ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ -ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜ.ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Η Διδασκαλία του Λόγου και της Αναλογίας σε Μαθητές Στ΄Δημοτικού με τη Χρήση ενός Ιστορικού Εργαλείου

Δεληγιαννίδης Τριαντάφυλλος

ΑΕΜ: 561

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

στην κατεύθυνση « Ιστορία και Επιστημολογία των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης Διδακτικής των Μαθηματικών»

Επόπτης: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Βαθμολογητές: Τσακιρίδου Ελένη

Θωμαΐδης Ιωάννης

Θεσσαλονίκη, 2017

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης:

   Βαθμός:

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Επόπτης:

   Βαθμός:

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Επόποπτης:

   Βαθμός:

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

Ο συγγραφέας……………………………………………………βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος εικόνων

Κατάλογος πινάκων

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία προσπαθεί να πραγματοποιήσει μια γεωμετρική διδακτική προσέγγιση των Λόγων και Αναλογιών, σε 23 μαθητές Στ΄Δημοτικού, με τη βοήθεια των Μαθηματικών Χώρων Εργασίας και τη χρήση ενός ιστορικού εργαλείου. Η έρευνα στηρίχθηκε στο μοντέλο της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης, που περιλαμβάνει τις πτυχές του αναλογικού συλλογισμού, του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας. Πριν από την παρέμβαση διερευνήθηκε μέσω ενός προελέγχου (pre-test) ο προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών, που συνίσταται στην ικανότητα επίλυσης λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών, την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων και την ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων. Ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση, που περιελάμβανε μια σειρά οκτώ μαθημάτων. Κατά τη διάρκειά της επιχειρήθηκε ο εμπλουτισμός και η διαμόρφωση του κατάλληλου ΜΧΕ των μαθητών, στο πλαίσιο της αξιοποίησης μιας ιστορικής πηγής και ενός ιστορικού εργαλείου. Η συλλογή των δεδομένων κατά τη διάρκεια της διδακτικής σειράς έγινε με παρατηρήσεις πεδίου, ηχογραφήσεις, φωτογραφήσεις και φύλλα εργασίας. Μετά την ολοκλήρωσή της ελέγχθηκε πάλι ο προσωπικός ΜΧΕ των μαθητών, μέσω ενός μεταελέγχου (post-test). Επίσης, με τη βοήθεια ενός ερωτηματολογίου, διερευνήθηκε η άποψη των μαθητών για τη διδακτική σειρά και την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα του μεταελέγχου μας έδειξαν πως υπήρξε σαφής βελτίωση των ικανοτήτων στη διαμόρφωση της μαθηματικής αναλογικής σκέψης των μαθητών. Βελτίωσαν τις επιδόσεις τους, χρησιμοποίησαν περισσότερες στρατηγικές στην επίλυση των προβλημάτων, έδωσαν δείγματα αναγνώρισης και καθορισμού της προβληματικής κατάστασης, ανέπτυξαν την ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων σε μια δεδομένη κατάσταση και εφάρμοσαν την πολλαπλασιαστική σχέση στα δεδομένα τους. Μπόρεσαν επίσης να συνεργαστούν και να αξιοποιήσουν τα οφέλη της ομαδικής εργασίας. Οπωσδήποτε το δείγμα μας είναι πολύ μικρό και περιορισμένο, για να μπορέσουμε να προβούμε σε γενικεύσεις. Ωστόσο, φαίνεται πως τέτοιου είδους παρεμβάσεις καθώς και η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας μπορούν να συμβάλλουν στην πληρέστερη κατανόηση σύνθετων εννοιών, όπως οι Λόγοι και οι Αναλογίες.

Λέξεις-κλειδιά: Μαθηματικός Χώρος Εργασίας, Λόγος και Αναλογία, Μαθηματική Αναλογική Σκέψη, Ιστορία των Μαθηματικών, ιστορικό εργαλείο του Jean Errard de Bar-le-Duc.

Abstract

The present study attempts to carry out a geometric, didactical approach to Ratio and Proportion, to 23 Primary school students, with the help of Mathematical Working Spaces and the use of a historical tool. The research was based on the Proportional Reasoning Model which includes the aspects of proportional thinking, mathematic proportional thinking and meta-analogical awareness. Prior to the intervention, a personal pre-test of the pupils, consisting of the ability to solve verbal and numerical proportions, the ability to solve analogue works and the ability to distinguish proportional-non-proportional situations, was investigated before the intervention. This was followed by a didactic intervention, which included a series of eight lessons. During its endeavor, the enrichment and shaping of the appropriate pupils' MWS was attempted, in the context of the use of a historical source and a historical tool. The collection of data during the series was done with field observations, recordings, photographs and worksheets. Upon completion, the pupils' personal MWS was rechecked through a post-test. Also, with the help of a questionnaire, the students' view of the teaching series and the integration of the History of Mathematics were explored. The results of our post-test showed that there was a clear improvement in the ability to formulate the students' mathematical proportional thinking. They improved their performance, used more strategies to solve the problems, gave examples of recognition and problem-solving, developed the capacity to analyze quantities in a given situation, and applied the multiplier relationship to their data. They have also been able to work together and harness the benefits of teamwork. Certainly our sample is too small and limited to be able to generalize. However, it seems that such interventions and the teaching of History can contribute to a fuller understanding of complex concepts, such as Ratio and Proportion.

Keywords: Mathematical Working Spaces, Ratio and Proportion, Mathematical Proportional Thinking, History of Mathematics, historical tool.

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια διδακτική γεωμετρική προσέγγιση των Λόγων και των Αναλογιών σε μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού. Η διδασκαλία στηρίχθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο των $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$, την αξιοποίηση των ιστορικών πηγών και την ανακατασκευή και χρήση ενός ιστορικού εργαλείου του 16$^{\text{ου}}$ αιώνα του Errard.

Ένα σημαντικό στοιχείο που οδήγησε στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, είναι το γεγονός πως οι Λόγοι και οι Αναλογίες αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα, αλλά ταυτόχρονα διδακτικώς τα πλέον περίπλοκα, δύσκολα και προκλητικά αντικείμενα των σχολικών προγραμμάτων σπουδών (Lamon, 2007). Επίσης, αν εξετάσει κανείς τα ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, θα διαπιστώσει ότι το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων που αφορούν τους Λόγους και τις Αναλογίες, αποτελούν μια απλή εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων που εφαρμόζονται από τους μαθητές μηχανιστικά, χωρίς την ύπαρξη εναλλακτικών μεθόδων επίλυσης. Ένας άλλος παράγοντας που συνηγόρησε στην επιλογή του θέματος ήταν η πολύ μικρή έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί στη χώρα μας σχετικά με τους Μαθηματικούς Χώρους Εργασίας και την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες και τα είδη των Λόγων και των Αναλογιών, μέσα από τη θεωρητική προσέγγιση διαφόρων ερευνητών. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια του Αναλογικού Συλλογισμού και της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης, το μοντέλο της οποίας χρησιμοποιήθηκε για τη διερεύνηση των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών που αφορούν τους Λόγους και τις Αναλογίες. Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση των ειδών των αναλογικών προβλημάτων και των δυσκολιών που συναντάμε στην επίλυση τους.

Το επόμενο κεφάλαιο ξεκινά με την παρουσίαση της θεωρίας των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας, οι οποίοι οργανώνονται με τρόπο που διασφαλίζουν στο χρήστη του χώρου την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Πρόκειται για μια πολύπλευρη και δυναμικά εξελισσόμενη θεωρία που διαρθρώνεται σε δύο οριζόντια επίπεδα: το επιστημολογικό και το γνωστικό. Οι «γενέσεις» που δημιουργούνται μεταξύ των επιπέδων ορίζουν τρία ακόμη κατακόρυφα επίπεδα. Οι διαδράσεις και η κινητικότητα μεταξύ των επιπέδων, φανερώνει το δυναμικό χαρακτήρα του θεωρητικού μοντέλου.

Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα τρία είδη Γεωμετρίας που ορίζουν οι ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$, καθώς και οι Μαθηματικοί Χώροι Εργασίας, που αποτελούν την εξέλιξη των ΓΧΕ. Στη διαμόρφωση των ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$ έχει συμβάλει η γνωστική θεώρηση της Γεωμετρίας του Duval, οι θέσεις του οποίου παρουσιάζονται στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας.

Με την παρούσα εργασία επιχειρείται η εκμάθηση ενός μαθηματικού αντικειμένου ακολουθώντας μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι θεωρίες για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και οι τρόποι ενσωμάτωσης της στη διδασκαλία. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα είδη των ιστορικών πηγών και η σημασία της χρήσης των πρωτογενών πηγών. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται ο ρόλος των εργαλείων στην Ιστορία και η σχέση τους με τον ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$, ενώ αποσαφηνίζονται οι όροι: *τεχνούργημα, εργαλείο* και *όργανο*.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας. Η χρησιμότητα της έρευνας έγκειται στο γεγονός, ότι η παρούσα εργασία προσπαθεί να συνδυάσει τρεις πτυχές της μαθηματικής εργασίας, που στο παρελθόν δεν έχουν βρει μεγάλη εφαρμογή στην ελληνική πραγματικότητα: την γεωμετρική προσέγγιση των Λόγων και των Αναλογιών, τη θεωρία των ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$ και την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο ίδιο κεφάλαιο διατυπώνεται ο σκοπός της εργασίας, που δεν είναι άλλος από τον σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλων δραστηριοτήτων στα πλαίσια των ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$, αξιοποιώντας την ενσωμάτωση της Ιστορίας, για να διδάξουμε Λόγους και Αναλογίες σε μαθητές Στ΄Δημοτικού. Παράλληλα διατυπώνονται και τα ερευνητικά ερωτήματα. Προσπαθούμε να δώσουμε ικανοποιητικές απαντήσεις σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδακτικής σειράς στη διαμόρφωση Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης, να διερευνήσουμε τυχόν δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη χρήση εμπειρικών μεθόδων και εργαλείων και τέλος να αξιολογήσουν οι ίδιοι οι μαθητές την εμπειρία τους από την κατασκευή και τη χρήση ενός ιστορικού εργαλείου και τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας με μια διαφορετική προσέγγιση. Παρακάτω παρουσιάζεται ο σχεδιασμός της διδακτικής σειράς και η ανάλυσή της υπό το πρίσμα των ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$. Το κεφαλαίο κλείνει με την παρουσίαση των ερευνητικών εργαλείων και τις διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία. Χρησιμοποιούνται δύο έλεγχοι (pre-test, post-test) για τη διερεύνηση των προσωπικών ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$ των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση, ένα ακόμη test για τη διερεύνηση της ενσωμάτωσης της νέας γνώσης, έξι φύλλα εργασίας, οι παρατηρήσεις πεδίου, οι ηχογραφήσεις και οι φωτογραφήσεις των διδασκαλιών για την εκτίμηση της διαμόρφωσης του κατάλληλου ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$ και ένα ερωτηματολόγιο για την αξιολόγηση της εμπειρίας από τους ίδιους τους μαθητές.

Το έκτο κεφάλαιο παρουσιάζει τα αποτελέσματα της παρέμβασης. Η παρουσίαση ξεκινά με τη διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$ των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση. Παρουσιάζονται αναλυτικά για κάθε μαθητή τα αποτελέσματα του pre-test. Στη συνέχεια γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κατασκευής του κατάλληλου ΜΧΕ$_{Γεωμετρία}$ των μαθητών, όπως αυτά καταγράφηκαν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Ακολουθεί η παρουσίαση της διαμόρφωσης του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση, μέσω του post-test και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για την ενσωμάτωση της νέας γνώσης. Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου που διερευνά την αξιολόγηση των μαθητών για τη διδακτική σειρά.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μελέτη περίπτωσης τριών μαθητών. Η πορεία τους κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων και τα αποτελέσματα της εργασίας τους σκιαγραφούν τα βασικά σημεία της ερευνάς μας.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και η αξιολόγηση της συνολικής παρέμβασης.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας υπάρχουν έξι συνολικά παραρτήματα. Το Παράρτημα Α΄ περιλαμβάνει έξι Φύλλα Εργασίας, με τα οποία εργάστηκαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, το Β΄ περιλαμβάνει ένα test που δόθηκε πριν και μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης, το Παράρτημα Γ΄ που αποτελείται από ένα ερωτηματολόγιο το οποίο δόθηκε στους μαθητές μετά τις διδασκαλίες για να αξιολογήσουν τη διδακτική σειρά, το Παράρτημα Δ΄ όπου εμπεριέχονται οι οδηγίες προς τους μαθητές για την κατασκευή του ιστορικού εργαλείου του Errrard, το Παράρτημα Ε΄ το οποίο περιλαμβάνει το ιστορικό κείμενο του Errard και τέσσερις ερωτήσεις που βοηθούν στην κατανόηση και διερεύνηση του κειμένου και το Παράρτημα ΣΤ΄ όπου παρουσιάζονται έξι φωτογραφίες των μαθητών κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών.

1. Λόγοι και αναλογίες

Από όλα τα αντικείμενα των σχολικών προγραμμάτων σπουδών, τα κλάσματα, οι λόγοι και οι αναλογίες διακρίνονται ως τα πλέον παρατεταμένα, υπό την έννοια της εξέλιξης, τα πλέον δύσκολα να διδαχθούν, τα πλέον περίπλοκα, τα πιο προκλητικά διδακτικώς, τα πιο ουσιώδη για να επιτύχει κανείς στα ανώτερα μαθηματικά και τις επιστήμες και από τις πλέον συναρπαστικές πλευρές της έρευνας (Lamon, 2007).

Στα Μαθηματικά η έννοια του «λόγου» είναι θεμελιώδης και έχει χρήσεις σε πολλές γνωστικές περιοχές. Τα παιδιά έρχονται σε επαφή με την έννοια από τις πρώτες κιόλας τάξεις του δημοτικού σχολείου, χωρίς ακόμη να έχουν διδαχθεί το αντικείμενο. Διδάσκονται πρώτη φορά τους λόγους στην έκτη τάξη του δημοτικού, αλλά στην πραγματικότητα σε πολλές περιοχές του προγράμματος σπουδών, τόσο στη Πρωτοβάθμια όσο και στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση γίνεται άμεση ή έμμεση αναφορά στην έννοια του λόγου (Ben-Chaim et al., 2012).

Στη Γεωγραφία για παράδειγμα συναντούμε την έννοια της πυκνότητας του πληθυσμού, η οποία ορίζεται ως ο λόγος του αριθμού των κατοίκων μιας περιοχής προς την έκταση της περιοχής αυτής και την έννοια της κλίμακας στην κατασκευή των χαρτών, όπου έχουμε το λόγο μιας μονάδας μήκους σε ένα χάρτη προς την ίδια μονάδα μήκους στην πραγματικότητα. Η ταχύτητα, η επιτάχυνση, το ειδικό βάρος, η πυκνότητα και η βαρύτητα αποτελούν μερικά μόνο παραδείγματα εννοιών από το χώρο των Φυσικών Επιστημών που σχετίζονται άμεσα με τους λόγους, ενώ επιστήμες όπως τα Οικονομικά, η Στατιστική, η Μηχανολογία και άλλες περιλαμβάνουν πληθώρα παραδειγμάτων που χρησιμοποιούν τους λόγους και τις αναλογίες.

Τους λόγους και τις αναλογίες τους χρησιμοποιούμε ευρέως στα Μαθηματικά, στην επιστήμη αλλά και στην καθημερινή μας ζωή (Karplus, Pulos & Stage, 1983). Όταν για παράδειγμα ο ανθοπώλης φτιάχνει μια ανθοδέσμη με τρία κόκκινα τριαντάφυλλα και πέντε άσπρες μαργαρίτες, ουσιαστικά μιλάμε για ένα λόγο 3:5 μεταξύ των τριαντάφυλλων και των μαργαριτών ή όταν ο ζαχαροπλάστης χρησιμοποιεί το λόγο 2:1 για το αλεύρι και τη ζάχαρη στην παρασκευή ενός γλυκίσματος, αυτό σημαίνει πως για κάθε δύο φλιτζάνια αλεύρι, χρησιμοποιεί ένα φλιτζάνι ζάχαρη.

Η μαθηματική βιβλιογραφία έχει αναδείξει διάφορους ορισμούς για τους λόγους και τις αναλογίες. Στην παρούσα εργασία επικεντρωνόμαστε στους εξής:

Σύμφωνα με τους Philippou, & Christou, (2002), ο λόγος αναφέρεται σε μια κλασματική σχέση α / β δύο μεγεθών.

Για τους Livy & Vale, (2011) η έννοια του λόγου μπορεί να τεκμηριωθεί ως η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ δυο αξιών. Ο λόγος είναι η σύγκριση μεταξύ δυο ποσοτήτων.

Κατά τους Ben-Chaim et al., (2012) ο λόγος είναι η ποσοτικοποίηση μιας πολλαπλασιαστικής σχέσης που προκύπτει από τη διαίρεση (ή τον πολλαπλασιασμό) μιας ποσότητας από μια άλλη. Ο πολλαπλασιαστικός ποσοδείκτης καθορίζεται από τη διαίρεση (ή τον πολλαπλασιασμό) των δυο ποσοτήτων.

Στα Μαθηματικά η αναλογία αναφέρεται στην ισότητα μεταξύ δύο λόγων α/β = γ/δ (Tourniaire & Pulos, 1985).

Σύμφωνα με το Collins Dictionary of Mathematics η αναλογία είναι: 1. Η γραμμική σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών ποσοτήτων ή των αντιστρόφων τους· τα αντίστοιχα στοιχεία δυο συνόλων που βρίσκονται σε αναλογία, βρίσκονται σε συνεχή λόγο. 2. Η σχέση μεταξύ τεσσάρων αριθμών ή ποσοτήτων στις οποίες ο λόγος του πρώτου ζεύγους ισούται με το λόγο του δεύτερου ζεύγους· γράφεται α:β = γ:δ ή α:β : : γ:δ (Borowski & Borwein, 2002).

1.1 Είδη λόγων

Η Lamon (2007) αναφέρει πως ο Freudenthal χαρακτηρίζει το λόγο ως «εσωτερικό» αν οι ποσότητες μοιράζονται τον ίδιο μετρικό χώρο ή σύμφωνα με την ορολογία του Freudenthal προέρχονται από το ίδιο «σύστημα». Ομοίως ο «εξωτερικός» λόγος αποτελείται από ποσότητες που προέρχονται από διαφορετικά μετρικά συστήματα.

Οι Ben-Chaim et al., (2012) υποστηρίζουν πως η σύγκριση δύο ή περισσοτέρων αξιών μπορεί να πραγματοποιηθεί με μια από τρεις μεθόδους:

- Σύγκριση μεγεθών διαφορετικών ποσοτήτων που βρίσκονται σε σύνδεση μεταξύ τους. Όπως για παράδειγμα η περίπτωση που μετράμε τους κατοίκους ανά τετραγωνικό χιλιόμετρο. Κατά κανόνα οι συγκρίσεις αυτές δεν ονομάζονται λόγος, αλλά βαθμός, δείκτης (rate).

- Σύγκριση δυο μερών μιας ενιαίας ποσότητας, όπως για παράδειγμα ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια σε μια σχολική τάξη.
- Σύγκριση μεγεθών δυο ποσοτήτων, που μπορεί εννοιολογικά να συνδέονται, αλλά δεν θεωρούνται ως μέρη ενός κοινού συνόλου, όπως για παράδειγμα η περίπτωση του λόγου των πλευρών δυο τριγώνων. Τέτοιες συγκρίσεις αναφέρονται συχνά ως «κλίμακα» και περιλαμβάνουν προβλήματα μετασχηματισμού σμίκρυνσης ή μεγέθυνσης.

Το πρώτο είδος το οποίο ορίζεται από τον Freudenthal ως βαθμός, δείκτης (rate), απεικονίζει μια σύγκριση δύο μεταβλητών με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Δημιουργείται από μια πολλαπλασιαστική σχέση, που απεικονίζει κάποιο φυσικό φαινόμενο ή από κάποια νέα αυθαίρετη έννοια που ορίζεται για ένα λειτουργικό σκοπό. Ο λόγος αυτού του είδους παράγει μια ξεχωριστή, νέα έννοια, με δική της οντότητα και αυτή η νέα έννοια δεν θεωρείται ως λόγος per se, αλλά ως βαθμός (rate) ή πυκνότητα (Ben-Chaim et al., 2012).

Σχετικά με την έννοια του βαθμού (rate) , οι όροι «εκτεταμένες» και «εντατικές» ποσότητες συναντώνται στην διεθνή βιβλιογραφία. Οι ποσότητες οι οποίες μπορούν να μετρηθούν απευθείας όπως το μήκος ή η απόσταση ονομάζονται εκτεταμένες (extensive quantities) (Piaget, 1952), ενώ άλλες ποσότητες όπως η ταχύτητα μπορούν να μετρηθούν σε συσχετισμό δύο μεταβλητών. Αυτές ονομάζονται εντατικές ποσότητες (intensive quantities) (Nunes, Desli, & Bell, 2003).

1.2 Είδη αναλογιών

Στη μαθηματική βιβλιογραφία αναφέρεται πως τέσσερις μεταβλητές α, β, γ και δ (α≠0, β≠0, γ≠0, δ≠0) θα σχηματίσουν μια σχέση αναλογίας στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

1. Όταν α/β = γ/δ. Αυτή είναι μια άμεση αναλογία. Το πηλίκο των δύο μερών των λόγων α και β είναι σταθερά ίσο με αυτό των γ και δ.
2. Όταν α×β = γ×δ. αυτή είναι μια έμμεση (αντίστροφη) αναλογία, όπου το γινόμενο των δύο μερών του λόγου α και β είναι σταθερά ίσο με αυτό του γ και δ (Ben-Chaim et al., 2012).

Προκειμένου οι μαθητές να αναγνωρίσουν πως υπάρχει μια σχέση αναλογίας ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες μεταβλητές σε ένα πρόβλημα, θα πρέπει να πληρούνται δύο προϋποθέσεις: α) θα πρέπει να υπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση (λόγος), ανάμεσα σε δύο αξίες. Δηλαδή η σχέση να μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά είτε ως το γινόμενο είτε ως το πηλίκο ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες αξίες. β) Η πολλαπλασιαστική σχέση πρέπει να είναι σταθερή είτε στην ίδια (άμεση) είτε στην αντίθετη (έμμεση) κατεύθυνση.

1.3 Αναλογικός συλλογισμός

Ο αναλογικός συλλογισμός είναι η ανθρώπινη ικανότητα για χρήση μιας αποτελεσματικής μορφής του αναλογικού σχήματος. Αυτή η ικανότητα έχει ένα κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και συχνά χαρακτηρίζεται ως η έννοια που, από τη μια μεριά αποτελεί το θεμέλιο λίθο των ανώτερων μαθηματικών και από την άλλη αποτελεί την κορυφή των βασικών αξιωμάτων των μαθηματικών (Post, Lesh & Behr, 1988), ενώ σύμφωνα με την Vosniadou (1989) ο αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και τη μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα, που αποτελεί την πηγή σε ένα άλλο σύστημα που αποτελεί το στόχο. Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς, που χαρακτηρίζουν τα δυο συστήματα.

Ο αναλογικός συλλογισμός είναι μια μακρόχρονη διαδικασία, όπου η κατανόηση του ενός σταδίου δημιουργεί τα θεμέλια για την κατανόηση του ανώτερου επιπέδου (Lamon, 2007).

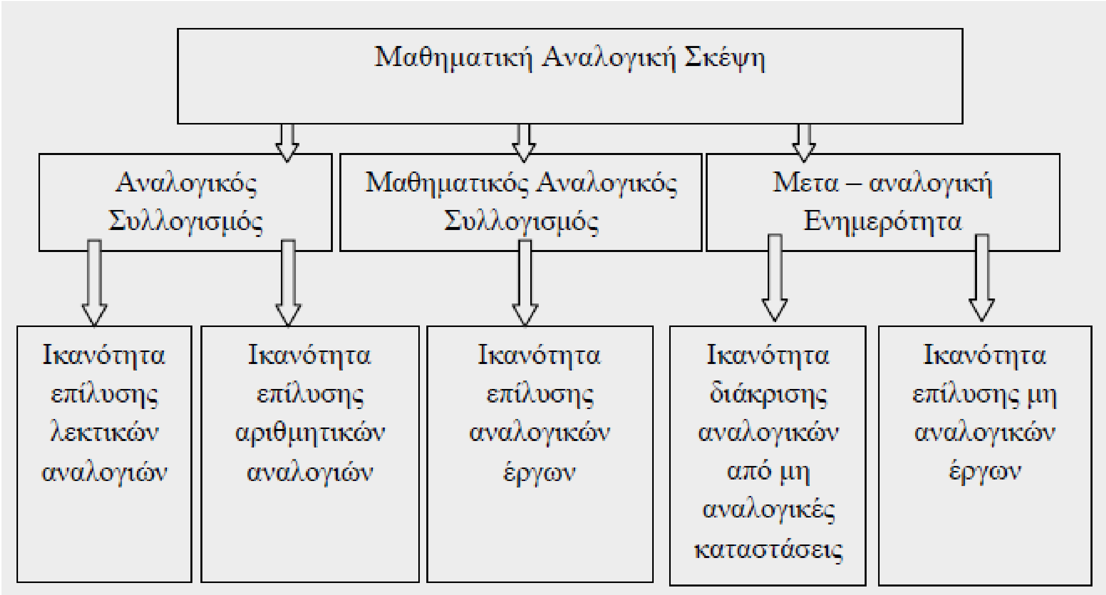
Το αναλογικό σχήμα αναπτύσσεται σε τρία στάδια: Το πρώτο είναι το **διαισθητικό** στάδιο (ηλικίες 3-7). Εδώ δεν υπάρχει ακόμη η ικανότητα στα παιδιά να συνδυάσουν δύο μεταβλητές και η συλλογιστική είναι ακόμη διαισθητική. Το επόμενο στάδιο είναι το **συμπαγές** (ηλικίες 8-12), όπου υπάρχει η δυνατότητα να συνδέσουν δύο μεταβλητές, οι οποίες συνδέονται στενά με μια οικεία συμπαγή κατάσταση, αλλά χωρίς καμία κατανόηση των κανόνων και των ιδιοτήτων, καθώς και χωρίς καμία δυνατότητα γενίκευσης οποιασδήποτε τυπικής μαθηματικής αρχής. Στο στάδιο αυτό πάντως είναι δυνατόν να επιτευχθεί ο συνδυασμός δύο μεταβλητών που οδηγούν σε μια πολλαπλασιαστική, παρά σε μια προσθετική σχέση. Τότε είναι δυνατόν να επιτευχθεί η ύπαρξη ενός δυνητικού αναλογικού σχήματος που θα επιτρέψει την επίλυση απλών αναλογικών προβλημάτων. Το τρίτο στάδιο είναι το **τυπικό** (ηλικίες 12-15), όταν οι κανόνες της αναλογικής σχέσης έχουν κατανοηθεί. Έχει πλέον δημιουργηθεί ένα αναλογικό σχήμα, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα αποτελεσματικό πνευματικό εργαλείο για την επίλυση αναλογικών προβλημάτων (Piaget & Inhelder, 1958).

Αυτά τα ευρήματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το αναλογικό σχήμα, είναι μια διαδικασία που ωριμάζει φυσιολογικά κατά την ενηλικίωση, όταν οι διαδικασίες της τυπικής σκέψης έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται πλέον ως στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων.

Έρευνες που έγιναν ήδη από τη δεκαετία του ογδόντα (Noelting, 1980, Fischer 1988, Lamon, 1993) έδειξαν πως η ανάπτυξη του αναλογικού σχήματος, μπορεί να είναι συνεχής και βαθμιαία, είναι όμως αποτέλεσμα εκμάθησης, ειδικά όταν τα παιδιά βρίσκονται στο συμπαγές στάδιο ανάπτυξης. Μαθησιακές διαδικασίες οι οποίες επιτρέπουν την ανάπτυξη πρώιμων γνωστικών σχημάτων, βοηθούν την ανάπτυξη της αναλογικής συλλογιστικής (Harel & Confrey, 1994). Επίσης διάφορες έρευνες έδειξαν ότι μερικοί μαθητές που βρίσκονται στο συμπαγές στάδιο ανάπτυξης, έχουν ήδη αναπτύξει ένα λανθάνων δυνητικό σύστημα αναλογικού σχήματος, το οποίο μέσω μιας μαθησιακής διαδικασίας που περιλαμβάνει κατάλληλες εξηγήσεις, πρακτική και ασκήσεις, μπορεί να εξελιχθεί σε ένα αποτελεσματικό γνωστικό εργαλείο, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων (Ben-Chaim et al., 2012).

1.4 Μαθηματική αναλογική σκέψη

Οι Modestou & Gagatsis έπειτα από έρευνα που πραγματοποίησαν με 945 μαθητές Δημοτικού στην Κύπρο (Modestou & Gagatsis, 2008), προτείνουν το μοντέλο της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης. Ο Αναλογικός Συλλογισμός μαζί με τον Μαθηματικό Αναλογικό Συλλογισμό και την Μετα-Αναλογική Ενημερότητα συνιστούν τις τρεις πτυχές που συνθέτουν το μοντέλο αυτό. Η πρώτη πτυχή εμπίπτει στο πεδίο της ψυχολογίας, η δεύτερη στο πεδίο των Μαθηματικών και η τρίτη έχει μεταγνωστική φύση:



Εικόνα 1: Η Μαθηματική Αναλογική Σκέψη.

Όπως βλέπουμε και από το σχήμα, κεντρικό ρόλο στη σύνθεση της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης έχει η ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων που συνιστά το Μαθηματικό Αναλογικό Συλλογισμό και συμπληρώνεται τόσο από την ικανότητα επίλυσης λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών, που συνθέτουν τον Αναλογικό Συλλογισμό, όσο και από την ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων και την ικανότητα επίλυσης μη αναλογικών έργων, που συνθέτουν την τρίτη πτυχή της Μετα-Αναλογικής Ενημερότητας. Επίσης θα πρέπει να συμπληρώσουμε πως τόσο οι Modestou & Gagatsis, όσο και ο Karplus (1983) υποστηρίζουν την ανάγκη συμπλήρωσης του Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού με τη χρήση καταστάσεων που να προωθούν την εφαρμογή στρατηγικών σύγκρισης είτε ανάμεσα είτε μεταξύ των ποσοτήτων.

Οι ερευνητές αντιτίθενται στη μονοδιάστατη ανάπτυξη της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης και υποστηρίζουν πως πρέπει να υπάρχει ισόρροπη ανάπτυξη και των τριών πτυχών του μοντέλου.

1.5 Είδη αναλογικών προβλημάτων – στρατηγικές επίλυσης

Κατά τη Lamon (2012), τα προβλήματα τα οποία αναφέρονται στην αναλογική συλλογιστική, είναι κυρίως δύο ειδών: α) τα προβλήματα σύγκρισης λόγων και β) τα προβλήματα στα οποία δίνονται τρείς ποσότητες και λείπει μια τέταρτη. Στο πρώτο είδος δίνονται τέσσερις ποσότητες οι οποίες σχηματίζουν λόγους και θα πρέπει οι μαθητές να διακρίνουν αν οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι ή κάποιος από αυτούς είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον άλλο. Στο δεύτερο είδος, όπως ήδη αναφέραμε, δίνονται οι τρείς όροι μιας αναλογίας και ζητείται ο τέταρτος όρος.

Σύμφωνα με τους Cramer, Post & Currier (1993) η βιβλιογραφία αναφέρει τρία είδη προβλημάτων για την αξιολόγηση της αναλογικής συλλογιστικής: α) προβλήματα στα οποία λείπει μια τιμή, όπου δίνονται τρία μέρη μιας πληροφορίας και αναζητείται το τέταρτο μέρος, β) προβλήματα αριθμητικής σύγκρισης, στα οποία δίνονται λόγοι και πρέπει να βρεθεί αν είναι ίσοι, μεγαλύτεροι ή μικρότεροι μεταξύ τους και γ) προβλήματα υπολογισμού, τα οποία απαιτούν συγκρίσεις οι οποίες δεν εξαρτώνται από συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές.

Ο Freudenthal (1986) υποστηρίζει ότι αυτού του είδους τα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

- Συγκρίνοντας λόγους ίδιας μεταβλητής ή μεγέθους, όπως για παράδειγμα το λόγο δύο μηκών. Τη προσέγγιση αυτή την ονομάζει «εσωτερικούς λόγους» ή «μέθοδο κλίμακας».
- Συγκρίνοντας λόγους δύο διαφορετικών μεταβλητών ή μεγεθών, όπως για παράδειγμα το λόγο απόστασης και χρόνου. Αυτή η προσέγγιση αποκαλείται «εξωτερικός λόγος» ή «λειτουργική μέθοδος».
- Απέχοντας από υπολογισμούς ωσότου βρεθεί τυπικά το αποτέλεσμα ή χτιστεί μια σχέση, η οποία περιλαμβάνει όλα τα δεδομένα.

Οι Ben-Chaim et al., (2012) πιστεύουν ότι προκειμένου να επιλυθούν σωστά τα προβλήματα Λόγων και Αναλογιών, θα πρέπει να υπάρχει ένας πολλαπλασιαστικός προσανατολισμός. Διακρίνουν μάλιστα δύο κύρια είδη στρατηγικών στην επίλυσή τους: Ι) τις προ – τυπικές και ΙΙ) τις τυπικές στρατηγικές. Συγκεκριμένα στην πρώτη ομάδα έχουμε:

i. Διαισθητική στρατηγική. Είναι κατάλληλη για απλά αναλογικά προβλήματα. Τα παιδιά φτάνουν στη σωστή λύση κάνοντας χρήση άμεσου πειραματισμού, χωρίς να έχουν επίγνωση της ισότητας που υπάρχει μεταξύ των δύο λόγων.
ii. Προσθετική στρατηγική. Είναι χαρακτηριστική στις μικρότερες τάξεις του Δημοτικού. Στηρίζεται στην προσθετική συλλογιστική και η έμφαση δίνεται στις ποσοτικές διαφορές μεταξύ των ποσοτήτων και όχι στους λόγους τους.

iii. Διαίρεση υπό αναλογία. Η στρατηγική αυτή προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν επίγνωση του δοθέντος λόγου και εκτιμούν την πολλαπλασιαστική σχέση που υπάρχει μεταξύ των τιμών του προβλήματος.
iv. Ορίζοντας τη μονάδα. Εδώ ο μαθητής ορίζει το λόγο ως μονάδα ή ως μέρος του όλου, ώστε να υπολογίσει ολόκληρη την ποσότητα
v. Καθορίζοντας το μέρος από το όλο. Και εδώ ακολουθείται μια παρόμοια στρατηγική όπως και προηγουμένως.
vi. Προβλήματα με μια άγνωστη τιμή. Η στρατηγική αυτή αποτελεί μια επέκταση της μεθόδου των πινάκων και είναι αρκετά αποτελεσματική.

Στη δεύτερη ομάδα (τυπική) διακρίνουμε μόνο μια στρατηγική :

I. Τη χρήση του αναλογικού τύπου: $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta \neq 0$). Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται από μεγαλύτερους μαθητές, όπου υπάρχει η αναλογική συλλογιστική και η αφαιρετική σκέψη.

1.6 Δυσκολίες που συναντάμε στην επίλυση προβλημάτων Λόγου – Αναλογίας

Η Lamon (2012) υποστηρίζει πως όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες, όταν εργάζονται με λόγους οι οποίοι αποτελούνται από ποσότητες που προέρχονται από διαφορετικά μετρικά συστήματα. Δίνει μάλιστα ως χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου Λόγου την ταχύτητα. Συχνά οι μαθητές αλλάζουν μεταξύ τους τη θέση των ποσοτήτων, μη μπορώντας να κατανοήσουν τη σημασία που έχει η θέση της κάθε ποσότητας για το Λόγο. Η δυσκολία αυτή, φαίνεται να συνδέεται με την ελλιπή κατανόηση των μαθητών για την έννοια του Λόγου ως ένα διατεταγμένο ζεύγος.

Μετά από έρευνα που πραγματοποίησαν οι Tourniaire & Pulos (1985), για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, κατά την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τους Λόγους και Αναλογίες, κατέληξαν ότι αυτές ταξινομούνται σε τρεις κύριες κατηγορίες: α) δυσκολίες γνωστικής φύσης, β) δυσκολίες που αφορούν τη διαδικασία επίλυσης και γ) δυσκολίες που αφορούν τη διδακτική – μαθησιακή διαδικασία και το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα. Πιο αναλυτικά:

I. Ότι αφορά τη γνωστική φύση: Το αναλογικό σχήμα είναι δευτερογενές. Το να κατανοήσει κανείς την αναλογία, προϋποθέτει την ικανότητα να συγκρίνει δύο λόγους, οι μεταβλητές των οποίων οργανώνονται σε σχέση.

Επίσης το πολλαπλασιαστικό σχήμα είναι πιο πολύπλοκο από το προσθετικό που χρησιμοποιείται στο Δημοτικό Σχολείο (Vergnaud, 1994). Μεγάλες δυσκολίες αντιμετωπίζουν επίσης οι μαθητές όταν πρέπει να διακρίνουν διαισθητικά το είδος του προβλήματος Λόγου και Αναλογίας που τους τίθεται, κυρίως στην περίπτωση των έμμεσων λόγων, όπως και όταν ο Λόγος αφορά μια «εντατική» ποσότητα, όπως για παράδειγμα η ταχύτητα.

II. Οι δυσκολίες που αναδύονται κατά την επίλυση των προβλημάτων αφορούν κυρίως τη φύση του προβλήματος, όπως το λεκτικό περιεχόμενο του προβλήματος, η φύση των ερωτήσεων, το είδος των αριθμών και ο πλούτος των γνώσεων που περιγράφει. Άμεση σχέση έχουν επίσης τα προσωπικά χαρακτηριστικά του μαθητή, όπως η ηλικία, το φύλο, το νοητικό του πηλίκο, και άλλα.

III. Τέλος οι δυσκολίες που αφορούν την τρίτη κατηγορία, σχετίζονται άμεσα με το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα της κάθε χώρας. Συνήθως αυτό προβλέπει την διδασκαλία των Λόγων και των Αναλογιών στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και στο Γυμνάσιο. Συνήθως όμως, δεν λαμβάνει υπόψη του τις ατομικές διαφορές των μαθητών και κυρίως την ανάπτυξη του αναλογικού σχήματος του καθενός. Ακόμη το περιεχόμενο των προβλημάτων είναι συχνά απόμακρο από τις πραγματικές εμπειρίες των παιδιών και απομονωμένο από την πραγματική γνώση, έξω από την τάξη (Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994).

Έρευνες που πραγματοποιήθηκαν από τους Fischbein, Manzat and Barbat (1975) έδειξαν ότι η ενασχόληση των μαθητών με κατάλληλα προβλήματα, τα οποία συνδυάζουν αυθεντικές δραστηριότητες με ένα πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον, μπορούν να βοηθήσουν να ξεπεραστούν οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην επίλυση των αναλογικών προβλημάτων. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν το αναλογικό σχήμα, εφαρμόζοντας τις δικές τους ευρετικές μεθόδους στην επίλυση των προβλημάτων. Καταφέρνουν έτσι να μετατρέψουν ένα προϋπάρχων, λανθάνων αναλογικό σχήμα σε ένα ισχυρό γνωστικό εργαλείο. Το οποίο θα μάθουν να χρησιμοποιούν.

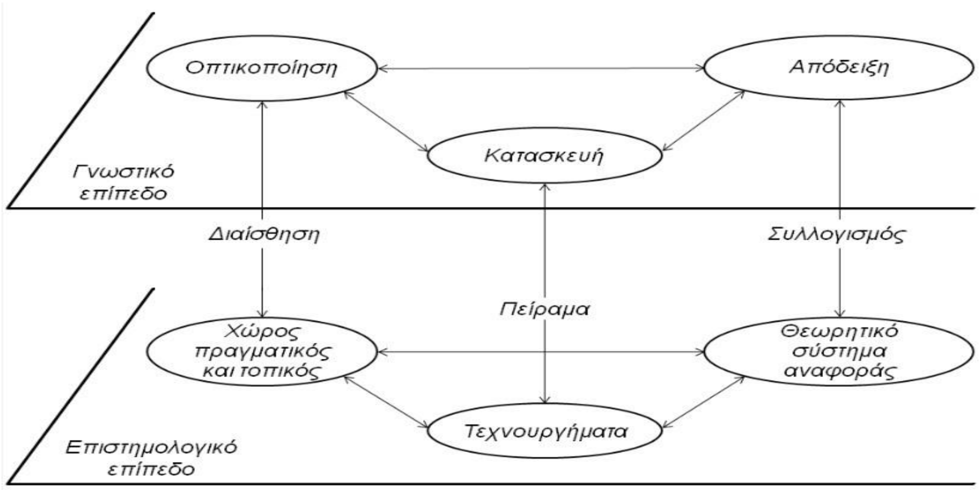
Τη σπουδαιότητα που έχει ο συνδυασμός αναλογικών προβλημάτων με ρεαλιστικές καταστάσεις που βίωσαν οι μαθητές εκτός τάξης για την ανάπτυξη του αναλογικού σχήματος, έχουν αναδείξει με έρευνές τους οι Verschaffel, De Corte & Lasure (1994).

2. Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας

Η προσέγγιση των λόγων και αναλογιών με ένα τρόπο γεωμετρικό, καθιστά εφικτή τη χρήση της θεωρίας των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (ΓΧΕ).

Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (ΓΧΕ) είναι ο χώρος που οργανώνεται με τρόπο που να διασφαλίζει στον χρήστη του χώρου, την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Kuzniak & Rauscher, 2011).

Ο ΓΧΕ διαρθρώνεται σε δύο επίπεδα. Το πρώτο είναι επιστημολογικής φύσης και βρίσκεται σε στενή σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο της περιοχής προς μελέτη και το δεύτερο είναι γνωστικής φύσης και σχετίζεται με τον τρόπο σκέψης του ατόμου που λύνει μαθηματικά προβλήματα (Kuzniak & Richard, 2014).



Εικόνα 2: Τα επίπεδα του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας στη Γεωμετρία

2.1 Το επιστημολογικό επίπεδο

Όσον αφορά τη γεωμετρία υπάρχουν τρία συστατικά τα οποία είναι χαρακτηριστικά της γεωμετρικής δραστηριότητας στην καθαρά μαθηματική τους διάσταση:

- Ένα σύνολο συμπαγών και απτών αντικειμένων, σε ένα χώρο πραγματικό και τοπικό.
- Ένα σύνολο από τεχνουργήματα, όπως όργανα σχεδίασης ή λογισμικό.
- Ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς, βασιζόμενο σε ορισμούς και ιδιότητες.

Τα στοιχεία αυτά δεν βρίσκονται σε αντιπαράθεση. Αντιθέτως οργανώνονται σύμφωνα με ένα προαποφασισμένο στόχο, ο οποίος εξαρτάται από το μαθηματικό πεδίο αναφοράς, στην επιστημολογική του διάσταση. Παρόλο που η έμφαση σε μια διδακτική κατάσταση δίνεται στη διαδικασία μάθησης, αυτό το επιστημολογικό σχέδιο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επιστημολογικό περιβάλλον.

2.2 Το επίπεδο των γνωστικών διεργασιών

Τα μαθηματικά που διδάσκονται δεν είναι ένα ξεκομμένο σύνολο από ιδιότητες και αντικείμενα, περιορισμένα σε έννοιες, που μπορούν να τα χειριστούν επίσημα συστήματα. Είναι πάνω από όλα και κυρίως μια ανθρώπινη δραστηριότητα. Είναι επομένως απαραίτητο να κατανοήσουμε πώς οι κοινότητες αλλά και τα άτομα, χρησιμοποιούν και εσωτερικεύουν τη μαθηματική γνώση στην πρακτική τους. Εξίσου σημαντικό είναι να κατανοήσουμε τον τρόπο που τα απτά αντικείμενα και τα σύμβολα αποκτούν νόημα. Οδηγούμαστε έτσι σε ένα δεύτερο επίπεδο, το γνωστικό, που επικεντρώνεται στην οπτική της επίλυσης του προβλήματος ως γνωστικό υποκείμενο (Kuzniak & Richard, 2014).

Σύμφωνα με τη σημειωτική προσέγγιση του Duval (1995), η γεωμετρική δραστηριότητα αποτελείται από τις εξής διαδικασίες:

- Μία διαδικασία οπτικοποίησης συνδεδεμένης με την αναπαράσταση του χώρου και την υλική υποστήριξη.
- Μία διαδικασία κατασκευής και λειτουργίας των χρησιμοποιούμενων οργάνων (χάρακες, διαβήτες κλπ.) και την σχετική γεωμετρική διαμόρφωση.
- Μία διαδικασία παραγωγής επιχειρημάτων και αποδείξεων.

Το σύνολο αυτό των σχέσεων περιγράφεται από τα στοιχεία του παραπάνω διαγράμματος, το οποίο επιπρόσθετα δείχνει και τις σχέσεις μεταξύ των δύο επιπέδων μέσω τριών διαστάσεων: α) της σημειωτικής, που έχει ως σημείο αναφοράς τη διαίσθηση β) της εργαλειακής, με σημείο αναφοράς το πείραμα και γ) της παραγωγικής με σημείο αναφοράς τον συλλογισμό (Kuzniak & Nechache, 2016).

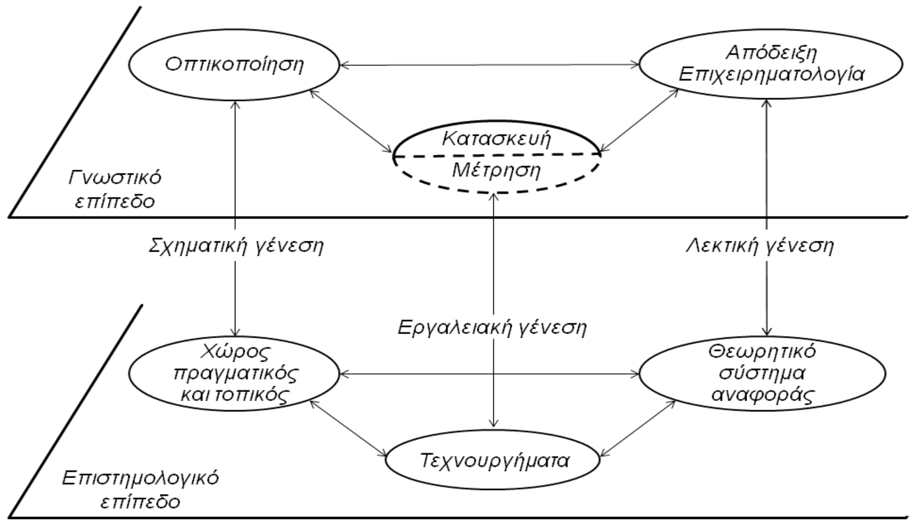
2.3 Οι «γενέσεις» στο Γεωμετρικό Χώρο Εργασίας

Προκειμένου να διαφανεί ο δυναμικός χαρακτήρας των ΓΧΕ, ειδικά κατά τις διαδικασίες αρχικής διαμόρφωσης, ανάπτυξης και μετασχηματισμού, χρησιμοποιήθηκε ο όρος «γένεση». Μπορούμε επομένως να θεωρούμε πως το επιστημολογικό επίπεδο, είναι αποτέλεσμα μιας επιστημολογικής γένεσης, ενώ το γνωστικό επίπεδο κατασκευάζεται μέσω της γνωστικής γένεσης.

Διακρίνουμε τρεις θεμελιώδεις γενέσεις ή αλλιώς κάθετα επίπεδα στο παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο:

- Την **εργαλειακή γένεση**, η οποία μας επιτρέπει κατά την γνωστική διαδικασία, να καθιστούμε τα τεχνουργήματα λειτουργικά, συμβάλλοντας έτσι στην επίτευξη του μαθηματικού έργου. Κατά την εργαλειακή γένεση, όταν ο χρήστης των ΓΧΕ μετασχηματίζει τα τεχνουργήματα σε εργαλείο μέσα από την ανάπτυξη ή την οικειοποίηση σχημάτων δράσης, στο πλαίσιο της διαδικασίας κατασκευής, τότε μιλάμε για τη διαδικασία instrumentation. Αντιστρόφως όταν ο χρήστης έχει στο μυαλό του το σχήμα που θέλει να κατασκευάσει και επιλέγει τα κατάλληλα εργαλεία ή προβαίνει στην κατασκευή νέων εργαλείων, τότε η εργαλειακή γένεση εμπλέκεται στη διαδικασία της instrumentalisation.
- Τη **σημειωτική γένεση**, η οποία βασίζεται κυρίως στην επικύρωση της σημειωτικής αναπαράστασης, δίνει νόημα στα αντικείμενα των ΓΧΕ και προσδίδει σε αυτά το κύρος των λειτουργικών, μαθηματικών αντικειμένων. Με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται η σχέση μεταξύ της σύνταξης, της σημασιολογικής λειτουργίας και της δομής των σημείων.
- Τη **συλλογιστική γένεση** της απόδειξης που χρησιμοποιεί τα αξιώματα στο θεωρητικό πλαίσιο για να τα θέσει στην υπηρεσία της μαθηματικής

απόδειξης και στην επικύρωση που δεν είναι αποκλειστικά εικονική, σχηματική ή εργαλειακή.



Εικόνα 3:Τα επίπεδα των ΓΧΕ και οι γενέσεις μεταξύ τους.

Οι διάφορες γενέσεις δεν λειτουργούν ξεχωριστά. Υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ των γενέσεων και ο εκπαιδευτικός είναι αυτός ο οποίος αποφασίζει τα διάφορα είδη οργάνωσης σύμφωνα με τους στόχους.

Προκειμένου να καθορίσουν τη γεωμετρική εργασία στο πλαίσιο των ΓΧΕ, οι Coutat και Richard 2011) περιγράφουν τις διαδράσεις που είναι συγκεκριμένες στη γεωμετρική προσέγγιση, χαρακτηρίζοντας τα τρία κάθετα επίπεδα που εμφανίζονται στο διάγραμμα των ΓΧΕ. Τα κάθετα επίπεδα σχετίζονται με τις διαφορετικές φάσεις μιας μαθηματικής εργασίας και είναι: ανακάλυψη και εξερεύνηση, αιτιολόγηση και συλλογισμός, παρουσίαση και επικοινωνία.

Για να θεωρηθεί πάντως μια μαθηματική εργασία πλήρης, θα πρέπει να έχει αναπτυχθεί μια γνήσια σχέση μεταξύ του επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου και να έχει επιτευχθεί κατάλληλη κυκλοφορία μεταξύ των τριών διαστάσεων του μοντέλου (Kuzniak, Nechache & Drouhard, 2016).

2.4 Τα είδη των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας

Σύμφωνα με τον Kuhn η έννοια του *παραδείγματος* στην επιστήμη αντιπροσωπεύει έναν ολόκληρο σχηματισμό από πεποιθήσεις, αξίες, τεχνικές και πρακτικές τις οποίες μοιράζονται τα μέλη μιας συγκεκριμένης κοινότητας. Η έννοια αυτή επεκτείνει την έννοια της θεωρίας και την συσχετίζει με μια κοινότητα ατόμων που διαμοιράζονται μια κοινή θεωρία. Έτσι λοιπόν το *παράδειγμα* είναι αυτό που είναι κοινό μεταξύ των μελών μιας επιστημονικής κοινότητας και, μια επιστημονική κοινότητα αποτελείται από μέλη που έχουν ως κοινό ένα *παράδειγμα* (Kuhn,1966 στο Kuzniak & Rauscher, 2011).

Ο «παραδειγματικός» χώρος εργασίας, όπως αυτός καθορίζεται από την κοινότητα καλείται ο *χώρος αναφοράς των ΓΧΕ*. Σε ένα δεδομένο εκπαιδευτικό σύστημα, η επίλυση ενός προβλήματος προϋποθέτει την ύπαρξη του *κατάλληλου ΓΧΕ,* ο οποίος οργανώνεται με τρόπο που επιτρέπει τη συμμετοχή του μαθητή στην επίλυση του προβλήματος. Ο *κατάλληλος ΓΧΕ* πρέπει απαραίτητα να εκπληρώνει δύο προϋποθέσεις. Από τη μια μεριά πρέπει να επιτρέπει την εργασία στο *παράδειγμα* για την επίλυση του προβλήματος και από την άλλη πρέπει να είναι καλά σχεδιασμένος, υπό την έννοια ότι τα στοιχεία που τον συνθέτουν είναι οργανωμένα με έγκυρο τρόπο. Τέλος, ο σχεδιασμός του χώρου από τον εκπαιδευτικό εξαρτάται από τον *προσωπικό ΓΧΕ* του εκπαιδευτικού, ενώ όταν ένα πρόβλημα ανατίθεται σε ένα μαθητή, η επίλυση του προβλήματος πραγματοποιείται μεσα στα πλαίσια του προσωπικού ΓΧΕ του μαθητή (Kuzniak & Richard, 2014).

Επομένως η μαθηματική εργασία υπό το πρίσμα των ΓΧΕ στα πλαίσια της σχολικής πραγματικότητας διαρθρώνεται ουσιαστικά σε τρία επίπεδα: Τα μαθηματικά που βρίσκονται στο *χώρο αναφοράς,* δηλαδή προγράμματα σπουδών και εγχειρίδια, αναμορφώνονται από τον εκπαιδευτικό μέσα στον *κατάλληλο χώρο εργασίας,* ώστε να πραγματοποιηθεί η επιτυχής διδακτική παρέμβαση στην τάξη, όπου ο καθένας θα εργαστεί στον *προσωπικό του χώρο εργασίας*.

2.5 Τρεις στειχειώδεις γεωμετρίες

Σύμφωνα με τη επιστημολογική προσέγγιση του Gonseth, ο οποίος συνέδεσε τη γεωμετρία με το πρόβλημα του χώρου, διακρίνουμε τρία γεωμετρικά παραδείγματα. Για να διασαφιστεί το νόημα των παραδειγμάτων, αξιοποιήθηκαν οι τρεις τρόποι που είχε διακρίνει ο Gonseth: η διαίσθηση, το πείραμα και η παραγωγή (Houdement & Kuzniak, 2003)

1. **Γεωμετρία Ι ή φυσική γεωμετρία (GI).** Πηγή επικύρωσης είναι ο πραγματικός, ο υλικός κόσμος. Σε αυτό οφείλει και το όνομά της: φυσική γεωμετρία. Σε αυτή τη γεωμετρία έγκυροι ισχυρισμοί διατυπώνονται με τη χρήση επιχειρημάτων, τα οποία έχουν τη βάση τους στη διαίσθηση, στον

πειραματισμό και στον συνακόλουθο συλλογισμό. Μέσα πειραματισμού αποτελούν διάφορα εργαλεία κατασκευής και μέτρησης, όπως ο βαθμονομημένος χάρακας, το μοιρογνωμόνιο και ο διαβήτης, ενώ εργαλειακά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η αποκοπή-επικόλληση ή ακόμη και η δίπλωση του χαρτιού και του σχήματος. Η GI έχει τεχνολογικό ορίζοντα και θα μπορούσε να θεωρηθεί μια μορφή εμπειρικής επιστήμης, καθώς σχετίζεται ιστορικά με πρακτικά προβλήματα χωρομετρίας.

2. **Γεωμετρία II ή φυσική, αξιωματική γεωμετρία (GII).** Το αρχέτυπό της είναι η κλασσική Ευκλείδεια γεωμετρία. Πηγή της επικύρωσής της είναι οι υποθετικο–απαγωγικοί νόμοι στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος, στο οποίο πρέπει να βασίζονται οι αποδείξεις για να είναι έγκυρες. Ταυτόχρονα το αξιωματικό σύστημα δεν είναι αποκομμένο από την αισθητή πραγματικότητα. Αυτός είναι και ο λόγος που η Γεωμετρία αυτή αποκαλείται φυσική, αξιωματική. Ομοίως τα σχήματα βασίζονται σε ορισμούς, αλλά οι ορισμοί αυτοί δεν αντιτίθενται στην πραγματικότητα. Λειτουργικά τα σχήματα αποτελούν στήριγμα για τον συλλογισμό, αλλά η μέτρηση πάνω σε αυτά δεν αποτελεί αποδεκτή μορφή απόδειξης. Τα σχήματα στην GII μπορούν να κατασκευαστούν με το χέρι και να έχουν τη μορφή του ελεύθερου σχεδίου, θα πρέπει όμως να είναι κωδικοποιημένα, δηλαδή να συνοδεύονται από γράμματα και άλλα ειδικά σύμβολα.
3. **Γεωμετρία III ή τυπική, αξιωματική γεωμετρία (GIII).** Οι δύο παραπάνω γεωμετρίες, παρά τις διαφορές τους, έχουν στενούς δεσμούς με τον πραγματικό κόσμο. Εδώ έρχεται να προστεθεί η Γεωμετρία III (τυπική, αξιωματική γεωμετρία) η οποία έχει ως κέντρο της το αξιωματικό σύστημα που είναι αποσυνδεδεμένο από τον πραγματικό κόσμο. Το σύστημα είναι πλήρες, η διασύνδεσή του με τον χώρο μπαίνει σε αυστηρά πλαίσια και απέχει από οποιεσδήποτε εφαρμογές του πραγματικού κόσμου. Ασχολείται περισσότερο με προβλήματα λογικής. Είναι σχεδόν απίθανο να συναντήσουμε το είδος αυτής της γεωμετρίας στην υποχρεωτική εκπαίδευση, παρά μόνο σε πανεπιστημιακό επίπεδο μαθηματικών.

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε, πως τα παραπάνω παραδείγματα προσπαθούν να διατηρήσουν μια εσωτερική συνοχή και βασίζονται σε ομοιογενείς θεωρίες. Δεν είναι οργανωμένα κατά ένα τρόπο ιεραρχικό, κάνοντας ίσως κάποιο περισσότερο προτιμητέο από άλλο. Αυτό άλλωστε αποτελεί και τη σημαντική διαφορά των γεωμετρικών παραδειγμάτων με τα επίπεδα των Van Hiele's (Houdement & Kuzniak, 2003) . Οι ορίζοντες του καθενός είναι διαφορετικοί και εξαρτάται από τον στόχο του προβλήματος και την οπτική του ερευνητή, ο διαφορετικός δρόμος που θα ακολουθήσει κανείς για να φτάσει στην επίλυση του προβλήματος.

2.6 Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (ΜΧΕ) και άλλα πεδία

Ο Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (ΜΧΕ) αποτελεί μια επέκταση του θεωρητικού μοντέλου, το οποίο εισήγαγαν για τη Γεωμετρία οι Kuzniak και Houdement (Kuzniak & Rauscher, 2011). Ο ΜΧΕ αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο για μαθητές και δασκάλους, για τη μελέτη της μαθηματικής εργασίας.

Η διάδραση μεταξύ των διαφορετικών μαθηματικών πεδίων, αποτελεί κεντρικό σημείο για να κατανοήσουμε τον τρόπο που η μαθηματική εργασία αναδύεται στο χώρο του ΜΧΕ. Πράγματι, συχνά ο τρόπος επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος απαιτεί τη μετακίνηση από ένα μαθηματικό πεδίο σε ένα άλλο. (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016). Έτσι μπορούμε να μιλήσουμε για $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$, $\text{ΜΧΕ}_{\text{Αριθμοί}}$, $\text{ΜΧΕ}_{\text{Μέτρηση}}$ κ.α.

3. Η γνωστική θεώρηση της Γεωμετρίας του Duval

Ο Duval μέσα από τη θεωρία του προσπαθεί να εντοπίσει τις γνωστικές διαδικασίες που υπάρχουν πίσω από τη γεωμετρική υπόσταση των υποκειμένων.

Σύμφωνα με αυτόν, τα σχήματα αποτελούν αντικείμενα «γνωστικής κατανόησης» και χρησιμοποιεί αυτό τον όρο για να δείξει ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι θέασης ενός σχήματος, ενώ για την πλήρη σύλληψή τους απαιτούνται τέσσερα είδη γνωστικής κατανόησης: α) αντιληπτική κατανόηση, β) διαδικαστική κατανόηση, γ) λεκτική κατανόηση και τέλος δ) λειτουργική κατανόηση (Duval, 1995).

Για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα ένα σχέδιο, θα πρέπει να ισχύει οπωσδήποτε η αντιληπτική κατανόηση και ένα από τα άλλα τρία είδη κατανόησης. Η χρήση των σχημάτων στη Γεωμετρία, συχνά απαιτεί τον χειρισμό των παραπάνω, σαν να επρόκειτο για ένα είδος κατανόησης, ενώ για την επίλυση των προβλημάτων απαιτείται η αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Σε ότι αφορά τα τέσσερα είδη γνωστικής κατανόησης έχουμε:

- **Η αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension**) αφορά την αναγνώριση ενός σχήματος με την πρώτη ματιά στο επίπεδο ή στον χώρο. Αυτό που γίνεται αντιληπτό, καθορίζεται από σχηματικούς, οργανωτικούς νόμους και είναι το αποτέλεσμα μιας υποσυνείδητης ενσωμάτωσης, κατά την οποία το σχήμα που αντιλαμβανόμαστε μπορεί να είναι διαφορετικό από την εικόνα του σχήματος που βλέπουμε. Η εικόνα μπορεί να αλλάξει, αλλά οι ιδιότητες του σχήματος που αντιλαμβανόμαστε, παραμένουν ίδιες. Στο σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε αρκετά υπο-σχήματα τα οποία μπορεί να αποτελούν πιθανά δομικά στοιχεία, αλλά η κατασκευή του σχήματος δεν εξαρτάται αποκλειστικά από αυτά, καθώς ένα γεωμετρικό σχήμα συχνά περιλαμβάνει υπο-σχήματα που δεν χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του.
- **Η σειριακή κατανόηση (sequential apprehension)** απαιτείται όταν έχουμε την κατασκευή ενός σχήματος. Υπάρχει μια συγκεκριμένη σειρά κατά την οποία αναδύονται τα δομικά στοιχεία του σχήματος. Η οργάνωση τους δεν υπόκειται σε αντιληπτικούς κανόνες, αλλά σε τεχνικούς περιορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες. Οι περιορισμοί εξαρτώνται από τη χρήση των εργαλείων που επιλέγονται για την κατασκευή του σχήματος. Το ελεύθερο σχέδιο δεν υπόκειται σε περιορισμούς.
- **Η λεκτική κατανόηση (discursive apprehension)** συνδέεται με τις δυο προηγούμενες και αφορά τις μαθηματικές ιδιότητες που συνοδεύουν ένα σχήμα. Δίνονται λεκτικά ή προκύπτουν από τις δοθείσες ιδιότητες. Ένα σχήμα χωρίς εκφώνηση ή υποθέσεις, αποτελεί μια ασαφή αναπαράσταση. Σε κάθε γεωμετρική αναπαράσταση η αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων, πρέπει να παραμένει υπό τον έλεγχο των λεκτικών δηλώσεων. Υπάρχει δηλαδή μια επαγωγική σχέση μεταξύ των αναπαραστάσεων και των λεκτικών δηλώσεων.
- **Η λειτουργική κατανόηση (operative apprehension)** εκφράζει την πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος, μέσω ενός απαγωγικού συλλογισμού. Σχετίζεται άμεσα με τους διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος. Οι μετασχηματισμοί μπορεί να είναι νοεροί ή φυσικοί .

i. **Μερεολογικές τροποποιήσεις (mereologic)** κατά τις οποίες μπορείς να διασπάσεις ένα σχήμα σε μέρη ή σε διάφορα σχήματα, όπως ταινίες, τετράγωνα, παραλληλόγραμμα και άλλα. Στη συνέχεια μπορείς να συνθέσεις αυτά τα μέρη σε ένα άλλο σχήμα ή υπο-σχήμα.

ii. **Οπτικές τροποποιήσεις (optic)** αφορούν μετασχηματισμούς του σχήματος, όπως μεγέθυνση, σμίκρυνση ή λόξωση του σχήματος, όπως όταν χρησιμοποιούμε φακούς. Τα σχήματα μπορεί να φαίνονται διαφορετικά ή τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο, χωρίς όμως να έχουν υποστεί καμία αλλαγή.

iii. **Αλλαγή θέσης (place way)** κατά την οποία μπορείς να αλλάξεις τη θέση ή τον προσανατολισμό ενός σχήματος στο επίπεδο.

Εκτός όμως από τα τέσσερα αυτά είδη γνωστικής κατανόησης ο Duval (1999) υποστηρίζει πως η γεωμετρική εργασία περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών που εκπληρώνουν τα επιστημολογικά κριτήρια: α) την οπτικοποίηση, β) την κατασκευή και γ) τον συλλογισμό.

