ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ: ΟΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΙ, ΟΙ ΛΟΓΟΤΕΧΝΕΣ, ΟΙ ΖΩΓΡΑΦΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ.

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΠΟΥΡΝΑΡΑ ΚΑΤΕΡΙΝΑΣ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

στις Επιστήμες της Αγωγής

με ειδίκευση «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Βαθμός:______________

Υπογραφή: Ημερομηνία

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Παλαιγεωργίου Γεώργιος, Λέκτορας

Βαθμός:______________

Υπογραφή: Ημερομηνία

3.Τρίτος Βαθμολογητής: Πνευματικός Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Βαθμός:______________

Υπογραφή: Ημερομηνία

Η συγγραφέας Πουρνάρα Αικατερίνη βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας στη Φλώρινα, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα και για τις υποδείξεις του, που βοήθησαν στη βελτίωση της δουλειάς μου. Επίσης, τον κ. Γεώργιο Παλαιγεωργίου, λέκτορα του ίδιου τμήματος για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Δημήτριο Πνευματικό, αναπληρωτή καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, για τη συμμετοχή του στην τριμελή εξεταστική επιτροπή της εργασίας μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Τα κλάσματα είναι μία από τις μαθηματικές έννοιες που συγκεντρώνουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον και όχι τυχαία, καθώς εκπαιδευτικοί και μαθητές τα θεωρούν από τα πιο δύσκολα κεφάλαια των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Ένας από τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει αυτό είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις του κλάσματος, με τις οποίες ο μαθητής πρέπει να έρθει σε επαφή και να εξοικειωθεί. Μόνο έτσι θα οικοδομήσει ουσιαστική κατανόηση για την πολυδιάστατη υπόσταση του κλάσματος. Επιπλέον, το ζήτημα της ενσωμάτωσης των παιχνιδιών στην εκπαιδευτική διαδικασία και ειδικά στην τάξη των μαθηματικών είναι ένα θέμα που επίσης απασχολεί τους επιστήμονες, δεδομένου ότι πάντα αναζητούνται τρόποι να γίνουν τα μαθηματικά πιο ευχάριστα και προσιτά για τους μαθητές. Μάλιστα, η έμφαση δίνεται κυρίως στα ηλεκτρονικά παιχνίδια, καθώς η τεχνολογία συγκεντρώνει το ενδιαφέρον των μαθητών και αποτελεί, τα τελευταία χρόνια, αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας και του ελεύθερου χρόνου τους.

Με αφορμή τις παραπάνω διαπιστώσεις, παρουσιάζουμε το ηλεκτρονικό παιχνίδι «Το κάστρο των κλασμάτων» (https://scratch.mit.edu/projects/48077686/) που αναπτύξαμε στο Scratch. Το παιχνίδι απευθύνεται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου και αφορά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων. Ο στόχος του είναι να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τις διαφορετικές μορφές του κλάσματος και να κατανοήσουν την πολυδιάστατη φύση της έννοιας. Έτσι, στο παιχνίδι οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε μια σειρά από ερωτήσεις – δοκιμασίες που αφορούν τη συνεχή και διακριτή αναπαράσταση του κλάσματος, τη λεκτική εκφορά του, την τοποθέτηση του κλάσματος στην αριθμογραμμή και τη σύνδεση του κλάσματος με τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό. Ο σκοπός είναι το παιχνίδι να αποτελέσει εναλλακτική πρότασή ή συμπλήρωμα των εργασιών που δίνονται στους μαθητές για εξάσκηση στο σπίτι.

Διεξαγάγαμε μια έρευνα για να εξετάσουμε την ευχρηστία και τη γνωστική αποτελεσματικότητα του παιχνιδιού. Πιο συγκεκριμένα, διερευνήσαμε αν οι στόχοι του παιχνιδιού μπορούν να εκπληρωθούν μέσα από τη χρήση του, με τρόπο αποτελεσματικό και αποδοτικό, αλλά παράλληλα και ευχάριστο για τους μαθητές. Όσον αφορά στη γνωστική αποτελεσματικότητα της εφαρμογής, αυτό που μας ενδιέφερε ήταν κατά πόσο μπορεί η χρήση του προγράμματος να βοηθήσει τους μαθητές να φτάσουν στο επιθυμητό μαθησιακό αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, θέλαμε να δούμε αν, μέσα από τη χρήση της εφαρμογής, οι μαθητές θα αποκόμιζαν γνωστικά οφέλη σε σχέση με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων.

Στην έρευνα συμμετείχαν 7 μαθητές της ΣΤ τάξης, που έπαιξαν το παιχνίδι για μια διδακτική ώρα. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με ημιδομημένη συνέντευξη και παρατήρηση των μαθητών όση ώρα έπαιζαν το παιχνίδι. Στη διάρκεια της συνέντευξης δόθηκαν στους μαθητές δραστηριότητες γνωστικού περιεχομένου, τόσο πριν όσο και μετά τη δοκιμή του παιχνιδιού, ώστε να διαπιστωθεί αν θα υπήρχαν κάποια γνωστικά οφέλη. Αν και μικρής έκτασης, η δοκιμή έδειξε ότι οι μαθητές μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν το πρόγραμμα χωρίς δυσκολίες και να κατανοήσουν τι έπρεπε να κάνουν χωρίς εξωτερική βοήθεια. Επίσης, εξέφρασαν την επιθυμία να ασχολούνται με τέτοιου είδους δραστηριότητες στα μαθηματικά, καθώς το μάθημα θα γινόταν έτσι πιο ευχάριστο. Σε επίπεδο γνωστικής αποτελεσματικότητας, η δοκιμή έδειξε ότι ειδικά οι αδύναμοι και οι μέτριοι μαθητές μπορούν να ωφεληθούν και να βελτιώσουν την κατανόησή τους για τα κλάσματα.

Εισαγωγή

Τα κλάσματα θεωρούνται ένα από τα πιο δύσκολα κεφάλαια που διδάσκονται οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει, ανάμεσα στα άλλα, και από τις πολύ κακές επιδόσεις των μαθητών σε δραστηριότητες στις οποίες συμπεριλαμβάνονται κλάσματα. Επιπλέον, θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι η ελλιπής γνώση τους οδηγεί σε περαιτέρω δυσκολίες στα μαθηματικά, καθώς παρεμβαίνει στη μάθηση και άλλων μαθηματικών εννοιών (Petit, Laird & Marsden, 2010). Συνεπώς, είναι λογικό το μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον που προκύπτει για την εξεύρεση πιο αποτελεσματικών μεθόδων για τη διδασκαλία τους.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναπτύξαμε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι για τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων, «Το κάστρο των κλασμάτων». Σκοπός του παιχνιδιού είναι να βοηθήσει τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων του δημοτικού σχολείου να έρθουν σε επαφή με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του κλάσματος και να κατανοήσουν την πολυδιάστατη φύση του. Έτσι, στο παιχνίδι οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε μια σειρά ερωτήσεων που αφορούν τη συνεχή και διακριτή αναπαράσταση του κλάσματος, τη λεκτική εκφορά του, την τοποθέτηση του κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή και τη σύνδεση του κλάσματος με τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό.

Στο κείμενο που ακολουθεί, μετά τη θεωρητική υποστήριξη των επιλογών που κάναμε για να αναπτύξουμε το πρόγραμμα, ακολουθεί η παρουσίαση του προγράμματος και η πειραματική δοκιμή του σε μαθητές της ΣΤ’ τάξης, με στόχο να ελεγχθεί η ευχρηστία και η γνωστική αποτελεσματικότητά του.

Πιο συγκεκριμένα, στο 1ο κεφάλαιο παρουσιάζουμε με συνοπτικό τρόπο τα διαφορετικά σχήματα των ρητών αριθμών και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία τους, με στόχο να τονίσουμε την πολυδιάστατη έννοια του κλάσματος, που καλούνται οι μαθητές να κατανοήσουν. Επίσης, παραθέτουμε τα πιο συχνά λάθη που κάνουν οι μαθητές στα κλάσματα, όπως αυτά έχουν καταγραφεί από τη σχετική βιβλιογραφία. Τέλος, το πρώτο κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση των περιεχομένων του αναλυτικού προγράμματος του δημοτικού σχολείου σχετικά με τα κλάσματα. Ο στόχος είναι να κατανοήσουμε τι διδάσκονται οι Έλληνες μαθητές για τα κλάσματα στο σχολείο και κατά συνέπεια τι αναμένεται από αυτούς να γνωρίζουν.

Στο 2^{ο} κεφάλαιο εξετάζουμε ενδεικτικά κάποιες ηλεκτρονικές εφαρμογές που έχουν αναπτυχθεί για τα κλάσματα και τα αποτελέσματα της δοκιμής τους σε μαθητές. Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε την ποικιλία των διαφορετικών προσεγγίσεων που έχουν δοκιμαστεί για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Η χρήση της τεχνολογίας ως βοηθητικού εργαλείου για τη διδασκαλία και τη μάθηση φαίνεται ότι είναι ένα σημείο που συγκεντρώνει το έντονο ενδιαφέρον των ερευνητών. Αυτό οφείλεται τόσο στα θετικά αποτελέσματα των παρεμβάσεων που έχουν γίνει, όσο και εξαιτίας του ενδιαφέροντος και του ενθουσιασμού που δείχνουν οι μαθητές, όταν εντάσσονται τέτοιου είδους δραστηριότητες στη διδασκαλία των κλασμάτων.

Στο 3^{ο} κεφάλαιο εξετάζουμε τη σχέση παιχνιδιών και μαθηματικών. Επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στους τρόπους με τους οποίους μπορεί να ενταχθεί ένα παιχνίδι στην τάξη των μαθηματικών, στα οφέλη και στις επιφυλάξεις που διατυπώνονται από τη χρήση τους. Εξετάζουμε λίγο πιο αναλυτικά τις θετικές επιπτώσεις που έχουν ειδικά τα ηλεκτρονικά παιχνίδια στα μαθηματικά.

Στο 4^{ο} κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του παιχνιδιού «Το κάστρο των κλασμάτων». Εκτός από την αναλυτική περιγραφή του παιχνιδιού, στο κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνονται οι στόχοι και οι επιλογές σχεδίασής του, καθώς και τα αποτελέσματα της πειραματικής δοκιμής που έλαβε χώρα στα πλαίσια της ανάπτυξης του παιχνιδιού, για να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές θα ήταν σε θέση να χειριστούν αποτελεσματικά το πρόγραμμα και να κατανοήσουν τι πρέπει να κάνουν.

Στο 5^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνα που πραγματοποιήθηκε για να εξεταστεί η ευχρηστία και η γνωστική αποτελεσματικότητα του παιχνιδιού.

1ο Κεφάλαιο: Κλάσματα

1.1 Εισαγωγή

Τα κλάσματα είναι μία από τις μαθηματικές έννοιες οι οποίες συγκεντρώνουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον εδώ και πολλά χρόνια. Αυτό το γεγονός δεν είναι τυχαίο, καθώς οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές τα θεωρούν από τα πιο δύσκολα κεφάλαια των μαθηματικών στο σχολείο. Επίσης, θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι η ελλιπής γνώση των κλασμάτων οδηγεί σε περαιτέρω δυσκολίες στα μαθηματικά, καθώς παρεμβαίνει στη μάθηση και άλλων μαθηματικών εννοιών (Petit, Laird & Marsden, 2010). Το ενδιαφέρον αυτό παραμένει αμείωτο, καθώς συνεχώς αναζητούνται νέες διδακτικές προσεγγίσεις, δημιουργούνται ηλεκτρονικά προγράμματα και δοκιμάζονται στην πράξη νέες μέθοδοι, με στόχο την αποτελεσματικότερη και σε βάθος κατανόηση αυτής της έννοιας από τους μαθητές.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την έννοια του κλάσματος και θα αναφέρουμε συνοπτικά τις διαφορετικές μορφές του, αλλά και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία. Άλλωστε, είναι αυτή η πολυδιάστατη υπόσταση του κλάσματος που αποτελεί το σημείο εκκίνησης πολλών δυσκολιών στην κατανόηση των κλασμάτων. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε κάποια από τα πιο συχνά λάθη που κάνουν οι μαθητές στα κλάσματα. Η γνώση των λαθών αυτών μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει ευκολότερα τις παρανοήσεις των μαθητών του και να τις αντιμετωπίσει αποτελεσματικότερα. Τέλος, κάνουμε μια συνοπτική αναφορά στους στόχους που θέτουν τα αναλυτικά προγράμματα του δημοτικού σχολείου σε σχέση με τα κλάσματα. Αυτό είναι χρήσιμο γιατί βοηθά να δούμε πότε έρχονται σε επαφή οι Έλληνες μαθητές με τα κλάσματα και ποιες αναπαραστάσεις και μοντέλα χρησιμοποιούνται συχνότερα στο δημοτικό σχολείο για τη διδασκαλία.

1.2 Σχήματα ρητών αριθμών

Τα σχήματα είναι ο όρος που χρησιμοποιείται από τους επιστήμονες για να περιγράψει τις νοητικές κατασκευές ενός ατόμου, τις οποίες το ίδιο το άτομο δημιουργεί για να μπορέσει να λειτουργήσει μέσα στο περιβάλλον του. Κάθε σχήμα χρησιμοποιεί εκείνα τα στοιχεία από το σύνολο των γνώσεων του ατόμου, που είναι κατάλληλα για να το βοηθήσουν να επιλύσει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σε συγκεκριμένες συνθήκες (Κολέζα, 2000).

Επικεντρώνοντας την προσοχή μας στους ρητούς αριθμούς, εδώ έχουν γίνει κατά καιρούς διάφορες κατηγοριοποιήσεις από τους επιστήμονες για να κατατάξουν τις διαφορετικές ερμηνείες ενός ρητού. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι Behr et al. (1992, 1993) χρησιμοποιούν τρεις κατηγορίες: μέρος – όλου, πηλίκο και τελεστής. Ο Kieren (1976) περιγράφει τουλάχιστον επτά ερμηνείες – κατηγορίες στις οποίες περιλαμβάνεται ο ρητός ως: κλάσμα, δεκαδικός, ταξινομημένα ζεύγη (ordered pairs), μέτρο, τελεστής, πηλίκο και αναλογία. Ο ίδιος ερευνητής το 1980 προτείνει, ως βασικές, τέσσερις κατηγορίες: πηλίκο, μέτρηση, τελεστής και λόγος. Μάλιστα, αν και την αναφέρει, αποφεύγει να χρησιμοποιήσει ξεχωριστά την κατηγορία μέρος – όλου, γιατί θεωρεί ότι αυτή διαπερνά τις υπόλοιπες.

Εμείς θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά και θα χρησιμοποιήσουμε την κατηγοριοποίηση της Marshall (1993, αναφορά στην Κολέζα, 2000). Η Marshall χρησιμοποιεί για τους ρητούς αριθμούς πέντε διαφορετικά σχήματα:

1. Μέρος – όλου
2. Πηλίκο
3. Λόγος
4. Μέτρο (μέτρηση)
5. Τελεστής

Προτού προχωρήσουμε στην ανάλυση καθενός από αυτά τα σχήματα, αξίζει τον κόπο να δώσουμε μια μικρή εξήγηση στο γιατί είναι σημαντική αυτή η προσπάθεια να αναγνωρίσουμε και να κατηγοριοποιήσουμε τις διαφορετικές μορφές ενός ρητού αριθμού. Ο λόγος είναι ότι αυτά τα σχήματα, αν και διαφορετικά μεταξύ τους, αλληλοσυνδέονται και συνθέτουν την έννοια του κλάσματος. Κάθε σχήμα συνδέεται με διαφορετικές γνωστικές δομές και παραπέμπει σε έναν διαφορετικό τρόπο αντίληψης του κλάσματος. Έτσι, μεταφερόμενοι στο διδακτικό περιβάλλον, είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να προσπαθήσουν να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αναπτύξουν όλες αυτές τις ερμηνείες για τους ρητούς αριθμούς και να είναι σε θέση να τις αναγνωρίζουν και να τις διαχειρίζονται αποτελεσματικά. Επίσης, να μπορούν να τις συνδέουν μεταξύ τους και να τις συνθέτουν δημιουργώντας τελικά την πολυδιάστατη έννοια του κλάσματος (Behr et al., 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Vergnaud, 1983, αναφορές στον Behr, 1993). Αυτός ο στόχος, αν και είναι απαραίτητος για να κατακτηθεί πλήρως η έννοια του ρητού αριθμού, στην πράξη αποδεικνύεται συχνά πως αποτυγχάνει να επιτευχθεί για την πλειονότητα των μαθητών.

1.2.1 Σχήμα «μέρος – όλου»

Το σχήμα μέρος – όλου είναι συνήθως το πρώτο με το οποίο έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων, καθώς θεωρείται ότι είναι πιο εύκολο στην κατανόηση, σε σχέση με τα υπόλοιπα (Kieren 1976; Behr,Lesh, Post and Silver 1983; Sinicrope & Mick 1998, αναφορές στο Γαγάτσης κ.α., 2006). Σε αυτό, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ περιγράφει μια συνεχή ή διακριτή ποσότητα και δηλώνει ότι «*ένας α αριθμός τμημάτων (ή κομματιών) περιέχονται στο β, που αντιπροσωπεύει το "όλο"*» (Κολέζα, 2000). Έτσι, η διδασκαλία συνήθως ξεκινά με συνεχείς επιφάνειες (όπως κύκλους ή ορθογώνια), τις οποίες οι μαθητές πρέπει να χωρίσουν σε ίσα τμήματα και να επιλέξουν τόσα τμήματα, όσος είναι ο αριθμητής του κλάσματος. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται και διακριτές αναπαραστάσεις με τον ίδιο σκοπό (σύνολα διακριτών αντικειμένων) (Γαγάτσης κ.α., 2006).

Αυτή η προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος, αν και φαίνεται αρκετά απλή, μπορεί να παρουσιάσει κάποιες δυσκολίες για τους μαθητές. Η Κολέζα (2000) επισημαίνει ότι οι δυσκολίες αυτές μπορεί να σχετίζονται είτε με τη φύση του όλου και τον τρόπο χωρισμού του, είτε με την αναγνώριση του μέρους. Στην πρώτη περίπτωση, είναι αρκετά προφανές για τους μαθητές το ποιο είναι το όλο, όταν έχουμε μια συνεχή ποσότητα. Δεν ισχύει όμως το ίδιο, όταν πρόκειται για ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων. Σε αυτή την περίπτωση, ο μαθητής θα πρέπει να κατανοήσει ότι ένας αριθμός αντικειμένων, για παράδειγμα 12 βόλοι, είναι το όλο, δηλαδή η μονάδα. Αντίστοιχες δυσκολίες μπορεί να προκύψουν και κατά τον χωρισμό του όλου σε ίσα κομμάτια και την αναγνώριση του μέρους. Εδώ, τόσο στις διακριτές όσο και στις συνεχείς αναπαραστάσεις του κλάσματος μπορεί να προκύψουν προβλήματα. Το πιο συχνό φαινόμενο στις συνεχείς αναπαραστάσεις είναι η άνιση κατάτμηση του όλου από τους μαθητές. Στις διακριτές αναπαραστάσεις, το πρόβλημα μπορεί να προκύψει όταν, όπως και προηγουμένως, έχουμε, για παράδειγμα 12 βόλους και θέλουμε να σχηματίσουμε το κλάσμα $\frac{1}{4}$. Δεν είναι άμεσα κατανοητό σε όλους τους μαθητές ότι τρεις βόλοι και όχι ένας αποτελούν το $\frac{1}{4}$ των 12 βόλων.

Οι Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) αναφέρουν ότι για να κατακτήσει ένας μαθητής πλήρως το σχήμα μέρος – όλου πρέπει να κατανοήσει μια σειρά από πράγματα. Καταρχάς, θα πρέπει να κατανοήσει ότι τα μέρη στα οποία είναι χωρισμένο το όλο πρέπει να είναι πάντα ίσα μεταξύ τους. Επιπλέον, θα πρέπει και ο ίδιος να είναι σε θέση να χωρίσει μια ποσότητα σε ίσα μέρη ή και να αντιληφθεί την περίπτωση στην οποία ένα όλο δεν έχει χωριστεί σωστά. Μια σειρά από έννοιες οι οποίες σχετίζονται με τη σχέση μεταξύ όλου και μέρους είναι επίσης αναγκαίες. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι όλα τα μέρη μαζί συνθέτουν το όλο, ότι για μια συγκεκριμένη ποσότητα, όσο αυξάνεται το πλήθος των κομματιών στα οποία αυτή διαιρείται (δηλαδή το μέγεθος του παρονομαστή), αντίστοιχα μειώνεται το μέγεθός τους και ότι αυτή η σχέση ανάμεσα στα μέρη και στο όλο διατηρείται ανεξάρτητα από το μέγεθος, το σχήμα, τη διάταξη ή τον προσανατολισμό των ισοδύναμων μερών. Ακόμη, ο μαθητής θα πρέπει να αναπτύξει την έννοια της συμπερίληψης (inclusion), δηλαδή να κατανοεί ότι ο αριθμός των κομματιών που δηλώνεται στον αριθμητή είναι κομμάτια τα οποία είναι επίσης στοιχεία και του παρονομαστή. Τέλος, η Baturo (2004, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) θεωρεί ότι οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν την ικανότητα χωρισμού και επανένωσης (unitizing & reunitizing), η οποία θα τους επιτρέπει να επανακατασκευάζουν ένα όλο από τα συνθετικά του μέρη, αλλά και να διαχωρίζουν εκ νέου (repartition) μια ποσότητα που είναι ήδη χωρισμένη σε ίσα μέρη (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Στο σημείο αυτό, αξίζει να κάνουμε μια μικρή αναφορά στις ενστάσεις που έχουν οι ερευνητές όσον αφορά στην υπερβολική έμφαση που δίνεται κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων στο σχήμα μέρος – όλου. Η έμφαση σε ένα μόνο σχήμα δεν βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν πλήρως την έννοια του κλάσματος. Ο Freudenthal (1983, αναφορά στην Κολέζα, 2000) αναφέρει ότι «*η προσέγγιση στα κλάσματα από την οπτική γωνία της σχέσης «μέρος – όλου» είναι πολύ περιορισμένη όχι μόνο φαινομενολογικά αλλά και μαθηματικά – αυτή η προσέγγιση αναφέρεται μόνο σε γνήσια κλάσματα*». Επίσης, πολλοί ερευνητές (Wachsmuth, 1983, Haenish, 1985, Kerslake, 1986, Mack, 1993, αναφορές στην Κολέζα, 2000) αναφέρουν ότι η υπερβολική έμφαση που δίνεται κατά τη διδασκαλία σε αυτό το σχήμα ευθύνεται για πολλές από τις παρανοήσεις και τις αδυναμίες που εμφανίζουν οι μαθητές στα κλάσματα. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα κλάσμα, όπως το $\frac{2}{5}$, ως τα 2 μέρη από τα 5 ενός όλου και όχι ως έναν μοναδικό αριθμό.

1.2.2 Πηλίκο

Το σχήμα του ρητού ως πηλίκο μιας διαίρεσης παρουσιάζει κάποιες ομοιότητες, αλλά και σημαντικές διαφορές από το προηγούμενο σχήμα μέρος – όλου. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε κλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης. Πιο συγκεκριμένα, ένα κλάσμα της μορφής $\frac{a}{\beta}$ δείχνει το πηλίκο που προκύπτει, όταν διαιρούμε το α δια του β, όπου α και β είναι ακέραιοι αριθμοί (Kieren, 1993, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Έτσι, το κλάσμα μπορεί να γραφεί σε μια ισοδύναμη δεκαδική μορφή. Τελικά, υπάρχουν διαφορετικοί συμβολισμοί (notations), κλάσμα, δεκαδικός ή και ποσοστό, για τον ίδιο αριθμό (Smith, 2002, αναφορά στον Long, 2009).

Και σε αυτό το σχήμα υπάρχει η έννοια της διαμέρισης, του χωρισμού μιας ποσότητας σε τμήματα. Σε αντίθεση με το προηγούμενο σχήμα όμως, εδώ τα α, β δεν αναπαριστούν αναγκαστικά το ίδιο είδος πραγμάτων. Επίσης, δεν υπάρχει ο περιορισμός ότι α < β. Άρα, το σχήμα του ρητού ως πηλίκο οδηγεί στα καταχρηστικά κλάσματα, αφού τα ίσα μερίδια μπορεί να είναι μικρότερα, ίσα ή μεγαλύτερα από τη μονάδα και συνεπώς ο αριθμητής μπορεί να είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή (Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007).

Το σχήμα του ρητού ως πηλίκο μας παραπέμπει στην έννοια της διαίρεσης μερισμού και της διαίρεσης μέτρησης. Ο Ohlsson (1988, αναφορά στην Κολέζα, 2000) αναφέρεται σε αυτές τις έννοιες ως διαμέριση (partitioning) και αφαίρεση (extracting) αντίστοιχα.

- Με τον όρο διαμέριση, εννοούμε τον χωρισμό μιας ποσότητας (διαιρετέος) σε έναν αριθμό ισοδύναμων ομάδων (διαιρέτης). Εδώ, το πηλίκο μας δείχνει το σύνολο των στοιχείων που απαρτίζουν την κάθε ομάδα. Έτσι, για μια συνεχή ποσότητα, η διαίρεση μερισμού (διαμέριση) περιγράφει τον χωρισμό της σε ισοδύναμα μέρη. Για μια διακριτή ποσότητα, σημαίνει τον σχηματισμό επιμέρους συλλογών από διακριτά αντικείμενα. Για παράδειγμα, έχουμε ένα σύνολο από 6 βόλους και το χωρίζουμε σε 3 ομάδες των 2 βόλων (6:3=2, κλάσμα $\frac{6}{3}$).

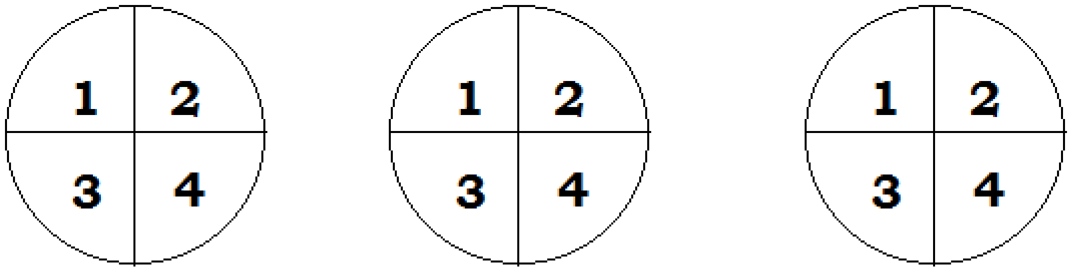
- Με τον όρο αφαίρεση (διαίρεση μέτρησης) δηλώνεται ότι, αν για παράδειγμα έχω 6 βόλους και τους χωρίσω σε ομάδες των 3 βόλων, τότε θα έχω συνολικά 2 τέτοιες ομάδες. Με άλλα λόγια, η ποσότητα των 3 βόλων μπορεί να αφαιρεθεί 2 φορές από το σύνολο των 6 βόλων (6:3=2, κλάσμα $\frac{6}{3}$).

Το σχήμα του ρητού αριθμού ως πηλίκο παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες/δυσκολίες για τους μαθητές. Οι Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) αναφέρουν ότι, σε αντίθεση με το σχήμα μέρος – όλου, στο πηλίκο έχουμε συχνά δύο διαφορετικά μεγέθη ως όρους του κλάσματος (για παράδειγμα στην περίπτωση που θέλουμε να μοιράσουμε 3 πίτσες σε 4 φίλους). Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν το ρόλο του διαιρετέου και του διαιρέτη και να κατανοήσουν ότι ο διαιρετέος αναφέρεται στον αριθμό των αντικειμένων που θα μοιραστούν (3 πίτσες) ενώ ο διαιρέτης, στον αριθμό των ίσων κομματιών που θα χωριστεί το κάθε αντικείμενο (η κάθε πίτσα θα χωριστεί σε 4 κομμάτια) (Γαγάτσης κ.α., 2006).

Επιπλέον, ενώ συνηθίζουμε να λέμε στους μαθητές ότι το κλάσμα είναι διαίρεση, εντούτοις η ορολογία που χρησιμοποιούμε όταν κάνουμε μια διαίρεση δεν εφαρμόζεται πάντα στα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, όπως αναφέρει η Κολέζα (2000), σε ένα πρόβλημα με κλάσματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση «*Μοιράζω τρία γλυκά σε 4 παιδιά*», αλλά δεν θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση «*Διαιρώ τρία γλυκά σε 4 παιδιά*». Επιπλέον, κατά την εκτέλεση μιας διαίρεσης, όπως το 3:4, λέμε ότι «*το 4 χωράει (ή δεν χωράει) στο 3*», κάτι που προφανώς δεν μπορούμε να πούμε όταν έχουμε ένα παράδειγμα όπως το παραπάνω. Από τα παραπάνω, λοιπόν, προκύπτει ότι, όταν αναφερόμαστε στον ρητό ως πηλίκο, αν και αυτό ισχύει αλγοριθμικά, στην πράξη παρουσιάζονται κάποιες εννοιολογικές και γλωσσικές δυσκολίες, οι οποίες μπορεί να μπερδέψουν τους μαθητές.

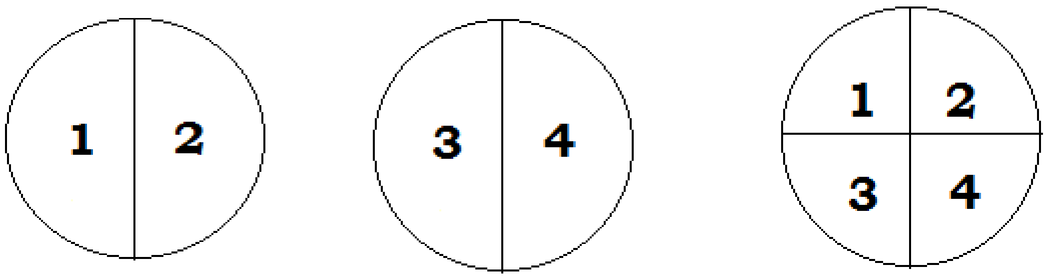
Επίσης, κάποια ακόμη πιθανά προβλήματα που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές σε αυτό το σχήμα είναι το τι συμβαίνει στην περίπτωση που το αποτέλεσμα της διαίρεσης δεν είναι ένας ακέραιος αριθμός ή το γεγονός ότι οι τρόποι με τους οποίους θα χωρίσουμε ένα όλο σε ίσα μέρη μπορεί να ποικίλουν. Για να γίνουμε πιο σαφείς, στο παρακάτω σχήμα δείχνουμε ένα παράδειγμα που χρησιμοποίησε ο Streefland (1991, αναφορά στην Κολέζα, 2000). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να μοιράσουμε 3 πίτσες σε 4 παιδιά. Αυτό μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:

1ος τρόπος:



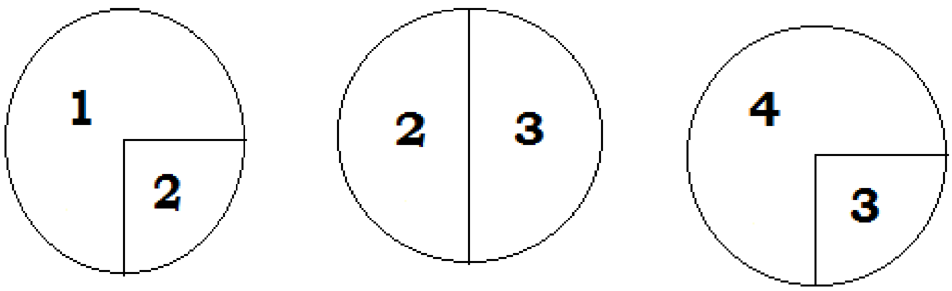
Κάθε παιδί παίρνει $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

2ος τρόπος:



Κάθε παιδί παίρνει από μισή πίτσα και από $\frac{1}{4}$. Δηλαδή, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3ος τρόπος:



Δύο παιδιά παίρνουν απευθείας τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας (κομμάτια 1 και 4) και δύο παιδιά παίρνουν $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ (κομμάτια 2 και 3)

Ανάλογα προβλήματα μπορούν να προκύψουν και όταν έχουμε να μοιράσουμε σύνολα διακριτών αντικειμένων. Σε αυτή την περίπτωση, όταν έχουμε διακριτά αντικείμενα τα οποία δεν είναι εντελώς όμοια μεταξύ τους, μπορεί να προκύψει μια σύγχυση για το ποιος είναι ο πιο σωστός τρόπος μοιράσματος. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μοιράσουμε τρία διαφορετικά φρούτα σε τρία παιδιά, είναι πιο σωστό να δώσουμε από ένα φρούτο σε κάθε παιδί ή να δώσουμε το $\frac{1}{3}$ κάθε φρούτου σε κάθε παιδί; (Κολέζα, 2000).

Από όλη την παραπάνω ανάλυση γίνεται προφανές ότι, αν και συχνά το πηλίκο θεωρείται μια απλή προσέγγιση στην κατανόηση των ρητών αριθμών, αυτό στην πράξη μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες στους μαθητές.

1.2.3 Λόγος

Η έννοια του ρητού ως λόγου υποδηλώνει ότι έχουμε μια σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, όπου το μέγεθος της μιας ποσότητας συγκρίνεται με το μέγεθος μιας άλλης ποσότητας. Μάλιστα, η έννοια του λόγου εναλλάσσεται συχνά με την έννοια της αναλογίας. Η Lamon (1999, αναφορά στους Charalambous & Pitta – Pantazi, 2007) ορίζει την αναλογία ως τη σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων διαφορετικού είδους, ενώ ο λόγος αφορά μια σύγκριση ποσοτήτων ίδιου είδους. Μάλιστα, για να κάνει αυτόν τον διαχωρισμό πιο σαφή, δίνει ως παράδειγμα τις διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορεί να ακολουθήσουν οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα, όπως το «*7 κορίτσια μοιράζονται 3 πίτσες και 3 αγόρια μοιράζονται 1 πίτσα. Ποιος θα φάει περισσότερη πίτσα, τα κορίτσια ή τα αγόρια*;». Στην περίπτωση που οι μαθητές συγκρίνουν τα παιδιά με τις πίτσες (3 πίτσες/7 κορίτσια και 1 πίτσα/3 αγόρια), έχουμε χρήση της έννοιας της αναλογίας. Στην περίπτωση που συγκρίνουν τα κορίτσια με τα αγόρια και τον αριθμό από πίτσες των κοριτσιών με εκείνον των αγοριών (7 κορίτσια/ 3 αγόρια και 3 πίτσες/1 πίτσα), τότε εφαρμόζουν την έννοια του λόγου.

Αυτές τις δύο διαφορετικές προσεγγίσεις στην έννοια του λόγου, αναλογία και λόγο, η Κολέζα (2000) τις ονομάζει εξωτερικό και εσωτερικό λόγο αντίστοιχα. Η διαφορά που η συγγραφέας επισημαίνει είναι ότι ένας εσωτερικός λόγος είναι ένας καθαρός αριθμός. Αντίθετα, ένας εξωτερικός λόγος ορίζει ένα νέο μέγεθος που εκφράζει τη σχέση μεταξύ των δύο αρχικών μεγεθών. Έτσι, μπορούμε να προσθέσουμε δύο εξωτερικούς λόγους, αλλά όχι δύο εσωτερικούς (Behr et al, 1983, αναφορά στην Κολέζα, 2000).

Στους Charalambous & Pitta – Pantazi (2007) γίνεται μια σύντομη σύνοψη των εννοιών που οι ερευνητές επισημαίνουν ότι πρέπει ένας μαθητής να κατανοήσει, ώστε να κατακτήσει το σχήμα του ρητού ως λόγου. Αρχικά, σύμφωνα με τους Lamon (1993) και Marshall (1993) πρέπει να οικοδομηθεί η έννοια των σχετικών ποσοτήτων. Επίσης, είναι απαραίτητο ο μαθητής να καταλάβει τι σημαίνει το ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων και τι είναι η ιδιότητα της συμμεταβλητότητας – αμεταβλητότητας (covariance-invariance). Αυτή η ιδιότητα στην ουσία σημαίνει ότι η αναλογία απαρτίζεται από δύο οντότητες, οι οποίες μεταβάλλονται ταυτόχρονα και με τέτοιον τρόπο, ώστε τελικά η σχέση μεταξύ τους να παραμένει αμετάβλητη. Με παρόμοιο τρόπο, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, όταν οι δύο αυτές ποσότητες πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό και πάλι η τιμή της αναλογίας παραμένει αμετάβλητη. Αυτή η ιδιότητα της συμμεταβλητότητας – αμεταβλητότητας (covariance-invariance) θεωρείται από την Marshall (1993) ως αναγκαία για να μπορέσουν οι μαθητές να αναπτύξουν την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Παρόλα αυτά, η Lamon (1999, αναφορά στους Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007) υποστηρίζει ότι οι μαθητές που είναι σε θέση να κατασκευάσουν ισοδύναμα κλάσματα δεν είναι απαραίτητα ικανοί και να αναγνωρίσουν την ιδιότητα της αμεταβλητότητας (invariance).

1.2.4 Μέτρο (μέτρηση)

Στο σχήμα του ρητού ως μέτρηση, το κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος $\frac{1}{\beta}$ α φορές για τον καθορισμό μιας απόστασης (Κολέζα, 2000). Οι Charalambous & Pitta – Pantazi (2007) υποστηρίζουν ότι σε αυτό το σχήμα εμπεριέχονται δύο έννοιες που αλληλοσυνδέονται και αλληλοεξαρτώνται. Η πρώτη είναι η αντίληψη του ρητού ως αριθμού, κάτι που αναδεικνύει και την ποσοτική διάσταση του κλάσματος, δηλαδή το μέγεθός του. Η δεύτερη έννοια συνδέει το κλάσμα με τη μέτρηση ενός διαστήματος.

Αυτή η θεώρηση του κλάσματος μπορεί να φαίνεται με την πρώτη ματιά απλή, αλλά στην πραγματικότητα παρουσιάζει μεγάλες προκλήσεις για τους μαθητές. Καταρχάς, πρόκειται για μια προσέγγιση η οποία δεν έχει άμεση συσχέτιση με την καθημερινή εμπειρία των παιδιών. Η Lamon (1999, αναφορά στους Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007) θεωρεί ότι οι μαθητές πρέπει να κάνουν ένα ποιοτικό άλμα, όταν περνούν από τους ακέραιους στους ρητούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί πολλές από τις γνώσεις των παιδιών για τους ακέραιους αριθμούς δεν ισχύουν και για τους ρητούς και αυτό τα κάνει να απορρίπτουν την άποψη ότι ένας ρητός είναι στην πραγματικότητα αριθμός. Για παράδειγμα, οι ρητοί αριθμοί δεν αποτελούν μέρος μιας ακολουθίας μετρήματος (counting sequence), όπως οι ακέραιοι. Η ίδια ερευνήτρια θεωρεί απαραίτητη την εξάσκηση στη διαδικασία χωρισμού ενός όλου σε ίσα μέρη, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια ενός κλάσματος ως μέτρηση. Εξίσου σημαντική είναι και η σε βάθος κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών, δηλαδή του γεγονότος ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι άλλοι. Ακόμη, η Smith (2002, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) υποστηρίζει ότι, για να αναπτύξουν πλήρως τα παιδιά το σχήμα του ρητού ως μέτρηση, πρέπει να οικοδομήσουν την ικανότητα να διατάσσουν τα κλάσματα και να αναγνωρίζουν τις ισοδυναμίες των κλασμάτων.

Από τα παραπάνω προκύπτει και ο τρόπος με τον οποίο συνήθως προσεγγίζεται διδακτικά το σχήμα του ρητού ως μέτρηση. Έτσι, εδώ χρησιμοποιούνται πολύ συχνά αριθμογραμμές και συσκευές μέτρησης, όπως οι χάρακες. Η ιδέα πίσω από αυτές τις αναπαραστάσεις είναι κοινή: υπάρχει μια ευθεία πάνω στην οποία τοποθετείται αυθαίρετα το σημείο 0 και χωρίζεται σε μοναδιαία τμήματα, τα οποία με τη σειρά τους υποδιαιρούνται με όποιον τρόπο επιθυμούμε, ανάλογα με το κλάσμα που θέλουμε κάθε φορά να τοποθετήσουμε.

Είναι γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν πλήθος δυσκολιών όταν πρέπει να τοποθετήσουν έναν αριθμό πάνω στην αριθμογραμμή. Η Κολέζα (2000) υποστηρίζει ότι για να είναι κάποιος σε θέση να τοποθετήσει ένα κλάσμα (για παράδειγμα το $\frac{a}{\beta}$) πάνω στην αριθμογραμμή, χρειάζεται να κατανοήσει ότι το μοναδιαίο κλάσμα (το $\frac{1}{\beta}$) λειτουργεί ως μονάδα μέτρησης. Επίσης, οι μαθητές πρέπει να μπορούν, δεδομένης μιας κλασματικής μονάδας, να εντοπίσουν οποιοδήποτε κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή ξεκινώντας από το 0 και αντίστροφα να μπορούν να αναγνωρίσουν ποιος αριθμός αναπαριστάται σε ένα σημείο της αριθμογραμμής (Hannula, 2003; Smith, 2002, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Οι Keijzer & Terwel (2003, αναφορά στους Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007) βρήκαν ότι οι μαθητές συχνά, αντί να μετρούν τα διαστήματα της αριθμογραμμής, μετρούν τις γραμμές που χρησιμοποιούνται για να οριοθετήσουν αυτά τα διαστήματα. Ακόμη, δεν κατανοούν ποια είναι η μονάδα, ειδικά στις περιπτώσεις που στην αριθμογραμμή που τους δίνεται σημειώνονται οι θέσεις των πρώτων φυσικών αριθμών (0, 1, 2, …). Επίσης, αποτυγχάνουν να εντοπίσουν τη θέση του κλάσματος, στην περίπτωση που η αριθμογραμμή είναι χωρισμένη σε ίσα κομμάτια, το πλήθος των οποίων αποτελεί πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο (sub-multiple) του παρονομαστή (Baturo, 2004, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

1.2.5 Τελεστής

Σε αυτό το σχήμα, μια ποσότητα χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί ή να κατασκευαστεί μια άλλη ποσότητα. Η Κολέζα (2000) αναφέρει ότι εδώ το κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ «*λειτουργεί ως μια "μηχανή" που μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη*». Με αυτό το σκεπτικό, θεωρεί ότι το σχήμα του ρητού ως τελεστή μπορεί να θεωρηθεί ότι εμπεριέχεται στο σχήμα του ρητού ως λόγου. Οι Charalambous & Pitta- Pantazi (2007) εξηγούν ότι μπορούμε να το σκεφτόμαστε ως μια διαδικασία δύο βημάτων: αρχικά γίνεται ένας πολλαπλασιασμός μιας ποσότητας με τον αριθμητή και στη συνέχεια το αποτέλεσμα που προκύπτει διαιρείται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Αυτή η διαδικασία βέβαια μπορεί να γίνει και με την αντίστροφη σειρά. Η Lamon (1999, αναφορά στους Charalambous & Pitta – Pantazi, 2007) προσεγγίζει το σχήμα ως έναν μετασχηματισμό, ο οποίος μπορεί να μεγαλώσει/μικρύνει ευθύγραμμα τμήματα, να αυξήσει/μειώσει τον αριθμό ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων ή να μεγεθύνει/συρρικνώσει ένα αντικείμενο.

Ο Behr και οι συνεργάτες του (1993) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση του σχήματος του ρητού ως τελεστή μπορεί να βοηθήσει στην εμπέδωση του πολλαπλασιασμού μεταξύ των κλασμάτων και κυρίως στην ερμηνεία που χαρακτηρίζεται ως «*παίρνοντας ένα μέρος ενός μέρους του όλου*» (taking a part of a part of the whole). Για παράδειγμα, πώς μπορώ να βρω τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$;

Οι ερευνητές (Lamon, 1999, Marshall, 1993, αναφορά στους Charalambous & Pitta- Pantazi, 2007) υποστηρίζουν ότι για την κατάκτηση αυτού του σχήματος οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση:

- Να ερμηνεύσουν ένα κλάσμα ως γινόμενο με διαφορετικούς τρόπους, π.χ. το $\frac{3}{4}$ μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως 3 φορές το $\frac{1}{4}$ μιας ποσότητας είτε ως το $\frac{1}{4}$ τριών αντικειμένων (units).
- Να μπορούν να κατονομάσουν ένα κλάσμα το οποίο να περιγράφει μια σύνθετη διαδικασία κατά την οποία μια πράξη πολλαπλασιασμού και μια διαίρεσης λαμβάνουν χώρα χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά (η δεύτερη χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της πρώτης).

1.3 Εξωτερικές Αναπαραστάσεις – Μοντέλα

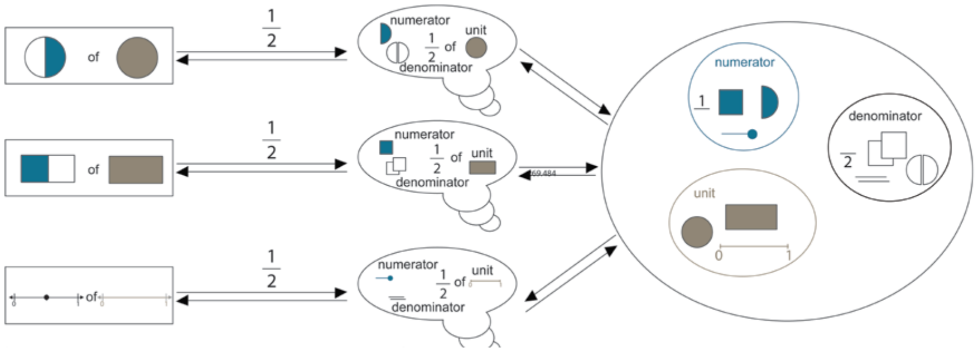
Όπως είδαμε, τα σχήματα αποτελούν τις εσωτερικές νοερές ερμηνείες του ρητού αριθμού. Για την οικοδόμηση των σχημάτων και την επίτευξη της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος, κατά τη διδασκαλία χρησιμοποιούνται εξωτερικές αναπαραστάσεις (στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτές ως αναπαραστάσεις). Οι αναπαραστάσεις έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές να σκιαγραφήσουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος (Rau et al., 2013, Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) και έτσι να δημιουργήσουν ακριβέστερα νοητικά μοντέλα της έννοιας (Rau, 2013). Κατά τη διδασκαλία χρησιμοποιείται μια πληθώρα διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως τα μοντέλα περιοχής (πίτες, ορθογώνια) τα γραμμικά μοντέλα (αριθμογραμμές) και τα διακριτά σύνολα αντικειμένων (Rau, 2009).

Οι ερευνητές υπογραμμίζουν τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία (Tunç-Pekkan, 2015), καθώς η ταυτόχρονη χρήση τους μπορεί να ευνοήσει την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, De Corte et al., 2005). Ο Van de Walle (2007) διαπιστώνει ότι τα μοντέλα μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να ξεκαθαρίσουν τις έννοιες που μπερδεύουν, όταν χρησιμοποιούν έναν καθαρά συμβολικό τύπο. Σύμφωνα με τις έρευνες, τα διαφορετικά είδη μοντέλων που υπάρχουν, προσφέρουν διαφορετικές προκλήσεις στην κατανόησή τους από τους μαθητές (Hunting, αναφορά στους Bezuk & Bieck, 1993; VMP OGAP, 2005, 2006, 2007, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010).

Η μάθηση διευκολύνεται, όταν οι μαθητές αλληλεπιδρούν με πολλαπλά μοντέλα, τα οποία διαφέρουν στα αντιληπτικά (perceptual) τους χαρακτηριστικά. Αυτό τους αναγκάζει να ξανασκέφτονται συνεχώς την έννοια του κλάσματος και τελικά να τη γενικεύουν (Dienes, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010). Μετά από εκτεταμένη χρήση και εμπειρία με διαφορετικές αναπαραστάσεις, οι μαθητές θα μπορέσουν τελικά να κατασκευάσουν τα δικά τους εσωτερικά νοερά μοντέλα.

Η Rau (2013) προτείνει ένα θεωρητικό πλαίσιο για να περιγράψει τη μάθηση που προκύπτει με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Όπως επισημαίνει η ερευνήτρια, το υπάρχον θεωρητικό πλαίσιο επικεντρώνεται αποκλειστικά στη μάθηση μέσα από τη χρήση διαφορετικών συμβολικών συστημάτων (για παράδειγμα κείμενο και εικόνα) και δε λαμβάνει υπόψη τη μάθηση μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν το ίδιο συμβολικό σύστημα.

Το νέο θεωρητικό πλαίσιο της Rau (2013) λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις συχνά δίνουν έμφαση σε συμπληρωματικές πτυχές του κλάσματος και ενισχύουν διαφορετικά είδη γνωστικών διαδικασιών και στρατηγικών. Στην παρακάτω εικόνα αποτυπώνεται ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν την κατανόησή τους για τα κλάσματα μέσα από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στην αριστερή πλευρά του μοντέλου σημειώνεται η χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία. Αλληλεπιδρώντας με μια αναπαράσταση – μοντέλο, οι μαθητές αρχίζουν να οικοδομούν σταδιακά την αντίστοιχη εσωτερική αναπαράσταση με το να συσχετίζουν το μοντέλο με τη συμβολική μορφή του κλάσματος (μεσαίο κομμάτι εικόνας). Η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ολοκληρώνεται, όταν τελικά οι μαθητές μπορέσουν να συσχετίσουν μεταξύ τους τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του και είναι σε θέση να αναγνωρίζουν ότι δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις μπορούν να δείχνουν το ίδιο κλάσμα (δεξί κομμάτι εικόνας).



