ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός κύκλος (13-18 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

«Η γεωμετρική απόδειξη με μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης»

της
Πέλλα Παναγιώτας
Α.Ε.Μ.: 583

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αν.Καθηγητής
Εξεταστές: Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Θωμαΐδης Ιωάννης, Δρ. Μαθηματικών

Φλώρινα, 03/11/2018

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

   Βαθμίδα: Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

   Βαθμός: ______________________________

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Σακονίδης Χαράλαμπος

   Βαθμίδα: Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε/Δ.Π.Θ

   Βαθμός: ______________________________

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Θωμαΐδης Ιωάννης

   Βαθμίδα: Δρ. Μαθηματικών

   Βαθμός: ______________________________

   Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός: _________________________

Η συγγραφέας της παρούσας εργασίας, Πέλλα Παναγιώτα, βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Ημερομηνία:03/11/2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θεωρώ υποχρέωση μου πριν από την παρουσίαση της παρούσας ερευνητικής εργασίας να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που βοήθησαν ώστε να ολοκληρωθεί αυτή η προσπάθεια. Πρώτο από όλους ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον κύριο επιβλέποντα της εργασίας, αναπληρωτή καθηγητή του ΠΤΔΕ Φλώρινας, κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για τις συμβουλές και την καθοδήγηση των βημάτων της εργασίας. Ακόμη ευχαριστώ τον κ. Σακονίδη Χαράλαμπο και κ. Θωμαΐδη Ιωάννη για τη συμμετοχή τους στη τριμελή επιτροπή της εργασίας μου και για τις τελικές παρατηρήσεις και διορθώσεις.

Για την έρευνα ευχαριστίες οφείλω στους εκπαιδευτικούς Μαρία Παπακωνσταντίνου και Αθανάσιο Σισμανίδη για την παραχώρηση των τμημάτων τους και των διδακτικών τους ωρών. Επίσης, ευχαριστώ τους μαθητές και τις μαθήτριες που συμμετείχαν στην έρευνα με ζωντάνια και ενδιαφέρον και διαμόρφωσαν τα αποτελέσματα της.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ ανήκει βεβαίως στην οικογένεια μου. Στο σύζυγο μου Κώστα, που πάντοτε με στηρίζει και φρόντισε να διατηρήσει ένα ισορροπημένο περιβάλλον ώστε να είναι εφικτή η παρακολούθηση του ΜΠΣ αλλά και η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Στα δύο παιδία μας, Δημήτρη και Θεοδώρα, που με υπομονή και αληθινό ενδιαφέρον ήταν δίπλα μου. Στους γονείς μου που πάντα στηρίζουν τις προσπάθειες μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω δύο φίλες μου, που με τον δικό τους ιδιαίτερο τρόπο με βοήθησαν και συνεχίζουν να με στηρίζουν, την αδερφή Αντωνία και την αδερφή Χρυσοστόμη.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω την εργασία αυτή στην καρδιακή φίλη μου Κατερίνα Στάμου ως ελάχιστο ευχαριστώ για τη συνολική βοήθεια και συμπαράστασή της.

Πέλλα Παναγιώτα

Φλώρινα,2018

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 6

ABSTRACT 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 10

1.1 Ιστορική αναδρομή της απόδειξης 10

1.2 Έρευνες για τη διδασκαλία της απόδειξης 12

1.3 Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (MWS) 19

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 27

2.1 Στόχος 27

2.2 Ερευνητικά Ερωτήματα 27

2.3 Δείγμα 28

2.4 Διαδικασία 28

2.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ 29

2.5.1. ΔΗΜΟΤΙΚΟ 31

2.5.2 ΓΥΜΝΑΣΙΟ 32

2.5.3 ΛΥΚΕΙΟ 34

2.6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ 34

2.7 ΕΡΓΑΛΕΙΑ 45

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 47

3.1 ΓΥΜΝΑΣΙΟ 48

3.1.1ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ PRE-TEST 48

3.1.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ POST-TEST 51

3.2 ΛΥΚΕΙΟ 57

3.2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ PRE-TEST 57

3.2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ POST-TEST 59

3.3 Συγκριτική αποτίμηση Γυμνασίου-Λυκείου 63

3.4. Προσωπικός ΓΧΕ των μαθητών κατά την διδακτική παρέμβαση 67

4. Συμπεράσματα / Συζήτηση 75

4.1. Συμπεράσματα 75

4.2. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΥΕΝΑΣ 78

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 80

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 84

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΕΙΚΟΝΩΝ - ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1 : Σχηματική αναπαράσταση του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας 21
Σχήμα 2 : Διάγραμμα του ΜΧΕ με τις τρεις γενέσεις. 22
Σχήμα 3 : Το επίπεδο [Sem – Dis] του ΜΧΕ 24
Σχήμα 4 : Το επίπεδο [Ins – Dis] του ΜΧΕ 24
Σχήμα 5 : Το επίπεδο [Sem – Ins] του ΜΧΕ 25
Σχήμα 6 : Τρίγωνο 1^{ου} φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.89) 36
Σχήμα 7 : Δραστηριότητα 2^{ου} φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.90) 36
Σχήμα 8 : Δραστηριότητα 4^{ου} φύλλου εργασίας (παράρτημα,σελ.92) 37
Σχήμα 9 : Κινέζικη Απόδειξη Θεωρήματος 42
Σχήμα 10 : Δραστηριότητα φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.100) 44
Σχήμα 11 : Δραστηριότητα φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.101) 44

ΕΙΚΟΝΕΣ

Εικόνα 1 : Εφαρμογή σχολικού βιβλίου Στ΄ Δημοτικού (σελ. 142) 32
Εικόνα 2 : Δραστηριότητα σχολικού βιβλίου μαθητή α΄ γυμνασίου (σελ. 221) 33
Εικόνα 3 : Δραστηριότητα 3^{ου} φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.91) 37
Εικόνα 4 : Δραστηριότητα 5^{ου} φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.93) 38
Εικόνα 5 : Εφαρμογή GeoGebra άθροισμα γωνιών τριγώνου 39
Εικόνα 6 : Εφαρμογή GeoGebra άθροισμα γωνιών τριγώνου 39
Εικόνα 7 : Απόδειξη θεωρήματος σχολικό βιβλίο μαθητή Γεωμετρία Α΄ Λυκείου (σελ. 88) 40
Εικόνα 8 : Απόδειξη Θεωρήματος Στοιχεία Ευκλείδη (σελ. 178) 41
Εικόνα 9 : Απόδειξη μαθήτριας Γυμνασίου 54
Εικόνα 10: Απόδειξη μαθήτριας Γυμνασίου 55
Εικόνα 11: Απόδειξη μαθήτριας Γυμνασίου 55
Εικόνα 12: Απόδειξη μαθητή Γυμνασίου 56
Εικόνα 13: Απόδειξη μαθητή Γυμνασίου 56
Εικόνα 14: Απόδειξη μαθητή Λυκείου 62
Εικόνα 15: Απόδειξη μαθητή Λυκείου 62
Εικόνα 16: Απόδειξη μαθητή Λυκείου 63
Εικόνα 17: Απόδειξη μαθητή Λυκείου 63
Εικόνα 18: Λύση άσκησης μαθητή Γυμνασίου 65
Εικόνα 19: Λύση άσκησης μαθητή Γυμνασίου 65
Εικόνα 20: Λύση άσκησης μαθητή Λυκείου 66
Εικόνα 21: Λύση άσκησης μαθητή Λυκείου 66
Εικόνα 22: Λανθασμένη μέτρηση γωνίας με μοιρογνωμόνιο μαθήτριας Λυκείου 67
Εικόνα 23 : Προσπάθεια σχηματισμού τριγώνου με δοσμένες γωνίες 68
Εικόνα 24 : Σχηματισμός οξυγώνιου τριγώνου με γωνίες 60^{o}, 50^{o} και 70^{o} 69
Εικόνα 25 : Σχηματισμός ορθογώνιου τριγώνου με γωνίες 90^{o}, 30^{o} και 60^{o} 69
Εικόνα 26: Απόδειξη μαθητή Γυμνασίου 72
Εικόνα 27: Απόδειξη με κόψιμο γωνιών μαθητή Γυμνασίου 72
Εικόνα 28: Απόδειξη μαθήτριας Λυκείου 72
Εικόνα 29: Απόδειξη με κόψιμο γωνιών μαθήτριας Λυκείου 73

Εικόνα 30 : Λύση άσκησης από μαθητή Γυμνασίου 74
Εικόνα 31 : Λύση άσκησης από μαθήτρια Λυκείου 74

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 1 : Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις pre-test Γυμνασίου 50
Πίνακας 2 **:** Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις post-test Γυμνασίου 53
Πίνακας 3 **:** Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις pre-test Λυκείου 59
Πίνακας 4 **:** Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις post-test Λυκείου 61
Πίνακας 5 **:** Σωστές απαντήσεις pre/post-test Γυμνασίου και Λυκείου 64

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν διττός: πρώτον να διερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές του γυμνασίου και του λυκείου γνωρίζουν την έννοια της γεωμετρικής απόδειξης και σε ποιο βαθμό είναι εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία, και κατά δεύτερον να διαφανεί τι είδους βελτίωση μπορεί να προκύψει στον αποδεικτικό λόγο των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μετά από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 44 μαθητές, χωρισμένοι σε δύο ισόποσα τμήματα β' τάξης γυμνασίου και λυκείου αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα ερμηνεύτηκαν με βάση τη θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας και προέκυψαν από τρία ερευνητικά στάδια: από τον αναφορικό ΓΧΕ των μαθητών με τη συμπλήρωση ενός τεστ ελέγχου, από τον κατάλληλο ΓΧΕ που αναπτύχθηκε κατά τη διδακτική παρέμβαση για την κατανόηση της διαδικασίας της γεωμετρικής απόδειξης και, τέλος, από τον προσωπικό ΓΧΕ των μαθητών με τη συμπλήρωση ενός τεστ προόδου. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι μαθητές του γυμνασίου είχαν φτωχό θεωρητικό σύστημα αναφοράς και παρουσίασαν μικρή πρόοδο στην αποδεικτική διαδικασία. Αντιθέτως, οι μαθητές του Λυκείου ήταν εξαρχής εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία και επιδέχτηκαν σημαντική βελτίωση στον αποδεικτικό τους λόγο.

Λέξεις κλειδιά: Γεωμετρική απόδειξη, Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας, μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

ABSTRACT

The aim of the present research is double: first, to investigate how familiar Junior High School and Senior High School students are with the notion of the Geometrical proof and how familiar they are with the process of proving. Second, to show how far the speech of proving of secondary education students can improve as a result of the teaching intervention. Forty four (44) students took part in the research, divided into two groups including the same number of learners of second grade of Junior High School and Senior High School respectively. Results were discussed on the basis of the theory of GWS following 3 research stages: the students' reference GWS with the use of a pre-test, the suitable GWS developed during the teaching intervention for the understanding of the process of the geometrical proof and finally, from the students' personal GWS with the completion of a post-test. Results analysis showed that Junior High School students had a poor referential system while they showed little progress during the proving process. On the contrary, Senior High School students were familiar with the proving process from the very beginning significantly improving their proving speech.

Keywords: Geometric Working Space, geometrical proof, secondary education students

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γεωμετρική απόδειξη αποτελεί το θεμέλιο της επιστήμης των μαθηματικών, αλλά και των υπόλοιπων θετικών επιστημών. Σύμφωνα με τον Freudental (1971) το πρώτο καταγεγραμμένο μάθημα γεωμετρίας συναντάται στον Μένωνα του Πλάτωνα από τον Σωκράτη στην προσπάθεια του να διδάξει μαθηματικά σε ένα δούλο. Η φράση «εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλά δεῖξον» (83^{E} Πλάτων) δείχνει τη σταδιακή εξέλιξη από την επίδειξη ενός μεγέθους σε σχήμα στη θεωρητική απόδειξη μίας πρότασης. Επομένως, η διδασκαλία της απόδειξης αποτέλεσε από πολύ νωρίς θέμα μελέτης και έρευνας. Τα τελευταία δέκα χρόνια μία νέα θεωρία, αυτή των Μαθηματικού Χώρου Εργασίας (MWS), αναπτύχθηκε από τον Kuzniak με σκοπό τη μελέτη καταστάσεων διδασκαλίας σε όλους τους τομείς των μαθηματικών. Πρόκειται για μία δυναμικά εξελισσόμενη θεωρία, η οποία εξετάζει μια μαθηματική εργασία και αναδεικνύει την πολυπλοκότητα της.

Η παρούσα εργασία αποτελεί προσπάθεια εφαρμογής της θεωρίας του MWS στη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης, στο πλαίσιο μίας σχεδιασμένης διδακτικής παρέμβασης για μαθητές γυμνασίου και λυκείου, και αποτελείται από τέσσερις ενότητες με την εξής θεματική:

Στην πρώτη ενότητα - Θεωρητικό Πλαίσιο - γίνεται σύντομη ιστορική αναδρομή της επιστήμης της Γεωμετρίας, μέσα από την οποία αναδεικνύεται η ανάγκη της γέννησης της γεωμετρικής απόδειξης· δίνονται οι αναγκαίοι ορισμοί της γεωμετρικής απόδειξης με σκοπό την αποσαφήνιση της έννοιας· παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σύγχρονων ερευνών πάνω στη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και αναλύεται η θεωρία του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας (MWS).

Στη δεύτερη ενότητα - Μεθοδολογία της Έρευνας - παρουσιάζεται ο στόχος της έρευνας και διατυπώνονται τα ερευνητικά ερωτήματα. Διευκρινίζεται η επιλογή του δείγματος της έρευνας και περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε. Στη συνέχεια αναλύεται ο Γεωμετρικός Χώρος Αναφοράς ως προς την απόδειξη των μαθητών δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου. Η ενότητα περιλαμβάνει και την ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης, ενώ τελειώνει με την αναλυτική παρουσίαση των εργαλείων που στήριξαν την έρευνα.

Στην τρίτη ενότητα - Αποτελέσματα - στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του pre-test και του post-test των μαθητών του γυμνασίου. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο test των μαθητών του λυκείου. Και στα δύο μέρη γίνεται ποιοτική και ποσοτική ανάλυση και σύγκριση των αποτελεσμάτων, αλλά αναλύονται οι γενέσεις και οι διαδρομές στα επίπεδα του ΓΧΕ που ακολούθησαν οι μαθητές κατά την επίλυση των δραστηριοτήτων. Τέλος, γίνεται μια συγκριτική αποτίμηση των επιδόσεων των μαθητών των δύο βαθμίδων.

Στην Ενότητα 4 - Συζήτηση/Συμπεράσματα - ερμηνεύονται τα αποτελέσματα και εξάγονται συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα οργανωμένα σε ομάδες ακολουθούν την πορεία διεξαγωγής της έρευνας και απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα, ενώ παράλληλα επισημαίνονται ομοιότητες και διαφορές με άλλα ερευνητικά ευρήματα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα νέα ερευνητικά στοιχεία που προέκυψαν στην παρούσα έρευνα και διατυπώνονται οι περιορισμοί της.

Στο τέλος παρατίθεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για να πλαισιώσει όσα αναφέρονται στο κείμενο και ακολουθούν τα παραρτήματα. Στο Παράρτημα 1 παρουσιάζονται τα τεστ αξιολόγησης που δόθηκαν στους μαθητές και στο Παράρτημα 2 παρουσιάζονται τα φύλλα εργασίας που στήριξαν τη διδακτική παρέμβαση.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Ιστορική αναδρομή της απόδειξης

Η απόδειξη αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις έννοιες - αν όχι τη σημαντικότερη - στην επιστήμη των μαθηματικών. Αυτό φαίνεται και από μια σύντομη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών, η οποία αναδεικνύει την ύπαρξη πολλών και αντικρουόμενων απόψεων σχετικά με τον τόπο και το χρόνο ανακάλυψης - γέννησης της απόδειξης.

Σύμφωνα με τον Victor Katz (2008) στο βιβλίο του *Ιστορία των μαθηματικών* μία νέα προσέγγιση εμφανίστηκε στην αρχαία Ελλάδα πριν από τον 4ο αιώνα π.Χ. Δεν αρκούσε πια η αριθμητική επίλυση των προβλημάτων, αλλά έπρεπε να αποδεικνύεται η ορθότητα των προτάσεων και των αποτελεσμάτων. Τα γεωγραφικά χαρακτηριστικά της Ελλάδας με τα πολλά βουνά και τα νησιά δεν επιτρέπουν μεγάλης έκτασης γεωργικές καλλιέργειες. Ίσως εξαιτίας αυτού του γεγονότος να μην αναπτύχθηκε κεντρική εξουσία στην αρχαία Ελλάδα. Η βασική πολιτική οργάνωση ήταν η πόλη - κράτος. Τα πολιτικά καθεστώτα των πόλεων ήταν πολυποίκιλα, αλλά εν γένει εξουσίαζαν πληθυσμούς λίγων χιλιάδων. Το καθεστώς μπορεί να ήταν δημοκρατικό ή μοναρχικό, αλλά δεν ήταν αυθαίρετο. Κάθε καθεστώς υπάκουε σε νόμους, πράγμα που έδινε κίνητρο στους πολίτες να είναι ικανοί στην επιχειρηματολογία και τη συζήτηση. Ίσως εξαιτίας αυτού του χαρακτηριστικού να αναπτύχθηκε η ανάγκη για μαθηματικές αποδείξεις.

Οι Έλληνες πίστευαν ότι τα μαθηματικά ήταν μία από τις πρωταρχικές επιστήμες, η βάση για κάθε μελέτη του φυσικού κόσμου. Και μολονότι ο δυτικός πολιτισμός χρωστά πολλά στον ελληνικό πολιτισμό για τα επιτεύγματά του στη λογοτεχνία, την τέχνη και την αρχιτεκτονική, στα ελληνικά μαθηματικά οφείλει την ιδέα της μαθηματικής απόδειξης, μιας ιδέας που βρίσκεται στη βάση των σύγχρονων μαθηματικών και κατ' επέκταση στα θεμέλια του σύγχρονου τεχνολογικού πολιτισμού. (Katz, σελ.54)

Ο αρχαιότερος Έλληνας μαθηματικός που αναφέρεται είναι ο Θαλής ο Μιλήσιος (624-547 π.Χ). Ο Θαλής ασχολήθηκε με την επίλυση πρακτικών προβλημάτων της εποχής του και μέσα από αυτό ανακάλυψε διάφορα θεωρήματα, πχ ότι οι "παρά τη βάσει" γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Δεν είναι γνωστό πώς ο Θαλής "απέδειξε" τις προτάσεις αυτές, αλλά είναι προφανές ότι βασίστηκε σε κάποιο λογικό επιχείρημα.

Ο επόμενος μεγάλος μαθηματικός που αναφέρεται και άρχισε να βάζει τα μαθηματικά στο δρόμο της απόδειξης είναι ο Πυθαγόρας (572-497 π.Χ.). Στον Πυθαγόρα και στους μαθητές του αποδίδονται πολλές προτάσεις και ανακαλύψεις σε όλους τους τομείς των μαθηματικών. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι χρησιμοποιούσαν κάποιο είδος αξιωματικού συστήματος , αλλά είχαν σίγουρα αποφασίσει ότι κάποιο είδος λογικού επιχειρήματος ήταν αναγκαίο για τον προσδιορισμό της αλήθειας ενός αποτελέσματος.

Η μεγάλη στροφή προς τη θεωρητική μελέτη των μαθηματικών, και ιδιαίτερα της γεωμετρίας, έγινε τον 4ο αιώνα από τον Πλάτωνα. Κατά τον Πλάτωνα σκοπός της γεωμετρίας δεν είναι η πρακτική χρησιμότητα της, αλλά η απόκτηση γνώσης. Επομένως η μελέτη της γεωμετρίας γίνεται θεωρητική με σκοπό "να τραβήξει την ψυχή στην αλήθεια". Στο υπέρθυρο της πύλης της εισόδου της Σχολής του υπήρχε η επιγραφή ¨Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω¨. Η συνεισφορά του Πλάτωνα και της σχολής του ήταν καταλυτική στην εξέλιξη της γεωμετρικής απόδειξης. Ο Πλάτων και οι μαθητές του εισηγήθηκαν και εφάρμοσαν την αναλυτική μέθοδο, σε αντίθεση με την παραγωγική που ήταν γνωστή μέχρι τότε. Ο Πλάτων δεν μας έχει δώσει ο ίδιος αξιόλογα μαθηματικά επιτεύγματα, παρήγαγε όμως η σχολή του πολλούς αξιόλογους μαθηματικούς, ένας από αυτούς ήταν και ο Αριστοτέλης.

Η συνέχεια στη μελέτη της θεωρητικής γεωμετρίας, αλλά με διαφορετικό τρόπο, γίνεται από τον Αριστοτέλη τον 3ο αιώνα π.Χ. Ο Αριστοτέλης συνέγραψε για πολλά θέματα, μεταξύ των οποίων η πολιτική, η ηθική, η φυσική κ.α. Όσον αφορά τα μαθηματικά, η μεγαλύτερη επιρροή του ήταν στον κλάδο της λογικής. Για τον Αριστοτέλη, η λογική επιχειρηματολογία σύμφωνα με τις μεθόδους του είναι ο μόνος τρόπος απόκτησης επιστημονικής γνώσης. Μπορεί να αποκτούμε γνώση και με άλλους τρόπους, ωστόσο η απόδειξη μέσω μιας ακολουθίας συλλογισμών είναι ο μόνος βέβαιος τρόπος, με τον οποίο μπορεί κανείς να είναι σίγουρος για το αποτέλεσμα. Συνεπώς, οι κανόνες του Αριστοτέλη για την απόκτηση γνώσης, σύμφωνα με τους οποίους ξεκινούμε από αξιώματα και μέσω αποδείξεων καταλήγουμε σε νέα συμπεράσματα, συνιστούν το πρότυπο που ακολουθούν οι μαθηματικοί ως σήμερα.

Αν και όλοι οι μαθηματικοί που αναφέρθηκαν παραπάνω χρησιμοποίησαν αποδείξεις και ανέδειξαν τη χρησιμότητα της απόδειξης, αυτός που της έδωσε πρωταρχικό ρόλο και τη στερέωσε στη μελέτη των μαθηματικών είναι ο Ευκλείδης. Ο Ευκλείδης (~300-270 π.Χ.) έγραψε το σπουδαιότερο μαθηματικό κείμενο της ελληνικής εποχής, ίσως όλων των εποχών, τα *Στοιχεία*. Σύμφωνα με τα "Σχόλια" του Πρόκλου, ο Ευκλείδης στο έργο του, συγκέντρωσε, συστηματοποίησε και τελειοποίησε πολλά από τα θεωρήματα των προηγούμενων μαθηματικών και τα διατύπωσε με αποδείξιμη και μη ανασκευάσιμη μορφή. Παρέθεσε 23 ορισμούς, 5 γεωμετρικά αιτήματα και 5 επιπρόσθετες προτάσεις, τις οποίες ονόμασε "κοιναί έννοιαι", στη βάση των οποίων απέδειξε 465 θεωρήματα. Το αξιωματικό σύστημα που κατασκεύασε ο Ευκλείδης εμφάνισε την αποδεικτική διαδικασία ως μια ακολουθία προτάσεων που προκύπτουν με διαδοχικούς συλλογισμούς από τους αρχικούς όρους και τα αξιώματα. Στα *Στοιχεία* συναντώνται όλες οι σύγχρονες μέθοδοι απόδειξης όπως της συνεπαγωγής, της συνθετικής μεθόδου, της αναλυτικής μεθόδου, της εις άτοπον απαγωγής και της μεθόδου της τέλειας επαγωγής.

Εκείνο, στο οποίο μπορεί κανείς να καταλήξει, μελετώντας την εξέλιξη των μαθηματικών στην Αρχαία Ελλάδα, είναι ότι η μέθοδος της απόδειξης αποτελούσε πεδίο έρευνας και τελειοποίησης.

1.2 Έρευνες για τη διδασκαλία της απόδειξης

Ο ορισμός της απόδειξης έχει εγείρει πολυάριθμες διαφωνίες μεταξύ των μαθηματικών. Ο Balacheff (2000) διερωτάται αν υπάρχει ένας κοινός ορισμός της μαθηματικής απόδειξης. Οι ορισμοί που προκύπτουν από τη βιβλιογραφία ποικίλουν. Σύμφωνα με το Balacheff η απόδειξη είναι η διαδικασία, μέσω της οποίας αποκτάται η εγκυρότητα μιας απόδειξης. Είναι μια εξήγηση που γίνεται από μία δεδομένη κοινότητα σε μία δεδομένη χρονική στιγμή.

Σύμφωνα με το Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας (1998) απόδειξη είναι "ο συλλογισμός μέσω του οποίου γίνεται εμφανής η ορθότητα μιας πρότασης". Για τον Τουμάση (1994) η απόδειξη είναι η συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσω μιας σειράς διαδοχικών συμπερασμάτων καταλήγει σε ένα τελικό συμπέρασμα, με τέτοιο τρόπο ώστε η οποιαδήποτε αμφιβολία γύρω από το τελικό συμπέρασμα θα πρέπει να αναζητηθεί πίσω στις υποθέσεις μάλλον, παρά στη λογική αναγκαιότητα των διαδοχικών συμπερασμάτων.

Τέλος για τον Schoenfeld (1988) η απόδειξη είναι μία λογική αλυσίδα επιχειρηματολογίας, στην οποία ένα ή περισσότερα συμπεράσματα παράγονται σύμφωνα με καλά προκαθορισμένους κανόνες από δύο σύνολα δεδομένων: α) ένα σύνολο από υποθέσεις και β) ένα σύνολο από αποδεκτά γεγονότα, αποτελούμενο είτε από αξιώματα είτε από αποτελέσματα που έχουν ήδη αποδειχθεί.

Συνήθως η εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία γίνεται μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η γεωμετρική απόδειξη εμφανίζεται ως μια συγκεκριμένη φορμαλιστική τυπική διαδικασία, η οποία προσπαθεί να προσφέρει στους μαθητές την επιβεβαίωση για μαθηματικές προτάσεις και εικασίες. Αν και σαν διαδικασία φαίνεται απλή, αφού μέσω λογικών βημάτων φτάνει κανείς γρήγορα στο αποτέλεσμα, η γεωμετρική απόδειξη δυσκολεύει τους μαθητές. Αυτό οδήγησε πολλούς ερευνητές να μελετήσουν αυτή την δυσκολία και να εντοπίσουν τις αιτίες της.

Η έρευνα του Schoenfeld (1986) έδειξε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με την αποδεικτική διαδικασία στη γεωμετρία εξαιτίας της αυστηρότητας στη γλώσσα, ενώ αποδέχονται την οπτική αναπαράσταση ως απόδειξη. Πολλές φορές οι μαθητές πείθονται για τα συμπεράσματα ενός γεωμετρικού θεωρήματος από το γεγονός ότι οι κατασκευές τους με μολύβι και χαρτί ή οι μετρήσεις τους με γεωμετρικά όργανα δείχνουν αληθείς.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και μια μεγάλη έρευνα που έγινε στην Ιαπωνία σχετικά με τη διδασκαλία και την εκμάθηση των γεωμετρικών αποδείξεων (Kunimune et al,2010). Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε μια έρευνα σε βάθος χρόνου (το 1987, το 2000 και το 2005), με στόχο να εντοπιστεί το πρόβλημα της δυσκολίας των μαθητών στη γεωμετρική απόδειξη. Η έρευνα έδειξε ότι το 80% των μαθητών της Β'θμιας Εκπαίδευσης θεωρούν ότι οι πειραματικές επαληθεύσεις αρκούν, για να δεχτούμε τις γεωμετρικές προτάσεις. Ακόμα και όταν καταλαβαίνουν ότι χρειάζεται περαιτέρω μελέτη και απόδειξη, σταματάνε εκεί. Οι μαθητές κατανοούν ότι μια επίσημη απόδειξη είναι ο έγκυρος τρόπος αποδοχής της αλήθειας της πρότασης, ωστόσο θεωρούν και την επαλήθευση ως έγκυρο τρόπο.

Όπως προκύπτει και από μια άλλη έρευνα (Mariotti, 2007), η "απόκλιση" μεταξύ των πειραματικών επαληθεύσεων και της απόδειξης είναι πλέον ένα αναγνωρίσιμο πρόβλημα. Οι μαθητές πολλές φορές είναι σε θέση να κατασκευάσουν μια τυπική απόδειξη, αλλά δε μπορούν να εκτιμήσουν τη σημασία αυτών των αποδείξεων.

Αρκετές έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές για να προχωρήσουν στην κατανόηση της απόδειξης θα πρέπει πρώτα να έχουν καλή γνώση μαθηματικού περιεχομένου, αλλά και εμπειρία επίλυσης προβλημάτων. Οι Ufer, Heinze και Reisse (2008), σε μια έρευνα 341 Γερμανών μαθητών λυκείου, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές πρέπει πρώτα να κατανοήσουν τη φύση των μαθηματικών αποδείξεων και να αποκτήσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, με σκοπό να κατακτήσουν τη διαδικασία της γεωμετρικής απόδειξης. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν οι Xang, Lin and Wang (2007), αφού διερεύνησαν πώς από ένα μοντέλο ανάγνωσης της γεωμετρίας οι μαθητές οδηγούνται στην κατανόηση της απόδειξης. Ομοίως, οι Giant και Spiegel (2015) διαπίστωσαν την απουσία "ευελιξίας" στην απόδειξη από μαθητές αρχάριους στη γεωμετρία.

Δεδομένου ότι οι ορισμοί είναι αναπόσπαστο στοιχείο της γεωμετρικής απόδειξης, οι Haj-Yahya, Hershkowitz and Dreyfus (2014) διερεύνησαν την ικανότητα να αναπτύσσουν γεωμετρικές αποδείξεις μαθητές 11ης τάξης μέσω του φακού των ορισμών. Διαπίστωσαν ότι η έλλειψη γνώσης των γεωμετρικών ορισμών αποτελεί εμπόδιο και επηρεάζει τη δυνατότητα απόδειξης.

Υπάρχουν εμπειρικές ενδείξεις ότι ένα περιβάλλον τάξης πλούσιο σε κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών και μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών μπορεί να προωθήσει την ανάπτυξη αποδείξεων. Οι Matus και Rodrigues (2011) μελέτησαν αν σχετίζονται η κατασκευή της απόδειξης με την κοινωνική αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται σε μια τάξη. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα μέλη μιας τάξης, ανάλογα με τις ικανότητές τους συνεργάζονται, ανταλλάσσουν απόψεις και, συμπληρώνοντας ο ένας τον άλλο, καταλήγουν στην κατασκευή μιας απόδειξης. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Balacheff (1991), υπάρχουν καταστάσεις κοινωνικής αλληλεπίδρασης που δεν εγγυώνται την αποτελεσματική συμμετοχή στη μαθηματική συζήτηση και την κατασκευή μιας απόδειξης στο τέλος.

Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη μιας γεωμετρικής απόδειξης έχουν τα σχήματα. Οι Lin and Wu (2007) εξέτασαν πώς οι μαθητές 6^{ης} βαθμίδας (Α΄ Γυμνασίου), που βρίσκονται ακόμα στο στάδιο της διαισθητικής γεωμετρίας, δημιούργησαν γεωμετρικές υποθέσεις, όταν δόθηκαν γεωμετρικές συνθήκες στα σχήματα. Η ανάλυση έδειξε ότι οι μαθητές οδηγούνται στη δημιουργία εικασιών, αν έχουν τα κατάλληλα οπτικά γεωμετρικά υλικά.

Οι Jones, Fujita and Kunimune (2012) παρουσίασαν μία μελέτη μαθητών γυμνασίου με προβλήματα στερεομετρίας. Μέσω της κατασκευής ενός κύβου μελετήθηκε πώς οι μαθητές παράγουν εικασίες, βασιζόμενοι σε οπτικές εικόνες και όχι μέσω συλλογισμού. Η ανάλυση έδειξε ότι το σχήμα δεν βοηθάει πάντα στην κατασκευή απόδειξης, αφού πολλοί μαθητές μπορούσαν να διακρίνουν το τρισδιάστατο σχήμα και να σχεδιάσουν το ανάπτυγμα του για να αποδείξουν μια ιδιότητα, ενώ άλλοι μαθητές δεν μπόρεσαν να τα καταφέρουν χωρίς τη βοήθεια του καθηγητή.

Οι γεωμετρικές κατασκευές αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της γεωμετρίας και πολλές φορές είναι αυτές που οδηγούν στη σύλληψη μιας εικασίας και στην κατασκευή απόδειξης. Οι Fujita, Jones and Kunimune (2014) ερεύνησαν πώς προκύπτουν συλλογισμοί και αποδείξεις κατά τη διαδικασία γεωμετρικών κατασκευών. Για παράδειγμα, οι μαθητές ανακάλυψαν διάφορες μεθόδους για να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο, αλλά ταυτόχρονα είχαν δυσκολία στο να εξηγήσουν γιατί η κατασκευή τους ήταν σωστή. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τα αποδεικτικά βήματα που κάνουν κατά τη διάρκεια μιας γεωμετρικής κατασκευής.

