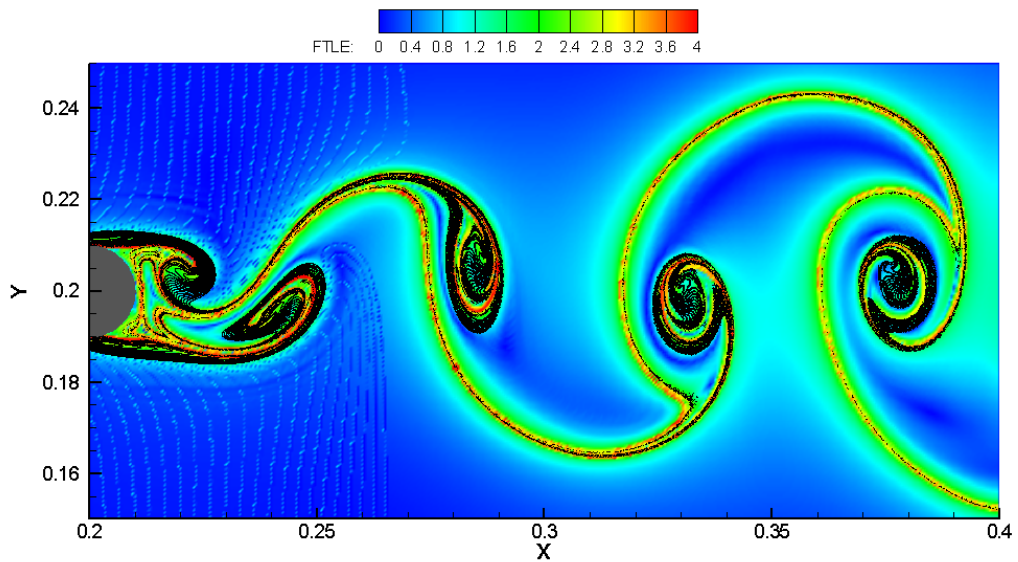


**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Εξαγωγή συνεκτικών δομών σε ασταθείς ροές με
λαγκρανσιανές μεθόδους**



ΚΟΥΡΕΝΤΗΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΑΕΜ:395

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Δρ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ

ΚΟΖΑΝΗ (ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ, 2010)

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την εξαγωγή συνεκτικών δομών κατά Lagrange, οι οποίες εμφανίζονται στο πεδίο τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου, σε ροή γύρω από κύλινδρο. Αρχικά γίνεται εφαρμογή της μεθόδου σε χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας για στρωτή ροή και οι δομές ταυτοποιούνται με αυτές προηγούμενων μεθόδων. Στην συνέχεια η μέθοδος εφαρμόζεται σε χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας που προέρχονται από μετρήσεις ταχύτητας τυρβώδους ροής με την μέθοδο PIV οι οποίες είχαν επεξεργαστεί στην συνέχεια με την μέθοδο POD για την ανάκτηση της πληροφορίας του χρόνου. Μελετώνται περιπτώσεις σταθερής εισερχόμενης ταχύτητας καθώς και περιπτώσεις με επιβολή αρμονικών διαταραχών. Γίνεται για πρώτη φορά οπτικοποίηση της οδού στροβίλων von Kármán σε τυρβώδη ροή και μάλιστα οι δομές είναι παρόμοιες με αυτές που εμφανίζονται στην περίπτωση στρωτής ροής. Τέλος μελετάται η επίδραση των επιβαλλόμενων διαταραχών καθώς επίσης και η επίδραση της συχνότητας και του πλάτους ταλάντωσης αυτών.

Abstract

The purpose of this study is to reveal Lagrangian coherent structures, as ridges on the Finite-Time Lyapunov Exponent field, using discrete velocity data obtained from both CFD (laminar flow) and PIV measurements (turbulent flow) concerning flow over a cylinder. In the case of experimental data only the large scale dynamics were imprinted on the velocity data by reconstruction of the two more energetic modes of the decomposed (POD) velocity field. Various cases of inflow conditions are studied including natural and forced wake. Finally the effect of frequency and peak-to-peak velocity amplitude of the perturbations is considered.

Ευχαριστίες

Εξ' αρχής θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή, Δρ. Ευστάθιο Κωνσταντινίδη, χωρίς την σημαντική συμβολή του οποίου δεν θα ήταν εύκολη η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 | Ροή ρευστού γύρω από κύλινδρο..... | 1 |
| 1.2 | Εξαγωγή συνεκτικών δομών..... | 3 |
| 2 | Περιγραφή των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν | 8 |
| 2.1 | Δεδομένα που προέρχονται από υπολογιστική ρευστομηχανική (περίπτωση στρωτής ροής)..... | 8 |
| 2.2 | Δεδομένα που προέρχονται από πειραματικές μετρήσεις (περίπτωση τυρβώδους ροής)..... | 9 |
| 2.3 | Περιγραφή της μεθόδου ορθοκανονικής αποικοδόμησης (POD)..... | 10 |
| 3 | Μεθοδολογία | 13 |
| 3.1 | Μέθοδος υπολογισμού του εκθέτης Lyapunov πεπερασμένου χρόνου..... | 13 |
| 3.1.1 | Εκθέτης Lyapunov πεπερασμένου Χρόνου (FTLE)..... | 13 |
| 3.1.2 | Συνεκτικές δομές κατά Lagrange (LCS)..... | 15 |
| 3.1.3 | Υπολογισμός του πεδίου FTLE..... | 17 |
| 3.1.4 | Διαθέσιμα λογισμικά υπολογισμού του πεδίου FTLE..... | 18 |
| 3.2 | Εφαρμογή στην περίπτωση στρωτής ροής..... | 23 |
| 3.2.1 | Τροποποίηση του κώδικα LCS Matlab Kit..... | 23 |
| 3.2.2 | Επιλογή παραμέτρων που σχετίζονται με τον χρόνο..... | 24 |
| 3.2.3 | Επιλογή παραμέτρων που σχετίζονται με τον χώρο..... | 25 |
| 3.2.4 | Επιλογή μεθόδου ολοκλήρωσης και παρεμβολής..... | 25 |
| 3.3 | Εφαρμογή στην περίπτωση τυρβώδους ροής..... | 26 |
| 4 | Αποτελέσματα | 31 |
| 4.1 | Στρωτή ροή..... | 31 |
| 4.2 | Τυρβώδης ροή..... | 36 |
| 4.2.1 | Επίδραση της ταχύτητας..... | 39 |
| 4.2.2 | Επίδραση των επιβαλλόμενων διαταραχών..... | 40 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.3 | Επίδραση της συχνότητας των επιβαλλόμενων διαταραχών..... | 44 |
| 4.2.4 | Επίδραση του πλάτους ταλάντωσης των επιβαλλόμενων διαταραχών | 44 |
| 5 | Συμπεράσματα | 49 |
| 6 | Βιβλιογραφία | 51 |

1 Εισαγωγή

1.1 Ροή ρευστού γύρω από κύλινδρο

Η ροή ρευστού γύρω από αντικείμενα αποτελεί το αντικείμενο πολλών μελετών αφού υπάρχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές που σχετίζονται με αυτή. Η παρούσα εργασία ασχολείται με την ροή ρευστού γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού παρατηρείτε αποκόλληση και αισθητή ταλάντωση της ροής στον ολκό του κυλίνδρου.

Καθώς το ρευστό πλησιάζει την επιφάνεια του κυλίνδρου δημιουργείται ένα οριακό στρώμα λόγω του ιξώδους του ρευστού. Το οριακό αυτό στρώμα χαρακτηρίζεται από μείωση της ταχύτητας του ρευστού μέχρι και τον μηδενισμό αυτής στα σύνορα του κυλίνδρου που ουσιαστικά αποτελούν σύνορα μη-ολίσθησης. Το οριακό αυτό στρώμα που δημιουργείται υποδηλώνει αστάθεια της ροής υπό την έννοια ότι το στρώμα αυτό είναι επιρρεπές στις αυξομειώσεις της πίεσης. Πιο συγκεκριμένα όταν η πίεση αυξάνεται κατά μήκος της κατεύθυνσης της ροής εμφανίζεται αποκόλληση του οριακού στρώματος. Κατά συνέπεια δημιουργούνται συνθήκες υποπίεσης αφού στο μπροστινό μέρος η πίεση είναι μέγιστη (σημείο ανακοπής) και στο πίσω μέρος η ροή έχει αποκολληθεί με αποτέλεσμα την μείωση της.

Συγχρόνως η αποκόλληση της ροής δημιουργεί ένα ελεύθερο οριακό στρώμα, λόγω των διατμητικών τάσεων, το οποίο λόγω της μεγάλης αστάθειας που παρουσιάζει παίρνει σχήμα μεγάλης δίνης και τελικά αποκολλάται εντελώς από τον κύλινδρο. Η αποκόλληση αυτή των στροβίλων γίνεται συνήθως από την πάνω και από την κάτω μεριά του κυλίνδρου εναλλάξ σχηματίζοντας την οδό στροβίλων von Kármán στον ολκό του κυλίνδρου. Η έκλυση των στροβίλων αυτών παρατηρείται για αριθμούς Reynolds 45 και πάνω. Καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνει περαιτέρω αρχίζουν να εμφανίζονται μεγαλύτερες αστάθειες στην ροή και έτσι εμφανίζονται φαινόμενα τριών διαστάσεων και τύρβη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για μεγάλους αριθμούς Reynolds να παρατηρούνται χαοτικά φαινόμενα πάνω σε μία ήδη ασταθή ροή στον ολκό του κυλίνδρου που όμως παρουσιάζει κάποια μορφή οργάνωσης (Konstantinidis et al., 2010).

Η έκλυση αυτών των στροβίλων γίνεται με περιοδικό τρόπο και η συχνότητα έκλυσης στροβίλων συνδέεται με τον αριθμό Reynolds. Η συχνότητα έκλυσης των στροβίλων στην διαστατική ανάλυση περιγράφεται με τον αριθμό Strouhal. Ο αριθμός Strouhal στην περίπτωση ροής γύρω από κύλινδρο ορίζεται ως

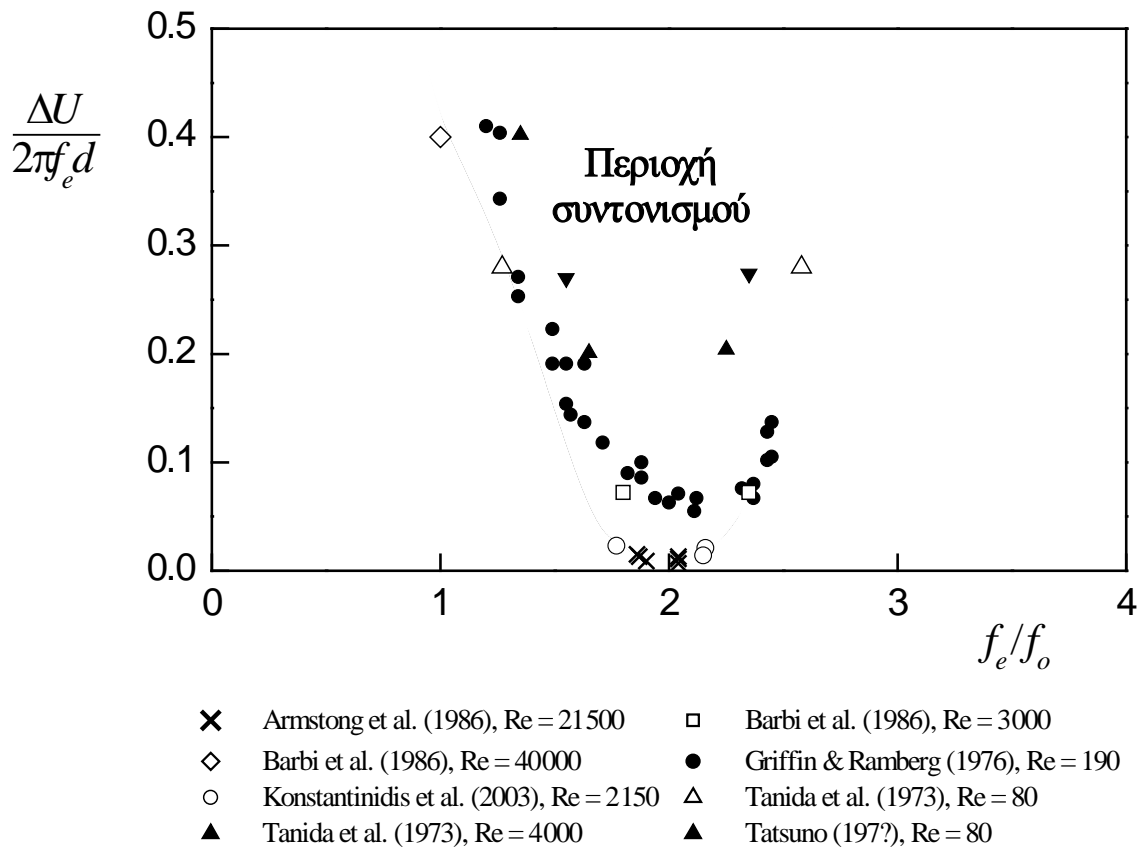
$$St = \frac{f_0 D}{U_0} \quad (1.1)$$

όπου f_0 είναι η συχνότητα έκλυσης των στροβίλων, D η διάμετρος του κυλίνδρου και U_0 η ταχύτητα του ρευστού. Για αριθμούς Strouhal της τάξης του ένα στην κίνηση του ρευστού κυριαρχεί το ιξώδες με αποτέλεσμα να υπάρχει μία περιοδική ταλάντωση του ρευστού. Καθώς ο αριθμός Strouhal μικραίνει αρχίζει να γίνεται έκλυση στροβίλων εμφανίζοντας κάποια πιο ασταθή χαρακτηριστικά μέχρι που οι αστάθειες αυτές πλέον κυριαρχούν.

Η περιοδική αυτή έκλυση των στροβίλων δημιουργεί περιοδικές αυξομειώσεις της πίεσης οι οποίες με την σειρά τους δημιουργούν περιοδικές δυνάμεις που ενεργούν στον κύλινδρο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ταλάντωση του κυλινδρικού σώματος. Σε περιπτώσεις ειδικότερα που θα υπάρξει συντονισμός της ταλάντωσης του κυλίνδρου με την συχνότητα έκλυσης των στροβίλων το αποτέλεσμα μπορεί να είναι καταστρεπτικό όπως στην περίπτωση της γέφυρας Tacoma το 1940 η οποία κατέρρευσε λόγω συντονισμού των εκλυόμενων στροβίλων του αέρα και της γέφυρας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην περίπτωση που επιβάλλονται διαταραχές στην εισερχόμενη ροή αφού παρατηρείται αλληλεπίδραση μεταξύ της συχνότητας και του πλάτους ταλάντωσης των επιβαλλόμενων διαταραχών με τη συμπεριφορά του ρευστού στον ολκό του κυλίνδρου. Οι Konstantinidis et al. (2003) δείχνουν ότι υπάρχει μία περιοχή συχνότητας και πλάτους ταλάντωσης όπου η συχνότητα έκλυσης στροβίλων κλειδώνει στην συχνότητα των επιβαλλόμενων διαταραχών (Σχήμα 1). Μάλιστα για συχνότητες λίγο μικρότερες του συντονισμού υπάρχει μεταφορά ενέργειας από το ρευστό στον κύλινδρο ενώ για συχνότητες μεγαλύτερες από αυτές του συντονισμού παρατηρείται μεταφορά ενέργειας από τον κύλινδρο στο ρευστό. Τα φαινόμενα αυτά μπορεί να προκαλέσουν αυτοδιέγερση ταλαντώσεων στο κυλινδρικό σώμα που να έχουν καταστροφικές συνέπειες. Οι περιπτώσεις ροής με επιβαλλόμενες διαταραχές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού στην φύση συνήθως η ροή δεν

είναι σταθερή. Παραδείγματα αποτελούν η ταλάντωση υψηλών κτιρίων, αγωγών άντλησης πετρελαίου και κατασκευαστικών μερών γεφυρών κυλινδρικού σχήματος.



Σχήμα 1: Η περιοχή που παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού (Konstantinidis et al., 2003).

1.2 Εξαγωγή συνεκτικών δομών

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την εξαγωγή συνεκτικών δομών γύρω από κύλινδρο για τυρβώδη ροή με αλλά και χωρίς εξωτερικά επιβαλλόμενες διαταραχές. Η οπτικοποίηση και εξαγωγή συνεκτικών δομών στην περίπτωση στρωτής ροής έχει γίνει εκτενώς σε προηγούμενες εργασίες. Οι συνήθεις τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε τέτοιες περιπτώσεις για την οπτικοποίηση της ροής είναι ο χρωματισμός της ροής (Σχήμα 2) στην περίπτωση πειραματικών διατάξεων και ο υπολογισμός της τροχιάς αβαρών μονοδιάστατων σωματιδίων στην περίπτωσης υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Παρόλο αυτά με αύξηση του αριθμού Reynolds οι δομές αυτές επηρεάζονται σημαντικά από την τύρβη και τα χαοτικά φαινόμενα καθιστώντας δύσκολη την αναπαράσταση των βασικών δομών που ενυπάρχουν. Είναι γνωστό ότι οι δομές

μεγάλης κλίμακας παίζουν σημαντικό ρόλο στην μελέτη φαινομένων μεταφοράς μάζας και ανάμιξης σε ασταθείς ροές.

Για την εμφάνιση των βασικών δομών στον χώρο χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος ορθοκανονικής αποικοδόμησης (POD) από τους Konstantinidis et al. (2007,2008). Στην συνέχεια έγινε ανακατασκευή του πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιώντας μόνο τις δύο ενεργειακά μεγαλύτερες δομές. Πάνω στις ανακατασκευασμένες αυτές χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας έγινε εξαγωγή των συνεκτικών δομών κατά Lagrange. Ο Haller (2002) και στην συνέχεια οι Shadden et al. (2005) έδειξαν ότι είναι δυνατή η αποκάλυψη συνεκτικών δομών στο πεδίο τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου χρησιμοποιώντας χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας που προέρχονται είτε από πειραματικά δεδομένα είτε από δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Οι δομές αυτές ενεργούν ως τέλεια φράγματα στην ροή υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει ροή ρευστού διαμέσω αυτών. Επίσης αναλόγως αν οι συνεκτικές δομές είναι έλκουσες ή απωθητικές το ρευστό τείνει να κινηθεί προς της δομές ή να απομακρυνθεί από αυτές αντίστοιχα.

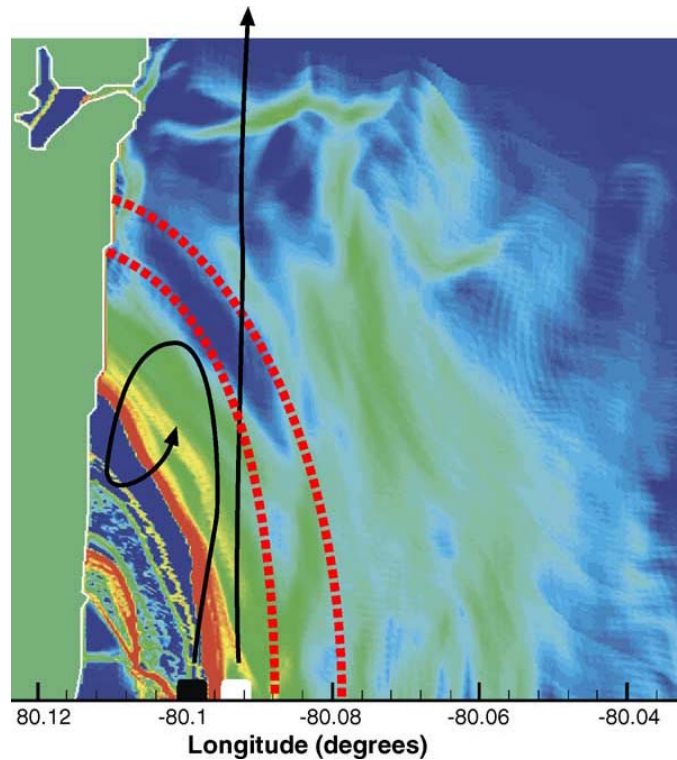
Οι Lekien et al (2005) έκαναν εξαγωγή συνεκτικών δομών, με χρήση της μεθόδου FTLE, στα επιφανειακά ρεύματα της ακτής στην Φλόριντα. Η μέθοδος εφαρμόστηκε πάνω σε χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας των επιφανειακών νερών της ακτής οι οποίες προέρχονταν από μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν με την βοήθεια ραντάρ υψηλής συχνότητας (High Frequency Radar technology). Με την εύρεση των συνεκτικών δομών έγινε κατανοητή η μεταφορά των επιφανειακών οργανικών ρύπων (Σχήμα 3). Έτσι έγινε φανερό που υπάρχει ανακυκλοφορία με αποτέλεσμα οι ρύποι να παραμένουν για μεγάλο χρονικό διάστημα στην παραλία καθώς επίσης που και πότε πρέπει να απελευθερώνονται τα απόβλητα ώστε να μην παραμένουν στην ακτή (Σχήμα 4). Για να γίνει αυτό εφαρμόσιμο κατασκευάστηκε ένα μοντέλο πρόβλεψης της ταχύτητας ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός του πεδίου FTLE σε πραγματικό χρόνο.

Οι Shadden et al. (2007) χρησιμοποίησαν την μέθοδο για να μελετήσουν τα φαινόμενα μεταφοράς και ανάμιξης κατά τον σχηματισμό και την κίνηση δινών που δημιουργούνται από διάταξη πιστονίου-κυλίνδρου. Ποιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν πειραματικά δεδομένα καθώς και δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής και έδειξαν πέρα των άλλων (με την βοήθεια των συνεκτικών δομών) ότι υπάρχει κίνηση ρευστού διαμέσω της δίνης (Σχήμα 5). Επίσης οι δομές αυτές χρησιμοποιήθηκαν σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές μελέτης των φαινομένων ανάμιξης.

