

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

Π.Μ.Σ.: ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ.
ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ

Διπλωματική εργασία

**Η κοινωνική σημειωτική προσέγγιση στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων
σε μαθητές δημοτικού με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος.**

της

Σαματά Χρυσούλας

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος/ Αν. Καθηγητής ΠΤΔΕ/ΠΔΜ
Εξεταστές: Αλευριάδου Αναστασία/ Καθηγήτρια ΠΤΝ/ΠΔΜ
Κυρίδης Αργύριος/ Καθηγητής ΑΠΘ

Φλώρινα Ιούνιος 2018

Copyright © Σαματά Χρυσούλα, 2018.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και μόνο.

Όνοματεπώνυμο: Σαματά Χρυσούλα

A.E.M.: 599

Ηλεκτρονική διεύθυνση: xrysasam@yahoo.gr

Έτος εισαγωγής: 2015

Κατεύθυνση: Πολιτισμικές Σπουδές

Τίτλος διπλωματικής εργασίας: Η κοινωνική σημειωτική προσέγγιση στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές δημοτικού με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος.

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής, είναι προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας, η βιβλιογραφία και οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει, έχουν δηλωθεί κατάλληλα με παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Επισημαίνεται πως η συγκεκριμένη επιλογή βοηθά στον περιορισμό της λογοκλοπής διασφαλίζοντας έτσι τη συγγραφέα.

Ημερομηνία 7 - 06 - 2018

Η δηλούσα

Σαματά Χρυσούλα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	6
1.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	
1.1 Η ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	7
Η θεωρία του Arzarello	10
Η θεωρία του Radford	12
Σημειωτικά μέσα αναπαράστασης στα μαθηματικά	21
Οι κινήσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών	23
1.2.ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ	
Τα μαθηματικά προβλήματα	29
Κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων	30
Μοντέλα και στρατηγικές επίλυσης γραπτών μαθηματικών προβλημάτων	32
1.3. ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΤΟΥ ΑΥΤΙΣΤΙΚΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ	
Διαγνωστικά κριτήρια και χαρακτηριστικά	35
Ακαδημαϊκές δεξιότητες μαθητών με ΔΑΦ	37
1.4. ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ	40
2. ΕΡΕΥΝΑ	
2.1 Η ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ ΚΑΙ ΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	48
2.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	
Το προφίλ του μαθητή	51
Η διαδικασία	52
Τα γραπτά μαθηματικά προβλήματα της έρευνας	54
Τα κριτήρια σχεδίασης και τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων της έρευνας	55
2.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	
Ανάλυση 1 ^{ου} προβλήματος	60
Ανάλυση 2 ^{ου} προβλήματος	67
Ανάλυση 3 ^{ου} προβλήματος	78
3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	84
4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	97
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ	102
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	102
Παράρτημα	106

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα εξετάζει, υπό το πρίσμα των κοινωνικών σημειωτικών θεωριών, τις διαδικασίες επίλυσης ενός μαθητή της έκτης τάξης του δημοτικού σχολείου με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος (ΔΑΦ) και νοημοσύνη εντός των φυσιολογικών ορίων, κατά την εφαρμογή τριών πρωτότυπων λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων στο πλαίσιο ομαδικών δραστηριοτήτων επίλυσης εντός της γενικής τάξης. Σκοπός ήταν να διαπιστωθεί η δυνατότητα και οι τρόποι με τους οποίους θα μπορούσαν οι μαθητές με ΔΑΦ να ωφεληθούν από τα διάφορα σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης, και ιδιαίτερα από τις κινήσεις των χεριών και την κοινή αξιοποίηση απτικών υλικών, κατά την συνεργασία με άλλους στην επίλυση προβλημάτων. Από τα αποτελέσματα, προέκυψε, ότι ο μαθητής της έρευνας δεν χρησιμοποίησε κινήσεις των χεριών, παρά μόνο σε μια περίπτωση για να υποβοηθήσει την εργαζόμενη μνήμη του και όχι για να επικοινωνήσει. Ωστόσο, υιοθέτησε μια γραπτή μορφή των κινήσεων στη δική του επίλυση. Γενικά, οι διαδικασίες επίλυσης εμφανίστηκαν έντονα συνδεδεμένες με τις γραπτές διαδικασίες αλλά και με την προφορική γλώσσα, παρά τα επικοινωνιακά του ελλείμματα. Στο τρίτο πρόβλημα, η ποικιλία των σημειωτικών μέσων αποδείχτηκε θετική στην ανάπτυξη της συνεργασίας στην ομάδα, και αυτή στη δέσμευση του μαθητή στις δραστηριότητες της ομάδας και στην προώθηση των διαδικασιών επίλυσης, αλλά και στην αύξηση της αυτοπεποίθησής του, αφού ελαττώθηκε η ανάγκη του για επιβεβαίωση. Τέλος, εξέφρασε αυθόρμητα τον ενθουσιασμό και την ικανοποίησή του από το σύνολο των διαδικασιών. Από όλα τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι η κοινωνική σημειωτική προσέγγιση μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα και στους μαθητές με ΔΑΦ, με μεγάλα περιθώρια περαιτέρω έρευνας στον τομέα.

Λέξεις-κλειδιά

κοινωνική σημειωτική προσέγγιση, επίλυσης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, κινήσεις των χεριών (χειρονομίες)

Abstract

The current study examines under the lens of socio-cultural semiotic theories the solving processes of a 6th grade elementary school (male) student with autism spectrum disorders (ASD) without intellectual disabilities (ID) on three non-routine mathematical word problems during group working activities in an inclusive classroom setting. The purpose of the study was to discern the ways in which students with ASD could benefit

from the variety of emerging semiotic means of objectification, especially concerning gestures and handling of shared (in group) manipulatives throughout problem solving collaboration. Research outcome revealed a lack of gestures used by the student, as they only appeared once facilitating working memory, but serving no communicational purpose. Nevertheless, he included a written form of his former gesture as part of his solution. The solving process was strongly depended on writing and speech, despite his communicational deficits. In the third word problem, the wide range of semiotic means of objectification had a positive impact on the evolution of the communication among the group members. That led to the point of a great commitment to the group activities and the increase of his self-confidence, since his need for prompting was reduced. Finally, he declared his excitement and satisfaction about all the activities. In conclusion, it is obvious that social semiotic approach can also have a positive outcome for students with ASD on mathematical word problem solving. Nonetheless, further future research would be required.

Keywords

Social semiotic approach, mathematical word problem solving, autism spectrum disorders, gestures

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα έρευνα εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών στη «σημειωτική και επικοινωνία» της κατεύθυνση πολιτισμικών σπουδών στις επιστήμες της αγωγής του πανεπιστημίου της Φλώρινας. Πεδίο ενδιαφέροντος αποτέλεσε η εφαρμογή των σύγχρονων κοινωνικών σημειωτικών θεωριών στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στην επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος. Η εργασιακή απασχόληση της ερευνήτριας σε δημοτικά σχολεία της χώρας, την έφερε σε επαφή με πολλούς μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, που παρά τις πολύ υψηλές ικανότητές τους στην εκτέλεση αλγορίθμων, υστερούσαν σημαντικά ως προς την επίλυση των λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, με συχνή την αποτυχία τους και με φανερά αρνητικά αποτελέσματα ως προς τη διάθεση και τη στάση τους απέναντι σε αυτά. Το γεγονός αυτό, οδήγησε στην ανάγκη διερεύνησης αποτελεσματικότερων τρόπων για τη διδασκαλία των μαθηματικών προβλημάτων μέσα στις γενικές τάξεις, από την οποία να μπορούν να ωφεληθούν και οι μαθητές αυτοί.

Η προσέγγιση των κοινωνικών σημειωτικών θεωριών, φαίνεται να προσφέρει πρόσφορο έδαφος στην ενίσχυση των μαθητών αυτών, τόσο ως προς τις μαθηματικές τους ικανότητες σχετικά με τις διαδικασίες επίλυσης, όσο και ως προς τις επικοινωνιακές και κοινωνικές τους δεξιότητες, εφόσον προϋποτίθεται η συνδιαλλαγή με τα μέλη της ομάδας και η κοινή χρήση υλικών και μέσων. Επιπλέον, οι πιθανόν θετικές εμπειρίες από τις διδακτικές και μαθησιακές διαδικασίες, είναι δυνατόν να οδηγήσουν στην τόνωση του αυτοσυναισθήματος και την απόκτηση θετικότερης στάσης απέναντι στα μαθηματικά προβλήματα και κατ' επέκταση στο μάθημα των μαθηματικών. Για τον λόγο αυτό, επιλέχθηκε ως ένας πολλά υποσχόμενος τρόπος προσέγγισης της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας με πολλαπλά οφέλη για τους μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, όπως προκύπτουν μέσα από την κοινή ενασχόληση κατά την επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων.

Στην αρχή της εργασίας αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο γύρω από την κοινωνική σημειωτική προσέγγιση και τις σύγχρονες θεωρίες της στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Στο πλαίσιο αυτό, αναλύονται τα διάφορα σημειωτικά μέσα που μπορεί να οδηγήσουν στη μάθηση, με ιδιαίτερη αναφορά στο ρόλο των κινήσεων των χεριών.

Στη συνέχεια, αναπτύσσεται το ζήτημα του λεκτικού μαθηματικού προβλήματος και διάφοροι τρόποι προσέγγισης για την επίλυσή του. Ακολούθως, παρατίθενται τα σημαντικότερα διαγνωστικά χαρακτηριστικά αλλά και το προφίλ των ακαδημαϊκών δεξιοτήτων των μαθητών με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος. Έπειτα, γίνεται αναφορά στις προηγούμενες έρευνες σχετικά με την επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος. Ακολουθεί, η θέση των ερευνητικών ερωτημάτων και των υποθέσεων και έπεται η περιγραφή της ακολουθούμενης μεθοδολογίας. Εν συνεχεία, αναλύονται τα δεδομένα που προέκυψαν και αμέσως μετά συνάγονται τα συμπεράσματα. Τέλος, πραγματοποιούνται η συζήτηση, οι παρατηρήσεις καθώς και προτάσεις για μελλοντικές μελέτες.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Η ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τη σημειωτική επιστήμη, καθώς τα ίδια τα αντικείμενα των μαθηματικών, είναι ιδεατά ως προς τη φύση τους (πχ. αριθμοί, χρόνος) (Presmeg, Radford, Roth, & Kadunz, 2016), και ως εκ τούτου, μπορούν να γίνουν αντιληπτά και να προσεγγιστούν μόνο μέσα από τα σημειωτικά συστήματα που έχουν ορισθεί να τα αναπαριστούν (Duvall, 2006). Επιπλέον, αποτελούν κοινωνική και πολιτισμική πρακτική, καθότι διαμορφώνονται από μέλη μιας συγκεκριμένης κοινωνίας στην προσπάθειά τους να βρουν τρόπους για να διαχειριστούν διάφορα προβλήματα (Κολέζα, 2009). Επομένως, η μαθηματική δραστηριότητα καθίσταται ένα διαχρονικά εμφανιζόμενο πολιτισμικό προϊόν που απορρέει, επηρεάζει και διαμορφώνει την καθημερινότητα, τις πρακτικές και τις συνήθειες του πληθυσμού εντός ενός ορισμένου πολιτισμικού πλαισίου.

Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης τα σημειωτικά συστήματα προσφέρονται για την προσέγγισή των Μαθηματικών, όχι μόνο ως επιστήμης με τις αυστηρές αρχές και τη δομή που τη διέπει, αλλά και από την άποψη των σύνθετων και ποικίλων μαθησιακών και κοινωνικών διαδικασιών που αναπτύσσονται κατά τη διδασκαλία τους (Arzarello, 2006). Έτσι, τα μαθηματικά έχουν μελετηθεί υπό το πρίσμα διάφορων σημειωτικών θεωριών αλλά και γενικότερων εκπαιδευτικών θεωριών που υπόκεινται σε σημειωτικές αναγνώσεις, οδηγώντας, πολλές φορές, στην ανάπτυξη νέων σημειωτικών προσεγγίσεων. Σημαντικότερη εφαρμογή στην εκπαίδευση των μαθηματικών

βρίσκουν η θεωρία του Peirce και του Vygotsky.

Η βασική θεωρία του Peirce, αφορά στην τριχοτόμηση του σημείου στο αναφερόμενο (referent) – αντικείμενο (το σημαινόμενο κατά τον Saussure), στο σημειοφόρο (sign vehicle) που δηλώνει το αντιπροσωπεύον, δηλαδή τη μορφή που παίρνει το σημείο (το σημαίνον κατά τον Saussure) και στο ερμήνευμα (interpretant) που δεν είναι άλλο από την έννοια που αποδίδεται στο σημείο (Chadler, 1999). Τα σημεία διακρίνονται σε εικονικά, ενδεικτικά και συμβολικά, ανάλογα με τη σχέση που ανιχνεύεται κάθε φορά από το άτομο, ανάμεσα στο σημειοφόρο και το αντικείμενο, και το αν η έμφαση δίνεται στην οντολογική, τη φαινομενολογική ή τη συμβολική διάστασή τους. Ο Peirce υποστηρίζει ότι εκκινώντας από τον ίδιο σημειοφόρο είναι δυνατόν να προκύψουν διαφορετικές ερμηνείες από διαφορετικά άτομα και κατά συνέπεια διαφορετικά σημεία (Presmeg et al., 2016). Αυτό βρίσκει εφαρμογή και στα μαθηματικά, επιτρέποντας την παρατήρηση των ατομικών αυτών διαφοροποιήσεων που μπορούν να χρησιμεύσουν ως δείκτες της μαθηματικής αντίληψης και του βάθους κατανόησης των μαθητών σχετικά με μια συγκεκριμένη πτυχή του γνωστικού περιεχομένου (Presmeg et al., 2016) με ότι αυτό συνεπάγεται για την αξιοποίησή του στη διδακτική διαδικασία. Επιπλέον, η διδασκαλία εκλαμβάνεται ως μια πράξη επικοινωνίας και ως εκ τούτου σύμφωνα με τον Peirce αποτελεί ένα είδος αναπαράστασης ή σημείωσης, που φέρει τρία είδη ερμηνευμάτων: ένα που σχηματίζει ο ομιλητής, ένα ο ακροατής και ένα κοινό ανάμεσα στους δύο, όπου θα πρέπει να μοιραστεί μεταξύ τους μια κοινή ερμηνεία, προκειμένου να επιτευχθεί η επικοινωνία (Presmeg et al., 2016).

Εξαιρετικής σημασίας για την εκπαιδευτική πράξη και παρέμβαση είναι η συμβολή του Vygotsky, ο οποίος μάλιστα επηρεάστηκε από το τομέα της ειδικής αγωγής ως προς την ανάπτυξη της έννοιας του σημείου. Συγκεκριμένα, θέτει δυο σημαντικά ζητήματα, που αφορούν στην ικανότητα των παιδιών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση να επιτύχουν τους (ίδιους) μαθησιακούς στόχους ακολουθώντας διαφορετικά μέσα και διαφορετικές διαδρομές μάθησης (γεγονός που υπογραμμίζει την ύπαρξη πολλαπλών αναπαραστάσεων για το ίδιο αντικείμενο στην περίπτωση των μαθηματικών) και στις δυνατότητες για μάθηση που παρέχονται μέσα από την αλληλεπίδραση με τους άλλους (όπως αναφέρεται στο Presmeg et al., 2016). Ο τρόπος που αυτή η διάδραση μέσω των σημείων μπορεί να προωθήσει τη μάθηση αποτελεί ιδιαίτερης σημασίας

χαρακτηριστικό στη θεωρία του και μπορεί, απολύτως, να προσεγγιστεί από σημειωτική σκοπιά στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Βέβαια, ο Vygotsky χρησιμοποιεί το «σημείο», όχι με τη σημειωτική έννοια του όρου σχετικά με την αναπαραστατική του φύση, αλλά ανάλογα με τη λειτουργία που επιτελεί και σύμφωνα με τη θεωρία του, φέρει δυο διαστάσεις: εκείνη του ψυχολογικού εργαλείου και αυτή του πολιτισμικού διαμεσολαβητή (*cultural mediator*). Τα σημεία φέρουν κοινωνικο-πολιτιστικά διαμορφωμένα νοήματα και αξιοποιούνται ως εργαλεία που μπορούν να οδηγήσουν στην αλλαγή του τρόπου σκέψης του ατόμου, όταν εσωτερικευτούν στο άτομο, όταν δηλαδή περάσουν από το κοινωνικό και συλλογικό (εξωτερικευμένο), στο ατομικό (εσωτερικευμένο) επίπεδο της ψυχολογικής λειτουργίας και της συμπεριφοράς. Η θεωρία της εσωτερικεύσης (*internalization*) προϋποθέτει την επίδραση του πολιτισμικού περιβάλλοντος στο άτομο με τον κατάλληλο τρόπο, όπου τα σημεία εκλαμβάνονται ως τα εργαλεία επίτευξης της σημειωτικής μεσολάβησης (*semiotic mediation*) που θα οδηγήσουν στην επικείμενη ανάπτυξη (Presmeg et al., 2016). Από τον Vygotsky επηρεάστηκαν πολλοί ερευνητές στις σημειωτικές θεωρίες που ανέπτυξαν για τα μαθηματικά, με μια από τις σημαντικότερες, εκείνη του Arzarello, που αναπτύσσει τη θεωρία της σημειωτικής δέσμης.

Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά «είναι ο τομέας εντός του οποίου βρίσκουμε το μεγαλύτερο εύρος σημειωτικών αναπαραστατικών συστημάτων» (Duval, 2006, p.108) τα οποία είναι τόσο εσωτερικά όσο και εξωτερικά στο άτομο (Goldin, 2000). Οποιαδήποτε μαθηματική διαδικασία, με κορυφαία την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, περιλαμβάνει την «αντικατάσταση μιας σημειωτικής αναπαράστασης με κάποια άλλη» (Duval, 2006, p.107). Αυτό είναι που σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (πχ. Roth 2011, Otte 2006, Wartofsky 1968, Duval 2006) δημιουργεί δυσκολίες και συντελεί στα λάθη που πραγματοποιούνται από τους λύτες κατά την ενασχόληση με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, δηλαδή η δυσκολία κατά τη μετάβαση από ένα αναπαραστατικό σύστημα (ή από μία είδους αναπαράσταση εντός του ίδιου συστήματος) σε ένα άλλο (Duval 2006; Presmeg 2016).

Ωστόσο, η πολυπλοκότητα των διδακτικών φαινομένων που πραγματοποιούνται σε μια τάξη δεν μπορεί να ερμηνευτεί σε όλο της το εύρος υπό τις κλασικές σημειωτικές θεωρήσεις, καθώς έτσι περιορίζονται ως προς τη δομή και το είδος των σημειωτικών συστημάτων που περιλαμβάνουν (Arzarello, 2006), ενώ αγνοούνται άλλες σημαντικές

παράμετροι της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας (Radford, 2003). Έτσι, έχουμε την δημιουργία των κοινωνικών - πολιτισμικών σημειωτικών θεωριών των Arzarello και Radford.

Η θεωρία του Arzarello

Ο Arzarello και οι συνεργάτες του εισάγουν τη θεωρία της *σημειωτικής δέσμης (semiotic bundle)* ή *δέσμης σημειωτικών ομάδων (bundle of semiotic sets)* διευρύνοντας την ποικιλία των πηγών που αναγνωρίζονται και αξιοποιούνται ως σημειωτικές κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας από τους δασκάλους και τους μαθητές, καθώς και τις σχέσεις ανάμεσα στα διάφορες αυτές σημειωτικές αναπαραστάσεις, προσφέροντας έτσι ένα νέο θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο των Μαθηματικών.

Αρχικά, η θεωρία της σημειωτικής δέσμης αντλεί από προηγούμενες θεωρίες, με βασικότερο σημείο τον ορισμό του Ernest για το σημειωτικό σύστημα, σύμφωνα με τον οποίο αυτό αποτελείται από τρία συστατικά στοιχεία: ένα σύνολο σημείων (προφορικών, γραπτών, σχεδιασμένων ή ηλεκτρονικά κωδικοποιημένων), ένα σύνολο κανόνων παραγωγής και μετασχηματισμού σημείων και ένα σύνολο σχέσεων μεταξύ των σημείων και των νοημάτων τους. Ωστόσο, στη θέση του *σημειωτικού συστήματος*, εισάγεται ο όρος **σημειωτική ομάδα-τάξη (semiotic set)** και περιλαμβάνει πρώτον, μια τάξη σημείων στα οποία περιλαμβάνονται επιπλέον χειρονομίες-κινήσεις του σώματος και ο χειρισμός κατασκευών, δεύτερον, ένα σύνολο τρόπων παραγωγής και μετασχηματισμού των σημείων, που μπορεί εκτός από αποτέλεσμα δομημένων και σαφών κανόνων (όπως αυτοί των αλγορίθμων) να είναι αποτέλεσμα ελαστικών χειρισμών και δραστηριοποίησης των υποκειμένων, και τρίτον, ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα στα σημεία και τις σημασίες τους. Επομένως, η σημειωτική δέσμη αποτελείται από μια συλλογή σημειωτικών ομάδων-τάξεων και από τις μεταξύ τους σχέσεις. Ωστόσο, αποτελεί ένα ενοποιημένο σύστημα, τα μέρη του οποίου δεν μπορούν στην πραγματικότητα να διαχωριστούν και να μελετηθούν απομονωμένα από το σύνολο και το πλαίσιο εντός του οποίου εμφανίζονται, καθώς μόνο τότε είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν στην ερμηνεία και την ανάδειξη των νέων ή/και των σύνθετων φαινομένων. Επιπλέον, πρόκειται για μια δυναμική δομή που μεταβάλλεται στο χρόνο ανάλογα με τη δραστηριοποίηση του ατόμου. Ένα παράδειγμα σημειωτικής δέσμης

είναι αυτή του λόγου-χειρονομιών.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφής η διεύρυνση της ίδιας της έννοιας του σημείου, με την μετακίνηση από τα σημειωτικά συστήματα των παραδοσιακών σημειωτικών μοντέλων προς πιο «ανοιχτά σύνολα σημείων» -ανοιχτά ως προς τη δομή και τους κανόνες παραγωγής και ερμηνείας τους - όπως είναι οι χειρονομίες και γενικά οι κινήσεις και η στάση του σώματος, το βλέμμα, οι ζωγραφιές, τα σκίτσα, ακόμα και ο χειρισμός των εργαλείων και των τεχνητών μέσων. Επίσης, ο χειρισμός των σημείων αυτών αντιμετωπίζεται υπό νέα ευρύτερη προοπτική (ως προς τους τρόπους και τις λειτουργίες του). Κατά συνέπεια, αυτά τα σημεία επιτρέπουν την έκφραση των ιδιοσυγκρασιακών χαρακτηριστικών του ατόμου, καθώς ο χειρισμός του μπορεί να γίνει πιο ελεύθερα συγκριτικά με τα αυστηρώς δομημένα, ακριβή, αλγοριθμικά μαθηματικά συστήματα (Arzarello & Paola, 2007). Η σχέση ανάμεσα στα σύνολα αυτά των σημείων, καθορίζεται από τον τρόπο χρήσης και αξιοποίησή τους από το άτομο, δηλαδή από την πρόθεση και το σκοπό του ατόμου. Η σημειωτική δεσμίδα «περιλαμβάνει όλα τα σημεία που παράγονται από ενέργειες που πραγματοποιούνται εσκεμμένα» (Arzarello & Paola, 2007, p.19). Επομένως, η έννοια της προθετικότητας (*intentionality*) είναι κεντρική στη θεωρία του Arzarello.

Ακόμα, η θεωρία των σημειωτικών δεσμίδων προσφέρει ένα πιο λειτουργικό πλαίσιο για την ερμηνεία των βασικών θεωριών του Vygotsky. Ο εσωτερικός λόγος (*inner speech*) του Vygotsky προσομοιάζει με τις σημειωτικές ομάδες-τάξεις (*semiotic sets*) ως προς ορισμένα χαρακτηριστικά που του αποδίδονται και οι σημειωτικές μετατροπές (*semiotic transformations*) που πραγματοποιούνται κατά την μετατροπή του «έξω» λόγου (*outer speech*) σε εσωτερικό, δηλαδή κατά την διαδικασία της εσωτερίκευσης, μπορούν να ερμηνευτούν επίσης μέσω της *γενετικής μετατροπής* (*genetic conversion*) που πραγματοποιείται εντός μιας σημειωτικής δέσμης. Η γενετική μετατροπή ορίζεται ως η γένεση ενός νέου σημείου (σημειωτικού μέρους επί του συνόλου της σημειωτικής δέσμης) εκκινώντας από ένα ήδη υπάρχον και μέσω αυτής της διαδικασίας αυξάνεται το εύρος της σημειωτικής δέσμης. Ερμηνεύοντας την διαδικασία της εσωτερίκευσης του Vygotsky υπό αυτό το πρίσμα, ο εξωτερικός λόγος αποτελεί την υπάρχουσα σημειωτική ομάδα, ενώ ο εσωτερικός λόγος συνιστά τη νέα που γεννάται εκ της υπάρχουσας (Arzarello, 2006). Βαρύνουσα σημασία αποκτά ο ρόλος του δασκάλου στην θεωρία του Arzarello, καθώς εκλαμβάνεται ως μεσολαβητής, «που προωθεί τις

διαδικασίες εσωτερίκευσης των μαθητών μέσω των σημείων» (Arzarello & Paola, 2007, p.17) που παράγει, με το να αξιοποιεί (μέσω παρατήρησης) τη δυναμικά εξελισσόμενη σημειωτική δεσμίδα, που αυτοί αναπτύσσουν κατά την εργασία τους, «ως εργαλείο για να ανιχνεύσει τη ζώνη επικείμενης ανάπτυξης στην οποία βρίσκονται οι μαθητές του» (Arzarello & Paola, 2007, p.23).

Η θεωρία του Radford

Ο Luis Radford στο πλαίσιο της πολιτισμικής-ιστορικής θεωρία του (*cultural-historical theory*) για την διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, ανέπτυξε τη θεωρία της εξαντικειμενίκευσης (*theory of objectification*). Η εξαντικειμενίκευση, ορίζεται ως το σύνολο των διαδικασιών μέσω των οποίων «οι ιστορικά και πολιτισμικά κωδικοποιημένες μορφές σκέψης και δράσης, γίνονται αντικείμενα αναγνώρισης ή αντικείμενα της συνείδησης/ συνειδητότητας» (Radford, 2013a, p.28) του ατόμου. Δηλαδή, είναι οι ενέργειες που στοχεύουν στο να «φέρουν μπροστά» στο άτομο, σύμφωνα με την ετυμολογία του αγγλικού όρου, τα μαθηματικά (εν προκειμένω) αντικείμενα (Radford, 2003), κάνοντάς τα εμφανή και αντιληπτά στο άτομο, μέσα από «την κοινή δραστηριοποίησή του με άλλους, μέσω του υλικού πολιτισμού» (Radford, 2013a, p.31).

Η εξαντικειμενίκευση, συντελείται μέσω των σημειωτικών μέσων εξαντικειμενίκευσης, (*semiotic means of objectification*) που έρχονται να διευρύνουν τους τρόπους μέσω των οποίων μπορεί κανείς να έρθει σε επαφή με το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Το σύνολο των μέσων «που το άτομο χρησιμοποιεί σκόπιμα μέσα από κοινωνικές διαδικασίες παραγωγής νοήματος (μάθησης) για να πετύχει μια σταθερή μορφή συνειδητότητας – (επί)γνώσης, για να δηλώσει τις προθέσεις του και να ενεργήσει ώστε να επιτύχει τον στόχο των δραστηριοτήτων του» (Radford, 2003a, p.41) είναι αυτό που ο Radford αποκαλεί σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης. Τα μέσα αυτά δεν περιορίζονται μόνο στις σημειωτικές αναπαραστάσεις, αλλά περιλαμβάνουν επιπλέον αντικείμενα, συσκευές και εργαλεία του υλικού πολιτισμού και γενικά μορφές της ανθρώπινης αλληλεπίδρασης, εφόσον αποσκοπούν στην εξαντικειμενίκευση της γνώσης. Ως εκ τούτου, σημαντική θέση στη θεωρία έχει και το ίδιο το σώμα, με ιδιαίτερο σημείο ενδιαφέροντος τις (δεικτικές) κινήσεις που πραγματοποιούνται με τα χέρια (Radford, 2013c)

Ο ίδιος αντλεί τα βασικότερα θεωρητικά σημεία στα οποία στηρίζει τη θεωρία του, όπως είναι η έννοια της γνώσης, κυρίως από τον Γερμανό φιλόσοφο Hegel (και τη διαλεκτική παράδοση), ενώ άλλες κεντρικές έννοιες προέρχονται από τη θεωρία του Vygotsky και των συνεργατών του. Η θεωρία της εξαντικειμενίκευσης αποτελείται από τρία συνθετικά μέρη, οι σχέσεις μεταξύ των οποίων αποτυπώνονται στο σχετικό σχεδιάγραμμα του Radford, με τα στοιχεία του να σχηματίζουν ένα αντεστραμμένο τρίγωνο. Στο πάνω αριστερό μέρος βρίσκεται το «γενικό», που δεν είναι άλλο από τη γνώση (knowledge), στο πάνω δεξί άκρο τοποθετείται το «ατομικό», που ταυτίζεται με την κατάσταση κατά την οποία το άτομο γνωρίζει (knowing), δηλαδή την επίγνωση ή τη συνείδηση, και ανάμεσά τους, στο κάτω μέρος, τοποθετείται το «συγκεκριμένο». Ένα βέλος οδηγεί από το γενικό στο συγκεκριμένο και ένα άλλο από το συγκεκριμένο στο ατομικό. Επίσης, ένα διακοπτόμενο βέλος εκκινεί από το γενικό προς το ατομικό, σχηματίζοντας έτσι την εντύπωση του αντεστραμμένου τριγώνου, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Τα βέλη αναπαριστούν τις σχέσεις μεταξύ των συνθετικών μερών της θεωρίας της εξαντικειμενίκευσης. Οι έννοιες αυτές και οι σχέσεις μεταξύ τους, θα αναλυθούν στη συνέχεια εκτενώς, καθώς μέσω αυτών εξηγούνται, στη θεωρία του Radford, οι διαδικασίες της μάθησης που λαμβάνουν χώρα στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Η πρώτη βασική έννοια, που έχει συντελέσει εν πολλοίς στη διαμόρφωση της θεωρίας του Radford, είναι αυτή της γνώσης (knowledge). Αρχικά, ο Radford (2013a), δέχεται ότι η γνώση είναι κοινωνικά, πολιτισμικά και ιστορικά διαμορφωμένη και ότι δεν υφίσταται αφ' εαυτής ως ιδεατή έννοια, ανεξάρτητη από τον υλικό κόσμο των εμπειριών. Ωστόσο, μπορεί να χαρακτηριστεί ιδεατή υπό την έννοια ότι φέρει τη γενική πρότυπη (ιδανική) μορφή δράσης (σε αντίθεση με την ίδια τη δράση σε κάθε επιμέρους έκφασή της), όπως αυτή διαμορφώθηκε (και διαμορφώνεται) ως συλλογική και πολιτισμική δραστηριότητα μέσα στην ιστορική διαδρομή του χρόνου. Επίσης, θεωρείται ότι η γνώση δεν μπορεί να μεταδοθεί άμεσα ή να αποκτηθεί μέσω συμπεριφοριστικών μεθόδων, εν είδη ερεθίσματος –αντίδρασης, καθώς η θεωρία αυτή κρίνεται μονοδιάστατη και ανεπαρκής στο να ερμηνεύσει την πολυπλοκότητα των εκφάνσεων της ανθρώπινης σκέψης και συμπεριφοράς. Επιπλέον, υπάρχει ανεξάρτητα από το άτομο (individual), καθώς «προϋπάρχει της δικής μας εμφάνισης στον κόσμο» (Radford, 2013a, p.27).

Ο ρόλος του ατόμου στη θεωρία του Radford έρχεται σε αντίθεση με τον κεντρικό ρόλο που δίνεται στην ατομική διάσταση της κατασκευής της γνώσης ως απόρροια της προσωπικής (και άρα μοναδικής στο κάθε άτομο) αντίληψης των εμπειριών, σύμφωνα με τον Καντ και τις εποικοδομιστικές θεωρίες, όπως του Piaget, αποκλείοντας έτσι την αντίληψη της γνώσης ως μια δυναμική κοινωνική διαδικασία (Radford, 2013a). Ακόμα και στις θεωρίες του κοινωνικού-πολιτισμικού πλαισίου, ο διαχωρισμός σε μια εξωτερική (περιβάλλον-εμπειρία) και μια εσωτερική (άτομο-νους) διάσταση της ανθρώπινης πολιτισμικής ανάπτυξης, όπως στη θεωρία της εσωτερίκευσης του Vygotsky, οδηγεί στο να δοθεί και πάλι, έμφαση στην ατομικότητα της γνώσης (Radford, 2013a, p.22). Αντίθετα, για την πολιτισμική-ιστορική θεωρία η γνώση είναι μια διαδικασία πολιτισμική και ιστορική (και όχι μια ατομική κατασκευή) που προσεγγίζεται μόνο μέσω συγκεκριμένων διαδικασιών (που θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια) που το άτομο κινητοποιεί κατά την αλληλεπίδρασή του με τους άλλους, μέσα από πολιτισμικά και ιστορικά διαμορφωμένους τρόπους και υλικά δράσης και κοινωνικής συνδιαλλαγής. Συνεπώς, η έμφαση δίνεται στις πολιτισμικές διαδικασίες που το άτομο, (ως μέρος αυτών και όχι αποκομμένο ή αυτόνομο) ακολουθεί.

Ο Radford υιοθετεί την ερμηνεία του Hegel (στο έργο του *Logic*) για την έννοια της γνώσης (knowledge) ως «ένα σύνολο πολιτισμικά και ιστορικά διαμορφωμένων, σωματοποιημένων διαδικασιών σκέψης και δράσης¹» (απόδοση εκ του αγγλικού) (Radford, 2013a, p.10). Από αυτό γίνεται φανερό, ότι για την πολιτισμική –ιστορική θεωρία του Radford, η γνώση δεν είναι στατική, αλλά αποτελεί μια διαδικασία (process) που χαρακτηρίζεται από κινητικότητα και δραστηριοποίηση. Η γνώση χαρακτηρίζεται από γενικότητα, ακριβώς επειδή πρόκειται για την πρωτότυπη μορφή της πολιτισμικά και κοινωνικά προσδιορισμένης δράσης που, παραμένοντας αφηρημένη στη φύση της, παρέχει τη γενική «μορφή» σκέψης ή δράσης σε καθεμιά από τις συγκεκριμένες περιπτώσεις εμφάνισής της. Αποτελεί (κατά τον Hegel) μία «πιθανότητα», καθώς είναι μια εν δυνάμει, μη υπαρκτή ακόμα, πραγμάτωση των ποικίλων δυνατών εκφάνσεων που αυτή μπορεί να λάβει (Radford, 2013a). Ωστόσο, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, μπορεί, σύμφωνα τη Χεγκελιανή διαλεκτική, να γίνει δυνατή «η μετάβαση από το αφηρημένο στο απτό»² (Radford, 2013a, p.15).

¹ Η αγγλική παράθεση αποσπάσματος είναι η ακόλουθη: «Knowledge is an ensemble of culturally and historically constituted embodied processes of reflection and action»

² Στα αγγλικά αποδίδεται ως εξής: «...the ascension from the abstract to the concrete». Η ακριβής

Η διαδικασία μέσω της οποίας μπορεί να επιτευχθεί η μετάβαση από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο (στο απτό), αποτελεί την «πραγμάτωση» της γνώσης («actualization») στη θεωρία του Radford. Η γνώση μπορεί να προσεγγιστεί μόνο διαμέσου της ανθρώπινης δραστηριότητας («activity») (και αλληλεπίδρασης) επί ενός συγκεκριμένου και αντιληπτού δια μέσου των αισθήσεων μέσο, δηλαδή, σε αυτό που ο Hegel ονομάζει «συγκεκριμένο» («particular») και το οποίο φέρει το περιεχόμενο της γνώσης (Radford, 2013, p.17). Ταυτόχρονα, λειτουργεί ως διαμεσολαβητής της γνώσης, γεγονός που τονίζει τη σπουδαιότητα της διαδικασίας αυτής στη θεωρία του Radford. Συνεπώς, η γνώση με τη διαδικασία της πραγμάτωσης και με τη διαμεσολάβησή της παύει πλέον να είναι «αδύναμη», σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό του Hegel, ως είναι αφ' εαυτής στη γενικότητά της και της επιτρέπεται να «εμφανιστεί» (χωρίς αυτό να συνεπάγεται την αυτόματη συνειδητοποίηση της ύπαρξής της από το άτομο) με συγκεκριμένη μορφή. Αυτή η δραστηριότητα γίνεται φορέας νέων «πιθανοτήτων», υπό την έννοια που αποδόθηκε προηγουμένως στον όρο «πιθανότητα» στο πλαίσιο της θεωρίας του Radford, και ως συμβάν είναι μοναδικό, καθώς είναι αδύνατον να επαναληφθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Γι' αυτό και αναφέρει ότι «αφήνει το αποτύπωμά της στην ενσάρκωση της γνώσης» (Radford, 2013a, p.17).

Αυτή η «ενσάρκωση» («instantiation») της γνώσης είναι που σηματοδοτεί το «knowing» της θεωρίας του Radford, την «επίγνωση» ή «συνειδητοποίηση», ή αυτό που ο Hegel αποκαλεί «ατομικό» («singular» ή «individual») (Radford, 2013a, p.17). Η ενσάρκωση συμβαίνει όταν η γνώση γίνει αντικείμενο της σκέψης (της συνείδησης³) του ατόμου. Κατά τη διαδικασία αυτή το άτομο φτάνει στο να συνειδητοποιήσει την παρουσία της (γενικής) γνώσης μέσα από την κοινή δραστηριοποίησή του με άλλους στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας. Πρόκειται, ουσιαστικά, για τη μετάβαση από το γενικό στο ατομικό μέσω του συγκεκριμένου, δηλαδή για την ενσάρκωση του γενικού στο ατομικό. Υπό αυτή την έννοια αντιλαμβάνεται ο Hegel το ατομικό, που δεν χάνει την κοινωνικο-πολιτισμική και ιστορική υπόστασή του. Από αυτό γίνεται φανερός ο καταλυτικός ρόλος του συγκεκριμένου, δηλαδή της

μετάφραση του «ascension» είναι «άνοδος», «ανύψωση».

³ Η συνείδηση (consciousness) στο πλαίσιο της θεωρίας της εξαντικειμενοποίησης θεωρείται ο υποκειμενικός τρόπος αναστοχασμού του εξωτερικού κόσμου, δηλαδή, της απτής πραγματικότητας, ως αποτέλεσμα των κοινωνικο-πολιτισμικών συνθηκών/πλαισίων, εντός των οποίων αυτή διαμορφώνεται (Radford, 2013a, p.27).

δραστηριότητας, στην όλη διαδικασία, καθώς αποτελεί το σημείο αναφοράς για την ατομική γνώση, η οποία είναι άμεσα συνδεδεμένη μαζί της. Χωρίς τη διαμεσολάβηση της δραστηριότητας του ατόμου, δεν μπορεί να επέλθει η κατανόηση (η συνειδητοποίηση της γνώσης).

Η διαδικασία αυτή μέσω της οποίας η γνώση συγκεκριμενοποιείται (πραγματώνεται) και ενσαρκώνεται, αποτελεί την εξαντικειμενίκευση της γνώσης. Η ίδια η μάθηση (learning) γίνεται αντιληπτή στο πλαίσιο της θεωρίας του Radford ως μια σειρά από διαδικασίες εξαντικειμενίκευσης. Η μάθηση κατά τον Radford (2007) «είναι μια σύμπυξη μεταξύ των κοινωνικών τρόπων σκέψης και δράσης και της συνείδησης (ατομικής σκέψης) που προσπαθεί να τις αντιληφθεί» (όπως αναφέρεται στο Radford, 2013a, p.27). Είναι, δηλαδή, αποτέλεσμα της «υποκειμενικής και ιδιοσυγκρασιακής μετατροπής...της πολιτισμικής γνώσης σε αντικείμενο της συνείδησης» (Radford, 2013a, p.25). Η εξαντικειμενίκευση ως διαδικασία είναι εκείνη που επιτρέπει τη μετατροπή και τη διεύρυνση της γνώσης και της συνειδητότητας του ατόμου, εμπλεκόμενη έτσι και σε διαδικασίες υποκειμενοποίησης.

Κάθε διδασκαλία είναι μια συγκεκριμένη, άρα μοναδική και ανεπανάληπτη διαδικασία μάθησης, που συμβαίνει σε συγκεκριμένο χρόνο και χώρο, μέσω μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας, στο πλαίσιο της οποίας αναπτύσσονται ποικίλες και πολύπλοκες σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των συμμετεχόντων, με πολλούς παράγοντες ιδιοσυγκρασιακούς ή/και συναισθηματικούς στο κάθε άτομο να τις επηρεάζουν (πχ. επίπεδο διέγερσης-προσοχής, διάθεση, στάση απέναντι στα μαθηματικά κλπ). Μάλιστα, για τον Radford (2013a) η ίδια η δραστηριότητα θεωρείται ένας ζωντανός οργανισμός με γνωστική, συναισθηματική και ηθική διάσταση. Η διερεύνηση της εξαντικειμενίκευσης, μας δίνει τη δυνατότητα να παρακολουθήσουμε όλες αυτές τις πολύπλοκες διαδικασίες και σχέσεις που αναπτύσσονται κατά την πορεία της μάθησης στα μαθηματικά μέσα στην τάξη και χάρη στις οποίες προσεγγίζεται η γνώση.

