



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΠΑΦΗΣ

ΡΗΓΑ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ-ΜΑΡΙΑ

ΑΕΜ 1593

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΓΙΑΓΚΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΚΟΖΑΝΗ 2018

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη	3
Abstract	4
Ευχαριστίες	5
1 Εισαγωγή	6
2 Περιγραφή της πειραματικής διάταξης	7
3 Επαφή κατά Hertz	10
3.1 Εισαγωγή στη θεωρία	10
3.2 Μαθηματικές εκφράσεις	11
3.3 Διορθωμένες εκφράσεις για τη σταθερά απόσβεσης ξ	12
4 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	16
4.1 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας	18
4.2 Αριθμητική ανάλυση ιδιομορφών	20
5 Πειραματικός προσδιορισμός μορφικών παραμέτρων	22
5.1 Πειραματικός προσδιορισμός των συναρτήσεων μετάδοσης	23
5.2 Μέθοδοι υπολογισμού μορφικών παραμέτρων	25
5.3 Ενημέρωση μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων	27
6 Μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση γραμμικού μοντέλου	30
6.1 Μοντελοποίηση της πειραματικής διάταξης	30
6.2 Ανάλυση ιδιομορφών με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων	32
6.3 Πειραματική διαδικασία	37
6.4 Ενημέρωση αριθμητικού μοντέλου	41
7 Μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση μη γραμμικού μοντέλου	45
7.1 Ανάπτυξη και ενημέρωση μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων	45
7.2 Αποτελέσματα δυναμικής ανάλυσης μη γραμμικού συστήματος	48
8 Συμπεράσματα	54
Βιβλιογραφία	56

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και δυναμική ανάλυση προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής κατά Hertz. Η μελέτη αυτή πραγματοποιείται με τη χρήση αριθμητικών και πειραματικών μεθόδων και έχει ως στόχο τη βέλτιστη μοντελοποίηση της ταλαντωτικής συμπεριφοράς του συστήματος κατά την επαφή. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από μία χαλύβδινη δοκό η οποία είναι πακτωμένη στο ένα άκρο, ενώ σε κάποιο σημείο υπάρχει ένα σταθερό έλασμα με το οποίο και έρχεται σε επαφή έπειτα από τη διέγερσή της. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Στο πρώτο μέλος της εργασίας γίνεται εισαγωγή στη θεωρία στην οποία βασίζεται η μέθοδος. Η μελέτη προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής γίνεται με τη μέθοδο κατά Hertz. Στη συνέχεια, δίνεται έμφαση στην περιγραφή της πειραματικής διάταξης που αναπτύχθηκε για την εργασία. Η μοντελοποίηση της διάταξης έγινε με τη χρήση λογισμικών πακέτων ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων (FEA). Πιο συγκεκριμένα, το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία του μοντέλου είναι το Ansa της BETA CAE Systems S.A, ενώ για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Dynamis. Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων του αριθμητικού μοντέλου γίνεται με τη χρήση του λογισμικού META.

Στη συνέχεια, με βάση τις πειραματικά προσδιοριζόμενες συναρτήσεις μετάδοσης (Frequency Response Function) γίνεται η αναγνώριση των μορφικών παραμέτρων (ιδιοσυχνότητες και μέτρα απόσβεσης) της υπάρχουσας πειραματικής διάταξης. Για τη βέλτιστη μοντελοποίηση της εξεταζόμενης διάταξης, απαραίτητη είναι η ενημέρωση του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων με χρήση μεθόδων αριθμητικής βελτιστοποίησης. Η ενημέρωση έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος μεταξύ των αποτελεσμάτων του αριθμητικού μοντέλου σε σχέση με αυτών που προέκυψαν από το πείραμα.

Τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του αριθμητικού και πειραματικού μοντέλου, η απεικόνιση των ιδιομορφών και της δυναμικής ανάλυσης της δοκού κατά την κρούση της με το σταθερό έλασμα, με το οποίο έρχεται σε επαφή για δύο διαφορετικές περιπτώσεις διέγερσης, μία κρουστική και μία ημιτονοειδή.

Abstract

The objective of this thesis is the study and dynamic analysis of nonlinear contact impact problems using the Hertzian contact method. The study aims at optimal modeling of the oscillating behavior during contact, using numerical and experimental methods. The experimental set-up which was used is a steel cantilever beam, which is embedded from the one edge. At one point of the other side of the beam there is a rigid stop which clashes with the cantilever beam after its excitement. The experiment took place at the Mechanical Engineering Department laboratory of UOWM.

On the first part of the study there is an introduction behind the theory which the method is based on. Nonlinear contact problems are being studied using the Hertzian contact method. Furthermore, there is a strictly description of the experimental set-up which was developed for the study. The set-up was modeled using Finite Element Analysis (FEA) software packages. Specifically, the software which was used for the model creation is Ansa by BETA CAE Systems S.A. Dynamis software was used for the numerical solution. μ ETA software is used for the result exportation of the numerical model.

Subsequently, based on the experimentally determined Frequency Response Functions (FRF), the identification of the parametric parameters (eigenfrequencies and damping ratios) of the existing experimental set-up is carried out. It is also necessary for the optimum modeling of the considered set-up to optimize the Finite Element Model using several numerical optimization methods. The purpose of this procedure is to minimize the error between the values of the numerical model and the experimental set-up.

Finally, figures of the eigenvalues and the oscillating behavior in time domain of the cantilever beam (during and after impact) are depicted. Also, there is a comparison between the numerical and experimental results for two different types of excitation, one impact and one sinusoidal.

Ευχαριστίες

Με την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γιαγκόπουλο Δημήτριο, Επ. Καθηγητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Π.Δ.Μ για την καθοδήγηση, την άμεση και πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά και για όλα όσα μου δίδαξε κατά τα χρόνια φοίτησής μου. Επίσης, ευχαριστώ πολύ τον υποψήφιο διδάκτορα Αραϊλόπουλο Αλέξανδρο που συνέβαλε σημαντικά στην διεκπεραίωση της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια και τους φίλους μου που με ανέχτηκαν όλο αυτό το διάστημα, τους φίλους μου που αν και βρίσκονται μακριά βοήθησαν σημαντικά, αλλά και όσους με στήριξαν και μου συμπαραστάθηκαν όλα αυτά τα χρόνια της ζωής μου αλλά και των σπουδών μου.

1 Εισαγωγή

Σε αρκετές εφαρμογές μηχανικών συστημάτων υπάρχει επαφή μεταξύ σωμάτων. Αυτό συμβαίνει σε συστήματα γραναζιών, πτερύγια στροβίλων, ακόμα και σε μηχανισμούς με κινηματικές ασυνέχειες. Συνεπώς, είναι ένα σημαντικό ζήτημα προς μελέτη. Η εργασία αυτή θα ασχοληθεί με τη μελέτη προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής. Αρχικά, γίνεται η περιγραφή της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποιήθηκε. Η διάταξη αυτή αποτελείται από μία χαλύβδινη δοκό η οποία είναι πακτωμένη στο ένα άκρο. Η διάταξη τοποθετήθηκε πάνω σε μία τσιμεντένια βάση για τη λήψη καλύτερων αποτελεσμάτων, τα οποία δεν επηρεάζονται από το εξωτερικό περιβάλλον. Επιπλέον, στην κατασκευή προστέθηκε ένα χαλύβδινο σταθερό έλασμα ως εμπόδιο με το οποίο η δοκός έρχεται σε κρούση για να μελετηθεί η επαφή. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στη θεωρία στην οποία βασίζεται όλη η μέθοδος. Η μελέτη προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής γίνεται με τη μέθοδο κατά τον Hertz.

Έπειτα, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για την ανάπτυξη του αριθμητικού μοντέλου, στη διακριτοποίηση της γεωμετρίας της κατασκευής αλλά και στον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων αυτών.

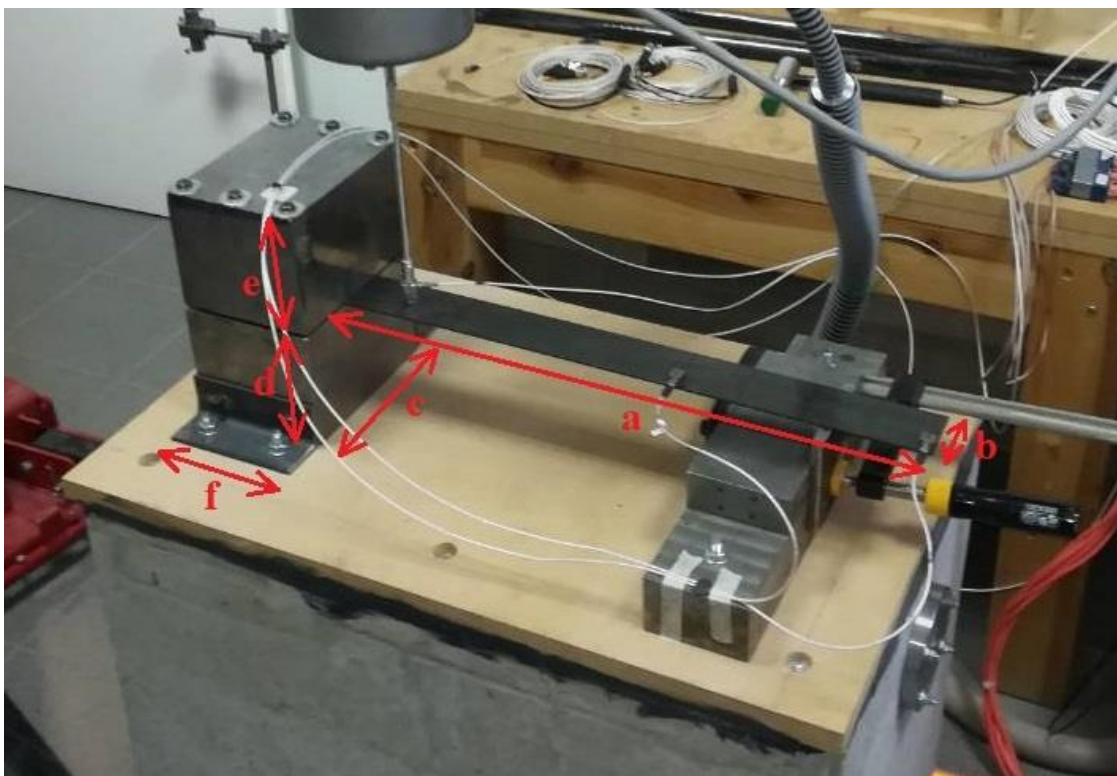
Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύονται οι μαθηματικές εκφράσεις προσδιορισμού των συναρτήσεων μετάδοσης και της μεθόδου για την εύρεση των μορφικών παραμέτρων. Επίσης, γίνεται αναφορά στη χρήση και λειτουργία της διαδικασίας βελτιστοποίησης μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων.

Η μοντελοποίηση της διάταξης έγινε με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων (FEA). Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία του μοντέλου είναι το Ansa, ενώ για την αριθμητική επίλυση και τη διεξαγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το Dynamis. Στη συνέχεια, έγινε χρήση του μετά-επεξεργαστή μεΤΑ για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Έπειτα, αναλύεται η πειραματική διαδικασία για την συλλογή των δεδομένων του πειράματος και γίνεται ο πειραματικός προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων και μέτρων απόσβεσης του συστήματος με βάση τη συνάρτηση μετάδοσης. Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μετάδοσης, τη σχηματική της απεικόνιση, αλλά και τη εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων αναγκαία ήταν η χρήση του λογισμικού πακέτου MATLAB. Τέλος, απαραίτητη είναι η βελτιστοποίηση του αναλυτικού μοντέλου, εμφανίζοντας σε πίνακες τις παραμέτρους που ενημερώθηκαν, τις ιδιοσυχνότητες που επαναπροσδιορίστηκαν και τις αποκλίσεις μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων του αναλυτικού και μετρούμενων πειραματικών.

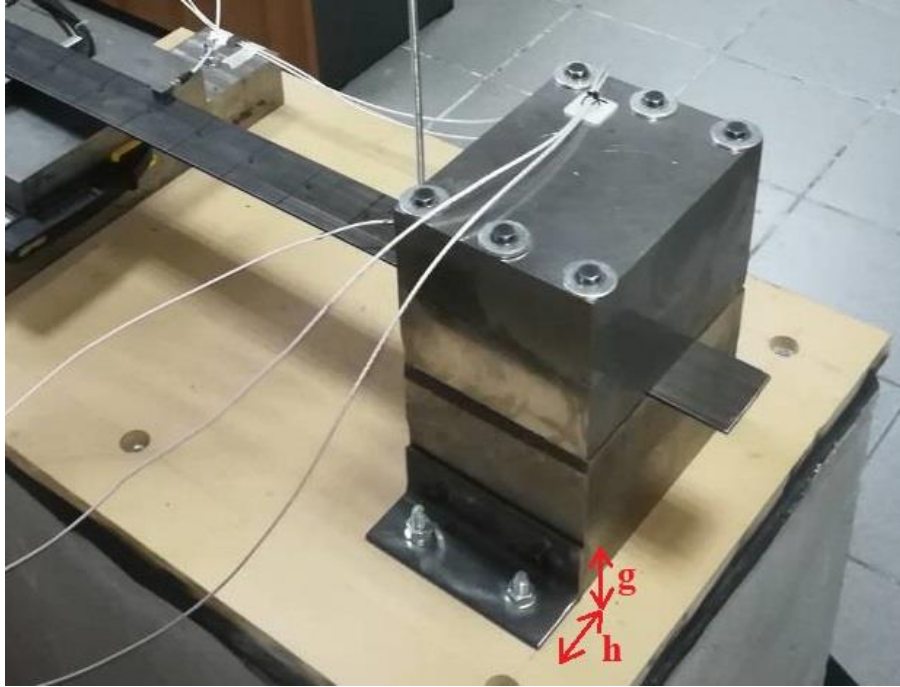
Στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται η μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση του μη γραμμικού μοντέλου, ενώ έπειτα απεικονίζονται οι δύο τύποι διεγέρσεων της δοκού και επιταχύνσεις συναρτήσεως του χρόνου. Τέλος, στο όγδοο κεφάλαιο αναλύονται τα συμπεράσματα από τη μελέτη μη γραμμικών συστημάτων επαφής.

2 Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

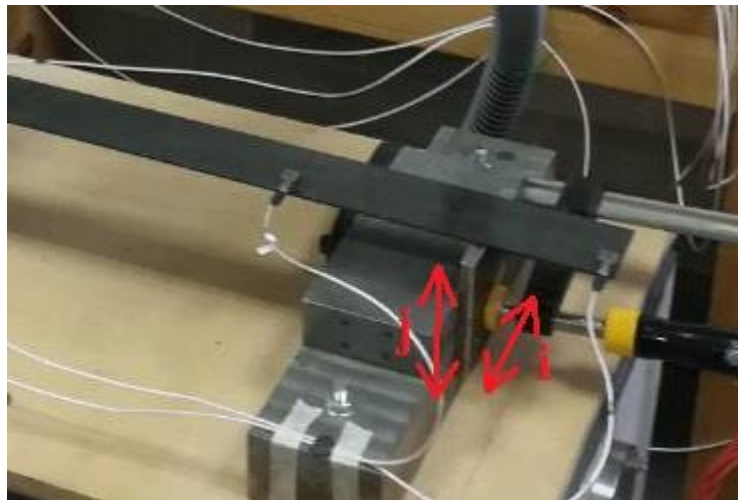
Για τη δυναμική ανάλυση προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής αναπτύχθηκε κατάλληλη πειραματική διάταξη. Η διάταξη αποτελείται από μία χαλύβδινη δοκό η οποία είναι πακτωμένη στο ένα άκρο, ενώ το άλλο άκρο είναι ελεύθερο. Το πάχος της δοκού είναι 3 mm. Για τη δημιουργία της πάκτωσης, η δοκός τοποθετήθηκε μεταξύ δύο δοκιμίων, τα οποία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με έξι κοχλίες σύνδεσης. Ωστόσο, για να μελετηθεί η επαφή πρέπει να επιτευχθεί κρούση στην δοκό. Συνεπώς, απαραίτητη είναι η χρήση ενός σταθερού ελάσματος το οποίο είναι κατασκευασμένο επίσης από χάλυβα και έχει πάχος 10 mm. Το σταθερό έλασμα βρίσκεται σε απόσταση 1 mm κάτω από την οριζόντια θέση της δοκού και 500 mm από τη βάση στήριξής της. Η πειραματική διάταξη εδράζεται πάνω σε μία βάση από τσιμεντό για την αποφυγή κραδασμών και δονήσεων από το εξωτερικό περιβάλλον. Η βάση στήριξης της δοκού εδράζεται μέσω δύο γωνιών στήριξης πάνω σε μία ξύλινη πλάκα η οποία είναι συνδεδεμένη με την τσιμεντένια βάση. Στα σχήματα 2.1, 2.2 και 2.3 παρουσιάζεται η πειραματική διάταξη και τα επιμέρους εξαρτήματά της.



Σχήμα 2.1: Πειραματική διάταξη



Σχήμα 2.2: Επιμέρους τμήματα της πειραματικής διάταξης, γωνία στήριξης και βοηθητικό εξάρτημα



Σχήμα 2.3: Επιμέρους τμήμα της πειραματικής διάταξης, σταθερό έλασμα επαφής

Στον πίνακα 2.4 παρουσιάζονται οι διαστάσεις των βασικών μερών της πειραματικής διάταξης.

Πίνακας 2.4: Διαστάσεις εξαρτημάτων

Name	Dimension (mm)
a	600
b	60
c	200
d	130
e	130
f	145
g	50
h	52
i	100
j	100

3 Επαφή κατά Hertz

3.1 Εισαγωγή στη θεωρία

Στη Μηχανική, κυρίως στον κατασκευαστικό τομέα, χρησιμοποιούνται καθημερινά σώματα τα οποία έρχονται σε επαφή είτε επειδή είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να συμβαίνει αυτό, όπως μηχανισμοί, οδοντωτοί τροχοί, δοκοί κλπ., είτε επειδή υπάρχει κάποιο σφάλμα στο σύστημα. Τα σώματα που αποτελούν ένα σύστημα πολλών σωμάτων μπορούν να θεωρηθούν ως άκαμπτα ή εύκαμπτα. Άκαμπτα σώματα είναι αυτά όπου η παραμόρφωση τους θεωρείται αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζεται η ολική κίνηση του συστήματος. Συνεπώς, στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την επαφή μεταξύ άκαμπτων σωμάτων.

Ο πρώτος επιστήμονας που ξεκίνησε τη μελέτη περί επαφής άκαμπτων σωμάτων χωρίς τριβή ήταν ο Heinrich Hertz, ο οποίος και ανέπτυξε το 1880 τη θεωρία επαφής κατά Hertz [1]. Το πρόβλημα της επαφής μεταξύ σωμάτων υπήρξε ένα έντονο ζήτημα προς έρευνα, το οποίο άρχισε να απασχολεί σημαντικά την ακαδημαϊκή και επιστημονική κοινότητα τις τελευταίες δεκαετίες. Μάλιστα, αναπτύχθηκαν πολλές σχετικές μελέτες από αρκετούς επιστήμονες όπως ο Goldsmith, Brach, Pfeiffer και Glocker, Johnson, Stronge, Wriggers και άλλοι.

