ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

«Η Διδασκαλία των Νοερών Υπολογισμών και Εκτιμήσεων στην Εκπαίδευση των Μαθηματικών στην Ελλάδα: μια ιστορική αναδρομή»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΗΛΙΑΝΑΣ ΜΑΝΟΥ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

Στις «Επιστήμες της Αγωγής»

με ειδίκευση στις «Θετικές επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

ΦΛΩΡΙΝΑ

Νοέμβριος 2018

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Επιστήμες της αγωγής» με κατεύθυνση τις Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, οι οποίοι με αφοσίωση και ζήλο μας μεταλαμπάδευσαν νέες γνώσεις. Ιδιαίτερα θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επόπτη καθηγητή μου κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη για την καθοδήγησή του στην επιλογή του ερευνητικού θέματος, καθώς και για τις πολύτιμες υποδείξεις και συμβουλές του, οι οποίες συνέβαλαν στη βελτίωση και ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ για την άψογη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου σε αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα και εύχομαι να είναι πηγή έμπνευσης και για άλλους συναδέλφους.

Επίσης, ευχαριστώ τον κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο και τον κ. Ανδρέου Ανδρέα για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή της εργασίας μου.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συμπαράσταση και για τη στήριξή τους.

Αφιερώνεται στους δυο πρίγκιπές μου,

τον Κωνσταντίνο και το Φώτη…

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται μια ιστορική αναδρομή της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου στην Ελλάδα. Σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση του περιεχομένου και της διδασκαλίας των νοερών πράξεων και εκτιμήσεων από τα πρώτα χρόνια οργάνωσης του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος μέχρι και σήμερα. Για την επίτευξη του στόχου πραγματοποιήθηκε μια ποιοτική ιστορική έρευνα με αναδρομή σε πρωτογενείς πηγές δεδομένων. Η ανάλυση χωρίστηκε σε τρεις περιόδους και στηρίχθηκε στα Αναλυτικά Προγράμματα, τα σχολικά εγχειρίδια και τα βιβλία του δασκάλου κάθε εποχής. Συμπερασματικά, στην πρώτη περίοδο, αυτή των παραδοσιακών μαθηματικών, παρατηρήθηκε ότι υπήρχε έντονη χρήση των νοερών υπολογισμών με στόχο την πραγματοποίηση των πράξεων, ενώ δεν χρησιμοποιούνταν καθόλου οι εκτιμήσεις. Τη δεύτερη περίοδο, κατά την οποία τα παραδοσιακά μαθηματικά δίνουν τη θέση τους στα μοντέρνα μαθηματικά, οι νοεροί υπολογισμοί παραγκωνίσθηκαν αισθητά, ενώ στο τέλος αυτής της περιόδου έγιναν οι πρώτες αναφορές στις εκτιμήσεις, χωρίς όμως να διδάσκονται στην πραγματικότητα. Τέλος, την τρίτη περίοδο, οι νοεροί υπολογισμοί επανήλθαν στο προσκήνιο με στόχο την εξοικείωση με τις ιδιότητες των πράξεων, ενώ σήμερα στοχεύουν στην εύρεση αποτελεσμάτων με διαφορετικές στρατηγικές με σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Σήμερα η διδασκαλία της εκτίμησης προωθείται μέσα από τα Αναλυτικά Προγράμματα, ενώ υπάρχει έντονα στη διδακτέα ύλη από τις μικρές ακόμα τάξεις.

Λέξεις κλειδιά: ιστορική αναδρομή, νοεροί υπολογισμοί, εκτιμήσεις.

Abstract

In this research is attempted a historical review of the teaching of the mental calculations and estimations in the mathematical education of the Primary School in Greece. This research aims to investigate the content and the way of teaching mental calculations and estimations through the earliest years of organizing the greek educational system to the present days. To achieve the goal, a qualitative historical research was carried out with reference to primary data sources.The analysis was divided into three periods and was based on the curriculum, school textbooks and teacher books of each period. The results showed that, in the first period, that of traditional mathematics, there was intense use of mental calculations with the aim of carrying out the operations, while no estimations were used at all. In the second period, when traditional mathematics puts their place into modern mathematics, mental calculations were markedly offset, whereas at the end of this period the first references to estimations were made, but they were no taught in reality. Finally, in the third period, mental calculations came back to the fore in order to familiarize themselves with the properties of operations, and today they aim to find results with different strategies for the development of mathematical thinking. Today teaching of estimation is promoted through the curriculum, while it is heavily present in school textbooks from the small classes.

Keywords: historical review, mental calculations, estimation.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Σημερινή κατάσταση: Έννοιες & Ορισμοί

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται η ανάλυση κάποιων σημαντικών θεωρητικών θεμάτων. Αρχικά, γίνεται αναφορά στους αριθμητικούς υπολογισμούς και στα είδη αυτών. Στη συνέχεια, ορίζονται οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις, καθώς επίσης ξεκαθαρίζεται η σχέση των δυο αυτών εννοιών. Ακολουθεί ανάλυση των στρατηγικών νοερών υπολογισμών, τόσο για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, όσο και του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Έπειτα, αναλύονται τα είδη της εκτίμησης και οι στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης. Σκόπιμο θεωρήθηκε να αναφερθεί η σημαντικότητα και τα οφέλη της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων. Τέλος, γίνεται μια μικρή αναφορά στην έννοια της αίσθησης του αριθμού, καθώς και στη σχέση της με τους νοερούς υπολογισμούς και τις εκτιμήσεις.

1.Αριθμητικοί υπολογισμοί- Είδη υπολογισμών

Τα Μαθηματικά κατείχαν πάντα πολύ σημαντική θέση στο σχολικό πρόγραμμα μαθημάτων. Στόχος της διδασκαλίας τους ήταν, και είναι η ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης των μαθητών. Ως επί των πλείστων, οι μαθητές ασχολούνται με τους αριθμούς, τους αριθμητικούς υπολογισμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Εάν λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι όλα τ' άλλα μαθήματα χρησιμοποιούν αριθμητικούς υπολογισμούς, τότε δικαίως λοιπόν, το σχολείο χαρακτηρίζεται ως το σχολείο των αριθμητικών πράξεων και των υπολογισμών. Συνεπώς, οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι απαραίτητοι τόσο στην εκπαιδευτική διαδικασία, όσο και στην καθημερινή ζωή, αφού είναι πανταχού παρόντες σε όλες τις καθημερινές συναλλαγές και εκδηλώσεις (Αποστολόπουλος, 1995).

Υπολογισμός, σύμφωνα με τη Wikipedia, είναι (1) ένας μαθηματικός προσδιορισμός του ποσού ή του αριθμού κάποιου αντικειμένου , (2) η αξιολόγηση των κινδύνων, των δυνατοτήτων ή των αποτελεσμάτων μιας κατάστασης ή μιας πορείας. Σύμφωνα με τον καθηγητή Μπαμπινιώτη η λέξη υπολογισμός ορίζεται ως: 1. η εκτέλεση μαθηματικών πράξεων, 2. ο προσδιορισμός του αριθμού μιας ποσότητας (προσώπων, πραγμάτων), της αξίας κλπ. (συνήθως με εμπειρικό ή πρόχειρο τρόπο). Σύμφωνα με το λεξικό Τριανταφυλλίδη, υπολογισμός είναι ο συνδυασμός, ο σχεδιασμός ορισμένων δεδομένων για τον προσδιορισμό ενός μεγέθους ή μια σειρά συλλογισμών και εκτιμήσεων που οδηγούν σε κάποιο αποτέλεσμα.

Στην ελληνική γλώσσα, σε παλαιότερες εποχές, χρησιμοποιούνταν ο όρος *λογαριασμός* αντί του *υπολογισμός* που χρησιμοποιείται σήμερα. Για παράδειγμα, ένα σχετικό βιβλίο του συγγραφέα Σαφαρίκα (1965) έφερε τον τίτλο «*Μέθοδος λογαριασμών από μνήμης*» (Λεμονίδης, 2013).

Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, με σημείο αναφοράς τη διαδικασία, χρησιμοποιείται ο όρος «Αριθμητικός Λογισμός». Κατά τον καθηγητή κ. Χαλάτση, «ο αριθμητικός λογισμός είναι κάθε ακολουθία αριθμητικών πράξεων, με την οποία από δύο ή περισσότερους θετικούς ρητούς αριθμούς οδηγούμαστε σ' ένα νέο θετικό ρητό αριθμό, τον οποίο καλούμε αποτέλεσμα» (Χαλάτσης, 1990).

Στην καθημερινή ζωή, οι άνθρωποι είναι αναγκασμένοι να πραγματοποιούν διάφορους υπολογισμούς. Οι υπολογισμοί αυτοί, σε γενικές γραμμές, μπορεί να γίνονται με τη χρήση τριών μέσων: α) χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι και εκτελώντας τους γραπτούς αλγόριθμους των πράξεων, β) με την πραγματοποίηση υπολογισμών με το μυαλό, δηλαδή νοερών υπολογισμών ή γ) με τη βοήθεια μηχανικών μέσων: αριθμομηχανή, κομπιούτερ, κινητό τηλέφωνο, κτλ. Χρησιμοποιούνται, βεβαίως, και συνδυασμοί αυτών των μέσων, για παράδειγμα μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για μια πράξη την αριθμομηχανή και να ελέγξει το αποτέλεσμα υπολογίζοντας με το μυαλό. Στους υπολογισμούς μπορεί κάποιες πράξεις να πραγματοποιούνται στο χαρτί, κάποιες να γίνονται με τη βοήθεια μηχανής και κάποιες με το μυαλό. Επίσης, μπορεί να πραγματοποιούνται υπολογισμοί με το μυαλό και να κρατούνται σημειώσεις με χαρτί και μολύβι (Λεμονίδης, 2013).

Η διάκριση του αριθμητικού λογισμού σε κατηγορίες, ως προς τον τρόπο διεξαγωγής τους, θα μπορούσε να γίνει και κατά το σχήμα:

i) αλγοριθμικός
ii) μη – αλγοριθμικός
iii) με υπολογιστή (Χαλάτσης, 1990).

Οι αλγόριθμοι ή γραπτοί υπολογισμοί είναι μια αυστηρά τυποποιημένη διαδικασία με προδιαγεγραμμένα υπολογιστικά βήματα που αντιστοιχούν σε αριθμητικές πράξεις δυο φυσικών αριθμών, οι οποίες τελικά ανάγονται στα **«βασικά αριθμητικά γεγονότα»**, όπως αποκαλεί ο Χαλάτσης, τις βασικές αριθμητικές σχέσεις αθροισμάτων, διαφορών, γινομένων, μονοψήφιων αριθμών (Χαλάτσης, 1990).

Ο γραπτός αριθμητικός λογισμός κυριαρχεί ακόμα στο σχολείο, όπως και άλλοτε. Στη διδασκαλία, επικρατεί η παραδοσιακή λογική της διδασκαλίας της γραπτής αριθμητικής, δηλαδή των τυπικών γραπτών αλγορίθμων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Θεωρείται ότι, κάποιος μπορεί να κάνει εύκολα υπολογισμούς, όταν γνωρίζει και χρησιμοποιεί σωστά τους γραπτούς αλγόριθμους. Παρόλα αυτά, τα τελευταία χρόνια τονίζεται η σημαντικότητα των νοερών υπολογισμών και προτείνεται περισσότερο η ένταξή τους στη διδασκαλία.

Στην καθημερινότητα, ενώ οι αλγοριθμικοί υπολογισμοί ήταν άλλοτε κυρίαρχοι, την εποχή μας παραγκωνίζονται. Πλέον στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιείται ευρέως ο υπολογιστής τσέπης, ενώ για τους εύκολους και απλούς υπολογισμούς χρησιμοποιείται ο νοερός τρόπος εκτέλεσης. Οι νοεροί αριθμητικοί υπολογισμοί είναι και θα είναι πάντα, για απλές αριθμητικές πράξεις, χρήσιμοι και απαραίτητοι στον καθένα γιατί είναι πάντα και θα είναι σε κάθε περίσταση διαθέσιμοι.

2. Ορισμοί

2.1 Νοεροί υπολογισμοί

Για την απόδοση του όρου των νοερών υπολογισμών, χρησιμοποιούνται διάφοροι άλλοι όροι στη βιβλιογραφία. Οι νοεροί αριθμητικοί υπολογισμοί έχουν αποκληθεί «Αριθμητική με το Νου», «Νοητική Αριθμητική», «Νοερός Λογαριασμός» (Αποστολοπουλος, 1995). Παλαιότερα, χρησιμοποιούνταν οι όροι «Λογαριασμοί από μνήμης» ή «Προφορικοί Λογαριασμοί» ή «Νοεροί Λογαριασμοί» (Σαφαρίκας, 1965). Στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία για την απόδοση του όρου συναντούμε διαφορετικούς όρους όπως: *mental calculation* ή *mental arithmetic* (νοερή αριθμητική). Συναντούμε επίσης, τον γενικό όρο *mental maths* (νοερά μαθηματικά), που χρησιμοποιείται συνήθως για να εκφράσει την ενότητα των νοερών υπολογισμών μέσα στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών.

Πολυπληθής φαίνεται να είναι ο αριθμός των ερευνών στη διεθνή βιβλιογραφία, σχετικά με το περιεχόμενο των νοερών υπολογισμών. Ο ορισμός του όρου έχει προσεγγιστεί πολλάκις στο παρελθόν από γνωστά ονόματα στον ερευνητικό χώρο, μερικοί εκ των οποίων θα παρατεθούν παρακάτω.

Σύμφωνα με τους Wandt & Brown (1957), *«νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία του υπολογισμού με ακρίβεια ενός αριθμητικού αποτελέσματος χωρίς τη χρήση κανενός εξωτερικού μέσου υπολογισμού ή γραφής».* Ο Trafton (1978) ορίζει τους νοερούς υπολογισμούς ως *«χρήση μη τυπικών αλγορίθμων υπολογισμού για την εξαγωγή απαντήσεων χωρίς τη χρήση χαρτιού και* *μολυβιού».* Οι δυο αυτοί ορισμοί παρατηρήθηκαν ότι περιορίζουν σε μεγάλο βαθμό τον όρο των νοερών υπολογισμών.

Επιπλέον, η Reys (1985) αναφέρει: «*Η ικανότητα να υπολογίσεις νοερά είναι να υπολογίσεις ακριβώς αριθμητικές απαντήσεις χωρίς τη βοήθεια αριθμομηχανής ή καταγραφής. Η ικανότητα αυτή ποικίλει ανάμεσα στα άτομα».* Με αυτή την άποψη συμφώνησαν και οι ερευνητές Sowder (1988), Reys et al. (1995) και Reys & Hope (1993).

Ο Χαλάτσης (1990), υποστηρίζει ότι κάνουμε «αριθμητική με το νου», όταν εκτελούμε έναν αριθμητικό υπολογισμό, χωρίς να χρησιμοποιούμε χαρτί και μολύβι ή υπολογιστή ή άλλο τεχνικό μέσο. Κάθε πρόγραμμα διδασκαλίας της αριθμητικής στο δημοτικό σχολείο, υποστηρίζει, αποσκοπεί μεταξύ άλλων, και στην απομνημόνευση των αθροισμάτων και των γινομένων των μονοψήφιων αριθμών, αλλά και των αντίστοιχων διαφορών και πηλίκων. Η απομνημόνευση και άλλων, σχετικά απλών, αριθμητικών υπολογισμών, απλοποιεί τη λειτουργία των αλγορίθμων ή πολλές φορές καθιστά περιττή και την ίδια τη χρήση τους, ακριβώς διότι μπορούμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό με το νου.

Οι McIntosh et al. (1997), ορίζουν τον νοερό υπολογισμό, ως υπολογισμό στο μυαλό μιας ακριβούς απάντησης και έτσι, εξωτερικά εργαλεία, όπως αριθμομηχανή ή χαρτί και μολύβι, δε χρησιμοποιούνται, κάνοντας τον υπολογισμό. Η άποψη αυτή αντιτέθηκε στην άποψη της Sowder (1990) η οποία υποστήριζε ότι ο νοερός υπολογισμός αναφέρεται στο να γίνει υπολογισμός στο μυαλό και συνήθως ο λύτης δεν έχει πρόσβαση σε χαρτί και μολύβι, ωστόσο ο νοερός υπολογισμός μερικές φορές συνδυάζεται με χαρτί και μολύβι ή ακόμα και με υπολογισμό με αριθμομηχανή. Ο Thompson (1999) ανέφερε ότι κάποιες φορές χρησιμοποιείται μολύβι και χαρτί, ώστε να κρατούνται σημειώσεις οι οποίες βοηθούν τη βραχύχρονη μνήμη. Η άποψη αυτή βρίσκει σύμφωνο και τον Threlfall (2009), αναφέροντας ότι «*οι νοεροί υπολογισμοί υποστηρίζονται από γραπτή καταγραφή σημειώσεων για να θυμούνται οι λύτες τα ενδιάμεσα αποτελέσματα».*

Σύμφωνα με τους Harries & Spooner (2000) *«νοερός υπολογισμός είναι ο υπολογισμός που γίνεται με το μυαλο και όχι με το χαρτί και το μολύβι, χωρίς όμως να παραγνωρίζεται η σημασία της καταγραφής των μαθηματικών συμβόλων για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού».*

Κοινά σημεία των παραπάνω ορισμών είναι ότι ο νοερός υπολογισμός γίνεται χωρίς τη βοήθεια εξωτερικών μεθόδων και ότι είναι ακριβής. Επιπλέον, μπορεί να γίνει η χρήση χαρτιού και μολυβιού, αλλά μόνο για καταγραφή σημειώσεων. Τα επόμενα χρόνια οι ερευνητές συνέδεσαν την έννοια των νοερών υπολογισμών με τη χρήση στρατηγικών, με αποτέλεσμα να υπάρξουν νέοι ορισμοί, πιο ουσιαστικοί.

Οι McIntosh et al. (1997) και η Maclellan (2001) αναφέρουν ότι για να επιτευχθεί ο νοερός υπολογισμός είναι απαραίτητη η χρήση στρατηγικών που είναι πολύ διαφορετικές από αλγόριθμους που συνδέονται με γραπτές διαδικασίες. Οι McIntosh et al. (1997) υποστηρίζουν ότι ο χρήστης μπορεί να επινοήσει τις στρατηγικές για τον υπολογισμό ή να τις δανειστεί από τις τυπικές αλγοριθμικές τεχνικές.

Η Anghileri (1999) προσδιορίζει τον νοερό υπολογισμό με βάση τις στρατηγικές αναφέροντας συγκεκριμένα: «*Είναι υπολογισμοί που γίνονται συνειδητά από τους ανθρώπους με νοερές στρατηγικές. Οι νοερές στρατηγικές μπορεί να χρειάζονται χαρτί και μολύβι για "σύντομες σημειώσεις", για να υποστηρίζουν τη βραχύχρονη μνήμη των μαθητών, ως "νοερό" δηλαδή ερμηνεύεται το "υπολογίζω με το κεφάλι" και όχι μόνο "μέσα στο κεφάλι"»*.

Ο Threlfall (2002) υποστηρίζει ότι οι νοεροί υπολογισμοί γίνονται με το μυαλό, δεν αφορούν μόνο ανάκληση απλών αριθμητικών γεγονότων, αλλά αντιθέτως αφορούν κυρίως τη χρήση στρατηγικών, ενώ θεωρεί ως στρατηγικές τις διαδικασίες κατά τις οποίες πραγματοποιείται μια ακολουθία μετασχηματισμών των αριθμών ενός προβλήματος, προκειμένου να βρεθεί μια λύση.

Σύμφωνα με όλες τις παραπάνω απόψεις, μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν πιο συγκεκριμένο και σαφή ορισμό για τους νοερούς υπολογισμούς: *«Νοερός υπολογισμός είναι ο υπολογισμός που πραγματοποιείται νοερά και με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι για "σύντομες σημειώσεις" που υποστηρίζουν τη μνήμη» (*Λεμονίδης, 2013). Μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές περιπτώσεις της καθημερινής ζωής, αλλά και της επιστήμης και για έλεγχο των αποτελεσμάτων των υπολογιστών.

Ο νοερός υπολογισμός ως μαθηματική διαδικασία έχει ιδωθεί με διαφορετικούς τρόπους από τους παιδαγωγούς (Reys & Barger, 1994)[1]. Η συμπεριφοριστική (behavioral) οπτική ισχυρίζεται ότι ο νοερός υπολογισμός είναι μια βασική ικανότητα, που ίσως βοηθάει ως ένα προαπαιτούμενο για την υπολογιστική ικανότητα με χαρτί και μολύβι ή για τους κατ' εκτίμηση

[1] Όπως αναφ. στο Λυγούρας (2006).

υπολογισμούς. Στην περίπτωση αυτή η πρόοδος στη γνώση κερδίζεται με άμεση διδασκαλία και πρακτική (Shibata, 1994)[2]. Η κατασκευαστική (constructivist) οπτική θεωρεί το νοερό υπολογισμό ως μια υψηλού επιπέδου διαδικασία σκέψης και προτάσσει την άποψη, ότι η δημιουργία μιας στρατηγικής είναι τόσο σημαντική όσο η εκτέλεση της στρατηγικής (Sowder, 1992). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή η ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων των μαθητών επιτυγχάνεται στην τάξη με την ανάδυση και στη συνέχεια αξιοποίηση των στρατηγικών που κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν οι μαθητές στα νοερά προβλήματα, μετά από προτροπή του δασκάλου (Λυγούρας, 2006).

2.2 Εκτίμηση

Από πολλούς γίνεται σύγχυση μεταξύ του νοερού υπολογισμού και της εκτίμησης. Ο όρος της εκτίμησης σύμφωνα με το λεξικό Μπαμπινιώτη είναι: 1. η αξιολόγηση (προσδιορισμός της αξίας, της τιμής), 2. ο υπολογισμός (σε χρήμα), 3. η υποκειμενική αξιολόγηση (μιας κατάστασης) ή η πιθανολόγηση σχετικά με την εξέλιξη, 4. ο προσδιορισμός της ποιότητας, του πόσου που αξίζει (κανείς, κάτι).

Ο όρος «εκτίμηση» αναφέρεται σε έναν αριθμό που αποτελεί κατάλληλη προσέγγιση για έναν ακριβή αριθμό που δίνεται στο κάθε συγκείμενο. Αυτή η έννοια της εκτίμησης δεν εφαρμόζεται μόνο στον υπολογισμό, αλλά και στις μετρήσεις και στις ποσότητες (Van de Walle, 2007).

Η εκτίμηση, βάση των Reys & Bestgen (1981), είναι μια βασική δεξιότητα και είναι χρήσιμη σε όλους, ενώ ορίζουν τον κατ' εκτίμηση υπολογισμό, ως μια επικοινωνία μεταξύ του νοερού υπολογισμού, των αριθμητικών εννοιών και των τεχνικών αριθμητικών ικανοτήτων.

Οι ερευνητές Siegel, Goldsmith και Madson (1982) αναφέρουν: *«Η εκτίμηση είναι μια διαδικασία η οποία δίνει μια ακατέργαστη λύση σε ένα πρόβλημα μέτρησης αριθμών ή μεγεθών. Η εκτίμηση αρχίζει με ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου και τελειώνει με μια μη ακριβή ποσοτική δήλωση, πχ. Τα μπισκότα είναι περίπου 2 ίντσες πλατιά».* Οι ίδιοι ερευνητές παραθέτουν έναν ορισμό για την εκτίμηση: «*Εκτίμηση είναι αυτό που κάνεις όταν θέλεις να ξέρεις πόσο μεγάλο είναι κάτι ή πόσα πράγματα υπάρχουν, αλλά δε μετράς. Έτσι εκτιμάς,*

[2] Όπως αναφ. στο Λυγούρας (2006).

προσπαθείς να σχηματοποιήσεις πόσο μεγάλο είναι κάτι ή περίπου πόσα είναι κάποια αντικείμενα».

Η Levine (1982) θεωρεί πως η νοερή εκτίμηση των αποτελεσμάτων, από υπολογισμούς προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε σε καθημερινές καταστάσεις και περιλαμβάνουν αριθμούς, είναι μια βασική δεξιότητα, ενώ παράλληλα υποστηρίζει ότι η εκτίμηση για πολλές κοινές χρήσεις των μαθηματικών είναι πιο σημαντικές από τον ακριβή υπολογισμό. Όταν χρησιμοποιούνται υπολογιστές, η εκτίμηση είναι ένα βασικό κομμάτι της κρίσης, αν το αποτέλεσμα είναι λογικό.

Η Sowder (1988) υποστηρίζει ότι, όταν έχουμε να πραγματοποιήσουμε έναν υπολογισμό, στην ουσία πρέπει να χειριστούμε τους αριθμούς, τις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, τα αριθμητικά γεγονότα που γνωρίζουμε κ.ά., με τέτοιο τρόπο ώστε να πετύχουμε την επιθυμητή απάντηση. Η απάντηση μπορεί να είναι ακριβής, συγκεκριμένη και μοναδική, ή μπορεί να είναι μια κατά προσέγγιση τιμή. Όταν σε ένα πρόβλημα νοερής αριθμητικής, ο στόχος είναι να επιτύχουμε μια ακριβή απάντηση, τότε απαιτείται ένας υπολογισμός. Το κατά πόσον αυτός ο υπολογισμός θα είναι νοερός, εξαρτάται από το μέγεθος των αριθμών που εμπλέκονται σε αυτόν τον υπολογισμό. Αν ο στόχος είναι να επιτύχουμε μια προσεγγιστική απάντηση ή αν οι αριθμοί έχουν μεγάλο μέγεθος, τότε απαιτείται η εκτίμηση.

Ένας ορισμός επομένως του όρου της εκτίμησης θα μπορούσε να είναι ο εξής: «*Εκτίμηση είναι η διαδικασία μετατροπής αριθμών απο ακριβείς σε προσεγγιστικούς και ο νοερός υπολογισμός με αυτούς τους αριθμούς, για να ληφθεί μια απάντηση η οποία είναι αρκετά κοντά στο αποτέλεσμα του ακριβούς υπολογισμού» (Sowder, 1988).* Με άλλα λόγια, η εκτίμηση εμπεριέχει τον νοερό υπολογισμό και είναι κάτι περισσότερο από αυτόν.

Οι ερευνητές Siegler & Booth (2005), όρισαν την εκτίμηση ως *«μια διαδικασία μετάφρασης μεταξύ εναλλακτικών ποσοτικών αναπαραστάσεων, εκ των οποίων τουλάχιστον μια είναι μη ακριβής».* Οι ποσοτικές αυτές αναπαραστάσεις μπορεί να είναι αριθμητικές ή μη-αριθμητικές και συνεπώς, οι εκτιμήσεις ομαδοποιούνται σε αριθμητικές εκτιμήσεις και μη-αριθμητικές εκτιμήσεις. Οι αριθμητικές εκτιμήσεις είναι αυτές, στις οποίες η μια ή και οι δυο πλευρές της μετάφρασης εμπεριέχουν αριθμούς. Οι μη- αριθμητικές εκτιμήσεις είναι αυτές, στις οποίες, καμία ποσοτική αναπαράσταση δεν είναι αριθμητική και περιλαμβάνουν παραδείγματα ψυχοφυσικών πειραμάτων που απαιτούν μετάφραση μεταξύ δυο μη-αριθμητικών ποσοτικών αναπαραστάσεων, για παράδειγμα μεταξύ της φωτεινότητας μιας λάμπας και της χωρικής θέσης σε μια γραμμή.

Οι McIntosh et al. (1997) ορίζουν την εκτίμηση ως παραγωγή μιας προσεγγιστικής απάντησης σε έναν υπολογισμό, μιας που να είναι αρκετά κοντά ώστε να επιτρέπει να παρθεί μια απόφαση. Η εκτίμηση, συνήθως εμπλέκει το χρήστη σε νοερό υπολογισμό ως προκαταρκτικό πρώτο βήμα στη διαμόρφωση μιας εκτίμησης.

Βάση των παραπάνω, ο Maclellan (2001) θεωρεί ότι η εκτίμηση είναι κάτι περισσότερο από τον νοερό υπολογισμό και τον περιλαμβάνει. Επιπλέον, καταλήγει ότι «*νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία διεξαγωγής αριθμητικών πράξεων, να επιτευχθεί είτε μια ακριβής απάντηση (οπότε απαιτείται νοερός υπολογισμός) είτε μια κατά προσέγγιση απάντηση (οπότε απαιτείται υπολογιστική εκτίμηση)*».

3. Σχέση νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων

Τα τελευταία χρόνια η εκτίμηση του αποτελέσματος ενός υπολογισμού αποτελεί σημαντικό μέρος του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο στην Ελλάδα και το εξωτερικό καθώς τα οφέλη από την έκθεση των παιδιών σε δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης έχουν επισημανθεί με αναφορές, κυρίως, στην πρακτική χρησιμότητα της εκτίμησης (Segovia & Castro, 2009). Συχνά, ωστόσο, η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης συγχέεται με την ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013), ενδεχομένως επειδή πραγματοποιούνται και οι δύο νοερά: σε αντίθεση με τους νοερούς υπολογισμούς που καταλήγουν σε ακριβές αποτέλεσμα, οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί προσεγγίζουν το αποτέλεσμα του υπολογισμού με ακρίβεια.

Ο Reys (1984) υποστήριξε ότι υπάρχουν δυο χαρακτηριστικά που διακρίνουν το νοερό υπολογισμό. Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι ότι ο νοερός υπολογισμός παράγει ακριβείς απαντήσεις και το δεύτερο είναι ότι χρησιμοποιεί νοερές διαδικασίες χωρίς εξωτερική βοήθεια, όπως μολύβι και χαρτί. Παράλληλα αναφέρεται και στην εκτίμηση υποστηρίζοντας ότι *«ο νοερός υπολογισμός είναι ένα σημαντικό στοιχείο της εκτίμησης δεδομένου ότι συνιστά τον ακρογωνιαίο λίθο που είναι απαραίτητος για τις διαφορετικές αριθμητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση»,* προσδιορίζοντας τη σχέση των δυο υπολογισμών. Συνεπώς υποστηρίζει ότι οι νοεροί υπολογισμοί είναι ακριβείς και αποτελούν μέρος των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Δεν υπάρχει αντίφαση μεταξύ της παραγωγής ακριβών απαντήσεων με τις κατά προσέγγιση τιμές που προκύπτουν από την εκτίμηση. Ο Reys αναφέρεται αποκλειστικά στον νοερό υπολογισμό, χωρίς να το συνδέει με την εκτίμηση.

Οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις, από πολλούς συγγραφείς θεωρούνται ίδιες έννοιες. Ωστόσο, υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε αυτά τα δυο είδη υπολογισμού.

Μια ομοιότητα είναι, ότι και οι δυο δεξιότητες χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της ορθότητας και τη λογική των αποτελεσμάτων που παράγονται από χαρτί και μολύβι, από αριθμομηχανή ή υπολογιστή. Επιπλέον, καθεμία εκτελείται νοερά και καθεμιά εκμεταλλεύεται τις δομικές ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των αριθμών. Τέλος, καθεμία επιτρέπει στους λύτες να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές διαδικασίες επίλυσης. Χωρίς αμφιβολία και για τις δυο έννοιες έχει δοθεί η ελάχιστη προσοχή και από τα προγράμματα σπουδών και από τους εκπαιδευτικούς. Στην πραγματικότητα, πολλές έγκριτες ομάδες και εθνικές οργανώσεις έχουν υποστηρίξει σθεναρά τους νοερούς υπολογισμούς και τις εκτιμήσεις στα σχολικά μαθηματικά προγράμματα.

Τόσο οι νοεροί όσο και οι κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί, μέσω της αναζήτησης αποτελεσματικών και οικονομικών στρατηγικών, συνεπικουρούν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (McIntosh, 2004· Maclellan, 2001) και γι’ αυτό προτείνονται για διδασκαλία από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

Από την άλλη πλευρά, αυτές οι δυο δεξιότητες είναι πολύ διαφορετικές από ορισμένες απόψεις. Για παράδειγμα, ο νοερός υπολογισμός, είναι ζωτικής σημασίας προϋπόθεση για την υπολογιστική εκτίμηση, αλλά η αντίθετη σχέση δεν ισχύει. Επιπλέον, ο νοερός υπολογισμός παράγει μια ακριβή απάντηση, η οποία είναι είτε σωστή είτε λανθασμένη, ενώ η υπολογιστική εκτίμηση μπορεί να παράγει πολλές διαφορετικές απαντήσεις, εκ των οποίων όλες να είναι εύλογες και αποδεκτές (Reys, 1984). Συνεπώς, κατά τη διαδικασία της εκτίμησης, ο νοερός υπολογισμός, ως στοιχείο της, έχει εξέχουσα θέση και σημασία.

Το ίδιο υποστήριξε και η Sowder (1988), δηλαδή όταν ο σκοπός είναι να αποκτηθεί μια ακριβής απάντηση στο αριθμητικό πρόβλημα, τότε απαιτείται υπολογισμός, ενώ όταν απαιτείται μια κατά προσέγγιση απάντηση τότε κατάλληλη είναι η εκτίμηση. Αλλά αυτή η εκτίμηση περιέχει τον υπολογισμό. Με άλλα λόγια, η εκτίμηση περιέχει αλλά είναι κάτι παραπάνω από τον υπολογισμό.

Η απαίτηση συμμετοχής σε υπολογισμό ενθαρρύνει την αναζήτηση σημαντικών συντομεύσεων που χρησιμοποιούν βασικές γνώσεις αριθμού. Η απαίτηση συμμετοχής σε εκτίμηση απαιτεί υπολογισμό, αλλά και κατάλληλη κρίση σχετικά με το σχετικό μέγεθος των αριθμών για να καθοριστεί πόσο λογική ή χρήσιμη είναι η κατά προσέγγιση απάντηση. Η εκτίμηση είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς επιτρέπει στο παιδί να κάνει πνευματική λογική, ενώ ο υπολογισμός θα ήταν παράλογος, επειδή οι αριθμοί θα ήταν πολύ μεγάλοι ή κλασματικοί (Maclellan, 2001).

Οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις διαφοροποιούνται επίσης ως προς τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται σε καθεμιά έννοια, οι οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια της παρούσας εργασίας.

4. Στρατηγικές νοερών υπολογισμών

Σύμφωνα με τον Ashcraft (1990) ένας ορισμός του όρου της στρατηγικής θα μπορούσε να είναι ο εξής: «*Στρατηγική είναι κάθε νοερή διαδικασία στη ροή των δραστηριοτήτων επεξεργασίας πληροφοριών που εξυπηρετεί ένα σκοπό ο οποίος σχετίζεται με το στόχο». Ο* Threlfall (2000) ορίζει ως «στρατηγική» τους διαφορετικούς τρόπους που υπάρχουν για να υπολογιστούν νοερά απλά αριθμητικά προβλήματα.

Ο Thompson (1999a) προσδιορίζει τις στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς ως εξής: *«Οι νοερές στρατηγικές είναι περισσότερο η εφαρμογή γνωστών ή γρήγορα υπολογίσιμων αριθμητικών γεγονότων, σε συνδυασμό με ειδικές ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, για να βρεθεί η λύση ενός υπολογισμού του οποίου η απάντηση δεν είναι γνωστή. Επίσης, οι νοερές στρατηγικές ενσωματώνουν την ιδέα ότι τα παιδιά, με δεδομένη μια συλλογή από αριθμούς για να εργαστούν, θα επιλέξουν την στρατηγική που είναι η πιο κατάλληλη για τους συγκεκριμένους αριθμούς».*

Ο Threlfall (2000) θεωρεί ότι ο όρος «στρατηγική» χρησιμοποιείται για να εννοήσει δυο συναφή πράγματα:

1. Μια απόφαση να κάνεις κάτι με συγκεκριμένο τρόπο.
2. Μια σειρά δράσεων (σε αυτή την περίπτωση, νοερές διαδικασίες) από τις οποίες εκτελείται μια προγενέστερη απόφαση.

Οι McIntosh et al. (1997) περιγράφουν το σκοπό των νοερών στρατηγικών ως τη μεταμόρφωση ενός υπολογισμού που δεν μπορούμε να κάνουμε, σε έναν υπολογισμό που μπορούμε να κάνουμε εφαρμόζοντας σχέσεις μεταξύ των αριθμών και των πράξεων.

Υπάρχουν διάφορες διαθέσιμες στρατηγικές (Thomson, 1999). Κατά τον καθορισμό των νοερών στρατηγικών, τα παιδιά (αν και ασυνείδητα) προσπαθούν να απαντήσουν σε δύο θεμελιώδη ερωτήματα (Sowder, 1988). Το πρώτο ερώτημα στο οποίο προσπαθεί να απαντήσει το παιδί είναι πώς οι αριθμοί στην πράξη μπορούν να μεταφρασθούν δομικά έτσι ώστε να μπορούν να απαντηθούν από τις γνώσεις και τις δεξιότητες που υπάρχουν ήδη στο ρεπερτόριο του παιδιού. Το δεύτερο ερώτημα στο οποίο το παιδί προσπαθεί να απαντήσει είναι ποιές πραξιακές ακολουθίες (αλληλουχίες) θα υπάρξουν ως αποτέλεσμα των δομικών αλλαγών στην αρχική λειτουργία (Maclellan, 2001).

Δεν είναι μόνο μία στρατηγική που μπορεί να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά την πράξη. Περισσότερες από μία στρατηγικές μπορεί να είναι αποτελεσματικές αλλά δεν μπορεί όλες οι στρατηγικές να είναι εξίσου αποτελεσματικές. Καθώς τα παιδιά αναγνωρίζουν το φάσμα των γνώσεων και των δεξιοτήτων που διαθέτουν και που μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να υπολογίσουν νοερά, ώστε να αυξηθεί η ευελιξία τους, η επιλογή της νοερής στρατηγικής μπορεί να γίνει με βάση την ταχύτητα και/ή την ευκολία. Καθώς οι γνώσεις και οι δεξιότητες γίνονται προσωπικά χρήσιμες για τα παιδιά, έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν για τον εαυτό τους μια κατανόηση του αριθμού. Μέσω της εκτίμησης του τρόπου λειτουργίας των αριθμών και των λειτουργιών τους και μέσω της αναζήτησης αποτελεσματικών και οικονομικών στρατηγικών, η απαίτηση να συμμετέχουν σε νοερούς υπολογισμούς προωθεί την ανάπτυξη μιας αίσθησης αριθμού (Maclellan, 2001).

Η Sowder (1988) υποστηρίζει ότι οι στρατηγικές των νοερών υπολογισμών είναι μεταβλητές, ευέλικτες, δημιουργικές και ιδιοσυγκρασιακές. Ο Reys (1994) υποστηρίζει ότι οι νοεροί υπολογισμοί ενθαρρύνουν την επινόηση στρατηγικών και την εγρήγορση σε λογικές απαντήσεις.

4.1 Στρατηγικές νοερών υπολογισμών για την πρόσθεση και την αφαίρεση

4.1.1 Στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς μέχρι το 20

Λαμβάνοντας υπόψη την πιο πρόσφατη έρευνα του Λεμονίδη (2013), οι στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης μονοψήφιων αριθμών αναπτύσσονται σύμφωνα με τα παρακάτω τρία επίπεδα:

1^{ο} επίπεδο: Στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης των αριθμών.

Σε αυτό το επίπεδο τα παιδιά έχουν ανάγκη από την αισθητοποίηση των αριθμών, για να πραγματοποιήσουν τις πράξεις. Χρησιμοποιούν, δηλαδή, αντικείμενα ή τα δάκτυλά τους, για να κατασκευάσουν ένα άμεσο μοντέλο της πράξης της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης που τους δίνεται. Τις στρατηγικές σε αυτό το επίπεδο τις ονομάζουμε *στρατηγικές με υλικά* και διαχωρίζουμε εκείνες κατά τις οποίες τα παιδιά χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους (**Δάχτυλα**) από εκείνες που χρησιμοποιούν αντικείμενα (**Αντικείμενα**), για να μοντελοποιήσουν την πράξη. Οι στρατηγικές αυτές είναι οι πρώτες που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να εκτελούν προσθέσεις ή αφαιρέσεις και τις συναντούμε στο νηπιαγωγείο και στις πρώτες τάξεις του δημοτικού.

Για την πράξη της πρόσθεσης σε αυτό το επίπεδο υπάρχει η στρατηγική **απαρίθμηση όλων,** όπου τα παιδιά έχουν την ανάγκη να αισθητοποιήσουν τους δυο όρους της πρόσθεσης με τα δάχτυλα ή με αντικείμενα και για να βρουν το αποτέλεσμα μετράνε και τα δυο σύνολα μαζί.

Για την πράξη της αφαίρεσης υπάρχουν οι στρατηγικές **διαχωρισμός από, διαχωρισμός μέχρι, πρόσθεση** και **αντιπαραβολή.**

Στη στρατηγική **διαχωρισμός από** το παιδί κατασκευάζει τον μειωτέο χρησιμοποιώντας αντικείμενα ή τα δάχτυλά του, στη συνέχεια διαχωρίζει από αυτά τον μικρότερο όρο, δηλαδή τον αφαιρετέο, και μετά απαριθμεί όσα στοιχεία μένουν για να δώσει την απάντηση.

Η στρατηγική **διαχωρισμός μέχρι** είναι παρόμοια με την προηγούμενη στρατηγική με τη διαφορά ότι εδώ διαχωρίζονται από το μεγάλο αρχικό σύνολο τόσα στοιχεία, ώστε αυτά που θα μείνουν να είναι ίσα με το μικρότερο όρο που δίνεται στο πρόβλημα. Απαριθμώντας τον αριθμό των αντικειμένων που διαχωρίστηκαν έχουμε την απάντηση.

Σύμφωνα με την στρατηγική της **πρόσθεσης** το παιδί ξεκινάει από τον αφαιρετέο και ανεβαίνει ένα-ένα μέχρι να φτάσει τον μειωτέο. Τα βήματα που ανέβηκε είναι η διαφορά.

Η στρατηγική της **αντιπαραβολής** πραγματοποιείται μόνο όταν υπάρχουν συγκεκριμένα αντικείμενα. Είναι αδύνατο να γίνει νοερά. Σύμφωνα με την στρατηγική αυτή αντιπαραβάλλονται και αντιστοιχίζονται ένα προς ένα τα στοιχεία των δυο συνόλων αντικειμένων των όρων της αφαίρεσης. Απαριθμώντας ό,τι περισσεύει από αυτήν την αντιπαραβολή έχουμε την απάντηση.

2ο επίπεδο: Στρατηγικές αρίθμησης.

Στο επίπεδο αυτό τα παιδιά, για να υπολογίσουν τις προσθέσεις και αφαιρέσεις, χρησιμοποιούν την ακολουθία των αριθμών (αριθμογραμμή) σε αντίθεση με το προηγούμενο επίπεδο, κατά το οποίο απαριθμούσαν μόνο αντικείμενα. Γι’ αυτόν τον λόγο τις στρατηγικές αυτές τις ονομάζουμε στρατηγικές αρίθμησης.

Για την πράξη της πρόσθεσης μπορούν οι στρατηγικές να χωριστούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες: τις *στρατηγικές αρίθμησης όλων* και τις *στρατηγικές αρίθμησης από.*

Στις στρατηγικές *αρίθμησης όλων* αριθμούνται ένα-ένα όλα τα βήματα των όρων της πράξης. Μπορούμε να διαχωρίσουμε δυο κατηγορίες: τις στρατηγικές *αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο* και τις στρατηγικές *αρίθμηση όλων αρχίζοντας από το μεγαλύτερο.*

Στις στρατηγικές **αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο** γίνεται αρίθμηση του πρώτου αριθμού και συνεχίζεται αυτή η ευθεία αρίθμηση μέχρι την αρίθμηση και του δεύτερου αριθμού. Η απάντηση είναι ο τελευταίος αριθμός αυτής της αρίθμησης.

Στις στρατηγικές **αρίθμηση όλων αρχίζοντας από το μεγαλύτερο** εφαρμόζεται άτυπα η αντιμεταθετική ιδιότητα. Αριθμούν όλα τα βήματα και των δυο αριθμών. Αριθμούν μέχρι το μεγαλύτερο αριθμό αρχίζοντας από το 1, και συνεχίζουν αυτή την ευθεία αρίθμηση μέχρι την αρίθμηση και του μικρότερου αριθμού. Η απάντηση είναι ο τελευταίος αριθμός αυτής της αρίθμησης.

Στις στρατηγικές *αρίθμησης από* γίνεται συντόμευση των βημάτων της αρίθμησης. Ξεκινά, δηλαδή, με δεδομένο τον πληθάριθμο του πρώτου όρου και ανεβαίνει τόσα βήματα όσα δείχνει ο δεύτερος όρος. Μπορούμε να πούμε ότι οι στρατηγικές *αρίθμησης από* είναι πιο προχωρημένες από τις στρατηγικές *αρίθμησης όλων*. Στις στρατηγικές *αρίθμησης από* μπορούμε να διαχωρίσουμε δυο κατηγορίες: τις στρατηγικές *αρίθμησης από τον πρώτο* και τις στρατηγικές *αρίθμησης από τον μεγαλύτερο.*

Στις στρατηγικές **αρίθμησης από τον πρώτο** γίνεται οικονομία βημάτων και τα παιδιά αριθμούν αρχίζοντας από τον πληθάριθμο του πρώτου προσθετέου. Στις στρατηγικές **αρίθμησης από τον μεγαλύτερο**, όταν ο δεύτερος όρος της πρόσθεσης είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο, εφαρμόζεται άτυπα η αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης και με αυτόν τον τρόπο γίνεται οικονομία βημάτων.

Για την πράξη της αφαίρεσης οι στρατηγικές διαχωρίζονται σε τρεις κατηγορίες, στις στρατηγικές *αντίστροφη αρίθμηση από, αντίστροφη αρίθμηση μέχρι* και *πρόσθεση*.

Στα πλαίσια της στρατηγικής **αντίστροφη αρίθμηση από** τα παιδιά πραγματοποιούν αντίστροφη αρίθμηση αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο από τους δυο όρους της αφαίρεσης. Τα βήματα της αντίστροφης αρίθμησης είναι τόσα όσος είναι ο μικρότερος όρος. Ο τελευταίος αριθμός που προφέρεται σ' αυτήν την αντίστροφη αρίθμηση είναι η απάντηση.

Στη στρατηγική **αντίστροφη αρίθμηση μέχρι** πραγματοποιείται αντίστροφη αρίθμηση ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο από τους δύο όρους μέχρι να φτάσουμε στον αριθμό που εκφράζει τον μικρότερο όρο. Αριθμώντας τα βήματα αυτής της αρίθμησης βρίσκεται η απάντηση.

Στη στρατηγική της **πρόσθεσης** οι μαθητές εκτελούν πρόσθεση αντί για αφαίρεση. Ξεκινούν από τον μικρότερο όρο της αφαίρεσης και αριθμούν ευθέως μέχρι να φτάσουν τον μεγαλύτερο αριθμό. Μετρώντας τα βήματα που έκαναν σ' αυτή την αρίθμηση έχουν την απάντηση.

<u>3ο επίπεδο: Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές.</u>

Στο επίπεδο αυτό τα παιδιά ανακαλούν από τη μνήμη τους γνωστά αριθμητικά γεγονότα και τα επεξεργάζονται νοερά, για να υπολογίσουν κάποια άλλα. Στο επίπεδο αυτό διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις στρατηγικών: στρατηγικές *άμεσης ανάκλησης,* κατά τις οποίες το παιδί σε μια πράξη, για παράδειγμα 3+3, γνωρίζει το αποτέλεσμα απ' έξω. Γνωρίζει, δηλαδή, την πράξη και το αποτέλεσμά της και την ανακαλεί αμέσως από τη μνήμη μακράς διάρκειας.

Έχουμε επίσης τις *κατασκευαστικές στρατηγικές* ή *παραγωγής πράξεων*, κατά τις οποίες το παιδί, για να βρει το αποτέλεσμα μιας πράξης, ανακαλεί από τη μνήμη του γνωστά αριθμητικά γεγονότα και με αυτά κατασκευάζει την απάντηση.

Για την πράξη της πρόσθεσης υπάρχουν οι στρατηγικές *κοντά στα διπλά, χρήση του 5, υπέρβαση της δεκάδας ή πέρασμα από το 10, αντιστάθμιση* και *εξισορρόπηση.*

Στη στρατηγική **κοντά στα διπλά** οι μαθητές χρησιμοποιούν τα διπλά αθροίσματα (ν+ν) που είναι εύκολα για να υπολογίσουν. Συνήθως χρησιμοποιούν τη στρατηγική αυτή όταν οι δύο αριθμοί διαφέρουν κατά μια μονάδα.

Στη στρατηγική **χρήση του 5** οι μαθητές αναλύουν κάθε προσθετέο με βάση το 5. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται πολύ όταν ένας από τους δύο όρους είναι το 5, π.χ. 5+8=5+5+3=13.

Η στρατηγική **υπέρβαση της δεκάδας ή πέρασμα από το 10** είναι μια από τις πιο γνωστές στρατηγικές στο σχολείο, η οποία δυσκολεύει και αρκετούς μαθητές. Ενδείκνυται για αριθμούς που είναι κοντά στο 10, όπως το 8 και το 9, π.χ. 9+7: 9+1=10, 10+6=16.

Στη στρατηγική **αντιστάθμιση** οι μαθητές συμπληρώνουν τον έναν αριθμό μέχρι να γίνουν οι όροι εύκολοι για πρόσθεση και στη συνέχεια αφαιρούν αυτό που συμπλήρωσαν, π.χ. 9+5: 9+1=10, 10+5=15, 15-1=14. Δεν είναι βέβαια και τόσο εύκολη στρατηγική για τους μαθητές.

Η στρατηγική **εξισορρόπηση** βασίζεται στην ιδιότητα της ισορροπίας, ό,τι προσθέτουμε στον έναν όρο το αφαιρούμε από τον άλλο και έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, π.χ. 6+8=7+7=14. Η ιδιότητα αυτή δεν είναι και τόσο εύκολη για τους μαθητές.

Για την πράξη της αφαίρεσης υπάρχουν οι στρατηγικές *χρήση των διπλών, κοντά στα διπλά, υπέρβαση της δεκάδας ή πέρασμα από το 10* και *αφαίρεση ως αντίστροφη της πρόσθεσης.*

Στη στρατηγική **χρήση των διπλών** συνήθως οι μαθητές γνωρίζουν την αντίστροφη πρόσθεση των διπλών, που είναι εύκολο να απομνημονευθεί, και με βάση αυτήν υπολογίζουν την αφαίρεση. Κάποιοι μαθητές μπορεί να γνωρίζουν απ’ έξω την αφαίρεση και να χρησιμοποιούν απλά την αντίστροφη πρόσθεση για να δικαιολογήσουν την απάντησή τους.

Στη στρατηγική **κοντά στα διπλά** οι μαθητές υπολογίζουν με βάση την αφαίρεση των διπλών (2ν-ν), π.χ. 9-5: 10-5=5, 5-1=4. Αν και αυτή η στρατηγική χρησιμοποιείται από τα παιδιά κυρίως για την πρόσθεση, υπάρχουν μαθητές που την χρησιμοποιούν και στην αφαίρεση.

Στη στρατηγική **υπέρβαση της δεκάδας ή πέρασμα από το 10** αφαιρούν από τον μεγαλύτερο όρο μέχρι να φτάσουν στο 10. Στη συνέχεια αφαιρούν και τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου, π.χ. 13-7: 13-3=10,10-4=6. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται συχνά στο σχολείο.

