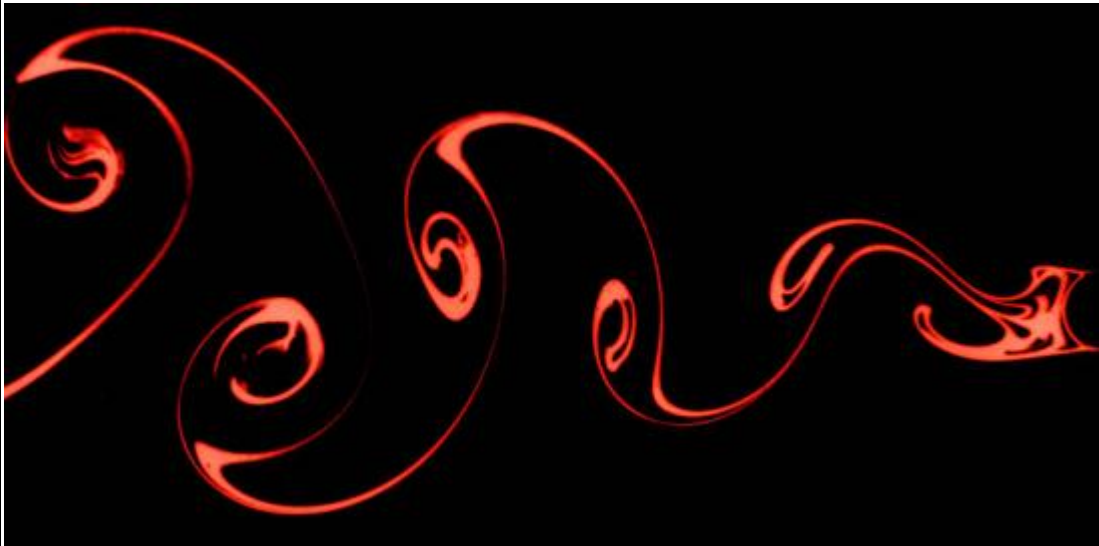


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θέμα: *Επίδραση προστιθέμενης μάζας στην ελαστική απόκριση ταλαντευόμενου κυλίνδρου εντός ροής ρευστού*



Υπεύθυνος καθηγητής: Ευστ. Κωνσταντινίδης

Επιμέλεια: Ψύχος Ανδρέας

ΑΕΜ:340

Κοζάνη, 2011

Περίληψη

Στη διπλωματική εργασία που ακολουθεί, αναλύεται το φαινόμενο της εγκάρσιας ταλάντωσης ενός ελαστικά στηριζόμενου λείου κυλίνδρου εντός ελεύθερης ροής ρέοντος ρευστού. Ο κύλινδρος εξετάζεται αρχικώς για τη περίπτωση όπου είναι σταθερά στηριζόμενος έτσι ώστε να κατανοηθούν τα μεγέθη όπως ο αριθμός Strouhal, ο αριθμός Reynolds και η συχνότητα διάχυσης δινών. Στη συνέχεια παρατίθεται η περίπτωση του ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου σε εξαναγκασμένη ταλάντωση για τη μελέτη των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα, όπως οι διαφορετικές μορφές ομόρρου που σχηματίζονται αλλά και της ύπαρξης άλματος στη φάση. Έπεται η ελεύθερη ταλάντωση του ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου λόγω της επίδρασης του ομόρρου στη δυνατότητα μετατόπισης του σώματος. Η κίνηση του σώματος μπορεί να περιγραφεί σε ικανοποιητικό βαθμό με τη χρήση απλού αρμονικού ταλαντωτή. Παρατίθενται και αναλύονται σημαντικά διαγράμματα για τη περιοχή του συντονισμού της κίνησης του κυλίνδρου με τον ομόρρο, όπου κάποιος μπορεί να κατανοήσει τα φαινόμενα.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η θεωρία ιδανικού ρευστού για την επεξήγηση του όρου της προστιθέμενης μάζας, η οποία εμφανίζεται κατά την επιτάχυνση του κυλίνδρου, όταν αυτός περιβάλλεται από κάποιο ρευστό.

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής ήταν η διερεύνηση της κίνησης της προστιθέμενης μάζας σύμφωνα με μία νέα προσέγγιση. Παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις για ελεύθερη ταλάντωση: χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης και με εφαρμογή στο σύστημα. Η δύναμη που ασκείται είναι η δύναμη λόγω δινών του ομόρρου. Τα αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις κρίνονται ενδιαφέροντα, τόσο για τη περίπτωση χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης όπου εξάγεται ένας νέος αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης, όσο και στη περίπτωση με εφαρμογή εξωτερικής δύναμης όπου παρατίθενται νέες σχέσεις για το αδιάστατο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος αλλά και για τη αδιάστατη συχνότητα. Στη δεύτερη περίπτωση συγκρίνονται με ήδη υπάρχοντες σχέσεις και εξάγονται κάποια σημαντικά συμπεράσματα.

Τέλος γίνεται αναφορά η ανάγκη για διεξαγωγή πειραμάτων ώστε να επιβεβαιωθούν αυτά τα αποτελέσματα και στη πράξη, αλλά και για τον προσδιορισμό νέων μεγεθών που εμφανίζονται.

Περιεχόμενα

1.	Εισαγωγή.....	8
2.	Ταλάντωση κυλίνδρου λόγω ροής.....	10
2.1	Σταθερός κύλινδρος λόγω ρέοντος ρευστού.....	10
2.2	Εξαναγκασμένη ταλάντωση κυλίνδρου	16
2.2.1	Διαγράμματα περιοχών συντονισμού.....	20
2.2.2	Σχηματισμός δινών στη θεμελιώδη περιοχή του συγχρονισμού...23	
2.2.3	Επεξήγηση της καταστάσεως «άλματος».....	27
2.2.4	Περαιτέρω περιοχές συγχρονισμού δινών.....	29
2.2.5	Περιληπτική σύνοψη του φαινομένου του συγχρονισμού για εξαναγκασμένη ταλάντωση	34
2.3	Ελεύθερη ταλάντωση κυλίνδρου λόγω δινών	36
2.3.1	Ιστορική αναδρομή	36
2.3.2	Απόκριση συχνότητας	44
2.3.3	Συχνότητα χαμηλότερου κλάδου και ύπαρξη κρίσιμου λόγου μαζών m^*_{crit}	46
2.3.4	Σχετικές επιρροές της μάζας και της απόσβεσης	53
2.3.5	Περιληπτική σύνοψη της επίδρασης του λόγου μαζών στην απόκριση	54
3.	Προστιθέμενη μάζα σύμφωνα με τη θεωρία ιδανικού ρευστού.....	58
3.1	Προστιθέμενη μάζα σύμφωνα με τη θεωρία ιδανικού ρευστού	58
3.1.1	Όρος σταθερής ροής	59
3.1.2	Όρος ασταθούς ροής	62
4.	Νέα προσέγγιση της προστιθέμενης μάζας	68
4.1	Γενικά	68
4.2	Σύστημα χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης	68
4.3	Σύστημα με εφαρμογή εξωτερικής δύναμης	77

5. Συμπεράσματα – Προτάσεις	82
Βιβλιογραφία.....	84
Παράρτημα Α	86

Συμβολισμοί

A	πλάτος ταλάντωσης συστήματος	m
A^*	Αδιάστατο πλάτος ταλάντωσης συστήματος	-
a	Επιτάχυνση	m/s^2
c	Συντελεστής απόσβεσης	$N/m/s$
C_A	Αδιάστατος συντελεστής προστιθέμενης μάζας	-
C_L'	Επιμέρους συντελεστής άνωσης	-
C_v	Αδιάστατη δύναμη λόγω δινών ομόρρου	-
C_Y	Αδιάστατη συνισταμένη δύναμη ομόρρου	-
C_{pot}	Αδιάστατη δύναμη ιδανικού ρευστού προστιθέμενης μάζας	-
c_{crit}	Κρίσιμος συντελεστής απόσβεσης	$N/m/s$
D	Διάμετρος σωλήνα	m
f_n	Φυσική συχνότητα στο κενό	Hz
f	Συχνότητα διέγερσης	Hz
f_s	Συχνότητα διάχυσης δινών	Hz
f^*	Αδιάστατος λόγος συχνοτήτων	-
k	Μέτρο ελαστικότητας	N/m
L	Μήκος σωλήνα	m
m	Μάζα σωλήνα	kg
m_a	Προστιθέμενη μάζα	kg
m_d	Εκτοπιζόμενη μάζα	kg
m^*	Αδιάστατος λόγος μαζών	-
R^*	Αδιάστατη ακτίνα	-
Re	Αριθμός Reynolds	-
St	Αριθμός Strouhal	-

S_G	Παράμετρος Skop-Griffin	-
z	Μετατόπιση	m
\dot{z}	Ταχύτητα	m/s
\ddot{z}	Επιτάχυνση	m/s^2
\bar{z}	Σχετική μετατόπιση	m
$\ddot{\bar{z}}$	Σχετική επιτάχυνση	m/s^2
U_∞	Ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος ροής ρευστού	m/s
U^*	Αδιάστατη ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος ροής ρευστού	-
ζ	Αδιάστατος λόγος απόσβεσης	-
ζ'	Νέος αδιάστατος λόγος απόσβεσης	-
λ^*	Αδιάστατο μήκος κύματος	-
μ	Ιξώδες	$kg/m \cdot s$
ν	Κινηματικό ιξώδες	m^2/s
ρ	Πυκνότητα ρευστού	kg/m^3
ω_n	Φυσική γωνιακή ταχύτητα στο κενό	rad/s
ω	Γωνιακή ταχύτητα συστήματος	rad/s
φ_v	Σχηματιζόμενη γωνία μεταξύ δύναμης δινών και μετατόπισης	rad
φ	Σχηματιζόμενη γωνία συνισταμένης δύναμης δινών και μετατόπισης	rad

1. Εισαγωγή

Μία κατασκευή είναι ένας συνδυασμός από μέρη στερεωμένα μεταξύ τους για να δημιουργήσουν ένα υποστηριζόμενο πλαίσιο το οποίο μπορεί να είναι μέρος ενός κτηρίου, πλοίου, μηχανής ή κάποιου άλλου συστήματος.

Πριν ξεκινήσει η βιομηχανική επανάσταση, οι κατασκευές είχαν πολύ μεγάλη μάζα επειδή χρησιμοποιούσαν ξύλο, επεξεργασμένες πέτρες και άλλα ογκώδη υλικά για τις κατασκευές τους. Τα τελευταία 200 χρόνια, με την βοήθεια των σχετικά υψηλών σε αντοχή ελαφρών υλικών όπως ο χυτοσίδηρος, το αλουμίνιο, το ασάλι και η αυξημένη γνώση των ιδιοτήτων των υλικών και της φόρτισης των κατασκευών, οδήγησαν στη μείωση της μάζας των κατασκευών. Οι αποδόσεις των μηχανών και, με υψηλότερη περιστροφική ταχύτητα, το πλάτος της ταλάντωσης των δυνάμεων διέγερσης αυξήθηκε. Αυτή η διαδικασία αύξησης της διέγερσης με παράλληλη μείωση της μάζας και της ταλάντωσης έχει συνεχιστεί με αυξανόμενο τρόπο όλα αυτά τα χρόνια. Μέρος αυτών των διεγέρσεων είναι και οι ταλαντώσεις, οι οποίες λαμβάνουν χώρα στις κατασκευές και δυναμικά συστήματα, ενώ είναι μη επιθυμητές τις περισσότερες φορές. Ένα τέτοιου είδους δυναμικό σύστημα θα εξεταστεί και στη παρούσα εργασία.

Υπάρχουν δύο παράγοντες οι οποίοι ελέγχουν το πλάτος και τη συχνότητα ταλάντωσης σε μία κατασκευή: η εφαρμοσμένη διέγερση και η απόκριση της κατασκευής σε μία συγκεκριμένη διέγερση. Αλλάζοντας είτε τη διέγερση είτε τα δυναμικά χαρακτηριστικά της κατασκευής θα αλλάξει η διεγερμένη ταλάντωση.

Η διέγερση μπορεί να προέρχεται από εξωτερικές πηγές όπως το έδαφος, ρεύματα αέρος, κύματα νερού, σεισμούς, και από πηγές εσωτερικά της κατασκευής όπως κινούμενα φορτία και περιστροφικές ή εμβολοφόρες μηχανές. Αυτές οι δυνάμεις διέγερσης και οι κινήσεις μπορούν να είναι περιοδικές ή αρμονικές στο χρόνο, λόγω των κραδασμικών ή διεγερτικών φορτίων, ή ακόμη και κάτι τυχαίο στη φύση.

Η απόκριση της κατασκευής στη διέγερση εξαρτάται από τη μέθοδο της εφαρμογής και της τοποθεσίας της δύναμης διέγερσης ή της κίνησης και τα δυναμικά χαρακτηριστικά της κατασκευής όπως η φυσική της συχνότητα και το εγγενές επίπεδο απόσβεσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται πρώτα η περίπτωση ενός σταθερά στηριζόμενου κυλίνδρου κυκλικής διατομής. Παρουσιάζονται τα πρώτα μεγέθη τα οποία είναι χρήσιμα για τις υπόλοιπες περιπτώσεις που θα ακολουθήσουν και για καλύτερη κατανόηση του φαινομένου διάχυσης δινών και πώς οι τελευταίες επηρεάζουν τη κίνηση του κυλίνδρου όταν αυτός έχει τη δυνατότητα να ταλαντεύεται εγκάρσια ως ελαστικά στηριζόμενος. Ακολουθούν οι περιπτώσεις του ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου σε εξαναγκασμένη ταλάντωση και σε ελεύθερη ταλάντωση. Γίνεται και για τις δύο περιπτώσεις ιστορική αναδρομή στις πιο σημαντικές πτυχές του προβλήματος, αναπτύσσοντας τες και αναφέροντας παράλληλα τα μεγέθη τα οποία χρησιμοποιήθηκαν και στη νέα μέθοδο που αναπτύχθηκε.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση της θεωρίας της προστιθέμενης μάζας σύμφωνα με τη θεωρία του ιδανικού ρευστού. Αναπτύσσεται η θεωρία αυτή, για τη κατανόηση της ύπαρξης της προστιθέμενης μάζας μιας και αποτελεί ένα σημαντικό μέγεθος για προβλήματα με σώματα βυθισμένα σε ρευστό και ειδικότερα στη περίπτωση του ταλαντευόμενου κυλίνδρου που εξετάζεται. Η προστιθέμενη μάζα όπως αναφέρεται και στο δεύτερο κεφάλαιο επηρεάζει σημαντικά τη ταλάντωση όλου του κυλίνδρου.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται το τέταρτο κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζεται η νέα μέθοδος προσέγγισης της κίνησης της προστιθέμενης μάζας και πώς επηρεάζει το όλο σύστημα. Αυτή η επιρροή της νέας προσέγγισης παρουσιάζεται με την εξαγωγή εξισώσεων και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με τα ήδη υπάρχοντα.

Τέλος παρουσιάζεται το πέμπτο κεφάλαιο όπου γίνεται αναφορά των συμπερασμάτων και προτάσεων για διεξαγωγή ερευνών και πειραμάτων σύμφωνα με τα νέα αποτελέσματα.

2. Ταλάντωση κυλίνδρου λόγω ροής

2.1 Σταθερός κύλινδρος εντός ρέοντος ρευστού

Η ροή γύρω από κυλινδρικές κατασκευές σχετίζεται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, όπως καμινάδες, καλώδια, σωλήνες παράκτιων κατασκευών και άλλες. Η γνώση σχετικά με την ασταθή φόρτιση λόγω ροής σε τέτοιες κατασκευές είναι σημαντική για τον υδροδυναμικό και αεροδυναμικό σχεδιασμό και έλεγχο [Blevins (1990)]. Για την εξέταση αυτής της γνώσης χρειάζεται η εισαγωγή κάποιων σημαντικών μεγεθών που καθορίζουν τη ροή του ρευστού και είναι σημαντικά για την περιγραφή του προβλήματος.

Ένα από αυτά τα μεγέθη είναι ο αριθμός Reynolds. Η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή εξαρτάται εκτός των άλλων, από το γεωμετρικό σχήμα, την τραχύτητα της επιφάνειας, τη θερμοκρασία της επιφάνειας καθώς και από την ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος και το είδος του ρευστού. Μετά από εξαντλητικά πειράματα κατά τη δεκαετία του 1880, ο Osborn Reynolds ανακάλυψε ότι η περιοχή ροής εξαρτάται κυρίως από το λόγο των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις ιξώδους του ρευστού. Αυτός ο λόγος ονομάζεται αριθμός Reynolds και εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Re} = \frac{\text{δυνάμεις ιξώδους}}{\text{δυνάμεις αδράνειας}} = \frac{\rho U^2 / \delta}{\mu U / \delta^2} = \frac{\rho U \delta}{\mu} \Rightarrow$$
$$\text{Re} = \frac{U_{\infty} \delta}{\nu}, \quad (2.1)$$

Όπου U_{∞} = ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος, σε m/s

δ = χαρακτηριστικό μήκος του γεωμετρικού σχήματος, σε m

$\nu = \mu/\rho$ = κινηματικό ιξώδες του υγρού, σε m^2/s

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός Reynolds είναι μία αδιάστατη ποσότητα, και ότι το κινηματικό ιξώδες ν διαφέρει από το δυναμικό μ κατά ένα παράγοντα ρ όπως προαναφέρθηκε. Το χαρακτηριστικό μήκος είναι η απόσταση από το χείλος προσβολής x στη διεύθυνση της ροής για μια επίπεδη επιφάνεια και η διάμετρος D για έναν κύλινδρο ή μια σφαίρα.

Σε μεγάλους αριθμούς Reynolds, οι δυνάμεις αδράνειας, που είναι ανάλογες προς την πυκνότητα και την ταχύτητα του ρευστού, είναι μεγάλες σε σύγκριση με τις ιξώδεις δυνάμεις, και επομένως οι δυνάμεις ιξώδους δεν μπορούν να εμποδίσουν τις τυχαίες και γρήγορες διακυμάνσεις του ρευστού. Όμως, για μικρούς αριθμούς Reynolds, οι ιξώδεις δυνάμεις είναι αρκετά μεγάλες ώστε να μπορούν να υπερνικήσουν τις δυνάμεις αδράνειας και να διατηρήσουν το ρευστό «στη γραμμή». Επομένως, η ροή είναι τυρβώδης στην πρώτη περίπτωση και στρωτή στη δεύτερη.

Ο αριθμός Reynolds στον οποίο η ροή γίνεται τυρβώδης ονομάζεται κρίσιμος αριθμός Reynolds. Η κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds διαφέρει σε διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα. Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds για ροή σε έναν κυκλικό κύλινδρο ή σε μία σφαίρα είναι $Re_{cr} \approx 5 \times 10^5$. Δηλαδή, το οριακό στρώμα παραμένει στρωτό για $Re < 5 \times 10^5$ και γίνεται τυρβώδης για $Re > 5 \times 10^5$.

Η εγκάρσια ροή σε ένα κύλινδρο παρουσιάζει πολύπλοκα χαρακτηριστικά ροής, όπως δείχνει το σχήμα 2.1. Το ρευστό που πλησιάζει στον κύλινδρο διακλαδώνεται και τον περιβάλλει, σχηματίζοντας έτσι ένα οριακό στρώμα που τυλίγει τον κύλινδρο. Τα σωματίδια του ρευστού στο ενδιάμεσο επίπεδο θα προσπέσουν στον κύλινδρο στο σημείο ακινησίας, σταματώντας πλήρως την κίνηση του ρευστού και επομένως αυξάνοντας την πίεση στο συγκεκριμένο σημείο. Στη διεύθυνση της ροής η πίεση μειώνεται ενώ η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται.

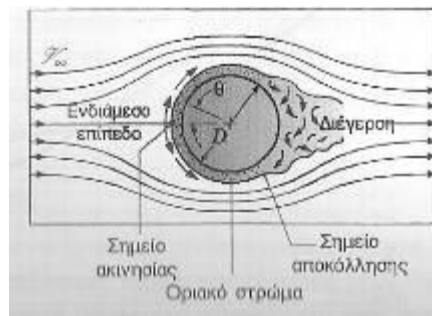
Σε πολύ μικρές ταχύτητες ελεύθερου ρεύματος ($Re < 5$), το ρευστό περιβάλλει πλήρως τον κύλινδρο με ομαλό τρόπο. Έτσι, το ρευστό ακολουθεί την καμπυλότητα του κυλίνδρου. Σε μεγαλύτερες ταχύτητες, το ρευστό συνεχίζει να περιβάλλει τον κύλινδρο στη μετωπική πλευρά, αλλά κινείται πολύ γρήγορα ώστε να παραμείνει προσκολλημένο στην επιφάνεια καθώς πλησιάζει το επάνω μέρος του κυλίνδρου. Κατά συνέπεια, το οριακό στρώμα αποσπάται από την επιφάνεια, δημιουργώντας διέγερση πίσω από τον κύλινδρο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο αποκόλλησης. Η ροή στην περιοχή διέγερσης χαρακτηρίζεται από τυχαίο σχηματισμό στροβίλου και πιέσεων πολύ χαμηλότερων από την πίεση του σημείου ακινησίας.

Η αποκόλληση της ροής εμφανίζεται περίπου σε $\theta \approx 80^\circ$ όταν το οριακό στρώμα είναι στρωτό και περίπου σε $\theta \approx 140^\circ$ όταν είναι τυρβώδες, όπως φαίνεται και στα σχήματα 2.2. Η καθυστέρηση της αποκόλλησης κατά την τυρβώδη ροή οφείλεται στις γρήγορες διακυμάνσεις του ρευστού στην εγκάρσια διεύθυνση.

Η συχνότητα f_s με την οποία οι δίνες αποκολλώνται από τον κύλινδρο, συχνότητα δινών Von Karman, συνδέεται με τα άλλα στοιχεία της ροής με την σχέση:

$$St = \frac{f_s D}{U}$$

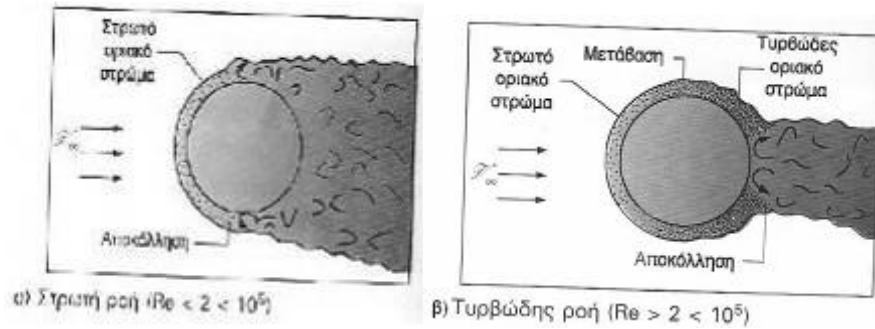
Ο αριθμός Strouhal (St) είναι αδιάστατος αριθμός και έχει βρεθεί ότι είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds για οποιαδήποτε μορφή διατομής κυλίνδρου. Η προηγούμενη σχέση μας δίνει την πληροφορία ότι ο ομόρρους εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Για τη περίπτωση κυλίνδρου κυκλικής διατομής μία συλλογή δεδομένων $St(Re)$ από επιλεγμένα πειράματα και δυσδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις παρουσιάζονται στο σχήμα 2.3. Γενικώς μπορεί να θεωρηθεί ότι ο αριθμός Strouhal είναι προσεγγιστικά σταθερός με τιμή 0,20 για ένα μεγάλο εύρος αριθμών Reynolds. Στα πειράματα όμως θα πρέπει να υπολογίζεται επακριβώς ποια είναι η τιμή του αριθμού St , για μεγαλύτερη ακρίβεια. Στον πίνακα 2.1 δίνονται εμπειρικές σχέσεις για τον υπολογισμό του αριθμού St σε συνάρτηση του αριθμού Re , μιας και δεν υπάρχει μία ενιαία σχέση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι δεν είναι οι μοναδικές στη διεθνή βιβλιογραφία και φυσικά έρευνες έχουν γίνει από διάφορους ερευνητές για την εξαγωγή εμπειρικών σχέσεων.



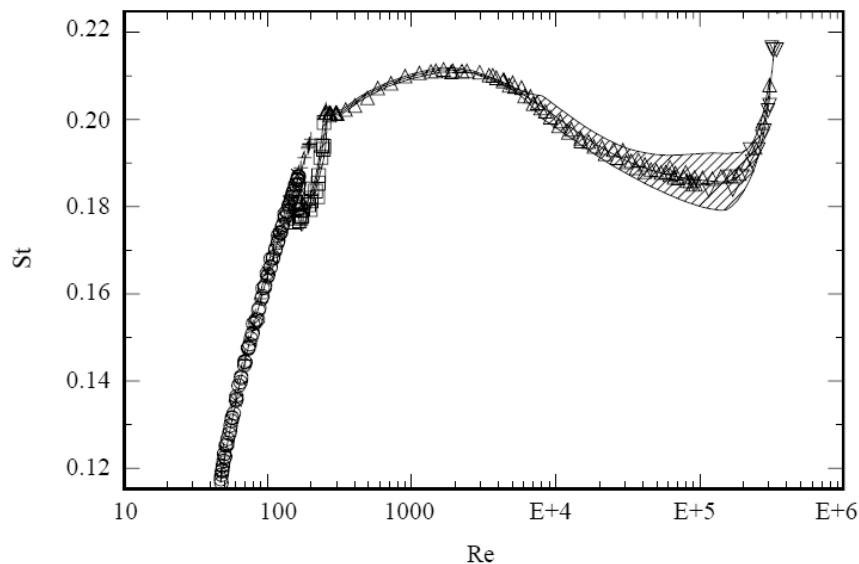
Σχήμα 2.1. Απεικονίσεις συνηθισμένων σχηματισμών ροής κατά την εγκάρσια ροή σε έναν κύλινδρο [Cengel (2005)].

Τα πλάτη της κυμαινόμενης δύναμης αντίστασης, τα οποία είναι σημαντικά μικρότερα από την κυμαινόμενη δύναμη άνωσης είναι κυρίως από μεταβαλλόμενες πιέσεις οι οποίες είναι σε φάση μεταξύ του ανώτερου και κατώτερου μέρους του κυλίνδρου, οι οποίες με τη σειρά τους είναι συγκεντρωμένες σε πολύ χαμηλές συχνότητες και σε μία περιοχή περίπου δύο φορές της συχνότητας f_s (Sonneville, 1976). Εξαιτίας κυρίως της διάχυσης δινών, ως απόρροια των δυνάμεων

τριβής, ο κύλινδρος επίσης υφίσταται μία μεταβαλλόμενη ροπή γύρω από τον άξονα του. Ακόμη και για σχετικά χαμηλούς αριθμούς Reynolds στη στρωτή περιοχή διάχυσης ($Re \approx 47-190$), η μεταβαλλόμενη ροπή εμφανίζεται να είναι πρωτεύουσας σημασίας.



Σχήμα 2.2. Η τυρβώδης ροή καθυστερεί το διαχωρισμό της ροής [Cengel (2005)].



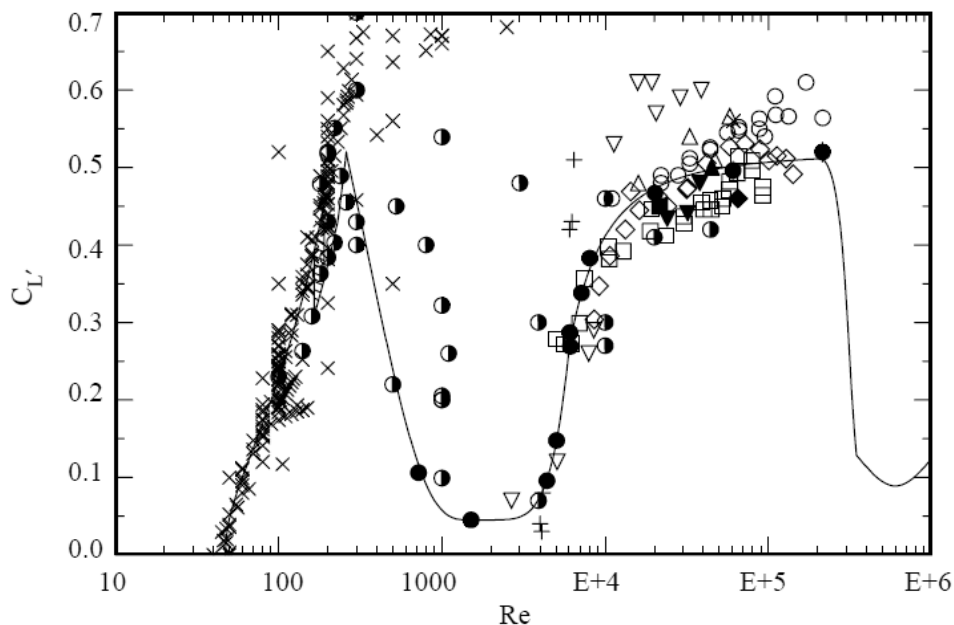
Σχήμα 2.3. Η εξάρτηση του αριθμού Strouhal από τον αριθμό Reynolds για ένα κυκλικό κύλινδρο. \blacktriangledown : Bearman (1969), Norberg (1987a, 1994); \circ : στρωτή διάχυση, \circ : μετάβαση ομόρρου, Δ : τυρβώδης διάχυση, - - -: Barkley & Henderson (1996), 2-D; \times : Kwon & Choi (1996), 2-D; $+$: Posdziech & Grundmann (2000), 2-D; —: Σχέσεις σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 [Norberg (2003)].

Όπως κάθε μη αεροδυναμικό σώμα, έτσι και ο κυκλικός κύλινδρος υποβάλλεται σε σταθερή και ασταθείς δυνάμεις από το ρευστό. Αυτή η δύναμη είναι άμεσα συσχετιζόμενη με τη διάχυση δινών του ομόρρου. Η μεταβαλλόμενη δύναμη άνωσης έχει συχνότητα f_o ίση με τη συχνότητα διάχυσης, f_s . Για ένα σταθερό λείο κύλινδρο κυκλικής διατομής, μεγάλοι λόγοι διαστάσεων (aspect ratio) και κατάλληλες τελικές συνθήκες, ο Norberg (2001), σύμφωνα με τον Lazarkov (2004), προτείνει μία εμπειρική σχέση για τον υπολογισμό της r.m.s. τιμής του συντελεστή άνωσης σε

επιμέρους τμήματα, C_L' σε στρωτό εύρος διάχυσης δινών. Η σχέση του παρουσιάζεται στο πίνακα 2.1 και η παράμετρος ε ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{Re - Re_{cr}}{Re_{cr}}$$

και Re_{cr} είναι ένα κρίσιμος αριθμός Reynolds της διάχυσης που συμβαίνει για $Re_{cr} \approx 47$. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κάποιος από το διάγραμμα του σχήματος 2.4, για την συνεχόμενη γραμμή η οποία στηρίζεται στις εμπειρικές σχέσεις του πίνακα 2.1, στη περιοχή της μετάβασης οι διακυμάνσεις της άνωσης είναι πιο σημαντικές και ο C_L' τείνει να εξασθενεί καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνεται.



Σχήμα 2.4. R.m.s. συντελεστής άνωσης ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds. ο: Keefe (1962), +: Leehey & Hanson (1971), ▲: Sonnevile (1973), Δ: Mohr (1981), ∇: Moeller & Leehey (1984), ■: Gartshore (1984), ◇: Szepessy & Bearman (1992), ○: West & Apelt (1993), ◆: Sakamoto and Haniu (1994), x : 2-D: μισο-μαρκαρισμένοι κύκλοι, 3-D: ●: : —: Σχέσεις σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 [Norberg (2003)].

Η r.m.s. (root-mean-square) του συντελεστή άνωσης μπορεί να προσδιοριστεί και σύμφωνα με τη παρακάτω σχέση:

$$C_L' = \frac{L'}{Dl_c \rho U^2 / 2},$$

όπου L' είναι η τετραγωνική μέση ρίζα (root-mean-square) των διακυμάνσεων της άνωσης σε ένα τμήμα του μήκους l_c (η άνωση θεωρείται ότι έχει ένα χρονικό μέσο όρο ίσο με το μηδέν). Ο επιμέρους r.m.s. συντελεστής άνωσης είναι ο r.m.s.

συντελεστής άνωσης για τον οποίο το τμήμα του μήκους είναι αρκετά μικρό ($l_c/D \rightarrow 0$). Η επιμέρους άνωση οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως η άνωση ανά μονάδα μήκους. Οι επιμέρους διακυμάνσεις άνωσης προσδιορίζονται ως εκείνες οι οποίες δρουν σε όλο το μήκος του κυλίνδρου που εκτίθεται στη ροή ($l_c=l$). Το διάγραμμα του σχήματος 2.4 απεικονίζει το C_L' ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds από διάφορες μελέτες που έχουν γίνει και σύμφωνα με τις εμπειρικές σχέσεις όπως προαναφέρθηκε.