Η επαφή άκαμπτων σωμάτων μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους διέγερσης. Κατά τον πρώτο τρόπο γίνεται εφαρμογή κρουστικής διέγερσης μέσω σφυριού, ενώ στην δεύτερη περίπτωση γίνεται εφαρμογή στοχαστικής διέγερσης μέσω ηλεκτρομαγνητικού διεγέρτη. Στην περίπτωση όπου το ένα σώμα δέχεται κρούση, η ώθηση μεταδίδεται σε όλο το σύστημα. Ο Gilardi και ο Sharf περιέγραψαν την κρούση ως ένα σύνθετο φυσικό φαινόμενο το οποίο έχει σαν κύρια χαρακτηριστικά του την πολύ μικρή διάρκεια, τη μεγάλη δύναμη, την απότομη απώλεια ενέργειας και τις μεγάλες αλλαγές στις ταχύτητες των σωμάτων. Η απώλεια της ενέργειας μπορεί να εκφραστεί και με τον συντελεστή επαναφοράς ή αποκατάστασης. Με βάση τον ορισμό του συντελεστή επαναφοράς όταν δύο σώματα συγκρούονται η ταχύτητα μετά την κρούση σχετίζεται με την ταχύτητα πριν την κρούση. Ο συντελεστής αυτός είναι σταθερός και εξαρτάται από τις ιδιότητες των υλικών, τη γεωμετρία των επιφανειών που έρχονται σε επαφή, την ταχύτητα πριν την κρούση, τη διάρκεια της επαφής, τη θερμοκρασία και την τριβή. Ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης, η οποία με τη σειρά της μετατρέπεται στην τελική κινητική ενέργεια στο τέλος της επαφής. Το εναπομείναν ποσό της κινητικής ενέργειας χάνεται κατά τη διάρκεια της επαφής σε διάδοση κυμάτων, θερμότητα, απόσβεση και πλαστικότητα. Η προσέγγιση που παρουσιάζεται στη μελέτη αυτή βασίζεται στην ανάλυση της απώλειας ενέργειας, η οποία σχετίζεται με το συντελεστή αποκατάστασης, την αποθηκευμένη ελαστική ενέργεια και την απώλεια ενέργειας που σχετίζεται με την εσωτερική απόσβεση των σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή. Η ανάγκη για κατανόηση της θεωρίας στην οποία βασίζεται η επαφή των σωμάτων έκανε τους

επιστήμονες να αναπτύξουν μαθηματικά μοντέλα και να κάνουν αριθμητικές προσομοιώσεις με τη βοήθεια της κλασσικής μπάλας αναπήδησης.

3.2 Μαθηματικές εκφράσεις

Η θεωρία που αναπτύχθηκε από τον Hertz παραμένει θεμέλιο για τα περισσότερα προβλήματα επαφής στις μηχανολογικές εφαρμογές. Η δύναμη επαφής είναι μία μη γραμμική δύναμη παραμόρφωσης και εκφράζεται ως

$$F_N = k_h \delta^n \quad (3.2.1)$$

όπου το k_h αντιπροσωπεύει την παράμετρο της ακαμψίας και το δ είναι η σχετική παραμόρφωση μεταξύ των δύο σωμάτων. Ο εκθέτης n είναι ίσος με $3/2$ για κυκλικές και ελλειψοειδείς επιφάνειες. Ο συντελεστής k_h εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού και το σχήμα των επιφανειών που έρχονται σε επαφή. Παρόλα αυτά, ο Kelvin και ο Voigt περιέλαβαν τον όρο της απόσβεσης στη δύναμη, αφού ο Hertz είχε ασχοληθεί μόνο με αυτόν που σχετίζεται με την ελαστική παραμόρφωση. Η εναλλακτική προσέγγισή τους όμως περιείχε δύο γραμμικούς όρους.

$$F_N = k_h \delta + d_h \dot{\delta} \quad (3.2.2)$$

Η σταθερά d_h είναι ο συντελεστής υστέρησης και $\dot{\delta}$ η ταχύτητα της σχετικής παραμόρφωσης, που όμως δεν αντιπροσωπεύουν επακριβώς τη δύναμη αυτή. Έτσι, ο Hunt και ο Crossley έδωσαν μία διαφορετική μορφή στη δύναμη επαφής με τους δύο αυτούς όρους αυτούς να είναι μη γραμμικοί [2].

$$F_N = k_h \delta^n + c_h \dot{\delta} \quad (3.2.3)$$

Το c_h είναι ο μη γραμμικός συντελεστής απόσβεσης και ισούται με:

$$c_h = \xi \delta^n \quad (3.2.4)$$

όπου ξ είναι μία σταθερά απόσβεσης και είναι ίση με:

$$\xi = \frac{3k_h(1-e)}{2(v_1-v_2)} \quad (3.2.5)$$

Οι όροι v_1 και v_2 αντιπροσωπεύουν τις ταχύτητες των σωμάτων που έρχονται σε επαφή πριν την κρούση, ενώ ο όρος e είναι ο συντελεστής επαναφοράς και είναι ίσος με:

$$e = \frac{(v'_1 - v'_2)}{(v_1 - v_2)} \quad (3.2.6)$$

Τα v'_1 και v'_2 είναι οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση. Κατά τον Jankowski για πλήρως ελαστική κρούση ($e = 1$) το $\xi = 0$, ενώ για πλαστική ($e = 0$) το $\xi \rightarrow \infty$. Ύστερα από τη μορφή της σταθεράς απόσβεσης ξ που έδωσε ο Hunt και ο Crossley, με τη σειρά τους ο Lankearani και ο Nikravesh έδωσαν μία διαφορετική μορφή στην έκφραση αυτή.

$$\xi = \frac{3k_h(1-e^2)}{4(v_1-v_2)} \quad (3.2.7)$$

Με βάση όμως τον Αναγνωστόπουλο, ο συντελεστής επαναφοράς e που χρησιμοποιείται σε πραγματικές προσομοιώσεις παίρνει τιμές από 0.5 έως και 0.75. Αυτό δείχνει ότι η σταθερά απόσβεσης ξ είναι λανθασμένη. Έτσι, στην παρακάτω ενότητα φαίνονται οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται για τη διόρθωσή της.

3.3 Διορθωμένες εκφράσεις για τη σταθερά απόσβεσης ξ

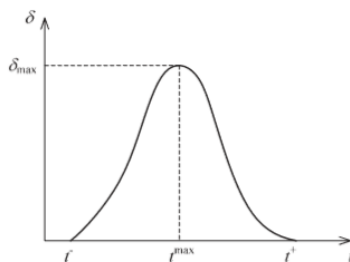
Με βάση το μοντέλο η απώλεια ενέργειας μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του συντελεστή επαναφοράς όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2 \quad (3.3.1)$$

m_1 και m_2 είναι οι μάζες των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Η ενέργεια που χάνεται λόγω της απόσβεσης είναι ίση με:

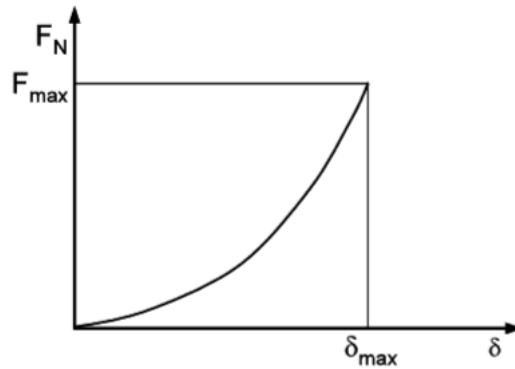
$$\Delta E = \oint c_h \delta d\delta \quad (3.3.2)$$

Ως \oint αναφέρεται στην επικαμπύλια ολοκλήρωση του βρόχου υστέρησης κατά τη διάρκεια της κρούσης. Στο σχήμα 3.3.1 φαίνεται η παραμόρφωση συναρτήσει του χρόνου, όπου δ είναι η παραμόρφωση, δ_{max} η μέγιστη παραμόρφωση, t ο χρόνος κατά την έναρξη της επαφής, t^{max} ο χρόνος που υπάρχει η μεγαλύτερη παραμόρφωση και t^+ ο χρόνος κατά την αποκόλληση των δύο σωμάτων.



Σχήμα 3.3.1: Καμπύλη παραμόρφωσης συναρτήσει του χρόνου

Στο σχήμα 3.3.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα της δύναμης επαφής συναρτήσει της σχετικής παραμόρφωσης δ .



Σχήμα 3.3.2: διάγραμμα δύναμης επαφής συναρτήσει της σχετικής παραμόρφωσης



Σχήμα 3.3.3: ισοδύναμο μοντέλο επαφής δύο σωμάτων

Στο σχήμα 3.3.3 φαίνεται ένα μοντέλο επαφής δύο σωμάτων τα οποία μπορούν να προσομοιωθούν και ως ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με μία αρχική παραμόρφωση $\delta_0 = 0$ και αρχική ταχύτητα $\dot{\delta}_0 = v_1 - v_2$. Η εξίσωση κίνησης του του συστήματος γράφεται ως εξής:

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = 0 \quad (3.3.3)$$

όπου m είναι η ισοδύναμη μάζα και είναι ίση με:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.3.4)$$

c είναι η απόσβεση και k η στιβαρότητα του ισοδύναμου συστήματος. Έτσι λοιπόν η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\delta = e^{-r\omega t} \frac{\delta_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \quad (3.3.5)$$

$$\dot{\delta} = e^{-r\omega t} \delta_0 \cos(\omega_d t) - r e^{-r\omega t} \frac{\omega \delta_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \quad (3.3.6)$$

Το ω είναι η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης και είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.3.7)$$

r είναι ο συντελεστής απόσβεσης και είναι ίσος με:

$$r = \frac{c}{2m\omega} \quad (3.3.8)$$

και ω_d είναι η ιδιοσυχνότητα με απόσβεση:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - r^2} \quad (3.3.9)$$

Για την περίπτωση όπου το r ισούται με μηδέν, τότε ισχύει ότι:

$$t^{max} = \frac{\pi}{2\omega}, \quad \delta^{max} = \frac{\delta_0}{\omega} \quad (3.3.10)$$

Από τις εξισώσεις (3.3.5), (3.3.6) και (3.3.10) μπορεί να προκύψει η παρακάτω σχέση:

$$\left(\frac{\delta}{\delta^{max}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0}\right)^2 = 1 \quad (3.3.11)$$

Από τη σχέση (3.3.11) καταλαβαίνουμε ότι η σχέση που περιλαμβάνει την παραμόρφωση και την ταχύτητα παραμόρφωσης παίρνει τη μορφή έλλειψης. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις στη συνέχεια:

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta^{max}}\right)^2}, \quad \delta = \delta_f \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0}\right)^2} \quad (3.3.12)$$

Το $\delta_f = v'_1 - v'_2 < 0$ και είναι η σχετική ταχύτητα μετά την κρούση μετά την κρούση των δύο σωμάτων. Έτσι λοιπόν, από τις σχέσεις (3.3.12) και (3.3.2) μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής:

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = \int_0^{\delta^{max}} \xi \delta^n \dot{\delta}_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta^{max}}\right)^2} d\delta + \int_0^{\delta^{max}} \xi \delta^n |\dot{\delta}_f| \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta^{max}}\right)^2} d\delta \quad (3.3.13)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης ισούται με την ενέργεια που χάθηκε λόγω της απόσβεσης κατά τη διάρκεια της συμπίεσης των δύο σωμάτων, ενώ ο δεύτερος με την ενέργεια

που χάθηκε κατά τη διάρκεια της αποκατάστασης. Έπειτα από ολοκληρωτικό μετασχηματισμό η σχέση παίρνει την επόμενη μορφή:

$$\Delta E = \xi(\dot{\delta}_0 + |\dot{\delta}_f|)\delta_{max}^{5/2} \int_0^1 x^{3/2}\sqrt{1-x^2} dx \quad (3.3.14)$$

Κάνοντας την αριθμητική ολοκλήρωση υπολογίζεται ότι το $\int_0^1 x^{3/2}\sqrt{1-x^2} dx = 0.2487 \approx \frac{1}{4}$

Έτσι η σχέση (3.3.14) γίνεται ίση με:

$$\Delta E = \frac{1}{4}\xi(\dot{\delta}_0 + |\dot{\delta}_f|)\delta_{max}^{5/2} = \frac{1}{4}(1+e)\xi\dot{\delta}_0\delta_{max}^{5/2} \quad (3.3.15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχή διατήρησης της ενέργειας, ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = U_m + \Delta E_1 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \quad (3.3.16)$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V \quad (3.3.17)$$

όπου U_m είναι η μέγιστη εσωτερική ενέργεια και ΔE_1 η απώλεια ενέργειας λόγω απόσβεσης.

Στη συνέχεια φαίνονται οι μαθηματικές τους εκφράσεις:

$$U_m = \int_0^{\delta_{max}} k_h \delta^{3/2} d\delta = \frac{2}{5}k_h\delta_{max}^{5/2}, \quad \Delta E_1 = \frac{1}{4}\xi_h\dot{\delta}_0\delta_{max}^{5/2} \quad (3.3.18)$$

Εάν η ενέργεια που χάνεται λόγω κρούσης δεν αμελείται, η σχέση (3.3.16) θα πάρει την εξής μορφή:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{2}{5}k_h\delta_{max}^{5/2} + \frac{1}{4}\xi\dot{\delta}_0\delta_{max}^{5/2} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \quad (3.3.19)$$

Συγχωνεύοντας τις σχέσεις (3.3.17) και (3.3.19), το $\delta_{max}^{5/2}$ παίρνει τη μορφή:

$$\delta_{max}^{5/2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \frac{20}{5\xi\dot{\delta}_0 + 8k_h} \quad c(3.3.20)$$

και τέλος, από τις σχέσεις (3.3.1), (3.3.15) και (3.3.20) το ξ παίρνει την τελική του μορφή:

$$\xi = \frac{8k_h(1-e)}{5e\dot{\delta}_0} \quad (3.3.21)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (3.3.21), προκύπτει η συσχέτιση μεταξύ των ξ και e όπως φαίνεται στη συνέχεια [2]:

- $e=1 \rightarrow \xi=0$
- $e=0 \rightarrow \xi=1$

4 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μαθηματική μοντελοποίηση σύνθετων κατασκευών καταλήγει σε συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Όταν η γεωμετρία ενός μοντέλου είναι απλή, τότε η επίλυση των εξισώσεων αυτών είναι δυνατή. Σε περίπτωση όμως που το πρόβλημα είναι πιο σύνθετο, η λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να αποδειχθεί δύσκολη έως και αδύνατη.

Γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν διάφορες αριθμητικές προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Μία από τις μεθόδους αυτές είναι και αυτή των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, FEM), η οποία ενώ είναι προσεγγιστική, εξάγει αξιόπιστα αποτελέσματα με πεδίο εφαρμογής σε πληθώρα προβλημάτων. Ένα μειονέκτημα που έχει είναι η απαίτηση μεγάλης υπολογιστικής ισχύος, και αυτό συμβαίνει κυρίως όταν υπάρχουν σύνθετα μοντέλα. Λόγω όμως της ραγδαίας ανάπτυξης των ηλεκτρονικών υπολογιστών το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε και η μέθοδος αυτή συνεχίζει να χρησιμοποιείται στην έρευνα και βιομηχανία για τη μελέτη διάφορων κατασκευών. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μία εξέλιξη των μητρικών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων [3].

Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής απαιτείται μία σειρά διαδικασιών. Αρχικά, γίνεται η εισαγωγή της γεωμετρίας της κατασκευής και δημιουργία του τρισδιάστατου μοντέλου σε ένα πρόγραμμα CAD. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται ο χωρισμός του μοντέλου σε πεπερασμένα στοιχεία και επιλέγεται το είδος επίλυσης που κάθε πρόβλημα απαιτεί. Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται με κάποιο από τα προγράμματα που αποκαλούνται pre-processor. Έπειτα από την προετοιμασία των δεδομένων γίνεται η εισαγωγή τους σε ένα είδος προγραμμάτων που λέγεται solver, το οποίο πραγματοποιεί την επίλυση του προβλήματος. Τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν από το solver, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα άλλο πρόγραμμα που λέγεται post-processor για να γίνει η τελική μελέτη.

Πιο αναλυτικά, για να γίνει εφικτή η επίλυση ενός προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει να πραγματοποιηθούν μερικά βήματα. Σε πρώτο στάδιο πρέπει να γίνει η διακριτοποίηση της δομής του μοντέλου. Το μοντέλο-κατασκευή πρέπει να διαιρεθεί σε στοιχεία (elements). Η σύνδεση μεταξύ των στοιχείων αυτών γίνεται στα σημεία που ονομάζονται κόμβοι (nodes). Όλη η συνεχής κατασκευή πρέπει να προσομοιωθεί κατάλληλα ώστε τα στοιχεία να εκφράζονται σωστά σε σχέση με το πραγματικό μοντέλο και να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μητρικές μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Για να γίνει αυτό, απαραίτητο είναι να προσομοιωθεί η κατασκευή με ένα πεπερασμένο αριθμό μεταβλητών, οι οποίες αποτελούνται από τις μετατοπίσεις και τις παραγώγους των μετατοπίσεων των κόμβων. Στη συνέχεια, επιλέγεται το κατάλληλο μοντέλο μετατόπισης, του οποίου η λύση μπορεί να έχει περίπλοκη δομή. Σε τέτοιες περιπτώσεις, επιλέγεται κάποια απλή λύση η οποία έχει πολυωνυμική μορφή. Ένα σημαντικό σημείο για τη λύση του γενικότερου προβλήματος, με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων, είναι η δημιουργία των μητρώων στιβαρότητας και διανυσμάτων φορτίου των στοιχείων [4]. Έπειτα,

γίνεται η συγχώνευση των ολικών εξισώσεων ισορροπίας για κάθε στοιχείο με τη μορφή πινάκων. Η σχέση που συνδέει τη στιβαρότητα, τη μετατόπιση και το φορτίο για ένα στοιχείο του μοντέλου φαίνεται παρακάτω. Αν υποθέσουμε ότι δ είναι η σχετική παραμόρφωση του στοιχείου και v_1 και v_2 οι μετατοπίσεις 2 κόμβων του στοιχείου, τότε ισχύει ότι

$$\delta = v_2 - v_1 \quad (4.1)$$

και η αντίστοιχη δύναμη είναι ίση με

$$f = k\delta = k(v_2 - v_1) \quad (4.2)$$

όπου k είναι η στιβαρότητα του στοιχείου. Για ένα ισοζύγιο ισχύει ότι

$$f_1 + f_2 = 0 \quad \text{άρα} \quad f_1 = -f_2 \quad (4.3)$$

Άρα,

$f_1 = k(v_2 - v_1)$ και $f_2 = -k(v_2 - v_1)$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί και σχέση πινάκων με την παρακάτω μορφή.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Η πιο απλή μορφή του είναι

$$[k_e] * \{v\} = \{f\} \quad (4.5)$$

Ο δείκτης e αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του μοντέλου, ενώ για το k_e ισχύει ότι

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

και ονομάζεται μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου. Το $\{f\}$ και $\{v\}$ είναι το διάνυσμα κομβικών δυνάμεων και μετατοπίσεων του κάθε στοιχείου αντίστοιχα. Για ολόκληρο το μοντέλο ισχύει

$$[K] * \{\bar{v}\} = \{\bar{F}\} \quad (4.7)$$

Αφού εξήχθη η τελική μορφή του πίνακα, γίνεται η επίλυση των μετατοπίσεων των κόμβων, και στη συνέχεια ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και των καταπονήσεων των στοιχείων με τη βοήθεια εξισώσεων που ισχύουν για τα στερεά. Για γραμμικά προβλήματα το διάνυσμα \bar{v} μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα, ενώ για την περίπτωση μη γραμμικών προβλημάτων, ακολουθείται μία διαδικασία βημάτων με μεταβολή του μητρώου στιβαρότητας και/ή του διανύσματος φορτίου.

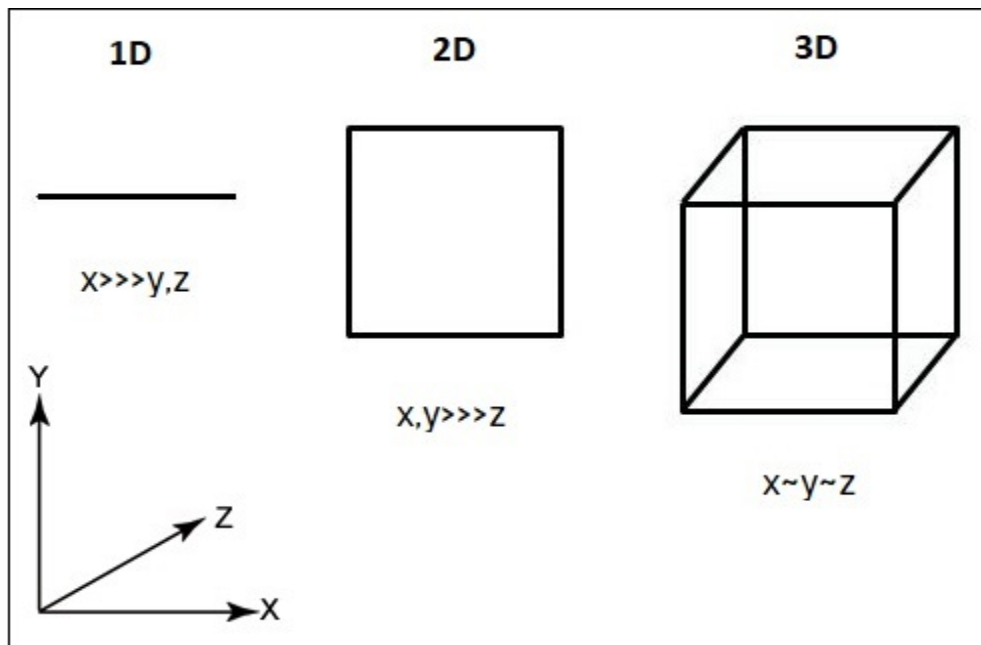
Σε όλα τα προβλήματα όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι απαραίτητα όλα τα παραπάνω βήματα, ίσως με ορισμένες διαφοροποιήσεις ανάλογα με τη φύση του εκάστοτε προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, στη διπλωματική εργασία αυτή θα

γίνουν οι κατάλληλες διαφοροποιήσεις, ώστε το θεωρητικό μοντέλο να αντιστοιχεί στο πειραματικό. Σκοπός είναι η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, η χρονική απεικόνιση δυνάμεων του συστήματος, αλλά και η σύγκρισή τους σε σχέση με αυτές του πειραματικού μοντέλου.