Στη στρατηγική **αφαίρεση ως αντίστροφη της πρόσθεσης** οι μαθητές χρησιμοποιούν την αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης, που ξέρουν καλά, για να υπολογίσουν την αφαίρεση, π.χ. *7-4: 4+3=7. Είναι 3, γιατί ξέρω 4 και 3, κάνει 7.*

4.1.2 Στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς από το 20 μέχρι το 100

Σύμφωνα με τις έρευνες που μελετήθηκαν (Beishuizen, 1985· Blote et al, 2000· Heirdsfield & Lamb, 2005· Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011· Λεμονίδης, 2013· Lucangeli et al., 2003· Λυγούρας, 2006· Thompson, 2000· Varol & Farran, 2007 · Van de Walle, 2007) εντοπίστηκαν και κωδικοποιήθηκαν οι στρατηγικές νοερών υπολογισμών που αφορούν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, οι οποίες κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες:

1. **Άμεση ανάκληση (AUTO) ή γνωστή πράξη**: Ονομάζεται η στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές γνωρίζουν απ' έξω το αποτέλεσμα και το ανακαλούν αμέσως από τη μακρόχρονη μνήμη (Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011· Λυγούρας, 2006).
2. **Στρατηγική Διαχωρισμού ή Διαχωρισμός Δεκάδων – Μονάδων ή 1010:** Ονομάζεται η στρατηγική κατά την οποία χωρίζουμε τους δυο όρους της πράξης σε μονάδες και δεκάδες και τις προσθέτουμε μεταξύ τους (Beishuizen, 1985). Στην κατηγορία αυτής της στρατηγικής εντοπίζονται τρεις υποκατηγορίες:

2.1. *Υπολογισμός πρώτα των δεκάδων και μετά των μονάδων ή διαχωρισμός από αριστερά προς τα δεξιά ή 1010* (Heirdsfield & Lamb, 2005· Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011· Λεμονίδης, 2013· Λυγούρας, 2006· Thompson, 2000).

2.2. *Υπολογισμός πρώτα των μονάδων και μετά των δεκάδων ή διαχωρισμός από δεξιά προς τα αριστερά ή u-1010* (Heirdsfield & Lamb, 2005· Λεμονίδης, 2013). Ο τρόπος αυτός είναι ουσιαστικά η νοερή αναπαράσταση του γραπτού τρόπου επίλυσης των προσθέσεων και των αφαιρέσεων. Οι μαθητές ξεκινούν από τα δεξιά προς τα αριστερά και πρώτα προσθέτουν τις μονάδες και μετά τις δεκάδες (Λεμονίδης, 2013). Επιλέγεται συνήθως από τους μαθητές για πράξεις χωρίς κρατούμενο (Λυγούρας, 2006).

2.3. *Υπολογισμός πρώτα των δεκάδων και στη συνέχεια διαδοχικά των μονάδων ή 10s* (Blote et al, 2000· Λυγούρας, 2006 · Thompson, 2000· Varol & Farran, 2007).

Για την πρόσθεση, στο άθροισμα των δεκάδων προστίθενται αρχικά οι μονάδες του πρώτου προσθετέου και στη συνέχεια οι μονάδες του δεύτερου προσθετέου. Για την αφαίρεση χωρίς κρατούμενο, οι αριθμοί αναλύονται στις δεκάδες τους, στη διαφορά των δεκάδων τους αφαιρούνται αρχικά οι μονάδες του αφαιρετέου και στη συνέχεια προστίθενται οι μονάδες του μειωτέου. Για την αφαίρεση με κρατούμενο οι αριθμοί αναλύονται στις δεκάδες τους και στη συνέχεια στη διαφορά των δεκάδων τους προστίθενται οι μονάδες του μειωτέου και από το άθροισμα αυτό αφαιρούνται οι μονάδες του αφαιρετέου.

Η στρατηγική 1010 και u-1010 χαρακτηρίζεται ως στρατηγική «χωρισμού» (separation) (Heirdsfield & Lamb, 2005).

3. **Υπολογισμός με βάση τον πρώτο όρο ή στρατηγική συσσώρευσης ή N10**

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, κρατούμε σταθερό τον πρώτο όρο, διασπούμε τον δεύτερο όρο σε μονάδες και δεκάδες και προσθέτουμε ή αφαιρούμε διαδοχικά από τον πρώτο όρο τις μονάδες και τις δεκάδες. Η στρατηγική αυτή συναντάται λιγότερο στην εκπαίδευση της Ελλάδας (Λεμονίδης, 2013). Στην κατηγορία αυτής της στρατηγικής εντοπίζονται δυο υποκατηγορίες:

3.1. *Στρατηγική συσσώρευσης με μονάδες – δεκάδες ή u-N10* (Heisrdsfield & Lamb, 2005). Στον πρώτο όρο πρώτα προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις μονάδες και μετά τις δεκάδες.

3.2. *Στρατηγική συσσώρευσης με δεκάδες – μονάδες.* Στον πρώτο όρο προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις δεκάδες και μετά τις μονάδες (Λεμονίδης, 2013).

Σε αυτή την κατηγορία στρατηγικών, οι Lucangeli et al (2003) ενσωματώνουν και την περίπτωση στην οποία ο δεύτερος προσθετέος αναλύεται με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα, **43+25**: 43+10+10=63, 63+5=68.

4. **Στρογγυλοποίηση ή N10C:** Είναι η πιο σύνθετη διαδικασία και δείγμα της ευελιξίας που μπορεί να διακρίνει έναν μαθητή στους νοερούς υπολογισμούς. Λίγοι μαθητές τη χρησιμοποιούν και συνήθως σε υπολογισμούς με κρατούμενα. Στην κατηγορία αυτής της στρατηγικής, ο μαθητής κάνει προσθαφαιρέσεις πάνω στους όρους της πράξης, έτσι ώστε να προκύψουν αριθμοί που εύκολα μπορούν να τους προσθέσουν ή να τους αφαιρέσουν. Ο μαθητής, προκειμένου να υπολογίσει το άθροισμα ή τη διαφορά, προχωρεί σε στρογγυλοποίηση του ενός ή και των δυο αριθμών. Η στρατηγική αυτή χωρίζεται σε δυο κατηγορίες:

4.1 *Αντιστάθμιση*: Οι μαθητές αυξάνουν ή μειώνουν τον ένα όρο της πράξης για να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν εύκολα και στη συνέχεια αφού κάνουν την πράξη αφαιρούν ή προσθέτουν τον αριθμό που χρησιμοποίησαν (Λυγούρας, 2006).

4.2 *Ισοσκέλιση*: Οι μαθητές αυξάνουν ή μειώνουν ανάλογα και τους δυο όρους της πράξης, χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα, έτσι ώστε να προκύπτουν αριθμοί με τους οποίους εύκολα μπορούν να κάνουν τον υπολογισμό (Λυγούρας, 2006). Η στρατηγική αυτή χαρακτηρίζεται ως «ολιστική» στρατηγική (Heirdsfield & Lamb, 2005).

5.**Επαρίθμηση (CON):** Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική για την πρόσθεση, στον πρώτο προσθετέο προστίθενται οι μονάδες του δεύτερου προσθετέου μία προς μία ή οι δεκάδες του δεύτερου προσθετέου σταδιακά και ύστερα οι μονάδες του. Για την αφαίρεση, από το μειωτέο αφαιρούνται διαδοχικά οι μονάδες του αφαιρετέου μία – μία ή αφαιρούνται οι δεκάδες του αφαιρετέου σταδιακά και ύστερα οι μονάδες του (Καραντζής & Τόλλου, 2009).

6. **(Απ)αρίθμηση**: Αρχίζει η μέτρηση με τις μονάδες του ενός προσθετέου και συνεχίζει με τις μονάδες του άλλου προσθετέου. Μπορεί, επίσης, στον πρώτο προσθετέο να προστίθενται οι μονάδες του δεύτερου προσθετέου μία προς μία με τη χρήση των δακτύλων ή μερικές φορές με ρυθμική κίνηση του κεφαλιού (αρίθμηση με δάκτυλα, COF). Ομοίως, στην αφαίρεση, η μέτρηση αρχίζει με τα αντικείμενα που εκφράζει ο μειωτέος και στη συνέχεια αφαιρούνται τα αντικείμενα που εκφράζει ο αφαιρετέος και στο τέλος μετρούνται όσα έμειναν. Μπορεί επίσης από το μειωτέο να αφαιρούνται οι μονάδες του αφαιρετέου μία προς μία με τη χρήση των δακτύλων και μερικές φορές με ρυθμική κίνηση του κεφαλιού (αρίθμηση με δάκτυλα, COF) (Καραντζής & Τόλλου, 2009).

Η στρατηγική αυτή είναι από τις πρώτες που μαθαίνουν τα παιδιά στη σχολική ηλικία. Ενώ για τους μαθητές των μικρότερων τάξεων (Α' κυρίως και Β' πιο σπάνια) είναι μια συνηθισμένη διαδικασία, στην τρίτη τάξη σπάνια χρησιμοποιείται από τους μαθητές και μόνο από αυτούς που δεν έχουν κατανοήσει πλήρως τη λειτουργία των αριθμών. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη στρατηγική αυτή σε αυτή την ηλικία χαρακτηρίζονται από μειωμένη ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς (Λυγούρας, 2006).

Ανάλογα με το αν οι μαθητές χρησιμοποιούν μονάδες ή δεκάδες στην αρίθμηση, η στρατηγική αυτή χωρίζεται σε δυο υποκατηγορίες:

6.1 *Αρίθμηση με μονάδες:* Ξεκινώντας από τον έναν όρο, συνήθως τον μεγαλύτερο, ανεβαίνουν ή κατεβαίνουν ένα – ένα τόσα βήματα όσα είναι ο άλλος όρος.

6.2 *Αρίθμηση με δεκάδες:* Ξεκινώντας από τον έναν όρο, ανεβαίνουν ή κατεβαίνουν ανά δέκα ή άλλους αριθμούς, σύμφωνα με τον τρόπο που αναλύουν τον άλλον όρο της πράξης (Λεμονίδης, 2013).

7. **Στρατηγική πέρασμα από το 10 ή C10:** Προκειμένου να γίνει η πρόσθεση ή η αφαίρεση πιο εύκολα, σχηματίζεται το συμπλήρωμα του 10. Η στρατηγική αυτή χαρακτηρίζεται από τους Varol & Farran (2007) και τους Blotte et al. (2000) ως στρατηγική A10 (Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011). Είναι μια στρατηγική που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πράξη, όταν κάνουμε νοερούς υπολογισμούς. Στη στρατηγική αυτή, κρατούμε σταθερό τον πρώτο όρο και προσθέτουμε ή αφαιρούμε μέρη από τον δεύτερο όρο. Η ιδιαιτερότητα είναι ότι προσθέτουμε ή αφαιρούμε στον πρώτο όρο έναν τέτοιο αριθμό από τον δεύτερο,

ώστε να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα, γι' αυτό και ονομάζεται πέρασμα από το 10 (Λεμονίδης, 2013).

8. **Νοερός παραδοσιακός αλγόριθμος (MA) ή Νοητική αναπαράσταση του τυπικού αλγόριθμου:** Ο παραδοσιακός αλγόριθμος της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης εκτελείται νοερά ακολουθώντας τον αλγόριθμο της κάθετης πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Δηλαδή, τοποθετούν τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο, όπως στο χαρτί, εκτελώντας την πράξη από τα δεξιά προς τα αριστερά (Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011· Λεμονίδης, 2013· Lucangeli et al., 2003).

9. **Συμπλήρωμα του αφαιρετέου:** Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική, ο μαθητής αυξάνει τις μονάδες του αφαιρετέου μέχρι να φτάσει στο μειωτέο. Ο αριθμός που αντιπροσωπεύει την αύξηση θα είναι η σωστή απάντηση. Η στρατηγική αυτή χωρίζεται σε δυο κατηγορίες:

9.1. Όταν ο αφαιρετέος βρίσκεται σε μικρή απόσταση από το μειωτέο, τότε ο μαθητής προσθέτει μία – μία (ή όλες μαζί) τις μονάδες στον αφαιρετέο μέχρι να φτάσει στο μειωτέο.

9.2. Όταν ο αφαιρετέος βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από το μειωτέο, τότε η απάντηση βρίσκεται σταδιακά («πάτημα» πρώτα στη δεκάδα κτλ.)(Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011· Thompson, 2000).

10. **Προσθήκη δεκάδων μέχρι να ξεπεραστεί το ποσό** (Van de Walle, 2007): Για παράδειγμα, **73-46**: 46+30=76, 76-3=73, 30-3=27. Ή προσθήκη στο μειωτέο. Για παράδειγμα, **73-46:** 73+3=76, 76-46=30, 30-3=27 (Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011).

Συμπερασματικά, η (απ)αρίθμηση, η αρίθμηση με τα δάκτυλα και ο νοερός παραδοσιακός αλγόριθμος, χαρακτηρίζονται ως στρατηγικές χαμηλού επιπέδου καθώς δεν είναι αποτελεσματικές, αφού υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να γίνουν λάθη στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων.

Αντίθετα, οι στρατηγικές υψηλού επιπέδου που συντελούν στην καλύτερη κατανόηση των αριθμών είναι οι εξής: διαχωρισμός Δεκάδων – Μονάδων (1010), υπολογισμός με βάση τον πρώτο όρο (N10), στρογγυλοποίηση (N10C), C10, συμπλήρωμα του αφαιρετέου, προσθήκη δεκάδων μέχρι να ξεπεραστεί το ποσό, προσθήκη στο μειωτέο (Καραντζής & Τόλλου, 2009· Karantzis, 2010-2011).

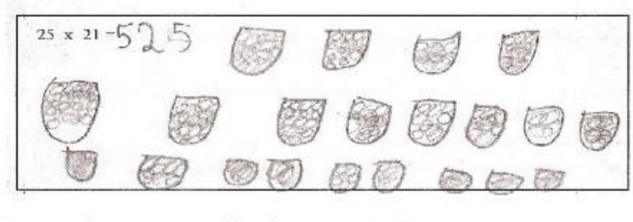
4.2 Στρατηγικές νοερών υπολογισμών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση

Η ανάδειξη των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές στους νοερούς υπολογισμούς για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης πραγματοποιήθηκε μετά από μελέτη των ερευνών του Baek (1998), του Baek (2005), των Heirdsfield et al. (1999), των Hope & Sherrill (1987), του Λεμονίδη (2013), των Reys et al. (1986) και του Whitacre (2012). Η ανάλυση που παρατίθεται βασίζεται στην ανάλυση της πιο πρόσφατης βιβλιογραφίας του Λεμονίδη (2013), η οποία συμπεριλαμβάνει όλες τις παλαιότερες έρευνες, γι' αυτό και βάση αυτής θα κινηθούμε. Ακολουθεί η περιγραφή των στρατηγικών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

1. **Άμεση μοντελοποίηση.** Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται οι στρατηγικές κατά τις οποίες οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης, έχουν ανάγκη να πραγματοποιήσουν τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Τα παιδιά μοντελοποιούν τους αριθμούς του προβλήματος χρησιμοποιώντας υλικά καταμέτρησης, ομάδες υλικών με βάση τη δεκάδα, σημάδια καταμέτρησης ή άλλα σχέδια, με τα οποία μετρούν τους αριθμούς του προβλήματος. Για τους πολλαπλασιασμούς υπάρχουν δυο τύποι άμεσης μοντελοποίησης:

1.1 Άμεση μοντελοποίηση με μονάδες. Ο μαθητής μοντελοποιεί και μετρά με μονάδες, για να βρει το όλο.

1.2 Άμεση μοντελοποίηση με δεκάδες. Ο μαθητής μοντελοποιεί και μετρά με δεκάδες ή μεγαλύτερους αριθμούς, για να βρει το όλο. Για παράδειγμα, παρακάτω παρουσιάζεται μια λύση με μοντελοποίηση του πολλαπλασιασμού 21x25.



Εικόνα 1: Μοντελοποίηση του πολλαπλασιασμού 21x25.

Για τις διαιρέσεις, η μοντελοποίηση επηρεάζεται από τη σημασιολογική δομή του προβλήματος. Για παράδειγμα, στις διαιρέσεις μερισμού (π.χ. μοιράζω δίκαια 450 ευρώ σε 3 παιδιά) οι μαθητές δημιουργούν ένα μοντέλο, όπου προσπαθούν να μοιράσουν τα ευρώ σε τρία μερίδια και να βρουν πόσα ευρώ θα περιέχει κάθε μερίδιο. Σε μια διαίρεση μέτρησης (π.χ. έχω 520 ευρώ σε χαρτονομίσματα των 5 ευρώ. Πόσα χαρτονομίσματα έχω;) δημιουργούν ένα μοντέλο και προσπαθούν να βρουν πόσες ομάδες των 5 περιέχει το 520.

2. **Στρατηγικές αρίθμησης.** Οι στρατηγικές αυτές ονομάζονται *αρίθμησης*, γιατί οι μαθητές αριθμούν προς τα επάνω ή προς τα κάτω ή ανεβαίνουν με διπλασιασμό ή κατεβαίνουν με υποδιπλασιασμό. Στις στρατηγικές αυτές τα παιδιά προσθέτουν τον πολλαπλασιαστέο ή αφαιρούν το διαιρέτη ως ολόκληρο αριθμό και δε διασπούν τους όρους της πράξης με οποιονδήποτε ιδιαίτερο τρόπο. Για να προσθέσουν τον πολλαπλασιαστέο, τα παιδιά χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές, όπως την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή το διπλασιασμό.

3. **Άμεση ανάκληση.** Η στρατηγική αυτή αναφέρεται σε κάποιους πολλαπλασιασμούς ή διαιρέσεις που μπορούν να λυθούν με τη βοήθεια της άμεσης ανάκλησης από τη μνήμη κάποιου αριθμητικού γεγονότος ή με μια μικρή τροποποίηση και παραγωγή πράξης με αυτό το αριθμητικό γεγονός.

4. **Στρατηγικές διάσπασης του αριθμού.** Στις στρατηγικές αυτές τα παιδιά διασπούν τον έναν ή και τους δυο όρους της πράξης σε μικρότερους αριθμούς, έτσι ώστε να μπορούν να τους πολλαπλασιάσουν ή να τους διαιρέσουν ευκολότερα. Τα παιδιά διασπούν τον έναν όρο της πράξης του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης με διαφορετικούς τρόπους:

4.1 *Διάσπαση ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία*: Πολλά παιδιά διασπούν τους αριθμούς με βάση τη θεσιακή αξία των ψηφίων στο δεκαδικό σύστημα, δηλαδή σε μονάδες, δεκάδες, κτλ . Στις στρατηγικές αυτές μπορούμε να διαχωρίσουμε δύο περιπτώσεις:

α) διάσπαση από Δεξιά προς τα Αριστερά (ΔΑ) και

β) διάσπαση από Αριστερά προς τα Δεξιά (ΑΔ).

Εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση τους από το δεκαδικό σύστημα.

4.2 Διάσπαση και των δυο αριθμών με βάση τη θεσιακή αξία. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται μόνο στον πολλαπλασιασμό, μοιάζει πολύ με τον συμβατικό αλγόριθμο και είναι στην ίδια λογική με τον ελληνικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Εδώ τα παιδιά διασπούν και τον πολλαπλασιαστή και τον πολλαπλασιαστέο σε αριθμούς με βάση τη θεσιακή αξία, εκτελούν κάθε πολλαπλασιασμό και προσθέτουν τα μερικά γινόμενα. Ένα κλασικό λάθος στη στρατηγική αυτή είναι ότι τα παιδιά, στην περίπτωση διψήφιου επί διψήφιο, δεν σχηματίζουν και τα τέσσερα επιμέρους γινόμενα, αλλά υπολογίζουν μόνο τα δύο.

4.3 Διάσπαση σε αριθμούς μη δεκάδων. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται μόνο στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Τα παιδιά που χρησιμοποιούν τη στρατηγική αυτή διασπούν τον πολλαπλασιαστή ή τον πολλαπλασιαστέο, για να γίνει ο πολλαπλασιασμός ευκολότερος, ή χρησιμοποιούν γινόμενα που ήδη γνωρίζουν.

Αυτή η στρατηγική ονομάζεται από τους Hope & Sherrill (1987) ως γενική παραγοντοποίηση, όπου ένας ή περισσότεροι παράγοντες παραγοντοποιούνται προτού εφαρμοστεί η προσεταιριστική ιδιότητα. Ο Whitacre (2012) θεωρεί ότι σε αυτή τη στρατηγική γίνεται χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού.

Οι στρατηγικές διάσπασης βασίζονται στην επιμεριστική ιδιότητα που είναι μια σημαντική έννοια στους υπολογισμούς πολλαπλασιασμών (Van de Walle, 2007).

5. **Ολιστικές στρατηγικές ή Αντιστάθμισης.** Στις στρατηγικές αυτές τα παιδιά χειρίζονται τους αριθμούς της πράξης μ' έναν ολιστικό τρόπο. Ρυθμίζουν τον έναν ή και τους δυο όρους του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης, ώστε οι αριθμοί να διπλασιαστούν ή να διχοτομηθούν, για να καταστήσουν τον υπολογισμό ευκολότερο ή για να χρησιμοποιήσουν μερικά γινόμενα πολλαπλασιασμού ή πηλίκα που ήδη γνωρίζουν. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται σε πράξεις πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης όπου οι αριθμοί έχουν ειδικά χαρακτηριστικά.

Συνήθως, τα παιδιά όταν προσαρμόζουν τον ένα από τους δυο αριθμούς του πολλαπλασιασμού, τον προσαρμόζουν προς τα πάνω ή προς τα κάτω στην πλησιέστερη δεκάδα και μετά κάνουν τη διόρθωση στο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, ένα παιδί στον πολλαπλασιασμό **15x48** υπολογίζει ως εξής: 15x50=750, 2x15=30, 750-30=720.

5. Είδη εκτίμησης

Σύμφωνα με τους Capenter, Coburn, Reys, & Wilson (1976) και τον Driscoll (1981) το είδος της εκτίμησης χρησιμοποιείται περισσότερο από τους ακριβείς υπολογισμούς (Rubenstein, 1985). Ανάλογα με τις καταστάσεις εκτίμησης που καλούνται οι άνθρωποι να αντιμετωπίσουν στην καθημερινή τους ζωή, χρησιμοποιούν και διαφορετικά είδη εκτίμησης, τα οποία είναι: α) η υπολογιστική εκτίμηση (computational estimation), β) η εκτίμηση μέτρων (estimating measures), γ) η εκτίμηση πλήθους (estimating numerosity) και δ) η εκτίμηση αριθμογραμμής (number line estimation) (Λεμονίδης, 2013· Siegler & Booth, 2005· Sowder,1992).

Καθένα από αυτά τα είδη εκτίμησης απαιτεί διαφορετικά είδη κατανόησης και διαφορετικό σύνολο ικανοτήτων (Λεμονίδης, 2013). Καθένα είδος χρειάζεται ένα αποτελεσματικό πλαίσιο για να γίνει κατανοητό, όπως επίσης και σε καθένα χρησιμοποιούνται διαφορετικές στρατηγικές από τα παιδιά και τους ενήλικες, οι οποίες αυξάνονται καθώς αυξάνεται η εμπειρία και η ηλικία (Siegler & Booth, 2005)

5.1 Υπολογιστική εκτίμηση

Κατά τον Reys (1984) υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διακριτά χαρακτηριστικά των κατ' εκτίμηση υπολογισμών: (1) γίνονται νοερά, γενικά χωρίς χαρτί και μολύβι, (2) γίνονται γρήγορα, (3) παράγουν απαντήσεις που δεν είναι ακριβείς, αλλά είναι επαρκείς για να ληφθούν απαραίτητες αποφάσεις, και (4) συχνά αντικατοπτρίζουν ατομικές προσεγγίσεις και παράγουν ποικίλες εκτιμήσεις ως απαντήσεις. Η υπολογιστική εκτίμηση αναφέρεται σε αριθμητικές πράξεις και κρίσεις οι οποίες μπορούν να γίνουν για τα αποτελέσματα (Segovia & Castro, 2009).

Οι ερευνητές Reys & Bestgen (1981) ορίζουν την υπολογιστική εκτίμηση ως την «*αλληλεπίδραση μεταξύ νοερών υπολογισμών, της έννοιας του αριθμού και τεχνικών αριθμητικών δεξιοτήτων όπως η στρογγυλοποίηση και η θεσιακή αξία. Επίσης ως μια νοερή διαδικασία η οποία εκτελείται γρήγορα και δίνει αποτελέσματα σε ερωτήσεις οι οποίες είναι δικαιολογημένα κοντά σε ένα σωστά υπολογισμένο αποτέλεσμα*».

Η Dowker (1992) ορίζει την υπολογιστική εκτίμηση ως «*τη διαδικασία λογικών εικασιών (μάντεμα) με προσεγγιστικές απαντήσεις σε αριθμητικά προβλήματα, χωρίς την εκτέλεση των ακριβών υπολογισμών*».

Επίσης, η Rubenstein (1983) ορίζει την υπολογιστική εκτίμηση ως «*η εύρεση μιας κατά προσέγγισης απάντησης σε ένα προφορικό ή γραπτό αριθμητικό πρόβλημα, χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής ή άλλων υποστηρικτικών εργαλείων, χρησιμοποιώντας νοερούς υπολογισμούς που εφαρμόζονται γρήγορα, για να βρεθεί μια επαρκής απάντηση για τη λήψη αποφάσεων*» και στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνει δραστηριότητες που απαιτούν αποφάσεις σχετικά με το αν ένα αποτέλεσμα είναι λογικό, αν η απάντηση που δίνουμε είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από ένα δεδομένο αριθμό ή αν η απάντηση είναι της σωστής σειράς μεγέθους.

Η Sowder (1992) υποστηρίζει ότι η υπολογιστική εκτίμηση απαιτεί να εκτιμηθεί το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού εκτελώντας κάποιον νοερό υπολογισμό με προσεγγίσεις των αρχικών αριθμών. Για να είναι σωστό το αποτέλεσμα, θα πρέπει να βρίσκεται μέσα σε κάποιο διάστημα, το οποίο προσδιορίζεται από το ίδιο το πρόβλημα ή κάποια εξωτερική πηγή, όπως είναι ο εκπαιδευτικός.

Βέβαια, το ερώτημα που τίθεται είναι μέσα σε ποιο διάστημα γίνονται αποδεκτές οι λύσεις της εκτίμησης. Σύμφωνα με τη Levine (1982) κάποιοι ερευνητές δέχονται τις απαντήσεις που απέχουν 10-15% από το ακριβές αποτέλεσμα, ενώ βάση της Sowder (1992) άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η προσέγγιση εξαρτάται κάθε φορά από το ίδιο το πρόβλημα ή από κάποια εξωτερική πηγή π.χ. δάσκαλος ο οποίος ορίζει το διάστημα των αποδεκτών απαντήσεων. Βασικά, δεν υπάρχει κάποιος κανόνας που να ορίζει το διάστημα αποδεκτών απαντήσεων σε μια εκτίμηση, καθώς το εκάστοτε πρόβλημα απαιτεί διαφορετικού είδους εκτίμηση, άλλοτε πλησιέστερη στο ακριβές αποτέλεσμα και άλλοτε λιγότερο κοντά.

Η υπολογιστική εκτίμηση περιλαμβάνει την απάντηση σε ένα αριθμητικό πρόβλημα, με στόχο την προσέγγιση του σωστού μεγέθους και όχι του υπολογισμού της σωστής απάντησης (Siegler & Booth, 2005). Η αποτελεσματική υπολογιστική εκτίμηση απαιτεί διάφορους τύπους εννοιολογικής κατανόησης: α) ότι ο στόχος της εκτίμησης είναι να παράγει μια απάντηση λογικά κοντά σε μέγεθος με τη σωστή, β) ότι οι προσεγγιστικοί αριθμοί χρησιμεύουν για την επίτευξη αυτού του στόχου, γ) ότι η εκτίμηση μπορεί να περιέχει ποικίλες έγκυρες προσεγγίσεις και πολλαπλές λογικές απαντήσεις, και δ) ότι το πλαίσιο καθορίζει την καταλληλότητα των απαντήσεων (LeFrevem Greenham, & Waheed, 1993· Sowder & Wheeler, 1989).[3]

5.2 Εκτίμηση μέτρων

Μπορούμε να ορίσουμε την εκτίμηση μέτρων, ως τη διαδικασία με την οποία φτάνουμε σε μια μέτρηση χωρίς τη χρήση εργαλείων μέτρησης. Η εκτίμηση μέτρων πραγματοποιείται σε αντικείμενα, τα οποία μετρώνται με συνεχή και όχι διακριτά μεγέθη, με βάση μια αυθαίρετη μονάδα μέτρησης (π.χ. το μέτρο για το μήκος). Τέτοια μεγέθη είναι το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος, ο χρόνος, το βάρος κ.ά.. Για παράδειγμα, για να υπολογίσει κανείς το μήκος ενός τοίχου με τσιμεντόλιθους, αρκεί να εκτιμήσει το μήκος ενός τσιμεντόλιθου και να πολλαπλασιάσει με τον αριθμό τους. Για μια καλή εκτίμηση των μέτρων βέβαια, κάποιος θα πρέπει να έχει μέσα από την εμπειρία μια καλή εικόνα ή αίσθηση του μεγέθους της μονάδας που χρησιμοποιεί (Λεμονίδης, 2013).

Ο Bright (1976)[4] περιγράφει την εκτίμηση μέτρων, ως μια διαδικασία μέσα από την οποία φτάνεις στη μέτρηση, χωρίς όμως να χρησιμοποιηθούν όργανα μέτρησης, ορίζοντας ταυτόχρονα τη μέτρηση ως τη διαδικασία σύγκρισης ενός φυσικού αντικειμένου με μια ομοειδή προκαθορισμένη μονάδα. Η μέτρηση ορίζει μια σχέση ανάμεσα σε μια ποσότητα και στους πραγματικούς αριθμούς. Η εκτίμηση όμως διαφέρει, καθώς προϋποθέτει μια νοερή μονάδα αναφοράς, μια νοερή «εικόνα» ή «αίσθηση» για το μέγεθος της μονάδας. Για παράδειγμα, η εκτίμηση έμπειρου τεχνίτη για το μέγεθος της δουλειάς σε μια οικοδομή (βάψιμο, στρώσιμο με

[3] Όπως αναφ. στους Siegler & Booth (2005)

[4] Όπως αναφ. στη Sowder (1992)

πλακάκια κλπ.) το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με βάση τους εργάτες που απαιτούνται. Ο Bright (1976) αναφέρει ότι πρόκειται για μια νοερή διεργασία, παρόλο που συχνά έχει ορατές ή απλές εκφάνσεις. Η εκτίμηση μέτρων προϋποθέτει διαφορετικές ικανότητες από την εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Είναι περισσότερο συνδεδεμένη και περιορισμένη στα όρια κάποιου συγκείμενου και μπορεί να γίνει χωρίς τη χρήση αριθμητικών πράξεων, παρόλο που συχνά γίνονται κάποιες απλές πράξεις.

Ο Bright (1976) περιγράφει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να προβούμε στην εκτίμηση μέτρησης. Οι συνθήκες αυτές ορίζονται ανάλογα με το αν το αντικείμενο προς μέτρηση είναι παρόν ή απόν, αν η μονάδα μέτρησης είναι παρούσα ή απούσα και αν η μέτρηση ή το αντικείμενο προσδιορίζονται. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα: «ονόμασε κάτι στην τάξη το οποίο είναι περίπου 1 μέτρο μακρύ ή ψηλό», το αντικείμενο προς μέτρηση είναι απόν, η μονάδα μέτρησης προσδιορίζεται (1 μέτρο) και η μέτρηση είναι προκαθορισμένη (1 μέτρο μακρύ ή ψηλό).

Οι Siegel et al. (1982) περιγράφουν ένα μοντέλο εκτίμησης των Siegel & Zacharias[5] για τη λύση προβλημάτων εκτίμησης το οποίο διακρίνεται σε δυο ιεραρχικά αλληλοσυσχετιζόμενες διαδικασίες: εκτίμηση αναφοράς και διαμέριση-επανένωση (ανασύνθεσης-αποσύνθεσης). Η εκτίμηση αναφοράς είναι, ουσιαστικά, η εφαρμογή μιας μονάδας μέτρησης στο στοιχείο που πρόκειται να εκτιμηθεί. Όμως σε προβλήματα εκτίμησης μέτρησης δεν είναι διαθέσιμη κάποια μονάδα μέτρησης. Σ' αυτή την περίπτωση εφαρμόζεται η δεύτερη διαδικασία σύμφωνα με την οποία γίνεται διαμέριση του αντικειμένου που πρέπει να μετρηθεί σε μικρότερα ίσα κομμάτια, καθένα από τα οποία μπορούμε να μετρήσουμε με βάση μια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια σύνθεση όλων αυτών των μικρότερων δειγμάτων προκειμένου να φτάσουμε σε μια τελική εκτίμηση. Υπάρχουν, ωστόσο, περιπτώσεις όπου ένα αντικείμενο δε διαμοιράζεται εύκολα σε μικρότερα κομμάτια (Siegel et al., 1982).

Σύμφωνα με τους Segovia & Castro (2009), η εκτίμηση μέτρων αναφέρεται στις κρίσεις που γίνονται σχετικά με την τιμή μιας συγκεκριμένης ποσότητας ή του αποτελέσματος που θα προέκυπτε κάνοντας μια μέτρηση. Δυο τύποι μεγεθών διακρίνονται στην εκτίμηση μέτρων: τα συνεχή και τα διακριτά. Για παράδειγμα, η περίπτωση των συνεχών μεγεθών φαίνεται στο πώς αξιολογούμε το ύψος κάποιου σε σχέση με το δικό μας. Η περίπτωση των διακριτών μεγεθών

[5] Siegel, A. W., & Zacharias, J. R. *Development and Facilitation of Cognitive Representation in Estimation Problems.* (Proposal for NSF-NIE Grand #SED-7912743). Cambridge, Mass.: Education Development Center, 1979.

φαίνεται όταν π.χ. εκτιμούμε τον αριθμό των ατόμων που συμμετέχουν σε μια πολιτική διαδήλωση. Βέβαια, αυτή η περίπτωση αντιμετωπίζεται κατά κόρον στη βιβλιογραφία ως ένα ξεχωριστό είδος εκτίμησης: εκτίμηση πλήθους αντικειμένου (βλ. παρακάτω ενότητα 5.3).

5.3 Εκτίμηση πλήθους

Η εκτίμηση πλήθους τίθεται συνήθως με την ερώτηση «πόσα είναι;» και ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων σε ένα σύνολο. Για παράδειγμα, προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των ανθρώπων μέσα σε μια αίθουσα κινηματογράφου, τον αριθμό των καρτών σε μια στοίβα από κάρτες, πόσες είναι οι καραμέλες σε ένα κουτί κτλ. Μια κοινή διαδικασία που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση πλήθους είναι να μετρηθεί ένα δείγμα και μετά να πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό των δειγμάτων. Μπορούμε να έχουμε και διάφορες παραλλαγές αυτής της μεθόδου, όπως διατομές, για να βρούμε τον αριθμό από τις καραμέλες σε ένα διαφανές κουτί, ή αναλογίες (πόσες από τις καραμέλες είναι κόκκινες) ή και διάφορες άλλες μεθόδους (Λεμονίδης, 2013).

Σύμφωνα με τη Sowder (1992), «*η τυπική διαδικασία που χρησιμοποιείται κατά την εκτίμηση πλήθους είναι να πάρεις τον αριθμό ενός μικρού δείγματος, και μετά να τον πολλαπλασιάσεις με τον αριθμό τέτοιων δειγμάτων που εκτιμώνται ότι υπάρχουν. Έτσι, για να εκτιμήσουμε τον αριθμό των θεατών σ' ένα παιχνίδι μπέιζμπολ, μπορούμε να μετρήσουμε ή να εκτιμήσουμε τους θεατές σε μια μικρή περιοχή, να εκτιμήσουμε το πλήθος τέτοιων μικρών περιοχών και να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο ως την εκτίμηση του συνόλου*».

Στην ίδια διαδικασία αναφέρονται και οι ερευνητές Siegel, Goldsmith & Madson (1982), σύμφωνα με την οποία γίνεται διάσπαση του συνόλου σε μικρότερα (ίσα) δείγματα, υπολογισμός του ενός και τέλος συνένωση των μικρότερων δειγμάτων και υπολογισμός του συνόλου. Οι ίδιοι αναφέρουν ότι πολλά προβλήματα εκτίμησης είναι δυσκολότερα, καθώς το σύνολο δεν μπορεί να κατακερματιστεί εύκολα σε μικρότερα δείγματα, όπως κατά την εκτίμηση ενός μεγάλου πλήθους ανθρώπων ή έστω κι αν μπορεί να τεμαχιστεί, δεν μπορεί να βρεθεί ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα. Αυτές είναι περιπτώσεις «μη κανονικής διάσπασης». Σ' αυτή την περίπτωση προχωρούμε σε άλλες διαδικασίες εκτίμησης, όπως «να μαντέψουμε», να συγκρίνουμε αυτό που βλέπουμε με προηγούμενες εμπειρίες μας, δηλαδή να υπολογίσουμε πόσο περίπου είναι, έχοντας στο μυαλό μας άλλες παρόμοιες καταστάσεις.

Οι Segovia & Castro (2009) αντιμετωπίζουν την εκτίμηση πλήθους αντικειμένων ως μια υποκατηγορία της εκτίμησης μεγεθών, που αναφέρεται σε διακριτές ποσότητες.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ της υπολογιστικής εκτίμησης και της εκτίμησης μέτρων ή πλήθους αντικειμένων είναι ότι στην πρώτη περίπτωση απαιτείται η μετατροπή αριθμητικών δεδομένων σε αριθμό ενώ στις άλλες δυο περιπτώσεις απαιτείται η μετατροπή μιας μη αριθμητικής αναπαράστασης (οπτικής αναπαράστασης) σε αριθμό (Siegler & Booth, 2005).

5.4 Εκτίμηση αριθμογραμμής

Η εκτίμηση αριθμογραμμής είτε απαιτεί τη μετάφραση ενός αριθμού σε μια χωρική θέση σε μια αριθμογραμμή ή τη μετάφραση μιας χωρικής θέσης ενός αριθμού σε μια αριθμογραμμή σε έναν αριθμό (Siegler & Booth, 2005). Οι ερμηνείες των μαθητών για τους αριθμούς σε θέσεις πάνω στην αριθμογραμμή δίνουν ιδιαίτερα άμεσες πληροφορίες σχετικά με τις αναπαραστάσεις που έχουν για τα αριθμητικά μεγέθη. Η εκτίμηση αριθμογραμμής βελτιώνεται σταθερά κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, η ακρίβεια γίνεται μεγαλύτερη σε κάθε δεδομένη ηλικία στις χαμηλότερες αριθμητικές κλίμακες (Λεμονίδης, 2013).

6. *Στρατηγικές στην υπολογιστική εκτίμηση*

Οι στρατηγικές εκτίμησης είναι λογαριθμικές διαδικασίες, που οδηγούν σε μη ακριβή αποτελέσματα υπολογισμών, δηλαδή σε αποτελέσματα κατά προσέγγιση. Οι ερευνητές Reys et al. (1991) αναφέρουν ότι προηγούμενες έρευνες παρείχαν μια δομή, σχετικά με τον τρόπο που οι καλοί εκτιμητές παράγουν εκτιμήσεις. Οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης έχουν οριστεί βασιζόμενες σε τρεις μεγάλες κατηγορίες: την *αναδόμηση* (reformulation), τη *μετάφραση* (translation) και την *αντιστάθμιση* (compensation).

Η αναδόμηση αφορά τη μετατροπή των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος με νέους όρους, που είναι σε πιο διαχειρίσιμη μορφή. Η μετάφραση αφορά την αλλαγή της μαθηματικής δομής του προβλήματος, σε μια μορφή που να είναι υπολογιστικά πιο βολική. Κατά τη μετάφραση μπορεί να αλλάξει η ίδια η πράξη, με σκοπό να γίνει πιο εύκολο το πρόβλημα.

Η αντιστάθμιση λαμβάνει χώρα όταν κάποιος επανέρχεται και διορθώνει το αποτέλεσμα μιας αρχικής εκτίμησης. Η αντιστάθμιση είναι πιο πολύπλοκη από τις άλλες δυο και για αυτό το λόγο εμφανίζεται η χρήση της σε μικρότερο ποσοστό. Η αντιστάθμιση μπορεί να γίνει και κατά τη διάρκεια της εκτίμησης αλλά και στο τέλος της διαδικασίας. Καλοί εκτιμητές χρησιμοποιούν την αντιστάθμιση πιο συχνά και την αναγνωρίζουν ως την πιο κατάλληλη για επιτυχημένες εκτιμήσεις. Διάφορες συγκεκριμένες στρατηγικές για κάθε διαδικασία έχουν αναγνωριστεί.

Η Dowker (2003) υποστήριξε ότι αυτές οι τρεις κατηγορίες δεν επαρκούν για να ορίσουν και να περιγράψουν τα «βασικά συστατικά της εκτίμησης» και είναι τόσο γενικοί, γεγονός το οποίο καθιστά δύσκολο σε δασκάλους και μαθητές να δουλέψουν με αυτά.

Πολλοί είναι οι ερευνητές, οι οποίοι έχουν περιγράψει διαφορετικές στρατηγικές χρησιμοποιώντας ποικίλους διαφορετικούς όρους. Ο Λεμονίδης (2013) με βάση τη σχετική βιβλιογραφία[6] συνέθεσε μια λίστα με στρατηγικές που παρουσιάζονται στην υπολογιστική εκτίμηση. Οι στρατηγικές αυτές, βέβαια, πολλές φορές εξαρτώνται από τις πράξεις που δίνονται στην εκτίμηση. Επίσης, σε μερικές περιπτώσεις ποικίλουν οι ονομασίες που τούς αποδίδουν οι διάφοροι συγγραφείς. Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης.

1.	**Στρογγυλοποίηση** (rounding): Μετατρέπονται το ένα ή και τα δυο μέλη στον πλησιέστερο αριθμό που καταλήγει σε ένα ή περισσότερα μηδενικά. Μπορούμε να διακρίνουμε δυο τύπους στρογγυλοποίησης: *Στρογγυλοποίηση με κανόνα*, η οποία βασίζεται στον γνωστό κανόνα στρογγυλοποίησης με βάση το 5. *Στρογγυλοποίηση που βασίζεται στην κατάσταση*, όπου λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο του αριθμητικού προβλήματος και η ειδική κατάσταση του υπολογισμού.
2.	**Στρατηγική εμπρόσθιου άκρου (**Front – end strategy): Παρόλο που μπορεί να φανεί χρήσιμη και στις τέσσερις πράξεις, η κύρια χρησιμότητά της είναι στην πρόσθεση. Μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δυο βήματα. Στην αρχή επικεντρώνεται στα ψηφία στο αριστερό άκρο των αριθμών, αγνοώντας τα υπόλοιπα. Αφότου διατυπωθεί μια εκτίμηση, μπορεί να γίνει μια ρύθμιση με υπολογισμό των τμημάτων που αγνοήθηκαν.
3.	**Κουτσούρεμα** (truncating): Μετατρέπουν σε μηδέν ένα ή περισσότερα ψηφία από το τέλος (δεξιά), ενός ή περισσότερων μελών.
4.	**Συσσώρευση** (clustering) **ή Μέσος Όρος** (averaging): Αυτή η ειδική στρατηγική εφαρμόζεται στην πρόσθεση πολλών αριθμών και όταν οι αριθμοί αυτοί βρίσκονται γύρω από μια ειδική τιμή.

[6] Reys et al., 1982· Sowder & Wheeler, 1989· Reys et al., 1991b· Dowker, 1992· LeFreve et al., 1993

5.	**Προγενέστερη αντιστάθμιση** (prior compensation): Ο δεύτερος όρος στρογγυλοποιείται σε αντίθετη κατεύθυνση από τον πρώτο, πριν πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε πράξη.
6.	**Μεταγενέστερη αντιστάθμιση** (post compensation): Μετά από τη στρογγυλοποίηση ή το κουτσούρεμα γίνεται μια διόρθωση.
7.	**Στρατηγική συμβατών αριθμών** (compatible numbers strategy): Αυτή η στρατηγική περιλαμβάνει την επιλογή των αριθμών που καθιστούν τον υπολογισμό εύκολο και δίνουν μια καλή εκτίμηση του αρχικού προβλήματος.
8.	**Στρατηγική ειδικών αριθμών** (special numbers strategy): σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές εκπαιδεύονται να ξεχωρίζουν του αριθμούς που είναι κοντά σε ειδικές τιμές. Αυτό συμβαίνει με τα κλάσματα, όπου οι ειδικές τιμές είναι 0, ½ και 1.
9.	**Αλλαγή μορφής αριθμού** (reformulation): Αλλάζει η μορφή ενός ή και των δυο αριθμών, για να δημιουργηθεί ένας ευκολότερος υπολογισμός.
10.	**Παραγοντοποίηση** (factorization): Αναλύουμε τους αριθμούς ώστε να έχουν απλούστερη μορφή.
11.	**Επιμεριστικότητα** (distributivity): Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.
12.	**Με αλγοριθμικό τρόπο** (proceeding algorithmically): Χρησιμοποιείται κάποιος αλγόριθμος, για να γίνει υπολογισμός στο περίπου, και μετά να υπολογιστεί η απάντηση.

Πίνακας 1: Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα διαφόρων ερευνών, η εκτίμηση της απάντησης μέσω στρογγυλοποίησης είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στρατηγική, ενώ μέσω αντιστάθμισης τείνει να είναι η τελευταία σε συχνότητα χρήσης. Η στρατηγική του μέσου όρου, αν και δε χρησιμοποιείται συχνά, όταν υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί, είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

Οι στρατηγικές εκτίμησης πρέπει να διδάσκονται, να εξηγούνται και να ασκούνται οι μαθητές με φθίνουσα καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό. Όταν οι μαθητές κατανοήσουν και είναι σε θέση να εφαρμόζουν τις εναλλακτικές στρατηγικές, ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν στις εκτιμήσεις τους όποια στρατηγική επιθυμούν ή θεωρούν πιο κατάλληλη. Οι εναλλακτικές εκτιμήσεις και στρατηγικές των μαθητών πρέπει να αποτελούν αντικείμενο συζήτησης στη σχολική τάξη.

7. Η σημαντικότητα των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων

Καθημερινά ερχόμαστε αντιμέτωποι με πλήθος υπολογισμών, εκ των οποίων, κάποιοι είναι ακριβείς, ενώ κάποιοι άλλοι είναι κατ' εκτίμηση. Πολλοί ερευνητές τονίζουν τη σημαντικότητα των νοερών υπολογισμών και των εκτιμήσεων, τόσο για τα παιδιά όσο και για τους ενήλικες.

Οι νοεροί υπολογισμοί διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Μάλιστα ο Hope (1986) αναφέρει ότι οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις είναι πιο κοινές στην καθημερινή ζωή σε σχέση με τους γραπτούς αλγόριθμους που εφαρμόζονται στα σχολεία (Carrol, 1996). Στο ίδιο μήκος κύματος βρίσκονται και άλλοι ερευνητές, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι ενήλικες χρησιμοποιούν στην καθημερινότητά τους περισσότερο τους νοερούς υπολογισμούς, παρά τους γραπτούς (McIntosh et al, 1997· Reys, 1984).

Ο νοερός υπολογισμός είναι σημαντικός για διάφορους λόγους. Πρώτον, ο νοερός υπολογισμός είναι μια πολύτιμη δεξιότητα. Χρησιμοποιείται συχνά στον πραγματικό κόσμο για την επίλυση προβλημάτων και παρέχει βασικές προϋποθέσεις για να γίνει η υπολογιστική εκτίμηση. Δεύτερον, ο νοερός υπολογισμός προάγει τη μαθηματική σκέψη, συμβάλλει στην αίσθηση του αριθμού και να αναπτύσσει πολύτιμες διαδικασίες που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων (Sowder, 1992).

Η ερευνήτρια Rubenstein (2001) υποστηρίζει ότι ένας απλός λόγος για να δοθεί έμφαση στα νοερά μαθηματικά είναι ότι είναι χρήσιμοι στους εργάτες, στους καταναλωτές και στους πολίτες, ενώ συνεχίζει αναφέροντας ότι οι άνθρωποι συχνά εκτιμούν ή υπολογίζουν νοερά το χρόνο που απαιτείται για να ταξιδέψουν συγκεκριμένες αποστάσεις, το κόστος του καλαθιού των λαχανικών, τους φόρους, τα φιλοδωρήματα, τις εκπτώσεις, το κόστος μιας μονάδας, τα μίλια ανά γαλόνι, τα μίλια ανά ώρα, και άλλα. Οι νοεροί υπολογισμοί έχουν αναγνωριστεί ως σημαντικοί και χρήσιμοι στην καθημερινή ζωή, καθώς και ως πολύτιμοι στην προώθηση και την παρακολούθηση της υψηλού επιπέδου μαθηματικής σκέψης (Reys at al, 1995).

Η χρήση των νοερών υπολογισμών δίνει κίνητρα σε πολλούς μαθητές. Σε μια έρευνα των Carrol & Porter (1994), ζητήθηκε από μαθητές της τετάρτης δημοτικού να συγκρίνουν τη μαθηματική γνώση μαθητών που βρήκαν τη λύση νοερά, με μολύβι και χαρτί ή με τη βοήθεια αριθμομηχανής. Σχεδόν όλοι οι μαθητές θεώρησαν ότι ο μαθητής που χρησιμοποίησε νοερό υπολογισμό ήταν καλύτερος στα μαθηματικά (Carrol, 1996).

Ο Reys (1984) αναφέρει πέντε ευρέως αποδεκτούς λόγους για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, οι οποίοι είναι: (1) είναι προαπαιτούμενο για μια επιτυχημένη ανάπτυξη όλων των γραπτών αριθμητικών αλγορίθμων, (2) συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση της δομής και των ιδιοτήτων των αριθμών, (3) προωθούν τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και ενθαρρύνουν τους μαθητές να βρίσκουν έξυπνους τρόπους για να χειρίζονται τους αριθμούς, (4) συμβάλλουν στην ανάπτυξη καλύτερων ικανοτήτων στη λύση προβλήματος, και (5) αποτελούν τη βάση για να αναπτυχθούν οι ικανότητες των κατ' εκτίμηση υπολογισμών.

Ο Ian Thompson (1999) επισημαίνει τέσσερις βασικούς λόγους για τους οποίους πρέπει να διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί:

1. Χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή περισσότερο από τους γραπτούς υπολογισμούς.
2. Η εξάσκηση με αυτούς δημιουργεί καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού (McIntosh, 1990· Sowder, 1990).
3. Η νοερή εργασία αναπτύσσει ικανότητες για τη λύση προβλημάτων.
4. Βοηθούν στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού[7].

Ο Λεμονίδης (2013) επέκτεινε τους βασικούς λόγους για τους οποίους είναι σημαντικοί και πρέπει να διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί, οι οποίοι είναι οι εξής:

Α. *Η χρησιμότητα και η εφαρμογή τους στην πράξη*: Χρησιμοποιούνται πολύ στην καθημερινή ζωή και μάλιστα περισσότερο από τους γραπτούς υπολογισμούς.

Β. *Η συμβολή τους σε άλλες μαθηματικές έννοιες*: Η εξάσκηση με αυτούς δημιουργεί καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού. Βοηθούν στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού. Αποτελούν την βάση για να αναπτυχθούν οι ικανότητες των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών. Η νοερή εργασία αναπτύσσει ικανότητες για τη λύση προβλημάτων.

Γ. *Η συμβολή τους σε γνωστικές ικανότητες:* Με τους νοερούς υπολογισμούς εξασκείται η ικανότητα αναπαράστασης και χρήσης αφηρημένων εννοιών στη βραχύχρονη μνήμη, ασκείται

[7] Όπως αναφ. ο Λεμονίδης (2013)

επίσης και η ικανότητα της ευελιξίας. Ασκείται, τέλος, η μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών, όταν αυτοί παρουσιάζουν τους τρόπους με τους οποίους υπολόγισαν.

Μια έρευνα του Λεμονίδη (2006α), εξέτασε την επίδραση μιας μακροχρόνιας διδασκαλίας με νοερούς υπολογισμούς στις τέσσερις πράξεις, στην Α' και Β' τάξη, σε δημοτικά σχολεία της Φλώρινας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που υποβληθήκαν στη συγκεκριμένη διδασκαλία, ανέπτυξαν όλες τις πράξεις από πολύ πιο νωρίς και χρησιμοποιούσαν αφηρημένες κατασκευαστικές στρατηγικές. Επιπρόσθετα, οι μαθητές παρουσίασαν μεγαλύτερη ευελιξία ως προς τη χρήση στρατηγικών υπολογισμού, χρησιμοποίησαν δηλαδή μεγαλύτερη ποικιλία μεθόδων υπολογισμού των πράξεων από ότι οι μαθητές της κλασικής διδασκαλίας.