1. Strouhal number		
Re	St \approx	
47 – 190	$0.2663 - 1.019/\sqrt{Re}$	
165 – 260	$-0.089 + 22.9/Re + 7.8 \times 10^{-4} \times Re$	
260 – 325	0.2016	
325 – 1.6×10^3	$0.2139 - 4.0/Re$	
$1.6 \times 10^3 - 1.5 \times 10^5$	$0.1853 + 0.0261 \times \exp(-0.9 \times x^{23})$	$x = \log(Re/1.6 \times 10^3)$
$1.5 \times 10^5 - 3.4 \times 10^6$	$0.1848 + 8.6 \times 10^{-4} \times (Re/1.5 \times 10^5)^{48}$	
2. Sectional r.m.s. lift coefficient		
Re	$C_{L'} \approx$	
47 – 190	$(\varepsilon/30 + \varepsilon^2/90)^{1/2}$	$\varepsilon = (Re - 47)/47$
165 – 230	$0.43 \times (Re/230)$	
230 – 260	$0.78 \times (Re/260) - 0.26$	
260 – 1.6×10^3	$0.045 + 1.05 \times (1 - Re/1.6 \times 10^3)^{43}$	
$1.6 \times 10^3 - 5.4 \times 10^5$	$0.045 + 3.0 \times x^{48}$	$x = \log(Re/1.6 \times 10^3)$
$5.4 \times 10^5 - 2.2 \times 10^6$	$0.52 - 0.06 \times x^{-26}$	$x = \log(Re/1.6 \times 10^3)$
$2.2 \times 10^6 - 3.4 \times 10^7$	$0.09 + 0.43 \times \exp[-10^5 \times (Re/10^6)^{10}]$	

Πίνακας 2.1. Σύνοψη εμπειρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό του αριθμού St και του C_L' συνάρτησης του αριθμού Re [Norberg (2003)].

2.2 Εξαναγκασμένη ταλάντωση κυλίνδρου

Πολύ μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ροή γύρω από ταλαντευόμενα μη αεροδυναμικά σώματα και ειδικότερα στη περιοχή του ομόρρου τους. Ειδικότερα μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζεται για την περίπτωση του κυλίνδρου, η οποία και θα μας απασχολήσει, μιας και είναι ένα από τα πιο θεμελιώδη σχήματα.

Όταν ένας κύλινδρος ταλαντεύεται πλευρικά (εγκάρσια) σε ένα ελεύθερο ρεύμα, μπορεί να συγχρονιστεί η συχνότητα σχηματισμού δινών, με τη συχνότητα κίνησης του σώματος. Αυτή η θεμελιώδης περιοχή, που στη διεθνή ορολογία καλείται “lock-in” region, είναι μόνο μία από μια σειρά περιοχών που παρατηρείται συγχρονισμός και οι οποίες θα αναφερθούν αργότερα. Στη θεμελιώδη περιοχή, αποδεικνύεται ότι η επιτάχυνση του κυλίνδρου οδηγεί στον σχηματισμό τεσσάρων περιοχών στροβιλότητας σε κάθε κύκλο (δηλαδή σε μία πλήρη περίοδο). Κάτω από ένα κρίσιμο μήκος κύματος, σε κάθε μισό κύκλο έχουμε την ένωση ενός ζευγαριού ομόστροφων στροβίλων και την ανάπτυξη της περίφημης οδού στροβίλων Von Karman στον ομόρρου. Εντούτοις, αν ξεπεραστεί αυτό το μήκος κύματος, οι ομόστροφοι στροβίλοι απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο και ζευγαρώνουν ο καθένας με έναν στροβίλο αντίστροφα στρεφόμενο. Ο ομόρρους, που προκύπτει τότε, αποτελείται από ένα σύνολο ζευγαριών στροβίλων. Η διαδικασία του «ζευγαρώματος» προκαλεί την αιφνίδια και απότομη μετάβαση από μία κατάσταση ομόρρου σε μία άλλη, και αυτό εξηγεί τη σημαντική αλλαγή που παρατηρείται στον χαρακτήρα των δυνάμεων στον κύλινδρο, καθώς επίσης και την απότομη αλλαγή της φάσης της δυνάμεως άνωσης (το φαινόμενο του «άλματος») σε σχέση με τη μετατόπιση του σώματος. Ακριβώς στο κρίσιμο μήκος κύματος, μόνο δύο περιοχές στροβιλότητας διαμορφώνονται, και οι προκύπτοντες στροβιλισμοί στον ομόρρου είναι πιο συγκεντρωμένοι από ότι σε άλλα μήκη κύματος. Αυτή η ιδιαίτερη περίπτωση ερμηνεύεται με τον όρο «resonant synchronization», και αντιστοιχίζεται με το φαινόμενο της κορύφωσης του μεγέθους των δυνάμεων των σωμάτων, που παρατηρείται σε διάφορες εργασίες, όπως στις εργασίες των Bishop & Hassan (1964).

Το πρόβλημα ενός κυλινδρικού σώματος που ταλαντεύεται πλευρικά (εγκάρσια) σε μία ελεύθερη ροή έχει απασχολήσει πολλούς. Εάν ένας κύλινδρος τοποθετείται σε μια ροή, τότε δέχεται μια κυμαινόμενη δύναμη άνωσης (εγκάρσια στη ροή), που προκαλείται από τον ασύμμετρο σχηματισμό δινών, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν στη δόνηση (ή αλλιώς ταλάντωση) μιας κατασκευής. Ένα από τα

θεμελιώδη χαρακτηριστικά γνωρίσματα της προκληθείσας δόνησης είναι η δυνατότητα της κατασκευής, που ταλαντεύεται με την φυσική της συχνότητα (f_N), να συγχρονιστεί με τη συχνότητα διάχυσης δινών. Εάν συμβολίσουμε με f_s τη συχνότητα διάχυσης δινών ενός μη ταλαντευόμενου κυλίνδρου, τότε το σύνολο των λόγων των συχνοτήτων, f_N/f_s , όπου είναι πιθανό να έχουμε φαινόμενο “lock-in”, αυξάνει με την αύξηση του εύρους ταλάντωσης. Ο ομόρρους των ταλαντευόμενων σωμάτων έχει άμεση σχέση με την περίπτωση ενός σταθερού σώματος που τοποθετείται κάτω από τα κύματα και σε ρεύματα, όπου η σχετική ταλάντωση του ρευστού μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερου εύρους από ότι μελετάται σε συνήθη προβλήματα ταλαντώσεων. Στα περισσότερα πειράματα, αναγκάζοντας ένα κύλινδρο να ταλαντεύεται με μεγάλα εύρη σε μία ελεύθερη ροή, μπορούμε να ερευνήσουμε υπό περισσότερο ελεγχόμενες συνθήκες πώς ένα σώμα επηρεάζει τον ομόρρο του ώστε να προκληθεί το φαινόμενο του συγχρονισμού.

Στη περίπτωση ενός κυλίνδρου που ταλαντεύεται εγκάρσιως σε ένα ελεύθερο ρεύμα, οι σχετικές παράμετροι, εκτός από τον αριθμό Reynolds, είναι το αδιάστατο εύρος ταλάντωσης (A) και η συχνότητα f_e (ή η περίοδος T_e). Εντούτοις, αντί των τελευταίων προτιμάται από πολλούς να χρησιμοποιείται το μήκος κύματος (λ) της αντίστοιχης ημιτονοειδής τροχιάς, με την οποία το σώμα κινείται σχετικά με το ρευστό. Κατά συνέπεια οι σχετικές παράμετροι είναι:

$$\text{Αριθμός Reynolds, } Re = \frac{UD}{\nu}, \quad (2.1)$$

$$\text{Λόγος εύρους ταλάντωσης} = \frac{A}{D}, \quad (2.2)$$

$$\text{Λόγος μήκους κύματος} = \frac{UT_e}{D} = \frac{\lambda}{D}, \quad (2.3)$$

όπου U είναι η ταχύτητα στην X-κατεύθυνση, και T_e είναι η περίοδος ταλάντωσης του κυλίνδρου κατά την εγκάρσια Y-κατεύθυνση (ο αδιάστατος λόγος μήκους κύματος είναι ίσος με αυτό που αναφέρεται συνήθως ως ανηγμένη ή αδιάστατη ταχύτητα (reduced velocity)).

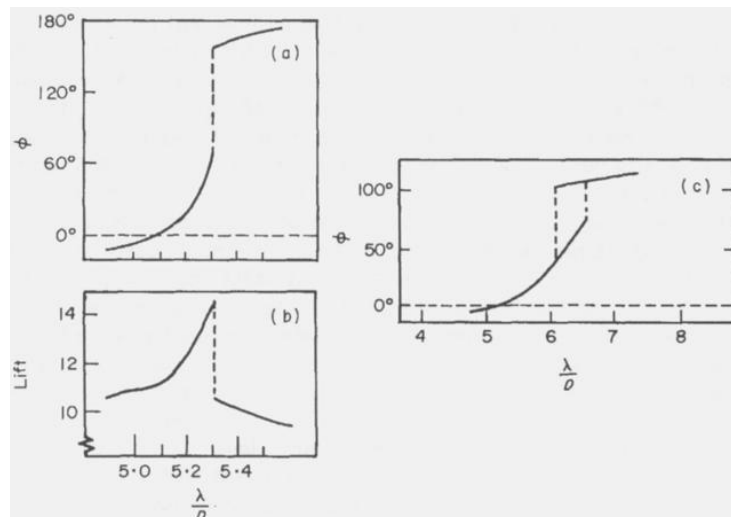
Σημαντικές διαπιστώσεις για το πώς οι δυνάμεις στο σώμα επηρεάζονται με το να αναγκάσουμε ένα κύλινδρο να ταλαντευτεί, έγιναν από τους Bishop & Hassan (1964). Διαπίστωσαν ότι οι δυνάμεις έφταναν σε μια κορυφή (μέγιστο) σε μια συχνότητα διέγερσης ελαφρώς κάτω από τη φυσική συχνότητα διάχυσης, όπως συμβαίνει στην απόκριση του απλού ταλαντωτή σε αρμονική διέγερση από δύναμη. Σε

ένα σημείο όταν μειώνεται αισθητά η δύναμη της άνωσης (καθώς το μήκος κύματος της τροχιάς αυξάνεται), η φάση (φ) ανάμεσα στην άνωση και στην κίνηση του σώματος επίσης αλλάζει απότομα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5 (a) και (b). Το σύστημα παρουσιάζει υστέρηση στην ακριβή θέση που συμβαίνει το φαινόμενο του «άλματος» στην φάση, και εξαρτάται από το εάν το μήκος κύματος αυξάνεται ή μειώνεται, (δηλαδή ανάλογα με το ιστορικό της κίνησης). Ο Feng (1968) παρατήρησε ένα παρόμοιο «άλμα» στη φάση σε έναν ελαστικά στηριζόμενο κύλινδρο, στο σημείο όπου το εύρος της απόκρισης και η άνωση αλλάζουν απότομα, και βρήκε πάλι υστέρηση σε μερικά από τα πειράματά του, ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2.5(c). Η σημασία της φάσης σε αυτά τα προβλήματα βρίσκεται στο γεγονός ότι επηρεάζει έντονα τη μεταφορά ενέργειας από το ρευστό στις κινήσεις του σώματος. Αν και διάφοροι ερευνητές είχαν κάποια επιτυχία στη μοντελοποίηση της μη γραμμικής απόκρισης σε ταλάντωση ενός ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου με διαφορικές εξισώσεις, για πλήρη κατανόηση του χαρακτήρα των δυνάμεων και των αποκρίσεων πρέπει να εμπεριέχεται και η γνώση της δυναμικής των δινών οι οποίες προκαλούν τα φαινόμενα.

Η εργασία του Zdravkovich (1982), η οποία εξέτασε άλλες δημοσιευμένες εργασίες με αποτελέσματα εξαγόμενα με τη μέθοδο της οπτικοποίησης (visualization) καθώς και οι εργασίες των Ongoren & Rockwell (1987), καταδεικνύουν ότι υπάρχει μια αλλαγή στον συγχρονισμό (timing) της διάχυσης των δινών σε κάθε πλευρά του «άλματος» της φάσης. Ο Zdravkovich (1982) συμπέρανε ότι σε μικρότερα μήκη κύματος τροχιάς, μια δίνη, που διαμορφωνόταν στη μια πλευρά του κυλίνδρου, διαχεόταν όταν ο κύλινδρος ήταν κοντά στη μέγιστη μετατόπιση στην αντίθετη πλευρά, αλλά το αντίστροφο φάνηκε να εμφανίζεται σε πιο μεγάλα μήκη κύματος. Οι Ongoren & Rockwell (1987) παρατήρησαν ένα παρόμοιο αποτέλεσμα, και επίσης κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η «ταλάντωση» του κοντινού ομόρρου, που αυξανόταν ξαφνικά μετά από ένα κρίσιμο μήκος κύματος, μπορούσε πιθανότατα «να συνδυαστεί» με την κορύφωση στη δύναμη της άνωσης. Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα, από τις μετρήσεις της ταχύτητας, είναι ότι το «άλμα» της φάσης της δυνάμεως της άνωσης εμφανίζεται για κυκλικές και τριγωνικές διατομές αλλά όχι για τετραγωνική διατομή, που καταδεικνύει τη σημασία της μορφής της διατομής.

Εάν η φάση της δύναμης της άνωσης αλλάξει αισθητά, γίνεται εμφανές ότι πρέπει να συμβαίνει μία απότομη αλλαγή στο συγχρονισμό (timing) και

ενδεχομένως και στον χαρακτήρα του σχηματισμού των δινών. Δηλαδή η δύναμη στο σώμα μπορεί να διαχωριστεί σε έναν δυναμικό ή προστιθέμενο μαζικό όρο, και σε έναν όρο δύναμης δινών, ο οποίος προκύπτει από τον ρυθμό ώθησης των δινών που διαχέονται (σχετική εργασία έχει γίνει από τον Lighthill). Ο δυναμικός όρος αλλάζει συνεχώς εάν το μήκος κύματος της τροχιάς του σώματος ή η περίοδος ταλάντωσης αυξηθεί βαθμιαία, οπότε αναμένεται ότι μια απότομη αλλαγή στη δύναμη στον κύλινδρο, μπορεί μόνο να οφείλεται σε μία απότομη αλλαγή στη δύναμη δινών, δηλαδή, σε μια έντονη αλλαγή στη δυναμική των δινών που διαχέονται. Ένα βασικό ερώτημα που απασχόλησε τους Williamson & Roshko (1988) ήταν γιατί ο σχηματισμός των δινών αλλάζει το χαρακτήρα του κατά τη διάρκεια του συντονισμού.



Σχήμα 2.5. Μεταβολή της δυνάμεως άνωσης και της φάσης της (φ), καθώς το μήκος κύματος (λ) μεταβάλλεται. Οι περιπτώσεις (a) και (b) είναι για κύλινδρο εξαναγκασμένης ταλάντωσης [Bishop-Hassan (1964)]. Η περίπτωση c είναι για ελαστικά-στηριγμένο κύλινδρο [Feng (1968)].

Ένα από τα κύρια ερωτήματα των Williamson & Roshko (1988) που προσπάθησαν να απαντήσουν είναι, ποιες περιοχές συγχρονισμού των δινών υπάρχουν στο επίπεδο (λ , A).

Λόγω των εγκάρσιων ταλαντώσεων, ο κύλινδρος επιταχύνει συνεχώς και επιβραδύνει κατά μήκος της τροχιάς του μέσα στο ρευστό. Στη περιοχή του θεμελιώδους συγχρονισμού, διαπιστώνουμε ότι η δυναμική των δινών πολύ κοντά στο πίσω μέρος του σώματος, επηρεάζεται από αυτή τη μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, και παρατηρούμε μια αιφνίδια μεταστροφή, από την μία κατάσταση σχηματισμού

δινών σε μία άλλη εμφανώς διαφορετική κατάσταση σχηματισμού δινών, πέρα από ένα κρίσιμο όριο.

2.2.1 Διαγράμματα περιοχών συντονισμού

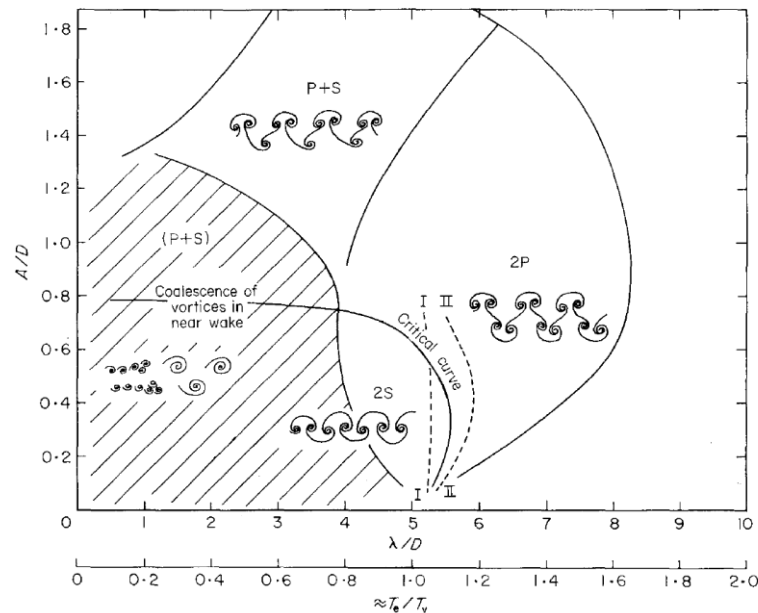
Η κύρια ενασχόληση των περισσότερων μελετών σχετικά με τα ταλαντευόμενα μη αεροδυναμικά σώματα, ήταν η θεμελιώδης περιοχή του φαινομένου του συντονισμού (lock-in), η οποία βρίσκεται κοντά στην περιοχή χαρακτηρισμένη ως «2S» στο χάρτη των περιοχών του επιπέδου (λ, A) που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.6, καθώς επίσης και για άλλες.

Στη περίπτωση της επίπεδης ταλαντευόμενης ροής μετά από ένα σώμα, οι Bearman (1981) και Williamson (1985) παρατήρησαν επαναλαμβανόμενες μορφές διαχεόμενων δινών στον ομόρρου, με το καθένα να εμφανίζεται μέσα σε ένα συγκεκριμένο εύρος πλατών. Η διαδικασία της ένωσης (ζευγάρωμα) των δινών βρέθηκε ότι είναι θεμελιώδης, όχι μόνο για την επανάληψημότητα των μορφών αλλά και επειδή επιτρέπει στις δίνες να απομακρύνονται (από την τοπική περιοχή του σώματος) με τις δικές τους επαγόμενες ταχύτητες. Σε αρκετές από τις παρόντες μορφές δινών, η ένωση δινών είναι πάλι ένα θεμελιώδες γνώρισμα της δυναμικής του ομόρρου, όπως μπορεί να δειχθεί διαγραμματικά στους τύπους των σχεδίων που παρουσιάζονται στο σχήμα 2.7. Τα διαγράμματα των μορφών του σχήματος 2.7 αναφέρονται στους τύπους ομόρρου που βρίσκονται στις περιοχές του επιπέδου (λ, A) του σχήματος 2.6, και καθορίστηκαν με βάση τους συνδυασμούς P, που σημαίνει ζεύγος δινών (Vortex Pair), και S που σημαίνει μονή δίνη (Single Vortex). Για παράδειγμα, P + S σημαίνει μία μορφή δινών όπου σε κάθε κύκλο ένα ζεύγος δινών και μια μονή δίνη διαχέονται. Στο σχήμα 2.7 οι διακεκομμένες γραμμές εσωκλείουν εκείνες τις δίνες που διαμορφώνονται σε έναν πλήρη κύκλο.

Στο σχήμα 2.6 υπάρχει επίσης ο άξονας αναφοράς T_e/T_s όπου T_s είναι η περίοδος διάχυσης δινών σε ένα μη ταλαντευόμενο κύλινδρο. Η τιμή του T_s προέρχεται από τον αριθμό Strouhal θεωρώντας ότι είναι $St = D/UT_s = 0,20$ για όλους τους αριθμούς Reynolds που μελετώνται. Η παράμετρος (T_e/T_s) συνδέεται με την παράμετρο λ/D μέσω της έκφρασης $(T_e/T_s) = S(\lambda/D)$, έτσι ώστε κοντά στη θεμελιώδη περιοχή «lock-in» $T_e \approx T_s$, και οπότε $\lambda/D \approx 5$, δηλαδή ο κύλινδρος ταξιδεύει κατά προσέγγιση 5 διαμέτρους σε κάθε κύκλο διάχυσης και διαχέονται δύο δίνες.

Οι σημαντικότερες μορφές δινών κοντά στη θεμελιώδη περιοχή του “lock-

in” είναι 2S, 2P και P+S. Ο προσδιορισμός 2S σημαίνει ότι σε κάθε μισό κύκλο μια δίνη τροφοδοτείται προς τον ομόρρου, όπως γίνεται η φυσική διάχυση δινών Von Karman, ο προσδιορισμός 2P σημαίνει τον σχηματισμό δύο ζευγών δινών σε κάθε κύκλο τα οποία μεταφέρονται αργότερα εκτός της κεντρικής γραμμής του ομόρρου και ο προσδιορισμός P+S είναι η ασύμμετρη εκδοχή της μορφής διάχυσης 2P όπου ο κύλινδρος διαχέει ένα ζεύγος και μια μονή δίνη σε κάθε κύκλο. Άλλες μορφές χαρακτηρίζονται ως C(2S) και C(P+S), που σημαίνει ότι κοντά στον κύλινδρο έχουμε τις 2S ή P+S μορφές αντίστοιχα, αλλά οι μικρότερες δίνες συγχωνεύονται είτε αμέσως πίσω από το σώμα είτε περίπου μέσα σε 15 διαμέτρους και δημιουργούν έτσι μεγαλύτερης κλίμακας δομές (το σχεδιάγραμμα παρουσιάζει ένα ακραίο παράδειγμα).

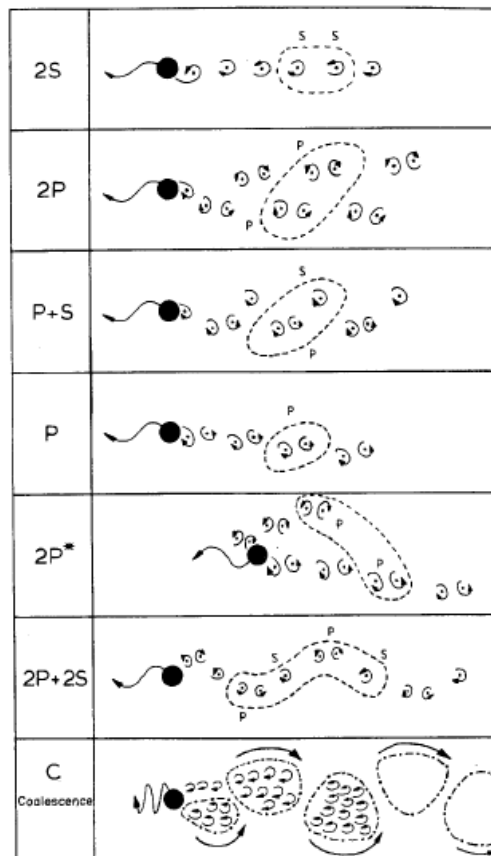


Σχήμα 2.6. Χάρτης των μορφών συγχρονισμού των δινών κοντά στη θεμελιώδη περιοχή lock-in. Η κρίσιμη καμπύλη αντιπροσωπεύει τη μετάβαση από τη μία μορφή σχηματισμού δινών σε μια άλλη. Οι καμπύλες I και II υποδηλώνουν σε ποιο σημείο οι δυνάμεις στο σώμα παρουσιάζουν το έντονο «άλμα» από τη μελέτη των αυξάνεται Bishop & Hassan (1964). Η καμπύλη I είναι για την περίπτωση όπου μειώνεται το μήκος κύματος και η II είναι όταν. [Williamson & Roshko (1988)].

Τέλος, μία μορφή δινών που ονομάζεται 2P+2S περιλαμβάνει δύο ζεύγη δινών που σχηματίζονται στην άνω και κάτω πλευρά της τροχιάς του σώματος όπως στη περίπτωση της μορφής 2P, αλλά με την παρεμβολή μονής δίνης ανάμεσα σε δύο ζεύγη δινών, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7. Η «κενή» περιοχή στο επίπεδο (λ, A) δεξιά της περιοχής μορφής 2P, αντιπροσωπεύει εκείνες τις συνθήκες, όπου καμιά

περιοδική μορφή συγχρονισμού του σχηματισμού δινών δεν παρατηρήθηκε.

Τα όρια μεταξύ των περιοχών στο σχήμα 2.6 μπορούν να θεωρηθούν ως προσεγγιστικά, παρόλο που λήφθηκε μεγάλη προσοχή από τους Williamson & Roshko (1988) στη κατασκευή της λεγόμενης «κρίσιμης καμπύλης», όπως φαίνεται και στο σχήμα, και τα άλλα όρια δίπλα. Αυτό το σχήμα παρουσιάζει τη θεμελιώδη περιοχή που έχουμε “lock-in” με πολύ μεγάλη λεπτομέρεια. Είναι ευδιάκριτο ότι οι καμπύλες δεν φτάνουν ως τον άξονα λ , καθώς υπάρχει ένα κατώτατο όριο πλάτους που είναι απαραίτητο πριν συμβεί ο συντονισμός, αν και η ακριβής τιμή του δεν προσδιορίστηκε στη μελέτη των Williamson & Roshko (1988), όμως στη μελέτη του Koopmann (1967), ο ίδιος αναφέρει ότι έχουμε συντονισμό για $A/D > 0,05$. Το όριο μεταξύ των μορφών P+S και 2P όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2.6 είναι προσεγγιστικά σωστό για $300 < Re < 1000$, αλλά για $Re < 300$ εμφανίστηκε η μορφή P+S αντί της μορφής 2P, σε όλη εκείνη την περιοχή επίσης.



Σχήμα 2.7. Σχεδιάγραμμα των μορφών των διαχεόμενων δινών που συναντώνται στον χάρτη του σχήματος 3.3(α). Το «P» σημαίνει ένα ζεύγος δινών και το «S» σημαίνει μία μονή δίνη, και κάθε μορφή ορίζεται από ένα αριθμό ζευγών και μονών δινών που σχηματίζονται ανά κύκλο. Η γραμμή “-----” περικλείει τις διαχεόμενες δίνες ενός πλήρους κύκλου [Williamson & Roshko (1988)].

Οι σχετικές παράμετροι του προβλήματος είναι, όπως καθορίστηκαν νωρίτερα, ο λόγος του εύρους ταλάντωσης, ο λόγος μήκους κύματος και ο αριθμός Reynolds ορισμένος με τη ταχύτητα U της ελεύθερου ρεύματος ροής.

Μορφές ομόρρου παρόμοιες με τις P+S και 2P έχουν βρεθεί σε έναν αριθμό από διαφορετικές ροές, αλλά όλες τους είχαν σχέση με ταλαντευόμενο σώμα ή με ταλαντευόμενο μέρος της ροής γύρω από το σώμα. Ο Koochesfahani (1987) παρατήρησε τις μορφές P+S και 2P σε μια αεροτομή, αλλά ανακάλυψε ότι η μορφή P+S εμφανιζόταν μόνο όταν η μορφή των κυμάτων της ταλάντωσης δεν ήταν συμμετρική. Οι Griffin & Ramberg (1976) και οι Ongoren & Rockwell (1987) παρατήρησαν τις δύο μορφές όταν ένας κύλινδρος ταλαντευόταν κατά το διάμηκες σε μια ροή, με μια περίοδο κατά προσέγγιση ίση με τη μισή φυσική περίοδο διάχυσης δινών, αλλά οι Ongoren & Rockwell (1987) δεν βρήκαν παρόμοιες μορφές όταν η ταλάντωση γινόταν εγκάρσια της ροής, όπως βρήκαν οι Williamson & Roshko (1988).

2.2.2 Σχηματισμός δινών στη θεμελιώδη περιοχή του συγχρονισμού

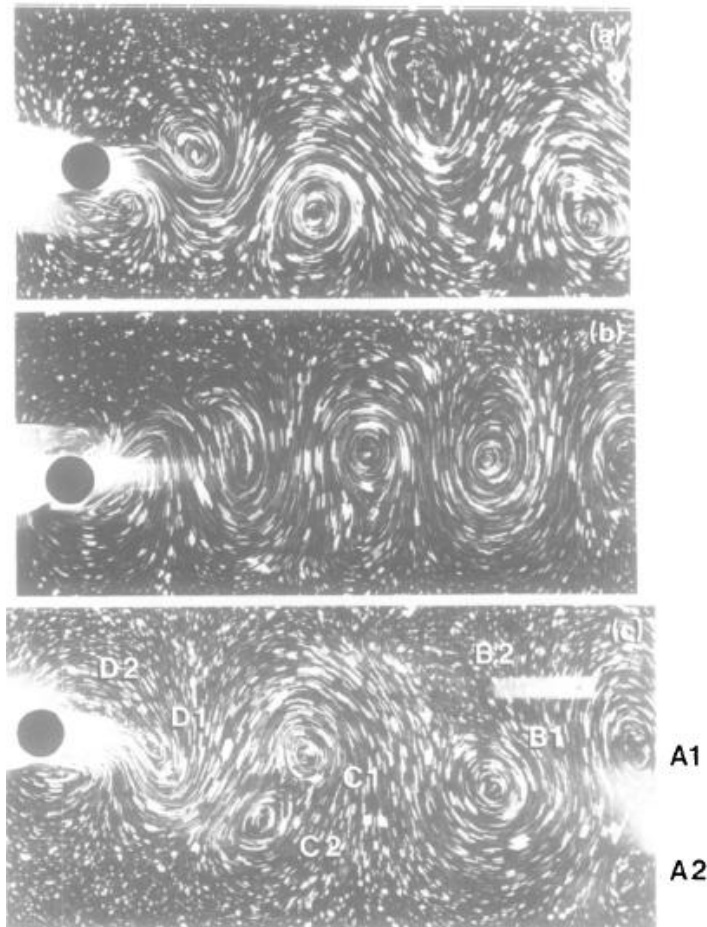
Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από τις παρατηρήσεις της ροής κοντά στη θεμελιώδη περιοχή του “lock-in”. Οι καμπύλες I και II του σχήματος 2.6, οι οποίες υποδηλώνουν τις περιοχές που οι Bishop-Hassan (1964) ανακάλυψαν μια απότομη αλλαγή στον χαρακτήρα των δυνάμεων πάνω στο σώμα, συνδέονται με την έρευνα των Williamson-Roshko (1988) με μια απότομη μετάβαση από τη μορφή σχηματισμού δινών 2S, στη μορφή 2P. Και στις δύο καταστάσεις, ο σχηματισμός των δινών είναι ελάχιστα διαφορετικός από την περίπτωση του σχηματισμού των μονών δινών, που διαμορφώνονται και διαχέονται ανά μισό κύκλο. Το γεγονός ότι το σώμα επιταχύνεται στο πρώτο μισό του κάθε μισού κύκλου, έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία τεσσάρων περιοχών στροβιλότητας ανά κύκλο. Κάτω από ένα κρίσιμο μέγεθος τροχιάς, δύο ομόστροφες δίνες συγχωνεύονται σε κάθε μισό κύκλο για να δημιουργηθεί ο περίφημος τύπος δινών ομόρρου, οδός Von Karman ή 2S τύπος. Πάνω από το κρίσιμο αυτό μέγεθος, η συγχώνευση των δινών δεν συμβαίνει, και οι τέσσερις περιοχές στροβιλότητας οδηγούν στην εμφάνιση της μορφής 2P.

Μια άμεση απεικόνιση παρουσιάζεται στο σχήμα 2.8 για το πώς ο σχηματισμός δινών αλλάζει καθώς αυξάνεται το μήκος κύματος λ της τροχιάς και για ένα μικρό

εύρος $A/D=0,3$. Οι τιμές του λ/D είναι τέτοιες ώστε ο σχηματισμός των δινών στις περιπτώσεις (b) και (c) να είναι περιοδικός και συγχρονισμένος με τις καταστάσεις 2S και 2P αντίστοιχα. Στη περίπτωση (a) η τιμή του λ/D είναι ακριβώς κάτω από αυτή για την οποία ο συγχρονισμός 2S εμφανίζεται, αν και η εμφάνιση και η γενική διαμόρφωση των δινών στην περιοχή του κοντινού ομόρρου για χαμηλές τιμές του λ/D εντός της περιοχής 2S παραμένουν παρόμοιες με την περίπτωση (a). Υπάρχουν δύο σαφείς επιδράσεις στον ομόρρου τύπου 2S οι οποίες συμβαίνουν καθώς αυξάνει το μήκος κύματος λ , και το οποίο μπορεί κάποιος να το παρατηρήσει συγκρίνοντας τις περιπτώσεις (a) και (b). Με την αύξηση του επιβληθέντος μήκους κύματος λ , η πλευρική απόσταση μεταξύ των δινών στον ομόρρου μειώνεται, και επίσης το μήκος κύματος του ομόρρου (ή η διαμήκης απόσταση μεταξύ των δινών) αυξάνεται. Ωστόσο, η αλλαγή στη μορφή σχηματισμού δινών, μεταξύ των περιπτώσεων (b) και (c) είναι πιο δραματική. Δηλαδή υπάρχει μια αλλαγή στη μορφή σχηματισμού δινών μεταξύ της περίπτωσης (b) για την οποία το επιβληθέν μήκος κύματος είναι «υπό-κρίσιμο» και της περίπτωσης (c), για την οποία το επιβληθέν μήκος κύματος είναι «υπέρ-κρίσιμο». Για παράδειγμα, οι αντίθετες προς την φορά των δεικτών του ρολογιού δίνες A_1 και A_2 της περιπτώσεως (c) διαχύθηκαν στο πρώτο μισό κύκλο, και ακολούθησε στον δεύτερο μισό κύκλο η διάχυση των δεξιόστροφων δινών B_1 και B_2 , έπειτα είχαμε τη διάχυση των αντιθέτων προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού δινών C_1 και C_2 , και τελικά, στον τελευταία σχηματιζόμενο μισό κύκλο (πιο κοντά στον κύλινδρο), διαχύθηκαν οι δεξιόστροφες δίνες D_1 και D_2 . Αυτά τα ζεύγη δινών στην 2P κατάσταση είναι εμφανή στην περίπτωση (c). Τέλος πρέπει να τονιστεί ότι, οι αναφερόμενοι όροι «υπό-κρίσιμο» και «υπέρ-κρίσιμο» μήκος κύματος δεν έχουν καμία σχέση με τις παρεμφερείς ονομασίες, που δίνουμε στους αριθμούς Reynolds για τους οποίους το οριακό στρώμα γίνεται τυρβώδες.