Κατηγοριοποίηση μοντέλων – αναπαραστάσεων

Σε αυτό το σημείο, κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε συνοπτικά ποια είναι τα πιο συνηθισμένα μοντέλα – αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων προκειμένου να βοηθούν τους μαθητές να οπτικοποιήσουν την έννοια του κλάσματος. Ο Van de Walle (2007) αναφέρεται στις εξής κατηγορίες μοντέλων για την αναπαράσταση κλασμάτων: μοντέλα περιοχής ή εμβαδού (αναπαράσταση επιφάνειας), μοντέλα συνόλων (αναπαράσταση διακριτών ποσοτήτων) και μοντέλα μήκους ή μέτρησης. Τα μοντέλα αυτά θα τα εξετάσουμε πιο αναλυτικά στη συνέχεια.

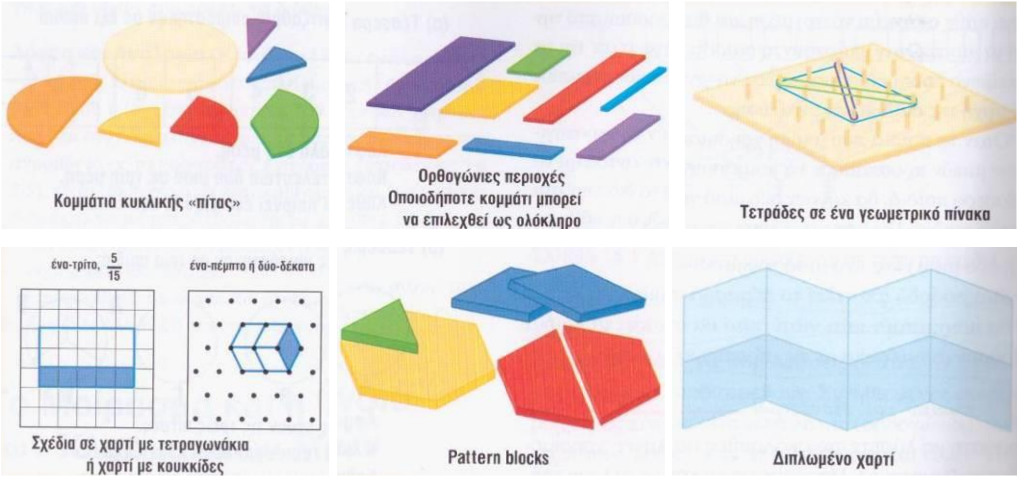
Είναι σημαντικό για τους μαθητές να αλληλεπιδρούν και με τους τρεις αυτούς τύπους μοντέλων, γιατί είναι διαφορετικός ο τρόπος με τον οποίο σε καθένα από αυτά:

- ορίζεται το όλο
- ορίζονται τα ίσα μέρη
- προβάλλεται το τι υποδεικνύει το κλάσμα (J. Zawojewski, 2005, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010).

Μοντέλα περιοχής

Στα *μοντέλα περιοχής ή εμβαδού* υπάρχει μια επιφάνεια η οποία αποτελεί τη μονάδα αναφοράς και διαιρείται σε ίσα μέρη. Η χρήση των μοντέλων περιοχής προϋποθέτει ανάπτυξη συλλογισμών πάνω σε σχέσεις μέρους – όλου (Petit, Laird & Marsden, 2010). Μοντέλα περιοχής είναι οι ορθογώνιες επιφάνειες, οι κυκλικοί δίσκοι, οι γεωπίνακες, οι διάστικτοι και οι ορθογώνιοι καμβάδες, τα σχήματα διαφορετικού μεγέθους (pattern blocks), το διπλωμένο χαρτί κτλ.

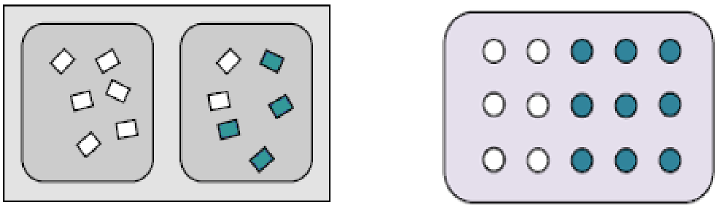
Ο Van de Walle (2007) διατυπώνει την άποψη ότι από αυτά τα μοντέλα, οι κυκλικοί δίσκοι είναι αυτό που συναντάται συχνότερα. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημά τους σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα περιοχής είναι ότι δίνουν έμφαση στην ποσότητα που απομένει για να σχηματιστεί το όλο.



Μοντέλα συνόλων

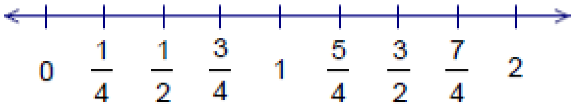
Στα *μοντέλα συνόλων* μπορούν να περιλαμβάνονται διάφορα σύνολα διακριτών αντικειμένων. Σε αυτά, το σύνολο αποτελεί τη μονάδα αναφοράς, ενώ τα μέρη εκφράζονται με υποσύνολα του αρχικού συνόλου. Η χρήση των μοντέλων συνόλου περιλαμβάνει τη δυνατότητα να σκέφτεται κανείς πάνω σε ένα κλασματικό μέρος ενός συνόλου από αντικείμενα (Petit, Laird & Marsden, 2010).

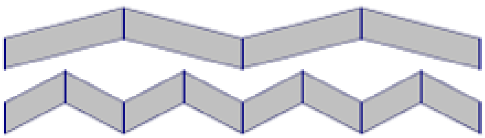
Ο Van de Walle (2007) αναφέρει ότι η ιδέα της αναφοράς σε ένα σύνολο από αντικείμενα ως μεμονωμένη οντότητα είναι κάτι που δυσκολεύει την κατανόηση των μοντέλων αυτής της κατηγορίας, ειδικά από τους μαθητές των μικρότερων τάξεων. Ωστόσο, αυτά τα μοντέλα βοηθούν τα παιδιά να συγκροτήσουν σημαντικές συνδέσεις με πολλές καθημερινές εφαρμογές των κλασμάτων, καθώς και με τις έννοιες των λόγων.

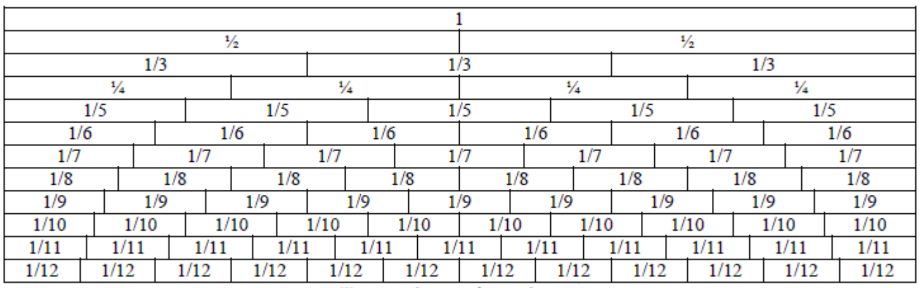


Μοντέλα μήκους ή μέτρησης

Στα *μοντέλα μήκους ή μέτρησης* αντί για εμβαδά συναντάμε μήκη. Ο Van de Walle (2007) αναφέρει ότι σε αυτή την κατηγορία μοντέλων είτε σχεδιάζουμε και υποδιαιρούμε ευθείες γραμμές, είτε συγκρίνουμε χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος τους. Εδώ, κατατάσσονται μοντέλα όπως οι λωρίδες κλασμάτων και οι ράβδοι Cuisenaire, τα ευθύγραμμα τμήματα, οι διπλωμένες λωρίδες χαρτιού και η αριθμογραμμή. Η Κολέζα (2000) προτείνει και μια εναλλακτική λύση για τη χρήση του μοντέλου της αριθμογραμμής, την οποία ονομάζει το κουτί των κλασμάτων.



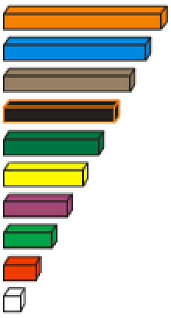




Το κουτί των κλασμάτων [1]

Οι ράβδοι Cuisenaire αποτελούν εμπορικό όνομα έγχρωμων ξύλινων ή πλαστικών ράβδων που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική ή στις κλασματικές έννοιες. Οι λωρίδες κλασμάτων αποτελούν μια εκδοχή των ράβδων Cuisenaire. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ράβδους με 10 διαφορετικά μήκη από 1 έως 10εκ. Τα τελευταία χρόνια έχει προστεθεί μια ακόμα ράβδος με μήκος 12εκ. Τα χρώματα είναι σταθερά και σχετίζονται με το μήκος των ράβδων.

[1] Τα μοντέλα συνόλων και μήκους είναι αναπαραγωγή από τον Van de Walle (2001/2005, αναφορά στον Σταματόπουλο, 2011).



Τα μοντέλα αυτής της κατηγορίας διαφοροποιούνται από τα προηγούμενα σε διάφορα σημεία. Σύμφωνα με τους Bright, Behr, Post, & Wachsmuth (1988, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010) υπάρχουν κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά που τα διαχωρίζουν από τα υπόλοιπα μοντέλα που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων. Αυτά είναι:

1. Το όλο αναπαριστάται από ένα μήκος, και όχι από μια περιοχή ή ένα σύνολο αντικειμένων.
2. Σε ένα μοντέλο μήκους χρειάζεται να υπάρχουν σύμβολα τα οποία να οριοθετούν το όλο/μονάδα, ενώ στα άλλα μοντέλα αυτό είναι προφανές.
3. Δεν υπάρχουν οπτικοί διαχωρισμοί ανάμεσα στις διαφορετικές μονάδες, καθώς οι μονάδες είναι συνεχόμενες. Στα υπόλοιπα μοντέλα κλασμάτων οι μονάδες είναι φυσικά ξεχωριστές (π.χ. έχω 2 πίτσες), ενώ στα μοντέλα μήκους δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Σε μια αριθμογραμμή για παράδειγμα, όταν αναζητούμε το κλάσμα $\frac{1}{3}$, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε το $\frac{1}{3}$ από το 0 μέχρι το 1, αφού το χωρίσουμε σε τρία ίσα μέρη, και όχι να βρούμε το $\frac{1}{3}$ ολόκληρης της γραμμής.
4. Οι μονάδες μπορούν να υποδιαιρεθούν χωρίς περιορισμούς.

Επιπλέον, η χρήση τέτοιων μοντέλων προϋποθέτει ότι οι μαθητές θα κατανοήσουν την έννοια της απόστασης που διανύεται πάνω σε μια γραμμή ή του εντοπισμού ενός σημείου πάνω σε αυτή με βάση ένα κλάσμα.

Σε ερευνητικό επίπεδο, οι επιστήμονες επιβεβαιώνουν ότι οι αριθμογραμμές μπορούν να βοηθήσουν να οικοδομηθεί η κατανόηση του μεγέθους ενός κλάσματος και να εδραιωθούν οι έννοιες της ισοδυναμίας και της πυκνότητας των ρητών αριθμών (Behr & Post, 1992; Saxe et al., 2007, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010).

Ενδοιασμοί/Επιφυλάξεις στη χρήση των μοντέλων

Διάφορα προβλήματα μπορεί να προκύψουν από τη χρήση των μοντέλων στη διδακτική διαδικασία. Αυτό που συμβαίνει πολύ συχνά είναι ότι οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν ένα μοντέλο με μηχανικό τρόπο, χωρίς ουσιαστικά να κατανοούν τις μαθηματικές ιδέες που συνδέονται με αυτό (Clements, 1999, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010). Επίσης, μερικές φορές οι εκπαιδευτικοί μπορεί να επιμένουν ιδιαίτερα στη χρήση ενός μόνο μοντέλου, παραλείποντας ή δίνοντας μικρή σημασία στα υπόλοιπα. Αυτό έχει συνέπειες στην εμπέδωση της έννοιας των κλασμάτων από τους μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές για αλληλεπίδραση με διαφορετικά μοντέλα και να τους προτρέπουν να αναζητούν μοτίβα και σχέσεις ανάμεσα σε αυτά. Επίσης, οι μαθητές πρέπει να παρακινούνται να κάνουν και να διερευνούν υποθέσεις για τα μοντέλα και να χρησιμοποιούν τα όσα έχουν μάθει από τη χρήση τους για να γενικεύουν τις μαθηματικές έννοιες. Η χρήση των μοντέλων πρέπει να διαπερνά τη διδασκαλία και όχι να αποτελεί μια ευκαιριακή εμπειρία. Τα μοντέλα πρέπει να γίνουν μια μέθοδος για τη σκέψη και τη μάθηση των μαθητών.

Οι Petit, Laird & Marsden (2010) υποστηρίζουν ότι τα μοντέλα είναι το μέσο και όχι ο σκοπός της διδασκαλίας των κλασμάτων. Αυτό δημιουργεί και ένα πλαίσιο για την κατανόηση της σημασίας της χρήσης των μοντέλων. Η χρησιμότητά τους είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν την κατανόησή τους για την έννοια των κλασμάτων. Έτσι, πρέπει να τηρηθεί η ισορροπία ανάμεσα στην χρήση των μοντέλων για την μάθηση και στην υπερβολική εξάρτηση από τα μοντέλα.

Συνοψίζοντας, οι ερευνητές συμφωνούν ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν και πρέπει να αναπαριστώνται με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Έτσι, εκτός από τα μοντέλα, καλό είναι να χρησιμοποιούνται και αληθινά αντικείμενα, γραπτά και προφορικά σύμβολα και λεκτικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι μαθητές που έρχονται σε επαφή με διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων και τους ζητείται να μετακινούνται από τη μια στην άλλη, τελικά αναπτύσσουν πιο ευέλικτη αντίληψη για τα κλάσματα (Lesh, Landau, & Hamilton, 1983, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010).

1.4 Λάθη των μαθητών στα κλάσματα

Σε αυτή την ενότητα καταγράφουμε κάποια από τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών σε σχέση με τα κλάσματα. Όπως έχουμε προαναφέρει, η έννοια των ρητών αριθμών παρουσιάζει δυσκολίες στην κατανόησή της από τους μαθητές. Αυτό εν μέρει μπορεί να οφείλεται στις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών με τους φυσικούς αριθμούς (Stafylidou & Vosniadou, 2004), αλλά και στην πολυπλοκότητα της ίδιας της έννοιας του κλάσματος.

Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώσαμε τις βασικές διαφορές μεταξύ ρητών και φυσικών αριθμών, στις οποίες οφείλεται η γνωστική σύγκρουση των μαθητών και πολλά από τα συνακόλουθα λάθη τους στα κλάσματα, όπως τις παρουσιάζουν οι Λεμονίδης (2007) και οι Stafylidou & Vosniadou (2004).

Φυσικός αριθμός	**Κλάσμα**
Ένας αριθμός.	Δύο αριθμοί και μια γραμμή στη μέση.
Συνδέεται με την απόλυτη τιμή μιας ποσότητας (πληθάριθμος) και απαντά στην ερώτηση «πόσα πολλά».	Αναπαριστά ποσοτικές σχέσεις και απαντά στην ερώτηση «πόσο πολύ».
	Κάθε κλάσμα έχει ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.
Υποστηρίζεται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών. Υπάρχει πάντα ένας προηγούμενος και ένας επόμενος αριθμός. Δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών.	Δεν μπορεί να στηριχθεί στην ακολουθία των φυσικών αριθμών. Δεν υπάρχει ένας μοναδικός επόμενος ή προηγούμενος αριθμός. Ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι άλλοι.
Η μονάδα είναι ο μικρότερος αριθμός	Δεν υπάρχει ένας μοναδικός μικρότερος αριθμός.
Υποστηρίζονται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών.	Δεν υποστηρίζονται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών.
Ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει έναν αριθμό.	Ο πολλαπλασιασμός μπορεί είτε να μεγαλώσει είτε να μικρύνει έναν αριθμό.
Η διαίρεση μικραίνει έναν αριθμό.	Η διαίρεση μπορεί είτε να μεγαλώσει είτε να μικρύνει έναν αριθμό.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια από τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών αναφορικά με τα κλάσματα επικεντρώνοντας την προσοχή μας κυρίως σε αυτά που έχουν σχέση με την έννοια του κλάσματος και τις αναπαραστάσεις.

1.4.1 Λάθη στην έννοια του κλάσματος

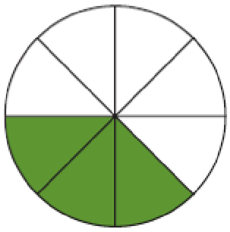
Οι Γαγάτσης κ.α. (2006) αποδίδουν τα λάθη που γίνονται σε αυτή την κατηγορία, στην πυκνή δομή των ρητών αριθμών. Αυτή η πυκνότητα έρχεται σε αντίθεση με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών, που είναι εκείνη με την οποία οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι. Οι ίδιοι ερευνητές κατατάσσουν σε αυτή την κατηγορία λάθη όπως:

♦ Η σύνδεση του κλάσματος $\frac{\kappa}{\mu}$ με την απόλυτη αξία των φυσικών αριθμών κ και μ. Σε αυτή την περίπτωση, ο Hannula (2003) αναφέρει ότι οι μαθητές τοποθετούν στην αριθμογραμμή ένα κλάσμα όπως το $\frac{3}{9}$ κοντά στον ακέραιο που αντιστοιχεί στον αριθμητή ή στον παρονομαστή, δηλ. κοντά στο 3 ή στο 9.

♦ Η αντίληψη ότι ανάμεσα σε δύο ομώνυμα κλάσματα με αριθμητές διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, όπως $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$, δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός.

♦ Η αντίληψη ότι η κλασματική μονάδα είναι σταθερό μέγεθος. Στο Mathematics Navigator (2015) αναφέρεται ότι οι μαθητές τείνουν να υπεργενικεύουν τις έννοιες και να θεωρούν για παράδειγμα ότι «σε όλες τις περιπτώσεις το $\frac{1}{4}$ είναι το ίδιο». Δεν αναγνωρίζουν το γεγονός ότι το μέγεθος του όλου καθορίζει και το μέγεθος του κλάσματος. Έτσι, στο παρακάτω πρόβλημα: «*Ο Κώστας και η Άννα πήγαν για ορειβασία. Ο Κώστας ανέβηκε 2 μίλια και η Άννα ανέβηκε 8 μίλια.*», οι μαθητές έχουν την εντύπωση ότι αν τα δύο παιδιά έχουν ολοκληρώσει το $\frac{1}{4}$ της ορειβασίας τους, τότε σίγουρα έχουν περπατήσει την ίδια απόσταση, γιατί $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

♦ Η κυριαρχία της αντίληψης της σχέσης μέρους – μέρους, αντί της σχέσης μέρους – όλου. Έτσι, στο Mathematics Navigator (2015) αναφέρεται ότι οι μαθητές γράφουν ένα κλάσμα ως μέρος/μέρος αντί για μέρος/όλο. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα αντί να πουν ότι είναι γραμμοσκιασμένα τα $\frac{3}{8}$ του κύκλου, λένε ότι είναι τα $\frac{3}{5}$.



♦ Ο λογιστικός χειρισμός των αριθμητών ανεξάρτητα από τους παρονομαστές. Το Mathematics Navigator (2015) επισημαίνει ότι οι μαθητές συνηθίζουν να χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς τους τον αριθμητή και να αγνοούν τον παρονομαστή. Για παράδειγμα, όταν τους ζητείται να υπολογίσουν τα $\frac{2}{3}$ του 9, οι μαθητές δίνουν ως απάντηση το 2.

♦ Η δυσκολία των παιδιών να υπερβούν την κλασματική ποσότητα, να αποσυνδέσουν δηλαδή το $\frac{\kappa}{\mu}$ του χ από το χ και να οικοδομήσουν τελικά την έννοια του κλασματικού αριθμού. Για παράδειγμα, μπορούν να συγχέουν τα $\frac{3}{4}$ των 8 αντικειμένων με το κλάσμα $\frac{3}{8}$.

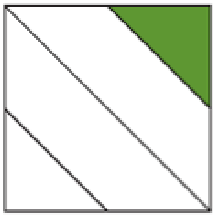
♦ Η έλλειψη κατανόησης της έννοιας των κλασματικών μερών. Έτσι, κάποιοι μαθητές θεωρούν πως οτιδήποτε μικρότερο από το μισό είναι ίσο με $\frac{1}{4}$ ή ότι το $\frac{1}{3}$ είναι το ίδιο με το $\frac{1}{4}$ (McLeod & Newmarch, 2006).

♦ Το Mathematics Navigator (2015) σημειώνει ότι οι μαθητές θεωρούν ότι ο παρονομαστής μας δείχνει πάντα τον αριθμό των αντικειμένων ενός συνόλου, αγνοώντας την περίπτωση στην οποία το κλάσμα έχει απλοποιηθεί. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που έχουμε ένα σύνολο 10 διακριτών αντικειμένων και από αυτά επιλέξουμε τα 4, προκύπτει το κλάσμα $\frac{4}{10}$. Αυτό το κλάσμα μπορούμε να το απλοποιήσουμε και να το αντικαταστήσουμε με το ισοδύναμό του $\frac{2}{5}$, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τώρα έχουμε ένα νέο σύνολο 5 αντικειμένων.

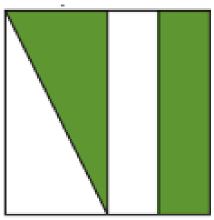
1.4.2 Λάθη που σχετίζονται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις – μοντέλα

Α. Λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος συνεχούς επιφάνειας.

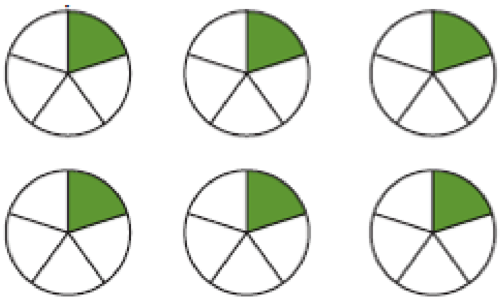
Οι Φιλίππου & Χρίστου (1995, αναφορά στους Γαγάτσης κ.α., 2006) αναφέρουν ότι κάποιοι μαθητές μπορεί να κάνουν λάθη στα μοντέλα συνεχούς επιφάνειας, καθώς στρέφουν την προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται και δεν δίνουν σημασία και στους δύο όρους του κλάσματος. Επίσης μπορεί να μην κατανοούν ότι τα μέρη της συνεχούς επιφάνειας πρέπει να είναι ισοδύναμα χωρισμένα, για να ισχύει η σχέση που αντανακλά το κλάσμα. Αντίστοιχα, οι McLeod & Newmarch (2006) επισημαίνουν ότι όταν οι μαθητές χωρίζουν ένα σχήμα σε μη ίσα μέρη για να αναπαραστήσουν ένα κλάσμα, αυτό δείχνει την έλλειψη κατανόησης για την έννοια των ίσων μερών. Στο Mathematics Navigator (2015) υπάρχει και το αντίστοιχο παράδειγμα, όπου κάποιοι μαθητές δηλώνουν ότι το $\frac{1}{4}$ του παρακάτω σχήματος είναι βαμμένο.



Μια ακόμη από τις παρανοήσεις των μαθητών, η οποία καταγράφεται στο Mathematics Navigator (2015) πιθανόν να σχετίζεται και με τον τρόπο που συνήθως τους παρουσιάζονται τα μοντέλα περιοχής. Οι μαθητές πιστεύουν ότι σε ένα τέτοιο μοντέλο πρέπει απαραίτητα τα ίσα κομμάτια να έχουν και ίδιο σχήμα. Έτσι, στην παρακάτω περίπτωση, παρά το γεγονός ότι τα κομμάτια είναι ίσα, οι μαθητές ισχυρίζονται ότι δεν είναι βαμμένα τα $\frac{2}{4}$ του τετραγώνου.



Στο ίδιο βιβλίο επισημαίνεται ότι, όταν υπάρχουν πολλά σχήματα – μονάδες και οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν τι κλάσμα είναι τα βαμμένα κομμάτια των σχημάτων, οι μαθητές τείνουν απλά να μετρούν τα κομμάτια (τόσο τα βαμμένα όσο και τα υπόλοιπα) χωρίς να σκέφτονται ποιο είναι το όλο. Έτσι, σε ένα σχήμα όπως το παρακάτω, όπου το όλο είναι ο ένας κύκλος, οι μαθητές μπορεί να απαντήσουν ότι είναι βαμμένα τα $\frac{6}{30}$ του ενός κύκλου (αντί του σωστού $\frac{6}{6}$).



B. Λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος συνόλου αντικειμένων.

Όταν έχουν να επιλύσουν προβλήματα που περιλαμβάνουν σύνολα διακριτών αντικειμένων, οι μαθητές μερικές φορές έχουν την τάση να υπεργενικεύουν τις εμπειρίες τους από τα μοντέλα περιοχής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, να αναπτύσσουν την αντίληψη ότι όταν μιλάμε για σύνολα αντικειμένων, πρέπει αυτά τα αντικείμενα να είναι ίσα σε μέγεθος μεταξύ τους. Σύμφωνα, όμως, με το Mathematics Navigator (2015), μπορούμε να μιλήσουμε για κλάσματα συνόλων αντικειμένων και στην περίπτωση του τα αντικείμενα δεν έχουν την ίδια μορφή ή το ίδιο μέγεθος. Έτσι, στο παρακάτω σχήμα κάποιοι μαθητές θα αναγνωρίσουν το κλάσμα $\frac{2}{5}$, ενώ άλλοι θα υποστηρίξουν ότι το γραμμοσκιασμένο μέρος δεν είναι δυνατό να περιγραφεί με κλάσμα, λόγω της ανισότητας των τετραγώνων.

Επίσης, οι Φιλίππου & Χρίστου (1995, αναφορά στους Γαγάτσης κ.α. 2006) διαπιστώνουν πως οι μαθητές δυσκολεύονται να απαντήσουν σε ασκήσεις όπου το σύνολο των αντικειμένων είναι πιο μεγάλο από τον παρονομαστή του κλάσματος που τους ζητείται να επιλέξουν.

Γ. Λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλάσματος ως λόγου

Οι Γαγάτσης κ.α. (2006) επισημαίνουν τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος ως λόγου. Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{3}{4}$ μπορεί να εκφράζει 3 αγόρια για κάθε 4 κορίτσια ή 3:4. Αυτό προκύπτει μέσα από συγκρίσεις μεταξύ επιμέρους ομάδων εντός μιας ολότητας (παράδειγμα: 3 αγόρια και 4 κορίτσια – ο λόγος των κοριτσιών προς τα αγόρια είναι 4 : 3). Εδώ παίζει ρόλο και η σειρά αναφοράς του κάθε επιμέρους συνόλου.

Δ. Λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλασμάτων ως πηλίκο

Οι Γαγάτσης κ.α. (2006) ισχυρίζονται ότι, αν και γίνεται αναφορά σε προβλήματα διαίρεσης από την καθημερινή ζωή, οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν το κλάσμα ως διαίρεση ανάμεσα σε δύο αριθμούς. Για παράδειγμα, πόση ποσότητα σοκολάτας θα φάνε έξι παιδιά, αν υπάρχουν μόνο 4 σοκολάτες;

Ε. Λάθη των μαθητών στην αντιστοίχιση κλασμάτων με τη δεκαδική τους μορφή

Είναι γεγονός ότι συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν ένα κλάσμα με τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό. Οι McLeod & Newmarch (2006) επισημαίνουν ότι αρκετές φορές οι μαθητές επηρεάζονται από τις ομοιότητες στην εμφάνιση μεταξύ των δεκαδικών αριθμών και των κλασμάτων, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη όπως $\frac{1}{4}$=1,4. Αντίστοιχα, στο Mathematics Navigator (2015) αναφέρεται και το λάθος $\frac{1}{4}$=0,4.

ΣΤ. Λάθη των μαθητών στην αναγνώριση κλάσματος ως μέτρου

Είναι γεγονός ότι η χρήση της αριθμογραμμής και κατ' επέκταση η αναγνώριση του κλάσματος ως μέτρου είναι δύσκολη για τους μαθητές. Αυτό το έχουν επισημάνει πολλοί ερευνητές οι οποίοι ασχολούνται με τη διδασκαλία των κλασμάτων (Petit, Laird & Marsden, 2010, Γαγάτσης κ.α., 2006, Mathematics Navigator, 2015, Hannula, 2003). Ως προς αυτό, έχουν παρατηρηθεί διάφορες παρανοήσεις και δυσκολίες των μαθητών. Ο Hannula (2003) διαπιστώνει ότι κάποιοι μαθητές δεν θεωρούν το κλάσμα αριθμό, οπότε πιστεύουν ότι δεν μπορούν να το τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή ενώ άλλοι εντοπίζουν τη θέση του κλάσματος πάντα στα δεξιά της μονάδας αντί του μηδενός. Ο ερευνητής αναφέρει επίσης ότι κάποιοι μαθητές αναζητούν το κλάσμα θεωρώντας ότι ολόκληρη η αριθμογραμμή αποτελεί το όλο και όχι μόνο το τμήμα από το 0 μέχρι το 1. Επιπλέον, στο Γαγάτσης κ.α. (2006) επισημαίνεται ότι συχνά οι μαθητές μετρούν τα σημεία και όχι τα διαστήματα, όταν προσπαθούν να εντοπίσουν τη θέση ενός κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή, κάτι που τους οδηγεί σε σφάλματα. Επίσης, οι ίδιοι ερευνητές παρατηρούν ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία το πλήθος των υποδιαιρέσεων στην αριθμογραμμή δεν αντιστοιχεί στον παρονομαστή του κλάσματος.

1.4.3 Λάθη των μαθητών στη σύγκριση κλασμάτων

Οι ερευνητές καταγράφουν κάποια από τα λάθη που γίνονται από τους μαθητές, όταν εκείνοι προχωρούν σε συγκρίσεις κλασμάτων.

Η πεποίθηση ότι μόνο το μέγεθος του παρονομαστή καθορίζει το μέγεθος του κλάσματος μπορεί να οδηγήσει σε δύο διαφορετικά είδη σφαλμάτων. Από τη μια μεριά, οι μαθητές συχνά θεωρούν ότι, μεταξύ δύο κλασμάτων, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο παρονομαστή. Για παράδειγμα, $\frac{4}{5} > \frac{1}{3}$ γιατί 5>3 (McLeod & Newmarch, 2006). Εδώ, οι μαθητές ουσιαστικά εφαρμόζουν τους κανόνες που γνωρίζουν από τη σύγκριση ακέραιων αριθμών στα κλάσματα. Αντίθετα, κάποιοι άλλοι μαθητές υπεργενικεύουν την ιδέα ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής τόσο μικρότερη είναι η αξία του κλάσματος και έτσι έχουν την τάση να αγνοούν τους αριθμητές των κλασμάτων όταν τα συγκρίνουν. Έτσι, λένε ότι $\frac{1}{4} > \frac{3}{5}$, γιατί θεωρούν ότι τα κλάσματα με παρονομαστή το 4 είναι πάντα μεγαλύτερα από αυτά που έχουν παρονομαστή 5 (Mathematics Navigator, 2015).

Στο Mathematics Navigator (2015) αναφέρεται και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν κάποιους αριθμούς όπως το 1, το $\frac{1}{2}$ και το 0 ως ορόσημα κατά τη σύγκριση, κάτι που θα διευκόλυνε τη δουλειά τους και θα τους βοηθούσε να αποφύγουν πολλά λάθη. Ακόμη, επισημαίνεται η τάση των παιδιών να συγκρίνουν τους δύο όρους του κλάσματος μεταξύ τους αντί να συγκρίνουν το κλάσμα με την μονάδα ώστε να διαπιστώσουν το μέγεθός του. Επίσης, κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι πάντα μεγαλύτεροι από τα κλάσματα, γιατί τα κλάσματα είναι πολύ μικρά ή αντίστοιχα ότι δεν μπορείς να συγκρίνεις έναν δεκαδικό με ένα κλάσμα.

Ανάλογα λάθη συναντώνται και στην περίπτωση των ισοδύναμων κλασμάτων. Μερικές φορές οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδεχτούν ότι δύο κλάσματα όπως τα $\frac{2}{3}$ και $\frac{4}{6}$ προσδιορίζουν την ίδια ποσότητα, γιατί αυτά τα κλάσματα φαινομενικά είναι διαφορετικά. Αντίστοιχα, όταν προσπαθούν να εντοπίσουν αν δυο κλάσματα είναι ισοδύναμα, συχνά ακολουθούν μια αθροιστική λογική, σύμφωνα με την οποία για παράδειγμα, $\frac{3}{8} = \frac{4}{9}$ γιατί 3+1=4 και 8+1=9. Στην ίδια κατηγορία εσφαλμένων αντιλήψεων ανήκει και η πεποίθηση των μαθητών ότι αν πολλαπλασιάσεις (ή διαιρέσεις) τους όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, τότε αυξάνεται (μειώνεται) η αξία του κλάσματος (Mathematics Navigator, 2015).

1.4.4 Λάθη των μαθητών στις πράξεις με κλάσματα

Οι πράξεις των κλασμάτων είναι επίσης μια περιοχή στην οποία οι μαθητές δυσκολεύονται. Στη συνέχεια καταγράφουμε κάποια από τα λάθη των παιδιών στις τέσσερις βασικές πράξεις.

Οι McLeod & Newmarch (2006) αναφέρουν ότι ίσως το πιο συχνό λάθος των μαθητών στην πρόσθεση είναι τα παιδιά να προσθέτουν τους αντίστοιχους όρους των κλασμάτων, όπως θα έκαναν και με τους ακέραιους αριθμούς, δηλαδή να προσθέτουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους. Για παράδειγμα, γράφουν $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Οι ερευνήτριες σημειώνουν ότι αυτό δείχνει πως οι μαθητές δεν κατανοούν ότι στα κλάσματα ισχύουν διαφορετικοί κανόνες και ταυτόχρονα δεν είναι σε θέση να κρίνουν πότε μια απάντηση που δίνουν δεν έχει νόημα. Στο Mathematics Navigator (2015) αναφέρεται επίσης ότι, μερικές φορές, τα παιδιά κατά την πρόσθεση κλασμάτων προσθέτουν τους αριθμητές και πολλαπλασιάζουν τους παρονομαστές μεταξύ τους. Παραδείγματος χάρη, γράφουν $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{10}$.

Οι Fazio & Siegler (2011) σημειώνουν ότι στα προβλήματα πολλαπλασιασμού, όταν τα κλάσματα έχουν ίδιο παρονομαστή, οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τον παρονομαστή στην πράξη. Έτσι, γράφουν για παράδειγμα, $\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Το Mathematics Navigator (2015) αναφέρει ότι κατά τον πολλαπλασιασμό παρατηρείται καμιά φορά και η περίπτωση κάποιοι μαθητές να διαιρούν τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή του ενός κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου. Για παράδειγμα, $\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Επίσης, μπορεί τα παιδιά να πολλαπλασιάζουν τον αριθμητή του πρώτου κλάσματος με τον παρονομαστή του δεύτερου και αντίστροφα και να προσθέτουν τα αποτελέσματα μεταξύ τους. Για παράδειγμα, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=(3\times 7)+(4\times 5)=41$.

Τέλος, και κατά την πράξη της διαίρεσης των κλασμάτων εμφανίζονται προβλήματα στην εφαρμογή του αλγορίθμου. Οι μαθητές συχνά πιστεύουν ότι το να διαιρέσεις έναν αριθμό με ένα κλάσμα όπως το $\frac{1}{2}$ είναι το ίδιο με τον να τον διαιρέσεις με το 2. Έτσι, γράφουν 4: $\frac{1}{2}$ =2. Αντίστοιχα, όταν διαιρούν ένα κλάσμα με έναν ακέραιο αριθμό, τείνουν να διαιρούν τον παρονομαστή με τον ακέραιο ($\frac{1}{26}:2=\frac{1}{13}$) ή μπερδεύουν ποιος όρος διαιρείται με ποιον ($\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$). Ένα ακόμη λάθος κατά τη διαίρεση των κλασμάτων είναι η διαίρεση των αριθμητών και των παρονομαστών μεταξύ τους ($\frac{6}{7}:\frac{2}{7}=\frac{3}{1}$) (Mathematics Navigator, 2015).

1.4.5 Λάθη των μαθητών στους μικτούς αριθμούς

Οι μικτοί αριθμοί παρουσιάζονται στους μαθητές μαζί με τα κλάσματα και καθώς φαίνεται αποτελούν και αυτοί πηγή ποικίλων παρανοήσεων από τους μαθητές. Οι Fazio & Siegler (2011) σημειώνουν ότι κάποιοι μαθητές αγνοούν το κλασματικό μέρος των μικτών και ασχολούνται μόνο με το ακέραιο μέρος (π.χ. $4\frac{2}{3}-1\frac{2}{5}=3$). Άλλοι αντιμετωπίζουν το ακέραιο μέρος ως ένα κλάσμα το οποίο έχει όμοιο παρονομαστή με το κλάσμα που δίνεται ($3-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$). Τέλος, κάποιοι προσθέτουν το ακέραιο μέρος του μικτού αριθμού στον αριθμητή του κλάσματος ($2\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{20}{30}$).

Συνοψίζοντας, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε κάποια από τα λάθη που κάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να επιλύσουν προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν κλάσματα. Ο λόγος αυτής της ανάλυσης είναι διπλός: καταρχάς θέλαμε να δείξουμε το μεγάλο εύρος λαθών που μπορεί να κάνει κάποιος μαθητής και, συγχρόνως, να επισημάνουμε την ευρέως αποδεκτή άποψη ότι τα κλάσματα αποτελούν μια από τις δυσκολότερες έννοιες στην εμπέδωσή τους από τους μαθητές. Όπως έχουμε δει, οι ερευνητές επισημαίνουν ότι πολλά από αυτά τα λάθη των μαθητών οφείλονται στο γεγονός ότι τα παιδιά έχουν περιορίσει τον ορισμό που οι ίδιοι έχουν διαμορφώσει για τα κλάσματα σε ένα μόνο μοντέλο αναπαράστασης. Γι' αυτόν τον λόγο και είναι σημαντικό οι μαθητές να έρχονται σε επαφή και να αλληλεπιδρούν με όσο το δυνατό περισσότερα διαφορετικά μοντέλα.

1.6 Αναλυτικά προγράμματα και κλάσματα στο δημοτικό

Στο σημείο αυτό θεωρούμε χρήσιμο να εξετάσουμε τι προβλέπουν τα αναλυτικά προγράμματα σχετικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων στο δημοτικό. Αυτό θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα με ποιον τρόπο εντάσσονται στην πράξη όσα θεωρητικά στοιχεία έχουν αναφερθεί παραπάνω σχετικά με τις διαφορετικές μορφές και αναπαραστάσεις των κλασμάτων.

Καταρχάς, πρέπει να αναφέρουμε ότι τα κλάσματα διδάσκονται για πρώτη φορά στους μαθητές της Γ' δημοτικού (Λεμονίδης κ.α., χ.χ.). Σε αυτή την τάξη, τα παιδιά έρχονται σε επαφή αρχικά με την έννοια της κλασματικής μονάδας μέσα από παραδείγματα που προέρχονται από την καθημερινή ζωή. Ακόμη, παρουσιάζονται τα δεκαδικά κλάσματα και γίνεται η εισαγωγή και η σύνδεση των κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς, με δραστηριότητες όπως η χρήση της αριθμομηχανής. Το ευρώ και οι υποδιαιρέσεις του χρησιμοποιούνται σε πολλές δραστηριότητες με δεκαδικούς αριθμούς, με στόχο να αξιοποιηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών. Επίσης, παρουσιάζονται τα ισοδύναμα κλάσματα και τα κλάσματα που ισούνται με τη μονάδα. Παράλληλα, στο σχολικό βιβλίο αυτής της τάξης (Λεμονίδης κ.α., χ.χ.). περιλαμβάνονται και κάποιες δραστηριότητες με χάρακα – ζυγαριά. Όπως αναφέρει και η συγγραφική ομάδα του αντίστοιχου βιβλίου, δίνεται έμφαση κυρίως στο σχήμα μέρος – όλο, τόσο σε συνεχείς όσο και σε διακριτές ποσότητες. Επίσης, διδάσκεται στους μαθητές η συμβολική γραφή και η ονοματολογία κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών. Σε αυτή την τάξη γίνεται μέσα από στοχευμένες δραστηριότητες η προσπάθεια να κατανοήσουν οι μαθητές τις πολλαπλές αναπαραστάσεις του κλάσματος (λογοτέχνες, πρακτικοί, ζωγράφοι, μαθηματικοί).

Στην ύλη της Δ δημοτικού απουσιάζουν εντελώς τα κλάσματα. Το μόνο σχετικό αντικείμενο που διδάσκονται οι μαθητές σε αυτή την τάξη είναι οι δεκαδικοί αριθμοί και οι πράξεις τους (προσθέσεις και αφαιρέσεις).

Στην Ε δημοτικού (Κακαδιάρης κ.α., χ.χ.) οι μαθητές διδάσκονται ξανά τα κλάσματα. Ένας από τους κύριους στόχους σε αυτή την τάξη είναι τα παιδιά να είναι σε θέση να εκφράσουν έναν αριθμό ως κλάσμα, δεκαδικό αριθμό ή ως πηλίκο. Μαθαίνουν τη μέθοδο αναγωγής στην κλασματική μονάδα και έρχονται σε επαφή με τις τέσσερις πράξεις με κλάσματα (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) Εισάγεται επίσης και οι έννοια του αντίστροφου αριθμού. Τα παιδιά μαθαίνουν να μετατρέπουν τα κλάσματα σε ομώνυμα, να τα συγκρίνουν και να τα διατάσσουν. Στην Ε τάξη δίνεται έμφαση στη δεκαδική μορφή του κλάσματος. Επίσης, επιδιώκεται να εξοικειωθούν οι μαθητές με τις κλασματικές μονάδες και να μάθουν να τις διαχειρίζονται και να τις συγκρίνουν. Εμπλουτίζονται οι γνώσεις τους για τα ισοδύναμα κλάσματα μέσα από δραστηριότητες για την αναγνώριση και τεχνικές δημιουργίας ισοδύναμων. Τέλος, υπάρχουν και κάποιες δραστηριότητες σχετικές με το σχήμα των ρητών ως μέτρηση με τη χρήση της αριθμογραμμής και του χάρακα.

Στη ΣΤ δημοτικού (Κασσώτη κ.α., χ.χ.) οι μαθητές έρχονται και πάλι σε επαφή με την αμφίδρομη διαδικασία μετατροπής των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα. Δίνεται και πάλι έμφαση στην έννοια του κλάσματος ως μέρος – όλου και η σύγκριση με τη μονάδα. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εμπλακούν σε δραστηριότητες μετατροπής του κλάσματος σε μεικτό αριθμό, ενώ επιδιώκεται η σύνδεση του κλάσματος με την έννοια του πηλίκου διαίρεσης. Παράλληλα, εμφανίζονται και κάποιες δραστηριότητες που συνδέουν το κλάσμα με την έννοια της μέτρησης με χρήση της αριθμογραμμής. Και σε αυτή την τάξη εξετάζονται τα ισοδύναμα κλάσματα και εισάγεται η έννοια του ανάγωγου κλάσματος. Ακόμη, υπάρχουν δραστηριότητες για τη διάταξη κλασμάτων, όπως επίσης και ασκήσεις και προβλήματα με κλάσματα και αριθμητικές παραστάσεις με κλάσματα. Τέλος, εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά και η έννοια του λόγου και της αναλογίας.

Όπως ήταν αναμενόμενο, διαπιστώσαμε ότι τα κλάσματα εμφανίζονται ως αντικείμενο διδασκαλίας στις τάξεις του δημοτικού σχολείου (με εξαίρεση τη Δ δημοτικού). Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με αρκετές από τις σημαντικές έννοιες που σχετίζονται με τα κλάσματα σε αυτή την πορεία τους. Γίνεται φανερό για παράδειγμα, ότι εξετάζεται το κλάσμα ως μέρος – όλου, τόσο για συνεχείς όσο και για διακριτές ποσότητες, ως πηλίκο και ως μέτρο. Επίσης, στη ΣΤ τάξη εμφανίζεται για πρώτη φορά και η έννοια του λόγου και της αναλογίας. Αυτό που ενδιαφέρει βέβαια είναι και σε ποιον βαθμό φτάνει η κατανόηση των μαθητών σε αυτές τις μορφές, κάτι που σχετίζεται και με την έμφαση που δίνεται σε αυτές κατά τη διδασκαλία. Μια εις βάθος ανάλυση της φιλοσοφίας των αναλυτικών προγραμμάτων σχετικά με τα κλάσματα ξεφεύγει των στόχων της παρούσας εργασίας και γι’ αυτό δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω.

2^{o} Κεφάλαιο: Ηλεκτρονικές εφαρμογές για τη διδασκαλία των κλασμάτων

2.1 Εισαγωγή

Η ενσωμάτωση των υπολογιστών και των Νέων Τεχνολογιών στο σχολείο είναι μια τάση που κερδίζει όλο και περισσότερο έδαφος τα τελευταία χρόνια. Μια επισκόπηση της βιβλιογραφίας δείχνει ότι ειδικά για το μάθημα των μαθηματικών είναι πολύ μεγάλο το ενδιαφέρον, τόσο των ερευνητών όσο και των εκπαιδευτικών, για την ένταξή τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποιες από τις προσπάθειες που έχουν γίνει για να χρησιμοποιηθούν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στη διδασκαλία των κλασμάτων. Κάποιες από αυτές αποτελούν μεμονωμένες παρεμβάσεις, ενώ άλλες εντάσσονται σε προγράμματα που επιδιώκουν την ευρύτερη ενσωμάτωση των υπολογιστών στην καθημερινότητα του σχολείου. Οι εφαρμογές που παρουσιάζουμε διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους σε στοιχεία όπως ο βαθμός διαδραστικότητας, το είδος των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν και το αν προορίζονται για ατομική ή συνεργατική μάθηση. Ο στόχος μας είναι να καταγράψουμε τα θετικά στοιχεία και τις αδυναμίες τους ώστε να τα συγκρίνουμε τελικά με το δικό μας πρόγραμμα για τα κλάσματα.

2.2 Εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά κάποιες από τις διδακτικές παρεμβάσεις που έχουν γίνει στο μάθημα των μαθηματικών με τη βοήθεια της τεχνολογίας.

2.2.1 Ενισχύοντας την εκπαίδευση μέσα από την τεχνολογία – εκμάθηση μαθηματικών μέσα από τη χρήση ηλεκτρονικών παιχνιδιών

Η έρευνα των Liang & Zhou (2009) πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της συμμετοχής των μαθητών σε ένα πρόγραμμα, το οποίο ενσωμάτωνε την τεχνολογία στη μάθηση και είχε τον τίτλο «*Ενισχύοντας την εκπαίδευση μέσα από την τεχνολογία*» (Enhance Education Through Technology, EETT). Το πρόγραμμα αυτό αναπτύχθηκε σε εθνικό επίπεδο στα πλαίσια μιας πρωτοβουλίας (No Child Left Behind Act), που φιλοδοξεί να παρέχει ίσες ευκαιρίες για μάθηση σε όλους τους μαθητές, με το να βελτιώσει τις ακαδημαϊκές τους επιδόσεις μέσα από τη χρήση τεχνολογίας στο σχολείο, να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν ψηφιακά εγγράμματοι και να ενσωματώσει με αποτελεσματικό τρόπο την τεχνολογία στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και στα αναλυτικά προγράμματα.

Ο στόχος της συγκεκριμένης έρευνας ήταν να παρουσιάσει τις μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών του δημοτικού, οι οποίοι χρησιμοποίησαν ένα ολοκληρωμένο σύστημα τεχνολογίας για να μάθουν μαθηματικά. Οι μαθητές, στα πλαίσια του γενικότερου προγράμματος, έρχονταν στην ειδικά διαμορφωμένη τάξη για να μάθουν να διαβάζουν, για κοινωνικές επιστήμες, φυσική και μαθηματικά, δύο ή τρεις φορές την εβδομάδα κατά τη διάρκεια του ωρολογίου προγράμματος. Τα ερευνητικά ερωτήματα της συγκεκριμένης έρευνας ήταν «*πώς εξελίσσεται η μαθηματική μάθηση, όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν την τεχνολογία;*» και «*ποια είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά ενός τεχνολογικού συστήματος τα οποία διευκολύνουν τη μαθηματική μάθηση;*».

Τα χαρακτηριστικά της παρέμβασης ήταν ότι παρεχόταν ένα ψηφιακό διαδραστικό περιβάλλον μάθησης με παιχνίδια, τα οποία ήταν διασκεδαστικά και κατάλληλα για την ηλικία των μαθητών. Το περιβάλλον ενσωμάτωνε τη μάθηση μέσα από το παιχνίδι και τη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο και παρείχε πολλαπλά ιδιωτικά κανάλια επικοινωνίας στους μαθητές, με στόχο να διερευνήσουν τις έννοιες, να δοκιμάσουν και να διορθώσουν τα λάθη τους. Επίσης, η επαναλαμβανόμενη διδασκαλία και η άμεση ανατροφοδότηση που έδινε το σύστημα, με τη χρήση χαρακτήρων που είναι αγαπητοί στα παιδιά, είχε ως στόχο να κεντρίσει το ενδιαφέρον και την περιέργειά τους, ώστε να εμπλακούν σε μια διαδικασία αυτοδιαχειριζόμενης μάθησης.

