ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΝΟΛΚΑ ΕΛΕΝΗΣ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

στις «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2015

ΦΥΛΛΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

1. Επόπτης: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής

Βαθμός: ________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης, Επίκουρος Καθηγητής

Βαθμός: ________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Ελένη Τσακιρίδου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Βαθμός: ________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία

Γενικός Βαθμός: ____

Η συγγραφέας, Ελένη Νόλκα, βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Περίληψη

Μία θεμελιώδης δεξιότητα του πραγματικού κόσμου είναι η ικανότητα της υπολογιστικής εκτίμησης. Μέσω της δεξιότητας αυτής επιτρέπεται ο έλεγχος για το αν η λύση ενός αριθμητικού προβλήματος είναι λογική, η καλύτερη κατανόηση των αριθμητικών πράξεων και γενικά της αίσθησης του αριθμού. Ιδιαίτερα σημαντική στην υπολογιστική εκτίμηση είναι η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών καθώς και η ικανότητα εκτέλεσης πολύπλοκων νοερών υπολογισμών. Γι’ αυτό το λόγο θεωρείται αρκετά σημαντικό να κατέχει κάποιος ένα ευρύ ρεπερτόριο στρατηγικών και να επιλέγει την πιο κατάλληλη στρατηγική σε κάθε πρόβλημα (Reys, Rittle-Johnson & Perova, 2009). Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση και ανάλυση της συμπεριφοράς μαθητών λυκείου στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης. Μελετήθηκε η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών Λυκείου, ομογενών μαθητών από ελληνικό Λύκειο της Γερμανίας, η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών, το μέγεθος του ρεπερτορίου στρατηγικών που διαθέτουν, οι παράγοντες οι οποίοι μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα εκτίμησης. Οι μαθητές δεν είχαν δεχτεί καμία διδακτική παρέμβαση και η ερευνήτρια τυγχάνει να είναι και η μαθηματικός των μαθητών του δείγματος. Παράλληλα έγινε μία σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας με προηγούμενη έρευνα σε μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού. Οι επιδόσεις και οι στρατηγικές των 30 μαθητών λυκείου μετρήθηκαν με ερωτηματολόγιο το οποίο απαντήθηκε προφορικά μέσω συνέντευξης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούν να χειριστούν προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης και να χρησιμοποιούν πλήθος στρατηγικών εκτίμησης παρόλο που ποτέ δεν τις διδάχθηκαν. Βρέθηκε συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας τους στα μαθηματικά στην τάξη καθώς και της ενασχόλησής τους με εξωσχολικές δραστηριότητες με την επίδοσή τους στην υπολογιστική εκτίμηση. Από τη σύγκριση μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων στην ικανότητα εκτίμησης οι μαθητές λυκείου εμφανίζονται πιο ικανοί από τους μαθητές του δημοτικού χωρίς όμως πολύ μεγάλες διαφορές στις επιδόσεις τους και στη χρήση των στρατηγικών.

Λέξεις-κλειδιά: υπολογιστική εκτίμηση, ευελιξία στρατηγικών, ρεπερτόριο στρατηγικών, παράγοντες σχετικοί με εκτίμηση, μαθητές Λυκείου.

Abstract

A fundamental real-world skill is the ability of computational estimation. Through this skill we are allowed to check the reasonableness of arithmetic problem's answers, as well as achieve a better understanding of mathematical operations and general number sense. Particularly critical in the computational estimation is the flexibility in the use of strategies and the ability to perform complex calculations mentally. For these reasons it is important to have a broad repertoire of estimation strategies and to select the most appropriate strategy for a given problem (Reys, Rittle-Johnson & Perova, 2009). The aim of this study is to examine the behaviors in computational estimation problems of 10^{th}, 11^{th} and 12^{th} grade students. This study focuses on (i) the computational estimation ability of 10^{th}, 11^{th} and 12^{th} grade Greek students, immigrants in Germany, (ii) their flexibility in the use of strategies, (iii) their repertoire of strategies and (iv) factors that may affect their estimation ability. These students have not received training in relation to computational estimation strategies and the researcher of this study is their teacher of mathematics. Included is also a comparison between the results of the present study and a previous study on 5^{th} and 6^{th} grade students of Greek Primary schools. The performance and the strategies of 30 students were measured through interviews and a questionnaire with 15 estimation problems. The results showed that students can estimate although they have not been taught about estimation before. It was found that computational estimation ability may correlate with their abilities in school mathematics and with their extracurricular activities. From the comparison with the two different age research groups the students from 10^{th}, 11^{th} and 12^{th} grade are better estimators than those of 5^{th} and 6^{th} grade, nevertheless without noteworthy differences.

Keywords: computational estimation, strategic flexibility, repertoire of strategies, factors affecting estimation, 10^{th}-12^{th} grade students.

Πρόλογος

«Χωρίς την ικανότητα να εκτιμά κάποιος λογικά και με ακρίβεια, η ζωή θα είναι δύσκολη» (Siegler & Booth, 2004, p 428).

Η εκτίμηση αναγνωρίζεται ως ένας πολύ σημαντικός παράγοντας στη μάθηση των Μαθηματικών και η χρήση της εμφανίζεται σε μεγάλο ποσοστό στην καθημερινή ζωή. Σύμφωνα με τη Reys (1992), η εκτίμηση είναι μία βασική δεξιότητα και η όλο αυξανόμενη σπουδαιότητα της αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο μέσα σε μία τεχνολογική κοινωνία. Χρησιμοποιείται επίσης περισσότερο από ότι ο ακριβής υπολογισμός. Το National Research Council (1989), αναφέρει ότι «στη σημερινή κοινωνία, αλλαγές στην τεχνολογία καταφέρνουν να αναδείξουν τις ικανότητες στην εκτίμηση πιο σημαντικές από ποτέ στην ανάπτυξη της μαθηματικής δύναμης» (αναφορά στο Dolma, 2003). Όμοια ο Usiskin (1986) (όπως αναφέρει ο Dolma, 2003) δηλώνει ότι «…ακόμα και με τις αριθμομηχανές και τους υπολογιστές να αναλαμβάνουν τη δουλειά των υπολογισμών, η εκτίμηση μπορεί να κάνει τα πράγματα ευκολότερα χωρίς σημαντικό σφάλμα στην ποιότητα των απαντήσεων. Συγκεκριμένα απαντήσεις που προκύπτουν μέσω κατάλληλης εκτίμησης μπορεί να είναι πιο λογικές και πιο ρεαλιστικές από αυτές που επιχειρούν ακρίβεια».

Το να είναι ικανός κάποιος να εκτιμήσει ένα αποτέλεσμα σε ένα πρόβλημα είναι πολύ σημαντικό θέμα στη μαθηματική σκέψη σύμφωνα με τη Reys (1986). Κάθε συστατικό της εκτίμησης, αποφασίζοντας τον τύπο της απάντησης που απαιτείται, επιλέγοντας και εκτελώντας κατάλληλη στρατηγική και ελέγχοντας τη λογική της απάντησης – αντανακλά το είδος του υψηλού επιπέδου σκέψης το οποίο σχετίζεται με την επίλυση του προβλήματος και της μαθηματικής σκέψης. Γι’ αυτό η εκτίμηση είναι πολύ κρίσιμη στο να είναι σε θέση ο μαθητής να επιλύει προβλήματα. Με το να είναι ικανός κάποιος μαθητής να δικαιολογεί και να επικοινωνεί με μαθηματικό τρόπο αναπτύσσει την αυτοπεποίθηση του. Έχοντας αυτές τις ικανότητες, τον βοηθάει να εκτιμήσει τα μαθηματικά ως ένα διακριτό τρόπο σκέψης και όχι ως συλλογή κανόνων και τύπων. Επομένως η ανάγκη για ανάπτυξη της ικανότητας της εκτίμησης είναι πολύ σημαντική αφού συνεπάγεται την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Το να είναι ικανός κάποιος να λύνει με επιτυχία προβλήματα στη ζωή είναι ένας από τους βασικότερους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Παρόλο που η σπουδαιότητά αυτής της δεξιότητας έχει αναγνωριστεί ήδη από τη δεκαετία του ’70 (National Council of Supervisors of Mathematics, 1978˙ Carpenter, Coburn, Reys & Wilson, 1976˙ Trafton, 1978) (αναφορά στην Elisha, 2013) οι έρευνες και η εισαγωγή της εκτίμησης στο πρόγραμμα σπουδών στον Ελληνικό χώρο λάβανε χώρα μόλις τα τελευταία χρόνια. Το 2006 εμφανίζεται στα βιβλία του Δημοτικού σχολείου (Δ΄ - ΣΤ΄ τάξη) ενώ μέχρι και σήμερα δεν υπάρχει καμία αναφορά στα βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου ούτε και κάποια επιμόρφωση στους μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας για τη σπουδαιότητα της δεξιότητας ακόμα και για την ύπαρξή της.

Όντας εν ενεργεία μαθηματικός της δημόσιας δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από το 2007 και της ιδιωτικής εκπαίδευσης από το 2003, δεν είχα συναντήσει ποτέ πριν από τις σπουδές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα, την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης σε κάποιο σχολικό εγχειρίδιο. Επίσης λόγω των σπουδών μου στα καθαρά μαθηματικά, όπως και όλοι οι μαθηματικοί που εργάζονται στα ελληνικά γυμνάσια και λύκεια, ήμουν οπαδός του «Μαθηματικά σημαίνει ακρίβεια». Το 2012 σε μια εργασία που μου ανέθεσε ο κύριος Λεμονίδης μελέτησα τις συμπεριφορές μαθητών Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης δημοτικού στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς (Λεμονίδης, Νόλκα & Νικολαντωνάκης, 2014). Εκεί ανακάλυψα τη σπουδαιότητα αυτής της ικανότητας και θέλησα να επεκτείνω την έρευνα σε μαθητές Λυκείου, μία βαθμίδα στην οποία δεν έχουν γίνει προηγούμενες έρευνες σε ελληνικό σχολείο. Μία βαθμίδα στην οποία δε διδάσκεται η υπολογιστική εκτίμηση και που οι μαθητές είναι περισσότερο συγκεντρωμένοι στο «πανελληνιοκεντρικό σύστημα» δηλαδή έχουν στόχο να μάθουν τα μαθηματικά που χρειάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου. Επίσης οι μαθητές οι οποίοι συμμετέχουν στην παρούσα έρευνα, το 2006 ήταν στη Δ΄, Ε΄, και ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού, μόλις είχε εισέλθει η έννοια της εκτίμησης στα σχολεία και τώρα είναι στο σημείο που ολοκληρώνουν τη μαθηματική τους εκπαίδευση πριν εισέλθουν στον κόσμο των ενηλίκων.

Την περίοδο που διεξάγεται η έρευνα βρίσκομαι αποσπασμένη σε ένα ελληνικό λύκειο στο Μπίλεφελντ της Γερμανίας. Οι μαθητές είναι παιδιά ομογενών, παιδιά μεταναστών είτε τρίτης γενιάς είτε του νέου κύματος μεταναστών λόγω της οικονομικής κρίσης. Οι γονείς τους ανήκουν στην πλειοψηφία τους σε χαμηλό βιοτικό και μορφωτικό επίπεδο ενώ οι ίδιοι οι μαθητές (αρκετοί όχι όλοι) έχουν όνειρα και θέλουν να σπουδάσουν και να αποκτήσουν καλύτερο βιοτικό επίπεδο. Το σύστημα φυσικά, των πανελληνίων των ομογενών, τους ευνοεί αρκετά ώστε να περάσουν σε κάποιο ελληνικό πανεπιστήμιο. Σχετικά με το δείγμα της παρούσας έρευνας συγκριτικά με τους μαθητές ενός λυκείου στην Ελλάδα είναι ότι στη Γερμανία δεν ευνοείται τόσο πολύ η παραπαιδεία όπως στην Ελλάδα. Στα Λύκεια στην Ελλάδα είναι πολύ σπάνιο να υπάρχει κάποιος μαθητής ο οποίος δεν παρακολουθεί επιπλέον μαθήματα σε φροντιστήριο ή ιδιαίτερα, όταν ακόμα από τα γυμνάσιο και το δημοτικό πολλές φορές οι μαθητές παρακολουθούν επιπλέον μαθήματα εκτός σχολείου. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές επενδύουν περισσότερο σε αυτά που μαθαίνουν στο σχολείο.

Πέρα όμως από τον έλεγχο των ικανοτήτων των μαθητών σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης, ελέγχεται και η ευελιξία των μαθητών στη χρήση στρατηγικών και κατά πόσο διαθέτουν την ευχέρεια να εφαρμόζουν εναλλακτικούς τρόπους για να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα του ίδιου προβλήματος. Αυτό επεκτείνει την έρευνα όχι μόνο σε ηλικιακό επίπεδο αλλά εμπλουτίζει παράλληλα τη βιβλιογραφία των υπολογιστικών εκτιμήσεων και στον ελλαδικό αλλά και στο διεθνή χώρο.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται στοιχεία σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση. Αρχικά ορίζεται η εκτίμηση και δίνεται έμφαση στη υπολογιστική εκτίμηση. Στη συνέχεια αναλύονται οι στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης όπως αυτές ορίζονται και περιγράφονται στη διεθνή βιβλιογραφία. Έρευνες από το διεθνή χώρο οι οποίες έχουν διεξαχθεί με θέμα την υπολογιστική εκτίμηση στη μεσαία βαθμίδα της εκπαίδευσης, Γυμνάσια και Λύκεια ($7^{η}$ έως και $12^{η}$ τάξη) παρουσιάζονται αναλυτικά. Έπειτα γίνεται μία συσχέτιση της έννοιας της υπολογιστικής εκτίμησης και των νοερών υπολογισμών καθώς και της εκτίμησης ως συστατικό της αίσθησης των αριθμών. Ακόμα παρουσιάζεται η έννοια της ευελιξίας στα μαθηματικά και στην υπολογιστική εκτίμηση. Ολοκληρώνεται η ενότητα αυτή με την περιγραφή των παραγόντων που επηρεάζουν την ικανότητα της εκτίμησης όπως αυτοί προκύπτουν μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας.

1.1 Ορισμοί

Στην ελληνική γλώσσα ο όρος της εκτίμησης σύμφωνα με το λεξικό του Γεώργιου Μπαμπινιώτη είναι 1. Η αξιολόγηση (προσδιορισμός της αξίας, της τιμής), 2. Ο υπολογισμός (σε χρήμα), 3. Η υποκειμενική αξιολόγηση (μιας κατάστασης) ή η πιθανολόγηση σχετικά με την εξέλιξη, 4. Ο προσδιορισμός της ποιότητας, του πόσο αξίζει (κανείς, κάτι). Ενώ η λέξη υπολογισμός ορίζεται ως 1. Η εκτέλεση μαθηματικών πράξεων, 2. Ο προσδιορισμός του αριθμού (προσώπων, πραγμάτων) μιας ποσότητας, της αξίας κλπ. (συνήθως με εμπειρικό ή πρόχειρο τρόπο). Στη σχετική βιβλιογραφία ο όρος εκτίμηση βρίσκεται κυρίως ως estimation και πολλές φορές συγχέεται και με τον όρο approximation, δηλαδή την προσέγγιση. Σύμφωνα με το αγγλικό λεξικό του Collins (Collins English Dictionary, 1988, p.500) ο όρος estimation ορίζεται ως 1. Μία κατά προσέγγιση ιδέα μιας απόστασης, κόστους, μεγέθους, κλπ. 2. Υπολογισμός στο περίπου.

Μέσω της εκτίμησης πραγματοποιείται μία «κρίση της αξίας των αποτελεσμάτων από μία αριθμητική πράξη ή από μία μέτρηση της ποσότητας, ως συνάρτηση μεμονωμένων περιστάσεων του εκτιμητή» (Segovia & Castro, 2009). Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνει ο Maclellan (2001) «ο κατ' εκτίμηση υπολογισμός είναι η διαδικασία μετατροπής των αριθμών σε κατά προσέγγιση αριθμούς και υπολογισμού νοερά του αριθμητικού αποτελέσματος, το οποίο θα «προσεγγίζει» το αποτέλεσμα του αντίστοιχου υπολογισμού με ακρίβεια». Ενώ σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2002β) «Η διαδικασία της εκτίμησης είναι αυτή που χρησιμοποιείται πιο συχνά και είναι πιο χρήσιμη στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Η εκτίμηση είναι μία άτυπη μέτρηση που βασίζεται στην εμπειρία και τις γνώσεις των ατόμων και βοηθάει στην ανάπτυξη της σημασίας των αριθμών, των πράξεων και των ικανοτήτων του υπολογισμού». Οι Siegler & Booth (2005), ορίζουν ως εκτίμηση τη «διαδικασία μετάφρασης μεταξύ εναλλακτικών ποσοτικών αναπαραστάσεων, μεταξύ των οποίων μία τουλάχιστον είναι μη-ακριβής. Οι ποσοτικές αναπαραστάσεις μπορεί να είναι αριθμητικές ή μη-αριθμητικές. Η αριθμητική εκτίμηση αντιστοιχεί στο υποσύνολο των δραστηριοτήτων εκτίμησης κατά την οποία στη μία ή και στις δύο όψεις της μετάφρασης περιλαμβάνει αριθμούς. Αυτή η κατηγορία περιλαμβάνει τις πιο πρωτότυπες μορφές της εκτίμησης».

1.2 Είδη εκτίμησης

Ανάλογα με τις καταστάσεις εκτίμησης που καλούνται οι άνθρωποι να αντιμετωπίσουν στην καθημερινή τους ζωή, χρησιμοποιούν και διαφορετικά είδη εκτίμησης, τα οποία είναι: α) η υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation), β) η εκτίμηση μέτρων (measurement estimation), γ) η εκτίμηση πλήθους (numerosity estimation) και δ) η εκτίμηση αριθμογραμμής (number line estimation) (Sowder, 1992˙ Siegler & Booth, 2005).

Κάθε ένα είδος, σύμφωνα με τους Siegler & Booth (2005), χρειάζεται ένα αποτελεσματικό πλαίσιο για να γίνει κατανοητό όπως επίσης και σε κάθε ένα χρησιμοποιούνται διαφορετικές στρατηγικές από τα παιδιά και τους ενήλικές, οι οποίες αυξάνονται καθώς αυξάνεται η ηλικία και η εμπειρία. Το είδος που χρησιμοποιείται πιο συχνά είναι η υπολογιστική εκτίμηση και αυτή θα μας απασχολήσει στη συγκεκριμένη εργασία.

1.2.1 Υπολογιστική Εκτίμηση

Σύμφωνα με τη Reys, (1984) υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διακριτά χαρακτηριστικά της υπολογιστικής εκτίμησης: 1) πραγματοποιείται νοερά, χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού, β) εκτελείται γρήγορα, γ) παράγει απαντήσεις οι οποίες δεν είναι ακριβείς αλλά είναι επαρκείς για να ληφθούν αποφάσεις, δ) συχνά αντανακλά μεμονωμένες προσεγγίσεις και παράγει ποικιλία εκτιμήσεων ως απαντήσεις.

Η υπολογιστική εκτίμηση περιλαμβάνει την απάντηση σε ένα αριθμητικό πρόβλημα με στόχο την προσέγγιση της σωστής ποσότητας παρά τον υπολογισμό της ακριβούς απάντησης (Siegler & Booth, 2005). Η υπολογιστική εκτίμηση αναφέρεται επίσης σε αριθμητικές πράξεις και σε κρίσεις οι οποίες μπορούν να γίνουν για τα αποτελέσματα. (Segovia & Castro, 2009).

Ορίζεται επίσης ως η προσπάθεια να κάνουν λογικές υποθέσεις με απαντήσεις κατά προσέγγιση σε αριθμητικά προβλήματα, είτε χωρίς την εκτέλεση υπολογισμών είτε πριν από την εκτέλεσή τους (Dowker, 1992˙ Lemaire, Lecacheur & Farioli, 2000). Η υπολογιστική εκτίμηση είναι μία σύνθετη δεξιότητα παρόμοια με την επίλυση προβλημάτων. Ένας καλός εκτιμητής μπορεί να επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική στο πρόβλημα, η οποία περιλαμβάνει τους κατάλληλους αριθμούς και πράξεις (Reys, 1986). Ικανότητες όπως ευελιξία σκέψης, λήψη αποφάσεων, προσαρμογή απάντησης είναι πολύ σημαντικές για την καλλιέργεια καλών δεξιοτήτων εκτίμησης (Trafton, 1994). Οι Reys & Bestgen (1981) ορίζουν την υπολογιστική εκτίμηση ως την «αλληλεπίδραση μεταξύ νοερών υπολογισμών, της έννοιας του αριθμού και τεχνικών αριθμητικών δεξιοτήτων όπως η στρογγυλοποίηση και η θεσιακή αξία. Επίσης ως μία νοερή διαδικασία η οποία εκτελείται γρήγορα και δίνει αποτελέσματα σε ερωτήσεις οι οποίες είναι δικαιολογημένα κοντά σε ένα σωστά υπολογισμένο αποτέλεσμα».

Θεωρείται επίσης ότι η υπολογιστική εκτίμηση είναι ένα συστατικό της αίσθησης του αριθμού (Greeno, 1991˙ McIntosh, 2004). Ο όρος αίσθηση του αριθμού περιγράφτηκε από τους McIntosh, Reys, Bana & Farrell (1997) ως «η γενική κατανόηση, ενός ατόμου, του αριθμού και των πράξεων, μαζί με τη δυνατότητα και την τάση για να χρησιμοποιήσει αυτήν την κατανόηση με ευέλικτους τρόπους για να κάνει μαθηματικές κρίσεις και να αναπτύξει χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές στο χειρισμό αριθμητικών καταστάσεων». Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, η ικανότητα εκτίμησης αριθμητικών ποσοτήτων είναι ένα συστατικό της αίσθησης του αριθμού (Mildenhall, 2009).

Σε άλλον ορισμό σύμφωνα με τη Rubenstein (1985), η υπολογιστική εκτίμηση ορίζεται ως «μία νοητική λειτουργία η οποία παράγει έναν υπολογισμό κατά προσέγγιση σε ένα δοσμένο αριθμητικό πρόβλημα». Στην κατηγορία υπολογιστική εκτίμηση η Rubenstein (1985) επίσης, συμπεριλαμβάνει καταστάσεις οι οποίες απαιτούν αποφάσεις σχετικά με το εάν ή όχι μία απάντηση είναι λογική, εάν ένας δεδομένος αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από την ακριβή απάντηση, εάν η απάντηση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από έναν δεδομένο αριθμό αναφοράς και επίσης εάν μία εκτίμηση βρίσκεται στη σωστή σειρά μεγέθους. Η υπολογιστική εκτίμηση, όπως σημειώνουν οι Star & Rittle-Johnson (2009) θεωρείται ενδιαφέρον τομέας για έρευνα διότι πρώτον, η εκτίμηση είναι λιγότερο περιορισμένη από άλλους μαθηματικούς τομείς, όπως για παράδειγμα η επίλυση εξίσωσης, δεύτερον υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία από στρατηγικές εκτίμησης οι οποίες οδηγούν σε ακριβείς εκτιμήσεις και οι καλοί εκτιμητές γνωρίζουν και χρησιμοποιούν πολλές από αυτές και τρίτον ένα πρόβλημα υπολογιστικής εκτίμησης δεν έχει μόνο μία σωστή λύση. Η ορθότητα ή το πόσο καλή θεωρείται μία λύση που έχει προκύψει με υπολογιστική εκτίμηση εξαρτάται από δύο ανταγωνιστικούς στόχους. Ο πρώτος είναι το πόσο εύκολα μπορεί να υπολογιστεί η εκτίμηση και ο δεύτερος το πόσο κοντά βρίσκεται η εκτίμηση στην ακριβή απάντηση (Star & Rittle-Johnson, 2009).

Παράλληλα, όπως αναφέρουν οι Siegler & Booth (2005) για μια αποτελεσματική υπολογιστική εκτίμηση απαιτούνται διάφοροι τύποι εννοιολογικής κατανόησης: α) ο στόχος της εκτίμησης είναι να παράγει μία λογική απάντηση κοντά στην ακριβή, β) οι προσεγγιστικοί αριθμοί είναι χρήσιμοι για την επίτευξη αυτού του στόχου, γ) η εκτίμηση μπορεί να συμπεριλάβει πολλαπλές έγκυρες μεθόδους και πολλαπλές λογικές απαντήσεις, δ) αυτό το πλαίσιο καθορίζει την επάρκεια των απαντήσεων (Sowder & Wheeler, 1989). Η αποτελεσματική εκτίμηση απαιτεί διαδικασίες για να παραχθούν προσεγγιστικοί αριθμοί.

Σε μια αποτελεσματική υπολογιστική εκτίμηση συμβάλλουν πολλοί παράγοντες σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2013). Οι Sowder και Wheeler (1989) πραγματοποιούν μία λεπτομερή ανάλυση αυτών των παραγόντων όπως αυτοί παρουσιάζονται στο διάγραμμα που ακολουθεί:

Πίνακας 1. Μια ανάλυση των παραγόντων που περιλαμβάνονται στην υπολογιστική εκτίμηση (Sowder και Wheeler 1989, σελ. 132)

I. Εννοιολογικοί Παράγοντες
Α. Ρόλος των προσεγγιστικών αριθμών 1. Αναγνώριση ότι χρησιμοποιούνται προσεγγιστικοί αριθμοί για τον υπολογισμό. 2. Αναγνώριση ότι μία εκτίμηση είναι μία προσέγγιση. **Β. Πολλαπλές διαδικασίες/πολλαπλά εξαγόμενα** 1. Αποδοχή πολλών και όχι μιας διαδικασίας για να έχουμε μία εκτίμηση. 2. Αποδοχή πολλών και όχι μιας τιμής ως εκτίμηση. **Γ. Καταλληλότητα** 1. Αναγνώριση ότι η καταλληλότητα της διαδικασίας εξαρτάται από το πλαίσιο. 2. Αναγνώριση ότι η καταλληλότητα της εκτίμησης εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια.
II. Παράγοντες Δεξιοτήτων
Α. Διαδικασίες 1. Ανασυγκρότηση: Αλλαγή των αριθμών που χρησιμοποιούνται για υπολογισμό. α. Στρογγυλοποίηση β. Κουτσούρεμα γ. Μέσος όρος δ. Αλλαγή της μορφής ενός αριθμού 2. Αντιστάθμιση: Γίνονται ρυθμίσεις κατά τη διάρκεια ή μετά τον υπολογισμό. 3. Μετάφραση: Αλλαγή της δομής του προβλήματος. **Β. Εξαγόμενα** 1. Προσδιορισμός της σωστής σειράς του μεγέθους του εκτιμούμενου. 2. Προσδιορισμός του εύρους αποδοχής των εκτιμήσεων.
III. Σχετικές έννοιες και δεξιότητες
Α. Ικανότητα εργασίας με δυνάμεις του 10 **Β. Γνώση της θεσιακής αξίας των αριθμών** **Γ. Ικανότητα σύγκρισης αριθμών σύμφωνα με το μέγεθος**

Δ. Ικανότητα νοερού υπολογισμού **Ε. Γνώση των αριθμητικών γεγονότων** **ΣΤ. Γνώση των ιδιοτήτων των πράξεων και της κατάλληλής τους χρήσης** **Ζ. Αναγνώριση ότι η μετατροπή των αριθμών μπορεί να αλλάξει τα εξαγόμενα του υπολογισμού**
IV. Συναισθηματικοί παράγοντες
Α. Εμπιστοσύνη στην ικανότητα να κάνεις μαθηματικά **Β. Εμπιστοσύνη στην ικανότητα να εκτιμάς** **Γ. Ανεκτικότητα για τα λάθη** **Δ. Αναγνώριση της χρησιμότητας της εκτίμησης**

1.3 Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης έχουν οριστεί βασιζόμενες σε τρεις μεγάλες κατηγορίες, την αναδόμηση (reformulation), τη μετάφραση (translation) και την αντιστάθμιση (compensation) (Reys, Rybolt, Bestgen, & Wyatt 1982˙ Segovia & Castro, 2009). Η αναδόμηση ορίζεται ως η αλλαγή των αριθμητικών δεδομένων σε άλλη μορφή η οποία είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμη νοερά (Reys et al., 1982). Κατά τη μετάφραση γίνεται μία αλλαγή της εξίσωσης ή της μαθηματικής δομής με σκοπό να επιτευχθεί μία πιο εύκολη νοερή διαδικασία (Reys et al., 1982). Επίσης κατά τη μετάφραση μπορεί να αλλάξει η ίδια η πράξη με σκοπό να γίνει πιο εύκολο το πρόβλημα. Η μετάφραση είναι μία πιο ευέλικτη στρατηγική συγκριτικά με την αναδόμηση και απαιτεί ένα πιο υψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης (Reys et al., 1982). Η αντιστάθμιση είναι πιο πολύπλοκη από τις άλλες δύο και για αυτό το λόγο εμφανίζεται η χρήση της σε μικρότερο ποσοστό. Κατά την αντιστάθμιση αναζητούνται απαντήσεις οι οποίες είναι πιο κοντά σε μία ακριβή απάντηση και αυτό επιτυγχάνεται μέσω του κατάλληλου χειρισμού και της κατάλληλης αλλαγής του αποτελέσματος της εκτίμησης. Επίσης η αντιστάθμιση αυτή μπορεί να λάβει χώρα και κατά τη διάρκεια της εκτίμησης αλλά και στο τέλος της διαδικασίας. Καλοί εκτιμητές χρησιμοποιούν την αντιστάθμιση πιο συχνά και την αναγνωρίζουν ως την πιο κατάλληλη στρατηγική για επιτυχημένες εκτιμήσεις.

Η Dowker βέβαια υποστήριξε ότι αυτές οι 3 κατηγορίες δεν επαρκούν για να ορίσουν και να περιγράψουν τα «βασικά συστατικά της εκτίμησης» (Dowker, 2003, p.256) και είναι τόσο γενικοί γεγονός το οποίο καθιστά δύσκολο σε δασκάλους και μαθητές να δουλέψουν με αυτά. Αρκετοί ερευνητές τα τελευταία 40 χρόνια (Dowker, 2003; Levine, 1982; McIntosh et al., 1997; Reys, 1984) έχουν περιγράψει διαφορετικές στρατηγικές χρησιμοποιώντας ποικιλία διαφορετικών όρων (Segovia, 2009).

Σύμφωνα με πολλές έρευνες που έχουν διεξαχθεί σε μαθητές εξετάζοντας τη χρήση στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης έχει βρεθεί όπως και σε άλλους γνωστικούς τομείς ότι: α) οι μαθητές χρησιμοποιούν αρκετές στρατηγικές στην εκτίμηση αριθμητικών προβλημάτων, β) αυτές οι στρατηγικές ποικίλουν σε συχνότητα και αποτελεσματικότητα και γ) η χρήση και η εκτέλεση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης αλλάζουν με την ηλικία (Lemaire & Lecacheur, 2002; Λεμονίδης, 2013).

Παρακάτω ακολουθεί η παρουσίαση των πιο συνηθισμένων στρατηγικών στην υπολογιστική εκτίμηση με βάση τη σχετική βιβλιογραφία (Dowker, 1992˙ LeFevre et al., 1993˙ Reys et al., 1982˙ Reys et al., 1991˙ Sowder & Wheeler, 1989). Οι στρατηγικές αυτές βεβαίως να σημειώσουμε ότι πολλές φορές εξαρτώνται από τις πράξεις που δίνονται στην εκτίμηση καθώς επίσης σε μερικές περιπτώσεις ποικίλουν οι ονομασίες που αποδίδουν οι διάφοροι συγγραφείς.

1. Η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου (Front-end strategy)

Η διαδικασία του εμπρόσθιου άκρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις πράξεις αλλά η κύρια χρησιμότητά της είναι στην πρόσθεση (Reys, 1984˙ Reys, 1986˙ Λεμονίδης, 2013) και ακολουθούν η αφαίρεση και η διαίρεση. Οι μαθητές πρέπει πρώτα να εντοπίσουν τα πιο σημαντικά ψηφία των αριθμών του προβλήματος, να εκτελέσουν την κατάλληλη πράξη νοερά και στη συνέχεια να λάβουν υπόψη τους την αξία θέσης του αποτελέσματος. Για παράδειγμα ζητείται να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα:

$$4.219+7.512+2.446=$$

Το άθροισμα των εμπρόσθιων ψηφίων είναι 13 (4+7+2) και η αξία θέσης είναι χιλιάδες. Οπότε μία εκτίμηση είναι 13.000.

Το πλεονέκτημα της στρατηγικής αυτής σε σχέση με τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, η οποία περιγράφεται παρακάτω, είναι ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν μπροστά τους, τους αριθμούς που χρησιμοποιούν στον υπολογισμό της εκτίμησης (Reys, 1984).

Στη συνέχεια μπορεί να εφαρμοστεί μία μεταγενέστερη αντιστάθμιση με σκοπό να ελαττωθεί το σφάλμα της αρχικής εκτίμησης. Ακόμα και μαθητές μικρής ηλικίας μπορούν να φτάσουν σε εκτίμηση εύκολα και γρήγορα μέσω της στρατηγικής τους εμπρόσθιου άκρου (Reys, 1983˙ Van de Walle, 2007). Αλλά παράλληλα η στρατηγική αυτή είναι χρήσιμη και σε μεγαλύτερους μαθητές και ενήλικες και μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλους αριθμούς όπως κλάσματα και δεκαδικοί.

2. Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης (rounding)

Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πιο δημοφιλής στρατηγική, απαιτεί ένα υψηλότερο επίπεδο αφαιρετικής σκέψης από ότι η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου, σύμφωνα με τη Reys (1984). Είναι ένα παράδειγμα της στρατηγικής της αναδόμησης και συχνά είναι η μοναδική στρατηγική η οποία διδάσκεται στην τάξη (Levine, 1982˙ Trafton, 1986). Είναι μία διαδικασία δύο βημάτων, σύμφωνα με την οποία πρώτον οι αριθμοί πρέπει να στρογγυλοποιηθούν σε κάποια προεπιλεγμένη θεσιακή αξία και στη συνέχεια τα στρογγυλοποιημένα ποσά να χρησιμοποιηθούν ώστε να υπολογιστεί η εκτίμηση νοερά. Θα πρέπει να γίνει κατανοητό από τους μαθητές ότι ο βασικός λόγος της στρογγυλοποίησης των ποσών είναι να παραχθούν εύκολοι αριθμοί οι οποίοι θα διευκολύνουν το νοερό υπολογισμό. Θα πρέπει να «ξεμάθουν» τους βασικούς κανόνες στρογγυλοποίησης, όπως αυτοί διδάσκονται στο σχολείο, και να αντιλαμβάνονται το κάθε πρόβλημα υπολογιστικής εκτίμησης σα μοναδικό στο οποίο θα επιλέγουν οι ίδιοι «προς τα πού» θα στρογγυλοποιηθούν τα ποσά. Μπορεί ακόμα να ακολουθήσει και τρίτο βήμα το οποίο είναι η διόρθωση της εκτίμησης (μεταγενέστερη αντιστάθμιση), εφόσον είναι επιθυμητή μεγαλύτερη ακρίβεια στο πρόβλημα (Reys, 1984).

Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης είναι μία ισχυρή και ικανή διαδικασία για την εκτίμηση του γινομένου 2 παραγόντων με πολλά ψηφία. Οι μαθητές είναι πολύ βασικό να συνειδητοποιήσουν 2 πράγματα για τη στρογγυλοποίηση, πρώτον ότι μέσω της στρογγυλοποίησης αλλάζουν το πρόβλημά ώστε να υπολογίζεται πιο εύκολα και δεύτερον ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς τρόπους στρογγυλοποίησης για κάθε μεμονωμένο πρόβλημα και θα πρέπει να είναι ικανοί να επιλέξουν τον καταλληλότερο τρόπο. Για παράδειγμα στο πρόβλημα 95x43 υπάρχουν 3 τρεις διαφορετικοί τρόποι να στρογγυλοποιηθούν τα ποσά ώστε να μετατραπεί το πρόβλημα σε ευκολότερο για νοερό υπολογισμό, 90x40, 40x100 ή 100x43. Ανάλογα με την εμπειρία των μαθητών στην εκτίμηση και στην ευχέρειά χρήσης και χειρισμού των αριθμών μπορούν να επιλέξουν και άλλους συμβατούς αριθμούς οι οποίοι θα τους διευκολύνουν το νοερό υπολογισμό.

3. Η στρατηγική του κουτσουρέματος (truncating)

Στη στρατηγική του κουτσουρέματος μένει σταθερό το ψηφίο με τη μεγαλύτερη θεσιακή αξία ή και περισσότερα από τα μπροστινά ψηφία και οι υπόλοιποι αριθμοί (στα δεξιά) μετατρέπονται σε μηδενικά. Για παράδειγμα, στο άθροισμα 496+498 μπορούν να «κουτσουρευτούν» και οι δύο αριθμοί και να μετατραπούν σε 490. Η επιλογή της θέσης του κουτσουρέματος επιλέγεται ανάλογα με την κατάσταση υπολογισμού (Segovia & Castro, 2009).

4. Η στρατηγική της συσσώρευσης ή Μέσου Όρου (clustering or averaging)

Η στρατηγική της συσσώρευσης ή του Μέσου Όρου χρησιμοποιείται κυρίως στα προβλήματα πρόσθεσης τα οποία περιλαμβάνουν μία ομάδα αριθμών οι οποίοι όλοι «συσσωρεύονται» γύρω από μία κοινή ειδική τιμή, τη μέση τιμή ή μέσο όρο. Οι μαθητές και οι μαθήτριες για να εφαρμόσουν τη στρατηγική της συσσώρευσης πρώτα παρατηρούν όλους τους αριθμούς και επιλέγουν μία λογική μέση τιμή και έπειτα πολλαπλασιάζουν την τιμή αυτή με το πλήθος των αριθμών του προβλήματος. Για παράδειγμα στην πρόσθεση 23+18+19+22 όλοι οι αριθμοί συσσωρεύονται γύρω από το 20, άρα το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί μέσω του πολλαπλασιασμού 4x20=80. Η στρατηγική της συσσώρευσης είναι μία πολύ χρήσιμη στρατηγική και το πλεονέκτημά της συγκριτικά με τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου και της στρογγυλοποίησης είναι ότι ελαχιστοποιεί το πλήθος των ψηφίων και της λίστας των αριθμών που πρέπει να συγκρατηθούν στην εργαζόμενη μνήμη διευκολύνοντας το λύτη αφού απαιτεί νοερό πολλαπλασιασμό δύο μόνο αριθμών.

5. **Η στρατηγική της προγενέστερης αντιστάθμισης (Prior compensation)**

Κατά την εφαρμογή της στρατηγικής της προγενέστερης αντιστάθμισης ο ένας όρος στρογγυλοποιείται σε αντίθετη κατεύθυνση από τον άλλο, πριν από την πραγματοποίηση οποιασδήποτε πράξης. Για παράδειγμα στο γινόμενο 57x56, το 57 στρογγυλοποιείται προς τα πάνω και γίνεται 60 ενώ το 56 στρογγυλοποιείται προς τα κάτω και γίνεται 50 και έπειτα υπολογίζεται το γινόμενο 50x60=3.000 το οποίο είναι πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα (3.192) συγκριτικά με το 60x60=3.600 αν είχαν στρογγυλοποιηθεί και οι δύο παράγοντες προς τα πάνω.

6. **Η στρατηγική της επακολουθούμενης ή μεταγενέστερης αντιστάθμισης (Post compensation)**

Η στρατηγική της μεταγενέστερης αντιστάθμισης εφαρμόζεται μετά από τη χρήση κάποιας άλλης στρατηγικής με σκοπό να διορθώσει την αρχική εκτίμηση και να πλησιάσει περισσότερο το αποτέλεσμα στο ακριβές. Σύμφωνα με τη Reys (1984) η στρατηγική αυτή συναντάται και ως στρατηγική προσαρμογής (adjusting strategy) και οι μαθητές και μαθήτριες που τη χρησιμοποιούνε γίνονται πιο ανταγωνιστικοί. Παρόλο μάλιστα που οι μαθητές και μαθήτριες αντιλαμβάνονται την ανάγκη για αντιστάθμιση δυσκολεύονται στο να κατανοήσουν τη διαδικασία που πρέπει να εφαρμόσουν ώστε να υπολογίσουν το ποσό της αντιστάθμισης σε κάθε πρόβλημα.

Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό 57x56 αν στρογγυλοποιηθούν και τα δύο ποσά προς τα πάνω, 60x60=3.600, τότε είναι απαραίτητη η μεταγενέστερη αντιστάθμιση του γινομένου, οπότε αφαιρείται το 3x60=180 και το 4x60=240, δηλαδή συνολικά αφαιρείται περίπου 400 και η τελική εκτίμηση του γινομένου γίνεται 3.600-400=3.200.

7. **Η στρατηγική των συμβατών αριθμών (Compatible numbers strategy)**

Η στρατηγική αυτή περιλαμβάνει την επιλογή συμβατών – «ταιριαστών» αριθμών οι οποίοι καθιστούν πιο εύκολη την πράξη του προβλήματος και είναι ένα παράδειγμα της στρατηγικής της αναδόμησης (reformulation) (Reys et al., 1982˙ Reys, 1986). Οι Levine (1982) και Dowker (1992) στις έρευνες τους ονομάζουν τη στρατηγική αυτή ως στρατηγική «γνωστών αριθμών» (known numbers). Συνιστάται η στρατηγική αυτή περισσότερο σε προβλήματα πρόσθεσης και διαίρεσης. Η προσαρμογή ή η στρογγυλοποίηση των αριθμών μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, αρκεί να διευκολύνεται η υπολογιστική εκτίμηση (Reys, 1984˙ Reys, 1986). Για παράδειγμα στο πρόβλημα της διαίρεσης 2.265:6 αν το 2.265 στρογγυλοποιηθεί σε 2.300 ή στην πλησιέστερη χιλιάδα, 2.000, δε διευκολύνεται πολύ η πράξη. Αν όμως μετατραπεί σε 2.400, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 6, η πράξη μπορεί να γίνει εύκολα και γρήγορα 2.400:6=400.

Παράδειγμα συμβατών αριθμών αποτελούν δυάδες ή τριάδες αριθμών που να μπορούν να δώσουν άθροισμα που να προσεγγίζει το 10, το 100, το 1.000 κλπ. (Van de Walle, 2007) ή πολλαπλάσιά τους (Reys, 1984) τα οποία είναι εύκολα να υπολογιστούν. Όπως στο επόμενο παράδειγμα πρόσθεσης 35+46+65+71+60+38, παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα ανά δύο των αριθμών 35+71, 46+60, 65+38 είναι περίπου 100. Άρα το άθροισμα είναι περίπου 300.

8. Η στρατηγική των ειδικών αριθμών (Special numbers strategy)

Με τη στρατηγική των ειδικών αριθμών οι μαθητές και οι μαθήτριες ενθαρρύνονται στο να αναζητούν και να ξεχωρίζουν αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές και μπορούν να υπολογιστούν εύκολα νοερά. Ειδικές τιμές είναι οι αριθμοί οι οποίοι περιλαμβάνουν δυνάμεις του 10, απλά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα στο άθροισμα $\frac{3}{4}+\frac{1}{25}+\frac{7}{13}$, το $\frac{3}{4}$ μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίσο με 1, το $\frac{1}{25}$ περίπου 0 και το $\frac{7}{13}$ περίπου $\frac{1}{2}$, άρα το άθροισμα είναι περίπου 1,5.

Σύμφωνα με τη Reys (1986) η στρατηγική των ειδικών αριθμών μαζί με τη στρατηγική των συμβατών αριθμών μπορούν να περιγράψουν με τον καλύτερο τρόπο τι είναι πραγματικά η εκτίμηση: «η διαδικασία της μετατροπής ενός δοσμένου προβλήματος σε μια νέα μορφή η οποία έχει δύο χαρακτηριστικά: 1. προσεγγιστικά ισοδύναμη απάντηση και 2. εύκολος ο υπολογισμός νοερά».

9. Στρατηγική υποκατάστασης ή Αλλαγή μορφής αριθμού (Substitution or Reformulation)

Η αλλαγής της μορφής ενός ή περισσότερων αριθμών πραγματοποιείται με σκοπό ο λύτης να διευκολυνθεί στον υπολογισμό των πράξεων. Για παράδειγμα η εκτίμηση του γινομένου των δεκαδικών αριθμών 0,52x0,35, μέσω της αλλαγής του δεκαδικού αριθμού 0,52 σε $\frac{1}{2}$ και του 0,35 σε $\frac{1}{3}$, μετατρέπεται σε αρκετά ευκολότερη πράξη για να εκτελεστεί νοερά.

10. Η στρατηγική της παραγοντοποίησης (Factorization)

Μέσω της στρατηγικής της παραγοντοποίησης αναλύονται οι αριθμοί σε απλούστερους ή διαιρούνται οι όροι της πράξης με έναν κοινό παράγοντα με σκοπό να διευκολυνθεί ο υπολογισμός. Για παράδειγμα το γινόμενο 128x152 μπορεί να αναλυθεί σε 130x10x15 ή η διαίρεση 8.204:44 μπορεί να γίνει 4.102:22, που είναι 2.051:11, και δίνει αποτέλεσμα μικρότερο του 200.

11. Η στρατηγική της επιμεριστικότητας (Distributivity)

Στη στρατηγική της επιμεριστικότητας αξιοποιείται η επιμεριστική ιδιότητα (Dowker, 1992˙ Λεμονίδης, 2013). Για παράδειγμα, το γινόμενο 38x91, μπορεί να υπολογιστεί μέσω της μετατροπής της πράξης σε (38x100)-(38x10)=3.800-380 δηλαδή περίπου 3.400.

12. Με αλγοριθμικό τρόπο (Proceeding algorithmically)

Στη στρατηγική αυτή πρώτα γίνεται η χρήση κάποιου αλγόριθμου με σκοπό να υπολογισθεί η απάντηση κατά προσέγγιση και στη συνέχεια ακολουθεί μία εκτίμηση για να δοθεί η τελική απάντηση. Για παράδειγμα στον υπολογισμό του γινομένου 8,3x11,2 μπορεί πρώτα να υπολογιστεί το 8x11 νοερά μέσω του αλγόριθμου και τη συνέχεια να προστεθούν τα γινόμενα 0,2x8=1,6 και 0,3x11=3,3 δίνοντας ως τελική απάντηση περίπου 88+5=93.