4.1 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Το πρώτο στάδιο για τη μοντελοποίηση της κατασκευής που μελετάται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας. Σε αυτή την περίπτωση γίνεται χωρισμός των μερών του μοντέλου που μελετάται σε στοιχεία, έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας και να είναι πιο εύκολη η λύση του προβλήματος. Συνεπώς, συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από εξισώσεις μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Ανάλογα με τη μορφή του μοντέλου που μελετάται χρησιμοποιούνται διαφόρων τύπου στοιχεία διαμόρφωσης. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να χωριστούν με βάση των αριθμό των διαστάσεων, δηλαδή μπορεί να είναι μονοδιάστατα, διδιάστατα ή τρισδιάστατα. Στο σχήμα 4.1.1 παρουσιάζονται τα είδη των στοιχείων.

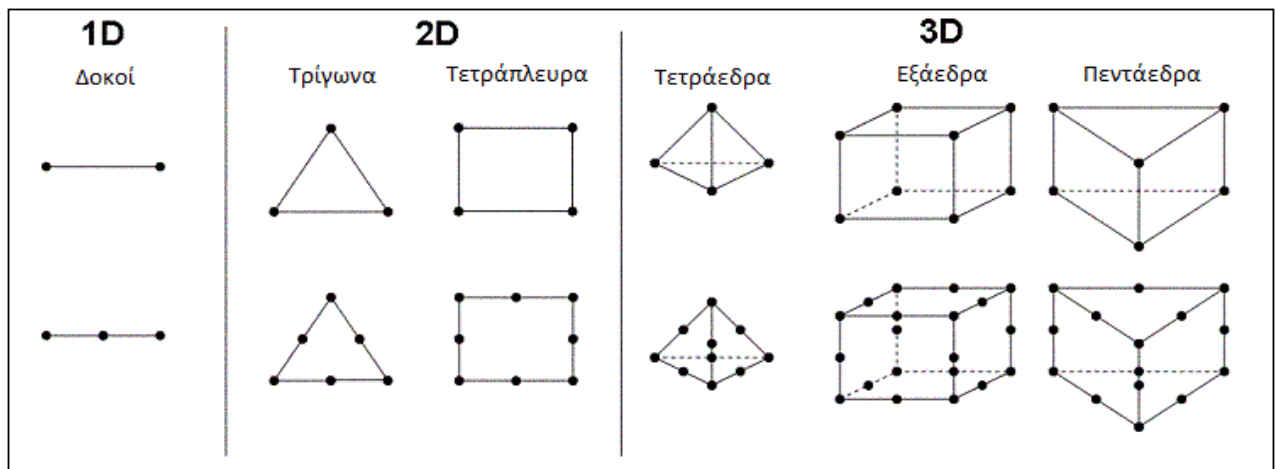


Σχήμα 4.1.1: Τύποι πεπερασμένων στοιχείων

Για τα μονοδιάστατα στοιχεία διαμόρφωσης ισχύει ότι η μία διάσταση είναι πολύ μεγαλύτερη συγκριτικά με τις άλλες δύο διαστάσεις.

Δισδιάστατα στοιχεία χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου η γεωμετρία του προς μελέτη μοντέλου μπορεί να προσομοιωθεί με γραμμικά στοιχεία, τα οποία μπορούν να εκφραστούν επί ενός άξονα. Τέτοια στοιχεία χρησιμοποιούνται σε μοντέλα όπως άξονες, δοκοί και πλαίσια. Στα δισδιάστατα στοιχεία, οι δύο διαστάσεις είναι πολύ μεγαλύτερες σε σύγκριση με την τρίτη. Τα στοιχεία δύο διαστάσεων διακρίνονται σε τριγωνικά και τετραπλευρικά.

Στα τρισδιάστατα στοιχεία διαμόρφωσης όλες οι διαστάσεις είναι συγκρίσιμες μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία διακρίνονται σε τετραεδρικά, κυβικά και σφηνοειδή. Αυτά βρίσκουν εφαρμογή σε διαφόρων ειδών κατασκευές, ακόμη και σε μοντέλα με πολύπλοκη γεωμετρία. Τέλος, υπάρχουν πολλά προβλήματα με καμπύλες γεωμετρίες. Γι' αυτό το λόγο, αναπτύχθηκαν στοιχεία με καμπυλωμένες πλευρές, τα οποία διαθέτουν στο εσωτερικό τους επιπλέον κόμβους για τη δημιουργία καμπυλότητας. Στο σχήμα 4.1.2 φαίνονται τα τρία είδη πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 4.1.2: Μονοδιάστατα, δισδιάστατα και τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία

Έπειτα, για τη δημιουργία του πλέγματος της προς μελέτη κατασκευής, γίνεται πρώτα η επιλογή του κατάλληλου στοιχείου. Το πλέγμα μπορεί να δημιουργηθεί είτε με τη χειροκίνητη μέθοδο, είτε με την αυτοματοποιημένη. Στην πρώτη περίπτωση, ο χειριστής επιλέγει με την κρίση του το είδος του στοιχείου που θα χρησιμοποιηθεί σε κάθε επιφάνεια, ανάλογα με την πολυπλοκότητα του μοντέλου. Σε αντίθεση, στην περίπτωση όπου το πλέγμα δημιουργείται αυτόματα, ο χρήστης δε συμβάλλει στην επιλογή του πλέγματος, αλλά το πλέγμα εκτελείται από αλγορίθμους τους οποίους διαθέτει το πρόγραμμα.

Πέρα από τις δύο αυτές μεθόδους, λόγω της ανάγκης για δημιουργία πλέγματος σε

πολύπλοκες γεωμετρίες, αναπτύχθηκε η ημιαυτοματοποιημένη μέθοδος. Κατά τη μέθοδο αυτή, αρχικά το πλέγμα δημιουργείται αυτόματα μέσω του προγράμματος, ενώ στη συνέχεια ο χρήστης επεμβαίνει σε περιοχές όπου η γεωμετρία είναι πολύπλοκη.

Για τη σωστή ολοκλήρωση της δημιουργίας του πλέγματος του μοντέλου, σημαντικό είναι αρχικά να επιλεγεί το κατάλληλο μέγεθος των στοιχείων, ο αριθμός από τον οποίο θα αποτελείται αλλά και οι θέσεις των κόμβων. Για μία απλή κατασκευή, ο πλήθος των στοιχείων του μοντέλου μπορεί να είναι μικρό αλλά το μέγεθός τους μεγάλο. Αντίθετα, σε μία πολύπλοκη γεωμετρία ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται, ενώ αντίστοιχα μειώνεται το μέγεθός τους. Βέβαια, στην περίπτωση αυτή λόγω της αύξησης του πλήθους των στοιχείων, υπάρχει η πιθανότητα αύξησης του χρόνου επίλυσης του προβλήματος. Πρέπει επίσης να αναφερθεί πως απαραίτητος είναι και ο καθορισμός των οριακών συνθηκών του προβλήματος για κάθε περίπτωση.

Τέλος, σημαντικό ρόλο παίζει και η κατάλληλη επιλογή της μεθόδου πλεγματοποίησης. Η εμπειρία του χρήστη μπορεί να επιφέρει γρηγορότερη επίλυση του προβλήματος, αλλά και ελαχιστοποίηση του σφάλματος μεταξύ θεωρίας και πράξης. Συνεπώς, γίνεται αντιληπτό πως δεν αρκεί μόνο η υπολογιστική ισχύς και η χρήση του κατάλληλου προγράμματος, αλλά και η γνώση και εμπειρία του χρήστη.

4.2 Αριθμητική ανάλυση ιδιομορφών

Έπειτα από τη μοντελοποίηση του συστήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, σειρά έχει η αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Παρακάτω εμφανίζεται αναλυτικά το μαθηματικό υπόβαθρο που χρησιμοποιείται από το λογισμικό επίλυσης για τη διεξαγωγή των μορφικών παραμέτρων.

Σε πρώτο στάδιο, γίνεται η εισαγωγή στις εξισώσεις κίνησης που χρησιμοποιήθηκαν. Η γενική μορφή της εξίσωσης κίνησης σε μητρική μορφή ενός ταλαντωτικού συστήματος δίνεται από τη σχέση που φαίνεται στη συνέχεια.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \underline{\mathbf{f}}(t) \quad (4.2.1)$$

όπου $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ και $[\mathbf{K}]$ είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης, στιβαρότητας, \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ και $\ddot{\mathbf{x}}$ το διάνυσμα μετατόπισης, ταχύτητας, επιτάχυνσης αντίστοιχα και $\underline{\mathbf{f}}$ το διάνυσμα διέγερσης του συστήματος.

Στην περίπτωση όπου δεν ασκείται εξωτερική διέγερση στο σύστημα ισχύει η ελεύθερη ταλάντωση, όπου η εξίσωση παίρνει την εξής μορφή:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = 0 \quad (4.2.2)$$

Για να γίνει ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών του ταλαντωτικού συστήματος που προκύπτουν από τις παραπάνω εξισώσεις, αναγκαία είναι η επίλυση του ιδιοπρόβληματος του συστήματος αυτού.

Επειδή η απόκριση του εξεταζόμενου συστήματος αναμένεται να είναι ταλαντωτική, υποτίθεται ότι η λύση της θα έχει τη εξής μορφή:

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{x}} \cos(\omega t - \theta) \quad (4.2.3)$$

Αντικαθιστώντας όμως την απόκριση στην εξίσωση κίνησης, προκύπτει ότι:

$$(K - \omega^2 M) \underline{\hat{x}} \cos(\omega t - \theta) = \underline{0} \quad (4.2.4)$$

Συνεπώς, για να είναι το $\underline{x}(t)$ λύση της εξίσωσης, θα πρέπει να ικανοποιείται το ιδιοπρόβλημα που παρουσιάζεται:

$$(K - \omega_n^2 M) \underline{x}_n = \underline{0} \quad (4.2.5)$$

Από το ιδιοπρόβλημα (4.2.5) προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές του ταλαντωτικού συστήματος ω_n και \underline{x}_n , τα οποία μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων οι οποίοι φαίνονται παρακάτω:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_{11}^2 & \dots & \omega_{1n}^2 \\ \dots & \ddots & \dots \\ \omega_{n1}^2 & \dots & \omega_{nn}^2 \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

Συνεπώς το ιδιοπρόβλημα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{KX} = \mathbf{M}\mathbf{\Omega}^2\mathbf{X} \quad (4.2.7)$$

Οι συνθήκες ορθογωνικότητας για τα μητρώα μάζας και στιβαρότητας εκφράζονται σε μητρική μορφή όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{M} \quad \text{και} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{K} \quad (4.2.8)$$

όπου \mathbf{X}^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του \mathbf{X} , ενώ \mathbf{M} και \mathbf{K} είναι οι διαγώνιοι πίνακες με στοιχεία διαγώνιου m_r , k_r αντίστοιχα και ισχύει:

$$m_r = \underline{x}_r^T \mathbf{M} \underline{x}_r \quad \text{και} \quad k_r = \underline{x}_r^T \mathbf{K} \underline{x}_r \quad (4.2.9)$$

5 Πειραματικός προσδιορισμός μορφικών παραμέτρων

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή της διαδικασίας προσδιορισμού των συναρτήσεων μετάδοσης για τη διεξαγωγή των μορφικών παραμέτρων της πειραματικής διάταξης. Σε πρώτο στάδιο, γίνεται η τοποθέτηση επιταχυνσιόμετρων σε επιλεγμένα σημεία της κατασκευής για την καταγραφή της ταλαντωτικής της συμπεριφοράς. Υπάρχουν δύο τύπου επιταχυνσιόμετρα, μονοαξονικά και τριαξονικά. Ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάται, γίνεται η επιλογή των κατάλληλων επιταχυνσιόμετρων.

Εν συνεχεία, για την έναρξη της ταλάντωσης της κατασκευής απαραίτητοι είναι οι μηχανισμοί διέγερσης. Υπάρχουν ορισμένες ευρέως διαδεδομένες περιπτώσεις διέγερσης της κατασκευής. Μία είναι η εφαρμογή κρουστικής διέγερσης μέσω σφυριού (Impact Hammer) [5]. Μία άλλη περίπτωση είναι η ημιτονοειδής διέγερση. Επίσης, υπάρχει η εφαρμογή στοχαστικής διέγερσης μέσω ηλεκτρομαγνητικού διεγέρτη, ακόμα και η ψευδοστοχαστική διέγερση.

Ένα κρουστικό σφυρί αποτελείται από τη λαβή του, ένα κρουστικό άκρο, έναν αισθητήρα δύναμης και μία μάζα εξισορρόπησης. Υπάρχουν διάφορα υλικά τα οποία μπορούν να τοποθετηθούν στο σφυρί ως κρουστικό άκρο. Ανάλογα με το υλικό από το οποίο αποτελείται η κατασκευή επιλέγεται διαφορετικό υλικό ως κρουστικό άκρο, αφού επηρεάζει άμεσα το εύρος της συχνότητας διέγερσης.

Ωστόσο, η ημιτονοειδής διέγερση αποτελεί την πιο ευρέως διαδεδομένη μέθοδο διέγερσης στις μορφικές δοκιμές. Η μέθοδος αυτή είναι η πιο κατάλληλη για κατασκευές με μεγάλο εύρος ταλάντωσης, για να χαρακτηρίζεται η μη γραμμική συμπεριφορά της κατασκευής. Η δύναμη που εφαρμόζεται στην κατασκευή έχει μία συχνότητα κάθε φορά και η διέγερση αλλάζει από μία τιμή συχνότητας σε κάποια άλλη, κάνοντας έτσι την κατασκευή να πραγματοποιεί μία αρμονική ταλάντωση.

Αφού έχουν τοποθετηθεί τα επιταχυνσιόμετρα στην κατασκευή και έχει γίνει η επιλογή του κατάλληλου κρουστικού άκρου στο σφυρί, ξεκινά η διαδικασία για τη λήψη των δεδομένων. Η συλλογή των αποκρίσεων του συστήματος γίνεται μέσω ενός προσαρμογέα σήματος, ο οποίος συνδέεται με ηλεκτρονικό υπολογιστή μέσω του λογισμικού LabVIEW. Συνεπώς, έχοντας συγκεντρώσει τις χρονικές ιστορίες των επιταχύνσεων για τα δύο διαφορετικά σημεία όπου τοποθετήθηκαν τα επιταχυνσιόμετρα, με τη βοήθεια του κώδικα που έχει αναπτυχθεί στο λογισμικό MATLAB, είναι δυνατόν να γίνει η λήψη των δεδομένων και στη συνέχεια να δημιουργηθούν διαγράμματα συναρτήσεων μετάδοσης ως προς τις συχνότητες. Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων μετάδοσης γίνεται η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων και μέτρων απόσβεσης της κατασκευής, αφού μέσω του διαγράμματος ευστάθειας και της μεθόδου RFPM ορισθεί το βέλτιστο κλάσμα πολυωνύμων που τις περιγράφει ο προσδιορισμός των μέτρων απόσβεσης.

5.1 Πειραματικός προσδιορισμός των συναρτήσεων μετάδοσης

Η διαδικασία για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μετάδοσης ενός γραμμικού ταλαντωτή με ένα βαθμό ελευθερίας και ιξώδη απόσβεση, ξεκινά από την εξίσωση κίνησης:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (5.1.1)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες ισχύει η παρακάτω σχέση:

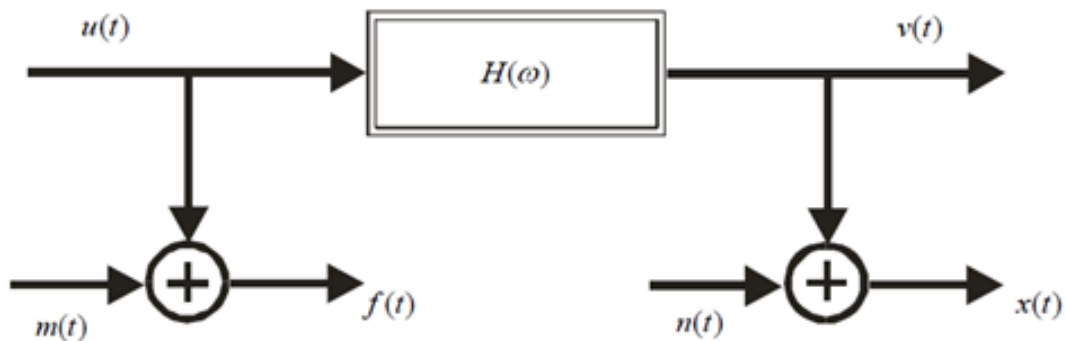
$$X(\omega) = H(\omega) * F(\omega) \quad (5.1.2)$$

όπου ο όρος $X(\omega)$ και $F(\omega)$ αποτελούν το μετασχηματισμό του Fourier της απόκρισης και της διέγερσης αντίστοιχα, ενώ ο όρος $H(\omega)$ ονομάζεται συνάρτηση μετάδοσης του συστήματος. Οι συναρτήσεις που αποτελούν το μετασχηματισμό του Fourier της απόκρισης και της διέγερσης είναι:

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{και} \quad F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (5.1.3)$$

Ως γνωστόν, η συνάρτηση μετάδοσης δεν εξαρτάται από τη διέγερση, αλλά μόνο από τα τεχνικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Ο πειραματικός προσδιορισμός των συναρτήσεων μετάδοσης ταλαντωτικών συστημάτων γίνεται με βάση τη φυσική ερμηνεία που προκύπτει από τον προσδιορισμό τους.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης μετάδοσης, πρέπει να ασκηθεί αρχικά μία δύναμη στην κατασκευή. Μετρώντας την απόκριση υπολογίζεται στη συνέχεια ο λόγος απόκρισης-διέγερσης. Πρακτικά όμως, αυτό εμφανίζει πολλά προβλήματα, αφού αρκετές κατασκευές παρουσιάζουν μη γραμμικές συμπεριφορές λόγω μηχανικού θορύβου. Συνεπώς, για τη μείωση των προβλημάτων αυτών αναπτύχθηκαν μεθοδολογίες για την εκτίμηση της συχνότητας μετάδοσης. Παρακάτω γίνεται η ανάλυση της πιο διαδεδομένης μεθοδολογίας. Στο σχήμα 5.1.1 απεικονίζεται το μοντέλο μίας εισόδου-μίας εξόδου γραμμικού συστήματος.



Σχήμα 5.1.1: Μοντέλο μίας εισόδου-μίας εξόδου γραμμικού συστήματος

Για το παραπάνω μοντέλο ισχύουν τα εξής:

$H(\omega)$: η συχνότητα μετάδοσης(FRF)

$u(t)$: το πραγματικό σήμα εισόδου

$f(t)$: το μετρούμενο σήμα εισόδου, το οποίο ισούται με το άθροισμα των $u(t)$ και $m(t)$

$v(t)$: το πραγματικό σήμα εξόδου

$x(t)$: το μετρούμενο σήμα εξόδου, το οποίο ισούται με το άθροισμα των $v(t)$ και $n(t)$

Έπειτα από τη μέτρηση του σήματος διέγερσης και απόκρισης, $f(t)$ και $x(t)$ αντίστοιχα, υπολογίζεται ο μετασχηματισμός Fourier για το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου του συστήματος. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι φασματικές πυκνότητες για την απόκριση και τη διέγερση, αλλά και η διαφασματική πυκνότητα.