- **Η οπτικοποίηση (visualization**) αφορά διαδικασίες που συνδέονται με την αναπαράσταση του χώρου για την απεικόνιση της κατάστασης, για την ευρετική εξερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης, για μια συνοπτική ματιά αυτής ή για μια υποκειμενική επαλήθευση. Ο Duval από το 2004 διαχωρίζει την έννοια της οπτικοποίησης σε: **α) εικονική οπτικοποίηση** που αφορά την διαισθητική αντίληψη των σχημάτων μέσω του περιγράμματός τους, σε σχέση με το «πρωτότυπο σχήμα» που υπάρχει στην αντίληψη των μαθητών, χωρίς ωστόσο να μπορούν να αντιληφθούν σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων του σχήματος και **β) στη μη εικονική οπτικοποίηση** που αφορά τη αντίληψη του σχήματος μέσω της διάσπασης, της επανασύνδεσης και του μετασχηματισμού των σχημάτων. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει η αντίληψη των σχέσεων των ιδιοτήτων του σχήματος.
- **Κατασκευή (construction)** πρόκειται για διαδικασίες με εργαλεία. Η κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων, μπορεί να λειτουργήσει ως μοντέλο για περαιτέρω δράσεις, στο βαθμό που τα μαθηματικά αντικείμενα και οι αναπαραστάσεις τους συνδέονται μεταξύ τους.

- **Συλλογισμός (reasoning)** πρόκειται για μια διαδικασία, η οποία σε σύνδεση με τις λεκτικές διαδικασίες οδηγούν στην επέκταση της γνώσης, στην απόδειξη και στη διατύπωση επεξηγήσεων.

Αν και οι παραπάνω διαδικασίες μπορούν να λειτουργήσουν ξεχωριστά, εντούτοις υπάρχει στενή σχέση μεταξύ τους και η συνέργεια τους σε γνωστικό επίπεδο, αποτελεί βασικό στοιχείο της επιτυχούς εργασίας στη Γεωμετρία.

4. Ιστορία των μαθηματικών και μαθηματική εκπαίδευση

Πριν από ένα αιώνα περίπου ο Hieronymus Georg Zeuthen έγραψε ένα βιβλίο για την ιστορία των μαθηματικών. Φυσικά δεν ήταν το πρώτο βιβλίο του είδους, αλλά αυτό που του έδινε μια ξεχωριστή σημασία, ήταν ότι απευθυνόταν προς τους εκπαιδευτικούς (Furinghetti & Radford, 2002). Εκείνος όμως ο οποίος από τις αρχές ήδη του 20^{ου} αιώνα έδωσε πραγματική ώθηση στην ιστορική μέθοδο της διδασκαλίας των μαθηματικών ήταν ο Felix Klein, ο οποίος στηρίχθηκε στον βιογενετικό νόμο της «γενετικής αρχής». Σύμφωνα με αυτήν «η οντογενετική εξέλιξη είναι μια συντομευμένη επανάληψη της φιλογενετικής εξέλιξης» (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987)

Πράγματι, η ιδέα της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση δεν είναι νέα. Τα τελευταία χρόνια οι ερευνητές πολλών χωρών έχουν διερευνήσει τη δυνατότητα εισαγωγής νέων εννοιών εντός του συναφούς ιστορικού πλαισίου, σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες (Panaoura, 2012).

Ο Burton (2011) ορίζει την ιστορία των μαθηματικών ως ένα ευρύ πεδίο μελέτης που περιλαμβάνει ερευνητικές πηγές ανακαλύψεων στα μαθηματικά, καθώς και έρευνα των επιτευγμάτων διακεκριμένων μαθηματικών και τις ιδέες τους.

Σύμφωνα με τους Furinghetti & Radford (2002) ο σκοπός της ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών στην σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση είναι διττός: από τη μια προβάλλει ως ένα θεωρητικό εργαλείο για την κατανόηση της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης και από την άλλη, επιχειρεί να διευκολύνει τους μαθητές, μέσω σαφών παιδαγωγικών παρεμβάσεων, να συνδέσουν την εξέλιξη της μαθηματικής τους σκέψης, με την εξέλιξη ιστορικών γνωστικών επιτευγμάτων.

Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση έχει υποστηριχθεί ήδη από πολύ παλιά (Tzanakis & Arcavi, et.al 2002).Υπάρχουν πέντε κυρίως πεδία όπου η διδασκαλία των μαθηματικών υποστηρίζεται από την ιστορία των μαθηματικών: α) στην εκμάθηση των μαθηματικών β) στην ανάπτυξη απόψεων για τη φύση των μαθηματικών και τη μαθηματική δραστηριότητα γ) στο διδακτικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών και στο παιδαγωγικό τους ρεπερτόριο δ) στη συναισθηματική προδιάθεση που αναπτύσσουμε απέναντι στα μαθηματικά και ε) στην εκτίμηση ότι τα μαθηματικά αποτελούν αποτέλεσμα ανθρώπινης, κοινωνικής προσπάθειας.

Η ενσωμάτωση της ιστορίας μπορεί να γίνει με τους εξής τρεις τρόπους: α) μαθαίνοντας την ιστορία από άμεσες ιστορικές πληροφορίες, β) μαθαίνοντας διάφορα μαθηματικά αντικείμενα, ακολουθώντας μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνευσμένη από την ιστορία και γ) αναπτύσσοντας μια βαθύτερη επίγνωση, τόσο των ίδιων των μαθηματικών, όσο και του κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου, όπου αυτά αναπτύσσονται.

Ο Fauvel (1991) αναφέρει δεκαπέντε λόγους που συνηγορούν στην ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίοι συνοψίζονται στους εξής τρεις: α) τα μαθηματικά γίνονται πιο ενδιαφέροντα, κατανοητά και προσιτά β) αποκτούν μια περισσότερο ανθρώπινη υπόσταση και γ) διευκολύνουν την βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, των προβλημάτων και την επίλυση αυτών.

Ωστόσο ακόμη και σήμερα, υπάρχουν αντιρρήσεις που αφορούν τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτές είναι τόσο επιστημολογικής, όσο και πρακτικής φύσης. Σε ότι αφορά το πρώτο είδος, οι συνηθέστερες αντιρρήσεις που προβάλλονται είναι ότι: η ιστορία δεν είναι μαθηματικά, ότι προκαλεί συχνά σύγχυση και ότι είναι δύσκολη και βαρετή για τους μαθητές, απαιτεί πολύ χρόνο και είναι πιθανό να οδηγήσει σε σωβινιστικές τάσεις. Το δεύτερο είδος περιλαμβάνει αντιρρήσεις σχετικά με την έλλειψη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, τη στενότητα του διδακτικού χρόνου, την έλλειψη πηγών και αδυναμία αξιολόγησης των μαθητών (Clark, Kjeldsen, Schorcht, & Tzanakis, 2016).

Σχετικά με τις αντιρρήσεις αυτές, θα μπορούσαμε να πούμε ότι παραβλέπουν τις διαδικασίες που εμπλέκονται στη μαθηματική εργασία και δίνεται έμφαση μόνο στα αποτελέσματα. Οπωσδήποτε η ενσωμάτωση της ιστορίας είναι ένα δύσκολο εγχείρημα και απαιτεί προσεκτικό χειρισμό, σωστή προετοιμασία από τον εκπαιδευτικό και λεπτομερή οργάνωση. Αυτό όμως δεν αποτελεί λόγο για την απόρριψη της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών.

4.1 Θεωρίες για την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική τους

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει αναδείξει τρεις κυρίως θεωρίες, οι οποίες συμβάλλουν στην αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική τους. Αυτές είναι:

i. Η θεωρία της αντιστοίχησης των σταδίων της ιστορικής εξέλιξης με τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης του Piaget

ii. Η διδακτική αξιοποίηση της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης» του Freudenthal

iii. Η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Brousseaou

Ο Piaget ξεκινώντας από τη θεωρία της βιολογικής προσαρμογής, ανέπτυξε τη θεωρία του για τη νοητική ανάπτυξη των παιδιών. Σύμφωνα με αυτήν, υπάρχει μια διαρκής αλληλεπίδραση των παιδιών με το περιβάλλον τους, που οδηγεί μέσα από τέσσερα διαδοχικά στάδια εξέλιξης στην κατασκευή των νοητικών δομών. Η προσαρμογή στο περιβάλλον πραγματοποιείται μέσω των μηχανισμών της «αφομοίωσης», της ενσωμάτωσης δηλαδή των νέων γνώσεων σε ένα υπάρχον νοητικό σχήμα και της «συμμόρφωσης», των αλλαγών δηλαδή που είναι απαραίτητες ώστε να υπάρχει συνταίριασμα της νέας γνώσης με τις παλιές. Η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο γίνεται μέσω του μηχανισμού της «αναστοχαστικής αφαίρεσης», όπου οι ενέργειες και οι διαδικασίες του ενός σταδίου μετατρέπονται σε αντικείμενα σκέψης στο επόμενο στάδιο.

Εκείνο όμως που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι ότι ο Piaget και οι συνεργάτες του θέλησαν να δείξουν πως βασικά στοιχεία της θεωρίας τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία ανάλυσης στην ιστορία των μαθηματικών. Θεωρούν δηλαδή ότι η ανάπτυξη των εννοιών στα μαθηματικά, ακολούθησε μια πορεία εξέλιξης από το ένα στάδιο στο άλλο, ανάλογο του μηχανισμού νοητικής ανάπτυξης. Βέβαια «σκοπός τους δεν ήταν να δημιουργήσουν αντιστοιχίες ανάμεσα σε ιστορικές και ψυχογενετικές ακολουθίες ως προς το περιεχόμενο, αλλά να δείξουν ότι οι μηχανισμοί της μετάβασης από μια ιστορική περίοδο στην επόμενη είναι ανάλογοι προς εκείνους της μετάβασης από ένα ψυχογενετικό στάδιο στο επόμενο» (Piaget & Garcia,1989).

Ένα θεωρητικό πλαίσιο του οποίου η διδακτική αποτελεσματικότητα έχει αναδειχθεί μέσα από μια πληθώρα ερευνών και πρακτικών εφαρμογών είναι εκείνο της **Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης**. Σύμφωνα με τον Freudenthal, μια από τις βασικές αρχές της θεωρίας είναι η αρχή της «καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης» (Freudenthal, 1986). Δίνεται η ευκαιρία δηλαδή στους μαθητές να βιώσουν κατά τη διδασκαλία, διαδικασίες ανάλογες με εκείνες μέσω των οποίων επινοήθηκαν μαθηματικές έννοιες και σύμβολα. Στόχος δεν είναι η αναπαραγωγή του ιστορικού πλαισίου γένεσης μιας μαθηματικής έννοιας, αλλά η εμπλοκή σε διερευνητικές δραστηριότητες. Η ιστορία των μαθηματικών είναι δυνατόν να προσφέρει ενδιαφέρουσες ιδέες για διδακτικές δραστηριότητες (Κολέζα, 2009).

Η θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων, η οποία μας ενδιαφέρει άμεσα στην έρευνά μας, έχει στο πυρήνα της το άτομο, στη γνωστική του διάσταση και το ειδικό εκείνο υποσύνολο του ευρύτερου περιβάλλοντος του μαθητή, που ο ίδιος ο Brousseaou (2002) ονομάζει *μέσον (mileu).* Το μέσον αποτελεί την προβολή της επιστημικής διάστασης του περιβάλλοντος. Η κατασκευή της γνώσης στα Μαθηματικά, είναι το προϊόν της αλληλεπίδρασης ατόμου – περιβάλλοντος, τα οποία συγκροτούν ένα σύστημα. Τα προβλήματα αποτελούν μια μικρή ή μεγάλη διαταραχή αυτού του συστήματος. Το άτομο σε κάθε διαταραχή προσπαθεί να επιφέρει μια ισορροπία στο σύστημα ώστε να διασφαλιστεί η βιωσιμότητά του. Η μάθηση αποτελεί μια διαδικασία ανάκτησης της ισορροπίας μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντος.

Προκειμένου να υπάρχει μαθησιακό αποτέλεσμα, ο δάσκαλος πρέπει να θέσει ενώπιον του μαθητή του μια σειρά από προσεκτικά επιλεγμένα προβλήματα. Από τη στιγμή που ο μαθητής αποδέχεται το πρόβλημα, ως τη στιγμή που θα φτάσει στην απάντησή του, ο εκπαιδευτικός περιορίζει το ρόλο του, υπονοώντας την απάντηση που περιμένει να εμφανιστεί. Ο μαθητής γνωρίζει καλά πως το πρόβλημα επιλέχθηκε για να τον βοηθήσει να κατακτήσει τη νέα γνώση. Θα την έχει κατακτήσει πραγματικά, μόνο όταν θα μπορεί να τη χρησιμοποιήσει μόνος του σε καταστάσεις που θα συναντήσει έξω από κάθε διδακτικό πλαίσιο. Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται *αδιδακτικές* (Brousseaou, 2002).

Οι καταστάσεις ή τα προβλήματα που επιλέγονται από τον δάσκαλο αποτελούν ένα σημαντικό τμήμα μιας διαδικασίας, κατά την οποία ο δάσκαλος επιδιώκει να παρέχει στον μαθητή του μια αδιδακτική κατάσταση. Για το σκοπό αυτό, σύμφωνα με την περίπτωση επικοινωνεί μαζί του μέσω πληροφοριών, ερωτήσεων, διδακτικών μεθόδων, ευρετικών πρακτικών κ.α. Λαμβάνει χώρα επομένως, ένα παιχνίδι μέσα σε ένα σύστημα διάδρασης του μαθητή με τα προβλήματα που του δίνονται, το οποίο συνιστά τις *διδακτικές καταστάσεις*.

Οι κανόνες αυτού του παιχνιδιού που καθορίζουν τη στρατηγική της διδακτικής κατάστασης, αποτελούν το *διδακτικό συμβόλαιο* ανάμεσα στον διδάσκοντα και τον διδασκόμενο.

Εξέχουσα θέση στη θεωρία του Brousseaou έχουν οι απόψεις του για το *λάθος*. Συναντώντας τις θεωρητικές απόψεις του Bachelard, τα λάθη δεν είναι μόνο αποτέλεσμα άγνοιας, αβεβαιότητας ή σύμπτωσης, όπως ευαγγελίζονται οι εμπειρικές ή οι συμπεριφοριστικές θεωρίες μάθησης, αλλά το αποτέλεσμα μιας προηγούμενης γνώσης, που κάποτε ήταν ενδιαφέρουσα και επιτυχημένη, αλλά τώρα αποκαλύπτονται ως λαθεμένη ή μη αποδεκτή (Brousseaou, 2002). Ο Brousseaou θεωρεί αυτά τα λάθη όχι απλά αναπόφευκτα, αλλά και απαραίτητα για τη δημιουργία της νέας γνώσης, η οποία θα έρθει ως το αποτέλεσμα της συγκρουσιακής ρήξης με την παλιά. Η παλαιότερη γνώση που ανθίσταται σθεναρά στην αντικατάστασή της από την νεότερη, αποτελεί τα λεγόμενα *επιστημολογικά εμπόδια.* Χρέος του εκπαιδευτικού είναι να οργανώσει με κατάλληλες διαδικασίες μια κατάσταση συγκρουσιακής πορείας και στη συνέχεια να εκχωρήσει την κατάσταση αυτή στους μαθητές περιορίζοντας τη συμμετοχή του.

Σύμφωνα με τις αρχές της Θεωρίας των Διδακτικών Καταστάσεων οι ερευνητές της ιστορίας των μαθηματικών οφείλουν (Brousseaou, 2002) :

i. Να βρίσκουν επαναλαμβανόμενα λάθη και να δείχνουν ότι αυτά ομαδοποιούνται γύρω από αντιλήψεις.
ii. Να βρίσκουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών.
iii. Να συγκρίνουν τα ιστορικά εμπόδια με εμπόδια στη μάθηση και να αιτιολογούν τον επιστημολογικό τους χαρακτήρα.

4.2 Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Οι Tzanakis, Arcavi et. al (2002) διακρίνουν τρεις διαφορετικούς αλλά ταυτόχρονα και συμπληρωματικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών:

I. Μαθαίνοντας την Ιστορία των Μαθηματικών από την άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών.
II. Μαθαίνοντας διάφορα μαθηματικά αντικείμενα, ακολουθώντας μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία.
III. Αναπτύσσοντας μια βαθύτερη γνώση και συνείδηση, τόσο των ίδιων των Μαθηματικών, όσο και του κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου, όπου αυτά εξελίσσονται.

Με τον όρο ιστορικές πληροφορίες εννοούμε: α) οι ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες όπως ονόματα, ημερομηνίες, διάσημα έργα και γεγονότα, χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες, διάσημα προβλήματα και ερωτήματα κλπ. και β) αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η έμφαση και στις δύο περιπτώσεις δίνεται περισσότερο στην Ιστορία παρά στην εκμάθηση των Μαθηματικών, αποτελεί επομένως ένα έμμεσο τρόπο ενσωμάτωσης της Ιστορίας. Η ενσωμάτωση των ιστορικών πληροφοριών μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορους τρόπους όπως: με πακέτα έτοιμα προς χρήση στην αίθουσα διδασκαλίας, με ιστορικά ψήγματα, με θεατρικές παραστάσεις ή κινηματογραφικές ταινίες, με επισκέψεις σε μουσεία, με τη χρήση βάσης δεδομένων από τον παγκόσμιο ιστό (www) και με την εξοικείωση των μαθητών με φημισμένα ιστορικά προβλήματα.

Ο δεύτερος τρόπος ενσωμάτωσης της Ιστορίας αποτελεί μια γενετική προσέγγιση στη διδασκαλία και στη μάθηση. Δεν είναι ούτε αυστηρά επαγωγικός, ούτε αυστηρά ιστορικός. Βασική θέση της προσέγγισης αυτής είναι, πως η εξέταση ενός μαθηματικού αντικειμένου αρχίζει, μόνο εφόσον υπάρχει κινητοποίηση από την πλευρά του μαθητή και μάθηση συντελείται μόνο όταν υπάρχει η κατάλληλη πνευματική ανάπτυξη. Επομένως τα ερωτήματα και τα προβλήματα με τα οποία ασχολήθηκε ο συγκεκριμένος τομέας των Μαθηματικών έχουν αποσαφηνιστεί και κατανοηθεί επαρκώς (Tzanakis, Arcavi et. al 2002). Είναι φανερή επομένως η «αναγκαιότητα του μαθηματικού αντικειμένου», η οποία αποτελεί και τον πυρήνα του μαθηματικού νοήματος που αποδίδεται σε αυτό από τον διδασκόμενο. Από την άποψη αυτή η ιστορική προοπτική προσφέρει μια βαθειά, σφαιρική κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου, ακολουθώντας το παρακάτω σχήμα (Tzanakis, Arcavi et. al 2002) :

1. Κάθε δάσκαλος, ακόμα κι αν δεν είναι ιστορικός, πρέπει να γνωρίζει τα βασικά σημεία της ιστορικής εξέλιξης του θέματος το οποίο διδάσκει.

2. Τα κρίσιμα βήματα αυτής της ιστορικής εξέλιξης είναι τα ερωτήματα, τα προβλήματα και οι ιδέες κλειδιά που άνοιξαν νέες διαδρομές στην επιστημονική μαθηματική έρευνα.

3. Τα προηγούμενα κρίσιμα βήματα ανακατασκευάζονται ώστε να γίνουν κατάλληλα για τη διδασκαλία τους μέσα στην τάξη.

4. Τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα δίνονται ως μια ακολουθία ιστορικών προβλημάτων αυξανόμενης δυσκολίας, προκειμένου ο διδασκόμενος να κτίζει τη γνώση του πάνω στα προηγούμενα. Η μορφή των προβλημάτων αυτών μπορεί να κλιμακωθεί από πολύ απλές ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα μέχρι ανοικτά ερωτήματα, που μπορούν να αποτελέσουν μέρος μίας εργασίας που θα πραγματοποιηθεί από μια ομάδα μαθητών.

Ο παραπάνω τρόπος ενσωμάτωσης της Ιστορίας κατατάσσεται στις προσεγγίσεις εκείνες, που χρησιμοποιούν την Ιστορία κυρίως ως «εργαλείο» (Jankvist, 2009).

Σύμφωνα με τον τρίτο τρόπο ενσωμάτωσης της Ιστορίας η βαθύτερη γνώση και συνείδηση για τα Μαθηματικά, περιλαμβάνει διαστάσεις που σχετίζονται με: α) τα ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας και β) με τα εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας.

Λέγοντας ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας εννοούμε : α) Το ρόλο των γενικών εννοιολογικών πλαισίων και των συνδυαζόμενων κινήτρων, ερωτημάτων και προβλημάτων, τα οποία οδήγησαν στην ανάπτυξη και εξέλιξη συγκεκριμένων μαθηματικών πεδίων, β) την εξελικτική φύση των Μαθηματικών ως προς το περιεχόμενο και τη μορφή τους, σε τομείς όπως ο συμβολισμός, η ορολογία, οι υπολογιστικές μέθοδοι, οι τρόποι έκφρασης και αναπαράστασης σε μαθηματικά θέματα, καθώς επίσης και σε μετα-μαθηματικές έννοιες όπως η απόδειξη, η τεκμηρίωση και η αυστηρότητα, πάντα σε σύγκριση με τα σύγχρονα Μαθηματικά και γ) το ρόλο των αμφιβολιών, των παραδόξων, των αντιφάσεων, των ευρετικών μεθόδων και δυσκολιών στην εκμάθηση και στη δημιουργία νέων Μαθηματικών, στα πλαίσια συγκεκριμένων ερωτημάτων και προβλημάτων, είναι πολύ σημαντικός και μπορεί να οδηγήσει στη γενίκευση, στις αφαιρετικές διαδικασίες και στο φορμαλισμό.

Αναφερόμενοι στα εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας εννοούμε ότι : α) Πολλές πλευρές των Μαθηματικών μπορούν συσχετισθούν στενά με φιλοσοφικά ερωτήματα και προβλήματα, με τέχνες όπως η μουσική και η αρχιτεκτονική, με άλλες επιστήμες όπως η Φυσική, η Βιολογία και η Αστρονομία, αλλά και άλλες ανθρώπινες δραστηριότητες. β) Το πολιτιστικό και κοινωνικό πλαίσιο επέδρασαν στη σύλληψη, στη διατύπωση και στη λύση κάποιων προβλημάτων, αλλά και στην αξιοποίηση της λύσης τους. γ) Ο κοινωνικός και πολιτιστικός περίγυρος έχουν επηρεάσει σημαντικά την ανάπτυξη, αλλά και την καθυστέρηση της ανάπτυξης κάποιων μαθηματικών πεδίων. δ) Τα Μαθηματικά έχουν αναγνωριστεί ως ένα σημαντικό μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς διαφορετικών πολιτισμών, εθνών και φυλών. ε) Πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας της, μας φανερώνουν τάσεις και ανησυχίες στην κοινωνία και στον πολιτισμό κάθε εποχής σε πολλούς διαφορετικούς τόπους.

Ο παραπάνω τρόπος ενσωμάτωσης της Ιστορίας, χρησιμοποιεί την Ιστορία κυρίως ως «στόχο» (Jankvist, 2009).

4.3 Τα είδη των ιστορικών πηγών στη διδασκαλία των Μαθηματικών-Η σημασία της χρήσης πρωτογενών πηγών

Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση κατά τους Tzanakis, Arcavi et. al (2002) περιλαμβάνει τη χρήση πηγών υλικού, οι οποίες γενικά κατηγοριοποιούνται ως εξής :

- Πρωτογενείς πηγές, όπως είναι τα αποσπάσματα από αυθεντικά μαθηματικά κείμενα.
- Δευτερογενείς πηγές, όπως βιβλία με ιστορικές αφηγήσεις, μεταφράσεις, αναπαραστάσεις κ.α.
- Πηγές διδακτικού υλικού. Αυτές είναι το σύνολο της βιβλιογραφίας, που αποτελεί το απόσταγμα πρωτογενούς και δευτερογενούς γραφής, υπό το πρίσμα μιας προσέγγισης που εμπνέεται από την ιστορία.

Από τις ανωτέρω πηγές, οι πρωτογενείς προβάλλουν ως οι πλέον απαιτητικές και χρονοβόρες. Προϋποθέτουν λεπτομερή και βαθιά κατανόηση του ιστορικού και ιδεολογικού πλαισίου όπου γράφτηκαν, ενώ η γλώσσα αποτελεί σημαντικό στοιχείο στην πρακτική της διδασκαλίας των μαθηματικών (Jahnke et al., 2000).

Παρόλα αυτά η μελέτη μιας πρωτογενούς πηγής, λειτουργεί ανταποδοτικά και βοηθά ουσιαστικά στην εμβάθυνση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Ο Jahnke (2000) αναφέρει τρεις γενικές έννοιες, οι οποίες περιγράφουν τα ειδικά οφέλη που αποκομίζει κανείς από την μελέτη των πηγών, κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών: α) *την αντικατάσταση,* σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αποτελούν μια διανοητική δραστηριότητα, παρά ένα σώμα γνώσεων και τεχνικών, β) *τον αναπροσανατολισμό,* όπου η ιστορία μας θυμίζει πως οι μαθηματικές έννοιες επινοήθηκαν και γ) *την πολιτισμική κατανόηση,* σύμφωνα με την οποία η εξέλιξη των μαθηματικών τοποθετείται σε ένα επιστημονικό και τεχνολογικό πλαίσιο μιας συγκεκριμένης εποχής στην ιστορία των ιδεών και των κοινωνιών. Μας βοηθάει επίσης να δούμε την ιστορία της διδασκαλίας των μαθηματικών έξω από τα στενά, καθορισμένα όρια που ορίζει η επιστήμη.

Σύμφωνα με τους Tzanakis & Thomaidis (2000) η κριτική ανάγνωση των πηγών δίνει την δυνατότητα τόσο στον εκπαιδευτικό, όσο και στον μαθητή να εκτιμήσουν το γενικό εννοιολογικό πλαίσιο και τα συναφή προβλήματα και ερωτήματα, που οδήγησαν στην ανάπτυξη των συγκεκριμένων μαθηματικών πεδίων γνώσεων. Βοηθά επίσης να κατανοήσουμε ότι η επιστήμη δεν εξελίσσεται μόνο ως προς το περιεχόμενό της, αλλά και ως προς τη μορφή της: σημειολογία, ορολογία, προτιμούμενες υπολογιστικές μέθοδοι, τρόποι έκφρασης και αναπαράστασης. Έτσι η ιστορία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη μαθηματική γλώσσα μιας δοθείσας εποχής και να τη συγκρίνουν με τη σύγχρονή της μορφή. Τέλος προσφέρει τη δυνατότητα της μερικής, έστω, κατανόησης των δυσκολιών που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος, με συγκεκριμένα ερωτήματα και προβλήματα.

Ο Jankvist (2014) μας παραθέτει μια λίστα του Pengelley από εννέα πλεονεκτήματα που μας προσφέρει η χρήση των πηγών. Συνοπτικά είναι: 1) κίνητρο και διασύνδεση διαχρονικά, 2) κατανόηση της ουσίας, αυθεντικότητα και ανακάλυψη, 3) τα μαθηματικά ως ανθρώπινη προσπάθεια, 4) μετακίνηση από την προφορική στη σύγχρονη μαθηματική περιγραφή, 5) αντανάκλαση στο καθεστώς του παρόντος και στα παραδείγματα, 6) συμμετοχή στη διαδικασία του να κάνεις μαθηματικά μέσα από το πείραμα, την υπόθεση, την απόδειξη, την γενίκευση, τη δημοσίευση και τη συζήτηση, 7) βαθύτερη τεχνική κατανόηση, 8) αναπροσανατολισμό και 9) ένα πρόγραμμα σπουδών που έχει ως βάση του τις ερωτήσεις που προηγούνται των απαντήσεων και όχι το αντίστροφο.

Ωστόσο η χρήση των πρωτογενών πηγών για τη διδασκαλία των σύγχρονων μαθηματικών πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, καθώς η διαφοροποίηση τους ως προς το περιεχόμενο τους, είναι τεράστια από αυτά του παρελθόντος. Πρέπει να καθοριστούν εξαρχής οι μαθησιακοί στόχοι, οι πληθυσμιακές ομάδες που αφορούν, η διδακτική μεθοδολογία που θα αξιοποιηθεί και φυσικά το κατάλληλο είδος πηγών που θα επιλεγούν. Εξίσου σημαντικό είναι να υπάρχει η κατάλληλη προετοιμασία από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος πρέπει να διαθέτει επίγνωση της ιστορικής πραγματικότητας και ικανότητα χειρισμού των μαθηματικών που πραγματεύεται (Jahnke et al., 2000).

4.4 Τα εργαλεία και η σχέση τους με τους ΜΧΕ

Η Bussi (2000) υποστηρίζει ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να βρει εφαρμογή στις σχολικές δραστηριότητες μέσω της μελέτης και κατασκευής αντιγράφων αρχαίων εργαλείων και άλλων τεχνουργημάτων, τα οποία ανακατασκευάζονται με τη βοήθεια των ιστορικών πηγών. Πιστεύει μάλιστα, πως όλα σχεδόν τα εργαλεία της αρχαίας και σύγχρονης τεχνολογίας, ενσωματώνουν πολλή μαθηματική γνώση, η οποία γίνεται προσιτή μέσω μιας προσεκτικής και στοχευόμενης μελέτης. Πετυχαίνουμε έτσι σημαντική κινητοποίηση σε μικρούς και μεγάλους μαθητές, αλλά και σε ενήλικες. Ιδιαίτερα οι μαθητές που δεν αγαπούν τα Μαθηματικά, απολαμβάνουν την ενασχόλησή τους με φυσικά αντικείμενα που είναι πιο κοντά στις καθημερινές τους εμπειρίες.

Προτείνει μάλιστα δύο τρόπους για να ενταχθούν τα ιστορικά εργαλεία στις σχολικές δραστηριότητες: α) να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με αυτά, φυσική ή εικονική, μέσω κάποιας επίσκεψης σε μουσείο ή στο διαδίκτυο, οπότε αναφερόμαστε στην πολιτιστική διάσταση των Μαθηματικών και β) μέσα από συγκεκριμένες σχολικές δραστηριότητες που βοηθούν τους μαθητές να γνωρίσουν την εργασία των μαθηματικών και να αναπτύξουν την κατανόηση για ένα συγκεκριμένο κομμάτι γνώσης.

Σε ότι αφορά τη χρήση των εργαλείων στο πλαίσιο των ΜΧΕ, δύο ιδέες πρέπει να ληφθούν υπόψη: α) για την ακριβή περιγραφή της μαθηματικής εργασίας χρειάζεται όχι μόνο η μαθηματική γνώση, αλλά και τα εργαλεία που είναι απαραίτητα για τη διεξαγωγή της μαθηματικής εργασίας και β) κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο και ομοίως κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να μελετηθεί ως αντικείμενο (Kuzniak, Nechache, Drouhard, 2016). Ωστόσο ο όρος *«εργαλείο»* δεν είναι αρκετά ακριβής για να περιγράψει τη μαθηματική εργασία, έτσι χρησιμοποιούνται και οι όροι «*τεχνούργημα*» και «*όργανο*» για να τονίσουν τις λεπτές διαφορές μεταξύ τους.

Σύμφωνα με την άποψη των αρχαιολόγων *τεχνούργημα* είναι ένα υλικό αντικείμενο το οποίο μετασχηματίζεται από τους ανθρώπους για κάποιο σκοπό. Δεν διαφαίνεται πάντως ο σκοπός, ούτε αν το τεχνούργημα μπορεί να συμβάλλει στη διεκπεραίωση ενός αντικειμένου, για να θεωρηθεί ως εργαλείο. Αν και στην πραγματικότητα δεν ισχύει αυτό, για τη μαθηματική εργασία, θεωρούμε πως κάθε τεχνούργημα αποτελεί εργαλείο. Τα τεχνουργήματα είναι κυρίως υλικά σώματα ή αναπαριστούν ψηφιακά τα υλικά σώματα. Αντιθέτως τα εργαλεία μπορεί να έχουν και εννοιολογική φύση, όπως τα θεωρήματα και οι αλγόριθμοι. Με τον όρο *εργαλείο* εννοούμε κυρίως ένα αντικείμενο το οποίο κατασκευάστηκε για να διεκπεραιώσει μια συγκεκριμένη εργασία, η οποία δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί διαφορετικά (Kuzniak, Nechache, Drouhard, 2016).

Σύμφωνα με τον Rabardel (2001) ο όρος *όργανο* αποκτά μια εννοιολογική σημασία: το εργαλείο γίνεται όργανο, όταν το υποκείμενο έχει κατασκευάσει γνωστικά σχήματα για να χρησιμοποιήσει αυτό το εργαλείο. Το όργανο δεν παραχωρείται, αλλά αντίθετα πρέπει να κατασκευαστεί από το υποκείμενο και αποτελείται από δύο στοιχεία: α) από το εργαλείο, υλικό ή συμβολικό και β) από τα κατασκευασμένα σχήματα.

5 Μεθοδολογία έρευνας

5.1 Χρησιμότητα της έρευνας

Από τη μελέτη της μέχρι τώρα βιβλιογραφίας βγαίνει το συμπέρασμα πως η αντιμετώπιση του ζητήματος των λόγων και των αναλογιών στο Δημοτικό Σχολείο, γίνεται κυρίως με τρόπο αλγεβρικό. Σε ελάχιστες περιπτώσεις υπάρχει γεωμετρική προσέγγιση.

Συγκεκριμένα ότι αφορά την ελληνική πραγματικότητα οι λόγοι και οι αναλογίες διδάσκονται μόνο στην Στ΄τάξη. Από τα δεκαπέντε κεφάλαια τα οποία περιλαμβάνει η σχετική ενότητα, δύο μόνο δραστηριότητες προσεγγίζουν το θέμα γεωμετρικά, ενώ στην ενότητα της Γεωμετρίας στο κεφάλαιο «Μεγεθύνω – μικραίνω σχήματα» όπου εξετάζεται η κλίμακα, γίνεται αναφορά στους λόγους και τις αναλογίες, χωρίς, κατά την άποψή μου, να υπάρχει επαρκής διασύνδεση με αυτές.

Υπάρχει επομένως αρκετό περιθώριο για μια γεωμετρική προσέγγιση των λόγων και των αναλογιών ή έστω κάποιων πτυχών του τεράστιου αυτού αντικειμένου των Μαθηματικών.

Από την άλλη, η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας, ειδικά στην Ελλάδα, δεν έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στον σχεδιασμό και στην υλοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων. Σε ότι αφορά μάλιστα το θέμα της παρούσας εργασίας, δεν βρέθηκε κάποια έρευνα που να εξετάζει τους ΓΧΕ των μαθητών στους λόγους και στις αναλογίες με ένα γεωμετρικό τρόπο.

Τέλος, η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και η ενσωμάτωσή της στη διδασκαλία, είναι σχεδόν ανύπαρκτη στην ελληνική πραγματικότητα. Συγκεκριμένα, αν και στο βιβλίο των Μαθηματικών της Στ΄Δημοτικού, στην εισαγωγή του κεφαλαίου για τους λόγους και της αναλογίες, υπάρχει ένα ιστορικό σημείωμα για τις βραχογραφίες των προϊστορικών ανθρώπων, το οποίο μάλιστα συνοδεύεται και από εικόνα, δεν γίνεται διδακτική αξιοποίηση του, παρά μονάχα μια απλή αναφορά στην αναλογία που προσπαθούσαν να κρατήσουν οι δημιουργοί των εικόνων με τα πραγματικά αντικείμενα.

Με βάση τα παραπάνω, πιστεύω πως θα ήταν διδακτικά σκόπιμο και χρήσιμο να σχεδιαστεί και να υλοποιηθεί μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές Στ΄Δημοτικού, που να εξετάζει τους ΓΧΕ των μαθητών στους λόγους και στις αναλογίες, υπό το πρίσμα μιας γεωμετρικής προσέγγισης, αξιοποιώντας παράλληλα την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών.

5.2 Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της έρευνας δεν είναι να διδάξει τους λόγους και τις αναλογίες σε όλη τους την έκταση, καθώς κάτι τέτοιο θα προϋπόθετε ένα τεράστιο εύρος δραστηριοτήτων. Φιλοδοξεί όμως να φωτίσει κάποιες από τις πτυχές του θέματος, με το σχεδιασμό και τη χρήση των ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$ και ενός ιστορικού εργαλείου. Θα προσπαθήσουμε δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε την Ιστορία των Μαθηματικών για να σχεδιάσουμε κατάλληλες διδακτικές δραστηριότητες στα πλαίσια των ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$, για μαθητές Στ΄Δημοτικού. Οι δραστηριότητες αυτές αφορούν κυρίως το λόγο των πλευρών όμοιων τριγώνων και τη χρήση της κλίμακας. Θα ασχοληθούμε επομένως με δύο είδη λόγων, σύμφωνα με τον Freudenthal (1986):

- ✓ Σύγκριση μεταξύ δύο μερών μιας ποσότητας
- ✓ Σύγκριση μεγεθών δύο ποσοτήτων που συνδέονται εννοιολογικά, αλλά δεν θεωρούνται ως μέρη του όλου.

Πρόκειται επομένως για «γνήσιους λόγους», μιας και οι δύο όροι του λόγου ανήκουν στην ίδια μονάδα μέτρησης.

Με βάση τον σκοπό αυτό, τα **ερευνητικά ερωτήματα** που τίθενται είναι τα εξής:

I. Πόσο αποτελεσματική μπορεί να είναι μια πειραματική γεωμετρική προσέγγιση, στη διαμόρφωση της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης των μαθητών, κατά την ενασχόλησή τους με Λόγους και Αναλογίες;
II. Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη χρήση εμπειρικών μεθόδων και εργαλείων κατά τη διδασκαλία Λόγων και Αναλογιών;
III. Πώς αξιολογούν οι μαθητές την εμπειρία τους από την κατασκευή ενός ιστορικού εργαλείου και τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας με την ιστορική προσέγγιση;

5.3 Συμμετέχοντες στην έρευνα

Στην έρευνα πήραν μέρος 23 μαθητές, από τους οποίους τα 9 ήταν κορίτσια και τα 14 αγόρια. Όλοι τους ήταν μαθητές ενός τμήματος της Στ΄τάξης ενός Δημοτικού σχολείου της Κατερίνης. Τα περισσότερα παιδιά φοιτούν μαζί στο ίδιο σχολείο από την Α΄τάξη και οι γονείς των περισσοτέρων ήταν υπάλληλοι και ελεύθεροι επαγγελματίες. Δύο μαθήτριες ήταν αλλοδαπής καταγωγής και δύο από τους μαθητές ήταν διαγνωσμένοι με μαθησιακά προβλήματα. Τα παιδιά δεν είχαν κάποια προηγούμενη εμπειρία από συμμετοχή σε έρευνα ή άλλου είδους διδακτικής παρέμβασης.

5.4 Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης

5.4.1 Ο ΜΧΕ αναφοράς των μαθητών

Σύμφωνα με τους Kuzniak & Vivier, καθώς στην Ελλάδα χρησιμοποιούμε ένα μόνο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας, το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και τα σχολικά βιβλία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διερεύνηση του ΜΧΕ αναφοράς.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στο ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ-Α.Π.Σ, 2003) η διδασκαλία των λόγων και των αναλογιών προβλέπεται μόνο για την Στ΄Τάξη. Συγκεκριμένα στους στόχους της ενότητας «Λόγοι και αναλογίες» (Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού, σελ. 273) αναφέρει:

- *Να γνωρίσουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας και να βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας με τη «χιαστί» μέθοδο.*
- *Να γνωρίσουν την έννοια του ποσοστού ως λόγου, ως πηλίκου και ως δεκαδικού.*
- *Να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.*

Ενώ στη σελίδα 274 στο κεφάλαιο της «Γεωμετρίας» θέτει ως στόχο για τη μεγέθυνση και σμίκρυνση:

- *Να διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις, σε μιλιμιτρέ χαρτί απλών ευθύγραμμων σχημάτων.*

Για τις προβλεπόμενες δραστηριότητες αναφέρει:

- *Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά να προσεγγιστούν με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.*

- *Συλλογή πληροφοριών και συζήτηση για τις διατροφικές ανάγκες των παιδιών (ποσοστά, θερμίδες, θρέψη, καταναλωτής, υγεία). (Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή, Φυσικά, Γλώσσα).*

Βλέπουμε δηλαδή ότι παρότι αφιερώνονται 20 διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία των λόγων και των αναλογιών, η έμφαση δίνεται στη διαθεματική προσέγγιση και στις υπολογιστικές διαδικασίες, όπως με τη χρήση της «χιαστί» μεθόδου. Δεν υπάρχει καμία αναφορά σε διαδικασίες που προάγουν την αναλογική συλλογιστική και οδηγούν σε μια εις βάθος εννοιολογική κατανόηση στους λόγους και τις αναλογίες. Την ίδια λογική ακολουθεί και η διδασκαλία της «μεγέθυνσης – σμίκρυνσης», όπου και εδώ το βάρος δίνεται στις πρακτικές, χωρίς να υπάρχει κάποια εννοιολογική διασύνδεση του κεφαλαίου με τους λόγους και τις αναλογίες.

Όσον αφορά το βιβλίο του μαθητή της Στ΄τάξης, η ενότητα ξεκινά με ένα ιστορικό σημείωμα, το οποίο διδακτικά μένει αναξιοποίητο και προχωρά στο Κεφ. 30 όπου οι μαθητές οδηγούνται στην έννοια του λόγου μέσα από δύο δραστηριότητες, μια αριθμητική και μια γεωμετρική. Αυτή η πρώτη γεωμετρική προσέγγιση δείχνει το λόγο του μήκους της πλευράς προς την περίμετρο σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο. Το κεφάλαιο καταλήγει σε ένα ορισμό, ο οποίος ταυτίζει σχεδόν το λόγο με το κλάσμα: «*Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δυο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται λόγος. Το κλάσμα έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο»*.

Σο επόμενο κεφάλαιο του βιβλίου επιχειρείται το πέρασμα από τους λόγους στις αναλογίες, κυρίως με τη χρήση πινάκων λόγων, ενώ συνεχίζεται η αντιμετώπιση των λόγων ως κλάσματα: «*Για να σχηματίσω αναλογία από ένα λόγο, αρκεί να φτιάξω έναν άλλο λόγο που να είναι ίσος με τον πρώτο, όπως στα κλάσματα (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δύο όρους με τον ίδιο αριθμό).*

Μια δεύτερη (και τελευταία) γεωμετρική προσέγγιση των αναλογιών, γίνεται στη 1^{η} Δραστηριότητα του Κεφ. 32, όπου δίνεται ο λόγος των πλευρών ενός ισόπλευρου τριγώνου προς την περίμετρο του τριγώνου αυτού. Το κεφάλαιο κλείνει με την εκμάθηση της μεθόδου των «χιαστί γινομένων».

Στο Κεφ. 33 δίνεται ο ορισμός του ποσού και η διάκρισή του σε σταθερά και μεταβλητά, αν και ποσά και τιμές έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε πίνακες στα προηγούμενα κεφάλαια.

Το Κεφ.34 παρουσιάζει δύο δραστηριότητες με ανάλογα ποσά, όπου οι τιμές των ποσών είναι δυνατόν να οδηγήσουν στην παρανόηση ότι δημιουργούνται προσθετικά και όχι πολλαπλασιαστικά.

Το Κεφ. 35 παρουσιάζει δύο μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων με ανάλογα ποσά: α) την αναγωγή στη μονάδα και β) τον πίνακα ποσών και τιμών. Μια πιθανή δυσκολία που προκύπτει για την αναγωγή στη μονάδα, είναι η διαδικασία της εύρεσης «πολλών από πολλά»

Ανάλογο πνεύμα επικρατεί και στα επόμενα κεφάλαια με τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και τα ποσοστά, τα οποία όμως δεν θα αναλύσω, αφού δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

5.4.2 Ο σχεδιασμός του κατάλληλου ΜΧΕ

Ο σχεδιασμός της παρέμβασης ακολουθεί τα τρία στάδια διδασκαλίας που περιγράφουν οι Coutat & Richard, (2011). Η πρώτη φάση αποτελεί μια εισαγωγή, όπου προκαλείται η ενεργοποίηση των μαθητών και η διαμόρφωση των ιδιοτήτων που καθορίζουν τον ΜΧΕ. Στη συνέχεια έχουμε τη φάση του πειραματισμού, που αποτελεί και το κύριο μέρος της εργασίας και τέλος η παρέμβαση κλείνει με την επισημοποίηση των αποτελεσμάτων και την εφαρμογή των νέων ιδιοτήτων.

Η επιλογή των ιστορικών πηγών παίζει σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό της διδασκαλίας. Επελέγη γι αυτό μια πρωτογενή πηγή, ένα απόσπασμα από το βιβλίο ενός Γάλλου μηχανικού του $16^{ου}$ αιώνα του Jean Errard, με τίτλο: «*La géométrie et pratique générale d'icelle*» (Παράρτημα Ε,σελ.185), όπου περιγράφεται με ακρίβεια ο τρόπος κατασκευής και χρήσης ενός οργάνου, κατάλληλου για τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων. Η επιλογή του ιστορικού αυτού κειμένου, έγινε αφενός διότι ο τρόπος λειτουργίας του εργαλείου που περιγράφει στηρίζεται άμεσα στους λόγους και στις αναλογίες, αφετέρου αποτελεί μια θαυμάσια ευκαιρία για ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Η παρουσίαση και μόνο του αυθεντικού βιβλίου και των εικόνων που το συνοδεύουν αρκεί για να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον των παιδιών. Το Φύλλο Εργασίας, καθώς και η συζήτηση που ακολουθεί αναδεικνύει τις μαθηματικές ιδιότητες που περικλείει. Καθώς η γλώσσα του κειμένου είναι τα γαλλικά, υπάρχει μια μετάφραση για τους μαθητές στα ελληνικά, η οποία παρατίθεται πλάι στο γαλλικό κείμενο, για να μην απομακρυνόμαστε από τα αυθεντικά (Jahnke et. al, 2000).

Οι μετρήσεις που περιγράφονται στο ιστορικό κείμενο παρακινούν τους μαθητές να εργαστούν με πρακτικό τρόπο και εντάσσονται στη Γεωμετρία Ι (GI), η οποία ταιριάζει περισσότερο με τον ΜΧΕ αναφοράς και με το επίπεδο των μαθητών της Στ΄τάξης του Δημοτικού.

Η διδακτική παρέμβαση αποφασίστηκε να πραγματοποιηθεί μετά τη διδασκαλία των κεφαλαίων που αναφέρονται στους λόγους και αναλογίες, ώστε να διαπιστωθεί αν όντως πέτυχε να ανταποκριθεί στους στόχους που είχαμε θέσει και αν εντέλει είναι σε θέση να δώσει απαντήσεις στα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Βεβαίως, ήταν γνωστό και αναμενόμενο, ότι μια από τις δυσκολίες τις οποίες θα έπρεπε να ξεπεράσουμε, ήταν η προσκόλληση των μαθητών στις ευρετικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων του βιβλίου, οι οποίες πολλές φορές λειτουργούν κατασταλτικά σε οτιδήποτε νέο και οδηγούν σε παρανοήσεις. Η υπερπήδηση αυτής της δυσκολίας ήταν μια πρόκληση την οποία δεχτήκαμε από την αρχή.

5.5 Η διδακτική σειρά

Με τη διδακτική σειρά επιδιώκουμε να οργανώσουμε τη χρήση κατάλληλων τεχνουργημάτων που θα χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία μεταξύ των επιπέδων.

Στην εξέταση των λόγων και αναλογιών υπάρχει μια συνέχεια μεταξύ των ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$ και ΜΧΕ$_{\text{Αριθμοί}}$. Μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$ αποτελεί την αφετηρία και ο ΜΧΕ$_{\text{Αριθμοί}}$ αποτελεί το χώρο άφιξης στο πλαίσιο του Χώρου Εργασίας. Παρόλα αυτά μια επιστροφή στο ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία,}}$ θεωρείται απαραίτητη για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων ή για τη διατύπωση ενός συμπεράσματος, ενώ μερικές εργασίες απαιτούν ένα διαρκές μπρος-πίσω. Αναλυτικά, ο σχεδιασμός της διδακτικής σειράς προέβλεπε τα εξής:

1η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχοι: Να προσπαθήσουν οι μαθητές να εκτιμήσουν οπτικά, απρόσιτες αποστάσεις και να καταγράψουν τις εκτιμήσεις τους αυτές. Να γνωρίσουν οι μαθητές το ιστορικό εργαλείο του Errard και τη χρήση του μέσω ιστορικών κειμένων. Να αντιληφθούν οι μαθητές το πρόβλημα της μέτρησης απρόσιτων αποστάσεων, παρουσιάζοντας ανάλογες καταστάσεις και προβλήματα στην τάξη. Να γεννηθεί η επιθυμία και η ανάγκη κατασκευής του ιστορικού οργάνου από τους ίδιους τους μαθητές.

Υλικά: Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν : ένα Φύλλο Εργασίας (Φ.Ε.1, Παράρτημα Α, σελ.166), φωτοτυπίες με το ιστορικό κείμενο του Errard (Παράρτημα. Ε, σελ.185) και βιντεοπροβολέα, που θα προβάλλει το ιστορικό εργαλείο.

Φάση Ι: Οι μαθητές θα χωριστούν σε ομάδες των 4-5 ατόμων. Ο σχηματισμός των ομάδων θα γίνει αποκλειστικά από τους μαθητές, χωρίς την παρέμβαση του δασκάλου, εκτός και αν υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση ως προς τη δυναμική τους. Γενικά όμως αναμένεται να μην υπάρχει πρόβλημα, αφού είναι ήδη εξοικειωμένοι με αυτόν τον τρόπο εργασίας μέσα στην τάξη. Στη συνέχεια οι ομάδες θα μεταβούν στο χώρο της αυλής του σχολείου, όπου και θα τους μοιραστεί ένα φύλλο εργασίας (Φ.Ε. 1). Θα τους ζητηθεί να εργαστούν με όποιο τρόπο θέλουν και να κάνουν εκτιμήσεις σχετικά με το ύψος διαφόρων αντικειμένων από το οικείο τους περιβάλλον, όπως για παράδειγμα ο ιστός της σημαίας στην αυλή του σχολείου ή ένα δέντρο στον αυλόγυρο. Οι μαθητές αφού εντοπίσουν αρχικά τα αντικείμενα στο χώρο, θα προσπαθήσουν να εκτιμήσουν τα ύψη οπτικά χρησιμοποιώντας ως μέτρο διάφορα αντικείμενα γνωστού μήκους. Ακόμη θα χρειαστεί να περιγράψουν τον τρόπο που εργάστηκαν, προκειμένου να φτάσουν σε μια όσο το δυνατόν ακριβή εκτίμηση. Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία και συμπληρωθούν τα φύλλα εργασίας θα μεταβούν στην αίθουσα όπου θα παρουσιάσουν τις εκτιμήσεις τους και θα συζητήσουν τις τεκμηριώσεις τους. Λογικό είναι να υπάρχουν αρκετές αποκλίσεις, τόσο στις εκτιμήσεις, όσο και στον τρόπο που εργάστηκαν.

Φάση ΙΙ: Κατά τη φάση αυτή θα επιχειρηθεί η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Για το σκοπό αυτό έχει επιλεγεί ένα αυθεντικό κείμενο του 16ου αιώνα του Jean Errard de Bar-le-Duc. Πρόκειται για το πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο από το έργο του "Géométrie et Pratique générale d'icelle". Το κείμενο είναι στη γαλλική γλώσσα και συνοδεύεται από μετάφραση στα ελληνικά, καθώς τα παιδιά δεν γνωρίζουν τη γλώσσα. Προκειμένου να γίνει κατανοητό, έχουν αφαιρεθεί τα μέρη εκείνα που θεωρήθηκε ότι θα δυσκολέψουν ιδιαίτερα τα παιδιά, όπως οι πολλές λεπτομέρειες από *«Τη μέτρηση ευθείων γραμμών και εισαγωγή στη σύνθεση του οργάνου»* και από το «*Πώς μετρούνται οι μακρινές ευθείες γραμμές σε μια επίπεδη επιφάνεια».*

Με τη βοήθεια του βιντεοπροβολέα αλλά και φωτοτυπιών, θα παρουσιαστεί στους μαθητές το ιστορικό κείμενο και το εργαλείο του Errard. Με την πρώτη ερώτηση του φυλλαδίου που το συνοδεύει (Παράρτημα Ε, σελ.185), οι μαθητές θα διαπιστώσουν το σκοπό για τον οποίο γράφτηκε το κείμενο και ότι ανάλογοι προβληματισμοί σχετικά με την μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων απασχόλησαν τον άνθρωπο από πολύ παλιά. Η δεύτερη ερώτηση είναι αυτή η οποία ουσιαστικά βοηθά στην ανάδυση των μαθηματικών ιδιοτήτων που εμπεριέχονται στο κείμενο. Με την τρίτη ερώτηση θα αντιληφθούν ότι η χρήση ενός τέτοιου εργαλείου, θα μπορούσε να δώσει λύση στο πρόβλημα που αντιμετώπισαν στην προηγούμενη φάση. Έτσι θα υποκινηθεί το ενδιαφέρον τους για την κατασκευή του εργαλείου αυτού.

Στη φάση αυτή δε θα γίνει επακριβώς η ανάλυση του τρόπου λειτουργίας του, γιατί κάτι τέτοιο θα στερούσε από τους μαθητές τα οφέλη της δημιουργικής ανακάλυψης των ιδιοτήτων του.

2η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχος: Να πραγματοποιηθεί η κατασκευή του εργαλείου από τους ίδιους τους μαθητές, ακολουθώντας τις οδηγίες του δασκάλου.

Υλικά: Στη φάση αυτή ο δάσκαλος θα έχει φροντίσει, ώστε η κάθε ομάδα να έχει στη διάθεσή της τα υλικά για την κατασκευή του οργάνου. Δηλαδή από τρεις αριθμημένες ράβδους, δύο του ενός μέτρου και μια εκατόν είκοσι εκατοστών, από ένα κινητό σύνδεσμο για την κάθετη ράβδο και από ένα πτυσσόμενο σύνδεσμο με σκόπευτρο για την κινούμενη ράβδο. Θα χρειαστεί επίσης από μια φωτοτυπία (Παράρτημα Δ΄, σελ.183) για το κάθε παιδί με το σχεδιάγραμμα και με αναλυτικές οδηγίες κατασκευής του οργάνου.

Φάση Ι: Πριν δώσουμε τα υλικά στις ομάδες, μοιράζουμε ατομικά στον κάθε μαθητή από μια φωτοτυπία με το σχεδιάγραμμα του οργάνου (Παράρτημα Δ΄, σελ.183) και την ονομασία των μερών του. Ακολουθεί συζήτηση μέσα στην τάξη και δίνονται εξηγήσεις για τη χρήση του, ώστε να είμαστε σίγουροι πως όλοι οι μαθητές έχουν κατανοήσει πλήρως τη δομή και τον τρόπο λειτουργίας του. Εναλλακτικά μπορούμε να ζητήσουμε από μερικούς μαθητές να ονοματίσουν τα μέρη του οργάνου και να μας εξηγήσουν τον τρόπο λειτουργίας τους. Σίγουροι πλέον ότι, σε θεωρητικό τουλάχιστον επίπεδο, οι μαθητές γνωρίζουν τι πρόκειται να κατασκευάσουν, προχωρούμε στην επόμενη φάση της δραστηριότητάς μας, που είναι η κατασκευή του οργάνου.

Φάση ΙΙ: Οι μαθητές εργάζονται ομαδικά, στο επίπεδο της Γεωμετρίας Ι (GI). Σε κάθε ομάδα δίνεται από ένα φυλλάδιο με αναλυτικές οδηγίες (Παράρτημα Δ΄,σελ.183), καθώς και τα απαιτούμενα υλικά και τους αφήνουμε να εργαστούν, χωρίς να παρεμβαίνουμε. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη φάση αυτή είναι καθαρά συμβουλευτικός. Παρέχει τη βοήθεια του μόνο αν του ζητηθεί από τις ομάδες, με τρόπο διακριτικό. Δίνεται έτσι η ευκαιρία στους μαθητές να εργαστούν μόνοι τους και να ανακαλύψουν τη γνώση αυτενεργώντας. Οι οδηγίες προσπαθούμε να είναι λιτές και κατανοητές, ώστε να μην δημιουργούν παρερμηνείες, ενώ καλό είναι να υπάρχει και το ανάλογο σχήμα.

Η όλη κατασκευή θεωρείται γενικά απλή και ολοκληρώνεται σε τέσσερα απλά βήματα. Τα υλικά που απαιτούνται τίθενται άμεσα στη διάθεση των μαθητών και απαιτείται μονάχα η συναρμολόγησή τους. Παρόλα αυτά, αν και η δραστηριότητα έχει οργανωθεί επιμελώς και συνοδεύεται από επαρκείς οδηγίες, αναμένεται να προκαλέσει μια μικρή δυσκολία στους μαθητές, καθώς ξεφεύγει από τις συνηθισμένες χειραπτικές δραστηριότητες της τάξης.

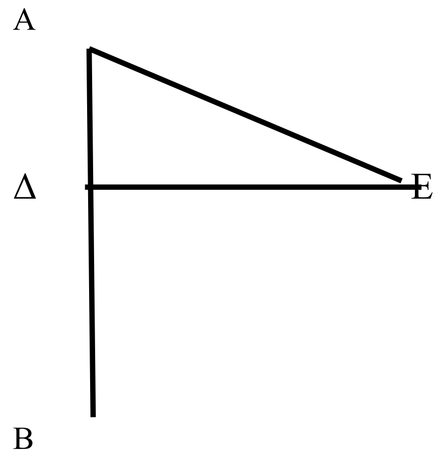
Η χρήση του εργαλείου από τα παιδιά, υπόκειται σε κάποιους πρακτικούς περιορισμούς οι οποίοι διαφάνηκαν ήδη από την φάση της προετοιμασίας της δραστηριότητας. Ο πιο σημαντικός είναι, το σχετικά μικρό ύψος της κάθετης ράβδου, λόγω προσαρμογής του στο ύψος των παιδιών. Έτσι, το εργαλείο αδυνατεί να μετρήσει αποστάσεις μεγαλύτερες των 12 μέτρων. Φροντίζουμε επομένως, οι μετρήσεις που ανατίθενται στις διάφορες δραστηριότητες, να μην ξεπερνούν την απόσταση αυτή. Αν παρόλα αυτά παραστεί τέτοια ανάγκη, αυτό μπορεί να γίνει με διαδοχικές μετρήσεις. Η κατασκευή ή έστω η συναρμολόγηση του εργαλείου από τους ίδιους τους μαθητές, αναμένεται να προκαλέσει μεγάλη ικανοποίηση στους μαθητές και να τους διεγείρει τη δημιουργική διάθεση. Παράλληλα, η ομαδική εργασία και οι διαδράσεις μεταξύ των μελών των ομάδων θα δημιουργήσει τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τη διερεύνηση των ιδιοτήτων του εργαλείου που προβλέπεται στις επόμενες παρεμβάσεις.

3η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχοι: Να εξασκηθούν οι μαθητές στη χρήση του εργαλείου του Errard, μετρώντας προσιτές αποστάσεις στην αυλή του σχολείου, να μεταφέρουν τις μετρήσεις τους αυτές στο χαρτί, να διαπιστώσουν ότι σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα και ότι η ζητούμενη απόσταση είναι η βάση του μεγάλου τριγώνου.

Υλικά: Οι μαθητές θα εργαστούν με το εργαλείο του Errard, θα χρησιμοποιήσουν το Φύλλο Εργασίας 2 (Παράρτημα Α, σελ.166), θα επιβεβαιώσουν τις μετρήσεις τους με μια μετροταινία και θα αποτυπώσουν τα τρίγωνα που σχηματίζονται σε ένα φύλλο χαρτί με τετραγωνάκια με τη βοήθεια των γεωμετρικών τους οργάνων.

Φάση Ι: Οι μαθητές θα εργαστούν ομαδικά, αλλά και ατομικά. Θα μοιράσουμε από ένα Φύλλο Εργασίας (Φ.Ε.2) στις ομάδες, όπου εκεί δίνουμε αναλυτικές οδηγίες για τον τρόπο με τον οποίο θα εργαστούν. Η πρώτη δραστηριότητα ζητά να ονομαστούν τα μέρη του εργαλείου από την ολομέλεια των ομάδων, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη εξοικείωση με αυτό.



Εικόνα 4: Σχηματική αναπαράσταση του εργαλείου του Errard.

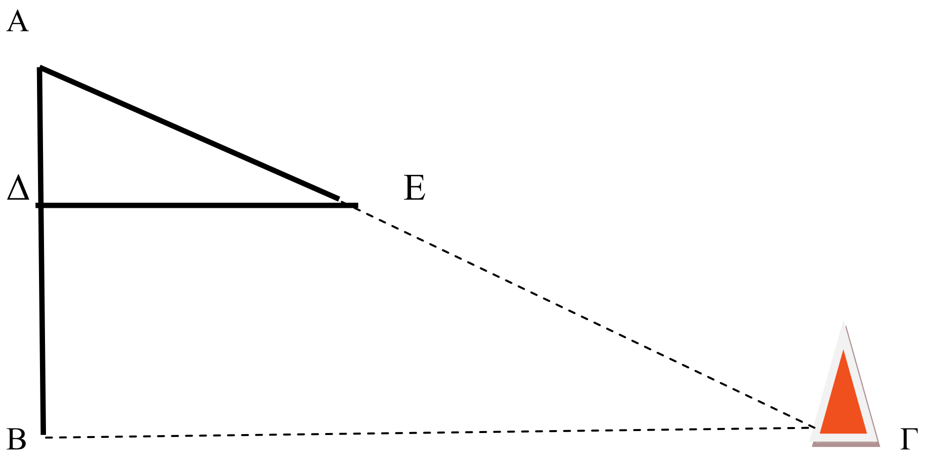
Στη συνέχεια η δεύτερη δραστηριότητα καθορίζει το ρόλο των μελών των ομάδων. Οι ρόλοι θα είναι εναλλασσόμενοι, ώστε να δοθεί σε όλους η δυνατότητα να εργαστούν κυκλικά στις διάφορες θέσεις της ομάδας. Κάποιος μαθητής θα πραγματοποιεί τις στοχεύσεις, άλλος θα φροντίζει για την καθετότητα του οργάνου, ένας άλλος θα μετρά τις αποστάσεις πάνω στην οριζόντια ράβδο, κάποιος θα καταγράφει τα δεδομένα των μετρήσεων στο Φύλλο Εργασίας, ενώ άλλοι δυο θα μετρούν με τη μετροταινία τις αποστάσεις. Θα πραγματοποιηθούν συνολικά έξι μετρήσεις, όσα και τα μέλη της κάθε ομάδας, προκειμένου να γίνει όπως αναφέραμε η εναλλαγή των ρόλων.

Σε κάθε νέα μέτρηση ο κώνος θα μετακινείται, χωρίς όμως να ξεπερνά τη μέγιστη απόσταση των 12 μέτρων, αφού ισχύει ο περιορισμός αυτός. Βέβαια δεν θα αναφέρουμε τίποτα ακόμη για τον περιορισμό αυτό στους μαθητές. Αυτό περιμένουμε να το ανακαλύψουν μόνοι τους σε κάποια άλλη δραστηριότητα.

Αναμένεται να ανακαλύψουν τη λειτουργία του εργαλείου, σκοπεύοντας προς τους κώνους, τους οποίους έχουμε τοποθετήσει στην αυλή του σχολείου. Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε πως θα πρέπει να καταγράψουν τόσο το μήκος (ΒΓ) από τη βάση του οργάνου ως το αντικείμενο και το μήκος της οριζόντιας ράβδου (ΔΕ), όσο και τα μήκη της κάθετης ράβδου (ΑΔ) και (ΔΒ).

Αναμένουμε οι μαθητές να μην μπορούν ακόμη να κάνουν μετρήσεις με τη χρήση του εργαλείου. Οι μετρήσεις ως αυτή τη φάση θα γίνονται με τη μετροταινία, προκειμένου να συλλέξουν τα απαραίτητα δεδομένα για να οδηγηθούν αργότερα στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων του εργαλείου.

Φάση ΙΙ: Η εργασία τώρα θα γίνει ατομικά, μέσα στην τάξη. Θα μοιράσουμε σε όλους από ένα χαρτί με τετραγωνάκια και θα τους ζητήσουμε να μεταφέρουν τη κατάσταση που βίωσαν έξω, στην αυλή, πάνω στο χαρτί. Ζητάμε δηλαδή να σχεδιάσουν, με τη βοήθεια των γεωμετρικών τους οργάνων, τη στόχευση που έκαναν πάνω σε έναν κώνο και να συνδέσουν με μια διακεκομμένη γραμμή το άκρο της κινητής ράβδου με το αντικείμενο. Η προέκταση αυτή αποτελεί τη νοητή ευθεία του ματιού. Το σχέδιο στο οποίο αναμένεται να καταλήξουν θα έχει περίπου την εξής μορφή:



Εικόνα 5: Σχηματική αναπαράσταση της στόχευσης προς ένα αντικείμενο με το εργαλείο του Errard.