Η δομή του συγκεκριμένου, μέσω της συσχέτισης και αλληλεπίδρασης των συνθετικών της μερών, αποκτά ιδιαίτερη σημασία για τη διδασκαλία, καθώς σχετίζεται με τους παιδαγωγικούς (και επιστημονικούς· εδώ, μαθηματικούς) στόχους της δραστηριότητας της τάξης (Radford, 2013a) και συνθέτει, θα μπορούσαμε να πούμε, τις διαδικασίες της μάθησης. Αυτή η δομή αποτελείται από τρία μέρη: το αντικείμενο, τον στόχο και τις

(επιμέρους) δραστηριότητες. Το αντικείμενο της δραστηριότητας, αποτελεί τον απώτερο στόχο της μάθησης και είναι η γνώση της γενικής μαθηματικής έννοιας την οποία αναμένεται οι μαθητές να προσεγγίσουν μέσω της διαδικασίας της συγκεκριμενοποίησης και της συνειδητοποίησης, δηλαδή μέσω της εξαντικειμενίκευσης. Ακολουθεί ο στόχος (της δραστηριότητας), που αποτελεί τη συγκεκριμένη έκφραση του γενικού (της γενικής γνώσης) στη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Τέλος, είναι οι επιμέρους εργασίες /τα μέρη που απαρτίζουν τη συγκεκριμένη δραστηριότητα (tasks), που διαμορφώνονται με βάση τους στόχους της δραστηριότητας. Συνήθως, πρόκειται για δραστηριότητες με σταδιακά αυξανόμενη δυσκολία. Η διδασκαλία εκκινεί από τις επιμέρους δραστηριότητες και κινείται (ανοδικά) προς το στόχο και έπειτα προς το αντικείμενο της δραστηριότητας. Όλα αυτά τα βήματα δε σημαίνει ότι πρέπει ή ότι μπορούν να πραγματοποιηθούν (επιτυχημένα) σε μια και μόνο διδασκαλία ή μέσω μιας δραστηριότητας. Άλλωστε, η τάξη γίνεται αντιληπτή στη θεωρία του Radford (2013a, p.32) ως ένα «σταδιακά εξελισσόμενο σύστημα, χωρίς όμως η εξέλιξη αυτή να μπορεί να προβλεφθεί εκ των προτέρων».

Ο Radford με τους συνεργάτες του παρουσιάζουν συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής δραστηριοτήτων που αφορούν στην ανάπτυξη ενός «...αλγεβρικού τρόπου αντίληψης, συλλογισμού και διερεύνησης ακολουθιών, που ανάγεται στην αρχαιότητα» (Radford, 2013a, p.13), όπως εξετάζοντας υπό το πρίσμα της θεωρίας της εξαντικειμενίκευσης τις διαδικασίες της μάθησης. Από τις πιο συνηθισμένες δραστηριότητες που εφαρμόζουν για να εισάγουν τους μαθητές στην άλγεβρα είναι εκείνες που φέρουν μια σειρά γεωμετρικών ή αριθμητικών ακολουθιών, όπως για παράδειγμα ένα μοτίβο ακολουθιών με τετράγωνα, (αντλώντας μαθηματικούς της αρχαιότητας,) που εκκινώντας από αριστερά με μια ορισμένη δομή συνεχίζουν προς τα δεξιά με κάθε επόμενη δομή να αυξάνει τα στοιχεία της με ορισμένο σταθερό τρόπο, και μέσω της οποίας αναμένεται οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τη δομή που διέπει τα μοτίβα και να μπορέσουν την αξιοποιήσουν για να επεκτείνουν σε οποιοδήποτε επόμενο μοτίβο της συγκεκριμένης αλγεβρικής ακολουθίας. Έτσι, σε μια από αυτές τις δραστηριότητες αποτελούμενη από τετράγωνα (Radford, 2003, 2013a, 2013b, 2013c; Presmeg, 2016) η αρχική δομή αποτελείται από τρία τετράγωνα με συγκεκριμένη διάταξη στο χώρο: δυο πάνω, εκ των οποίων το δεύτερο είναι χρωματισμένο ή σκιασμένο, και ένα από κάτω (και ανάμεσα) στα δυο. Στη δεύτερη δομή έχουν προστεθεί δυο νέα τετράγωνα στο μοτίβο του προηγούμενου σχηματισμού, ένα στην

πάνω σειρά και ένα στην κάτω, ώστε συνολικά υπάρχουν πέντε τετράγωνα. Το χρωματισμένο τετράγωνο παραμένει στην πάνω δεξιά πλευρά σε όλα τα μοτίβα ακολουθιών. Δίνεται σχεδιασμένη μέχρι και η τέταρτη τέτοια δομή. Εκείνο που ζητείται αρχικά από τους μαθητές είναι να σχεδιάσουν το πέμπτο μοτίβο, δηλαδή το αμέσως επόμενο. Στην συνέχεια, ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των τετραγώνων που υπάρχει σε ένα κατοπινό μοτίβο (για παράδειγμα στο δέκατο). Ανάλογα με την επιτυχία ή τις δυσκολίες στα στάδια αυτά, διαμορφώνονται οι επόμενες ενέργειες του εκπαιδευτικού, έως ότου διασφαλιστεί ότι όλοι οι μαθητές της ομάδας έχουν κατανοήσει την οργανωτική και αριθμητική δομή των μοτίβων (μια σειρά πάνω και μια σειρά κάτω, με την πάνω να έχει ένα τετράγωνο περισσότερο από την κάτω). Οι τρόποι αυτοί περιλαμβάνουν εκτός από τη λεκτική καθοδήγηση (για παράδειγμα με θέση κατάλληλων ερωτημάτων) και μια σειρά ρυθμικών δεικτικών κινήσεων από μέρους του εκπαιδευτικού (πάνω στα τετράγωνα ή/και κατά μήκος των σειρών). Στη συνέχεια, εφαρμόζουν σε επόμενα, αριθμητικά μεγαλύτερα, μοτίβα. Σε κάθε επόμενο στάδιο ενασχόλησης, επιτυγχάνεται ένα ολοένα μεγαλύτερο επίπεδο αφαίρεσης, με την καθοδήγηση και του εκπαιδευτικού, καθώς οι μαθητές αναφέρονται με πιο γενικούς χαρακτηρισμούς για το κάθε μοτίβο, αποστασιοποιώντας το από το «συγκεκριμένο» και ως προς το ότι δεν χρειάζεται να βοηθηθούν πλέον οπτικά από τα αρχικά μοτίβα. Το ανώτερο σημείο γενίκευσης επιτυγχάνεται στο τελευταίο στάδιο της δραστηριότητας (εφόσον ζητηθεί) κατά το οποίο οι μαθητές καλούνται να βρουν έναν τρόπο να υπολογίζουν τον αριθμό του συνόλου των στοιχείων σε οποιαδήποτε αριθμητικής σειράς μοτίβο τους ζητηθεί, κατά το $2n+1$, χωρίς όμως, ο στόχος να είναι η σωστή απόδοση της αλγεβρικής παράστασης ή η χρήση αγνώστου, αλλά η βαθύτερη κατανόηση της δομής των ακολουθιών και του τρόπου με τον οποίον επιτρέπουν τη γενίκευση σε οποιαδήποτε ακολουθία.

Η ίδια δομή αλγεβρικής ακολουθίας, παρουσιάζεται μέσω ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος, «The piggy bank problem», το οποίο ο Radford και οι συνεργάτες του αξιοποιούν για να παρακολουθήσουν (και να διαμορφώσουν) τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης μιας 4^{ης} τάξης δημοτικού, με βάση της αρχές της θεωρίας του πολιτισμικού ιστορικού πλαισίου και της θεωρίας της εξαντικειμενίκευσης (Radford, 2013a). Το πρόβλημα αφορά σε έναν κουμπαρά που λαμβάνει ως δώρο ένα παιδί με το πρώτο δολάριο μέσα. Το παιδί αυτό αποταμιεύει δυο δολάρια την εβδομάδα. Στο τέλος της πρώτης έχει αποταμιεύσει συνολικά τρία δολάρια, τη δεύτερη

πέντε και ούτω καθεξής. Ζητούμενο είναι να βρουν οι μαθητές το ποσό της αποταμίευσης μέχρι και την 5^η εβδομάδα, και έπειτα για την 10^η, 15^η και 25^η. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε μικρές ομάδες. Τα υλικά που τους δόθηκαν ήταν μάρκες δυο χρωμάτων (κόκκινες και μπλε) και 5 πλαστικά κυπελάκια, ένα για κάθε εβδομάδα, από την πρώτη μέχρι την πέμπτη (με σημειωμένο πάνω τους τον αριθμό της αντίστοιχης εβδομάδας). Οι μαθητές προχώρησαν σε μια αναπαράσταση της πραγματικής κατάστασης, τοποθετώντας τα χρήματα-μάρκες στον κάθε κουμπάρα-ποτήρι, γεγονός που δεν απέδωσε στην εύρεση του χρηματικού ποσού σε κάποιες από τις επόμενες εβδομάδες, καθώς έλειπε η κατάλληλη οργάνωση των υλικών, που θα τους έφερνε αντιμέτωπους με την κατανόηση της λογικής της αλγεβρικής ακολουθίας. Έτσι, ο ερευνητής, παρενέβη σε μια από τις ομάδες μαθητών που βρέθηκε στο αδιέξοδο αυτό, και τους πρότεινε να τοποθετήσουν τις μάρκες τους μπροστά από κάθε ποτήρι και να επιλέξουν το μπλε χρώμα για να δηλώσουν το πρώτο δολάριο που υπήρχε ήδη στον κουμπάρα. Ο ερευνητής λειτούργησε εδώ καταλυτικά, ως μεσολαβητής, καθώς με την κατάλληλη καθοδήγηση του δημιουργήθηκαν ευνοϊκότερες συνθήκες για τη σύνθεση των υλικών κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να διευκολυνθεί ή/και να οδηγηθεί η εστίαση της προσοχής των μαθητών σε εκείνα τα σημεία που φέρουν την γενική γνώση της μαθηματικής έννοιας που αποτελεί τον απώτερο στόχο της συγκεκριμένης δραστηριότητας. Η νέα διάταξη των υλικών στο χώρο, με τη μπλε μάρκα πρώτη και τις κόκκινες ανά δυο σε κάθετη σειρά κάτω από την μπλε, τοποθετημένες αντίστοιχα μπροστά από το ποτήρι της κάθε εβδομάδας, αφενός προσφέρει τη δυνατότητα της διάκρισης ανάμεσα στο αρχικό ένα (μπλε) και στα υπόλοιπα προστιθέμενα (κόκκινα), καθώς και την ομαδοποίηση ανά 2, δηλαδή τον διπλασιασμό, στοιχεία που εμφανίζονται σε κάθε εβδομαδιαία αποταμίευση, δηλαδή σε κάθε αριθμητική ακολουθία, αφετέρου οδηγεί σταδιακά στην «απεξάρτηση» από τη συγκεκριμένη κατάσταση και τη μετάβαση σε ένα πιο αφαιρετικό επίπεδο χειρισμού (λεκτικού και πρακτικού) των υλικών, όπου η έμφαση δίνεται στη αριθμητική δομή της σύνθεσής τους. Στη συνέχεια της δραστηριοποίησής τους με το συγκεκριμένο πρόβλημα, οι μαθητές της ίδιας ομάδας ανέπτυξαν μια στρατηγική για να βρουν το αποτέλεσμα της 10^{ης} εβδομάδας, κατά την οποία διπλασίασαν τις αποταμιεύσεις της 5^{ης} εβδομάδας αφαιρώντας τη μια μπλε μάρκα. Αν και σωστή από μαθηματικής απόψεως, η στρατηγική αυτή, δε φέρει τη λογική της αλγεβρικής αριθμητικής ακολουθίας, που αποτελεί τον στόχο της δραστηριότητας ($n * 2 + 1$), δηλώνοντας ότι ακόμα δεν έχει γίνει αντιληπτή από τους μαθητές. Γι' αυτό και η εκπαιδευτικός επιστρέφει στην

προηγούμενη ακολουθία της 5^{ης} εβδομάδας και προσπαθεί με τη θέση κατάλληλων ερωτήσεων και με τη υπόδειξη συγκεκριμένων υλικών (πχ. δείχνει μόνο τη μια σειρά από τις κόκκινες μάρκες), να οδηγήσει τους μαθητές στην συνειδητοποίηση της σκέψης που τους οδήγησε να βρουν το αποτέλεσμα της και στη συνέχεια να εφαρμόσουν τον ίδιο αυτό τρόπο, ώστε να βρουν το αποτέλεσμα της 10^{ης} εβδομάδας. Κατά τη διαδικασία αυτή δόθηκε έμφαση στο είδος των ερωτήσεων και γενικά των ερεθισμάτων που παρέχονται από την/τον εκπαιδευτικό και την διαμεσολαβητική επίδρασή τους στους μαθητές, όπως αυτή εκδηλώνεται σωματικά, λεκτικά και πρακτικά, η οποία δεν περιορίζεται στη γνωστική της διάσταση. Η θεωρία, δηλαδή, όπως επισημάνθηκε ήδη, ενδιαφέρεται για το σύνολο των εκφάνσεων της συμπεριφοράς και της αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων κατά την κοινή δραστηριοποίησή τους στο πλαίσιο των διαδικασιών της διδασκαλίας και της μάθησης, οι οποίες εμπλέκουν «γνωστικές, συναισθηματικές, ηθικές» (Radford, 2013a, p.30) κοινωνικές και πολιτισμικές συνιστώσες που δεν μπορούν να αγνοηθούν, καθώς η μάθηση θεωρείται διαδικασία κοινωνικά και πολιτισμικά προσδιορισμένη. Έτσι, μια λέξη, ο τόνος της φωνής αλλά και η στάση του σώματος, λειτουργούν ενθαρρυντικά, τονώνοντας το αυτοσυναίσθημα του μαθητή και ταυτόχρονα καθοδηγώντας τον στην μετατόπιση της προσοχής του στα κατάλληλα στοιχεία που θα του επιτρέψουν να αντιληφθεί τη δομή (της γνώσης) που εμπεριέχουν οι συγκεκριμένες δραστηριότητες. Κατά τη συγκεκριμένη διδασκαλία έγινε μια διακοπή των διαδικασιών των ομάδων, ώστε να πραγματοποιηθεί μια γενική συζήτηση σε όλη την τάξη, όπου εκτέθηκαν οι σκέψεις των ομάδων και των μαθητών που δυσκολεύτηκαν κατά την ομαδική δραστηριότητα, ώστε να διασφαλιστεί η κατανόηση των στοιχείων της συγκεκριμένης μαθηματικής δομής-ακολουθίας.

Την επόμενη ημέρα, δόθηκε στους μαθητές της τάξης αυτής ένα πρόβλημα ίδιας μορφής, με τη διαφορά ότι το αρχικό ποσό ήταν 6 δολάρια και ότι αποταμιευόταν το ποσό των 3 δολαρίων κάθε εβδομάδα ($3n+6$). Όταν ζητήθηκε το ποσό της αποταμίευσης για την δέκατη εβδομάδα, διαπιστώθηκε ότι ο μαθητής της ομάδας που είχε δυσκολευτεί την προηγούμενη μέρα, ήταν σε θέση να ακολουθήσει τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης κατά την αναζήτηση του αποτελέσματος. Μάλιστα, μια εβδομάδα αργότερα, ήταν σε θέση να γενικεύσει «την πολιτισμικά κωδικοποιημένη μορφή γνώσης» (Radford, 2013, p.37) σε νέες καταστάσεις, δηλαδή, σε μια σχηματικά αποτυπωμένη αλγεβρική αριθμητική ακολουθία της μορφής $4n+1$ (ένας σταυρός από 5

τετράγωνα στο πρώτο σχήμα, 9 στο δεύτερο, 13 στο τρίτο κ.ο.κ) για την οποία μάλιστα πρότεινε έναν τρόπο για την εύρεση οποιουδήποτε όρου (ακολουθίας) με τη χρήση κενής γραμμής στη θέση του αγνώστου και κενής γραμμής στη θέση της απάντησης, με τη συνοδεία εξήγησης για το ρόλο του κάθε στοιχείου της δομής που κατασκεύασε και μέσω της οποίας αποδεικνύεται ότι ενσωμάτωσε τη (γενική) γνώση στην προσωπική του αντίληψη, διαμορφώνοντας τον τρόπο που αντιλαμβάνεται, σκέφτεται και δρα ως προς τις αλγεβρικές ακολουθίες και επιδρώντας ακόμα και στην ίδια την προσωπική του γνώση, καθώς, όπως είδαμε, την επέκτεινε (γενίκευσε) με τον δικό του τρόπο.

Τα σημειωτικά μέσα αναπαράστασης στα μαθηματικά

Η γλώσσα αποτελεί μια από τις βασικές σημειωτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιείται (σχεδόν αναπόφευκτα) κατά τον χειρισμό των μαθηματικών αντικειμένων και μπορεί να πάρει είτε τη μορφή της φυσικής γλώσσας (προφορικής ή γραπτής), είτε της συμβολικής μαθηματικής γλώσσας (πχ. στα θεωρήματα, στην άλγεβρα) (Duval, 2006). Στην περίπτωση των γραπτών μαθηματικών προβλημάτων καθίσταται αυτονόητη η χρήση του γραπτού λόγου για τη σύνταξη των κειμένων και η ανάγκη της ανάγνωσης των κειμένων αυτών. Επομένως, ένα μέρος της δυσκολίας των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων, συνδέεται με τις δυσκολίες κατά την αποκωδικοποίηση των μαθηματικών κειμένων, όπου συνυπάρχουν δυο ποιοτικά διαφορετικοί κώδικες: ένας της φυσικής γλώσσας και ένας των μαθητικών συμβόλων (Γαγάτσης, Ηλία, Καταλάνου, Μοδέστου & Ιωάννου, 2006). Η «αλγοριθμική» μαθηματική γλώσσα είναι μια αυστηρά δομημένη κοινωνική κατασκευή, καθώς τα σημεία που την αναπαριστούν δεν έχουν αξία εκτός του συγκεκριμένου πλαισίου αναφοράς τους, όπου και αποκτούν τη συγκεκριμένη σημασία τους σε σχέση με τα άλλα σημεία (Duval, 2006). Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, ο Duval (2002), αναφέρει ότι πραγματοποιούνται διαδικασίες (τουλάχιστον) διπλής σημείωσης: μια της φυσικής γλώσσας κατά την επεξήγηση και μια συμβολική ή/και διαγραμματική κατά την επεξεργασία (Duval, 2006).

Σύμφωνα με την Presmeg (2016) συχνότερη στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους είναι, πλέον, η χρήση οπτικών σημει(οφόρων) και ιδιαίτερα της εικόνας. Η έμφαση που έχει δοθεί στις εικόνες φανερώνεται μεταξύ άλλων στην εισαγωγή πολυάριθμων αλλά και ποικίλων εικονικών αναπαραστάσεων στα νέα σχολικά εγχειρίδια (Bezemer

& Kress, 2010). Οι εικονικές αυτές αναπαραστάσεις μπορεί να είναι διαγράμματα (εικονογράμματα ή ραμβδογράμματα), χάρτες (διαδρομής), σχέδια γεωμετρικών σχημάτων, τάγκραμ, αποτύπωση μοτίβου, αριθμητική γραμμή και πολλές άλλες. Ως προς τη λειτουργία που επιτελούν κατά τη διαδικασία της επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων, οι εικόνες διακρίνονται από τους Ηλία και Γαγάτση (2004, όπως αναφέρεται στο Γαγάτση κ.ά, 2006) σε διακοσμητικές, βοηθητικές – αναπαραστατικές, βοηθητικές - οργανωτικές και πληροφοριακές. Οι πληροφοριακές εικόνες απαιτούνται τόσο για την επίλυση του προβλήματος, όσο και για την επίτευξη της επικοινωνίας μεταξύ των συμμετεχόντων στις διαδικασίες επίλυσης συνοδεύοντας το λόγο τους, ενώ οι οργανωτικές και οι αναπαραστατικές φαίνεται να λειτουργούν συμπληρωματικά στον λόγο, χωρίς να είναι απαραίτητες στην επίλυση (Γαγάτση κ.ά., 2006).

Καθώς, το εικονικό σημείο «μπορεί να διαθέτει οπτικές (ορατές), οντολογικές (υποτιθέμενες) και συμβατικοποιημένες ιδιότητες του αντικειμένου» (Eco, 1994, σελ.316), τονίζεται ιδιαίτερα ο ρόλος των κοινωνικών συμβάσεων και του συστήματος «προσδοκιών» στην ταυτοποίηση συγκεκριμένων διακριτικών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων κατά την ερμηνεία μιας εικόνας. Ο Duval (2006), υποστηρίζει ότι η γλώσσα μπορεί να κατευθύνει μέσω της εκφώνησης των προβλημάτων την ερμηνεία ακόμα και της εικονικής αναπαράστασης ενός μαθηματικού αντικειμένου. Συνεπώς, η ερμηνεία της εικόνας στο πλαίσιο των μαθηματικών επηρεάζεται από τις μαθηματικές και διδακτικές συμβάσεις εντός του πολιτισμικού πλαισίου όπου αυτή εμφανίζεται. Ωστόσο, οι ίδιοι παράγοντες επηρεάζουν και την παραγωγή των εικονικών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, οι Kress & Van Leeuwen (2010) υποστηρίζουν ότι κατά τη δημιουργία εικονικών σημείων, ο παραγωγός του σημείου με βάση την ψυχολογία του και το ενδιαφέρον του τη δεδομένη στιγμή επιλέγει και απεικονίζει εκείνες τις πλευρές του αντικειμένου που του φαίνονται σημαντικές τη δεδομένη στιγμή και στο συγκεκριμένο πλαίσιο. Εδώ το πλαίσιο είναι μαθηματικό, και αυτό ενδέχεται να περιορίζει αρκετά την παραγωγή σημείων, ακόμα και των εικονικών. Ωστόσο, φαίνεται ότι οι ψυχολογικές και ατομικές αυτές παράμετροι, επηρεάζουν και συνδιαμορφώνουν, ως έναν βαθμό, τόσο την παραγωγή, όσο και την ερμηνεία των σημείων. Αυτό συμφωνεί με τη διατύπωση του Goldin (2000), ο οποίος ορίζει αναφερόμενος συγκεκριμένα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ότι αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μια αλληλεπίδραση του ατόμου ανάμεσα στα εικονικά

συστήματα, στα επίσημα συστήματα των μαθηματικών θεωρημάτων, τα συστήματα σχεδίασης, κινητοποίησης και ελέγχου του ατόμου αλλά και του συστήματος των συναισθημάτων.

Επομένως, πέρα από το αυστηρά δομημένο λεκτικό- συντακτικό σύστημα προσέγγισης των μαθηματικών, αφήνεται χώρος για παραμέτρους που έρχονται να καλύψουν οι σύγχρονες κοινωνικές σημειωτικές θεωρίες, με την «μετατόπιση» του ενδιαφέροντος στις διαδικασίες που πραγματώνονται κατά την κοινωνική αλληλεπίδραση των μελών στο πλαίσιο της ομαδικής εργασίας με άλλους. Η αλληλεπίδραση αυτή δεν περιορίζεται, όπως είναι φυσικό, στα κλασικά (μαθηματικά) αναπαραστατικά συστήματα, αλλά διευρύνεται, ώστε να συμπεριλάβει όλο το εύρος (κατά το δυνατόν) της ανθρώπινης δραστηριότητας, που μπορεί να συμβάλει στις διαδικασίες μάθησης. Έτσι, κεντρικό ρόλο στις κοινωνικές σημειωτικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας και της μάθησης αποκτά ο χειρισμός αντικειμένων και εργαλείων αλλά και το ίδιο το σώμα, οι εκφράσεις, το βλέμμα, και κυρίως, οι κινήσεις που πραγματοποιούνται με τα άκρα, ως αναπόσπαστο μέρος της συνδιαλλαγής με άλλους κατά την κοινή ενασχόληση με ένα (γνωστικό ή πραγματικό) αντικείμενο.

Οι κινήσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Ιδιαίτερη αξία στις κοινωνικές σημειωτικές θεωρίες τόσο του Arzarello, όσο και του Radford έχει λάβει, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο ρόλος του σώματος, με έμφαση στις κινήσεις που πραγματοποιούνται με τα χέρια (χαρακτηρίζονται *gestures*). Οι κινήσεις του σώματος και κυρίως των χεριών αποτελούν έναν από τους παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία και προάγουν τη μάθηση. Μπορούν να διαμορφώσουν το επικοινωνιακό πλαίσιο της διδασκαλίας αλλά και τα ίδια τα γνωστικά σχήματα των μαθητών (Goldin-Meadow & Wagner, 2005).

Οι κινήσεις των χεριών σχετίζονται με τη μείωση του γνωστικού φορτίου της εργαζόμενης μνήμης, λειτουργώντας ως ένα εύκολα προσβάσιμο μέσο και «ως μια επιπλέον γνωστική πηγή» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.228) για την επεξεργασία ορισμένων πληροφοριών. Έτσι, οι κινήσεις απελευθερώνουν τη μνήμη και διευρύνουν τη δυναμική της στην επεξεργασία των πληροφοριών και την αποτελεσματικότητά της στη μάθηση (Cook & Goldin-Meadow, 2006). Επιπλέον, έρευνες έχουν καταδείξει ότι «όταν κανείς εκτελεί μια ενέργεια ενδυναμώνεται η μνήμη του σχετικά με την ενέργεια

αυτή» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.229) και κατά συνέπεια, η συνοδεία του λόγου μας από κινήσεις των χεριών βοηθά στην καλύτερη απομνημόνευση των νοητικών μας αναπαραστάσεων, διευκολύνοντας τη μάθηση. Αυτό φαίνεται να έχει ισχύ και αναφορικά με τον χειρισμό απτικών υλικών και εργαλείων στο πλαίσιο εκτέλεσης δραστηριοτήτων (hands-on activities). Έτσι, η αλληλεπίδραση μεταξύ των κινήσεων των χεριών και των αντικειμένων μπορεί να συνδράμει στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης (Francaviglia & Servidio, 2011).

Σύμφωνα με τον McNeill (1992) η χρήση των χειρονομιών ενεργοποιεί την επεξεργασία σε εικονικό επίπεδο. «Η παραγωγή κινήσεων είναι πιθανό να ενθαρρύνει του ομιλητές να σχηματίσουν εικονικές αναπαραστάσεις στις οποίες, κατόπιν, μπορούν να έχουν πρόσβαση» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.229), μέσω των νοερών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, η έκθεση σε κινήσεις και η παραγωγή τους, συνδράμουν στην καλύτερη κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των φυσικών αντικειμένων και μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία ακριβέστερων και περισσότερο ανεπτυγμένων νοητικών μοντέλων αναπαράστασης της πραγματικότητας (Cook & Goldin-Meadow, 2006).

Οι κινήσεις των χεριών αποτελούν σύμβολα, που φέρουν δικά τους νοήματα, ποιοτικά διαφορετικά από εκείνα της ομιλούσας γλώσσας (McNeill, 1992). Οι κινήσεις εμφανίζονται ως «σωματοποιημένες αναπαραστάσεις» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.228) καθώς το σώμα και συγκεκριμένα τα χέρια «μετατρέπονται» σε ένα ξεχωριστό σημειοφόρο και με τη μορφή που λαμβάνουν κάθε φορά, την κίνηση και τη θέση του στον χώρο, δημιουργούν συμβολικές αναπαραστάσεις (McNeill, 1992).

Ο McNeill κατηγοριοποίησε τις κινήσεις των χεριών ανάλογα με την σημειωτική τους λειτουργία σε εικονικές, μεταφορικές, δεικτικές και σε ρυθμικές⁴, (McNeill, 1992). Η χειρονομία που χαρακτηρίζεται εικονική, πρέπει να παραπέμπει άμεσα στην οπτική μορφή (των φυσικών χαρακτηριστικών) του αναπαριστώμενου γεγονότος ή αντικειμένου, κατά τον τρόπο που στο εικονικό σημείο του Peirce «το σημαίνον μοιάζει οπτικά ή μιμείται το σημαινόμενο... όντας όμοιο σε κάποιες από τις ιδιότητές του» (Chandler, 1999, σελ.11), ενώ στις μεταφορικές κινήσεις, λόγω του ότι αναπαριστούν μια αφηρημένη έννοια, τα χέρια λαμβάνουν μια μορφή που συνδέεται με

⁴ Στην κατηγοριοποίηση του McNeill (1992) αναφέρονται ως «beats». Γι' αυτές επιλέχθηκε η μετάφραση «ρυθμικές» που αποτελεί και την ακριβή ονομασία «rhythmic» που αποδόθηκε από τους Ekman & Friesen (1969) για την ίδια κατηγορία κινήσεων (McNeill, 1992).

το αναφερόμενό της, όχι λόγω κάποιας οπτικής ομοιότητας με αυτό, αλλά χάρη στις ενδείξεις που παρέχονται μέσω του προφορικού λόγου. Τόσο οι εικονικές όσο και οι μεταφορικές κινήσεις είναι εικονιστικές, δηλαδή, δημιουργούν αναπαραστάσεις με τη μορφή εικόνας (αποτελούν εικονικές αναπαραστάσεις) αλλά διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το πόσο κινητρωμένες είναι. Από την άλλη, οι δεικτικές κινήσεις πραγματοποιούνται με τον αντίχειρα, αλλά και με μέρη του σώματος ή αντικείμενα που μπορεί να κρατάει κανείς στο χέρι του, αλλά συνήθως δείχνουν προς ένα υποτιθέμενο αντικείμενο, μέρος ή γεγονός, που για να το αντιληφθεί κανείς θα πρέπει να έχει παρακολουθήσει τον λόγο του ομιλητή. Οι ρυθμικές κινήσεις, πραγματοποιούνται αυθόρμητα κατά την ομιλία, χωρίς να φέρουν νοηματικό περιεχόμενο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε είδος κίνησης τοποθετείται σε διαφορετικό σημείο ως προς το σώμα του ομιλητή, με τις εικονικές να καταλαμβάνουν κυρίως το κεντρικό σημείο (στο στήθος) του ομιλητή, με τις μεταφορικές να πραγματοποιούνται λίγο χαμηλότερα, τις δεικτικές να πραγματώνεται περιφερειακά, γύρω από το κεντρικό σημείο του ομιλητή, ενώ οι ρυθμικές ποικίλουν εντελώς ανάλογα με τον ομιλητή (McNeill, 1992). Φαίνεται δηλαδή, ότι όσο στενότερα συνδεδεμένες είναι οι κινήσεις με την απόδοση του νοηματικού περιεχομένου, τόσο κεντρικότερος είναι και ο χώρος που καταλαμβάνουν ως προς το σώμα του ομιλητή.

Σύμφωνα με τους Ekman & Friesen (1969) οι χειρονομίες μπορεί να φέρουν «συμβατική μορφή και νόημα», δηλαδή να αποτελούν «εμβλήματα» (όπως αναφέρεται στο Goldin-Meadow & Wagner, 2005, p.234), όπως για παράδειγμα το έμβλημα της νίκης, οπότε είναι δυνατή η άμεση αντιστοίχιση με λέξεις ή φράσεις, καθιστώντας τα κοινώς αποδεκτά και ευρέως αναγνωρίσιμα (αν και εξαρτώμενα από το πολιτισμικό πλαίσιο εμφάνισής τους). Για τις υπόλοιπες χειρονομίες όμως⁵, είναι απαραίτητος ο ρόλος της γλώσσας στην ερμηνεία τους, γι' αυτό εμφανίζονται στενά συνδεδεμένες με τον προφορικό λόγο των ομιλητών (McNeill, 1992; Goldin-Meadow, 2003 όπως αναφέρεται στο Cook & Goldin-Meadow, 2006). Οι χειρονομίες αυτές, που συνοδεύουν το λόγο, αποκαλούνται από τους Ekman & Friesen (1969) «διευκρινιστικές» (illustrators) ως προς το περιεχόμενο του προφορικού λόγου, και διακρίνονται από τα εμβλήματα, καθώς «δεν αποτελούν μέρος ενός κωδικοποιημένου

⁵ Εννοούνται όσες κινήσεις φέρουν νόημα (μεταφέρουν μια πληροφορία) και δεν είναι ρυθμιστικές της συζήτησης, προσαρμογής του ατόμου στο περιβάλλον του ή δεικτικές ως προς ένα αντικείμενο.

συστήματος» (Goldin-Meadow & Wagner, 2005, p.234) που να μπορούν να σταθούν νοηματικά αφ' εαυτών.

Ωστόσο, σε αντίθεση με τον λόγο που υπόκειται σε κανόνες και περιορίζεται από πολλές γλωσσικές συμβάσεις, η εκτέλεση των κινήσεων επιτρέπει με μεγαλύτερη ελευθερία και ευελιξία την έκφραση στοιχείων της πληροφορίας που είναι δύσκολο να αποδοθούν ολιστικά μέσω της γλώσσας, και μάλιστα εκείνων των στοιχείων που θεωρούνται σημαντικά ως προς την απόδοση του νοηματικού περιεχομένου της από τον κάθε ομιλητή, σύμφωνα με τα ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά του (McNeill, 1992). Έτσι, ο λόγος και η κίνηση αποδίδουν τις ίδιες πληροφορίες με ποιοτικά διαφορετικό τρόπο αλλά και διαφορετικές πλευρές της ίδιας πληροφορίας που θεωρούνται σχετικές με αυτήν, αλληλοσυμπληρώνοντάς την και ολοκληρώνοντας από κοινού το νόημά της. Υπάρχει, όμως και η περίπτωση, της αναντιστοιχίας μεταξύ λόγου και χειρονομιών, όπου οι πληροφορίες που παρέχονται μέσω των κινήσεων των χεριών δεν εμπεριέχονται στον λόγο (οι κινήσεις αυτές μπορεί να αφορούν σε μια στρατηγική επίλυσης στην περίπτωση των μαθηματικών) και αυτή «η ταυτόχρονη ενεργοποίηση δυο ιδεών» μπορεί να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση (αποσταθεροποίηση) και ως εκ τούτου να επιφέρει (ευκολότερα) τη γνωστική αλλαγή (Goldin-Meadow & Wagner, 2005, p.236). Γι' αυτό, οι μαθητές που παρουσιάζουν αναντιστοιχία μεταξύ λόγου-χειρονομιών, ανεξάρτητα από την ορθότητα ή μη των εκφραζόμενων ιδεών τους, έχουν περισσότερες πιθανότητες να ωφεληθούν από την διδασκαλία σε σχέση με τους μαθητές που ο λόγος τους και οι χειρονομίες βρίσκονται σε συμφωνία. Μάλιστα, ακόμα και στην περίπτωση που ο λόγος του εκπαιδευτικού έρχεται σε αναντιστοιχία με τις χειρονομίες του, οι μαθητές είναι δυνατόν να αντιληφθούν τις διαφορετικές πληροφορίες και να ωφεληθούν (υπό τις κατάλληλες συνθήκες) ακόμα και έμμεσα (δηλαδή, ως ακροατές), αρκεί να υπάρχει ένα ρεαλιστικό και αυθεντικό πλαίσιο επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης (Goldin-Meadow & Wagner, 2005).

Ως εκ τούτου, θεωρείται ότι το σώμα και οι κινήσεις επιτρέπουν την πρόσβαση στην σκέψη του ομιλητή, εφόσον παρέχουν πληροφορίες για τη γνώση ή την κατανόηση του θέματος που δεν μπορούν να εκφραστούν λεκτικά (McNeill, 1992) ή δεν έχουν συνειδητοποιηθεί ακόμα. Κατά τη διδασκαλία, αυτή η έμμεσα αποκτημένη (μέσω της ερμηνείας των χειρονομιών) κατανόηση της παρούσας γνωστικής κατάστασης των

μαθητών, επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να αλλάξει την επικοινωνία του μαζί τους, δημιουργώντας το κατάλληλο εκπαιδευτικό περιβάλλον και προσαρμόζοντας τις διδακτικές παρεμβάσεις (τις παρεχόμενες πληροφορίες/οδηγίες) για να προωθήσει την γνωστική τους ανάπτυξη, συνδράμοντας σε αυτό που ο Vygotsky αποκαλεί «ζώνη επικείμενης ανάπτυξης» (Goldin-Meadow & Wagner, 2005).

Συγκεκριμένα στην περίπτωση των Μαθηματικών, οι πληροφορίες που μεταφέρονται μέσω των χειρονομιών, λόγω της οπτικοχωρικής τους φύσης, ενδέχεται να τονίζουν παραμέτρους της προβληματικής κατάστασης διαφορετικές από εκείνες που μπορεί να κάνει φανερός ο προφορικός λόγος (Cook & Goldin-Meadow, 2006). Επίσης, ενώ ο λόγος μπορεί να μεταβάλλεται αρκετά, (για παράδειγμα στις διατυπώσεις των προβλημάτων), οι κινήσεις των χεριών που τον συνοδεύουν και σχετίζονται με μια συγκεκριμένη στρατηγική, παραμένουν (αρκετά) σταθερές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και η ομοιομορφία αυτή των κινήσεων βοηθά τους μαθητές «να μη χαθούν στις λεπτομέρειες κάθε συγκεκριμένου προβλήματος-δραστηριότητας» αλλά να «επικεντρωθούν στα βασικά στοιχεία της διδασκαλίας» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.228), δηλαδή στην κατανόηση του κοινού τρόπου/στρατηγικής επίλυσης.

Δεικτικές κινήσεις μπορεί να πραγματοποιούνται και από τον δάσκαλο ως προς ένα αντικείμενο, οπότε λειτουργούν ως ενδείκτες και οδηγούν στην εστίαση της προσοχής των μαθητών σε εκείνες τις πλευρές του αντικειμένου ή στη σχέση ανάμεσα στα δομικά χαρακτηριστικά του, ώστε να προωθηθεί η εξέλιξη των διαδικασιών μάθησης, όπως συνέβη κατά την παρέμβαση της δασκάλας, στο παράδειγμα που δίνει ο Radford και οι συνεργάτες του, κατά την ομαδική εργασία των μαθητών στο πλαίσιο ανάπτυξης και διερεύνησης της δομής ενός μοτίβου. Μέσω της τοποθέτησης και την κίνησης των δακτύλων της σε συγκεκριμένα σημεία της δομής του μοτίβου, σε συνδυασμό με τον ρυθμό της κίνησης και άλλα μέσα εξαντικειμενίκευσης (όπως ο λόγος της), κατόρθωσε να «εξοικειώσει το μάτι» των μαθητών, κατά τον χαρακτηρισμό του Radford (2013c) και να τους οδηγήσει στη συνειδητοποίηση της αριθμητικής ακολουθίας σύμφωνα με την οποία αναπτυσσόταν το μοτίβο αυτό (Presmeg et. al., 2016; Radford 2013b; Radford, 2013c). Κατά συνέπεια, πέρα από, καθεαυτή, την παροχή πληροφοριών, οι κινήσεις μπορούν να στρέψουν την προσοχή των μαθητών στην πληροφορία αυτή ή στα επιμέρους στοιχεία της που θα οδηγήσουν στην μαθηματική επίλυση.

Οι κινήσεις των χεριών φαίνεται ότι ευνοούν όσους από τους μαθητές, βρίσκονται σε

τέτοια γνωστική κατάσταση, ώστε η στρατηγική που υπονοείται μέσω της κίνησης να μπορεί να γίνει αντιληπτή από αυτούς. Πιθανόν, δηλαδή, η πραγματοποίηση των κινήσεων των χεριών «να αντικατοπτρίζει την ετοιμότητά τους να μάθουν, παρά να προκαλεί την ίδια τη μάθηση» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.227) γι' αυτό και οι κινήσεις παράγονται από ορισμένους μαθητές χωρίς δεν τις έχουν δει προηγουμένως, αλλά από την άλλη δεν αναπαράγονται από όλους όσοι την έχουν δει από τον εκπαιδευτικό ή παράγονται κινήσεις άλλου είδους στρατηγικής (Cook & Goldin-Meadow, 2006). Ωστόσο, δεν είναι αφ' εαυτής η μίμηση της συγκεκριμένης συμπεριφοράς, δηλαδή της κίνησης των χεριών, χάρη στην οποία οδηγείται κανείς στη σωστή μαθηματική απάντηση. «Η αντιγραφή της κίνησης των χεριών...μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μόνο εφόσον αυτοί κατανοήσουν τι αναπαριστούν οι κινήσεις αυτές- δηλαδή τι σημαίνουν οι χειρονομίες τις οποίες μιμούνται» (Cook & Goldin-Meadow, 2006, p.226), δεδομένου του ότι στην περίπτωση των Μαθηματικών οι κινήσεις, κατά βάση, συνδέονται με ορισμένες στρατηγικές επίλυσης.

Ένας εκπαιδευτικός που αξιοποιεί τις κινήσεις των χεριών του κατά τη διδασκαλία, ενθαρρύνει την (ανα)παραγωγή κινήσεων από τους μαθητές του, συγκριτικά με μια διδασκαλία με χρήση μόνο προφορικού λόγου (Cook & Goldin-Meadow, 2006). Τα αποτελέσματα της έρευνας των Cook & Goldin-Meadow (2006) έδειξαν ότι η πραγματοποίηση χειρονομιών από τους μαθητές δεν επηρεάζεται από την παρότρυνση από μέρους του εκπαιδευτικού να τις εφαρμόσουν, αλλά ότι η απλή έκθεση σε αυτές στο πλαίσιο της διδασκαλίας αρκεί για να εγείρει την αυθόρμητη χρήση τους. Μάλιστα, οι μαθητές αναπτύσσουν σε μεγαλύτερο ποσοστό κινήσεις ίδιου τύπου με αυτές που έχουν δει κατά τη διδασκαλία. Επίσης, ενώ οι χειρονομίες κατά τη διδασκαλία που έφεραν τη συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης επηρέασαν τους μαθητές ως προς τον τη μορφή των εκτελούμενων χειρονομιών, άφησαν ανεπηρέαστη την εμφάνιση λεκτικών στοιχείων ως προς τη στρατηγική.