Η εμφάνιση των δυναμικών εργαλείων γεωμετρίας (DGS) άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται η απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων κυρίως από τους μαθητές. Σύμφωνα με τον Jones (2000) τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας παρέχουν άμεση επαφή με τη γεωμετρική θεωρία και έτσι έχουν τη δυνατότητα να μειώσουν το χάσμα ανάμεσα στη γεωμετρική κατασκευή και την παραγωγική διαδικασία. Οι Patsiomitou and Emvalotis (2010) μετά από τη μελέτη τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων στο λογισμικό που χρησιμοποιήσαν οδήγησε τους μαθητές να αντιληφθούν τις ιδιότητες και αυτό τους βοήθησε να κατασκευάσουν αποδείξεις. (Patsiomitou , 2011).

Τα DGS έχουν πολλές ιδιότητες, που βοηθούν τεχνικά τους μαθητές να δουν κάποιες ιδιότητες στο σχήμα και να βγάλουν λογικά συμπεράσματα. Ο Olivero (2006) επεσήμανε το ρόλο του εργαλείου εμφάνιση/απόκρυψη του λογισμικού στη διαδικασία της εικασίας και της απόδειξης. Στην έρευνα του συμμετείχαν μαθητές Λυκείου, οι οποίοι μέσω του λογισμικού Cabri έλυσαν προβλήματα γεωμετρίας. Στο

Cabri οι μαθητές με διαδραστικό τρόπο προσάρμοζαν το σχήμα, έκρυβαν ή προέβαλαν στοιχεία για την ανακάλυψη νέων ιδεών, με αποτέλεσμα να φτάνουν στη λύση και στην απόδειξη πιο εύκολα. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουν και άλλοι ερευνητές, όπως οι Baccaglini-Frank et al (2011).

Οι Fujita, Jones and Miyazaki (2011, 2014) αναφέρθηκαν σε μελέτες, στις οποίες οι μαθητές έκαναν εικασίες και αποδείξεις με "σύρσιμο" πλευρών και γωνιών σε τρίγωνα. Το λογισμικό μετέτρεπε αυτόματα τα σύμβολα σε συμβολικά στοιχεία έτσι ώστε οι μαθητές να επικεντρώνονται στη δομή της γεωμετρικής απόδειξης. Οι ερευνητές υποστήριξαν ότι με αυτήν την προσέγγιση της απόδειξης, παράλληλα με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, οι μαθητές μπόρεσαν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ της εικασίας που δημιούργησαν και της απόδειξης που έπρεπε να κατασκευάσουν.

Σε μια διαφορετική προσέγγιση καταλήγουν οι Hoyle and Jones (1998). Έτσι όπως λένε οι Hoyles και Jones (1998), δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να επικεντρωθεί όχι στην απόδειξη αυτή καθ΄ αυτή, αλλά στη δυνατότητα που έχει το λογισμικό να βοηθήσει στη μετάβαση από το ειδικό στο γενικό. Μία ιδιότητα, που παρατηρείται σε ένα συγκεκριμένο σχήμα, με το σύρσιμο του σχήματος μπορεί να παρατηρηθεί, αν μένει αναλλοίωτη, και άρα γενικεύεται, ή αν αλλάζει, και έτσι δεν είναι κάτι που αφορά περισσότερα σχήματα.

Επιπλέον σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας δίνονται περισσότερες ευκαιρίες σε κάποιους τουλάχιστον μαθητές, εκτός από την ερώτηση "γιατί……;" που μπορεί να κάνουν για μια πρόταση, να αναρωτηθούν ακόμα και "τι θα γινόταν αν……..;" ή και "τι θα γινόταν αν δεν ………;", που είναι το πρώτο βήμα για να διερευνήσουν την ισχύ της συγκεκριμένης πρότασης. Όπως αναφέρει η Hadas και οι συνεργάτες της (Hadas et al., 2000), με αυτόν τον τρόπο είναι πολύ πιο εύκολο να πειστεί κάποιος για την αλήθεια μιας εικασίας. Έτσι όμως δε νιώθει την ανάγκη να προχωρήσει σε αιτιολόγηση της εικασίας και σε απόδειξη. Συνεπώς, τα δυναμικά εργαλεία γεωμετρίας δημιουργούν ένα περιβάλλον, το οποίο όχι μόνο δεν ευνοεί την ανάγκη του μαθητή για απόδειξη, αλλά μπορεί και να την εμποδίζει. Με αυτή την άποψη φαίνεται να συμφωνούν και να την επιβεβαιώνουν μετά από έρευνες που έκαναν και οι Yerusalmy, Chazan και Gordon (1986).

Τα εγχειρίδια συμβάλλουν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στη γεωμετρική απόδειξη. Οι Otten, Males and Gilbertson (2013) μελέτησαν έξι σχολικά βιβλία γεωμετρίας των ΗΠΑ, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στο κεφάλαιο που εισήγαγε την απόδειξη σε σχέση με τα υπόλοιπα κεφάλαια. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπήρξαν πολλές δραστηριότητες διερεύνησης και δημιουργίας εικασιών, αλλά ασκήσεις όπου ζητείται απόδειξη από τους μαθητές υπήρξαν λίγες.

Ο Miyakawa (2012) συνέκρινε εγχειρίδια από τη Γαλλία και την Ιαπωνία και εντόπισε σημαντικές διαφορές στον ορισμό της απόδειξης και στη μορφή της απόδειξης που συναντάται στο βιβλίο κάθε χώρας. Τέλος, οι Even et al (2016) μελέτησαν οχτώ ισραηλινά βιβλία της έβδομης τάξης, εξετάζοντας τις ευκαιρίες που δίνει το κάθε βιβλίο για συλλογιστική και απόδειξη. Τα ευρήματα αποκαλύπτουν ότι τα ισραηλινά μαθηματικά της έβδομης τάξης είναι πλούσια σε δραστηριότητες και προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές με διαφορετικές ικανότητες και δυνάμεις να κατανοήσουν τη φύση των αποδείξεων. Μάλιστα έγινε εμφανής η διαφορά στον τρόπο συλλογισμού που υπάρχει στα εγχειρίδια άλγεβρας και γεωμετρίας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι έρευνες στις οποίες οι μαθητές έχουν διδαχτεί τη γεωμετρική απόδειξη και καλούνται να βρουν λάθη ή να ανακατασκευάσουν αποδείξεις που έχουν ήδη γραφτεί. Οι Komatsu et al (2016) ερεύνησαν κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα λάθη που υπάρχουν σε μια ήδη γραμμένη γεωμετρική απόδειξη, αλλά και κατά πόσο μπορούν να επέμβουν και να διορθώσουν αυτά τα λάθη. Διαπίστωσαν ότι το 59% των μαθητών πέτυχε στη σωστή επικύρωση μιας απόδειξης αλλά μόνο το 37% εντόπισε λάθη, διόρθωσε και τροποποίησε μια απόδειξη. Μία παρόμοια μεγάλη έρευνα σε 700 μαθητές 8^{ης} βαθμίδας (Γ΄ Γυμνασίου) στη Γερμανία έδειξε ότι ήταν πιο δύσκολο για τους μαθητές να κρίνουν τις λανθασμένες απαντήσεις από τις σωστές. Μόνο το 35% των μαθητών μπορεί να ξεχωρίσει λάθη σε επίτηδες γραμμένες με λάθη γεωμετρικές αποδείξεις (Reiss, Helmich & Thomas, 2007) .

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού αποτελεί καθοριστικό παράγοντα στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στη γεωμετρική απόδειξη. Με βάση την παρατήρηση της δραστηριότητας απόδειξης στην τάξη οι Herbst, Chen and Weiss (2013) εντόπισαν ορισμένους κανόνες που ρυθμίζουν τη διαδικασία απόδειξης. Βρήκαν ότι ο καθηγητής είναι υπεύθυνος για την πρόταση που πρέπει να αποδειχθεί, συμπεριλαμβανομένης και της βοήθειας. Τονίζουν ότι οι μαθητές σπάνια παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαδικασία ανάπτυξης μιας απόδειξης.

Οι Dimmel & Herbst (2014) ανέλυσαν τις νόρμες που αναπτύσσονται σε τάξεις λυκείου κατά τη διάρκεια μιας γεωμετρικής απόδειξης. Βιντεοσκοπήθηκαν και αναλύθηκαν τα μαθήματα 70 καθηγητών, στα οποία παρουσιάζουν μια ολοκληρωμένη γεωμετρική απόδειξη στην τάξη και οι μαθητές εξετάζουν λεπτομερώς τα βήματα της απόδειξης. Στόχος της έρευνας ήταν να διερευνηθεί αν υπάρχουν κανονιστικοί τρόποι διερεύνησης των λεπτομερειών μιας απόδειξης. Τα ευρήματα έδειξαν οι καθηγητές παραβιάζουν συχνά τους κανόνες μιας απόδειξης, δεν δικαιολογούν τα βήματα της και αποτελεί ρουτίνα για αυτούς ο έλεγχος των λεπτομερειών της απόδειξης. Το αποτέλεσμα αυτής της συμπεριφοράς των εκπαιδευτικών έχει άμεσο αντίκτυπο στη μάθηση της γεωμετρικής απόδειξης από τους μαθητές. Πολλές φορές οι εκπαιδευτικοί εισάγουν ένα θεώρημα χωρίς απόδειξη και άλλες φορές επιβεβαιώνουν την ισχύ του εμπειρικά σύμφωνα με τους Miyakawa & Herbst (2014). Σύμφωνα με την έρευνα των τελευταίων οι εκπαιδευτικοί βλέπουν ως ξεχωριστή εργασία το να διδάξουν ένα θεώρημα από το να κάνουν την απόδειξη του.

Οι Brockmann-Behnsen & Rott (2014) παρουσίασαν μία μακροχρόνια μελέτη που διεξήχθη σε τέσσερις τάξεις 8ης βαθμίδας (Γ΄ Γυμνασίου). Δύο από αυτές τις τάξεις χρησίμευσαν σαν ομάδα ελέγχου, ενώ στις άλλες δύο τάξεις τα μαθήματα εμπλουτίστηκαν με διάφορες μεθόδους με στόχο την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, τη δημιουργία εικασιών και αποδείξεων. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν ικανοποιητικά. Στο post-test η ομάδα πειραματισμού είχε σημαντική προόδο και καλύτερα αποτελέσματα από την ομάδα ελέγχου. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγει και η έρευνα των Miyazaki & Fujita (2016), οι οποίοι μελέτησαν πώς μετά από μοντέλο εισαγωγής και διδακτικής της απόδειξης οι μαθητές ξεπερνούν τα προβλήματα που συχνά εμφανίζονται στην κατανόηση της απόδειξης.

Οι επιλογές του εκπαιδευτικού και οι ενέργειες του είναι καθοριστικές για το περιβάλλον που δημιουργείται στην τάξη και ως εκ τούτου για την ευκαιρία που έχουν οι μαθητές να βελτιώσουν τις δεξιότητες τους στην απόδειξη και τη συλλογιστική. Σ' αυτό το συμπέρασμα κατέληξαν οι Martin et al (2005), οι οποίοι ερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στις δράσεις των εκπαιδευτικών και τις ενέργειες των μαθητών όσον αναφορά την κατανόηση της γεωμετρικής απόδειξης. Συμπέραναν ότι, όταν ο δάσκαλος χρησιμοποιεί τεχνικές με σκοπό να προσελκύσει τους μαθητές στη δημιουργία εικασιών και στην κατασκευή αποδείξεων, τότε οι μαθητές γίνονται ενεργοί και πιο αποδοτικοί στην κατασκευή επίσημων αποδείξεων.

1.3 Μαθηματικός Χώρος Εργασίας (MWS)

Η διδακτική των μαθηματικών αποτελεί αντικείμενο μελέτης εδώ και πολλά χρόνια. Από τη μία πλευρά εξετάζεται ο ρόλος των μαθηματικού, καθώς θεωρείται ο κύριος υπεύθυνος για την πρόοδο των μαθηματικών, και από την άλλη επικρατεί η άποψη ότι η τόνωση της δραστηριότητας του μαθητή ενισχύει την ικανότητα του να αναπτύξει τις γνώσεις του σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων. Τα παραπάνω αποτέλεσαν το έναυσμα για την ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου μελέτης της μαθηματικής εργασίας, του μαθηματικού χώρου εργασίας MWS (mathematical working space). Ο μαθηματικός χώρος εργασίας, που από εδώ και στο εξής θα αναφέρεται ως MWS, αναπτύχθηκε τα τελευταία δέκα χρόνια από τους Kuzniak και Houdement και χρησιμοποιείται για να μελετήσει καταστάσεις διδασκαλίας και δραστηριότητες που καθορίζονται σε συγκεκριμένα μαθηματικά πεδία ή τομείς. Αποτελεί ένα εργαλείο μελέτης μιας μαθηματικής εργασίας, στην οποία οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί εμπλέκονται αποτελεσματικά.

Ένα μαθηματικό πεδίο υπόκειται σε διάφορες αλλαγές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η Γεωμετρία, αφού ο όρος έχει πολλά νοήματα ανάλογα με τη διαδικασία διδασκαλίας. Για να γίνει κατανοητή αυτή η ποικιλομορφία των απόψεων οι Houdement και Kuzniak (1999, 2011) εισήγαγαν μία νέα προσέγγιση διδακτικής της Γεωμετρίας μέσω των παραδειγμάτων (paradigms).

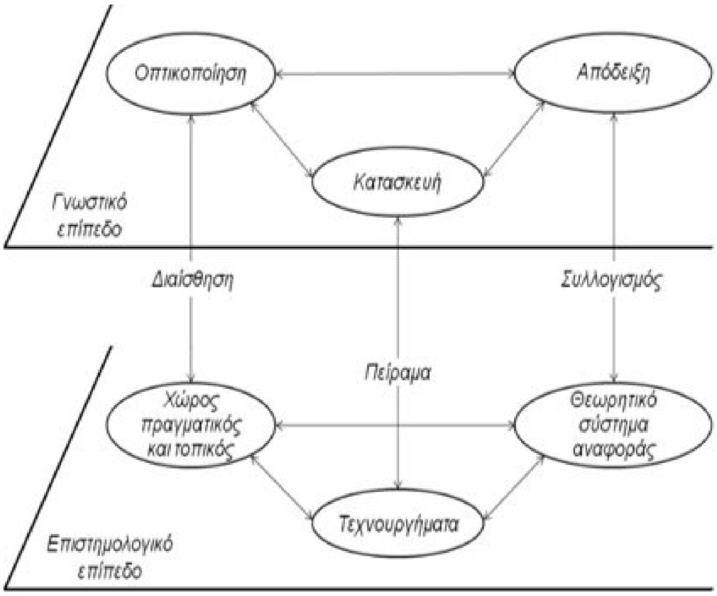
Ως παράδειγμα (paradigm) θεωρείται ο συνδυασμός πεποιθήσεων, τεχνικών μεθόδων και αξιών που μοιράζεται μια επιστημονική ομάδα. Για να προσεγγιστεί αυτό το μαθηματικό παράδειγμα, θα πρέπει να προσεγγίσουμε τη δουλειά του μαθηματικού και να δούμε τις λύσεις, αλλά και τις διαδικασίες που οδηγούν στη λύση κάποιων διακριτών προβλημάτων. Οι λύσεις αυτών των προβλημάτων προϋποθέτουν αναγκαστικά τη χρήση συγκεκριμένης μορφής λόγου, ένα σύνολο κανόνων και κωδικών. (Kuzniak et al, 2016)

Επανερχόμενοι στην περίπτωση της Γεωμετρίας, συναντάμε τρία παραδείγματα (paradigms). Πρώτο παράδειγμα αποτελεί η Γεωμετρία I (GI) και έχει τον πραγματικό κόσμο ως πηγή επικύρωσης. Σκοπός είναι να αναπτυχθούν πειστικά επιχειρήματα, τα οποία είναι βασισμένα στο πείραμα και την αφαίρεση. Οι αποδείξεις στηρίζονται σε παρατηρήσεις που έγιναν με εργαλεία μέτρησης ή σχεδίασης, όπως ο διαβήτης, ο βαθμονομημένος χάρακας ή το μοιρογνωμόνιο. Η ανάπτυξη αυτής της γεωμετρίας έχει ιστορικά κίνητρα από πρακτικά προβλήματα, γι' αυτό το λόγο ονομάζεται και Φυσική Γεωμετρία.

Η Γεωμετρία II (GII) είναι το δεύτερο παράδειγμα και έχει ως αρχέτυπο την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ονομάζεται Αξιωματική, καθώς στηρίζεται αυστηρά σε ένα αξιωματικό σύστημα κανόνων. Οι αποδείξεις αναπτύσσονται στα πλαίσια αυτού του αξιωματικού συστήματος. Τα σχήματα και οι μετρήσεις αποτελούν στήριγμα για την απόδειξη και όχι την ίδια την απόδειξη. Και οι δύο γεωμετρίες (GI και GII) έχουν στενή σχέση με τον πραγματικό κόσμο, η καθεμία όμως με τον δικό της τρόπο.

Το τρίτο παράδειγμα αποτελεί η Γεωμετρία III (GIII) ή Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία. Εδώ το κεντρικό σύστημα αξιωμάτων είναι αποσυνδεδεμένο από την πραγματικότητα. Ασχολείται περισσότερο με τα λογικά προβλήματα και αντιλαμβάνεται μη διαισθητικά τις έννοιες, όπως για παράδειγμα αυτή της κυρτότητας.

Από την παραπάνω μελέτη της γεωμετρίας αναπτύχθηκε η ιδέα δύο αρθρωτών επιπέδων στο MWS. Το ένα, το Επιστημολογικό, που σχετίζεται με το μαθηματικό περιεχόμενο που μελετάται, και το άλλο, το Γνωστικό, που σχετίζεται με την ατομική σκέψη επίλυσης προβλημάτων.



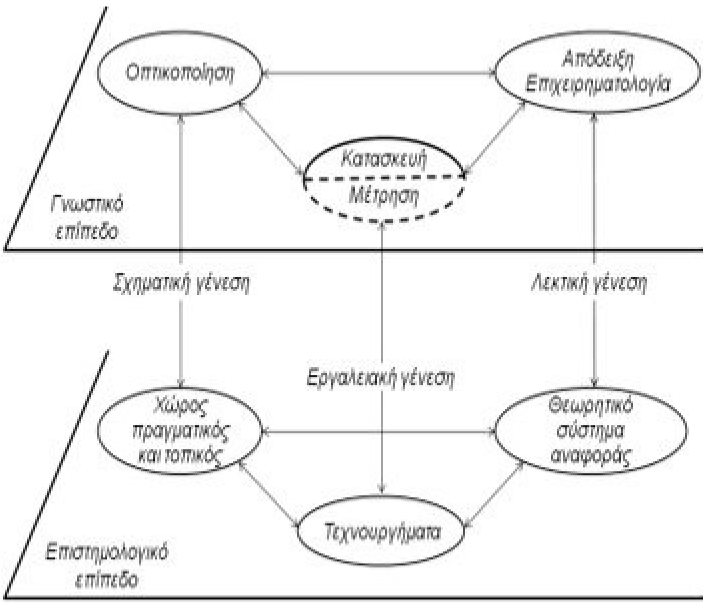
Σχήμα 1 : Σχηματική αναπαράσταση του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας

Σε κάθε επίπεδο εμφανίζονται τρία στοιχεία αλληλεπίδρασης:

1. *Το επιστημολογικό επίπεδο*. Τα τρία συστατικά-στοιχεία που εμφανίζονται στο επιστημολογικό επίπεδο είναι:
   - Ένα σύνολο από συγκεκριμένα και απτά αντικείμενα (representamen). Χρησιμοποιείται ο όρος σύμβολο (sign) ή παράσταση (representamen) και ανάλογα με το μαθηματικό πεδίο και τις στρατηγικές διδασκαλίας μπορεί να είναι γεωμετρικές εικόνες, αλγεβρικά σύμβολα, γραφικές παραστάσεις ή ακόμα και φωτογραφίες.
   - Ένα σύνολο εργαλείων (artifacts) και μπορεί να είναι οι αλγόριθμοι που συνοδεύονται είτε με παραδοσιακά υλικά αντικείμενα - όπως άβακας, τριγωνομετρικοί ή λογαριθμικοί πίνακες - είτε με τεχνικές υπολογισμού ή κατασκευής – όπως Ευκλείδεια διαίρεση, κατασκευές με διαβήτη και χάρακα.
   - Ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς που βασίζεται σε ορισμούς, ιδιότητες και θεωρήματα. Αναφέρεται στο θεωρητικό μέρος της μαθηματικής εργασίας και στον αποδεικτικό λόγο, γι' αυτό απαιτείται να είναι καλά οργανωμένος.
2. *Το γνωστικό επίπεδο*. Τα μαθηματικά πάνω απ' όλα είναι κυρίως ανθρώπινη δραστηριότητα, επομένως είναι απαραίτητο να μελετηθεί και να κατανοηθεί πώς αναπτύσσονται οι μαθηματικές γνώσεις. Σ' αυτό βοηθάει το δεύτερο επίπεδο του MWS, το οποίο ονομάζεται γνωστικό επίπεδο. Σε αναλογία με το επιστημονικό επίπεδο, και στο γνωστικό επίπεδο διακρίνονται τρία συστατικά:

- Οπτικοποίηση (visualization), που σχετίζεται με την αποκρυπτογράφηση και ερμηνεία των συμβόλων, τα οποία σε πολλές περιπτώσεις δεν περιέχουν την οπτικοποίηση αυστηρά.
- Κατασκευή (construction), η οποία εξαρτάται από τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται, αλλά και τις σχετικές τεχνικές. Τα αποτελέσματα δεν είναι αναγκαστικά σχέδια ή γραπτά, αλλά μπορεί και να περιλαμβάνουν παρατήρηση, εξερεύνηση ή και πειραματισμό.
- Απόδειξη (proving), η οποία παράγει την επικύρωση και βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς. Οι επικυρώσεις πρέπει να στηρίζονται αυστηρά σε θεωρητικές προτάσεις και όχι σε εμπειρικές παρατηρήσεις.

Η ανάλυση της μαθηματικής εργασίας μέσω του MWS οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης προέρχεται από μια διαδικασία γεφύρωσης του επιστημολογικού και του γνωστικού επιπέδου. Αυτή η γεφύρωση επιτυγχάνεται μέσα από αλληλοσυνδεδεμένες γενετικές εξελίξεις, καθεμία από τις οποίες προσδιορίζεται ως γένεση (Kuzniak, 2015).



Σχήμα 2 : Διάγραμμα του ΜΧΕ με τις τρεις γενέσεις.

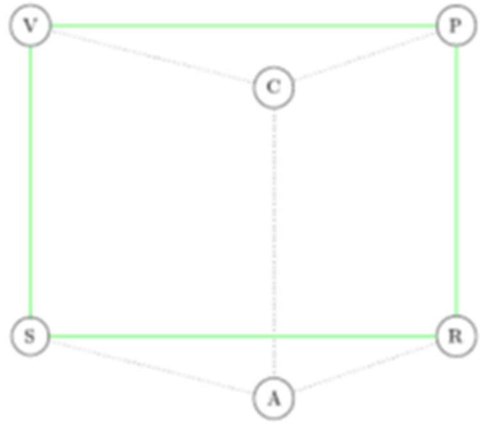
Η σημειωτική γένεση (semiotic genesis) είναι μια διαδικασία που καταγράφει τη διαλεκτική σχέση μεταξύ της συντακτικής και της σημασιολογικής προοπτικής στα μαθηματικά αντικείμενα, η οποία εμφανίζεται και οργανώνεται μέσω των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης, όπως σχήματα. Θα μπορούσε να θεωρηθεί μεταφορικά ως μία αύξουσα κίνηση από έναν αντιπρόσωπο προς τη "γνωστική συνειδητοποίηση" μέσω της αντίληψης. Η αντίστροφη κίνηση ξεκινάει από ένα γνωστό υποκείμενο και κατευθύνεται προς έναν εκπρόσωπο, αποτελεί δηλαδή μία διαδικασία κωδικοποίησης.

Η εργαλειακή γένεση μετασχηματίζει το τεχνούργημα σε εργαλείο μέσα από την ανάπτυξη σχημάτων στο πλαίσιο της διαδικασίας της κατασκευής. Αυτός ο μετασχηματισμός αποτελεί την ανοδική κίνηση ανάμεσα στα δύο επίπεδα του MWS. Αντιστρόφως, όταν ο χρήστης έχει στο μυαλό του το σχήμα που πρέπει να κατασκευάσει, η εργαλειακή γένεση εμπλέκεται στην επιλογή των κατάλληλων εργαλείων και εκφράζεται μέσω της καθοδικής κίνησης του MWS.

Η λεκτική γένεση είναι η διαδικασία κατά την οποία οι ιδιότητες και τα αποτελέσματα που οργανώνονται στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς ενεργοποιούνται, για να είναι διαθέσιμα σε διαδικασίες επικύρωσης. Και εδώ παρατηρείται η αμφίδρομη κίνηση. Στην ανοδική κίνηση αντιστοιχείται ένας αποδεικτικός λόγος που υποστηρίζεται από ιδιότητες δομημένες στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς. Αντιστρόφως, η καθοδική κίνηση αναφέρεται στην αναγνώριση των ιδιοτήτων και των ορισμών που θα συμπεριληφθούν στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς. (Kuzniak, et al, 2016)

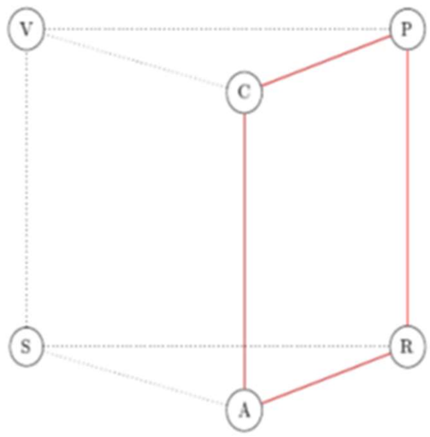
Όπως αναφέρθηκε ο MWS δομείται σε δύο επίπεδα, το γνωστικό και το επιστημολογικό, τα οποία δείχνουν την κυκλοφορία της γνώσης μέσα σε μια μαθηματική εργασία. Ταυτόχρονα όμως διαρθρώνονται τρία κατακόρυφα επίπεδα, τα οποία προκύπτουν άμεσα από τις αμφίδρομες συνδέσεις των δύο οριζόντιων επιπέδων. Αυτά τα τρία κατακόρυφα επίπεδα δείχνουν την κυκλοφορία που γίνεται στο MWS και οδηγούν στην κατανόηση της απόκτησης της μαθηματικής γνώσης.

Το επίπεδο [Sem-Dis], που συνδέεται με τη σημειωτική και τη λεκτική γένεση της απόδειξης, περιγράφει μια εργασία που ξεπερνά την απλή εικονική όραση των πραγμάτων. Για παράδειγμα στη Γεωμετρία μπορεί κάποιος να καταλήξει σε συμπέρασμα, κάνοντας μετασχηματισμούς σε ένα δεδομένο σχήμα. Αντιθέτως μέσα στο ίδιο επίπεδο εκτελείται μια επίσημη απόδειξη. Το επίπεδο είναι προσανατολισμένο στη μαθηματική επικοινωνία των αποτελεσμάτων.



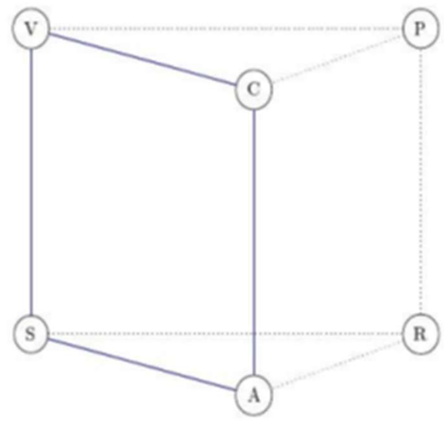
Σχήμα 3 : Το επίπεδο [Sem – Dis] του ΜΧΕ

Το επίπεδο [Ins-Dis] συνδέεται με την εργαλειακή και τη λεκτική γένεση. Σ’ αυτό το επίπεδο αναπτύσσεται ο μαθηματικός συλλογισμός, βασιζόμενος στην επικύρωση των ανακαλύψεων μέσω λεκτικών και εργαλειακών γενέσεων. Τα συμπεράσματα προκύπτουν από μετρήσεις, οδηγώντας σε πειραματική επιβεβαίωση. Εργασίες, όπου οι μαθητές κατασκευάζουν με γεωμετρικά όργανα, αλλά δικαιολογούν τα βήματά τους με την κατάλληλη γεωμετρική θεωρία, σχετίζονται με το συγκεκριμένο επίπεδο.



Σχήμα 4 : Το επίπεδο [Ins – Dis] του ΜΧΕ

Το επίπεδο [Sem-Ins], που σχετίζεται με τη Σημειωτική και Εργαλειακή γένεση. Το συγκεκριμένο επίπεδο δίνει έμφαση στην ταύτιση και την διερεύνηση των αντικειμένων βασιζόμενο στις σημειωτικές και εργαλειακές γενέσεις για την ανάπτυξη μιας δεξιότητας που σχετίζεται με την ανακάλυψη της λύσης των μαθηματικών προβλημάτων. Για παράδειγμα τα ψηφιακά εργαλεία επιτρέπουν την εξερεύνηση των γραφικών παραστάσεων με σκοπό την κατανόηση μιας συγκεκριμένης έννοιας χωρίς να διακυβεύονται οι στόχοι επικύρωσης.



Σχήμα 5 : Το επίπεδο [Sem – Ins] του ΜΧΕ

Τα τρία επίπεδα αποτελούν πολύτιμα εργαλεία για την περιγραφή των αλληλεξαρτήσεων μεταξύ των διάφορων γενέσεων, για την αναγνώριση και τον χαρακτηρισμό των φάσεων που προκύπτουν κατά τη μαθηματική εργασία, και για την ανάλυση των μετατοπίσεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια της εργασίας. Οι διδακτικές δραστηριότητες πολλές φορές στοχεύουν στη δημιουργία εικασιών χωρίς οποιαδήποτε αποδεικτική πτυχή, πέραν της απλής εμπειρικής επαλήθευσης. Σκοπός μας είναι να εμπλέκονται και οι τρεις διαστάσεις στη συγγραφική γένεση της απόδειξης. Η μελέτη της φύσης και της δυναμικής αυτών των επιπέδων κατά τη διάρκεια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί κεντρική μέριμνα για μια βαθύτερη κατανόηση του MWS. (Kuzniak, et al, 2016)

Ο MWS δεν είναι μοναδικός για κάθε μαθηματική εργασία. Η μορφή του εξαρτάται κάθε φορά από το ποιος είναι ο κατασκευαστής του και ποιος ο χρήστης του. Αναπτύσσονται τρεις διαφορετικοί τύποι μαθηματικών χώρων εργασίας. Ο MWS αναφοράς , ο κατάλληλος MWS και ο προσωπικός MWS.

Ο MWS αναφοράς καθορίζεται από μια κοινότητα μαθηματικών ή από το πρόγραμμα σπουδών όταν πρόκειται για την εκπαίδευση. Εκτός από τα μαθηματικά κριτήρια και κοινωνικά, πολιτικά ή οικονομικά κριτήρια συμβάλλουν στη διαμόρφωσή του. Ο κατάλληλος MWS σχεδιάζεται από τον διδάσκοντα για μια δεδομένη τάξη. Μέσα σ' αυτόν το χώρο η επιλογή και η οργάνωση των δραστηριοτήτων που προτείνει ο διδάσκοντας είναι ζωτικής σημασίας έτσι ώστε να δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να τις λύσουν με κατάλληλο τρόπο. Τέλος, ο προσωπικός MWS αναπτύσσεται στην πράξη από τον τελικό χρήστη, που μπορεί να είναι ο μαθητής ή ο καθηγητής.

Στο πλαίσιο μιας μαθηματικής εργασίας μέσα σε μια σχολική τάξη μπορούν να αναπτυχθούν και οι τρεις τύποι του μαθηματικού χώρου εργασίας. Το πρόγραμμα σπουδών και η ύλη αποτελούν το χώρο αναφοράς. Αυτός ο MWS θα πρέπει να προσαρμοστεί από τον καθηγητή σε κατάλληλο χώρο , όπου κάθε μαθητής θα εργάζεται στον προσωπικό του MWS.

Οι αλληλοεξαρτήσεις μεταξύ αυτών των τριών τύπων MWS είναι σημαντικές και πολυσύνθετες. Τίποτα δεν εγγυάται ότι αν οι δύο πρώτοι χώροι, ο χώρος αναφοράς και ο κατάλληλος, είναι καλά οργανωμένοι θα επιτρέψουν στους μαθητές να αναπτύξουν αποτελεσματικό προσωπικό χώρο εργασίας.