Θα συλλέξουμε στη συνέχεια τα σχέδια και θα τα εκθέσουμε σε κοινή θέα στον φελλοπίνακα της τάξης, προκαλώντας μια συλλογική συζήτηση. Αν κάποιοι μαθητές δεν καταφέρουν να αποτυπώσουν στο σχέδιό τους την κατάσταση που περιγράψαμε, θα τους ζητήσουμε να παρουσιάσουν τα σχέδιά τους και να προσπαθήσουν να επιχειρηματολογήσουν για τις επιλογές τους.

Από τη συζήτηση που θα προκύψει επιδιώκουμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα, ότι μεταξύ της κορυφής του οργάνου, του αντικειμένου προς στόχευση, της κινητής βάσης και της κάθετης ράβδου του οργάνου, σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα, με κοινή κορυφή, την κορυφή του οργάνου. Άρα ουσιαστικά έχουμε δύο ορθογώνια και ισογώνια τρίγωνα, αφού και η τρίτη κορυφή δεν μπορεί παρά να είναι ίση.

4η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχοι: Να διαπιστώσουν τη σχέση αναλογίας που υπάρχει μεταξύ δυο όμοιων τριγώνων και ότι η σχέση αυτή ισχύει και για τα τρίγωνα που σχηματίζονται από το εργαλείο του Errard.

Υλικά: Θα χρησιμοποιήσουμε ένα χάρτινο ορθογώνιο τρίγωνο, το εργαλείο του Errard, μαρκαδόρους, τον πίνακα της τάξης και το Φύλλο Εργασίας 3 (Παράρτημα Α, σελ.166).

Φάση Ι: Η Εργασία αυτή πρόκειται να γίνει ομαδικά από την ολομέλεια της τάξης. Θα σχεδιάσουμε ένα μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο στον πίνακα της τάξης και στη συνέχεια θα τοποθετήσουμε πάνω από αυτό, το χάρτινο ορθογώνιο τρίγωνο που θα έχουμε από πριν κατασκευάσει. Θα προσέξουμε ώστε οι κορυφές Α και Α΄ των δύο τριγώνων, αλλά και οι πλευρές τους να συμπέσουν σε ένα τμήμα τους. Κατόπιν θα ζητήσουμε από του μαθητές μας να διαπιστώσουν, αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στις ομόλογες πλευρές των τριγώνων.

Θα ακολουθήσει συζήτηση και αναμένεται πως κάποιοι θα καταλήξουν στο συμπέρασμα, ότι μετακινώντας το μικρό τρίγωνο μέσα στο μεγάλο, μπορούμε να διαπιστώσουμε πόσες φορές χωράει η κάθε πλευρά του μικρού τριγώνου στην αντίστοιχη πλευρά του μεγάλου. Θα καταγράψουμε στον πίνακα τους λόγους που δημιουργούνται από τις μετρήσεις αυτές και αναμένεται οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι οι λόγοι είναι ίσοι μεταξύ τους. Η φάση αυτή επιδιώκουμε να λήξει με τη διαπίστωση, ότι μεταξύ των ομόλογων πλευρών των ομοίων τριγώνων στον πίνακα υπάρχει μια σχέση αναλογίας.

Φάση ΙΙ: Κατά τη φάση αυτή οι μαθητές θα εργαστούν ατομικά και ομαδικά. Θα μοιράσουμε σε όλους τους μαθητές μας το 3^{o} Φύλλο Εργασίας. Στην πρώτη δραστηριότητα υπάρχει ένας πίνακας, όπου καταγράφονται οι τιμές των μετρήσεων, από τρεις διαφορετικές στοχεύσεις για τα μήκη: ΑΔ, ΑΒ, ΔΕ και ΒΓ. Θα τους ζητήσουμε να παρατηρήσουν τις τιμές των μέτρων και να γράψουν τι παρατηρούν για κάθε στόχευση ξεχωριστά.

Η δεύτερη δραστηριότητα τους καλεί να δημιουργήσουν τα κλάσματα ΑΔ/ΑΒ και ΔΕ/ΒΓ των πλευρών των τριγώνων για κάθε στόχευση ξεχωριστά και τους παρακινεί να τα παρατηρήσουν. Αναμένεται να διακρίνουν οι μαθητές πως πρόκειται για λόγους των πλευρών.

Η τρίτη δραστηριότητα ζητά από τα παιδιά να πραγματοποιήσουν τις διαιρέσεις των κλασμάτων που δημιουργούνται από τις τιμές των προηγούμενων κλασμάτων. Θα διαπιστώσουν οι μαθητές πως το πηλίκο είναι σταθερό. Αυτό αναμένεται να τους οδηγήσει στο συμπέρασμα πως πρόκειται για αναλογία.

Η τέταρτη δραστηριότητα ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν την εκτίμησή τους και για τη σχέση που συνδέει τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΑΕ. Η απάντηση που αναμένουμε να δώσουν είναι ότι και για αυτές τις πλευρές ισχύει η σχέση αναλογίας.

Η πέμπτη δραστηριότητα επιδιώκει να επιβεβαιώσουν οι μαθητές την προηγούμενη υπόθεσή τους. Τους ζητά επομένως να χρησιμοποιήσουν ξανά το εργαλείο του Errard, να δώσουν τις τιμές του πίνακα για τις γνωστές πλευρές και να μετρήσουν με μια μετροταινία τα ΑΕ και ΑΓ. Θα διαπιστώσουν ότι πράγματι η σχέση αναλογίας ισχύει και για αυτές τις πλευρές.

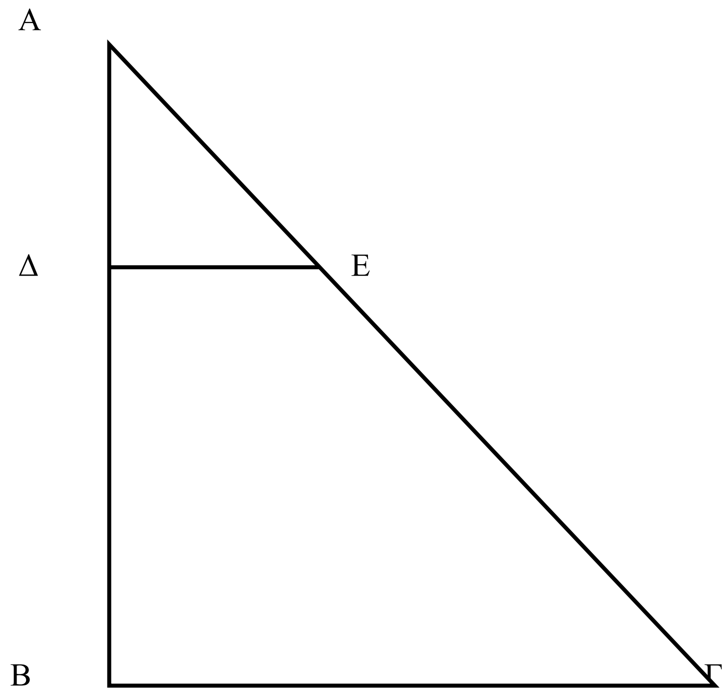
Με την έκτη δραστηριότητα επιδιώκεται να καταλήξουν ότι όλες οι πλευρές των δύο τριγώνων που σχηματίζονται με τη χρήση του εργαλείου, συνδέονται ανά δυο με μια σχέση αναλογίας, κάτι που διαπιστώσανε ήδη και με τα τρίγωνα στον πίνακα στο προηγούμενο μάθημα.

5η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχοι: Να επιβεβαιωθεί η λειτουργικότητα του εργαλείου και να επισημοποιηθεί η νέα γνώση. Να επιβεβαιώσουν επίσης την άποψη, πως για κάθε τρίγωνο που σχηματίζεται από τη χρήση του εργαλείου, ισχύει ο κανόνας των ανάλογων πλευρών.

Υλικά: Το Φύλλο Εργασίας 4 (Παράρτημα Α, σελ.166), το εργαλείο του Errard, διάφορα αντικείμενα προς στόχευση (μπάλες, κώνους κλπ.), μια μετροταινία.

Φάση Ι: Με δεδομένη τη σχέση αναλογίας μεταξύ των πλευρών των τριγώνων, όπως ανακάλυψαν από την προηγούμενη φάση, θα καλέσουμε τώρα τους μαθητές να προχωρήσουν στην επίλυση του προβλήματος του Φύλλου Εργασίας, εργαζόμενοι πάλι ατομικά. Τους μοιράζουμε από ένα Φ.Ε όπου έχουμε τα ακόλουθα δύο ορθογώνια και ισογώνια τρίγωνα με κοινή κορυφή την Α:



Εικόνα 6: Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με κοινή την κορυφή Α.

Δεδομένου ότι η ΑΒ = 90 εκ. και ΑΔ = 30 εκ., θα ζητήσουμε να υπολογίσουν πόσες φορές μικρότερη είναι η ΑΔ από την ΑΒ. Κατόπιν θα τους ζητήσουμε να μας πουν ποιος είναι ο λόγος των πλευρών. Οι απαντήσεις δεν αναμένεται να δυσκολέψουν τους μαθητές, καθώς αυτό μπορεί να γίνει ακόμη και με μια απλή διαίρεση. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε πως οι ΑΕ = 50εκ. και ΔΕ = 40εκ. Θα ζητήσουμε από τους μαθητές να μας βρουν τα ΑΓ και ΒΓ. Εδώ αναμένεται μια σχετικά μεγαλύτερη δυσκολία για τα παιδιά, μιας και πρέπει να εφαρμόσουν τη διαδικασία με τα «χιαστί» γινόμενα.

Η δεύτερη δραστηριότητα ζητά από τα παιδιά να ανακοινώσουν στην ολομέλεια της τάξης, τον τρόπο που εργάστηκαν και τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν.

Η τρίτη ερώτηση και οι απαντήσεις των μαθητών, θα μας οδηγήσουν ουσιαστικά στην ανακάλυψη της βασικής ιδιότητας του εργαλείου, που δεν είναι άλλη από τη χρήση των αναλογιών για τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων.

Φάση ΙΙ: Η γνώση που μόλις αποκτήθηκε από την προηγούμενη δραστηριότητα, θα πρέπει να επαληθευτεί στην πράξη και να ισχύσει για πλήθος περιπτώσεων, ώστε να γενικευθεί και να επισημοποιηθεί πλήρως στη συνείδηση των μαθητών.

Θα ζητήσουμε λοιπόν από τα παιδιά να εργαστούν σε ομάδες, με εναλλαγή ρόλων εφόσον έχουν πλέον αποκτήσει την κατάλληλη εξοικείωση με τη χρήση του εργαλείου. Θα τοποθετήσουν διάφορα αντικείμενα σε προσιτές αποστάσεις στο χώρο και στη συνέχεια θα τα στοχεύσουν με το εργαλείο και θα προσπαθήσουν να υπολογίσουν την απόσταση τους. Κατόπιν θα μετρήσουν με μια μετροταινία τις αποστάσεις και θα επιβεβαιώσουν τους υπολογισμούς τους.

Η διαδικασία θα επαναληφθεί έως ότου δοθεί σε όλες τις ομάδες η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο. Από τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, αναμένεται να επιβεβαιωθεί η λειτουργικότητα του εργαλείου και να επισημοποιηθεί η νέα γνώση.

6η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχοι: Να μετρήσουν αποστάσεις στην αυλή του σχολείου ή σε κοντινή περιοχή, κάνοντας χρήση του εργαλείου και της σχέσης αναλογίας που ανακάλυψαν ήδη πως ισχύει. Ακόμη, να καταγράψουν και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους και να τα συζητήσουν από κοινού, προσπαθώντας να ανακαλύψουν τους λόγους που τους οδήγησαν σε πιθανά διαφορετικά αποτελέσματα.

Υλικά: Θα χρησιμοποιηθούν το εργαλείο Errard, το Φύλλο Εργασίας 5 (Παράρτημα Α, σελ. 166), κώνοι ή μπάλες ως δείκτες και σημειωματάρια.

Φάση Ι: Οι μαθητές θα εργαστούν ομαδικά στην αυλή του σχολείου. Θα τοποθετήσουν διάφορα αντικείμενα, ως δείκτες, στις τέσσερις γωνίες του κτηρίου, καθώς και σε άλλα επιλεγμένα σημεία του αυλόγυρου. Στη συνέχεια θα πραγματοποιήσουν τις μετρήσεις με το εργαλείο και θα καταγράψουν τα αποτελέσματά τους. Οι ομάδες θα αναλάβουν διαφορετικά σημεία και θα εργαστούν εναλλάξ.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων τώρα πλέον, δεν επιβεβαιώνονται από μετρήσεις με μετροταινία, καθώς οι αποστάσεις θεωρούνται πια μη προσιτές και επιπλέον έχει επιβεβαιωθεί η λειτουργικότητα του εργαλείου για τη μέτρηση τέτοιων αποστάσεων.

Καθ' όλη τη διαδικασία ο δάσκαλος περιφέρεται στις ομάδες και ελέγχει διακριτικά τις εργασίες τους, προσφέροντας τη βοήθεια του, όπου χρειάζεται.

Μια δυσκολία που προβλέπεται να απασχολήσει τις ομάδες είναι ο περιορισμός της εμβέλειας μέτρησης του εργαλείου, μιας και οι αποστάσεις προς μέτρηση είναι αρκετά μεγάλες. Αναμένεται όμως να διαχειριστούν το πρόβλημα, κάνοντας μικρότερες διαδοχικές μετρήσεις των πλευρών.

Η διαδικασία θα έχει ολοκληρωθεί, όταν πλέον και οι τέσσερις ομάδες θα έχουν ολοκληρώσει τη μέτρηση των αποστάσεων που τους ανατέθηκε και έχουν καταγράψει τα δεδομένα τους στο Φύλλο Εργασίας.

Φάση ΙΙ: Οι ομάδες τώρα θα συγκεντρωθούν στην αίθουσα, όπου και θα παρουσιάσουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους. Είναι πολύ πιθανό μερικές ομάδες να έχουν οδηγηθεί σε διαφορετικά αποτελέσματα από τη μέτρηση ίδιων σημείων. Στην περίπτωση αυτή θα προκληθεί συζήτηση στην τάξη, ώστε να διαπιστωθούν οι αιτίες των αποκλίσεων. Ιδιαίτερη σημασία θα δώσουμε στις περιπτώσεις εκείνες, όπου οι διαφοροποιήσεις θα έχουν επέλθει από τη μη σωστή χρήση των αναλογιών των τριγώνων.

Η δραστηριότητα θα ολοκληρωθεί με τη μεταφορά των δεδομένων πάνω σε ένα πρόχειρο σχήμα το οποίο έχει σχεδιάσει ο δάσκαλος στον πίνακα, με τη βοήθεια των ομάδων και θα αναπαριστά το χώρο του σχολικού κτηρίου και της αυλής, υπό κάτοψη. Οι μαθητές θα μεταφέρουν το σχέδιο με τις αποστάσεις και στα δικά τους σημειωματάρια.

7η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχος: Να μεταφέρουν τις μετρήσεις τους στο χαρτί και να σχεδιάσουν υπό κλίμακα την κάτοψη του κτηρίου και της αυλής του σχολείου.

Υλικά: Τα παιδιά θα χρησιμοποιήσουν κόλλες χαρτί Α4, από ένα σετ γεωμετρικών οργάνων και σημειωματάρια.

Φάση Ι: Οι μαθητές θα εργαστούν ατομικά μέσα στην τάξη. Έχουν πλέον στα χέρια τους ένα πρόχειρο σχέδιο του σχολείου με τις διαστάσεις του και θα πρέπει τώρα να μεταφέρουν το σχέδιό τους αυτό, με κάποια κλίμακα σε ένα φύλλο χαρτί Α4 χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά τους όργανα.

Πριν ξεκινήσει η εργασία, είναι απαραίτητο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές μας πως εφόσον είναι αδύνατον να μεταφέρουμε το σχέδιο στο χαρτί με τις πραγματικές του διαστάσεις, θα πρέπει αναγκαστικά να γίνει μια σμίκρυνση του αρχικού σχεδίου. Προκαλούμε λοιπόν τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης, προκειμένου να αποφασίσουμε από κοινού, πόσες φορές θα πρέπει να μικρύνει το πραγματικό σχέδιο, με άλλα λόγια ποιος θα είναι ο λόγος της κλίμακας που θα χρησιμοποιήσουμε.

Είναι σημαντικό να συμφωνήσουμε, πως ο λόγος αυτός θα πρέπει απαρέγκλιτα να εφαρμοστεί σε όλες τις διαστάσεις του σχεδίου και να είναι κοινός για όλους, ώστε να υπάρχει μια ομοιογένεια στην εργασία της τάξης.

Αφού λοιπόν υπολογίσουν τις διαστάσεις υπό κλίμακα, θα αρχίσουν να σχεδιάζουν το κτήριο και τον αυλόγυρο, μεταφέροντας ό,τι υπάρχει εκεί, στο χαρτί. Και στη περίπτωση αυτή ο ρόλος του δασκάλου παραμένει βοηθητικός. Θα παρακολουθεί διακριτικά την πορεία των εργασιών χωρίς άμεσες παρεμβάσεις. Μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία, οι μαθητές μας θα αναρτήσουν τα έργα τους στον φελλοπίνακα της τάξης και θα ακολουθήσει συζήτηση, όπου ο καθένας θα έχει την ευκαιρία να εκφράσει τις εντυπώσεις του από την πορεία του έργου.

8η Διδακτική Παρέμβαση

Στόχος: Να εφαρμόσουν αυτά που έμαθαν προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα (μεταγνωστική φάση).

Υλικά: Θα χρησιμοποιηθούν το σχέδιο του σχολείου υπό κλίμακα, το εργαλείο του Errard και σημειωματάρια.

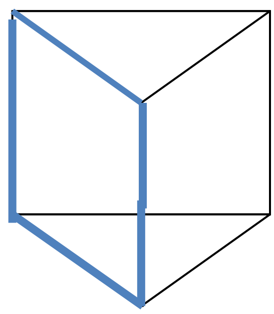
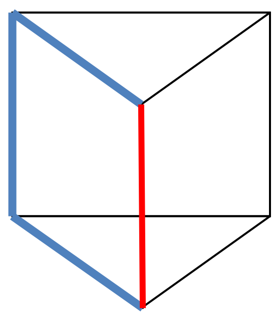
Φάση Ι: Στη φάση αυτή οι μαθητές μας θα εργαστούν ομαδικά. Θα χρησιμοποιήσουν την εμπειρία τους και τις γνώσεις που αποκόμισαν από τις προηγούμενες δραστηριότητες για να δώσουν λύση σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα.

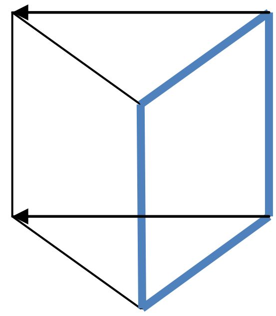
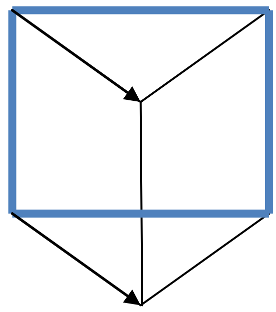
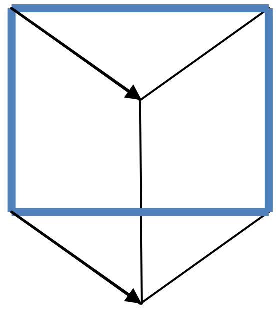
Σύμφωνα με το πρόβλημα αυτό, ο Σύλλογος Γονέων και Κηδεμόνων του σχολείου, προτίθεται να αναλάβει το κόστος κατασκευής για ένα κιόσκι στην αυλή του σχολείου μας. Ζήτησε από εμάς να του υποδείξουμε το ακριβές σημείο που θα έπρεπε αυτό να στηθεί, ώστε να βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο της αυλής.

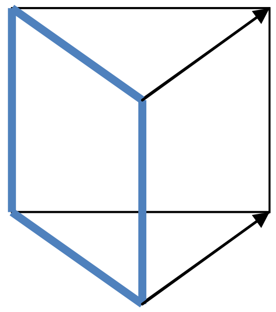
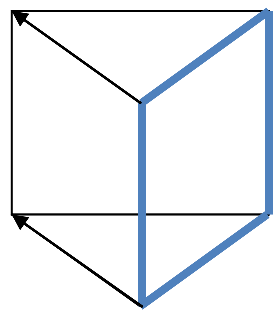
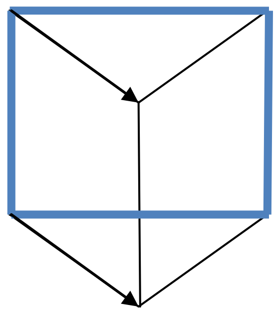
Προκαλούμε μια συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης, όπου γίνεται αντιληπτό πως τώρα θα πρέπει οι μαθητές μας να ακολουθήσουν μια αντίστροφη πορεία. Θα ξεκινήσουν δηλαδή από το σχέδιο που έφτιαξαν υπό κλίμακα στην προηγούμενη φάση, θα υπολογίσουν το σημείο πάνω στο χαρτί, στη συνέχεια θα μετατρέψουν τα αποτελέσματά τους σε αποστάσεις πραγματικές στο χώρο της αυλής και θα εντοπίσουν το σημείο στο χώρο, κάνοντας χρήση του εργαλείου του Errard.

Θα ξεκινήσουν λοιπόν οι ομάδες να εργάζονται πρώτα στα σχέδια και στα σημειωματάριά τους και κατόπιν στην αυλή. Θα αναλάβουν να μετρήσουν την απόσταση, ξεκινώντας από διαφορετικά σημεία στο χώρο. Η σύγκλιση των μετρήσεων και η ταύτισή τους σε ένα κοινό σημείο, θα αποτελέσει την απόδειξη της επιτυχούς έκβασης του έργου.

5.6 Ανάλυση της διδακτικής σειράς υπό το πρίσμα των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας

Μάθημα	**Εισαγωγή στη γεωμετρική εργασία**	**Διάγραμμα ΓΧΕ**
Μάθημα 1	Βρισκόμαστε στο Σημειωτικό-Εργαλειακό επίπεδο όπου παρουσιάζονται πραγματικές καταστάσεις. Οι μαθητές κινούνται σε ένα χώρο πραγματικό και τοπικό. Τα αντικείμενα της αυλής λειτουργούν ως σχήματα. Χρησιμοποιείται η διαίσθηση και το νοητικό πείραμα για τον υπολογισμό των αποστάσεων. Η παρουσίαση του ιστορικού κειμένου οδηγεί στην ανάδειξη της εργαλειακής διάστασης του οργάνου. Είναι ένα εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση δυσπρόσιτων αποστάσεων.	
Μάθημα 2	Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε στο ίδιο κάθετο επίπεδο. Η προηγούμενη φάση μας οδήγησε στην εργαλειακή γένεση. Τα σχήματα αποκτούν υλική υπόσταση και οι μαθητές κατασκευάζουν το εργαλείο.	

Μάθημα 3	Οι μαθητές στο μάθημα αυτό εργάζονται στο Εργαλειακό-Λεκτικό επίπεδο. Πραγματοποιούν μετρήσεις με το όργανο που κατασκεύασαν. Εκτός του οργάνου, κάνουν χρήση πινάκων, τετραγωνισμένου χαρτιού, γεωμετρικών οργάνων και μετροταινίας. Οι μαθητές μεταφέρουν την εργασία τους στο χαρτί. Η πραγματική κατάσταση έχει πάρει πλέον μια σημειωτική διάσταση. Συζητούν και καταλήγουν στο συμπέρασμα πως σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν κοινή κορυφή, ενώ η μια κάθετη πλευρά του μεγάλου τριγώνου αποτελεί ουσιαστικά την ζητούμενη απόσταση.	
Μάθημα 4	Η εργασία πραγματοποιείται στο Σημειωτικό – Λεκτικό επίπεδο. Οι μαθητές χρησιμοποιούν δυο όμοια τρίγωνα, τα σχήματα και τους πίνακες που παρήγαγαν στην προηγούμενη φάση της εργασίας τους για να διαπιστώσουν τη βασική ιδιότητα του εργαλείου, που δεν είναι άλλη από τη σχέση αναλογίας που συνδέει τις πλευρές των τριγώνων. Για την επικύρωση της κατάστασης, ζητάμε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο του Errard. Έχουμε δηλαδή μια προσφυγή προς την εργαλειακή διάσταση.	
Μάθημα 5	Προκειμένου να επισημοποιηθεί η ισχύς της νέας γνώσης και να γενικευτεί η σημασία της εργαζόμαστε πάλι στο Σημειωτικό-Λεκτικό επίπεδο. Η ιδιότητα της αναλογίας που προέκυψε από την προηγούμενη δραστηριότητα, χρησιμοποιείται τώρα για να λύσουν οι μαθητές στο φυλλάδιο ένα πρόβλημα. Στη συνέχεια προτείνεται η χρήση του οργάνου στην αυλή, προκειμένου να υπάρχει επαλήθευση. Η ιδιότητα των ανάλογων πλευρών των τριγώνων που ορίζει το όργανο, γίνεται τώρα εργαλείο για να μετρηθούν οι απρόσιτες αποστάσεις. Παρατηρούμε δηλαδή μια προσφυγή προς την εργαλειακή διάσταση. Συνειδητή και ηθελημένη είναι η μετακίνηση στις τελευταίες δραστηριότητες από το παράδειγμα ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$ στο ΜΧΕ$_{\text{Αριθμοί}}$.	

Μάθημα 6	Τώρα πλέον το εργαλείο Errard χρησιμοποιείται πλήρως στον πραγματικό και τοπικό χώρο (αυλή – κτήριο) και τα αποτελέσματα των μετρήσεων καταγράφονται σε πίνακες και μεταφέρονται σε πρόχειρο σχέδιο πάνω στο χαρτί (μετακίνηση προς τη GII). Εργαζόμαστε λοιπόν στο Σημειωτικό-Εργαλειακό επίπεδο. Η παρουσίαση των δεδομένων στην ολομέλεια της τάξης και η συζήτηση που εγείρει το θέμα της διαφοροποίησης των αποτελεσμάτων, μας δείχνει σαφείς προσφυγές προς τη λεκτική διάσταση.	
Μάθημα 7	Οι μαθητές εργάζονται τώρα στο Εργαλειακό-Λεκτικό επίπεδο με προσφυγή προς το Σημειωτικό. Η ιδιότητα των λόγων γίνεται τώρα εργαλείο για την επίλυση του προβλήματος. Έρχονται αντιμέτωποι με το πρόβλημα της μεταφοράς του πραγματικού χώρου στο χαρτί. Εργάζονται με λόγους και προκαλούν τη σμίκρυνση των αρχικών διαστάσεων. Χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και αριθμητικές πράξεις. Προκαλείται συζήτηση στην ολομέλεια και αναδύεται η έννοια της κλίμακας.	
Μάθημα 8	Η διδακτική σειρά κλείνει με μια μεταγνωστική δραστηριότητα. Το όργανο του Errard αποκτά μια άλλη λειτουργικότητα. Αντί να υπολογίσει απρόσιτες αποστάσεις, μεταφέρει αποστάσεις από το σχέδιο στον πραγματικό χώρο της αυλής, επικυρώνοντας έτσι την ιδιότητα των λόγων και αναλογιών στη χρήση του οργάνου. Η εργασία πραγματοποιείται στο Σημειωτικό-Λεκτικό επίπεδο με προσφυγές προς το Εργαλειακό. Η αλλαγή χρήσης του εργαλείου του Errard μας δίνει το πέρασμα από τη instrumentation στην instrumentalisation εργαλειακή διάσταση.	

Πίνακας 1: Ανάλυση της διδακτικής σειράς υπό το πρίσμα των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας.

5.7 Ερευνητικά εργαλεία

Η έρευνα περιελάμβανε μια σειρά οχτώ διδακτικών παρεμβάσεων με έλεγχο πριν και μετά τις παρεμβάσεις με τη βοήθεια ενός pre-test, ενός post-test και ενός ακόμη τεστ για τον έλεγχο της νέας γνώσης. Η συλλογή των δεδομένων κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων έγινε από τα Φύλλα Εργασιών, από παρατηρήσεις κατά τη διδασκαλία, από την απομαγνητοφώνηση των διαλόγων που προέκυψαν από τις διαδράσεις των ομάδων και από ένα ερωτηματολόγιο, που δόθηκε μετά το πέρας των παρεμβάσεων και περιελάμβανε δεκατέσσερις ερωτήσεις για την αξιολόγηση της διδακτικής σειράς, από τους μαθητές.

Ο έλεγχος των προσωπικών ΜΧΕ των μαθητών μέσω των pre και post-tests

Ο έλεγχος των προσωπικών ΜΧΕ των μαθητών, πραγματοποιήθηκε μετά τη διδασκαλία της τρίτης θεματικής ενότητας του σχολικού εγχειριδίου, που αναφέρεται στους Λόγους και τις Αναλογίες. Όπως και στην έρευνα των Modestou & Gagatsis (Modestou & Gagatsis, 2008) έγινε προσπάθεια να διαπιστωθεί η ανάπτυξη της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης των μαθητών. Δόθηκαν συνολικά δέκα προβλήματα (Παράρτημα Β, σελ.174), τα οποία προσπαθούν να διακρίνουν κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι εκείνοι του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών που αναφέρονται μόνο στους Λόγους και στις Αναλογίες. Δεν εξετάζουμε τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, ούτε και τα ποσοστά, καθώς αυτά δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα δόθηκε έμφαση στον πρώτο και στον τρίτο στόχο του Α.Π.Σ (2003): «*Να γνωρίσουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας, να βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας με τη «χιαστί» μέθοδο και να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα ανάλογων ποσών»*.

Έτσι στην 1^{η} άσκηση (Π1) δίνονται εφτά λεκτικές προτάσεις (Π1α-η), στις οποίες θα πρέπει να διακρίνουν οι μαθητές ποια ζεύγη ποσών είναι ανάλογα. Εξετάζεται δηλαδή η ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων.

Οι ασκήσεις 2, 7 και 8 (Πρ2, Πρ7, Πρ8) εξετάζουν την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων, όπου αναδεικνύεται ο αναλογικός συλλογισμός. Οι μαθητές, σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουν, έχουν τη δυνατότητα να λύσουν τα προβλήματα με πίνακες ποσών και τιμών, με εξισώσεις ή με αναγωγή στη μονάδα.

Στις ασκήσεις 3, 4 και 10 (Α3, Α4, Α10), διερευνάται η ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Εδώ οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν τον όρο μιας αναλογίας που λείπει είτε από ένα πίνακα είτε από την ισότητα δύο λόγων.

Οι ασκήσεις 5 και 9 (Γ5, Γ9) εξετάζουν την ικανότητα σύγκρισης λόγων. Αυτό δίνεται στη Γ5 μέσα από ένα πρόβλημα, ενώ στη Γ9 από την άμεση σύγκριση πέντε λόγων.

Τέλος η άσκηση 10 (Β6) διερευνά την ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών.

Τα ίδια προβλήματα, με ελαφρώς αλλαγμένα δεδομένα, δόθηκαν ως post-test μετά το πέρας των παρεμβάσεων, ώστε να έχουμε - μαζί με τα δεδομένα των παρατηρήσεων -

μια πληρέστερη εικόνα για τα αποτελέσματα, που πιθανόν έχει επιφέρει η προσέγγιση που επιχειρούμε στην έρευνά μας.

Το test για τη νέα γνώση

Το τεστ που δόθηκε για τον έλεγχο της νέας γνώσης περιελάμβανε 5 προβλήματα, από τα οποία τα 3 εξέταζαν το λόγο των πλευρών ομοίων ορθογωνίων και τριγώνων και τα άλλα 2, περιείχαν δραστηριότητες με κλίμακες. Με το test αυτό προσπαθούμε να εξετάσουμε τη νέα γνώση που προέκυψε κατά την εφαρμογή των διδακτικών παρεμβάσεων με τη χρήση του ιστορικού εργαλείου και έχει ένα προσανατολισμό καθαρά γεωμετρικό. Αντιθέτως, με τα δύο προηγούμενα tests επιχειρήσαμε να εξετάσουμε κατά πόσο η διδακτική παρέμβαση θα διαφοροποιούσε τα αποτελέσματα των tests, σχετικά με τις γνώσεις των εννοιών που προέκυψαν ύστερα από τη διδασκαλία των ενοτήτων 30-35 του σχολικού εγχειριδίου και απουσίαζε όπως είδαμε, ο χαρακτήρας της γεωμετρικής προσέγγισης.

Τα Φύλλα Εργασίας

Η δομή και η οργάνωση που ακολουθήθηκε στο σχεδιασμό και την κατασκευή των Φύλλων Εργασίας και επομένως και των παρεμβάσεων, ήταν βαθιά επηρεασμένη από τη φιλοσοφία και το πνεύμα της θεωρίας των $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$. Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, η κάθε μια παρέμβαση σχεδιάστηκε εκ των προτέρων με λεπτομέρεια και ορίστηκε το επίπεδο πάνω στο οποίο εργαστήκαμε. Τα Φύλλα Εργασίας κατεύθυναν μεθοδικά τις ενέργειες των μαθητών, μέσα από μια διαρκή κίνηση και εναλλαγή μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων εργασίας.

Το ερωτηματολόγιο για την αξιολόγηση της διδακτικής σειράς

Τέλος, το ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Γ, σελ.180) που δόθηκε μετά το πέρας των διδασκαλιών είχε ως στόχο να αξιολογήσουν οι ίδιοι οι μαθητές τη διδακτική σειρά και την εμπειρία τους από την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία.

Το ερωτηματολόγιο, είχε ως βάση του, τους εξής άξονες: α) τη γενική αξιολόγηση της διδακτικής σειράς, β) το κείμενο του Errard, γ) το ιστορικό εργαλείο του Errard, δ) τη διδακτική σειρά, ε) τη συνεργασία των ομάδων και στ) τη χρησιμότητα της νέας γνώσης.

Οι ερωτήσεις 1-3 είναι ανοιχτού τύπου και προσπαθούν να διερευνήσουν κάτι που έμαθαν, τους δυσκόλεψε ή τους εξέπληξε. Οι ερωτήσεις 4-5 ζητούν από τους μαθητές να μιλήσουν για το κείμενο και να εκφράσουν τη σχέση του με τα Μαθηματικά. Οι ερωτήσεις 6-9 εξετάζουν την άποψη των μαθητών για την κατασκευή, τη χρήση, την αποτελεσματικότητα και τη χρησιμότητα του ιστορικού εργαλείου που Errard, ενώ οι ερωτήσεις 10-12 διερευνούν την άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα της διδακτικής σειράς και τους ζητούν να μιλήσουν για αυτή. Η ερώτηση 13 ζητά από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν το επίπεδο συνεργασίας τους σε ομάδες και τέλος η ερώτηση 14 προσπαθεί να διερευνήσει τις πρακτικές εφαρμογές που μπορεί να έχει η νεοαποκτηθείσα γνώση.

5.8 Διαδικασίες

Η διδακτική παρέμβαση, όπως έχει ήδη αναφερθεί, πραγματοποιήθηκε μετά τη διδασκαλία της τρίτης ενότητας των Μαθηματικών της Στ΄τάξης που αναφέρεται στους Λόγους-Αναλογίες. Η απόφαση αυτή πάρθηκε, διότι η έννοια αυτή παρουσιάζεται για πρώτη φορά στους μαθητές του Δημοτικού, οπότε δεν θα υπήρχε η δυνατότητα να διαπιστωθεί η επίδραση που άσκησε η παρέμβαση στους προσωπικούς ΜΧΕ των μαθητών.

Δεδομένου ότι ο αρχικός σχεδιασμός προέβλεπε την πραγματοποίηση του προελέγχου (pre-test) αμέσως μετά τις διακοπές των Χριστουγέννων, αυτό δόθηκε στους μαθητές στις 17 Ιανουαρίου, καθώς υπήρχε μια χρονική καθυστέρηση μιας εβδομάδας περίπου, λόγω καιρικών συνθηκών.

Στη συνέχεια και αφού μελετήθηκαν τα αποτελέσματα του προελέγχου δόθηκε ένα χρονικό περιθώριο μιας εβδομάδος περίπου και στις 26 Ιανουαρίου ξεκίνησαν οι οχτώ διδακτικές παρεμβάσεις. Καθ’ όλη τη διάρκεια των παρεμβάσεων έγινε συλλογή δεδομένων από τις διδασκαλίες με τη μέθοδο των σημειώσεων πεδίου, με ηχογραφήσεις και από τα Φύλλα Εργασίας των ομάδων. Πραγματοποιήθηκε μια παρέμβαση την εβδομάδα, οπότε αυτές ολοκληρώθηκαν στις 13 Μαρτίου. Μετά από μια εβδομάδα, στις 21 Μαρτίου πραγματοποιήθηκε ο μεταέλεγχος (post-test), προκειμένου να διαπιστωθούν τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης και αμέσως μετά ακολούθησε ένα ερωτηματολόγιο, για τον έλεγχο της ενσωμάτωσης της

Ιστορίας των Μαθηματικών και την αξιολόγηση της σειράς από τους ίδιους τους μαθητές και το τεστ για τον έλεγχο της νέας γνώσης.

Πριν από την έναρξη των διδακτικών παρεμβάσεων, είχε προηγηθεί συζήτηση και ενημέρωση για τους σκοπούς της παρέμβασης, τόσο με τη σχολική σύμβουλο, όσο και με τους γονείς των παιδιών. Άδεια για βιντεοσκόπηση δεν ήταν δυνατό να δοθεί, παρά μια απλή συγκατάθεση για ηχογράφηση των συνομιλιών κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Οι μαθητές ενημερώθηκαν και αυτοί με τη σειρά τους και τους έγινε σαφώς γνωστό, ότι τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων δεν θα βαθμολογούνταν.

Οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν με το τμήμα το οποίο διδάσκω και αποτελείται όπως αναφέραμε από 23 μαθητές. Επομένως, δε χρειάστηκε κάποιο χρονικό διάστημα προσαρμογής με τα παιδιά, αφού ήδη διανύαμε μαζί το δεύτερο χρόνο συνεργασίας. Επίσης εδώ και δυο χρόνια τουλάχιστον, εργάζονται σε ομάδες μέσα στο πλαίσιο της τάξης, οπότε δεν αντιμετωπίσαμε κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα στη σύνθεση των ομάδων εργασίας.

Οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν από εμένα, στα πλαίσια της διπλωματικής μου εργασίας για το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών και ο χώρος εργασίας ήταν η αίθουσα διδασκαλίας της τάξης μας και η αυλή του σχολείου μας.

Οι παραγραμματισθείσες διδασκαλίες προέβλεπαν ένα συνεχόμενο διδακτικό δίωρο την εβδομάδα, αυτό όμως ήδη από την πρώτη διδακτική παρέμβαση διαπίστωσα πως θα έπρεπε να αλλάξει, καθώς η συνεχόμενη εργασία των παιδιών, επέφερε κόπωση και απώλεια συγκέντρωσης. Έτσι αντί αυτού προτιμήθηκε η εναλλακτική των δύο διδακτικών ωρών με ενδιάμεσο διάλειμμα, γεγονός που λειτούργησε αρκετά θετικά στη συνέχεια. Βεβαίως υπήρξε και μια περίπτωση, κατά τη συναρμολόγηση του εργαλείου, όπου οι μαθητές, παραδόξως, τελείωσαν πολύ γρηγορότερα από ότι ανέμενα, αλλά και άλλες δύο περιπτώσεις, όταν έπρεπε να πραγματοποιήσουν μετρήσεις στην αυλή, όπου χρειάστηκε μια μικρή ολιγόλεπτη παράταση. Γενικά όμως όλες οι εργασίες πραγματοποιήθηκαν μέσα σε δύο διδακτικές ώρες τη φορά. Όσο για τον προέλεγχο (pre-test), τον μεταέλεγχο (post-test) και το ερωτηματολόγιο, διατέθηκε από μια διδακτική ώρα για το καθένα.

6. Αποτελέσματα

6.1 Η διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση.

Όπως ήδη αναφέραμε ο προέλεγχος (pre-test), που πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με το σχεδιασμό της έρευνας μια εβδομάδα πριν την έναρξη των διδακτικών παρεμβάσεων, μας έδωσε μια εικόνα για το επίπεδο κατανόησης των παιδιών για τις έννοιες των Λόγων και Αναλογιών, καθώς και για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων που ορίζει το Αναλυτικό Πρόγραμμα. Πήραμε δηλαδή μια εικόνα για τη διαμόρφωση των προσωπικών ΜΧΕ των μαθητών, πριν την πραγματοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες και ακολουθεί ένας σύντομος σχολιασμός των ευρημάτων.

Το πρώτο πρόβλημα (Π1) διερευνά όπως αναφέραμε την ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων.

Πρόβλημα Π1															Σύνολα	
	α		β		γ		δ		ε		ζ		η		Σωστά	Λάθος
Βιβή		Λ	Σ		Σ		Σ			Λ	Σ			Λ	4	3
Κωνσταντίνος	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		6	1
Σοφία		Λ		Λ		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		4	3
Παναγιώτης		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1
Θωμάς		Λ	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		5	2
Χάρης		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1
Μαριάννα		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1
Σπύρος	Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		6	1
Ελένη	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		6	1
Γιώργος		Λ	Σ		Σ		Σ			Λ		Λ	Σ		4	3
Αντζελίνα		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1
Ραφαήλ		Λ		Λ		Λ	Σ			Λ		Λ		Λ	1	6
Θάνος		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		5	2
Χρόνης		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	5	2
Αναστασία	Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		6	1
Στέφανος		Λ		Λ		Λ	Σ		Σ		Σ			Λ	3	4
Άγγελος Μ.	Σ		Σ			Λ	Σ			Λ	Σ			Λ	4	3
Νίκος	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		6	1
Ιωάννης	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		7	0
Μαρία	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		6	1

Άγγελος Η.		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	**5**	**2**
Βασιλική		Λ		Λ	Σ		Σ			Λ		Λ	Σ		**3**	**4**
Ραφαέλλα	Σ			Λ	Σ		Σ			Λ		Λ	Σ		**4**	**3**
Σύνολα	**9**	**14**	**18**	**5**	**16**	**7**	**23**	**0**	**14**	**9**	**17**	**6**	**17**	**6**	**161**	

Πίνακας 2: Αποτελέσματα του pre-test στο πρόβλημα Π1.

Η πρώτη ερώτηση Π1α παρουσιάζει μια γεωμετρική κατάσταση, όπου το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου με σταθερό εμβαδόν, συνδέονται με μια αντιστρόφως ανάλογη σχέση. Όπως βλέπουμε στην ερώτηση αυτή μόνο 9 μαθητές, απάντησαν σωστά, ενώ 14 μαθητές, απάντησαν λανθασμένα. Ενώ πρόκειται για μια κλασική περίπτωση αντιστρόφως ανάλογων ποσών, το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι αρκετά μικρό. Εκτιμάται πως η συνεξάρτηση εμβαδού και πλευρών, είναι μια κατάσταση που γενικά δυσκολεύει τα παιδιά καθώς η ενασχόληση τους με γεωμετρικά σχήματα, σύμφωνα με το ΑΠΣ, είναι ελάχιστη.

Η δεύτερη ερώτηση Π1β παρουσιάζει δύο ποσά, την ημερήσια κατανάλωση τροφίμων και τον αριθμό των ατόμων που συνδέονται με μια σχέση αναλογίας. Εδώ βλέπουμε ότι 18 μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ μόνο 5 μαθητές απάντησαν λάθος. Το πλήθος των σωστών απαντήσεων ήταν ιδιαίτερα υψηλό, γεγονός που ερμηνεύεται κατά την άποψή μας, από το ότι τα ποσά έχουν χρησιμοποιηθεί σε αρκετές περιπτώσεις σε ασκήσεις του βιβλίου και συνδέονται άμεσα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Η τρίτη ερώτηση Π1γ, όπου δίνεται ο αριθμός εργατών και ο χρόνος εκτέλεσης ενός έργου, αποτελεί και αυτή μια κλασική περίπτωση αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Και εδώ παρατηρούμε ένα αρκετά υψηλό ποσοστό επιτυχίας: 16 μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ μόνο 7 απάντησαν λάθος. Φαίνεται πως και εδώ η εξοικείωση των μαθητών με αυτού του είδους τα ποσά, λειτούργησε καταλυτικά στη σωστή εκτίμηση τους.

Η τέταρτη ερώτηση Π1δ παρουσιάζει δύο ανάλογα ποσά: την αξία και το βάρος μιας ποσότητας. Εδώ είχαμε απόλυτη επιτυχία, καθώς και οι 23 μαθητές απάντησαν σωστά. Φαίνεται πως οι έννοιες αυτές δεν δυσκόλεψαν καθόλου τους μαθητές, αφού ήταν ιδιαίτερα γνωστές από ασκήσεις του βιβλίου.

Η πέμπτη ερώτηση Π1ε αποτελεί μια έκφραση αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Εξετάζεται η ωριαία παροχή νερού και ο χρόνος πλήρωσης μιας δεξαμενής. Από τις απαντήσεις των παιδιών βλέπουμε πως 14 μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ 9 μαθητές απάντησαν λάθος. Και εδώ είχαμε σχετικά υψηλό ποσοστό επιτυχίας, αφού οι έννοιες δεν παρουσιάζουν κάποια ιδιαίτερη δυσκολία.
Η έκτη ερώτηση Π1ζ αν και παρουσιάζει μια αρκετά δύσκολη και ασυνήθιστη κατάσταση αντιστρόφως ανάλογων ποσών, όπως η ακτίνα ενός ποδηλάτου και ο αριθμός των στροφών που θα κάνει ο τροχός για να καλύψει μια απόσταση, είχε αρκετά υψηλό ποσοστό επιτυχίας. Βλέπουμε ότι 17 μαθητές απάντησαν σωστά και μόλις 6 μαθητές, απάντησαν λάθος. Εδώ εκτιμάται πως ίσως η πολυπλοκότητα της ερώτησης απέτρεψε τους μαθητές από το να θεωρήσουν την κατάσταση ως αναλογική.
Τέλος η έβδομη ερώτηση Π1η αν και αποτελεί μια ψευδοαναλογική κατάσταση όπου το ύψος και η ηλικία συχνά θεωρούνται ως ποσά ανάλογα από τους μαθητές, εντούτοις τα αποτελέσματα δεν μας έδειξαν κάτι τέτοιο. Συγκεκριμένα μόνο 6 μαθητές απάντησαν λανθασμένα, ενώ οι υπόλοιποι 17 απάντησαν σωστά.

Γενικά θα μπορούσε να πει κανείς, κοιτώντας τα αποτελέσματα της πρώτης άσκησης, πως οι μαθητές έχουν καταφέρει να διακρίνουν με σχετικά μεγάλη επιτυχία τις αναλογικές από τις μη αναλογικές καταστάσεις. Ακραίες περιπτώσεις του δείγματος αποτελούν ο Ραφαήλ, ο οποίος είχε μόνο μια σωστή απάντηση και ο Ιωάννης, ο οποίος απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις σωστά. Δέκα μαθητές είχαν ένα μόνο λάθος, άλλοι τέσσερις από δύο λάθη και οι υπόλοιποι εφτά είχαν τρία με τέσσερα λάθη.

Από τα ερωτήματα της $1^{ης}$ άσκησης, αυτό που παρουσίασε το μικρότερο βαθμό δυσκολίας ήταν το «δ», που αναφέρεται στην αξία και το βάρος μιας ποσότητας. Εδώ κατάφεραν όλοι να απαντήσουν σωστά. Ωστόσο δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το αρνητικό αποτέλεσμα της (α) ερώτησης, η οποία έχει ένα καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα. Το γεγονός αυτό συνηγορεί με τις αρχικές υποθέσεις της έρευνας, ότι στη διαμόρφωση του προσωπικού $ΜΧΕ_{Γεωμετρία}$ των μαθητών που σχετίζεται με τους Λόγους και τις Αναλογίες, κυρίαρχο ρόλο παίζουν οι αριθμητικές παρά οι γεωμετρικές προσεγγίσεις.

Στην επόμενη κατηγορία ασκήσεων (Πρ2, Πρ7, Πρ8), εξετάζεται η ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων:

	Πρόβλημα Πρ2			Πρόβλημα Πρ7			Πρόβλημα Πρ8		
	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή		X			X			X	
Κωνσταντίνος		X			X			X	
Σοφία		X			X			X	
Παναγιώτης	X			X			X		
Θωμάς		X		X				X	
Χάρης	X			X			X		
Μαριάννα	X			X			X		
Σπύρος	X			X			X		
Ελένη		X				X			X
Γιώργος	X			X			X		
Αντζελίνα		X			X			X	
Ραφαήλ		X				X		X	
Θάνος		X			X			X	
Χρόνης	X				X			X	
Αναστασία	X				X				X
Στέφανος		X				X			X
Άγγελος Μ.		X			X			X	
Νίκος			X			X			X
Ιωάννης	X				X			X	
Μαρία		X		X				X	
Άγγελος Η.			X			X			X
Βασιλική		X				X			X
Ραφαέλλα	X					X			X
ΣΥΝΟΛΑ	**9**	**12**	**2**	**7**	**9**	**7**	**5**	**11**	**7**

Πίνακας 3: Αποτελέσματα του pre-test στα προβλήματα Πρ2, Πρ7 και Πρ8.

Ότι αφορά το Πρ2, όπου συνεξετάζεται η ποσότητα του γάλακτος και του τυριού, βλέπουμε πως 9 μαθητές απάντησαν σωστά, οι 12 μαθητές απάντησαν λανθασμένα και 2 δεν απάντησαν καθόλου. Από τους μαθητές που απάντησαν σωστά, όλοι χρησιμοποίησαν τη μέθοδο του πίνακα ποσών-τιμών και στη συνέχεια χιαστί γινόμενα και εξίσωση. Από αυτούς που έκαναν λάθος η Σοφία, η Βασιλική και η Μαρία προσπάθησαν να το λύσουν με διαδοχικούς πίνακες ποσών-τιμών, δεν κατάφεραν όμως να τους συμπληρώσουν σωστά. Οι υπόλοιποι προσπάθησαν να το λύσουν με τη μέθοδο του πίνακα και των χιαστί γινομένων, αλλά δεν μπόρεσαν να την εφαρμόσουν σωστά και οδηγήθηκαν σε λανθασμένα συμπεράσματα. Τέλος ο Νίκος και ο Άγγελος Η., δεν απάντησαν καθόλου.

Τα αποτελέσματα για το Πρ7 έδειξαν ότι 7 μαθητές απάντησαν σωστά, 9 μαθητές έκαναν λάθη, ενώ άλλοι 7 δεν απάντησαν καθόλου. Από τους μαθητές που απάντησαν σωστά, η Μαρία χρησιμοποίησε μια προσθετική μέθοδο για να φτάσει στο σωστό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα πρόσθεσε 1,5+1,5 για να φτάσει τα 3 μέτρα ύψους του ίσκιου και στη συνέχεια πρόσθεσε 4,5+4,5 για να φτάσει τα 9 μέτρα ύψους από το κυπαρίσσι. Οι υπόλοιποι μαθητές που απάντησαν σωστά, χρησιμοποίησαν τη μέθοδο με πίνακα και τα σταυρωτά γινόμενα, την οποία προτείνει το βιβλίο. Από αυτούς που απάντησαν λάθος, η Σοφία και ο Χρόνης προσπάθησαν να το λύσουν με αναγωγή στη μονάδα, ενώ οι υπόλοιποι προσπάθησαν με πίνακα ποσών-τιμών.

Τέλος για το Πρ8 βλέπουμε ένα ακόμη μεγαλύτερο ποσοστό αποτυχίας, όπου μόνο 5 μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις, οι 11 απάντησαν λάθος, ενώ οι 7 δεν απάντησαν καθόλου. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά χρησιμοποίησαν τον πίνακα ποσών-τιμών, εκτός από τη Μαριάννα που χρησιμοποίησε την αναγωγή στη μονάδα. Από αυτούς που έκαναν λάθος , η Σοφία και ο Χρόνης προσπάθησαν να το λύσουν με αναγωγή στη μονάδα και οι υπόλοιποι με πίνακα ποσών-τιμών.

Παρατηρώντας κανείς τα αποτελέσματα, μπορεί να διαπιστώσει ότι γενικά το ποσοστό επιτυχίας στα προβλήματα που αφορούν την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων ήταν αρκετά χαμηλό. Αυτό καταδεικνύει την αδυναμία των μαθητών να επιλύσουν προβλήματα όπου απαιτείται η χρήση αναλογικού συλλογισμού.

Στα δύο τελευταία προβλήματα Πρ7 και Πρ8 παρατηρούμε ότι 7 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου. Μάλιστα, είναι οι ίδιοι οι οποίοι δεν απάντησαν τόσο στο ένα, όσο και στο άλλο πρόβλημα. Επίσης, σχεδόν οι μισοί μαθητές δεν κατάφεραν να απαντήσουν ούτε σε ένα πρόβλημα σωστά. Τέλος, μόνο ο Παναγιώτης, ο Χάρης, η Μαριάννα, ο Σπύρος και ο Γιώργος κατάφεραν να λύσουν και τα τρία προβλήματα χωρίς κανένα λάθος.

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων (Α3, Α4, Α10) εξετάζει την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Τα αποτελέσματα των ασκήσεων μας έδειξαν τα εξής:

	Πρόβλημα Α3			Πρόβλημα Α4			Πρόβλημα Α10		
	Σωστό	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή			X		X			X	
Κωνσταντίνος			X		X			X	
Σοφία	X				X			X	
Παναγιώτης	X			X			X		
Θωμάς	X			X			X		
Χάρης	X			X			X		
Μαριάννα	X			X			X		
Σπύρος	X			X			X		
Ελένη			X		X			X	
Γιώργος	X			X			X		
Αντζελίνα	X				X		X		
Ραφαήλ	X					X	X		
Θάνος	X				X		X		
Χρόνης			X		X				X
Αναστασία		X				X			X
Στέφανος		X			X				X
Άγγελος Μ.	X					X	X		
Νίκος		X			X		X		
Ιωάννης	X				X		X		
Μαρία		X			X			X	
Άγγελος Η.		X			X			X	
Βασιλική		X				X		X	
Ραφαέλλα		X			X			X	
ΣΥΝΟΛΑ	**12**	**7**	**4**	**6**	**13**	**4**	**12**	**8**	**3**

Πίνακας 4: Αποτελέσματα pre-test στα προβλήματα Α3, Α4 και Α10.

Στο πρόβλημα Α3, όπου οι μαθητές έπρεπε απλά να συμπληρώσουν ένα πίνακα με ανάλογα ποσά, απάντησαν σωστά 12 μαθητές, οι 7 απάντησαν λάθος, ενώ οι 4 δεν απάντησαν καθόλου. Αυτοί που απάντησαν σωστά, μπόρεσαν να αντιληφθούν την πολλαπλασιαστική λογική που ισχύει μεταξύ των τιμών του πίνακα. Αντιθέτως, στις λανθασμένες απαντήσεις επικράτησε η προσθετική μέθοδος.

Στο πρόβλημα Α4, δόθηκαν στους μαθητές οχτώ ζευγάρια ίσων λόγων, από τα οποία έλειπε ο τέταρτος όρος. Αν και πρόκειται για μια σχετικά απλή άσκηση, μόνο 6 μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά, ενώ άλλοι 13 έκαναν λάθη. Πάντως αρκετοί από αυτούς, όπως η Μαρία, ο Ιωάννης, ο Θάνος και ο Σπύρος, έκαναν μόνο 2-3 λάθη, ενώ αυτοί που δεν απάντησαν στο πρόβλημα αυτό, δηλαδή 4 μαθητές, είτε είχαν απαντήσει στο προηγούμενο πρόβλημα σωστά, όπως ο Άγγελος Μ. και ο Ραφαήλ, είτε απάντησαν μεν, αλλά λάθος, όπως η Βασιλική και η Αναστασία.

Τέλος, στην Α10 δόθηκε ένα λεκτικό πρόβλημα και ακολούθως ένας πίνακας ποσών-τιμών, η συμπλήρωση του οποίου έδινε τη λύση στο πρόβλημα. Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά όμοια με αυτά της Α3 άσκησης, αφού και εδώ 12 μαθητές μπόρεσαν να συμπληρώσουν τον πίνακα σωστά και να οδηγηθούν στο σωστό αποτέλεσμα, 8 έκαναν λάθη, ενώ 3 δεν απάντησαν καθόλου. Από τις λάθος απαντήσεις ξεχωρίζω της Σοφίας και της Μαρίας, οι οποίες φαίνεται να προσπάθησαν να ακολουθήσουν ένα μοτίβο πρόσθεσης, ενώ η Ραφαέλλα και ο Άγγελος Η. προσπάθησαν να πολλαπλασιάσουν τις τιμές, όμως με λάθος τρόπο. Από τους τρεις μαθητές που δεν απάντησαν καθόλου, η Αναστασία δεν είχε απαντήσει και στο προηγούμενο πρόβλημα, ο Στέφανος είχε απαντήσει λαθεμένα και στα δύο προηγούμενα, ενώ ο Χρόνης στο πρώτο δεν απάντησε και στο δεύτερο είχε κάνει λάθος.

Αν δούμε τα αποτελέσματα αυτής της ομάδας ασκήσεων συνολικά, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι γενικά τα προβλήματα με αριθμητικές αναλογίες δυσκόλεψαν αρκετά τους μαθητές του δείγματός μας. Κάτι που δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές ήταν η διαισθητική διάκριση των λόγων. Αδυνατούσαν δηλαδή να ερμηνεύσουν τα δεδομένα του προβλήματος και να σχηματίσουν τους λόγους. Μεγαλύτερη δυσκολία συνάντησαν στα προβλήματα εκείνα στα οποία η αναλογία δίνεται με τη μορφή ισότητας κλασμάτων. Εδώ, ίσως διαφαίνεται κάποια γενικότερη δυσκολία των μαθητών με τα κλάσματα. Ευκολότερα εργάστηκαν με τους πίνακες. Τα λάθη εδώ οφείλονταν κυρίως στην σθεναρή επικράτηση της προσθετικής συλλογιστικής, αλλά και στη λανθασμένη χρήση του πολλαπλασιαστικού μοτίβου. Πάντως, στο σύνολό τους οι μαθητές οι οποίοι δεν απάντησαν σε κάποιο πρόβλημα, μπόρεσαν έστω και λανθασμένα, να απαντήσουν στα υπόλοιπα. Τέλος, ο Παναγιώτης, ο Θωμάς, ο Χάρης, η Μαριάννα, ο Σπύρος και ο Γιώργος απάντησαν και στα τρία προβλήματα σωστά.

Το επόμενο πρόβλημα Β6 αξιολογεί την ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών. Δίνεται ένα σύνολο αγοριών και ένα σύνολο κοριτσιών καθώς και τέσσερις αριθμητικοί λόγοι και ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν λεκτικά τους λόγους. Τα αποτελέσματα έδειξαν τα εξής:

Πρόβλημα Β6			
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή			Χ
Κωνσταντίνος	Χ		
Σοφία	Χ		
Παναγιώτης	Χ		
Θωμάς	Χ		
Χάρης	Χ		
Μαριάννα	Χ		
Σπύρος	Χ		
Ελένη	Χ		
Γιώργος		Χ	
Αντζελίνα			Χ
Ραφαήλ	Χ		
Θάνος			Χ
Χρόνης	Χ		
Αναστασία			Χ
Στέφανος		Χ	
Άγγελος Μ.		Χ	
Νίκος		Χ	
Ιωάννης			Χ
Μαρία	Χ		
Άγγελος Η.	Χ		
Βασιλική	Χ		
Ραφαέλλα		Χ	
ΣΥΝΟΛΑ	**13**	**5**	**5**

Πίνακας 5: Αποτελέσματα pre-test στο πρόβλημα Β6.

Τα αποτελέσματα, χωρίς να θεωρούνται αρκετά επιτυχημένα, κρίνονται ικανοποιητικά, αφού οι 13 μαθητές απάντησαν σωστά, κατάφεραν δηλαδή να διατυπώσουν σωστά τους λόγους των ποσών, οι 5 απάντησαν λανθασμένα και άλλοι 5 δεν κατάφεραν να απαντήσουν καθόλου. Από αυτούς που έκαναν λάθος, οι 3 έκαναν μικρά εκφραστικά λάθη κατά τη διατύπωση των λόγων και οι 2 είχαν λάθος διατύπωση. Από τις σωστές απαντήσεις πρέπει να πούμε ότι η Σοφία, ο Άγγελος Η., ο Παναγιώτης και ο Χάρης εξέφρασαν τους λόγους με λεκτικά κλάσματα, ενώ οι υπόλοιποι με λεκτικές εκφράσεις.

Τέλος η ομάδα προβλημάτων (Γ5, Γ9) επιχειρεί να διερευνήσει τη σύγκριση λόγων. Από την επίλυση των ασκήσεων, πήραμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Πρόβλημα Γ5			Πρόβλημα Γ9		
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή		X		X		
Κωνσταντίνος		X		X		
Σοφία	X			X		
Παναγιώτης		X		X		
Θωμάς		X				X
Χάρης	X			X		
Μαριάννα		X		X		
Σπύρος		X		X		
Ελένη	X			X		
Γιώργος		X		X		
Αντζελίνα		X		X		
Ραφαήλ			X	X		
Θάνος		X		X		
Χρόνης	X				X	
Αναστασία			X			X
Στέφανος		X		X		
Άγγελος Μ.			X		X	
Νίκος			X		X	
Ιωάννης		X		X		
Μαρία		X			X	
Άγγελος Η.			X			X
Βασιλική			X		X	
Ραφαέλλα		X		X		
ΣΥΝΟΛΑ	**4**	**13**	**6**	**15**	**5**	**3**

Πίνακας 6: Αποτελέσματα pre-test στα προβλήματα Γ5 και Γ9.

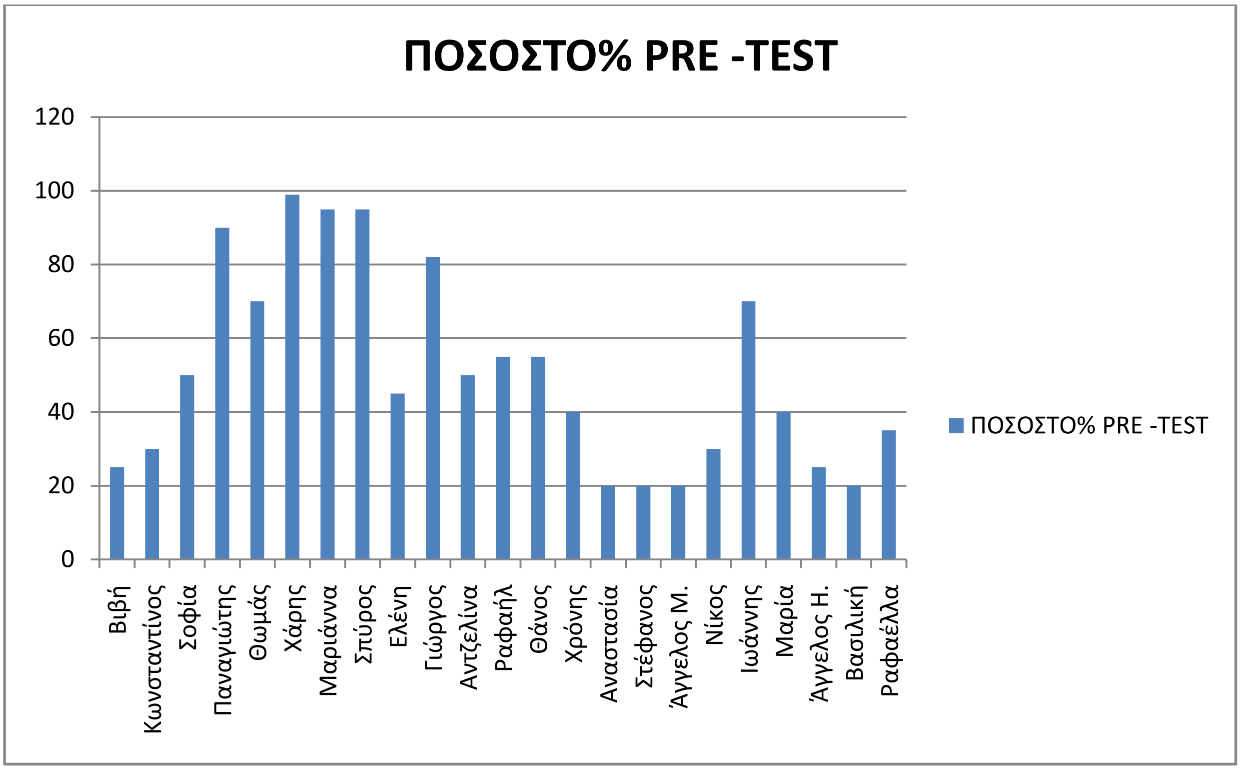
Στο πρόβλημα Γ5 δόθηκε ένα λεκτικό πρόβλημα απόδοσης δύο δακτυλογράφων, όπου τα παιδιά έπρεπε να σχηματίσουν τους λόγους που δημιουργούνται και στη συνέχεια να τους συγκρίνουν. Παρατηρούμε ότι μόνο 4 μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις, 13 μαθητές έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις και 6 δεν απάντησαν καθόλου. Από αυτούς που έκαναν λάθος, αξίζει να αναφερθεί ότι ο Σπύρος, η Μαριάννα και ο Παναγιώτης, οι οποίοι απάντησαν σωστά στις προηγούμενες δραστηριότητες, φαίνεται πως παρασύρθηκαν και προσπάθησαν να λύσουν την άσκηση σύγκρισης λόγων με σταυρωτά γινόμενα. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν οι περιπτώσεις του Γιώργου, της Μαρίας, του Στέφανου, του Θάνου και της Ραφαέλλας, οι οποίοι δημιούργησαν μεν τους λόγους, αλλά δεν μπόρεσαν να τους συγκρίνουν σωστά.