Επιπλέον, στην έρευνα των Cook & Goldin-Meadow (2006) αποδείχτηκε ότι οι μαθητές που κατά τη διδασκαλία εξέφρασαν με προφορικό λόγο και με κινήσεις των χεριών τη στρατηγική που χρησιμοποίησαν για να επιλύσουν (εξίσωση της μορφής $4 + 6 + 3 = 4 + _$) (είτε ο εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε χειρονομίες κατά τη δική του προφορική εξήγηση είτε όχι) έδωσαν με μικρή διαφορά περισσότερες σωστές

απαντήσεις κατά τη διδασκαλία συγκριτικά με όσους χρησιμοποίησαν μόνο το λόγο, αλλά είχαν με στατιστικά σημαντική διαφορά περισσότερες σωστές λύσεις από εκείνους που δεν χρησιμοποίησαν ούτε λόγο, ούτε χειρονομίες. Επιπλέον, οι μαθητές που κατά τη διδασκαλία χρησιμοποίησαν λόγο και κινήσεις μαζί για να εξηγήσουν τις διαδικασίες που ακολούθησαν, ήταν σε θέση να διατηρήσουν τη μάθησή τους σε ίδιου τύπου δοκιμασίες σε τεστ που τους δόθηκαν μετά τη διδασκαλία, δίνοντας στατιστικά σημαντικό ποσοστό περισσότερων σωστών απαντήσεων συγκριτικά με όσους κατά τη διδασκαλία αξιοποίησαν μόνο το λόγο και με εκείνους που δεν χρησιμοποίησαν κανέναν από τους δυο τρόπους. Ως προς την ικανότητα τους να μεταφέρουν τη γνώση τους (γενίκευση) σε νέας μορφής δραστηριότητες, όπως φαίνεται βάσει του ποσοστού των σωστών τους απαντήσεων στη σχετική δοκιμασία μετά τη διδασκαλία, ευνοημένοι εμφανίζονται και πάλι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν και τα χέρια τους κατά την επίλυση. Ωστόσο η διαφορά μεταξύ εκείνων που χρησιμοποίησαν και κινήσεις με τον λόγο τους και όσων χρησιμοποίησαν μόνο λόγο, ήταν στατιστικά μη σημαντική (με εξαίρεση τη δοκιμασία διατήρησης της γνώσης) αν και περισσότερες ήταν πάντα οι σωστές απαντήσεις της πρώτης ομάδας, με αποτέλεσμα να καθίσταται δύσκολη η απόδοση της θετικής απόκρισης αποκλειστικά στη χρήση των κινήσεων, εφόσον μάλιστα αυτές δεν εμφανίζονται χωρίς τη συνοδεία του λόγου.

Από όλα τα παραπάνω, γίνονται φανερά τα πολλαπλά οφέλη που προσδίδει η αξιοποίηση των κινήσεων στο σύνολο των διδακτικών και μαθησιακών δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα κατά τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων στην τάξη και αιτιολογεί το ενδιαφέρον και την προσοχή που έχει δοθεί σε αυτές από τις σύγχρονες κοινωνικές σημειωτικές θεωρίες.

1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Τα μαθηματικά προβλήματα

Πρόβλημα, κατά τον Duncker (1945, όπως αναφέρεται στο Mayer & Hegarty, 1996) υφίσταται όταν υπάρχει ένας στόχος, χωρίς να είναι (εκ των προτέρων) γνωστός στο άτομο ο τρόπος μέσω του οποίου μπορεί να τον επιτύχει. Κατ' επέκταση, μαθηματικό πρόβλημα υφίσταται, όποτε απαιτούνται μαθηματικές (αριθμητικές ή αλγοριθμικές) διαδικασίες για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος (Mayer & Hegarty, 1996). Τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούν «προφορικές, γραπτές, εικονιστικές ή μεικτές παρουσιάσεις καταστάσεων, σχέσεων ή δράσεων με ποσοτικά χαρακτηριστικά, οι

οποίες καταλήγουν σε ένα ή περισσότερα ζητούμενα» (Αγαλιώτης, 2013, σελ.27). Ωστόσο, εκείνα που φαίνεται να συγκεντρώνουν τη μεγαλύτερη προσοχή, τόσο σε επίπεδο ερευνητικό όσο και εκπαιδευτικής πολιτικής, είναι τα γραπτά μαθηματικά προβλήματα, δηλαδή εκείνα στα οποία οι σημαντικές πληροφορίες που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δίνονται μέσω γραπτών λέξεων με τη μορφή αφήγησης (Αγαλιώτης, 2013). Στην παρούσα εργασία, αυτά χαρακτηρίζονται και ως λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, ακολουθώντας τον αγγλικό όρο «word problems». Στη βιβλιογραφία απαντώνται και ως μαθηματικές ιστορίες (story problems) (Presmeg et al., 2016, p.27).

Τα γραπτά προβλήματα, ως ειδική μορφή κειμενικής αφήγησης, χαρακτηρίζονται από λιτή εκφραστική δομή, δηλαδή από φειδώ ως προς το λεξιλογικό πλούτο και από απουσία στοιχείων αισθητικής διάνθισης του λόγου, ενώ χαρακτηρίζονται από πυκνότητα νοημάτων, εφόσον στοχεύουν στην συντομότερη παροχή των απαραίτητων για την επίλυση του προβλήματος πληροφοριών, με αποτέλεσμα την συσσώρευση πολλαπλών (και πολλές φορές δυσνόητων, εκ πρώτης, για τους μαθητές) πληροφοριών σε μικρή έκταση κειμένου, όπου μάλιστα, συνδυάζονται γλωσσικές και αριθμητικές πληροφορίες, αυξάνοντας, έτσι, τις συνολικές γνωστικές απαιτήσεις για την επεξεργασία και την επίλυσή τους (Αγαλιώτης, 2013).

Η επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο της διδασκαλίας, θεωρείται «η ουσία των μαθηματικών» (Lappan & Briars, 1995, p.138, όπως αναφέρεται στο Van De Walle, 2005. σελ.55) καθώς σε αυτήν «ενσωματώνονται όλα τα δομικά στοιχεία των μαθηματικών» (Αγαλιώτης 2013, σελ.27), που οδηγούν στην κατανόηση και στη μάθηση, όπως η συλλογιστική σκέψη, οι συσχετισμοί, οι αναπαραστάσεις και η επικοινωνία, ενώ ταυτόχρονα ενισχύεται η αυτοπεποίθηση και η αυτοαποτελεσματικότητα των μαθητών, μέσα από ένα ευχάριστο και κατάλληλα διαμορφωμένο από την/τον εκπαιδευτικό διδακτικό περιβάλλον (Van De Walle, 2005).

Κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων

Η πιο συνηθισμένη, ίσως, κατηγοριοποίηση των προβλημάτων είναι εκείνη μεταξύ των ανοιχτών και κλειστών προβλημάτων. Τα κλειστά προβλήματα αφορούν στην εφαρμογή μιας μαθημένης διαδικασίας επίλυσης (συνήθως μιας ορισμένης θεματικής

ενότητας του σχολικού εγχειριδίου) προκειμένου να επιτευχθεί η εμπέδωσή της γνώσης, και επιδέχονται μιας μόνον ορθής απάντησης, σε αντίθεση με τα ανοιχτά προβλήματα, τα οποία επιδέχονται πολλαπλών, εξίσου ορθών απαντήσεων στη βάση της (κριτικής) αξιοποίησης ορισμένων δεδομένων (Κολέζα, 2009).

Ουσιαστικά, πρόκειται για τη διάκριση ανάμεσα σε προβλήματα ρουτίνας και σε μη συνήθη/ πρωτότυπα προβλήματα (non-routine). Στα προβλήματα ρουτίνας ο λύτης γνωρίζει τις διαδικασίες που πρέπει να ακολουθήσει και τον τρόπο να τις εφαρμόσει, προκειμένου για να βρει στη σωστή λύση και γι' αυτό κατά έναν αυστηρό ορισμό δεν αποτελούν πραγματικά προβλήματα αλλά συνηθίζεται να χαρακτηρίζονται ως ασκήσεις (Mayer & Hegarty, 1996). Από την άλλη, στα πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα, υπάρχει μια πραγματικά προβληματική κατάσταση της οποίας η λύση δεν γίνεται ευθύς εξ αρχής προφανής στο λύτη, αλλά απαιτεί διερεύνηση και ανώτερου επιπέδου γνωστικές διεργασίες (ό.π. 1996). Λόγω της παρουσιαζόμενης νέας πρόκλησης, παρατηρείται υπερδιέγερση των εγκεφαλικών λειτουργιών (σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στα προβλήματα ρουτίνας), δηλαδή, κατά τον LeDoux (1998, όπως αναφέρεται στο Schloeglmann, 2004) της προσοχής, της αντίληψης, της μνήμης αλλά και του συναισθήματος. Τα προβλήματα αυτού του είδους κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών, προκαλούν την ενεργό συμμετοχή τους στη δόμηση της μάθησης με αξιοποίηση των προηγούμενων γνώσεων, της κριτικής και λογικής σκέψης μέσα από διαδικασίες διερεύνησης «εννοιών και αρχών που είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος» (Κολέζα, 2009, σελ.310), ενώ ταυτόχρονα, προωθείται και η ανάπτυξη κοινωνικών και επικοινωνιακών δεξιοτήτων, μεταξύ των μελών της συνεργαζόμενης ομάδας, εφόσον η επίλυση προβλημάτων νοείται ως μια ομαδική συνεργατική και διερευνητική πρακτική στο πλαίσιο της τάξης. (Κολέζα, 2009). Ωστόσο, τα προβλήματα αυτά, λόγω του ότι οι απαιτήσεις τους μεγαλώνουν, αυξάνοντας το ποσοστό λαθών κατά την επίλυσή τους, τείνουν να συνδέονται συχνά με τον φόβο των μαθητών για αποτυχία, ιδιαίτερα εκείνων που εμφανίζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων και έχουν ήδη βιώσει αρνητικά συναισθήματα (Schloeglmann, 2004).

Η κατηγοριοποίηση του Skovsmose (2001, όπως αναφέρεται στο Alro & Skovsmose, 2004) κινείται επίσης στο δίπολο «ασκήσεις» και «διερεύνηση» για καθένα από τα τρία πεδία «καθαρά μαθηματικά», «τεχνητή πραγματικότητα» και «καθημερινή ζωή»,

δημιουργώντας ένα σύνολο έξι ειδών προβλημάτων. Παραδείγματος χάριν, τα ρεαλιστικά μαθηματικά ανήκουν στην διερευνητική προσέγγιση του πεδίου τεχνητής πραγματικότητας και τα project στο πεδίο της καθημερινής ζωής. Σε αυτό το μοντέλο, τα διάφορα είδη ασκήσεων και διευρυνήσεων, χαρακτηρίζονται ως «περιβάλλοντα μάθησης» (milieus of learning) τονίζοντας έτσι τη σημασία τους κατά τη διδακτική διαδικασία, εφόσον καθένα προσφέρει μια διαφορετική προσέγγιση της μάθησης και της γνώσης, επηρεάζοντας την οργάνωση της διδασκαλίας (πχ. οι ασκήσεις επικρατούν στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας) και κατ' επέκταση το μοντέλο επικοινωνίας που αναπτύσσεται μεταξύ δασκάλου και μαθητών (και των μαθητών μεταξύ τους) αλλά και τον κοινωνικό ρόλο των μαθηματικών στην κοινωνία (πχ. ο ρόλος τους στην κοινωνική επίτευξη) (Alro & Skovsmore, 2004).

Επομένως, μια εναλλακτική κατηγοριοποίηση των προβλημάτων σχετίζεται με τον ρόλο τους στη διδασκαλία. Έτσι, έχουμε διδασκαλία σχετικά με την επίλυση προβλήματος, στην οποία κυριαρχεί η εκμάθηση στρατηγικών, όπως αυτές του Polya, άλλη στην οποία επικρατεί η εφαρμογή τυποποιημένων μαθηματικών ασκήσεων κατά το πρότυπο των παραδοσιακών σχολικών εγχειριδίων, και διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος, στην οποία και στηρίζονται τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και οι Διδακτικές Καταστάσεις, όπου η ενασχόληση με την προβληματική κατάσταση είναι εκείνη η οποία εκκινεί τις διαδικασίες εισαγωγής στην νέα γνώση (Κολέζα, 2009, σελ.313).

Τα λεκτικά (ή γραπτά) μαθηματικά προβλήματα μπορούν, επίσης, να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με την κατάσταση που εκφράζουν και τη σχέση μεταξύ των πληροφοριών τους. Για παράδειγμα, η κατηγοριοποίηση των Riley, Greeno και Heller (1983) σε προβλήματα αλλαγής, συνδυασμού, σύγκρισης και εξομοίωσης (όπως αναφέρεται στο Αγαλιώτης, 2013), στην οποία βασίζεται και η θεωρία του σχήματος, ή οι έξι κατηγορίες των προσθετικών προβλημάτων του Gerard Nerghand (Κολέζα, 2009).

Μοντέλα και στρατηγικές επίλυσης γραπτών μαθηματικών προβλημάτων

Η διαδικασία επίλυσης ενός λεκτικού μαθηματικού προβλήματος ακολουθεί ορισμένα στάδια, στο πλαίσιο των οποίων είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μια ποικιλία στρατηγικών

επίλυσης. Το πιο γνωστό μοντέλο επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και οι πλέον διαδεδομένες στρατηγικές επίλυσης έχουν διατυπωθεί από τον Ούγγρο μαθηματικό George Polya. Στο βιβλίο του *How to Solve it* (1945) διατυπώνει τις τέσσερις βασικές αρχές της θεωρίας του, οι οποίες αποτελούν ταυτόχρονα και τα στάδια επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων, που είναι η κατανόηση του προβλήματος, η δημιουργία ενός σχεδίου για την επίλυση, η εκτέλεση του σχεδίου και η ανασκόπηση (Κολέζα, 2009. Αγαλιώτης, 2013). Στη θεωρία αυτή, γίνεται χρήση πλειάδας ευρετικών στρατηγικών (heuristics), που η καθεμιά ισοδυναμεί με μια διαφορετική πορεία σκέψης και ενεργειών ή/και μέσων προς την επίτευξη της λύσης. Ανάμεσα στις πιο διαδεδομένες και ευρέως χρησιμοποιούμενες στην τάξη, είναι αυτές που αναφέρει η Κολέζα (2009): διατύπωση μιας υπόθεσης κι έλεγχός της, λύση ενός απλούστερου προβλήματος, σχεδίαση πίνακα, κατασκευή μιας αναπαράστασης (εικόνα, σχήμα, διάγραμμα), αντιστροφή και αναζήτηση μοτίβου.

Αρκετά μοντέλα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων έχουν διατυπωθεί με μικρές παραλλαγές και διαφοροποιήσεις στη βάση του μοντέλου του Polya. Συνολικά, διαπιστώνεται ότι τα αρχικά στάδια όλων των μοντέλων αφορούν στην ποιοτική, δηλαδή νοητική και λογική επεξεργασία και οργάνωση των δεδομένων, ενώ ακολουθεί η ποσοτική επεξεργασία, καθώς πραγματοποιείται η εκτέλεση των αριθμητικών υπολογισμών. Τέλος, σε όλα τα στάδια περιλαμβάνεται ο έλεγχος (ως τελευταίο βήμα) που δεν ακολουθείται από όλους τους λύτες, αλλά, κατά βάσει από τους ικανούς λύτες. Ωστόσο, η πορεία των σταδίων δεν είναι απαραίτητα γραμμική, αλλά, πολλές φορές, ιδίως σε πραγματικά προβληματικές, για τον λύτη, καταστάσεις, παρατηρούνται μεταπηδήσεις και επιστροφές για επανέλεγχο ανάμεσα στα διάφορα στάδια (Αγαλιώτης, 2013). Έτσι, υπάρχουν πολλαπλές διαδρομές που μπορεί να ακολουθηθούν από έναν λύτη κατά τη διαδικασία επίλυσης, γεγονός που σχετίζεται με την εφαρμογή των μεταγνωστικών διαδικασιών (Yimer & Ellerton, 2006).

Στο μοντέλο των Yimer & Ellerton (2006) περιέχεται ο αναστοχασμός ως ένα στάδιο που διατρέχει δυναμικά όλο το μοντέλο, και περιλαμβάνει όχι μόνο την αποτίμηση των συνολικών διαδικασιών για τη γενίκευση των αποκτηθέντων διαδικασιών σε νέες ή/και παρόμοιες καταστάσεις, αλλά επίσης, την αξιολόγηση από τον λύτη σχετικά με το επίπεδο της μαθηματικής δυσκολίας του προβλήματος, την αυτοπεποίθησή του σχετικά με τον χειρισμό τέτοιων διαδικασιών και τον βαθμό ικανοποίησής του από την πορεία

επίλυσης που ακολούθησε, δηλαδή κρίνεται εξίσου σημαντικός για τις διαδικασίες επίλυσης, ο ρόλος της διαμορφούμενης στάσης και των συναισθημάτων των λυτών απέναντι στο κάθε πρόβλημα (Yimer & Ellerton, 2006). Λίγο παλαιότερα, στα στάδια του μοντέλο του Alan Schoenfeld (1985) περιλαμβάνονταν και οι πεποιθήσεις του ατόμου για τον μαθηματικό κόσμο που τον περιβάλλει, ενώ τα πιστεύω των λυτών απαντώνται επίσης στην κατηγοριοποίηση των Greiger & Galbraith (1998) (όπως αναφέρεται στο Yimer & Ellerton, 2006).

Ως προς την ενασχόληση των λυτών με τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, αναφέρονται από τους Mayer & Hegarty (1996) δυο προσεγγίσεις που μπορεί να οδηγήσουν στη (διαφορετικής ποιότητας) μαθηματική κατανόηση. Αυτές αντικατοπτρίζονται, σύμφωνα με τους ερευνητές, στις δύο ειδών στρατηγικές της «άμεσης μετάφρασης» (*direct translation strategy*), κατά την οποία επιχειρείται μια ποσοτική προσέγγιση με άμεσο υπολογισμό των αριθμητικών στοιχείων του προβλήματος, και της στρατηγικής βασισμένης στο μοντέλο του προβλήματος (*problem model strategy*) στην οποία λαμβάνει χώρα μια ποιοτική επεξεργασία των δεδομένων, προκειμένου να γίνει κατανοητή η σχέση μεταξύ των πληροφοριών του προβλήματος, να αναγνωριστεί ο τύπος του προβλήματος στον οποίο ανήκει και να δημιουργηθεί το σχέδιο επίλυσης, προτού εκτελεστούν οι αριθμητικοί υπολογισμοί. Η πρώτη μέθοδος δεν στηρίζεται στην κατηγοριοποίηση των προβλημάτων σε τύπους (κατόπιν εσκεμμένης και προσεκτικής επεξεργασίας των δεδομένων) και έχει συνολικά μικρότερες μνημονικές (και όχι μόνο) απαιτήσεις, με αποτέλεσμα να επιλέγεται συχνότερα από τους λιγότερο ικανούς λύτες (Mayer & Hegarty, 1996, p.35).

Τέλος, ο Polya τονίζει τη σημασία του δασκάλου στην όλη διαδικασία επίλυσης. Εξαίρει τη σημασία της θέσης ερωτημάτων και προτροπών από τον δάσκαλο προς τους μαθητές του, καθώς οι κατάλληλες ερωτήσεις μπορούν να προκαλέσουν την ενεργοποίηση των απαραίτητων για την επίλυση διανοητικών και ψυχοκινητικών λειτουργιών, μπορούν να επικεντρώσουν την προσοχή στο κατάλληλο σημείο, να καθοδηγήσουν και να οργανώσουν την πορεία σκέψης (Polya, 1973), όπως και να στηρίξουν την κατανόηση, να ενισχύσουν και να ενθαρρύνουν την προσπάθεια αναζήτησης και τη δημιουργικότητα των μαθητών (Κολέζα, 2009). Έτσι, καταγράφει μια σειρά προσεκτικά διατυπωμένων ερωτημάτων και προτροπών, οι οποίες περιλαμβάνουν τα χαρακτηριστικά της απλής λογικής και της γενίκευσης, συνεπώς

βρίσκουν εφαρμογή σε όλα τα προβλήματα και γίνονται εύκολα κατανοητές, και οι οποίες εμβαθύνουν σε διαφορετικό βαθμό στο γνωστικό περιεχόμενο, προσφέροντας διαβαθμισμένη καθοδήγηση και υποστήριξη ανάλογη με τις ανάγκες του κάθε μαθητή, τις οποίες μάλιστα, μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτόνομα και οι ίδιοι οι μαθητές για αυτό-καθοδήγηση, κατά τον πρότυπο του δασκάλου (Polya, 1973).

1.3 ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΤΟΥ ΑΥΤΙΣΤΙΚΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Διαγνωστικά κριτήρια και χαρακτηριστικά

Οι διαταραχές του αυτιστικού φάσματος (ΔΑΦ) αφορούν σε διαταραχές στην εκδηλούμενη συμπεριφορά του ατόμου που επηρεάζουν τη λειτουργικότητά του σε διάφορα πλαίσια και διαγιγνώσκονται στη βάση διαφορικών κριτηρίων με τη βοήθεια επίσημων συστημάτων κατηγοριοποίησης των διάφορων παρουσιαζόμενων συμπτωμάτων (www.autismhellas.gr). Τα συστήματα αυτά είναι το ICD (International Classification of Diseases), και συγκεκριμένα το ICD-10, του Διεθνούς Οργανισμού Υγείας (WHO) και το DSM (*Diagnostic and Statistic Manual of Mental Disorders*) της Αμερικανικής Ψυχιατρικής Εταιρίας (APA). Οι βασικοί άξονες που οδηγούν στη διάγνωση της αυτιστικής συμπεριφοράς και στα δυο διαγνωστικά συστήματα⁶ είναι τα ελλείμματα στην επικοινωνία, τα ελλείμματα στην κοινωνική αλληλεπίδραση και η ύπαρξη στερεοτυπικών, επαναλαμβανόμενων συμπεριφορών, ενδιαφερόντων ή/και δραστηριοτήτων.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το DSM-V (APA, 2013) οι διαταραχές του αυτιστικού φάσματος χαρακτηρίζονται από δυσκολία στις κοινωνικές δεξιότητες και στη

⁶ Οι υποκατηγορίες των διάχυτων αναπτυξιακών διαταραχών για το ICD-10 είναι ο παιδικός αυτισμός, το σύνδρομο Asperger και η ΔΑΔ-μη άλλως προσδιοριζόμενη και για το DSM-IV είναι ο αυτισμός, το σύνδρομο Asperger και η ΔΑΔ-μη άλλως προσδιοριζόμενη. Σύμφωνα με την ισχύουσα αναθεωρημένη έκδοση του DSM-V (*Diagnostic and Statistic Manual of Mental Disorders*) της αμερικανικής ψυχιατρικής εταιρίας (APA, 2013) καταργούνται όλες οι υποκατηγορίες του φάσματος του αυτισμού όπως ίσχυαν στην 4^η έκδοση και υιοθετείται ο γενικός όρος «διαταραχές του αυτιστικού φάσματος». Με το DSM-V οι διαφορές στη συμπτωματολογία, δεν αναγνωρίζονται πλέον βάσει των διαγνωστικών υποκατηγοριών στις οποίες κατατάσσεται το άτομο, αλλά η σοβαρότητα των συμπτωμάτων διαβαθμίζεται για την ίδια γενική κατηγορία σε τρία επίπεδα ανάλογα τη βαρύτητα των συμπτωμάτων.

καλλιέργεια κοινωνικής και συναισθηματικής αμοιβαιότητας με τους άλλους (μειωμένη ενσυναίσθηση), από αδυναμία στην ανάπτυξη και διατήρηση κοινωνικών σχέσεων, δυσκολίες κατανόησης και ακολουθίας των κοινωνικών συμβάσεων, καθώς και από δυσκολίες προσαρμογής σε διαφορετικά πλαίσια. Χαρακτηριστικά είναι, επίσης, τα ελλείμματα στη μη λεκτική επικοινωνία όπως η φτωχή διατήρηση βλεμματικής επαφής, η δυσκολία τόσο στην πραγματοποίηση όσο και την ερμηνεία των χειρονομιών, των εκφράσεων του προσώπου και γενικότερα της γλώσσας του σώματος ως προς τα κοινωνικά μηνύματα που φέρονται μέσω αυτής, και είναι πιθανή έως και η πλήρης απουσία τους από το ρεπερτόριο των ενεργειών του ατόμου κατά την κοινωνική συνδιαλλαγή του με άλλους. Ακόμα, τα άτομα στο φάσμα του αυτισμού παρουσιάζουν περιορισμένο εύρος, επαναλαμβανόμενων στερεοτυπικών συμπεριφορών και δραστηριοτήτων, όπως είναι ορισμένες κινήσεις που πραγματοποιούν με το σώμα τους, η επανάληψη ίδιων φράσεων ή η ηχολαλία. Φανερό είναι η προσκόλλησή τους σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα και ρουτίνες που επηρεάζουν τη λειτουργικότητα του ατόμου και η αλλαγή των οποίων ενδέχεται να προκαλέσει αποδιοργάνωση και αναστάτωση, ενώ έχουν περιορισμένο εύρος ενδιαφερόντων, επιδεικνύοντας ιδιαίτερη προσκόλληση κατά την ενασχόλησή τους με αυτά. Στην 5^η έκδοση του DSM οι διάφορες συνοδές αισθητηριακές διαταραχές, όπως η ευαισθησία σε ήχους, στο φως, σε μυρωδιές ή σε υφές (προτίμηση ή μη στο να αγγίζουν διάφορα αντικείμενα ή ακόμα και στη σωματική επαφή με τους άλλους), περιλαμβάνονται επίσης στα διαγνωστικά κριτήρια του φάσματος.

Οι διαταραχές του αυτιστικού φάσματος πιθανόν να συνοδεύονται από γλωσσικά ελλείμματα (μειωμένη λεκτική επικοινωνία) καθώς και να συνυπάρχουν με άλλα προβλήματα υγείας και διαταραχές, όπως η υπερκινητικότητα ή νοητική υστέρηση. Κατά συνέπεια, το είδος των εκδηλούμενων συμπτωμάτων, καθώς και η ένταση, η επιμονή και η έκτασή τους, επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες (εγγενείς στο άτομο ή/και περιβαλλοντικούς) και διαφέρει από άτομο σε άτομο, επηρεάζοντας την συνολικότερη λειτουργικότητά του και απαιτώντας την ανάλογη εκπαιδευτική και κοινωνικο-ψυχολογική υποστήριξη για τη συμπερίληψη του ατόμου στο κοινωνικό περιβάλλον.

Μια από τις υποκατηγορίες του φάσματος του αυτισμού (στο ICD-10 και μέχρι πρότινος στο DSM-IV) είναι το σύνδρομο Asperger. Τα άτομα με το σύνδρομο

Asperger διαφέρουν στο ότι έχουν δείκτη νοημοσύνη που τοποθετείται από το μέσο φυσιολογικό και πάνω, δεν φέρουν γλωσσικά ελλείμματα (που να σχετίζονται με την αναπτυξιακή καθυστέρηση του λόγου) και παρουσιάζουν καλύτερες επικοινωνιακές καθώς και προσαρμοστικές δεξιότητες (Firth, 1991). Ως αποτέλεσμα χαρακτηρίζεται και ως αυτισμός υψηλής λειτουργικότητας (HFA, High Functioning Autism).

Ακαδημαϊκές δεξιότητες μαθητών με ΔΑΦ

Αναφορικά με το προφίλ ακαδημαϊκών επιδόσεων των μαθητών με αυτισμό υψηλής λειτουργικότητας ή σύνδρομο Άσπεργκερ, σύμφωνα με την επισκόπηση των Whitby & Mancil (2009), προκύπτει ότι οι μαθητές αυτοί εξέχουν στον προφορικό λόγο, στην ανάγνωση και το συλλαβισμό, στον οπτικό συλλογισμό (visual reasoning), στην αποστήθιση και σε διαδικασίες ρουτίνας, ενώ εμφανίζουν ελλείμματα⁷ στην προσοχή και τις οργανωτικές δεξιότητες, στις γραφοκινητικές δεξιότητες, στην γραπτή έκφραση, στην ακουστική ή/και αναγνωστική κατανόηση, στη διαχείριση σύνθετων γλωσσικών προτάσεων και άλλων σύνθετων διαδικασιών σε όλους τους τομείς, καθώς και στην επίλυση προβλημάτων και το μαθηματικό συλλογισμό. Τα ελλείμματα αυτά των μαθητών γίνονται (περισσότερο) εμφανή, συνήθως, όταν η μάθηση περνά από τις επαναλαμβανόμενες και εξ απαγγελίας δραστηριότητες και διαδικασίες, συχνότερες κατά τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, σε περισσότερο αφηρημένες διαδικασίες, με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, σύμφωνα με τον Goldstein et al. (1994 όπως αναφέρεται στο Whitby & Mancil, 2009), δηλαδή, κατά το πέρασμα στις μεγαλύτερες τάξεις και ιδίως με την είσοδο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Hart-Barnett & Cleary, 2015).

Συγκεκριμένα στα Μαθηματικά, τα ευρήματα των λιγοστών ερευνών⁸ όπου χρησιμοποιήθηκαν σταθμισμένα εργαλεία αξιολόγησης των μαθηματικών ικανοτήτων των παιδιών της εν λόγω κατηγορίας, καταδεικνύει ότι η πλειοψηφία των μαθητών αυτών τοποθετείται στον μέσο όρο του γενικού πληθυσμού ως προς τις μαθηματικές ικανότητες (Chiang & Lin, 2007). Ωστόσο, η επιμέρους επίδοση των μαθητών είναι

⁷ Τονίζεται, βέβαια, ότι ορισμένα από τα ελλείμματα αυτά, κατά τομέα και κατά περίπτωση, ενδέχεται να μην είναι πρωτογενή, αλλά να απορρέουν σε μεγάλο βαθμό, αλλά όχι κατ' αποκλειστικό τρόπο, από την έλλειψη συγκέντρωσης, τις ελλειπείς οργανωτικές ή/και τις γραφοκινητικές δυσκολίες (Whitby & Mancil, 2009: 557-558).

⁸ Αναφέρονται 8 τέτοιες έρευνες (από τις συνολικά 18 που περιλαμβάνονται) στην επισκοπική μελέτη των Chiang & Lin (2007:547-556): Goldstein et al. (2001), Griswold et al. (2002), Mayes & Calhoun (2003a, 2003b), Minshew et al. (1992, 1994), Myles et al.,(1994), Rumsey & Hamburger (1988).

χαμηλότερη στις μαθηματικές δοκιμασίες σε σχέση με τον μέσο όρο της γενικής τους επίδοσης (του νοητικού δυναμικού τους), χωρίς όμως αυτή η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική (Whitby & Mancil, 2009; Chiang & Lin, 2007). Για παράδειγμα, στην έρευνα των Griswold et al. (2002) ένα από τα χαμηλότερα σκορ στο WIAT (Wechsler Individual Achievement Test) συνδέεται με την ικανότητα για καθ' υπαγόρευση γραφή αριθμών, απάντηση σε μαθηματικά προβλήματα-πράξεις και επίλυση εξισώσεων (Griswold et al., 2002). Από την άλλη, το 23% των μαθητών με σύνδρομο Άσπεργκερ/ αυτισμό υψηλής λειτουργικότητας εμφανίζει μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, ποσοστό συγκριτικά μικρότερο από το 60% του πληθυσμού αυτού που εμφανίζει μαθησιακές δυσκολίες στη γλώσσα, και συγκεκριμένα στη γραπτή έκφραση (Mayes & Calhoun, 2006). Τέλος, ανάμεσα στους μαθητές με Άσπεργκερ/αυτισμό υψηλής λειτουργικότητας, υπάρχει ένας μικρός αριθμός χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά, που κατατάσσεται πάνω από το 99% του γενικού πληθυσμού στις σταθμισμένες δοκιμασίες (Chiang & Lin, 2007, p.553).

Αξιοποιώντας τις παρατηρήσεις επί των επιδόσεων στις επιμέρους μαθηματικές δοκιμασίες των μαθητών με αυτισμό υψηλής λειτουργικότητας και σύνδρομο Asperger, σχηματίζεται η εικόνα, ότι δεν επηρεάζονται τόσο ως προς τις δεξιότητες εκτέλεσης πράξεων, όμως επηρεασμένη εμφανίζεται η ικανότητα τους στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων, ενδεχομένως οφειλόμενη αφενός στις ελλείψεις οργανωτικές δεξιότητες και στη μειωμένη διατήρηση της προσοχής, αφετέρου στα ελλείμματα στην αναγνωστική κατανόηση, όπως αυτά πιθανόν διαμορφώνουν για τους μαθητές αυτούς το επίπεδο δυσκολίας των γραπτών μαθηματικών προβλημάτων (Whitby & Mancil, 2009).

Γενικά για τους μαθητές στο φάσμα του αυτισμού, οι δυσκολίες τους στα Μαθηματικά βάσει ερευνών (πχ. Happe et al., 2006, Hughes et al. 1994) είναι πιθανόν να απορρέουν, επιπλέον, από ελλείμματα στην εργαζόμενη μνήμη, τη γνωστική ευελιξία, την αυτορρύθμιση και τον αυτοέλεγχο, ενώ τα χαρακτηριστικά στον αυτισμό γλωσσικά ελλείμματα⁹, ενδέχεται με τη σειρά τους να επηρεάζουν μια σειρά γλωσσικά

⁹ Τα γλωσσικά ελλείμματα συνδέονται ακόμα και με το Asperger (αλλά και τον υψηλής λειτουργικότητας αυτισμό) όπου δεν εμφανίζονται με την ίδια ένταση και στον ίδιο βαθμό, εξακολουθούν όμως να υφίστανται, αφορώντας κυρίως την πραγματολογική λειτουργία της γλώσσας, επιδρώντας στην κοινωνική κατανόηση και αλληλεπίδραση του ατόμου, επηρεάζοντας κατά τον τρόπο αυτό τη λειτουργικότητά του.

συνδεδεμένων δραστηριοτήτων, με εξέχουσα την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Hart-Barnett & Cleary, 2015, p.173), όπου ενυπάρχουν τουλάχιστον δυο αναπαραστατικά συστήματα, με το γλωσσικό να είναι αναπόφευκτα το ένα από αυτά, κατά τον Duval (2006). Συνεπώς, πηγή δυσκολιών στα μαθηματικά για τους μαθητές του αυτιστικού φάσματος θεωρούνται οι γνωστικά περίπλοκες διαδικασίες, όπως η επίλυση σύνθετων (διερευνητικών) προβλημάτων, ο χειρισμός αφηρημένων μαθηματικών εννοιών και ο ανωτέρου επιπέδου λογικο-μαθηματικός συλλογισμός (Hart-Barnett & Cleary, 2015).

Σε κάθε περίπτωση είναι σημαντικό να μην ξεχνάμε, ότι το κάθε άτομο με αυτισμό εμφανίζει διαφορετικές εκφάνσεις των γενικών χαρακτηριστικών του αυτιστικού φάσματος (Mayes & Calhoun, 2003), σε διαφορετική ένταση και βαθμό, και ως εκ τούτου αυτές οι ατομικές γνωστικές διαφορές, πρέπει να εντοπιστούν μέσω ατομικών διαδικασιών αξιολόγησης, (Chiang & Lin, 2007), και μάλιστα ξεχωριστά για κάθε επιμέρους δεξιότητα που απαιτείται για το κάθε γνωστικό αντικείμενο, προκειμένου να αξιοποιηθούν κατάλληλα προς όφελος των μαθητών κατά την οργάνωση των διδακτικών παρεμβάσεων (Whitby & Mancil, 2009). Μάλιστα, προτείνεται η άμεση παρατήρηση της μαθησιακής δραστηριότητας του μαθητή στην τάξη από τον/την εκπαιδευτικό κατά τη διδακτική διαδικασία για καλύτερη κατανόηση των διαδικασιών (συλλογισμού) που εμπλέκει ο μαθητής στις διαδικασίες της μάθησής του (Griswold et al., 2002).

Η δυσκολία των μαθητών του αυτιστικού φάσματος στην επεξεργασία των ακουστικών ερεθισμάτων (ακουστική κατανόηση) μεταξύ των άλλων δυσκολιών, καθιστά επιτακτικότερη την ανάγκη για παροχή οπτικών και χειραπτικών υλικών, εργαλείων και δραστηριοτήτων, που να συνοδεύουν την προφορικά δοσμένη πληροφορία, προκειμένου να υποβοηθηθεί και να επιτευχθεί η κατανόηση των αριθμητικών διαδικασιών και των μαθηματικών εννοιών (Griswold et al., 2002). Επίσης, πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη κατά τη διδασκαλία η υπεροχή των μαθητών του αυτιστικού φάσματος στον οπτικό συλλογισμό (visual reasoning) μέσω της παροχής κατάλληλων ερεθισμάτων και δραστηριοτήτων, μέσω των οποίων μπορεί να μεγιστοποιηθεί η μαθησιακή απόδοσή τους, έναντι των δραστηριοτήτων που απαιτούν γραφοκινητικές δεξιότητες, στις οποίες (συγκριτικά) υστερούν (Mayes & Calhoun, 2003).

1.4 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Οι προηγούμενες έρευνες στις οποίες ανατρέξαμε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας αφορούσαν στην επίλυση γραπτών μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές του δημοτικού με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος. Ωστόσο, διαπιστώθηκε ότι μόνο ελάχιστες έρευνες πραγματοποιούνται τη θεματική αυτή και αναφέρονται πρώτες.

Η έρευνα των Rockwell, Griffin και Jones (2011) είναι η πρώτη μελέτη που πραγματοποιείται τη διδακτική παρέμβαση με βάση τη θεωρία του σχήματος (schema-based strategy instruction – SBI) σε μαθητές του αυτιστικού φάσματος. Σε αυτή πραγματοποιείται μελέτη περίπτωσης ενός πλήρως ενταγμένου μαθητή στην γενική τάξη της τετάρτης δημοτικού με αυτισμό και νοημοσύνη στο κατώτερο άκρο του μέσου όρου, με χαμηλότερες από το επίπεδο της τάξης του μαθηματικές επιδόσεις (Rockwell, 2012). Η διδακτική παρέμβαση στόχευε στη χρησιμοποίηση από το παιδί σχηματικών διαγραμμάτων για την επίλυση τριών τύπων προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης: ομαδοποίησης, σύγκρισης και αλλαγής. Επίσης, διδάχθηκε η μνημονική στρατηγική RUNS, που περιλαμβάνει τέσσερα βήματα για την επίλυση: 1) Read the problem, 2) Use a diagram, 3) use the diagram to create a Number sentence και 4) State the answer, και η οποία χρησιμοποιήθηκε συνδυαστικά με τα σχηματικά διαγράμματα κατά τη διαδικασία επίλυσης. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε τρεις φάσεις με καθεμιά να αντιστοιχεί σε έναν από τους τύπους των προβλημάτων και να διαρκεί οκτώ εβδομάδες. Αρχικά, μετρήθηκε η επίδοσή του πριν την διδακτική παρέμβαση (σε συνολικά έξι προβλήματα – “story problems”) και ακολούθως πραγματοποιήθηκαν διδασκαλίες, ένας προς έναν, για τον κάθε τύπο προβλήματος ξεχωριστά. (Rockwell, 2012). Συγκρίνοντας την επίδοση μετά την άμεση διδασκαλία της στρατηγικής, διαπιστώθηκε σημαντική βελτίωση ως προς την ικανότητα επίλυσης σε όλους τους τύπους προβλημάτων, που πλησίασε για τα προβλήματα ομαδοποίησης (από 3,75 σε 5,75) και έφτασε το μέγιστο σκορ των 6 βαθμών, από τους αρχικά 2 βαθμούς για τα προβλήματα αλλαγής και από τους 0 βαθμούς για τα προβλήματα σύγκρισης (Agrawal, 2013). Τα θετικά αποτελέσματα ήταν εμφανή και στις δοκιμασίες γενίκευσης, στις οποίες διέφερε η θέση του αγνώστου (Rockwell et al, 2011) γεγονός που απορρέει, πιθανότατα, από τη βελτιωμένη εννοιολογική κατανόηση του μαθητή των τύπων των προβλημάτων αυτών, όπως διαμορφώθηκε κατόπιν της διδασκαλίας της στρατηγικής με βάση τη θεωρία του σχήματος και της χρήσης των σχεδιαστικών αναπαραστάσεων (Rockwell et al, 2012; Agrawal, 2013). Ωστόσο, παρά τα ενθαρρυντικά θετικά

αποτελέσματα της έρευνας, οι πολλοί περιορισμοί αδυνατούν να κάνουν εφικτή την όποια ασφαλή γενίκευση των αποτελεσμάτων αυτών (Rockwell, 2012).

Η Rockwell (2012) προχώρησε διεξάγοντας νέα έρευνα σχετικά με τη χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου επίλυσης προβλημάτων, στοχεύοντας σε ενός βήματος προσθετικά προβλήματα, σε μαθητές με αυτισμό χωρίς σε αυτούς να συνυπάρχει νοητική υστέρηση ή άλλου είδους συνοδή διαταραχή. Επιπροσθέτως, η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε με συλλογή του δείγματος από κέντρο παιδιών με αυτισμό μόνο από τη βόρεια Φλόριντα, ενώ πραγματοποιήθηκε στις κατοικίες των συμμετεχόντων από την ίδια την ερευνήτρια, και όχι στο πλαίσιο του σχολείου από την/τον εκπαιδευτικό της τάξης, δυσκολεύοντας τη γενίκευση των αποτελεσμάτων στον γενικό πληθυσμό των μαθητών με αυτισμό.

Κριτήριο συμπερίληψης των μαθητών στο δείγμα, εκτός από τη διάγνωση για διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, είναι να παρακολουθούν κάποια από τις τάξεις του δημοτικού, η ακαδημαϊκή τους επίδοση να βρίσκεται τουλάχιστον στον μέσο όρο της τάξης τους, αλλά να υστερούν στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και αυτό να αποτυπώνεται και από τη θέση ανάλογων στόχων στο ατομικό τους εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Επίσης, πρέπει να είναι σε θέση εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς χωρίς δανεισμό σε ποσοστό 90%. Κριτήριο αποκλεισμού είναι η συννοσηρότητα του αυτισμού με άλλες διαταραχές, η ανικανότητα λεκτικής επικοινωνίας ή/και η αδυναμία παρακολούθησης τακτικών διδασκαλιών ένας προς έναν διάρκειας 30 λεπτών.