Στη συνέχεια ακολουθεί ένας συνοπτικός πίνακας με τις διάφορες στρατηγικές που παρουσιάζονται στην υπολογιστική εκτίμηση με βάση τη σχετική βιβλιογραφία. Στην πρώτη στήλη καταγράφονται οι στρατηγικές, στη δεύτερη περιγράφεται η καθεμία με λόγια και στην τρίτη αναφέρονται κάποια παραδείγματα που μπορεί να εμφανιστεί η κάθε στρατηγική.

Πίνακας 2. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
1	**Στρογγυλοποίηση**	Μετατρέπονται το ένα ή και τα δύο μέλη στον πλησιέστερο αριθμό που καταλήγει σ' ένα ή περισσότερα μηδενικά.	496+498 ≈ 500+500
2	**Στρατηγική εμπρόσθιου άκρου**	1º βήμα: Επικεντρώνεται στα ψηφία στο αριστερό άκρο των αριθμών, αγνοώντας τα υπόλοιπα.	5,4+3,2+7,5+9,8 1ο βήμα: εμπρόσθιο άκρο

		2^{o} βήμα: Αφότου διατυπωθεί μία εκτίμηση μπορεί να γίνει μια ρύθμιση υπολογίζοντας τα τμήματα που αγνοήθηκαν.	5+3+7+9=24, 2^{o} βήμα: προσαρμογή 0,2+08=1 0,4+0,5 ≈ 1 Άρα, 5,4+3,2+7,5+9,8 ≈ 24+2=26
3	**Κουτσούρεμα**	Αλλάζουν με το μηδέν ένα ή περισσότερα ψηφία από το τέλος δεξιά ενός ή περισσότερων μελών.	496+498 ≈ 490+490= 980
4	**Συσσώρευση ή Μέσος όρος**	Εφαρμόζεται στην πρόσθεση πολλών αριθμών και όταν οι αριθμοί αυτοί βρίσκονται γύρω από μία ειδική τιμή.	23+18+19+22≈ 4x20=80
5	**Προγενέστερη αντιστάθμιση**	Ο δεύτερος όρος στρογγυλοποιείται σε αντίθετη κατεύθυνση από τον πρώτο προτού πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε πράξη.	57x56 ≈ 50x60=3.000
6	**Επακολουθούμενη ή μεταγενέστερη αντιστάθμιση**	Μετά από τη στρογγυλοποίηση ή το κουτσούρεμα γίνεται μια διόρθωση.	57x56≈60x60=3.600 3x60=180 4x60=240 180+240 ≈ 400 Άρα: 57x56 ≈ 3.600-400 =3.200
7	**Στρατηγική συμβατών αριθμών**	Αυτή η στρατηγική περιλαμβάνει την επιλογή των αριθμών που καθιστούν τον υπολογισμό εύκολο και δίνουν μια καλή εκτίμηση του αρχικού προβλήματος.	35+46+65+71+60+38, 35+71 ≈ 100 46+60 ≈100 65+38 ≈ 100

			Άρα, 35+46+65+71+60+38≈ 100+100+100=300
8	**Στρατηγική ειδικών αριθμών**	Σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές εκπαιδεύονται να ξεχωρίζουν τους αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές. Αυτό συμβαίνει με τα κλάσματα όπου οι ειδικές τιμές είναι 0, $\frac{1}{2}$ και 1.	$\frac{3}{4}+\frac{1}{25}+\frac{7}{13}$ $\frac{3}{4}\approx 1$ $\frac{1}{25}\approx 0$ $\frac{7}{13}\approx\frac{1}{2}$. Άρα: $\frac{3}{4}+\frac{1}{25}+\frac{7}{13}\approx 1+0+\frac{1}{2}$ =1,5
9	**Υποκατάσταση ή Αλλαγή μορφής ενός αριθμού**	Αλλάζει η μορφή ενός ή και των δύο αριθμών για να δημιουργηθεί ένας ευκολότερος υπολογισμός.	0,52x0,35 ≈ $\frac{1}{2}$ x$\frac{1}{3}$
10	**Παραγοντοποίηση**	Αναλύουμε τους αριθμούς ώστε να έχουν απλούστερη μορφή.	128x152 ≈ 130x10x15
11	**Επιμεριστικότητα**	Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.	38x91≈ (38x100) – (38x10) = 3.800 – 380 ≈ 3.400
12	**Με αλγοριθμικό τρόπο**	Χρησιμοποιείται κάποιος αλγόριθμος για να γίνει υπολογισμός στο περίπου και μετά να υπολογιστεί η απάντηση.	8,3x11,2 8x11=88 0,2x8=1,6 0,3x11=3,3 1,6+3,3 ≈ 5 Άρα 8,3x11,2 ≈ 88+5=93.

1.4 Ανασκόπηση βιβλιογραφίας

Τις τελευταίες 3 δεκαετίες παρατηρείται η ενασχόληση αρκετών ερευνητών με το θέμα της υπολογιστικής εκτίμησης. Πολλοί από αυτούς εξετάζουν τα διάφορα επίπεδα επιτυχίας στην υπολογιστική εκτίμηση σε διάφορες ηλικιακές ομάδες (Dowker et al., 1996) με τον μεγαλύτερο όγκο ερευνών να αφορά την πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Booth & Mildenhall, 2011˙ Dowker, 1997 & 2003˙ Opfer & Siegler, 2007˙ Schneider & Grabner, 2009˙ Siegler, 2004˙ Star et al., 2009˙ Star & Rittle-Johnson, 2009˙ Wai & Kheong, 1998˙ Λεμονίδης, Νόλκα & Νικολαντωνάκης, 2014), τους φοιτητές (Hanson & Hogan, 2000˙ Levine, 1982˙ Λεμονίδης & Καϊμακάμη, 2013) και τους δασκάλους ή καθηγητές μαθηματικών (Boz & Bulut, 2002˙ Dowker, 1992˙ Tsao & Pan, Tsao, 2013). Αρκετοί ερευνητές αφιέρωσαν τις έρευνές τους στην αναγνώριση και ταξινόμηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούνται (Boz & Bulut, 2012˙ Dowker et al., 1996˙ Lemaire et al., 2000˙ Lemaire & Lecacheur, 2002˙ Reys et al., 1991˙ Sowder & Wheeler, 1989). Άλλες έρευνες εστιάζουν στα επίπεδα επιτυχίας στην υπολογιστική εκτίμηση με βάση τη μορφή των ερωτήσεων, λεκτικών ή αριθμητικών, άλλες με βάση το είδος των δραστηριοτήτων που τίθενται (ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, ανοιχτές ερωτήσεις, διάταξη αριθμών και αριθμοί αναφοράς), ενώ άλλες με βάση το είδος των αριθμών (ακέραιοι αριθμοί, δεκαδικοί αριθμοί, κλάσματα, ποσοστά) (Boz & Bulut, 2002˙ Noordin et al., 2010˙ Rubenstein, 1985). Η σύγκριση και η σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με άλλες μαθηματικές δεξιότητες έχει επίσης παρατηρηθεί σε έναν αριθμό ερευνών (Berteletti et al., 2010˙ Noordin et al., 2010˙ Rubenstein, 1985˙ Sowder, 1992˙ Star et al., 2009˙ Tsao, 2004˙ Λεμονίδης, Νόλκα & Νικολαντωνάκης, 2014). Τα τελευταία χρόνια έχουν αυξηθεί οι έρευνες που ασχολούνται με τη διδασκαλία της εκτίμησης, προτάσεις διδασκαλίας και την ύπαρξή της σα θέμα μέσα στα προγράμματα σπουδών (curriculum) (Alajmi, 2009˙ Lan et al., 2010˙ Lin et al., 2009˙ Mildenhall et al., 2009˙ Mildenhal, 2011˙ Opfer & Siegler, 2007˙ Reys, 1986˙ Segovia & Castro, 2009˙ Star & Rittle-Johnson, 2009˙ Tsao & Pan, 2013). Επιπλέον υπάρχουν και ελάχιστες έρευνες οι οποίες υποστηρίζουν και ανακαλύπτουν ότι η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης δεν είναι ανεξάρτητη από συναισθηματικούς παράγοντες (Boz & Bulut, 2012).

1.4.1 Έρευνες σε μαθητές Γυμνασίου & Λυκείου

Η ανασκόπηση των ερευνών που ακολουθεί αφορά μελέτες που λάβανε χώρα σε μαθητές της δευτεροβάθμιας ή μέσης εκπαίδευσης, τάξεις 7η έως και 12η (αντιστοιχούν σε μαθητές γυμνασίου και λυκείου στο Ελληνικό σύστημα εκπαίδευσης). Μετά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι δεν έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές με αυτή τη βαθμίδα της εκπαίδευσης αφού οι περισσότερες έρευνες αφορούν μαθητές δημοτικού, φοιτητές ή δασκάλους. Ελάχιστες έρευνες αναφέρονται σε μαθητές της μέσης εκπαίδευσης και ακόμη πιο λίγες στη βαθμίδα του λυκείου ή στις τάξεις 10η έως και 12η.

Έρευνα των Reys, Bestgen, Rybolt και Wyatt (1980) (Reys et al., 1991) αποτελεί την αρχή για μια θεωρία σχετικά με το πώς «καλοί» εκτιμητές στις τάξεις 7 έως 12, μπορούν να χρησιμοποιήσουν την εκτίμηση με τον ίδιο τρόπο όπως οι ενήλικες. Εντοπίστηκαν τρεις γενικές γνωστικές διαδικασίες μέσα από τις συνεντεύξεις των «καλών» εκτιμητών οι οποίες είναι η αναδόμηση, η μετάφραση και η αντιστάθμιση. Στην ίδια έρευνα αναγνωρίστηκαν και ταξινομήθηκαν ένας αριθμός στρατηγικών, μερικές από τις οποίες βρίσκονταν και διδάσκονταν στα προγράμματα σπουδών. Παράλληλα παρατηρήθηκαν διαφορές στις επιδόσεις των 2 φύλων σε όλες τις ηλικίες.

Η Rubenstein (1985) εξέτασε τις ικανότητες στην υπολογιστική εκτίμηση μαθητών της 8ης τάξης. Σχεδίασε ένα τεστ για να μετρήσει την επίδοση των μαθητών σε τέσσερις τύπους προβλημάτων της υπολογιστικής εκτίμησης: α) ανοιχτού- κλειστού τύπου (π.χ. να εκτιμήσουν το κόστος από μία σειρά αντικειμένων που αναγράφονται οι τιμές τους), β) λογικό ή μη λογικό (π.χ. είναι σωστό το αποτέλεσμα που αναγράφεται στην αριθμομηχανή του γινομένου 324x6;), γ) με βάση έναν αριθμό αναφοράς (π.χ. η διαφορά των ποσών 55,65€ και 26,95€ είναι πάνω από 20€;) και δ) σχετικά με την τάξη μεγέθους (π.χ. το πηλίκο της διαίρεσης 74,4:24 είναι πιο κοντά στο 0,3, στο 3, στο 31 ή στο 310;). Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε ήταν ότι: α) οι πιο δύσκολες ήταν οι ανοιχτού-κλειστού τύπου (open-ended), ακολούθησαν οι αριθμοί αναφοράς (reference number) και ως πιο εύκολες εντοπίστηκαν οι σχετικές με την τάξη μεγέθους (order of magnitude) (η κατηγορία «λογική - μη λογική» (reasonable vs unreasonable) εξαιρέθηκε από τη διαδικασία ανάλυσης λόγω ανεπαρκών στοιχείων), β) οι αριθμητικές δραστηριότητες δεν ήταν δυσκολότερες από τις λεκτικές, ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των Reys et al. (1980) (Rubenstein, 1985), γ) οι εκτιμήσεις σε προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς αποδείχθηκαν πιο δύσκολες από αυτές με τους ακέραιους αριθμούς καθώς και δ) οι δραστηριότητες με τις πράξεις της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού αποδείχθηκαν πιο δύσκολες από αυτές με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στην ίδια έρευνα εξέτασε τη σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με άλλες μαθηματικές δεξιότητες όπως πράξεις με δεκάδες, συγκρίσεις και διάταξη μεγεθών. Τέλος σύγκρινε τις συνολικές επιδόσεις των 2 φύλων, αγοριών, κοριτσιών στην υπολογιστική εκτίμηση σημειώνοντας ότι τα αγόρια είχαν συνολικά καλύτερη επίδοση από τα κορίτσια.

Στην έρευνα των Sowder & Wheeler (1989), δόθηκαν σε 12 μαθητές 4 τάξεων (3ης, 5ης, 7ης και 9ης τάξης) ξεχωριστά θέματα υπολογιστικής εκτίμησης. Οι μαθητές, όπως διαπιστώθηκε από την έρευνα, ήταν θετικοί στο να δεχτούν πολλαπλές στρατηγικές για τον υπολογισμό μιας εκτίμησης, η καθεμία από τις οποίες οδηγεί σε διαφορετική απάντηση, αλλά ήταν αρνητικοί στο να δεχτούν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις. Οι μαθητές όλων των τάξεων προτιμούσαν πρώτα να υπολογίζουν το αποτέλεσμα και στη συνέχεια να το στρογγυλοποιούν παρά πρώτα να στρογγυλοποιούν και έπειτα να υπολογίζουν, γιατί θεωρούσαν ότι αυτή η μέθοδος θα τους οδηγήσει στη σωστή απάντηση της υπολογιστικής εκτίμησης. Όσο μεγάλωνε η τάξη παρατηρούνταν και αύξηση της χρήσης της στρογγυλοποίησης. Οι Sowder &

Wheeler εικάζουν ότι η χρήση της στρογγυλοποίησης και η έμφαση στη μία και μοναδική απάντηση είναι αποτέλεσμα της μεθόδου και τρόπου διδασκαλίας.

Οι Reys et al. (1991) στην εργασία τους «Estimation Performance and Strategy use of Mexican 5th and 8th Grade students» μελέτησαν τις δεξιότητες και τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που κατέχουν Μεξικανοί μαθητές της 5ης και 8ης τάξης. Μέσα από συνεντεύξεις κατέληξαν ότι οι Μεξικάνοι μαθητές στο σύνολό τους χρησιμοποιούν τις τρεις γενικές γνωστικές διαδικασίες, την αναδόμηση (reformulation), τη μετάφραση (translation) και την αντιστάθμιση (compensation). Η στρατηγική που παρατηρήθηκε περισσότερο ήταν η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου καθώς και η νοερή εφαρμογή του γραπτού αλγόριθμου. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα από παρόμοιες έρευνες στην Ιαπωνία και τις Ηνωμένες πολιτείες, στις οποίες η στρατηγική που παρατηρήθηκε περισσότερο ήταν η στρογγυλοποίηση. Στην ίδια έρευνα οι Reys et al., εξετάζουν και ως προς την ευελιξία και την ικανότητα εφαρμογής εναλλακτικών στρατηγικών («Μπορείτε να σκεφτείτε άλλο τρόπο για να βρείτε μία εκτίμηση;») όπου οι μαθητές είτε επαναλαμβάνουν τη διαδικασία που εφάρμοσαν αρχικά ή μία μικρή επέκταση αυτής, είτε απαντούν ότι μία εκτίμηση θα μπορούσε να γίνει με μολύβι και χαρτί.

Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Reys et al. (1991) στην Ιαπωνία σε μαθητές 5ης και 8ης τάξης επίσης φαίνεται οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις τρεις βασικές γνωστικές διαδικασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι Ιάπωνες μαθητές χρησιμοποιούν πολλές από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι Αμερικάνοι μαθητές (εμπρόσθιου άκρου, συμβατών αριθμών, στρογγυλοποίηση) ενώ αποδεικνύονται καλύτεροι στην ικανότητα νοερών υπολογισμών συγκριτικά με τους Αμερικάνους μαθητές, κάνουν λιγότερα λάθη στη διάταξη μεγέθους και παρουσιάζονται πιο απρόθυμοι στο να δεχτούν το λάθος. Επίσης έχουν την τάση να εφαρμόζουν περισσότερο αλγοριθμικές υπολογιστικές διαδικασίες καθώς και η τάση τους να χρησιμοποιούν νοερούς αλγόριθμους εμποδίζει την ανάπτυξη της κατ' εκτίμηση ικανότητας (Reys et al., 1991).

Το 1997, ο Segovia, (Segovia & Castro, 2009) μελετά και αναλύει τις νοερές διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές από 6 ετών έως και 14 σε προβλήματα εκτίμησης με διακριτές ποσότητες και εξετάζει τα αποτελέσματά τους και τις διαδικασίες τους αναφορικά με την ηλικία. Οι επιδόσεις των μαθητών βελτιώνονται όσο αυξάνεται η ηλικία και εξαρτώνται από το μέγεθος της ποσότητας. Επίσης καταγράφονται 12 διαφορετικές στρατηγικές οι οποίες διαφέρουν ανά ηλικία.

Το 1998 ο Heinrich εξέτασε τη συμπεριφορά 66 μαθητών της $6^{ης}$, $7^{ης}$ και $8^{ης}$ τάξης στην υπολογιστική εκτίμηση. Το εργαλείο μέτρησης που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Assessing Computing Estimation (ACE) τεστ (Reys, 1980). Πραγματοποιήθηκαν από 2 διδακτικές παρεμβάσεις για κάθε μία από τις 4 στρατηγικές (εμπρόσθιου άκρου, αναδόμηση, μετάφραση, αντιστάθμιση). Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των τριών τάξεων στις στρατηγικές της αναδόμησης, της μετάφρασης και της αντιστάθμισης ενώ δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των τριών τάξεων στη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου. Η στρατηγική στην οποία συνάντησαν τη μεγαλύτερη δυσκολία όλοι οι μαθητές ήταν η αντιστάθμιση.

Στην έρευνά του ο Dolma το 2002 σε μαθητές της 5ης, 7ης και 9ης τάξης σχετικά με τη σχέση μεταξύ των ικανοτήτων τους στην εκτίμηση και στην υπολογιστική ικανότητα με ακέραιους και ρητούς διαπιστώνει ότι η ικανότητα στην εκτίμηση έχει θετική συσχέτιση με την ικανότητα στους γραπτούς υπολογισμούς σε όλες τις παραπάνω τάξεις. Επίσης οι μαθητές τείνουν να έχουν καλύτερη επίδοση στους υπολογισμούς με ακέραιους αριθμούς ενώ συναντούν μεγαλύτερη δυσκολία στα προβλήματα με διαίρεση και πολλαπλασιασμό κλασμάτων και δεκαδικών. Οι μαθητές οι οποίοι είναι λίγο πάνω από το μέσο όρο τείνουν να επιλέγουν τις δικές τους στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων ενώ μαθητές οι οποίοι είναι λίγο κάτω από το μέσο όρο τείνουν περισσότερο στους αλγορίθμους που μαθαίνουν «παπαγαλία».

Το 2004 οι Bana & Dolma πραγματοποίησαν έρευνα σε μαθητές και μαθήτριες της 7ης τάξης στην περιοχή του Περθ της Αυστραλίας μέσω ενός τεστ υπολογισμών και ενός τεστ υπολογιστικών εκτιμήσεων. Διαπιστώθηκε ότι η ικανότητα των μαθητών και μαθητριών στους υπολογισμούς είναι μεγαλύτερη από την ικανότητά τους στην υπολογιστική εκτίμηση. Τα προσθετικά προβλήματα θεωρήθηκαν πιο εύκολα ενώ παρατηρείται αδυναμία στο χειρισμό κλασμάτων και δεκαδικών. Ήταν ξεκάθαρο ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες τείνουν να απαντούν μηχανικά παρά να δίνουν απαντήσεις με νόημα. Από την έρευνα αυτή προκύπτει η ανάγκη για ένταξη της υπολογιστικής εκτίμησης στη διδασκαλία.

Η έρευνα της Volkova (2005) απευθύνθηκε σε καλούς μαθητές της 8ης τάξης και η οποία παρουσιάζεται στην εργασία με τίτλο «Characterizing middle school student’s thinking in estimation». Σα στόχο είχε την ανάπτυξη ενός πλαισίου για την περιγραφή του τρόπου σκέψης των μαθητών στην υπολογιστική εκτίμηση, το οποίο περιλαμβάνει 4 επίπεδα ανάπτυξης: α) χωρίς διάσταση (predimensional), β) μονοδιάστατο (unidimensional), γ) δισδιάστατο (bidimensional) και δ) ολοκληρωμένο δισδιάστατο (integrated bidimensional). Η έρευνα αυτή απορρέει από την ανάλυση των υπαρχουσών ταξινομήσεων στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης (π.χ. Reys, Rybolt, Bestgen & Wyatt, 1982; Rubenstein, 1985; Levine, 1982) καθώς και από τη θεωρία γνωστικής ανάπτυξης του Case (1996) (Volkova, 2005). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι μαθητές της ίδιας ηλικίας μπορεί να διαφέρουν σε επίπεδο σκέψης σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση. Αυτό το αποτέλεσμα, σύμφωνα με τη Volkova, έρχεται πιο κοντά στο μοντέλο του Van Hiele (1959/1984) παρά του Case (1996). Έτσι τα επίπεδα σκέψης σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση δε μπορούν να διαχωριστούν με ηλικιακά κριτήρια, αλλά η πρόοδος από επίπεδο σε επίπεδο εξαρτάται περισσότερο από το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας που δέχεται ο μαθητής, παρά την ηλικία του.

Οι Çilingir and Türnüklü (2009), σε έρευνά τους σε 30 μαθητές της 6ης, 7ης και 8ης τάξης στην Τουρκία, εξέτασαν την ικανότητα και τις στρατηγικές στην υπολογιστική εκτίμηση και στην εκτίμηση μέτρων ταυτόχρονα. Και για τα δύο είδη εκτίμησης καταγράφουν μία λίστα από στρατηγικές, δώδεκα στο σύνολο. Συμπεραίνουν ότι όσο μεγαλώνει η ηλικία βελτιώνεται και η ικανότητα εκτίμησης και παράλληλα παρατηρούν ότι τα αγόρια εμφανίζουν μεγαλύτερες ικανότητες εκτίμησης σε σχέση με τα κορίτσια.

Το 2012 οι Boz και Bulut εξέτασαν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης μαθητών 7ης τάξης στην Τουρκία. Πέντε μαθητές υψηλών επιδόσεων στα μαθηματικά κλήθηκαν να δώσουν συνέντευξη και να απαντήσουν σε αριθμητικές ερωτήσεις υπολογιστικής εκτίμησης και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Από τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας προκύπτει ότι η προτιμώμενη στρατηγική αυτών των μαθητών ήταν η αναδόμηση και οι λιγότερο προτιμώμενες στρατηγικές ήταν η μετάφραση και η αντιστάθμιση.

Μία άλλη έρευνα των Boz και Bulut (2012) με τίτλο «Affective Factors Associated with Computational Estimation of Seventh Graders», εξέτασε τους συναισθηματικούς παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης μαθητών 7ης τάξης. Τα αποτελέσματα της έρευνας αποκαλύπτουν ότι η εμπιστοσύνη των μαθητών στην ικανότητά τους να «κάνουν» μαθηματικά, οι αντιλήψεις τους για την εκτίμηση και η ανοχή στο λάθος είναι οι συναισθηματικοί παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών. Στα αποτελέσματα της έρευνας αυτής επίσης φαίνεται ότι οι μαθητές προτιμούνε να χρησιμοποιούνε τον ακριβή υπολογισμό και όχι την υπολογιστική εκτίμηση γεγονός που ενθαρρύνεται και από τους δασκάλους τους μέσα στην τάξη.

Οι Yang & Wu (2012) σε έρευνα τους σε μαθητές της 8^{ης} τάξης στη νότια Ταϊβάν εξετάζουν τις διαφορές στις συμπεριφορές των μαθητών σε αριθμητικά προβλήματα εκτίμησης και σε προβλήματα εκτίμησης με πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν καλύτερες επιδόσεις στα αριθμητικά προβλήματα σε σχέση με τα προβλήματα με πλαίσιο και στις τρεις διαστάσεις της αναδόμησης, αντιστάθμισης και μετάφρασης. Παράλληλα παρατηρείται ότι οι επιδόσεις των μαθητών στη χρήση υπολογιστικής εκτίμησης για επίλυση προβλημάτων είναι χαμηλότερες συγκριτικά με τη χρήση του γραπτού αλγόριθμου.

Οι Cochran & Dugger (2013) σε έρευνά τους σε 26 μαθητές της 6^{ης}, 7^{ης} και 8^{ης} τάξης προσπαθούν να δώσουν έναν πιο περιεκτικό ορισμό της υπολογιστικής εκτίμησης και των στρατηγικών της και να διαπιστώσουν αν οι μαθητές κατανοούν επαρκώς την έννοια της εκτίμησης όταν τη χρησιμοποιούνε, δίνοντας τον ορισμό έξι βασικών στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Διαπιστώνουν ότι υπάρχει μεγάλη εξάρτηση μεταξύ της στρατηγικής της στρογγυλοποίησης με τις μεθόδους υπολογισμού με ακρίβεια. Παράλληλα οι μαθητές είναι πιο ευέλικτοι ως προς τη χρήση των στρατηγικών οι οποίες είναι πιο κατάλληλες σε δεδομένο πρόβλημα. Ικανοί εκτιμητές μπορούν να ανακαλύψουν επίσης τις δικές τους στρατηγικές εκτίμησης. Πιστεύουν ότι όσο οι μαθητές αναπτύσσουν ευελιξία στην υπολογιστική εκτίμηση τόσο πιο ευέλικτοι γίνονται στις εκτιμήσεις τους και μπορούν να κινηθούν και πέρα από τις καλά ορισμένες στρατηγικές.

Η Elisha το 2013 μελετά τις ικανότητες μαθητών Λυκείου στην εκτίμηση σε τέσσερα είδη δραστηριοτήτων (Rubenstein, 1985): ανοιχτού-κλειστού τύπου (open-ended), αριθμοί αναφοράς (reference number), λογικό – μη λογικό (reasonable vs unreasonable), τάξη μεγέθους (order of magnitude). Οι μαθητές προέρχονταν από δύο τύπους λυκείων, αστικών περιοχών και αγροτικών περιοχών στη Νιγηρία. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των 2 φύλων των μαθητών καθώς και μεταξύ των μαθητών των δύο διαφορετικών τύπων σχολείων. Τα προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς ήταν πιο δύσκολα από τα προβλήματα με ακέραιους αριθμούς καθώς και τα προβλήματα με διαίρεση και πολλαπλασιασμό ήταν πιο δύσκολα από τα προβλήματα με πρόσθεση-αφαίρεση. Οι χαμηλότερες βαθμολογίες των μαθητών σημειώθηκαν στα προβλήματα ανοιχτού-κλειστού τύπου. Τέλος η έρευνα έδειξε ότι η γλώσσα της εκτίμησης δεν είναι απολύτως κατανοητή από τους μαθητές.

Σε μία άλλη έρευνα που έγινε σε μαθητές της 6ης, 7ης και 8ης τάξης στην Τουρκία από τους Aytekin και Tolukuçar (2014) μελετήθηκαν οι συμπεριφορές των μαθητών σε προβλήματα εκτίμησης με κλάσματα και υπολογισμού με κλάσματα. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι η επίδοση των μαθητών στην εκτίμηση με κλάσματα ήταν πολύ χαμηλή. Υπήρχε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στα προβλήματα της εκτίμησης και στα προβλήματα των υπολογισμών καθώς και στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας εκτίμησης και της επίδοσής τους στα μαθηματικά. Επίσης παρατηρήθηκε ότι όσο μεγάλωνε η τάξη αυξανόταν και οι καλές επιδόσεις στην εκτίμηση με κλάσματα ενώ δεν παρατηρήθηκε κάποια διαφορά της επίδοσης μεταξύ των φύλων των μαθητών.

Μία έρευνα των Berry, Grant, McKinney και Berube (2014), εξετάζει την ικανότητά μαθητών μεσαίας βαθμίδας στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης και τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των διαφορετικών διαδικασιών εκτίμησης που εκτελούν σε απευθείας υπολογισμούς ή σε μορφή προβλημάτων. Χρησιμοποιήθηκε ένα προσαρμοσμένο μοντέλο του Accessing Computational Test (ACE) ώστε να εντοπιστούν οι στρατηγικές εκτίμησης που εφαρμόζουν οι μαθητές σε χρονομετρημένες και μη χρονομετρημένες καταστάσεις. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν ότι δεν υπήρχαν διαφορές στις διαδικασίες εκτίμησης μεταξύ των απευθείας υπολογισμών και αυτών που δίνονταν σε μορφή προβλημάτων, ενώ οι μαθητές έχουν καλύτερη απόδοση στα χρονομετρημένα προβλήματα.

1.5 Εκτίμηση και νοεροί υπολογισμοί

Κατά τη διαδικασία της εκτίμησης ο νοερός υπολογισμός λαμβάνει κεντρικό ρόλο. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η εκτίμηση δε μπορεί να επιτευχθεί και με μολύβι και χαρτί ή μέσω μίας αριθμομηχανής αλλά σε πολλές περιπτώσεις αυτό δεν είναι εφικτό ή επιθυμητό και έτσι οι νοεροί υπολογισμοί είναι άμεσα συνδεδεμένοι με την εκτίμηση. Βέβαια υπάρχουν πολλοί εκπαιδευτικοί οι οποίοι ταυτίζουν τις δύο έννοιες των νοερών υπολογισμών με την έννοια των κατ' εκτίμηση υπολογισμών, αφού θεωρούν ότι οι νοεροί υπολογισμοί είναι κατά προσέγγιση (Λεμονίδης, 2013).

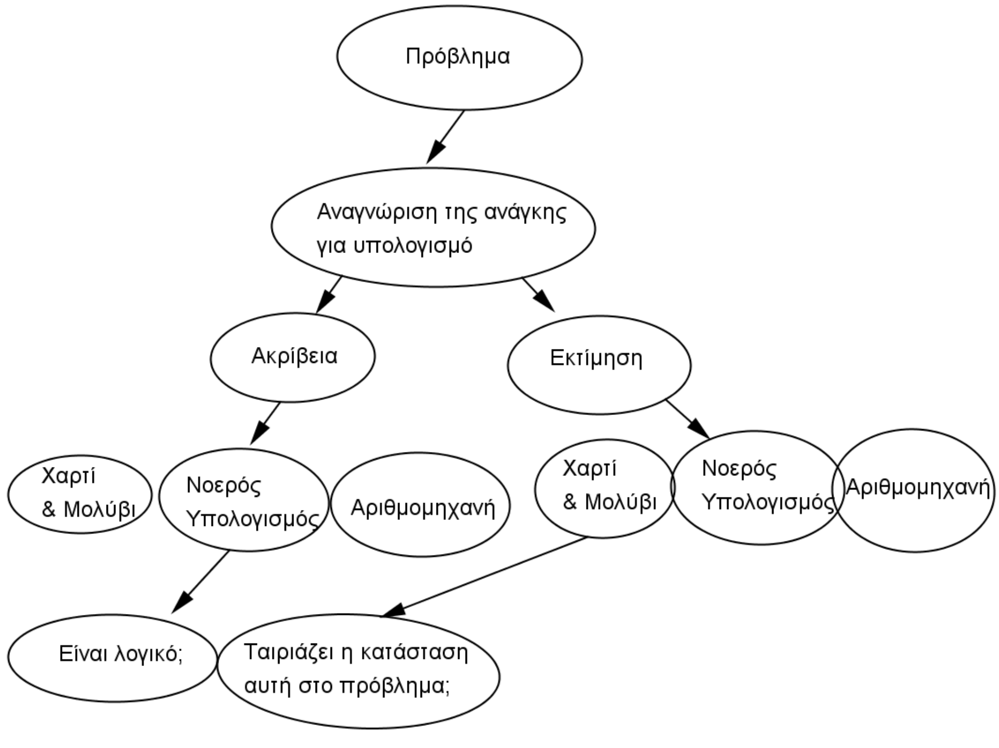
Σύμφωνα με τους Reys et al. (1984) οι νοεροί υπολογισμοί και η υπολογιστική εκτίμηση έχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά όπως: 1) και οι δύο δεξιότητες χρησιμοποιούνται για να ελέγξουν την ορθότητα και τη λογική των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από χαρτί και μολύβι, από αριθμομηχανή ή υπολογιστή, 2) και οι δύο πραγματοποιούνται νοερά, 3) κάθε μία εκμεταλλεύεται τις ιδιότητες της δομής και τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και 4) κάθε μία επιτρέπει στους λύτες να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης. Από την άλλη η ίδια ερευνήτρια δηλώνει ότι οι δύο δεξιότητες είναι διαφορετικές σε κάποιους τομείς: 1) ο νοερός υπολογισμός είναι προαπαιτούμενος στην υπολογιστική εκτίμηση και 2) ο νοερός υπολογισμός παράγει ακριβή απάντηση η οποία είναι είτε σωστή είτε λανθασμένη ενώ η υπολογιστική εκτίμηση παράγει πολλές διαφορετικές απαντήσεις οι οποίες όλες είναι λογικές και αποδεκτές. Ο νοερός υπολογισμός λοιπόν είναι ένα σημαντικό στοιχείο της εκτίμησης, δεδομένου ότι συνιστά τον ακρογωνιαίο λίθο που είναι απαραίτητος για τις διαφορετικές αριθμητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση (Reys et al., 1984). Δεν υπάρχει λόγος παρανόησης μεταξύ των ακριβών απαντήσεων που δίνονται μέσω νοερών υπολογισμών και των προσεγγιστικών απαντήσεων που δίνονται μέσω εκτίμησης. Όταν ο νοερός υπολογισμός χρησιμοποιείται σε μία διαδικασία εκτίμησης προηγείται η διαδικασία επιλογής απλούστερων αριθμών οι οποίοι χρησιμοποιούνται στο νοερό υπολογισμό και σε αυτή την επιλογή των αριθμών οφείλεται η προσεγγιστική απάντηση. Ένας από τους βασικούς λόγους που πρέπει να διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί σύμφωνα με τη Reys, είναι ότι είναι η βάση για την ανάπτυξη τεχνικών για υπολογιστική εκτίμηση.

Σύμφωνα επίσης με τη Sowder (1988), «εκτίμηση είναι η διαδικασία μετατροπής αριθμών από ακριβείς σε προσεγγιστικούς και ο νοερός υπολογισμός με αυτούς τους αριθμούς, εκτελείται για να ληφθεί μία απάντηση η οποία είναι αρκετά κοντά στο αποτέλεσμα του ακριβούς υπολογισμού». Επομένως ο νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία διεξαγωγής αριθμητικών πράξεων για να επιτευχθεί είτε μία ακριβής απάντηση είτε μία κατά προσέγγιση απάντηση (Maclellan, 2001˙ Λεμονίδης, 2013). Ο Van de Walle (2005b) αναφέρει ότι η εκτίμηση είναι ένας απλός νοερός υπολογισμός ο οποίος εκτελείται σε κοντινούς ή εύκολους σε χρήση αριθμούς.

Οπότε όταν εκτελούμε έναν κατ' εκτίμηση υπολογισμό χρησιμοποιούμε το νοερό υπολογισμό αλλά με σκοπό να βρούμε μία λύση όχι ακριβή αλλά κατά προσέγγιση δηλαδή η υπολογιστική εκτίμηση είναι πιο ισχυρή έννοια από το νοερό υπολογισμό αφού περιλαμβάνει την έννοια του νοερού υπολογισμού.

Στο παρακάτω διάγραμμα περιγράφεται η διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά τη εκτέλεση ενός υπολογισμού. Θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η μελέτη των υπολογισμών είναι αναγκαίο να προωθήσει ένα γεμάτο νόημα και κατανοητό φάσμα της μάθησης στον κόσμο των μαθηματικών. Δηλαδή στο πρόγραμμα σπουδών πρέπει να δοθεί έμφαση στο κομμάτι των υπολογισμών και κατ’ επέκταση στην επίλυση προβλημάτων (Dolma, 2003). Μέσα από αυτό τον τρόπο οι μαθητές θα γίνουν ενεργοί στη δημιουργία της γνώσης και όχι απλά παθητικοί δέκτες κανόνων και διαδικασιών. Με αυτό τον τρόπο ενισχύεται στα πιστεύω των μαθητών ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι μία κατ’ αίσθηση εμπειρία (NCTM, 1989).

Διάγραμμα 1. Μοντέλο υπολογιστικής κατάστασης – διαδικασίας (NCTM 1989)



1.6 Η εκτίμηση ως συστατικό της αίσθησης του αριθμού (number sense)

Το National Council of Teachers of Mathematics (1989) ορίζει ως αίσθηση του αριθμού τη διαίσθηση για τους αριθμούς η οποία προέρχεται από όλες τις διαφορετικές έννοιες του αριθμού και περιλαμβάνει πέντε συστατικά: α) την καλή κατανόηση της έννοιας των αριθμών, β) την ανάπτυξη πολλαπλών σχέσεων μεταξύ των αριθμών, γ) την κατανόηση του σχετικού μεγέθους των αριθμών, δ) την ανάπτυξη διαισθήσεων για τις σχετικές επιδράσεις με τον χειρισμό των αριθμών, ε) την ανάπτυξη αναφορών για μετρήσεις κοινών αντικειμένων.

Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στη γενική κατανόηση ενός ατόμου των αριθμών και των πράξεων και στην ικανότητα χειρισμού καταστάσεων της καθημερινής ζωής που περιέχουν αριθμούς. Η ικανότητα αυτή προϋποθέτει τη χρήση ευέλικτων, χρήσιμων και αποτελεσματικών στρατηγικών στον νοερό υπολογισμό και την εκτίμηση, για τη διαχείριση αριθμητικών προβλημάτων (McIntosh, 1992˙ Reys & Reys, 1992˙ Sowder, 1992˙ Λεμονίδης, 2013). Επίσης οι McIntosh et al. (1997) χαρακτηρίζουν την αίσθηση του αριθμού ως την «αίσθηση να κάνεις μαθηματικά» (sense-making of mathematics).

Υπάρχουν ποικίλες διαφορετικές έννοιες του όρου αίσθηση του αριθμού σύμφωνα με τη Sowder (1989). Αυτές μπορεί να περιλαμβάνουν γενικά σχήματα σχετικά με τη συμπεριφορά των αριθμών, κρίσεις και λογικές εξηγήσεις των αριθμών όπως αυτά χρησιμοποιούνται σε ειδικές καταστάσεις, ευελιξία στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών και κατ' εκτίμηση υπολογισμών, την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλες αναφορές, την τάση να θέλουν να «κάνουν αίσθηση» καταστάσεων που περιλαμβάνουν αριθμούς και ποσότητες, την κατανόηση και σωστή χρήση των δεκαδικών αριθμών και των κλασμάτων, την αναγνώριση των σχετικών ενεργειών να χειρίζονται αριθμούς, να κατέχουν την αίσθηση του μεγέθους του αριθμού (sense of number size).

Το 1976 ο Carpenter όπως αναφέρει η Sowder (1992), είχε ήδη δηλώσει ότι «πριν οι μαθητές είναι ικανοί να εκτελέσουν εκτίμηση σωστά, πρέπει να έχουν αναπτύξει μία διαίσθηση της ποσότητας η οποία είναι η αίσθηση του αριθμού, μία αίσθηση για ποσότητες οι οποίες αναπαριστούνται με αριθμούς». Επίσης οι Reys et al. (1982) σε άλλη έρευνα βρίσκουν κάποια χαρακτηριστικά καλών εκτιμητών και συμπεραίνουν ότι η γνώση βασικών λειτουργιών όλων των πράξεων και η κατανόηση της θεσιακής αξίας, «προσδιορίζοντας» ακριβή αποτελέσματα των διαφορετικών πράξεων της αριθμητικής, σχετίζονται επίσης με την αίσθηση του αριθμού. Στην ίδια έρευνα προκύπτει ότι η «ανοχή στο λάθος» στην εκτίμηση σχετίζεται άμεσα με την αίσθηση του αριθμού. Αυτό σημαίνει ότι καλοί χρήστες της εκτίμησης μπορούν να αντιληφθούν το λάθος και να διορθώσουν την απάντησή τους αμέσως αν έχουν ανεπτυγμένη την αίσθηση του αριθμού.

Ορισμένοι ερευνητές ορίζουν την αίσθηση του αριθμού ως σχετική με την εκτίμηση και ως ένα συστατικό της διαδικασίας της εκτίμησης (Siegler, 2004˙ Sowder, 1992a) ενώ άλλοι ορίζουν την εκτίμηση ως υποσύνολο της αίσθησης του αριθμού (Yang, 2005). Αδυναμία στην υπολογιστική εκτίμηση μπορεί να αποκαλύπτει αδυναμία στην αίσθηση του αριθμού (NCTM, 1989˙ Sowder et al., 1989˙ Reys et al., 1991˙ Sowder, 1992˙ Levine, 1982) δηλαδή η έλλειψη των ικανοτήτων εκτίμησης οφείλεται στην έλλειψη της αίσθησης του αριθμού (Reys et al., 1991˙ Sowder, 1992a, 1992b). Η Threadgill-Sowder (1984) διαπιστώνει ότι «οι μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις έδειξαν ότι έχουν ποσοτική διαίσθηση ή αίσθηση του αριθμού, ενώ εκείνοι που έδωσαν απαράδεκτες απαντήσεις φάνηκε ότι έχουν μικρή αίσθηση της αντιπροσώπευσης των αριθμών». Σύμφωνα με τους Reys et al. (1990) η αίσθηση του αριθμού, οι νοεροί υπολογισμοί και η υπολογιστική εκτίμηση είναι συχνά πολύ δύσκολο να διαχωριστούν και όπως επίσης διαπιστώνει η Sowder (1992) «Η εκτίμηση και ο νοερός υπολογισμός δεν είναι μόνο χρήσιμα εργαλεία στην καθημερινή ζωή, αλλά μπορούν επίσης να οδηγήσουν στην καλύτερη αίσθηση του αριθμού». Το 2001 στο “Adding It Up” μία έκθεση του National Research Council αναφέρεται ότι: «Το πρόγραμμα σπουδών πρέπει να παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν και να χρησιμοποιούν τεχνικές νοερής αριθμητικής και εκτίμησης ως ένα μέσο για την προώθηση της βαθύτερης αίσθησης του αριθμού» (σελ. 415). Στην ίδια έκθεση αναφέρεται επίσης ότι ένα βασικό εκπαιδευτικό αποτέλεσμα στα μαθηματικά είναι η ανάπτυξη της ευέλικτης γνώσης, η έννοια της οποίας περιγράφεται στην παρακάτω κεφάλαιο.

1.7 Η ευελιξία και η ευχέρεια στην υπολογιστική εκτίμηση

Το να είναι κάποιος ευέλικτος σημαίνει το να γνωρίζει ένα πλήθος τρόπων για την επίλυση προβλημάτων καθώς και να είναι ικανός να εφαρμόσει αυτές τις μεθόδους σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Η έννοια της μαθηματικής ευελιξίας (flexibility) έχει διερευνηθεί ευρέως σε πολλές έρευνες στις οποίες η ορολογία και οι ερευνητικές μέθοδοι ποικίλουν. Οι διαφορετικοί όροι οι οποίοι έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνες είναι η προσαρμοστικότητα (adaptivity) (Siegler & Lemaire, 1997), η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών (strategic flexibility), η ευχέρεια (fluency). Ο όρος ευελιξία σύμφωνα με το λεξικό της νέας Ελληνικής γλώσσας του Γεώργιου Μπαμπινιώτη είναι η ικανότητα να ελίσσεται, να περιστρέφεται κανείς με ταχύτητα και ευκολία ή η ικανότητα να κάνει ελιγμούς την κατάλληλη στιγμή.

Η ευχέρεια και η ευελιξία είναι δύο στενά συνδεδεμένες έννοιες. Η ευχέρεια (fluency) είναι η διαδικασία κατά την οποία κάποιος μπορεί να λύσει προβλήματα, να απαντήσει σε ερωτήσεις και να επεκτείνει τις διαδικασίες με ένα γρήγορο και αποτελεσματικό τρόπο. Το NTCM Principle and Standards of School Mathematics (2000) ορίζει την υπολογιστική ευχέρεια (computational fluency) ως την αποτελεσματική, ευέλικτη και ακριβή μέθοδο για υπολογισμό. Η ευελιξία είναι η ικανότητα κάποιου να λύνει προβλήματα με ποικίλους τρόπους, να χρησιμοποιεί πληροφορίες που ήδη γνωρίζει για να λύσει άγνωστα προβλήματα και η ικανότητα να προσδιορίσει την πιο αποτελεσματική μέθοδο και να τη χρησιμοποιήσει όταν έρχεται αντιμέτωπος με ένα νέο πρόβλημα (NCTM, 2010; Star, 2009). Άλλος ορισμός για την ευελιξία είναι η ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ των διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει (Λεμονίδης, 2013). Από ορισμένους συγγραφείς, όπως οι Verschaffel et al. (2009) και Heinze et al. (2009) ο όρος ευελιξία συγχέεται με την προσαρμοστικότητα. Ενώ από αυτούς που διαχωρίζουν τους δύο αυτούς όρους (π.χ. Baroody, 2003), η προσαρμοστικότητα ορίζεται ως η σημασία της ικανότητας του ατόμου να χρησιμοποιεί την πιο κατάλληλη στρατηγική που γνωρίζει, με γνώμονα τη γρήγορη και σωστή απάντηση (Λεμονίδης, 2013).

Πολύ συχνά εμφανίζεται στη βιβλιογραφία ο όρος διαδικαστική ευχέρεια και ευελιξία στα μαθηματικά (Procedural Fluency and Flexibility-PFF) και αναφέρεται στην ενασχόληση με μαθηματικές δραστηριότητες εφαρμόζοντας περισσότερους από έναν τρόπους. Η PFF επίσης περιλαμβάνει την ικανότητα της εκτίμησης πριν από την εκτέλεση ενός μαθηματικού προβλήματος ή υπολογισμού. Σύμφωνα με το NCTM (2014) «*η διαδικαστική ευχέρεια είναι ένα κρίσιμο στοιχείο της ικανότητας στα μαθηματικά. Είναι η ικανότητα να εφαρμόζει κάποιος διαδικασίες με ακρίβεια, αποτελεσματικά και ευέλικτα, να μεταφέρει διαδικασίες σε διαφορετικά προβλήματα και καταστάσεις, να κατασκευάζει ή να τροποποιεί διαδικασίες μέσω άλλων διαδικασιών και να αναγνωρίζει πότε μία στρατηγική ή διαδικασία είναι πιο κατάλληλη για να εφαρμοστεί σε σχέση με κάποια άλλη*». Η διαδικαστική ευελιξία ενσωματώνει γνώση για πολλαπλούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων και το πότε να χρησιμοποιούνται (NCTM, 2001˙ Star, 2005, 2007) και είναι σημαντικό συστατικό της μαθηματικής ικανότητας (Dowker, 1992˙ Star & Rittle-Johnson, 2008˙ Star & Seifert, 2006). Για να διαχωριστεί η γνώση των τρόπων από τη χρήση των τρόπων χρησιμοποιούνται δύο ανεξάρτητοι όροι, το μέτρο της διαδικαστικής γνώσης και η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών για την αξιολόγηση της διαδικαστικής γνώσης (Star & Rittle-Johnson, 2009).