Αντιθέτως στη Γ9 όπου έπρεπε οι μαθητές να συγκρίνουν πέντε λόγους, είχαμε πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Βλέπουμε πως 15 μαθητές απάντησαν σωστά, άλλοι 5 απάντησαν λάθος και 3 δεν απάντησαν καθόλου. Από αυτούς που απάντησαν λάθος, η Μαρία, ο Άγγελος Μ. και η Βασιλική αντιλαμβάνονται πως μεταξύ των ισοδύναμων κλασμάτων υπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση, δεν καταφέρνουν όμως να βρουν τη σωστή. Εδώ, πρέπει πάντως να σχολιάσουμε ότι ακόμη και από αυτούς που απάντησαν σωστά, μόνο ένας επιχειρηματολογεί για τη λύση που δίνει, ενώ οι υπόλοιποι 14 λύνουν σωστά το πρόβλημα, χωρίς όμως να επιχειρηματολογήσουν.

Μπορούμε να πούμε ότι μεταξύ των δύο ασκήσεων είχαμε διαμετρικά αντίθετα αποτελέσματα. Σε αυτό πιστεύω συνέβαλε η φύση των προβλημάτων. Στο Γ5 είχαμε ένα λεκτικό πρόβλημα, το οποίο έπρεπε πρώτα να κατανοήσουν οι μαθητές, μετά να δημιουργήσουν τους λόγους και τέλος να φτάσουν στη σύγκριση των λόγων. Αντιθέτως στο Γ9 δόθηκαν απλώς πέντε λόγοι, οι οποίοι έπρεπε να συγκριθούν. Κάτι που επίσης δυσκόλεψε τους μαθητές, ήταν η απλοποίηση των κλασμάτων, ώστε να μπορέσουν να τα συγκρίνουν. Τα αποτελέσματα φαίνεται να είναι μοιρασμένα σχεδόν στη μέση. Με άλλα λόγια η ικανότητα σύγκρισης λόγων των μαθητών του δείγματός μας φαίνεται να βρίσκεται σε ένα μέτριο επίπεδο.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι αν και οι μαθητές μπορούν με σχετική ευκολία να διακρίνουν τις αναλογικές από τις μη αναλογικές καταστάσεις, εντούτοις οι περισσότεροι αποτυγχάνουν να λύσουν προβλήματα με αναλογικά έργα. Ακόμη και όταν το κάνουν, χρησιμοποιούν σχεδόν μηχανικά τη μέθοδο των χιαστί γινομένων. Πολλοί λίγοι είναι αυτοί, οι οποίοι θα προσπαθήσουν να λύσουν τα προβλήματα με κάποια άλλη μέθοδο, όπως για παράδειγμα την αναγωγή στη μονάδα. Την ίδια μέθοδο των χιαστί γινομένων, προσπαθούν να εφαρμόσουν ακόμη και στη σύγκριση λόγων, κάτι που τους οδηγεί σαφώς σε λανθασμένα αποτελέσματα. Εδώ διαφαίνεται η εμμονή των μαθητών σε κάποια «επιτυχημένη» μέθοδο την οποία προσπαθούν να μεταφέρουν σε κάθε είδους πρόβλημα. Όσον αφορά την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών, μπορούμε να πούμε πως τα λεκτικά προβλήματα δημιουργούν μεγαλύτερη δυσκολία στην κατανόησή τους από τους μαθητές. Επίσης, αρκετές δυσκολίες διαπιστώσαμε και σε λόγους που απαιτούν τη διαχείριση κλασμάτων. Αυτές προφανώς συνδέονται με προϋπάρχουσες γνώσεις, οι οποίες δημιουργούν εννοιολογικά εμπόδια στην κατανόηση των αναλογιών. Τέλος, έργα που αφορούσαν την ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών, δεν φάνηκε να δυσκόλεψαν ιδιαίτερα τους μαθητές, εφόσον οι περισσότεροι μπόρεσαν με επιτυχία να σχηματίσουν τους κατάλληλους λόγους.

Αυτό μπορεί κανείς να διακρίνει και από το παρακάτω γράφημα όπου παρουσιάζονται συγκεντρωτικά σε ποσοστά, τα αποτελέσματα του προελέγχου ανά μαθητή.



Πίνακας 7: Ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στο pre-test.

Ανακεφαλαιώνοντας, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε για τη διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$ των μαθητών, πως αν και το συγκεκριμένο τεστ πραγματοποιήθηκε αφού οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τους Λόγους και τις Αναλογίες μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια, όπως προβλέπεται από το πλαίσιο που ορίζει το ΑΠΣ, εντούτοις παρουσιάζουν αρκετές ελλείψεις, τόσο στην ικανότητα σύγκρισης λόγων, όσο και στην ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων και αριθμητικών αναλογιών.

6.2 Η κατασκευή του κατάλληλου ΜΧΕ-Τα αποτελέσματα της διδακτικής σειράς

Η γεωμετρική θεώρηση των Λόγων και Αναλογιών στην έρευνά μας, στηρίζεται ουσιαστικά στις ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων, τις οποίες ανακάλυψαν οι μαθητές μέσα από τη χρήση ενός ιστορικού εργαλείου. Χρησιμοποίησαν για αυτό τους ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$, όπου η GI ήταν το Παράδειγμα το οποίο στοχεύθηκε από τη διδασκαλία.

Η ιδιότητα των αναλογιών στα όμοια τρίγωνα, αποτελεί μετακίνηση προς τη GII, καθώς οι μαθητές χρησιμοποιούν πλέον την ιδιότητα και όχι τις μετρήσεις για την επίλυση των προβλημάτων. Άρα, η διδακτική σειρά είχε ως στόχο και τη μετατόπιση προς τη GII.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών και κυρίως της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο, πρέπει να προάγει την κατασκευή και χρήση χειραπτικών εργαλείων.

Απαραίτητη είναι η συντονισμένη χρήση των γνωστικών συστατικών των ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$, δηλαδή της οπτικοποίησης, της κατασκευής και της συλλογιστικής. Αρχικά χρησιμοποιείται η οπτική αναγνώριση και τα τεχνουργήματα χρησιμοποιούνται για την ανάδυση των μαθηματικών εννοιών.

Σε κάθε μάθημα χρησιμοποιήθηκαν κατά περίπτωση οι διαφορετικές εισαχθείσες διαστάσεις στην εργασία, η σημειωτική, η εργαλειακή και η λεκτική, καθώς και η εναλλαγή των επιπέδων που ορίζουν.

1η Διδακτική Παρέμβαση

Οι μαθητές, αφού χωρίστηκαν σε τέσσερις ομάδες, τους δόθηκε το 1ο Φ.Ε, το οποίο περιελάμβανε τέσσερις δραστηριότητες. Έπρεπε να εργαστούν ομαδικά στην αυλή του σχολείου. Στην πρώτη δραστηριότητα τους ζητήθηκε να εντοπίσουν πέντε αντικείμενα, να εκτιμήσουν και να καταγράψουν τα ύψη τους. Τα αντικείμενα ήταν ένα κιόσκι, μια μπασκέτα, το μεταλλικό κοντάρι της σημαίας, το κτήριο του σχολείου και ένα μεγάλο πλατάνι, όλα μέσα στον αύλειο χώρο του σχολείου.

Αφού τους δόθηκαν οι κατάλληλες διευκρινήσεις, οι ομάδες ξεκίνησαν να εργάζονται εναλλάξ στα προαναφερθέντα σημεία.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι από την αρχή είχε γίνει σαφές στους μαθητές, πως οι εργασίες δεν επρόκειτο να βαθμολογηθούν και ότι ήταν απαραίτητο να υπάρχει αρμονική συνεργασία μεταξύ των μελών της ομάδας.

Καθ' όλη τη διαδικασία εγώ, από τη θέση του ερευνητή-δασκάλου περιφερόμουν μεταξύ των ομάδων καταγράφοντας τις αντιδράσεις των παιδιών, τον τρόπο εργασίας τους και τις διαδράσεις μεταξύ των μαθητών. Αν και υπήρξαν αρκετές ερωτήσεις από τα παιδιά, ιδίως κατά την έναρξη της δραστηριότητας, απέφευγα να δώσω απαντήσεις. Αντιθέτως τους παρέπεμπα στις οδηγίες του φυλλαδίου και στη συνεργασία με τους συμμαθητές τους. Έτσι, γρήγορα κατάλαβαν πως έπρεπε να μην περιμένουν κάποια εξωτερική βοήθεια, αλλά θα έπρεπε να ψάξουν μόνοι τους για τις απαντήσεις.

Οι αντιπαραθέσεις ήταν έντονες και συχνά κάποιοι προσπαθούσαν να επιβάλλουν την άποψή τους στην ομάδα. Γρήγορα όμως οι εντάσεις υποχώρησαν και έδωσαν τη θέση τους σε ένα δυναμικό διάλογο, πολλές φορές με αιτιολόγηση της άποψής τους. Μια ομάδα για παράδειγμα, που διαφωνούσε για τα αποτελέσματα της εκτίμησης τους, προσπαθούσαν να συγκρίνουν τα ύψη του δέντρου και του σχολείου:

Κωνσταντίνος: Δεν μπορεί το σχολείο να'ναι 7 μέτρα μόνο και το δέντρο 16 μέτρα!

Κάποιοι άλλοι προσπάθησαν να εκτιμήσουν το ύψος του σχολικού κτηρίου, συγκρίνοντας το με το ύψος του σχολικού φύλακα, που βρέθηκε εκείνη τη στιγμή κοντά τους:

Παναγιώτης: Κύριε Γιώργο, πόσο ψηλός είστε;

Κ.Γιώργος: Είμαι περίπου 1,90!

Παναγιώτης: Μήπως μπορείτε να σταθείτε δίπλα στον τοίχο;

Ενώ κάποια άλλα παιδιά, γνωρίζοντας το ύψος της μπασκέτας προσπαθούσαν να εκτιμήσουν το ύψος από το κιόσκι, συγκρίνοντας το με αυτήν:

Άγγελος: Αφού σου λέω, είναι πιο κοντό από την μπασκέτα!

Οι ομάδες αφού ολοκλήρωσαν τις εκτιμήσεις τους και συμπλήρωσαν την άσκηση, πέρασαν στη δεύτερη δραστηριότητα. Εδώ έπρεπε να κατατάξουν τα αντικείμενα της προηγούμενης δραστηριότητας σύμφωνα με τις προηγούμενες εκτιμήσεις τους, σε μια αύξουσα σειρά. Πραγματοποιήθηκε δηλαδή μια ταξινόμηση των αντικειμένων με βάση το ύψος τους.

Στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να αποφασίσουν πόσες φορές ψηλότερα ήταν τα διάφορα αντικείμενα της αυλής από τα ίδια τα παιδιά. Εδώ αναφέρθηκε από τα παιδιά και η έννοια του «μέσου όρου», την οποία είχαν γνωρίσει σε παλαιότερο κεφάλαιο των Μαθηματικών:

Μαριάννα: Κύριε, ποιο ύψος να χρησιμοποιήσουμε; Το δικό μου ή της Ελένης;

Δάσκαλος: Δε θα πάρετε, ούτε αυτόν (τον μαθητή) με το μεγαλύτερο ύψος, αλλά ούτε και αυτόν με το μικρότερο ύψος!

Μαριάννα: Δηλαδή να πάρουμε τον μέσο όρο;

Δάσκαλος: Ακριβώς!

Μαριάννα: Μπορούμε να πούμε ...περίπου ενάμιση μέτρο;

Δάσκαλος: Νομίζω πως είναι καλά.

Το ύψος των παιδιών αποτέλεσε το μέτρο σύγκρισης, το εργαλείο με το οποίο τα παιδιά μπόρεσαν να εκτιμήσουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο δικό τους ύψος και στο ύψος των αντικειμένων στην αυλή. Η σχέση αυτή είναι πολλαπλασιαστική και, όπως και η πρώτη δραστηριότητα, καλλιεργεί την πολλαπλασιαστική λογική στα παιδιά.

Ένα άλλο θέμα που απασχόλησε τους μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με αυτή την δραστηριότητα, ήταν εάν μπορεί ένα αντικείμενο να είναι 2½ ή 3½ φορές μεγαλύτερο από το ύψος τους και όχι απλά 2 ή 3 φορές ψηλότερο. Εδώ δηλαδή, αναδύονται προφανώς δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων, όπου τα κλάσματα δεν αντιμετωπίζονται ως αριθμοί. Το θετικό ήταν ότι αυτό αντιμετωπίστηκε από την ίδια την ομάδα, χωρίς να χρειαστεί κάποια δική μου παρέμβαση:

Γιώργος: Δεν μπορεί η μπασκέτα να είναι 2½ ή 3½ φορές μεγαλύτερη…πρέπει να'ναι 2 ή 3.

Ομάδα(όλοι μαζί): Πώς δεν μπορεί…γίνεται…και βέβαια γίνεται.

Παναγιώτης: Γιατί, δεν μπορούμε να πούμε ότι αυτό είναι 2 και μισή φορά μεγαλύτερο από το άλλο;

Γιώργος: Α… ναι…ναι.

Μεγάλο δίλλημα επίσης, αντιμετώπισαν τα παιδιά όταν η εκτίμηση τους για το πόσες φορές ψηλότερο ήταν ένα αντικείμενο, ερχόταν σε αντίθεση με την αρχική τους εκτίμηση για το ύψος των αντικειμένων. Με άλλα λόγια η οπτική σύγκριση των αντικειμένων, ερχόταν σε σύγκρουση με την αριθμητική. Φαίνεται πάντως, πως και εδώ κάποιες ομάδες βρήκαν την λύση, αν και η λύση αυτή ήταν περισσότερο μια κατασκευασμένη λύση που τους βόλευε, ώστε να μην προκαλείται σύγχυση μεταξύ των αποτελεσμάτων:

Στέφανος: Το κτήριο πρέπει να'ναι 6πλάσιο από εμάς

Ραφαήλ: Δεν μπορεί. Αφού 6 φορές το 1,5 μας κάνει …9 μέτρα.

Ελένη: Ναι, ναι δεν γίνεται!

Βασιλική: Εμείς το βάλαμε 7 μέτρα!

Στέφανος: Εεε… τότε θα το βάλουμε…4,5 φορές.

Ομάδα: Ναι, ναι…καλά είναι.

Βέβαια από την άλλη μεριά, ο τρόπος που τα παιδιά διαχειρίστηκαν τα δεδομένα, φανερώνει την ανάγκη να διατηρηθεί μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Φαίνεται δηλαδή ήδη από την πρώτη παρέμβαση, πως οι μαθητές άρχισαν να ενσωματώνουν και να χρησιμοποιούν συνειδητά την πολλαπλασιαστική σχέση στις εργασίες τους.

Τέλος, η τέταρτη δραστηριότητα του φυλλαδίου ήταν μια ανοιχτή ερώτηση, όπου οι ομάδες καλούνταν να προτείνουν κάποιο τρόπο, ώστε να εκτιμήσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια το ύψος των παραπάνω αντικειμένων.

Η ερώτηση σαφώς αποσκοπούσε στο να προτείνουν τα παιδιά την χρήση ή ακόμη και την κατασκευή κάποιου εργαλείου, με το οποίο θα μπορούσαν να οδηγηθούν σε ασφαλέστερα αποτελέσματα. Έτσι, σύμφωνα με το σχεδιασμό της διδασκαλίας, θα οδηγούμασταν αφενός στην εργαλειακή γένεση και αφετέρου θα δινόταν η κατάλληλη ευκαιρία για την εισαγωγή της Ιστορίας στη διδασκαλία μας.

Στη συνέχεια οι ομάδες επέστρεψαν στην αίθουσα, όπου σε κοινή θέα παρουσίασαν τα αποτελέσματα των καταγραφών τους. Όσον αφορά την πρώτη δραστηριότητα είχαμε τα εξής:

	Εκτιμώμενα ύψη σε μέτρα, με οπτική αναγνώριση			
Αντικείμενα	**Ομάδα Α**	**Ομάδα Β**	**Ομάδα Γ**	**Ομάδα Δ**
Κιόσκι	3,20	2,5	4,7	2,60
Μπασκέτα	3,80	2	3,2	2,40
Ιστός σημαίας	5	5	2,2	5,60
Σχολικό κτήριο	7	11	11,5	10
Πλάτανος	13,5	14	14	16

Πίνακας 8: Εκτιμώμενα ύψη αντικειμένων, με οπτική αναγνώριση.

Από την πρώτη στιγμή, έγινε αντιληπτή η διαφοροποίηση στις εκτιμήσεις των παιδιών. Αυτός άλλωστε ήταν και ο σκοπός της δραστηριότητάς μας. Έγινε μια σύγκριση των τιμών και φάνηκε ότι οι αποκλίσεις στις εκτιμήσεις κυμαίνονταν από 1,80μ. για την μπασκέτα και ως 4,50μ. για το σχολικό κτήριο. Οι διαφοροποιήσεις αυτές προβλημάτισαν τους μαθητές, οι οποίοι θέλησαν να διερευνήσουν τους λόγους που οδήγησαν σε αυτές.

Η συζήτηση που ακολούθησε ανέδειξε την ανάγκη χρήσης ενός εργαλείου:

Χάρης: Ναι, αλλά αν είχαμε κάτι για να τα μετρήσουμε, δεν θα'χαμε τόσες διαφοροποιήσεις.

Δάσκαλος: Τι εννοείς;

Χάρης: Να, ένα όργανο…

Η εργασία μας είχε ήδη περάσει στη φάση της εργαλειακής γένεσης, σύμφωνα με τον σχεδιασμό μας. Στο σημείο αυτό δημιουργήθηκαν πολλές απορίες και συζητήσεις για τη φύση και τη χρήση του εργαλείου:

Γιώργος: Ναι, αλλά πώς; Θα πηγαίναμε πάνω στο πλατάνι για να μετρήσουμε;

Δάσκαλος: Πιστεύεις δηλαδή ότι είναι δύσκολο να μετρήσουμε το πλατάνι γιατί είναι ψηλό;

Γιώργος: Ναι.

Δάσκαλος: Και αν υπήρχε ένα εργαλείο που θα μπορούσαμε να το μετρήσουμε από μακριά, θα είχαμε πάλι διαφοροποιήσεις;

Γιώργος: Ναι, αλλά πιο λίγες.

Δάσκαλος: Γιατί αυτό;

Χάρης: Μπορεί κάποιος να το κράταγε στραβά, άλλος λίγο πιο πάνω…

Δάσκαλος: Δηλαδή εξαρτάται από τη χρήση του εργαλείου;

Χάρης: Ναι.

Παναγιώτης: Επίσης παίζει ρόλο πώς θα στηθεί η κάθε ομάδα…άλλοι μπορεί να παν από εδώ άλλοι πιο εκεί…

Δάσκαλος: Δηλαδή παίζει ρόλο ο τρόπος χρήσης του από την ομάδα;

Παναγιώτης: Ναι.

Κάποια άλλα παιδιά πιστεύουν ότι οι μετρήσεις εξαρτώνται και από το σχήμα του αντικειμένου:

Νίκος: Επίσης παίζει ρόλο τι μετράμε. Το κτήριο είναι πιο σταθερό από το δέντρο…το δέντρο είναι πιο αλλοπρόσαλλο!

Δάσκαλος: Εννοείς ότι το σχήμα του δέντρου δεν είναι κανονικό;

Νίκος: Ναι.

Ιωάννης: Και ο ιστός μπορεί να κουνηθεί…δεν είναι τόσο σταθερός.

Χάρης: Επίσης είναι και κυλινδρικός. Δεν μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια.

Διαφοροποιήσεις όμως είχαμε και στην δεύτερη δραστηριότητα, στην κατάταξη των αντικειμένων:

Ομάδες	**Κατάταξη αντικειμένων σύμφωνα με το ύψος τους**
Ομάδα Α	κιόσκι < μπασκέτα < ιστός < κτήριο< πλατάνι
Ομάδα Β	μπασκέτα < κιόσκι < ιστός < κτήριο < πλατάνι
Ομάδα Γ	ιστός < μπασκέτα < κιόσκι < κτήριο < πλατάνι
Ομάδα Δ	μπασκέτα < κιόσκι < ιστός < κτήριο < πλατάνι

Πίνακας 9: Κατάταξη αντικειμένων σύμφωνα με το ύψος τους.

Παρατηρούμε πως, ενώ όλες οι ομάδες συμφωνούν για τα δύο ψηλότερα αντικείμενα, δηλαδή το κτήριο και το πλατάνι, εντούτοις οι εκτιμήσεις τους διαφοροποιούνται σημαντικά στα άλλα τρία αντικείμενα. Το πλέον ενδιαφέρον είναι, ότι, ενώ τα αντικείμενα αυτά δεν έχουν το ίδιο ύψος και οι διαφορές τους είναι εμφανείς με μια απλή οπτική παρατήρηση, τα παιδιά εμπιστεύονται περισσότερο τις αρχικές αριθμητικές τους εκτιμήσεις και κατατάσσουν τα αντικείμενα με βάση αυτές. Με άλλα λόγια η πρότερη γνώση, έρχεται να λειτουργήσει τώρα ως γνωστικό εμπόδιο. Είναι δε τόσο ισχυρό, ώστε μπορεί να υπερνικήσει ακόμη και την αισθητηριακή αντίληψη του γύρω κόσμου.

Στην τρίτη δραστηριότητα του φυλλαδίου, αφού οι μαθητές επίλυσαν διάφορα πρακτικά προβλήματα, όπως ποιο θεωρούν ως μέσο ύψος ή αν μπορούν να θεωρήσουν πως κάτι είναι 2½ ή 3½ φορές ψηλότερο από κάτι άλλο προχώρησαν στη συμπλήρωση της άσκησης, με τον τρόπο βέβαια που περιγράψαμε προηγουμένως. Έτσι είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Πόσες φορές ψηλότερο είναι το καθένα από τα παρακάτω αντικείμενα από εσάς;			
Αντικείμενα	**Ομάδα Α**	**Ομάδα Β**	**Ομάδα Γ**	**Ομάδα Δ**
Κιόσκι	2	1,5	3	1,5
Μπασκέτα	2,5	1,5	2,5	1,4
Ιστός σημαίας	3,5	3,5	1,5	4
Σχολικό κτήριο	4,5	9,5	11	6
Πλάτανος	9	13	13	10

Πίνακας 10: Σύγκριση αντικειμένων με το ύψος των παιδιών.

Δεδομένου ότι όλες οι ομάδες, όπως είπαμε και προηγουμένως θεώρησαν ως μέσο ύψος το 1,5μ., βλέπουμε ότι φρόντισαν να καταλήξουν, ή τουλάχιστον προσπάθησαν, σε τιμές στον πίνακα, που αποτελούν το πηλίκο των αρχικών τους εκτιμήσεων με το μέσο τους ύψος. Έτσι για μια φορά ακόμη βλέπουμε, πως οι αρχικές τους εκτιμήσεις και οι αριθμητικές πράξεις, έπαιξαν καθοριστικό ρόλο και αποτέλεσαν τη βασική πηγή επικύρωσης στη διαμόρφωση των αποτελεσμάτων.

Στην τέταρτη δραστηριότητα του φυλλαδίου όπου οι ομάδες έπρεπε να προτείνουν κάποιον τρόπο για εκτίμηση με μεγαλύτερη ακρίβεια, είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Ομάδες	**Προτείνετε κάποιο τρόπο, ώστε να εκτιμήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το ύψος των αντικειμένων.**
Ομάδα Α	*«Βρίσκουμε το ύψος του χαμηλότερου αντικειμένου και το πολλαπλασιάζουμε για να βρούμε το ύψος των υπολοίπων».*
Ομάδα Β	*«Ένα ξύλο, σύγκριση αντικειμένων, το ύψος ενός μαθητή»*
Ομάδα Γ	*«Ένα κλαδί περίπου ενός μέτρου»*
Ομάδα Δ	

Πίνακας 11: Προτάσεις των μαθητών για την εκτίμηση του ύψους των αντικειμένων.

Βλέπουμε ότι η ομάδα Δ δεν απάντησε καθόλου, ενώ η ομάδα Β ουσιαστικά επανέλαβε τα μέσα που χρησιμοποιήσανε στις παραπάνω δραστηριότητες. Έτσι περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των ομάδων Α και Γ. Και στις δυο απαντήσεις, αν και διαφέρουν ως προς τα μέσα, επικρατεί η πολλαπλασιαστική λογική. Τόσο το «κλαδί», όσο και «το αντικείμενο με το χαμηλότερο ύψος» προτείνονται να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία για τον υπολογισμό των άλλων αντικειμένων.

Η πρώτη διδακτική παρέμβαση συνεχίστηκε την επόμενη διδακτική ώρα με την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία.

Αφού πλέον, από τις προηγούμενες δραστηριότητες, έγινε αντιληπτή από τους μαθητές η ανάγκη χρήσης ενός κατάλληλου εργαλείου για την μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, είχε έρθει η ώρα για την παρουσίαση του ιστορικού κειμένου (Παράρτημα Ε, σελ.185). Δόθηκε το κείμενο στις ομάδες και ξεκίνησε η μελέτη του.

Αμέσως τα παιδιά έδειξαν ζωηρό ενδιαφέρον για το βιβλίο του Errard και άρχισαν να διατυπώνονται ερωτήσεις για την αυθεντικότητά του, την προέλευσή του, τον τόπο και την χρονολογία έκδοσής του, αλλά και για τυχόν παρόμοια κείμενα που εκτυπώθηκαν εκείνη την εποχή στην Ελλάδα:

Θωμάς: Τι γράφει στον τίτλο, κύριε;

Δάσκαλος: «Γεωμετρία και Γενική Πρακτική»

Ραφαέλλα: Στο Παρίσι τυπώθηκε; Είναι το αληθινό;…

Δάσκαλος: Ναι. Στο Παρίσι και είναι το αυθεντικό.

Βιβή: Πότε;

Δάσκαλος: Αυτό φαίνεται κάτω, με τα λατινικά γράμματα. Θυμηθείτε λίγο τον λατινικό τρόπο αρίθμησης: M.DC.XXI…

Χάρης: Το πρώτο είναι χίλια…το δεύτερο…εεε… το τελευταίο είναι είκοσι ένα…

Δάσκαλος: Το μεσαίο είναι εξακόσια. Η χρονιά είναι 1621.

Θωμάς: Εμείς (οι Έλληνες) είχαμε τότε, τέτοια βιβλία;

Δάσκαλος: Θα ήταν πολύ δύσκολο, μια και βρισκόμασταν σε περίοδο τουρκοκρατίας. Όμως μια και το ανέφερες, θέλω να προσέξετε, αργότερα μέσα στο κείμενο, κάποιες παραπομπές και να τις συζητήσουμε.

Ακολούθησε η μεγαλόφωνη ανάγνωση του κειμένου από τους μαθητές, με τις απαραίτητες παύσεις, όπου χρειαζόταν να σχολιάσουμε κάτι. Τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να παρακολουθούν παράλληλα και το αυθεντικό κείμενο στα Γαλλικά. Αν και δεν καταλάβαιναν τη γλώσσα, προσπαθούσαν να συνδυάσουν λέξεις και φράσεις με τη μετάφραση του κειμένου στα ελληνικά.

Μεγάλη εντύπωση έκανε στα παιδιά η χρήση των ποδιών και ιντσών, αντί για τα μέτρα και τα εκατοστά που χρησιμοποιούμε σήμερα, καθώς και η συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι κάποιες μαθηματικές έννοιες, όπως οι τρεις διαστάσεις και τα ισογώνια τρίγωνα χρησιμοποιούνταν από τότε. Την προσοχή τους επίσης κέρδισαν σε μεγάλο βαθμό, οι εικόνες του ιστορικού κειμένου, οι οποίες πέρα από την καλλιτεχνική τους αξία, μπόρεσαν να προσδώσουν την ιστορικότητα του κειμένου και να παράσχουν πλήθος πληροφοριών σχετικά με το υλικό κατασκευής, τον τρόπο συναρμολόγησης και χρήσης του εργαλείου:

Κωνσταντίνος: Είναι από μέταλλο και έχει μια βίδα…μοιάζει με μηχάνημα.

Ελένη: Αυτή η σφαίρα, εκεί, τι είναι;

Δάσκαλος: Είναι ο σύνδεσμος. Μας τον παρουσιάζει με λεπτομέρειες.

Σπύρος: Στην εικόνα (που μετράει) φαίνεται διαφορετικό απ'ότι στην πρώτη εικόνα.

Δάσκαλος: Είναι το ίδιο εργαλείο. Απλώς στη δεύτερη φαίνεται ο τρόπος χρήσης του.

Παναγιώτης: Μετράει από τη μια μεριά του ποταμιού, στην άλλη.

Δάσκαλος: Σωστά. Στοχεύει προς ένα συγκεκριμένο σημείο, το δέντρο.

Θωμάς: Σχηματίζονται και κάτι τρίγωνα…

Δάσκαλος: Ναι όχι στην πραγματικότητα. Είναι νοητά. Αλλά για αυτά θα μιλήσουμε παρακάτω.

Η συζήτηση πήρε αρκετό ενδιαφέρον όταν φτάσαμε στις παραπομπές του Errard που προαναφέραμε. Εκεί έγινε λόγος για τα βιβλία του Ευκλείδη στα οποία στηρίχθηκε ο συγγραφέας για να στηρίξει τις απόψεις του. Από το διάλογο που προέκυψε, πήραν οι μαθητές μια ιδέα για την αξία και τη σπουδαιότητα του έργου του μεγάλου αυτού Έλληνα μαθηματικού και συνειδητοποίησαν τη διαχρονικότητα του έργου του:

Δάσκαλος: Οι αριθμοί αυτοί παιδιά μας παραπέμπουν σε κάποια από τα βιβλία του Ευκλείδη. Του μεγάλου αυτού Έλληνα μαθηματικού της αρχαιότητας.

Γιώργος: Μα αυτός έζησε πολλά χρόνια πριν!

Δάσκαλος: Ακριβώς. Έζησε τον $4^{ο}$ αι. π.Χ. και θεμελίωσε τη Γεωμετρία, την Ευκλείδειο Γεωμετρία, όπως λέγεται, την οποία θα διδαχθείτε στο Γυμνάσιο.

Όλοι: (παύση, με επιφωνήματα θαυμασμού).

Γιώργος: Και ο Errard σ'αυτόν στηρίχθηκε;

Δάσκαλος: Και ο Errard και πολλοί άλλοι μέχρι σήμερα!

Στο τέλος οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν ομαδικά σε τέσσερις ερωτήσεις που συνόδευαν το φυλλάδιο με το ιστορικό κείμενο. Με τις τρεις πρώτες επιχειρήθηκε να διερευνηθεί η κατανόηση του, ενώ η τέταρτη αποσκοπούσε στην μαθηματικοποίηση του ερωτήματος. Οι απαντήσεις των ομάδων στην ερώτηση Η1 φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Η1: Τι θέλει να μελετήσει εδώ ο συγγραφέας;	
Ομάδες	**Απαντήσεις**
Ομάδα Α	Πώς μπορούμε να μετρήσουμε απρόσιτες αποστάσεις.
Ομάδα Β	Το πώς θα μετρήσει τις απρόσιτες αποστάσεις.
Ομάδα Γ	Για τη Γεωμετρία.

Ομάδα Δ	Θέλει να μελετήσει τη μέτρηση μερικώς ή τελείως απρόσιτων αποστάσεων, με δυο ισοσκελή τρίγωνα, χρησιμοποιώντας αναλογίες.

Πίνακας 12: Απόψεις των μαθητών για το θέμα του κειμένου του Errard.

Αν εξαιρέσουμε την απάντηση της Γ ομάδας, η οποία είναι πολύ γενική, φαίνεται πως οι μαθητές κατάλαβαν το αντικείμενο που διαπραγματεύεται ο Errard στο κείμενό του. Η ομάδα Δ μάλιστα, δείχνει να έχει καταλάβει επακριβώς το αντικείμενο της μελέτης και το διατυπώνει λεπτομερέστατα.

Στην επόμενη ερώτηση Η2 είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Η2: Ποιες μαθηματικές έννοιες περιλαμβάνονται στο κείμενο;	
Ομάδες	**Απαντήσεις**
Ομάδα Α	Μήκος, πλάτος, βάθος, βάση, παράλληλη, διαγώνια, υποδιαιρέσεις, ισογώνια τρίγωνα, ευθείες γραμμές, ανάλογα.
Ομάδα Β	Γωνία, τρίγωνο, ευθεία, μήκος, μέτρηση, ισογώνια, πλάτος.
Ομάδα Γ	Το τρίγωνο, η γωνία και το μήκος.
Ομάδα Δ	Οι αναλογίες και η τρισδιάστατη εικόνα του χώρου, οι γωνίες, τα τρίγωνα, τα ευθύγραμμα μήκη, μέτρα και υποβαθμίδες.

Πίνακας 13: Ποιες μαθηματικές έννοιες πιστεύουν οι μαθητές πως περιέχονται στο κείμενο του Errard.

Βλέπουμε πως οι μαθητές με σχετικά μεγάλη επιτυχία, κατάφεραν να διακρίνουν τις μαθηματικές έννοιες που υπάρχουν στο κείμενο. Η ομάδα Γ και εδώ είχε τις λιγότερες απαντήσεις, ενώ οι Α και Δ μπόρεσαν να διακρίνουν τις περισσότερες.

Στην ερώτηση Η3 είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Η3: Γιατί έγραψε ο Errard το κείμενο αυτό;	
Ομάδες	**Απαντήσεις**
Ομάδα Α	Για να διδάξει στους ανθρώπους έναν άλλο τρόπο να μετρούν τις απρόσιτες αποστάσεις.

Ομάδα Β	Για να διευκολύνει τους ανθρώπους που θέλουν να μετρήσουν τις απρόσιτες αποστάσεις.
Ομάδα Γ	Το έγραψε για να μάθουμε να μετρούμε αποστάσεις.
Ομάδα Δ	Το έγραψε για να μας υποδείξει τις λειτουργίες του οργάνου και τις ομοιότητες που υπάρχουν μεταξύ των ράβδων.

Πίνακας 14: Απόψεις των μαθητών για το σκοπό του κειμένου του Errard.

Ως προς τη σκοπιμότητα του συγγραφέα, οι τρεις πρώτες ομάδες πιστεύουν ότι ο Errard έγραψε το κείμενο για να διδάξει τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, ενώ η τέταρτη ομάδα εστιάζει στην λειτουργία του οργάνου μέτρησης.

Στην τέταρτη ερώτηση Η4 οι απαντήσεις μας έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

Η4: Με βάση τα στοιχεία του κειμένου, μπορείτε να δημιουργήσετε ένα δικό σας πρόβλημα;	
Ομάδες	**Απαντήσεις**
Ομάδα Α	Είμαι σε ένα νησάκι και θέλω να μετρήσω μια απρόσιτη απόσταση.
Ομάδα Β	Ένας χτίστης θέλει να χτίσει ένα τοίχο από το σημείο Α ως το σημείο Β. Όμως δεν ήξερε την απόσταση για να πάρει τα τούβλα.
Ομάδα Γ	Ο διευθυντής του σχολείου θέλει να μετρήσει το ύψος του σχολείου, για τι θέλει να προσθέσει έναν ακόμη όροφο για παιδιά με ειδικές ανάγκες.
Ομάδα Δ	Να βρεθεί η απόσταση δύο σημείων στο χάρτη.

Πίνακας 15: Μαθηματικά προβλήματα που δημιούργησαν οι μαθητές με βάση το ιστορικό κείμενο.

Αν και τα παιδιά περιέγραψαν αρκετά γενικές καταστάσεις, εντούτοις φαίνεται να έχουν καταφέρει να μαθηματικοποιήσουν τις έννοιες που γνώρισαν μέσα από το ιστορικό κείμενο. Εντύπωση προκαλεί η τέταρτη ομάδα η οποία αν και δεν αναφέρθηκε ακόμη κάτι για κλίμακες και χάρτες, μεταφέρει την κατάσταση στην περίπτωση αυτή.

Γενικά μπορούμε να πούμε πως η πρώτη προσπάθεια για ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία των Λόγων και των Αναλογιών με τη χρήση ενός ιστορικού εργαλείου, είχε αρκετά ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Κάτι που δυσκόλεψε λίγο τα παιδιά στο κείμενο, ήταν η λεπτομερής περιγραφή του εργαλείου, καθώς συνοδευόταν από αρκετά σύμβολα και ορολογίες. Εδώ χρειάστηκε να παρέμβω και να υπενθυμίσω στα παιδιά πως θα πρέπει να ανατρέχουν διαρκώς στα σχήματα που συνοδεύουν το κείμενο.

Με την επεξεργασία του ιστορικού κειμένου ολοκληρώθηκε ουσιαστικά η πρώτη διδακτική παρέμβαση. Ο χρόνος που χρειάστηκε τελικά, ήταν περισσότερος από ότι αρχικά είχε προγραμματιστεί, καθώς χρειάστηκαν συνολικά τρεις διδακτικές ώρες. Αυτό έγινε διότι ήθελα να υπάρχει άμεση σύνδεση των εισαγωγικών εργασιών στο χώρο της αυλής με την παρουσίαση του ιστορικού κειμένου, ώστε να επιτευχθεί η αυθόρμητη έκφραση της επιθυμίας από μέρους των παιδιών, για την κατασκευή και χρήση του ιστορικού εργαλείου. Πράγματι, αυτό έγινε και η παρέμβαση έκλεισε με την υπόσχεση ότι στην επόμενη συνεδρία μας θα επιχειρούσαμε την κατασκευή του εργαλείου.

Κρίνοντας εκ του αποτελέσματος, θα λέγαμε ότι ο αρχικός σχεδιασμός στο χώρο του $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$ πραγματοποιήθηκε με επιτυχία. Οι μαθητές εργάστηκαν στην GI, που δίνει έμφαση στον εμπειρικό πόλο της Γεωμετρίας, δηλαδή στη διαίσθηση και στο πείραμα. Η διδακτική παρέμβαση ξεκίνησε στο Σημειωτικό–Εργαλειακό επίπεδο, αφού οι δραστηριότητες πραγματοποιήθηκαν σε χώρο πραγματικό και τοπικό και αξιοποιήθηκε η διαίσθηση και το πείραμα. Η οπτικοποίηση ήταν εικονική, ενώ σύμφωνα με τον Duval (2005) ο τρόπος θέασης ήταν αυτός του χωρομέτρη. Οι μαθητές πραγματοποίησαν νοητικές μετρήσεις στο χώρο της αυλής. Πηγή εγκυρότητας αποτέλεσε η σύγκριση των αριθμητικών τιμών που προέκυψαν από τις μετρήσεις. Η αλλαγή στον τρόπο εργασίας των μαθητών, όπου από οπτική εκτίμηση των αποστάσεων, περνάμε σε αριθμητικούς υπολογισμούς, ορίζουν ουσιαστικά μια μετατόπιση προς το $\text{ΜΧΕ}_{\text{Αριθμοί.}}$ Ως μέτρο σύγκρισης, χωρίς όμως να έχουμε μέτρηση, χρησιμοποιήθηκε το μέσο ύψος των μαθητών ή ακόμη κάποια αντικείμενα. Έτσι η εργασία μας πέρασε στη φάση της εργαλειακής γένεσης, σύμφωνα με τον σχεδιασμό μας. Στο σημείο αυτό δημιουργήθηκαν πολλές απορίες και συζητήσεις για τη φύση και τη χρήση του εργαλείου και γεννήθηκε μέσα τους η ανάγκη για την κατασκευή και χρήση ενός εργαλείου που θα τους διευκόλυνε στους υπολογισμούς τους.

2η Διδακτική Παρέμβαση

Η εργασία συνεχίστηκε στην τάξη, ανά ομάδες, γύρω από πάγκους εργασίας. Στην αρχή τους δόθηκε πάλι το ιστορικό κείμενο, όπου περιγράφονταν λεπτομερώς από τον ίδιο τον Errard η σύνθεση του εργαλείου και ένα ακόμη φυλλάδιο με τα υλικά και τις απαραίτητες οδηγίες για τη συναρμολόγησή του.

Στους πάγκους υπήρχαν ήδη τα απαραίτητα υλικά και οι ομάδες συγκεντρώθηκαν γύρω από αυτούς. Πριν αρχίσει η εργασία, τα παιδιά μελέτησαν με προσοχή τα φυλλάδια. Κάποιοι μαθητές ονομάτισαν τα μέρη του οργάνου και τα ανακοίνωσαν στην τάξη. Στη συνέχεια τα παιδιά διαπίστωσαν την ύπαρξη των υλικών και προχώρησαν με τις οδηγίες. Οι ρόλοι μοιράστηκαν μεταξύ των μελών των ομάδων, χωρίς να χρειαστεί καν να παρέμβω. Ένας διάβαζε, άλλος βίδωνε τους συνδέσμους, άλλος προμήθευε με υλικά κλπ.

Κάποιοι μαθητές, όπως η Αναστασία και η Βασιλική συνάντησαν μια μικρή δυσκολία με τους μεταλλικούς συνδέσμους, οι οποίοι έπρεπε να περάσουν στις ξύλινες ράβδους. Γρήγορα όμως τα υπόλοιπα μέλη των ομάδων έδωσαν λύση, βοηθώντας τες με την συναρμολόγησή τους.

Κάτι που μας εντυπωσίασε ιδιαίτερα θετικά, ήταν το γεγονός, ότι κάποιοι μαθητές όπως ο Νίκος και ο Άγγελος, οι οποίοι συνήθως εκδηλώνουν αρκετές μαθησιακές δυσκολίες, ήταν από τους πρώτους που κατάφεραν να ολοκληρώσουν τη συναρμολόγηση των εργαλείων και φυσικά με υπερηφάνεια να παρουσιάσουν το έργο τους στην τάξη. Βλέπουμε δηλαδή πως η ομαδική, πρακτική εργασία στην τάξη, έδωσε την ευκαιρία σε κάποια παιδιά να αναδείξουν μια άλλη πλευρά της προσωπικότητας και των δεξιοτήτων τους, γεγονός που επέδρασε σημαντικά στην τόνωση της αυτοεκτίμησης τους. Παράλληλα έδωσε την ευκαιρία στις ομάδες να εργαστούν αρμονικά και να φτάσουν σε ένα ποιοτικό αποτέλεσμα, γεγονός που ενίσχυσε τη συνεργασία μεταξύ τους.

Τέλος κάποιοι δεν έκρυψαν τον ενθουσιασμό τους, όταν κοιτώντας πάλι το ιστορικό κείμενο, διαπίστωναν πως κάτι το οποίο είχε κατασκευαστεί και χρησιμοποιηθεί αιώνες πριν, βρισκόταν πλέον στα χέρια τους, κατασκευασμένο από τους ίδιους και έτοιμο προς χρήση:

Θωμάς: Αυτό είναι ίδιο με την εικόνα!

Δάσκαλος: Μα και βέβαια, αφού το φτιάξατε ίδιο!

Μαριάννα: Πότε θα πάμε να μετρήσουμε με αυτό;

Δάσκαλος: Από το επόμενο κιόλας μάθημα.

Γενικά η παρέμβαση ολοκληρώθηκε με επιτυχία αφού μπόρεσε να εκπληρώσει το σκοπό της. Η συνεργασία των μαθητών ήταν άψογη και κατάφεραν να τελειώσουν πολύ πιο γρήγορα από ότι ανέμενα. Όλες οι ομάδες κατάφεραν να έχουν ολοκληρώσει τη συναρμολόγηση του εργαλείου πριν το τέλος της πρώτης διδακτικής ώρας.

Όσον αφορά τον αρχικό σχεδιασμό, στην φάση αυτή οι μαθητές συνέχισαν να εργάζονται στο Σημειωτικό-Εργαλειακό επίπεδο στη GI, η έμφαση όμως τώρα δόθηκε στην εργαλειακή γένεση. Άλλαξε επίσης και ο τρόπος θέασης. Οι μαθητές τώρα υιοθετούν το ρόλο του οικοδόμου-κατασκευαστή, που αντιστοιχεί στη σειριακή κατανόηση. Το σχέδιο με το εργαλείο του Errard στο χαρτί, πήρε υλική υπόσταση και μετατράπηκε σε εργαλείο, με σκοπό την μέτρηση προσιτών και ημι-απρόσιτων αποστάσεων. Έχουμε επομένως μια διαδικασία κατασκευής, που στο πλαίσιο των $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$, αποκαλούμε “instrumentation”. Σύμφωνα με το σχεδιασμό μας, πετύχαμε μερική κινητοποίηση των μαθηματικών ιδιοτήτων του εργαλείου που ήταν απαραίτητες για την κατασκευή και τη χρήση του. Η ανακάλυψη της ιδιότητας των ανάλογων πλευρών των τριγώνων που σχηματίζονται από τη χρήση του, παρέμεινε ως στόχος μιας επόμενης δραστηριότητας. Έτσι μπορούμε να πούμε πως η δεύτερη διδακτική παρέμβαση ακολούθησε απολύτως τον αρχικό σχεδιασμό μας.

3η Διδακτική Παρέμβαση

Η εργασία των ομάδων ξεκίνησε στην αυλή του σχολείου. Οι μαθητές είχαν στα χέρια τους το εργαλείο του Errard, το οποίο είχαν κατασκευάσει στην προηγούμενη παρέμβαση. Παρόλα αυτά, δεν είχαν ακόμη εξοικειωθεί πλήρως με αυτό. Έτσι αφιερώσαμε μερικά λεπτά για να ονοματίσουμε τα μέρη του, σύμφωνα με το σχέδιο που συνόδευε το 2ο Φύλλο Εργασίας. Πριν ξεκινήσουν τις μετρήσεις αναφέραμε πάλι ότι το ύψος της κάθετης βέργας ήταν ΑΒ = 120εκ. και ότι ο κινητός σύνδεσμος ήταν τοποθετημένος σε τέτοιο σημείο, ώστε ΑΔ = 20εκ. Άρα, εκείνο που έπρεπε να κάνουν ήταν να μετρήσουν το ΔΕ με τις χαράξεις του οργάνου και το ΒΓ με μετροταινία, για να συμπληρώσουν τον πίνακα του φυλλαδίου. Άλλωστε ο σκοπός δεν ήταν ακόμη να μετρήσουν με το όργανο, αλλά να ανακαλύψουν τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται από αυτό και τις ιδιότητές τους.

Οι ομάδες τοποθετημένες μακριά η μια από την άλλη πραγματοποίησαν από έξι στοχεύσεις η καθεμιά, ώστε να δοθεί η δυνατότητα να εργαστούν όλοι εκ περιτροπής στις διάφορες θέσεις. Η ομάδα Β΄ αποτελούνταν από 5 μαθητές, οπότε δεν χρειάστηκε να πραγματοποιήσουν την $6^{η}$ στόχευση, αφού εργάστηκαν εκ περιτροπής σε όλες τις θέσεις.

Στην αρχή παρουσιάστηκαν κάποιες δυσκολίες στις ομάδες, είτε γιατί δεν είχαν καταλάβει καλά τις οδηγίες είτε γιατί δυσκολευόντουσαν με τη χρήση του εργαλείου και της μετροταινίας. Σε κάθε περίπτωση τους παρέπεμψα για βοήθεια στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους και στις οδηγίες του φυλλαδίου. Χρειάστηκε να παρέμβω μια, δυο φορές όταν διαπίστωσα ότι κάποιοι μαθητές δυσκολευόντουσαν να συνεργαστούν με την ομάδα τους και απείχαν. Γρήγορα όμως λύθηκαν τα ζητήματα αυτά και η εργασία προχώρησε κανονικά.

Αξιοσημείωτη ήταν η ερώτηση της Μαριάννας κατά τη διάρκεια των μετρήσεων:

Μαριάννα: Είναι φυσιολογικό αυτή (η ΔΕ) να΄ναι μεγαλύτερη από τη ΒΓ ή ακόμη και ίση;

Δάσκαλος: Τι εννοείς «φυσιολογικό»;

Μαριάννα: Δηλαδή γίνεται η ΔΕ να είναι μεγαλύτερη από τη ΒΓ;

Δάσκαλος: Κοίταξε το σχήμα στο φυλλάδιο. Τι πιστεύεις;

Μαριάννα: Όχι δεν μπορεί να είναι.

Η Μαριάννα χρησιμοποιεί τη λέξη «φυσιολογικό» για να αντιπαραβάλλει μια αντίληψη που της δημιουργήθηκε από κάποια εσφαλμένη μέτρηση, με την κατάσταση που προβάλλεται από το σχήμα και τη πραγματικότητα. Νοιώθει δηλαδή πως δεν μπορεί να είναι σωστή, καθώς η βάση του μικρού τριγώνου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από αυτή του μεγάλου.

Αφού κατάφεραν όλες οι ομάδες να ολοκληρώσουν τις μετρήσεις τους, την επόμενη ώρα συνεχίστηκε η εργασία στην τάξη. Οι μαθητές ατομικά, μετέφεραν την κατάσταση που βίωσαν στην αυλή, πάνω στο χαρτί. Σχεδίασαν σε μια κόλλα χαρτί το εργαλείο και τα δύο τρίγωνα που σχηματίστηκαν μεταξύ του οργάνου και του αντικειμένου προς μέτρηση. Σχεδόν όλοι οι μαθητές μπόρεσαν με ευκολία να ολοκληρώσουν τα σχέδιά τους. Κατόπιν παρουσιάστηκαν μερικά από αυτά στην ολομέλεια και ακολούθησε συζήτηση.

Οι μαθητές μπόρεσαν να διαπιστώσουν ότι σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΕ και ΒΑΓ με κοινή κορυφή Α (Φ.Ε. 2). Οι πλευρές μάλιστα ΔΑ και ΑΕ του μικρού τριγώνου ΔΑΕ, αποτελούν τμήμα των πλευρών ΒΑ και ΑΓ του μεγάλου τριγώνου ΒΑΓ:

Δάσκαλος: Κοιτώντας προσεχτικά τα τρίγωνα που σχηματίζονται τι έχετε να παρατηρήσετε;

Ελένη: Έχουν ίδια γωνία, την Α.

Σπύρος: Είναι και τα δυο ορθογώνια.

Δάσκαλος: Σωστά. Είναι και τα δυο ορθογώνια και έχουν κοινή κορυφή την Α. Κάτι άλλο;

Ιωάννης: Ναι, η ΑΔ πατάει επάνω στην ΑΒ…

Γιώργος: Ναι..ναι. Και η ΑΕ πάνω στην ΑΓ.

Δάσκαλος: Μπράβο! Πολύ ωραία παιδιά! Θέλω τώρα να θυμηθείτε το εργαλείο του Errard από ιστορικό κείμενο και να μου πείτε: Η απόσταση ΒΓ στο μεγάλο τρίγωνο, τι σας θυμίζει;

Χάρης: Είναι η απόσταση από το εργαλείο, ως το δέντρο απέναντι.

Δάσκαλος: Ωραία! Και πως θα τη χαρακτηρίζατε αυτή την απόσταση;

Μαριάννα: Είναι η απόσταση που ζητάμε!

Δάσκαλος: Μπράβο παιδιά. Δηλαδή για να ανακεφαλαιώσουμε διαπιστώσαμε πως τα δυο τρίγωνα ΔΑΕ και ΒΑΓ είναι ορθογώνια, με κοινή κορυφή την Α και με δυο πλευρές που μερικώς συμπίπτουν, ενώ η ΒΓ στο μεγάλο τρίγωνο, είναι η ζητούμενη απόσταση.

Στη συνέχεια έγινε η παρουσίαση σε κοινή θέα, των μετρήσεων που πραγματοποίησαν οι ομάδες την προηγούμενη ώρα και ακολούθησε συζήτηση.

	Τμήμα	1η στόχευση σε εκ.	2η στόχευση σε εκ.	3η στόχευση σε εκ.	4η στόχευση σε εκ.	5η στόχευση σε εκ.	6η στόχευση σε εκ.
Α΄ Ομάδα	ΑΔ	20	20	20	20	20	20
	ΑΒ	120	120	120	120	120	120
	ΔΕ	50	65	70	80	70	75
	ΒΓ	300	400	450	500	450	480
Β΄ Ομάδα	ΑΔ	20	20	20	20	20	-
	ΑΒ	120	120	120	120	120	-
	ΔΕ	60	77	62	72	56	-
	ΒΓ	420	520	450	530	350	-
Γ΄ Ομάδα	ΑΔ	20	20	20	20	20	20
	ΑΒ	120	120	120	120	120	120
	ΔΕ	85	75	100	100	95	30
	ΒΓ	330	540	480	500	900	200
Δ΄ Ομάδα	ΑΔ	20	20	20	20	20	20
	ΑΒ	120	120	120	120	120	120
	ΔΕ	50	35	65	95	15	60
	ΒΓ	300	250	370	420	90	360

Πίνακας 16: Τα αποτελέσματα των μετρήσεων με το εργαλείο του Errard κατά την 3η διδακτική παρέμβαση.

Από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων μπόρεσαν οι μαθητές να διαπιστώσουν, πως ενώ οι ΑΔ και ΑΒ ήταν πάντοτε σταθερές και αυτό που θα επηρέαζε τις μετρήσεις θα ήταν ουσιαστικά μόνο το μήκος της ΔΕ, εντούτοις πολλές μετρήσεις ενώ έγιναν με το ίδιο μήκος στη ΔΕ, κατέληξαν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα η Β΄ ομάδα για ΑΔ = 60εκ. βρίσκει ότι ΒΓ = 420εκ., ενώ η Δ΄ ομάδα καταλήγει πως ΒΓ = 360εκ.

Αναζητήθηκαν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτές τις διαφοροποιήσεις και η συζήτηση κατέληξε στην ανάδειξη κάποιων δυσκολιών που είχαν με τις μετρήσεις:

Δάσκαλος: Τι ήταν αυτό που σας δυσκόλευε περισσότερο;

Χάρης: Το ανώμαλο έδαφος. Είχε πετραδάκια.

Παναγιώτης: Ήταν λίγο δύσκολο με την μετροταινία.

Γιώργος: Μας έφευγε συνεχώς η βέργα από τη θέση της.

Ατζελίνα: Εμάς μας έφευγαν τα πετραδάκια που βάζαμε για σημάδια και χάναμε τα σημεία.

Ιωάννης: Εγώ μερικές φορές δεν μπορούσα να το σταθεροποιήσω.

Δάσκαλος: Εννοείς να το έχεις κατακόρυφο;

Ιωάννης: Ναι.

Δάσκαλος: Πράγματι, είναι λίγο δύσκολο να το κρατάμε σε όρθια θέση. Για το λόγο αυτό, θα μπορούσαμε ίσως να χρησιμοποιήσουμε κάτι που να μας βοηθούσε να το κρατάμε πάντοτε κάθετο προς το επίπεδο της γης;

Γιώργος: Ένα γνώμονα;

Δάσκαλος: Θα μπορούσε και αυτό! Όμως μήπως έχετε προσέξει τι χρησιμοποιούν οι χτίστες;

Ιωάννης: Εμένα ο παππούς μου είναι χτίστης. Κρεμάει ένα βαρίδι σε πετονιά.

Δάσκαλος: Ακριβώς. Αυτό παιδιά λέγεται νήμα της στάθμης. Μπορούμε αν δυσκολεύεστε να χρησιμοποιήσουμε και εμείς ένα πρόχειρο, που θα κατασκευάσουμε με νήμα και πέτρα.

Στο σημείο εκείνο θεώρησα κατάλληλη την ευκαιρία να κάνω μια προσφυγή στην Ιστορία:

Δάσκαλος: Πιστεύετε πως και ο Errard θα είχε τέτοια προβλήματα, όπως τα δικά σας;

Κωνσταντίνος: Μα, αυτός το έφτιαξε. Θα ήξερε να το χρησιμοποιεί καλύτερα.

Δάσκαλος: Και μπορούσε να παίρνει ακριβείς μετρήσεις;

Κωνσταντίνος: Ναι…δεν ξέρω…ίσως.

Γιώργος: Δεν νομίζω να μπορούσε να μετρήσει με ακρίβεια!

Σύμφωνα με το αρχικό σχεδιασμό της παρέμβασης, η εργασία κατάφερε να εξελιχθεί στο Εργαλειακό – Λεκτικό επίπεδο. Ο τρόπος θέασης στη δραστηριότητα αυτή ήταν αυτή του χωρομέτρη, αφού είχαμε μετρήσεις σε πραγματικό χώρο. Το εργαλείο του Errard έγινε το μέσο, από τη χρήση του οποίου ανακαλύφθηκαν κάποιες από τις ιδιότητες των ομοίων τριγώνων που σχηματίζονται. Οι μετρήσεις των αποστάσεων δεν έγιναν ακόμη με το εργαλείο, αλλά με τη μετροταινία, καθώς σκοπός της παρέμβασης ήταν η διαπίστωση, πως σχηματίζονται δύο όμοια τρίγωνα με κοινή κορυφή και πλευρές που συμπίπτουν μερικώς. Χρησιμοποιήθηκαν και άλλα εργαλεία, όπως το χαρτί με τα τετραγωνάκια και ο χάρακας, για να μεταφερθεί το σχέδιο της πραγματικότητας στο χαρτί και ένας πίνακας για την καταγραφή των δεδομένων. Η σύγκριση των τιμών αποτέλεσε πηγή εγκυρότητας. Οι μαθητές κατέληξαν στο συλλογισμό ότι η βάση του μεγάλου τριγώνου αποτελεί τη ζητούμενη απόσταση. Επιβεβαιώθηκε επομένως ο αρχικός σχεδιασμός της διδακτικής αυτής παρέμβασης.

4η Διδακτική Παρέμβαση

Η εργασία στη φάση αυτή ξεκίνησε στον πίνακα της τάξης με δύο ορθογώνια ομοιοθετικά τρίγωνα, ένα μικρό κατασκευασμένο από χαρτόνι και ένα επίσης ορθογώνιο, μεγαλύτερο, σχεδιασμένο στον πίνακα της τάξης. Σκοπός της πρώτης φάσης της παρέμβασης, ήταν να βρουν οι μαθητές τις ομοιότητες των δύο τριγώνων και να ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει τις πλευρές τους. Έτσι κατέληξαν στη διατύπωση του ορισμού των ομοίων τριγώνων. Αργότερα, ακολούθησε η επικύρωση των αποτελεσμάτων μέσα από τη χρήση του εργαλείου του Errard.

Η εργασία όπως είπαμε, ξεκίνησε στην τάξη με τη συμμετοχή όλων των μαθητών. Αφού σχεδιάστηκε στον πίνακα το μεγάλο τρίγωνο και στη συνέχεια τοποθετήθηκε το μικρό τρίγωνο πάνω σε αυτό και με συμπίπτουσα την κορυφή τους, ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν τις ομοιότητες των δυο τριγώνων. Οι απαντήσεις τους είχαν αρκετό ενδιαφέρον:

Γιώργος: Και τα δυο είναι ορθογώνια και οι βάσεις τους είναι προς την ίδια πλευρά.

Σπύρος: Οι δυο ορθές γωνίες είναι στη βάση και στην αριστερή πλευρά.

Ιωάννης: Οι δυο βάσεις είναι παράλληλες.

Μαρία: Αυτή η γωνία (Α), είναι του μικρού τριγώνου και του μεγάλου τριγώνου.

Δάσκαλος: Είναι δηλαδή κοινή. Πολύ ωραία, τι άλλο υπάρχει;

Βιβή: Αυτή η πλευρά (κάθετος) πέφτει πάνω στην άλλη πλευρά και η άλλη (υποτείνουσα), πάνω στην άλλη.

Δάσκαλος: Πολύ ωραία! Αφού τα τρίγωνα έχουν πάντοτε άθροισμα γωνιών 180^o και τα δυο αυτά τρίγωνα έχουν κοινή την γωνία Α και από μια ορθή γωνία, τότε οι τρίτες γωνίες τι θα είναι;

Τάξη: Ίσες!

Αφού λοιπόν μπόρεσαν οι μαθητές να εντοπίσουν τις ομοιότητες των δυο τριγώνων, ήρθε η κατάλληλη στιγμή για να τεθεί το κύριο ερώτημα:

Δάσκαλος: Κοιτώντας τις πλευρές από το μικρό χάρτινο τρίγωνο και από το μεγάλο που είναι σχεδιασμένο στον πίνακα, πόσες φορές μεγαλύτερες νομίζετε ότι είναι οι πλευρές του μεγάλου τριγώνου από του μικρού;

Στο σημείο αυτό ακολούθησε ένα πραγματικό πανδαιμόνιο, λέγοντας ο καθένας και από μια άλλη τιμή. Άλλος έλεγε 7, άλλος 5, άλλος 4 και άλλος 3 φορές. Έτσι χρειάστηκε να τροποποιήσω την ερώτηση:

Δάσκαλος: Υπάρχει τρόπος να διαπιστώσουμε, πόσες φορές μεγαλύτερες είναι οι πλευρές του μεγάλου τριγώνου, από αυτές του μικρού;

Η αναμενόμενη απάντηση δεν άργησε να έρθει από τον Γιώργο:

Γιώργος: Ναι θα πάρουμε το μικρό τρίγωνο και θα το βάζουμε πάνω στην πλευρά του, να δούμε πόσες φορές χωράει.

Δάσκαλος: Πολύ ωραία. Έλα να μας το δείξεις.

Γιώργος: …είναι λίγο δύσκολο…να έτσι…1,2,3…4 φορές.

Κάθε φορά που μετρούσε, έβαζε και ένα σημάδι με τον μαρκαδόρο. Κατάφερε έτσι να βρει ότι η κάθετη πλευρά του μικρού τριγώνου, χωρούσε τέσσερις φορές στην κάθετη πλευρά του μεγάλου. Το ίδιο έκαναν στη συνέχεια η Μαριάννα και ο Ραφαήλ για τις άλλες δυο πλευρές.

Ωστόσο όταν τελείωσαν όλα τα παιδιά και ήρθε η ώρα να μετρήσουμε, διαπιστώσαμε πως ενώ οι δυο πλευρές μας έδωσαν από τέσσερις φορές, η τρίτη πλευρά μας έδωσε πέντε φορές. Τότε ρώτησα την τάξη αν αυτό ήταν σωστό. Η μισή τάξη συμφώνησε, οι υπόλοιποι όμως διαφώνησαν, χωρίς όμως να γνωρίζουν τι λάθος έγινε. Αυτό ίσως δείχνει τη διαισθητική αντίληψη των παιδιών ότι και η τρίτη πλευρά των τριγώνων θα έπρεπε να ακολουθήσει την αναλογία των τριγώνων, χωρίς ακόμη βέβαια να μπορούν να το αιτιολογήσουν. Τότε ένας μαθητής, ο Θωμάς, είπε:

Θωμάς: Ξέρω τι πήγε λάθος. Βάλαμε λάθος το τρίγωνο. Να έτσι πρέπει να μπει…1,2,3…4 φορές.

Όλη η τάξη συμφώνησε και μπόρεσε να βγει το συμπέρασμα πως όλες οι πλευρές του μικρού τριγώνου, ήταν πράγματι τέσσερις φορές μικρότερες από τις αντίστοιχες του μεγάλου.

Ρώτησα τότε τους μαθητές, τι συμπέρασμα έβγαζαν για τα δυο τρίγωνα, δηλαδή ποια σχέση τα συνέδεε. Η απάντηση που δόθηκε, έδειξε ότι μάλλον υπήρχε μια σύγχυση μεταξύ των εννοιών «ίσα» και «όμοια»:

Τάξη: Είναι ίσα!