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από δυο αγόρια με αυτισμό, μαθητές της πρώτης και έκτης τάξης δημοτικού. Ο μαθητής της πρώτης (7 ετών) παρακολουθεί την τάξη του με υποστήριξη από ειδικό επαγγελματία (paraprofessional), έχει εξαιρετική οπτική μνήμη, μπορεί να ακολουθήσει απλές προφορικές οδηγίες και ωφελείται από αυτές (επαναλαμβάνοντάς τες κατά τη διάρκεια της εργασίας του), ενώ ο λόγος είναι το κύριο μέσο επικοινωνίας για αυτόν, παρά τις σημαντικές του ελλείψεις. Δεν μπορεί να απαντήσει σε ανοιχτού τύπου ερωτήσεις. Δυσκολεύεται στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και στην γραπτή έκφραση, σύμφωνα με το εξατομικευμένο εκπαιδευτικό του πρόγραμμα. Ο μαθητής της έκτης (12 ετών) παρακολουθεί τα περισσότερα μαθήματα της τάξης του με υποστήριξη (μοιρασμένη με άλλον μαθητή με αυτισμό), ενώ παρακολουθεί ειδικό τμήμα για βελτίωση της ανάγνωσης (special education

reading class) και ατομική διδασκαλία (study hall period). Οι δυσκολίες του σχετίζονται με την αναγνωστική κατανόηση και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Του αρέσει η ρουτίνα (όπως αυτή που προσφέρεται στο σχολείο) και το να ευχαριστεί τους άλλους, επομένως τον κινητοποιεί ιδιαίτερα η ενίσχυση και η επιβράβευση. Μπορεί να αξιοποιήσει και να ακολουθήσει απλές προφορικές οδηγίες. Το κύριο μέσο επικοινωνίας γι' αυτόν είναι ο προφορικός λόγος και είναι σε θέση να απαντήσει σε ανοιχτού τύπου ερωτήσεις, εφόσον του διατεθεί ορισμένος χρόνος. Θέλει να ολοκληρώνει γρήγορα και χωρίς διαλείμματα τις δραστηριότητές του, γι' αυτό και απογοητεύεται έντονα όταν καθυστερεί, καθώς κι όταν κάτι αποκλίνει από τη ρουτίνα του.

Η παρέμβαση χωρίστηκε σε τρεις φάσεις, μια για κάθε τύπο προσθετικού προβλήματος, σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Carpenter & Moser, ακολουθώντας την προτεινόμενη από τους Χρήστου και Φιλίππου σειρά διδασκαλίας τους. Οι συνεδρίες διδασκαλιών λάμβαναν μέρος πέντε φορές την εβδομάδα και είχαν διάρκεια τριάντα λεπτών η καθεμία. Πραγματοποιήθηκε επίσης, καταγραφή και «κωδικοποίηση» κατά την έκφραση της συγγραφέα (Rockwell, 2012, p.64) των συμπεριφορών των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ώστε να διαπιστωθεί εάν υπάρχει διαφοροποίηση σε αυτές μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Αρχικά οι μαθητές αξιολογήθηκαν ως προς την ικανότητά τους να επιλύσουν προσθετικά προβλήματα, χωρίς να έχει προηγηθεί διδακτική παρέμβαση και χωρίς να δοθεί βοήθεια. Στη συνέχεια, εισάγεται με άμεση διδασκαλία από την ερευνήτρια η στρατηγική επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων του πρώτου τύπου (μέρος-όλο) με βάση τη θεωρία του σχήματος, μέσω της παρουσίασης προβλημάτων στα οποία όλες οι ποσότητες είναι γνωστές, ώστε να εισαχθούν οι βασικές έννοιες και τα μέρη αυτού του μοντέλου επίλυσης προβλημάτων. Η παρέμβαση συνεχίζεται με την εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία επίλυσης μιας σειράς προβλημάτων του τύπου που έχει προηγουμένως διδαχθεί, υπό την καθοδήγηση της ερευνήτριας, και με παράλληλη αξιολόγηση της πορείας τους, μέσω της βαθμολόγησής της ως προς συγκεκριμένα κριτήρια. Όταν συγκεντρωθεί η ύψιστη βαθμολογία (6/6) σε δύο συνεχόμενα προβλήματα, θεωρείται η διδασκαλία επιτυχής και προχωρά η διαδικασία στο επόμενο βήμα. Η ολοκλήρωση της διδασκαλίας οδηγεί στο στάδιο της αξιολόγησης μέσω χορήγησης δοκιμασιών επίλυσης προβλημάτων για τον μόλις διδαγμένο τύπο

προβλήματος, καθώς και μίας δοκιμασίας γενίκευσης των αποκτηθέντων από τη διδασκαλία γνώσεων σε νέας μορφής προβλήματα. Η δοκιμασία της γενίκευσης εξετάζει τριών ειδών θεματικές για καθέναν από τους τρεις τύπους μαθηματικών προβλημάτων, που είναι οι εξής: προβλήματα με την άγνωστη ποσότητα στην τελική θέση αλλά με επιπλέον μη σχετικές πληροφορίες, προβλήματα με την άγνωστη ποσότητα στην αρχική θέση και τέλος, με την άγνωστη ποσότητα στην μεσαία θέση. Ανάλογα με τα αποτελέσματα της γενίκευσης, ακολουθεί διδασκαλία γενίκευσης και εκ νέου αξιολόγηση. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται για καθένα από τους τρεις τύπους μαθηματικών προβλημάτων, καθώς ο καθένας διδάσκεται ξεχωριστά. Η τελική αξιολόγηση για το βαθμό διατήρησης των αποτελεσμάτων, τόσο ως προς την επίλυση όσο και ως προς τη γενίκευση, πραγματοποιήθηκε οκτώ εβδομάδες μετά το πέρας της παρέμβασης. Ακόμα, η έρευνα περιέλαβε διερεύνηση μέσω ερωτηματολογίων, των απόψεων και των στάσεων (satisfaction questionnaires) των μαθητών του δείγματος και των γονιών τους απέναντι στο μοντέλο και τη διδασκαλία του.

Τα αποτελέσματα της έρευνας της Rockwell είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά ως προς τα θετικά αποτελέσματα που μπορεί να έχει η διδασκαλία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με βάση τη θεωρία του σχήματος (SBI) σε μαθητές με αυτισμό. Και οι δυο μαθητές ωφελήθηκαν από τη διδασκαλία της συγκεκριμένης στρατηγικής επίλυσης και για τους τρεις τύπους μαθηματικών προβλημάτων, όπως αποδεικνύουν οι βαθμολογίες που συγκέντρωσαν στις δοκιμασίες που έπονταν των διδασκαλιών αλλά και εκείνων της γενίκευσης καθώς ήταν σε θέση, έπειτα από τη σχετική διδασκαλία, να επιτύχουν στην κορυφή των δοκιμασιών αυτών. Αυτό αποδεικνύει ότι οι μαθητές κατανόησαν τα γνωστικά σχήματα των τριών τύπων προβλημάτων και ήταν σε θέση να αξιοποιήσουν ευέλικτα τα σχηματικά διαγράμματα για να επιτύχουν την γενίκευση.

Η διδασκαλία της στρατηγικής συνοδευόταν από συμπεριφοριστικές και μνημονικές τεχνικές με σκοπό κυρίως τη διατήρηση της προσοχής στο έργο, την ολοκλήρωση της δραστηριότητας, την οργάνωση και τον αυτοέλεγχο. Η μνημονική ευρετική στρατηγική (heuristics) RUNS ήταν εκείνη που επιλέχθηκε και διδάχθηκε για να οργανώσει την πορεία επίλυσης των προβλημάτων και να παρέχει αυτοέλεγχο της διαδικασίας επίλυσης (και λεκτική αυτό-καθοδήγηση) σύμφωνα με την οποία οι μαθητές καλούνται να διαβάσουν, να χρησιμοποιήσουν το κατάλληλο διάγραμμα, να γράψουν την πράξη και να γράψουν την απάντηση. Η λεκτική ενίσχυση για την ενθάρρυνση του μαθητή, η

επιβράβευση και η ανατροφοδότηση, οι λεκτικές νύξεις επαναφοράς ή/και θέση καθοδηγητικών ερωτημάτων είναι ορισμένες από τις γενικές αρχές και τεχνικές που εφαρμόστηκαν παράλληλα με τη διδασκαλία και γενικότερα το πρόγραμμα παρέμβασης. Αυτές, προσαρμόστηκαν περαιτέρω ανάλογα με τις ατομικές ανάγκες του κάθε μαθητή. Έτσι, η επιβράβευση για τον έναν μαθητή περιελάμβανε, πέραν της λεκτικής μορφής, και ένα γλύκισμα, ενώ για τον άλλον ένα συνοδευτικό άγγιγμα ορισμένες φορές.

Ο τρόπος και ο βαθμός στον οποίο ο κάθε μαθητής αξιοποίησε τα διάφορα στοιχεία της διδασκαλίας διέφερε επίσης, ανάλογα με το μαθησιακό προφίλ του. Έτσι, για παράδειγμα, ο μαθητής με τη δυνατή οπτική μνήμη, δεν σχεδίαζε τα διαγράμματα όταν ο άγνωστος ήταν στο τέλος, ενώ ο μαθητής με ισχυρότερη τη λεκτική μνήμη χρησιμοποιούσε σταθερά τα διαγράμματα, ενώ επαναλάμβανε φωναχτά τις σκέψεις του και τα βήματα που ακολουθούσε κάθε φορά, κατά το πρότυπο που υποδείχθηκε από την ερευνήτρια. Η ανάγκη για επιβεβαίωση και ενίσχυση, ήταν πολύ μεγαλύτερη για τον μαθητή αυτό, ενώ ο μαθητής της πρώτης είχε επιπλέον ανάγκη για επαναφορά στη διαδικασία και παρώθηση ώστε να παραμείνει η προσοχή του στο έργο και να το ολοκληρώσει. Ο μαθητής της έκτης χρειάστηκε λιγότερες διδασκαλίες γενίκευσης, γεγονός που εξηγείται λόγω της μεγαλύτερης προηγούμενης έκθεσής του σε ερεθίσματα μαθηματικών προβλημάτων από τη σχολική του ζωή, σε αντίθεση με τον μαθητή της πρώτης, ο οποίος μόλις είχε παρακολουθήσει ένα μάθημα σχετικό με την επίλυση προβλημάτων που αφορούσε συγκεκριμένα στη διδασκαλία λέξεων κλειδιών στα προβλήματα (κατά το αναλυτικό πρόγραμμα του Καναδά, στο οποίο προβλέπεται ξεχωριστή διδασκαλία λεξιλογίου). Η διάκριση των διαγραμμάτων για του μέρους-όλου και της σύγκρισης ήταν προβληματική για τον μαθητή της πρώτης, ο οποίος χρειάστηκε επιπλέον διδασκαλία για να το επιτύχει, καθώς τα δυο διαγράμματα παρουσιάζουν κάποια ομοιότητα (το σχήμα της σύγκρισης μοιάζει με το σχήμα του μέρους-όλου αντεστραμμένο).

Η Agrawal (2013) ερευνά την αποτελεσματικότητα της άμεσης διδασκαλίας με χρήση χειραπτικών υλικών στη βελτίωση της διαδικαστικής και δηλωτικής γνώσης των μαθητών με αυτισμό (μέτριο και ήπιο) στην εκτέλεση πρόσθεσης και αφαίρεσης ομόνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Επιπλέον, η έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση των στάσεων και αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με την συγκεκριμένη παρέμβαση.

Η έρευνα περιλαμβάνει έξι μαθητές (εκ των οποίων πέντε αγόρια) με ελαφρύ ως μέτριο (ως προς τα συμπτώματα) αυτισμό, μεταξύ 8 και 12 χρόνων, με διαπιστωμένο έλλειμμα στα Μαθηματικά, που να παρακολουθούν, όμως, (με υποστήριξη εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής) το πρόγραμμα της τάξης τους. Οι παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν κατ' οίκον και ατομικά για τον καθένα. Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν κλασματικοί κύκλοι (fraction circles), ο καθένας εκ των οποίων ήταν χωρισμένος σε ίσα μέρη, και δίχρωμες μάρκες μέτρησης (chips). Η πορεία της έρευνας εκκινεί με την αξιολόγηση της αρχικής ικανότητας των μαθητών στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, συνεχίζει με τη φάση της παρέμβαση με άμεση διδασκαλία με χρήση χειραπτικού υλικού, και ακολούθως τη γενίκευσης και διατήρηση των αποτελεσμάτων. Η συνολική διαδικασία αυτή πραγματοποιείται ξεχωριστά για τα ομώνυμα και έπειτα για τα ετερόνυμα κλάσματα. Κάθε άμεση διδασκαλία εισαγόταν με τον σχετικό προοργανωτή, ακολουθούσε η διδασκαλία από την εκπαιδευτικό με χρήση του χειραπτικού υλικού και έπειτα ο κάθε μαθητής πραγματοποιούσε αρχικά, καθοδηγούμενη πρακτική εξάσκηση, στη συνέχεια εφαρμογή στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων και τέλος αυτόνομη εξάσκηση. Κατά την επίδειξη του μοντέλου πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων (μοντελοποίηση δυο προσθέσεων και δυο αφαιρέσεων) η εκπαιδευτικός εξέφραζε και λεκτικά τη σκέψη της (thinking-aloud) ενώ χρησιμοποιήθηκε και ο πίνακας. Στην καθοδηγούμενη εξάσκηση (σε δυο κλασματικές πράξεις) η εκπαιδευτικός παρείχε βοήθεια και υπενθυμίσεις με λεκτικές νύξεις, με θέση ερωτήσεων και κατάλληλη ανατροφοδότηση, όπου χρειαζόταν (μειωμένη για τη δεύτερη πράξη), όσο το κάθε παιδί έγραφε (έλυσε) στον πίνακα με βοήθεια και του χειραπτικού υλικού. Στη φάση της εφαρμογής του μοντέλου επίλυσης σε λεκτικά προβλήματα, τα προβλήματα αυτά που αφορούν σε πραγματικές καταστάσεις και συνδέονται άμεσα με τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών, αφού στις εκφωνήσεις των προβλημάτων χρησιμοποιούνται οικεία για τον καθένα τους πρόσωπα και καταστάσεις. Κάθε φορά δίνεται ένα τέτοιο πρόβλημα, διαβάζεται από την εκπαιδευτικό και είναι δυνατή η παροχή βοήθειας. Αυτή είναι κι η μοναδική φάση στην παρούσα έρευνα όπου γίνεται χρήση λεκτικού προβλήματος. Στην αυτόνομη εξάσκηση, δεν είναι πλέον δυνατή η ανατροφοδότηση οποιασδήποτε μορφής από την ερευνήτρια κατά την επίλυση, καθώς μέσω αυτής ελέγχεται τόσο η διαδικαστική όσο και η δηλωτική γνώση των μαθητών, μέσω της ικανότητας για ακριβή υπολογισμό και για εξήγηση του τρόπου σκέψης για την επίλυση, αντίστοιχα. Στη φάση της γενίκευσης, αμέσως μετά το τέλος της διδασκαλίας, δόθηκαν τρεις δοκιμασίες ίδιας

δυσκολίας και επιπέδου με εκείνες της αρχικής αξιολόγησης, αλλά πραγματοποιήθηκαν χωρίς τη χρήση χειραπτικών υλικών και χωρίς βοήθεια από την ερευνήτρια. Η φάση της διατήρησης πραγματοποιήθηκε 4 εβδομάδες μετά την παρέμβαση για τα ομώνυμα κλάσματα και 2 εβδομάδες μετά την παρέμβαση για τα ετερόνυμα κλάσματα και πάλι χωρίς τη χρήση χειραπτικού υλικού και βοήθειας. Πέντε στους έξι μαθητές ήταν σε θέση να εξηγήσουν ή να δείξουν σωστά τον τρόπο σκέψης τους κατά την εκτέλεση πράξεων με ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα μετά την μοντελοποίηση της εκπαιδευτικού, ενώ πέντε στους έξι μπόρεσαν να λύσουν σωστά τις πράξεις για τα ομώνυμα και τέσσερις στους έξι για τα ετερόνυμα. Όλοι οι μαθητές εξήγησαν σωστά και έλυσαν με ακρίβεια προσθέσεις και αφαιρέσεις ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων τόσο στη φάση της γενίκευσης όσο και της διατήρησης. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη και την αρχική αξιολόγηση, συνολικά η επίδοση των μαθητών ως προς την διαδικαστική γνώση ήταν μεγαλύτερη σε σχέση με τη δηλωτική. Οι διαφορές στην επίδοση εξηγούνται από τις ατομικές διαφορές στο στυλ μάθησης του καθενός (για παράδειγμα ένας μαθητής δεν προτιμά τη χρήση αντικειμένων για την εκτέλεση πράξεων) αλλά και από τη γενικότερη δυσκολία στη γλωσσική επικοινωνία των μαθητών στο φάσμα του αυτισμού, που καθιστά γι' αυτούς δυσκολότερη τη λεκτική έκφραση της σκέψης τους. Ωστόσο, και πάλι όλοι ήταν σε θέση να πετύχουν στο μέγιστο βαθμό στις δοκιμασίες διατήρησης και γενίκευσης και στα δυο είδη γνώσης. Επομένως, όλοι οι μαθητές ωφελήθηκαν από την άμεση διδασκαλία με χρήση χειραπτικού υλικού, καθώς ανέπτυξαν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση και εκτελεστική ακρίβεια, διατηρώντας τα αποτελέσματά της μάθησής τους σταθερά σε βάθος χρόνου. Επιπλέον, φαίνεται ότι στην πλειοψηφία τους εξέφρασαν κάποιο θετικό σχόλιο, αποκαλύπτοντας τη θετική στάση τους απέναντι στη διδασκαλία με χρήση χειραπτικών υλικών, κατά την οποία μάλιστα δε δόθηκαν υλικοί ενισχυτές, και ακόμα, ήταν σε θέση να συνδέσουν τα κλάσματα με την καθημερινότητα. Τα θετικά αυτά αποτελέσματα, ενθαρρύνουν την εφαρμογή της άμεσης διδασκαλίας (με μοντελοποίηση από τον εκπαιδευτικό) με χρήση χειραπτικών υλικών για τη διδασκαλία μαθητών στα φάσμα του αυτισμού σε πλαίσιο συμπερίληψης στη γενική τάξη.

Η έρευνα της Whitby (2012) διερευνά την αποτελεσματικότητα της στρατηγικής Solve it! Στην ικανότητα επίλυσης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων σε τρεις έφηβους μαθητές (περίπου 14 ετών) με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος (στη Φλόριντα). Τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι όλοι βελτίωσαν την ικανότητά τους στην επίλυση

προβλημάτων, και μάλιστα σημείωσαν ποσοστά υψηλότερα από τον μέσο όρο των συνομηλίκων τους, αλλά δεν διατηρήθηκε η χρήση της στρατηγικής σε βάθος χρόνου, παρ' ότι και πάλι οι δυο από τους τρεις πέτυχαν υψηλότερη βαθμολογία συγκρινόμενη με το μέσο όρο των συνομηλίκων τους, στις δοκιμασίες που τους δόθηκαν τεσσεράμισι εβδομάδες μετά την παρέμβαση για τρεις συνεχόμενες μέρες.

Αποκλείονται οι έρευνες των Banda & Kubina (2010) και Banda, McAfee, Lee & Kubina (2007) καθώς αφορούν έφηβα παιδιά με αυτισμό, με ερευνητικό αντικείμενο που δεν σχετίζεται με τις ακαδημαϊκές δεξιότητες των μαθητών (Spencer, Evmenova, Boon, & Hayes-Harris, 2014), αλλά με το κατά πόσο το επίπεδο υψηλής κατάκτησης μιας συγκεκριμένου τύπου δραστηριότητας επηρεάζει την προτίμηση που δείχνουν σε αυτού του τύπου τις δραστηριότητες (Agrawal, 2013). Αποκλείεται, επίσης, η έρευνα του Holified et al. (2012) όπου μελετάται η επίδραση της αυτοκαθοδήγησης δύο μαθητών του δημοτικού με αυτισμό στην δέσμευση (της προσοχής και την διασφάλιση της εμπλοκής) και στην ακρίβεια εκτέλεσης των δραστηριοτήτων, με τα αποτελέσματα να συνηγορούν υπέρ της αύξησης της προσοχής στην εργασία, που συνακόλουθα οδηγεί στην αύξηση της ακαδημαϊκής επίδοσης (Spencer et al., 2014).

Η Agrawal (2013) αναφέρεται και σε άλλες έρευνες, όπως αυτή των Cihac & Foust (2008), οι οποίοι συγκρίνουν την αποτελεσματικότητα δυο διαφορετικών στρατηγικών για την πρόσθεση μονοψήφιων αριθμών, σε τρεις μαθητές του δημοτικού με αυτισμό. Η πρώτη αφορά στη χρήση της αριθμογραμμής και η δεύτερη στην στρατηγική «touch-point» με την αξιοποίηση του προγράμματος *TouchMath* (πραγματοποιείται άγγιγμα – συνήθως- και απαρίθμηση των σημείων-κουκίδων που αποτυπώνονται πάνω στο γραπτό σύμβολο του κάθε αριθμού και αντιστοιχούν σε αριθμό, στον αριθμό που συμβολίζεται κάθε φορά). Οι δυο στρατηγικές διδάχθηκαν παράλληλα και οι μαθητές εξασκούνταν μια φορά καθημερινά και στις δυο, έως να αποκτήσουν αυτονομία και ακρίβεια στην επίλυση σε τρεις διαδοχικές ερευνητικές συνεδρίες (όπως αναφέρεται στο Spencer et al., 2014). Οι μαθητές σημείωσαν πρόοδο 27% με τη χρήση της στρατηγικής touch point και 17% με τη χρήση της αριθμογραμμής (όπως αναφέρεται στο Agrawal, 2013), γεγονός που καθιστά αποτελεσματικότερη τη χρήση της στρατηγικής με άγγιγμα στα σημεία μέτρησης. Παρ' ότι η έρευνα δεν αφορά στην επίλυση γραπτών μαθηματικών προβλημάτων, αναφέρονται ως προς τη θετική επίδραση που φαίνεται να έχει στους μαθητές η τεχνική αυτή που απαιτεί άγγιγμα

σημείων, άρα προϋποθέτει τη συμμετοχή του σώματος και συγκριμένα των δακτύλων (ή/και έμμεσα με το κράτημα ενός αντικειμένου, συνήθως μολυβιού).

Η ίδια τεχνική έφερε θετικά αποτελέσματα και σε άλλες έρευνες, όπως η έρευνα του Eichel (2007) που όπως παραθέτει η Agrawal (2013) αφορά τη χρήση της στρατηγικής touch-point με εφαρμογή σε πραγματικές καταστάσεις και την αναγνώριση νομισμάτων σε έναν δεκατριάχρονο μαθητή με αυτισμό και η έρευνα που αναφέρει ο Spencer και οι συνεργάτες του (2014) των Waters & Boon (2011) στη χρήση του προγράμματος *TouchMath* σε δυο έφηβους μαθητές με αυτισμό και μέτρια νοητική υστέρηση στην αφαίρεση τριψήφιων αριθμών με εφαρμογές στη χρήση χρημάτων. Παρά τα θετικά τους αποτελέσματα, έρευνες αυτές δεν εξυπηρετούν στην παρούσα εργασία, καθώς αφορούν στην εφηβική ηλικία (και στη μία συνυπάρχει νοητική υστέρηση με τις ΔΑΦ) και κυρίως, δεν βρίσκουν εφαρμογή σε γραπτά μαθηματικά προβλήματα, εφόσον σχετίζονται με τη χρήση χρημάτων με εφαρμογή σε πραγματικές καταστάσεις.

Από τις ελάχιστες έρευνες που παρατέθηκαν, γίνεται σαφής η μεγάλη έλλειψη ερευνητικών δεδομένων ως προς την επίλυση γραπτών μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, χωρίς τη συνύπαρξη συνοδών διαταραχών. Συνεπώς, καταδεικνύεται η αναγκαιότητα της εκπόνησης περισσότερων σχετικών ερευνών, καθώς το συνεχώς αυξανόμενο ποσοστό συμπερίληψη των μαθητών με διαταραχές αυτιστικών διαταραχών στις γενικές τάξεις των σχολείων, δημιουργεί την αναγκαιότητα εφαρμογής καταλληλότερων και αποτελεσματικότερων μεθόδων και μέσων κατά τη διδασκαλία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, που θα προωθήσουν τις διαδικασίες της μάθησή τους μέσα στη γενική τάξη.

2. Η ΕΡΕΥΝΑ

2.1 Η ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ - ΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Με βάση τις προηγούμενες έρευνες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε παιδιά με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος και τις παρατηρήσεις από την εφαρμογή της κοινωνικής σημειωτικής προσέγγισης στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, το γενικό ερευνητικό ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Σε ποιο

βαθμό και με ποιον τρόπο μπορούν οι μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος να ωφεληθούν από την κοινωνική σημειωτική προσέγγιση στη διδασκαλία της επίλυσης λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων, μέσω της αλληλεπίδρασης των μελών της ομάδας κατά την επίλυση, με την αξιοποίηση της γλώσσας, των κινήσεων των χεριών, των διάφορων απτικών υλικών, των εργαλείων και των άλλων μέσων εξαντικειμενίκευσης, κατά τον Radford.

Τα επιμέρους ερωτήματα που ανακύπτουν είναι: Ποια μέσα εξαντικειμενίκευσης προτιμούνται από τους μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος; Κυρίως μας ενδιαφέρει η αξιοποίηση ή μη των κινήσεων των χεριών και των απτικών αντικειμένων. Ποιες σημειωτικές δεσμίδες δημιουργούνται, δηλαδή σε συνδυασμό με ποια άλλα μέσα εξαντικειμενίκευσης εμφανίζονται; Με ποιο τρόπο λειτουργούν διαμεσολαβητικά στην επίτευξη της γνώσης; Με ποιο τρόπο τα διάφορα μέσα συμβάλουν στην επικοινωνία μεταξύ των μελών της ομάδας (στη βάση δημιουργίας ενός αναπαραστατικού συστήματος) και σε ποιο βαθμό υιοθετούνται τρόποι αναπαράστασης που παρουσιάζονται από τους άλλους; Ποιος ο διαμεσολαβητικός ρόλος των συμμαθητών της ομάδας και του/της εκπαιδευτικού;

Αρχικά, λόγω των χαρακτηριστικών στον αυτισμό επικοινωνιακών ελλειμμάτων, υποθέτουμε ότι ο μαθητής θα δυσκολευτεί να εξηγήσει (αποκλειστικά) λεκτικά τον τρόπο σκέψης του με σαφή τρόπο στους άλλους. Εξαιτίας της δυσκολίας στις μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας που συνοδεύουν τον αυτισμό, υποθέτουμε ότι θα χρησιμοποιηθούν σε πολύ περιορισμένο βαθμό χειρονομίες που να αποδίδουν μια μαθηματική έννοια, κατά την επεξήγηση του μαθηματικού συλλογισμού. Αναμένουμε ότι θα ωφεληθεί από τις χειρονομίες των άλλων κατά τη δική τους εξήγηση, μόνο εφόσον μπορέσει να τις ερμηνεύσει, (δηλαδή σε επίπεδο εννοιολογικής, κυρίως, κατανόησης), αλλά αναμένεται να μην τις υιοθετήσει εύκολα ή/και άμεσα στις δικές του ενέργειες. Ως προς τη χρήση απτικών αντικειμένων, αυτή έχει συνδεθεί στο παρελθόν μόνο με την άμεση διδασκαλία στρατηγικών και δεξιοτήτων σε παιδιά με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, οπότε έχει ενδιαφέρον να παρατηρηθεί η αυθόρμητη αξιοποίηση ενός απτικού υλικού από τους μαθητές αυτούς για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, στο πλαίσιο της ομαδικής εργασίας. Υποθέτουμε ότι θα χρησιμοποιήσει (αυθόρμητα) τα υλικά, εφόσον προσελκύσουν το ενδιαφέρον του, και ενδεχομένως εκείνα που του είναι περισσότερο οικεία ή περισσότερο βολικά, δηλαδή

εκείνα που παρουσιάζουν κάποια ομοιότητα με τα δεδομένα του προβλήματος που θέλει να αναπαραστήσει ή που του επιτρέπουν να τα επεξεργαστεί με μεγαλύτερη ευελιξία και να αναπτύξει ευκολότερα το μαθηματικό συλλογισμό του. Επιπλέον, με δεδομένο ότι δεν προτιμούνται συνήθως οι δραστηριότητες που απαιτούν εφαρμογή γραφοκινητικών δεξιοτήτων, αλλά και το γεγονός ότι η ίδια η χρήση των αντικειμένων κάνει πιο ενδιαφέρουσα και ευέλικτη την όλη διαδικασία επίλυσης, υποθέτουμε ότι είναι αρκετά μεγάλη η πιθανότητα της χρησιμοποίησης των απτικών αντικειμένων από τον μαθητή. Μάλιστα, υποθέτουμε ότι όσο πιο σύνθετη είναι η προβληματική κατάσταση, τόσο πιθανότερη είναι η ανάγκη για αναπαράσταση του προβλήματος μέσω απτικών υλικών. Επίσης, υποθέτουμε ότι η χρήση των υλικών αυτών από την ομάδα θα κινητοποιήσει και τον μαθητή να εργαστεί με αυτά, ακόμη κι αν δεν το έχει κάνει προηγουμένως αυθόρμητα.

Ως προς τη δυνατότητα να λειτουργήσει στο πλαίσιο της ομάδας, υποθέτουμε ότι θα είναι σε θέση να συμμετάσχει στις δραστηριότητες της ομάδας και να συμβάλει στις διαδικασίες επίλυσης με τους κατάλληλους χειρισμούς τόσο από μέρους των συμμαθητών, όσο και με τις αντίστοιχες παραινέσεις και προτροπές από τον /την εκπαιδευτικό. Η εργασία στο πλαίσιο της ομάδας είναι πιθανό να μειώσει το όποιο άγχος σχετικά με το μάθημα των μαθηματικών και συγκεκριμένα με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, εφόσον μοιράζεται η ευθύνη ανάμεσα σε πολλούς και ο καθένας μπορεί να συνδράμει ανάλογα με τις δυνατότητές του στην από κοινού προσπάθεια. Αυτό βέβαια εξαρτάται πολύ από το παιδαγωγικό κλίμα της τάξης και τη σχέση μεταξύ των μελών της ομάδας. Από την άλλη, τα επικοινωνιακά ελλείμματα, ενδέχεται να αποθαρρύνουν αρχικά τον μαθητή από το να συμμετάσχει, αλλά η χρήση των υλικών (και των λοιπών μέσων αναπαράστασης) υποθέτουμε ότι, εκτός από το να υποβοηθήσει τη μαθηματική σκέψη, μπορεί να βελτιώσει την ίδια την επικοινωνία της ομάδας. Έτσι, μπορεί να τονωθεί η αυτοπεποίθηση του μαθητή και η εμπιστοσύνη στις δυνάμεις του, να νιώσει ότι συμβάλει κι εκείνος στην ομάδα και ότι τον αποδέχονται περισσότερο, άρα να αποκτήσει ένα θετικότερο αυτοσυναίσθημα., αλλά και μια θετικότερη στάση απέναντι στο μάθημα και συγκεκριμένα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Ως προς το διαμεσολαβητικό ρόλο των μελών της ομάδας, υποθέτουμε ότι μπορεί να πραγματοποιηθεί έμμεσα, καθώς παρατηρεί τις δικές τους συμπεριφορές αλλά και

άμεσα, μέσα από την αλληλεπίδρασή τους κατά την επίλυση. Μπορεί οι μαθητές μέσα από τη διαφορετική χρήση του ίδιου υλικού ή τη χρήση διαφορετικών μέσων και διαύλων επικοινωνίας, να προωθήσουν την κατανόηση και να συνδράμουν στη διεύρυνση των γνωστικών σχημάτων των συμμαθητών τους αλλά και των ιδίων. Στην περίπτωση της ενσωμάτωσης στην ομάδα παιδιού στο φάσμα του αυτισμού, υποθέτουμε ότι θα χρειαστεί μεγαλύτερη καθοδήγηση από τα μέλη της ομάδας και ίσως παροχή αναλυτικότερων εξηγήσεων, εφόσον η παρακολούθηση και κυρίως η συμμετοχή στις αλληλεπιδραστικές διαδικασίες της ομάδας, είναι δυσκολότερη στην περίπτωση αυτών των μαθητών και χρειάζεται περισσότερη υποστήριξη. Η υποστήριξη αυτή υποθέτουμε ότι θα παρασχεθεί συχνότερα από το δάσκαλο προς όλους τους μαθητές της ομάδας, προκειμένου να διευκολυνθεί η μεταξύ τους επικοινωνία για να λειτουργήσουν όλα τα μέλη με ομαδικότητα.

2.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε μελέτη περίπτωσης με άμεση συμμετοχική παρατήρηση (Cohen & Manion, 1994) ενός μαθητή με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος κατά τη διαδικασία επίλυσης γραπτών μαθηματικών προβλημάτων στο πλαίσιο ομαδικής εργασίας στην τάξη του. Το υλικό συλλέχθηκε με καταγραφή σημειώσεων πεδίου από την ερευνήτρια. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με βάση τις κοινωνικές σημειωτικές θεωρίες σχετικά με την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, κατά το πρότυπο των αναλύσεων των Arzarello και Radford. Επίσης, στην περίπτωση του πρώτου προβλήματος, η κατηγοριοποίηση των κινήσεων ακολούθησε τη θεωρία του McNeill (1992).

Το προφίλ του μαθητή

Ο μαθητής που επιλέχθηκε για τη μελέτη περίπτωσης, φοιτά στην Στ' τάξη γενικού δημοτικού σχολείου της πρωτεύουσας και είναι πλήρως ενταγμένος στο πρόγραμμα της τάξης του. Έχει διαγνωστεί για διαταραχές του αυτιστικού φάσματος από πιστοποιημένο φορέα, η νοημοσύνη του βρίσκεται στα φυσιολογικά όρια, ενώ δεν εμφανίζει ειδική μαθησιακή δυσκολία στη γλώσσα ή τα μαθηματικά. Στα Μαθηματικά παρακολουθεί κανονικά το αναλυτικό πρόγραμμα της τάξης του, ενώ οι επιδόσεις του είναι πολύ καλές, και συμβαδίζουν με τον μέσο όρο των επιδόσεων των συμμαθητών

του. Κατά την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, διαβάζει συνήθως βιαστικά τις εκφωνήσεις και ορισμένες φορές δυσκολεύεται να αποδώσει με δικά του λόγια το πρόβλημα (χωρίς να το ξαναδιαβάσει). Ωστόσο, εφόσον το διαβάσει προσεκτικά, είναι σε θέση να καταλάβει την προβληματική κατάσταση και να διακρίνει ποια δεδομένα του χρειάζονται. Αρκετές φορές, ανακοινώνει παρορμητικά την πράξη που πρόκειται να κάνει και αλλάζει συχνά τη γνώμη του γι' αυτό. Αναζητά έντονα την επιβεβαίωση για την ορθότητα της σκέψης του ή της πράξης που επιλέγει και συχνά απογοητεύεται εάν κρατηθεί ουδέτερη στάση, καθώς την εκλαμβάνει ως αρνητική απάντηση. Ο ίδιος δηλώνει ότι τα μαθηματικά είναι το αγαπημένο του μάθημα και πιστεύει ότι είναι πολύ καλός σε αυτά.

Στη γλωσσική έκφραση αντιμετωπίζει ορισμένες δυσκολίες και ελλείμματα, που όμως δεν εμποδίζουν την επικοινωνιακή του διάθεση, ούτε στέκονται εμπόδιο στην επικοινωνία με τους συμμαθητές του. Παρ' όλα, αυτά δυσκολεύεται να εκφράσει πάντα με σαφή τρόπο αυτά που σκέφτεται και αυτή η δυσκολία στο να γίνει αντιληπτός, τον αποθαρρύνει και τον οδηγεί, ορισμένες φορές, στην εγκατάλειψη της προσπάθειας, ιδιαίτερα κατά την επικοινωνία του με τους ενηλίκους. Είναι αποδεκτός στην τάξη του, έχει πολύ καλή σχέση με όλους τους συμμαθητές του ανεξαρτήτως φύλου, και έχει σχετικά καλή κοινωνική αλληλεπίδραση. Δεν εμφανίζει ιδιαίτερη προσκόλληση σε ρουτίνες ή ενδιαφέροντα που να καθιστούν προβληματική την προσαρμογή του ή την απόδοσή του στα μαθήματα. Του αρέσει ιδιαίτερα να φτιάχνει κατασκευές από χαρτί.

Η διαδικασία

Στο πλαίσιο της έρευνας εκπονήθηκαν τρία γραπτά μαθηματικά προβλήματα που αποτέλεσαν τη βάση της εργασίας των μαθητών σε ομάδες. Τα προβλήματα δόθηκαν στους μαθητές εντός του σχολικού ωραρίου και εντός της τάξης τους, παρουσία του εκπαιδευτικού της τάξης και είχαν διάρκεια που δεν υπερέβη τη μια διδακτική ώρα τη φορά. Η τάξη ήταν ήδη οργανωμένη σε ομάδες, η σύσταση των οποίων αναδιαμορφωνόταν από τον εκπαιδευτικό κάθε μήνα. Λόγω της καλής σχέσης όλων των μαθητών μεταξύ τους και δεδομένου του καλού μέσου όρου επιδόσεων των μαθητών της τάξης, δεν κρίθηκε απαραίτητη η αναδιαμόρφωση της ομάδας στην οποία ήταν τοποθετημένος ο μαθητής για την επίλυση των μαθητικών προβλημάτων. Στην

πρώτη παρατήρηση η σύσταση της ομάδας ήταν σταθερή στα άτομα και μεικτή ως προς το φύλο (δυο κορίτσια, ένα αγόρι) ενώ μεταβλήθηκε στις δύο επόμενες παρατηρήσεις, αποτελούμενη μόνο από αγόρια. Το πρώτο πρόβλημα μοιράστηκε σε απόσταση τριών εβδομάδων από τα επόμενα. Το δεύτερο και το τρίτο πρόβλημα πραγματοποιήθηκαν σε δυο διαδοχικές εβδομάδες.

Στην αρχή της διαδικασίας για κάθε πρόβλημα, εξηγούνταν από την ερευνήτρια σε όλους τους μαθητές της τάξης οι συνθήκες εργασίας υπό τις οποίες καλούνταν να εργαστούν. Η ερευνήτρια πραγματοποιούσε μεγαλόφωνη ανάγνωση των προβλημάτων, ώστε οι μαθητές να έχουν ακούσει έστω και μια φορά σωστά διατυπωμένο το πρόβλημα και να διασφαλιστεί ότι εκκινούν από την ίδια βάση ως προς την αρχική ανάγνωση του κειμένου των προβλημάτων. Στο σημείο αυτό, επιτράπηκε στους μαθητές να εκφράσουν τυχόν απορίες τους προς την ερευνήτρια. Η διαδικασία αυτή ακολουθήθηκε, έτσι ώστε να μην πραγματοποιηθεί (κατά το δυνατόν) καμία διακοπή κατά τη διάρκεια της παρατήρησης της ερευνήτριας από τις ομάδες. Η ερευνήτρια φρόντισε να μην προβεί σε καμία κίνηση και (κατά το δυνατό) άλλου είδους υπόδειξη (πχ. μέσω του λόγου) κατά την ανάγνωση, ώστε να μην επηρεάσει τους μαθητές ως προς τα σημειωτικά μέσα που θα ανέπτυσαν στη συνέχεια. Για τον ίδιο λόγο δόθηκαν ελάχιστες διευκρινίσεις, σχετικά με το περιεχόμενο (και όχι για τον τρόπο προσέγγισής του), ενώ ζητήθηκε να διαβαστεί ξανά το κάθε πρόβλημα στην ομάδα και να βεβαιωθούν ότι όλοι το καταλαβαίνουν, πριν ξεκινήσουν την επεξεργασία του. Τονίστηκε, ιδιαίτερα η συνεργασία στο πλαίσιο της ομάδας. Έπειτα, η ερευνήτρια αναφερόταν στα φύλλα εργασίας και τα υπόλοιπα υλικά που είχαν στη διάθεσή τους για να λύσουν το πρόβλημα και εκκινούσε τις διαδικασίες επίλυσης. Ως προς τα απτικά υλικά του πρώτου προβλήματος, η ερευνήτρια ανέφερε, επιπλέον, ότι η χρησιμοποίησή τους για την επίλυση είναι προαιρετική.

Η παρατήρηση του μαθητή εκκινούσε αμέσως μετά και τελείωνε όταν ο μαθητής δεν είχε πλέον καμία αλληλεπίδραση με την ομάδα του (ή την τάξη) στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας. Η ερευνήτρια, μετακινούνταν κοντά στον μαθητή με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, ώστε να καταστεί δυνατή η λεπτομερής παρατήρηση της συμπεριφοράς του. Η παρατήρηση συμπεριέλαβε και την αλληλεπίδραση με την ομάδα του, όπως είναι φυσικό, αλλά και με την ερευνήτρια, στην οποία ο μαθητής στράφηκε πολλές φορές, καθιστώντας δύσκολη την

αποστασιοποίησή της από τη διαδικασία και τον περιορισμό του ρόλου της στην απλή παρατήρηση. Σκοπός της ερευνήτριας ήταν εντοπίσει τις κινήσεις που θα πραγματοποιούσε ο μαθητής με τα χέρια του (και γενικότερα τη στάση του σώματός του), σημειώνοντας ορισμένα από τα χαρακτηριστικά τους σε αυτοσχέδιες φόρμες καταγραφής στις οποίες προέβη εκ των προτέρων, ώστε να καταστεί εφικτή η γρήγορη και ακριβέστερη καταγραφή τους. Παρόμοια, διαδικασία ακολουθήθηκε και για την αξιοποίηση των απτικών υλικών. Τα υπόλοιπα σημειωτικά μέσα καταγράφηκαν με προσοχή, άλλοτε τη στιγμή που συνέβαιναν (οπωσδήποτε καταγραφή σημαντικών λέξεων-με βαρύνουσα σημασία ως προς τις διαδικασίες) και άλλοτε αμέσως μετά, στο κενό διάστημα που δημιουργούνταν κατά την εκτέλεση υπολογισμών με χρήση αλγορίθμων. Μετά το πέρας της κάθε διαδικασίας, ακολουθούσε από την ερευνήτρια λεπτομερής και αναλυτική καταγραφή και περιγραφή της κάθε διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας, όπως έγινε αντιληπτή και καταγράφηκε στο πεδίο έρευνας.

Για πρακτικούς λόγους, ο μαθητής με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος αναφέρεται ως Μ, η ερευνήτρια ως Ε και οι υπόλοιποι μαθητές της εκάστοτε ομάδας του μαθητή ως Μ1, Μ2 και τα λοιπά, ανάλογα με το πόσοι αναφέρονται κατά την ανάλυση της επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων.