Η εκτίμηση είναι ένα σημαντικό στοιχείο των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων γενικά (Siegel et al. 1982). Η εκτίμηση είναι ένα σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής γνώσης, ένα στοιχείο το οποίο είναι διάχυτα παρόν στις ζωές τόσο των παιδιών, όσο και των ενηλίκων (Siegler & Booth, 2005). Οι ίδιοι ερευνητές θεωρούν ότι η εκτίμηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί πιο συχνά στην καθημερινότητα, παρά σε άλλες διαδικασίες ποσοτικοποίησης. Οι Λεμονίδης και Μουράτογλου (2014), θεωρούν ότι δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που καθημερινά απαιτούνται γρήγοροι υπολογισμοί ή κρίσεις αριθμητικών μεγεθών χωρίς τη βοήθεια του υπολογιστή ή του χαρτιού και μολυβιού.

Μια ακόμη αιτία, εκτός από τη χρησιμότητά της στην καθημερινή ζωή, για την οποία η εκτίμηση είναι σημαντική, είναι ότι μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια καλύτερη κατανόηση της θεσιακής αξίας, των πράξεων και της γενικής αίσθησης του αριθμού (National Research Council, 2001). Παρόλη τη σημαντικότητα της εκτίμησης στην τάξη και στην καθημερινή ζωή, λίγα είναι γνωστά για την ανάπτυξη άλλων βασικών ποσοτικών ικανοτήτων, όπως η άμεση εκτίμηση, η μέτρηση και η πρόσθεση (Dowker, 2003; Geary, 1994).

Ο Usiskin (1986) σε περιστάσεις καθημερινότητας, υποστηρίζει ότι ο κατά προσέγγιση υπολογισμός αυξάνει τη σαφήνεια σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι συχνά πιο εύχρηστος, οι προσεγγιστικές τιμές συχνά εξασφαλίζουν συνοχή κ ακρίβεια, βοηθά στην αντιμετώπιση εμποδίων των προβλημάτων που επιφέρει ο ακριβής υπολογισμός.

Η εκτίμηση της απάντησης, σύμφωνα με τους Φιλλίπου & Χρίστου (2004), έχει μεγάλη σημασία στην ανάπτυξη της αξίας θέσης του ψηφίου, στην κατανόηση των εννοιών των τεσσάρων πράξεων, στην ανάπτυξη της επικοινωνίας και στην κατανόηση των δεκαδικών αριθμών.

Πρόσθετα, η εκτίμηση είναι σημαντική διότι σχετίζεται με άλλες συγκεκριμένες πτυχές της μαθηματικής ικανότητας, όπως η αριθμητική δεξιότητα, καθώς και γενικά μέτρα μαθηματικής ικανότητας (Dowker, 2003). Ένας ακόμα λόγος για τον οποίο είναι σημαντική η εκτίμηση είναι γιατί πολλά είδη εκτίμησης απαιτούν να ξεπεράσουμε την εφαρμογή διαδικασιών και να εφαρμόσουμε τις μαθηματικές γνώσεις με ευέλικτους τρόπους (Siegler & Booth, 2005).

Οι Segovia & Castro (2009) εκθέτουν τους λόγους που καθιστούν αναγκαία την εκτίμηση και τους ταξινομούν σε τέσσερις ομάδες: (1) την αδυναμία να γνωρίζουμε την ακριβή αξία, όπως στην περίπτωση υπολογισμού με μια τιμή που είναι άγνωστη σε ακριβείς όρους, για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινήτων που ταξιδεύουν κάποιο σαββατοκύριακο, (2) την αδυναμία μιας ακριβούς αριθμητικής επεξεργασίας, για παράδειγμα τον υπολογισμό με έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό, (3) την αριθμητική σαφήνεια, για παράδειγμα, τα μέσα μαζικής ενημέρωσης χρησιμοποιούν εκτιμήσεις αντί για ακριβείς ποσότητες για να καταστήσουν τις πληροφορίες πιο ξεκάθαρες και κατανοητές, (4) ευκολία στον υπολογισμό, υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου η ακρίβεια δεν είναι απαραίτητη και μια κατά προσέγγιση απάντηση είναι επαρκής και χρήσιμη. Η στρογγυλοποίηση και οι κατάλληλοι νοεροί αλγόριθμοι παρέχουν έναν απλό τρόπο επίτευξης μιας απάντησης η όποια είναι αρκετά ακριβής και χρήσιμη στη λήψη αποφάσεων.

Ο Reys (1984) υποστηρίζει ότι πρέπει να καθιερωθεί ο χαρακτηρισμός για τις υπολογιστικές εκτιμήσεις ως χρήσιμες και σημαντικές ικανότητες. Ο ερευνητής θεωρεί ότι πρέπει να ανατίθενται προβλήματα στους μαθητές που τους καθιστούν ενήμερους για τις διάφορες καταστάσεις στις οποίες αντιμετωπίζονται οι υπολογιστικές εκτιμήσεις. Πολλοί μαθητές δε γνωρίζουν ποιά είναι η εκτίμηση, ενώ πολλοί είναι οι μαθητές που προσπαθούν σκληρά να υπολογίσουν την ακριβή απάντηση νοερά, με αποτέλεσμα να παρερμηνεύουν τη χρήση της εκτίμησης. Άλλοι μαθητές γράφουν τους συντελεστές, υπολογίζουν το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό αλγόριθμο με χαρτί και μολύβι και κουτσουρεύουν ή στρογγυλοποιούν το αποτέλεσμα για να παράγουν την «εκτίμησή» του. Αυτή η διαδικασία ωστόσο δεν είναι υπολογιστική εκτίμηση. Οι μαθητές θα πρέπει να θεωρούν την υπολογιστική εκτίμηση ως μια χρήσιμη τεχνική, μια τεχνική που μπορεί να εφαρμοστεί σχετικά εύκολα και γρήγορα.

Ακόμη, μια μεγάλη πλειοψηφία μαθητών έχει δυσκολία να εκτιμήσει την απάντηση σε ένα πρόβλημα. Εκτός από τους μαθητές είναι και πολλοί ενήλικοι που συναντούν δυσκολίες στις διαδικασίες της εκτίμησης (Case & Sowder, 1990· Hope & Sherrill, 1987· Reys, Bestgen, Rybolr, & Wyatt, 1980· Sowder, 1992).

Λίγα χρόνια νωρίτερα και η Levine (1982) είχε αναφέρει ότι για πολλές κοινές χρήσεις των μαθηματικών, η εκτίμηση είναι πιο σημαντική από τον ακριβή υπολογισμό, υποστηρίζοντας επιπλέον πως όταν χρησιμοποιούνται αριθμομηχανές, η εκτίμηση είναι ουσιαστικό μέρος της κρίσης εάν το αποτέλεσμα είναι λογικό. Παράλληλα, τόνισε ότι η εκτίμηση είναι μια σημαντική δεξιότητα για τους ενήλικες.

Ο νοερός υπολογισμός είναι σημαντικός επειδή προωθεί την αίσθηση αριθμών. Η ανάγκη συμμετοχής σε υπολογισμό ενθαρρύνει την αναζήτηση σημαντικών συντομεύσεων που χρησιμοποιούν βασικές γνώσεις αριθμού. Η ανάγκη συμμετοχής σε υπολογισμό απαιτεί υπολογισμό αλλά, επιπλέον, απαιτεί κατάλληλες κρίσεις σχετικά με το σχετικό μέγεθος των αριθμών για να καθορίσουμε πόσο λογική ή χρήσιμη είναι η κατά προσέγγιση απάντηση. Η εκτίμηση είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς επιτρέπει στο παιδί να κάνει νοερή αίσθηση (mental sense) όταν ο υπολογισμός θα ήταν παράλογος επειδή οι αριθμοί ήταν πολύ μεγάλοι ή ήταν κλασματικοί (Maclellan,2001).

Η ικανότητα να γίνονται ακριβείς κρίσεις για ένα σχετικό μέγεθος επιτρέπει την εκτίμηση να έχει νόημα στον εκτιμητή, επιτρέποντας έτσι την ανάπτυξη διαίσθησης σχετικά με τον αριθμό. Παραδόξως ίσως, η δύναμη της εκτίμησης προέρχεται από την ύπαρξη πολλών πιθανών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα και κάποιες μπορεί να ικανοποιήσουν επαρκώς τις συναφείς απαιτήσεις εκ των οποίων αποτελεί μέρος η πράξη (Maclellan, 2001). Η Sowder (1988), ωστόσο επισημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές θεωρούν ότι οι νοεροί υπολογισμοί είναι ανώτεροι από την εκτίμηση, επειδή η εκτίμηση είναι απλώς «μάντεμα». Αυτή η έλλειψη σεβασμού για τη δύναμη και την αξία της εκτίμησης μειώνει την ρόλο των νοερών υπολογισμών και μας ενθαρρύνει να θεωρήσουμε τον νοερό υπολογισμό ως ρουτίνα εξάσκησης και πρακτικής, η οποία λειτουργεί σύμφωνα με κάποιους κανόνες πρότυπα (Maclellan, 2001).

Επίσης πολλοί τύποι εκτίμησης απαιτούν να προχωρήσουμε πέρα από μια μηχανιστική εφαρμογή των διαδικασιών και να εφαρμόσουμε τη μαθηματική γνώση με ευέλικτους τρόπους. Αυτός ο προσαρμοστικός τύπος επίλυσης προβλήματος είναι ένας από τους βασικούς στόχους στη σύγχρονη διδασκαλία (Λεμονίδης, 2013).

8. *Οφέλη της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων*

Από πολύ νωρίς δόθηκε έμφαση στα οφέλη των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων. Ο Max Beberman[8] (1959) ανέφερε ότι: «*η νοερή αριθμητική είναι ένας από τους καλύτερους τρόπους να βοηθήσουμε τα παιδιά να γίνουν ανεξάρτητα από τις τεχνικές τις οποίες μαθαίνουν συνήθως με αυστηρή απομνημόνευση. Επιπλέον, η νοερή αριθμητική ενθαρρύνει τα παιδιά να ανακαλύψουν υπολογιστικές συντομεύσεις και έτσι αποκτούν βαθύτερη γνώση του αριθμητικού συστήματος*» (Josefina, 1960).

Η Josephina (1960) υποστηρίζει ότι *«όταν η νοερή αριθμητική χρησιμοποιηθεί σωστά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, τότε οι μαθητές καταφέρνουν να σκέφτονται ποσοτικά. Γνωρίζοντας το αριθμητικό λεξιλόγιο, που διατυπώνεται σε σημαντικά προβλήματα και χρησιμοποιώντας υπολογισμούς που μπορούν να λυθούν νοερά, οι μαθητές ενθαρρύνονται να εκφραστούν αριθμητικά. Η μεταφορά σε πιο δύσκολη εργασία με το μολύβι και το χαρτί είναι κατά συνέπεια λιγότερο περίπλοκη».*

Οι νοεροί υπολογισμοί ενισχύουν την κρίση και τη δημιουργικότητα των μαθητών περισσότερο από τους τυποποιημένους γραπτούς αλγόριθμους. Οι τυποποιημένοι αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε όλες τις περιπτώσεις και καταλήγουν σε μια μηχανιστική εφαρμογή κάποιων κανόνων. Αντίθετα για τους νοερούς υπολογισμούς, κάθε περίπτωση είναι ξεχωριστή, ενισχύοντας έτσι την αίσθηση του αριθμού στα παιδιά (Κολέζα, 2009). Ίδια άποψη φαίνεται να έχει και ο Χαλάτσης (1990) ο οποίος υποστηρίζει ότι η έννοια του αριθμού οικοδομείται καλύτερα με υπολογισμούς με το νου παρά με τη βαρετή και τυφλή διαδικασία των γραπτών αλγόριθμων και ότι στην αριθμητική με το νου γίνεται ευρηματική χρήση των ιδιοτήτων των αριθμών.

Ο Reys (1984) αναφέρει ότι η χρήση νοερών υπολογισμών εγγυάται ότι οι μαθητές όχι μόνο θα γνωρίζουν πολλά δομικά πρότυπα, αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι θα τα χρησιμοποιήσουν στην επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές έχουν την ελευθερία να αποφασίσουν με διάφορους τρόπους να κάνουν νοερούς υπολογισμούς οι οποίοι ενθαρρύνουν την ευέλικτη σκέψη, η οποία είναι μια κρίσιμη πτυχή στην επίλυση προβλημάτων.

---

[8] Max Beberman in the Introduction to G. H. Shutter and R. L. Spreckelmeyer, Teaching the Third R (Washington: Council for Basic Education, 1959), p. 4.

Η Reys (1995) τονίζει ότι «*ο νοερός υπολογισμός προωθεί την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, καθώς επίσης και τις ιδιότητές του*» και ότι «*ο νοερός υπολογισμός καλλιεργεί την ανάπτυξη της έντονης αίσθησης του αριθμού*». Ο Reys (1984) θεωρεί ότι «*ο νοερός υπολογισμός προωθεί τη μεγαλύτερη κατανόηση της δομής του αριθμού και των ιδιοτήτων του*» και «*προάγει τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και ενθαρρύνει τους μαθητές στο να δημιουργούν έξυπνους τρόπους χειρισμού των αριθμών*».

Ο Heirdsfield (2000) αναφέρει ότι, η αριθμητική με το νου βοηθά τους μαθητές να κατανοούν τη σημασία των αριθμών, να καταλαβαίνουν πώς λειτουργούν οι αριθμοί και να κερδίζουν εμπειρία στο πώς να χειρίζονται τα νούμερα.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Hope (1986), οι μαθητές έχοντας αναπτύξει την ικανότητα να υπολογίζουν νοερά, μπορούν να ελέγξουν την ορθότητα του αποτελέσματος σε απλές πράξεις που γίνονται μέσω αριθμομηχανής ή άλλων ηλεκτρονικών μέσων. Ακόμα, ο ερευνητής υποστηρίζει ότι η αριθμητική με το νου βοηθά τους μαθητές να απαλλαγούν από τεχνικές που βασίζονται στην αποστήθιση και τους παροτρύνει να ανακαλύψουν μεθόδους υπολογισμού και να κατανοήσουν βαθύτερα το σύστημα αρίθμησης.

Στο άρθρο των ερευνητών Heirdsfield & Lamb (2005) μας γίνεται γνωστό ότι η χρήση νοερών υπολογισμών βοηθά τα παιδιά να μάθουν πώς δουλεύουν οι αριθμοί, να πάρουν αποφάσεις σχετικά με τις διαδικασίες και να δημιουργήσουν στρατηγικές (Reys, 1985; Sowder, 1990), προάγουν την κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Reys, 1984), και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέσο ανάπτυξης της σκέψης, της ικανότητας για υποθέσεις και γενικεύσεις, βασιζόμενες στην εννοιολογική κατανόηση (Reys & Barger, 1994).

Η συστηματική διδασκαλία των νοερών και των κατ' εκτίμηση υπολογισμών στο σχολείο συμβάλλει στην ανάπτυξη γνωστικών λειτουργιών (της προσοχής, της μνήμης, της αντίληψης, των μνημονικών συστημάτων, λεκτικών και μεταγνωστικών ικανοτήτων) και βοηθά στην καλλιέργεια ποικίλων μαθηματικών ικανοτήτων. Τέτοιες ικανότητες είναι: η αναγνώριση της ορθότητας ή της λογικότητας ενός αποτελέσματος, η πληρέστερη κατανόηση ποικίλων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, η ικανότητα επίλυσης λεκτικών προβλημάτων και η αποτελεσματικότερη χρήση του μικροϋπολογιστή και του ηλεκτρονικού υπολογιστή (Λεμονίδης, 2006α).

Καλές δεξιότητες υπολογιστικής εκτίμησης χρειάζονταν πάντα, και αυτή η ανάγκη αυξάνεται στη σημερινή τεχνολογική κοινωνία. Έρευνες δείχνουν ότι περισσότερο από το 80% της συνολικής χρήσης των μαθηματικών από ενήλικες, περιλαμβάνει την εκτίμηση. Εκτός από την προφανή ανάγκη των καταναλωτών να χρησιμοποιούν εκτιμήσεις, η κοινωνία καθίσταται λιγότερο ανεκτική στους γραπτούς υπολογισμούς. Η τεχνολογία, ιδιαίτερα οι αριθμομηχανές και οι υπολογιστές, καθιστούν ολοένα και πιο απαιτητικές τις υπολογιστικές εκτιμήσεις, για να εξασφαλίσουν ότι τα αποτελέσματα που υπολογίζονται από τις μηχανές είναι πράγματι λογικά (Reys, 1984).

Οι ερευνητές Beishuizen, van Putten, & van Mulken (1997) και το National Research Council (2001) υποστηρίζουν ότι η εκτίμηση είναι μια πολύ χρήσιμη δεξιότητα στην καθημερινή ζωή και στα μαθηματικά. Συχνά πρέπει να κάνουμε γρήγορους υπολογισμούς ή κρίσεις αριθμητικών μεγεθών, χωρίς τη βοήθεια αριθμομηχανής ή χαρτιού και μολυβιού. Εκτός από την ύπαρξη θεμελιωδών δεξιοτήτων, η ικανότητα γρήγορης και ακριβούς εκτέλεσης νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων, έχει δυο επιπρόσθετα οφέλη. Αρχικά, επιτρέπει στους μαθητές να ελέγξουν τη λογική των απαντήσεών τους, που βρήκαν με άλλα μέσα. Δεύτερον, βοηθά τους μαθητές, να αναπτύξουν μια καλύτερη κατανόηση της θεσιακής αξίας, των μαθηματικών πράξεων και γενικά της αίσθησης του αριθμού (Star & Rittle-Johnson, 2009).

9. Αίσθηση του αριθμού

Τα νέα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο τονίζουν την ανάγκη για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στα παιδιά. Ο όρος «αίσθηση του αριθμού» ως έννοια είναι δύσκολο να οριστεί σε στενό πλαίσιο, αλλά περιλαμβάνει ευρύτερα ένα σύνολο ιδεών, με βασικό στοιχείο την «ικανότητα διερεύνησης και ερμηνείας αριθμών και πράξεων, χωρίς την εκτέλεση των τυποποιημένων αλγόριθμων» (Κολέζα, 2009).

Η έννοια της αίσθησης του αριθμού πρωτοεμφανίστηκε από τον Tobias Dantzig το 1954, ο οποίος την χαρακτήρισε ως μια ικανότητα που διαθέτει ο άνθρωπος ακόμη και στα χαμηλά στάδια της ανάπτυξής του. Αυτή η ικανότητα, υποστήριξε, του επιτρέπει να αναγνωρίζει, ότι κάτι άλλαξε σε μια μικρή συλλογή όταν, χωρίς την άμεση γνώση του, ένα αντικείμενο απομακρύνθηκε ή προστέθηκε σε αυτή τη συλλογή (Dehaene, 2011).

Οι ερευνητές McIntosh et al. (1997) έδωσαν τον ορισμό της έννοιας της αίσθησης του αριθμού, ο οποίος είναι ο εξής: «*αίσθηση του αριθμού είναι η γενική κατανόηση ενός ατόμου του αριθμού και των πράξεων, μαζί με τη δυνατότητα και την τάση για να χρησιμοποιήσει αυτήν την κατανόηση με ευέλικτους τρόπους για να κάνει μαθηματικές κρίσεις και να αναπτύξει χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές στον χειρισμό αριθμητικών καταστάσεων*». Αυτή θεωρήθηκε από τις Δεσλή και Μυρόβαλη (2014) η πιο συστηματική ανάλυση της αίσθησης του αριθμού, η οποία αναφέρθηκε στην τάση και την ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί τους αριθμούς και τις ποσοτικές μεθόδους ως έναν τρόπο επικοινωνίας, και συνάμα επεξεργασίας και ερμηνείας των πληροφοριών.

Πιο πρόσφατα, οι Yang et al. (2001) στον ορισμό της αίσθησης του αριθμού αναφέρουν: «*η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην γενική κατανόηση ενός ατόμου των αριθμών και των πράξεων και της ικανότητας να χειριστεί καθημερινές καταστάσεις που περιέχουν αριθμούς. Αυτή η ικανότητα χρησιμοποιείται για να αναπτυχθούν ευέλικτες και αποτελεσματικές στρατηγικές (συμπεριλαμβανομένων των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων) για να χειριστούν αριθμητικά προβλήματα*».

Ο Berch (2005) ορίζει την αίσθηση του αριθμού ως «*μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών αρχών και σχέσεων, έναν υψηλό βαθμό ευχέρειας και ευελιξίας με τις πράξεις και τις διαδικασίες, μια αναγνώριση και εκτίμηση της συνέπειας και της κανονικότητας των μαθηματικών, και μια ώριμη εγκατάσταση σε συνεργασία με αριθμητικές εκφράσεις που αναπτύσσονται ως υποπροϊόν της μάθησης, μέσω μιας ευρείας σειράς μαθηματικών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων*».

Οι ερευνητές Reys & Reys (1999) αναγνώρισαν έξι συστατικά της αίσθησης του αριθμού, τα οποία είναι τα εξής:

1. Κατανόηση της έννοιας και του μεγέθους των αριθμών.
2. Κατανόηση και χρήση ισοδύναμων αναπαραστάσεων των αριθμών.
3. Κατανόηση της σημασίας και του αποτελέσματος των πράξεων.
4. Κατανόηση και χρήση ισοδύναμων εκφράσεων.
5. Ευέλικτες στρατηγικές υπολογισμού και μέτρησης για νοερούς υπολογισμούς, γραπτούς υπολογισμούς και υπολογισμούς με αριθμομηχανή.
6. Σημεία αναφοράς για μετρήσεις.

Η Κολέζα (2009) αναφέρει ότι η αίσθηση του αριθμού περιλαμβάνει ένα σύνολο ιδεών, όπως (1) το νόημα του αριθμού, (2) την αξία θέσης των ψηφίων ενός αριθμού, (3) τρόπους αναπαράστασης ενός αριθμού, (4) σχέσεις μεταξύ αριθμών, (5) το σχετικό μέγεθος των αριθμών, και (6) την ικανότητα χρήσης των αριθμών για την επίλυση προβλημάτων.

Ο McIntosh (1990) υποστηρίζει ότι η αίσθηση του αριθμού είναι εξατομικευμένη και σχετίζεται με ποιες ιδέες έχουν καθιερωθεί για τους αριθμούς και επίσης, πώς αυτές οι ιδέες καθιερώθηκαν. Επιπλέον, κάνουν λόγο πως μαθητές που είναι ικανοί σε υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, υπάρχει περίπτωση να αναπτύσσουν την αίσθηση του αριθμού ή όχι.

Τα άτομα που έχουν αίσθηση του αριθμού εκδηλώνουν άνεση και φιλικότητα σε αριθμητικά ερωτήματα και προβλήματα, είναι ικανά να κάνουν συσχετισμούς με την καθημερινή τους εμπειρία, μπορούν να αναπαραστήσουν τους αριθμούς και τις πράξεις με πολλούς τρόπους και μπορούν να εκτιμούν το αποτέλεσμα ενεργειών σε αριθμούς (Greeno, 1991· Reys, 1991· Sowder & Schapelle, 1994).

Η αίσθηση του αριθμού περιλαμβάνει την ανάπτυξη πολλαπλών σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών, των γεγονότων και των δεξιοτήτων και ως εκ τούτου, παρέχει πολλαπλή πρόσβαση σε αυτά όταν χρειάζεται (Reys & Reys, 1999). Σύμφωνα με το NCTM (1989) τα παιδιά που έχουν καλή αίσθηση του αριθμού κατανοούν τις αριθμητικές έννοιες, έχουν πολλαπλές ερμηνείες/αναπαραστάσεις των αριθμών, αναγνωρίζουν τα σχετικά και τα απόλυτα μεγέθη των αριθμών, εκτιμούν τα αποτελέσματα των πράξεων και αναπτύσσουν ένα σύστημα αναφοράς για να υπολογίσουν τους αριθμούς (McIntosh et al., 1992).

Σύμφωνα με τους MacIntosh et al. (1992), η αίσθηση του αριθμού είναι σημαντική, καθώς ο εκπαιδευόμενος επιλέγει, αναπτύσσει και χρησιμοποιεί υπολογιστικές μεθόδους, συμπεριλαμβανομένου του γραπτού υπολογισμού, του νοερού υπολογισμού και της εκτίμησης. Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η αίσθηση του αριθμού είναι συχνά εμφανής σε μια μικρή ηλικία, καθώς το παιδί σκέφτεται για τους αριθμούς και προσπαθεί να αποκτήσει αίσθηση αυτών, ενώ παράλληλα υποστηρίζουν ότι η αίσθηση του αριθμού είναι απαραίτητη από όλους τους ενήλικες ανεξαρτήτως επαγγέλματος.

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι αποτέλεσμα ενός συνόλου μαθηματικών δραστηριοτήτων και σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να διδάσκεται αποσπασματικά σε ειδικά σχεδιασμένες ενότητες (Δεσλή και Μυρόβαλη, 2014).

Πολλοί ερευνητές κάνουν σαφές ότι η αίσθηση του αριθμού είναι μια ευρεία έννοια η οποία περιέχει τις έννοιες των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων και ότι οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις εξαρτώνται άμεσα από την αίσθηση του αριθμού, η οποία είναι απαραίτητη για τη μαθηματική εκπαίδευση.

9.1 Αίσθηση του αριθμού και νοεροί υπολογισμοί

Οι McIntosh et al. (1992)[9], δηλώνουν ότι η υψηλή ικανότητα στους γραπτούς υπολογισμούς δε συνοδεύεται υποχρεωτικά από την αίσθηση του αριθμού. Μπορεί δηλαδή, ένας μαθητής ή ενήλικας να βρίσκει μηχανικά τη σωστή απάντηση για μια πράξη, χωρίς να καταλαβαίνει τη σημασία των αριθμών ή της πράξης.

Οι νοεροί υπολογισμοί υποστηρίζονται από την αίσθηση του αριθμού και τους βελτιώνει (Carroll,1996), καθώς επηρεάζεται και συσχετίζεται με αρκετές ικανότητες και συστατικά της αίσθησης του αριθμού όπως: την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και των ιδιοτήτων του (Reys, 1985), τη δομή του αριθμού και των ιδιοτήτων του (Reys, 1984), τη χρήση των διάφορων αναπαραστάσεων του αριθμού (Reys & Barger, 1994), τη γνώση των αριθμητικών γεγονότων (Plunkett, 1979· Sowder, 1988· Dowker, 2005) και την ευελιξία (McIntosh et al., 1992· Reys, 1984· Sowder, 1990, 1992· Trafton, 1992)[10].

Η Sowder (1990) αναφέρει ότι πρέπει να δίνεται έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς καθώς βοηθά στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού που χρειάζεται για να κατανοήσουμε την αριθμητική, για να εκτιμήσουμε, για να αντιμετωπίσουμε την τεχνολογία και γενικά για να λειτουργήσουμε καλύτερα όταν αντιμετωπίζουμε αριθμούς στην καθημερινή μας ζωή.

9.2 Αίσθηση του αριθμού και εκτιμήσεις

Η αίσθηση του αριθμού συνδέεται με την ικανότητα εκτίμησης (Dowker, 1992). Η Levine (1982) υποστηρίζει ότι οι μαθητές που είναι αδύναμοι στην εκτίμηση, στην αρχή υπολογίζουν ακριβώς και μετά στρογγυλοποιούν για να βρουν μια εκτίμηση κι ότι τα άτομα που χρησιμοποιούν αυτή τη μέθοδο, δεν έχουν καμία αίσθηση του αριθμού.

Οι Reys et al. (1982) υποστηρίζουν, ότι η γνώση βασικών λειτουργιών των πράξεων και η κατανόηση της θεσιακής αξίας, προσδιορίζοντας ακριβή αποτελέσματα των διαφορετικών πράξεων της αριθμητικής, σχετίζονται με την αίσθηση του αριθμού. Επιπλέον, αναφέρουν ότι αν κάποιος έχει ανεπτυγμένη αίσθηση του αριθμού, μπορεί αν αντιληφθεί κάποιο λάθος, να διορθώσει αμέσως την απάντησή του.

---

[9] Όπως αναφ. στο Λεμονίδης (2013)

[10] Όπως αναφ. στο Λεμονίδης (2013)

Η Threagill – Sowder (1984) διαπίστωσε ότι «*οι μαθητές που έδωσαν αποδεκτές απαντήσεις έδειξαν ότι έχουν ποσοτική διαίσθηση ή αίσθηση του αριθμού, ενώ εκείνοι που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις φάνηκε ότι είχαν μικρή αίσθηση της αντιπροσώπευσης των αριθμών».*

Σύμφωνα με τους Reys et al. (1986) *«κάνοντας εκτιμήσεις είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος για να αποκτήσει κάποιος αίσθηση του αριθμού γιατί είναι ο μόνος τρόπος που είναι άμεσος και ολιστικός».*

Η Sowder (1992) αναφέρει χαρακτηριστικά: «*Τι συμβαίνει με αυτούς που συμπεριφέρονται φτωχά σε καταστάσεις εκτίμησης και νοερού υπολογισμού; Εάν η Resnick έχει δίκαιο, τότε πρέπει να διαμορφώσουμε τη διδασκαλία έτσι ώστε να αποκτήσουν σημασία τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά. Η διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει και να αναπτύξει την ποσοτική διαίσθηση, εάν επιτρέπει και ενθαρρύνει την ανακάλυψη των αλγορίθμων, εάν προωθεί την αμφισβήτηση σχετικά με το πώς οι αριθμοί μπορούν να αποσυνθέτονται και να ανασυνθέτονται και πώς οι έννοιες της θεσιακής αξίας μπορούν να εφαρμόζονται, εάν επιτρέπει τις πολλαπλές απαντήσεις και διαδικασίες και ζητά σκέψη σχετικά με τη λογικότητα. Η εκτίμηση και ο νοερός υπολογισμός δεν είναι μόνο χρήσιμα εργαλεία στην καθημερινή ζωή, αλλά μπορούν επίσης να οδηγήσουν στην καλύτερη αίσθηση του αριθμού*».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Σκοπός, μέθοδος και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθεί μέσα από την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθηματικών στην Ελλάδα το περιεχόμενο και η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων από το 1830 μέχρι και σήμερα.

Η παρούσα εργασία έγκειται στα πλαίσια μιας ποιοτικής ιστορικής έρευνας. Αναζητήθηκαν κατά κύριο λόγο πρωτογενείς πηγές δεδομένων, με κύρια εργαλεία της ανάλυσης αυτής να είναι τα σχολικά εγχειρίδια του μαθήματος των μαθηματικών (βιβλία μαθητή και βιβλία δασκάλου) καθώς και τα αντίστοιχα αναλυτικά προγράμματα, ώστε να καταλάβουμε πώς η ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης επηρέασε και διαμόρφωσε τις έννοιες έτσι όπως είναι σήμερα.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα επιδιωχθούν να απαντηθούν είναι τα εξής:

- Ποιοι ήταν οι στόχοι διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και των εκτιμήσεων;
- Χρησιμοποιούνταν οι στρατηγικές των νοερών υπολογισμών και των εκτιμήσεων σε όλες τις περιόδους;
- Πώς διδάσκονταν οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις; (μέθοδοι διδασκαλίας, μεταγνωστική ικανότητα)
- Πώς διαρθρώνονταν διδακτικά οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις; (σε ποιες τάξεις διδάσκονταν, σε ποιους αριθμούς, με ποια σειρά σε σχέση με τους γραπτούς)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Ιστορική αναδρομή

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την εμφάνιση των νοερών υπολογισμών και των εκτιμήσεων στην ελληνική εκπαίδευση μέσα από τα Αναλυτικά Προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια, ακολουθώντας την ιστορική εξέλιξη. Αρχικά θα αναφέρουμε τα κυριότερα στοιχεία των παραδοσιακών και μοντέρνων μαθηματικών. Στη συνέχεια θα αναλυθούν οι διάφορες μέθοδοι διδασκαλίας που εφαρμόστηκαν ανά τα χρόνια. Στο τέλος θα εξετάσουμε το περιεχόμενο και τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων μέσα από τρεις περιόδους. Η πρώτη περίοδος των παραδοσιακών Μαθηματικών, αρχίζει από το τέλος του 19^{ου} αιώνα και φτάνει μέχρι το 1912. Η δεύτερη περίοδος, όπου τα παραδοσιακά μαθηματικά παραχωρούν τη θέση τους στα Μοντέρνα μαθηματικά, κυμαίνεται από το 1913 μέχρι το 1981. Η ανάλυση ολοκληρώνεται με τα σύγχρονα μαθηματικά, με χρονολογικό εύρος 1982/83 μέχρι 1985, καθώς επίσης και τα σημερινά δεδομένα με το ΔΕΠΠΣ του 2003 και τα σχολικά βιβλία του 2006.

3.1 Παραδοσιακά μαθηματικά

Παραδοσιακά Μαθηματικά είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται τόσο από την ελληνική, όσο και από τη διεθνή βιβλιογραφία και χαρακτηρίζει την κατάσταση στην εκπαίδευση των μαθηματικών κατά την περίοδο του πρώτου μισού του 20^{ου} αιώνα (Βαϊνάς, 1997).

Στην Ελλάδα, η περίοδος των παραδοσιακών μαθηματικών αρχίζει λίγα χρόνια μετά την απελευθέρωση του ελληνικού κράτους από την τουρκική κυριαρχία (τότε αρχίζουν οι πρώτες προσπάθειες σύστασης και οργάνωσης του ελληνικού κράτους). Όσον αφορά το τέλος της περιόδου των παραδοσιακών Μαθηματικών στην Ελλάδα υπάρχει μια φυσιολογική καθυστέρηση· οφείλεται στο γεγονός ότι η μεταρρύθμιση των «νέων» ή «μοντέρνων» Μαθηματικών, προϊόν των χωρών του δυτικού πολιτισμού, χρειάστηκε κάποιο διάστημα ώσπου να περάσει και στην Ελλάδα (Βαϊνάς, 1997).

Η περίοδος των ελληνικών παραδοσιακών Μαθηματικών τελειώνει με την πρώτη προσπάθεια εισαγωγής στην Ελλάδα των Μοντέρνων Μαθηματικών (1963-64), που όμως στην πρώτη φάση της ανακόπηκε. Στην ουσία η περίοδος των παραδοσιακών μαθηματικών φτάνει μέχρι τη δεκαετία του 1980, όταν για πρώτη φορά παρουσιάζονται επίσημα σχολικά βιβλία στα μαθηματικά.

Οι περισσότεροι/ες ενήλικες θα παραδεχτούν ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα σημαντικό μάθημα, όμως λίγοι/ες κατανοούν ποιο είναι πραγματικά το νόημά τους. Για πολλούς/ες, τα μαθηματικά αποτελούν ένα σύνολο από κανόνες που πρέπει να μάθει κανείς τέλεια, από αριθμητικούς υπολογισμούς, από μυστήριες αλγεβρικές ισότητες και από γεωμετρικές αποδείξεις. Αυτή η αντίληψη για τα μαθηματικά έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την άλλη όψη των μαθηματικών που συνεπάγεται κατανόηση μαθηματικών αντικειμένων όπως τα δεδομένα, οι τύποι, η αλλαγή ή τα σχήματα.

Η παραδοσιακή διδασκαλία ξεκινά τυπικά με την εξήγηση οποιασδήποτε ιδέας βρίσκεται στην κάθε σελίδα του σχολικού εγχειριδίου και συνεχίζει υποδεικνύοντας στα παιδιά πώς να κάνουν τις ασκήσεις. Ακόμη και με μια δραστηριότητα που απαιτεί πρακτικούς χειρισμούς, ο/η παραδοσιακός εκπαιδευτικός που καθοδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες, λέει ακριβώς πώς να χρησιμοποιήσουν το υλικό με έναν προδιαγεγραμμένο τρόπο. Η έμφαση στο μάθημα δίνεται κυρίως στην εύρεση απαντήσεων. Οι μαθητές και οι μαθήτριες στηρίζονται στο δάσκαλό τους για να δουν αν οι απαντήσεις τους είναι σωστές. Τα παιδιά βγαίνουν τελικά από αυτές τις εμπειρίες έχοντας σχηματίσει την εντύπωση ότι τα μαθηματικά είναι μια σειρά αυθαίρετων κανόνων, που ελέγχονται από τον/την εκπαιδευτικό που με τη σειρά του τούς απέκτησε από κάποια πολύ έξυπνη πηγή. Χρησιμοποιείται ευρέως η αισθητοποίηση των αριθμών μέσω διαφόρων υλικών αντικειμένων (Van de Walle, 2007).

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο, και κυρίως βεβαίως στο Δημοτικό Σχολείο, χαρακτηρίζεται κυρίως από τις πολλές και διάφορες απομνημονευτικές ασκήσεις αριθμών, πράξεων, διαδικασιών και μηχανισμών. Σύμφωνα με την φιλοσοφία αυτή η μέθοδος διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο στηρίζεται κυρίως στις διαρκείς επαναλήψεις, επιδιώκει με τη μηχανική επανάληψη την εξάσκηση και όχι την κατανόηση. Στα πλαίσια της παραδοσιακής διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο ζητείται από τους μαθητές να μιμηθούν αυτό που λέει το βιβλίο και ο δάσκαλος. Οι μαθητές καλούνται συνήθως να εφαρμόζουν μια διαδικασία και όχι να κατανοούν και λιγότερο βεβαίως να καταλήγουν σε αυτήν την κατανόηση (Καψάλης, 1999).

Αυτή η αντίληψη για τα μαθηματικά σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά βασίζονται στην εφαρμογή κανόνων, στην εκτέλεση υπολογισμών και στην αναζήτηση σωστών απαντήσεων, αποτελεί μια κατάφορη διαστρέβλωση της πραγματικής φύσης των μαθηματικών. Δεν μπορούν δηλαδή να είναι συναρπαστικά. Λίγα παιδιά είναι καλά στη μάθηση κανόνων και τα καταφέρνουν να παίρνουν καλούς βαθμούς. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι διαθέτουν και τον πιο σωστό τρόπο σκέψης. Το παραδοσιακό σύστημα ανταμείβει τη μάθηση των κανόνων, αλλά προσφέρει ελάχιστες δυνατότητες για να ασχοληθεί κανείς ουσιαστικά με τα μαθηματικά (Van de Walle, 2007).

3.2 Μοντέρνα Μαθηματικά

Μετά το 1950 πλήθος μεταρρυθμίσεων και αλλαγών συντελούνται στη μαθηματική εκπαίδευση, γνωστή στη διεθνή και ελληνική βιβλιογραφία με το όνομα «Νέα Μαθηματικά» ή «Μοντέρνα Μαθηματικά». Στις ΗΠΑ εμφανίζονται αρχικά κάποιες προσπάθειες που αποβλέπουν αρχικά σε μια αναβάθμιση και αναπροσαρμογή της ύλης των σχολικών Μαθηματικών σύμφωνα με τις σύγχρονες εξελίξεις της μαθηματικής επιστήμης.

Από πολύ παλιά είναι γνωστό ότι το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής επιστήμης στηρίζεται λογικά και οικοδομείται νοητικά πάνω σε ένα μικρό σχετικά αριθμό αλλά προσεκτικά επιλεγμένων αξιωμάτων. Τα αξιώματα αυτά συνδυάζονται μεταξύ τους και με ορισμούς. Με τη βοήθεια της λογικής προκύπτουν νέες αληθείς προτάσεις, από αυτές νέες και ούτω καθεξής και έτσι δημιουργείται η μαθηματική επιστήμη. Όταν, λοιπόν, είναι δοσμένες οι βάσεις της θεωρίας με μορφή αξιωμάτων, τότε είναι δυνατόν να αναπτυχθεί ολόκληρη η θεωρία με λογικό τρόπο. Αυτός ο χαρακτηριστικός τρόπος σύνδεσης των μαθηματικών δομικών στοιχείων για τη δημιουργία μιας ολότητας εκφράζει την έννοια της μαθηματικής δομής, που αποτέλεσε βασική έννοια των μοντέρνων μαθηματικών.

Διδάσκοντας με βάση τις δομές των μαθηματικών εννοιών, χάνεται η φυσικότητα της μάθησης, δηλαδή η απόδοση της σημασίας στις έννοιες δε γίνεται με βάση το επίπεδο του παιδιού και το φυσικό τρόπο κατανόησης, αλλά με έναν τεχνητό τρόπο. Αυτή ήταν μία από τις βασικές αιτίες που απέτυχε το κίνημα των Μοντέρνων Μαθηματικών και αποσύρθηκε από τη διδασκαλία η λογική αυτή (Λεμονίδης, 2013).

Η διδασκαλία της περιόδου αυτής βασίζεται στις θεωρίες του Ελβετού ψυχολόγου Jean Piaget (1941) και γενικά της Σχολής της Γενεύης, που αφορούν την κατανόηση της έννοιας του αριθμού και των αριθμητικών πράξεων από το παιδί. Σύμφωνα με τον Piaget, η ανάπτυξη των αριθμητικών ικανοτήτων του παιδιού συνδέεται με την ανάπτυξη των λογικών του ικανοτήτων. Το παιδί αρκετά αργά, σε ηλικία 6-8 χρονών, μπορεί να πετυχαίνει λειτουργικά, δηλαδή με λογικό τρόπο, ταυτόχρονα στα πειράματα της διατήρησης του αριθμού, της σειροθέτησης και του εγκλεισμού των κλάσεων (προαριθμητικές λογικές ικανότητες). Οι λογικές αυτές λειτουργίες του παιδιού θεωρούνται από τον Piaget προαπαιτούμενες και απαραίτητες για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού (Λεμονίδης, 2003).

Η διδασκαλία θα πρέπει να οργανώνεται σε δυο διαδοχικές φάσεις. Σε μία πρώτη φάση προτείνονται στα παιδιά δραστηριότητες που έχουν στόχο την ανάπτυξη των προαριθμητικών εννοιών. Στη δεύτερη φάση προτείνονται οι καθαρά αριθμητικές δραστηριότητες, δηλαδή αυτές στα πλαίσια των οποίων τα παιδιά μετρούν και υπολογίζουν αριθμούς (Λεμονίδης, 2003).

Εισάγεται στη διδασκαλία μια νέα αντίληψη του αριθμού. Στην επιστημονική μαθηματική κοινότητα η θεμελίωση των φυσικών αριθμών και των αριθμητικών πράξεων με βάση τη θεωρία των συνόλων έγινε στα τέλη του 19ου αιώνα (1870-1880) από το μαθηματικό George Cantor.

Η έννοια του αριθμού και των πράξεων θεμελιώνεται με βάση τα σύνολα. Έτσι, πριν από τη διδασκαλία του αριθμού, εισάγεται με απλό τρόπο η έννοια του συνόλου και των στοιχείων του, καθώς και η σύγκριση των πληθαρίθμων των συνόλων με αντιστοίχηση ένα προς ένα (σύνολα με περισσότερα ή λιγότερα στοιχεία, ισοδύναμα σύνολα). Στη συνέχεια, και σύμφωνα με το μαθηματικό ορισμό, αριθμός είναι ο κοινός πληθάριθμος διαφόρων συνόλων αντικειμένων τα οποία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Αυτή η ισοδυναμία του πλήθους των στοιχείων ελέγχεται με την αντιστοίχηση ένα προς ένα. Όσον αφορά τις αριθμητικές πράξεις, πρόσθεση θεωρείται η ένωση δυο ξένων συνόλων, αφαίρεση η αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης ή το συμπλήρωμα ενός συνόλου ως προς ένα άλλο, πολλαπλασιασμός η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, δηλαδή η ένωση ίσων συνόλων ξένων μεταξύ τους, και διαίρεση η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.

Στη Γαλλία ιδρύθηκε το 1930 η περίφημη ομάδα «Nikolas Bourbaki» από μαθηματικούς όπως οι C. Chevalley, J. Dieudonne, A. Weil, J. Delsarte κ.ά. που είχαν στενές σχέσεις με το “College de France”, η οποία δημοσίευσε βιβλία με τις σπουδαιότερες ιδέες των Μοντέρνων Μαθηματικών. Το κύριο έργο της σχολής των Bourbaki συνίσταται στο ότι καθόρισαν με ακρίβεια μαθηματικές ιδέες λίγο ή πολύ γνωστές, τις συνέδεσαν, τις γενίκευσαν και τις δόμησαν με μοναδικό κριτήριο τη λογική συνέπεια. Οι εκπρόσωποί της υποστήριζαν ότι τα μαθηματικά είναι ενιαία και επομένως η διάκρισή τους σε Αριθμητική, Άλγεβρα, Γεωμετρία κτλ είναι ξεπερασμένη. Για το λόγο αυτό υποστήριζαν ότι έπρεπε να αλλάξει η οργάνωση και η διάταξη της μαθηματικής ύλης.

Υποστηρίχθηκε η παραγωγική μέθοδος διδασκαλίας έναντι της επαγωγικής μεθόδου.

Η εφαρμογή των Μοντέρνων Μαθηματικών στη χώρα μας συνδέθηκε με μεγάλες κοινωνικές και πολιτικές εξελίξεις, που έμμεσα ή άμεσα έφεραν μεταβολές ή και αναστολές στη μεταρρύθμιση. Συνεπώς, η υλοποίηση των νέων Μαθηματικών στην Ελλάδα μπορεί να διακριθεί σε τρεις φάσεις:

Α' φάση (1963-64 έως 1969-70): «Η μεταρρύθμιση που δεν έγινε» (σύμφωνα με το ομώνυμο τίτλο του γνωστού βιβλίου του Α. Δημαρά) αφού η φάση της μεταρρύθμισης που σχεδιάστηκε δε πραγματοποιήθηκε λόγω της δικτατορίας του 1967, η οποία γύρισε το μάθημα των Μαθηματικών σε προηγούμενες μορφές.

Β' φάση (1969-70 έως 1976): Η «αυστηρή» εφαρμογή των Μοντέρνων Μαθηματικών με προσανατολισμό σε μαθηματικά επιστημονικά καλούπια και προσήλωση στις αρχές των Μοντέρνων Μαθηματικών. Γράφτηκαν νέα Αναλυτικά Προγράμματα (του 1969) τα οποία ενσωμάτωναν αρκετά στοιχεία των νέων Μαθηματικών. Για πρώτη φορά στα Αναλυτικά Προγράμματα του Δημοτικού εμφανίζεται η διδασκαλία των συνόλων. Η Αριθμητική και η Γεωμετρία δεν οργανώνονται ως ανεξάρτητοι κλάδοι, αλλά η Γεωμετρία αποτελεί μέρος του μαθήματος «Αριθμητική-Γεωμετρία».

Μετά τη σύντομη περιγραφή (10 γραμμές) των γενικών σκοπών του μαθήματος συναντά κανείς τη διδακτική σημείωση που συνιστά τη χρήση της επαγωγικής μεθόδου για τις μικρότερες τάξεις του Δημοτικού και για τις μεγαλύτερες τη χρήση της παραγωγικής μεθόδου.

Η γενική μορφή των Αναλυτικών Προγραμμάτων μοιάζει με ένα θεματολόγιο ή ένα ευρετήριο της διδακτέας μαθηματικής ύλης, που παραμένει αναλλοίωτη στο μεγαλύτερο μέρος της σε σχέση με την αντίστοιχη ύλη των παραδοσιακών μαθηματικών.

Όσον αφορά τη μεθοδολογία των νέων Μαθηματικών, δε σημειώνονται ουσιαστικές αλλαγές. Η τριμερής πορεία που κυριαρχούσε προς το τέλος των παραδοσιακών μαθηματικών, παραμένει και τώρα η συνηθέστερη μορφή διδασκαλίας.

Τα γενικά χαρακτηριστικά της φάσης αυτής είναι: Προσήλωση στην επιστήμη των Μαθηματικών και ο αυστηρός τρόπος παρουσίασής της στο μάθημα των Μαθηματικών · έμφαση στην αξιωματική θεμελίωση και υπερβολική χρήση της παραγωγικής μεθόδου · τονισμός της δομής στη συγκέντρωση και οργάνωση της μαθηματικής ύλης, και ιδιαίτερη προσοχή στην ακρίβεια των εκφράσεων και το φορμαλισμό του περιεχομένου.

Γ' φάση (1976 έως 1981): Η «μετριασμένη» εφαρμογή των νέων Μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία χωρίς τη βοήθεια της Παιδαγωγικής και της Ψυχολογίας τα Μαθηματικά δε γίνονται κατανοητά στον ευρύτερο μαθηματικό πληθυσμό.

Μετά το μεταρρυθμιστικό εκπαιδευτικό νόμο 309 (επίσημη γλώσσα η δημοτική, υποχρεωτική εκπαίδευση από 6 σε 9 έτη, κατάργηση εισαγωγικών εξετάσεων από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, συνδιδασκαλία αρρένων και θηλέων κ.ά.), γράφηκαν νέα αναλυτικά προγράμματα. Οι σκοποί του μαθήματος «Αριθμητική – Γεωμετρία» περιγράφονται διεξοδικά και με περισσότερη σαφήνεια από τα προηγούμενα αναλυτικά προγράμματα · διαχωρίζονται μάλιστα σε γενικούς και ειδικούς σκοπούς του μαθήματος. Στα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού υπερισχύουν οι πρακτικοί σκοποί, που καλλιεργούν δεξιότητες και ικανότητες χρήσιμες στην καθημερινή ζωή. Εμφανής είναι η προσπάθεια σύνδεσης Αριθμητικής και Γεωμετρίας και η παρουσίασή τους ως ένα μάθημα, πράγμα που δε συνέβαινε στα προηγούμενα αναλυτικά προγράμματα · απουσιάζει όμως και πάλι η οργανική σύνδεση των δυο αυτών κλάδων, καθώς και η εννοιολογική αρμονική συνέχεια μεταξύ τους. Για πρώτη φορά αναγνωρίζεται, οι μαθητές αμέσως πριν την ενασχόλησή τους με την αφηρημένη έννοια του αριθμού και της ποσότητας, να ασχοληθούν με τις λεγόμενες προμαθηματικές έννοιες. Η διδασκαλία των συνόλων αρχίζει από την Α' Δημοτικού και, σύμφωνα με το σπειροειδές αξίωμα, επαναλαμβάνεται και διευρύνεται στις επόμενες μέχρι την Στ' τάξη.

Στα Αναλυτικά προγράμματα δίνονται χρήσιμες για τον εκπαιδευτικό διδακτικές οδηγίες. Τονίζεται η αυτενέργεια των μαθητών στη μάθηση, η σημασία της καλλιέργειας της συνεργατικότητας των μαθητών, η προσπάθεια να προσανατολιστεί το μάθημα σε μέσα αυτοελέγχου (έτσι ώστε, όταν ο μαθητής τελειώνοντας την εργασία του, να είναι σε θέση μόνος του να ελέγξει αν εργάστηκε σωστά ή όχι), και η αναγκαιότητα της σύνδεσης της ύλης με την καθημερινή πραγματικότητα. Γίνονται συστάσεις για τη χρήση κατάλληλων εποπτικών μέσων διδασκαλίας με στόχο την ομαλή μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Τονίζεται η σημασία του υπολογισμού από μνήμης. Δίνονται οδηγίες για τη χρήση της εξατομικευμένης διδασκαλίας στο μάθημα των Μαθηματικών, όταν βέβαια ο διδάσκων το θεωρεί σκόπιμο.

Συγχρόνως, η «τριμερής πορεία» χάνει την παντοδυναμία της και κρίνεται αρνητικά από την ελληνική σχετική βιβλιογραφία. Η χρήση διαφοροποιητικών μέσων στη διδασκαλία, δηλαδή διδακτικών δυνατοτήτων που διαφοροποιούν το περιεχόμενο της διδασκαλίας σύμφωνα με τις ψυχοπνευματικές ιδιαιτερότητες του κάθε μαθητή, κρίνεται θετικά και συνιστάται έντονα.