Οι μαθητές δύο σχολείων παρατηρούνταν από τους ερευνητές όταν έρχονταν στο εργαστήριο της πληροφορικής. Μετά την ολοκλήρωση της δουλειάς τους στην τάξη, έρχονταν στο εργαστήριο και εργάζονταν πάνω σε στοχευμένες δραστηριότητες στον υπολογιστή και με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού που βρισκόταν στο εργαστήριο. Χρησιμοποιούσαν, λοιπόν, τους υπολογιστές ως συμπληρωματικά εργαλεία μάθησης για επιπλέον βοήθεια εκτός της τάξης. Το μαθησιακό περιβάλλον ήταν συνεργατικό και υποστηρικτικό και φάνηκε ότι οι μαθητές κατόρθωναν να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητες στον αναμενόμενο χρόνο.

Τα αποτελέσματα της έρευνας είναι πολλαπλά και ενθαρρυντικά. Η παρατήρηση των μαθητών που χρησιμοποίησαν την τεχνολογία για να μάθουν μαθηματικά έδειξε ότι το ψηφιακό περιβάλλον μπορεί να παρέχει ισχυρά ερεθίσματα στους μαθητές για μάθηση και αναστοχασμό. Η τεχνολογία με τα εργαλεία που παρέχει μπορεί να ελαφρύνει το γνωστικό φορτίο των μαθητών. Επίσης, μπορεί να δημιουργήσει ευκαιρίες για εκτεταμένη κατανόηση των μαθηματικών. Στην πράξη, βοήθησε τους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν ένα υποστηρικτικό και αποτελεσματικό περιβάλλον μέσα στην τάξη. Τα αλληλεπιδραστικά στοιχεία παιχνιδιού που υπήρχαν στα προγράμματα και η ερευνητική φύση του διαδικτύου έδωσαν κίνητρο στους μαθητές να διερευνήσουν και να συνδέσουν τη μάθηση με την καθημερινή τους ζωή. Η ευχάριστη και μη επικριτική φύση των δραστηριοτήτων τις κάνει ιδανικές για να βοηθήσουν τους μαθητές να νιώσουν ασφαλείς και να διορθώνουν μόνοι τους τα λάθη τους, χωρίς άγχος και ντροπή. Επιπλέον, οι μαθησιακές εμπειρίες που προκύπτουν από δραστηριότητες που υποστηρίζονται από τον υπολογιστή δημιούργησαν θετικές μαθησιακές εμπειρίες, που έδωσαν επιβράβευση στους μαθητές και ενθάρρυναν τον αυτοέλεγχο και τη μεταγνώση, που είναι τόσο σημαντικά για την ακαδημαϊκή επιτυχία.

2.2.2 Διαδραστικά tabletops – ενίσχυση της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος

Οι Dillenbourg & Evans (2011) περιγράφουν τα διαδραστικά tabletops, μια νέα τεχνολογία που μπορεί να προσφέρει μια εναλλακτική πρόταση για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη. Ένα διαδραστικό tabletop είναι αυτό που υποδηλώνει το όνομά του, δηλαδή η προσομοίωση της επιφάνειας ενός τραπεζιού. Το βασικό χαρακτηριστικό του περιβάλλοντος αυτού είναι μια οριζόντια επιφάνεια που χρησιμοποιείται ως είσοδος σε ένα ψηφιακό περιβάλλον. Είναι συνήθως αρκετά μεγάλη, ώστε να επιτρέπει σε αρκετούς χρήστες να αλληλεπιδρούν ταυτόχρονα.

Οι ενέργειες ενός χρήστη εντοπίζονται από το σύστημα από κάποια ειδικά αντικείμενα με μια σειρά από τεχνικές (ραδιοσήματα, κάμερες που καταγράφουν τα σημεία, σημεία επαφής των δαχτύλων, σχήμα δαχτύλων κλπ). Η πιο συνηθισμένη είσοδος στο σύστημα είναι ένα σύνολο από θέσεις πάνω στο επίπεδο, με το να δείχνει κανείς σε αυτές τις θέσεις. Μπορεί κανείς να δείξει μια θέση με το να αγγίξει μια επιφάνεια, να τοποθετήσει απτά αντικείμενα πάνω της (η θέση τους εντοπίζεται από μια κάμερα που είναι τοποθετημένη πάνω ή κάτω από την επιφάνεια του tabletop), με ηλεκτρονικό στυλό, με χαρτί (τα κομμάτια χαρτιού μπορούν να τοποθετηθούν στην επιφάνεια, να μετακινηθούν και να περιστραφούν, να διπλωθούν κλπ), με χειρονομίες (δεν χρειάζεται επαφή με το tabletop, καθώς οι κάμερες που διαθέτει το σύστημα εντοπίζουν τις χειρονομίες που μπορεί να μεταφραστούν σε ενέργειες όπως ταξινόμηση, επιλογή, μεταφορά και απόθεση (drag-and-drop)), με πληκτρολόγιο και ποντίκι. Η έξοδος του συστήματος εμφανίζεται στη επιφάνεια του tabletop μέσα από οθόνες LCD ή από προτζέκτορες υπολογιστή.

Αυτή η τεχνολογία, σε αντίθεση με τις άλλες, παρέχει κάποιες μοναδικές δυνατότητες, όπως για παράδειγμα ότι υποστηρίζει την ύπαρξη φυσικών αντικειμένων και ότι επιτρέπει την ταυτόχρονη αλληλεπίδραση και συνεργασία πολλών ατόμων με το σύστημα. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται ένα παράδειγμα μιας πολυμεσικής τάξης στην οποία οι μαθητές εργάζονται με τη χρήση tabletops. Οι μαθητές είναι καθισμένοι σε ομάδες γύρω από τα tabletops και ο εκπαιδευτικός συντονίζει τη δουλειά τους μέσα από τον διαδραστικό πίνακα και το γραφείο ενορχήστρωσης (orchestration desk).

Η βασική διαφορά του tabletop από τον υπολογιστή είναι ότι υποστηρίζει ταυτόχρονα πολλούς χρήστες, οι οποίοι αλληλεπιδρούν με το σύστημα από διαφορετικές θέσεις. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες εφαρμογές με διδακτικό περιεχόμενο για το tabletop, αν και πρόκειται για μια νέα τεχνολογία.

Μια εφαρμογή του περιβάλλοντος αυτού είναι το DigiTile Project, το οποίο προορίζεται για κατασκευές που βοηθούν τα παιδιά να εντοπίσουν και να δημιουργήσουν σχέσεις σύνδεσης ανάμεσα στα μαθηματικά και την τέχνη. Έχει πραγματοποιηθεί έρευνα στην οποία συμμετείχαν μαθητές ηλικίας 9 – 11 ετών, που εργάστηκαν σε δυάδες (Rick and Rogers 2008). Τα παιδιά εργάστηκαν πάνω σε τρεις δοκιμασίες. Στην πρώτη έπρεπε να δημιουργήσουν ένα μοτίβο πάνω σε ένα τυπωμένο σχήμα, στο οποίο να εναλλάσσεται το κόκκινο χρώμα με το κίτρινο. Στη δεύτερη, έπρεπε να δημιουργήσουν ένα πλακάκι μεγέθους 4x4 το οποίο να είναι $\frac{3}{8}$ πορτοκαλί και $\frac{3}{8}$ καφέ και να συμπληρώσουν την υπόλοιπη περιοχή με όποιο χρώμα θέλουν. Στην τρίτη, έπρεπε να δημιουργήσουν ένα πλακάκι μεγέθους 5x5 το οποίο να είναι κατά $\frac{1}{10}$ κόκκινο, $\frac{4}{10}$ πράσινο, $\frac{3}{10}$ κίτρινο και $\frac{2}{10}$ μπλε. Το αποτέλεσμα της έρευνας έδειξε ότι αυξήθηκε η κατανόηση των κλασμάτων στους μαθητές που συμμετείχαν στην παρέμβαση.

Αν και οι ερευνητές επισημαίνουν ότι πολλές από τις εφαρμογές που έχουν δημιουργηθεί για αυτό το περιβάλλον θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και σε παραδοσιακούς υπολογιστές, το Tabletop ευνοεί τη συνεργασία και την ταυτόχρονη αλληλεπίδραση πολλών μαθητών με το περιβάλλον με δραστηριότητες που απαιτούν ενεργή εμπλοκή των μαθητών (hands-on activities) και παρέχει τη δυνατότητα για επικοινωνία σε πολλά επίπεδα (λόγος, χειρονομίες, στάση σώματος, ενέργειες, βλέμμα) και έτσι αποτελεί μια πλούσια εμπειρία μάθησης και διδασκαλίας.

2.2.3 GeoGebra – παρέμβαση για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων

Το GeoGebra είναι ένα πρόγραμμα ανοιχτού κώδικα, που παρέχει τη δυνατότητα οπτικοποίησης με δυναμικό τρόπο διάφορων μαθηματικών φαινομένων. Το περιβάλλον αυτό δημιουργήθηκε από τον Markus Hohenwarter το 2001, με στόχο να συνδυάσει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και τον λογισμό (calculus) σε ένα δυναμικό περιβάλλον υπολογιστή (Zengin et al., 2012).

Το GeoGebra έχει αποτελέσει το επίκεντρο αρκετών ερευνών, καθώς παρέχει ένα οπτικό και αποτελεσματικό μαθησιακό περιβάλλον για τους μαθητές. Έτσι, οι χρήστες μπορούν να δημιουργήσουν μαθηματικά αντικείμενα και να αλληλεπιδράσουν με αυτά. Επιπλέον, το GeoGebra υποστηρίζει πολλαπλές αναπαραστάσεις και συμβάλλει στην οπτικοποίηση των εννοιών (Zengin et al., 2012).

Σε μια έρευνα, οι Thambi & Eu (2013) χρησιμοποίησαν το GeoGebra για να ελέγξουν τις επιπτώσεις της χρήσης του στην κατανόηση των μαθητών της 4ης τάξης πάνω στα κλάσματα. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες: την πειραματική και την ομάδα ελέγχου. Η πειραματική ομάδα διδάχθηκε τα κλάσματα για διάστημα μιας εβδομάδας χρησιμοποιώντας το GeoGebra, ενώ η ομάδα ελέγχου ακολουθούσε την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας. Το αντικείμενο της διδασκαλίας ήταν ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση κλασμάτων, ένα κεφάλαιο που οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Η διάρκεια της παρέμβασης ήταν μια εβδομάδα και ένα μεγάλο μέρος του χρόνου χρησιμοποιήθηκε για την επανάληψη γνωστών εννοιών (όπως οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων), αλλά και για την εξοικείωση των μαθητών με το περιβάλλον του GeoGebra. Η διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης έγινε την τελευταία μέρα της παρέμβασης. Δεν ακολουθήθηκε η παραδοσιακή προσέγγιση της επίδειξης των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, αλλά χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα και οι σχετικά σχεδιασμένες από τους ερευνητές δραστηριότητες. Ζητήθηκε από τους μαθητές να καταγράψουν αυτά που έκαναν, ώστε να εξεταστεί στο τέλος το κατά πόσο κατανόησαν τις δραστηριότητες.

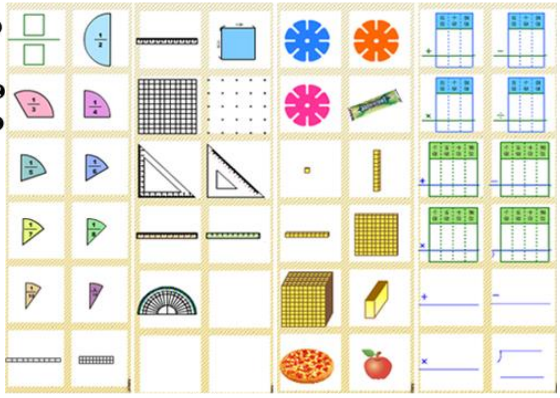
Έπειτα, οι δύο ομάδες μαθητών υποβλήθηκαν σε ένα τεστ για να αξιολογηθεί η κατανόησή τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει θετική επίδραση στην οικοδόμηση της γνώσης των παιδιών γύρω από τα κλάσματα με τη χρήση του GeoGebra. Επίσης, φάνηκε ότι η χρήση του λογισμικού και της διαφορετικής προσέγγισης στη διδασκαλία βοήθησε στην ανοιχτή επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού και στην επικοινωνία των μαθητών μεταξύ τους.

2.2.4 G-Math – ψηφιακό σύστημα για την αλληλοδιδασκαλία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες

Ο Tsuei (2014) έγραψε ένα άρθρο, στο οποίο περιγράφει το σύστημα G-Math. Πρόκειται για ένα ψηφιακό σύστημα πραγματικού χρόνου για την αλληλοδιδασκαλία μαθητών (synchronous peer tutoring system), που χρησιμοποιεί την τεχνολογία και προορίζεται ειδικά για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Με αυτό, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ελέγχει και να οργανώνει τις δραστηριότητες που χρησιμοποιούν οι μαθητές του. Το σύστημα, επίσης, περιλαμβάνει διάφορα μαθηματικά αντικείμενα, επικοινωνιακά εργαλεία και ένα σύστημα επιβράβευσης, με στόχο να βοηθήσει τους μαθητές στη διάρκεια των μαθημάτων.

Μέσα από αυτή την πλατφόρμα, δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να επιβλέπει και να διαχειρίζεται τις δραστηριότητες των μαθητών του. Έτσι, μπορεί να τους χωρίσει σε ομάδες και να αποδώσει τον ρόλο του εκπαιδευτή ή του εκπαιδευόμενου στον κάθε μαθητή. Επιπλέον, υπάρχει μια τράπεζα θεμάτων από την οποία ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να αντλεί διαφορετικές ομάδες προβλημάτων για να τις αναθέσει σε ομάδες μαθητών. Δηλαδή, ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει να αναθέσει σε κάποια ομάδα ένα συγκεκριμένο μαθησιακό αντικείμενο (κλάσματα, πράξεις ακεραίων και γεωμετρία), κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων και να καθορίσει το επίπεδο δυσκολίας. Χρησιμοποιώντας ως είσοδο αυτές τις παραμέτρους, το σύστημα επιλέγει με τυχαίο τρόπο από την τράπεζα θεμάτων τις μαθηματικές ερωτήσεις που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές.

Στην έρευνα του Tsuei (2014) συμμετείχαν 4 μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Η διαδικασία διαρκούσε 40 λεπτά ανά εβδομάδα για διάστημα ενός έτους. Οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων (εκπαιδευτής και εκπαιδευόμενος) και οι ομάδες άλλαζαν κάθε 2 εβδομάδες. Η διαδικασία είχε ως εξής. Στην αρχή, ο εκπαιδευτικός δίδασκε τις μαθηματικές έννοιες για 10 λεπτά και στη συνέχεια οι μαθητές κάθονταν μπροστά στους υπολογιστές για 30 λεπτά. Οι μαθητές της ίδιας ομάδας ήταν καθισμένοι μπροστά στον ίδιο υπολογιστή. Ο μαθητής – εκπαιδευτής χειριζόταν το πρόγραμμα και εμφάνιζε την πρώτη ερώτηση – πρόβλημα. Στη συνέχεια το έλυνε ο ίδιος, με στόχο να λειτουργήσει ως πρότυπο για τον μαθητή – εκπαιδευόμενο. Ο εκπαιδευόμενος μπορούσε να κάνει ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της διαδικασίας και στο τέλος βαθμολογούσε τον εκπαιδευτή με βάση την επίδοσή του. Για να ενισχυθεί η μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών, το σύστημα παρέχει τις σωστές απαντήσεις, ώστε να μπορούν οι μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στις λύσεις τους. Σε περίπτωση που ο εκπαιδευτής έλυνε σωστά το πρόβλημα, κέρδιζε έναν βαθμό εμπειρίας. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτής ανέθετε ένα πρόβλημα στον εκπαιδευόμενο και οι ρόλοι τους άλλαζαν. Ο εκπαιδευόμενος γινόταν τώρα εκπαιδευτής. Αυτή η διαδικασία συνεχιζόταν μέχρι το τέλος του μαθήματος. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας οι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιούν τα ψηφιακά αντικείμενα και τα μοντέλα που τους παρέχει το πρόγραμμα για να διευκολυνθούν στην επίλυση του προβλήματος. Η επικοινωνία των μαθητών μεταξύ τους μπορούσε να γίνει άμεσα ή με τη χρήση των εργαλείων επικοινωνίας που παρέχει το πρόγραμμα.



Στην αριστερή εικόνα φαίνεται η βασική οθόνη του συστήματος. Στη δεξιά πλευρά της εικόνας εμφανίζονται οι πληροφορίες για τους συμμαθητές και οι προσωπικές πληροφορίες του μαθητή. Τέτοιες πληροφορίες είναι το όνομα, η εμπειρία, ο χαρακτήρας – avatar που έχει επιλέξει ο μαθητής, οι βαθμοί και τα βραβεία που έχει συγκεντρώσει. Για να ενισχυθεί το κίνητρο των μαθητών, το επίπεδο εμπειρίας τους αυξάνεται κατά έναν βαθμό κάθε φορά που δίνουν μια σωστή απάντηση. Στο κάτω μέρος της οθόνης υπάρχουν εργαλεία για την υποβοήθηση της επικοινωνίας των μελών της ομάδας. Στη δεξιά εικόνα φαίνονται παραδείγματα από τα μαθησιακά αντικείμενα που περιλαμβάνει το σύστημα και είναι στη διάθεση των μαθητών για να επιλύσουν τα προβλήματα που τους τίθενται.

Τα αποτελέσματα της παρέμβασης έδειξαν ότι υπήρχαν θετικές επιπτώσεις στους μαθητές, καθώς βελτίωσαν την επίδοσή τους στα εννοιολογικά προβλήματα και μάλιστα σε τέτοιον βαθμό, ώστε πλησίασαν την επίδοση των μαθητών χωρίς μαθησιακές δυσκολίες. Ωστόσο, η επίδοση στους υπολογισμούς και στα μαθηματικά προβλήματα δεν ήταν η αναμενόμενη, όταν τους παρουσιάζονταν πιο πολύπλοκα προβλήματα. Όλοι οι μαθητές έδειξαν βελτίωση στα προβλήματα εφαρμογής. Οι μαθητές ωφελήθηκαν από τις διαδικασίες που ακολουθήθηκαν στην παρέμβαση και από την οπτικοποίηση μέσα από τον υπολογιστή, καθώς διευκολύνθηκε η ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης. Σταδιακά χρησιμοποιούσαν όλο και περισσότερα ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα και παρατηρήθηκε ότι προτιμούσαν να επικοινωνούν μέσω της πλατφόρμας, παρά το γεγονός ότι κάθονταν σε διπλανές θέσεις. Επειδή όμως οι μαθητές έδιναν ανεπαρκείς εξηγήσεις για τις λύσεις των προβλημάτων, επισημαίνεται η ανάγκη για περισσότερα υποστηρικτικά εργαλεία από το σύστημα.

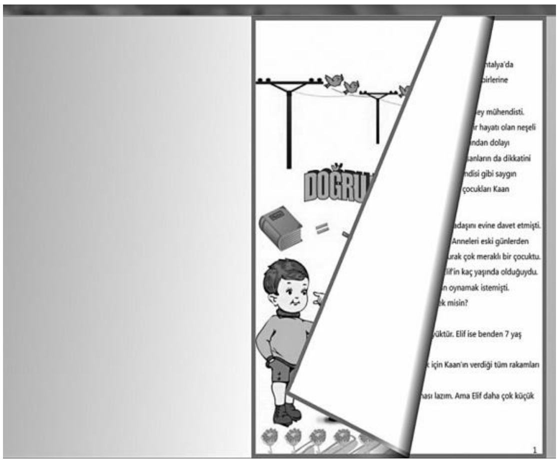
2.2.5 Ψηφιακή ιστορία – παραμύθι

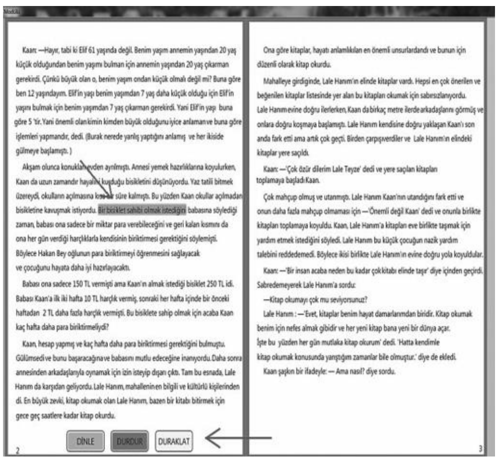
Ο Gundas (2014) παρουσιάζει μια έρευνα, η οποία έχει ως στόχο να καταγράψει την επίδραση που έχει η ύπαρξη μιας ιστορίας, η οποία λειτουργεί ως πλαίσιο, στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και παράλληλα κατά πόσο υπάρχει διαφορά στην επίδοση των μαθητών, όταν η ιστορία δίνεται σε ψηφιακή ή εκτυπωμένη μορφή. Στην έρευνα συμμετείχαν 128 μαθητές της έκτης τάξης. Η πειραματική ομάδα έλυσε μια σειρά προβλημάτων χρησιμοποιώντας την ψηφιακή έκδοση της ιστορίας. Η πρώτη ομάδα ελέγχου χρησιμοποίησε την εκτυπωμένη έκδοση της ίδιας ιστορίας, ενώ η δεύτερη ομάδα ελέγχου έλυσε τα ίδια μαθηματικά προβλήματα μεμονωμένα, χωρίς την ύπαρξη κάποιου πλαισίου.

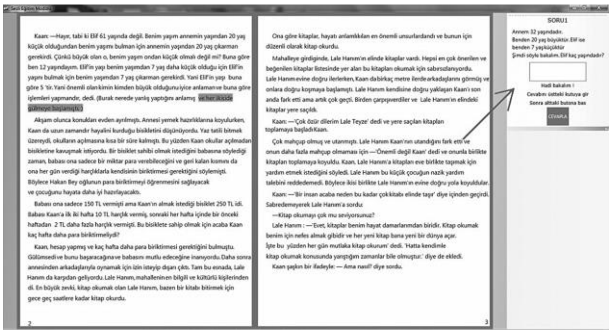
Η ψηφιακή μαθηματική ιστορία που χρησιμοποιήθηκε από τον ερευνητή είχε ως στόχο να ενταχθούν τα μαθηματικά προβλήματα μέσα σε ρεαλιστικό πλαίσιο. Σε αυτό, ο μαθητής πρέπει να επιλύσει τα μαθηματικού περιεχομένου προβλήματα που αντιμετωπίζει ο ήρωας της ιστορίας, ώστε να τον βοηθήσει να φτάσει στον τελικό του στόχο. Έτσι, οι μαθητές βλέπουν τις πληροφορίες της ιστορίας ως εργαλείο για την επίτευξη ενός στόχου και όχι ως τυχαία γεγονότα ή διαδικασίες.

Σχεδιαστικά, χρησιμοποιήθηκε μια παρουσίαση που βασίζεται στο βίντεο και την αφήγηση. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της αφήγησης, εμφανίζονται πάνω στο κείμενο κάποιες επισημάνσεις, οι οποίες έχουν ως στόχο να βοηθήσουν τον μαθητή στην επίλυση των προβλημάτων. Ακόμη, υπάρχουν κουμπιά που επιτρέπουν στον χρήστη να σταματήσει, να ξεκινήσει ή να κάνει μια παύση στην αφήγηση, ώστε να μπορεί να ακούσει και να παρακολουθήσει την ιστορία χωρίς τη βοήθεια ενηλίκου. Επιπλέον, παρέχεται ανατροφοδότηση στον μαθητή μετά την επίλυση ενός προβλήματος. Αυτή εμφανίζεται αφού ο μαθητής υποβάλλει την απάντησή του, για να τον βοηθήσει να κατανοήσει τυχόν λάθη που έχει κάνει. Συμπληρωματικά, εμφανίζονται οθόνες μηνυμάτων για να τον καθοδηγήσουν στα βήματα που πρέπει να κάνει για να επιλύσει σωστά το πρόβλημα.

Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται το ψηφιακό περιβάλλον της ιστορίας. Στην πρώτη εικόνα φαίνεται ο τρόπος πλοήγησης μέσα στο ψηφιακό βιβλίο, ο οποίος προσομοιώνει ένα κανονικό βιβλίο με το γύρισμα των σελίδων. Η διπλανή εικόνα δείχνει τις επισημάνσεις που γίνονται αυτόματα μέσα στο κείμενο, καθώς και τα κουμπιά πλοήγησης (παύση, έναρξη, σταμάτημα) στο κάτω μέρος της οθόνης. Τέλος, στην τρίτη εικόνα φαίνεται στη δεξιά πλευρά της οθόνης η περιοχή στην οποία γίνεται η επίλυση των προβλημάτων.







Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η ψηφιακή ιστορία βοήθησε περισσότερο στην κατανόηση των μαθητών από την αντίστοιχη εκτυπωμένη. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την ψηφιακή ιστορία είχαν καλύτερες επιδόσεις στην επίλυση των προβλημάτων. Τα επιπλέον χαρακτηριστικά που είχε η ψηφιακή ιστορία (η αφήγηση, η επισήμανση, η ανατροφοδότηση και οι οθόνες μηνυμάτων) την έκαναν διαφορετική από την εκτυπωμένη. Οι οθόνες μηνυμάτων που καθοδηγούσαν τους μαθητές να επιλύσουν ξανά το πρόβλημα συντέλεσαν στην αυτοαξιολόγηση και την αυτοδιόρθωση των μαθητών. Αντίθετα, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την εκτυπωμένη μορφή της ιστορίας φάνηκε ότι δεν είχαν τόσο καλά αποτελέσματα όσο η πειραματική ομάδα.

Έτσι, ο ερευνητής διαπιστώνει ότι η ύπαρξη της ιστορίας από μόνη της, ως πλαίσιο για την επίλυση των προβλημάτων, δεν επηρέασε σημαντικά την επίδοση των μαθητών, αν και στη βιβλιογραφία συχνά εμφανίζονται και διαφορετικά αποτελέσματα. Τελικά, η έρευνα έδειξε ότι η ψηφιακή ιστορία βοήθησε στην καλύτερη επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Επιπλέον, η ιστορία (ψηφιακή ή εκτυπωμένη) φάνηκε να είναι πολύ πιο αποτελεσματική από τα μεμονωμένα προβλήματα.

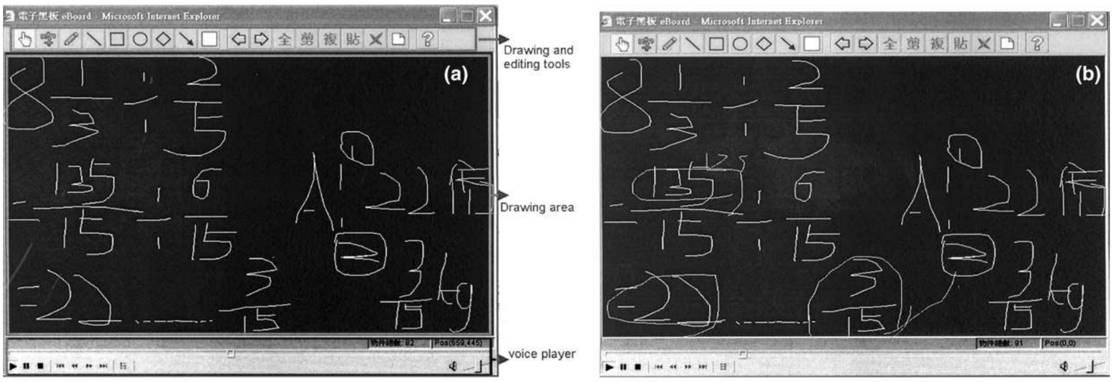
2.2.6 Διαδικτυακός πολυμεσικός πίνακας – παρέμβαση για τη διαίρεση κλασμάτων

Σε αυτή την έρευνα, οι Hwang et al. (2006) δημιούργησαν έναν διαδικτυακό πολυμεσικό πίνακα (whiteboard) με στόχο να ενισχύσουν την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα σε συνεργατικά διαδικτυακά περιβάλλοντα. Το εργαλείο που δημιούργησαν οι ερευνητές μοιάζει πολύ με έναν παραδοσιακό πίνακα, όπως αυτοί που συναντά κανείς σε μια σχολική τάξη. Ωστόσο, είναι πιο ευέλικτος και εύκολα προσβάσιμος, τόσο για τον εκπαιδευτικό όσο και για τους μαθητές στο σύνολό τους Ο κάθε μαθητής μπορεί να πάρει μέρος στη διαδικασία της επίλυσης ενός προβλήματος, απλά με το να χρησιμοποιήσει το ψηφιακό στυλό της εφαρμογής και να γράψει πάνω στον πίνακα. Επιπλέον, υπάρχει η δυνατότητα καταγραφής του τρόπου σκέψης του μαθητή με το σύστημα καταγραφής φωνής της εφαρμογής. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, γιατί δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης που βρίσκεται πίσω από τη λύση που προτείνει κάποιος μαθητής.

Ο στόχος του εργαλείου είναι να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να γράψουν τις λύσεις τους και να τις διορθώσουν, ώστε τελικά να προκύψει η καλύτερη δυνατή εκδοχή της λύσης μέσα από τη συνεργασία. Με πολυμεσικά εργαλεία σαν κι αυτό, οι μαθητές μπορούν να επικοινωνούν με ευκολία μεταξύ τους και να εκφράζουν τις απόψεις τους, δημιουργώντας ένα περιβάλλον συνεργατικής μάθησης. Έτσι, ενισχύεται το ενδιαφέρον τους και βελτιώνονται οι ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων. Επιπλέον, μέσα από το περιβάλλον του ψηφιακού πίνακα οδηγούνται στη διατύπωση κρίσεων για τις λύσεις που προτείνουν οι συμμαθητές τους, κάτι που οδηγεί σε καλλιέργεια της κριτικής τους σκέψης και της ικανότητας να τεκμηριώνουν τις απόψεις τους.

Για να ελέγξουν την αποτελεσματικότητα του εργαλείου, οι ερευνητές έκαναν μια παρέμβαση με αντικείμενο τη διαίρεση κλασμάτων, στην οποία συμμετείχαν 38 μαθητές της έκτης δημοτικού. Η διάρκειά της ήταν ένα εξάμηνο στο οποίο οι μαθητές παρακολουθούσαν ένα μάθημα διάρκειας 1,5 ώρας μία φορά την εβδομάδα. Κάθε εβδομάδα, οι ερευνητές έδιναν ένα μαθηματικό πρόβλημα και ζητούσαν από τους μαθητές να το λύσουν με τη χρήση του ψηφιακού πίνακα.

Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται ο ψηφιακός πίνακας. Το παράθυρο της εφαρμογής αποτελείται από τρία τμήματα (όπως δείχνουν και τα βέλη της πρώτης εικόνας). Το επάνω κομμάτι περιλαμβάνει τα εργαλεία που μπορούν να επιλέξουν οι μαθητές για τη σχεδίαση και τη διόρθωση. Το κεντρικό κομμάτι του παραθύρου, το οποίο καταλαμβάνει και τον περισσότερο χώρο, είναι ουσιαστικά ο πίνακας στον οποίο οι μαθητές γράφουν τις λύσεις τους. Τέλος, στο κάτω κομμάτι της οθόνης υπάρχουν τα εργαλεία για την προφορική καταγραφή των εξηγήσεων των μαθητών. Στο παράδειγμα που φαίνεται στις εικόνες, έχει δοθεί στους μαθητές ένα πρόβλημα διαίρεσης μικτού αριθμού με κλάσμα. Στην πρώτη εικόνα φαίνεται η προσπάθεια ενός μαθητή να λύσει το πρόβλημα και στην επόμενη οι συμμαθητές του προσπαθούν να συμπληρώσουν και να διορθώσουν αυτή τη λύση.



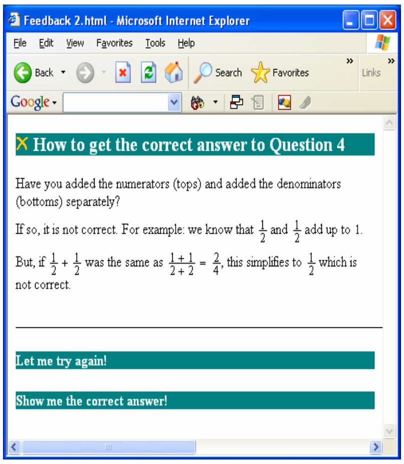
Μετά την ολοκλήρωσή της παρέμβασης, οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο για το πώς τους φάνηκε η χρήση του εργαλείου. Οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον και δήλωσαν ότι τους άρεσε να συζητούν στα πλαίσια του περιβάλλοντος αυτού, καθώς τους επιτρέπει να εκφράζουν τη σκέψη τους μέσα από κείμενο, εικόνα και φωνή.

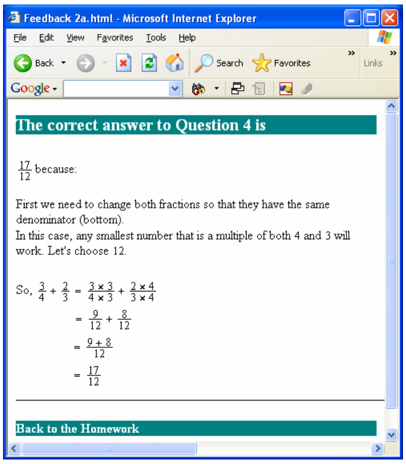
Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα κορίτσια έδιναν καλύτερες προφορικές εξηγήσεις. Επιπλέον, οι καλοί μαθητές έκαναν πιο σωστή κριτική και έδιναν καλύτερες εξηγήσεις σε σχέση με τους πιο αδύναμους. Σε σχέση με την ποιότητα των λύσεων που δόθηκαν, βρέθηκε ότι κάποιοι μαθητές δεν μπορούσαν να εξηγήσουν καλά και ξεκάθαρα τη σκέψη τους. Αν και κάποιοι μαθητές ήταν σε θέση να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα, δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τα πραγματικά μαθηματικά νοήματα. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, αν και οι μαθητές μαθαίνουν μερικές φορές τον αλγόριθμο επίλυσης κάποιων προβλημάτων, δεν σημαίνει ότι τον κατανοούν στην ουσία. Έτσι, η προφορική εξήγηση της σκέψης των μαθητών μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει τι κατανοούν στην πραγματικότητα οι μαθητές του.

2.2.7 WebMA – ένα διαδικτυακό εργαλείο για την εξάσκηση των μαθητών στα κλάσματα

Οι Nguyen & Kulm (2005) περιγράφουν το WebMA, ένα διαδικτυακό εργαλείο για την εξάσκηση των μαθητών στα κλάσματα. Το εργαλείο χρησιμοποιεί ερωτήσεις σύντομης απάντησης, αντιστοίχισης και πολλαπλής επιλογής. Κάθε μαθησιακή ενότητα περιλαμβάνει μια αναλυτική περιγραφή των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, που μπορούν να θεωρηθούν διδακτικό υλικό. Επίσης, περιέχει λυμένες ασκήσεις και 15 δραστηριότητες προς επίλυση από τον μαθητή. Ένα πλεονέκτημά του εργαλείου είναι η δυνατότητα παραγωγής τυχαίων θεμάτων κάθε φορά που ο μαθητής επαναλαμβάνει μια ερώτηση ή μια ολόκληρη ενότητα.

Σημαντικό στοιχείο του προγράμματος είναι και η αυτόματα προσαρμοζόμενη ανατροφοδότηση. Η ανατροφοδότηση προσαρμόζεται κάθε φορά στη φύση του λάθους που κάνει ο μαθητής, με στόχο να του παρέχει στοχευμένη βοήθεια ή και παραδείγματα. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγχουν άμεσα την επίδοσή τους και να επιλέγουν να δουν τις σωστές απαντήσεις ή την ανατροφοδότηση για κάθε ερώτηση ξεχωριστά ή και συνολικά στο τέλος της δουλειάς τους. Επιπλέον, το WebMA παρέχει μια μέθοδο για αυτόματη βαθμολόγηση των τεστ και καταγράφει τον χρόνο που χρειάζεται ο μαθητής να ολοκληρώσει μια δραστηριότητα, όπως και τον αριθμό των φορών που ο μαθητής εξασκείται σε μια ενότητα. Στις παρακάτω εικόνες φαίνονται παραδείγματα της ανατροφοδότησης που δίνει το πρόγραμμα.





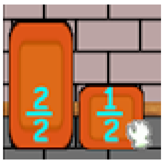
Η εφαρμογή δοκιμάστηκε από 95 μαθητές της έβδομης και όγδοης τάξης. Οι μαθητές έλυναν ασκήσεις για 30 λεπτά, 3 φορές την εβδομάδα, για διάστημα τριών εβδομάδων. Οι μισοί μαθητές συμμετείχαν στην πειραματική ομάδα και οι υπόλοιποι στην ομάδα ελέγχου. Η πειραματική ομάδα έκανε τις ασκήσεις εξάσκησης στο εργαστήριο, ενώ οι μαθητές της ομάδας ελέγχου έμεναν στην τάξη και έκαναν τις ίδιες δραστηριότητες, αλλά σε γραπτή μορφή. Η ανατροφοδότηση που έπαιρναν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου ήταν αντίστοιχη με εκείνη της πειραματικής ομάδας.

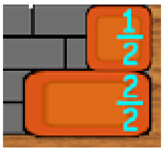
Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το διαδικτυακό εργαλείο τα πήγαν σημαντικά καλύτερα από την ομάδα ελέγχου. Οι ερευνητές αποδίδουν αυτή τη διαφορά στις επιδόσεις στην παροχή άμεσης ανατροφοδότησης, στην δυναμική παραγωγή παραλλαγμένων εκδοχών των δραστηριοτήτων και στο ενδιαφέρον των μαθητών για ενασχόληση με τον υπολογιστή. Επιπλέον, η παραγωγή ερωτήσεων με τυχαίο τρόπο έδωσε κίνητρο στους μαθητές με χαμηλή επίδοση να εξασκηθούν περισσότερο για να βελτιώσουν το σκορ τους. Η ανατροφοδότηση υποστήριξε επίσης και τους μαθητές που ήθελαν να έχουν μια άριστη επίδοση, καθώς τους έδωσε τη δυνατότητα να κατανοήσουν και να διορθώσουν τα λάθη τους. Η αξιολόγηση του εργαλείου από τους ίδιους τους μαθητές έδειξε ότι είναι διατεθειμένοι να περάσουν περισσότερο χρόνο στον υπολογιστή για να αποκτήσουν καλύτερη μαθηματική γνώση και κατανόηση. Οι μαθητές εξέφρασαν τον ενθουσιασμό και το ενδιαφέρον τους για τέτοιου είδους δραστηριότητες.

2.2.8 Παιχνίδι για την ταξινόμηση κλασμάτων

Στη συγκεκριμένη έρευνα, ο Lee (2009) παρουσιάζει ένα παιχνίδι για την ταξινόμηση κλασμάτων. Η ιστορία του παιχνιδιού εξελίσσεται σε έναν πύργο, όπου ένα αγόρι που έχει χαθεί, θέλει να ανεβεί ψηλά για να βρει τον δρόμο για το σπίτι του. Για να το πετύχει αυτό, πρέπει να φτιάξει σκάλες από τούβλα ορθογώνιου σχήματος. Το κάθε τούβλο έχει πάνω του τη συμβολική μορφή ενός κλάσματος και μέγεθος αντίστοιχο με το μέγεθος του συγκεκριμένου κλάσματος. Οι μαθησιακοί στόχοι του παιχνιδιού είναι να μάθουν οι μαθητές να ταξινομούν τα κλάσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και το αντίστροφο.

Μέσα στο παιχνίδι συναντά κανείς 3 είδη τούβλων, καθένα από τα οποία έχει έναν διαφορετικό παιδαγωγικό στόχο. Έτσι, υπάρχουν τα *ορατά τούβλα* (visible bricks), τα οποία αναπαριστούν τα μεγέθη των κλασμάτων με τέτοιον τρόπο, ώστε το μέγεθος του τούβλου να είναι ανάλογο με το μέγεθος του κλάσματος. Τέτοια παραδείγματα φαίνονται στις δύο πρώτες εικόνες παρακάτω. Τα *σπασμένα τούβλα* (broken bricks) είναι χωρισμένα σε κομμάτια και οι μαθητές μπορούν να τα επεξεργαστούν και να ενώσουν τα κομμάτια, ώστε να δουν ποιες αλλαγές προκαλούνται στο τούβλο (ένα παράδειγμα φαίνεται στην τρίτη εικόνα παρακάτω). Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να συγκρίνουν ετερώνυμα κλάσματα. Τέλος, υπάρχουν και τα *κρυμμένα τούβλα* (hidden bricks), που έχουν πάνω τους μόνο το σύμβολο του κλάσματος, χωρίς ουσιαστικές διαφορές στα μεγέθη τους. Εδώ, οι μαθητές θα πρέπει να «μεταφράσουν» τη συμβολική μορφή του κλάσματος και να κρίνουν ποιο θα είναι το μέγεθός του. Εμφανίζοντας σταδιακά τα διαφορετικά είδη τούβλων, το παιχνίδι αυξάνει τη δυσκολία του και οι μαθητές περνούν από τη γραφική αναπαράσταση του κλάσματος στη συμβολική μορφή του.





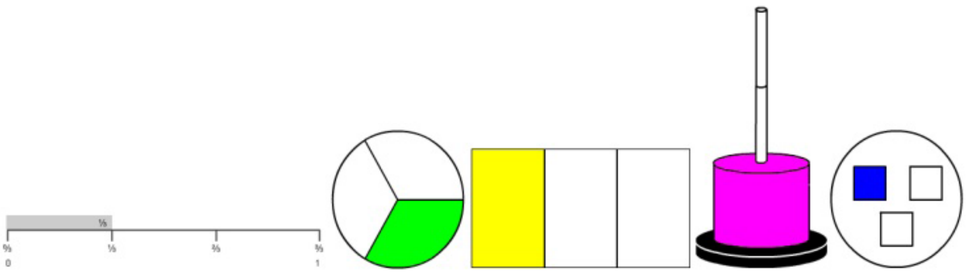
Όταν τα τούβλα με τα κλάσματα ταξινομηθούν με λάθος σειρά, τότε δίνεται ανατροφοδότηση στον χρήστη και συμβουλές για το πώς πρέπει να ενεργήσει, ώστε να συνεχίσει το παιχνίδι. Οι συμβουλές που δίνονται περιλαμβάνουν διάφορες στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ταξινομηθούν τα κλάσματα, όπως το να μετατραπούν σε ομώνυμα, ή να χρησιμοποιηθούν κάποια κλάσματα ως σημεία αναφοράς.

Το πρόγραμμα δοκιμάστηκε σε 20 μαθητές της $8^{ης}$ τάξης (11-13 ετών). Οι μαθητές είχαν προηγούμενες γνώσεις πάνω στα κλάσματα, καθώς είχαν διδαχθεί σχετικές ενότητες στο σχολείο. Κάθε μαθητής αφιέρωσε μια διδακτική ώρα για να παίξει το ψηφιακό παιχνίδι και να συμπληρώσει κάποια τεστ, τα οποία δόθηκαν πριν και μετά από το παιχνίδι. Οι ερωτήσεις ήταν πολλαπλής επιλογής και ερωτήσεις κατάταξης κλασμάτων, στις οποίες ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Επίσης, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, το σύστημα κατέγραφε τον τρόπο που έπαιζε ο μαθητής και πιο συγκεκριμένα πόσες φορές προσπάθησε να κατατάξει τα κλάσματα, τον αριθμό των επιπλέον ερωτήσεων που επέλεξε και πόσο συχνά ζητούσε βοήθεια από το πρόγραμμα.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές τα πήγαν καλύτερα στις ερωτήσεις που αφορούσαν τις αναπαραστάσεις των κλασμάτων σε σχέση με εκείνες που αφορούσαν την κατάταξη. Μετά τη χρήση του παιχνιδιού, όλοι οι μαθητές ήταν σε θέση να απαντήσουν σε ερωτήσεις που τους ζητούσαν να αναγνωρίσουν ποιο μέρος ενός ορθογωνίου ήταν γραμμοσκιασμένο. Ωστόσο, οι μαθητές φάνηκε να μπερδεύονται όταν έπρεπε να διαχειριστούν αναπαραστάσεις τις οποίες δεν συνάντησαν στο παιχνίδι. Όσον αφορά στη σύγκριση κλασμάτων, κάποιοι μαθητές φάνηκε ότι βελτίωσαν την επίδοσή τους, ενώ άλλοι δεν εμφάνισαν διαφορά ή τα πήγαν χειρότερα. Ο ερευνητής καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές παίζοντας το παιχνίδι βασίστηκαν πολύ στην εικόνα του τούβλου και όχι τόσο στη σύνδεση αυτής της εικόνας με το μέγεθος του κλάσματος που το τούβλο αναπαριστούσε. Το μαθησιακό αποτέλεσμα δείχνει ότι το παιχνίδι μπορεί να αποτελέσει μια από τις δραστηριότητες που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στην τάξη. Το παιχνίδι πρέπει να επεκταθεί περαιτέρω για να παρέχει τη δυνατότητα να καλυφθούν και άλλες αναπαραστάσεις κλασμάτων, περισσότερα κλάσματα που να είναι κοντά στο ½ και το 1 και στρατηγικές για την κατάταξη των κλασμάτων.

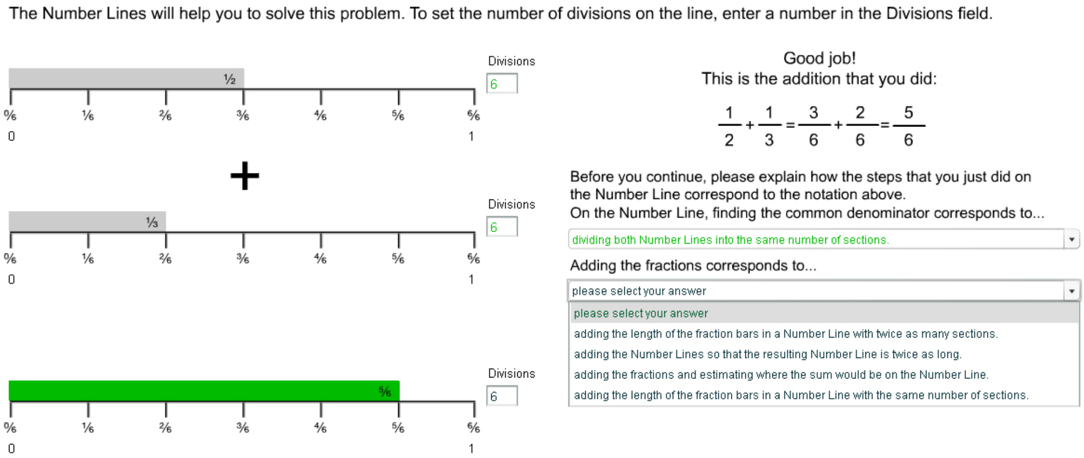
2.2.9 Cognitive Tutors – ευφυές σύστημα μάθησης για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των κλασμάτων

Οι Rau et al. (2009) εξέτασαν την αξία των πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη μάθηση των κλασμάτων στο πλαίσιο της χρήσης ενός συστήματος ευφυούς μάθησης (Cognitive Tutors). Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο του συστήματος αυτού, αναπτύχθηκε ένα σύνολο από δραστηριότητες μετατροπής και πρόσθεσης κλασμάτων πάνω στις οποίες εξασκήθηκαν οι μαθητές. Κάποιοι από τους μαθητές εργάστηκαν με 5 διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων, ενώ άλλοι μόνο με μία (την αριθμογραμμή). Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται οι 5 διαφορετικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στις δραστηριότητες: αριθμογραμμή, πίτα, ορθογώνιο, στοίβα, σύνολο διακριτών αντικειμένων.



Η υπόθεση της συγκεκριμένης έρευνας ήταν ότι, αν παρέχουμε στους μαθητές πολλαπλές γραφικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων σε συνδυασμό με τη συμβολική μορφή του κλάσματος, τα μαθησιακά αποτελέσματα θα είναι καλύτερα σε σχέση με το να δουλέψουν μόνο με μία αναπαράσταση. Αναμενόταν επίσης ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις θα κάνουν το έργο των μαθητών πιο απαιτητικό, καθώς θα πρέπει να τις συνδέσουν μεταξύ τους. Τέλος, υποτέθηκε ότι, αν οι μαθητές προτρέπονται να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους, αυτό θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν σε βάθος τις πολλαπλές αναπαραστάσεις. Για να εξακριβωθούν αυτές οι υποθέσεις, 112 μαθητές της $6^{ης}$ τάξης χρησιμοποίησαν το σύστημα για 2,5 ώρες στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών. Όλοι εργάστηκαν στους υπολογιστές σε δραστηριότητες που είχαν σχεδιαστεί ειδικά για την έρευνα.

Ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος για ένα πρόβλημα με αριθμογραμμή φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Εδώ ο μαθητής μπορεί να καθορίσει σε πόσα κομμάτια θα χωριστεί η αριθμογραμμή και σε ποιο σημείο της αριθμογραμμής βρίσκεται το ζητούμενο κλάσμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ήταν όλες οι αναπαραστάσεις το ίδιο διαδραστικές όσο η αριθμογραμμή, αλλά τα προβλήματα ήταν όλα διαδραστικά.



Σε κάποιους από τους μαθητές ζητούνταν να εξηγήσουν πώς φαίνεται στην αναπαράσταση ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος. Τους δινόταν μια σειρά επιλογών σε ένα μενού (που φαίνεται στην κάτω δεξιά γωνία της παραπάνω εικόνας) και οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή. Σε περίπτωση λάθους, δινόταν ανατροφοδότηση στους μαθητές, με στόχο να επανεξετάσουν την απάντησή τους. Σε πρώτο στάδιο, τους δινόταν μια επιπλέον επεξήγηση του τι τους ζητά το πρόβλημα. Έπειτα, τους δινόταν βοήθεια που σχετιζόταν με τις έννοιες του προβλήματος και τελικά τους δινόταν η σωστή απάντηση.