Τα γραπτά μαθηματικά προβλήματα της έρευνας

Το πρόβλημα της σκάλας (παράρτημα 1)

Ένα παιδί ποτίζει τα φυτά που βρίσκονται στη σκάλα μιας πολυκατοικίας. Για να ποτίσει όλα τα φυτά, ακολουθεί έναν συγκεκριμένο ρυθμό. Ανεβαίνει 2 σκαλοπάτια με μια κίνηση και ποτίζει το φυτό που βρίσκεται στα αριστερά της σκάλας. Στη συνέχεια, κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι και ποτίζει το φυτό που βρίσκεται στη δεξιά μεριά της σκάλας. Μόλις φτάσει στην κορυφή της σκάλας σταματάει (δεν ξανακατεβαίνει).

α) Πόσες κινήσεις θα πρέπει να κάνει για να ανέβει στην κορυφή της σκάλας;

β) Πόσα φυτά υπάρχουν στη δεξιά μεριά της σκάλας;

Το πρόβλημα της ανακύκλωσης (Παράρτημα 2)

Με αφορμή την παγκόσμια ημέρα ανακύκλωσης (14 Νοεμβρίου) οι δάσκαλοι ενός Δημοτικού Σχολείου συγκέντρωσαν ανακυκλώσιμα υλικά από χαρτί και πλαστικό σε μια χάρτινη κούτα, για να δείξουν στους μαθητές τον σωστό τρόπο διαχωρισμού και

ανακύκλωσης των υλικών αυτών, αλλά και για να τους παρακινήσουν στο να ανακυκλώνουν. Έτσι, οι μαθητές αποφάσισαν να συγκεντρώνουν στο σχολείο τους πλαστικές και χάρτινες συσκευασίες, τις οποίες θα στέλνουν στο τέλος κάθε εβδομάδας στο Δήμο τους για να ενισχύσουν την προσπάθεια ανακύκλωσης που πραγματοποιεί. Οι μαθητές συμφώνησαν να συγκεντρώνουν και να στέλνουν δυο κούτες ανακυκλώσιμων υλικών κάθε εβδομάδα. Στο τέλος της πρώτης εβδομάδας, οι μαθητές έστειλαν τη μια κούτα των δασκάλων τους και τις δυο κούτες με υλικά που ανακύκλωσαν μόνοι τους, δηλαδή, έστειλαν συνολικά τρεις κούτες για ανακύκλωση. Στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας έστειλαν άλλες δυο κούτες με υλικά ανακύκλωσης, έχοντας στείλει συνολικά πέντε κούτες στο Δήμο τους.

Πόσες κούτες θα έχουν στείλει συνολικά στο τέλος της 3^{ης}, 4^{ης} και 5^{ης} εβδομάδας;

Πόσες κούτες θα έχουν στείλει την 10^η, 15^η την 25^η εβδομάδα;

Το πρόβλημα των κήπων (Παράρτημα 3)

Η Δ' τάξη ενός Δημοτικού σχολείου ανέλαβε το φύτεμα και το πότισμα δύο κήπων που φτιάχτηκαν ειδικά για το σκοπό αυτό στην αυλή του σχολείου. Το κάθε τμήμα θα ήταν υπεύθυνο για έναν κήπο. Τα δυο τμήματα άρχισαν να διαφωνούν για το ποιον κήπο θέλουν να αναλάβουν, γιατί και οι δυο ήθελαν τον μεγαλύτερο. Τελικά, ο διευθυντής πρότεινε να κάνουν κλήρωση ώστε η επιλογή να είναι τυχαία και δίκαιη. Το Δ1 πήρε τον αριστερό κήπο και το Δ2 τον δεξί κήπο. Τη Δευτέρα το πρωί, τα δυο τμήματα βγήκαν έξω, μεταφέροντας και ένα θρανίο από την τάξη τους για να ακουμπούν επάνω τα εργαλεία τους, και ξεκίνησαν το φύτεμα. Κάποια στιγμή, όμως, άρχισαν πάλι να διαφωνούν για το ποιος είχε πάρει το μεγαλύτερο κήπο. Το κάθε τμήμα υποστήριζε ότι ο δικός τους κήπος ήταν ο πιο μεγάλος. Έτσι, ο διευθυντής, για να λύσει το πρόβλημα, αποφάσισε να ζητήσει τη βοήθεια της Στ' τάξης. Τους έδωσε ένα σχέδιο και τους ρώτησε:

- Μπορείτε να υπολογίσετε την επιφάνεια του κάθε κήπου;
- Ποια αλλαγή προτείνετε να γίνει ώστε και οι δύο κήποι να έχουν ίσο εμβαδόν;

Τα κριτήρια σχεδίασης και τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων της έρευνας

Τα τρία μαθηματικά προβλήματα σχεδιάστηκαν με κριτήριο τη δυνατότητα που παρείχαν ως προς την αξιοποίηση πρωτότυπων απτικών υλικών ή/και εργαλείων, ως προς την εκτέλεση χειρονομιών από τους μαθητές για την επίλυσή τους και γενικά ως προς την αξιοποίηση διάφορων μέσων εξαντικειμενίκευσης. Επιπλέον, επιλέχθηκαν

στη βάση της ύπαρξης μια πραγματικά προβληματικής κατάστασης, ώστε να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να οδηγήσουν στην αλληλεπίδραση των μελών των ομάδων προκειμένου να τα επιλύσουν. Ακόμα, σχεδιάστηκαν (τα δυο τελευταία) με σκοπό να φέρουν κάποια ομοιότητα με ορισμένα από τα προβλήματα που περιγράφουν ή εφαρμόσαν άλλοι ερευνητές στις δικές τους μελέτες, ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση των μέσων εξαντικειμενίκευσης, μιας και δεν υπάρχουν προηγούμενες έρευνες στην επίλυση πρωτότυπων γραπτών μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος για να στραφούμε κατά την ανάλυση και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας.

Το πρώτο πρόβλημα σχεδιάστηκε έτσι, ώστε να είναι αρκετά κατανοητό στη δομή του και προσιτό ως προς τις απαιτήσεις του (γλωσσικές και μαθηματικές), ενώ το περιεχόμενό του είναι οικείο, ώστε να μπορούν όλοι οι μαθητές να το προσεγγίσουν με κάποιον τρόπο. Βασικότερο όλων, όμως, είναι ότι προσφέρεται για αναπαράσταση μέσω κινήσεων. Επιπλέον, παρέχει ένα μοτίβο κίνησης αλλά υπόκειται σε έναν περιορισμό, που θα μας επιτρέψει να ελέγξουμε το βαθμό προσοχής που επιδεικνύεται κατά την ανάγνωση, με το να δούμε εάν αυτός ο περιορισμός έχει ληφθεί υπόψη στη λύση, αλλά και τις διαδικασίες ελέγχου της ομάδας ή/και την εφαρμογή μεταγνωστικών στρατηγικών. Στους μαθητές μοιράστηκε το φύλλο εργασίας με την διατύπωση του γραπτού μαθηματικού προβλήματος και τη (δισδιάστατη) σχεδιαστική απεικόνιση μιας σκάλας στο χώρο κάτω από το πρόβλημα. Επιπλέον, στη διάθεσή τους υπήρχαν λευκές κόλλες μεγέθους A4, πολύχρωμα χαρτόνια μεγέθους A4 και πλαστελίνη.

Η σκάλα, παρατέθηκε μέσω σχεδιαστικής αναπαράστασης στους μαθητές, παρά το ότι θα μπορούσαν μόνοι τους να προβούν στη σχεδίαση ή σε κάποιου είδους αναπαράσταση αξιοποιώντας τα υλικά που τους δόθηκαν. Αυτό, όμως, θα συνεπαγόταν την προσθήκη επιπλέον γραπτών-λεκτικών πληροφοριών (για τον αριθμό των σκαλοπατιών) στο πρόβλημα, γεγονός που πιθανόν να το έκανε πιο σύνθετο και περίπλοκο για μερίδα μαθητών, δημιουργώντας ένα αρνητικό πρώτο συναίσθημα που θα μπορούσε να θέσει σε κίνδυνο την κινητοποίηση του ενδιαφέροντος και της προσοχής τους, καθώς και της εμπλοκής τους στις διαδικασίες επίλυσης. Αντίθετα, θεωρήθηκε ότι η παροχή αυτού του δεδομένου μέσω ενός πιο δελεαστικού και προσιτού σε όλους αναπαραστατικού τρόπου, θα μπορούσε να κινητοποιήσει την

πλειονηφία των μαθητών, καθώς και να διευκολύνει την κατανόηση και την επεξεργασία του προβλήματος. Ωστόσο, αποδόθηκε σκόπιμα με τον πιο απλό σχεδιαστικό τρόπο, ούτως ώστε να μην αποκλείεται η συμπλήρωση χαρακτηριστικών, όπως η απόδοση βάθους για να αποτυπωθεί σαφέστερα η χωρικότητα (αριστερά-δεξιά) ή η συμπλήρωση άλλων στοιχείων με επιπρόσθετο σημειωτικό ενδιαφέρον. Μάλιστα, ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του είδους των πληροφοριών που θα θεωρηθεί σημαντικό από τους μαθητές να αναπαρασταθούν καθώς και του τρόπου με τον οποίον θα αποδοθεί η αναπαράσταση αυτή. Αυτός είναι και ένας λόγος για τον οποίον έχουν σκόπιμα χρησιμοποιηθεί στο πρόβλημα λέξεις «αποφορτισμένες» από κοινωνικά ή λοιπά προσδιοριστικά χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα οι λέξεις «παιδί» και «φυτό».

Το πρόβλημα θεωρείται ότι θα επιτρέψει την παρακολούθηση της πορείας της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, όπως πιθανόν θα αποτυπωθεί στο χαρτί, αλλά κυρίως όπως αναμένεται να εκφραστεί μέσω των σωματικών κινήσεων, κυρίως των χειρονομιών, κατά την προσπάθειά τους να εξηγήσουν και να συζητήσουν την άποψή τους στους συμμαθητές τους στο πλαίσιο της ομαδικής εργασίας. Η παρατήρηση αυτή θα πραγματοποιηθεί με σημειωτικούς όρους κατηγοριοποίησης των κινήσεων, που συνοδεύουν συνήθως το λόγο, (με βάση την προτεινόμενη κατηγοριοποίηση του McNeil, 1992) εστιάζοντας στις εικονικές και δεικτικές κινήσεις που στοχεύουν στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων (και αφήνοντας εκτός όσες αφορούν στην συνεννόηση μεταξύ των μελών της ομάδας, και όσες δεν σχετίζονται με κάτι από τα παραπάνω). Εικονικές θα θεωρηθούν κινήσεις που υποδηλώνουν για παράδειγμα ένα αντικείμενο ή μια κίνηση με αυτό, όπως το πότισμα (κράτημα ποτιστηριού και πλάγια θέση του για να δηλωθεί η ενέργεια του ποτίσματος), το παιδί ή τη σκάλα. Δεικτικές εδώ μπορεί να είναι κινήσεις που θα γίνουν με το δάχτυλο ή με το κράτημα του μολυβιού στο σχήμα (τη σκάλα) ή στο χώρο (πχ. με τον αντίχειρα δείχνοντας κατεύθυνση) με σκοπό την εξήγηση της μαθηματικής σκέψης. Ο βαθμός στον οποίο αυτές οι κινήσεις εκφράζουν μαθηματικές έννοιες θα εξαρτηθεί (και) από τα λόγια που τις συνοδεύουν.

Οι κινήσεις θα εξεταστούν και ως προς τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους, όπως τα ορίζει ο Mc Neil (1992), αποκαλύπτοντας πληροφορίες σχετικά με το χώρο όπου πραγματοποιούνται οι κινήσεις, την κατεύθυνση ή την πορεία των κινήσεων αυτών,

τον τρόπο πραγματοποίησής τους και τέλος, τη χρονική αλληλουχία τους. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αναμένεται μεγάλος αριθμός κινήσεων «πορείας», από τα άνω άκρα και κυρίως την παλάμη, στον κατακόρυφο κυρίως άξονα (πάνω-κάτω) χωρίς να αποκλείεται ο οριζόντιος (δεξιά-αριστερά) και κινήσεις «χρονικής ακολουθίας». Ο χώρος κίνησης θα μπορούσε να αποδοθεί μέσω της κλιμακωτής και επίπεδης διαβάθμισης (του χώρου κατά την κίνηση). Ο τρόπος κίνησης, εκτιμούμε ότι δε θα αποδοθεί με μιμητικό τρόπο (π.χ. χρήση δαχτύλων ως ανθρώπινα πόδια), αλλά ενδεχομένως θα μπορούσε να αποτυπωθεί μέσω δυο μικρών κινήσεων – βημάτων, σαν να πρόκειται για ένα σταδιακό ανέβασμα σε σκάλα, όμοιο με αυτό που θα έκανε ένας άνθρωπος για να ανέβει μια σκάλα.

Το πρόβλημα με την ανακύκλωση εμπνεύστηκε από το πρόβλημα με τον κουμπαρά του Radford και από τις προηγούμενες εφαρμογές ομαδικών διδακτικών διαδικασιών που πραγματοποίησε με τους συνεργάτες του στις αλγεβρικές ακολουθίες (Radford, 2003, 2013a, 2013b, 2013c). Πέρα από το φύλλο εργασίας με την διατύπωση του γραπτού προβλήματος, τα υλικά που δόθηκαν ήταν ξύλινα κυβάρια με μήκος ακμής περίπου 1,5 εκατοστό και πέντε σελίδες A4, στο πάνω μέρος των οποίων υπήρχε από μια ένδειξη με κόκκινο χρώμα, (αντικαθιστώντας τις μάρκες και τα διάφανα πλαστικά ποτηράκια, αντίστοιχα, στο πρόβλημα του κουμπαρά). Η πρώτη σελίδα έγραφε 1^η, η δεύτερη 2^η και ούτω κάθε εξής μέχρι την πέμπτη σελίδα. Οι σελίδες επιλέχθηκαν γιατί υπερπηδούν τη δυσκολία που δημιούργησαν τα ποτήρια στην εφαρμογή του προβλήματος του Radford και οδηγούν αμεσότερα (και υποθέτουμε ευκολότερα) στην οργανωμένη διάταξη του απτικού υλικού στο χώρο, επιτρέποντας την οπτικοποίηση και την παρατήρηση της δομής αυτής (δηλαδή της αριθμητικής και συνακόλουθα της αλγεβρικής ακολουθίας). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ενδιαφέρει ιδιαίτερα ο τρόπος με τον οποίο τα διάφορα σημειωτικά μέσα αλλά και οι κινήσεις μπορούν να λειτουργήσουν διαμεσολαβητικά, οδηγώντας στην συνειδητοποίηση της αριθμητικής ακολουθίας μέσω της παρατήρησης της οργανωμένης διάταξης των «αντικειμένων» στο χώρο. Επειδή, το πρόβλημα έχει έναν βαθμό δυσκολίας, ανάλογα και με την πρόοδο των εργασιών των ομάδων, υποθέτουμε ότι θα χρειαστεί να διακοπεί η εργασία των ομάδων και να μετατοπιστεί η διδακτική διαδικασία στο σύνολο της τάξης, με μια σειρά μεθοδευμένων ενεργειών από μέρους της ερευνήτριας, κατά τον τρόπο που αυτές πραγματοποιήθηκαν από την εκπαιδευτικό στο παράδειγμα διδακτικών χειρισμών που δίνει ο Radford. Επομένως, το ενδιαφέρον εστιάζεται και στους τρόπους με τους

οποίους οι μαθητές μπορεί να ωφεληθούν από την ερευνήτρια καθώς και εάν θα μιμηθούν ή θα υιοθετήσουν στοιχεία από τη δική της συμπεριφορά.

Το τρίτο πρόβλημα με τους κήπους και το σχέδιο (Παράρτημα 4) εν είδει κάτοψης, εμπνεύστηκε από το πρόβλημα των Seeger & Steinbring (1994, όπ. αναφ. στο Radford, 2003), στο οποίο ζητούμενο ήταν να αποφανθούν οι μαθητές σχετικά με το ύψος ενός δέντρου, βασισμένοι στη σχεδιαστική απεικόνισή του δίπλα σε ένα σπίτι. Για τα πρόβλημα με τους κήπους μοιράστηκε σε κάθε μαθητή ένα φύλλο εργασίας με τη διατύπωση του γραπτού μαθηματικού προβλήματος και σε κάθε ομάδα δόθηκε από ένα φύλλο μεγέθους A4 (όχι μιλιμετρέ) με το σχέδιο μιας κάτοψης (Παράρτημα 4). Σε αυτή περιλαμβανόταν ένα μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, καταλαμβάνοντας το μεγαλύτερο μέρος της σελίδας, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σχήμα, τοποθετημένο στην πάνω αριστερή άκρη του μεγάλου ορθογωνίου, με την γραπτή σημείωση της λέξης «ΣΧΟΛΕΙΟ» μέσα του, ένα μικρό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στην κάτω αριστερή άκρη του μεγάλου, μια διαγώνια γραμμή που δημιουργεί ένα τρίγωνο στην κάτω δεξιά άκρη του μεγάλου ορθογωνίου, και δυο πολύ μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμο με ορισμένα σχέδια πάνω τους. Το ένα βρισκόταν σε μικρή απόσταση πάνω από το ορθογώνιο (παράλληλα με αυτό) και το άλλο σε μικρή απόσταση από το τρίγωνο (με πλάγιο προσανατολισμό, παράλληλο με την υποτείνουσα του τριγώνου). Στην ερμηνεία ορισμένων από τα σχέδια αυτά, ήταν απαραίτητη η κατανόηση των δεδομένων του γραπτού μαθηματικού προβλήματος. Έτσι, πέρα από το σχολικό κτήριο και την αυλή, τα υπόλοιπα σχέδια αποτελούν τους δυο κήπους διαφορετικού σχήματος, τα δυο θρανία και ορισμένα κηπευτικά εργαλεία.

Ζητούμενο, αρχικά, είναι οι μαθητές να εντοπίσουν εκείνη τη σχεδιαστική απεικόνιση του αντικειμένου, ανάμεσα στις άλλες, που θα τους επιτρέψει να προβούν σε συσχέτισή του με τα αντικείμενα του περιβάλλοντός τους, ώστε να βρουν την πληροφορία που χρειάζονται για αυτό. Από αυτό γίνεται σαφές, ότι οι μαθητές θα πρέπει αναγκαστικά να προβούν στην αξιοποίηση φυσικών αντικειμένων από το άμεσο περιβάλλον τους, συγκεκριμένα του θρανίου τους, καθώς και εργαλείων μέτρησης, για να μετρήσουν τις διαστάσεις του. Στη συνέχεια, απαιτείται η έμμεση συσχέτιση των στοιχείων του σχεδίου σε συνδυασμό με την προηγούμενη πληροφορία, προκειμένου να βρουν μια νέα πληροφορία (και έπειτα κι άλλες) που θα την χρησιμοποιήσουν για να εφαρμόσουν τους μαθηματικούς τύπους και να εκτελέσουν τους αλγόριθμους που

θα τους οδηγήσουν στην επίλυση. Κατά συνέπεια, δημιουργείται ένα ιδιαίτερα πρόσφορο έδαφος για ανάπτυξη δεικτικών κινήσεων και ποικιλίας μέσω σημείωσης (πχ. χρωματισμός). Η ευέλικτη αξιοποίηση των μαθηματικών τύπων υπολογισμού του Εμβαδού ορθογωνίου και τριγώνου, υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς που δημιουργεί η διατύπωση του προβλήματος, αποτελούν επίσης ζητούμενα του προβλήματος και επιτρέπουν την ανάπτυξη διαλόγου ανάμεσα στην ομάδα, όσο και την αξιοποίηση δεικτικών κινήσεων (κατά την εκτίμησή μας) με ενδιαφέρον για την μελέτη μας.

2.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

1^ο Πρόβλημα – Το πρόβλημα της σκάλας

Ο μαθητής, μετά από σιωπηλή ατομική επεξεργασία του προβλήματος, στράφηκε στην ερευνήτρια και της έθεσε ένα ερώτημα σχετικά με το πρόβλημα. Η ερευνήτρια τον προέτρεψε να το συζητήσει με την ομάδα του. Ωστόσο, αυτός δεν το έκανε, αλλά στράφηκε ξανά μπροστά του και κοίταξε για λίγο το φύλλο εργασίας του. Μάλιστα, είχε πλησιάσει την ερευνήτρια με το χαρτί του στο χέρι και της έθεσε ένα ερώτημα πριν ολοκληρωθεί η αρχική διαδικασία των διευκρινίσεων, δηλαδή, πριν ακόμα από την εκκίνηση των διαδικασιών επίλυσης. Για το λόγο αυτό, το επόμενο ερώτημά του προς την ερευνήτρια απαντήθηκε, προκειμένου να μην αποθαρρυνθεί από τη διαδικασία, όπως συνέβη προηγουμένως.

«Μ: Κυρία, είναι δυο κινήσεις, μια σκάλα;

Ε: Είναι δυο σκαλοπάτια με μια κίνηση. Ας ξαναδιαβάσουμε το πρόβλημα.»

Αρχικά, ο μαθητής χρησιμοποίησε προφανώς τη λέξη «σκάλα» αντί της λέξης «σκαλοπάτι», οπότε ο όρος αντικαταστάθηκε στην απάντηση. Έπειτα, θεωρήθηκε ότι η ερώτηση αφορούσε στα δεδομένα και ότι προέκυψε, κατά συνέπεια, από ελλιπή κατανόηση ή σύγχυση των δεδομένων αυτών, εφόσον αυτά αναφέρθηκαν αντίθετα, δηλαδή ως δυο κινήσεις και ένα σκαλί, αντί για δυο σκαλοπάτια και μια κίνηση. Γι' αυτό και προτάθηκε στον μαθητή η εκ νέου ανάγνωσή του. Ωστόσο, η ερώτηση του μαθητή ήταν ελλιπής στην διατύπωσή της και ενδεχομένως να μην ήταν αυτό που εννοούσε. Έτσι, δεν μπορεί να απορριφθεί εντελώς η περίπτωση να εννοούσε ότι οι δύο κινήσεις (βάσει του μοτίβου κίνησης) του παιδιού αντιστοιχούν σε ένα σκαλοπάτι

(για ανάβαση) κάθε φορά (δηλαδή: $2-1=1$). Επομένως, η ερώτηση ίσως να μη σχετιζόταν με την κατανόηση των δεδομένων, αλλά με την επιβεβαίωση της ορθότητας του τρόπου σκέψης και του αποτελέσματος κατά την επεξεργασία τους. Σε αυτή την περίπτωση, γίνεται φανερό ότι η απάντηση που του δόθηκε δεν ήταν η κατάλληλη. Σε κάθε περίπτωση, θα ήταν καλύτερο να είχε ζητηθεί από τον μαθητή να εξηγήσει εκτενέστερα τι εννοούσε λέγοντας δύο κινήσεις, πριν του δοθεί οποιαδήποτε απάντηση.

Ο μαθητής διάβασε χαμηλόφωνα το πρόβλημα, ενώ έδειχνε με το δάχτυλο του το σημείο που βρισκόταν κάθε φορά. Αφού διάβασε και τις δυο ερωτήσεις, του τέθηκε ξανά το πρώτο ερώτημα από την ερευνήτρια, δηλαδή πόσες κινήσεις θα κάνει για να φτάσει στην κορυφή της σκάλας. Αμέσως, ο μαθητής έφερε το σώμα του κοντά στο θρανίο σκύβοντας πάνω από το φύλλο εργασίας του. Τοποθέτησε το δείκτη του αριστερού του χεριού πάνω στο σχέδιο και συγκεκριμένα κάτω από το δεύτερο σκαλοπάτι της σκάλας του σχεδίου, ενώ με το δεξί έγραψε με το μολύβι του πάνω στο θρανίο Α και Κ τραβώντας ανάμεσά τους μια γραμμή, ώστε δημιούργησε δυο κάθετες στήλες. Έγραψε τον αριθμό 1 κάτω από την στήλη Α και τον αριθμό 1 κάτω από τη στήλη Κ. Συνέχισε μετακινώντας τον δείκτη του κάτω από το τρίτο σκαλοπάτι και γράφοντας τον αριθμό 1 κάτω από την καθεμία στήλη. Στη συνέχεια μετακίνησε τον δείκτη του κάτω από το τέταρτο σκαλοπάτι και κατέγραψε τον αριθμό 1 κάτω από την κάθε στήλη. Επανέλαβε την ίδια ακριβώς διαδικασία για το πέμπτο και το έκτο σκαλοπάτι, ενώ όταν έφτασε στο έβδομο, τοποθέτησε τον δείκτη του κάτω από αυτό, όπως και πριν, αλλά κατέγραψε τον αριθμό 1 μόνο κάτω από τη στήλη Α. Έπειτα, απομάκρυνε τον δείκτη του από το χαρτί, έστρεψε το σώμα του περισσότερο προς τη δεξιά μεριά του θρανίου του, όπου είχε σημειώσει τις δύο στήλες Α και Κ, τράβηξε μια οριζόντια γραμμή στο τέλος κάθε στήλης και σημείωσε το άθροισμα των αριθμών που είχε σημειώσει για την καθεμία. Έτσι, σημείωσε τον αριθμό 6 κάτω από τη στήλη Α και τον αριθμό 5 κάτω από τη στήλη Κ. Κάτω από το Α σημείωνε τις φορές που το παιδί του προβλήματος ανεβαίνει τη σκάλα και κάτω από το Κ τις φορές που κατεβαίνει. Δεν πραγματοποιήθηκε μεγалоφωνα απαρίθμηση, ούτε κάποια άλλη κίνηση με το σώμα που να φανερώνει κάποιου είδους ρυθμική μέτρηση. Η τοποθέτηση του δείκτη του στο σχέδιο φαίνεται να λειτούργησε ως ένα σημάδι του ανώτερου σημείου όπου έφτανε το παιδί με κάθε κίνηση κατά την οποία ανέβαινε, δηλαδή λειτούργησε ως δείκτης του σημείου ανάβασης (Α). Αυτό το σημείο ήταν

ταυτόχρονα το σημείο από όπου κατέβαινε στη συνέχεια ένα σκαλοπάτι. Ωστόσο, η κίνηση της κατάβασης, δεν πραγματοποιήθηκε με αντίστοιχη κίνηση του δείκτη στο σχέδιο, παρά το ότι καταμετρήθηκε στον αριθμό των κινήσεων, γεγονός που αποδεικνύει ότι πραγματοποιήθηκε έστω σε επίπεδο νοερού υπολογισμού και άρα, νοητικής εικονικής αναπαράστασης (έστω και μία φορά, αν υποθέσουμε ότι κάθε επόμενη επαναλαμβανόταν ως συνακόλουθη κίνηση). Μάλιστα, αξιοσημείωτο είναι το ότι δεν μπερδεύτηκε κατά την επανατοποθέτηση του δείκτη του, ώστε να εκκινήσει από εκείνο το σημείο τον υπολογισμό της ανοδικής κίνησης. Αντίθετα, έδειχνε κάθε φορά το αμέσως επόμενο σκαλοπάτι. Μάλιστα, αυτή η επανατοποθέτηση του δείκτη του στο επόμενο σκαλοπάτι, ακολουθούσε αμέσως μετά την γραπτή καταγραφή των κινήσεων, τόσο γρήγορα, που φαντάζει πολύ δύσκολο να άφηνε χρονικά περιθώρια για νοερή αναπαράσταση της κίνησης (καθώς θα απαιτούσε πρώτα εύρεση του σωστού σημείου εκκίνησης, δηλαδή ένα σκαλοπάτι κάτω από τον δείκτη του χεριού και στη συνέχεια νοερή απεικόνιση της ανοδικής κίνησης για δύο σκαλοπάτια). Δίνεται η εντύπωση περισσότερο, σαν να δημιούργησε ο μαθητής μια αναπαράσταση μιας ανοδικής και μιας καθοδικής κίνησης (ως ακολουθία δυο κινήσεων) που θα τοποθετούσε την πρώτη κίνηση στο δεύτερο σκαλοπάτι και κάθε επόμενη ένα σκαλοπάτι παραπάνω, καθώς ο συνδυασμός τους ισοδυναμεί με ένα ($2-1=1$). Ωστόσο, αυτό το ζευγάρι των δυο κινήσεων δεν φαίνεται να εκλαμβάνεται ως ένα αδιαίρετο ζεύγος κινήσεων (άλλωστε δεν προσμετράται αυτομάτως ως 2 κινήσεις για κάθε ένα σκαλοπάτι στρατηγική που ακολουθήθηκε από άλλες ομάδες), όπως αποδεικνύεται αφενός από το ότι η καταγραφή τους πραγματοποιήθηκε σε δυο διαφορετικές στήλες και ακόμα περισσότερο από το ότι η τελευταία ανοδική κίνηση δεν συνοδεύτηκε αυτομάτως από μια καθοδική (κίνηση-μέτρηση), καθώς αυτό υπόκειντο στον περιορισμό του προβλήματος.

Γεμάτος χαρά φώναξε ότι το βρήκε δείχνοντας στην ερευνήτρια το θρανίο του:

«Μ: Το βρήκα! Ανεβαίνει 6 και κατεβαίνει 5.

E:: Άρα πόσες κινήσεις κάνει;

M: 30.

E: Γιατί 30;

M: 5 επί 6 ίσον 30.

E: Πρόσεξε. Γιατί να κάνεις πολλαπλασιασμό; Βρήκες πόσες κινήσεις κάνει για να ανέβει (ελάχιστη παύση) και πόσες για να κατέβει. Πόσες είναι όλες μαζί; Τι πράξη θα

κάνεις για να το βρεις;

Μ: Πρόσθεση. 11!»

Η ερευνήτρια προέτρεψε τον μαθητή να γράψει στο φύλλο εργασίας του την απάντησή του. Εκείνος έγραψε μόνο το αποτέλεσμα, δηλαδή τον 11.

«Ερευνήτρια: Γράψε κι αυτό (δείχνοντάς του στο θρανίο τις δυο στήλες)

Μαθητής: Αυτό; (Ρώτησε κοιτώντας πρώτα το θρανίο κι έπειτα την ερευνήτρια, χαμηλώνοντας το κεφάλι προς τους ώμους σε ένδειξη απορίας)

Ερευνήτρια: Ναι! Για να δείξεις πώς σκέφτηκες.»

Η στάση του σώματος του μαθητή αλλά και ο τόνος της φωνής του έδειξαν απορία, όσο και δυσπιστία, που σχετιζόταν με τη χρησιμότητα της καταγραφής της στρατηγικής που ακολούθησε για την επίλυση. Αυτή η στάση, συνάδει απόλυτα και με το μέρος όπου επέλεξε να την καταγράψει, δηλαδή πάνω στο θρανίο, από όπου θα σβηνόταν λογικά στη συνέχεια (άρα δεν υπήρχε για τον μαθητή η χρησιμότητα του να διατηρηθεί). Επίσης, το γεγονός ότι αυτός ο τρόπος που επέλεξε για να φτάσει στη λύση δεν αποτελεί κάποιον μαθημένο τρόπο επίλυσης δείχνει ταυτόχρονα την έλλειψη εμπιστοσύνης στον εαυτό του ως προς τη συλλογιστική πορεία που ακολούθησε, ώστε να επιλέξει να μην την συμπεριλάβει στο φύλλο εργασίας του, αλλά και την έλλειψη κατανόησής του σχετικά με την σημασία του να (από)δείξει και αναπαραστήσει ως μέρος της λύσης του, τον τρόπο μέσω του οποίου οδηγήθηκε στην απάντηση, δηλαδή στο αριθμητικό αποτέλεσμα.

Αφού έγραψε τη λύση του, παροτρύνθηκε να μοιραστεί τον τρόπο σκέψης του με την ομάδα του. Τότε, ανασηκώθηκε από τη θέση του, στηρίχτηκε με τους αγκώνες στο θρανίο και στράφηκε προς τα αριστερά στα μέλη της ομάδας του, που εκείνη τη στιγμή μετρούσαν δυνατά μεταξύ τους τις κινήσεις, ελέγχοντας όσες είχαν καταγράψει, χωρίς, όμως, να έχουν ολοκληρώσει τη διαδικασία.

«Μ: Το βρήκα! (Οι συμμαθήτριές του σταματούν το μέτρημα για να τον ακούσουν).
Ανεβαίνει...ένα, κατεβαίνει...ένα, ανεβαίνει..., κατεβαίνει...,
ανεβαίνει...κατεβαίνει..., ανεβαίνει...κατεβαίνει, ανεβαίνει...κατεβαίνει...,
ανεβαίνει.»

Δεν υπήρξε συνοδεία κάποιας κίνησης με το σώμα, τα χέρια ή το μολύβι στον αέρα ή στο χαρτί κατά την εξήγηση του.

«Συμμαθήτρια: Κι εμείς το ίδιο κάνουμε.

Μαθητής: Είναι 11.

Συμμαθήτρια: Για(τι)...α!»

Τη στιγμή εκείνη ο μαθητής τής έδειξε τις στήλες που έφτιαξε.

Ο μαθητής στην προσπάθειά του να εξηγήσει τον τρόπο που ακολούθησε για να επιλύσει το πρόβλημα ήταν ιδιαίτερα φειδωλός στη χρήση του λεξιλογίου που επέλεξε να χρησιμοποιήσει. Σε συνδυασμό μάλιστα με το ότι δεν αξιοποίησε καμία κίνηση, σχέδιο ή κάποιο άλλο στοιχείο παράλληλα με τον λόγο του, δείχνει την αδυναμία του στον λόγο ή/και την δυσκολία να αντιληφθεί ότι οι άλλοι δεν μπορούν, απαραίτητα, με τόσο ελλιπή στοιχεία να καταλάβουν τι θέλει να πει (θεωρία του νου). Επιπλέον, δεν αξιοποιεί το σώμα του ή άλλα βοηθήματα για να συνοδεύσει το λόγο του. Από την άλλη, βέβαια, ο τρόπος που επέλεξε αντικατοπτρίζει ακριβώς τη στρατηγική του, ακολουθεί έναν συγκεκριμένο ρυθμό (λέξη,παύση,ένα ή λέξη και παύση) όμοιο με τον ρυθμό κίνησης και άρα της μέτρησης, ενώ σταδιακά απαλλάσσεται από τα περιττά στοιχεία, δηλαδή την μέτρηση ένα, καθώς εννοείται ότι κάθε κίνηση εκλαμβάνεται ως μία κίνηση, με αποτέλεσμα να γίνει ακόμα πιο αφηρημένος και μαθηματικοποιημένος. Δεδομένου του ότι οι μαθητές μοιράζονται μια κοινή κατανόηση για το πρόβλημα, η εξήγησή του φαίνεται να γίνεται κατανοητή, έστω μερικώς. Στη συνέχεια, αφού δείξει τις στήλες που έφτιαξε και τον τρόπο με τον οποίο κατέγραψε τις κινήσεις, οι συμμαθήτριές του φάνηκε να αποκτούν μια βαθύτερη κατανόηση του τρόπου επίλυσης που ακολούθησε και επέστρεψαν στους υπολογισμούς τους με περισσότερη σιγουριά για τη διαδικασία που ακολουθούσαν. Χρησιμοποιούσαν τη λέξη ανεβαίνει ή κατεβαίνει αντίστοιχα, δείχνοντας στο αντίστοιχο σκαλοπάτι με το μολύβι ή το δάχτυλό τους, προσθέτοντας λεκτικά, αμέσως μετά, τον αριθμό ένα για κάθε νέα κίνηση που είχαν μόλις αναγγείλει.

Ο μαθητής δεν ενεπλάκει περαιτέρω στις δραστηριότητες των συμμαθητριών του, αλλά ανακάθισε πάλι κανονικά στη θέση του, έχοντας επαναφέρει το σώμα του στην ευθεία μπροστά στο θρανίο του, οπότε τον παρότρυνα να ασχοληθεί και με το δεύτερο ερώτημα. Ο μαθητής διάβασε την ερώτηση χαμηλόφωνα και απάντησε αυτόματα

«πέντε» χωρίς να χρειαστεί την οπτική βοήθεια του σχεδίου ή της δικής του γραπτής λύσης. Κατέγραψε την απάντησή του στο χαρτί του.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός της τάξης παρακίνησε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα υλικά τους για να παραστήσουν τα φυτά. Αξίζει να σημειωθεί ότι καμία ομάδα δεν είχε αξιοποιήσει μέχρι εκείνη τη στιγμή κανένα από υλικά και κατά συνέπεια αυτά δεν αποτέλεσαν μέρος της διαδικασίας επίλυσης.

Ο μαθητής χρησιμοποίησε ένα λευκό χαρτί Α4 όπου σχεδίασε με πιο ρεαλιστικό τρόπο τη σκάλα, αποδίδοντάς επιπλέον βάθος, και προσθέτοντας έτσι, στοιχεία στη διάστασή της. Στη συνέχεια, έφτιαξε μικρά μπαλάκια με πορτοκαλί πλαστελίνη, τα οποία τοποθέτησε σωστά στη δεξιά μεριά της σκάλας, δηλαδή, εκεί όπου σύμφωνα με το πρόβλημα έπρεπε να βρίσκεται καθένα από τα φυτά. Γίνεται σαφές, ότι η αναπαράσταση του φυτού έγινε μέσω ενός αφηρημένου συμβολικού τρόπου, εφόσον οπτικά δεν θυμίζει σε τίποτα φυτό και ως τέτοιο μπορεί να ερμηνευτεί μόνο από όσους έχουν διαβάσει το ίδιο πρόβλημα. Μάλιστα, η πλαστελίνη περισσότερο «δείχνει» το σημείο όπου βρίσκεται το φυτό, παρά (ανα)παριστάνει το ίδιο το φυτό. Ωστόσο, το «τριδιάστατο» σχέδιο της σκάλας, αποδίδει περίφημα την χωρικότητα, κατά τον McNeill(1992), και συγκεκριμένα την δεξιά κατεύθυνση, στοιχείο που έλειπε στην αρχική σχεδιαστική απεικόνιση. Η διαδικασία αυτή της τοποθέτησης έγινε αυτόματα, χωρίς παύση ή κίνηση που να μαρτυρά σκέψη- νοερό υπολογισμό σχετικά με το πού θα έπρεπε να τοποθετηθεί κάθε φορά το φυτό.

Ακολούθησε η παρουσίαση του τρόπου επίλυσης και των αποτελεσμάτων της κάθε ομάδας στην ολομέλεια της τάξης. Δυο ομάδες βρήκαν λάθος αποτελέσματα, αλλά τα λάθη τους δεν διορθώθηκαν κατά τη φάση αυτή. Αξίζει να σημειωθεί ότι καμία ομάδα δεν είχε χρησιμοποιήσει αρχικά την πλαστελίνη κατά τη διαδικασία επίλυσης, παρά μόνο μετά από την παρότρυνση του εκπαιδευτικού της τάξης, ότι οι μισές ομάδες επέλεξαν να παραστήσουν με το υλικό τις σκάλες, μία τα λουλούδια, μια άλλη επέλεξε να φτιάξει ένα ανθρωπάκι, ενώ μια δεν χρησιμοποίησε καθόλου την πλαστελίνη. Τέλος, μόνο μια ομάδα συμπεριέλαβε γραπτώς κατά την διαδικασία επίλυσης ελλειπτικές γραμμές οι οποίες αναπαριστούσαν τις κινήσεις στα σκαλοπάτια.

Αφού εξήγησαν τον τρόπο επίλυσης και έδειξαν τον τρόπο αξιοποίησης του υλικού για όσες από αυτές το χρησιμοποίησαν, ακολούθησε η επίλυση του προβλήματος στον

πίνακα. Αρχικά, σχεδιάστηκε στον πίνακα η σκάλα με τον ίδιο τρόπο που αυτή απεικονιζόταν στο φύλλο εργασίας των μαθητών κι έπειτα ερωτήθηκαν οι μαθητές για το ποιος θα ήθελε να δείξει πώς σκέφτηκε για να λύσει το πρόβλημα, ώστε να το δουν και να το καταλάβουν όλοι. Ο μαθητής έδειξε ιδιαίτερη προθυμία και επελέγη ανάμεσα στους άλλους. Ωστόσο, ξεκίνησε να σχεδιάζει χωρίς να μιλάει, οπότε του ζητήθηκε να εξηγήει τι κάνει κάθε φορά. Έγραψε Α και Κ για το ανέβασμα και το κατέβασμα, χωρίς να εξηγήσει όμως τι σημαίνει το καθένα, και έπειτα σχεδίασε μια ελλειπτική γραμμή από τη βάση της σκάλας στο δεύτερο σκαλοπάτι λέγοντας «ανεβαίνει» και σημειώνοντας έπειτα τον αριθμό ένα κάτω από το Α, λέγοντας ταυτόχρονα «ένα». Στη συνέχεια λέει «κατεβαίνει...ένα» και γράφει τον αριθμό ένα κάτω από το Κ, χωρίς να σχεδιάσει καμπύλη για το κατέβασμα, ούτε να δείξει με το χέρι του την κίνηση. Κατόπιν, σχεδιάζει άλλη μια ελλειπτική γραμμή εκκινώντας από το πρώτο σκαλοπάτι (όπου υποτίθεται ότι είχε κατέβει) ως το τρίτο σκαλοπάτι, λέγοντας πάλι «ανεβαίνει», «ένα» και γράφοντας τον αριθμό στη στήλη Α. Συνέχισε με τον ίδιο τρόπο, σχεδιάζοντας μόνο τις καμπύλες της ανάβασης και προσθέτοντας με το νου τα αποτελέσματα των δυο στηλών.

Σε αυτό το σημείο υπήρξε αντίρρηση από μια ομάδα:

«Ομάδα: Γιατί να μην ξανακατέβει;

Μ: Δεν ξανακατεβαίνει. (Απευθυνόμενος σε εμένα) Ξανακατεβαίνει;

Ε: Όχι. Το πρόβλημα λέει ότι μόλις φτάσει στην κορυφή της σκάλας, δεν ξανακατεβαίνει.

Ομάδα: Α! Ναι. Εμείς δεν το προσέξαμε αυτό.»

Στη συνέχεια απαντήθηκε και το δεύτερο ερώτημα προφορικά, ενώ με προτροπή του εκπαιδευτικού τοποθετήθηκε από τον μαθητή και τα μέλη της ομάδας του πλαστελίνη στον πίνακα, στα σκαλοπάτια όπου βρίσκονταν τα φυτά που πότιζε το παιδί του προβλήματος κατά την κατάβαση της σκάλας.

Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας, ο μαθητής ρώτησε την ερευνήτρια πότε θα ξανακάνουνε τέτοιου είδους πρόβλημα και δήλωσε αυθόρμητα ότι του άρεσε πολύ και ότι του φάνηκε εύκολο.

2^ο Πρόβλημα- Πρόβλημα ανακύκλωσης

Ο μαθητής Μ1 διάβασε δυνατά το πρόβλημα. Οι υπόλοιποι μαθητές της ομάδας δε φαινόταν να τον προσέχουν.

«Ε: Καταλάβατε το πρόβλημα;

Μ2: Όχι και τόσο καλά.

Ε: Διάβασέ το ξανά και προσέχετε και οι υπόλοιποι.»

Ο μαθητής Μ έπαιξε με τα κυβάρια και χρειάστηκε να τοποθετήσω τα χέρια μου πάνω στα δικά του για να σταματήσει. Μετά τη δεύτερη αυτή ανάγνωση ο Μ2 είχε μια απορία οπότε το πρόβλημα εξηγήθηκε ξανά κι από την ερευνήτρια ώστε να διευκρινιστούν όλα του τα σημεία.

«Ε: Πόσες κούτες έστειλαν συνολικά στο τέλος της πρώτης εβδομάδας (δείχνοντας το φύλλο της 1^{ης} εβδομάδας).

Μ2: Δυο.

Μ: Τρεις (κοιτώντας την ερευνήτρια).

Μ2: Α! Ναι!

Μ: Ε; Τρία δεν είναι; (κοιτώντας και πάλι την ερευνήτρια)

Ε: Ναι.»

Το βλέμμα του μαθητή Μ στην ερευνήτρια υποδηλώνει την ανάγκη του για επιβεβαίωση από έναν ενήλικα. Ωστόσο, εσκεμμένα δεν του δόθηκε καμία νύξη (λεκτική ή σωματική) ως προς την ορθότητα της απάντησής του, καθώς ζητούμενο είναι η ανάπτυξη της επικοινωνίας με τα μέλη της ομάδας του στο πλαίσιο της επίλυσης του προβλήματος και του διαμεσολαβητικού ρόλου που οι μεταξύ τους διάδραση μπορεί να φέρει στην πορεία της εξαντικειμενίκευσης της γνώσης, σύμφωνα με τη θεωρία του Radford. Στο πλαίσιο αυτής της από κοινού διερεύνησης θα μπορούσε να βρει τρόπους να στηρίζει την άποψή του, όπως το να βρει το σημείο του κειμένου όπου αναγράφεται η κάθε πληροφορία (ενδεχομένως, αναπτύσσοντας ασυναίσθητα και μια σειρά στρατηγικών, όπως της υπογράμμισης) βοηθώντας και τους συμμαθητές του. Μάλιστα, ακόμα και μετά την συμφωνία του συμμαθητή του με την δική του απάντηση, εξακολουθεί να αισθάνεται την ανάγκη να συμφωνήσει μαζί του και ένας ενήλικας, προκειμένου να δεχτεί την απάντηση ως σωστή.

Στη συνέχεια, ο μαθητής στράφηκε αμέσως προς το κέντρο του θρανίου και τοποθέτησε στο φύλλο της 1^{ης} εβδομάδας 3 κυβάρια (σε τυχαία σειρά). Συνέχισαν ως

ομάδα τοποθετώντας μόνοι τους (αριθμητικά σωστά) τα κυβάκια στις επόμενες εβδομάδες.

Η θετική απάντηση της ερευνήτριας λειτούργησε ως ενισχυτής, που πυροδότησε την άμεση (γρήγορη να μην τον προλάβουν οι άλλοι) και ενθουσιώδη εκτέλεση της τοποθέτησης των κύβων στο φύλλο εργασίας, με τη στάση του σώματός του (έχοντας πλησιάσει και γύρει το πάνω μέρος του κορμού προς το κέντρο του θρανίου και πάνω από τα υλικά) να δείχνει την προθυμία και την αφοσίωση στην διαδικασία. Μάλιστα, είχε τοποθετήσει το σώμα του πιο κοντά στα υλικά από τους συμμαθητές της ομάδας του, που στη συνέχεια συμμετείχαν κι εκείνοι στην τοποθέτηση των κύβων.

Όταν έφτασαν στην 5^η εβδομάδα, ο M1 είπε χαμογελαστός στην ερευνήτρια, δείχνοντας ταυτόχρονα το φύλλο τους:

«M1: Κοιτάξτε! Εμείς κάναμε πρόσωπο!»

Ήταν η μόνη φορά που στην αρχή αποσπάστηκε η προσοχή αρκετών μαθητών από το υλικό τους δόθηκε, αλλά ταυτόχρονα και η πρώτη φορά που τους ζητήθηκε να το χρησιμοποιήσουν (όχι προαιρετικά) ως μέρος της αναπαράστασης του προβλήματος και της επίλυσής του. Το γεγονός ότι έφτιαξαν το πρόσωπο, αφού εκτέλεσαν τη δραστηριότητά τους, δείχνει ότι το υλικό ήταν δελεαστικό και ενδιαφέρον, ίσως λιγότερο συνδεδεμένο με κάποια ή καλύτερα με τη συγκεκριμένη μαθηματική διαδικασία, αλλά κυριότερα, ότι ως εκείνη τη στιγμή, προφανώς, δεν επιτέλεσε από μόνο του σπουδαίο ρόλο στην επίλυση του προβλήματος, καθώς δεν υπήρξε ακόμα κάποια πραγματικά προβληματική κατάσταση, αφήνοντας χώρο και χρόνο στην αξιοποίησή του στο παιχνίδι.

Τα κυβάκια των περισσότερων ομάδων είχαν τοποθετηθεί τυχαία στο χώρο, ενώ δυο ομάδες τα είχαν τοποθετήσει όλα στη σειρά (της κάθε εβδομάδας). Τρεις ομάδες δεν υπολόγισαν αθροιστικά για την κάθε εβδομάδα με βάση την προηγούμενή της, τοποθετώντας έτσι από δυο μόνο κύβους σε κάθε επόμενη εβδομάδα. Τους ζητήθηκε να προσέξουν το στοιχείο αυτό του προβλήματος, οπότε το διόρθωσαν (εκτός από μια ομάδα της οποίας τα μέλη θέλησαν να διατηρήσουν έτσι τους κύβους τους, ούσα τελικά και η μόνη που βρήκε λάθος αποτέλεσμα).

Στο σημείο αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές να σταματήσουν την ομαδική εργασία τους και να στραφούν στον πίνακα, όπου η ερευνήτρια έγραψε στη σειρά 1^η, 2^η, 3^η, 4^η και 5^η για την κάθε εβδομάδα. (Η κίνηση αυτή πραγματοποιήθηκε εκείνη τη στιγμή, ακολουθώντας την αντίστοιχη διδακτική δραστηριότητα που περιγράφει ο Radford κατά την επεξεργασία του προβλήματος με τον κουμπάρα). Οι ομάδες κλήθηκαν να πουν τα ευρήματά τους για την κάθε εβδομάδα. Οι πρώτες ομάδες είπαν 3-5-7-9-11 οπότε ερωτήθηκαν οι υπόλοιπες ομάδες εάν συμφωνούν κι εκείνες. Μια ομάδα βρήκε διαφορετικά αποτελέσματα:

«Ομάδα: 3-4...

Οι άλλες ομάδες: Πέντε!!!

Ερευνήτρια: Περιμένετε.

Ομάδα:...6-8-10.

Ερευνήτρια: Γιατί 4 τη 2^η εβδομάδα;

Ομάδα: Γιατί πηγαίνει ανά 2. Αφού λέει στέλνουν 2 κάθε εβδομάδα.

Ερευνήτρια: Την 1^η εβδομάδα;

Ομάδα: Τρία.

Ερευνήτρια: Τη 2^η;

Ομάδα: Τέσ...σερις.

Ερευνήτρια: Πόσα ακόμα βάλατε στη 2^η;

Ομάδα: Δύο. Ανεβαίνει ανά δύο.

Ερευνήτρια: Άρα, δε λάβατε υπόψιν σας την 1^η εβδομάδα;

Ομάδα: Τη λάβαμε.

Ερευνήτρια: Πώς; Η 2^η εβδομάδα είναι η 1^η και η 2^η μαζί. Πόσα έχετε στην 1^η ;

Ομάδα: Τρία.

Ερευνήτρια: Και της 2^{ης};

Ομάδα: Α! Πέντε.»

Κατά τη διάρκεια αυτής της συζήτησης ο μαθητής Μ πλησίασε την ερευνήτρια θέλοντας να πει κάτι, οπότε του ζητήθηκε να το κάνει από τη θέση του. Επέστρεψε στο θρανίο του χωρίς όμως να σηκώσει το χέρι του για να πει σε όλους αυτό που ήθελε. Σηκώθηκε άλλη μία φορά και ρώτησε εάν όλα μαζί είναι 25 (τα κυβάρια μέχρι την 5^η εβδομάδα). Έλαβε αρνητική απάντηση και την εξήγηση ότι έχουν βρει ήδη σωστά (στην ομάδα τους) πόσα είναι (τα κυβάρια) την 5^η εβδομάδα.

Ενώ ο μαθητής Μ φάνηκε να κατάλαβε καλά το πρόβλημα, εφόσον διόρθωσε αρχικά τον συμμαθητή της ομάδας του και τοποθετώντας στη συνέχεια αριθμητικά σωστά

τους κύβους με τους συμμαθητές του στην ομαδική εργασία, στο σημείο αυτό φαίνεται ότι μπερδεύτηκε. Πιθανότατα εξέλαβε κυριολεκτικά αυτό που άκουσε κατά την συζήτηση με την ομάδα που διαφώνησε με τις άλλες, ότι δηλαδή «η 2^η εβδομάδα είναι η 1^η και η 2^η μαζί» και «στην πρώτη...και της 2^{ης}» επομένως θεώρησε ότι πρέπει να προσθέσει ότι βρήκε στην κάθε προηγούμενη εβδομάδα «μαζί», όπως άκουσε να λέγεται. Επιπλέον, ίσως η αναφώνηση «πέντε» που αφορούσε στο σύνολο για τη 2^η εβδομάδα, να έγινε αντιληπτή ως το ποσό που θα έπρεπε να προστεθεί στην 1^η εβδομάδα, παρ' ότι κάτι τέτοιο δεν συμφωνεί με τα δεδομένα του προβλήματος που, όπως είπαμε, ο μαθητής τα κατανόησε. Δεν συσχέτισε τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος με μια τέτοια κίνηση για να ελέγξει την αναγκαιότητα ή τη λογικότητά της. Μάλιστα, έδωσε τόση έμφαση στην πρόσθεση που θεώρησε ότι έπρεπε να κάνει, ώστε δεν διαπίστωσε ότι τα αποτελέσματα που βρήκαν τελικά όλες οι ομάδες, συμφωνούσαν και με τα δικά τους αποτελέσματα. Το γεγονός ότι δεν υπήρχε μπροστά τους η λύση καταγεγραμμένη, αλλά με τη μορφή του υλικού (υλικής απεικόνισης) ίσως λειτούργησε αρνητικά στην περίπτωση αυτού του μαθητή. Η πρόσθεση με τους κύβους, ενδεχομένως να έγινε ως μια πιο φυσική διαδικασία και ως ένα βαθμό οπτικά (καθώς δεν εκφράστηκαν λεκτικά τα αθροίσματα στην ομάδα του), με αποτέλεσμα να μην συνειδητοποίησε τον αριθμό των κύβων ή να μην μετέτρεψε αριθμητικά την εικόνα των κύβων ανά εβδομάδα. Εάν η λύση ήταν καταγεγραμμένη μπροστά του, ενδέχεται να μην συνέβαινε η παρανόηση αυτή.

Επίσης, το γεγονός αυτό υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο οι λέξεις και γενικότερα η προφορική επικοινωνία, μπορεί να διαμεσολαβήσει στην διδακτική διαδικασία, φέροντας τα ανάλογα αποτελέσματα, και κάνει φανερή την ανάγκη για σωστή και ολοκληρωμένη έκφραση των λεγομένων των εμπλεκόμενων στην επικοινωνία προς αποφυγή τέτοιων παρανοήσεων. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η συνοδεία του λόγου με κινήσεις, γραπτά σύμβολα, σχέδια, υλικά ή εργαλεία συμπληρώνει και προσδίδει (σ/το) νόημα, καθώς σε αυτή την περίπτωση, η απουσία τους από την άμεση προσοχή των μαθητών, ενδεχομένως να βοήθησε στην δημιουργία της παρανόησης αυτής. Από την άλλη όσοι παρακολούθησαν από την αρχή τη συζήτηση προς επίλυση της διαφωνίας, κατάλαβαν αφενός το λάθος της ομάδας και αφετέρου την υπονοούμενη σημασία των λέξεων, έχοντας μπροστά τους (κοιτώντας) ή φέροντας στο νου τους το υλικό που είχαν μόλις προηγουμένως χρησιμοποιήσει. Συνεπώς, μια άλλη εκδοχή θα ήταν η μειωμένη προσοχή του εν λόγω μαθητή σε κάποιο συγκεκριμένο (προφανώς στο αρχικό) σημείο της διαδικασίας που πραγματοποιήθηκε σε όλη την τάξη, που σε

συνδυασμό με την επικέντρωσή του τη στιγμή που πραγματοποιήθηκε ο συγκεκριμένος διάλογος με την αναφορά των λέξεων που πιθανώς οδήγησαν στην παρανόηση (όπως εξηγήθηκε και προηγουμένως) και το γεγονός ότι όλη αυτή η διαδικασία πραγματοποιήθηκε προφορικά, άρα δεν υπήρχε άλλο μέσο που να τον οδηγήσει στη σύνδεση με τη διαδικασία που κι ο ίδιος έκανε με τα μέλη της ομάδας του, δηλώνει πέρα των άλλων, την ανάγκη για τη διατήρηση της προσοχής και τη διασφάλιση της ενεργητικής συμμετοχής όλων των μαθητών σε κάθε φάση της διδασκαλίας.

Στη συνέχεια της διαδικασίας οι ομάδες ερωτήθηκαν, πώς τοποθέτησαν τα κυβάκια τους στο χαρτί (τυχαία ή με κάποια σειρά). Άλλες τα είχαν τοποθετήσει τυχαία, αλλά οι περισσότερες σε μια σειρά. Έτσι, η ερευνήτρια ζωγράφησε στον πίνακα κάτω από τον αριθμό της κάθε εβδομάδας, μέχρι και για την 3^η εβδομάδα, τον αντίστοιχο αριθμό από τετραγώνια το ένα δίπλα στο άλλο (κατά τον τρόπο που οργάνωσαν τα κυβάκια τους οι μαθητές). Έπειτα, οι μαθητές ερωτήθηκαν εάν πιστεύουν ότι αυτή η οργάνωση θα τους βοηθούσε να βρουν γρήγορα την επόμενη εβδομάδα. Οι πλειοψηφία των μαθητών αποκρίθηκε θετικά, ωστόσο το ποσοστό τους μειώθηκε όταν ερωτήθηκαν το ίδιο και για την 100^η εβδομάδα.

Στο σημείο αυτό, προτάθηκε από την ερευνήτρια μια διαφορετική οργάνωση των τετραγώνων.

«Ε: Πρώτα απ' όλα ας βάλουμε χωριστά την κούτα των δασκάλων. (Ακολουθως, πραγματοποιείται σχεδιασμός στον πίνακα ενός τετραγώνου και η σκιαγράφησή του με μαρκαδόρο μπλε χρώματος, κάτω από την «1^η» εβδομάδα.) Και έχουμε άλλες δυο που μάζεψαν οι μαθητές. Ας τις βάλουμε από κάτω. (Σχεδιασμός δυο τετραγώνων κάτω από το σκιασμένο). Ποιος θέλει να ζωγραφίσει τη 2^η εβδομάδα με τον ίδιο τρόπο;»

Ο μαθητής που σηκώθηκε ζωγράφησε το σκιασμένο τετράγωνο πάνω-πάνω και από κάτω του σε μια σειρά τέσσερα τετράγωνα. Η ερευνήτρια προτείνει να τοποθετηθεί η μια εβδομάδα κάτω από την άλλη. Ο μαθητής διόρθωσε το σχέδιο, προσθέτοντας τα δυο νέα τετράγωνα κάτω από τα προηγούμενα δυο. Για την 3^η εβδομάδα σηκώθηκε άλλος μαθητής που τοποθέτησε με τυχαία σειρά τα τετράγωνα (κάποια στη σειρά και όσα δεν χώρεσαν από κάτω), χωρίς να ακολουθήσει το προηγούμενο μοτίβο, οπότε χρειάστηκε πάλι καθοδήγηση ως προς την τοποθέτηση τους. Οι επόμενες δυο εβδομάδες σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια.

Η «μεταφορά» του απτικού υλικού στον πίνακα, γίνεται μέσω μιας σχεδιαστικής απεικόνισης, δηλαδή μέσω ενός ποιοτικά διαφορετικού τρόπου αναπαράστασης. Συνεπώς, τα σημειωτικά μέσα εξαντικειμενίκευσης πληθαίνουν. Οι μαθητές καλούνται να αντιστοιχίσουν τον τρισδιάστατο κύβο με ένα τετράγωνο, το χαρτί της κάθε εβδομάδας με τον νοητό χώρο της κάθε εβδομάδας στον πίνακα και επιπλέον καλούνται να οργανώσουν με διαφορετικό τρόπο τα σχήματα αυτά στον πίνακα (σχεδιαστικά). Υποθέτουμε, ότι η αντιστοίχιση του κύβου με το τετράγωνο και η ανάπτυξη τους στον πίνακα, είναι εμφανής και γίνεται εύκολα αντιληπτή από τους μαθητές, σε άμεσο παραλληλισμό με τα υλικά που έχουν στη διάθεσή τους στα θρανία τους. Ωστόσο, καμία ομάδα δεν επανατοποθέτησε τους κύβους της ανά εβδομάδα κατά το πρότυπο της σχεδιαστικής απεικόνισης στον πίνακα. Αυτό, δηλώνει είτε την δυσκολία στη μετάβαση από τον έναν τρόπο αναπαράστασης στον άλλο (μητρώο, κατά τον Duvall), είτε την ελλιπή σημασία που δόθηκε από τους μαθητές στην πραγματοποίηση αυτής της αντιστοιχίας. Θεωρούμε ότι αν τους είχε ζητηθεί να δείξουν με τα υλικά τους την σχεδιαστική αναπαράσταση του πίνακα, θα το είχαν καταφέρει επιτυχώς. Το γεγονός ότι αυτό δεν συνέβη, πιθανόν, να οφείλεται στο ότι δεν τους ζητήθηκε να αναδιοργανώσουν το απτικό υλικό τους και κυρίως στο ότι τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν. Διαφαίνεται εδώ, η σύνδεση της έννοιας της παρατήρησης με μια διαδικασία, νοητική και όχι ενεργητική ή/και διερευνητική, καθώς δεν αξιοποιήθηκε το απτικό υλικό, το οποίο προσφέροντας μεγάλη ευελιξία στο χειρισμό, θα μπορούσε να τους έχει βοηθήσει πολύ στην εύρεση της δομής που αναζητούσαν σε αυτή την αλγεβρική ακολουθία. Από την άλλη, το γεγονός ότι δεν χρησιμοποίησαν κανένα υλικό και το ότι δεν συζήτησαν με την ομάδα τους, δεν δημιούργησε καμία ευκαιρία για ύπαρξη αναντιστοιχίας μεταξύ των διαθέσιμων (εν δυνάμει) μέσων εξαντικειμενίκευσης, με αποτέλεσμα να μην πραγματοποιηθεί καμία πρόοδος στο σημείο εκείνο ως προς την επίλυση της προβληματικής κατάστασης.

Επίσης, ως προς την σχεδίαση από τους μαθητές των τετραγώνων στον πίνακα, παρατηρούμε έντονη τη δυσκολία της χωροταξικής οργάνωσης των δεδομένων στη βάση ενός δοσμένου κριτηρίου. Το κριτήριο αυτό, αποτέλεσε, ουσιαστικά, την αριθμητική ακολουθία του μοτίβου, η οποία κατανοήθηκε εν μέρει από τους μαθητές από τη στιγμή που την εφάρμοσαν ορθά με τα απτικά υλικά και τη διατύπωσαν σωστά προφορικά, χωρίς όμως να έχει συνειδητοποιηθεί απόλυτα. Επομένως, εκείνο που ενδέχεται να μην έγινε πλήρως αντιληπτό, είναι η ανάγκη της οργανωμένης οπτικής

αποτύπωσης του μοτίβου, με τέτοιο τρόπο που να επιτρέψει (και να οδηγήσει χάρη στη συγκεκριμένη ανάπτυξή του στο χώρο) την ευκολότερη παρατήρηση προς εύρεση ενός μοτίβου (αριθμητικού εδώ) και συνακόλουθα στην ανακάλυψη της αλγεβρικής ακολουθίας.

Στη συνέχεια ερωτήθηκαν οι ομάδες εάν θα μπορούσαν να βρουν κατευθείαν πόσα θα έχουν στείλει τη 10^η εβδομάδα. Δόθηκε λίγος χρόνος ώστε να το σκεφτούν όλες οι ομάδες.

Στο διάστημα αυτό ο Μ πλησίασε την ερευνήτρια στον πίνακα:

«Μ: Είναι τρεις φορές το πέντε;

Ερευνήτρια: Μμμ... Συζήτησέ το με την ομάδα σου.»

Ο μαθητής επέστρεψε στο θρανίο του αλλά δεν μοιράστηκε την σκέψη του με τους υπόλοιπους της ομάδας του.

Ο μαθητής Μ προτίμησε και πάλι να μοιραστεί την σκέψη του με κάποιον ενήλικα. Προκειμένου να μην αποθαρρυνθεί δεν του δόθηκε αρνητική απάντηση, αλλά ούτε ερωτήθηκε για πώς το σκέφτηκε, καθώς σκοπός ήταν να μεταφερθεί στην ομάδα αυτή η σκέψη και να αναπτυχθεί εκεί. Συνεπώς, η στάση της ερευνήτριας ήταν ουδέτερη αναφορικά με την ιδέα του μαθητή, αλλά και συνάμα ενθαρρυντική στο να την συζητήσουν στην ομάδα του. Δεν υπήρξε καμία νύξη ότι έκανε λάθος, αλλά ουσιαστικά ότι είναι μια σκέψη που έχει ενδιαφέρον να την μελετήσουν όλοι μαζί. Ωστόσο, ο μαθητής δεν τη μετέφερε στην ομάδα του, είτε επειδή δεν έλαβε την θετική απάντηση που περίμενε από την ερευνήτρια, άρα από ελλιπή εμπιστοσύνη στην λύση που πρότεινε και κατ' επέκταση στον εαυτό του, είτε λόγω δυσκολίας να εκκινήσει μόνος του συζήτηση στην ομάδα ή/και να εξηγήσει αναλυτικότερα τη σκέψη του στους άλλους.

Στη συνέχεια κλήθηκαν οι ομάδες να πουν τις λύσεις τους. Μια από τις ομάδες απάντησε 21. Μια άλλη ομάδα όμως διαφώνησε φωνάζοντας ότι είναι 22.

«1^η ομάδα: Δε γίνεται να είναι 22.

Ε: Πώς σκεφτήκατε; Πώς βρήκατε 21;

2^η ομάδα: Γιατί την 5^η εβδομάδα είναι 11, την 6^η είναι 13, την 7^η 15, την 8^η 17, την 9^η

19 και τη 10^η 21. Και δε γίνεται να βρεις ζυγό αριθμό προσθέτοντας δυο σε μονό αριθμό. Θα βγαίνει πάντα μονός αριθμός.

E: Εσείς πώς το σκεφτήκατε;

2^η ομάδα: Αφού την 5^η είναι 11, τη 10^η θα είναι το διπλάσιο.

E: Σκεφτήκατε, λοιπόν, ότι θα είναι το διπλάσιο. 2 φορές η 5^η εβδομάδα. λογικό ακούγεται. *(Απευθυνόμενη σε όλη την τάξη.)* Η μια ομάδα βρήκε 21 και η άλλη 22. Υπάρχει όμως ένας αριθμός διαφορά σε αυτά που βρήκαν. Τι ξέφυγε στη 2^η ομάδα; Τι είναι αυτό το ένα που δημιουργεί τη διαφορά;

Μαθήτρια από 3^η ομάδα: Των δασκάλων (χαμηλόφωνα και με δισταγμό)

E: Πες το!

Μαθήτρια: Είναι το κουτί των δασκάλων.

Η ερευνήτρια δείχνει με τον δείκτη στον πίνακα το σκιασμένο κουτί της 5^η εβδομάδα.

E: Εμφανίζεται μόνο μια φορά σε κάθε εβδομάδα (ενώ δείχνει το σκιασμένο τετράγωνο από την 1^η έως και την 5^η εβδομάδα), γιατί μόνο την 1^η εβδομάδα έδωσαν μια κούτα και οι δάσκαλοι. Άρα δε θα πρέπει να διπλασιαστεί.»

Η ερευνήτρια χρησιμοποίησε εδώ τη δεικτική κίνηση πάνω στα χρωματισμένα τετράγωνα, ως σημειωτικό μέσο εξαντικειμενίκευσης, αφενός για να οπτικοποιηθεί και να κατανοηθεί η εξήγηση από όλους, αφετέρου (και σημαντικότερα) για να συνειδητοποιηθεί με τον τρόπο αυτό ο ρόλο του συγκεκριμένου τετραγώνου, που επαναλαμβάνεται σταθερά σε κάθε επόμενο μοτίβο, στην εύρεση της αριθμητικής ακολουθίας και, ως εκ τούτου, στη συνέχιση των εργασιών των ομάδων.

«E: Αν σας ζητήσω τώρα να μου βρείτε το σύνολο της 25^{ης} εβδομάδας ή της 100^{ης} εβδομάδας, γίνεται να ανεβείτε μια-μια εβδομάδα για βρείτε το αποτέλεσμα;

Μαθητές: Όχι.

E: Μπορούμε, λοιπόν, να βρούμε έναν τρόπο, παρατηρώντας τη δομή της ακολουθίας των εβδομάδων (μικρή παύση), τον τρόπο με τον οποίο προχωράμε από τη μια εβδομάδα στην επόμενη (μικρή παύση), ώστε να βρίσκουμε αμέσως, όποια εβδομάδα και να μας ζητηθεί. Παρατηρήστε τον πίνακα. Είναι 1 των δασκάλων (δείχνει το ένα σκιασμένο της 1^{ης} εβδομάδας) και 2 των μαθητών (δείχνει τα δυο των μαθητών για την 1^η εβδομάδα). Εδώ (προχωρώντας στη 2^η εβδομάδα) όπως πριν (κρύβοντας τα δυο επιπρόσθετα τετράγωνα) και ακόμα 2 (αποκαλύπτοντας και δείχνοντας τα 2 τετράγωνα). Πόσο ανεβαίνουν κάθε φορά;

Μαθητές: Δυο.

E: Ωραία. Θα το χρησιμοποιήσουμε αυτό το δυο. Πώς; (παύση) Σκεφτείτε το λίγο με την ομάδα σας.»

Εν τω μεταξύ, η ερευνήτρια πλησίασε στο θρανίο της ομάδας του M.

«M: 25 δεν είναι και οι 5 εβδομάδες; (δείχνοντας με τον δείκτη του την πράξη που είχε γράψει στο χαρτί $3+5+7+9+11=25$)

Ερευνήτρια: Αυτό που έχεις βρει την 5^η εβδομάδα είναι ήδη το σύνολο των προηγούμενων εβδομάδων. Η 2^η εβδομάδα είναι η 1^η και η 2^η. Η 3^η εβδομάδα είναι η 1^η, η 2^η και η 3^η. Η 4^η είναι όλες οι προηγούμενες και η 4^η. Η 5^η είναι η 1^η, η 2^η, η 3^η, η 4^η και η 5^η. Είναι ήδη μέσα οι προηγούμενες εβδομάδες. Δεν χρειάζεται να τα προσθέσεις ξανά όλα. Το έχεις κάνει ήδη. Την 5^η είναι 11. Πόσα θα είναι τη 10; Μπορείς να το υπολογίσεις;

M: Ναι! 11...13-15-17-19...21!

M1: Τωώρα! Το έχουμε πει εδώ και ώρα!

Ερευνήτρια: Συνεχίστε μαζί τώρα.»

Ο μαθητής εξακολούθησε να έχει την ίδια απορία με πριν, που λανθασμένα θεωρήθηκε από την ερευνήτρια ότι του έχει εξηγηθεί. Δεν τη συζήτησε με την ομάδα του. Η ομάδα του, από την αντίδραση του ενός συμμαθητή του, φάνηκε ότι είχε κατανοήσει εκείνο που ο μαθητής εξέφρασε ως απορία στην ερευνήτρια και συνεπάγεται ότι θα μπορούσαν να του έχουν εξηγήσει στην ομάδα, αυτό που του αναλύθηκε από την ερευνήτρια. Διακρίνεται και πάλι η ανάγκη επιβεβαίωσης από έναν ενήλικα. Θετικό είναι, ωστόσο, το γεγονός ότι ήθελε να διευκρινίσει το σημείο αυτό και δεν το προσπέρασε απλώς, κάτι που δείχνει την προθυμία του μαθητή και την αφοσίωσή του σε αυτό που ανέλαβε να κάνει. Παρ' ότι το ερώτημά του απαντήθηκε ξανά με τον ίδιο τον τρόπο που ενδέχεται να τον μπέρδεψε αρχικά, δηλαδή, με τη μορφή «οι προηγούμενες εβδομάδες και η εκάστοτε εβδομάδα», αυτή τη φορά έδειξε να το κατάλαβε, καθώς βρήκε σωστά μόνος του, το αποτέλεσμα της 10^{ης} εβδομάδας ανεβαίνοντας ανά δυο από την 5^η εβδομάδα, χωρίς ωστόσο να έχει αναφερθεί ο αριθμός δυο, κατά την εξήγηση από την ερευνήτρια. Το διαφορετικό αυτή τη φορά ήταν ότι η ερευνήτρια έδειχνε την κάθε εβδομάδα-στόχο, τις προηγούμενές της (με μια ελλειπτική κίνηση πάνω από τις εβδομάδες από τα δεξιά προς τα αριστερά) και ξανά την εβδομάδα στόχο. Ουσιαστικά και πάλι η κίνηση αυτή ήταν λάθος πάνω στους

αριθμούς των κίβων που γινόταν (3-5-7-9-11) γιατί αυτό που έπρεπε να εννοηθεί με την κάθε προηγούμενη εβδομάδα που έδειχνε η ερευνήτρια, ήταν ο αριθμός των κιβωτίων που αποστέλλονταν ανά εβδομάδα, δηλαδή το 3-2-2-2-2 και όχι ο συνολικός (προστεθειμένος) αριθμός. Παρ' όλα αυτά αναπτύχθηκε μια κοινή κατανόηση με τη μεσολάβηση της κίνησης επί των γραπτών συμβόλων και του λόγου. Βέβαια, ο μαθητής είχε ήδη κατανοήσει και χειριστεί αυτή τη πληροφορία και δομή, οπότε βρισκόταν σε ετοιμότητα να την επαναφέρει με την κατάλληλη καθοδήγηση.

Τη στιγμή που ο μαθητής Μ βρήκε την απάντηση της 10^{ης} εβδομάδας, ο εκπαιδευτικός της τάξης βλέποντας ότι οι υπόλοιποι μαθητές έμεναν άπραγοι, ανέλαβε δράση.

«Εκπαιδευτικός τάξης: Ουσιαστικά ψάχνουμε μια εξίσωση με άγνωστο. Όπου X η εβδομάδα. (Γράφει X στον πίνακα).

E: Εκεί ακριβώς θέλουμε να καταλήξουμε (πλησιάζοντας προς το κέντρο της τάξης).

Εκπαιδευτικός τάξης: Έχουμε 2 φορές το X (ενώ το γράφει στον πίνακα) (μικρή παύση) και πόσο ακόμα κάθε φορά; (δεν αποκρίθηκε κανένας μαθητής). Πόσο; (δείχνει με το δείκτη το σκιασμένο τετράγωνο από την 1^η ως την 5^η εβδομάδα).

Μαθητής N: A! Και άλλο ένα!

Ο εκπαιδευτικός συμπληρώνει στο «2 • X» το «+1»

E: Άρα, η 25^η εβδομάδα θα είναι... πόσο;

Μαθητής N: 51.

E: Την 100^η;

Μαθητής N: 201.»

Η πρωτοβουλία αυτή του εκπαιδευτικού δείχνει, ότι πέρασε μάλλον ένα σημαντικό χρονικό διάστημα, κατά το οποίο υπήρξε αδράνεια από μέρους των μαθητών, με αποτέλεσμα να αποφασίσει να παρέμβει στην διαδικασία. Ο σκοπός του ήταν αναμφισβήτητα να βοηθήσει τους μαθητές και πιθανότατα και την ερευνήτρια, καθώς εκείνη τη στιγμή ήταν απασχολημένη. Ενδεχομένως, να θεωρήθηκε πολύ δύσκολος στόχος προς επίτευξη για τους μαθητές και να επέλεξε σκόπιμα, να αποκαλύψει τις πληροφορίες που επιχειρήθηκε από την ερευνήτρια να ανακαλύψουν μόνοι τους. Επιπλέον, υπήρχε χρονική πίεση καθώς πλησίαζε το διάλειμμα και προσπάθησε να επισπεύσει τις διαδικασίες. Ωστόσο, παρατηρούμε, ότι ακόμα και ο εκπαιδευτικός της τάξης υιοθέτησε τη δεικτική κίνηση που προηγουμένως εκτέλεσε η ερευνήτρια και την

εφάρμοσε ως μέσο εξαντικειμενίκευσης για να φέρει τους μαθητές μπροστά στην απάντηση. Επιπρόσθετα, στράφηκε και στη γραπτή καταγραφή με μορφή αριθμών και συμβόλων, η οποία, οφείλουμε να παραδεχτούμε ότι, υπό τους κατάλληλους χειρισμούς και χωρίς τη χρήση του αγνώστου X , θα μπορούσε να είχε φανεί βοηθητική στην προώθηση των διαδικασιών κατά την επίλυση. Παρ' όλα αυτά, ο εκπαιδευτικός, μέσω της παρέμβασής του, μετατόπισε την προσοχή των μαθητών σε ένα μαθημένο-γνωστό για αυτούς μαθηματικό γνωστικό αντικείμενο (τις εξισώσεις) στις οποίες θα κατέληγε, ιδανικά, η διδασκαλία, εφόσον περνούσαν οι μαθητές από την συνειδητοποίηση της αριθμητικής ακολουθίας, στη γενίκευσή της σε αλγεβρική ακολουθία. Ωστόσο, η δυσκολία για τους μαθητές παρέμεινε. Εκείνο που ήταν αναγκαίο να κατανοήσουν, αρχικά, ήταν η αριθμητική δομή της κάθε εβδομάδας με τη μορφή αριθμητικής πράξης με ορισμένα σταθερά στοιχεία ανά εβδομάδα (δηλαδή τον πολλαπλασιασμό ενός διαφορετικού, ανάλογα με την εβδομάδα, αριθμού επί 2, συν ένα), ώστε να συνδέσουν έπειτα τον κάθε πολλαπλασιαστή με τον αριθμό που φέρει η κάθε εβδομάδα. Αυτή, ήταν μάλλον και η μεγαλύτερη δυσκολία του προβλήματος, που ο εκπαιδευτικός επέλεξε να προσπεράσει, παραθέτοντας την πληροφορία ότι ο άγνωστος X ισούται με την κάθε εβδομάδα. Παρ' όλα αυτά, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν και πάλι στο σύνολο τους να κατανοήσουν τη σημασία του λόγου αυτού. Ο προσδιορισμός της άγνωστης ποσότητας για αυτούς είναι πιθανότερο να ανταποκρινόταν στο σύνολο των κιβωτίων. Για να αντιληφθούν το πώς η κάθε εβδομάδα λειτουργεί ως άγνωστος X , θα έπρεπε προηγουμένως να έχουν μαθηματικοποιήσει την κάθε εβδομάδα, δίνοντάς της έναν αριθμό (τον αριθμό που αντιστοιχεί στην εβδομάδα αυτή, πχ. $1^{\text{η}}$ εβδομάδα=1, $14^{\text{η}}$ εβδομάδα=14 κοκ). Οι μαθητές όμως, δεν φάνηκε να πέρασαν σε αυτό το επίπεδο αποστασιοποίησης από το συγκεκριμένο. Επιπλέον, η δομή που ακολούθησε για την αλγεβρική ακολουθία δεν ανταποκρίνεται στην δομή που την αναπαριστάνει οπτικά. Θα έπρεπε να είχε γράψει $X*2=1$, μιας η προσπάθεια έγινε για να κατανοηθεί αυτή η δομή, λαμβάνοντας υπόψιν το 2 και το 1 ως γνωστά και σταθερά επαναλαμβανόμενα στοιχεία της ακολουθίας. Ως εκ τούτου, οι μαθητές δεν επέδειξαν ουσιαστική κατανόηση, του πώς πραγματοποιήθηκε η μετάβαση από τη μια δομή στην άλλη, κι αυτό αποδεικνύεται και από το ότι μόνο ένας μαθητής ήταν σε θέση να αναπαραγάγει, έστω και μηχανικά, την αλγεβρική ακολουθία για να βρει κάποια επόμενη εβδομάδα που του ζητήθηκε.

3^ο Πρόβλημα - Πρόβλημα κήπων

Ο μαθητής M1 διαβάζει το πρόβλημα στην ομάδα του.

«M1: Να μετρήσουμε με χάρακα (απευθυνόμενος στην ερευνήτρια);

E: (σήκωμα ώμων) Πώς νομίζετε ότι θα το βρείτε; Μπορείτε αλλιώς;

M2: Ναι, με χάρακα. Έχεις χάρακα; (ρωτά τον μαθητή M.)

Ο M ψάχνει στην κασετίνα του, του δείχνει το μοιρογνωμόνιο, αλλά ο M2 του προτείνει το τρίγωνο, που είδε ότι υπήρχε επίσης ανάμεσα στα πράγματά του, λέγοντάς του «Καλύτερα αυτό. Μας κάνει». Παράλληλα το πήρε από τα πράγματα του M.

M2: Να μετρήσουμε το τέτοιο; (Σέρνει το τρίγωνο στο τριγωνικό σχήμα του κήπου και το τοποθετεί πάνω στην υποτείνουσα. Ξεκινούν να μετράνε μαζί. Τους βλέπει ο M1 που εν τω μεταξύ μέτρησε στο χαρτί του, και λέει απευθυνόμενος στον M2 (που κρατούσε το χάρακα) «Αυτό γιατί να το μετρήσεις; Εμβαδόν θέλεις. Δεν το χρειάζεσαι».

M2: Ναι. Δεν το μετράμε (απευθυνόμενος στον M). (Με το άκουσμα του «αυτό γιατί» μετακίνησε το τρίγωνο στη βάση). Αυτό θα μετρήσουμε.»

Οι δυο μαθητές πιάνουν μαζί το τρίγωνο, το τοποθετούν στην κάθετη πλευρά και μετρούν το μήκος. Σημειώνει ο M2. Επαναλαμβάνουν τη διαδικασία για την άλλη πλευρά και έπειτα εφαρμόζουν τον τύπο για να βρουν το εμβαδόν του. Ο M κάνει την πράξη που του υπαγορεύει ο M2 με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης. Με τον ίδιο τρόπο εργάζονται για να βρουν το εμβαδόν του τετραγώνου.

Αρχικά, βλέπουμε ότι οι μαθητές αρχίζουν να συνεργάζονται περισσότερο και να λαμβάνουν περισσότερο υπόψιν ο ένας τα λεγόμενα του άλλου. Έτσι, ο M2 αναλαμβάνει πρωτοβουλία να απαντήσει αντί για την ερευνήτρια στον συμμαθητή του (αντιλαμβανόμενος από τη στάση της και την θέση του ερωτήματός της, την ορθότητα της απάντησής του), καθοδηγώντας, κατά κάποιον τρόπο τη διαδικασία που θα ακολουθούσε η ομάδα του, ενώ στη συνέχεια, καθοδήγησε και τον μαθητή M, επιλέγοντας για την μέτρηση ένα πιο κατάλληλο όργανο. Αυτή η επιλογή έγινε δεκτή από τον M χωρίς καμία αντίρρηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο M2 το πέτυχε αυτό με μια κίνηση, δηλαδή με το να το πιάσει και να το απομακρύνει από τα άλλα αντικείμενα, καθώς δεν το αποκαλεί με το όνομά του, αλλά «αυτό». Με παρόμοιο τρόπο λειτουργεί σέρνοντας το γνώμονα στην υποτείνουσα του τριγώνου, για να δείξει

την πλευρά που προτίθεται να μετρήσει, καθώς δεν γνωρίζει την επίσημη μαθηματική ονομασία της, αλλά την αποκαλεί «το τέτοιο». Χωρίς την κίνησή του, θα ήταν αδύνατο και στις δυο περιπτώσεις να κατανοήσει κανείς τι εννοούσε απλώς από τα λεγόμενά του. Η κίνηση και η χρήση των απτικών μέσων, επομένως, λειτούργησαν ως μέσο εξαντικειμενίκευσης προωθώντας την επικοινωνία των μελών, αλλά και την επεξεργασία του προβλήματος. Ακόμα, διαπιστώνουμε, ότι ο λόγος του μαθητή M1 λειτούργησε ως διαμεσολαβητής της διαδικασίας των άλλων δυο μαθητών, εφόσον οδήγησε στην διαπίστωση του λάθους τους και στον άμεσο επαναπροσδιορισμό της διαδικασίας. Τέλος, βλέπουμε ότι ο μαθητής επέλεξε να χρησιμοποιήσει υπολογιστή τσέπης για να διευκολύνει τη διαδικασία υπολογισμού του αριθμητικού αποτελέσματος, αναλαμβάνοντας την εργασία αυτή για λογαριασμό της ομάδας.

«M1: Τώρα πρέπει να γίνουν ίσα.

Στο σημείο αυτό ο M ασχολούνταν ακόμα με τον υπολογιστή τσέπης και δεν φαινόταν να προσέχει ιδιαίτερα, οπότε η ερευνήτρια έδειξε με το δείκτη της στο χαρτί, ρωτώντας τον «τι μπορούμε να κάνουμε για να γίνουν ίσα».