Στην περίπτωση που ο MWS αναφέρεται σε γεωμετρικό θέμα τότε ονομάζεται Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (ΓΧΕ) και ισχύουν οι ίδιες ορολογίες για τα επίπεδα και τις γενέσεις του χώρου. Μάλιστα ο ΓΧΕ είναι ο χώρος από τον οποίο ξεκίνησε η θεωρία των Μαθηματικών Χώρων Εργασίας. (Kuzniak & Nechane, 2015). Ένα πλήρες γεωμετρικό έργο υποθέτει μια ουσιαστική σχέση μεταξύ του επιστημολογικού και γνωστικού επιπέδου και τη διαμόρφωση ποικίλων συνδέσεων μεταξύ των τριών γενέσεων και των κατακόρυφων επιπέδων του ΓΧΕ. (Kuzniak, Nechane and Drouhard, 2016).

Ο Kuzniak σε ένα από τα τελευταία του άρθρα τονίζει ότι στόχος του μοντέλου του ΓΧΕ δεν είναι μόνο να παρατηρηθούν και να καταγραφούν οι διαδρομές ανάμεσα στα επίπεδα του χώρου κατά την διάρκεια μιας μαθηματικής δραστηριότητας, αλλά εξ αρχής να σχεδιάζονται εργασίες οι οποίες ενσωματώνουν και τις τρεις διαστάσεις του ΓΧΕ ώστε να επιτευχθεί πλήρης κατανόηση ενός γεωμετρικού έργου. (Kuzniak, 2018)

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η απόδειξη αποτελεί ένα από τα πιο συχνά θέματα μελέτης και έρευνας. Ειδικότερα η γεωμετρική απόδειξη έχει μελετηθεί εκτενώς υπό το πρίσμα διαφόρων θεωριών και μεθόδων. Από τη βιβλιογραφία που παρουσιάστηκε προκύπτει το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες που να αναλύουν την κατανόηση της γεωμετρικής απόδειξης με τη βοήθεια της θεωρίας του Μαθηματικού Χώρου Εργασίας (MWS). Επομένως προκύπτει ότι θα ήταν ερευνητικά ενδιαφέρον να γίνει μια διδακτική παρέμβαση με θέμα τη γεωμετρική απόδειξη και στη συνέχεια να αναλυθούν τα αποτελέσματά της με τη χρήση της θεωρίας του MWS.

2.1 Στόχος

Να διερευνηθεί μέσα από τη διδασκαλία της Γεωμετρικής Απόδειξης πώς οι μαθητές οδηγούνται από την εικασία στην απόδειξη μίας πρότασης και να καταγραφεί η πορεία διέλευσης από τη Γεωμετρία Ι (GI) στη Γεωμετρία ΙΙ (GII).

Η καταγραφή της πορείας θα γίνει με χρήση της ιδιότητας του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, καθώς είναι μια πρόταση που διατρέχει την εκπαίδευση από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο. Επίσης είναι χαρακτηριστική ιδιότητα με πλήθος απτικών και οπτικών εφαρμογών στα πλαίσια της Γεωμετρίας Ι (GI) αλλά και διαφορετικές θεωρητικές αποδείξεις στα πλαίσια της Γεωμετρίας ΙΙ (GII).

2.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

1. Σε ποιον βαθμό οι μαθητές Β' τάξης Γυμνασίου και Λυκείου έχουν αποδεικτικό λόγο, όπως αυτό προκύπτει από την επίλυση ασκήσεων πάνω στην ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου; (έλεγχος pre-test)

2. Μπορούν οι μαθητές με τη βοήθεια κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης να διαμορφώσουν εικασίες και κατ' επέκταση να στηρίξουν λογικά τις εικασίες τους και να προχωρήσουν σε κάποια μορφή απόδειξης;

3. Ποιες διαδρομές ακολουθούν οι μαθητές μέσα στα επίπεδα του Γ.Χ.Ε. και μέσω ποιων γενέσεων προκύπτουν;

4. Τι είδους αποδεικτικό λόγο θα κατακτήσουν οι μαθητές Β’ τάξης Γυμνασίου και Λυκείου μετά τη διδακτική παρέμβαση με επιλεγμένες δραστηριότητες για την ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου; (έλεγχος pos-test)

2.3 Δείγμα

Για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας επιλέχτηκαν μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου με σκοπό τη συγκριτική τους μελέτη. Συγκεκριμένα το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 22 μαθητές ενός τμήματος Β΄ Γυμνασίου και 22 μαθητές ενός τμήματος Β΄ Λυκείου. Κρίθηκε κατάλληλη η επιλογή των συγκεκριμένων τάξεων, καθώς οι μαθητές αυτών των τάξεων έχουν ήδη κάποιες προαπαιτούμενες γνώσεις και εμπειρία στην επίλυση γεωμετρικών ασκήσεων, αλλά και εμπειρία στη γεωμετρική απόδειξη όσον αφορά τους μαθητές του Λυκείου. Πρέπει να αναφερθεί ότι 10 μαθητές από τους 22 του Λυκείου είναι μαθητές θεωρητικής κατεύθυνσης, ωστόσο αυτό δεν επηρεάζει την έρευνα, καθώς το μάθημα της γεωμετρίας είναι μάθημα γενικής παιδείας.

2.4 Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τους μήνες Φεβρουάριο-Μάρτιο 2017. Διεξήχθη σε τρία στάδια. Το πρώτο στάδιο ήταν το pre-test (προκαταρτικό στάδιο αξιολόγησης), το δεύτερο στάδιο ήταν οι διδακτικές παρεμβάσεις και το τρίτο στάδιο ήταν το post-test (τελικό στάδιο αξιολόγησης). Ειδικότερα, το pre-test δόθηκε και στα δύο σχολεία την πρώτη εβδομάδα του Φεβρουαρίου και συμπληρώθηκε ατομικά από τους μαθητές μέσα σε μία διδακτική ώρα. Το στάδιο της διδακτικής παρέμβασης διήρκησε 4 εβδομάδες. Στο Γυμνάσιο έγιναν συνολικά 8 σαραντάλεπτες συνεδρίες με συχνότητα δυο συνεδρίες την εβδομάδα. Στο Λύκειο έγιναν συνολικά 6 συνεδρίες των σαράντα λεπτών για λόγους που αναφέρονται στην ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης. Οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης συμπλήρωναν φύλλα εργασίας ανά ομάδες δύο ατόμων. Το post-test πραγματοποιήθηκε μια εβδομάδα μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης. Και το post-test, όπως και το pre-test, συμπληρώθηκε από τους μαθητές ατομικά κατά τη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας.

Για τη διεξαγωγή της έρευνας εξασφαλίστηκε η απαραίτητη άδεια και έγκριση εφαρμογής της από τους υπεύθυνους. Αρχικά ζητήθηκε έγκριση από τους διευθυντές των σχολείων, στη συνέχεια από τους εκπαιδευτικούς των τμημάτων και τέλος ενημερώθηκαν οι μαθητές που αποτέλεσαν το δείγμα. Μετά την προφορική έγκριση του προγράμματος από τους διευθυντές των σχολείων και τους εκπαιδευτικούς, πραγματοποιήθηκε ενημέρωση των μαθητών. Ο ερευνητής επισκέφτηκε τα τμήματα των μαθητών και του Γυμνασίου και του Λυκείου. Ενημέρωσε τους μαθητές για τη μορφή και τους στόχους της έρευνας και συζήτησε μαζί τους για τη σημασία των ερευνών στην εκπαίδευση. Δέχτηκε ερωτήσεις από τους μαθητές που αφορούσαν τη συμμετοχή τους στην ερευνητική διαδικασία, καθώς οι μαθητές και των δύο τμημάτων συμμετείχαν πρώτη φορά σε ερευνητικό πρόγραμμα. Τονίστηκε ιδιαίτερα η ανωνυμία της συμμετοχής και διευκρινίστηκε πλήρως ότι οι απαντήσεις δεν επηρεάζουν τη βαθμολογία της σχολικής τους επίδοσης. Εξαρχής ζητήθηκε από τους μαθητές να διαλέξουν ένα ψευδώνυμο, το οποίο θα χρησιμοποιούσαν σε όλα τα φύλλα εργασίας.

Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε από τον ίδιο τον ερευνητή και οι εκπαιδευτικοί των τάξεων συμμετείχαν σε αυτήν ως απλοί παρατηρητές. Ακολούθησε το pre-test και προηγήθηκε του post-test. Τα χαρακτηριστικά της, όπως αυτά προκύπτουν μέσα από την διαδικασία διεξαγωγής της, παρουσιάζονται αναλυτικά στην παράγραφο 2.6 του κεφαλαίου της Μεθοδολογίας.

2.5 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Σύμφωνα με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ), αναλυτικό και εγχειρίδια που αποτελούν τον γεωμετρικό χώρο αναφοράς, κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας. Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να επιτευχθεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες:

α. Του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας
β. Της δημιουργίας συνδέσεων
γ. Της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων
δ. Της μεταγνωστικής ενημερότητας, όπου ο μαθητής σκέφτεται πάνω στις δράσεις του και ελέγχει το αποτέλεσμα των δραστηριοτήτων του

Οι παραπάνω διεργασίες συναντώνται και οι τέσσερις στο μάθημα της Γεωμετρίας. Η επαφή των μαθητών με τη Γεωμετρία γίνεται από την πρώιμη σχολική ηλικία. Οι μαθητές ήδη από τη νηπιακή ηλικία και τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τα σχήματα, να τα ταξινομούν με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των σχημάτων. Επίσης, μαθαίνουν να κατασκευάζουν και να σχεδιάζουν σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων.

Στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού επιδιώκεται να αναπτυχθεί μια αντίληψη των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους. Στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές εξασκούνται στο να κατηγοριοποιούν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους, να εξάγουν συμπεράσματα και να φτάνουν σε ένα πιο θεωρητικοποιημένο μοντέλο. Η έννοια της απόδειξης δεν αναφέρεται πουθενά στο δημοτικό. Σύμφωνα με τους Kuzniak και Vivier (2010) οι μαθητές του Δημοτικού στην Ελλάδα κινούνται στα πλαίσια του παραδείγματος GI. Στην έρευνα τους εξέτασαν τον γεωμετρικό χώρο αναφοράς μελετώντας τα σχολικά εγχειρίδια και διαπίστωσαν ότι οι γεωμετρικές εργασίες αποτελούνται αποκλειστικά από μετρήσεις, συγκρίσεις και σχεδιασμό. Ωστόσο παρατήρησαν ότι στην ΣΤ΄ τάξη προετοιμάζεται η μετατόπιση στο ΓΧΕ αναφοράς του Γυμνασίου.

Στο Γυμνάσιο γίνεται η πρώτη θεωρητική προσέγγιση της Γεωμετρίας. Οι μαθητές εμπλέκονται με έννοιες και ορισμούς της βάσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Διάφορες διδακτικές δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν γεωμετρικές έννοιες και ιδιότητες, να αναγνωρίσουν γεωμετρικές σχέσεις και να διατυπώσουν εικασίες σε διαισθητικό επίπεδο. Σε αυτόν τον ηλικιακό κύκλο μπαίνουν οι βάσεις για τη μετάβαση σε ένα ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Σκοπός του προγράμματος σπουδών είναι οι μαθητές να αναγνωρίζουν ιδιότητες, να κάνουν συσχετίσεις μέσα από τις ιδιότητες και τέλος να κατασκευάζουν απλές αποδείξεις. Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές κινούνται αποκλειστικά στα πλαίσια του παραδείγματος GI, καθώς όλες οι δραστηριότητες και ασκήσεις βασίζονται στην παρατήρηση και στις κατασκευές με γεωμετρικά όργανα. Στην Β΄ Γυμνασίου ο ΓΧΕ αναφοράς μετατοπίζεται προς τη GII, αφού εμφανίζεται ο όρος “απόδειξη” στην εκφώνηση ασκήσεων. Σε αυτό το σημείο εμφανίζεται ένα κενό στο ΓΧΕ αναφοράς των μαθητών, αφού δεν γνωρίζουν την έννοια της απόδειξης και τους ζητείται να αποδείξουν. Τέλος, στη Γ΄ Γυμνασίου υπάρχει σαφής μετακίνηση προς τη GII με την εμφάνιση των αποδείξεων των ταυτοτήτων στην άλγεβρα και των αποδεικτικών ασκήσεων στην ισότητα τριγώνων της γεωμετρίας. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται εισαγωγή στη Γεωμετρία του Λυκείου και την πλήρη μετάβαση στη GII.

Στην πρώτη τάξη του Λυκείου επιχειρείται η μετάβαση από την πρακτική Γεωμετρία, που οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο, στη θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η εισαγωγή της έννοιας του αξιώματος και της απόδειξης είναι τα κύρια στοιχεία που διαφοροποιούν τη θεωρητική από την πρακτική Γεωμετρία. Στα πρώτα μαθήματα γίνεται η εισαγωγή στις βασικές αρχές και τους σκοπούς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επίσης, επιχειρείται η περιγραφή των κατά Ευκλείδη Όρων, Κοινών Εννοιών, Αιτημάτων και Προτάσεων. Διδάσκεται η μαθηματική απόδειξη ως μεθοδολογία, με την οποία μια υπόθεση καταλήγει σε συμπέρασμα. Στόχος του προγράμματος σπουδών είναι να εξηγηθεί και να κατανοηθεί από τους μαθητές η ανάγκη των αποδεικτικών διαδικασιών. Μια διαδικασία που θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών και όχι μόνο. Είναι εμφανές από τα πρώτα μαθήματα της Γεωμετρίας ότι ο ΓΧΕ αναφοράς αλλάζει εντελώς και οι μαθητές βρίσκονται στο παράδειγμα GII. Όλες οι προτάσεις αποδεικνύονται και τίποτα δεν βασίζεται στον πειραματισμό ή στη διαίσθηση.

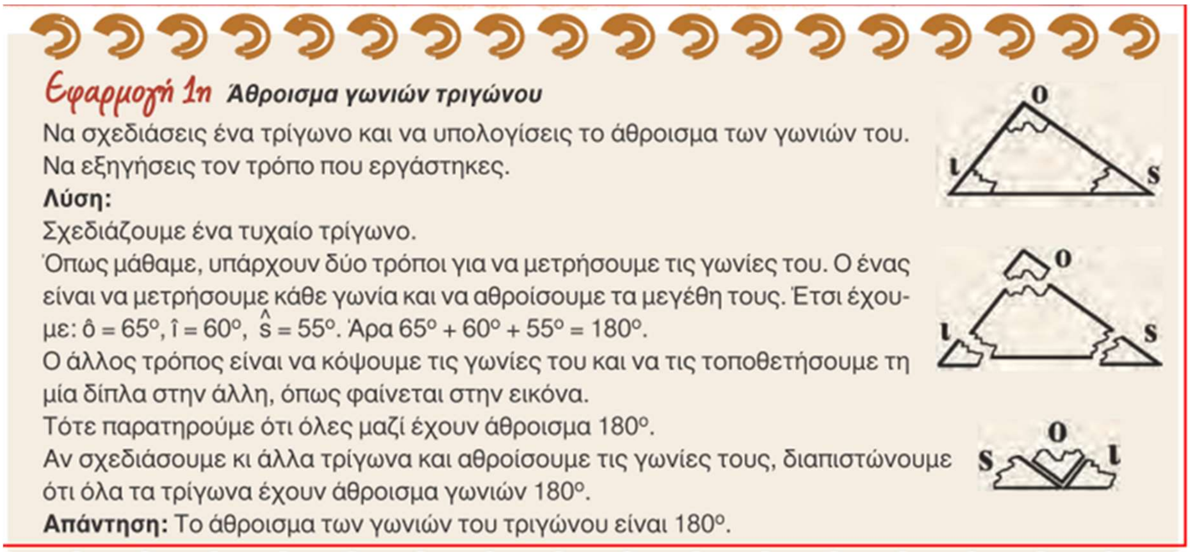
Ο αναφορικός ΓΧΕ του Γυμνασίου παρουσιάζει κενά στο ζήτημα της απόδειξης σε σχέση με αυτόν του Λυκείου. Για να μελετηθεί καλύτερα αυτό το ζήτημα επιλέχτηκε η πρόταση της ιδιότητας του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και παρουσιάζεται ο αναφορικός ΓΧΕ αυτής της ιδιότητας του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου.

2.5.1. ΔΗΜΟΤΙΚΟ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη ΣΤ τάξη Δημοτικού στοχεύει σε μια θεωρητική προσέγγιση των εννοιών. Ο μαθητής δεν αντιμετωπίζεται ως αποδέκτης μαθηματικών πληροφοριών, αλλά κατασκευάζει δυναμικά τη μαθηματική γνώση μέσα από κατάλληλες μαθηματικές δραστηριότητες.

Η ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου εμφανίζεται πρώτη φορά στην ΣΤ τάξη (Μαθηματικά ΣΤ΄, βιβλίο μαθητή). Οι μαθητές, αφού διδαχτούν την έννοια της γωνίας και τη μέτρηση της, έχουν ως εφαρμογή να υπολογίσουν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

Προτείνονται δύο τρόποι υπολογισμού. Ο πρώτος είναι η μέτρηση των γωνιών με το μοιρογνωμόνιο και στη συνέχεια το αλγεβρικό τους άθροισμα. Ο δεύτερος τρόπος είναι το κόψιμο των γωνιών και η κατάλληλη τοποθέτηση τους δίπλα δίπλα, ώστε να σχηματίζουν ευθεία γραμμή. Από αυτές τις δραστηριότητες συνεπάγεται άμεσα το συμπέρασμα ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180˚ για όλα τα τρίγωνα.


Εφαρμογή 1η **Άθροισμα γωνιών τριγώνου**

Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο και να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών του. Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.

Λύση:

Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο.

Όπως μάθαμε, υπάρχουν δύο τρόποι για να μετρήσουμε τις γωνίες του. Ο ένας είναι να μετρήσουμε κάθε γωνία και να αθροίσουμε τα μεγέθη τους. Έτσι έχουμε: $\hat{o} = 65°$, $\hat{\iota} = 60°$, $\hat{s} = 55°$. Άρα $65° + 60° + 55° = 180°$.

Ο άλλος τρόπος είναι να κόψουμε τις γωνίες του και να τις τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη, όπως φαίνεται στην εικόνα.

Τότε παρατηρούμε ότι όλες μαζί έχουν άθροισμα 180°.

Αν σχεδιάσουμε κι άλλα τρίγωνα και αθροίσουμε τις γωνίες τους, διαπιστώνουμε ότι όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 180°.

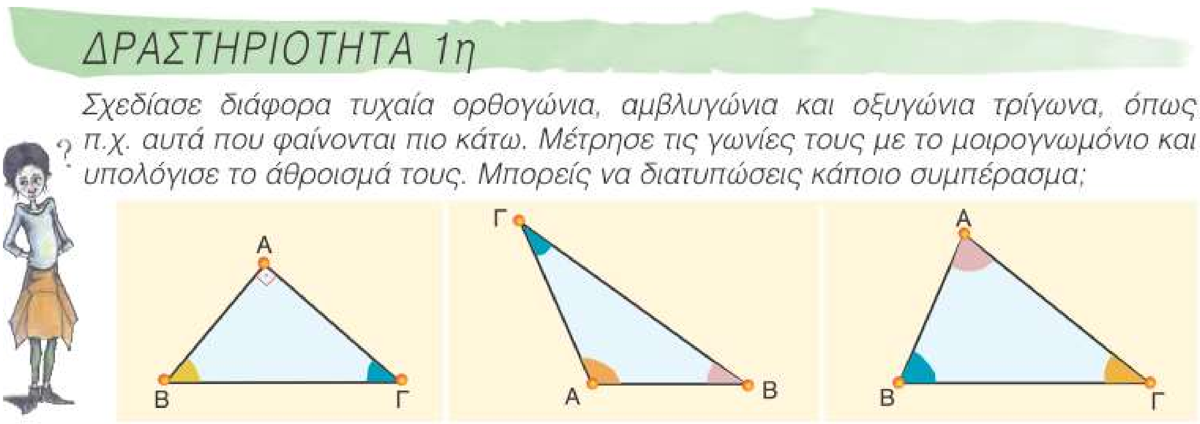
Απάντηση: Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°.

Εικόνα 1 : Εφαρμογή σχολικού βιβλίου Στ΄ Δημοτικού (σελ. 142)

Η εύρεση του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου είναι απλή διαδικασία για τους μαθητές δημοτικού, η οποία ωστόσο παρουσιάζει δυσκολία γενίκευσης. Έρευνες έχουν αποδείξει ότι οι μαθητές θεωρούν πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου εξαρτάται από το μέγεθος του τριγώνου. (βιβλίο εκπαιδευτικού, σελ.145)

2.5.2 ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Στο Γυμνάσιο οι μαθητές γνωρίζουν ήδη από το δημοτικό ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180˚. Η εισαγωγή στην ιδιότητα γίνεται με μια δραστηριότητα, η οποία ωθεί τους μαθητές στο συμπέρασμα μέσω των μετρήσεων των γωνιών διαφόρων τριγώνων.



Εικόνα 2 : Δραστηριότητα σχολικού βιβλίου μαθητή α΄ γυμνασίου (σελ. 221)

Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού προτείνεται η αισθητοποίηση της ιδιότητας του αθροίσματος να γίνει με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων. Στο Φωτόδεντρο υπάρχει η ενότητα "πειράματα με το άθροισμα των γωνιών τριγώνου" με διάφορες εφαρμογές πάνω στην ιδιότητα: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14350 (βιβλίο εκπαιδευτικού μαθηματικών α γυμνασίου).

Στη συνέχεια η ιδιότητα δίνεται σαν πρόταση :

► Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

Η πρόταση καθώς και τα πορίσματα που προκύπτουν από αυτήν δίνονται χωρίς απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης εμφανίζεται ως εφαρμογή στη συνέχεια της θεωρίας. Ζητείται από τους μαθητές να δικαιολογήσουν με λογικά επιχειρήματα ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180˚ (βιβλίο μαθητή σ. 222). Όπως παρατηρείται από την εκφώνηση, ζητείται η απόδειξη της πρότασης, χωρίς ωστόσο να αναφέρεται η λέξη απόδειξη ή κάποιο παράγωγό της. Στη συνέχεια με τον ίδιο τρόπο ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν όλα τα πορίσματα που προκύπτουν από την ιδιότητα. Δίνονται οι αποδείξεις ως εφαρμογές, οι οποίες είναι εκτός εξεταστέας ύλης αλλά δίνεται ως οδηγία στους εκπαιδευτικούς να διδάξουν υποχρεωτικά τις συγκεκριμένες εφαρμογές (βιβλίο εκπαιδευτικού μαθηματικών α γυμνασίου).

2.5.3 ΛΥΚΕΙΟ

Οι μαθητές του Λυκείου είναι πλέον εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία, όταν συναντούν την ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου. Στο 4ο κεφάλαιο του βιβλίου της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου γίνεται αναφορά στο 5ο αίτημα των Στοιχείων του Ευκλείδη (βιβλίο μαθητή σελ. 80). Η ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών δίνεται ως θεώρημα και η απόδειξη του γίνεται με τη χρήση του αξιώματος της παραλληλίας και των συμπερασμάτων του. Δίνεται ως οδηγία στους εκπαιδευτικούς να τονίσουν την αξία του θεωρήματος και ότι αυτό είναι ισοδύναμο του αιτήματος της παραλληλίας, αφού το τελευταίο χρησιμοποιείται στην απόδειξη.

Αν και η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο είναι καθαρά θεωρητική και βασίζεται στην αποδεικτική διαδικασία, προτείνονται δραστηριότητες που οδηγούν τους μαθητές στην εικασία πριν την απόδειξη. Με το μικροπείραμα “Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου” από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία οι μαθητές διερευνούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και οδηγούνται σταδιακά από τη διαίσθηση στην τυπική απόδειξη του θεωρήματος. http://photodentro.edu.gr/lor/i78521/2265

2.6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας, η διδακτική παρέμβαση ως ερευνητικό μέσο σχεδιάστηκε με σκοπό την ανάπτυξη του κατάλληλου ΜΧΕ στη μαθηματική τάξη, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν αποδεικτικό λόγο, να τον εκφράσουν ρητά και ολοκληρωμένα και να χρησιμοποιήσουν την απόδειξη ως μαθηματικό εργαλείο για την επικύρωση δοσμένων μαθηματικών προτάσεων. Η εφαρμογή της παρέμβασης χωρίστηκε σε τρεις διδακτικές ενότητες και υλοποιήθηκε σε οχτώ διδακτικές συναντήσεις για το Γυμνάσιο και έξι για το Λύκειο. Οι λόγοι της χρονικής διαφοροποίησης στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες είναι προφανείς και αφορούν τη νοητική και γνωστική ωριμότητα των μαθητών αντίστοιχα.

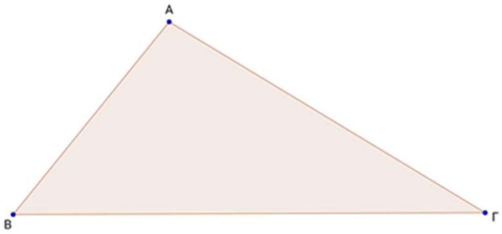
Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης οι μαθητές ασχολήθηκαν κυρίως με το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και την απόδειξή του με πορεία από το εμπειρικό προς το θεωρητικό πεδίο των μαθηματικών. Η αρχή όμως της πρώτης διδακτικής ενότητας έγινε με μια εισαγωγή στην επιστήμη της Γεωμετρίας και με αναφορές σε ιστορικά στοιχεία, καθώς η Ιστορία των μαθηματικών κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών.

Πιο αναλυτικά, παρουσιάστηκε σύντομα η πορεία και η εξέλιξη της Γεωμετρίας από την εποχή του Θαλή ως την εποχή του Ευκλείδη. Αρχικά έγινε αναφορά στη ζωή και το έργο του Θαλή του Μιλήσιου και τονίστηκε ότι ως μαθηματικός έκανε τα πρώτα βήματα προς τη συστηματοποίηση της γεωμετρίας. Στη συνέχεια αναλύθηκε το έργο του Πυθαγόρα και υπογραμμίστηκε ότι είναι το έργο όπου πιθανόν εμφανίζονται οι πρώτες αποδείξεις. Μετά τον Πυθαγόρα το Σάμιο έγινε αναφορά στη ζωή και το έργο του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη και η ιστορική διαδρομή κατέληξε στον «πατέρα» της Γεωμετρίας, τον Ευκλείδη.

Στο έργο του Ευκλείδη δόθηκε ιδιαίτερη σημασία. Τονίστηκε η προσπάθειά του να οργανώσει το έργο των προκατόχων του μαθηματικών, καθώς και να το συνεχίσει, γράφοντας τα «Στοιχεία», μια συλλογή ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων, που ορίζουν τη μαθηματική σκέψη από το 300 π.Χ. περίπου ως σήμερα. Επίσης, αναφέρθηκε ότι ο Ευκλείδης κατέχει μια κρίσιμη θέση στην ιστορία της Λογικής και των Μαθηματικών, καθώς είναι ο πρώτος που παρήγαγε ένα αυστηρά δομημένο και συνεκτικό σύστημα προτάσεων με βάση ένα σύνολο ορισμών. Στο σημείο αυτό αναλύθηκαν οι όροι "Αξίωμα", "Θεώρημα", "Πόρισμα" και δόθηκε ο ορισμός της γεωμετρικής απόδειξης. Τέλος, έγινε εκτενής αναφορά στη σημασία της απόδειξης σε όλους τους τομείς των μαθηματικών· Άλγεβρα, Γεωμετρία, Ανάλυση κλπ.

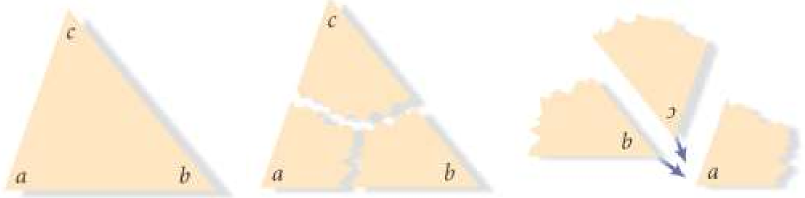
Για την κατανόηση και την εφαρμογή των όσων αναλύθηκαν σε θεωρητικό επίπεδο επιλέχτηκε το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και για τους μαθητές του γυμνασίου και για τους μαθητές του λυκείου. Συγκεκριμένα, κύριο έργο των μαθητών ήταν να παρατηρήσουν κάθε φορά και να προσπαθήσουν να υπολογίσουν με κάποιον τρόπο το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου που τους δινόταν. Για το σκοπό αυτόν ετοιμάστηκαν πέντε διαφορετικά φύλλα εργασίας (παράρτημα, σελ. 89), στο καθένα από τα οποία το άθροισμα των γωνιών υπολογιζόταν με διαφορετικό τρόπο είτε με χρήση μοιρογνωμονίου είτε με δίπλωση χαρτιού είτε με κοπή γωνιών. Πρόκειται για γεωμετρικές δραστηριότητες κατευθυνόμενες πλήρως από τη GI.

Έτσι, το πρώτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 90) που μοιράστηκε στους μαθητές περιείχε ένα σχεδιασμένο τρίγωνο ΑΒΓ και τους καλούσε να μετρήσουν τις γωνίες του με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου, να γράψουν το μέτρο καθεμίας, να αθροίσουν τις μοίρες των τριών γωνιών που μέτρησαν και να βρουν το άθροισμά τους. Οι μαθητές του Γυμνασίου επέδειξαν ευκολία στη χρήση του μοιρογνωμονίου σε αντίθεση με τους μαθητές του Λυκείου που δυσκολεύτηκαν στη χρήση του καθώς δεν ασχολούνται με μετρήσεις και εργάζονται σε συμβολικό επίπεδο. Στη συνέχεια ανακοίνωσαν στην ολομέλεια της τάξης τα αποτελέσματα και κλήθηκαν να απαντήσουν αν μέσω της προηγούμενης μέτρησης ήταν δυνατό να γενικευτεί το τελικό αποτέλεσμα των 180^o για το άθροισμα των γωνιών σε όλα τα τρίγωνα.



Σχήμα 6 : Τρίγωνο 1ου φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.89)

Το δεύτερο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 91) συνοδευόταν από ένα χάρτινο τρίγωνο. Οι μαθητές ζητήθηκε αρχικά να ονομάσουν τις γωνίες του τριγώνου (α, β, γ) και στη συνέχεια να το κόψουν σε τρία μέρη ώστε το κάθε μέρος να περιέχει μια γωνία. Έγινε επίδειξη του τρόπου κοψίματος του τριγώνου και οι μαθητές ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στη δραστηριότητα. Αμέσως μετά τοποθέτησαν τις γωνίες τη μια δίπλα στην άλλη έτσι ώστε να σχηματίζεται ευθεία γωνία πάνω στην ευθεία γραμμή που τους δόθηκε. Ακόμα, οι μαθητές κατέγραψαν τις παρατηρήσεις τους και το συμπέρασμα τους για το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου και, τέλος, απάντησαν αν το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ίσχυε μόνο για το συγκεκριμένο τρίγωνο ή μπορούσε να γενικευτεί για όλα τα τρίγωνα.

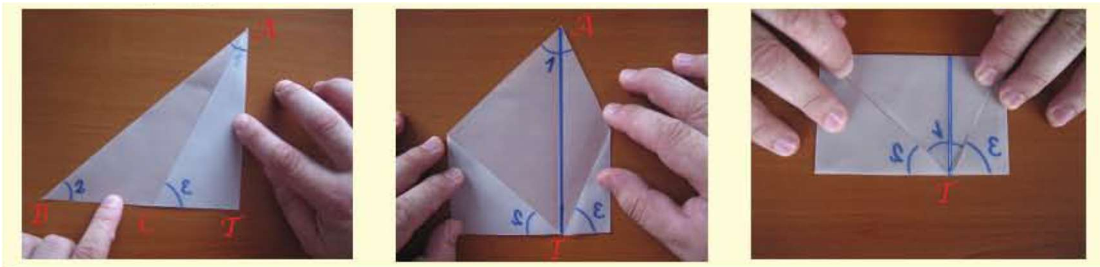


Σχήμα 7 : Δραστηριότητα 2ου φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.90)

Στο τρίτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 92) ζητήθηκε από τους μαθητές να εργαστούν με δίπλωση πάνω σε ένα τρίγωνο φτιαγμένο από ριζόχαρτο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές κλήθηκαν:

- Να ονομάσουν ΑΒΓ το τρίγωνο και να αριθμήσουν (1, 2, 3) τις γωνίες του.
- Να διπλώσουν τη γωνία Α έτσι, ώστε το σημείο Γ να είναι πάνω στη ΒΓ πλευρά.
- Να ξεδιπλώσουν τη γωνία Α, να τονίσουν τη γραμμή που σχηματίστηκε από τη δίπλωση και να την ονομάσουν ΑΤ.
- Να διπλώσουν τις γωνίες 2 και 3 του τριγώνου, ώστε να ακουμπάνε τη ΒΓ και οι κορυφές να ταυτίζονται με το Τ.