Ειδικότερα σε αυτή τη φάση κυκλοφόρησαν πολλά βιβλία με ενδεικτικές διδακτικές δραστηριότητες (Βαϊνάς, 1997).

3.3 Μέθοδοι διδασκαλίας / Παιδαγωγικά συστήματα

3.3.1 Αλληλοδιδακτική μέθοδος

Στο νεοσύστατο ελληνικό κράτος, μετά την Επανάσταση του 1821 και μέχρι το 1880, η μέθοδος που κυριαρχούσε στο τετρατάξιο Δημοτικό Σχολείο ήταν η «αλληλοδιδακτική» ή Λαγκαστριανή μέθοδος διδασκαλίας, ή μέθοδος «Bell-Langaster», από το όνομα του Σκώτου Bell Andrew (1753-1832) και του Άγγλου Langaster Joseph (1778-1838), που την εισήγαγαν και την εφάρμοσαν με διαδοχικές βελτιώσεις.

Εξυπηρετούσε την ανάγκη που ήταν τότε επιτακτική, ένας εκπαιδευτικός να μπορεί να εκπαιδεύει ταυτόχρονα μεγάλο αριθμό παιδιών.

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, ο δάσκαλος χώριζε τους μαθητές σε 8 κλάσεις (τάξεις) και επέλεγε τους ικανότερους ή τους ευφυέστερους μαθητές να τον βοηθήσουν στο έργο του. Οι μαθητές αυτοί ονομάζονταν Πρωτόσχολοι και έπαιζαν ηγετικό ρόλο στο Σχολείο. Αφού έπαιρναν σχετικές οδηγίες και υποδείξεις από το δάσκαλο, στη συνέχεια αναλάμβαναν να «διδάξουν» τους συμμαθητές τους που ήταν λιγότερο ικανοί ή τους βοηθούσαν στη μελέτη τους ή τους επέβλεπαν κατά την εργασία τους, χωρίς να παρευρίσκεται ταυτόχρονα και ο δάσκαλος στην αίθουσα διδασκαλίας. Έτσι, ένας δάσκαλος μπορούσε να διδάξει ή καλύτερα να επιβλέψει την εργασία πολλών συγχρόνως μαθητών. Απώτερος στόχος της μεθόδου ήταν η παροχή στοιχειωδών γνώσεων ανάγνωσης, γραφής, αριθμητικής και θρησκευτικών στον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό μαθητών, στον ελάχιστο χρόνο και με το ελάχιστο κόστος.

Η μέθοδος αυτή πέρα από τα πολύ σημαντικά οικονομικά της πλεονεκτήματα, είχε, την εποχή εκείνη, θεωρηθεί σημαντικό όπλο για την καταπολέμηση κάθε μορφής τυραννίας, και για τη διάδοση των φιλελεύθερων αρχών (Δημαράς, 1983).

Από την Αγγλία εισήχθηκε η αλληλοδιδακτική μέθοδος στη Γαλλία (1815) και στη συνέχεια στην Ελλάδα (1819) από το Γ. Κλεόβουλο, τον Α. Πολίτη, το Χορτάκη, το Συνέσιο κ.ά. Πάντως ο κύριος εκπρόσωπος της αλληλοδιδακτικής μεθόδου στην Ελλάδα θεωρείται ο Ι. Κοκκώνης, που έγραψε το «*Εγχειρίδιον ή Οδηγός της αλληλοδιδακτικής μεθόδου*», μεταφράζοντας το αντίστοιχο εγχειρίδιο του Sarasin από τα γαλλικά. Στον «Οδηγό» περιγράφονται όλες οι λεπτομέρειες της υλοποίησης της διδασκαλίας, ακόμη και οι προβλεπόμενες αντιδράσεις των μαθητών. Περισσότερο αναλύεται ο ρόλος των «βοηθών - μαθητών». Είναι προφανές ότι η αλληλοδιδακτική μέθοδος, που στην πραγματικότητα δεν ήταν μέθοδος διδασκαλίας με τη σημερινή έννοια του όρου αλλά τρόπος οργάνωσης της σχολικής εργασίας, έλυνε, βέβαια, το οξύτατο πρόβλημα της έλλειψης δασκάλων. Όμως ειδικότερα για το μάθημα των Μαθηματικών οι μαθητές έμεναν σε μεγάλο βαθμό αβοήθητοι στην κατανόηση της ύλης. Χρόνος για επεξηγήσεις από την πλευρά του δασκάλου δεν υπήρχε. Επιπλέον, παρά τις οδηγίες που είχαν διανεμηθεί στους δασκάλους, οι περισσότεροι εφάρμοζαν τη μέθοδο σύμφωνα με τις προσωπικές τους απόψεις (Βαϊνάς, 1997).

Ωστόσο η αλληλοδιδακτική μέθοδος, κατάλληλη για τις πρώτες, βασικές γνώσεις, δεν αρκούσε για την ευρύτερη διάδοση της εκπαίδευσης στην καινούρια κοινωνία που θα διαμορφωνόταν στο ελεύθερο κράτος. Έτσι στα 1824, ένα από τα πιο σκληρά χρόνια του Αγώνα, η Βουλή του αγωνιζόμενου Έθνους προχωρεί στη διατύπωση των ευχών της για το γενικότερο εκπαιδευτικό σχήμα, όπου υπάρχει πρόβλεψη και για τις τρεις βαθμίδες (κατώτερη, μέση, ανώτερη) (Δημαράς, 1983). Αργότερα, ασκήθηκε αρνητική κριτική καθώς θεωρήθηκε πως δεν ήταν μια διδακτική μέθοδος, αλλά απλά ένας τρόπος οργάνωσης του σχολείου (Βαϊνάς, 1997).

3.3.2 Ερβαρτιανή ή συνδιδακτική μέθοδος

Ανάμεσα στις μεθόδους που επηρέασαν τη διδασκαλία ως τις πρώτες δεκαετίες του αιώνα μας, ιδιαίτερα σημαντική είναι η γνωστή ως **Ερβαρτιανή μέθοδος**, από το όνομα του Γερμανού παιδαγωγού J. F. Herbart (1776-1841). Σύμφωνα με αυτόν, το πρωταρχικό δεδομένο του ψυχικού βίου είναι οι παραστάσεις · από την αλληλεπίδραση των αναπαραστάσεων προκύπτουν τα συναισθήματα και οι βουλήσεις. Καθοριστικό στοιχείο του ψυχικού βίου αναγνωρίζεται η διανόηση. Γι’ αυτό και η ερβαρτιανή διδακτική απορρίπτει το διδακτικό ειδολογισμό και τάσσεται ανεπιφύλακτα υπέρ του διδακτικού υλισμού.

Για να εμπλουτίσει η διδασκαλία τη συνείδηση με τις παραστάσεις που υπηρετούν την ηθική μόρφωση του μαθητή, πρέπει να διέλθει από δύο φάσεις: την εμβάθυνση και τη βαθιά κατανόηση. Η εμβάθυνση διαιρείται στα στάδια της σαφήνειας και της σύνδεσης, η οποία αποβλέπει στο να συνδέσει τις νέες προσφερόμενες παραστάσεις με τις ήδη προϋπάρχουσες στο μαθητή. Η βαθιά κατανόηση έχει ως αποστολή να εξυψώσει τη διδασκαλία από την εποπτική στην εννοιολογική περιοχή και υποδιαιρείται στα στάδια του συστήματος (αποβλέπει στη διατύπωση των εννοιών που προκύπτουν από τις εποπτείες και την κατάλληλη ταξινόμησή τους μέσα στο συστηματικό εννοιολογικό σύνολο) και της μεθόδου (εξασφαλίζεται η σταθεροποίηση της γνώσης που αποκτήθηκε και συμπεριλαμβάνει και την εφαρμογή της σε συγκεκριμένες περιπτώσεις) (Βαϊνάς, 1997).

Σκοπός της διδασκαλίας είναι να διερευνήσει και να ενισχύσει τον κύκλο των παραστάσεων, για να ενισχυθεί τελικά η βούληση και να εξασφαλιστεί η ηθικοποίηση του ατόμου, που αποτελεί την απώτερη επιδίωξη της εκπαίδευσης (Κασσιμάτη, 2008)[11].

Η μέθοδος αυτή, που αναπτύχθηκε κυρίως από τους διαδόχους του Herbart (Ziller, Rein), θεωρεί ότι κάθε μάθημα μπορεί να διδαχθεί με την ίδια μέθοδο, ανεξάρτητα από τα άλλα. Η μέθοδος αυτή είναι μια καλά σχεδιασμένη συστηματική διαδικασία σε πέντε τυπικά βήματα, που κατά το Morrish (1970) δεν χρειάζονται ιδιαίτερη ερμηνεία. Είναι τα ακόλουθα:

1. **Προετοιμασία** των μαθητών, για να δεχθούν τη νέα ενότητα, για παράδειγμα, με ανάκληση σχετικών γνώσεων.
2. **Παρουσίαση** και εξήγηση της νέας ενότητας, είτε πρόκειται για έννοιες, διαδικασίες, στρατηγικές κτλ., είτε πρόκειται για γεγονότα.
3. **Σύνδεση** με τα προηγούμενα, που θα επιτευχθεί με τις κατάλληλες συγκρίσεις και αναπαραστάσεις του νέου με το παλιό, αφού, βέβαια, προηγηθεί πλήρης ανάλυση και κατανόηση του νέου.
4. **Γενίκευση**, που θα γίνει ύστερα από τη συστηματοποίηση και συνόψιση της ύλης και θα οδηγήσει σε τελικά συμπεράσματα.
5. **Εφαρμογή**, όπου η νέα γνώση ή δεξιότητα δοκιμάζεται στην πράξη και εμπερικλείει, προφανώς, την παραδοχή ότι η πραγματική γνώση είναι χρήσιμη σε καταστάσεις καθημερινής ζωής.

Τα πέντε αυτά τυπικά βήματα έχουν ακόμα αξία τόσο στο σχεδιασμό μαθημάτων , όσο και στις γενικές διαδικασίες της εμπειρικής νόησης. Βοηθούν ακόμα τον αυστηρό έλεγχο των ιδεών και των ενεργειών μας. Αλλά η γενική και αυστηρή εφαρμογή τους σε κάθε μάθημα θα οδηγούσε

[11] «Εισαγωγή στη Διδακτική Μεθοδολογία – Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας, Παιδαγωγική Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών του ΟΑΕΔ»

σε τυποποιημένες μηχανικές διδασκαλίες και θα δέσμευε την επινοητικότητα και την πρωτοβουλία δασκάλων και μαθητών. Ο J. Dewey (1859-1952), ένας από τους ισχυρότερους επικριτές της Ερβαρτιανής μεθόδου, θεωρεί ότι είναι δασκαλοκεντρική και προάγει την υποταγή και την εκ των άνω πειθαρχία. Επιπλέον, έδιναν ένα φορμαλιστικό καταπιεστικό χαρακτήρα στη διδασκαλία, η οποία θα έπρεπε βασικά να στηρίζεται στην ελευθερία του πνεύματος. Στην Ελλάδα, ωστόσο, εμφανίστηκε με «βελτιωμένη μορφή» και κυριάρχησε ως τα μέσα του αιώνα μας ως «τριμερής διδασκαλία» (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

Οι πρώτοι εκπρόσωποι της ερβαρτιανής Διδακτικής στην Ελλάδα θεωρούνται οι παιδαγωγοί Χ. Παπαμάρκου, Σ. Μωραΐτης, Π. Οικονόμου και Ι. Δέλλιος, οι οποίοι μετά το 1875 επέστρεψαν στην Ελλάδα, αφού σπούδασαν στη Γερμανία με υποτροφία του «Συλλόγου προς διάδοσιν των Ελληνικών Γραμμάτων» και με απώτερο σκοπό τη βελτίωση της ομολογουμένης δεινής εκπαιδευτικής κατάστασης στην Ελλάδα (Βαϊνάς, 1997). Συγκεκριμένα, οι Οικονόμου και Μωραΐτης, μέλη της επιτροπής που εξέταζε το θέμα της μεθόδου διδασκαλίας, είχαν ως στόχο την αλληλοδιδακτική, που η γερμανική παιδαγωγική δεν την είχε δεχθεί ποτέ με ενθουσιασμό. Άλλωστε και στις χώρες που γνώρισε ιδιαίτερη διάδοση, στη Γαλλία και στην Αγγλία, είχε από χρόνια καταργηθεί. Η πρωτοβουλία του Διδασκαλικού Συλλόγου, καθώς και το γεγονός ότι η νέα μέθοδος, η συνδιδακτική, διδάσκονταν στο νέο διδασκαλείο, συνετέλεσαν, ασφαλώς, στην επίσημη κατάργηση της αλληλοδιδακτικής στα 1880 (Γεωργούλης, 1974 · Δημαράς, 1983).

Μόλις από το 1930 άρχισαν οι Έλληνες παιδαγωγοί να απομακρύνονται από την ερβαρτιανή παιδαγωγική και από τα περίφημα πέντε ειδολογικά στάδια, τα καθορίζοντα την πορεία διδασκαλίας. Προβαίνοντας στην κριτική του Ερβαρτιανού συστήματος παρατηρήθηκε ότι γενικά ήταν άριστο σύστημα μεταδόσεως της ευρεθείσης γνώσης. Δεν ήταν όμως κατάλληλο να μυήσει τους μαθητές στις μεθόδους έρευνας, ούτε προήγαγε τη διάθεση προς αυτενέργεια, διότι ο μαθητής βρισκόταν σε κατάσταση παθητικότητας. Το ερβαρτιανό σύστημα ήταν καθαρώς δασκαλοκεντρικό, ενώ η αρχή της αυτενέργειας επιβάλλει να γίνει παιδοκεντρικό (Γεωργούλης, 1974).

3.3.3 Σχολείο εργασίας

Στις αρχές του 20ού αιώνα, οι παιδαγωγικές αντιλήψεις στην Ευρώπη και στην Αμερική είχαν αρχίσει να επαναπροσδιορίζονται και η ερβαρτιανή παιδαγωγική με την «από καθέδρας διδασκαλία» άρχισε να βάλλεται και να παραχωρεί τη θέση της στα νέα παιδαγωγικά αιτήματα και τις αρχές της Νέας Αγωγής και του Σχολείου Εργασίας, με πρωτεργάτες τον John Dewey στην Αμερική, τον Kerschensteiner στη Γερμανία, τη Montessori στην Ιταλία, που διαμόρφωσαν τις νέες παιδαγωγικές αρχές, που σαν κέντρο έχουν το παιδί και όχι τον δάσκαλο.

Την ίδια περίοδο, Έλληνες παιδαγωγοί ήρθαν σε επαφή με τη γερμανική μεταρρυθμιστική παιδαγωγική κίνηση και τη φιλοσοφία του Σχολείου Εργασίας και αρκετοί από αυτούς άρχισαν να ασκούν κριτική στο ερβαρτιανό σχολείο της λογοκοπίας και της αποστήθισης, το οποίο πλέον άρχισε να θεωρείται και στην Ελλάδα συνώνυμο με το «παλαιό σχολείο». Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν κυρίως ο Α. Δελμούζος, ο Δ. Γληνός, ο Μ. Τριανταφυλλίδης, ο Θ. Κάστανος, ο Μ. Παπαμαύρος και ο Μ. Κουντουράς (Κανδήρου, 2012).

Εκτός από το όνομα «Σχολείο Εργασίας» η προοδευτική αυτή κίνηση συνδέεται με τα ονόματα «Νέο Σχολείο», «Σχολείο αυτονομίας», «Σχολείο ενέργειας», «Σχολείο της θέλησης», «Σχολείο της ζωής». Η εφαρμογή του στην Ελλάδα συνδέθηκε, όπως ήταν φυσικό, και με άλλες προοδευτικές θεωρήσεις και στάσεις, όπως ήταν ο θεσμός της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, η προσπάθεια αποθεωρητικοποίησης της διδακτέας ύλης, η τάση για μια σύγχρονη παιδαγωγική, η μόρφωση της γυναίκας, η προσαρμογή του εκπαιδευτικού συστήματος στις κοινωνικές και οικονομικές ανάγκες της χώρας, η στροφή προς τις θετικές επιστήμες και η δημιουργία επαγγελματικής εκπαίδευσης (Βαϊνάς, 1997).

Το κύριο πρόβλημα που καθόρισε την εκπαιδευτική πορεία του νεοελληνικού κράτους ήταν το γλωσσικό ζήτημα, το οποίο οδήγησε στην κατάργηση της καθαρεύουσας και στην επικράτηση της δημοτικής γλώσσας. Για την άσχημη κατάσταση που επικρατούσε στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα αναφέρει ο Δ. Γληνός: «*Το σχολείο μας εργάζεται διά τον τύπον, διά την λέξιν και όχι διά την ουσίαν. Η λεξιμάθεια κυριαρχεί και παραγκωνίζει την γνώσιν των πραγμάτων και την άσκησιν των παιδικών δεξιοτήτων*»[12].

Οι σπουδαιότεροι σκοποί του Σχολείου Εργασίας κατά τον G.Kerschensteiner είναι η προετοιμασία για το μελλοντικό επάγγελμα, η ηθική στήριξη της επαγγελματικής εκπαίδευσης και η ηθική εξύψωση της κοινωνίας.

[12] Δημ. Γληνού, *Άπαντα*, τόμ. Β', Αθήνα, 1983, σελ. 444

Για την επίτευξη των παραπάνω σκοπών πρέπει να καλλιεργηθούν οι εξής ψυχικές ικανότητες και δεξιότητες: η ισχυροποίηση της θέλησης, η καθαρότητα της κρίσης, η ευαισθησία και η έρευνα.

Ορισμένες από τις αρχές που και σήμερα θεωρούνται αυτονόητες, οφείλουν την καθιέρωσή τους στο Σχολείο Εργασίας. Ανάμεσά τους βασικές είναι οι ακόλουθες: η αρχή της αυτενέργειας, ο ερευνητικός τρόπος μάθησης, η αρχή της συνεργασίας και ο συνδυασμός ατομικών και ομαδικών εργασιών με κοινωνικό περιεχόμενο, η αρχή της Ενιαίας Συγκεντρωτικής Διδασκαλίας, η εξατομίκευση της διδασκαλίας, η αναγνώριση της προσωπικότητας του παιδιού, των ατομικών του δικαιωμάτων και των φυσικών του ικανοτήτων, η παιδοκεντρική διδασκαλία, η πειθαρχημένη ελευθερία κίνησης του μαθητή, η ολόπλευρη (πνευματική, ψυχοσυναισθηματική, σωματική) ανάπτυξη των δυνάμεων των μαθητών (Κανδήρου, 2012).

Το «Νέο Σχολείο» προκρίνει τη βιωματική και ομαδοσυνεργατική μάθηση, ασκεί κριτική στις πειθαρχικές μεθόδους του παραδοσιακού σχολείου και πραγματώνει την ισότητα των φύλων. Επιπλέον επιδιώκει τη σύνδεση του σχολείου με την κοινότητα, καταξιώνει τη χειρωνακτική εργασία σε αντιδιαστολή με τον ακαδημαϊσμό, με δυο λόγια, θεωρεί πρωταρχική προϋπόθεση για τη λειτουργία του σχολείου την εμπλοκή και το ενδιαφέρον των παιδιών για ό,τι συμβαίνει εκεί. Στο πλαίσιο των «σχολείων εργασίας» του Dewey τα παιδιά, μεταξύ άλλων, ανέλαβαν την έκδοση τοπικών εφημερίδων, λειτουργούσαν τυπογραφεία, καλλιεργούσαν χωράφια, μαγείρευαν και έραβαν. Κύρια μεθοδολογική αρχή του «σχολείου εργασίας» ήταν ότι οι μαθητές μαθαίνουν στην προσπάθειά τους να λύσουν πραγματικά προβλήματα.

Παρακάτω παρατίθενται οι σημαντικότερες θέσεις του Σχολείου Εργασίας:

1. Το Σχολείο Εργασίας δεν κάνει διάκριση ανάμεσα στη χειρονακτική εργασία και στην πνευματική. Θεωρεί εξίσου σημαντικές και τις δύο μορφές εργασίας.
2. Η εργασία πρέπει να είναι ελεύθερη και πραγματικά αυτόνομη.
3. Η αρχή της εργασίας ενώνει τους μαθητές σε μία ομάδα κατά τη διάρκεια της εργασίας τους και καλλιεργεί το κοινό πνεύμα. Η προσπάθεια για καλλιέργεια της ικανότητας για συνεργασία, οδήγησε στο να αναπτυχθούν διάφορες κοινωνικές μορφές σχολικής εργασίας (εταιρική εργασία, ομαδοποιημένη εργασία κτλ). Ιδιαίτερα η σχολική εργασία σε ομάδες θεωρήθηκε χαρακτηριστικό στοιχείο του Σχολείου Εργασίας.

4. Το Σχολείο Εργασίας έδωσε ιδιαίτερη σημασία αφ’ ενός μεν στην έμφυτη τάση του παιδιού για κίνηση και δημιουργία, αφ’ ετέρου δε στη σύνδεση του σχολείου με τη ζωή.
5. Το Σχολείο Εργασίας τόνισε τη σημασία των κινήτρων μάθησης. Η διέγερση της περιέργειας με μέσα ανάλογα με την ηλικία του παιδιού έτσι, ώστε ο μαθητής να φτάσει στη λεγόμενη «γόνιμη στιγμή», αποτελούσε σταθερό ζητούμενο. Στην κατάσταση αυτή ο μαθητής όχι μόνο αφομοιώνει με τον καλύτερο τρόπο τη νέα ύλη, αλλά και το σπουδαιότερο: το πετυχαίνει με δική του αυτενέργεια.
6. Το Σχολείο Εργασίας ελάχιστη σημασία δίνει στην ποσότητα των γνώσεων που θα αποκτήσει ο μαθητής. Αυτό που το ενδιαφέρει κυρίως είναι η προσπάθεια και η δραστηριοποίηση του μαθητή, για να αποκτήσει τη γνώση.
7. Το Σχολείο Εργασίας τονίζει τη μοναδικότητα και την ιδιαιτερότητα κάθε μαθήματος (δεν υπάρχουν στάδια διδασκαλίας).
8. Το σχολικό μάθημα δεν περιορίζεται πλέον χωρικά στην αίθουσα διδασκαλίας. Πρέπει να περιλαμβάνει ολόκληρο το κοινωνικό και φυσικό περιβάλλον, που σ’ αυτό κινείται το παιδί. Οι διδακτικές εκδρομές, επισκέψεις σε εργοστάσια, εργαστήρια, μουσεία κτλ. δίνουν σπουδαιότατα ερεθίσματα και αποτελούν σημαντικές αφορμές για τη σχολική εργασία. Η φύση είναι το μεγάλο εργαστήριο για τους μαθητές. Τονίζεται η λειτουργία του σχολικού κήπου και η ενασχόληση του παιδιού με τα φυτά και τα ζώα.
9. Ο δάσκαλος δεν πρέπει να καταπιέζει τα παιδιά με το βάρος της προσωπικότητάς του. Ο δάσκαλος είναι αφ’ ενός μεν οδηγός, εφ’ ετέρου δε συνεργάτης και φίλος με το μαθητή.
10. Δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στο συναίσθημα των μαθητών.
11. Παραμερίζεται η τιμωρία και ο έπαινος ως μέσα δημιουργίας κινήτρων μάθησης για τους μαθητές.
12. Καταβάλλεται προσπάθεια καλλιέργειας της παρατηρητικότητας, η οποία παρέχει ερεθίσματα για εξέταση και συνηγορεί στην αυτόνομη εργασία.
13. Η σχολική βιβλιοθήκη είναι απαραίτητη για κάθε τάξη (Βαϊνάς, 1997).

Ο Μ. Παπαμαύρος[13] προτείνει τρεις φάσεις κατά την υλοποίηση της διδασκαλίας: α) τη φάση της παθητικής παρατήρησης, κατά την οποία το παιδί συγκεντρώνει πληροφορίες, β) τη φάση της επεξήγησης ή της ενεργητικής επέμβασης ή της επεξεργασίας, κατά την οποία ο μαθητής αναζητά

[13] Όπως αναφ. ο Βαϊνάς (1997).

την αιτία. Ερευνά, συγκρίνει, υπολογίζει, υποστηρίζει, γ) τη φάση της διατύπωσης ή του ορισμού της έννοιας του πράγματος.

Κατά τον O. Scheibner [14], τα στάδια της σχολικής εργασίας πρέπει να είναι: α) ο καθορισμός του σκοπού, β) η κατάστρωση ενός σχεδίου εργασίας και η προετοιμασία και συγκέντρωση των απαραίτητων μέσων για την εκτέλεση της εργασίας, γ) η σύνδεση των επιμέρους και η εκτέλεση της εργασίας, δ) η εξέταση (ή δοκιμή), η τακτοποίηση και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Τόσο οι φάσεις όσο και τα στάδια ήταν εντελώς ενδεικτικά. Αποτελούσαν ένα πιθανό σχέδιο διδασκαλίας του εκπαιδευτικού. Η πορεία διδασκαλίας έπρεπε να είναι σε μεγάλο βαθμό ευέλικτη.

Την περίοδο αυτή το Σχολείο Εργασίας διατήρησε τη διάκριση της διδασκαλίας της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας. Τόσο για το μάθημα της Αριθμητικής, όσο και της Γεωμετρίας προτείνεται η χρήση της Ενιαίας Συγκεντρωτικής Διδασκαλίας (μεθοδολογικός τρόπος διδασκαλίας). Η καλλιέργεια των μαθηματικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων, καθώς και η άσκηση στον υπολογισμό και στην εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων συνιστώνται σε κάθε ευκαιρία.

Μόνο από τη Δ’ τάξη οφείλει το μάθημα των Μαθηματικών να γίνεται συστηματικά και σε καθορισμένες ώρες στο εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα. Για τις τρεις πρώτες τάξεις δε χρησιμοποιούνταν σχολικά βιβλία καθώς θεωρούνταν ότι η Ενιαία Συγκεντρωτική Διδασκαλία ήταν ο καλύτερος μεθοδολογικός τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Για τις τρεις μεγαλύτερες τάξεις θεωρήθηκε επιβεβλημένη η συγγραφή μαθηματικών βιβλίων με την προϋπόθεση ότι αυτά υποκινούν τη δημιουργικότητα, την αυτονομία και την ελευθερία μαθητών και δασκάλων.

Η αξιολόγηση της διδασκαλίας των Μαθηματικών δε θα γίνονταν με βάση τα αποτελέσματα των προβλημάτων και των ασκήσεων, αλλά κυρίως εκτιμώντας την αυτενέργεια που κατέβαλαν τα παιδιά για τη λύση του προβλήματος, άσχετα αν δεν κατάφερναν να φτάσουν μέχρι το τέλος της άσκησης.

---

[14] Όπως αναφ. ο Βαϊνάς (1997).

Οι ερωτήσεις το δασκάλου έπρεπε να είναι ανοιχτές, να δίνουν τη δυνατότητα πολλών απαντήσεων και να παρέχουν τη μεγαλύτερη δυνατή ελευθερία σκέψης στο μαθητή, παρά το γεγονός ότι τα μαθηματικά από τη φύση τους απαιτούν κάποια πειθαρχία στη σκέψη.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι αρκετά εύκολο να αντιληφθεί κανείς τη διαφορά του Σχολείου Εργασίας από το παραδοσιακό σχολείο, το σχολείο που όλοι καταδίκαζαν για το στείρο ακαδημαϊσμό του, τον αυταρχικό του χαρακτήρα, την προαγωγή ενός τύπου ανθρώπου, το κύριο γνώρισμα του οποίου ήταν η παθητικότητα και η υπακοή.

Αν και οι ιδέες του Σχολείου Εργασίας έφτασαν στην Ελλάδα σχετικά νωρίς, η μέθοδος του Σχολείου Εργασίας κυριάρχησε στην Ελλάδα στο μεσοδιάστημα του μεσοπολέμου (Βαϊνάς, 1997), καθώς οι άσχημες πολιτικές, κοινωνικές και εκπαιδευτικές συνθήκες που επικρατούσαν κατέστησαν αναγκαία την εδραίωση του Νέου Σχολείου στη χώρα μας.

3.3.4 Τριμερής πορεία

Η Τριμερής πορεία παρουσιάστηκε στην Ελλάδα από τον καθηγητή Ν. Εξαρχόπουλο, ο οποίος πρότεινε την εισαγωγή τριών σταδίων στη διδακτική πράξη. Το παιδί, τονίζει ο εισηγητής του μοντέλου της «τριμερούς πορείας», όταν έρχεται σε επαφή με τη γνώση με φυσικό τρόπο, χωρίς δηλαδή την παρέμβαση του δασκάλου, περνάει ασυναίσθητα από τις παρακάτω φάσεις:

1. Παρουσίαση της γνώσης (ως εξωτερικό ερέθισμα).
2. Προσπάθεια κατανόησης και βαθύτερης επεξεργασίας της γνώσης (ψυχική επεξεργασία των εντυπώσεων).
3. Χρήση ή εφαρμογή της γνώσης (κινητική αντίδραση).

Από αυτά τα στάδια θα πρέπει να διέρχεται και η οργανωμένη διδασκαλία. Τα στάδια, λοιπόν, κατά την τριμερή πορεία διδασκαλίας είναι:

1. Παρατήρηση ή εντύπωση: Σύνδεση με τα προηγούμενα, παρουσίαση της νέας ενότητας ως συνέχεια της προηγούμενης.
2. Επεξεργασία ή κατανόηση: Το πιο εκτεταμένο στάδιο και απαιτεί το μεγαλύτερο μέρος της διδακτική ώρας. Γίνεται η ανάλυση και η διερεύνηση των επιμέρους στοιχείων της νέας ύλης. Ο δάσκαλος ακολουθεί την πορεία που χάραξε. Οι μαθητές εκφράζουν την γνώμη τους αλλά η συμμετοχή τους είναι κατευθυνόμενη από το δάσκαλο, ο οποίος αποτελεί τον κύριο παράγοντα της διαδικασίας

3. Παράσταση ή έκφραση: Ανακεφαλαίωση ώστε να δοθεί πλήρης εικόνα των όσων διδάχθηκαν. Δίνονται παραδείγματα εφαρμογές για να εμπεδώσουν οι μαθητές τα όσα έμαθαν και να γίνουν γενικεύσεις.

Η τριμερής πορεία παρείχε, βέβαια, κάποια βοήθεια στον εκπαιδευτικό να οργανώσει τη διδασκαλία του. Όμως ο δασκαλοκεντρικός της χαρακτήρας και η αυστηρή απαίτηση της εφαρμογής των σταδίων καταδυνάστευαν τη σχολική εργασία και γύριζαν τη διδακτική σε προηγούμενες εποχές. Δεν ήταν απόλυτα δασκαλοκεντρική γιατί επέτρεπε και σχετική συμμετοχή του μαθητή στη διαδικασία της διδασκαλίας

Η τριμερής πορεία επίσημα κυριάρχησε στην Ελλάδα μέχρι την εφαρμογή των νέων Μαθηματικών, στην πραγματικότητα όμως μέχρι την κατάρρευση της δικτατορίας (1974) (Βαϊνάς, 1997).

Χρονολογική περίοδος	**Μέθοδος**
1821-1880	Αλληλοδιδακτική μέθοδος
1880-1930	Συνδιδακτική μέθοδος
1930-1941	Μέθοδος Σχολείου Εργασίας
1941-1964/1974	Τριμερής πορεία

Πίνακας 2: Χρονολογικός πίνακας των μεθόδων διδασκαλίας κατά την περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών

3.4 Πρώτη περίοδος

Από την απελευθέρωση της χώρας μας παρατηρήθηκαν προσπάθειες οργάνωσης του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος. Στην ενότητα που ακολουθεί, επιχειρείται ανάλυση της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων την πρώτη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών, η οποία εκτείνεται από το 1821 μέχρι το 1912. Η ανάλυση βασίστηκε στο «Εγχειρίδιο ή Οδηγό της αλληλοδιδακτικής μεθόδου» του Ι. Κοκκώνη το οποίο εκδόθηκε το 1830 και χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1880, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Δ. Πετρίδη, «Στοιχειώδεις πρακτικαί οδηγίαι της διδασκαλίας των μαθημάτων εν τοις δημοτικοίς σχολείοις», το οποίο κυκλοφόρησε το 1880 και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Παπαμάρκου, το οποίο εκδόθηκε το

1894. Την περίοδο αυτή παρατηρήθηκε πως γίνονταν προσπάθειες ένταξης των νοερών υπολογισμών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και δίνονταν μεγάλη έμφαση σε αυτούς, ενώ αντίθετα δεν υπήρχαν αναφορές στις εκτιμήσεις.

3.4.1 «Εγχειρίδιον ή Οδηγός αλληλοδιδακτικής μεθόδου» : Ι. Κοκκώνης

Από τη σύσταση του νεοελληνικού κράτους μέχρι το 1880 για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση δεν υπήρχαν επίσημα Αναλυτικά Προγράμματα, ούτε επίσης και Επιθεωρητές για να καθοδηγήσουν τους δασκάλους σχετικά με τις μεθόδους διδασκαλίας. Υπήρχαν μόνο ορισμένα διατάγματα που περιείχαν οδηγίες για τους εκπαιδευτικούς και το «*Εγχειρίδιο ή Οδηγός της αλληλοδιδακτικής μεθόδου*» του Ι. Κοκκώνη. Στα χρόνια του Καποδίστρια και συγκεκριμένα το 1830 ο Κοκκώνης μετέφρασε τον «*Οδηγό*» του Γάλλου παιδαγωγού Sarasin που αποτέλεσε τον καταστατικό χάρτη της ελληνικής εκπαίδευσης κατά την πεντηκονταετία 1830-1880.

Στα δημοτικά σχολεία διδάσκονταν, βάση του νόμου της 6 Φεβρουαρίου 1934, κατήχηση, στοιχεία της Ελληνικής Γλώσσας, Ανάγνωση, Γραφή, Αριθμητική, Γραμμική Ιχνογραφία, φωνητική Μουσική, στοιχεία Γεωγραφίας και Ελληνικής Ιστορίας, Γυμναστική και οι κυριότερες γνώσεις των φυσικών επιστημών και της αγρονομίας.

Για το μάθημα της Αριθμητικής, ο βασικότερος σκοπός της τετραετούς Δημοτικής Εκπαίδευσης ήταν η κατοχή από τους μαθητές των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων · οι τελειόφοιτοι του Δημοτικού έπρεπε να είναι σε θέση να προσθέτουν, να αφαιρούν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν, καθώς και να μπορούν να χρησιμοποιούν τις πράξεις στη λύση κάπως συνθετότερων προβλημάτων, σαν αυτά που θα αντιμετώπιζαν στο μελλοντικό τους επάγγελμα. Σχετικά με τη μεθοδολογία τονιζόταν ότι πρώτα πρέπει να διδάσκονται οι κανόνες των πράξεων και στη συνέχεια με βάση αυτούς γίνονται οι πράξεις.

Την περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών υπήρχαν σχολεία με έναν δάσκαλο (ο οποίος ερμήνευε σύμφωνα με τις αντιλήψεις του τον «Οδηγό») και πολλούς μαθητές, ενώ με την αλληλοδιδακτική μέθοδο δίδασκαν και οι ίδιοι μαθητές τους συμμαθητές τους. Συνεπώς, η οργάνωση του μαθήματος ήταν αυστηρή και η διεξαγωγή του μαθήματος γίνονταν με προστάγματα και δεν υπήρχαν περιθώρια να ερωτηθούν οι μαθητές για τον τρόπο σκέψης τους (μεταγνωστική ικανότητα), αλλά ήταν υποχρεωμένοι να ακολουθούν τον τρόπο που τους είχαν δείξει οι πρωτόσχολοι. Ο δάσκαλος την εποχή εκείνη θεωρούνταν η αυθεντία και η μάθηση γινόταν μέσω αποστήθισης των λεγόμενων του δασκάλου ή των πρωτόσχολων, με αποτέλεσμα να μην αναπτύσσονται και να μην χρησιμοποιούνται καθόλου οι στρατηγικές μάθησης των μαθητών (ουσιαστικά δεν υπήρχαν στρατηγικές).

Ο δάσκαλος έχοντας να διδάξει μεγάλο αριθμό μαθητών, δεν κατάφερνε να μάθει τα ονόματά τους, πόσο μάλλον και τις ατομικές γνωστικές δεξιότητες του καθενός. Συνεπώς, δε γινόταν να προσαρμόσει τη διδασκαλία βάση των αναγκών των παιδιών, αλλά προσαρμόζονταν βάση της ύλης η οποία έπρεπε να καλυφθεί.

Ο δάσκαλος και οι πρωτόσχολοι παρουσίαζαν το περιεχόμενο, το μετέδιδαν στους μαθητές, οι οποίοι έπρεπε να το αποστηθίσουν και στη συνέχεια να εξεταστούν. Η τάξη ήταν ένα άθροισμα από μεμονωμένα άτομα, μέσα στην οποία έπρεπε να επικρατεί σιωπή για να ακούγεται ο δάσκαλος.

Ο Κοκκώνης στον «Οδηγό της Αλληλοδιδακτικής Μεθόδου» αναφέρει ότι κάθε μάθημα της Αριθμητικής θα πρέπει να διακρίνεται (μεθοδολογικά) σε δυο μορφές, στη γραπτή και την άγραφη (νοερή), που είναι και οι δυο εξίσου σημαντικές. Υποστηρίζει όμως ότι πρέπει να προτάσσεται πάντα η άγραφη (νοερή) αριθμητική. Γίνεται επίσης διαχωρισμός μεταξύ πρακτικής και θεωρητικής αριθμητικής.

Συνεπώς, δίνονταν μεγάλη έμφαση στους υπολογισμούς από μνήμης. Ο αναθεωρημένος *«Νέος Οδηγός της αλληλοδιδακτικής μεθόδου»* (1842) στο κεφάλαιο με τίτλο «Περί της εγγράφου και αγράφου αριθμητικής» τονίζει τη σημασία των υπολογισμών από μνήμης, διότι αυτοί οξύνουν τη διάνοια. Συγκεκριμένα, ο Δημαράς (1987) αναφέρει ότι στο συγκεκριμένο κεφάλαιο τονίζεται η μορφωτική αξία της αγράφου αριθμητικής με την επισήμανση ότι ασκεί το μυαλό και την κριτική σκέψη, ενώ παράλληλα ασκεί τη δυνατότητα διατύπωσης νοημάτων στον προφορικό λόγο σωστά και καθαρά. Επισημαίνεται επίσης, η χρησιμότητα των νοερών υπολογισμών στις καθημερινές συναλλαγές και γενικά σε πολλές δραστηριότητες της καθημερινότητας. Στον Οδηγό τέλος, τονίζεται ότι πρώτα πρέπει να διδάσκεται «η κατά διάνοιαν ή λογική αριθμητική» σε σχέση με τη γραπτή αριθμητική. Παρακάτω παρατίθεται το απόσπασμα του Οδηγού στο οποίο έγινε αναφορά:

«Περί των παραδιδομένων μαθημάτων. […]

Περί της εγγράφου και αγράφου αριθμητικής. Η Αριθμητική είναι έγγραφος ή κατά διανοίαν, και πρακτική ή θεωρητική. Η πρακτική μόνη, άνευ εξηγήσεως τίνος λόγου γινομένη μηχανικώς, είναι επίπονος καταντώσα και άχρηστος, διότι ογλήγορα λησμονεί τις τας πράξεις τας άνευ λόγου συνεθιζομένας. Όταν δ’ οι κανόνες θέτωνται και αι πράξεις γίνωνται εξηγουμένου και του λόγου, εντυπώνονται εις τον νουν και δεν λησμονούνται ευκόλως. Δεν εννοούμεν βέβαια ενταύθα, ότι πρέπει ο διδάσκαλος να παραδώσει εις παιδία ανήλικα αριθμητικήν με όλην την έκτασιν των επιστημονικών λόγων · αλλ’ ότι πρέπει να εκθέτη αναλόγως της καταλήψεως των παίδων, το διά τι καταστρώνεται ο δείνα αριθμός ούτω, και διά τι γίνεται η δείνα πράξις κατά τούτον ή εκείνον τον τρόπον, και να εξετάζη συχνάκις τους μαθητάς εις τα προκείμενα, από τά οποία δεν πρέπει να τους μεταβιβάζη εις άλλα, πρίν καλώς τα εννοήσωσιν · ο τρόπος ούτος πρέπει να γίνεται και εις την κατά διάνοιαν και εις την έγγραφον αριθμητικήν.

Αι κατά διάννοιαν πράξεις της Αριθμητικής προσηλώνουν την προσοχήν, γυμνάζουσι το κριτικόν του νοός, κινούν τα παιδία εις άμιλλαν, και χρησιμεύουσι μεγάλως εις τα του κοινωνικού βίου · η δε έγγραφος αριθμητική, έχουσα τα αυτά ωφελήματα, δίδει διά των εγγράφων πράξεων βεβαιότερα τα αποτελέσματα, χρησιμεύουσα εις πολλαπλασιωτέρας και πολυπλοκωτέρας περιστάσεις · όθεν είναι καλόν οι μαθητευόμενοι να διδάσκωνται εκ παραλλήλου και τα δύο ταύτα μαθήματα εις τα σχολεία, αρχίζοντες από την κατά διάνοιαν ή λογικήν αριθμητικήν διότι εις αυτήν περιλαμβάνεται και η μάθησις της προφορικής αριθμήσεως, ήγουν του μηχανισμού του αριθμείν . […]»

Ένα πρόβλημα της εποχής εκείνης ήταν οι ελλιπείς γνώσεις των εκπαιδευτικών, που είχε ως αποτέλεσμα τη διδασκαλία μόνο των φυσικών αριθμών και όχι των κλασμάτων ή των δεκαδικών αριθμών. Επιπλέον, η εργασία των μαθητών ήταν πάντοτε γραπτή και περιορίζονταν μόνο σε αφηρημένους αριθμούς, χωρίς να γίνεται αναφορά και να εξυπηρετούνται οι ανάγκες της καθημερινής ζωής. Γι’ αυτό και στην επανέκδοση του «Οδηγού της Αλληλοδιδακτικής Μεθόδου» το 1850 ο Κοκκώνης επιτίθενται εναντίον των εκπαιδευτικών που παραμελούν την νοερή αριθμητική και τονίζει ότι κάθε μάθημα της Αριθμητικής θα χωρίζεται σε δύο μέρη, τη νοερή και τη γραπτή αριθμητική και θα προτάσσεται πάντα η νοερή.

Την περίοδο εκείνη δεν υπήρχαν ούτε σχολικά εγχειρίδια. Από την πρώτη οργάνωση των δημοτικών σχολείων, ελήφθη πρόνοια για την σύνταξη διδακτικών βιβλίων. Από το 1836 είχε δοθεί εντολή να συγγραφούν διδακτικά βιβλία τα οποία θα τυπώνονταν από το Βασιλικό τυπογραφείο και θα πωλούνταν ώστε να οργανωθεί καλύτερα η εκπαίδευση. Ωστόσο το διάταγμα αυτό δεν εφαρμόστηκε και μετά από δυο χρόνια (1838) εκδόθηκε νέο διάταγμα όπου ζητούνταν να συνταχθεί επιτροπή προς έγκριση των βιβλίων.

Ως διδακτικά βιβλία κυκλοφορούσαν μέχρι το 1856 διάφορα εκδιδόμενα βιβλία από διάφορους συγγραφείς τα οποία δεν ήταν εγκεκριμένα από το Υπουργείο. Για παράδειγμα, εντοπίστηκε βιβλίο του 1832, αγνώστου συγγραφέα, με τίτλο «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ εις την οποίαν οι λόγοι του εργάζεσθαι δι' αριθμών εξηγούνται αναλυτικώς και εφαρμόζονται συνθετικώς», το οποίο μεταφράσθηκε για χρήση των δημοτικών σχολείων της Ελλάδας. Το συγκεκριμένο βιβλίο δεν καθορίζει σε ποια τάξη θα χρησιμοποιηθεί.

Το εν λόγω βιβλίο αναφέρει για την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ότι, όταν οι αριθμοί είναι μικροί, οι πράξεις γίνονται εύκολα με το νου, αλλά όταν είναι μεγάλοι είναι ευκολότερο, ή και αναγκαίο, να καταγράφουμε τους αριθμούς. Σημαντικό θεωρούνταν η αποστήθιση των πινάκων της πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ενδεικτικά, ακολουθούν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με το νου, πινάκων πρόσθεσης και αφαίρεσης και ασκήσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης με το νου. Αφού γινόταν εξάσκηση στους νοερούς υπολογισμούς, προχωρούσαν και στους γραπτούς υπολογισμούς.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

ΑΠΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

¶ 4. 1. Ὁ Ἰάκωβος εἶχε 5 ῥοδάκινα, ἡ μήτηρ του τὸν ἔδωκε 3 ῥοδάκινα ἀκόμη· πόσα ῥοδάκινα εἶχε τότε ;

2. Ὁ Ἰωάννης ἠγόρασεν ἀβάκιον 25 λεπτὰ, καὶ βιβλίον 8 λεπτά· πόσα λεπτὰ ἔδωκε καὶ διὰ τὰ δύο ;

3. Ὁ Πέτρος ἠγόρασε μίαν πάλαν 36 λεπτὰ, καὶ, μεταπωλήσας την, ἐκέρδησεν 9 λεπτά· πόσα λεπτὰ τὴν ἐπώλησε ;

4. Ὁ Δημήτριος ἔδωκεν εἰς ἓν παιδίον 15 καρύδια, εἰς ἓν ἄλλο 8, καὶ εἶχεν ἀκόμη 7· πόσα καρύδια εἶχεν εἰς τὴν ἀρχήν ;

5. Ἄνθρωπός τις ἠγόρασεν ἓν ἄλογον 54 τάλλαρα· τὸ ἐκράτησεν ὀλίγον καιρὸν, καὶ ἐξῶ-

ΠΙΝΑΚΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.*

2 ϗ 0 = 2	3 ϗ 0 = 3	4 ϗ 0 = 4	5 ϗ 0 = 5
2 ϗ 1 = 3	3 ϗ 1 = 4	4 ϗ 1 = 5	5 ϗ 1 = 6
2 ϗ 2 = 4	3 ϗ 2 = 5	4 ϗ 2 = 6	5 ϗ 2 = 7
2 ϗ 3 = 5	3 ϗ 3 = 6	4 ϗ 3 = 7	5 ϗ 3 = 8
2 ϗ 4 = 6	3 ϗ 4 = 7	4 ϗ 4 = 8	5 ϗ 4 = 9
2 ϗ 5 = 7	3 ϗ 5 = 8	4 ϗ 5 = 9	5 ϗ 5 = 10
2 ϗ 6 = 8	3 ϗ 6 = 9	4 ϗ 6 = 10	5 ϗ 6 = 11
2 ϗ 7 = 9	3 ϗ 7 = 10	4 ϗ 7 = 11	5 ϗ 7 = 12
2 ϗ 8 = 10	3 ϗ 8 = 11	4 ϗ 8 = 12	5 ϗ 8 = 13
2 ϗ 9 = 11	3 ϗ 9 = 12	4 ϗ 9 = 13	5 ϗ 9 = 14

* Μὴν ἔχοντες σημεῖα τῆς προσθέσεως, μεταχειριζόμεθα εἰς τόπον αὐτῶν τὸ ϗ.

5 ϗ 9 = πόσα ;
8 ϗ 7 = πόσα ;
4 ϗ 3 ϗ 2 = πόσα ;
6 ϗ 4 ϗ 5 = πόσα ;
2 ϗ 0 ϗ 4 ϗ 6 = πόσα ;
7 ϗ 1 ϗ 0 ϗ 8 = πόσα ;
3 ϗ 0 ϗ 9 ϗ 5 = πόσα ;
9 ϗ 2 ϗ 6 ϗ 4 ϗ 5 = πόσα ;
1 ϗ 3 ϗ 5 ϗ 7 ϗ 8 = πόσα ;
1 ϗ 2 ϗ 3 ϗ 4 ϗ 5 ϗ 6 = πόσα ;
8 ϗ 9 ϗ 0 ϗ 2 ϗ 4 ϗ 5 = πόσα ;
6 ϗ 2 ϗ 5 ϗ 0 ϗ 8 ϗ 3 = πόσα ;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

ΑΠΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

¶ **6.** 1. *Ὁ Νικόλαος, ἔχων 18 λεπτά, ἠγόρασε βιβλίον, διὰ τὸ ὁποῖον ἔδωκεν 6 λεπτά· πόσα λεπτὰ τοῦ ἔμειναν;*

2. *Ὁ Ἀντώνιος εἶχε 12 μῆλα· ἔδωκε τὰ 5 εἰς τὸν ἀδελφόν του· πόσα τοῦ ἔμειναν;*

3. *Ὁ Πέτρος ἔπαιξε κόκκους· εἶχεν 23, ὅταν ἤρχισεν, ἀλλ' ὅταν ἐτελείωσεν, εἶχε μόνον 12· πόσους ἔχασε;*

4. *Ἠγόρασέ τις μίαν ἀγελάδα 17 τάλλαρα, καὶ τὴν ἐμεταπώλησεν 22 τάλλαρα· πόσα τάλλαρα ἐκέρδισε;*

5. *Ὁ Κάρολος εἶναι 9 χρόνων, καὶ ὁ Ἀνδρέας εἶναι 13· ποία ἡ διαφορὰ εἰς τὰς ἡλικίας των;*

6. *Ἄνθρωπός τις ἐδανείσθη 50 τάλλαρα, καὶ τὰ ἐπλήρωσεν ὅλα πλὴν 18· πόσα τάλλαρα ἐπλήρωσεν; ἤγουν, ἔπαρε 18 ἀπὸ 50, πόσα μένουν;*

ΠΙΝΑΚΑ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

2—2 = 0	6—3 = 3	5—5 = 0	7—7 = 0
3—2 = 1	7—3 = 4	6—5 = 1	8—7 = 1
4—2 = 2	8—3 = 5	7—5 = 2	9—7 = 2
5—2 = 3	9—3 = 6	8—5 = 3	10—7 = 3
6—2 = 4	10—3 = 7	9—5 = 4	8—8 = 0
7—2 = 5	4—4 = 0	10—5 = 5	9—8 = 1
8—2 = 6	5—4 = 1	6—6 = 0	10—8 = 2
9—2 = 7	6—4 = 2	7—6 = 1	9—9 = 0
10—2 = 8	7—4 = 3	8—6 = 2	10—9 = 1
3—3 = 0	8—4 = 4	9—6 = 3	
4—3 = 1	9—4 = 5	10—6 = 4	
5—3 = 2	10—4 = 6		

7—3 = πόσα;
8—5 = πόσα;
9—4 = πόσα;
12—3 = πόσα;
23—3 = πόσα;

18— 7 = πόσα;
28— 7 = πόσα;
22—13 = πόσα;
33— 5 = πόσα;
41—15 = πόσα;

Για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο ίδιο βιβλίο δινόταν ο πίνακας της προπαίδειας, για την πράξη της διαίρεσης δινόταν ο πίνακας της διαίρεσης, τους οποίους έπρεπε να μάθουν όλοι οι μαθητές απ' έξω, ενώ διδάσκονταν κατευθείαν ο κάθετος γραπτός πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ως συνεχείς αφαιρέσεις ίδιων αριθμών.