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi T} X_T(\omega) X_T^*(\omega) \right] = X(\omega) X^*(\omega) \quad (5.1.4)$$

$$S_{FF}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi T} F_T(\omega) F_T^*(\omega) \right] = F(\omega) F^*(\omega) \quad (5.1.5)$$

$$S_{XF}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi T} X_T(\omega) F_T^*(\omega) \right] = X(\omega) F^*(\omega) \quad (5.1.6)$$

Στην περίπτωση όπου ο κυρίαρχος θόρυβος εμφανίζεται στο σήμα εισόδου, τότε η συνάρτηση μετάδοσης υπολογίζεται από το λόγο:

$$H_1 = \frac{S_{XF}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} \quad (5.1.7)$$

ενώ αν εμφανίζεται στο σήμα εξόδου, τότε η συνάρτηση μετάδοσης υπολογίζεται ως εξής:

$$H_2 = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)} \quad (5.1.8)$$

Όταν όμως ο θόρυβος δεν εμφανίζεται μόνο στο σήμα εισόδου ή στο σήμα εξόδου, αλλά εμφανίζεται και στα δύο, τότε το διάστημα εμπιστοσύνης της συχνότητας μετάδοσης είναι $H_1 \leq H \leq H_2$. Επίσης, για τον έλεγχο της γραμμικότητας των σημάτων εισόδου και εξόδου του συστήματος υπάρχει ο συντελεστής ομοιότητας $\gamma^2(\omega)$, ο οποίος υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{S_{XF}(\omega) S_{XF}^*(\omega)}{S_{XX}(\omega) S_{FF}^*(\omega)} \quad (5.1.9)$$

Ο συντελεστής ομοιότητας κυμαίνεται από το 0 μέχρι το 1. Για μία τέλεια μέτρηση σε γραμμικό ταλαντωτή ισχύει ότι $\gamma^2(\omega) = 1$.

Παρόμοια είναι και η διαδικασία που ακολουθείται σε ένα σύστημα για τον υπολογισμό του H_{mn} των στοιχείων του πίνακα μετάδοσης συχνότητας, της μετατόπισης του βαθμού ελευθερίας m που προκαλείται από το μοναδιαίο κρουστικό φορτίο βαθμού ελευθερίας n [5].

5.2 Μέθοδοι υπολογισμού μορφικών παραμέτρων

Έπειτα από τη δημιουργία των συναρτήσεων μετάδοσης του ταλαντωτικού συστήματος που μελετάται, σειρά έχει ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων ω_r μέτρων απόσβεσης ζ_r και ιδιομορφών του ξ_r . Συνήθως, η διεξαγωγή των μορφικών παραμέτρων από πειραματικές μετρήσεις γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με χρήση της συνάρτησης μετάδοσης που υπολογίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων. Ενώ υπάρχουν πολλές μέθοδοι για τη διαδικασία αυτή, η πιο διαδεδομένη είναι η RFPM (Rational Function Polynomial Method).

Η συνάρτηση μετάδοσης μπορεί να γραφεί και σε μορφή πινάκων όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1n}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \dots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ \vdots \\ F_n(\omega) \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

Η σχέση (5.2.1) πιο συνοπτικά μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\underline{X}(\omega) = H(\omega)\underline{F}(\omega) \quad (5.2.2)$$

όπου $H(\omega)$ είναι ο πίνακας μετάδοσης του συστήματος, και κάθε επιμέρους στοιχείο του πίνακα να αποτελεί μία επιμέρους συνάρτηση μετάδοσης του συστήματος η οποία μπορεί να εκφραστεί σε κλασματική μορφή (Partial Fraction Form):

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{r_r}{i\omega - p_r} + \frac{p_r^*}{i\omega - p_r^*} \right] \quad (5.2.3)$$

ή αλλιώς και σε ρητή κλασματική μορφή:

$$H(\omega) = \sum_{r=0}^{2N-1} a_r (i\omega)^r / \sum_{r=0}^{2N} b_r (i\omega)^r \quad (5.2.4)$$

Όπου p_r : ο r -οστός πόλος.

r_r : το υπόλοιπο στον r -οστό πόλο

N : αριθμός βαθμών ελευθερίας του μοντέλου

a_r : ο σταθερός συντελεστής του πολυωνύμου του αριθμητή

b_r : ο συντελεστής του πολυωνύμου του παρονομαστή

Ο r -οστός πόλος υπολογίζεται όπως φαίνεται παρακάτω.

$$p_r = -\omega_r \zeta_r + i\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (5.2.5)$$

Για ένα μοντέλο N βαθμών ελευθερίας, η συνάρτηση μετάδοσης περιέχει N ζεύγη πόλων. Οι θέσεις που βρίσκονται οι πόλοι καθορίζονται από τους παραμετρικούς όρους της εξίσωσης (5.2.3). Στην κλασματική μορφή της συνάρτησης μετάδοσης ο αριθμητής παρουσιάζεται με ένα ζεύγος σταθερών μιγαδικών συζυγών, που ονομάζονται υπόλοιπα. Κάθε πόλος έχει και διαφορετικό υπόλοιπο. Στης περίπτωση όπου η συνάρτηση μετάδοσης γράφεται στην κλασματική της μορφή οι άγνωστοι παράμετροι είναι οι πόλοι και τα υπόλοιπα.

Η εξίσωση της συνάρτησης μετάδοσης σε κλασματική μορφή εκφράζει τη συνάρτηση μετάδοσης ως ένα κλάσμα δύο πολυωνύμων, όπου το κάθε πολυώνυμο είναι ανεξαρτήτου βαθμού. Οι ρίζες του αριθμητή αποτελούν τα μηδενικά της συνάρτησης μετάδοσης, ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή αποτελούν τους πόλους αυτής. Το πολυώνυμο του παρονομαστή αποκαλείται και ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Για την κλασματική μορφή της συνάρτησης μετάδοσης οι άγνωστοι είναι οι πόλοι και οι μηδενιστές.

Κατά τη μορφική αναγνώριση παραμέτρων, οι δύο παραπάνω μορφές της συνάρτησης μετάδοσης εμπεριέχουν τις ίδιες ακριβώς πληροφορίες και υπάρχει συσχέτιση μεταξύ τους. Απαραίτητη καθίσταται η εύρεση των σταθερών συντελεστών a_r και b_r , με σκοπό την ελαχιστοποίηση του σφάλματος ανάμεσα στην αναλυτική έκφραση της συνάρτησης μετάδοσης (5.2.4) και στην πειραματικά εκτιμώμενη. Συνεπώς, ορίζεται η συνάρτηση λάθους e_n όπου αποτελεί τη διαφορά ανάμεσα στην αναλυτική συνάρτηση μετάδοσης $H(\omega)$ και στην πειραματική συνάρτηση $H_e(\omega)$ για τις τιμές των συχνοτήτων ω . Η συνάρτηση λάθους ορίζεται ως εξής:

$$e_n = \sum_{r=0}^{2N-1} a_r (i\omega_n)^r / \sum_{r=0}^{2N} b_r (i\omega_n)^r - H_e(i\omega_n) \quad (5.2.6)$$

όπου $b_{2N} = 1$

Το διάνυσμα σφάλματος για όλες τις τιμές συχνοτήτων ορίζεται όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$\underline{e}' = (e'_1 \quad e'_2 \quad \dots \quad e'_L)^T \quad (5.2.7)$$

και μπορεί να εκφραστεί και σε μητρωϊκή μορφή:

$$\underline{e}' = \begin{bmatrix} 1 & (i\omega_1) & (i\omega_1)^2 & \dots & (i\omega_1)^{2N-1} \\ 1 & (i\omega_2) & (i\omega_2)^2 & \dots & (i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (i\omega_L) & (i\omega_L)^2 & \dots & (i\omega_L)^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2N-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N} \\ H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N} \\ \vdots \\ H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} H_e(\omega_1) & H_e(\omega_1)(j\omega_1) & \dots & H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N-1} \\ H_e(\omega_2) & H_e(\omega_2)(j\omega_2) & \dots & H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_e(\omega_L) & H_e(\omega_L)(j\omega_L) & \dots & H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{pmatrix} \quad (5.2.8)$$

Σε πιο απλή μορφή μπορεί να γραφτεί ως:

$$\underline{e}' = P\underline{\alpha} - T\underline{b} - \underline{w} \quad (5.2.9)$$

Τελικά, η συνάρτηση η οποία πρέπει να έχει όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή είναι η συνάρτηση κόστους J, η οποία εκφράζεται ως:

$$J = \underline{e}^{*T} \underline{e} \quad (5.2.10)$$

Επίσης, αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} J(\underline{\alpha}, \underline{b}) = & \underline{\alpha}^T \text{Re}(P^{*T}P)\underline{\alpha} + \underline{b}^T \text{Re}(T^{*T}T)\underline{b} + \underline{w}^{*T} \underline{w} - 2\underline{\alpha}^T \text{Re}(P^{*T}P)\underline{b} - \\ & - 2\underline{\alpha}^T \text{Re}(P^{*T}\underline{w}) - 2\underline{b}^T \text{Re}(T^{*T}\underline{w}) \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Οι βέλτιστες τιμές των διανυσμάτων $\underline{\alpha}$ και \underline{b} για τις οποίες η συνάρτηση κόστους μηδενίζεται αποτελούν την ιδανική περίπτωση. Επί της ουσίας, επιζητείται η ελαχιστοποίηση της διαφοράς μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων. Απαραίτητη προϋπόθεση για την επίτευξη της συνθήκης αυτής είναι να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \underline{\alpha}} = & \text{Re}(P^{*T}P)\underline{\alpha} - \text{Re}(P^{*T}T)\underline{b} - \text{Re}(P^{*T}\underline{w}) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \underline{b}} = & \text{Re}(T^{*T}T)\underline{b} - \text{Re}(T^{*T}P)\underline{\alpha} - \text{Re}(T^{*T}\underline{w}) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Η εφαρμογή αυτών των συνθηκών οδηγεί στην κατάστροφη ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων συναρτήσει των \underline{a} και \underline{b} , το οποίο μπορεί στη συνέχεια να επιλυθεί με κατάλληλες αριθμητικές μεθόδους. Έπειτα από την εύρεση των βέλτιστων τιμών των συντελεστών του αριθμητή και του παρονομαστή της συνάρτησης μετάδοσης όταν βρίσκεται σε κλασματική μορφή, είναι δυνατός ο υπολογισμός των μορφικών παραμέτρων του συστήματος που μελετάται.

5.3 Ενημέρωση μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων

Η ενημέρωση του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων είναι μία διαδικασία που χρησιμεύει στην εξαγωγή αποτελεσμάτων τα οποία συγκλίνουν στις πειραματικές τιμές. Στόχος της βελτιστοποίησης είναι η απόκλιση των ιδιοσυχνοτήτων και αποκρίσεων του αριθμητικού μοντέλου σε σχέση με αυτές του πειράματος να τείνει στο μηδέν. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης του μοντέλου περιορίζεται σε ορισμένες και μόνο παραμέτρους. Οι παράμετροι αυτές ορίζονται σε κατηγορίες οι οποίες φαίνονται παρακάτω [6].

- Μεταβλητές σχεδιασμού (design variables)
- Ιδιότητες σχεδιασμού (design properties)
- Αποκρίσεις σχεδιασμού (design responses)
- Στόχος σχεδιασμού (design objective)
- Περιορισμοί σχεδιασμού (design constrains)

Η αριθμητική βελτιστοποίηση χρησιμοποιεί την ανάλυση ευαισθησίας, αφού υπολογίζει ρυθμούς μεταβολής των αποκρίσεων σε σχέση με τις αλλαγές που γίνονται στις μεταβλητές σχεδιασμού. Η αλλαγή στις τιμές των περιορισμών λόγω μίας αλλαγής στις μεταβλητές σχεδιασμού ή στην απόκριση λόγω αλλαγής κάποιας ιδιότητας, μπορούν να προκύψουν από τις ευαισθησίες που υπολογίζονται. Συνεπώς, πάντα κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι, αφού παρέχουν βασικές πληροφορίες κλίσεων.

Στην ανάλυση ευαισθησίας ορίζεται μία αντικειμενική συνάρτηση, όπου μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται ανάλογα με το πρόβλημα που υπάρχει. Οι περιορισμοί που υπάρχουν στην ανάλυση ευαισθησίας δεν μπορούν να παραβιάζονται, που σημαίνει ότι οι τιμές δεν επιτρέπεται να βρίσκονται εκτός των ορίων που έχουν τεθεί.

Για την συγκεκριμένη μελέτη, στην ανάλυση ευαισθησίας μεταβάλλονται οι μεταβλητές σχεδιασμού. Ανάλογα με το πρόβλημα που υπάρχει οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να διαφέρουν. Σε πολλά προβλήματα μπορεί να είναι οι διαστάσεις εξαρτημάτων, οι ιδιότητες των υλικών κ.α. Στην περίπτωση αυτή οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι ιδιότητες υλικών, δηλαδή η πυκνότητα και το μέτρο ελαστικότητας, αλλά και η στιβαρότητα των ελατηρίων. Με βάση τους συντελεστές που έχουν οι μεταβλητές σχεδιασμού και τους περιορισμούς, μελετάται η βέλτιστη λύση του προβλήματος για την εύρεση των σημείων των τομών.

Η αριθμητική βελτιστοποίηση του μοντέλου γίνεται με τη χρήση του λογισμικού Dymamis, για την εύρεση των μεταβλητών εντός των ορίων που έχουν τεθεί. Οι περιορισμοί του προβλήματος της ανάλυσης ευαισθησίας είναι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος που προέκυψαν από την μορφική αναγνώριση στην περίπτωση της γραμμικής συμπεριφοράς της δοκού. Σε αντίθεση, στην περίπτωση όπου δημιουργείται κρούση, οι περιορισμοί είναι οι αποκρίσεις του συστήματος που λαμβάνονται από τις πειραματικές μετρήσεις.

Κατά την αριθμητική βελτιστοποίηση, απαραίτητη είναι η ταύτιση των τιμών (ιδιοσυχνοτήτων ή αποκρίσεων) μεταξύ του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων με αυτές που προσδιορίστηκαν πειραματικά. Προκειμένου να γίνει εφικτό αυτό, καθίσταται απαραίτητη η ελαχιστοποίηση της απόκλισης των τιμών αυτών, δηλαδή το άθροισμα της τετραγωνικής ρίζας της διαφοράς τους:

$$f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i,exp})^2} \quad (6.1)$$

όπου x_i είναι οι ιδιοσυχνότητες ή οι αποκρίσεις, ανάλογα την περίπτωση του πειράματος, που προκύπτουν από το βελτιστοποιημένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων και $x_{i,exp}$ οι

μετρούμενες ιδιοσυχνότητες ή αποκρίσεις του πειραματικού μοντέλου. Συνεπώς, η ενημέρωση του του μοντέλου γίνεται με την εύρεση του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης $f(x_i)$. Ιδανική περίπτωση καθιστά τον μηδενισμό της συνάρτησης αυτής, αφού οι τιμές x_i $x_{i,exp}$ και είναι ίσες.

6 Μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση γραμμικού μοντέλου

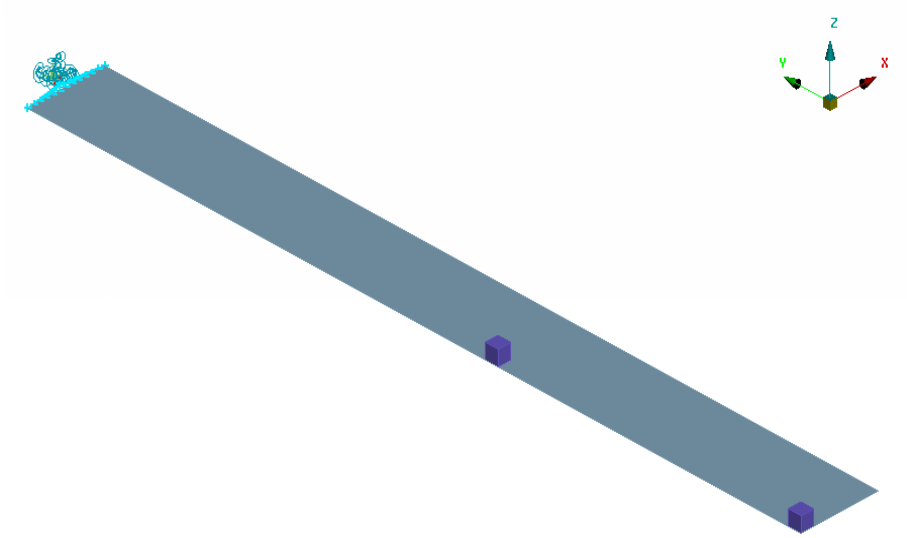
Αρχικά, επιλέγεται να μελετηθεί και να αναπτυχθεί ένα βέλτιστο μοντέλο της δοκού χωρίς την παρουσία του ελάσματος που προκαλεί την επαφή και έχει ως αποτέλεσμα τη μη γραμμική συμπεριφορά του συστήματος.

6.1 Μοντελοποίηση της πειραματικής διάταξης

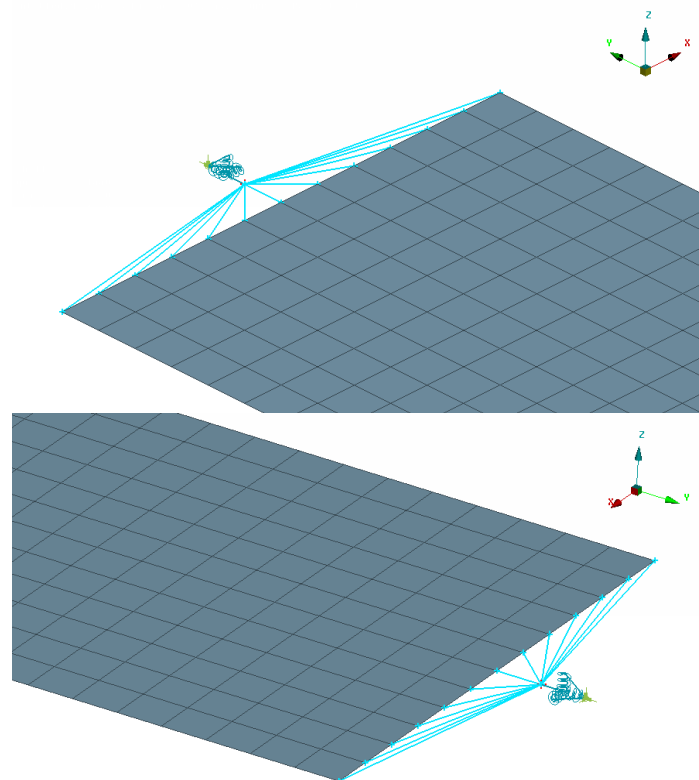
Για τη ανάπτυξη του αριθμητικού μοντέλου της πειραματικής διάταξης, απαραίτητη είναι αρχικά η σχεδίαση της γεωμετρίας της κατασκευής. Σε αυτή την περίπτωση, όπου η γεωμετρία δεν είναι πολύπλοκη, δεν είναι απαραίτητη η χρήση λογισμικού CAD για τη σχεδίαση του τρισδιάστατου μοντέλου. Η δημιουργία της γεωμετρίας μπορεί να ξεκινήσει απευθείας από το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων, όπου στη προκειμένη περίπτωση είναι το Ansa.

Η διακριτοποίηση της γεωμετρίας σε πεπερασμένα στοιχεία αρχικά έγινε με δυσδιάστατα (shell elements) και τρισδιάστατα χωρικά στοιχεία (solid elements). Το μέγεθος ή ακόμα και το σχήμα των στοιχείων που απαρτίζουν το αριθμητικό μοντέλο μπορεί να διαφέρει από εξάρτημα σε εξάρτημα. Η μοντελοποίηση της πειραματικής διάταξης έγινε λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη δοκό. Λόγω ότι η δοκός είναι αρκετά εύκαμπτη για τη βέλτιστη μοντελοποίηση της διάταξης λαμβάνονται υπόψη ως γεωμετρικά στοιχεία και τα επιταχυνσιόμετρα. Πιο συγκεκριμένα, η δοκός προσομοιώθηκε με δυσδιάστατα στοιχεία όπου το πάχος τους είναι 3mm, ενώ τα επιταχυνσιόμετρα με τρισδιάστατα χωρικά στοιχεία. Το αριθμητικό μοντέλο έχει τελικά 1463 στοιχεία. Λόγω του ότι η πάκτωση της πειραματικής διάταξης δεν θεωρείται ιδανική προσομοιώνεται με ελατήρια, οι σταθερές των οποίων αποτελούν παραμέτρους προς βελτιστοποίηση.