Δάσκαλος: Ίσα; Είστε σίγουροι γι αυτό;

Σπύρος: Όχι κύριε…είναι όμοια!

Δάσκαλος: Και με ποιο λόγο συνδέονται;

Ελένη: (δείχνοντας τις πλευρές των τριγώνων) 1 προς 4,…1 προς 4,…1 προς 4.

Δάσκαλος: Και όταν έχουμε ίσους λόγους…τότε τι έχουμε;

Τάξη: (δυνατά) αναλογία!

Δάσκαλος: Δηλαδή, οι πλευρές των τριγώνων συνδέονται με μια σχέση αναλογίας.

Στο σημείο αυτό έγινε η σύνδεση της κατάστασης με τα τρίγωνα που σχηματίζονται από το εργαλείο του Errard: Ρωτήθηκαν αν τα τρίγωνα αυτά, τους θύμιζαν κάτι από τα προηγούμενά μας μαθήματα. Όλοι απάντησαν πως τους θύμιζαν τα τρίγωνα που σχηματίζονται μεταξύ του εργαλείου και του αντικειμένου προς στόχευση. Βγήκε επομένως το συμπέρασμα πως θα έπρεπε και στα τρίγωνα αυτά να ισχύει η αναλογία των πλευρών τους. Αυτό θα το επιβεβαιώναμε στην πράξη την επόμενη ώρα, μετρώντας με το εργαλείο και καταγράφοντας τις μετρήσεις μας.

Ενώ λοιπόν η ώρα έφτανε στο τέλος της και πίστευα πως είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία, η ερώτηση ενός μαθητή, του Χάρη μας έδωσε την αφορμή, αν και ήταν εκτός των διδακτικών μας στόχων, να παρατείνουμε λίγο την παρέμβαση. Συγκεκριμένα ο Χάρης ρώτησε αν και τα εμβαδά των δυο τριγώνων ακολουθούν την ίδια αναλογία.

Για μια ακόμη φορά η τάξη διχάστηκε και ακούστηκαν διάφορες γνώμες. Χρειάστηκε να ανατρέξουμε στον πίνακα με τις μετρήσεις που είχαμε κάνει στην προηγούμενη δραστηριότητα, να κάνουμε ένα, δυο αριθμητικά παραδείγματα για να καταλάβουν πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Αυτό μας θυμίζει μια σειρά άλλων ερευνών που έχουν ως θέμα τους τη σχέση των εμβαδών μεταξύ ομοίων τριγώνων και τις παρανοήσεις που σχηματίζονται στους μαθητές γύρω από αυτές τις έννοιες.

Η επόμενη διδακτική ώρα ξεκίνησε με τη διανομή του $3^{ου}$ Φύλλου Εργασίας (Παράρτημα Α, σελ.166). Στη πρώτη δραστηριότητα υπήρχε ένας πίνακας με τρεις στοχεύσεις, όπου δινόταν τα μέτρα των καθέτων πλευρών (ΑΔ, ΑΒ) και των βάσεων (ΔΕ, ΒΓ) των δύο τριγώνων. Ζητήθηκε από τις ομάδες να γράψουν τι παρατηρούν για κάθε στόχευση ξεχωριστά. Όλες οι ομάδες κατέληξαν στο συμπέρασμα, ότι στην $1^{η}$ στόχευση τα ζεύγη τιμών έχουν μια σχέση 1/6, στη $2^{η}$ στόχευση 1/12 και στη $3^{η}$ στόχευση 1/10.

Στη δεύτερη δραστηριότητα δημιούργησαν τα κλάσματα ΑΔ/ΑΒ και ΔΕ/ΒΓ για κάθε στόχευση ξεχωριστά και παρατήρησαν τα κλάσματα. Όλες οι ομάδες δημιούργησαν τα παρακάτω κλάσματα: 20/120 και 50/300 για την $1^{η}$ στόχευση, 10/120 και 50/600 για τη $2^{η}$ στόχευση, 12/120 και 80/800 για την $3^{η}$ στόχευση. Κατέληξαν πως τα ζεύγη κλασμάτων είναι ισοδύναμα. Είπαμε επίσης πως τα κλάσματα αυτά αναπαριστούσαν λόγους.

Στην τρίτη δραστηριότητα έπρεπε να κάνουν τις διαιρέσεις των παραπάνω κλασμάτων. Για οικονομία χρόνου τους επιτράπηκε να χρησιμοποιήσουν και υπολογιστή για τις πράξεις τους. Γρήγορα όλες οι ομάδες κατέληξαν πως το πρώτο ζευγάρι κλασμάτων έδινε πηλίκο ίσο με 0,16, το δεύτερο ζευγάρι 0,083 και το τρίτο ζευγάρι 0,1. Από αυτά που ήδη γνώριζαν, μπόρεσαν εύκολα να διαπιστώσουν πως τα κλάσματα που είχαν σταθερό πηλίκο ήταν ανάλογα. Άρα τα ζεύγη των λόγων που δημιουργούνταν από τις στοχεύσεις ήταν μεταξύ τους ανάλογα.

Η τέταρτη δραστηριότητα καλούσε τους μαθητές να εκτιμήσουν τι θα ίσχυε και για τα μήκη των πλευρών της υποτείνουσας των τριγώνων. Δηλαδή να σκεφτούν τι θα ίσχυε και για τη τρίτη πλευρά των τριγώνων. Εύκολα οι ομάδες υπέθεσαν ότι το ίδιο θα ίσχυε και για αυτές τις πλευρές. Έτσι, όλοι είπαν πως και αυτές οι πλευρές, δηλαδή οι ΑΕ και ΑΓ θα ήταν ανάλογες.

Αυτό ζητούσε να επιβεβαιώσει στην πράξη η πέμπτη δραστηριότητα, όπου ζητούνταν από τα παιδιά να εφαρμόσουν στο εργαλείο του Errard τα δεδομένα της $1^{ης}$

στόχευσης από την πρώτη δραστηριότητα, στη συνέχεια να μετρήσουν με μετροταινία τα ΑΕ και ΑΓ και να εξετάσουν στην πράξη, αν ίσχυε και γι αυτές τις πλευρές η αναλογία. Οι μετρήσεις έδειξαν ότι ΑΕ/ΑΓ = 50/300 εκ. Άρα κατέληξαν πως η αναλογία ίσχυε και για αυτές τις πλευρές.

Η έκτη και τελευταία δραστηριότητα του φυλλαδίου τους οδήγησε στο τελικό συμπέρασμα, ότι δηλαδή: Όλες οι πλευρές των τριγώνων ήταν ανάλογες.

Οι παραπάνω δραστηριότητες αν και πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια των ομάδων, είχαν κοινή θέαση από την ολομέλεια των μαθητών. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την ομοιογένεια των συμπερασμάτων και των αποτελεσμάτων, αφού πολύ συχνά οι ομάδες συνεργαζόντουσαν. Στην παρούσα φάση αυτό ήταν επιθυμητό, καθώς σκοπός της παρέμβασης δεν ήταν να διερευνήσουμε την υπολογιστική ικανότητα των ομάδων, αλλά καθοδηγούμενοι διακριτικά, να οδηγηθούν στην ανακάλυψη της βασικής ιδιότητας των ομοίων τριγώνων, που δεν ήταν άλλη από την αναλογία των πλευρών τους. Μετά από αυτό, οι μαθητές ήταν πλέον ικανοί να διαχειριστούν το εργαλείο και να προχωρήσουν σε μετρήσεις στην αυλή του σχολείου.

Η εργασία στην παρέμβαση αυτή, κατάφερε να ακολουθήσει σε μεγάλο βαθμό τον αρχικό της σχεδιασμό. Οι μαθητές εργάστηκαν στο Σημειωτικό-Λεκτικό επίπεδο με προσφυγή στο Εργαλειακό. Χρησιμοποίησαν δυο όμοια τρίγωνα στον πίνακα, συγκρίνοντας τις πλευρές τους, για να ανακαλύψουν τη σχέση που τα συνδέει. Τα σχήματα λειτούργησαν ως εργαλεία, μέσω των οποίων αναδείχθηκε η ιδιότητα της αναλογίας των πλευρών τους. Η διαπίστωση αυτή μεταφέρθηκε και για τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τη χρήση του εργαλείου του Errard και επιβεβαιώθηκε στην πράξη από τη χρήση του. Οι μετρήσεις του εργαλείου εμφανίζονται τώρα ως το μέσο επικύρωσης της κατάστασης. Από τη σκοπιά της εργαλειακής διάστασης της γεωμετρικής εργασίας, μπορούμε να πούμε πως το εργαλείο του Errard δημιούργησε δύο ορθογώνια τρίγωνα στο χώρο με σχέση αναλογίας μεταξύ τους. Η διαπίστωση αυτή, είδαν με μετρήσεις, ότι ισχύει για όλες τις πλευρές των τριγώνων. Έτσι οι μαθητές κατέληξαν στον συλλογισμό πως τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ανάλογα, άρα ο λόγος της αναλογίας ισχύει για όλες τις πλευρές των τριγώνων.

5η Διδακτική Παρέμβαση

Η εργασία στη φάση αυτή πραγματοποιήθηκε σε ατομικό επίπεδο. Στην αρχή της πρώτης ώρας μοιράστηκε στους μαθητές το $4^{ο}$ Φύλλο Εργασίας, όπου τους δίνονταν σε ένα πρόχειρο σχήμα, χωρίς την τήρηση των αναλογιών, δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα με κοινή κορυφή Α, η ΑΔ = 30εκ. και η ΑΒ = 90εκ. Τα παιδιά έπρεπε να υπολογίσουν το λόγο των πλευρών. Στη συνέχεια δίνονταν η ΑΕ = 50εκ. και η ΔΕ = 40εκ. και ζητούνταν η ΑΓ και η ΒΓ. Τα αποτελέσματα για την πρώτη άσκηση έδειξαν τα εξής:

Μαθητές	Αν γνωρίζω πως ΑΒ=90εκ. και ΑΔ=30εκ. Πόσες φορές μικρότερη είναι η ΑΔ από την ΑΒ;	Ποιος είναι ο λόγος των πλευρών;	Αν γνωρίζω πως η ΑΕ=50εκ., πόσο θα είναι η ΑΓ;	Αν γνωρίζω πως η ΔΕ=40εκ., πόσο θα είναι η ΒΓ;
Βιβή	3 φορές	30/90	100εκ.	80εκ.
Κωνσταντίνος	60εκ.	45εκ.+45εκ. προς ΑΔ	100εκ.	80εκ.
Σοφία	3 φορές	30/90 ή 1/3	100εκ.	80εκ.
Παναγιώτης	3 φορές	30/90 ή 1/3	150εκ.	120εκ.
Θωμάς	3φορές, αφού 90:30=3	30/90	90εκ.	80εκ.
Χάρης	3 φορές	1/3	150εκ.	120εκ.
Μαριάννα	3 φορές	30/90 ή 1/3	150εκ.	120εκ.
Σπύρος	3 φορές	30/90 ή 1/3	150εκ.	120εκ.
Ελένη	3 φορές	30/100, 90/100	100εκ.	80εκ.
Γιώργος	3 φορές	30/90 ή 1/3	150εκ.	120εκ.
Αντζελίνα	60εκ.	90/30	100εκ.	80εκ.
Ραφαήλ	3 φορές	30/90 ή 1/3	150εκ.	120εκ.
Θάνος	60εκ.	90/30	100εκ.	80εκ.
Χρόνης	3 φορές	30/90	150εκ.	80εκ.
Αναστασία	60εκ.	30/90 ή 1/3	100εκ.	70εκ.
Στέφανος	3 φορές	90/30	50εκ.	80εκ.
Άγγελος Μ.	60εκ.	30/90 ή 1/3	100εκ.	80εκ.
Νίκος	2 φορές	30/90	100εκ.	80εκ.
Ιωάννης	3 φορές	90/30 ή 3/1	150εκ.	80εκ.
Μαρία	30+30+30=90εκ.,3 φορές μικρότερη	30/90	100εκ.	70εκ.
Άγγελος Η.	3 φορές	1/3	110εκ.	120εκ.
Βασιλική	3 φορές	30/90 ή 1/3	140εκ.	140εκ.
Ραφαέλλα	3 φορές	30/90	100εκ.	80εκ.

Πίνακας 17: Αποτελέσματα πρώτης άσκησης στο Φ.Ε. 4.

Παρατηρώντας τις απαντήσεις των παιδιών, βλέπουμε πως στην πρώτη ερώτηση, όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο, 17 μαθητές απάντησαν σωστά, ότι δηλαδή η ΑΔ είναι 3 φορές μικρότερη από την ΑΒ και 6 μαθητές απάντησαν λάθος. Από αυτούς οι 5 έκαναν αφαίρεση, ενώ ο 1 απάντησε πως είναι 2 φορές μικρότερη.

Από τα παιδιά που απάντησαν σωστά 2 αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους. Ο Θωμάς χρησιμοποίησε την διαίρεση, ενώ η Μαρία χρησιμοποίησε διαδοχικές προσθέσεις. Βλέπουμε πως εμμένει στην προσθετική στρατηγική.

Ωστόσο μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των πέντε μαθητών που απάντησαν «60εκ.» και του Νίκου, ο οποίος απάντησε «2 φορές». Στη συζήτηση που ακολούθησε μετά τη συμπλήρωση του φυλλαδίου, ρωτήσαμε τα παιδιά αυτά γιατί έδωσαν αυτές τις απαντήσεις. Αυτοί που απάντησαν «60εκ.» είπαν πως παρασύρθηκαν και έκαναν αφαίρεση αντί για διαίρεση. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση του Κωνσταντίνου και του Θάνου:

Κων/νος: Το βρήκα 60εκ.

Θάνος; Κι εγώ, τόσο το βρήκα,

Δάσκαλος: Πώς το βρήκατε;

Κων/νος: Κάναμε αφαίρεση…90-30=60εκ.

Δάσκαλος: Πιστεύετε ότι χρειαζόταν αφαίρεση;

Όλοι: Όχι, όχι, διαίρεση έπρεπε να κάνουμε!

*Γιώργος: Το λέει ξεκάθαρα: «πόσες **φορές** μικρότερη»*

Δάσκαλος: Δηλαδή ποια σχέση βλέπετε πως υπάρχει μεταξύ των δυο πλευρών, πρόσθεσης – αφαίρεσης ή πολλαπλασιασμού – διαίρεσης;

Όλοι: Πολλαπλασιασμού – Διαίρεσης!

Στη συνέχεια ρώτησα τον Νίκο γιατί απάντησε «δυο φορές» και η απάντηση που μου έδωσε, ήταν πράγματι αποκαλυπτική για τον τρόπο σκέψης των μαθητών που παρασύρθηκαν από το σχήμα:

Νίκος: Το έβαλα 2 φορές, γιατί η ΑΔ φαίνεται να'ναι η μισή από την ΑΒ

Δάσκαλος: Φαίνεται…εννοείς στο σχήμα;

Νίκος: Ναι

Δάσκαλος: Μα, η άσκηση σου λέει πως ΑΔ=30εκ. και ΑΒ=90εκ.

Νίκος: Ναι, αλλά φαίνεται μισή…

Δάσκαλος: Το σχήμα είναι πρόχειρο. Οι διαστάσεις είναι που ισχύουν. Μάλλον σε παρέσυρε το σχήμα στο φυλλάδιο.

Νίκος: Ναι, ναι.

Η άποψη αυτή ενισχύεται και από τις επόμενες απαντήσεις των παιδιών. Συγκεκριμένα στην τρίτη ερώτηση μόνο 8 μαθητές απάντησαν σωστά, ότι δηλαδή η ΑΓ ήταν 150εκ., 11 μαθητές απάντησαν λάθος, ότι ήταν 100εκ. και τέλος 4 μαθητές έδωσαν άλλες λάθος απαντήσεις.

Κάτι αντίστοιχο έγινε και στην τέταρτη ερώτηση, όπου 7 μαθητές απάντησαν σωστά, πως ήταν ΒΓ = 120εκ., 13 μαθητές απάντησαν λάθος πως ήταν 80εκ. και τέλος 3 μαθητές έδωσαν άλλη λάθος απάντηση.

Η συζήτηση που ακολούθησε μας επιβεβαίωσε πως και σε αυτές τις περιπτώσεις το σχήμα λειτούργησε παραπλανητικά στη κρίση τους:

Νίκος: Εγώ την ΑΓ, την έβαλα 100εκ.

Δάσκαλος: Πώς το σκέφτηκες;

Νίκος: Αφού η ΑΕ είναι 50εκ., τότε η ΑΓ που είναι διπλάσια, θα είναι 100εκ.

Δάσκαλος: Είναι διπλάσια η ΑΓ;

Σπύρος: Τον παρέσυρε το σχήμα!

Νίκος: Να το μετρήσω (σκύβει στο σχήμα)

Δάσκαλος: Ποιο;

Νίκος: Το ΑΓ.

Παναγιώτης: Μα αυτό σου λέμε! Δεν παίζει ρόλο το σχήμα!

Δάσκαλος: Τι πιστεύετε για τη ΒΓ;

Ιωάννης: Έβαλα ΒΓ = 80εκ., γιατί φαίνεται (στο σχήμα) να'ναι η μισή από την ΔΕ που είναι 80εκ.

Παρόμοια είναι και η περίπτωση του Θωμά, ο οποίος οπτικά συγκρίνει τις πλευρές των τριγώνων και πιστεύει ότι η ΑΓ = 90εκ.:

Θωμάς: Εγώ έβαλα την ΑΓ = 90 εκ. γιατί μου φάνηκε (στο σχήμα) ίση με την ΑΒ.

Άλλη μια παρόμοια περίπτωση, που ωστόσο επικράτησε ένας άλλος τρόπος σκέψης ήταν η απάντηση της Μαρίας:

Μαρία: Εγώ έβαλα ΒΓ = 70εκ. Από την Ε έφερα μια κάθετο προς τη ΒΓ την ΕΚ. Τότε η ΒΚ θα είναι 40εκ, όσο και ΔΕ. Και η ΚΓ, που φαίνεται λίγο μικρότερη περίπου 30εκ. θα είναι ΒΚ+ΚΓ= 70εκ.

Δάσκαλος: Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

Παναγιώτης: Νομίζω πως δεν είναι σωστό, γιατί το σχήμα δεν έχει τις αληθινές διαστάσεις.

Στις σωστές απαντήσεις της τρίτης ερώτησης φαίνεται ότι επικράτησε η μέθοδος των «χιαστί» γινομένων και η πολλαπλασιαστική λογική:

*Χάρης: Εγώ χρησιμοποίησα εξίσωση, δηλαδή είπα: αφού ο λόγος είναι 1/3 τότε θα είναι και 50/χ άρα χ = 3 * 50, χ = 150εκ.*

Σπύρος (και άλλοι): Κι εγώ έτσι το έκανα. Μόνο που το υπολόγισα με τον νου.

Το ίδιο ίσχυσε και για την τέταρτη ερώτηση:

Γιώργος: Εγώ έβαλα ΒΓ = 120εκ., γιατί ο λόγος είναι 1/3 άρα η ΒΓ θα είναι τριπλάσια από την ΔΕ.

Δάσκαλος: Συμφωνείτε όλοι με την επιχειρηματολογία του Γιώργου;

Όλοι: Ναι.

Χάρης: Κι εγώ συμφωνώ, μόνο που χρησιμοποίησα πάλι εξίσωση.

Στη δεύτερη ερώτηση σχεδόν όλοι, δηλαδή 22 μαθητές απάντησαν σωστά και μόνο 1 απάντησε λάθος. Πάντως, παρατηρεί κανείς ότι οι περισσότερες απαντήσεις, δηλαδή οι 17 από τις 23, σχηματίζουν το λόγο 1 προς 3, δηλαδή ΑΔ/ΑΒ και όχι το αντίστροφο. Θέλοντας λοιπόν να ελέγξω την κατανόηση των μαθητών για τον σχηματισμό των λόγων έκανα την εξής ερώτηση:

Δάσκαλος: Ποιος είναι ο λόγος των πλευρών;

Ιωάννης: Εγώ έκανα ΑΒ/ΑΔ = 90/30 = 3/1.

Σπύρος: Λάθος!...δηλαδή ...μικρό το κακό. Εγώ έβαλα ΑΔ/ΑΒ = 30/90 =1/3.

Δάσκαλος: Πού βρίσκεται το λάθος;

Παναγιώτης: Να…το κλάσμα 1/3, είναι καλύτερα από το κλάσμα 3/1!

Εδώ φαίνεται ξεκάθαρα μια παρανόηση των μαθητών, κατά την οποία όπως περιγράφει και η Lamon (2012), συχνά τα παιδιά αντιμετωπίζουν τους λόγους ως κλάσματα, όπου δεν μπορείς να αντιστρέψεις τους όρους. Χρειάστηκε λοιπόν να αφιερώσουμε λίγο περισσότερο χρόνο στο συγκεκριμένο ζήτημα, προκειμένου να ξεπεραστεί η δυσκολία:

Δάσκαλος: Ο Σπύρος είπε ΑΔ/ΑΒ, ενώ ο Ιωάννης είπε ΑΒ/ΑΔ. Πιστεύετε ότι κάποιος από τους δυο σχημάτισε το λόγο λάθος; Κοιτάξτε και το σχήμα!

Σοφία: Το ίδιο είναι.

Δάσκαλος: Και βέβαια! Αρκεί πάντοτε να παίρνω τις πλευρές των τριγώνων με την ίδια σειρά. Να μην τις μπερδέψω. Όμως στα κλάσματα είναι το ίδιο αν πω 1/3 ή 3/1;

Όλοι: Όχι!

Μαριάννα: Στα κλάσματα το 1/3 είναι μικρότερο από τη μονάδα, ενώ το 3/1 είναι ίσο με 3.

Ένα άλλο σημείο που εστίασε την προσοχή μου ήταν η απάντηση του Κωνσταντίνου: «45εκ.+45εκ. προς ΑΔ». Η απάντηση αυτή, αν και θεωρείται αρχικά σωστή, αφού τελικά θα έχουμε το λόγο 90 προς 30, στην πραγματικότητα δεν είναι, αφού και εδώ ο μαθητής παραπλανήθηκε από το σχήμα. Την υποψία μου αυτή μου την επιβεβαίωσε ο ίδιος με την απάντηση που μου έδωσε:

Δάσκαλος: Γιατί έβαλες στην απάντησή σου 45εκ.+45εκ.;

Κωνσταντίνος: Να, αφού αυτή (η ΑΒ) χωρίζεται στα δύο, είναι (ΑΔ+ΑΒ) 45εκ.+45εκ.

Θεωρεί δηλαδή την ΑΔ=ΔΒ=45εκ. προφανώς εξαιτίας του σχήματος.

Έτσι λοιπόν, ενώ αρχικά είχε εκτιμηθεί πως η πρώτη ώρα της διδακτικής παρέμβασης δεν θα είχε ιδιαίτερα προβλήματα, είδαμε πως ποικίλα θέματα προέκυψαν, τα οποία έφεραν στην επιφάνεια κάποιες δυσκολίες. Αυτές έχουν παγιωθεί ως πρότερη γνώση και συχνά λειτουργούν ως εννοιολογικά εμπόδια.

Κατά τη δεύτερη διδακτική ώρα, οι μαθητές εργάστηκαν στην αυλή ομαδικά. Σύμφωνα με την τέταρτη άσκηση του 4ου Φ.Ε, έπρεπε η κάθε ομάδα να πραγματοποιήσει από μια στόχευση με το όργανο, παρουσία των υπολοίπων ομάδων, να καταγράψει το αποτέλεσμα της μέτρησής τους και στη συνέχεια να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμά τους πραγματοποιώντας τη μέτρηση με τη μετροταινία. Έτσι θα δινόταν σε όλες τις ομάδες η ευκαιρία να πραγματοποιήσουν από μια μέτρηση, να παρακολουθήσουν την εργασία των συμμαθητών τους και στη συνέχεια να συζητήσουν για τα αποτελέσματά τους.

Πριν ξεκινήσουν οι ομάδες, προηγήθηκε μια συζήτηση για τη λειτουργικότητα του οργάνου. Οι μαθητές ρωτήθηκαν αν γνώριζαν, τι θα έπρεπε να προσέξουν σχετικά με τη χρήση του εργαλείου, καθώς και το λόγο που θα χρησιμοποιούσαν στις μετρήσεις:

Χρόνης: Θα πρέπει να προσέξουμε να'ναι κάθετο… και να στοχεύουμε σωστά, αλλιώς δεν μετράει καλά.

Δάσκαλος: Και ποιος είναι ο λόγος που θα χρησιμοποιήσουμε στις μετρήσεις μας;

Θάνος: 1 προς 4.

Δάσκαλος: Από πού το συμπέρανες;

Θάνος: Επειδή αυτό το λόγο είχαμε χρησιμοποιήσει στις ασκήσεις (προηγούμενη δραστηριότητα φυλλαδίου).

Μαριάννα: Όχι, χρειάζεται να γνωρίζουμε τις αποστάσεις στην κατακόρυφη ράβδο. Το λόγο.

Γιώργος: Είναι 20/120, δηλαδή 1/6.

Δάσκαλος: Πολύ ωραία! Και σε τι θα τον χρειαστούμε αυτόν τον λόγο;

Παναγιώτης: Για να βρούμε τη ΒΓ. Αφού η ΒΓ θα είναι 6 φορές η ΔΕ.

Από τη συζήτηση προέκυψε, ότι οι περισσότεροι τουλάχιστον, μαθητές είχαν κατανοήσει τις βασικές αρχές λειτουργίας του εργαλείου. Στη συνέχεια άρχισαν οι ομάδες τις στοχεύσεις. Κατά την καταγραφή των αποτελεσμάτων, διαπιστώθηκε πως υπήρχε μια μικρή διαφοροποίηση στα αποτελέσματα των μετρήσεων μεταξύ του εργαλείου και της επιβεβαίωσης με την μετροταινία. Οι μαθητές μπόρεσαν να δώσουν αξιόλογες εξηγήσεις γι αυτό:

Ομάδες	Μέτρηση απόστασης με όργανο	Μέτρηση απόστασης με μετροταινία
Α΄	4,60μ.	4,80μ.
Β΄	2,40μ.	2,40μ.
Γ΄	3μ.	3μ.
Δ΄	3,90μ.	3,80μ.

Πίνακας 18: Αποτελέσματα μετρήσεων με το όργανο και τη μετροταινία.

Μαριάννα: Μπορεί να μη στοχεύσαμε ακριβώς στους κώνους.

Παναγιώτης: Η οριζόντια ράβδος χωρίζεται ανά 5εκ. Η μέτρηση μας μπορεί να είναι ανάμεσα…

Αντζελίνα: Μπορεί να μην ήταν όρθιο (κάθετο) το όργανο.

Στο σημείο αυτό προέκυψε μια ενδιαφέρουσα ερώτηση, η οποία μας έδωσε την αφορμή για περαιτέρω συζήτηση:

Γιώργος: Πρέπει να στοχεύουμε στη βάση ή στην κορυφή του κώνου;

Δάσκαλος: Για να απαντήσετε, σκεφτείτε το σχήμα στο φυλλάδιο εργασιών.

Θάνος: Στη βάση. Για να σχηματιστεί σωστά το τρίγωνο, πρέπει να στοχεύουμε στη βάση του τριγώνου.

Δάσκαλος: Και αν ο κώνος βρισκόταν σε μια κατηφόρα;

Κωνσταντίνος: Ναι, θα μπορούσαμε. Απλά θα βάζαμε το εργαλείο λίγο πλάγια για να έρθει κάθετο στο έδαφος.

Δάσκαλος: Τότε όμως το νήμα της στάθμης δεν θα έδειχνε πως το εργαλείο είναι κατακόρυφο προς το κέντρο της γης. Τι λέτε;

Σπύρος: Τότε δε γίνεται, γιατί τα τρίγωνα δεν θα ήταν όμοια. Το ένα τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο και το άλλο όχι.

Δάσκαλος: Επομένως τα δυο τρίγωνα δε θα είχανε ίσες γωνίες! Άρα αυτός είναι ένας περιορισμός που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας.

Η συζήτηση συνεχίστηκε στην τάξη, όπου εκεί οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να διατυπώσουν τα γενικά συμπεράσματα που αποκόμισαν από τη μέχρι τώρα εμπειρία τους από τη χρήση του εργαλείου:

Σπύρος: Με το εργαλείο του Errard, μπορούμε να μετρήσουμε απρόσιτες αποστάσεις, όχι όμως με τόσο μεγάλη ακρίβεια.

Γιώργος: Το μέτρο (η μετροταινία) δεν είναι το μοναδικό εργαλείο για να μετράμε αποστάσεις. Υπάρχει και το εργαλείο του Errard και ίσως και άλλα.

Χάρης: Χρησιμοποιώντας την αναλογία μπορώ με ένα εργαλείο μικρού μήκους, να μετρήσω μεγάλες αποστάσεις.

Ελένη: Το εργαλείο στηρίζει τη λειτουργία του στους λόγους και στις αναλογίες.

Στο σημείο αυτό, αφού πλέον οι μαθητές είχαν εξοικειωθεί με τη λειτουργία του εργαλείου και είχαν πλέον αποκαλυφθεί οι ιδιότητες του, ήρθε η κατάλληλη στιγμή για να ανακαλύψουν μια ακόμη πτυχή της λειτουργικότητάς του:

Δάσκαλος: Θα εμπιστευόσασταν επομένως το εργαλείο, για να πραγματοποιήσουμε μετρήσεις στην αυλή του σχολείου;

Χάρης: Ναι αλλά για μικρές αποστάσεις, ως 6μ.

Δάσκαλος: Και αν έπρεπε να μετρήσουμε μεγαλύτερες αποστάσεις; Π.χ 20μ. ή 50μ;

Μαριάννα: Ναι, θα βάζαμε ένα σημαδάκι στα 6μ και θα συνεχίζαμε…

Δάσκαλος: Πολύ ωραία! Και αν σας έλεγα ότι μπορώ με αυτό το εργαλείο να μετρήσω και μεγαλύτερες αποστάσεις; Για σκεφτείτε το… Βάλτε στο μυαλό σας λίγο τους λόγους… Μπορώ να κάνω κάτι να αλλάξω το λόγο;

Ραφαήλ: Ναι. Θα ανεβάσω λίγο αυτό (τον κινητό σύνδεσμο)…εδώ…και τότε θα αλλάξει ο λόγος.

Δάσκαλος: Μπράβο! Ορίστε το βάζω στα 10εκ. Ποιος είναι τώρα ο λόγος στην κάθετη ράβδο;

Θωμάς: 10/120…δηλαδή 1 προς 12. Μπορώ να μετρήσω ως 12μ.!

Στέφανος: Και γιατί να μην το βάζαμε στα 5εκ;

Δάσκαλος: Θεωρητικά ναι, θα μπορούσαμε. Για κοιτάξτε όμως…(το μετακίνησα στα 5εκ.), γίνεται σχεδόν παράλληλο με τη ράβδο στόχευσης και είναι δύσκολο να μετρήσετε.

Η δραστηριότητα έκλεισε με την υπόσχεση ότι την επόμενη φορά θα επιχειρούσαμε να μετρήσουμε αποστάσεις στο χώρο της αυλής, κάτι που όπως φάνηκε άρεσε πολύ στα παιδιά.

Όσον αφορά τον αρχικό σχεδιασμό της εργασίας μας στο πλαίσιο των ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$, είδαμε πως οι μαθητές εργάστηκαν πάλι στο Σημειωτικό-Λεκτικό επίπεδο, με προσφυγή προς το Εργαλειακό επίπεδο. Η ιδιότητα της αναλογίας των πλευρών των τριγώνων που προέκυψε από την προηγούμενη δραστηριότητα, χρησιμοποιήθηκε τώρα στην επίλυση ενός προβλήματος. Έγινε χρήση ενός πρόχειρου σχήματος και οι διαστάσεις τοποθετήθηκαν πάνω σε αυτό. Βλέπουμε δηλαδή μια απόπειρα μετακίνησης προς τη GII, όπου τα σχήματα αποτελούν μεν στήριγμα για το συλλογισμό, αλλά η μέτρηση πάνω σε αυτά δεν είναι αποδεκτή. Εδώ τα αποτελέσματα μας έδειξαν πως ο αρχικός μας σχεδιασμός δεν έφερε τα αναμενόμενα αποτελέσματα, καθώς η εμμονή αρκετών - περισσότερων των μισών - μαθητών με το σχήμα ήταν πιο ισχυρή από ότι αρχικά πιστεύαμε. Επίσης συνειδητή και ηθελημένη ήταν η μετακίνηση από το παράδειγμα $ΜΧΕ_{Γεωμετρία}$ στο $ΜΧΕ_{Αριθμοί}$, αφού κύριο λόγο στην δραστηριότητα είχαν οι αριθμητικοί υπολογισμοί. Πολύ θετικά αποτελέσματα όμως έφερε η δεύτερη φάση της παρέμβασης, όπου ο αρχικός σχεδιασμός φαίνεται ότι πρόσφερε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Το εργαλείο χρησιμοποιήθηκε για να επικυρώσει τη λειτουργικότητά του, με μετρήσεις στο χώρο της αυλής που επιβεβαιώθηκαν από τη χρήση της μετροταινίας. Έτσι τώρα επελέγη το εργαλείο (instrumentalisation) για ένα μαθηματικό έργο, δηλαδή τη μέτρηση αποστάσεων, ενώ πηγή της εγκυρότητας αποτέλεσε η σύγκριση των αριθμητικών τιμών που προέκυψαν από τη χρήση της μετροταινίας.

6η Διδακτική Παρέμβαση

Στην παρέμβαση αυτή οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά στην αυλή του σχολείου. Μέτρησαν την αυλή και το κτήριο του σχολείου. Χρησιμοποίησαν το εργαλείο του Errard, το οποίο εμπιστεύονταν για τις μετρήσεις τους, αφού πλέον ήταν γνωστές οι ιδιότητες του, η λειτουργία του, αλλά και οι περιορισμοί του. Τα δεδομένα των μετρήσεων καταγράφηκαν σε ένα πρόχειρο σχέδιο, το οποίο αναπαριστούσε το σχολείο με την αυλή του.

Την πρώτη ώρα πήραν οι ομάδες από ένα Φύλλο Εργασίας 5 (Παράρτημα Α, σελ.166) και κατέβηκαν στην αυλή. Εκεί σύμφωνα με τις οδηγίες θα έπρεπε να μετρηθούν τέσσερις διαστάσεις: τα μήκη και τα πλάτη του κτηρίου και της αυλής. Αποφασίστηκε μεταξύ των ομάδων, τι θα αναλάμβανε η κάθε μια ομάδα και αμέσως ξεκίνησαν τις μετρήσεις.

Σύμφωνα με όσα είχαν μάθει από τις προηγούμενες δραστηριότητες, όλες οι ομάδες είχαν θέσει το κινητό σύνδεσμο του εργαλείου στη θέση που θα τους εξασφάλιζε τη μέγιστη εμβέλεια στις μετρήσεις τους, δηλαδή στα 10εκ. Έτσι σύμφωνα με το λόγο 1/12, θα μπορούσαν να μετρούν αποστάσεις έως 12μ. Ακόμη γνώριζαν πως τις μεγαλύτερες αποστάσεις θα έπρεπε να τις μετρήσουν διαδοχικά, βάζοντας κάθε φορά κάποια σημάδια.

Σύντομα η ομάδα που είχε αναλάβει να μετρήσει την πρόσοψη του κτηρίου, η οποία ήταν άλλωστε και η μικρότερη διάσταση, τελείωσε την εργασία της. Τότε κάποιο παιδί από την ομάδα, ο Θωμάς, ρώτησε αν θα χρειαζόταν να μετρήσουν και από την άλλη πλευρά του κτηρίου, για να πάρει αμέσως την απάντηση από τη Σοφία πως κάτι τέτοιο δεν ήταν απαραίτητο μιας και το κτήριο ήταν ορθογώνιο. Βλέπουμε δηλαδή, ότι τα παιδιά χρησιμοποίησαν το σχήμα για να αντιληφθούν τις ιδιότητες των παραλληλεπιπέδων στις μετρήσεις τους.

Γενικά η διαδικασία κύλησε ομαλά, οι ομάδες συνεργάστηκαν αρκετά καλά, χωρίς προβλήματα και έδειξαν να είναι εξοικειωμένοι με το εργαλείο.

Αφού τελείωσαν όλοι, συγκεντρωθήκαμε για μια πρώτη καταγραφή και αποτίμηση των αποτελεσμάτων:

Ομάδες	Είδος μέτρησης	Αποτέλεσμα μέτρησης
Α΄	Πλάτος κτηρίου	28μ.
Β΄	Πλάτος αυλής	85μ.
Γ΄	Μήκος κτηρίου	55μ.
Δ΄	Μήκος αυλής	65μ.

Πίνακας 19: Πρώτα αποτελέσματα μέτρησης του κτηρίου και της αυλής.

Αμέσως έγινε αντιληπτό ότι στη μέτρηση του μήκους της αυλής υπήρχε σίγουρα κάποιο λάθος στη μέτρηση, αφού το μήκος του αυλής ήταν μόνο κατά 10μ. μεγαλύτερο από το μήκος του κτηρίου. Αποφασίστηκε επομένως να επαναληφθεί η μέτρηση. Μάλιστα για μεγαλύτερη ασφάλεια, μια άλλη ομάδα θα αναλάμβανε να πραγματοποιήσει την ίδια μέτρηση από την αντίθετη κατεύθυνση.

Μέχρι το τέλος της πρώτης διδακτικής ώρας, οι ομάδες είχαν καταφέρει να πραγματοποιήσουν τις μετρήσεις τους. Αυτή τη φορά οι μετρήσεις έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

Ομάδες	Είδος μέτρησης	Αποτέλεσμα μέτρησης
Α΄	Πλάτος κτηρίου	28μ.
Β΄	Πλάτος αυλής	85μ.
Γ΄	Μήκος κτηρίου	54μ.
Δ΄	Μήκος αυλής	130μ.

Πίνακας 20: Τα αποτελέσματα της επανάληψης της μέτρησης του κτηρίου και της αυλής.

Η επόμενη διδακτική ώρα ξεκίνησε στην τάξη, με τη συμμετοχή όλων των μαθητών. Αρχικά ζητήθηκε από την ομάδα που είχε πραγματοποιήσει την λανθασμένη μέτρηση να προσπαθήσει να εκτιμήσει τι ήταν αυτό που τους οδήγησε στο λάθος αποτέλεσμα. Η συζήτηση που ακολούθησε μας έδωσε αρκετά ενδιαφέροντα στοιχεία και έδειξε ότι οι μαθητές είχαν αντιληφθεί την έννοια των λόγων:

Σπύρος: Απ' ότι βλέπω η αρχική μας μέτρηση, δείχνει ότι ήταν η μισή από τη δεύτερη…μάλλον πρέπει να κάναμε λάθος στον πολλαπλασιασμό.

Δάσκαλος: Ποιον πολλαπλασιασμό εννοείς;

Σπύρος: Να…αντί να πολλαπλασιάζουμε με το 12, πολλαπλασιάζαμε με το 6.

Δάσκαλος: Εννοείς ότι πήρατε λάθος λόγο;

Σπύρος: Ναι αντί για 1/12, πήραμε 1/6 !

Επίσης από τη συζήτηση προέκυψε, πως αντιλαμβάνονταν την πολλαπλασιαστική σχέση που υπήρχε μεταξύ των επαναλαμβανόμενων σφαλμάτων κατά τις μετρήσεις:

Παναγιώτης: Αν έχουμε ένα σφάλμα στη μια μέτρηση, αυτό επαναλαμβάνεται.

Δάσκαλος: Δηλαδή, τι εννοείς;

Παναγιώτης: Να…αν είχαμε 20εκ. σφάλμα σε μια μέτρηση και μετρήσω δέκα φορές με το εργαλείο, τότε το σφάλμα θα γίνει 2μ.!

Κάτι που είχε ιδιαίτερη αξία στη δραστηριότητα αυτή, ήταν το γεγονός ότι αυτή τη φορά το πρόχειρο σχέδιο δεν δημιούργησε κάποια σύγχυση στα παιδιά. Αντιθέτως αυτό το οποίο μέτρησε περισσότερο στην κρίση τους ήταν οι μετρήσεις και τα αριθμητικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, αν και στο σχήμα φαινόταν ότι το πλάτος του κτηρίου ήταν περίπου τα 3/4 του πλάτους της αυλής και το μήκος του κάτι παραπάνω από το μισό μήκος της αυλής, αυτό δεν μπέρδεψε τα παιδιά, τα οποία είπαν:

Σπύρος: Παρατήρησα ότι η πρόσοψη του κτηρίου είναι το 1/3 της πρόσοψης του οικοπέδου.

Θωμάς: Ναι, ναι και το μήκος του είναι περίπου το μισό.

Στην παρέμβαση αυτή το επίπεδο εργασίας ήταν το Σημειωτικό–Εργαλειακό. Οι μαθητές βέβαιοι πλέον για τις ιδιότητες του εργαλείου, το χρησιμοποίησαν για να πραγματοποιήσουν μετρήσεις στο χώρο της αυλής, χωρίς πλέον να χρειάζεται η επικύρωση των αποτελεσμάτων από τη μετροταινία. Οι τιμές καταγράφηκαν σε ένα πρόχειρο σχήμα που αναπαριστούσε το χώρο του σχολείου. Η εργασία ξεκίνησε στο παράδειγμα της GI με μετρήσεις σε χώρο πραγματικό. Με τη μεταφορά όμως των μετρήσεων σε ένα πρόχειρο σχήμα στο χαρτί, έχουμε μια μετακίνηση προς τη GII. Αν και ο χώρος εργασίας είναι η GI, εντούτοις σε παιδιά αυτής της ηλικίας, σύμφωνα με τον Kuzniak, πραγματοποιούνται μικρές μετακινήσεις προς τη GII. Μπορούμε να θεωρήσουμε πως οι στόχοι του αρχικού σχεδιασμού επετεύχθησαν, καθώς όλοι ο μαθητές κατάφεραν να εργαστούν με επιτυχία στο παράδειγμα.

.

7η Διδακτική Παρέμβαση

Στο μάθημα αυτό τα παιδιά εργάστηκαν ατομικά μέσα στην τάξη. Χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά τους όργανα ως εργαλεία, για να μεταφέρουν το σχέδιο του σχολείου με τις διαστάσεις που μέτρησαν στο χαρτί. Στην προσπάθειά τους αυτή συνειδητοποίησαν πως έπρεπε οι πραγματικές διαστάσεις να μικρύνουν αρκετές φορές ώστε να μπορέσουν να αποτυπωθούν σε μια κόλλα χαρτιού μεγέθους Α4. Έτσι αναδύθηκε η έννοια της κλίμακας, η οποία αποτελεί ένα λόγο των πραγματικών διαστάσεων προς τις διαστάσεις του σχεδίου.

Στην αρχή της ώρας μοιράστηκε στους μαθητές από μια λευκή κόλλα Α4, ενώ στον πίνακα της τάξης σχεδιάσαμε πάλι ένα πρόχειρο σχέδιο του σχολείου με την αυλή. Πάνω στο σχέδιο βάλαμε τις πραγματικές διαστάσεις, τις οποίες είχαν μετρήσει οι μαθητές στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Ρωτήθηκαν τότε τα παιδιά, αν θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε πάνω σε ένα φύλλο χαρτιού το σχέδιο αυτό με τις πραγματικές του διαστάσεις. Η απάντηση φυσικά ήταν πως για κάτι τέτοιο θα χρειαζόμασταν ένα χαρτί τόσο μεγάλο, όσο το σχολείο ολόκληρο! Αφού λοιπόν αυτό ήταν πρακτικά αδύνατο, αναζητήθηκε μια άλλη λύση. Ο Σπύρος τότε είπε ότι θα μπορούσαμε να το μικρύνουμε αρκετές φορές για να χωρέσει. Η συζήτηση που προέκυψε μας οδήγησε σε ποικίλα συμπεράσματα:

Δάσκαλος: Και πόσες φορές νομίζετε πως θα πρέπει να το μικρύνουμε;

Σπύρος: Μπορούμε να το διαιρέσουμε δια 10.

Δάσκαλος: Δηλαδή τα 130μ. να τα διαιρέσω δια 10 και να γίνουν 13μ.;

Σοφία: Όχι, όχι δεν είναι σωστό. Τα μέτρα πρέπει πρώτα να γίνουν εκατοστά.

Γιώργος: 130μ. Χ 100 = 13000εκ. Το ίδιο και για τις άλλες διαστάσεις: 28μ = 2800εκ, 54μ = 5400εκ και 85μ. = 8500εκ.

Δάσκαλος: Ωραία. Και τώρα που ξέρω πόσα εκατοστά είναι στην πραγματικότητα οι διαστάσεις του σχολείου και της αυλής, πόσες φορές να τα μικρύνω; 10 φορές;

Μαριάννα: Όχι, είναι λίγο. Καλύτερα 100 φορές.

Γιώργος: Μπα! Λίγο είναι, καλύτερα 1000 φορές. Αφού 13000 : 1000 = 13εκ. Έτσι είναι καλά!

Δάσκαλος: Βέβαια αυτό θα πρέπει να ισχύσει για όλες τις πλευρές.

Τάξη: Ναι!

Δάσκαλος: Ωραία λοιπόν, καταλήγουμε σε μια κλίμακα 1 : 1000, όπου κάθε εκατοστό στο χαρτί θα είναι…;

Δάσκαλος: 1000εκ. στην πραγματικότητα.

Το περίεργο είναι, πως την έννοια της κλίμακας οι μαθητές δεν την συνάντησαν για πρώτη φορά. Στο παρελθόν, στο μάθημα της Γεωγραφίας, είχαν μάθει για την κλίμακα στην κατασκευή χαρτών. Από τον τρόπο όμως που χειρίστηκαν την έννοια, φαίνεται ουσιαστικά πως δεν είχε γίνει κατανοητή ή τουλάχιστον στο βαθμό που θα έπρεπε. Η ενασχόληση τους με τη δραστηριότητα, δημιούργησε τις προϋποθέσεις και την ανάγκη για την «επανεφεύρεσή» της, όπως θα έλεγε και ο Freudentahl στο σημείο αυτό.

Στη συνέχεια, αφού είχαμε αποφασίσει για την κλίμακα και τις διαστάσεις του σχεδίου, είχε φτάσει η ώρα για την κατασκευή του σχεδίου υπό κλίμακα. Όλοι οι μαθητές πριν ξεκινήσουν να εργάζονται, έγραψαν στην άκρη της κόλλας τους την κλίμακα 1:1000. Τότε παρουσιάστηκε η κατάλληλη ευκαιρία για να συνδέσουμε την έννοια της κλίμακας με τους λόγους:

Δάσκαλος: Η κλίμακα 1:1000, που έχετε γράψει, μήπως σας θυμίζει κάτι;

Ραφαέλλα: Ένα δια χίλια;

Δάσκαλος: Αν σας το έδινα έτσι: 1/1000

Ραφαήλ: Ένα προς χίλια.

Δάσκαλος: Πολύ ωραία. Και πότε χρησιμοποιήσαμε αυτή την έκφραση;

Νίκος: Στους λόγους!

Δάσκαλος: Μπράβο! Μήπως έχουμε εδώ κάποιο λόγο;

Μαριάννα: Ναι είναι ο λόγος των διαστάσεων στο χαρτί, προς τις πραγματικές διαστάσεις.

Η εργασία συνεχίστηκε κανονικά και όλα τα παιδιά κατάφεραν να κάνουν το σχέδιο υπό κλίμακα. Η μόνη τους απορία ήταν για το πού θα τοποθετούσαν το κτήριο μέσα στο οικόπεδο του σχολείου. Εδώ συζητήσαμε πως αν θα θέλαμε να γνωρίζουμε την ακριβή του θέση, θα έπρεπε να πάρουμε μετρήσεις και από τις αποστάσεις μεταξύ κτηρίου και αυλής. Έτσι συμφωνήσαμε να το τοποθετήσουμε διαισθητικά στο χώρο, τηρώντας βέβαια τις αναλογίες μόνο για τις διαστάσεις του κτηρίου και της αυλής.

Και ενώ η εργασία βάδιζε προς το τέλος της, ένας μαθητής, ο Θωμάς, έκανε μια ερώτηση η οποία ξεκίνησε μια νέα συζήτηση και προβληματική. Συγκεκριμένα ρώτησε, πώς θα μπορούσαμε να μετρήσουμε και το ύψος του κτηρίου, σε περίπτωση που θα θέλαμε να κατασκευάσουμε μια μακέτα του κτηρίου υπό κλίμακα. Ο συγκεκριμένος μαθητής είχε επισκεφτεί στο παρελθόν κάποιο νοσοκομείο, απ’ ότι μας είπε και είχε δει μια τέτοια μακέτα.

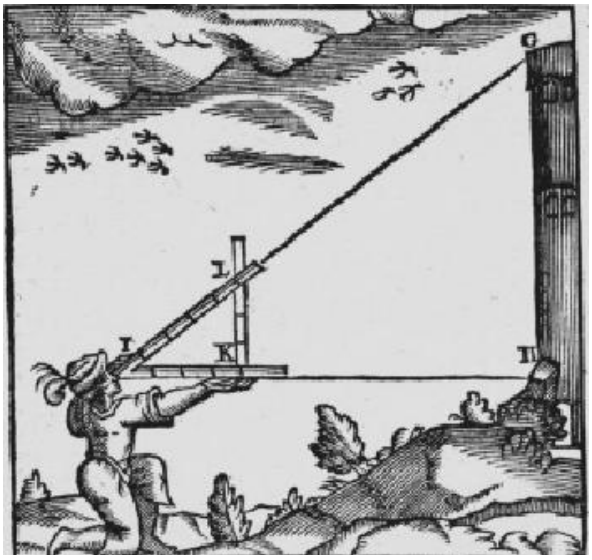
Έτσι λοιπόν για να μη διακόψουμε την εργασία μας, αλλά και για να μη μείνει αναπάντητο το ερώτημα, συμφωνήσαμε να το απαντήσουμε στην επόμενη διδακτική ώρα.

Η ευκαιρία ήταν κατάλληλη για να διευκρινίσουμε και ένα μάλλον «σκοτεινό» σημείο της εργασίας μας. Κατά της έναρξη των παρεμβάσεων και συγκεκριμένα στην πρώτη μας παρέμβαση, είχε ζητηθεί από τους μαθητές να εκτιμήσουν το ύψος διάφορων αντικειμένων στο χώρο της αυλής. Στη συνέχεια, η εργασία μεταφέρθηκε σε αποστάσεις στο επίπεδο της αυλής. Ενώ δηλαδή ξεκινήσαμε να εργαζόμαστε με εκτιμήσεις του ύψους διαφόρων αντικειμένων, στη συνέχεια εργαστήκαμε με αποστάσεις στο χώρο της αυλής. Αυτό έγινε, γιατί τα ψηλά αντικείμενα είναι μη προσβάσιμα, άρα θα έπρεπε να εκτιμήσουν το ύψος τους, χωρίς να μπορούν να τα μετρήσουν. Στη συνέχεια όμως, οι εργασίες απαιτούσαν την επιβεβαίωση των εκτιμήσεων με τη χρήση της μετροταινίας. Δε θα μπορούσαν επομένως να συνεχίσουν να εργάζονται με ψηλά αντικείμενα.

Αφού λοιπόν δόθηκαν οι κατάλληλες εξηγήσεις και προκειμένου να έχουμε μια ακόμη ευκαιρία για αξιοποίηση της ιστορίας, παρουσιάστηκε στους μαθητές μια ακόμη σελίδα (Παράρτημα Ε, σελ.185) από το βιβλίο του Errard, όπου φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται το εργαλείο για να μετρήσουν το ύψος διαφόρων αντικειμένων.

Η συζήτηση που ακολούθησε επιβεβαίωσε για μια ακόμη φορά αυτά τα οποία είχαμε μάθει για την αναλογία των πλευρών των ομοίων τριγώνων. Ότι δηλαδή υπάρχουν δυο όμοια τρίγωνα με κοινή κορυφή και ο λόγος των πλευρών τους είναι ίσος. Το μόνο που χρειάστηκε να σχολιάσουμε ήταν, πως εδώ το εργαλείο δεν είχε την κάθετη ράβδο στερεωμένη στο έδαφος, αλλά οριζόντια, στοχεύοντας τη βάση του υπό μέτρηση αντικειμένου.

Από την άποψη του αρχικού σχεδιασμού της διδασκαλίας μπορούμε να πούμε πως αυτός τηρήθηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό, καθώς όλοι οι μαθητές κατάφεραν να εργαστούν στο πλαίσιο του $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$ και μετέφεραν το πραγματικό σχέδιο του σχολείου στο χαρτί, υπό κλίμακα. Το επίπεδο εργασίας αυτή τη φορά ήταν το Εργαλειακό–Λεκτικό, η χρήση των σχημάτων όμως μας έδειξε μια προσφυγή προς το Σημειωτικό επίπεδο. Τα παιδιά χρησιμοποίησαν την ιδιότητα των Λόγων ως ένα θεωρητικό εργαλείο, για να επιλύσουν το πρόβλημα της σμίκρυνσης του χώρου του σχολείου. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί σαφώς μας έδειξαν μια μετακίνηση προς τον $\text{ΜΧΕ}_{\text{Αριθμοί}}$ και το πρόβλημα εντάσσεται στη GI καθώς το πλαίσιό του αφορά τον πραγματικό κόσμο.



Εικόνα 7: Η χρήση του εργαλείου του Errard για τη μέτρηση του ύψους.

8η Διδακτική Παρέμβαση

Η εργασία στη φάση αυτή πραγματοποιήθηκε ομαδικά, στην αρχή μέσα στην τάξη και κατόπιν στην αυλή του σχολείου. Παρουσιάστηκε ένα πρακτικό πρόβλημα, το οποίο οι μαθητές έλυσαν με τη βοήθεια των ανάλογων πλευρών και της κλίμακας, πρώτα στο φυλλάδιό τους και κατόπιν στον πραγματικό χώρο της αυλής, κάνοντας χρήση του εργαλείου του Errard.

Η εργασία ξεκίνησε με την παρουσίαση του προβλήματος στην ολομέλεια της τάξης. Συγκεκριμένα τους ζητήθηκε να βρούνε το κέντρο της αυλής, όπου επρόκειτο, σύμφωνα με το πρόβλημα να τοποθετηθεί ένα κιόσκι.

Αφού σιγουρευτήκαμε πως το πρόβλημα είχε γίνει κατανοητό από όλους, δόθηκε στις ομάδες το σχέδιο υπό κλίμακα που είχαν κατασκευάσει στην προηγούμενη τους δραστηριότητα και τους ζητήθηκε να συζητήσουν και να προτείνουν από μια λύση. Από τη συζήτηση προέκυψαν ενδιαφέρουσες προτάσεις. Η μια ομάδα πρότεινε αρχικά να βρούμε το μέσο του μήκους του οικοπέδου:

Αντζελίνα: Αφού η πλευρά της αυλής είναι 130μ., θα βρούμε πρώτα τη μέση της, δηλαδή τα 65μ.

Αμέσως υπήρξε αντίδραση από μια άλλη ομάδα, οι οποίοι εντόπισαν σωστά το γεγονός ότι ως αυλή θεωρούμε το μπροστινό μέρος του αυλόγυρου, χωρίς το κτήριο του σχολείου:

Χάρης: Εμείς δε συμφωνούμε. Πρέπει πρώτα να βρούμε το μήκος από το κτήριο ως την πρόσοψη και μετά το μέσο.

Η τρίτη ομάδα πρότεινε κάτι διαφορετικό, που ωστόσο συμφωνούσε με το σκεπτικό της δεύτερης ομάδας. Πρότειναν από το συνολικό μήκος της αυλής να αφαιρεθεί το μήκος του σχολείου και του χώρου στο πίσω μέρος της αυλής και μετά να βρεθεί το μέσο από το υπόλοιπο:

Ιωάννης: Πρέπει πρώτα να βρούμε τη διάσταση πίσω από το σχολείο, να προσθέσουμε το μήκος του σχολείου, μετά να αφαιρέσουμε από τα 130μ. και μετά να το διαιρέσουμε δια 2.

Τέλος η τέταρτη ομάδα πρότεινε κάτι διαφορετικό. Σκέφτηκαν να χαράξουν τις δυο διαγώνιους στο ορθογώνιο που σχηματίζει ο χώρος της αυλής και το σημείο τομής τους, θα ήταν το ζητούμενο κέντρο της αυλής. Η λύση αυτή όμως απορρίφθηκε από τους υπόλοιπους, ως μη πραγματοποιήσιμη:

Μαριάννα: Θα μπορούσαμε να φέρουμε δυο διαγώνιους. Εκεί που ενώνονται είναι το κέντρο της αυλής.

Γιώργος: Αυτό δεν μπορεί να γίνει. Πώς θα χαράξουμε τις διαγώνιες στην αυλή; Δε γίνεται…

Αφού λοιπόν παρουσιάστηκαν όλες οι προτάσεις, έπρεπε να καταλήξουμε στην επιλογή μιας από αυτές. Οι ομάδες ομόφωνα επέλεξαν ως πιο πρακτική και εύκολη, την πρόταση της δεύτερης ομάδας. Να μετρήσουν δηλαδή το μήκος από το κτήριο ως την πρόσοψη της αυλής και στη συνέχεια να διαιρέσουν δια δύο. Το ίδιο αποφασίστηκε να κάνουν και για το πλάτος της αυλής.

Δεδομένου ότι η τοποθέτηση του κτηρίου στο σχέδιο δεν έγινε με ακριβή τρόπο, συμφωνήσαμε πως θα έπρεπε, πρώτα να μετρήσουμε το μήκος που προαναφέραμε στην αυλή και κατόπιν να προχωρήσουμε.

Κατέβηκαν όλες οι ομάδες στην αυλή και ανέλαβαν από μια γωνία. Εργάστηκαν με τα εργαλεία που διέθεταν και σύντομα βρήκαν τα μέσα των πλευρών. Ενώνοντας τα μέσα τους συναντήθηκαν σε ένα σημείο στο χώρο, το οποίο αποτελούσε το ζητούμενο σημείο:

Σοφία: Εδώ, αυτό το σημείο είναι το κέντρο της αυλής. Αν θέλαμε να στήσουμε το κιόσκι, εδώ θα έπρεπε να το στήσουμε.

Θωμάς: Μα εδώ κοντά είναι οι μπασκέτες!

Ιωάννης: Φαντάσου ότι δεν υπάρχουν…ένα πρόβλημα είναι!

Για το υπόλοιπο της ώρας επιστρέψαμε στην τάξη, όπου είχαμε την ευκαιρία να μεταφέρουμε την εργασία μας και πάλι στο χαρτί. Έτσι γνωρίζοντας τώρα πλέον όλες τις διαστάσεις και την κλίμακα, μπορέσαμε να προσδιορίσουμε ακριβώς το σημείο της αυλής που ήταν το κέντρο της.

Καθώς υπήρχαν ακόμη μερικά λεπτά μέχρι τη λήξη της δεύτερης διδακτικής ώρας, κάποιος μαθητής ρώτησε τι προέβλεπε η επόμενή μας δραστηριότητα. Όταν τους ευχαρίστησα για τη συνεργασία και τους πληροφόρησα πως είχαμε φτάσει πλέον στο τέλος των παρεμβάσεών μας, αντέδρασαν πολύ έντονα και δήλωσαν ότι δεν ήθελαν να τελειώσουμε. Χαρακτηριστική ήταν η δήλωση ενός μαθητή, του Γιώργου:

Γιώργος: Τι;…όχι!...και πώς θα περάσει η υπόλοιπη βαρετή χρονιά!...ήταν ωραία με αυτά τα μαθήματα!

Όπως αναφέραμε η εργασία μας στηρίχθηκε στη γεωμετρική προσέγγιση των λόγων και των αναλογιών, των πλευρών των τριγώνων που ορίζονται από τη χρήση του εργαλείου του Errard. Στο επιστημολογικό επίπεδο, στο σχεδιασμό του κατάλληλου $ΜΧΕ_{Γεωμετρία}$ οι λόγοι ορίζονται από την τριάδα: πλευρές τριγώνων (σχέδιο)-Εργαλείο Errard-ισότητα λόγων πλευρών.

Η τελευταία αυτή παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στο Λεκτικό-Σημειωτικό επίπεδο με μετακίνηση προς το Εργαλειακό. Χρησιμοποιήθηκε το σχέδιο του σχολείου υπό κλίμακα που δημιουργήθηκε στην προηγούμενη παρέμβαση για να υπολογιστεί το ακριβές σημείο όπου βρίσκεται το κέντρο της αυλής. Με τη βοήθεια του εργαλείου του Errard εντοπίστηκε αυτό το σημείο στον πραγματικό χώρο της αυλής και στη συνέχεια η εργασία επέστρεψε πάλι στο χαρτί όπου τοποθετήθηκε το σημείο, με τη βοήθεια φυσικά της κλίμακας του σχεδίου. Το εργαλείο αυτή τη φορά απέκτησε μια άλλη λειτουργικότητα. Χρησιμοποιήθηκε για να μεταφέρει αποστάσεις από το χαρτί στον πραγματικό χώρο. Επικυρώθηκε έτσι η ιδιότητα των Λόγων και των Αναλογιών που εμπεριέχεται στη χρήση του εργαλείου. Οι ομάδες των μαθητών πραγματοποίησαν με επιτυχία τις δραστηριότητες της παρέμβασης, επιβεβαιώνοντας έτσι τον αρχικό σχεδιασμό.

Κάνοντας ένα γενικό απολογισμό της εργασίας που συντελέστηκε στις διδακτικές παρεμβάσεις, μπορούμε να πούμε πως κατά τη γεωμετρική εργασία χρησιμοποιήθηκε αρχικά το τεχνούργημα, για να αναδυθεί η ιδιότητα της αναλογίας που βρίσκεται ενσωματωμένη στο εργαλείο. Στη συνέχεια παραμερίστηκε προσωρινά το εργαλείο, ώστε να προωθηθεί η συλλογιστική με λόγο που σχετίζεται με το λόγο των πλευρών των ομοίων τριγώνων. Δώσαμε ιδιαίτερη σημασία στο πέρασμα από το σχέδιο της πραγματικότητας στο γεωμετρικό σχέδιο, πάνω στο οποίο επενδύεται και αναπτύσσεται ο συλλογισμός. Στο τέλος της σειράς επιστρέψαμε και πάλι στο εργαλείο, ώστε να αναδειχθεί η έννοια της κλίμακας και να ξεκινήσει και πάλι ο κύκλος των εργασιών μεταξύ των κάθετων επιπέδων.

6.3 Η διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών μετά την διδακτική παρέμβαση

Τα αποτελέσματα του μεταελέγχου (post-test) μας έδωσαν μια εικόνα για τη διαμόρφωση του προσωπικού χώρου των μαθητών, όπως αυτός διαμορφώθηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση. Γενικά τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών, σε σχέση με τα αποτελέσματα του προ-ελέγχου (pre-test) (Παράρτημα Β΄, σελ.174)

Συγκεκριμένα στο πρώτο πρόβλημα (Π1) που διερευνά τη διάκριση αναλογικών – μη αναλογικών καταστάσεων είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Πρόβλημα Π1															Σύνολα Post-test		Σύνολα Pre-test	
	α		β		γ		δ		ε		ζ		η		Σωστά	Λάθος	Σωστά	Λάθος
Βιβή		Λ		Λ		Λ	Σ		Σ			Λ	Σ		3	4	4	3
Κωνσταντίνος	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	5	2	6	1
Σοφία	Σ		Σ			Λ	Σ			Λ	Σ		Σ		5	2	4	3
Παναγιώτης	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1	6	1
Θωμάς	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ	Σ			Λ	5	2	5	2
Χάρης	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1	6	1
Μαριάννα	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		6	1	6	1
Σπύρος	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		7	0	6	1
Ελένη	Σ		Σ		Σ		Σ			Λ		Λ	Σ		5	2	6	1

Γιώργος	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		**6**	**1**	**4**	**3**
Αντζελίνα	Σ		Σ			Λ		Λ		Λ		Λ	Σ		**3**	**4**	**6**	**1**
Ραφαήλ	Σ			Λ		Λ	Σ		Σ			Λ	Σ		**4**	**3**	**1**	**6**
Θάνος	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		**7**	**0**	**5**	**2**
Χρόνης	Σ			Λ	Σ		Σ			Λ		Λ		Λ	**3**	**4**	**5**	**2**
Αναστασία	Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		Σ			Λ	**5**	**2**	**6**	**1**
Στέφανος	Σ		Σ			Λ	Σ			Λ	Σ		Σ		**5**	**2**	**3**	**4**
Άγγελος Μ.	Σ		Σ			Λ		Λ		Λ		Λ		Λ	**2**	**5**	**4**	**3**
Νίκος		Λ	Σ			Λ		Λ		Λ	Σ			Λ	**2**	**5**	**6**	**1**
Ιωάννης		Λ	Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		Σ		**6**	**1**	**7**	**0**
Μαρία	Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		Σ		Σ		**6**	**1**	**6**	**1**
Άγγελος Η.	Σ			Λ	Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		**5**	**2**	**5**	**2**
Βασιλική		Λ		Λ	Σ		Σ		Σ			Λ	Σ		**4**	**3**	**3**	**4**
Ραφαέλλα	Σ		Σ			Λ	Σ			Λ		Λ	Σ		**4**	**3**	**4**	**3**
Σύνολα Post test	**19**	**4**	**13**	**10**	**14**	**9**	**19**	**4**	**14**	**9**	**14**	**9**	**17**	**6**	**161**		**161**	
Σύνολα Pro-test	**9**	**14**	**18**	**5**	**16**	**7**	**23**	**0**	**14**	**9**	**17**	**6**	**17**	**6**	**161**		**161**	

Πίνακας 21: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Π1.