ΠΙΝΑΞ ΤΟΥ ΠΟΛΥΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

2 ἐπὶ 0 = 0	4 ἐπὶ 10 = 40	7 ἐπὶ 7 = 49	10 ἐπὶ 4 = 40
2 ἐπὶ 1 = 2	4 ἐπὶ 11 = 44	7 ἐπὶ 8 = 56	10 ἐπὶ 5 = 50
2 ἐπὶ 2 = 4	4 ἐπὶ 12 = 48	7 ἐπὶ 9 = 63	10 ἐπὶ 6 = 60
2 ἐπὶ 3 = 6	5 ἐπὶ 0 = 0	7 ἐπὶ 10 = 70	10 ἐπὶ 7 = 70
2 ἐπὶ 4 = 8	5 ἐπὶ 1 = 5	7 ἐπὶ 11 = 77	10 ἐπὶ 8 = 80
2 ἐπὶ 5 = 10	5 ἐπὶ 2 = 10	7 ἐπὶ 12 = 84	10 ἐπὶ 9 = 90
2 ἐπὶ 6 = 12	5 ἐπὶ 3 = 15	8 ἐπὶ 0 = 0	10 ἐπὶ 10 = 100
2 ἐπὶ 7 = 14	5 ἐπὶ 4 = 20	8 ἐπὶ 1 = 8	10 ἐπὶ 11 = 110
2 ἐπὶ 8 = 16	5 ἐπὶ 5 = 25	8 ἐπὶ 2 = 16	10 ἐπὶ 12 = 120
2 ἐπὶ 9 = 18	5 ἐπὶ 6 = 30	8 ἐπὶ 3 = 24	11 ἐπὶ 0 = 0
2 ἐπὶ 10 = 20	5 ἐπὶ 7 = 35	8 ἐπὶ 4 = 32	11 ἐπὶ 1 = 11
2 ἐπὶ 11 = 22	5 ἐπὶ 8 = 40	8 ἐπὶ 5 = 40	11 ἐπὶ 2 = 22
2 ἐπὶ 12 = 24	5 ἐπὶ 9 = 45	8 ἐπὶ 6 = 48	11 ἐπὶ 3 = 33
3 ἐπὶ 0 = 0	5 ἐπὶ 10 = 50	8 ἐπὶ 7 = 56	11 ἐπὶ 4 = 44
3 ἐπὶ 1 = 3	5 ἐπὶ 11 = 55	8 ἐπὶ 8 = 64	11 ἐπὶ 5 = 55
3 ἐπὶ 2 = 6	5 ἐπὶ 12 = 60	8 ἐπὶ 9 = 72	11 ἐπὶ 6 = 66
3 ἐπὶ 3 = 9	6 ἐπὶ 0 = C	8 ἐπὶ 10 = 80	11 ἐπὶ 7 = 77
3 ἐπὶ 4 = 12	6 ἐπὶ 1 = 6	8 ἐπὶ 11 = 88	11 ἐπὶ 8 = 88
3 ἐπὶ 5 = 15	6 ἐπὶ 2 = 12	8 ἐπὶ 12 = 96	11 ἐπὶ 9 = 99
3 ἐπὶ 6 = 18	6 ἐπὶ 3 = 18	9 ἐπὶ 0 = 0	11 ἐπὶ 10 = 110
3 ἐπὶ 7 = 21	6 ἐπὶ 4 = 24	9 ἐπὶ 1 = 9	11 ἐπὶ 11 = 121
3 ἐπὶ 8 = 24	6 ἐπὶ 5 = 30	9 ἐπὶ 2 = 18	11 ἐπὶ 12 = 132
3 ἐπὶ 9 = 27	6 ἐπὶ 6 = 36	9 ἐπὶ 3 = 27	12 ἐπὶ 0 = 0
3 ἐπὶ 10 = 30	6 ἐπὶ 7 = 42	9 ἐπὶ 4 = 36	12 ἐπὶ 1 = 12
3 ἐπὶ 11 = 33	6 ἐπὶ 8 = 48	9 ἐπὶ 5 = 45	12 ἐπὶ 2 = 24
3 ἐπὶ 12 = 36	6 ἐπὶ 9 = 54	9 ἐπὶ 6 = 54	12 ἐπὶ 3 = 36
4 ἐπὶ 0 = 0	6 ἐπὶ 10 = 60	9 ἐπὶ 7 = 63	12 ἐπὶ 4 = 48
4 ἐπὶ 1 = 4	6 ἐπὶ 11 = 66	9 ἐπὶ 8 = 72	12 ἐπὶ 5 = 60
4 ἐπὶ 2 = 8	6 ἐπὶ 12 = 72	9 ἐπὶ 9 = 81	12 ἐπὶ 6 = 72
4 ἐπὶ 3 = 12	7 ἐπὶ 0 = 0	9 ἐπὶ 10 = 90	12 ἐπὶ 7 = 84
4 ἐπὶ 4 = 16	7 ἐπὶ 1 = 7	9 ἐπὶ 11 = 99	12 ἐπὶ 8 = 96
4 ἐπὶ 5 = 20	7 ἐπὶ 2 = 14	9 ἐπὶ 12 = 108	12 ἐπὶ 9 = 108
4 ἐπὶ 6 = 24	7 ἐπὶ 3 = 21	10 ἐπὶ 0 = 0	12 ἐπὶ 10 = 120
4 ἐπὶ 7 = 28	7 ἐπὶ 4 = 28	10 ἐπὶ 1 = 10	12 ἐπὶ 11 = 132
4 ἐπὶ 8 = 32	7 ἐπὶ 5 = 35	10 ἐπὶ 2 = 20	12 ἐπὶ 12 = 144
4 ἐπὶ 9 = 36	7 ἐπὶ 6 = 42	10 ἐπὶ 3 = 30	

ΠΙΝΑΞ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

$\frac{2}{2}=1$*	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{4}{4}=1$	$\frac{5}{5}=1$	$\frac{6}{6}=1$	$\frac{7}{7}=1$
$\frac{4}{2}=2$*	$\frac{6}{3}=2$	$\frac{8}{4}=2$	$\frac{10}{5}=2$	$\frac{12}{6}=2$	$\frac{14}{7}=2$
$\frac{6}{2}=3$	$\frac{9}{3}=3$	$\frac{12}{4}=3$	$\frac{15}{5}=3$	$\frac{18}{6}=3$	$\frac{21}{7}=3$
$\frac{8}{2}=4$	$\frac{12}{3}=4$	$\frac{16}{4}=4$	$\frac{20}{5}=4$	$\frac{24}{6}=4$	$\frac{28}{7}=4$
$\frac{10}{2}=5$	$\frac{15}{3}=5$	$\frac{20}{4}=5$	$\frac{25}{5}=5$	$\frac{30}{6}=5$	$\frac{35}{7}=5$
$\frac{12}{2}=6$	$\frac{18}{3}=6$	$\frac{24}{4}=6$	$\frac{30}{5}=6$	$\frac{36}{6}=6$	$\frac{42}{7}=6$
$\frac{14}{2}=7$	$\frac{21}{3}=7$	$\frac{28}{4}=7$	$\frac{35}{5}=7$	$\frac{42}{6}=7$	$\frac{49}{7}=7$
$\frac{16}{2}=8$	$\frac{24}{3}=8$	$\frac{32}{4}=8$	$\frac{40}{5}=8$	$\frac{48}{6}=8$	$\frac{56}{7}=8$
$\frac{18}{2}=9$	$\frac{27}{3}=9$	$\frac{36}{4}=9$	$\frac{45}{5}=9$	$\frac{54}{6}=9$	$\frac{63}{7}=9$

$\frac{8}{8}=1$	$\frac{9}{9}=1$	$\frac{10}{10}=1$	$\frac{11}{11}=1$	$\frac{12}{12}=1$
$\frac{16}{8}=2$	$\frac{18}{9}=2$	$\frac{20}{10}=2$	$\frac{22}{11}=2$	$\frac{24}{12}=2$
$\frac{24}{8}=3$	$\frac{27}{9}=3$	$\frac{30}{10}=3$	$\frac{33}{11}=3$	$\frac{36}{12}=3$
$\frac{32}{8}=4$	$\frac{36}{9}=4$	$\frac{40}{10}=4$	$\frac{44}{11}=4$	$\frac{48}{12}=4$
$\frac{40}{8}=5$	$\frac{45}{9}=5$	$\frac{50}{10}=5$	$\frac{55}{11}=5$	$\frac{60}{12}=5$
$\frac{48}{8}=6$	$\frac{54}{9}=6$	$\frac{60}{10}=6$	$\frac{66}{11}=6$	$\frac{72}{12}=6$
$\frac{56}{8}=7$	$\frac{63}{9}=7$	$\frac{70}{10}=7$	$\frac{77}{11}=7$	$\frac{84}{12}=7$
$\frac{64}{8}=8$	$\frac{72}{9}=8$	$\frac{80}{10}=8$	$\frac{88}{11}=8$	$\frac{96}{12}=8$
$\frac{72}{8}=9$	$\frac{81}{9}=9$	$\frac{90}{10}=9$	$\frac{99}{11}=9$	$\frac{108}{12}=9$

* *Ὁ μαθητής, μανθάνων τὸν πίνακα ἐκ στήθους, ἐμπορεῖ νὰ τὸν ἀναγινώσκῃ οὕτω· 2 μὲ 2 εἶναι 1, 4 μὲ 2 εἶναι 2, κτλ· ἤ, 2 εἰς 2 μίαν φοράν, 2 εἰς 4 δύο φοράς, κτλ.*

9 ἐπὶ 2 = πόσα;
4 ἐπὶ 5 = πόσα;
8 ἐπὶ 9 = πόσα;
3 ἐπὶ 7 = πόσα;
5 ἐπὶ 5 = πόσα;

4 ἐπὶ 3 ἐπὶ 2 = 24.
3 ἐπὶ 2 ἐπὶ 5 = πόσα;
7 ἐπὶ 1 ἐπὶ 2 = πόσα;
8 ἐπὶ 3 ἐπὶ 2 = πόσα;
3 ἐπὶ 2 ἐπὶ 4 ἐπὶ 5 = πόσα;

$28 \div 7$, ἢ $\frac{28}{7}$ = πόσα;
$42 \div 6$, ἢ $\frac{42}{6}$ = πόσα;
$54 \div 9$, ἢ $\frac{54}{9}$ = πόσα;
$32 \div 8$, ἢ $\frac{32}{8}$ = πόσα;
$33 \div 11$, ἢ $\frac{33}{11}$ = πόσα;

$49 \div 7$, ἢ $\frac{49}{7}$ = πόσα;
$32 \div 4$, ἢ $\frac{32}{4}$ = πόσα;
$99 \div 11$, ἢ $\frac{99}{11}$ = πόσα;
$84 \div 12$, ἢ $\frac{84}{12}$ = πόσα;
$108 \div 12$, ἢ $\frac{108}{12}$ = πόσα;

Από το 1856, το Υπουργείο εξέδωσε πίνακες των εισακτέων βιβλίων με την τιμή του καθενός, τα οποία θα μπορούσαν να χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί. Οι δυο μεγάλοι εκδοτικοί οίκοι, οι οποίοι είχαν την αποκλειστική σχεδόν έκδοση των διδακτικών βιβλίων της δημοτικής εκπαίδευσης ήταν οι οίκοι «Κορομηλά» και «Βλαστού». Για το μάθημα της αριθμητικής είχαν εκδοθεί οι εξής τίτλοι διδακτικών βιβλίων:

-Προπαιδεία περιέχουσα τας 4 αριθμητικάς πράξεις υπό Β.Π.Β. (4 λεπτά)

-Στοιχειώδης αριθμητική διά τους προκεχωρημένους μαθητάς υπό Β.Π.Β (30 λεπτά)

Το Σεπτέμβριο του 1856 δημοσιεύτηκε διάταγμα «περί διαγωνισμού προς συγγραφή προσφορότερων βιβλίων για τα δημοτικά σχολεία». Η κριτική επιτροπή θα επέλεγε το καταλληλότερο βιβλίο το οποίο θα λάμβανε χρηματικό βραβείο. Το εγκεκριμένο βιβλίο εισήχθη στα σχολείο για όλη την περίοδο προσδιορίζοντας και την τιμή του από τη κριτική επιτροπή. Αλλά αργότερα άρχισαν να κυκλοφορούν ελεύθερα, οπότε έπεσε σε αχρηστία η έκδοση προκήρυξης και η επιτροπή έγκρισης διδακτικών βιβλίων. Το Νοέμβριο του 1875 έγινε πάλι απόπειρα υποβολής των διδακτικών βιβλίων υπό έγκριση. Συστήθηκε επιτροπή η οποία έλεγχε τα βιβλία μήπως περιείχαν κάτι που αντιτίθονταν στη θρησκεία, στα ήθη και στους νόμους. Όμως επειδή δεν γινόταν επαρκής έλεγχος, στα σχολεία χρησιμοποιούνταν και μη εγκεκριμένα βιβλία (Λέφας, 1942).

Ο Κοκκώνης στην έκδοση του «Οδηγού» του 1860, για το μάθημα της Αριθμητικής πρότεινε κάποια βιβλία για το δάσκαλο και για τους μαθητές. Για το δάσκαλο συμβούλευε ότι έπρεπε να διαθέτει στη φαρέτρα του τα εξής βιβλία:

- Σύνοψις επιστημών υπό Κούμα τόμ. 1
- Στοιχειώδης Αριθμητική υπό Γεράκη
- Αριθμητική Στοιχειώδης υπό Δεσποτοπούλου

Οι μαθητές θα μπορούσαν να ασχοληθούν με τους Πίνακες Αριθμητικής υπό Δραΐκη καθώς επίσης και με τα παρακάτω βιβλία:

- Προπαιδεία Αριθμητικής
- Στοιχειώδης Αριθμητική υπό Ε. Ξύδη
- **Διδασκαλία της κατά νουν Αριθμητικής υπό Αντωνίου Θηβαίου εν Πάτραις.**

Για περαιτέρω κατά νου αριθμητικές πράξεις δίδασκαν οι δάσκαλοι μεταχειριζόμενοι την υπό του διδασκάλου Ε. Ξύδη μεταφρασθείσα Αριθμητική.

Ο Κοκκώνης, τόνισε ότι η προφορική αρίθμηση αποτελεί μέρος της Αριθμητικής του Νου, από την οποία αρχίζουν οι μαθητές να διδάσκονται και τη διδασκαλία αυτής ακολουθούσε μετά παράλληλα η διδασκαλία της εγγράφου αριθμητικής, *«αναγινώσκωντες οι μαθητές κατά χορείας τους νέους πίνακες της Αριθμητικής του επαρχικού δημοδιδάσκαλου Δραϊκη και συστηθέντας παρά της Κυβέρνησης στα Δημοτικά Σχολεία»*. Από αυτούς τους πίνακες οι 10 πρώτοι χρησίμευαν στη μάθηση της προφορικής αρίθμησης, ενώ οι επόμενοι στην έγγραφη αριθμητική και στην άγραφη αριθμητική (οι πίνακες με περιττούς αριθμούς- 11,13 κλπ μέχρι το 33- απέβλεπαν στη διδασκαλία της κατά νουν αριθμητικής, οι οποίοι περιείχαν συνδυασμούς των τεσσάρων πράξεων).

Ο Κοκκώνης, στον «Οδηγό» του 1860, αναφέρει ότι αν παρατηρήσει κανείς τα παιδιά να αριθμούν, θα δει ότι προφέρουν τους αριθμούς χωρίς σειρά, δηλαδή τυχαία, διότι δεν έχουν ιδέα ούτε για τη ποσοτική σημασία των προφερόμενων αριθμών, ούτε για το μηχανισμό της αρίθμησης. Για να διορθωθεί αυτή η κατάσταση, υποστήριξε ότι έπρεπε να διδαχθούν το μηχανισμό της προφορικής αρίθμησης και στη συνέχεια να διδαχθούν πώς αυτοί οι προφορικοί αριθμοί γράφονται με λίγους χαρακτήρες ή με ψηφία. Η σειρά διδασκαλίας στην Α' κλάση συμβούλευε πως έπρεπε να είναι η εξής:

-Διδασκαλία προφορικής αρίθμησης με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, πέτρες, αριθμητήριο) μέχρι το 5/μέχρι το 10/μέχρι το 20/ μέχρι το 100, ενώ παράλληλα διδάσκονταν και η ανάλυση των αριθμών (για παράδειγμα, ο αριθμός 27 έχει 2 δεκάδες και 7 μονάδες).

-Διδασκαλία προφορικής αρίθμησης κατά δεκάδες μέχρι το 100.

-**Μικρές κατά νου Αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση ή αφαίρεση) μέχρι το 100, πρώτα κατά μονάδες και έπειτα κατά δεκάδες.**

-Λύση προβλημάτων των τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής.

- Εκμάθηση του Πυθαγόρειου πίνακα (αποστήθιση).

-Εκμάθηση του μηχανισμού της προφορικής αρίθμησης από το 100 μέχρι το 1000, ενώ παράλληλα διδάσκονται οι εκατοντάδες.

- Εκμάθηση της γραφής των 9 ψηφίων και του 0 (μηδενός), εξάσκηση στην αξία θέσης ψηφίου και στην ανάλυση αριθμών. Στη συνέχεια οι μαθητές περνούσαν στη γραπτή αρίθμηση.

Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η μορφή των νοερών υπολογισμών βασίζονταν κυρίως στην εκμάθηση της προφορικής αρίθμησης (ως μέρος της Αριθμητικής του Νου), στις λύσεις απλών αριθμητικών πράξεων με το νου και στις λύσεις προβλημάτων, ενώ αργότερα οι μαθητές ασχολούνταν με τη γραπτή αρίθμηση και τις πράξεις.

Ειδικότερα, ο τρόπος διδασκαλίας της προφορικής αρίθμησης από το 1-5 στην Α' κλάση γίνονταν με τρεις τρόπους:

Α' τρόπος: Ο ερμηνευτής σήκωνε ψηλά το αριστερό του χέρι και με τα δάχτυλα μετρούσε 1-2-3-4-5.

Β' τρόπος: Ο ερμηνευτής με σηκωμένο το αριστερό χέρι και κλειστά τα δάχτυλα, ξεκινούσε την αρίθμηση 1 και 1 (σήκωνε τον αντίχειρα και το δείκτη) μας κάνει 2, και ένα (σήκωνε το μέσο) 3, και ένα (σήκωνε παράμεσο) 4, και ένα (σήκωνε το μικρό) 5.

Γ' τρόπος: Ο ερμηνευτής άνοιγε έναν αριθμό δαχτύλων. Ρωτούσε να του πουν τη ποσότητα αυτών. Μετά ρωτούσε το ίδιο αυξημένο κατά ένα. Ή έδειχνε 5 δάχτυλα και ρωτούσε αν κλείσουμε τα 1-2-3 πόσα μένουν κλειστά και πόσα ανοιχτά. Όταν ο μαθητής δεν επιτύγχανε να απαντήσει σωστά είχε τη βοήθεια του ερμηνευτή.

Ο τρόπος διδασκαλίας της προφορικής αρίθμησης από το 1-10 στην Α' κλάση γίνονταν επίσης με τρεις τρόπους:

Α' τρόπος: Ο ερμηνευτής στο αριστερό χέρι αριθμούσε 5 δάχτυλα και μετά στο δεξί αριθμούσε άλλα 5 και έλεγε: «Για να δούμε τώρα 5 δάχτυλα στο δεξί και 5 στο αριστερό πόσα κάνουν 1,2,3,4,5 και ένα 6, και ένα 7, και ένα 8, και ένα 9, και ένα 10. 5 και 5 κάνουν 10». Μετά επαναλάμβανε πολλές φορές «5,6,7,8,9,10».

Β' τρόπος: Ίδιος τρόπος με τον β' τρόπο αρίθμησης των αριθμών μέχρι το 5 μόνο με τη διαφορά ότι η αρχή γίνεται από το 5 ως επί το πλείστον (5 και ένα 6, και ένα 7 κτλ).

Γ' τρόπος: Αφού ο ερμηνευτής αριθμούσε επί των δυο του χεριών τους 10 αριθμούς κατά σειρά, επαναλάμβαναν οι μαθητές, έκανε ερωτήσεις, όπως 1 και 1 (οι μαθητές απαντούσαν 2), 2 και 1 (οι μαθητές απαντούσαν 3) κτλ. Όπου οι μαθητές αποτύγχαναν, δέχονταν τη βοήθεια του ερμηνευτή.

Στον Οδηγό αλληλοδιδακτικής μεθόδου του Ι. Κοκκώνη, σε όλες τις εκδόσεις, δεν παρατηρήθηκε να γίνεται αναφορά στις εκτιμήσεις, παρά μόνο στους νοερούς υπολογισμούς, στους οποίους δίνονταν μεγάλη σημασία και άρχιζαν να διδάσκονται από τις μικρότερες τάξεις. Επιπλέον, δεν εντοπίστηκε κάποια αναφορά σε νοερούς υπολογισμούς δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων.

Δυστυχώς οι συνεχείς βελτιώσεις της αλληλοδιδακτικής μεθόδου δεν έφεραν αποτέλεσμα. Το υπουργείο Παιδείας με την εγκύκλιο υπ’ αριθμ. 1837/1857 βλέποντας την αθλιότητα που επικρατούσε στα σχολεία έκανε έκκληση στους δασκάλους να συμβάλλουν στη βελτίωση της μεθόδου με την πολύχρονη πείρα τους (Χριστόπουλος, 1857). Δυστυχώς όμως ούτε αυτό το μέτρο δεν έφερε τα ποθούμενα αποτελέσματα. Η κατάσταση αυτή κατακρίθηκε και από το «Σύλλογο προς Διάδοσιν των Ελληνικών Γραμμάτων», ο οποίος σε έκθεσή του στις 3 Μαΐου 1872 αναφερόμενος στην αλληλοδιδακτική μέθοδο γράφει ότι «προκαλεί ζημία εν τοις δημοτικοίς σχολείοις» και ζητά να εγκαταλειφθεί (Λέφας, 1942). Γι’ αυτό το σκοπό προκήρυξε διαγωνισμό για την επιλογή υποτρόφων που θα στέλνονταν στη Γερμανία, με σκοπό να διδαχθούν τις νέες μεθόδους στη διδακτική και παιδαγωγική επιστήμη. Οι παιδαγωγοί που επέστρεψαν στην Ελλάδα από τις σπουδές τους στο εξωτερικό προπαρασκεύασαν το έδαφος για την κατάργηση της αλληλοδιδακτικής μεθόδου και την εισαγωγή του Ερβαρτιανού συστήματος. Έτσι με το νόμο ΧΘ΄/1878 (ΦΕΚ 7/24-1-1878) καθιερώνεται στην εκπαίδευση η καθαρεύουσα, επανιδρύεται το Διδασκαλείο σε νέες βάσεις και αρχίζει να εφαρμόζεται για πρώτη φορά στην Ελλάδα η συνδιδακτική μέθοδος στην εκπαίδευση των δασκάλων.

Στη συνέχεια με Βασιλικό Διάταγμα της 22.3.1880 («Περί της συνδιδακτικής μεθόδου») γίνεται εισήγηση για την εφαρμογή της συνδιδακτικής ή Ερβαρτιανής μεθόδου διδασκαλίας, ενώ ακολούθησε το διάταγμα της 3ης Σεπτεμβρίου του 1880 «Περί μεθόδου διδασκαλίας εν τοις δημοτικοίς σχολείοις», σύμφωνα με το οποίο καταργείται η αλληλοδιδακτική μέθοδος και καθιερώνεται επίσημα η χρήση της «συνδιδακτικής» μεθόδου.

3.4.2 «Στοιχειώδεις πρακτικαί οδηγίαι της διδασκαλίας των μαθημάτων εν τοις δημοτικοίς σχολείοις»: Δ. Πετρίδης

Το πρώτο επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα για το Δημοτικό Σχολείο, συγγράφηκε από τον **Επιθεωρητή Δ. Πετρίδη το 1880** με τίτλο «Στοιχειώδεις πρακτικαί οδηγίαι της διδασκαλίας των μαθημάτων εν τοις δημοτικοίς σχολείοις»**.** Μέχρι τότε επικρατούσε η μηχανική διδασκαλία των αριθμητικών πράξεων, η οποία δεν ωφελούσε σε τίποτα στα παιδιά, αντιθέτως προκαλούσε μεγάλη πνευματική βλάβη της ακινησίας του πνεύματος, αποστροφή προς το μάθημα και προς το σχολείο (Πετρίδης, 1880). Η μέθοδος διδασκαλίας την χρονική αυτή περίοδο αλλάζει, πλέον η αλληλοδιδακτική μέθοδος αντικαθιστάται από την ερβαρτιανή ή συνδιδακτική μέθοδο, η οποία εφαρμόζεται στα τετρατάξια Δημοτικά Σχολεία.

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα προτρέπει τους εκπαιδευτικούς να ασκούν την παρατηρητικότητα των μαθητών και την κριτική σκέψη, καθώς και να ωθεί τους μαθητές προς την αυτενέργεια. Ο δάσκαλος πρέπει να προσπαθεί να μεταδώσει σωστή αγωγή στους μαθητές και να καταστήσει τα παιδιά πρακτικά, δηλαδή ικανά να εκτιμούν τι χρειάζονται και να επιλέγουν τα προσφορότερα για τον κάθε σκοπό μέσα.

Η διδασκαλία δεν πρέπει να έχει ως στόχο την απομνημόνευση, αλλά ο δάσκαλος πρέπει να εφιστά την προσοχή των μαθητών, να προκαλεί μέσω κατάλληλων καθοδηγητικών ερωτήσεων τον μαθητή να οδηγηθεί μέσω της σκέψης του στο αποτέλεσμα.

Το εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα για το μάθημα των Μαθηματικών γίνεται και για τις τέσσερις τάξεις πέντε ώρες την εβδομάδα (έναντι τριών που ήταν τα προηγούμενα χρόνια), σε σύνολο 22 ωρών για την Α’ και Β’ τάξη και 32 ωρών για τη Γ’ και Δ’ τάξη.

Διδακτέα μαθήματα.	Ὧραι διδασκαλίας ἑκάστης τάξεως καθ' ἑβδομάδα				Παρατηρήσεις.
	Α.	Β.	Γ.	Δ.	
Ἱερ. μαθήματα (Ἱερ. Ἱστορία Ἱρ. Κατήχησις, ἀνάγνωσις περικοπῶν ἐκ τῆς Ἁγ. Γραφῆς)	3	3	3	3	(α) Ἐκ τῶν 12 ὡρῶν διατίθενται ἀνὰ 2 ὧραι ἐν ἑκάστῃ τάξει πρὸς καλλιγραφικὰς ἀσκήσεις.
Ἑλλην. (Πραγματογνωσία, ἀνάγνωσις Γραφὴ (α) Γραμματική	12	12	12	12	(β) Δὲν ὁρίζονται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἰδιαίτεραι ὧραι· διότι δυνατὸν αἱ στοιχειώδεις τῆς Φυσικῆς Ἱστορίας γνώσεις νὰ μεταδίδωνται διὰ τῶν ἀναγνωστικῶν βιβλίων καὶ διὰ τῆς Πραγματογνωσίας εἰς τὰς κατωτέρας τάξεις, ἐν οἷς σχολείοις διδάσκει εἷς διδάσκαλος πάσας τὰς τάξεις.
Ἀριθμητ. καὶ στοιχ. Γεωμετρίας	5	5	5	5	
Ἰχνογραφία			3	3	
Στοιχ. Φυσικὴ Ἱστορία (β) . . .					
Γεωγραφία.			3	3	
Ἑλληνικὴ Ἱστορία.			2	3	
Φωνητικὴ Μουσική.	2		2	2	(γ) Ἐν ταῖς σημειουμέναις ὥραις περιλαμβάνονται καὶ ὧραι τῆς κατ' ἰδίαν ἐργασίας τοῦ μαθητοῦ ἐν σχολείῳ, ἐνῷ διδάσκει εἷς μόνος διδάσκαλος.
Γυμναστική		2	2	2	
(γ)	22	22	32	33	

Εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα ο συγγραφέας όριζε τους σκοπούς του σχολείου, τα καθήκοντα των δασκάλων, τη διδακτέα ύλη σε γενικές γραμμές και τη μέθοδο διδασκαλίας αναλυτικότερα. Για πρώτη φορά στο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών αναφέρεται ότι ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας της αριθμητικής είναι αφ' ενός η άσκηση της διανοίας μέσω των λογιστικών σχέσεων, ώστε να σκέφτεται ορθά και να διατυπώνει τα νοήματα καθαρά και κανονικά στον προφορικό λόγο, την κανονική κρίση και τον ορθό λογισμό, και αφετέρου η απόκτηση της λογικής εμπειρίας η οποία είναι τόσο χρήσιμη στην πρακτική ζωή. Συγκεκριμένα, αναγράφεται ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας της Αριθμητικής ως εξής:

«Ως σκοπός της διδασκαλίας της αριθμητικής ετίθετο *«αφ' ενός μεν η άσκησις της διανοίας δια των λογιστικών σχέσεων, ώστε να νοή ορθώς και να διατυπώνη τα νοήματα του καθαρώς και κανονικώς εν τω προφορικό λόγω, την κανονικήν της κρίσεως και του ορθού λογισμού οδόν ακολουθών, αφ'ετέρου δε η απόκτησις της λογικής εμπειρίας της τοσούτω χρησίμου εν τω πρακτικώ βίω»* (Λέφας, 1942).

Όσον αφορά την κατά νου αριθμητική, ο Πετρίδης υποστήριζε ότι, συντελεί στην εκπλήρωση και των δυο σκοπών της διδασκαλίας της αριθμητικής και ότι πρέπει να διδάσκονται από μικρή ηλικία ώστε να ασκείται η αντίληψη των σχέσεων των αριθμών με διανοητικές (νοερές) εργασίες. Παρατηρείται λοιπόν ότι στην ανάλυση της διδακτέας ύλης του Αναλυτικού Προγράμματος, αποσπάσματα της οποίας αποτυπώνονται παρακάτω, αναφέρονται συχνά οι νοεροί υπολογισμοί από την πρώτη κιόλας τάξη. Ακόμη, παρατηρείται ότι οι νοεροί υπολογισμοί προηγούνται των γραπτών υπολογισμών. Υποστηρίζεται ότι η γραπτή αριθμητική και η άσκηση αυτής, είναι υποβοηθητική στη μνήμη στους πολυπλοκότερους συνδυασμούς αριθμών, είναι ευαπόκτητος (εύκολη να αποκτηθεί), όταν διδαχθεί τη κατά νου από μνήμης αριθμητική και το παιδί ασκηθεί επαρκώς. Ακόμη, το Αναλυτικό Πρόγραμμα συμβούλευε τους εκπαιδευτικούς ότι η διδασκαλία της αριθμητικής πρέπει να είναι αργή και με επαναλήψεις για να μπορούν να παρακολουθούν και οι ασθενέστεροι μαθητές, καθώς η ελάχιστη αμφιβολία προκαλεί σύγχυση.

Στην Α' τάξη οι μαθητές γνώριζαν τη σχέση των αριθμών από της μονάδος μέχρι του 20 (1-10 και αργότερα 1-20). Οι μαθητές ασκούνταν στην αρίθμηση (με αισθητοποίηση-χρήση εποπτικού υλικού). Μετά εξασκούνταν στην πρόσθεση με το ένα (1 και 1 γίνονται 2, 2 και 1 γίνονται 3 κ.ο.κ) και στην αφαίρεση με το ένα (10 αφαιρώ 1 μένουν 9, 9 αφαιρώ 1 μένουν 8 κ.ο.κ.) αισθητοποιώντας τις πράξεις με πράγματα ορατά και ευδιάκριτα. Μετά γινόταν εξάσκηση στην πρόσθεση και στην αφαίρεση με το δύο (πάντα μέχρι το 10), μετά με το 3, με το 4 κ.ο.κ. Στη συνέχεια έρχονταν σε επαφή με τη γραπτή αριθμητική, τα παιδιά γνώριζαν τους 9 αραβικούς χαρακτήρες και τους έγραφαν ως από μνήμης εργασία. Με τον ίδιο τρόπο διδάσκονταν τη γραπτή αρίθμηση και τις 4 πράξεις από το 1-20 σε απλά προβλήματα. Στο τέλος του πρώτου έτους έδειχνε ο δάσκαλος και την ένωση των ίσων μερών ενός αντικειμένου π.χ. μισό μήλο και μισό μήλο μας κάνει ένα μήλο, για να εισάγει την έννοια του κλάσματος σε μικρή ηλικία.

Στη Β' τάξη οι μαθητές γνώριζαν τους αριθμούς μέχρι το 100. Αρχικά ασκούνταν στην αντίληψη της έννοιας της δεκάδας και στην αρίθμηση ανά 10. Έπειτα στην πρόσθεση, στην αφαίρεση, στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση χωρίς υπόλοιπο από το 1-100 και με το νου και γραπτά. Πρώτα ασκούνταν από το 20 και μετά στην πρόσθεση του ένα (1) και με το νου και γραπτά, λέγοντες και γράφοντες 10+1=11, 22+1=23, μέχρι το 100. Μετά με τον ίδιο τρόπο ασκούνταν στην πρόσθεση με το 2 λέγοντες και γράφοντες, π.χ. 24+2=26, 26+2=28 κλπ. Πάντα με τη χρήση αριθμητηρίου κατά τη διδασκαλία. Έπειτα ασκούνταν να λένε οι μαθητές αυτές τις πράξεις από μνήμης έχοντας στο νου τους αντικείμενα. Κύριο μέλημα του δασκάλου ήταν, από την αρχή της χρονιάς, να μην επαναλαμβάνουν μηχανικά οι μαθητές τους αριθμούς, χωρίς να έχουν στο νου τους πράγματα. Έπειτα ασκούνταν στην πρόσθεση μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών ώστε να εθιστεί η μνήμη στην χρήση των αριθμών, π.χ. 1 και 2 κάνει 3, 3 και 2 κάνει 5, 5 και 2 κάνει 7 κτλ.

Στην αφαίρεση πρώτα ασκούνταν στις απλές αφαιρέσεις και μετά στις πολυπλοκότερες. Πρώτα ασκούνταν λέγοντες και βλέποντες το αριθμητήριο και μετά γράφοντας με κανονική σειρά την αφαίρεση της μονάδας από το 100 μέχρι το 1, δηλαδή 100-1=99, 99-1=98, 98-1=97 κ.ο.κ. Μετά ασκούνταν στην αφαίρεση με το 2 από το 100 μέχρι το 0, δηλαδή 100-2=98, 98-2=96 κ.ο.κ., στην αφαίρεση του 4 από το 100, το 99, το 98 και το 97 (τέσσερεις σειρές), μετά τους υπόλοιπους αριθμούς των μονάδων κατ' ισάριθμους σειρές, δηλαδή για την αφαίρεση του 7 ασκούνταν 7 σειρές, δηλαδή αφαιρούν 7 από το 100, το 99,το 98, το 97, το 96, το 95 και το 94. Τέλος, μπορούσε το παιδί να ασκήσει τη μνήμη στην αφαίρεση μέσω της εκμάθησης της προπαιδείας της αφαιρέσεως (αλλά αυτό γινόταν αφού ασκηθεί να νοεί ευχερώς την αφαίρεση κατά τα λεγόμενα). Και ο πολλαπλασιασμός κατά αυτόν τον τρόπο διδασκόταν σε σειρές πολλαπλασιασμού των απλούστερων πρώτων αριθμών και αργότερα συνθετότερων. Αρχικά, οι μαθητές ασκούνταν να βλέπουν και να γράφουν τον πολλαπλασιασμό του 1, του 2, του 3 κ.ο.κ. μέχρι του 10, χωρίς ακόμη να ασκούνται στους νοερούς υπολογισμούς πολλαπλασιασμού.

Στη Γ' τάξη οι μαθητές έρχονταν σε επαφή με τους αριθμούς μέχρι το 1000. Στις κατά νου πράξεις υποστηρίζονταν ότι πάντα οι αριθμοί χρειάζονται να είναι εφαρμοσμένοι σε γνωστά πράγματα ώστε οι σχέσεις να νοούνται ευκρινώς. Κατά τη διδασκαλία της κατά νου αριθμητικής ήταν δέον να καταβάλλεται μεγάλη προσοχή και επιμέλεια από το δάσκαλο ώστε να ασκούνται από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες δεκάδες. Ασκούνταν λίγο στην κατά νου διαίρεση διψήφιων δια μονοψήφιων αριθμών, όπως και στην κατά νου πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό διψήφιων αριθμών.

Από το πρώτο έτος διδασκαλίας της διαίρεσης, ήταν ανάγκη οι μαθητές να ασκούνται παράλληλα με τον πολλαπλασιασμό π.χ. 4 παιδιά έχουν 12 μήλα, πόσα θα πάρει ο καθένας; 4 παιδιά έχουν 3 μήλα ο καθένας, τα βάζουν μέσα σε ένα καλάθι, πόσα μήλα έχει στο καλάθι; (παράλληλη εξάσκηση). Μετά από πολλά παραδείγματα ασκούνταν προφορικά και γραπτά στη διαίρεση των αριθμών μέχρι το 20 (και με υπόλοιπο) π.χ. 8:2=4, 2*4=8 / 9:2=4 και μένει 1, 2*4+1=9. Στη συνέχεια ασκούνταν στη διαίρεση με αριθμούς από το 20-100.

Στη Δ' τάξη οι μαθητές παρατηρήθηκε ότι έπαυαν να κάνουν νοερούς υπολογισμούς και ασκούνταν περισσότερο στους γραπτούς υπολογισμούς και στις τέσσερις πράξεις. Εξασκούνταν στην πρόσθεση διψήφιων, μετά τριψήφιων και από τα απλούστερα προβλήματα στα συνθετότερα, στην αφαίρεση διψήφιων από διψήφιους.

Στον πολλαπλασιασμό έκαναν πολύ καλή εξάσκηση στον κατά διανοίαν πολλαπλασιασμό στην Γ' τάξη και είχε την εξής μορφή: 45*5: 40*5=200, 5*5=25, 200+25=225. Στη Δ' τάξη ασκούνταν κυρίως γραπτώς σε συνθετότερα προβλήματα (πολυψήφιοι επί μονοψήφιο). Η διαίρεση διδάσκονταν με ανάλυση, ακρίβεια και λεπτομέρεια των πράξεων για να εκτελεί τις πράξεις ο μαθητής μετά λόγου και συλλογιστικής ενέργειας. Γι' αυτό χρησιμοποιούσαν κυρίως τη διδασκαλία της γραπτής διαίρεσης, σταδιακά, για προβλήματα που περιείχαν αριθμούς που όλα τα ψηφία διαιρούνται με το ψηφίο του διαιρέτη, για προβλήματα που δε διαιρούνται τα ψηφία πάντα με τα ψηφία του διαιρέτη (υπήρχε και υπόλοιπο), για προβλήματα με διψήφιο διαιρέτη και στο τέλος για οποιαδήποτε προβλήματα διαίρεσης και με υπόλοιπο.

Στην τελευταία τάξη του Δημοτικού Σχολείου οι μαθητές έκαναν πρακτική άσκηση στην κατά διάνοια ανάλυση των συνήθων νομισμάτων, μέτρων και σταθμών. Π.χ «Εν τάλληρον ισπανικόν έχει εξ δραχμάς, εκάστη δραχμή 100 λεπτά, επομένως αι 6 δραχμαί 600 λεπτά. Ωσαύτως 5 οκάδες περιέχουσι 2000 δράμια, πόσαι οκάδες γίνονται;»

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Πετρίδη «Στοιχειώδεις πρακτικαί οδηγίαι της διδασκαλίας των μαθημάτων εν τοις δημοτικοίς σχολείοις», βλέπουμε ότι η χρήση νοερών υπολογισμών γίνονταν περισσότερο στις μικρότερες τάξεις, ενώ στη Δ' τάξη δίνονταν περισσότερη έμφαση στους γραπτούς υπολογισμούς. Επιπλέον, δεν παρατηρήθηκε καμία αναφορά στις εκτιμήσεις, ούτε και σε νοερούς υπολογισμούς κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών. Εντύπωση προκαλεί η αναφορά της κατά διάνοιας ανάλυσης νομισμάτων, μέτρων και σταθμών στην τελευταία τάξη του δημοτικού. Επιπρόσθετα, ακόμη και κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών δεν παρατηρήθηκε χρήση στρατηγικών. Τέλος, την περίοδο αυτή και σύμφωνα με τις οδηγίες του Αναλυτικού Προγράμματος, ο δάσκαλος δεν ρωτούσε τον τρόπο σκέψης των μαθητών (μεταγνωστική ικανότητα), παρά μόνο τον λόγο που επέλεγε ο μαθητής την κάθε πράξη για να λύσει κάποιο πρόβλημα.

3.4.3 Αναλυτικό Πρόγραμμα Χ. Παπαμάρκου

Το **1894** συντάχθηκε και δημοσιεύτηκε νέο, βελτιωμένο Αναλυτικό Πρόγραμμα από τον παιδαγωγό Χ. Παπαμάρκο, ο οποίος είχε επιστρέψει από την Ευρώπη. Στο νέο αυτό Πρόγραμμα για τις τρεις πρώτες τάξεις του τετρατάξιου Δημοτικού Σχολείου διαχωρίζεται η έννοια της «από στόματος λογιστικής» και της «γραπτής λογιστικής», δηλαδή διαχωρίζεται η έννοια των νοερών υπολογισμών από την έννοια των γραπτών υπολογισμών. Ίσως να είναι το πιο ξεκάθαρο και οργανωμένο αναλυτικό πρόγραμμα όλων των εποχών όσον αφορά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.

Η ώρες του μαθήματος της Αριθμητικής στο ωρολόγιο πρόγραμμα μειώθηκαν σημαντικά, καθώς προτείνονταν να είναι 3 ώρες εβδομαδιαία.

Μαθήματα	Α'	Β'	Γ'	Δ'
Θρησκευτικά	2	2	2	3
Ἑλληνικά	12	10	10	10.
Ἀριθμητική	3	3	3	3
Ἱστορία	—	—	2	2
Γεωγραφία	—	2	2	2
Φυσική ἱστορία	—	—	2	2
Ὠδική	3	3	3	2
Ἰχνογραφία	—	—	2	2
Καλλιγραφία	—	2	2	2
Γυμναστική	2	2	2	2
Χειροτεχνήματα	4	4	4	4
Ἄθροισμα ὡρῶν . . .	26	28	34	34

Εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα

Η κατανομή της ύλης στις τέσσερις τάξεις προσδιορίζεται με μεγαλύτερη σαφήνεια και ακρίβεια. Αναλυτικότερα για κάθε τάξη παρατίθεται παρακάτω η ύλη.

<u>Α’ τάξις</u>: «Παντοδαπαί ασκήσεις επί των αριθμών 1-10 και 10-20».

Από στόματος λογιστική: Αισθητοποίηση της αξίας των αριθμών. Ανάλυσις και σύνθεσις αυτών. Αρίθμησης ανιούσα και κατιούσα. Αρίθμησης προστιθέμενων εις έκαστον προηγούμενον αριθμόν ή και αφαιρούμενον απ’ αυτού του 1, 2 και 3. Άσκησις επί των τακτικών αριθμητικών. Ανάλυσις εκάστου διδομένου αριθμού και σχηματισμός αυτού δια προσθέσεως και αφαιρέσεως άλλων αριθμών. Σχηματισμός αριθμών δια πολλαπλασιασμού και διαιρέσεως. Προβλήματα του κοινού βίου εντός της περιοχής των αριθμών αυτών.

Γραπτή λογιστική: Εκμάθησις της γραφής των αριθμών από του 1 μέχρι του 20. Γραφή των σημείων των τεσσάρων θεμελιωδών πράξεων. Άσκησις εις την εκτέλεσιν των τεσσάρων πράξεων επί των ειρημένων αριθμών.

<u>Β τάξις</u>: «Παντοδαπαί ασκήσεις επί των αριθμών 1-100.

Από στόματος λογιστική: Αισθητοποίησις της έννοιας της δεκάδος. Αρίθμησις κατά δεκάδας. Αρίθμησις από του 1-100 κατά μονάδας. Αρίθμησις προστιθεμένων εις έκαστον προηγούμενον αριθμόν ή και αφαιρούμενων απ’ αυτού των αριθμών 2,3,4,5,6,7,8,9, ιδίως δε του 7 και του 8. Ανάλυσις αριθμών διψηφίων εις δεκάδας και μονάδας και ανασύνθεσις αυτών. Πρόσθεσις και αφαίρεσις διψηφίων αριθμών. Πρόσθεσις τριών μονοψήφιων, δύο μονοψήφιων και ενός διψήφιου, δύο διψηφίων και ενός μονοψηφίου και τριών διψηφίων αριθμών. Αφαίρεσις μονοψηφίου από διψηφίου και διψηφίου από διψηφίου αριθμού. Πολλαπλασιασμός μονοψηφίου επί μονοψήφιον, διψηφίου επί μονοψήφιον. Διαίρεσις διψηφίων αριθμών δια μονοψηφίου. Προβλήματα πολλαπλασιασμού. Τελεία άσκησις εις το ευρίσκειν πόσον τιμάται η μονάς πράγματος τινός, όταν γνώσκει πόσον τιμώνται πολλαί μονάδες του αυτού πράγματος, εις το ευρίσκειν πόσον διάστημα διανύει κινητόν τι ομαλώς κινούμενων εις μιαν χρονικήν μονάδα, όταν γινώσκει πόσον διανύει το αυτό κινητόν εις πολλάς μονάδας και εις τα παρόμοια.

Γραπτή λογιστική: Γραφή των αριθμών από του 1-100. Εκτέλεσις επί των ειρημένων αριθμών των τεσσάρων θεμελιωδών πράξεων δια των σημείων αυτών.

<u>Γ’ τάξη:</u> Αι τέσσαρες πράξεις των ακεραίων επί των αριθμών 1-1000 και πέραν αυτών. Τα απλούστατα εκ των κλασμάτων. Απλή μέθοδος των τριών.

Από στόματος λογιστική: Ονομασία και εκμάθησις των αριθμών από του 1-1000. Έννοια της εκατοντάδος. Αντιπαραβολή της εκατοντάδος προς την δεκάδα. Η έννοια της χιλιάδος. Αντιπαραβολή αυτής προς την εκατοντάδα και δεκάδα. Η διάφορος αξία των ψηφίων κατά την διάφορον προς άλληλας θέσιν αυτών. Πρόσθεσις και αφαίρεσις αριθμών διψηφίων. Πολλαπλασιασμός διψηφίου επί μονοψήφιον. Διαίρεσις αριθμών διψηφίων δια μονοψηφίου. Προβλήματα επί των νομισμάτων, των σταθμών, των μέτρων και του χρόνου. Προβλήματα της απλής μεθόδου των τριών δια της αναγωγής στη μονάδα. Ορισμοί των τεσσάρων θεμελιωδών πράξεων. Ονομασίαι των αριθμών, εφ’ ων εκτελούνται αι πράξεις και ονομασίαι των εξαγομένων των πράξεων. Τελεία διαίρεσις, ατελής διαίρεσις. Τα ευκολώτατα των κλασμάτων (το ήμισυ και το τέταρτον).

Γραπτή λογιστική: Γραφή των αριθμών από 1-1000 και πέραν αυτών. Αι τέσσαρες θεμελιώδεις πράξεις επί αριθμών πολυψηφίων. Τροπή μονάδων του παρ’ ημίν εν χρήσει μετρικού συστήματος από μεγαλητέρον εις μικροτέρας και τανάπαλιν. Βάσανοι των τεσσάρων πράξεων. Προβλήματα.

<u>Δ’ τάξη:</u> Αι τέσσαρες πράξεις των ακεραίων επί αριθμών πολυψήφιων. Κλασματικοί, δεκαδικοί και συμμιγείς αριθμοί. (Δεν διαχωρίζει δια στόματος ή γραπτή εδώ)

Ασκήσεις δια πολυψηφίων αριθμών επί των τεσσάρων θεμελιωδών πράξεων. Πολλαπλασιασμός και διαίρεσις με την μονάδα ακολουθουμένην υπό μηδενικών. Συντομίαι εν τω πολλαπλασιασμώ και τη διαιρέσει. Κλασματική μονάς. Κλάσμα ίσον τη ακέραια μονάδι, κλάσμα μικρότερον και μεγαλήτερον της ακέραιας μονάδος. Τροπή κλάσματος εις ισοδύναμον δεκαδικόν και συμμιγή. Τι καλείται μικτός. Τροπή ακεραίου και μικτού εις κλασματικόν. Εξαγωγή των ακεραίων μονάδων των εμπεριεχομένων εν κλάσματι μείζονι της μονάδος. Ιδιότητες των κλασμάτων. Απλοποίησις των κλασμάτων. Δεκαδική μονάς. Η έννοια αυτής. Γραφή και απαγγελία των δεκαδικών αριθμών. Πως γράφονται οι δεκαδικοί αριθμοί ως κοινά κλάσματα. Ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών. Τροπή ετερώνυμων δεκαδικών κλασμάτων εις ομώνυμα. Αι τέσσερεις θεμελιώδεις πράξεις επί των δεκαδικών κλασμάτων. Συμμιγείς αριθμοί. Η έννοια αυτών. Πρόσθεσις και αφαίρεσις των συμμιγών του χρόνου και του βάρους.

Παρατηρούμε στο παραπάνω πρόγραμμα του 1894 ότι γίνεται διαχωρισμός μεταξύ νοερών υπολογισμών (από στόματος λογιστική) και γραπτών υπολογισμών (γραπτή λογιστική). Στους νοερούς υπολογισμούς γίνεται αναφορά στην προφορική αρίθμηση, ανιούσα και κατιούσα, κατά 1, 2 και 3 στην Α’ και 7, 8 και 9 στη Β’. Επιπλέον, αναφέρεται η ανάλυση και η σύνθεση των αριθμών. Παρατηρούμε βεβαίως στο πρόγραμμα αυτό πόσο πολύ προχωρούν στην ύλη των πράξεων. Στη Β’ τάξη, για παράδειγμα, διδάσκονται και οι τέσσερις πράξεις (Λεμονίδης, 2013).

Σε σχετικό βιβλίο της Β’ Δημοτικού, με τίτλο «Συλλογή αριθμητικών προβλημάτων προς χρήσιν των Δημοτικών Σχολείων» του συγγραφέα Σακελλαρόπουλου, εγκεκριμένο από την Κυβέρνηση της εποχής, από τον Υπουργό Δ. Πετρίδη, εντοπίστηκαν δραστηριότητες οι οποίες ακολουθούσαν το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Β’ τάξης.

20. Πρόσθεσε προφορικῶς

α 2 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 12, 14, 24, 36, 42, 46, 64, 67, 55, 77, 93.
β 3 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 15, 22, 33, 45, 56, 64, 71, 66, 85, 93, 95.
γ 4 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 16, 24, 42, 45, 84, 92, 94, 71, 25, 32, 45.
δ 6 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 12, 22, 33, 91, 82, 71, 63, 88, 83, 43.
ε 8 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 31, 52, 70, 81, 82, 61, 65, 39, 85, 57.
ζ 7 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 19, 41, 63, 54, 27, 32. 44, 75, 61, 88.
η 5 εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 23, 37, 46, 82, 39. 49, 55, 64, 87.

21. Ἐκτέλεσε τὰς αὐτὰς προσθέσεις ἐγγράφως.

22. Ἀφαίρεσε προφορικῶς

α 2 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 68, 63, 77, 75, 84, 92, 38, 44, 28.
β 4 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 68, 85, 94, 96, 66, 75, 37, 45, 54.
γ 5 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 66, 55, 47, 38, 99, 76, 87, 35, 28
δ 3 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 83, 94, 75, 86, 66. 45, 37, 52, 59.
ε 6 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 66, 77, 88, 99, 38, 47, 26, 39, 58,
ζ 8 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 48, 59, 60, 78, 75, 69, 44, 92, 81.
η 7 ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 77, 88, 90, 67, 43, 51, 74, 39, 85.

23. Ἐκτέλεσε τὰς αὐτὰς ἀφαιρέσεις ἐγγράφως.