Λαμβάνοντας υπόψη τις προκλήσεις των νοερών υπολογιστικών εκτιμήσεων, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να υπάρχει ένα ευρύ ρεπερτόριο στρατηγικών εκτίμησης και να επιλέγεται η πιο κατάλληλη στρατηγική για ένα δεδομένο πρόβλημα και στόχο (Dowker, Flood, Griffiths, Harriss, & Hook, 1996˙ LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993˙ Lemaire, Lecacheur & Farioli, 2000˙ Star, Rittle-Johnson, Lynch & Perova, 2009). Οι Reys et al. (1982) διαπιστώνουν στην έρευνά τους ότι οι καλοί εκτιμητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές για να χειριστούν τα προβλήματα της εκτίμησης. Επίσης μπορούν με διαφορετικές στρατηγικές να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα του ίδιου προβλήματος (Reys, 1991). Οι Cochran & Dugger (2013) δηλώνουν ότι όσο οι μαθητές αναπτύσσουν μεγαλύτερη ευχέρεια στην υπολογιστική εκτίμηση γίνονται πιο ευέλικτοι στις εκτιμήσεις τους και ξεκινούν να κινούνται μεταξύ των προηγούμενα ορισμένων στρατηγικών.

Ο όρος ευελιξία στην εκτίμηση περιλαμβάνει την επιλογή της πιο κατάλληλης στρατηγικής για τον υπολογισμό μιας εκτίμησης σε ένα δοσμένο πρόβλημα (Star, Rittle-Johnson, Lynch & Perova, 2009). Η επιλογή της πιο κατάλληλης στρατηγικής σε προβλήματα εκτίμησης είναι μία πολύπλοκη διαδικασία λόγω παρουσίας πολλαπλών κατά καιρούς ανταγωνιστικών στόχων. Από τη μία μπορεί να είναι επιθυμητό να παραχθεί μία εκτίμηση η οποία είναι πολύ κοντά στην ακριβή απάντηση και ένας άλλος στόχος είναι η ευκολία, δηλαδή μπορεί να επιλεχθεί η εκτίμηση μέσω της πιο εύκολης υπολογιστικά στρατηγικής. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα από την έρευνα των Star et al. (2009), η ευκολία και η ακρίβεια των ίδιων των στρατηγικών μαζί με την ευχέρεια των μαθητών να χειρίζονται τις στρατηγικές είναι σημαντικοί παράγοντες για την ανάπτυξη της ευελιξίας της χρήσης των στρατηγικών.

Η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών (strategic flexibility) ορίζεται ως η γνώση πολλαπλών στρατηγικών και η ικανότητα να επιλέξει κάποιος την πιο κατάλληλη στρατηγική για ένα δεδομένο πρόβλημα και έναν δεδομένο στόχο σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος (Blöte, Van der Burg & Klein, 2001˙ Star, 2005˙ Star & Seifert, 2006˙ Star et al., 2009). Ο όρος «κατάλληλη» αναφέρεται στη πιο αποτελεσματική στρατηγική για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, μεμονωμένο και σε πλαίσιο (Verschaffel et al., 2007).

Πρώτον η ευελιξία στη χρήση στρατηγικών περιλαμβάνει τη γνώση πολλών στρατηγικών. Οι ευέλικτοι εκτιμητές γνωρίζουν περισσότερες από μία στρατηγικές για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Η γνώση πολλαπλών στρατηγικών έχει πολλά οφέλη στη μάθηση και στην απόδοση (Star et al., 2009). Το δεύτερο συστατικό της ευελιξίας είναι η χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών. Ευέλικτοι εκτιμητές χρησιμοποιούν πιο αποτελεσματικές στρατηγικές συγκριτικά με άλλους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Η γνώση της πιο αποτελεσματικής στρατηγικής είναι ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό της επίλυσης προβλημάτων καθώς και ένας θεμελιώδης μηχανισμός ο οποίος υποστηρίζει τη μάθηση και την ανάπτυξη (Siegler, 1996). Ο Blöte και οι συνεργάτες του σε έρευνά τους έχουν βρει ότι οι πιο ικανοί μαθητές ξέρουν και επιλέγουν στρατηγικές νοερών προσθέσεων οι οποίες ταιριάζουν πιο πολύ με τα χαρακτηριστικά των αριθμών στο πρόβλημα, επειδή μία τέτοιου είδους προσέγγιση επιτρέπει τους μαθητές να επιλύσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το μικρότερο αριθμό βημάτων (Blöte, Klein & Beishuizen, 2000˙ Blöte et al., 2001).

Σύμφωνα με τον Star (2006) υπάρχουν πολλά προβλήματα στη μελέτη της ικανότητας της ευελιξίας διότι: α) υπάρχουν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, β) δεν υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ των ιδιοτήτων των πολλαπλών στρατηγικών, γ) η επιλογή της στρατηγικής αξιολογείται ως προς την καταλληλότητά της, δ) η ευελιξία εφαρμόζεται όποτε υπάρχει πιθανότητα για ύπαρξη στρατηγικής. Γι’ αυτό το λόγο η ευελιξία είναι ανάγκη να προσδιορίζεται με σύνθετο τρόπο. Οι Verschaffel et al. (2009) επισημαίνουν τρία διαφορετικά είδη μεταβλητών που επηρεάζουν και προσδιορίζουν την ευελιξία (Λεμονίδης, 2013): α) Μεταβλητές της κατάστασης ή τα χαρακτηριστικά του προβλήματος (δηλαδή η φύση των αριθμών στο πρόβλημα), β) Μεταβλητές του υποκειμένου ή ταχύτητα και αποτελεσματικότητα (δηλαδή με πόση ακρίβεια και πόσο γρήγορα μπορούν να εκτελέσουν τις ανταγωνιστικές στρατηγικές για το συγκεκριμένο πρόβλημα, με δεδομένο τις προσωπικές γνώσεις και τις δεξιότητές τους για την εφαρμογή αυτών των στρατηγικών), γ) Μεταβλητές του πλαισίου (μεταβλητές που αφορούν το κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο).

Σε έρευνα των Star & Rittle-Johnson (2009) μαθητές της πέμπτης και έκτης τάξης μαθαίνουν για την υπολογιστική εκτίμηση συγκρίνοντας εναλλακτικές στρατηγικές λύσεων ή μέσω προβληματισμού για τις στρατηγικές, μία κάθε φορά. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι οι μαθητές που συγκρίναν στρατηγικές ήταν πιο ευέλικτοι λύτες. Δηλαδή η σύγκριση στρατηγικών λύσεων οδηγούν σε μεγαλύτερη ευελιξία. Η σύγκριση αυτή βοηθάει τους μαθητές να γίνουν πιο ευέλικτοι στην υπολογιστική εκτίμηση, αναπτύσσουν ένα μεγαλύτερο ρεπερτόριο στρατηγικών εκτίμησης, βελτιώνουν την ικανότητα των μαθητών να επιλέξουν την πιο κατάλληλη στρατηγική για τον υπολογισμό μιας εύκολης εκτίμησης και προωθεί τη συγκράτηση στη μνήμη της εννοιολογικής γνώσης, των μαθητών όμως που ήδη γνώριζαν κάποιες στρατηγικές εκτίμησης (Star & Rittle-Johnson, 2009).

Σε μία έρευνα των Xu, Wells, LeFevre & Imbo (2014), σε Κινέζους και Καναδούς μορφωμένους ενήλικες, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν την ευελιξία της χρήσης των στρατηγικών στην υπολογιστική εκτίμηση είναι οι οδηγίες των προβλημάτων, η ανατροφοδότηση, τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων και όλοι αυτοί οι παράγοντες αλληλοεπιδρούν ταυτόχρονα με τις ατομικές διαφορές (π.χ. τις αριθμητικές δεξιότητες, την εθνικότητα).

Μελετώντας τις έρευνες που έχουν γίνει στην υπολογιστική εκτίμηση η Sowder (1992) συνοψίζει λέγοντας ότι «οι καλοί εκτιμητές είναι ευέλικτοι στον τρόπο σκέψης τους και χρησιμοποιούν μία ποικιλία από στρατηγικές. Επιδεικνύουν μία βαθιά κατανόηση των αριθμών και των πράξεων και διαρκώς εμπνέονται από αυτή την κατανόηση».

1.8 Η Υπολογιστική εκτίμηση στα Προγράμματα Σπουδών

Για ποιους λόγους θεωρείται αναγκαία η ενσωμάτωση της εκτίμησης στο πρόγραμμα σπουδών; Σύμφωνα με τους Segovia & Castro, 2009, υπάρχουν δύο λόγοι για την ενσωμάτωση της έννοιας της εκτίμησης στο πρόγραμμα σπουδών (curriculum). Ο πρώτος λόγος είναι η πρακτική της ωφέλεια και ο δεύτερος είναι η ολοκλήρωση της κατάρτισης των μαθητών.

Από το 1986 ακόμα, ο Trafton δηλώνει ότι: *«Η υπολογιστική εκτίμηση είναι μία από τις πιο ισχυρές και χρήσιμες όψεις της εκτίμησης και το χτίσιμο ενός ισχυρού πλέγματος της υπολογιστικής εκτίμησης μέσα στα προγράμματα των σχολικών μαθηματικών θα πρέπει να είναι στις βασικές προτεραιότητες των δημιουργών των προγραμμάτων σπουδών τα επόμενα χρόνια»* (αναφορά στο Dolma, 2003).

Παγκόσμιες εκθέσεις μαθηματικών συμβουλίων και προγράμματα σπουδών, θεωρούν την υπολογιστική εκτίμηση ως ένα σημαντικό συστατικό εξέλιξης των μαθητών στα Μαθηματικά (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, 2000˙ Segovia & Castro, 2009˙ The England Department for Education and Skills-EDCTM, 2007˙ Australian Education Council-AEC, 1991˙ The Turkish Ministry of National Education-TMNE, 2005˙ Japanese Ministry of Education, 1989).

Το U.S. National Council of Teachers of Mathematics αναφέρει ότι η εκτίμηση είναι χρήσιμη όταν χρησιμοποιείται σαν εργαλείο για τον έλεγχο απαντήσεων ή ωφελεί στη διδασκαλία συγκεκριμένων θεμάτων όπως για παράδειγμα στις μετρήσεις. Επίσης το NCTM (1991) Curriculum and Evaluation Standards for Mathematics Education θεωρεί ότι: *«οι δεξιότητες και οι εννοιολογικές δομές της εκτίμησης ενισχύουν τις ικανότητες των μαθητών να αντιμετωπίσουν καθημερινές ποσοτικές καταστάσεις» (p.35).* Στο «Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού σε μαθητές της μεσαίας βαθμίδας» το οποίο εκδόθηκε από το NCTM (1991), αναφέρεται ότι ένας από τους ρόλους που παίζει ο δάσκαλος των μαθηματικών είναι «να ενθαρρύνει και να δεχτεί καλές υπολογιστικές μεθόδους» δηλαδή οι μαθητές να μπορούν να χρησιμοποιούν υπολογισμούς με μολύβι και χαρτί, νοερούς υπολογισμούς, υπολογιστική εκτίμηση και αριθμομηχανές ώστε να προωθήσουν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Στην εισαγωγική διαδικασία πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να μοιράζονται στρατηγικές νοερών υπολογισμών και υπολογιστικών εκτιμήσεων με συνομήλικους ώστε να κατανοήσουν βασικές σχέσεις και αρχές υπολογισμών της θέσης των ψηφίων. Περαιτέρω, για την κατανόηση κάποιων εννοιών, ο νοερός υπολογισμός και η υπολογιστική εκτίμηση είναι πιο αποτελεσματικές από τους ακριβείς υπολογισμούς. Η βελτίωση στους υπολογισμούς πρέπει να βασίζεται σε συνεχή πρακτική εξάσκηση. Αν η υπολογιστική εκτίμηση επικεντρώνεται στη διδασκαλία μόνο ορισμένων ενοτήτων, θα περιοριστεί η υπολογιστική εκτίμηση σε μέρη του συστήματος υπολογισμών και όταν οι μαθητές θα έρχονται σε επαφή με προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης θα χρησιμοποιούν μη ευέλικτες στρατηγικές (Sowder, 1984). Επίσης το NCTM (2000) αναγνωρίζει ότι οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν και να προσαρμόσουν διαδικασίες για τους νοερούς υπολογισμούς και την υπολογιστική εκτίμηση με κλάσματα, δεκαδικούς και ακέραιους αριθμούς.

Εξετάζοντας τι συμβαίνει με την υπολογιστική εκτίμηση και σε άλλα εκπαιδευτικά συστήματα και curriculum άλλων χωρών, στην Ιαπωνία για παράδειγμα η υπολογιστική εκτίμηση υπάρχει στο curriculum της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης από πολύ παλιά, ήδη μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, σύμφωνα με τους Reys et al., (1991). Η έμφαση στην εκτίμηση έχει σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές α) στην κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στους ακέραιους αριθμούς και τα δεκαδικά κλάσματα, β) στην κατανόηση της έννοιας της εκτίμησης μέσω χρήσης στρογγυλοποιημένων αριθμών και γ) στο να ελέγχουν το μέγεθος ενός γινομένου ή ενός πηλίκου μέσω μιας εκτίμησης (Japanese Ministry of Education, 1951). Το 1989 το Curriculum έχει σχεδιαστεί με σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να έχουν μία καλή αίσθηση των αριθμών και οι μαθητές να γίνουν καλοί εκτιμητές (Japanese ministry of Education, 1989b). Στο curriculum του 2008 (Japanese Ministry of Education, Culture, Sports, Sciences and Technology, 2008), αναφέρεται ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να κατανοήσουν τους αριθμούς κατά προσέγγιση και να τους χρησιμοποιούν κατάλληλα. Να εκτιμούν τα αποτελέσματα ενός υπολογισμού καταλλήλως.

Στην Τουρκία η εκτίμηση και οι στρατηγικές της διδάσκονται από το 2004 στα σχολεία. Το Turkish Ministry of National Education (TMNE, 2004) υποστηρίζει ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να εκτελούν νοερούς υπολογισμούς και να έχουν ικανότητες υπολογιστικής εκτίμησης πέρα από τις δεξιότητες υπολογισμών με ακρίβεια. Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιούν την εκτίμηση ως μέσο για τον έλεγχο των απαντήσεων τους σε υπολογισμούς και σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος όταν δεν είναι απαραίτητη ακριβής απάντηση (Usiskin, 1986). Σύμφωνα με το TMNE (2005) η εκτίμηση στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών των τάξεων 6 έως 8 στην Τουρκία είναι σημαντική γιατί αποτελεί μία βασική μαθηματική ικανότητα και έχει μεγάλη σημασία στην επίλυση προβλημάτων. Το νέο πρόγραμμα σπουδών για τις τάξεις 6 έως 8 περιλαμβάνει 14 στόχους με σκοπό τη βελτίωση της υπολογιστικής εκτίμησης όπως π.χ. να εκτιμούν το αποτέλεσμα μίας πράξης με κλάσματα μέσω χρήσης στρατηγικών ή να εκτιμούν το αποτέλεσμα πράξεων με δεκαδικούς μέσω χρήσης στρατηγικών ή να εκτιμούν τετραγωνικές ρίζες αριθμών οι οποίες δεν έχουν ακριβή τετραγωνική ρίζα.

Σύμφωνα με το Australian Curriculum κάποια από τα χαρακτηριστικά των ευέλικτων μαθητών είναι να υπολογίζουν με αποτελεσματικούς τρόπους και να επιλέγουν κατάλληλες μεθόδους και προσεγγίσεις.

Η έννοια της εκτίμησης στο Ελληνικό πρόγραμμα σπουδών έχει κάνει την εμφάνισή της το 2003 στα προγράμματα σπουδών του Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003) και το 2006 εφαρμόστηκε στις σχολικές τάξεις με τα καινούρια σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση το οποίο παράγεται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης «Νέο Σχολείο (Σχολείο 21^{ου} αιώνα)» (2011), η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού κατέχει κεντρική θέση. Υιοθετούνται τροχιές ανάπτυξης της αίσθησης καθενός από τους φυσικούς, κλασματικούς, ακέραιους, ρητούς και πραγματικούς αριθμούς με 5 υπο-τροχιές από τις οποίες η μία να περιλαμβάνει την εκτέλεση ή τον υπολογισμό των πράξεων και την εκτίμηση του αποτελέσματος πράξεων. Επίσης η έννοια της εκτίμησης αναφέρεται ρητά στο κομμάτι των μετρήσεων, στις οποίες η χρήση εργαλείων μέτρησης και η ανάπτυξη στρατηγικών εκτίμησης υποστηρίζουν τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση των μεγεθών. Τέλος στο κομμάτι των πιθανοτήτων μέσω της εκτίμησης της πιθανότητας οι μαθητές αρχίζουν να αποκτούν μια κατανόηση του τυχαίου. Μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στην έννοια της εκτίμησης στα Μαθηματικά του Δημοτικού και ελάχιστα στα Μαθηματικά του Γυμνασίου ενώ δε γίνεται καμία αναφορά στο πρόγραμμα σπουδών για το Λύκειο.

1.9 Παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα της εκτίμησης

Τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων

1) *Το είδος της πράξης*

Από την έρευνα των Hanson & Hogan (2000) σε φοιτητές προκύπτει ότι οι φοιτητές σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα της πρόσθεσης και αφαίρεσης από ότι στα προβλήματα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Αυτά τα αποτελέσματα συμφωνούν με τους Levine (1982) όμοια σε έρευνά της σε φοιτητές, Rubenstein (1985) σε μαθητές της 8^{ης} τάξης, Λεμονίδη & Καϊμακάμη (2013) σε έρευνά τους σε υποψήφιους δασκάλους, Bana & Dolma (2004) σε μαθητές της 7^{ης} τάξης, Dolma (2003) σε μαθητές 5^{ης}, 7^{ης} και 9^{ης} τάξης, Elisha σε έρευνα της σε μαθητές Λυκείου (2013).

2) *Το είδος των αριθμών*

Ένα από τα ευρήματα της έρευνας της Rubenstein (1985) σε μαθητές της όγδοης τάξης ήταν ότι οι μαθητές είχαν περισσότερες δυσκολίες στα προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς από ότι στα προβλήματα με ακέραιους. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήγουν οι Bestgen et al. (1980) (όπως αναφέρει η Rubenstein, 1985), ο Dolma (2003) και η Elisha (2013). Παρόμοια στην έρευνα των Hanson & Hogan (2000) διαπιστώνεται ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται στα προβλήματα με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Οι De Castro, Castro & Segovia (2002) (αναφορά στο Segovia & Castro, 2009) οι οποίοι στηρίχτηκαν στα αποτελέσματα της Levine (1980) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς μικρότερων του 1 είναι δυσκολότερα από τα προβλήματα με ακέραιους ή δεκαδικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 1.

3) *Το σχετικό μέγεθος των αριθμών*

Αν είναι μεγάλοι οι αριθμοί είναι δύσκολο να υπολογιστούν νοερά (Λεμονίδης & Καϊμακάμη, 2013). Ο Segovia (1997) (αναφορά στο Segovia & Castro, 2009) διαπιστώνει ότι η ακρίβεια στις απαντήσεις εξαρτάται από το μέγεθος της ποσότητας, όσο μεγαλύτερες ποσότητες τόσο μικρότερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις.

4) *Το πλήθος των όρων της πράξης*

Για παράδειγμα η πρόσθεση με πέντε όρους (35+42+40+38+44) είναι πιο δύσκολη από την πρόσθεση με τρεις όρους (1.378+236+442) (Λεμονίδης & Καϊμακάμη, 2013).

5) *Το περιεχόμενο της εκφώνησης του προβλήματος*

Μπορεί το περιεχόμενο να είναι οικείο και να ωθεί προς έναν κατ' εκτίμηση υπολογισμό (Λεμονίδης & Καϊμακάμη, 2013).

6) *Η γλώσσα του προβλήματος*

Οι Imbo & LeFevre (2011) σε μια έρευνα με 40 Βέλγους και 80 Κινέζους διαπίστωσαν ότι η αποτελεσματικότητα στις υπολογιστικές εκτιμήσεις σχετίζεται με τη γλώσσα. Από τους 80 Κινέζους οι 40 απαντούσαν στη μητρική τους γλώσσα και οι άλλοι 40 στα αγγλικά. Οι συμμετέχοντες που απαντούν σε γλώσσα διαφορετική της μητρικής τους είναι πιο αργοί στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης σε σχέση με αυτούς που απαντούν στη μητρική τους. Αυτή η διαφορά αυξανόταν όσο αυξανόταν η δυσκολία των στρατηγικών και το φορτίο στην εργαζόμενη μνήμη.

7) *Το πλαίσιο του προβλήματος*

Οι Yang & Wu (2012) μελέτησαν τις διαφορές μαθητών της 8ης τάξης στην Ταϊβάν στην εκτίμηση καθαρά αριθμητικών προβλημάτων και προβλημάτων με πλαίσιο. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στα αριθμητικά προβλήματα συγκριτικά με τα προβλήματα με πλαίσιο και για τις τρεις κατηγορίες προβλημάτων του εργαλείου τους (αναδόμηση, αντιστάθμιση, μετάφραση). Τα αριθμητικά προβλήματα αποτελούνται από αριθμούς και πράξεις και οι μαθητές μπορούν να τα λύσουν απευθείας χωρίς καμία μετατροπή σε αναπαραστάσεις. Αντίθετα κατά την ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα με πλαίσιο πρέπει πρώτα να γίνει ανάγνωση της κατάστασης-πρόβλημα, να καταγραφούν οι πράξεις και στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση με τις έρευνες των Sowder (1992) και Reys et al. (1982) στις οποίες προκύπτει ότι οι μαθητές λύνουν πιο εύκολα λεκτικά προβλήματα πλαισίου από ότι αριθμητικά προβλήματα. Συμφωνούν ότι στα προβλήματα με πλαίσιο τα οποία περιλαμβάνουν ασυνήθιστες λέξεις οι μαθητές δυσκολεύονται ενώ στα προβλήματα με πλαίσιο που χρησιμοποιούνται λεκτικές περιγραφές οι μαθητές κατανοούν πιο εύκολα το νόημα των προβλημάτων.

Γνωστικό υπόβαθρο και προϋπάρχουσες γνώσεις

Ο ρόλος της προϋπάρχουσας γνώσης στην ανάπτυξη της ευελιξίας στρατηγικής στις υπολογιστικές εκτιμήσεις μελετήθηκε από τους Star, Rittle-Johnson, Lynch & Perova (2009). Διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που έδειξαν υψηλή ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και ευελιξίας πριν την παρέμβαση ανέπτυξαν στρατηγικές που οδηγούν σε ακριβέστερες εκτιμήσεις, ενώ οι μαθητές χαμηλής ικανότητας και ευελιξίας ανέπτυξαν στρατηγικές που ήταν πιο εύκολο να τις εκτελέσουν. Οι μαθητές οι οποίοι είχαν προηγούμενες γνώσεις σχετικές με στρατηγικές της εκτίμησης έδειξαν μικρότερη ευελιξία μετά την παρέμβαση, συγκριτικά με τους μαθητές που είχαν ελάχιστες προηγούμενες γνώσεις. Η αύξηση της ευελιξίας στους μαθητές με περιορισμένες προϋπάρχουσες γνώσεις οφείλεται στο ότι στηρίζονται στην αρχή της απλούστευσης ενώ οι μαθητές με περισσότερες προϋπάρχουσες γνώσεις επικαλούνται την αρχή της εγγύτητας και η εννοιολογική τους κατανόηση δεν αντανακλά στις διαδικασίες που επιλέγουν.

Μαθητές οι οποίοι έχουν δυσκολία με την έννοια της αξίας της θέσης, με τη στρογγυλοποίηση και με πράξεις με πολλαπλάσια του 10 συναντάνε προβλήματα κατά την ενασχόλησή τους με προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης σύμφωνα με τη Rubenstein (1985). Οι Booth & Siegler (2006), αναφέρουν ότι η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης εξαρτάται από την ικανότητα απομνημόνευσης αριθμητικών γεγονότων, από την ικανότητα εκτέλεσης συγκεκριμένων διαδικασιών επίλυσης προβλήματος και την ικανότητα εκτέλεσης υπολογισμών με ακρίβεια. Σύμφωνα με τους Çilingir & Türnüklü (2009) οι μαθητές οι οποίοι κατέχουν υψηλό επίπεδο στα Μαθηματικά εμφανίζουν να έχουν υψηλό επίπεδο στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης.

Οι Berry et al. (2014) στην έρευνά τους, σε μαθητές της 8ης τάξης, συμπεραίνουν ότι ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα εκτίμησης είναι οι προηγούμενες εμπειρίες, οι μαθηματικές πράξεις και το μέγεθος των αριθμών.

Το φύλο

Στις περισσότερες έρευνες που εξετάζουν τις διαφορές μεταξύ των φύλων στις επιδόσεις στην υπολογιστική εκτίμηση, δεν παρατηρείται κάποια αξιοσημείωτη διαφορά (Aytekin & Tolukuçar, 2014˙ Dolma, 2003˙ Hanson & Hogan, 2000˙ Lewis, 1994). Η Rubenstein (1985) παρατηρεί σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα φύλα με τα αγόρια να σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στην εκτίμηση και όμοια οι Reys et al. (1991) διαπιστώνουν ότι τα αγόρια σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στην 5η τάξη αλλά δεν παρατηρούν το ίδιο στην 8η τάξη. Στο ίδιο συμπέρασμα με τα αγόρια να σημειώνουν καλύτερες επιδόσεις στην υπολογιστική εκτίμηση καταλήγουν οι Wai & Kheong (1998) σε μαθητές της 5ης τάξης στη Σιγκαπούρη, οι Çilingir & Türnüklü

(2009) σε μαθητές της 6ης έως και την 8η τάξη στην Τουρκία και η Elisha (2013) στην έρευνά της σε μαθητές Λυκείου στη Νιγηρία.

Οι Hanson & Hogan (2000) παρόλο που δεν παρατηρούν κάποια σημαντική διαφορά στις συμπεριφορές των δύο φύλων στην υπολογιστική εκτίμηση συνολικά, σημειώνουν ότι τα κορίτσια είναι καλύτερα στα λεκτικά τεστ ενώ τα αγόρια είναι καλύτερα στα ποσοτικά τεστ.

Η ηλικία

Η υπολογιστική εκτίμηση βελτιώνεται σημαντικά, αν και σταδιακά μετά την τρίτη και τέταρτη τάξη (Siegler & Booth, 2005). Έχει διαπιστωθεί ότι οι ενήλικες χειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης από ότι τα παιδιά (Dowker, 1996, 1997). Στην έρευνα των Lemaire & Lecacheur (2002) η οποία έλαβε χώρα ταυτόχρονα σε ενήλικες και μαθητές της 6ης τάξης και της 4ης τάξης παρατηρούνται διαφορές στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης μεταξύ των ενηλίκων και των μαθητών στη επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών και στην εκτέλεση τους. Οι μαθητές παρόλο που αντιλαμβάνονται τους στόχους των προβλημάτων, τις διαφορές μεταξύ υπολογισμών και υπολογιστικής εκτίμησης διαθέτουν μειωμένη ικανότητα στη χρήση στρατηγικών συγκριτικά με τους ενήλικες. Γενικά διαπιστώνεται ότι οι ενήλικες είναι καλύτεροι από τους μαθητές της 6ης τάξης και αυτοί με τη σειρά τους σημειώνουν καλύτερα αποτελέσματα από τους μαθητές της 4ης τάξης σε αθροίσματα δύο τριψήφιων αριθμών (Lemaire & Lecacheur, 2002). Όμοια οι μαθητές της 6ης και 8ης τάξης είναι πιο αποτελεσματικοί από τους μαθητές της 4ης τάξης σε ένα πρόβλημα εκτίμησης αθροίσματος πολλών προσθετέων σύμφωνα με τον Smith (1999) (όπως αναφέρουν οι Siegler & Booth, 2005), ενώ οι ενήλικες είναι καλύτεροι από τους μαθητές της 8ης τάξης οι οποίοι με τη σειρά τους είναι πιο ικανοί από τους μαθητές της 6ης τάξης σε προβλήματα εκτίμησης γινομένων πολυψήφιων αριθμών (LeFevre et al., 1993).

Οι ηλικιακές αυτές διαφορές διαπιστώνονται και στη χρήση στρατηγικών. Η έκταση, η καταλληλότητα, η ποιότητα των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης αυξάνεται με την ηλικία και τη μαθηματική εμπειρία (LeFevre et al., 1993˙ Siegler & Booth, 2005). Στην έρευνα του Heinrich (1998) σε μαθητές της 6ης, 7ης και 8ης τάξης προκύπτει ότι οι μαθητές σημειώνουν σημαντικές διαφορές στις στρατηγικές της αναδόμησης, μετάφρασης και αντιστάθμισης μεταξύ των τριών τάξεων.

Από την άλλη σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας της Volkova (2005) μαθητές της ίδιας ηλικίας μπορεί να βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο σκέψης αναφορικά με την υπολογιστική εκτίμηση. Τα επίπεδα της σκέψης στην υπολογιστική εκτίμηση δεν εξαρτώνται αποκλειστικά από την ηλικία αλλά η πρόοδος στο επίπεδο μπορεί να εξαρτηθεί από το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας που δέχεται ο μαθητής.

Επίσης σε ορισμένες έρευνες δεν καταγράφεται κάποια σημαντική βελτίωση με την αύξηση της ηλικίας. Οι Schoen et al. (1981) δε εντόπισαν καμία διαφορά ανάμεσα στις διαφορετικές ηλικίες (έρευνα σε μαθητές δεύτερης και τέταρτης τάξης) σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. Στην έρευνα του Dolma (2003) παρατηρήθηκε πρόοδος στην ικανότητα εκτίμησης των μαθητών από την 5η στην 7η τάξη αλλά δεν παρατηρήθηκε καμία πρόοδος από την 7η στην 9η τάξη.

Γενικό συμπέρασμα των Siegler και Booth (2005) είναι ότι: «η ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης αρχίζει εκπληκτικά αργά και προχωρά εκπληκτικά αργά».

Οι πεποιθήσεις για την υπολογιστική εκτίμηση

Οι πεποιθήσεις είναι ένας σημαντικός παράγοντας για την αποτελεσματική μάθηση σύμφωνα με τους Carter & Norwood (1997) (όπως αναφέρουν οι Mildenhall & Hackling, 2012). Στην έρευνα των Mildenhall & Hackling (2012) γίνεται εκπαιδευτική παρέμβαση σε μαθητές της 6ης τάξης στο Περθ της Αυστραλίας από έμπειρους δασκάλους, με θέμα την υπολογιστική εκτίμηση. Οι μαθητές στην αρχή είχαν την πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά είναι κάτι που πρέπει να γίνεται γρήγορα, σχετικό με τις τέσσερις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) και με μία σωστή απάντηση. Η αντίληψή τους για την υπολογιστική εκτίμηση αφορούσε κάτι περιορισμένο, κάτι το οποίο βοηθούσε στον έλεγχο των απαντήσεων και ως μία διαδικασία που οδηγεί σε εικασίες. Μετά το τέλος της έρευνας όλοι οι μαθητές θεωρούσαν την υπολογιστική εκτίμηση σαν μία επιπλέον διαδικασία υπολογισμών. Οι πεποιθήσεις τους σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση ευρύνονται, αυξάνονται οι γνώσεις τους για την υπολογιστική εκτίμηση και έχουν θετική αντίληψη σχετικά με την έννοια. Ένα τελευταίο συμπέρασμα της έρευνας είναι ότι η διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης μέσα σε ένα ευχάριστο περιβάλλον και μέσα από ουσιαστικές διαδικασίες βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν την αξία της υπολογιστικής εκτίμησης.

Περιβαλλοντικοί - Πολιτιστικοί παράγοντες

Οι Reys et al. (1991) σε διαφορετικές έρευνες μελετούν τις συμπεριφορές στην υπολογιστική εκτίμηση των μαθητών από τις Ηνωμένες πολιτείες της Αμερικής, την Ιαπωνία και το Μεξικό, μαθητές που προέρχονται από διαφορετικούς πολιτισμούς και εκπαιδευτικά συστήματα. Οι μαθητές και από τις τρεις εθνικότητες χρησιμοποιούν τις τρεις γενικές γνωστικές διαδικασίες, την αναδόμηση (reformulation), τη μετάφραση (translation) και την αντιστάθμιση (compensation) με τους Μεξικανούς μαθητές να χρησιμοποιούν περισσότερο τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου ενώ η στρατηγική που παρατηρήθηκε περισσότερο στους Αμερικανούς και Ιάπωνες μαθητές ήταν η στρογγυλοποίηση. Επίσης οι Ιάπωνες έχουν την τάση να εφαρμόζουν περισσότερο αλγοριθμικές υπολογιστικές διαδικασίες καθώς και η τάση τους να χρησιμοποιούν νοερούς αλγόριθμους εμποδίζει την ανάπτυξη της κατ' εκτίμηση ικανότητας (Reys et al., 1991).

Η Elisha (2013) ερευνά τις συμπεριφορές στην υπολογιστική εκτίμηση μαθητών δύο τύπων Λυκείου (αστικών και αγροτικών περιοχών) στη Νιγηρία με τους μαθητές των αστικών περιοχών να σημειώνουν καλύτερα αποτελέσματα από τους μαθητές των αγροτικών περιοχών. Όπως δηλώνει η ερευνήτρια η καλύτερη απόδοση των μαθητών των αστικών περιοχών μπορεί να συνδέεται με το γεγονός ότι στις πόλεις οι μαθητές έχουν μεγαλύτερη επαφή με υπολογιστές και το διαδίκτυο και καταλήγει ότι και οι μαθητές των αγροτικών περιοχών μπορούν να σημειώσουν καλύτερα αποτελέσματα αν το περιβάλλον υποστηρίξει τη μάθηση.

Σε έρευνα των Imbo & LeFevre (2011) σε Βέλγους και Κινέζους μορφωμένους ενήλικες στην υπολογιστική εκτίμηση με σκοπό να εξερευνήσουν τις πολιτιστικές διαφορές μεταξύ των συμμετεχόντων στη χρήση στρατηγικών προκύπτει ότι οι Κινέζοι ήταν ταχύτεροι και πιο ακριβείς στις απαντήσεις τους αλλά επιλέγουν λιγότερο κατάλληλες στρατηγικές. Οι Κινέζοι δεν κατανοούν την ανάγκη για εκτίμηση αφού το πρόγραμμα σπουδών στην Κίνα εστιάζει περισσότερο στους ακριβείς υπολογισμούς παρά στους κατ' εκτίμηση. Σε έρευνα των Xu, Wells, LeFevre και Imbo (2014) εξετάζουν την ευελιξία στρατηγικών στην υπολογιστική εκτίμηση σε Κινέζους και Καναδούς μορφωμένους ενήλικες διαπιστώνοντας ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν την ευελιξία της χρήσης των στρατηγικών στην υπολογιστική εκτίμηση είναι οι οδηγίες των προβλημάτων, η ανατροφοδότηση, τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων και όλοι αυτοί οι παράγοντες αλληλοεπιδρούν ταυτόχρονα με τις ατομικές διαφορές (π.χ. τις αριθμητικές δεξιότητες, την εθνικότητα).

Συναισθηματικοί παράγοντες

Οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την ικανότητα στην υπολογιστική εκτίμηση δεν είναι μόνο εννοιολογικής φύσεως αλλά και σχετικοί με συμπεριφορές και στάσεις. Η αυτοπεποίθηση είναι ένας παράγοντας σημαντικός σχετικός με την αυτό-εικόνα των μαθητών και επηρεάζει την ικανότητα και την προθυμία για εκτίμηση (Clayton, 1992). Οι Sowder & Wheeler (1989) ανέδειξαν στοιχεία όπως η αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά ή στις εκτιμήσεις, η ανοχή στο λάθος και η αναγνώριση της χρησιμότητας της εκτίμησης, τα οποία μπορεί να επηρεάσουν την ικανότητα στην υπολογιστική εκτίμηση. Οι LeFevre et al. (1993) ομολογούν ότι η υψηλή ικανότητα στην υπολογιστική εκτίμηση συσχετίζεται με τους υψηλούς βαθμούς στα μαθηματικά και την πεποίθηση ότι η εκτίμηση είναι χρήσιμη σε καθημερινές καταστάσεις. Παράλληλα οι Tsao & Pan (2011) προσθέτουν στους παράγοντες της αυτοπεποίθησης και της ανοχής για λάθος και την προηγούμενη εμπειρία του ατόμου με την υπολογιστική εκτίμηση, την αποδοχή της αξίας της μάθησης των εκτιμήσεων καθώς και την απόλαυση που προσφέρει στο άτομο η ενασχόληση με εκτιμήσεις. Ο Tsao (2013) διαπιστώνει ότι παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα της υπολογιστικής εκτίμησης είναι η αυτοπεποίθηση, οι αξίες, η εμπειρία και θετική διάθεση για τη μάθηση της υπολογιστικής εκτίμησης.

Στην έρευνα των Boz και Bulut (2012) για τους συναισθηματικούς παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα στην υπολογιστική εκτίμηση μαθητών της 7ης τάξης προκύπτει ότι: η εμπιστοσύνη στην ικανότητα να κάνει κάποιος μαθηματικά, η εμπιστοσύνη στην ικανότητα να υπολογίζει εκτιμήσεις, η αντίληψη της εκτίμησης και η ανοχή στο λάθος είναι συναφείς παράγοντες με την ικανότητα στην υπολογιστική εκτίμηση.

Παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση και την επιλογή των στρατηγικών στην υπολογιστική εκτίμηση.

Οι Siegler και Booth (2005) παραθέτουν τους παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση και την επιλογή των στρατηγικών στα προβλήματα της υπολογιστικής εκτίμησης:

1) *Η εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της εκτίμησης:*

Οι LeFevre et al.(1993) υποθέτουν ότι η υπολογιστική εκτίμηση απαιτεί την αρχή της απλούστευσης (simplicity) (η κατανόηση ότι η νοερή αριθμητική είναι πιο εύκολη με απλούς τελεστές) και την αρχή της εγγύτητας (proximity) (η κατανόηση ότι ο στόχος της εκτίμησης είναι να καταλήξει σε εκτιμήσεις όσο πιο κοντά γίνεται στη σωστή απάντηση). Η αναφορά από τους ίδιους τους μαθητές της $4^{ης}$ και $8^{ης}$ τάξης, ως προς τη στρατηγική που χρησιμοποιούν, αποδεικνύει την κατανόηση της αρχής της απλούστευσης αλλά η δικαιολόγηση των απαντήσεων των ενηλίκων αποδεικνύει την ισορροπία μεταξύ της απλούστευσης και της εγγύτητας στις εκτιμήσεις τους. Σε παρόμοιο συμπέρασμα καταλήγουν οι Sowder και Wheeler (1989) στα προβλήματα εκτίμησης αθροίσματος πολυψήφιων αριθμών όπου παρατηρείται: α) απροθυμία ακόμα και των μαθητών της $9^{ης}$ τάξης να δεχθούν ότι δύο εναλλακτικές εκτιμήσεις μπορεί να είναι αποδεκτές και β) η σπάνια χρήση της αντιστάθμισης σε όλες τις ηλικίες (τρίτη έως ένατη τάξη).

2) *Η χωρητικότητα της εργαζόμενης μνήμης*

Οι Case και Sowder (1990) αναφέρουν ότι όσο αυξάνεται η ηλικία αυξάνεται και η χωρητικότητα της εργαζόμενης μνήμης, γεγονός που επιτρέπει τους μαθητές να εκτελούν έναν αυξημένο αριθμό αναπαραστάσεων ταυτόχρονα.

3) *Περιορισμένες δεξιότητες υπολογισμού και αριθμητικής.*

Στο πρόβλημα 79x191 ένας μαθητής με ικανότητες στο νοερό πολλαπλασιασμό θα μπορούσε να υπολογίσει το γινόμενο 80x190 ενώ ένας μαθητής με μειωμένες δεξιότητες θα έλυνε μόνο το 80x200. Συνεπής στην ανάλυση αυτή, η αυξημένη ικανότητα στους νοερούς υπολογισμούς παρουσιάζει θετική συσχέτιση με την υπολογιστική εκτίμηση (LeFevre et al., 1993).

Άλλοι παράγοντες (σχετικοί με τις συνθήκες διεξαγωγής της έρευνας)

Οι Reys et al. (1984) στην έρευνά τους σε Μεξικάνους μαθητές καταγράφουν μία σειρά από παράγοντες οι οποίοι επηρέασαν τις χαμηλές επιδόσεις των Μεξικανών μαθητών στην υπολογιστική εκτίμηση:

1) Ορισμένοι μαθητές δεν κατανοούν την έννοια της εκτίμησης με σκοπό να εφαρμόζουν το γραπτό αλγόριθμο νοερά.
2) Οι Μεξικάνοι μαθητές δεν ήταν συνηθισμένοι σε χρονομετρημένα τεστ.
3) Δεν ήταν συνηθισμένοι σε προβλήματα που δεν μπορούσαν να ξαναδιαβάσουν την εκφώνηση, αφού το πρόβλημα εμφανιζόταν σε μία οθόνη μόνο μία φορά.

4) Πολλοί μαθητές εργάζονταν σε ένα πρόβλημα παραπάνω χρόνο από τον επιτρεπτό με αποτέλεσμα να μην προλάβουν να ασχοληθούν με κάποιο αριθμό άλλων προβλημάτων.
5) Πολλοί μαθητές απογοητεύτηκαν από την ταχύτητα του τεστ με αποτέλεσμα να εκφράζουν τη δυσανασχέτησή τους με την ανικανότητά τους να απαντήσουν μέσα στον επιτρεπόμενο χρόνο.
6) Οι μαθητές δεν είχαν συνηθίσει την ύπαρξη και χρήση του προβολέα (προτζέκτορα) αφού περισσότεροι από αυτούς αντίκρυζαν πρώτη φορά προβολέα.
7) Οι Μεξικάνοι μαθητές δεν είχαν συνηθίσει την ύπαρξη επισκεπτών στην τάξη. Το τεστ είχε εφαρμοστεί από τρεις άγνωστους ανθρώπους για αυτούς.

Συνοψίζοντας λοιπόν παρατηρείται ότι υπάρχουν πολλών ειδών παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης, την ανάπτυξη των στρατηγικών και την ευελιξία στην υπολογιστική εκτίμηση.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο παρακάτω κεφάλαιο παρουσιάζονται τα στοιχεία σχετικά με το σχεδιασμό, τη διεξαγωγή και την ολοκλήρωση του ερευνητικού μέρους της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Παρουσιάζεται το δείγμα της έρευνας, οι πηγές δεδομένων και τα εργαλεία μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι άξονες ανάλυσης.

Πριν από την ανάλυση των παραπάνω στοιχείων γίνεται μία περιγραφή του θεσμού των αμιγών ελληνικών σχολείων στην Γερμανία.

2.1 Τα αμιγή Ελληνικά σχολεία της Γερμανίας

Τα αμιγή ελληνικά σχολεία της Γερμανίας είναι στην ευθύνη του ΥΠ.Ε.Π.Θ και διέπονται από την εκπαιδευτική νομοθεσία και τα αναλυτικά προγράμματα που εφαρμόζονται στα ελληνικά δημόσια σχολεία της ημεδαπής. Φοιτούν μαθητές ελληνικής καταγωγής, αφού προσκομίσουν ειδική άδεια αποδέσμευσης από την υποχρέωση φοίτησης στα αντίστοιχα γερμανικά σχολεία. Διδάσκουν εκπαιδευτικοί αποσπασμένοι του ΥΠ.Ε.Π.Θ., καθώς και ομογενείς ή αλλογενείς εκπαιδευτικοί της γερμανικής γλώσσας με σύμβαση εργασίας. Είναι αναγνωρισμένα από τη γερμανική πλευρά ως ιδιωτικά σχολεία της Ελληνικής Δημοκρατίας.

Η εκπαίδευση των ελληνοπαίδων στη Γερμανία συνδέεται άμεσα από τους εξής παράγοντες: την πολιτική και οικονομική κατάσταση της κάθε χρονικής περιόδου στη Γερμανία, τη μορφωτική κατάσταση των γονέων των μαθητών, την ανάπτυξη των ελληνικών κοινοτήτων στη Γερμανία, το επίπεδο των αποσπασμένων εκπαιδευτικών στη Γερμανία, το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας.

Η πλειοψηφία των παιδιών που φοιτούν στα Ελληνικά σχολεία σήμερα στη Γερμανία είναι τρίτης γενιάς μεταναστών. Οι παππούδες τους μετανάστευσαν στη Γερμανία τα έτη 1960-1970 όπου αυτή τη δεκαετία υπολογίζεται το μεγαλύτερο κύμα μετανάστευσης στη Γερμανία. Η εκπαίδευση των παιδιών τότε άργησε να πάρει πρωτεύοντα ρόλο, γιατί το 84% των οικογενειών των μεταναστών ζούσαν χωριστά με τα παιδιά τους. Τα μικρά παιδιά της προσχολικής ηλικίας παραμένουν στην Ελλάδα μέχρι την ηλικία περίπου των 7 έως 12 ετών και ανατρέφονται από τους γονείς των μεταναστών. Σε μία έρευνα που έγινε στο Μανχάιμ διαπιστώνεται ότι το 69,5% των παιδιών των Ελλήνων μεταναστών πέρασαν τα πρώτα χρόνια τους μακριά από τους 2 γονείς τους, το 2% έζησε με τον ένα γονέα στην Ελλάδα και μόνο το 8% των παιδιών ζούσε και με τους δύο γονείς στη Γερμανία. Αλλά ακόμα και τα παιδιά που μεγαλώνουν στη Γερμανία αντιμετωπίζουν αρκετά προβλήματα αφού στις περισσότερες περιπτώσεις μεγαλώνουν απομονωμένα σε μία κλειστή κοινωνία και γι’ αυτό δεν έχουν στενή επαφή με Γερμανούς συνομήλικους αλλά παράλληλα και η σχέση τους με την Ελλάδα είναι έμμεση.