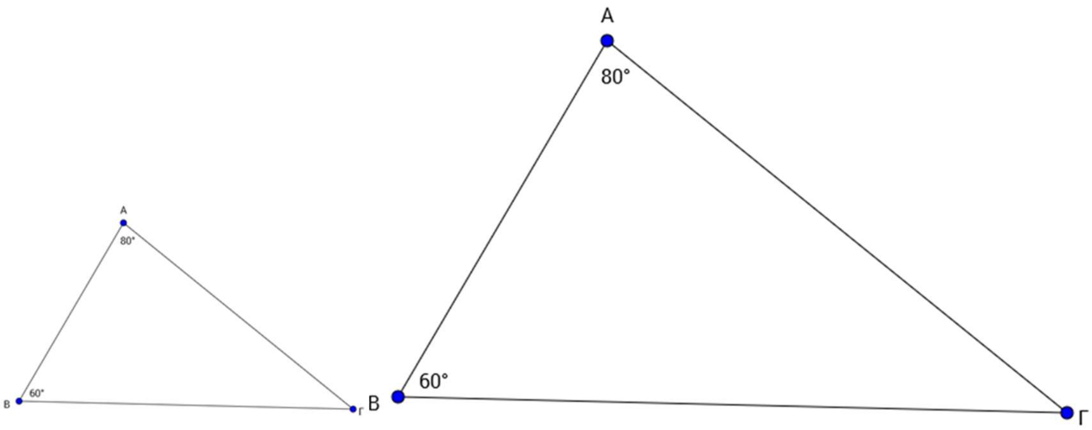
- Και, τέλος, να διπλώσουν τη γωνία 1, ώστε η κορυφή της να ακουμπήσει το Τ.



Εικόνα 3 : Δραστηριότητα 3ου φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.91)

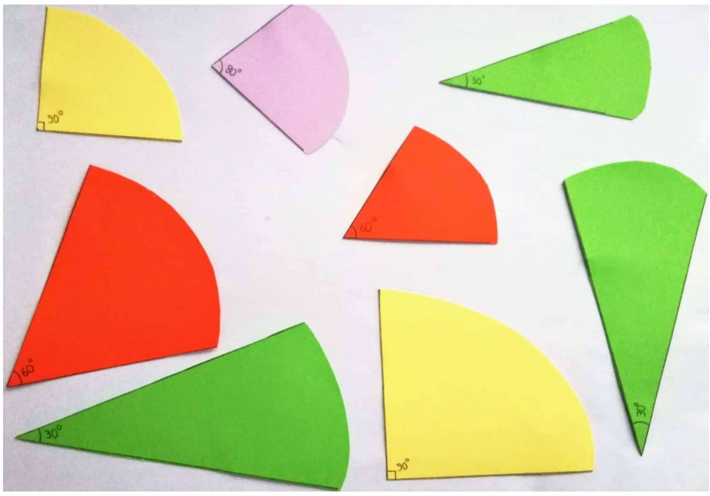
Οι μαθητές ακολούθησαν πιστά τα βήματα όπως τα είδαν στις φωτογραφίες και ανταποκρίθηκαν με ευκολία και σε αυτήν τη δραστηριότητα. Ως κατακλείδα και πάλι οι μαθητές ζητήθηκε να γράψουν την παρατήρηση τους ως προς το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

Στο τέταρτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 93) υπήρχαν σχεδιασμένα δύο όμοια τρίγωνα, στα οποία ήταν σημειωμένο το μέτρο των δύο γωνιών (Α και Β). Εδώ οι μαθητές κλήθηκαν να μετρήσουν με το μοιρογνωμόνιο την τρίτη γωνία σε κάθε τρίγωνο και να τη σημειώσουν. Παρά τη ρητή οδηγία να μετρήσουν τη γωνία, οι περισσότεροι μαθητές του Λυκείου δεν χρησιμοποίησαν το μοιρογνωμόνιο αλλά υπολόγισαν αλγεβρικά το μέτρο της γωνίας θεωρώντας γνωστή την πρόταση για το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να υπολογίσουν το άθροισμα των γωνιών των δύο τριγώνων και πάλι καταληκτικά να γράψουν το συμπέρασμά τους για το άθροισμα των γωνιών και αν αυτό επηρεάζεται από το μέγεθος του τριγώνου. Τους ζητήθηκε δηλαδή να αποφανθούν για τη σχέση του αθροίσματος γωνιών και του μεγέθους τριγώνου.



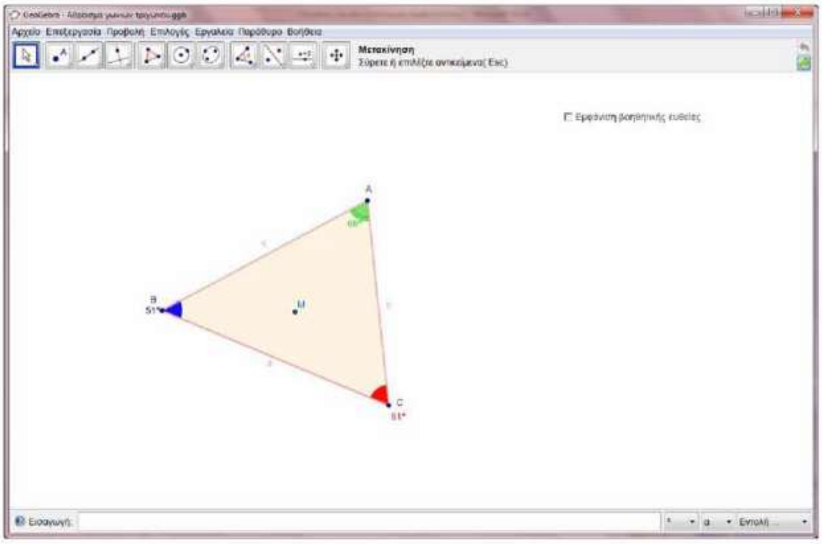
Σχήμα 8 : Δραστηριότητα 4ου φύλλου εργασίας (παράρτημα,σελ.92)

Τέλος, στο πέμπτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 94) δόθηκαν στους μαθητές κομμένες γωνίες των 30°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 120° και τους ζητήθηκε να κάνουν συνδυασμούς τριών γωνιών και με κατάλληλη τοποθέτησή τους να σχηματίσουν τρίγωνο. Στη συνέχεια οι μαθητές έπρεπε να καταγράψουν τους συνδυασμούς με τους οποίους μπόρεσαν να σχηματίσουν τρίγωνο και να βρουν το άθροισμα των γωνιών κάθε συνδυασμού. Τελικός στόχος ήταν να διατυπώσουν το συμπέρασμα για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Για ακόμα μια φορά οι μαθητές του Γυμνασίου επέδειξαν δεξιότητα στη χρήση των χειραπτικών μέσων σε αντίθεση με τους μαθητές του Λυκείου που αντέδρασαν στη χρήση των χειραπτικών υλικών που απαιτούσε η συγκεκριμένη δραστηριότητα.

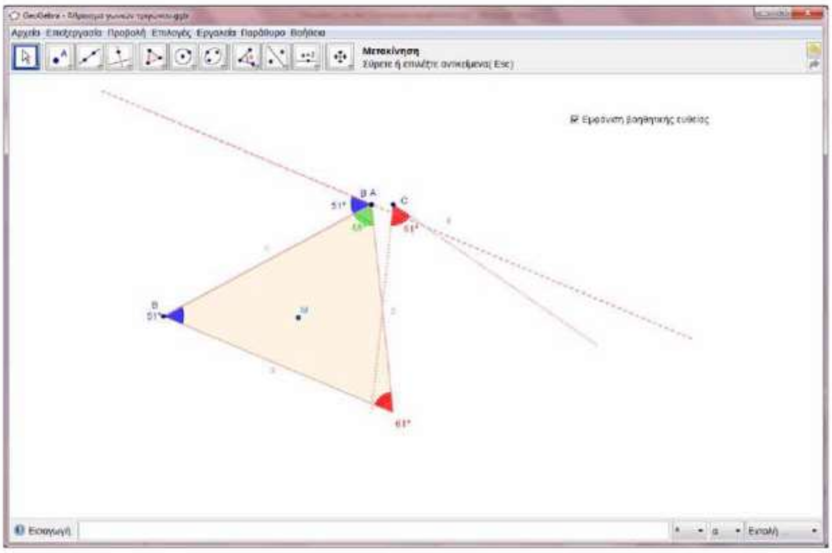


Εικόνα 4 : Δραστηριότητα 5^{ου} φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.93)

Αφού τελείωσαν οι δραστηριότητες με φύλλα εργασίας, παρουσιάστηκαν δύο δραστηριότητες με τη χρήση λογισμικού. Συγκεκριμένα με τη βοήθεια υπολογιστή και του λογισμικού GeoGebra παρουσιάστηκαν οι εφαρμογές που προτείνει το πρόγραμμα σπουδών και των δύο τάξεων. Στην πρώτη εφαρμογή μετακινώντας την κορυφή Α του τριγώνου αλλάζουν τα μέτρα των γωνιών ώστε να παραμένει το άθροισμα σταθερό και ίσο με 180˚ (εικόνα 5). Στη δεύτερη δραστηριότητα μετακινώντας τις γωνίες Β και C δίπλα στη γωνία Α σχηματίζεται ευθεία γωνία, οπότε το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με 180˚ (εικόνα 6).



Εικόνα 5 : Εφαρμογή GeoGebra άθροισμα γωνιών τριγώνου



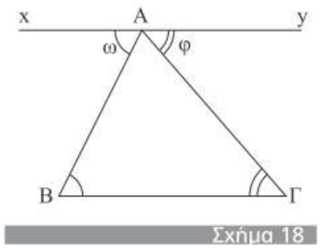
Εικόνα 6 : Εφαρμογή GeoGebra άθροισμα γωνιών τριγώνου

Το πρώτο μέρος της διδακτικής παρέμβασης έκλεισε με το ερώτημα αν οι παραπάνω δραστηριότητες στα τρίγωνα των μαθητών οδηγούν σε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και αν μπορεί αυτό το συμπέρασμα μέσω των συγκεκριμένων μετρήσεων και δραστηριοτήτων να γενικευτεί για όλα τα τρίγωνα.

Η πρώτη ενότητα είχε ρόλο εισαγωγής, κινητοποίησης των μαθητών και ενεργοποίησης των γεωμετρικών ιδιοτήτων που ήταν απαραίτητες για τη διαμόρφωση του κατάλληλου ΓΧΕ. Οι δραστηριότητες που περιείχαν τα φύλλα εργασίας προέρχονταν από τη GI με σκοπό τη δημιουργία εικασιών, ώστε στο επόμενο βήμα να υπάρξει η ανάγκη αποδεικτικού λόγου και σταδιακή μετάβαση στη GII. Η γεφύρωση των δύο επιπέδων απαιτούσε είτε εργαλειακή γένεση, μέσω των μετρήσεων ή των κατασκευών, είτε σχηματική γένεση μέσω της ερμηνείας των σχημάτων. Υπήρχε η πρόβλεψη οι γεωμετρικές εργασίες να κινηθούν στο επίπεδο [Sem-Ins].

Με την έναρξη της δεύτερης ενότητας αρχικά έγινε υπενθύμιση των δραστηριοτήτων της πρώτης ενότητας (2 δ.ω. για το Γυμνάσιο και 1 δ.ω. για το Λύκειο) και ειδικότερα επαναλήφθηκε και απαντήθηκε το ερώτημα αν μπορεί να γενικευτεί το αποτέλεσμα των μετρήσεων των γωνιών και του αθροίσματός τους για όλα τα τρίγωνα. Περνώντας στο νέο υλικό της παρέμβασης, πρώτα αναλύθηκε η έννοια της εικασίας μιας πρότασης και η αναγκαιότητα της απόδειξης για την καθολική αποδοχή της πρότασης αυτής. Για να γίνει κατανοητή η σημασία της απόδειξης επιλέχτηκε ξανά το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές αποδείξεις του. Με αυτόν τον τρόπο έγινε κατανοητή η διαφορά της απόδειξης σε σχέση με τα εμπειρικά αποτελέσματα που είχαν βρει οι μαθητές στην πρώτη διδακτική ενότητα της παρέμβασης.

Η πρώτη απόδειξη που διδάχτηκε είναι η απόδειξη που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου (βιβλίο μαθητή, σελ. 88). Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Εύδημος ο Περιπατητικός αποδίδει στους Πυθαγορείους την επινόηση για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου (Ευκλείδη ‘Στοιχεία’, σελ. 178). Η απόδειξη των Πυθαγορείων, όπως μας την παραθέτει ο Πρόκλος από τον Εύδημο και την παρουσιάζει και το σχολικο βιβλίο έχει ως εξής:



ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\llcorner$ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}} = 2\llcorner.$$

Εικόνα 7 : Απόδειξη θεωρήματος σχολικό βιβλίο μαθητή Γεωμετρία Α΄ Λυκείου (σελ. 88)

Η δεύτερη απόδειξη που αναλύθηκε είναι αυτή που υπάρχει στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Βασίζεται πάλι στο αίτημα της παραλληλίας, αλλά γίνεται με διαφορετικό τρόπο από ό,τι η παραπάνω. Πρόκειται για την πρόταση 32 στο Πρώτο βιβλίο των Στοιχειών και η απόδειξη της έχει ως εξής :

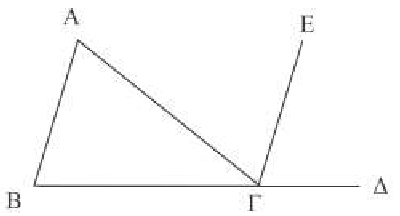
Πρόταση 32 (Ι. 32)

Σε κάθε τρίγωνο κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο εντός και απέναντι γωνιών και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ μέχρι το Δ (Σχ. 84). Θα αποδείξουμε ότι

$A\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A} + \hat{B}$ και ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές.



Σχήμα 84

Φέρνουμε ΓΕ // ΑΒ και αφού η ΑΓ τις τέμνει, τότε $B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}E$.

Επίσης, αφού η ΒΓ τις τέμνει, τότε $A\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε

$B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Gamma \quad = \hat{A} + \hat{B} = A\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta$.

Επειδή $\hat{A} + \hat{B} = A\hat{\Gamma}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές, θα είναι και

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2$ ορθές.

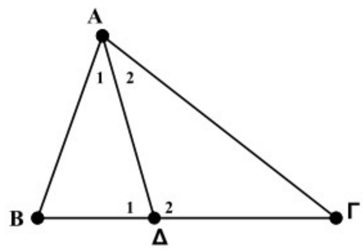
ὅ.ἔ.δ.

Εικόνα 8 : Απόδειξη Θεωρήματος Στοιχεία Ευκλείδη (σελ. 178)

Η τρίτη απόδειξη που αναλύθηκε λύνεται με αλγεβρικό τρόπο και είναι εντελώς διαφορετική από τις προηγούμενες που παρουσιάστηκαν, καθώς διαφέρει ως προς την αρχική υπόθεση. Η συγκεκριμένη απόδειξη αναφέρθηκε με στόχο να διεγείρει την υποψία των μαθητών ως προς την διαφορά της αρχικής υπόθεσης ορισμένων αποδείξεων.

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180˚.

Απόδειξη



Έστω x το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου και ΑΔ τυχαίο τμήμα. Στο τρίγωνο ΑΒΔ θα ισχύει :

$Α_1+Β+Δ_1=x$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΓΔ θα ισχύει :

$Α_2+Γ+Δ_2 = x$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2)

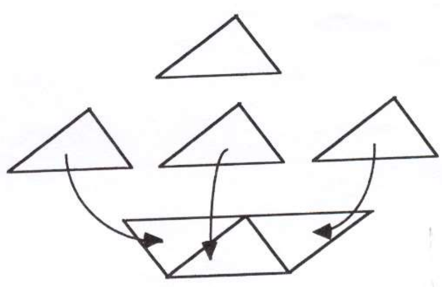
$Α_1+Β+Δ_1+Α_2+Γ+Δ_2 = 2x$ άρα

$Α+Β+Γ+Δ_1+Δ_2 = 2x$ οπότε

$x + 180^\circ = 2x$ άρα

$x = 180^\circ$

Τέλος, παρουσιάστηκε και η απόδειξη που εμφανίστηκε στα κινέζικα μαθηματικά, η οποία ταυτίζει το συλλογισμό με την κίνηση του σχήματος. Σχεδιάστηκε τρεις φορές το ίδιο τρίγωνο και με κατάλληλη μετατόπιση οι τρεις γωνίες σχημάτισαν ευθεία γωνία. Αυτή η τοποθέτηση των γωνιών οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το γεωμετρικό άθροισμα των τριών γωνιών είναι μια επίπεδη γωνία.

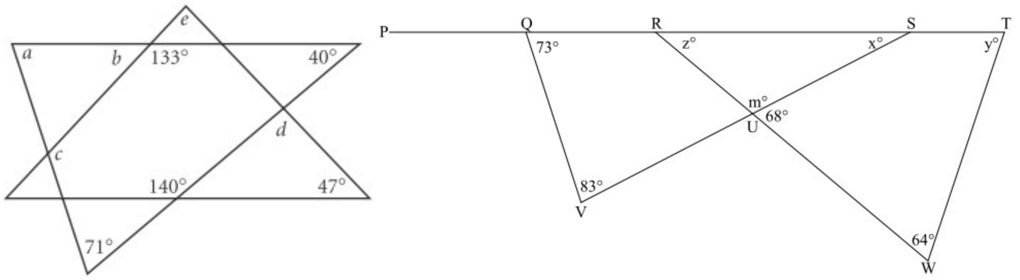


Σχήμα 9 : Κινέζικη Απόδειξη Θεωρήματος

Αφού παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν οι παραπάνω αποδείξεις, δόθηκαν φύλλα εργασίας (παράρτημα, σελ. 95) στους μαθητές και ζητήθηκε να αποδείξουν ορισμένες προτάσεις που προκύπτουν από το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου. Οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας είχαν ως στόχο την ανάπτυξη του προσωπικού ΓΧΕ στην αποδεικτική διαδικασία. Στο πρώτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ. 96) ζητήθηκε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.97) οι μαθητές ασχολήθηκαν με δύο αποδείξεις· αρχικά ζητήθηκε να αποδείξουν ότι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές και στη συνέχεια ότι σε κάθε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι 45°. Τέλος, στο τρίτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.98) ζητήθηκε η απόδειξη μίας πρότασης με δύο τρόπους· πρώτα με αποδεικτικό λόγο και στη συνέχεια εμπειρικά με κόψιμο και μετακίνηση των γωνιών ενός τριγώνου. Συγκεκριμένα ζητήθηκε να αποδείξουν οι μαθητές ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου. Στη συνέχεια να αποδείξουν το ίδιο με κόψιμο και εφαρμογή γωνιών στο τρίγωνο που τους δόθηκε. Τέλος, να συγκρίνουν τις δύο αποδείξεις, να καταγράψουν το συμπέρασμα της σύγκρισης και να απαντήσουν στο ποια από τις δύο αποδεικτικές διαδικασίες γενικεύει το συμπέρασμα; Όλες οι δραστηριότητες προέρχονται από το παράδειγμα GII και είχαν σκοπό να γεφυρώσουν τα δύο επίπεδα - γνωστικό και επιστημολογικό - μέσω της λεκτικής γένεσης. Εμπλουτίστηκε το θεωρητικό σύστημα αναφοράς των μαθητών με νέες ιδιότητες και προτάσεις, αλλά και με νέες τεχνικές μεθόδους επίλυσης με αποτέλεσμα την ανάπτυξη αποδεικτικού λόγου. Η γεωμετρική εργασία κινήθηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] ή στο επίπεδο [Ins-Dis].

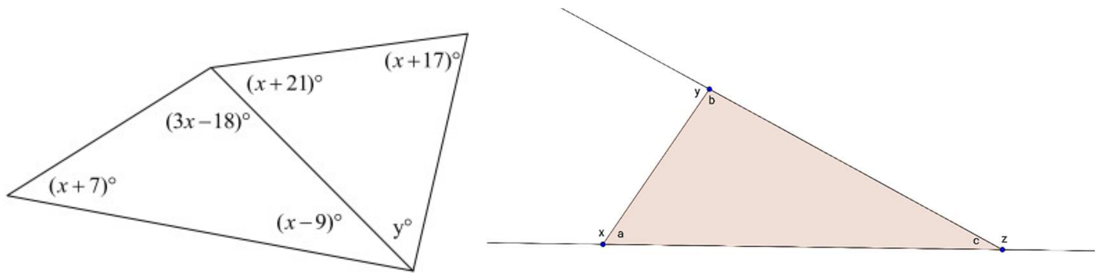
Στην τρίτη και τελευταία διδακτική ενότητα αρχικά έγινε υπενθύμιση των προτάσεων που οι μαθητές απέδειξαν στην προηγούμενη ενότητα και διευκρινίστηκε ότι τις προτάσεις αυτές τις χρησιμοποιούμε στις λύσεις ασκήσεων, αφού έχουν αποδειχτεί και είναι έγκυρες. Και σε αυτήν την διδακτική ενότητα μοιράστηκαν φύλλα εργασίας (παράτημα, σελ.99) που περιείχαν προτάσεις και ασκήσεις, των οποίων η λύση στηριζόταν στο θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και στα πορίσματα του θεωρήματος που αποδείχτηκαν στα προηγούμενα φύλλα εργασίας. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε με στόχο τον εμπλουτισμό του προσωπικού ΓΧΕ των μαθητών με νέες μεθόδους και η είσοδος στο ΓΧΕ να ξεκινάει από το επίπεδο [Sem-Dis].

Στο πρώτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.100) υπήρχαν σχεδιασμένα δύο σχήματα με γνωστές και άγνωστες γωνίες. Οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν τις άγνωστες γωνίες, χρησιμοποιώντας τις προτάσεις που απέδειξαν στην προηγούμενη ενότητα. Η δραστηριότητα δόθηκε με στόχο οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις νέες ιδιότητες του θεωρητικού συστήματος αναφοράς του ΓΧΕ στα πλαίσια της GII, ωστόσο ήταν δυνατόν να εργαστούν και στο πλαίσιο της GI με τη χρήση μοιρογνωμονίου.



Σχήμα 10 : Δραστηριότητα φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.100)

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.102)υπήρξαν πάλι σχήματα σχεδιασμένα με άγνωστες παραστάσεις. Η λύση των ασκήσεων ήταν περισσότερο αλγεβρική παρά γεωμετρική. Στόχος ήταν οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τις ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις και με σωστό συλλογισμό, να υπολογίσουν τα ζητούμενα.



Σχήμα 11 : Δραστηριότητα φύλλου εργασίας (παράρτημα, σελ.101)

Τέλος, στο τρίτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.104) υπήρχαν δύο γεωμετρικές ασκήσεις. Η πρώτη άσκηση δεν έδινε σχήμα, αλλά το περιέγραφε και ζητούσε να υπολογιστούν οι γωνίες δύο τριγώνων που σχηματίζονταν, μετά το σωστό σχεδιασμό του σχήματος. Η δεύτερη άσκηση έδινε το σχήμα και είχε ως ζητούμενα τον υπολογισμό διάφορων γωνιών. Και στις δύο ασκήσεις απαιτούνταν η σωστή διαχείριση των προτάσεων που διδάχτηκαν, αλλά και η σωστή διατύπωση αποδεικτικού λόγου.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται στα φύλλα εργασίας έχουν πορεία από τη σκέψη και λύση στα πλαίσια της Γεωμετρίας Ι (GI) με κόψιμο ή δίπλωση σχημάτων στην κατανόηση της ιδιότητας του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και στη συνέχεια να χρησιμοποιούν την συγκεκριμένη ιδιότητα σε μια αποδεικτική λύση η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη αποδεικτικού λόγου στα πλαίσια της Γεωμετρίας ΙΙ (GII).

2.7 ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Τα εργαλεία που στήριξαν τη διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκαν ειδικά, για να εξυπηρετήσουν το σκοπό της έρευνας, να επιβεβαιώσουν τις υποθέσεις και να απαντήσουν στα ερευνητικά ερωτήματα. Είχαν τη μορφή φύλλων εργασίας, τα οποία απέβλεπαν σε συγκεκριμένο διδακτικό στόχο το καθένα.

Για να ανιχνευθεί αν χρησιμοποιούν αποδεικτικό λόγο οι μαθητές του δείγματος, συντάχθηκε ειδικό φύλλο εργασίας, με σκοπό να καταγραφεί ο αρχικός προσωπικός μαθηματικός χώρος εργασίας των μαθητών και των δύο τάξεων. Το αρχικό φύλλο εργασίας (pre-test) αποτελείται από έξι ασκήσεις – δραστηριότητες (παράρτημα, σελ.85-86) μέσω των οποίων ο ερευνητής ήθελε να περιγράψουν οι μαθητές αναλυτικά τον τρόπο σκέψης που τους οδήγησε στην απάντησή τους.

Στις δύο πρώτες ασκήσεις δόθηκαν δύο τρίγωνα με γνωστές τις δύο γωνίες και την τρίτη γωνία άγνωστη και ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν την άγνωστη γωνία. Παράλληλα με το φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές και μοιρογνωμόνιο. Στόχος των συγκεκριμένων ασκήσεων ήταν να εξεταστεί ο τρόπος, με τον οποίο οι μαθητές θα υπολογίσουν την άγνωστη γωνία. Πιο συγκεκριμένα εξετάστηκε αν χρησιμοποιούν το μοιρογνωμόνιο και υπολογίζουν την άγνωστη γωνία με μέτρηση ή αν χρησιμοποιούν την ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου και την υπολογίζουν με αλγεβρικές πράξεις.

Η τρίτη και τέταρτη άσκηση είχε ως ζητούμενο τον υπολογισμό άγνωστης γωνίας σε σχήματα που αποτελούνται από τρίγωνα και παράλληλες ευθείες σε μια πλευρά των τριγώνων. Με τις ασκήσεις αυτές διερευνήθηκε αν οι μαθητές ακολουθούν λογικά βήματα, προκειμένου να υπολογίσουν την άγνωστη γωνία, αλλά εξετάστηκε και ο τρόπος καταγραφής των βημάτων της λύσης. Επίσης διερευνήθηκε αν οι μαθητές υπολογίζουν τη γωνία με χρήση του αιτήματος της παραλληλίας του Ευκλείδη ή με μέτρηση, χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο. Τέλος, εξετάστηκε πόσοι μαθητές βρίσκονται στο παράδειγμα GI ή στο GII.

Στην πέμπτη και έκτη άσκηση ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν τις γωνίες ενός τριγώνου, αξιοποιώντας μια σχέση που συνδέει τις τρεις γωνίες μεταξύ τους. Η εκφώνηση των ασκήσεων δεν περιείχε σχήμα. Για παράδειγμα, σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ δινόταν η γωνία Α 35°, η γωνία Β 23° μεγαλύτερη της Α και ζητιόταν η γωνία Γ. Σε άλλο τρίγωνο ΑΒΓ δινόταν η γωνία Α ως διπλάσια από τη γωνία Β και η γωνία Γ ως τριπλάσια από τη γωνία Β και ζητιόταν να υπολογιστούν και οι τρεις γωνίες του τριγώνου. Με τις συγκεκριμένες δραστηριότητες διερευνήθηκε αν οι μαθητές γνωρίζουν την ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου και αν μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν για τη λύση των ασκήσεων. Το σημαντικότερο που εξέτασαν οι συγκεκριμένες ασκήσεις ήταν ο τρόπος γραφής της λύσης και αν η λύση των μαθητών εμπεριείχε κάποια μορφή αποδεικτικού λόγου.

Οι έξι προηγούμενες δραστηριότητες αποτέλεσαν τον αρχικό έλεγχο της έρευνας. Μετά τη διδακτική παρέμβαση και τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης δόθηκε στους μαθητές το τελικό φύλλο εργασίας, το post-test (παράρτημα, σελ.87-88). Αυτό περιείχε τέσσερις ασκήσεις, δύο από τις οποίες είναι παρόμοιες με αυτές του αρχικού φύλλου εργασίας. Η λογική που διέπει το post-test είναι ίδια με αυτή του pre-test, καθώς οι μαθητές κλήθηκαν και εδώ να λύσουν ασκήσεις και να καταγράψουν με αναλυτικό τρόπο τα βήματα που τους οδήγησαν στην απάντηση. Απώτερος στόχος ήταν να διερευνηθεί αν μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές βελτίωσαν τον αποδεικτικό τους λόγο ή ακόμα και αν εμφάνισαν αποδεικτικό λόγο σε περίπτωση που δεν είχαν. Επίσης εξετάστηκε αν υπήρξε μετάβαση από την πρακτική γεωμετρία Geometry I στη θεωρητική γεωμετρία Geometry II.

Στην πρώτη δραστηριότητα ζητήθηκε η απόδειξη ενός πορίσματος που έπεται του θεωρήματος του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου. Σκοπός ήταν να διερευνηθεί αν οι μαθητές κατανόησαν την έννοια της γεωμετρικής απόδειξης μετά τη διδακτική παρέμβαση. Εξετάστηκε επίσης αν οι μαθητές αναπτύσσουν αποδεικτικό λόγο και αν επιτεύχθηκε η μετάβαση από τη GI στη GII. Τέλος, αναλύθηκαν οι διαδρομές των λύσεων ανάμεσα στα στοιχεία και τα επίπεδα του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας.

Η δεύτερη άσκηση είναι παρόμοια με τις δύο πρώτες δραστηριότητες του pre-test, αλλά με μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας. Δόθηκε στους μαθητές ένα τρίγωνο με άγνωστη γωνία και ζητήθηκε η εύρεσή της, καθώς και η καταγραφή της λύσης. Στόχος ήταν να εξεταστεί με ποιον τρόπο βρίσκουν την άγνωστη γωνία οι μαθητές που είχαν χρησιμοποιήσει μοιρογνωμόνιο στο pre-test, αν εξακολουθούν να βρίσκουν τη γωνία με μέτρηση ή αν τη βρίσκουν πλέον με χρήση της ιδιότητας του αθροίσματος. Επίσης, μελετήθηκε ο τρόπος γραφής και ο λόγος που χρησιμοποιούν.

Η τρίτη άσκηση είναι παρόμοια με τις δύο τελευταίες ασκήσεις του pre-test. Δόθηκε μια σχέση που συνδέει τις γωνίες ενός τριγώνου και ζητήθηκε να τις υπολογίσουν. Επίσης προστέθηκε ένα ερώτημα, σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές πρέπει να σχεδιάσουν οι ίδιοι το σχήμα που περιγράφεται και στη συνέχεια να υπολογίσουν μία γωνία που ζητείται. Στόχος της δραστηριότητας ήταν να διερευνηθεί πόσοι μαθητές λύνουν την άσκηση σε σχέση με τις παρόμοιες ασκήσεις του αρχικού ελέγχου. Εξετάστηκε κι εδώ η ύπαρξη αποδεικτικού λόγου.

Τέλος, η τέταρτη άσκηση ήταν μια καθαρά θεωρητική άσκηση. Δόθηκε ένα σχήμα και ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι ένα τρίγωνο που εμφανίζεται μέσα στο σχήμα είναι ορθογώνιο. Στόχος ήταν να διερευνηθεί αν οι μαθητές κατανόησαν τις προτάσεις και τις αποδείξεις που αναπτύχθηκαν στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, καθώς αυτές χρησιμοποιούνται στη λύση της άσκησης. Επίσης, εξετάστηκαν αναλυτικά οι διαδρομές που κάνουν οι μαθητές μέσα στα επίπεδα του MWS.

Από το pre-test , το post-test και την ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης προέκυψαν πλούσια και ενδιαφέροντα ευρήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία. Τα ευρήματα αυτά θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Με βάση τη φύση της έρευνας, αλλά και το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχτηκε η έρευνα, η ανάλυση των αποτελεσμάτων θα γίνει σε τρία στάδια. Αρχικά θα αναλυθούν ποσοτικά και ποιοτικά οι απαντήσεις των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου χωριστά τόσο για το pre-test όσο και για το post-test. Στη συνέχεια θα αναλυθεί ο Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας των μαθητών των δύο τάξεων χωριστά. Τέλος, θα γίνει συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων για τα ποσοτικά αποτελέσματα, αλλά και τα αποτελέσματα των ΓΧΕ.

3.1 ΓΥΜΝΑΣΙΟ

3.1.1ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ PRE-TEST

Στην πρώτη ερώτηση (υπολογισμός άγνωστης γωνίας σε τρίγωνο, παράρτημα σελ.85) το 68% των μαθητών, δηλαδή 15 μαθητές υπολόγισαν την άγνωστη γωνία, αξιοποιώντας την προϋπάρχουσα γνώση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180˚. Οι μαθητές δηλαδή θυμήθηκαν και θεώρησαν γνωστή την πρόταση που διδάχτηκαν στην Α΄ Γυμνασίου και υπολόγισαν αλγεβρικά την τρίτη γωνία. Συγκεκριμένα, πρόσθεσαν τις δύο γνωστές γωνίες και στη συνέχεια αφαίρεσαν το άθροισμά τους από το 180. Οι συγκεκριμένοι μαθητές κινήθηκαν στο επίπεδο [Sem-Dis], αφού βασίστηκαν στη σχηματική και τη λεκτική γένεση. Το 10% των μαθητών βρήκε την άγνωστη γωνία, μετρώντας την με το μοιρογνωμόνιο, που δόθηκε μαζί με το φύλλο εργασίας. Από τους 22 μαθητές δηλαδή μόνο 2 χρησιμοποίησαν το γεωμετρικό όργανο, προκειμένου να υπολογίσουν τη γωνία άμεσα και να αποφύγουν τις αλγεβρικές πράξεις, όπως χαρακτηριστικά ανέφεραν. Οι συγκεκριμένοι μαθητές εργάστηκαν στο παράδειγμα GI και έφτασαν στο αποτέλεσμα μέσω της εργαλειακής γένεσης. Τέλος, 5 μαθητές από το σύνολο (22%) δεν απάντησαν στην ερώτηση, αφού δεν ήξεραν να χρησιμοποιήσουν το μοιρογνωμόνιο και δεν γνώριζαν την ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, συνεπώς δε μπορούσαν να εφαρμόσουν καμία στρατηγική.