Προκειμένου να συνοψιστεί η κίνηση των δινών σε διαφορετικά μήκη κύματος, εξετάζονται οι θέσεις των δινών κοντά στο σώμα, καθώς αυτό κινείται προς τα πάνω και διασχίζει τη κεντρική γραμμή του ομόρρου, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9. Η δίνη D_1 (ή D) αντιπροσωπεύει τη δίνη που αρχίζει να σχηματίζεται στο πρώτο μισό κύκλο, για να διαχυθεί στον επόμενο, κάτι στο οποίο δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή νωρίτερα. Σε ένα χαμηλό μήκος κύματος, σχήμα 2.9(a), η φάση της επιτάχυνσης του κινούμενου σώματος έχει σαν αποτέλεσμα τον σχηματισμό δύο δινών (D_2 και E_1), πριν η δίνη D_1 φθάσει στο πίσω τμήμα του κυλίνδρου. Η περίπτωση (b) αντιπροσωπεύει την «κρίσιμη» συνθήκη, στην οποία η δίνη D_1 (στην περίπτωση

αυτή αποκαλείται D) φθάνει στο πίσω τμήμα του σώματος κατά τη διάρκεια της φάσης της επιτάχυνσης. Αυτή η συνθήκη αποκαλείται “resonant synchronization”. Καθώς το μήκος κύματος αυξάνεται πέρα της κρίσιμης τιμής (περίπτωση c), η δίνη D_1 διαχέεται πολύ νωρίτερα κατά τη διάρκεια του μισού κύκλου. Τότε η φάση της επιτάχυνσης έχει ως αποτέλεσμα οι δύο δίνες, D_2 και E_1 να διαμορφώνονται, αφού έχει διαχυθεί η δίνη D_1 .



Σχήμα 3.6. Ο ομόρρους ενός ταλαντευόμενου κυλίνδρου για τρία διαφορετικά μήκη κύματος, σε ένα πλάτος των 0,3 διαμέτρων και για αριθμό Reynolds $Re=392$. (a) $\lambda/D=3,75$ ($T_e/T_v=0,77$), (b) $\lambda/D=5,0$ ($T_e/T_v=1,03$), (c) $\lambda/D=6,5$ ($T_e/T_v=1,33$) [Williamson & Roshko (1988)].

Όσο το μήκος κύματος αυξάνεται μεταξύ των περιπτώσεων (a) και (b), η δίνη D_1 είναι σε θέση να μετακινείται γύρω από τον κύλινδρο περαιτέρω, μέχρι να φθάσει στο πίσω τμήμα του κυλίνδρου κατά τη διάρκεια της φάσης της επιτάχυνσης (περίπτωση b), όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Λόγω αυτού του ιδιαίτερου συγχρονισμού, το δεξιόστροφο αποκολλημένο στρώμα δεν κυλάει σαν ξεχωριστή οντότητα D_2 όπως γίνεται στη περίπτωση (a), αλλά κυλάει μέσα στην D_1 (που

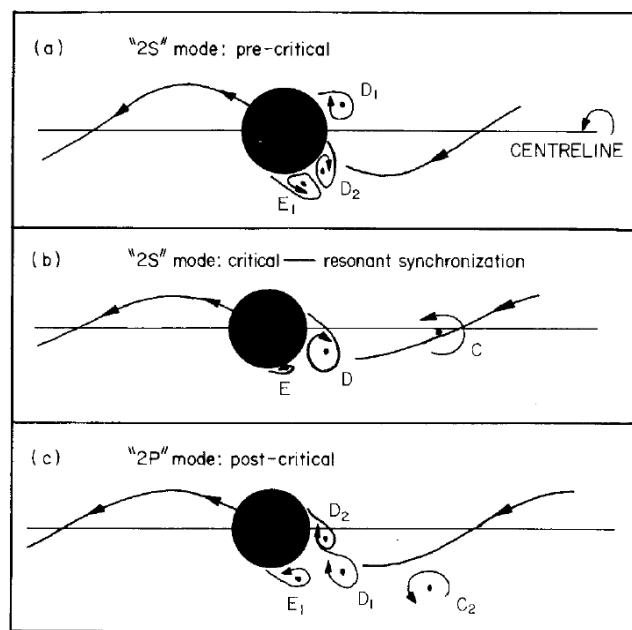
παρουσιάζεται απλά ως D εδώ. Ακριβώς σε αυτό το μήκος κύματος, ο προκύπτων σχηματισμός μιας ενιαίας και πιο συγκεντρωμένης περιοχής στροβιλότητας, αποτελεί το χαρακτηριστικό στοιχείο της κατάστασης, η οποία ερμηνεύεται στην εργασία των Williamson & Roshko (1988) με τον όρο «resonant synchronization». Η «κρίσιμη καμπύλη», που παρουσιάστηκε στο επίπεδο μήκος κύματος-εύρος ταλάντωσης του σχήματος 2.6 δεν περιγράφει μόνο τις συνθήκες που έχουμε αλλαγή στη κατάσταση σχηματισμού δινών (από τη μορφή 2S στη μορφή 2P), αλλά επίσης καθορίζει και τις πειραματικές συνθήκες για να έχουμε το φαινόμενο resonant synchronization. Οπότε γίνεται αντιληπτό ότι για να εμφανιστεί ο προαναφερόμενος συγχρονισμός, εξαρτάται και από το εύρος της ταλάντωσης καθώς επίσης και από το μήκος κύματος της τροχιάς του σώματος. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η προαναφερόμενη κρίσιμη καμπύλη του συγχρονισμού, βρίσκεται κοντά στις καμπύλες των Bishop & Hassan (1964), οι οποίες καθορίζουν τις συνθήκες για μέγιστο στις δυνάμεις του σώματος. Είναι εύλογο να υποθεθεί ότι η μεγιστοποίηση των δυνάμεων συμβαδίζει με το φαινόμενο του resonant synchronization, και ότι η πιο συγκεντρωμένη διανομή της στροβιλότητας, στο συγκεκριμένο μήκος κύματος, προκαλεί την μεγιστοποίηση των δυνάμεων. Αντίθετα, η δυναμική των μικρότερων περιοχών στροβιλότητας (συμπεριλαμβανομένων των αντίστροφα στρεφόμενων δινών) στην περιοχή του κοντινού ομόρρου, θα προκαλέσει μια μικρότερη ώθηση στη διανομή της στροβιλότητας που διαχέεται, και ως συνέπεια, και μια μικρότερη δύναμη πάνω στο σώμα, από αυτήν που προκαλείται από τη διάχυση περισσότερο συγκεντρωμένων δινών κατά την εξέλιξη του φαινομένου resonant synchronization.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η φάση της επιτάχυνσης σε κάθε μισό κύκλο κίνησης του σώματος έχει την τάση να δημιουργεί δύο δίνες, οπότε σχηματίζονται τέσσερις δίνες ανά κύκλο, εκτός από συγκεκριμένες συνθήκες όπου συμβαίνει το φαινόμενο resonant synchronization. Στην υπό-κρίσιμη περίπτωση, η αμοιβαία επαγωγή των δινών προκαλεί συγχώνευση δύο ομόστροφων δινών σε κάθε μισό κύκλο και την εμφάνιση της μορφής 2S, ενώ στην υπέρ-κρίσιμη περίπτωση οι ομόστροφες δίνες μετακινούνται ξεχωριστά, δημιουργώντας δύο ζεύγη δινών σε κάθε κύκλο απαρτίζοντας έτσι την κατάσταση 2P.

Το γεγονός ότι ένα επιταχυνόμενο σώμα τείνει να διαμορφώσει ένα νέο ζεύγος δινών, διαπιστώθηκε και από τους Honji & Taneda (1968), οι οποίοι επιτάχυναν έναν κύλινδρο από μια ομοιόμορφα κατανομημένη ταχύτητα σε μια άλλη. Αυτό το φαινόμενο συσχετίζεται με την αύξηση της δύναμης (ανά μονάδα μήκους) σε

καθένα από τα ξεχωριστά διατμητικά στρώματα καθώς το σώμα επιταχύνεται, με αποτέλεσμα τον σχηματισμό καινούργιων δινών που κινούνται κοντά στο σώμα. Ο σχηματισμός περισσότερων από δύο δίνες ανά κύκλο (και κατά συνέπεια η παραγωγή των μορφών P+S και 2P), είναι επίσης προφανής σε πολλά πειράματα διαφόρων ερευνητών, και μπορεί επίσης να αποδοθεί, στους αδρανειακούς όρους της σχετικής κίνησης μεταξύ ροής και σώματος.

Απεικόνιση της μορφής 2P σε ένα μεγαλύτερο πλάτος της μιας διαμέτρου φαίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα 2.10. Στις περιπτώσεις (a) και (b), δύο δίνες ίδιας φοράς με αυτή των δεικτών ρολογιού διαχέονται καθώς ο κύλινδρος κινείται προς τα πάνω, ακολουθούμενες από διαχεόμενες δίνες με κίνηση αντίθετη αυτής των δεικτών ρολογιού στα σχήματα (c), (d) και (e). Τα ζεύγη δινών τότε παίρνουν την μορφή που περιγράφηκε προηγουμένως.



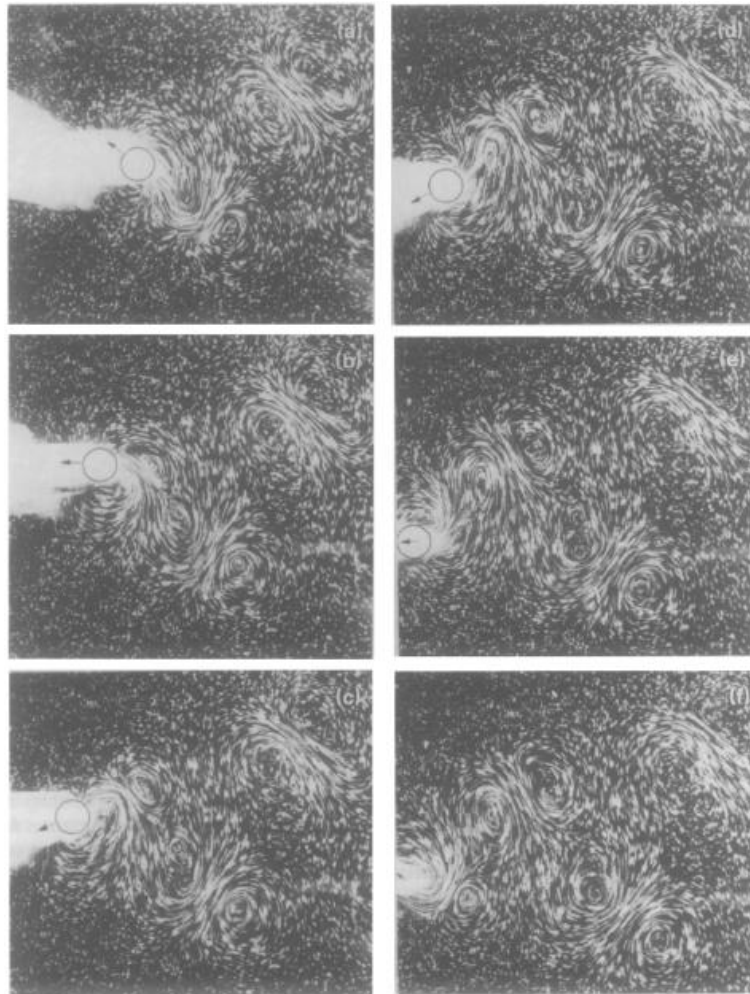
Σχήμα 2.9. Θέσεις της δίνης D και άλλων δινών στον κοντινό ομόρροο όταν ο κύλινδρος κινείται προς την επάνω πλευρά, και μόλις τέμνει την κεντρική γραμμή του ομόρροου [Williamson & Roshko (1988)].

2.2.3 Επεξήγηση της καταστάσεως «άλματος»

Αφού παρουσιάστηκε ότι έχουμε μετάβαση από τη μία μορφή στην άλλη αν αυξηθεί το μήκος κύματος, πρέπει τώρα να εξηγηθεί γιατί αυτή η αλλαγή είναι τόσο απότομη. Αυτό θα γίνει με την εξέταση μιας ροής που είναι οριακά υπό-κρίσιμη

και που διαταράσσεται από μια μικρή αύξηση του μήκους κύματος, έτσι ώστε η ροή να αρχίζει να αναπτύσσει την υπέρ-κρίσιμη της μορφή. Στο Σχήμα 2.11, στον ομόρροου του (a) με μήκος κύματος λ_1 αναπτύχθηκαν οι δίνες A, B, C με τη μορφή 2S. Επιβάλλοντας ένα νέο μεγαλύτερο μήκος κύματος λ_2 , η δίνη D_1 διαχέεται ελαφρώς νωρίτερα, σε σχέση με τη νέα ημι-περίοδο, από την δίνη C, και επιτρέπει τη μορφοποίηση μιας δεύτερης μικρής δίνης D_2 στη περίπτωση (a), όσο διαρκεί το υπόλοιπο μέρος της φάσης της επιτάχυνσης του κυλίνδρου. Η παρουσία της D_2 επιταχύνει τη διάχυση της δίνης E_1 στη περίπτωση (b), αφήνοντας τη δίνη E_2 να γίνει ισχυρότερη από τη δίνη D_2 . Η δίνη E_2 επιταχύνει τη διάχυση της δίνης F_1 έτσι ώστε η τελευταία να διαχέεται νωρίτερα από την δίνη E_1 , και ούτω καθεξής, έως ότου επιτευχθεί μια νέα κατάσταση ισορροπίας, με τις δίνες να διαχέονται κοντά στην έναρξη του κάθε νέου μισού κύκλου. Ο νέος τρόπος σχηματισμού των δινών είναι έτσι, ευδιάκριτα διαφορετικός από τον αρχικό τρόπο. Χρειάζεται να γίνει μόνο μια μικρή διαταραχή, όπως μια αύξηση του μήκους κύματος, για να ανατραπεί η μία κατάσταση ισορροπίας προς όφελος μιας καινούργιας κατάστασης ισορροπίας, και με αυτόν τον τρόπο, προκαλείται η απότομη αλλαγή στο σχηματισμό δινών, φαινόμενο που αποκαλείται με τον όρο «άλμα» (“jump”).

Το φαινόμενο του «άλματος» στον τρόπο σχηματισμού των δινών, μπορεί να εξηγήσει το άλμα στη φάση της δύναμης της άνωσης και το φαινόμενο της υστέρησης, που διαπίστωσαν οι Bishop & Hassan (1964). Εάν η διάχυση της δίνης συμβεί νωρίτερα σε έναν κύκλο, αναμένεται η φάση φ της δύναμης της άνωσης να αυξηθεί (αφού έχουμε ότι η πλευρική απόσταση είναι $y=A \sin(\omega t)$ και ο συντελεστής της άνωσης είναι $C_L=C_{L_0} \sin(\omega t+\varphi)$, περιμένουμε να αυξηθεί το φ). Στο Σχήμα 2.12, απεικονίζεται η σχηματική μεταβολή της φάσης φ συναρτήσει του μήκους κύματος λ , και φαίνεται ξεκάθαρα το φαινόμενο της υστέρησης, όπως παρατήρησαν και οι Bishop & Hassan (1964). Η χαμηλότερη καμπύλη μπορεί να συνδεθεί με την κατάσταση 2S και η υψηλότερη καμπύλη με την κατάσταση 2P σχηματισμού δινών, όπου το υψηλότερο φ σχετίζεται με τη πρόιμη διάχυση δινών σε κάθε μισό κύκλο. Είναι δυνατόν μέσα σε ένα συγκεκριμένο εύρος του μήκους κύματος λ , να μπορούν να εμφανιστούν είτε οι δύο καταστάσεις ισορροπίας ή οι δύο τρόποι σχηματισμού δινών. Ο τρόπος που θα επικρατήσει, εξαρτάται από το ιστορικό της ροής. Το άλμα 2P→2S θα συμβεί για μικρότερο λ από το άλμα 2S→2P. Έτσι εξηγείται το φαινόμενο της υστέρησης των Bishop & Hassan (1964).



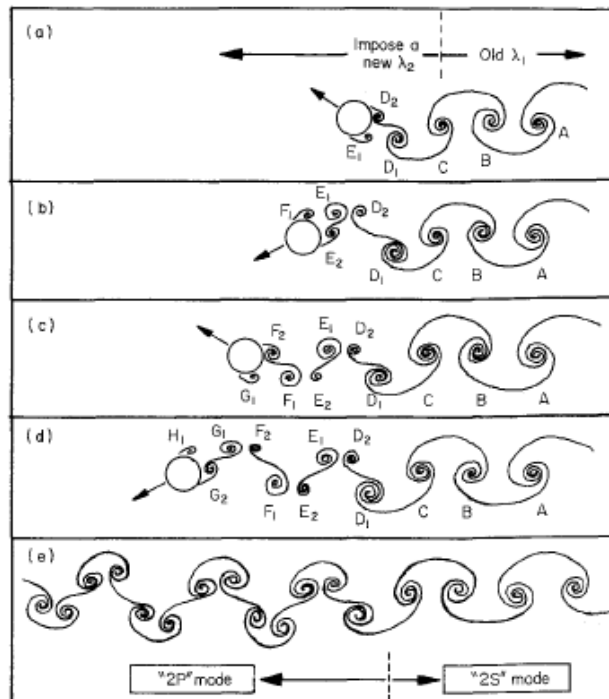
Σχήμα 2.10. Η κατάσταση σχηματισμού δινών “2P” απεικονίζεται κατά την κίνηση του κυλίνδρου εντός αρχικά αδιατάρακτου ρευστού $\lambda/D=6,5$, $A/D=1,0$, $Re=392$ ($T_e/T_v=1,33$) [Williamson & Roshko (1988)].

2.2.4 Περαιτέρω περιοχές συγχρονισμού δινών

Στη συνέχεια, θα αναφερθούν και άλλες περιοχές του επιπέδου (λ , A), πέρα από την θεμελιώδη περιοχή του lock-in (που αναπτύχθηκε προηγουμένως), καθώς αυτή περιβάλλεται και από άλλες περιοχές συγχρονισμού. Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στις μορφές P+S και 2P+2S του ομόρρου.

Σε ένα μικρό εύρος ταλάντωσης ($A/D = 0,13$), οι Ongoren-Rockwell (1987) ανέφεραν την ανάκτηση του δρόμου στροβίλων Von Karman σε ταλαντευόμενο σώμα, για ένα σύνολο συχνοτήτων εκτός της θεμελιώδους περιοχής συγχρονισμού. Βρήκαν εντυπωσιακές αλληλεπιδράσεις δινών που συγχωνεύονταν για να σχηματιστεί ο τύπος δρόμος Von Karman ομόρρου, το μέγεθος του οποίου ήταν στην κλίμακα των

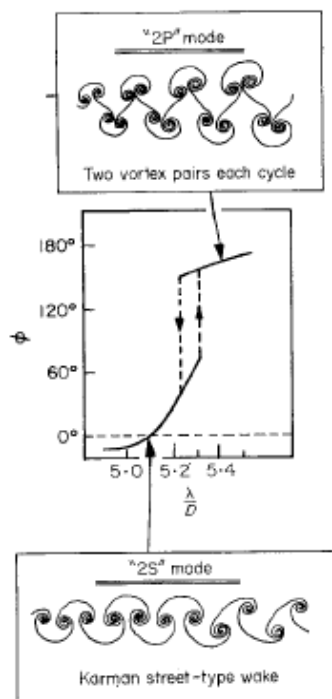
διαστάσεων του κυλίνδρου. Στη δημοσίευση των Williamson & Roshko (1988), διαπιστώθηκε ότι για μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης, οι διαστάσεις του ομόρρου δεν έφταναν μόνο στο μέγεθος του σώματος ή στο μέγεθος του εύρους ταλάντωσης, αλλά μπορούσαν να πάρουν πολύ μεγάλες διαστάσεις, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.13(a) για $A/D=1,0$ και $\lambda/D=1,5$ ($T_e/T_s=0,2$). Ο ομόρρος ήταν ένα σύνολο από μεγάλες δίνες, με την κάθε μεγάλη δίνη να έχει προέλθει από την συγχώνευση 30 περίπου μικρότερων δινών, το τυπικό μέγεθος των οποίων, παρουσιάζεται στη μικρή φωτογραφία στα αριστερά του παραπάνω σχήματος. Το μήκος κύματος των μεγάλων σχηματισμών είναι κατά προσέγγιση έξι φορές μεγαλύτερο από το μήκος κύματος του φυσικού ομόρρου, και οι μεγάλες δίνες συνεχίζουν να περιστρέφονται για τουλάχιστον 150 κύκλους ταλάντωσης του κυλίνδρου.



Σχήμα 2.11. Η μετάβαση από τη μία κατάσταση ισορροπίας σχηματισμού δινών (2S) σε μία άλλη κατάσταση ισορροπίας (2P) χρησιμοποιώντας μία μικρή αύξηση στο μήκος κύματος της τροχιάς του σώματος [Williamson & Roshko (1988)].

Οι όμορροι των σχημάτων 2.13(b) και (c) είναι ίδιας κλίμακας με τον μεγάλο ομόρρο της περίπτωση (a), και παρουσιάζουν την υπό-κρίσιμη μορφή 2S, καθώς και την υπέρ-κρίσιμη μορφή P+S, που εμφανίζονται σε αυτόν τον χαμηλό αριθμό Reynolds $Re=275$. Στην περίπτωση (b) παρατηρείται επίσης ότι υπάρχει μια έντονη αύξηση της πλευρικής απόστασης μεταξύ των δινών σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Η μορφή P+S

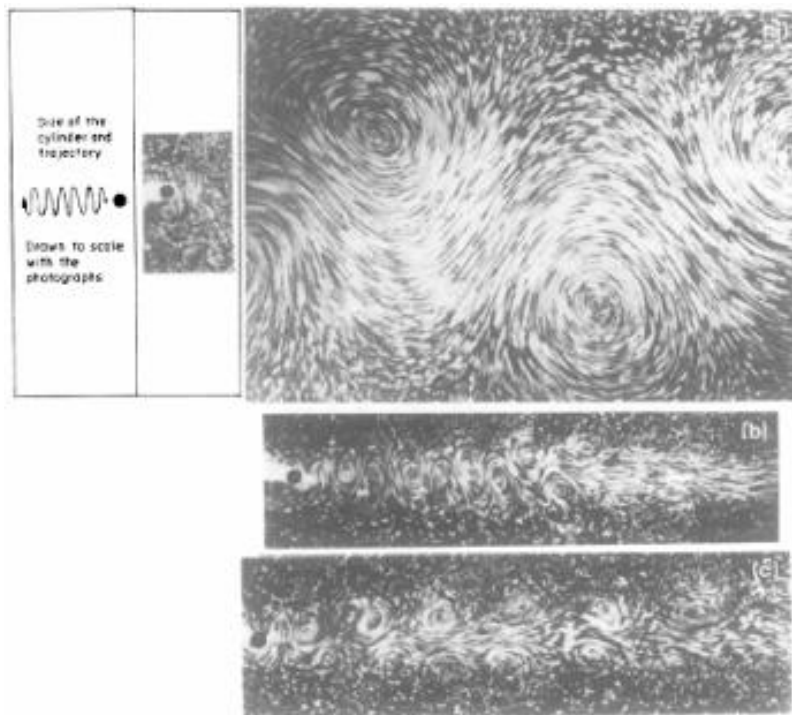
στην (c) περίπτωση διακρίνεται για την μετακίνηση προς τα πάνω των ζευγών δινών, με τις μονές δίνες να κινούνται στην κάτω πλευρά του ομόρρου. Το καθαρό ποσό της δεξιόστροφης στροβιλότητας μέσα σε κάθε ζεύγος δινών στην πάνω πλευρά, πρέπει να είναι ίσο με την αρνητική στροβιλότητα σε μια μονή δίνη στην κάτω πλευρά, και οπότε η δεξιόστροφη δίνη ανά ζεύγος, είναι ισχυρότερη από τη «συνοδό» της. Ως συνέπεια τα ζεύγη δινών, έχοντας μια κυρτή πορεία, απομακρύνονται από την κεντρική γραμμή του ομόρρου και έπειτα την πλησιάζουν. Επιστρέφοντας στην περίπτωση (a), ο ομόρρος είναι ένα ακόμα παράδειγμα μορφής P+S κοντά στον κύλινδρο, αλλά όσο απομακρυνόμαστε πίσω από τον κύλινδρο, έχουμε την προαναφερόμενη συγχώνευση και δημιουργία των μεγάλων δινών. Σε αυτήν την περίπτωση, η μορφή P+S τροφοδοτεί την πάνω και την κάτω πλευρά των τεράστιων σχηματισμών, με το ίδιο ποσό δεξιόστροφης και αριστερόστροφης στροβιλότητας, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.12. Σχηματική μεταβολή της φάσης (ϕ) με το μήκος κύματος (λ), για την παρουσία της πιθανότητας υστέρησης, η οποία προκαλείται από την αλληλεκάλυψη των ευρών όπου διαδραματίζονται οι καταστάσεις “2S” και “2P”. [Williamson & Roshko (1988)].

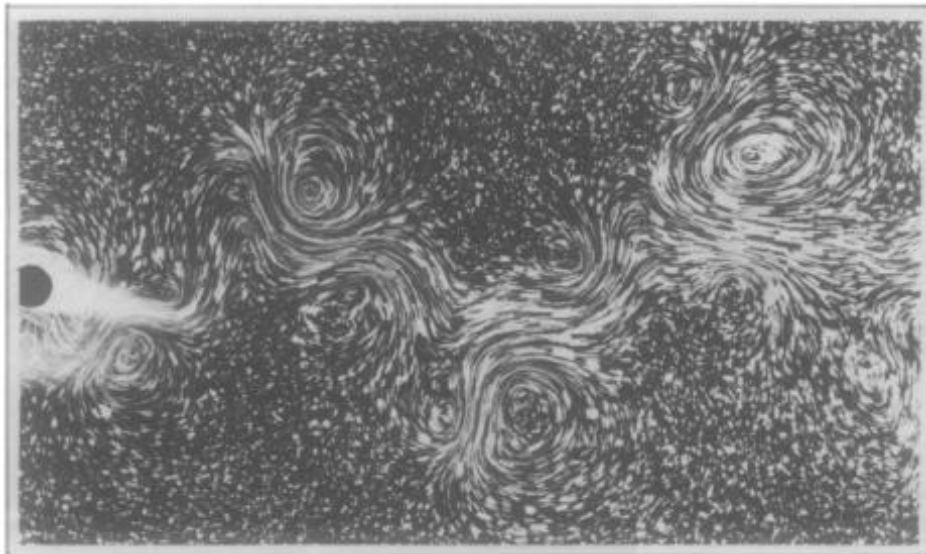
Η μορφή 2P+2S παρουσιάζεται στο σχήμα 2.14, όπου διακρίνονται δύο ζεύγη δινών, το ένα στην πάνω και το άλλο στην κάτω πλευρά της τροχιάς του σώματος, με τις μονές δίνες ενδιάμεσα. Αυτό που είναι ενδιαφέρον σε αυτή τη μορφή και

αποτελεί την πιθανή αιτία της εμφάνισης της, είναι η συμμετρία που παρουσιάζει, δηλαδή εάν μια δεξιόστροφη δίνη διαμορφώνεται σε μια συγκεκριμένη φάση σε ένα μισό κύκλο, τότε η αντίστροφη της δίνη θα διαμορφωθεί στην ίδια φάση στον επόμενο μισό κύκλο. Η ακολουθία αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 2.15(b). Όταν συναντάται σε χαμηλά εύρη ταλάντωσης, τότε αντιπροσωπεύει μία $T_e \approx 3T_s$ ή μια $\frac{1}{3}$ -υποαρμονική ταλάντωση, ενώ μια $\frac{1}{2}$ -υποαρμονική ταλάντωση, σχήμα 2.15(a) δεν βρέθηκε να παρατηρείται. Εάν η σύζευξη μεταξύ της κίνησης του σώματος και του σχηματισμού δινών ενθαρρύνει την εμφάνιση του φαινομένου lock-in κατά τη διάρκεια ενός μισού κύκλου, τότε λόγω της συμμετρίας της μορφής $2P+2S$ θα ενθαρρύνει την εμφάνιση του φαινομένου lock-in στον επόμενο μισό κύκλο. Εντούτοις, η περίπτωση της $\frac{1}{2}$ -υποαρμονικής ταλάντωσης (περίπτωση α) δεν είναι συμμετρική, και αν η κίνηση του σώματος είναι τέτοια ώστε να ενθαρρύνει την εμφάνιση του lock-in κατά τη διάρκεια ενός μισού κύκλου, στον επόμενο μισό κύκλο η κίνηση του σώματος θα έχει αντίθετη επίδραση στο σχηματισμό δινών. Έτσι μπορεί

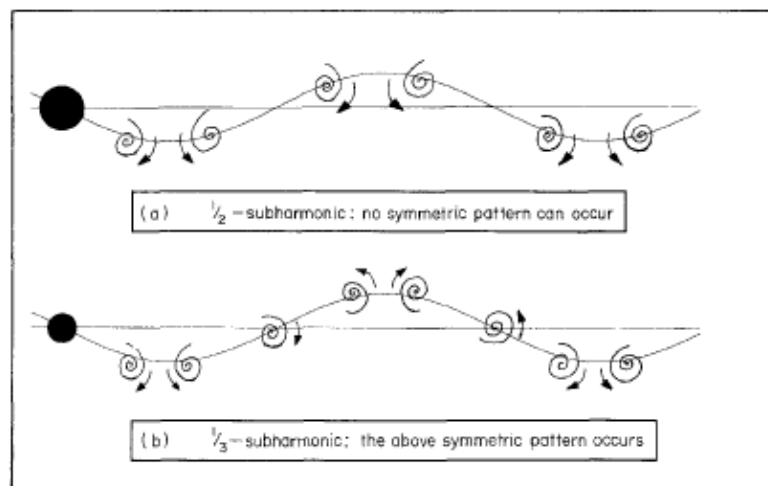


Σχήμα 2.13. (a) Ένα παράδειγμα ενός τεράστιου δρόμου δινών στον ομόρρου, ο οποίος έχει δημιουργηθεί από τη συγχώνευση ενός μεγάλου αριθμού δινών οι οποίες έχουν σχηματιστεί σε κάθε κύκλο. $\lambda/D=1,5$, $A/D=1,0$, $Re=60$ ($T_e/T_s=0,2$). (b) Μορφή 2S για $\lambda/D=5,5$, $A/D=0,5$, $Re=275$. Μορφή P+S για $\lambda/D=6,0$, $A/D=0,5$, $Re=275$. Οι φωτογραφίες των περιπτώσεων (a), (b) και (c) είναι όλες της ίδιας κλίμακας [Williamson & Roshko (1988)].

να εξηγηθεί η έλλειψη παρατηρούμενης περιοχής συγχρονισμού του σχήματος 2.6 κοντά στη τιμή $\lambda/D \approx 10$, που αντιπροσωπεύει την περίπτωση της $1/2$ -υποαρμονικής ταλάντωσης. Η φάση της διάχυσης δινών φάνηκε να αλλάζει από τον ένα κύκλο στον άλλο και το φαινόμενο lock-in δεν παρατηρήθηκε. Επεκτείνοντας τις παραπάνω διαπιστώσεις περαιτέρω, αναμένονται η εμφάνιση των $1/5$, $1/7$ και ούτω καθεξής υπό-αρμονικών μορφών καθώς είναι συμμετρικές και η απουσία των $1/4$, $1/6$ και ούτω καθεξής υπό-αρμονικών μορφών καθώς δεν μπορούν να είναι συμμετρικές.



Σχήμα 2.14. Η κατάσταση σχηματισμού δινών “2P+2S” αντιπροσωπεύει μία $1/3$ -υποαρμονική ταλάντωση και είναι συμμετρική $\lambda/D=12,0$, $A/D=1,15$, $(T_e/T_v=2,4)$, $Re=600$ [Williamson & Roshko (1988)].



Σχήμα 2.15. (a) $1/2$ -υποαρμονική διάχυση δινών. (b) $1/3$ -υποαρμονική διάχυση δινών [Williamson & Roshko (1988)].

2.2.5 Περιληπτική σύνοψη του φαινομένου του συγχρονισμού για εξαναγκασμένη ταλάντωση

Κατόπιν, θα συνοψιστούν τα όσα αναφέρθηκαν για το φαινόμενο του συγχρονισμού των δινών, ο οποίος εμφανίζεται σε διάφορες περιοχές του επιπέδου μήκος κύματος-εύρος ταλάντωσης (παράμετροι που καθορίζουν τη μορφή της τροχιάς του σώματος).

Υπάρχει ένα σύνολο από μικρά μήκη κύματος, όπου οι δίνες που διαχέονται σε κάθε κύκλο, συγχωνεύονται στον κοντινό ομόρρου. Όταν τα πλάτη ταλάντωσης είναι συγκρίσιμα με τη διάμετρο του σώματος, ο προκύπτων μεγάλης κλίμακας δρόμος στροβίλων μπορεί να πάρει αρκετά μεγάλες διαστάσεις. Σε μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης, διαφορετικοί σχηματισμοί δινών συγχρονίζονται, ο καθένας εντός συγκεκριμένου εύρους πλατών, και οι σχηματισμοί αυτοί είναι παρεμφερείς με εκείνους τους σχηματισμούς δινών, που αναπτύσσονται σε ταλαντευόμενο σώμα χωρίς ύπαρξη μιας μέσης ροής. Αυτοί περιλαμβάνουν τον σχηματισμό ζευγών δινών, που μπορούν καθώς απομακρύνονται από το σώμα, να διαμορφώσουν και ροές τύπου τζετ. Παρά τη συμμετρία της κίνησης του σώματος, οι προαναφερόμενοι σχηματισμοί μπορούν να διακριθούν για τη μη συμμετρία τους.