Η οικονομική κρίση στην Ελλάδα πυροδότησε ένα νέο κύμα μετανάστευσης, με τη Γερμανία να παραμένει ένας από τους δημοφιλέστερους προορισμούς σύμφωνα με τα στοιχεία της Deutsche Welle. Το 2011 ο αριθμός των Ελλήνων που μετανάστευσαν στη Γερμανία φτάνει τις 23.800 από 12.550 που ήταν το 2010, μία αύξηση της τάξης του 90%. Το ίδιο διάστημα ωστόσο 11.500 Έλληνες εγκατέλειψαν τη Γερμανία.

Συμπερασματικά λοιπόν οι μαθητές που φοιτούν σήμερα στα Ελληνικά σχολεία της Γερμανίας είναι είτε η τρίτη γενιά των μεταναστών της δεκαετίας του '60, είτε μετανάστες λόγω της οικονομικής κρίσης της Ελλάδας τα τελευταία 3 χρόνια, είτε παιδιά των αποσπασμένων εκπαιδευτικών στα ελληνικά σχολεία.

2.2 Σχεδιασμός έρευνας

Στην παρούσα μελέτη, η ερευνήτρια είναι η ίδια η μαθηματικός του σχολείου στο οποίο διεξάγεται η έρευνα, και των τριών τάξεων, η οποία επιλέγει το δείγμα από το σύνολο των μαθητών του σχολείου.

Οι στόχοι της συγκεκριμένης έρευνας είναι να διερευνήσει:

- Την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών Λυκείου, του Ελληνικού Λυκείου της Γερμανίας. Κατά πόσο, δηλαδή, μπορούν να κάνουν εκτιμήσεις και ποιες οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν συχνότερα.
- Την ευχέρεια και την ικανότητα τους στο να χρησιμοποιούν με επιτυχία περισσότερες από μία στρατηγικές για κάθε πρόβλημα καθώς και το μέγεθος του ρεπερτορίου τους.
- Τους παράγοντες που μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης.
- Τις διαφορές ή ομοιότητες μεταξύ μαθητών Δημοτικού και Λυκείου στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.

2.3 Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 30 μαθητές, 17 αγόρια και 13 κορίτσια, και των τριών τάξεων του Ελληνικού Λυκείου του Μπήλεφελντ του κρατιδίου της Βόρειας Ρηνανίας- Βεστφαλίας της Γερμανίας. Πιο συγκεκριμένα οι 10 μαθητές φοιτούν στη Α΄ τάξη του Λυκείου, οι 9 στη Β΄ τάξη του Λυκείου και οι υπόλοιποι 11 στη Γ΄ τάξη του Λυκείου. Οι μαθητές επιλέχθηκαν από την καθηγήτρια με βάση τις ικανότητές τους στα Μαθηματικά όπως αυτές προκύπτουν από την καθημερινή επαφή των μαθητών με την καθηγήτρια μέσα στην ώρα των Μαθηματικών. Με τους μαθητές της Α΄ τάξης η καθηγήτρια συνεργάζεται 5 ώρες την εβδομάδα, με τους μαθητές της Β΄ και της Γ΄ από 7 ώρες αντίστοιχα. Οι ώρες αυτές είναι αρκετές ώστε η καθηγήτρια να σχηματίσει εικόνα σχετικά με τις ικανότητές τους στα Μαθηματικά. Σύμφωνα με αυτές τις ικανότητές τους στα Μαθηματικά διαχωρίζονται οι μαθητές σε δύο ομάδες: α) μαθητές με υψηλή ικανότητα στα Μαθηματικά (13 μαθητές) και β) μαθητές με μέτρια ικανότητα στα Μαθηματικά (17 μαθητές). Όλοι οι μαθητές είχαν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά. Όσον αφορά τον τόπο γέννησής τους, οι 23 μαθητές έχουν γεννηθεί στη Γερμανία ενώ οι 7 στην Ελλάδα. Οι 16 μαθητές έχουν φοιτήσει σε ελληνικό νηπιαγωγείο, οι 10 σε γερμανικό (3 χρόνια) ενώ 4 μαθητές έχουν φοιτήσει και σε ελληνικό και σε γερμανικό. Οι 27 μαθητές έχουν τελειώσει το ελληνικό δημοτικό σχολείο ενώ 3 μαθητές έχουν παρακολουθήσει και τάξεις σε γερμανικό δημοτικό σχολείο. Συγκεκριμένα ένας μαθητής έχει φοιτήσει μέχρι και την Ε΄ τάξη σε γερμανικό δημοτικό σχολείο, μία μαθήτρια έχει τελειώσει μόνο την Α΄ τάξη σε γερμανικό δημοτικό σχολείο, ενώ μία μαθήτρια έχει παρακολουθήσει τη μισή Α΄ τάξη του δημοτικού σε γερμανικό σχολείο ενώ την υπόλοιπη μισή σε ελληνικό δημοτικό. Όλοι μαθητές του δείγματος έχουν τελειώσει και τις τρεις τάξεις σε ελληνικό γυμνάσιο και οι 28 από αυτούς έχουν φοιτήσει σε ελληνικό λύκειο ενώ 2 μαθητές έχουν παρακολουθήσει την Α΄ λυκείου ή 10η τάξη σε γερμανικό σχολείο. Αναφορικά με το αν οι μαθητές εργάζονται, οι 7 μαθητές εργάζονται σε εστιατόρια και οι υπόλοιποι 23 δεν εργάζονται.

2.4 Πηγές δεδομένων

Τη βασική πηγή δεδομένων αποτελούν οι συνεντεύξεις των 30 μαθητών.

2.4.1 Έλεγχος των μαθητών με συνέντευξη

Για την εξέταση της ικανότητας υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών του δείγματος πραγματοποιήθηκαν προφορικές συνεντεύξεις. Το ερευνητικό εργαλείο περιλαμβάνει συνολικά 15 προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Τα επτά προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης αναφέρονται σε καταστάσεις πρόσθεσης, τα τέσσερα σε καταστάσεις πολλαπλασιασμού, τα δύο σε διαίρεση, το ένα αναφέρεται σε υπολογισμό μέσου όρου και άλλο ένα είναι πρόβλημα με ποσοστά. Το ερευνητικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε από τους Λεμονίδη & Καϊμακάμη (2013) σε έρευνα τους σε φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Αναφορικά με το είδος των αριθμών των προβλημάτων, στα 11 προβλήματα εμφανίζονται ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι περιέχουν από 1 έως και 5 ψηφία, σε ένα πρόβλημα (Π1) εμφανίζονται δεκαδικοί αριθμοί με 1 ψηφίο στο ακέραιο μέρος και 2 δεκαδικά ψηφία, δύο προβλήματα (Π5, Π10) περιέχουν κλάσματα και ένα πρόβλημα (Π6) περιέχει έναν δεκαδικό και έναν τριψήφιο ακέραιο αριθμό. Από το σύνολο των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης οι καταλληλότερες για τα προβλήματα της έρευνας ήταν η στρογγυλοποίηση, του εμπρόσθιου άκρου, των συμβατών αριθμών, των ειδικών αριθμών και της συσσώρευσης ή μέσου όρου.

Πίνακας 3. Παρουσίαση των προβλημάτων της έρευνας

Πρόβλημα	Περιγραφή ερώτησης	Πράξη	Αριθμητικό Σύνολο	Κατάλληλη στρατηγική
Π1	*Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών: 1.26 €, 4.79 €, 0.99 €, 1.37 €, 2.58 €*	Πρόσθεση	Δεκαδικοί	Εμπρόσθιο άκρο
Π2	*Να εκτιμηθεί περίπου ο αριθμός των επισκεπτών σε μια έκθεση από την ακόλουθη λίστα:* *Δευτέρα 72.250, Τρίτη 63.819, Τετάρτη 67.480, Πέμπτη 73.180, Παρασκευή 74.918, Σάββατο 68.490*	Πρόσθεση	Ακέραιοι	Συσσώρευση
Π3	*Ένας μαθητής που ξεκίνησε σκι έκανε 75 ώρες μάθημα και κάθε ώρα κόστιζε 36 €. Πόσο πρέπει περίπου να πληρώσει;*	Πολλαπλασιασμός	Ακέραιοι	Στρογγυλοποίηση
Π4	*Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:* *3.388:7*	Διαίρεση	Ακέραιοι	Συμβατοί αριθμοί
Π5	*Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:* *7/8 + 12/13 + 23/45*	Πρόσθεση	Κλάσματα	Ειδικοί αριθμοί
Π6	*Στα 816ml μιας ουσίας το 9,84% είναι αλκοόλη. Πόση περίπου αλκοόλη έχει η ουσία;*	Ποσοστά	Δεκαδικός +ακέραιος	Ειδικοί αριθμοί
Π7	*Υπολογίστε περίπου τον αριθμό μαθητών των τριών σχολείων:* *Α' Λύκειο: 1.378 μαθητές,* *Β' Λύκειο :236 μαθητές,* *Γ' Λύκειο: 442 μαθητές*	Πρόσθεση	Ακέραιοι	Εμπρόσθιο άκρο
Π8	*Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:* *437 x 8*	Πολλαπλασιασμός	Ακέραιοι	Εμπρόσθιο άκρο
Π9	*Έξι ανεξάρτητες μετρήσεις έγιναν από μια ομάδα για την*	Μέσος όσος	Ακέραιοι	Συσσώρευση

	εύρεση του ύψους του βουνού Έβερεστ: *28.990ft, 28.991ft, 28994ft, 28998ft, 29001ft, 29026ft.* *Με βάση αυτές τις μετρήσεις πόσο περίπου μπορούμε να πούμε ότι είναι το ύψος του Έβερεστ;*			
Π10	*Η Μαρία έτρεξε 1/2km το πρωί και 3/8km το απόγευμα.* *Έτρεξε τουλάχιστον 1km ;*	Πρόσθεση	Κλάσματα	Ειδικοί αριθμοί
Π11	*Το αποτέλεσμα ισούται περίπου με 200;* *35 + 42 + 40 +38 +44*	Άθροισμα	Ακέραιοι	Συσσώρευση
Π12	*Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 62x79*	Γινόμενο	Ακέραιοι	Στρογγυλοποίηση
Π13	*Ένας εργάτης δούλεψε 28 ημέρες για 56€ τη μέρα. Πόσο περίπου θα πληρωθεί;*	Γινόμενο	Ακέραιοι	Στρογγυλοποίηση
Π14	*Έξι ομάδες μαθητών έκαναν με λουλούδια ανθοδέσμες για τη σχολική γιορτή. Κάθε ομάδα έκανε 27, 49, 38, 65, 56, 81 ανθοδέσμες.* *Πόσες ανθοδέσμες έχουμε περίπου συνολικά;*	Άθροισμα	Ακέραιοι	Συμβατοί αριθμοί
Π15	*Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 χιλιόμετρα σε 52 ώρες.* *Πόσα χιλιόμετρα διανύει περίπου σε μία ώρα;*	Πηλίκο	Ακέραιοι	Συμβατοί αριθμοί

2.4.2 Περιγραφή των κοινωνικών χαρακτηριστικών των μαθητών του δείγματος

Για την καλύτερη σκιαγράφηση του κοινωνικού υπόβαθρου των μαθητών καταγράφηκαν οι εξής μεταβλητές στα κοινωνικά χαρακτηριστικά των μαθητών:

1. Φύλο: 1=Αγόρι, 2=Κορίτσι

2. Τάξη: 1=Α Λυκείου, 2=Β Λυκείου, 3=Γ Λυκείου
3. Μορφωτικό επίπεδο πατέρα: 1=Βασική εκπαίδευση, 2=Μέση εκπαίδευση, 3=Ανώτατη εκπαίδευση
4. Μορφωτικό επίπεδο μητέρας: 1=Βασική εκπαίδευση, 2=Μέση εκπαίδευση, 3=Ανώτατη εκπαίδευση
5. Ικανότητα στα Μαθηματικά: 1 = μέτρια ικανότητα, 2 = υψηλή ικανότητα
6. Εξωσχολικές δραστηριότητες: 1 = Λίγες (μέχρι και μία), 2 = Πολλές (πάνω από μία)
7. Εργασία των μαθητών: 1 = Ναι, 2 = Όχι
8. Τόπος γέννησης: 1 = Ελλάδα, 2 = Γερμανία
9. Νηπιαγωγείο: 1 = Ελληνικό, 2 = Γερμανικό, 3 = και τα δύο
10. Δημοτικό: 1 = Ελληνικό, 2 = Γερμανικό, 3 = και τα δύο
11. Γυμνάσιο: 1 = Ελληνικό, 2 = Γερμανικό, 3 = και τα δύο
12. Συνολικά έτη που ζουν στη Γερμανία: 1 = από 1 έτος έως 5 έτη, 2 = από 5 έτη έως 10 έτη, 3 = πάνω από 10 έτη

2.5 Διεξαγωγή της έρευνας

Η ερευνήτρια είχε προετοιμάσει κάρτες στις οποίες αναγράφονταν το κάθε πρόβλημά ξεχωριστά. Τοποθετούσε μία κάρτα αναποδογυρισμένη μπροστά στον μαθητή και μία μπροστά της. Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας αναποδογύριζαν ταυτόχρονα τις κάρτες τους ο μαθητής με την ερευνήτρια, η ερευνήτρια διάβαζε το πρόβλημα ενώ ο μαθητής το είχε παράλληλα μπροστά του. Μετά τη διατύπωση της κάθε ερώτησης άφηνε η ερευνήτρια το μαθητή να σκεφτεί ώστε να δώσει την απάντησή του. Αφού απαντούσε ο μαθητής στη συνέχεια η ερευνήτρια ζητούσε εξηγήσεις σχετικά με τον τρόπο επίλυσης. Μετά την ανάλυση του τρόπου σκέψης του μαθητή ακολουθούσε δεύτερη ερώτηση από την ερευνήτρια για το αν μπορούσε να σκεφτεί ο μαθητής κάποιον άλλο τρόπο για να λύσει το ίδιο πρόβλημα. Η δεύτερη απάντηση δεν χρονομετρούνταν. Αν έδινε δεύτερη απάντηση ο μαθητής, ακολουθούσε και επόμενη ερώτηση αν μπορούσε να σκεφτεί και τρίτο τρόπο και να τον αναλύσει. Η ερευνήτρια σημείωνε για κάθε πρόβλημα το χρόνο απόκρισης της πρώτης απάντησης, τη στρατηγική επίλυσης της πρώτης απάντησης, το πλήθος των διαφορετικών τρόπων επίλυσης, καθώς και τις στρατηγικές επίλυσης της δεύτερης και τρίτης απάντησης όπου αυτές δίνονταν. Μετά την περιγραφή της τρίτης απάντησης προχωρούσαν στο επόμενο πρόβλημα. Όλη η συνέντευξη ηχογραφούνταν και οι μαθητές το γνώριζαν. Από τη συσκευή ηχογράφησης προέκυπτε και ο χρόνος που χρειάζονταν ο μαθητής για να απαντήσει. Δεν επιτρέπονταν η χρήση κανενός εξωτερικού μέσου (αριθμομηχανή, χαρτί, μολύβι, πίνακας, κιμωλία, κλπ.) αλλά όλες οι διαδικασίες και πράξεις γίνονταν νοερά. Η διαδικασία περιγράφηκε αναλυτικά σε κάθε μαθητή πριν από την διατύπωση της εκφώνησης του πρώτου προβλήματος της έρευνας. Μετά το τέλος της συνέντευξης μοιράζονταν ένα ερωτηματολόγιο για να συμπληρώσουν τα προσωπικά στοιχεία τους οι μαθητές καθώς και κάποια στοιχεία σχετικά με το προφίλ των γονέων τους.

Διάρκεια των συνεντεύξεων

Η διάρκεια κάθε συνέντευξης ήταν 45 με 90 λεπτά και συνολικά όλη η διαδικασία των συνεντεύξεων κράτησε 2 εβδομάδες. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν σε χώρο του σχολείου είτε εντός του σχολικού ωραρίου, όταν δεν παρεμποδίζονταν η ομαλή ροή του σχολικού προγράμματος (όχι σε ώρες μαθημάτων κατεύθυνσης για Β΄ και Γ΄ Λυκείου), είτε σε ώρες εκτός σχολικού ωραρίου δηλαδή μετά τη λήξη των μαθημάτων, είτε σε απογευματινές ώρες είτε εντός του Σαββατοκύριακου.

2.6 Ανάλυση δεδομένων

Τα αποτελέσματα της έρευνας θα παρουσιαστούν με βάση τους πέντε παρακάτω άξονες.

Οι απαντήσεις των μαθητών

Ο πρώτος άξονας περιλαμβάνει την ανάλυση της επίδοσης κάθε μαθητή αναφορικά με το πλήθος των σωστών απαντήσεών του μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, το μέγεθος του ρεπερτορίου του, τη χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής στην πρώτη του απάντηση, τα λάθη του και το μέσο χρόνο των απαντήσεών του.

Ανάλυση απαντήσεων ανά πρόβλημα

Ο δεύτερος άξονας ανάλυσης αφορά την ανάλυση των ίδιων των προβλημάτων του ερευνητικού εργαλείου αναφορικά με τις στρατηγικές που επιλέγονται για κάθε ένα, το πλήθος των σωστών απαντήσεων που δίνονται, τα λάθη, ο μέσος χρόνος σωστών απαντήσεων που σημειώνεται για κάθε πρόβλημα.

Ανάλυση απαντήσεων ανά πρόβλημα με βάση τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων

Ο τρίτος άξονας αφορά την ανάλυση των απαντήσεων των προβλημάτων με βάση τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων (το είδος της πράξης και τη φύση των αριθμών).

Παράγοντες που μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα εκτίμησης

Ο τέταρτος άξονας ανάλυσης αναφέρεται σε όλους εκείνους τους κοινωνικούς παράγοντες που μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα της υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών και των μαθητριών. Αυτοί οι παράγοντες αναφέρονται σε:

- Μορφωτικό επίπεδο γονέων και προφίλ μαθητών (ικανότητες στα Μαθηματικά, εργασία, εξωσχολικές δραστηριότητες).
- Ηλικία και φύλο.

Σύγκριση αποτελεσμάτων με προηγούμενη έρευνα σε μαθητές δημοτικού

Ο πέμπτος άξονας ανάλυσης αναφέρεται στη σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας με προηγούμενη έρευνα η οποία πραγματοποιήθηκε σε μαθητές δημοτικού από την ίδια ερευνήτρια σε 4 από τα προβλήματα του ερωτηματολογίου.

Στο παρακάτω κεφάλαιο ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων με βάση τους παραπάνω άξονες ανάλυσης.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας μετά την ανάλυση των δεδομένων στους 5 άξονες όπως αυτοί περιεγράφηκαν παραπάνω.

3.1 Οι απαντήσεις των μαθητών και μαθητριών του δείγματος

Κατά τη διάρκεια της απομαγνητοφώνησης των συνεντεύξεων σημειώνονται από την ερευνήτρια οι απαντήσεις των μαθητών-μαθητριών καθώς και ο χρόνος πρώτης απάντησής τους. Παράλληλα καταγράφεται αν οι μαθητές κάνουν χρήση στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης ή του νοερού αλγόριθμου για να απαντήσουν. Στη συνέχεια αναλύεται η στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν σε κάθε απάντησή τους, το πλήθος των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν ώστε να διαπιστωθεί το μέγεθος του ρεπερτορίου τους καθώς και η χρήση ή όχι της πιο κατάλληλης στρατηγικής στη πρώτη τους απάντηση. Τέλος γίνεται ανάλυση των λαθών και χωρίζονται σε 2 βασικές κατηγορίες, στα λάθη που οφείλονται στις πράξεις και στα λάθη που οφείλονται σε παρανόηση της έννοιας της εκτίμησης όπου στη συνέχεια αυτές οι δύο κατηγορίες διακρίνονται σε επιμέρους υποκατηγορίες λαθών.

3.1.1 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων ανά μαθητή/μαθήτρια

Στον παρακάτω πίνακα αναλύεται η συμπεριφορά κάθε μαθητή και μαθήτριας, το πλήθος των επιτυχημένων απαντήσεων και το σύνολο των απαντήσεων τους μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, ξεχωριστά στις τρεις απαντήσεις για κάθε πρόβλημα αλλά και συνολικά. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα κατά φθίνουσα σειρά κατάταξης ανάλογα με το πλήθος των σωστών απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης.

Πίνακας 4. Συνολική επίδοση των μαθητών/μαθητριών και χρήση υπολογιστικής εκτίμησης και στις τρεις απαντήσεις (κατά φθίνουσα σειρά χρήσης υπολογιστικής εκτίμησης)

	Σωστές απαντήσεις				**Χρήση υπολογιστικής εκτίμησης**			
	Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	**Σύνολο**	**Α απάντηση**	Β απάντηση	Γ απάντηση	**Σύνολο**
Μ18	9	14	6	**29**	**8**	12	6	**26**
Μ9	15	11	4	**30**	**13**	8	4	**25**
Μ21	14	12	4	**30**	**11**	11	3	**25**
Μ14	12	13	9	**34**	**10**	7	7	**24**
Μ15	14	14	4	**32**	**12**	10	2	**24**
Μ17	10	12	4	**26**	**9**	11	4	**24**
Μ26	13	10	3	**26**	**13**	8	3	**24**
Μ23	15	12	1	**28**	**13**	10	-	**23**
Μ13	11	11	4	**26**	**10**	9	4	**23**
Μ12	12	10	5	**27**	**12**	8	2	**22**
Μ30	13	10	2	**25**	**12**	7	2	**21**
Μ22	12	12	1	**25**	**11**	10	-	**21**
Μ1	11	12	2	**25**	**10**	9	2	**21**
Μ2	10	11	3	**24**	**10**	8	3	**21**
Μ10	13	12	2	**27**	**12**	5	2	**19**
Μ11	11	10	1	**22**	**11**	7	1	**19**
Μ20	13	8	-	**21**	**11**	8	-	**19**
Μ3	12	7	1	**20**	**11**	6	1	**18**
Μ19	10	7	3	**20**	**9**	6	3	**18**
Μ25	10	9	-	**19**	**10**	8	-	**18**
Μ5	8	8	3	**19**	**7**	8	3	**18**
Μ27	8	11	-	**19**	**7**	10	-	**17**
Μ8	9	10	2	**21**	**7**	7	2	**16**
Μ4	10	8	2	**20**	**8**	7	1	**16**
Μ24	14	4	-	**18**	**12**	3	-	**15**
Μ16	10	5	2	**17**	**10**	4	1	**15**
Μ6	6	10	1	**17**	**6**	8	1	**15**
Μ7	7	6	2	**15**	**7**	6	2	**15**
Μ29	11	4	-	**15**	**9**	4	-	**13**
Μ28	7	4	-	**11**	**7**	3	-	**10**
Σύνολο	330 48%*	287 41,7%*	71 10,3%*	**688**	**298 50,9% ****	228 39%**	59 10,1%**	**585 85% ***
Μ.Ο. Τυπ. Απ.	M=11 SD=2,4	M=9,6 SD=2,9	M=2,9 SD=1,87	M=22,9 SD=5,53	**M=9,9 SD=2,07**	M=7,6 SD=2,31	M=2,7 SD=1,59	**M=19,5 SD=4,06**

*Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων (N=688), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων με στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Από το σύνολο και των τριών απαντήσεων των μαθητών και μαθητριών μέσω εφαρμογής στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης προκύπτει μία κατάταξη τους σε 3 ομάδες. Η μέση τιμή των σωστών απαντήσεων είναι 19,5, με ελάχιστη τιμή το 10 και μέγιστη τιμή το 26. Με βάση τις τιμές αυτές γίνεται ο διαχωρισμός στις παρακάτω τρεις ομάδες: α) «ομάδα υψηλής επίδοσης», στην οποία εντάσσονται οι μαθητές που έδωσαν στο σύνολό τους από 22 έως και 26 σωστές απαντήσεις, β) «ομάδα μέτριας επίδοσης», στην οποία βρίσκονται οι μαθητές και μαθήτριες οι οποίοι έδωσαν στο σύνολό τους από 17 έως και 21 σωστές απαντήσεις και γ) «ομάδα χαμηλής επίδοσης», στην οποία βρίσκονται οι μαθητές με συχνότητες σωστών απαντήσεων από 10 έως και 16.

Στην ομάδα υψηλής επίδοσης ανήκουν 10 μαθητές (33,3%), στην ομάδα μέτριας επίδοσης ανήκουν 12 μαθητές (40%) και οι υπόλοιποι 8 (26,7%) ανήκουν στην ομάδα χαμηλής επίδοσης. Ο μέσος όρος των σωστών πρώτων απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης στην ομάδα υψηλής επίδοσης είναι 11,1 απαντήσεις, στη Β απάντηση 9,4 απαντήσεις και στη Γ απάντηση 3,9. Ο μαθητής με τις περισσότερες σωστές απαντήσεις μέσω στρατηγικών εκτίμησης, 26 σωστές απαντήσεις, είναι ο Μ18 μαθητής της Β Λυκείου. Ο Μ18 στην πρώτη του προσπάθεια στα 15 προβλήματα απαντάει σωστά μόνο τα 8, ενώ από τα υπόλοιπα 7 στα 6 κάνει λάθη στις πράξεις, εφαρμόζοντας σε όλα όμως στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και στο ένα απαντάει σωστά αλλά με νοερό αλγόριθμο. Στη δεύτερη του προσπάθεια δίνει τις περισσότερες σωστές απαντήσεις με εκτίμηση από όλους τους συμμετέχοντες, σύνολο 12, αντιλαμβανόμενος όλα του τα λάθη στις προηγούμενες απαντήσεις του. Ακολουθούν στις υψηλές επιδόσεις οι μαθήτριες Μ9 και Μ21 οι οποίες αναπτύσσουν σωστά με υπολογιστική εκτίμησης συνολικά 25 απαντήσεις η κάθε μία. Η Μ9 συγκεντρώνει το μεγαλύτερο σκορ σωστών απαντήσεων στην Α απάντηση (μαζί με τους Μ26 και Μ23) μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης (13 σωστές απαντήσεις). Η Μ21 εμφανίζει την ίδια συχνότητα σωστών απαντήσεων και στην Α και στη Β απάντησή της (11 σωστές απαντήσεις).

Σχετικά με το προφίλ των μαθητών που ανήκουν στην ομάδα υψηλής επίδοσης (Μ18, Μ9, Μ21, Μ14, Μ15, Μ17, Μ26, Μ23, Μ13, Μ12) οι 8 έχουν υψηλές ικανότητες στα Μαθηματικά του σχολείου, σύμφωνα με την καθηγήτρια, ενώ οι υπόλοιποι 2 έχουν μέτριες ικανότητες στα μαθηματικά. Σχεδόν όλοι, εκτός από 1, έχουν έντονο το στοιχείο του ανταγωνισμού μεταξύ των συμμαθητών τους έχοντας θέσει παράλληλα υψηλούς στόχους στη ζωή τους. Επίσης σχεδόν όλοι, εκτός από μία μαθήτρια, ασχολούνται με τον αθλητισμό. Τρείς από αυτούς έχουν γονείς εκπαιδευτικούς, ο πατέρας μίας μαθήτριας είναι αστυνομικός (Γερμανός) ενώ και οι δύο οι γονείς των υπολοίπων έχουν τελειώσει τη βασική ή μέση εκπαίδευση.

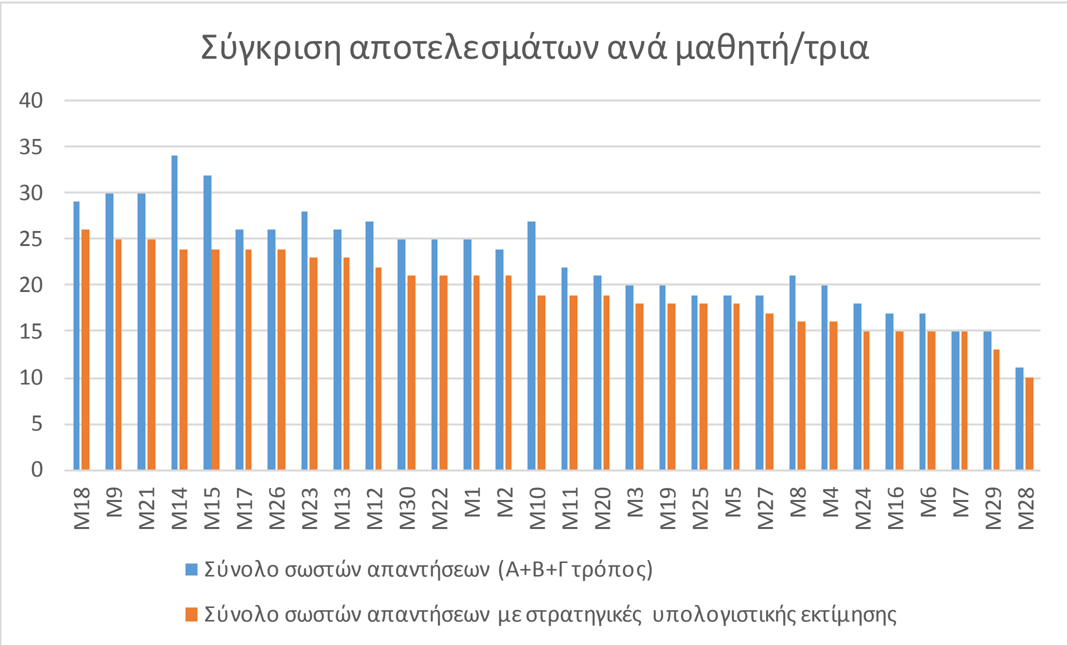
Στην ομάδα χαμηλής επίδοσης ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων στην Α απάντηση είναι 8,3, στη Β απάντηση 5,3 και στη Γ απάντηση 1,4. Οι μαθητές οι οποίοι ανήκουν σε αυτή την ομάδα (Μ8, Μ4, Μ24, Μ16, Μ6, Μ7, Μ29, Μ28) παρουσιάζουν μία ανομοιομορφία στο προφίλ τους. Οι 4 από αυτούς έχουν υψηλή ικανότητα στα Μαθηματικά και οι άλλοι 4 μέτρια. Οι δύο μόνο έχουν πολλές εξωσχολικές δραστηριότητες. Ο Μ28, ο οποίος συγκεντρώνει το χαμηλότερο σκορ (ν=10 σωστές απαντήσεις), είναι μαθητής με δυσλεξία και παρατηρούμε ότι δυσκολεύεται να εφαρμόσει εναλλακτικούς τρόπους (Β και Γ) αφού δίνει μόνο σε 4 προβλήματα Β απάντηση (3 σωστοί τρόποι και 1 λάθος) και σε κανένα πρόβλημα Γ απάντηση. Ο ίδιος μαθητής εργάζεται χρόνια σε εστιατόρια στα οποία όμως καλείται καθημερινά να εκτελέσει νοερά πράξεις. Η Μ29, η μαθήτρια με το δεύτερο χαμηλότερο σκορ (ν=13 σωστές απαντήσεις) ενώ απαντάει σωστά σε 9 προβλήματα στην πρώτη προσπάθεια, δίνει μόνο 4 σωστές απαντήσεις στη Β προσπάθεια και καμία Γ απάντηση. Ο Μ24 ενώ έχει αρκετές ικανότητες δε θέτει υψηλούς στόχους στη ζωή του, αφού οι γονείς του εργάζονται όλη μέρα και δεν έχουν χρόνο να ασχοληθούν με αυτόν (κάτι το οποίο το έχουν δηλώσει οι ίδιοι σε επίσκεψή τους στο σχολείο). Οι μαθήτριες Μ7 και Μ29 οι οποίες βρίσκονται στις δύο προτελευταίες θέσεις της ομάδας χαμηλής επίδοσης και η Μ16 είχαν αυξημένο τον παράγοντα άγχος, κάτι το οποίο μάλιστα το λέγανε συνέχεια και οι δύο μαθήτριες κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Η Μ7 είναι μία πολύ καλή μαθήτρια της Γ Λυκείου, θετική κατεύθυνση, με πολύ καλή επίδοση στα Μαθηματικά, υψηλούς στόχους για τη ζωή της και με γονείς εκπαιδευτικούς. Η ίδια δήλωνε ότι ήταν πολύ αγχωμένη καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης και δε μπορούσε να χαλαρώσει καθόλου. Ταυτόχρονα υπήρχε και το ανταγωνιστικό στοιχείο μέσα της αφού ήθελε να σημειώσει καλύτερα αποτελέσματα από ότι άλλοι συμμαθητές της που έλαβαν μέρος στην έρευνα, κάτι το οποίο το έλεγε η ίδια, αφού είχε έντονη την απορία του πως τα πήγαν οι συμμαθητές της συγκριτικά με αυτήν. Δυστυχώς όμως αυτοί οι 2 παράγοντες, άγχος και ανταγωνιστικότητα, έφεραν τα αντίθετα αποτελέσματα για την Μ7. Το άγχος των μαθητών είναι ένας παράγοντας ο οποίος δεν λήφθηκε υπόψη στην έρευνα ότι μπορεί να επηρεάσει τα αποτελέσματα. Παρόλο που έγινε ξεκάθαρο στους μαθητές και στις μαθήτριες σχετικά με τις ανάγκες της έρευνας και ότι δεν υπάρχει λόγος άγχους για τις σωστές απαντήσεις ούτε για το χρόνο στον οποίο θα απαντήσουν, πολλοί από αυτούς αγχώθηκαν με αποτέλεσμα να κάνουν περισσότερα λάθη καθώς και να χάσουν πολύ χρόνο.

Ο μέσος όρος της σωστής χρήσης στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης της ομάδας μέτριας επίδοσης (Μ30, Μ22, Μ1, Μ2, Μ10, Μ11, Μ20, Μ3, Μ19, Μ25, Μ5, Μ27) στην Α απάντηση είναι 10,1, στη Β απάντηση 7,7 και στη Γ απάντηση μόλις 2,1. Στην ομάδα μέτριας επίδοσης υπάρχει ένας ακόμα μαθητής με διαγνωσμένη δυσλεξία, ο Μ27, ο οποίος όμως παρουσιάζει πολύ καλύτερη εικόνα στο σύνολο από ότι ο Μ28 αφού συγκεντρώνει 27 σωστές απαντήσεις μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Όλοι οι μαθητές χρησιμοποιούν το νοερό αλγόριθμο τουλάχιστον μία φορά στο σύνολο των απαντήσεών τους. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν περισσότερο το νοερό αλγόριθμο είναι οι Μ14, Μ15 και Μ10 με 10, 8 και 8 απαντήσεις αντίστοιχα μέσω νοερού αλγόριθμου στο σύνολο των σωστών τους απαντήσεων. Ο μαθητής Μ10 δήλωσε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης ότι δεν καταλαβαίνει γιατί πρέπει να βρει την εκτίμηση σε ένα πρόβλημα όταν μπορεί να υπολογίσει νοερά την ακριβή απάντηση: *«Το μυαλό μου λέει: μην κοιτάς το περίπου, βρες το ακριβές, θα σε βοηθήσει πιο πολύ».*

Συγκρίνοντας το σκορ των μαθητών στην Α απάντησή τους με υπολογιστική εκτίμηση και στο σύνολο των απαντήσεών τους με εκτίμηση δεν παρατηρείται κάποια συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων (X^2=11,641, df=7, p=0,113). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι δίνουν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις στην Α τους προσπάθεια δεν σημειώνουν απαραίτητα και το μεγαλύτερο σκορ στο σύνολο.

Γράφημα 1. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για κάθε μαθητή και μαθήτρια



3.1.2 Το ρεπερτόριο των στρατηγικών

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται οι διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής με σκοπό να μελετηθεί το εύρος του ρεπερτορίου στρατηγικών που διαθέτουν. Το ρεπερτόριο στρατηγικών αναφέρεται στις διάφορες στρατηγικές που χρησιμοποιεί ένα άτομο για να λύσει μία σειρά από προβλήματα σε ένα δεδομένο τομέα προβλημάτων (Siegler & Shipley, 1995; Siegler, & Lemaire, 1997).

Πίνακας 5. Οι διαφορετικές στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής/τρια (κατά φθίνουσα σειρά κατάταξης)

	Στρογγυλοποίηση	**Συμβατοί αριθμοί**	**Ειδικών αριθμών**	**Συσσώρευση ή Μ.Ο.**	**Εμπρόσθιου άκρου**	**Προγενέστερη αντιστάθμιση**	**Αλλαγή μορφής αριθμών**	**Κουτσούρεμα**	**Επιμεριστικότητα**	**Παραγοντοποίηση**	**Άλλη στρατηγική**	**Σύνολο**	**Πλήθος διαφορετικών ειδών στρατηγικών**
M15	6	5	1	3	1	1	2	-	4	-	1	**24**	**9**
M13	9	1	2	3	3	2	1	1	-	-	1	**23**	**9**
M17	9	2	2	2	2	4	1	2	-	-	-	**24**	**8**
M26	5	5	3	3	-	3	1	1	-	-	3	**24**	**8**
M23	11	4	2	2	1	1	1	-	-	-	1	**23**	**8**
M1	9	2	2	2	2	-	2	1	-	-	1	**21**	**8**
M22	8	5	1	1	2	-	2	-	1	1	-	**21**	**8**
M25	8	2	2	1	1	1	2	1	-	-	-	**18**	**8**
M8	4	1	1	2	4	1	2	1	-	-	-	**16**	**8**
M6	5	2	1	1	2	1	2	1	-	-	-	**15**	**8**
M18	12	1	3	3	3	3	1	-	-	-	-	**26**	**7**
M21	8	6	4	3	2	1	-	-	-	-	1	**25**	**7**
M14	9	2	3	5	2	2	1	-	-	-	-	**24**	**7**
M12	10	1	2	3	2	3	-	-	-	-	1	**22**	**7**
M2	8	4	3	-	3	1	-	1	-	-	1	**21**	**7**
M5	7	2	3	3	1	-	-	1	-	-	1	**18**	**7**
M11	8	3	3	2	1	1	1	-	-	-	-	**19**	**7**
M3	10	1	2	1	2	-	-	1	-	-	1	**18**	**7**
M10	4	5	2	2	2	1	-	-	-	-	3	**19**	**7**
M27	6	3	2	1	2	2	1	-	-	-	-	**17**	**7**
M24	3	4	2	1	1	3	1	-	-	-	-	**15**	**7**
M9	12	3	3	-	3	-	-	2	-	-	2	**25**	**6**
M30	12	2	2	1	-	3	-	1	-	-	-	**21**	**6**
M19	10	-	4	1	1	1	-	1	-	-	-	**18**	**6**
M20	6	3	4	4	-	1	-	-	-	-	1	**19**	**6**
M4	7	1	2	3	2	-	1	-	-	-	-	**16**	**6**
M7	3	-	3	3	3	-	1	2	-	-	-	**15**	**6**
M16	5	3	2	3	1	1	-	-	-	-	-	**15**	**6**
M29	4	3	3	1	1	-	-	-	-	-	1	**13**	**6**
M28	3	1	2	-	3	1	-	-	-	-	-	**10**	**5**
Σ	**221** **37,8%**	**77** **13,2%**	**71** **12,1%**	**60** **10,3%**	**53** **9,1%**	**38** **6,5%**	**23** **3,9%**	**17** **2,9%**	**5** **0,9%**	**1** **0,2%**	**19** **3,2%**	**585**	**Μ.Ο** **7,1**

Ο μέσος όρος του μεγέθους του ρεπερτορίου ως προς τις στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης που διαθέτουν οι μαθητές, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, είναι 7,1 με μέγιστη τιμή 9 και ελάχιστη τιμή 5. Σύμφωνα με αυτά ακολουθεί μία ακόμα κατάταξη των μαθητών σε 2 ομάδες: α) «ομάδα υψηλού ρεπερτορίου», στην οποία ανήκουν οι μαθητές οι οποίοι διαθέτουν ρεπερτόριο με μέγεθος μεγαλύτερο από το μέσο όρο (από 8 έως και 9 διαφορετικές στρατηγικές) και β) «ομάδα χαμηλού ρεπερτορίου», στην οποία ανήκουν οι μαθητές οι οποίοι διαθέτουν ρεπερτόριο μεγέθους μικρότερο από το μέσο όρο (από 5 έως και 7 διαφορετικές στρατηγικές). Στην πρώτη ομάδα ανήκουν 10 μαθητές και οι υπόλοιποι 20 στη δεύτερη ομάδα. Το μεγαλύτερο ρεπερτόριο στρατηγικών το έχουν ο Μ15 και η Μ13 κάνοντας χρήση 9 διαφορετικών ειδών στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Ο Μ28 ο οποίος κατέχει την τελευταία θέση και στην προηγούμενη κατάταξη ως προς την επίδοση, καταφέρνει να συγκεντρώσει και σε αυτό τον πίνακα το χαμηλότερο σκορ, με μέγεθος ρεπερτορίου 5 στρατηγικές.

Από τους δέκα μαθητές που ανήκουν στην ομάδα αυξημένου ρεπερτορίου οι 7 ανήκουν στην ομάδα υψηλής επίδοσης από την προηγούμενη κατάταξη, ένας ο Μ25 ανήκει στην ομάδα μεσαίας επίδοσης και υπάρχουν και δύο μαθητές ο Μ8 και ο Μ6 οι οποία προέρχονται από την ομάδα χαμηλής επίδοσης. Αυτοί ενώ εκτελούν μόνο 16 και 15 αντίστοιχα σωστές απαντήσεις στο σύνολο όλων των προβλημάτων, χρησιμοποιούν συνολικά 8 διαφορετικές στρατηγικές.

Αντίθετα στην ομάδα μειωμένου ρεπερτορίου από τους 20 μαθητές που την απαρτίζουν οι πέντε ανήκουν στην ομάδα υψηλής απόδοσης (Μ18, Μ9, Μ21, Μ14 , Μ12). Αξιοσημείωτο είναι ότι οι Μ18, Μ9 και Μ21 είναι οι μαθητές με τα μεγαλύτερα σκορ στην προηγούμενη κατάταξη (26, 25 και 25 απαντήσεις αντίστοιχα) ενώ το μέγεθος ρεπερτορίου τους είναι 7, 6 και 7 στρατηγικές αντίστοιχα, κάτω από το μέσο όρο. Δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης στο σύνολο και των τριών απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης και στο μέγεθος του ρεπερτορίου των στρατηγικών τους (X^2=4,838, df=2, p=0,089). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι σημειώνουν υψηλή επίδοση στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης δεν έχουν απαραίτητα και αυξημένο ρεπερτόριο στρατηγικών.

3.1.3 Χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη συχνότητα των σωστών απαντήσεων που δίνονται από τους μαθητές στην Α τους προσπάθεια μέσω χρήσης των πιο κατάλληλων στρατηγικών για κάθε πρόβλημα.

Πίνακας 6. Συχνότητα χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής στην Α απάντηση των μαθητών στο σύνολο των 15 προβλημάτων(κατά φθίνουσα σειρά)

Χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής					
Μαθητής	Συχνότητα	Μαθητής	Συχνότητα	Μαθητής	Συχνότητα
Μ16	7 (70%)*	**Μ30**	5 (41,7%)*	**Μ27**	4 (57,1%)*
Μ10	7 (58,3%)*	**Μ11**	5 (45,5%)*	**Μ2**	3 (30%)*
Μ9	6 (46,2%)*	**Μ3**	5 (45,5%)*	**Μ13**	3 (30%)*
Μ21	6 (54,5%)*	**Μ19**	5 (55,6%)*	**Μ18**	3 (37,5%)*
Μ12	6 (50%)*	**Μ8**	5 (71,4%)*	**Μ25**	3 (30%)*
Μ23	6 (46,2%)*	**Μ24**	5 (41,7%)*	**Μ5**	3 (42,9%)*
Μ22	6 (54,5%)*	**Μ14**	4 (40%)*	**Μ28**	3 (42,9%)*
Μ20	6 (54,5%)*	**Μ17**	4 (44,4%)*	**Μ6**	3 (50%)*
Μ29	6 (66,7%)*	**Μ15**	4 (33,3%)*	**Μ4**	2 (25%)*
Μ26	5 (38,5%)*	**Μ1**	4 (40%)*	**Μ7**	2 (28,6%)*
Μ.Ο. = 4,5 **SD = 1,43**					

*Ποσοστό στο σύνολο των σωστών Α απαντήσεων κάθε μαθητή

Ο μέσος όρος χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής είναι 4,5 απαντήσεις και 16 μαθητές τον ξεπερνάνε. Η μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής στο σύνολο των 15 προβλημάτων είναι 7 απαντήσεις και σημειώνεται από τον M10 (7 από τις 12 σωστές απαντήσεις με εκτίμηση) και τη μαθήτρια M16 (7 από τις 10 σωστές απαντήσεις με εκτίμηση) ενώ η μικρότερη συχνότητα χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής είναι 2 προβλήματα με δύο μαθητές να την εμφανίζουν (M4 και M7).

Παρουσιάζεται στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων στην Α απάντηση των μαθητών και στη χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής (X^2=10,625, df=1, p=0,001). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη στρατηγική στην Α απάντησή τους σε συχνότητα πάνω από το μέσο όρο (4,5) σημειώνουν μεγαλύτερο σκορ στη χρήση υπολογιστικής εκτίμησης στην Α απάντησή τους.

Γενικά όμως δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της συνολικής επίδοσης των μαθητών από τις τρεις απαντήσεις τους μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και της χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής στην πρώτη τους απάντηση σε κάθε πρόβλημα (X^2=0,004, df=1, p=0,95). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι σημειώνουν υψηλή επίδοση στο σύνολο των απαντήσεών τους δε χρησιμοποιούν απαραίτητα και τις πιο κατάλληλες στρατηγικές στην πλειοψηφία των πρώτων απαντήσεών τους σε κάθε πρόβλημα. Παράλληλα δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του μεγέθους του ρεπερτορίου στρατηγικών των μαθητών και της χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής στην πρώτη απάντηση κάθε προβλήματος (X^2=1,527, df=1, p=0,217). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι έχουν μεγάλο ρεπερτόριο στρατηγικών δεν εφαρμόζουν απαραίτητα την πιο κατάλληλη στρατηγική στην πρώτη τους απάντηση σε κάθε πρόβλημα.

Οι μαθήτριες M26 και M23 και ο μαθητής M22 είναι οι 3 μαθητές οι οποίοι ξεπερνάνε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων και στους τρεις παραπάνω πίνακες κατάταξης 4,5 και 6 δηλαδή ως προς το σύνολο της επίδοσής τους, ως προς το μέγεθος του ρεπερτορίου στρατηγικών και ως προς τη χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής.