Στη δεύτερη ερώτηση (υπολογισμός άγνωστης γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο, παράρτημα σελ.85) τα ποσοστά των απαντήσεων είναι ίδια με αυτά της πρώτης, αφού οι ερωτήσεις είναι παρόμοιες, αλλά διαφέρουν στο σκοπό, να υπολογίσουν δηλαδή την άγνωστη γωνία χρησιμοποιώντας το άθροισμα των οξειών γωνιών ίσο με 90˚. Συγκεκριμένα, 15 από τους 22 μαθητές υπολόγισαν την άγνωστη γωνία, θεωρώντας το συνολικό άθροισμα των γωνιών 180˚. Οι δύο ίδιοι μαθητές που χρησιμοποίησαν το μοιρογνωμόνιο στην πρώτη ερώτηση το χρησιμοποίησαν και σ' αυτήν την ερώτηση και μέτρησαν σωστά. Πάλι οι ίδιοι 5 μαθητές που δεν έδωσαν απάντηση στην πρώτη ερώτηση δεν απάντησαν και σ' αυτήν. Εδώ αξίζει να τονιστεί ότι κανένας μαθητής από τους 22 δεν χρησιμοποίησε συμπληρωματικές γωνίες και άθροισμα 90˚, για να υπολογίσει την άγνωστη γωνία. Κανένας μαθητής δηλαδή δεν παρατήρησε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ότι οι δύο οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές. Οι απαντήσεις των μαθητών κινήθηκαν στα ίδια αντίστοιχα επίπεδα του ΓΧΕ με αυτά της προηγούμενης ερώτησης.

Στην τρίτη ερώτηση (υπολογισμός άγνωστων γωνιών με χρήση της παραλληλίας, παράρτημα σελ.85), στην οποία οι μαθητές χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουν την παραλληλία και τα πορίσματά της, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων μειώθηκε σημαντικά. Σωστά απάντησαν μόνο 9 από τους 22 μαθητές (41%) κι από αυτούς τους 9 μαθητές οι 7 βρήκαν τις άγνωστες γωνίες, εξισώνοντάς τες με τις εντός εναλλάξ τους. Οι άλλοι δύο μαθητές βρήκαν τη μία γωνία από την εντός εναλλάξ και την άλλη τη θεώρησαν παραπληρωματική του αθροίσματος των δύο άλλων γωνιών. Η γεωμετρική εργασία εκτελέστηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] με την είσοδο στο ΓΧΕ να πραγματοποιείται μέσω της σχηματικής γένεσης. Το 23% των μαθητών θεώρησαν ίσες τις δύο άγνωστες γωνίες και, αφού έκαναν αφαίρεση τη γωνία των 60˚ από τις 180˚ της ευθείας γωνίας, διαίρεσαν με 2 και βρήκαν ότι η καθεμία είναι 60˚. Τέλος, το 36% δεν μπόρεσε να απαντήσει με κανέναν τρόπο, ούτε θεωρητικά με την εφαρμογή γνωστών μαθηματικών προτάσεων ούτε πρακτικά με μέτρηση των άγνωστων γωνιών με το μοιρογνωμόνιο.

Στην τέταρτη ερώτηση (υπολογισμός άγνωστων γωνιών με χρήση της παραλληλίας, παράρτημα σελ.85) απάντησαν σωστά μόνο 7 από τους 22 μαθητές. Συγκεκριμένα, ένας μαθητής μέτρησε τις ζητούμενες γωνίες με μοιρογνωμόνιο και τις βρήκε σωστά με σφάλμα μέτρησης μίας μοίρας. Βρήκε την άγνωστη γωνία εργαζόμενος στα πλαίσια της GI. Ενώ οι υπόλοιποι 6 μαθητές εργαζόμενοι στα πλαίσια της GII υπολόγισαν τη γωνία ω ως εντός εναλλάξ της γωνίας Α και τη γωνία φ από το συνολικό άθροισμα της ευθείας γωνίας με την εργασία τους να κινείται στο επίπεδο [Sem-Dis]. Από το σύνολο των μαθητών οι μισοί δεν έδωσαν καμία απάντηση, ενώ 4 μαθητές έδωσαν λάθος απάντηση εξαιτίας της λανθασμένης αντιστοίχισης των εντός εναλλάξ γωνιών. Σε αυτό το σημείο πρέπει επίσης να τονιστεί ότι κανένας μαθητής δεν παρατήρησε ότι η γωνία φ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά με τη γωνία Β, μια ιδιότητα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και οι μαθητές τη διδάσκονται στην Α΄ Γυμνασίου.

Στην πέμπτη ερώτηση (παράρτημα, σελ.86) - στην οποία δόθηκε η γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ ίση με 35˚, ενώ η Β μεγαλύτερη της Α κατά 23˚ και ζητήθηκε να βρεθεί η γωνία Γ - το 64% των μαθητών απάντησε σωστά. Συγκεκριμένα, 14 μαθητές βρήκαν τη γωνία Β με πρόσθεση και, αφού πρόσθεσαν τη γωνία Α και Β, αφαίρεσαν από το 180 το προηγούμενο άθροισμα και έτσι υπολόγισαν τη γωνία Γ. Η κίνηση στο ΓΧΕ ήταν μονοδιάστατη, φτάνοντας στο αποτέλεσμα μέσω της λεκτικής γένεσης.

Ωστόσο ένας μαθητής από αυτούς που απάντησαν σωστά υπολόγισε τη γωνία εντελώς πρακτικά. Βρήκε τη γωνία Β με πρόσθεση ίση με 58˚ και στη συνέχεια σχεδίασε με τη χρήση του μοιρογνωμονίου και του χάρακα ένα τρίγωνο με γωνία Α ίση με 35˚ και γωνία Β 58˚, οπότε στη συνέχεια μέτρησε τη γωνία Γ, που ήταν η μόνη άγνωστη στο σχήμα. Ο μαθητής εργάστηκε αποκλειστικά στο παράδειγμα GI και η κίνηση του ήταν στον άξονα της εργαλειακής γένεσης. Αξιοσημείωτο είναι ότι ο συγκεκριμένος μαθητής απάντησε και τις προηγούμενες ερωτήσεις, μετρώντας τις γωνίες με χρήση μοιρογνωμονίου. Λανθασμένη απάντηση έδωσε το 14% των μαθητών, θεωρώντας τη γωνία Β ίση με 23˚, οπότε στη συνέχεια υπολόγισε λάθος τη γωνία Γ, αλλά χρησιμοποίησε σωστά το άθροισμα των γωνιών ίσο με 180˚. Τέλος το 23% των μαθητών απάντησε ότι δεν ξέρει πώς να λύσει την άσκηση.

Στην έκτη και τελευταία ερώτηση (δόθηκε μία σχέση μεγέθους που συνδέει τις γωνίες Α και Γ με τη Β, παράρτημα, σελ.85) απάντησαν σωστά μόνο 7 μαθητές. Αυτοί θεώρησαν χ τη γωνία Β, οπότε η γωνία Α είναι ίση με 2χ και η γωνία Γ ίση με 3χ. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών ίσο με 180˚, έλυσαν την εξίσωση που προέκυψε και βρήκαν το χ. Άλλοι 3 μαθητές έδωσαν σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση και σημείωσαν ότι το υπολόγισαν με το μυαλό, αλλά δεν ήξεραν πώς να γράψουν τη λύση. Ένας πιθανός τρόπος επίλυσης που χρησιμοποίησαν ήταν με ιδιότητες αναλογιών τον οποίο εξέφρασαν προφορικά στην ερώτηση πως το σκέφτηκες. Τέλος, 12 μαθητές από τους 22 δεν μπόρεσαν να απαντήσουν καθόλου.

Τα παραπάνω αποτελέσματα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές του Γυμνασίου στο pre-test παρουσιάζονται και στον ακόλουθο πίνακα.

	Σωστή απάντηση		Λάθος απάντηση	
Άσκηση	Συχνότητα	Ποσοστό	Συχνότητα	Ποσοστό
Α1	17	77%	5	23%
Α2	17	77%	5	23%
Α3	9	41%	13	59%
Α4	7	32%	15	68%
Α5	14	64%	8	36%
Α6	7	32%	15	68%

Πίνακας 1 : Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις pre-test Γυμνασίου

Όσον αφορά τους ΓΧΕ των μαθητών, οι μαθητές υπολόγισαν τις άγνωστες γωνίες που ζητήθηκαν σε κάθε άσκηση με τρόπους προερχόμενους από τη GII, καθώς οι περισσότεροι δεν χρησιμοποίησαν μοιρογνωμόνιο. Αντίθετα χρησιμοποίησαν ιδιότητες που υπήρχαν στο θεωρητικό τους σύστημα αναφοράς. Κινήθηκαν στο επίπεδο [Sem-Dis] με την είσοδο να γίνεται μέσω του άξονα της σχηματικής γένεσης, αλλά προσανατολισμένο στη λεκτική γένεση.

3.1.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ POST-TEST

Στην πρώτη ερώτηση (παράρτημα, σελ.87) ζητήθηκε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι, αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη γωνία ίση. Η ερώτηση αυτή είναι καθαρά θεωρητική και απαιτεί αποδεικτικό λόγο, κάτι το οποίο οι μαθητές του Γυμνασίου διδάχτηκαν για πρώτη φορά στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας. Έτσι, κατάφεραν να απαντήσουν σωστά και να παρουσιάσουν μια πλήρη απόδειξη 8 μαθητές από τους 22 (36%). Οι συγκεκριμένοι μαθητές προσπάθησαν να παρουσιάσουν απόδειξη, όπως το διδάχτηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Έκαναν σχήμα, σχεδίασαν δύο διαφορετικά τρίγωνα, ονόμασαν με διαφορετικά γράμματα τις κορυφές των τριγώνων και, χρησιμοποιώντας τη βασική πρόταση του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου, κατέληξαν στο ζητούμενο. Ο ΓΧΕ της απόδειξης ξεκίνησε μέσω του άξονα της εργαλειακής γένεσης με το γεωμετρικό έργο αρχικά να αναπτύσσεται στο επίπεδο [Sem-Ins] και στη συνέχεια να μεταφέρεται στο επίπεδο [Sem-Dis] προσανατολισμένο προς τη λεκτική γένεση. Δύο μαθητές από αυτούς που απάντησαν σωστά απέδειξαν το ζητούμενο με λόγια. Έγραψαν δηλαδή ότι, αφού έχουν δύο ίσες γωνίες και όλες μαζί είναι 180˚, τότε και για την τρίτη γωνία θα περισσεύουν ίσες μοίρες. Το έργο των συγκεκριμένων μαθητών αν και σωστό δεν μπορεί να θεωρηθεί πλήρες, αφού η γεωμετρική εργασία είναι μονοδιάστατη και η απόδειξη προήρθε απευθείας με λεκτική γένεση από το θεωρητικό σύστημα αναφοράς. Από τους υπόλοιπους 14 που απέτυχαν στην απάντηση 7 μαθητές έκαναν το ίδιο και σημαντικό λάθος. Δεν κατάλαβαν την εκφώνηση, δεν έδωσαν βάση στη φράση "μία προς μία" και θεώρησαν ότι οι δυο γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Με αυτόν το συλλογισμό συμπέραναν ότι όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, άρα η καθεμία 60˚. Τέλος, εφτά μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν καμία απάντηση και σχεδίασαν μόνο ένα τρίγωνο ή δύο τρίγωνα.

Στη δεύτερη άσκηση (παράρτημα, σελ.87) ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν μία άγνωστη γωνία ενός τριγώνου, όμως, προκειμένου να υπολογιστεί η συγκεκριμένη γωνία, έπρεπε να υπολογιστούν άλλες γωνίες του τριγώνου και να καταγραφούν με σειρά τα βήματα. Τελικά κατάφεραν να υπολογίσουν την άγνωστη γωνία 14 μαθητές, δηλαδή το 64% , το οποίο είναι ένα ικανοποιητικό ποσοστό. Όμως από αυτούς τους 14 μόνο οι 6 έγραψαν αναλυτικά τα βήματα που ακολούθησαν με σειρά, οι υπόλοιποι 8 έλυσαν την άσκηση πάνω στο σχήμα και απλά έγραψαν τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις που τους οδήγησαν στο αποτέλεσμα. Η εργασία τοποθετείται στο επίπεδο [Sem-Dis] με την είσοδο να γίνεται από τον άξονα της σχηματικής γένεσης. Το 18% των μαθητών (4 μαθητές) δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει την άσκηση. Οι μαθητές αυτοί βρήκαν μόνο μία γωνία και τη σημείωσαν απευθείας στο σχήμα, χωρίς να γράφουν τι έκαναν για να την υπολογίσουν. Το πιο πιθανό είναι να μην πρόλαβαν, όπως και σημείωσαν, γιατί άφησαν την άσκηση για το τέλος, καθώς τους φάνηκε πιο εύκολη από τις υπόλοιπες. Υπήρξαν και 4 μαθητές που δεν μπόρεσαν να απαντήσουν καθόλου.

Η τρίτη άσκηση (παράρτημα, σελ.88) περιείχε δύο ερωτήματα. Το πρώτο ερώτημα, το οποίο ζητούσε να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ με δεδομένη μια σχέση που τις συνδέει, απαντήθηκε σωστά από 10 μαθητές (45%). Οι μαθητές αυτοί έθεσαν ως χ τη γωνία Γ και χ+20 τη γωνία Β, οπότε, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, έγραψαν μία εξίσωση, την έλυσαν και βρήκαν σωστά τις ζητούμενες γωνίες. Στη συνέχεια το ερώτημα β ζητούσε να υπολογιστούν οι γωνίες ενός τριγώνου που σχηματιζόταν από την τομή του ύψους ΑΔ και της διχοτόμου ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ. Από τους 10 μαθητές που απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα, οι 2 δεν μπόρεσαν να ολοκληρώσουν την άσκηση. Οι υπόλοιποι 8 έκαναν σωστά το σχήμα και, καταγράφοντας τα βήματα τους, έλυσαν σωστά και αυτό το ερώτημα. Λανθασμένη υπόθεση έκαναν 9 μαθητές από τους 22. Συγκεκριμένα υπέθεσαν ότι η γωνία Β είναι 20˚ μεγαλύτερη από τη γωνία Α, οπότε τη βρήκαν ίση με 80˚ και στη συνέχεια με σωστό συλλογισμό υπολόγισαν τη γωνία Γ. Το β ερώτημα το συνέχισαν μόνο 4 μαθητές από αυτούς. Μάλιστα 2 μαθητές, κάνοντας επαλήθευση, αντιλήφθηκαν το λάθος που έκαναν στο α ερώτημα και άλλαξαν τα γράμματα στις απαντήσεις τους. Με αυτήν την αλλαγή όμως έλυσαν σωστά το β ερώτημα. Τέλος 3 μαθητές δεν κατάφεραν να κάνουν την άσκηση. Η κατασκευή της συγκεκριμένης άσκησης έγινε με σκοπό η λύση της να αναπτύσσεται και στα τρία κατακόρυφα επίπεδα του ΓΧΕ. Από την ανάλυση των απαντήσεων προέκυψε ότι στο πρώτο ερώτημα οι μαθητές συνέδεσαν τα δύο οριζόντια επίπεδα μέσω της λεκτικής γένεσης.

Στο δεύτερο ερώτημα η είσοδος έγινε μέσω της εργαλειακής γένεσης και οι μαθητές αρχικά εργάστηκαν στο επίπεδο [Sem-Ins] και στη συνέχεια μετέβηκαν στο επίπεδο [Sem-Dis], ώστε να καταλήξουν στην απόδειξη του ζητούμενου μέσω της λεκτικής γένεσης.

Η τέταρτη και τελευταία άσκηση (παράρτημα, σελ.88) ζητούσε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι ένα τρίγωνο που προκύπτει στο σχήμα είναι ορθογώνιο. Ήταν πιο σύνθετη άσκηση, που η λύση της δεν καθοδηγούνταν από τα δεδομένα, αλλά έπρεπε οι μαθητές να τα αξιοποιήσουν κατάλληλα και να αποδείξουν το ζητούμενο. Ωστόσο κατάφεραν να την κάνουν 12 μαθητές από τους 22 (56%). Δυο μαθητές από αυτούς την έλυσαν πάνω στο σχήμα χωρίς καμία επεξήγηση, ενώ οι υπόλοιποι 10 ανέπτυξαν πλήρως τη σκέψη τους χρησιμοποιώντας αποδεικτικό λόγο. Χρησιμοποίησαν εκφράσεις, όπως "από αυτό συμπεραίνουμε ότι …" ή συνέδεαν τα βήματα τους με τις λέξεις "άρα" και "οπότε". Το γεωμετρικό έργο αναπτύχθηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] του ΓΧΕ με σαφή ανάπτυξη αποδεικτικού λόγου. Όμως 10 μαθητές δεν κατάφεραν να αποδείξουν το ζητούμενο. Επεξεργάστηκαν το σχήμα, σημειώνοντας πάνω του, αλλά δεν έγραψαν κάτι που να οδηγεί στη λύση της άσκησης. Έτσι, το 44% των μαθητών δεν έκανε την απόδειξη που ζητήθηκε.

Τα παραπάνω αποτελέσματα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές του Γυμνασίου στο post-test παρουσιάζονται και στον ακόλουθο πίνακα.

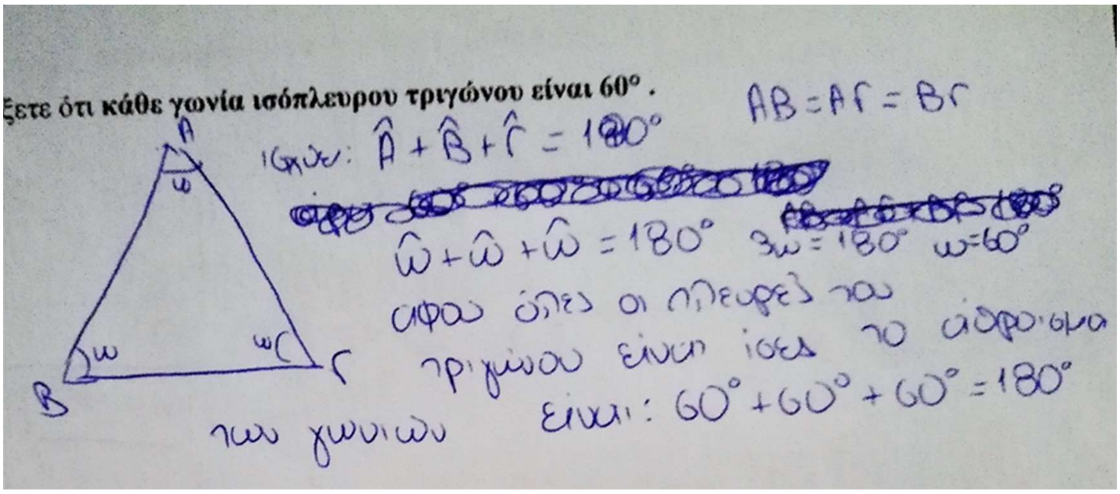
	Σωστή απάντηση		Λάθος απάντηση	
Άσκηση	Συχνότητα	Ποσοστό	Συχνότητα	Ποσοστό
A1	8	36%	14	64%
A2	14	64%	8	36%
A3	10	45%	12	55%
A4	12	55%	10	45%

Πίνακας 2 **:** Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις post-test Γυμνασίου

Από τη συγκριτική μελέτη των σωστών απαντήσεων του pre-test και του post-test στις ασκήσεις που απαιτούσαν παρόμοια μεθοδολογία στη λύση τους φάνηκε ότι για τους μαθητές του Γυμνασίου δεν υπάρχει αξιοσημείωτη μεταβολή. Το κυριότερο όμως είναι ότι 8 μαθητές κατάφεραν να γράψουν μια πλήρη απόδειξη ενός πορίσματος. Αυτοί οι μαθητές εργάστηκαν καθαρά σε θεωρητικό επίπεδο και ίσως είναι η πρώτη απόδειξη που έκαναν μόνοι τους στη μαθητική τους πορεία. Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι στο post-test κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε μοιρογνωμόνιο και όλοι έλυσαν τις ασκήσεις χρησιμοποιώντας προτάσεις που γνώριζαν ή διδάχτηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Επομένως, όλοι οι μαθητές μετέβηκαν στο παράδειγμα GII. Εμπλουτίστηκε το θεωρητικό σύστημα αναφοράς και η γεωμετρική εργασία αναπτύχθηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] για όλες τις δραστηριότητες που τους δόθηκαν στο post-test. Ακόμα και οι μαθητές που έδωσαν λάθος απαντήσεις φάνηκε ότι προσπάθησαν να κινηθούν στο ίδιο επίπεδο.

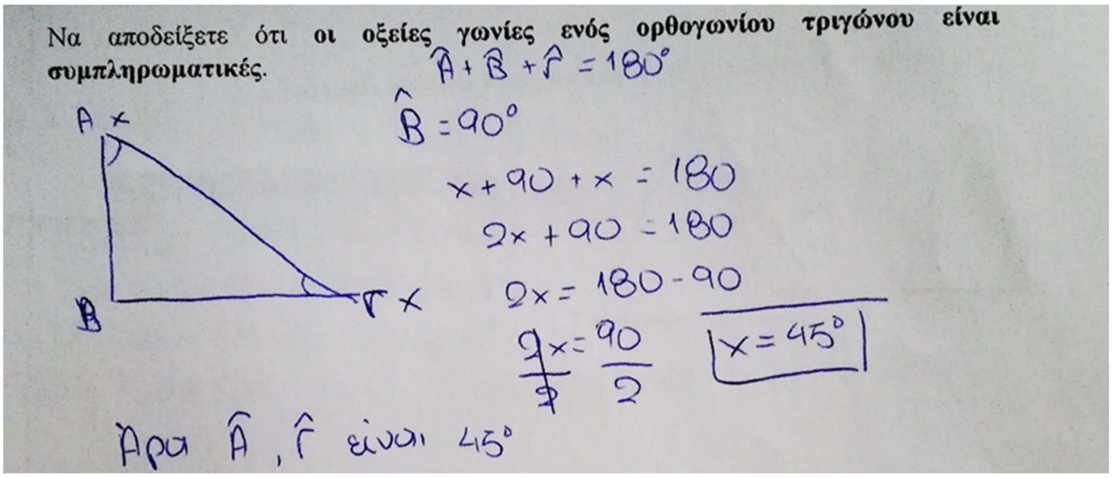
Παρακάτω αναλύονται και παρουσιάζονται εικονικά οι απαντήσεις δύο μαθητών Γυμνασίου ως προς την απόδειξη δύο συναφών πορισμάτων. Η απόδειξη του ενός πορίσματος ζητήθηκε στην αρχή της διδακτικής παρέμβασης, όταν οι μαθητές έκαναν την πρώτη προσπάθεια να γράψουν μόνοι τους την απόδειξη μιας πρότασης. Η δεύτερη απόδειξη ζητήθηκε στο post-test και ήταν μία από τις ασκήσεις που εξέτασε την κατάκτηση της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης και την πιθανή βελτίωσή τους ως προς τον αποδεικτικό λόγο που διατύπωσαν γραπτά. Η πρώτη περίπτωση αφορά την προσπάθεια μιας μαθήτριας και η δεύτερη ενός μαθητή.

Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στην εικόνα 9, ζητήθηκε να αποδειχτεί ότι κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με 60˚, η μαθήτρια σχεδίασε σωστά ένα ισόπλευρο τρίγωνο και σημείωσε όλες τις γωνίες ίσες. Ωστόσο η απόδειξη που παρουσίασε δεν είχε συνοχή, με αποτέλεσμα να μην καταλήγει με σωστά βήματα στο ζητούμενο.



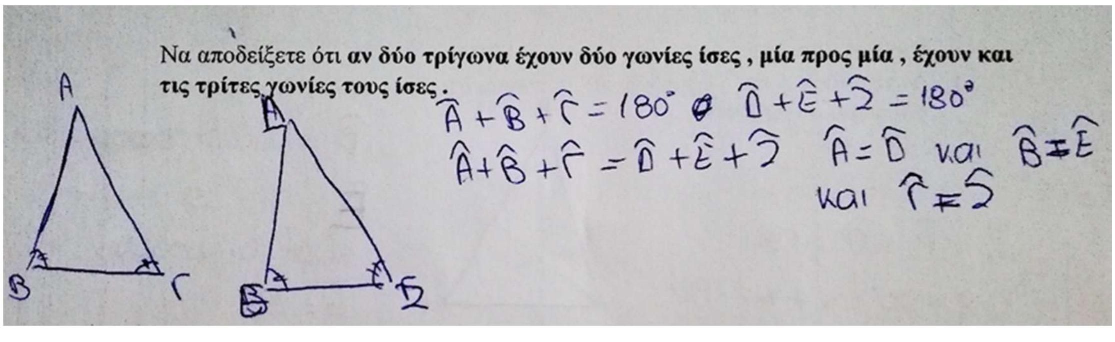
Εικόνα 9 : Απόδειξη μαθήτριας Γυμνασίου

Αντίστοιχα, στην εικόνα 10 φαίνεται η προσπάθεια της ίδιας μαθήτριας να αποδείξει ότι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου είναι συμπληρωματικές. Εδώ η μαθήτρια, ενώ ξεκίνησε σωστά την απόδειξη σχεδιάζοντας ορθογώνιο τρίγωνο και χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου, στη συνέχεια θεώρησε ίσες τις οξείες γωνίες μεταξύ τους και κατέληξε σε λανθασμένη απάντηση.



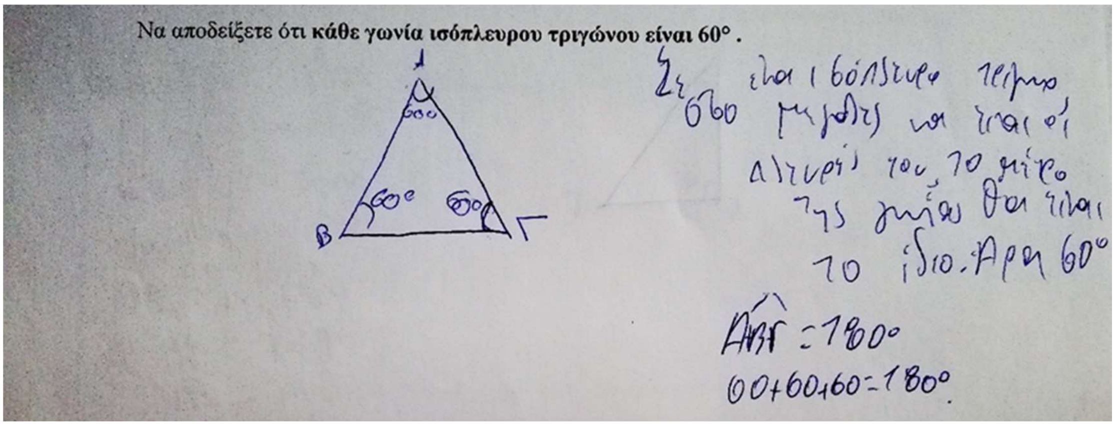
Εικόνα 10: Απόδειξη μαθήτριας Γυμνασίου

Αντίθετα στο post-test, όπως παρατηρείται και στην εικόνα 11, η μαθήτρια έδωσε σωστή και αρκετά καλά γραμμένη απόδειξη. Ειδικότερα, σχεδίασε σωστά δύο τρίγωνα, τα ονόμασε με διαφορετικά γράμματα, σημείωσε τις ίσες γωνίες και, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του αθροίσματος των γωνιών των τριγώνων, απέδειξε το ζητούμενο. Βέβαια στην απόδειξη που παρουσίασε δεν εξήγησε με λόγια τα βήματα της και χρησιμοποίησε μόνο σχέσεις. Θα λέγαμε δηλαδή ότι πρόκειται για μια αποδεικτική διαδικασία που αξιοποιεί μόνο συμβολική και όχι λεκτική αναπαράσταση, ωστόσο από τη σύγκριση των τριών αποδείξεων είναι εμφανής η εξέλιξη της μαθήτριας τόσο ως προς την ορθότητα της απάντησης όσο και ως προς τα αποδεικτικά βήματα.



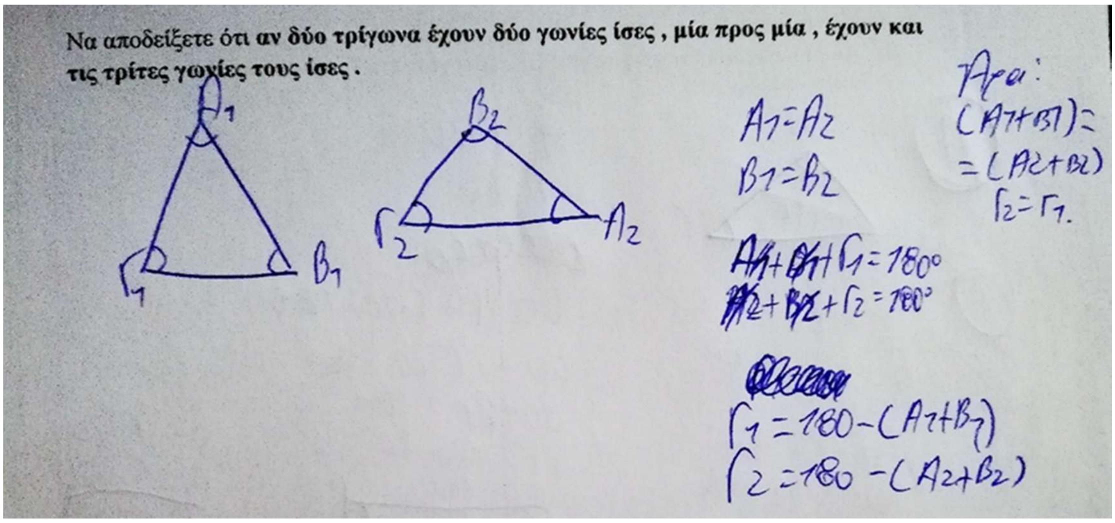
Εικόνα 11: Απόδειξη μαθήτριας Γυμνασίου

Αναφορικά με τη δεύτερη περίπτωση μαθητή Γυμνασίου, όπως φαίνεται και στην εικόνα 12, όταν ζητήθηκε να αποδειχτεί ότι κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60˚, ο μαθητής προσπάθησε να αποδείξει το ζητούμενο λεκτικά. Φάνηκε δηλαδή ότι ο μαθητής γνώριζε εξαρχής την πρόταση, αλλά δεν ήξερε πώς να καταγράψει την απόδειξή της με μαθηματικά σύμβολα και σχέσεις.



Εικόνα 12: Απόδειξη μαθητή Γυμνασίου

Στη δεύτερη εικόνα, (εικόνα 13) όπου παρουσιάζεται η απόδειξη που ζητήθηκε στο post-test, είναι εμφανής η εξέλιξη του μαθητή στη μαθηματική καταγραφή της απόδειξης, ο οποίος αυτή τη φορά σχεδίασε δύο όμοια τρίγωνα, σημείωσε τις ίσες γωνίες, έγραψε το άθροισμα των γωνιών και για τα δύο τρίγωνα ξεχωριστά και κατέληξε στο ζητούμενο.



Εικόνα 13: Απόδειξη μαθητή Γυμνασίου

3.2 ΛΥΚΕΙΟ

3.2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ PRE-TEST

Στην πρώτη ερώτηση (παράρτημα, σελ.85) απάντησαν σωστά 20 από τους 22 μαθητές, χρησιμοποιώντας στον υπολογισμό το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου. Μάλιστα οι 10 από αυτούς ανάφεραν και την πρόταση πριν προχωρήσουν στη λύση, γράφοντας στο χαρτί «Γνωρίζουμε ότι σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι ίσο με 180˚, οπότε …». Είναι φανερό ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές εμφάνισαν αποδεικτικό λόγο ακόμα και στη λύση μιας απλής άσκησης. Μόνο δύο μαθητές απάντησαν πως δεν ξέρουν να λύσουν την άσκηση και ούτε γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιήσουν το μοιρογνωμόνιο, ώστε να μετρήσουν την άγνωστη γωνία. Κανένας μαθητής δεν χρησιμοποίησε μοιρογνωμόνιο για τη λύση της άσκησης και γενικά, όπως θα δούμε και παρακάτω, οι μαθητές του Λυκείου δυσκολεύονται με τη χρήση του.