Τα αποτελέσματα της έρευνας υποστηρίζουν την υπόθεση ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα τις έννοιες των κλασμάτων, όταν έρχονται σε επαφή με πολλαπλές αναπαραστάσεις σε σχέση με την περίπτωση που χρησιμοποιούν μόνο μια αναπαράσταση. Ωστόσο, η έρευνα έδειξε ότι αυτό ισχύει μόνο όταν ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα φάνηκε ότι, όταν οι μαθητές δεν εξηγούν τη σκέψη τους, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορεί να οδηγήσουν σε σύγχυση αντί να βοηθούν στην κατανόηση. Ένα πλεονέκτημα των πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να είναι το γεγονός ότι οι μαθητές φάνηκε ότι μαθαίνουν να είναι ευέλικτοι στο να εφαρμόζουν μια διαδικασία σε διαφορετικές καταστάσεις.

2.3 Συμπεράσματα – Παρατηρήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο κάναμε μια σύντομη επισκόπηση κάποιων εφαρμογών τα οποία χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Όπως φάνηκε, τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων είναι ενθαρρυντικά και ενισχύουν το ενδιαφέρον για την αποτελεσματικότερη ένταξη της τεχνολογίας στο σχολείο.

Σε σχέση με τα μαθησιακά αποτελέσματα, ανάμεσα στα θετικά στοιχεία που καταγράφονται είναι ότι δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις αφηρημένες έννοιες που μαθαίνουν και έτσι να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση (Thambi & Eu, 2013, Garcia & Pacheco, 2013). Επίσης, τα προβλήματα που τους παρουσιάζονται σε πολλές περιπτώσεις διαφοροποιούνται και προσαρμόζονται στις δυνατότητες και τις προτιμήσεις του κάθε μαθητή, επιτυγχάνοντας έτσι την εξατομίκευση της διδασκαλίας (Liang & Zhou, 2009), ενώ ταυτόχρονα ο κάθε μαθητής μπορεί να ακολουθεί τον δικό του μαθησιακό ρυθμό (Liang & Zhou, 2009). Ακόμη, η άμεση ανατροφοδότηση βοηθά τους μαθητές να αναστοχαστούν και να διορθώσουν μόνοι τους στα λάθη τους (Garcia & Pacheco, 2013).

Τα τεχνολογικά εργαλεία βοηθούν τους μαθητές να λάβουν πιο ενεργό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία και να γίνουν πιο αυτόνομοι (Liang & Zhou, 2009). Επιπλέον, οι υπολογιστές μπορούν να αποτελέσουν ένα μέσο για τη σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα. (Liang & Zhou, 2009). Πολλές από τις παρεμβάσεις δείχνουν μια βελτίωση στα κίνητρα των μαθητών, τη συνεργασία και τη συζήτηση με τον εκπαιδευτικό και τους συμμαθητές πάνω στα μαθηματικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν (Garcia & Pacheco, 2013). Ακόμη, ενισχύεται η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης και της ικανότητας των μαθητών να υποστηρίζουν και να τεκμηριώνουν τις απόψεις τους (Hwang et al., 2006). Μέσα από τη χρήση της τεχνολογίας, ο μαθητής μπορεί να γίνει το επίκεντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας, κάτι που είναι παιδαγωγικά ζητούμενο (Garcia & Pacheco, 2013). Τέλος, δεν πρέπει να παραβλέπεται και το γεγονός ότι σε παρεμβάσεις που χρησιμοποιούν την τεχνολογία ως εργαλείο, οι μαθητές ανταποκρίνονται με ενθουσιασμό και ενδιαφέρον και δηλώνουν ότι θεωρούν πως έτσι το μάθημα γίνεται πιο ευχάριστο και διασκεδαστικό (Liang & Zhou, 2009).

Βέβαια, δεν πρέπει να παραβλέπουμε το γεγονός ότι, παρά τα θετικά στοιχεία που καταγράφονται από τις έρευνες, δεν είναι τόσο εύκολο να ενταχθούν οι νέες τεχνολογίες στην καθημερινότητα του σχολείου. Οι Keengwe et al. (2008) επισημαίνουν ότι πρέπει πρώτα να εξασφαλιστεί η ύπαρξη κατάλληλων υποδομών στα σχολεία, αλλά και η επαρκής εκπαίδευση και υποστήριξη των εκπαιδευτικών. Επίσης, η ένταξη των νέων τεχνολογιών στην τάξη προϋποθέτει ότι θα αναβαθμιστεί ο ρόλος του εκπαιδευτικού και θα συμπεριληφθεί στη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τις διδακτικές πρακτικές που θα εφαρμόζει στην τάξη του, καθώς αυτός είναι που γνωρίζει καλύτερα τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών του (Thambi & Eu, 2013).

Ακόμη, η τεχνολογία δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως πανάκεια για την επίλυση όλων των προβλημάτων που μπορούν να ανακύψουν κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Όπως επισημαίνουν οι Keengwe et al. (2008), η τεχνολογία από μόνη της δεν μπορεί να βελτιώσει ή να αλλάξει την ποιότητα της διδασκαλίας. Δεν είναι όλες οι τεχνολογικές εφαρμογές χρήσιμες και κατάλληλες για ένταξη στην τάξη και γι' αυτό πρέπει να γίνεται προσεκτική αξιολόγησή τους και σχεδιασμός του τρόπου χρήσης τους στο μάθημα. Επιπλέον, είναι αναγκαίο να διερευνηθούν σε βάθος και να κατανοηθούν τα κίνητρα, οι αντιλήψεις και οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τη μάθηση και την τεχνολογία (Woodbridge, 2004).

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε διάφορα τεχνολογικά εργαλεία, τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί σε παρεμβάσεις για τα κλάσματα. Ο στόχος μας ήταν να δώσουμε μια γενική εικόνα της ποικιλίας και της διαφορετικότητας των εργαλείων που υπάρχουν. Τα θετικά συμπεράσματα των παρεμβάσεων είναι ενθαρρυντικά, αλλά δεν πρέπει να παραβλέπονται και οι παράγοντες που θα καταστήσουν αυτές τις παρεμβάσεις εφαρμόσιμες στην καθημερινή πρακτική του σχολείου.

3ο Κεφάλαιο: Παιχνίδια και Μαθηματικά

3.1 Εισαγωγή

Το ζήτημα της ενσωμάτωσης των παιχνιδιών στην εκπαιδευτική διαδικασία και ειδικά στην τάξη των μαθηματικών είναι ένα θέμα που συγκεντρώνει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Υπάρχουν οι υποστηρικτές των παιχνιδιών που τονίζουν τα θετικά σημεία της χρήσης τους για την ενίσχυση της μάθησης των παιδιών, αλλά υπάρχουν και οι σκεπτικιστές οι οποίοι είναι πιο επιφυλακτικοί και εκφράζουν τον προβληματισμό τους για το κατά πόσο είναι όντως πιο αποτελεσματικά τα παιχνίδια σε σχέση με άλλου τύπου δραστηριότητες.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια συνοπτική επισκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από την έρευνα που έχει γίνει για τη χρήση των παιχνιδιών στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια του παιχνιδιού και προχωρώντας σε μια γενική κατηγοριοποίηση των ειδών των παιχνιδιών, η οποία θα μας βοηθήσει στην ανάλυσή μας. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τις θετικές ενδείξεις από την χρήση των παιχνιδιών στα μαθηματικά, όπως παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία, αλλά και τις επιφυλάξεις που διατυπώνονται από κάποιους ερευνητές.

3.2 Ορισμός και κατηγορίες μαθηματικών παιχνιδιών

Είναι σημαντικό να ξεκινήσουμε προσπαθώντας να καταγράψουμε έναν ορισμό για το τι είναι μαθηματικό παιχνίδι. Κι αυτό γιατί, συχνά, πολλές δραστηριότητες που γίνονται στο πλαίσιο των μαθηματικών χαρακτηρίζονται ως παιχνίδια, αν και μπορεί τελικά να μην είναι. Παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός για τα μαθηματικά παιχνίδια, οι διάφοροι ορισμοί που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία διαφοροποιούνται σε επιμέρους λεπτομέρειες και όχι σε ουσιαστικά σημεία. Έτσι, εμείς επιλέξαμε να παρουσιάσουμε τον ορισμό που δίνει ο Oldfield (1991) υποστηρίζοντας ότι ένα μαθηματικό παιχνίδι είναι μια δραστηριότητα που:

1. Ο παίκτης προκαλείται να ολοκληρώσει με επιτυχία ή στην οποία για να κερδίσει πρέπει να επικρατήσει απέναντι σε έναν ή περισσότερους αντιπάλους.

Εναλλακτικά, μπορεί να είναι μια πρόκληση η οποία πρέπει να αντιμετωπιστεί από μια ομάδα που συνεργάζεται.

2. Διέπεται από ένα σύνολο κανόνων και έχει μια ξεκάθαρη δομή.
3. Κανονικά έχει ένα διακριτό σημείο τερματισμού.
4. Έχει σαφείς μαθηματικούς γνωστικούς στόχους.

Όσον αφορά στην ένταξη των μαθηματικών παιχνιδιών σε κατηγορίες, οι ερευνητές έχουν προχωρήσει σε διάφορες ταξινομήσεις. Έτσι, συχνά, ο διαχωρισμός των παιχνιδιών γίνεται με βάση τους μαθησιακούς στόχους των παιχνιδιών αυτών. Για παράδειγμα, ο Lim-Teo (1991) διαχωρίζει τα παιχνίδια σε αυτά που χρησιμοποιούνται:

- Για εξάσκηση (drill ’n’ practice)
- Ως εισαγωγική δραστηριότητα
- Για τη διαμόρφωση εννοιών (concept formation)
- Για την ενίσχυση εννοιών (concept reinforcement)
- Για εφαρμογή γνώσης
- Για διασκέδαση

Η Bragg (2012) αναφέρει τον διαχωρισμό που σχετίζεται με το είδος των παιχνιδιών, δηλαδή αν το παιχνίδι είναι ηλεκτρονικό (δηλαδή παίζεται στον υπολογιστή) ή μη. Οι Whitton & Whitton (2011) προχωρούν στον διαχωρισμό των ηλεκτρονικών παιχνιδιών στα εμπορικά παιχνίδια, τα οποία τα βρίσκει κανείς έτοιμα στην αγορά, και στα παιχνίδια που φτιάχνονται ειδικά για εκπαιδευτικούς σκοπούς, συνήθως από κάποιον μη επαγγελματία του είδους. Μια ενδιάμεση κατηγορία ανάμεσα σε αυτά είναι και τα παιχνίδια που εντάσσονται στην κατηγορία του Edutainment (μάθηση μέσω διασκέδασης).

Οι Whitton, & Whitton (2011) αναφέρουν ότι τα εμπορικά παιχνίδια έχουν το πλεονέκτημα ότι έχουν κατασκευαστεί από επαγγελματίες. Έτσι, σαφώς υπερτερούν σε ζητήματα σχεδιασμού και γραφικών. Κύριος στόχος τους όμως είναι η διασκέδαση. Αυτό συνεπάγεται έναν περιορισμό στις επιλογές που έχει ο εκπαιδευτικός, όταν ψάχνει ένα παιχνίδι που να εξυπηρετεί συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που θα μπορέσουμε να βρούμε ένα παιχνίδι κατάλληλο για να το εντάξουμε στην εκπαιδευτική διαδικασία, υπάρχουν ακόμη προβλήματα που σχετίζονται με τον χρόνο που δαπανάται στο παίξιμο του παιχνιδιού και το κόστος της αγοράς του.

Από την άλλη πλευρά, τα παιχνίδια που κατασκευάζονται για εκπαιδευτικούς σκοπούς μπορεί κανείς να τα βρει σπανιότερα, γιατί δεν είναι εύκολο για έναν εκπαιδευτικό να δημιουργήσει ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι το οποίο θα εξυπηρετεί συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους και ταυτόχρονα θα είναι κατάλληλο για τους μαθητές. Το να σχεδιάσει κανείς ένα παιχνίδι από την αρχή προϋποθέτει γνώσεις για τον σχεδιασμό παιχνιδιών, τα γραφικά και τον προγραμματισμό. Η δημιουργία παιχνιδιών από τους εκπαιδευτικούς έχει κι αυτή φυσικά τα αδύνατα σημεία της, όπως είναι οι περιορισμένες γνώσεις των εκπαιδευτικών γύρω από τη σχεδίαση παιχνιδιών και οι περιορισμένοι οικονομικοί πόροι σε σχέση με αυτούς των εμπορικών παιχνιδιών. Αυτό συνεπάγεται την υποδεέστερη ποιότητα γραφικών και αίσθησης του παιχνιδιού σε σχέση με τα εμπορικά παιχνίδια. Το θετικό σε αυτή την περίπτωση είναι ότι δημιουργούνται παιχνίδια που εξυπηρετούν συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους (Whitton, & Whitton, 2011).

Όσον αφορά στο edutainment, ο Egenfeldt-Nielsen (2007) αναφέρει ότι πρόκειται για έναν όρο με ευρεία σημασία, ο οποίος καλύπτει τον συνδυασμό της διασκέδασης και της εκπαίδευσης σε μια ποικιλία από πλατφόρμες πολυμέσων, όπως είναι τα παιχνίδια στους υπολογιστές. Με λίγα λόγια, είναι παιχνίδια που κατασκευάζονται από επαγγελματίες, αλλά οι ίδιες οι εταιρείες παραγωγής τα ξεχωρίζουν από τα υπόλοιπα τονίζοντας ότι τα παιχνίδια αυτά έχουν μαθησιακούς στόχους. Αν και με μια πρώτη ματιά ίσως φαίνονται αρκετά δελεαστικά, εντούτοις ο συγγραφέας είναι επιφυλακτικός ως προς τα πραγματικά μαθησιακά οφέλη που μπορούν να επιτευχθούν μέσα από αυτά. Το πιο βασικό ίσως μειονέκτημα αυτών των παιχνιδιών είναι η έλλειψη ενσωμάτωσης της μαθησιακής εμπειρίας στη διασκέδαση. Δηλαδή, ο παίκτης επικεντρώνει την προσοχή του στο να παίξει το παιχνίδι και όχι να μάθει κάτι από το παιχνίδι (Egenfeldt-Nielsen, 2005, αναφορά στον Egenfeldt-Nielsen, 2007). Επίσης, τίθεται υπό αμφισβήτηση το κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να διδαχθούν κάτι ουσιαστικό επάνω σε ένα αντικείμενο ή απλά τα παιχνίδια αυτά αφήνουν τον παίκτη να κάνει μηχανικά κάποιες διαδικασίες.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνει κανείς ότι λόγω της πληθώρας των παιχνιδιών που υπάρχουν, αντίστοιχα πολλές είναι και οι κατηγορίες των παιχνιδιών. Αυτό συνεπάγεται ότι το ζήτημα της επιλογής του κατάλληλου είδους παιχνιδιού για την ένταξη στο μάθημα των μαθηματικών δεν είναι τελικά καθόλου εύκολη υπόθεση. Ούτε πρέπει να αντιμετωπίζονται οι έρευνες που σχετίζονται με τα αποτελέσματα της εφαρμογής των παιχνιδιών στην τάξη ως απόλυτες, καθώς υπάρχουν τόσο πολλές διαφοροποιήσεις από κατηγορία σε κατηγορία και από παιχνίδι σε παιχνίδι, που δεν είναι εύκολο να ισχυριστεί κανείς ότι τα αποτελέσματα μιας έρευνας για ένα συγκεκριμένο είδος παιχνιδιού ισχύουν αυτόματα και για τα υπόλοιπα είδη.

Η ιδανική περίπτωση θα ήταν να υπήρχε ένα παιχνίδι για κάθε συγκεκριμένη μαθησιακή ενότητα, το οποίο όχι μόνο θα ικανοποιεί απόλυτα τους μαθησιακούς στόχους, αλλά θα είναι προσαρμοσμένο στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών, θα μπορεί να τερματιστεί σε κατάλληλο και συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και θα χρησιμοποιεί τη διαθέσιμη τεχνολογία και με ένα αποδεκτό κόστος.

3.3 Κριτήρια επιλογής παιχνιδιών

Από τη στιγμή που κάποιος εκπαιδευτικός αποφασίσει να εντάξει τα παιχνίδια στο μάθημα των μαθηματικών, προκύπτει το ζήτημα της επιλογής του κατάλληλου παιχνιδιού. Τα κριτήρια της επιλογής ενός παιχνιδιού μπορεί να σχετίζονται με τους γνωστικούς στόχους που ο εκπαιδευτικός θέλει να επιτύχουν οι μαθητές του, τις προτιμήσεις των μαθητών, την καταλληλότητα του παιχνιδιού για το επίπεδο και την ηλικία των μαθητών, τη διαθεσιμότητα του αντίστοιχου παιχνιδιού, τον τρόπο ένταξης και τη θέση του παιχνιδιού μέσα στο μάθημα κ.λπ.

3.4 Με ποιους τρόπους μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα παιχνίδι στην τάξη;

Είναι γεγονός ότι πολλοί εκπαιδευτικοί εντάσσουν τα παιχνίδια ως μέρος του μαθήματος των μαθηματικών. Ένα παιχνίδι μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους μέσα στο μάθημα. Για παράδειγμα, μπορεί να αποτελέσει εισαγωγική δραστηριότητα – αφόρμηση, μέσο για την επιβράβευση των μαθητών (Bragg, 2006) ή μεταμφιεσμένη – παραλλαγμένη δραστηριότητα εξάσκησης (disguising drill and practice) (Lim-Teo, 1991). Λιγότερο συχνά συναντάμε παιχνίδια που χρησιμοποιούνται έναντι της παραδοσιακής διδασκαλίας ή ως αφορμή για συζήτηση και προβληματισμό πάνω σε μια έννοια (Swan & Marshall, 2009). Οι Squire & Jenkins (2003) προτείνουν τη χρήση των παιχνιδιών ως εναλλακτική πρόταση έναντι των ασκήσεων για το σπίτι, με στόχο να επιτρέψουν στους μαθητές να εργαστούν και να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις των παιχνιδιών μόνοι τους. Οι ίδιοι ερευνητές δεν αποκλείουν τη δυνατότητα χρήσης ενός παιχνιδιού ως δραστηριότητας για την τελική αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών σε ένα γνωστικό αντικείμενο. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να ελεγχθεί τι έχουν μάθει οι μαθητές εφαρμόζοντας τις γνώσεις τους στην πράξη.

Οι Swan & Marshall (2009) προσθέτουν ότι, σε σπάνιες περιπτώσεις, ένα παιχνίδι μπορεί να διδάσκεται συστηματικά από τον εκπαιδευτικό, με στόχο την ουσιαστική μαθηματική μάθηση μέσα τις επαναλαμβανόμενες εμπειρίες των μαθητών. Αρκετοί ερευνητές αναφέρουν ότι τα παιχνίδια μπορούν να λειτουργήσουν ως μέσο για ενίσχυση των κινήτρων των μαθητών (Burnett, 1992; Bright, Harvey, & Wheeler, 1985; Ernest, 1986, αναφορά στους Swan & Marshall, 2009), αλλά και να βελτιώσουν τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά (Nisbet & Williams, 2009). Τέλος, ο Booker (2000, αναφορά στους Swan & Marshall, 2009) αναφέρει τη χρήση των παιχνιδιών ως διαγνωστικών εργαλείων. Επισημαίνει πως όταν παρατηρεί κανείς τα παιδιά να παίζουν και καταγράφει τις αλληλεπιδράσεις τους, μπορεί να μάθει πολλά γι’ αυτά.

3.5 Θετικά αποτελέσματα από τη χρήση των παιχνιδιών στα μαθηματικά

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η ένταξη των παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία. Υπάρχει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από το ζήτημα των παιχνιδιών. Στην ερώτηση «*Γιατί να χρησιμοποιηθεί ένα παιχνίδι στα μαθηματικά*;» μπορούν να δοθούν πολλές απαντήσεις, καθώς οι ερευνητές επισημαίνουν μια σειρά από θετικά αποτελέσματα τα οποία μπορούν να προκύψουν μέσα από αυτή τη διαδικασία. Σε αυτή την ενότητα, λοιπόν, παρουσιάζουμε κάποια από τα πλεονεκτήματα της χρήσης των παιχνιδιών στο μάθημα, όπως αυτά καταγράφονται από τις σχετικές έρευνες. Για λόγους ευκολίας τα χωρίσαμε σε δύο κατηγορίες: σε αυτά που σχετίζονται με την αλλαγή της στάσης των μαθητών (συναισθηματικά οφέλη) και σε αυτά που ενισχύουν τη μαθηματική μάθηση (γνωστικά οφέλη).

3.5.1 Συναισθηματικά οφέλη

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε τα οφέλη που μπορούν να προκύψουν στα κίνητρα και στη στάση των μαθητών από την χρήση των παιχνιδιών στο μάθημα των μαθηματικών, όπως αυτά καταγράφονται από τους ερευνητές.

Τα παιχνίδια και ειδικά αυτά που παίζονται στον υπολογιστή είναι επικεντρωμένα στον παίκτη, κάτι που συνεπάγεται πως το παιδί συμμετέχει ενεργά σε αυτή τη διαδικασία (Gros, 2007). Αυτό σημαίνει ότι το παιδί έχει ουσιαστική συμμετοχή και εμπλοκή στο παιχνίδι και δεν παραμένει παθητικός θεατής των όσων εξελίσσονται (Oldfield, 1991, Gros, 2007).

Οι Nisbet & Williams (2009) αναφέρουν ότι με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και ενισχύονται τα κίνητρά τους. Η Bragg (2003) επισημαίνει ότι παρατηρούνται αλλαγές στη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, όταν τα παιδιά παίζουν παιχνίδια. Παρόμοια, αρκετοί ερευνητές αναφέρουν ότι τα παιχνίδια μπορούν να λειτουργήσουν ως μέσο για ενίσχυση των κινήτρων των μαθητών (Burnett, 1992; Bright, Harvey, & Wheeler, 1985; Ernest, 1986, αναφορά στους Swan & Marshall, 2009), αλλά και να βελτιώσουν τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά (Nisbet & Williams, 2009). Η στάση (affect) σχετίζεται με μια μεγάλη γκάμα από πεποιθήσεις, συναισθήματα και διαθέσεις που, σε γενικές γραμμές, θεωρούνται ότι ξεφεύγουν από το γνωστικό πεδίο. Ο Mcleod (1992) ορίζει την έννοια της στάσης ως τις συναισθηματικές αντιδράσεις που περιλαμβάνουν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα μέτριας έντασης και αρκετής σταθερότητας. Παραδείγματα στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά είναι το να αρέσει σε κάποιον η γεωμετρία, να αντιπαθεί τα προβλήματα, να είναι περίεργος για την τοπολογία ή να βαριέται την άλγεβρα. Ο ίδιος ερευνητής υπογραμμίζει ότι αυτές οι απόψεις των μαθητών αναπτύσσονται με την πάροδο του χρόνου μέσω της εμπειρίας και είναι αρκετά σταθερές. Μάλιστα, οι παγιωμένες απόψεις των μαθητών μπορεί να διαρκέσουν μεγάλο διάστημα.

Η Bragg (2007) σημειώνει πως η βιβλιογραφία υποστηρίζει τη χρήση παιχνιδιών για να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των παιδιών, γιατί οι μαθητές διασκεδάζουν με τους διαγωνισμούς και τις προκλήσεις. Άλλωστε, οι ερευνητές έχουν καταγράψει τον ενθουσιασμό των παιδιών, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να παίξουν παιχνίδια στην τάξη, κάτι που είναι σε γενικές γραμμές αναμενόμενο (Oldfield, 1991).

Επιπλέον, ο Dienes (1963, αναφορά στη Bragg, 2006) υποστηρίζει ότι τα παιχνίδια θεωρούνται παιδαγωγικό εργαλείο το οποίο προάγει τη δημιουργία ενός θετικού περιβάλλοντος μάθησης.

Σε πολλές έρευνες αναφέρεται ως θετική συνέπεια της χρήσης των παιχνιδιών μέσα στην τάξη των μαθηματικών η ενίσχυση των ικανοτήτων και των δεξιοτήτων των μαθητών (Oldfield, 1991). Ανάμεσα σε αυτές συμπεριλαμβάνεται και η ανάπτυξη των κοινωνικών δεξιοτήτων των παιδιών, καθώς παίζοντας ένα παιχνίδι στην τάξη παρέχονται δυνατότητες για συνεργασία και κοινωνική αλληλεπίδραση (Booker, 2000, αναφορά στη Bragg, 2012, Gros, 2007, Oldfield, 1991).

Τέλος, μέσα από το πρίσμα των παιχνιδιών, τα μαθηματικά, που για πολλούς μαθητές αποτελούν ένα δύσκολο και δυσνόητο μάθημα, μπορούν να εμφανιστούν πιο ενδιαφέροντα και εύκολα (Fisher & Neill, 2007, Young-Loveridge, 2005 αναφορές στον Lee, 2009).

Από όλα τα παραπάνω, γίνεται προφανές ότι μπορούν να προκύψουν πολλαπλά οφέλη σε συναισθηματικό επίπεδο για τους μαθητές από τη χρήση των παιχνιδιών. Αυτά, αν και μερικές φορές στην καθημερινή πρακτική των εκπαιδευτικών μπορεί να παραμεληθούν, είναι εξίσου σημαντικά με τα γνωστικά οφέλη και γι’ αυτό θα πρέπει να τα συνυπολογίζουμε στις αποφάσεις μας που αφορούν τη μαθησιακή διαδικασία

3.5.2 Γνωστικά οφέλη

Πέρα από τα σημαντικά οφέλη που μπορούν να προκύψουν σε συναισθηματικό επίπεδο από τη χρήση των παιχνιδιών στα μαθηματικά, δεν πρέπει να παραβλέπουμε ότι ένας από τους βασικούς στόχους παραμένει να βελτιώσουν οι μαθητές τις επιδόσεις τους. Το ερώτημα «*Τι μπορώ να κάνω για να βελτιώσω τις επιδόσεις των μαθητών μου στα μαθηματικά;*» είναι άλλωστε τις περισσότερες φορές η αφετηρία για την αναζήτηση εναλλακτικών πρακτικών διδασκαλίας και μάθησης. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα αναφέρουμε τα συμπεράσματα της έρευνας γύρω από τα γνωστικά οφέλη που μπορούν να αποκομίσουν οι μαθητές από τη χρήση των παιχνιδιών.

Η Gros (2007) σημειώνει ότι οι περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι η χρήση των παιχνιδιών μέσα στην τάξη των μαθηματικών βοηθά πιο πολύ τους αδύναμους μαθητές. Η ίδια επισημαίνει βέβαια ότι αυτό το συμπέρασμα δεν προκύπτει από όλες τις σχετικές έρευνες, αλλά παρόλα αυτά αξίζει να σημειωθεί, καθώς η παροχή ευκαιριών στους πιο αδύναμους μαθητές να βελτιώσουν την επίδοσή τους είναι πάντα μέσα στους στόχους των εκπαιδευτικών.

Από την άλλη πλευρά, οι Bright et al. (1985) διατυπώνουν την άποψη ότι τα παιχνίδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διδαχθεί μαθηματικό περιεχόμενο όλων των στόχων σε όλα τα επίπεδα μαθητών. Κάποιοι ερευνητές διαπιστώνουν ότι μέσα από τα παιχνίδια προωθείται η εννοιολογική μάθηση με πιο ευχάριστο τρόπο απ' ότι θα γινόταν με την παραδοσιακή διδασκαλία (Gros, 2007, Oldfield, 1991). Ο Gerdes (2001) σημειώνει ότι με τα παιχνίδια προάγεται η μάθηση, μέσα από την εξάσκηση των μαθητών.

Ο Oblinger (2004) σημειώνει ότι υπάρχουν χαρακτηριστικά των παιχνιδιών τα οποία βελτιώνουν τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές. Για παράδειγμα, ενεργοποιούν τις προϋπάρχουσες γνώσεις και τη μεταφορά γνώσης από ένα περιβάλλον σε άλλο. Επίσης, έχουν άμεση σύνδεση με το πλαίσιο (πλαισιωμένη δράση) και δίνουν τη δυνατότητα να αναζητά κανείς τις πληροφορίες ή τεχνικές που πρέπει να εφαρμόσει σε συγκεκριμένες περιστάσεις. Επιπλέον, παρέχουν ευρεία και άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση, καθώς ο παίκτης κρίνεται άμεσα και βλέπει τα αποτελέσματα των ενεργειών του.

Ανάμεσα στα άλλα, οι Kamii & Rummelsburg (2008) αναφέρονται στην ενίσχυση της λογικο-μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Οι μαθητές εξασκούνται τόσο στη λογική σκέψη (Oldfield, 1991), όσο και στη μαθηματική αφαίρεση (mathematical abstraction) (Avraamidou & Monaghan, 2009) και μπορούν να φτάσουν σε υψηλότερα επίπεδα κατανόησης (Oldfield, 1991). Επίσης, τα παιχνίδια μπορούν να τους βοηθήσουν να εξοικειωθούν με συγκεκριμένους μαθηματικούς συμβολισμούς (Oldfield, 1991). Έρευνες προσθέτουν σε αυτά και τις βελτιωμένες χωρικές δεξιότητες των μαθητών που παίζουν παιχνίδια (Amorim, 2003, αναφορά στη Bragg, 2012).

Ένα σημαντικό όφελος που μπορεί να προκύψει από τη χρήση των παιχνιδιών στο μάθημα είναι και η ανάπτυξη στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων (Gros, 2007). Πολύ συχνά στα παιχνίδια οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με καταστάσεις οι οποίες για να επιλυθούν απαιτούν τον συνδυασμό πολλών διαφορετικών πληροφοριών και μαθαίνουν έτσι να εμπλέκονται και να επιλύουν προβληματικές καταστάσεις.

Ένα άλλο όφελος, το οποίο περιλαμβάνει και το κοινωνικό στοιχείο που έχουμε προαναφέρει, είναι ότι τα παιχνίδια μπορούν να αποτελέσουν σημείο εκκίνησης για μαθηματική συζήτηση μέσα στην τάξη (Oldfield, 1991). Είναι προφανές ότι μια τέτοια συζήτηση μπορεί να έχει πολλά γνωστικά οφέλη για όλους τους μαθητές που θα συμμετάσχουν σε αυτή, καθώς μπορούν να λύσουν απορίες, να ξεδιαλύνουν παρανοήσεις και να προβληματιστούν πάνω σε ζητήματα που τους ενδιαφέρουν, καθώς αφορούν το παιχνίδι που παίζουν.

Τέλος, ένα παιχνίδι με μαθηματικό περιεχόμενο μπορεί ακόμη να αποτελέσει ένα σημαντικό διαγνωστικό εργαλείο (Booker, 2000, αναφορά στη Bragg, 2012) για τον εκπαιδευτικό για να τον βοηθήσει να δει τις αδυναμίες και τα κενά των μαθητών του σε συγκεκριμένα κεφάλαια του αναλυτικού προγράμματος.

3.5.3 Οφέλη των *ηλεκτρονικών* παιχνιδιών

Πέρα από τα οφέλη των παιχνιδιών τα οποία αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, κρίνουμε απαραίτητο να αφιερώσουμε το παρόν υποκεφάλαιο σε μια συνοπτική αναφορά των πλεονεκτημάτων που μπορεί να έχει πιο συγκεκριμένα η χρήση των ηλεκτρονικών παιχνιδιών μέσα στην τάξη. Καταρχάς, με αυτόν τον τρόπο ο εκπαιδευτικός αναγνωρίζει ότι η νέα γενιά που φοιτά αυτή τη στιγμή στο σχολείο μεγαλώνει σε ένα ψηφιακό περιβάλλον. Έτσι, έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά και ενδιαφέροντα από τις προηγούμενες.

Η έρευνα επιβεβαιώνει αυτή τη διαπίστωση. Οι Roberts et al. (1999) διεξήγαγαν μια έρευνα σε εθνικό επίπεδο στην Αμερική με συμμετέχοντες παιδιά και εφήβους ηλικίας 2 έως 18 ετών με στόχο να καταγράψει τη σχέση τους με τα ψηφιακά μέσα και τις νέες τεχνολογίες. Οι συγγραφείς καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι ο χαρακτηρισμός αυτής της γενιάς ως «*γενιά των πολυμέσων*» (media generation) της ταιριάζει απόλυτα. Ανάμεσα στα άλλα, η έρευνα αναφέρει ότι το 42% των παιδιών και εφήβων από 2-18 ετών χρησιμοποιεί υπολογιστή σε καθημερινή βάση στο σπίτι ή στο σχολείο και το 30% παίζει ηλεκτρονικά παιχνίδια καθημερινά. Επίσης, δεν προέκυψαν σημαντικές διαφορές όσον αφορά στο φύλο των παιδιών και τη σχέση τους με τους υπολογιστές.

Σε αντίστοιχα αποτελέσματα καταλήγει και η Papastergiou (2009), η οποία επισημαίνει ότι τα παιχνίδια στον υπολογιστή έχουν γίνει πια ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας των παιδιών και των εφήβων. Ένας από τους κύριους λόγους για τους οποίους τα παιδιά ηλικίας 12-16 ετών χρησιμοποιούν το διαδίκτυο είναι για να παίζουν παιχνίδια (Papastergiou & Solomonidou, 2005, αναφορά στην Papastergiou, 2009).

Ο Oblinger (2004) αναφέρει ότι τα παιχνίδια στον υπολογιστή έχουν γίνει ένα κομμάτι του κοινωνικού μας περιβάλλοντος και ότι δεν χρησιμοποιούνται μόνο για τη διασκέδαση, αλλά προσφέρουν και πιθανά δυναμικά μαθησιακά περιβάλλοντα. Οι σημερινοί μαθητές έχουν μεγαλώσει παίζοντας παιχνίδια στον υπολογιστή. Ταυτόχρονα, η συνεχής έκθεσή τους στο διαδίκτυο και στα άλλα ψηφιακά μέσα έχει διαμορφώσει τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνουν τις πληροφορίες και το πώς μαθαίνουν. Οι ικανότητες και δεξιότητές τους έχουν διαμορφωθεί μέσα σε αυτό το ψηφιακό περιβάλλον. Έτσι, είναι ψηφιακά εγγράμματοι και προτιμούν να μαθαίνουν μέσα από τη δράση τους (learn by doing) παρά μέσα από όσα ακούν (learn by listening).

Το σχολείο, λοιπόν, δεν μπορεί να αγνοήσει αυτές τις διαπιστώσεις. Η ένταξη της τεχνολογίας και των παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία έχει διπλή σημασία. Από τη μία, είναι υποχρέωση του σχολείου να διδάξει στους μαθητές να χρησιμοποιούν σωστά και να αξιοποιούν τις δυνατότητες των ηλεκτρονικών μέσων. Αυτό θα τους χρειαστεί σε όλη τη μετέπειτα ζωή τους ως πολίτες μιας κοινωνίας, στην οποία τα πολυμέσα παίζουν κεντρικό ρόλο. Από την άλλη, είναι χρήσιμο να τροποποιήσουμε τις διδακτικές μας μεθόδους για να τις προσαρμόσουμε στα ενδιαφέροντα και στις ανάγκες των μαθητών μας.

Όσον αφορά στο πρώτο σκέλος, οι Bennett et al. (2008) υποστηρίζουν ότι, αν και ένα μέρος των νέων ασχολείται πολύ και είναι αρκετά εξοικειωμένο με την τεχνολογία, ωστόσο υπάρχει και ένα ποσοστό το οποίο δεν έχει πρόσβαση στις νέες τεχνολογίες ή δεν έχει αναπτύξει τις δεξιότητες που απαιτούνται για την σωστή και αποτελεσματική χρήση τους. Έτσι, προκύπτει ο κίνδυνος να παραμεληθεί αυτή η ομάδα παιδιών, τα οποία στερούνται των παραπάνω δεξιοτήτων κυρίως λόγω κοινωνικοοικονομικών ή πολιτισμικών παραγόντων. Είναι, λοιπόν, δουλειά του σχολείου να φροντίσει ώστε και αυτά τα παιδιά δεν θα μείνουν αποκλεισμένα από τις νέες εξελίξεις και τις δυνατότητες της τεχνολογίας. Αυτό το πρόβλημα βέβαια ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας και για αυτό δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω.

Το δεύτερο κομμάτι έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί στις μέρες μας αντιμετωπίζουν την πρόκληση να κάνουν τα μαθήματα, ιδιαίτερα τα μαθηματικά, πιο ενδιαφέροντα και προσιτά στους μαθητές τους. Μια λύση που προτείνεται είναι ο συνδυασμός των ηλεκτρονικών παιχνιδιών με τα γνωστικά αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος, σε αυτό που ο Prensky (2003) ονομάζει «Ψηφιακή μάθηση μέσω παιχνιδιών» (Digital Game-Based Learning). Η άποψη αυτή υποστηρίζει ότι με αυτόν τον τρόπο θα μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε τα εσωτερικά κίνητρα που καταγράφονται απέναντι στα παιχνίδια, σε αντίθεση με την έλλειψη ενδιαφέροντος των μαθητών για τα περιεχόμενα του αναλυτικού προγράμματος του σχολείου (Prensky, 2003).

Ο Prensky (2001) λέει ότι η μάθηση μέχρι τώρα είναι βαρετή για τους μαθητές. Ο στόχος μας πρέπει να είναι να κάνουμε την εκπαιδευτική διαδικασία όσο το δυνατό πιο ευχάριστη και αποτελεσματική. Η λύση που προτείνει ο συγγραφέας είναι η χρήση των ηλεκτρονικών παιχνιδιών. Πέρα όμως από τη διασκέδαση, ο συγγραφέας, παρουσιάζοντας τις απόψεις διαφόρων επιστημόνων, υποστηρίζει ότι έχουν επέλθει γνωστικές αλλαγές στα παιδιά, οι οποίες οφείλονται σε αυτή τη συστηματική επαφή τους με τον ψηφιακό κόσμο. Κάνει λόγο για αλλαγή στα μοτίβα της σκέψης και στην επαναδιοργάνωση του εγκεφάλου τους.

Μάλιστα, προχωρά ένα βήμα παραπέρα και παραθέτει τις 10 κυριότερες γνωστικές αλλαγές που έχει παρατηρήσει σε αυτή τη γενιά μαθητών λόγω των ηλεκτρονικών παιχνιδιών. Καταλήγει ότι από αυτές τις αλλαγές προκύπτουν και οι προκλήσεις για την εκπαίδευση: μεγάλη ταχύτητα (twitch speed), παράλληλη επεξεργασία πληροφοριών σε αντίθεση με τη γραμμική, προηγούνται τα γραφικά και όχι το κείμενο, τυχαία προσπέλαση και όχι βήμα-προς βήμα, διασύνδεση (connected), ο μαθητής είναι ενεργός και όχι παθητικός δέκτης, παιχνίδι αντί για βαρετή δουλειά, ανταπόδοση αντί για υπομονή, φαντασία αντί για πραγματικότητα, η τεχνολογία είναι φίλος και όχι εχθρός (Prensky, 2001).

Από όλα τα παραπάνω λοιπόν, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η εισαγωγή των ηλεκτρονικών παιχνιδιών στην τάξη φαίνεται να έχει πολλαπλά οφέλη για τους μαθητές σε πολλά επίπεδα. Έτσι, σίγουρα αξίζει να βρούμε παιχνίδια τα οποία να εξυπηρετούν συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους και να προσπαθήσουμε να τα εντάξουμε στο μάθημα των μαθηματικών.

3.6 Επιφυλάξεις σχετικά με τη χρήση των παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία

Προηγουμένως αναλύσαμε τα θετικά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από την ένταξη των ηλεκτρονικών παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία. Ωστόσο, οι απόψεις των επιστημόνων δεν είναι ομόφωνες σε αυτό το ζήτημα. Υπάρχουν κάποιοι που αντιμετωπίζουν με σκεπτικισμό την αποτελεσματικότητα των παιχνιδιών. Αυτές τις απόψεις θα παρουσιάσουμε στο παρόν υποκεφάλαιο.

Καταρχάς, επισημαίνεται το γεγονός ότι οι έρευνες οι οποίες χρησιμοποιούνται για να υποστηρίξουν τη χρήση των παιχνιδιών συνήθως δεν παρουσιάζουν εντυπωσιακά αποτελέσματα υπέρ των παιχνιδιών, ούτε καν ομοιομορφία ως προς την καλύτερη επίδοση των μαθητών. Για παράδειγμα, οι Randel et al. (1992) παρουσιάζουν μια επισκόπηση ερευνών που έγιναν για τη χρήση των παιχνιδιών σε μια περίοδο 28 ετών. Τα αποτελέσματά της έδειξαν ότι, από τις 67 έρευνες συνολικά, οι 38 δεν έδειξαν καμία διαφορά ανάμεσα στη χρήση των παιχνιδιών και στις παραδοσιακές μεθόδους και οι 22 έδειξαν θετικά αποτελέσματα υπέρ των παιχνιδιών. Το ίδιο αποτέλεσμα έχουν και πέντε ακόμη έρευνες, αν και οι συγγραφείς αμφισβητούν τις μεθόδους τους, ενώ τρεις έδειξαν καλύτερα αποτελέσματα για τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας. Ο Ke (2008), μετά από μια έρευνα για την αποτελεσματικότητα της εφαρμογής των παιχνιδιών στο μάθημα των μαθηματικών σε μαθητές της 4^{ης} και 5^{ης} τάξης, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι δεν είναι όλα τα παιχνίδια κατάλληλα στο να οδηγήσουν τους μαθητές στην κατάκτηση των μαθησιακών στόχων. Ο ερευνητής διαπιστώνει ότι, αν και με τα παιχνίδια οι μαθητές έδειξαν να διαμορφώνουν μια πιο θετική στάση απέναντι στο αντικείμενο, εντούτοις δεν καταγράφηκαν σημαντικά οφέλη σε γνωστικό ή μεταγνωστικό επίπεδο. Αντίστοιχες είναι και οι απόψεις που εκφράζουν οι Bennett et al. (2008). Οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχουν επαρκή και αξιόπιστα στοιχεία που να υποδεικνύουν ότι πρέπει να συμπεριληφθούν τα ηλεκτρονικά παιχνίδια στην εκπαίδευση. Πιστεύουν ότι, αν και υπάρχει μια γενική εικόνα που φαίνεται να υποστηρίζει κάτι τέτοιο, δεν έχει αποδειχθεί σε επιστημονικό επίπεδο. Συνεπώς, δεν έχει αποδειχθεί προς το παρόν ότι υπάρχει αιτιακή σχέση μεταξύ της χρήσης των ηλεκτρονικών παιχνιδιών και της ακαδημαϊκής επίδοσης.

Από την άλλη πλευρά, κάποιοι σχεδιαστές παιχνιδιών (Smith & Mann, 2002) διατυπώνουν τον προβληματισμό ότι, αν ξεκινά κανείς να φτιάξει ένα παιχνίδι με μοναδικό σκοπό να πετύχει κάποιους μαθησιακούς στόχους, συχνά θυσιάζει την ίδια την έννοια του παιχνιδιού. Η Gros (2007) προσθέτει ότι είναι δύσκολο να σχεδιαστούν παιχνίδια τα οποία να ακολουθούν τους μαθησιακούς στόχους που θέτει το Αναλυτικό Πρόγραμμα και ταυτόχρονα να είναι ευχάριστα για τα παιδιά.

Επιπλέον, δεν είναι και τόσο εύκολο να βρεθούν έτοιμα εμπορικά παιχνίδια, τα οποία να μπορούν να αξιοποιηθούν άμεσα, καθώς σε πολλά από αυτά συναντώνται βίαια ή σεξιστικά θέματα, που προφανώς είναι ακατάλληλα για τους μαθητές. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο στόχος των εμπορικών παιχνιδιών είναι η διασκέδαση και ότι οι σχεδιαστές τους συχνά θυσιάζουν την ορθότητα των επιστημονικών αρχών στον βωμό της. Έτσι, μπορεί να παρουσιάζουν λανθασμένη εφαρμογή επιστημονικών αρχών ενσωματώνοντας το φανταστικό στοιχείο στα σενάρια των παιχνιδιών που φτιάχνουν, κάτι που τα καθιστά ακατάλληλα για το σχολείο (Gros, 2007).

Επίσης, σημειώνεται η δυσκολία που ενέχει η ένταξη των παιχνιδιών στην τάξη, ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, λόγω της πίεσης που υπάρχει από τον όγκο της ύλης που χρειάζεται να καλυφθεί σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτό πρέπει να προστεθεί και ο χρόνος που απαιτείται για την εξοικείωση του εκπαιδευτικού και των μαθητών με το λογισμικό. Μάλιστα, λόγω της μικρής εμπειρίας πολλών εκπαιδευτικών με τέτοιου είδους δραστηριότητες, είναι απαραίτητο να υπάρχει υποστήριξη από ειδικούς, κυρίως στην αρχή της εφαρμογής ενός τέτοιου προγράμματος. Αυτό βέβαια δεν είναι πάντα εφικτό, και έτσι κάποιοι εκπαιδευτικοί, αν και αναγνωρίζουν τα θετικά αποτελέσματα της χρήσης των παιχνιδιών, δύσκολα παίρνουν την απόφαση να τα εντάξουν στην τάξη των μαθηματικών. Επιπλέον, είναι δύσκολο για έναν εκπαιδευτικό να αποφασίσει μόνος του, χωρίς εξωτερική υποστήριξη, αν ένα παιχνίδι είναι αρκετά αξιόλογο και επαρκές στο να καλύψει τους στόχους που τίθενται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα (Gros, 2007).

Ακόμη, οι Bennett et al. (2008) ασκούν κριτική στην άποψη που υποστηρίζει ότι τα ηλεκτρονικά παιχνίδια πρέπει να ενταχθούν στη μαθησιακή διαδικασία, καθώς αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας και των ενδιαφερόντων της νέας γενιάς. Διατυπώνουν τη θέση ότι μόνο ένα ποσοστό των νέων ανθρώπων είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένο με την τεχνολογία. Αντίστοιχα, υπάρχει ένα μεγάλο ποσοστό νέων το οποίο δεν έχει πρόσβαση στις νέες τεχνολογίες ή δεν είναι επαρκώς εξοικειωμένο με αυτές. Έτσι, προκύπτει ο κίνδυνος να παραμεληθεί αυτή η ομάδα παιδιών, τα οποία διαφοροποιούνται κυρίως λόγω κοινωνικοοικονομικών και πολιτιστικών παραγόντων από τους συνομήλικούς τους. Τελικά, όπως υποστήριξε ο Squire (2003, αναφορά στον Ke, 2008), το να χρησιμοποιηθεί ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι σε μια τάξη μπορεί να προκαλέσει τόσα προβλήματα, όσα λύνει, καθώς τα παιχνίδια δεν είναι εξίσου δελεαστικά για όλους τους μαθητές.

Ένα επιπλέον μειονέκτημα είναι ότι μπορεί να διασπαστεί η προσοχή των μαθητών και έτσι να μην επιτύχουν τους μαθησιακούς στόχους (Miller, Lehman, & Koedinger, 1999). Οι Miller et al. (1999) πιστεύουν ότι οι μαθητές πρέπει να υποστηρίζονται από τους εκπαιδευτικούς, για να τους κάνουν ξεκάθαρα τόσο τα μαθησιακά αποτελέσματα τα οποία αναμένεται να προκύψουν από το παίξιμο του παιχνιδιού, όσο και τον τρόπο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί το παιχνίδι ώστε να φτάσει κανείς στην κατάκτηση της επιθυμητής γνώσης.

Όλοι οι παραπάνω λόγοι συνιστούν κάποια από τα βασικά επιχειρήματα εναντίον της χρήσης των ηλεκτρονικών παιχνιδιών στο σχολείο και ειδικά στα μαθηματικά. Ακόμη όμως και οι σκεπτικιστές αναγνωρίζουν ότι η τεχνολογία αποτελεί όντως ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας της πλειοψηφίας των νέων, αν και δεν έχουν όλοι το ίδιο επίπεδο εξοικείωσης. Είναι λοιπόν μια πρόκληση τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους ερευνητές το να ξεκαθαρίσουν τον τρόπο με τον οποίο τα παιχνίδια μπορούν να ενταχθούν με αποτελεσματικότητα στο σχολείο (Bennett et al., 2008).

4ο Κεφάλαιο: Το παιχνίδι «Το κάστρο των κλασμάτων»

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το ηλεκτρονικό παιχνίδι που φτιάξαμε για τα κλάσματα, με τίτλο «*Το κάστρο των κλασμάτων*», το οποίο είναι διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση https://scratch.mit.edu/projects/48077686/.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα δούμε τους στόχους του προγράμματος, τους λόγους για τους οποίους επιλέξαμε το περιβάλλον του Scratch για να το υλοποιήσουμε, την αναλυτική περιγραφή του παιχνιδιού, καθώς και τα αποτελέσματα της πειραματικής δοκιμής που κάναμε για το παιχνίδι κατά τη φάση της σχεδίασής του.

4.1 Στόχοι και επιλογές σχεδίασης του προγράμματος

Το πρόγραμμα που φτιάξαμε είναι ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι για τα κλάσματα. Προορίζεται για την εξάσκηση και την εμπέδωση των βασικών αναπαραστάσεων των κλασμάτων με τις οποίες έρχονται σε επαφή οι μαθητές του Δημοτικού. Μετά τη διδασκαλία, είναι απαραίτητο οι μαθητές να εμπλακούν σε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες οι οποίες θα τους βοηθήσουν να εμπεδώσουν αυτά που διδάχθηκαν, αλλά και να ξεδιαλύνουν κάποιες από τις κοινές παρανοήσεις/λάθη που κάνουν πάνω στα κλάσματα. Αν όλα αυτά μπορούν να γίνουν με έναν ευχάριστο και παιγνιώδη τρόπο με τη χρήση της τεχνολογίας, η οποία αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας και του ελεύθερου χρόνου των μαθητών, ίσως να βελτιώσει την στάση τους απέναντι στα κλάσματα και στα μαθηματικά γενικότερα και να αποτελέσει μια εναλλακτική πρόταση για τις ασκήσεις εξάσκησης που γίνονται από τους μαθητές στο σπίτι.