63. Ἓν παιδίον ἔδωκεν εἰς τὸ ταχυδρομεῖον 3 ἐπιστολὰς καὶ 4 δέματα μὲ ἐφημερίδας· δι' ἑκάστην ἐπιστολὴν πρέπει νὰ πληρώσῃ 20 λεπτὰ καὶ δι' ἕκαστον δέμα 5 λεπτά· πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ, ἂν δώσῃ μίαν δραχμήν ;

64. Εἰς τὸ δωμάτιον τῆς παραδόσεως ὑπάρχουσιν 8 θρανία· πόσοι θὰ εἶναι οἱ μαθηταί, ἂν εἰς ἕκαστον θρανίον κάθηνται 7, πόσοι, ἂν εἰς ἕκαστον θρανίον κάθηνται 5, καὶ πόσοι ἂν εἰς ἕκαστον θρανίον κάθηνται 8 μαθηταί ;

65. Χωρικὴ ἐπώλησε 18 αὐγὰ πρὸς 5 λεπτὰ τὸ ἓν καὶ ἠγόρασε 2 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 35 λεπτὰ τὸν πῆχυν· πόσα λεπτὰ ἔμειναν εἰς αὐτήν ;

66. Μαθητὴς ἠγόρασεν ἓν τετράδιον ἀντὶ 10 λεπτῶν καὶ 8 ξενάκια ἀντὶ 2 λεπτῶν τὸ ἕν· πόσον θὰ πληρώσῃ ;

28. Ἐκτέλεσε τὰς ἑπομένας προσθέσεις·

1 α	1 β	1 γ	2 α	2 β	2 γ
9+3	19+7	49+5	8+3	8+5	48+5
19+5	49+8	79+7	18+7	18+7	48+3
29+6	29+6	89+4	38+9	38+9	48+9
39+7	79+5	39+4	48+4	48+4	38+7
29+8	89+7	59+8	56+6	56+6	28+7
49+7	89+6	69+5	68+7	68+7	68+6

29. Ἐκτέλεσε τὰς ἑπομένας ἀφαιρέσεις·

1 α	1 β	1 γ	2 α	2 β	2 γ
31—4	61—5	41—5	42—9	92—8	72—6
21—5	41—8	31—8	32—9	82—6	72—9
41—6	81—7	61—7	22—9	72—5	82—7
91—7	71—5	91—9	52—7	52—6	52—3
81—8	61—7	61—4	62—8	62—4	42—5

54. Συμπλήρωσε τοὺς ἑπομένους πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τὰ παραδείγματα τῆς πρώτης σειρᾶς.

3× 8=6×4	5×6=10×3	4×3=6×2
3× 8=4× ;	5×6= 3× ;	4×3=2× ;
4×10=8×	9×4= 6×	7×9=9×
6× 5=3×	5×2=10×	3×3=9×

55. Κατὰ τὰ παραδείγματα τῆς πρώτης σειρᾶς συμπλήρωσε καὶ τὰ ἑπόμενα.

27=4×6+3	38=6×6+2	43=7×6+1
35=8×4+3	41=8×5+	70=8×8+
39= ;×6+3	75= ;×9+3	68= ;×8+4

59. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις·

1	2	3	4	5	6
13 : 4	37 : 7	26 : 3	26 : 5	52 : 7	47 : 9
21 : 5	66 : 9	35 : 4	35 : 5	59 : 7	35 : 9
25 : 6	59 : 8	44 : 5	36 : 5	69 : 8	43 : 9
29 : 7	75 : 9	55 : 7	39 : 6	76 : 8	49 : 7
30 : 9	49 : 5	79 : 8	45 : 6	46 : 7	61 : 7
33 : 8	26 : 6	66 : 7	49 : 6	67 : 8	64 : 8
49 : 9	65 : 7	72 : 7	43 : 9	57 : 8	65 : 7

Ασκήσεις νοερών υπολογισμών στις τέσσερεις πράξεις και προβλήματα πολλαπλασιασμού (Σακελλαρόπουλος)

Στο προκείμενο Αναλυτικό Πρόγραμμα η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών επιδιώκεται σε μεγάλο βαθμό σε όλες τις τάξεις, αλλά δεν αναφέρεται αν προηγούνται οι νοεροί υπολογισμοί ή οι γραπτοί. Υποθέτουμε ότι πρώτα διδάσκονται οι νοεροί σύμφωνα με την κατανομή της διδακτέας ύλης. Νοερούς υπολογισμούς συναντάμε σε φυσικούς αριθμούς σε όλες τις τάξεις, σε κλάσματα στη Γ' και Δ' τάξη και σε δεκαδικούς μόνο στη Δ' τάξη (εδώ δε διευκρινίζονται ακριβώς τι θα διδαχθεί δια στόματος και τι γραπτά). Ωστόσο δεν παρατηρήθηκε διδασκαλία των εκτιμήσεων, ούτε και η χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Επίσης δεν αναφέρεται πουθενά αν ο δάσκαλος ζητούσε την περίοδο εκείνη από τους μαθητές να αναλύσουν τον τρόπο σκέψης που χρησιμοποιούσαν για να επιλύσουν τις διάφορες πράξεις και προβλήματα (μεταγνωστική ικανότητα).

Την περίοδο αυτή χρησιμοποιούνταν η Ερβαρτιανή μέθοδος διδασκαλίας. Ο εκπαιδευτικός επιδίωκε τη βαθιά κατανόηση της ύλης από τους μαθητές και παράλληλα την προαγωγή της σωστής αγωγής (ηθικοποίηση ατόμων). Ωστόσο πολλές φορές δεν κατάφερναν οι μαθητές να ασχοληθούν με μεθόδους έρευνας, ούτε να προάγουν την αυτενέργειά τους, με αποτέλεσμα να γίνονται παθητικοί δέκτες της γνώσης. Επίσης, εξαιτίας της λανθασμένης εφαρμογής της μεθόδου, το σύστημα γινόταν δασκαλοκεντρικό, ενώ έπρεπε να είναι παιδοκεντρικό για να συνάδει με την αρχή της αυτενέργειας και με τη βούληση να είναι σε κεντρική θέση. Λόγω ελλιπών στοιχείων και μη αναφοράς στο αναλυτικό πρόγραμμα του 1894 δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τους στόχους των μαθημάτων, πόσο μάλλον τους λόγους που προάγονταν οι νοεροί υπολογισμοί.

3.4.4 Συμπεράσματα πρώτης περιόδου

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι την πρώτη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών, η οποία εκτείνεται από τις πρώτες προσπάθειες οργάνωσης του ελληνικού κράτους μετά την απελευθέρωσή του (1821) μέχρι το 1912, υπήρχε έντονη χρήση των νοερών υπολογισμών στην ελληνική εκπαίδευση. Είδαμε ότι γίνεται διαχωρισμός μεταξύ δυο ειδών της αριθμητικής, της εγγράφου και της αγράφου. Τονίζεται η μορφωτική αξία της αγράφου αριθμητικής με την επισήμανση ότι ασκεί το μυαλό και την κριτική σκέψη, ασκεί επίσης τη δυνατότητα διατύπωσης νοημάτων στον προφορικό λόγο σωστά και καθαρά. Επισημαίνεται, επίσης, η χρησιμότητα των νοερών υπολογισμών στις καθημερινές συναλλαγές και γενικά σε πολλές δραστηριότητες της καθημερινότητας (Λεμονίδης, 2013).

Η εκπαίδευση στην Ελλάδα ξεκίνησε εφαρμόζοντας την αλληλοδιδακτική μέθοδο διδασκαλίας. Τα επόμενα χρόνια, παρατηρώντας τα μειονεκτήματά της, αλλά και εξαιτίας της ανάπτυξης των επιστημών, η μέθοδος θεωρητικά άλλαξε και επικράτησε η Ερβαρτιανή ή συνδιδακτική μέχρι το τέλος της πρώτης περιόδου (από το 1880). Ωστόσο, αν και επιδιώκονταν κυρίως η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, η παρατηρητικότητα και η αυτενέργεια των μαθητών, λόγω της λανθασμένης εφαρμογής της, έγινε δασκαλοκεντρική, κάνοντας παθητικούς δέκτες της γνώσης τους μαθητές.

Δεν μπορούμε να ξέρουμε, βέβαια, πολλές λεπτομέρειες για τις διδακτικές μεθόδους και γενικά τον τρόπο που διδάσκονταν οι νοεροί υπολογισμοί την εποχή εκείνη. Οι συνθήκες ήταν πολύ διαφορετικές, δεν υπήρχαν σχολικά βιβλία, αναλυτικά προγράμματα με μεθοδολογικές οδηγίες καθώς και κατάλληλα εκπαιδευμένοι δάσκαλοι. (Λεμονίδης, 2013).

Στα Αναλυτικά Προγράμματα και στα βιβλία που χρησιμοποιούνταν ανά διαστήματα από τους εκπαιδευτικούς, διακρίνονταν οι νοεροί υπολογισμοί από τους γραπτούς αλγόριθμους. Στόχος της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών την πρώτη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών ήταν η πραγματοποίηση των πράξεων.

Αρχικά οι μαθητές υποχρεούνταν να μαθαίνουν την ύλη μέσω της αποστήθισης (από τους πίνακες πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης), ενώ αργότερα (με το Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1980) έπρεπε η διδασκαλία να μη στοχεύει στην αποστήθιση, αλλά μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να οδηγηθούν στο αποτέλεσμα οι μαθητές.

Οι νοεροί υπολογισμοί προτείνονταν καθ’ όλη τη διάρκεια της πρώτης περιόδου να διδάσκονται από τις μικρές τάξεις (από την Α’ δημοτικού) μέχρι το τέλος του Δημοτικού, με μόνη εξαίρεση το Αναλυτικό Πρόγραμμα του Πετρίδη (1880) στο οποίο ναι μεν εισάγονται στην Α’ δημοτικού, αλλά στη Δ’ Δημοτικού μειώνεται αισθητά η διδασκαλία τους με τους γραπτούς αλγόριθμους να επικρατούν.

Στα αναλυτικά προγράμματα του Ι. Κοκκώνη (1830) και του Δ. Πετρίδη (1880) παρατηρήθηκε ότι, κατά τη διδασκαλία, προηγούνταν οι νοεροί υπολογισμοί από τους αλγόριθμους, ενώ στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Παπαμάρκου (1894) δεν ήταν ξεκάθαρο. Ακόμη την περίοδο αυτή συναντήσαμε νοερούς υπολογισμούς κυρίως σε φυσικούς αριθμούς, με εξαίρεση το Αναλυτικό Πρόγραμμα του Παπαμάρκου (1984), όπου συναντήσαμε νοερούς υπολογισμούς κλασμάτων στη Γ’ και Δ’ τάξη και νοερούς υπολογισμούς δεκαδικών αριθμών στη Δ’ τάξη.

Στη διδασκαλία δε διδάσκονταν και δε χρησιμοποιούνταν οι στρατηγικές των νοερών υπολογισμών καθ’ όλη την πρώτη περίοδο. Επιπλέον, δε ρωτούσε ο εκπαιδευτικός τον τρόπο σκέψης των μαθητών για την εύρεση μιας απάντησης, παρά μόνο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του

Πετρίδη (1980) προτείνονταν ο εκπαιδευτικός να ρωτάει το λόγο που επέλεξε ο μαθητής την πράξη.

Την περίοδο αυτή δεν παρατηρήθηκε καμία αναφορά στις εκτιμήσεις.

3.5 Δεύτερη περίοδος

Την περίοδο αυτή συναντάμε τα Αναλυτικά Προγράμματα του 1913, του 1969, του 1973 και του 1977, με αυτό του 1973 να είναι απλά μια αναθεωρημένη και εμπλουτισμένη έκδοση του Αναλυτικού Προγράμματος του 1969.

Το ενδιαφέρον των μεταρρυθμίσεων που συμβαίνουν αυτή την εποχή στην Ελληνική Εκπαίδευση στρέφεται κυρίως στο γλωσσικό πρόβλημα, αφού έχουν ήδη αρχίσει έντονες διαμάχες μεταξύ των δημοτικιστών και των καθαρευουσιάνων (Βαϊνάς, 1997).

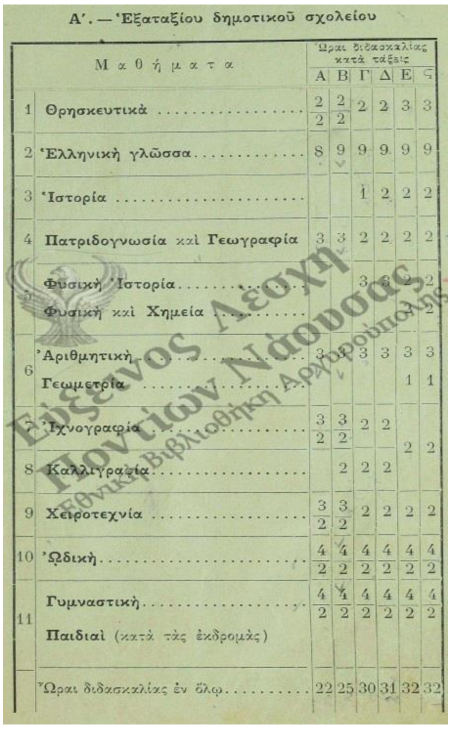
Τα σχολεία πλέον με το Διάταγμα της 1 Σεπτεμβρίου 1913 και με υπουργό Παιδείας τον Ι. Δ. Τσιριμώκο, ορίζονται ως εξατάξια, δηλαδή πραγματοποιείται η «επέκταση» του Δημοτικού Σχολείου από τα τέσσερα στα έξι χρόνια και εκδίδεται ωρολόγιο πρόγραμμα εξατάξιου Δημοτικού Σχολείου, από την Α’ τάξη μέχρι την Στ’ τάξη.

3.5.1 Αναλυτικό πρόγραμμα 1913

Το μαθηματικό Αναλυτικό Πρόγραμμα για το Δημοτικό Σχολείο του 1913, που γράφηκε από το Δ. Λάμψα, θεωρείται από τα αντιπροσωπευτικότερα για τη Δημοτική Εκπαίδευση της περιόδου των παραδοσιακών Μαθηματικών. Αναφέρεται κυρίως στο «τι» της διδασκαλίας και υποβαθμίζουν το «πως». Είναι μια λίστα περιεχομένων, παρέχουν κάποιες συνοπτικές και αόριστα διατυπωμένες μεθοδολογικές και διδακτικές οδηγίες, από τις οποίες δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τον τρόπο με τον οποίο διδάσκονταν οι νοεροί υπολογισμοί (Αποστολόπουλος, 1995). Στο Πρόγραμμα αυτό οι νοεροί υπολογισμοί περιορίζονται, ενώ παρατηρείται ότι η σχολική μαθηματική εκπαίδευση στο Δημοτικό είναι περισσότερο αλγοριθμική. Δεν γίνεται πλέον διαχωρισμός μεταξύ νοερών υπολογισμών και γραπτών υπολογισμών, όπως στα προηγούμενα προγράμματα. Τα ίδια χαρακτηριστικά έχουν και τα επόμενα δυο Αναλυτικά Προγράμματα, αυτά του 1969 και του 1977.

Κατά το Λάμψα, κύριος σκοπός του μαθήματος των Μαθηματικών είναι η καλλιέργεια των πνευματικών ικανοτήτων του παιδιού. Με τη διδασκαλία και την κατανόηση των αφηρημένων μαθηματικών γνώσεων είναι δυνατόν να αφυπνισθεί το παιδαγωγικό ενδιαφέρον του παιδιού. Οι πρακτικοί σκοποί του μαθήματος των Μαθηματικών είναι λιγότερο σημαντικοί · κατά το Λάμψα, αποτελούν σκοπούς δεύτερης κατηγορίας (Βαϊνάς, 1997).

Το ωρολόγιο πρόγραμμα για το εξατάξιο πλέον Δημοτικό Σχολείο ήταν:



Α΄. — Ἑξαταξίου δημοτικοῦ σχολείου

	Μαθήματα	Ὧραι διδασκαλίας κατὰ τάξεις: Α	Β	Γ	Δ	Ε	ς
1	Θρησκευτικὰ	2/2	2/2	2	2	3	3
2	Ἑλληνικὴ γλῶσσα	8	9	9	9	9	9
3	Ἱστορία			1	2	2	2
4	Πατριδογνωσία καὶ Γεωγραφία	3	3	2	2	2	2
5	Φυσικὴ Ἱστορία			3	3	2	2
	Φυσικὴ καὶ Χημεία					2	2
6	Ἀριθμητικὴ	3	3	3	3	3	3
	Γεωμετρία					1	1
7	Ἰχνογραφία	3/2	3/2	2	2	2	2
8	Καλλιγραφία		2	2	2		
9	Χειροτεχνία	3/2	3/2	2	2	2	2
10	Ὠδικὴ	4/2	4/2	4/2	4/2	4/2	4/2
11	Γυμναστικὴ	4/2	4/2	4/2	4/2	4/2	4/2
	Παιδιαὶ (κατὰ τὰς ἐκδρομὰς)						
	Ὧραι διδασκαλίας ἐν ὅλῳ	22	25	30	31	32	32

Η ύλη των Μαθηματικών του Δημοτικού παρουσίαζε την εξής κατανομή:

Στην Α΄ τάξη διδάσκονταν οι αριθμοί 1-20 (σε ομάδες 1-5/1-10/1-20), αισθητοποίηση των αριθμών, αρίθμηση ανιούσα, αρίθμηση κατιούσα, ανάλυση αριθμών, σύγκριση και διαφορά αυτών, πρόσθεση μονοψήφιων των οποίων το άθροισμα υπερβαίνει το 10, με ανάλυση του δεύτερου προσθετέου σε δυο αριθμούς ώστε να γίνεται πάτημα στη δεκάδα, πχ 8+7=8+2+5, αφαίρεση από διψήφιο μονοψήφιο αριθμό ώστε η διαφορά να είναι μονοψήφιος, άσκηση προς ανάλυση του αφαιρετέου σε δυο αριθμούς, ώστε να γίνεται πάτημα στη δεκάδα, πχ 15-8=15-5-3, πολλαπλασιασμός μονοψήφιου αριθμού επί 2,3,4,5 και 6, του οποίου το γινόμενο δεν υπερβαίνει το 20, Διαίρεση διψήφιου αριθμού ο οποίος δεν υπερβαίνει το 20 δια του 2,3,4,5,6. Απλά προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεταξύ αυτών των αριθμών, **λύση προβλημάτων και των τεσσάρων πράξεων προφορικώς**, εύρεση του μισού των αριθμών 11,13,15,17,19, γραφή των αριθμών, λύση προβλημάτων γραπτώς, το δεκάλεπτο, το πεντάλεπτο. Το λεπτό, το μέτρο, το υποδεκάμετρο/το εικοσάλεπτο, το δεκάλεπτο, το πεντάλεπτο, διδασκαλία των σημείων των τεσσάρων πράξεων/ομοίως

Στη Β΄ τάξη διδάσκονταν οι αριθμοί 1-100 ο σχηματισμός της πρώτης εκατοντάδας πρώτα με δεκάδες και έπειτα με πεντάδες. Αισθητοποίηση των αριθμών 30,40,50,60,κλπ δια δεκάδων και πεντάδων. Αρίθμηση ανιούσα και κατιούσα κατά δεκάδες και πεντάδες. Η Τρίτη δεκάδα: Αρίθμηση από το 21-30 ανιούσα και κατιούσα κατά σειράν και δια παραλείψεως εν τω μεταξύ αριθμών, Πρόσθεση και αφαίρεση εντός της δεκάδας αυτής, Πολλαπλασιασμός του 2 και 3 επί τους αριθμούς 1-10, Οι δυνατές πλήρεις διαιρέσεις των αριθμών 20-30 δια των αριθμών 1-10, Γραφή των αριθμών 1-30 και λύσις προβλημάτων γραπτώς. Η τέταρτη δεκάδα και οι επόμενες μέχρι τη δεκάτη όπως παραπάνω. Πρόσθεση αριθμών που έχουν δεκάδες και μονάδες με αριθμό που έχει καθαρές δεκάδες και το αντίστροφο. Πρόσθεση αριθμών που έχουν δεκάδες και μονάδες (15 και 14 = 15+10+4). Ανάλυση των μονάδων του ενός, όταν αυτές με τις μονάδες του άλλου αποτελούν μεγαλύτερο αριθμό από τη δεκάδα σε δύο αριθμούς, ώστε ο άλλος με τις μονάδες του πρώτου αποτελεί δεκάδα ως 17+18=17+10+8=17+10+3+5. Πίνακας του πολλαπλασιασμού. Οι δυνατές πλήρεις διαιρέσεις των αριθμών 1-100 δια των αριθμών 1-10.Λύσεις διαφόρων προβλημάτων και των τεσσάρων πράξεων εντός των αριθμών 1-100. Τα κλάσματα ½, 1/4, 1/5. **Ασκήσεις προφορικαί προς εύρεσιν του ½, του ¼, του 1/5 των αριθμών 1-100.**

Στη Γ' τάξη διδάσκονταν οι αριθμοί 1-1000, ο σχηματισμός της πρώτης χιλιάδας με εκατοντάδες και πεντηκοντάδες. Γραφή και ανάγνωση των αριθμών. Οι πράξεις στη δεύτερη εκατοντάδα: Ανιούσα και κατιούσα αρίθμηση, πρώτα κατά δεκάδες και έπειτα κατά πεντάδες και μονάδες, πρόσθεση και αφαίρεση οποιονδήποτε αριθμών, εύρεση των παραγόντων διαφόρων αριθμών, εντός των αριθμών 100-200, πολλαπλασιασμός αριθμών που δίνουν γινόμενο όχι μεγαλύτερο από το 200 και διαίρεση του 200 και μικρότερων αριθμών πρώτα με μονοψήφιο και έπειτα με διψήφιο αριθμό, **λύσεις διαφόρων προβλημάτων προφορικώς και γραπτώς**. (Αι κατά μέρος πράξεις εν τη Δευτέρα εκατοντάδι… ε)λύσις διαφόρων προβλημάτων προφορικώς και γραπτώς.). Η τρίτη μέχρι τη δέκατη εκατοντάδα ως ανωτέρω. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση αριθμών δια του 10 και 100. Εύρεση των παραγόντων διαφόρων αριθμών εντός των αριθμών 200-1000. Η έννοια του ½,1/4,1/5,1/10. **Ασκήσεις προφορικαί προς εύρεσιν του ½,1/4,1/5,1/10 διαφόρων αριθμών εντός των αριθμών 1-1000.**

Στη Δ΄ τάξη διδάσκονταν οι αριθμοί πάνω από το 1000 και οι μεταξύ τους πράξεις. Έννοια πολυψήφιων αριθμών και γραφή και απαγγελία αυτών. Ανάλυση πολυψήφιου αριθμού (σε ΧΕΜΔ, σε ΧΜ, σε ΕΜ, σε ΔΜ). Οι δεκαδικοί αριθμοί. Απαγγελία και γραφή τους. Μετακινήσεις υποδιαστολής. Προσθήκη μηδενικού προς τα δεξιά του δεκαδικού. Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση δεκαδικών. Οι τέσσερεις πράξεις της αριθμητικής με ακέραιους και δεκαδικούς. Λύσεις διαφόρων προβλημάτων. Ευθεία και αντίστροφη σχέση ποσών. Λύσεις προβλημάτων μέσω της αναγωγής στη μονάδα

Στην Ε' τάξη διδάσκονταν τα κλάσματα. Το ήμισυ, το τέταρτο, το όγδοο, το πέμπτο, το δέκατο κλπ. Αισθητοποίηση αυτών. Σύγκριση κλασματικών μονάδων μεταξύ τους. Τροπή του ακεραίου σε μέρη και αντιστρόφως. Γραφή των κλασμάτων. Όροι κλασμάτων. Κλάσματα ομώνυμα, ετερώνυμα, γνήσια, καταχρηστικά. Πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων. Τροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα και πρόσθεση και αφαίρεση αυτών. Εξαγωγή ακέραιων μονάδων εκ καταχρηστικών κλασμάτων. Πρόσθεση και αφαίρεση μικτών. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων. Τροπή κοινών κλασμάτων σε δεκαδικά και δεκαδικά σε κοινά. Άσκηση των μαθητών σε λύση προβλημάτων ληφθέντα από το κοινωνικό βίο.

Στη ΣΤ' τάξη διδάσκονταν η απλή και σύνθετη μέθοδος των τριών. Λύση προβλημάτων. Χρησιμοποίηση κεφαλαίων. Δάνεια επί τόκο. Εύρεση τόκου ετών, μηνών, ημερών. Εύρεση του επιτοκίου, του κεφαλαίου, του χρόνου. Προβλήματα δανείων τοκοχρεολυτικών. Προεξοφλήσεις δανείων. Μέθοδος της υφαιρέσεως. Εμπορικόν γραμματιον, χρεόγραφον, μετοχή, τοκομερίδιον. Χρησιμοποίηση κεφαλαίων εις το εμπόριων. Συνεταιρισμός. Μέρισμα. Μέθοδος της εταιρείας. Λύση προβλημάτων. Μέθοδος της μίξεως. Λύση προβλημάτων.

Παρατηρείται βάση της διδακτέας ύλης ότι παραμεριζόταν ο υπολογισμός από μνήμης, σε αντίθεση με τα προηγούμενα αναλυτικά προγράμματα. Συμπεραίνουμε ότι οι νοεροί υπολογισμοί διδάσκονταν στις πράξεις φυσικών αριθμών (λύση προβλημάτων στην Α' και Γ' τάξη), σε κάποια μοναδιαία κλάσματα (στη Β' και στη Γ' τάξη), αλλά όχι στους δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίοι εισάγονταν στη Δ' τάξη. Επιπλέον οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι, αν και σε πολύ μικρό βαθμό, οι νοεροί υπολογισμοί διδάσκονταν στις τρεις μικρότερες τάξεις, ενώ στις τρεις μεγαλύτερες δεν υπήρχαν πουθενά. Ωστόσο δεν μπορούμε να κατανοήσουμε αν διδάσκονταν πριν ή μετά τις γραπτές πράξεις.

Στο Αναλυτικό πρόγραμμα του 1913 δεν αναφέρονται πουθενά για ποιους λόγους θα έπρεπε να διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί (εν μέρει αναμενόμενο καθώς έχουν παραγκωνιστεί). Η διδασκαλία τους ήταν τόσο σποραδική κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς που δε δύναται να συμπεράνουμε τον τρόπο διδασκαλίας του ή αν χρησιμοποιούνταν στρατηγικές. Επιπλέον, δεν αναφέρονται πουθενά οι εκτιμήσεις.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η διδακτέα ύλη θεωρείται μάλλον δύσκολη για τον μέσο λεγόμενο μαθητή, και γίνεται ακόμη δυσκολότερη, αν λάβει κανείς υπόψη του τις επικρατούσες τότε εκπαιδευτικές πολιτικές και κοινωνικές συνθήκες. Καταβάλλεται ιδιαίτερη προσπάθεια, το εξατάξιο Δημοτικό να προσφέρει μια ολοκληρωμένη μόρφωση στο μαθητή · τελειώνοντας το παιδί το Δημοτικό θα πρέπει να είναι σε θέση να ασχοληθεί με προβλήματα του εμπορίου, συνεταιρισμών κτλ., θέματα επιτακτικά των καιρών (Βαϊνάς, 1997).

Στα αρνητικά στοιχεία του αναλυτικού προγράμματος του 1913 συγκαταλέγεται και το ότι περιείχε ελάχιστες διδακτικές οδηγίες και έτσι σε ορισμένες περιπτώσεις γίνονταν διάφορες παρεξηγήσεις από την πλευρά των δασκάλων. Επίσης απουσίαζαν διδακτικές οδηγίες κατά την υπέρβαση της δεκάδας και έτσι οι μαθητές αντιμετώπιζαν πρόβλημα, τόσο κατά την πρόσθεση όσο και στην αφαίρεση (Βαϊνάς, 1997).

Σε μελέτη που διεξήγαγε ο Βουτσινάς (1928) αναφέρεται μεταξύ των άλλων βασικών διδακτικών στόχων που πρέπει να πετύχει ο δάσκαλος με τη διδασκαλία της πρακτικής αριθμητικής δεύτερος σε αξιολογική σειρά μνημονεύεται ο από μνήμης υπολογισμός. Ο μελετητής δεν κάνει απλά μια περιστασιακή αναφορά «εις τον από μνήμης υπολογισμό». Αποδίδει στο θέμα πολύ μεγάλη σημασία και γι' αυτό επιχειρεί να διατυπώσει διδακτικές αρχές και μεθοδολογικές οδηγίες για τη διδασκαλία, κάτι πολύ πρωτοποριακό για την εποχή. Συγκεκριμένα, αναφέρει:

«Ο Δάσκαλος να επιμείνει εις τον από μνήμης υπολογισμό. Μετά τη διδασκαλία μεγάλης μεθοδικής ενότητος ο Δάσκαλος ασκεί του Μαθητάς του εις τον σχετικόν προς τη διδαχθείσα

ενότητα υπολογισμόν από μνήμης. Η άσκησις αυτή είναι καλόν να βαίνει από των απλούστερων αριθμών και πράξεων εις τας συνθετότερας, μετά τούτο δε εις στοιχειώδη του πρακτικού βίου προβλήματα».

Το 1937 ιδρύθηκε ο Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, υπό τον Υπουργό Παιδείας Κ. Γεωργακόπουλο. Για την παρούσα εργασία εντοπίστηκαν κάποια σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνταν πριν και μετά την ίδρυση του ΟΕΔΒ, στα οποία ερευνήθηκε αν και σε ποια ποσότητα υπήρχαν νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις. Πριν την ίδρυση του ΟΕΔΒ ερευνήθηκαν οι παρακάτω τίτλοι βιβλίων:

- 1927: «Αριθμητικά προβλήματα: Δια την Γ' τάξη των Δημοτικών Σχολείων, εγκριθέντα κατά τον διαγωνισμόν του 1927 δια την δεκαετίαν 1927-1937», Σακελλαρίου – Κοντομάρη.
- 1929: «Προβλήματα Αριθμητικής: Ε' τάξη», Σπυριδάκη.
- 1929: «Ασκήσεις και προβλήματα αριθμητικής: Δ' τάξη», Παπανικητόπουλος.
- 1929: «Ασκήσεις και προβλήματα αριθμητικής: Στ' τάξη», Παπανικητόπουλος.
- 1934: «Ασκήσεις και προβλήματα αριθμητικής: Στ' τάξη, 2η έκδοση», Παπανικητόπουλος.
- 1936: «Αριθμητικά Προβλήματα: Ε' τάξη», Λιουδάκη – Αλοιζου.

Σε όλα από τα παραπάνω σχολικά εγχειρίδια δεν υπήρχε ούτε μια αναφορά σε νοερούς υπολογισμούς, ούτε σε εκτιμήσεις. Στη συνέχεια ερευνήθηκαν τα παρακάτω σχολικά εγχειρίδια εκδοθέντα μετά την ίδρυση του ΟΕΔΒ, τα οποία είχαν αναφορές σε νοερούς υπολογισμούς αλλά σε πολύ μικρό βαθμό ή καθόλου, ενώ δεν υπήρχε καμία αναφορά σε εκτιμήσεις.

- 1938: «Ασκήσεις και προβλήματα αριθμητικά και γεωμετρικά: Στ' Δημοτικού Σχολείου», Μονοκρούσου. Καμία αναφορά.
- 1945: «Ασκήσεις και προβλήματα αριθμητικής για την Τετάρτην τάξη», Παπανικητόπουλος. Στο συγκεκριμένο βιβλίο υπήρχαν μόνο οι παρακάτω αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Α΄ Πρόσθεση ἀπὸ μνήμης

1) Πόσες δραχμὲς κάνουν 996 δραχμὲς καὶ 5 δραχμές; 996+5= ;

— 12 —

Πόσες δραχμὲς κάνουν

	α΄	β΄	γ΄
2)	998+3	990+20	990+15
	995+7	980+60	980+45
	999+8	920+90	950+72
3)	900+700	900+250	830+250
	800+600	800+320	920+160
	600+500	600+450	940+350
4)	8000+4000	9000+3200	6500+7200
	7000+6000	8000+4500	8600+5200
	9000+5000	5000+9800	2465+300

5) Στὸ 980 νὰ προσθέσῃς 8 καὶ σ' ἐκεῖνο ποὺ θὰ βρῇς νὰ προσθέσῃς πάλι 8 καὶ ἔτσι νὰ κάνῃς ὥς ποὺ νὰ βρῇς 1100.

6) Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῇς τὶς σειρὲς

990+7=997+7= . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 1130.
1900+20= . . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 2200.
2000+400= . . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 6800.
4000+300= . . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 4000.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Α΄. Ἀφαίρεση ἀπὸ μνήμης.

1) Πόσες δραχμὲς μένουν ἀπὸ τὶς 1003 δραχμές, ἂν ἀφαιρέσουμε 5 δραχμές; 1003—5= ;

2) Πόσες δραχμὲς μένουν

α΄	β΄	γ΄
1002—3	1010—20	1700—900
1005—7	1030—50	1200—700
1004—9	1040—80	1500—600
1006—8	1060—90	1300—800

3) Πόσες δραχμὲς μένουν ἀπὸ τὶς 2000 δραχμές, ἂν ξοδέψουμε

α΄) 400, 300, 700, 900, 800, 600 δραχμές;
β΄) 150, 280, 340, 720, 630, 510 δραχμές;
γ΄) 40, 70, 30, 60, 80, 20, 90 δραχμές;
δ΄) 25, 47, 64, 82, 7, 8, 6, 4, 9 δραχμές;

4) Πόσες δραχμὲς μένουν ἀπὸ 10000 δραχμές, ἂν ξοδέψουμε

α΄) 4000, 7000, 9000, 6000, 8000 δραχμές;
β΄) 3200, 5400, 7600, 800, 300, 400 δραχμές;
γ΄) 120, 350, 840, 70, 30, 90, 60 δραχμές;
δ΄) 25, 42, 64, 78, 3, 6, 9, 5, 4 δραχμές;

5) Ἀπὸ 100000 ν' ἀφαιρέσῃς 6000 καὶ ἀπ' ἐκεῖνο ποὺ θὰ βρῇς ν' ἀφαιρέσῃς πάλι 6000 καὶ ἔτσι νὰ κάνῃς ὥς ποὺ νὰ βρῇς 46000.

6) Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ σχηματίσῃς τὶς σειρὲς

α΄) 100000—8000= . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 36000
β΄) 100000—7000= . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 30000
γ΄) 90000—6000= . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 0
δ΄) 76000—4000= . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 40000
ε΄) 28000—3500= . . . . ὥς ποὺ νὰ βρῇς 0

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Α΄. Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης.

1) Ἕνα μέτρο κορδέλλα ἔχει 300 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 4 μέτρα; 300×4= ;

Πολλαπλασίασε

	α΄	β΄
2)	300×2, 3, 4, ... 9	2000×2, 3, 4, ... 9
	500×2, 3, 4, ... 9	7000×2, 3, 4, ... 9
	700×2, 3, 4, ... 9	4000×2, 3, 4, ... 9
	900×2, 3, 4, ... 9	6000×2, 3, 4, ... 9
3)	250×2, 3, 4, 5	3100×4, 5, 6, 9
	410×3, 6, 7, 9	4200×2, 3, 7, 8
	530×2, 3, 5, 8	5400×2, 5, 6, 9

	α΄	β΄	γ΄	δ΄
4)	50×30	200×40	15×70	3×800
	40×60	600×20	34×50	5×700
	80×70	300×80	62×40	6×300
	70×90	700×50	75×20	8×900
5)	60×400	25×300	3×6000	60×2000
	50×700	16×500	5×8000	20×8000
	90×500	32×600	9×3000	40×7000
	70×600	85×200	6×8000	90×5000

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Α΄. Διαίρεση ἀπὸ μνήμης.

1) Πόσες φορὲς ὁ 2 χωρεῖ στὸ 1200; 1200 : 2= ;

Διαίρεσε

	α΄	β΄	γ΄
2)	1400 : 2	18000 : 6	8450 : 10
	2400 : 3	28000 : 7	1930 : 10
	3200 : 8	36000 : 4	3250 : 10
	4500 : 9	35000 : 5	14000 : 10
3)	7200 : 100	4000 : 1000	3754 : 10
	5500 : 100	8000 : 1000	2617 : 10
	25000 : 100	75000 : 1000	8345 : 10
	67000 : 100	24000 : 1000	9072 : 10

	α΄.	β΄.	β΄.
4)	2650 : 100	37200 : 1000	1200 : 30
	5040 : 100	16700 : 1000	2800 : 40
	7532 : 100	54960 : 1000	3500 : 70
	4395 : 100	72645 : 1000	4200 : 60

- 1946: «Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής: Ε’ τάξη», $6^{η}$ έκδοση, Παπανικητόπουλος. Καμία αναφορά.

- 1946 «Ασκήσεις και Προβλήματα αριθμητικής: Στ’ τάξη», Παπανικητόπουλος. Καμία αναφορά.

- 1952: «Αριθμητική δια την Ε’ και Στ’ τάξιν των Δημοτικών Σχολείων», Ντούζου - Παπανδρέου. Στο συγκεκριμένο βιβλίο υπήρχαν μόνο οι παρακάτω αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ προσθέσετε ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς τὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$; πήχεις. β) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=$; πήχεις.

γ) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$; ἔτη. δ) $\frac{5}{12}+\frac{11}{12}+\frac{8}{12}=$ ἔτη.

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$; β) $\frac{6}{7} - \frac{5}{7} =$;

γ) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} =$; δ) $\frac{25}{30} - \frac{15}{30} =$;

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

α) $5 - \frac{6}{7} =$; $10 - \frac{1}{2} =$; $6 - \frac{5}{8} -$; $3\frac{3}{4} - \frac{2}{4} =$;

β) $8\frac{1}{5} - \frac{4}{5} =$; $7\frac{7}{8} - 5\frac{5}{8} =$; $5\frac{3}{4} - 2 =$;

$30\frac{7}{8} - 24 =$;

1. Βρῆτε ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα:

α) $\frac{2}{3} \times 4 =$; $\frac{3}{4} \times 20 =$; $\frac{2}{5} \times 2 =$;

β) $12 \times \frac{3}{4} =$; $10 \times \frac{5}{10} =$; $16 \times \frac{2}{5} =$:

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς πράξεις:

α) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$; $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} =$; $\frac{3}{10} \times \frac{3}{4} =$;

β) $1\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} =$; $\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{5} =$; $1\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} =$;

2. Νὰ βρῆτε γραπτῶς τὰ γινόμενα:

α) $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} =$; $\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} =$; $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} =$;

β) $8\frac{3}{4} \times 9\frac{1}{3} =$; $1\frac{3}{8} \times 10\frac{1}{2} =$; $12\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$;

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς διαιρέσεις:

α) $1 : \frac{1}{2} =$; $1 : \frac{1}{3} =$; $1 : \frac{1}{4} =$;

β) $7 : \frac{1}{3} =$; $3 : \frac{1}{5} =$; $2 : \frac{1}{12} =$;

1. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα στὶς παρακάτω διαιρέσεις ἀπὸ μνήμης:

α) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, β) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$, γ) $\frac{1}{10} : \frac{1}{3}$.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι στα σχολικά εγχειρίδια της εποχής, δεν αναφέρονταν πουθενά οι εκτιμήσεις, ενώ οι νοεροί υπολογισμοί αναφέρονταν σε ελάχιστο βαθμό ή καθόλου.

Το 1949 ο καθηγητής της παιδαγωγικής του Πανεπιστημίου Αθηνών Σπύρος Καλλιάφας εξέδωσε το «Πρόγραμμα των μαθημάτων των σχολείων της Στοιχειώδους Εκπαιδεύσεως» το οποίο περιείχε πολλές μεθοδικές οδηγίες βασισμένο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1913. Ο ίδιος εισηγήθηκε με την έκδοση του συγκεκριμένου βιβλίου ότι η μεταβολή του προγράμματος ήταν αναγκαία. Σε αυτό περιελάμβανε όχι μόνο τη διδακτέα ύλη, αλλά και το σκοπό του σχολείου και κάθε μαθήματος και οδηγίες περί της μεθόδου διδασκαλίας.

Υποστήριξε ότι το παιδί εκ φύσεως είναι αυτενεργό και ανεξάρτητο και ότι τη φυσική αυτή ορμή οφείλει το σχολείο να αναπτύσσει κατά τη διδασκαλία της τάξης και κατά την ατομική εργασία κάθε μαθητή. Επιπλέον, υποστήριξε ότι ο μαθητής δεν επιτρέπεται να μαθαίνει τη διδασκόμενη ύλη επιπόλαια ή κατ' απομνημόνευση, αλλά είναι αναγκαίο με τη συστηματική οδηγία του δασκάλου να την μαθαίνει. Ήταν αναγκαίο να λαμβάνονται υπόψη οι ατομικές ανάγκες των μαθητών, τα ενδιαφέροντά τους και να προσαρμόζεται η διδασκαλία. Συμβούλευε τους εκπαιδευτικούς να μην τηρούν το αναλυτικό πρόγραμμα κατά γράμμα, αλλά να προσαρμόζονται ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών (άλλοτε να αφαιρούν και άλλοτε να προσθέτουν εργασίες).

Όσον αφορά τον σκοπό του μαθήματος της Αριθμητικής ο καθηγητής Καλλιάφας ανέφερε:

«Η διδασκαλία της αριθμητικής σκοπόν έχει την υπό των μαθητών κατανόησιν των αριθμών και του τρόπου, κατά τον οποίον σχηματίζονται ούτοι, την ασφαλή κτήσιν των αναγκαίων εις την ζωήν γνώσεων και δεξιοτήτων, ώστε οι μαθηταί και μετά την αποφοίτησιν εκ του δημοτικού σχολείου να δύναται να λύουν ευχερώς τα εκάστοτε παρουσιαζόμενα εις τον πρακτικόν βίον προβλήματα» και συνεχίζει αναφέροντας ότι *«Η διδασκαλία της αριθμητικής προς τούτοις αναπτύσσει την ικανότητα του διανοείσθαι κατ' αυστηράν λογικήν ακολουθίαν, η οποία (ικανότης) εμμέσως επιδρά ευεργετικώς και εις την διάπλασιν του χαρακτήρος, επειδή εθίζει εις το πράττειν αυστηρώς καθ' ωρισμένας αρχάς».*

Όσον αφορά την εύρεση λύσεων από τους μαθητές, υποστήριζε ότι αφού επιτευχθεί η απόκτηση της κανονικής μεθόδου, πρέπει ο μαθητής να παρορμάται στην εκλογή πολλών δυνατών τρόπων λύσεων.

Σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς υποστήριζε ότι:

*«Εις **πάσας** τας τάξεις πρέπει να καλλιεργήται η ικανότης του λογαριάζειν από μνήμης. Πλην της πλήρους γραπτής αριθμήσεως, πρέπει να καλλιεργήται και αρίθμησις ατελώς γραφόμενη».*

Υποστηρίχθηκε ότι δεν πρέπει να παραμελείται και η άσκηση προς κτήση της δεξιότητας του λογαριάζειν, ενώ για πρώτη φορά παρατηρείται αναφορά στην εκτίμηση, όπου αναφέρεται συγκεκριμένα:

«Συνεχώς πρέπει να αναπτύσσεται περαιτέρω από τάξεως εις τάξιν η ικανότης του εξ απλών πραγματικών γεγονότων και καταστάσεων άνευ της βοήθειας του διδασκόντος εξευρίσκειν προβλήματα και λύειν αυτά. Δια συνεχούς δε ασκήσεως πρέπει να γίνεται έξις των μαθητών ο υπολογισμός εκ των προτέρων του τελικού αποτελέσματος και ο κατόπιν έλεγχος αυτού δια της λύσεως του προβλήματος. Δι' εξεταστικών σε εργασιών ελέγχομεν, αν οι μαθηταί κατενόησαν την ύλην και αν δύναται να εφαρμόζουν αυτήν και να εκθέτουν αυτήν με την προσήκουσαν τάξιν».

Όσον αφορά τη διδακτέα ύλη υποστήριζε ότι ενώ μέχρι τότε διδάσκονταν στην Α' το αριθμητικό διάστημα 1-20, στη Β' το αριθμητικό διάστημα 1-100, στη Γ' 1-1000 κλπ, καλύτερα θα ήταν αν λαμβάνονταν υπόψη οι δυσχέρειες των πράξεων. Είναι ευκολότερο ο μαθητής στην Α' τάξη να διδαχθεί τη σειρά 1-100 και τις ευκολότερες πράξεις, παρά τις δύσκολες πράξεις π.χ. της διαίρεσης στη μικρότερη σειρά 1-20. Σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς αναφέρεται μόνο στη Β', Γ', Δ' και Ε' Δημοτικού «Άσκησις συχνή περί το λύειν απλά προβλήματα από μνήμης», ενώ στην Α' και στη Στ' δεν αναφέρονται καθόλου.

Ο επιθεωρητής Σαφαρίκας (1965), παρόλο που αυτή την περίοδο παραγκωνίστηκαν οι νοεροί υπολογισμοί στη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα στις ελληνικές αίθουσες διδασκαλίας, το 1965 έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο «Μέθοδος Λογαριασμών από μνήμης» ως πρακτικό βοήθημα για τους δασκάλους. Ο ίδιος θεωρούσε ότι:

*«Στη ζωή μας αντιμετωπίζουμε συχνά την ανάγκη να κάνωμε λογαριασμούς χωρίς χαρτί και μολύβι. Οι λογαριασμοί αυτοί που λέγονται "από μνήμης" ή προφορικοί ή νοεροί, για να μας εξυπηρετήσουν πρέπει να γίνονται με ταχύτητα. Η απόκτηση της ικανότητας για γρήγορους και σωστούς λογαριασμούς από μνήμης εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, ο σπουδαιότερος των οποίων είναι **η άσκηση**».*

Για τους νοερούς υπολογισμούς δεν υπήρχαν βιβλία ή βοηθήματα στη χώρα μας. Θεωρώντας λοιπόν πολύ σημαντική τη διδασκαλία αυτών των υπολογισμών, αποφάσισε να συγγράψει ο ίδιος και να προωθήσει στους εκπαιδευτικούς, έχοντας τη θέση του επιθεωρητή δημοτικών σχολείων, ένα βιβλίο που θα περιελάμβανε όλες τις πράξεις φυσικών αριθμών, δεκαδικών και κλασμάτων, οδηγίες διδασκαλίας με πολλά παραδείγματα καθώς επίσης πίνακες, κανόνες, ασκήσεις και προβλήματα.

Το εν λόγω βιβλίο χωρίζονταν σε πέντε κεφάλαια, εκ των οποίων τα τέσσερα πρώτα ασχολούνταν με τις πράξεις την πρόσθεσης (φυσικών αριθμών-μονοψήφιων, διψήφιων, τριψήφιων- και δεκαδικών αριθμών), της αφαίρεσης (φυσικών αριθμών-μονοψήφιων, διψήφιων, τριψήφιων- και δεκαδικών αριθμών), του πολλαπλασιασμού (φυσικών αριθμών, δεκαδικών αριθμών, φυσικών αριθμών με δεκαδικούς, τετράγωνα αριθμών) και της διαίρεσης (κανόνες διαιρετότητας, διαίρεση με μονοψήφιο/διψήφιο/τριψήφιο αριθμό, διαίρεση δεκαδικών αριθμών), ενώ το τελευταίο κεφάλαιο διαπραγματεύονταν τα κλάσματα (πρόσθεση κλασμάτων, πρόσθεση δεκαδικών, αφαίρεση κλασμάτων, πολλαπλασιασμός κλασμάτων και διαίρεση κλασμάτων).

Ο Σαφαρίκας (1965) συμβούλευε τους εκπαιδευτικούς την εποχή εκείνη κατά τη διδασκαλία να εκφωνούν και μετά να γράφουν τους αριθμούς στον πίνακα, ενώ στις μικρές τάξεις να χρησιμοποιούν και συγκεκριμένα αντικείμενα. Επιπλέον τόνιζε ότι η διδασκαλία και η άσκηση των μαθητών στους λογαριασμούς από μνήμης ήταν το τελευταίο στάδιο της διδασκαλίας. Για να φτάσουν οι μαθητές στο σημείο να κάνουν τέτοιους λογαριασμούς, πρέπει να προηγηθεί επίμονη εργασία στους γραπτούς λογαριασμούς.

Ο ίδιος διαχώρισε τους λογαριασμούς από μνήμης σε δυο κατηγορίες: α) τους λογαριασμούς που γίνονται χωρίς χαρτί και μολύβι, και β) τους λογαριασμούς που γίνονται βλέποντας τα δεδομένα του προβλήματος, πολλές φορές γράφοντας με περιορισμό και μερικούς αριθμούς (αποτελέσματα επιμέρους πράξεων, τελικό αποτέλεσμα κτλ). Υποστήριξε δε ότι για να υπάρξει αποτελεσματική μάθηση των λογαριασμών από μνήμης θα πρέπει να γίνει αποστήθιση των κανόνων και συχνή επανάληψη.

Ενδεικτικά παραθέτουμε στο Παράρτημα της παρούσης εργασίας ένα παράδειγμα της πρότασης του τρόπου διδασκαλίας του επιθεωρητή Σαφαρίκα για την πράξη της πρόσθεσης δυο μονοψήφιων αριθμών, των οποίων το άθροισμα δεν θα ξεπερνά το 10 (Παράρτημα 1) και ένα παράδειγμα για την πράξη του πολλαπλασιασμού (Παράρτημα 2). Στο βιβλίο του ο συγγραφέας παρουσίαζε στο βιβλίο του οδηγίες διδασκαλίας, παραδείγματα, ασκήσεις και προβλήματα με απώτερο στόχο να καταστούν ικανοί οι μαθητές στις νοερές πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ δυο μονοψήφιων αριθμών. Έπρεπε οι μαθητές να αποστηθίσουν τον κανόνα, μετά να εξασκηθούν γραπτά και στο τέλος να εξασκηθούν στους νοερούς υπολογισμούς. Η διδασκαλία ήταν μια διδασκαλία διαδικασιών και κανόνων που οι μαθητές εκτελούσαν χωρίς να κατανόηση τις περισσότερες φορές. Να σημειώσουμε εδώ ότι δεν υπήρχε εκείνη την εποχή διαχωρισμός ύλης ανά τάξη και συνεπώς ήταν στην ευχέρεια του κάθε εκπαιδευτικού σε ποια τάξη θα δίδασκε το κάθε περιεχόμενο.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούσαν οι δάσκαλοι αυτή την περίοδο δεν ήταν η ενδεικνυόμενη · οι μαθητές έπρεπε να μαθαίνουν απέξω τους κανόνες εκτέλεσης πράξεων, μετά να τους εφαρμόζουν σε πράξεις και στη συνέχεια να λύνουν σχετικά προβλήματα. Η αποστήθιση κανόνων, που τις περισσότερες φορές ήταν περιττή, είχε ως αποτέλεσμα τη στέρηση της κατανόησης στο μάθημα των Μαθηματικών (Βαϊνάς, 1997). Σχετικές οδηγίες προς τον διδάσκοντα ή απουσίαζαν ή ήταν ελάχιστες.

Την περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών (1821-1964) το μάθημα των Μαθηματικών βρισκόταν σε μια διαρκή εξελικτική πορεία προς το καλύτερο. Το μάθημα στα ελληνικά σχολεία του 1964 ήταν σαφώς καλύτερο από το μάθημα στα ελληνικά σχολεία του 1830. Υπήρξε βελτίωση στη μέθοδο διδασκαλίας, στη χρήση καταλληλότερων εποπτικών μέσων, στον τρόπο αξιολόγησης του μαθήματος, στην εξέλιξη των μορφωτικών προγραμμάτων και στην αισθητή διεύρυνση των μορφωτικών σκοπών της διδασκαλίας. Οι πρακτικοί μορφωτικοί σκοποί για το μάθημα των Μαθηματικών ήταν η εκτέλεση των πράξεων, καθώς και οι διάφοροι υπολογισμοί μ’ αυτές, που δεν έπαψαν να θεωρούνται ικανότητες και δεξιότητες απαραίτητες στην καθημερινή ζωή.

Κατά τη διάρκεια των παραδοσιακών μαθηματικών δε χρησιμοποιήθηκε σχολικό βιβλίο για τις μικρότερες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Το κυριότερο βοήθημα του δασκάλου ήταν το αναλυτικό πρόγραμμα, όπου ο δάσκαλος εύρισκε τη διδακτέα ύλη, χωρίς να γίνεται κάποια σχετική αναφορά σε μέσα διδασκαλίας. Ακριβώς για το λόγο ότι έλειπαν τα διδακτικά βιβλία και τα τετράδια, οι μαθητές ασκούνταν στο να κάνουν τις τέσσερις πράξεις με το μυαλό. Εκδόθηκαν μάλιστα και μερικά βοηθήματα σχετικά με τη μέθοδο του υπολογισμού με το μυαλό.