Σε μία άλλη περίπτωση συγχρονισμού δινών στον ομόρρου, έχουμε την παραγωγή έξι δινών ανά κύκλο. Όπου ο συγχρονισμός αυτός εμφανίζεται για χαμηλά εύρη ταλάντωσης και για μεγάλα μήκη κύματος, τότε η μορφή του ομόρρου που προκύπτει είναι στην ουσία μια 1/3 υπό-αρμονική ταλάντωση, δηλαδή η συχνότητα διέγερσης είναι περίπου το ένα τρίτο της φυσικής συχνότητας διάχυσης.

Το φαινόμενο του “lock-in” εμφανίζεται όταν το μήκος κύματος της τροχιάς είναι συγκρίσιμο με την απόσταση που διανύει ένας μη ταλαντευόμενος κύλινδρος μέσα στο ρευστό σε έναν κύκλο διάχυσης. Σε αυτήν την θεμελιώδη περιοχή του “lock-in”, η φάση της επιτάχυνσης της κίνησης του σώματος στην αρχή του κάθε μισού κύκλου προκαλεί τη δημιουργία ενός «νέου» ζεύγους δινών, προερχόμενων από τα ξεχωριστά διατμητικά στρώματα. Η συνεχής επιτάχυνση-επιβράδυνση του σώματος έχει σαν αποτέλεσμα τη διάχυση τεσσάρων περιοχών στροβιλότητας ανά κύκλο. Κάτω από ένα κρίσιμο μήκος κύματος τροχιάς, σε κάθε μισό κύκλο έχουμε τη συγχώνευση δύο ομόστροφων δινών, έτσι ώστε δύο περιοχές αντίθετης στροβιλότητας να τροφοδοτούνται στον ομόρρου ανά κύκλο. Αυτή η μορφή σχηματισμού δινών δημιουργεί έναν ομόρρου τύπου οδού Von Karman (ή μορφή

2S). Εάν, όμως το μήκος κύματος υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, κάθε μία από τις δύο ομόστροφες δίνες ζευγαρώνει με μία αντίθετα στρεφόμενη δίνη. Ο προκύπτων ομόρρους διακρίνεται για τα ζεύγη δινών που απομακρύνονται από την κεντρική του γραμμή (μορφή 2P). Είναι σημαντικό ότι η μετάβαση από τη μια μορφή στην άλλη συμπίπτει με την αιφνίδια αλλαγή στο χαρακτήρα των δυνάμεων, που ασκούνται πάνω στο σώμα. Οποιαδήποτε αιφνίδια μεταβολή στη φάση της δύναμης της άνωσης (σε σχέση με την κίνηση του σώματος) πρέπει να συνδεθεί με μια απότομη αλλαγή στη δυναμική των δινών του ομόρρου. Το γεγονός ότι πέρα από ένα κρίσιμο μήκος κύματος η φάση αλλάζει ξαφνικά ή κάνει «άλμα» (φαινόμενο “jump”), οφείλεται στην έναρξη του ζευγαρώματος των δινών σε κάθε μισό κύκλο, το οποίο προκαλεί μια αιφνίδια αλλαγή στο συγχρονισμό της διάχυσης των δινών. Για ένα μικρό σύνολο τιμών του μήκους κύματος, μπορούν να εμφανιστούν και οι δύο μορφές ομόρρου και το ποια θα επικρατήσει, εξαρτάται από το ιστορικό της ροής. Έτσι εξηγείται και το φαινόμενο της υστέρησης των δυνάμεων που παρατηρούνται σε σχετικές μετρήσεις των δυνάμεων. Ο σχηματισμός περισσότερων από δύο δινών ανά κύκλο, που επεξηγήθηκε προηγουμένως, (και έτσι η παραγωγή των μορφών 2P ή P+S) είναι προφανής σε πολλά πειράματα εξαναγκασμένης κίνησης κυλίνδρου και μπορεί επίσης να αποδοθεί στους αδρανειακούς όρους της σχετικής κίνησης μεταξύ του σώματος και του ρευστού, που αναπτύσσονται σε τέτοιου είδους ροές.

Όταν το μήκος κύματος της τροχιάς αυξηθεί μέχρι την κρίσιμη τιμή που συζητήθηκε ανωτέρω, τότε οι τέσσερις περιοχές της στροβιλότητας δεν σχηματίζονται. Σε αυτό ακριβώς το μήκος κύματος, ο συγχρονισμός είναι τέτοιος ώστε ένα εκ των διατμητικών στρωμάτων το οποίο διαχωρίζεται κατά τη διάρκεια της επιτάχυνσης, αντί να μετακινηθεί σαν ξεχωριστή οντότητα, κυλιέται μέσα σε μια από τις δίνες που ξεκίνησε στο προηγούμενο μισό κύκλο. Το αποτέλεσμα είναι ότι μόνο δύο δίνες σχηματίζονται σε κάθε κύκλο, και η στροβιλότητα του ομόρρου είναι πιο συγκεντρωμένη. Είναι το φαινόμενο του “resonant synchronization” μέσα στην περιοχή του “lock-in”. Υπάρχει μια κρίσιμη καμπύλη πάνω στο επίπεδο του εύρους ταλάντωσης-μήκους κύματος, η οποία καθορίζει πού θα εμφανιστεί το φαινόμενο του “resonant synchronization” (και επίσης πού θα εμφανιστεί η μετάβαση από τη μια μορφή ομόρρου στην άλλη) και περίπου συμπίπτει με την καμπύλη, που δείχνει σε ποιες περιοχές του επιπέδου έχουμε κορύφωση στις δυνάμεις πάνω στο σώμα. Είναι προφανές ότι η κορύφωση αυτή των δυνάμεων προκαλείται από το φαινόμενο του

“resonant synchronization” και ότι η μεγιστοποίηση των δυνάμεων αυτών, οφείλεται στη διάχυση περισσότερων συγκεντρωμένων περιοχών στροβιλότητας. Είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες περιοχές συγχρονισμού στο επίπεδο εύρους ταλάντωσης-μήκους κύματος, άλλωστε συνεχώς νέα στοιχεία βγαίνουν στην επιφάνεια.

2.3 Ελεύθερη ταλάντωση κυλίνδρου λόγω δινών

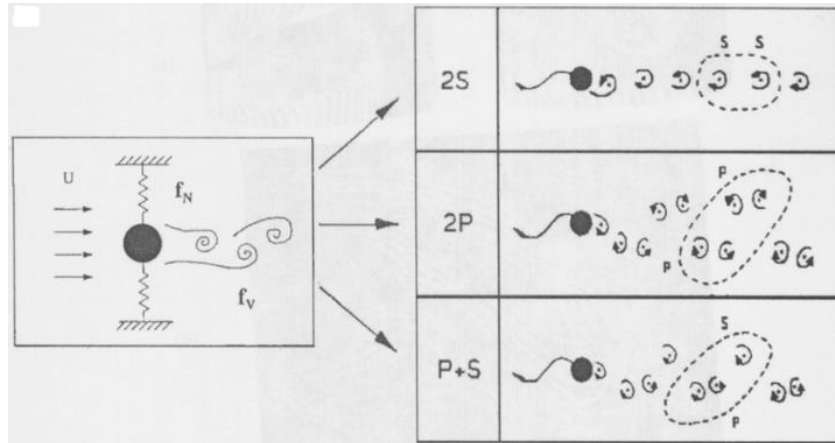
2.3.1 Ιστορική αναδρομή

Οι ταλαντώσεις λόγω δινών στις κατασκευές έχουν πρακτικό ενδιαφέρον σε πολλούς τομείς της μηχανικής. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει αρκετές εργασίες σχετικές με το πρόβλημα της ταλάντωσης μη αεροδυναμικών σωμάτων σε ρευστό, το οποίο είναι αλληλένδετο με το πρόβλημα των ταλαντώσεων που προκαλούνται από τις δίνες (vortex-induced vibrations, εν συντομία VIV) του ομόρρου των σωμάτων αυτών. Η περίπτωση ενός ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου ο οποίος ταλαντώνεται ως αποτέλεσμα των δυνάμεων του ρευστού, είναι μία από τις πιο βασικές και σημαντικές περιπτώσεις στο γενικό αντικείμενο ενδιαφέροντος των αλληλεπιδράσεων μεταξύ του ρευστού και της κατασκευής από τη δημιουργία δινών μη αεροδυναμικών σωμάτων. Η πρακτική σπουδαιότητα του φαινομένου έχει οδηγήσει σε ένα μεγάλο αριθμό θεμελιωδών μελετών. Σε αρκετές από αυτές, εξετάζεται η περίπτωση ενός ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου, ο οποίος είναι περιορισμένος να μετακινείται εγκάρσια προς τη ροή και είναι ελαστικά στηριζόμενος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.16. Είναι ξεκάθαρο ότι οι μεταβαλλόμενες δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι καίριας σημασίας για την δυναμική των αλληλεπιδράσεων. Η δημοσίευση της έρευνας του Feng (1968) ήταν μία μελέτη-ορόσημο περιγράφοντας τις σχέσεις μεταξύ του πλάτους και της συχνότητας του ασκούμενου ρευστού σε συνάρτηση με τις παραμέτρους του συστήματος και την ταχύτητα της ροής.

Στη περίπτωση όπου ένας κύλινδρος εξαναγκάζεται να κινηθεί περιοδικά μέσα σε ένα ρευστό, το σχήμα του ομόρρου (και της περιοδικής φόρτισης αντίστοιχα) καθορίζεται από το πλάτος της ταλάντωσης A και τη συχνότητα διέγερσης. Όταν η κίνηση του κυλίνδρου δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά συμβαίνει εξαιτίας των

ασκούμενων δυνάμεων από τη ροή, η κίνηση είναι αποτέλεσμα μιας ισχυρής αλληλεπίδρασης μεταξύ της μηχανικής του στερεού (κύλινδρος) και της ροής. Ο ομόρρους και η αντίστοιχη φόρτιση προσδιορίζουν τις ταλαντώσεις του κυλίνδρου.

Το ενδιαφέρον των μηχανικών είναι η πλήρης κατανόηση του προβλήματος και πιο συγκεκριμένα σε κρίσιμες πτυχές του προβλήματος που μπορούν να οδηγήσουν σε αστοχία του σώματος.



Σχήμα 2.16. Σχηματικό διάγραμμα ενός ελαστικά στηριζόμενου κυλίνδρου, περιορισμένου να ταλαντώνεται εγκάρσια (διεύθυνση Y) προς την ελεύθερη ροή. Η ανατροφοδότηση ανάμεσα στο υγρό και στην κίνηση του σώματος μπορεί να προκαλέσει την εμφάνιση διαφορετικών μορφών δινών όπως η μορφή “2S” ή η μορφή “2P”. Η μορφή “P+S” δεν εμφανίζεται ποτέ για ελεύθερη, αλλά μόνο για εξαναγκασμένη ταλάντωση [Williamson & Govardhan (2004)].

Με την αύξηση της ταχύτητας (U) της ροής, επιτυγχάνεται μια κατάσταση όπου η συχνότητα σχηματισμού των δινών (f_s) πλησιάζει αρκετά τη φυσική συχνότητα του σώματος (f_N), έτσι ώστε οι ασταθείς πιέσεις των δινών του ομόρρου να προκαλέσουν την απόκριση του σώματος. Συγκεκριμένες μορφές ομόρρου μπορούν να προκληθούν από την κίνηση του σώματος, όπως η μορφή 2S και η μορφή 2P. Είναι ενδιαφέρον το ότι μια εξαναγκασμένη ταλάντωση μπορεί επίσης να οδηγήσει και σε άλλες μορφές δινών, όπως η μορφή $P + S$, η οποία δεν μπορεί να διεγείρει ένα σώμα σε ελεύθερη ταλάντωση.

Ένα σημαντικό φαινόμενο το οποίο ερευνάται εκτενέστατα είναι ο συντονισμός (“lock-in”) το οποίο αναφέρθηκε προηγουμένως. Το φαινόμενο παρουσιάζεται ως εξής: ο κύλινδρος είναι ελεύθερος να κινείται εγκάρσια και το εύρος συχνοτήτων των δυνάμεων που προκαλούνται από τη διάχυση των δινών περιλαμβάνει τη φυσική συχνότητα του συστήματος. Υπό αυτή την περίπτωση, η φυσική συχνότητα του

συστήματος, f_N , η οποία εξαρτάται από την αδράνεια του (μάζα κυλίνδρου + προστιθέμενη μάζα) αλλάζει εξαιτίας του σχηματισμού των δινών, και η συχνότητα διάχυσης δινών, f_s , αλλάζει εξαιτίας της ταλάντωσης του κυλίνδρου. Ένας μηχανισμός ανάδρασης συμβαίνει έτσι ώστε να συναυξάνονται η φυσική συχνότητα και η συχνότητα διάχυσης δινών, οδηγώντας στην ενίσχυση της ταλάντωσης εξαιτίας του συντονισμού. Οι ταλαντώσεις είναι τέτοιες ώστε η κίνηση στη κάθετη (cross-flow) κατεύθυνση είναι μερικές φορές της κίνησης στον οριζόντιο άξονα. Με πιο απλά λόγια, όταν η συχνότητα ταλαντώσεων του κυλίνδρου συμπίπτει ή προσεγγίζει την τιμή της φυσικής συχνότητας ταλάντωσης του κυλίνδρου, $\omega_N = \sqrt{k/m}$, γνωστό ως συντονισμός (“lock-in”) το συγκεκριμένο φαινόμενο, έχει ως αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να αυξάνεται το οποίο μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την αστοχία της κατασκευής.

Πριν την επεξήγηση του σημαντικού φαινομένου του συντονισμού είναι χρήσιμο να παρουσιαστούν κάποιες έννοιες χρήσιμες για την κατανόηση του προβλήματος και για την παρουσίαση-σύγκριση των ερευνών που έχουν γίνει έως τις ημέρες μας.

Αρχικά παρουσιάζεται η γενική εξίσωση κίνησης που διέπεται για ένα κύλινδρο, ελαστικά στηριζόμενο ο οποίος ταλαντώνεται στην εγκάρσια κατεύθυνση ως προς την ροή του ρευστού λόγω της διάχυσης των δινών του ομόρρου:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F, \quad (2.4)$$

όπου m είναι η συνολική ταλαντευόμενη μάζα του συστήματος, c ο συντελεστής απόσβεσης του συστήματος, k το μέτρο ελαστικότητας, και F η συνισταμένη δύναμη του ρευστού στην εγκάρσια κατεύθυνση. Στην περιοχή όπου η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος συγχρονιστεί με την περιοδική μορφή των δινών του ομόρρου (ή περιοδική δύναμη του ρευστού), μια καλή προσέγγιση της δύναμης και της απόκρισης, δίνονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.5)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t), \quad (2.6)$$

όπου $\omega = 2\pi f$ και f είναι η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος. Επίσης, η γωνία της φάσης φ είναι ζωτικής σημασίας στην απόκριση του σώματος στο πρόβλημα, το οποίο έχει δειχθεί σε αρκετές έρευνες [π.χ. Khalak & Williamson (1999), Sarpkaya (1979), Bearman (1984)]. Η απόκριση του κυλίνδρου στην εγκάρσια κατεύθυνση επηρεάζεται από μία ομάδα αδιάστατων μεγεθών, η οποία παρουσιάζεται στον πίνακα 2.2.

Mass ratio	m^*	$\frac{m}{\pi\rho D^2 L/4}$
Damping ratio	ζ	$\frac{c}{2\sqrt{k(m+m_d)}}$
Velocity ratio	U^*	$\frac{U}{f_N D}$
Amplitude ratio	A^*	$\frac{y_w}{D}$
Frequency ratio	f^*	$\frac{f}{f_N}$
Streamwise force coefficient	C_x	$\frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL}$
Transverse force coefficient	C_y	$\frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL}$
Reynolds number	Re	$\frac{\rho U D}{\nu}$

Πίνακας 2.2. Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί το f_N ως η φυσική συχνότητα στο νερό, η συχνότητα f είναι η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος και το f^* ως ο λόγος συχνοτήτων (f/f_N). Η προστιθέμενη μάζα m_A , δίνεται από την σχέση $m_A = C_A m_d$, όπου $m_d = \pi\rho D^2 L/4$ είναι η εκτοπιζόμενη μάζα του ρευστού και C_A είναι ο δυναμικός συντελεστής προστιθέμενης μάζας ($C_A = 1,0$ για ένα κύλινδρο). D =διάμετρος κυλίνδρου, L =μήκος κυλίνδρου, ρ =πυκνότητα ρευστού, U =ταχύτητα ρευστού πριν από τον κύλινδρο, μ = ιξώδες [Khalak & Williamson (1999)].

Το εύρος της απόκρισης και η συχνότητα μπορούν να εξαχθούν από τις τρεις παραπάνω εξισώσεις. Αν χρησιμοποιηθούν αδιάστατες παράμετροι, τότε προκύπτουν το αδιάστατο εύρος και η αδιάστατη συχνότητα ως εξής σύμφωνα με τους Khalak & Williamson(1999):

$$A^* = \frac{1}{4\pi^3} \frac{C_y \sin \varphi}{(m^* + C_A) \zeta} \left(\frac{U^*}{f^*} \right)^2 f^*, \quad (2.7)$$

$$f^* = \sqrt{\frac{m^* + C_A}{m^* + C_{EA}}}, \quad (2.8)$$

όπου C_A είναι ο δυναμικός συντελεστής προστιθέμενης μάζας (συνήθως παίρνει την τιμή 1,0) και C_{EA} ο «δραστικός» συντελεστής προστιθέμενης μάζας, που οφείλεται στην φαινομενική επίδραση της ολικής εγκάρσιας δύναμης του υγρού αναγόμενη στην φάση της επιτάχυνσης του σώματος, $C_y \cos \varphi$:

$$C_{EA} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_y \cos \varphi}{A^*} \left(\frac{U^*}{f^*} \right)^2. \quad (2.9)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πλάτος ταλάντωσης A^* είναι ανάλογο του όρου της κάθετης δύναμης αναγόμενη στη φάση της επιτάχυνσης του σώματος ($C_y \cos \varphi$), και αργότερα θα παρουσιαστεί πειραματικά σύμφωνα με τους Khalak & Williamson

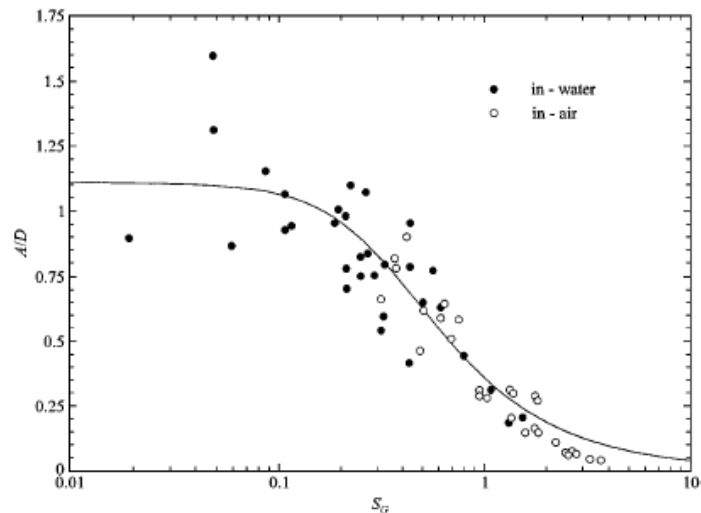
(1999) ότι η τιμή της γωνίας φ για μικρές τιμές του όρου (λόγου) μάζας-απόσβεσης, $m^* \zeta$, έχει μεγάλη επίδραση στην απόκριση της ταλάντωσης. Ακόμη θα γίνει και μία αντιπαράθεση με τη νέα μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε ως προς τα μεγέθη του αδιάστατου πλάτους και της αδιάστατης συχνότητας σε άλλη ενότητα.

Ένα σημαντικό ερώτημα το οποίο ειπώθηκε κατά την έρευνα του φαινομένου ήταν ποιο είναι το μέγιστο εφικτό πλάτος ταλάντωσης. Στην διεθνή βιβλιογραφία αυτό το ερώτημα απαντάται με την παρουσίαση ενός διαγράμματος πλάτους με μία παράμετρο. Αυτή η παράμετρος είναι η ονομαζόμενη παράμετρος Skor-Griffin, S_G , η οποία είναι ανάλογη του όρου μάζας-απόσβεσης και εισάχθηκε για πρώτη φορά από τον Griffin και τους συνεργάτες του το 1970 και παρουσιάζονται τα συλλεγόμενα δεδομένα τους ως διάγραμμα “Griffin”, το οποίο βελτιώθηκε από τους Skor-Balashubramanian (1997). Τα αποτελέσματα των ερευνών τους οι προαναφερόμενοι τα παρουσίασαν στο διάγραμμα του σχήματος 2.17 με μία χαρακτηριστική καμπύλη όπου φαίνεται ότι το πλάτος ταλάντωσης παίρνει μία συγκεκριμένη τιμή καθώς η τιμή του όρου μάζας-απόσβεσης μικραίνει (δηλαδή το S_G). Η εισαγωγή μιας συνδυασμένης παραμέτρου για την έρευνα ως προς το μέγιστο πλάτος που μπορεί να επιτευχθεί δεν είναι τυχαία, αν παρατηρήσει κανείς την εξίσωση 2.7 και είχε αναφερθεί εκτενώς από τον Bearman (1984). Στην εργασία του αναφέρεται ότι για πολύ μεγάλες τιμές του λόγου μαζών ($m^* \gg 1$), η συχνότητα ταλάντωσης του κυλίνδρου (f) στον συντονισμό θα είναι κοντά στην τιμή της συχνότητας διάχυσης δινών για ένα στατικό κύλινδρο (f_0), και επίσης κοντά στη φυσική συχνότητα (f_N), οπότε $f \approx 1,0$. Μαζί με τις παραδοχές ότι οι όροι (U^*/f^*) και f^* είναι σταθεροί, υπό συνθήκες συντονισμού, μπορούμε να φτάσουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$A_{\max}^* \propto \frac{C_Y \sin \varphi}{(m^* + C_A) \zeta}. \quad (2.10)$$

Ένας αριθμός από παραμέτρους μάζας-απόσβεσης έχουν εισαχθεί από διάφορους κατά τη διάρκεια προσέγγισης του προβλήματος. Η παράμετρος όμως που προσεγγίζει καλύτερα το συγκεκριμένο πρόβλημα όπως αναφέρθηκε είναι η παράμετρος των Skor & Griffin (1973), η οποία αναφέρεται ως παράμετρος S_G και χρησιμοποιείται με σκοπό να προβλέπει τα πλάτη της απόκρισης από συλλεγόμενα δεδομένα από διαφορετικά πειράματα. Η παράμετρος ορίστηκε από τον Skor (1974) ως εξής:

$$S_G = 2\pi^3 St^2 (m^* \zeta). \quad (2.11)$$



Σχήμα 2.17. Το διάγραμμα “Griffin” παρουσιάζει το μέγιστο πλάτος A^* με την Skop-Griffin παράμετρο S_G . Το διάγραμμα διαφέρει από εκείνα τα οποία τυπικά χρησιμοποιήθηκαν, από τότε που εισήχθησαν από τον Griffin (1975), σε αυτό χρησιμοποιήθηκε γραμμικός άξονας για το πλάτος A^* . Αυτή η κλίμακα αποκάλυψε μεγάλη διασπορά στο πλάτος, η οποία δεν ήταν εμφανής στα κλασικά διαγράμματα και για τους δύο άξονες. Η καμπύλη προέρχεται από την έρευνα των Skop & Balsubramanian (1997) [Khalak & Williamson (1999)].

Τα διαγράμματα του Griffin έχουν γίνει ένα αναπόσπαστο κομμάτι των μελετών αλλά παρόλο αυτό, υπήρχαν αμφιβολίες από ορισμένους ερευνητές, όπως Sarpkaya (1978, 1979), Bearman (1984) και άλλους. Στο διάγραμμα του “Griffin” παρατηρούμε ότι υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις του πλάτους από την καμπύλη για μικρές τιμές της παραμέτρου S_G (ή του συνδυασμένου όρου μάζας-απόσβεσης) και ο Bearman είχε δηλώσει ότι στην περίπτωση για μικρές τιμές του m^* , ακόμη και αν ο όρος $m^*\zeta$, ή αντίστοιχα ο $(m^* + C_A)\zeta$, κρατηθεί σταθερός, η συχνότητα f θα επηρεαστεί από τις ανεξάρτητες διακυμάνσεις του λόγου μαζών m^* , όπως φαίνεται και από την εξίσωση 2.8. Για αυτό κάποιος μπορεί να περιμένει ότι η κορυφή του πλάτους A^*_{max} δεν θα είναι μία ενιαία σχέση της συνδυασμένης παραμέτρου $m^*\zeta$. Σε αυτό το σημείο σημαντικό θα ήταν να αναφερθεί η δήλωση του Sarpkaya (1993, 1995), ότι η δυναμική απόκριση επηρεάζεται, εκτός των άλλων παραμέτρων, από τους όρους m^* και ζ ξεχωριστά και όχι απλώς από τον συνδυασμένο όρο $m^*\zeta$. Ο Zdravkovich (1990) υποστήριξε και αυτός το συγκεκριμένο σημείο, ο οποίος δήλωσε ότι ο αριθμός Scruton, ο οποίος είναι μια προγενέστερη μορφή της παραμέτρου Skop-Griffin, ο οποίος εμπεριέχει τον $m^*\zeta$, είναι χρήσιμος για τους μηχανικούς που ασχολούνται με τον άνεμο ($m^* > 100$), αλλά δεν είναι δικαιολογημένο για τους μηχανικούς που ασχολούνται με τις παράκτιες κατασκευές ($m^* < 10$). Δήλωσε ότι ο λόγος μαζών και ο

όρος της απόσβεσης πρέπει να χειρίζονται ως ξεχωριστοί παράμετροι σε παράκτιες εφαρμογές από τους μηχανικούς.

Εξισώσεις οι οποίες συμφωνούν με τα συλλεγμένα δεδομένα του διαγράμματος “Griffin” έχουν εξαχθεί από πολλούς ερευνητές. Ο Sarpkaya (1978) χρησιμοποίησε την υποτιθέμενη εξίσωση κίνησης για να εξάγει μία πιο απλή σχέση μεταξύ του A_{max}^* και του S_G όπως φαίνεται:

$$A_{max}^* = \frac{B}{\sqrt{C + S_G^2}}. \quad (2.12)$$

Αυτή η εξίσωση συμφωνεί με τα υπάρχοντα δεδομένα λογικά, όπως φαίνεται και από την καμπύλη του σχήματος 2.17 (όπου $B=0.385$ και $C=0.12$), από το βελτιωμένο διάγραμμα του Skor & Balsubramanian (1997). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα B και C δεν είναι σταθερές. Η τιμή του B είναι ανάλογη του συντελεστή δύναμης C_Y , για παράδειγμα, και ο Sarpkaya δήλωσε ότι το C_Y εξαρτάται από το A^* . Για αυτό, δεν μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι μία τέτοια εξίσωση θα συμφωνεί με ακρίβεια με τα δεδομένα εκ των προτέρων. Μία ακόμη πιο απλή εξίσωση τέθηκε από τους Triantafyllou & Grosenbaugh (1995), όπου παρουσίασαν εμπειρικά το όρο $C_Y \sin \phi$ ως γραμμική σχέση με το A^* :

$$A_{max}^* = \frac{D}{E + S_G}, \quad (2.13)$$

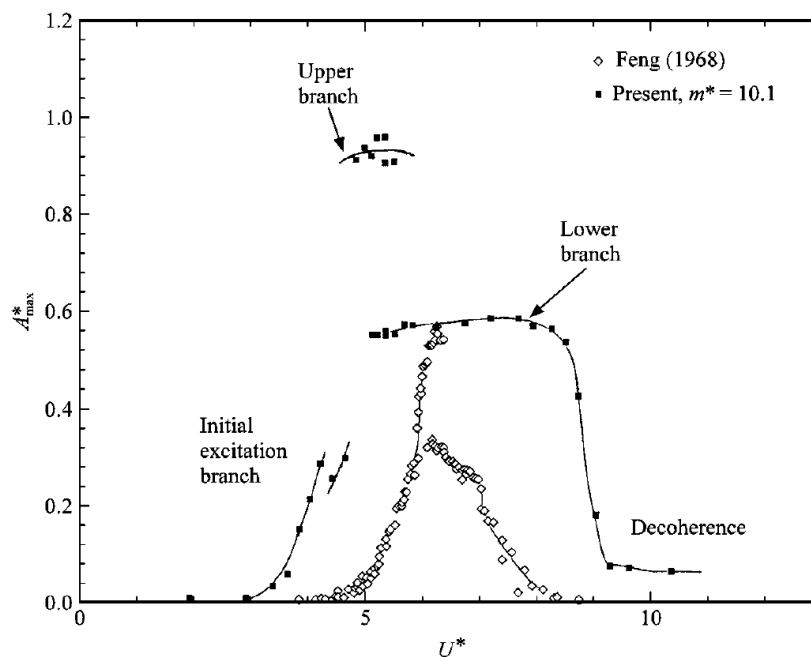
η οποία συμφωνεί με τα δεδομένα του διαγράμματος “Griffin” λογικά καλά.

Ένα σημαντικό ερώτημα στο οποίο έπρεπε να δοθεί απάντηση είναι ποιές μορφές απόκρισης παρουσιάζονται ως συνάρτηση του λόγου μαζών και της απόσβεσης. Αρκετές έρευνες έχουν γίνει για το πλάτος απόκρισης ως συνάρτηση της κανονικοποιημένης ταχύτητας U^* και ανακαλύφθηκε ότι όχι μόνο υπάρχει συντονισμός κοντά στη περιοχή όπου ισχύει η συνθήκη όπου ισχύει $f \approx f_o \approx f_N$, αλλά επίσης υπάρχει μία υστέρηση όπου το πλάτος μπορεί να κάνει «άλμα» ανάμεσα σε μία κατώτερη και μία ανώτερη τιμή για ένα μικρό εύρος τιμών του U^* . Αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά ξεκάθαρα από τον Feng (1968), του οποίου το διάγραμμα απόκρισης παρουσιάζεται στο σχήμα 2.18. Επακόλουθα, τέτοια υστέρηση βρέθηκε επίσης για ταλαντευόμενο καλώδιο από τους Brika & Laneville (1993), και για εύκαμπτο κύλινδρο από τους Saltara (1998) και τους Pesce & Fajarra (1999). Ο λόγος μαζών στα πειράματα του Feng ήταν της τάξης των 250.

Στα πειράματα των Khalak & Williamson (1999) ο λόγος μαζών ήταν αρκετά χαμηλότερος από αυτόν του Feng (1968) και συγκεκριμένα είχε την τιμή $m^*=10,1$

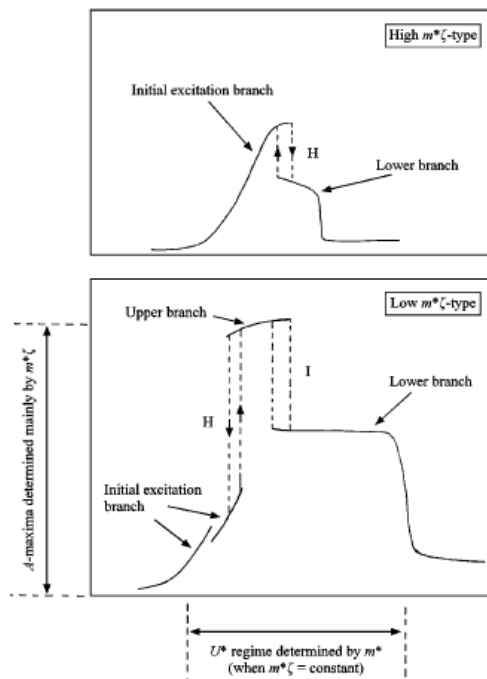
και για τιμή του όρου $m^*\zeta$ η οποία ήταν περίπου στο 4% της αντίστοιχης τιμής του Feng. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το διάγραμμα απόκρισης να είναι αρκετά διαφορετικό όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.18.

Το εύρος του πλάτους απόκρισης είναι ξεκάθαρα αρκετά υψηλότερο σε σύγκριση με τα πειράματα του Feng με χρησιμοποιούμενο μέσο τον αέρα, και η έκταση του U^* κατά την οποία υπάρχει σημαντική απόκριση είναι 4 φορές μεγαλύτερη από ότι βρέθηκε από τον Feng. Ωστόσο, η μορφή της απόκρισης για χαμηλό όρο μάζας-απόσβεσης είναι αρκετά διαφορετικό, το οποίο παρουσιάζεται σχηματικά και στο σχήμα 2.19. Για μεγάλες τιμές του ($m^*\zeta$) σε πειράματα, όπως του Feng, υπάρχουν μόνο δύο κλάδοι στο διάγραμμα, ο οποίος ένας προσδιορίζεται ως «αρχικός κλάδος» και αποδίδει τις μεγαλύτερες τιμές πλάτους, και τον «κατώτερο κλάδο», φαινομενικά με μία υστέρηση ανάμεσα στις δύο καταστάσεις. Στις δημοσιεύσεις των Khalak & Williamson (1996, 1997a,b) παρουσιάστηκε και ένας επιπλέον κλάδος, όποτε έχουμε την ύπαρξη τριών συνολικά κλάδων και ο οποίος ονομάζεται «ανώτερος κλάδος».