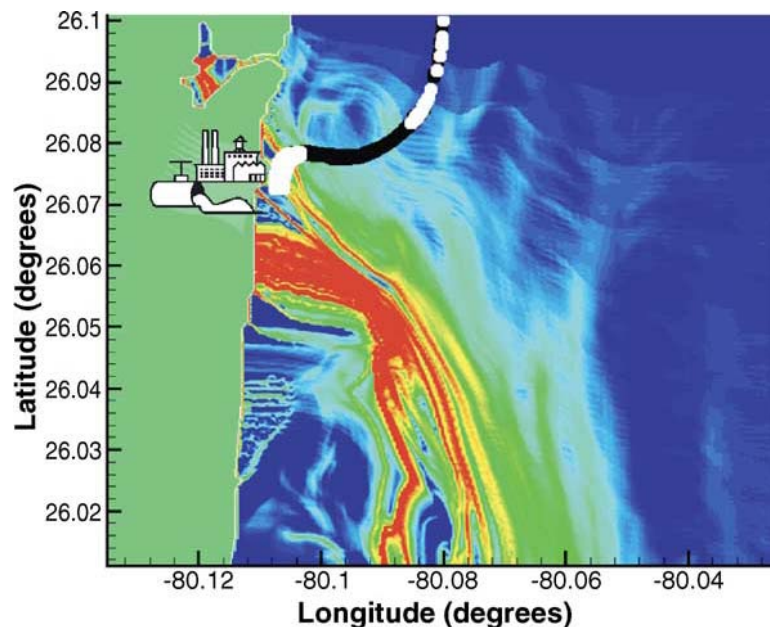
Η μεθοδολογία εφαρμόστηκε επίσης σε διάφορα άλλα προβλήματα όπως μεταφορά αέριων ρύπων, καθορισμός του σημείου αποκόλλησης της ροής σε αεροτομή, εύρεση περιοχών ανακυκλοφορίας της ροής του αίματος σε αγγεία και άλλες πολλές. Γίνεται φανερό ότι η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την οπτικοποίηση της ροής αλλά και για την κατανόηση φαινομένων μεταφοράς και ανάμιξης.



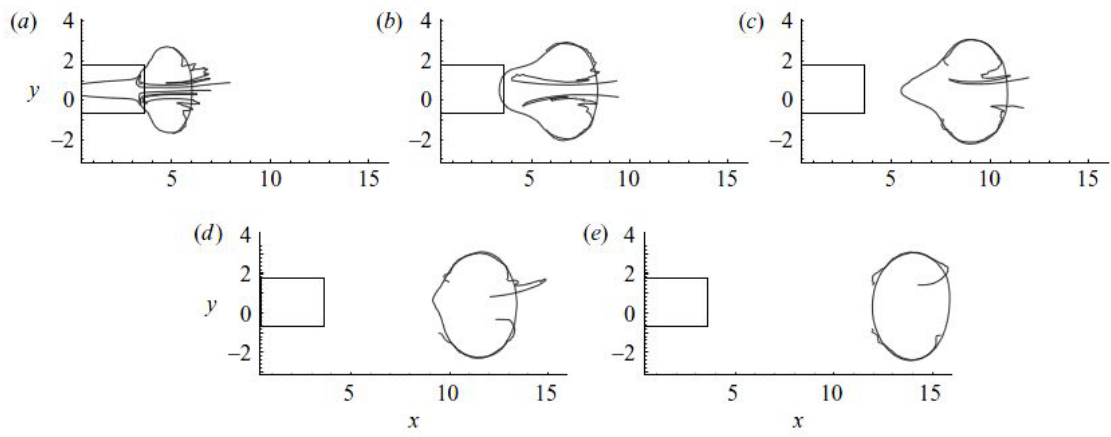
Σχήμα 2: Η οδός στροβίλων von Kármán. Για την οπτικοποίηση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος χρωματισμού του ρευστού. Μάλιστα χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά χρώματα για την καλύτερη οπτικοποίηση των φαινομένων μεταφοράς μάζας (Perry et al., 1982).



Σχήμα 3: Πεδίο τιμών του εκθέτη Lyapunov στην ακτή της Φλόριντας. Οι κόκκινες τελείες αντιπροσωπεύουν τις συνεκτικές δομές σε μεταγενέστερους χρόνους. Με άσπρο και μαύρο παριστάνονται δύο πιθανές θέσεις έκλυσης ρύπων. Στην πρώτη περίπτωση οι ρύποι θα μεταφερθούν μακριά από την παραλία ενώ στην δεύτερη περίπτωση οι ρύποι θα καταλήξουν να πλησιάζουν την παραλία παρόλο που και οι δύο απελευθερώνονται σε πολύ κοντινή θέση (Lekien et al., 2005).



Σχήμα 4: Έκλυση ρύπων από εργοστάσιο με σταθερό ρυθμό (μαύρο) και έκλυση ρύπων σε ελεγχόμενες χρονικές περιόδους (άσπρο). Στην δεύτερη περίπτωση παρατηρείται ότι οι ρύποι απομακρύνονται από την ακτή πιο γρήγορα (Lekien et al., 2005).



Σχήμα 5: Αποθητικές και έλκουσες δομές σε διάφορες χρονικές στιγμές. Η μεταφορά ρευστού διαμέσου της δίνης γίνεται μεταξύ των δύο συνεκτικών δομών (Shadden et al., 2007).

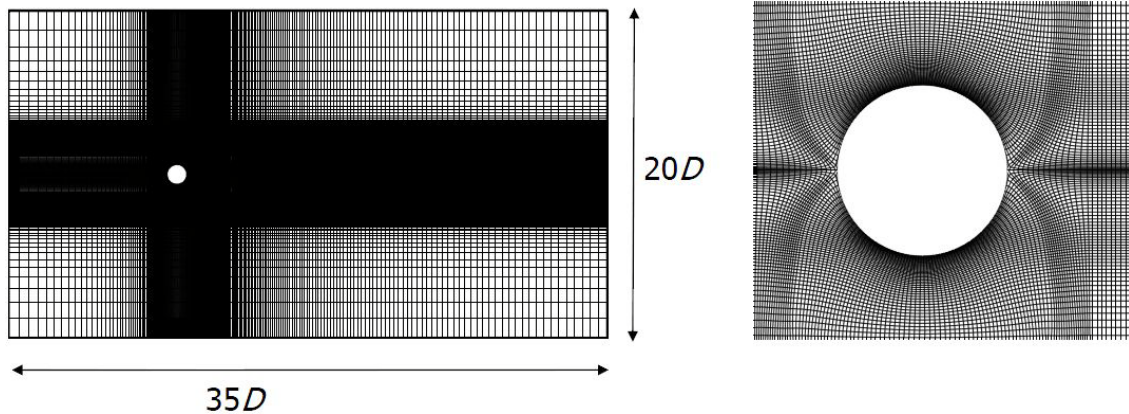
2 Περιγραφή των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν

2.1 Δεδομένα που προέρχονται από υπολογιστική ρευστομηχανική (περίπτωση στρωτής ροής)

Η μέθοδος FTLE εφαρμόζεται αρχικά σε χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας σε ροή γύρω από κύλινδρο που προέρχονται από την υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα. Ο αριθμός Reynolds με βάση τη διάμετρο του κυλίνδρου, την ταχύτητα της εισερχόμενης ροής και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού είναι 180 και το μέτρο της ταχύτητας εισόδου είναι 0.198m/s. Οπότε η ροή μπορεί να θεωρηθεί στρωτή. Το υπολογιστικό πλέγμα (Σχήμα 6) εκτείνεται σε 35 διαμέτρους στην διεύθυνση της ροής και σε 20 διαμέτρους κάθετα στην ροή. Η διάμετρος του κυλίνδρου είναι 0.02m. Τέλος το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από 300X209 κόμβους.

Η επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes έγινε με την μέθοδο SIMPLE. Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι μη-ολίσθηση στην επιφάνεια του κυλίνδρου, σταθερή ταχύτητα εισόδου, συμμετρία στις παράπλευρες επιφάνειες και συνθήκη συναγωγής στην έξοδο. Περισσότερες λεπτομέρειες, για τα δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής που χρησιμοποιήθηκαν υπάρχουν σε προηγούμενες εργασίες από τους Bouris et al. (2005).

Παράλληλα με την επίλυση των εξισώσεων Navier–Stokes αβαρή σωματίδια αμελητέου μεγέθους εκχύνονται στο πεδίο ροής ανάντι του κυλίνδρου τα οποία είναι γνωστό ότι σχηματίζουν συνεκτικές δομές στον ολκό του κυλίνδρου λόγω της περιοδικής έκλυσης δινών von Kármán. Η τροχιά των σωματιδίων αυτών χρησιμοποιείται για την ταυτοποίηση της μεθόδου FTLE συγκρίνοντας τις δομές που σχηματίζουν τα σωματίδια με τις συνεκτικές δομές κατά Lagrange.



Σχήμα 6: Ορθογώνιο καμπυλόγραμμο υπολογιστικό πλέγμα (Bouris et al., 2005).

2.2 Δεδομένα που προέρχονται από πειραματικές μετρήσεις (περίπτωση τυρβώδους ροής)

Οι χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας για τυρβώδη ροή που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία προέρχονται από πειραματικές μετρήσεις. Οι μετρήσεις έγιναν σε υδροσήραγγα κλειστού τύπου. Ο κύλινδρος είναι ακρυλική βέργα κυκλικής διατομής με διάμετρο 7.2mm και λεία επιφάνεια. Ο κύλινδρος εκτίθεται σε εισερχόμενη ομοιόμορφη ροή νερού και μετράται η ταχύτητα του. Να σημειωθεί ότι τα πειράματα και οι μετρήσεις έγιναν στο King's College London από τους Konstantinidis et al. (2007, 2008).

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται η μέθοδος FTLE σε διάφορες περιπτώσεις με μόνιμη εισερχόμενη ροή αλλά και με εισερχόμενη ροή με αρμονικές διαταραχές. Για ροή χωρίς διαταραχές μελετώνται 3 περιπτώσεις με διαφορετική ταχύτητα εισόδου. Για ροή με διαταραχές μελετώνται περιπτώσεις με διαφορετικές συχνότητες ταλάντωσης της εισερχόμενης ροής αλλά και με διαφορετικά πλάτη ταλάντωσης. Συνοπτικά οι περιπτώσεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Σε όλες τις περιπτώσεις η ροή μπορεί να θεωρηθεί τυρβώδης και ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται σε σχέση με την μέση ταχύτητα της εισερχόμενης ροής, το κινηματικό ιξώδες του νερού και την διάμετρο του κυλίνδρου. Να σημειωθεί επίσης ότι σε όλες τις περιπτώσεις μη μόνιμης ροής η συχνότητα ταλάντωσης των διαταραχών είναι διπλάσια αυτής της έκλυσης στροβίλων στον ολκό του κυλίνδρου. Έχει παρατηρηθεί ότι υπό τις παρούσες συνθήκες η συχνότητα έκλυσης στροβίλων με διαταραχές κλειδώνει σε μία συχνότητα υποδιπλάσια της συχνότητας των επιβαλλόμενων διαταραχών (Konstantinidis et al., 2003).

Η μέτρηση της ταχύτητας έγινε με την μέθοδο PIV (Particle Image Velocimetry). Για κάθε περίπτωση έγινε δειγματοληψία 480 στιγμιαίων πεδίων ταχύτητας. Παρόλα αυτά η συχνότητα δειγματοληψίας ήταν αρκετά μικρότερη της συχνότητας έκλυσης στροβίλων στον ολκό του κυλίνδρου. Για τον λόγο αυτό τα πεδία ταχύτητας υπέστησαν περαιτέρω επεξεργασία με την μέθοδο που περιγράφεται παρακάτω ώστε να προκύψουν χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας για μία περίοδο έκλυσης στροβίλων.

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά μεγέθη των περιπτώσεων που μελετώνται στην παρούσα εργασία.

| Περίπτωση | Συχνότητα διαταραχών | Πλάτος ταλάντωσης | Ταχύτητα εισερχόμενης ροής | Συχνότητα έκλυσης στροβίλων | Αριθμός Reynolds |
|-----------|----------------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------|
| | f_e [hz] | ΔU [m/s] | U_0 [m/s] | F_0 [hz] | Re |
| A | | | 0.149 | 4.3 | 1072 |
| B | | | 0.3 | 8.8 | 2150 |
| C | | | 0.686 | 20.15 | 4955 |
| B1 | 16.4 | 0.04 | 0.294 | 8.2 | 2125 |
| B2a | 17.7 | 0.02 | 0.293 | 8.85 | 2125 |
| B2b | 17.7 | 0.04 | 0.301 | 8.85 | 2150 |
| B2c | 17.8 | 0.07 | 0.295 | 8.9 | 2130 |
| B3 | 19.1 | 0.04 | 0.302 | 9.55 | 2150 |

2.3 Περιγραφή της μεθόδου ορθοκανονικής αποικοδόμησης (POD)

Τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των συνεκτικών δομών κατά Lagrange είχαν υποστεί περαιτέρω επεξεργασία με την μέθοδο ορθοκανονικής αποικοδόμησης (Proper Orthogonal Decomposition) (Konstantinidis et al., 2007, 2008 και Kourentis et al., 2009-2010). Το πεδίο ταχύτητας σύμφωνα με αυτή την μεθοδολογία μπορεί να περιγραφεί ως το άθροισμα ορθογώνιων συναρτήσεων βάσης με κάποιους κατάλληλους συντελεστές έτσι ώστε

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(t_i) \Phi_k(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Έτσι το πρόβλημα έγκειται στην εύρεση των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων που ικανοποιούν την σχέση

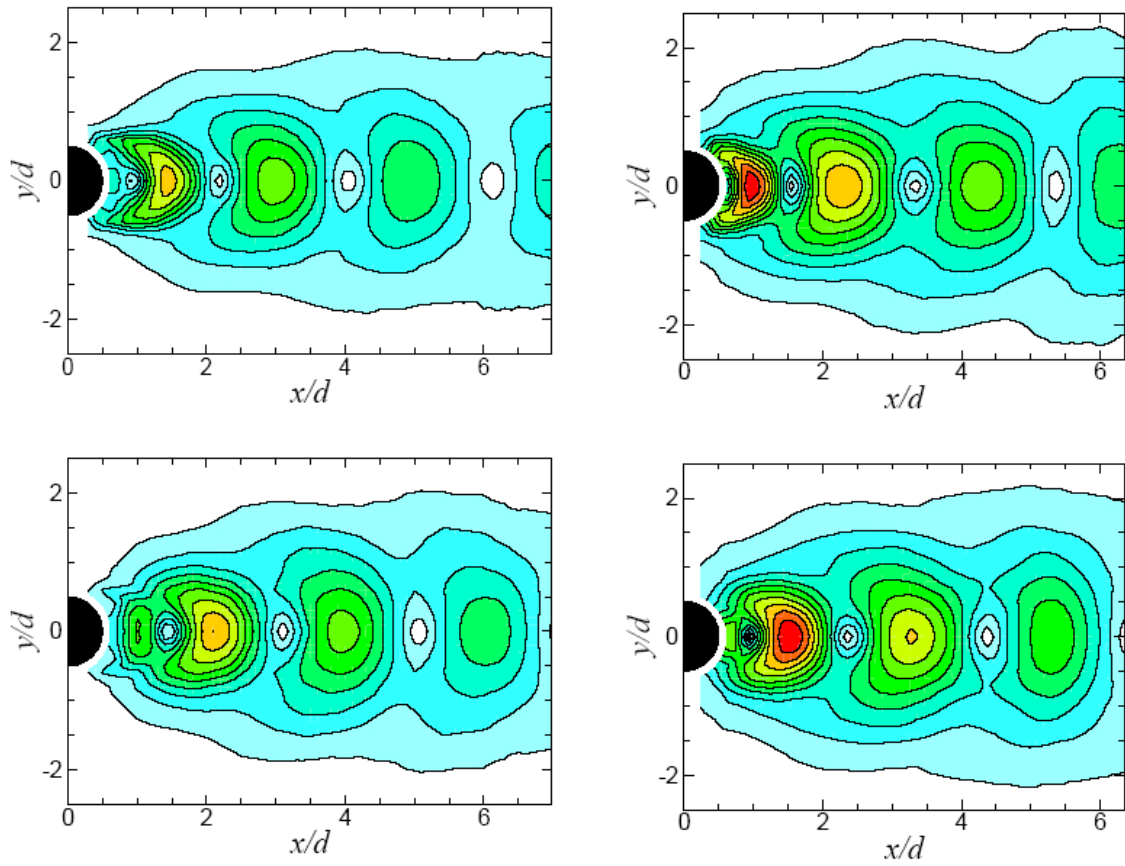
$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} \quad (2.2)$$

όπου \mathbf{C} είναι ο συμμετρικός πίνακα που περιέχει τους συντελεστές συσχέτισης των πεδίων ταχύτητας και \mathbf{A} ο πίνακας που περιέχει τους συντελεστές $a_{ik} = a_k(t_i)$. Εάν οι ιδιοτιμές λ , που αντιπροσωπεύουν την ενέργεια, ταξινομηθούν κατά φθίνουσα ενεργειακή σειρά τότε από τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν στατιστικά ανεξάρτητες συναρτήσεις βάσης

$$\Phi_j = \sum_{k=0}^{M-1} a_j(t_k) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_k) \quad (2.3)$$

που αντιπροσωπεύουν τις χώρο-χρονικές δομές του πεδίου ροής.

Η μηδενική δομή αντιπροσωπεύει το χρονικό μέσο του πεδίου ταχύτητας. Οι πρώτες και οι δεύτερες ενεργειακά δομές παρουσιάζουν αντισυμμετρία καθώς επίσης είναι παρόμοιες αλλά μετατοπισμένες κατά μισό μήκος κύματος η μία από την άλλη (Σχήμα 7). Οι τρίτες μέχρι πέμπτες δομές παρουσιάζουν κάποια οργάνωση επίσης. Δομές χαμηλότερης ενέργειας παρουσιάζουν μεγαλύτερη αταξία και συνεπώς συνδέονται με χαοτικά φαινόμενα λόγω τύρβης. Παρατηρείται επίσης ότι οι δύο πρώτες ενεργειακά δομές αντιπροσωπεύουν ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό (50-60%) της συνολικής τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Να σημειωθεί επίσης ότι στις περιπτώσεις με διαταραχές το ποσοστό αυτό είναι ακόμα μεγαλύτερο. Έτσι έγινε αποικοδόμηση του πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιώντας μόνο τις δύο αυτές πρώτες δομές. Παρατηρήθηκε ότι οι συντελεστές των δύο πρώτων δομών δείχνουν κυκλική αρμονική εξάρτηση. Έγινε προσαρμογή κυκλικής καμπύλης με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να επανακτηθεί η πληροφορία του χρόνου και να γίνει αποικοδόμηση του πεδίου ταχύτητας για μία περίοδο.



Σχήμα 7: Βασικές χώρο-χρονικές δομές της ταχύτητας του πεδίου ροής για τις περιπτώσεις B (αριστερά) και την περίπτωση B2c (δεξιά). Από πάνω προς τα κάτω παρουσιάζονται η πρώτη και η δεύτερη σε ενεργειακή κατάταξη δομές.

3 Μεθοδολογία

3.1 Μέθοδος υπολογισμού του εκθέτης Lyapunov πεπερασμένου χρόνου

Παρακάτω γίνεται περιγραφή του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου καθώς και των συνεκτικών δομών που αποκαλύπτονται πάνω στο πεδίο τιμών του εκθέτη αυτού οι οποίες ονομάζονται συνεκτικές δομές κατά Lagrange.

Η ανάλυση που ακολουθεί προέρχεται από τον κλάδο της δυναμικής συστημάτων. Παρόλα αυτά όμως επειδή η κίνηση των σωματιδίων σε ένα ρευστό μπορεί να περιγραφεί εξίσου ως ένα δυναμικό σύστημα η μεθοδολογία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και στην ανάλυση πεδίων ροής. Έτσι όταν π.χ. γίνεται αναφορά σε σημεία στον χώρο φάσεων εννοούνται τα αντίστοιχα σωματίδια στο πεδίο ροής ενός ρευστού στον δισδιάστατο χώρο. Επίσης η μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί και σε τρισδιάστατα πεδία ταχύτητας. Παρόλα αυτά η ανάλυση που ακολουθεί αφορά μόνο πεδία ταχύτητας δύο διαστάσεων αφού τα προβλήματα πάνω στα οποία θα εφαρμοστεί ορίζονται πάνω στον δισδιάστατο χώρο.

3.1.1 Εκθέτης Lyapunov πεπερασμένου Χρόνου (FTLE)

Η κίνηση των σωματιδίων ενός ρευστού μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0), t) \quad (3.1)$$

όπου $\vec{v}(\vec{x}(t), t)$ είναι το πεδίο ταχύτητας και $\vec{x}(t)$ είναι η τροχιά ενός σημείου που την χρονική στιγμή t_0 βρίσκεται στην θέση \vec{x}_0 . Αυτή η τροχιά είναι η αριθμητική λύση της εξίσωσης (3.1) με αρχικές συνθήκες $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (δηλαδή την αρχική θέση των σωματιδίων του ρευστού). Το δεξιό μέλος της (3.1) είναι συνάρτηση και του χρόνου οπότε η εξίσωση αυτή περιγράφει μια ασταθή ροή ή γενικότερα ένα χρονικά μεταβαλλόμενο δυναμικό σύστημα. Να σημειωθεί επίσης ότι επειδή στην ανάλυση αυτή είναι πολύ σημαντική η εξάρτηση της τροχιάς από την αρχική της θέση και τον αρχικό της χρόνο στις εξισώσεις συμπεριλαμβάνονται και οι αρχικές αυτές συνθήκες.

Βασική παραδοχή που γίνεται είναι ότι το πεδίο ταχύτητας (δηλαδή η διανυσματική συνάρτηση $\vec{v}(\vec{x}(t), t)$) πρέπει να είναι τουλάχιστον C^0 κλάσεις στον χρόνο και C^2 στον

χώρο. Δηλαδή πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεχής αλλά μη διαφοροποιήσιμη στον χρόνο και τουλάχιστον να ορίζονται οι δεύτεροι παράγωγοι στον χώρο. Αυτό σημαίνει ότι η $\bar{x}(t)$ θα είναι C^1 κλάσεις στον χρόνο και C^3 στον χώρο.