Αρχικά, η δοκός μελετάται σε πακτωμένη-ελεύθερη κατάσταση χωρίς το έλασμα που προκαλεί την επαφή και τη μη γραμμική συμπεριφορά. Για την έναρξη ταλάντωσης της δοκού εφαρμόζεται κρουστική διέγερση στο μοντέλο, με τη χρήση του στοιχείου TLOAD1 σε απόσταση 240 mm από την πάκτωση της δοκού. Το στοιχείο αυτό αντιστοιχεί σε δυναμικά φορτία. Στα σχήματα 6.1.1 και 6.1.2 παρουσιάζεται το μοντέλο της κατασκευής. Τα σχήματα απεικονίζουν διαφορετικές όψεις του αριθμητικού μοντέλου για καλύτερη κατανόηση της γεωμετρίας της κατασκευής.



Σχήμα 6.1.1: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων χωρίς το σταθερό έλασμα επαφής



Σχήμα 6.1.2: Προσομοίωση πάκτωσης δοκού με ελατήρια

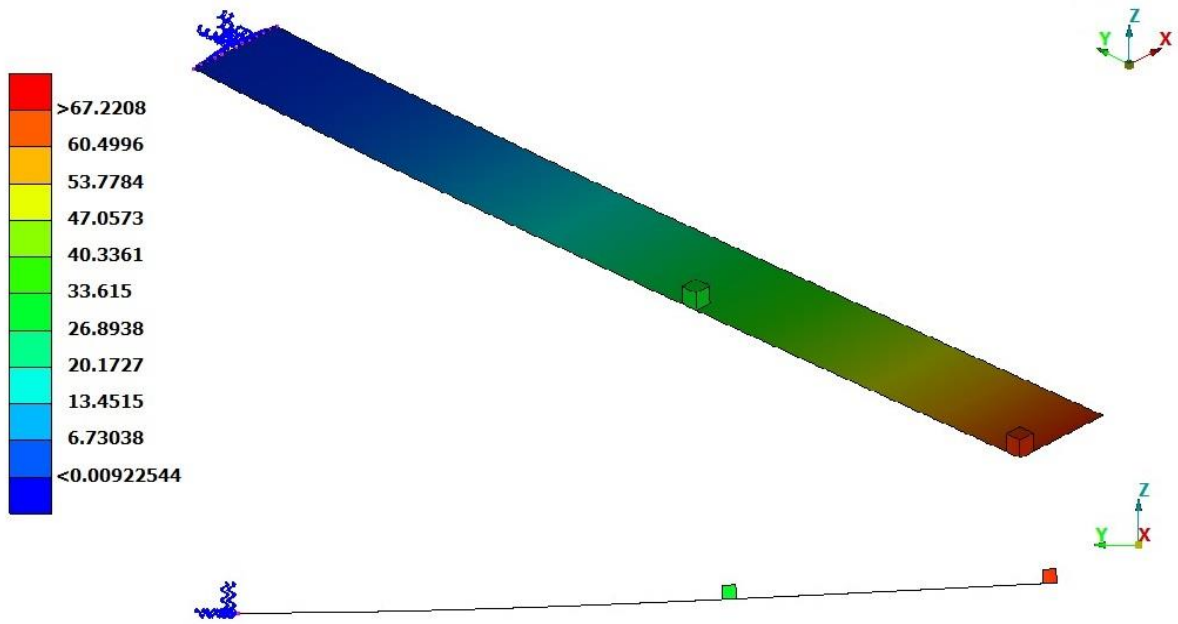
6.2 Ανάλυση ιδιομορφών με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Έπειτα από τη ανάπτυξη του αριθμητικού μοντέλου γίνεται η επίλυση του προβλήματος με τη χρήση του λογισμικού Dynamis. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης παρουσιάζονται στη συνέχεια σε εικονική μορφή μέσω του μετά-επεξεργαστή μΕΤΑ. Οι ιδιομορφές του μοντέλου μπορεί να εμφανίζονται ως αξονικές, καμπτικές, στρεπτικές ή και συνδυασμός αυτών στους άξονες x, y και z. Στον πίνακα 6.2.1 που βρίσκεται στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι οκτώ πρώτες ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις του μοντέλου.

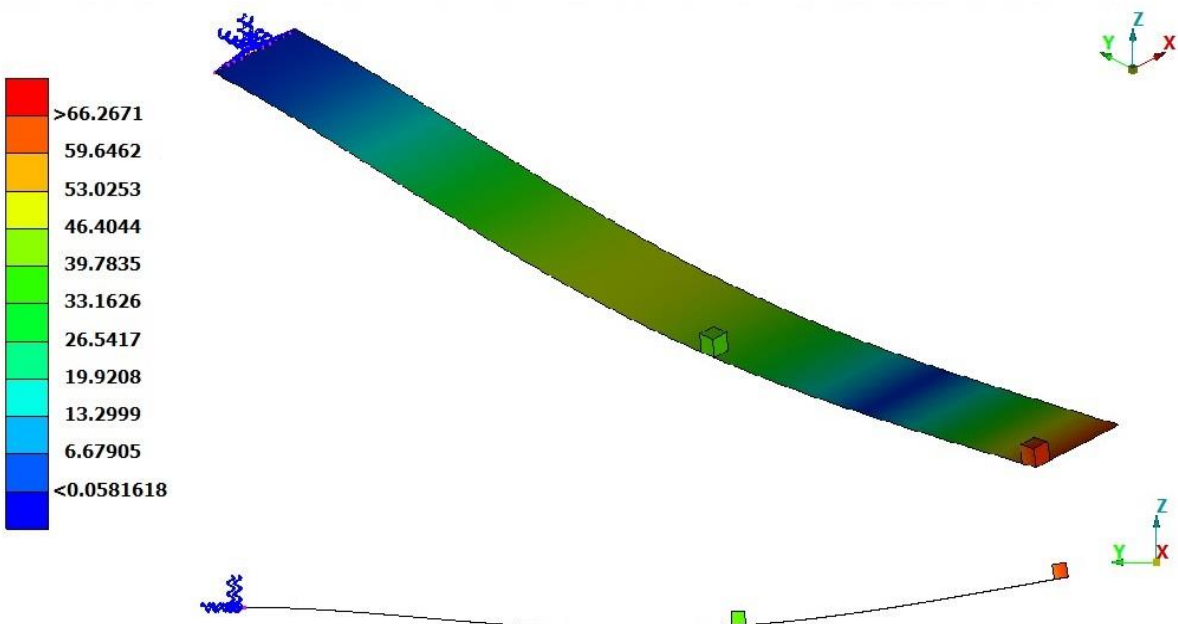
Πίνακας 6.2.1: Ιδιοσυχνότητες ιδιομορφικής ανάλυσης του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων

Mode	Nominal FE Predicted Modal Frequency ω_{r,FE_opt} [Hz]	Axes
1	6.794	Κάμψη στο z
2	42.551	Κάμψη στο z
3	119.368	Κάμψη στο z
4	129.481	Στρέψη στο y
5	134.963	Κάμψη στο y
6	235.050	Κάμψη στο z
7	385.967	Κάμψη στο z, στρέψη στο y
8	396.841	Κάμψη στο z, στρέψη στο y

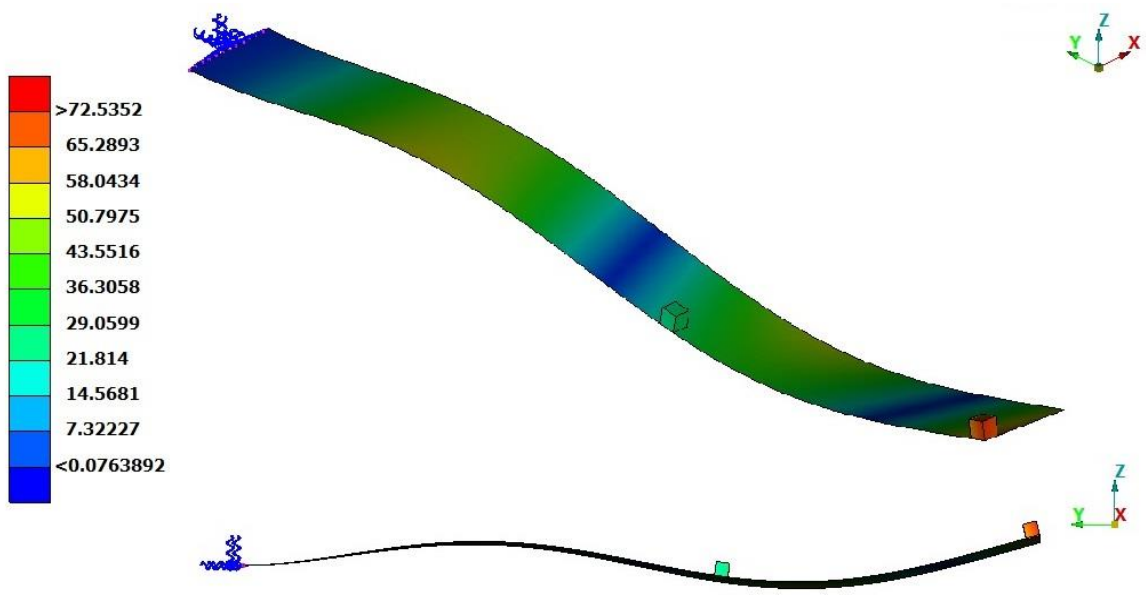
Παρακάτω, παρουσιάζονται σχηματικά οι ιδιομορφές για κάθε μία από τις οκτώ πρώτες ιδιοσυχνότητες του συστήματος (σχήματα 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4, 6.2.5, 6.2.6, 6.2.7, 6.2.8). Για καλύτερη κατανόηση, οι ιδιομορφές εμφανίζονται από δύο όψεις του αριθμητικού μοντέλου για κάθε περίπτωση.



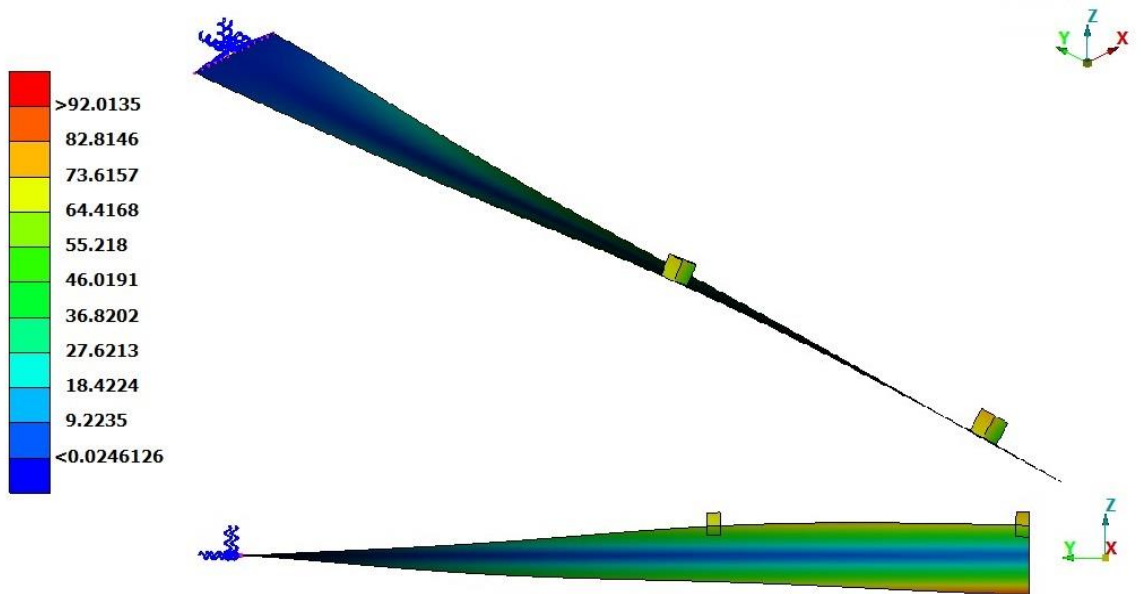
Σχήμα 6.2.2: 1^η Ιδιοσυχνότητα 6.794 Hz



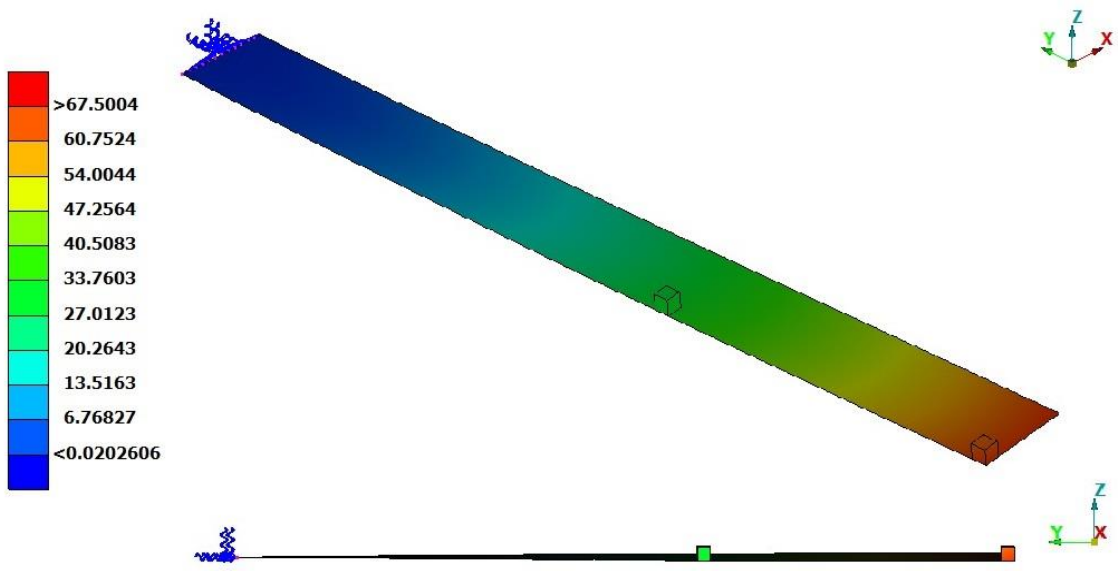
Σχήμα 6.2.3: 2^η Ιδιοσυχνότητα 42.551 Hz



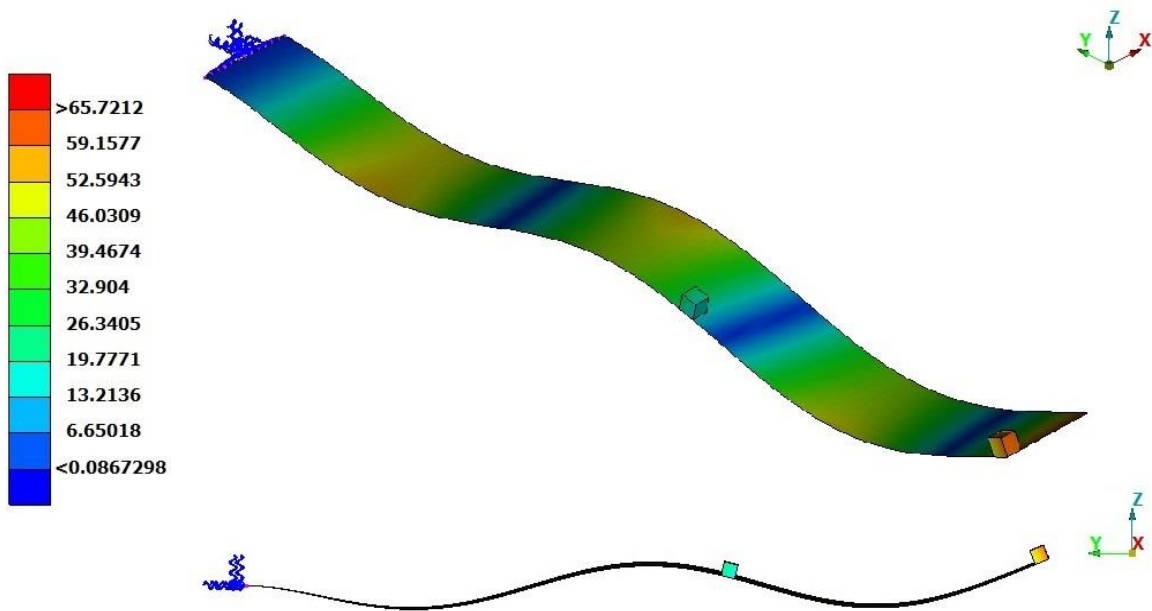
Σχήμα 6.2.4: 3^η Ιδιοσυχνότητα 119.368 Hz



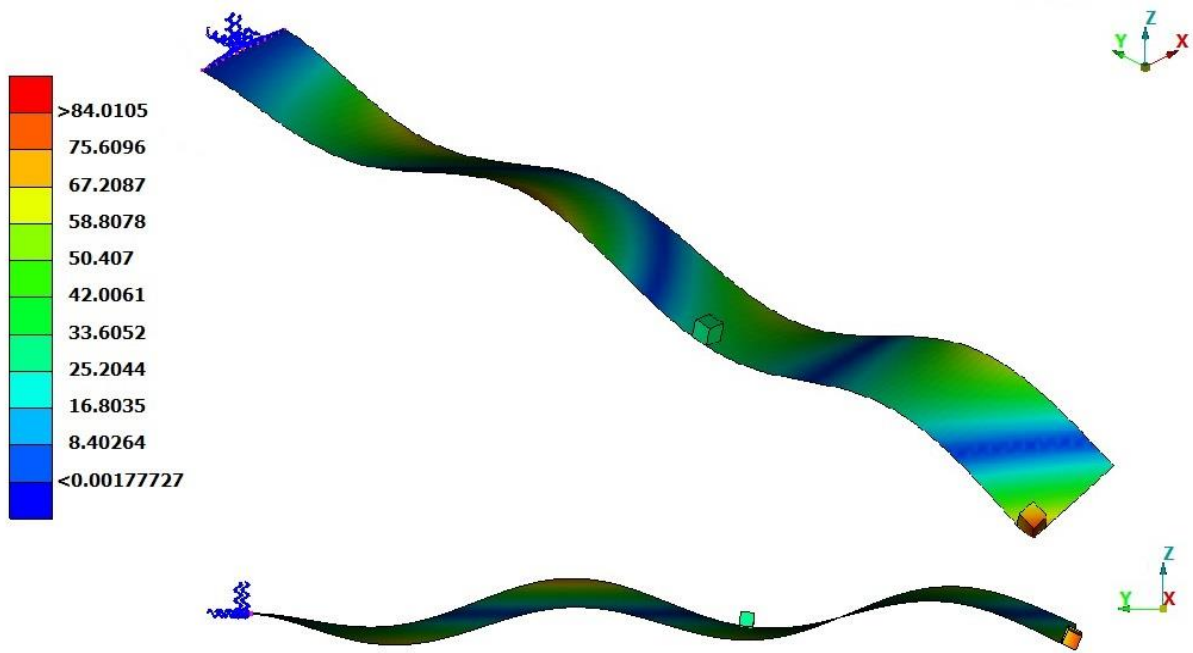
Σχήμα 6.2.5: 4^η Ιδιοσυχνότητα 129.481 Hz