Σχήμα 2.18. Διάγραμμα πλάτους απόκρισης σε αντιδιαστολή προς την αδιάστατη ταχύτητα U^* , για $m^*\zeta=0,013$. Παρουσιάζονται ξεκάθαρα στο διάγραμμα οι τρεις κλάδοι απόκρισης (αρχικός, ανώτερος και κατώτερος). Αυτή η απόκριση χαμηλού όρου $m^*\zeta$ (για $m^*=10,1$) ξεχωρίζει από την απόκριση για υψηλό $m^*\zeta$ (για $m^*=248$) του Feng (1968), όπου υπάρχουν μόνο δύο κλάδοι (αρχικός και κατώτερος). Άξιο προσοχής είναι το αρκετά μεγαλύτερο μέγιστο πλάτους και η μεγαλύτερη περιοχή συντονισμού για χαμηλό $m^*\zeta$ [Khalak & Williamson (1999)].

Σύμφωνα με την δημοσίευση των Khalak & Williamson (1997b) δείχτηκε ότι η μετάβαση αρχικός κλάδος \leftrightarrow ανώτερος κλάδος συνοδεύεται από μία υστέρηση, ενώ στην δημοσίευση των Khalak-Williamson (1999) δείχτηκε ότι υπάρχει διακοπτόμενη εναλλαγή στην μετάβαση ανώτερος κλάδος \leftrightarrow κατώτερος κλάδος. Οι δύο προηγούμενες μεταβάσεις παρουσιάζονται σχηματικά και στο σχήμα 2.19.

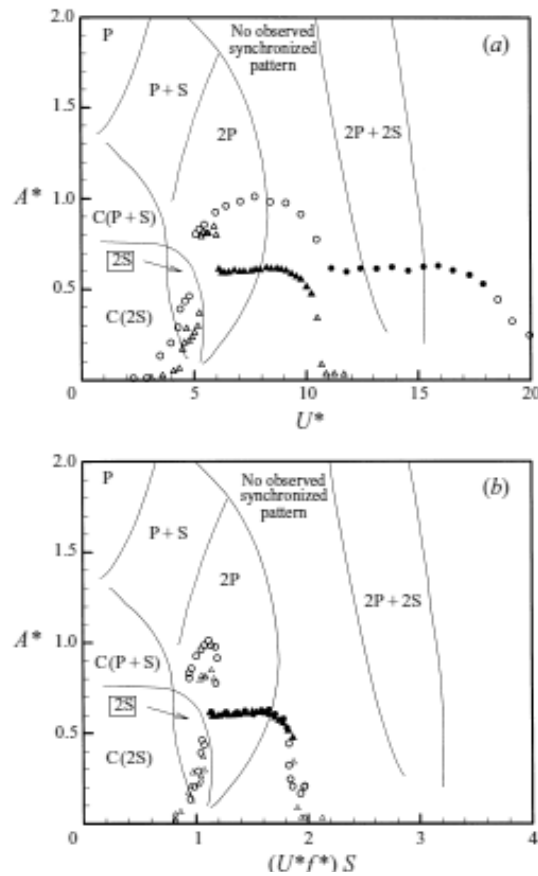


Σχήμα 2.19. Οι δύο διαφορετικές μορφές του πλάτους απόκρισης παρουσιάζονται εδώ σχηματικά (ο κάθετος άξονας αναπαριστά το μέγεθος A^* και ο οριζόντιος αναπαριστά το U^*). Η μορφή του Feng για απόκριση υψηλού $m^*\zeta$ παρουσιάζει μόνο δύο κλάδους (αρχικός και κατώτερος), ενώ η απόκριση χαμηλού $m^*\zeta$ παρουσιάζει τρεις κλάδους (αρχικός, ανώτερος και κατώτερος). Οι καταστάσεις μετάβασης είναι είτε με υστέρηση (H) ή με διακοπτόμενες καταστάσεις εναλλαγής (I). Το εύρος του U^* για τον συγχρονισμό ελέγχεται πρωτίστως από το m^* (όταν το $m^*\zeta$ είναι σταθερό), ενώ τα μέγιστα των αποκρίσεων ελέγχονται κυρίως από το αποτέλεσμα του $m^*\zeta$ [Khalak & Williamson (1999)].

2.3.2 Απόκριση συχνότητας

Είναι γνωστό από την μελέτη των Griffin & Ramberg (1982) και Khalak & Williamson (1999) ότι η μείωση του λόγου μαζών μπορεί να αυξήσει την περιοχή της ταχύτητας U^* κατά την οποία υπάρχει συντονισμός. Σε αυτή την ενότητα, όλες οι αποκρίσεις θα είναι τύπου χαμηλής μάζας-απόσβεσης (για $(m^*+C_A)\zeta < 0,05$), παρουσιάζοντας τρεις κλάδους απόκρισης, μιας και το ενδιαφέρον παρουσιάζεται κυρίως για μικρές τιμές αυτού του όρου. Θα δειχθεί, σύμφωνα με την μελέτη των

Govardhan & Williamson (2000) ότι, η μείωση του m^* σε $O(1)$ (τάξεως της μονάδος) μπορεί να αποδώσει μία περιοχή συντονισμού η οποία υπερβαίνει την μεγαλύτερη περιοχή που έχουμε δει ως αυτό το σημείο. Θα αποδοθούν απλές εκφράσεις για την συχνότητα ταλάντωσης, στον κατώτερο κλάδο, οι οποίες μας επιτρέπουν να λάβουμε μία σχέση για την περιοχή του συντονισμού ως συνάρτηση του λόγου μαζών, m^* . Αυτές οι σχέσεις θα δείξουν ότι υπάρχει ένας κρίσιμος λόγος μαζών, κάτω του οποίου η περιοχή του συντονισμού εκτείνεται στο άπειρο.



Σχήμα 2.20. Πλάτος απόκρισης για δύο διαφορετικούς λόγους μαζών αναπαριστώνται γραφικά στον χάρτη καταστάσεων σχηματισμού δινών του ομόρρου των Williamson-Roshko (1988). Στο (b), οι περιοχές του κατώτερου κλάδου ομαδοποιούνται αρκετά καλά όταν αναπαριστώνται γραφικά με μία διαφορετική κανονικοποιημένη ταχύτητα $(U^*/f^*)S$, όπως αναφέρεται στους Khalak-Williamson (1999). ●, ○, για $m^*=1,19$ και $(m^*+C_A)\zeta=0,0110$, ▲, Δ, για $m^*=8,63$ και $(m^*+C_A)\zeta=0,0145$. Τα «κλειστά» σχήματα αναφέρονται στις περιοχές του κατώτερου κλάδου [Govardhan-Williamson (2000)].

Η σύγκριση του μεγέθους της περιοχής συντονισμού για δύο λόγους μαζών μπορεί να φανεί στο σχήμα 2.20. Σε μέτριους λόγους μαζών ($m^*=8,63$), η περιοχή συντονισμού εκτείνεται σε ταχύτητες περίπου $U^*\approx 10$. Όταν ο λόγος μαζών μειώνεται σε $m^*=1,19$, αυτή η περιοχή υπόκειται μία σημαντική αύξηση, φτάνοντας σε

ταχύτητες $U^* \approx 18$. Ωστόσο, όταν τα δύο σύνολα δεδομένων απόκρισης αναπαριστώνται γραφικά με την παράμετρο $(U^*/f^*)S$, τότε τα δύο σύνολα δεδομένων ομαδοποιούνται πολύ καλύτερα. Μία τέτοια ομαδοποίηση για δεδομένα ελεύθερα ταλαντευόμενου κυλίνδρου χρησιμοποιώντας αυτή την παράμετρο ταχύτητας έγινε για πρώτη φορά από τους Khalak & Williamson (1999). Μιας και στην περίπτωση του χαμηλού λόγου μαζών εδώ έχουμε χαμηλό συντελεστή μάζας-απόσβεσης, το μέγιστο του πλάτους στον ανώτερο κλάδο αυξάνεται, καθώς τα σύνολα των δεδομένων στον κατώτερο κλάδο ομαδοποιούνται καλά. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι τα επίπεδα στον κατώτερο κλάδο είναι σχεδόν ανεξάρτητα του λόγου μαζών, m^* , όσο μικρότερος είναι ο όρος $(m^* + C_A)\zeta$. Αυτό είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα του διαγράμματος Griffin του σχήματος 2.21, στο οποίο φαίνεται ότι για $(m^* + C_A)\zeta < 0,05$, τα πλάτη του κατώτερου κλάδου παραμένουν σταθερά.

2.3.3 Συχνότητα χαμηλότερου κλάδου και ύπαρξη κρίσιμου λόγου μαζών (m^* crit)

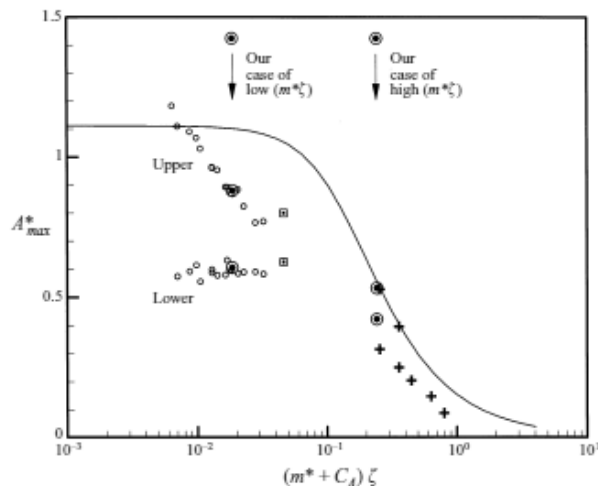
Σε αυτή την ενότητα, ενδιαφερόμαστε αρχικώς για την συχνότητα απόκρισης, και πιθανά μέσα για να προβλεφθεί η συχνότητα. Γυρνώντας πίσω στην περίπτωση για $m^* = 1,19$, τώρα αναπαρίσταται γραφικά στο σχήμα 2.22, η συχνότητα του κατώτερου κλάδου παραμένει σταθερή για όλη την περιοχή του συντονισμού με μία τιμή $f^*_{lower} \approx 1,8$. Ένα παρόμοιο σταθερό επίπεδο συχνότητας στην περιοχή του κατώτερου κλάδου παρουσιάζεται στο σχήμα 2.23. Αυτό είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό της περιοχής του κατώτερου κλάδου για μικρή τιμή του συνδυασμένου όρου μάζας-απόσβεσης. Αυτό υποστηρίζεται και από τα δεδομένα συχνοτήτων των μελετών του Hover et al. (1998) και των Khalak & Williamson (1999), οι οποίες ήταν σε συγκρίσιμες συνθήκες χαμηλής μάζας-απόσβεσης.

Μιας και η απόκριση στην περιοχή του κατώτερου κλάδου είναι αξιόλογα ημιτονοειδής και περιοδική, οι εξισώσεις κίνησης (2.4)-(2.6) είναι τέλεια αντιπροσωπευτικές για την δυναμική του συστήματος. Οπότε η εξίσωση της συχνότητας θα έχει την μορφή της εξίσωσης (2.8) η οποία ξαναπαρουσιάζεται:

$$f^* = \sqrt{\frac{m^* + C_A}{m^* + C_{EA}}} \quad (2.8)$$

Ο «δραστικός» συντελεστής προστιθέμενης μάζας (C_{EA}) είναι μία συνάρτηση των

$\{(U^*/f^*)S, A^*\}$, και θα έχει μία μοναδική τιμή σε κάθε σημείο κατά μήκος του κατώτερου κλάδου, όταν θα αναπαρίσταται γραφικά όπως στο σχήμα 2.20(b). Αφού όλα τα δεδομένα του κατώτερου κλάδου βρίσκονται όλα κατά μήκος της ίδιας γραμμής σε αυτό το σχήμα, σχεδόν ανεξάρτητα από τον λόγο μαζών, m^* , τότε η τιμή του m^* κατά μήκος αυτής της γραμμής θα είναι ανεξάρτητη του m^* . Για μία δεδομένη τιμή του m^* , κατά μήκος του κατώτερου κλάδου η συχνότητα είναι σχεδόν σταθερή όπως μπορεί να παρατηρηθεί στο σχήμα 2.23. Αυτό σηματοδοτείται από την σχέση (2.8) ότι είναι σταθερό το C_{EA} κατά μήκος του κατώτερου κλάδου. Αν το C_{EA} είναι σταθερό για ένα σύνολο δεδομένων για ένα δεδομένο m^* , τότε θα είναι το ίδιο σταθερό για όλες τις άλλες τιμές του m^* . Συνεχίζεται και εδώ η υπόθεση ότι η τιμή της μάζας-απόσβεσης είναι μικρή.

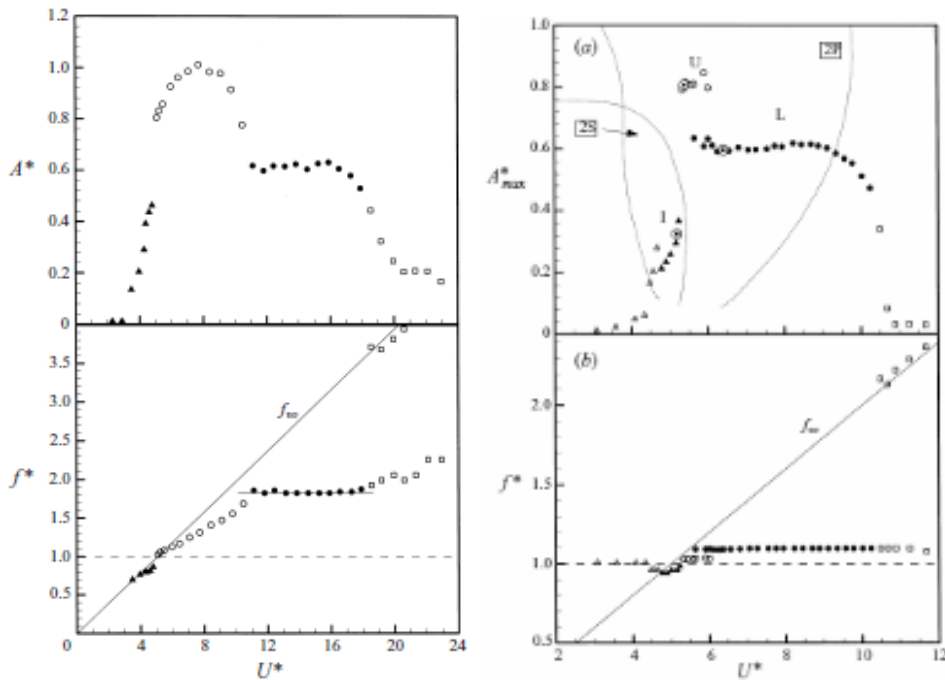


Σχήμα 2.21. Το διάγραμμα του ‘Griffin’ παρουσιάζει τα μέγιστα του πλάτους A^*_{max} σε αντιδιαστολή με την συνδυασμένη παράμετρο $[(m^*+C_A)\zeta]$. ◉ Govardhan-Williamson (2000), + Feng (1968), ◼ Hover (1998), ◊ Khalak & Williamson (1999), — Skop & Balasubramanian (1997) [Govardhan & Williamson (2000)].

Τώρα αναζητούμε την τιμή του C_{EA} η οποία είναι σταθερή κατά μήκος της περιοχής του κατώτερου κλάδου και είναι ανεξάρτητη του m^* . Για να βρούμε αυτή την τιμή, βρίσκουμε την τιμή για την οποία ταιριάζει καλύτερα στην σχέση (2.8) η οποία αντιπροσωπεύει τα πειραματικά δεδομένα του σχήματος 2.24. Από την ανάλυση, σύμφωνα με τους Govardhan & Williamson (2000), βρίσκεται με πειραματική ακρίβεια $C_{EA} = -0,54 \pm 0,02$, και οπότε καταλήγουμε στην επόμενη σχέση συχνότητας για τον κατώτερο κλάδο:

$$f_{lower}^* = \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* - 0,54)}}, \quad (2.14)$$

όπου $C_A=1,0$. Αυτή η καμπύλη σχεδιάστηκε μέσω δεδομένων στο σχήμα 2.24 και αντιπροσωπεύει τα δεδομένα πολύ καλά. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι η τιμή του C_{EA} που κατέληξαν οι Govardhan & Williamson (2000) είναι σύμφωνη με τα αποτελέσματα για εξαναγκασμένη ταλάντωση του Gopalkrishnan (1993), όπου ο τελευταίος βρήκε $C_{EA} \approx -0,60$ για μία μεγάλη περιοχή του επιπέδου $\{(A^*, U^*/f^*)S\}$, περικλείοντας ολόκληρη την έκταση του κατώτερου κλάδου. Η έκφραση για το f_{lower}^* της εξισώσεως (2.14) μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε με απλά μέσα την υψηλότερη συχνότητα στην περιοχή του συντονισμού, για μία γνωστή τιμή του λόγου μαζών, m^* .



Σχήμα 2.22. Το πλάτος και η συχνότητα απόκρισης ως συνάρτηση της κανονικοποιημένης ταχύτητας, U^* , για πολύ χαμηλό λόγο μαζών, $m^*=1,19$ ($\zeta=0,00502$, αριστερό διάγραμμα). Η μέγιστη συχνότητα απόκρισης στην περιοχή του συντονισμού, και το τέλος του συντονισμού, είναι και τα δύο σημαντικά μεγαλύτερα σε αυτό τον χαμηλό λόγο μαζών m^* , σε σύγκριση με την περίπτωση με $m^*=8,63$ ($\zeta=0,00151$, δεξιό διάγραμμα). \blacktriangle , αρχικός κλάδος, \circ , ανώτερος κλάδος, \bullet , κατώτερος κλάδος, \square , περιοχή αποσυντονισμού [Govardhan & Williamson (2000)].

Μία σημαντική συνέπεια της εξισώσεως (2.14) είναι ότι η συχνότητα γίνεται όλο και μεγαλύτερη όσο ο λόγος μαζών μειώνεται σε μία οριακή τιμή, ίση με 0,54. Γι' αυτό συμπεραίνεται ότι υπάρχει μία κρίσιμη τιμή του λόγου μαζών:

$$m_{crit}^* = 0,54.$$

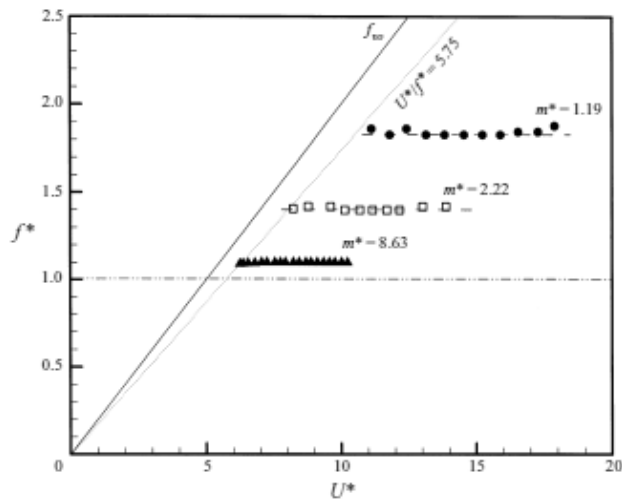
Καθώς ο λόγος μαζών μειώνεται, η τιμή της αδιάστατης ταχύτητας, προσδιορίζει την έναρξη του κατώτερου κλάδου, αυξάνεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\left(\frac{U^*}{f^*}\right)_{start} = 5,75. \quad (2.15)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.14) και (2.15), βρίσκουμε την ταχύτητα στην οποία ξεκινά ο κατώτερος κλάδος:

$$U_{start}^* \approx 5,75 \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* - 0,54)}}, \quad (2.16)$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι: $U_{start}^* \rightarrow \infty$ καθώς $m^* \rightarrow m_{crit}^*$.

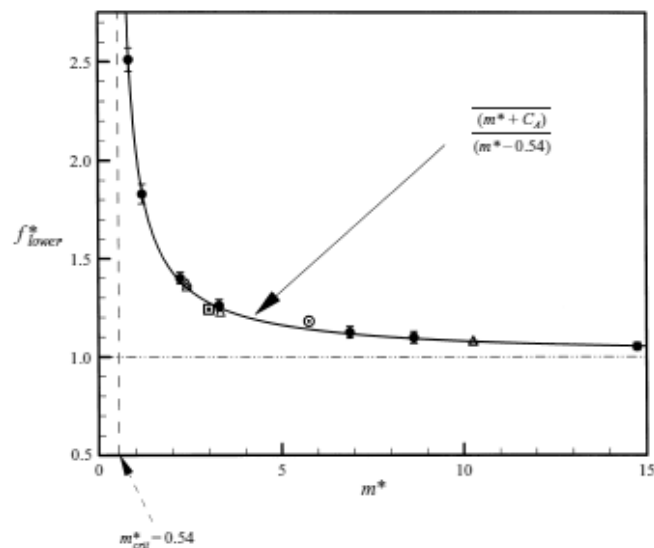


Σχήμα 2.23. Η συχνότητα απόκρισης κατώτερου κλάδου για διάφορους λόγους μαζών, παρουσιάζει μία σχεδόν σταθερή τιμή για κάθε συγκεκριμένο m^* . Περίπτωση χαμηλού m^* [Govardhan & Williamson (2000)].

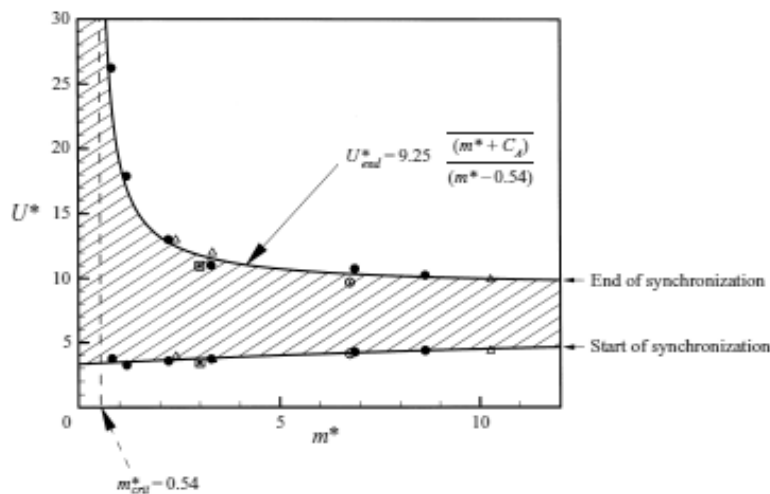
Γι' αυτό, όταν οι λόγοι μαζών βρεθούν κάτω της κρίσιμης τιμής 0,54, ο κατώτερος κλάδος δεν μπορεί να προσεγγιστεί και παύει να υπάρχει. Ενώ ακόμη καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ανώτερος κλάδος θα συνεχίσει αόριστα, και η περιοχή του συντονισμού θα εκτείνεται στο άπειρο. Το προηγούμενο συμπέρασμα μπορούμε να το παρατηρήσουμε και στο διάγραμμα $A^* - U^*$ του σχήματος 2.26 όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι για $m^* = 0,52$ έχουμε μόνο τον αρχικό και ανώτερο κλάδο, χωρίς να είναι δυνατόν να σχηματιστεί ο κατώτερος κλάδος.

Για συνθήκες όταν ο λόγος μαζών είναι πάνω από την κρίσιμη τιμή, $m^* > m_{crit}^*$, έχουμε την δυνατότητα να προβλέψουμε την ταχύτητα, που ορίζει το τέλος του

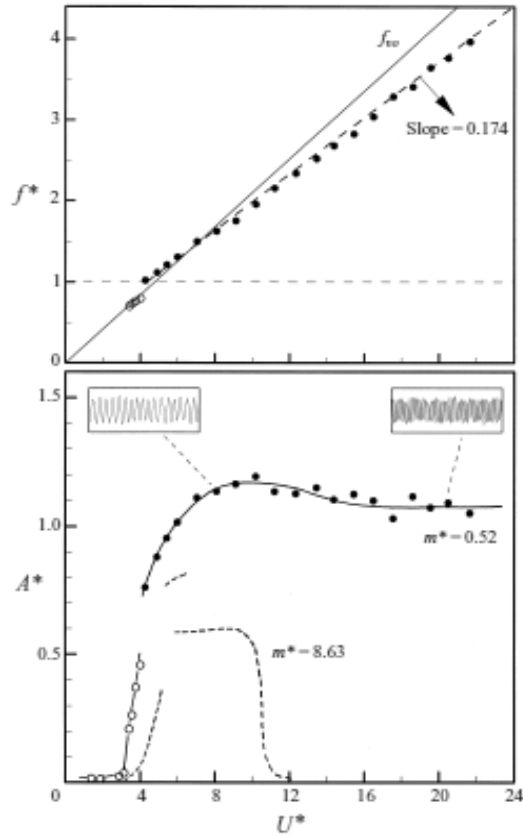
κατώτερου κλάδου με τρόπο παρόμοιο της προηγούμενης ανάλυσης, οπότε σύμφωνα με τους Govardhan & Williamson (2000) έχουμε:



Σχήμα 2.24. Μεταβολές της συχνότητας του κατώτερου κλάδου (f_{lower}^*) ως συνάρτηση με τον λόγο μαζών m^* . Η εξίσωση για το f_{lower}^* συμπίπτει με τα δεδομένα αξιόλογα καλά, και δείχνει μία σημαντική αύξηση του f_{lower}^* όσο προσεγγίζουμε τον κρίσιμο λόγο μαζών, $m_{crit}^*=0,54$. ● Govardhan & Williamson (2000), △ Khalak & Williamson (1999), ◻ Hover et al. (1998), ⊙ Anand (1985) [Govardhan & Williamson (2000)].



Σχήμα 2.25. Η έκταση του συντονισμού (σκιαγραφημένη περιοχή) ως συνάρτηση του λόγου μαζών, m^* . Η εξίσωση για το U_{end}^* ταιριάζει με τα δεδομένα, και δείχνει μία σημαντική αύξηση στην έκταση της περιοχής συντονισμού, προσδιοριζόμενη από το U_{end}^* , καθώς προσεγγίζεται ο κρίσιμος λόγος μαζών, $m_{crit}^*=0,54$. Για $m^* < m_{crit}^*$, το εύρος του συντονισμού θα εκτείνεται στο άπειρο. ● Govardhan & Williamson (2000), △ Khalak & Williamson (1999), ◻ Hover et al. (1998), ⊙ Anand (1985) [Govardhan & Williamson (2000)].



Σχήμα 2.26. Η συμπεριφορά της απόκρισης όταν ο λόγος μαζών βρίσκεται κάτω της κρίσιμης τιμής, $m^*=0,52$. Ο ανώτερος κλάδος συνεχίζει πέρα από τα όρια της ταχύτητας του διαγράμματος ($U^*\sim 20$). Η αντίστοιχη συχνότητα εκτείνεται σε μία ευθεία γραμμή με κλίση 0,174, η οποία προβλέπεται από την εξίσωση (2.15). Ο λόγος μαζών και ο συντελεστής απόσβεσης είναι $m^*=0,52$ και $\zeta=0,0052$ αντίστοιχα [Govardhan & Williamson (2000)].

$$\left(\frac{U^*}{f^*}\right)_{end} = 9,25, \quad (2.17)$$

δίνοντας την εξίσωση για την U^*_{end} :

$$U^*_{end} \approx 9,25 \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* - 0,54)}}. \quad (2.18)$$

Η προηγούμενη έκφραση αποδίδει μία ποσοτική μέτρηση της έκτασης της περιοχής του συντονισμού, για ένα δεδομένο λόγο μαζών, m^* . Όπως συζητήθηκε προηγουμένως, η περιοχή συντονισμού γίνεται αόριστα μεγάλη όταν ο λόγος μαζών βρεθεί κάτω της κρίσιμης τιμής, 0,54. Η έκταση ολόκληρης της περιοχής συντονισμού, ως συνάρτηση του λόγου μαζών, m^* , παρουσιάζεται στο σχήμα 2.25 ως σκιαγραφημένη περιοχή. Τα δεδομένα που σηματοδοτούν το τέλος του συντονισμού (U^*_{end}) αντιπροσωπεύονται καλά από την σχέση (4.17). Το διάγραμμα περιέχει

δεδομένα από τις μελέτες των Anand (1985), Hover et al. (1998) και Khalak & Williamson (1999).

Άξιο αναφοράς είναι ότι τα δεδομένα της συχνότητας ακολουθούν μία ευθεία γραμμή η οποία έχει κλίση περίπου 0,174 ή 1/5,75. Η ευθεία γραμμή δεν περνά από την αρχή των αξόνων, αλλά αντιθέτως τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στην θετική του πλευρά. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα, αν προσέξουμε το σχήμα 2.27.

Ένα σχηματικό διάγραμμα της συχνότητας απόκρισης για διάφορους λόγους μαζών δίνεται στο σχήμα 2.27. Για ένα μεγάλο εύρος λόγου μαζών, η αρχή του ανώτερου κλάδου βρέθηκε να είναι κοντά στο σημείο 1, όπου $U^* \approx 1/S \approx 5,0$ και όπου $f^* \approx 1,0$. Οι συχνότητες του ανώτερου κλάδου που παρουσιάζονται σε αυτό το διάγραμμα, ακολουθούν μία ευθεία γραμμή από αυτό το σημείο, μέχρι το σημείο όπου ο κατώτερος κλάδος αρχίζει. Η έναρξη του κατώτερου κλάδου ικανοποιεί τη συνθήκη της εξίσωσης (2.15):

$$\left(\frac{U^*}{f^*}\right)_{start} = 5,75,$$

και παρουσιάζεται ως η μία από τις δύο ευθείες με κουκίδες σε αυτό το σχήμα. Για ένα δεδομένο λόγο μαζών (m^*), η αρχή του κατώτερου κλάδου θα ορίζεται, κατά μήκος αυτής της γραμμής, όπου η συχνότητα f^* γίνεται f^*_{lower} η οποία δίνεται από την εξίσωση (2.14):

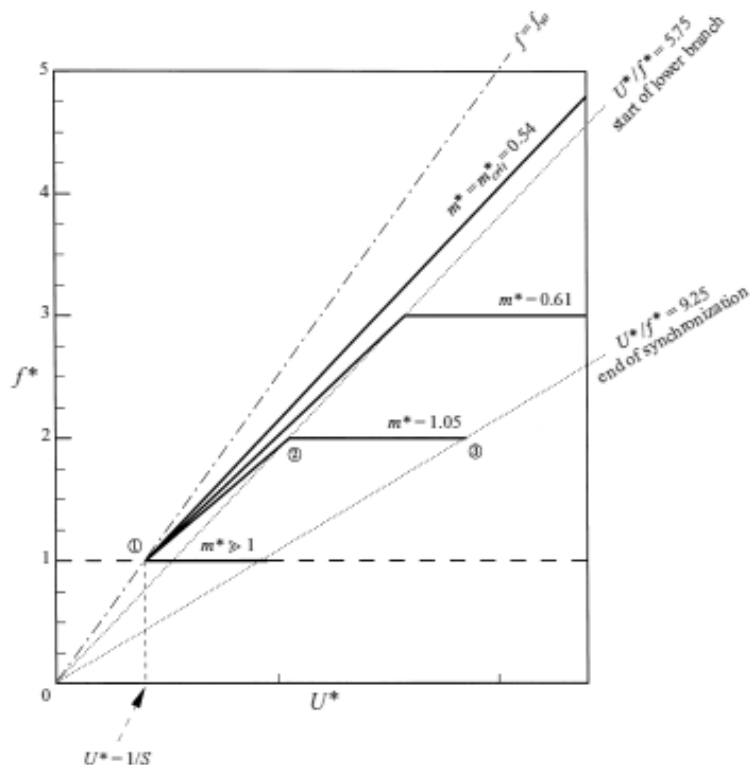
$$f^*_{lower} = \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* - 0,54)}},$$

η οποία στην περίπτωση για $m^* = 1,05$, για παράδειγμα, σηματοδοτείται ως το σημείο 2. Τότε οι συχνότητες του κατώτερου κλάδου παραμένουν σταθερές μέχρι να φτάσουμε στο σημείο 3, το οποίο βρίσκεται στην άλλη ευθεία με κουκίδες, η οποία ορίζει το τέλος του κατώτερου κλάδου, η οποία δίνεται από την σχέση (2.17):

$$\left(\frac{U^*}{f^*}\right)_{end} = 9,25.$$

Όσο ο λόγος μαζών προσεγγίζει την τιμή $m^* = 0,54$, το σημείο κατά μήκος της ευθείας $(U^*/f^*) = 5,75$ όπου ο κατώτερος κλάδος αρχίζει θα ανταποκρίνεται σε μία συχνότητα f^* η οποία τείνει στο άπειρο. Υπό αυτές τις συνθήκες, οι συχνότητες του ανώτερου κλάδου θα βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία η οποία είναι παράλληλη της $(U^*/f^*) = 5,75$ αλλά μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά $(\Delta U^* = 0,75)$. Η κλίση της είναι 0,174 και ταιριάζει με την ευθεία του ανώτερου κλάδου η οποία βρέθηκε από

πειραματικές μετρήσεις. Αυτό εξηγεί γιατί η ευθεία της συχνότητας του σχήματος 2.17 δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αντιθέτως τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στην θετική του πλευρά. Το συνοπτικό διάγραμμα του σχήματος 2.17 επίσης εξηγεί γιατί η κλίση της ευθείας συχνοτήτων του ανώτερου κλάδου θα είναι πάντα μικρότερη από την κλίση που ορίζεται από την ευθεία της συχνότητας Strouhal, $f=f_s$.



Σχήμα 2.27. Σχηματική γραφική αναπαράσταση της συχνότητας απόκρισης για διαφορετικούς λόγους μαζών, για συνθήκες χαμηλού όρου $m^* \zeta$. Η συχνότητα στον κατώτερο κλάδο παραμένει σταθερή για κάθε m^* [Govardhan & Williamson (2000)].

2.3.4 Σχετικές επιρροές της μάζας και της απόσβεσης

Οι Khalak & Williamson (1997) επέλεξαν στη μελέτη τους τρεις λόγους μαζών, οι 2,4, 10,3 και 20,6, αλλά και δώδεκα διαφορετικές αποκρίσεις της συνάρτησης της U^* έχουν αποδοθεί για να ερευνηθούν και να παρουσιάσουν την μορφή των καμπυλών. Η μάζα-απόσβεση, $m^* \zeta_{air}$ για διαφορετικές επαναλήψεις εκτείνεται στο εύρος τιμών 0,006 έως 0,030.