3.1.4 Τα λάθη των μαθητών και μαθητριών

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων που έδωσαν οι 30 μαθητές και μαθήτριες στο σύνολο των 15 προβλημάτων (κατά φθίνουσα σειρά). Παράλληλα γίνεται διαχωρισμός των λαθών σε δύο κατηγορίες: «λάθη στις πράξεις» και «λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής».

Πίνακας 7. Συχνότητα λανθασμένων απαντήσεων

	Συχνότητα Λαθών				**Λάθη στις πράξεις**				**Λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής**			
	Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	**Σύνολο**	Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	**Σύνολο**	Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	**Σύνολο**
Μ7	8	3	2	**13**	5	2	-	**7**	3	1	2	**6**
Μ6	9	1	-	**10**	7	1	-	**8**	2	-	-	**2**
Μ2	5	3	1	**9**	5	-	-	**5**	-	3	1	**4**
Μ28	8	1	-	**9**	8	1	-	**9**	-	-	-	**-**
Μ19	5	3	-	**8**	3	2	-	**5**	2	1	-	**3**
Μ27	7	1	-	**8**	6	1	-	**7**	1	-	-	**1**
Μ8	6	1	-	**7**	4	-	-	**4**	2	1	-	**3**
Μ5	7	-	-	**7**	6	-	-	**6**	1	-	-	**1**
Μ16	5	1	1	**7**	3	-	-	**3**	2	1	1	**4**
Μ18	6	1	-	**7**	4	-	-	**4**	2	1	-	**3**
Μ29	4	2	-	**6**	3	2	-	**5**	1	-	-	**1**
Μ13	4	2	-	**6**	4	1	-	**5**	-	1	-	**1**
Μ17	5	1	-	**6**	5	1	-	**6**	-	-	-	**-**
Μ14	3	2	-	**5**	2	2	-	**4**	1	-	-	**1**
Μ1	4	1	-	**5**	3	-	-	**3**	1	1	-	**2**
Μ25	5	-	-	**5**	4	-	-	**4**	1	-	-	**1**
Μ4	5	-	-	**5**	4	-	-	**4**	1	-	-	**1**
Μ11	4	-	-	**4**	4	-	-	**4**	-	-	-	**-**
Μ3	3	-	-	**3**	3	-	-	**3**	-	-	-	**-**
Μ12	3	-	-	**3**	2	-	-	**2**	1	-	-	**1**
Μ22	3	-	-	**3**	3	-	-	**3**	-	-	-	**-**
Μ26	2	-	-	**2**	2	-	-	**2**	-	-	-	**-**
Μ30	2	1	-	**3**	2	1	-	**3**	-	-	-	**-**
Μ10	2	-	-	**2**	1	-	-	**1**	1	-	-	**1**
Μ20	2	-	-	**2**	1	-	-	**1**	1	-	-	**1**
Μ24	1	1	-	**2**	-	1	-	**1**	1	-	-	**1**
Μ15	1	-	1	**2**	1	-	1	**2**	-	-	-	**-**
Μ21	1	-	-	**1**	1	-	-	**1**	-	-	-	**-**
Μ9	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**
Μ23	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**
Σ	120 80%*	25 16,7%*	5 3,3%*	**150**	96 64%*	15 10%*	1 0,7%*	**112** 74,7%*	24 16%*	10 6,7%*	4 2,7%*	**38** 25,3%*

*Ποσοστό στο σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων (N=150)

Τα περισσότερα λάθη παρατηρούνται στην Α απάντηση (80%), αφού στην Β (16,7%) και Γ προσπάθεια (3,3%) δε δίνονται απαντήσεις από όλους τους μαθητές. Επιπλέον η πλειοψηφία των λαθών (74,7% του συνόλου των λανθασμένων απαντήσεων) εντοπίζονται στην λανθασμένη εκτέλεση των πράξεων. Οι περισσότεροι μαθητές οι οποίοι δίνουν λάθος απαντήσεις είτε διορθώνουν τα λάθη που έκαναν στην Α απάντηση είτε σκέφτονται εναλλακτική σωστή απάντηση για το κάθε πρόβλημα.

Η μαθήτρια με τα περισσότερα λάθη συνολικά (13 λανθασμένες απαντήσεις) είναι η Μ7 ενώ ο μαθητής Μ6 είναι ο μαθητής με τα πιο πολλά λάθη στη Α απάντηση. Δύο μαθήτριες η Μ9 και η Μ23 δε δίνουν καμία λανθασμένη απάντηση στο σύνολο και των τριών απαντήσεών τους (και οι δύο ανήκουν στην ομάδα υψηλής επίδοσης με 25 και 23 σωστές απαντήσεις αντίστοιχα).Ο μαθητής με το μεγαλύτερο ρεπερτόριο στρατηγικών Μ15 κάνει μόλις 2 λάθη συνολικά ενώ ο μαθητής Μ18 με τις περισσότερες σωστές απαντήσεις κάνει 7 λάθη συνολικά.

Ως γενική διαπίστωση, μετά τη μελέτη των τριών απαντήσεων των μαθητών, είναι ότι με την αναζήτηση εναλλακτικών απαντήσεων για το ίδιο πρόβλημα δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή/τρια να επαναπροσδιορίσει το πρόβλημα, να ανακαλύψει, να κατανοήσει και να διορθώσει τα λάθη του/της χωρίς καμία διδακτική παρέμβαση.

3.1.5 Μέσος χρόνος επιτυχίας κάθε μαθητή στη πρώτη τους απάντηση

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο μέσος χρόνος που χρειάστηκε κάθε μαθητής και μαθήτρια για να απαντήσει και στα 15 προβλήματα (Α απάντηση) συνολικά, ο μέσος χρόνος των απαντήσεων που δόθηκαν μόνο με στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και η διαφορά αυτών των δύο μέσων χρόνων.

Πίνακας 8. Μέσοι χρόνοι απόκρισης των σωστών απαντήσεων (κατά αύξουσα σειρά)

	Μέσος χρόνος απόκρισης (σύνολο σωστών απαντήσεων) (σε sec)	**Μέσος χρόνος – απαντήσεις μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης (σε sec)**	**Διαφορά μέσων χρόνων (σε sec)**
M12	8,4	**8,4**	0
M1	9,1	**9,4**	+0,3
M22	10,6	**10,6**	0
M28	15,3	**15,3**	0
M3	15,9	**16,2**	+0,3
M29	19,9	**19,9**	0
M7	20	**20**	0
M13	20,9	**17,9**	-3
M26	21,5	**21,5**	0
M27	21,6	**19,8**	-1,8
M8	23,5	**18,1**	-5,4
M16	24,1	**24,1**	0
M25	24,1	**24,1**	0
M30	24,3	**24,5**	+0,2
M18	24,9	**19,4**	-5,5
M24	26,5	**21,6**	-4,9
M6	26,8	**26,8**	0
M5	27,4	**30,1**	+2,7
M10	29,2	**31,1**	+1,9
M4	30,1	**33,9**	+3,8
M20	33,4	**34,3**	+0,9
M9	35	**32,7**	-2,3
M14	39,6	**35,8**	-3,8
M23	41,7	**38,1**	-3,6
M15	42,4	**46**	+3,6
M2	42,5	**42,5**	0
M21	43,5	**37,8**	-5,7
M19	70,8	**75,7**	+4,9
M11	73,7	**73,7**	0
M17	76,8	**78,1**	+1,3
M.O. Τυπ.Απ.	**M=30,8 SD=17,44**	**M=30,3 SD=18,15**	**-0,5**

Ο μέσος όρος των μέσων χρόνων στις απαντήσεις μέσω υπολογιστικής εκτίμησης είναι 30,3sec και οι μέσοι χρόνοι 18 μαθητών από τους 30 είναι μικρότεροι από αυτόν ενώ οι μέσοι χρόνοι των υπόλοιπων 12 τον ξεπερνάνε.

Σχετικά με τα αποτελέσματα των μαθητών στην Α απάντηση, από τα οποία προκύπτουν και οι μέσοι χρόνοι, δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τους μέσους χρόνους (X^2=0,078, df=1, p=0,78). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι σημειώνουν τις καλύτερες επιδόσεις μέσω υπολογιστικής εκτίμησης στην Α τους απάντηση δε σημειώνουν ταυτόχρονα και τους χαμηλότερους χρόνους.

Οι τρεις ταχύτεροι μαθητές στο σύνολο των πρώτων απαντήσεών τους, Μ12, Μ1 και Μ22, ανήκουν στην ομάδα υψηλής επίδοσης και από αυτούς μόνο ο Μ22 ανήκει και στην ομάδα υψηλού ρεπερτορίου. Από τους 12 μαθητές οι οποίοι σημείωσαν τους μεγαλύτερους χρόνους οι 6 ανήκουν στην ομάδα υψηλής επίδοσης στην πρώτη κατάταξη. Δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του μέσου χρόνου των μαθητών και της συνολικής τους επίδοσης (X^2=1,735, df=2, p=0,420). Δηλαδή οι μαθητές με τις καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης δεν είναι απαραίτητα και οι ταχύτεροι λύτες.

Όμοια από τους 10 μαθητές οι οποίοι ανήκουν στην ομάδα αυξημένου ρεπερτορίου μόνο οι 2 (Μ15 με 45sec και Μ23 με 38,1sec) σημειώνουν μέσους χρόνους κάτω από το μέσο όρο των μέσων χρόνων. Δεν παρατηρείται καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του μέσου χρόνου των μαθητών και του μεγέθους του ρεπερτορίου τους (X^2=0,256, df=1, p=0,613). Δηλαδή οι μαθητές που έχουν υψηλό ρεπερτόριο στρατηγικών δεν είναι απαραίτητα και οι πιο γρήγοροι λύτες.

Επιπλέον δεν παρατηρήθηκε καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του μέσου χρόνου που σημειώνουν οι μαθητές για να απαντήσουν σωστά μέσω υπολογιστικής εκτίμησης και της χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής (X^2=1,238, df=5, p=0,937). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι χρησιμοποιούν στις περισσότερες απαντήσεις τους την πιο κατάλληλη στρατηγική για το κάθε πρόβλημα, δεν είναι απαραίτητα και οι ταχύτεροι λύτες.

Στην τρίτη στήλη του πίνακα καταγράφεται η διαφορά των μέσων χρόνων ανάμεσα στο σύνολο των σωστών απαντήσεων και σε αυτές που δόθηκαν μόνο μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη διαφορά στους μέσους χρόνους αφού οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών, στον Α τρόπο, ήταν μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και ελάχιστες ήταν με τον νοερό αλγόριθμο υπολογισμού της ακριβής απάντησης.

Παράλληλα όμως παρατηρούμε ότι οι 11 από τους 30 μαθητές χρησιμοποιούν μόνο στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης σε όλες τις σωστές τους απαντήσεις και ο μέσος χρόνος των 9 από αυτούς τους 11 είναι μικρότερος από 30 sec. Παρόλα αυτά όμως δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των μέσων χρόνων των μαθητών που χρησιμοποιούν τουλάχιστον μία φορά νοερό αλγόριθμο σε απάντησή τους με αυτούς που χρησιμοποιούν μόνο στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης (X^2=1,612, df=1, p=0,204). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι χρησιμοποιούν μόνο στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης στην Α τους απάντηση σε όλα τα προβλήματα δε σημειώνουν καλύτερους χρόνους από τους μαθητές που χρησιμοποιούν και το νοερό αλγόριθμο στις απαντήσεις τους.

3.2 Παρουσίαση των απαντήσεων ανά πρόβλημα

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα 15 προβλήματα της έρευνας όπως αυτές δόθηκαν από τους 30 μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα για κάθε απάντηση ξεχωριστά αλλά και στο σύνολο των τριών απαντήσεων.

Πίνακας 9. Η πρώτη απάντηση ανά πρόβλημα σε δείγμα 30 μαθητών.

	Σύνολο σωστών απαντήσεων (N=30)	**Απαντήσεις με υπολογιστική εκτίμηση**	Απαντήσεις με νοερό αλγόριθμο	Λανθασμένες απαντήσεις
Π1	28 (93,3%)	**28 (93,3%)* (100%)****	-	2 (6,7%)
Π2	22 (73,3%)	**22 (73,3%)* (100%)****	-	8 (26,7%)
Π3	17 (56,7%)	**11 (36,7%)* (64,7%)****	6 (20%)* (35,3%)**	13 (43,3%)
Π4	22 (73,3%)	**14 (46,7%)* (63,6%)***	8 (26,7%)* (36,4%)**	8 (26,7%)
Π5	22 (73,3%)	**22 (73,3%)* (100%)****	-	8 (26,7%)
Π6	20 (66,7%)	**20 (66,7%)* (100%)****	-	10 (33,3%)
Π7	28 (93,3%)	**26 (86,7%)* (92,9%)****	2 (6,7%)* (7,1%)**	2 (6,7%)
Π8	20 (66,7%)	**19 (63,3%)* (95%)****	1 (3,3%)* (5%)**	10 (33,3%)
Π9	24 (80%)	**24 (80%)* (100%)****	-	6 (20%)
Π10	28 (93,3%)	**24 (80%)* (85,7%)****	4 (13,3%)* (14,3%)**	2 (6,7%)
Π11	29 (96,7%)	**18 (60%)* (62,1%)****	11 (36,7%)* (37,9%)**	1 (3,3%)
Π12	17 (56,7%)	**17 (56,7%)* (100%)****	-	13 (43,3%)
Π13	16 (53,3%)	**16 (53,3%)* (100%)****	-	14 (46,7%)
Π14	26 (86,7%)	**26 (86,7%)* (100%)****	-	4 (13,3%)
Π15	11 (36,7%)	**11 (36,7%)* (100%)****	-	19 (63,3%)

Σ	330	**298** **(90,3%)****	32 (9,7%)**	120
Μ.Ο. Τυπ. απ.	M=22 SD=5,29	**M= 19,9 SD=5,37**	M=9,1 SD=10,65	M=15 SD=5,29

*Ποσοστό επί του συνόλου του δείγματος (N=30), **Ποσοστό επί του συνόλου των σωστών απαντήσεων που σημειώθηκαν σε κάθε πρόβλημα.

Από τις 330 σωστές απαντήσεις που δόθηκαν οι 298 (90,3%) δίνονται μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και μόλις οι 32 (9,7%) είναι μέσω νοερού αλγόριθμου.

Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων, στην Α απάντηση των μαθητών, μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι 19,9. Σε 8 από τα 15 προβλήματα η συχνότητα των σωστών απαντήσεων ξεπερνάει το μέσο όρο (Π1, Π2, Π5, Π6, Π7, Π9, Π10, Π14). Το πρόβλημα που συγκέντρωσε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είναι το Π1 (Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών: 1,26€, 4,79€, 0,99€, 1,37€, 2,58€) με ποσοστό επιτυχίας 93,3% (28 μαθητές στους 30). Ακολουθούν σε υψηλά ποσοστά επιτυχίας τα Π7 και Π14 με 86,7% (Π7:Υπολογίστε περίπου τον αριθμό μαθητών των τριών τύπων σχολείων: Α Λύκειο 1.378 μαθητές, Β Λύκειο 236 μαθητές, Γ Λύκειο 442 μαθητές, Π14: Έξι ομάδες μαθητών έκαναν με λουλούδια ανθοδέσμες για τη σχολική γιορτή. Κάθε ομάδα έκανε 27, 49, 38, 65, 56, 81 ανθοδέσμες. Πόσες ανθοδέσμες έχουμε περίπου συνολικά;), Π9 με 80% (Έξι ανεξάρτητες μετρήσεις έγιναν από μία ομάδα για την εύρεση του ύψους του βουνού Έβερεστ:28.990ft, 28.991ft, 28.994ft, 28.998ft, 29.001ft, 29.026ft. Με βάση αυτές τις μετρήσεις πόσο περίπου μπορούμε να πούμε ότι είναι το ύψος του Έβερεστ;) και Π10 με 80% επίσης (Η Μαρία έτρεξε 1/2 km το πρωί και 3/8 km το απόγευμα. Έτρεξε τουλάχιστον 1km;). Παρατηρείται μία ανομοιομορφία στα πέντε προβλήματα με τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας ως προς τη φύση των αριθμών, αφού το ένα περιέχει δεκαδικούς αριθμούς, τα άλλα τρία ακέραιους (από 2 έως και 5 ψηφία) και το τέταρτο κλάσματα. Ως προς το είδος των πράξεων τα τέσσερα προβλήματα περιέχουν την πράξη της πρόσθεσης και το άλλο τον υπολογισμό του μέσου όρου. Και τα τέσσερα προβλήματα είναι προβλήματα με πλαίσιο.

Τα προβλήματα τα οποία εμφανίζουν το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας είναι τα Π3 (Ένας μαθητής που ξεκίνησε σκι έκανε 75 ώρες μάθημα και κάθε ώρα κόστιζε 36 €. Πόσο πρέπει περίπου να πληρώσει;) και Π15 (Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 χιλιόμετρα σε 52 ώρες. Πόσα χιλιόμετρα διανύει περίπου σε μία ώρα;) με ποσοστό επιτυχίας 36,7% το καθένα. Για το Π3 υπάρχει και ένα επιπλέον ποσοστό 20% των μαθητών οι οποίοι εφαρμόζουν το νοερό αλγόριθμο ενώ στο Π15 δεν υπάρχει κανένας μαθητής ο οποίος να εφαρμόζει σωστά το νοερό αλγόριθμο. Το ένα πρόβλημα περιλαμβάνει την πράξη του πολλαπλασιασμού και το άλλο της διαίρεσης. Ως προς το είδος των αριθμών και στα δύο προβλήματα εμπλέκονται ακέραιοι αριθμοί. Επίσης και τα δύο προβλήματα είναι προβλήματα με πλαίσιο.

Η χρήση του νοερού αλγόριθμου εμφανίζεται σε μεγαλύτερο ποσοστό στα προβλήματα Π11 με 36,7% (Το αποτέλεσμα ισούται περίπου με 200; 35+42+40+38+ 44) με ποσοστό χρήσης 36,7% και το Π4 με 26,7% (Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:3.388:7). Το ένα είναι πρόβλημα πρόσθεσης διψήφιων ακεραίων και το άλλο διαίρεσης ακεραίων αριθμών όπου ο ένας είναι μονοψήφιος.

Πίνακας 10. Η δεύτερη και τρίτη απάντηση ανά πρόβλημα σε δείγμα 30 μαθητών.

	Β απάντηση				**Γ απάντηση**			
	Σύνολο σωστών απαντήσεων (N=30)	**-με υπολογιστική εκτίμηση**	-με νοερό αλγόριθμο	Λάθος απαντήσεις	Σύνολο σωστών απαντήσεων (N=30)	**-με υπολογιστική εκτίμηση**	-με νοερό αλγόριθμο	Λάθος απαντήσεις
Π1	22 (73,3%)	**19 (63,3%)* (86,4%)****	3 (10%)* (13,6%)**	-	6 (20%)	**5 (16,7%)* (83,3%)****	1 (3,3%)* (16,6%)**	-
Π2	21 (70%)	**21 (70%)* (100%)****	-	-	8 (26,7%)	**8 (26,7%)* (100%)****	-	-
Π3	17 (56,7%)	**16 (53,3%)* (94,1%)****	1 (3,3%)* (5,9%)**	-	6 (20%)	**4 (13,3%)* (66,7%)****	2 (6,7%)* (33,3%)**	-
Π4	20 (66,7%)	**18 (60%)* (90%)****	2 (6,7%)* (10%)**	3 (10%)	9 (30%)	**7 (23,3%)* (77,8%)****	2 (6,7%)* (22,2%)**	1 (3,3%)
Π5	21 (70%)	**16 (53,3%)* (76,2%)****	5 (16,7%)* (22,8%)**	-	-	**-**	-	-
Π6	17 (56,7%)	**17 (56,7%)* (100%)****	-	3 (10%)	3 (10%)	**3 (10%)* (100%)****	-	2 (6,7%)
Π7	12 (40%)	**6 (20%)* (50%)****	6 (20%)* (50%)**	2 (6,7%)	1 (3,3%)	**1 (3,3%)* (100%)****	-	-
Π8	21 (70%)	**15 (50%)* (71,4%)**	6 (20%)* (28,6%)	-	6 (20%)	**3 (10%)* (50%)**	3 (10%)* (50%)	-
Π9	13 (43,3%)	**10 (33,3%)* (76,9%)****	3 (10%)* (23,1%)**	4 (13,3%)	2 (6,7%)	**2 (6,7%)* (100%)****	-	-
Π10	25 (83,3%)	**9 (30%)* (36%)****	16 (53,3%) (64%)	-	6 (20%)	**4 (13,3%)* (66,7%)****	2 (6,7%)* (33,3%)**	-
Π11	25 (83,3%)	**16 (53,3%)* (64%)****	9 (30%)* (36%)**	-	10 (33,3%)	**9 (30%)* (90%)****	1 (3,3%)* (10%)**	-
Π12	14 (46,7%)	**14 (46,7%)* (100%)****	-	4 (13,3%)	3 (10%)	**3 (10%)* (100%)****	-	1 (3,3%)
Π13	20 (66,7%)	**17 (56,7%)* (85%)****	3 (10%)* (15%)**	1 (3,3%)	6 (20%)	**5 (16,7%)* (83,3%)****	1 (3,3%)* (16,7%)**	-
Π14	21 (70%)	**17 (56,7%)* (81%)****	4 (13,3%)* (19%)**	-	3 (10%)	**3 (10%)* (100%)****	-	-
Π15	18 (60%)	**17 (56,7%)***	1 (3,3%)*	3 (10%)	2 (6,7%)	**2 (6,7%)***	-	1 (3,3%)

		(94,4%)**	(5,6%)**			**(100%)****		
Σ	**287**	**228 (79,4%)****	**59 (20,6%)****	**20**	**71**	**59 (83,1%)****	**12 (16,9%)****	**5**
Μ.Ο.	19,1	**15,2**	4,9	2,9	5,1	**4,2**	1,7	1,25

*Ποσοστά επί του συνόλου του δείγματος (Ν=30), **Ποσοστά επί του συνόλου των σωστών απαντήσεων (σε κάθε πρόβλημα ξεχωριστά).

Από τις 287 σωστές απαντήσεις που δόθηκαν ως Β απάντηση οι 228 (79,4%) είναι μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης ενώ οι υπόλοιπες 59 (20,6%) μέσω νοερού αλγόριθμο για υπολογισμό της απάντησης με ακρίβεια.

Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων με χρήση υπολογιστικής εκτίμησης, που δόθηκαν ως Β απάντηση, ήταν15,2 με τα αποτελέσματα σε 10 προβλήματα να συγκεντρώνουν μεγαλύτερες συχνότητες (Π1, Π2, Π3, Π4, Π5, Π6, Π11, Π13, Π14, Π15). Το πρόβλημα το οποίο συγκέντρωσε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας με χρήση υπολογιστικής εκτίμησης (70%) είναι το Π2 (Να εκτιμηθεί περίπου ο αριθμός των επισκεπτών σε μία έκθεση από την ακόλουθη λίστα: Δευτέρα 72.250, Τρίτη 63.819, Τετάρτη 67.480, Πέμπτη 73.180, Παρασκευή 74.918, Σάββατο 68.490) το οποίο στην Α απάντηση συγκέντρωσε ποσοστό επιτυχίας 73,3%. Ακολουθούν με υψηλά ποσοστά επιτυχίας το Π1 (Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών: 1,26€, 4,79€, 0,99€, 1,37€, 2,58€) με 63,3% το οποίο στην απάντηση Α συγκεντρώνει το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας (93,3%) και το Π4 με 60%. Το Π4 (Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 3.388:7) στην Α απάντηση συγκεντρώνει μόλις το 46,7% των σωστών απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης αφού κατέχει το δεύτερο μεγαλύτερο ποσοστό στη χρήση του νοερού αλγόριθμου στην ίδια απάντηση (26,7%). Σχετικά με το είδος της πράξης που απαιτείται σε κάθε ένα από αυτά τα 3 προβλήματα, στα δύο χρειάζεται πρόσθεση και στο τρίτο διαίρεση. Επίσης το ένα πρόβλημα περιέχει μεγάλους ακέραιους αριθμούς (πενταψήφιους), το άλλο δεκαδικούς αριθμούς και το τρίτο δύο ακέραιους όπου ο ένας από τους δύο είναι μονοψήφιος αριθμός.

Τα προβλήματα με τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην εκτίμηση στη Β απάντηση είναι κατά αύξουσα σειρά το Π7 (Υπολογίστε περίπου τον αριθμό των μαθητών των τριών σχολείων: Α Λύκειο 1.378 μαθητές, Β Λύκειο 236 μαθητές, Γ Λύκειο 442 μαθητές) με ποσοστό επιτυχίας 20%, Π9 (Έξι ανεξάρτητες μετρήσεις έγιναν από μία ομάδα για την εύρεση του ύψους του βουνού Έβερεστ: 28.990ft, 28.994 ft, 28.998ft, 29.001ft, 29,026ft. Με βάση αυτές τις μετρήσεις πόσο περίπου μπορούμε να πούμε ότι είναι το ύψος του Έβερεστ;) με ποσοστό 30% και το Π10 (Η Μαρία έτρεξε 1/2km το πρωί και 3/8km το απόγευμα. Έτρεξε τουλάχιστον 1km;) με 33,3% των μαθητών να απαντούν σωστά. Και τα τρία αυτά προβλήματα στην Α απάντηση συγκέντρωσαν τα τρία από τα τέσσερα υψηλότερα ποσοστά (Π7:86,7%, Π10:80%, Π9:80%). Αυτό σημαίνει ότι αν σε ένα πρόβλημα καταφέρνουν και καταλήγουν με ευκολία μέσω υπολογιστικής εκτίμησης στην πρώτη τους προσπάθεια δεν προϋποθέτει ότι με την ίδια ευκολία θα καταλήξουν σε δεύτερη σωστή απάντηση μέσω εκτίμησης.

Ο μέσος όρος χρήσης του νοερού αλγορίθμου για υπολογισμό με ακρίβεια στον Β τρόπο είναι 4,9, με 5 ερωτήσεις να εμφανίζουν συχνότητα μεγαλύτερη του μέσου όρου. Το πρόβλημα 10 να συγκεντρώνει τις περισσότερες σωστές απαντήσεις μέσω νοερού αλγόριθμου με ποσοστό που φτάνει το 53,3%.

Από τις 79 σωστές απαντήσεις που δίνονται συνολικά στην τρίτη προσπάθεια των μαθητών, οι 59 (83,1%) είναι μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων είναι 4,2 με τις συχνότητες 5 προβλημάτων να τον ξεπερνούν (Π1, Π2, Π4, Π11, Π13). Από αυτές τις απαντήσεις το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας σημειώνεται στο Π11 (Το αποτέλεσμα ισούται με 200; 35+42+40+38+44), με ποσοστό 30%, το οποίο δεν κατέχει τις πρώτες θέσεις στην Α και Β απάντηση. Στο Π11 στην Α προσπάθεια η συχνότητα των σωστών απαντήσεων είναι μικρότερη του μέσου όρου (συχνότητα 18 με Μ.Ο.19,9) ενώ στη Β προσπάθεια είναι λίγο πάνω από το μέσο όρο της αντίστοιχης απάντησης (συχνότητα 16 με Μ.Ο.15,2). Το δεύτερο μεγαλύτερο ποσοστό το συγκεντρώνει το Π2 με 26,7% και ακολουθεί τα Π4 με 23,3%. Και τα δύο αυτά προβλήματα συγκεντρώνουν υψηλά ποσοστά και στη Β απάντηση (70% και 60% αντίστοιχα), ενώ αντίθετα στην Α απάντηση μόνο το Π2 σημειώνει ικανοποιητικό ποσοστό σωστών απαντήσεων (73,3%) ενώ το Π4 φτάνει μόλις το 46,7%. Στο Π5 (Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 7/8+12/13+23/45) δε δίνεται καμία σωστή τρίτη απάντηση ούτε μέσω υπολογιστικής εκτίμησης ούτε με νοερό αλγόριθμο. Στις προηγούμενες δύο απαντήσεις για το πρόβλημα 5 οι συχνότητες των σωστών απαντήσεων με στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης ξεπερνάνε τους μέσους όρους της αντίστοιχης απάντησης (Α απάντηση: ν=22 με Μ.Ο.=19,9 & Β απάντηση: ν=16 με Μ.Ο.=15,2). Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων και στην Γ απάντηση προκύπτει ότι τα προβλήματα τα οποία λύνονται με ευχέρεια στην Α απάντηση δεν είναι απαραίτητο να μπορούν να δοθούν με την ίδια ευκολία και άλλες σωστές απαντήσεις μέσω εκτίμησης.

Στο σύνολο των 15 προβλημάτων υπάρχουν 7 προβλήματα στα οποία δόθηκε τουλάχιστον μία σωστή απάντηση μέσω νοερού αλγόριθμου ως τρίτη απάντηση. Ο μέσος όρος χρήσης του νοερού αλγόριθμου στον τρίτο τρόπο είναι 1,7 με 4 ερωτήσεις να τον ξεπερνάνε.

Πίνακας 11. Αποτελέσματα και από τις τρεις απαντήσεις που δόθηκαν σε κάθε πρόβλημα

	Σύνολο σωστών απαντήσεων (N=30)				**Απαντήσεις με υπολογιστική εκτίμηση**				**Απαντήσεις με νοερό αλγόριθμο**			
	Α Απ.	**Β Απ.**	**Γ Απ.**	**Σύνολο**	**Α Απ.**	**Β Απ.**	**Γ Απ.**	**Σύνολο**	**Α Απ.**	**Β Απ.**	**Γ Απ.**	**Σύνολο**
Π1	28	22	6	**56**	28	19	5	**52**	-	3	1	**4**
Π2	22	21	8	**51**	22	21	8	**51**	-	-	-	**-**
Π3	17	17	6	**40**	11	16	4	**31**	6	1	2	**9**
Π4	22	20	9	**51**	14	18	7	**39**	8	2	2	**12**
Π5	22	21	-	**43**	22	16	-	**38**	-	5	-	**5**
Π6	20	17	3	**40**	20	17	3	**40**	-	-	-	**-**
Π7	28	12	1	**41**	26	6	1	**33**	2	6	-	**8**
Π8	20	21	6	**47**	19	15	3	**37**	1	6	3	**10**
Π9	24	13	2	**39**	24	10	2	**36**	-	3	-	**3**
Π10	28	25	6	**59**	24	9	4	**37**	4	16	2	**22**
Π11	29	25	10	**64**	18	16	9	**43**	11	9	1	**21**
Π12	17	14	3	**34**	17	14	3	**34**	-	-	-	**-**
Π13	16	20	6	**42**	16	17	5	**38**	-	3	1	**4**
Π14	26	21	3	**50**	26	17	3	**46**	-	4	-	**4**
Π15	11	18	2	**31**	11	17	2	**30**	-	1	-	**1**
Σ	330	287	71	**688**	**298 43,3% * 50,9% ****	**228 33,1% * 39% ***	**59 8,6% * 10,1% ****	**585 (85%)***	32	59	12	103 (15%)*
Μ.Ο.	22	19,1	5,1	**45,9**	**19,9**	**15,2**	**4,2**	**39**	5,3	4,9	1,7	8,6

*Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων (N1=688), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων με υπολογιστική εκτίμηση (N2=585).

Από το σύνολο των 688 σωστών απαντήσεων που δόθηκαν συνολικά, στις 585 (85%) έχουν εφαρμοστεί στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων μέσω κατ' εκτίμηση υπολογισμών είναι 39, με έξι προβλήματα από τα 15 (Π1, Π2, Π4, Π6, Π11, Π14) να έχουν συχνότητα μεγαλύτερη ή ίση αυτού. Τα 4 από αυτά τα προβλήματα (Π1, Π2, Π11, Π14) περιλαμβάνουν την πράξη της πρόσθεσης, το ένα της διαίρεσης (Π4) και το άλλο υπολογισμό ποσοστού (Π6). Κανένα πρόβλημα δεν περιέχει την πράξη του πολλαπλασιασμού. Σχετικά με το είδος των αριθμών, τα 4 προβλήματα έχουν ακέραιους αριθμούς (Π2, Π4, Π11, Π14) και τα άλλα δύο δεκαδικούς (Π1, Π6). Τα τέσσερα (Π1, Π2, Π6, Π14) από τα έξι αυτά προβλήματα ανήκουν στην κατηγορία με πλαίσιο και τα δύο όχι (Π4, Π11).

Το πρόβλημα που συγκεντρώνει τη μεγαλύτερη συχνότητα σωστών απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης είναι το Π1 με ν=52 και ακολουθεί το Π2 με ν=51. Το Π1 (Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών: 1,26€, 4,79€, 0,99€, 1,37€, 2,58€) περιλαμβάνει την πράξη της πρόσθεσης πέντε δεκαδικών αριθμών με δύο δεκαδικά ψηφία και ένα ψηφίο στο ακέραιο μέρος. Το Π2 (Να εκτιμηθεί περίπου ο αριθμός των επισκεπτών σε μία έκθεση από την ακόλουθη λίστα: Δευτέρα 72.250, Τρίτη 63.819, Τετάρτη 67.480, Πέμπτη 73.180, Παρασκευή 74.918, Σάββατο 68.490)περιέχει το άθροισμα 6 πενταψήφιων ακέραιων αριθμών. Και τα δύο προβλήματα ανήκουν σε πλαίσιο.

Τα προβλήματα με τη χαμηλότερη συχνότητα σωστών απαντήσεων είναι τα Π15 και Π3 με συχνότητες 30 και 31 αντίστοιχα (Μ.Ο.=39). Το Π15 (Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 χιλιόμετρα σε 52 ώρες. Πόσα χιλιόμετρα διανύει περίπου σε μία ώρα;) περιλαμβάνει την πράξη της διαίρεσης πενταψήφιου με διψήφιο γεγονός που την κατατάσσει σε αυτή τη χαμηλή θέση. Το Π3 (Ένας μαθητής που ξεκίνησε σκι έκανε 75 ώρες μάθημα και κάθε ώρα κόστιζε 36 ευρώ. Πόσο πρέπει περίπου να πληρώσει;) πρόβλημα πολλαπλασιασμού δύο διψήφιων ακέραιων αριθμών.

Στα προβλήματα Π3, Π4, Π13 και Π15 εντοπίζονται περισσότερες επιτυχημένες απαντήσεις στη Β προσπάθεια από ότι στην Α. Τα δύο από αυτά τα προβλήματα (Π3, Π13) περιέχουν την πράξη του πολλαπλασιασμού και τα άλλα δύο (Π4, Π15) διαίρεση. Τα Π3 και Π15, όπως αναλύθηκε παραπάνω, είναι τα δύο προβλήματα που δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές αφού σημειώνουν τη μικρότερη συχνότητα επιτυχημένων απαντήσεων. Από την άλλη το Π4 ανήκει στα προβλήματα που συγκεντρώνουν συχνότητα σωστών απαντήσεων πάνω από το μέσο όρο στο σύνολο των τριών απαντήσεων.

Συμπερασματικά θα μπορούσε να σημειωθεί ότι η αναζήτηση εναλλακτικών απαντήσεων του ίδιου προβλήματος οδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες στην καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και στην ανακάλυψη και διόρθωση των λαθών τους, από μόνοι τους, χωρίς καμία διδακτική παρέμβαση από το δάσκαλο ή από κάποιο εξωτερικό βοηθητικό μέσο (αριθμομηχανή, υπολογιστής, βιβλίο με λύσεις).

3.2.1 Λάθη ανά πρόβλημα

Στους παρακάτω πίνακες αναλύονται τα λάθη σε κάθε πρόβλημα. Στον πίνακα 12 ξεχωρίζουν δύο μεγάλες κατηγορίες λαθών ενώ στον πίνακα 13 χωρίζονται σε μικρότερες υποκατηγορίες και αναλύονται παραπάνω.

Πίνακας 12. Οι συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων σε κάθε πρόβλημα και για κάθε απάντηση που εφαρμόζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες (N=30)

	Λάθη				**Είδη λαθών**	
	Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	Σύνολο	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής
Π1	2 (6,7%)	-	-	**2 (1.3%)***	2	-
Π2	8 (26,7%)	5	-	**13 (8,7%)***	12	1
Π3	13 (43,3%)	-	-	**13 (8,7%)***	12	1
Π4	8 (26,7%)	3 (10%)	1 (3,3%)	**12 (8%)***	7	5
Π5	8 (26,7%)	-	-	**8 (5.3%)***	8	-
Π6	10 (33,3%)	3 (10%)	2 (6,7%)	**15 (10%)***	11	4
Π7	1 (3,3%)	3 (6,7%)	-	**4 (2,7%)***	1	3
Π8	10 (33,3%)	-	-	**10 (6,7%)***	4	6
Π9	6 (20%)	4 (13,3%)	-	**10 (6,7%)***	7	3
Π10	2 (6,7%)	-	-	**2 (1,3%)***	2	-
Π11	1 (3,3%)	-	-	**1 (0,7%)***	1	-
Π12	13 (43,3%)	4 (13,3%)	1 (3,3%)	**18 (12%)***	16	2
Π13	14 (46,7%)	1 (3,3%)	-	**15 (10%)***	4	11
Π14	4 (13,3%)	-	-	**4 (2,7%)***	4	-
Π15	19 (63,3%)	3 (10%)	1 (3,3%)	**23 (15,3%)***	21	2
Σύνολο	**119 (79,3%)**	**26 (17,3%)**	**5 (3,3%)**	**150**	**112 (74,7%)**	**38 (25,3%)**

*Ποσοστό στο σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων (N=150)

Στο σύνολο και των τριών απαντήσεων δόθηκαν 150 λανθασμένες απαντήσεις η πλειοψηφία των οποίων (119 ή 79,3%) συγκεντρώνεται στην κατηγορία «λάθη στις πράξεις». Τα δύο προβλήματα τα οποία συγκέντρωσαν τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις στο σύνολο και των τριών απαντήσεων είναι το πρόβλημα Π15 (25.889:52) με ποσοστό 15,3% των συνολικά λανθασμένων απαντήσεων και Π12 (62x79) με ποσοστό 12%. Ακολουθούν τα προβλήματα Π6 (816x9,84%) και Π13 (28x56) με ποσοστό 10% το καθένα.

3.2.1.1 Υποκατηγορίες Λαθών

Στη συνέχεια ακολουθεί ένας πίνακας κατάταξης των δύο βασικών ειδών των λαθών, «Λάθη στις πράξεις» και «Λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής», σε υποκατηγορίες οι οποίες περιγράφονται παρακάτω.

Πίνακας 13. Υποκατηγορίες λαθών

	Λάθη στις πράξεις				**Λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής**	
	Λάθη στον αριθμό ψηφίων	Λάθη στις πράξεις	Λάθη στην εκτέλεση του νοερού αλγόριθμου	Άλλο λάθος	Χωρίς επακολουθούμενη αντιστάθμιση	Λάθη στην επακολουθούμενη αντιστάθμιση
Π1		2				
Π2	2	10			1	
Π3	3	2	7		1	
Π4	6	1			5	
Π5			2	6 (3 ν.α.)[1]		
Π6	5	2		4	4	
Π7		1			3	
Π8	1	2	1		5	1
Π9		1	2	5	2	
Π10		1		1		
Π11		1				
Π12	10	3	2		1	2
Π13		4			9	2
Π14	1	3				
Π15	12	9			1	1
Σύνολο	**40 (26,7%)***	**42 (28%)***	**14 (9,3%)***	**16 (10,7%)***	**32 (21,3%)***	**6 (4%)***

*Ποσοστό στο σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων (N_3=150)
[1]Μέσω νοερού αλγόριθμου

Το 74,7% των λαθών συγκεντρώνονται στην κατηγορία «Λάθη στις πράξεις». Αυτή την κατηγορία αναλύεται παρακάτω σε μικρότερες υποκατηγορίες:

1) Λάθη ως προς των αριθμό των ψηφίων (26,7%)

Μετά τη στρογγυλοποίηση ή το κουτσούρεμα ή την προγενέστερη αντιστάθμιση των ποσών του εκάστοτε προβλήματος ακολουθεί ο νοερός υπολογισμός ενός γινομένου ή ενός πηλίκου. Πολλές φορές όμως οι μαθητές δεν υπολογίζουν σωστά το μέγεθος της απάντησης ως προς το πλήθος των ψηφίων. Δηλαδή για παράδειγμα σε ένα γινόμενο δύο διψήφιων δεν αντιλαμβάνονται ότι το αποτέλεσμα πρέπει να είναι τετραψήφιος αριθμός με αποτέλεσμα να μην προσθέτουν ή αφαιρούν τα αντίστοιχα μηδενικά στην τελική απάντησή τους. Η πλειοψηφία των λαθών αυτής της μορφής εμφανίζεται στα προβλήματα πολλαπλασιασμού (Π12), διαίρεσης (Π4 και Π12) και ποσοστού (Π6). Αυτή η μορφή των λαθών αποδεικνύει την έλλειψη της αίσθησης του αριθμού. π.χ.

Π3 (75x36): $75 \approx 70$, $36 \approx 40$, 70x40=28.000,

Π15 (25.889:52): 25.000:50=5.000,

Π8 (437x8): 400x8=320, 30x8=24, άρα 320+24 περίπου 340,

Π6 (Το 9,84% των 816): 10%x816=8,16 ή 10%816=8.160,

Π12 (62x79): 60x80=480.

2) Λάθη στις πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός-προπαίδεια) (28%)

Σε όλες τις λανθασμένες απαντήσεις της υποκατηγορίας αυτής έχει εφαρμοστεί κάποια στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης από τους μαθητές αλλά κατά τη νοερή εκτέλεση των πράξεων γίνονται λάθη. Πολλά από αυτά τα λάθη μπορεί να οφείλονται σε βιασύνη, απροσεξία ή και μειωμένη χωρητικότητα της εργαζόμενης μνήμης. π.χ.

Π1 (1.26+4.79+0.99+1.37+2.58) : Στρογγυλοποιεί όλους τους όρους:$4{,}79 \approx 5$, $0{,}99 \approx 1$, $1{,}37 \approx 1{,}5$, $1{,}26 \approx 1$, $2{,}58 \approx 2{,}5$. Άρα περίπου 9,

Π14 (27+49+38+65+56+81) : 81+49=130, $65+56 \approx 60+50=110$, $27+38 \approx 30+30=60$ άρα 130+110+60=270,

Π10 (1/2+3/8) : 1/2+3/8 = 4/8+3/8 = 9/8 > 1, άρα έτρεξε 1 χλμ.,

Π7 (1.378+236+442) : $1.378+238 \approx 1.600$, 1.600+442=1.850

3) Λάθη στην εκτέλεση του νοερού αλγόριθμου (9,3%)

Εφαρμόζουν τον νοερό αλγόριθμο για υπολογισμό της απάντησης με ακρίβεια και εκτελούν λάθη στις πράξεις. π.χ.

Π4 (3.388:7): $3.388 \approx 3.000$ άρα $3.000{:}7 \approx 21$,

Π12 (62x79): 70x60=4.200, 9x2=18, άρα 4.200+18=4.218,

Π12 (62x79): 6x7=42, 2x9=18, άρα περίπου 500,

Π13 (28x56): 30x55, 3x5=15 άρα 1.500, 1.500+15=1.515

Π13 (28x56): $28 \approx 30$, $56 \approx 50$, 30x50=1.500, το 2 που πρόσθεσα στο 28 και το 6 που αφαίρεσα από το 56, 2x6=12, άρα 1.500+12=1.512.

4) Άλλα λάθη (10,7%)

Σε αυτή την υποκατηγορία ανήκουν οι απαντήσεις οι οποίες δε μπορούν να ενταχθούν στις προηγούμενες υποκατηγορίες. Πολλά από αυτά τα λάθη οφείλονται σε μη λογικά μαθηματικά λάθη ή ακόμα και σε μη κατανόηση της εκφώνησης του προβλήματος. π.χ.

Π5 (7/8+12/13+23/45): 23/45 είναι περίπου 2.

Π5 (7/8+12/13+23/45): 7/8+12/13+23/45= $\frac{7+8+23}{8+13+45}$

Π6 (Το 9,84% των 816): Στα 900ml η αλκοόλη είναι περίπου 10%. Άρα απάντηση 1/9.

Π5 (7/8+12/13+23/45): 7/8 περίπου 0,2, το 12/13 περίπου 0,5, το 23/45 περίπου 0,2.

Το 25,3% των λανθασμένων απαντήσεων οφείλονται «στην εκτέλεση της στρατηγικής». Αυτό σημαίνει ότι ενώ εκτελείται σωστά η στρατηγική της υπολογιστικής εκτίμησης, χωρίς λάθη σε πράξεις, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι το αποτέλεσμά τους απέχει αρκετά από το ακριβές. Η ορθότητα ή το πόσο καλή θεωρείται μία λύση, σύμφωνα με τους Star & Rittle-Johnson (2009), εξαρτάται εκτός από το πόσο εύκολα μπορεί να υπολογιστεί η εκτίμηση καθώς και από το πόσο κοντά βρίσκεται η εκτίμηση στην ακριβή απάντηση.

Παρακάτω διακρίνονται επίσης υποκατηγορίες της κατηγορίας «λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής» και αναφέρονται παραδείγματα σε κάθε περίπτωση.

1) Χωρίς αντιστάθμιση (21,3%)

Εκτελείται σωστά η στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης στην αντίστοιχη ερώτηση αλλά η απάντηση απέχει αρκετά από την ακριβή και αυτό δε γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές ώστε να εκτελέσουν κάποια επακολουθούμενη αντιστάθμιση:

Π13 (28x56): Στρογγυλοποιώ το 28 σε 30 και το 56 σε 60, άρα 30x60=1.800,

Π4 (3.388:7): 3.388 $\approx$ 2.000, το 7 στο 2.000 περίπου 300 φορές,

Π6 (816x9,84%): 1.378 $\approx$ 1.000, 236 $\approx$ 200, 442 $\approx$ 400, 1.000+200+400=1.700.

2) Λάθη στην αντιστάθμιση (4%)

Ενώ η υπολογιστική εκτίμηση εφαρμόζεται σωστά και οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ανάγκη για μεταγενέστερη αντιστάθμιση, τελικά εφαρμόζουν λανθασμένα την αντιστάθμιση.