Ηλεκτρονικά παιχνίδια

Μιλώντας για παιχνίδια, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το γεγονός ότι η νέα γενιά παιδιών, τα οποία φοιτούν αυτή τη στιγμή στο δημοτικό, δείχνει ένα μεγάλο ενδιαφέρον για την τεχνολογία και ειδικά για τα ηλεκτρονικά παιχνίδια. Η Papastergiou (2009) επισημαίνει ότι τα παιχνίδια στον υπολογιστή έχουν γίνει πια ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας των παιδιών και των εφήβων. Είναι αλήθεια ότι οι περισσότεροι μαθητές παίζουν ηλεκτρονικά παιχνίδια και προτιμούν να περνούν ένα μεγάλο μέρος του ελεύθερου χρόνου τους μπροστά στον υπολογιστή (McFarlane, Sparrowhawk, & Heald, 2002, Downes, 1999; Harris, 1999; Mumtaz, 2001, Facer, 2003; Kafai, 2001; Kirriemuir & McFarlane, 2004, αναφορές στην Papastergiou, 2009). Αυτό είναι μια πραγματικότητα την οποία δεν μπορούμε να την αγνοήσουμε, όταν αναζητάμε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες για το μάθημα των μαθηματικών.

Τι ηλεκτρονικά παιχνίδια όμως μπορούμε να εντάξουμε στο μάθημα; Όπως είδαμε στο 3^{ο} κεφάλαιο, υπάρχουν τα εμπορικά παιχνίδια ή αυτά που κατασκευάζονται για εκπαιδευτικούς σκοπούς.

Οι Whitton, & Whitton (2011) αναφέρουν ότι τα εμπορικά παιχνίδια έχουν το πλεονέκτημα ότι έχουν κατασκευαστεί από επαγγελματίες. Έτσι, σαφώς υπερτερούν σε ζητήματα σχεδιασμού και γραφικών. Κύριος στόχος τους όμως είναι η διασκέδαση. Αυτό συνεπάγεται έναν περιορισμό στις επιλογές που έχει ο εκπαιδευτικός, όταν ψάχνει ένα παιχνίδι που να εξυπηρετεί συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που θα μπορέσουμε να βρούμε ένα παιχνίδι κατάλληλο για να το εντάξουμε στην εκπαιδευτική διαδικασία, υπάρχουν ακόμη προβλήματα που σχετίζονται με τον χρόνο που δαπανάται στο παίξιμο του παιχνιδιού και το κόστος της αγοράς του.

Από την άλλη πλευρά, τα παιχνίδια που κατασκευάζονται για εκπαιδευτικούς σκοπούς μπορεί κανείς να τα βρει σπανιότερα, γιατί δεν είναι εύκολο για έναν εκπαιδευτικό να δημιουργήσει ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι το οποίο θα εξυπηρετεί συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους και ταυτόχρονα θα είναι κατάλληλο για τους μαθητές. Το να σχεδιάσει κανείς ένα παιχνίδι από την αρχή προϋποθέτει γνώσεις για τον σχεδιασμό παιχνιδιών, τα γραφικά και τον προγραμματισμό. Η δημιουργία παιχνιδιών από τους εκπαιδευτικούς έχει κι αυτή φυσικά τα αδύνατα σημεία της όπως είναι οι περιορισμένες γνώσεις των εκπαιδευτικών γύρω από τη σχεδίαση παιχνιδιών και οι περιορισμένοι οικονομικοί πόροι σε σχέση με αυτούς των εμπορικών παιχνιδιών. Το θετικό σε αυτή την περίπτωση είναι ότι δημιουργούνται παιχνίδια που εξυπηρετούν συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους.

Εμείς δημιουργήσαμε ένα παιχνίδι από την αρχή, γνωρίζοντας ότι θα υστερεί στα σημεία που προαναφέραμε έναντι των εμπορικών παιχνιδιών, αλλά αναγνωρίζοντας την ανάγκη που υπάρχει να δημιουργηθούν παιχνίδια τα οποία θα μπορούν να ενταχθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία άμεσα. Αυτό το διασφαλίζει το γεγονός ότι το παιχνίδι σχεδιάστηκε λαμβάνοντας υπόψη συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους, είναι προσαρμοσμένο στις γνώσεις των μαθητών με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και έχει μηδενικό κόστος για όποιον επιθυμεί να το χρησιμοποιήσει, με την προϋπόθεση φυσικά ότι διαθέτει υπολογιστή.

Ψηφιακά παιχνίδια ως δραστηριότητες

Όπως είδαμε και στο 3ο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, μια από τις πιο ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η ένταξη των παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία. Υπάρχει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από το ζήτημα των παιχνιδιών. Στην ερώτηση «*Ποια είναι τα οφέλη από την ένταξη των παιχνιδιών στα μαθηματικά*;» μπορούν να δοθούν πολλές απαντήσεις ανάλογα με την οπτική του εκάστοτε ερευνητή. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ο Dienes (1963, αναφορά στη Bragg, 2006) υποστηρίζει ότι τα παιχνίδια θεωρούνται παιδαγωγικό εργαλείο το οποίο προάγει τη δημιουργία ενός θετικού περιβάλλοντος μάθησης. Επίσης, η Bragg (2007) προσθέτει ότι βελτιώνουν τη στάση που έχουν οι μαθητές απέναντι στα μαθηματικά. Ο Gerdes (2001) διατυπώνει την άποψη ότι με τα παιχνίδια προάγεται η μάθηση, μέσα από την εξάσκηση των μαθητών, ενώ οι Nisbet & Williams (2009) αναφέρουν ότι με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και ενισχύονται τα κίνητρά τους. Ανάμεσα στα άλλα, οι Kamii & Rummelsburg (2008) αναφέρονται στην ενίσχυση της λογικο – μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

Αυτές οι θετικές επιπτώσεις της ένταξης των παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία, έχουν καταγραφεί και στην περίπτωση της διδασκαλίας των κλασμάτων. Όπως είδαμε και στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας μας, τα παιχνίδια εντάσσονται είτε ως μεμονωμένες παρεμβάσεις (βλ. κεφάλαιο 2.9), είτε ως κομμάτι μιας συνολικής παρέμβασης, με στόχο την ένταξη της τεχνολογίας στην καθημερινότητα της τάξης των μαθηματικών (βλ. κεφάλαιο 2.2). Όπως αναφέρουν οι συγκεκριμένοι ερευνητές, αυτές οι παιγνιώδεις δραστηριότητες κάνουν τη μάθηση ευχάριστη και μη επικριτική δραστηριότητα (Liang & Zhou, 2009) (βλ. κεφάλαιο 2.2). Επιπλέον, το γραφικό περιβάλλον κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών (Lee, 2009) (βλ. κεφάλαιο 2.9). Ακόμη, όπως αναφέρεται από τον Gundas (2014) (βλ. κεφάλαιο 2.6), η ύπαρξη μιας ιστορίας, η οποία λειτουργεί ως πλαίσιο, κάνει τους μαθητές να προσπαθούν να απαντήσουν στις μαθηματικές δραστηριότητες, καθώς θέλουν να βοηθήσουν τον ήρωα να φτάσει στον στόχο του.

Είναι γεγονός ότι πολλοί εκπαιδευτικοί εντάσσουν τα παιχνίδια ως μέρος του μαθήματος των μαθηματικών. Ένα παιχνίδι μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους μέσα στο μάθημα. Για παράδειγμα, μπορεί να αποτελέσει εισαγωγική δραστηριότητα – αφόρμηση, επιβράβευση των μαθητών (Bragg, 2006), μεταμφιεσμένη – παραλλαγμένη δραστηριότητα εξάσκησης (disguising drill and practice)(Lim-Teo, 1991). Λιγότερο συχνά συναντάμε παιχνίδια που χρησιμοποιούνται έναντι της παραδοσιακής διδασκαλίας ή ως αφορμή για συζήτηση και προβληματισμό πάνω σε μια έννοια (Swan & Marshall, 2009). Οι Swan & Marshall (2009) προσθέτουν ότι, σε σπάνιες περιπτώσεις, ένα παιχνίδι μπορεί να διδάσκεται συστηματικά από τον εκπαιδευτικό, με στόχο την ουσιαστική μαθηματική μάθηση μέσα τις επαναλαμβανόμενες εμπειρίες των μαθητών.

Το παιχνίδι που φτιάξαμε εμείς έχει ως στόχο να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτική πρόταση έναντι των παραδοσιακών ασκήσεων εξάσκησης που δίνει ο εκπαιδευτικός στα παιδιά για το σπίτι. Άλλωστε, όπως αναφέρεται και από τους Liang & Zhou (2009) (βλ. κεφάλαιο 2.2), οι υπολογιστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συμπληρωματικό εργαλείο για τη μάθηση εκτός της τάξης. Βέβαια, σε εκείνη την περίπτωση οι μαθητές κατέφευγαν στο εργαστήριο του σχολείου για να εργαστούν πάνω στις ηλεκτρονικές δραστηριότητες. Εμείς δεν προτείνουμε κάτι τέτοιο, δεδομένου του γεγονότος ότι τα περισσότερα σχολεία είτε δε διαθέτουν εργαστήριο υπολογιστών, είτε το εργαστήριο έχει περιορισμένο αριθμό μηχανημάτων και έτσι δεν είναι δυνατό να εργαστεί ο κάθε μαθητής μόνος του. Με βάση αυτό το δεδομένο, σκεφτήκαμε ότι, αφού σχεδόν σε κάθε σπίτι υπάρχει κάποιος υπολογιστής, θα ήταν πιο εύκολο να δοθεί το παιχνίδι μας ως εναλλακτική της δουλειάς που κάνουν οι μαθητές στο σπίτι.

Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων

Στο πρόγραμμα που κατασκευάσαμε ασχοληθήκαμε με τα κλάσματα και τις δυσκολίες των μαθητών σε αυτά. Πιο συγκεκριμένα, το ενδιαφέρον μας επικεντρώθηκε στο ζήτημα των πολλαπλών αναπαραστάσεων των κλασμάτων και στον τρόπο διασύνδεσής τους.

Στο 1ο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάστηκε ο ρητός αριθμός ως μια πολυδιάστατη έννοια, η οποία περιλαμβάνει την αντίληψη του ρητού ως μέρος ενός όλου, ως πηλίκου, ως λόγου, ως μέτρησης και ως τελεστή. Για να κατανοήσει κάποιος τους ρητούς αριθμούς, θα πρέπει να είναι σε θέση να αναπτύξει όλες τις παραπάνω ερμηνείες, να μπορεί να τις αναγνωρίζει, να τις συνδέει μεταξύ τους και να τις διαχειρίζεται αποτελεσματικά (Behr et al., 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Vergnaud, 1983, αναφορές στον Behr et al., 1993).

Για την κατανόηση από τους μαθητές των διαφορετικών αναπαραστάσεων των κλασμάτων, χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας διαφορετικά μοντέλα. Ο Van de Walle (2007) σημειώνει τρεις συνήθεις κατηγορίες: μοντέλα περιοχής ή εμβαδού, μοντέλα συνόλων και μοντέλα μήκους ή μέτρησης. Οι ερευνητές επισημαίνουν ότι είναι ιδιαίτερα κρίσιμο το να αλληλεπιδρούν οι μαθητές με μοντέλα και από τις τρεις κατηγορίες και να μην προσκολλώνται στη χρήση ενός μόνο μοντέλου, κάτι που δυστυχώς παρατηρείται συχνά στην πράξη. Η χρήση πολλαπλών μοντέλων, τα οποία διαφέρουν στα αντιληπτικά (perceptual) τους χαρακτηριστικά, θα αναγκάσει τους μαθητές να ξανασκέφτονται συνεχώς την έννοια του κλάσματος και τελικά να τη γενικεύουν (Dienes, 1979, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010).

Η σημασία της επαφής και της αλληλεπίδρασης με μοντέλα και των τριών κατηγοριών μας οδήγησε να τα συμπεριλάβουμε όλα στο παιχνίδι. Ο στόχος είναι ο μαθητής να κατανοήσει πως όλες οι διαφορετικές αναπαραστάσεις συνδέονται μεταξύ τους, αλλά και με τη συμβολική μορφή του κλάσματος. Έτσι, χρησιμοποιήθηκαν μοντέλα και των τριών κατηγοριών (περιοχής, συνόλων, μήκους) και επιπλέον, συμπεριλάβαμε στις διαφορετικές αναπαραστάσεις τη λεκτική εκφορά και τη δεκαδική μορφή του κλάσματος.

Μέχρι στιγμής, η πιο συστηματική έρευνα πάνω στη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων του κλάσματος σε συνδυασμό με την τεχνολογία είναι αυτή της Rau (2013). Η Rau (2013) κατασκεύασε ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα (Fractions Tutor) για να ενισχύσει τη μάθηση των μαθητών στα κλάσματα με στόχο αυτό να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο μάθησης μέσα στην τάξη. Η εφαρμογή περιλαμβάνει διαδραστικές αναπαραστάσεις για τα κλάσματα (πίτα, ορθογώνιο, αριθμογραμμή, στοίβα και σύνολο διακριτών αντικειμένων), ενσωματωμένες σε προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν από τον μαθητή. Στο πρόγραμμα, οι μαθητές χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις για να επιλύσουν προβλήματα. Η διαφορά του Fractions Tutor σε σχέση με άλλα προγράμματα για κλάσματα είναι ότι υποστηρίζει την εννοιολογική μάθηση μέσα από τις πολλαπλές διαδραστικές γραφικές αναπαραστάσεις. Οι Rau et al. (2009) (βλ. κεφάλαιο 2.10) προχώρησαν σε σύγκριση της επίλυσης ασκήσεων με μία αναπαράσταση (αριθμογραμμή) έναντι πολλών σε ηλεκτρονικό περιβάλλον και έδειξαν την υπεροχή των πολλαπλών αναπαραστάσεων, όταν οι μαθητές καλούνται με ενεργό τρόπο να εξηγήσουν τις αποφάσεις τους.

Το Fractions Tutor παρουσιάζει κάποια κοινά στοιχεία και αρκετές διαφορές με το παιχνίδι «Το κάστρο των κλασμάτων». Η βασική ομοιότητα των δύο προγραμμάτων είναι η αναγνώριση ότι η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων του κλάσματος μπορεί να ενισχύσει την εννοιολογική και σε βάθος κατανόηση της έννοιας. Και στις δύο περιπτώσεις κατανοείται η ανάγκη αλληλεπίδρασης των μαθητών με πολλαπλές αναπαραστάσεις του κλάσματος και αυτό ήταν η αφετηρία της για τη δημιουργία των προγραμμάτων. Σε εκείνη την περίπτωση όμως, το πρόγραμμα προορίζεται για χρήση στην τάξη υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού για να βοηθά και να υποστηρίζει τους μαθητές, ενώ το «Κάστρο των Κλασμάτων» προορίζεται για το σπίτι, για την εξάσκηση των μαθητών. Επίσης, το Fractions Tutor είναι ένα πρόγραμμα αποπλαισιωμένο που παρουσιάζει προβλήματα στον μαθητή που πρέπει να επιλυθούν με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων. Με αυτή την έννοια μοιάζει με το παραδοσιακό μάθημα σε ηλεκτρονική μορφή. Έχει παραδοσιακού τύπου ασκήσεις, ενώ στη δική μας περίπτωση υπάρχει μια ιστορία που λειτουργεί ως πλαίσιο για να κάνει τις δραστηριότητες για τα κλάσματα πιο προσιτές για τα παιδιά και να νιώθουν ότι έχουν έναν στόχο – κίνητρο για να τις ολοκληρώσουν.

Συνοψίζοντας, ο στόχος του παιχνιδιού που δημιουργήσαμε είναι να βοηθήσουμε τους μαθητές να εμβαθύνουν τις γνώσεις τους για τα κλάσματα, καθώς θα εξασκούνται στις βασικές αναπαραστάσεις τους. Μέσα από την αλληλεπίδραση με τα διαφορετικά μοντέλα ρητών που υπάρχουν στο παιχνίδι να μπορέσουν να συνειδητοποιήσουν την πολυδιάστατη έννοια του κλάσματος και να συνδέσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του. Πιο συγκεκριμένα, σε σχέση με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις ενός κλάσματος, θέλουμε οι μαθητές μετά το παιχνίδι να είναι σε θέση να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους ώστε:

1. Να μετασχηματίζουν ένα κλάσμα στον ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό.
2. Να τοποθετούν ένα κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή.
3. Να συνδέουν ένα κλάσμα με την αντίστοιχη λεκτική έκφραση.

4. Να κατανοούν την έννοια του κλάσματος ως μέρος – όλου μέσα από συνεχείς και διακριτές αναπαραστάσεις.

Αλλαγή στάσης απέναντι στα μαθηματικά

Μια σημαντική οπτική της μάθησης, η στάση των μαθητών απέναντι στα κλάσματα, αλλά και στα μαθηματικά γενικότερα, είναι κάτι το οποίο λάβαμε υπόψη μας για την κατασκευή του παιχνιδιού.

Στη δική μας περίπτωση, θεωρήσαμε ότι ένα παιχνίδι το οποίο περιλαμβάνει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων θα ήταν πιο ευχάριστο για τους μαθητές από τις παραδοσιακές ασκήσεις. Επίσης, μας ενδιέφερε να βοηθήσουμε τους μαθητές, έστω και σε μικρό βαθμό λόγω της έκτασης του παιχνιδιού, να μάθουν να αντιμετωπίζουν τα κλάσματα με θετικότερη στάση.

Λάθη μαθητών

Κατά τη σχεδίαση του προγράμματος είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι λάβαμε υπόψη μας κάποια από τα συχνά λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν τα μοντέλα. Ο στόχος μας ήταν να τους παράσχουμε την απαραίτητη ανατροφοδότηση, ώστε να τους βοηθήσουμε να τα κατανοήσουν και να τα διορθώσουν. Ενδεικτικά, στο Mathematics Navigator: A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2-8) (2015) αναφέρονται λάθη των μαθητών στη μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, όπως π.χ. ότι θεωρούν ότι ισχύει $\frac{1}{3}$=1,3 ή $\frac{1}{3}$=0,3. Στις συνεχείς αναπαραστάσεις, γράφουν ένα κλάσμα ως μέρος/ μέρος αντί όλο προς μέρος, π.χ. αν έχουν ένα ορθογώνιο χωρισμένο σε 8 κομμάτια και είναι βαμμένα τα 3, γράφουν $\frac{3}{5}$ αντί για $\frac{3}{8}$. Περισσότερα λάθη παρατηρούνται στη χρήση της αριθμογραμμής. Ο Hannula (2003) αναφέρει ότι οι μαθητές τοποθετούν ένα κλάσμα όπως το $\frac{3}{9}$ κοντά στον ακέραιο που αντιστοιχεί στον αριθμητή ή στον παρονομαστή, δηλ. κοντά στο 3 ή στο 9. Επίσης, αναζητούν το κλάσμα θεωρώντας ότι ολόκληρη η αριθμογραμμή αποτελεί το όλο και όχι μόνο το τμήμα από το 0 μέχρι το 1. Ο ερευνητής διαπιστώνει ότι κάποιοι μαθητές δεν θεωρούν το κλάσμα αριθμό, οπότε πιστεύουν ότι δεν μπορούν να το τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή ενώ μερικοί, για να εντοπίσουν το κλάσμα, ξεκινούν να μετρούν από το 1 αντί από το 0. Για μια πιο ολοκληρωμένη ανάλυση γύρω από τα λάθη των μαθητών στα κλάσματα, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο κεφάλαιο 1.4.

Σε γενικές γραμμές, επισημαίνεται ότι οι μαθητές δεν πρέπει να περιορίζουν τον ορισμό που οι ίδιοι έχουν διαμορφώσει για τα κλάσματα σε ένα μόνο μοντέλο. Σε μια τέτοια περίπτωση, θα δυσκολευτούν να αναγνωρίσουν το κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό ή ως σημείο πάνω στην αριθμογραμμή. Το πρόγραμμά μας λοιπόν στοχεύει ακριβώς στο να υπενθυμίσει στους μαθητές τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και να τους βοηθήσει να αναγνωρίσουν το κλάσμα σε όλες τις μορφές που τους παρουσιάζεται.

Παροχή άμεσης ανατροφοδότησης

Ένα από τα θετικά στοιχεία στα οποία υπερέχει η χρήση των υπολογιστών έναντι των παραδοσιακών μεθόδων επίλυσης ασκήσεων είναι η δυνατότητα που υπάρχει για την παροχή άμεσης ανατροφοδότησης στον μαθητή. Όπως αναφέρεται από τους Nguyen & Kulm (2005) (βλ. κεφάλαιο 2.8), η ανατροφοδότηση είναι ένα σημαντικό εργαλείο που μπορεί να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει τα λάθη του την ώρα ακριβώς που τα κάνει και όχι μετά από αρκετό χρόνο, όταν πια η προσοχή του έχει στραφεί αλλού. Έτσι, ο μαθητής μπορεί να αναστοχαστεί πάνω στις λανθασμένες επιλογές του και να τις διορθώσει χωρίς να νιώσει ότι απειλείται ή ντρέπεται γι' αυτές (Liang & Zhou 2009) (βλ. κεφάλαιο 2.2). Αυτό οδηγεί σε αποτελεσματικότερη μάθηση και σε αποφυγή δημιουργίας αρνητικών συναισθημάτων.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, εισάγαμε κι εμείς στο παιχνίδι μας τη δυνατότητα ανατροφοδότησης σε περίπτωση που ο μαθητής κάνει κάποιο λάθος. Η ανατροφοδότηση σχετίζεται κάθε φορά με την αναπαράσταση στην οποία έχει κάνει λάθος ο μαθητής και μπορεί να έχει τη μορφή επεξήγησης – υπενθύμισης της σχετικής θεωρίας για τα κλάσματα ή τη μορφή παραδείγματος. Αμέσως μετά, ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να προσπαθήσει ξανά να απαντήσει στην ερώτηση στην οποία έκανε λάθος και να δοκιμάσει εκ νέου την κατανόησή του.

Παρακάτω συνοψίζουμε τους στόχους του παιχνιδιού μας, όπως αυτοί προέκυψαν από τα παραπάνω:

Διδακτικοί στόχοι:

1. Εμβάθυνση των γνώσεων των μαθητών για τα κλάσματα και εξάσκηση στις βασικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων, τις οποίες έχουν διδαχθεί.
2. Συνειδητοποίηση και εμπέδωση της πολυδιάστατης έννοιας του κλάσματος και σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεών του.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές να είναι σε θέση να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους ώστε:

1. Να μετασχηματίζουν ένα κλάσμα στον ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό.
2. Να τοποθετούν ένα κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή.
3. Να συνδέουν ένα κλάσμα με την αντίστοιχη λεκτική έκφραση.
4. Να κατανοούν την έννοια του κλάσματος ως μέρος – όλου μέσα από συνεχείς και διακριτές αναπαραστάσεις.

Συναισθηματικοί στόχοι:

Απόκτηση θετικής στάσης απέναντι στα κλάσματα μέσα από ευχάριστες δραστηριότητες (χρήση της τεχνολογίας και του παιχνιδιού) που έχουν στόχο να αντικαταστήσουν τις κλασικές ασκήσεις.

4.2 Επιλογή του περιβάλλοντος Scratch

Για την υλοποίηση του παιχνιδιού, επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε το Scratch. Ο λόγος για την επιλογή αυτή είναι ότι το συγκεκριμένο προγραμματιστικό περιβάλλον επιτρέπει στον χρήστη – προγραμματιστή να δημιουργήσει εφαρμογές οι οποίες είναι διαδραστικές και πολυμεσικές. Όπως υποδηλώνει και το όνομά του, το Scratch βασίζεται στην ιδέα της αλλαγής – συνδυασμού (tinker), αφού προέρχεται από την τεχνική που χρησιμοποιούν οι dj της μουσικής χιπ χοπ, οι οποίοι κουνούν με τα χέρια τους διαφορετικούς μουσικούς δίσκους μπρος – πίσω, με στόχο να αλλάξουν τη μουσική και να δημιουργήσουν πρωτότυπα μουσικά κομμάτια. Έτσι και το Scratch είναι ένα προγραμματιστικό περιβάλλον στο οποίο μπορεί κανείς εύκολα να συνδυάσει γραφικά, κίνηση, φωτογραφίες, μουσική και ήχο και να δημιουργήσει πολυμεσικές εφαρμογές (Resnick et al., 2009).

Επιπλέον, το περιβάλλον αυτό προσφέρεται δωρεάν, κάτι που ήταν πολύ σημαντικό. Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ένα από τα βασικά ζητήματα που πρέπει να λάβει υπόψη του ένας εκπαιδευτικός, προτού επιλέξει ένα πρόγραμμα για να το εντάξει στο μάθημά του, είναι η διαθεσιμότητά του. Το Scratch είναι ένα περιβάλλον το οποίο μπορεί να κατεβάσει και να εγκαταστήσει κανείς εύκολα σε οποιονδήποτε υπολογιστή. Ακόμη, το γεγονός ότι ο κώδικας ενός προγράμματος στο Scratch είναι προσβάσιμος από όλους τους χρήστες, δίνει τη δυνατότητα σε οποιονδήποτε εκπαιδευτικό έχει τη διάθεση, να τροποποιήσει παραμέτρους του προγράμματος και να το προσαρμόσει στις ανάγκες των μαθητών του. Επίσης, λάβαμε υπόψη μας το ότι το συγκεκριμένο περιβάλλον είναι οικείο για τους μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου, καθώς προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Πληροφορικής η γνωριμία των μαθητών αυτών των τάξεων με τον προγραμματισμό και πιο συγκεκριμένα και με το Scratch, ανάμεσα σε άλλα προγράμματα.

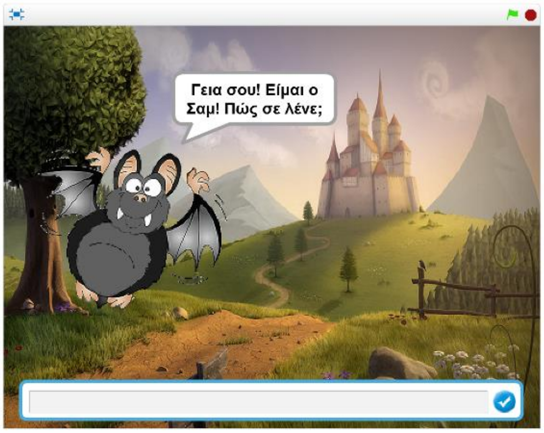
Τέλος, το γεγονός ότι το Scratch είναι ένα περιβάλλον το οποίο παρέχει ένα κοινωνικό πλαίσιο για τους χρήστες του, μέσα στο οποίο μπορούν να λαμβάνουν ανατροφοδότηση και σχόλια για τα προγράμματά τους, αλλά και να μαθαίνουν από τα προγράμματα των άλλων (Maloney et al, 2010), αποτέλεσε ένα ακόμη πλεονέκτημα για την επιλογή του. Είναι χαρακτηριστικό ότι από τη στιγμή δημιουργίας της ιστοσελίδας του, οι πάνω από 120.000 χρήστες του Scratch ανά τον κόσμο έχουν δημιουργήσει και κοινοποιήσει πάνω από ένα εκατομμύριο προγράμματα. Υπολογίζεται μάλιστα ότι κάθε μέρα κοινοποιούνται κατά μέσο όρο 1.500 νέα προγράμματα (Maloney et al, 2010). Το να δημιουργήσουμε και να κοινοποιήσουμε ένα παιχνίδι σε ένα τόσο ευρύ κοινό, με την προσδοκία να γίνουμε αποδέκτες σχολίων, αλλά και ανατροφοδότησης ήταν για εμάς μια πρόκληση.

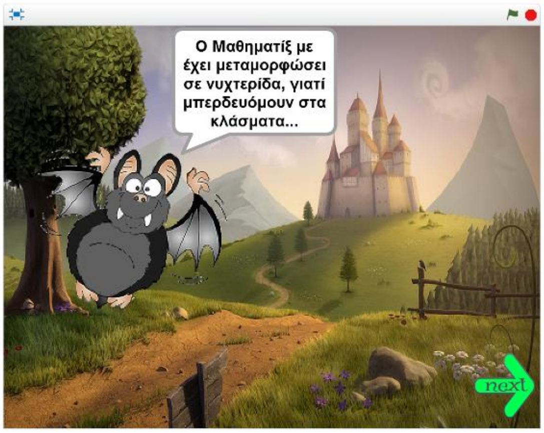
4.3 Περιγραφή παιχνιδιού

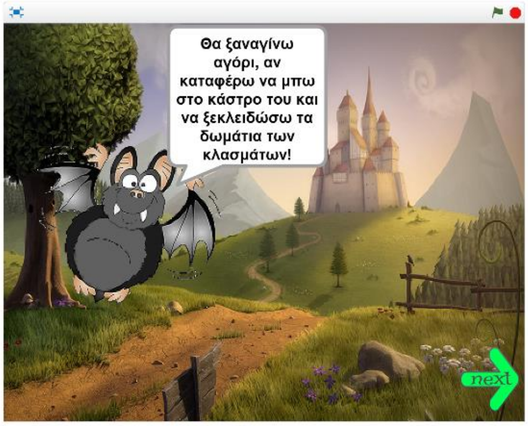
Η πλοήγηση στο πρόγραμμα σχεδιάστηκε ώστε να είναι όσο το δυνατό πιο απλή και κατανοητή από τους μαθητές. Η εκτέλεση της εφαρμογής ξεκινά, όπως σε όλα τα προγράμματα του περιβάλλοντος Scratch, με το πάτημα της πράσινης σημαίας από τον χρήστη. Εμφανίζεται τότε η εισαγωγική οθόνη, η οποία εξηγεί στον χρήστη τι πρέπει να κάνει για να ξεκινήσει. Πιο συγκεκριμένα, κάνει την εμφάνισή του ο ήρωας της ιστορίας μας, ο Σαμ, ο οποίος εξηγεί στον χρήστη ότι πρέπει να πατήσει το κουμπί Start για να ξεκινήσει το παιχνίδι. Επίσης, υπάρχει και η επιλογή Skip για όποιον έχει ήδη δει την ιστορία του Σαμ και θέλει να ξεκινήσει απευθείας το παιχνίδι.

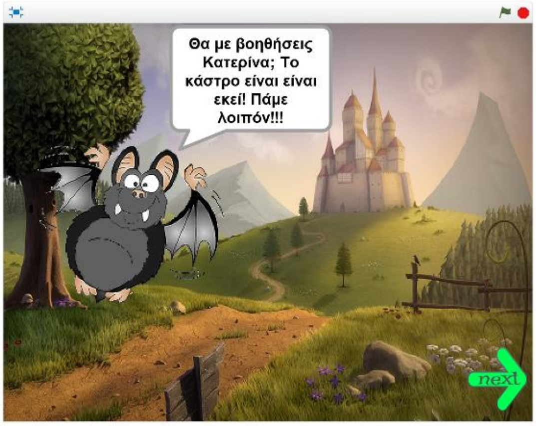
Το κουμπί Skip έχει τοποθετηθεί με στόχο να αποφευχθεί η πιθανόν ανιαρή επανάληψη της ιστορίας για κάποιον χρήστη που έχει ξαναπαίξει το παιχνίδι.

Πατώντας το κουμπί Start, ο χρήστης ξεκινά το παιχνίδι κάνοντας τη γνωριμία με τον βασικό χαρακτήρα του παιχνιδιού, τον Σαμ. Στις οθόνες που ακολουθούν, ο Σαμ συστήνεται στον μαθητή, ζητά και από εκείνον να του συστηθεί και του λέει την ιστορία του. Πρόκειται για ένα αγόρι, το οποίο έχει μεταμορφωθεί σε νυχτερίδα από τον μάγο Μαθηματίξ, ως τιμωρία, γιατί δεν τα κατάφερνε στα κλάσματα. Ο Σαμ, λοιπόν, ζητά τη βοήθεια του μαθητή, ώστε να μπουν μαζί στο κάστρο και να περάσουν τις δοκιμασίες του Μαθηματίξ, για να μπορέσει ο Σαμ να τον πείσει να τον μεταμορφώσει και πάλι σε αγόρι. Με στόχο να έχει χρόνο ο μαθητής να διαβάσει τα λόγια του Σαμ και να επεξεργαστεί το σκηνικό της ιστορίας, τοποθετήθηκε στην κάτω δεξιά γωνία της οθόνης ένα βέλος, το οποίο ο μαθητής πρέπει να πατήσει για να συνεχίσει ο Σαμ να μιλά.









Στη συνέχεια, μεταφερόμαστε στην είσοδο του κάστρου, όπου κάνει την εμφάνισή του και μας συστήνεται ο μάγος Μαθηματίξ. Για να μπούμε στο κάστρο και να ξεκινήσουν οι δοκιμασίες, ο μαθητής πρέπει να δώσει το σύνθημα και το παρασύνθημα στον μάγο. Ο Σαμ εμφανίζεται εδώ για να βοηθήσει τον χρήστη, κάτι που θα κάνει σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού. Εξηγεί ότι το σύνθημα που περιμένει ο Μαθηματίξ είναι ο αριθμητής του κλάσματος, το οποίο θα αποτελέσει το αντικείμενο των δοκιμασιών, και το παρασύνθημα είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Όπως φαίνεται στην παρακάτω αριστερή εικόνα, ο χρήστης μπορεί να επιλέξει ως αριθμητή για το κλάσμα έναν αριθμό από 0 – 10. Αυτός ο περιορισμός υπενθυμίζεται στον χρήστη σε περίπτωση που πληκτρολογήσει κάποιον αριθμό εκτός των επιτρεπόμενων ορίων και τότε του ζητείται να επανεισάγει τον αριθμητή (δεξιά εικόνα).

Αφού ο παίκτης δώσει τον αριθμητή, στη συνέχεια πρέπει να δώσει τον παρονομαστή του κλάσματος, ο οποίος θα πρέπει να είναι από 1-10 και ταυτόχρονα μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμητή (γνήσια κλάσματα). Καθώς υπάρχει ο περιορισμός ότι ο $αριθμητής \leq παρονομαστή$, στο μήνυμα του Σαμ αλλάζει κάθε φορά το εύρος των τιμών που μπορούν να αποτελέσουν τον παρονομαστή, με βάση τον αριθμητή που έχει δώσει προηγουμένως ο μαθητής. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εικόνα ο χρήστης έδωσε ως αριθμητή τον αριθμό 4, οπότε ο Σαμ τον ενημερώνει ότι ο παρονομαστής θα πρέπει να είναι ένας αριθμός από το 4 μέχρι το 10.

Και πάλι, σε περίπτωση λάθους, ο Σαμ ενημερώνει τον χρήστη για το εύρος των αριθμών από τους οποίους μπορεί να επιλέξει αυτόν που επιθυμεί ως παρονομαστή.

Μετά την επιτυχή εισαγωγή των όρων του κλάσματος, μεταφερόμαστε στην κεντρική οθόνη, στο εσωτερικό του κάστρου. Στο πάνω μέρος της οθόνης, σε έναν σχηματισμό ασπίδων, ο μαθητής βλέπει το κλάσμα το οποίο έχει εισάγει και με το οποίο παίζει το παιχνίδι. Επίσης, παρουσιάζεται ο Σαμ, ο οποίος και πάλι ως βοηθός καθοδηγεί τον χρήστη να επιλέξει μια από τις πέντε πόρτες που υπάρχουν. Περνώντας με το ποντίκι πάνω από την πόρτα, αυτή αλλάζει χρώμα (χρησιμοποιήθηκε το εφέ χρώματος του Scratch). Πάνω σε κάθε πόρτα υπάρχει και μια φράση η οποία υποδεικνύει το περιεχόμενο της πόρτας, δηλ. ο γρίφος που θα κληθεί ο χρήστης να απαντήσει μέσα σε κάθε δωμάτιο του κάστρου σχετίζεται με την αναπαράσταση που αναγράφεται πάνω στην αντίστοιχη πόρτα. Έτσι, έχουμε τις φράσεις: με βόλους (διακριτή αναπαράσταση), με σχήμα (συνεχής αναπαράσταση), με γραμμή (αριθμογραμμή), με λόγια (λεκτική αναπαράσταση), με δεκαδικό.

Πατώντας πάνω σε μια πόρτα, ο χρήστης μεταφέρεται στο αντίστοιχο δωμάτιο. Όλα τα δωμάτια έχουν σχεδιαστεί με παρόμοιο τρόπο, ώστε να διευκολύνεται η πλοήγηση του χρήστη. Όπως βλέπουμε και στην παρακάτω εικόνα, σε κάθε δωμάτιο ο μαθητής θα συναντήσει έναν διαφορετικό μικρό μάγο – βοηθό του Μαθηματίξ, ο οποίος ζητά από τον χρήστη να απαντήσει σε έναν γρίφο. Ο χρήστης μπορεί να μπει και να βγει από τα δωμάτια πατώντας το κουμπί Έξοδος, που βρίσκεται στην πάνω αριστερή γωνία της οθόνης. Έχει, λοιπόν, την ελευθερία να επισκεφτεί τα δωμάτια και να απαντήσει στους γρίφους με όποια σειρά αυτός επιθυμεί. Ωστόσο, πρέπει να απαντήσει σωστά σε όλες τις ερωτήσεις για να κερδίσει το παιχνίδι. Ακόμη, στην επάνω δεξιά γωνία του δωματίου εμφανίζεται ένας μικρός πίνακας ο οποίος του υπενθυμίζει το κλάσμα με το οποίο παίζει.

Στην πάνω αριστερή γωνία της οθόνης φαίνονται συνεχώς δύο καρδιές που αντιστοιχούν στις ζωές του χρήστη. Κάθε φορά που κάνει ένα λάθος, χάνει μια ζωή και μια από τις καρδιές αλλάζει χρώμα (από κόκκινη γίνεται γκρι). Έτσι, ο χρήστης μπορεί να κάνει λάθος δύο φορές και να συνεχίσει το παιχνίδι του κανονικά. Αν όμως κάνει και τρίτο λάθος, τότε το παιχνίδι τελειώνει και πρέπει να ξεκινήσει από την αρχή, επιλέγοντας το ίδιο ή και διαφορετικό κλάσμα αυτή τη φορά. Στο τέλος του παιχνιδιού ο Σαμ ενημερώνει τον χρήστη σε πόσες από τις ερωτήσεις έχει απαντήσει σωστά.

Κάθε φορά που ο χρήστης απαντά σωστά σε κάποιον γρίφο, βγαίνει αυτόματα από το δωμάτιο και μεταφέρεται και πάλι στην κεντρική οθόνη του κάστρου. Εκεί, αυτή τη φορά δεν μπορεί να κάνει κλικ πάνω στην πόρτα των δωματίων που έχει ήδη επισκεφτεί με επιτυχία, καθώς μπροστά στην πόρτα βρίσκεται ο μικρός μάγος του αντίστοιχου δωματίου. Για παράδειγμα, στην παρακάτω οθόνη ο χρήστης δεν μπορεί να πατήσει πάνω στις δύο πόρτες κάτω αριστερά και αυτό σημαίνει ότι αυτά τα δωμάτια τα έχει ήδη περάσει. Μπορεί να πάει σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες τρεις πόρτες επιθυμεί.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στην περίπτωση λάθους, εμφανίζεται μια οθόνη ανατροφοδότησης, όπου ο Σαμ δίνει πληροφορίες και εξηγήσεις για τη συγκεκριμένη αναπαράσταση, ώστε να βοηθηθεί ο μαθητής όταν ξαναπροσπαθήσει να απαντήσει στον γρίφο. Σε κάθε δωμάτιο υπάρχει διαφορετικό μήνυμα ανατροφοδότησης, το οποίο σχετίζεται με τον αντίστοιχο γρίφο. Για παράδειγμα, μια από τις οθόνες αυτές είναι η παρακάτω:

Έτσι ο μαθητής μπορεί να διαβάσει αυτό που του λέει ο Σαμ και πατώντας το κουμπί OK να επανέλθει στο δωμάτιο για να προσπαθήσει να απαντήσει στην ερώτηση από την αρχή.

<u>Δωμάτια</u>

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα πέντε δωμάτια του παιχνιδιού με τους αντίστοιχους γρίφους.

1^{o} δωμάτιο: Με βόλους (Διακριτή αναπαράσταση κλάσματος)

Στο πρώτο δωμάτιο, ο μαθητής καλείται να επιλέξει τον σάκο που αντιστοιχεί στο κλάσμα, πατώντας στο αντίστοιχο κουμπί που βρίσκεται κάτω από αυτόν. Ο συνολικός αριθμός των βόλων του κάθε σάκου αντιστοιχεί στον παρονομαστή του κλάσματος, ενώ ο αριθμός των βαμμένων βόλων αντιστοιχεί στον αριθμητή. Εμφανίζονται συνολικά τρείς επιλογές:

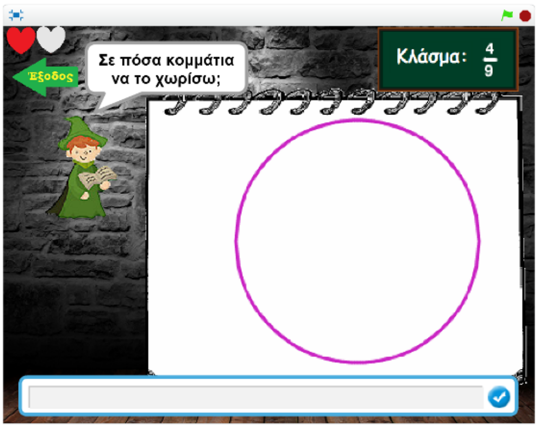
1. Η μία αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση (στο παρακάτω σχήμα είναι ο τρίτος σάκος).
2. Η δεύτερη εμφανίζει το κλάσμα *(αριθμητής + παρονομαστής)/(αριθμητής + παρονομαστής)* (στην παρακάτω εικόνα είναι ο πρώτος σάκος).
3. Η τρίτη εμφανίζει το κλάσμα *(αριθμητής + τυχαίος αριθμός)/(αριθμητής + παρονομαστής)* (στην εικόνα είναι ο δεύτερος σάκος). Ο τυχαίος αριθμός είναι ένας αριθμός μεταξύ του 1 και του αριθμού που ισούται με τον (*παρονομαστή-1*), ώστε να αποφευχθεί η πιθανότητα να τυπωθούν δύο ίδιοι σάκοι.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σειρά παρουσίασης των επιλογών είναι τυχαία. Αυτό έγινε ώστε, όταν ο μαθητής παίξει το παιχνίδι αρκετές φορές, να μην γνωρίζει εκ των προτέρων σε ποια θέση βρίσκεται η σωστή απάντηση. Έτσι, κάθε φορά θα πρέπει να σκέφτεται για να εντοπίσει τον σάκο που αντιστοιχεί στο κλάσμα με το οποίο παίζει.

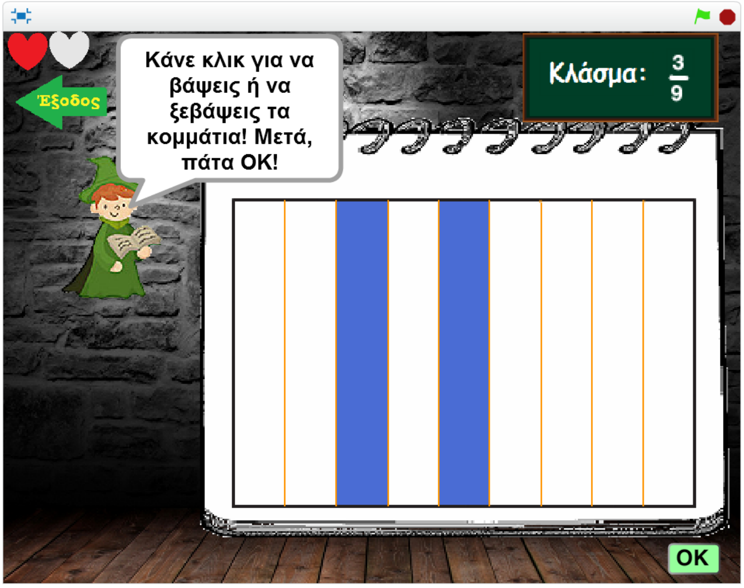
Σε περίπτωση λάθους, εμφανίζεται η παρακάτω οθόνη ανατροφοδότησης:

2ο δωμάτιο: Με σχήμα (Συνεχής αναπαράσταση κλάσματος)

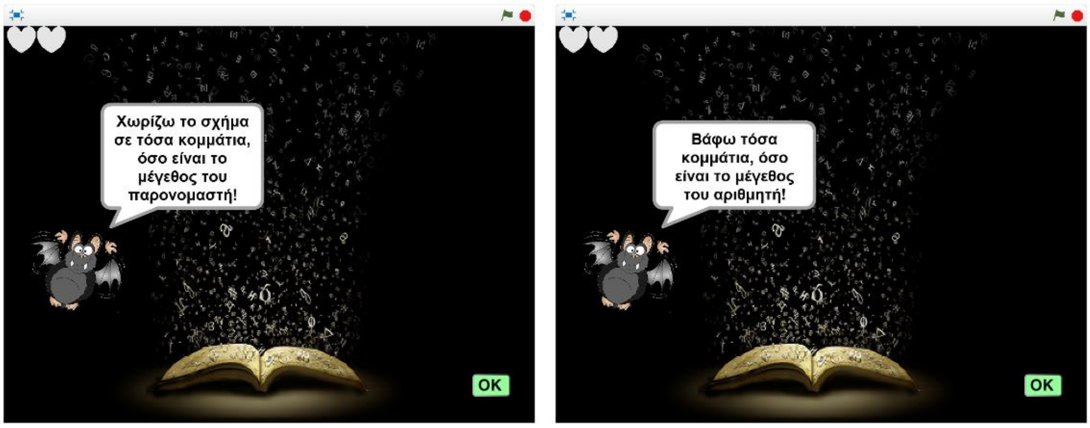
Στο δεύτερο δωμάτιο, εμφανίζεται ένα μεγάλο τετράδιο και σχεδιάζεται τυχαία ένα σχήμα (κύκλος ή ορθογώνιο). Αρχικά, ο μικρός μάγος ρωτά τον χρήστη σε πόσα κομμάτια πρέπει να χωριστεί το σχήμα (παρονομαστής).



Εφόσον ο χρήστης απαντήσει σωστά, το πρόγραμμα χωρίζει το σχήμα σε αντίστοιχο αριθμό κομματιών και στη συνέχεια του ζητά να βάψει τα κομμάτια κάνοντας κλικ πάνω τους. Σε περίπτωση που βάψει παραπάνω κομμάτια από όσα χρειάζεται, ο χρήστης μπορεί να κάνει κλικ πάνω σε κάποιο από τα βαμμένα κομμάτια και να το ξεβάψει. Μόλις ολοκληρώσει αυτή τη διαδικασία και για να ελέγξει την απάντησή του, αρκεί να πατήσει το κουμπί OK στην κάτω δεξιά γωνία της οθόνης.



Και πάλι δίνεται ανατροφοδότηση στον μαθητή σε περίπτωση λάθους. Μάλιστα, το μήνυμα είναι διαφορετικό, ανάλογα με το αν έχει δώσει λάθος απάντηση για το μέγεθος του αριθμητή ή του παρονομαστή.



Στα μηνύματα της ανατροφοδότησης λάβαμε υπόψη μας το γεγονός ότι συχνά οι μαθητές γράφουν ένα κλάσμα ως μέρος/μέρος αντί για μέρος/όλο (Mathematics Navigator, 2015). Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα, αντί να πουν ότι είναι γραμμοσκιασμένα τα $\frac{3}{8}$ του κύκλου, λένε ότι είναι τα $\frac{3}{5}$.

3^{o} δωμάτιο: Με γραμμή (Αριθμογραμμή)

Στο τρίτο δωμάτιο σχεδιάζεται η αριθμογραμμή και χωρίζεται σε κομμάτια ανάλογα με τον παρονομαστή που είχε δώσει αρχικά ο μαθητής. Εδώ, στόχος είναι να βρει σε ποιο σημείο της αριθμογραμμής πρέπει να τοποθετήσει το κλάσμα και να κάνει κλικ πάνω του. Μόλις ο μαθητής κάνει κλικ πάνω στη γραμμή, αυτή βάφεται με μοβ χρώμα από το 0 μέχρι το σημείο επιλογής και εφόσον η απάντηση είναι σωστή εμφανίζεται το ζητούμενο κλάσμα.

Η σχεδίαση της αριθμογραμμής έγινε με τέτοιον τρόπο ώστε να προβλεφτούν και να συμπεριληφθούν κάποιες από τις παρανοήσεις των μαθητών, με στόχο, αν υπάρχουν, να ξεπεραστούν με τη βοήθεια του παιχνιδιού. Έτσι, λάβαμε υπόψη μας την παρατήρηση του Hannula (2003), ο οποίος αναφέρει ότι κάποιοι μαθητές αναζητούν το κλάσμα θεωρώντας ότι ολόκληρη η αριθμογραμμή αποτελεί το όλο και όχι μόνο το τμήμα από το 0 μέχρι το 1, γι’ αυτό και η αριθμογραμμή στο πρόγραμμα έχει μήκος 2.