Τα διαγράμματα του μέγιστου πλάτους της απόκρισης, A^* σε αντιδιαστολή με U^* για τρεις διαφορετικούς λόγους μαζών, 2,4, 10,3, 20,6, παρουσιάζονται στα σχήματα

2.28(a)-2.28(c), αντίστοιχα. Η αδιάστατη ταχύτητα φαίνεται να ομαδοποιεί το εύρος της διέγερσης για ένα δεδομένο λόγο μαζών. Το μέγιστο του ανώτερου κλάδου, ωστόσο, είναι εξαρτώμενο από την απόσβεση, όπως ήταν αναμενόμενο.

Το σχετικό εύρος της διέγερσης του ανώτερου και του κατώτερου κλάδου φαίνεται να έχει εξάρτηση από τον λόγο απόσβεσης, με μικρότερη απόσβεση έχουμε ένα μεγαλύτερο εύρος για τον ανώτερο κλάδο, επίσης δε, έχουμε μεγαλύτερα πλάτη στον ανώτερο κλάδο. Επίσης, οι μεταβάσεις μεταξύ του ανώτερου και κατώτερου κλάδου, γίνονται περισσότερο απότομες καθώς ο λόγος μαζών μειώνεται.

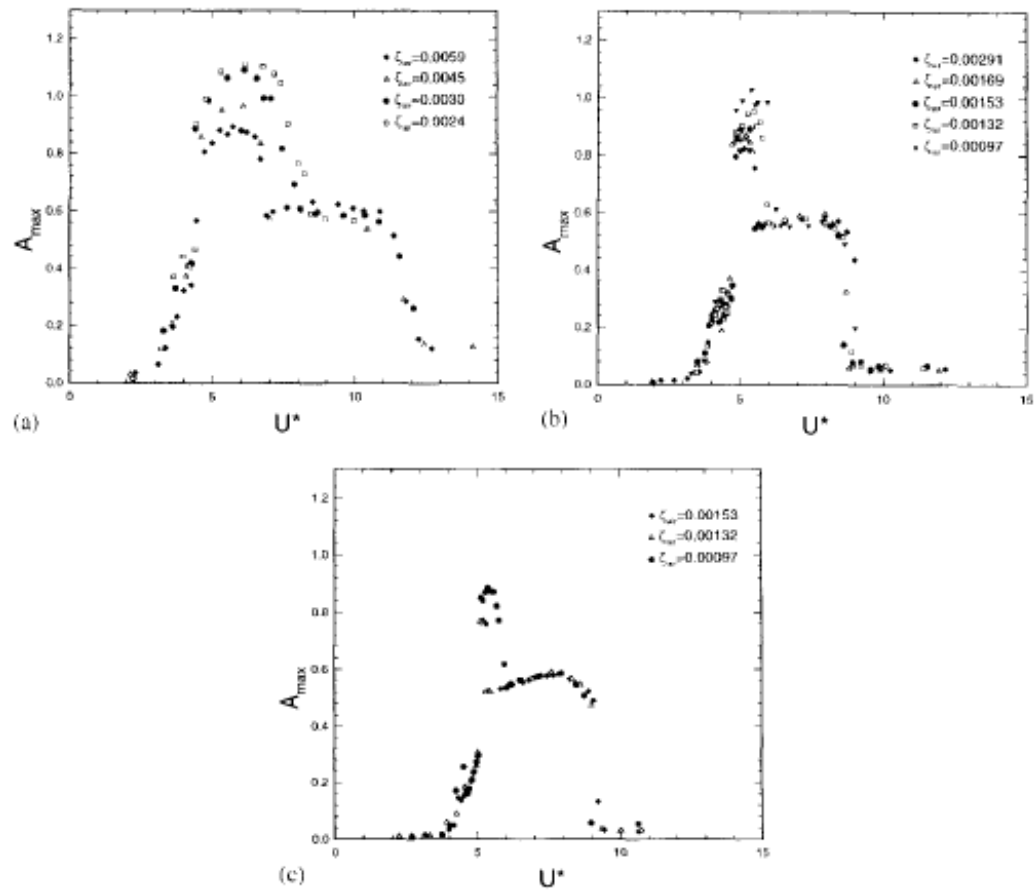
2.3.5 Περιληπτική σύνοψη της επίδρασης του λόγου μαζών στην απόκριση

Οι γενικές επιδράσεις του μεταβαλλόμενου λόγου μαζών στην απόκριση μπορεί να παρατηρηθεί στο σχήμα 2.29 όπου υπάρχουν σε ζεύγη τα διαγράμματα του πλάτους και της συχνότητας για αρκετά παρόμοιους όρους μάζας-απόσβεσης ($(m^* + C_A)\zeta \approx 0,01$) και στα τρία ζεύγη διαγραμμάτων, οπότε τα μέγιστα των πλατών θα είναι παρόμοια. Όσο ο λόγος μαζών μειώνεται, το σχήμα δείχνει μία μεγάλη αύξηση στο εύρος του συντονισμού και για τον ανώτερο και για τον κατώτερο κλάδο. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο σε αυτή την παρουσίαση, όπου όλα τα διαγράμματα είναι της ίδιας κλίμακας. Τα επίπεδα της αποκρινόμενης συχνότητας αυξάνονται δραματικά, όσο το m^* μειώνεται.

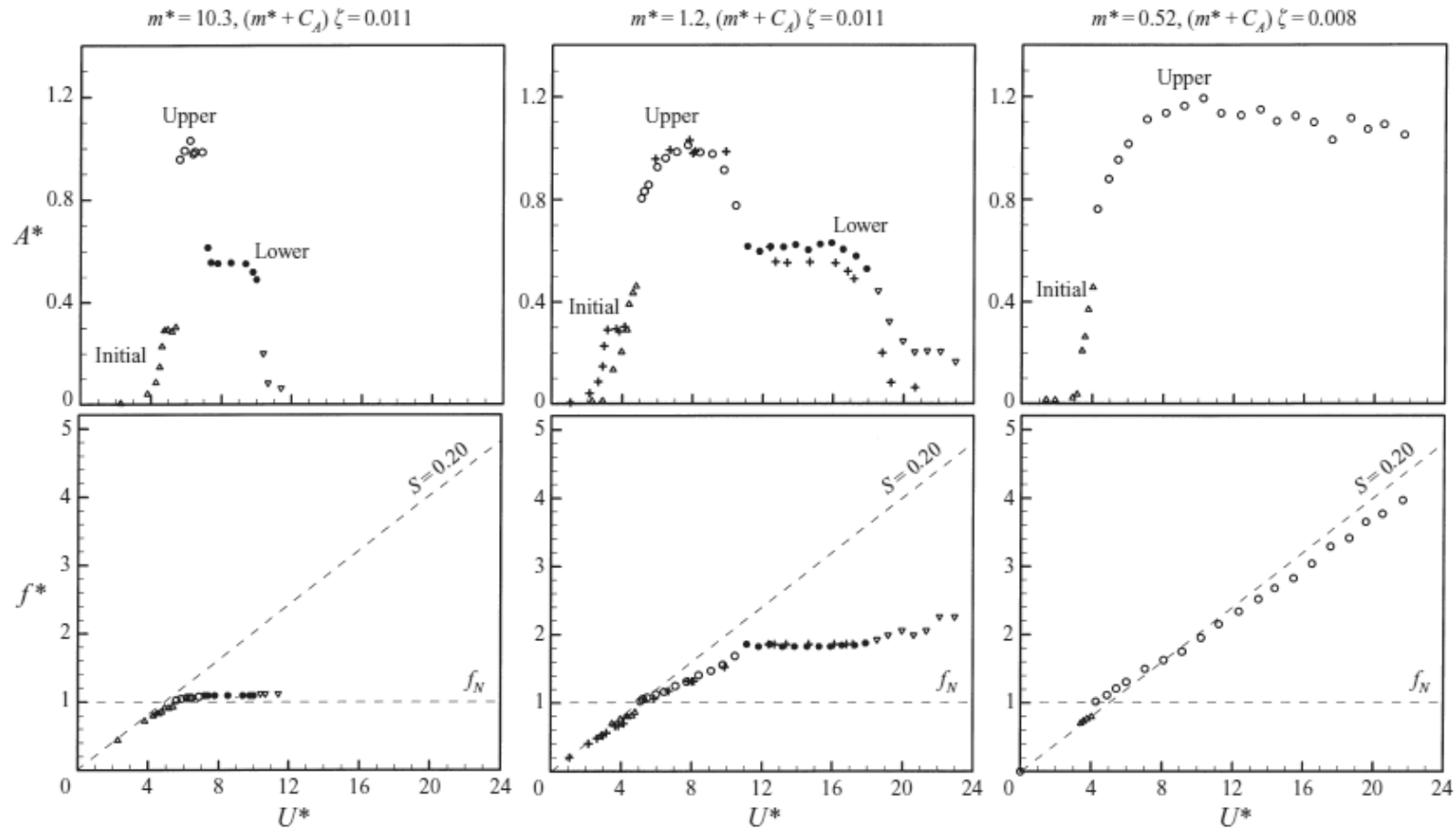
Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιος μπορεί να προβλέψει προσεγγιστικά αυτών των ειδών αποκρίσεις από ένα σύνολο δεδομένων πλάτους-συχνότητας, εάν υποθέσουμε ότι, για παρόμοιους όρους μάζας-απόσβεσης ($m^*\zeta$), τα διαγράμματα πλάτους απόκρισης ομαδοποιούνται στην ίδια τοποθεσία των σημείων του επιπέδου A^* , (U^*/f^*). Από ένα τέτοιο ομαδοποιημένο διάγραμμα απόκρισης, συνδυασμένο με την γνώση του C_{EA} υπολογισμένου σε όλα τα σημεία κατά μήκος της τοποθεσίας των σημείων, μπορούμε πολύ απλά να προβλέψουμε το πλάτος και την συχνότητα απόκρισης, για οποιοδήποτε λόγο μαζών. Ένα τυπικό παράδειγμα μιας τέτοιας πρόβλεψης, χρησιμοποιώντας δεδομένα από $m^*=10,3$ για να υπολογιστεί η απόκριση για $m^*=1,2$ φαίνεται στο σχήμα 2.29 με σταυρούς (+) για σημάδια απεικόνισης. Η συμφωνία στο πλάτος είναι αρκετά καλή, ενώ η συμφωνία στη συχνότητα είναι τέλεια. Το C_{EA} συνάχθηκε απλά από την αναδιατύπωση της εξίσωσης (2.8), ως εξής: $C_{EA}=(m^* + C_A)/(f^*)^2 - m^*$. Αφού το C_{EA} είναι γνωστό, τότε κάποιος μπορεί να υπολογίσει

τη συχνότητα απόκρισης χρησιμοποιώντας την εξίσωση: $f^*=[(m^*+C_A)/(m^*+C_{EA})]^{(1/2)}$, για οποιαδήποτε τιμή του λόγου μαζών, m^* . Αυτό τότε αποδίδει το πλάτος απόκρισης A^* ως συνάρτηση της ταχύτητας U^* .

Συμπερασματικά, ο κύριος σκοπός αυτού του συνοπτικού σχήματος είναι να περικλείσει τις επιδράσεις του λόγου μαζών στο πλάτος και στη συχνότητα απόκρισης, υποδεικνύοντας με κάποια διαύγεια την έναρξη των φαινομένων του κλασσικού συντονισμού, όσο ο λόγος μαζών γίνεται αρκετά μικρός.



Σχήμα 2.28. (a) Καμπύλες απόκρισης του λόγου μαζών, $m^*=2,4$, και για μεταβαλλόμενους λόγους απόσβεσης. Ο άξονας x είναι η αδιάστατη ταχύτητα, U^* , και ο άξονας y είναι το μέγιστο πλάτος, A_{max} . (b) Καμπύλες απόκρισης του λόγου μαζών, $m^*=2,4$, και για μεταβαλλόμενους λόγους απόσβεσης. (c) Καμπύλες απόκρισης του λόγου μαζών, $m^*=2,4$, και για μεταβαλλόμενους λόγους απόσβεσης [Khalak & Williamson (1997)].



Σχήμα 2.29. Ζεύγη σχηματικά αναπαραστάσεων πλάτους-συχνότητας για λόγο μαζών (m^*), σε φθίνουσα σειρά στην ίδια κλίμακα. Μία μεγάλη αύξηση στη συχνότητα του ανώτερου και κατώτερου κλάδου (f^*), και στο εύρος του συντονισμού μπορεί καθαρά να παρατηρηθεί καθώς το m^* μειώνεται. Η παράμετρος μάζας-απόσβεσης $[(m^* + C_A)\zeta]$ και για τις τρεις περιπτώσεις είναι προσεγγιστικά στο 0,01. Δ , αρχικός κλάδος, \bullet , ανώτερος κλάδος, \circ , κατώτερος κλάδος, \blacktriangledown , περιοχή αποσυντονισμού, $+$ προβλεπόμενη απόκριση για $m^* = 1,2$ από δεδομένα απόκρισης $m^* = 10,3$ [Govardhan-Williamson(2000)].

3. Προστιθέμενη μάζα σύμφωνα με τη θεωρία ιδανικού ρευστού

3.1 Προσέγγιση δυναμικής ροής

Η θεώρηση ιδανικής (ή δυναμικής) ροής γύρω από ένα κύλινδρο κυκλικής διατομής θα παρέχει ένα πλαίσιο σχετικά με τις ασκούμενες δυνάμεις. Εάν, προς ευκολίας, θεωρήσουμε μία περιοχή κάθετου σώματος μακριά από την ελεύθερη επιφάνεια, τότε για να λάβουμε μία πρώτη προσέγγιση της δυνάμεως της ροής, ενσωματώνουμε την διανομή πίεσης γύρω από το σώμα χρησιμοποιώντας ιδανική ροή. Για σώμα κυκλικής μορφής, είναι βολικό να χρησιμοποιούνται οι πολικές συντεταγμένες (r, θ, z) σε οριζόντιο επίπεδο. Σε αυτό το σύστημα, η εξίσωση Laplace σε τρεις διαστάσεις είναι:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.1)$$

και οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad u_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Μία λύση αυτής της εξίσωσης, η οποία είναι ενιαία στη κάθετη διεύθυνση, είναι:

$$\phi(r, \theta) = U(t) r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (3.3)$$

Η προηγούμενη σχέση ονομάζεται και συνάρτηση δυναμικού (velocity potential). Για $r=a$, έχουμε την ακτίνα του σώματος και έχουμε συνθήκη μη ρέοντος ρευστού στο τοίχωμα του σώματος στη διεύθυνση του r όπως και περιμέναμε.

$$u_r(a, \theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (3.4)$$

Το $U(t)$ είναι η ταχύτητα σε ένα απομακρυσμένο σημείο, και θεωρείται ότι μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με περίοδο T . Η απεικόνιση της ροής αναπαρίσταται στο σχήμα 3.1. Παρατηρείται επίσης η απουσία ομόρρου στην ιδανική ροή.

Για τον υπολογισμό της κατανομής της πίεσης γύρω από τον κύλινδρο χρησιμοποιείται η εξίσωση Bernoulli και εφαρμόζεται σε ένα σημείο στο τοίχωμα

του κυλίνδρου και σε ένα άλλο αρκετά μακριά από τον κύλινδρο, όπου οι συντεταγμένες είναι $r=l$, $\theta=0$, και $r \gg a$:

$$\left[\frac{p(r,\theta)}{\rho} + gz + \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{r=l, \theta=0} = \left[\frac{p(r,\theta)}{\rho} + gz + \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{r=l, \theta=0}. \quad (3.5)$$

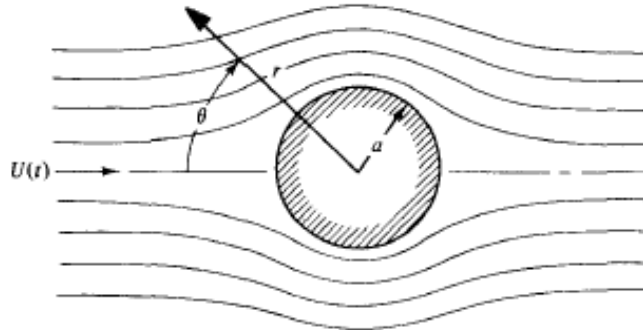
Οι όροι της υψομετρικής διαφοράς θεωρούνται μηδέν, οπότε η προηγούμενη σχέση θα είναι:

$$p(a,\theta) - p(l,0) = \rho \left[\left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} \right)_{r=l, \theta=0} - \left(\frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2} \right)_{r=a} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{r=a} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{r=l, \theta=0} \right]. \quad (3.6)$$

Αντικαθιστώντας από τη συνάρτηση δυναμικού, έχουμε:

$$p(a,\theta) - p(l,0) = \rho \left[\frac{U^2(t)}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) + 2\alpha \frac{dU}{dt} \cos \theta - l \frac{dU}{dt} \right], \quad (3.7)$$

όπου οι όροι της τάξης $O(\alpha^2/l^2)$ παραλείπονται ως πολύ μικροί. Ο όρος της πίεσης αποτελείται από δύο διαφορετικές συνεισφορές-συνιστώσες, τον όρο της σταθερής ροής, που είναι ανάλογη με τον όρο $U^2(t)$, και την επιτάχυνση ή τον όρο της αδράνειας, εξ' αιτίας του όρου $dU(t)/dt$.



Σχήμα 3.1. Δυναμικό ροής γύρω από ένα κυκλικό κύλινδρο [Dean et al. (1984)].

3.1.1 Όρος σταθερής ροής

Η συνεισφορά της σταθερής πίεσης ως συνάρτηση γύρω από ένα κύλινδρο για κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$p(a,\theta) - p(l,0) = \rho \frac{U^2(t)}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta). \quad (3.8)$$

Η κατανομή της πίεσης παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2. Η πίεση είναι συμμετρική ως προς το σώμα και με την απουσία ομόρρου, η πίεση στο πίσω μέρος του σώματος

είναι ίδια με αυτή στο μπροστά μέρος. Επομένως, η καθαρή δύναμη πίεσης στη κάθετη διεύθυνση πρέπει να είναι μηδέν. Ολοκληρώνοντας την πίεση περίξ του σώματος, χρησιμοποιώντας μόνο τη συνιστώσα της δύναμης στη κάθετη κατεύθυνση όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 3.3, αποδίδει την σταθερή οπισθέλκουσα δύναμη ανά μονάδα ύψους dF_D , όπου:

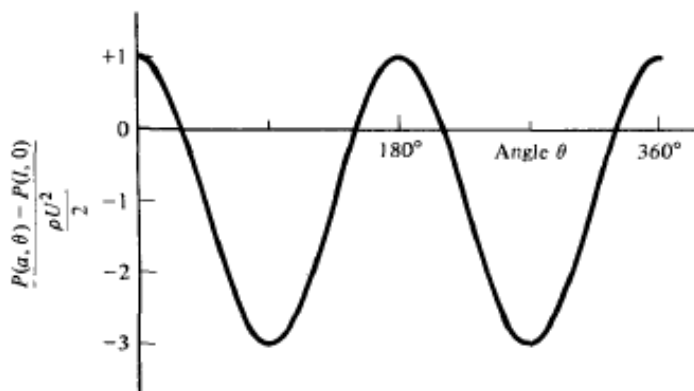
$$dF_D = \int_0^{2\pi} p(a, \theta) a \cos \theta d\theta \Rightarrow$$

$$dF_D = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho U^2(t)}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) + p(l, 0) \right] a \cos \theta d\theta, \quad (3.9)$$

ή

$$dF_D = 0. \quad (3.10)$$

Οπότε, όπως ήταν αναμενόμενο και από τη συμμετρία της πίεσης, δεν υπάρχει καμία δύναμη επάνω στο σώμα σε συνθήκες ιδανικής ροής. Ωστόσο, αυτό είναι αντίθετο ως προς τα αποτελέσματα που προσδιορίζονται από πραγματικές ροές. Παρόμοιο φαινόμενο αποτελεί η εμφάνιση δύναμης όταν κάποιος τοποθετεί το χέρι του έξω από το παράθυρο ενός κινούμενου αυτοκινήτου. Αυτή η ασυμφωνία ονομάζεται *παράδοξο του D'Alembert* και προβλημάτισε αρκετούς επιστήμονες στα πρώτα στάδια της υδροδυναμικής. Η αιτία του παράδοξου, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι η μη ρεαλιστική θεώρηση της ιδανικής ροής, η οποία καθιστά αδύνατο το σχηματισμό οριακών στρωμάτων και ομόρρου.



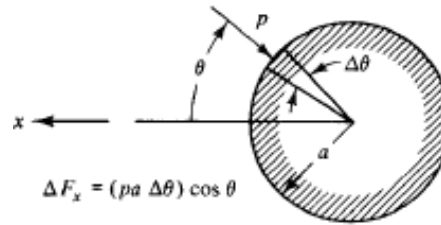
Σχήμα 3.2. Διανομή πίεσης γύρω από ένα κύλινδρο για την περίπτωση ιδανικής ροής. Σημειώνεται η χαμηλή πίεση στις πλευρές $\theta=90^\circ$ και η συμμετρία στις πλευρές $\theta=0^\circ$ και $\theta=180^\circ$ [Dean et al. (1984)].

Η πραγματική διανομή πίεσης γύρω του κυλίνδρου σε σταθερή ροή είναι μία συνάρτηση του αριθμού Reynolds, Re. Στο σχήμα 3.4, παρουσιάζεται η μετρημένη διανομή πίεσης γύρω από κύλινδρο για δύο αριθμούς Reynolds, συγκρινόμενοι με

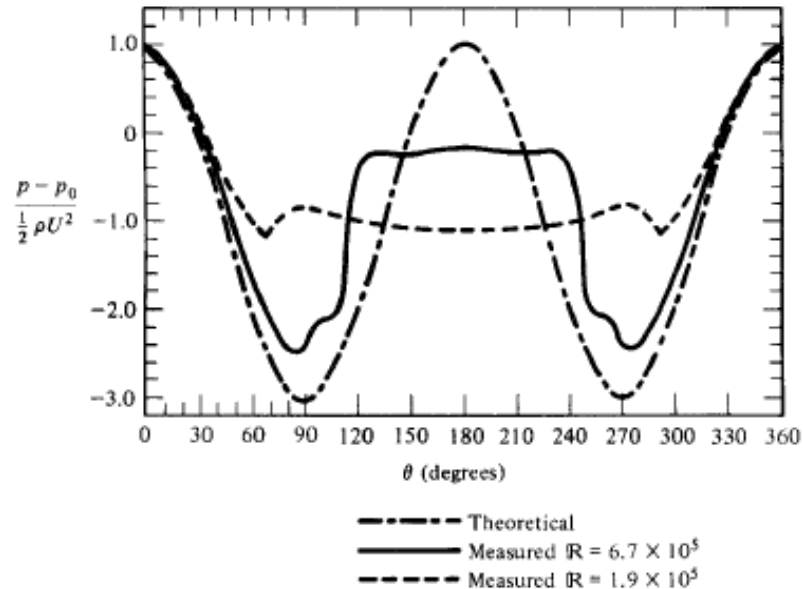
το αποτέλεσμα για θεωρητική ιδανική ροή, το οποίο σχήμα αποτελεί μέρος του Goldstein (1938). Για το άνω μέρος του κυλίνδρου, με $\theta \leq \theta_s$, η γωνία διαχωρισμού, η πίεση μπορεί να περιγραφεί προσεγγιστικά από την ιδανική ροή. Ωστόσο, για $\theta > \theta_s$, το οποίο είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds, η πίεση εμφανίζεται σχεδόν σταθερή. Μπορούμε οπότε να προσεγγίσουμε τη δύναμη στο κύλινδρο χρησιμοποιώντας τη λύση της ιδανικής ροής για $0 \leq \theta \leq \theta_s$ και χρησιμοποιώντας μία σταθερή πίεση στον ομόρρο, ως εξής:

$$dF_D = 2 \int_0^{\theta_s} \frac{\rho U^2(t)}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) a \cos \theta d\theta + 2 \int_{\theta_s}^{\pi} p_{wake} a \cos \theta d\theta \Rightarrow$$

$$dF_D = \rho U^2(t) a \left[\int_0^{\theta_s} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta + \int_{\theta_s}^{\pi} \frac{p_{wake}}{\rho U^2(t)/2} \cos \theta d\theta \right]. \quad (3.11)$$



Σχήμα 3.3. Υπολογισμός της στοιχειώδους δυνάμεως στην x κατεύθυνση. Η ΔF_x είναι θετική στη διεύθυνση $-x$ [Dean et al. (1984)].



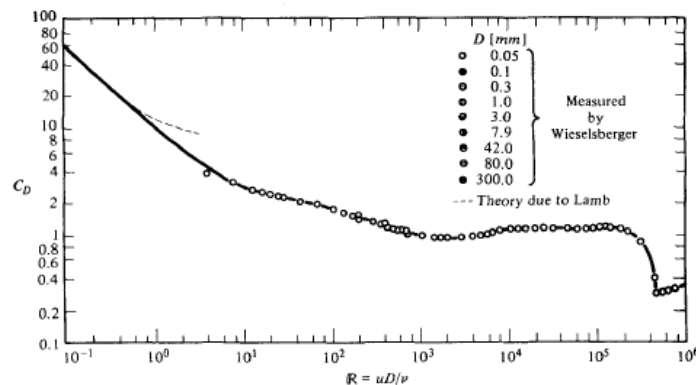
Σχήμα 3.4. Μετρημένες διανομές πίεσης γύρω από κύλινδρους [Dean et al. (1984)].

Ο όρος εντός των αγκυλών είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds, όπως επίσης το θ_s και το p_{wake} μεταβάλλονται με τον αριθμό Reynolds. Οπότε, η δύναμη ανά

μονάδα μήκους, dF , μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση, C_D , η οποία μεταβάλλεται με τον αριθμό Reynolds, επιτρέποντας μας να γράψουμε τη δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο ανά μονάδα ύψους ποδιών ως εξής:

$$dF_D = C_D(\text{Re}) \rho D \frac{U^2(t)}{2} = C_D \rho \frac{AU^2(t)}{2}, \quad (3.12)$$

όπου D είναι η διάμετρος του σώματος και για τη την περίπτωση του κυκλικού κυλίνδρου είναι ίση με $A =$ προβολόμενη περιοχή / μονάδα ύψους του κυλίνδρου ($A=2\alpha$). Η τελευταία μορφή της (3.12) εφαρμόζεται σε δυσδιάστατα και τρισδιάστατα αντικείμενα, με προσδιορισμό πάντα του A . Η συνάρτηση του C_D ονομάζεται συντελεστής οπισθέλκουσας και η μεταβολή του με τον αριθμό Reynolds είναι εμπειρικά γνωστή για σταθερές ροές όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.5 για λείο κύλινδρο κυκλικής διατομής. Στη πράξη, ο C_D είναι γενικώς της τάξεως της μονάδος και εξαρτάται από την τραχύτητα του σώματος επιπρόσθετα του αριθμού Reynolds.



Σχήμα 3.5. Μεταβολή του συντελεστή οπισθέλκουσας, C_D με τον αριθμό Reynolds R για ένα λείο κυκλικό κύλινδρο [Dean et al. (1984)].

3.1.2 Όρος ασταθούς ροής

Εξετάζοντας τον εναπομείνοντα όρο της εκφράσεως της δυναμικής ροής για την πίεση, σχέση (3.7), ολοκληρώνοντας τη συνιστώσα της δυνάμεως στην εγκάρσια κατεύθυνση, έχουμε:

$$dF_l = \int_0^{2\pi} \rho \frac{dU(t)}{dt} 2\alpha^2 \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \rho \frac{dU(t)}{dt} l\alpha \cos \theta d\theta. \quad (3.13)$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού σκέλους ισοδυναμεί με το μηδέν, επειδή δεν συνεισφέρει καθαρή δύναμη. Ο πρώτος όρος, ωστόσο αποδίδει:

$$dF_I = \rho \alpha^2 \frac{dU}{dt} 2\pi = 2\rho\pi\alpha^2 \frac{dU}{dt}. \quad (3.14)$$

Ο όρος $\pi\alpha^2$ είναι ο όγκος V του σώματος ανά μονάδα μήκους, έτσι η τελική έκφραση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$dF_I = C_M \rho V \frac{dU}{dt}, \quad (3.15)$$

όπου C_M ορίζεται ο συντελεστής αδράνειας, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση της δυναμικής ροής είναι ίσος με 2,0. Συνεπώς υπάρχει μία δύναμη η οποία ονομάζεται δύναμη αδράνειας η οποία προκαλείται από την επιτάχυνση του ρευστού μετά τον κύλινδρο, ακόμη και από την απουσία της τριβής. Ακόμη παρατηρείται ότι είναι ανάλογη της επιτάχυνσης του ρευστού, το οποίο σημαίνει ότι σε περίπτωση μη ύπαρξης επιτάχυνσης δεν υφίσταται και δεν νοείται ο όρος της δυνάμεως. Η γενική μορφή της σχέσεως (3.15) για τη δύναμη της αδράνειας είναι έγκυρη για δυσδιάστατα αλλά και τρισδιάστατα αντικείμενα αυθαίρετων σχημάτων. Βέβαια ο συντελεστής αδράνειας C_M , μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με τη κατεύθυνση της ροής.

Ο συντελεστής αδράνειας, στη πράξη, μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα δύο όρων:

$$C_M = 1 + C_A, \quad (3.16)$$

όπου ο δεύτερος όρος, C_A , ονομάζεται προστιθέμενη μάζα η οποία εξαρτάται από το σχήμα του σώματος. Η ερμηνεία του συντελεστή αδράνειας είναι ότι η κλίση της πίεσης απαιτείται για να επιταχυνθεί το ρευστό ασκεί την επονομαζόμενη δύναμη της άνωσης στο αντικείμενο, το οποίο ανταποκρίνεται στον μοναδιαίο όρο της εξισώσεως (3.16). Μία επιπλέον τοπική κλίση πίεσης συμβαίνει για να επιταχυνθεί το γειτονικό ρευστό γύρω του κυλίνδρου. Η αναγκαία δύναμη για την επιτάχυνση του ρευστού γύρω από τον κύλινδρο αποδίδει τον όρο της προστιθέμενης μάζας, C_A .

Θεωρούμε αρχικά τη δύναμη στο σώμα εξαιτίας της ανεπηρέαστης κλίσεως της πίεσεως εντός του επιταχυνόμενου ρευστού. Εάν η κλίση της πίεσης είναι ομοιόμορφη κατά μήκος της διαστάσεως του αντικειμένου, μπορούν να εφαρμοσθούν οι κάθετες δυνάμεις εντός υδροστατικού ρευστού σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία. Στη τελευταία περίπτωση, η υδροστατική δύναμη άνωσης F_B επάνω σε αντικείμενο όγκου V εντός ρευστού με συγκεκριμένο βάρος γ είναι:

$$F_B = \gamma V, \quad (3.17)$$

και για ένα υδροστατικό ρευστό, η κλίση της πίεσης $\partial p/\partial z$ και συγκεκριμένου βάρους γ συνδέονται ως εξής:

$$\gamma = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Οπότε

$$F_B = -\frac{\partial p}{\partial z} V. \quad (3.19)$$

Γυρνώντας στην επίδραση της οριζόντιας κλίσης πίεσης συνδεόμενη με ένα επιταχυνόμενο ρευστό, η δύναμη της άνωσης είναι:

$$F_B = -\frac{\partial p}{\partial x} V, \quad (3.20)$$

και από τις εξισώσεις Euler, το $-\partial p/\partial x$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $\rho(du/dt)$, αποδίδοντας

$$F_B = \rho V \frac{du}{dt} \quad (3.21)$$

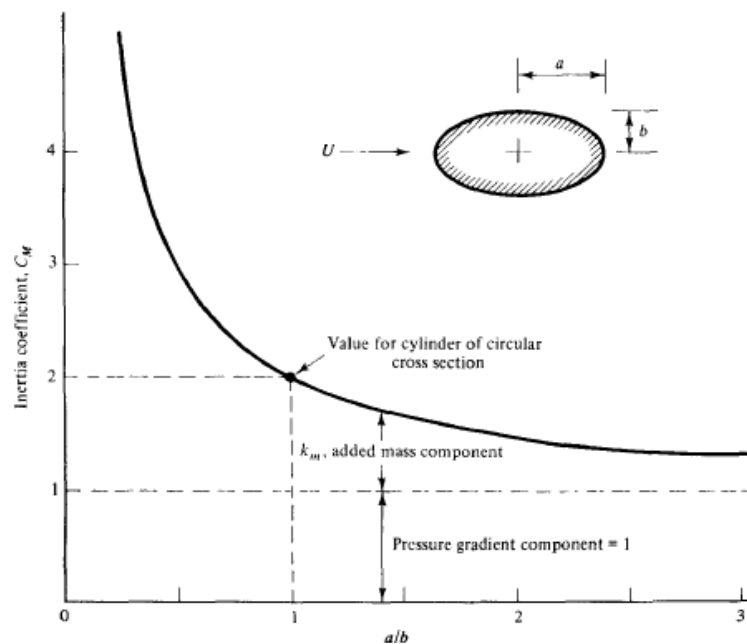
και συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.20), (3.15) και (3.16), η προέλευση του μοναδιαίου όρου στον όρο C_M είναι ξεκάθαρη. Η προστιθέμενη μάζα, η οποία είναι εξαρτώμενη από το σχήμα, οφείλεται από τη διαταραχή του πεδίου ροής. Εμφανίζεται σε όλες τις περιπτώσεις και για αυτό το C_M πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα. Ακόμη θα πρέπει σημειωθεί ότι οι δυνάμεις τόσο της άνωσης, όσο και αυτής της προστιθέμενης μάζας ασκούνται στην ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση, όπως άλλωστε εξάγεται αυτό το συμπέρασμα και από τη σχέση (1.14), στην οποία ο πρώτος όρος όπως φαίνεται αναπαριστά την άνωση και ο δεύτερος τη δύναμη της προστιθέμενης μάζας.

$$dF_l = 2\rho\pi\alpha^2 \frac{dU}{dt} = \underbrace{\left(\rho\pi\alpha^2 \frac{dU}{dt}\right)}_{\text{Συνιστώσα άνωσης}} + \underbrace{\left(\rho\pi\alpha^2 \frac{dU}{dt}\right)}_{\text{Συνιστώσα προστιθέμενης μάζας}}$$

Σύμφωνα με τη δημοσίευση του Lamb (1945) Για δυσδιάστατη ροή γύρω από ένα κύλινδρο ελλειπτικής εγκάρσιας διατομής, ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας C_A μπορεί να δειχθεί ότι είναι:

$$C_A = \frac{b}{a}. \quad (3.22)$$

Όπου το a και b είναι οι ημιάξονες οι οποίοι είναι σύμφωνοι με την οριζόντια και εγκάρσια κατεύθυνση της επιτάχυνσης αντίστοιχα. Η σχέση (3.22) είναι σχεδιασμένη στο σχήμα 3.6, η οποία παρουσιάζει την ύπαρξη για μικρές τιμές του C_A για ένα αεροδυναμικό σώμα. Παρατηρούμε ακόμη ότι για $a/b=1$, δηλαδή όταν έχουμε την περίπτωση του κυλίνδρου, ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας είναι ίσος με τη μονάδα. Αυτό είναι ένα αρκετά σημαντικό στοιχείο το οποίο θα χρησιμοποιηθεί σε άλλο κεφάλαιο για τους υπολογισμούς. Την μοναδιαία τιμή του συντελεστή προστιθέμενης μάζας την εκλαμβάνουν όλοι οι ερευνητές για τη περίπτωση κυλίνδρου με κυκλική εγκάρσια διατομή.