Στη δεύτερη ερώτηση (παράρτημα, σελ.85) και πάλι η συντριπτική πλειοψηφία υπολόγισε σωστά τη ζητούμενη γωνία, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών ίσο με 180˚. Συγκεκριμένα, 19 μαθητές ακολούθησαν την ίδια διαδικασία με την πρώτη άσκηση, ενώ μόνο ένας μαθητής παρατήρησε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές, οπότε υπολόγισε, λέγοντας ότι το άθροισμα είναι 90˚. Δύο μαθητές επίσης δεν μπόρεσαν με κανένα τρόπο να υπολογίσουν την άγνωστη γωνία . Και σε αυτήν τη δραστηριότητα κανένας μαθητής δεν επέλεξε τη μέτρηση με μοιρογνωμόνιο για τη λύση της.

Στην τρίτη ερώτηση (παράρτημα, σελ.85) 14 μαθητές απάντησαν σωστά και υπολόγισαν τις ζητούμενες γωνίες από τις εντός εναλλάξ τους. Μάλιστα 6 μαθητές από αυτούς προσδιόρισαν κάθε φορά τις παράλληλες και τις τέμνουσες. Έγραψαν δηλαδή ότι η γωνία ω είναι ίση με τη γωνία Β ως εντός εναλλάξ που σχηματίζονται από τις παράλληλες ευθείες χ΄χ και ΒΓ με τέμνουσα την ευθεία ΑΒ. Επίσης, άλλοι 2 μαθητές βρήκαν τη γωνία ω ως εντός εναλλάξ της Β και στη συνέχεια τη γωνία φ την υπολόγισαν από την ευθεία γωνία που σχηματίζουν οι γωνίες ω, φ και Α. Από τους υπόλοιπους μαθητές που δεν είχαν επιτυχία, τρεις μαθητές έκαναν λάθος αντιστοίχιση τις εντός εναλλάξ και τις χαρακτήρισαν ως κατά κορυφήν και τρεις δεν μπόρεσαν να απαντήσουν καθόλου.

Στην τέταρτη άσκηση (παράρτημα, σελ.85) 14 μαθητές βρήκαν τη γωνία ω σωστά ως εντός εναλλάξ της γωνίας Α και στη συνέχεια τη γωνία φ την υπολόγισαν με αφαίρεση από το 180. Και σε αυτήν την άσκηση οι ίδιοι 6 μαθητές προσδιόρισαν τις παράλληλες και την τέμνουσα που χρησιμοποίησαν, προκειμένου να βρουν τη γωνία ω. Μία μαθήτρια εξίσωσε τη γωνία φ με τη γωνία Β γράφοντας, ότι είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων Γχ και ΑΒ με τέμνουσα την ευθεία ΒΓ, αλλά στη συνέχεια με το άθροισμα των 180 που σχηματίζουν οι τρεις γωνίες υπολόγισε τη γωνία ω. Παρατηρείται ότι κανένας μαθητής δεν χρησιμοποιεί ταυτόχρονα και τις εντός εναλλάξ και τις εντός εκτός και επί τα αυτά. Επίσης, 4 μαθητές θεώρησαν ότι οι γωνίες ω και φ είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε τις βρήκαν 65˚ την καθεμία. Τέλος, τρεις μαθητές δεν απάντησαν καθόλου.

Η πέμπτη άσκηση (παράρτημα, σελ.86) δεν δυσκόλεψε τους μαθητές, αφού 17 μαθητές από τους 22 απάντησαν σωστά. Οι μαθητές αυτοί υπολόγισαν άμεσα τη γωνία Β, προσθέτοντας τις 35˚ με τις 23˚, και στη συνέχεια με το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου βρήκαν και τη γωνία Γ. Αξίζει να αναφερθεί ότι κανένας μαθητής δεν έκανε σχήμα και φαίνεται ότι όλοι αντιμετώπισαν την άσκηση εντελώς αλγεβρικά. Υπήρξαν και τρεις μαθητές που υπέθεσαν ότι η γωνία Β είναι 23˚, οπότε μπορεί στη συνέχεια να βρήκαν με σωστό τρόπο την γωνία Γ, αλλά έκαναν λάθος στο αποτέλεσμα. Και εδώ δύο μαθητές δεν μπόρεσαν να λύσουν την άσκηση.

Τέλος, στην έκτη άσκηση (παράρτημα, σελ.86) έδωσαν σωστή και πλήρη απάντηση 16 από τους 22 μαθητές. Αυτοί θεώρησαν άγνωστη τη γωνία Β, οπότε έγραψαν ότι η γωνία Α είναι ίση με 2Β και η γωνία Γ ίση με 3Β και εξίσωσαν το άθροισμα τους με 180˚. Και σε αυτή την άσκηση, όπως και στην προηγούμενη, δεν σχεδίασε τρίγωνο κανένας μαθητής, ενώ οι μαθητές που δεν έδωσαν καμία απάντηση αριθμούν τους 6.

Τα παραπάνω αποτελέσματα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές του Λυκείου στο pre-test παρουσιάζονται και στον ακόλουθο πίνακα.

Άσκηση	Σωστή απάντηση Συχνότητα	Ποσοστό	Λάθος απάντηση Συχνότητα	Ποσοστό
Α1	20	91%	2	9%
Α2	19	86%	3	14%
Α3	16	73%	6	27%
Α4	15	68%	7	32%
Α5	17	77%	5	23%
Α6	16	73%	6	27%

Πίνακας 3 **:** Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις pre-test Λυκείου

Από την παραπάνω ποιοτική και ποσοτική ανάλυση φάνηκε ότι οι μαθητές του Λυκείου εργάστηκαν αποκλειστικά στο παράδειγμα GII, αφού κανείς δεν χρησιμοποίησε μοιρογνωμόνιο και βασίστηκαν στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς. Ο ΓΧΕ σε όλες τις δραστηριότητες αναπτύχθηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] με προσανατολισμό στη λεκτική γένεση.

3.2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ POST-TEST

Η πρώτη άσκηση (παράρτημα, σελ.87) αποτελεί γνωστό και διδαγμένο πόρισμα για τους μαθητές του Λυκείου. Οι μαθητές έχουν διδαχτεί τη συγκεκριμένη πρόταση στην Α΄ Λυκείου. Επίσης, η αποδεικτική διαδικασία αποτελεί συνηθισμένη διαδικασία για αυτούς και τονίστηκε ξανά και στη διδακτική παρέμβαση. Αυτό είχε ως συνέπεια 14 μαθητές από τους 22 να γράψουν μια πλήρη απόδειξη (64%). Συγκεκριμένα σχεδίασαν δύο όμοια τρίγωνα, ονόμασαν το ένα ΑΒΓ και το άλλο Α΄Β΄Γ΄ και έγραψαν το άθροισμα των γωνιών τους ίσο με 180˚. Στη συνέχεια γράφοντας την έκφραση "τα δύο πρώτα μέλη ίσα, άρα και τα δεύτερα μέλη ίσα" και διαγράφοντας τις ίσες γωνίες κατέληξαν στην ισότητα των δύο γωνιών. Η απόδειξη των μαθητών ήταν πλήρως ανεπτυγμένη στα επίπεδα του ΓΧΕ με την είσοδο να γίνεται στον άξονα της εργαλειακής γένεσης και την εργασία να αναπτύσσεται στο επίπεδο [Ins-Sem], να μεταφέρεται στο επίπεδο [Sem-Dis] και να καταλήγει στη ζητούμενη απόδειξη μέσω της λεκτικής γένεσης. Μόνο δύο μαθητές παρουσίασαν λάθος απόδειξη, ο μεν πρώτος θεώρησε ίσες γωνίες στο ίδιο τρίγωνο και δεν μπορούσε να βγάλει συμπέρασμα, ο δε άλλος προσπάθησε να το αποδείξει με αριθμητικά παραδείγματα, δίνοντας συγκεκριμένες μοίρες σε κάθε γωνία, οπότε έβρισκε ίση την τρίτη γωνία με αυτόν τον τρόπο. Αν και, όπως προαναφέρθηκε παραπάνω, οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία, υπήρξαν και 6 μαθητές που δεν μπόρεσαν να αποδείξουν το ζητούμενο.

Η δεύτερη άσκηση (παράρτημα, σελ.87), όπως φάνηκε, δεν δυσκόλεψε τους μαθητές του Λυκείου. Κατάφεραν να υπολογίσουν την άγνωστη γωνία 21 από του 22 μαθητές. Από αυτούς μόνο οι 5 σημείωσαν τη λύση πάνω στο σχήμα, χωρίς να γράψουν τον τρόπο που σκέφτηκαν, απλά γράφοντας κάθετες προσθέσεις και αφαιρέσεις. Οι υπόλοιποι 16 μαθητές (73%) παρουσίασαν μια πλήρη και καλογραμμένη απάντηση. Έγραφαν κάθε φορά σε ποιο τρίγωνο εργάζονταν και ποια γωνία υπολόγιζαν, σημειώνοντας το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης που έκαναν απευθείας χωρίς να φαίνεται η πράξη. Οι μαθητές εργάστηκαν στο επίπεδο [Sem-Dis]. Υπήρξε και 1 μαθητής που δεν μπόρεσε να λύσει την άσκηση.

Η τρίτη άσκηση (παράρτημα, σελ.88) αντιμετωπίστηκε επιτυχώς, αφού την έλυσε το 90% των μαθητών. Συγκεκριμένα 20 μαθητές από τους 22 έλυσαν την άσκηση σωστά και μόνο 5 μαθητές δεν πρόλαβαν να τελειώσουν το β ερώτημα. Αναλυτικότερα, στο α ερώτημα και οι 20 μαθητές θεώρησαν σωστά ως άγνωστη γωνία τη γωνία Γ και τη γωνία Β την αντικατέστησαν με Γ+20 και δημιούργησαν εξίσωση με το άθροισμα των γωνιών ίσο με 180. Αφού έλυσαν σωστά το α ερώτημα, σχεδίασαν το σχήμα που περιγραφόταν στο β ερώτημα και, γράφοντας κάθε φορά τα βήματα τους αναλυτικά, υπολόγισαν τις άγνωστες γωνίες του τριγώνου ΑΕΚ. Οι μαθητές κινήθηκαν σωστά στα επίπεδα [Ins-Sem] και [Sem-Dis]. Δύο μαθητές έδωσαν λάθος λύση στο α ερώτημα και δεν συνέχισαν στο β ερώτημα. Ο ένας θεώρησε τη γωνία Β 20˚ μεγαλύτερη από τη γωνία Α αντί της γωνίας Γ, όπως έλεγε η εκφώνηση, και οδηγήθηκε σε λάθος αποτέλεσμα. Ο άλλος μαθητής έκανε συνδυασμούς γωνιών, προσπαθώντας να πετύχει τον συνδυασμό που επαληθεύει τα δεδομένα, οπότε έγραψε συνδυασμούς γωνιών, των οποίων το άθροισμα ήταν 180, αλλά δεν κατάφερε να βρει τον σωστό συνδυασμό και σταμάτησε. Σε δεύτερο χρόνο προσπάθησε να συνεχίσει την άσκηση, κάνοντας σχήμα και θεωρώντας έναν από τους συνδυασμούς που έγραψε ως σωστό.

Η τέταρτη άσκηση (παράρτημα, σελ88) αποδείχτηκε από 18 μαθητές. Και αυτήν την άσκηση την έλυσε το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών, συγκεκριμένα το 82%. Οι μαθητές έγραφαν κάθε φορά ποιο δεδομένο χρησιμοποιούσαν και με σωστή σειρά έδειξαν το ζητούμενο. Χρησιμοποίησαν τη διπλή συνεπαγωγή για να συνδέσουν τις ισότητες, τόνιζαν τα αποτελέσματα τους κάθε φορά, βάζοντας τα σε πλαίσιο, και, αφού έβρισκαν τη γωνία ΔΓΕ ίση με 90˚ έγραφαν το συμπέρασμα τους, δηλαδή έγραφαν "άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο". Μάλιστα δύο μαθητές στο τέλος της απόδειξης σημείωσαν ο.ε.δ., το οποίο αντιστοιχεί στη φράση "ὅπερ ἔδει δείξαι" που χρησιμοποιούσε ο Ευκλείδης στις αποδείξεις του και αναφέρθηκε κατά τη διδακτική παρέμβαση. Η γεωμετρική εργασία αναπτύχθηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] με είσοδο από τον άξονα της σχηματικής γένεσης και κατευθύνθηκε στην απόδειξη από το θεωρητικό σύστημα αναφοράς από τον άξονα της λεκτικής γένεσης. Μόνο ένας μαθητής έκανε λάθος υπολογισμούς και τους σημείωσε πάνω στο σχήμα χωρίς αιτιολόγηση, ενώ τρεις μαθητές δεν έλυσαν την άσκηση είτε γιατί δεν μπόρεσαν είτε γιατί δεν πρόλαβαν.

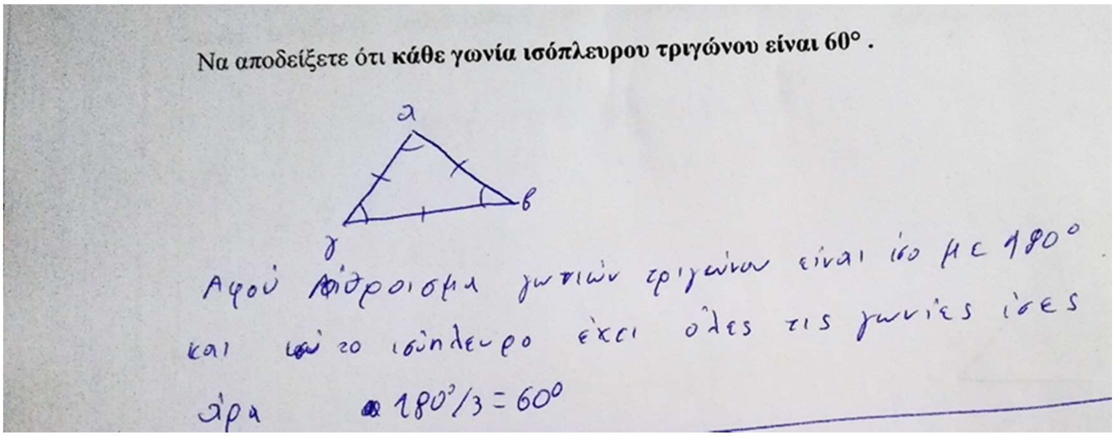
Τα παραπάνω αποτελέσματα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές του Λυκείου στο post-test παρουσιάζονται και στον ακόλουθο πίνακα.

	Σωστή απάντηση		Λάθος απάντηση	
Άσκηση	Συχνότητα	Ποσοστό	Συχνότητα	Ποσοστό
Α1	14	64%	8	36%
Α2	21	95%	1	5%
Α3	20	91%	2	9%
Α4	18	82%	4	18%

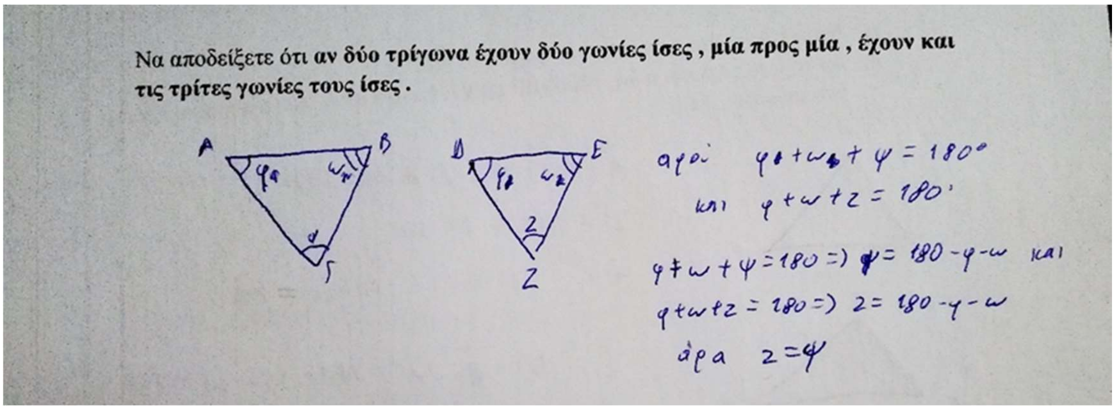
Πίνακας 4 **:** Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις post-test Λυκείου

Από τη συγκριτική μελέτη των σωστών απαντήσεων του pre-test και του post-test στις ασκήσεις που απαιτούσαν παρόμοια μεθοδολογία στη λύση τους φάνηκε ότι για τους μαθητές του Λυκείου, αντίθετα από τους μαθητές του Γυμνασίου, υπήρξε εμφανής και σημαντική βελτίωση. Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές έδωσαν πλήρη και καλογραμμένη απόδειξη της πρότασης που τους ζητήθηκε στο post-test, αλλά και σχεδόν όλοι έλυσαν τις υπόλοιπες ασκήσεις, ακολουθώντας τις οδηγίες και τις συμβουλές που δόθηκαν στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Χαρακτηριστικό είναι το 95% επιτυχίας στην άσκηση Α2 του post-test, που δείχνει ότι μόνο ένας μαθητής δεν ανέπτυξε αποδεικτικό λόγο μετά την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν υπογραμμίζουν την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στον προσωπικό ΓΧΕ των μαθητών σχετικά με τη διαδικασία της απόδειξης ή της ανάπτυξης αποδεικτικού λόγου όπου απαιτείται.

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζεται ενδεικτικά η εξέλιξη δύο μαθητών Λυκείου. Υπενθυμίζεται ότι στην αρχή της διδακτικής παρέμβασης ζητήθηκε η απόδειξη του πορίσματος για τις γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου. Έτσι, ο πρώτος μαθητής (εικόνα 14) απέδειξε την πρόταση λεκτικά, περιγράφοντας την απόδειξη, ενώ ο δεύτερος μαθητής (εικόνα 16) απέδειξε την πρόταση, χρησιμοποιώντας σχέσεις και χωρίς να εξηγεί τα βήματα του. Φαίνεται ότι στο pre-test οι απαντήσεις των μαθητών του Λυκείου παρουσιάζουν αναλογία με τις απαντήσεις των μαθητών του Γυμνασίου ως προς τον μερικό (ή λεκτικά ή συμβολικά) τρόπο της γραπτής διατύπωσης της απόδειξης.

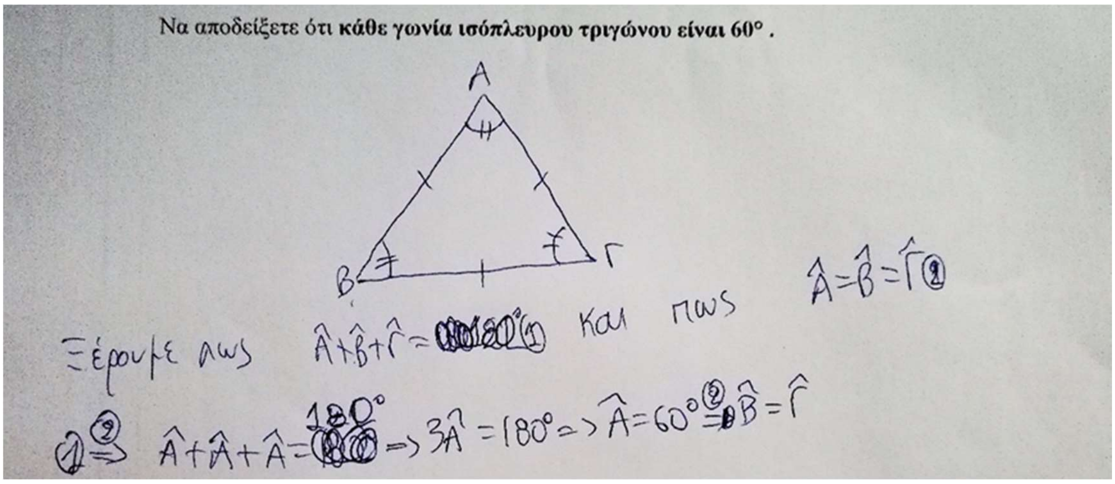


Εικόνα 14: Απόδειξη μαθητή Λυκείου

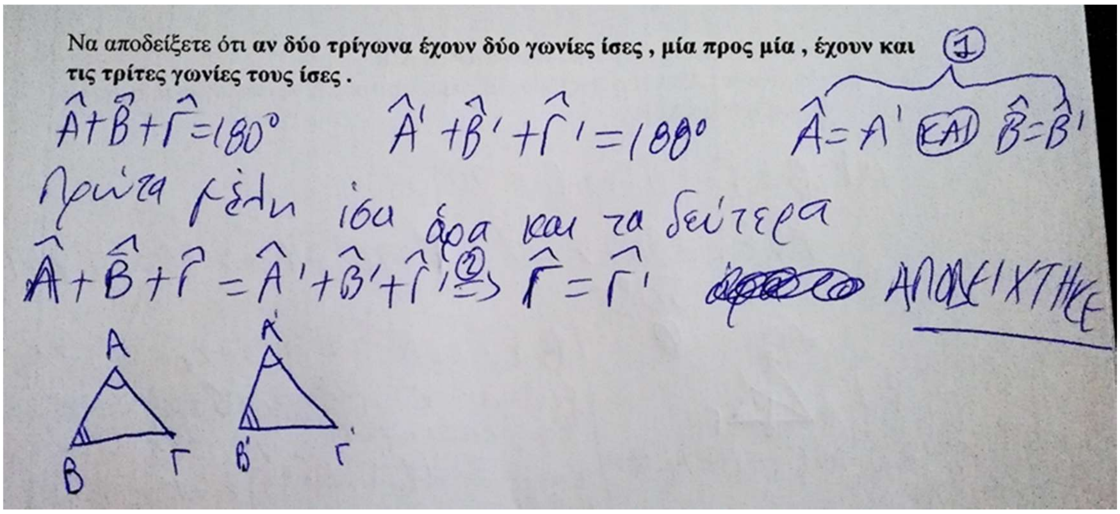


Εικόνα 15: Απόδειξη μαθητή Λυκείου

Ωστόσο και οι δύο μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση παρουσίασαν καλύτερη και πιο ολοκληρωμένη απόδειξη στο post-test, όπως φαίνεται από τις εικόνες 15 και 17 αντίστοιχα.



Εικόνα 16: Απόδειξη μαθητή Λυκείου



Εικόνα 17: Απόδειξη μαθητή Λυκείου

3.3 Συγκριτική αποτίμηση Γυμνασίου-Λυκείου

Συγκεντρώνοντας τις σωστές απαντήσεις των μαθητών και του Γυμνασίου και του Λυκείου σε έναν πίνακα τόσο για το pre-test όσο και για το post-test διαπιστώνεται η διαφορά των δύο τάξεων και οι καλύτερες επιδόσεις των μαθητών του Λυκείου. Έτσι, στο pre-test τα ποσοστά των επιτυχημένων απαντήσεων για τους μαθητές του Γυμνασίου ξεκινούν από το 32% και φτάνουν στο 77%, ενώ για τους μαθητές του Λυκείου από το 68% έως το 91%. Αντίστοιχα στο post-test το ίδιο εύρος κυμαίνεται από 36% έως 64% για το Γυμνάσιο, ενώ από 64% έως το 95% για το Λύκειο. Σημειώνεται επίσης ότι στο pre-test το υψηλότερο ποσοστό σημειώνεται στις δύο πρώτες ασκήσεις και για τις δύο τάξεις, ενώ στο post-test οι μαθητές του Γυμνασίου πέτυχαν μεγαλύτερα ποσοστά στις ασκήσεις Α2 και Α4, ενώ οι μαθητές του Λυκείου στις ασκήσεις Α2 και Α3.

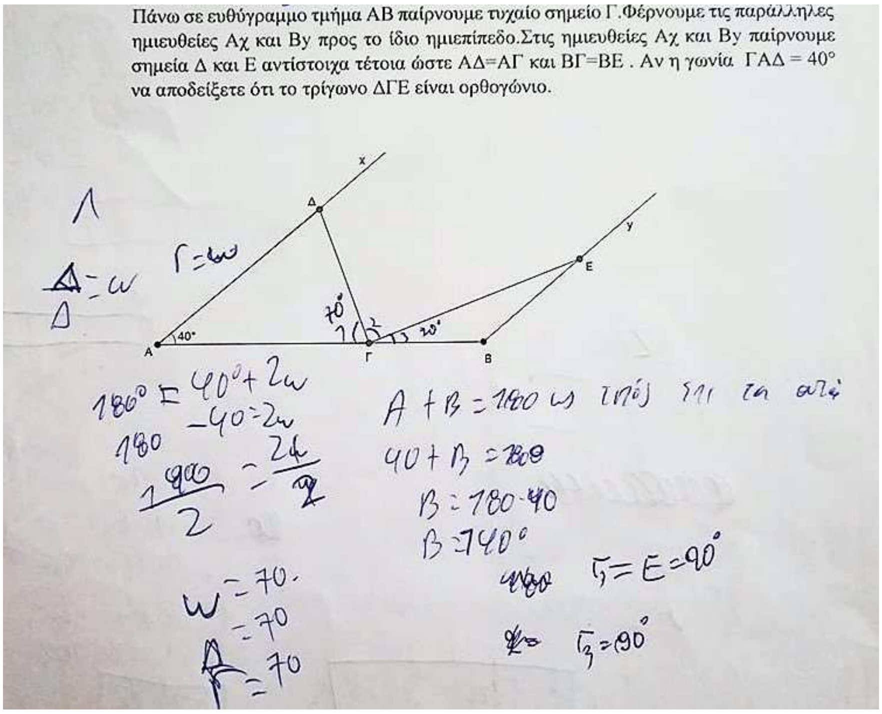
Η διαφορά ανάμεσα στις δύο τάξεις ήταν αναμενόμενη και αποτυπώνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Pre-test		Post-test	
Άσκηση	Γυμνάσιο	Λύκειο	Γυμνάσιο	Λύκειο
Α1	17 77%	20 91%	8 36%	14 64%
Α2	17 77%	19 86%	14 64%	21 95%
Α3	9 41%	16 73%	10 45%	20 91%
Α4	7 32%	15 68%	12 55%	18 82%
Α5	14 64%	17 77%	-	-
Α6	7 32%	16 73%	-	-

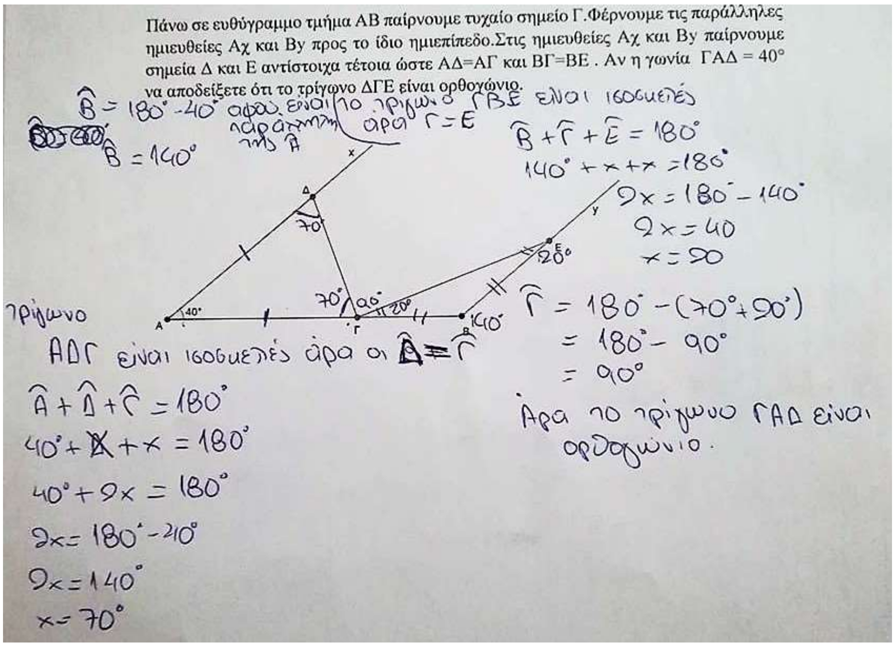
Πίνακας 5 **:** Σωστές απαντήσεις pre/post-test Γυμνασίου και Λυκείου

Συγκρίνοντας τους αντίστοιχους ΓΧΕ των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου φαίνεται η διαφορά στο θεωρητικό σύστημα αναφοράς πριν την διδακτική παρέμβαση. Μελετώντας τα ποσοτικά αποτελέσματα των σωστών απαντήσεων στο post-test και των δύο τάξεων είναι εμφανής η υπεροχή των μαθητών του Λυκείου, ωστόσο οι μαθητές που απάντησαν σωστά κινήθηκαν στα ίδια επίπεδα του ΓΧΕ μέσω της ίδιας κίνησης και γενέσεων.

Η διαφορά των δύο τάξεων ως προς τον αποδεικτικό λόγο που χρησιμοποιούν φαίνεται και στις παρακάτω εικόνες, οι οποίες είναι από την επίλυση της τελευταίας άσκησης του post-test. Οι δύο πρώτες εικόνες (εικόνες 18 και 19) δείχνουν τη λύση δύο μαθητών Γυμνασίου και οι δύο τελευταίες (εικόνες 20 και 21) τη λύση δύο μαθητών Λυκείου. Όλες οι απαντήσεις είναι σωστές και καταλήγουν στο ζητούμενο της άσκησης. Μελετώντας αναλυτικά τις λύσεις όμως βλέπουμε ότι οι μαθητές του Γυμνασίου κάνουν πράξεις χωρίς να εξηγούν, σημειώνουν πάνω στο σχήμα τη λύση δίχως αιτιολόγηση και χρησιμοποιούν κάθε φορά το ίδιο γράμμα χ για κάθε άγνωστο που θέλουν να υπολογίσουν.

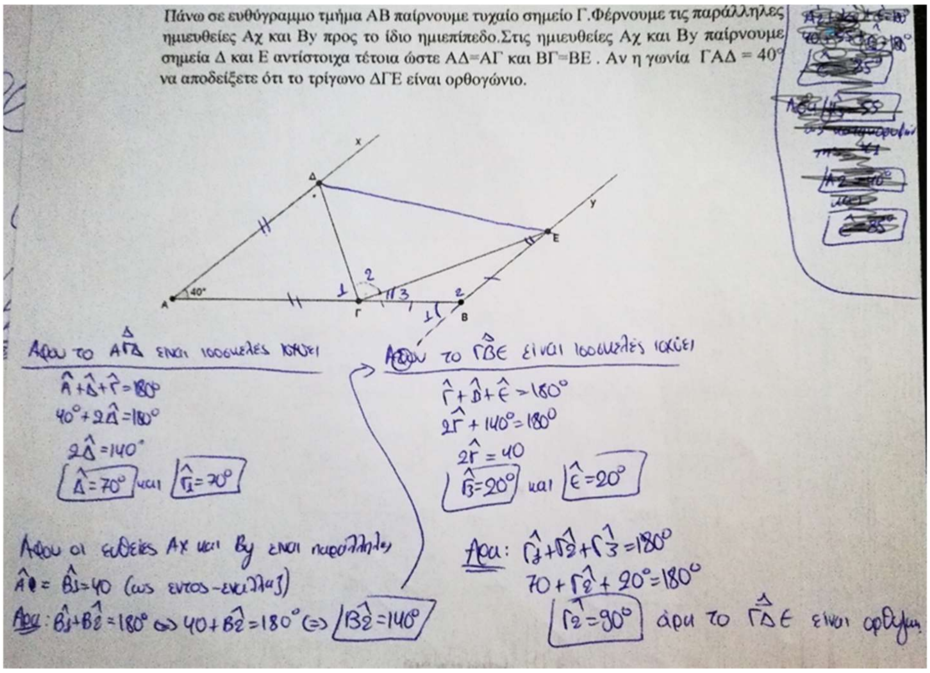


Εικόνα 18: Λύση άσκησης μαθητή Γυμνασίου

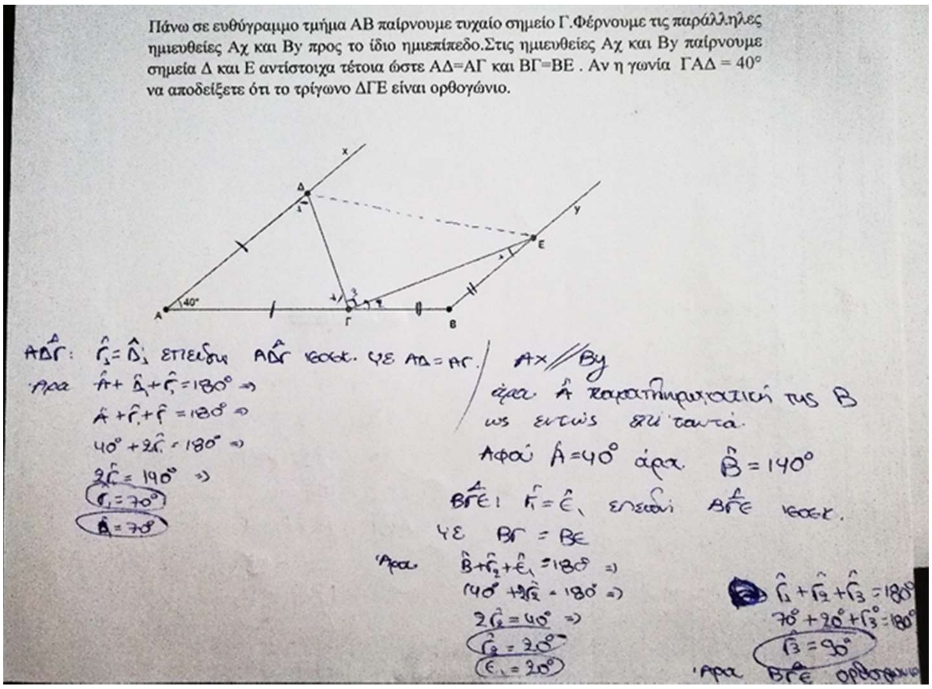


Εικόνα 19: Λύση άσκησης μαθητή Γυμνασίου

Αντιθέτως οι μαθητές του Λυκείου παρουσιάζουν συγκροτημένη λύση με πλούσιο αποδεικτικό λόγο, καταγράφοντας με σειρά τα βήματα της επίλυσης της άσκησης. Συνδυάζουν λόγο και πράξεις και υπογραμμίζουν ή τονίζουν πάνω στο χαρτί σημεία της απόδειξης που θεωρούν αξιοσημείωτα ή κομβικά.