M: Κάνει διά 2.

M2: Όχι δεν κάνουμε δια 2.

M: Επί 2. Θα τα προσθέσουμε.

M1: Να πω τι σκέφτηκα;

M: Να κάνουμε πολλαπλασιασμό.

M1: Να το μικρύνουμε. Να το κάνουμε 5 (δείχνοντας το τετράγωνο).

M: Να ρωτήσουμε την κυρία. Δεν γίνεται αυτό, να το μικρύνουμε ή να το μεγαλώσουμε. Γίνεται αυτό κυρία;

E: Ναι, βέβαια. Πώς δε γίνεται!

M: Α.. (σήκωμα ώμων και ελαφρύ στρέψιμο του κεφαλιού στο πλάι). Θα αρχίσουν να λένε κάποια άλλα παιδιά μικρότερα ότι αυτό είναι μεγαλύτερο και εκείνο μικρότερο.

M1: Α, καλά! Να το μεγαλώσουμε.

Ο M2 επιχειρεί να μεγαλώσει το τετράγωνο.

M1: Αυτό θα μεγαλώσεις; Καλά, το μεγάλο θα μεγαλώσεις;

M2: Ε... (γρήγορο κούνημα του κεφαλιού δεξιά-αριστερά) ναι.

M1: Ε, να το μικρύνουμε.»

Συνεχίζουν ελαττώνοντας τις διαστάσεις του τετραγώνου έτσι ώστε τα εμβαδά να είναι ίδια.

Η ερευνήτρια χρησιμοποίησε εδώ μια δεικτική κίνηση που λειτούργησε θετικά στο να επαναφέρει την προσοχή του μαθητή Μ στη διαδικασία. Ωστόσο, οι απαντήσεις του και η γρήγορη εναλλαγή τους, δείχνει πιθανόν την ανάγκη ή/και τη διάθεσή του να συμμετάσχει δυναμικά στην ομάδα του, βρίσκοντας γρήγορα την κατάλληλη απάντηση, χωρίς να επεξεργαστεί προσεκτικά τα ζητούμενα και τα δεδομένα. Ωστόσο, συμβαίνει κάτι αξιοπρόσεκτο. Χρησιμοποιεί στον λόγο του για πρώτη φορά το α' πληθυντικό πρόσωπο, ενδεχομένως επηρεασμένος από το λόγο των συμμαθητών του. Επίσης, διατυπώνει την αμφισβήτησή του απέναντι στην ιδέα του Μ1, στρεφόμενος στην ερευνήτρια, αλλά χρησιμοποιώντας στον λόγο και πάλι α' πληθυντικό πρόσωπο. Αυτό, δείχνει ότι δεν αποστασιοποιεί τον εαυτό του από την ομάδα, ούτε σε αυτή την περίπτωση. Μάλιστα, εκφράζει τον σκεπτικισμό του ακόμα και απέναντι στην απάντηση της ερευνήτριας, μέσα από τη στάση του σώματός του, και επιπρόσθετα, εξηγεί αυθόρμητα τον λόγο της αμφιβολίας του, που δείχνει την ικανότητά του να μπει στη θέση των άλλων (θεωρία του νου).

«Ε: Τώρα υπολογίστε το πραγματικό εμβαδόν των δυο κήπων όπως ήταν στην αρχή.

Μ1: Τα υπολογίσαμε.

Ε: Αυτό που υπολογίσατε δεν είναι οι πραγματικές του διαστάσεις. Το σχέδιο αυτό είναι μια σμίκρυνση. Τι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο σχέδιο για να βρείτε την πραγματική του διάσταση;

Μ1: Η είσοδος.

Μ: Το σχολείο. Είναι το σχολείο μας.

Ε: Δεν είναι το σχολείο μας. Είναι ένα σχολείο. (τονική έμφαση στο «ένα»)

Μ1: Ναι, γιατί το σχολείο μας είναι στη μέση της αυλής.

Ε: Γιατί; Ξέρουμε πόσο μήκος έχει το σχολείο μας;

Μ: Όχι.

Ε: Το σχολείο αυτό είναι ίδιο με τα άλλα σχολεία;

Όλοι: Όχι.

Ε: Η αυλή είναι ίδια;

Όλοι: Όχι.

Ε: Υπάρχει κάτι που είναι ίδιο και στο σχολείο μας;

Μ2: Όχι.

Δεν απάντησε κανένας άλλος κάτι διαφορετικό στο χρονικό διάστημα που

ακολούθησε.

E: Υπάρχει. (μικρή παύση)

M2: Α! Τα θρανία!

M1: Όχι!

E: Ναι!

M1: Α! Ναι. Αλλιώς το σκέφτηκα.

E: Τα θρανία είναι ίδια σε όλα τα σχολεία. Άρα, μπορώ να βρω τις πραγματικές διαστάσεις του θρανίου;

Όλοι: Ναι!

E: Πώς;

Όλοι: Θα το μετρήσουμε!

Ο M1 και ο M παίρνουν στα χέρια τους το χάρακα και τον γνώμονα αντίστοιχα, και ξεκινάν να μετρήσουν. Ο M1 μετράει το θρανίο στο χαρτί. Ο M μετράει το θρανίο του. Ο M1, αφού μέτρησε, κοιτάει τον M με ύφος αποδοκιμαστικό και ετοιμάστηκε να πει κάτι (χωρίς να το κάνει) σαν να ήταν έτοιμος να τον διορθώσει, αλλά κοντοστάθηκε και άλλαξε έκφραση (σαν να κατάλαβε τι κάνει ο συμμαθητής του και ότι δεν ήταν λάθος) οπότε τελικά λέει:

M1: Το θρανίο πρέπει να μετρήσουμε; (κοιτάζει την ερευνήτρια).

Σταματάει τη δραστηριότητά του και ο M.

E: Και τα δύο θα τα χρειαστούμε.

Οπότε ο M συνεχίζει τη μέτρησή του (για δευτερόλεπτα).

M1: Α...(σαν βαθιά αναπνοή). Το 'χουμε γράψει στο βιβλίο!

M2: Ναι!

Ο M1 έφαχνε σε λάθος βιβλίο οπότε τον διόρθωσε ο M2 και συνέχισε το ψάξιμο στο άλλο βιβλίο. Εν τω μεταξύ ο M σταμάτησε τη μέτρηση με τον χάρακα και άνοιξε το βιβλίο του. Βρήκε το σημείο, τέντωσε τον κορμό του, μακραίνοντας το σώμα του και διάβασε δυνατά τις μετρήσεις στους άλλους δυο, οι οποίοι σημείωναν στο φύλλο εργασίας τους.

M: Εμβαδόν θρανίου. Μήκος 1,20, πλάτος 0,40»

Διαπιστώνεται και πάλι η χρήση του α' πληθυντικού από τον μαθητή M στη φράση «Το σχολείο. Το σχολείο μας», και μάλιστα κατά την αναδιατύπωση, το οποίο εδώ λειτουργεί προσδιοριστικά. Επίσης, η επανάληψη της λέξης, είναι ενδεικτική του ενθουσιασμού του, πιστεύοντας ότι βρήκε την σωστή απάντηση. Ο M1 αναφέρθηκε

στο χαρακτηριστικό της τοποθέτησής του στο χώρο, για να αποκρούσει την άποψη ότι το σχολείο του σχεδίου, είναι το σχολείο τους (αφού άκουσε πρώτα την αρνητική απάντηση της ερευνήτριας). Γι' αυτό, χρησιμοποιήθηκαν από την ερευνήτρια οι φράσεις «ξέρουμε το μήκος...» και «...ίδιο με τα άλλα», προκειμένου να στραφεί η προσοχή τους μέσω της λεκτικής αυτής βοήθειας, στη σωστή κατεύθυνση αναζήτησης. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι η ίδια λεκτική διατύπωση «θα το μετρήσουμε» (εννοώντας το θρανίο) έγειρε δυο διαφορετικές συμπεριφορές και οδήγησε στην αξιοποίηση του ίδιου σημειωτικού μέσου, του χάρακα/ γνώμονα (ίδιο από την άποψη της λειτουργίας του στο να μετρήσει το μήκος) σε δυο διαφορετικά σημειωτικά μέσα. Ο ένας μαθητής μέτρησε το μήκος του θρανίου στις φυσικές του διαστάσεις και ο άλλος μέτρησε το μήκος της μικρογραφίας του θρανίου στο σχέδιο. Αυτή η σύγκριση, οδήγησε στην αμφιβολία των μαθητών για την ορθότητα των εργασιών τους και στράφηκαν πάλι στην ερευνήτρια. Ακολούθως, πραγματοποιείται παύση της διαδικασίας μέτρησης του θρανίου, εφόσον ο M1 θυμήθηκε ότι η ίδια διαδικασία μέτρησης πραγματοποιήθηκε στα προηγούμενα μαθήματά τους, και ότι αυτή η πληροφορία βρισκόταν ήδη γραμμένη στο σχολικό τους βιβλίο. Ο μαθητής M, διαπιστώνοντας ότι οι συμμαθητές του αργούν να βρουν το σημείο στο βιβλίο, όπου είχαν γράψει τη μέτρηση του μήκους του θρανίου τους, επέδειξε ιδιαίτερο ζήλο στο να το βρει πρώτος, όπως και το έκανε. Η ικανοποίησή του έγινε φανερή και από τη δυνατή (συγκριτικά με τα δεδομένα του) ανάγνωση που πραγματοποίησε καθώς και από τη στάση του σώματός του.

«E: Ξέρουμε τις διαστάσεις του. Τι θα κάνουμε για να βρούμε τις πραγματικές διαστάσεις των κήπων;

M1: Να δούμε πόσες φορές χωράει (δείχνει όλο το θρανίο, γύρω-γύρω, στο σχέδιο) σε αυτό (δείχνει τον κήπο του Δ1).

E: Όλο το θρανίο; Τι θα χρειαστούμε; Το μήκος ή το πλάτος; Ποιο μας διευκολύνει στη μέτρηση; (παύση) Η μεγάλη πλευρά του ή η μικρή; (δείχνοντας ταυτόχρονα με το μολύβι στο σχήμα κατά μήκος των αντίστοιχων πλευρών).

M1: Η μεγάλη.

E: Πόσο είναι η μεγάλη;

M1: 1 εκατοστό.

E: Ωραία. Στην πραγματικότητα πόσο είναι;

M1: 1,20 μέτρα.

E: Τι σχέση έχει αυτή η πλευρά (κινώντας το μολύβι κατά μήκος της πλευράς του θρανίου στο σχέδιο) ... με αυτήν (κινώντας το μολύβι κατά μήκος της πλευράς του κήπου στο σχέδιο);

M1: Είναι παράλληλες.

E: Εκτός από αυτό; Ως προς τις διαστάσεις τους;

M1: Είναι ένα και το άλλο έξι. Και είναι παράλληλες.

E: Αυτό είναι τυχαίο. Θα μπορούσε το θρανίο να ήταν πλάγια. Τι σχέση έχει το 1 (το μολύβι ακουμπά τη γραμμή του θρανίου στο σχέδιο που αντιστοιχεί το 1) με το 6 (το μολύβι μετακινείται από το «1» στην άκρη της πλευράς του σχήματος «6»);

M1: Το 1 είναι 1,20 (μικρή παύση)

E: Μπορώ να το χρησιμοποιήσω αυτό (δείχνεται το μήκος του θρανίου) για να βρω αυτό (μεταφέρεται το μολύβι στην άκρη του μήκους του κήπου);

M1: Μπορώ να το βάλω πάνω (δείχνει στην άκρη του θρανίου και έπειτα μετακινεί το μολύβι του σε ένα σημείο παραδίπλα, αφήνοντας μια μικρή απόσταση). Α! Κατάλαβα...6 φορές.

E: Πόσο είναι το 1 στην πραγματικότητα;

M1: 1,20.

E: Άρα...

M1: Α! Κατάλαβα. (Σκύβει στο γραπτό του και ξεκινά να γράφει γρήγορα).

E: (προς τους υπόλοιπους της ομάδας) Καταλάβατε;»

Ο M2 που είχε ξεκινήσει να γράφει κάτι, σταμάτησε και είπε ότι δεν το κατάλαβε και πολύ καλά. Τότε ζητήθηκε από τον M1 να εξηγήσει και στους υπόλοιπους τι σκέφτηκε και να βεβαιωθεί ότι βρίσκονται όλοι στο ίδιο σημείο.

Ο M1 τους είπε ότι θα βάλουν (χρήση α' πληθυντικού στην εξήγησή του) το θρανίο (του σχεδίου) εδώ (δείχνοντας την άκρη του μήκους της πλευράς του σχήματος) και τους ρώτησε πόσες φορές χωράει. Του απάντησαν 6 φορές και τους είπε ότι επειδή το 1 εκατοστό είναι ίσο με 1,20 μέτρα θα κάνουν (χρήση α' πληθυντικού) 6 επί 1,20. Κατάλαβαν το σκεπτικό και συνέχισαν κάνοντας τις πράξεις οι δυο τους. Ο M2 έλεγε και ο M πληκτρολογούσε στον υπολογιστή, λέγοντάς του τα αποτελέσματα ώστε να τα καταγράψει.

Ακολούθησε από την ερευνήτρια μια σειρά δεικτικών κινήσεων που συνόδευσαν το λόγο με σκοπό να φέρει τον μαθητή M1 στο σημείο να συνειδητοποιήσει τη σύνδεση μεταξύ των δυο στοιχείων που του έδειξε. Οι κινήσεις αυτές έγιναν πιο συγκεκριμένες

βαθμιαία, προσδίδοντας περισσότερα βοηθητικά στοιχεία. Η κίνηση κατά την οποία έσυρε το δάχτυλο από το ένα σημείο στο άλλο, μπορεί να παρομοιαστεί με τη λειτουργία ενός υπολογιστή ή με την κίνηση σε μια οθόνη αφής, όπου ένα αντικείμενο μπορεί να κρατηθεί και να μεταφερθεί σέρνοντας το ποντίκι ή το δάχτυλο αντίστοιχα στην επιφάνεια της οθόνης. Έτσι, φαίνεται να δημιουργήθηκε στον μαθητή αυτή η νοητική εικόνα, ότι δηλαδή, το ένα σημείο μεταφέρθηκε νοερά και τοποθετήθηκε πάνω στο άλλο, καθώς φάνηκε να τον βοήθησε σημαντικά στην εύρεση της σωστής απάντησης. Μάλιστα, μεταχειρίστηκε παρόμοιο τρόπο με τη χρήση πιο συγκεκριμένου λεξιλογίου και μιας δεικτικής κίνησης, για να εξηγήσει στους συμμαθητές του τι θα κάνουν. Δηλαδή, χρησιμοποίησε τη φράση «θα βάλουμε το θρανίο εδώ», δίνοντας λεκτικά το στοιχείο του μήκους του θρανίου (λέγοντας θρανίο) καθώς και την κίνηση προς τον κήπο (λέγοντας θα βάλουμε, που είναι ένα ρήμα που υποδηλώνει αλλαγή κατεύθυνσης-κατάστασης) και δείχνοντας μόνο την άκρη της πλευρά του κήπου (και λέγοντας εδώ), κατάφερε να δημιουργήσει επιτυχημένα για τους συμμαθητές του την ίδια νοητική εικόνα. Τους έθεσε κατάλληλες ερωτήσεις και κατόρθωσε να τους οδηγήσει, χωρίς την παρέμβαση της ερευνήτριας, στο να συνειδητοποιήσουν τη συσχέτιση ανάμεσα στα μεγέθη, ώστε να προβούν στη συνέχεια σε εταιρική συνεργασία για εύρεση των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο πρώτο πρόβλημα ο μαθητής δημιούργησε μια σημειωτική δεσμίδα αποτελούμενη από το σχέδιο της σκάλας στο φύλλο εργασίας του, τις δεικτικές κινήσεις στο χαρτί που πραγματοποίησε με το δείκτη του αριστερού του χεριού και την καταγραφή αριθμών σε δύο στήλες (θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως πίνακας). Ο προφορικός λόγος, ο ρυθμός και παύσεις στον λόγο του χρησίμευσαν ως σημειωτικά μέσα κατά την επεξήγηση στην ομάδα του. Επιπλέον, αφού παρακινήθηκε (όπως και το σύνολο των συμμαθητών του) από τον εκπαιδευτικό της τάξης επέλεξε μια κόλλα χαρτί A4 για να σχεδιάσει μια τρισδιάστατη αναπαράσταση της σκάλας και την πλαστελίνη για να κατασκευάσει με αφαιρετικό (συμβολικό) τρόπο τα φυτά, διευρύνοντας έτσι, περισσότερο τη σημειωτική δεσμίδα. Κατά την φάση της παρουσίασης στην τάξη του τρόπου επίλυσης που ακολούθησε, χρησιμοποίησε, επιπλέον, ελλειπτικές γραμμές για να αποτυπώσει στον πίνακα (με χρήση του μαρκαδόρου) την ανοδική κίνηση του παιδιού στην σχεδιασμένη σκάλα. Μάλιστα, αύξησε την δυναμική της σημειωτικής του

δεσμίδας, καθώς στη φάση αυτή συνυπήρξαν ο λόγος, ο ρυθμός και οι παύσεις, η σχεδίαση των κινήσεων και η καταγραφή τους (με αριθμητικά σύμβολα) σε πίνακα, καθώς και η χρήση της πλαστελίνης (στο τέλος). Διαπιστώνεται ότι ο μαθητής επηρεάστηκε από τους συμμαθητές του ως προς την υιοθέτηση στην επίλυσή του τού στοιχείου των ελλειπτικών γραμμών (όπως το είδε να σχεδιάστηκε από μια άλλη ομάδα) το οποίο όμως προσάρμοσε στην στρατηγική του. Δηλαδή, όπως έκανε και με τις δεικτικές κινήσεις με τον δείκτη του χεριού του, έτσι και σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποίησε τις ελλειπτικές γραμμές για να αποτυπώσει μόνο την κάθε ανοδική και όχι τις καθοδικές κινήσεις στη σκάλα. Η καθοδική κίνηση αποτυπώθηκε με τη σημειωτική δεσμίδα του προφορικού λόγου και της γραπτής καταγραφής στον πίνακα (μετρήσεων). Ωστόσο, έχει αξία το ότι η προηγουμένως (αποκλειστικά) δεικτική κίνηση, επιλέχθηκε τώρα να αποτυπωθεί και γραπτά, καθώς πιθανότατα υποδηλώνει την κατανόηση από μέρους του μαθητή της ανάγκης να εξηγήσει με κατανοητό στους άλλους τρόπο την στρατηγική επίλυσης που ακολούθησε, στην οποία η γραπτή απεικόνιση της κίνησης διαδραματίζει έναν σημαντικό και άρα άξιο να αποτυπωθεί ρόλο.

Στο δεύτερο πρόβλημα, ο μαθητής χρησιμοποίησε τον προφορικό λόγο, τις κόλλες με τον αριθμό της κάθε εβδομάδας και του κύβους. Επιπλέον, εκτέθηκε όπως και οι συμμαθητές του, στα μέσα εξαντικειμενίκευσης που χρησιμοποιήθηκαν από την ερευνήτρια κατά τη φάση της επεξεργασίας του προβλήματος στην ολομέλεια της τάξης. Σε αυτή τη φάση, πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια σχεδιαστική απεικόνιση των κύβων, με τυχαία και στη συνέχεια με οργανωμένη δομή, χρησιμοποιήθηκε χρώμα (σκίαση) ως ενδείκτης του ενός κύβου (ανά εβδομάδα) (επιπλέον οργάνωση των εβδομάδων τη μία δίπλα στην άλλη με σειρά ανάλογη αυτής των φύλλων εργασίας τους), δεικτικές κινήσεις και ο προφορικός λόγος. Ωστόσο, οι μαθητές χρησιμοποίησαν περιορισμένα μέσα εξαντικειμενίκευσης (αν και εκτέθηκαν σε περισσότερα στην ολομέλεια) γεγονός που ίσως εξηγεί την περιορισμένη απόδοσή τους στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ενώ ταυτόχρονα αποδεικνύει τη δυσκολία που κρύβει η μεταφορά από ένα μέσο αναπαράστασης σε ένα άλλο, ακόμα και στο ίδιο μητρώο, όπως υποστηρίζει και ο Duval, με ιδιαίτερη επίδραση στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου η μεταφορά αυτή αποτελεί το βασικό σημείο-κλειδί για την επίλυση του προβλήματος (ενός προβλήματος με υψηλές απαιτήσεις).

Στο τρίτο πρόβλημα, η σημειωτική δεσμίδα που παρατηρήθηκε να χρησιμοποιήθηκε από τον μαθητή, αποτελείται από το σχέδιο στο χαρτί (κάτοψη), από το θρανίο, τον γνώμονα, το σχολικό βιβλίο των μαθηματικών, τη γραπτή καταγραφή αριθμών (μήκος), τη χρήση αλγορίθμων (μέτρησης εμβαδού), την αξιοποίηση αριθμομηχανής και τον προφορικό λόγο. Από την ερευνήτρια και από ένα μέλος της ομάδας πραγματοποιήθηκαν, επιπλέον, δεικτικές κινήσεις πάνω στο σχέδιο με τον δείκτη του χεριού (με ταυτόχρονη χρήση προφορικού λόγου), αλλά παρά την έκθεση των υπολοίπων μελών της ομάδας σε αυτές, δεν προέβησαν και οι ίδιοι στην χρησιμοποίησή τους. Βέβαια, σε μια περίπτωση η τοποθέτηση του χάρακα στην υποτείνουσα του τριγώνου και η επανατοποθέτηση, έπειτα από την παρατήρηση του συμμαθητή τους, στη μια από τις πλευρές του τριγώνου, μπορεί να θεωρηθεί ως μια δεικτική κίνηση της πλευράς που προτίθενται να μετρήσουν.

Για το πρώτο πρόβλημα, η αξιοποίηση των κινήσεων και η συμπερίληψή τους στις σημειωτικές δεσμίδες, ήταν αναμενόμενη, καθώς το πρόβλημα προσφερόταν για δεικτικές κινήσεις ως μέρος της επίλυσής του. Ωστόσο, αυτές συσχετίστηκαν αποκλειστικά με το σχέδιο (προσανατολισμένες στο αντικείμενο) και εμφανίστηκαν κατά την ατομική εργασία του μαθητή, χωρίς συνοδεία προφορικού λόγου. Επίσης, ο προφορικός λόγος στην περίπτωση της επεξήγησης στην ομάδα, δεν συνοδεύτηκε από αυτές, ούτε στο χαρτί, ούτε ως κίνηση του χεριού στον χώρο (όπως πιθανότατα θα έκανε αυθόρμητα ένας φυσικός ομιλητής, κατά τον Mc Neil), αλλά ο μαθητής αρκέστηκε στις παύσεις του προφορικού του λόγου (και στον δημιουργούμενο ρυθμό), εφόσον υποθέσουμε ότι τις χρησιμοποίησε εσκεμμένα για τον σκοπό αυτό, για να αποδώσει με τον τρόπο αυτό, νοερά, την ανοδική και την καθοδική κίνηση, εξηγώντας, δηλαδή την στρατηγική του. Από την άλλη, στην περίπτωση αυτή, έθεσε μπροστά στα μέλη της ομάδας του τον πίνακα (τις στήλες) με την καταγραφή των κινήσεων που περιέγραφε, οπότε ενδεχομένως εδώ, να προέβαλε τη μια στρατηγική, ή προτιμότερα τον έναν τρόπο αποτύπωσής της (την καταγραφή) έναντι της άλλης (δεικτική κίνηση μέτρησης), γεγονός ενδεικτικό της σημασίας που είχε για τον μαθητή, μέχρι εκείνη τουλάχιστον τη στιγμή, ο μαθημένος, συμβολικός (μαθηματικοποιημένος θα μπορούσαμε να πούμε), τρόπος επίλυσης, όντας εγγύτερος στα παραδοσιακά σημειωτικά μέσα σημείωσης. Ωστόσο, είναι γεγονός ότι κάποια δεικτική κίνηση θα μπορούσε να είχε πραγματοποιηθεί και στις στήλες, έστω για να δείξει το σημείο στο οποίο αναφέρεται κάθε φορά (υποδηλώνοντας ταυτόχρονα και την κίνηση στην σκάλα

με έναν «μεταφορικό» τρόπο, ενδεχομένως χωρίς αυτό να γίνεται συνειδητά). Ωστόσο, η κίνηση απορρίφτηκε εντελώς από τη διαδικασία επεξήγησης όταν αυτή πραγματοποιήθηκε στα μέλη της ομάδας του. Αντίθετα, η ανοδική πορεία, επιλέχθηκε να αποτυπωθεί κατά την επεξήγηση στο σύνολο της τάξης, γεγονός που αποδεικνύει ότι επηρεάστηκε από τα μέσα εξαντικειμενίκευσης που παρουσιάστηκαν από τους συμμαθητές του, εφόσον το μέσο αυτό χρησιμοποιήθηκε από μια εκ των υπόλοιπων ομάδων. Βέβαια, το προσάρμοσε, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στη δική του στρατηγική. Επιπλέον, είναι πιθανόν να πείστηκε, αφενός για το γεγονός ότι είναι κι αυτός ένας αποδεκτός τρόπος επίλυσης, εφόσον έχει χρησιμοποιηθεί κι από άλλους (δεδομένου ότι πρόκειται για έναν μαθητή που φέρει ανασφάλειες και αναζητά συχνά την επιβεβαίωση), αφετέρου για τη χρησιμότητα της αποτύπωσης της κίνησης στο σχέδιο της σκάλας, ως μέρος της καλύτερης επεξήγησης του τρόπου σκέψης του στους άλλους.

Ως προς τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των δεικτικών κινήσεων του μαθητή κατά την επίλυση του πρώτου προβλήματος, σύμφωνα με την τυπολογία του McNeil (1992), αυτά αποτυπώνουν την πορεία της (επαναλαμβανόμενης) κίνησης, η οποία είναι πλάγια (διαγώνια), ευθύγραμμη κίνηση, με ανοδική κατεύθυνση προς τα αριστερά. Κάθε ανοδική κίνηση με τη συγκεκριμένη πορεία, ακολουθείται από μια μικρή χρονική παύση, που την ακολουθεί η γραπτή καταγραφή. Στη συνέχεια πραγματοποιείται άρση και τοποθέτηση του δαχτύλου στο επόμενο «σκαλοπάτι», δηλαδή ο δείκτης του χεριού μετατοπίζεται μια θέση διαγώνια προς τα πάνω και αριστερά. Αυτό δημιούργησε έναν συγκεκριμένο ρυθμό στις επαναλαμβανόμενες κινήσεις. Ως προς τα στοιχεία της χωρικότητας της κίνησης αλλά και του τρόπου της εκτέλεσης της κίνησης διαπιστώνεται, ότι δεν έχουν αποδοθεί, κατά την πρώτη φάση της επεξεργασίας του μαθητή, καθώς οι δεικτικές του κινήσεις δεν πραγματοποιήθηκαν στον φυσικό τρισδιάστατο χώρο, μπροστά στο σώμα του ομιλητή-λύτη, (πάνω- κάτω ή /και δεξιά-αριστερά), αλλά με τοποθέτηση του δείκτη πάνω στο σχέδιο, ενώ το ανέβασμα της σκάλας δεν αποδόθηκε μέσω κάποιας κλιμακωτής (σε επάλληλα επίπεδα) ή ελλειπτικής κίνησης, ώστε να αποδοθούν τα χαρακτηριστικά στοιχεία της χωρικότητας της σκάλας (κλιμακωτή διάταξη στο χώρο) ή το είδος της κίνησης που πραγματοποιεί κανείς κατά την ανάβαση μιας σκάλας, αντίστοιχα. Αντίθετα, αποδόθηκε μόνο το στοιχείο του υψομετρικού αναπτύγματος της σκάλας μέσω της ανοδικής πλάγιας κίνησης, η οποία μάλιστα τοποθετήθηκε κάτω από το κάθε σκαλοπάτι, γεγονός που

αποδεικνύει ότι τέτοιου είδους χαρακτηριστικά σχετικά με το «μονοπάτι της κίνησης», όπως το ονομάζει ο McNeil ή την μίμηση της φυσικής κίνησης, δεν θεωρήθηκε σκόπιμο να αποδοθούν από τον μαθητή, κατά την φάση αυτή της επεξεργασίας του προβλήματος. Επομένως, ο δείκτης του δαχτύλου δεν αναπαριστά, για παράδειγμα, το παιδί που «δρασκελίζει» τα σκαλοπάτια, ούτε το φυτό στα εκάστοτε σκαλοπάτια. Περισσότερο, είναι ενδεικτικό του σημείου, όπου ολοκληρώνεται ένα μοτίβο κίνησης και (εδώ) της αξιοποιούμενης στρατηγικής επίλυσης.

Συνολικά, και για τα τρία προβλήματα, διαπιστώνεται ότι η πραγματοποίηση δεικτικών κινήσεων ως μέρος της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος είναι πολύ περιορισμένη, εφόσον εμφανίζεται μόνο στο πρώτο πρόβλημα. Αυτό, ανταποκρίνεται στα επίσημα διαγνωστικά κριτήρια (DSM-V, ICD-10), σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος αντιμετωπίζουν ελλείμματα σε βασικές επικοινωνιακές δεξιότητες, όπως η δυνατότητα να αποδώσουν ή/και να λάβουν νόημα μέσω των χειρονομιών, του βλέμματος των εκφράσεων και της στάσης του σώματος. Οι κινήσεις που εκτέλεσε ήταν δεικτικές, προς ένα πραγματικό (και όχι νοερό) αντικείμενο και πραγματοποιήθηκαν κατά την ατομική εργασία του, χωρίς τη συνοδεία προφορικού λόγου. Δεν πραγματοποιήθηκε καμία δεικτική κίνηση κατά την συνεργασία με την ομάδα του, όπου προτιμήθηκε ο προφορικός λόγος. Απ' την άλλη σε μεγάλο βαθμό, οι κινήσεις του, αντικατοπτρίζουν το είδος της κατανόησης που αναπτύχθηκε για το κάθε πρόβλημα και τις επιλεγόμενες στρατηγικές επίλυσης. Φαίνεται, ότι οι κινήσεις που πραγματοποίησε ο μαθητής λειτούργησαν περισσότερο υποβοηθώντας τις νοητικές λειτουργίες του κατά την επεξεργασία και επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, αποφορτίζοντας το γνωστικό φορτίο και βοηθώντας την εργαζόμενη μνήμη, σύμφωνα με τη θεωρία, παρά ως ένας τρόπος να επικοινωνήσει τις ιδέες του και εξηγήσει τον τρόπο επίλυσης που ακολούθησε στην ομάδα του ή στην τάξη. Κατά τη φάση της παρουσίασης σε όλη την τάξη του τρόπου επίλυσης που ακολούθησε, μπορούμε να πούμε, ότι η αρχική δεικτική κίνηση μετατράπηκε σε σχεδιαστική απεικόνιση στον πίνακα. Ως προς το αν ο μαθητής ωφελήθηκε από τις κινήσεις των άλλων, αυτό δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο, καθώς αφενός οι κινήσεις συνοδεύονταν από λόγο (και στην περίπτωση που φάνηκε να ωφελήθηκε, ο προφορικός λόγος του συμμαθητή του ήταν ιδιαίτερα καθοδηγητικός και ίσως καθοριστικός ως προς την κατανόηση που ανέπτυξε ο μαθητής) και δεν είναι ξεκάθαρος ο βαθμός στον οποίο το ένα μέσο μπορεί να επηρέασε την ερμηνεία του

άλλου, αφετέρου διότι δεν φάνηκε να ωφελήθηκε κάποιος συμμαθητής του σε κάποια φάση κοινής «έκθεσης» σε κινήσεις, από την οποία εκείνος να επέδειξε αδυναμία να ωφεληθεί. Επιπλέον, ο ελάχιστος αριθμός δεικτικών κινήσεων και γενικά χειρονομιών από τους μαθητές κατά την εργασία τους σε ομάδες, δεν παρείχε ευκαιρίες για να διαπιστωθούν τόσο ο βαθμός κατά τον οποίο θα μπορούσε να ωφεληθεί από αυτές, όσο και ο βαθμός στον οποίο θα μπορούσε να τις υιοθετήσει στο δικό του ρεπερτόριο ενεργειών. Τα διαγνωστικά κριτήρια των διαταραχών του αυτιστικού φάσματος θα συνηγορούσαν κατά της πιθανότητας αυτής, ενώ τα εκπαιδευτικά και τα ερευνητικά αποτελέσματα (πχ. σχετικά με την έκθεση στις κινήσεις του εκπαιδευτικού, το γεγονός ότι οι κινήσεις αντικατοπτρίζουν μια στρατηγική, ότι αποφορτίζουν την εργαζόμενη μνήμη κ.ά.) θα συνηγορούσαν υπέρ της.

Αναφορικά με την αξιοποίηση των διάφορων απτικών μέσων, αυτή ήταν άλλοτε προαιρετική και άλλοτε προϋπόθεση της διαδικασίας επίλυσης. Η επιλογή ή μη των απτικών μέσων, καθώς και το ποια από τα μέσα αυτά επιλέχθηκαν να αξιοποιηθούν (από ποιους) και με ποιον τρόπο, αποτελεί βασικό σημείο της παρούσας μελέτης, καθώς μπορεί να οδηγήσει σε πολλά χρήσιμα συμπεράσματα, ωφέλιμα για τη μαθησιακή και τη διδακτική διαδικασία. Κατά το πρώτο πρόβλημα, καμιά ομάδα δεν προέβη αυθόρμητα στην αξιοποίηση κανενός από τα υλικά που δόθηκαν στη διάθεσή τους (χαρτί, χαρτόνια, πλαστελίνη). Χρειάστηκε η παραίνεση του εκπαιδευτικού της τάξης, μετά το πέρας των διαδικασιών επίλυσης που ακολουθήθηκαν από τις ομάδες, προκειμένου αυτές να χρησιμοποιήσουν τα απτικά υλικά. Αυτό, οφείλεται, προφανώς, στο γεγονός ότι το σχέδιο της σκάλας παρείχε μια βολική αναπαράσταση και ήταν ως εκ τούτου αρκετό από μόνο του για να συμπεριλάβει τα ζητούμενα και να οδηγήσει στην επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον, το πρόβλημα θεωρήθηκε εύκολο από τους μαθητές και σε συνδυασμό με τη βολική δοσμένη σχεδιαστική του απεικόνιση, δεν προέκυψε η ανάγκη να δημιουργηθεί μια νέου είδους αναπαράσταση. Ακόμη, πιθανή εξήγηση αποτελεί το γεγονός της μειωμένης εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση απτικών υλικών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, με αποτέλεσμα να τα αποφύγουν ή/και να προτιμήσουν πιο ασφαλείς, «μαθηματικοποιημένους» τρόπους επίλυσης, χωρίς αυτό να συνεπάγεται δυσκολία από μέρους τους στην αξιοποίησή τους. Άλλωστε, η ποικιλία στους τρόπους αναπαράστασης που προέβησαν με τη χρήση των απτικών υλικών, όταν αυτό τους ζητήθηκε, αποδεικνύει την ευκολία και την ευελιξία που επέδειξαν κατά την αξιοποίησή τους. Από τον μαθητή με διαταραχές του

αυτιστικού φάσματος προτιμήθηκε το χαρτί και το μολύβι, ως μέσο για να σχεδιάσει την τρισδιάστατη αναπαράσταση της σκάλα του προβλήματος. Με την τρισδιάστατη αναπαράστασή του, κατάφερε να αποδώσει με μεγάλη ευκολία τη χωρικότητα, και να συμπεριλάβει πληροφορίες για τον προσανατολισμό, τοποθετώντας δεξιά στα σκαλοπάτια μικρές μπαλίτσες από πορτοκαλί πλαστελίνη για να συμβολίσει τα φυτά. Ο πολύ αφαιρετικός τρόπος με τον οποίο χρησιμοποίησε την πλαστελίνη, υποθέτουμε ότι δείχνει έναν υψηλό βαθμό μαθηματοποίησης του προβλήματος, εφόσον η έμφαση φαίνεται να δόθηκε αποκλειστικά στην τοποθέτηση της πλαστελίνης-φυτού στον χώρο, δηλαδή στην ένδειξη του σημείου όπου βρίσκεται το κάθε φυτό, που αποτελούσε και το ερώτημα του προβλήματος, και όχι στην κατά το δυνατόν πιο ρεαλιστική αναπαράσταση του ίδιου του φυτού.

Στο δεύτερο πρόβλημα, χρησιμοποίησε, πρώτος από την ομάδα του, με ιδιαίτερο ενθουσιασμό το απτικό υλικό, το οποίο φάνηκε ότι τον προδιέθεσε πολύ θετικά ως προς την ομαδική δραστηριότητα. Δεν δυσκολεύτηκε να συνδέσει το απτικό υλικό, δηλαδή τους κύβους, με τα δεδομένα του προβλήματος, δηλαδή τις κούτες, και προσάρμοσε με ευκολία τη χρήση τους στα δεδομένα του προβλήματος. Το ίδιο το υλικό ήταν εύχρηστο και δεν δημιούργησε κανένα πρόβλημα στην αξιοποίησή του, εφόσον το ίδιο δεν απαιτούσε κάποια προσαρμογή ή μετατροπή στη μορφή του, όπως παράδειγμα η πλαστελίνη ή το χαρτί. Ωστόσο, όπως και οι υπόλοιποι συμμαθητές του, δεν προέβη σε μια πιο ευέλικτη χρήση ή/και επανατοποθέτηση του υλικού στον χώρο, δηλαδή δεν το χρησιμοποίησε, πέραν του αρχικού ερωτήματος, με τρόπο που να τον βοηθήσει να περάσει από την οπτικοποίηση, στην μαθηματοποίηση του συγκεκριμένου προβλήματος. Μάλιστα, ενώ οι περισσότερες ομάδες, όπως και ο ίδιος ο μαθητής, έπαιξαν με το υλικό, δημιουργώντας με αυτό αστείες μορφές, στη συνέχεια δεν το μετακίνησαν για να επεξεργαστούν τα δεδομένα. Δεν επηρεάστηκαν δηλαδή από την προηγούμενη ενέργειά τους με το υλικό, δηλαδή από την ευέλικτη χρήση του ως προς την τοποθέτησή του στο χώρο, ώστε να το αξιοποιήσουν ανάλογα, δηλαδή μετακινώντας το, προκειμένου να επιλύσουν το πρόβλημα. Εφόσον, αυτό δεν ζητήθηκε εσκεμμένα από τους μαθητές, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε εάν και κατά πόσο θα ωφελούνταν από την ενέργεια αυτή ως προς την εύρεση του αριθμητικού-αλγεβρικού μοτίβου. Εξάλλου, η παρατήρηση της δομής ενός σχεδιαστικού ή/και τρισδιάστατου μοτίβου και η σύνδεσή του με το αριθμητικό μοτίβο που αυτή η δομή κρύβει, είναι μια υψηλών απαιτήσεων και μεγάλης δυσκολίας νοητική μαθηματική διαδικασία, που

απαιτεί μια κατά το δυνατόν βοηθητική οπτική απεικόνιση (στην οποία οι μαθητές δεν προέβησαν με το υλικό τους) και μεγάλη καθοδήγηση των ενεργειών από τον εκπαιδευτικό /ερευνητή προκειμένου να φτάσουν οι μαθητές στην «ανακάλυψη» της δομής αυτής, όπως άλλωστε συνέβη και στην εφαρμογή που περιγράφει ο Radford στο πρόβλημα με τον κουμπαρά. Ωστόσο, η δυσκολία, αυτή δεν φαίνεται να σχετίζεται με καθεαυτό το απτικό υλικό, όσο με περιορισμένη ή καθόλου αξιοποίηση άλλων σημειωτικών μέσων εξαντικειμενίκευσης (όπως πχ. χρώμα για να «σημειωθεί» η κούτα-κύβος των δασκάλων). Αυτό μας οδηγεί στην υπόθεση, ότι η περιορισμένη, σε εύρος σημειωτικών μέσων, σημειωτική δεσμίδα που συστάθηκε στο πλαίσιο της ομάδας για το εν λόγω πρόβλημα, σε συνδυασμό με τις υψηλές απαιτήσεις του προβλήματος, μπορεί να ευθύνεται εν μέρει για την μειωμένη απόδοση των μαθητών κατά την επεξεργασία και την ανάπτυξη διαδικασιών επίλυσης.

Στο τρίτο πρόβλημα τα απτικά υλικά που δόθηκαν στους μαθητές ήταν το φύλλο εργασίας με το πρόβλημα και το φύλλο με την κάτοψη, χωρίς αναφορά σε κλίμακα, καθώς ζητούμενο ήταν να βρουν οι μαθητές μόνοι τους την αντιστοιχία των διαστάσεων μεταξύ των απεικονιζόμενων και των πραγματικών υλικών. Δεν μοιράστηκε κανένα άλλο υλικό. Ωστόσο, στην άμεση διάθεσή τους βρίσκονταν ορισμένα από τα υλικά που χρησιμοποίησαν στη συνέχεια, όπως ο γνώμονας (ή το τρίγωνο), το θρανίο τους, ακόμα και το βιβλίο τους. Ο γνώμονας χρησιμοποιήθηκε κατά τον κλασικό τρόπο για τη μέτρηση μήκους, αποκαλύπτοντας ωστόσο στοιχεία για την κατανόηση των μαθητών και λειτουργώντας ως ένα μέσο επιτέλεσης έμμεσης δεικτικής κίνησης, όπως εξηγήθηκε προηγουμένως. Το θρανίο, όμως, αποτέλεσε ένα πρωτότυπο υλικό ως προς τη μαθηματική λειτουργία του στην επίλυση του προβλήματος. Η αξιοποίησή του ως φυσικό μέσο του χώρου της τάξης για την άντληση πληροφοριών για τις φυσικές του διαστάσεις και στη συνέχεια η συσχέτιση των πληροφοριών αυτών με τα στοιχεία του σχεδίου αποτελεί την πρωτότυπη χρήση του υλικού, καθώς από μόνο του δεν συνδέεται με κάποια μαθηματική δραστηριότητα, αντίθετα με ότι συμβαίνει, για παράδειγμα, με τη χρήση του χάρακα (εφόσον αυτός χρησιμοποιείται κατά τον παραδοσιακό μαθηματικό τρόπο για τη μέτρηση διαστάσεων). Επιπλέον, οι μαθητές χρησιμοποίησαν κατά την εργασία τους και πληροφορίες από μετρήσεις που είχαν πραγματοποιήσει σε προηγούμενα μαθήματα και τις οποίες είχαν καταγράψει στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών τους, αποφεύγοντας τελικά τη διαδικασία της μέτρησης του θρανίου με τον χάρακα. Αξιοποίησαν,

επομένως, το σχολικό εγχειρίδιο, ως πηγή πληροφοριών, εξοικονομώντας ενέργεια και χρόνο, διευκολύνοντας, έτσι, τις διαδικασίες επίλυσής τους. Αξίζει να αναφερθεί ότι η μια πηγή τους οδήγησε στην άλλη, δηλαδή πέρασαν από την συνειδητοποίηση της δυνατότητας αξιοποίησης του φυσικού υλικού (δηλαδή του θρανίου) για την πραγματοποίηση της μέτρησης με τον χάρακα, στην εκκίνηση της διαδικασίας μέτρησης, έπειτα στη συνειδητοποίηση ότι αυτή η διαδικασία έχει επαναληφθεί κατά το πρόσφατο παρελθόν (σε προηγούμενη μαθηματική άσκηση) και σε διακοπή της μέτρησης του μήκους του θρανίου και τέλος, στην εκκίνηση της διαδικασίας αναζήτησης των αντίστοιχων πληροφοριών στο σχολικό τους εγχειρίδιο. Παρατηρείται εδώ, η άντληση πληροφοριών από το περιβάλλον τους, όσο και η συνειρμική μνήμη διαδικασιών και πληροφοριών.