Καθώς εξελίσσεται ο χρόνος η λύση της εξίσωσης (3.1) σχηματίζει καμπύλες. Ορίζεται ως «χάρτης» $\Phi_{t_0}^t$ η διαδρομή της λύσης ενός σημείου του πεδίου από τον χρόνο t_0 στον χρόνο t , δηλαδή

$$\Phi_{t_0}^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0), \quad (3.2)$$

με τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0}^{t_0}(\bar{x}) &= \bar{x}, \\ \Phi_{t_0}^{t+s}(\bar{x}) &= \Phi_s^{t+s}(\Phi_{t_0}^s(\bar{x})) = \Phi_t^{t+s}(\Phi_{t_0}^t(\bar{x})). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ένα σημείο γειτονικό στο σημείο \bar{x}_0 την χρονική στιγμή t_0 αναμένεται να συμπεριφερθεί παρόμοια με το σημείο \bar{x}_0 όταν μεταφερθεί από την ροή για μικρό χρονικό διάστημα. Άλλα καθώς ο χρόνος εξελίσσεται η απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων θα αλλάξει. Η ιδέα της ανάλυσης αυτής είναι να γίνει ποσοτικοποίηση της απομάκρυνσης γειτονικών σωματιδίων με την πάροδο του χρόνου. Ουσιαστικά το FTLE είναι ένας μέσος όρος του μέγιστου βαθμού απομάκρυνσης ζευγών σωματιδίων όταν αυτά μεταφερθούν από την ροή.

Έστω ένα σημείο που βρίσκεται στην θέση \bar{x} την χρονική στιγμή t_0 , και ένα γειτονικό σημείο $\bar{y} = \bar{x} + \delta\bar{x}(0)$ όπου $\delta\bar{x}(0)$ είναι απειροελάχιστο και αυθαίρετα προσανατολισμένο. Μετά από χρονικό διάστημα T αυτή η διαταραχή που έχουμε εισαγάγει γίνεται

$$\delta\bar{x}(T) = \frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\bar{x})}{d\bar{x}} \delta\bar{x}(0) + O(\|\delta\bar{x}(0)\|^2). \quad (3.4)$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης (3.4) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος. Έτσι το μέτρο της διαταραχής με χρήση Ευκλείδειας νόρμας είναι

$$\|\delta\bar{x}(T)\| = \sqrt{\left\langle \delta\bar{x}(0), \left[\frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right]^* \frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\bar{x})}{d\bar{x}} \delta\bar{x}(0) \right\rangle} \quad (3.5)$$

όπου με $[\]^*$ συμβολίζετε ο ανάστροφος πίνακας του $[\]$. Ο πίνακας

$$\Delta = \left[\frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right]^* \frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\bar{x})}{d\bar{x}} \quad (3.6)$$

είναι πεπερασμένου χρόνου έκδοση του τανυστή παραμόρφωσης Cauchy-Green. Θεωρούμε $\lambda_{\max}(\Delta)$ την μέγιστη ιδιοτιμή αυτού του τανυστή. Έτσι η ποσότητα $\sqrt{\lambda_{\max}(\Delta)}$ δίνει την μέγιστη έκταση της διαταραχής $\delta\bar{x}(0)$ όταν αυτή είναι ευθυγραμμισμένη με το ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται με την μέγιστη ιδιοτιμή του Δ . Έτσι η

$$\|\delta\bar{x}(T)\|_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(\Delta)} \|\delta\bar{x}(0)\| \quad (3.7)$$

μπορεί να γραφεί επίσης ως

$$\|\delta\bar{x}(T)\|_{\max} = e^{\sigma_0^T(\bar{x})|T|} \|\delta\bar{x}(0)\| \quad (3.8)$$

όπου

$$\sigma_0^T(\bar{x}) = \frac{1}{|T|} \ln \sqrt{\lambda_{\max}(\Delta)}. \quad (3.9)$$

Η εξίσωση (3.9) αντιπροσωπεύει το FTLE με χρόνο ολοκλήρωσης T , που σχετίζεται με ένα σημείο \bar{x} την χρονική στιγμή t_0 . Παρόλο που ο εκθέτης Lyapunov $\sigma_0^T(\bar{x})$ είναι συνάρτηση της κατάστασης \bar{x} την χρονική στιγμή t_0 , αλλάζοντας τον χρόνο t_0 μπορούμε τον θεωρήσουμε και σαν συνάρτηση του χρόνου. Η απόλυτη τιμή στον χρόνο ολοκλήρωσης χρησιμοποιείται γιατί είναι δυνατή εξίσου η προς τα μπρός στον χρόνο όσο και η προς τα πίσω στον χρόνο ολοκλήρωση.

Το πεδίο FTLE αποτελείται από τιμές σε σταθερά σημεία στο πεδίο ροής και έτσι τεχνικά ανήκει στην περιγραφή πεδίου κατά Euler. Παρόλο αυτά θεωρείται ως ποσότητα κατά Lagrange αφού προέρχεται από ανάλυση των τροχιών σημείων της ροής.

3.1.2 Συνεκτικές δομές κατά Lagrange (LCS)

Το πεδίο FTLE φανερώνει διακριτές γραμμές που αποτελούνται από υψηλές τιμές του πεδίου FTLE. Αυτές οι κορυφές στο πεδίο ονομάζονται συνεκτικές δομές κατά Lagrange (Lagrangian Coherent Structures ή εν συντομία LCS). Αν και σε προηγούμενες εργασίες γινόταν χρήση των συνεκτικών αυτών δομών η εξαγωγή τους γινόταν με παρατήρηση και οι ιδιότητες τους δεν ήταν πλήρως καθορισμένες. Ήταν

φανερó ότι οι δομές αυτές ενεργούσαν ως υλικές γραμμές, δηλαδή γραμμές όπου χώριζαν δυναμικά περιοχές με διαφορετική συμπεριφορά στην ροή. Παρόλα αυτά δεν υπήρχαν ακριβείς ορισμοί ώστε να εξαχθεί ένα τέτοιο συμπέρασμα.

Οι Shadden et al. (2005) ορίζουν πλέον επακριβώς την έννοια LCS έτσι ώστε να μπορούν να εξαχθούν αναλυτικά οι δομές αυτές και να καθοριστούν οι ιδιότητες τους. Έτσι ορίζουν τις συνεκτικές δομές κατά Lagrange ως κορυφές στο βαθμωτό πεδίο $\sigma_t^T(\bar{x})$ για κάθε χρόνο t . Επίσης εκτιμούν την ροή του ρευστού διαμέσων των συνεκτικών αυτών δομών για πεπερασμένους χρόνους ολοκλήρωσης T . Για άπειρο χρόνο T , όπου η (3.9) είναι ο κλασικός εκθέτης Lyapunov, η ροή διαμέσου των συνεκτικών δομών είναι μηδενική. Στην πράξη όμως τα δεδομένα του πεδίου ροής υπάρχουν μόνο για πεπερασμένο χρόνο. Παρόλα αυτά δείχνουν ότι και για πεπερασμένο αλλά ικανοποιητικά μεγάλο χρόνο ολοκλήρωσης η ροή διαμέσου των συνεκτικών δομών μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και έτσι μπορούν να θεωρηθούν ως υλικές γραμμές. Δηλαδή μπορούν να θεωρηθούν ως σχεδόν τέλεια φράγματα στην μεταφορά σωματιδίων. Αυτό συνεπάγεται ότι σωματίδια που βρίσκονται πάνω στις συνεκτικές δομές θα παραμείνουν εκεί και έτσι οι συνεκτικές αυτές δομές μεταφέρονται από την ροή σαν σύνολο υλικών σημείων.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στην εξίσωση μπορεί να γίνει χρήση είτε θετικού είτε αρνητικού χρόνου T . Στην περίπτωση που ο χρόνος ολοκλήρωσης (T) είναι θετικός δηλαδή η ολοκλήρωση γίνεται προς τα μπρος στον χρόνο το πεδίο FTLE αποκαλύπτει απωθητικές συνεκτικές δομές (repelling LCS ή rLCS) ενώ στην περίπτωση που γίνει χρήση αρνητικού χρόνου ολοκλήρωσης το πεδίο FTLE αποκαλύπτει έλκουσες συνεκτικές δομές (attractive LCS ή aLCS).

Έστω δύο σωματίδια στην ροή τοποθετημένα σε δύο γειτονικά σημεία του πεδίου ροής όπου το ένα βρίσκεται αρχικά στην μία πλευρά της απωθητικής συνεκτικής δομής και το άλλο στην άλλη πλευρά. Με την πάροδο του χρόνου τα σωματίδια αυτά θα απομακρυνθούν το ένα από το άλλο. Αυτό συμβαίνει γιατί τα σωματίδια αυτά βρίσκονται γύρο από υψηλές τιμές του πεδίου που σημαίνει ότι η αύξηση της διαταραχής μεταξύ των σωματιδίων είναι η μέγιστη. Αντίστοιχα αν αυτά τα σωματίδια βρισκόταν αρχικά τοποθετημένα στις δύο πλευρές μίας έλκουσας συνεκτικής δομής τότε αυτά θα απομακρυνόταν το ένα από το άλλο αν οι υπολογισμοί γινόταν προς τα πίσω στον χρόνο. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι καθώς περνάει ο χρόνος τα σωματίδια τείνουν να πλησιάσουν τις έλκουσες συνεκτικές δομές.

3.1.3 Υπολογισμός του πεδίου FTLE

Η διαδικασία υπολογισμού του πεδίου FTLE έχει ως εξής. Αρχικά ορίζεται ένα πλέγμα πάνω στο οποίο θα υπολογιστεί το πεδίο FTLE. Τα σημεία αυτά του πλέγματος θεωρούνται σημεία του πεδίου της ροής. Για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE για κάθε χρόνο ακολουθείται η εξής διαδικασία. Για κάθε σημείο \vec{x}_0 του πλέγματος υπολογίζεται το $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\vec{x}_0)$. Δηλαδή για κάθε σημείο υπολογίζεται η τελική του θέση μετά από χρόνο T . Αυτό γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση του πεδίου ταχύτητας. Για να γίνει αυτή η ολοκλήρωση θα πρέπει σε κάθε βήμα να γίνεται επίσης παρεμβολή του πεδίου ταχύτητας. Οι Shadden et al. (2005, 2006) προτείνουν και χρησιμοποιούν τέταρτης τάξης Runge-Kutta-Fehlberg αλγόριθμο για την ολοκλήρωση του πεδίου ταχύτητας. Για την παρεμβολή των δεδομένων προτείνουν έναν ιδιαίτερο αλγόριθμο τρι-κυβικής παρεμβολής (tricubic interpolator) κατασκευασμένο από τους Lekien et al. (2005).

Έχοντας τις θέσεις $\vec{x}(t_0+T) = \Phi_{t_0}^{t_0+T}(\vec{x})$ των σημείων υπολογίζεται η παράγωγος $\frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\vec{x})}{d\vec{x}}$ με χρήση κεντρικών πεπερασμένων διαφορών. Στην συνέχεια υπολογίζεται η μέγιστη ιδιοτιμή της και η τιμή του FTLE σύμφωνα με την εξίσωση (3.9).

Σημαντικό ρόλο στην μεθοδολογία αυτή παίζει η επιλογή του χρόνου ολοκλήρωσης. Γενικώς όσο πιο μεγάλος είναι ο χρόνος ολοκλήρωσης τόσο οι συνεκτικές δομές είναι πιο ακριβώς ορισμένες και η ροή διαμέσου αυτών θα είναι μικρότερη. Αυτό σημαίνει επίσης ότι εμφανίζονται πιο πολλές δομές. Παρόλα αυτά στην πράξη ο χρόνος ολοκλήρωσης περιορίζεται λόγω του ότι τα δεδομένα συνήθως είναι πεπερασμένα και στον χώρο και στον χρόνο.

Καταρχάς ο χρόνος ολοκλήρωσης περιορίζεται από την χρονική διάρκεια του πεδίου ταχύτητας, αφού για να ολοκληρωθεί το πεδίο ταχύτητας με χρόνο ολοκλήρωσης T θα πρέπει να υπάρχουν δεδομένα για τουλάχιστον T χρονικές περιόδους μετά ή πριν. Έτσι ο χρόνος ολοκλήρωσης περιορίζεται από την χρονική διάρκεια των χρονοσειρών του πεδίου ταχύτητας που είναι διαθέσιμες. Και στην περίπτωση όμως που τα δεδομένα ταχύτητας είναι άπειρα στον χρόνο, ο χρόνος ολοκλήρωσης δέχεται κάποιους περιορισμούς. Επειδή το πεδίο ταχύτητας δεν είναι άπειρο στον χώρο υπάρχει περίπτωση σωματίδια να βρεθούν εκτός του πεδίου ταχύτητας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό του FTLE για τα σωματίδια αυτά αλλά και για τα γειτονικά τους με μικρότερο χρόνο ολοκλήρωσης. Έτσι σε ανοιχτά συστήματα ο χρόνος

ολοκλήρωσης καθορίζεται επίσης από το πόσο γρήγορα σωματίδια της ροής εγκαταλείπουν το πεδίο ταχύτητας. Το φαινόμενο αυτό αναλύεται παρακάτω.

Όπως είναι λογικό καθώς υπολογίζεται η τροχιά των σωματιδίων υπάρχει περίπτωση αυτά να βρεθούν εκτός του πεδίου ταχύτητας. Από την χρονική στιγμή εκείνη και μετά η τροχιά αυτών των σωματιδίων δεν μπορεί να υπολογιστεί. Έτσι έστω ένα σωματίδιο το οποίο την χρονική στιγμή $t+T'$, όπου $T' < T$, βρίσκεται εκτός του πεδίου ταχύτητας. Για τον υπολογισμό της τιμής FTLE αυτού του σημείου χρειάζονται και οι θέσεις των γειτονικών τους σωματιδίων την χρονική στιγμή $t+T'$ ώστε να εφαρμοστούν οι πεπερασμένες διαφορές. Αυτό σημαίνει ότι για το σημείο που βγήκε από το πεδίο της ταχύτητας το πεδίο FTLE θα υπολογιστεί για χρόνο ολοκλήρωσης T' . Κατά συνέπεια πρέπει να υπολογιστεί και η τιμή του FTLE των γειτονικών σημείων για ίδιο χρόνο ολοκλήρωσης αφού και αυτά χρειάζονται την θέση του σημείου που βρίσκεται εκτός του πεδίου για την εφαρμογή των πεπερασμένων διαφορών. Παρόλο που το FTLE έχει υπολογιστεί και για τα γειτονικά σημεία, αυτά συνεχίζουν να μεταφέρονται από την ροή μέχρι να βρεθούν και αυτά εκτός πεδίου ή ο χρόνος να γίνει T . Αυτό γίνεται γιατί οι θέσεις τους θα χρειαστούν για τον υπολογισμό των γειτονικών τους σημείων.

Όπως αναφέρθηκε για να εξαχθούν συνεκτικές δομές που να είναι καλά ορισμένες ο χρόνος ολοκλήρωσης πρέπει να είναι μεγάλος. Όμως για μεγαλύτερους χρόνους ολοκλήρωσης είναι αναγκαία η χρήση μεγαλύτερης ανάλυσης του πεδίου FTLE και κατά συνέπεια μεγαλύτερου υπολογιστικού χρόνου. Αυτό γίνεται γιατί όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος ολοκλήρωσης τόσο καλύτερα ορισμένες στον χώρο είναι οι συνεκτικές δομές και άρα τόσο μεγαλύτερη ανάλυση χρειάζονται για να οριστούν. Φυσικά σημαντικότερο ρόλο στην εξαγωγή καλύτερα ορισμένων στον χώρο συνεκτικών δομών παίζει και η ανάλυση του διαθέσιμου πεδίου ταχύτητας.

3.1.4 Διαθέσιμα λογισμικά υπολογισμού του πεδίου FTLE

Οι Shadden et al. (2005, 2006) προτείνουν έναν αλγόριθμο υπολογισμού του πεδίου FTLE (Πίνακας 2). Βασισμένα σε αυτόν τον αλγόριθμο υπάρχουν δύο λογισμικά πακέτα. Το ένα είναι το MANGEN (Manifold Generator) που κατασκευάστηκε από τους F. Lekien και C. Coulliette (Lekien, 2003). Το πρόγραμμα αυτό είναι γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού C και πέρα από την δυνατότητα υπολογισμού του πεδίου FTLE παρέχει και άλλα εργαλεία ανάλυσης ροής. Το δεύτερο είναι ένας κώδικας γραμμένος σε προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab που κατασκευάστηκε από τους

J. Peng και J. Dabiri (Peng et al., 2007). Και τα δύο λογισμικά αποσκοπούν στον υπολογισμό του πεδίου εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου (FTLE) από δοθέντες χρονοσειρές δισδιάστατου πεδίου ταχύτητας. Τα δεδομένα που είναι αναγκαία για τους υπολογισμούς είναι οι χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας καθώς και ο φυσικός χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο χρονικών βημάτων αυτών. Σημαντικοί περιορισμοί και των δύο λογισμικών είναι ότι δέχονται μόνο δισδιάστατα πεδία ταχύτητας και ότι αυτά πρέπει να είναι ορισμένα σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό πλέγμα.

Το Mangan (Σχήμα 8) είναι διαθέσιμο ελεύθερα από την ιστοσελίδα του F. Lekien (<http://www.lekien.com/~francois/software/mangen/>) και υποστηρίζεται από διάφορα λειτουργικά συστήματα συμπεριλαμβανομένων των LINUX και των Windows. Για την ολοκλήρωση του πεδίου ταχύτητας διαθέτει τρεις επιλογές. Την μέθοδο Euler, τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης (RK4) με σταθερό βήμα και την μέθοδο Runge-Kutta-Fehlberg τέταρτης και πέμπτης τάξης (RK45) με μεταβλητό βήμα. Για την παρεμβολή των δεδομένων μπορεί να επιλεγεί είτε απλός αλγόριθμος γραμμικής παρεμβολής είτε ο αλγόριθμος τρι-κυβικής παρεμβολής κατασκευασμένος από τους Lekien και Marsden (2005).

Το LCS Matlab Kit (Σχήμα 9) διατίθεται ελεύθερα από την ιστοσελίδα του ινστιτούτου (<http://dabiri.caltech.edu/software.html>). Στην σελίδα είναι διαθέσιμες δύο εκδόσεις. Η έκδοση LCS Matlab Kit Version 1.0 και η έκδοση LCS Matlab Kit Version 2.3. Κατά τους υπολογισμούς η έκδοση LCS Matlab Kit Version 1.0 χρησιμοποιεί μία απλοποιημένη μορφή της μεθόδου Runge-Kutta τέταρτης τάξης για την ολοκλήρωση των εικονικών σωματιδίων στο πεδίο ταχύτητας με παράλληλη κυβική παρεμβολή σε κάθε διάσταση ξεχωριστά με την εντολή 'interp2 (cubic)'. Η έκδοση LCS Matlab Kit Version 2.3 χρησιμοποιεί απλή μέθοδο Euler για την συναγωγή των εικονικών σωματιδίων με παράλληλη γραμμική παρεμβολή των δεδομένων σε κάθε διάσταση ξεχωριστά με την εντολή 'interp2 (linear)'. Και στις δύο εκδόσεις το βήμα των μεθόδων ολοκλήρωσης περιορίζεται στο βήμα στον χρόνο των διαθέσιμων χρονοσειρών αφού δεν διαθέτουν παρεμβολή των δεδομένων στον χρόνο. Να σημειωθεί ότι για την εκτέλεση του κώδικα είναι αναγκαία η εγκατάσταση προγράμματος Matlab και είναι δυνατή η επεξεργασία του κώδικα ώστε να προσαρμοστεί καλύτερα στις ανάγκες του προβλήματος.

Το Matlab LCS Kit πλεονεκτεί κυρίως στην επεξεργασιμότητα του. Με άλλα λόγια εφόσον είναι γραμμένο σε περιβάλλον προγραμματισμού της Matlab δίνεται η

δυνατότητα στον χρήστη να τροποποιήσει τον κώδικα εύκολα και να τον προσαρμόσει στις ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος. Από την άλλη το λογισμικό Mangen αποτελεί ένα πιο ολοκληρωμένο πακέτο με περισσότερες επιλογές και καλύτερους αλγόριθμους για την ολοκλήρωση και παρεμβολή των δεδομένων.

Πιο συγκεκριμένα το λογισμικό Mangen παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Περιλαμβάνει καλύτερους και με μεγαλύτερο εύρος επιλογών αλγόριθμους υπολογισμών της τροχιάς των σωματιδίων. Το Mangen προσφέρει την δυνατότητα επιλογής διάφορων μεθόδων ολοκλήρωσης των εικονικών σωματιδίων πάνω στο πεδίο ταχύτητας καθώς επίσης περιέχει και τον αλγόριθμο τρι-κυβικής παρεμβολής των δεδομένων ταχύτητας.
- Είναι δυνατή η αυτόματη σύγκριση διάφορων χρόνων ολοκλήρωσης για ένα συγκεκριμένο χρονικό βήμα, κάτι που αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επιλογή του χρόνου ολοκλήρωσης.
- Δίνεται η δυνατότητα χρήσης μη ορθογώνιου συνόρου.
- Μπορεί να επεξεργαστεί περιοδικά δεδομένα.
- Παρέχει διάφορα βοηθητικά εργαλεία όπως εργαλεία για τον υπολογισμό τις κίνησης σωματιδίων στο ρευστό ή των ορισμό αναλυτικής εξίσωσης αντί της εισαγωγής χρονοσειρών πεδίου ταχύτητας.
- Γενικότερα οι αλγόριθμοι υπολογισμού είναι πιο γρήγοροι.