Π2 (72.250+63.819+67.480+73.180+74.918+68.490): Όλα περίπου 100.000, άρα 6x100.000=600.000 και λίγο πιο κάτω άρα 500.000 (πολύ χοντρική αντιστάθμιση), Π7 (1.378+236+442): 1.500+500+250=2.250 άρα περίπου 2.500 (αντιστάθμιση αντίθετης κατεύθυνσης),

Π8 (437x8): 400x8=3.200 και τα υπόλοιπα άρα περίπου 4.000 (πολύ γενική αντιστάθμιση),

Π13 (28x56): 28≈30, 56≈60, 30x60=1.800 άρα περίπου 2.000 (αντιστάθμιση αντίθετης κατεύθυνσης).

Στο σύνολο όλων των λαθών τα περισσότερα οφείλονται στις νοερές πράξεις (28% των λανθασμένων απαντήσεων) ενώ το 26,7% οφείλεται στο πλήθος των αριθμών των ψηφίων.

Στο 88,7% των λανθασμένων απαντήσεων (133 απαντήσεις από 150) γίνεται χρήση κάποιας στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης από τους μαθητές και μόνο στο 11,3% (17 απαντήσεις από τις 150) χρησιμοποιείται ο νοερός αλγόριθμος.

Στο Π15 (25.889:52) το πρόβλημα που δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές (15,3% των λανθασμένων απαντήσεων) εμφανίζονται πιο πολλά λάθη στις πράξεις και λάθη ως προς το πλήθος των ψηφίων. Στο Π12 (12%), το δεύτερο δυσκολότερο πρόβλημα, τα περισσότερα λάθη γίνονται στο πλήθος των ψηφίων. Το Π13 (28x56) το οποίο εμφανίζεται ως το τρίτο δυσκολότερο πρόβλημα οι απαντήσεις των μαθητών υστερούν ως προς την ακρίβεια. Οι περισσότεροι μαθητές στρογγυλοποιούν και τα δύο ποσά προς την ίδια κατεύθυνση αλλά στη συνέχεια δεν εφαρμόζουν καμία επακολουθούμενη αντιστάθμιση ώστε να βελτιώσουν την απάντησή τους (28x56 ≈ 30x60=1.800). Αξιοσημείωτο είναι ότι στα 3 προβλήματα Π3, Π12 και Π13 τα οποία περιέχουν όλα γινόμενο 2 διψήφιων ακέραιων αριθμών η πλειοψηφία των λαθών σε κάθε ένα πρόβλημα ανήκει σε διαφορετική κατηγορία. Πιο συγκεκριμένα στο Π3 (75x36) τα περισσότερα λάθη οφείλονται σε λάθη κατά την εκτέλεση του νοερού αλγορίθμου, στο Π12 (62x79) οι μαθητές κάνουν λάθη στον αριθμό των ψηφίων και στο Π13 (28x56) οι μαθητές δεν εφαρμόζουν μεταγενέστερη αντιστάθμιση στο αποτέλεσμά τους όπως περιγράφηκε και παραπάνω.

Όλα τα παραπάνω λάθη δηλώνουν τη δυσκολία εκτέλεσης των αλγόριθμων νοερά, της συγκράτησης στην εργαζόμενη μνήμη των επιμέρους αποτελεσμάτων καθώς και της μειωμένης αίσθησης του αριθμού.

Σύνοψη

Συγκεντρώνοντας όλα τα αποτελέσματα από τους παραπάνω πίνακες παρατηρούμε ότι δόθηκαν συνολικά 838 απαντήσεις από τους μαθητές από τις οποίες οι 688 σωστές και οι 150 λανθασμένες ή σε ποσοστά 82,1% σωστές και 17,9% λανθασμένες. Από τις 838 απαντήσεις στο 69,8% (585 απαντήσεις) χρησιμοποιήθηκαν σωστά στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης και στο υπόλοιπο 12,3% (103 απαντήσεις) χρησιμοποιήθηκε σωστά ο νοερός αλγόριθμος. Παράλληλα όμως από τις 150 λανθασμένες απαντήσεις στις 133 (15,9%) έγινε χρήση κάποιας στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης από τους μαθητές ανεξάρτητα από το ότι κατέληξαν σε λάθος αποτέλεσμα. Άρα σε 585+133=718 απαντήσεις (85,7%) χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Αυτό το γεγονός αποδεικνύει ότι οι μαθητές παρόλο που δε διδάχθηκαν ποτέ τις στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης αλλά και γενικά την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης είναι ικανοί να χειριστούν προβλήματα αυτού του είδους.

3.2.2 Μέσοι χρόνοι ανά πρόβλημα

Πίνακας 14. Οι μέσοι χρόνοι των συμμετεχόντων για κάθε πρόβλημα

	Μέσος χρόνος σωστών απαντήσεων	**Μέσος χρόνος απαντήσεων με υπολογιστική εκτίμηση**	**Διαφορά μέσων χρόνων**	**Μέσος χρόνος χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής**
Π1	21,71sec	**21,71sec**	0	16,7sec
Π2	59,77sec	**59,77sec**	0	38sec
Π3	45,47sec	**41,45sec**	-4,02	45,61sec
Π4	44,86sec	**41,57sec**	-3,29	36,39sec
Π5	38,59sec	**38,59sec**	0	21,44sec
Π6	21,3sec	**21,3sec**	0	11,5sec
Π7	24,5sec	**24,28sec**	-0,22	32sec
Π8	30,85sec	**30,89sec**	+0,04	13,83sec
Π9	17,55sec	**17,55sec**	0	14,55sec
Π10	14,43sec	**10,13sec**	-4,3	7,31sec
Π11	19,28sec	**17,06sec**	-2,22	12,57sec
Π12	33,12sec	**33,12sec**	0	34,13sec
Π13	24,06sec	**24,06sec**	0	26sec
Π14	39,08sec	**39,08sec**	0	38,67sec
Π15	64sec	**64sec**	0	78sec
Μ.Ο.	M=33,2	**M=33,3**	-0,9	M=28,4

Το πρόβλημα στο οποίο οι μαθητές χρειάστηκαν το λιγότερο χρόνο για να απαντήσουν σωστά μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης ήταν το Π10, ο υπολογισμός του αθροίσματος 1/2+3/8, με μέσο χρόνο απάντησης 10,13sec. Επίσης ο μέσος χρόνος των μαθητών που χρησιμοποίησαν την πιο κατάλληλη στρατηγική σε αυτό το πρόβλημα, τη στρατηγική των ειδικών αριθμών, ήταν 7,31sec. Το επόμενο πρόβλημα το οποίο απαντήθηκε στο δεύτερο καλύτερο χρόνο μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης ήταν το Π9, με μέσο χρόνο 17,06sec, το οποίο ζητούσε το μέσο όρο των 6 μετρήσεων του βουνού Έβερεστ.

Τον περισσότερο χρόνο για να απαντήσουν σωστά χρειάστηκαν οι μαθητές σα προβλήματα Π2 και Π15, στα οποία σημείωσαν 59,77sec και 64sec αντίστοιχα. Στο Π2 χρειάστηκαν αρκετό χρόνο γιατί δυσκολεύονταν να συγκρατήσουν τα επιμέρους αθροίσματα των πενταψήφιων αριθμών και το πρόβλημα 15 ήταν η διαίρεση του 25.889 με το 52 η οποία δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές και συγκέντρωσε το μεγαλύτερο ποσοστό αποτυχίας στο σύνολο των προβλημάτων.

Από τη διαφορά των μέσων χρόνων μεταξύ των σωστών απαντήσεων γενικά και των απαντήσεων μέσω στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης παρατηρούμε ότι στα 9 από τα 15 προβλήματα δεν υπάρχει καμία διαφορά αφού όλες οι σωστές απαντήσεις ήταν μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Από τα υπόλοιπα έξι, στα πέντε οι μέσοι χρόνοι των απαντήσεων μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης είναι μικρότεροι από τους μέσους χρόνους των σωστών απαντήσεων συνολικά. Μόνο σε ένα πρόβλημα, το Π8, παρατηρείτε μεγαλύτερος μέσος χρόνος στις απαντήσεις μέσω εκτίμησης από το συνολικό μέσο χρόνο, των οποίων η διαφορά όμως είναι πολύ μικρή μόλις 0,04sec.

3.2.3 Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε πρόβλημα

Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι στρατηγικές των μαθητών και μαθητριών σε κάθε πρόβλημα αναλυτικά και για τις τρεις απαντήσεις ξεχωριστά αλλά και συνολικά.

Πρόβλημα 1

«Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών:

1.26 € , 4.79 €, 0.99 €, 1.37 € , 2.58 €».

Πίνακας 15. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 1 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**			**Σύνολο**
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	
Εμπρόσθιου άκρου*	1.26+4.79+0.99+1.37+2.58 1+4+1+2+1=9, 0,79+0,37 ≈ 1 0,58+0,26 ≈ 1 9+1+1=11	9	4	4	**17**
Στρογγυλοποίηση		17 (=8+7+2)	11	1	**29**
Α)Στρογγυλοποίηση & Συμβατοί αριθμοί & νοερός αλγόριθμος	1,26+2,58 ≈ 1,20+2,50=3,7 0,99 ≈ 1, 1,37+4,79 ≈ 1,5+4,5=6 3,7+1+6=10,7 ≈ 11	8	-	-	8
Β)Στρογγυλοποίηση & νοερός αλγόριθμος	1,26 ≈ 1, 4,79 ≈ 5, 0,99 ≈ 1, 1,37 ≈ 1,5, 2,58 ≈ 2,5 1+5+1+1,5+2,5=11	7	11	1	19
Γ)Στρογγυλοποίηση & εμπρόσθιο άκρο & νοερός αλγόριθμος	1,26 ≈ 1,20, 4,79 ≈ 4,80, 0,99 ≈ 1, 1,37 ≈ 1,40, 2,58 ≈ 2,60, 1+4+1+1+2=9 0,20+0,80+0,40+0,60=2 9+2=11	2	-	-	2
Συμβατών αριθμών	1,26+4,79 ≈ 6, 1,37+2,58 ≈ 4 0,99 ≈ 1 6+4+1=11	2	3	-	**5**
Νοερός αλγόριθμος		-	3	1	**4**
Συσσώρευση ή Μ.Ο.	Όλα περίπου 2, άρα 2x5=10	-	1	-	**1**
ΣΥΝΟΛΟ		**28 (93,3%)**	**22 (73,3%)**	**6 (19,9%)**	**56**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών, 28 από τους 30 (93,3%), απάντησε σωστά σε αυτό το πρόβλημα στην πρώτη τους απάντηση. Μόλις 2 μαθητές (6,7%) έδωσαν λάθος απάντηση, η οποία μάλλον οφείλεται σε απροσεξία ή βιασύνη, αφού η επεξήγηση της σκέψης των μαθητών αυτών ήταν σωστή. Πιο συγκεκριμένα ο ένας χρησιμοποίησε τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου και ο άλλος μαθητής τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, αλλά κατέληξαν σε λάθος αποτελέσματα, 9 και 13 αντίστοιχα. Και οι δύο αυτοί μαθητές διορθώνουν τις απαντήσεις τους δίνοντας δύο σωστές απαντήσεις έκαστος (Β και Γ απάντηση). Στο σύνολο και των 3 απαντήσεων που προτείνονται από τους μαθητές δίνονται συνολικά 56 διαφορετικές σωστές απαντήσεις από τις οποίες οι 52 είναι μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Η στρατηγική η οποία εφαρμόζεται από την πλειοψηφία των μαθητών και μαθητριών είναι η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου η οποία θεωρείται και η πιο κατάλληλη στρατηγική για αυτή το πρόβλημα και ακολουθεί η στρατηγική της στρογγυλοποίησης η οποία επιλέγεται από μεγάλο ποσοστό μαθητών και εμφανίζεται σε τρεις διαφορετικές μορφές όπως αυτές περιγράφονται στον πίνακα 13.

Πρόβλημα 2

«Να εκτιμηθεί περίπου ο αριθμός των επισκεπτών σε μια έκθεση από την ακόλουθη λίστα:

Δευτέρα 72.250, Τρίτη 63.819, Τετάρτη 67.480, Πέμπτη 73.180, Παρασκευή 74.918, Σάββατο 68.490».

Πίνακας 16. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 2 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	Σύνολο
Συσσώρευση ή Μ.Ο.*	1)όλα περίπου 70.000 άρα 70x6=42, άρα 420.000 2) Τα 72.250, 73.180, 74.918 όλα περίπου 73.000, και τα 63.819, 67.480,68.490 περίπου 65.000 άρα 3x73+3x65	5	6	4	**15**
Εμπρόσθιου άκρου	Α+Β+Γ	10 (=8+1+1)	3 (=2+1)	2	**15**
Α)Εμπρόσθιου άκρου	72+63+67+73+74+68=417 Και λίγο παραπάνω περίπου 2 ή 3 ώστε να έρθει πιο κοντά στο αποτέλεσμα. Άρα 420.000	8	2	2	**12**
Β)Εμπρόσθιου άκρου & συμβατοί αριθμοί	67+73=140 (Τε +Πε) 72+68 =140 (Δε + Σα) 74+63 $\approx$ 140 (Τρ + Πα) 3x140=420, άρα 420.000	1	1	-	**2**
Γ)Εμπρόσθιο άκρο & συμβατοί αριθμοί & στρογγυλοποίηση	67+73=140 (Τε +Πε) 72+68 =140 (Δε + Σα) 74+63 $\approx$ 140 (Τρ + Πα) 3x140=420, άρα 420.000	1	-	-	**1**
Στρογγυλοποίηση	Α+Β	5 (=3+2)	9 (=7+2)	1	**15**
Α)Στρογγυλοποίηση & νοερός αλγόριθμος	72.250 $\approx$ 72.000, 63.819 $\approx$ 64.000, 67.480 $\approx$ 68.000, 73.180 $\approx$ 73.000, 74.918 $\approx$ 75.000, 68.490 $\approx$ 68.000	3	7	1	**11**

Β)Στρογγυλοποίηση & συμβατοί αριθμοί & νοερός αλγόριθμος	Δε $\approx$ 70.000, Τε $\approx$ 60.000, Πα $\approx$ 70.000 70+70+60=200 ή 200.000 Τρ $\approx$ 60.000, Πε $\approx$ 70.000, Σα $\approx$ 70.000 70+70+60=200 ή 200.000 200+200=400, άρα $\approx$ 400.000	2	2	-	**4**
Κουτσούρεμα	70.000x3=210.000 60.000x3=180.000 210.000+180.000=390.000 $\approx$ 400.000	2	3	1	**6**
ΣΥΝΟΛΟ		**22 (73,3%)**	**21 (70%)**	**8 (26,7%)**	**51**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Η πλειοψηφία των μαθητών, 22 μαθητές ή το 73,3%, έδωσε σωστή πρώτη απάντηση στο πρόβλημα 2, ενώ το 26,7% των μαθητών (8 μαθητές) έδωσε λανθασμένη Α απάντηση. Οι λανθασμένες απαντήσεις οφείλονται στη δυσκολία των μαθητών να χειριστούν πενταψήφιους αριθμούς και στη συγκράτηση στην εργαζόμενη μνήμη τους των επιμέρους αθροισμάτων που υπολογίζανε. Μία μαθήτρια, η οποία εν τέλει έδωσε λανθασμένη απάντηση, προσπάθησε να υπολογίσει νοερά το ακριβές άθροισμα και μετά από 220sec κατέληξε σε λάθος αποτέλεσμα αφού δεν ήταν εφικτό να συγκρατήσει στο μυαλό της όλα τα επιμέρους αθροίσματα των μονάδων, δεκάδων κλπ. Από τους 8 μαθητές που έδωσαν λανθασμένη Α απάντηση οι έξι διορθώνουν τις απαντήσεις τους μετά από δεύτερη ή τρίτη σκέψη ενώ δύο μαθητές δεν καταφέρνουν ούτε μετά και από δεύτερη σκέψη να χειριστούν τους πενταψήφιους αριθμούς νοερά και να καταλήξουν σε μία σωστή εκτίμηση του αθροίσματός τους.

Συνολικά δόθηκαν 51 σωστές απαντήσεις και όλες μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Οι στρατηγικές οι οποίες προτιμώνται από τους μαθητές και τις μαθήτριες είναι η στρατηγική της συσσώρευσης η οποία είναι και η καταλληλότερη στρατηγική για αυτό το πρόβλημα και με το ίδιο ποσοστό προτίμησης συνολικά, μετά από τις τρεις απαντήσεις, βρίσκονται η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου και της στρογγυλοποίησης (οι οποίες όμως εμφανίζονται σε τρεις και δύο διαφορετικές μορφές η καθεμία όπως αυτές περιγράφονται στον παραπάνω πίνακα).

Πρόβλημα 3

«Ένας μαθητής που ξεκίνησε σκι έκανε 75 ώρες μάθημα και κάθε ώρα κόστιζε 36 €. Πόσο πρέπει περίπου να πληρώσει;».

Πίνακας 17. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 3 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (Ν=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Στρογγυλοποίηση*	Α+Β+Γ	8 (=4+3+1)	7 (=4+3)	3 (=2+1)	**18**
Α) Στρογγυλοποίηση & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	75≈80, 36≈40, 80x40=3.200, 4x80=320, 3.200-320=2.880	4	4	2	**10**
Β) Στρογγυλοποίηση	1)75≈70, 36x70=2.520 2)35x75	3	3	1	**7**
Γ) Στρογγυλοποίηση & εμπρόσθιο άκρο	36≈40 40x7=28, άρα 2.800	1	-	-	**1**
Νοερός αλγόριθμος	1)30x70+30x5+70x6+5x 6=2.700 2)75x4=300, 36:4=9, 9x3=27, άρα 2.700 3)6x75=450, 3x75=225, άρα 2.250+450=2.700 4)10x36=360, 360x7=2.520, 10x36=360, 360:2=180,άρα 2520+180=2.700 5)36x10=360, 360x2=720, 720x2=1.440, 1.440+1.440=2.880, 36x5=(36x10):2=180, Άρα 2.880-180=2.700	6	1	2	**9**
Προγενέστερη αντιστάθμιση	1)75≈70, 36≈40, άρα 70x40=2.800 2)75≈80, 36≈30, άρα 80x30=2.400	3	8	-	**11**
Επιμεριστικότητα	100x35=3.500, 20x35=700, 3.500-175=2.800, 5x35=(10x35):2=175, Άρα 2.800-175=2.625	-	1	-	**1**
Άλλη στρατηγική	36≈33,3x33≈100, 75:3=25 άρα 25x100=2.500	-	-	1	**1**
ΣΥΝΟΛΟ		**17 (56,6%)**	**17 (56,7%)**	**6 (20%)**	**40**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Μόλις το 36,7% των μαθητών του δείγματος εφαρμόζει σωστά υπολογιστική εκτίμηση στην πρώτη του απάντηση. Από τους 13 μαθητές που δίνουν λανθασμένη Α απάντηση μόλις οι 5 ανακαλύπτουν τα λάθη τους και δίνουν σωστή απάντηση με τη δεύτερη ή τρίτη προσπάθεια αλλά όλες μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Συνολικά δίνονται 40 διαφορετικές σωστές απαντήσεις από τις οποίες οι 31 είναι μέσω της χρήσης στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Η στρατηγική η οποία εμφανίζεται περισσότερο (45%) είναι η στρογγυλοποίηση η οποία όμως χρησιμοποιείται σε τρεις διαφορετικές μορφές ενώ αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών (22,5%) επιλέγουν να υπολογίσουν με ακρίβεια το πρόβλημα. Στο σύνολο και των 3 απαντήσεων και η στρατηγική της προγενέστερης αντιστάθμισης κατέχει επίσης υψηλή θέση (27,5%) στην επιλογή από τους μαθητές και τις μαθήτριες η οποία όμως εφαρμόζεται περισσότερο ως δεύτερη επιλογή.

Πρόβλημα 4

«Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 3.388:7».

Πίνακας 18. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 4 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Συμβατών αριθμών*	Α+Β	12 (=7+5)	8 (=5+3)	6 (=4+2)	**26**
Α)Συμβατών αριθμών	3.388≈3.500, 3.500:7=500	7	5	4	16
Β)Συμβατών αριθμών & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	1)2.800 < 3.388 < 3.500, άρα 2.800:7 < 3.388:7 < 3.500:7 400 < 3.388:7 < 500, περίπου 480 γιατί το 3.388 είναι πιο κοντά στο 3.500. 2)3.388≈3.500, 35x100=3.500,5x7=35, 5x100=500 όμως επειδή είναι λιγότερο από 3.500 άρα περίπου 480.	5	3	2	10
Νοερός αλγόριθμος	Α+Β	8 (=6+2)	2	2 (=1+1)	**12**
Α)Νοερός αλγόριθμος & στρογγυλοποίηση	3.388:7, 33:7≈4, 58:7≈8, άρα περίπου 480.	6	2	1	9
Β)Νοερός αλγόριθμος	3.388:7=484 (*«Σκεφτόμουν τον εαυτό μου πως ήμουν στον πίνακα»*)	2	-	1	3

Στρογγυλοποίηση	Α+Β	1	9 (=5+4)	1	**11**
Α)Στρογγυλοποίηση & νοερός αλγόριθμος	$3.300:7 \approx 470$	1	5	-	6
Β)Στρογγυλοποίηση & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	$3.388 \approx 3.000$, $3.000:7 \approx 400$, και επειδή κατέβηκα αρκετά άρα θα ανέβω στο 450 περίπου.	-	4	-	4
Άλλη στρατηγική	Το 7 στο 7.000 χωράει 1.000 φορές. Το 3.388 είναι σχεδόν το μισό του 7.000 άρα θα χωράει λίγο λιγότερο από 500.	1	1	-	**2**
ΣΥΝΟΛΟ		**22 (73,3%)**	**20 (66,7%)**	**9 (30%)**	**51**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Από το σύνολο των 30 συμμετεχόντων στην έρευνα, οι 22 δίνουν σωστή Α απάντηση, με 14 μαθητές να κάνουν χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Η στρατηγική των συμβατών όρων εμφανίζει τη μεγαλύτερη συχνότητα (ν=12). Από τους 8 μαθητές που δίνουν λανθασμένη απάντηση στην πρώτη τους προσπάθεια οι 7 από αυτούς διορθώνουν τα λάθη τους και δίνουν σωστές απαντήσεις είτε με τη δεύτερη προσπάθεια, είτε με την τρίτη είτε και με 2 διαφορετικές σωστές απαντήσεις. Στο σύνολο και των τριών διαφορετικών απαντήσεων που προτείνονται δίνονται 51 διαφορετικές απαντήσεις με 39 να δίνονται μέσω χρήσης στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Η στρατηγική η οποία κατέχει την πρώτη θέση προτίμησης (ν=26), των μαθητών και μαθητριών, είναι των συμβατών όρων, η οποία είτε εφαρμόζεται μετατρέποντας το 3.388 σε 3.500 και εκτελώντας νοερά τη διαίρεση 3.500:7 είτε άλλοι εκτελούν και μία μεταγενέστερη αντιστάθμιση στο πηλίκο με σκοπό να βελτιώσουν την τελική τους εκτίμηση. Μεγάλος αριθμός σωστών απαντήσεων δίνονται και με τη χρήση του νοερού αλγόριθμου και υπολογισμού της λύσης με ακρίβεια (ν=12) ενώ η τρίτη στρατηγική η οποία ακολουθεί σε προτίμηση είναι η στρατηγική της στρογγυλοποίησης (ν=11) η οποία επιλέγεται περισσότερο ως δεύτερη απάντηση.

Πρόβλημα 5

«Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 7/8 + 12/13 + 23/45».

Πίνακας 19. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 5 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Ειδικών αριθμών*	Α+Β+Γ	14 (=9+5)	10 (=8+1+1)	-	**24**
Α)Ειδικών αριθμών	7/8≈1, 12/13≈1, 23/45≈1/2 ή 0,5, άρα 1+1+0,5=2,5	9	8	-	17
Β)Ειδικών αριθμών & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	7/8≈1, 12/13≈1, 23/45≈1/2 ή 0,5, άρα 1+1+0,5=2,5 (όμοια με το παραπάνω παράδειγμα), όμως στο τέλος αποτέλεσμα ≈ 2,3 ή λιγότερο από 2,5, αφού το 7/8 και το 12/13 είναι λιγότερο από 1 και το 23/45 είναι σχεδόν 0,5 άρα το άθροισμά τους θα είναι μικρότερο από 2,5 (2,3 ή 2,4).	5	1	-	6
Γ)Ειδικών αριθμών & νοερός αλγόριθμος	7/8≈8/8=1, 12/13≈13/13=1, 1+1+23/45=2+23/45=90/45+2 3/45=113/45 ≈2,5	-	1	-	1
Αλλαγή μορφής αριθμού & ειδικών αριθμών & νοερός αλγόριθμος	7/8≈0,9, 12/13≈0,9, 23/45≈ 0,5, άρα 0,9+0,9+0,5=2,3	5	6	-	**11**
Άλλη στρατηγική	7/8+12/13+23/45≈100/45, ομώνυμα με παρονομαστές περίπου 40, 7/8x5/5=35/40, 12/13x3/3=36/39, 23/45x1=23/45 35/40+36/39+23/45≈100/45	3	-	-	**3**
Νοερός αλγόριθμος	1)7/8=8/8-1/8, 1/8=1/2x0,25=0,125, άρα 7/8=1-0,125=0,875 12/13=13/13-1/13≈0,93, το 13 επειδή είναι πρώτος αριθμός είναι πιο δύσκολο να υπολογιστεί το 1/13 νοερά. 23/45≈0,51 2)7/8≈0,85, 12/13≈0,9, 23/45 ≈0,51 Το 12/13 είναι πιο κοντά στο 1 από ότι το 7/8, σκέφτεται το παράδειγμα της πίτσας.	-	5	-	**5**
ΣΥΝΟΛΟ		**22 (73,3%)**	**21 (70%)**	**-**	**43**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Όμοια με το πρόβλημα 5 το πλήθος των επιτυχημένων Α απαντήσεων των μαθητών είναι 22 και όλες είναι μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Συνολικά όλες οι σωστές απαντήσεις που δόθηκαν είναι 43, με τις 38 από αυτές να δίνονται μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και τη στρατηγική των ειδικών αριθμών να κυριαρχεί. Αξιοσημείωτο είναι ότι δε δίνεται καμία τρίτη απάντηση από μαθητή ή μαθήτρια ενώ δίνεται από 21 μαθητές Β απάντηση. Οι 8 μαθητές και μαθήτριες οι οποίοι έδωσαν λανθασμένη Α απάντηση καταφέρνουν όλοι να διορθώσουν το λάθος τους και να δώσουν μία σωστή εκτίμηση με τη δεύτερη απάντηση.

Πρόβλημα 6

«Στα 816 ml μιας ουσίας το 9,84% είναι αλκοόλη. Πόση περίπου αλκοόλη έχει η ουσία;».

Πίνακας 20. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 6 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	Σύνολο
Ειδικών αριθμών*	Α+Β	9 (=5+4)	10 (=7+3)	1	**20**
Α)Ειδικών αριθμών & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	Το 9,84%≈10% του 816 είναι περίπου 81,6 ml≈81 ή 80ml, επειδή ανεβάσαμε το ποσοστό αφαιρούμε λίγο από το ποσό.	5	3	-	8
Β)Ειδικών αριθμών	9,84%≈10%, άρα το 10% των 816ml είναι 81,6ml.	4	7	1	12
Στρογγυλοποίηση	Α+Β	8	7 (=6+1)	1	**16**
Α)Στρογγυλοποίηση & Ειδικοί αριθμοί	1)9,84%≈10%, 816≈800. Άρα το 10% του 800 είναι 80 ml. 2)9,84%≈10%, 816≈820. Άρα το 10% του 820 είναι 82 ml.	8	6	1	15
Β)Στρογγυλοποίηση & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	816≈800, 9,84%≈9%, άρα 800x9% και πιο πάνω από αυτό το ποσό γιατί τα κατεβάσαμε και τα δύο. Στρογγυλοποίηση και των 2 παραγόντων.	-	1	-	1
Εμπρόσθιου άκρου & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	9,84x816, 8x9=72 άρα πάνω από 72 περίπου 76 ή 78 ml.	2	-	-	**2**
Άλλη στρατηγική	Το 9,84 είναι στα 100 , άρα στα 816 θα κάνουμε 9x8 για	1	-	1	**2**

	να φτάσουμε σε αυτό το ποσό, άρα περίπου 80 ml.				
ΣΥΝΟΛΟ		**20 (66,7%)**	**17 (56,7%)**	**3 (10%)**	**40**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Το 66,7% του συνόλου του δείγματος (20 μαθητές/τριες) σημειώνουν επιτυχία στο πρόβλημα 6 μετά την πρώτη τους απάντηση και όλοι χρησιμοποιούν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Η στρατηγική των ειδικών αριθμών χρησιμοποιείται περισσότερο (45%) και ακολουθεί η στρατηγική της στρογγυλοποίησης (40%) και των ειδικών αριθμών μαζί.

Παράλληλα και στο σύνολο των 40 σωστών απαντήσεων, όπου όλες λύνονται με στρατηγικές εκτίμησης, οι δύο παραπάνω στρατηγικές κυριαρχούν. Από τους 10 μαθητές και μαθήτριες που αποτυγχάνουν στην πρώτη τους προσπάθεια οι 5 καταφέρνουν να ανακαλύψουν το λάθος τους και να το διορθώσουν με τη δεύτερη προσπάθεια.

Πρόβλημα 7

«Υπολογίστε περίπου τον αριθμό μαθητών των τριών σχολείων

Α' Λύκειο: 1.378 μαθητές , Β' Λύκειο :236 μαθητές , Γ' Λύκειο: 442 μαθητές».

Πίνακας 21. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 7 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Στρογγυλοποίηση & νοερός αλγόριθμος	1.378≈1.400, 236≈250, 442≈450, άρα 1.400+250+450=2.100	13	2	1	**16**
Συμβατοί αριθμοί	Α+Β+Γ	6 (=3+2+1)	1	-	**7**
Α)Συμβατοί αριθμοί & στρογγυλοποίηση & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	1.378+236≈1.500, 442≈440 άρα 1.500+440=1.940≈2.000	3	-	-	3
Β)Συμβατοί αριθμοί & στρογγυλοποίηση	1.380+236≈1.500, 442≈500, άρα 1.500+500=2.000	2	-	-	2
Γ)Συμβατοί αριθμοί & Νοερός αλγόριθμος & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	236+442≈700,1.378≈1.300, 1.300+700=2.000, 78+36≈100 άρα 2.000+1.00=2.100	1	-	-	1

Κουτσούρεμα	Α+Β	3	3	-	**6**
Α)Κουτσούρεμα		-	3	-	3
Β)Κουτσούρεμα & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	1)236≈200, 442≈400, 1.378 ≈1.300 300+400+200=900 1.000+900=1.900 και μαζί με τους υπόλοιπους αριθμούς άρα γύρω στις 2.000. 2)236≈200, 442≈400, 1.378 ≈1.000 200+400+1.000=1.600 Και τα υπόλοιπα άρα περίπου 2.000.	3	-	-	3
Προγενέστερη αντιστάθμιση & Νοερός αλγόριθμος	1)1.378≈1.400, 442≈440, 236 ≈230,άρα 1.400+440+230=2.070. Τα δύο πρώτα τα στρογγυλοποιεί προς τα πάνω και το τρίτο προς τα κάτω. 2)1.378≈1.500 ανεβάζω τους μαθητές εδώ και τους κατεβάζω στα άλλα 2 λύκεια ώστε να έρθει πιο κοντά στο πραγματικό, 442≈400, 236≈200, Άρα 1.500+400+200=2.100	3	-	-	**3**
Νοερός αλγόριθμος	236≈200, 442≈400, 1.378≈ 1.300, 1.300+400+200=1.900 78+42+36=156 1.900+156=2.056	2	6	-	**8**
Εμπρόσθιο άκρο*	13+2+5+4=19, 1.900 και λίγο παραπάνω, άρα περίπου 2.000.	1	-	-	**1**
ΣΥΝΟΛΟ		**28 (93,3%)**	**12 (40%)**	**1 (3,3%)**	**41**

*Πιο κατάλληλη στρατηγική

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων, 28 ή το 93,3%, σημειώνουν επιτυχία στην πρώτη τους απάντηση και οι 26 από αυτούς χρησιμοποιούν στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης, με τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης να εφαρμόζεται περισσότερο. Στο σύνολο των 41 σωστών απαντήσεων, οι 37 είναι μέσω στρατηγικών εκτίμησης και η στρογγυλοποίηση χρησιμοποιείται περισσότερο. Από τους 2 μαθητές που δίνουν τις λανθασμένες απαντήσεις δε προτείνονται άλλες λύσεις, οπότε δεν ανακαλύπτουν και δε διορθώνουν το λάθος τους. Αξιοσημείωτο είναι ότι η πιο κατάλληλη στρατηγική για αυτό το πρόβλημα, η οποία είναι η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου, χρησιμοποιείται μόνο από ένα μαθητή στο σύνολο και των 41 σωστών απαντήσεων που δίνονται.

Πρόβλημα 8

«Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 437 x 8».

Πίνακας 22. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 8 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Στρογγυλοποίηση	Α+Β	8 (=5+3)	10 (=6+4)	3	**21**
Α)Στρογγυλοποίηση	437≈440, 440x8=3.520	5	6	-	11
Β)Στρογγυλοποίηση & μεταγενέστερη αντιστάθμιση	μεταγενέστερη αντιστάθμιση: 3x8=24, άρα 3.520-24 περίπου 3.500.	3	4	3	10
Εμπρόσθιου άκρου*	Α+Β	6 (=1+5)	2	-	**8**
Α)Εμπρόσθιου άκρου	8x400=3.200	1	-	-	1
Β)Εμπρόσθιου άκρου & μεταγενέστερη αντιστάθμιση	8x400=3.200 και 8x30=240, Άρα 3.200+240=3.440 και λίγο παραπάνω άρα περίπου 3.500.	5	-	-	5
Ειδικών αριθμών & Μεταγενέστερη αντιστάθμιση	8≈10 οπότε 437x10=4.370, 2x437≈870 άρα 4.370-870=3.500	-	2	-	**2**
Επιμεριστικότητα	1)437≈440, 8≈10, οπότε 10x440=4.400, 2x440=880, άρα 4.400-880=3.520 2)8≈10 οπότε 437x10=4.370, 2x437≈870 άρα 4.370-870=3.500	2	-	-	**2**
Νοερός αλγόριθμος	400x8+30x8+7x8=3.496	1	6	3	**10**
Παραγοντοποίηση	440x2x2x2=3.520	-	1	-	**1**
Άλλη στρατηγική	1)Νοερός αλγόριθμος και στρογγυλοποίηση κατά τη διάρκεια του υπολογισμού του: 4x8=32 άρα 3.200, 3x8=24 άρα 240, 7x8=56, 56+40≈100 οπότε περίπου 3.500. 2)437x2≈900, 8:2=4, άρα 900x4=3.600	3	-	-	**3**
ΣΥΝΟΛΟ		**20 (66,7%)**	**21 (70%)**	**6 (20%)**	**47**

* Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Τα 2/3 των μαθητών και μαθητριών που συμμετέχουν στην έρευνα σημειώνουν επιτυχία στην πρώτη τους απάντηση, με τις στρατηγικές της στρογγυλοποίησης και του εμπρόσθιου άκρου να εφαρμόζονται περισσότερο. Μεγαλύτερος αριθμός μαθητών σημειώνει επιτυχία στη δεύτερη απάντησή τους από ότι στην πρώτη με τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης και πάλι να κυριαρχεί αλλά και το νοερό αλγόριθμο για υπολογισμό με ακρίβεια να σημειώνει αύξηση. Στο σύνολο όλων των σωστών απαντήσεων που δόθηκαν, 47 στο άθροισμα (37 με εκτίμηση), η στρογγυλοποίηση κατέχει την πρώτη θέση και ακολουθούν ο νοερός αλγόριθμος και η στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου. Επίσης 6 από τους 10 μαθητές που αποτυγχάνουν στη πρώτη τους προσπάθεια διορθώνουν το λάθος τους και επιτυγχάνουν στη δεύτερη προσπάθειά τους χρησιμοποιώντας όλοι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης.

Πρόβλημα 9

«Έξι ανεξάρτητες μετρήσεις έγιναν από μια ομάδα για την εύρεση του ύψους του βουνού Έβερεστ:

28.990ft, 28.991ft, 28.994ft, 28.998ft, 29.001ft, 29.026ft.

Με βάση αυτές τις μετρήσεις πόσο περίπου μπορούμε να πούμε ότι είναι το ύψος του Έβερεστ;».

Πίνακας 23. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 9 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (Ν=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Συσσώρευση ή Μ.Ο.*	Όλες οι μετρήσεις είναι κοντά στο 29.000, άρα απάντηση 29.000	20	5	-	**25**
Άλλη στρατηγική	Τα 3 πρώτα ποσά (28.990, 28.991, 28.994) είναι πολύ κάτω και το 29.026 είναι πολύ ψηλά και παίρνει το 26 από το 29.026 και το μοιράζει στα 3 πρώτα (10+9+6) ώστε να τα κάνει 29.000. Τα 29.998 και 29.001 τα λέει περίπου 29.000 και άρα απάντηση Μ.Ο. 29.000.	3	2	1	**6**
Στρογγυλοποίηση & νοερός αλγόριθμος	Πρόσθεσα 6 φορές το 29.000 και μετά διαίρεσα με 6: (29.000x6):6	1	2	1	**4**
Νοερός αλγόριθμος	Τα 3 πρώτα ποσά (28.990, 28.991, 28.994) είναι πολύ κάτω και το 29.026 είναι πολύ ψηλά και παίρνει το 26 από το 29.026 και το μοιράζει στα 3 πρώτα(10+9+6) ώστε να τα κάνει 29000. Περισσεύει 1 και μαζί με το 1 του 29.001 τα κολλάει στο 28.998. 28.990+10=29.000, 28.991+9=29.000, 28.994+6=29.000,	-	3	-	**3**

	28.998+2=29.000, άρα Μ.Ο. με ακρίβεια 29.000.				
Εμπρόσθιου άκρου	(29+29+29+29+29+29):6=29, άρα 29.000	**-**	1	**-**	**1**
ΣΥΝΟΛΟ		**24 (80%)**	**13 (43,3%)**	**2 (6,7%)**	**39**

* Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Σε ποσοστό 80% (24 άτομα, N=30) οι συμμετέχοντες στη έρευνα απαντούν σωστά στην Α απάντηση με τη στρατηγική της συσσώρευσης να κυριαρχεί συντριπτικά. Αλλά και στο σύνολο των 39 σωστών απαντήσεων, μετά και από τους τρεις διαφορετικές απαντήσεις, η στρατηγική της συσσώρευσης εξακολουθεί να κατέχει την πρώτη θέση αλλά υπάρχουν και 3 μαθητές οι οποίοι επιλέγουν να υπολογίσουν με ακρίβεια το πρόβλημα. Ακόμα και οι 4 από τους 6 μαθητές που αποτυγχάνουν στην πρώτη τους προσπάθεια εφαρμόζουν τη στρατηγική της συσσώρευσης και δίνουν σωστή απάντηση με τη δεύτερη προσπάθεια.

Πρόβλημα 10

«Η Μαρία έτρεξε 1/2km το πρωί και 3/8km το απόγευμα.

Έτρεξε τουλάχιστον 1km ;».

Πίνακας 24. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 10 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Ειδικών αριθμών*	1)Το 1/2 είναι μισό χιλιόμετρο και το 3/8 είναι λιγότερο από μισό χιλιόμετρο, θα έπρεπε να είναι 4/8 για να είναι μισό χιλιόμετρο για να μας κάνει 1 χιλιόμετρο άρα έτρεξε λιγότερο από1km. 2)1/2=0,5km και 3/8<0,5km, άρα δεν έτρεξε τουλάχιστον 1km.	13	8	4	**25**
Αλλαγή μορφής αριθμών & νοερός αλγόριθμος	1)1/2km=500m, 3/8km≈300, άρα 500+300=800m 2)1/2km=0,5 , 3/8km ≈0,4, άρα 0,5 +0,4=0,9 3)1/2 είναι μισό χιλιόμετρο και το 3/8 αφού είναι λιγότερο από το μισό άρα έτρεξε γύρω στα 400m. Άρα	11	1	-	**12**

	έτρεξε περίπου 900m, άρα λιγότερο από 1000m, δηλαδή 1km.				
Νοερός αλγόριθμος	1/2 + 3/8 = 7/8	4	16	2	**22**
Σύνολο		**28 (93,3%)**	**25 (83,3%)**	**6 (20%)**	**59**

*Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Άλλο ένα πρόβλημα στο οποίο σημειώθηκαν επιτυχημένες απαντήσεις που φτάνουν τις 28 στην πρώτη απάντηση, είναι το πρόβλημα 10, με τις στρατηγικές των ειδικών αριθμών και της αλλαγής μορφής αριθμού να κυριαρχούν. Μόλις 4 μαθητές/τριες στην πρώτη τους προσπάθεια υπολογίζουν με ακρίβεια ενώ στη δεύτερη προσπάθεια ο νοερός αλγόριθμος κατέχει την ψηλότερη θέση. Στο σύνολο και των 59 σωστών απαντήσεων οι 37 δίνονται μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και οι 22 μέσω νοερού αλγόριθμου. Η στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης που σημειώνει τη μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης είναι η στρατηγική των ειδικών αριθμών (67,5% των σωστών απαντήσεων μέσω στρατηγικών εκτίμησης) και ακολουθεί η στρατηγική της αλλαγής μορφής αριθμών. Ο μαθητής και η μαθήτρια που απέτυχαν στην πρώτη τους απάντηση διορθώνουν το λάθος τους στη δεύτερη απάντησή τους.

Πρόβλημα 11

«Το αποτέλεσμα ισούται περίπου με 200;

35 + 42 + 40 +38 +44».

Πίνακας 25. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 11 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Νοερός αλγόριθμος	1)3+4+4+3+4=18 ή 180, 5+2+8+4=19,άρα 180+19=199 2)42+40+44=126, 126+35+38=199 3)42+38≈40+40=80 και 80+40=120, 44≈40, 120+40=160, 35≈30, 160+30=190, άρα 190+5+4=199	11	9	1	**21**

Συσσώρευση ή Μ.Ο*	1)Όλα περίπου 40, άρα 40x5=200 2) «Ο μέσος όρος των αριθμών είναι το 40. 4 φορές το 5. 4x5=20 και το μηδενικό άρα 200. Οπότε το αποτέλεσμα θα είναι περίπου 200».	7	6	5	**18**
Στρογγυλοποίηση	Α+Β	6 (=5+1)	6	-	**12**
Α)Στρογγυλοποίηση	1)35, 42≈40, 40, 38≈40, 44 ≈45, άρα 3x40=120, 35+45=80, 120+80=200 2)35≈40, 42≈40, 40=40, 38≈ 40, 44≈40, άρα 40+38≈ 40+40=80, 80+40=120, 120+40=180, 180+40=200	5	6	-	11
Β)Στρογγυλοποίηση & Συμβατοί αριθμοί & Κουτσούρεμα	35=35 και 44≈45, άρα 35+45=80 42≈40, 38≈30, άρα 40+30=70, 44≈40. 80+70+40=190≈200	1	-	-	1
Συμβατοί αριθμοί	*«Πήρα ζευγάρια. 35+44=80, 42+38=80. 80+80=160, 160+40=200, 199 όμως για την ακρίβεια».*	3	1	1	**5**
Εμπρόσθιο άκρο & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	3x4=12, 2x3=6, 12+6=18, 2+8=10 Άρα περίπου 200	2	2	1	**5**
Κουτσούρεμα	30+40+40+30+40=180	-	1	2	**3**
ΣΥΝΟΛΟ		**29 (96,7%)**	**25 (83,3%)**	**10 (33,3%)**	**64**

*Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Σχεδόν όλοι οι μαθητές απαντούν σωστά στο πρόβλημα αυτό με την πρώτη τους προσπάθεια χρησιμοποιώντας μία ποικιλία από στρατηγικές. Συνολικά συγκεντρώνονται 64 σωστές απαντήσεις με 43 απαντήσεις να δίνονται μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Μεγάλο ποσοστό χρήσης σημειώνει ο νοερός αλγόριθμος (32,8%). Οι στρατηγικές οι οποίες χρησιμοποιούνται περισσότερο είναι η στρατηγική της συσσώρευσης (28,2%) και η στρατηγική της στρογγυλοποίησης (18,8%). Ο ένας και μοναδικός μαθητής ο οποίος απέτυχε στην πρώτη του προσπάθεια ανακαλύπτει το λάθος του και δίνει σωστή απάντηση με τη δεύτερη προσπάθεια.

Πρόβλημα 12

«Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 62x79».

Πίνακας 26. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 12 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (Ν=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Στρογγυλοποίηση*	Α+Β+Γ	15 (=12+1+2)	13 (=6+3+4)	3 (=1+2)	**31**
Α)Στρογγυλοποίηση	1)62≈60, 79≈80 άρα 60x80=4.800 2)79≈80, 80:2=40, 62≈60, 60x2=120, 120x40=4.800	12	6	1	19
Β)Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	Στρογγυλοποίησα το 79 το έκανα 80. Μετά πολλαπλασίασα το 60x80=4.800 και το 2x80=160. Πρόσθεσα το 4.800+160=4.960 και μετά αφαίρεσα 1 φορά το 60, άρα 4.960-60=4.900	1	3	-	4
Γ)Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος	1)79≈80, 80x62=4.960 2)Έκανα 79x10=790, 790x2=1.580, 1.580x2 περίπου 3.000, και 3.000+1.580=4.580 και είναι και άλλες 2 φορές από το 62, αλλά δεν το έκανα. Στρογγυλοποίησα το 62 σε 60.	2	4	2	8
Κουτσούρεμα & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	79≈70, 62≈60, 60x70=4.200, άρα περίπου 4.500.	1	-	-	**1**
Επιμεριστικότητα	100x80=8.000, 10x80=800, 8.000:2=4.000 άρα 50x80=4.000, Άρα είναι: 4.000+800=4.800	1	-	-	**1**
Άλλη στρατηγική	7x7=49 άρα 4.900.	-	1	-	**1**
ΣΥΝΟΛΟ		**17 (56,7%)**	**14 (46,7%)**	**3 (10%)**	**34**

*Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Το τρίτο σε δυσκολία πρόβλημα θεωρήθηκε η εκτίμηση του παραπάνω γινομένου. Σε ποσοστό 56,7% σημειώνονται οι επιτυχημένες απαντήσεις στην Α τρόπο ενώ στο σύνολο και των τριών τρόπων δίνονται 34 απαντήσεις όλες μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Υπήρξαν μαθητές που προσπάθησαν να υπολογίσουν νοερά και με ακρίβεια το γινόμενο αλλά στη συνέχεια ή κατέληξαν σε λάθος αποτέλεσμα ή αφού συνειδητοποίησαν ότι έχαναν πολύ χρόνο και δε μπορούσαν να το υπολογίσουν εύκολα, άλλαξαν μέθοδο και κατέληγαν στην εκτίμηση, όπως είπαν οι ίδιοι στη συνέντευξη. Η στρατηγική η οποία κυριαρχεί είναι η στρατηγική της στρογγυλοποίησης η οποία εμφανίζεται με 3 διαφορετικές μορφές. Από τους 13 μαθητές οι οποίοι δίνουν λανθασμένη πρώτη απάντηση μόνο οι 4 καταφέρνουν να διορθώσουν το λάθος τους στη δεύτερη ή τρίτη προσπάθεια.