Σχήμα 3.6. Συντελεστής αντίδρασης για ένα κύλινδρο ελλειψοειδούς διατομής [Dean et al. (1984)].

Σε αυτό το σημείο θα ήταν δόκιμο να παρουσιαστεί ένα παράδειγμα όπου το εξεταζόμενο σώμα θα είναι ένας κύλινδρος κυκλικής εγκάρσιας διατομής. Μέσα από το παράδειγμα θα δειχθεί ότι από τη στιγμή που δεν υπάρχει κλίση πίεσης στο ρευστό, η μόνη πίεση που θα υφίσταται θα είναι εξαιτίας του συντελεστή προστιθέμενης μάζας. Για να προσδιοριστεί το προηγούμενο παραθέτουμε τη δυοδιάστατη δυνητική ταχύτητα για ένα επιταχυνόμενο κύλινδρο εντός ενός στάσιμου ρευστού, η οποία είναι η εξής:

$$\phi(r, \theta, t) = U(t) \frac{a^2}{r} \cos \theta, \quad (3.23)$$

όπου τώρα, το $U(t)$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του κυλίνδρου. Είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η περίπτωση ικανοποιεί την ακόλουθη κινηματική συνοριακή συνθήκη για τον κύλινδρο

$$u_r|_{r=\alpha} = U(t) \cos \theta. \quad (3.24)$$

Η πίεση στο τοίχωμα του κυλίνδρου λόγω της επιτάχυνσης του ρευστού δίνεται ως εξής:

$$p(\alpha, \theta) = p(l, 0) + \rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_{r=\alpha} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_{\substack{r=l, \\ \theta=0^\circ}} \right], \quad (3.25)$$

όπου το l είναι όπως το ίδιο όπως ορίστηκε προηγουμένως για ένα σταθερό κύλινδρο. Ενσωματώνοντας τη κάθετη συνιστώσα της δυνάμεως πίεσης γύρω από το κύλινδρο, έχουμε

$$\begin{aligned} dF_I &= \int_0^{2\pi} [p(\alpha, \theta)] \alpha \cos \theta d\theta \Rightarrow \\ dF_I &= \int_0^{2\pi} \rho \frac{dU}{dt} \alpha^2 \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \rho \frac{dU}{dt} \frac{\alpha^3}{l} \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} p(l, 0) \alpha \cos \theta d\theta \Rightarrow \\ dF_I &= (1) \rho \frac{dU}{dt} \alpha^2 \pi \\ dF_I &= C_A \rho \frac{dU}{dt} V. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Επιπρόσθετα σε αυτή τη δύναμη από το ρευστό στον επιταχυνόμενο κύλινδρο, μία δύναμη είναι απαραίτητη για να επιταχύνει τη μάζα του ίδιου του κυλίνδρου. Γι' αυτό, η συνολική δύναμη που απαιτείται για να επιταχυνθεί ο κύλινδρος μέσω του νερού πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από ότι εάν το νερό επιταχυνόταν μετά τον κύλινδρο εξαρτώμενο από το κατά πόσο η μάζα του κυλίνδρου είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από αυτή του εκτοπιζόμενου νερού.

Ερμηνεύοντας τη φυσική και την ορολογία που συνδέεται με το στοιχείο της προστιθέμενης μάζας είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τη δυναμική της περίπτωσης ενός επιταχυνόμενου κυκλικού κυλίνδρου εντός ρευστού. Όπως σημειώθηκε και προηγουμένως, η ασκούμενη δύναμη ανά μονάδα μήκους από τον επιταχυνόμενο κύλινδρο στο περιβάλλον ρευστό δίνεται από την εξίσωση (3.26),

$$F_I = \rho C_A \pi a^2 \frac{dU}{dt}, \quad (3.27)$$

όπου $C_A=1$ για ένα κυκλικό κύλινδρο.

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του επιταχυνόμενου ρευστού ως συνάρτηση του χρόνου. Οι συνιστώσες της ακτινικής και γωνιακής

ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις (3.28) και (3.29), οι οποίες εξάγονται από τη σχέση (3.23),

$$u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = U(t) \frac{a^2}{r^2} \cos\theta, \quad (3.28)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = U(t) \frac{a^2}{r^2} \sin\theta. \quad (3.29)$$

Η συνολική κινητική ενέργεια του ρευστού, KE , σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι:

$$KE = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\rho}{2} (u_r^2 + u_\theta^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\rho}{2} U^2 \frac{a^4}{r^3} dr d\theta \Rightarrow$$

$$KE = \frac{\rho}{2} U^2 \pi a^2. \quad (3.30)$$

Ο χρονικός ρυθμός της αλλαγής της κινητικής ενέργειας θα πρέπει να είναι ίσος με το γινόμενο της δύναμews και της ταχύτητας, $F_I \cdot U$, το οποίο είναι, ο ρυθμός στο οποίο το έργο έχει παραχθεί από τον κύλινδρο, το οποίο προσδιορίζεται ως ακολούθως:

$$\frac{\partial(KE)}{\partial t} = \rho \pi a^2 \frac{\partial U}{\partial t} U, \quad (3.31)$$

και σε σύγκριση με τη σχέση (3.26), βλέπουμε ότι είναι ακριβώς ίσο με το $F_I \cdot U$. Για αυτό το λόγο ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας αντιπροσωπεύει το λόγο της προστιθέμενης μάζας του επιταχυνόμενου ρευστού με το κύλινδρο προς τη μάζα του εκτοπιζόμενου ρευστού από τον κύλινδρο [Dean & Dalrymple (1984)].

Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί ότι η προστιθέμενη μάζα του ρευστού αυξάνει την πραγματική μάζα της κατασκευής όταν κάποιος χρησιμοποιεί δυναμική ανάλυση για ένα σύστημα. Το εύρος της επίδρασης εξαρτάται από τη πυκνότητα του ρευστού σε σχέση με τη μάζα της κατασκευής. Γενικά, η προστιθέμενη μάζα είναι περισσότερο σημαντική σε σχετικά πυκνά ρευστά, όπως το νερό, σε σύγκριση με τα αέρια, όπως ο αέρας. Σε κάποιες αναφορές για τη προστιθέμενη μάζα, αντ' αυτού απαντάται και ως εικονική μάζα ή ακόμη και υδροδυναμική μάζα, ενώ ο συντελεστής προστιθέμενης συμβολίζεται και ως k_m .

4. Νέα προσέγγιση της προστιθέμενης μάζας

4.1 Γενικά

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η νέα μεθοδολογία προσέγγισης του προβλήματος του εγκάρσια ταλαντευόμενου κυλίνδρου εντός ρέοντος ρευστού. Η νέα μέθοδος έγκειται στη κίνηση της προστιθέμενης μάζας. Παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις ελεύθερης ταλάντωσης κυλίνδρου: ταλάντωση χωρίς επίδραση εξωτερικής διέγερσης και ταλάντωση με επίδραση εξωτερικής δύναμης.

Έως τώρα η πλειοψηφία των ερευνητών χρησιμοποιούσε τη προστιθέμενη μάζα ως μία ενιαία μάζα του συστήματος, η οποία προστιθέμενη μάζα κινείται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που κινείται και ο κύλινδρος, δηλαδή υπάρχει ταύτιση της κίνησης της μάζας του κυλίνδρου με τη κίνηση της προστιθέμενης μάζας. Η νέα μέθοδος προσέγγισης παρουσιάζει ένα νέο τρόπο κίνησης της προστιθέμενης μάζας, ο οποίος διαφέρει από τον παλιό στο ότι η προστιθέμενη μάζα μετατοπίζεται εγκάρσια ως προς ένα ακίνητο σημείο αναφοράς, αλλά και ως προς τον κύλινδρο, σε σύγκριση πάντα με το κέντρο του κυλίνδρου το οποίο θεωρείται και το κέντρο βάρους του.

4.2 Σύστημα χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης

Στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζεται η πιο απλή από τις δύο περιπτώσεις, αυτή χωρίς την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης. Για να κατανοήσει κάποιος το δυναμικό σύστημα αυτών των δύο περιπτώσεων θα πρέπει να παρουσιαστούν οι δυνάμεις που το διέπουν και τα αντίστοιχα μεγέθη τους, κάποια εκ των οποίων παρουσιάστηκαν και σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεωρούμε το σύστημα του σχήματος 4.1. Το υπό εξεταζόμενο σύστημα αποτελείται από ένα ελαστικά στηριζόμενο λείο κύλινδρο κυκλικής εγκάρσιας διατομής διαμέτρου D , μήκους L και μάζας m . Η προσέγγιση της κίνησης του κυλίνδρου εντός ρευστού μπορεί να γίνει με τη χρήση ενός ελατηρίου, μέτρου

ελαστικότητας k και ενός αποσβεστήρα μέτρου απόσβεσης c , όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.1.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο οπότε είναι, η ασκούμενη δύναμη από το ελατήριο στο σώμα, η δύναμη από τον αποσβεστήρα στο σώμα και φυσικά η ασκούμενη δύναμη λόγω της επιτάχυνσης και επιβράδυνσης, οι εξισώσεις των οποίων παρουσιάζονται στη συνέχεια:

$$F_k = -kz, \quad (4.1)$$

$$F_c = -c \frac{dz}{dt} = -c\dot{z}, \quad (4.2)$$

$$F_{motion} = ma = m \frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z}. \quad (4.3)$$

Όπου, k : το μέτρο ελαστικότητας του ελατηρίου [N/m],

c : ο συντελεστής απόσβεσης [N/m/s],

\dot{z} : η πρώτη παράγωγος της μετατόπισης, η ταχύτητα [m/s],

\ddot{z} : η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης, η επιτάχυνση [m/s²].

Οι δυνάμεις λόγω ελατηρίου και αποσβεστήρα αντιτίθενται στη κίνηση, γι' αυτό υπάρχει το σύμβολο “-“. Οπότε σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, σχέση (4.3), η συνισταμένη δύναμη που θα ασκείται στο σώμα θα είναι:

$$F_{tot} = F_k + F_c \Rightarrow m\ddot{z} = -kz - c\dot{z} \Rightarrow$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0. \quad (4.4)$$

Η προηγούμενη σχέση αποτελεί τη σχέση κίνησης του κυλίνδρου μόνο. Λόγω της ύπαρξης προστιθέμενης μάζας, m_a , θα πρέπει να συμπεριληφθεί και αυτή στη σχέση (4.4). Άρα η σχέση κίνησης θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(m + m_a) \ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0. \quad (4.5)$$

Η σχέση (4.5) αποτελεί τη κλασσική προσέγγιση έως τώρα, η οποία προστιθέμενη μάζα λαμβάνεται ότι αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του κυλίνδρου χωρίς να ακολουθεί διαφορετική πορεία από τον κύλινδρο ως προς ένα ακίνητο σημείο. Με τη νέα μέθοδο όπως ειπώθηκε και προηγουμένως θεωρούμε ότι εκτός της εγκάρσιας μετατόπισης που ακολουθεί με τον κύλινδρο, η προστιθέμενη μάζα μετατοπίζεται και ως προς τον κύλινδρο με μία σχετική ταχύτητα $\dot{\bar{z}}$, η οποία παρουσιάζεται και στο σχήμα 4.1(α), και σχετικής επιτάχυνσης $\ddot{\bar{z}}$. Ακόμη στο σχήμα 4.1(β) παρουσιάζεται το τρίγωνο ταχυτήτων, με τη ταχύτητα U_∞ να αποτελεί την οριζόντια ταχύτητα του ρέοντος ρευστού, μέσα στο οποίο ρευστό είναι

βυθισμένος ο κύλινδρος, η ταχύτητα \dot{z} η οποία συμβολίζει τη ταχύτητα στην εγκάρσια κατεύθυνση και η ταχύτητα U η οποία αντιπροσωπεύει τη συνισταμένη ταχύτητα σε κάθε δεδομένη στιγμή, δηλαδή τη σχετική ταχύτητα \dot{z} . Άρα η σχέση που θα περιγράφει τη κίνηση θα δίνεται από τη σχέση:

$$(m + m_a) \ddot{z} + m_a \ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0. \quad (4.6)$$

Ακόμη θα πρέπει να αναφερθεί ότι το κέντρο μάζας της προστιθέμενης μάζας απέχει μία απόσταση R από το κέντρο του κυλίνδρου. Η σχετική μετατόπιση του κέντρου μάζας της προστιθέμενης μάζας προσδιορίζεται κάθε φορά σύμφωνα με τη γωνία $\theta(t)$, η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο.

Η κίνηση του συστήματός μας μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά με χρήση απλής αρμονικής ταλάντωσης. Οι σχέσεις για τη μετατόπιση, τη ταχύτητα και την επιτάχυνση για τον κύλινδρο θα δίνονται από τις σχέσεις (4.7) – (4.9):

$$z = A \sin(\omega t), \quad (4.7)$$

$$\dot{z} = A\omega \cos(\omega t), \quad (4.8)$$

$$\ddot{z} = -A\omega^2 \sin(\omega t). \quad (4.9)$$

Το σύστημα που περιγράφηκε θα έχει μία δική του φυσική συχνότητα, η οποία μπορεί να εξαχθεί αν υποθεθεί ότι το σύστημα βρίσκεται στο κενό. Άρα η φυσική του συχνότητα θα δίνεται από τη σχέση (4.10):

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m + m_a}}, \quad (4.10)$$

ενώ ο συντελεστής απόσβεσης c , προσδιορίζεται πάντα σε σχέση με το κρίσιμο συντελεστή απόσβεσης c_{crit} , ο οποίος αποτελεί χαρακτηριστικό του συστήματος όπως φαίνεται και από τη σχέση (4.12). Αυτός ο προσδιορισμός ονομάζεται αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης, συμβολίζεται ως ζ και ορίζεται ως ο λόγος του συντελεστή απόσβεσης προς τον κρίσιμο συντελεστή.

$$c_{crit} = 2(m + m_A)\omega_N, \quad (4.11)$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}}. \quad (4.12)$$

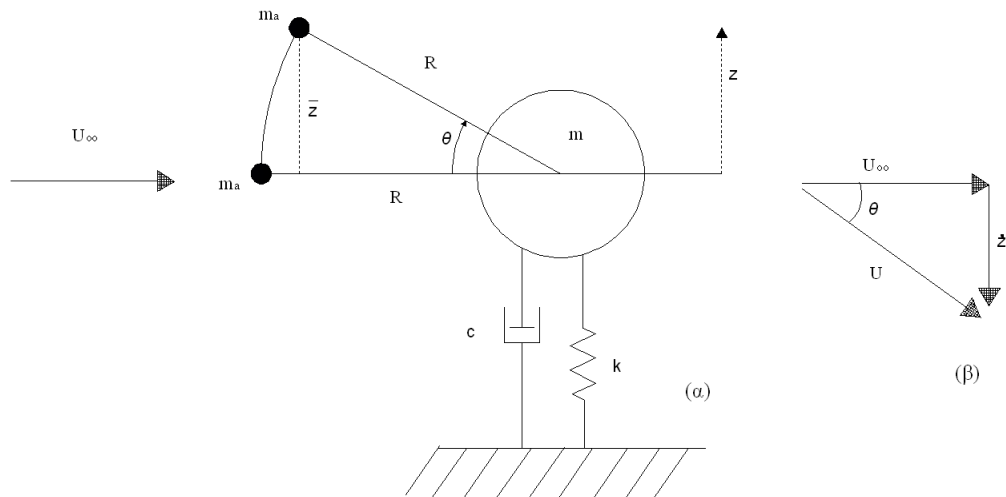
Οπότε συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\zeta = \frac{c}{2(m + m_A)\omega_N}. \quad (4.13)$$

Χρήσιμο για τους υπολογισμούς αποτελεί και η έννοια του αδιάστατου λόγου μαζών, m^* . Ορίζεται ως ο λόγος της μάζας του σώματος, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η μάζα του κυλίνδρου, προς την εκτοπιζόμενη μάζα του ρευστού λόγω του σώματος, m_d . Η εκτοπιζόμενη μάζα του ρευστού δίνεται από τη σχέση (4.14) και παρατηρείται ότι εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυλίνδρου, D και L , και από τη πυκνότητα του ρευστού που τον περικλείει. Ο αδιάστατος λόγος μαζών θα δίνεται από τη σχέση (4.15):

$$m_d = \frac{\pi \rho D^2 L}{4}, \quad (4.14)$$

$$m^* = \frac{m}{m_d}. \quad (4.15)$$



Σχήμα 4.1. Σχηματική απεικόνιση της κίνησης του δυναμικού συστήματος κυλίνδρου. (α) Η εγκάρσια κίνηση του κυλίνδρου και της προστιθέμενης μάζας εντός ρέοντος ρευστού ταχύτητας U_∞ . (β) απεικόνιση της σχετικής ταχύτητας \dot{z} , η οποία είναι μεταβάλλεται σε κάθε χρονική στιγμή.

Τέλος, σημαντικό μέγεθος αποτελεί ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας, C_A , ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της προστιθέμενης μάζας προς την εκτοπιζόμενη μάζα του ρευστού και φυσικά αποτελεί ένα αδιάστατο μέγεθος.

$$C_A = \frac{m_a}{m_d} \quad \text{ή} \quad m_a = C_A m_d. \quad (4.16)$$

Συνήθως ο αδιάστατος συντελεστής προστιθέμενης μάζας λαμβάνεται ίσος με τη μονάδα για το γεωμετρικό σχήμα του κυλίνδρου.

Πριν ξεκινήσουμε να αναλύουμε τη σχέση κίνησης θα πρέπει να προβούμε στην ανάλυση της σχετικής μετατόπισης, η οποία χρησιμοποιείται για τη κίνηση της

προστιθέμενης μάζας, και των παραγώγων της. Σύμφωνα με το σχήμα 4.1(α), μπορούμε να συνδέσουμε τη προστιθέμενη μάζα με τη χρονικά μεταβαλλόμενη γωνία $\theta(t)$ σύμφωνα με τη σχέση $\bar{z} = R \sin[\theta(t)]$, ο οποίος παράγοντας $\sin[\theta(t)]$ ισούται και με το λόγο \dot{z}/\ddot{z} , όπως μπορεί να διαπιστωθεί και από το σχήμα 4.1(β). Άλλη μία σχέση που ισχύει είναι αυτή του διανυσματικού αθροίσματος των ταχυτήτων. Άρα η σχετική μετατόπιση, με τη βοήθεια της σχέσεως (4.8), θα ισούται με:

$$\bar{z} = R \sin[\theta(t)] \Rightarrow \bar{z} = \frac{\dot{z}}{\ddot{z}} R \Rightarrow \bar{z} = \frac{A\omega \cos(\omega t)}{\sqrt{U_\infty^2 + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}} R \Rightarrow$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{\omega A}{U_\infty} \cos(\omega t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega A}{U_\infty}\right)^2 \cos^2(\omega t)}} R. \quad (4.17)$$

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή που παρουσιάζεται στη σχέση (4.18). Η απλοποίηση έγκειται στο μικρό εύρος τιμών του παράγοντα $(\omega A/U_\infty)$. Για καλύτερη κατανόηση θα πρέπει να εισαχθούν κάποια αδιάστατα μεγέθη, τα οποία θα παρουσιαστούν στη συνέχεια και με τη βοήθεια των οποίων θα αναδιαμορφωθεί ο προηγούμενος όρος σε επιμέρους όρους.

$$\bar{z} = \frac{\omega A}{U_\infty} R \cos(\omega t). \quad (4.18)$$

Επομένως, η σχετική ταχύτητα και επιτάχυνση θα δίνονται από τις σχέσεις (4.19) και (4.20) αντίστοιχα:

$$\dot{\bar{z}} = -\frac{\omega^2 A}{U_\infty} R \sin(\omega t), \quad (4.19)$$

$$\ddot{\bar{z}} = -\frac{\omega^3 A}{U_\infty} R \cos(\omega t), \quad \text{ή} \quad \ddot{\bar{z}} = -\frac{\omega^2 R}{U_\infty} [A\omega \cos(\omega t)] \Rightarrow$$

$$\ddot{\bar{z}} = -\frac{\omega^2 R}{U_\infty} \dot{\bar{z}}. \quad (4.20)$$

Για τη καλύτερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα πρέπει όλα τα μεγέθη να βρίσκονται σε αδιάστατη μορφή ώστε να είναι συγκρίσιμα με άλλες έρευνες. Η αδιαστατοποίηση των μεγεθών που χρησιμοποιήθηκε είναι παρόμοια με την αδιαστατοποίηση των Khalak & Williamson (1999), η οποία παρουσιάζεται και στον πίνακα 2.2 και παρατίθεται στη συνέχεια μέσω των εξισώσεων (4.21) – (4.24).

Η σχέση κίνησης του συστήματος μας για ελεύθερη ταλάντωση (σχέση (4.6)) θα είναι:

$$(m + m_a) \ddot{z} + m_a \ddot{\bar{z}} + c\dot{z} + kz = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{z} + \left[2\zeta\omega_N - \frac{C_A}{m^* + C_A} \frac{\omega^2 R}{U_\infty} \right] \dot{z} + \omega_N^2 z = 0. \quad (4.26)$$

Από τη σχέση (4.26) εξάγεται το συμπέρασμα ότι ο όρος της απόσβεσης δεν είναι πλέον $2\zeta\omega_N$, αλλά $2\zeta'\omega_N$, ο οποίος νέος αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης ορίζεται ως εξής:

$$\zeta' = \zeta - \left(\frac{C_A}{m^* + C_A} \right) \left(\frac{f^*}{U^*} \right)^2 U^* \pi R^*. \quad (4.27)$$

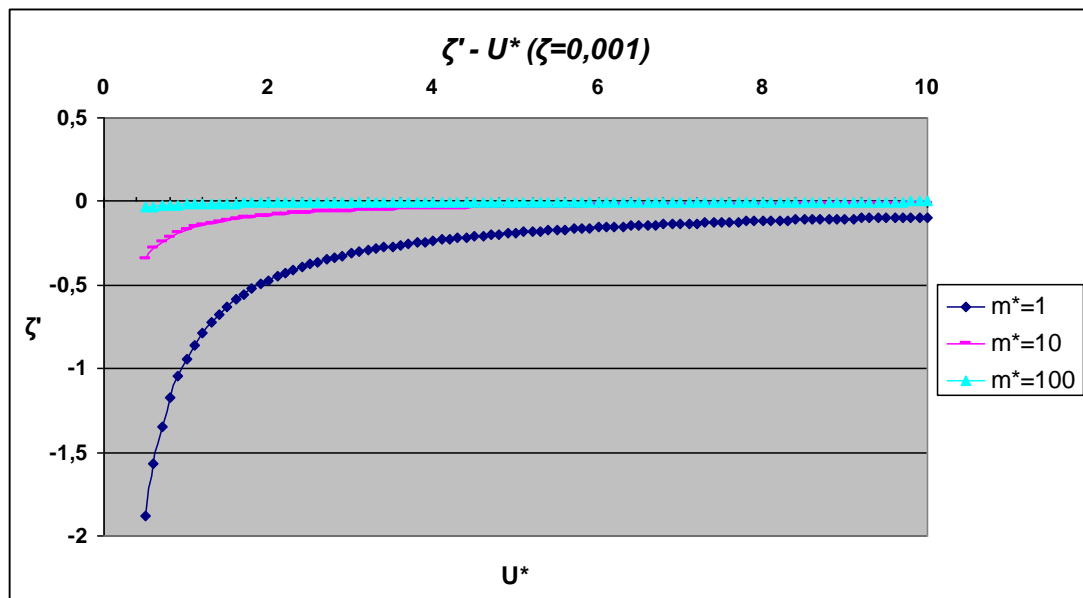
Ο νέος αυτός συνδυαστικός αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης παρατηρώντας τη σχέση (4.27), μας δίνει την πληροφορία ότι η προστιθέμενη μάζα συμβάλει στη μείωση του συνολικού αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης του συστήματος κατά ένα όρο. Αυτός ο όρος είναι η συμβολή της σχετικής κίνησης της προστιθέμενης μάζας ως προς τον κύλινδρο. Ακόμη παρατηρείται ότι για πολύ μεγάλες τιμές του m^* , ο νέος πρόσθετος όρος τείνει στο μηδέν και επομένως ο νέος συντελεστής απόσβεσης είναι παρόμοιος με το παλιό συντελεστή απόσβεσης. Αυτό συμβαίνει όταν κάποιος ασχολείται με το ρευστό μέσο του αέρα. Όταν κάποιος όμως χρησιμοποιεί για ρευστό το νερό, όπου ο αδιάστατος λόγος μαζών είναι αρκετά μικρός, τότε η απόσβεση μεταβάλλεται σημαντικά. Επίσης εξαρτάται και από τα αδιάστατα μεγέθη της ταχύτητας, της συχνότητας και της ακτίνας R^* . Η αδιάστατη συχνότητα μπορεί να θεωρηθεί ίση με τη μονάδα, επειδή βρισκόμαστε κοντά στη περιοχή του συντονισμού. Αυτή η αδιάστατη ακτίνα R^* ορίζεται ως ο λόγος της αποστάσεως του κέντρου μάζας της προστιθέμενης μάζας από το κέντρο του κυλίνδρου προς τη διάμετρο του κυλίνδρου. Από τον ορισμό της αδιάστατης ακτίνας μπορούμε να καταλάβουμε ότι οι επιτρεπόμενες τιμές είναι πάνω από 0,5.

Στη συνέχεια παρατίθενται διαγράμματα όπου συγκρίνεται η μεταβολή του νέου μεγέθους σύμφωνα με τις μεταβολές των μεγεθών της σχέσεως (4.27). Η εξαγωγή των διαγραμμάτων έγινε για τιμές αδιάστατης ταχύτητας U^* από 0,5 έως 10. Στα διαγράμματα των σχημάτων 4.2-4.4 παρουσιάζεται η εξάρτηση του νέου αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης ζ' με την αδιάστατη ταχύτητα U^* για τρεις διαφορετικές τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών, $m^*=1, 10, 100$ και αδιάστατης ακτίνας $R^*=0,6$. Η αδιάστατη ταχύτητα χωρίστηκε με διάστημα κατά 0,1 για τους υπολογισμούς. Η

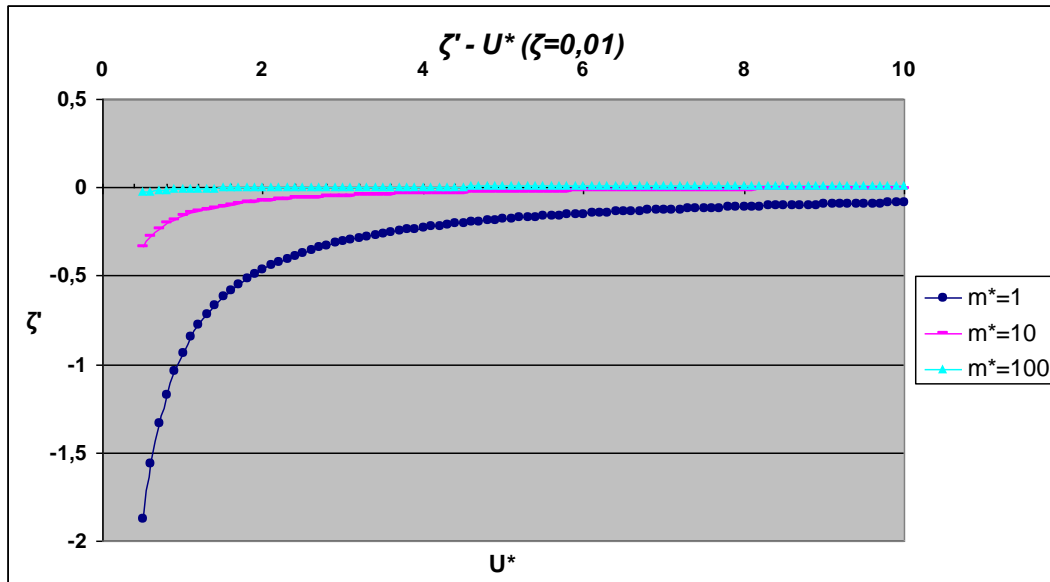
διαφορά μεταξύ αυτών των τριών διαγραμμάτων έγκειται στον αδιάστατο συντελεστή απόσβεσης του κυλίνδρου ζ . Οι τιμές οι οποίες επιλέχθηκαν είναι $\zeta=0,001, 0,01, 0,1$. Όπως παρατηρείται από το διάγραμμα του σχήματος 4.2, οι τιμές του νέου μεγέθους ήταν αρνητικές και για τις τρεις περιπτώσεις. Στη περίπτωση του σχήματος 4.3, $\zeta=0,01$, θετικές τιμές εμφανίστηκαν μόνο στη περίπτωση για $m^*=100$ και για το εύρος ταχύτητας $U^* = 1,9 - 10$, ενώ στη περίπτωση για $\zeta=0,1$ και $m^*=1$, σχήμα 4.4, θετικές τιμές του ζ' εμφανίστηκαν σε υψηλές τιμές της ταχύτητας, $U^* = 9,5 - 10$. Στη περίπτωση για $m^*=10$, θετικές τιμές του ζ' εμφανίζονται στο εύρος τιμών ταχύτητας $U^* = 0,5 - 10$.

Όπως είναι αναμενόμενο και από τη σχέση (4.27) το ζ' θα αυξάνεται καθώς θα αυξάνεται ο λόγος μαζών και η αδιάστατη ταχύτητα, όπως επίσης αναμένεται αύξηση με αύξηση του αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης ζ . Γενικώς ο λόγος μαζών παίζει πρωτεύοντα ρόλο καθώς καθορίζει το ρευστό που χρησιμοποιείται, το οποίο νερό (χαμηλές τιμές του m^*) επιδρά διαφορετικά στην απόκριση του συστήματος, σε αντίθεση με την περίπτωση του αέρα ως ρευστό (υψηλές τιμές του m^*).

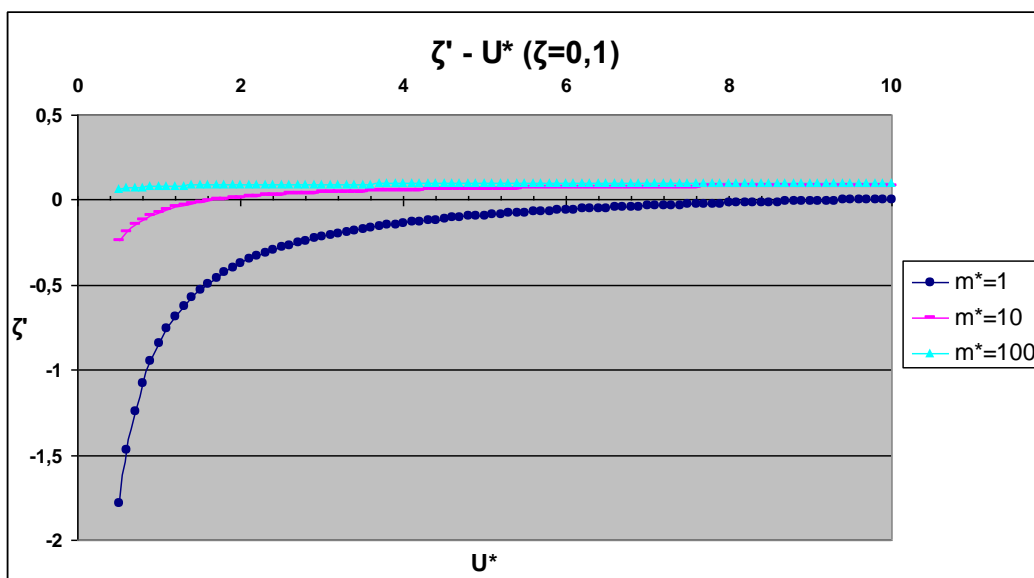
Η σημασία του αρνητικού πρόσημου σημαίνει ότι ο νέος όρος δεν λειτουργεί πάντα ως αποσβεστικός όρος, αλλά και ως διεγερτικός και αυτό αποτελεί ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο σύμφωνα με τη νέα προσέγγιση, αλλά απαιτεί και περαιτέρω διερεύνηση.