Παρατηρώντας κανείς τα αποτελέσματα του πίνακα, μπορεί να διαπιστώσει ότι στο πρώτο ερώτημα (Π1α), όπου είχαμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, οι σωστές απαντήσεις είχαν σημαντική αύξηση, καθώς από 9 σωστές στο pre-test, είχαμε 19 σωστές στο post-test. Αυτό δείχνει τη σημαντική επίδραση που άσκησε η παρέμβαση στη διαμόρφωση του αποτελέσματος, καθώς τόσο η παρέμβαση, όσο και το ερώτημα είχαν ένα καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα. Αντιθέτως στο δεύτερο ερώτημα (Π1β), παρατηρούμε μια μικρή μείωση των σωστών απαντήσεων, αφού από 18 οι σωστές, έγιναν 13. Το ίδιο περίπου βλέπουμε και στο τρίτο ερώτημα (Π1γ) όπου από 16 έγιναν 14, στο τέταρτο (Π1δ) όπου από 23 έγιναν 19 και στο έκτο ερώτημα (Π1ζ) όπου από 17 πήγαμε στις 14 σωστές απαντήσεις. Τέλος στο πέμπτο (Π1ε) και έβδομο (Π1η) ερώτημα τα αποτελέσματα παρέμειναν αμετάβλητα.

Αν εξαιρέσει κανείς το πρώτο ερώτημα, φαίνεται ότι η παρέμβαση δεν μπόρεσε να επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητα των μαθητών για διάκριση αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων. Ωστόσο δεν μπορεί κανείς να παραβλέψει το γεγονός πως μαθητές όπως ο Ραφαήλ, ο Γιώργος, η Σοφία και ο Στέφανος μπόρεσαν να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους σε ατομικό επίπεδο, ενώ άλλοι όπως ο Ιωάννης, ο

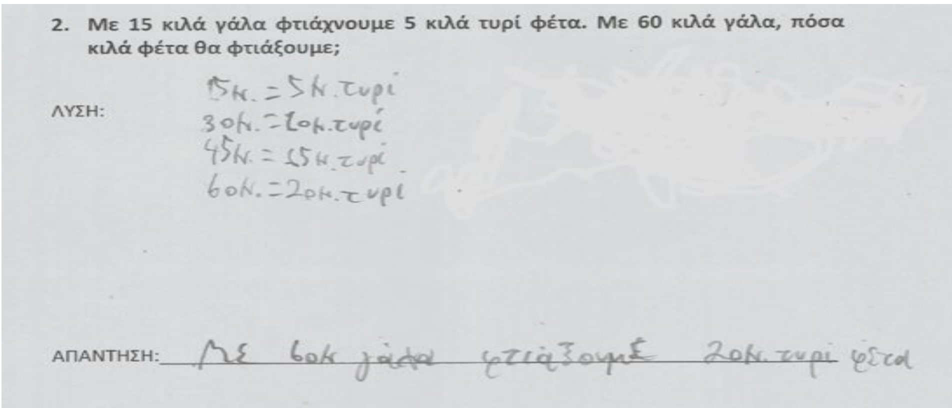
Παναγιώτης, ο Χάρης, ο Σπύρος και η Μαριάννα, μπόρεσαν να διατηρήσουν το υψηλό τους ποσοστό. Όλοι οι παραπάνω, καθώς είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, συμμετείχαν ενεργά στις δραστηριότητες είτε με ερωτήματα είτε με παρεμβάσεις.

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων (Πρ2, Πρ7, Πρ8) η οποία εξετάζει την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων, μας έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα, τα οποία συγκρίνουμε με τα ανάλογα αποτελέσματα του προελέγχου:

Πρόβλημα Πρ2						
	Αποτελέσματα Pre-test			Αποτελέσματα Post-test		
Μαθητές	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή		X			X	
Κωνσταντίνος		X		X		
Σοφία		X		X		
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς		X		X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη		X			X	
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα		X			X	
Ραφαήλ		X		X		
Θάνος		X		X		
Χρόνης	X			X		
Αναστασία	X			X		
Στέφανος		X			X	
Άγγελος Μ.		X			X	
Νίκος			X			X
Ιωάννης	X			X		
Μαρία		X		X		
Άγγελος Η.			X			X
Βασιλική		X			X	
Ραφαέλλα	X				X	
ΣΥΝΟΛΑ	9	12	2	14	7	2

Πίνακας 22: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Πρ2.

Στο πρόβλημα Πρ2 βλέπουμε ότι αυξήθηκε σημαντικά ο αριθμός των μαθητών οι οποίοι έδωσαν σωστή επίλυση, αφού από 9 αυξήθηκαν σε 14 οι μαθητές. Ωστόσο ακόμη και οι 7 μαθητές που στο post-test έκαναν λάθη, κατάφεραν να φτάσουν πολύ κοντά στη σωστή επίλυση και τα λάθη τους ήταν κυρίως σε πράξεις. Αυτό δεν είχε συμβεί στο pre-test, όπου τα λάθη των 12 μαθητών ήταν αρκετά πιο σοβαρά, καθώς οι περισσότεροι δεν είχαν καταφέρει καν να σχηματίσουν σωστά πίνακα ποσών-τιμών. Τέλος, οι μαθητές που δεν έδωσαν καθόλου απάντηση, παρέμειναν οι ίδιοι δύο. Αν και τα περισσότερα από τα παιδιά που έδωσαν σωστές απαντήσεις χρησιμοποίησαν τη μέθοδο με τα σταυρωτά γινόμενα, εντούτοις αυξήθηκε ο αριθμός των μαθητών που χρησιμοποίησαν άλλες ευρετικές μεθόδους, όπως την αναγωγή ή τον αναλογικό πίνακα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η επίλυση του Κωνσταντίνου, ο οποίος μέσα από μια συλλογιστική πορεία, κατάφερε να το λύσει με ένα τρόπο, που δείχνει ότι ανέπτυξε αναλογικό συλλογισμό:


2. Με 15 κιλά γάλα φτιάχνουμε 5 κιλά τυρί φέτα. Με 60 κιλά γάλα, πόσα κιλά φέτα θα φτιάξουμε;

ΛΥΣΗ:
15κ. = 5κ. τυρί
30κ. = 10κ. τυρί
45κ. = 15κ. τυρί
60κ. = 20κ. τυρί

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Με 60κ γάλα φτιάξουμε 20κ. τυρί φέτα

Εικόνα 8: Ο τρόπος με τον οποίο εργάστηκε ο Κωνσταντίνος στο Πρ2.

Η Ραφαέλλα επίσης, αν και δεν κατάφερε να φτάσει σε μια σωστή απάντηση, προσπάθησε ωστόσο να το λύσει με αναγωγή στη μονάδα.

Για το πρόβλημα Πρ7 είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Πρόβλημα Πρ7						
	Αποτελέσματα Pre-test			Αποτελέσματα Post-test		
Μαθητές	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή		X		X		
Κωνσταντίνος		X		X		
Σοφία		X			X	

Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς	X			X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη			X			X
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα		X		X		
Ραφαήλ			X		X	
Θάνος		X		X		
Χρόνης		X		X		
Αναστασία		X			X	
Στέφανος			X	X		
Άγγελος Μ.		X				X
Νίκος			X		X	
Ιωάννης		X		X		
Μαρία	X			X		
Άγγελος Η.			X			X
Βασιλική			X		X	
Ραφαέλλα			X		X	
ΣΥΝΟΛΑ	**7**	**9**	**7**	**14**	**6**	**3**

Πίνακας 23: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Πρ7.

Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα για το πρόβλημα αυτό ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντικά, καθώς οι σωστές απαντήσεις σε σχέση με το pre-test διπλασιάστηκαν και από 7 έγιναν 14, οι λανθασμένες απαντήσεις μειώθηκαν, καθώς από 9 έγιναν 6, ενώ τέλος ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησαν καθόλου υποδιπλασιάστηκε, αφού από 7 έγιναν 3. Οι 2 από αυτούς δεν είχαν απαντήσει και στο pre-test.

Για μια ακόμη φορά οι περισσότεροι από αυτούς που απάντησαν σωστά, εφάρμοσαν τα σταυρωτά γινόμενα. Θα σταθούμε όμως και πάλι στην περίπτωση του Κωνσταντίνου, ο οποίος αφού βλέπει πως το δέντρο με ύψος 1,5μ. ρίχνει σκιά 3μ. και αναζητείται το ύψος ενός άλλου δέντρου που ρίχνει σκιά 9μ., απαντά: *« Το ύψος του δέντρου είναι το μισό, δηλαδή 4,5μ.».* Μια παρόμοια λύση δίνει και η Αντζελίνα, χωρίς όμως να το αιτιολογήσει όπως έκανε ο Κωνσταντίνος. Διαιρεί δηλαδή το 9:2 και βρίσκει το ύψος ίσο με 4,5μ.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζουν και οι απαντήσεις του Γιώργου και του Θάνου, οι οποίοι αφού έχουν δημιουργήσει την αναλογία με άγνωστο όρο το ύψος του δέντρου, επιλύουν το πρόβλημα με εξίσωση.

Βλέπουμε δηλαδή πως οι παραπάνω μαθητές χρησιμοποιούν την αναλογική συλλογιστική για να απαντήσουν με ένα τρόπο δικό τους, πέρα από τη συνήθη πρακτική των σταυρωτών γινομένων.

Αλλά και στις λανθασμένες απαντήσεις, πολλές από αυτές έφτασαν πολύ κοντά στη σωστή επίλυση και οδηγήθηκαν σε λάθος αποτέλεσμα, κυρίως λόγω λαθών στις πράξεις.

Αξιοσημείωτο είναι τέλος το γεγονός πως αρκετά παιδιά που δεν είχαν δώσει καμία απάντηση στο pre-test προσπάθησαν στο post-test να απαντήσουν, έστω και λανθασμένα. Εδώ ξεχωρίζει η περίπτωση του Στέφανου, ο οποίος ενώ πριν δεν είχε απαντήσει καθόλου, τώρα κατάφερε να απαντήσει και μάλιστα σωστά. Αντίστοιχα ήταν τα αποτελέσματα για το πρόβλημα Πρ8, το τελευταίο της ομάδας αυτής:

Πρόβλημα Πρ8						
	Αποτελέσματα Pre-test			**Αποτελέσματα Post-test**		
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή		X			X	
Κωνσταντίνος		X			X	
Σοφία		X			X	
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς		X		X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη			X		X	
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα		X		X		
Ραφαήλ		X			X	
Θάνος		X		X		
Χρόνης		X		X		
Αναστασία			X		X	
Στέφανος			X		X	
Άγγελος Μ.		X			X	
Νίκος			X			X
Ιωάννης		X		X		
Μαρία		X			X	
Άγγελος Η.			X			X
Βασιλική			X		X	
Ραφαέλλα			X		X	
ΣΥΝΟΛΑ	**5**	**11**	**7**	**10**	**11**	**2**

Πίνακας 24: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Πρ8.

Και σε αυτό το πρόβλημα τα αποτελέσματα έδειξαν πως ο αριθμός των σωστών απαντήσεων διπλασιάστηκαν, αφού από 5 σωστές στο pre-test έγιναν 10 στο post-test, οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις παρέμειναν σταθεροί στους 11, ενώ αυτοί που δεν απάντησαν καθόλου μειώθηκαν από τους 7 στους 2, οι οποίοι δεν είχαν απαντήσει και στο pre-test.

Οι μαθητές που έλυσαν σωστά το πρόβλημα χρησιμοποίησαν κατά κύριο λόγο τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων. Εξαίρεση αποτέλεσαν ο Θάνος και η Αντζελίνα που δημιούργησαν την αναλογία και έλυσαν το πρόβλημα με εξίσωση.

Από τις 11 λανθασμένες απαντήσεις οι 4 είχαν σοβαρά λάθη που έδειξαν αδυναμία κατανόησης του Λόγου ως ένα διατεταγμένο ζεύγος ποσών. Συγκεκριμένα η Ελένη, η Αναστασία, ο Άγγελος Μ. και η Βασιλική δημιούργησαν πίνακα ποσών-τιμών τοποθετώντας τα ποσά και τις τιμές σε λάθος θέση. Έτσι οι λόγοι που δημιουργήθηκαν ήταν λανθασμένοι, αφού είχαν τη μορφή σελίδες/σελίδες και χρόνος/χρόνος. Σε αυτό ίσως να συνετέλεσε και η διατύπωση του προβλήματος αφού τα ζεύγη των ποσών, σελίδες-χρόνος, στο δεύτερο σκέλος του προβλήματος, δίνονταν αντίστροφα από ότι στο πρώτο. Πάντως και εδώ τρεις μαθήτριες, η Σοφία, η Ραφαέλλα και η Βιβή έκαναν μόνο υπολογιστικά λάθη και πλησίασαν πολύ κοντά στη σωστή επίλυση του προβλήματος.

Τέλος, μόνο δύο μαθητές, ο Νίκος και ο Άγγελος Η. δεν έδωσαν καμία απάντηση, όπως έκαναν και στο pre-test, ενώ οι υπόλοιποι που δεν είχαν απαντήσει, αυτή τη φορά απάντησαν, έστω και λανθασμένα.

Μια γενική παρατήρηση που αφορά τις επιδόσεις των μαθητών σε αυτού του είδους τα προβλήματα, είναι πως είχαμε κυρίως μετακινήσεις από τη δεύτερη προς τη πρώτη στήλη και από τη τρίτη προς τη δεύτερη. Δηλαδή μαθητές που είχαν απαντήσει λάθος στο pre-test, κατάφεραν να απαντήσουν σωστά στο post-test και μαθητές που δεν είχαν απαντήσει καθόλου, απάντησαν λανθασμένα. Αυτό σίγουρα δείχνει μια βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών στο είδος αυτό των ασκήσεων, μετά την παρέμβαση. Βελτίωση ωστόσο δεν είχαμε μόνο στον αριθμό των σωστών απαντήσεων, αλλά και στις τεχνικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, για να φτάσουν σε ένα σωστό αποτέλεσμα. Χρησιμοποιήθηκε περισσότερο και πιο συνειδητά η αναλογική συλλογιστική, ακόμη και από μαθητές που στο αρχικό τεστ έδειξαν χαμηλές επιδόσεις. Χαρακτηριστικό ήταν το παράδειγμα του Κωνσταντίνου (βλ. Πρ7).

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων (Α3, Α4, Α10) προσπάθησε να διακρίνει την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Τα αποτελέσματα των δύο ελέγχων παρουσιάζονται συγκριτικά παρακάτω:

Πρόβλημα Α3						
Αποτελέσματα Pre-test				Αποτελέσματα Post-test		
Μαθητές	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή			X	X		
Κωνσταντίνος			X	X		
Σοφία	X			X		
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς	X			X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη			X			X
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα	X			X		
Ραφαήλ	X			X		
Θάνος	X			X		
Χρόνης			X		X	
Αναστασία		X		X		
Στέφανος		X			X	
Άγγελος Μ.	X				X	
Νίκος		X			X	
Ιωάννης	X			X		
Μαρία		X		X		
Άγγελος Η.		X			X	
Βασιλική		X			X	
Ραφαέλλα		X			X	
ΣΥΝΟΛΑ	12	7	4	15	7	1

Πίνακας 25: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Α3.

Στο πρόβλημα Α3 βλέπουμε πως ο αριθμός των μαθητών που έδωσαν σωστή απάντηση βελτιώθηκε ακόμη περισσότερο, αφού από 12 έγιναν 15, ο αριθμός των μαθητών με λανθασμένες απαντήσεις παρέμεινε 7, ενώ αυτοί που δεν απάντησαν καθόλου μειώθηκαν από 4 σε 1. Και εδώ το σημαντικό στοιχείο ήταν η αύξηση των σωστών απαντήσεων και η μείωση αυτών που δεν απάντησαν καθόλου.

Η άσκηση ήταν απλή και το μόνο που χρειαζόταν, ήταν να συμπληρωθούν οι πίνακες με τα ανάλογα ποσά. Έτσι δεν μπορούμε να διακρίνουμε διαφορετικές τεχνικές στην επίλυση των ασκήσεων. Εκείνο που μπορούμε να πούμε είναι πως από τις 7 λανθασμένες απαντήσεις, οι 4 ήταν μερικώς λανθασμένες, αφού μπόρεσαν να συμπληρώσουν σωστά τουλάχιστον το μισό πίνακα, ενώ οι υπόλοιπες 3 ήταν σχεδόν ολοκληρωτικά λανθασμένες, με περισσότερες από τις μισές ασκήσεις λάθος. Αξιοσημείωτη ήταν η πρόοδος που έδειξαν η Βιβή και ο Κωνσταντίνος, οι οποίοι ενώ στον αρχικό έλεγχο δεν είχαν καταφέρει να απαντήσουν, στον μετα-έλεγχο απάντησαν και μάλιστα σωστά.

Πρόβλημα Α4						
	Αποτελέσματα Pre-test			Αποτελέσματα Post-test		
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή		X			X	
Κωνσταντίνος		X			X	
Σοφία		X			X	
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς	X			X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη		X				X
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα		X			X	
Ραφαήλ			X	X		
Θάνος		X		X		
Χρόνης		X		X		
Αναστασία			X		X	
Στέφανος		X			X	
Άγγελος Μ.			X		X	
Νίκος		X			X	
Ιωάννης		X			X	
Μαρία		X			X	
Άγγελος Η.		X				X
Βασιλική			X		X	
Ραφαέλλα		X			X	
ΣΥΝΟΛΑ	**6**	**13**	**4**	**9**	**12**	**2**

Πίνακας 26: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Α4.

Στην άσκηση Α4 όπου έπρεπε οι μαθητές να βρουν τον τέταρτο όρο της αναλογίας, είχαμε μια μικρή αύξηση των μαθητών που έδωσαν σωστές απαντήσεις, αφού από 6 στο pre-test έγιναν 9 στο post-test. Οι μαθητές που απάντησαν λάθος μειώθηκαν κατά 1, ενώ αυτοί που δεν απάντησαν καθόλου μειώθηκαν από 4 σε 2.

Η άσκηση δεν απαιτούσε την εφαρμογή διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, καθώς το μόνο που ζητούσε ήταν η συμπλήρωση του τέταρτου όρου της αναλογίας. Έτσι το λάθος σε όλες τις περιπτώσεις, ήταν η μη σωστή συμπλήρωση του τέταρτου όρου. Από τους 12 μαθητές που έκαναν λάθος στο Α4, το οποίο αποτελούνταν από οκτώ συνολικά επιμέρους ασκήσεις, τέσσερις μαθητές έκαναν από 1-3 λάθη, ένας έκανε 4-6 λάθη και εφτά μαθητές έκαναν 7-8 λάθη.

Τέλος για το πρόβλημα Α10 είχαμε τα εξής συγκριτικά αποτελέσματα:

Πρόβλημα Α10						
	Αποτελέσματα Pre-test			**Αποτελέσματα Post-test**		
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή		X		X		
Κωνσταντίνος		X			X	
Σοφία		X		X		
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς	X				X	
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη		X			X	
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα	X				X	
Ραφαήλ	X			X		
Θάνος	X			X		
Χρόνης			X	X		
Αναστασία			X		X	
Στέφανος			X		X	
Άγγελος Μ.	X				X	
Νίκος	X			X		
Ιωάννης	X			X		
Μαρία		X		X		
Άγγελος Η.		X			X	

Βασιλική		X			X	
Ραφαέλλα		X		X		
ΣΥΝΟΛΑ	**12**	**8**	**3**	**14**	**9**	**0**

Πίνακας 27: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Α10.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα, μπορούμε να δούμε ότι αυξήθηκε ελαφρά ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν σωστά στην Α10 και από 12 οι μαθητές έγιναν 14. Μικρή αύξηση όμως παρουσίασε και ο αριθμός των μαθητών που έκαναν λάθος, έτσι από 8 αυτοί έγιναν 9, ενώ μηδενίστηκε ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησαν καθόλου.

Η άσκηση έδινε ένα πρόβλημα το οποίο λυνόταν με ένα πίνακα αναλογιών. Έπρεπε επομένως οι μαθητές να εφαρμόσουν την πολλαπλασιαστική σχέση και να συμπληρώσουν σωστά τον πίνακα με τις τιμές. Από αυτούς που έκαναν λάθος, οι πέντε δεν συμπλήρωσαν σωστά 2 τιμές , ένας έκανε λάθος σε 3 τιμές και άλλοι τρείς έκαναν λάθος σε 4 τιμές. Αξιοπρόσεκτη είναι η περίπτωση του Χρόνη, ο οποίος στο pre-test δεν μπόρεσε να απαντήσει καθόλου, ενώ τώρα απάντησε και μάλιστα σωστά.

Γενικά στην ομάδα αυτή των ασκήσεων, αν και δεν είχαμε τόσο σημαντική πρόοδο, ωστόσο υπήρχε μια βελτίωση των αποτελεσμάτων που αφορά την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Φαίνεται πως οι δυσκολίες οι οποίες υπάρχουν στη κατανόηση και χρήση των κλασμάτων, που χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν λόγους, δημιουργούν σθεναρά μαθησιακά εμπόδια, τα οποία χρειάζονται αρκετή προσπάθεια για να ξεπεραστούν.

Το πρόβλημα Β6 το οποίο αξιολογεί την ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών μας έδωσε τα εξής αποτελέσματα:

Πρόβλημα Β6						
	Αποτελέσματα Pre-test			**Αποτελέσματα Post-test**		
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή			X	X		
Κωνσταντίνος	X			X		
Σοφία	X			X		
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς	X			X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		

Σπύρος	X			X		
Ελένη	X			X		
Γιώργος		X		X		
Αντζελίνα			X	X		
Ραφαήλ	X			X		
Θάνος			X	X		
Χρόνης	X			X		
Αναστασία			X	X		
Στέφανος		X			X	
Άγγελος Μ.		X			X	
Νίκος		X		X		
Ιωάννης			X	X		
Μαρία	X			X		
Άγγελος Η.	X					X
Βασιλική	X			X		
Ραφαέλλα		X		X		
ΣΥΝΟΛΑ	**13**	**5**	**5**	**20**	**2**	**1**

Πίνακας 28: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Β6.

Από ότι μπορούμε να δούμε συγκριτικά, είχαμε σημαντική βελτίωση στις απαντήσεις των μαθητών. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά αυξήθηκαν από 13 σε 20, αυτοί οι οποίοι έκαναν λάθος μειώθηκαν από 5 σε 2, ενώ αυτοί που δεν απάντησαν μειώθηκαν από 5 σε 1. Δεν απάντησε ο Άγγελος Η., ο οποίος στο pre-test είχε απαντήσει και μάλιστα σωστά. Ο ίδιος το αιτιολόγησε λέγοντας πως δεν του έφτασε ο χρόνος, κάτι όμως που δεν ευσταθεί, καθώς μπορούσαν να πάρουν όσο χρόνο χρειαζόταν για να ολοκληρώσουν.

Όλοι οι μαθητές που απάντησαν σωστά χρησιμοποίησαν τις κατάλληλες λέξεις για να εκφράσουν τα ποσά και τις σχέσεις: *«κορίτσια, αγόρια, μαθητές, προς»*. Από τους δύο που έκαναν λάθος, ο Άγγελος Μ. έλυσε τη μισή άσκηση σωστά, ενώ ο Στέφανος μπέρδεψε τα ποσά.

Φαίνεται πως η σειρά των διδακτικών παρεμβάσεων είχε αρκετά θετικά αποτελέσματα στην ικανότητα των μαθητών να διακρίνουν λεκτικές αναλογίες, αφού το σύνολο σχεδόν της τάξης μπόρεσε με μεγάλη επιτυχία να ανταποκριθεί στο πρόβλημα.

Η τελευταία ομάδα ασκήσεων (Γ5, Γ9) η οποία εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να συγκρίνουν λόγους μας έδωσε τα παρακάτω συγκριτικά αποτελέσματα:

Πρόβλημα Γ5						
Αποτελέσματα Pre-test				Αποτελέσματα Post-test		
Μαθητές	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή		X			X	
Κωνσταντίνος		X			X	
Σοφία	X				X	
Παναγιώτης		X		X		
Θωμάς		X			X	
Χάρης	X			X		
Μαριάννα		X		X		
Σπύρος		X		X		
Ελένη	X					X
Γιώργος		X		X		
Αντζελίνα		X			X	
Ραφαήλ			X		X	
Θάνος		X		X		
Χρόνης	X				X	
Αναστασία			X	X		
Στέφανος		X				X
Άγγελος Μ.			X			X
Νίκος			X		X	
Ιωάννης		X		X		
Μαρία		X			X	
Άγγελος Η.			X			X
Βασιλική			X			X
Ραφαέλλα		X		X		
ΣΥΝΟΛΑ	4	13	6	9	9	5

Πίνακας 29: Αποτελέσματα του post-test για το πρόβλημα Γ5.

Παρότι η Γ5 δεν μας έδωσε κάποια θεαματικά αποτελέσματα στο post-test, εντούτοις και εδώ κατάφεραν οι μαθητές να σημειώσουν βελτίωση. Έτσι ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν σωστά αυξήθηκε από 4 σε 9, αυτών που απάντησαν λάθος μειώθηκε από 13 σε 9 και αυτών που δεν απάντησαν καθόλου περιορίστηκε από 6 σε 5.

Αυτοί που απάντησαν σωστά κατάφεραν να ερμηνεύσουν το λεκτικό πρόβλημα, να μετατρέψουν τις ώρες σε λεπτά, να δημιουργήσουν τους λόγους και τελικά να τους συγκρίνουν. Από τα παιδιά που έκαναν λάθος η Βιβή και ο Ραφαήλ προσπάθησαν να το λύσουν με πίνακες, κάτι που όπως είπαμε δείχνει την εμμονή των μαθητών στη χρήση τυποποιημένων μεθόδων επίλυσης, ενώ ο Κωνσταντίνος, η Σοφία, ο Χρόνης και η Μαρία δημιούργησαν μεν τους λόγους, δεν κατάφεραν όμως να τους συγκρίνουν σωστά. Τέλος αρκετοί από τους μαθητές που δεν απάντησαν καθόλου, επειδή όπως είπαν, δεν κατάφεραν να κατανοήσουν το πρόβλημα.

Από τα αποτελέσματα του δείγματός μας φαίνεται πως η σύγκριση των λόγων η οποία εκφράζεται μέσα από ένα λεκτικό πρόβλημα, είναι κάτι που δυσκολεύει τους μαθητές, καθώς απαιτούνται μια σειρά από σύνθετες νοητικές λειτουργίες κωδικοποίησης-αποκωδικοποίησης της κατάστασης μέχρι να μπορέσει ο μαθητής να φέρει τα δεδομένα του σε μια συγκρίσιμη μορφή.

Η επίλυση τέλος του προβλήματος Γ9 μας έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πρόβλημα Γ9						
	Αποτελέσματα Pre-test			Αποτελέσματα Post-test		
Μαθητές	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή	Χ			Χ		
Κωνσταντίνος	Χ			Χ		
Σοφία	Χ			Χ		
Παναγιώτης	Χ			Χ		
Θωμάς			Χ	Χ		
Χάρης	Χ			Χ		
Μαριάννα	Χ			Χ		
Σπύρος	Χ			Χ		
Ελένη	Χ				Χ	
Γιώργος	Χ			Χ		
Αντζελίνα	Χ			Χ		
Ραφαήλ	Χ			Χ		
Θάνος	Χ			Χ		
Χρόνης		Χ		Χ		
Αναστασία			Χ		Χ	
Στέφανος	Χ			Χ		
Άγγελος Μ.		Χ			Χ	
Νίκος		Χ		Χ		
Ιωάννης	Χ			Χ		
Μαρία		Χ		Χ		
Άγγελος Η.			Χ			Χ
Βασιλική		Χ			Χ	
Ραφαέλλα	Χ			Χ		
ΣΥΝΟΛΑ	15	5	3	18	4	1

Πίνακας 30: Αποτελέσματα post-test για το πρόβλημα Γ9.

Για μια ακόμη φορά η Γ9 μας έδωσε καλύτερα αποτελέσματα από την Γ5, καθώς η πρώτη απαιτεί μονάχα της σύγκριση μιας σειράς λόγων. Έτσι οι μαθητές που απάντησαν σωστά αυξήθηκαν από 15 σε 18, αυτοί που απάντησαν λάθος περιορίστηκαν από 5 σε 4, ενώ αυτοί που δεν απάντησαν καθόλου, μειώθηκαν από 3 σε 1.

Σχεδόν όλοι οι μαθητές που απάντησαν σωστά, μπόρεσαν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, δείχνοντας ότι έχουν κατανοήσει την πολλαπλασιαστική σχέση που υπάρχει μεταξύ των όρων των λόγων. Αντιθέτως κάποιοι από αυτούς που απάντησαν λάθος, έδειξαν ότι προσπάθησαν να εφαρμόσουν μια προσθετική τακτική για να ερμηνεύσουν τη σχέση μεταξύ των λόγων. Χαρακτηριστικές είναι οι παρακάτω περιπτώσεις: Η Αναστασία γράφει: *« Παρατηρώ ότι όσο πάει ο αριθμητής μεγαλώνει ανά 15 και ο παρονομαστής ανά 20, εκτός τον τελευταίο (λόγο)».* Το ίδιο περίπου γράφει και ο Άγγελος Μ.: *« Η πάνω σειρά ανεβαίνει ανά 15, ενώ η κάτω ανά 20».* Μια άλλη μαθήτρια, η Βασιλική φαίνεται να αντιμετωπίζει δυσκολίες με τα κλάσματα, καθώς προσπαθεί σε κάθε λόγο χωριστά να αφαιρέσει τον παρονομαστή από τον αριθμητή, ενώ η Ελένη υποστηρίζει πως τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Η άσκηση αυτή δεν δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές, αφού οι περισσότεροι απάντησαν σωστά και μόνο ένας δεν κατάφερε να απαντήσει καθόλου. Σε αυτό βέβαια βοήθησε η φύση του προβλήματος, καθώς οι λόγοι δινόντουσαν απευθείας και το μόνο που χρειαζόταν ήταν η σύγκρισή τους.

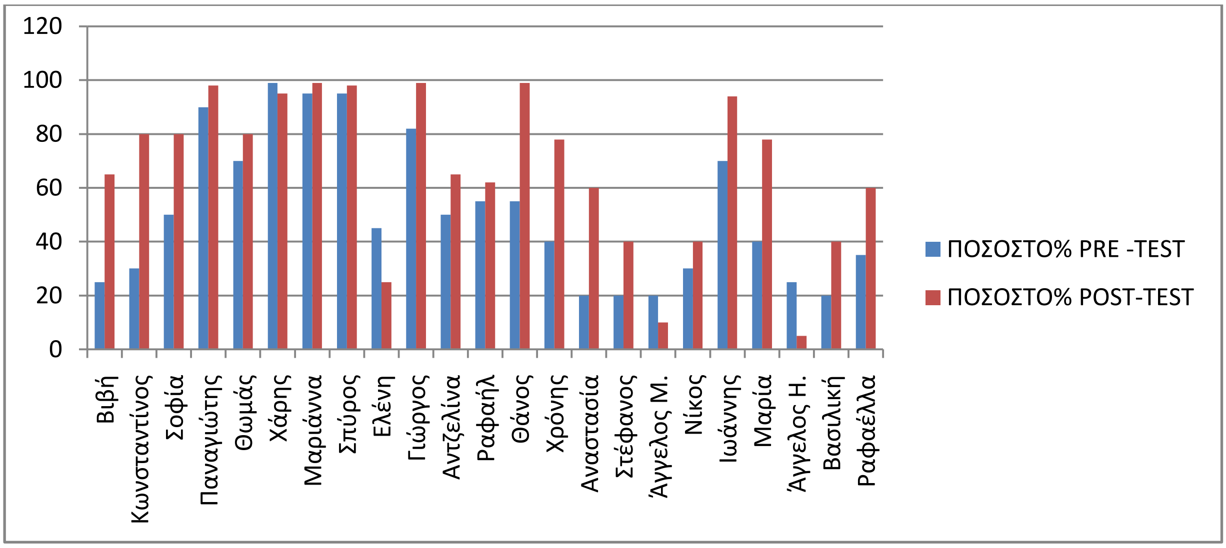
Γενικά σε ότι αφορά τη σύγκριση λόγων είδαμε πως είχαμε αρκετά καλά αποτελέσματα, κυρίως στην άμεση σύγκριση λόγων, ενώ η σύγκριση λόγων που προκύπτει μέσα από μια λεκτική κατάσταση, ήταν κάτι που δυσκόλεψε τους μαθητές.

Αν δούμε γενικά τα αποτελέσματα του post-test και τα συγκρίνουμε με αυτά του pre-test μπορούμε να πούμε ότι σαφώς υπάρχει μια βελτίωση των αποτελεσμάτων τόσο σε ποσοτικά όσο και σε ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Οι μαθητές μετά την παρέμβαση, μπόρεσαν σε κάθε είδους πρόβλημα να δώσουν περισσότερες σωστές απαντήσεις, μειώθηκαν οι λανθασμένες καθώς και οι περιπτώσεις εκείνες που οι μαθητές δεν απάντησαν. Συγκεκριμένα, οι σωστές απαντήσεις αυξήθηκαν από 197 στο pre-test, σε 233 στο post-test, ενώ οι λανθασμένες μειώθηκαν από 130 σε 118 και οι περιπτώσεις που οι μαθητές δεν απάντησαν, μειώθηκαν από 41 σε 17.

Πέρα όμως από τα ποσοτικά στοιχεία, σημαντική βελτίωση είχαμε και στα ποιοτικά χαρακτηριστικά των ικανοτήτων των μαθητών. Έτσι, σε περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές χρησιμοποίησαν πολλαπλές ευρετικές μεθόδους στην επίλυση των ασκήσεων, υιοθέτησαν την πολλαπλασιαστική συλλογιστική στην επίλυση των προβλημάτων, αιτιολόγησαν τις επιλογές τους, δοκίμασαν να δώσουν λύσεις ακόμη και αυτοί οι οποίοι δεν μπόρεσαν στον αρχικό έλεγχο και τέλος περιόρισαν κατά πολύ τα λάθη τους. Ειδικά για το τελευταίο, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τα περισσότερα λάθη ήταν υπολογιστικού χαρακτήρα και όχι στρατηγικής.

Τη βελτίωση των επιδόσεων μπορεί κανείς να τη δει και στο παρακάτω διάγραμμα, όπου παρουσιάζονται συγκριτικά οι επιδόσεις των μαθητών τόσο στο pre-test όσο και στο post-test:



Πίνακας 31: Τα ποσοστά της επίδοσης των μαθητών στο post-test.

Βλέπουμε δηλαδή πως οι περισσότεροι μαθητές μετά την παρέμβαση σημείωσαν σημαντική πρόοδο, με το 1/3 περίπου αυτών να πλησιάζουν την άριστη επίδοση.

Για τη διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών μετά την πραγματοποίηση της παρέμβασης, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε πως συντελέστηκε σημαντική βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών που σχετίζονται με τις έννοιες των Λόγων και Αναλογιών.

Ωστόσο η πρόοδος δεν συντελέστηκε ισομερώς σε όλους τους τομείς που εξετάσαμε. Όπως είδαμε λεπτομερέστερα και πιο πάνω, μεγαλύτερη ήταν η συμβολή της παρέμβασης στην ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων και στην ανάπτυξη της αναλογικής συλλογιστικής, καθώς και στην ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών. Λιγότερο αποτελεσματική ήταν στην περίπτωση της ικανότητας επίλυσης αριθμητικών αναλογιών, ενώ μέτρια ήταν η συμβολή της στην ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων.

6.4 Τα αποτελέσματα της ενσωμάτωσης της νέας γνώσης

Οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τη διδακτική σειρά εργάστηκαν με δραστηριότητες που αφορούσαν κλίμακες, καθώς και λόγους πλευρών ομοίων τριγώνων. Από την εξέταση του ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$ αναφοράς των μαθητών διαπιστώσαμε ότι τα σχολικά εγχειρίδια και το ΑΠΣ δεν προέβλεπαν αρκετές δραστηριότητες με τις έννοιες αυτές. Μπορούμε επομένως να τις θεωρήσουμε ως νέα γνώση, την ενσωμάτωση της οποίας εξετάσαμε με ένα ξεχωριστό τεστ (Παράρτημα Β, σελ.174) πέντε ασκήσεων, όπου συμπεριλήφθησαν δύο δραστηριότητες κλίμακας και τρεις με λόγους πλευρών ομοίων γεωμετρικών σχημάτων. Το τεστ δόθηκε δύο εβδομάδες μετά το post-test. Για τα προβλήματα Ε1, Ε2 και Ε5 που αφορούσαν τους λόγους των πλευρών ομοίων τετραπλεύρων και τριγώνων είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Αποτελέσματα Ε1			Αποτελέσματα Ε2			Αποτελέσματα Ε5		
Μαθητές	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**	**Σωστό**	**Λάθος**	**Δεν απάντησαν**
Βιβή	Χ				Χ		Χ		
Κωνσταντίνος	Χ				Χ		Χ		
Σοφία	Χ			Χ			Χ		
Παναγιώτης	Χ			Χ			Χ		
Θωμάς		Χ			Χ		Χ		
Χάρης	Χ			Χ			Χ		
Μαριάννα	Χ			Χ			Χ		
Σπύρος	Χ			Χ			Χ		
Ελένη	Χ				Χ		Χ		
Γιώργος	Χ			Χ			Χ		
Αντζελίνα		Χ		Χ			Χ		
Ραφαήλ	Χ			Χ			Χ		
Θάνος	Χ			Χ			Χ		
Χρόνης	Χ			Χ			Χ		
Αναστασία	Χ				Χ		Χ		
Στέφανος	Χ			Χ				Χ	
Άγγελος Μ.		Χ			Χ		Χ		
Νίκος		Χ		Χ			Χ		
Ιωάννης	Χ			Χ			Χ		
Μαρία	Χ				Χ		Χ		
Άγγελος Η.	Χ				Χ			Χ	

Βασιλική		X			X		X		
Ραφαέλλα	X			X			X		
ΣΥΝΟΛΑ	**18**	**5**	**0**	**14**	**9**	**0**	**21**	**2**	**0**

Πίνακας 32: Αποτελέσματα του τεστ για τη νέα γνώση για τα προβλήματα Ε1, Ε2 και Ε5.

Η άσκηση Ε1 ζητούσε το λόγο των πλευρών δυο ομοιοθετικών ορθογωνίων. Όπως βλέπουμε 18 μαθητές απάντησαν σωστά και 5 λανθασμένα. Όλοι αυτοί που απάντησαν σωστά, κατάφεραν να βρουν το λόγο που τα συνδέει και να δώσουν τις διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου που να διατηρεί την αναλογία. Από τους μαθητές που έκαναν λάθος, ο Θωμάς και η Αναστασία κατάφεραν να βρουν τους λόγους που συνέδεαν τα ορθογώνια, αλλά δεν μπόρεσαν να βρουν τις διαστάσεις ενός άλλου ορθογώνιου που να διατηρεί την αναλογία. Ενδιαφέρον παρουσίασε η απάντηση της Αντζελίνας, η οποία απάντησε: «*το μεγάλο ορθογώνιο έχει διπλάσιες διαστάσεις*». Βλέπουμε πως οι 3 από τους 5 μαθητές που έκαναν λάθος είχαν αντιληφθεί την πολλαπλασιαστική σχέση που συνέδεε τα σχήματα.

Η άσκηση Ε2 ζητούσε να βρούνε ποια ορθογώνια ήταν όμοια και στη συνέχεια να γράψουνε το λόγο των πλευρών τους. Παρατηρούμε πως 14 μαθητές απάντησαν σωστά και 9 λανθασμένα. Εντύπωση προκαλεί ο μεγάλος αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων, παρότι η άσκηση δεν ήταν ιδιαίτερα δύσκολη. Οι περισσότεροι από αυτούς που έκαναν λάθος, όπως ο Θωμάς, η Αναστασία, η Μαρία, ο Κωνσταντίνος και η Βιβή κατάφεραν να σχηματίσουν τους λόγους, έκαναν λάθος όμως στη σύγκρισή τους. Εδώ διαπιστώνουμε πάλι κάποιες δυσκολίες με τα κλάσματα.

Πολύ καλά αποτελέσματα έφερε η Ε5, όπου δίνονταν δύο όμοια τρίγωνα και ζητούσε να βρεθεί η τρίτη πλευρά του ενός τριγώνου. Παρόμοια άσκηση είχε δοθεί και στο $4^{ο}$ Φ.Ε. Όπως βλέπουμε, 21 μαθητές απάντησαν σωστά και μόνο 2, ο Στέφανος και ο Άγγελος Η. απάντησαν λάθος. Εδώ φάνηκε καθαρά η επίδραση της διδακτικής σειράς, αφού η κατάσταση με τα τρίγωνα έμοιαζε πολύ με τα τρίγωνα που σχηματίζονταν από τη χρήση του εργαλείου.

Πάντως σε καμία άσκηση δεν υπήρχε μαθητής που δεν απάντησε σε κάποιο πρόβλημα.

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων Ε3 και Ε4 περιελάμβανε δραστηριότητες με κλίμακες και είχαμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Αποτελέσματα Ε3				Αποτελέσματα Ε4		
Μαθητές	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν	Σωστό	Λάθος	Δεν απάντησαν
Βιβή	X			X		
Κωνσταντίνος		X			X	
Σοφία	X			X		
Παναγιώτης	X			X		
Θωμάς	X			X		
Χάρης	X			X		
Μαριάννα	X			X		
Σπύρος	X			X		
Ελένη	X			X		
Γιώργος	X			X		
Αντζελίνα		X			X	
Ραφαήλ	X			X		
Θάνος	X			X		
Χρόνης	X			X		
Αναστασία		X				X
Στέφανος	X				X	
Άγγελος Μ.	X				X	
Νίκος		X		X		
Ιωάννης	X			X		
Μαρία	X			X		
Άγγελος Η.		X			X	
Βασιλική			X			X
Ραφαέλλα	X			X		
ΣΥΝΟΛΑ	17	5	1	16	5	2

Πίνακας 33: Αποτελέσματα του τεστ για τη νέα γνώση για τα προβλήματα Ε3 και Ε4.

Στην Ε3 δίνονταν οι διαστάσεις ενός γηπέδου υπό κλίμακα και έπρεπε οι μαθητές να βρούνε τις πραγματικές διαστάσεις. Ενώ επρόκειτο για μια σχετικά απλή άσκηση, 17 μαθητές απάντησαν σωστά, 6 λανθασμένα και 1 δεν απάντησε καθόλου. Οι 4 έκαναν λάθη στις πράξεις, ενώ η Αντζελίνα και ο Κωνσταντίνος πολλαπλασίασαν τις διαστάσεις, όπως γίνεται στην εύρεση του εμβαδού.

Στην Ε5 δίνονταν ο χάρτης της Κρήτης υπό κλίμακα και ζητούνταν η πραγματική απόσταση μεταξύ Ρεθύμνου-Ηρακλείου. Εδώ 16 μαθητές απάντησαν σωστά, 5 λάθος και 2 δεν απάντησαν καθόλου. Για μια ακόμα φορά τα λάθη έγιναν κυρίως στις πράξεις, όπως και στις μετατροπές των μονάδων μέτρησης, καθώς έπρεπε να μετατρέψουν τα εκατοστά σε χιλιόμετρα.

6.5 Η αξιολόγηση της διδακτικής σειράς από τους ίδιους τους μαθητές

Η αξιολόγηση της διδακτικής σειράς στηρίχθηκε σε ένα ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Γ, σελ. 180), το οποίο είχε ως βάση του, τους εξής άξονες: α) τη γενική αξιολόγηση, β) το κείμενο, γ) το εργαλείο, δ) τη διδακτική σειρά, ε) τη συνεργασία των ομάδων και στ) τη χρησιμότητα της σειράς.

Ότι αφορά τη γενική αξιολόγηση οι απαντήσεις των μαθητών συνοψίζονται στα εξής:

Το πρώτο ερώτημα ζητούσε από τους μαθητές να γράψουν τρία πράγματα τα οποία έμαθαν με τη διδακτική παρέμβαση, βάζοντας τα σε μια σειρά, ανάλογα με το ποιο θεωρούσαν πιο σπουδαίο.

Ερώτηση: Κάτι που έμαθα.	
Απαντήσεις	**Συχνότητα**
Να συνεργάζομαι	14
Να μετρώ απρόσιτες αποστάσεις	17
Να χρησιμοποιώ το εργαλείο Errard	13
Υπάρχουν πολλά εργαλεία για μέτρηση αποστάσεων	11
Κατάλαβα καλύτερα τις αναλογίες	14
Σύνολο	69

Πίνακας 34: Απαντήσεις των μαθητών για το τι έμαθαν από τη διδακτική παρέμβαση.

Στο πρώτο ερώτημα, σχετικά με το τι έμαθαν από τη διδακτική αυτή σειρά, βλέπουμε πως 17 μαθητές δήλωσαν πως έμαθαν να μετρούν απρόσιτες αποστάσεις. Άλλοι 14 δήλωσαν πως έμαθαν να συνεργάζονται, 11 ότι υπάρχουν πολλά εργαλεία για τη μέτρηση αποστάσεων και 14 ότι κατάλαβαν καλύτερα τις αναλογίες. Αν θελήσουμε να εξετάσουμε τι θεώρησαν τα παιδιά ως πιο σπουδαίο από αυτά που έμαθαν, δηλαδή ποια ήταν η πρώτη τους προτίμηση, τότε θα δούμε πως το «Να μετρώ απρόσιτες αποστάσεις» προτιμήθηκε ως πρώτη επιλογή από 8 παιδιά, το «Κατάλαβα καλύτερα τις αναλογίες» από 6 παιδιά, το «Να συνεργάζομαι» από 5 παιδιά και από 2 παιδία οι απαντήσεις «Υπάρχουν πολλά εργαλεία για μέτρηση αποστάσεων» και «Να χρησιμοποιώ το εργαλείο Errard».

Στο δεύτερο ερώτημα που ζητάει από τους μαθητές να δηλώσουν κάτι που τους εξέπληξε, υπήρχαν όπως είναι φυσικό πολλές και διαφορετικές απαντήσεις. Ξεχωρίσαμε και ομαδοποιήσαμε κάποιες από αυτές:

Ερώτηση: Κάτι που με εξέπληξε	
Απαντήσεις	**Συχνότητα**
Ότι με ένα ιστορικό εργαλείο, μπόρεσα να μετρήσω απρόσιτες αποστάσεις	5
Ότι δούλεψε στην πράξη, μια ιδέα του 16^{ου} αιώνα	3
Ότι ο Errard στηρίχτηκε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία	2
Ότι με τρεις μόνο ξύλινες βέργες μπόρεσα να μετρήσω απρόσιτες αποστάσεις	2
Στην αρχή νόμιζα πως δε θα μου αρέσει	2
Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να μετράς αποστάσεις	3
Πως υπήρχε ένα τέτοιο εργαλείο και δεν το ήξερα	2
Πόσα πράγματα μπορούμε να καταφέρουμε με το εργαλείο του Errard	1
Ότι με ένα τόσο μικρό εργαλείο, μπόρεσα να μετρήσω τόσο μεγάλες αποστάσεις	2
Ότι ήταν τόσο εύκολη η χρήση του	1
Σύνολο	23

Πίνακας 35: Απαντήσεις των μαθητών για το τι τους εξέπληξε στη διδακτική σειρά.

Από τις παραπάνω απαντήσεις βλέπουμε ότι αυτό που εξέπληξε κυρίως τα παιδιά ήταν η διασύνδεση της παρέμβασης με την Ιστορία. Έτσι, 5 μαθητές απάντησαν ότι τους εξέπληξε το γεγονός πως με ένα ιστορικό εργαλείο κατάφεραν να μετρήσουν απρόσιτες αποστάσεις, άλλοι 3 ότι δούλεψε στην πράξη μια ιδέα του 16^{ου} αιώνα, 2 ότι ο Errard στηρίχθηκε στη Γεωμετρία του Ευκλείδη και άλλοι 2 πως υπήρχε ένα τέτοιο εργαλείο, το οποίο δεν γνώριζαν.

Εντύπωση επίσης έκανε στα παιδιά το γεγονός, ότι κατάφεραν να κάνουν πράγματα τα οποία είτε πίστευαν ότι δε θα κατάφερναν, είτε νόμιζαν ότι δε θα τους άρεσαν. Έτσι 2 παιδιά είπαν, πως στην αρχή πίστευαν ότι δε θα τους άρεσε και 1 εντυπωσιάστηκε από το πόσα πράγματα κατάφεραν να κάνουν.

Τέλος, εντύπωση έκανε στους μαθητές η λειτουργικότητα και χρηστικότητα του εργαλείου. Έτσι 3 εντυπωσιάστηκαν από την ανακάλυψη ότι ίσως υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι για να μετράς αποστάσεις και τα παιδιά ανακάλυψαν έναν από αυτούς και 2 παιδιά εξεπλάγησαν από το γεγονός πως, με μια τόσο απλή κατασκευή από τρεις βέργες, κατάφεραν να μετρήσουν απρόσιτες αποστάσεις.

Στην τελευταία ερώτηση του γενικού μέρους για το τι δυσκόλεψε τους μαθητές, απάντησαν μόνο οι μισοί:

Ερώτηση: Κάτι που με δυσκόλεψε	
Απαντήσεις	**Συχνότητα**
Η καθετότητα του οργάνου	1
Η στόχευση με το όργανο	1
Η χρήση του οργάνου	8
Η σταθερότητα του οργάνου	2
Σύνολο	12

Πίνακας 36: Απαντήσεις των μαθητών για το τι τους δυσκόλεψε στη διδακτική σειρά.

Από τις απαντήσεις των μαθητών βλέπουμε πως όλες οι δυσκολίες είχαν σχέση με τη χρήση του οργάνου. Αυτό άλλωστε φάνηκε και κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, όμως περιορίστηκε στην αρχή τους. Αργότερα, όταν εξοικειώθηκαν με τη χρήση του εργαλείου οι δυσκολίες αυτές σχεδόν εξαφανίστηκαν. Εδώ βέβαια απουσιάζουν οι απαντήσεις των παιδιών που σχετίζονται με δυσκολίες γνωστικής φύσης, οι οποίες φαίνεται να μη γίνονται αντιληπτές από τα ίδια τα παιδιά, αλλά μόνο από τον διδάσκοντα. Περιορίζονται έτσι στη διατύπωση των δυσκολιών που σχετίζονται με τις διαδικασίες.

Στο δεύτερο σκέλος ερωτήσεων, όπου αξιολογήθηκε το κείμενο, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να δώσουν πολλαπλές απαντήσεις. Η πρώτη ερώτηση ζητούσε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν το κείμενο. Σύμφωνα με τις απαντήσεις τους, όλοι οι μαθητές του δείγματος μας, δηλαδή και οι 23, βρήκαν το ιστορικό κείμενο ενδιαφέρον, 21 μαθητές το βρήκαν ευχάριστο, 18 το βρήκαν κατανοητό, ενώ ένας συμπλήρωσε ότι το βρήκε και λεπτομερές. Πάντως, από την εξέταση των απαντήσεων σε αυτή την ομάδα απαντήσεων, προκύπτει ότι αυτοί που έδωσαν μια αρνητική απάντηση, έδωσαν στις υπόλοιπες ερωτήσεις θετικές απαντήσεις.

Στη δεύτερη ερώτηση, έπρεπε τα παιδιά να απαντήσουν αν το κείμενο είχε σχέση με τα Μαθηματικά. Όλοι οι μαθητές απάντησαν θετικά και συμπλήρωσαν ποιες κατά τη γνώμη τους έννοιες συμπεριλαμβάνονταν στο κείμενο. Οι πιο χαρακτηριστικές απαντήσεις ήταν οι εξής*: «ορθογώνια και ισογώνια τρίγωνα, γωνίες των τριγώνων, λόγοι και αναλογίες των πλευρών των τριγώνων, μέτρηση αποστάσεων, ευθείες γραμμές και Ευκλείδεια Γεωμετρία».* Η ίδια περίπου ερώτηση είχε δοθεί και στο ιστορικό κείμενο (Παράρτημα Ε, σελ.185) οπότε οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εντοπίσουν τις μαθηματικές έννοιες που εμπεριέχονται στο κείμενο.

Βλέπουμε δηλαδή ότι οι περισσότεροι μαθητές ανταποκρίθηκαν θετικά στο κείμενο, αφού το έκριναν ενδιαφέρον, ευχάριστο και κατανοητό, ενώ όλοι κατάφεραν να αντιληφθούν τη σχέση του κειμένου με τα Μαθηματικά και να διακρίνουν τις μαθηματικές έννοιες που συμπεριλαμβάνονται σε αυτό.

Η επόμενη κατηγορία ερωτήσεων, είχε να κάνει με την αξιολόγηση του ίδιου του εργαλείου. Από τις απαντήσεις των παιδιών πήραμε τα ακόλουθα αποτελέσματα: 19 μαθητές θεώρησαν εύκολη την κατασκευή του, ενώ μόνο 4 τη βρήκαν δύσκολη. Αυτοί που απάντησαν θετικά το δικαιολόγησαν ότι υπήρχαν σαφείς και λεπτομερείς οδηγίες, ότι η κατασκευή ήταν σχετικά απλή και ότι υπήρξε καλή συνεργασία με τους συμμαθητές τους. Αυτοί που απάντησαν αρνητικά, θεώρησαν την συναρμολόγηση πολύπλοκη.

Τη χρήση του εργαλείου, 17 μαθητές τη βρήκαν εύκολη, ενώ άλλοι 6 απάντησαν αρνητικά. Πάντως πολλοί από αυτούς που θεώρησαν τη χρήση του εργαλείου δύσκολη, δεν είχαν πρόβλημα με την κατασκευή του.

Και οι 23 μαθητές, δηλαδή όλοι, απάντησαν ότι το εργαλείο τους βοήθησε. Οι περισσότερες απαντήσεις συγκλίνουν στην άποψη, ότι τους βοήθησε να μετρούν αποστάσεις, 2 μαθητές διευκρινίζουν ότι τους βοήθησε να μετρούν αποστάσεις χωρίς μετροταινία και 3 υποστηρίζουν πως τους βοήθησε να κατανοήσουν καλύτερα τους Λόγους και τις Αναλογίες. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε, πως η μέτρηση των αποστάσεων χωρίς τη χρήση της μετροταινίας, μας δείχνει μια μετατόπιση παραδείγματος προς τη GII.

Στο τελευταίο ερώτημα, αν θα ήθελαν στο μέλλον να κατασκεύαζαν και άλλα παρόμοια εργαλεία, 20 μαθητές απάντησαν θετικά, ενώ μόλις 3 αρνητικά. Οι απαντήσεις που πήραμε από τους μαθητές που απάντησαν θετικά έχουν αρκετό ενδιαφέρον. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις απαντήσεις κάποιων μαθητών.

Στέφανος: *«μου αρέσει να βλέπω πράγματα που έχω κατασκευάσει με τους συμμαθητές μου».*

Αντζελίνα: *«ωραία εμπειρία και σε βοηθάει να μάθεις».*

Παναγιώτης: *«είναι ενδιαφέροντα τα εργαλεία και μαθαίνεις πολλά από τη χρήση τους»*

Χάρης: *«θέλω να ανακαλύψω νέα πράγματα και να εισχωρήσω βαθειά στη μαγεία των Μαθηματικών».*

Βασιλική: *«ήταν κάτι διασκεδαστικό».*

Νίκος: *«θέλω να μάθω και για άλλα εργαλεία».*

Γενικά η εμπειρία τους από την κατασκευή και χρήση του εργαλείου, φαίνεται πως αξιολογείται αρκετά θετικά από τους ίδιους τους μαθητές, αφού οι περισσότεροι βρήκαν την κατασκευή και τη χρήση του εργαλείου εύκολη, θεωρούν ότι τους βοήθησε και θα ήθελαν να κατασκευάσουν στο μέλλον παρόμοια εργαλεία. Φαίνεται πάντως από τις απαντήσεις, πως η έμφαση δίνεται περισσότερο στο πρακτικό μέρος, στις μετρήσεις, ενώ η έννοια των Λόγων ενυπάρχει και χρησιμοποιείται ως το μέσο για την επίτευξη τους.

Στην επόμενη ομάδα ερωτήσεων αξιολογείται από τους μαθητές η διδακτική σειρά. Η πρώτη ερώτηση διερευνά το κατά πόσο θα ήθελαν οι μαθητές να πραγματοποιηθούν και άλλες παρόμοιες διδασκαλίες. Εδώ όλοι οι μαθητές, δηλαδή και οι 23 απάντησαν θετικά. Οι απαντήσεις που έδωσαν για να αιτιολογήσουν την άποψή τους ήταν αρκετά ενδιαφέρουσες και φαίνεται να συγκλίνουν στα εξής *:*

Ελένη: *«ήταν χρήσιμες, επιμορφωτικές και διασκεδαστικές».*

Χάρης; *«μου πρόσφερε ένα κίνητρο».*

Άγγελος: *«μου αρέσει να περνάω την ώρα μου με τα Μαθηματικά»*

Χρόνης: *«μου άρεσε που δουλέψαμε όλοι μαζί»*

Κωνσταντίνος: *«μας βοηθούν στα Μαθηματικά».*

Βλέπουμε δηλαδή ότι όλοι οι μαθητές αξιολόγησαν θετικά το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν και άλλες παρόμοιες πρακτικές διδακτικές παρεμβάσεις, επειδή πιστεύουν ότι αυτές τους ωφελούν ποικιλοτρόπως στο μαθησιακό τους έργο.

Με την επόμενη ερώτηση καλούνταν οι μαθητές να χαρακτηρίσουν τη σειρά. Εδώ υπήρχε η δυνατότητα των πολλαπλών επιλογών από τους μαθητές, καθώς και η συμπλήρωση ενός χαρακτηρισμού από τους ίδιους. Όλοι οι μαθητές του δείγματός μας απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις και δύο από αυτούς συμπλήρωσαν και από ένα δικό τους χαρακτηρισμό. Συγκεκριμένα: 23 μαθητές, δηλαδή όλοι, βρήκαν τη σειρά χρήσιμη. Ενδιαφέρουσα τη βρήκαν 21 μαθητές, ενώ 2 απάντησαν αρνητικά. Στην ερώτηση αν τη βρήκαν δύσκολη, 9 μαθητές απάντησαν πως τη βρήκαν δύσκολή, ενώ οι υπόλοιποι 14 απάντησαν αρνητικά. Τέλος δύο μαθητές συμπλήρωσαν πως τη βρήκαν *«ωραία»* και *«κατανοητή»*. Σύμφωνα λοιπόν με τις απαντήσεις της δεύτερης ερώτησης οι περισσότεροι μαθητές χαρακτήρισαν τη σειρά χρήσιμη, ενδιαφέρουσα, αλλά και σχετικά δύσκολη, αφού σχεδόν οι μισοί μαθητές απάντησαν θετικά στην ανάλογη ερώτηση.

Στην τρίτη και τελευταία ερώτηση της ομάδας, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα αν πιστεύουν ότι ύστερα από τη σειρά των μαθημάτων θα μπορούσαν να διαχειρίζονται καλύτερα τα προβλήματα Λόγων-Αναλογιών. Εδώ οι απαντήσεις μοιράστηκαν, καθώς 13 μαθητές απάντησαν θετικά, αλλά οι 10 απάντησαν αρνητικά. Αυτοί οι οποίοι απάντησαν θετικά, αιτιολόγησαν την απάντηση τους λέγοντας κυρίως τα εξής:

Σπύρος: *«οι μετρήσεις γίνονταν με Λόγους-Αναλογίες. Αυτό με βοήθησε να καταλάβω καλύτερα τις αναλογίες».*

Γιώργος: *«τα κατάλαβα καλύτερα».*

Ιωάννης: *«κατάλαβα γιατί το κάνω».*

Μαριάννα: *«θα με βοηθήσει να σκέφτομαι πιο γρήγορα σε προβλήματα με αναλογίες».*

Χάρης: *«κέρδισα εμπειρίες για τη διαχείριση τέτοιων προβλημάτων».*

Σχετικά με τη τελευταία ερώτηση θα πρέπει να πούμε, ότι οι απαντήσεις των μαθητών, χαρακτηρίζουν κυρίως την προσωπική εκτίμηση τους σχετικά με την επίδραση που έχει ή θα έχει η διδακτική σειρά στη διαχείριση προβλημάτων Λόγων και Αναλογιών. Και από ότι φαίνεται πρόκειται για μια μάλλον μετριοπαθή εκτίμηση, καθώς, όπως είδαμε, τα αποτελέσματα του post-test αλλά και οι παρατηρήσεις πεδίου της διδακτικής σειράς, μας έδωσαν αρκετά θετικά αποτελέσματα.

Πάντως το γενικό συμπέρασμα για την αξιολόγηση της διδακτικής σειράς, όπως αυτό καταγράφηκε από τις απαντήσεις των παιδιών, είναι πως τη βρήκαν πολύ χρήσιμη, αρκετά ενδιαφέρουσα, σχετικά δύσκολη και θα ήθελαν πολύ να πραγματοποιηθούν παρόμοιες διδακτικές παρεμβάσεις στο μέλλον.

Το επόμενο ερώτημα διερευνά την αξιολόγηση των μαθητών για το επίπεδο της συνεργασίας τους στις ομάδες εργασίας. Οι απαντήσεις των μαθητών έδειξαν πως και οι 23 συμφώνησαν πως τους άρεσε η συνεργασία τους με τους συμμαθητές τους. Επίσης 21 μαθητές πιστεύουν ότι είχαν καλή επικοινωνία, 20 θεωρούν ότι σεβόντουσαν ο ένας τη γνώμη του άλλου και 23 πιστεύουν ότι υπήρχε αλληλοβοήθεια στην ομάδα. Ακόμη ένας μαθητής συμπλήρωσε πως συνεργάστηκαν με καλή διάθεση, ενώ ένας άλλος έγραψε πως δεν έδειχναν όλοι στην ομάδα τους το ίδιο ενδιαφέρον. Γενικά η εκτίμηση των μαθητών για το επίπεδο της συνεργασίας τους στις ομάδες, ήταν πολύ θετική, αφού υπήρχε επικοινωνία, αλληλοβοήθεια και αμοιβαίος σεβασμός στις απόψεις τους.

Το τελευταίο ερώτημα του ερωτηματολογίου προσπαθεί να εκτιμήσει την άποψη των μαθητών, σχετικά με την χρησιμότητα της διδακτικής σειράς και την πρακτική της αξιοποίηση. Εδώ 19 μαθητές εκτιμούν πως θα χρησιμοποιήσουν αυτά που έμαθαν, στην καθημερινή τους ζωή, ενώ άλλοι 4 πιστεύουν πως όχι. Από τα παιδιά που απάντησαν θετικά ξεχωρίζουν οι παρακάτω απαντήσεις:

Σπύρος: *«θα τα χρειαστώ αν γίνω μαθηματικός, μηχανικός ή τοπογράφος».*

Σοφία: *«θα μπορώ να εκτιμώ καλύτερα τις αποστάσεις».*

Χάρης: *«θα υπολογίζω αποστάσεις χωρίς μετροταινία».*

Μαριάννα: *«θα μπορώ να υπολογίζω την πραγματική απόσταση δύο περιοχών από το χάρτη».*

Ραφαήλ: *«για να υπολογίζω απρόσιτες αποστάσεις».*

Η πλειοψηφία δηλαδή των μαθητών θεωρεί ότι η διδακτική σειρά θα τους φανεί χρήσιμη στην καθημερινή τους ζωή, αφού μπορεί να βρει αρκετές πρακτικές εφαρμογές.

7. Μελέτες περίπτωσης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ξεχωριστά οι περιπτώσεις τριών μαθητών οι οποίοι παρακολούθησαν όλα τα μαθήματα της διδακτικής παρέμβασης. Η πορεία και τα αποτελέσματα της εργασίας τους καθώς και ο βαθμός συμμετοχής τους, σκιαγραφούν σε μεγάλο βαθμό την εξελικτική πορεία της παρέμβασης και αποτελούν δείκτη των ποιοτικών της χαρακτηριστικών.