Επιπλέον όσον αφορά στην ανατροφοδότηση που δίνεται στον μαθητή σε περίπτωση λάθους, η αναφορά των Γαγάτσης κ.α. (2006) ότι συχνά οι μαθητές μετρούν τα σημεία και όχι τα διαστήματα, όταν προσπαθούν να εντοπίσουν τη θέση ενός κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή, μας έκανε να συμπεριλάβουμε αυτή την εξήγηση. Έτσι, αν ο μαθητής κάνει λάθος, του εμφανίζεται το παρακάτω μήνυμα:

4ο δωμάτιο: Με λόγια

Στο συγκεκριμένο δωμάτιο ο μαθητής πρέπει να επιλέξει τον σωστό τρόπο ανάγνωσης του κλάσματος ανάμεσα σε τέσσερις πιθανές απαντήσεις, οι οποίες σε κάθε περίπτωση είναι σχετικές με τον αριθμητή και τον παρονομαστή που έχει δώσει στην αρχή.

Σε γενικές γραμμές, χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες υλοποίησης, για την παραγωγή των τεσσάρων εναλλακτικών απαντήσεων, δημιουργήσαμε δύο λίστες. Η μία περιλαμβάνει τον τρόπο εκφοράς του αριθμητή και οι άλλη τον τρόπο εκφοράς του παρονομαστή. Έτσι, η πρώτη λίστα είχε τα εξής στοιχεία: μηδέν, ένα, δύο, …, δέκα (υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμητής είναι ένας ακέραιος αριθμός από το 0 μέχρι το 10). Αντίστοιχα, η δεύτερη λίστα έχει τα εξής στοιχεία: πρώτο(α), δεύτερο(α), …, δέκατο(α).

Για να εξηγήσουμε τις επιλογές που εμφανίζει το πρόγραμμα, κάνουμε την εξής σύμβαση: αν η λέξη που εμφανίζεται προέρχεται από τη λίστα των αριθμητών, τότε τη συμβολίζουμε με το γράμμα Α και χρησιμοποιούμε ως δείκτη το μέγεθος του αριθμητή. Για παράδειγμα, η λέξη *εννιά,* που ανήκει στη λίστα των αριθμητών, συμβολίζεται με το $Α_9$. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με Π μια λέξη που προέρχεται από τις λίστες των παρονομαστών. Έτσι, η λέξη *όγδοα*, που προέρχεται από τη λίστα των παρονομαστών, συμβολίζεται με το $Π_8$.

Για να γίνουν κατανοητές οι επιλογές που εμφανίζει το πρόγραμμα, θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα το κλάσμα $\frac{3}{9}$ που φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Οι τέσσερις επιλογές που θα εμφανίσει το πρόγραμμα σε αυτή την περίπτωση είναι $Α_3Α_9$, $Π_3Π_9$, $Α_3Π_9$ και $Α_9Π_3$. Προφανώς η σωστή απάντηση είναι το $Α_3Π_9$, δηλαδή η έκφραση «τρία ένατα». Όπως και στο δωμάτιο με τους βόλους, η σειρά εμφάνισης των επιλογών είναι τυχαία και αλλάζει κάθε φορά που ο χρήστης μπαίνει στο δωμάτιο.

Η ανατροφοδότηση στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνεται μέσα από ένα παράδειγμα:

5ο δωμάτιο: Με δεκαδικό

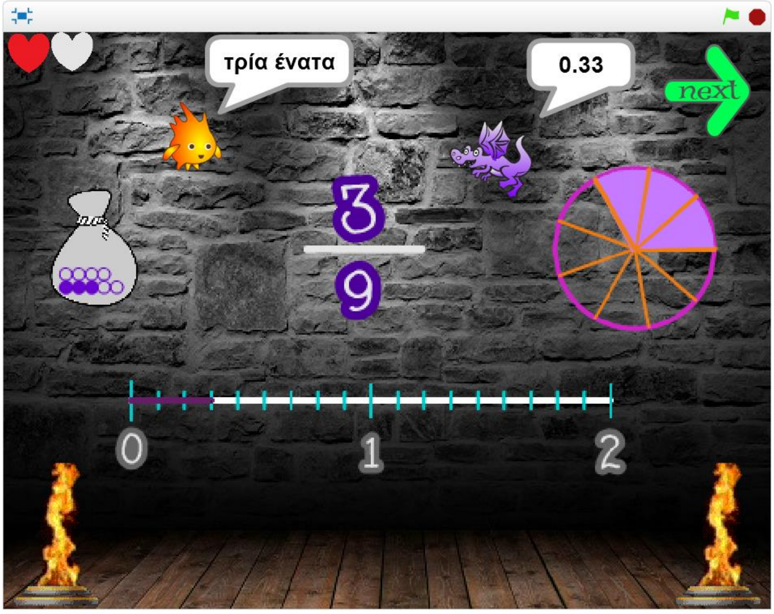
Στο τελευταίο δωμάτιο ο μαθητής πρέπει να συνδέσει το κλάσμα με τον δεκαδικό αριθμό που αυτό ισούται. Και σε αυτή την περίπτωση έχει στη διάθεσή του τέσσερις εναλλακτικές λύσεις, οι οποίες σχετίζονται με τους αρχικούς όρους του κλάσματος που έχει δώσει. Εδώ, στις εναλλακτικές προτάσεις που εμφανίζονται στον μαθητή, λάβαμε υπόψη μας και κάποια από τα πιο συχνά λάθη που γίνονται κατά τη μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό. Έτσι, στις επιλογές που δίνονται στον μαθητή υπάρχει και η μορφή *αριθμητής , παρονομαστής*, που είναι ένα από τα συχνά λάθη των μαθητών σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (McLeod & Newmarch, 2006). Επιπλέον, εκτός από τη σωστή απάντηση, εμφανίζεται το αποτέλεσμα της πράξης *παρονομαστής/αριθμητής* και η τέταρτη επιλογή είναι ένας τυχαίος δεκαδικός αριθμός. Και σε αυτή την περίπτωση οι επιλογές εμφανίζονται με τυχαία σειρά.

Σε περίπτωση λάθους, υπενθυμίζεται στον μαθητή τι πρέπει να κάνει για να φτάσει στον υπολογισμό του αποτελέσματος.

Τελική Σκηνή

Μόλις ο χρήστης ολοκληρώσει με επιτυχία και την τελευταία από τις πέντε δοκιμασίες, μεταφέρεται στην κεντρική οθόνη του κάστρου. Αυτή τη φορά έχει εμφανιστεί και μια νέα έκτη πόρτα την οποία παρακινείται από τον Σαμ να ανοίξει.

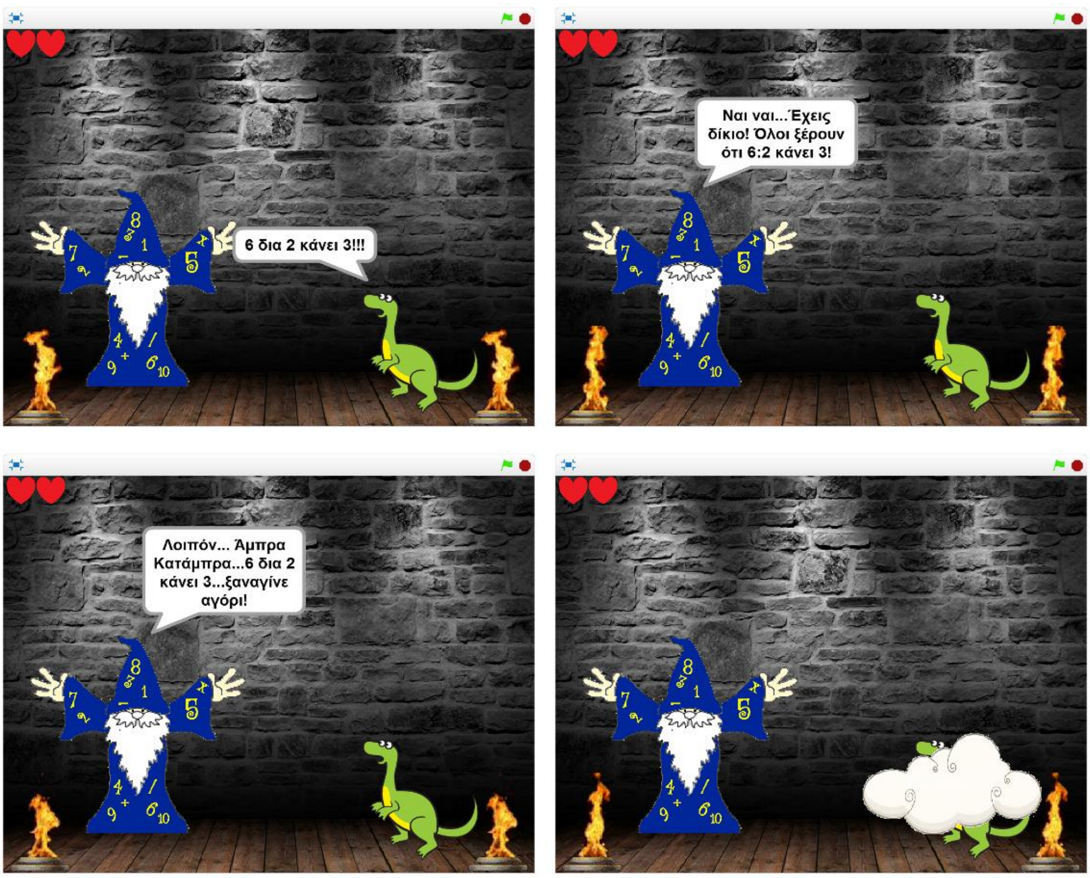
Μόλις ο χρήστης την επιλέξει, μεταφέρεται σε ένα ακόμη δωμάτιο του κάστρου, όπου αρχικά βλέπει διαδοχικά όλες τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που συνάντησε στο παιχνίδι να συνδέονται με το αρχικό κλάσμα. Ο στόχος εδώ είναι προφανής: επιδιώκεται να γίνει από τον μαθητή άμεσα η διασύνδεση της γνώσης που ουσιαστικά χρειάστηκε να χρησιμοποιήσει σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού, ότι δηλαδή οι διαφορετικές αναπαραστάσεις του κλάσματος είναι όλες ισοδύναμες μεταξύ τους.



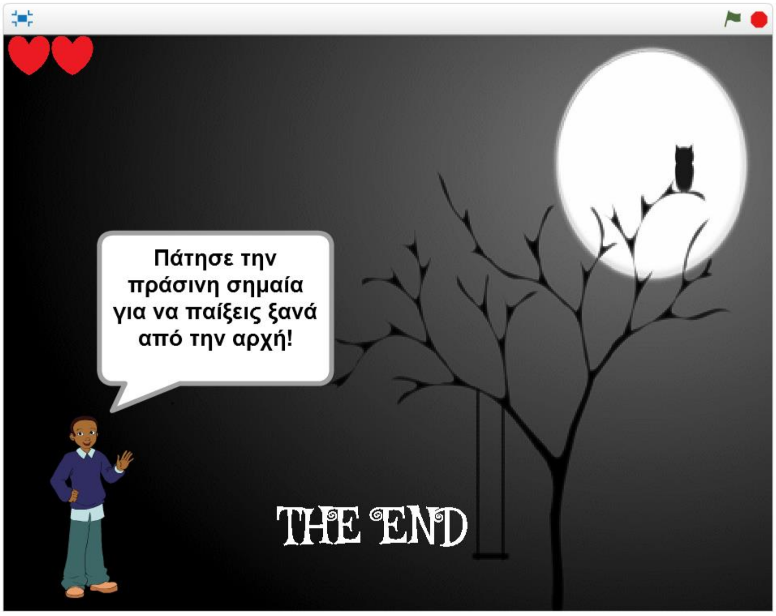
Τέλος, πατώντας το κουμπί Next ο χρήστης μεταφέρεται στην τελευταία οθόνη για να δει το τέλος της ιστορίας, δηλαδή τη μεταμόρφωση του Σαμ σε αγόρι.

Εδώ, ο Μαθηματίξ ξεκινά να κάνει τη μεταμόρφωση, αλλά κάνει ένα λάθος στο ξόρκι που λέει (το οποίο είναι ουσιαστικά ένα λάθος στη διαίρεση 6:2) και μεταμορφώνει αρχικά τον Σαμ σε σαύρα.

Στη συνέχεια, ο Σαμ, ως ειδικός πια στα μαθηματικά, διορθώνει τον Μαθηματίξ λέγοντάς του το σωστό αποτέλεσμα της πράξης κι έτσι γίνεται τελικά αγόρι, ενώ σκέφτεται ότι από δω και στο εξής πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός στα μαθηματικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι για τις μεταμορφώσεις του Σαμ χρησιμοποιήθηκε η εικόνα ενός σύννεφου σε διαφορετικά μεγέθη σε συνδυασμό με τα εφέ fisheye και whirl.



Στο τέλος, ο χρήστης παρακινείται να ξεκινήσει το παιχνίδι από την αρχή πατώντας ξανά την πράσινη σημαία του προγράμματος.



4.4 Αρχική διαμορφωτική πειραματική Δοκιμή

Στο πλαίσιο της ανάπτυξης του προγράμματος πραγματοποιήθηκε μια αρχική διαμορφωτική πειραματική δοκιμή του με μαθητές. Ο στόχος αυτής της δοκιμής ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές θα ήταν σε θέση να χειριστούν αποτελεσματικά το πρόγραμμα και να κατανοήσουν τι αναμένεται από αυτούς να κάνουν. Επίσης, θέλαμε να αξιολογήσουμε αν ο βαθμός δυσκολίας των δραστηριοτήτων του προγράμματος και το σενάριο ήταν κατάλληλα για την ηλικία και το μαθησιακό επίπεδο των μαθητών.

Έτσι, επισκεφτήκαμε το 15^{o} Δημοτικό Σχολείο Θεσσαλονίκης, όπου δοκιμάσαμε το πρόγραμμα με τρεις μαθητές της ΣΤ' Τάξης. Στο πείραμα συμμετείχαν δύο κορίτσια και ένα αγόρι. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον δάσκαλο της τάξης, το ένα κορίτσι και το αγόρι είχαν άριστες επιδόσεις στα μαθηματικά και το άλλο κορίτσι είχε μέτρια επίδοση στο μάθημα.

4.4.1 Χειρισμός προγράμματος – πλοήγηση

Ένας από τους βασικούς μας στόχους ήταν να ελέγξουμε κατά πόσο ένα παιδί αυτής της ηλικίας θα μπορούσε να πλοηγηθεί στο πρόγραμμα χωρίς πρόβλημα και να κατανοήσει τι πρέπει να κάνει διαβάζοντας τις οδηγίες που του δίνονται και χωρίς εξωτερική βοήθεια.

Τα αποτελέσματα σε αυτό το σημείο ήταν πολύ θετικά με μοναδική εξαίρεση το σημείο στο οποίο ζητείται από τον χρήστη του προγράμματος να εισάγει τον αριθμητή και τον παρονομαστή που αυτός επιθυμεί, για να ξεκινήσει ουσιαστικά το παιχνίδι. Σε αυτό το σημείο κανείς από τους μαθητές δεν κατάλαβε τι αναμενόταν από αυτόν να κάνει. Στην πρώτη μαθήτρια δεν είχαν δοθεί καθόλου πληροφορίες σχετικά με το πρόγραμμα και το τι θα της ζητούνταν, πέρα από το ότι πρόκειται για ένα παιχνίδι με κλάσματα. Έτσι, φτάνοντας στη συγκεκριμένη οθόνη αναρωτήθηκε ποιον αριθμητή και παρονομαστή να δώσει, καθώς δεν της είχε δοθεί καμιά τέτοια πληροφορία προηγουμένως. Κάτι ανάλογο παρατηρήθηκε σε μικρότερο βαθμό και στα άλλα δύο παιδιά που δοκίμασαν το πρόγραμμα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, αν και πριν ξεκινήσουν να παίζουν τους εξηγήσαμε ότι στην αρχή το πρόγραμμα θα τους ζητήσει να δώσουν τους όρους του κλάσματος που εκείνοι επιθυμούν, ώστε να ξεκινήσει το παιχνίδι και πάλι τα παιδιά φτάνοντας στη σχετική οθόνη δίστασαν και ρώτησαν αν εκείνο ήταν το σημείο στο οποίο έπρεπε να εισάγουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή. Με αυτό τον τρόπο μας έγινε σαφές ότι σε αυτό το σημείο του προγράμματος θα πρέπει να δώσουμε περισσότερες πληροφορίες – οδηγίες στον χρήστη, έτσι ώστε να του είναι ξεκάθαρο το τι αναμένεται από αυτόν.

Το θετικό συμπέρασμα που αποκομίσαμε από το υπόλοιπο πρόγραμμα είναι ότι οι οδηγίες είναι σαφείς και κάνουν την πλοήγηση και τη χρήση του προγράμματος εύκολη και χωρίς προβλήματα. Ακόμη και στην περίπτωση που κάποιος μαθητής έκανε λάθος χειρισμό, διαβάζοντας προσεκτικότερα τις οδηγίες που του έδινε το πρόγραμμα κατανοούσε τι έπρεπε να κάνει. Για παράδειγμα, στην οθόνη με τους δεκαδικούς αριθμούς, ένας μαθητής αντί να πατήσει πάνω στον δράκο για να επιλέξει απάντηση, πάτησε πάνω στα λόγια του. Όταν το πρόγραμμα δεν ανταποκρίθηκε, τότε ο ίδιος μαθητής ξαναδιαβάζοντας τα λόγια του μικρού μάγου – βοηθού και χωρίς εξωτερική βοήθεια από εμάς, κατάλαβε τι έπρεπε να κάνει και προχώρησε στη σωστή ενέργεια για να απαντήσει.

Επίσης θετικό κρίθηκε και το γεγονός ότι, στην περίπτωση λάθους των μαθητών, η οθόνη ανατροφοδότησης που εμφανίζει το πρόγραμμα φάνηκε ότι όντως τους βοηθά να θυμηθούν τη θεωρία και να κατανοήσουν τι πρέπει να κάνουν για να βρουν τη σωστή απάντηση. Αυτό παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις λαθών, όπου οι μαθητές μετά την οθόνη ανατροφοδότησης φάνηκε να προσπαθούν να πραγματοποιήσουν αυτό που η βοήθεια τους είχε υποδείξει.

4.4.2 Εντυπώσεις μαθητών

Κατά τη διάρκεια της δοκιμής του προγράμματος από τους μαθητές, μας δόθηκε η ευκαιρία να εξετάσουμε και τη γνώμη τους σχετικά με το περιεχόμενό της. Πιο συγκεκριμένα, ρωτήσαμε τους μαθητές τι τους άρεσε και τι δεν τους άρεσε στην εφαρμογή, έχοντας ως στόχο να προχωρήσουμε σε αλλαγές τόσο στο περιεχόμενο των δραστηριοτήτων, όσο και στο γραφικό περιβάλλον, με βάση τις παρατηρήσεις που θα μας έκαναν.

Όπως διαπιστώσαμε από τις απαντήσεις τους, δεν υπήρχε κάτι στο γραφικό περιβάλλον το οποίο να μην αρέσει στους μαθητές, καθώς δεν έκαναν κανένα αρνητικό σχόλιο για αυτό. Όσον αφορά στις δραστηριότητες, οι μαθητές μας απάντησαν ότι τους άρεσαν, κυρίως η δραστηριότητα με το σχήμα, αλλά και εκείνες με την αριθμογραμμή και με τα λόγια.

Τα σχόλια των μαθητών για το τι δεν τους άρεσε στην εφαρμογή επικεντρώθηκαν σε δύο σημεία. Το πρώτο ήταν το σημείο στο οποίο το πρόγραμμα τους ζητούσε να δώσουν τους όρους του κλάσματος. Όπως μας εξήγησαν, αυτό που δεν τους άρεσε ήταν ότι δεν μπόρεσαν να καταλάβουν τι ήταν αυτό που τους ζητούσε το πρόγραμμα να κάνουν. Το δεύτερο σημείο στο οποίο επικεντρώθηκαν οι μαθητές και το χαρακτήρισαν ως αρνητικό του προγράμματος ήταν οι δραστηριότητες στις οποίες οι ίδιοι έκαναν κάποιο λάθος. Πιο συγκεκριμένα, μία μαθήτρια ανέφερε ότι δεν της άρεσε η δραστηριότητα με την αριθμογραμμή, γιατί δεν την κατάλαβε. Όταν την ρωτήσαμε αν δεν κατάλαβε τι ήταν αυτό που της ζητούσε το πρόγραμμα, εκείνη απάντησε ότι είχε κατανοήσει την ερώτηση, αλλά δεν γνώριζε πώς να τοποθετήσει το κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή. Αυτό που μπέρδεψε την μαθήτρια, όπως η ίδια μας είπε, ήταν ότι η αριθμογραμμή είχε πάνω τους αριθμούς 0,1,2 και εκείνη δεν ήξερε πού πηγαίνει το κλάσμα σε σχέση με αυτούς τους αριθμούς. Αυτό, λοιπόν, το σχόλιο το αποδώσαμε περισσότερο στην αδυναμία της μαθήτριας να δώσει μια απάντηση σε γνωστικό επίπεδο, παρά σε κάποια αδυναμία του προγράμματος.

Συνοψίζοντας, η άποψη των μαθητών για το πρόγραμμα ήταν πολύ θετική με εξαίρεση τα σχόλιά τους για την ασάφεια στο σημείο που το πρόγραμμα τους ζητά να δώσουν τους όρους του κλάσματος. Το ζήτημα αυτό, το οποίο είχε επισημανθεί και στην προηγούμενη ενότητα, είναι κάτι το οποίο διορθώθηκε πριν το πρόγραμμα προχωρήσει στη φάση της δοκιμής. Όπως ήταν αναμενόμενο, σε κάποιους από τους μαθητές δεν άρεσαν οι δραστηριότητες στις οποίες έκαναν λάθη, τα οποία όμως οφείλονταν σε μαθησιακά κενά που οι ίδιοι είχαν και όχι σε ασάφειες της εφαρμογής.

4.4.3 Λάθη μαθητών

Τα λάθη των μαθητών σε αυτή την πρώτη φάση της δοκιμής του προγράμματος έγιναν κυρίως στην αριθμογραμμή και στους δεκαδικούς αριθμούς, κάτι που σε γενικές γραμμές συμφωνεί με τη βιβλιογραφία που παρουσιάσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια.

Όπως φάνηκε, οι μαθητές, ακόμη και αυτοί που έχουν καλές επιδόσεις στα μαθηματικά, δεν είναι πολύ εξοικειωμένοι με την αριθμογραμμή και με την τοποθέτηση ενός κλάσματος σε αυτή, παρά το γεγονός ότι η εφαρμογή χωρίζει απευθείας τη μονάδα σε τόσα τμήματα, όσο είναι το μέγεθος του παρονομαστή. Έτσι, το μόνο που ουσιαστικά καλείται να κάνει ο μαθητής είναι να μετρήσει τόσες γραμμές, όσο είναι το μέγεθος του αριθμητή. Ωστόσο, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά να εντοπίσουν το σωστό σημείο πάνω στην αριθμογραμμή, ακόμη και μετά την παροχή της ανατροφοδότησης, η οποία τους εξηγούσε με σαφήνεια τη διαδικασία που έπρεπε να ακολουθήσουν για να εντοπίσουν τη σωστή απάντηση. Είναι χαρακτηριστικό ότι μια μαθήτρια, αφού διάβασε προσεκτικά την οθόνη ανατροφοδότησης, προσπάθησε να μετρήσει τις γραμμές από το 0 μέχρι το 1 (κάτι που δείχνει ότι κατανόησε αυτό που είχε διαβάσει στην οθόνη ανατροφοδότησης), αλλά οδηγήθηκε και πάλι σε λάθος απάντηση, καθώς μέτρησε και τη γραμμή που αντιστοιχούσε στο μηδέν.

Ένα άλλο σημείο στο οποίο υπήρξαν αρκετά λάθη από τους μαθητές ήταν η οθόνη στην οποία καλούνται να αντιστοιχίσουν το κλάσμα με τον ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό. Οι μαθητές δεν φάνηκε να θυμούνται απευθείας ότι το κλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαίρεση και μάλιστα επέλεξαν απαντήσεις, όπως ότι ο δεκαδικός που είναι ίσος με το κλάσμα είναι της μορφής «*αριθμητής, παρονομαστής*».

Τέλος, λιγότερα λάθη έγιναν στην οθόνη με τη διακριτή αναπαράσταση του κλάσματος (οθόνη με βόλους), κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο, καθώς οι μαθητές από την πρώτη επαφή τους με τα κλάσματα στη Γ’ τάξη συναντούν τέτοιου είδους αναπαραστάσεις. Αντίστοιχη και το ίδιο αναμενόμενη ήταν ως ένα βαθμό και η έλλειψη λαθών από τους μαθητές στην οθόνη με το σχήμα (συνεχής αναπαράσταση), αλλά και με τα λόγια (τρόπος ανάγνωσης – προφοράς) του κλάσματος.

4.4.4 Γνωστικά οφέλη

Στο σημείο αυτό, αναφέρουμε συνοπτικά τις απαντήσεις των μαθητών για το τι πιστεύουν ότι έμαθαν ή κατάλαβαν για τα κλάσματα παίζοντας το παιχνίδι. Όλοι οι μαθητές μας είπαν ότι θεώρησαν πως το παιχνίδι τους βοήθησε προς αυτή την κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, στις απαντήσεις τους μας μίλησαν για το ότι το πρόγραμμα τους βοήθησε να θυμηθούν όλη τη θεωρία που έχουν κάνει ήδη γύρω από τα κλάσματα, αλλά και να μάθουν πώς να τοποθετούν το κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή.

4.4.5 Εξωτερικές συνθήκες

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να καταγράψουμε με συνοπτικό τρόπο κάποιες γενικές παρατηρήσεις που κάναμε κατά τη διάρκεια της πειραματικής φάσης και οι οποίες θεωρούμε ότι μπορεί να επηρέασαν ως έναν βαθμό τα αποτελέσματα που λάβαμε. Το βασικό στοιχείο το οποίο διαπιστώσαμε ήταν ότι τα παιδιά είχαν ιδιαίτερο άγχος, κάτι το οποίο πολύ πιθανόν να οφειλόταν στο γεγονός ότι δεν μας γνώριζαν. Έτσι, παρά το γεγονός ότι από την αρχή υπήρχε η διαβεβαίωση ότι δεν μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε τις γνώσεις τους γύρω από τα κλάσματα για να τους αξιολογήσουμε, τα παιδιά έδειξαν μια ιδιαίτερη αγωνία για να μην κάνουν κάποιο λάθος και αγχώνονταν, όταν κάτι τέτοιο συνέβαινε. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να ασχοληθούν ελάχιστα έως καθόλου με το γραφικό περιβάλλον της εφαρμογής και να επικεντρώσουν όλη την προσοχή και την πλειονότητα των σχολίων τους γύρω από τις δραστηριότητες.

4.4.6 Σχόλια εκπαιδευτικού

Στο πλαίσιο της δοκιμαστικής εφαρμογής του προγράμματος, αυτό δόθηκε και στον υπεύθυνο δάσκαλο, ώστε να μας πει και εκείνος τη γνώμη του. Τα σχόλια του δασκάλου ήταν ιδιαίτερα θετικά για την εφαρμογή και επικεντρώθηκαν σε δύο σημεία. Καταρχάς, ο εκπαιδευτικός μας επισήμανε ότι του άρεσε το γεγονός ότι όταν το παιδί κάνει κάποιο λάθος σε μια δραστηριότητα, εμφανίζεται μια οθόνη ανατροφοδότησης, η οποία υπενθυμίζει στον μαθητή τη σχετική θεωρία. Το δεύτερο σημείο που μας επισήμανε ο εκπαιδευτικός είναι ότι θεώρησε πολύ καλό το γεγονός ότι στο τελευταίο δωμάτιο εμφανίζονται όλες οι αναπαραστάσεις του κλάσματος συγκεντρωμένες, γιατί κάτι τέτοιο θα βοηθήσει το παιδί να τις συνδέσει μεταξύ τους. Τέλος, μια παρατήρηση που έκανε ο εκπαιδευτικός για την δοκιμασία με τους βόλους (διακριτή αναπαράσταση) ήταν ότι ίσως θα προτιμούσε οι βόλοι να μην είναι τοποθετημένοι σε σειρές, αλλά διάσπαρτοι μέσα σε κάθε σάκο.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι η γνώμη του εκπαιδευτικού, σε αυτή την πρώτη δοκιμή του προγράμματος, συμβάδιζε με τη συνολική εικόνα που αποκομίσαμε και από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο των συμμετεχόντων έκρινε θετικά το πρόγραμμα, επισημαίνοντας κάποια σημεία, τα οποία έχρηζαν αλλαγής, ώστε να είναι περισσότερο κατανοητά από τον χρήστη. Σε γενικές γραμμές πάντως, όλοι έκριναν θετικά το πρόγραμμα επισημαίνοντας τη χρησιμότητά του για να γίνει μια επανάληψη στη θεωρία των κλασμάτων και μια πρακτική εφαρμογή των γνώσεων των μαθητών.

5ο Κεφάλαιο: Διεξαγωγή έρευνας

5.1 Μεθοδολογία

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να αξιολογηθεί η χρησιμότητα της εφαρμογής στην πράξη. Πιο συγκεκριμένα, θέλαμε να αξιολογήσουμε την ευχρηστία (usability) και τη γνωστική αποτελεσματικότητα (learning efficiency) του παιχνιδιού.

Ο όρος ευχρηστία στο πρότυπο ISO9241-11 ορίζεται ως: «*Ο βαθμός στον οποίο ένα προϊόν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από προκαθορισμένους χρήστες, για να επιτευχθούν προκαθορισμένοι στόχοι με αποτελεσματικότητα, αποδοτικότητα και ικανοποίηση, σε ένα προκαθορισμένο πλαίσιο χρήσης*».

- Η «*αποτελεσματικότητα*» ορίζεται ως η ακρίβεια και η πληρότητα με την οποία οι χρήστες επιτυγχάνουν τις προκαθορισμένες στοιχειώδεις εργασίες.
- Η «*αποδοτικότητα*», είναι οι πόροι που καταναλώνονται, σε σχέση με την ακρίβεια και την πληρότητα με την οποία οι χρήστες επιτυγχάνουν τους στόχους τους.
- Η «*ικανοποίηση*» είναι ένα καθαρά υποκειμενικό μέτρο και αφορά στην άνεση και στην αποδοχή της χρήσης του συστήματος από τους τελικούς χρήστες.

Στη δική μας περίπτωση, λοιπόν, οι χρήστες για τους οποίους προορίζεται το πρόγραμμα είναι οι μαθητές που βρίσκονται στην Ε’ ή μεγαλύτερη τάξη του δημοτικού σχολείου. Με την παρούσα έρευνα, προσπαθήσαμε να δούμε αν οι στόχοι που παρουσιάστηκαν παραπάνω μπορούν να εκπληρωθούν μέσα από τη χρήση του προγράμματος με τρόπο αποτελεσματικό και αποδοτικό, αλλά παράλληλα και ευχάριστο για τους μαθητές, καθώς απώτερος σκοπός είναι το πρόγραμμα να αποτελέσει μια εναλλακτική πρόταση ή συμπλήρωμα της δουλειάς που κάνουν οι μαθητές στο σπίτι για την εξάσκησή τους.

Όσον αφορά στη γνωστική αποτελεσματικότητα της εφαρμογής, αυτό που μας ενδιέφερε ήταν κατά πόσο μπορεί η χρήση του προγράμματος να βοηθήσει τους μαθητές να φτάσουν στο επιθυμητό μαθησιακό αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, θέλαμε να δούμε αν, μέσα από τη χρήση της εφαρμογής, οι μαθητές θα κατακτούσαν τις επιθυμητές γνώσεις γύρω από τα κλάσματα. Οι γνώσεις αυτές ουσιαστικά περιγράφονται από τους γνωστικούς στόχους του παιχνιδιού, τους οποίους παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 4.1.

Επομένως, σε αυτό το στάδιο στοχεύαμε σε μια διαμορφωτική αξιολόγηση (formative evaluation) της ευχρηστίας του προγράμματος. Αυτού του είδους η αξιολόγηση γίνεται με στόχο τη βελτίωση της ευχρηστίας. Με άλλα λόγια, σε αυτό το στάδιο μπορούν οι τελικοί χρήστες του προγράμματος (στη δική μας περίπτωση οι μαθητές) να το αξιολογήσουν, ώστε να γίνουν οι αλλαγές που απαιτούνται (Αβούρης, 2000).

Ως προς τη μέθοδο συλλογής των δεδομένων μας, επιλέξαμε έναν συνδυασμό παρατήρησης και ημιδομημένων συνεντεύξεων.

Καταρχάς, επιλέξαμε την παρατήρηση, γιατί ως μέθοδος δίνει στον ερευνητή τη δυνατότητα να συλλέξει δεδομένα μέσα από πραγματικές καταστάσεις και να δει πράγματα που σε διαφορετική περίπτωση (για παράδειγμα, σε μια συνέντευξη) πιθανώς θα διέφευγαν της προσοχής του (Cohen et al., 2007). Στην προκειμένη περίπτωση, ήταν επιθυμητό να καταγραφούν οι αντιδράσεις των μαθητών, όταν προσπαθήσουν μόνοι τους και χωρίς εξωτερική βοήθεια ή καθοδήγηση να χρησιμοποιήσουν το πρόγραμμα. Από τα διαφορετικά είδη παρατήρησης που υπάρχουν, αυτό που ταίριαζε περισσότερο με τους στόχους της παρούσας έρευνας ήταν η ημιδομημένη παρατήρηση, καθώς υπήρχαν συγκεκριμένα θέματα για τα οποία ήταν επιθυμητό να γίνει συλλογή δεδομένων, αλλά αυτό δεν χρειαζόταν να γίνει με έναν εντελώς προκαθορισμένο τρόπο. Όσον αφορά στην εμπλοκή του παρατηρητή κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, επιλέξαμε τη θέση του απόλυτου παρατηρητή, δηλαδή την πλήρη αποστασιοποίηση για όσο χρόνο το παιδί ασχολείται με το παιχνίδι (Cohen et al., 2007). Ο λόγος για αυτή την επιλογή είναι γιατί το αντικείμενο του ενδιαφέροντος ήταν το κατά πόσο το παιδί θα ήταν σε θέση να χειριστεί το πρόγραμμα μόνο του, όπως θα το έκανε και στο περιβάλλον του σπιτιού του.

Οι τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε για τη συλλογή των δεδομένων σε αυτή τη φάση ήταν το Πρωτόκολλο Ομιλούντων Υποκειμένων (Thinking Aloud Protocol) σε συνδυασμό με την Παρατήρηση Πεδίου (Field Observation). Με την πρώτη τεχνική, ο χρήστης καλείται να εκφράσει μεγαλόφωνα τις σκέψεις, τις απόψεις και τα συναισθήματά του, ενώ αλληλεπιδρά με το πρόγραμμα. Σε γενικές γραμμές, το Πρωτόκολλο Ομιλούντων Υποκειμένων θεωρείται μια ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδος και χρησιμοποιείται ευρύτατα. Από την άλλη πλευρά, με την Παρατήρηση

Πεδίου, ο χρήστης παρατηρείται, ενώ χρησιμοποιεί το πρόγραμμα. Έτσι, ο χρήστης αποκτά μια αίσθηση ελέγχου πάνω στο πρόγραμμα και μια ελευθερία κινήσεων. Αυτό καταλήγει σε μια ποιοτική και όχι ποσοτική καταγραφή των ενεργειών του, η οποία όμως δίνει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με το πρόγραμμα (Αβούρης, 2000).

Αυτές οι δύο τεχνικές κάλυπταν πλήρως τις ανάγκες μας στη συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς έδιναν τη δυνατότητα να καταγράψουμε άμεσα τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα χειρίζονταν το παιχνίδι. Ταυτόχρονα, καθώς τα παιδιά θα μιλούσαν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, θα εντοπίζονταν κάποιες από τις σκέψεις και τις παρατηρήσεις τους. Βέβαια, λόγω του γεγονότος ότι τα παιδιά δεν γνώριζαν την ερευνήτρια ήταν αναμενόμενο ότι θα υπήρχε κάποιου είδους αυτοσυγκράτηση εκ μέρους τους. Παρόλα αυτά, πιστεύαμε ότι, μετά τη γνωριμία και την κουβέντα με τα παιδιά, που θα προηγείτο του πειράματος, θα είχαν ξεπεράσει τη συστολή τους σε βαθμό που θα τους επέτρεπε να μιλήσουν με επαρκή άνεση και να διατυπώσουν με ειλικρίνεια τις σκέψεις και τις απόψεις τους.

Η δεύτερη μέθοδος που επελέγη ήταν η ημιδομημένη συνέντευξη, η οποία θα γινόταν πριν και μετά τη χρήση του παιχνιδιού από τους μαθητές. Λήφθηκαν βεβαίως υπόψη τα μειονεκτήματα της συνέντευξης ως μεθόδου, όπως ότι είναι χρονοβόρα, με αποτέλεσμα να περιορίζει τον αριθμό των συμμετεχόντων, ότι προκύπτουν ζητήματα αξιοπιστίας, τα οποία μπορεί να οφείλονται στον ερευνητή, στο εργαλείο, στο δείγμα, στην κωδικοποίηση κλπ. (Cohen et al., 2007). Ωστόσο, θεωρήθηκε ότι η συνέντευξη θα ταίριαζε στους στόχους της παρούσας διερεύνησης, η οποία ήταν η αξιολόγηση της ευχρηστίας και της γνωστικής αποτελεσματικότητας του προγράμματός. Μέσα από τις συνεντεύξεις με τα παιδιά, θα δινόταν η ευκαιρία να διευκρινιστούν και να διερευνηθούν σε βάθος ζητήματα που θα είχαν προκύψει από την παρατήρηση της χρήσης του προγράμματος.

Επελέγη να γίνει μια συνέντευξη που να ακολουθεί την προσέγγιση πιλότου/οδηγού. Σε αυτό το είδος συνέντευξης, αν και προκαθορίζονται με τη μορφή περίληψης τα θέματα και τα ζητήματα τα οποία πρέπει να καλυφθούν, δίνεται η ελευθερία στον ερευνητή να αποφασίσει για τη σειρά και τη διατύπωση των ερωτήσεων κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και όχι από πριν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα βέβαια ότι ο ερευνητής πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής της συνέντευξης, ώστε να μην παραλείψει κάποιο ζήτημα από απροσεξία. Επιπλέον, αυτή η ευελιξία στη διατύπωση και τη σειρά των ερωτήσεων επηρεάζει τη συγκρισιμότητα των απαντήσεων των συμμετεχόντων

(Cohen et al., 2007). Βέβαια, στην προκειμένη περίπτωση αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, γιατί δεν είναι ο στόχος να βγουν ποσοτικά συμπεράσματα και συγκρίσιμα αποτελέσματα από την έρευνα. Αντίθετα, τα πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης, στα οποία συμπεριλαμβάνεται η πιο συστηματική συλλογή πληροφοριών από τον κάθε συμμετέχοντα και το γεγονός ότι η συνέντευξη θα έχει μια μορφής συζήτησης (Cohen et al., 2007), κάτι που θα κάνει τους μαθητές να νιώθουν πιο άνετα και όχι ότι εξετάζονται, ταιριάζουν απόλυτα με τους στόχους της παρούσας έρευνας.

Όσον αφορά στα θέματα που αποφασίστηκε να διερευνηθούν, αυτά κατηγοριοποιήθηκαν στις εξής ενότητες:

- Η σχέση των μαθητών με τα μαθηματικά και η επίδοσή τους στο μάθημα.
- Η σχέση των μαθητών με τους υπολογιστές.
- Η κατανόηση του τρόπου πλοήγησης στο πρόγραμμα.
- Οι εντυπώσεις και ο βαθμός ικανοποίησης από τη χρήση του προγράμματος.
- Τα γνωστικά οφέλη που μπορούν να προκύψουν, τα οποία περιγράφονται από τους γνωστικούς στόχους της εφαρμογής (που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4.1).

Για να διερευνηθεί αυτή η πτυχή, αποφασίστηκε να δημιουργηθεί μια σειρά από δραστηριότητες και αυτές να ομαδοποιηθούν ακολουθώντας τη δομή των δωματίων – δοκιμασιών του παιχνιδιού. Έτσι, προέκυψαν 5 κατηγορίες δραστηριοτήτων, όσες και τα αντίστοιχα δωμάτια στην εφαρμογή. Στη συνέχεια, έγινε περαιτέρω ταξινόμηση των δραστηριοτήτων σε 3 επίπεδα δυσκολίας (εύκολες, μεσαίου επιπέδου, δύσκολες). Με αυτόν τον τρόπο, για καθεμιά από τις 5 κατηγορίες δραστηριοτήτων υπήρχαν 3 διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας.

Η σκέψη ήταν η εξής: πριν παίξει το παιχνίδι, ο κάθε μαθητής θα έκανε τις δραστηριότητες. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε κατηγορία ο μαθητής θα ξεκινούσε από τις εύκολες δραστηριότητες. Αν τα κατάφερνε σε αυτές, θα προχωρούσε στις δραστηριότητες μεσαίου επιπέδου και στη συνέχεια στις πιο δύσκολες. Αν όμως δεν μπορούσε να τα καταφέρει στις εύκολες, δεν προχωρούσε στις πιο δύσκολες δραστηριότητες. Με αυτόν τον τρόπο θεωρήθηκε ότι θα γίνει εφικτό να καταγραφεί το επίπεδο των προϋπαρχουσών γνώσεων του μαθητή ξεχωριστά για την κάθε διαφορετική αναπαράσταση.

Στη συνέχεια, ο κάθε μαθητής θα παρατηρούνταν όσο θα έπαιζε το παιχνίδι.

Δεδομένου ότι το παιδί δεν θα έπαιζε μόνο μια φορά, ελαχιστοποιούνταν η πιθανότητα να έχει δοθεί κάποια σωστή απάντηση στην τύχη.

Μετά το τέλος του παιχνιδιού, θα συνεχίζονταν η συνέντευξη με ερωτήσεις για τις εντυπώσεις από το παιχνίδι. Έπειτα, θα δίνονταν στον μαθητή και πάλι οι ίδιες δραστηριότητες που είχε κάνει και πριν το παιχνίδι, με στόχο να φανεί αν υπήρξε κάποια βελτίωση στις γνώσεις του.

5.2 Δείγμα

Στη δοκιμή του προγράμματος συμμετείχαν συνολικά 7 μαθητές, 4 αγόρια και 3 κορίτσια της ΣΤ' τάξης. Οι μαθητές επιλέχθηκαν με τη βοήθεια του δασκάλου τους, ώστε να ανήκουν σε όλα τα επίπεδα επίδοσης στα μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα, δύο από αυτούς ήταν μαθητές χαμηλής επίδοσης, τρεις είχαν μέτρια επίδοση και δύο ήταν μαθητές υψηλής επίδοσης. Αν και το δείγμα των μαθητών ήταν μικρό, θεωρήθηκε ότι εξυπηρετεί τους σκοπούς της έρευνας στην παρούσα φάση, δηλαδή τον έλεγχο της ευχρηστίας και της γνωστικής αποτελεσματικότητας του προγράμματος.

5.3 Διεξαγωγή έρευνας – Αποτελέσματα

Ο στόχος της έρευνας ήταν να εξεταστεί η ευχρηστία και η γνωστική αποτελεσματικότητα του προγράμματος. Έτσι, το δείγμα που επελέγη ήταν μικρό, γιατί ο στόχος δεν ήταν να βγουν ποσοτικά συμπεράσματα και συγκρίσιμα αποτελέσματα από την έρευνα. Οι μαθητές προέρχονταν και από τα τρία επίπεδα επίδοσης (χαμηλό, μεσαίο, υψηλό) ώστε να εξεταστεί η ανταπόκρισή τους τόσο στο επίπεδο της ευχρηστίας όσο και στο επίπεδο της γνωστικής αποτελεσματικότητας του προγράμματος.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα δημόσιο δημοτικό σχολείο της Φλώρινας, στο εργαστήριο των υπολογιστών. Οι μαθητές έρχονταν ανά ένας στο εργαστήριο, και μετά τη γνωριμία, τους γίνονταν κάποιες ερωτήσεις για τη σχέση τους με τα μαθηματικά και τους υπολογιστές, με στόχο να καταγραφούν αυτά τα στοιχεία, αλλά και να νιώσουν πιο άνετα μέσα από την συζήτηση. Στη συνέχεια, συμπλήρωναν τις δραστηριότητες που είχαν προετοιμαστεί για να ελεγχθούν οι γνώσεις τους πάνω στα κλάσματα (pretest). Έπειτα, οι μαθητές έπαιζαν το παιχνίδι αρκετές φορές (4 κατά μέσο όρο), χρησιμοποιώντας όποια κλάσματα ήθελαν εκείνοι. Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, παρατηρούνταν χωρίς να τους δίνονται εξηγήσεις για το τι πρέπει να κάνουν, γιατί σκοπός ήταν να καταγραφεί αν θα ήταν σε θέση να κατανοήσουν πώς να χρησιμοποιήσουν το παιχνίδι ακολουθώντας τις οδηγίες που δίνονται από αυτό. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 5.1, είχε ζητηθεί από τους μαθητές να εκφράζουν μεγαλόφωνα τις σκέψεις, τις απόψεις και τα συναισθήματά τους καθώς θα χρησιμοποιούσαν το πρόγραμμα (Thinking Aloud Protocol). Μετά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας, ακολουθούσε ένα δεύτερο κομμάτι ημιδομημένης συνέντευξης, στο οποίο γίνονταν ερωτήσεις στους μαθητές για τις εντυπώσεις τους από το πρόγραμμα και η διαδικασία ολοκληρωνόταν δίνοντας στους μαθητές ξανά τις ίδιες δραστηριότητες που είχαν συμπληρώσει στην αρχή, για να φανεί αν θα υπήρχε κάποια διαφοροποίηση στις απαντήσεις που θα έδιναν (posttest).

Στις ενότητες που ακολουθούν, θα εξεταστούν πιο αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν τόσο από τη συνέντευξη όσο και από την παρατήρηση των μαθητών. Σε γενικές γραμμές, θα ακολουθηθούν οι άξονες της συνέντευξης και οι γνωστικοί και συναισθηματικοί στόχοι της εφαρμογής και θα εξεταστούν ένας προς έναν καταγράφοντας τα αποτελέσματα της έρευνας σε καθέναν από αυτούς.

5.3.1 Η σχέση των μαθητών με τα μαθηματικά

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, για τη δοκιμή του προγράμματος επιλέχθηκαν 7 μαθητές από όλα τα επίπεδα επίδοσης στα μαθηματικά (χαμηλό, μεσαίο, υψηλό). Η επιλογή των μαθητών έγινε με τη βοήθεια του δασκάλου τους, ο οποίος υπέδειξε τους μαθητές, με βάση τους βαθμούς τους στο μάθημα των μαθηματικών. Όπως ήταν αναμενόμενο, και οι ίδιοι οι μαθητές επιβεβαίωσαν στη διάρκεια της συνέντευξης τη σχέση τους με τα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, τόσο οι μαθητές με χαμηλές όσο και οι μαθητές με μέτριες επιδόσεις είπαν ότι δεν τους αρέσουν τα μαθηματικά και ότι δεν είναι καλοί σε αυτά. Αντίθετα, οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις είπαν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά και ότι τα καταφέρνουν στο μάθημα.

Βέβαια, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων των ερωτήσεων γνωστικού επιπέδου, προέκυψε ότι τόσο οι μαθητές με χαμηλές επιδόσεις, όσο και οι μαθητές με μέτριες επιδόσεις είχαν περισσότερα γνωστικά κενά από το αναμενόμενο. Η παρατήρηση αυτή συμφωνεί με τη βιβλιογραφία (βλ. $1^{ο}$ κεφάλαιο), όπου τα κλάσματα καταγράφονται ως ένα από τα πιο δύσκολα κεφάλαια των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο.

5.3.2 Η σχέση των μαθητών με τους υπολογιστές

Όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα είπαν ότι έχουν υπολογιστή στο σπίτι και ότι ασχολούνται αρκετά με αυτόν. Ειδικά τα αγόρια απάντησαν ότι ασχολούνται με τον υπολογιστή σε καθημερινή βάση, κάτι που συμφωνεί με τις παρατηρήσεις των ερευνητών, που έχουν καταγραφεί στο κεφάλαιο 3.5.3. Έτσι, επιβεβαιώθηκε η άποψη που κυριαρχεί στη βιβλιογραφία, ότι για τη νέα γενιά μαθητών που φοιτούν αυτή τη στιγμή στο σχολείο, ο υπολογιστής είναι αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας και του ελεύθερου χρόνου τους.

5.3.3 Ευχρηστία του προγράμματος

Ένας από τους βασικούς στόχους της έρευνας ήταν να ελεγχθεί η ευχρηστία του προγράμματος. Μετά τις διορθώσεις που έγιναν έπειτα από τα αποτελέσματα της πειραματικής δοκιμής του προγράμματος (που περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.4), αναμενόταν ότι οι μαθητές δεν θα αντιμετώπιζαν ιδιαίτερα προβλήματα στον χειρισμό του και ότι θα εξέφραζαν το ίδιο θετικές απόψεις με τα παιδιά που συμμετείχαν στην πειραματική δοκιμή. Τα αποτελέσματα που καταγράφηκαν ήταν όντως θετικά και αναλύονται στα δύο υποκεφάλαια που ακολουθούν.

Πλοήγηση και αλληλεπίδραση με το παιχνίδι

Όσον αφορά στην αποδοτικότητα και στην αποτελεσματικότητα του παιχνιδιού, δεν παρατηρήθηκαν προβλήματα. Αν και κανείς από τους μαθητές δεν γνώριζε το Scratch, μετά την υπόδειξη ότι για να ξεκινήσουν έπρεπε να πατήσουν το κουμπί με την πράσινη σημαία, τα παιδιά δεν φάνηκε να έχουν κάποιο πρόβλημα με την πλοήγηση. Όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν το πρόγραμμα χωρίς να χρειαστούν εξωτερική βοήθεια. Πατούσαν τα κουμπιά που έπρεπε, χωρίς να διστάζουν ή να αναρωτιούνται τι χρειάζεται να κάνουν. Σε αυτό μπορεί να συντελεί το γεγονός ότι όλοι έχουν πρόσβαση σε κάποιον υπολογιστή στο σπίτι τους, κάτι που πιθανόν να εξηγεί την άνεσή τους.