Εικόνα 20: Λύση άσκησης μαθητή Λυκείου

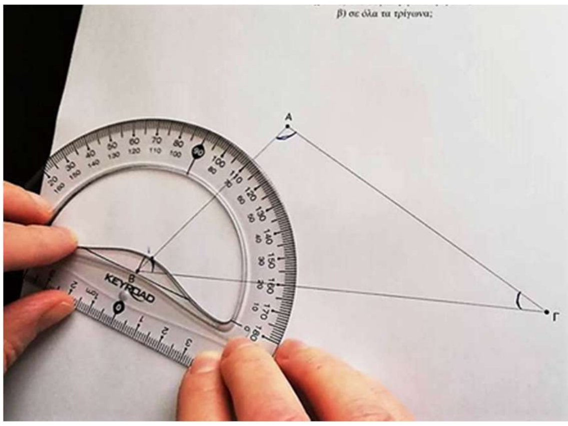


Εικόνα 21: Λύση άσκησης μαθητή Λυκείου

3.4. Προσωπικός ΓΧΕ των μαθητών κατά την διδακτική παρέμβαση

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ο προσωπικός ΓΧΕ των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Συγκεκριμένα σχολιάζονται οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στις ασκήσεις των φύλλων εργασίας και καταγράφεται ο διάλογος που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων είναι ταυτόχρονη και για τις δύο τάξεις, καθώς οι απαντήσεις των μαθητών ήταν κοινές και δεν παρουσίασαν καμία ιδιαίτερη ποιοτική διαφορά.

Η πρώτη διδακτική ενότητα (παράρτημα, σελ.89) της παρέμβασης περιλάμβανε δραστηριότητες προερχόμενες από τη GI και σε όλα τα φύλλα εργασίας οι μαθητές εργάστηκαν με χειραπτικά υλικά. Σκοπός των δραστηριοτήτων ήταν να δημιουργηθεί εικασία για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Το πρώτο αξιοσημείωτο στοιχείο εδώ είναι το γεγονός ότι, όταν οι μαθητές κλήθηκαν να μετρήσουν τις γωνίες ενός τριγώνου με μοιρογνωμόνιο, τότε συνάντησαν δυσκολία (εικόνα 22). Το σύνολο των μαθητών και του γυμνασίου, αλλά και του λυκείου δεν θυμόταν πώς χρησιμοποιείται ένα μοιρογνωμόνιο. Αυτό ως ένα σημείο ήταν αναμενόμενο, καθώς οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν φύγει από το πλαίσιο της GI και εργάζονται αποκλειστικά στη GII. Οπότε αρχικά στη διδακτική παρέμβαση έγινε υπενθύμιση της χρήσης του μοιρογνωμονίου.



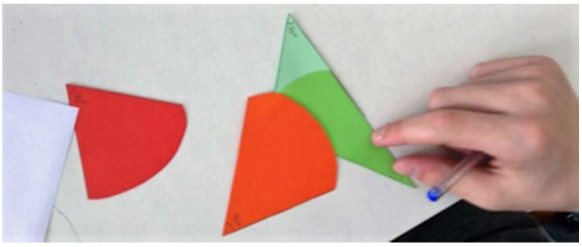
Εικόνα 22: Λανθασμένη μέτρηση γωνίας με μοιρογνωμόνιο μαθήτριας Λυκείου

Από την ανάλυση των απαντήσεων και των δύο τάξεων ως προς το πρώτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.90), όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να μετρήσουν τις γωνίες ενός τριγώνου και στη συνέχεια να βρουν το άθροισμα των γωνιών, παρατηρήθηκε το εξής σημαντικό: οι περισσότεροι μαθητές, οι 40 από τους 44, μέτρησαν τις δύο γωνίες και στη συνέχεια υπολόγισαν την τρίτη γωνία αλγεβρικά χωρίς να τη μετρήσουν, θεωρώντας γνωστό ότι το άθροισμα των γωνιών είναι 180˚. Τέλος άθροισαν ξανά τις γωνίες και βρήκαν 180˚. Οι υπόλοιποι 4 μαθητές μέτρησαν και τις τρεις γωνίες και βρήκαν αθροίσματα διαφορετικά του 180, καθώς έκαναν λάθος στη μέτρηση με το μοιρογνωμόνιο.

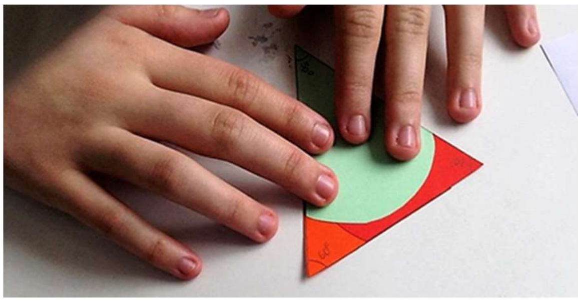
Στα επόμενα τρία φύλλα εργασίας (παράρτημα, σελ.91-93) οι μαθητές ακολούθησαν με προσοχή τις οδηγίες και έφεραν σε πέρας όλες τις εφαρμογές. Στο τελευταίο φύλλο (παράρτημα, σελ.94) μαζί με το οποίο μοιράστηκαν γωνίες των 30˚, 50˚, 60˚, 70˚, 80˚, 90˚, 120˚, οι μαθητές συνδύασαν σωστά τις γωνίες και με ακριβή εφαρμογή κατάφεραν και σχημάτισαν τρίγωνα. Οι συνδυασμοί που καταγράφηκαν από την πλευρά των μαθητών ήταν οι εξής:

- 60º, 50º και 70º
- 90º, 30º και 60º
- 80˚, 70˚ και 30˚
- 30˚, 30˚ και 120˚
- 60˚, 60˚ και 60˚

Αξιοσημείωτο είναι ότι ένας μαθητής Γυμνασίου κατάφερε να καταγράψει 4 διαφορετικούς συνδυασμούς γωνιών. Ακολουθούν χαρακτηριστικές εικόνες της εργασίας των μαθητών.



Εικόνα 23 : Προσπάθεια σχηματισμού τριγώνου με δοσμένες γωνίες



Εικόνα 24 : Σχηματισμός οξυγώνιου τριγώνου με γωνίες 60º, 50º και 70º

Εικόνα 25 : Σχηματισμός ορθογώνιου τριγώνου με γωνίες 90º, 30º και 60º

Στο τέλος της ενότητας, αφού οι μαθητές τελείωσαν με όλα τα φύλλα εργασίας, έγινε διάλογος, ώστε να συζητηθεί το τελευταίο ερώτημα κάθε φύλλου εργασίας, για το αν δηλαδή μπορεί να γενικευτεί το συμπέρασμα που προέκυψε για το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου σε όλα τα τρίγωνα. Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα από τη συζήτηση που έγινε με τους μαθητές του Γυμνασίου και ήταν παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε και με τους μαθητές του Λυκείου.

Ερευνήτρια:	Τι παρατηρήσατε σχετικά με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;
Μαθητής 1:	Είναι ίσο με 180˚.
Ερευνήτρια:	Όλοι βρήκατε 180˚;
Μαθητής 2:	Εγώ βρήκα 174˚ στο πρώτο τρίγωνο.
Μαθητής 1:	Κάπου έκανες λάθος
Ερευνήτρια:	Ξαναμέτρησε τις γωνίες του τριγώνου και ξαναβρες το άθροισμα. Τι βρήκες τώρα;
Μαθητής 2:	Βρήκα 180. Είχα μετρήσει 2˚ λιγότερο την κάθε γωνία.
Μαθήτρια 3:	Εγώ βρήκα 178˚ αλλά άλλαξα τη μια γωνία ώστε να βγαίνει 180˚.

Ερευνήτρια:	Γιατί την άλλαξες;
Μαθήτρια 3:	Ξέρω ότι το άθροισμα πρέπει να βγαίνει 180. Οπότε μεγάλωσα μια γωνία κατά δύο μοίρες ώστε να βγαίνει 180.
Ερευνήτρια	Είναι σωστό να αλλάζεις τη μέτρηση σου;
Μαθήτρια 3	Όχι, αλλά πρέπει να βρίσκω 180˚.
Μαθητές …	Βρήκα 180˚
Ερευνήτρια:	Ναι αλλά υπήρχαν συμμαθητές σας που δεν βρήκαν 180˚. Οπότε; Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, επειδή βρήκαμε 180˚ στα τρίγωνα που εργαστήκαμε, θα βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα σε κάθε τρίγωνο;
Μαθητές:	... ... (σιωπή)
Μαθητής 1:	Ίσως και να μην μπορούμε.

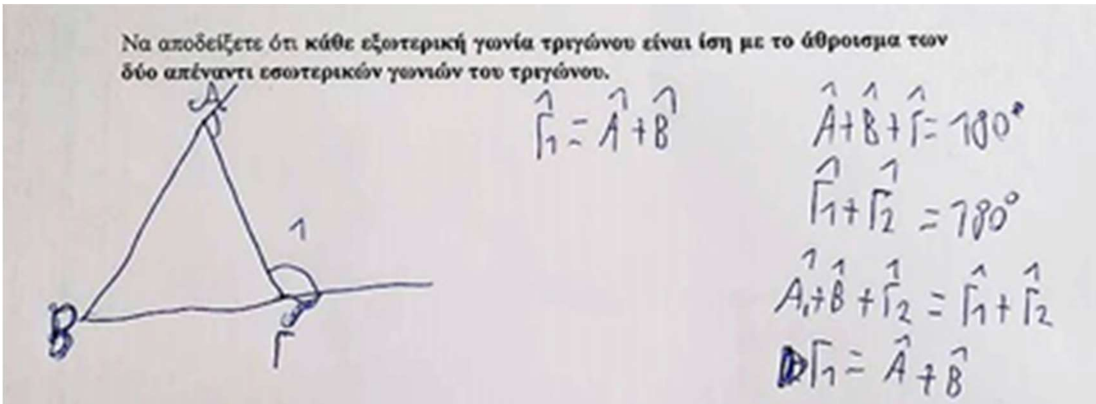
Όπως παρατηρήθηκε, οι μαθητές δεν μπορούσαν να αποδεσμευτούν από την πρότερη γνώση που είχαν για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Στις δραστηριότητες ζητήθηκε να καταγράψουν το αποτέλεσμα μιας μέτρησης ή μιας κατασκευής που θα τους οδηγούσε σταδιακά στην εικασία ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180˚, όμως πολλοί από τους μαθητές θεώρησαν ήδη γνωστή την πρόταση.

Με την έναρξη της δεύτερης ενότητας αρχικά έγινε υπενθύμιση των δραστηριοτήτων της πρώτης ενότητας και ειδικότερα επαναλήφθηκε και απαντήθηκε το ερώτημα αν μπορεί να γενικευτεί το αποτέλεσμα των μετρήσεων των γωνιών και του αθροίσματός τους για όλα τα τρίγωνα. Περνώντας στο νέο υλικό της παρέμβασης, πρώτα αναλύθηκε η έννοια της εικασίας μιας πρότασης και η αναγκαιότητα της απόδειξης για την καθολική αποδοχή της πρότασης αυτής. Για να γίνει κατανοητή η σημασία της απόδειξης επιλέχτηκε ξανά το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές αποδείξεις του. Με αυτόν τον τρόπο έγινε κατανοητή η διαφορά της απόδειξης σε σχέση με τα εμπειρικά αποτελέσματα που είχαν βρει οι μαθητές στην πρώτη διδακτική ενότητα της παρέμβασης.

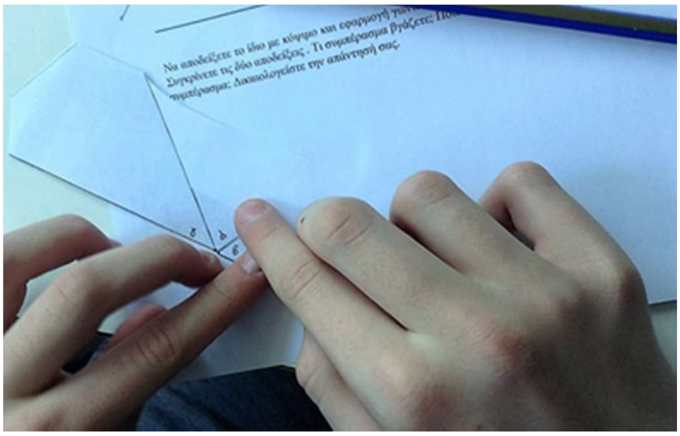
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε ο σχολιασμός της απόδειξης που στηρίζεται σε διαφορετικό αξίωμα και παρουσιάζεται αναλυτικά στη σελίδα 42. Από τους 44 μαθητές και των δύο τάξεων μόνο δύο μαθητές (ένας Γυμνασίου και ένας Λυκείου) κατάλαβαν τη διαφορά της συγκεκριμένης απόδειξης σε σχέση με τις δύο προηγούμενες που είχαν ήδη παρουσιαστεί. Συγκεκριμένα ο μαθητής του Γυμνασίου παρατήρησε και ρώτησε: "*Γιατί το άθροισμα και στο μικρό τρίγωνο να είναι πάλι χ και όχι χ/2;*". Ομοίως και ο μαθητής του Λυκείου αναρωτήθηκε και είπε: "*Πού ξέρουμε ότι το άθροισμα των γωνιών στα μικρά τρίγωνα είναι πάλι χ; Γιατί να είναι ίδιο; Εγώ λέω ότι είναι ψ.*" Και στις δύο περιπτώσεις αντίδρασης των παραπάνω μαθητών ζητήθηκε από τους υπόλοιπους μαθητές να απαντήσουν, αν μπορούν, στην ερώτηση των συμμαθητών τους, αλλά κανένας δεν ήταν σε θέση να το κάνει. Ωστόσο μετά τη διατύπωσή του όλοι συμφωνούσαν με το ερώτημα. Έτσι δόθηκε η ευκαιρία να τονιστεί ξανά στην τάξη η έννοια του αξιώματος και της σημασίας του στα βήματα μιας απόδειξης.

Αφού παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν οι παραπάνω αποδείξεις, δόθηκαν φύλλα εργασίας (παράρτημα, σελ.95) στους μαθητές και ζητήθηκε να αποδείξουν ορισμένες προτάσεις που προκύπτουν από το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου. Οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας είχαν ως στόχο την ανάπτυξη του προσωπικού ΓΧΕ στην αποδεικτική διαδικασία.

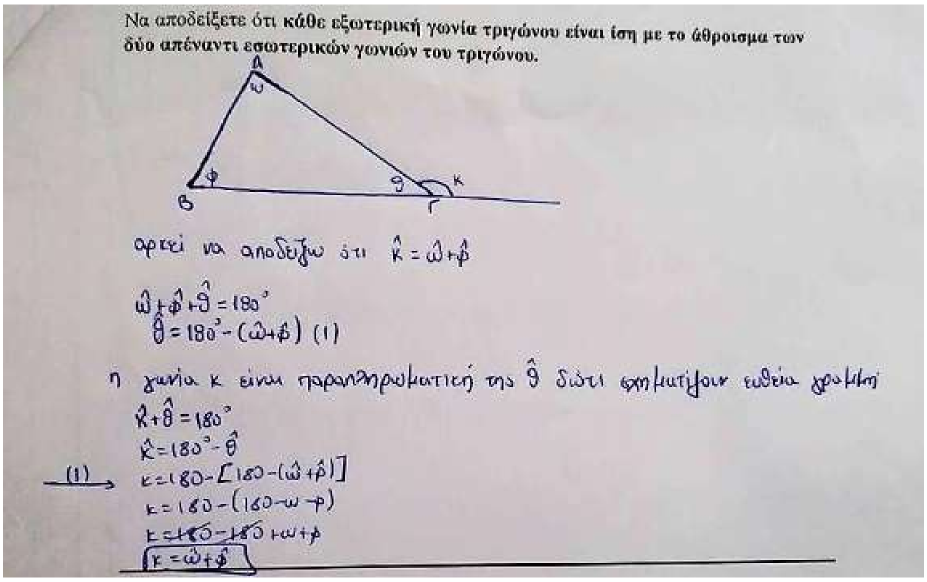
Οι μαθητές του Γυμνασίου χρειάζονταν βοήθεια και περισσότερη ανάλυση της εκφώνησης κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, ώστε να μπορέσουν να ξεκινήσουν την απόδειξη. Αντιθέτως, οι μαθητές του Λυκείου φάνηκαν εξοικειωμένοι με τη διαδικασία και προχωρούσαν μόνοι τους στην απόδειξη των προτάσεων που τους ζητήθηκε. Στο τρίτο φύλλο εργασίας (παράρτημα, σελ.98) ζητήθηκε να αποδείξουν ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών του. Η απόδειξη ζητήθηκε με δύο τρόπους, έναν στο πλαίσιο της GII και έναν στο πλαίσιο της GI. Από τις απαντήσεις των μαθητών φαίνεται ότι έγινε διαχωρισμός της έννοιας της εικασίας και της έννοιας της απόδειξης. Το σύνολο των μαθητών απάντησε ότι η απόδειξη του θεωρήματος οδηγεί στην αποδοχή του, ενώ η κατασκευή της πρότασης με χειραπτικά υλικά οδηγεί στην εικασία του θεωρήματος. Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά οι απαντήσεις ενός μαθητή Γυμνασίου (εικόνες 26 και 27) και μιας μαθήτριας Λυκείου (εικόνες 28 και 29). Είναι εμφανής η διαφορά τους στον αποδεικτικό λόγο.



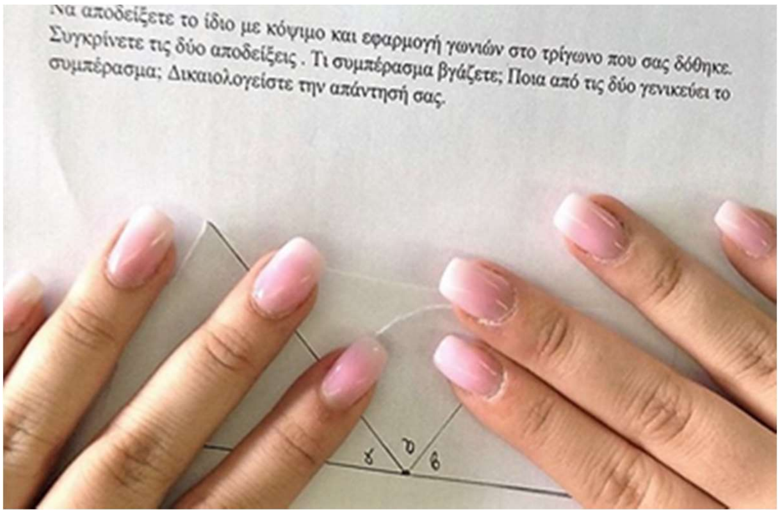
Εικόνα 26: Απόδειξη μαθητή Γυμνασίου



Εικόνα 27: Απόδειξη με κόψιμο γωνιών μαθητή Γυμνασίου



Εικόνα 28: Απόδειξη μαθήτριας Λυκείου

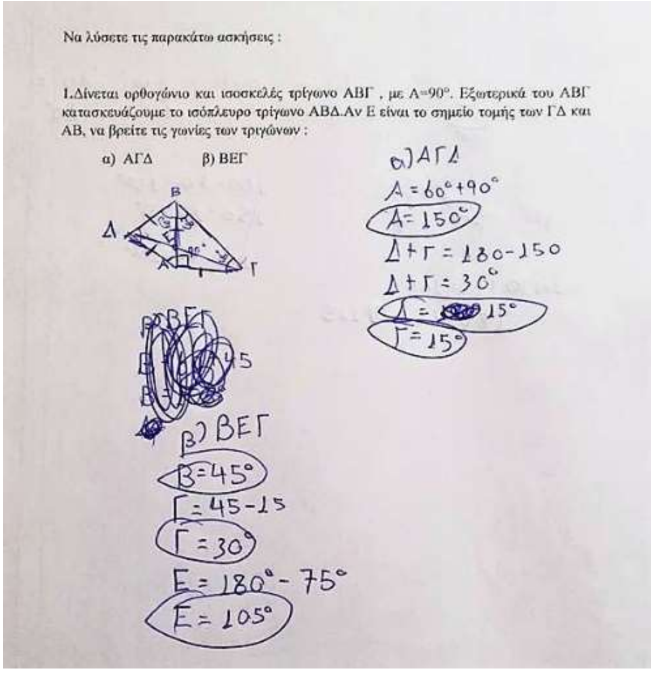


Εικόνα 29: Απόδειξη με κόψιμο γωνιών μαθήτριας Λυκείου

Στην τρίτη διδακτική ενότητα (παράρτημα, σελ.99) μοιράστηκαν φύλλα εργασίας που περιείχαν προτάσεις και ασκήσεις, των οποίων η λύση στηριζόταν στο θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και στα πορίσματα του θεωρήματος που αποδείχτηκαν στα προηγούμενα φύλλα εργασίας. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε με στόχο τον εμπλουτισμό του προσωπικού ΓΧΕ των μαθητών με νέες μεθόδους και η είσοδος στο ΓΧΕ να ξεκινάει από το επίπεδο [Sem-Dis].

Η συγκέντρωση και ανάλυση των απαντήσεων έδειξε την προσπάθεια των μαθητών του γυμνασίου να γράψουν με σειρά τα βήματα τους, όπως τα διδάχτηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, αλλά δεν τα κατάφεραν έτσι, ώστε η λύση που έδωσαν να θεωρηθεί πλήρη και άρτια. Αντιθέτως οι μαθητές του λυκείου παρουσίασαν λύσεις με πλήρη αιτιολόγηση και καλό αποδεικτικό λόγο. Ενδεικτικά παρουσιάζονται εικόνες από την λύση ενός μαθητή του Γυμνασίου (εικόνα 30) και μιας μαθήτριας του Λυκείου (εικόνα 31) όπου φαίνεται η διαφορά των μαθητών των δύο τάξεων στον αποδεικτικό λόγο κατά την επίλυση μιας άσκησης.

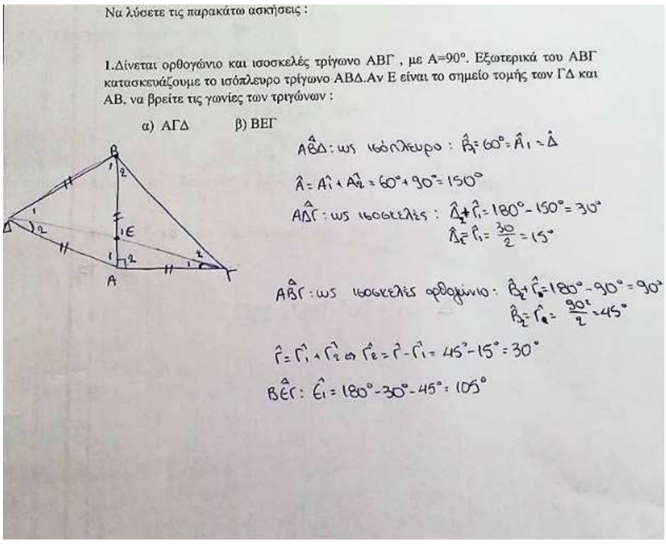
Όπως φαίνεται στην εικόνα 30 ο μαθητής του Γυμνασίου στην επίλυση της άσκησης δεν καταγράφει τις γεωμετρικές ιδιότητες που χρησιμοποιεί αλλά γράφει μόνο τις αλγεβρικές πράξεις που χρειάζεται για να υπολογίσει τις άγνωστες γωνίες. Αντιθέτως η μαθήτρια Λυκείου (εικόνα 31) σε κάθε βήμα της λύσης της σημειώνει πρώτα με λόγια ποια γεωμετρική ιδιότητα χρησιμοποιεί και μετά υπολογίζει τις άγνωστες γωνίες.


Να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις :

1.Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ , με Α=90°. Εξωτερικά του ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ.Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΓΔ και ΑΒ, να βρείτε τις γωνίες των τριγώνων :

α) ΑΓΔ β) ΒΕΓ

Εικόνα 30 : Λύση άσκησης από μαθητή Γυμνασίου


Να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις :

1.Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ , με Α=90°. Εξωτερικά του ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ.Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΓΔ και ΑΒ, να βρείτε τις γωνίες των τριγώνων :

α) ΑΓΔ β) ΒΕΓ

Εικόνα 31 : Λύση άσκησης από μαθήτρια Λυκείου

4. Συμπεράσματα / Συζήτηση

4.1. Συμπεράσματα

Τα ευρήματα από την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία, βρίσκονται σε άμεση σχέση με το σκοπό της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν κατά την ανάπτυξη της μεθοδολογίας της. Στο τελικό στάδιο της εργασίας τα ευρήματα αυτά παρουσιάζονται με τη μορφή συμπερασμάτων, που επιβεβαιώνουν το σκοπό της έρευνας και απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα.

Υπενθυμίζεται ότι σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνηθεί αρχικά κατά πόσο οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου γνωρίζουν την έννοια της γεωμετρικής απόδειξης και πόσο εξοικειωμένοι είναι με την αποδεικτική διαδικασία, αλλά και στη συνέχεια να διαφανεί τι είδους βελτίωση μπορεί να προκύψει στον αποδεικτικό λόγο των μαθητών μετά από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση. Βέβαια όλα τα προηγούμενα σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν υπό το πρίσμα της θεωρίας των ΓΧΕ. Ο σκοπός αυτός επιμερίζεται στα τέσσερα ερευνητικά ερωτήματα : α) τον αποδεικτικό λόγο που είχαν αρχικά οι μαθητές, β) την επίδραση διδακτικής παρέμβασης στην δημιουργία εικασιών και στην αποδεικτική διαδικασία, γ) τις διαδρομές μέσα στα επίπεδα του Γ.Χ.Ε. και δ) τον αποδεικτικό λόγο των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Ξεκινώντας λοιπόν από το πρώτο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με τον αρχικό αποδεικτικό λόγο που εμφανίζουν οι μαθητές της Β΄ τάξης Γυμνασίου και της Β΄ Λυκείου, από την ανάλυση των απαντήσεων του pre-test φάνηκε ότι κατά την αποδεικτική διαδικασία οι μαθητές του Γυμνασίου εμφάνισαν φτωχό αποδεικτικό λόγο και χρησιμοποίησαν γεωμετρικές ιδιότητες χωρίς καμία αιτιολόγηση ή σημείωσαν τα αποτελέσματα πάνω στο σχήμα δίχως να σημειώνουν με σειρά τα βήματα που τους οδήγησαν στη λύση. Αντιθέτως οι μαθητές του Λυκείου εμφάνισαν εξαρχής αρκετά καλό αποδεικτικό λόγο και φάνηκε ότι είναι εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία. Η διαφορά αυτή ανάμεσα στις δύο τάξεις ήταν αναμενόμενη, καθώς η έννοια της απόδειξης εμφανίζεται στην Α΄ Λυκείου ως διδακτέα έννοια. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί και με τις έρευνες των Reisse et al (2008) και Spiegel et al (2015), οι οποίοι διαπίστωσαν αδυναμία της αποδεικτικής διαδικασίας από μαθητές Γυμνασίου. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και η έρευνα των Kunimune et al (2010), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι το 80% των μαθητών Γυμνασίου παρουσιάζει δυσκολία στην ολοκλήρωση μιας απόδειξης.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας, το οποίο εξέταζε την κατάκτηση της αποδεικτικής διαδικασίας μετά από την εφαρμογή κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης, απαντήθηκε θετικά και τα αντίστοιχα δεδομένα έδωσαν θετικά αποτελέσματα. Έτσι, οι μαθητές του Γυμνασίου ανταποκρίθηκαν με ενθουσιασμό στις δραστηριότητες της παρέμβασης. Διδάχτηκαν για πρώτη φορά έννοιες όπως εικασία, θεώρημα, πόρισμα και έγινε προσπάθεια να κατανοήσουν την έννοια της απόδειξης, αλλά και την αναγκαιότητα της. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι μαθητές εξέφρασαν την επιθυμία να διδάσκονται όλη την ύλη του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών με παρόμοιο τρόπο με αυτόν της διδακτικής παρέμβασης. Οι μαθητές του Λυκείου αντίστοιχα, αν και ήταν εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης ξεκαθάρισαν τις έννοιες που εμπλέκονται, όπως εικασία και θεώρημα ειδικότερα μέσω των εφαρμογών GeoGebra που έγιναν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Επίσης έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην ιστορική πορεία για τη γέννηση και τη εξέλιξη της απόδειξης. Επομένως εμβάθυναν εννοιολογικά όσον αφορά τις σχετικές με την απόδειξη έννοιες και τις συνέδεσαν με το χρονικό ορίζοντα εμφάνισής τους. Μια διδακτική παρέμβαση που ξεκινάει με απλές διαδικασίες και οδηγεί σε θεωρητικές εφαρμογές είχε αρκετά θετικά αποτελέσματα όπως φαίνεται στην παράγραφο 2,6 όπου γίνεται η ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης.

Τα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιήθηκαν στην παρέμβαση κινητοποίησαν ιδιαίτερα το ενδιαφέρον των μαθητών του Γυμνασίου γεγονός που είναι σύμφωνο και με την έρευνα των Lin and Wun (2007) οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι μαθητές ίδιας ηλικιακής ομάδας οδηγούνται στην δημιουργία εικασιών, αν έχουν τα κατάλληλα οπτικά γεωμετρικά υλικά. Αντιθέτως από την έρευνα μας προέκυψε το νέο εύρημα που δείχνει ότι οι μαθητές του Λυκείου αντέδρασαν αρνητικά στη χρήση χειραπτικών υλικών. Επίσης η αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους και ο διάλογος που αναπτύχθηκε οδήγησε στη γέννηση εικασιών, οπότε οι μαθητές οδηγήθηκαν σταδιακά και με την κατάλληλη βοήθεια στην απόδειξη μιας πρότασης, συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν και οι Matus & Rodrigues (2011). Τέλος, η επίδειξη της απόδειξης μέσω δυναμικών εργαλείων γεωμετρίας ήταν κάτι πρωτοφανές για τους μαθητές και λειτούργησε θετικά στη δημιουργία εικασίας. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι έρευνες των Patsiomitou (2011), Baccaglini (2011) και Fujita(2014).

Αναφορικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο εξέταζε την κίνηση και τις διαδρομές των μαθητών μέσα από το μοντέλο του ΓΧΕ, από τα αποτελέσματα της έρευνας συμπεραίνουμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών και των δύο τάξεων κινήθηκε στο επίπεδο [Sem-Dis] με την είσοδο στο επίπεδο να γίνεται από τον σημειωτικό άξονα και να είναι προσανατολισμένο προς τη λεκτική γένεση. Οι αρχικοί προσωπικοί ΓΧΕ των μαθητών του Γυμνασίου παρουσίαζαν ελλείψεις σε σχέση με τους προσωπικούς ΓΧΕ των μαθητών του Λυκείου. Ωστόσο οι μαθητές του Γυμνασίου ήταν πιο αποδοτικοί στις δραστηριότητες που προέρχονται από τη GI. Χρησιμοποίησαν το μοιρογνωμόνιο και κινήθηκαν στο επίπεδο [Sem-Ins] και στο επίπεδο [Ins-Dis]. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς ο αναφορικός ΓΧΕ των μαθητών του Γυμνασίου βρίσκεται στο παράδειγμα GI. Αντιθέτως οι μαθητές του Λυκείου κινήθηκαν αποκλειστικά στο παράδειγμα GII και όλες τις δραστηριότητες τις έλυσαν με ιδιότητες και όχι με μετρήσεις, καθώς εμφάνισαν δυσκολία στη χρήση του μοιρογνωμονίου. Στο τέλος της παρέμβασης, βάσει των τελευταίων φύλλων εργασίας, οι προσωπικοί ΓΧΕ των μαθητών είχαν εμπλουτιστεί με νέες μεθόδους και η επεξεργασία των ασκήσεων είχε μεταφερθεί εξολοκλήρου στο επίπεδο [Sem-Dis].