Η επιλογή των μαθητών έγινε με κριτήριο το φύλο και τις μαθησιακές τους επιδόσεις. Τα 2/3 της τάξης είναι αγόρια. Φροντίσαμε λοιπόν να τηρηθεί αυτή η αναλογία και επιλέξαμε για την περίπτωσή μας 2 αγόρια τον Κωνσταντίνο και τον Ιωάννη και ένα κορίτσι, τη Μαριάννα. Όσον αφορά τις σχολικές τους επιδόσεις, η Μαριάννα βρίσκεται σε ένα πολύ καλό επίπεδο, ο Ιωάννης σε ένα μέτριο επίπεδο και ο Κωνσταντίνος αντιμετωπίζει αρκετές δυσκολίες.

7.1 Η περίπτωση του Κωνσταντίνου.

Ο Κωνσταντίνος πριν τη διδακτική παρέμβαση, στο pre-test, στο πρόβλημα Π1 που εξετάζει τη διάκριση αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων, κατάφερε να απαντήσει σε 6 περιπτώσεις σωστά και σε 1 λάθος. Είχε χαρακτηρίσει ως ανάλογα τα ποσά: παροχή νερού από μια βρύση και το χρόνο πλήρωσης μιας δεξαμενής.

Στα προβλήματα Πρ2, Πρ7 και Πρ8 όπου εξεταζόταν η ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων, έλυσε λάθος και τα τρία προβλήματα. Συγκεκριμένα στο Πρ2, κατάφερε να φτιάξει σωστά ένα πίνακα ποσών-τιμών, αλλά δεν προχώρησε παραπέρα. Στα προβλήματα Πρ7 και Πρ8 προσπάθησε να φτιάξει πίνακες ποσών-τιμών, αλλά τοποθέτησε τις τιμές λάθος και δεν προχώρησε.

Στα προβλήματα Α3, Α4 και Α10, που εξετάζουν την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών, στο πρόβλημα Α3 δεν απάντησε, ενώ στα Α4 και Α10 έκανε λάθη. Στο Α4 όπου έπρεπε να συμπληρώσει τον τέταρτο όρο μιας αναλογίας, έβαλε λάθος αριθμούς και στις οκτώ περιπτώσεις, ενώ στο Α10, όπου έπρεπε να λύσει ένα πρόβλημα με ανάλογα ποσά συμπληρώνοντας τις τιμές σε ένα αναλογικό πίνακα που δίνονταν, συμπλήρωσε λανθασμένα τις τρεις από τις τέσσερις τιμές, χωρίς να ακολουθείται μια λογική αλληλουχία.

Στο πρόβλημα Β6, όπου εξετάζονταν η ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών, ο Κωνσταντίνος απάντησε σωστά, εκφράζοντας λεκτικά τέσσερις περιπτώσεις αριθμητικών λόγων.

Τέλος, στα προβλήματα Γ5 και Γ9, τα οποία σύγκριναν λόγους, στο Γ5 απάντησε λάθος, καθώς προσπάθησε να το λύσει με πίνακα ποσών-τιμών, ενώ στο Γ9 μπόρεσε να συγκρίνει τους λόγους και να διαπιστώσει την αναλογία που ισχύει.

Γενικά βλέπουμε πως η διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ του Κωνσταντίνου πριν την παρέμβαση και όπως αυτή είχε διαμορφωθεί από την επίδραση του αναφορικού ΜΧΕ, δηλαδή των σχολικών εγχειριδίων, είχε σοβαρές αδυναμίες και ελλείψεις. Η ικανότητα του για Μαθηματική Αναλογική Σκέψη, βρισκόταν σε πολύ χαμηλό επίπεδο και το ποσοστό επιτυχίας του στο pre-test ήταν μόλις 30%.

Ακολούθησε η παρέμβαση κατά τη οποία ο Κωνσταντίνος έδειξε σοβαρό ενδιαφέρον, συμμετοχή και διάθεση συνεργασίας. Συμμετείχε ενεργά στη διαμόρφωση του κατάλληλου $ΜΧΕ_{Γεωμετρία}$, εκτελώντας με συνέπεια τις δραστηριότητες που προέβλεπε ο σχεδιασμός της παρέμβασης. Ήδη από την $1^{η}$ παρέμβαση άρχισε να συμμετέχει στη διάδραση της ομάδας. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα όπου κατά την οπτική εκτίμηση του ύψους των αντικειμένων στην αυλή, αντιλαμβάνεται τη σχέση μεγέθους που υπάρχει ανάμεσα στο κτήριο και το δέντρο και λέει: «*Δεν μπορεί το σχολείο να' ναι 7 μέτρα μόνο και το δέντρο 16 μέτρα!*» Κατά τη $2^{η}$ παρέμβαση προσπαθεί να αντιληφθεί τον τρόπο λειτουργίας του εργαλείου του Errard, παρατηρώντας το από το ιστορικό κείμενο: *«Είναι από μέταλλο και έχει μια βίδα…μοιάζει με μηχάνημα».* Στην $5^{η}$ παρέμβαση προσπαθεί να βρει μια λύση, ώστε το εργαλείο να μπορεί να μετρά σε μη επίπεδες επιφάνειες: *«Ναι, θα μπορούσαμε. Απλά θα βάζαμε το εργαλείο λίγο πλάγια για να έρθει κάθετο στο έδαφος».* Κατά την εργασία του με το Φ.Ε.4 παρασύρθηκε από το σχήμα και έδωσε λάθος απαντήσεις στις δραστηριότητες της άσκησης. Έδειξε να μην κατανοεί τι ζητάει η πρώτη ερώτηση και αντί να συγκρίνει τις πλευρές των τριγώνων, αυτός τις αφαίρεσε. Στη συνέχεια όμως, αν και οι απαντήσεις του ήταν λάθος, φάνηκε να εφαρμόζει μια πολλαπλασιαστική στρατηγική και σε όλες τις περιπτώσεις οι πλευρές διατήρησαν τη σχέση 1:2. Ενώ δηλαδή η ΑΕ=50εκ. η ΑΓ βρέθηκε 100εκ. και για ΔΕ=40εκ., η ΒΓ βρέθηκε 80εκ.

Τα αποτελέσματα του post-test που ελέγχουν τη διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ του μαθητή μετά την παρέμβαση, μας έδωσαν τα εξής αποτελέσματα: Στο πρόβλημα Π1 είχε 2 λάθη, το Π1β που παρουσιάζει το λόγο ημερήσιας κατανάλωσης τροφίμων/αριθμό ατόμων και το Π1η που παρουσιάζει την ηλικία/ύψος του ανθρώπου. Δεν είχαμε δηλαδή μια βελτίωση στην ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων.

Αντιθέτως στα προβλήματα Πρ2, Πρ7 και Πρ8 όπου εξετάζεται η ικανότητα ανάπτυξης αναλογικού συλλογισμού είχαμε βελτίωση, αφού τα Πρ2 και Πρ8 τα λύνει σωστά, δείχνοντας μάλιστα και ευρηματικότητα στην επίλυση. Το Πρ8 προσπαθεί να το λύσει με χιαστί γινόμενα, δεν καταφέρνει όμως να το ολοκληρώσει.

Στα προβλήματα Α3, Α4 και Α10 καταφέρνει να λύσει σωστά το πρώτο, συμπληρώνοντας τους πίνακες σωστά, ενώ τα Α4 και Α10 τα λύνει μερικώς σωστά, αφού στο Α4 βρίσκει μόνο τους μισούς όρους και στο Α10 συμπληρώνει το μισό πίνακα.

Το πρόβλημα Β6, όπως και στο pre-test, κατάφερε να το λύσει σωστά. Τέλος στα προβλήματα Γ5 και Γ9, το Γ5 το έλυσε μερικώς σωστά, αφού δημιούργησε τους λόγους, αλλά δεν κατάφερε να τους συγκρίνει, ενώ το Γ9 το έλυσε πάλι σωστά.

Γενικά βλέπουμε μια σημαντική βελτίωση των αποτελεσμάτων στο post-test, αφού κατάφερε να φτάσει το ποσοστό του 70%, γεγονός που μας κάνει να συμπεράνουμε πως μετά τη διδακτική παρέμβαση, σημειώθηκε πρόοδος των ικανοτήτων που συνθέτουν την Μαθηματική Αναλογική Σκέψη του μαθητή.

Όσον αφορά τη νέα γνώση, όπως αυτή αποκτήθηκε μέσα από την πειραματική γεωμετρική εργασία των παρεμβάσεων, τα αποτελέσματα του τεστ μας έδειξαν τα εξής: Στα προβλήματα Ε1, Ε2 και Ε5 που αφορούν γεωμετρικά προβλήματα λόγων, ο Κωνσταντίνος κατάφερε να λύσει σωστά το Ε1 που ζητούσε να βρεθεί ο λόγος δύο ομοίων ορθογωνίων και το Ε5 που ζητούσε το λόγο των πλευρών δύο ομοίων τριγώνων. Στο Ε2, όπου ζητούνταν να βρεθούν τα δύο όμοια ορθογώνια, κατάφερε να τα εντοπίσει και να κυκλώσει τα σωστά, εντούτοις γράφει λάθος το λόγο των πλευρών τους. Στα προβλήματα Ε3 και Ε4, που περιλαμβάνονται δραστηριότητες με κλίμακες είχαμε λάθη και στα δυο. Στο Ε3 αντί να βρει τις πραγματικές διαστάσεις, πολλαπλασιάζει το μήκος με το πλάτος, σαν να επρόκειτο για εμβαδό, ενώ στο Ε4, όπου έπρεπε από το χάρτη να βρεθεί η πραγματική απόσταση, δημιουργεί ένα λόγο της απόστασης προς την κλίμακα: 3εκ / 1: 500.000. Παρόλα αυτά και σε αυτό το τεστ κατάφερε να φτάσει το 70% στη βαθμολογία.

Ο ίδιος ο μαθητής απαντώντας στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε μετά την παρέμβαση, θεωρεί ότι έμαθε να συνεργάζεται με τους συμμαθητές του, να χρησιμοποιεί το εργαλείο του Errard και να μετρά απρόσιτες αποστάσεις. Τον εξέπληξε το πόσα πράγματα μπορούμε να κάνουμε με μια απλή κατασκευή, ενώ κάτι που τον δυσκόλεψε ήταν η χρήση του εργαλείου. Το ιστορικό κείμενο το βρήκε ενδιαφέρον και κατανοητό, ενώ πιστεύει ότι είχε σχέση με τη Γεωμετρία. Το εργαλείο τον βοήθησε να μετρήσει αποστάσεις, ενώ η κατασκευή του, του φάνηκε σχετικά εύκολη. Τη διδακτική σειρά τη βρήκε χρήσιμη, αν και λίγο δύσκολη και θα ήθελε να πραγματοποιηθούν παρόμοιες διδασκαλίες στο μέλλον.

7.2 Η περίπτωση του Ιωάννη

Ο Ιωάννης στο πρόβλημα Π1 του pre-test παρουσίασε άριστη επίδοση, αφού κατάφερε να διακρίνει με απόλυτη επιτυχία όλες τις αναλογικές καταστάσεις.

Στην επόμενη ομάδα προβλημάτων Πρ2, Πρ7 και Πρ8, όπου εξετάζεται η ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων κατάφερε να λύσει σωστά το Πρ2 εφαρμόζοντας τη μέθοδο των χιαστί γινομένων. Στα Πρ7 και Πρ8 ενώ έφτιαξε σωστά τους πίνακες και εφάρμοσε τα σταυρωτά γινόμενα, κατέληξε σε λάθος αποτέλεσμα, από λάθη που έγιναν στο πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

Η επόμενη ομάδα προβλημάτων Α3, Α4 και Α10 εξετάζει την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Τα προβλήματα Α3 και Α10 κατάφερε να τα λύσει σωστά, αφού συμπλήρωσε τις σωστές τιμές στους πίνακες ποσών-τιμών. Το Α4, που ζητούσε τη συμπλήρωση του τέταρτου όρου της αναλογίας, το έλυσε μερικώς σωστά, μιας και κατάφερε να συμπληρώσει σωστά, μόνο τις μισές αναλογίες.

Το πρόβλημα Β6 που εξέταζε την ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών, ο Ιωάννης δεν το απάντησε καθόλου. Ο ίδιος αργότερα το δικαιολόγησε λέγοντας ότι δεν είχε καταλάβει τι ζητούσε η άσκηση.

Τέλος στην ομάδα ασκήσεων Γ5 και Γ9 όπου εξετάζονταν η ικανότητα σύγκρισης λόγων, στο Γ5 κατάφερε να δημιουργήσει τους λόγους, όμως δεν μπόρεσε να τους συγκρίνει και στο Γ9 έλυσε το πρόβλημα σωστά, αιτιολογώντας μάλιστα ότι η σειρά των ίσων λόγων προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του αρχικού λόγου.

Με την εξέταση του προσωπικού ΜΧΕ του μαθητή, όπως αυτός διαμορφώθηκε από τον αναφορικό χώρο των σχολικών εγχειριδίων, μπορούμε να πούμε πως ο Ιωάννης γενικά, παρουσίασε μια καλή εικόνα, αφού μπόρεσε να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του pre-test και να φτάσει σε μια επίδοση του 70% περίπου. Έμελλε λοιπόν να δούμε, πως η διαμόρφωση του κατάλληλου ΜΧΕ$_{\text{Γεωμετρία}}$, μέσω μιας γεωμετρικής προσέγγισης, θα επιδρούσε στη βελτίωση των ικανοτήτων του μαθητή.

Κατά τη διδακτική παρέμβαση ο Ιωάννης λειτούργησε πολύ θετικά μέσα στην ομάδα του, συμμετέχοντας ενεργά στη πειραματική γεωμετρική εργασία, από την πρώτη κιόλας παρέμβαση. Εργάστηκε με την ομάδα του στο παράδειγμα της GI σε ένα χώρο πραγματικό όπου οι μετρήσεις και το πείραμα αποτέλεσαν το μέσο της επικύρωσης. Καταλυτικός ήταν ο ρόλος του στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων των τριγώνων, που σχηματίζονται από το εργαλείο: *«Ναι, η ΑΔ πατάει επάνω στην ΑΒ…», «Οι δυο βάσεις είναι παράλληλες»*. Χρησιμοποίησε στη συνέχεια τις ιδιότητες αυτές για να οδηγηθεί στην επίλυση προβλημάτων μέτρησης στο χώρο της αυλής. Πήρε μέρος στη συζήτηση που προέκυψε για τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν με τη χρήση του εργαλείου: *«Εγώ μερικές φορές δεν μπορούσα να το σταθεροποιήσω»* ή για την καθετότητα του εργαλείου: *«Εμένα ο παππούς μου είναι χτίστης. Κρεμάει ένα βαρίδι σε πετονιά»*. Κατά την εργασία του με το Φ.Ε.4, κατάφερε να βρει σωστά τον λόγο των πλευρών των τριγώνων και να πει ότι ΑΔ ήταν 3 φορές μικρότερη από την ΑΒ. Κάνοντας χρήση του λόγου που βρήκε, κατάφερε να υπολογίσει σωστά και την ΑΓ, που ήταν 150εκ. Υπολόγισε λάθος όμως τη ΒΓ, την οποία βρήκε 80εκ.

Τα αποτελέσματα του post-test μας έδειξαν τα εξής: Στο πρόβλημα Π1 κατάφερε να λύσει σχεδόν όλα τα ερωτήματα σωστά, εκτός από το Π1α, το οποίο εξετάζει το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδόν. Όταν το συζητήσαμε, το δικαιολόγησε λέγοντας ότι το έκανε από απροσεξία. Τόσο στο pre-test όσο και στο post-test ο Ιωάννης κατάφερε να διατηρήσει υψηλή ικανότητα διάκρισης αναλογικών-μη αναλογικών καταστάσεων.

Στην επόμενη ομάδα προβλημάτων Πρ2, Πρ7 και Πρ8 είχαμε μια σημαντική βελτίωση της ικανότητας επίλυσης αναλογικών έργων, αφού ο Ιωάννης έλυσε σωστά και τα τρία προβλήματα. Έφτιαξε πίνακες ποσών-τιμών και εφάρμοσε και στα τρία τη μέθοδο των χιαστί γινομένων. Να σημειωθεί πως στο pre-test, είχε λύσει μόνο το ένα πρόβλημα αυτής της ομάδας σωστά.

Η επίλυση των προβλημάτων Α3, Α4 και Α10 που εξετάζουν την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών, μας έδωσε τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα που είχαμε και στο pre-test. Συγκεκριμένα ο Ιωάννης έλυσε σωστά το Α3 και το Α10, ενώ έκανε τρία λάθη στην εύρεση του τέταρτου όρου της αναλογίας, στο πρόβλημα Α4.

Στο πρόβλημα Β6, όπου εξετάζεται η ικανότητα επίλυσης λεκτικών αναλογιών, είχαμε σημαντικότατη βελτίωση. Ο Ιωάννης κατάφερε να απαντήσει σωστά στο πρόβλημα, ενώ στο pre-test δεν είχε απαντήσει καθόλου.

Τέλος η ομάδα προβλημάτων Γ5 και Γ9 που ελέγχει την ικανότητα σύγκρισης λόγων, μας έδωσε άριστα αποτελέσματα, μιας και απάντησε και στα δύο προβλήματα σωστά. Να σημειωθεί και εδώ πως στο pre-test, το Γ5 δεν είχε καταφέρει να το λύσει σωστά.

Από τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του ελέγχου μετά την παρέμβαση, διαπιστώνουμε μια σημαντική βελτίωση των ικανοτήτων που συνθέτουν τη Μαθηματική Αναλογική Σκέψη του μαθητή. Το ποσοστό επιτυχίας του έφτασε στο 90%, δείχνοντας σημαντική βελτίωση από το pre-test.

Ο έλεγχος της νέας γνώσης που προέκυψε από την γεωμετρική προσέγγιση της παρέμβασης, μας έδειξε άριστα αποτελέσματα. Στα προβλήματα Ε1, Ε2 και Ε5 που εξετάζουν τους λόγους γεωμετρικών σχημάτων, ο Ιωάννης απάντησε σωστά. Στην Ε1 σχημάτισε σωστά το λόγο των πλευρών των ομοίων ορθογωνίων και έδωσε τις διαστάσεις ενός άλλου όμοιου ορθογωνίου, που να διατηρεί τον ίδιο λόγο. Στην Ε2 βρήκε ποια ορθογώνια ήταν όμοια και έγραψε σωστά τους λόγους των πλευρών τους. Στην Ε5 βρήκε το λόγο των πλευρών των ομοίων τριγώνων και υπολόγισε σωστά τη ΒΓ. Τέλος, έλυσε σωστά και τα προβλήματα Ε3 και Ε4, τα οποία περιλαμβάνουν δραστηριότητες με κλίμακες. Στην Ε3 βρήκε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου, βάσει κλίμακας, ενώ στην Ε4 εργάστηκε με το χάρτη και την κλίμακα και βρήκε την πραγματική απόσταση Ρεθύμνου-Ηρακλείου.

Από το ερωτηματολόγιο παίρνουμε χρήσιμες πληροφορίες για την επίγνωση της γνώσης των μαθητών και για την αξιολόγηση της παρέμβασης. Έτσι, ο Ιωάννης θεωρεί πως με τη διδακτική σειρά έμαθε να μετρά απρόσιτες αποστάσεις, κατάλαβε καλύτερα τις αναλογίες και ότι μπορεί να μετρά αποστάσεις και με άλλα όργανα, εκτός της μετροταινίας. Τον εξέπληξε το γεγονός ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εργαλείο του Errard σε επιφάνειες μη επίπεδες, ενώ θεωρεί ότι δεν τον δυσκόλεψε κάτι ιδιαίτερα. Το ιστορικό κείμενο το βρήκε ενδιαφέρον ευχάριστο και κατανοητό και θεωρεί ότι έχει σχέση με τα Μαθηματικά. Η κατασκευή του εργαλείου του φάνηκε σχετικά εύκολη, δυσκολεύτηκε όμως λίγο στη χρήση του. Πιστεύει πως το εργαλείο τον βοήθησε να μετρήσει απρόσιτες αποστάσεις και θα ήθελε στο μέλλον να κατασκευάσει και άλλα παρόμοια εργαλεία για τα Μαθηματικά. Τη σειρά των μαθημάτων τη βρήκε χρήσιμη, ενδιαφέρουσα αλλά και δύσκολη και θα ήθελε να πραγματοποιηθούν και άλλες παρόμοιες διδασκαλίες. Ακόμη πιστεύει πως τα μαθήματα τον βοήθησαν να διαχειρίζεται καλύτερα τα προβλήματα Λόγων-Αναλογιών και ότι θα χρησιμοποιήσει αυτά που έμαθε στην καθημερινή του ζωή. Τέλος, του άρεσε πολύ η συνεργασία με τους συμμαθητές του, γιατί είχαν καλή επικοινωνία, όμως τόνισε πως πρέπει να σέβονται ο ένας τη γνώμη του άλλου.

7.3 Η περίπτωση της Μαριάννας

Η Μαριάννα στον προέλεγχο που έγινε, για να εκτιμηθεί η διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ της μετά από τη διδασκαλία της ενότητας από το σχολικό εγχειρίδιο, έφερε άριστα αποτελέσματα. Στο πρόβλημα Π1 του Pre-test απάντησε σωστά, σχεδόν σε όλα τα ερωτήματα. Κατάφερε να διακρίνει όλες της αναλογικές καταστάσεις, εκτός από την πρώτη στο Π1α, όπου παρουσίαζε μια γεωμετρική κατάσταση.

Στην επόμενη ομάδα προβλημάτων Πρ2, Πρ7 και Πρ8 έφερε επίσης άριστα αποτελέσματα, αφού έλυσε σωστά και τα τρία προβλήματα που αφορούσαν την εξέταση της ικανότητας επίλυσης αναλογικών έργων. Στην επίλυση των Πρ2 και Πρ7 χρησιμοποίησε τη μέθοδο των χιαστί γινομένων, ενώ στο Πρ8 τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

Η ίδια κατάσταση επικράτησε και στα προβλήματα Α3, Α4 και Α10, όπου εξετάζονταν η ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Στο Α4 βρήκε σωστά τον τέταρτο όρο όλων των αναλογιών, ενώ στα Α3 και Α10 κατάφερε να συμπληρώσει σωστά τους αναλογικούς πίνακες και να λύσει τα προβλήματα.

Στο πρόβλημα Β6 μπόρεσε με επιτυχία να δημιουργήσει τις λεκτικές αναλογίες που εξέφραζαν οι αριθμητικοί λόγοι.

Τέλος, στα προβλήματα Γ5 και Γ9 είχε πολύ καλά αποτελέσματα, αφού στο Γ9 μπόρεσε να διακρίνει την αναλογία που υπήρχε μεταξύ των ομοίων λόγων που παρουσίαζε το πρόβλημα. Το Γ5 όμως δεν κατάφερε να το λύσει σωστά, μιας και αντί να συγκρίνει τους λόγους που δημιουργούνταν από τα δεδομένα του προβλήματος, προσπάθησε να το λύσει με τη μέθοδο των χιαστί γινομένων. Εδώ δηλαδή, βλέπουμε μια εμμονή στην στρατηγική που προτείνει το σχολικό βιβλίο για την επίλυση αναλογικών έργων, την οποία η μαθήτρια εφάρμοσε ακόμη και στη σύγκριση λόγων. Πάντως, η Μαριάννα παρουσίασε μια άριστη επίδοση στο τεστ αυτό, που έφτασε το ποσοστό του 90%.

Στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης εργάστηκε αρμονικά με την ομάδα της και κατάφερε να ανταπεξέλθει στα ζητούμενα των εργασιών. Συμμετείχε ενεργά σε συζητήσεις γύρω από θέματα που ανέκυπταν, προωθώντας τη δυναμική της ομάδας. Έδειξε μεγάλη ευρηματικότητα και λειτουργική κατανόηση. Από την έναρξη κιόλας των παρεμβάσεων πρότεινε τη χρήση του μέσου όρου του ύψους των μαθητών ως μέτρο σύγκρισης: *«Δηλαδή να πάρουμε τον μέσο όρο;»* και δείχνει ζωηρό ενδιαφέρον για τη χρήση του εργαλείου: *«Πότε θα πάμε να μετρήσουμε με αυτό;»*. Κατά τις εργασίες με τα σχήματα κατάφερε να διαπιστώσει ότι η ΒΓ ήταν η ζητούμενη πλευρά του τριγώνου: *«Είναι η απόσταση που ζητάμε!»* και εργάστηκε με τα δύο όμοια τρίγωνα στον πίνακα για να δείξει την αναλογία των πλευρών τους και δείχνει να κατανοεί τη διαφορά λόγου-κλάσματος: *«Στα κλάσματα το 1/3 είναι μικρότερο από τη μονάδα, ενώ το 3/1 είναι ίσο με 3»*. Κατά την εργασία με το εργαλείο προτείνει ένα τρόπο για να μετράμε μεγαλύτερες αποστάσεις: *«Ναι, θα βάζαμε ένα σημαδάκι στα 6μ και θα συνεχίζαμε…»* και προτείνει δύο διαγώνιους για την εύρεση του κέντρου της αυλής: *«Θα μπορούσαμε να φέρουμε δυο διαγώνιους. Εκεί που ενώνονται είναι το κέντρο της αυλής»*. Τέλος συμμετείχε ενεργά στις συζητήσεις για την κλίμακα: *«Ναι είναι ο λόγος των διαστάσεων στο χαρτί, προς τις πραγματικές διαστάσεις»*.

Στο post-test είχαμε τα εξής αποτελέσματα: Στο πρόβλημα Π1 είχε πάλι ένα λάθος, όμως αυτή τη φορά όχι την περίπτωση της γεωμετρικής κατάστασης (Π1α), αλλά το Π1β όπου υπήρχε μια αντίστροφη αναλογία. Όλα τα υπόλοιπα κατάφερε να τα λύσει σωστά, καταφέρνοντας να διακρίνει τις αναλογικές καταστάσεις.

Στα προβλήματα Πρ2, Πρ7 και Πρ8 κατάφερε να λύσει όλα τα προβλήματα αναλογικών έργων σωστά, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τη μέθοδο των χιαστί γινομένων για όλα.

Κατάφερε επίσης να λύσει σωστά και τα προβλήματα Α3, Α4 και Α10, δείχνοντας μια υψηλή ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών. Συμπλήρωσε σωστά τον τέταρτο όρο της αναλογίας στην Α4 και τους αναλογικούς πίνακες στα Α3 και Α10.

Στο πρόβλημα Β6 κατάφερε να σχηματίσει σωστά τις λεκτικές αναλογίες και να λύσει σωστά το πρόβλημα.

Τέλος, κατάφερε αυτή τη φορά να λύσει σωστά και το Γ5 συγκρίνοντας σωστά τους λόγους που δημιουργούνταν. Μάλιστα χρησιμοποίησε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών για μετατρέψει τα κλάσματα σε ομώνυμα. Επίσης, σωστά έλυσε και τη Γ9. Αιτιολόγησε μάλιστα την απάντησή της, λέγοντας πως η σειρά των κλασμάτων δημιουργήθηκε από το αρχικό κλάσμα με πολλαπλασιασμό.

Η Μαριάννα κατάφερε, όχι μόνο να κρατήσει το υψηλό ποσοστό επιτυχίας που είχε στο pre-test, αλλά σημείωσε και πρόοδο ανεβάζοντας το ποσοστό της σε 98% στο post-test. Βλέπουμε, δηλαδή, μια σαφώς θετική επίδραση της διδακτικής σειράς στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης της μαθήτριας.

Εξίσου, άριστα αποτελέσματα είχε και το τεστ για τη νέα γνώση, όπως αυτή διαμορφώθηκε μέσα από την πειραματική μας προσέγγιση. Η Μαριάννα απάντησε σωστά σε όλα τα προβλήματα του τεστ, τόσο σε αυτά που αφορούσαν την ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων (Ε1, Ε2, Ε5), όσο και σε αυτά που αφορούσαν κλίμακες (Ε3, Ε4). Εντόπισε σωστά την ομοιότητα των ορθογωνίων και δημιούργησε τους κατάλληλους λόγους, ενώ στην Ε5 βρήκε σωστά τη ΒΓ πλευρά του τριγώνου. Τέλος, βρήκε τις πραγματικές διαστάσεις του γηπέδου και την πραγματική απόσταση των δύο πόλεων του χάρτη.

Από τις απαντήσεις που έδωσε στο ερωτηματολόγιο, βλέπουμε ότι θεωρεί πως με τη διδακτική σειρά έμαθε να μετρά απρόσιτες αποστάσεις, κατάλαβε καλύτερα τις αναλογίες και έμαθε να χρησιμοποιεί το εργαλείο του Errard. Την εξέπληξε το γεγονός ότι ο Errard βασίστηκε στις μελέτες του Ευκλείδη, ενώ τη δυσκόλεψε λίγο η σωστή τοποθέτηση του εργαλείου στο χώρο. Το ιστορικό κείμενο το βρήκε ενδιαφέρον ευχάριστο και κατανοητό και θεωρεί ότι έχει σχέση με τα Μαθηματικά, αφού εμπεριέχει έννοιες όπως αναλογία, ορθογώνια τρίγωνα κλπ. Η κατασκευή του εργαλείου της φάνηκε σχετικά δύσκολη, βρήκε όμως εύκολη τη χρήση του. Πιστεύει πως το εργαλείο την βοήθησε να μετρήσει απρόσιτες αποστάσεις και θα ήθελε στο μέλλον να κατασκευάσει και άλλα παρόμοια εργαλεία για τα Μαθηματικά, αφού προσφέρουν την ευκαιρία να μάθεις κάτι καινούριο. Τη σειρά των μαθημάτων τη βρήκε χρήσιμη, ενδιαφέρουσα αλλά και δύσκολη και θα ήθελε να πραγματοποιηθούν και άλλες τέτοιες διδασκαλίες. Ακόμη πιστεύει πως τα μαθήματα την βοήθησαν να διαχειρίζεται καλύτερα τα προβλήματα Λόγων-Αναλογιών και ότι θα χρησιμοποιήσει αυτά που έμαθε στην καθημερινή της ζωή, όπως για παράδειγμα στον υπολογισμό των πραγματικών αποστάσεων του χάρτη. Τέλος, της άρεσε η συνεργασία με τους συμμαθητές της, γιατί βοηθούσαν ο ένας τον άλλο, αλλά πιστεύει πως χρειάζεται καλύτερη επικοινωνία μεταξύ τους.

8. Συζήτηση – συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μια συζήτηση που συνοψίζει τα αποτελέσματα της έρευνας σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα και επιχειρεί την ερμηνεία τους με βάση το θεωρητικό πλαίσιο των $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$.

Ο αρχικός σχεδιασμός της διδασκαλίας προέβλεπε την ολοκλήρωσή της σε οχτώ συνολικά παρεμβάσεις, οι οποίες θα αναπτύσσονταν πάνω στα τρία κάθετα επίπεδα που ορίζουν οι ΜΧΕ: το Σημειωτικό, το Εργαλειακό και το Λεκτικό. Στην περίπτωσή μας οι δραστηριότητες είναι δομημένες γύρω από το τρίπτυχο: πλευρές ομοίων τριγώνων-εργαλείο Errard-ιδιότητες ομοίων τριγώνων. Η εργασία για να θεωρηθεί ολοκληρωμένη θα πρέπει να περιλαμβάνει τις τρεις διαστάσεις που ορίζουν τα παραπάνω επίπεδα, να έχει ολοκληρώσει δηλαδή μια πλήρη περιφορά γύρω από τα κάθετα επίπεδα.

Ο χώρος στον οποίο δομείται η εργασία είναι η GI, καθώς δίνεται έμφαση στη διαίσθηση και το πείραμα, ενώ πηγή επικύρωσης είναι ο πραγματικός κόσμος. Ωστόσο σε κάποια σημεία της εργασίας διαπιστώθηκε η μετακίνηση προς τη GII.

Στόχος των δύο πρώτων μαθημάτων ήταν να οδηγηθούν οι μαθητές στην εργαλειακή γένεση. Στην κατασκευή δηλαδή του εργαλείου του Errard, το οποίο γνώρισαν μέσα από ένα ιστορικό κείμενο που παρουσιάσαμε στην τάξη. Πράγματι οι μαθητές εργάστηκαν στο Σημειωτικό-Εργαλειακό επίπεδο και κατάφεραν να μετασχηματίσουν ένα τεχνούργημα σε εργαλείο (instrumentation).

Σκοπός του τρίτου μαθήματος ήταν να μεταφέρουν το σχέδιο της πραγματικότητας, δηλαδή το εργαλείο με τα τρίγωνα που σχηματίζονται κατά τη χρήση του, στο χαρτί και να γίνει ένα γεωμετρικό σχήμα. Οι μαθητές εργάστηκαν στο Εργαλειακό-Λεκτικό επίπεδο και κατάφεραν με τη βοήθεια του χάρακα να μεταφέρουν το σχήμα σε ένα χαρτί με τεραγωνάκια. Εκεί είχαν την ευκαιρία να μελετήσουν τα τρίγωνα και να συζητήσουν για κάποιες από τις ιδιότητες των τριγώνων.

Το τέταρτο μάθημα στόχευσε στην ανάδειξη της ιδιότητας της αναλογίας που υπάρχει μεταξύ των πλευρών των ομοίων τριγώνων. Πράγματι οι μαθητές εργάστηκαν με δύο όμοια τρίγωνα στον πίνακα και κατάφεραν να διαπιστώσουν τη σχέση αναλογίας που υπάρχει μεταξύ των πλευρών τους (Σημειωτικό-Εργαλειακό προς Λεκτικό επίπεδο). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε τη μεγάλη σημασία που έχει για την γεωμετρική εργασία στο χώρο της $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$ το πέρασμα από μια αναπαράσταση στοιχείων μιας κατασκευασμένης πραγματικότητας σε μια αναπαράσταση ιδεατών εννοιών μιας θεωρίας.

Με το πέμπτο μάθημα στοχεύσαμε η ιδιότητα των αναλογιών που αναδύθηκε από την προηγούμενη δραστηριότητα, να καταστεί το μέσο για την επίλυση ενός αναλογικού προβλήματος. Πράγματι οι μαθητές εργάστηκαν στο ίδιο επίπεδο (Σημειωτικό-Εργαλειακό προς Λεκτικό επίπεδο) και έλυσαν το πρόβλημα. Βλέπουμε δηλαδή πως χρησιμοποίησαν μια μαθηματική ιδιότητα που ανακάλυψαν για να επιλύσουν ένα πρόβλημα, γεγονός που σηματοδοτεί τη μετατόπιση από τη GI προς τη GII.

Στην έκτη συνάντησή μας τέθηκε ως στόχος να χρησιμοποιηθεί το εργαλείο του Errard για μετρήσεις στο χώρο της αυλής και οι μετρήσεις αυτές να μεταφερθούν σε ένα πρόχειρο σχέδιο στο χαρτί (Λεκτικό-Εργαλειακό-Σημειωτικό επίπεδο). Για άλλη μια φορά τα παιδιά χρησιμοποίησαν την ιδιότητα των Λόγων που ανακάλυψαν πως ενυπάρχει στο εργαλείο για να μετρήσουν το χώρο της αυλής. Στη συνέχεια μετέφεραν την πραγματικότητα στο χαρτί, τοποθετώντας τις διαστάσεις πάνω σε ένα πρόχειρο σχέδιο του σχολείου. Η χρήση του πρόχειρου σχεδίου με τις διαστάσεις του μας δείχνει μια ακόμη μετατόπιση από τις μετρήσεις (GI) προς τη GII.

Με την έβδομη παρέμβαση στοχεύσαμε στην ανάδειξη μιας άλλης μαθηματικής έννοιας που αποτελεί μια ειδική περίπτωση Λόγων: της κλίμακας. Τα παιδιά χρησιμοποίησαν τα σχέδια και τις μετρήσεις της προηγούμενης δραστηριότητας, εργάστηκαν με αριθμητικές πράξεις και κατάφεραν να σμικρύνουν το πραγματικό σχήμα για να το μεταφέρουν στο χαρτί τους με τη βοήθεια του χάρακα. Το σχέδιο που προέκυψε δεν ήταν πλέον ένα τυχαίο σχήμα, αλλά ένα σχέδιο που απεικόνιζε την πραγματικότητα υπό κλίμακα. Η εργασία στη φάση αυτή κινήθηκε στην Εργαλειακή-Λεκτική προς Σημειωτική διάσταση. Η εργασία παρέμεινε στο παράδειγμα της GI, αφού οι αριθμητικοί υπολογισμοί σχετίζονται κυρίως με τη GI.

Η τελευταία παρέμβαση είχε ως στόχο της την επικύρωση της νέας γνώσης. Η ιδιότητα του εργαλείου θα χρησιμοποιούνταν για να μεταφέρει τώρα ένα γεωμετρικό σχήμα από το χαρτί, στον πραγματικό χώρο της αυλής. Οι μαθητές εργάστηκαν με ένα πρόβλημα που ζητούσε πρώτα την εύρεση του κέντρου της αυλής στο σχέδιο υπό κλίμακα και στη συνέχεια τον εντοπισμό του σημείου στο χώρο της αυλής (Σημειωτικό-Λεκτικό προς Εργαλειακό επίπεδο). Η επιλογή του κατάλληλου εργαλείου για τη διεκπεραίωση της εργασίας, σηματοδοτεί τη διαδικασία της instrumentalisation.

Κάνοντας μια γενική εκτίμηση των οκτώ διδακτικών παρεμβάσεων, θα λέγαμε πως οι στόχοι επετεύχθησαν σε μεγάλο βαθμό. Οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά, ανακάλυψαν τα οφέλη της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εργασία τους, κατασκεύασαν με τα ίδια τους τα χέρια ένα ιστορικό εργαλείο, το χρησιμοποίησαν, ανακάλυψαν τις ιδιότητες των ομοίων τριγώνων και οδηγήθηκαν τέλος στην ανακάλυψη και χρήση των κλιμάκων. Γνώρισαν επομένως, με ένα βιωματικό τρόπο, τους λόγους και τις αναλογίες που στόχευε η έρευνά μας.

Επίσης με οδηγό το ζωηρό ενδιαφέρον και τη συνεργασία των παιδιών, μπορέσαμε όχι απλά να πετύχουμε τους αρχικούς μας στόχους, που προέβλεπε ο σχεδιασμός του κατάλληλου ΜΧΕ των μαθητών, αλλά και να επεκταθούμε και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών, όπως στο μέσο όρο, στη χρήση των κλασμάτων, στη σχέση των κλασμάτων με τους λόγους, στη σχέση ομοίων τριγώνων με τα εμβαδά τους και στις ιδιότητες των ομοίων τριγώνων.

Όσον αφορά τα ερευνητικά μας ερωτήματα, προκειμένου να απαντήσουμε στο **πρώτο ερευνητικό ερώτημα**, εξετάσαμε τη διαμόρφωση του προσωπικού ΜΧΕ των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση. Αυτό, όπως είδαμε, έγινε με ένα τεστ δέκα δραστηριοτήτων, οι οποίες δόθηκαν πριν και μετά την παρέμβαση και προσπάθησαν να διερευνήσουν τις ικανότητες εκείνες των μαθητών που συνθέτουν τη Μαθηματική Αναλογική Σκέψη.

Στον τομέα της μετα-αναλογικής ενημερότητας είδαμε πως δεν είχαμε σημαντική βελτίωση της ικανότητας διάκρισης αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις. Προφανώς η διδακτική σειρά δεν μπόρεσε να επηρεάσει την ικανότητα αυτή των μαθητών. Αυτό βέβαια θα μπορούσε να ερμηνευτεί από το γεγονός ότι η ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας, η οποία έχει μεταγνωστική φύση, προϋποθέτει την εφαρμογή αρκετών διδακτικών παρεμβάσεων.

Ωστόσο, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το γεγονός, ότι στο ερώτημα που αφορούσε μια γεωμετρική κατάσταση, είδαμε πως είχαμε μια σημαντική αύξηση των σωστών απαντήσεων, ενώ αντιθέτως στα υπόλοιπα ερωτήματα που έμοιαζαν πολύ με αυτά του βιβλίου, είχαμε μια στασιμότητα, αν όχι και αύξηση των λανθασμένων απαντήσεων. Διακρίνουμε, δηλαδή, μια ασταθή γνώση. Αυτό μας κάνει να υποθέσουμε πως οι μαθητές, περιορίζονται από τον ΜΧΕ αναφοράς τους, που είναι τα σχολικά εγχειρίδια και οδηγούνται σε μια μηχανιστική διάκριση των αναλογικών καταστάσεων. Αντιθέτως η ενασχόλησή τους με εμπειρικές έρευνες, όπως στην περίπτωσή μας, φαίνεται να οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα.

Αντιθέτως στον τομέα του Μαθηματικού Αναλογικού συλλογισμού είχαμε πολύ καλά αποτελέσματα μετά τη διδακτική παρέμβαση. Διαπιστώσαμε δηλαδή μια σημαντική βελτίωση στην ικανότητα των μαθητών για σύγκριση λόγων και για επίλυση αναλογικών έργων. Αυτό φάνηκε όχι μόνο από την αύξηση των σωστών απαντήσεων που πήραμε στο post-test, αλλά και από τη βελτίωση των μεθόδων επίλυσης και την ποιότητα των απαντήσεων των μαθητών.

Ενώ λοιπόν στην επίλυση αναλογικών έργων στο pre-test, είχαμε σχεδόν αποκλειστική εφαρμογή της μεθόδου του εσωτερικού γινομένου (χιαστί γινόμενα), η οποία μάλιστα δεν συνοδεύονταν από κάποια αιτιολόγηση της απάντησης, στο post-test εφαρμόστηκαν εναλλακτικά και άλλες μέθοδοι επίλυσης, όπως η αναγωγή στη μονάδα και η μέθοδος των τριών. Οι περισσότερες από τις σωστές απαντήσεις συνοδεύονταν μάλιστα και από αιτιολόγηση της απάντησής τους. Ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι ακόμη και μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τα

Μαθηματικά, μπόρεσαν να βελτιώσουν την απόδοσή τους και κατάφεραν να δώσουν απαντήσεις, που έδειξαν ότι έχουν αναπτύξει ικανότητα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Η χρήση αλγεβρικών μεθόδων στην επίλυση των αναλογικών έργων μας δείχνει τη μετακίνηση των μαθητών προς το $\text{ΜΧΕ}_{\text{Άλγεβρα}}$. Αυτό ήταν κάτι που συνεχίσαμε να το βλέπουμε σε όλη τη διάρκεια της εργασίας. Είχαμε δηλαδή μια διαρκή μετακίνηση στο παράδειγμα, από τον $\text{ΜΧΕ}_{\text{Γεωμετρία}}$ προς τον $\text{ΜΧΕ}_{\text{Άλγεβρα}}$ και αντιστρόφως. Αυτό βέβαια δικαιολογείται από τη φύση του μαθηματικού αντικειμένου, το οποίο τοποθετείται στο μεταίχμιο μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας (Picken, 1920).

Ομοίως και στη σύγκριση των λόγων είχαμε σημαντική βελτίωση των απαντήσεων. Εδώ βέβαια πρέπει να πούμε ότι αν και μειώθηκε ο αριθμός των μαθητών που έδειξαν μια σχετική εμμονή στην αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων ως αναλογικά έργα, υπήρξε μεγαλύτερη δυσκολία στις περιπτώσεις σύγκρισης λεκτικών, παρά αριθμητικών καταστάσεων. Αυτό φαίνεται λογικό, αφού η χρήση λεκτικών σχέσεων είναι όπως είπαμε μια διαδικασία αρκετά πιο δύσκολη για τα παιδιά, καθώς προϋποθέτει διαδικασίες μετασχηματισμού των εννοιολογικών σχημάτων.

Το ίδιο θετικά ήταν τα αποτελέσματα στον τομέα του Αναλογικού Συλλογισμού. Είχαμε, δηλαδή, βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών για την επίλυση λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών. Κατάφεραν δηλαδή οι μαθητές να αυξήσουν τις ορθές τους απαντήσεις και μειώθηκε σημαντικά ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησαν. Εδώ βέβαια δεν μπορούμε να μιλήσουμε για βελτίωση της τεχνικής επίλυσης, αφού επρόκειτο για ασκήσεις συμπλήρωσης, χωρίς την εφαρμογή κάποιας ιδιαίτερης τακτικής.

Ωστόσο, αυτό που μας προβλημάτισε ήταν, πως όταν οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν τον τέταρτο όρο μιας αναλογίας, έκαναν λάθη σε κάποιες από τις ισότητες, ενώ σε άλλες όχι. Αυτό, ίσως, δείχνει μια δυσκολία των μαθητών να διαχειριστούν επαρκώς τα κλάσματα.

Ανάλογα αποτελέσματα μας έδωσε και η διδακτική σειρά. Οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με τη μελέτη του ιστορικού κειμένου και με την κατασκευή και χρήση του ιστορικού εργαλείου, είχαν την ευκαιρία να αναπτύξουν την Αναλογική Συλλογιστική. Αυτό έγινε μέσα από την ανακάλυψη της πολλαπλασιαστικής σχέσης που ίσχυε μεταξύ των αποτελεσμάτων, τα οποία προέκυψαν από τις μετρήσεις τους. Οι μαθητές έκαναν χρήση αναλογικών πινάκων, όπου κατέγραφαν τους λόγους των ευθυγράμμων τμημάτων που σχηματίζονταν στο εργαλείο. Εργάστηκαν δηλαδή με αριθμητικές αναλογίες και βελτίωσαν την ικανότητα τους για επίλυση αναλογικών έργων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω και επιχειρώντας να απαντήσουμε στο πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα, θα λέγαμε πως πράγματι, η πειραματική μας γεωμετρική προσέγγιση στους Λόγους και Αναλογίες, κατάφερε να φέρει θετικά αποτελέσματα στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης των μαθητών του δείγματός μας. Ωστόσο υπάρχουν, όπως είναι φυσικό, ακόμη αρκετά περιθώρια βελτίωσης, ειδικά στον τομέα της μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Σχετικά με **το δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα** θα μπορούσαμε να πούμε πως οι κυριότερες δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με εμπειρικές μεθόδους, χωρίζονται όπως είδαμε και στο θεωρητικό μέρος, σε τρεις κατηγορίες: α) τις δυσκολίες γνωστικής φύσης, β) τις δυσκολίες που αφορούν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και γ) τις δυσκολίες που αφορούν τη διδακτική, μαθησιακή διαδικασία.

Σχετικά με τις δυσκολίες **γνωστικού περιεχομένου**, οι κυριότερες δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές ήταν κυρίως η εμμονή κάποιων μαθητών στο προσθετικό σχήμα και στη διαισθητική διάκριση των λόγων. Τα περισσότερα λάθη που έκαναν οι μαθητές στα δύο τεστ, αλλά και στη συμπλήρωση των Φύλλων Εργασίας οφείλονταν κυρίως στην απουσία του πολλαπλασιαστικού σχήματος. Αλλά ακόμη και σε κάποιες σωστές απαντήσεις, είδαμε πως χρησιμοποιήθηκε η προσθετική στρατηγική. Αυτό βέβαια είναι φυσιολογικό για παιδιά Δημοτικού, καθώς το πολλαπλασιαστικό σχήμα είναι κάτι το οποίο συνήθως χρειάζεται χρόνο για να αναπτυχθεί. Επίσης κάποιοι μαθητές τόσο στα τεστ, όσο και κατά την εργασία τους με το εργαλείο, αδυνατούσαν να αντιληφθούν άμεσα τους λόγους που δημιουργούνταν μεταξύ των ποσοτήτων. Στις διδασκαλίες, βοήθησε σημαντικά η αλληλεπίδραση των ομάδων, όπου μπορούσαν να αναζητήσουν στήριξη από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας για να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους. Στα τεστ όμως και κυρίως στα προβλήματα αριθμητικών αναλογιών, φάνηκε εντονότερα το πρόβλημα.

Σχετικά με τις δυσκολίες που αφορούν **τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων** είχαμε κυρίως δυσκολίες που συνδέονταν με τη φύση των προβλημάτων, με το λεκτικό περιεχόμενο των ασκήσεων και με το είδος των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν. Χαρακτηριστικό για τη φύση των προβλημάτων ήταν το παράδειγμα της άσκησης Γ5, όπου είχαμε ένα λεκτικό πρόβλημα σύγκρισης λόγων. Έπρεπε αρχικά οι μαθητές να αντιληφθούν διαισθητικά τη σχέση των λόγων, κάτι που εντοπίσαμε στην προηγούμενη ομάδα δυσκολιών, στη συνέχεια να μετατρέψουν τις ώρες σε λεπτά, να δημιουργήσουν τους λόγους και τέλος να τους συγκρίνουν. Το λεκτικό περιεχόμενο δυσκόλεψε κάποιους μαθητές κυρίως στο ιστορικό κείμενο, όπου περιέχονταν αρκετοί όροι, αλλά και στα προβλήματα αναλογικών έργων, όπου η λεκτική κατάσταση έπρεπε να ερμηνευτεί σε αριθμητική, προκειμένου να οδηγηθούν στην επίλυση του προβλήματος. Τέλος είδαμε πως η φύση των αριθμών και κυρίως τα κλάσματα, δημιούργησαν δυσκολίες σε κάποιους μαθητές. Αυτό φάνηκε τόσο στα τεστ, όσο και στην ενασχόληση τους με τις μετρήσεις. Στα τεστ το είδαμε κυρίως στις ασκήσεις Α4, που αφορούσαν την ικανότητα επίλυσης αριθμητικών αναλογιών, όταν κάποιοι μαθητές ενώ έδειξαν ότι είχαν κατανοήσει το μηχανισμό επίλυσης, έκαναν λάθη διαχείρισης των κλασματικών αριθμών. Το ίδιο έκαναν και στις ασκήσεις Α3 και Α10, αλλά σε μικρότερο βαθμό.

Οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν στην **διδακτική και μαθησιακή διαδικασία,** αφορούσαν κυρίως παράγοντες όπως: η ηλικία, οι ατομικές διαφορές των μαθητών και η ανάπτυξη του αναλογικού σχήματος στον καθένα. Ότι αφορά την ηλικία, πράγματι θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί, πως το νεαρό της ηλικίας των μαθητών δημιούργησε αρκετές μαθησιακές δυσκολίες. Θα πρέπει όμως να επαναλάβουμε, πως πολλοί ερευνητές (Noelting, 1980, Fischer 1988, Lamon, 1993) υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη του αναλογικού σχήματος είναι συνεχής, βαθμιαία και είναι αποτέλεσμα εκμάθησης. Ειδικά τα παιδιά των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, που βρίσκονται στο συμπαγές στάδιο ανάπτυξης, μπορούν μέσω μιας μαθησιακής διαδικασίας να μετατρέψουν ένα λανθάνον δυνητικό σύστημα αναλογικού σχήματος που έχουν αναπτύξει, σε ένα αποτελεσματικό γνωστικό εργαλείο, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων (Ben-Chaim et al., 2012).

Αν και το δείγμα μας ήταν μικρό, υπήρχαν όπως είναι φυσικό, διαφορές τόσο στην νοητική ανάπτυξη, όσο και στην ανάπτυξη του αναλογικού σχήματος στον καθένα. Έτσι λοιπόν, κάποιοι από τους μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες κατανόησης και συνεργασίας. Όπως είπαμε και προηγουμένως, μέσα από τις μαθησιακές διαδικασίες οι μαθητές μπόρεσαν να δημιουργήσουν τα κατάλληλα γνωστικά εργαλεία που τους βοήθησαν να εργαστούν με τους Λόγους και τις Αναλογίες. Δυστυχώς όμως, όπως έδειξαν και τα αποτελέσματα των τεστ αλλά και οι παρατηρήσεις πεδίου, δεν κατάφεραν όλοι να αξιοποιήσουν τα οφέλη στο μέγιστο βαθμό. Αυτό θα μπορούσαμε να το ερμηνεύσουμε από τον τρόπο που λειτουργεί καθένας μέσα σε μια μαθησιακή διαδικασία. Επίσης κάποιοι, ελάχιστοι, μαθητές έδειξαν μερικές φορές απροθυμία για συνεργασία ή και κόπωση. Αυτό παρατηρήθηκε κυρίως κατά την έναρξη των παρεμβάσεων, ξεπεράστηκε όμως σχετικά γρήγορα με την στήριξη των υπολοίπων μελών της ομάδας και σε ελάχιστες περιπτώσεις με τη δική μου παρέμβαση. Ίσως μάλιστα να οφείλεται και στο γεγονός ότι οι μαθητές μας, αν και εργάζονταν ομαδικά στο πλαίσιο της τάξης, δεν είχαν ανάλογες εμπειρίες από παρόμοιες πρακτικές παρεμβάσεις. Επίσης αν αναλογιστεί κανείς ότι τα μεγαλύτερα οφέλη της διδακτικής σειράς, τα καρπώθηκε ο ένας από τους δύο μαθητές της τάξης, με διαπιστωμένα μαθησιακά προβλήματα, αυτό μας κάνει να πιστέψουμε, ότι τουλάχιστον στο διδακτικό-μαθησιακό επίπεδο η διδακτική σειρά μπόρεσε να ξεπεράσει κάποιες από τις παραπάνω δυσκολίες.

Γενικά, όπως είπαμε και στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα οι μαθητές κατάφεραν να ξεπεράσουν αρκετές από τις δυσκολίες τους και να βελτιώσουν όλους εκείνους τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν τα ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά της εργασίας τους. Αυτό μας έδειξαν άλλωστε τα αποτελέσματα των τεστ και οι παρατηρήσεις της διδακτικής σειράς.

Σχετικά με τις δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το ιστορικό εργαλείο, τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις απαντήσεις του ερωτηματολογίου, είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές (πάνω από το 80%) βρήκαν την κατασκευή και τη χρήση του εργαλείου εύκολη. Βέβαια, από τις παρατηρήσεις που πραγματοποιήσαμε κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών, διαπιστώσαμε κάποιες δυσκολίες των μαθητών στη χρήση του εργαλείου, κυρίως κατά την έναρξη της διδακτικής σειράς. Αυτό θεωρείται φυσικό, αφού ήταν η πρώτη φορά που τα παιδιά εργάστηκαν με ένα τέτοιο εργαλείο. Σταδιακά όμως, οι δυσκολίες αυτές ξεπεράστηκαν καθώς οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τη χρήση του εργαλείου.

Γενικά μπορούμε να πούμε πως οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές με το ιστορικό εργαλείο ήταν ελάχιστες και αυτές γρήγορα περιορίστηκαν με την ενασχόληση των μαθητών με το εργαλείο.

Για να απαντήσουμε τέλος στο **τρίτο ερευνητικό ερώτημα** που αφορά τον τρόπο που αξιολογούν οι μαθητές την εμπειρία τους από την κατασκευή ενός ιστορικού εργαλείου και τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών και τη χρήση του ιστορικού εργαλείου, στηριχθήκαμε κυρίως στις απαντήσεις του ερωτηματολογίου και σε παρατηρήσεις πεδίου κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών.

Η διδασκαλία ξεκίνησε, όπως είδαμε με την παρουσίαση ενός ιστορικού κειμένου. Η πλειοψηφία των μαθητών σε ποσοστό άνω του 85% χαρακτήρισε το κείμενο ενδιαφέρον, ευχάριστο και κατανοητό, ενώ όλοι οι μαθητές θεώρησαν ότι είχε σχέση με τα Μαθηματικά, καθώς περιελάμβανε έννοιες όπως: ορθογώνια τρίγωνα, γωνίες, λόγοι και αναλογίες, γωνίες, μέτρηση αποστάσεων, ευθείες και Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δυσκολεύτηκαν, όπως είπαμε και προηγουμένως, με κάποιους μαθηματικούς όρους, αλλά αυτό δεν στάθηκε εμπόδιο στο να ασχοληθούν με αυτό. Ιδιαίτερα οι εικόνες που το συνόδευαν, προκάλεσαν μεγάλη εντύπωση στα παιδιά και κέντρισαν το ενδιαφέρον τους για το εργαλείο του Errard. Σύντομα μάλιστα εξέφρασαν την επιθυμία να κατασκευάσουν και τα ίδια ένα παρόμοιο εργαλείο και να ασχοληθούν με τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων. Θεωρούμε λοιπόν πως το κείμενο πέτυχε να κινητοποιήσει το ενδιαφέρον των παιδιών και λειτούργησε ως μια πρωτογενής ιστορική πηγή.

Το συμπέρασμα για την αξιολόγηση της διδακτικής σειράς, όπως αυτό καταγράφηκε από τις απαντήσεις των παιδιών, είναι πως οι περισσότεροι μαθητές (άνω του 85%) τη βρήκαν πολύ χρήσιμη και αρκετά ενδιαφέρουσα. Οι μισοί σχεδόν τη βρήκαν σχετικά δύσκολη, αλλά όλοι θα ήθελαν να πραγματοποιηθούν παρόμοιες διδακτικές παρεμβάσεις στο μέλλον. Παρόλα αυτά οι μισοί σχεδόν μαθητές δεν ήταν σίγουροι αν στο μέλλον θα μπορούσαν να διαχειρίζονται καλύτερα τα προβλήματα Λόγων και Αναλογιών. Ωστόσο τα αποτελέσματα του post-test μάλλον τους διέψευσαν προς το θετικότερο, καθώς έδειξαν σημαντική βελτίωση. Βλέπουμε δηλαδή μια έλλειψη αυτοπεποίθησης στο χειρισμό μαθηματικών προβλημάτων, κάτι όμως που δε δικαιολογείται από τα αποτελέσματα. Χρειάζεται ίσως αρκετή ενασχόληση των μαθητών με πρακτικές δραστηριότητες, που προσφέρουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση, προκειμένου να ξεπεραστούν αυτά τα εμπόδια.

Η εμπειρία τους από την κατασκευή και χρήση του εργαλείου, αξιολογήθηκε αρκετά θετικά από τους ίδιους τους μαθητές, αφού οι περισσότεροι βρήκαν την κατασκευή και τη χρήση του εργαλείου εύκολη, θεωρούν ότι τους βοήθησε και θα ήθελαν να κατασκευάσουν στο μέλλον παρόμοια εργαλεία. Φαίνεται πάντως από τις απαντήσεις, πως η έμφαση δόθηκε περισσότερο στο πρακτικό μέρος, στις μετρήσεις, ενώ η έννοια των Λόγων ενυπάρχει και χρησιμοποιήθηκε ως το μέσο για την επίτευξη τους.

Η εκτίμηση των μαθητών για το επίπεδο της συνεργασίας τους στις ομάδες, ήταν πολύ θετική, αφού υπήρχε επικοινωνία, αλληλοβοήθεια και αμοιβαίος σεβασμός στις απόψεις τους. Είδαμε πως όλοι οι μαθητές συμφώνησαν πως τους άρεσε η συνεργασία με τους συμμαθητές τους. Αυτό άλλωστε διαπιστώθηκε και από τις παρατηρήσεις πεδίου, όπου παρατηρήθηκε άψογη συνεργασία μεταξύ των μελών της ομάδας. Υπήρχε ισομερής κατανομή ρόλων και όταν κάποιος μαθητής αντιμετώπιζε μια δυσκολία, αναζητούσε βοήθεια από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας.

Τέλος, σχετικά με την χρησιμότητα της διδακτικής σειράς και την πρακτική της αξιοποίηση στο μέλλον, οι περισσότεροι μαθητές (άνω του 80%) έχουν θετική άποψη, καθώς πιστεύουν πως θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματά της, τόσο στο χώρο των Μαθηματικών, όσο και σε ζητήματα της καθημερινής ή και επαγγελματικής τους ζωής.

Αντί μιας τελικής απάντησης στο τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα, που ζητά την αξιολόγηση των μαθητών για τη διδακτική σειρά, θα ήθελα να επαναλάβω τα λόγια ενός μαθητή, του Γιώργου, που ήρθαν ως αντίδραση όταν τους ανακοινώθηκε ότι ολοκληρώθηκε ο κύκλος των μαθημάτων: «*Τι;…όχι!...και πώς θα περάσει η υπόλοιπη βαρετή χρονιά!...ήταν ωραία με αυτά τα μαθήματα!*». Θεωρώ πως τα λόγια του Γιώργου αντιπροσωπεύουν την άποψη των περισσότερων μαθητών, οι οποίοι έδειξαν ζωηρό ενδιαφέρον και συμμετείχαν ενεργά στη διαμόρφωση του τελικού αποτελέσματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bartolini Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the mathematics classroom. *History in mathematics education: The ICMI study*, 343-351.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., Illany, B-S. (2012). *Ratio and Proportion.* Sense Publishers

Borowski, E. J., & Borwein, J. M. (2002). *Collins dictionary of mathematics*. Collins.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in Mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). New York: Kluwer Academic Publishers.

Burton, D. (2011). *The history of mathematics: An introduction*. McGraw-Hill Companies.

Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016, July). History of mathematics in mathematics education. Recent developments. In *History and Pedagogy of Mathematics*.

Coutat, S., & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l’apprentissage des propriétés géométriques. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 16, pp. 97-126).

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, 159-178.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. *Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erlbaum, New Jersey*, 631-654.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. *Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erlbaum, New Jersey*, 631-654.

Harel, G., & Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics: Luce Irigaray and 'the Greeks'*. SUNY Press.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Volume 2. Research Agenda for Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 22091.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of CERME* 3(Vol. 3, pp. 1-10).

Θωμαΐδης, Γ., & Καστάνης, Ν. (1987). Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της Ιστορίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ*, (16), 61-92.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking From Childhood to Adolescence: An Essay on the Construction of Formal Operational Structures (Developmental Psychology)*. Basic Books.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist U. T., (2009), 'A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics, 71,* pp. 235 – 261.

Jankvist, U. T. (2014). On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. In *International handbook of research in history, philosophy and science teaching* (pp. 873-908). Springer Netherlands.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate'problems. *Educational studies in Mathematics*, *14*(3), 219-233.

Κολέζα,Ε.(2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2016). Using the geometric working spaces in order to plan the teaching of geometry. In *Proceedings of CERME 9*

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861-874.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?. *Educational studies in Mathematics*, *77*(1), 129-147.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(4), 5-39.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 629-667.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Livy, S., & Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: methods of solution to a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(2), 22-43.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(3), 313-324.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research*, *39*(7), 651-675.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ) Μαθηματικών. Αθήνα. Ανακτήθηκε 20 Μαρτίου 2017 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Panaoura, A. (2012). Young Students’ self-Beliefs about using Representations in relation to the Geometry Understanding. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-29.

Philippou, G., & Christou, C. (2002). A study of the mathematics teaching efficacy beliefs of primary teachers. In *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 211-231). Springer Netherlands.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children* (Vol. 8, No. 5, pp. 18-1952). New York: International Universities Press.

Piaget, J., & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. *The ideas of algebra, K–12*, 78-90.

Picken, D. (1920). Ratio and Proportion. *The Mathematical Gazette, 10*(144), 9-13. doi:10.1017/S0025557200086897

Rabardel, P., & Samurçay, R. (2001, March). From artifact to instrument-mediated learning. In *Symposium on New challenges to research on Learning* (pp. 21-23).

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational studies in mathematics, 16*(2), 181-204.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., & Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics education* (pp. 201-240). Springer Netherlands.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historial development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 44-55.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel, & J. Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.41–59). Albany: State University of New York Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273–294.

Vosniadou, S., & Ortony, A. (1989). *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge University Press.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Ονομασία ομάδας………………………..

1. **Εντοπίστε με την ομάδα σας στο χώρο της αυλής τα παρακάτω αντικείμενα και προσπαθήστε να εκτιμήσετε το ύψος των παρακάτω αντικειμένων. Στη συνέχεια να καταγράψετε τις εκτιμήσεις σας:**

- Το κιόσκι πρέπει να έχει ύψος…………………………………………..
- Η μπασκέτα πρέπει να έχει ύψος…………………………………………
- Ο ιστός της σημαίας πρέπει να έχει ύψος……………………………………
- Το κτήριο του σχολείου πρέπει να έχει ύψος………………………………..
- Το πλατάνι στη δυτική πλευρά πρέπει να έχει ύψος…………………………

2. **Μπορείτε να κατατάξετε τα παραπάνω αντικείμενα σε αύξουσα σειρά μεγέθους, σύμφωνα με τις εκτιμήσεις σας:**

………………………………………………………………………………….

3. **Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές της ομάδας έχετε περίπου το ίδιο ύψος, πόσες φορές ψηλότερο είναι το καθένα από τα παραπάνω αντικείμενα από εσάς;**

- Το κιόσκι πρέπει να είναι…………………………………………..
- Η μπασκέτα πρέπει να είναι…………………………………………
- Ο ιστός της σημαίας πρέπει να είναι……………………………………
- Το κτήριο του σχολείου πρέπει να είναι………………………………..
- Το πλατάνι πρέπει να είναι…………………………………………..