Πρόβλημα 13:

«Ένας εργάτης δούλεψε 28 ημέρες για 56 € τη μέρα. Πόσο περίπου θα πληρωθεί;».

Πίνακας 27. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 13 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Προγενέστερη αντιστάθμιση	Α+Β+Γ	9 (=4+4+1)	3	2	**14**
Α)Προγενέστερη αντιστάθμιση	28≈30, 56≈50 άρα 30x50=1.500	4	-	-	4
Β)Προγενέστερη αντιστάθμιση & νοερός αλγόριθμος	1)28≈30, 56≈55, άρα 30x55=1650 2)28≈25, 56≈60 άρα 25x60, 50x60=3.000, 3.000:2=1.500	4	3	2	9
Γ)Προγενέστερη αντιστάθμιση & επακολουθούμενη αντιστάθμιση	28≈30, 56≈50 άρα 30x50=1.500 και λίγο παραπάνω	1	-	-	1
Στρογγυλοποίηση*	Α+Β+Γ	6 (=3+2+1)	14 (=2+10+2)	3 (=1+1+1)	**23**
Α)Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	1)28≈30, 30x56, 30x50=1.500, 30x6=180, 1.500+180=1.680, όμοια με προηγούμενο και επακολουθούμενη αντιστάθμιση, 2x56≈100, άρα 1.680-100=1.580 2)10x56=560, 2x56=112, 560+560=1.120, 1.120+560 περίπου 1.700	3	2	1	6
Β)Στρογγυλοποίηση & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	28≈30, 56≈60, 6x3=18 άρα 1.800. Βγάζω και 2 μέρες, άρα 2x60=120 1.800-120=1.680	2	10	1	13
Γ)Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος	28≈30, 30x56, 30x50=1.500, 30x6=180, 1.500+180=1.680	1	2	1	4
Επιμεριστικότητα	10x56=560, 2x56=112, 560+560=1.120, 1.120+560 περίπου 1.700	1	-	-	**1**
Νοερός αλγόριθμος		-	3	1	**4**
ΣΥΝΟΛΟ		**16 (53,3%)**	**20 (66,7%)**	**6 (20%)**	**42**

*Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Μόλις το 53,3% των μαθητών/τριών σημειώνει επιτυχία στην πρώτη του προσπάθεια με τις στρατηγικές της προγενέστερης αντιστάθμισης και της στρογγυλοποίησης να κυριαρχούν, οι οποίες εμφανίζονται και οι δύο σε 3 διαφορετικές μορφές. Αλλά και οι 14 μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση όλοι έκαναν χρήση κάποιας στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης αλλά είτε έκαναν λάθη στις πράξεις και κατέληξαν σε λάθος απάντηση είτε η εκτίμησή τους ήταν λανθασμένη αφού απείχε αρκετά από την πραγματική. Στο σύνολο των 42 διαφορετικών σωστών απαντήσεων που δίνονται οι δύο παραπάνω στρατηγικές ξεχωρίζουν ενώ υπάρχουν και 4 επιτυχημένες απαντήσεις μέσω του νοερού αλγορίθμου για ακριβή υπολογισμό. Από τους 14 μαθητές και μαθήτριες που δίνουν λανθασμένη απάντηση στην πρώτη τους προσπάθεια οι 11 ανακαλύπτουν και διορθώνουν τα λάθη τους στο Β και Γ τρόπο.

Πρόβλημα 14

«Έξι ομάδες μαθητών έκαναν με λουλούδια ανθοδέσμες για τη σχολική γιορτή. Κάθε ομάδα έκανε 27, 49, 38, 65, 56, 81 ανθοδέσμες. Πόσες ανθοδέσμες έχουμε περίπου συνολικά;».

Πίνακας 28. Οι συχνότητες των στρατηγικών για το πρόβλημα 14 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (Ν=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	**Β απάντηση**	**Γ απάντηση**	**Σύνολο**
Στρογγυλοποίηση	Α+Β+Γ	12 (=6+2+4)	5 (=3+2)	1	**18**
Α)Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος	1) 30+40+50+60+70+80=330 2) 30+50=40+65+60+80=325	6	3	-	9
Β)Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος & Επακολουθούμενη αντιστάθμιση	27≈30, 49≈50, 38≈40, 65=70, 56≈60, 81≈80, 30+50+40+70+60+80=330, αφαιρώ περίπου 20 άρα 330-320=310	2	-	1	3
Γ)Στρογγυλοποίηση & Συμβατοί αριθμοί & Νοερός αλγόριθμος	*1)30+40+50+60+70+80= 3x110=330, γιατί 30+80=110, 40+70=110, 50+60=110* *2)27≈25, 49≈50, 38≈40, 65=65, 56≈60, 81≈80, 25+65=90, 50+40=90, 80+60=140, 90+90+140=320* *3)81+49=130, 65+56≈60+50=110, 27+38≈30+30=60 άρα 130+110+60=270*	4	2	-	6

Προγενέστερη αντιστάθμιση	1)27≈30, 49≈50, 38≈40, 65=65, 56≈55,81≈80, 30+50+40+65+55+80=320. 2)Τους 3 τους ανεβάζω και τους 3 τους κατεβάζω. 27≈30, 49≈50, 38≈40, 65=60, 56≈ 50, 81≈80 άρα 30+50+40+60+50+80=310.	7	3	-	**10**
Συμβατοί αριθμοί*	1)38+56≈100, 27+81≈100, 49+56≈100, άρα 3x100=300 2)27+81≈110, 38+65≈110, 49+56≈110, 3x110=330, αφαιρώ λίγο άρα περίπου 320.	6	5	1	**12**
Εμπρόσθιο άκρο	8+2=10, 5+6=11,11+10=21, 4+3=7, 10+11+7=28 άρα περίπου 280 και κάτι παραπάνω.	1	2	-	**3**
Κουτσούρεμα & Νοερός αλγόριθμος	20+40+30+60+50+80=280	-	1	-	**1**
Άλλη στρατηγική	Όλα περίπου 50. Άρα 6x50=300.	-	1	-	**1**
Συσσώρευση ή Μ.Ο.	Ο μέσος όρος του 30 και του 80 είναι το περίπου 50, άρα 50x6=300.	-	-	1	**1**
Νοερός αλγόριθμος	Με μεταγενέστερη αντιστάθμιση στην εκτίμηση που έκανε ως 1^{o} πρώτο καταλήγει στην ακριβή λύση. 30+50+40+65+55+80=320 (α΄ τρόπος). 320-4=316.	-	4	-	**4**
ΣΥΝΟΛΟ		**26 (90%)**	**21 (70%)**	**3 (10%)**	**50**

*Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Οι 26 από τους 30 συμμετέχοντες σημειώνουν επιτυχία στην Α απάντηση που προτείνουν, με τις στρατηγικές της στρογγυλοποίησης, της προγενέστερης αντιστάθμισης και των συμβατών αριθμών να συγκεντρώνουν τις μεγαλύτερες συχνότητες. Οι ίδιες στρατηγικές εμφανίζουν τη μεγαλύτερη συχνότητα και στο σύνολο όλων των 50 διαφορετικών σωστών απαντήσεων στην ερώτηση αυτή. Μόλις τέσσερις συνολικά απαντήσεις δίνονται μέσω του νοερού υπολογισμού της ακριβής απάντησης. Στο σύνολο επίσης των απαντήσεων παρατηρείται η χρήση ποικιλίας από στρατηγικές. Οι δύο από τους μαθητές οι οποίοι δίνουν λανθασμένες Α απαντήσεις καταλήγουν σε επιτυχημένη απάντηση στη δεύτερη προσπάθειά τους.

Πρόβλημα 15

«Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 χιλιόμετρα σε 52 ώρες. Πόσα χιλιόμετρα διανύει περίπου σε μία ώρα;».

Πίνακας 29. Οι συχνότητες των στρατηγικών για την πρόβλημα 15 και για τις τρεις απαντήσεις σε σύνολο 30 συμμετεχόντων (N=30).

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ			
		Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	Σύνολο
Συμβατοί αριθμοί*	1)Τα 25.889km είναι περίπου 25.000 και οι 52 ώρες είναι 50. Άρα 25.000:50=2.500:5=500. 2)Σε 50 ώρες διανύει περίπου 25.000km. Σε 100 ώρες 50.000km. Άρα σε 1 ώρα διανύει 500km. 3)Σε 50 ώρες διένυσε 25.000km. Σε 25 ώρες διένυσε περίπου 12.500 χλμ. Σε 12,5 ώρες περίπου 6.000km Σε 6 ώρες περίπου 3.000km. Άρα σε 1 ώρα περίπου 500χλμ. 4)Θα το κάνουμε 26.000 και το 52 το κάνω 50. Σε 50 ώρες έκανε 26.000km, σε 1 ώρα πόσο έκανε; Θα κάνουμε χιαστί. Παρόλο που το 25.889 είναι πιο κοντά στο 26.000, θα το κάνουμε 25.000 γιατί το 25 είναι το μισό του 50, άρα έτσι θα μας βγουν πιο εύκολοι αριθμοί. Σε 50 ώρες έκανε 25.000km, σε μία ώρα πόσο έκανε. Άρα 25.000:50, αν βγάλουμε τα μηδενικά θα γίνει 2.500:5=500, άρα περίπου 500km την ώρα.	7	14	1	**22**
Στρογγυλοποίηση & Νοερός αλγόριθμος	Τα 25.889km θα τα κάνω 26.000 και τις 52 ώρες 50. Θα βγάλω τα μηδενικά και θα γίνει 2.600:5. 26 δια 5 μας κάνει περίπου 5 κόμμα κάτι άρα διανύει περίπου 500km.	3	3	1	**7**
Εμπρόσθιο άκρο	Έκανα 25:5=5, άρα 500km	1	-	-	**1**
Νοερός αλγόριθμος		-	1	-	**1**
ΣΥΝΟΛΟ		**11 (36,7%)**	**18 (60%)**	**2 (6,7%)**	**31**

*Η πιο κατάλληλη στρατηγική

Το πρόβλημα 15, όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, ήταν αυτό που δυσκόλεψε τους περισσότερους μαθητές και μαθήτριες του δείγματος. Ήταν το μοναδικό πρόβλημα στο οποίο οι αποτυχημένες απαντήσεις ήταν περισσότερες από τις επιτυχημένες σε ποσοστό 61,3% έναντι 35,5% των σωστών. Η στρατηγική η οποία εφαρμόζεται από τους περισσότερους μαθητές και στον Α τρόπο αλλά και στο σύνολο των 31 σωστών απαντήσεων είναι η στρατηγική των συμβατών όρων. Οι 15 από τους 19 μαθητές που δίνουν λανθασμένη Α απάντηση καταλήγουν σε σωστή απάντηση μετά από δεύτερη η τρίτη σκέψη.

Σύνοψη

Μετά την αναλυτική παρουσίαση των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε πρόβλημα ξεχωριστά, ακολουθεί ο παρακάτω πίνακας στον οποίο παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι στρατηγικές που εκτελέστηκαν από τους 30 συμμετέχοντες και στα 15 προβλήματα ξεχωριστά σε κάθε μία από τις 3 απαντήσεις που διατυπώνουν αλλά και συνολικά.

Παρατηρούμε ότι συνολικά δόθηκαν 688 σωστές απαντήσεις από τις οποίες οι 585 ήταν με στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Η στρατηγική η οποία κατέχει την πρώτη θέση στην επιλογή από τους μαθητές με διαφορά από τις υπόλοιπες στρατηγικές είναι η στρατηγική της στρογγυλοποίησης η οποία εφαρμόστηκε σε 221 διαφορετικές απαντήσεις.

Πίνακας 30. Σύνολο στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	Α απάντηση	Β απάντηση	Γ απάντηση	Σύνολο
Νοερός αλγόριθμος	32	59	12	**103** (15%)*
Υπολογιστική εκτίμηση (Συνολικά)	282	246	57	**585** (85%)*
Στρογγυλοποίηση	85	116	20	**221** (32,1%)* (37,8%)**
Συμβατοί αριθμοί	38	32	7	**77** (11,2%)* (13,2%)**
Ειδικών αριθμών	36	30	5	**71** (10,3%)* (12,1%)**
Συσσώρευση ή Μ.Ο.	32	18	10	**60** (8,7%)* (10,3%)**
Εμπρόσθιου άκρου	32	14	7	**53** (7,7%)* (9,1%)**
Προγενέστερη αντιστάθμιση	22	14	2	**38** (5,5%)* (6,5%)**
Αλλαγή μορφής αριθμών	16	7	-	**23** (3,3%)* (3,9%)**
Κουτσούρεμα	6	8	3	**17** (2,5%)* (2,9%)**
Επιμεριστικότητα	4	1	-	**5** (0,7%)* (0,9%)**
Παραγοντοποίηση	-	1	-	**1** (0,1%)* (0,2%)**
Άλλη στρατηγική	11	5	3	**19** (2,8%)* (3,2%)**
ΣΥΝΟΛΟ	**314**	**305**	**69**	**688**

* Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων (N_1=688), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων με υπολογιστική εκτίμηση (N_2=585).

3.3 Τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων

Αρκετοί είναι οι παράγοντες οι οποίοι μπορεί να επηρεάσουν τη δυσκολία των προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης. Αυτά είναι η φύση και το σχετικό μέγεθος των αριθμών, το είδος των πράξεων και η ποσότητα των αριθμών. Παρακάτω αναλύονται τα αποτελέσματα με βάση αυτά τα τρία χαρακτηριστικά (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

3.3.1 Ανάλυση των προβλημάτων με βάση τη φύση των πράξεων

3.3.1.1 Καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης με πρόσθεση

Σε επτά από τα 15 προβλήματα του τεστ σημειώνεται η πράξη της πρόσθεσης. Αναφορικά με το είδος των αριθμών σε 4 από αυτά υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί, σε ένα πρόβλημα δεκαδικοί αριθμοί και σε άλλα δύο κλάσματα. Σχετικά με το πλήθος των όρων της πράξης σε δύο προβλήματα υπάρχουν 6 ποσά τα οποία προστίθενται, σε άλλα δύο προβλήματα υπάρχουν πέντε ποσά, όμοια σε άλλα δύο προβλήματα τρία ποσά και σε ένα πρόβλημα δύο ποσά (δύο κλάσματα). Το σχετικό μέγεθος των αριθμών είναι από δύο ψηφία έως και πέντε ψηφία. Τα πέντε προβλήματα δίνονται σε πλαίσιο (Π1, Π2, Π7, Π10, Π14) και τα δύο δε δίνονται σε πλαίσιο (Π5, Π11).

Πίνακας 31. Συχνότητες επιτυχημένων απαντήσεων στα προβλήματα με πρόσθεση

	Α απάντηση			**Α+Β+Γ απάντηση**		
	Σύνολο σωστών απαντήσεων (N=30)	**Υπολογιστική εκτίμηση**	Νοερός αλγόριθμος	Σύνολο σωστών απαντήσεων	**Υπολογιστική εκτίμηση**	Νοερός αλγόριθμος
Π1 1,26+4,79+0,99+1,37+2,58	28 (93,3%)	**28** **(93,3%)*** **(100%)****	-	56 (62,2%)***	**52** **(92,9%)**** **(57,8%)*****	4
Π2 72.250+63.819+67.480+73.180+74.918+68.490	22 (73,3%)	**22** **(73,3%)*** **(100%)****	-	51 (56,7%)***	**51** **(100%)**** **(56,7%)*****	-
Π5 7/8+12/13+23/45	22 (73,3%)	**22** **(73,3%)*** **(100%)****	-	43 (47,8%)***	**38** **(88,4%)**** **(36,7%)*****	5
Π7 1.378+236+442	28 (93,3%)	**26** **(86,7%)*** **(92,9%)****	2	41 (45,6%)***	**33** **(80,5%)**** **(36,7%)*****	8

Π10 1/2+3/8	28 (93,3%)	**24 (80%)* (85,7%)****	4	59 (65,6%)***	**37 (62,7%)** (41,1%)*****	22
Π11 35+42+40+38+44	29 (96,7%)	**18 (60%)* (62,1%)****	11	64 (71,1%)***	**43 (72%)** (47,8%)*****	21
Π14 27+49+38+65+56+81	26 (86,7%)	**26 (86,7%)* (100%)****	-	50 (55,6%)***	**46 (92%)** (51,1%)*****	4
Μ.Ο. Τυπ. Απ.	M=26,1 SD=2,97	**M=23,7 SD=3,35**	M=4,7 SD=5,67	M=52 SD=8,33	**M=42,9 SD=7,2**	M=12 SD=8,53

*Ποσοστό στο σύνολο του δείγματος (N=30), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων, ***Ποσοστό στο σύνολο των δυνατών απαντήσεων μετά και από τις τρεις απαντήσεις (N_1=30+30+30=90).

Οι συχνότητες των σωστών απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης στα επτά προβλήματα με βάση την πράξη της πρόσθεσης είναι αρκετά μεγάλες, στην πρώτη απάντηση των μαθητών. Ο μέσος όρος σωστών απαντήσεων είναι 23,7 και σε τέσσερα από τα επτά προβλήματα (Π1, Π7, Π10, Π14) σημειώνεται μεγαλύτερη συχνότητα. Όμοια στο σύνολο και των τριών απαντήσεων ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων μέσω στρατηγικών εκτίμησης είναι 42,9 και σε τέσσερα προβλήματα (Π1, Π2, Π11, Π14) εμφανίζεται μεγαλύτερη συχνότητα από το μέσο όρο. Όπως φαίνεται τα προβλήματα Π1 (1,26+4,79+0,99+1,37+2,58) και Π14 (27+49+38+65+56+81) συγκεντρώνουν μεγάλη συχνότητα και στην πρώτη απάντηση αλλά και στο σύνολο των 3 απαντήσεων. Από την άλλη στα προβλήματα Π7 (1.378+236+442) και Π10 (1/2+3/8) ενώ σημειώνονται μεγάλα ποσοστά επιτυχίας στην Α απάντηση, στο σύνολο και των τριών απαντήσεων των μαθητών εμφανίζουν τα μικρότερα ποσοστά επιτυχίας ανάμεσα στα προσθετικά προβλήματα. Δηλαδή ενώ η πλειοψηφία των μαθητών αρχικά λύνει σωστά μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης τα δύο αυτά προβλήματα, δυσκολεύονται στο να χρησιμοποιήσουν άλλους διαφορετικούς τρόπους για να λύσουν τα προβλήματα. Παράλληλα το Π2 (72.250+63.819+67.480+73.180+74.918+68.490) ενώ στη πρώτη απάντηση συγκεντρώνει το χαμηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων μέσω εκτίμησης, στο σύνολο των τριών απαντήσεων συγκεντρώνει το δεύτερο μεγαλύτερο ποσοστό. Όμοια και το Π11 (35+42+40+38+44) ενώ στην πρώτη απάντηση των μαθητών συγκεντρώνει τις λιγότερες σωστές απαντήσεις μέσω υπολογιστικής εκτίμησης (αφού σημειώνονται οι περισσότερες απαντήσεις μέσω νοερού αλγόριθμου), μετά και από τις τρεις απαντήσεις των μαθητών η συχνότητα των σωστών απαντήσεων ξεπερνάει το μέσο όρο των σωστών απαντήσεων στα προσθετικά προβλήματα. Το πρόβλημα το οποίο και στην πρώτη απάντηση των μαθητών αλλά και μετά από τις τρεις απαντήσεις των μαθητών συγκεντρώνει χαμηλό ποσοστό επιτυχίας μεταξύ των προβλημάτων με βάση την πράξη της πρόσθεσης είναι το Π7 (7/8+12/13+23/45).

Σχετικά με την ικανότητα των μαθητών στην υπολογιστική εκτίμηση σε σχέση με το είδος και τη φύση των αριθμών στα προσθετικά προβλήματα (όπως προκύπτει από την πρώτη τους απάντηση) οι μαθητές χειρίζονται πιο εύκολα προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς (Π1), με λίγους αριθμούς σε πλήθος (Π7), εύκολα κλάσματα (Π10) και ακέραιους με λίγα ψηφία (διψήφιους) (Π14). Δυσκολεύονται περισσότερο στα προβλήματα με πολυψήφιους αριθμούς (Π2) και πολλά κλάσματα (Π7).

Αναφορικά με τη χρήση περισσότερων από μία στρατηγικές για να λύσουν ένα πρόβλημα προκύπτει ότι σχεδόν σε όλα τα προβλήματα που περιέχουν ακέραιους αριθμούς (Π2, Π11, Π14) και δεκαδικούς (Π1) εμφανίζουν οι μαθητές μεγαλύτερη ευελιξία στη χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Τη μικρότερη ευελιξία στη χρήση στρατηγικών παρατηρείται στα προβλήματα με κλάσματα (Π5 και στο Π10) καθώς και στο πρόβλημα Π7 (1.378+236+442). Αυτό συμφωνεί με τους Verschaffel et al (2009), οι οποίοι επισημαίνουν ότι ένα από είδη μεταβλητών που επηρεάζουν και προσδιορίζουν την ευελιξία/προσαρμοστικότητα είναι οι μεταβλητές της κατάστασης ή τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, δηλαδή η φύση των αριθμών στο πρόβλημα.

Τα περισσότερα λάθη τα οποία γίνονται στις προσθετικές καταστάσεις οφείλονται στις πράξεις (και ως προς τη γενική κατηγορία «Λάθη στις πράξεις» αλλά και στην υποκατηγορία του Πίνακα 13 «λάθη στις πράξεις»).

Πίνακας 32. Συχνότητες και είδη λαθών στα προβλήματα με πρόσθεση

	Α απάντηση			**Α+Β+Γ απάντηση**		
	Σύνολο λανθασμένων απαντήσεων (N=30)	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής	Σύνολο λανθασμένων απαντήσεων	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής
Π1 1,26+4,79+0,99+ 1,37+2,58	2 (6,7%)	2 (6,7%)* (100%)**	-	2	2	-
Π2 72.250+63.819+ 67.480+73.180+ 74.918+68.490	8 (26,7%)	7 (23,3%) (87,5%)	1 (3,3%) (12,5%)	8	7	1
Π5 7/8+12/13+23/45	8 (26,7%)	8 (26,7%) (100%)	-	8	8	-
Π7 1.378+236+442	2 (6,7%)	1 (3,3%) (50%)	1 (3,3%) (50%)	4	1	3
Π10 1/2+3/8	2 (6,7%)	2 (6,7%) (100%)	-	2	2	-

Π11 35+42+40+38+44	1 (3,3%)	1 (3,3%) (100%)	-	1	1	-
Π14 27+49+38+65+56+81	4 (13,3%)	4 (13,3%) (100%)	-	4	4	-
Μ.Ο.	Μ=3,9	Μ=3,6	Μ=1	Μ=4,1	Μ=3,6	Μ=2

3.3.1.2 Καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης με πολλαπλασιασμό-διαίρεση

Στο σύνολο των 15 προβλημάτων τα τέσσερα περιέχουν την πράξη του πολλαπλασιασμού και τα δύο της διαίρεσης. Σχετικά με το είδος των αριθμών και τα έξι αυτά προβλήματα περιέχουν ακέραιους αριθμούς. Το μέγεθος των αριθμών είναι μονοψήφιοι έως και πενταψήφιοι. Τα τρία από αυτά τα προβλήματα παρουσιάζονται με πλαίσιο (Π3, Π13, Π15) ενώ τα άλλα τρία όχι (Π4, Π8, Π12).

Πίνακας 33. Συχνότητες επιτυχημένων απαντήσεων στα προβλήματα με πολλαπλασιασμό-διαίρεση

	Α απάντηση			**Α+Β+Γ απάντηση**		
	Σύνολο σωστών απαντήσεων	**Υπολογιστική εκτίμηση**	Νοερός υπολογισμός με ακρίβεια	Σύνολο σωστών απαντήσεων	**Υπολογιστική εκτίμηση**	Νοερός υπολογισμός με ακρίβεια
Π3 75x36	17 (56,7%)	**11** **(36,7%)*** **(64,7%)****	6 (20%)* (35,3%)**	40 (44,4%)***	**31** **(77,5%)**** **(34,4%)*******	9 (22,5%)** (10%)****
Π4 3.388:7	22 (73,3%)	**14** **(46,7%)*** **(63,6%)****	8 (26,7%)* (36,4%)**	51 (56,7%)***	**39** **(76,5%)**** **(43,3%)******	12 (23,5%)** (13,3%)***
Π8 437x8	20 (66,7%)	**19** **(63,3%)*** **(95%)****	1 (3,3%)* (5%)**	47 (52,2%)***	**37** **(78,7%)**** **(41,1%)******	10 (21,3%)** (11,1%)***
Π12 62x79	17 (56,7%)	**17** **(56,7%)*** **(100%)****	-	34 (37,8%)***	**34** **(100%)**** **(37,8%)******	-
Π13 28x56	16 (53,3%)	**16** **(53,3%)*** **(100%)****	-	42 (46,7%)***	**38** **(90,5%)**** **(42,2%)******	4 (9,5%)** (4,4%)***
Π15 25.889:52	11 (36,7%)	**11** **(36,7%)*** **(100%)****	-	31 (34,4%)***	**30** **(96,7%)**** **(33,3%)******	1 (3,2%)** (1,1%)***
Μ.Ο. Τυπ.Απ.	Μ=17,2 SD=3,76	**Μ=14,7** **SD=3,27**	Μ=5 SD=3,61	Μ=40,8 SD=7,57	**Μ=34,8** **SD=3,76**	Μ=7,2 SD=4,55

*Ποσοστό στο σύνολο του δείγματος (N=30), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων, ***Ποσοστό στο σύνολο των δυνατών απαντήσεων μετά και από τις τρεις απαντήσεις (N_1=30+30+30=90).

Συγκριτικά με τις καταστάσεις πρόσθεσης οι καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης σημειώνουν μικρότερα ποσοστά επιτυχίας ως προς τη χρήση υπολογιστικής εκτίμησης αλλά και συνολικά. Ο μέσος όρος των σωστών Α απαντήσεων μέσω υπολογιστικής εκτίμησης είναι 14,7, όταν στα προσθετικά προβλήματα είναι 23,7. Αλλά και στο σύνολο των απαντήσεων μέσω εκτίμησης ο μέσος όρος στα προσθετικά προβλήματα είναι 42,9 ενώ στα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης είναι 34,8. Παράλληλα όμως στα προβλήματα με την πράξη της πρόσθεσης παρατηρείται και μεγαλύτερη χρήση του νοερού αλγόριθμου σε σχέση με τα προβλήματα του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, στο σύνολο των απαντήσεων. Πιο συγκεκριμένα ο μέσος όρος υπολογισμού μέσω νοερού αλγόριθμου στα προσθετικά προβλήματα είναι 12 ενώ στα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης 7,2.

Τα προβλήματα τα οποία σημειώνουν μεγαλύτερη συχνότητα επιτυχίας από τον αντίστοιχο μέσο όρο με την πρώτη απάντηση είναι τα Π8, Π12, Π13 ενώ στο σύνολο των τριών απαντήσεων τα Π4, Π13, Π8. Τα προβλήματα με τη χαμηλότερη συχνότητα χρήσης υπολογιστικής εκτίμησης και στην Α απάντησή τους αλλά και στο σύνολο των τριών απαντήσεων είναι τα Π3 και Π15. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές στα αποτελέσματα μεταξύ της πρώτης απάντησης και του συνόλου των τριών απαντήσεων για τα προβλήματα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα στα προσθετικά προβλήματα.

Πιο εύκολα χειρίζονται την εκτίμηση του γινομένου τριψήφιου αριθμού με ένα μονοψήφιο στο Π8 (437x8) και το πηλίκο με ένα μονοψήφιο στο Π4 (3.388:7). Παράλληλα σε αυτά τα δύο προβλήματα ευνοείται περισσότερο από τα άλλα προβλήματα και η χρήση του νοερού αλγόριθμου. Τη μεγαλύτερη δυσκολία την εμφανίζουν στην εκτίμηση του πηλίκου του προβλήματος 15 (25.889:52).

Ως γενικό συμπέρασμα αποδεικνύεται ότι οι μαθητές μπορούν να χειριστούν πιο εύκολα καταστάσεις πρόσθεσης και ακολουθούν οι καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Τα περισσότερα λάθη οφείλονται στην εκτέλεση των πράξεων ενώ στα προβλήματα Π8 (437x8) και Π13 (28x56) η πλειοψηφία των λαθών οφείλονται στην εκτέλεση της στρατηγικής. Οι μαθητές ενώ εφαρμόζουν σωστά κάποια στρατηγική υπολογιστικής εκτίμησης δεν αντιλαμβάνονται ότι η εκτίμησή τους απέχει πολύ από την ακριβή απάντηση και δε διορθώνουν την εκτίμησή τους μέσω κάποιας μεταγενέστερης αντιστάθμισης με σκοπό να θεωρείται λανθασμένη.

Πίνακας 34. Συχνότητες και είδη λαθών στα προβλήματα με πολλαπλασιασμό-διαίρεση

	Α απάντηση			**Α+Β+Γ απάντηση**		
	Σύνολο λανθασμένων απαντήσεων	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής	Σύνολο λανθασμένων απαντήσεων	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής
Π3 75x36	13 (43,3%)	12 (40%)* (92,3%)**	1 (3,3%)* (7,7%)**	13 (14,4%)***	12 (92,3%)** (13,3%)***	1 (7,7%)** (1,1%)***
Π4 3.388:7	8 (26,7%)	7 (23,3%)* (87,5%)**	1 (3,3%)* (12,5%)**	12 (13,3%)***	7 (58,3%)** (7,8%)***	5 (41,7%)** (5,6%)***
Π8 437x8	10 (33,3%)	4 (13,3%)* (40%)**	6 (20%)* (60%)**	10 (11,1%)***	4 (40%)** (4,4%)***	6 (60%)** (6,7%)***
Π12 62x79	13 (43,3%)	12 (40%)* (92,3%)**	1 (3,3%)* (7,7%)**	18 (20%)***	16 (88,9%)** (17,8%)***	2 (11,1%)** (2,2%)***
Π13 28x56	14 (46,7%)	3 (10%)* (21,4%)**	11 (36,7%)* (78,6%)**	15 (16,7%)***	6 (40%)** (6,7%)***	9 (60%)** (10%)***
Π15 25.889:52	19 (63,3%)	18 (60%)* (94,7%)**	1 (3,3%)* (5,3%)**	23 (25,6%)***	21 (91,3%)** (23,3%)***	2 (8,7%)** (2,2%)***
Μ.Ο. Τυπ. απ.	M=12,8 SD=3,76	M=9,3 SD=5,76	M=3,5 SD=4,18	M=15,2 SD=4,71	M=11 SD=6,57	M=4,2 SD=3,1

*Ποσοστό στο σύνολο του δείγματος (N=30), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων, ***Ποσοστό στο σύνολο των δυνατών απαντήσεων μετά και από τις τρεις απαντήσεις (N_1=30+30+30=90).

3.3.1.3 Καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης με ποσοστά και Μέσο Όρο

Ανάμεσα στα 15 προβλήματα του τεστ υπάρχει και ένα πρόβλημα για υπολογισμό ποσοστού και ένα πρόβλημα με υπολογισμό μέσου όρου. Το πρόβλημα με το ποσοστό περιέχει ένα δεκαδικό αριθμό και έναν ακέραιο ενώ το πρόβλημα του μέσου όρου περιλαμβάνει έξι πενταψήφιους ακέραιους. Και τα δύο προβλήματα είναι προβλήματα με πλαίσιο.

Πίνακας 35. Συχνότητες επιτυχημένων απαντήσεων στα προβλήματα με ποσοστά και μέσο όρο

	Α απάντηση			**Α+Β+Γ απάντηση**		
	Σύνολο σωστών απαντήσεων (N=30)	Υπολογιστική εκτίμηση	Νοερός υπολογισμός με ακρίβεια	Σύνολο σωστών απαντήσεων	Υπολογιστική εκτίμηση	Νοερός υπολογισμός με ακρίβεια
Π6 9,84%x816	20 (66,7%)	20 (66,7%)* (100%)**	-	40 (44,4%)***	40 (100%)** (44,4%)***	-
Π9 28.990,28.991,28.994, 28.998,29.001,29.026 (Μ.Ο)	24 (80%)	24 (80%)* (100%)**	-	39 (43,3%)***	36 (92,3%)** (40%)***	3 (7,7%)** (3,3%)***
Μ.Ο.	Μ=22	Μ=22		Μ=39.5	Μ=38	Μ=3

*Ποσοστό στο σύνολο του δείγματος (N=30), **Ποσοστό στο σύνολο των σωστών απαντήσεων, ***Ποσοστό στο σύνολο των δυνατών απαντήσεων μετά και από τις τρεις απαντήσεις (N_1=30+30+30=90).

Τα αποτελέσματα ως προς τη χρήση κατ' εκτίμηση υπολογισμών στα προβλήματα με ποσοστό και υπολογισμό μέσου όρου είναι υψηλότερα από τα αποτελέσματα των προβλημάτων με πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Η συχνότητα των σωστών απαντήσεων στο πρόβλημα με το ποσοστό είναι ν=20 ενώ στο πρόβλημα με τον υπολογισμό του μέσου όρου είναι ν=24, όταν ο μέσος όρος των συχνοτήτων στα προβλήματα του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης είναι 14,7 και των προσθετικών προβλημάτων 23,7. Σε αυτά τα δύο προβλήματα αναδεικνύεται ακόμα μια φορά η χρηστικότητα και η ανάγκη για υπολογιστική εκτίμηση έναντι του υπολογισμού με ακρίβεια αφού όλες οι σωστές απαντήσεις δίνονται μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης.

Όμοια στο σύνολο των τριών απαντήσεων οι συχνότητες που εμφανίζουν τα προβλήματα ποσοστού (ν=40) και του υπολογισμού μέσου όρου (ν=36) ξεπερνάει το μέσο όρο των προβλημάτων με πολλαπλασιασμό και διαίρεση (Μ.Ο.=34,8) αλλά όχι και των προσθετικών προβλημάτων (Μ.Ο.=42,9).

Συγκριτικά ανάμεσα στα δύο είδη προβλημάτων παρατηρείται ότι ενώ οι μαθητές σημειώνουν καλύτερα αποτελέσματα στην Α τους απάντηση στο πρόβλημα του υπολογισμού του μέσου όρου Π9 (Υπολογισμός μέσου όρου των ποσών: 28.990, 28.991, 28.994, 28.998, 29.001, 29.026), το ίδιο πρόβλημα δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές στο να προτείνουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης σε αντίθεση με το πρόβλημα του ποσοστού Π6 (9,84% x 816).

Η πλειοψηφία των λαθών οφείλεται και εδώ στις πράξεις.

Πίνακας 36. Συχνότητες και είδη λαθών στα προβλήματα με ποσοστά και μέσο όρο

	Α απάντηση			**Α+Β+Γ απάντηση**		
	Σύνολο λανθασμένων απαντήσεων (N=30)	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής	Σύνολο λανθασμένων απαντήσεων	Στις πράξεις	Στην εκτέλεση της στρατηγικής
Π6	10 (33,3%)	10 (33,3%) (100%)	-	15 (16,7%)**	11 (73,3%)** (12,2%)***	4 (13,3%)** (4,4%)***
Π9	6 (20%)	6 (20%)	-	10 (11,1%)**	7 (70%)** (7,8%)***	3 (30%)** (3,3%)***

Σύνοψη

Πίνακας 37. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα με βάση τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων

Είδος πράξης (σύνολο προβλημάτων)	**Μ.Ο. σωστών απαντήσεων**	**Μ.Ο. σωστών απαντήσεων με υπολογιστική εκτίμηση**	**Μ.Ο. Λαθών**
Αποτελέσματα από τις Α απαντήσεις των μαθητών (N=30)			
Πρόσθεση (7 προβλήματα)	26,1	23,7	3,9
Πολλαπλασιασμός –Διαίρεση (6 προβλήματα)	17,2	14,7	12,8
Ποσοστά-Μέσος όρος (2 προβλήματα)	22	22	8
Αποτελέσματα από το σύνολο των 3 απαντήσεων (N_1=90)*			
Πρόσθεση (7 προβλήματα)	52	42,9	4,1
Πολλαπλασιασμός –Διαίρεση (6 προβλήματα)	40,8	34,8	15,2
Ποσοστά-Μέσος όρος (2 προβλήματα)	39,5	38	7,5

*N_1=30+30+30=90

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία προκύπτει ότι τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων επηρέασαν την ικανότητα της υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών. Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές από ότι η πρόσθεση, τα ποσοστά και ο μέσος όρος. Τα προσθετικά προβλήματα θεωρήθηκαν πιο εύκολα και στο σύνολο των απαντήσεων που δόθηκαν και στη χρήση της υπολογιστικής εκτίμησης. Τα περισσότερα λάθη έγιναν στις καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Στα προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση το χαρακτηριστικό που επηρεάζει την επίδοση των μαθητών στην υπολογιστική εκτίμηση είναι το σχετικό μέγεθος των αριθμών. Δηλαδή όσο αυξάνεται το μέγεθος των αριθμών τόσο δυσκολεύονται οι μαθητές στους υπολογισμούς τους. Τα προβλήματα πολλαπλασιασμού όπου ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι μονοψήφιος συγκεντρώνουν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις και ως προς την υπολογιστική εκτίμηση και ως προς τη χρήση νοερού αλγόριθμου.

Στα προβλήματα πρόσθεσης οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης ευνοούνται όταν οι αριθμοί είναι δεκαδικοί. Επίσης οι πολλαπλές απαντήσεις στα προσθετικά προβλήματα ευνοούνται όταν οι αριθμοί είναι δεκαδικοί και φυσικοί σε αντιδιαστολή με τα κλάσματα. Παράλληλα η χρήση υπολογιστικής εκτίμησης συγκριτικά με τη χρήση του νοερού αλγόριθμου εντοπίζεται περισσότερο στα προσθετικά προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς και αριθμούς με πολλά ψηφία.

Τα προβλήματα με ποσοστό, υπολογισμό μέσου όρου και μεγάλους σε μέγεθος αριθμούς αναδεικνύουν την ανάγκη της χρήσης της υπολογιστικής εκτίμησης σε σύγκριση με το νοερό αλγόριθμο.

3.4 Τα κοινωνικά χαρακτηριστικά και η σχέση τους με την επίδοση των μαθητών

Το δείγμα της έρευνας περιγράφηκε παραπάνω στην παράγραφο με τίτλο «συμμετέχοντες». Όσο αφορά το μορφωτικό επίπεδο των γονέων το 54,5% των πατέρων είναι απόφοιτοι μέσης εκπαίδευσης, δηλαδή απόφοιτοι Λυκείου, το 21,2% απόφοιτοι ανώτατης εκπαίδευσης, δηλαδή έχουν τελειώσει κάποιο ανώτατο ίδρυμα ΑΕΙ ή ΤΕΙ και το υπόλοιπο 16,7% των πατέρων είναι απόφοιτοι βασικής εκπαίδευσης, έχοντας τελειώσει το δημοτικό ή το γυμνάσιο. Αντίστοιχα ποσοστά για τις μητέρες είναι 45,5% μέσης εκπαίδευσης, 24,2% ανώτατης εκπαίδευσης και 21,2% βασικής εκπαίδευσης.

Άλλος ένας παράγοντας που μελετήθηκε ήταν τα έτη διαμονής του κάθε μαθητή στη Γερμανία. Ποσοστό 70% των συμμετεχόντων ζούνε πάνω από 10 χρόνια στη Γερμανία (οι περισσότεροι από αυτούς όλη τους τη ζωή), το 20% έχει εγκατασταθεί στη Γερμανία τα τελευταία 5 χρόνια και το 10% ζει στη Γερμανία από 5 έως 10 χρόνια.

Το 76,7% των μαθητών δεν εργάζονται ενώ το υπόλοιπο 23,3% των μαθητών εργάζονται. Οι περισσότεροι από αυτούς εργάζονται σε ελληνικά εστιατόρια τα οποία είτε ανήκουν στους γονείς τους είτε σε συγγενικά πρόσωπα.

Σχετικά με τις εξωσχολικές δραστηριότητες των μαθητών και μαθητριών σε ποσοστό που φτάνει το 56,7% οι μαθητές έχουν πολλές εξωσχολικές δραστηριότητες (αθλητισμός, μουσική, χορός, ξένες γλώσσες) και το υπόλοιπο 43,3% λίγες (μόνο μία ή καμία από τις παραπάνω).

3.4.1 Συσχέτιση των κοινωνικών παραγόντων με την επίδοση των μαθητών και την ικανότητα εκτίμησης.

Οι ικανότητες των μαθητών στην υπολογιστική εκτίμηση σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα εξετάζεται σε 3 επίπεδα: α) αποτελέσματα στην Α απάντηση που εφαρμόζουν όλοι οι συμμετέχοντες μέσω υπολογιστικής εκτίμησης, β) συνολικά αποτελέσματα μετά από τις 3 διαφορετικές απαντήσεις με στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, γ) σύνολο διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν (ρεπερτόριο). Στον παρακάτω πίνακα ακολουθεί μία στατιστική ανάλυση διασποράς με ένα παράγοντα και χρησιμοποιούμε το μη παραμετρικό κριτήριο Kruskal-Wallis με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας p=0,05.

Πίνακας 38. Σύγκριση επίδοσης με τους κοινωνικούς παράγοντες

	Επίδοση στην Α απάντηση με χρήση στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης	**Συνολική επίδοση με στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης**	**Σκορ ρεπερτορίου στρατηγικών**
Φύλο	X^2=0,43 df=1 p=0,525	X^2=0,022 df=1 p=0,883	X^2=1,389 df=1 p=0,239
Τάξη	X^2=0,152 df=2 p=0,927	X^2=0,236 df=2 p=0,889	X^2=3,232 df=2 p=0,199
Έτη διαμονής στη Γερμανία	X^2=0,607 df=2 p=0,738	X^2=0,795 df=2 p=0,408	X^2=0,946 df=2 p=0,623
Ικανότητες στα Μαθηματικά	X^2=3,551 df=1 p=0,060	**X^2=4,337** **df=1** **p=0,037**	X^2=0,02 df=1 p=0,965
Μορφωτικό επίπεδο πατέρα	X^2=0,375 df=2 p=0,829	X^2=0,015 df=2 p=0,993	X^2=1,420 df=2 p=0,492
Μορφωτικό επίπεδο μητέρας	X^2=0,092 df=2 p=0,908	X^2=0,141 df=2 p=0,932	X^2=0,147 df=2 p=0,929
Εξωσχολικές δραστηριότητες	**X^2=3,961** **df=1** **p=0,047**	**X^2=9,433** **df=1** **p=0,002**	X^2=0,322 df=1 p=0,570
Εργασία	X^2=0,222 df=1 p=0,637	X^2=2,976 df=1 p=0,084	X^2=0,147 df=1 p=0,701

Από τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα από τους 8 διαφορετικούς παράγοντες, ο παράγοντας ο οποίος σχετίζεται περισσότερο με τις ικανότητες των μαθητών στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς είναι οι εξωσχολικές δραστηριότητες και οι ικανότητές τους στα μαθηματικά. Οι μαθητές και οι μαθήτριες οι οποίοι ασχολούνται με περισσότερες εξωσχολικές δραστηριότητες εμφανίζουν μεγαλύτερη ικανότητα στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς καθώς και οι μαθητές οι οποίοι έχουν μεγαλύτερες ικανότητες στα μαθηματικά, σύμφωνα με την κρίση της καθηγήτριας, εμφανίζουν μεγαλύτερη ευχέρεια στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς.

Συγκεντρωτικά από τον παραπάνω στατιστικό έλεγχο της σχέσης ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών από τις απαντήσεις τους στο τεστ και τους κοινωνικούς παράγοντες προκύπτει:

1. Δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στο φύλο και την επίδοση των μαθητών στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης στην Α απάντησή τους (X^2=0,43, df=1, p=0,525), ούτε στο σύνολο των σωστών τους απαντήσεων με υπολογιστική εκτίμηση (X^2=0,022, df=1, p=0,883) ούτε στο μέγεθος του ρεπερτορίου τους (X^2=1,389, df=1, p=0,239). Δηλαδή δε σημειώθηκε κάποια αξιοσημείωτη διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ αγοριών και κοριτσιών του δείγματος. Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με τα αποτελέσματα των ερευνών των Hanson & Hogan (2000), Lewis (1994), Dolma (2003) και Aytekin & Tolukuçar (2014).
2. Δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της τάξης στην οποία φοιτούν οι συμμετέχοντες και στην επίδοση τους στην Α απάντηση (X^2=0,152, df=2, p=0,927) , ούτε στο σύνολο των σωστών τους απαντήσεων (X^2=0,236, df=2, p=0,889), ούτε συγκριτικά με το μέγεθος του ρεπερτορίου τους (X^2=3,232, df=2, p=0,199). Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η τάξη και παράλληλα η ηλικία δεν αυξάνεται και η ικανότητα στην υπολογιστική εκτίμηση, όπως αυτό το συμπέρασμα έρχεται σε αντίθεση με πολλές έρευνες (LeFevre et al., 1993˙ Lemaire & Lecacheur, 2002)
3. Δεν παρατηρείται καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στα έτη που ζουν συνολικά οι μαθητές στη Γερμανία και στην επίδοση τους στην πρώτη απάντηση (X^2=0,607, df=2, p=0,738), ούτε στο σύνολο των σωστών τους απαντήσεων μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης (X^2=795, df=2, p=0,408) αλλά ούτε και σε σχέση με το ρεπερτόριο στρατηγικών που διαθέτουν (X^2=0,946, df=2, p=0,623).
4. Οι ικανότητες των μαθητών στα μαθηματικά, όπως αυτές κρίνονται από την καθηγήτρια, και η επίδοση τους στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης μέσω της Α απάντησης δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική συσχέτιση (X^2=3,551, df=1, p=0,06), σε αντίθεση με την επίδοση τους στο σύνολο των 3 απαντήσεων μέσω της χρήσης στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης όπου υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση (X^2=4,337, df=1, p=0,037). Σχετικά με το μέγεθος του ρεπερτορίου τους και τις ικανότητές τους στα μαθηματικά

δεν παρατηρείται κάποια στατιστικά σημαντική συσχέτιση (X^2=0,02, df=1, p=0,965).