Τέλος, αναφορικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο εξέταζε τον τελικό αποδεικτικό λόγο των μαθητών μετά την διδακτική παρέμβαση, από την ανάλυση των απαντήσεων του post-test φάνηκε ότι για τους μαθητές του Γυμνασίου δεν υπήρξε αξιοσημείωτη μεταβολή στον αποδεικτικό λόγο. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις δραστηριότητες του τεστ ελέγχου είχαν βελτίωση στη γραφή μιας απόδειξης και στην επεξήγηση των λύσεων που παρουσίασαν, αλλά το ποσοστό τους δεν ήταν ικανοποιητικό. Ίσως η διάρκεια της παρέμβασης να ήταν μικρή και λίγες οι δραστηριότητες για την κατανόηση μιας τόσο σημαντικής έννοιας, όπως αυτή της απόδειξης. Από την άλλη οι μαθητές του Λυκείου εμφάνισαν σημαντική βελτίωση, απαντώντας επιτυχώς σε όλες τις ασκήσεις του τελικού τεστ. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές που είναι ήδη εξοικειωμένοι με την αποδεικτική διαδικασία επιδέχονται βελτίωση και αποκτούν πλήρη αποδεικτικό λόγο, αν διδαχτούν με τις κατάλληλες δραστηριότητες την απόδειξη ορισμένων προτάσεων. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι έρευνες των Brockmann-Behnsen & Rott (2014) και Miyazaki &

Fujita (2016) καθώς στο post-test των ερευνών τους επισημάνθηκε σημαντική πρόοδος στην αποδεικτική διαδικασία.

Καταληκτικά αναφέρεται ότι η γεωμετρική απόδειξη αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία, η οποία όμως μπορεί να κατανοηθεί από τους μαθητές, όταν τη διδαχτούν με κατάλληλες δραστηριότητες σχεδιασμένες με βάση το μοντέλο του ΓΧΕ.

4.2. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΥΕΝΑΣ

Τα στοιχεία που αποτελούν περιορισμούς της έρευνας και χρειάζεται να επισημανθούν και να ληφθούν υπόψη κατά τη μελέτη των συμπερασμάτων της αφορούν α) την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, β) τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και γ) τα εργαλεία της μέτρησης.

Αρχικά, σε σχέση με την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, παρότι οι μαθητές ήταν 44 συνολικά, ένα τμήμα 22 μαθητών Γυμνασίου και ένα τμήμα 22 μαθητών Λυκείου, δεν μπορεί να υποστηριχτεί ότι αυτή εξασφαλίστηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό. Το κριτήριο που προτάχθηκε για την επιλογή των συμμετεχόντων μαθητών ειπώθηκε ήδη ότι ήταν η προσβασιμότητα στα σχολεία και η απρόσκοπτη διεξαγωγή της έρευνας και όχι η αντιπροσωπευτικότητα έναντι του συνολικού μαθητικού πληθυσμού που φοιτά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Όσον αφορά τη διάρκεια της παρέμβασης, θα μπορούσε να θεωρηθεί μικρό το χρονικό διάστημα, ώστε να κατανοηθεί πλήρως μια τόσο σημαντική έννοια και διαδικασία, όπως αυτή της γεωμετρικής απόδειξης. Η παρέμβαση σχεδιάστηκε εξαρχής, ώστε να είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος χωρίς να διαταράσσεται η ροή του προγράμματος σπουδών.

Τέλος, σε σχέση με τα εργαλεία μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν υπάρχει περιορισμός, καθώς επιλέχτηκε ένα συγκεκριμένο θεώρημα, αυτό του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί δύσκολο ως προς την απόδειξη του για τους μαθητές του γυμνασίου, αλλά εύκολο για τους μαθητές του Λυκείου. Επίσης, η χρήση μιας γεωμετρικής ιδιότητας που είναι γνωστή από το Δημοτικό ίσως να αποτέλεσε εμπόδιο στη δημιουργία εικασίας για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

Ενώ λοιπόν τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας δεν μπορούν ενδεχομένως να γενικευτούν, μπορούν να δώσουν μια ενδεικτική εικόνα για την επίδραση που μπορεί να έχει μια κατάλληλη διδασκαλία στη γεωμετρική απόδειξη. Προτείνεται έτσι να σχεδιαστούν γεωμετρικές δραστηριότητες με βάση το μοντέλο του ΓΧΕ, στις οποίες η ερευνώμενη γεωμετρική ιδιότητα δεν θα είναι οικεία στους μαθητές, να εφαρμοστεί μακράς διάρκειας διδακτική παρέμβαση με στόχο τη βελτίωση των μαθητών στον αποδεικτικό λόγο και να γίνει έρευνα σε μεγάλο δείγμα μαθητών από διάφορες περιοχές της Ελλάδας, ώστε τα αποτελέσματά της να αποτελέσουν έναυσμα για μια πιθανή αναδιαμόρφωση της διδασκαλίας της γεωμετρικής απόδειξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνικές βιβλιογραφικές αναφορές

Αργυρόπυλος,Η, Βλάμος,Π, Κατσούλης,Γ, Μαρκάτης, ΣΤ, Σιδέρης,Π, *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α', Β' Ενιαίου Λυκείου,* Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Βανδουλάκης Ι , Καλλίγης Χα , Νικηφόρου Μ, Φορεντίνος Σπ. (2007). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου,* Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Βανδουλάκης Ι , Καλλίγης Χα , Νικηφόρου Μ, Φορεντίνος Σπ. (2007). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*, Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Ευκλείδη 'Στοιχεία' (2001). *Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος Ι.* Αθήνα : Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού*, Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*, Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Μπαμπινιώτης, Γ. (1998). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας.* Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας.

Πλάτων. *Μένων / Πλάτων* · μετάφραση Ιωάννης Πετράκης. - Αθήνα : Βιβλιοπωλείον της Εστίας, 2016.

Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Ξένες βιβλιογραφικές αναφορές

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. *Proceedings of PME 33, 2,* 89–96.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., & Mariotti, M. A. (2011). Reasoning by contradiction in dynamic geometry. *Proceedings of PME 35, 2,* 81–88.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: A deadlock from educational research on proof. In F.L. Lin (ed.) *2002 International Conference on Mathematics Education- Understanding proving and proving to understand.* NCS and NSUT: Taipei.

Brockmann-Behnsen, D., & Rott, B. (2014). Fostering the argumentative competence by means of a structured training. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 2,* 193–200.

Dimmel, J. K., & Herbst, P. G. (2014). What details do geometry teachers expect in students' proofs? A method for experimentally testing possible classroom norms. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 2,* 393–400.

Dolev, S., & Even, R. (2012). Justifications and explanations in Israeli 7th grade math textbooks. *Proceedings of PME 36, 2,* 203–210.

Fujita, T., Kunimune, S., & Jones, K. (2014). The value of geometrical constructions: Discovering, reasoning and proving in geometry. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 6, 65.*

Ginat, D., & Spiegel, H. (2015). On the absence of fluency and flexibility in novices' geometry proofs. *Proceedings of PME 39, 2,* 329–336.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 127-150.

Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2014). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students' definitions. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36, 3,* 217–224.

Heinze, A. & Reiss, K. (2009). Reasoning and proof in the mathematics classroom. *Analysis*, 27(2-3), pp. 333-357.

Herbst P., Aaron W., Dimmel J., Erickson A. (2013). Expanding students' involvement in proof problems: Are geometry teachers willing to depart from the norm? Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 283-312.

Hoyles, C and Jones, K. (1998), Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: C. Mammana and V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer. pp121-128.

Jones, K., Fujita, T., & Kunimune, S. (2012). Representations and reasoning in 3-D geometry in lower secondary school. *Proceedings of PME 36,* 2, 339–346.

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 47: pp. 1–15 2017(Sep.)

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2010). A French look on the Greek geometrical working space at secondary school level. *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 686-695).

Kuzniak A. (2015) Understanding the Nature of the Geometric Work Through Its Development and Its Transformations. In*: Cho S. (eds) Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham*

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2015). Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 543–549). Prague, Czech Republic: Charles University and ERME.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721-737

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2010). Strengthening students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne and F. Arzarello (Eds), *Proc. 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 756–765). Lyon, France: ERME.

Lin, M.-L., & Wu, C.-J. (2007). Uses of examples in geometric conjecturing. *Proceedings of PME 31,3,* 209–216.

Mariotti, M.A. (2006) Proof and proving in mathematics education. A. Gutiérrez & P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands. ISBN: 9077874194, pp. 173-204.

Matos, J. F., & Rodrigues, M. (2011). Proof in classroom social practice. *Proceedings of PME 35, 3,*177–184.

Miyakawa, T., & Herbst, P. (2007). The nature and role of proof when installing theorems: The perspective of geometry teachers. *Proceedings of PME 31, 3,* 281–288.

Miyakawa, T. (2012). Proof in geometry: A comparative analysis of French and Japanese textbooks. *Proceedings of PME 36, 3,* 225–232.

Miyazaki, M., Fujita, T. & Jones, K. Educ Stud Math (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics, 2017, Volume 94, Number 2,* Page 223.

Patsiomitou, S., & Emvalotis, A. (2010). The development of students' geometrical thinking through a DGS reinvention process. *Proceedings of PME 34, 4,* 33–40.

Patsiomitou, S. (2011). Theoretical dragging: A non-linguistic warrant leading to 'dynamic' propositions. *Proceedings of PME 35, 3,* 361–368.

Otten, S., Males, L. M., & Gilbertson, N. J. (2014). The introduction of proof in secondary geometry textbooks. *International Journal of Educational Research, 64*, 107–118.

Reiss, K.; Hellmich, F.; Reiss, M. (2002): Reasoning and proof in geometry: prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. - In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 4. Norwich: University of East Anglia, pp. 113 – 120

Schoenfeld, A. H. (1989) Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(40):* 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Stylianides, G. (2007). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of science and Mathematics Education, 6,* 191-215.

T. S. Martin, S. M. S. McCrone, M. L. W. Bower and J. Dindyal, The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, *Educ. Stud. Math. 60* (2005), 95-124.

Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30, 4,* 361–368.

V.J. Katz, *History of Mathematics, an Introduction,* 3rd ed., Addison-Wesley, 2008.

Yang, K.-L., Lin, F.-L., & Wang, Y.-T. (2007). Reading strategies for comprehending geometry proof. *Proceedings of PME 31, 1,* 333.

Yerushalmy, M., Chazan, D., Gordon, M., & Houde, G. (1986). Microcomputer-centered plane geometry teaching: a preliminary study. In E. Lansing, G. Lappan, R. Even (Eds). *Proceedings of 8th PME Conference,* (pp. 184-189). N.A.

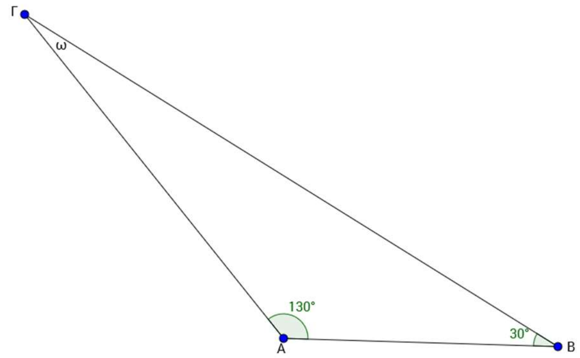
Διαδικτυακοί τόποι

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/14350

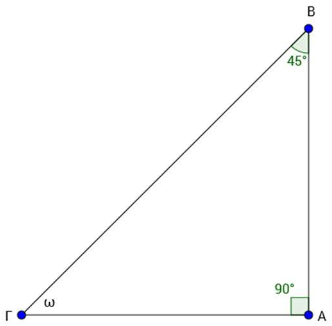
http://photodentro.edu.gr/lor/i78521/2265

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες αιτιολογώντας την απάντησή σας

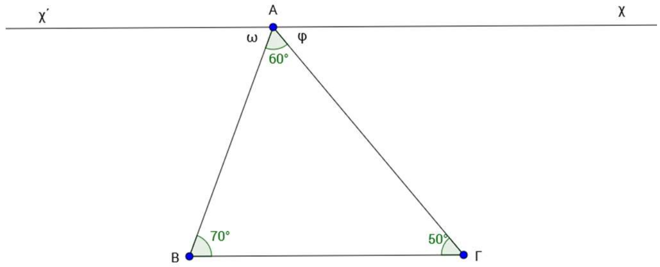


……………………………………………………………………………………………



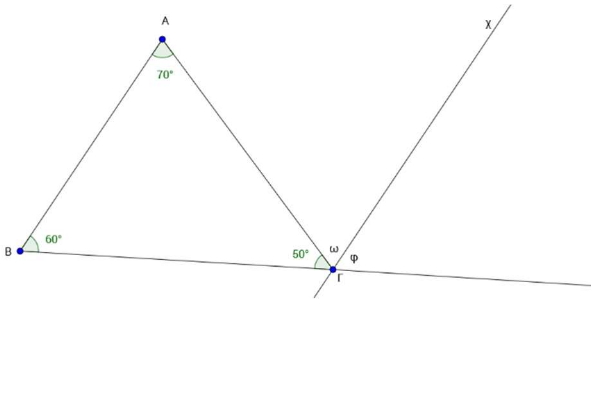
……………………………………………………………………………………………..

Αν χ΄χ // ΒΓ



……………………………………………………………………………………………..

Αν Γχ // ΑΒ



Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι 35° και η γωνία Β 23° μεγαλύτερη της γωνίας Α. Να βρείτε πόσο είναι η γωνία Γ.

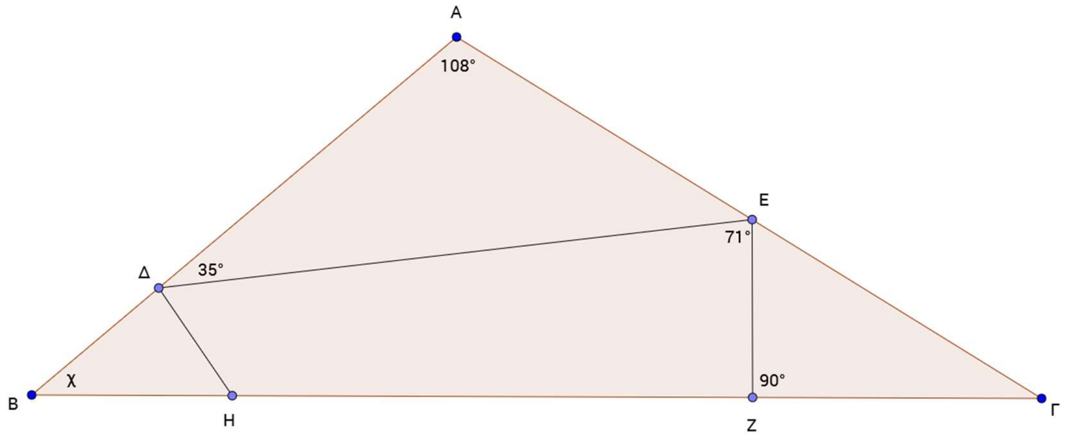
…………………………………………………………………………………………..

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι διπλάσια από τη γωνία Β και η γωνία Γ είναι τριπλάσια από τη γωνία Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

ΟΝΟΜΑ : ……………………………………………………………………………

Να αποδείξετε ότι **αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες , μία προς μία , έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες .**

Να υπολογίσετε την άγνωστη γωνία στο παρακάτω σχήμα :

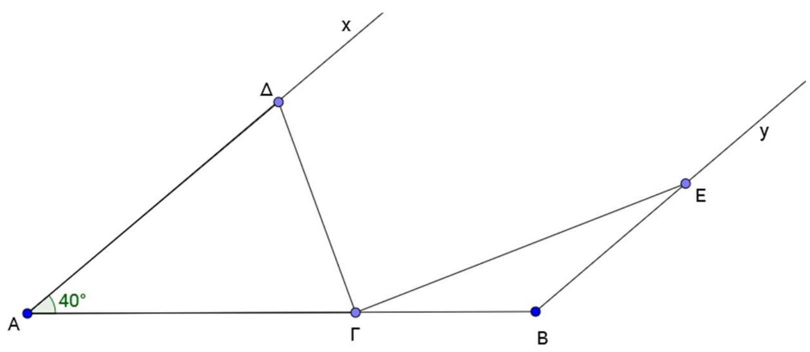


Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α=60° και η γωνία Β είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ .

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ .

β. Αν το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται στο Κ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΚ .

Πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ παίρνουμε τυχαίο σημείο Γ.Φέρνουμε τις παράλληλες ημιευθείες Αχ και Βy προς το ίδιο ημιεπίπεδο.Στις ημιευθείες Αχ και Βy παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ=ΑΓ και ΒΓ=ΒΕ . Αν η γωνία ΓΑΔ = 40° να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο.



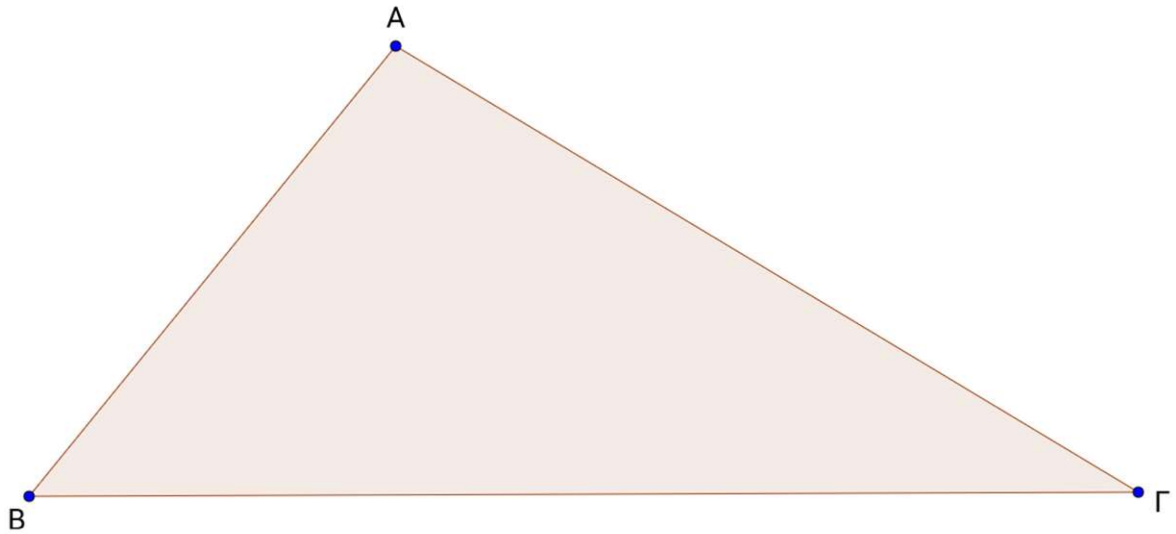
1η ΕΝΟΤΗΤΑ

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1</u>

ΟΝΟΜΑ: ....

1. Με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου μετρήστε τις γωνίες του τριγώνου και γράψτε το μέτρο τους. Υπολογίστε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

2. Πιστεύετε ότι το άθροισμα αυτό ισχύει: α) στο συγκεκριμένο τρίγωνο;
   β) σε όλα τα τρίγωνα;



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΟΝΟΜΑ: ....

Σας έχει δοθεί ένα τρίγωνο:

- Ονομάστε τις γωνίες του α, β, γ.
- Χωρίστε το τρίγωνο σε τρία μέρη, ώστε το κάθε μέρος να περιέχει μια γωνία.
- Τοποθετείστε τη μία γωνία δίπλα στην άλλη πάνω στην ευθεία γραμμή που ακολουθεί.

α. Τι παρατηρείτε;
....
....
....
....

β. Τι συμπέρασμα βγάζετε για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;
....
....
....
....

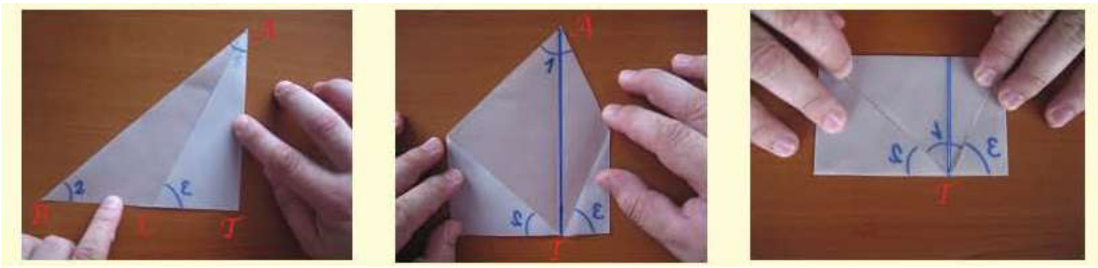
γ. Μπορεί το συμπέρασμα αυτό να γενικευθεί και να ισχύει για όλα τα τρίγωνα;
....
....
....
....

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

ΟΝΟΜΑ: ....

Σας δόθηκε ένα τρίγωνο:

- Ονομάστε ΑΒΓ το τρίγωνο και αριθμείστε τις γωνίες του 1, 2, 3 αντίστοιχα.
- Διπλώστε τη γωνία Α έτσι, ώστε το σημείο Γ να είναι πάνω στη ΒΓ πλευρά.
- Ξεδιπλώστε τη γωνία Α. Τονίστε τη γραμμή που σχηματίστηκε από τη δίπλωση και ονομάστε την ΑΤ.
- Διπλώστε τις γωνίες 2 και 3 του τριγώνου, ώστε να ακουμπάνε τη ΒΓ και οι κορυφές να ταυτίζονται με το Τ.
- Διπλώστε και τη γωνία 1, ώστε η κορυφή της να ακουμπήσει το Τ.



Τι παρατηρείτε;

....
....
....
....
....
....
....
....

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4</u>

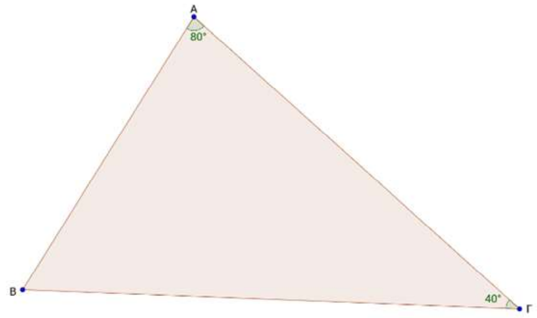
ΟΝΟΜΑ: ....

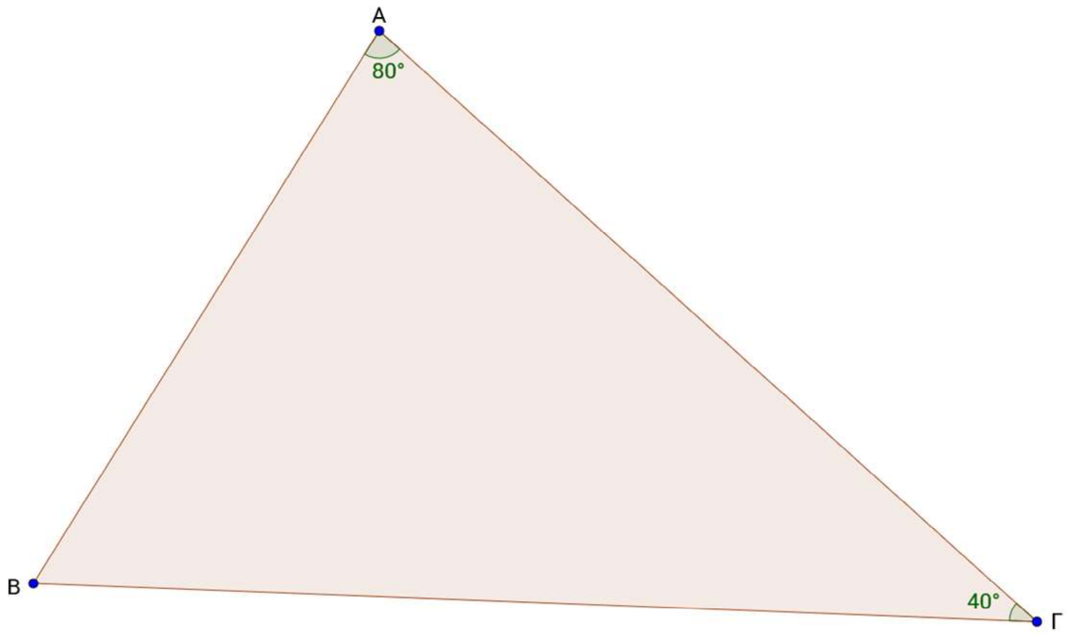
Στα παρακάτω τρίγωνα οι δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με τις δύο γωνίες του άλλου.

- Μετρήστε με το μοιρογνωμόνιο την τρίτη γωνία σε κάθε τρίγωνο και γράψτε την.

- Υπολογίστε το άθροισμα των γωνιών του κάθε τριγώνου.
  ....
  ....

- Τι παρατηρείτε για τη σχέση "άθροισμα γωνιών και μέγεθος τριγώνου";
  ....
  ....
  ....
  ....





<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5</u>

ΟΝΟΜΑ: ....

Σας δίνονται κομμένες γωνίες των 30°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 120°. Προσπαθείστε με διάφορες μετατοπίσεις και ενώσεις των πλευρών των γωνιών να σχηματίσετε τρίγωνο.

- Τι παρατηρείτε;

  ....
  ....
  ....
  ....

- Με ποιους συνδυασμούς μπορείτε να πετύχετε το ζητούμενο;

  ....
  ....
  ....
  ....

- Αθροίστε τις γωνίες κάθε τριγώνου που σχηματίσατε. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

  ....
  ....
  ....
  ....

2Η ΕΝΟΤΗΤΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

ΟΝΟΜΑ : ………………………………………………………………………………..

Να αποδείξετε ότι **κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΟΝΟΜΑ : ……………………………………………………………………………..

Να αποδείξετε ότι **οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές**.

Να αποδείξετε ότι **σε κάθε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι 45°.**

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3</u>

ΟΝΟΜΑ : …………………………………………………………………………

Να αποδείξετε ότι **κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.**

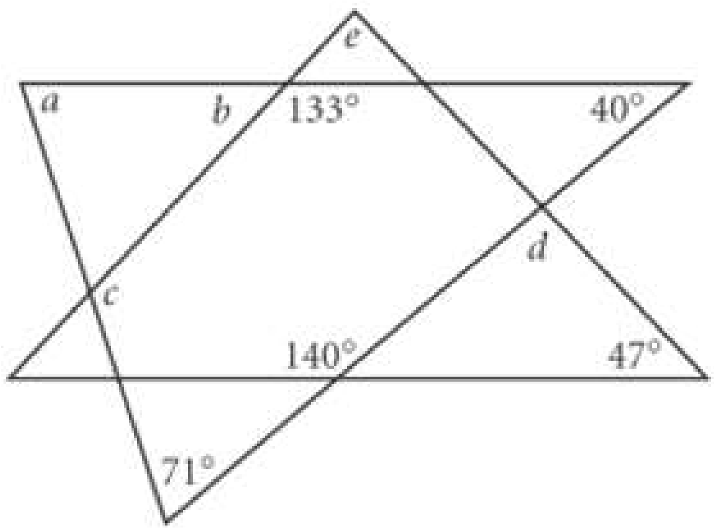
Να αποδείξετε το ίδιο με κόψιμο και εφαρμογή γωνιών στο τρίγωνο που σας δόθηκε. Συγκρίνετε τις δύο αποδείξεις . Τι συμπέρασμα βγάζετε; Ποια από τις δύο γενικεύει το συμπέρασμα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

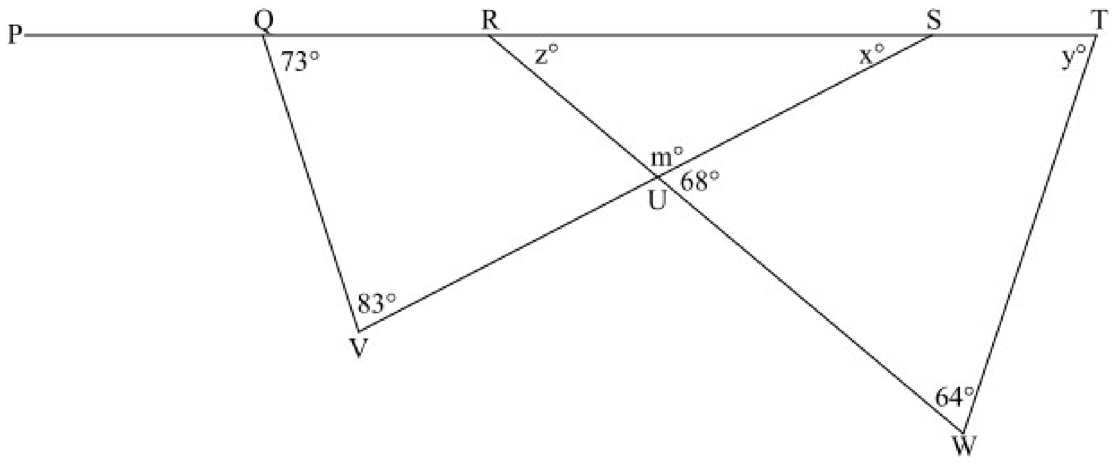
3^Η ΕΝΟΤΗΤΑ

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1</u>

ΟΝΟΜΑ : …………………………………………………………………………….

Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στα παρακάτω σχήματα :

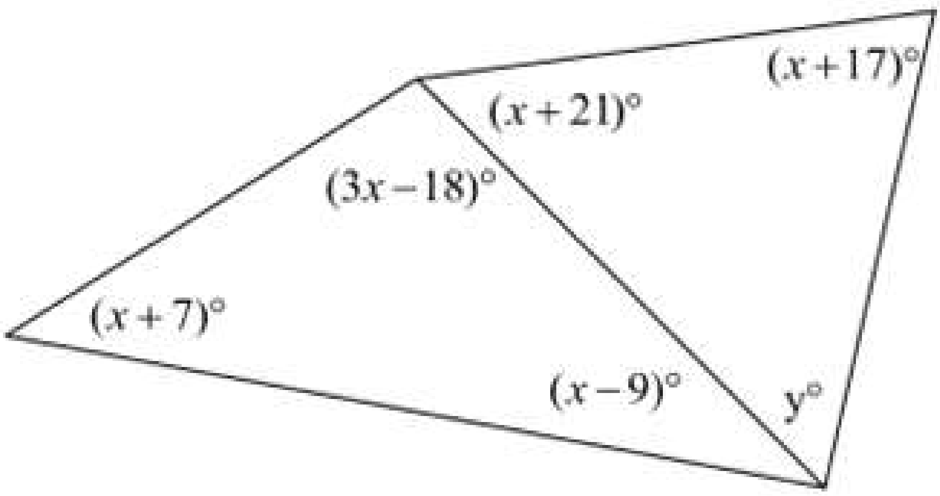


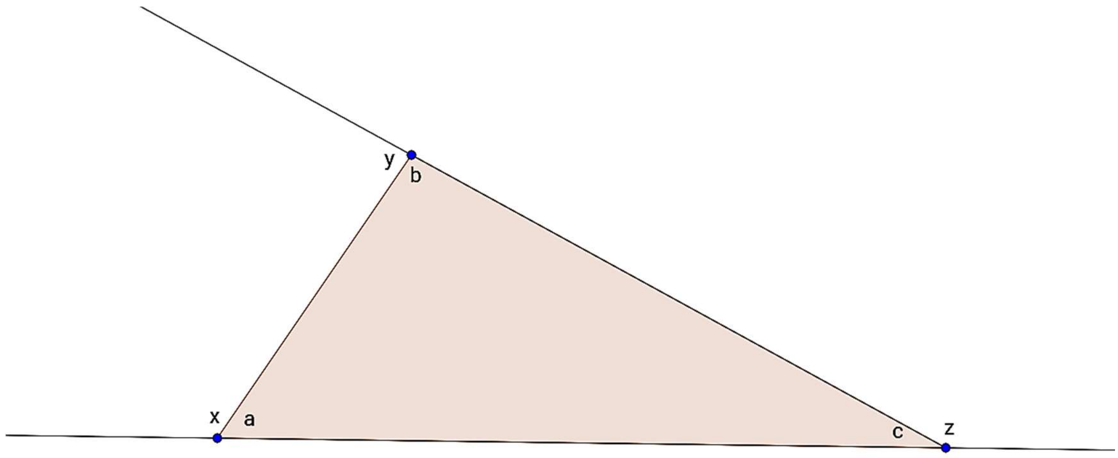

P
Q
R
S
T
73°
z°
x°
y°
m°
68°
U
83°
V
64°
W

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2</u>

ΟΝΟΜΑ : …………………………………………………………………………………….

Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες του παρακάτω σχήματος





Σύμφωνα με το σχήμα ποια είναι η τιμή της παράστασης :

(x + y + z) – (a + b + c)

Α) -180°   Β) 360°   Γ) 180°   Δ) 90°

<u>**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3**</u>

ΟΝΟΜΑ : ……………………………………………………………………………..

Να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις :

1.Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ , με Α=90°. Εξωτερικά του ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ.Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΓΔ και ΑΒ, να βρείτε τις γωνίες των τριγώνων :

α) ΑΓΔ β) ΒΕΓ

2.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και η διάμεσος του ΑΔ τέτοια ώστε ΒΑΔ=30°. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε ΑΔ=ΑΕ.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.