Τα πλεονεκτήματα του λογισμικού LCS Matlab Kit είναι:

- Λιγότερες και καλύτερα ορισμένες παράμετροι.
- Δυνατότητα προσαρμογής και επέκτασης του κώδικα ώστε να εξυπηρετεί καλύτερα της ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος. Να σημειωθεί εδώ ότι με πολύ απλή επεξεργασία του κώδικα το LCS Matlab Kit είναι δυνατό να δεχτεί χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας που δεν είναι ορισμένες σε ορθογώνιο καρτεσιανό πλέγμα.

Σε γενικές γραμμές στην περίπτωση που οι χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας που υπάρχουν είναι αρκετά πυκνές στον χώρο και στον χρόνο και συνεπώς δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθούν ακριβέστερες και πολυπλοκότερες μέθοδοι υπολογισμού τότε το LCS Matlab Kit πλεονεκτεί ειδικότερα αν γίνει επεξεργασία του ώστε να

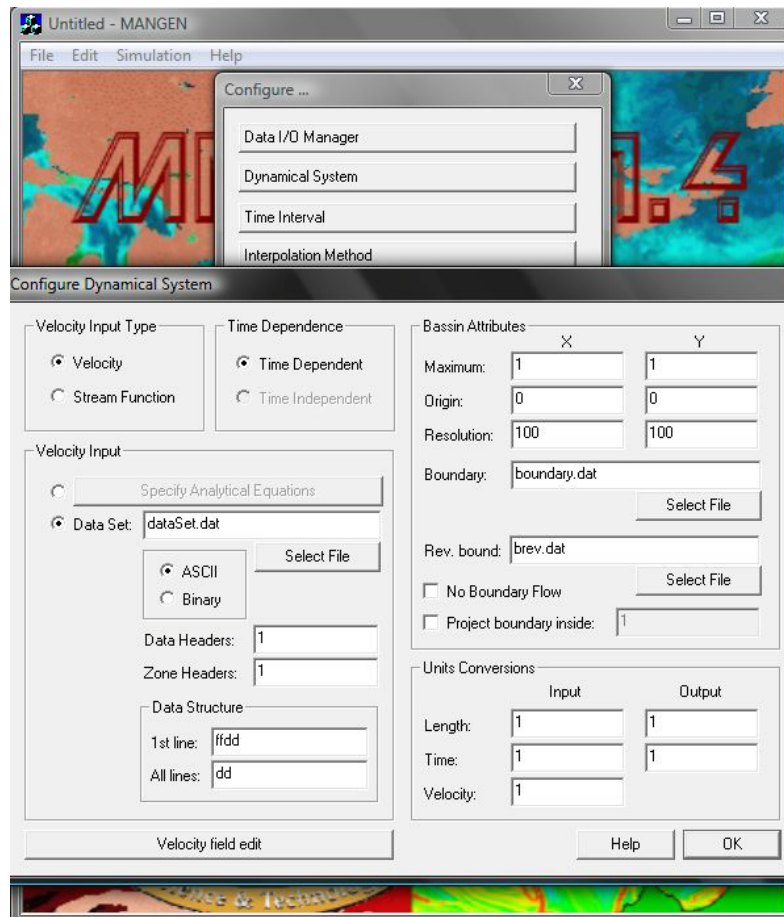
δέχεται οποιοδήποτε υπολογιστικό πλέγμα. Τέτοιες περιπτώσεις πυκνών δεδομένων εμφανίζονται κυρίως σε δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής.

Πίνακας 2: Αλγόριθμος υπολογισμού του πεδίου FTLE (Shadden et al., 2005, 2006).

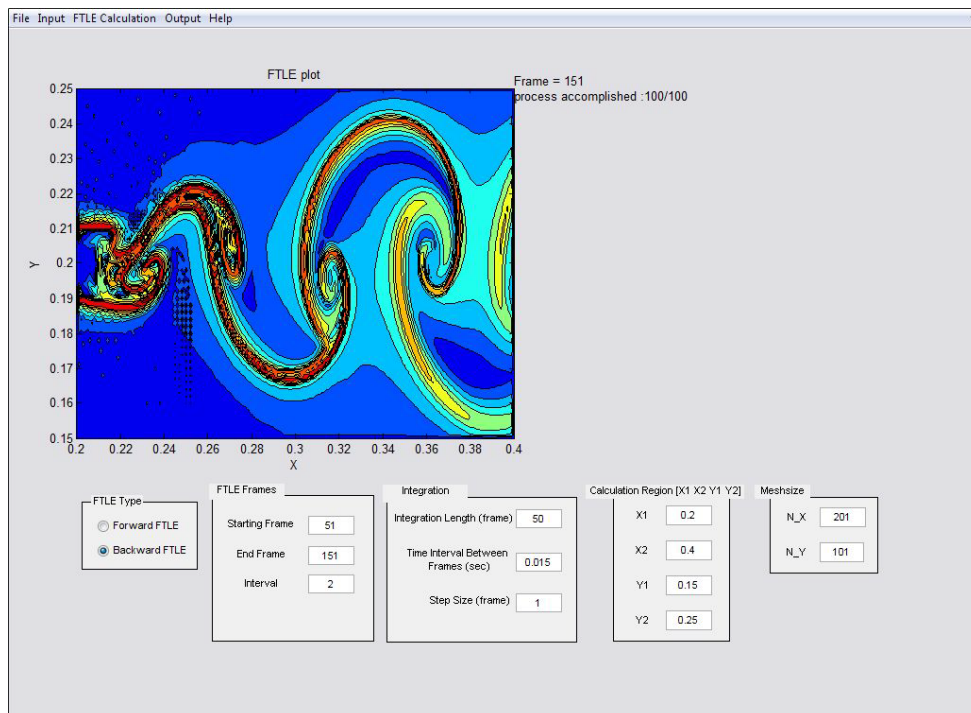
```

for each OutputTime {
  set FTLEgrid.Grid array to contain positions of points in FTLE grid
  set FTLEgrid.Old array to FTLEgrid.Grid
  set FTLEgrid.New array to FTLEgrid.Old
  set FTLEgrid.FTLE array to all zeros
  set FTLEgrid.CalcFTLE array to all true
  set FTLEgrid.LeftDomain array to all false
  If any point in FTLEgrid outside velocity domain
    remove point from FTLEgrid
  for IntegrationTime = 0 : DataTimeStep : (FTLEIntegrationLength - DataTimeStep) {
    for each point (i,j,k) in FTLEgrid {
      set t0 to OutputTime + IntegrationTime
      set t1 to t0 + DataTimeStep
      set FTLEgrid.New(i,j,k) to integration of FTLEgrid.Old(i,j,k) from t0 to t1
      if point FTLEgrid.New(i,j,k) outside velocity domain {
        set FTLEgrid.LeftDomain(i,j,k) to true
        if FTLEgrid.CalcFTLE(i,j,k) true {
          Compute FTLE based on FTLEgrid.Old and IntegrationTime
          Set FTLEgrid.CalcFTLE(i,j,k) = false
          Compute FTLE at neighboring points
          set FTLEgrid.CalcFTLE false for neighbors
        }
      }
    }
  }
  for each point (i,j,k) in FTLEgrid
    if FTLEgrid.LeftDomain(i, j, k) false
      set FTLEgrid.Old to FTLEgrid.New
  }
}
for each point (i,j,k) in FTLEgrid
  if FTLEgrid.CalcFTLE(i,j,k) true {
    Compute FTLE based on FTLEgrid.Old and FTLEIntegrationLength
    Set FTLEgrid.CalcFTLE(i,j,k) = false
  }
}

```



Σχήμα 8: Περιβάλλον του προγράμματος Mangen.



Σχήμα 9: Παράθυρο (GUI) του LCS Matlab Kit.

3.2 Εφαρμογή στην περίπτωση στρωτής ροής

Ο υπολογισμός του πεδίου FTLE για την περίπτωση στρωτής ροής από δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής αποσκοπεί στο να γίνει ταυτοποίηση της μεθόδου και στο να παρουσιαστούν οι δομές που εμφανίζονται ώστε να χρησιμοποιηθούν για σύγκριση με αυτές της τυρβώδους ροής. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο είναι διαθέσιμες οι τροχιές αβαρών σωματιδίων που σχηματίζουν την οδό von Kármán. Εκ των προτέρων υποθέτουμε ότι οι δομές αυτές θα πρέπει να συμπίπτουν με τις έλκουσες συνεκτικές δομές κατά Lagrange αφού αυτές τείνουν να ‘έλκουν’ σωματίδια. Παράλληλα με την ταυτοποίηση της μεθόδου οι τροχιές αυτών των σωματιδίων μπορούν να χρησιμεύσουν για την καλύτερη επιλογή των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν.

3.2.1 Τροποποίηση του κώδικα LCS Matlab Kit

Όπως έγινε φανερό στο προηγούμενο κεφάλαιο τα δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής είναι πολύ πυκνά στον χώρο και στον χρόνο καθώς επίσης το πεδίο πάνω στο οποίο ορίζονται οι ταχύτητες εκτείνεται σε αρκετά μεγάλη απόσταση από τον κύλινδρο. Η έκταση του πεδίου ταχύτητας παίζει σημαντικό ρόλο στους υπολογισμούς αφού όσο μεγαλύτερο είναι το πεδίο ταχύτητας τόσο μικρότερη η πιθανότητα εικονικά σωματίδια να εξέλθουν από αυτό σε χρόνο μικρότερο του χρόνου ολοκλήρωσης. Το πρόβλημα είναι ότι και τα δύο λογισμικά που είναι διαθέσιμα δεν δέχονται ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα. Επίσης αν γίνει παρεμβολή των δεδομένων σε ορθογώνιο καρτεσιανό πλέγμα τότε η ανάλυση θα μειωθεί σημαντικά. Έτσι αποφασίζεται να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Matlab LCS Kit ver2.3 με κατάλληλες τροποποιήσεις ώστε να δέχεται πεδία ταχύτητας σε οποιοδήποτε υπολογιστικό πλέγμα. Ταυτόχρονα δεν είναι αναγκαία η χρήση ισχυρών αλγόριθμων υπολογισμού της κίνησης των σωματιδίων που προσφέρονται μόνο από το λογισμικό Mangan αφού όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το πεδίο ταχύτητας των δεδομένων υπολογιστικής ρευστομηχανικής είναι αρκετά πυκνό στον χώρο και στον χρόνο.

Ο κύριος σκοπός της τροποποίησης του κώδικα είναι να γίνεται η ολοκλήρωση του πεδίου ταχύτητας χρησιμοποιώντας άμεσα τα πεδία ταχύτητας που βρίσκονται πάνω σε πυκνό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα. Ως πρότυπο για την τροποποίηση χρησιμοποιήθηκε η έκδοση Matlab LCS Kit ver2.3 καθώς έχει αρκετές βελτιώσεις στην δομή του κώδικα.

Οι αλλαγές που έγιναν είναι οι εξής:

- Τα αρχεία σε μορφή ASCII που περιέχουν τα δεδομένα ταχύτητας μπορούν να είναι πλέον οποιασδήποτε μορφής. Στην κανονική έκδοση του Matlab LCS Kit τα αρχεία έπρεπε να έχουν κατάληξη 'txt' ή 'wk1' και να περιέχουν μόνο τέσσερις στήλες, χωρίς επικεφαλίδες, οι οποίες από τα αριστερά προς τα δεξιά αντιπροσωπεύουν την οριζόντια διάσταση στον χώρο, την κάθετη διάσταση στον χώρο, την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας και την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας. Ο κώδικας τροποποιήθηκε ώστε να δέχεται αρχεία ASCII με κατάληξη είτε 'dat' είτε 'txt'. Επίσης τα αρχεία αυτά επιτρέπεται να έχουν κεφαλίδες καθώς επίσης επιτρέπεται πλέον η εισαγωγή αρχείων που περιέχουν μόνο τις συνιστώσες της ταχύτητας και το αρχείο με τις χωρικές συντεταγμένες δίνεται ως ξεχωριστό αρχείο.
- Δίνεται επιλογή χρήσης είτε της μεθόδου Euler είτε της μεθόδου Runge-Kutta. Το βήμα και στις δύο περιπτώσεις είναι ίσο με τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών βημάτων των χρονοσειρών του πεδίου ταχύτητας.
- Δίνεται επιλογή χρήσης είτε γραμμικής είτε κυβικής παρεμβολής των δεδομένων.
- Η παρεμβολή γίνεται πλέον με χρήση της εντολής 'griddata'. Αυτό δίνει την δυνατότητα παρεμβολής των δεδομένων χρησιμοποιώντας πλέγμα οποιασδήποτε μορφής. Με την εντολή (interp) που χρησιμοποιούνταν στην κανονική έκδοση η παρεμβολή μπορούσε να γίνει μόνο σε ορθογώνιο κανονικό πλέγμα. Για να γίνει δυνατή η χρήση της εντολής 'griddata' έγιναν συγχρόνως και αλλαγές στον τρόπο αποθήκευσης των ενδιάμεσων αρχείων δυαδικής μορφής.

3.2.2 Επιλογή παραμέτρων που σχετίζονται με τον χρόνο

Οι χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούνται από 151 χρονικά βήματα. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των βημάτων στον χρόνο είναι 0.015 δευτερόλεπτα. Το χρονικό διάστημα το οποίο καλύπτουν είναι 2.265s ξεκινώντας από την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε χρόνο 0.51sec μέχρι την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε χρόνο 2.76sec. Μια περίοδος έκλυσης στροβίλων στον ολκό του κυλίνδρου διαρκεί περίπου 0.51sec δηλαδή 34 βήματα στον χρόνο.

Επιλέγεται να γίνει απεικόνιση των συνεκτικών δομών κατά Lagrange για μία περίοδο. Γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι είναι αναγκαίο να υπάρχουν τουλάχιστον T (όπου T

είναι ο χρόνος ολοκλήρωσης σε αριθμό χρονικών βημάτων) χρονικά βήματα μετά από το τελευταίο βήμα στον χρόνο και άλλα T χρονικά βήματα πριν το αρχικό βήμα στον χρόνο, οι υπολογισμοί που μπορούν να γίνουν με σταθερό χρόνο ολοκλήρωσης T περιορίζονται από την χρονική στιγμή 1.41 μέχρι την χρονική στιγμή 1.92 που αντιστοιχεί σε μία περίοδο. Ο χρόνος ολοκλήρωσης για τους υπολογισμούς που θα γίνουν προς τα μπρος στον χρόνο θα είναι συνεπώς 60 χρονικά βήματα ή 0.9sec (λιγότερο από 2 περιόδους). Ο χρόνος ολοκλήρωσης για τους υπολογισμούς προς τα πίσω στον χρόνο περιορίζεται σε μια σταθερή τιμή 56 χρονικών βημάτων ή 0.84sec.

3.2.3 Επιλογή παραμέτρων που σχετίζονται με τον χώρο

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το πεδίο ταχύτητας εκτείνεται σε μία αρκετά μεγάλη έκταση από τον κύλινδρο. Επειδή για να απεικονιστούν σωστά οι συνεκτικές δομές είναι αναγκαία η χρήση υψηλής σχετικά ανάλυσης του πεδίου FTLE αυτό πρέπει να περιοριστεί σε μία μικρότερη έκταση. Άλλωστε με κάποιους προκαταρκτικούς υπολογισμούς είναι φανερό ότι το πεδίο FTLE παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο στην περιοχή κατάντι του κυλίνδρου που αντιστοιχεί στην περιοχή του ολκού του κυλίνδρου. Έτσι για να μην γίνεται άσκοπος υπολογισμός της κίνησης σωματιδίων (με αποτέλεσμα άσκοπα μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους) το πεδίο FTLE περιορίζεται σε μια έκταση από 0.15m μέχρι 0.55m (20D) στην οριζόντια διεύθυνση και από 0.12m μέχρι 0.28m (8D) στην κάθετη διεύθυνση. Να σημειωθεί ότι η επιλογή μικρότερης έκτασης για το πεδίο FTLE δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς αφού για τον υπολογισμό της τροχιάς των σωματιδίων θα εξακολουθεί να χρησιμοποιείται ολόκληρο το πεδίο ταχύτητας. Η ανάλυση του πεδίου FTLE που επιλέχτηκε είναι 601 σημεία στην οριζόντια διεύθυνση και 241 σημεία στην κάθετη διεύθυνση. Το πλέγμα του πεδίου FTLE είναι ορθογώνιο καρτεσιανό.

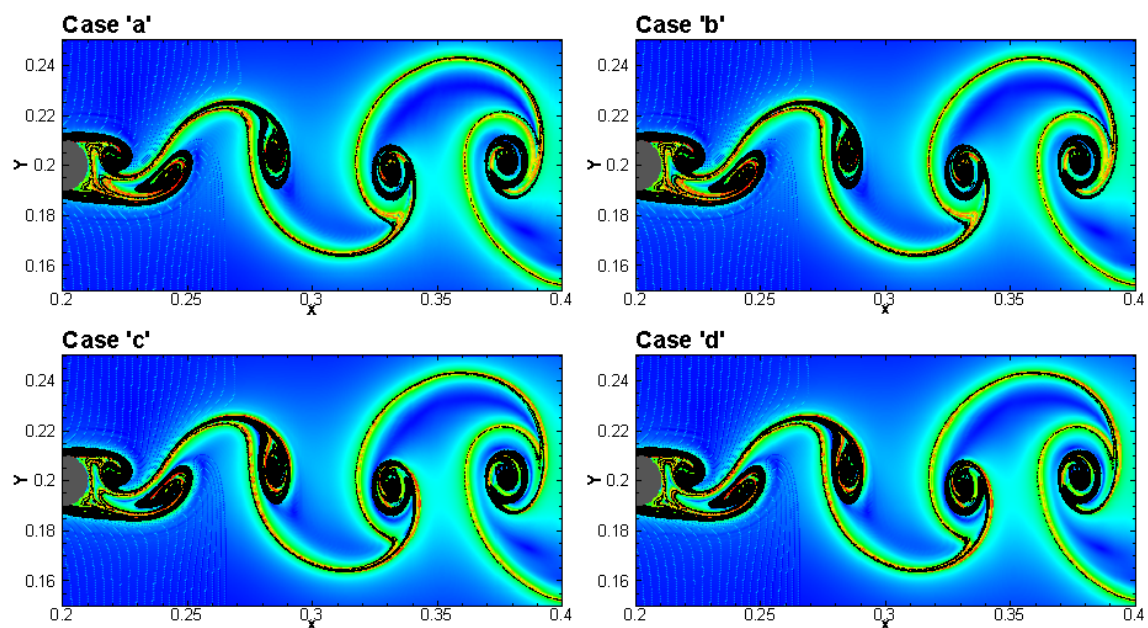
Να σημειωθεί επίσης ότι κατά τους υπολογισμούς δεν χρησιμοποιήθηκε σύνορο στα φυσικά όρια του κυλίνδρου. Αυτό σημαίνει ότι σωματίδια μπορεί να βρεθούν μέσα στον χώρο του κυλίνδρου χωρίς να μηδενίζεται η ταχύτητα τους. Αυτό δεν επηρεάζει σημαντικά τους υπολογισμούς αφού στην περιοχή κοντά στον κύλινδρο η ανάλυση του πεδίου ταχύτητας είναι πάρα πολύ μεγάλη.

3.2.4 Επιλογή μεθόδου ολοκλήρωσης και παρεμβολής

Έχοντας τις τροχιές των αβαρών σωματιδίων δίνεται η δυνατότητα να γίνει σύγκριση των διαθέσιμων υπολογιστικών μεθόδων. Συγκεκριμένα μελετάται η περίπτωση

μεθόδου Euler με παράλληλη γραμμική παρεμβολή (περίπτωση 'a'), η περίπτωση μεθόδου Euler με παράλληλη κυβική παρεμβολή (περίπτωση 'b'), η περίπτωση μεθόδου Runge-Kutta με παράλληλη γραμμική παρεμβολή (περίπτωση 'c') και η περίπτωση μεθόδου Runge-Kutta με παράλληλη κυβική παρεμβολή (περίπτωση 'd'). Οι υπολογισμοί γίνονται για ένα συγκεκριμένο βήμα στον χρόνο με χρόνο ολοκλήρωσης 2 περιόδους. Όλες οι άλλοι παράμετροι παραμένουν σταθερές.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 10 τα αποτελέσματα που χρησιμοποιούν Runge-Kutta προσεγγίζουν καλύτερα τις δομές που σχηματίζουν τα αβαρή σωματίδια. Παράλληλα παρατηρείται ότι η μέθοδος παρεμβολής των δεδομένων δεν δείχνει να επηρεάζει τους υπολογισμούς αισθητά. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το πλέγμα πάνω στο οποίο γίνεται η παρεμβολή είναι αρκετά πυκνό. Έτσι επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί μέθοδος Runge-Kutta σε συνδυασμό με γραμμική παρεμβολή για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE.



Σχήμα 10: Διαγράμματα ισοψών του βαθμωτού πεδίου FTLE για διάφορες περιπτώσεις υπολογιστικών μεθόδων. Σε υπέρθεση βρίσκονται οι θέσεις των αβαρών σωματιδίων.

3.3 Εφαρμογή στην περίπτωση τυρβώδους ροής

Για τα πειραματικά δεδομένα επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί για τους υπολογισμούς το πρόγραμμα Mangan. Η επιλογή αυτή γίνεται γιατί οι χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας που είναι διαθέσιμες δεν είναι αρκετά μεγάλης ανάλυσης στον χώρο και είναι πιο συνετό να χρησιμοποιηθούν οι πιο κατάλληλες μέθοδοι παρεμβολής που

προσφέρονται μόνο στο πρόγραμμα Mangen. Επίσης με το Mangen είναι δυνατή η επεξεργασία περιοδικών δεδομένων με πιο εύκολο τρόπο.