Πιο συγκεκριμένα, στις αρχικές οθόνες του προγράμματος, ο χρήστης παρακολουθεί την αφήγηση της ιστορίας και πρέπει να χρησιμοποιήσει τα βέλη που βρίσκονται στην κάτω δεξιά γωνία για να προχωρήσει παρακάτω. Κανένας από τους μαθητές δε δυσκολεύτηκε να κατανοήσει τον τρόπο πλοήγησης σε αυτό το σημείο. Όπως είπε χαρακτηριστικά ένας μαθητής: «*Είναι εύκολο (να πλοηγηθείς) γιατί έχει τα βέλη (που πατάς για να συνεχίσεις παρακάτω)*».

Οι οδηγίες του προγράμματος μέσα στα δωμάτια φάνηκαν επαρκείς και κατανοητές. Στην κεντρική οθόνη του προγράμματος, ο Σαμ παρακινεί τον χρήστη να διαλέξει όποια πόρτα επιθυμεί για να μπει στο αντίστοιχο δωμάτιο – γρίφο. Ο χρήστης μπορεί να μπει και να βγει από τα δωμάτια με όποια σειρά θέλει. Στην αρχή, κάποια από τα παιδιά φάνηκε ότι δεν περίμεναν το πρόγραμμα να τους δίνει αυτή την ελευθερία επιλογής και δίστασαν λίγο αναρωτώμενα ποια είναι η πρώτη πόρτα. Μόλις όμως δοκίμασαν να μπουν σε κάποιο δωμάτιο, κατάλαβαν ότι μπορούσαν να επισκεφτούν τους γρίφους με όποια σειρά το επιθυμούσαν. Αυτό φάνηκε, γιατί οι μαθητές κάθε φορά που έπαιζαν το παιχνίδι δεν πήγαιναν με την ίδια σειρά στα δωμάτια. Μάλιστα, έδειχναν να αποφεύγουν να μπουν σε κάποια δωμάτια, όπως αυτό της αριθμογραμμής και του δεκαδικού αριθμού, καθώς σε αυτά αντιμετώπιζαν τις περισσότερες δυσκολίες. Τελικά, όσο εξοικειώνονταν με το περιβάλλον του παιχνιδιού, κάποιοι έμπαιναν και έβγαιναν στα δωμάτια προσπαθώντας να επιλέξουν εκείνα για τα οποία ένιωθαν πιο σίγουροι να απαντήσουν. Είναι χαρακτηριστική η συμπεριφορά ενός από τους μαθητές με μέτρια επίδοση, ο οποίος δεν κατάφερε να ολοκληρώσει το παιχνίδι, καθώς έκανε πολλά λάθη σε όλες τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, εκτός από τη λεκτική εκφορά του κλάσματος. Αυτός λοιπόν ο μαθητής, αφού έπαιξε αρκετές φορές το παιχνίδι και κατάλαβε ότι αντιμετώπιζε δυσκολίες στο να απαντήσει στις ερωτήσεις, έκανε το εξής. Όταν ξεκινούσε να παίζει, έμπαινε πρώτα στο δωμάτιο με τη λεκτική εκφορά του κλάσματος. Στη συνέχεια, έχοντας απαντήσει σωστά σε αυτόν τον γρίφο, έμπαινε και έβγαινε στα υπόλοιπα δωμάτια κοιτώντας τις ερωτήσεις για να δει αν κάποια από αυτές θα τον βοηθούσε. Άσχετα με τις γνώσεις του για τα κλάσματα, το γεγονός αυτό δείχνει ότι πλοηγούνταν με μεγάλη ευκολία μέσα στο πρόγραμμα, χωρίς προβλήματα.

Επίσης, στα δωμάτια – γρίφους όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να κατανοήσουν τι ζητούνταν από αυτούς και να δώσουν ανάλογες απαντήσεις. Για παράδειγμα, στο δωμάτιο με τον δεκαδικό αριθμό και στο δωμάτιο με τη λεκτική αναπαράσταση, που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, ο μαθητής έπρεπε να επιλέξει τη σωστή απάντηση ανάμεσα σε 4 εναλλακτικές προτάσεις. Αυτές διατυπώνονταν από 4 διαφορετικά πλάσματα και ήταν σημαντικό οι μαθητές να πατήσουν πάνω στον χαρακτήρα και όχι πάνω στα λόγια που ο χαρακτήρας λέει. Αν πατούσαν πάνω στα λόγια, το πρόγραμμα δεν θα έκανε τίποτα. Αυτό που φάνηκε λοιπόν, ήταν ότι όντως κάποιοι από τους μαθητές στην αρχή πάτησαν πάνω στα λόγια. Στη συνέχεια όμως, βλέποντας ότι το πρόγραμμα δεν ανταποκρίνεται, διάβασαν ξανά τις οδηγίες που τους έδινε ο μάγος – βοηθός που υπήρχε στο δωμάτιο και διόρθωσαν το λάθος τους.

Αντίστοιχα, στο δωμάτιο με τη διακριτή αναπαράσταση τα παιδιά έβλεπαν τρεις σάκους και έπρεπε να επιλέξουν τον σωστό, πατώντας πάνω στο αντίστοιχο πράσινο κουμπί, που υπήρχε κάτω από κάθε σάκο. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν καθόλου να κατανοήσουν με ποιον τρόπο θα επέλεγαν την απάντησή τους. Μάλιστα, όλοι πάτησαν κατευθείαν πάνω στο κουμπί της επιλογής τους και κανείς δεν έκανε το λάθος να πατήσει πάνω στον σάκο.

Στο δωμάτιο με τη συνεχή αναπαράσταση, ο μαθητής έδινε την απάντησή του σε δύο βήματα. Στην αρχή, το πρόγραμμα σχεδιάζει ένα σχήμα (έναν κύκλο ή ένα ορθογώνιο) και ζητείται από τον παίκτη να πληκτρολογήσει τον αριθμό των κομματιών στα οποία πρέπει αυτό να χωριστεί (με βάση το κλάσμα που παίζει). Στη συνέχεια, αν η απάντηση είναι σωστή, το σχήμα χωρίζεται σε κομμάτια και ζητείται από τον μαθητή να χρωματίσει τόσα κομμάτια, όσος είναι ο αριθμητής του κλάσματος. Οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν πρόβλημα σε κανένα από τα δύο αυτά βήματα. Εύκολα κατανοούσαν ότι έπρεπε να πληκτρολογήσουν τον παρονομαστή και το ίδιο εύκολα έβαψαν όσα κομμάτια πίστευαν ότι ήταν απαραίτητο. Κανένας μαθητής δεν κοντοστάθηκε και δεν αναρωτήθηκε τι θα έπρεπε να κάνει, παρόλο που υπήρχαν και περιπτώσεις μαθητών που έδιναν λάθος απαντήσεις.

Στο δωμάτιο της αριθμογραμμής, το παιχνίδι σχεδιάζει μια αριθμογραμμή από το 0 μέχρι το 2 και χωρίζει κάθε μονάδα με κάθετες γραμμές σε τόσα κομμάτια, όσος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος που δόθηκε από τον μαθητή στην αρχή. Στη συνέχεια το παιδί πρέπει να επιλέξει σε ποια κάθετη γραμμή αντιστοιχεί το κλάσμα. Και εδώ, κανένας μαθητής δεν δυσκολεύτηκε να βρει με ποιον τρόπο θα δώσει την απάντησή του. Οι μαθητές επέλεγαν κατευθείαν τη γραμμή που πίστευαν ότι είναι σωστή. Μόνη εξαίρεση υπήρξε ένας μαθητής που αναρωτήθηκε αν η γραμμή μπορούσε να μετακινηθεί δεξιά. Όταν ρωτήθηκε πού πίστευε ότι έπρεπε να δείξει, είπε τον αριθμό 7 (αυτός ήταν ο παρονομαστής του κλάσματος που είχε δώσει στο παιχνίδι). Πρόκειται για μια συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, αλλά και σε αυτή την περίπτωση το λάθος εντοπιζόταν σε γνωστικού περιεχομένου παρανόηση. Έτσι, όταν ο μαθητής κατάλαβε ότι η απάντηση βρισκόταν στο κομμάτι της αριθμογραμμής που έβλεπε μπροστά του, επέλεξε τελικά την απάντηση που θεωρούσε σωστή.

Αντίστοιχα με τις παρατηρήσεις ήταν και τα σχόλια των μαθητών κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Οι μαθητές είπαν ότι καταλάβαιναν τι έπρεπε να κάνουν σε κάθε δοκιμασία και ότι μπορούσαν να πλοηγηθούν με ευκολία μέσα στο παιχνίδι. Μάλιστα, μια μαθήτρια είπε: *«(Ο Σαμ) σου εξηγεί τι να κάνεις»* ενώ μια άλλη πρόσθεσε ότι: «*(Μέσα στα δωμάτια) το παιδάκι (ο μάγος – βοηθός) σου λέει πώς να το λύσεις*». Τα σχόλια αυτά επιβεβαιώνουν ότι είναι εφικτός ο χειρισμός του προγράμματος από τους μαθητές χωρίς εξωτερική βοήθεια.

Όσοι από τους μαθητές χρησιμοποίησαν την ανατροφοδότηση, έδειξαν να κατανοούν τις συμβουλές που τους δίνονταν, καθώς στην πλειοψηφία τους προσπαθούσαν στη συνέχεια να τις εφαρμόσουν. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αριθμογραμμής, που ήταν μια ερώτηση στην οποία η πλειοψηφία των μαθητών έκανε λάθη, η ανατροφοδότηση έπαιξε καίριο ρόλο στη βελτίωση των απαντήσεων. Οι μαθητές διάβαζαν την ανατροφοδότηση που τους δινόταν και προσπαθούσαν στη συνέχεια να μετρήσουν τις γραμμές και να φτάσουν σε έναν αριθμό ίσο με τον αριθμητή. Αντίστοιχα, το ίδιο παρατηρήθηκε και στα δωμάτια της συνεχούς και της διακριτής αναπαράστασης. Στη συνεχή αναπαράσταση, ένας από τους μαθητές έκανε λάθος στον αριθμό των κομματιών που έπρεπε να χωριστεί το σχήμα και έδωσε ως απάντηση τον αριθμητή του κλάσματος. Στη συνέχεια, αφού διάβασε την ανατροφοδότηση συνειδητοποίησε το λάθος του και το διόρθωσε.

Πάντως, όλοι οι μαθητές είπαν ότι κατάλαβαν τις οδηγίες που τους έδινε η ανατροφοδότηση και πίστευαν ότι τους βοήθησαν να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους. Μάλιστα, μια μαθήτρια επισήμανε πολύ χαρακτηριστικά τη χρησιμότητα της ανατροφοδότησης στο παιχνίδι, όταν είπε ότι «*όταν δεν θυμάσαι κάτι, έχει και τη θεωρία και σου λέει πώς να το κάνεις*».

Εντυπώσεις και βαθμός ικανοποίησης από τη χρήση του προγράμματος

Οι μαθητές εξέφρασαν ιδιαίτερα θετικές απόψεις για το πρόγραμμα. Όλοι είπαν ότι τους άρεσε το παιχνίδι και θα το ξαναέπαιζαν στο σπίτι τους. Ένας μαθητής είπε: «*Είναι ωραίο και θες να δεις πώς θα τελειώσει*» και ένας άλλος: «*Θα ήθελα να το έχω και στο σπίτι*».

Φάνηκε το ενδιαφέρον τους για περισσότερες δραστηριότητες σε ηλεκτρονική μορφή και ειδικά για παιχνίδια μαθηματικού περιεχομένου. Οι μαθητές είπαν ότι τέτοια παιχνίδια θα έκαναν τα μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα και ευχάριστα, κάτι που συμφωνεί και με τις απόψεις που έχουν καταγραφεί από τους ερευνητές, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3.5.1. Όπως είπε μια μαθήτρια: *«(Το παιχνίδι) είναι πιο ωραίο από τις ασκήσεις (για το σπίτι)».* Ακόμη, η άποψή τους ήταν ότι το παιχνίδι τους προσφέρει έναν ευχάριστο τρόπο για να αποκτήσουν γνώσεις πάνω στα κλάσματα ή να κάνουν επανάληψη και εξάσκηση στις γνώσεις που ήδη έχουν. Όπως είπε ένας μαθητής: «*Με το παιχνίδι μπορείς να μάθεις τα κλάσματα με πολλούς τρόπους*» και ένας άλλος: «*Είναι ένας ευχάριστος τρόπος να θυμηθείς τα κλάσματα*».

Όσον αφορά τις εντυπώσεις των μαθητών από την ιστορία, αυτές καταγράφηκαν ως θετικές. Οι μαθητές στο σύνολό τους είπαν ότι τους άρεσε η υπόθεση της ιστορίας και οι χαρακτήρες του Σαμ και του Μαθηματίξ. Σύμφωνα με την άποψή τους, η ιστορία που υπάρχει στο παιχνίδι είναι το στοιχείο που το κάνει πιο ενδιαφέρον και τους κινεί την περιέργεια να το παίξουν για να δουν τι θα γίνει στο τέλος. Είναι χαρακτηριστικό αυτό που, όπως προαναφέρθηκε, είπε ένας μαθητής: «*θες να δεις πώς θα τελειώσει*». Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2.2.5, μια ηλεκτρονική ιστορία μπορεί να λειτουργήσει ως πλαίσιο και να κινητοποιήσει τους μαθητές να λύσουν τα μαθηματικά προβλήματα που δίνονται, τα οποία τα βλέπουν ως μέσο για να βοηθήσουν τον ήρωα να φτάσει στον τελικό του στόχο. Επίσης, δήλωσαν ότι η ιστορία έκανε τις δραστηριότητες πιο ευχάριστες και σίγουρα θα τις προτιμούσαν έναντι των ασκήσεων που έχουν συνήθως να κάνουν ως δουλειά για το σπίτι. Όπως χαρακτηριστικά είπε μια μαθήτρια: «*Είναι ένας παιχνιδιάρικος και ευχάριστος τρόπος για να θυμηθείς τα κλάσματα*».

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της δοκιμής του προγράμματος όσον αφορά στον άξονα της ευχρηστίας ήταν ιδιαίτερα θετικά. Οι μαθητές φάνηκε να μην έχουν προβλήματα στην κατανόηση του τρόπου χρήσης του. Επιπλέον, το πρόγραμμα τους ήταν ευχάριστο και σε κάθε περίπτωση θα το προτιμούσαν ως εναλλακτική δραστηριότητα για την εξάσκηση στα κλάσματα, έναντι των παραδοσιακών ασκήσεων.

5.3.4 Γνωστική αποτελεσματικότητα

Για να εξετάσουμε τη γνωστική αποτελεσματικότητα του προγράμματος, χρησιμοποιήσαμε 5 ομάδες με 34 δραστηριότητες οι οποίες δημιουργήθηκαν με οδηγό τους γνωστικούς στόχους της εφαρμογής. Έτσι, προέκυψαν 5 κατηγορίες δραστηριοτήτων, όσες και τα δωμάτια – δοκιμασίες του παιχνιδιού (βλέπε παράρτημα σελ. 142). Οι 5 ομάδες δραστηριοτήτων ήταν χωρισμένες σε τρία επίπεδα δυσκολίας (εύκολες, μέτριας δυσκολίας και δύσκολες), με στόχο να δούμε αν θα υπάρχει κάποια βελτίωση στις γνώσεις των μαθητών πριν και μετά το παίξιμο του παιχνιδιού. Οι δραστηριότητες δίνονταν στα παιδιά τόσο πριν όσο και μετά το παιχνίδι (pretest – posttest). Οι μαθητές ξεκινούσαν συμπληρώνοντας τις εύκολες δραστηριότητες κάθε κατηγορίας και στη συνέχεια, ανάλογα με τις δυνατότητές τους, προχωρούσαν παρακάτω. Έτσι, μπορεί σε κάποια κατηγορία (π.χ. στην αναπαράσταση επιφάνειας) να έφταναν στις μέτριας δυσκολίας δραστηριότητες, ενώ σε μια άλλη (π.χ. στη μετατροπή σε δεκαδικούς αριθμούς) να έμεναν στις εύκολες.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι επιδόσεις των μαθητών στις 34 ερωτήσεις του pre και του posttest. Στους πίνακες που ακολουθούν φαίνονται αναλυτικά οι επιδόσεις των μαθητών στις δραστηριότητες. Κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μια κατηγορία δραστηριοτήτων: η 1^{η} αναφέρεται στην αναπαράσταση διακριτών μονάδων (ΑΔΜ), η 2^{η} στην αναπαράσταση επιφάνειας (ΑΕ), η 3^{η} στην αναπαράσταση αριθμογραμμής (ΑΑ), η 4^{η} στη λεκτική αναπαράσταση (ΑΛ) και η 5^{η} στην αναπαράσταση δεκαδικού αριθμού (ΑΔ). Επίσης, σε κάθε κατηγορία ερωτήσεων υπάρχουν 2 γραμμές. Η 1^{η} γραμμή αντιστοιχεί στις εύκολες ερωτήσεις της κατηγορίας και η $2^η$ στις μέτριας δυσκολίας. Η $3^η$ γραμμή είναι κοινή για όλες τις κατηγορίες και αποτυπώνει τις επιδόσεις των μαθητών στις δύσκολες δραστηριότητες. Εμφανίζεται με αυτόν τον τρόπο στον πίνακα καθώς οι δραστηριότητες αυτής της κατηγορίας είναι ουσιαστικά δραστηριότητες αντιστοίχισης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων του κλάσματος. Ο σκοπός είναι να αποτυπωθεί κατά πόσο οι μαθητές έχουν κατανοήσει και μπορούν να πραγματοποιήσουν τη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη.

Σε κάθε γραμμή του πίνακα έχει καταγραφεί η επίδοση του κάθε μαθητή. Στους μαθητές έχουν δοθεί κωδικοί με βάση τις επιδόσεις τους. Έτσι, οι μαθητές υψηλής επίδοσης καταγράφονται ως ΜΥΕ1 και ΜΥΕ2, οι μαθητές μεσαίας επίδοσης ως ΜΜΕ1, ΜΜΕ2 και ΜΜΕ3 και οι μαθητές χαμηλής επίδοσης ως ΜΧΕ1 και ΜΧΕ2.

Στον πρώτο πίνακα καταγράφονται οι επιδόσεις των μαθητών στο pretest και στον δεύτερο οι επιδόσεις τους στο posttest. Αν η απάντηση σε μια δραστηριότητα ήταν σωστή, τότε σημειώνεται 1. Αν ήταν λάθος, σημειώνεται 0. Στην τελευταία στήλη του πίνακα παρουσιάζεται το συνολικό σκορ για κάθε μαθητή.

Όπως προκύπτει από τους πίνακες, όλοι οι μαθητές, εκτός από έναν μαθητή υψηλής επίδοσης, βελτίωσαν την επίδοσή τους έστω και σε μικρό βαθμό πριν και μετά το παιχνίδι. Μια άλλη παρατήρηση που προκύπτει από τη μελέτη των πινάκων είναι ότι οι μαθητές χαμηλής επίδοσης φάνηκε να έχουν καλύτερη κατανόηση των κλασμάτων από τους δύο μαθητές μεσαίας επίδοσης. Αυτή η διαφορά διατηρήθηκε και μετά το παιχνίδι. Επίσης, φαίνεται το χάσμα που υπάρχει ανάμεσα στις γνώσεις των μαθητών υψηλής επίδοσης και στους υπόλοιπους μαθητές, οι οποίοι στην καλύτερη περίπτωση φτάνουν στο μισό της επίδοσης των μαθητών υψηλής επίδοσης. Παράλληλα, καταγράφεται και το πολύ μικρό ποσοστό κατανόησης των αναπαραστάσεων των κλασμάτων από τους μαθητές χαμηλής και μεσαίας επίδοσης, οι οποίοι σε κάποιες περιπτώσεις δεν καταφέρνουν να απαντήσουν σωστά ούτε στο 1/5 των ερωτήσεων του τεστ.

Αμέσως μετά την παράθεση των πινάκων, παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της δοκιμής του προγράμματος ανά γνωστικό στόχο - αναπαράσταση.

Ερωτήσεις / Μαθητές	**ΑΔΜ1**	**ΑΕ1 α,β**	**ΑΑ1 α, β**	**ΑΛ1α,β, γ, δ**	**ΑΔ1α,β, γ, δ**	**Συνολικό σκορ**
	ΑΔΜ2	ΑΕ2 α, β, γ, δ	ΑΑ2 α, β, γ, δ	ΑΛ2α,β, γ ,δ	ΑΔ2α,β, γ, δ	
	ΜΑ α, β, γ, δ, ε					
ΜΥΕ1	1	1,1	1,1	1,1,1,1	1,1,1,1	29
	1	1,1,1,1	1,1,0,0	1,1,1,1	1,1,1,1	
	0,0,0,0,1					
ΜΥΕ2	1	1,1	0,1	1,1,1,1	1,1,1,1	23
	0	1,1,1,0	0,0,0,0	1,1,1,1	1,1,0,1	
	0,0,1,0,0					
ΜΜΕ1	1	0,0	0,0	1,1,1,1	0,0,0,0	5
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΜΕ2	0	0,0	0,0	1,1,1,1	0,0,0,0	4
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΜΕ3	1	1,1	0,1	1,1,1,1	0,0,0,0	12
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	1,1,1,1	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΧΕ1	1	1,1	0,0	1,1,1,1	0,0,1,1	9
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΧΕ2	1	0,0	0,1	1,1,1,1	0,0,0,0	6
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					

Πίνακας 1: Αποτελέσματα του pretest

Ερωτήσεις / **Μαθητές**	**ΑΔΜ1**	**ΑΕ1α,β**	**ΑΑ1α, β**	**ΑΛ1α,β, γ, δ**	**ΑΔ1α,β, γ, δ**	**Συνολικό Σκορ**
	ΑΔΜ2	ΑΕ2α, β, γ, δ	ΑΑ2α, β, γ, δ	ΑΛ2α,β, γ ,δ	ΑΔ2α,β, γ, δ	
	ΜΑα, β, γ, δ, ε					
ΜΥΕ1	1	1,1	1,1	1,1,1,1	1,1,1,1	29
	1	1,1,1,1	1,1,0,0	1,1,1,1	1,1,1,1	
	0,0,0,0,1					
ΜΥΕ2	1	1,1	0,1	1,1,1,1	1,1,1,1	25
	1	1,1,1,0	0,0,0,0	1,1,1,1	1,1,0,1	
	0,0,1,0,1					
ΜΜΕ1	1	1,0	0,1	1,1,1,1	0,0,0,0	7
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΜΕ2	1	0,0	0,1	1,1,1,1	0,0,0,0	6
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΜΕ3	1	1,1	0,1	1,1,1,1	0,0,1,1	14
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	1,1,1,1	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΧΕ1	1	1,1	0,1	1,1,1,1	0,0,1,1	10
	0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					
ΜΧΕ2	1	1,1	0,1	1,1,1,1	0,0,0,0	11
	0	1,1,1,0	1,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,0	
	0,0,0,0,0					

Πίνακας 2: Αποτελέσματα του posttest

Αναπαράσταση επιφάνειας

Οι μαθητές σε γενικές γραμμές φάνηκαν αρκετά εξοικειωμένοι με την αναπαράσταση επιφάνειας των κλασμάτων, αν και αρχικά δεν τη θυμόντουσαν όλοι.

Πιο συγκεκριμένα, στο pretest, η πρώτη από τους μαθητές με χαμηλή επίδοση (ΜΧΕ1) μπόρεσε να απαντήσει στις εύκολες ερωτήσεις για τις αναπαραστάσεις επιφάνειας, αλλά όχι στις μεσαίου επιπέδου. Αυτό επαναλήφθηκε και στο posttest. Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, δεν έκανε λάθος στη σχετική δραστηριότητα. Πάντως, έδειξε να μην είναι απολύτως βέβαιη για τις γνώσεις που είχε και δίσταζε πολύ πριν δώσει τις απαντήσεις της. Αντίθετα, ο άλλος μαθητής χαμηλής επίδοσης (ΜΧΕ2) στην αρχή φάνηκε να μη θυμάται καθόλου τις αναπαραστάσεις επιφάνειας καθώς στο pretest έκανε λάθος στις εύκολες ασκήσεις (σκορ 0/6). Το ίδιο φάνηκε και από το γεγονός ότι έκανε λάθος σε αυτή την αναπαράσταση την πρώτη φορά που έπαιξε το παιχνίδι. Στη συνέχεια όμως, όταν διάβασε τα μηνύματα ανατροφοδότησης, κατανόησε τι έπρεπε να κάνει και απάντησε σωστά τόσο στη σχετική δραστηριότητα του παιχνιδιού, όσο και στην εύκολη δραστηριότητα στο posttest. Μάλιστα, στο posttest απάντησε σωστά και στις 3 από τις 4 δραστηριότητες μέτριου επιπέδου (συνολικό σκορ 5/6).

Όσον αφορά στους μαθητές με μέτρια επίδοση και αυτοί έδειξαν ότι δεν ήταν ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με την αναπαράσταση επιφάνειας. Για παράδειγμα, ο πρώτος από τους μαθητές με μέτρια επίδοση (ΜΜΕ1) έκανε λάθος και στις 2 εύκολες δραστηριότητες του pretest (σκορ 0/6). Όλες οι απαντήσεις του στις ερωτήσεις που του ζητούσαν να κατονομάσει το μέρος του σχήματος που είναι γραμμοσκιασμένο, ήταν της μορφής *αριθμητής / (παρονομαστής – αριθμητής).* Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για το παρακάτω σχήμα δήλωσε ότι το κλάσμα που αναπαρίσταται είναι το $\frac{4}{3}$.

Αντίστοιχη ήταν και η απάντηση που έδωσε την πρώτη φορά που έπαιξε το παιχνίδι. Στη συνέχεια όμως, διαβάζοντας την ανατροφοδότηση για δεύτερη φορά (καθώς την πρώτη φορά δεν την πρόσεξε), κατάφερε να απαντήσει σωστά στην ερώτηση. Στις 2 από τις 4 φορές που έπαιξε το παιχνίδι, χρειάστηκε να διαβάσει την ανατροφοδότηση για να απαντήσει σωστά. Τελικά, απάντησε σωστά σε μία από τις δύο εύκολες ερωτήσεις του posttest (σκορ 1/6).

Κάτι αντίστοιχο συνέβη και με τη δεύτερη μαθήτρια μέτριου επιπέδου

(MME2). Απάντησε λάθος και στις δύο εύκολες ερωτήσεις στο pretest (σκορ 0/6). Μάλιστα, η συγκεκριμένη μαθήτρια φάνηκε ότι έβαζε πάντα ως αριθμητή του κλάσματος τον αριθμό 1 και ως παρονομαστή τον αριθμό των γραμμοσκιασμένων κομματιών (δηλ. στο παραπάνω σχήμα έγραψε το κλάσμα ¼). Όταν έπαιξε το παιχνίδι, δεν φάνηκε καταρχάς να κατανοεί την ανατροφοδότηση, καθώς συνέχισε να κάνει το ίδιο λάθος. Τη δεύτερη φορά όμως, αφού διάβασε την ανατροφοδότηση, απάντησε σωστά. Τις άλλες δύο φορές που έπαιξε το παιχνίδι, έδωσε κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα, οπότε δεν έκανε κανένα λάθος. Πάντως, η κατανόησή της δεν φάνηκε να έχει διάρκεια, αφού στις εύκολες δραστηριότητες του posttest έδωσε και πάλι τις ίδιες απαντήσεις με το pretest (σκορ 0/6).

Ο τρίτος από τους μέτριους μαθητές (MME3) απάντησε σωστά στις εύκολες δραστηριότητες για την αναπαράσταση επιφάνειας τόσο στο pretest όσο και στο posttest (σκορ 2/6). Και κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού δεν φάνηκε να έχει πρόβλημα με τη σχετική δραστηριότητα. Πάντως, δυσκολεύτηκε στις μέτριου επιπέδου δραστηριότητες και δεν κατάφερε να τις απαντήσει σωστά ούτε μετά το παιχνίδι.

Η εικόνα ήταν διαφορετική στους μαθητές υψηλής επίδοσης, ένα αγόρι κι ένα κορίτσι. Και οι δύο απάντησαν σωστά σε όλες τις εύκολες και μέτριου επιπέδου ερωτήσεις στο pretest (εκτός από ένα λάθος που έκανε το κορίτσι). Ωστόσο, τόσο πριν όσο και μετά το παιχνίδι, φάνηκε να τους δυσκολεύει η δύσκολη δραστηριότητα, η οποία ήταν στην ουσία ένας συνδυασμός όλων των αναπαραστάσεων μαζί. Το αγόρι (MYE1) έκανε σωστά τη δραστηριότητα αντιστοίχισης της συνεχούς αναπαράστασης με τον δεκαδικό αριθμό πριν και μετά το παιχνίδι, αλλά όχι τη δραστηριότητα αντιστοίχισης της συνεχούς αναπαράστασης με τη λεκτική εκφορά, ούτε εκείνη της αντιστοίχισης της συνεχούς αναπαράστασης με την αναπαράσταση διακριτών μεγεθών. Από την άλλη, το κορίτσι (MYE2) έκανε λάθος σε όλες τις δύσκολες δραστηριότητες πριν το παιχνίδι. Μετά το παιχνίδι έκανε σωστά τη δραστηριότητα αντιστοίχισης της συνεχούς αναπαράστασης με τον δεκαδικό αριθμό.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι μας εξέπληξε το γεγονός ότι αρκετοί από τους μαθητές δεν ήταν σε θέση από την αρχή να δώσουν σωστές απαντήσεις σε δραστηριότητες σχετικές με την αναπαράσταση επιφάνειας. Τελικά, φάνηκε ότι το παιχνίδι βοήθησε αρκετούς από αυτούς να θυμηθούν τη συγκεκριμένη αναπαράσταση και να βελτιώσουν τις απαντήσεις τους στο posttest.

Αναπαράσταση διακριτών μεγεθών

Και σε αυτή την περίπτωση, όπως και προηγουμένως, οι περισσότεροι μαθητές δεν είχαν την αναμενόμενη εξοικείωση με τη συγκεκριμένη αναπαράσταση, αν και είναι από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων ήδη από την Γ’ Δημοτικού.

Έτσι, η πρώτη από τους μαθητές χαμηλής επίδοσης (ΜΧΕ1) έκανε σωστά την εύκολη δραστηριότητα με τη διακριτή αναπαράσταση στο pretest (σκορ 1/2). Όσο έπαιζε, έκανε κάποια λάθη, αλλά διαβάζοντας την ανατροφοδότηση στη συνέχεια τα διόρθωνε. Σε κάθε περίπτωση, η μαθήτρια φάνηκε ότι δεν ήταν σίγουρη για τις γνώσεις της, καθώς έδινε διαφορετικές απαντήσεις κάθε φορά, δείχνοντας ότι δεν είχε στο μυαλό της έναν συγκεκριμένο τρόπο υπολογισμού της απάντησης. Και στο posttest, κατάφερε να απαντήσει σωστά μόνο στην εύκολη δραστηριότητα της αναπαράστασης διακριτών μεγεθών (σκορ 1/2).

Ο δεύτερος από τους μαθητές χαμηλής επίδοσης (ΜΧΕ2) επίσης συμπλήρωσε με επιτυχία μόνο την εύκολη δραστηριότητα του pretest(σκορ 1/2). Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, έκανε αρκετές φορές λάθος και φάνηκε ότι ως έναν βαθμό απαντούσε στην τύχη. Επίσης, ειδικά τις πρώτες φορές, δεν έδινε σημασία στην οθόνη ανατροφοδότησης και την προσπερνούσε χωρίς να τη διαβάσει. Αυτό τον οδηγούσε σε επανειλημμένα λάθη. Όταν τελικά διάβασε την ανατροφοδότηση, φάνηκε να κατανοεί πώς να υπολογίσει την αναπαράσταση διακριτών μεγεθών και από εκείνο το σημείο και πέρα δεν ξαναέκανε λάθος. Ωστόσο, στο τέλος μπόρεσε να απαντήσει και πάλι μόνο στην εύκολη δραστηριότητα του posttest (σκορ 1/2).

Παρόμοια ήταν η εικόνα και για τον πρώτο από τους μαθητές μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ1), που απάντησε σωστά μόνο στην εύκολη δραστηριότητα του pretest (σκορ 1/2). Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, έκανε δύο φορές λάθος στο δωμάτιο με την αναπαράσταση διακριτών μεγεθών. Αντίθετα όμως με το προηγούμενο παιδί, αυτός εξαρχής προσπάθησε να καταλάβει τι έλεγε η ανατροφοδότηση και στη συνέχεια απάντησε σωστά τη δραστηριότητα. Ωστόσο, και τη δεύτερη φορά που έπαιξε το παιχνίδι έκανε στην αρχή λάθος στην απάντηση που έδωσε, αλλά μετά, διαβάζοντας και πάλι την ανατροφοδότηση, απάντησε σωστά. Από εκείνο το σημείο και πέρα δεν ξαναέκανε λάθος κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Στο τέλος πάντως, φάνηκε ότι δεν είχε επεκτείνει τις γνώσεις του, καθώς στο posttest απάντησε σωστά μόνο την εύκολη δραστηριότητα (σκορ 1/2).

Η δεύτερη μαθήτρια μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ2) στην αρχή δεν θυμόταν καθόλου την αναπαράσταση διακριτών μεγεθών, καθώς έκανε λάθος στην εύκολη δραστηριότητα του pretest (σκορ 0/2). Όπως αναμενόταν, και την πρώτη φορά που έπαιξε το παιχνίδι έκανε λάθος. Διαβάζοντας όμως την ανατροφοδότηση, θυμήθηκε τον τρόπο υπολογισμού και από εκείνο το σημείο και πέρα δεν ξαναέκανε λάθος στο συγκεκριμένο δωμάτιο. Αυτό φάνηκε και στο posttest, όπου κατάφερε να ολοκληρώσει με επιτυχία την εύκολη δραστηριότητα για τη συγκεκριμένη αναπαράσταση (σκορ 1/2). Ο τρίτος μαθητής μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ3) δε βελτίωσε τις γνώσεις του για την αναπαράσταση διακριτών μεγεθών, καθώς απάντησε σωστά μόνο στην εύκολη δραστηριότητα, τόσο στο pretest όσο και στο posttest (σκορ 1/2). Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού δεν έκανε κανένα λάθος στο δωμάτιο αυτό.

Όσον αφορά στους μαθητές υψηλής επίδοσης, το αγόρι (ΜΥΕ1) απάντησε με επιτυχία την εύκολη και τη μέτριου επιπέδου δραστηριότητα τόσο στο pretest όσο και στο posttest (σκορ 2/2). Ωστόσο, δυσκολεύτηκε στις δύσκολες δραστηριότητες (αντιστοίχιση της αναπαράστασης διακριτών μεγεθών με αριθμογραμμή και με αναπαράσταση επιφάνειας), την οποία δεν μπόρεσε να ολοκληρώσει με επιτυχία. Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού δεν έκανε κανένα λάθος και δεν δίστασε καθόλου. Ήταν γρήγορος και σίγουρος για τις απαντήσεις που έδινε. Το κορίτσι (ΜΥΕ2) από την άλλη μεριά, έκανε λάθος στη μέτριου επιπέδου δραστηριότητα στο pretest (σκορ 1/2). Παίζοντας το παιχνίδι δεν έκανε λάθος στην αντίστοιχη δοκιμασία. Στο posttest, ολοκλήρωσε με επιτυχία και τη δραστηριότητα του μέτριου επιπέδου, αλλά όχι τις πιο δύσκολες (σκορ 2/2).

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι οι μαθητές φάνηκε να έχουν κάποιες βασικές γνώσεις για την αναπαράσταση διακριτών μεγεθών. Αν και αρκετοί από αυτούς δεν τη θυμόταν στην αρχή, ωστόσο με τη βοήθεια της ανατροφοδότησης του παιχνιδιού, μπόρεσαν να απαντήσουν σωστά στην αντίστοιχη δραστηριότητα. Ωστόσο, αν και κάποιοι φάνηκε να διατηρούν την κατανόησή τους στο posttest, οι περισσότεροι έκαναν τα ίδια λάθη με προηγουμένως, με εξαίρεση τη δεύτερη μαθήτρια μέτριας επίδοσης και τη μαθήτρια υψηλής επίδοσης, οι οποίες βελτίωσαν τις επιδόσεις τους πριν και μετά το παιχνίδι.

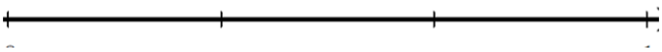
Αριθμογραμμή

Η αριθμογραμμή θεωρείται από τις πιο δύσκολες αναπαραστάσεις για τους μαθητές και ίσως ένας από τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτό είναι ότι συνήθως δεν διδάσκεται στο ελληνικό σχολείο. Κάτι αντίστοιχο αντιμετωπίσαμε και με τα παιδιά που συμμετείχαν στη δοκιμή. Αν και μας είπαν ότι την έχουν διδαχθεί, αρκετοί από τους μαθητές έκαναν πολλά λάθη σε αυτό το κομμάτι της εφαρμογής.

Έτσι, η πρώτη από τους μαθητές χαμηλής επίδοσης (ΜΧΕ1) έκανε λάθος και στις δύο εύκολες δραστηριότητες για την αριθμογραμμή στο pretest (σκορ 0/6). Παίζοντας το παιχνίδι, έκανε μερικές φορές λάθος στην αντίστοιχη δραστηριότητα. Διάβαζε όμως με προσοχή την ανατροφοδότηση και κάθε φορά προσπαθούσε να κάνει αυτό που εξηγούνταν, κάτι που δείχνει πως κατανοούσε τις οδηγίες. Τελικά, κατάφερε να απαντήσει σωστά στη δραστηριότητα του παιχνιδιού. Το ότι κατανόησε ως έναν βαθμό πώς λειτουργεί η αριθμογραμμή φάνηκε, γιατί στο posttest απάντησε σωστά σε μία από τις δύο εύκολες δραστηριότητες (σκορ 1/6).

Ο δεύτερος από τους μαθητές χαμηλής επίδοσης (ΜΧΕ2) είχε μια καλύτερη κατανόηση της αριθμογραμμής και απάντησε σωστά σε μία από τις δύο εύκολες ερωτήσεις του pretest (σκορ 1/6). Όσο έπαιζε το παιχνίδι, δύο φορές χρειάστηκε την ανατροφοδότηση για να απαντήσει σωστά. Στην αρχή, ρώτησε αν μπορεί η αριθμογραμμή να προχωρήσει πιο δεξιά. Είχε δώσει ως κλάσμα το 3/7 και, όταν ρωτήθηκε πού ήθελε να πάει η αριθμογραμμή, απάντησε τον αριθμό 7. Αφού διάβασε τις οδηγίες, φάνηκε ότι τις κατανοεί, καθώς προσπάθησε να τις ακολουθήσει. Μετά την πρώτη ανάγνωση της ανατροφοδότησης, προσπάθησε να μετρήσει τις γραμμές σωστά, αλλά υπολόγισε και τη γραμμή του 0 και οδηγήθηκε σε λάθος αποτέλεσμα. Αυτό το είδος λάθους έχει επισημανθεί και από τους ερευνητές, όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 1.4.2. Τη δεύτερη φορά, διάβασε πιο προσεκτικά την ανατροφοδότηση και μέτρησε σωστά. Πάντως, κάθε φορά που έμπαινε σε αυτό δωμάτιο της εφαρμογής, αν και προσπαθούσε να απαντήσει με βάση όσα θυμόταν, πρώτα έκανε λάθος και μετά, διαβάζοντας την ανατροφοδότηση, οδηγούνταν στη σωστή απάντηση. Στο posttest, κατάφερε να απαντήσει σωστά στη μία από τις δύο εύκολες ερωτήσεις και στη μια μέτριου επιπέδου δραστηριότητα (σκορ 2/6).

Ο πρώτος από τους μαθητές μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ1) είχε αρκετές αδυναμίες στην αριθμογραμμή. Στο pretest, έκανε λάθος και στις δύο εύκολες δραστηριότητες (σκορ 0/6). Παίζοντας το παιχνίδι, απέφυγε να μπει σε αυτό το δωμάτιο και το προσπάθησε μόνο 2 φορές. Την πρώτη φορά, έκανε λάθος και τη δεύτερη, έχοντας διαβάσει προηγουμένως την ανατροφοδότηση, προσπάθησε να δώσει τη σωστή απάντηση, αλλά μπερδεύτηκε στο μέτρημα των γραμμών. Πάντως, φάνηκε ότι κάτι έμαθε τελικά, γιατί στις εύκολες δραστηριότητες του posttest, αν και έκανε λάθος στη μία, στη δεύτερη τοποθέτησε το κλάσμα που του δίνονταν κοντά στο σωστό σημείο. Πιο συγκεκριμένα, του δινόταν η παρακάτω αριθμογραμμή και του ζητούνταν να τοποθετήσει σε αυτή το κλάσμα 2/3. Ο μαθητής τράβηξε μια γραμμή λίγο πιο δεξιά από τη σωστή γραμμή, δηλ. στο κομμάτι ανάμεσα στο 2/3 και το 1 (σκορ 1/6).



Η δεύτερη από τους μαθητές μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ2) έκανε επίσης λάθος και στις δύο εύκολες δραστηριότητες του pretest (σκορ 0/6). Ακόμη, έκανε αρκετές φορές λάθος και μέσα στο παιχνίδι στη δοκιμασία της αριθμογραμμής. Το λάθος που επέμενε να κάνει, αν και φαινόταν να διαβάζει την ανατροφοδότηση, ήταν να προσπαθεί να τοποθετήσει το κλάσμα δεξιά της μονάδας αντί του μηδενός. Αυτό είναι ένα από τα συχνά λάθη που κάνουν οι μαθητές στην αριθμογραμμή (βλ. κεφ. 1.4.2). Τελικά, δοκίμασε και κατάφερε να τοποθετήσει δύο φορές με επιτυχία το κλάσμα στη σωστή θέση. Μάλιστα, στο posttest κατάφερε να απαντήσει με επιτυχία σε μια από τις δύο εύκολες δραστηριότητες (σκορ 1/6).

Ο τρίτος από τους μαθητές μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ3) απάντησε σωστά σε μια από τις δύο εύκολες δραστηριότητες του pretest, αλλά δεν θέλησε να απαντήσει στην άλλη, λέγοντας ότι δεν τη γνωρίζει (σκορ 1/6). Παίζοντας το παιχνίδι, μπήκε στο δωμάτιο της αριθμογραμμής μόνο μια φορά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, είχε δώσει το κλάσμα 1/1, οπότε και απάντησε σωστά ότι το κλάσμα βρίσκεται στον αριθμό 1. Και στο posttest δεν φάνηκε να έχει βελτιώσει τις γνώσεις του, καθώς απέφυγε και πάλι να συμπληρώσει τη μια από τις δύο εύκολες δραστηριότητες και έδωσε την ίδια σωστή απάντηση στη δεύτερη δραστηριότητα (σκορ 1/6).

Στους μαθητές υψηλής επίδοσης, το αγόρι (ΜΥΕ1) στο pretest απάντησε σωστά στις εύκολες δραστηριότητες και στις δύο από τις τέσσερις μέτριου επιπέδου δραστηριότητες (σκορ 4/6). Όσες φορές έπαιξε το παιχνίδι, απάντησε σωστά στην ερώτηση της αριθμογραμμής και δεν χρειάστηκε να χρησιμοποιήσει την ανατροφοδότηση. Στο posttest, επανέλαβε τα ίδια λάθη που είχε κάνει και προηγουμένως. Το κορίτσι (ΜΥΕ2) απάντησε σωστά στη μια από τις δύο εύκολες ερωτήσεις του pretest (σκορ 1/6). Στη διάρκεια του παιχνιδιού, στην αρχή έκανε ένα λάθος στο μέτρημα των γραμμών, αλλά φάνηκε σε γενικές γραμμές να γνωρίζει τη διαδικασία εντοπισμού του κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή. Πάντως, δεν πρέπει να ήταν σίγουρη για τις γνώσεις της, καθώς στις δραστηριότητες του posttest, απάντησε και πάλι σωστά στη μια από τις δύο εύκολες, αλλά φάνηκε να διστάζει στη δεύτερη. Αφού το σκέφτηκε αρκετά, τελικά προτίμησε να μη συμπληρώσει τίποτα και να αφήσει κενή την ερώτηση, γιατί είπε ότι δεν ήξερε πού να τοποθετήσει το κλάσμα.

Συνοψίζοντας, στη δραστηριότητα της αριθμογραμμής καταγράφηκε αυτό που αναμενόταν σε γενικές γραμμές, το γεγονός δηλαδή ότι οι μαθητές δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με αυτή την αναπαράσταση. Ωστόσο, οφείλουμε να πούμε ότι τα παιδιά προσπάθησαν παίζοντας το παιχνίδι να ακολουθήσουν τις οδηγίες που τους δίνονταν και να τοποθετήσουν σωστά το κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή, κάτι που σε αρκετές περιπτώσεις το κατάφεραν. Το ότι επιτεύχθηκε μια έστω και μικρή βελτίωση στην κατανόησή τους δείχνει το γεγονός ότι οι 4 από τους 7 μαθητές βελτίωσαν έστω και σε μικρό βαθμό την επίδοσή τους πριν και μετά το παιχνίδι.

Μετατροπή σε δεκαδικό αριθμό

Στις ερωτήσεις με δεκαδικούς αριθμούς, όπως και στην αριθμογραμμή, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα. Μάλιστα, κάποιοι από αυτούς, όπως θα δούμε, δεν φάνηκε στην αρχή να γνωρίζουν την έννοια του δεκαδικού αριθμού.

Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη από τους μαθητές με χαμηλή επίδοση (ΜΧΕ1) έκανε λάθος τις δύο από τις τέσσερις εύκολες δραστηριότητες του pretest (εκείνες που ζητούσαν να μετατρέψει ένα κλάσμα στον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό) (σκορ 2/8). Έκανε μάλιστα τα λάθη που συναντήσαμε στη βιβλιογραφία (βλ. κεφ. 1.4.2), δηλαδή έγραψε το κλάσμα $\frac{1}{4}$ ως 1,4. Παίζοντας το παιχνίδι, έκανε αρκετές φορές λάθος στη σχετική δραστηριότητα και η ανατροφοδότηση δεν φάνηκε να τη βοηθά, καθώς δεν είδαμε να προσπαθεί να υπολογίσει το αποτέλεσμα κάνοντας την αντίστοιχη διαίρεση. Την τελευταία φορά που έπαιξε το παιχνίδι, έδωσε ένα πολύ γνωστό κλάσμα (το $\frac{1}{2}$) για το οποίο επέλεξε τη σωστή απάντηση ανάμεσα στις εναλλακτικές που της δίνονταν. Αυτό όμως μάλλον έγινε στην τύχη, καθώς για το ίδιο κλάσμα έδωσε ως δεκαδικό το 1,2 στη γραπτή δραστηριότητα, τόσο στο pretest όσο και στο posttest (σκορ 2/8). Έτσι, δεν φάνηκε να βελτιώνει την κατανόησή της.

Ο δεύτερος μαθητής χαμηλής επίδοσης (ΜΧΕ2) στο pretest αρνήθηκε να κάνει οποιαδήποτε άσκηση με δεκαδικούς αριθμούς, λέγοντας ότι δεν τους θυμάται καθόλου. Μάλιστα, έδειξε να μην γνωρίζει καν την έννοια του δεκαδικού αριθμού, καθώς νόμιζε ότι αυτό που του ζητούσαν οι δραστηριότητες ήταν να σχεδιάσει ένα σχήμα. Παίζοντας το παιχνίδι, δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά ούτε μια φορά στην αντίστοιχη δραστηριότητα και όλες του οι απαντήσεις ήταν επιλογές πάνω από το 1 (ενώ το πρόγραμμα δε δέχεται καταχρηστικά κλάσματα). Αν και διάβασε την ανατροφοδότηση, δεν γνώριζε πώς να κάνει τη διαίρεση που του ζητούνταν. Σημειώνουμε ακόμη ότι καμιά από τις φορές που έπαιξε το παιχνίδι δεν έδωσε κάποιο από τα «εύκολα» κλάσματα, δηλαδή κάποιο από τα γνωστά κλάσματα με τα οποία ασχολούνται συνήθως οι μαθητές, όπως το ½ ή το ¼. Στο τέλος, αν και δέχτηκε να συμπληρώσει τις εύκολες δραστηριότητες για τους δεκαδικούς αριθμούς, έκανε παρόμοια λάθη με την συμμαθήτριά του, γράφοντας ότι $\frac{1}{4}$=0,14 και $\frac{1}{2}$=1,2 (σκορ 0/8).

Και ο πρώτος από τους μαθητές μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ1) είχε πολλά κενά στους δεκαδικούς αριθμούς. Και αυτός στο pretest αρνήθηκε να συμπληρώσει την εύκολη δραστηριότητα, λέγοντας ότι δεν τους θυμάται (σκορ 0/8). Παίζοντας το παιχνίδι, αν και διάβασε την ανατροφοδότηση που έδινε η δραστηριότητα, δεν ακολούθησε τις οδηγίες που του δίνονταν. Κάθε φορά μάλιστα, αν και φαινόταν να προσπαθεί να σκεφτεί ποια απάντηση έπρεπε να διαλέξει, τελικά μάλλον επέλεγε μια στην τύχη. Αυτό το συμπεράναμε, καθώς οι απαντήσεις του δεν φαινόταν να ακολουθούν κάποιον συγκεκριμένο τρόπο σκέψης, καθώς άλλες φορές επέλεγε αριθμούς μικρότερους από τη μονάδα και άλλες φορές μεγαλύτερους. Αυτό άλλωστε καταγράφηκε και στις δραστηριότητες του posttest, όπου οι απαντήσεις που έδωσε ήταν δεκαδικοί αριθμοί μικρότεροι της μονάδας και προέκυπταν από την πρόσθεση του αριθμητή με τον παρονομαστή. Για παράδειγμα, στο κλάσμα $\frac{1}{2}$ έδωσε ως απάντηση τον δεκαδικό 0,3 (σκορ 0/8).