Σχήμα 4.2. Παραμετρική γραφική απεικόνιση του νέου αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης ζ' ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας U^* , για τρεις διαφορετικές τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών $m^* = 1, 10, 100$ για $\zeta=0,001$ και $R^*=0,6$.

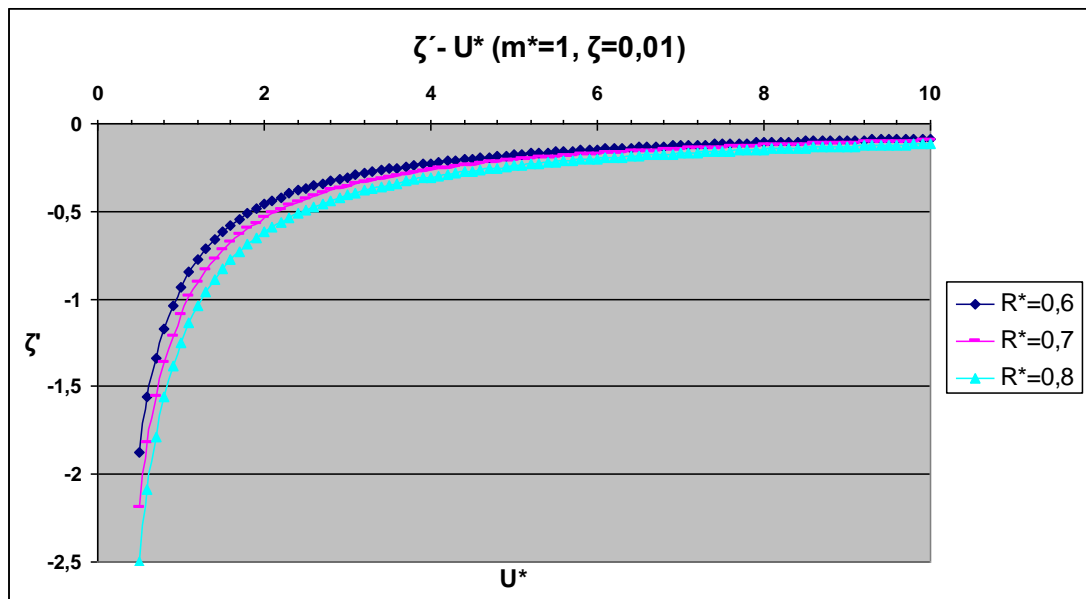


Σχήμα 4.3. Παραμετρική γραφική απεικόνιση του νέου αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης ζ' ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας U^* , για τρεις διαφορετικές τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών $m^* = 1, 10, 100$ για $\zeta=0,01$ και $R^*=0,6$.



Σχήμα 4.4. Παραμετρική γραφική απεικόνιση του νέου αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης ζ' ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας U^* , για τρεις διαφορετικές τιμές του αδιάστατου λόγου μαζών $m^* = 1, 10, 100$ για $\zeta=0,1$ και $R^*=0,6$.

Τέλος, στο διάγραμμα του σχήματος 4.5 παρουσιάζονται παραμετρικά οι καμπύλες για διαφορετικές τιμές της αδιάστατης ακτίνας R^* . Πιο συγκεκριμένα, η παραμετροποίηση έγινε για $R^*=0,6, 0,7$ και $0,8$ με σταθερή τιμή του λόγου μαζών και του συντελεστή απόσβεσης, $m^*=1$ και $\zeta=0,01$ αντίστοιχα. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς και από το διάγραμμα όσο το μέγεθος της αδιάστατης ακτίνας αυξάνεται τόσο μειώνεται ο συνδυαστικός συντελεστής απόσβεσης, μιας και αυξάνεται ο συμβαλλόμενος όρος της σχετικής κινήσεως της προστιθέμενης μάζας.



Σχήμα 4.5. Παραμετρική γραφική απεικόνιση του νέου αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης ζ' ως συνάρτηση της αδιάστατης ταχύτητας U^* , για τρεις διαφορετικές τιμές της αδιάστατης ακτίνας $R^*=0,6, 0,7, 0,8$ για $\zeta=0,01$ και $m^*=1$.

4.3 Σύστημα με εφαρμογή εξωτερικής δύναμης

Η διαφορά αυτής της περιπτώσεως με τη προηγούμενη εντοπίζεται στην εφαρμογή εξωτερικής δυνάμεως στο σύστημα. Το σύστημα μας αναγκάζεται να κινείται με μία συχνότητα η οποία καθορίζεται από τον ομόρρου και φυσικά από τους διάφορους σχηματισμούς δινών του ομόρρου, ανάλογα πάντα με τις συνθήκες που επικρατούν. Αυτή η εξαναγκασμένη ταλάντωση λόγω του ομόρρου, λεγόμενη και ως *VIV*, αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο εκτενέστερα για τη κατανόηση του φαινομένου. Η ειδοποιός διαφορά της περιπτώσεως του συστήματος με εφαρμογή εξωτερικής δυνάμεως και χωρίς εφαρμογή, έγκειται στο ότι στη μία

περίπτωση, αυτής με εξωτερική δύναμη, λαμβάνουμε υπόψη τη επίδραση της δυνάμεως του ομόρρου στον κύλινδρο, ενώ στη περίπτωση χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης επικεντρωνόμαστε στη κίνηση μόνο του συστήματος χωρίς την επίδραση του ομόρρου. Τη διαφορά τους την υποδηλώνει και η ύπαρξη ή όχι δύναμης στο δεξί μέλος των σχέσεων κίνησης για τις δύο περιπτώσεις.

Για την εξαγωγή της σχέσεως κίνησης του συστήματος χρησιμοποιείται αντίστοιχη προσέγγιση με αυτή της προηγούμενης περίπτωσης. Οι ίδιες δυνάμεις ασκούνται στο σύστημα και εδώ, όπως επίσης ισχύει και η απλοποιημένη μορφή της σχετικής μετατόπισης και των παραγώγων της. Επιπρόσθετα όμως εμφανίζεται και η συνιστώσα δύναμη δινών που ασκείται από τον ομόρρο στο σώμα. Πρέπει να αναφερθεί ότι αυτή η δύναμη δεν είναι η συνολική δύναμη που ασκείται από τον ομόρρο στο ρευστό. Η συνολική δύναμη αποτελείται από δύο συνιστώσες, τη δύναμη λόγω δινών και τη δύναμη ιδανικού ρευστού προστιθέμενης μάζας σύμφωνα με τον Lighthill (1986).

$$F_{total} = F_{vortex} + F_{potential} \quad (4.28)$$

Οπότε, η σχέση κίνησης του συστήματος θα είναι:

$$(m + m_a) \ddot{z} + m_a \ddot{\zeta} + c\dot{z} + kz = F_v \Rightarrow$$

$$\left[A\omega_N^2 (m + m_a) - A\omega^2 (m + m_a) \right] \sin(\omega t) + \left[2\zeta (m + m_a) \omega_N - \frac{\omega^2 R}{U_\infty} m_a \right] \left[A\omega \cos(\omega t) \right] =$$

$$F_v \cos(\varphi) \sin(\omega t) + F_v \sin(\varphi) \cos(\omega t). \quad (4.29)$$

Με τη χρήση της ομαδοποίησης των ημιτόνων και των συνημιτόνων θα γίνει η εξαγωγή των σχέσεων της αδιάστατης συχνότητας f^* και του αδιάστατου πλάτους A^* .

Ομαδοποίηση ημιτόνων $\sin(\omega t)$:

$$A\omega_N^2 (m + m_a) - A\omega^2 (m + m_a) = F_0 \cos(\varphi) \Rightarrow (m + m_a) A (\omega_N^2 - \omega^2) = F_v \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$f^* = \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* + C_{EA}')}} \quad (4.30)$$

$$C_{EA}^* = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_v \cos(\varphi)}{A^*} \left(\frac{U^*}{f^*} \right)^2 + C_A \quad (4.31)$$

Ομαδοποίηση συνημιτόνων $\cos(\omega t)$:

$$\left[2(m + m_a)\zeta\omega_N - \frac{\omega^2 R}{U_\infty} m_a \right] A\omega = F_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$A^* = \frac{C_v \sin(\varphi)}{4\pi^3 \left(\frac{U^*}{f^*}\right) (m^* + C_A)\zeta - 4\pi^4 f^* R^* C_A} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^3 f^*. \quad (4.32)$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως σχετικά με τις δυνάμεις, η δύναμη που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν η συνολική δύναμη, F_{total} , αλλά η δύναμη λόγω δινών του ομόρρου, F_{vortex} . Στη πραγματικότητα όμως δεν μπορεί να μετρηθεί η δύναμη λόγω δινών, αλλά μόνο η συνολική δύναμη και αυτό διότι δεν είναι εφικτό να διαχωριστούν αυτές οι δυνάμεις εντός ενός ρέοντος ρευστού.

Είναι χρήσιμο να παρουσιαστεί η προσέγγιση που υπάρχει από διάφορους επιστήμονες στο θέμα των ασκούμενων δυνάμεων από τον ομόρρο. Η τάση που υπάρχει στις έρευνες του συγκεκριμένου προβλήματος είναι να λαμβάνεται η συνολική δύναμη, όπως οι έρευνες των Govardhan & Williamson (2000) και Khalak & Williamson (1999), και από αυτή να αφαιρείται η συνιστώσα του ιδανικού ρευστού, όπως φαίνεται και από τη σχέση (4.28). Η αδιάστατη συνιστώσα δύναμης ιδανικού ρευστού προστιθέμενης μάζας δίνεται από τη σχέση (4.33):

$$C_{potential} = \frac{F_{potential}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 DL} = 2\pi^3 \frac{(z(t)/D)}{(U^*/f^*)^2}. \quad (4.33)$$

Όπως φαίνεται από τη προηγούμενη σχέση, η δύναμη ιδανικού ρευστού είναι στιγμιαία και έτσι για κάθε σημείο και χρονική στιγμή μπορεί να υπολογιστεί αυτή η δύναμη και επακόλουθα και η δύναμη λόγω δινών. Έτσι, η σχέση κίνησης για αυτή τη περίπτωση δίνεται από αυτή τη παρακάτω σχέση:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F_{total} \sin(\omega t + \phi_{total}). \quad (4.34)$$

Στη σχέση (4.34) περιλαμβάνεται η επίδραση της προστιθέμενης μάζας στη συνολική δύναμη.

Κάποιοι ερευνητές όπως οι Sumer & Fredsoe (1997), Bearman (1984) και Blevins (1990) όμως χρησιμοποίησαν τη μορφή της σχέσεως κίνησης (4.91)

$$(m + m_a)\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F_{vortex} \sin(\omega t + \phi_{vortex}). \quad (4.35)$$

Εάν συγκρίνουμε αυτές τις δύο σχέσεις κίνησης, παρατηρούμε ότι στη (4.34) έχουμε τη συνολική δύναμη, F_{total} και τη γωνία συνολικής φάσης, ϕ_{total} , ενώ στη

(4.35) έχουμε F_{vortex} και φ_{vortex} . Προσθέτοντας και τον νέο όρο στη σχέση (4.35), αυτό της σχετικής μετατόπισης της προστιθέμενης μάζας, θα έχουμε τη σχέση κίνησης της νέας προσέγγισης που παρουσιάζεται. Η διαφορά των γωνιών έγκειται στη φάση των αντίστοιχων δυνάμεων τους με τη μετατόπιση, Δηλαδή:

φ_{vortex} = Γωνία μεταξύ δύναμης λόγω έκλυσης δινών και μετατόπισης,

φ_{total} = Γωνία μεταξύ συνολικής δύναμης ομόρρου και μετατόπισης.

Αυτή η αναφορά έγινε για να δειχτούν οι διαφορές μεταξύ των δύο δυνάμεων οι οποίες είναι αλληλένδετες, αλλά και γιατί υπάρχουν λεπτές διαφορές στα αποτελέσματα τα οποία θα σχολιαστούν στη συνέχεια.

Από τη σχέση (4.30) παρατηρούμε ότι είναι παρεμφερής η σχέση της αδιάστατης συχνότητας με την αντίστοιχη που ορίζεται από τους Khalak & Williamson (1999), σχέση (2.8). Η διαφορά τους έγκειται στον «δραστικό» συντελεστή προστιθέμενης μάζας. Η κύρια διαφορά του νέου «δραστικού» συντελεστή προστιθέμενης μάζας με αυτόν που ορίστηκε από τους Khalak & Williamson (1999), σχέση (2.9), είναι η διαφορετική δύναμη που εφαρμόζεται στον κύλινδρο. Με τη νέα μέθοδο έγινε εφικτή η εισαγωγή της επίδρασης της δυνάμεως λόγω δινών στο «δραστικό» συντελεστή προστιθέμενης μάζας, ο οποίος τελευταίος επηρεάζει την αδιάστατη συχνότητα. Με αυτό τον τρόπο προσδιορίζεται καλύτερα ποιά δύναμη είναι αυτή που επηρεάζει τη συχνότητα ταλάντωσης του κυλίνδρου. Εξηγείται μέσω μίας φυσικής σχέσης αυτή η επιρροή, αλλά βεβαίως η επιβεβαίωση της εγκυρότητας της σχέσεως πρέπει να έλθει μέσω της πειραματικής επιβεβαίωσης. Μία τελευταία διαφορά που παρατηρείται είναι ότι στη σχέση (4.31) εμφανίζεται και ο όρος του συντελεστή προστιθέμενης μάζας, C_A , ενώ για τη σχέση (2.9) αυτό δεν ισχύει. Τέλος μπορεί μέσω των πειραμάτων να δειχθεί εάν ισχύει η κρίσιμη τιμή του $C_{EA} = -0,54$ όπως αναφέρουν οι Khalak & Williamson (1999).

$$f^* = \sqrt{\frac{m^* + C_A}{m^* + C_{EA}}} \quad (2.8)$$

$$C_{EA} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_Y \cos(\varphi)}{A^*} \left(\frac{U^*}{f^*} \right)^2 \quad (2.9)$$

$$C_{EA}' = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_v \cos(\varphi_v)}{A^*} \left(\frac{U^*}{f^*} \right)^2 + C_A \quad (4.31)$$

Ένα νέο αποτέλεσμα που εξάχθηκε είναι αυτό του αδιάστατου πλάτους, A^* . Και εδώ παρατηρείται ότι η κύρια διαφορά τους έγκειται στις δυνάμεις. Στο αποτέλεσμα

με τη νέα μέθοδο παρατηρείται η επίδραση της δυνάμεως λόγω δινών και όχι η συνισταμένη δύναμη. Επίσης παρατηρείται ότι διαφέρει και κατά ένα παράγοντα στον παρανομαστή, οποίος για να προσδιοριστεί απαιτείται να είναι γνωστή η απόσταση του κέντρου μάζας της προστιθέμενης μάζας από το κέντρο του κυλίνδρου. Αυτός ο νέος όρος, $4\pi^4 f^* R^* C_A$, ουσιαστικά αντιπροσωπεύει τη νέα επιπρόσθετη κίνηση, τη σχετική κίνηση της προστιθέμενης μάζας ως προς τον κύλινδρο. Τέλος παρατηρείται ότι στο νέο «δραστικό» συντελεστή προστιθέμενης μάζας προστίθεται και ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας, C_A .

$$A^* = \frac{1}{4\pi^3} \frac{C_V \sin(\varphi)}{(m^* + C_A)\zeta} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^2 f^* \quad (2.7)$$

$$A^* = \frac{C_V \sin(\varphi_v)}{4\pi^3 \left(\frac{U^*}{f^*}\right) (m^* + C_A)\zeta - 4\pi^4 f^* R^* C_A} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^3 f^* \quad (4.32)$$

Φυσικά και σε αυτή τη περίπτωση κρίνεται απαραίτητο η διεξαγωγή πειραμάτων για την επαλήθευση της σχέσεως. Αυτό που μπορεί κάποιος να κάνει είναι να μετρήσει τη ταχύτητα του ρευστού πριν από το κύλινδρο και με κατάλληλη διάταξη να μετρηθούν τα αδιάστατα πλάτη και οι αδιάστατες συχνότητες και μέσω των σχέσεων (4.32) και (4.30) να υπολογιστεί η εγκάρσια και οριζόντια συνιστώσα της δύναμης έκλυσης δινών αντίστοιχα.

Με τον υπολογισμό των συνιστωσών μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η συνισταμένη δύναμη λόγω δινών και η αντίστοιχη γωνία που δημιουργείται από αυτή τη δύναμη και τη μετατόπιση σύμφωνα με τις σχέσεις (4.36) και (4.37) αντίστοιχα.

$$C_v = \sqrt{(C_v \sin \phi_v)^2 + (C_v \cos \phi_v)^2} \quad (4.36)$$

$$\phi_v = \arctan \left(\frac{C_v \sin \phi_v}{C_v \cos \phi_v} \right) \quad (4.37)$$

5. Συμπεράσματα – προτάσεις

Σε αυτή την εργασία, ερευνήσαμε μία νέα προσέγγιση κίνησης της προστιθέμενης μάζας για ένα βυθισμένο σώμα το οποίο ταλαντεύεται λόγω του ρέοντος ρευστού που το περικλείει. Συγκεκριμένα εξετάστηκε ένας σωλήνας κυκλικής εγκάρσιας διατομής για δύο διαφορετικές περιπτώσεις, σε ελεύθερη ταλάντωση και εξαναγκασμένη. Στη πρώτη ο σωλήνας αποκρίνεται ελεύθερα από τον σχηματιζόμενο ομόρρου χωρίς επιβολή εξωτερικής δύναμης και στη δεύτερη περίπτωση ταλαντεύεται με άσκηση επιρροής από τον ομόρρου. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν τα συστήματα κοντά στη περιοχή του συντονισμού, η οποία αποτελεί μια σημαντική περιοχή, λόγω των μεγαλύτερων πλατών που δημιουργούνται.

Στη ελεύθερη ταλάντωση εξάχθηκε μία νέα σχέση η οποία ορίζει ένα νέο συντελεστή απόσβεσης, ο οποίος εξαρτάται από τη ταχύτητα του ρέοντος ρευστού, την απόσταση του κέντρου μάζας της προστιθέμενης μάζας από τον κύλινδρο και από τον αδιάστατο λόγο μαζών. Μεταβάλλει τον προϋπάρχων συντελεστή απόσβεσης ανάλογα με τα μεγέθη που αναφέρθηκαν προηγουμένως, ενώ μπορεί να επιδρά στο σύστημα και ως διεγερτικός όρος όταν η τιμή του είναι αρνητική.

Για την επαλήθευση αυτού του αποτελέσματος απαιτείται η διεξαγωγή πειραμάτων για ένα εύρος τιμών ταχύτητας του ρευστού στη περιοχή όπου παρατηρείται συγχρονισμός καθώς επίσης απαιτείται μεταβολή και των υπολοίπων μεγεθών για την πειραματική παρατήρηση των αλληλεπιδράσεων όλων αυτών των παραγόντων.

Σημαντικό ρόλο επίσης έχει το ρευστό που χρησιμοποιείται. Μικροί λόγοι μαζών επιτυγχάνονται μόνο με τη χρήση νερού και όχι με χρήση αέρα ρευστού, ο οποίος έχει μεγάλο λόγο μαζών. Είναι πολύ σημαντικό το ρευστό λόγω του λόγου μαζών που εισέρχεται στην εξαγόμενη σχέση και παρατηρείται ότι για μεγάλες τιμές του συγκεκριμένου μεγέθους, ο νέος συντελεστής απόσβεσης προσεγγίζει τον κλασικά οριζόμενο συντελεστή απόσβεσης. Οπότε κάποιος δεν μπορεί να παρατηρήσει την επίδραση τόσο από τη μεταβολή του λόγου μαζών, όσο και των άλλων μεγεθών.

Ένα άλλο μέγεθος το οποίο πρέπει να υπολογιστεί είναι η αδιάστατη ακτίνα (ή απόσταση) R^* . Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των διαγραμμάτων δεν στηρίζονται σε κάποια ήδη προϋπάρχοντα δεδομένα. Είναι σημαντικό να προσδιοριστεί αυτή η απόσταση διότι έτσι μπορεί να προσδιοριστεί καλύτερα η όλη

κίνηση του συστήματος. Σε περίπτωση για παράδειγμα μεγάλης αποστάσεως από τον κύλινδρο αυτό μπορεί να σημαίνει ότι επηρεάζει το κέντρο βάρους του συνολικού συστήματος και ίσως θα πρέπει να μετατοπιστεί.

Παρεμφερής περίπτωση αποτελεί και η ταλάντωση με επιβολή εξωτερικής δυνάμεως. Πειράματα χρειάζονται να γίνουν και εδώ. Σημαντική είναι η επαλήθευση των αποτελεσμάτων πειραματικώς, για να διαπιστωθεί εάν η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε είναι ρεαλιστική.

Και σε αυτή τη περίπτωση σημαντική είναι η διεξαγωγή των πειραμάτων να γίνει με ρευστό μέσο το νερό για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε και προηγουμένως. Η εξαγόμενη σχέση της αδιάστατης συχνότητας παρουσιάζει την εξάρτηση της από το λόγο μαζών και ένα νέο οριζόμενο «δραστικό» συντελεστή προστιθέμενης μάζας, C_{EA} . Η σημαντική διαφορά έγκειται, σε σύγκριση με τον αντίστοιχο C_{EA} που ορίστηκε από τους Khalak & Williamson (1999), στο ότι στη σχέση της νέας προσέγγισης που ακολουθήθηκε φαίνεται ξεκάθαρα η επίδραση της δυνάμεως έκλυσης δινών στο «δραστικό» συντελεστή προστιθέμενης μάζας και επακόλουθα την επίδραση στη συχνότητα, σε αντίθεση με τη προσέγγιση των Khalak & Williamson (1999) όπου χρησιμοποιείται η συνολική δύναμη και φυσικά και η γωνία που δημιουργείται από τη συνολική δύναμη και τη μετατόπιση.

Ο προσδιορισμός και εδώ της αδιάστατης ακτίνας είναι μία σημαντική πτυχή του εξεταζόμενου προβλήματος, ως ένα νέο μέγεθος, το οποίο υπεισέρχεται στη σχέση του αδιάστατου πλάτους. Όταν αυξάνεται η αδιάστατη ακτίνα αυξάνεται και το αδιάστατο πλάτος, γι' αυτό θα πρέπει να προσδιοριστεί επακριβώς το συγκεκριμένο μέγεθος.

Απαιτείται η διεξαγωγή πειραμάτων να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής για την εξάλειψη παραγόντων που εισάγουν σφάλμα στα αποτελέσματα. Η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της συχνότητας και του πλάτους, είτε μέσω περαιτέρω υπολογισμών είτε μέσω διαγραμμάτων ήδη υπάρχοντων δεδομένων, θα επιβεβαιώσει την ισχύ αυτής της μεθόδου ή την ανάγκη για περαιτέρω βελτίωση για ακριβέστερα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

1. Feng, C.C., 1968. The measurements of vortex-induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders. Master's thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
2. Dean R. G., Dalrymple R. A., 1984. World Scientific Publishing: Water wave mechanics for engineers and scientists.
3. Lighthill, J., 1986. Wave loading on offshore structures. *J. Fluid Mech.* 173, 667-681.
4. Ongoren, A., Rockwell, D., 1988. Flow structure from an oscillating cylinder. Part 2. Mode competition in the near wake. *J. Fluid Mech.* 191, 225-245.
5. Williamson, C.H.K., Roskho A., 1988. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *J. Fluids Struct.* 2, 355–381.
6. Blevins, R. D., 1990. Flow-induced vibrations. New York: Van Nostrand Reinhold
7. Gopalkrishnan, R., 1993. Vortex-induced forces on oscillating bluff cylinders. Bachelor's thesis, Indian Institute of Technology Madras.
8. Khalak, A., Williamson, C.H.K., 1996. Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping. *J. Fluids Struct.* 10, 455–472.
9. Khalak, A., Williamson, C.H.K., 1997b. Investigation of the relative effects of mass and damping in vortex-induced vibration of a circular cylinder. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 69–71, 341–350.
10. Khalak, A., Williamson, C.H.K., 1999. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. *J. Fluids Struct.* 13, 813–851.
11. Govardhan, R., Williamson, C.H.K., 2000. Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.* 420, 85–130.
12. Norberg, C., 2003. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *J. Fluids Struct.* 17, 57-96.
13. Lazarkov, M., 2004. Numerical Study of Fluid-Structure Interaction with Application to Oscillating Cylinders.
14. Williamson, C.H.K., Govardhan, R., 2004. Vortex-Induced Vibrations, *Annual Review of Fluid Mechanics* 36, 413-455.

15. Cengel. Y., 2005. Μεταφορά θερμότητας. Μία πρακτική προσέγγιση. Εκδόσεις Τζιόλα.
16. Williamson, C.H.K., Govardhan, R., 2008. A brief review of recent results in vortex-induced vibrations. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 96, 713–735.
17. Morse, T.L., Williamson, C.H.K., 2009. Fluid forcing, wake modes, and transitions for a cylinder undergoing controlled oscillations. *J. Fluids Struct.* 25, 697-712.

Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία εξαγωγής των τελικών εξισώσεων του νέου αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης για τη περίπτωση χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης και της αδιάστατης συχνότητας f^* και του αδιάστατου πλάτους ταλάντωσης του συστήματος A^* για την περίπτωση με εφαρμογή εξωτερικής δύναμης.

Περίπτωση χωρίς εφαρμογή εξωτερικής δύναμης

Η σχέση κίνησης που διέπει το σύστημα, όπως αναφέρεται και στο σχετικό κεφάλαιο της νέας προσέγγισης της προστιθέμενης μάζας είναι $(m + m_a)\ddot{z} + m_a\ddot{\bar{z}} + c\dot{z} + kz = 0$. Με χρήση των σχέσεων του αδιάστατου συντελεστή απόσβεσης, μαζών, προστιθέμενης μάζας, ζ , m^* , C_A , αντίστοιχα και των υπολοίπων αδιάστατων μεγεθών, U^* και f^* , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (m + m_a)\ddot{z} + m_a\ddot{\bar{z}} + c\dot{z} + kz &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{z} + \frac{m_a}{(m + m_a)}\ddot{\bar{z}} + \frac{c}{(m + m_a)}\dot{z} + \frac{k}{(m + m_a)}z &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{z} + \frac{C_A}{m^* + C_A}\ddot{\bar{z}} + 2\zeta\omega_N\dot{z} + \omega_N^2z &= 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{C_A}{m^* + C_A}\left[-\frac{\omega^2R}{U_\infty}\dot{z}\right] + 2\zeta\omega_N\dot{z} + \omega_N^2z = 0 \Rightarrow \\ \ddot{z} + \left[2\zeta\omega_N - \frac{C_A}{m^* + C_A}\frac{\omega^2R}{U_\infty}\right]\dot{z} + \omega_N^2z &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{z} + \left[2\zeta\omega_N - \frac{C_A}{m^* + C_A}\frac{\omega^2R}{U_\infty}\right]\dot{z} + \omega_N^2z &= 0 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη προηγούμενη σχέση ο νέος αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης ζ' θα δίνεται από τη σχέση (A.1):

$$\begin{aligned} 2\zeta'\omega_N &= 2\zeta\omega_N - \frac{C_A}{(m^* + C_A)}\frac{\omega^2R}{U_\infty} \Rightarrow \zeta' = \zeta - \frac{C_A}{(m^* + C_A)}\frac{\omega^2R}{2\omega_N U^* f_N D} \Rightarrow \\ \zeta' &= \zeta - \frac{C_A}{(m^* + C_A)}\frac{2\pi\omega^2 R^*}{2\omega_N^2 U^*} \Rightarrow \\ \zeta' &= \zeta - \frac{C_A}{(m^* + C_A)}\left(\frac{f^*}{U^*}\right)^2 U^* \pi R^* \end{aligned} \tag{A.1}$$

Περίπτωση με εφαρμογή εξωτερικής δύναμης

Και στη περίπτωση με εφαρμογή εξωτερικής δύναμης στον κύλινδρο χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις που ορίζουν τα αδιάστατα μεγέθη. Οπότε, η ανάλυση της σχέσεως κίνησης θα έχει ως εξής:

$$(m + m_a) \ddot{z} + m_a \ddot{\xi} + c\dot{z} + kz = F_v \Rightarrow$$

$$\left[A\omega_N^2 (m + m_a) - A\omega^2 (m + m_a) \right] \sin(\omega t) + \left[2\zeta (m + m_a) \omega_N - \frac{\omega^2 R}{U_\infty} m_a \right] \left[A\omega \cos(\omega t) \right] =$$

$$F_v \cos(\varphi) \sin(\omega t) + F_v \sin(\varphi) \cos(\omega t)$$

Ομαδοποίηση ημιτόνων

$$A\omega_N^2 (m + m_a) - A\omega^2 (m + m_a) = F_v \cos(\varphi) \Rightarrow (m + m_a) A (\omega_N^2 - \omega^2) = F_v \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$(m^* + C_A) m_a A \omega_N^2 (1 - f^{*2}) = F_v \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{(m^* + C_A)}{\frac{\rho D L U_\infty^2}{2}} \frac{\pi \rho D^2 L}{4} A \omega_N^2 (1 - f^{*2}) = \frac{F_v}{\frac{\rho D L U_\infty^2}{2}} \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{(m^* + C_A)}{U^{*2} f_N^2 D^2} \frac{\pi D}{2} A^* D 4 \pi^2 f_N^2 (1 - f^{*2}) = C_v \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{(m^* + C_A)}{U^{*2}} A^* 2\pi^3 (1 - f^{*2}) = C_v \cos(\varphi) \Rightarrow \frac{(m^* + C_A)}{U^{*2}} A^* 2\pi^3 \frac{f^{*2}}{f^{*2}} (1 - f^{*2}) = C_v \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{(m^* + C_A)}{U^{*2}} A^* 2\pi^3 f^{*2} \frac{(1 - f^{*2})}{f^{*2}} = C_v \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi^3 A^* (m^* + C_A) f^{*2} (1 - f^{*2})}{U^{*2} f^{*2}} = C_v \cos(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{f^{*2}} - 1 = \frac{C_v \cos(\varphi)}{\frac{2\pi^3 A^* (m^* + C_A) f^{*2}}{U^{*2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f^{*2}} = 1 + \frac{U^{*2}}{f^{*2}} \frac{C_v \cos(\varphi)}{2\pi^3 A^* (m^* + C_A)} \Rightarrow f^{*2} = \frac{2\pi^3 A^* (m^* + C_A)}{2\pi^3 A^* (m^* + C_A) + \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^2 C_v \cos(\varphi)} \Rightarrow$$

$$f^* = \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* + C_A) + \frac{1}{2\pi^3 A^*} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^2 C_v \cos(\varphi)}} \Rightarrow$$

$$f^* = \sqrt{\frac{(m^* + C_A)}{(m^* + C_{EA})}}, \quad (\text{A.2})$$

$$C_{EA} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_v \cos(\varphi)}{A^*} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^2 + C_A. \quad (\text{A.3})$$

Από τις σχέσεις (A.2) και (A.3) έχουμε την αδιάστατη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος και τον «δραστικό» συντελεστή προστιθέμενης μάζας αντίστοιχα.

Ομαδοποίηση συνημιτόνων

$$\left[2(m + m_a) \zeta \omega_N - \frac{\omega^2 R}{U_\infty} m_a \right] A \omega = F_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$2\zeta (m + m_a) A \omega \omega_N - \frac{\omega^3 R A}{U_\infty} m_a = F_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$2\zeta (m^* + C_A) m_d A \omega \omega_N - \frac{\omega^3 R A C_A m_d}{U_\infty} = F_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{2\zeta (m^* + C_A) \pi \rho D^2 L}{\frac{1}{2} \rho D L U_\infty^2} \frac{\pi \rho D^2 L}{4} A^* D f^* \omega_N^2 - \frac{f^{*3} \omega_N^3 R A^* D C_A \frac{\pi \rho D^2 L}{4}}{\frac{1}{2} \rho D L U_\infty^2 U_\infty} = \frac{F_v}{\frac{1}{2} \rho D L U_\infty^2} \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta (m^* + C_A)}{U_\infty^2} \pi D^2 A^* f^* \omega_N^2 - \frac{f^{*3} \omega_N^3 R A^* C_A \pi D^2}{2 U_\infty^3} = C_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta (m^* + C_A)}{U^{*2} f_N^2 D^2} \pi D^2 A^* f^* 4\pi^2 f_N^2 - \frac{f^{*3} 2^3 \pi^3 f_N^3 R A^* C_A \pi D^2}{2 U^{*3} f_N^3 D^3} = C_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta (m^* + C_A)}{U^{*2}} 4\pi^3 f^* A^* - \frac{f^{*3} 4\pi^4 R^* C_A}{U^{*3}} A^* = C_v \sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$A^* = \frac{C_v \sin(\varphi)}{4\pi^3 (m^* + C_A) \zeta \frac{f^*}{U^{*2}} - 4\pi^4 R^* C_A \frac{f^{*3}}{U^{*3}}} \Rightarrow$$

$$A^* = \frac{C_v \sin(\varphi)}{4\pi^3 (m^* + C_A) \zeta \frac{f^{*3}}{U^{*3}} \frac{U^*}{f^*} \frac{1}{f^*} - 4\pi^4 R^* C_A \frac{f^{*3}}{U^{*3}}} \Rightarrow$$

$$A^* = \frac{C_v \sin(\varphi)}{4\pi^3 \left(\frac{U^*}{f^*}\right) (m^* + C_A) \zeta - 4\pi^4 f^* R^* C_A} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^3 f^*. \quad (\text{A.4})$$

Η σχέση (A.4) μας δίνει το αδιάστατο πλάτος ταλάντωσης του συστήματος.