Οι χρονοσειρές του πεδίου ταχύτητας σε όλες τις περιπτώσεις αποτελούνται από 32 χρονικά βήματα που αντιστοιχούν σε χρόνο ίσο με μία περίοδο. Συνεπώς το χρονικό βήμα σε κάθε περίπτωση θα είναι $\Delta t[s] = \frac{1}{32f_0}$. Τα διαθέσιμα δεδομένα υπάρχουν σε

αδιάστατη μορφή. Πιο συγκεκριμένα οι συνιστώσες του χώρου εκφράζονται ως προς την διάμετρο του κυλίνδρου ενώ η συνιστώσες της ταχύτητας ως προς την μέση ταχύτητα εισόδου. Άρα για να είναι συνεπής η εξίσωση (3.1) θα πρέπει το χρονικό βήμα στους υπολογισμούς να είναι αδιαστατοποιημένο ως εξής: $\Delta t = \frac{1}{32f_0} \frac{U_0}{D} = \frac{1}{32St}$.

Τα δεδομένα είναι περιοδικά και έτσι ουσιαστικά οι χρονοσειρές μπορούν να θεωρηθούν ως άπειρες στον χρόνο. Έτσι δεν υπάρχει περιορισμός στον χρόνο ολοκλήρωσης όσον αφορά την διάρκεια των διαθέσιμων δεδομένων. Παρόλα αυτά ο χρόνος ολοκλήρωσης περιορίζεται λόγω του πεπερασμένου χώρου αφού αρκετά γρήγορα τα εικονικά σωματίδια κατά τους υπολογισμούς του πεδίου FTLE βρίσκονται εκτός ορίων του πεδίου ταχύτητας και έτσι δεν είναι δυνατή η μεταφορά τους περαιτέρω. Έτσι σε όλες τις περιπτώσεις ο χρόνος ολοκλήρωσης είναι ο μέγιστος δυνατός και φαίνεται στον Πίνακα 3.

Στο Σχήμα 11 φαίνεται η επίδραση του χρόνου ολοκλήρωσης στα αποτελέσματα. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ο χρόνος ολοκλήρωσης δεν επηρεάζει τις θέσεις ή το σχήμα των δομών αλλά μόνο την ποσότητα και την 'ευκρίνεια' αυτών. Παρόλο τον περιορισμό του χρόνου ολοκλήρωσης σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρείται ότι αυτός είναι αρκετά μεγάλος για να αποκαλύψει τις βασικές συνεκτικές δομές. Μάλιστα παρατηρείται ότι οι βασικές δομές αποκαλύπτονται και με χρήση χρόνου ολοκλήρωσης δύο μόνο περιόδων (Σχήμα 11 b). Η αύξηση περαιτέρω του χρόνου ολοκλήρωσης παρόλα αυτά προσθέτει κάποιες δομές στην ζώνη ανακυκλοφορίας και στην περιοχή των αποσπασμένων στροβίλων (Σχήμα 11 c και d). Οι περιοχές αυτές σχετίζονται με σωματίδια του ρευστού τα οποία προέρχονται κυρίως από την ζώνη ανακυκλοφορίας, κατάντι του κυλίνδρου, τα οποία χρειάζονται περισσότερο χρόνο για να βρεθούν εκτός του πεδίου ταχύτητας. Να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματα αυτά βγήκαν με παράλληλη καταμέτρηση από το πρόγραμμα των σωματιδίων που έχουν παραμείνει ακόμα στα όρια του πεδίου ταχύτητας και

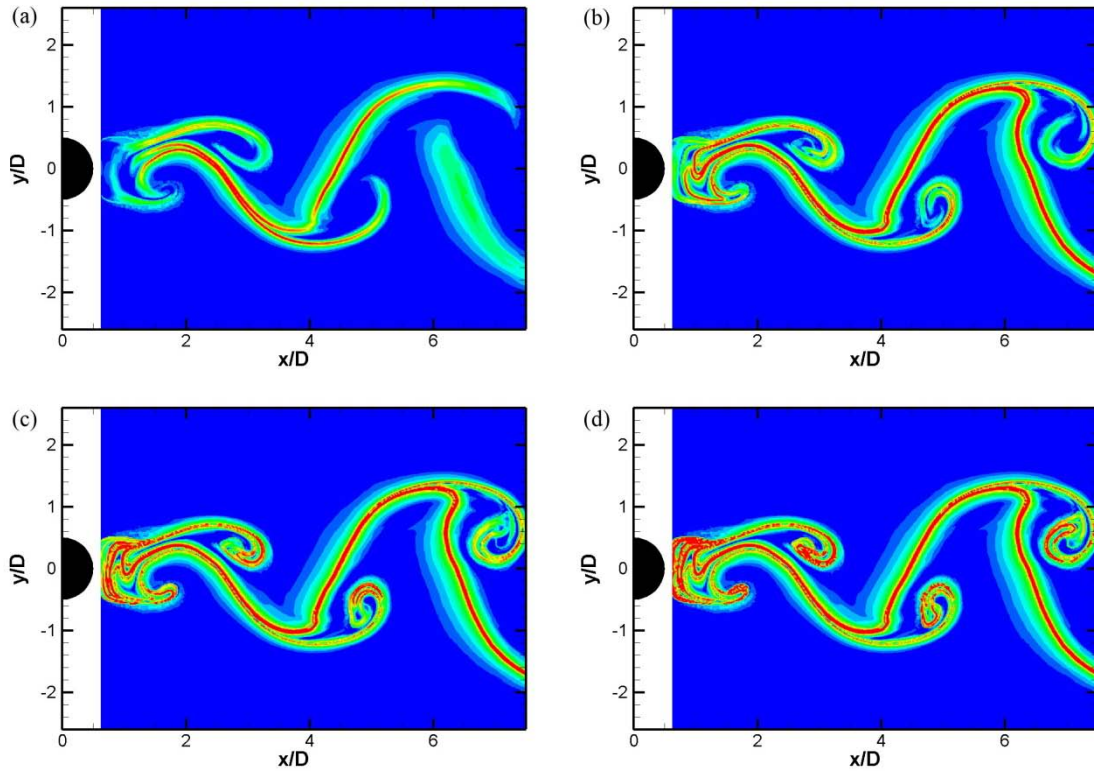
βρίσκονται σε συμφωνία με όσα αναφέρονται στην ενότητα των αποτελεσμάτων και αφορούν την κλειστή περιοχή της ανακυκλοφορίας. Το γεγονός ότι σε μερικές περιπτώσεις ο μέγιστος υπολογιστικά δυνατός χρόνος ολοκλήρωσης είναι μικρότερος από 4 περιόδους οφείλεται ακριβώς σε αυτό το γεγονός. Πιο συγκεκριμένα, όπως θα γίνει φανερό στο κεφάλαιο με τα αποτελέσματα, σε μερικές περιπτώσεις η ζώνη ανακυκλοφορίας είναι πολύ μικρότερη. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει μικρότερη ανακυκλοφορία του ρευστού με αποτέλεσμα σωματίδια να βγαίνουν πιο γρήγορα από τα όρια του πεδίου ροής και έτσι ο χρόνος ολοκλήρωσης να περιορίζεται περισσότερο.

Η έκταση του πεδίου FTLE είναι ίδια με την έκταση του πεδίου ταχύτητας. Πιο συγκεκριμένα το πεδίο εκτείνεται στην οριζόντια διεύθυνση σε απόσταση περίπου εφτά διαμέτρων και στην κάθετη διεύθυνση σε απόσταση έξι διαμέτρων. Η ανάλυση του πεδίου ταχύτητας είναι 73X61 σημεία. Για το πεδίο FTLE επιλέγεται ανάλυση πέντε φορές μεγαλύτερη σε κάθε διάσταση (361X301). Η επιλογή της ανάλυσης έγινε καθαρά για λόγους υπολογιστικής ισχύος. Να σημειωθεί ότι μία μεγαλύτερη ανάλυση θα είχε επιφέρει καλύτερα καθορισμένες συνεκτικές δομές. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι θα έδειχνε διαφορετικές δομές όπως φαίνεται στο Σχήμα 12. Έτσι αφού σκοπός της εργασίας είναι να φανερωθούν οι συνεκτικές δομές για τυρβώδη ροή (και όχι να καθοριστούν επακριβώς) η ανάλυση που χρησιμοποιείται είναι ικανοποιητική.

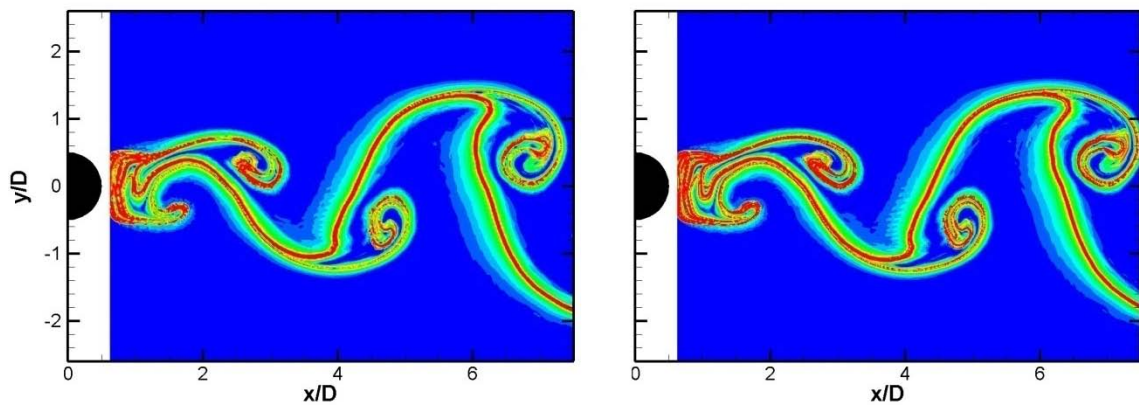
Για την ολοκλήρωση του πεδίου ταχύτητας γίνεται χρήση μεθόδου Runge-Kutta τέταρτης τάξης (RK4) με σταθερό βήμα στον χρόνο ίσο με 0.01 με παράλληλη παρεμβολή των δεδομένων με χρήση τρι-κυβικής παρεμβολής. Να σημειωθεί ότι στην τρι-κυβική παρεμβολή οι συντελεστές υπολογίζονται μόνο μία φορά και στην συνέχεια αποθηκεύονται.

Πίνακας 3: Παράμετροι που σχετίζονται με τον χρόνο και μέγιστοι δυνατοί χρόνοι ολοκλήρωσης (για όλες τις περιπτώσεις) για θετικό χρόνο ολοκλήρωσης και για αρνητικό χρόνο ολοκλήρωσης).

| Περίπτωση | Συχνότητα έκλυσης στροβίλων | Αριθμός Strouhal | Χρονικό βήμα | Αδιάστατο χρονικό βήμα | Χρόνος ολοκλήρωσης (θετικός) | Χρόνος ολοκλήρωσης (αρνητικός) |
|-----------|-----------------------------------|---------------------|-----------------|------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| | F_0 [hz] | St | Δt [s] | Δt | T [περίοδοι] | T [περίοδοι] |
| A | 4.3 | 4.8 | 0.00727 | 0.1499 | 3 | 4 |
| B | 8.8 | 4.8 | 0.0036 | 0.15 | 3 | 4 |
| B1 | 8.2 | 4.98 | 0.0038 | 0.1556 | 2 | 2 |
| B2a | 8.85 | 4.60 | 0.00353 | 0.1436 | 2 | 3 |
| B2b | 8.85 | 4.72 | 0.00353 | 0.1476 | 2 | 2 |
| B2c | 8.9 | 4.46 | 0.0034 | 0.1393 | 2 | 2.5 |
| B3 | 9.55 | 4.39 | 0.00327 | 0.1373 | 2 | 3 |
| C | 20.15 | 4.73 | 0.00155 | 0.1477 | 2 | 3 |



Σχήμα 11: Επίδραση του χρόνου ολοκλήρωσης στο πεδίο τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου. Οι υπολογισμοί έγιναν για χρόνους ολοκλήρωσης μίας (a), δύο (b), τριών (c) και τεσσάρων περιόδων (d). Εκτέλεση των υπολογισμών με μεγαλύτερο από 4 περιόδους χρόνο ολοκλήρωσης δεν επιφέρουν περαιτέρω αλλαγές στο πεδίο FTLE.



Σχήμα 12: Επίδραση της ανάλυση του πεδίου FTLE. Αριστερά το πεδίο FTLE υπολογισμένο με ανάλυση 5 φορές μεγαλύτερη σε κάθε άξονα και δεξιά το πεδίο FTLE υπολογισμένο με 7 φορές μεγαλύτερη ανάλυση από την ανάλυση του πεδίου ταχύτητας.

4 Αποτελέσματα

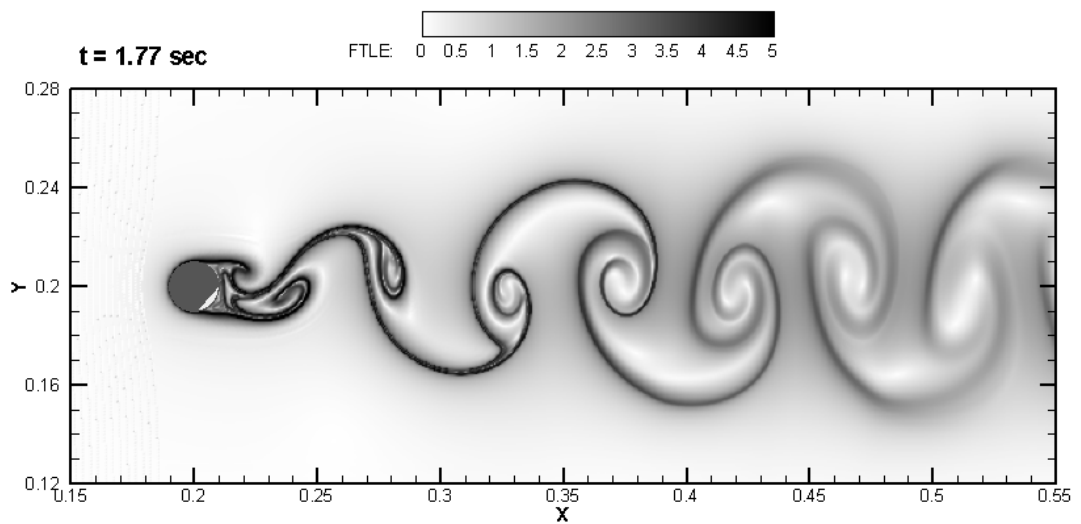
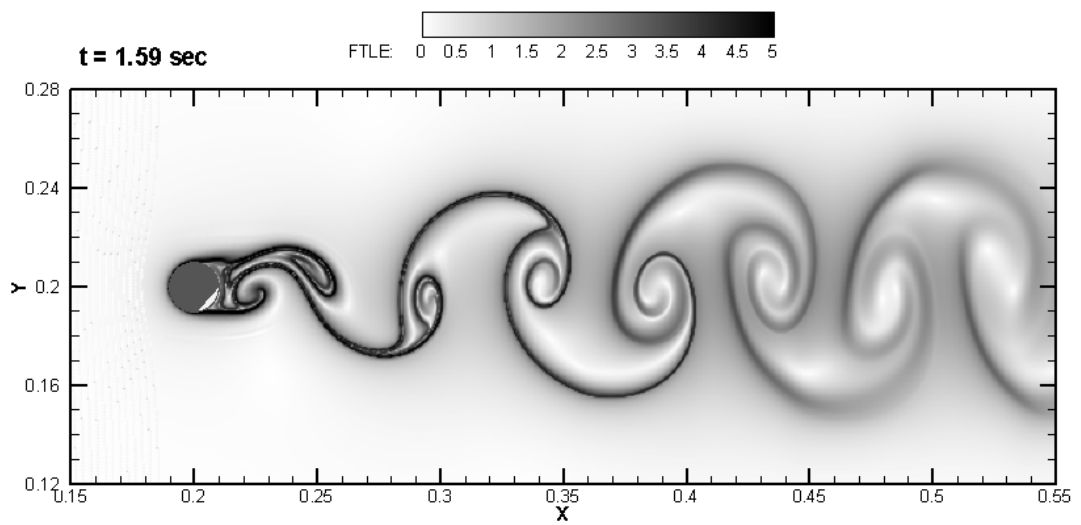
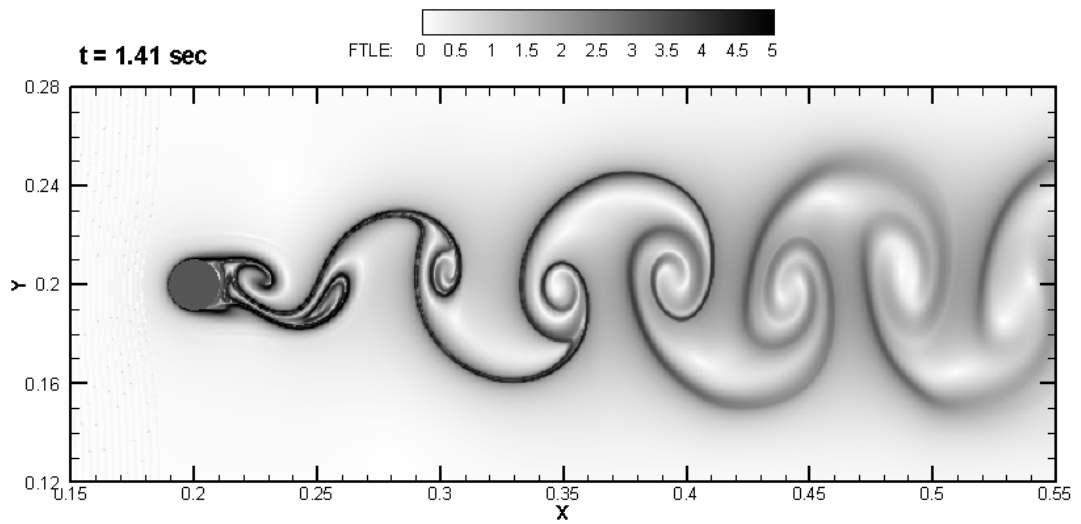
4.1 Στρωτή ροή

Στο Σχήμα 13 φαίνεται η κατανομή των τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για τρεις χρονικές στιγμές μίας περιόδου. Στο σχήμα αυτό οι τιμές του πεδίου FTLE είναι υπολογισμένες με αρνητικό χρόνο ολοκλήρωσης και έτσι οι γραμμές με απότομα μεγάλη τιμή του εκθέτη αποτελούν έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS). Να σημειωθεί ότι αφού είναι έλκουσες δομές, είναι ουσιαστικά οι δομές που θα εμφανιζόταν στην περίπτωση χρωματισμού τις ροής. Δηλαδή το ρευστό τείνει να προσεγγίζει τις δομές αυτές. Οι δομές αυτές σχήματος μανιταριού συμπίπτουν με τις δομές που σχηματίζουν τα αβαρή σωματίδια (Σχήματα 10, 13 και 15) και αποκαλύπτουν την οδό στροβίλων Von Kármán. Οι δομές αυτές ήταν γνωστές από πολλές προηγούμενες εργασίες. Γίνεται φανερό ότι η μέθοδος FTLE μπορεί να αποκαλύψει αυτές τις δομές a posteriori, δηλαδή χωρίς να γίνει χρωματισμός της ροής ή υπολογισμός της τροχιάς αβαρών σωματιδίων.