Παρόμοια επίδοση είχε και η δεύτερη μαθήτρια μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ2), η οποία στις δραστηριότητες του pretest αντιστοίχισε το κλάσμα $\frac{1}{4}$ με τον δεκαδικό

0,4. Αλλά και κατά την αντίστροφη διαδικασία, απάντησε ότι 0,75=$\frac{1}{75}$ (σκορ 0/8). Το ίδιο μοτίβο σκέψης φάνηκε να ακολουθεί και κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, αν και διάβασε την ανατροφοδότηση. Μάλιστα, αναρωτήθηκε γιατί το πρόγραμμα δεν δέχεται την απάντησή της ως σωστή, αφού όπως είπε χαρακτηριστικά: «*1 δια 2 μας κάνει 1,2*». Δηλαδή, αν και γνώριζε ότι έπρεπε να κάνει διαίρεση, θεωρούσε δεδομένο ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης θα είναι είτε το 1,2 είτε το 0,2 και δεν μπήκε στη διαδικασία να προσπαθήσει να κάνει την πράξη για να υπολογίσει το πηλίκο. Τελικά, δεν μπόρεσε να απαντήσει σωστά σε αυτή τη δραστηριότητα. Στο posttest, έδωσε τις ίδιες απαντήσεις με το pretest στις εύκολες δραστηριότητες.

Και ο τρίτος μαθητής μέτριας επίδοσης (ΜΜΕ3) στις δραστηριότητες του pretest έκανε παρόμοια λάθη, γράφοντας ότι $\frac{1}{2}$= 0,12 (σκορ 0/8). Και κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού έκανε αρκετά λάθη. Τελικά, όταν έδωσε το κλάσμα $\frac{5}{10}$, κατάφερε να απαντήσει σωστά. Αυτή η απάντηση φάνηκε ότι κάτι του θύμισε για τη μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα, γιατί στο posttest απάντησε σωστά στις δύο από τις τέσσερις εύκολες δραστηριότητες μετατροπής των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα, γράφοντας ότι 0,2=$\frac{2}{10}$ και ότι 0,75=$\frac{75}{100}$ (σκορ 2/8). Ωστόσο, έκανε πάλι τα ίδια λάθη με προηγουμένως στη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, γράφοντας ότι $\frac{1}{2}$=0,12.

Όπως ήταν αναμενόμενο, καλύτερα τα πήγαν οι μαθητές υψηλής επίδοσης. Το αγόρι (ΜΥΕ1) απάντησε σωστά στις εύκολες, τις μεσαίου επιπέδου και στη μία από τις δύο δύσκολες δραστηριότητες (αντιστοίχιση δεκαδικού αριθμού με αναπαράσταση επιφάνειας), τόσο στο pretest όσο και στο posttest. Στη διάρκεια του παιχνιδιού έδωσε σωστές απαντήσεις. Από την άλλη, το κορίτσι (ΜΥΕ2) απάντησε σωστά στις εύκολες και σχεδόν σε όλες τις μέτριου επιπέδου δραστηριότητες (άφησε μια απάντηση κενή) στο pretest. Επίσης, απάντησε σωστά και στη μία από τις δύο δύσκολες δραστηριότητες (αντιστοίχιση δεκαδικού με λεκτική εκφορά του κλάσματος). Παίζοντας το παιχνίδι, αν και δεν έκανε κάποιο λάθος στην αντίστοιχη δραστηριότητα, σκεφτόταν αρκετά πριν επιλέξει τη σωστή απάντηση και έδειξε να αγχώνεται μήπως απαντήσει λάθος. Τελικά, στο posttest, απάντησε σωστά στις εύκολες δραστηριότητες και σχεδόν σε όλες τις μέτριου επιπέδου (αφήνοντας πάλι την ίδια ερώτηση κενή), αλλά κατάφερε να απαντήσει σωστά και στις δύο δύσκολες δραστηριότητες (αντιστοίχιση δεκαδικού αριθμού με αναπαράσταση επιφάνειας και αντιστοίχιση δεκαδικού με λεκτική εκφορά του κλάσματος).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό είναι τελικά πολύ απαιτητική για τους μαθητές, εκ των οποίων μόνο οι μαθητές υψηλής επίδοσης φάνηκε να γνωρίζουν από την αρχή τη διαδικασία που έπρεπε να ακολουθήσουν. Οι περισσότεροι μαθητές υπέπεσαν στα πιο συνηθισμένα λάθη που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία ή ακολουθούσαν το μοτίβο σκέψης που είχαν αναπτύξει (όπως για παράδειγμα ο μαθητής που, για να κάνει τη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, πρόσθετε τον αριθμητή και τον παρονομαστή και έγραφε το αποτέλεσμα βάζοντας μπροστά το 0 και την υποδιαστολή). Από το σύνολο των μαθητών, φάνηκε ότι ένας από τους μαθητές μέτριας επίδοσης βοηθήθηκε ως έναν βαθμό από το πρόγραμμα, καθώς θυμήθηκε τα δεκαδικά κλάσματα, όπως επίσης και η μια από τους μαθητές υψηλής επίοδοσης, που βελτίωσε την επίδοσή της στις δύσκολες ασκήσεις του posttest.

Λεκτική αναπαράσταση

Πολύ πιο ομοιόμορφα ήταν τα αποτελέσματα της δοκιμής στο κομμάτι της λεκτικής αναπαράστασης. Όλοι οι μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά στις εύκολες ερωτήσεις, τόσο στο pretest όσο και στο posttest. Ωστόσο, μόνο οι μαθητές υψηλής επίδοσης και ένας από τους μαθητές μέτριας επίδοσης διάβασαν σωστά τα κλάσματα στη μέτριου επιπέδου δραστηριότητα. Και μόνο μια από τους μαθητές υψηλής επίδοσης (ΜΥΕ2) συμπλήρωσε σωστά τη μια από τις δύο δύσκολες δραστηριότητες, τόσο στο pretest όσο και στο posttest (αντιστοίχιση της λεκτικής εκφοράς του κλάσματος με τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό). Στο σύνολό τους οι μαθητές φάνηκε να είναι εξοικειωμένοι με τη λεκτική εκφορά των εύκολων κλασμάτων και κανείς τους δεν έκανε λάθος όσες φορές έπαιξαν το παιχνίδι. Το γεγονός ότι δεν παρουσίασε κάποια αλλαγή η επίδοσή τους στις μέτριου επιπέδου δραστηριότητες των τεστ μπορεί να οφείλεται στο ότι τα κλάσματα που υπήρχαν σε αυτές ήταν πολύ μεγάλα (για παράδειγμα $\frac{6}{72}$) και δεν συνάντησαν παρόμοιες περιπτώσεις μέσα στο παιχνίδι.

Συναισθηματικός στόχος

Τέλος, δεν παραλείπουμε να αναφέρουμε τι κατέγραψε η έρευνά μας όσον αφορά στον συναισθηματικό στόχο του προγράμματος, ο οποίος είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια θετική στάση απέναντι στα κλάσματα μέσα από ευχάριστες δραστηριότητες (χρήση της τεχνολογίας και του παιχνιδιού).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι μαθητές ήταν ιδιαίτερα θετικοί απέναντι στην προοπτική χρήσης των υπολογιστών και των ηλεκτρονικών παιχνιδιών ως εναλλακτικών τρόπων εξάσκησης έναντι των παραδοσιακών ασκήσεων. Όπως μας είπαν «*τα μαθηματικά θα ήταν πιο ευχάριστα*» με τέτοιες δραστηριότητες. Αυτό συμφωνεί με τη σχετική βιβλιογραφία για τα συναισθηματικά οφέλη της χρήσης των παιχνιδιών στα μαθηματικά και ειδικά των ηλεκτρονικών παιχνιδιών (βλ. κεφάλαια 3.5.1 & 3.5.3).

5.3.5 Γενικές παρατηρήσεις

Από την παραπάνω ανάλυση των αποτελεσμάτων της δοκιμής του προγράμματος προκύπτουν ενθαρρυντικά αποτελέσματα και χρήσιμες παρατηρήσεις για την περαιτέρω βελτίωση του παιχνιδιού.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε ότι όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν το πρόγραμμα χωρίς προβλήματα και χωρίς εξωτερική βοήθεια και κατανόησαν τι έπρεπε να κάνουν. Σε αυτό συντέλεσε πιθανόν και το γεγονός ότι όλοι είχαν εξοικείωση με τους υπολογιστές και είχαν υπολογιστή στο σπίτι. Μάλιστα, δήλωσαν ότι θα τους άρεσε να έχουν στα μαθηματικά τέτοιες δραστηριότητες και ότι θα ξαναέπαιζαν το παιχνίδι. Ακόμη, οι μαθητές έκαναν θετικά σχόλια και για την ύπαρξη της ιστορίας, λέγοντας ότι έτσι το παιχνίδι γίνεται πιο ενδιαφέρον και ότι τους κίνησε την περιέργεια να δουν τι θα γίνει παρακάτω. Η άποψή τους ήταν ότι το παιχνίδι ήταν πολύ καλύτερο με την ιστορία σε σχέση με το να υπήρχαν απλά οι δραστηριότητες σε ψηφιακή μορφή. Συνεπώς, ο στόχος της ευχρηστίας και ο συναισθηματικός στόχος του προγράμματος φάνηκαν να εκπληρώνονται.

Όσον αφορά στους γνωστικούς στόχους του προγράμματος, φάνηκε ότι ειδικά οι μαθητές χαμηλής και μέτριας επίδοσης σε γενικές γραμμές ωφελήθηκαν παίζοντας το παιχνίδι. Όλοι οι μαθητές χαμηλής και μέτριας επίδοσης βελτίωσαν τις επιδόσεις τους πριν και μετά το παιχνίδι, έστω και σε μικρό βαθμό. Σίγουρα, θα ήταν χρήσιμο να υπάρχει μια διαβάθμιση στη δυσκολία των δραστηριοτήτων, ώστε να παρατηρηθούν περισσότερα γνωστικά οφέλη και στους μαθητές υψηλής επίδοσης. Ίσως το να δέχεται το πρόγραμμα μεγαλύτερα και καταχρηστικά κλάσματα θα ήταν μια προσθήκη που θα πρόσφερε σε αυτούς τους μαθητές μεγαλύτερες γνωστικές προκλήσεις. Μια εναλλακτική πρόταση θα ήταν να υπάρχουν και δραστηριότητες που να συνδυάζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα η αντιστοίχιση αναπαραστάσεων που δείχνουν το ίδιο κλάσμα.

Αρκετά αναμενόμενο ήταν το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές δυσκολεύτηκαν στην αριθμογραμμή και στους δεκαδικούς αριθμούς, όπως και το ότι τους φάνηκε εύκολη η λεκτική αναπαράσταση. Αυτό που δεν περιμέναμε ήταν ότι μαθητές της ΣΤ’ τάξης θα παρουσίαζαν τόσες δυσκολίες και θα έκαναν τόσο πολλά λάθη σε αναπαραστάσεις επιφανειών και διακριτών ποσοτήτων, δεδομένου ότι αυτές χρησιμοποιούνται συχνότερα κατά την εκμάθηση των κλασμάτων.

Ένα θετικό στοιχείο που καταγράψαμε με την παρατήρηση ήταν ότι οι περισσότεροι μαθητές διάβαζαν με προσοχή την ανατροφοδότηση που τους δινόταν, όταν έκαναν κάποιο λάθος. Φάνηκαν να κατανοούν τις εξηγήσεις και στις περισσότερες περιπτώσεις προσπάθησαν να εφαρμόσουν αυτά που είχαν διαβάσει. Μάλιστα, μια μαθήτρια είπε ότι το παιχνίδι είναι καλό γιατί, «*όταν δεν θυμάσαι κάτι, έχει και τη θεωρία και σου λέει πώς να το κάνεις*». Από την άλλη πλευρά, ειδικά ένας από τους μαθητές στην αρχή αγνοούσε τις οθόνες ανατροφοδότησης και δεν τις διάβαζε καθόλου, με αποτέλεσμα να επαναλαμβάνει συνεχώς τα ίδια λάθη. Μόνο αφότου είχε παίξει πολλές φορές το παιχνίδι, διάβασε ένα από τα μηνύματα ανατροφοδότησης και προσπάθησε να το εφαρμόσει.

Τέλος, ένα στοιχείο που καταγράψαμε κατά την παρατήρηση των μαθητών ήταν ότι όλοι στην αρχή έδιναν τυχαία κλάσματα. Στην πορεία, οι περισσότεροι από αυτούς που έκαναν πολλά λάθη και έχαναν προτού τερματίσουν το παιχνίδι, φάνηκε ότι σταδιακά έδιναν όλο και πιο εύκολα κλάσματα, προσπαθώντας να χρησιμοποιήσουν κάποια από τα βασικά κλάσματα με τα οποία είναι πιο εξοικειωμένοι, όπως το ¼ και το ½. Αυτό το έκαναν όλοι σχεδόν οι μαθητές, εκτός από έναν μαθητή χαμηλής επίδοσης. Αυτός δεν φάνηκε να σκέφτεται έτσι και, παρά τα λάθη που έκανε, που τον οδήγησαν τελικά στο να μην καταφέρει να τερματίσει το παιχνίδι, σε καμία προσπάθεια δεν έδωσε κάποιο εύκολο κλάσμα. Το ίδιο συνέβη και με τον έναν από τους μαθητές υψηλής επίδοσης, ο οποίος ένιωθε πολύ σίγουρος για τις γνώσεις του. Βέβαια, σε αυτή την περίπτωση ο μαθητής κατάφερε να ολοκληρώσει το παιχνίδι όλες τις φορές.

Ακόμη, σίγουρα θα πρέπει να σημειώσουμε το γεγονός ότι οι μαθητές φάνηκε να έχουν κάποιο άγχος μήπως κάνουν λάθος, αν και τους είχε γίνει σαφές από την αρχή ότι δεν ήταν ο στόχος να αξιολογηθούν. Έτσι, ενώ τα παιδιά απαντούσαν με άνεση στις γενικές ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, όταν υπήρχαν ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου, αλλά και κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, κάποια παιδιά αγχώνονταν ιδιαιτέρως μήπως κάνουν λάθος. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι ένας από τους μαθητές μέτριας επίδοσης, επειδή έκανε πολλά λάθη σε όλα τα δωμάτια, εκτός από εκείνο με τη λεκτική αναπαράσταση, άρχισε να διστάζει να επιλέξει κάποιο. Τελικά, δεν κατάφερε να τερματίσει το παιχνίδι, αν και το έπαιξε αρκετές φορές, και φάνηκε να απογοητεύεται.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι η εικόνα που άφησε η δοκιμή του προγράμματος ήταν θετική όσον αφορά στην ευχρηστία και στη γνωστική του αποτελεσματικότητα. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν με ενδιαφέρον στο παιχνίδι και έδειξαν να το απολαμβάνουν, κάτι που προέκυψε τόσο από την παρατήρηση όσο και από την συνέντευξη. Δεν υπήρξαν προβλήματα με τον χειρισμό του προγράμματος και κανένας δεν χρειάστηκε εξωτερική βοήθεια για να κατανοήσει τι πρέπει να κάνει. Σχετικά με τη γνωστική αποτελεσματικότητα, αυτό που καταγράφηκε είναι ότι οι μαθητές χαμηλής και μέτριας επίδοσης είναι εκείνοι που θα μπορούσαν να ωφεληθούν περισσότερο από την παρούσα μορφή του προγράμματος, για να καλύψουν κάποια από τα μαθησιακά κενά που έχουν. Για τους μαθητές υψηλής επίδοσης, θα ήταν χρήσιμη μια διαβάθμιση στη δυσκολία των ερωτήσεων και ίσως η δυνατότητα χρήσης μεγαλύτερων και καταχρηστικών κλασμάτων. Πάντως, όλοι είπαν ότι ευχαρίστως θα ξαναέπαιζαν το παιχνίδι.

5.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα της δοκιμής του παιχνιδιού σε μαθητές της ΣΤ’ τάξης. Ο στόχος της δοκιμής ήταν να ελεγχθεί η ευχρηστία και η γνωστική αποτελεσματικότητα του προγράμματος. Στο κομμάτι της ευχρηστίας, τα αποτελέσματα ήταν πολύ ενθαρρυντικά, καθώς οι μαθητές διασκέδασαν παίζοντας το παιχνίδι και δεν αντιμετώπισαν προβλήματα στον χειρισμό του. Επίσης, καταγράφηκαν γνωστικά οφέλη, κυρίως στους μαθητές χαμηλής και μέτριας επίδοσης. Βέβαια, το δείγμα ήταν μικρό και συνεπώς τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν είναι αξιόπιστα. Άλλωστε, δεν ήταν αυτός ο στόχος. Ωστόσο, τα αποτελέσματα συμφωνούν με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις που έχουν γίνει στη βιβλιογραφία.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά στην ένταξη των υπολογιστών και των νέων τεχνολογιών στην τάξη των μαθηματικών, είναι αρκετοί οι επιστήμονες που επισημαίνουν την ανάγκη του σχολείου να συμβαδίσει με τα ενδιαφέροντα και την καθημερινότητα των παιδιών έξω από το σχολείο (βλ. κεφ. 3.5.3). Άλλωστε, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2, υπάρχει μια πληθώρα παρεμβάσεων, οι οποίες αξιοποιούν τους υπολογιστές, ειδικά στη διδασκαλία των κλασμάτων, με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση των μαθητών. Βέβαια, αρκετές από αυτές τις προσπάθειες επικεντρώνονται στην χρήση των υπολογιστών ως εναλλακτικό εργαλείο για τη διδασκαλία, όπως για παράδειγμα οι παρεμβάσεις που έγιναν με το GeoGebra και το G-Math (Thambi & Eu, 2013, Tsuei, 2014) (βλ. κεφ. 2.2.3 & 2.2.4). Στη δική μας περίπτωση, η πρόταση που υιοθετείται είναι η χρήση του παιχνιδιού ως εναλλακτικής των δραστηριοτήτων εξάσκησης για το σπίτι, όπως έγινε και στην περίπτωση του διαδικτυακού πολυμεσικού πίνακα και του WebMA (Hwang et al., 2006, Nguyen & Kulm, 2005) (βλ. κεφ. 2.2.6 & 2.2.7).

Η χρήση μιας δραστηριότητας με παιγνιώδη χαρακτηριστικά μπορεί να κάνει τα μαθηματικά να φαίνονται πιο ευχάριστα και διασκεδαστικά, (βλ. κεφάλαιο 3.5.1), κάτι το οποίο καταγράφηκε και στην παρούσα δοκιμή. Παρόμοια αποτελέσματα έχουν καταγράψει και άλλες έρευνες (Lee, 2009, Liang & Zhou, 2009), όπως στην περίπτωση του παιχνιδιού για την ταξινόμηση των κλασμάτων (βλ. κεφ. 2.2.8) και στην περίπτωση της πρωτοβουλίας για την ενίσχυση της εκπαίδευσης (βλ. κεφ. 2.2.1).

Ακόμη, η ύπαρξη μιας ιστορίας, η οποία λειτουργεί ως πλαίσιο για τις δραστηριότητες, προσθέτει ενδιαφέρον και κινητοποιεί τους μαθητές. Στη δοκιμή που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία, οι μαθητές δήλωσαν ότι ήθελαν να προχωρήσουν παρακάτω στο παιχνίδι για να δουν τη συνέχεια της ιστορίας. Αντίστοιχα αποτελέσματα καταγράφηκαν και στην ψηφιακή ιστορία (Gundas, 2014), που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 2.2.5. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο μαθητής πρέπει να επιλύσει τα μαθηματικού περιεχομένου προβλήματα που αντιμετωπίζει ο ήρωας της ιστορίας, ώστε να τον βοηθήσει να φτάσει στον τελικό του στόχο. Έτσι, οι μαθητές βλέπουν τις μαθηματικές ερωτήσεις της ιστορίας ως εργαλείο για την επίτευξη ενός στόχου και όχι ως τυχαία γεγονότα ή διαδικασίες.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της χρήσης των ηλεκτρονικών εφαρμογών για τα μαθηματικά είναι η δυνατότητα άμεσης ανατροφοδότησης των μαθητών σε περίπτωση λάθους. Στη δοκιμή που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία, η ανατροφοδότηση φάνηκε ότι βοήθησε πολύ τους μαθητές να θυμηθούν και να κατανοήσουν τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν για να απαντήσουν σωστά στις δραστηριότητες. Παρόμοια, και σε άλλες εφαρμογές (Gundas, 2014, Nguyen & Kulm, 2005, Liang & Zhou, 2009), όπως η ψηφιακή ιστορία, το WebMA και οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόγραμμα με τίτλο «*Ενισχύοντας την εκπαίδευση μέσα από την τεχνολογία*» (βλ. κεφ. 2.2.5, 2.2.7 & 2.2.1) οι ερευνητές επισήμαναν τη σημασία της ανατροφοδότησης για να οδηγηθεί ο μαθητής σε αναστοχασμό πάνω στα λάθη του. Επίσης, υπογραμμίζεται το γεγονός ότι ο μαθητής έχει την ευκαιρία να δοκιμάσει να διορθώσει μόνος του τα λάθη του, χωρίς να νιώθει ότι απειλείται ή εκτίθεται στα μάτια των άλλων. Όπως επισημαίνεται, η ευχάριστη και μη επικριτική φύση των δραστηριοτήτων, τις κάνει ιδανικές για να βοηθήσουν τους μαθητές να νιώσουν ασφαλείς και να διορθώνουν μόνοι τους τα λάθη τους, χωρίς άγχος και ντροπή.

Τέλος, πρέπει να υπογραμμιστεί ξανά η σημασία της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων από τους μαθητές. Αυτό το σημείο αποτέλεσε την αφετηρία για τη δημιουργία του παιχνιδιού και, όπως αναλύθηκε στο 1^{ο} κεφάλαιο, είναι απαραίτητο οι μαθητές να έρχονται σε επαφή και να αλληλεπιδρούν με όσο το δυνατό περισσότερες διαφορετικές μορφές του κλάσματος. Έτσι, θα μπορέσουν να κατανοήσουν την πολυδιάστατη φύση της συγκεκριμένης έννοιας. Άλλωστε, το ίδιο επισημαίνεται και σε αντίστοιχες προσπάθειες που έχουν γίνει με ηλεκτρονικές εφαρμογές για τα κλάσματα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των Cognitive Tutors (Rau et al., 2009) (βλ. κεφ. 2.2.9). Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και η έρευνα με το παιχνίδι για την ταξινόμηση των κλασμάτων (Lee, 2009) (βλ. κεφ. 2.2.8), στην οποία χρησιμοποιήθηκε μόνο αναπαράσταση επιφανειών του κλάσματος. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές φάνηκε να μπερδεύονται, όταν έπρεπε να διαχειριστούν αναπαραστάσεις τις οποίες δεν συνάντησαν στο παιχνίδι.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της δοκιμής του παιχνιδιού που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία, συμφωνούν με τις παρατηρήσεις που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία και αφορούν στη θετική αντιμετώπιση από τους μαθητές των ηλεκτρονικών εφαρμογών (και ειδικά των παιχνιδιών) για τα κλάσματα και τα μαθησιακά οφέλη που φαίνεται να προκύπτουν από τη χρήση τους.

Επίλογος – Μελλοντικές κατευθύνσεις

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις του κλάσματος. Το παιχνίδι απευθύνεται στους μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου. Αναπτύχθηκε με στόχο να αποτελέσει μια εναλλακτική πρόταση των δραστηριοτήτων εξάσκησης που δίνονται στους μαθητές για το σπίτι. Το παιχνίδι αναπτύχθηκε λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων και τα συνηθέστερα λάθη που κάνουν. Επίσης, μελετήθηκε η βιβλιογραφία που καταγράφει τα οφέλη της χρήσης των υπολογιστών και των παιχνιδιών κατά την ένταξή τους στην τάξη των μαθηματικών και ειδικότερα για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Βασιζόμενοι σε αυτά, αναπτύξαμε το παιχνίδι «Το κάστρο των κλασμάτων».

Εκτός από την παρουσίαση του παιχνιδιού, πραγματοποιήθηκε και μια έρευνα για να διαπιστωθεί η ευχρηστία και η γνωστική αποτελεσματικότητα της εφαρμογής. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, αν και δε βασίζονται σε μεγάλο πειραματικό δείγμα, είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά.

Όσον αφορά στην ευχρηστία του προγράμματος, διαπιστώθηκε ότι όλοι οι μαθητές ήταν σε θέση να το χειριστούν χωρίς προβλήματα. Κατανοούσαν τι έπρεπε να κάνουν και δεν χρειάστηκαν εξωτερική βοήθεια, καθώς φάνηκε ότι οι οδηγίες του προγράμματος ήταν επαρκείς και σαφείς. Συνεπώς, οι μαθητές πλοηγήθηκαν με ευκολία και δεν καταγράφηκαν προβλήματα στον χειρισμό του προγράμματος. Επιπλέον, όλοι οι μαθητές εξέφρασαν θετικές κρίσεις για το παιχνίδι, λέγοντας ότι θα το ξαναέπαιζαν στο σπίτι τους και θα το προτιμούσαν από τις παραδοσιακές ασκήσεις που έχουν συνήθως να κάνουν. Οι μαθητές είπαν ακόμη ότι τους άρεσε η ιστορία και οι χαρακτήρες του παιχνιδιού και ότι τους κίνησαν το ενδιαφέρον να προχωρήσουν παρακάτω για να δουν τι θα γίνει στη συνέχεια της ιστορίας. Αυτή η παρατήρηση συμφωνεί και με τη σχετική βιβλιογραφία, στην οποία αναφέρεται ότι η ύπαρξη μιας ιστορίας δημιουργεί ενδιαφέρον και κινητοποιεί τους μαθητές (Gundas, 2014).

Στο κομμάτι της γνωστικής αποτελεσματικότητας, αυτό που καταρχάς μας έκανε εντύπωση ήταν το πολύ χαμηλό επίπεδο γνώσεων γύρω από τα κλάσματα των μαθητών χαμηλής και μέτριας επίδοσης. Πιο συγκεκριμένα, σχεδόν όλοι οι μαθητές φάνηκε πως δεν ήταν εξοικειωμένοι με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων. Μάλιστα, αρκετοί από αυτούς δεν ήταν εξαρχής σε θέση να απαντήσουν σωστά σε εύκολες ερωτήσεις που αφορούσαν την αναπαράσταση επιφάνειας και την αναπαράσταση διακριτών ποσοτήτων των κλασμάτων, δηλαδή τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αναπαραστάσεις κατά τη διδασκαλία. Συνεπώς, τόσο οι μαθητές χαμηλής όσο και οι μαθητές μέτριας επίδοσης μαθητές έκαναν πολλά λάθη κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Θετικό ήταν το γεγονός ότι διάβαζαν την ανατροφοδότηση που τους δινόταν σε κάθε περίπτωση και φάνηκε ότι στην πλειοψηφία τους προσπαθούσαν στη συνέχεια να την εφαρμόσουν για να απαντήσουν σωστά στις δραστηριότητες.

Πολύ περισσότερες δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές στην αριθμογραμμή και στη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό. Στην αριθμογραμμή, οι μαθητές χαμηλής επίδοσης και οι μαθητές μέτριας επίδοσης στην πλειοψηφία τους φάνηκε να μη γνωρίζουν πώς να τοποθετήσουν σωστά το κλάσμα. Θετικό κρίθηκε το γεγονός ότι, αφού διάβαζαν την ανατροφοδότηση που δινόταν από το πρόγραμμα, οι μαθητές φάνηκε να κατανοούν τη διαδικασία που έπρεπε να ακολουθήσουν. Αρκετοί από αυτούς μάλιστα τελικά κατάφεραν να κατανοήσουν τι έπρεπε να κάνουν και βελτίωσαν την επίδοσή τους. Αντίστοιχες δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές και στους δεκαδικούς αριθμούς. Στην πλειοψηφία τους δεν γνώριζαν πώς να μετατρέψουν ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό. Ακόμη και αφού έπαιξαν αρκετές φορές το παιχνίδι, συνέχιζαν να αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σε αυτό το κομμάτι. Το μόνο σημείο στο οποίο όλοι οι μαθητές φάνηκε να μην αντιμετωπίζουν πρόβλημα ήταν η λεκτική εκφορά των μικρών κλασμάτων.

Διαφορετική ήταν η εικόνα για τους μαθητές υψηλής επίδοσης, οι οποίοι από την αρχή ότι ήταν σε θέση να απαντήσουν με σχετική άνεση σε εύκολες και μεσαίου επιπέδου ερωτήσεις. Για αυτούς τους μαθητές, ίσως θα ήταν καλό να υπάρχει μια διαβάθμιση στη δυσκολία των δραστηριοτήτων, ώστε να μπορέσουν να ωφεληθούν περισσότερο από το πρόγραμμα.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι το πρόγραμμα φάνηκε να έχει θετική επίδραση στις γνώσεις των μαθητών χαμηλής και μέτριας επίδοσης. Οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον για το παιχνίδι και δήλωσαν πρόθυμοι να το ξαναπαίξουν στο σπίτι τους, για να βελτιώσουν τις γνώσεις τους γύρω από τα κλάσματα. Ίσως θα ήταν χρήσιμο να γίνει ένας διαχωρισμός των διαδικασιών σε επίπεδα δυσκολίας, ώστε να ωφεληθούν περισσότερο από το παιχνίδι και οι καλοί μαθητές.

Τελικά, η έρευνα έδειξε θετικά αποτελέσματα στο κομμάτι της ευχρηστίας του προγράμματος και μάλιστα υπήρχε πολύ καλή ανταπόκριση από τους μαθητές, οι οποίοι δήλωσαν στην πλειοψηφία τους ότι θα ήθελαν να ξαναπαίξουν το παιχνίδι. Σχετικά με τη γνωστική αποτελεσματικότητα, τα αποτελέσματα που καταγράψαμε ήταν θετικά, αν και το δείγμα ήταν μικρό. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές χαμηλής και μέτριας επίδοσης έδειξαν ότι θα μπορούσαν να ωφεληθούν από τις δραστηριότητες του προγράμματος για να εμπλουτίσουν τις γνώσεις τους και να αυξήσουν την κατανόησή τους γύρω από τα κλάσματα. Για να υπάρξουν αντίστοιχα οφέλη και για τους μαθητές υψηλής επίδοσης, καλό θα ήταν το πρόγραμμα να επεκταθεί και να συμπεριλάβει και πιο πολύπλοκες δραστηριότητες, ίσως με μεγαλύτερα ή και καταχρηστικά κλάσματα.

Βιβλιογραφία

Avraamidou, A. & Monaghan, J. (2009). Abstraction through game play. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73–80). Thessaloniki, Greece: PME.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing. (ανάκτηση από τη διεύθυνση http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/bib_alpha.html)

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (ανάκτηση από τη διεύθυνση http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/bib_chrono.html

Bennett, S. J., Maton, K. A. & Kervin, L. K. (2008). The 'digital natives' debate: a critical review of the evidence. *British Journal of Educational Technology*, 39(5), p.775-786.

Bragg, L. (2007*)*. Students' Conflicting Attitudes Towards Games as a Vehicle for Learning Mathematics: A Methodological Dilemma. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), p.29-44.

Bragg, L. A. (2006). Hey, I'm learning this. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(4), p. 4–9.

Bragg, L. A. (2012). Testing The Effectiveness Of Mathematical Games As A Pedagogical Tool For Children's Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education.*

Bragg, L., (2003). Children's perspectives on mathematics and game playing, In *Mathematics education research: innovation, networking, opportunity: proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, held at Deakin University*, MERGA Inc., Pymble, N.S.W., p.160-167.

Bright, G. W., Harvey, J. G. & Wheeler, M. M. (1985). Learning and mathematics games. *Journal for Research in Mathematics Education*-Monograph Number, 1, p.1–189.

Chang, W. L., Yuan, Y., Lee, C. Y., Chen, M. H., & Huang, W. G. (2013). Using Magic Board as a Teaching Aid in Third Grader Learning of Area Concepts. *Educational Technology & Society*, 16 (2), p. 163–173.

Charalambous, Y. C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, p.293-316.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (Μ. Κλαυδιανού, Μετάφ.). Αθήνα: Μεταίχμιο. (Το πρωτότυπο έργο δημοσιεύτηκε το 2000).

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), p.111-144.

De Corte, E., Depaepe, F., Op ‘t Eynde, P., & Verschaffel, L. (2005). Comparing mathematics education traditions in for European countries: The case of the teaching of percentages in the primary school. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project: “Reform, revolution, and paradigm shifts in mathematics education* (p.1-11). Johor Bahru, Malaysia: The Mathematics Education into the 21st Century Project.

Dillenbourg, P. & Evans, M. (2011). Interactive tabletops in education. *International Journal of ComputerSupported Collaborative Learning*, 6 (4), p. 491-514.

Egenfeldt-Nielsen, S. (2007). Third Generation Educational Use of Computer Games**.** *Jl. of Educational Multimedia and Hypermedia*, 16(3), p.263-281.

Fazio, L. & Siegler, R. (2011). *Teaching Fractions*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, International Bureau of Education.

Garcia, I., & Pacheco, C. (2013*).* A constructivist computational platform to support mathematics education in elementary school. *Computers & Education*, 66, p. 25-39.

Gerdes, P. (2001). Exploring the game of “julirde”: A mathematical-educational game played by fulbe children in Cameroon. *Teaching Children Mathematics*, 7(6), p.321–327.

Gros, B. (2007). Digital Games in Education:The Design of Games-Based Learning Environments. *Journal of Research on Technology in Education*, 40(1), p.23–38.

Gundas, N. (2014). Students’ mathematics word problem-solving achievement in a computer-based story. *Journal of Computer Assisted Learning*, 31(1), p. 78–95.

Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction on a Number Line. *27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, 3, p.17- 24. Honolulu, Hawaii, International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Hwang W. Y., Chen N. S., Hsu R. L. (2006). Development and evaluation of multimedia whiteboard system for improving mathematical problem solving. *Computers & Education*, 46, p. 105–121.

Kamii, C. K. & Rummelsburg, J. (2008). Arithmetic for first graders lacking number concepts. *Teaching Children Mathematics*, 14(7), p.389–394.

Ke, F**.** (2008). A case study of computer gaming for math: Engaged learning from gameplay? *Computers & Education*, 51(4), p.1609-1620.

Keengwe, J., Onchwari, G., & Wachira, P. (2008). The use of computer tools to support meaningful learning. *AACE Journal*, 16(1), p. 77-92.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a researchworkshop* (pp. 101-144). Columus, Ohio.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-150). Columus, Ohio.

Lee, Y. L. (2009). Enhancement of fractions from playing a game. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.*), Crossing divides: MERGA 32: Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics* (Vol. 1, pp. 323–330). Palmerston North.

Liang, X. & Zhou, Q. (2009). Students’ experiences of mathematics learning in technology integrated classrooms. *International Journal of Technology in Teaching and Learning*, 5(1), p. 62–74.

Lim-Teo, S. K. (1991). Games in the mathematics classroom. *Teaching and Learning*, 11(2), p.47–56.
Long, C. (2009). From whole number to real number: Applying Rasch measurement to investigate threshold concepts. *Pythagoras*, 70, p.32-34.
Maloney, J., Resnick, M., Rusk, N., Silverman, B., Eastmond, E. (2010). The scratch programming language and environment. *ACM Transactions on Computing Education* 10(4), Article 16.
Mathematics Navigator: A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2-8). (2015) America's Choice. Ανάκτηση από τη διεύθυνση https://pearsonnacommunity.force.com/coco/articles/Documentation/Math-Navigator-A-Sample-of-Mathematics-Misconceptions-Errors
McFarlane, A., Sparrowhawk, A., & Heald, Y. (2002). *Report on the educational use of games*.
McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation (p.575-597) in D. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics and learning.* NY: Macmillan.
McLeod, R. & Newmarch, B. (2006). *Fractions*. London, NRDC.
Miller, C. S., Lehman, J. F., & Koedinger, K. R. (1999). Goals and learning in microworlds. *Cognitive Science*, 23(3), p.305–336.
Miller, D. J., & Robertson, D. P. (2010). Using games console in the primary classroom: Effects of 'Brain Training' programme on computation and self-esteem. *British Journal of Educational Technology*, 41, p.242 -255.
Nguyen, D. M. & Kulm, G. (2005). Using Web-based Practice to Enhance Mathematics Learning and Achievement. *Journal of Interactive Online Learning*, 3(3), p. 1-16 .
Nisbet, S. & Williams, A. (2009). Improving students' attitudes to chance with games and activities. *Australian Mathematics Teacher*, 65(3), p.25–37.
Oblinger, D. (2004). The Next Generation of Educational Engagement. *Journal of Interactive Media in Education, 8, Special Issue on the Educational Semantic Web.*
Oldfield, B. J. (1991). Games in the learning of mathematics—Part 1: Classification. *Mathematics in School*, 20(1), p.41–43.
Papastergiou, M. (2009). Digital Game-Based Learning in high school Computer Science education: Impact on educational effectiveness and student motivation. *Computers & Education* 52, p.1-12.
Petit, M. M., Laird R. E. & Marsden E. L. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom.* New York & London, Routledge.
Prensky, M. (2001). *Digital game-based learning*. New York: McGraw-Hill.
Prensky, M. (2003). Digital game-based learning. *ACM Computers in Entertainment*, 1(1), p.1–4.
Randel, J., Morris, B., Wetzel, C., & Whitehill, B. (1992). The effectiveness of games for educational purposes: A review of recent research. *Simulation and Gaming*, 23(3), p.261–276.
Rau, M. A. (2013). *Conceptual learning with multiple graphical representations: Intelligent tutoring systems support for sense-making and fluency-building processes* (Doctoral dissertation, Department of Statistics, Carnegie Mellon University).
Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings*

of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2013). How to use multiple graphical representations to support conceptual learning? Research-based principles in the Fractions Tutor. In *Artificial Intelligence in Education* (pp. 762-765). Springer Berlin Heidelberg.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernαndez, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., Millner, A., Rosenbaum, E., Silver, J., Silverman, B., Kafai, Y. (2009). Scratch: Programming for All. *Communications of the Acm***,** 52(11), p.60-67.

Rick, J., & Rogers, Y. (2008). From DigiQuilt to DigiTile: Adapting educational technology to a multi-touch table. *Proceedings of TABLETOP'08* (p. 79–86). Los Alamitos.

Roberts, D. F., Foehr, D. G., Rideout, V. I., & Brodie, M. (1999). *Kids and media at the new millennium: A comprehensive national analysis of children's media use.* Menlo Park, CA: A Kaiser Family Foundation Report.

Smith, L., & Mann, S. (2002). Playing the game: A model for gameness in interactive game based learning. *In Proceedings of the 15th Annual NACCQ*, p.397– 402. Hamilton, New Zealand.

Squire, K., & Jenkins, H. (2004). Harnessing the power of games in education. *Insight*, 3(1), p.5–33.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of numerical value of fractions. *Learning and Instruction* , 14, p.503 - 518.

Swan, P. & Marshall, L. (2009). Mathematical games as a pedagogical tool. *CoSMEd 2009 3rd International Conference on Science and Mathematics Education Proceedings* , p.402-406, Penang, Malaysia.

Thambi, N. & Eu, L. K. (2013). Effect of Students' Achievement in Fractions using GeoGebra. *SAINSAB*, 16, p. 97 - 106.

Tsuei, M. (2014). Mathematics Synchronous Peer Tutoring System for Students with Learning Disabilities. *Educational Technology & Society*, 17 (1), p. 115–127.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23.

Van de Walle, J.A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή Διαδικασία* Αθήνα. Επίκεντρο.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, p.9-35.

Whitton, N., Whitton, P. (2011). The Impact Of Visual Design Quality On Game-Based Learning. M.S. Khine (ed.), *Playful Teaching, Learning Games: New Tool for Digital Classrooms*, p.1–19.

Woodbridge, J. (2004). *Technology integration as a transforming teaching strategy*. Retrieved May 3, 2015, from http://www.techlearning.com/news/0002/technology-integration-as-a-transforming-teaching-strategy/56552.

Zengin, Y., Furkanb, H., Kutlucaa, T., (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 31, p. 183 – 187.

Αβούρης, Ν. (2000). *Εισαγωγή στην επικοινωνία ανθρώπου – υπολογιστή*. Αθήνα: Δίαυλος.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. Δ., Σαΐτης, Α. Α. *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού: Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών

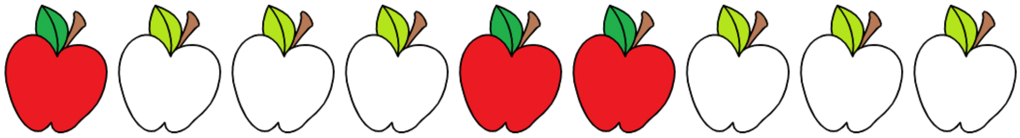
Βιβλίων.
Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά – Κωνσταντίνου, Α. & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; *9^ο^ Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου* (σελ 99 - 110). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.
Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., Χρονοπούλου, Γ. *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού: Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού: Βιβλίο Εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα, Leader Books.
Λεμονίδης, Χ., (2007). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής.* Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζυγός.
Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α. *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής: Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
Σταματόπουλος, Κ. (2011). *Η Μαθηματική και διδακτική διάσταση της γνώσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας σχετικά με την έννοια του κλάσματος.* (Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα). Ανάκτηση από τη διεύθυνση http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Stamatopoulos%20 Constantinos.pdf.

Παράρτημα

Διακριτή αναπαράσταση

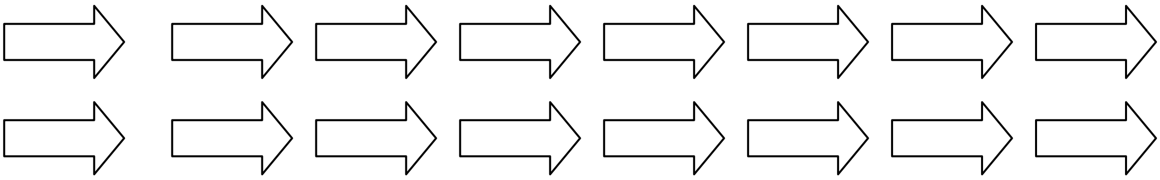
Εύκολη δραστηριότητα (ΑΔΜ1)

Γράψε τι κλάσμα του συνόλου είναι τα χρωματισμένα μήλα.



Δραστηριότητα μεσαίου επιπέδου (ΑΔΜ2)

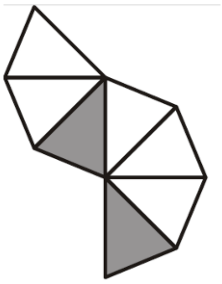
Χρωμάτισε τα 7/8 του παρακάτω συνόλου



Αναπαράσταση επιφάνειας

Εύκολη δραστηριότητα (ΑΕ1)

Τι μέρος του σχήματος είναι γραμμοσκιασμένο; Γράψε το κλάσμα.

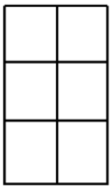


Δραστηριότητα μεσαίου επιπέδου

Ζωγράφισε το κομμάτι του σχήματος, με βάση το κλάσμα που δίνεται.

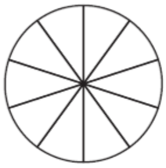
(ΑΕ2α)

$\frac{5}{6}$



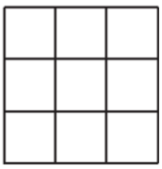
(ΑΕ2β)

$\frac{1}{5}$



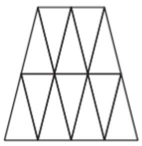
(ΑΕ2γ)

$\frac{1}{3}$



(ΑΕ2δ)

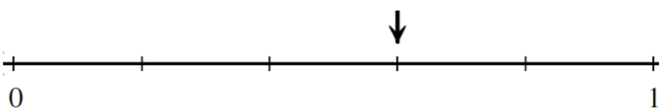
$\frac{3}{4}$



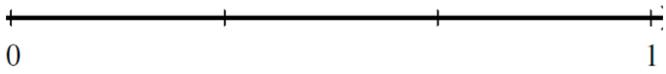
Αριθμογραμμή

Εύκολες δραστηριότητες

Α. Σε ποιο κλάσμα δείχνει το βέλος; (ΑΑ1α)

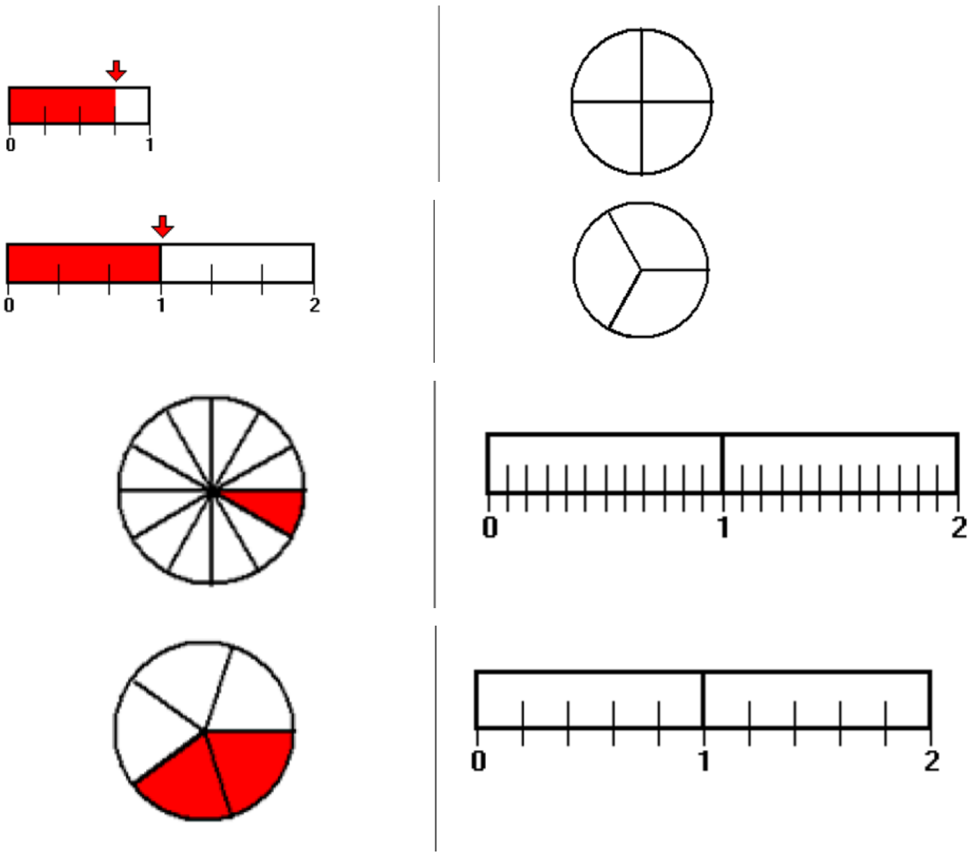


Β. Στην παρακάτω αριθμογραμμή, σημείωσε το κλάσμα 2/3 (ΑΑ1β)



Δραστηριότητες μεσαίου επιπέδου

Σε καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια, χρωμάτισε τον κύκλο με τέτοιο τρόπο, ώστε να απεικονίζει το ίδιο κλάσμα με αυτό που απεικονίζει η αριθμογραμμή και το αντίστροφο. (ΑΑ2α, β, γ, δ)



Λεκτική αναπαράσταση

Εύκολη δραστηριότητα (ΑΛ1α, β, γ, δ)

Διάβασε τα κλάσματα: $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{10}{100}$

Δραστηριότητα μεσαίου επιπέδου (ΑΛ2α, β, γ, δ)

Διάβασε τα κλάσματα: $\frac{6}{72}$, $\frac{4}{200}$, $\frac{19}{99}$, $\frac{52}{53}$

<u>Δεκαδικός αριθμός</u>

Εύκολη δραστηριότητα

Κάνε τα παρακάτω κλάσματα δεκαδικούς αριθμούς και αντίστροφα. **(ΑΔ1α, β, γ, δ)**

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

0,2

0,75

Δραστηριότητα μεσαίου επιπέδου (ΑΔ2α, β, γ, δ)

Κάνε τα παρακάτω κλάσματα δεκαδικούς αριθμούς και αντίστροφα.

$\frac{4}{10}$

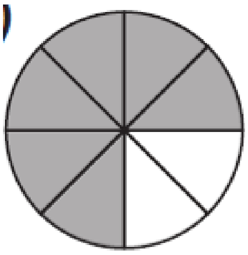
$\frac{3}{5}$

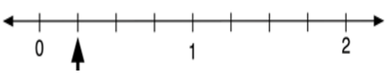
0,48

0,6

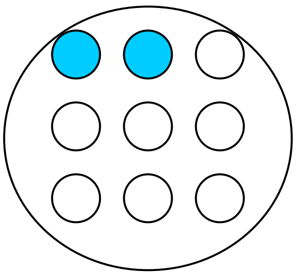
<u>Δύσκολη δραστηριότητα</u> (Μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη)

Ένωσε με μια γραμμή αυτά που είναι ίδια. (ΜΑα, β, γ, δ, ε)

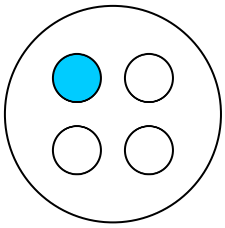




Δύο πέμπτα



0,5



0,4

Έξι όγδοα