5. Από την παραπάνω στατιστική ανάλυση φαίνεται ότι δεν υπάρχει σημαντική στατιστικά συσχέτιση ανάμεσα στο μορφωτικό επίπεδο του πατέρα και στις επιδόσεις των μαθητών μέσω υπολογιστικής εκτίμησης ούτε στην Α απάντηση (X^2=0,375, df=2, p=0,829), ούτε στο σύνολο των σωστών απαντήσεων (X^2=0,015, df=2, p=0,993) αλλά και ούτε σε σχέση με το μέγεθος του ρεπερτορίου τους (X^2=1,42, df=2, p=0,492).
6. Το ίδιο με παραπάνω ισχύει και συγκριτικά με το μορφωτικό επίπεδο της μητέρας όπου δεν παρατηρείται καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τις επιδόσεις των μαθητών στην πρώτη απάντησή τους (X^2=0,092, df=2, p=0,908), ούτε και στο σύνολο των τριών απαντήσεων (X^2=0,141, df=2, p=0,932) αλλά ούτε και σε σχέση με το μέγεθος του ρεπερτορίου τους (X^2=0,147, df=2, p=0,929).
7. Υπήρξε σημαντικά στατιστική συσχέτιση μεταξύ των εξωσχολικών δραστηριοτήτων των μαθητών και της πρώτης τους απάντησης (X^2=3,961, df=1, p=0,047) αλλά και του συνόλου των σωστών απαντήσεών τους μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης (X^2=9,433, df=1, p=0,002). Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι έχουν αρκετές εξωσχολικές δραστηριότητες εμφανίζουν καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης σε σχέση με τους μαθητές που δεν έχουν πολλές εξωσχολικές δραστηριότητες.
8. Η παραπάνω στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάλογα με τις εξωσχολικές δραστηριότητες δεν παρατηρείται και σε σύγκριση με το μέγεθος του ρεπερτορίου στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης που διαθέτουν οι μαθητές (X^2=0,322, df=1, p=0,57).
9. Δεν παρατηρείται καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στο αν εργάζονται οι μαθητές και στην επίδοση τους στην Α απάντησή τους (X^2=0,222, df=1, p=0,637) αλλά ούτε και στο σύνολο των απαντήσεών τους (X^2=2,976, df=1, p=0,084). Όμοια δεν παρατηρήθηκε καμία στατιστικά σημαντική συσχέτιση και ανάμεσα στο μέγεθος του ρεπερτορίου που διαθέτουν οι μαθητές σε σύγκριση με το αν εργάζονται (X^2=1,147, df=1, p=0,701).

3.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων από προηγούμενη έρευνα σε μαθητές της Ε και ΣΤ τάξης του Δημοτικού

Σε προηγούμενη έρευνα εξετάστηκαν 596 μαθητές της Ε και Στ τάξης που έλαβαν μέρος στον 7ο Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής» από Δημοτικά σχολεία πόλεων της Δυτικής Μακεδονίας και των Σερρών. Από αυτούς οι 314 φοιτούσαν στην Ε τάξη και οι 282 στη Στ, οι 304 (51%) μαθητές ήταν αγόρια και οι 292 (49%) κορίτσια. Οι μαθητές αυτοί δε διδάχτηκαν στο σχολείο συστηματικά τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς και δεν εξασκήθηκαν σε ειδικές στρατηγικές των υπολογισμών αυτών, οπότε οι όποιες στρατηγικές χρησιμοποίησαν είναι προσωπικές τους επινοήσεις. Τα θέματα που δόθηκαν στο διαγωνισμό και στις δύο τάξεις και αφορούσαν την υπολογιστική εκτίμηση ήταν τέσσερα (δύο στην κάθε τάξη). Συγκεκριμένα ζητούσε από τους μαθητές να υπολογίσουν με το μυαλό και χωρίς γραπτές πράξεις τη λύση του προβλήματος και στη συνέχεια να εκφράσουν γραπτώς τον τρόπο που σκεφτήκανε.

3.5.1 Οι επιδόσεις των μαθητών στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης

Από τη σύγκριση λοιπόν των αποτελεσμάτων των 2 ερευνών προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

Πίνακας 39. Οι επιδόσεις των μαθητών στα 4 προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης

	Π10 1/2 και 3/8		**Π13** 28 x 56		**Π6** 9,84% του 816		**Π1** 1,26+4,79+0,99 +1,37+2,58	
	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου
Κατ' εκτίμηση υπολογισμός	89 (28,3%)	24 (80%)	70 (22,3%)	16 (53,3%)	97 (34,4%)	20 (66,7%)	137 (48,6%)	28 (93,3%)
Ακριβής υπολογισμός με αλγόριθμο	123 (39,2%)	4 (14,3%)	147 (46,8%)	-	20 (7,1%)	-	73 (26%)	-
Λάθος απάντηση	82 (26,1%)	2 (6,7%)	93 (29,6%)	14 (46,7%)	130 (46,1%)	10 (33,3%)	48 (17%)	2 (6,7%)
Καμία απάντηση	20 (6,4%)	-	4 (1,3%)	-	35 (12,4%)	-	24 (8,5%)	-
Σύνολο	314 (100%)	30 (100%)	314 (100%)	30 (100%)	282 (100%)	30 (100%)	282 (100%)	30 (100%)

Οι μαθητές του Δημοτικού σε όλα τα προβλήματα εφαρμόζουν το νοερό αλγόριθμο για ακριβή υπολογισμό των προβλημάτων σε αρκετά μεγάλο ποσοστό σε αντίθεση με τους μαθητές του Λυκείου οι οποίοι και στα 4 αυτά προβλήματα εφαρμόζουν ελάχιστα ή καθόλου τον αλγόριθμο για ακριβή υπολογισμό των απαντήσεων. Από τα 4 παρακάτω προβλήματα, το ίδιο πρόβλημα (Π13) του γινομένου δύο διψήφιων αριθμών (28x56) δυσκόλεψε στο μεγαλύτερο ποσοστό και τις δύο ομάδες ώστε να λυθεί μέσω στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Το πρόβλημα (Π1) του αθροίσματος από την άλλη είναι και για τις δύο ομάδες το πρόβλημα στο οποία σημειώνουν τη μεγαλύτερη επιτυχία.

3.5.2 Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές

Στον παρακάτω πίνακα αναλύονται οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν κατά πλειοψηφία σε κάθε πρόβλημα στις δύο ηλικιακές ομάδες.

Πίνακας 40. Ποσοστά χρήσης των στρατηγικών στις σωστές απαντήσεις με κατ' εκτίμηση υπολογισμό

Στρατηγική	**Π10 1/2 και 3/8**		**Π13 28 x 56**		**Π6 9,84% του 816**		**Π1 1,26+4,79 +0,99+1,37+2,58**	
	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου
Στρατηγική ειδικών αριθμών	88 (28%) (99%)*	13 (43,3%) (46,4%)			59 (20,9%) (61%)	9 (30%) (45%)		
Στρογγυλοποίηση			52 (16,6%) (74,5%)	1 (3,3%) (6,25%)			110 (39%) (81%)	17 (56,7%) (60,7%)
Στρογγυλοποίηση και αντιστάθμιση			17 (5,4%) (24,5%)	5 (16,7%) (31,3%)				
Στρογγυλοποίηση & ειδικοί αριθμοί					33 (11,7%) (34%)	8 (26,7%) (40%)		
Προγενέστερη αντιστάθμιση			13 (4,1%) (6%)	9 (30%) (56,3%)				
Στρατηγική Εμπρόσθιου άκρου ή εμπρόσθιο άκρο & συσσώρευση							22 (7,8%) (16%)	9 (30%) (32,1%)

* Ποσοστό επί των μαθητών που εκτέλεσαν σωστά κατ' εκτίμηση υπολογισμό.

Σχετικά με τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που χρησιμοποιούν και οι δύο ηλικιακές ομάδες στο πρόβλημα Π10 (1/2 και 3/8), η στρατηγική των ειδικών αριθμών είναι η στρατηγική η οποία συγκεντρώνει το μεγαλύτερο ποσοστό. Επίσης αναφορικά με το πλήθος των διαφορετικών νοερών στρατηγικών και οι 2 ομάδες χρησιμοποιούν 3 είδη στρατηγικών.

Αντίθετα στο πρόβλημα Π13 (28 x 56) οι μαθητές του δημοτικού επιλέγουν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης ενώ οι μαθητές Λυκείου εφαρμόζουν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης αλλά ταυτόχρονα χρησιμοποιούν στρατηγικές που οδηγούν σε καλύτερη εκτίμηση όπως της μεταγενέστερης αντιστάθμισης και της προγενέστερης αντιστάθμισης. Το πλήθος των διαφορετικών νοερών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές του Δημοτικού είναι 4 ενώ οι μαθητές Λυκείου 5.

Στο Π6 (9,84% του 816) και Π1 (1,26+4,79+0,99+1,37+2,58) παρατηρείται ότι οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων επιλέγουν τις ίδιες στρατηγικές στην πλειοψηφία των απαντήσεών τους. Σχετικά με τα διαφορετικά είδη των νοερών στρατηγικών στο Π6 οι μαθητές του Δημοτικού επιλέγουν 3 νοερές στρατηγικές ενώ οι μαθητές του Λυκείου 4.

Στο σύνολο όλων των απαντήσεων οι μαθητές του Λυκείου φαίνεται να εκτελούν πιο ακριβείς εκτιμήσεις εφαρμόζοντας μεταγενέστερη αντιστάθμιση στις εκτιμήσεις τους σε σύγκριση με τους μαθητές του Δημοτικού που εφαρμόζουν αντιστάθμιση αλλά σε μικρότερο ποσοστό.

3.5.3 Τα λάθη

Όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα στα προβλήματα με το άθροισμα των κλασμάτων (Π10) και το γινόμενο φυσικών αριθμών (Π13) για τους μαθητές του Δημοτικού τα περισσότερα λάθη εκτελούνται στις πράξεις. Για τους μαθητές του Λυκείου τα περισσότερα λάθη οφείλονται στην εκτέλεση της υπολογιστικής εκτίμησης, δηλαδή τα αποτελέσματά τους δεν ήταν μία καλή εκτίμηση του αποτελέσματος. Στο πρόβλημα με το ποσοστό (Π6) και το άθροισμα με τους δεκαδικούς αριθμούς (Π1) η πλειοψηφία των μαθητών και του Δημοτικού και του Λυκείου κάνουν λάθη στις πράξεις, ενώ για τους μαθητές του δημοτικού υπάρχει και ένα ποσοστό το οποίο κάνει λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής καθώς και δίνουν λύσεις οι οποίες δεν έχουν κάποια μαθηματική λογική.

Πίνακας 41. Ποσοστά λαθών που πραγματοποίησαν οι μαθητές

ΤΥΠΟΣ ΛΑΘΟΥΣ	**Π10 1/2 και 3/8**		**Π13 28 x 56**		**Π6 9,84% του 816**		**Π1 1,26+4,79+0,99 +1,37+2,58**	
	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου	Μαθητές Δημοτικού	Μαθητές Λυκείου
Λάθη στις πράξεις	38 (12,1%)	3 (10%)	65 (20,7%)	3 (10%)	51 (18%)	10 (33,3%)	17 (6%)	2 (6,7%)
Λάθος κατ'εκτίμηση υπολογισμού	-	11 (36,7%)	13 (4,1%)	11 (36,7%)	18 (6,4%)	-	20 (7,1%)	-
Άλλη πράξη μεταξύ των ποσών	5 (1,6%)	-	1(0,3%)	-	27 (9,6%)	-	-	-
Λύση χωρίς καμία μαθηματική λογική	8 (2,5%)	-	8 (2,5%)	-	5 (1,8%)	-	5 (1,8%)	-

Σύνοψη

Όλες οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές του Λυκείου είναι νοερές ενώ οι μαθητές δημοτικού χρησιμοποιούν και το γραπτό αλγόριθμο (το εργαλείο μέτρησης ήταν θέματα από γραπτό διαγωνισμό στον οποίο καλούνταν να περιγράψουν γραπτά τη νοερή τους στρατηγική επίλυσης). Οι μαθητές του Δημοτικού χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερο ποσοστό τον αλγόριθμο για ακριβή υπολογισμό του αποτελέσματος ενώ οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που εμφανίζονται με μεγαλύτερη συχνότητα σε κάθε πρόβλημα συμπίπτουν με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές του Λυκείου. Οι μαθητές Λυκείου διαθέτουν ελάχιστα μεγαλύτερο ρεπερτόριο στρατηγικών για κάθε ερώτηση (διαφορά 0 έως 1 στρατηγική), καθώς και εφαρμόζουν σε μεγαλύτερο ποσοστό την αντιστάθμιση με σκοπό να πετύχουν καλύτερες εκτιμήσεις. Και για τις δύο ομάδες το πρόβλημα Π1 με την πράξη της πρόσθεσης σημειώνει το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας ενώ το πρόβλημα Π13 με τον υπολογισμό του γινομένου τη μικρότερη επιτυχία.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Περιορισμοί έρευνας

Στην παρούσα έρευνα γίνεται μία ποιοτική προσέγγιση με σκοπό να διεξαχθεί μία σε βάθος έρευνα, αλλά δυστυχώς λόγω περιορισμένου αριθμού δείγματος θέτονται όρια στη δυνατότητα γενίκευσης των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν.

Συμπεράσματα έρευνας

Ο πρώτος βασικός στόχος της έρευνας που τέθηκε αρχικά ήταν η διερεύνηση της ικανότητας υπολογιστικής εκτίμησης των μαθητών Λυκείου του Ελληνικού Λυκείου της Γερμανίας. Οι επιμέρους στόχοι ήταν το κατά πόσο μπορούν να κάνουν εκτιμήσεις, ποιες οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν συχνότερα, τα λάθη τους. Κατά πόσο μπορούν να χειριστούν προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης; Ποιες στρατηγικές επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν, οι οποίες δεν αποτελούν αποτέλεσμα κάποιας διδακτικής παρέμβασης αλλά διαμορφώνονται από το εξωσχολικό περιβάλλον και άτυπα από το σχολικό;

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές του Λυκείου μπορούν να χειριστούν προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Όλες οι διαδικασίες που εκτέλεσαν οι μαθητές ήταν νοερές αφού δεν επιτρεπόταν η χρήση κάποιου άλλου μέσου (αριθμομηχανής, υπολογιστή, χαρτί και μολύβι, πίνακας), δηλαδή οι απαντήσεις τους προέρχονταν είτε μέσω κάποιας στρατηγικής υπολογιστικής εκτίμησης είτε από ακριβή νοερό υπολογισμό. Όλοι οι μαθητές διαθέτουν μεταγνωστική ικανότητα αφού περιέγραφαν με λεπτομέρειες και ευχέρεια τους νοερούς τους συλλογισμούς.

Σχετικά με τις στρατηγικές τις οποίες χρησιμοποιούν περισσότερο κυριαρχεί η στρατηγική της στρογγυλοποίησης (37,8%) και ακολουθούν κατά σειρά προτίμησης οι στρατηγικές των συμβατών όρων (13,2%), των ειδικών αριθμών (12,1%), της συσσώρευσης (10,3%) και του εμπρόσθιου άκρου (9,1%). Συνολικά χρησιμοποιούνται 11 διαφορετικά είδη στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης και μαζί με το νοερό αλγόριθμο (ο οποίος εμφανίζεται και αυτός με διαφορετικές μορφές) σύνολο 12 διαφορετικές νοερές στρατηγικές.

Σχετικά με το ρεπερτόριο των μαθητών, το μέγεθος του ρεπερτορίου τους εκτείνεται από 5 έως και 9 στρατηγικές όπου 10 μαθητές ξεπερνάνε το μέσο όρο αυτού του μεγέθους. Παρόλα αυτά δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ του μεγέθους ρεπερτορίου των μαθητών και της επίδοσής τους στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης.

Η χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής με επιτυχία στην Α απάντηση έγινε σε 2 έως και 7 προβλήματα από όλους τους μαθητές. Παρατηρείται στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ της χρήσης της πιο κατάλληλης στρατηγικής και της επιτυχίας στην Α απάντηση των μαθητών μέσω υπολογιστικής εκτίμησης. Αντίθετα καμία συσχέτιση στατιστικά σημαντική δεν προκύπτει μεταξύ της χρήσης υπολογιστικής εκτίμησης στο σύνολο των απαντήσεων ούτε και στο μέγεθος του ρεπερτορίου των μαθητών συγκριτικά με τη χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής στην Α απάντηση.

Αναφορικά με τα λάθη των μαθητών τα περισσότερα λάθη πραγματοποιήθηκαν στην εκτέλεση των νοερών πράξεων, από βιασύνη, απροσεξία ή και αδυναμία συγκράτησης των επιμέρους αποτελεσμάτων στην εργαζόμενη μνήμη τους. Οι περισσότεροι μαθητές οι οποίοι έδωσαν λανθασμένη απάντηση εφαρμόζουν στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης (88,7%) παρόλο που καταλήγουν σε λάθος αποτέλεσμα. Μία αρκετά σημαντική διαπίστωση είναι ότι οι περισσότεροι από τους μαθητές που σημειώνουν αποτυχία στην πρώτη τους απάντηση ανακαλύπτουν, συνειδητοποιούν και διορθώνουν το λάθος τους στη δεύτερη ή τρίτη τους απάντηση. Χωρίς καμία διδακτική παρέμβαση από δάσκαλο ή άλλο παράγοντα, οι μαθητές μέσω της αναζήτησης εναλλακτικών τρόπων λύσεων για το ίδιο πρόβλημα είναι ικανοί να αντιληφθούν και να διορθώσουν τα λάθη τους. Παράλληλα μέσω της αναζήτησης εναλλακτικών λύσεων γίνονται περισσότερο αντιληπτοί από τους μαθητές κάποιοι παράγοντες που περιλαμβάνονται στην υπολογιστική εκτίμηση (Sowder & Wheeler, 1989) όπως τα πολλαπλά εξαγόμενα δηλαδή αποδοχή πολλών και όχι μόνο μιας τιμής της εκτίμησης, οι πολλαπλές διαδικασίες, δηλαδή η αποδοχή πολλών και όχι μιας διαδικασίας για να έχουμε εκτίμηση και η καταλληλότητα, δηλαδή η αναγνώριση ότι η καταλληλότητα της εκτίμησης εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια.

Ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν σωστά δεν συμβαδίζει με την ικανότητά τους. Δηλαδή οι μαθητές οι οποίοι σημειώνουν τη μεγαλύτερη επιτυχία είτε στην Α απάντηση, είτε στο σύνολο των απαντήσεων, είτε διαθέτουν μεγάλο ρεπερτόριο στρατηγικών δεν είναι και οι ταχύτεροι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης.

Τα χαρακτηριστικά των αριθμητικών προβλημάτων επηρέασαν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των συμμετεχόντων. Συγκεκριμένα τα προσθετικά προβλήματα μπορούν οι μαθητές να τα χειριστούν πιο εύκολα δίνοντας περισσότερες σωστές απαντήσεις αλλά και περισσότερες από μία απαντήσεις και μέσω πολλαπλών διαδικασιών από ότι τα προβλήματα με διαίρεση και πολλαπλασιασμό. Με σχετική ευκολία χειρίζονται τα προβλήματα υπολογισμού μέσου όρου και ποσοστών εκτελώντας σωστά στην πλειοψηφία τους στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης. Επίσης οι μαθητές χειρίζονται με μεγαλύτερη ευχέρεια προβλήματα που περιέχουν δεκαδικούς και ακέραιους αριθμούς από ότι προβλήματα με κλάσματα.

Ο τρίτος στόχος της έρευνας ήταν να εξεταστούν οι κοινωνικοί παράγοντες οι οποίοι μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης. Οι μαθητές που είναι καλύτεροι στα σχολικά Μαθηματικά και έχουν και αρκετές εξωσχολικές δραστηριότητες παρουσιάζουν καλύτερη επίδοση στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης και δίνουν περισσότερες απαντήσεις σε κάθε πρόβλημα από ότι οι υπόλοιποι μαθητές. Αξίζει να μελετηθούν περαιτέρω και άλλοι κοινωνικοί αλλά και συναισθηματικοί ή περιβαλλοντικοί παράγοντες οι οποίοι μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα της υπολογιστικής εκτίμησης.

Ο τέταρτος στόχος της μελέτης μας ήταν η σύγκριση με παλιότερη έρευνα των αποτελεσμάτων ανάμεσα σε μαθητές δημοτικού (Ε και ΣΤ δημοτικού) (N=596) και στους μαθητές λυκείου (N=30) σε τέσσερα από τα 15 προβλήματα της παρούσας έρευνας. Παρατηρούμε ότι ενώ υπάρχουν διαφορές στις δύο ηλικιακές ομάδες, με τους μαθητές του λυκείου να σημειώνουν καλύτερα αποτελέσματα, δεν είναι τόσο σημαντικές. Άρα τα συμπεράσματα της έρευνας συμφωνούν με τους Siegler & Booth (2005) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης αρχίζει εκπληκτικά αργά και προχωρά εκπληκτικά αργά. Ενδιαφέρον θα αποτελούσε η σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ ελληνικών ερευνών στην υπολογιστική εκτίμηση και σε άλλες ηλικιακές ομάδες καθώς και η μελέτη ως προς την ευελιξία στη χρήση στρατηγικών και πως αυτή μπορεί να αναπτυχθεί σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alajmi, A. H., (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education Volume 12, Number 4,* 263-283.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, (2012). Retrieved at September 2014, from www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/content-structure

Aytekin, C., & Tolukuçar, Z. (2014). Investigation of Middle school students' estimation ability with fractions. *Elementary Education Online, 13(2),* 546-563.

Bana, J., & Dolma, P. (2004). The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 63-70). Townsville: MERGA.

Berry, R., Grant, M., McKinney, S., & Berube, C. (2014). Investigating Estimation: Influences of Time and Confidence of Urban Middle School Students. *Academic Research Journal, 2(7),* 141-151.

Berteletti, I., Lucangeli, I., Piazza, M., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Numerical estimation in preschoolers. *Developmental Psychology, 46(2),* 545-551. doi: 10.1037/a0017887

Bestgen, B., Reys, R., Rybolt, J., & Wyatt, J. W. (1980). Effectiveness of systematic instruction on attitudes and computational estimation skills of pre-service elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education. 11(2),* 124-136.

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93,* 627-638.

Booth, J. L. & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Phycology, 41,* 189-201.

Boz, B. & Bulut, S. (2012). Affective factors associated with Computational Estimation of Seventh Graders. *Necatibeu Faculty of Electronic Journal of Science and Mathematics education, Vol. 6, Issue 2, pp.* 183-216.

Boz, B & Bulut, S. (2012). A Case study about Computational Estimation Strategies of Seventh Graders. *Elementary Education online, 11 (4),* 979-994.

Case, R., & Sowder, J. T. (1990). The Development of Computational Estimation: A Neo-Piagetian Analysis. *Cognition and Instruction, 7*(2), 79-104.

Çilingir D. & Türnüklü, E. B. (2009). Estimation Ability and Strategies of the 6th-8th Grades Elementary School Students. *Elementary Education Online, 8 (3),* 637-650. [Online]: Retrieved on 01-July-2014 at URL: http://www.ilkogretim-online.org.tr/vol8say3/v8s3m2.pfd

Clayton, J.G. (1992). Estimation in schools. MPHIL. Institute of Education. University of London.

Cochran, J. & Dugger, M.H. (2013). Taking the guesswork out of computational estimation. *The Mathematics Educator, 23(1),* 60-73.

Collins Dictionary and Thesaurus in one Volume. The New (1988) Collins, London and Glasgow.

De Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2002). Influence of number type and analysis of errors in computational estimation. Granada. Mathematics Didactics Department, University of Granada.

De Castro, C., Segovia, I., & Castro, E. (2002). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 193-200). Norwich, UK.

Dolma, P. (2003). The relationship between estimation skills and computational ability of students in Years 5, 7 and 9 for whole and rational numbers. *RABSEL, the Cerd Educational Journal, 2,* 31-60.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23(1),* 45–55.

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harriss, L., & Hook, L. (1996). *Estimation strategies of four groups.* Mathematical Cognition, *2(2),* 113-135.

Dowker, A. (2003). Young children estimating for addition: The zone for practical knowledge and understanding. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp243-266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Edwards, A. (1984). Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in Mathematics, 15,* p. 59-73.

Forrester, M., & Pike, C. (1998). Learning to Estimate in the Mathematics Classroom: A Conversation-Analytic Approach. *Journal of Research in Mathematics education, 29(3),* 334-356.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22(3),* 170-218.

Hanson, S. A., & Hogan, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Heinrich, E. J. (1998). Characteristics and skills exhibited by middle school students performing the task of computational estimation. ETD Collection for Fordham University. Paper AAI9839507.

Hing, L.Y. (2007). The relationship between numerical estimation and number sense in students' learning of mathematics. University of Hong Kong.

Imbo, I., & LeFevre, J. A. (2011).Cultural differences in strategic behavior: A study in computational estimation. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, Vol 37(5),* Sep 2011, 1294-1301. http://dx.doi.org/10.1037/a0024070

Joseph, Y. K. K. (2010). Beyond computation: Calculators can enhance problem solving process. National Institute of Education. Nanyang Technological University, Singapore.

Johanning, D. I. (2011). Estimation's role in calculations with fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School.* 17(2), 96-102.

Lan, Y. J., Sung, Y. T., Tan, N. C., Lin, C. P., & Chang, K. E. (2010). Mobile Device Supported Based Computational Estimation instruction for Elementary School Students. *Educational Technology & Society, 13 (3),* 55-69.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11, 95-132.

Lemaire, P., Lecacheur, M., (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology 82,* 281–304.

Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 141–148.

Lemonidis, Ch., (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*. Θεσσαλονίκη. Ζυγός

Lemonidis, Ch. & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research*, Issue 2b, 86-98.

Lemonidis, C., Nolka, E., & Nikolantonakis, K. (2014). Students' behavior in computational estimation correlated with their problem-solving ability. *Menon: Journal of Educational Research.* 3, Special Issue, (In Press).

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 350-359.

Lewis, J.C. (1994). The effect of Context and Gender on Assessment of Estimation. Paper presented at the Annual Meeting of the Orleans, LA, April 5-7, 1994.

Libertus, M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Is approximate number precision a stable predictor of math ability? *Learning and Individual Differences. Elsevier.*

Lin, C.-P., Chen, W., Tung, T.-H. (2009). Enhancing students computational estimation ability in GS-based computer-supported collaborative learning environment. In Kong, S.C., Ogata, H., Arnseth, H.C., Chan, C.K.K., Hirashima, T., Klett, F., Lee, J.H.M., Liu, C.C., Looi, C.K., Milrad, M., Mitrovic, A., Nakabayashi, K., Wong, S.L., Yang, S.J.H. (eds.) (2009). *Proceedings of the 17th International Conference on Computers in Education [CDROM]* . Hong Kong: Asia-Pacific Society for Computers in Education.

Μπαμπινιώτης, Γ. (2002). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής γλώσσας.* Κέντρο Λεξικολογίας Ε.Π.Ε. Αθήνα.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminister Studies in Education*, 24(2), 145-154.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of Mathematics,* 12, 2-8.

McIntosh, Reys, B., & Reys, R., Bana, J., & Farrwll, B. (1997). *Number sense in school mathematics: Student performance in four countries.* Perth: MASTEC, Edith Cowan University.

Mildenhall, P., Hackling, M., & Swan, P., (2009). Computational estimation in the primary school: A single case study of one teacher's involvement in a professional learning intervention. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Fremantle: MERGA.

Mildenhall, P. (2011). Enhancing the teaching and learning of computational estimation in Year 6. Faculty of arts and education, Edith Cowan University.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : The Council.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics, (2010*). Math Fact Fluency : How and why we teach for flexible thinking.* IDMT Boise State University, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics, (2014). *Procedural Fluency in Mathematics.* Reston, VA: Author.

Noordin, N., Razak, F.A. & Ali, N., (2011). *The relation between estimation and computation abilities of Mara Junior Science College students*. Research Management Institute. Malaysia.

Opfer, J., Siegler, R. S., (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology* 55 (2007) 169–195.

Pomerantz, H., & Waits, B. (1997). The Role of Calculators in Math Education. Dallas, Texas. Retrieved at 27 September 2013 from http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/therole.pdf.

Reys, R. E., Bestgen, B.J., Rybolt, J.F., & Wyatt, J.W. (1982).Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, pp183-201.

Reys, B. J. (1986). Teaching computational estimation: concepts and strategies. In, *Estimation & Mental Computation-1986 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.*

Reys, R. E., Trafton, P. R., Reys, B. B., & Zawojewski, J. (1984). *Developing computational estimation for the middle grades.* Final Report of NSF Grant No. NSF 81/13601.

Reys, B. J., Reys, R. W., & Penafiel, A., F., (1991). Estimation performance and strategies use of Mexican fifth- and eighth-grade student sample. *Educational Studies in Mathematics, 22*, p. 353-375.

Reys, R. W., Reys, B. J., Nohda, N., & Ishida, J. (1991b). Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(1), 39–58.

Rubenstein, R. N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16(2), 106–119.

Segovia, I. (1986). Estimation and approximate computation in grades 1-8. Bachelor's thesis. Department of Mathematics Didactics, University of Granada.

Segovia, I., Castro, E., (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. No 17, Vol 7(1), pp. 499-536.

Schoen, H. L., Friesen, C. D., Jarrett, J. A., & Urbatsch, T. D. (1981). Instruction in estimating solutions of whole number computations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 12, 165-178.

Schneider, M., & Grabner, R. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, Vol. 101, No. 2, 359-372.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development, March/April 2004, Volume 75, Number 2,* Pages 428 – 444.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197-212). New York: Psychology Press.

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: testing predictions of ASCM using the choice /no choice method. *Journal of Experimental Psychology: General,* 126, 71-92.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *The origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. (1990). Treating estimation and Mental computation as situated mathematical processes. *Learning Research and Development Center*. Pittsburg University. Pittsburg.

Slusser, E., Santiago, R., Barth, H. (2013). Developmental Change in Numerical *Estimation. Journal of Experimental Psychology: General*, Vol 123, No.1, 193-208.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and Number Sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.

Sowder, J. T., & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 130–146.

Star, J., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM Mathematics Education* (2009) 41:569–579.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: an experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 408–426.

Star, J. R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 280-300.

Takahashi, A., Watanabe, T., & Yoshida, M. (2008). English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study. *Global Education Resources, L.L.C.*

Trafton, P. (1994). Computational estimation: Curriculum and development efforts and instructional issues. In R. Reys & N. Nohda (Eds.*), Computational alternatives for the twenty-first century: Cross cultural perspectives from Japan and the United States (pp. 76-86).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tsao, Y-L. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of college teaching and learning,* Vol. 1, Number 12.

Tsao, Y-L. & Pan T-R. (2013). The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies*. May2013, Vol. 11, p1-15. 15p.

Tsao, Y-L. (2013). *Prospective Elementary Teachers Computational Estimation and Attitudes toward Computational Estimation.* The Clute Institute International Academic Conference. Breckenridge, Colorado

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2007). Developing adaptive expertise: A feasible and valuable goal for (elementary) mathematics education? *Ciencias Psicologicas,* 2007(1), 27-35.

Verschaffel, L., Torbeyns, J., Smedt, B., Peters, G., & Ghesquiere, P. (2010). Solving subtraction problems flexibly by means of indirect addition. *Understanding Number Development and Difficulties, BJEP Monograph Series,* II (7), 51-63

Volkova, T., (2005). Characterizing middle school student's thinking in estimation. *In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp. 289-296. Melbourne: PME.

Wai, S.K., Kheong, F.H. (1998). Pupils' estimation skills and related mathematical abilities. *The Mathematical Educator,* Vol. 3(1), 50-60.

Xu, C., Wells, E., LeFevre, J. A., & Imbo, I. (2014). Strategic flexibility in computational estimation for Chinese and Canadian educated adults. *Journal of*

Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 40(5): 1481-97. doi:10.1037/a0037346.

Yang, D.C. (2005) Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Journal of Educational Studies*, 31(3), pp. 317-333

Yang, D. C., & Wu, S. S. (2012). Examining the Differences of the 8th-Graders' Estimation Performance Between Contextual and Numerical Problems. *US-China Education Review A*, 12, 1061-1067.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Τεστ

Πρόβλημα 1

Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών:

1.26 € , 4.79 €, 0.99 €, 1.37 € , 2.58 €

Πρόβλημα 2

Να εκτιμηθεί περίπου ο αριθμός των επισκεπτών σε μια έκθεση από την ακόλουθη λίστα:

Δευτέρα 72.250, Τρίτη 63.819,

Τετάρτη 67.480, Πέμπτη 73.180,

Παρασκευή 74.918, Σάββατο 68.490

Πρόβλημα 3

Ένας μαθητής που ξεκίνησε σκι έκανε 75 ώρες μάθημα και κάθε ώρα κόστιζε 36 €. Πόσο πρέπει περίπου να πληρώσει;

Πρόβλημα 4

Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:

3.388:7

Πρόβλημα 5

Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:

7/8 + 12/13 + 23/45 =

Πρόβλημα 6

Στα 816ml μιας ουσίας το 9,84% είναι αλκοόλη. Πόση περίπου αλκοόλη έχει η ουσία;

Πρόβλημα 7

Υπολογίστε περίπου τον αριθμό μαθητών των τριών σχολείων:

Α΄ Λύκειο: 1.378 μαθητές , Β΄ Λύκειο :236 μαθητές , Γ΄ Λύκειο: 442 μαθητές

Πρόβλημα 8

Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:

437 x 8 =

Πρόβλημα 9

Έξι ανεξάρτητες μετρήσεις έγιναν από μια ομάδα για την εύρεση του ύψους του βουνού Έβερεστ: 28.990ft, 28.991ft, 28.994ft, 28.998ft, 29.001ft, 29.026ft.

Με βάση αυτές τις μετρήσεις πόσο περίπου μπορούμε να πούμε ότι είναι το ύψος του Έβερεστ;

Πρόβλημα 10

Η Μαρία έτρεξε 1/2km το πρωί και 3/8km το απόγευμα. Έτρεξε τουλάχιστον 1km ;

Πρόβλημα 11

Το αποτέλεσμα ισούται περίπου με 200;

35 + 42 + 40 +38 +44

Πρόβλημα 12

Εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα:

62x79=

Πρόβλημα 13

Ένας εργάτης δούλεψε 28 ημέρες για 56 € τη μέρα. Πόσο περίπου θα πληρωθεί;

Πρόβλημα 14

Έξι ομάδες μαθητών έκαναν με λουλούδια ανθοδέσμες για τη σχολική γιορτή. Κάθε ομάδα έκανε 27, 49, 38, 65, 56, 81 ανθοδέσμες. Πόσες ανθοδέσμες έχουμε περίπου συνολικά;

Πρόβλημα 15

Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 χιλιόμετρα σε 52 ώρες. Πόσα χιλιόμετρα διανύει περίπου σε μία ώρα;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΚΑΘΕ ΜΑΘΗΤΗ ΣΕ ΚΑΘΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΚΑΙ ΛΑΘΗ

Πίνακας 42. Οι επιδόσεις και τα λάθη των 30 μαθητών και μαθητριών στην πρώτη απάντηση

	Σωστές απαντήσεις				**Λάθη**		
	Σύνολο	**-με υπολογιστική εκτίμηση**	-με νοερό αλγόριθμο	Μέσος χρόνος απόκρισης (σε sec)	Σύνολο	-στις πράξεις	-στην εκτέλεση της στρατηγικής
M9	15 100%	**13**	2	35	-	-	-
M23	15 100%	**13**	2	41,7	-	-	-
M24	14 93,3%	**12**	2	26,5	1	-	1
M15	14 93,3%	**12**	2	42,4	1	1	-
M21	14 93,3%	**11**	3	43,5	1	1	-
M26	13 86,7%	**13**	-	21,5	2	2	-
M30	13 86,7%	**12**	1	24,3	2	2	-
M10	13 86,7%	**12**	1	29,2	2	1	1
M20	13	**11**	2	33,4	2	1	1

	86,7%						
M12	12 80%	**12**	-	8,4	3	2	1
M22	12 80%	**11**	1	10,6	3	3	-
M3	12 80%	**11**	1	15,9	3	3	-
M14	12 80%	**10**	2	39,6	3	2	1
M13	11 73,3%	**10**	1	20,9	4	4	-
M1	11 73,3%	**10**	1	9,1	4	3	1
M11	11 73,3%	**11**	-	73,7	4	4	-
M29	11 73,3%	**9**	2	19,9	4	3	1
M2	10 66,7%	**10**	-	42,5	5	5	-
M17	10 66,7%	**9**	1	76,8	5	5	-
M16	10 66,7%	**10**	-	24,1	5	3	2
M25	10 66,7%	**10**	-	24,1	5	4	1
M4	10 66,7%	**8**	2	30,1	5	4	1
M19	10	**9**	1	70,8	5	3	2

	66,7%						
Μ8	9 60%	**7**	2	23,5	6	4	2
Μ18	9 60%	**8**	1	24,9	9	5	2
Μ27	8 53,3%	**7**	1	21,6	8	5	1
Μ5	8 53,3%	**7**	1	27,4	7	7	1
Μ28	7 46,7%	**7**	-	15,3	8	8	-
Μ7	7 46,7%	**7**	-	20	8	5	3
Μ6	6 40%	**6**	-	26,8	9	7	2
Σύνολο	**330**	**298**	**32**	**Μ.Ο. 30,8**	**124**	97	24

Πίνακας 43. Οι επιδόσεις και τα λάθη των 30 μαθητών και μαθητριών στη δεύτερη και τρίτη απάντηση

	Β Απάντηση				**Γ Απάντηση**			
	Σωστές απαντήσεις	**-με υπολογιστική εκτίμηση**	**-με νοερό αλγόριθμο**	**Λάθη**	**Σωστές απαντήσεις**	**-με υπολογιστική εκτίμηση**	**-με νοερό αλγόριθμο**	**Λάθη**
Μ9*	11	**8**	3	-	4	**4**	-	-
Μ23	12	**10**	2	-	1	-	1	-
Μ24	4	**3**	1	1	-	-	-	-
Μ15	14	**10**	4	-	4	**2**	2	1
Μ21	12	**11**	1	-	4	**3**	1	-
Μ26	10	**8**	2	-	3	**3**	-	-

M30	10	**7**	3	1	2	**2**	-	**-**
M10	12	**5**	7	-	2	**2**	-	-
M20	8	**8**	**-**	**-**	-	**-**	-	**-**
M12*	10	**8**	2	-	5	**2**	3	-
M22	12	**10**	2	-	1	**-**	1	-
M3	7	**6**	1	-	1	**1**	-	-
M14	13	**7**	6	2	9	**7**	2	-
M1	12	**9**	3	1	2	**2**	-	-
M11	10	**7**	3	-	1	**1**	-	-
M17	12	**11**	1	1	4	**4**	-	-
M13	11	**9**	2	2	4	**4**	-	-
M29	4	**4**	-	2	-	**-**	-	-
M2	11	**8**	3	3	3	**3**	-	1
M16	5	**4**	1	1	2	**1**	1	1
M25	9	**8**	1	-	-	**-**	-	-
M4	8	**7**	1	-	2	**1**	1	-
M19	7	**6**	1	3	3	**3**	-	-
M8*	10	**7**	3	1	2	**2**	-	-
M18	14	**12**	2	1	6	**6**	-	-
M27	11	**10**	1	1	-	**-**	-	-
M5	8	**8**	-	-	3	**3**	-	-
M28	4	**3**	1	1	-	**-**	-	-
M7	6	**6**	-	3	2	**2**	-	2
M6	10	**8**	2	1	1	**1**	-	-
Σύνολο	**287**	**228**	59	25	71	**59**	12	5

Πίνακας 44. Συχνότητα λαθών ανά μαθητή σε κάθε υποκατηγορία λαθών

	Λάθη στις πράξεις				**Λάθη στην εκτέλεση της στρατηγικής**		**ΣΥΝΟΛΟ**
	Λάθη στον αριθμό ψηφίων	Λάθη στις πράξεις	Λάθη στην εκτέλεση του νοερού αλγόριθμου	Άλλο λάθος	Χωρίς επακολουθούμενη αντιστάθμιση	Λάθη στην επακολουθούμενη αντιστάθμιση	
M7	2	3		2	4	2	13
M6	3	2	1	2	2		10
M2	1	2	2		4		9
M28	4	2	1	2			9
M19	2	2 1ν.α.		1	3		8
M27	3	2		2		1	8
M18	1	1		2	3		7
M5	2	2	1	1	1		7
M8	1	2	1		3		7
M16	1	1	1		4		7
M17	2	4					6
M13	1	2	1	1	1		6
M29	5				1		6
M14		4				1	5
M1	1	1	1		2		5
M25		2	1	1	1		5
M4	2	1		1	1		5
M11	2	2					4
M12	2				1		3

M30		1	2				3
M22		2	1				3
M3	2		1				3
M26	1			1			2
M10		1				1	2
M15	1	1					2
M20		1				1	2
M24		1			1		2
M21	1						1
M23							0
M9							0
Σ	**40**	**42**	**14**	**16**	**32**	**6**	**150**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

ΠΙΝΑΚΕΣ ΓΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Πίνακας 45. Φύλο και τάξη φοίτησης του δείγματος

ΦΥΛΟ	**Σύνολο**	**Α Λυκείου**	**Β Λυκείου**	**Γ Λυκείου**
Αγόρι	17 56,7%	8	5	4
Κορίτσι	13 43,3%	2	4	7
Σύνολο	30 100%	10 33,3%	9 30%	11 36,7%

Πίνακας 46. Τόπος γέννησης και έτη διαμονής στη Γερμανία

Τόπος Γέννησης		**Έτη διαμονής στη Γερμανία**		
Ελλάδα	Γερμανία	1 έως 5	Από 5 έως 10	Πάνω από 10
7 23,3%	23 76,7%	6 20%	3 10%	21 70%

Πίνακας 47. Είδος σχολείου φοίτησης μαθητών

ΣΧΟΛΕΙΟ	Νηπιαγωγείο	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο
Ελληνικό	16 53,3%	27 90%	30 100%	28 93,3%
Γερμανικό	10 33,3%	-	-	-
Και τα δύο	4 13,3%	3 10%	-	2 6,7%
Σύνολο	30	30	30	30

Πίνακας 48. Το μορφωτικό επίπεδο των γονέων

Μορφωτικό επίπεδο	Απόφοιτος Βασικής Εκπαίδευσης	Απόφοιτος Μέσης Εκπαίδευσης	Απόφοιτος Ανώτατης Εκπαίδευσης
Πατέρας	5 16,7%	18 60%	7 23,3%
Μητέρα	7 23,3%	15 50%	8 26,7%

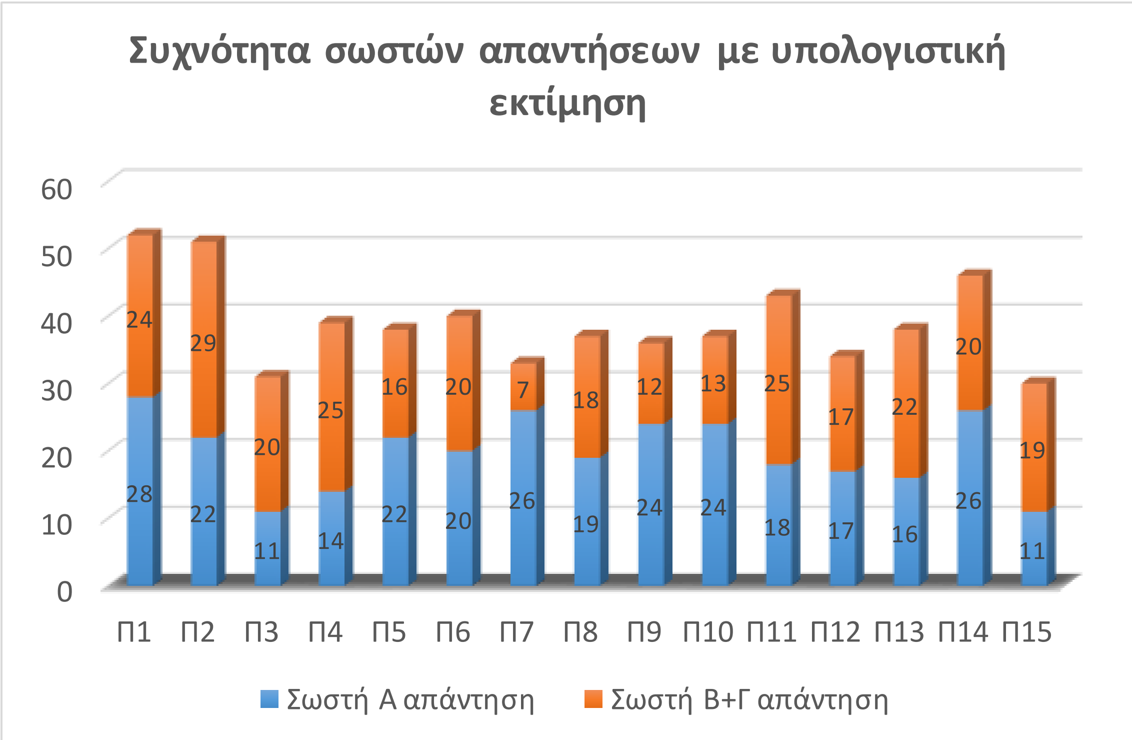
Πίνακας 49. Οι εξωσχολικές δραστηριότητες, η εργασία και η ικανότητα στα Μαθηματικά των μαθητών του δείγματος

Εξωσχολικές δραστηριότητες		**Εργασία Μαθητών**		**Ικανότητα στα Μαθηματικά**	
Λίγες	Πολλές	Ναι	Όχι	Μέτρια	Υψηλή
13 43,3%	17 56,7%	7 23,3%	23 76,7%	13 43,3%	17 56,7%

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Γράφημα 2. Συχνότητα σωστών απαντήσεων με υπολογιστική εκτίμηση



Γράφημα 3. Μέσος χρόνος απαντήσεων ανά πρόβλημα

Γράφημα 4. Συχνότητα χρήσης υπολογιστικής εκτίμησης και νοερού αλγόριθμου