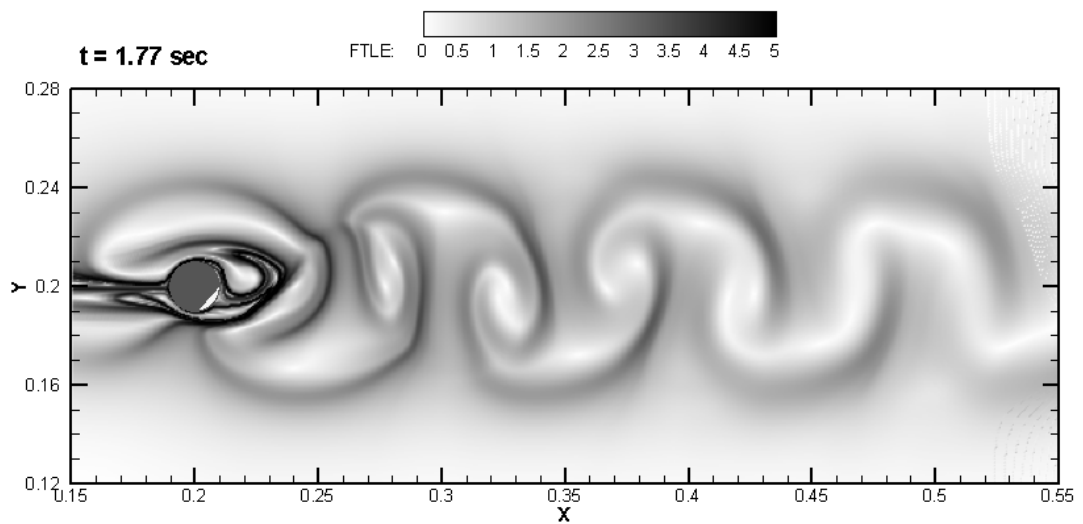
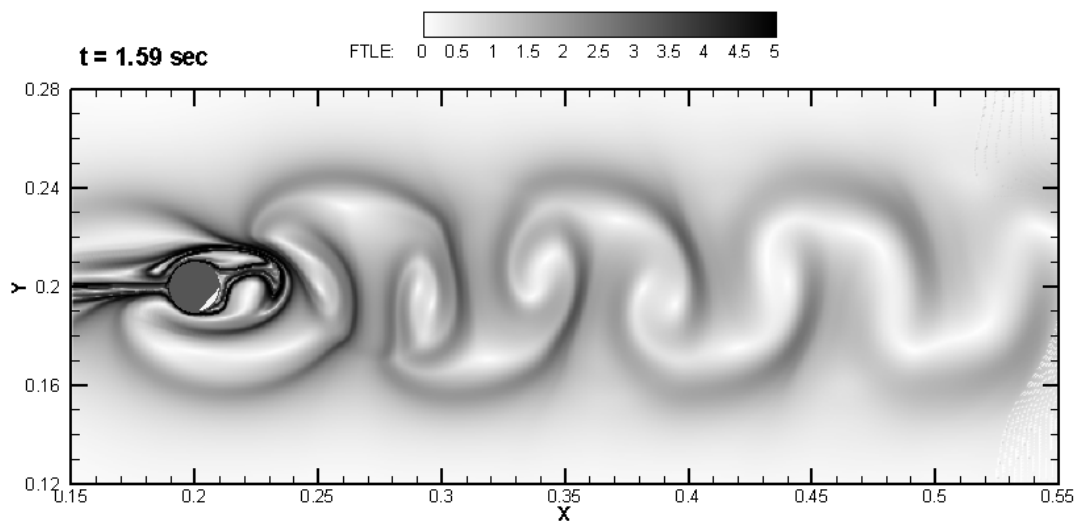
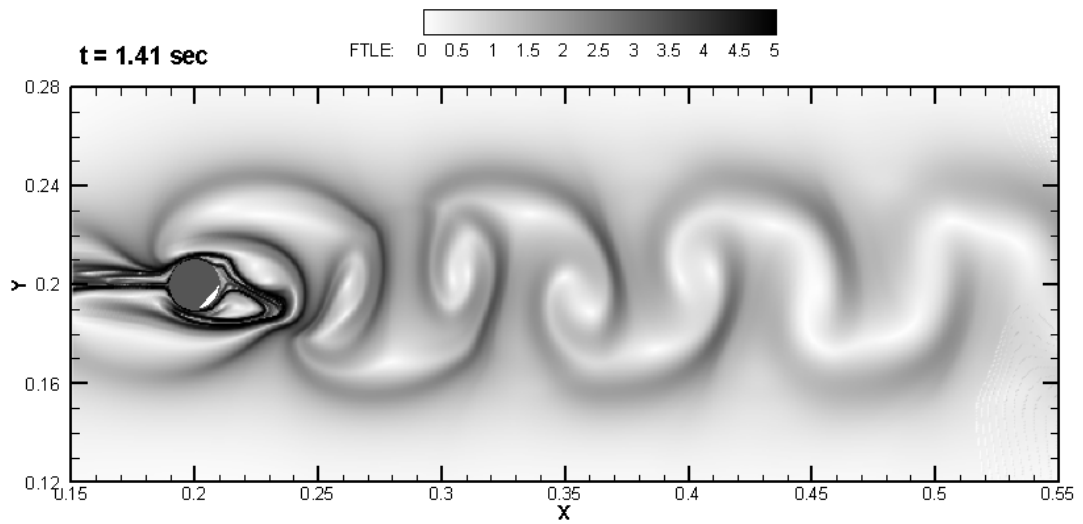
Στο Σχήμα 14 φαίνεται η κατανομή των τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για θετικό χρόνο ολοκλήρωσης. Οι απότομα σκούρες γραμμές αποτελούν απωθητικές συνεκτικές δομές (rLCS). Οι δομές αυτές υποδηλώνουν ότι το ρευστό που βρίσκεται κοντά σε αυτές τείνει να απομακρυνθεί με την πάροδο του χρόνου. Η αποκάλυψη αυτών των δομών αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου αφού δεν ήταν δυνατό να γίνει εξαγωγή τους με προηγούμενες μεθόδους. Στο σχήμα φαίνεται ξεκάθαρα η χρονική εξέλιξη της κλειστής περιοχής στο πίσω μέρος του κυλίνδρου. Αφού οι δομές αυτές είναι απωθητικές η κλειστή αυτή περιοχή υποδηλώνει μία ζώνη ανακυκλοφορίας. Παρατηρούνται επίσης δομές ανάντι του κυλίνδρου, και αρκετά μακριά από αυτόν, οι οποίες ‘εγκλωβίζουν’ μία μικρή περιοχή ρευστού η οποία θα καταλήξει στην ζώνη ανακυκλοφορίας. Παράλληλα αυτές οι επιμήκεις δομές θα ανοίγουν με την πάροδο του χρόνου ($y = 0.19 - 0.21$) αφήνοντας ρευστό που βρίσκεται κοντά στην περιοχή του κυλίνδρου να περάσει στους στροβίλους που πρόκειται να δημιουργηθούν. Να σημειωθεί επίσης ότι στους εκλυόμενους στροβίλους καταλήγει και ένα μικρό μέρος της ζώνης ανακυκλοφορίας. Τέλος παρατηρούνται επιμήκεις δομές που εκτείνονται πιο μακριά από τον κύλινδρο οι οποίες οριοθετούν την περιοχή του

ρευστού που θα καταλήξει στον ολκό του κυλίνδρου. Να σημειωθεί ότι και στα δύο σχήματα παρατηρείται ότι οι δομές εξασθενούν κατά μήκος της ροής. Αυτό σημαίνει ότι οι δομές αυτές είναι λιγότερο συνεκτικές. Δηλαδή υπάρχει μεγαλύτερη ροή διαμέσου αυτών. Αυτό είναι φυσικό να συμβαίνει αφού υπάρχουν φαινόμενα διάχυσης τα οποία εξασθενούν τις δομές στον ολκό του κυλίνδρου.

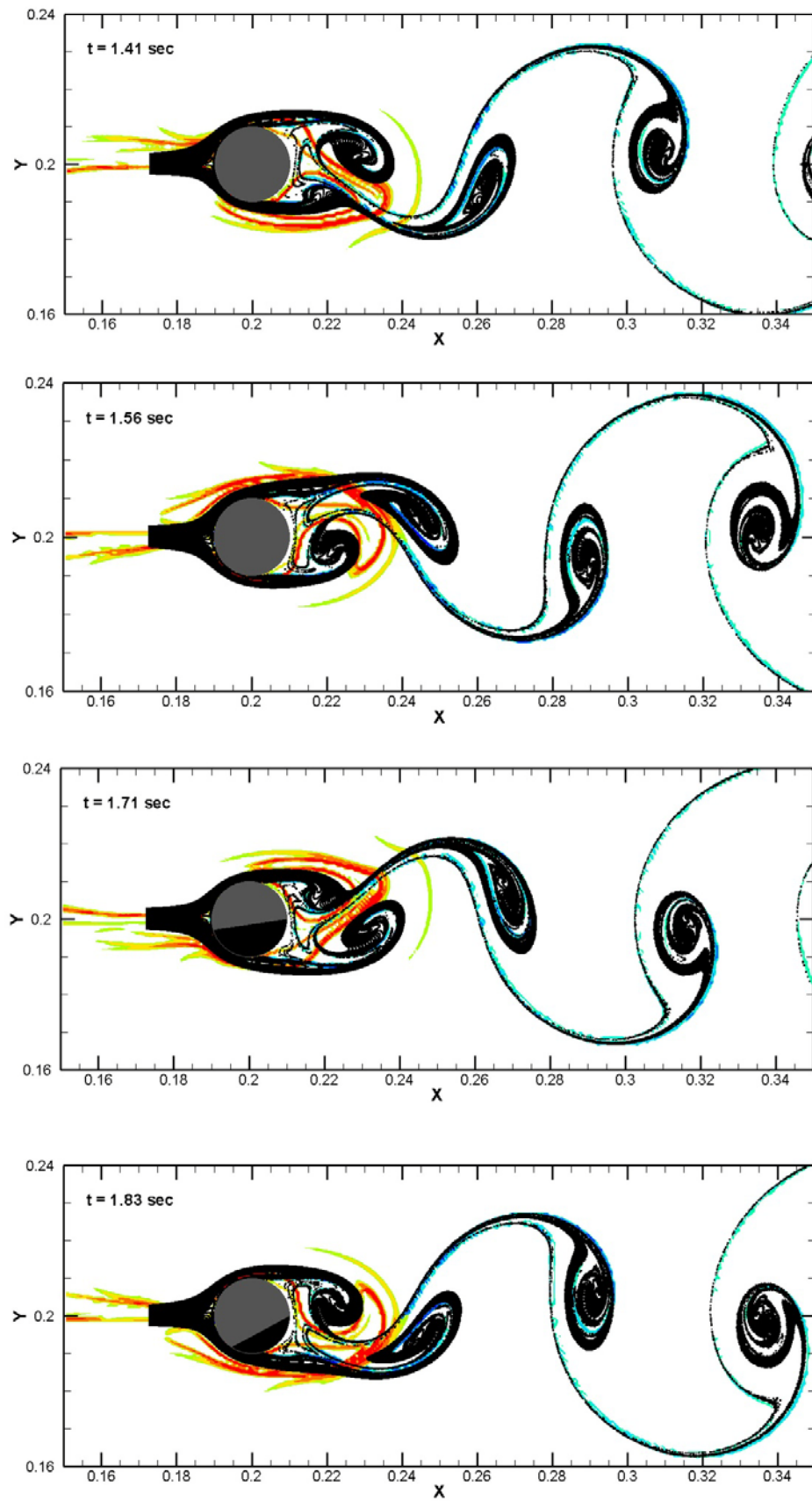
Στο Σχήμα 15 φαίνονται μαζί και οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS) και οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS). Είναι γνωστό ότι οι δύο δομές αυτές σχηματίζουν σύνορα στην ροή βοηθώντας στην μελέτη φαινομένων μεταφοράς (Shadden et al., 2007). Για την καλλίτερη οπτικοποίηση των φαινομένων μεταφοράς σε υπέρθεση στο σχήμα παρουσιάζονται οι θέσεις των αβαρών σωματιδίων. Γίνεται φανερό πλέον ποιες περιοχές του ρευστού καταλήγουν στην ζώνη ανακυκλοφορίας και ποιες στους εκλύομενους στροβίλους. Παράλληλα γίνεται φανερό ότι η μέθοδος της έκλυσης αβαρών σωματιδίων για την οπτικοποίηση της ροής μειονεκτεί. Αυτό γίνεται γιατί η μέθοδος αυτή παρουσιάζει την τροχιά σωματιδίων για μία μόνο συγκεκριμένη περιοχή του ρευστού ενώ με την μέθοδο FTLE γίνεται περιγραφή κατά Lagrange όλου του πεδίου ροής.



Σχήμα 13: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE με αρνητικό χρόνο ολοκλήρωσης για στρωτή ροή γύρω από κύλινδρο.



Σχήμα 14: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE με θετικό χρόνο ολοκλήρωσης για στρωτή ροή γύρω από κύλινδρο.



Σχήμα 15: Χρονική εξέλιξη αποθητικών συνεκτικών δομών (κόκκινο) και ελκυστών συνεκτικών δομών (μπλε). Σε υπέρθεση οι θέσεις των αβαρών σωματιδίων.

4.2 Τυρβώδης ροή

Στο Σχήμα 16 φαίνεται η χρονική εξέλιξη της κατανομής τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου για την περίπτωση χαμηλής ταχύτητας εισόδου χωρίς επιβολή διαταραχών (περίπτωση A). Οι τέσσερις απεικονίσεις του πεδίου FTLE καλύπτουν μία χρονική περίοδο έκλυσης στροβίλων. Στα αριστερά βρίσκεται το πεδίο FTLE υπολογισμένο με αρνητικό χρόνο ολοκλήρωσης ενώ δεξιά το πεδίο FTLE υπολογισμένο για θετικό χρόνο ολοκλήρωσης. Αυτό σημαίνει ότι οι υψηλές τιμές (κόκκινο), του πεδίου αριστερά, αντιστοιχούν σε έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ οι κόκκινες γραμμές στα δεξιά αντιπροσωπεύουν απωθητικές συνεκτικές δομές (rLCS). Να σημειωθεί ότι τιμές του πεδίου FTLE μικρότερες του 2 δεν παρουσιάζονται για οπτικούς λόγους.

Γίνεται φανερό στα αριστερά σχήματα ότι οι δομές που αποκαλύπτονται στον ολκό του κυλίνδρου είναι παρόμοιες με τις γνωστές δομές σχήματος μανιταριού Von Kármán για στρωτή ροή. Αυτό γίνεται αντιληπτό με σύγκριση των ελκουσών δομών με τις δομές που φαίνονται στο Σχήμα 13. Πιθανόν να είναι η πρώτη φορά που αποκαλύπτεται ξεκάθαρα η οδός Von Kármán σε τυρβώδη ροή. Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι ακριβώς στην κατάντι πλευρά του κυλίνδρου παρατηρείται έντονη συγκέντρωση ελκουσών δομών. Αυτό υποδεικνύει ότι στην περιοχή αυτή υπάρχει ανακυκλοφορία του ρευστού. Στα γραφήματα της δεξιάς πλευρά γίνονται φανερά τα όρια αυτής της περιοχής ανακυκλοφορίας. Η περιοχή αυτή εκτείνεται λίγο παραπάνω από δύο διαμέτρους κατά μήκος της ροής και μάλιστα κινείται πάνω κάτω περιοδικά. Με την βοήθεια των απωθητικών δομών γίνεται κατανοητός ο μηχανισμός έκλυσης των στροβίλων καθώς επίσης και ακριβώς ποιο μέρος του ρευστού καταλήγει στους στροβίλους, ποιο στην κλειστή ζώνη ανακυκλοφορίας και ποιο στον υπόλοιπο ολκό του κυλίνδρου.

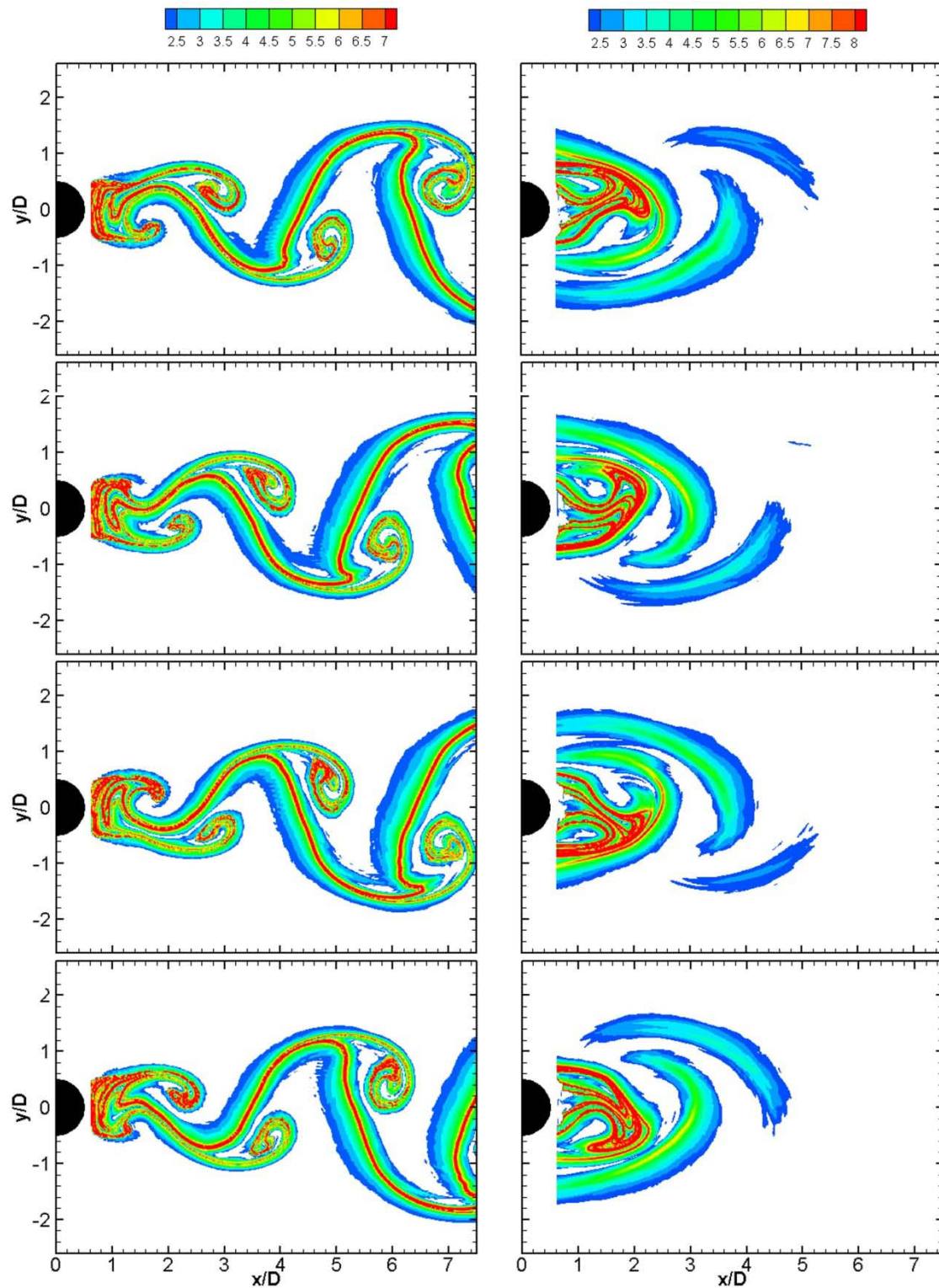
Τα παραπάνω γίνονται πιο εύκολα κατανοητά με την παρουσίαση και των δύο συνεκτικών δομών μαζί όπως φαίνεται στο Σχήμα 17. Σε υπέρθεση στο πεδίο τιμών του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου βρίσκονται οι θέσεις σωματιδίων που εκλύονται σε διαφορετικά σημεία. Να σημειωθεί ότι οι τροχιές των σωματιδίων υπολογίστηκαν με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε και στον υπολογισμό της τροχιάς των σωματιδίων για τον υπολογισμό του πεδίου FTLE. Για αυτό τον λόγο οι θέσεις τους δεν αποδεικνύουν κάτι αλλά απλώς βοηθούν στην

οπτικοποίηση και στην καλύτερη κατανόηση της σημασίας των συνεκτικών δομών κατά Lagrange.

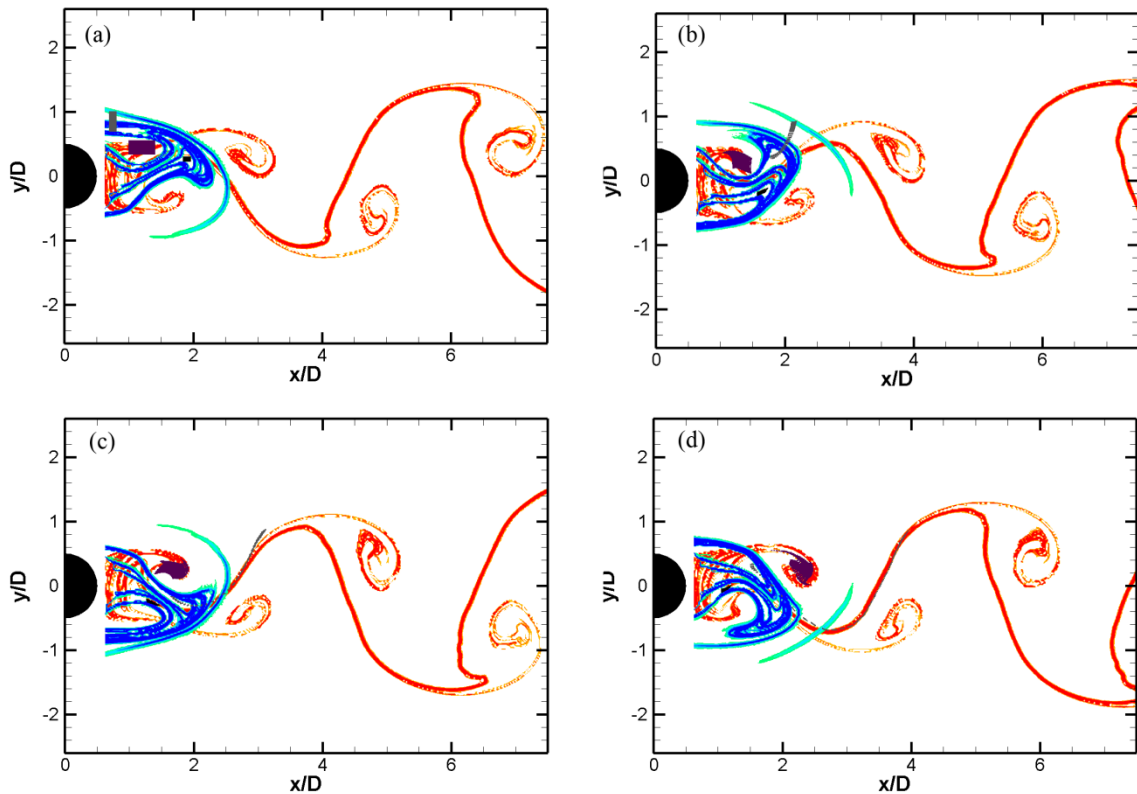
Στο Σχήμα 17 φαίνονται όπως και στην περίπτωση της στρωτής ροής τρεις επιμήκεις αποθητικές συνεκτικές δομές στο πάνω και στο κάτω μέρος του κυλίνδρου. Η μία αποτελείται από την επιμήκη δομή που μαζί με την έλκουσα σχηματίζουν μία κλειστή περιοχή κατάντι του κυλίνδρου. Η αποθητική αυτή δομή απομακρύνεται λίγο ανάντι του κυλίνδρου στο πάνω ή κάτω μέρος αφήνοντας να περάσει ρευστό ανάμεσα σε αυτήν και τον κύλινδρο. Το ρευστό που βρίσκεται σε αυτήν την σχεδόν κλειστή περιοχή (μοβ σωματίδια) καταλήγει στους στροβίλους. Η άλλη εκτείνεται λίγο πιο μακριά από τον κύλινδρο (ουσιαστικά αποτελεί μέρος της προηγούμενης αποθητικής δομής) και εγκλωβίζει ρευστό (μαύρα και γκρι σωματίδια) από πολύ πίσω από τον κύλινδρο το οποίο θα καταλήξει στην ζώνη ανακυκλοφορίας. Τέλος η τρίτη αποθητική δομή, που εμφανίζεται σε αρκετά μεγαλύτερη εγκάρσια απόσταση από τον κύλινδρο, οριοθετεί το μέρος του ρευστού (γκρι σωματίδια) που θα καταλήξει στον ολκό του κυλίνδρου, δηλαδή στις επιμήκεις δομές σχήματος μανιταριού.