3.5.2 Αναλυτικό πρόγραμμα 1969

Από το 1930 άρχισαν οι Έλληνες παιδαγωγοί να απομακρύνονται από την Ερβαρτιανή παιδαγωγική και από τα περίφημα πέντε ειδολογικά στάδια και άρχισε να εφαρμόζεται η κίνηση του Σχολείου Εργασίας, το οποίο προήγαγε την αυτενέργεια των μαθητών, μαζί με άλλες δεξιότητες. Το κίνημα αυτό εφαρμόστηκε μέχρι το 1941. Έπειτα εφαρμόστηκε στα σχολεία η

«Τριμερής πορεία» (1941-1974). Συνεπώς από τα Αναλυτικό πρόγραμμα του 1969 προωθούνταν στα σχολεία αυτού του είδους η διδακτική. Επίσης στο αναλυτικό πρόγραμμα του 1969 εφαρμόζονται τα Μοντέρνα Μαθηματικά με την εμφάνιση των συνόλων.

Το ωρολόγιο πρόγραμμα για το εξατάξιο Δημοτικό Σχολείο ήταν:

ΣΤ΄. 6/θεσίου Δημοτικού Σχολείου

α/α	Μαθήματα	Ὧραι διδ/λίας κατὰ τάξεις					
		Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ
1.	Θρησκευτικά	2	2	2	2	3	3
2.	Ἑλληνικὴ γλῶσσα	9	9	10	10	9	9
3.	Ἱστορία	—	—	2	2	2	2
4.	Σπουδὴ περιβάλλοντος	4	6	—	—	—	—
5.	Φυσικὴ καὶ Χημεία μετὰ στοιχείων ὑγιεινῆς	—	—	3	3	4	4
6.	Γεωγραφία	—	—	3	3	2	2
7.	Ἀριθμητικὴ καὶ Γεωμετρία	3	3	4	4	5	5
8.	Ἀγωγὴ τοῦ πολίτου	—	—	—	—	—	1
9.	Τεχνικά	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{2}$	4	4	4	3
10.	Μουσική	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$
11.	Γυμναστική	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{2}$
	Ὧραι διδ/λίας ἐν ὅλῳ	24	26	32	32	33	33

Στο πρόγραμμα του 1969 αναφέρεται ο σκοπός της διδασκαλίας της Αριθμητικής, ο οποίος είναι ο εξής:

«Η διδασκαλία της Αριθμητικής σκοπόν έχει την υπό των μαθητών κατανόησιν των αριθμών και του τρόπου, καθ' ον σχηματίζονται ούτοι, την ασφαλή κτήσιν των αναγκαίων γνώσεων δια την αντιμετώπισιν των παρουσιαζόμενων εις τον πρακτικόν βίον προβλημάτων, και εμμέσως την ανάπτυξιν της ικανότητος του διανοείσθαι κατ' αυστηράν λογικήν ακολουθίαν και αναγκαιότητα».

Στο πρόγραμμα του **1969** για πρώτη φορά συναντάμε αναφορά σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Αναφέρεται λακωνικά, χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς και οι σχετικές αναφορές έχουν το νόημα του ορισμού της διδακτέας ύλης.

Για την Α' τάξη ορίζεται:

«Γραπτώς και από μνήμης όλαι αι πράξεις των ακεραίων μεταξύ των αριθμών 1-10 και όμοια εργασία μεταξύ των αριθμών 11-20».

Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία των νοερών πράξεων γίνονταν πρώτα και μετά ακολουθούσαν οι γραπτοί από το παρακάτω απόσπασμα του Αναλυτικού προγράμματος:

«Το αποτέλεσμα των λογισμών και των τεσσάρων πράξεων από μνήμης προβλημάτων θα μεταφέρεται εις τον πίνακα ή τα τετράδια των μαθητών μετά των σχετικών συμβόλων».

Στις παρατηρήσεις αναφέρεται ότι:

«Ιδιαιτέρως θα ασκώνται οι μαθηταί εις την εύρεσιν του ζητουμένου με βάσιν τους και εις την ζωήν χρησιμοποιουμένους αριθμούς ως βασικούς δια τον από μνήμης λογισμόν (2,5,10)».

Για τη Β’ τάξη δίνεται η παρατήρηση ότι πρέπει να ζητείται πάντοτε η δια ζώσης διατύπωση της σκέψης του μαθητή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αυτή την περίοδο εφαρμόζεται η μεταγνωστική διαδικασία, με την οποία ο μαθητής οργανώνει τη σκέψη του, μεταδίδει τον τρόπο που σκέφτηκε και βοηθάει σε μια καλύτερη κατανόηση για όλους τους μαθητές. Η συζήτηση οδηγεί στην επιλογή των πιο αποτελεσματικών τρόπων εύρεσης της σωστής απάντησης.

Για τη Γ’ τάξη ορίζεται:

«Επανάληψις των διδαχθέντων εις την Β’ τάξιν προφορικώς και γραπτώς δια ποικίλων ασκήσεων και προβλημάτων, ειλημμένων εκ του οικογενειακού και σχολικού βίου των μαθητών ως ακολούθως:

Άσκησις των μαθητών εις την από μνήμης λύσιν εύκολων ασκήσεων και προβλημάτων εντός των αριθμών της πρώτης εκατοντάδος…».

«Νοερώς ταχείς πολλαπλασιασμοί επί 10,5,11,9 δι’ ευκόλων ασκήσεων και προβλημάτων».

«Λύσεις απλών προβλημάτων και των 4 πράξεων εντός των αριθμών 1-200 από μνήμης και γραπτώς».

Στο πρόγραμμα του 1969 για πρώτη φορά συναντάμε αναφορά για την εκτίμηση, ειδικότερα για προσεγγιστικούς υπολογισμούς, όπου αναφέρεται συγκεκριμένα: «*Άσκησις των μαθητών εις την* ***κατά προσέγγισιν εύρεσιν από μνήμης του αποτελέσματος*** *των διδομένων προς λύσιν γραπτώς απλών ασκήσεων και προβλημάτων».*

Για τη Δ’ τάξη η μία και μόνη αναφορά ορίζει:

«Λύσεις προβλημάτων προσθέσεως και αφαιρέσεως, από μνήμης και γραπτώς, ειλημμένων εκ του καθημερινού βίου».

Για την Ε’ τάξη αναφέρεται:

«Σύντομος επανάληψις των ακεραίων και δεκαδικών αριθμών (γραπτός και νοερός υπολογισμός)».

Στις παρατηρήσεις της Στ’ τάξης αναφέρεται :

«Δέον να γίνεται σύμμετρος χρήσις γραπτής και προφορικής εργασίας εις την λύσιν των προβλημάτων Αριθμητικής και Γεωμετρίας»

Στην παρούσα εργασία κατέστη δυνατό να εντοπιστούν δυο σχολικά εγχειρίδια της Ε’ και Στ’ τάξης, στα οποία αναζητήθηκε αν υπήρχαν αναφορές σε νοερούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις.

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Ε’ τάξης (Κυριαζοπούλου & Αλεξοπούλου, 1969) υπήρχαν δραστηριότητες νοερών υπολογισμών των τεσσάρων πράξεων φυσικών αριθμών, δεκαδικών και κλασμάτων, όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς: α) 58 + 9, 42 + 18, 52 + 29, 65 + 70 + 35, 745 + 99
β) 60 + 80 + 40, 155 + 45 + 30, 8465 + 535, 7255 + 745
γ) 30500 + 15500, 65000 + 35000, 750000 + 250000

Γραπτῶς: α) 8465 + 14127 + 562, β) 87128 + 685 + 168402 + + 78, γ) 548975 + 482869, δ) 128405 + 48005 + 9656

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελέσετε τὰς ἀφαιρέσεις :

Νοερῶς: α) 320 – 50, 3100 – 600, 85 – 32, 98 – 47, 4250 – 125
β) 82 – 9, 254 – 12, 328 – 99, 438 – 201, 867 – 401
γ) 5000 – 1500, 50000 – 10500, 100000 – 25000, 950000 – 250000.

Γραπτῶς: α) 38948 – 27639, β) 143572 – 98428, γ) 839720 – – 694096, δ) 1684025 – 908878, ε) 3405425 – 1968956.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ εὕρετε τὰ γινόμενα :

Νοερῶς : α) 6 × 9, 70 × 4, 600 × 8, 30 × 20, 80 × 5, 400 × 8, 5000 × 9
β) 2 × 53, 2 × 125, 2 × 149, 4 × 35, 4 × 125, 5 × 210 4 × 175
γ) 176 × 10, 298 × 100, 109 × 1000, 150 × 10000, 478 × 100000.

Γραπτῶς : α) 3048 × 650, β) 14060 × 409, γ) 425635 × 8004, δ) 6978 × 1080, ε) 49842 × 2678.

ατελής ; Πώς διαιρείται ένας αριθμός διά 10, 100, 1000, κλπ.;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) 48 : 2, β) 68 : 2, γ) 164 : 2, δ) 248 : 2, ε) 612 : 3, στ) 15 : 5, ζ) 32 : 8, η) 56 : 4, θ) 96 : 4, ι) 175 : 5, ια) 240 : 8, ιβ) 540 : 9.
β) 45850 : 10, 53700 : 100, 68000 : 1000, 38760 : 100, 70650 : 1000.

Γραπτῶς : α) 1890 : 45, β) 6450 : 75, γ) 18500 : 125, δ) 58180 : 185, ε) 496875 : 265, στ) 2416975 : 425.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ προσθέσετε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς :

Νοερῶς : α) 15,5 + 0,5, β) 30,2 + 20,8, γ) 25,50 + 10,25, δ) 65,75 + 150,5, ε) 0,125 + 35,375, ζ) 25,500 + 40,750.

Γραπτῶς: α) 405,5 + 250,25 + 465,125 + 848,5065
β) 0,135 + 89, 265 + 0,80 + 168,7525 + 625
γ) 0,0034 + 36,7450 + 168,00250 + 450,56250.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ κάμετε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις :

Νοερῶς : α) 0,75 – 0,25, β) 0,500 – 0,250, γ) 15,5 – 8,2, δ) 50,5 – – 35,5, ε) 1,50 – 0,75, στ) 85,50 – 65,25, ζ) 345,50 – 250, η) 500 – 150,50.

Γραπτῶς : α) 0,75 – 0,375, β) 60,95 – 0,4656, γ) 15684,75 – 8495, 50425, δ) 3450 – 1895,25, ε) 12650 – 4958,0675, στ) 3500,25 – 1750.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ εὕρετε τὰ κατωτέρω γινόμενα :

Νοερῶς : α) 6,5 × 4, β) 4,75 × 2, γ) 15,25 × 3, δ) 0,75 × 2, ε) 0,25 × 3, στ) 0,25 × 4, ζ) 65,5 × 10, η) 54,25 × 10, θ) 36,375 × 100, ι) 486,4750 × 1000, ια) 0,75 × 10, ιβ) 0,125 × 100, ιγ) 0,975 × 100, ιδ) 84,245 × 10000.

Γραπτῶς : α) 265,8 × 39,6, β) 675,5 × 39,25, γ) 750,35 × 0,25, δ) 0,750 × 0,08, ε) 4685,75 × 45, στ) 2685 × 4,75.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) 15 : 2, β) 10 : 4, γ) 36,6 : 3, δ) 120,8 : 4, ε) 70,50 : 2, στ) 90,75 : 3, ζ) 50,25 : 5.
α) 86 : 10, β) 165 : 10, γ) 368 : 100, δ) 675 : 1000, ε) 25,5 : 10, στ) 365,5 : 100, ζ) 4865,5 : 1000, η) 15485,05 : 10, θ) 25684,25 : 100, ι) 14685,250 : 1000.

Γραπτῶς : α) 1685,5 : 8, β) 9685,25 : 36, γ) 1875 : 0,5, δ) 2475 :0,25 ε) 14684,75 : 1,25, στ) 3647,5 : 2,25, ζ) 6,75 : 0,008.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ προσθέσετε τὰ κλάσματα:

α) Νοερῶς : α) $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$, β) $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$, γ) $\frac{1}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}$.

β) Γραπτῶς : α) $\frac{2}{12}+\frac{5}{12}+\frac{3}{12}$, β) $\frac{3}{15}+\frac{5}{15}+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}$,

γ) $\frac{16}{50}+\frac{13}{50}+\frac{10}{50}+\frac{11}{50}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς : α) $8\frac{2}{10}+5\frac{3}{10}+6\frac{1}{10}$ β) $15\frac{3}{20}+10\frac{5}{20}+5\frac{6}{20}$

Γραπτῶς : Μὲ τὸν πρῶτον τρόπον :

α) $5\frac{1}{3}+7\frac{3}{4}$ β) $9\frac{3}{8}+6\frac{2}{5}$ γ) $10\frac{1}{2}+20\frac{3}{4}+40\frac{5}{6}$

δ) $25\frac{2}{4}+39\frac{4}{8}+40\frac{5}{6}$ ε) $2\frac{1}{2}+8+3\frac{2}{4}$

Μὲ τὸν δεύτερον τρόπον :

α) $10+3\frac{4}{5}+6\frac{1}{3}$ β) $8\frac{4}{6}+5\frac{2}{4}+9$ γ) $5+\frac{3}{4}+6+7\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς :

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$, $\frac{2}{20}+\frac{5}{20}+\frac{4}{20}+\frac{6}{20}$,

$\frac{2}{8}+\frac{5}{8}$, $\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{6}{10}$, $\frac{1}{15}+\frac{6}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}$

$\frac{4}{35}+\frac{6}{35}+\frac{10}{35}+\frac{5}{35}$, $\frac{5}{50}+\frac{10}{50}+\frac{8}{50}+\frac{6}{50}$

Γραπτῶς:

$\frac{3}{4}+\frac{4}{8}$, $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{8}{10}$,

$\frac{1}{2}+\frac{5}{9}$, $\frac{5}{7}+\frac{2}{4}+\frac{6}{8}$, $\frac{2}{4}+\frac{7}{8}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$,

$5\frac{4}{6}+3\frac{7}{10}$, $3\frac{1}{10}+4\frac{3}{5}+5\frac{3}{8}$,

$6\frac{3}{9}+8\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{3}+8\frac{1}{5}+10\frac{3}{4}$,

$2\frac{1}{6}+4\frac{3}{5}+3\frac{7}{12}+5\frac{2}{20}$, $4\frac{2}{3}+5\frac{6}{10}+8\frac{1}{5}+3\frac{4}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἀφαιρέσετε τὰ κλάσματα νοερῶς καὶ γραπτῶς :

α) $\frac{7}{15}-\frac{4}{15}$ β) $\frac{9}{20}-\frac{6}{20}$ γ) $\frac{12}{30}-\frac{7}{30}$ δ) $\frac{15}{40}-\frac{8}{40}$

ε) $\frac{18}{36}-\frac{12}{36}$ στ) $\frac{18}{24}-\frac{9}{24}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τὰς διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) $\frac{4}{8} : 4$, β) $\frac{6}{16} : 6$, γ) $\frac{15}{24} : 5$,

δ) $\frac{12}{20} : 3$, ε) $\frac{32}{40} : 8$

Γραπτῶς : α) $\frac{3}{4} : 5$, β) $\frac{7}{10} : 5$, γ) $\frac{8}{30} : 9$

δ) $\frac{6}{10} : 8$, ε) $\frac{9}{20} : 4$.

Παρατηρούμε ότι υπήρχαν νοεροί υπολογισμοί φυσικών, δεκαδικών και κλασμάτων. Ωστόσο, δεν εντοπίστηκαν δραστηριότητες εκτιμήσεων. Αντίθετα, στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ' τάξης (Διαμαντοπούλου, 1969) δεν υπήρχε καμία αναφορά σε νοερούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι νοεροί υπολογισμοί γενικά, αναφέρονται λακωνικά σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου και εξακολουθούν να είναι περιορισμένοι στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Σημειώνεται ότι δεν υπάρχουν αναφορές για νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς (κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά). Εξαίρεση αποτελεί το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης που εντοπίστηκε, το οποίο κάνει αναφορές σε νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών, κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών. Οι στρατηγικές επίλυσης πράξεων δεν είναι εμφανείς αυτή την περίοδο.

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1969 είχε αρκετά στοιχεία των Νέων Μαθηματικών (την περίοδο εκείνη βρισκόταν στη Β' Φάση υλοποίησης). Ως προς τη μέθοδο που θα χρησιμοποιούνταν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας συμβουλεύονταν οι δάσκαλοι να εφαρμόζουν την επαγωγική στις μικρές τάξεις και την παραγωγική στις μεγάλες. Το μάθημα την εποχή αυτή διεξάγονταν με βάση την Τριμερή πορεία διδασκαλίας. Έτσι, έπρεπε να είναι πλήρως οργανωμένη η διδασκαλία από το δάσκαλο, ώστε να πραγματοποιηθούν επιτυχώς και τα τρία στάδια διδασκαλίας. Ο δάσκαλος επέτρεπε στους μαθητές να συμμετέχουν κατά τη διάρκεια του μαθήματος και να μην είναι παθητικοί δέκτες της γνώσης, αν και περιορισμένα, καθώς ο δάσκαλος κατεύθυνε τη συμμετοχή των μαθητών. Παρόλα αυτά το κλίμα μέσα στην αίθουσα σίγουρα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί πιο «χαλαρό» σε σχέση με αυτά των προηγούμενων ετών που δεν επιτρεπόταν να μιλήσουν καθόλου οι μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

3.5.3 Αναλυτικό πρόγραμμα 1973

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα που δημοσιεύτηκε το **1973** από τη Διεύθυνση Προγράμματος και Μελετών του ΥΠΕΠΕΘ υπάρχουν περισσότερες αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς και επιπλέον σε επίσημα εκπαιδευτικά κείμενα συναντάμε αναφορά σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς.

Στο κεφάλαιο των μεθοδολογικών οδηγιών, οι οποίες επαναλαμβάνονται σε κάθε τάξη και αναφέρονται σε κάθε αριθμητική πράξη, ορίζεται σε ποια φάση της όλης διδακτικής διαδικασίας τοποθετούνται οι μαθησιακές δραστηριότητες των νοερών υπολογισμών. Έτσι, προηγούνται οι μαθησιακές δραστηριότητες με το εποπτικό υλικό, ακολουθούν οι δραστηριότητες νοερών υπολογισμών και τέλος έπεται η γραπτή εκτέλεση των ασκήσεων (Αποστολόπουλος, 1995).

Επισημαίνεται ότι σε αυτό το Αναλυτικό Πρόγραμμα απουσιάζουν αναφορές σε νοερούς υπολογισμούς πηλίκου φυσικών αριθμών, σε νοερούς υπολογισμούς κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών.

Όσον αφορά τα σχολικά εγχειρίδια της εποχής, εντοπίστηκε το βιβλίο «Αριθμητική – Γεωμετρία Γ’ Δημοτικού» του συγγραφέα Καρκάνη (1973), στο οποίο οι μαθητές καλούνταν να λύνουν πρώτα προφορικά και έπειτα γραπτά τις ασκήσεις στο τετράδιό τους. Επίσης υπήρχε ολόκληρο κεφάλαιο αφιερωμένο στις από μνήμης προσθέσεις και αφαιρέσεις. Πρώτα διδάσκονταν οι από μνήμης ασκήσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης και στα επόμενα κεφάλαια διδάσκονταν γραπτά. Αλλά ακόμα και τότε ζητούνταν να γίνουν οι πράξεις προφορικά και γραπτά. Νοερούς υπολογισμούς ζητούνταν να γίνουν μέχρι και με τετραψήφιους αριθμούς. Επίσης παρατηρήθηκε ότι για την επίλυση των πράξεων ζητούνταν ο αναλυτικός τρόπος, ο σύντομος (συνηθισμένος) τρόπος και με όποιον τρόπο προτιμούσαν (τρεις τρόποι επίλυσης). Στο κεφάλαιο της στρογγυλοποίησης υπήρχε μόνο η κατά προσέγγιση λύση των ασκήσεων. Ενδεικτικά, παρατίθενται δραστηριότητες του βιβλίου στο Παράρτημα 3.

Στο βιβλίο «Αριθμητική και Γεωμετρία» της Δ’ τάξης του συγγραφέα Σαμαρά που εκδόθηκε το 1973, υπάρχουν ασκήσεις από μνήμης για την πράξη της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης φυσικών αριθμών και δεκαδικών αριθμών (εκτός της πράξης της διαίρεσης), οι οποίες αναφέρονται στο Παράρτημα 4.

Στο βιβλίο «Αριθμητική – Γεωμετρία» της Ε’ τάξης, των συγγραφέων Κυριαζοπούλου – Αλεξοπούλου (1974) αρχικά γινόταν μια επανάληψη της ύλης της Δ’ τάξης. Στη συνέχεια εντοπίστηκαν μόνο τρεις ασκήσεις νοερών υπολογισμών κλασμάτων (μόνο ομώνυμων κλασμάτων στις πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση και διαίρεση).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ προσθέσετε τὰ κλάσματα:

α) Νοερῶς: α) $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$, β) $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$, γ) $\frac{1}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}$.

β) Γραπτῶς: α) $\frac{2}{12}+\frac{5}{12}+\frac{3}{12}$, β) $\frac{3}{15}+\frac{5}{15}+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}$,

γ) $\frac{16}{50}+\frac{13}{50}+\frac{10}{50}+\frac{11}{50}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ ἀφαιρέσετε τὰ κλάσματα νοερως και γραπτως:

α) $\frac{7}{15}-\frac{4}{15}$ β) $\frac{9}{20}-\frac{6}{20}$ γ) $\frac{12}{30}-\frac{7}{30}$ δ) $\frac{15}{40}-\frac{8}{40}$

ε) $\frac{18}{36}-\frac{12}{36}$ στ) $\frac{18}{24}-\frac{9}{24}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τὰς διαιρέσεις:

Νοερῶς: α) $\frac{4}{8}:4$, β) $\frac{6}{16}:6$, γ) $\frac{15}{24}:5$,

δ) $\frac{12}{20}:3$, ε) $\frac{32}{40}:8$

Γραπτῶς: α) $\frac{3}{4}:5$, β) $\frac{7}{10}:5$, γ) $\frac{8}{30}:9$

δ) $\frac{6}{10}:8$, ε) $\frac{9}{20}:4$.

Στο βιβλίο «Αριθμητική-Γεωμετρία» της Στ΄ τάξης (Διαμαντοπούλου, 1973) δεν εντοπίστηκε καμία αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς ή σε εκτιμήσεις.

Ο Γεωργούλης (1974) υποστήριζε ότι κατά το μεταπολεμικό διάστημα, μετά το 1918, υποτιμήθηκε και παραμελήθηκε η αξία της μνήμης. Το ίδιο συνέβη και στη Γερμανία, όπου η μνήμη θεωρούνταν κάτι το συντηρητικό και ότι ανέκοπτε τη δημιουργία και την πρόοδο. Η άποψη αυτή υποστήριζε ότι ελέγχεται ως υπερβολική. Βέβαια, εάν κανείς επαναπαυόταν μόνο στη μνημονική λειτουργία, περιέπιπτε σε κατάσταση ρουτίνας, αλλά χωρίς μνήμη δεν υπήρχε προσωπικότητα, διότι αυτή αποτελούσε τη βάση της συγκρότησης του «Εγώ». Χωρίς μνήμη ο άνθρωπος περιέπιπτε στη φυσική κατάσταση.

Ο ίδιος ανέφερε ότι έπρεπε να ασκείται το παιδί στην εκτίμηση μεγεθών και στην εκτέλεση ακριβών μετρήσεων, ενώ η ακρίβεια στις μετρήσεις είχε ιδιαίτερη σημασία και έπρεπε να ασκούνται τα παιδιά από μικρή ηλικία.

Όσον αφορά τη μνημονική εργασία θεωρούσε ότι έπρεπε να περιορίζεται όσον είναι δυνατόν, έπρεπε να μην υποχρεώνονται τα παιδιά να μαθαίνουν πολλά πράγματα απ' έξω. Εννοείται ότι ο πλήρης αποκλεισμός της μνημονικής εργασίας από τα μαθηματικά δεν ήταν ορθός, διότι υπήρχαν και στα μαθηματικά μερικά στοιχεία, όπως ο πίνακας του πολλαπλασιασμού, τα οποία μαθαίνονταν μόνο με τη μνήμη.

Αναφέρθηκε και στις κατ' οίκον εργασίες οι οποίες διακρίνονταν σε γραπτές και προφορικές. Περισσότερο αποδοτικές είχαν αποδειχθεί οι γραπτές, διότι συντελούσαν στη μνημονική εντύπωση των διδαχθέντων και αποτελούσαν πρόσφορο μέσο άσκησης. Οι προφορικές ήταν απομνημονευτικές εργασίες, π.χ. η επανάληψη των μαθημάτων.

3.5.4. Αναλυτικό πρόγραμμα 1977

Το Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα του Δημοτικού που ίσχυε από το έτος 1977 ήταν χωρισμένο σε δύο μέρη. Το πρώτο περιείχε το Αναλυτικό Πρόγραμμα και το δεύτερο περιείχε μεθοδικές οδηγίες για τη διδασκαλία κάθε μαθήματος, χωρίς να δίνεται όμως συγκεκριμένος τύπος πορείας διδασκαλίας για κάθε μάθημα (αυτό ήταν έργο του εκπαιδευτικού). Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα οι σκοποί διαχωρίζονταν σε ειδικούς και γενικούς.

Το Ωρολόγιο εβδομαδιαίο πρόγραμμα ήταν το παρακάτω:

Ἑβδομαδιαῖο Ὡρολόγιο Πρόγραμμα Μαθημάτων τοῦ 6/θεσίου Δημοτικοῦ Σχολείου.

α/α	Μαθήματα	Ὧρες Διδασκαλίας					
		Α'	Β'	Γ'	Δ'	Ε'	ΣΤ'
1.	Θρησκευτικὰ	1	1	2	2	2	2
2.	Ἑλληνικὴ Γλῶσσα	9	9	10	9	8	8
3.	Ἱστορία	–	–	2	2	2	2
4.	Σπουδὴ τοῦ Περιβάλλοντος	5	5	–	–	–	–
5.	Φυσικὰ καὶ Χημεία μὲ Στοιχεῖα Ὑγιεινῆς	–	–	2	2	3	3
6.	Γεωγραφία	–	–	2	2	2	2
7.	Ἀριθμητικὴ καὶ Γεωμετρία	3	3	3	3	4	4
8.	Ἀγωγὴ τοῦ Πολίτη	–	–	–	–	1	1
9.	Τεχνικὰ	2	2	2	2	2	2
10.	Μουσικὴ	2	2	2	2	2	2
11.	Γυμναστικὴ	2	2	2	2	1	1
12.	Πολιτιστικὲς Ἐκδηλώσεις καὶ Ἀθλητισμὸς	–	–	–	2	2	2
Ὧρες διδασκαλίας		24	24	27	28	29	29

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1977 είναι αρκετά βελτιωμένο σε πολλά σημεία σε σχέση με τα προηγούμενα και κυρίως πάνω στον κύκλο των φρονηματιστικών μαθημάτων. Ακόμη, αναλύεται ταυτόχρονα το μάθημα της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας, όπου αναφέρεται ότι σκοπός των μαθημάτων αυτών είναι:

«Σκοπός των μαθημάτων αυτών στο Δημοτικό Σχολείο είναι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψεως του παιδιού ανάλογα με τις δυνατότητες της διανοητικής του αναπτύξεως, ώστε να είναι σε θέση να εφαρμόσει τη μαθηματική γνώση και εμπειρία του στη λύση των προβλημάτων της καθημερινής ζωής του».

Ως ειδικότεροι σκοποί ορίζονταν γενικά η αξιοποίηση της μεγάλης ειδολογικής αξίας των μαθηματικών για την ολοκλήρωση της προσωπικότητας των μαθητών, η κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, η ανάπτυξη της υπολογιστικής δεξιότητας και η ανάπτυξη της ικανότητας για λύση προβλημάτων. Για τις τάξεις Α' και Β' ορίζονταν η κατανόηση των προμαθηματικών εννοιών της ποσότητας και του χώρου, η άσκηση της ικανότητας για ταξινόμηση αντικειμένων με βάση κριτήρια, όπως είναι το χρώμα, το μέγεθος, το σχήμα και ακόμη της δεξιότητας για διάταξη και αντιστοίχηση, η σύλληψη της έννοιας του αριθμού ως συμβόλου συγκεκριμένης ποσότητας υλικών αντικειμένων και η σύλληψη του σχήματος, η κατανόηση της σχέσεως μεταξύ ποσότητας πραγμάτων και αριθμών.

Στην ανάλυση της διδακτέας ύλης δεν υπάρχει αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς σε καμία από τις έξι τάξεις. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι συνιστά μια οπισθοχώρηση σε σχέση με εκείνο του 1973. Ωστόσο διαβάζοντας τις «Μεθοδικές Οδηγίες για το μάθημα της Αριθμητικής» που έπονται της διδακτέας ύλης, συναντάμε μερικές αναφορές για τους νοερούς υπολογισμούς. Επιπλέον, διαβάζοντας τις οδηγίες συλλέγουμε αρκετά στοιχεία για τον τρόπο διδασκαλίας. Τα σχετικά αποσπάσματα είναι τα εξής:

«Οι μαθητές θα καταλάβουν τη σημασία των διαφόρων αριθμητικών πράξεων, όταν πρώτα ενεργούν πάνω στις υλικές ποσότητες του εποπτικού υλικού και μεταφέρουν έπειτα την εμπράγματη λύση στον πίνακα ή στα τετράδιά τους. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι που να βρουν τον κανόνα, ώστε να μπορούν κατόπιν να λύνουν και μόνοι τους προβλήματα, με το νου τους αν είναι απλά και στο τετράδιό τους αν είναι σύνθετα ή αν τα αριθμητικά δεδομένα εκφράζονται σε μεγάλους αριθμούς.

Επιπλέον, όσον αφορά τη χρήση εποπτικών μέσων αναφέρεται ότι ο σχηματισμός των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών και η κατανόηση των μαθηματικών σημείων που τις συμβολίζουν δεν αποτελεί για το μικρό παιδί καθαρή πνευματική ενέργεια ανεξάρτητη από την υλική πραγματικότητα, αλλά αντίθετα στηρίζεται σε αυτή. Για αυτό στη φάση της αισθητοποίησης των αριθμών και των βασικών πράξεων, επιβάλλεται η χρησιμοποίηση εποπτικών μέσων, εικόνων, εικονικών υλικών αντικειμένων (ξυλάκια, σφαιρίδια, κτλ), εικονικών σχημάτων που αποτελούν ορισμένες ποσότητες (γραμμές, τελείες κτλ) και η παράστασή τους με τα γνωστά αριθμητικά σύμβολα.

Εάν παραβιάσουμε τη βαθμιαία αυτή αποκόλληση του παιδικού πνεύματος από τις υλικές ποσότητες, θα εμποδίσουμε την ομαλή «αναδόμηση» της μαθηματικής σκέψεως με αποτέλεσμα τη σημαντική καθυστέρηση της ικανότητας του παιδιού για νοερό υπολογισμό.

Επειδή η «αναδόμηση» αυτή (δηλαδή η προοδευτική απαγκίστρωση και ανοδική πορεία του παιδικού πνεύματος από τις υλικές ποσότητες προς τη τελική σύλληψη των νοερών ποσοτήτων και των σχέσεών τους) δεν πραγματοποιείται με τον ίδιο ρυθμό σε όλα τα παιδιά της ίδιας ηλικίας, ο δάσκαλος δεν πρέπει να απαιτεί απόλυτη ανταπόκριση των μαθητών στο σημείο αυτό. Και όπως είναι παιδαγωγικά απαράδεκτο να υποχρεώνει ο δάσκαλος το παιδί να χρησιμοποιεί εποπτικά μέσα, όταν είναι πλέον ικανό να λογαριάζει με το νου του, είναι το ίδιο απαράδεκτο να εμποδίζει τους μαθητές του να χρησιμοποιούν βοηθητικά εποπτικά μέσα (ακόμη και τα δάχτυλα των χεριών τους), όταν δεν είναι ακόμη ικανοί για νοερό υπολογισμό.

Οι μαθητές από τις μικρές ακόμη τάξεις, πρέπει να ενθαρρύνονται να επινοούν και να διατυπώνουν προβλήματα, προφορικά και γραπτά από τις άμεσες εμπειρίες τους.

Η αρχή της εξατομικεύσεως είναι σκόπιμο να εφαρμόζεται γενικά στη διδασκαλία των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο και μάλιστα, όταν διαπιστώνονται σοβαρές αποκλίσεις μερικών μαθητών από το κανονικό. Είναι αυτονόητο ότι ο ευσυνείδητος δάσκαλος πρέπει να δείξει ιδιαίτερη προσοχή και φροντίδα για τα παιδιά της κατηγορίας αυτής.

Οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται, ώστε να αναζητούν και να βρίσκουν περισσότερους από έναν τρόπους λύσεως των προβλημάτων.

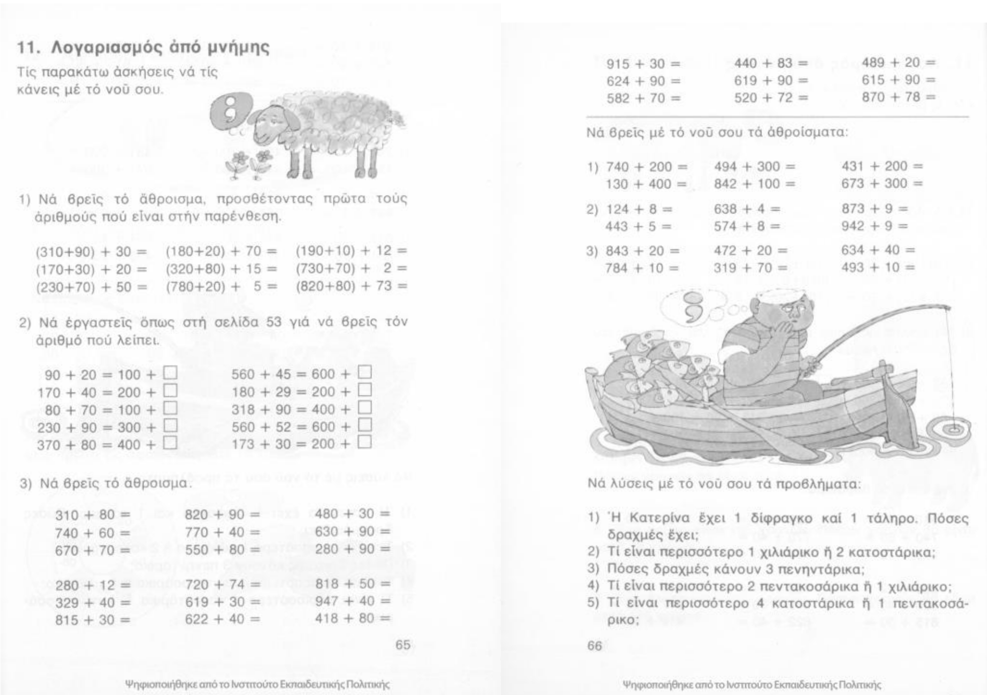
Η διόρθωση των σφαλμάτων μπορεί να γίνεται και από τα ίδια τα παιδιά με τη βοήθεια του δασκάλου, γιατί έτσι συνηθίζουν στον αυτοέλεγχο και στη συνεργασία.

Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι τα μαθηματικά δεν απαιτούν μονάχα βαθιά και σωστή κατανόηση, αλλά και επίμονη άσκηση».

Από τις αναφορές μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι νοεροί υπολογισμοί διδάσκονταν προκειμένου να βελτιωθούν οι μαθητές στην εμπέδωση των πράξεων. Η διδασκαλία τους εφαρμόζονταν από τις μικρές τάξεις, αλλά δε διευκρινίζεται σε ποια τάξη εισάγονταν. Αρχικά, έπρεπε οι μαθητές να εξασκηθούν στην επίλυση με τη χρήση εποπτικού υλικού, έπειτα γραπτά και στο τέλος νοερά. Ωστόσο δεν αναφέρεται πουθενά αν οι νοεροί υπολογισμοί διδάσκονταν στους φυσικούς αριθμούς, στα κλάσματα ή/και στους δεκαδικούς αριθμούς.

Στα σχολικά εγχειρίδια που εντοπίστηκαν και θα αναφερθούν παρακάτω, παρατηρήθηκε ότι υπήρχαν αναφορές για τους νοερούς υπολογισμούς κυρίως στις μικρότερες τάξεις (κυρίως στη Γ’ τάξη), ενώ στις μεγαλύτερες οι αναφορές μειώνονταν ή δεν υπήρχαν καθόλου. Όσον αφορά τις εκτιμήσεις, εντοπίστηκε μόνο μια άσκηση η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Αναλυτικότερα, στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ’ τάξης (Κωστάκη, 1977) είχε ολόκληρα κεφάλαια για τους νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών των τεσσάρων πράξεων.



11. Λογαριασμός ἀπό μνήμης

Τίς παρακάτω ἀσκήσεις νά τίς κάνεις μέ τό νοῦ σου.

1) Νά βρεῖς τό ἄθροισμα, προσθέτοντας πρῶτα τούς ἀριθμούς πού εἶναι στήν παρένθεση.

(310+90) + 30 = (180+20) + 70 = (190+10) + 12 =
(170+30) + 20 = (320+80) + 15 = (730+70) + 2 =
(230+70) + 50 = (780+20) + 5 = (820+80) + 73 =

2) Νά ἐργαστεῖς ὅπως στή σελίδα 53 γιά νά βρεῖς τόν ἀριθμό πού λείπει.

90 + 20 = 100 + □ 560 + 45 = 600 + □
170 + 40 = 200 + □ 180 + 29 = 200 + □
80 + 70 = 100 + □ 318 + 90 = 400 + □
230 + 90 = 300 + □ 560 + 52 = 600 + □
370 + 80 = 400 + □ 173 + 30 = 200 + □

3) Νά βρεῖς τό ἄθροισμα.

310 + 80 = 820 + 90 = 480 + 30 =
740 + 60 = 770 + 40 = 630 + 90 =
670 + 70 = 550 + 80 = 280 + 90 =

280 + 12 = 720 + 74 = 818 + 50 =
329 + 40 = 619 + 30 = 947 + 40 =
815 + 30 = 622 + 40 = 418 + 80 =

65

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

915 + 30 = 440 + 83 = 489 + 20 =
624 + 90 = 619 + 90 = 615 + 90 =
582 + 70 = 520 + 72 = 870 + 78 =

Νά βρεῖς μέ τό νοῦ σου τά ἀθροίσματα:

1) 740 + 200 = 494 + 300 = 431 + 200 =
130 + 400 = 842 + 100 = 673 + 300 =

2) 124 + 8 = 638 + 4 = 873 + 9 =
443 + 5 = 574 + 8 = 942 + 9 =

3) 843 + 20 = 472 + 20 = 634 + 40 =
784 + 10 = 319 + 70 = 493 + 10 =

Νά λύσεις μέ τό νοῦ σου τά προβλήματα:

1) Ἡ Κατερίνα ἔχει 1 δίφραγκο καί 1 τάληρο. Πόσες δραχμές ἔχει;
2) Τί εἶναι περισσότερο 1 χιλιάρικο ἤ 2 κατοστάρικα;
3) Πόσες δραχμές κάνουν 3 πενηντάρικα;
4) Τί εἶναι περισσότερο 2 πεντακοσάρικα ἤ 1 χιλιάρικο;
5) Τί εἶναι περισσότερο 4 κατοστάρικα ἤ 1 πεντακοσάρικο;

66

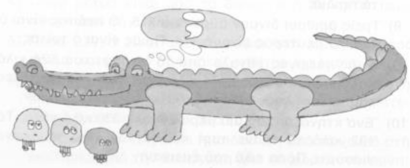
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

22. Λογαριασμός ἀπό μνήμης

Τίς παρακάτω ἀσκήσεις νά τίς κάνεις μέ τό νοῦ σου.

Νά βρεῖς τή διαφορά

1)	130 – 10 =	650 – 20 =	780 – 10 =
	180 – 30 =	360 – 10 =	890 – 60 =
2)	810 – 20 =	420 – 90 =	510 – 30 =
	530 – 40 =	130 – 40 =	620 – 30 =
	460 – 80 =	540 – 80 =	410 – 90 =
3)	300 – 200 =	800 – 200 =	1000 – 300 =
	400 – 100 =	900 – 700 =	1000 – 800 =
4)	618 – 100 =	425 – 300 –	443 – 100 =
	562 – 200 =	819 – 200 =	585 – 400 =
5)	643 – 143 =	685 – 3 =	839 – 9 =
	528 – 228 =	947 – 4 =	175 – 75 =
6)	930 – 700 =	385 – 200 =	476 – 300 =
	848 – 300 =	749 – 500 =	698 – 500 =



82

18. Λογαριασμός ἀπό μνήμης

Νά βρεῖς μέ τό νοῦ σου τά παρακάτω γινόμενα:

1)	4 X 5 =	9 X 4 =	7 X 4 =	
	6 X 8 =	3 X 5 =	6 X 3 =	
2)	10 X 4 =	30 X 5 =	70 X 4 =	60 X 3 =
	20 X 3 =	40 X 4 =	80 X 7 =	50 X 5 =
3)	70 X 6 =	70 X 9 =	80 X 3 =	90 X 3 =
	60 X 3 =	60 X 4 =	60 X 7 =	80 X 9 =
4)	70 X 5 =	6 X 30 =	3 X 70 =	4 X 80 =
	90 X 9 =	4 X 50 =	6 X 10 =	6 X 60 =
5)	200 X 3 =	100 X 4 =	3 X 300 =	4 X 200 =
	400 X 2 =	5 X 200 =	100 X 6 =	300 X 2 =
6)	20 X 10 =	40 X 20 =	40 X 10 =	30 X 20 =
	20 X 20 =	30 X 30 =	20 X 50 =	10 X 80 =

19. Πολλαπλασιασμός ἀπό μνήμης μέ 11

Ἄσκηση

Νά βρεῖς τά γινόμενα:

5 X 10,   15 X 10,   23 X 10,   42 X 10,   38 X 10,   14 X 10.

Ἄς κάνουμε τώρα τόν πολλαπλασιασμό 5 X 11.

Γράφουμε   11 = 10 + 1

Θυμᾶσαι τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση;

$$5 \times (10 + 1) = \underbrace{(5 \times 10)}_{50} + \underbrace{(5 \times 1)}_{5} = 55$$

Ὅμοια κάνουμε τόν πολλαπλασιασμό 23 X 11

$$23 \times (10 + 1) = \underbrace{(23 \times 10)}_{230} + \underbrace{(23 \times 1)}_{23} = 253$$

Μελέτησε τά παρακάτω παραδείγματα:

15 X 11 = 150 + 15   38 X 11 = 380 + 38

42 X 11 = 420 + 42   14 X 11 = 140 + 14

> Γιά νά πολλαπλασιάσουμε μέ τό νοῦ μας ἕναν ἀριθμό μέ 11, πολλαπλασιάζουμε μέ 10 καί σ' αὐτό πού θά βροῦμε προσθέτουμε τόν ἀριθμό.

Ἀσκήσεις

Νά βρεῖς μέ τό νοῦ σου τά παρακάτω γινόμενα:

39 X 11=	75 X 11=	84 X 11=	56 X 11=
63 X 11=	18 X 11=	68 X 11=	32 X 11=
90 X 11=	24 X 11=	33 X 11=	29 X 11=

130

14. Λογαριασμός ἀπό μνήμης

Νά κάνεις μέ τό νοῦ σου τίς παρακάτω διαιρέσεις.

		πηλίκο	ὑπόλοιπο
1)	64 : 8		
	35 : 5		
	69 : 7		
	48 : 5		
	62 : 7		
	44 : 6		
	54 : 9		
	78 : 9		
	37 : 6		

2)	540 : 6 =	120 : 6 =	700 : 7 =	250 : 5 =
	320 : 8 =	420 : 7 =	800 : 2 =	500 : 5 =
	270 : 9 =	180 : 9 =	360 : 4 =	160 : 4 =
	200 : 2 =	120 : 2 =	630 : 7 =	900 : 3 =
	600 : 3 =	180 : 3 =	720 : 8 =	820 : 9 =
	150 : 5 =	450 : 9 =	640 : 8 =	490 : 7 =
3)	402 : 4 =	603 : 6 =	803 : 4 =	908 : 9 =
	508 : 5 =	801 : 2 =	902 : 3 =	805 : 8 =
	403 : 4 =	401 : 2 =	602 : 3 =	601 : 2 =

178

Το σχολικό βιβλίο της Δ’ τάξης (Τζούφλα, 1979) είχε μόνο τέσσερις αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς, οι οποίες ήταν οι εξής:

170. Νά ὑπολογιστοῦν, χωρίς χαρτί καί μολύβι, τά γινόμενα:

1) 8 × 10 × 10	2) 2 × 3 × 4 × 10	3) 2 × 4 × 20 × 2
4) 2 × 3 × 4 × 5 × 6	5) 0 × 9 × 16	6) 16 × 9 × 0

174. Νά βρεῖτε νοερά, μέ τή χρήση τοῦ Πυθαγόρειου πίνακα τά παρακάτω πηλίκα καί ὑπόλοιπα.

1) 72 : 9 = 2) 63 : 7 = 3) 28 : 7 = 4) 35 : 5 =
5) 60 : 7 = 6) 62 : 8 = 7) 79 : 9 = 8) 27 : 4 =
10) 36 : 5 =

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

372. Ποιό μῆκος εἶναι 10, 100, 1.000 φορές μικρότερο ἀπ' τό χιλιόμετρο;
373. 12.859 δραχμές πόσα δεκάρικα εἶναι, πόσα ἑκατοστάρικα καί πόσα χιλιάρικα;
374. 1.000 ἄτομα παρακολούθησαν μιά θεατρική παράσταση. Ἄν ἡ ἐπιχείρηση πῆρε 225.000, πόσο στοίχιζε τό κάθε εἰσιτήριο;
375. Νά συμπληρωθεῖ ὁ πίνακας:

Ἀριθμοί	διά 10		διά 100		διά 1.000	
	πηλίκο	ὑπόλοιπο	πηλίκο	ὑπόλοιπο	πηλίκο	ὑπόλοιπο
561379	56137	9	5613	79	561	379
87456	8745	6	874	56	87	456
103107	10310	7	1031	07	103	107
457686	45768	6	4576	86	457	686

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

376. Πόσα μηδενικά μποροῦμε νά παραλείψουμε κι ἀπ' τό διαιρετέο κι ἀπ' τό διαιρέτη στίς παρακάτω διαιρέσεις;
420 : 60, 2.500 : 50, 28.000 : 7.000, 36.000 : 4.000
377. Ἕνας μαθητής ἔγραψε 800 λέξεις σέ 40 λεπτά τῆς ὥρας. Πόσες λέξεις ἔγραψε σέ ἕνα λεπτό;
378. Μιά ὥρα διαιρεῖται σέ 60 πρῶτα λεπτά. Πόσες ὧρες εἶναι 1.800 λεπτά;

Το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης (Καρφοπουλου, Χαλκιαδάκη, Τζουφλα, 1981) είχε μόνο μια αναφορά στην εκτίμηση και καμία στους νοερούς υπολογισμούς, η οποία ήταν η εξής:

Ἀσκήσεις

1. Νά κάμεις τίς διαιρέσεις μέ προσέγγιση.
α) 669 : 5 = β) 794 : 6 = γ) 3.815 : 7 =

Το σχολικό εγχειρίδιο της Στ΄ (Μέγα, 1979) είχε μόνο μια αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς, η οποία ήταν η εξής:

1) Νά βρεῖτε νοερά τά γινόμενα: α΄) 3 · 15 · 2 β΄) 5 · 7 · 6 γ΄) 8 · 9 · 10.

Ο εκπαιδευτικός όφειλε κατά τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών να ενθαρρύνει τους μαθητές να βρίσκουν περισσότερους από έναν τρόπους λύσης και να εφαρμόζει εξατομικευμένη διδασκαλία όταν το έκρινε σκόπιμο/απαραίτητο. Ο μαθητής έπρεπε να αναπτύξει το αίσθημα αυτενέργειας, συνεργατικότητας και αυτοελέγχου (να διορθώνει μόνος του τα λάθη του).

Την τρίτη αυτή φάση των Μοντέρνων Μαθηματικών η εφαρμογή της «Τριμερούς πορείας» είχε αρχίσει να φθίνει και να χρησιμοποιούνται διαφοροποιητικά μέσα στη διδασκαλία σύμφωνα με τις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες των μαθητών.

Παρατηρήθηκε επίσης ότι δεν γινόταν πουθενά αναφορά, ούτε στην ανάλυση της διδακτέας ύλης, ούτε στις μεθοδικές οδηγίες, στις εκτιμήσεις.

Μια σημαντική βελτίωση στο μάθημα των Μαθηματικών ήταν ότι για πρώτη φορά συγγράφηκαν και κυκλοφόρησαν τα σχολικά βιβλία του δημοτικού στα μαθηματικά (βιβλίο μαθητή και βιβλίο του δασκάλου) το 1980.

3.5.5 Συμπεράσματα δεύτερης περιόδου

Βλέπουμε ότι, τη δεύτερη περίοδο, η οποία διήρκησε από το 1913 μέχρι το 1981, στην οποία τα παραδοσιακά μαθηματικά έδωσαν τη θέση τους στα μοντέρνα μαθηματικά, υπήρχε μια σημαντική οπισθοδρόμηση στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, ενώ παρατηρήθηκαν οι πρώτες αναφορές για τις εκτιμήσεις.

Σε όλα τα Αναλυτικά Προγράμματα και στα σχολικά εγχειρίδια της περιόδου οι νοεροί υπολογισμοί παραγκωνίζονται. Εξαιτίας, λοιπόν, της λακωνικής αναφοράς σε αυτούς, δε δίνονταν οδηγίες για τον τρόπο που θα διδάσκονταν, ούτε και για τους λόγους που θα έπρεπε να διδαχθούν. Πουθενά δε διαχωρίζονταν οι νοεροί υπολογισμοί και οι γραπτοί. Παρατηρήθηκε, ωστόσο ότι, όσες φορές ζητήθηκε η εφαρμογή νοερών υπολογιστών στόχευε στην εμπέδωση των πράξεων.

Τη δεύτερη αυτή περίοδο ως μέθοδος διδασκαλίας αρχικά εφαρμόζονταν η Ερβαρτιανή, από το 1930 εμφανίστηκε το Σχολείο Εργασίας, ενώ από το 1941 η Τριμερής πορεία. Όσο όμως κι αν προσπαθούσαν οι μαθητές να προάγουν την αυτενέργεια, τον αυτοέλεγχο και τη συνεργατικότητα, όσο κι αν προσπαθούσαν οι εκπαιδευτικοί να εφαρμόσουν εξατομικευμένη διδασκαλία, να προσαρμόσουν το πρόγραμμα βάση των ατομικών αναγκών των μαθητών και των ενδιαφερόντων τους, η οργάνωση της εκπαίδευσης απαιτούσε αλλαγές προκειμένου να βελτιωθεί.

Στα Αναλυτικά Προγράμματα του εξατάξιου πλέον δημοτικού σχολείου προτείνονταν οι νοεροί υπολογισμοί να διδάσκονται από τις μικρότερες τάξεις (αν και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1974 δε διευκρινίζονταν πότε εισάγονταν), ενώ διέφεραν ως προς το πότε έπαυε η διδασκαλία τους. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1913 υποστηρίζονταν ότι οι νοεροί υπολογισμοί έπρεπε να διδάσκονται μέχρι και τη Γ’ τάξη, ενώ στις τρεις μεγαλύτερες δεν αναφέρονταν καθόλου. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1969 υποστηρίζονταν ότι οι νοεροί υπολογισμοί έπρεπε να διδάσκονται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού. Τέλος, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1974 οι νοεροί υπολογισμοί δεν αναφέρονταν πουθενά στην ανάλυση της διδακτέας ύλης, ενώ στα σχολικά εγχειρίδια εμφανίζονταν κυρίως στις μικρότερες τάξεις και ελάχιστα ή καθόλου στις μεγαλύτερες τάξεις.

Επιπλέον, η σειρά διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και των γραπτών υπολογισμών διέφερε. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1913 δε διευκρινίζονταν αν διδάσκονταν πρώτα ή μετά οι νοεροί υπολογισμοί, αν και ο καθηγητής Σαφαρίκας συμβούλευε πως οι μαθητές πρώτα έπρεπε να μάθουν τον κανόνα (αποστήθιση), έπειτα να εξασκηθούν γραπτά και στο τέλος νοερά. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1969 υποστηρίχθηκε πως οι μαθητές έπρεπε να εξασκηθούν πρώτα νοερά και στη συνέχεια γραπτά. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1973 έπρεπε πρώτα να εξασκηθούν με τη χρήση εποπτικού υλικού, στη συνέχεια νοερά και στο τέλος γραπτά. Τέλος στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1977 προτείνονταν να γίνει εξάσκηση με εποπτικό υλικό, έπειτα γραπτά και στο τέλος νοερά.