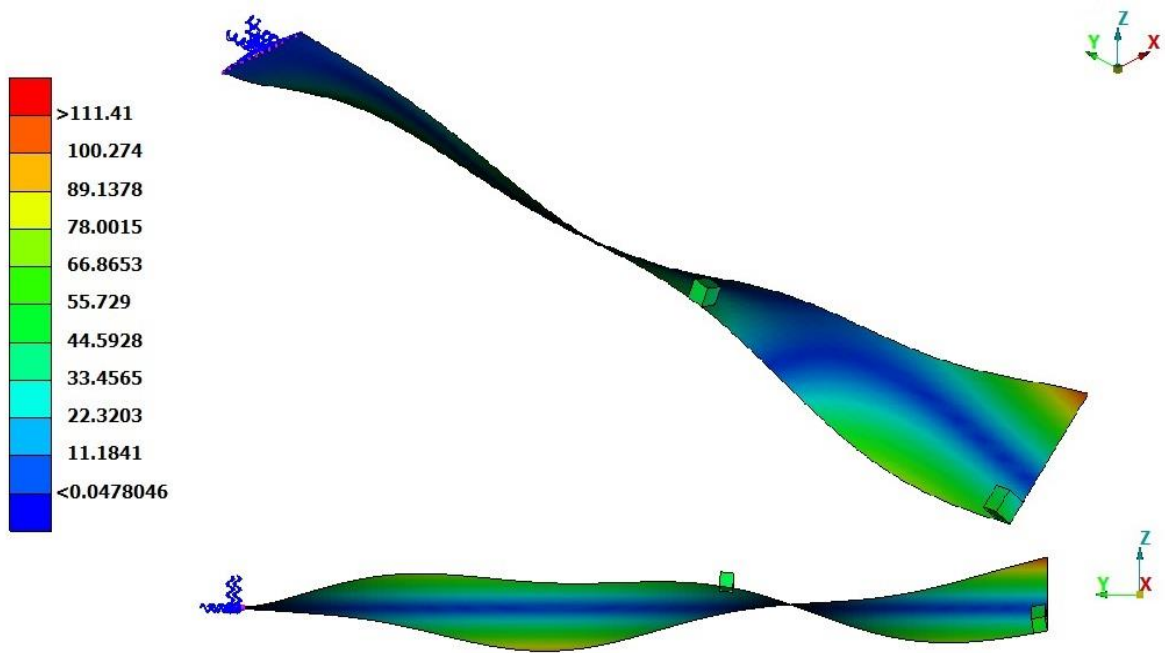
Σχήμα 6.2.6: 5^η ιδιοσυχνότητα 134.963 Hz



Σχήμα 6.2.7: 6^η ιδιοσυχνότητα 235.050 Hz



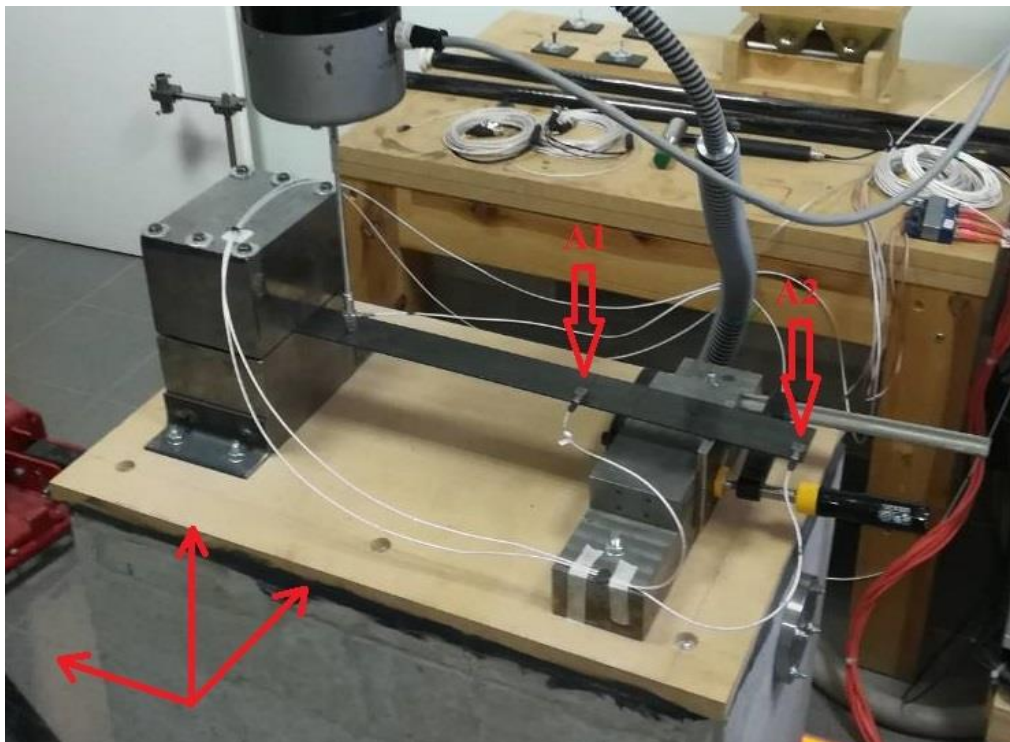
Σχήμα 6.2.8: 7^η ιδιοσυχνότητα 385.967 Hz



Σχήμα 6.2.9: 8^η ιδιοσυχνότητα 396.841 Hz

6.3 Πειραματική διαδικασία

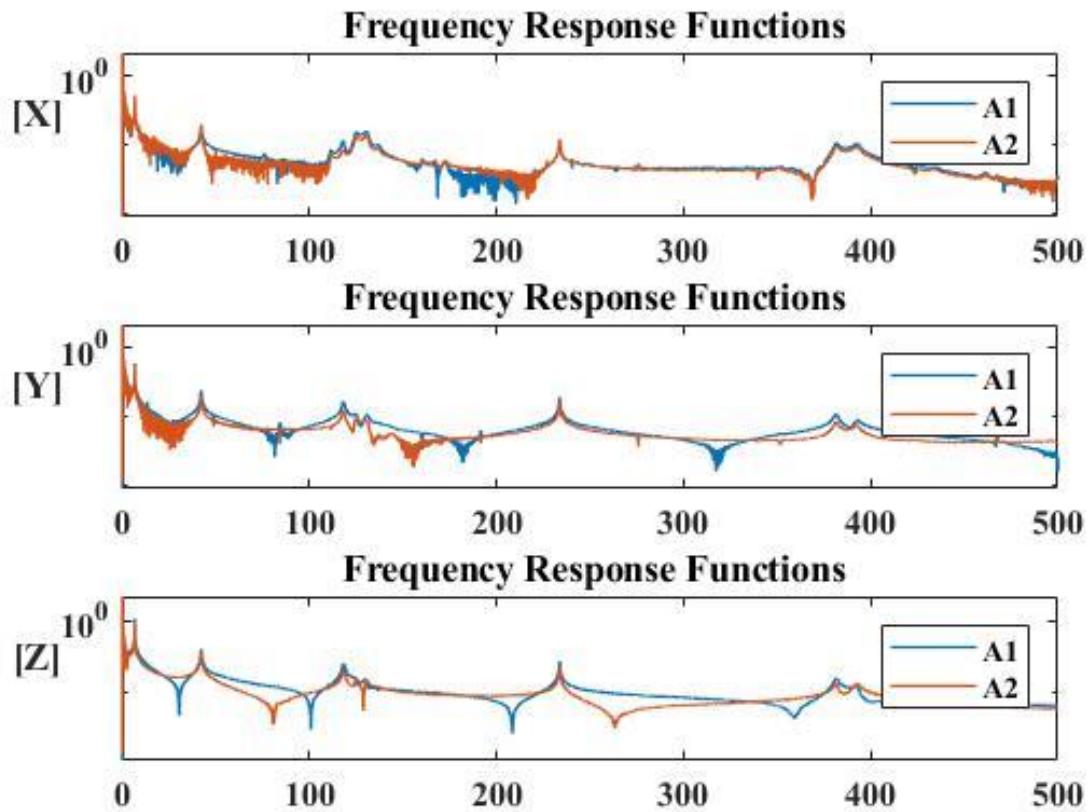
Για τη συγκεκριμένη κατασκευή τοποθετήθηκαν τριαξονικά επιταχυνσιόμετρα σε δύο διαφορετικά σημεία της δοκού. Τα τριαξονικά επιταχυνσιόμετρα καταγράφουν την απόκριση του συστήματος σε τρία κανάλια (x , y , z). Στο σχήμα 6.3.1 φαίνονται οι θέσεις με αρίθμηση όπου τοποθετήθηκαν τα επιταχυνσιόμετρα A1 και A2 επάνω στη δοκό. Το επιταχυνσιόμετρο A1 βρίσκεται σε απόσταση 600 mm από το σημείο όπου είναι πακτωμένη η δοκός, ενώ το A2 σε απόσταση 360 mm από την πάκτωση.



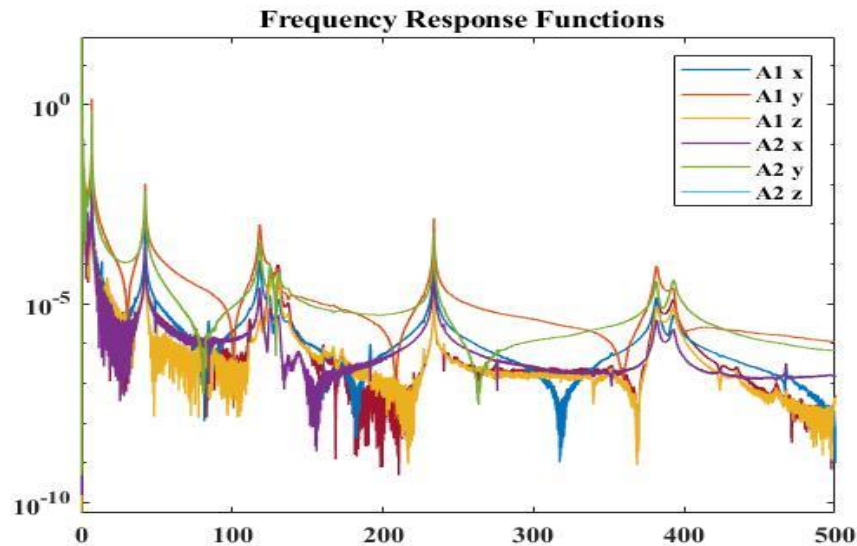
Σχήμα 6.3.1: Τοποθέτηση επιταχυνσιομέτρων στην κατασκευή

Ο προσδιορισμός των συναρτήσεων μετάδοσης και του διαγράμματος ευστάθειας πραγματοποιείται για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων και μέτρων απόσβεσης του συστήματος, όπως αναφέρθηκε στο πέμπτο κεφάλαιο. Στα σχήματα 6.3.2 και 6.3.3 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις μετάδοσης, και για τους τρεις άξονες x , y και z , οι οποίες προσδιορίστηκαν με τη χρήση του λογισμικού MATLAB ως προς ένα ικανοποιητικό εύρος συχνοτήτων (0-500Hz) από την καταγραφή αποκρίσεων των δύο επιταχυνσιομέτρων (A1 και A2). Από τα διαγράμματα είναι εμφανείς οι οκτώ πρώτες ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στη

συνάρτηση μετάδοσης που προκύπτει από τις μετρήσεις του επιταχυνσιόμετρου A1, ενώ η πορτοκαλί αντιστοιχεί σε αυτήν που προκύπτει από τις μετρήσεις του επιταχυνσιόμετρου A2.

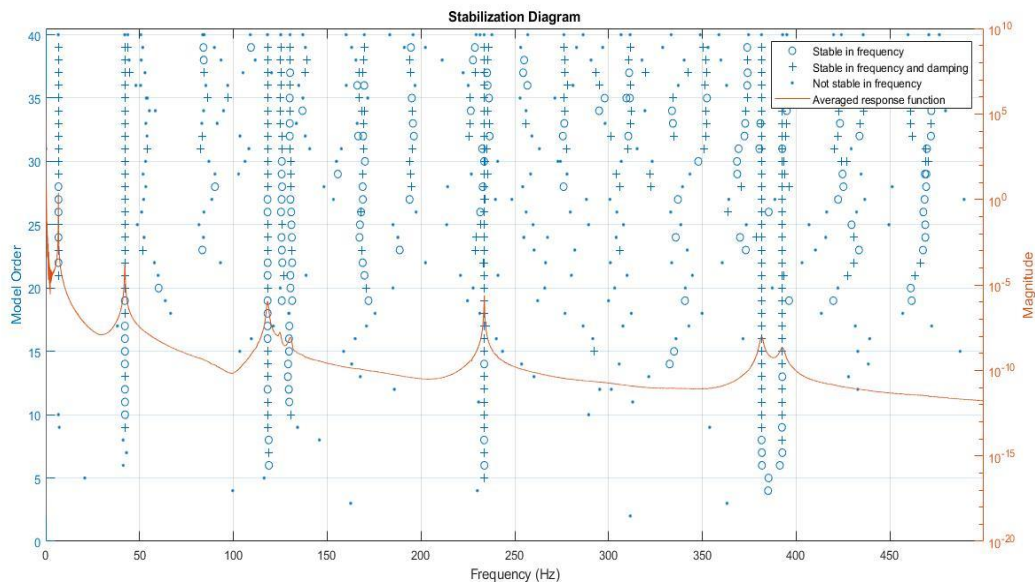


Σχήμα 6.3.2: Μέτρο συνάρτησης μετάδοσης για εύρος συχνοτήτων 0-500 Hz για τους άξονες x,y και z ξεχωριστά για τα επιταχυνσιόμετρα A1 και A2



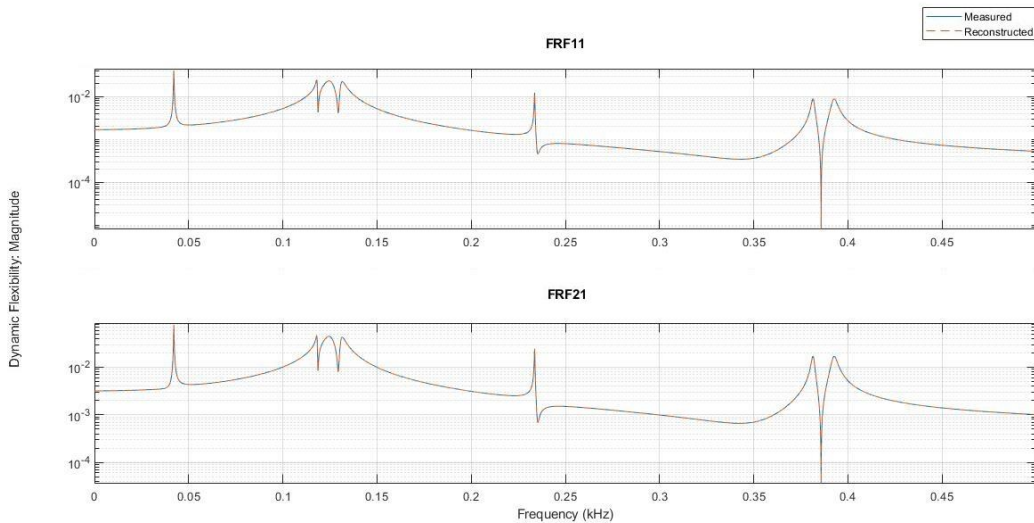
Σχήμα 6.3.3: Μέτρο συνάρτησης μετάδοσης για εύρος συχνοτήτων 0-500 Hz για τα επιταχυνσιόμετρα A1, A2 και τους άξονες x,y και z συνολικά

Στη συνέχεια, όπως προαναφέρθηκε, με την εφαρμογή της RFBM μεθόδου και τη δημιουργία του διαγράμματος ευστάθειας γίνεται ο προσδιορισμός των μορφικών παραμέτρων που προκύπτουν αριθμητικά. Με γνώμονα το διάγραμμα ευστάθειας, γίνεται η επιλογή της τάξης του πολυωνύμου, το οποίο προσεγγίζει με ακρίβεια τις συναρτήσεις μετάδοσης. Στο σχήμα 6.3.4 εμφανίζεται το διάγραμμα ευστάθειας για την επιλογή της τάξης του πολυωνύμου, επιλέγοντας τα σημεία όπου η συχνότητα και η απόσβεση εμφανίζουν ταυτόχρονα ευστάθεια.



Σχήμα 6.3.4: διάγραμμα ευστάθειας του συστήματος

Εν τέλει, παρουσιάζεται ένα διάγραμμα το οποίο απεικονίζει τις πειραματικές συναρτήσεις μετάδοσης σε σύγκριση με τις προσεγγιστικές, οι οποίες εξήχθησαν με τη χρήση της μεθόδου RFPM (σχήμα 6.3.5). Η μπλε συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί στην πειραματική συνάρτηση μετάδοσης, ενώ η πορτοκαλί διακεκομμένη σε αυτήν που προκύπτει μέσω της προσεγγιστικής μεθόδου.



Σχήμα 6.3.5: Πειραματική και προσεγγιστική συνάρτηση μετάδοσης για τα επιταχυνσιόμετρα A1 και A2

Συνεπώς, από τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω γίνεται προσδιορισμός των αποτελεσμάτων της μορφικής αναγνώρισης. Στον πίνακα 6.3.6 εμφανίζονται οι ιδιοσυχνότητες και τα μέτρα απόσβεσης της κατασκευής που προκύπτουν πειραματικά.

Πίνακας 6.3.6: Αποτελέσματα μορφικής αναγνώρισης των ιδιοσυχνοτήτων $\omega_{r,exp}$ και μέτρ απόσβεσης $\zeta_{r,exp}$ της πειραματικής διάταξης

Mode Number	Identified Modal Frequency $\omega_{r,exp}$ (Hz)	Identified Modal Damping Ratio $\zeta_{r,exp}$ (%)
1	6.699	0.908
2	42.127	0.297
3	118.215	0.257
4	125.518	1.287
5	130.388	1.287
6	233.703	0.070
7	381.568	0.239
8	392.696	0.462

Όπως είναι φανερό από τον πίνακα 6.2.1 και 6.3.6, οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων έχουν κάποια απόκλιση συγκριτικά με αυτές που προσδιορίστηκαν από το πειραματικό μοντέλο. Στο σχήμα 6.3.7 παρουσιάζεται το σφάλμα μεταξύ των τιμών αυτών.

Πίνακας 6.3.7: Ιδιοσυχνότητες πειραματικού μοντέλου, αρχικού μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων και το απόλυτο σφάλμα τους

Mode Number	Nominal FE Predicted Modal Frequency ω_{r,FE_nom} (Hz)	Identified Modal Frequency $\omega_{r,exp}$ (Hz)	Difference between Identified and Nominal FE Predicted Modal Frequency (%)
1	6.794	6.699	1.40
2	42.551	42.127	1.00
3	119.368	118.215	0.97
4	129.481	125.518	3.06
5	134.963	130.388	3.39
6	235.05	233.703	0.57
7	385.967	381.568	1.14
8	396.841	392.696	1.04

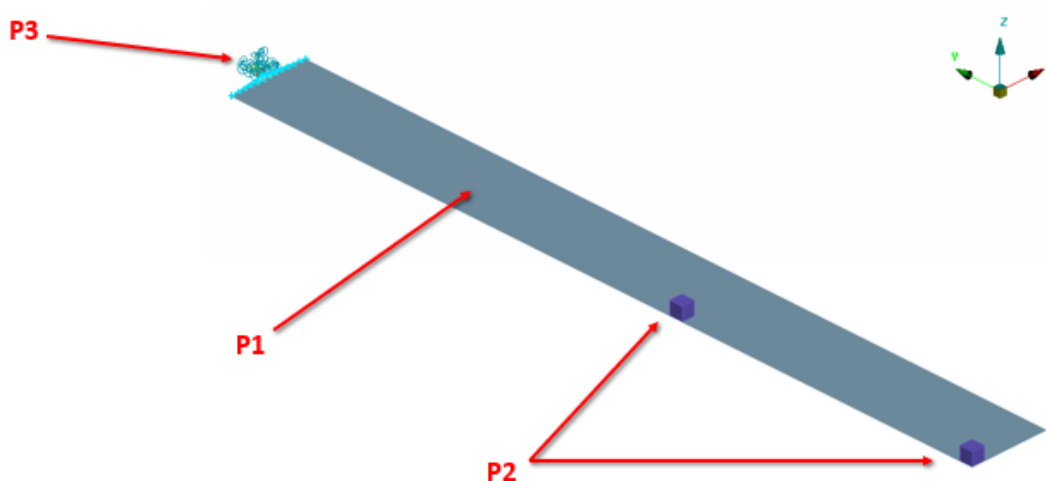
Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων του αριθμητικού μοντέλου διαφέρουν από αυτές των πειραματικών μετρήσεων με σφάλμα το οποίο αγγίζει το 3.39%. Αυτό συμβαίνει διότι δεν υπάρχει η απόλυτη ακρίβεια στον καθορισμό των υλικών και των στοιχείων διαμόρφωσης κατά τη μοντελοποίηση του προβλήματος με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων.