Γίνεται αντιληπτό ότι η ευρύτερη περιοχή ανακυκλοφορίας αποτελείται ουσιαστικά από πολλές ζώνες. Επίσης γίνεται εναλλαγή του ρευστού της περιοχής αυτής καθώς κινούνται οι δομές. Για παράδειγμα ένα μέρος του ρευστού (γκρι σωματίδια), που δεν καταλήγει ούτε στον στρόβιλο ούτε στις επιμήκεις έλκουσες δομές των στροβίλων, θα καταλήξει στον επόμενο εκλύμενο στρόβιλο αφού παραμείνει στην περιοχή της ευρύτερης ζώνης ανακυκλοφορίας για μία περίοδο. Επίσης μέρος του ρευστού που βρίσκεται σε μια πιο κοντινή στον κύλινδρο ζώνη ανακυκλοφορίας (μαύρα σωματίδια) θα καταλήξει στον εκλύμενο στρόβιλο μετά από δύο περιόδους. Έτσι συμπεραίνεται ότι στην κλειστή περιοχή που εκτείνεται λίγο παραπάνω από 2 διαμέτρους υπάρχει ανανέωση του ρευστού μέσω των συνεκτικών δομών και μάλιστα η ανανέωση αυτή είναι όλο και μικρότερη καθώς προχωράμε σε πιο κοντινές στον κύλινδρο ζώνες ανακυκλοφορίας. Επίσης συμπεραίνεται ότι ένα μεγάλο μέρος των στροβίλων αποτελείται από ρευστό το οποίο προέρχεται από την περιοχή ανακυκλοφορίας. Τα συγκεκριμένα συμπεράσματα είναι σε συμφωνία με τα ζητήματα που συζητήθηκαν στην παράγραφο που ασχολείται με την επιλογή του χρόνου ολοκλήρωσης αφού κατά τους προς τα πίσω υπολογισμούς μερικά από τα σωματίδια που ξεκινούσαν από τις θέσεις των στροβίλων ήθελαν περισσότερο χρόνο για να εξέλθουν από τα όρια του πεδίου ταχύτητας που σημαίνει ότι περνούσαν ή προερχόταν από την ζώνη

ανακυκλοφορίας. Να σημειωθεί επίσης ότι παρόμοια συμπεράσματα έχουν εξαχθεί και σε προηγούμενες εργασίες όπως αυτή των Perry et al. (1982) αλλά για την περίπτωση στρωτής ροής.



Σχήμα 16: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση A. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).



Σχήμα 17: Χρονική εξέλιξη (a-d) των ελκουσών συνεκτικών δομών (κόκκινο) και των αποθητικών συνεκτικών δομών (μπλε). Σε υπέρθεση οι θέσεις σωματιδίων που κινούνται με την ροή. Έκχυση των σωματιδίων έγινε μόνο την αρχική χρονική στιγμή σε τρία διαφορετικά σημεία.

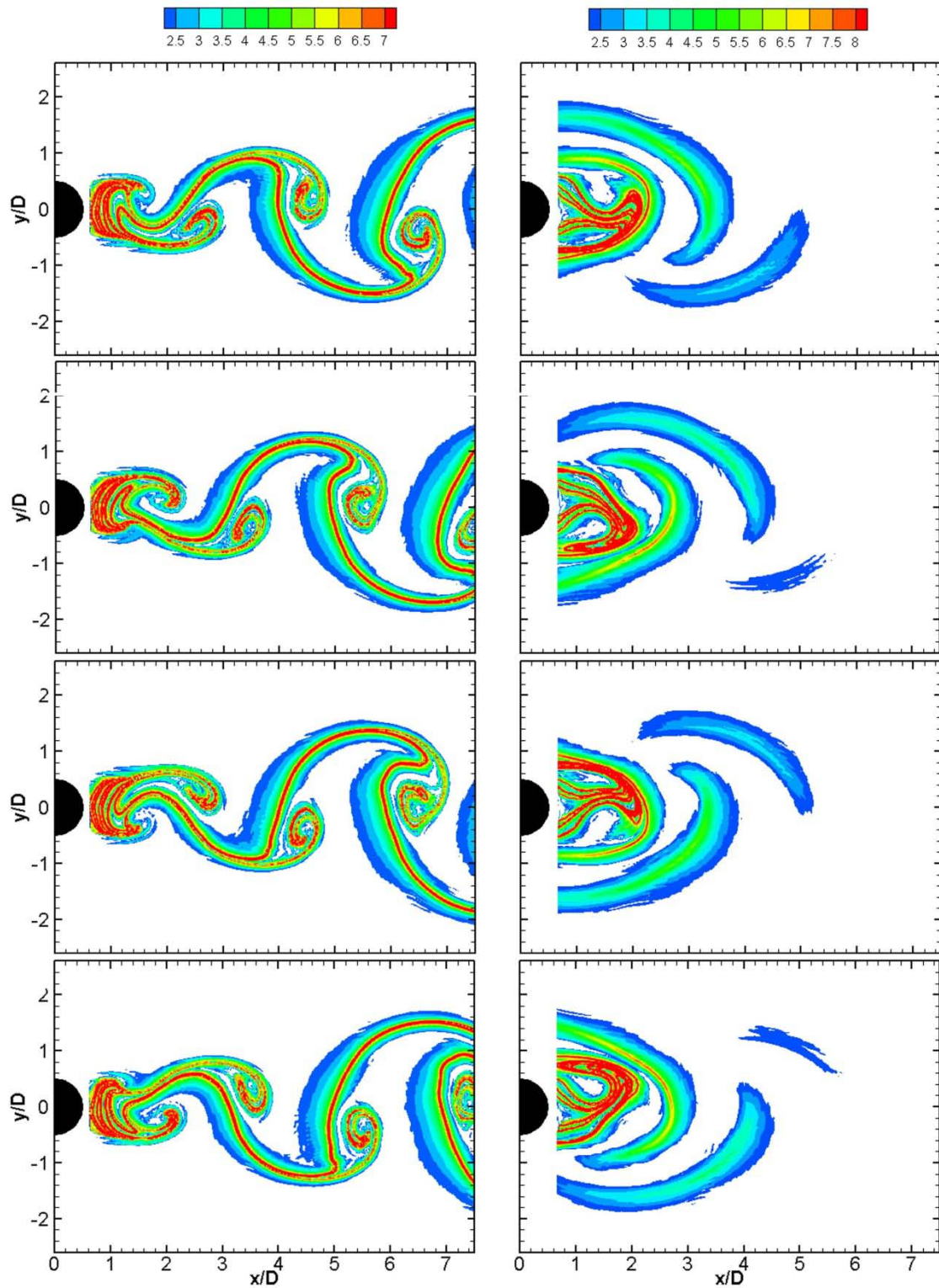
4.2.1 Επίδραση της ταχύτητας

Στο Σχήμα 18 φαίνεται η χρονική εξέλιξη της κατανομής των τιμών του πεδίου FTLE για την περίπτωση σταθερής εισερχόμενης ταχύτητας ίσης με $0.3m/s$ (περίπτωση B). Στο Σχήμα 19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για σταθερή ταχύτητα ίση με $0.69m/s$ (περίπτωση C). Οι δομές που εμφανίζονται είναι παρόμοιες με την προηγούμενη περίπτωση. Οι διαφορές που παρατηρούνται είναι ότι η δημιουργία των στροβίλων γίνεται όλο και πιο κοντά στον κύλινδρο με την αύξηση της ταχύτητας. Η ζώνη ανακυκλοφορίας επίσης μικραίνει στην κατεύθυνση της ροής. Επίσης οι επιμήκειες δομές σχήματος μανιταριού εκτείνονται σε μεγαλύτερη εγκάρσια απόσταση και συγχρόνως η έκταση που καλύπτουν είναι μεγαλύτερη. Να υπενθυμιστεί ότι διαμέσου αυτών των δομών η ροή είναι σχεδόν μηδενική. Στην περίπτωση αυτή όμως τα δεδομένα προέρχονται από τυρβώδη ροή όπου τα χαοτικά φαινόμενα δεν απεικονίζονται. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχει στην πραγματικότητα ροή διαμέσου των δομών αυτών λόγω της τύρβης και της τυρβώδους ανάμιξης. Έτσι όσο μεγαλύτερο το μήκος αυτών των δομών τόσο αναμένεται να υπάρχει μεγαλύτερη

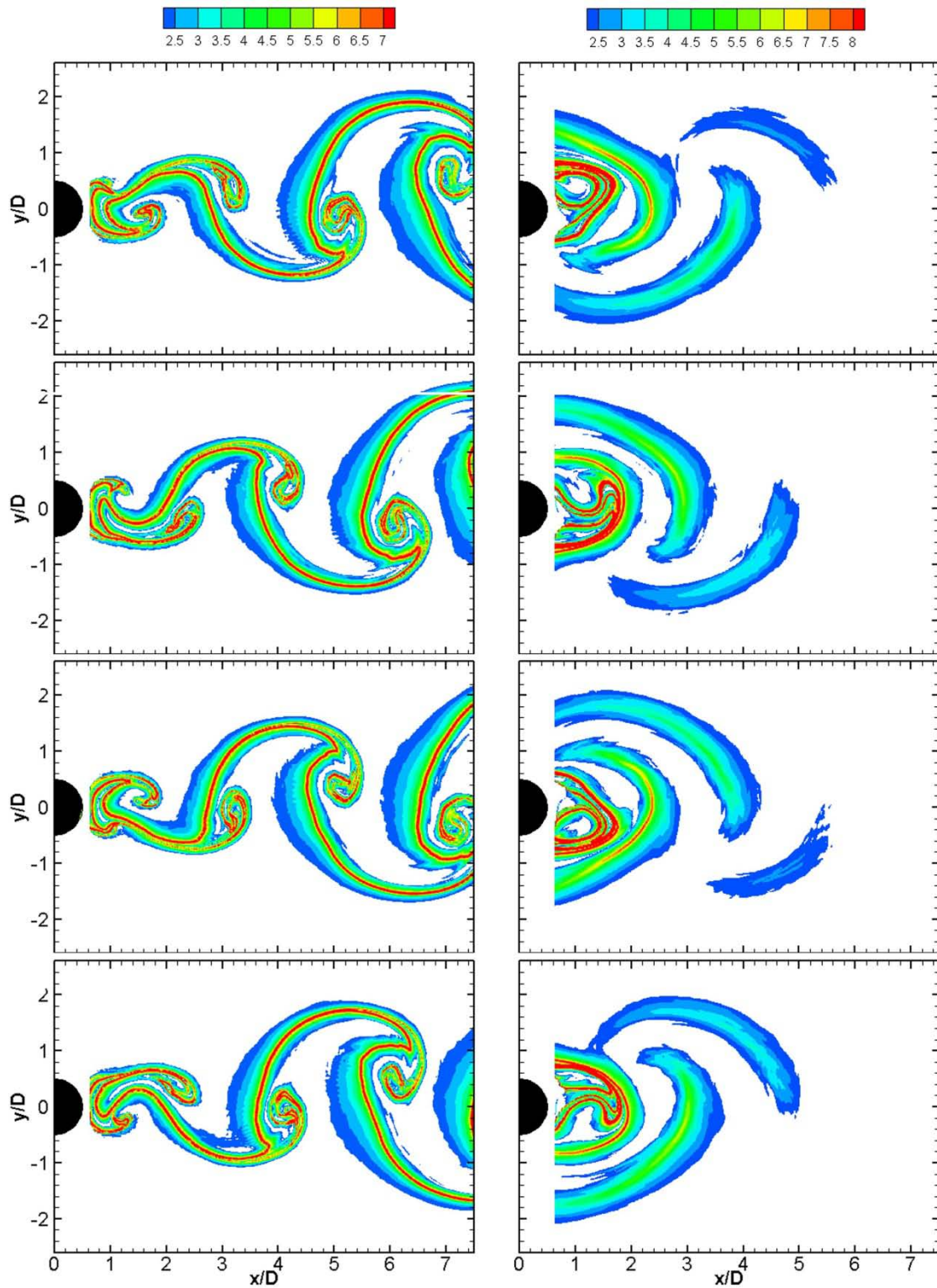
ανάμιξη μεταξύ του κάτω και του πάνω μέρους του ολκού του κυλίνδρου. Τέλος παρατηρείται ότι παρόλο που το ρευστό που εισέρχεται στους στρόβιλους φαίνεται να είναι το ίδιο και στις τρεις περιπτώσεις, όσο αυξάνεται η ταχύτητα τόσο αυξάνεται το ποσό του ρευστού που καταλήγει στον ολκό του κυλίνδρου. Αυτό φαίνεται από τις επιμήκεις αποθητικές δομές που εκτείνονται σε μεγαλύτερη εγκάρσια απόσταση αφήνοντας μεγαλύτερο μέρος του ρευστού να εισχωρήσει στον ολκό του κυλίνδρου.

4.2.2 Επίδραση των επιβαλλόμενων διαταραχών

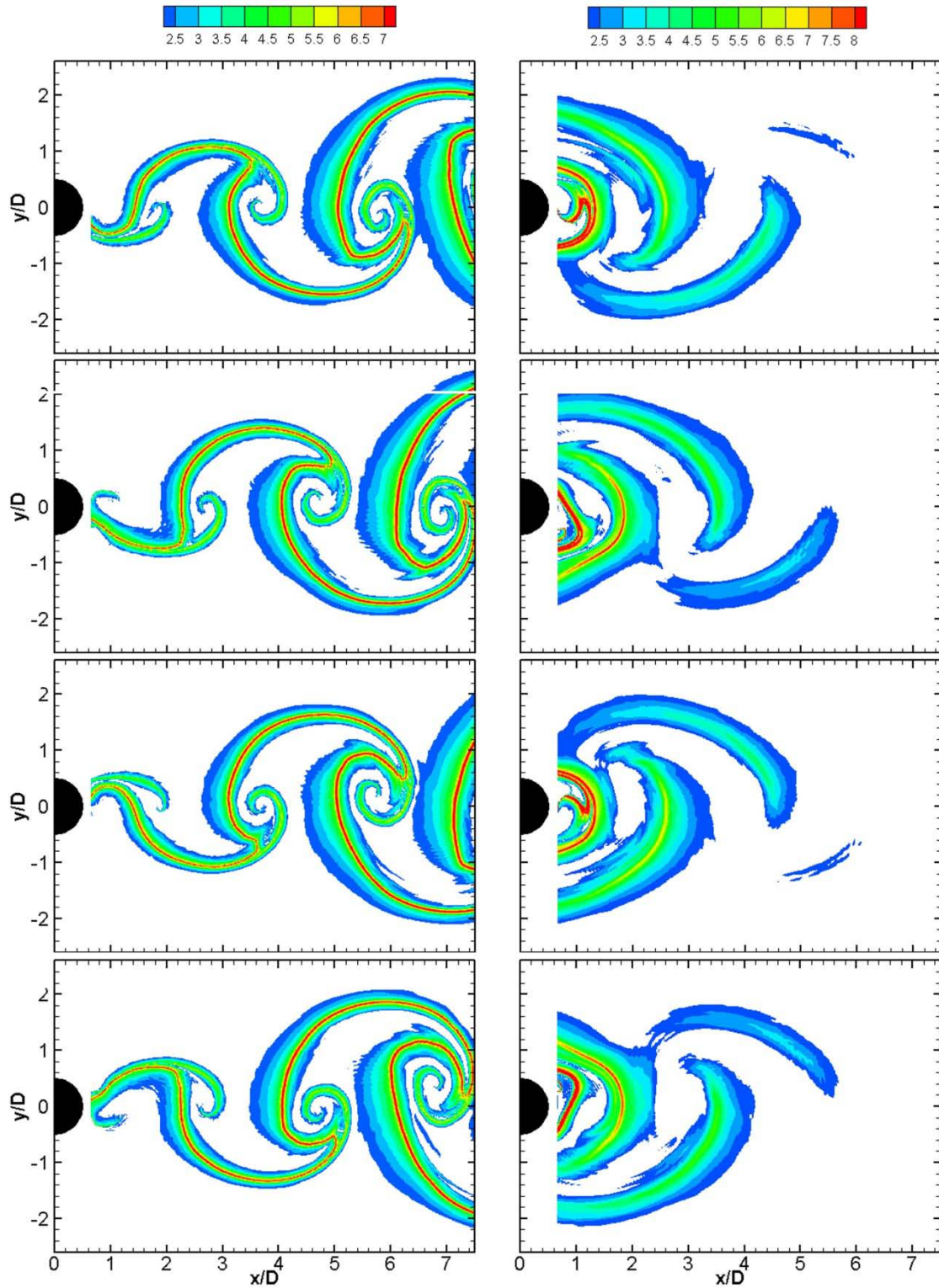
Στο Σχήμα 20 φαίνεται η κατανομή των τιμών του πεδίου FTLE για την περίπτωση ροής με επιβαλλόμενες διαταραχές (περίπτωση B2b). Σε σύγκριση με την αντίστοιχη περίπτωση χωρίς διαταραχές (B) παρατηρείται ότι πλέον η περιοχή ανακυκλοφορίας έχει πολύ μικρότερη έκταση (σχεδόν μισή απόσταση στην κατεύθυνση της ροής). Επίσης οι στρόβιλοι δημιουργούνται πλέον πολύ κοντά στον κύλινδρο και αναμένεται να έχουν μεγαλύτερη στροβιλότητα αφού οι αποθητικές συνεκτικές δομές εκτείνονται σε μεγαλύτερη απόσταση στην εγκάρσια διεύθυνση και έτσι περισσότερο ρευστό καταλήγει στους σχηματιζόμενους κυλίνδρους και γενικότερα στον ολκό του κυλίνδρου. Τέλος οι επιμήκεις έλκουσες συνεκτικές δομές σχήματος μανιταριού έχουν πλέον σχήμα παρόμοιο με αυτό της περίπτωσης C.



Σχήμα 18: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση B. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).



Σχήμα 19: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση C. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).



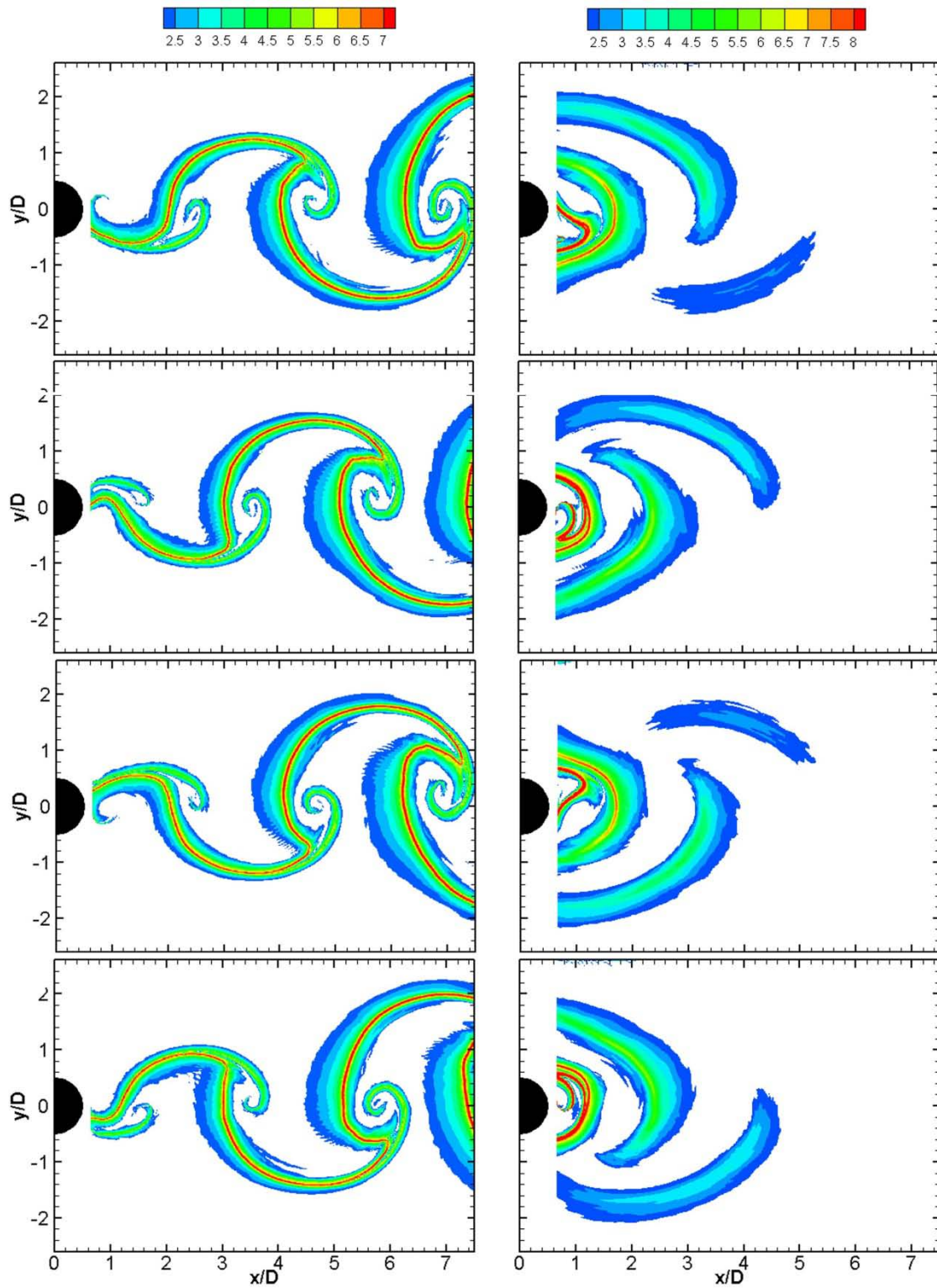
Σχήμα 20: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση B2b. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).