Ως προς την αναντιστοιχία ανάμεσα στις πληροφορίες που φέρει ο λόγος και εκείνων που φέρονται μέσω των κινήσεων ή, γενικεύοντας, μέσω του χειρισμού των διάφορων απτικών υλικών, αυτή παρατηρήθηκε κατά την ομαδική δραστηριότητα για την επίλυση του τρίτου μαθηματικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, αναντιστοιχία παρατηρήθηκε ανάμεσα προφορική διατύπωση των μαθητών της ομάδας σχετικά με την διαδικασία που έπρεπε να πραγματοποιηθεί τη δεδομένη στιγμή, δηλαδή τη μέτρηση του θρανίου, και στην εκτέλεση της διαδικασίας αυτής με δυο διαφορετικούς τρόπους από του μαθητές. Ο προφορικός λόγος ήταν «θα το μετρήσουμε» και αφορούσε στο θρανίο και η πραγματοποίηση της μέτρησης αυτής έγινε από τον έναν μαθητή με τοποθέτηση του χάρακα πάνω στο σχέδιο για να μετρήσει το μήκος και το πλάτος του θρανίου, ενώ ο μαθητής με τις διαταραχές του αυτιστικού φάσματος (βοηθούμενος από τον άλλο μαθητή της ομάδας) τοποθέτησε τον χάρακα πάνω στο φυσικό αντικείμενο του χώρου, δηλαδή πάνω στο θρανίο του, προκειμένου να μετρήσει τις πραγματικές του διαστάσεις. Η ασυμφωνία αυτή παρατηρήθηκε μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας από τον πρώτο μαθητή, οπότε έδειξε τον προβληματισμό του με τη στάση του σώματός του και στη συνέχεια με την προφορική έκφραση της απορίας του προς την ερευνήτρια: «Το θρανίο πρέπει να μετρήσουμε;». Ο λόγος του προκάλεσε το σταμάτημα των εργασιών και από τους υπόλοιπους μαθητές, οι οποίοι κοίταζαν τον χώρο εργασίας του συμμαθητή τους προσπαθώντας να καταλάβουν τι είχε μετρήσει εκείνος. Προφανώς, διαπίστωσαν ότι η δική του μέτρηση πραγματοποιήθηκε στο σχέδιο, τόσο από τη θέση του σώματος του συμμαθητή τους, καθώς είχε τα χέρια του εκατέρωθεν στο σχέδιο σαν να ασχολούνταν με αυτό, όσο και

από τη θέση του χάρακα πάνω στο σχέδιο, όπου βρισκόταν το μοναδικό «άλλο» θρανίο που θα μπορούσε να είχε μετρήσει εκτός από εκείνο που μετρούσαν οι ίδιοι. Η αναντιστοιχία αυτή βοήθησε, στη συνέχεια, στο να συνδυαστούν οι δυο αυτές πληροφορίες που βρήκανε οι μαθητές, δηλαδή οδήγησε σε αντιστοίχιση ανάμεσα στην πραγματική και στην υπό κλίμακα διάσταση, στοιχείο απαραίτητο για την προώθηση της επίλυσης του προβλήματος. Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί, ότι οι μαθητές δεν πήραν θέση ως προς τις διαδικασίες τους, δεν συζήτησαν σχετικά με τη χρησιμότητα ή μη των δυο διαφορετικών μετρήσεων, αλλά περίμεναν την απόκριση της ερευνήτριας. Θα ήταν ενδιαφέρον να βλέπαμε τον τρόπο που θα αντιμετώπιζαν μόνοι τους την αναντιστοιχία αυτή, και αν αυτό θα τους είχε οδηγήσει σε ακόμα μεγαλύτερα μαθησιακά οφέλη.

Επίσης, κατά την επίλυση του πρώτου προβλήματος ο μαθητής παρατηρήθηκε να εκφέρει λεκτικά κάτι με ασαφή τρόπο, έτσι ώστε να εκληφθεί η ρήση του ως λανθασμένη και οφειλόμενη σε παρερμηνεία των δεδομένων του προβλήματος. Ωστόσο, κατά την στρατηγική που εφάρμοσε με τη δεικτική του κίνηση αλλά και με την γραπτή καταγραφή των μετρήσεών του, διαπιστώθηκε ότι εκείνο το οποίο ήθελε να εκφράσει ο μαθητής στην αρχική φάση της διερεύνησης του προβλήματος, κατά πάσα πιθανότητα, ήταν αυτό το οποίο αναπαρέστησε δεικτικά και συμβολικά, και το οποίο αντικατοπτρίζει την ακολουθούμενη στρατηγική επίλυσης που ανέπτυξε. Από την φαινομενική αυτή ασυμφωνία μπόρεσε να ερμηνευτεί από την ερευνήτρια ο λόγος του μαθητή, έστω και ετεροχρονισμένα. Ουσιαστικά, διαπιστώθηκε ότι δεν επρόκειτο για λάθος κατανόησής του, αλλά για λεκτική αδυναμία στο να εκφράσει ξεκάθαρα αυτό που ήθελε να δηλώσει. Το γεγονός αυτό, αποδεικνύει τη μεγάλη αξία που έχουν οι κινήσεις, αλλά και τα λοιπά μέσα εξαντικειμενίκευσης κατά τη συνοδεία του προφορικού λόγου, ιδιαίτερα σε μαθητές με επικοινωνιακά ελλείμματα και γλωσσικές δυσκολίες, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των ατόμων με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, καθώς μέσω αυτών συμπληρώνεται για τον παρατηρητή ή ακροατή το περιεχόμενο του λόγου τους και αποδίδεται σε αυτόν η σωστή (ή έστω μια ορθότερη) ερμηνεία. Αυτό επιτρέπει στον/στην εκπαιδευτικό να αντλήσει πληροφορίες για τη γνωστική κατάσταση του μαθητή, ώστε να του παράσχει τα κατάλληλα ερεθίσματα, στον βαθμό που αυτό χρειάζεται, προκειμένου να οδηγηθεί ομαλά στην επίλυση, αλλά επιτρέπει και στους ομηλικούς (όσο και στον ίδιο τον μαθητή που χειρίζεται τα μέσα αυτά κατά την ομιλία του) να αναπτύξουν σαφέστερα και πιο παραστατικά τις ιδέες τους, να τις μοιραστούν πιο αποτελεσματικά μεταξύ τους ενισχύοντας την επικοινωνία

τους, έτσι ώστε να οδηγηθούν από κοινού στην λύση.

Επίσης, παρατηρήθηκαν ορισμένες ασυμφωνίες μεταξύ του λόγου (της πρόθεσης) και της διαδικασίας που ακολουθήθηκε ή προτάθηκε να ακολουθηθεί, χωρίς όμως να μπορούμε να μιλήσουμε για αναντιστοιχία μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο είδος ασυμφωνίας παρατηρήθηκε κατά την επίλυση του τρίτου προβλήματος, ανάμεσα στον προφορικό λόγο, «να μετρήσουμε», και στη διαδικασία μέτρησης, δηλαδή στην επιλογή των πλευρών όπου τοποθετήθηκε ο γνώμονας. Δεδομένου ότι η μέτρηση πραγματοποιήθηκε με σκοπό να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου (όπως αυτό προκύπτει από τα ζητούμενα του προβλήματος) φαίνεται ότι από τους δυο μαθητές που συνεργάζονταν (ανάμεσά τους και μαθητής Μ) δεν εφαρμόστηκε σωστά ο τύπος του εμβαδού, με αποτέλεσμα να πραγματοποιηθεί μέτρηση της υποτείνουσας του τριγώνου. Η αντίδραση του τρίτου μαθητή, μέσω του προφορικού του λόγου προς τον μαθητή που χειριζόταν το όργανο μέτρησης, («Αυτό γιατί να το μετρήσεις; Εμβαδόν θέλεις. Δεν το χρειάζεσαι»), οδήγησε στην άμεση αλλαγή της τοποθέτησής του (και μάλιστα πριν αυτός ολοκληρώσει το λόγο του), κατά τρόπο που να ανταποκρίνεται στον τύπο του εμβαδού τριγώνου. Φαίνεται, δηλαδή, ο λόγος του τρίτου μαθητή, να λειτούργησε ρυθμιστικά ως προς τη συμπεριφορά τους, υπενθυμίζοντάς τους, ουσιαστικά, τον σκοπό της μέτρησης που πραγματοποιούσαν και «συμμορφώνοντας» τη μέτρηση στα δεδομένα του μαθηματικού τύπου.

Σημαντικός αποδείχθηκε ο ρόλος των διάφορων σημειωτικών μέσων εξαντικειμενίκευσης και ως προς την επίτευξη της επικοινωνίας και της συνεργασίας των μελών της ομάδας αναφορικά με τις διαδικασίες επίλυσης. Παρατηρήθηκε αύξηση του βαθμού συνεργασίας των μαθητών από το ένα πρόβλημα στο άλλο, με κορυφαίο το τελευταίο πρόβλημα. Για το πρώτο πρόβλημα, τα φύλλα εργασίας μοιράστηκαν σε κάθε μαθητή της ομάδας ξεχωριστά, με αποτέλεσμα να μην προωθηθεί η ομαδική διεργασία σε όλες τις ομάδες στο βαθμό που αυτό συνέβη στα επόμενα προβλήματα, για τα οποία δόθηκε (τουλάχιστον) ένα κοινό φύλλο εργασίας, που τοποθετήθηκε στο κέντρο των θρανίων της κάθε ομάδας, προϋποθέτοντας την ομαδικότητα των εργασιών. Επιπλέον, η χρήση των απτικών υλικών αφέθηκε στην πρωτοβουλία των μαθητών, για το πρώτο πρόβλημα, ενώ στα επόμενα δύο, η αξιοποίηση ορισμένων σημειωτικών μέσων ήταν αναγκαία και αναπόφευκτη, αυξάνοντας το εύρος των δημιουργούμενων σημειωτικών δεσμίδων. Φαίνεται, λοιπόν ότι εφόσον δημιουργηθούν οι προϋποθέσεις

ανάπτυξης ομαδικής εργασίας, ο πιο καθοριστικός παράγοντας για την ποιότητα της συνεργασίας αυτής, είναι το εύρος των σημειωτικών δεσμίδων. Ο προφορικός λόγος ήταν παρών σε όλες τις διαδικασίες επίλυσης, όπως ήταν αναμενόμενο, εφόσον κατά τον Duval αποτελεί ένα αναπόφευκτο μέσο επικοινωνίας. Στην περίπτωση του μαθητή με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, οι κινήσεις δεν αποτέλεσαν για τον μαθητή ένα μέσο επίτευξης επικοινωνίας σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες με τα μέλη της ομάδας του. Τα απτικά υλικά φαίνεται ότι λειτούργησαν περισσότερο βοηθητικά ως προς αυτόν τον τομέα. Αρχικά, προσέλκυσαν το ενδιαφέρον και εξασφάλισαν τη δέσμευση του μαθητή στις δραστηριότητες της ομάδας, ενώ διευκόλυναν την επικοινωνία μεταξύ των μελών, εφόσον χρησίμευσαν ως πλαίσιο αναφοράς και εργασίας. Ιδιαίτερα, κατά την επίλυση του τρίτου μαθηματικού προβλήματος, παρατηρήθηκε υψηλότερο ποσοστό συνεργασίας του μαθητή με τους συμμαθητές του, στην οποία θεωρούμε ότι συνέβαλε πολύ θετικά η ποικιλία των μέσων και των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυσή του. Μάλιστα, από τη στιγμή που η σύσταση της ομάδας ήταν ίδια στα δυο τελευταία προβλήματα, η βαρύτητα ως προς τη συνεργασία των μαθητών στην ομάδα, φαίνεται να πέφτει στην αποτελεσματικότητα των μέσων εξαντικειμενίκευσης. Βέβαια, η δυσκολία του κάθε προβλήματος, εξαρτώμενη, κυρίως, από τις γνωστικές και μαθηματικές του απαιτήσεις, επηρεάζει κι αυτή τις διαδικασίες επίλυσής του. Ωστόσο, αυτό δεν πρέπει να θεωρηθεί από μόνο του ικανό για τη μειωμένη επιτυχία των διαδικασιών της ομάδας, ανάμεσα στην οποία ανήκει, σαφώς, και το ποσοστό αλλά και η ποιότητα της συνεργασίας των μελών της. Σε κάθε περίπτωση, κρίνεται σημαντικός ο διαμεσολαβητικός ρόλος του/της εκπαιδευτικού (ή εδώ της ερευνήτριας) στις διαδικασίες μάθησης των μαθητών του/της. Οι μεθοδευμένες ενέργειες και οι καθοδηγητικές παρεμβάσεις τους μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν (τουλάχιστον) ένα επιπλέον μέσο εξαντικειμενίκευσης που παρέχεται στους μαθητές, σύμφωνα με τις κοινωνικές σημειωτικές θεωρίες. Καθώς τα μέσα αυτά έχουν την ιδιότητα να φέρουν τον κάθε μαθητή πιο κοντά στη μάθηση, ανταποκρίνονται ακριβώς στη λειτουργία της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης, που προσπαθεί να δημιουργήσει ο/η εκπαιδευτικός για τους μαθητές του/της. Συνεπώς, μέσω του εκπαιδευτικού επιτυγχάνεται ο εμπλουτισμός των σημειωτικών δεσμίδων με νέα στοιχεία, έτσι ώστε αυτοί να μπορούν να οδηγηθούν με τις δυνάμεις τους, ολοένα και πιο κοντά στην επίλυση του προβλήματος. Υπό αυτή τη θεώρηση, καταλήγουμε πάλι στην κρισιμότητα των σημειωτικών μέσων ως προς την ανάπτυξη της συνεργασίας στην ομάδα και κατά συνέπεια της επιτυχούς επίλυσης του προβλήματος.

Επιπλέον, η χρήση των εργαλείων (πχ, γνώμονας, υπολογιστής τσέπης) αλλά και των κοινών στην ομάδα απτικών υλικών, οδήγησε στο μοίρασμα των δραστηριοτήτων (πχ. ένας μετράει κι ο άλλος καταγράφει) και στην ανάπτυξη επικοινωνίας στο πλαίσιο των κοινών εργασιών.

Επίσης, παρατηρήθηκε ότι όσο περισσότερο ανέπτυξε ο μαθητής σχέση συνεργασίας με την ομάδα του, τόσο λιγότερες φορές στράφηκε στην ερευνήτρια για καθοδήγηση ή/και επιβεβαίωση. Εμπιστεύτηκε την καθοδήγηση και τη διόρθωση των συμμαθητών του, εκτέλεσε με ιδιαίτερη αφοσίωση και συγκέντρωση τις δραστηριότητες που ανέλαβε και συνέδραμε επιτυχημένα στις διαδικασίες της ομάδας του. Η δέσμευσή του στην ομαδική δραστηριότητα, κορυφώθηκε στο τρίτο πρόβλημα, όπως φάνηκε και από την χρήση, για πρώτη φορά, του α' πληθυντικού προσώπου, αλλά και από τη θέση και στάση του σώματός του κοντά στο «κέντρο» των εργασιών της ομάδας, αλλά και από τη γενικότερη προθυμία και εγρήγορση που επέδειξε ως προς τις διαδικασίες της ομάδας του. Κατά συνέπεια, η ομαδική δραστηριότητα είχε θετικές συνέπειες και σε ατομικό επίπεδο, ως προς την αύξηση της αυτοπεποίθησης και της αυτενέργειας του μαθητή.

Η υιοθέτηση σημειωτικών μέσων αναπαράστασης ή άλλων μέσων εξαντικειμενίκευσης από τους συμμαθητές του ή/και τον εκπαιδευτικό ή την ερευνήτρια, έγινε φανερό σε δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά στην ενσωμάτωση των ελλειπτικών γραμμών στη δική του σημειωτική δεσμίδα, με τη μορφή που τις είδε να έχουν σχεδιαστεί από τα μέλη μιας άλλης ομάδας. Όπως τονίστηκε ήδη, η υιοθέτηση αυτή περιορίστηκε στη μορφή της σχεδίασης (το είδος της γραμμής –καμπύλη– και στην τοποθέτησή της πάνω στα σκαλοπάτια) και όχι στην στρατηγική που αυτή υποδήλωνε (καθώς στο σχέδιο των συμμαθητών του αποτυπώνονταν επίσης, οι καθοδικές κινήσεις, ενώ στο δικό του μόνο οι ανοδικές, ακριβώς όπως έκανε και με τις δεικτικές του κινήσεις, κατά την αρχική φάση της ενασχόλησής του με το πρόβλημα). Η δεύτερη περίπτωση αφορά στην υιοθέτηση του α' πληθυντικού προσώπου στον προφορικό του λόγο, επηρεασμένος από τον αντίστοιχο των συμμαθητών του κατά την επικοινωνία τους στο πλαίσιο των διαδικασιών επίλυσης του τρίτου μαθηματικού προβλήματος. Από την άλλη, δεν υιοθέτησε, δεικτικές κινήσεις που είδε να πραγματοποιούνται από άλλους. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα, σύμφωνα και με τη θεωρία των Cook & Goldin-Meadow, ότι εφόσον οι κινήσεις αυτές δεν υπήρχαν ήδη στο δικό του

ρεπερτόριο σημειωτικής δεσμίδας, δεν χρησιμοποιήθηκαν ως μέρος των δικών του ενεργειών επίλυσης ή/και επικοινωνίας με την ομάδα του. Ωστόσο, αυτό, δεν συνεπάγεται ότι δεν ωφελήθηκε από αυτές. Πιθανότερα, οι δεικτικές κινήσεις των άλλων να έγιναν κατανοητές συνδυαστικά και με άλλα μέσα εξαντικειμενίκευσης, οδηγώντας στο επόμενο βήμα της επίλυσης, χωρίς την ανάγκη να χρησιμοποιηθούν ξανά από τον μαθητή ως μέρος της επίλυσής του ή της επικοινωνίας του με τους άλλους. Εφόσον, μάλιστα, στα επόμενα δυο προβλήματα, η κίνηση δεν αποτελεί μέρος του προβλήματος και οι δεικτικές κινήσεις δεν προσφέρονται ως βασικό (αναπόσπαστο, κατά κάποιον τρόπο) μέρος της ανάπτυξης στρατηγικών για την επίλυση, κατά τον τρόπο που αυτό συμβαίνει σχεδόν αναπόφευκτα με το πρώτο πρόβλημα, αιτιολογείται αρκετά η μειωμένη χρήση τους από τον μαθητή. Βασικότερος παράγοντας όλων, βέβαια, αποτελεί το γεγονός ότι οι κινήσεις τους σώματος με τις πληροφορίες που φέρουν, αποτελούν ένα πεδίο στο οποίο οι μαθητές με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος εμφανίζουν μειωμένη κατανόηση και δυσκολεύονται να αξιοποιήσουν οι ίδιοι ως μέρος των γενικότερων κοινωνικών και επικοινωνιακών δυσκολιών τους (APA, 2013). Για το λόγο αυτό, η μειωμένη αξιοποίηση χειρονομιών ήταν αναμενόμενη για το μαθητή. Ωστόσο, διαπιστώθηκε ότι ήταν μειωμένη και για τους υπόλοιπους μαθητές της τάξης, που στράφηκαν πρωτίστως στην γραπτή καταγραφή και στον λόγο και δευτερευόντως στα άλλα μέσα εξαντικειμενίκευσης.

Η γραφή, με τις διάφορες μορφές της (σύμβολα, αριθμοί, γραμμές, στήλες, μαθηματικοί αλγόριθμοι κ.ά) αποτέλεσε αναπόσπαστο μέρος των διαδικασιών επίλυσης του μαθητή (και των ομάδων), σε όλα τα προβλήματα, εκτός από το δεύτερο (όπου το ίδιο συνέβη για όλες τις ομάδες). Αυτό, μπορεί να μας οδηγήσει σε έναν προβληματισμό σχετικά με τις πρακτικές δεξιότητες των μαθητών, που αφορούν σε έναν πιο ευέλικτο (πραγματικό και νοερό) χειρισμό αντικειμένων. Ο μαθητής, συνόδευσε το λόγο του συχνότερα με γραπτές καταγραφές, και όχι με κινήσεις που να σχετίζονται με τη μαθηματική του δραστηριότητα, αλλά και η αξιοποίηση των απτικών υλικών και εργαλείων ακολουθήθηκε, επίσης, από γραπτές καταγραφές. Η κίνηση πραγματοποιήθηκε μόνο στην περίπτωση που απουσίασε ο λόγος.

4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Από το σύνολο των ερευνητικών διαδικασιών και αποτελεσμάτων προέκυψε ότι για τον μαθητή με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, η αξιοποίηση των κινήσεων των

χειριών κατά τη μαθησιακή διαδικασία είναι εξαιρετικά περιορισμένη και δεν προτιμάται, αλλά ούτε και υιοθετήθηκε άμεσα, όπως ήταν αναμενόμενο βάσει των γενικών χαρακτηριστικών των μαθητών του αυτιστικού φάσματος, όπως περιγράφονται στο DSM –V (2013), που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στις επικοινωνιακές δεξιότητες, τόσο στην προφορική όσο και στη μη λεκτική επικοινωνία, ανάμεσα στις οποίες, η παραγωγή και η ερμηνεία χειρονομιών. Παρ' όλα αυτά, θα λέγαμε ότι ήταν πολύ περιορισμένος ο αριθμός των κινήσεων για το σύνολο των μαθητών. Θα ήταν χρήσιμο να μπορούσε να υπάρξει μια σύγκριση ανάμεσα στον αριθμό και το είδος/ποιότητα των κινήσεων ανάμεσα στον μαθητή και τους συμμαθητές του, ώστε να διαπιστωθεί εάν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ τους. Μάλιστα, συγκρίνοντας τις κινήσεις ανά διαφορετικές τάξεις σε ίδια προβλήματα, θα μπορούσε ίσως να διαπιστωθεί εάν και κατά πόσο εξαρτάται το ποσοστό εμφάνισης κινήσεων από τους μαθητές αυτούς, από το συνολικό ποσοστό εμφάνισης κινήσεων στις τάξεις τους.

Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι ο μαθητής προέβη στη σχεδιαστική αποτύπωση μιας κίνησης, που αρχικά εκφράστηκε από τον ίδιο τον μαθητή ως δεικτική χειρονομία. Ο μαθητής εκτέθηκε προηγουμένως στην σχεδιαστική αυτή απεικόνιση, οπότε ουσιαστικά την υιοθέτησε στη συμπεριφορά του, αλλά προσαρμόζοντάς τη στη δική του στρατηγική. Υιοθέτησε τον τρόπο απεικόνισης (με ελλειπτικές γραμμές πάνω στα σκαλοπάτια) και δεν μιμήθηκε την ίδια την διάταξη των στοιχείων της στο χώρο. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι από τον μαθητή υιοθετήθηκε μόνο μια γραπτή αναπαράσταση που είχε ήδη νόημα για τον ίδιο και ήταν βολική ως προς την αναπαράσταση της στρατηγικής του. Θα είχε λοιπόν, ενδιαφέρον, να εξεταστεί στο μέλλον η δυνατότητα να αποτυπωθούν σχεδιαστικά οι δεικτικές κινήσεις και να περιληφθούν στις λύσεις των προβλημάτων, ώστε να μελετηθεί η ικανότητα των μαθητών να περάσουν οι μαθητές από το συγκεκριμένο και οπτικοποιημένο (της σχεδίασης) στο συγκεκριμένο και πρακτικό-κιναισθητικό της κίνησης με τα χέρια. Επίσης, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί πώς θα μπορούσε ο μαθητής να εκτεθεί στις ίδιες του τις κινήσεις με τρόπο ώστε να «δει» τι έκανε και να μπορέσει να συνειδητοποιήσει τις ενέργειές του και την αξία τους στην κατανόηση και από μέρους των υπολοίπων της συλλογιστικής του πορείας. Επιπλέον, υπάρχει ανάγκη να απομακρυνθεί το επίκεντρο της επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων από την (αποκλειστική σχεδόν) καταγραφή και επίλυση αλγόριθμων, καθώς, αυτός ο

παράγοντας, πιθανόν να αποθαρρύνει τους μαθητές από την προβολή άλλων τρόπων και μέσων επίλυσης που έχουν χρησιμοποιήσει (ή που θα ήθελαν να χρησιμοποιήσουν) αλλά τα οποία, ενδεχομένως, να θεωρούν ότι θα είναι μη αποδεκτά ως επίσημη μαθηματική λύση. Επιπλέον, θα ήταν χρήσιμο να μελετηθεί η δυνατότητά τους να υιοθετήσουν τις κινήσεις στο ρεπερτόριό τους κατά την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων σε βάθος χρόνου και κατόπιν συστηματικής έκθεσής τους σε αυτές ή/και μέσα από την χρησιμοποίηση κατάλληλων προβλημάτων, ώστε να εκτεθούν σε επανάληψη ίδιου τύπου κινήσεων (εφόσον μπορεί να υποδηλώνουν μια δεδομένη στρατηγική).

Επιπλέον, η έκθεση του μαθητή της εν λόγω έρευνας στην σταδιακά αυξανόμενη πληθώρα σημειωτικών μέσων, με την έκθεση στις διαδικασίες των άλλων ομάδων, καθώς και μέσα από την επανάληψη των διαδικασιών επίλυσης που ακολούθησε για το ίδιο πρόβλημα (καθώς έλυσε και αποτύπωσε την επίλυσή του, περισσότερες από δυο φορές), τον οδήγησε, τελικά, στο να διευρύνει περισσότερο και να μεταβάλλει ποιοτικά τη σημειωτική δεσμίδα του. Ενδιαφέρον παρουσιάζει, κατά συνέπεια, η μελέτη των θετικών αποτελεσμάτων που μπορεί να έχει η έκθεση στις διεργασίες των άλλων ομάδων στην διεύρυνση των σημειωτικών μέσων εξαντικειμενίκευσης των μαθητών με διαταραχές του αυτιστικού φάσματος, καθώς και η επανάληψη των διαδικασιών αυτών από τον ίδιο τον μαθητή με ΔΑΦ (εντός της ίδιας διδασκαλίας), ενδεχομένως σε διαφορετικές ομάδες μαθητών.

Ακόμα, παρατηρήθηκε ότι η μαθηματική δραστηριότητα ήταν στενά συνδεδεμένη με την γραπτή καταγραφή και ότι, όταν αυτή απουσίαζε από τις δραστηριότητες της ομάδας, η δραστηριοποίηση με τα υπόλοιπα διαθέσιμα σημειωτικά μέσα ελαχιστοποιήθηκε εξαιρετικά. Θα είχε ενδιαφέρον, να εξεταστεί εάν αυτό ήταν τυχαίο (συγκυριακό) και αν θα επανεμφανιζόταν και σε άλλα προβλήματα με παρόμοια δομή και απαιτήσεις (δηλαδή αριθμητικών και αλγεβρικών ακολουθιών). Προκύπτουν, επομένως, τα ερωτήματα, κατά πόσο η απουσία μιας οποιασδήποτε γραπτής αναπαράστασης μπορεί να επηρεάσει αρνητικά στην επίλυση ενός τέτοιου μαθηματικού προβλήματος, κατά πόσο αυτό μπορεί να δυσχεραίνει ειδικά τους μαθητές με αυτισμό (καθώς υπολείπονται γλωσσικά αλλά και σε χειρονομίες) ή/και αν είναι δυνατόν να τους στρέψει σε άλλα σημειωτικά μέσα που δεν τείνουν να επιλέγουν, όπως οι δεικτικές κινήσεις (εφόσον υποθέσουμε ότι η αποφυγή των δεικτικών

κινήσεων μπορεί να γενικευτεί για τους μαθητές του φάσματος των αυτιστικών διαταραχών).

Ο συγκεκριμένος μαθητής, εξέφρασε σε όλες τις περιπτώσεις (αυθόρμητα) την ικανοποίησή του από τις διαδικασίες που έλαβαν χώρα, αλλά αυτό δεν μπορεί να αποδοθεί αποκλειστικά στις διαδικασίες αυτές (στο είδος των προβλημάτων, την ομαδική εργασία κ.ο.κ.) καθώς είχε ήδη μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Θα άξιζε, επομένως, να μελετηθούν οι εντυπώσεις από αντίστοιχες μαθηματικές διαδικασίες, μαθητών του αυτιστικού φάσματος με λιγότερο θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά για να διαπιστωθεί εάν αυτές μπορεί να αλλάξουν προς το θετικό και κατά πόσο μπορεί να συμβάλουν στη διαμόρφωση θετικότερου αυτοσυναισθήματος και πεποιθήσεων επίτευξης.

Τέλος, ο ρόλος του δασκάλου στις διαδικασίες μάθησης των μαθητών του είναι μεγάλης σπουδαιότητας. Οφείλει να αφήνει περισσότερο χώρο και χρόνο σε όλους τους μαθητές του, καθώς σε αρκετές περιπτώσεις διαπιστώθηκε στην παρούσα έρευνα, ότι θα ήταν προτιμότερο εάν (η ερευνήτρια, εν προκειμένω) δεν είχε απαντήσει άμεσα σε ορισμένες ερωτήσεις ή/και είχε προτρέψει εντονότερα τους μαθητές να συζητήσουν περισσότερο στις ομάδες τους. Θα ήταν πιθανότερο να είχαν δημιουργηθεί περισσότερες αναντιστοιχίες προς όφελος των μαθητών και της μάθησής του, άρα και σε περισσότερες ευέλικτες αξιοποιήσεις του υλικού τους, ενώ θα ενισχύονταν οι επικοινωνιακές δεξιότητές τους και θα προαγόταν περισσότερο η μεταξύ τους συνεργασία. Αυτό ισχύει και για τη σχεδίαση των διαδικασιών. Έτσι, διαπιστώθηκε για παράδειγμα, ότι εάν δεν είχε δοθεί το σχέδιο της σκάλας, οι μαθητές θα ήταν πιθανότερο να είχαν στραφεί αυθόρμητα σε κάποια από τα υλικά για την αναπαράσταση της σκάλας ή ακόμα και στην πραγματοποίηση περισσότερων χειρονομιών. Ωστόσο, προκειμένου να αποφευχθεί ο κίνδυνος να αποθαρρυνθούν από τις διαδικασίες επίλυσης, είδαμε ότι προτιμήθηκε άλλος μεθοδολογικός χειρισμός. Από την άλλη, προκειμένου να προκύψει συζήτηση στην ομάδα και να εγερθούν σημειωτικά μέσα, προτιμήθηκε να δοθεί χρόνος χωρίς καθοδήγηση (ενώ θα μπορούσε να έχει ζητηθεί στους μαθητές να προβούν σε ορισμένες ενέργειες) ο οποίος λειτούργησε αρνητικά στη διαδικασία του δεύτερου προβλήματος. Συνεπώς, οι διαδικασίες της διδασκαλίας και της μάθησης είναι τόσο αλληλένδετες και επηρεάζουν τόσο τους τομείς, ώστε να απαιτείται προσεκτικός αρχικός σχεδιασμός και ιδιαίτερα

ευέλικτος αλλά και στοχευμένος χειρισμός των καταστάσεων και των ευκαιριών προκειμένου να υπάρξει μια ισορροπία προς όφελος όλων των συμμετεχόντων στη μαθησιακή διαδικασία.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

www.autismhellas.gr

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αγαλιώτης, Ι. (2013). *Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., Καταλάνου, Σ., Μοδέστου, Μ., Ιωάννου, Ι. (2006). *Αναγνωσιμότητα των κειμένων και ο ρόλος των εικόνων*. 9^ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου.
- Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.
- Chandler, D. (1999). *Σημειωτική για αρχαρίους*. (Μ. Κωνσταντοπούλου, μετ.). Ανακτήθηκε στις 2/11/2015 από <http://semiotics.nured.uowm.gr/>
- Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Eco, U. (1994). *Θεωρία σημειωτικής*. (Ε. Καλλιφατίδη, μετ.). Αθήνα: Γνώση.
- Kress, G., & Van Leeuwen, T. (2010). *Η Ανάγνωση των εικόνων. Η γραμματική του οπτικού σχεδιασμού*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.
- Van De Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διαδικασία*, (Α. Αλεξανδροπούλου, Β. Κοντορόζος, μετ.). Αθήνα: τυπωθήτω –Γιώργος Δαρδανός
- Agrawal, J. (2013). *The effects of explicit instruction with manipulatives on the fraction skills of students with autism* (Doctoral dissertation, George Mason University)

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). American Psychiatric Publishing. Ανακτήθηκε από <https://books.google.com>

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267-300.

Arzarello, F., & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 17-24). Seoul: PME.

Bezemer, J., & Kress, G. (2010). Changing text: A social semiotic analysis of textbooks. *Designs For Learning*, 3(1-2), 10 – 29.

Chiang, H. M., & Lin, Y. H. (2007). Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-functioning autism: A review of literature. *Autism*, 11(6), 547-556.

Cook, S. W., & Goldin-Meadow, S. (2006). The role of gesture in learning: Do children use their hands to change their minds?. *Journal of cognition and development*, 7(2), 211-232.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.

Francaviglia, M., & Servidio, R. (2011). Gesture as a Cognitive Support to Solve Mathematical Problems. *Psychology*, 2(2), 91-97.

Goldin, G. A. (2000). Affective Pathways and Representations in Mathematical Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2), 209-219.

Goldin-Meadow, S. (2006). Talking and thinking with our hands. *Current Directions in Psychological Science*, 15(1), 34-39.

Goldin-Meadow, S., & Wagner, S. M. (2005). How our hands help us learn. *Trends in cognitive sciences*, 9(5), 234-241.

Griswold, D. E., Barnhill, G. P., Myles, B. S., Hagiwara, T., & Simpson, R. L. (2002). Asperger syndrome and academic achievement. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 17(2), 94-102.

Hart-Barnett, J., Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and training in autism and developmental disabilities*, 50, 172-185.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind*. Chicago: University of Chicago Press.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. *The nature of mathematical thinking*, 12, 24-59.

Mayes, S. D., & Calhoun, S. L. (2003). Ability profiles in children with autism: Influence of age and IQ. *Autism*, 7(1), 65-80.

Mayes, S. D., & Calhoun, S. L. (2006). Frequency of reading, math, and writing disabilities in children with clinical disorders. *Learning and individual Differences*, 16(2), 145-157.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton: Princeton university press.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Springer.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing and learning. *Journal of research in mathematics education*, 2(1), 7-44.
Ανακτήθηκε στις 30,10,2015, από <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.19>

Radford, L. (2013b). On semiotics and education. *Éducation et didactique*, 7(1), 185-204.

Radford, L. (2013c). Perceiving with the eyes and with the hands. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1).

Rockwell, S. B. (2012). *Teaching students with autism to solve additive word problems using schema-based strategy instruction*. University of Florida.

Schloeglmann, W. (2004). Routines in Non-Routine Problem Solving Processes. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Spencer, V. G., Evmenova, A. S., Boon, R. T., & Hayes-Harris, L. (2014). Review of research-based interventions for students with autism spectrum disorders in content area instruction: Implications and considerations for classroom practice. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 49(3), 331-353.

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. *Identities, cultures, and learning spaces*, 575-582.

Whitby, P.J. (2012). The affects of Solve it! on the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders. *Focus on autism and other developmental disabilities*, 28(2), 78-88.

Whitby, P. J. S., & Mancil, G. R. (2009). Academic achievement profiles of children with high functioning autism and Asperger syndrome: A review of the literature. *Education and Training in Developmental Disabilities*, 551-560.

Παράρτημα

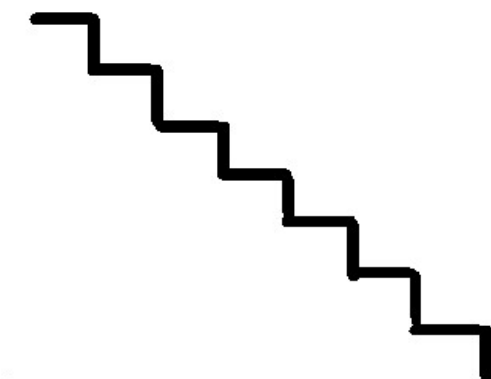
Παράρτημα 1. Το πρόβλημα της σκάλας

Πρόβλημα

Ένα παιδί ποτίζει τα φυτά που βρίσκονται στη σκάλα μιας πολυκατοικίας. Για να ποτίσει όλα τα φυτά, ακολουθεί έναν συγκεκριμένο ρυθμό. Ανεβαίνει 2 σκαλοπάτια με μια κίνηση και ποτίζει το φυτό που βρίσκεται στα αριστερά της σκάλας. Στη συνέχεια, κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι και ποτίζει το φυτό που βρίσκεται στη δεξιά μεριά της σκάλας. Μόλις φτάσει στην κορυφή της σκάλας σταματάει (δεν ξανακατεβαίνει).

Ερωτήσεις

- α) Πόσες κινήσεις θα πρέπει να κάνει για να ανέβει στην κορυφή της σκάλας;
- β) Πόσα φυτά υπάρχουν στη δεξιά μεριά της σκάλας;



Λύση

Απαντήσεις

- α) Αν ακολουθεί τον ίδιο ρυθμό, θα πρέπει να κάνεικινήσεις για να φτάσει στην κορυφή της σκάλας.
- β) Στη δεξιά μεριά της σκάλας υπάρχουν..... φυτά.

Παράρτημα 2. Το πρόβλημα της ανακύκλωσης

Πρόβλημα



Με αφορμή την παγκόσμια ημέρα ανακύκλωσης (14 Νοεμβρίου) οι δάσκαλοι ενός Δημοτικού Σχολείου συγκέντρωσαν ανακυκλώσιμα υλικά από χαρτί και πλαστικό σε μια χάρτινη κούτα, για να δείξουν στους μαθητές τον σωστό τρόπο διαχωρισμού και ανακύκλωσης των υλικών αυτών, αλλά και για να τους παρακινήσουν στο να ανακυκλώνουν. Έτσι, οι μαθητές αποφάσισαν να συγκεντρώνουν στο σχολείο τους πλαστικές και χάρτινες συσκευασίες, τις οποίες θα στέλνουν στο τέλος κάθε εβδομάδας στο Δήμο τους για να ενισχύσουν την προσπάθεια ανακύκλωσης που πραγματοποιεί.

Οι μαθητές συμφώνησαν να συγκεντρώνουν και να στέλνουν δυο κούτες ανακυκλώσιμων υλικών κάθε εβδομάδα. Στο τέλος της πρώτης εβδομάδας, οι μαθητές έστειλαν τη μια κούτα των δασκάλων τους και τις δυο κούτες με υλικά που ανακύκλωσαν μόνοι τους, δηλαδή, έστειλαν συνολικά τρεις κούτες για ανακύκλωση. Στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας έστειλαν άλλες δυο κούτες με υλικά ανακύκλωσης, έχοντας στείλει συνολικά πέντε κούτες στο Δήμο τους.

Πόσες κούτες θα έχουν στείλει συνολικά στο τέλος της 3^{ης}, 4^{ης} και 5^{ης} εβδομάδας;

Πόσες κούτες θα έχουν στείλει την 10^η, 15^η την 25^η εβδομάδα;

Παράρτημα 3. το πρόβλημα των κήπων

Πρόβλημα

Η Δ' τάξη ενός Δημοτικού σχολείου ανέλαβε το φύτεμα και το πότισμα δύο κήπων που φτιάχτηκαν ειδικά για το σκοπό αυτό στην αυλή του σχολείου. Το κάθε τμήμα θα ήταν υπεύθυνο για έναν κήπο. Τα δυο τμήματα άρχισαν να διαφωνούν για το ποιον κήπο θέλουν να αναλάβουν, γιατί και οι δυο ήθελαν τον μεγαλύτερο. Τελικά, ο διευθυντής πρότεινε να κάνουν κλήρωση ώστε η επιλογή να είναι τυχαία και δίκαιη. Το Δ1 πήρε τον αριστερό κήπο και το Δ2 τον δεξί κήπο. Τη Δευτέρα το πρωί, τα δυο τμήματα βγήκαν έξω, μεταφέροντας και ένα θρανίο από την τάξη τους για να ακουμπούν επάνω τα εργαλεία τους, και ξεκίνησαν το φύτεμα. Κάποια στιγμή, όμως, άρχισαν πάλι να διαφωνούν για το ποιος είχε πάρει το μεγαλύτερο κήπο. Το κάθε τμήμα υποστήριζε ότι ο δικός τους κήπος ήταν ο πιο μεγάλος. Έτσι, ο διευθυντής, για να λύσει το πρόβλημα, αποφάσισε να ζητήσει τη βοήθεια της Στ' τάξης. Τους έδωσε ένα σχέδιο και τους ρώτησε:

- Μπορείτε να υπολογίσετε την επιφάνεια του κάθε κήπου;

- Ποια αλλαγή προτείνετε να γίνει ώστε και οι δύο κήποι να έχουν ίσο εμβαδόν;

Παράρτημα 4. Σχέδιο 3^ο προβλήματος