6.4 Ενημέρωση αριθμητικού μοντέλου

Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου προκύπτει το συμπέρασμα ότι το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δεν είναι αρκετά αξιόπιστο. Αυτό καθιστά απαραίτητη την ενημέρωση του μοντέλου, τροποποιώντας τις ιδιότητες των υλικών (μέτρο ελαστικότητας, πυκνότητα) και τις παραμέτρους των στοιχείων διαμόρφωσης (στιβαρότητα ελατηρίων) αφού η γεωμετρία του μοντέλου δεν μπορεί να επέλθει σε αλλαγή. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση της απόκλισης μεταξύ ιδιοσυχνοτήτων πειραματικού και αριθμητικού μοντέλου. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης απαιτεί χρόνο και μεγάλη υπολογιστική ισχύ.

Στο σχήμα 6.4.1 φαίνονται τα μέρη της δοκού όπου απαιτείται ενημέρωση των μεταβλητών σχεδιασμού. Στους πίνακες 6.4.2 και 6.4.3 παρουσιάζονται οι τιμές των μεταβλητών

σχεδιασμού, του αρχικού και του ενημερωμένου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων σε μορφή πινάκων



Σχήμα 6.4.1: Αρχικές και βελτιστοποιημένες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού του αριθμητικού μοντέλου

Πίνακας 6.4.2: Αρχικές και βελτιστοποιημένες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού του αριθμητικού μοντέλου

	Μεταβλητή σχεδιασμού (Design variable)	Αρχική τιμή σχεδιασμού (initial value)	Κάτω όριο (Lower bound)	Άνω όριο (Upper bound)	Τελική τιμή σχεδιασμού (final value)	Βήμα (move limit)
Δοκός	Πάχος [mm]	3	2.4	3.6	3.228	1%
	Μέτρο ελαστικότητας [GPa]	210	168	252	214.261	1%
	Πυκνότητα [kg/m ³]	7850	6280	9420	9419.352	1%
Επιταχ. A1 A2	Μέτρο ελαστικότητας [GPa]	210	552	828	552.012	1%
	Πυκνότητα [kg/m ³]	7850	6200	9300	9299.977	1%

Πίνακας 6.4.3: Αρχικές και βελτιστοποιημένες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού ελατηρίων του αριθμητικού μοντέλου

	Μεταβλητή σχεδιασμού (Design variable)	Αρχική τιμή σχεδιασμού (initial value)	Κάτω όριο (Lower bound)	Άνω όριο (Upper bound)	Τελική τιμή σχεδιασμού (final value)	Βήμα (move limit)
Ελατήρια	Στιβαρότητα x axis [N/m]	$1 \cdot 10^6$ (N/m)	$0.010 \cdot 10^6$	$99.99 \cdot 10^6$	$6.590 \cdot 10^6$	1%
	Στιβαρότητα y axis [N/m]	$1 \cdot 10^{10}$	$0.010 \cdot 10^{10}$	$99.99 \cdot 10^{10}$	$7.950 \cdot 10^{10}$	1%
	Στιβαρότητα z axis [N/m]	$1 \cdot 10^{10}$	$0.010 \cdot 10^{10}$	$99.99 \cdot 10^{10}$	$6.770 \cdot 10^{10}$	1%
	Στιβαρότητα x ax.rot [N/m]	$1 \cdot 10^7$	$0.010 \cdot 10^7$	$99.99 \cdot 10^7$	$1.000 \cdot 10^7$	1%
	Στιβαρότητα y ax.rot [N/m]	$1 \cdot 10^7$	$0.010 \cdot 10^7$	$99.99 \cdot 10^7$	$1.270 \cdot 10^7$	1%
	Στιβαρότητα z ax.rot [N/m]	$1 \cdot 10^{10}$	$0.010 \cdot 10^{10}$	$99.99 \cdot 10^{10}$	$8.540 \cdot 10^{10}$	1%

Στον πίνακα 6.4.4 παρουσιάζονται οι ιδιοσυχνότητες για τις οκτώ πρώτες ιδιομορφές του συστήματος με τις βελτιωμένες τιμές του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, ενώ ο πίνακας 6.4.5 εμφανίζει τις ιδιοσυχνότητες με τις αρχικές τιμές σχεδιασμού του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, τις τελικές-βελτιωμένες, τις μετρούμενες πειραματικές, αλλά και το απόλυτο σφάλμα μεταξύ αυτών.

Πίνακας 6.4.4: Βελτιστοποιημένες τιμές ιδιοσυχνοτήτων μορφικής ανάλυσης μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων

Mode Number	Updated FE Predicted Modal Frequency ω_{r,FE_opt} (Hz)
1	6.734
2	42.141
3	118.233
4	124.924
5	128.691
6	232.745
7	382.195
8	392.930

Όπως προαναφέρθηκε, σκοπός της διαδικασίας βελτιστοποίησης του μοντέλου είναι η ελαχιστοποίηση του σφάλματος μεταξύ ιδιοσυχνοτήτων του πειραματικού μοντέλου σε σύγκριση με τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων που προκύπτουν από το ενημερωμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.

Πίνακας 6.4.5: Πειραματικές και βελτιστοποιημένες τιμές ιδιοσυχνοτήτων και απόλυτο σφάλμα

Mode Number	Nominal FE Modal Frequency $\omega_{r,FE_{in}}$ [Hz]	Identified Modal Frequency $\omega_{r,exp}$ [Hz]	Updated FE Predicted Modal Frequency $\omega_{r,FE_{opt}}$ [Hz]	Difference between Identified FE and Predicted Modal Frequency (%)
1	6.794	6.699	6.734	0.52
2	42.551	42.127	42.141	0.03
3	119.368	118.215	118.233	0.02
4	129.481	125.518	124.924	0.48
5	134.963	130.388	128.691	1.32
6	235.050	233.703	232.745	0.41
7	385.967	381.568	382.195	0.16
8	396.841	392.696	392.930	0.06

Τελικά, παρατηρείται από τον πίνακα 6.4.5 ότι ο στόχος της χρήσης ενημέρωσης του αριθμητικού μοντέλου επετεύχθη, αφού το απόλυτο σφάλμα μεταξύ πειραματικών και βελτιστοποιημένων τιμών είναι μικρότερο συγκριτικά με το σφάλμα που προκύπτει από τις πειραματικές και τις αρχικές τιμές του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων.

7 Μοντελοποίηση και βελτιστοποίηση μη γραμμικού μοντέλου

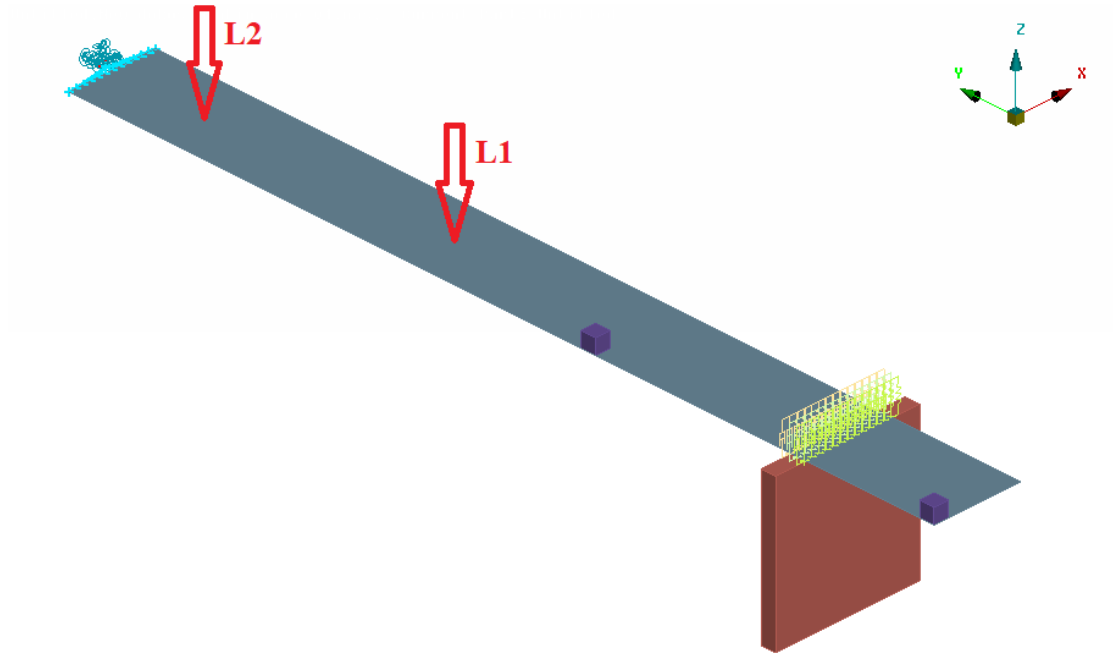
Η επαφή σε ένα σύστημα πολλών σωμάτων προκαλεί μη γραμμική συμπεριφορά. Στο σύστημα που μελετάται, η μη γραμμική συμπεριφορά προκαλείται από την ύπαρξη ενός σταθερού ελάσματος το οποίο έρχεται σε κρούση με τη δοκό ύστερα από τη διέγερσή της. Στην προκειμένη περίπτωση, υπάρχουν δύο περιπτώσεις διέγερσης της δοκού, μία κρουστική και μία ημιτονοειδής.

7.1 Ανάπτυξη και ενημέρωση μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων

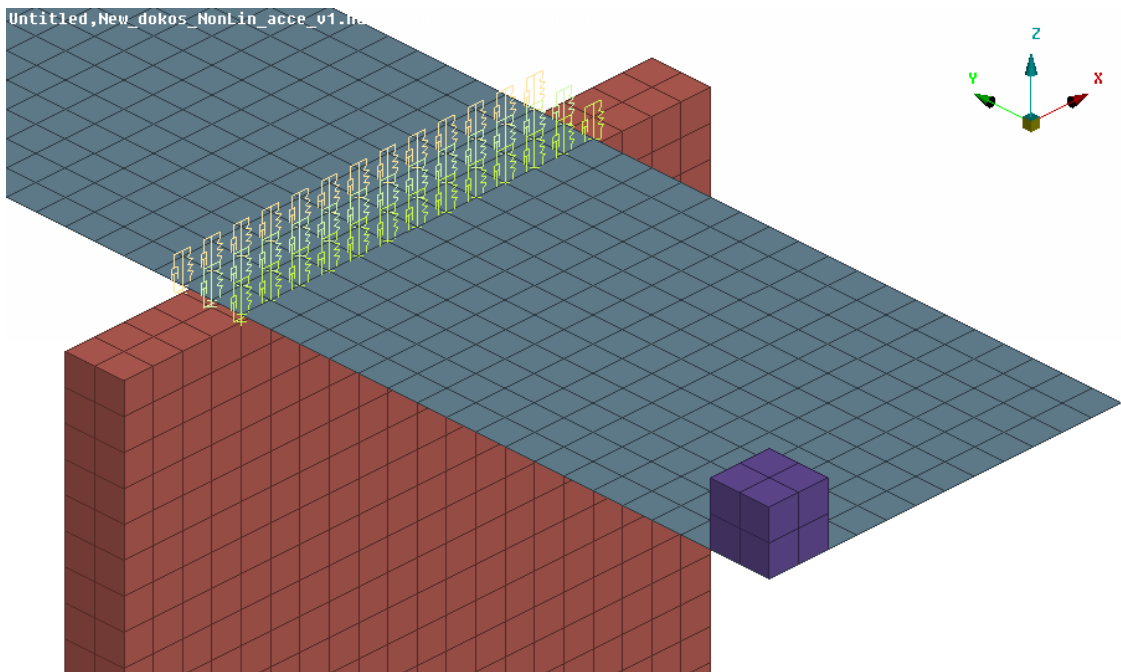
Προκειμένου να γίνει μελέτη της επαφής, στην πειραματική διάταξη προστίθεται το σταθερό έλασμα. Συνεπώς, και στο αναλυτικό μοντέλο πρέπει να γίνει προσθήκη του ελάσματος, αλλά και των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της κρούσης της δοκού. Τα στοιχεία για τη μοντελοποίηση της επαφής είναι τα CBUSH1D, τα οποία αντιστοιχούν σε ελατήρια με απόσβεση. Ενεργοποιούνται αφού γίνει πρώτα η επιλογή δύο κόμβων στα σημεία όπου εφάπτεται η δοκός με το σταθερό έλασμα. Τα στοιχεία CBUSH1D δεν έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία που εφαρμόζονται. Αυτό συμβαίνει διότι η σχετική παραμόρφωση κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της δοκού.

Επιπροσθέτως, για την προσομοίωση της μη γραμμικής μορφής της δύναμης κατά την επαφή, απαραίτητη είναι η εισαγωγή ενός πίνακα που αντιστοιχεί στο μέγεθός της συναρτήσσει της σχετικής παραμόρφωσης. Για τη δημιουργία του πίνακα αυτού αναπτύχθηκε κώδικας στο λογισμικό MATLAB.

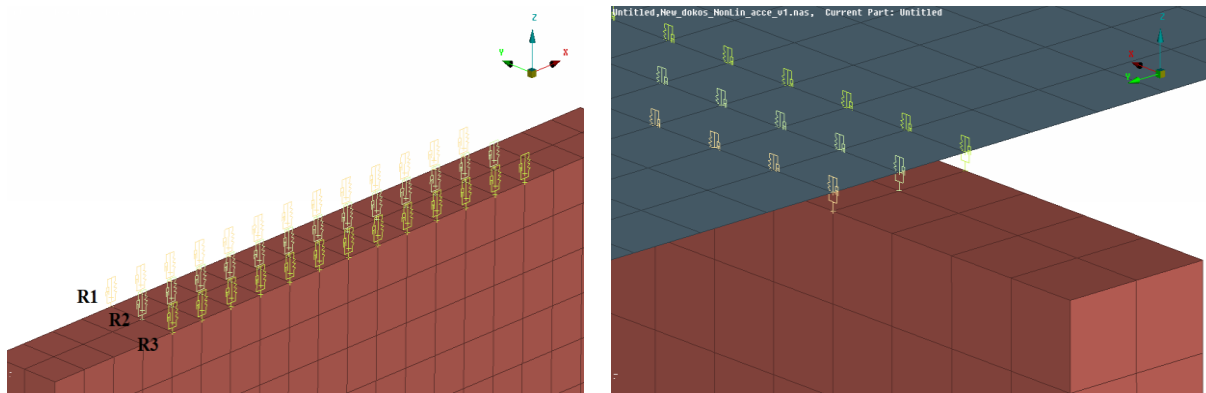
Για την εφαρμογή της κρουστικής αλλά και της ημιτονοειδούς διέγερσης στο μοντέλο, χρησιμοποιείται η εντολή TLOAD1. Στην πρώτη περίπτωση του πειράματος, η κρουστική διέγερση εφαρμόζεται σε απόσταση 240 mm από το σημείο πάκτωσης της δοκού (σημείο L1). Κατά την εφαρμογή όμως της ημιτονοειδούς διέγερσης, η δύναμη εφαρμόζεται σε απόσταση 60 mm από το ίδιο σημείο (σημείο L2). Στη συνέχεια, στο σχήμα 7.1.1 παρουσιάζεται το νέο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων αλλά και τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων L1 και L2, ενώ στα σχήματα 7.1.2 και 7.1.3 φαίνονται τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της επαφής υπό διαφορετικές όψεις για την καλύτερη κατανόησή τους, όπως εμφανίζεται μέσα από το λογισμικό Ansa.



Σχήμα 7.1.1: Πλήρες μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων



Σχήμα 7.1.2: Σχηματική απεικόνιση του στοιχείου CBUSH1D



Σχήμα 7.1.3: Σχηματική απεικόνιση του στοιχείου CBUSH1D

Στη συνέχεια, γίνεται η περιγραφή της διαδικασίας για τη λήψη των αποκρίσεων που προκύπτουν έπειτα από τη διέγερση της πειραματικής διάταξης για τις διαφορετικές περιπτώσεις, μίας κρουστικής και μίας ημιτονοειδούς.

Στην περίπτωση της κρουστικής διέγερσης η έναρξη της ταλάντωσης ξεκινάει με την διέγερση της δοκού με τη χρήση ενός κρουστικού σφυριού, σε απόσταση 240 mm από την πάκτωση, όπως αναπτύχθηκε και στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων στο σημείο L1 (σχήμα 7.1.1). Τα επιταχυνσιόμετρα καταγράφουν τις επιταχύνσεις της δοκού και στα τρία κανάλια x, y και z. Αντίστοιχα, στη δεύτερη περίπτωση τα επιταχυνσιόμετρα καταγράφουν τις αποκρίσεις του συστήματος για χρονικό διάστημα ενός δευτερολέπτου, όσο διαρκεί και η ημιτονοειδής διέγερση. Η ημιτονοειδής διέγερση εφαρμόζεται στο σημείο L2 (σχήμα 7.1.1).

Με την εισαγωγή των δεδομένων που καταγράφηκαν από τα επιταχυνσιόμετρα A1 και A2 στο λογισμικό MATLAB, γίνεται ο προσδιορισμός των χρονικών ιστοριών του συστήματος για τις διαφορετικές περιπτώσεις του πειράματος.

Όπως και στο γραμμικό, έτσι και στο μη γραμμικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων καθίσταται απαραίτητη η ενημέρωσή του. Στην ενότητα 6.4 γίνεται βελτιστοποίηση του αριθμητικού μοντέλου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, όπως τις ιδιότητες των υλικών και τις παραμέτρους των στοιχείων διαμόρφωσης. Η ίδια διαδικασία πραγματοποιείται και για το μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές. Ωστόσο, με την προσθήκη του σταθερού ελάσματος και τη χρήση των στοιχείων διαμόρφωσης CBUSH1D για τη δημιουργία επαφής, απαιτείται βελτιστοποίηση και στις παραμέτρους των στοιχείων αυτών. Στον πίνακα 7.3.1 παρουσιάζονται οι ενημερωμένες τιμές των παραμέτρων των CBUSH1D για τις τρεις σειρές των στοιχείων όπως φαίνονται στο σχήμα 7.1.3.

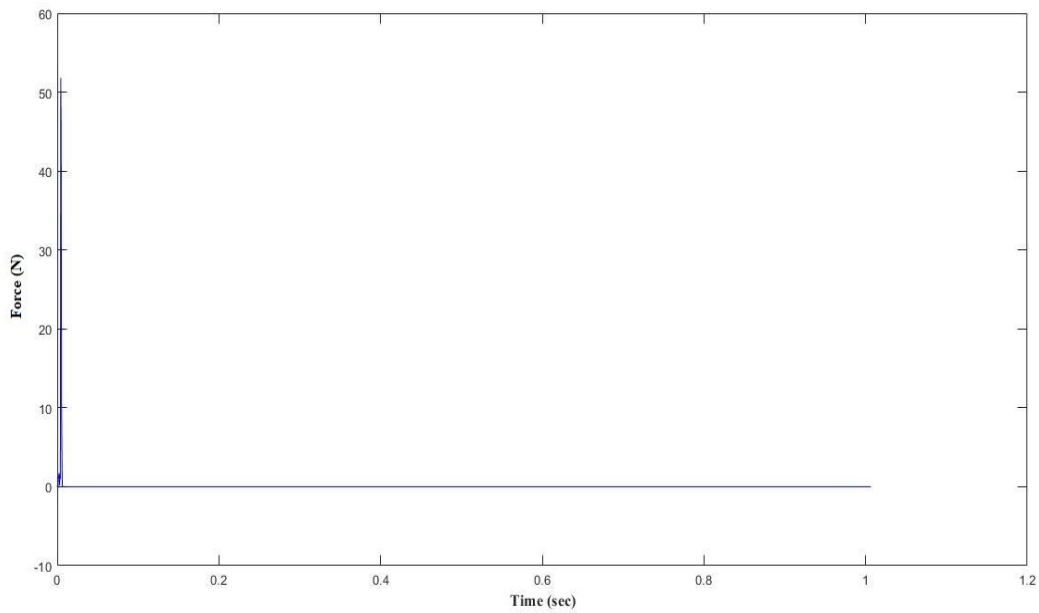
Πίνακας 7.3.1: Βελτιστοποιημένες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού της εντολής CBUSH1D

	Deformation [mm]	K [N/m]	Exponent n
R1	0.610	$3.965 \cdot 10^5$	1.910
R2	0.596	$3.341 \cdot 10^5$	4.199
R3	0.585	$4.006 \cdot 10^5$	3.458

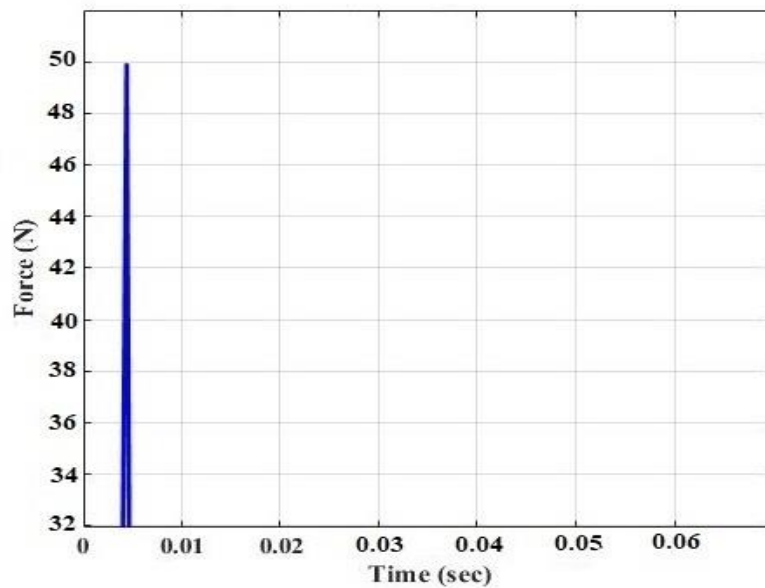
7.2 Αποτελέσματα δυναμικής ανάλυσης μη γραμμικού συστήματος

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται σε μορφή διαγραμμάτων η ταλαντωτική συμπεριφορά της δοκού για τα δύο σημεία όπου είναι τοποθετημένα τα επιταχυνσιόμετρα, όταν αυτή υπόκειται σε κρουστική και ημιτονοειδή διέγερση. Ταυτόχρονα, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ του ονομαστικού μοντέλου, του ενημερωμένου αλλά και των αποτελεσμάτων του πειράματος. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος πεπερασμένων στοιχείων αλλά και από τη διεξαγωγή του πειράματος είναι οι αποκρίσεις του συστήματος. Κατά την πειραματική διαδικασία, οι αποκρίσεις του συστήματος καταγράφηκαν με τη χρήση των επιταχυνσιόμετρων που τοποθετήθηκαν στη δοκό στα σημεία A1 και A2 όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3.1. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται σχηματικά οι αποκρίσεις στο πεδίο του χρόνου των δύο μοντέλων για κάθε επιταχυνσιόμετρο ξεχωριστά (σχήματα 7.2.3, 7.2.4, 7.2.6, 7.2.7) αλλά και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα για τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις διέγερσης (σχήματα 7.2.1, 7.2.2, 7.2.5).