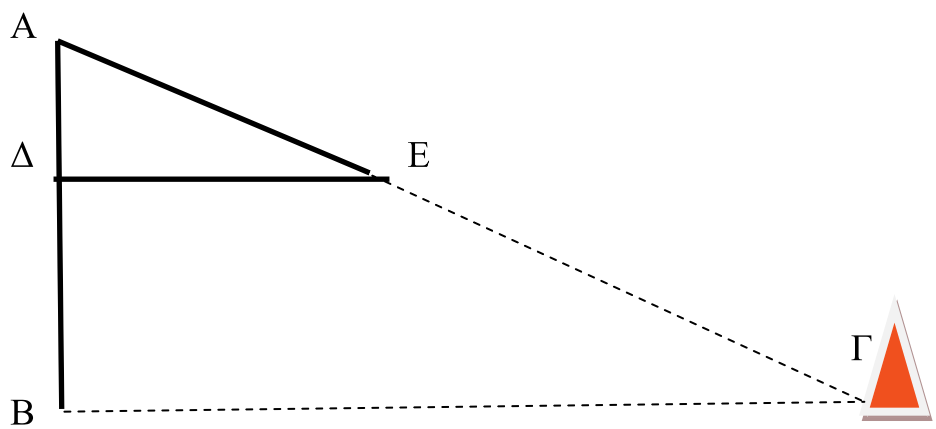
4. **Θα μπορούσατε ίσως να προτείνετε κάποιο τρόπο, ώστε να εκτιμήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το ύψος των παραπάνω αντικειμένων;**

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Ονομασία ομάδας………………………..

1. **Μπροστά σας έχετε το εργαλείο του Errard, που συναρμολογήσατε σε προηγούμενο μάθημα. Πριν ξεκινήσουμε να δουλεύουμε με αυτό θα συμφωνήσουμε πρώτα για την ονομασία κάποιων σημείων που θα έχουν την εξής μορφή:**



2. **Ο καθένας στην ομάδα θα αναλάβει και από ένα ρόλο:**
    - Ένας μαθητής θα πραγματοποιεί τις στοχεύσεις με το όργανο
    - Ένας μαθητής θα φροντίζει για την καθετότητα του οργάνου παρατηρώντας το νήμα της στάθμης
    - Δύο μαθητές θα μετρούν με τη μετροταινία την απόσταση ΒΓ
    - Ένας θα παρατηρεί τις αποστάσεις ΑΔ και ΔΕ
    - Ένας θα καταγράφει τα δεδομένα στον πίνακα που ακολουθεί.

❖ Οι ρόλοι θα εναλλάσσονται. Θα πραγματοποιηθούν 6 διαφορετικές στοχεύσεις, ώστε να δοθεί η δυνατότητα σε όλους να περάσουν από κάθε ρόλο.

❖ Σε κάθε νέα στόχευση ο κώνος θα μετακινείται σε διαφορετική απόσταση, ενώ η θέση του οργάνου θα παραμένει σταθερή.

❖ Προσέχουμε ώστε να τοποθετούμε κάθε φορά τον κώνο σε μια απόσταση μικρότερη των 20μ., για να μπορεί να μετρηθεί με την μετροταινία μας.

3. **Ακολουθήστε τις παραπάνω οδηγίες και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:**

Αποστάσεις σε εκατοστά	**1η στόχευση**	**2η στόχευση**	**3η στόχευση**	**4η στόχευση**	**5η στόχευση**	**6η στόχευση**
ΑΔ						
ΑΒ						
ΔΕ						
ΒΓ						

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Όνομα………………………..

1. **Παρακάτω έχετε συμπληρωμένο ένα πίνακα με στοχεύσεις που πραγματοποιήσατε στην προηγούμενή σας δραστηριότητα. Παρατηρήστε καλά τις τιμές του πίνακα ανά ζεύγη: (ΑΔ , ΑΒ) και (ΔΕ , ΒΓ) και γράψτε τι παρατηρείτε για κάθε στόχευση ξεχωριστά:**

Αποστάσεις σε εκατοστά	**1η στόχευση**	**2η στόχευση**	**3η στόχευση**
ΑΔ	20	10	12
ΑΒ	120	120	120
ΔΕ	50	50	80
ΒΓ	300	600	800

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2. **Δημιουργήστε τα κλάσματα ΑΔ/ΑΒ και ΔΕ/ΒΓ για κάθε στόχευση ξεχωριστά. Τι παρατηρείτε για αυτά τα κλάσματα; Πώς αλλιώς λέγονται αυτά ;**

…………………………………………………………………………………

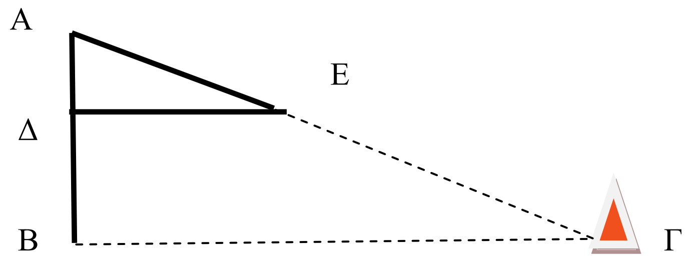
…………………………………………………………………………………

3. **Εκτελέστε τις διαιρέσεις και βρείτε τα πηλίκα αυτά. Τι παρατηρείτε; Ποια σχέση τα συνδέει;**

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

4. **Τα μήκη των πλευρών του παραπάνω πίνακα, αποτελούν τα μέτρα των καθέτων πλευρών των δύο ορθογώνιων τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ με κοινή κορυφή την Α. Αν μετρήσουμε και τα ΑΓ και ΑΕ, τι πιστεύετε πώς θα ισχύει;**



………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

5. **Προκειμένου να επιβεβαιώσετε την άποψή σας, χρησιμοποιήστε το εργαλείο του Errard, δώστε τις τιμές του παραπάνω πίνακα για τις γνωστές πλευρές και μετρήστε τα ΑΕ και ΑΓ με μια μετροταινία. Στη συνέχεια εξετάστε αν ισχύει η σχέση αναλογίας και για αυτές τις πλευρές:**

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

6. **Γράψτε τώρα το συμπέρασμά σας για τη σχέση που συνδέει τις πλευρές των δύο τριγώνων που σχηματίζονται από τη χρήση του εργαλείου:**

………………………………………………………………………………………

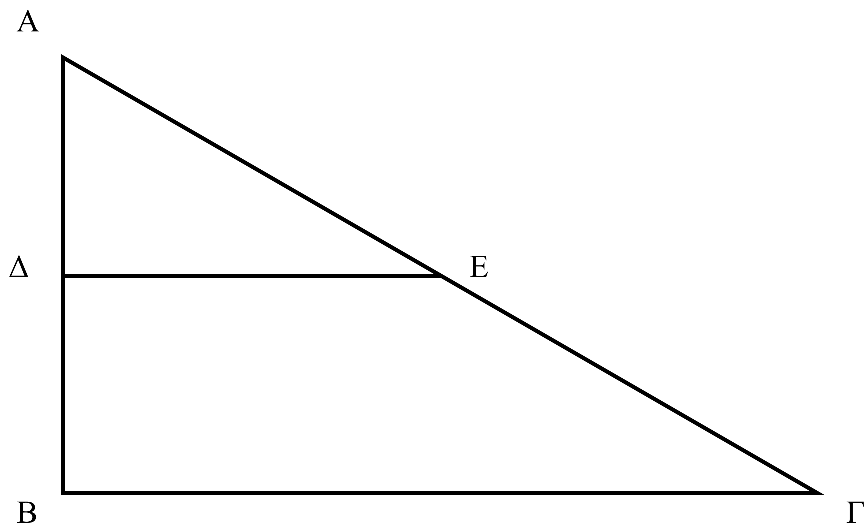
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Όνομα………………………..

1. **Έστω λοιπόν πως έχετε τα ακόλουθα δύο ορθογώνια και ισογώνια τρίγωνα με κοινή κορυφή την Α.**



- **Αν γνωρίζουμε πως ΑΒ = 90 εκ. και ΑΔ = 30 εκ., πόσες φορές μικρότερη είναι η ΑΔ από την ΑΒ;…………………………………………………...**
- **Ποιος είναι ο λόγος των πλευρών;……………………………………..**
- **Αν γνωρίζουμε πως η ΑΕ = 50εκ., πόσο θα είναι η ΑΓ;………………….**
- **Αν γνωρίζουμε πως η ΔΕ = 40εκ., πόσο θα είναι η ΒΓ;…………………..**

2. **Ανακοίνωσε τα αποτελέσματά σου στην τάξη και σύγκρινέ τα με των υπόλοιπων συμμαθητών σου.**

3. **Με βάση τα όσα γνωρίσαμε στο πρώτο μας μάθημα, πώς τελικά κατάφερε ο Errard να μετρήσει τις απρόσιτες αποστάσεις; Ποια πλευρά του τριγώνου ψάχνουμε;**

   …………………………………………………………………………………

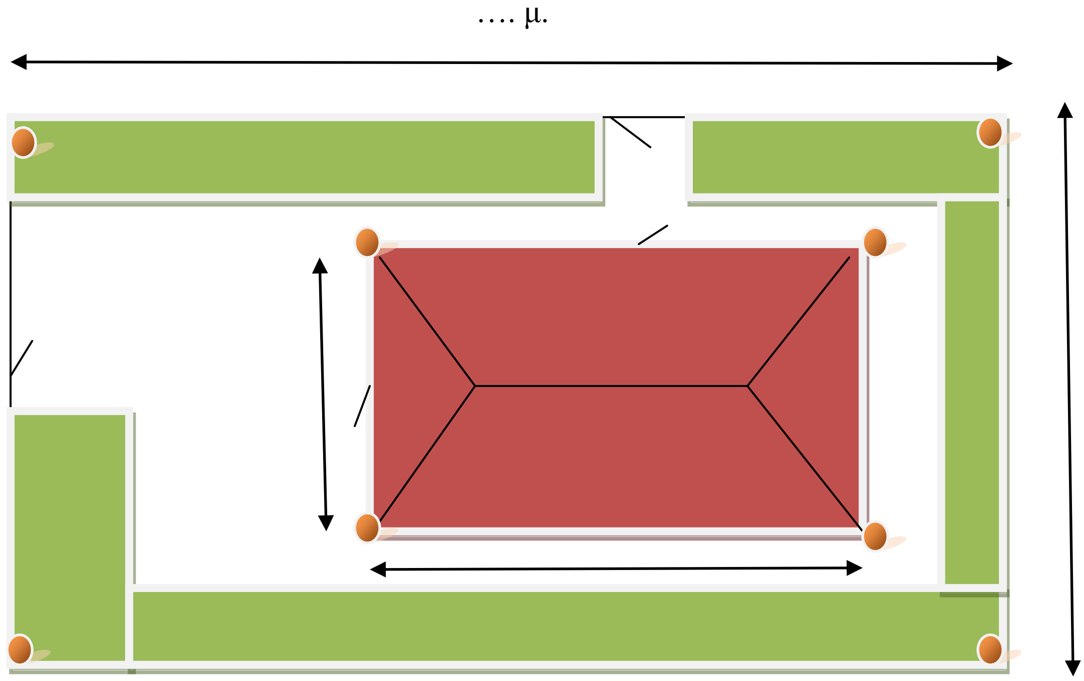
   …………………………………………………………………………………

4. **Συγκροτήστε τις ομάδες σας και εργαστείτε εναλλάξ με το εργαλείο του Errard. Στοχεύστε προς διάφορα αντικείμενα, υπολογίστε την απόσταση και στη συνέχεια επιβεβαιώστε τις μετρήσεις σας μετρώντας τις αποστάσεις με μετροταινία. Ταιριάζουν τα αποτελέσματά σας;**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

Ονομασία ομάδας………………………..

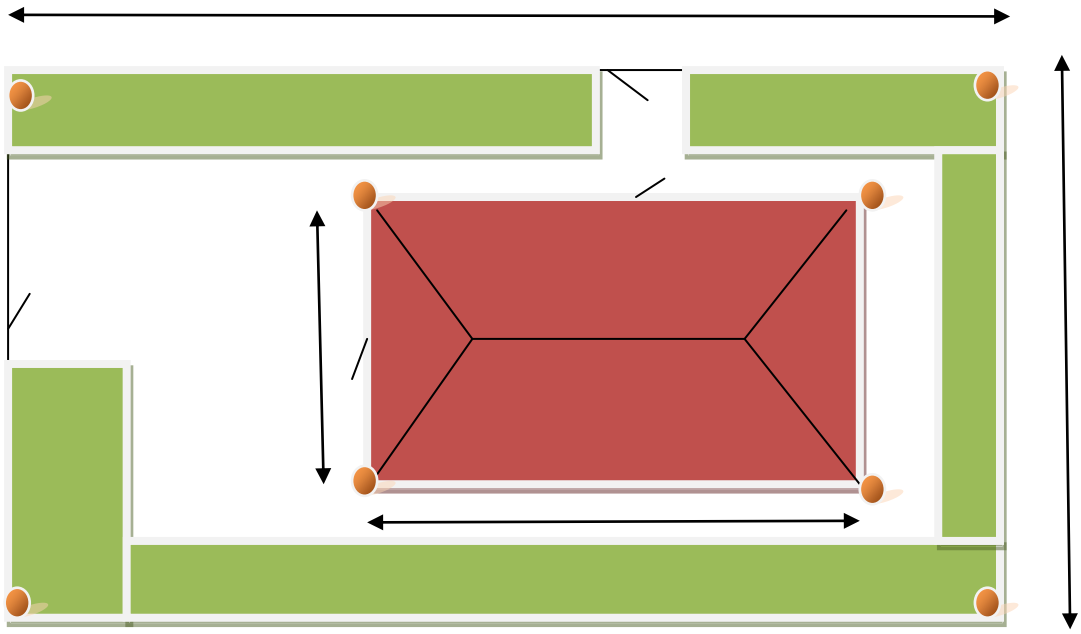
1. **Παρακάτω βλέπεις ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα του κτηρίου του σχολείου μας και της αυλής του σε κάτοψη. Επιλέξτε με την ομάδα σας μια απόσταση που θέλετε να μετρήσετε και τοποθετήστε στα προεπιλεγμένα πορτοκαλί σημεία στο έδαφος, από δύο κώνους για δείκτες. Εργαζόμενοι με το εργαλείο του Errard εναλλάξ, μετρήστε τις αποστάσεις αυτές και καταγράψτε τις πάνω στο σχήμα:**



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 6

Ονομασία ομάδας………………………..

1. **Ο Σύλλογος Γονέων και Κηδεμόνων του σχολείου μας, προτίθεται να αναλάβει το κόστος κατασκευής για ένα κιόσκι στην αυλή του σχολείου μας. Ζήτησε από εμάς να του υποδείξουμε το ακριβές σημείο που θα έπρεπε αυτό να στηθεί, ώστε να βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο της αυλής. Εργαστείτε με τις ομάδες σας, πρώτα στα σχέδια υπό κλίμακα που σχεδιάσατε στην προηγούμενη δραστηριότητα και στη συνέχεια στην αυλή με το εργαλείο του Errard, για να εντοπίσετε το ζητούμενο σημείο στην αυλή του σχολείου.**



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Όνομα:………………………………………………………………………………

1. **Ποια από τα παρακάτω ζεύγη ποσών είναι ανάλογα;**

α. Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδόν.

β. Η ημερήσια κατανάλωση τροφίμων και ο αριθμός των ατόμων .

γ. Ο αριθμός εργατών και ο χρόνος εκτέλεσης ορισμένου έργου.

δ. Η αξία και το βάρος ποσότητας .

ε. Η ωριαία παροχή νερού σε μια ορισμένη δεξαμενή και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει.

ζ. Το μήκος της ακτίνας του τροχού ενός ποδηλάτου με τον αριθμό των στροφών που θα κάμει ο τροχός για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση.

η. Η ηλικία και το ύψος του ανθρώπου

<u>Ανάλογα ποσά:</u>…………………………………………………………………….

2. **Με 15 κιλά γάλα φτιάχνουμε 5 κιλά τυρί φέτα. Με 60 κιλά γάλα, πόσα κιλά φέτα θα φτιάξουμε;**

ΛΥΣΗ:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:____

3. Συμπληρώνω τους πίνακες:

κ. μέλι	3	2	6	…	…	20
αξία σε €	15	…	…	20	50	…

μ.ύφασμα	2	4	5	…	6	10
Αξία σε €	100	…	…	50	…	…

4. Συμπλήρωσε τους όρους που λείπουν, ώστε να προκύψουν αναλογίες:

$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{6}$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{\quad}{9}$ $\qquad \frac{6}{11} = \frac{42}{\quad}$ $\qquad \frac{63}{45} = \frac{7}{\quad}$

$\frac{12}{\quad} = \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{45}{72} = \frac{5}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{20} = \frac{15}{60}$ $\qquad \frac{32}{18} = \frac{\quad}{9}$

5. Η Στέλλα και η Χριστίνα είναι δακτυλογράφοι. Η Στέλλα μπορεί να γράψει 2.130 λέξεις σε 45 λεπτά, ενώ η Χριστίνα 8.520 λέξεις σε 3 ώρες. Να σχηματίσετε τους λόγους και να εξετάσετε αν τα δυο κορίτσια έχουν την ίδια απόδοση.

ΛΥΣΗ

6. Η ΣΤ' τάξη έχει 10 κορίτσια και 15 αγόρια. Να διατυπώσεις τι εκφράζουν οι παρακάτω λόγοι :

- $\frac{10}{15}$
- $\frac{15}{10}$
- $\frac{10}{25}$
- $\frac{15}{25}$

☞ ……………………………………………………

☞ ……………………………………………………

☞ ……………………………………………………

7. Ένα κυπαρίσσι ρίχνει σκιά μήκους 9 μέτρων. Την ίδια ώρα ένας θάμνος δίπλα στο δέντρο, με ύψος 1,5 μέτρα, ρίχνει σκιά 3 μέτρα. Πόσο είναι το ύψος του δέντρου;

ΛΥΣΗ

Απάντηση:……………………………………………………………………………………………

8. Ένα φωτοτυπικό μηχάνημα φωτοτυπεί 96 σελίδες σε 3 λεπτά της ώρας. Σε πόσο χρόνο θα φωτοτυπήσει 576 σελίδες;

ΛΥΣΗ

Απάντηση:……………………………………………………………………………………………

9. Σύγκρινε τα κλάσματα (τους λόγους)

$\frac{15}{20}$ **,** $\frac{30}{40}$ **,** $\frac{45}{60}$ **,** $\frac{60}{80}$ **και** $\frac{90}{120}$**.**

Τι παρατηρείς;

……

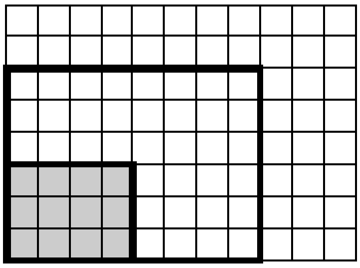
10. Ενας κτηνοτρόφος μαζεύει για κάθε 10 κατσίκες 40 L γάλα.
Να συμπληρώσεις τον πιο κάτω πίνακα, ώστε τα ποσά να είναι ανάλογα.

Αριθμός κατσικών	**10**	**15**	**30**		
Ποσότητα γάλακτος σε L	**40**			**200**	**400**

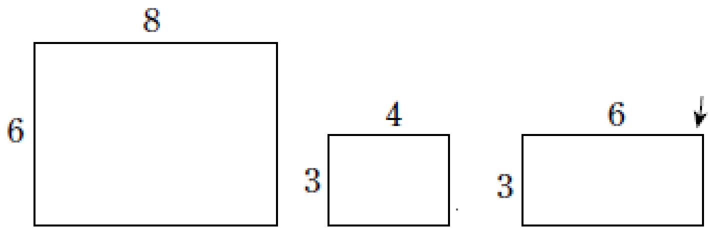
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΛΟΓΟΥΣ

Όνομα:…………………………………………………………..

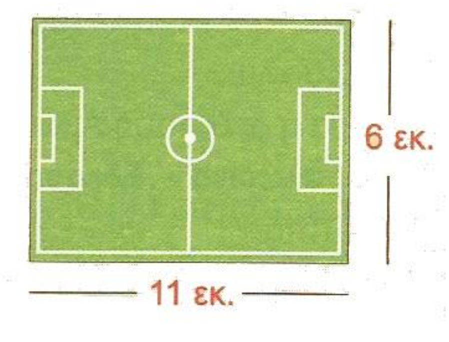
1. Παρακάτω βλέπετε δύο όμοια ορθογώνια. Βρείτε το λόγο που τα συνδέει. Στη συνέχεια δώστε τις διαστάσεις ενός άλλου ομοίου ορθογωνίου που να διατηρεί τον ίδιο λόγο:



2. Παρατηρήστε τα παρακάτω ορθογώνια και πείτε ποια είναι όμοια. Στη συνέχεια γράψτε τους λόγους των ομοίων πλευρών:

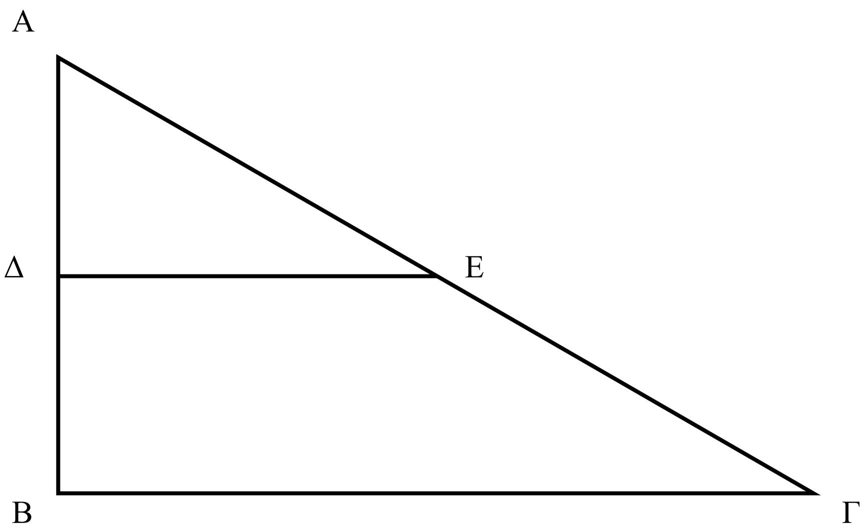


3. Παρακάτω βλέπεις τις διαστάσεις ενός γηπέδου σε κλίμακα 1:1000. Ποιες είναι οι πραγματικές του διαστάσεις;



4. Στον παρακάτω χάρτη της Κρήτης βλέπεις σε ευθεία γραμμή την απόσταση ανάμεσα στο Ρέθυμνο-Ηράκλειο. Αν η κλίμακα είναι 1:500.000, ποια είναι η πραγματική απόσταση;

5. Έστω λοιπόν πως έχετε τα ακόλουθα δύο ορθογώνια και ισογώνια τρίγωνα με κοινή κορυφή την Α.



Αν γνωρίζουμε πως ΑΒ = 80 εκ. και ΑΔ = 40 εκ., ποιος είναι ο λόγος των πλευρών;………………………………………..
Αν γνωρίζουμε πως η ΔΕ = 50εκ., πόσο θα είναι η ΒΓ;…………………..

Να το λύσεις με όποιο τρόπο θέλεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ΄

Ερωτηματολόγιο

Όνομα ....

- Κάτι που έμαθα είναι...

  ....

- Κάτι που με εξέπληξε είναι...

  ....

- Κάτι που με δυσκόλεψε είναι...

  ....

- Το κείμενο σου φάνηκε:

  Α. ενδιαφέρον ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Β. ευχάριστο ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Γ. κατανοητό ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Δ. κάτι άλλο;...

- Το κείμενο είχε σχέση με τα Μαθηματικά;

  ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Αν ναι, με ποιες έννοιες;...

  ....

- Η κατασκευή του εργαλείου σου φάνηκε εύκολη; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Εξήγησε γιατί:...

  ....

- Ήταν εύκολη η χρήση του; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

- Σε βοήθησε το εργαλείο; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Εξήγησε την άποψή σου δίνοντας ένα παράδειγμα…………………………………………………

  ………..

- Θα ήθελες να κατασκευάσεις και άλλα παρόμοια εργαλεία για τα

  Μαθηματικά; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Αν ναι, εξήγησε την άποψή σου:……………………………………………………………………………..

  ………..

- Θα ήθελες να πραγματοποιηθούν κι άλλες διδασκαλίες σαν αυτή; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Εξήγησε την άποψή σου:………………………………………………………………………………………

  ……….

- Τη σειρά των μαθημάτων, την βρήκες:

  Α. χρήσιμη ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Β. ενδιαφέρουσα ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Γ. δύσκολη ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Δ. κάτι άλλο;...

- Νομίζεις ότι ύστερα από τη σειρά των μαθημάτων, θα μπορείς να διαχειρίζεσαι καλύτερα τα προβλήματα Λόγων – Αναλογιών; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Αν ναι, με ποιον τρόπο;………………………………………………………………………………………

  ……….

  ....

- Σου άρεσε η συνεργασία με τους συμμαθητές σου;

  Αν ναι, επέλεξε όσα νομίζεις σωστά:

Α. είχαμε καλή επικοινωνία; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Β. βοηθούσαμε ο ένας τον άλλο; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Γ. σεβόμασταν ο ένας τη γνώμη του άλλου; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Δ. κάτι άλλο;..

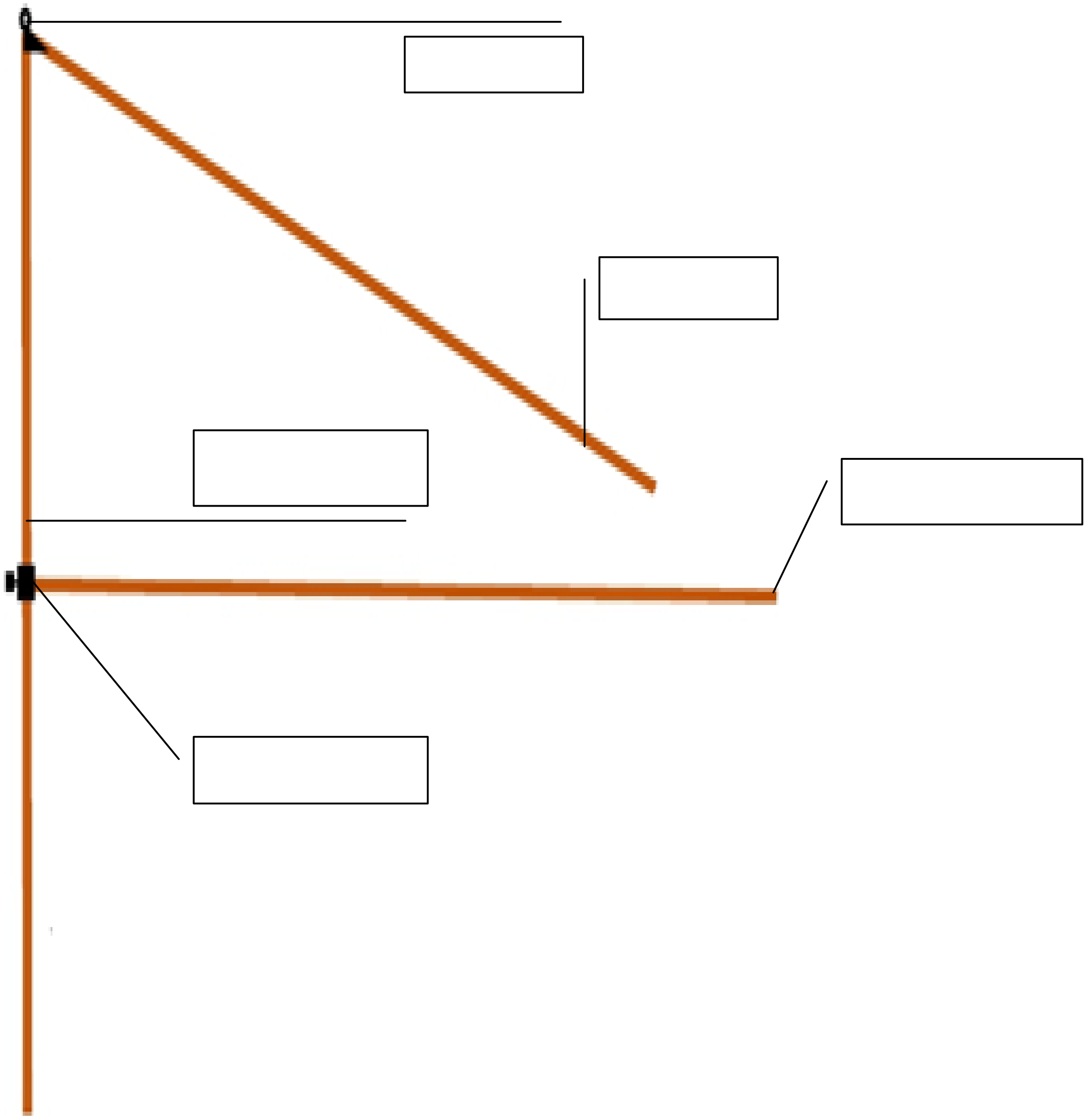
- Πιστεύεις ότι θα χρησιμοποιήσεις αυτά που έμαθες στην καθημερινή σου ζωή; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

  Αν ναι, δώσε κάποια παραδείγματα:…………………………………………………………………….

  ……….

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ΄

ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΤΟΥ ERRARD



ΟΔΗΓΙΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ERRARD

Πριν ξεκινήσετε σιγουρευτείτε ότι έχετε στη διάθεσή σας τα ακόλουθα υλικά:

1. Δύο (2) αριθμημένες ράβδους του ενός (1) μ. η καθεμιά.
2. Μια (1) αριθμημένη ράβδος του 1,20μ.
3. Ένα (1) κινητό σύνδεσμο.
4. Ένα (1) σύνδεσμο με πεταλούδα (σφιγκτήρας).
5. Ένα (1) σκόπευτρο.

Οδηγίες κατασκευής

Βήμα 1^{ο} : « Ενώστε με τον σύνδεσμο πεταλούδας από τα άκρα τους τη μεγάλη ράβδο με μια από τις άλλες δύο. Να χρησιμοποιήσετε αυτή της οποίας το ένα άκρο έχει διαμορφωθεί κατάλληλα » .

Βήμα 2^{ο} : « Περάστε το κινητό σύνδεσμο στη μακριά κάθετη ράβδο και βιδώστε τον, ώστε να σταθεροποιηθεί κάπου στο μέσο της».

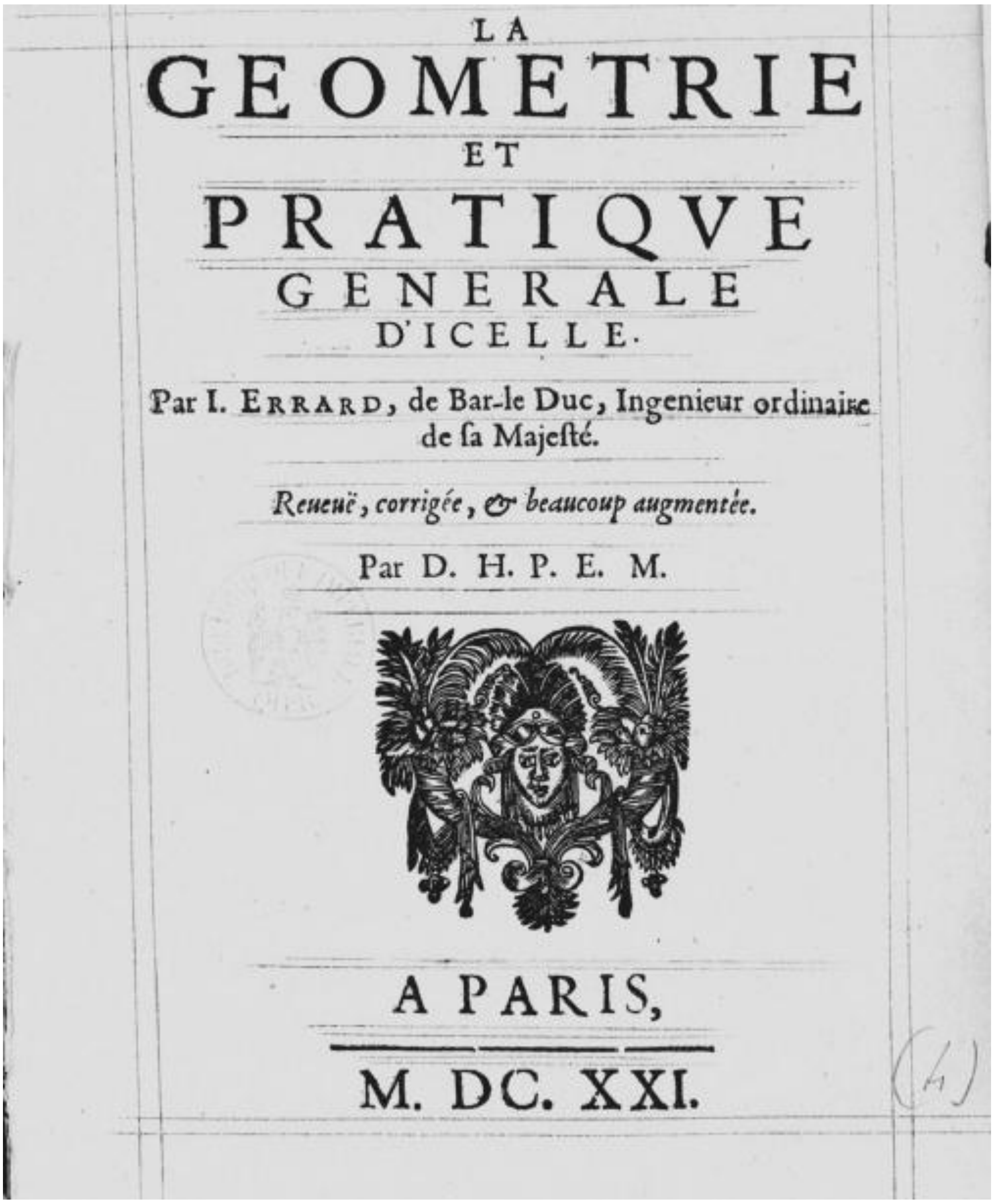
Βήμα 3^{ο} : « Στερεώστε την τρίτη ράβδο επάνω στον κινητό σύνδεσμο».

Βήμα 4^{ο} : « Στερεώστε το σκόπευτρο επάνω στην πτυσσόμενη ράβδο».

Συγχαρητήρια! Έχετε κατασκευάσει το ιστορικό εργαλείο του Errard για τη μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων και τώρα πλέον είστε έτοιμοι να προχωρήσετε σε μετρήσεις!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε΄

Το ιστορικό κείμενο του Jean Errard:



LA

GEOMETRIE

ET

PRATIQVE

GENERALE

D'ICELLE.

Par I. ERRARD, de Bar-le Duc, Ingenieur ordinaire de ſa Majeſté.

Reueuë, corrigée, & beaucoup augmentée.

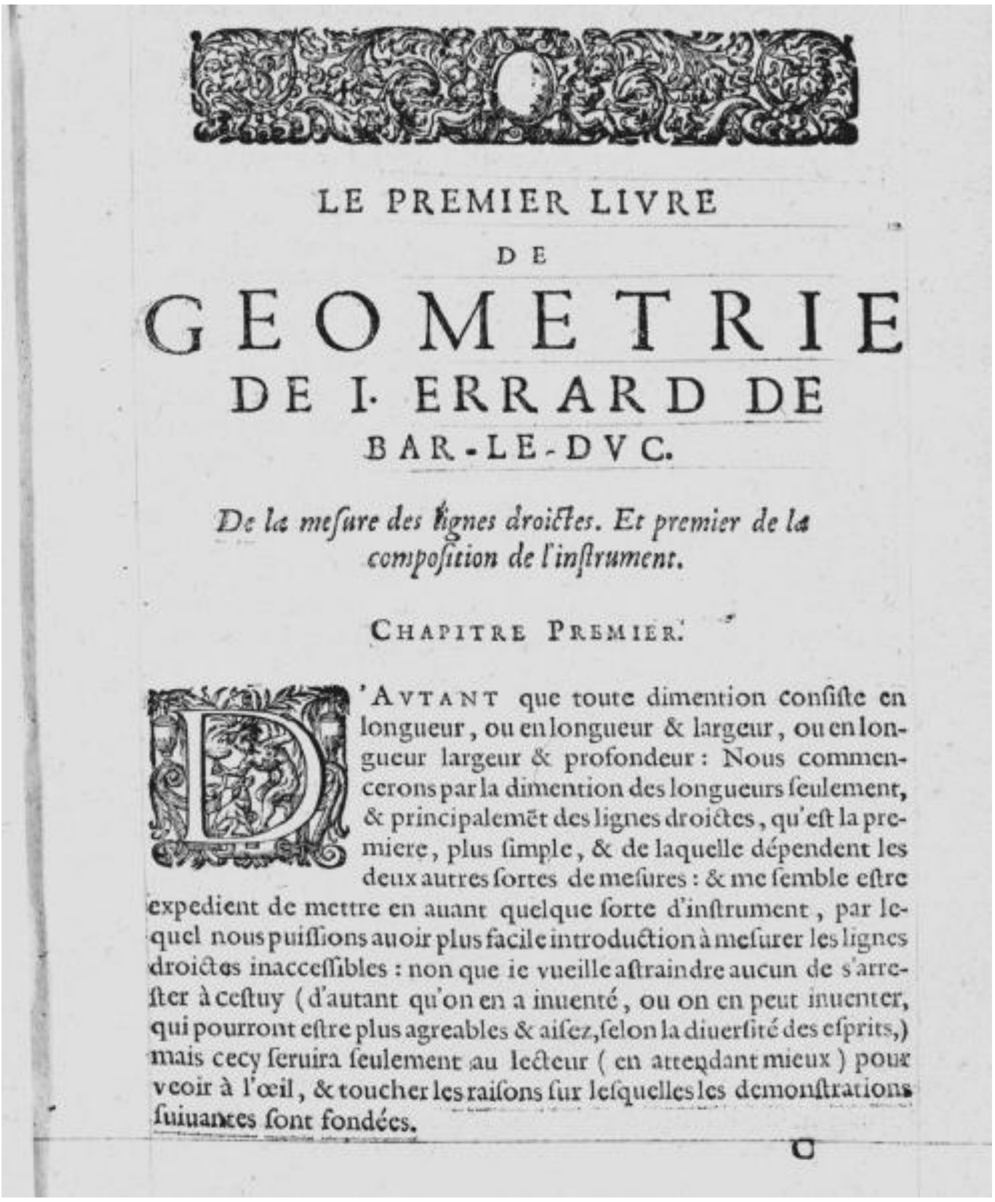
Par D. H. P. E. M.

A PARIS,

M. DC. XXI.

Κεφάλαιο I: Από τη μέτρηση ευθείων γραμμών. Και εισαγωγή στη σύνθεση του οργά νου.

Δεδομένου ότι οποιαδήποτε διάσταση αποτελείται από μήκος, ή από μήκος και πλάτος, ή από μήκος, πλάτος και βάθος: θα ξεκινήσουμε από τη διάσταση του μήκους μόνο, και κυρίως των ευθείων γραμμών που είναι το πρώτο, πιο απλό, και από το οποίο εξαρτώνται τα δύο άλλα είδη μέτρησης: και μου φαίνεται ότι είναι κατάλληλο να θέσω πρώτα κάποιο είδος οργάνου, με το οποίο θα μπορούσαμε να έχουμε πιο εύκολα την εισαγωγή στη *μέτρηση ευθείων απρόσιτων γραμμών: όχι ότι θέλω να αναγκάσω κανέναν να σταματήσει σ' αυτό (δεδομένου ότι το επινοήσαμε ή μπορούμε να το επινοήσουμε, το οποίο μπορεί να είναι πιο ευχάριστο και άνετο, ανάλογα με την ποικιλία των αντιλήψεων), αλλά έτσι θα βοηθήσω μόνο τον Αναγνώστη (τον υπομονετικό) να δει με το μάτι, και να αντιληφθεί τους λόγους πάνω στους οποίους οι ακόλουθες αποδείξεις στηρίχθηκαν.*



LE PREMIER LIVRE
DE
GEOMETRIE
DE I. ERRARD DE
BAR-LE-DVC.

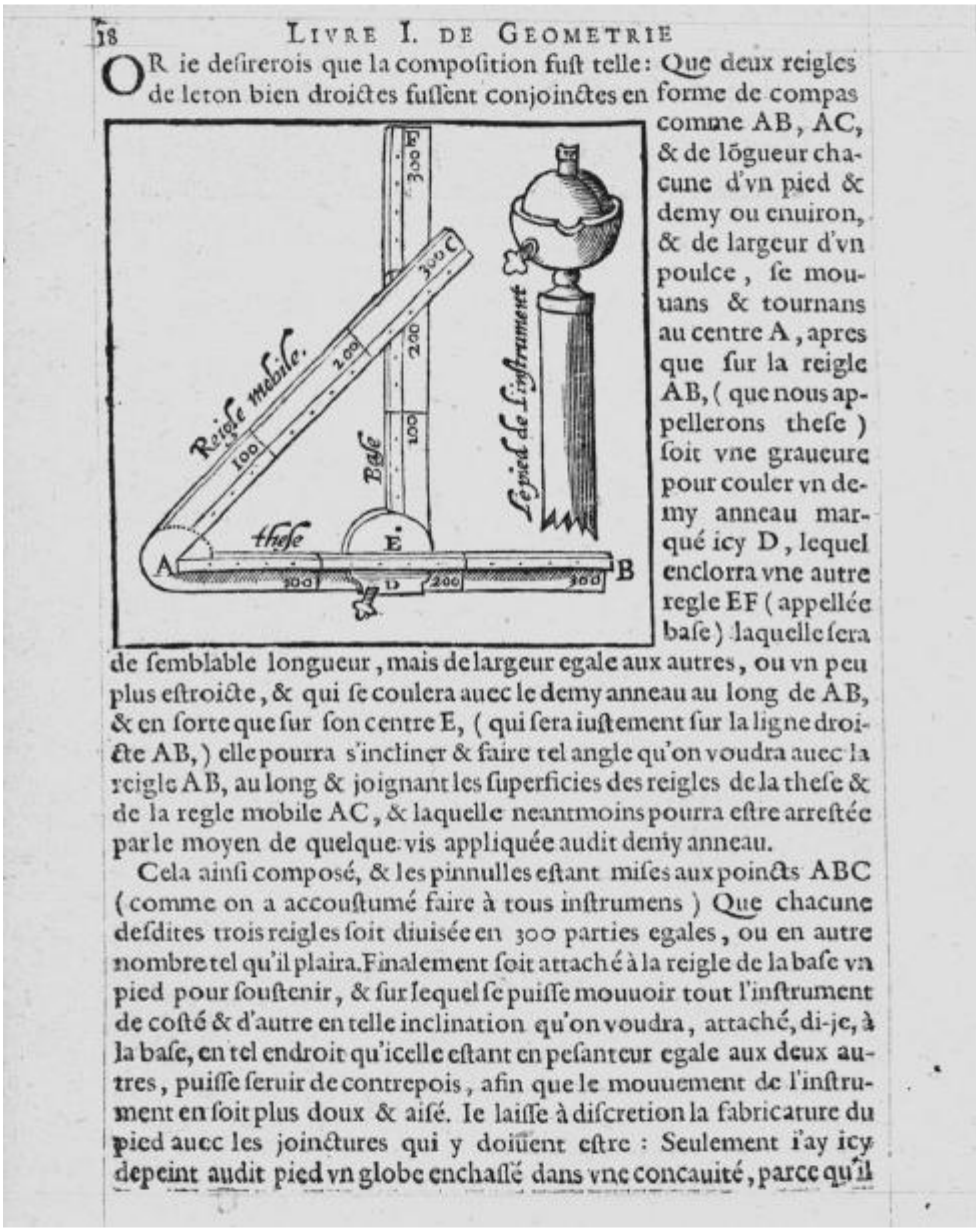
De la mesure des lignes droictes. Et premier de la composition de l'instrument.

CHAPITRE PREMIER.

D'AVTANT que toute dimention consiste en longueur, ou en longueur & largeur, ou en longueur largeur & profondeur: Nous commencerons par la dimention des longueurs seulement, & principalemēt des lignes droictes, qu'est la premiere, plus simple, & de laquelle dépendent les deux autres sortes de mesures: & me semble estre expedient de mettre en auant quelque sorte d'instrument, par lequel nous puissions auoir plus facile introduction à mesurer les lignes droictes inaccessibles: non que ie vueille astraindre aucun de s'arrester à cestuy (d'autant qu'on en a inuenté, ou on en peut inuenter, qui pourront estre plus agreables & aisez, selon la diuersité des esprits,) mais cecy seruira seulement au lecteur (en attendant mieux) pour veoir à l'œil, & toucher les raisons sur lesquelles les demonstrations suiuantes sont fondées.

C

Έτσι θα επιθυμούσα η σύνθεση να έχει ως εξής: δύο μπρούτζινοι ράβδοι εντελώς ευθείες να είναι συνδεδεμένοι σε σχήμα διαβήτη ως AB, AC, και με μήκος ο καθένας ενάμιση πόδι περίπου, και με πλάτος μία ίντσα, κινούμενοι και περιστρεφόμενοι στο κέντρο A. Έπειτα στη ράβδο AB (που θα την ονομάζουμε θέση) να υπάρχει μία χάραξη στην οποία θα εφαρμόσει ένας ημιδακτύλιος σημειωμένος εδώ ως D, στον οποίο θα στηρίζεται μια *άλλη ράβδος EF (ονομαζόμενη βάση) η οποία θα είναι παρόμοιου μήκους αλλά ίσου πλάτους με τις άλλες, ή λίγο πιο στενή, και η οποία εφαρμόζεται με τον ημιδακτύλιο κατά μήκος της AB, και με τρόπο που στο κέντρο της E (που θα είναι ακριβώς πάνω στην ευθεία γραμμή AB), θα μπορεί να κλείνει και να κάνει την γωνία που θα θέλουμε με τη ράβδο AB, κατά μήκος και ενώνοντας τις επιφάνειες των ράβδων της θέσης και της κινητής ράβδου AC, και στην οποία ωστόσο θα μπορεί να είναι σταθεροποιημένη μέσω κάποιας βίδας εφαρμοσμένης στον λεγόμενο ημιδακτύλιο. Όντας λοιπόν έτσι κατασκευασμένο, και οι διόπτρες όντας εστιασμένες στα σημεία ABC (όπως συνηθίζουμε να κάνουμε σε όλα τα όργανα) κάθε μία από τις ονομαζόμενες τρεις ράβδους θα είναι χωρισμένη σε 300 ίσα μέρη ή σε άλλο αριθμό που θα θέλαμε.*



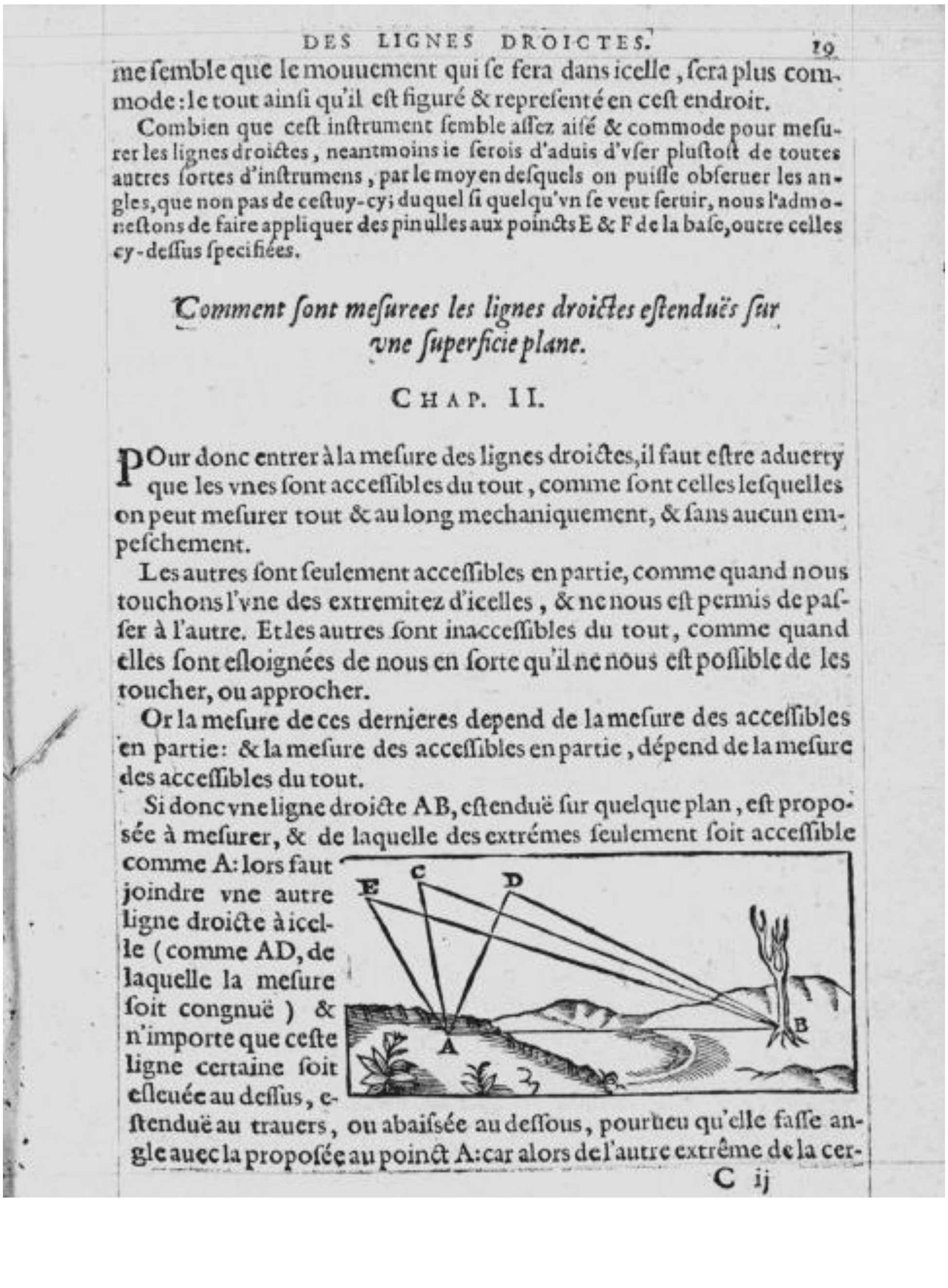
18 LIVRE I. DE GEOMETRIE

OR ie desirerois que la composition fust telle: Que deux reigles de leton bien droictes fussent conjoinctes en forme de compas comme AB, AC, & de lõgueur chacune d'vn pied & demy ou enuiron, & de largeur d'vn poulce, se mouuans & tournans au centre A, apres que sur la reigle AB, (que nous appellerons these) soit vne graueure pour couler vn demy anneau marqué icy D, lequel enclorra vne autre regle EF (appellée base) laquelle sera de semblable longueur, mais de largeur egale aux autres, ou vn peu plus estroicte, & qui se coulera auec le demy anneau au long de AB, & en sorte que sur son centre E, (qui sera iustement sur la ligne droicte AB,) elle pourra s'incliner & faire tel angle qu'on voudra auec la reigle AB, au long & joignant les superficies des reigles de la these & de la regle mobile AC, & laquelle neantmoins pourra estre arrestée par le moyen de quelque vis appliquée audit demy anneau.

Cela ainsi composé, & les pinnulles estant mises aux poincts ABC (comme on a accoustumé faire à tous instrumens) Que chacune desdites trois reigles soit diuisée en 300 parties egales, ou en autre nombre tel qu'il plaira. Finalement soit attaché à la reigle de la base vn pied pour soustenir, & sur lequel se puisse mouuoir tout l'instrument de costé & d'autre en telle inclination qu'on voudra, attaché, di-je, à la base, en tel endroit qu'icelle estant en pesanteur egale aux deux autres, puisse seruir de contrepois, afin que le mouuement de l'instrument en soit plus doux & aisé. Ie laisse à discretion la fabricature du pied auec les joinctures qui y doiuent estre: Seulement i'ay icy depeint audit pied vn globe enchassé dans vne concauité, parce qu'il

Κεφάλαιο ΙΙ: Πως μετρούνται οι μακρινές ευθείες γραμμές σε μια επίπεδη επιφάνεια

Για να εισέλθουμε λοιπόν στη μέτρηση των ευθείων γραμμών πρέπει να είναι δεδομένο ότι κάποιες είναι ολοκληρωτικά προσβάσιμες, όπως αυτές τις οποίες μπορούμε να μετρήσουμε ολόκληρες και κατά μήκος μηχανικά και χωρίς κανένα εμπόδιο. Άλλες είναι προσβάσιμες μόνο κατά ένα μέρος, όπως όταν αγγίζουμε το ένα άκρο αυτής, και δεν μας επιτρέπεται να περάσουμε στην άλλη. Και άλλες είναι μη προσβάσιμες ολοκληρωτικά, όπως όταν είναι απομακρυσμένες από εμάς με τρόπο που να μη μας είναι δυνατό να τις φτάσουμε ή να προσεγγίσουμε.



DES LIGNES DROICTES. 19

me ſemble que le mouuement qui ſe fera dans icelle, ſera plus commode: le tout ainſi qu'il eſt figuré & repreſenté en ceſt endroit.

Combien que ceſt inſtrument ſemble aſſez aiſé & commode pour meſurer les lignes droictes, neantmoins ie ſerois d'aduis d'vſer pluſtoſt de toutes autres ſortes d'inſtrumens, par le moyen deſquels on puiſſe obſeruer les angles, que non pas de ceſtuy-cy; duquel ſi quelqu'vn ſe veut ſeruir, nous l'admoneſtons de faire appliquer des pinulles aux poincts E & F de la baſe, outre celles cy-deſſus ſpecifiées.

Comment ſont meſurees les lignes droictes eſtenduës ſur vne ſuperficie plane.

CHAP. II.

POur donc entrer à la meſure des lignes droictes, il faut eſtre aduerty que les vnes ſont acceſſibles du tout, comme ſont celles leſquelles on peut meſurer tout & au long mechaniquement, & ſans aucun empeſchement.

Les autres ſont ſeulement acceſſibles en partie, comme quand nous touchons l'vne des extremitez d'icelles, & ne nous eſt permis de paſſer à l'autre. Et les autres ſont inacceſſibles du tout, comme quand elles ſont eſloignées de nous en ſorte qu'il ne nous eſt poſſible de les toucher, ou approcher.

Or la meſure de ces dernieres depend de la meſure des acceſſibles en partie: & la meſure des acceſſibles en partie, dépend de la meſure des acceſſibles du tout.

Si donc vne ligne droicte AB, eſtenduë ſur quelque plan, eſt propoſée à meſurer, & de laquelle des extrémes ſeulement ſoit acceſſible comme A: lors faut joindre vne autre ligne droicte à icelle (comme AD, de laquelle la meſure ſoit congnuë) & n'importe que ceſte ligne certaine ſoit eſleuée au deſſus, eſtenduë au trauers, ou abaiſsée au deſſous, pourueu qu'elle faſſe angle auec la propoſée au poinct A: car alors de l'autre extrême de la cer-

C ij

Έτσι η μέτρηση των τελευταίων εξαρτάται από τη μέτρηση των ημι-προσβάσιμων, και η μέτρηση των ημι-προσβάσιμων εξαρτάται από τη μέτρηση των ολοκληρωτικά προσβάσιμων. […]. Και αυτό είναι που θα παρουσιαστεί εύκολα από εδώ και πέρα.

20 LIVRE I. DE GEOMETRIE

taine, on peut par le ray de la veüe imaginer vne ligne droicte, tendante à l'autre bout de la proposée comme D B, ou C B, ou E B, & par ce moyen former & figurer vn triangle, duquel l'vn des coſtez eſtant congneu, auec la quantité des angles, on peut facilement paruenir à la cognoiſſance des autres coſtez. Et toute la difficulté de telles meſures ne giſt en autre choſe qu'à chercher vne ligne parallele à celle qu'on veut meſurer, qui n'eſt autre choſe que couper les coſtez d'vn triangle proportionnellement: *Comme il eſt monſtré tant en la 2. que 4. propoſition du 6. d'Euclide*: Et ce qui ſera facilement pratiqué cy apres.

Soit donc la ligne A B, propoſée à meſurer, ſur l'extremité de laquelle A, ie tire orthogonelement, & en angle droict la ligne A C, laquelle ie meſure, & contient 5. pieds, ſur laquelle & au long d'icelle ie mets la regle de la baſe (comme DE) laquelle baſe ſera parallele à AB, *par la 28. du* 1. mais il faut que l'inſtrument ſoit mis en ſorte qu'il y ait depuis C iuſques à D, autant de petites meſures de l'inſtrument comme il y aura de pieds depuis C iuſques à A. Ce faict, faut mouuoir la reigle mobile C E, iuſques à ce que du ray viſüel on puiſſe veoir par les pinnulles d'icelle, l'extremité B: alors ie dis que le petit triãgle CDE, eſt equiangle & proportionnel au grand A B C, *par la 4. du 6.* La ligne donc D E, coupant les coſtez du grand triãgle CA, & CB, aux poincts D, E, les couppe proportionnellement *par la 2. du 6.* Telle raiſon donc que CD a en DE, telle & ſemblable a C A, à A B. Or ſi C D contient 5. petites meſures & degrez, & ie trouue que D E en contient 10, ie concluray, que C A contenant 5.

Έχουμε λοιπόν τη γραμμή AB, προτεινόμενη προς μέτρηση, στο άκρο A της οποίας, τραβάω κάθετα, και με ορθή γωνία τη γραμμή AC, την οποία μετράω και περιλαμβάνει 5 πόδια, στην οποία και κατά μήκος αυτής θέτω τη ράβδο της βάσης (όπως η DE) η οποία βάση θα είναι παράλληλη στην AB, σύμφωνα με την 28 p. του 1. Αλλά πρέπει το όργανο να είναι τοποθετημένο με τέτοιο τρόπο που να έχει από το C έως το D, τόσες υποδιαιρέσεις μέτρησης του οργάνου όσα θα είναι τα πόδια από το C μέχρι το A. Έτσι, πρέπει να κινηθεί η κινούμενη ράβδος CE, μέχρι εκείνο το οπτικό πεδίο στο οποίο να *μπορούμε να δούμε από εκείνες τις διόπτρες το άκρο B: έτσι λοιπόν λέω ότι το μικρό τρίγωνο CDE, είναι ισογώνιο και ανάλογο με το μεγάλο ABC, σύμφωνα με το 4 [p.] του 6. Η γραμμή λοιπόν DE, που κόβει τις πλευρές του μεγάλου τριγώνου CA και CB, στα σημεία D, E τις κόβει αναλογικά σύμφωνα με το 2 του 6. Γι' αυτό το λόγο λοιπόν CD, ως προς DE είναι παρόμοιο με την CA, ως προς AB.*

DES LIGNES DROICTES. 21

pieds, la ligne A B contiendra 10 pieds. Que ſi tu voulois encor ſçauoir la longueur de C B, regarde combien de degrez aura C E, & autant aura de pieds icelle C B, *par les meſmes raiſons*. Mais ſi plus commodément tu voulois prendre la ligne meſurée en trauers, comme A X, mets l'inſtrument en ſorte que la reigle de la theſe ſoit directement ſur la ligne X A, & que depuis X, iuſques à la baſe N, ſoient autant de degrez comme X A contient de pieds, & poſons qu'il y en ait quatre. Apres faicts que la baſe N T ſoit parallele à A B, & dreſſe la mobile au poinct & extremité B, alors le lieu où elle couppera la baſe (ſçauoir T) monſtrera la vraye longueur de A B: car autant de petites meſures que contiendra N T, autant de pieds contiendra AB. (le triangle X N T eſtant equiangle & proportionnel au triangle X A B) *par les prealeguées*.

D'autant qu'ayant intelligence de ce chap. tous les autres ſont aiſez, nous le repeterons icy, ſelon que i'eſtime qu'il doit eſtre, afin que les rudes & moins verſez, tant en la pratique des inſtrumens, qu'és demonſtrations d'icelles, en ayent facile intelligence: Car l'Autheur eſtant aſſez obſcur en ſa pratique, ne l'eſt pas moins és demonſtrations, à cauſe que les propoſitions d'Euclide, ſur leſquelles s'appuyent leſdites demonſtrations, ſont quelquesfois mal cottées: De ce nous aduertirons icy le Lecteur vne fois pour toutes, afin de ne repeter ſouuent vne meſme choſe.

1. Soit donc la ligne A B propoſée à meſurer, ſur l'extremité de laquelle A, ie poſe l'inſtrument ſur ſon pied A C, en ſorte que la theſe C D, ſoit orthogonelle & en angle droict à la plaine horiſontalle: Ce faict ie diſpoſe tellement la baſe DE qu'elle ſoit orthogonelle à la theſe C D, & qu'il y ait depuis C, iuſques à D, autant de petites meſures de l'inſtrument, comme il y aura de pieds, ou toiſes depuis A iuſques à C; (car encore que nous prenions icy A C pour le pied de l'inſtrument, lequel eſt ordinairement de 5. pieds, neantmoins ladite hauteur C A pourroit eſtre de d'auantage, pource qu'elle peut eſtre priſe pour la hauteur de quelque feneſtre, tour, ou de quelque autre edifice, du ſommet duquel on voudroit meſurer la diſtance qu'il y a depuis le pied d'iceluy, iuſques à quelque lieu qu'on voit, laquelle hauteur ſeroit cogneuë auec vn fillet ou fiſſelle à plomb.) puis il faut mouuoir la regle mobile CE, iuſques à ce que du ray viſuel on puiſſe veoir par les pinulles d'icelle l'extremité B: alors ie dis que la diſtance AB propoſée à meſurer contient autant de pieds, (pas ou toiſes, ſelon la meſure auec laquelle on aura meſuré la haulteur CA) cõme DE contient de petites meſures de l'inſtrumẽt. Or la raiſon de cecy eſt, que puiſque les angles C A B, C D E, ſont egaux (car ils ont eſté faict droicts) & l'angle C commun aux deux triangles C A B, C D E, iceux triangles ſont equiangles par le Corol. de la 32. p. 1. d'Eucl. & partant ils ont les coſtez au long des angles égaux proportionnaux par la 4. p. 6. d'Eucl. tellement que CA ſera à AB, comme C D à D E; & en permutant CA ſera à CD, comme AB ſera à DE par la 16.

C iij

Έτσι λοιπόν αν στη CD περιέχονται 5 υποδιαιρέσεις μέτρου και βαθμίδων, και βρίσκω ότι στην DE περιέχονται 10, θα καταλήξω ότι στη CA περιέχονται 5 πόδια, και η γραμμή AB θα περιέχει 10 πόδια. Και αν θα ήθελες επιπλέον να γνωρίσεις το μήκος της CB, κοίταξε πόσες βαθμίδες θα έχει η CE, και τόσα πόδια θα έχει η CB, για τους ίδιους λόγους. Αλλά αν πιο άνετα ήθελες να πάρεις την προς μέτρηση γραμμή διαγώνια, όπως η AX, βάλε με τέτοιο τρόπο το όργανο ώστε η ράβδος της θέσης να είναι κατευθείαν *επάνω στη γραμμή ΧΑ, και από τη Χ μέχρι τη βάση Ν, να είναι τόσες βαθμίδες όσα τα πόδια που περιέχονται στη ΧΑ, και θεωρούμε ότι έχει τέσσερα από αυτά. Έπειτα, το κάνουμε έτσι ώστε η βάση ΝΤ να είναι παράλληλη στην ΑΒ, και ανυψώνουμε την κινητή στο σημείο και άκρο Β, έτσι λοιπόν το σημείο που αυτή θα κόψει τη βάση (γνωστό ως Τ) θα δείξει το πραγματικό μήκος της ΑΒ: διότι όσες υποδιαιρέσεις μέτρου περιέχονται στην ΝΤ τόσα πόδια θα περιέχονται στην ΑΒ (το τρίγωνο ΧΝΤ είναι ισογώνιο και ανάλογο με το τρίγωνο ΧΑΒ) σύμφωνα με τα προκείμενα.*

Ερωτήσεις

1. Τι θέλει να μελετήσει εδώ ο συγγραφέας;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

2. Ποιες μαθηματικές έννοιες περιλαμβάνονται στο κείμενο;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

3. Γιατί έγραψε ο Errard το κείμενο αυτό;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

4. Με βάση τα στοιχεία του κειμένου, μπορείτε να δημιουργήσετε ένα δικό σας πρόβλημα;

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ΄

Η εκτίμηση των υψών των αντικειμένων

Η παρουσίαση του ιστορικού κειμένου

Μετρήσεις στην αυλή

Η συναρμολόγηση του εργαλείου στην τάξη

Η μέτρηση του κτηρίου με το εργαλείο

Εργασία με τα τρίγωνα στον πίνακα