4.2.3 Επίδραση της συχνότητας των επιβαλλόμενων διαταραχών

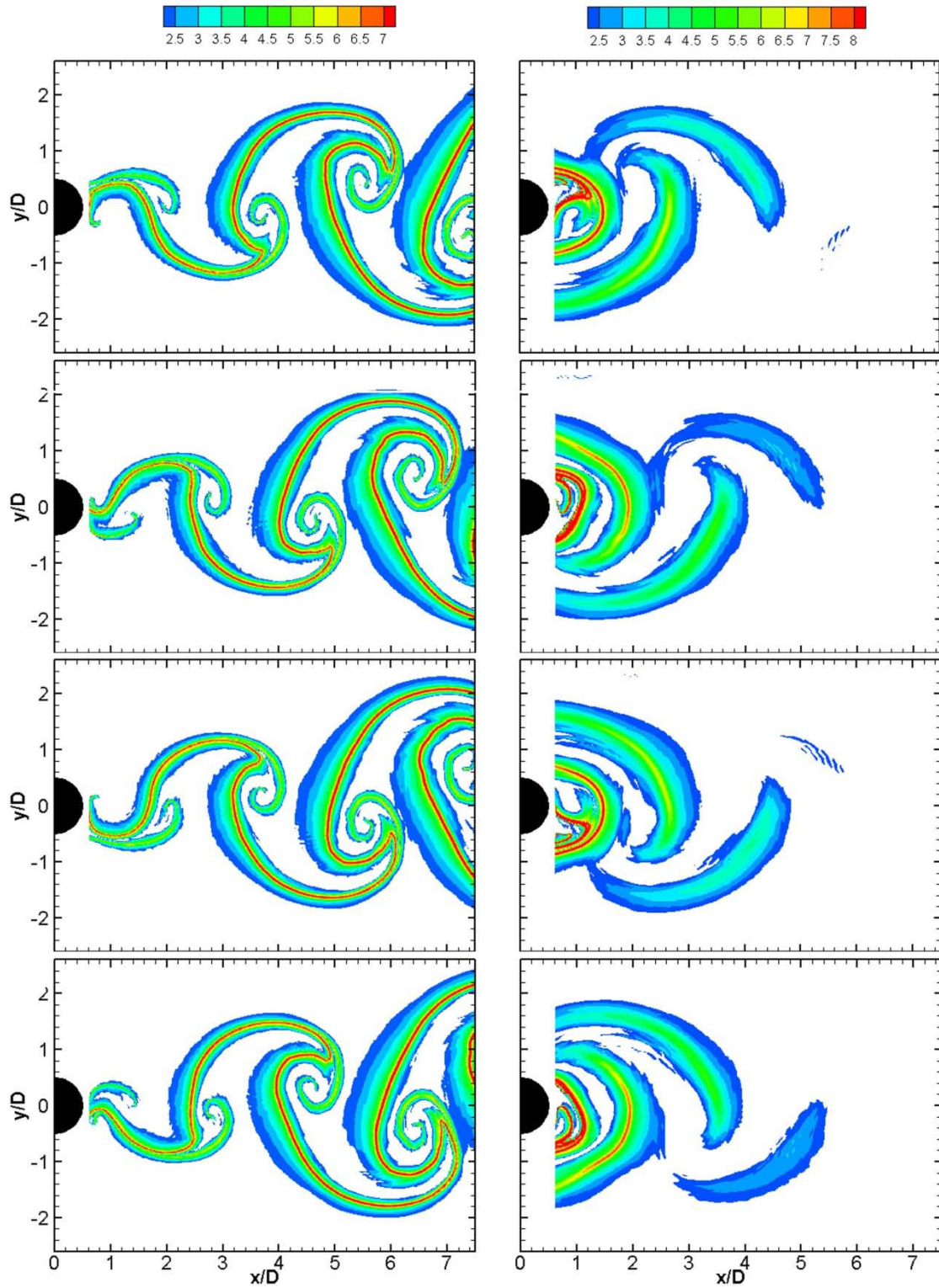
Στα Σχήματα 21 και 22 φαίνονται τα πεδία FTLE για τις περιπτώσεις επιβαλλόμενων διαταραχών μικρότερης (περίπτωση B1) και μεγαλύτερης συχνότητας (περίπτωση B3) αντίστοιχα. Η συχνότητα δεν δείχνει να επιδρά στο πλάτος των δομών στην εγκάρσια διεύθυνση αλλά ούτε στο πόσο κοντά στον κύλινδρο γίνεται η δημιουργία των στροβίλων. Παρατηρείται όμως (ειδικότερα στην περίπτωση B3) ότι η απόσταση μεταξύ των στροβίλων έχει μειωθεί καθώς επίσης οι στροβίλοι δείχνουν να βρίσκονται σε μεγαλύτερη εγκάρσια απόσταση από τον κύλινδρο.

4.2.4 Επίδραση του πλάτους ταλάντωσης των επιβαλλόμενων διαταραχών

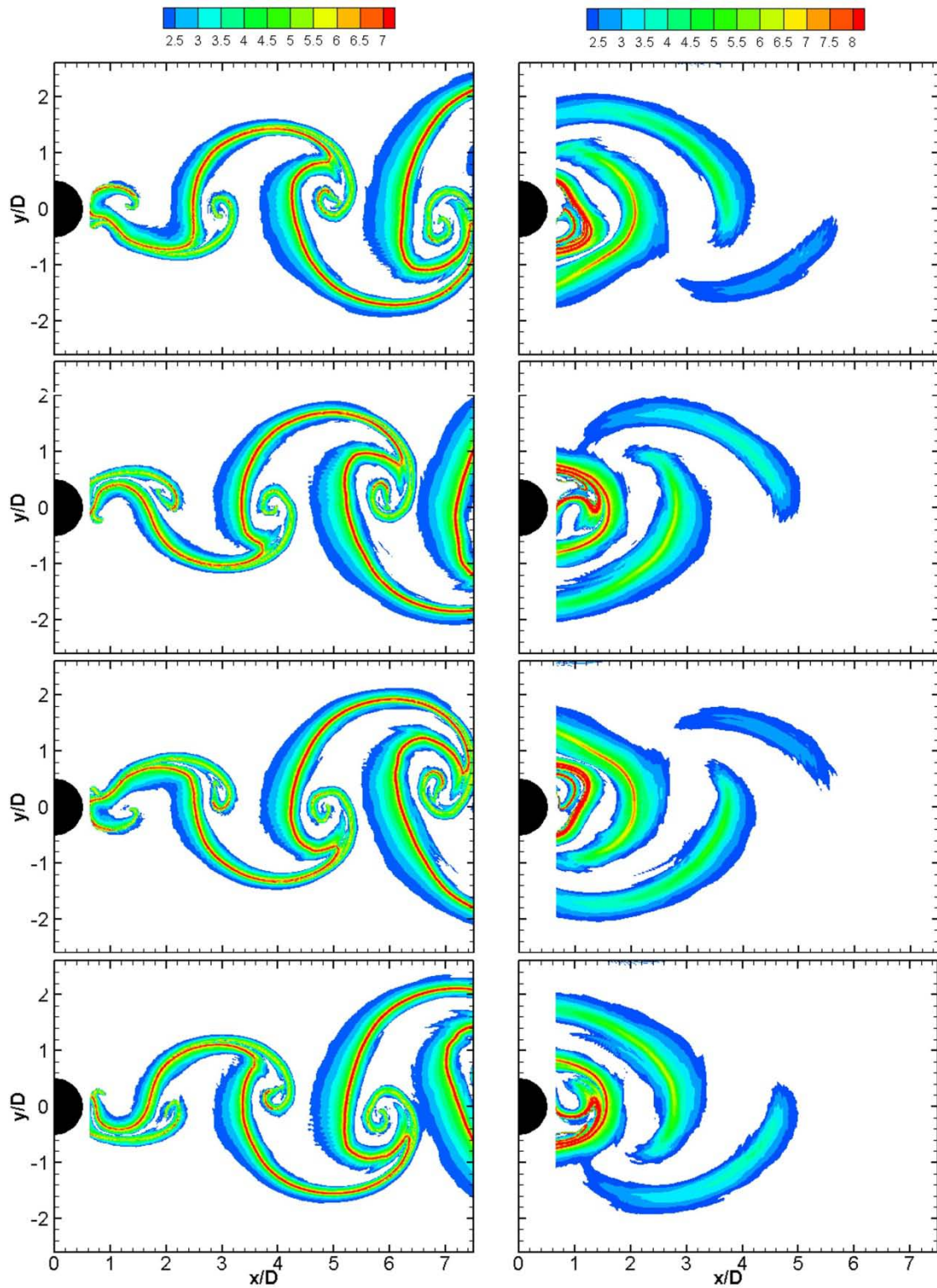
Στα Σχήματα 23 και 24 φαίνονται τα πεδία FTLE για τις περιπτώσεις επιβαλλόμενων διαταραχών με ίδια συχνότητα άλλα μικρότερο (περίπτωση B2a) και μεγαλύτερο (περίπτωση B2c) πλάτος ταλάντωσης από την περίπτωση B2b αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι η απόσταση μεταξύ των στροβίλων παραμένει σχεδόν ίδια με την επιβολή διαταραχών διαφορετικού πλάτους ταλάντωσης. Παρόλα αυτά με αύξηση του πλάτους ταλάντωσης υπάρχει σημαντική αύξηση του μήκους των δομών καθώς επίσης και διαπλάτυνση αυτών. Παράλληλα η ανακυκλοφορία και η έκλυση των στροβίλων γίνετε όλο και πιο κοντά στον κύλινδρο.



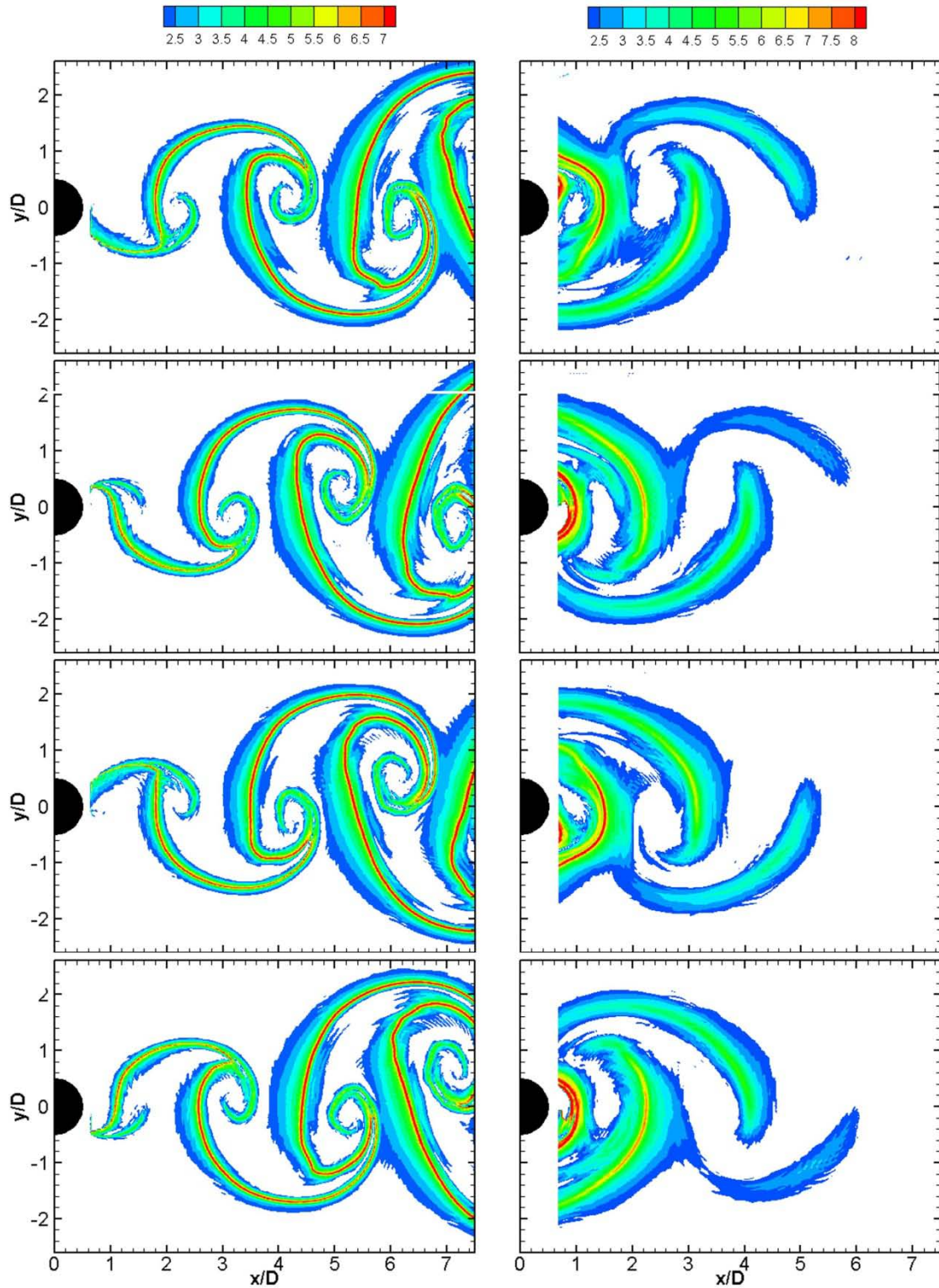
Σχήμα 21: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση B1. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).



Σχήμα 22: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση B3. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).



Σχήμα 23: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση B2a. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).



Σχήμα 24: Χρονική εξέλιξη του πεδίου FTLE για την περίπτωση B2c. Αριστερά με κόκκινο φαίνονται οι έλκουσες συνεκτικές δομές (aLCS) ενώ δεξιά με κόκκινο φαίνονται οι αποθητικές συνεκτικές δομές (rLCS).

5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε εξαγωγή συνεκτικών δομών κατά Lagrange από χρονοσειρές πεδίου ταχύτητας που αφορούν την ροή γύρο από κύλινδρο. Για την εξαγωγή των συνεκτικών δομών χρησιμοποιήθηκε μεθοδολογία που βασίζεται στον υπολογισμό του εκθέτη Lyapunov πεπερασμένου χρόνου από χρονοσειρές πεδίων ταχύτητας που προέρχονται είτε από δεδομένα υπολογιστικής ρευστομηχανικής είτε από πειραματικά δεδομένα. Είναι γνωστό ότι τέτοιες μεθοδολογίες χαρακτηρίζουν την ροή ως προς τα φαινόμενα μεταφοράς, μετάδοσης θερμότητας και ανάμιξης.

Αρχικά η μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε υπολογιστικά δεδομένα για στρωτή ροή με αριθμό Reynolds ίσο με 150. Οι έλκουσες συνεκτικές δομές που εμφανίζονται με αυτή την μεθοδολογία ταυτοποιούνται ικανοποιητικά με προηγούμενες τεχνικές απεικόνισης κατά Lagrange όπως αυτή του υπολογισμού της τροχιάς αβαρών σωματιδίων που εκλύονται ανάντι του κυλίνδρου. Γίνεται αντιληπτό ότι η μεθοδολογία που βασίζεται στον υπολογισμό του πεδίου FTLE πλεονεκτεί των προηγούμενων αφού γίνεται οπτικοποίηση *a posteriori* όλου του πεδίου ταχύτητας και επίσης δίνεται η δυνατότητα εξαγωγής απωθητικών δομών οι οποίες δεν ήταν δυνατό να εξαχθούν με προηγούμενες μεθόδους. Οι απωθητικές αυτές δομές σε συνδυασμό με τις έλκουσες οριοθετούν περιοχές του ρευστού με διαφορετική δυναμική από το υπόλοιπο ρευστό, όπως για παράδειγμα η περιοχή δημιουργίας των στροβίλων και η περιοχή ανακυκλοφορίας.

Στην συνέχεια η μεθοδολογία εφαρμόζεται σε δεδομένα που προέρχονται από πειραματικές μετρήσεις με την μέθοδο PIV και αφορούν την τυρβώδη ροή γύρο από κύλινδρο με αριθμό Reynolds της τάξης των 2000. Τα δεδομένα αυτά είχαν υποστεί περαιτέρω επεξεργασία με την μέθοδο ορθοκανονικής αποικοδόμησης (POD) και στην συνέχεια είχε γίνει αποικοδόμηση του πεδίου ταχύτητας μόνο από τις δύο ενεργειακά πρώτες δομές. Μελετήθηκαν οχτώ περιπτώσεις. Οι τρεις με διαφορετική σταθερή ταχύτητα και οι υπόλοιπες πέντε με επιβολή αρμονικών διαταραχών της ταχύτητας για διαφορετικά πλάτη και συχνότητες ταλάντωσης της εισερχόμενης ροής.

Εφαρμογή της μεθοδολογίας στις περιπτώσεις χωρίς διαταραχές απέδωσε αποτελέσματα θεαματικά σε σχέση με τα αναμενόμενα. Οι δομές που εμφανίζονται αποκαλύπτουν τις γνωστές δομές σχήματος μανιταριού της οδού στροβίλων Von

Κάρμάν. Οι δομές αυτές συμπίπτουν ικανοποιητικά με τις δομές που εμφανίζονται σε στρωτή ροή με αποτέλεσμα να συμπεραίνεται ότι ο βασικός μηχανισμός αστάθειας που προκαλεί την έκλυση στροβίλων να είναι ίδιος και στην περίπτωση της τυρβώδους ροής. Το γεγονός αυτό οδηγεί επίσης στο συμπέρασμα ότι οι δύο πρώτες ενεργειακά δομές POD είναι ικανές να χαρακτηρίσουν τις δυναμικά μεγάλης κλίμακας δομές που ενυπάρχουν στην ροή. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι είναι η πρώτη φορά που αποκαλύπτονται οι δομές αυτές για την περίπτωση τυρβώδους ροής αφού τα χαοτικά φαινόμενα εμπόδιζαν την οπτικοποίηση με προηγούμενες μεθόδους.

Η επίδραση των επιβαλλόμενων διαταραχών γίνεται πλέον πιο φανερή. Σε γενικές γραμμές η επιβολή διαταραχών υποβοηθά τα φαινόμενα ανάμιξης αφού η κλειστή περιοχή ανακυκλοφορίας υποδιπλασιάζεται, οι επιμήκης δομές έχουν μεγαλύτερο μήκος και οι απωθητικές δομές στο πάνω και κάτω μέρος του κυλίνδρου διαπλατώνονται με αποτέλεσμα περισσότερο ρευστό να εισχωρεί στον ολκό του κυλίνδρου και στους δημιουργούμενους στροβίλους. Τα αποτελέσματα δείχνουν επίσης ότι η συχνότητα των επιβαλλόμενων διαταραχών επηρεάζει κυρίως την απόσταση μεταξύ των στροβίλων (μήκος κύματος). Ενώ το πλάτος της ταλάντωσης των διαταραχών δείχνει να επηρεάζει κυρίως το σημείο δημιουργίας των εκλυόμενων στροβίλων, την περιοχή της ζώνης ανακυκλοφορίας και το πλάτος των απωθητικών δομών που σχετίζονται με την εισχώρηση ρευστού από τα πλάγια στον ολκό του κυλίνδρου. Πιο συγκεκριμένα με αύξηση της συχνότητας παρατηρείται μείωση της απόστασης των στροβίλων ενώ με αύξηση του πλάτους ταλάντωσης παρατηρείται μείωση της έκτασης της ζώνης ανακυκλοφορίας και της απόστασης έκλυσης των στροβίλων με παράλληλη αύξηση του εισερχόμενου ρευστού στον ολκό του κυλίνδρου.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την οπτικοποίηση πεδίων ροής καθώς και για την μελέτη φαινομένων μεταφοράς μάζας και ανάμιξης. Μάλιστα η μεθοδολογία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί όχι μόνο σε πεδία ροής με περιοδικά φαινόμενα αλλά και σε εντελώς ασταθείς ροές όπως επιφανειακά ρεύματα ωκεανών, μεταφορά αέριων ρύπων στην ατμόσφαιρα και άλλα πολλά.

6 Βιβλιογραφία

- Bouris, D., Konstantinidis, E., Balabani, S., Castiglia, D. and Bergeles, G., 2005, Design of a novel, intensified heat exchanger for reduced fouling rates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48(18):3817–3832.
- Haller, G., 2002, Lagrangian coherent structures from approximate velocity data. *Phys. Fluids* 14 : 1851-1861.
- Konstantinidis, E. and Balabani, S., 2008, Flow structure in the locked-on wake of a circular cylinder in pulsating flow: effect of forcing amplitude. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29:1567–1576
- Konstantinidis, E., Balabani, S. and Yianneskis, M., 2003, The effect of flow perturbations on the near wake characteristics of a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures* 18:367–386
- Konstantinidis, E., Balabani, S. and Yianneskis, M., 2007, Bimodal vortex shedding in a perturbed cylinder wake. *Physics of Fluids* 19: 011701, 1-4.
- Konstantinidis, E. and Bouris, D., 2010, The effect of nonharmonic forcing on bluff-body aerodynamics at a low Reynolds number. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 98: 245–252.
- Kourentis, L. and Konstantinidis, E., 2010, Uncovering large-scale coherent structures in natural and forced turbulent wakes by combining PIV, POD and FTLE. *15th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, July 5-8, Lisbon, Portugal*.
- Lekien, F., 2003, Time-Dependent Dynamical Systems and Geophysical Flows. *Thesis, California Institute of Technology Pasadena, California*
- Lekien, F., Coulliette, C., Mariano, A. J., Ryan, E.H., Shay, L. K., Haller, G. and Marsden, J., 2005 Pollution release tied to invariant manifolds: A case study for the coast of Florida. *Physica D* 210 (2005) 1-20.
- Lekien, F. and Marsden, J., 2005, Tricubic interpolation in three dimensions. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **63**:455-471.
- Peng, J. and Dabiri J. O., 2007, A potential-flow, deformable-body model for fluid-structure interactions with compact vorticity: application to animal swimming measurements. *Exp Fluids* 43:655-664.

Perry, A. E., Chong, M.S. & Lim, T.T., 1982, The vortex-shedding process behind two-dimensional bluff bodies. *Journal Of Fluid Mechanics*, 77 - 90.

Shadden, S. C., 2006, A dynamical systems approach to unsteady systems. *Ph.D. Thesis, California Institute of Technology*.

Shadden, S. C., Katija, K., Rosenfeld, M., Marsden, J. E. and Dabiri, J. O., 2007, Transport and stirring induced by vortex formation. *J. Fluid Mech. (2007)*, vol.593, pp. 315-331.

Shadden, S. C., Lekien, F. and Marsden, J.E., 2005, Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D* 212 271-304.

Κουρεντής, Λ., Κωνσταντινίδης, Ε., 2009, Μελέτη των φαινομένων μεταφοράς μάζας και ανάμιξης με τη χρήση Λαγκρασιανών μεθόδων. *7ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής, 3-5 Ιουνίου, Πάτρα*.