Κατά την εφαρμογή κρουστικής διέγερσης σε ένα σύστημα, η δύναμη μπορεί να έχει μεγάλο μέτρο αλλά διαρκεί για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Συνεπώς, από τα διαγράμματα (σχήματα 7.2.1 και 7.2.2) παρατηρείται πως στην περίπτωση της εφαρμογής κρουστικής διέγερσης στη δοκό η δύναμη διαρκεί περίπου 0.01 sec.

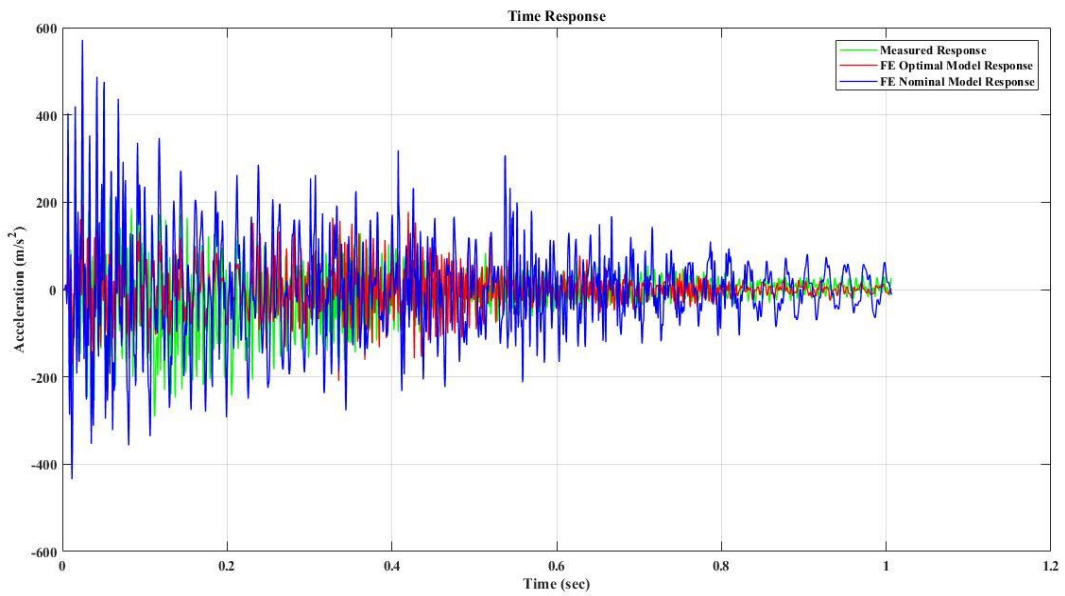


Σχήμα 7.2.1: Κρουστική διέγερση συναρτήσει του χρόνου

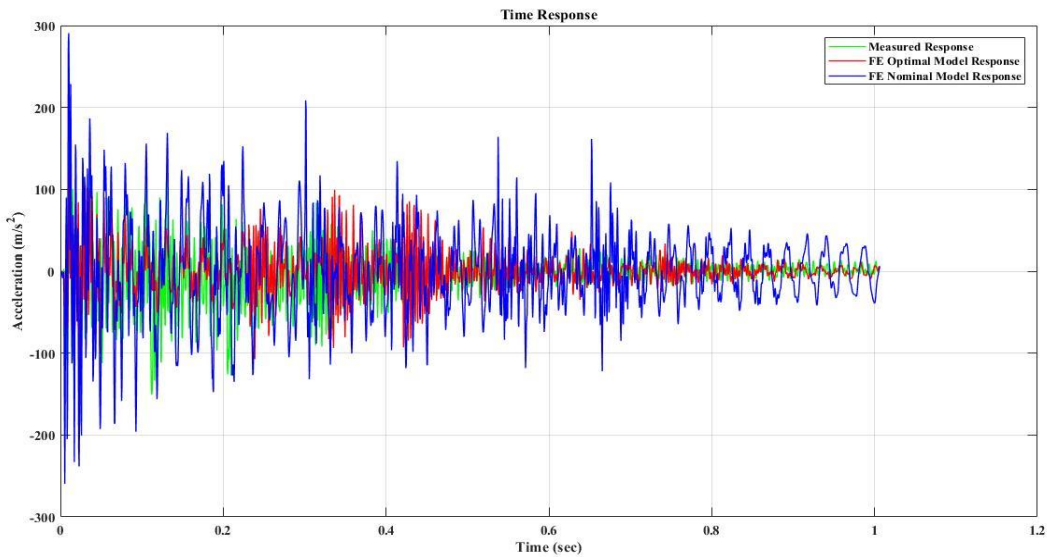


Σχήμα 7.2.2: Κρουστική διέγερση συναρτήσει του χρόνου

Η πράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στις επιταχύνσεις που καταγράφονται από το επιταχυνσιόμετρο, η μπλε καμπύλη στις επιταχύνσεις του αρχικού μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων για το ίδιο σημείο, ενώ η κόκκινη στις επιταχύνσεις του ενημερωμένου μοντέλου. Η συνολική καταγραφή του πειράματος γίνεται για χρονική διάρκεια ενός δευτερολέπτου.



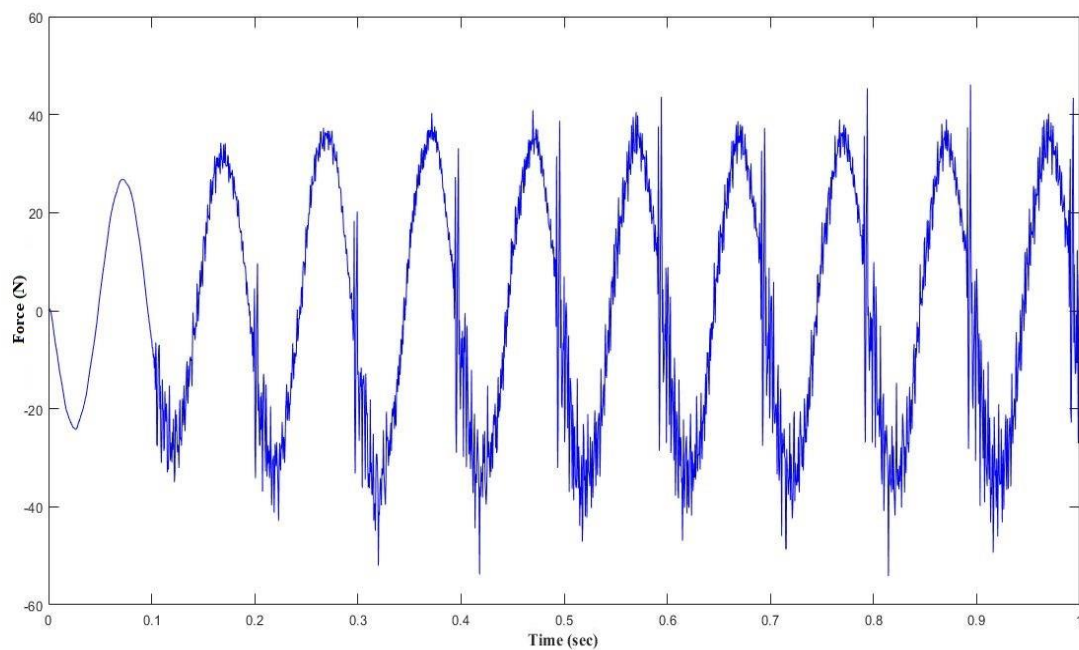
Σχήμα 7.2.3: Επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου για το σημείο A1



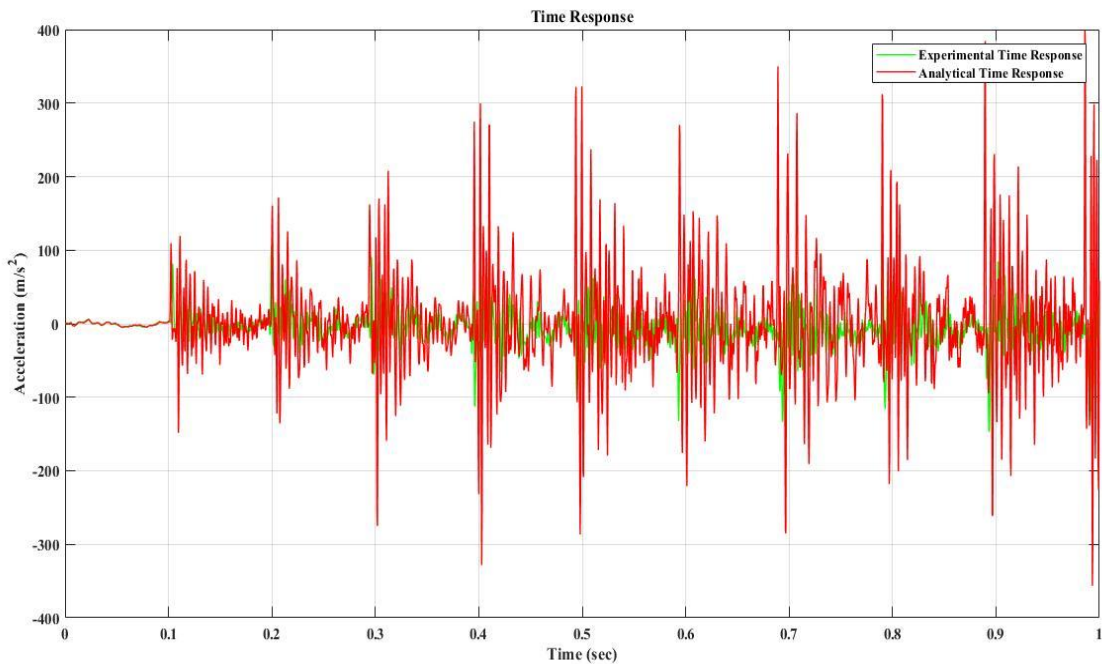
Σχήμα 7.2.4: Επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου για το σημείο A2

Όπως φαίνεται και από τα δύο διαγράμματα επιταχύνσεων για τα δύο σημεία (σχήματα 7.2.3 και 7.2.4), η δοκός έρχεται σε επαφή με το σταθερό έλασμα επτά φορές από τη στιγμή που δέχεται την κρουστική διέγερση στη συνολική διάρκεια καταγραφής του πειράματος.

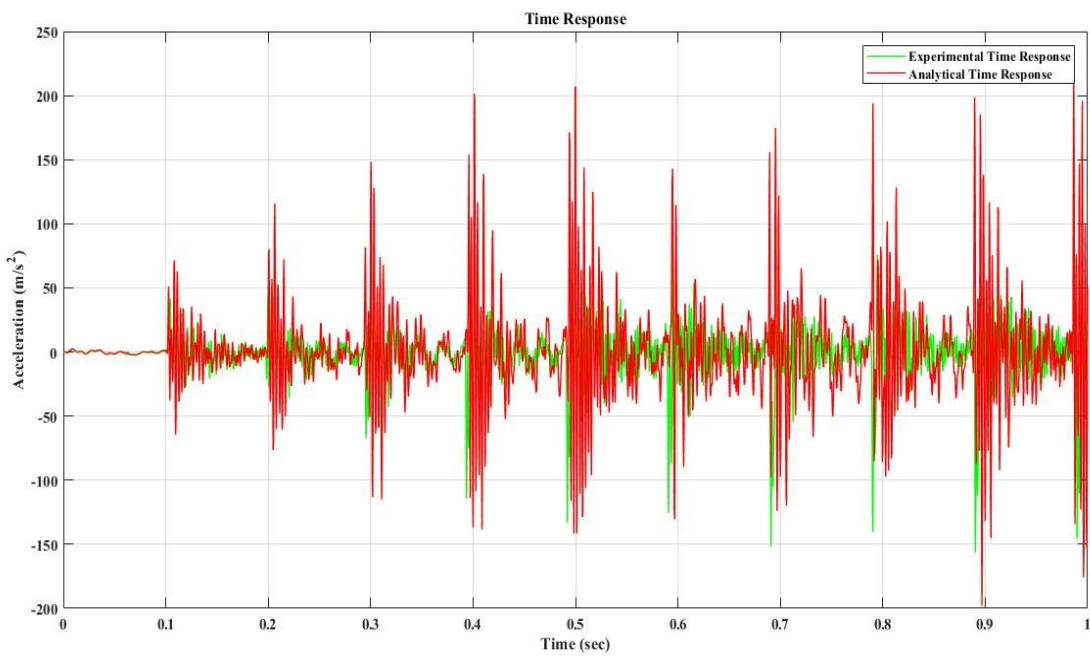
Στην περίπτωση της ημιτονοειδούς διέγερσης το βήμα είναι 0.1 sec, ενώ η συνολική καταγραφή γίνεται για χρονικό διάστημα 1 sec. Στο σχήμα 7.2.5 φαίνεται η ημιτονοειδής καμπύλη της δύναμης που δέχεται η δοκός συναρτήσει του χρόνου. Στα σχήματα 7.2.6 και 7.2.7 εμφανίζονται οι επιταχύνσεις για τα σημεία που βρίσκονται τα επιταχυνσιόμετρα A1 και A2 αντίστοιχα. Όπως φαίνεται η πράσινη καμπύλη αντιστοιχεί στις επιταχύνσεις από τις πειραματικές μετρήσεις, ενώ η κόκκινη στις επιταχύνσεις από το αναλυτικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 7.2.5: Ημιτονοειδής διέγερση συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 7.2.6: Επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου για το σημείο A1



Σχήμα 7.2.7: Επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου για το σημείο A2

Συνεπώς, μελετώντας τα διαγράμματα επιταχύνσεων της ενότητας 7.2 γίνεται αντιληπτό πως οι αποκρίσεις του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων δεν έχουν μεγάλη απόκλιση σε σχέση με τις αποκρίσεις που καταγράφονται από τις μετρήσεις του πειράματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η μέθοδος κατά Hertz να θεωρείται αξιόπιστη μέθοδος για τη μελέτη προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής.

8 Συμπεράσματα

Στόχος της διπλωματικής αυτής εργασίας ήταν η μελέτη και ανάλυση προβλημάτων μη γραμμικών συστημάτων επαφής με τη χρήση πειραματικών και αριθμητικών μεθόδων. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή του πειράματος αποτελείται από μία δοκό και ένα σταθερό έλασμα για τη δημιουργία επαφής, κατασκευασμένα και τα δύο από χάλυβα.

Αρχικά, αφού κατασκευάστηκε η πειραματική διάταξη, έγινε ο σχεδιασμός του αριθμητικού μοντέλου με τη χρήση λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων. Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση της κατασκευής είναι το Ansa. Η επίλυση του προβλήματος έγινε στο λογισμικό Dynamis για την εύρεση των αποτελεσμάτων, ενώ για την απεικόνιση των ιδιομορφών του συστήματος έγινε χρήση του μεΤΑ. Εν συνεχεία, προσδιορίστηκαν πειραματικά οι μορφικές παράμετροι του συστήματος. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πείραμα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της ιδιομορφικής ανάλυσης. Το απόλυτο σφάλμα που παρουσιάζεται αγγίζει το 3.4%.

Από το παραπάνω σφάλμα φαίνεται ότι το αριθμητικό μοντέλο χρήζει βελτίωσης, λόγω πιθανών απλοποιήσεων στη γεωμετρία ή διαφοροποιήσεων στις συστάσεις των υλικών που χρησιμοποιούνται κατά τη μοντελοποίηση του. Συνεπώς, γίνεται ενημέρωση του υπάρχοντος μοντέλου ως προς ορισμένες παραμέτρους, όπως το μέτρο ελαστικότητας την πυκνότητα των υλικών και τη στιβαρότητα των ελατηρίων. Εν τέλει, η απόκλιση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων του πειράματος και του ενημερωμένου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων είναι μικρότερη σε σχέση με του αρχικού. Το απόλυτο σφάλμα πλέον αγγίζει το 1.3%. Αυτό καθιστά το αριθμητικό μοντέλο αξιόπιστο.

Έπειτα, γίνεται η μελέτη του πειράματος με τη χρήση του σταθερού ελάσματος επαφής. Για τη διεξαγωγή του πειράματος, στο σύστημα εφαρμόζονται δύο περιπτώσεις δυνάμεων, μία κρουστική διέγερση και μία ημιτονοειδής. Αντίστοιχα, γίνεται επίλυση του προβλήματος πεπερασμένων στοιχείων προσομοιώνοντας τις δυνάμεις αυτές. Αφού γίνει σύγκριση των χρονικών ιστοριών του πειραματικού και του αριθμητικού μοντέλου για τις δύο περιπτώσεις διέγερσης, παρατηρείται ότι το μοντέλο που δημιουργήθηκε υπολογιστικά ανταποκρίνεται με μεγάλη ακρίβεια στα χαρακτηριστικά της πειραματικής διάταξης.

Τελικά, συμπεραίνεται πως ένα πρόβλημα μη γραμμικών συστημάτων επαφής με τη μέθοδο κατά Hertz μπορεί να μελετηθεί και να αναλυθεί τόσο πειραματικά όσο και υπολογιστικά σε πολύ καλό βαθμό.

Βιβλιογραφία

- [1] Paulo Flores, Margarida Machado, Miguel T. Silva, Jorge M. Martins, «On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics,» *Multibody Syst Dyn*, pp. 2-4, 7 December 2010.
- [2] Kun Ye*,†, Li Li, Hongping Zhu, «A note on the Hertz contact model with nonlinear damping for pounding simulation,» *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, pp. 2-6, 23 December 2008.
- [3] wikipedia.org, p. <https://www.wikipedia.org> .
- [4] Προβατίδης Χ. Γ, Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών, εκδόσεις Τζιόλα, 2016.
- [5] Νατσιάβας Σ., Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων, Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη, 2001.
- [6] Αραϊλόπουλος Α., Διερεύνηση Μεθόδων Ενημέρωσης και Βελτιστοποίησης Μοντέλων Πεπερασμένων Στοιχείων Με Χρήση Πειραματικών Μεθόδων, 2014.