Λόγω των ελάχιστων αναφορών σε νοερούς υπολογισμούς, εντοπίστηκαν μόνο αναφορές σε νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών και κλασμάτων, ενώ πουθενά δεν εντοπίστηκαν νοεροί υπολογισμοί δεκαδικών αριθμών (με εξαίρεση ένα σχολικό βιβλίο της Ε’ τάξης του 1969 το οποίο περιείχε νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών, κλασμάτων και δεκαδικών). Αντιθέτως, την περίοδο αυτή στο βιβλίο του Σαφαρίκα συναντούσαν νοερούς υπολογισμούς για φυσικούς αριθμούς, κλάσματα και δεκαδικούς.

Την περίοδο αυτή ήταν τόσο σποραδική η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών που δεν μπορέσαμε να συμπεράνουμε αν χρησιμοποιούνταν στρατηγικές. Επιπλέον, εντοπίστηκε μόνο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1969 ότι ζητούνταν η διατύπωση της σκέψης του μαθητή.

Στην αρχή της περιόδου αυτής δε παρατηρήθηκε καμία αναφορά στις εκτιμήσεις, ούτε στα Αναλυτικά Προγράμματα, ούτε στα σχολικά εγχειρίδια. Πρώτη αναφορά στις εκτιμήσεις έγινε από τον καθηγητή Καλλιάφα, ενώ επίσημα σε Αναλυτικό Πρόγραμμα αναφέρθηκε το 1969 ζητώντας από τους μαθητές να εκτιμούν το αποτέλεσμα της άσκησης ή του προβλήματος (αλλά δεν εντοπίστηκε σε κάποιο σχολικό βιβλίο) και αργότερα το 1973 (Αναλυτικό Πρόγραμμα και σχολικά βιβλία αν και ελάχιστα), ενώ το 1977 δεν εντοπίστηκε πουθενά κάποια αναφορά.

3.6 Τρίτη περίοδος

Την περίοδο αυτή συναντάμε τα Αναλυτικά Προγράμματα του 1982-85, του 1992 και του 2003. Όλες οι μεταρρυθμίσεις που αφορούν την εκπαίδευση σε αυτή την περίοδο έχουν ως απώτερο στόχο την οικονομική ανάπτυξη της χώρας, γι’ αυτό και ενισχύονται στα Αναλυτικά Προγράμματα τα μαθήματα των Μαθηματικών, της Φυσικής και την Τεχνολογίας.

Τα Αναλυτικά Προγράμματα του 1982-85 και η αναθεώρηση του 1992 με μικρές και δευτερεύουσες αλλαγές ήταν διατυπωμένα σύμφωνα με την θεωρία των curricula και με σύγχρονες παιδοκεντρικές θεωρίες μάθησης και διδασκαλίας. Από αυτή τη χρονική περίοδο και μετά υπάρχουν πλέον επίσημα σχολικά βιβλία για όλες τις τάξεις, που συνοδεύονται και από το βιβλίο του δασκάλου. Υπάρχουν διατυπωμένοι οι στόχοι της διδασκαλίας και δίνονται αναλυτικές οδηγίες για τις ενέργειες του δασκάλου σε κάθε επιμέρους ενότητα, οπότε μπορούμε και να εκτιμήσουμε με ακρίβεια τη διδασκαλία που προτείνεται για τους νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013).

Τα προγράμματα αυτής της περιόδου είναι επηρεασμένα από το κίνημα των Μοντέρνων Μαθηματικών και επικρατεί η λογική του στρουκτουραλισμού στην απόδοση των μαθηματικών περιεχομένων. Έτσι, οι αριθμοί και οι πράξεις διδάσκονται με βάση τη θεωρία των συνόλων. Η εξέλιξη και η ανάλυση των εννοιών του αριθμού και των πράξεων γίνεται αυστηρά σύμφωνα με τις μαθηματικές ιδιότητες και όχι σύμφωνα με τον τρόπο σκέψης και τις προϋπάρχουσες γνώσεις του παιδιού (Λεμονίδης, 2013).

3.6.1 Αναλυτικά προγράμματα 1982-1985 και 1992

Η ουσιαστική αλλαγή στη διδασκαλία των αριθμών και των πράξεων συντελείται με το αναλυτικό πρόγραμμα του 1982, το οποίο αναθεωρήθηκε το 1992 με πολύ λίγες αλλαγές. Την εποχή αυτή κυκλοφορούν τα πρώτα επίσημα σχολικά βιβλία (βιβλίο του δασκάλου και βιβλίο του μαθητή) των μαθηματικών. Το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος ίσχυε μέχρι το 2003 (Λεμονίδης, 2003).

Από το εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα, όπως παρατίθεται παρακάτω, βλέπουμε ότι αφιερώνονταν τέσσερεις (4) ώρες εβδομαδιαίως για το μάθημα των Μαθηματικών.

Ἑβδομαδιαῖα Ὡρολόγια Προγράμματα Μαθημάτων

ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΟ ΩΡΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΞΑΘΕΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ	ΤΑΞΕΙΣ	
	Α′	Β′
ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ (Θρησκευτικά, κοινωνικὲς ἐπιστῆμες, φυσικὲς ἐπιστῆμες)	4	4
ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ	9	9
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	4	4
ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΑΓΩΓΗ	4	4
ΦΥΣΙΚΗ ΑΓΩΓΗ	2	2
ΩΡΕΣ ΚΥΡΙΑΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ	23	23

Σκοπός του μαθήματος των Μαθηματικών, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, όσον αφορά τις πράξεις, είναι να αποκτήσουν τις τεχνικές για την εκτέλεση των βασικών μαθηματικών πράξεων και την ετοιμότητα για την εφαρμογή τους σε συγκεκριμένα προβλήματα. Σε κάθε επιμέρους διδακτική ενότητα που αναφέρεται στις αριθμητικές πράξεις φυσικών αριθμών, μονότονα επαναλαμβάνεται ότι στόχος της διδασκαλίας, μεταξύ των άλλων είναι *«να εκτελούν οι μαθητές νοερά πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης»*.

Ειδικότερα, το Βιβλίο του Δασκάλου της Δ’ τάξης στο μάθημα των Μαθηματικών αναφέρει πως τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό δεν ενδιαφέρει μόνο η κατανόηση των εννοιών και η ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης. Ενδιαφέρει, επίσης, τόσο η κατανόηση της υπολογιστικής τεχνικής και η εκμάθηση της υπολογιστικής δεξιότητας, όσο και η εμπέδωσή τους, για να είναι τελικά σε θέση ο μαθητής να λογαριάζει σωστά και να εκτελεί με ευχέρεια τις αριθμητικές πράξεις.

Η βασική αυτή επιδίωξη της μαθηματικής εκπαίδευσης, δηλαδή να λογαριάζει σωστά και να εκτελεί με ευχέρεια τις αριθμητικές πράξεις, επιτυγχάνεται στο βαθμό που οι μαθητές θα κατανοήσουν και θα ασκηθούν ικανοποιητικά και στο γραπτό και στο νοερό αριθμητικό λογισμό, υποστηρίζει ο Αποστολόπουλος (1995).

Στο Βιβλίο του Δασκάλου προτείνονται για κάθε διδακτικό θέμα πιθανή διδακτική πορεία, ενδεικνυόμενες διδακτικές ενέργειες και μαθητικές δραστηριότητες, αναλύονται οι τεχνικές αριθμητικών υπολογισμών, παρουσιάζονται στρατηγικές αριθμητικών υπολογισμών με τη λογικομαθηματική τους βάση, και όπου προτείνονται ασκήσεις εμπέδωσης, οι συνεχείς αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς θεμελιώνουν τον ισχυρισμό ότι τα Αναλυτικά Προγράμματα της εποχής προβάλλουν και αναδεικνύουν την εκπαιδευτική σημασία και τη θέση τους στη διδασκαλία (Αποστολόπουλος 1995).

Ο Αποστολόπουλος (1995) αναφέρει ότι για την κατανόηση της τεχνικής και την άσκηση της δεξιότητας γραπτού και νοερού υπολογισμού το συγκεκριμένο Αναλυτικό Πρόγραμμα και τα σχολικά βιβλία μαθηματικών περιέχουν μεγάλο αριθμό ασκήσεων.

Παρακάτω παρατίθεται τι αναφέρει το **Αναλυτικό πρόγραμμα** για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.

Για την Α' τάξη, την περίοδο αυτή διδάσκεται η έννοια του αριθμού και όχι η αισθητοποίηση και η προσέγγιση των αριθμών με τη χρήση των υλικών αντικειμένων, όπως γινόταν την προηγούμενη περίοδο. Μια ακόμη διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη περίοδο είναι ότι διαχωρίζονται οι προαριθμητικές έννοιες (ταξινόμηση, διάταξη, αντιστοίχηση) από τις αριθμητικές έννοιες. Η διδασκαλία των αριθμών και των πράξεων γίνεται σύμφωνα με την ταξινόμηση των αριθμών σε τρεις ομάδες (1-5, 0-10, 0-20) και οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού διδάσκονται με βάση τα σύνολα.

Η διδασκαλία των αριθμών, ως προς το μέγεθός τους, πραγματοποιείται παράλληλα με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Διδάσκονται οι αριθμοί σε ομάδες (1-5, 6-10, 11-20) και μετά τη διδασκαλία κάθε ομάδας αριθμών διδάσκονται και οι αντίστοιχες πράξεις μέσα στις ομάδες αυτές (προσθέσεις και αφαιρέσεις μέχρι το 5, μέχρι το 10 και μέχρι το 20 αντίστοιχα). Ως προς το περιεχόμενο η πράξη της πρόσθεσης διδάσκεται ως ένωση συνόλων, η πράξη της αφαίρεσης ως διαχωρισμός συνόλων και η πράξη του πολλαπλασιασμού ως ένωση ίσων συνόλων και ως σύντομη πρόσθεση.

Σημαντική επιδίωξη θεωρείται να εξοικειωθούν με την τεχνική εκτέλεσης των πράξεων και να αποκτήσουν την υπολογιστική δεξιότητα για την εκτέλεση αυτών των πράξεων. Αυτή η επιδίωξη είναι εμφανής στις ασκήσεις που υπήρχαν στα σχολικά βιβλία. Ενδεικτικές δραστηριότητες από τα σχολικά βιβλία παρατίθενται στο Παράρτημα 5 της παρούσης εργασίας.

Και στη Β' τάξη η διδασκαλία αρχίζει με προμαθηματικές έννοιες. Οι αριθμοί διδάσκονται μέχρι το 100. Κάθε φορά οι αριθμοί και οι πράξεις διδάσκονται μέχρι ένα ίδιο μέγεθος αριθμών. Για παράδειγμα, διδάσκονται οι απόλυτοι και οι τακτικοί αριθμοί από το 10-20 και στη συνέχεια η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός για αριθμούς από το 10-20.

Οι πράξεις εισάγονται με τη λογική των συνόλων. Η πρόσθεση και οι αφαίρεση διδάσκονται μέχρι και τις γραπτές πράξεις διψήφιων με κρατούμενο. Στη πρόσθεση γνωρίζουν την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα. Η γραπτή αφαίρεση δείχνεται με 2 αλγορίθμους, με τη μέθοδο του δανεισμού και τη βασική ιδιότητα της αφαίρεσης. Στον πολλαπλασιασμό διδάσκεται η προπαίδεια με τη σειρά και η αντιμεταθετική και η επιμεριστική ιδιότητα. Εισάγεται η έννοια της διαίρεσης (πηλίκα με μονοψήφιο διαιρέτη και μονοψήφιο ή διψήφιο διαιρετέο), η πράξη της διαίρεσης και ειδικότερα επιδιώκεται να εισαχθούν στην έννοιά της ως διαμοιρασμός συνόλων σε ισοδύναμα σύνολα και στη διαδικασία της τεχνικής για την εκτέλεση της διαίρεσης.

Επιδιώκεται κι εδώ να αναπτύξουν περισσότερο την υπολογιστική δεξιότητα για την εκτέλεση αυτών των πράξεων. Οι γραπτοί αλγόριθμοι προτάσσονται από την αρχή, ενώ η διδακτική ύλη συμπληρώνεται με ασκήσεις για νοερούς υπολογισμούς. Ενδεικτικές δραστηριότητες των σχολικών βιβλίων προς λύση από τους μαθητές της εποχής παρατίθενται στο Παράρτημα 6.

Στη Γ΄ τάξη (Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1983) ως προς το περιεχόμενο των μαθηματικών πράξεων διδάσκονται σύνθετες μαθηματικές πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού, η αντιμεταθετικότητα, η προσεταιριστικότητα και η επιμεριστικότητα στον πολλαπλασιασμό, η συστηματική μελέτη της πράξης της διαίρεσης και λύσεις προβλημάτων.

Επιδιώκεται να κατανοήσουν τις βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, να αποφασίζουν πότε θα χρησιμοποιούν την πράξη της διαίρεσης, να αποκτήσουν ευχέρεια στην τεχνική της και να ενισχύσουν τη λογιστική τους δεξιότητα στην πράξη της διαίρεσης.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μπορούν να γίνουν μέχρι και με τριψήφιους αριθμούς μέσα στη χιλιάδα. Οι δοκιμές τους ως «νοερή» εκτέλεση των πράξεων αυτών, με απώτερο στόχο να κατανοούν τη διαδικασία της δοκιμής ως μέσου ελέγχου της ορθότητας των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, επιδιώκουν να εκτελούν σωστά τις δοκιμές και να εκτελούν νοερά πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Η πράξη του πολλαπλασιασμού μπορεί να γίνει μέχρι και με διψήφιους παράγοντες, μέσα στη χιλιάδα, εφαρμόζουν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, τη δοκιμή του πολλαπλασιασμού, τη νοερή εκτέλεση πράξεων πολλαπλασιασμού και τον Πυθαγόρειο πίνακα.

Η διαίρεση μπορεί να γίνει με διαιρέτη μονοψήφιο μέσα στη χιλιάδα, διδάσκεται ως διαμερισμός συνόλων σε ισοδύναμα σύνολα ή ως ενέργεια αντίστροφη του πολλαπλασιασμού, διδάσκονται οι όροι της διαίρεσης, η τέλεια και η ατελής διαίρεση, η δοκιμή της διαίρεσης και στη συνέχεια η νοερή εκτέλεση απλών διαιρέσεων. Στα σχολικά βιβλία παρατηρείται η πρόθεση για ανάπτυξη της ικανότητας για νοερούς υπολογισμούς, η οποία παραδειγματίζεται στο Παράρτημα 7.

Στη Δ' τάξη (Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1984) οι μαθητικές πράξεις και τα προβλήματα στους αριθμούς 0-1.000.000 έχουν ως επιδιώξεις να βελτιώσουν την υπολογιστική δεξιότητα των μαθητών για την εκτέλεση των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, να αποφασίζουν με περισσότερη ευχέρεια πότε θα χρησιμοποιούν την κάθε πράξη, να συλλάβουν τις ιδιότητες των αριθμητικών πράξεων (επιμεριστική, προσεταιριστική, αντιμεταθετική), να επισημαίνουν τις συνέπειές τους και να επινοούν προβλήματα που σχετίζονται με τις εμπειρίες τους καθώς και ποικίλες διαδικασίες για τη λύση τους.

Ειδικότερα, μεταξύ των άλλων στόχων, αναφέρεται στις τέσσερεις πράξεις οι μαθητές να καταστούν ικανοί να εκτελούν νοερά προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. Επιπλέον στους δεκαδικούς αριθμούς στοχεύουν στον υπολογισμό νοερά και κατά προσέγγιση αθροισμάτων και διαφορών δεκαδικών αριθμών, στόχοι οι οποίοι διακρίνονται από τις ασκήσεις που περιέχουν τα σχολικά βιβλία. Ενδεικτικές δραστηριότητες έχουν παρατεθεί στο Παράρτημα 8.

Στην Ε' τάξη στη θεματική ενότητα «Εισαγωγή στη λογικομαθηματική σκέψη» με γενικό στόχο την εισαγωγή στη διαδικασία της συλλογιστικής, στοχεύει όσον αφορά την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης να δημιουργούν νοητικούς συνδυασμούς δύο (ή περισσότερων) οποιονδήποτε στοιχείων ενός συνόλου, να αναλύουν νοητικούς συνδυασμούς στα στοιχεία τους, ενώ όσον αφορά την πράξη του πολλαπλασιασμού στοχεύουν να δένουν ξεχωριστές νοητικές πράξεις σε ένα σύστημα. Στα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν σχετικές ασκήσεις με νοερούς υπολογισμούς, μερικές από τις οποίες περιέχονται στο Παράρτημα 9.

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα τους ΣΤ' τάξης δεν αναφέρεται πουθενά σε νοερούς υπολογισμούς, ενώ το σχολικό βιβλίο περιέχει μόνο τρεις (3) ασκήσεις με νοερούς υπολογισμούς, οι οποίες απεικονίζονται στο Παράρτημα 10.

Η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, νοερά, δεν ακολουθεί αυστηρά προδιαγεγραμμένα βήματα, είναι μη αλγοριθμική. Ποιά κάθε φορά υπολογιστική πορεία, δηλαδή **στρατηγική** σκέψης ακολουθούμε, ποιούς αριθμητικούς συνδυασμούς, ποιές αριθμητικές σχέσεις, ιδιότητες και κανόνες εφαρμόζουμε για να οδηγηθούμε στο αποτέλεσμα, εξαρτάται από την ευρηματική μας ικανότητα, από την ικανότητα δημιουργικού αυτοσχεδιασμού. Κάθε νοερός υπολογισμός είναι και μια δημιουργική πρόκληση, ουσιαστικά δημιουργούμε (Χαλάτσης, ;)[15].

Πάντως ευρισκόμενοι μπροστά στην πρόκληση να εκτελέσουμε νοερά μια αριθμητική πράξη, στην ουσία βρισκόμαστε μπροστά σε ένα πρόβλημα, σε μια προβληματική κατάσταση. Απαντάμε σωστά και οικονομικότερα, με την μικρότερη σπατάλη κόπων και χρόνου, αν καταφέρουμε να συλλάβουμε και εφαρμόσουμε την κατάλληλη ιδιότητα των αριθμητικών πράξεων και βέβαια αν έχουμε ασκηθεί σε νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς (Αποστολόπουλος, 1995). Η «αριθμητική με το νου» στηρίζεται στην χρήση των βασικών αριθμητικών γεγονότων, αλλά και άλλων αξιοσημείωτων αριθμητικών υπολογισμών, και φυσικά στην ευχερή και ευρηματική χρήση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων τους αριθμητικής (Χαλάτσης, 1990).

Κάποιοι σταθεροί βασικοί κανόνες, κάποιες βασικές υπολογιστικές στρατηγικές νοερής εκτέλεσης για κάθε αριθμητική πράξη μπορούν να προβληθούν και σε αυτές να ασκηθούν οι μαθητές εντατικότερα κατά τη διδασκαλία. Και τούτο γιατί πρέπει να ενδιαφέρεται το σχολείο να αποκτήσουν τα παιδιά ένα βασικό ευκολόχρηστο και οικονομικό εργαλείο υπολογισμών για τις πρακτικές τους ανάγκες. Συνεπώς, η ανάπτυξη των ικανοτήτων που διευκολύνουν την εκδήλωση της ευρηματικότητας και της δημιουργικής σύλληψης αποτελεσματικών στρατηγικών είναι ο πρωτεύον στόχος της διδασκαλίας της «Αριθμητικής με το Νου». Πέρα από αυτό όμως, ένας βασικός εξοπλισμός με απαραίτητες δεξιότητες – εργαλεία για καθημερινή χρήση είναι επίσης αναγκαίος (Αποστολοπουλος, 1995). Επιπλέον, κάθε αριθμητικός υπολογισμός με ολιγοψήφιους αριθμούς αποτελεί μια ιδιαιτερότητα και συγχρόνως μια πρόκληση για τον καθένα να βρει την κατάλληλη στρατηγική να τον εκτελέσει με το νου (Χαλάτσης, 1990).

Επομένως, σε ότι αφορά τον νοερό υπολογισμό, για να φτάσει κανείς στο σωστό αποτέλεσμα δεν αρκεί να χρησιμοποιεί σωστά τα «βασικά αριθμητικά γεγονότα», αλλά να μπορεί να επιλέγει την καταλληλότερη υπολογιστική στρατηγική. Συνεπώς, το σχολείο καλλιεργεί την ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς όχι μόνο όταν παρουσιάζει και αναλύει στρατηγικές νοερών υπολογισμών, αλλά και στο βαθμό που καταφέρνει να κατανοήσουν πλήρως τις

[15] Όπ. Αναφέρεται στον Αποστολόπουλο (1995).

αριθμητικές έννοιες, τις ιδιότητες των αριθμητικών πράξεων και τις μεταξύ των αριθμητικών πράξεων σχέσεις.

Αν και θα έπρεπε το Αναλυτικό Πρόγραμμα να αποτελεί σημείο αναφοράς του δασκάλου, τελικά το **σχολικό εγχειρίδιο** είναι εκείνο που καθοδηγεί την διδακτική διαδικασία. Έτσι, αναλύοντας τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών, μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για τη θέση που επιφυλάσσει το σχολικό σύστημα τους νοερούς υπολογισμούς, αλλά και το <u>είδος των στρατηγικών που χρησιμοποιούνταν για τη διδασκαλία τους</u>.

Στα σχολικά βιβλία συναντά κανείς δυο υπολογιστικές στρατηγικές για τις από μνήμης προσθέσεις. Η πρώτη στηρίζεται στην αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης (Γ΄ δημοτικού). Π.χ. 84+52=(80+50)+(4+2)=130+8=138 (χωρίς κρατούμενο) ή 78+46=(70+40)+(8+6)=110+14=124 (με κρατούμενο). Η δεύτερη στηρίζεται στην προσεταιριστική ιδιότητα. Π.χ. 28+14=(28+10)+4=38+4=42

Δυο είναι και οι υπολογιστικές στρατηγικές για την αφαίρεση. Η πρώτη στηρίζεται στις ιδιότητες της αντιμετάθεσης και του προσεταιρισμού. Π.χ. 97-35=(90-30)+(7-5). Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της διαφοράς είναι πολύ δύσκολος και δε διευκολύνει τις από μνήμης αφαιρέσεις στις περιπτώσεις που ψηφία του μειωτέου είναι μικρότερα αντίστοιχων του αφαιρετέου. Γι΄ αυτό το λόγο στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ τάξης χρησιμοποιείται αυτός ο τρόπος μόνο για να κατανοηθεί από τους μαθητές ο αλγόριθμος της αφαίρεσης, δηλαδή η ανάλυση αυτού του τρόπου αποτελεί στοιχείο της διδασκαλίας του αλγόριθμου της αφαίρεσης.

Η δεύτερη στρατηγική υπολογισμού χρησιμοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα (Γ΄ τάξη). Πχ 43-28=(43-20)-8. Στα σχολικά βιβλία τους Δ΄ τάξης δεν αναφέρεται καμία από τις παραπάνω στρατηγικές. Η Δ΄ τάξη είναι αφιερωμένη στην εκμάθηση και την εμπέδωση του αλγοριθμικού τρόπου υπολογισμού τους διαφοράς.

Για τον πολλαπλασιασμό το σχολικό εγχειρίδιο έχει επιλέξει, αναλύει και παρουσιάζει την υπολογιστική στρατηγική με βάση την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού σε σχέση με την πρόσθεση. Πχ 52*4=(50*4)+(2*4). Τα σχολικά εγχειρίδια Γ΄ τάξης αποφεύγουν συνδυασμούς γινομένων διψήφιων αριθμών ή και μεγαλύτερων. Στη Δ΄ τάξη το ενδιαφέρον έχει στραφεί αποκλειστικά σε αναλύσεις κατανόησης και άσκησης εμπέδωσης του αντίστοιχου αλγόριθμου.

Ο υπολογισμός γινομένου διψήφιων ή τριψήφιων αριθμών με βάση την επιμεριστική ιδιότητα και τη βοήθεια του 10 ή των πολλαπλάσιών του είναι μια καλή και εύκολη στρατηγική νοερών υπολογισμών που θα μπορούσε να ενταχθεί στη διδασκαλία πολλαπλασιασμού της Δ' τάξης, προτείνει ο Αποστολόπουλος (1995). Π.χ. 26*15=26*(10+5)=(26*10)+(26*5) ή 25*34=25*(10+10+10)+(25*4).

Για τη διαίρεση στη Γ' τάξη το σχολικό εγχειρίδιο παρουσιάζει την υπολογιστική στρατηγική με βάση την επιμεριστική ιδιότητα. Π.χ. 36:6=(30:6)+(6:6). Η διδασκαλία της συγκεκριμένης στρατηγικής εξυπηρετεί τη διδασκαλία του αλγορίθμου της διαίρεσης. Στη Δ' τάξη το ενδιαφέρον έχει στραφεί αποκλειστικά σε αναλύσεις κατανόησης και ασκήσεις εμπέδωσης του αντίστοιχου αλγόριθμου. Αυτό είναι ένα τεκμήριο ότι η σχολική εκπαίδευση αποδίδει δευτερεύουσα σημασία στους νοερούς υπολογισμούς. Μόνο στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης του 1986 παρουσιάζεται η στρατηγική προσέγγισης του πηλίκου με βάση το 10 ή τα πολλαπλάσιά του, ενώ στα σχολικά εγχειρίδια του 1993 παύουν να παρουσιάζονται (Αποστολόπουλος, 1995).

Την περίοδο αυτή οι νοεροί υπολογισμοί δεν προηγούνται των γραπτών αλγορίθμων, αλλά γίνονται ταυτόχρονα με αυτούς. Δεν βασίζονται στις άτυπες γνώσεις των μαθητών και δεν γίνονται με σκοπό να εισάγουν τις πράξεις με βάση τις ικανότητες των μαθητών. Οι νοεροί υπολογισμοί γίνονται για να τους εκτελέσουν οι μαθητές και να ασκηθούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες, οι οποίες δίνονται έτοιμες και καλούνται οι μαθητές να τους εφαρμόσουν (Λεμονίδης, 2013).

Ενώ παρατηρούνται αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς, περισσότερες στις μικρότερες τάξεις του δημοτικού και λιγότερες στις μεγαλύτερες, ωστόσο δεν αναφέρονται στα προγράμματα και τα σχολικά βιβλία της περιόδου νοεροί υπολογισμοί για τους ρητούς αριθμούς (κλάσματα, δεκαδικούς, ποσοστά). Εξαίρεση αποτελεί στη Δ' τάξη όπου υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο και νοεροί υπολογισμοί με δεκαδικούς αριθμούς.

Σύμφωνα με τη Μάνιου-Βακάλη (1983), «*η έλλειψη ερμηνευτικής προσέγγισης της σκέψης του παιδιού κατά την εκτέλεση νοερά, αριθμητικών πράξεων, η απουσία δηλαδή ψυχοπαιδαγωγικής θεμελίωσης της διδασκαλίας, δεν επιτρέπει τη διατύπωση ενός διδακτικό-μεθοδολογικού πλαισίου για νοερούς υπολογισμούς και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μεταγνωστικές ικανότητες δε λαμβάνονταν υπόψη*».

Ωστόσο, ο Αποστολόπουλος (1995) αναφέρει πως, βάση ενδείξεων και μελετών της εποχής, η διδακτική πράξη περιορίζεται κυρίως στο γραπτό και παραμελεί, υποβαθμίζει σοβαρά το νοερό αριθμητικό υπολογισμό παρά τις προγραμματικές θέσεις του Αναλυτικού Προγράμματος και τις παιδαγωγικές οδηγίες περί ισότιμης εκπαιδευτικής αξίας και των δυο.

Ειδικότερα, ο Αποστολόπουλος (1995) υποστηρίζει ότι κάνοντας μια ποσοτική σύγκριση των ασκήσεων και προβλημάτων, που στην εκφώνησή τους ρητά δηλώνεται ότι πρέπει να αναζητηθεί το αποτέλεσμα νοερά, με εκείνες που απαιτούν αλγοριθμικό τρόπο λύσης, φαίνεται ότι τα πρώτα αποτελούν ένα μικρό μέρος των συνολικών ασκήσεων και προβλημάτων. Ακόμη παρατηρεί μια διαφοροποίηση στον αριθμό των ασκήσεων με νοερές πράξεις να μειώνεται καθώς προχωρούμε από την πρόσθεση προς τη διαίρεση.

Επιπλέον, βάση προσωπικών παρατηρήσεων από τη διδακτική συμπεριφορά εκπαιδευτικών, έχοντας τη θέση του Σχολικού Συμβούλου, ισχυρίζεται ότι παρά τις οδηγίες του Αναλυτικού Προγράμματος και των οδηγιών του Βιβλίου του Δασκάλου, η διδακτική πράξη επιμένει μονομερώς σε αλγοριθμικούς τρόπους εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων. Βάση ερευνών[16] της εκτίμησης των επιπέδων μάθησης, όσον αφορά την υπολογιστική δεξιότητα των μαθητών του δημοτικού σχολείου, περιορίζονται μονομερώς στην ικανότητα εκτέλεσης γραπτά μόνο των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων και ιδίως των φυσικών αριθμών. Λείπει η παραμικρή αναφορά στους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Γι’ αυτούς τους λόγους ο ίδιος υποστηρίζει ότι εκείνη την εποχή ο γραπτός αριθμητικός λογισμός κυριαρχούσε ακόμα στο σχολείο.

Τέλος, ενώ τα Αναλυτικά Προγράμματα της εποχής και οι επίσημες οδηγίες (Βιβλία του Δασκάλου) που τα συνόδευαν, στο επίπεδο των προσθέσεων προβάλλουν περισσότερο από κάθε άλλη φορά τους νοερούς υπολογισμούς και διαμορφώνουν ένα πλαίσιο ευνοϊκό για τη διδασκαλία και άσκηση των μαθητών, στο επίπεδο της υλοποίησης, δηλαδή στα σχολικά βιβλία, αυτή η τάση δεν αποτυπώνεται. Έτσι, τίθεται σοβαρό ζήτημα αναντιστοιχίας εκπαιδευτικών επιλογών, παιδαγωγικών απαιτήσεων και διδακτικής πράξης (Αποστολόπουλος, 1995).

---

[16] Έχουμε υπόψη μας τις μελέτες: α) Φιλίππου, Γ.: Οι Μαθηματικές Γνώσεις των τελειόφοιτων του Δημοτικού Σχολείου. Στο: ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ’, (ΕΜΕ), 1990, τ.27. β) ΠΑΠΑΔΑΚΗ Μ., ΤΣΙΚΟΠΟΥΛΟΥ Σ.: Πόσοι μαθητές ξέρουν τις 4 πράξεις. Στο: ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ τ.32, 1987. γ) ΤΖΑΝΗ Μ.: Σχολική Επιτυχία, Αθήνα. 1983. δ) ΠΟΤΑΡΗ Δ.: Δυσκολίες μάθησης των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. Στο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ’, τ.21, 1989.

Ο Χαλάτσης (1990) την εποχή εκείνη υποστήριζε ότι διδάσκονταν μόνο ο αλγοριθμικός αριθμητικός λογισμός και προσπαθούσε να προβάλλει την εκπαιδευτική σημασία της «Αριθμητικής με το Νου» και των αριθμητικών υπολογισμών με προσέγγιση. Πρότεινε πως *«παράλληλα με τον ακριβή αριθμητικό λογισμό πρέπει να διδάξουμε και τον προσεγγιστικό. Η διδασκαλία αυτή πρέπει να αρχίζει πολύ νωρίς. Ίσως ακόμα και από την Τρίτη τάξη πρέπει να εισάγεται η έννοια της αριθμητικής προσέγγισης τόσο στην αρίθμηση διακριτών αντικειμένων όσο και στη μέτρηση συνεχών μεγεθών.*

Οι στόχοι αυτής της διδασκαλίας πρέπει να είναι: α) η καλλιέργεια πνεύματος ανεκτικότητας στο αριθμητικό σφάλμα, β) η βαθμιαία ανάπτυξη ικανοτήτων για τον προσδιορισμό των επιτρεπτών σε κάθε περίπτωση ορίων του σφάλματος αυτού, και γ) η εξοικείωση με τις πιο βασικές στρατηγικές που χρησιμοποιούμε για την εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών κατά προσέγγιση.

Ο προσεγγιστικός αριθμητικός λογισμός […] συμβάλλει με ουσιαστικό τρόπο στην αφομοίωση των αριθμητικών εννοιών και των αριθμητικών σχέσεων. Και ίσως, παρά τη μεγάλη σημασία της πρακτικής του χρησιμότητας, αυτός είναι ο κύριος λόγος για τον οποίο θα ‘πρεπε ο προσεγγιστικός αριθμητικός λογισμός να περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα διδασκαλίας της αριθμητικής».

Στα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούσαν αυτή την περίοδο, οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί συναντώνται σε προβλήματα και πράξεις, για να εκτιμάται νοερά το αποτέλεσμα και στη συνέχεια να βρίσκεται με ακρίβεια το αποτέλεσμα με την εκτέλεση τους γραπτής πράξης. Εκτιμήσεις συναντούμε μόνο στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ' τάξης σε πολύ μικρή ποσότητα όπως μπορεί να παρατηρηθεί στο Παράρτημα 11.

3.6.2 Αναλυτικό πρόγραμμα 2003

Σύμφωνα με το εβδομαδιαίο ωρολόγιο πρόγραμμα, εξακολουθούν οι ώρες που αφιερώνονται στο μάθημα των Μαθηματικών να είναι τέσσερεις (4).

Α/Α	ΜΑΘΗΜΑΤΑ	ΤΑΞΕΙΣ					
		Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ
1	ΘΡΗΣΚΕΥΤΙΚΑ	-	-	2	2	2	2
2	ΓΛΩΣΣΑ	9	9	8	8	7	7
3	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	4	4	4	4	4	4
4	ΙΣΤΟΡΙΑ	-	-	2	2	2	2
5	**ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ**	4	4	3	3	-	-
6	ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ	-	-	-	-	2	2
7	ΦΥΣΙΚΑ	-	-	-	-	3	3
8	ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΓΩΓΗ	-	-	-	-	1	1
9	ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΑΓΩΓΗ (*1)	3	3	3	3	2	2
10	ΦΥΣΙΚΗ ΑΓΩΓΗ	2	2	2	2	2	2
11	ΑΓΓΛΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ	-	-	3	3	3	3
12	ΕΥΕΛΙΚΤΗ ΖΩΝΗ (*2)	3	3	3	3	2	2
13	ΔΕΥΤΕΡΗ ΞΕΝΗ ΓΛΩΣΣΑ (ΓΑΛΛΙΚΗ Ή ΓΕΡΜΑΝΙΚΗ)	-	-	-	-	2	2(*3)
	ΣΥΝΟΛΟ	**25**	**25**	**30**	**30**	**32**	**32(*3)**

Σήμερα εφαρμόζονται στα σχολεία τα προγράμματα Δ.Ε.Π.Π.Σ (**2003**) και χρησιμοποιούνται τα σχολικά βιβλία που βασίζονται σε αυτά και κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά το 2006. Όσον αφορά τις διδακτικές και γενικότερα τις παιδαγωγικές αρχές, το Αναλυτικό Πρόγραμμα στηρίζεται στην αρχή της επιλεκτικότητας. Δεν υποστηρίζει κάποια διδακτική θεωρία, αλλά αξιοποιεί διάφορες σύγχρονες διδακτικές πρακτικές και μεθόδους ανάλογα με την εξελικτική πορεία και τις συνθήκες της διδασκαλίας. Καταργείται η στρουκτουραλιστική λογική και η απόδοση των περιεχομένων με βάση τη θεωρία των συνόλων. Δίνεται έμφαση στη διαθεματικότητα και την επίλυση προβλήματος και η διδασκαλία προτείνεται να πραγματοποιείται με την κονστρουκτιβιστική λογική.

Η νέα προσέγγιση διδασκαλίας των Μαθηματικών αλλάζει, καθώς μετατοπίζονται οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης κυρίως από την εκμάθηση των αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων και των τύπων χωρίς κατανόηση, στην εκμάθηση λύσης προβλημάτων (με μία ή πολλές λύσεις).

Ωστόσο το Αναλυτικό Πρόγραμμα είναι γραμμένο σε στήλες, χωρίς να συμπεριλαμβάνει επεξηγηματικά κείμενα, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να γίνει κατανοητή η λογική της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και να μη χρησιμοποιείται στην εκπαιδευτική πράξη. Αυτό που χρησιμοποιείται κατά κόρων είναι τα σχολικά εγχειρίδια. Βεβαίως στην παρούσα εργασία, θα παρουσιαστούν οι αναφορές σε νοερούς υπολογισμούς του Αναλυτικού Προγράμματος (παρόλο που δεν είναι πολύ ξεκάθαρες) και στη συνέχεια θα εξεταστούν τα διδακτικά βιβλία.

Συγκεκριμένα, το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Α' τάξης δεν αναφέρεται ξεκάθαρα σε νοερούς υπολογισμούς. Στη Β' τάξη αναφέρεται πως στόχος για τους μαθητές όσον αφορά την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης είναι *«να μπορούν να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών με βάση τα διπλά, την πεντάδα και τη δεκάδα, νοερά ή με τη βοήθεια της γραφής».* Στόχος για την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι «*να εξοικειωθούν σε πρώτη φάση με τη συνήθη προφορική πρακτική του νοερού πολλαπλασιασμού (προπαίδεια) και των γραπτών οριζόντιων γινομένων».* Για την πράξη της διαίρεσης, δεν παρατηρήθηκε κάποια αναφορά σε νοερούς υπολογισμούς.

Στη Γ' τάξη αναφέρεται πως στόχος είναι οι μαθητές να καταστούν ικανοί «*να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις νοερά ή με τη βοήθεια της γραφής»* με μεγαλύτερους αριθμούς. Ως ενδεικτική δραστηριότητα προτείνεται *«η εξάσκηση σε νοερούς υπολογισμούς και στην πορεία μπορούν να υποβοηθούνται από τη χρήση κατάλληλου διδακτικού υλικού, καθώς και η κατασκευή δικών τους υπολογιστικών διαδικασιών».* Όσον αφορά την πράξη του πολλαπλασιασμού στοχεύουμε στο *«να σταθεροποιήσουν και να ολοκληρώσουν τη συνήθη προφορική πρακτική του νοερού πολλαπλασιασμού (προπαίδεια) και των γραπτών οριζόντιων γινομένων».* Τέλος, για την πράξη της διαίρεσης προτείνεται ως ενδεικτική δραστηριότητα *«η εισαγωγή στη διαίρεση με οριζόντιες γραπτές διαιρέσεις (αντίστροφη της προπαίδειας), καθώς και με προφορικές διαιρέσεις».*

Για τη Δ' τάξη αναφέρεται πως στόχος για την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι *«να γνωρίζουν την προπαίδεια, να μπορούν να εκτελούν «απλούς» πολλαπλασιασμούς «με το μυαλό» και να αναπτύσσουν στρατηγικές νοερού υπολογισμού γινομένων με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού»* και για την πράξη της διαίρεσης είναι *«να σταθεροποιούν και να εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις προφορικές ή γραπτές οριζόντιες διαιρέσεις (αντίστροφη της προπαίδειας)».*

Για την Ε' τάξη, στη θεματική ενότητα «*Αριθμοί και πράξεις. Δεκαδικοί αριθμοί: πράξεις» ως ενδεικτική δραστηριότητα προτείνονται νοεροί υπολογισμοί και προσεγγιστικές εκτιμήσεις και χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων».* Στη Στ' τάξη δεν αναφέρεται τίποτα ξεκάθαρα στους νοερούς υπολογισμούς.

Στα Βιβλία του Δασκάλου και ιδιαίτερα στην Α' και Γ' τάξη δόθηκε έμφαση στο θέμα των νοερών υπολογισμών. Δίνονται πολλές οδηγίες σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας και αναφέρονται οι στρατηγικές που μπορεί να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να εκτελούν τις πράξεις στους νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013).

Συγκεκριμένα το βιβλίο του δασκάλου της Α’ τάξης (Λεμονίδης κ.α. 2006α) αναφέρει ότι διαφοροποιείται η διδασκαλία των αριθμών ως προς το μέγεθός τους από τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Διδάσκονται δηλαδή πρώτα οι αριθμοί και επεκτείνονται σε μεγαλύτερο μέγεθος (π.χ. αριθμοί μέχρι το 50) από ό,τι οι αριθμοί των πράξεων (π.χ. προσθέσεις και αφαιρέσεις με αριθμούς μέχρι το 10). Διδάσκονται οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών περισσότερο με νοερό τρόπο και χωρίς να δείχνονται οι τυπικοί γραπτοί αλγόριθμοι των πράξεων αυτών. Γίνεται η εισαγωγή του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και της διαίρεσης ως καταστάσεις μοιρασιάς μέσα από προβλήματα. Επιπλέον, στο βιβλίο του δασκάλου δίνονται πολλές οδηγίες σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας και αναφέρονται οι στρατηγικές που μπορεί να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να εκτελούν τις πράξεις στους νοερούς υπολογισμούς. Είναι χαρακτηριστικό το παρακάτω απόσπασμα από το βιβλία του δασκάλου της Α’ τάξης (Λεμονίδης, κ.ά 2006α):

«*Προοδευτική μετάβαση στους νοερούς υπολογισμούς*

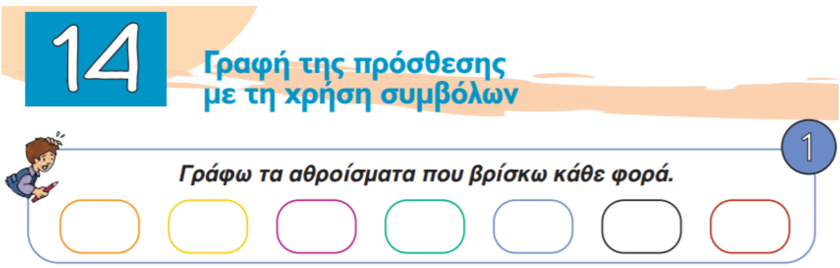
Θεωρούμε πολύ σημαντικούς και ως εκ τούτου δίνουμε μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς. Η ικανότητα των μαθητών στο να υπολογίζουν νοερά για εμάς είναι στόχος τον οποίο επιδιώκουμε με μια μακρόχρονη και μεθοδική διαδικασία μάθησης. Στην αρχή οι μαθητές για να εκτελέσουν πράξεις σε πολλές περιπτώσεις έχουν την ανάγκη να αναπαραστήσουν τους αριθμούς με αντικείμενα (αισθητοποίηση αριθμών).

Μέσα από τη διδασκαλία μας επιδιώκουμε να οδηγήσουμε προοδευτικά τους μαθητές από τις διαδικασίες υπολογισμού με αντικείμενα προς διαδικασίες ποιο αφηρημένες, οι οποίες εκτελούνται νοερά. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η διδασκαλία των πρώτων αριθμών πραγματοποιείται με υλικά (δίχρωμο αριθμητήριο, βάσεις) τα οποία δίνουν έμφαση στην προσθετική ανάλυση των αριθμών. Αρχικά δηλαδή οι μαθητές χρησιμοποιούν υλικά ή τα δάκτυλά τους για την εκτέλεση πράξεων. Επειδή όμως τα υλικά αυτά ευνοούν την προσθετική δομή, οι μαθητές δεν μετρούν βήμα προς βήμα τους αριθμούς αλλά τους θεωρούν ολόκληρους ως δεδομένους. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές είναι σε θέση εξαρχής να πραγματοποιήσουν διαδικασίες υπολογισμού με υλικά.

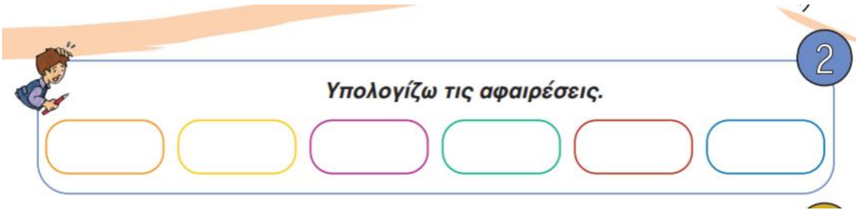
Διαφορετικές στρατηγικές υπολογισμού: Μέσα στην τάξη παρατηρείται ότι είναι διαφορετικές οι δυνατότητες των μαθητών και οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν για να πραγματοποιήσουν τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις. Κάποιοι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν διαδικασίες με υλικά, κάποιοι άλλοι διαδικασίες απαρίθμησης βήμα προς βήμα, και ορισμένοι διαδικασίες υπολογισμού. Ο δάσκαλος πρέπει να γνωρίζει τις διαδικασίες τις οποίες χρησιμοποιούν οι μαθητές του προκειμένου να χειριστεί τη διδασκαλία ανάλογα με τις δυνατότητές τους.

Ο δάσκαλος κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο υπολόγισαν το αποτέλεσμα. Το να εξηγεί ο μαθητής τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζει είναι μια πολύ χρήσιμη διανοητική ενέργεια (μεταγνωστική διαδικασία). Επίσης ο δάσκαλος δίνει τη δυνατότητα να εκφραστούν, να συζητηθούν και να καταγραφούν όλοι οι δυνατοί τρόποι υπολογισμού μιας πράξης».

Στα βιβλία του μαθητή και στα τετράδια εργασιών της Α’ και Γ’ τάξης σε όλα τα κεφάλαια στο επάνω μέρος των σελίδων υπάρχει ειδικός χώρος με χρωματιστά τετράγωνα πλαίσια, όπου οι μαθητές ασκούνται στους νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013). Ενδεικτικά, αναφέρεται το παρακάτω παράδειγμα, του 14ου κεφαλαίου της Α’ τάξης, όπου ο εκπαιδευτικός θέτει στους μαθητές ερωτήσεις σχετικές με αθροίσματα που δεν υπερβαίνουν τον αριθμό 5 (π.χ. «πόσο κάνουν τρία και ένα;», «πόσο κάνουν δύο και δύο;»). Οι μαθητές υπολογίζουν και γράφουν το άθροισμα μέσα στο τετραγωνάκι.



Αντίστοιχες δραστηριότητες υπάρχουν και για την πράξη της αφαίρεσης, όπως παραδειγματικά απεικονίζεται παρακάτω από το κεφάλαιο 29 της Α’ τάξης. Η δασκάλα προτείνει προφορικά αφαιρέσεις στις οποίες αφαιρούμε μικρό αριθμό. Οι αφαιρέσεις αυτές πρέπει να είναι σύμφωνες με το επίπεδο των παιδιών, όπως αυτές που έγιναν στο προηγούμενο μάθημα. Οι μαθητές γράφουν κάθε φορά μέσα στα πλαίσια τις πράξεις και το αποτέλεσμα.



Σε παρόμοιες καταστάσεις, ζητείται από κάθε μαθητή να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο υπολόγισε το άθροισμα. Έτσι, παρουσιάζουμε και συζητάμε με όλη την τάξη τους διάφορους τρόπους υπολογισμού.

Ίδιας μορφής δραστηριότητες προτείνονται και στα σχολικά εγχειρίδια της Γ' τάξης. Καλούνται οι μαθητές να κάνουν νοερούς υπολογισμούς στην πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (μέχρι και τετραψήφιους αριθμούς), στην πράξη του πολλαπλασιασμού(διψήφιου με μονοψήφιου και διψήφιου με το 10,100) και στην πράξη της διαίρεσης (διψήφιο με μονοψήφιο- με ή χωρίς υπόλοιπο- διψήφιο δια 10,100 και απλές διαιρέσεις διψήφιο δια διψήφιο).

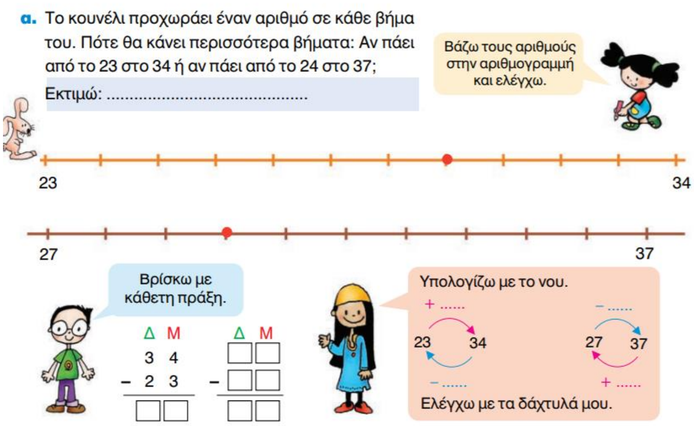
Υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τα αθροίσματα χωρίς να έχουν στην εικόνα πλήρη εποπτεία των αντικειμένων. Με αυτόν τον τρόπο αναγκάζονται να υπολογίσουν νοερά (βλ. Παράρτημα 12).

Μια ακόμη μορφή δραστηριοτήτων που απαιτούν νοερούς υπολογισμούς είναι η παρακάτω, στην οποία ενώ υπάρχει πλήρης εποπτεία των αντικειμένων, ο μαθητής πρέπει νοερά να αντικαταστήσει την ποσότητα και στη συνέχεια να προβεί στον υπολογισμό της πράξης.

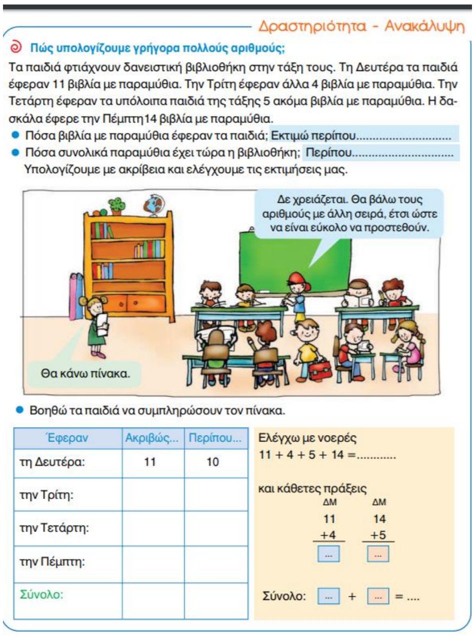
Ενδεικτικές δραστηριότητες νοερών υπολογισμών της Α' τάξης έχουν περιληφθεί στο Παράρτημα 13.

Στο βιβλίο του δασκάλου της Β' τάξης αναφέρεται πως οι νοεροί υπολογισμοί δεν αφορούν τη νοερή εκτέλεση των συνηθισμένων αλγορίθμων, αλλά την εύρεση αποτελέσματος με πολλές διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούμε με το μυαλό, π.χ. 1,25*16=2,50*8=5*4=20 (Καργιωτάκης κ.ά., 2006).

Στα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν πολλές αναφορές στις στρατηγικές που μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν (δάκτυλα, αριθμογραμμή, διαφορά του μικρότερου από το μεγαλύτερο ή το συμπλήρωμα), όπως απεικονίζεται και στο παρακάτω παράδειγμα του σχολικού βιβλίου της Β' τάξης.



Ειδικότερα, στο 17ο κεφάλαιο (όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα), στην εισαγωγή στην προπαίδεια ως κύριος διδακτικός στόχος ορίζεται οι μαθητές να μπορούν να υπολογίζουν νοερά αθροίσματα μέχρι το 100. Αναλυτικά οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να προσθέτουν νοερά με δεκάδες και μονάδες ή με υπέρβαση της δεκάδας ή με τα διπλά αθροίσματα, και ελέγχουν με κάθετη πράξη, να συνθέτουν ένα διψήφιο αριθμό με ίδιους ή διαφορετικούς όρους, να κάνουν νοερά διαδοχικές προσθέσεις ιδίων όρων (εισαγωγή στην προπαίδεια) και να λύνουν προβλήματα. Συνεπώς, κρίνεται πολύ σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να υπολογίζουν νοερά με διαφορετικές στρατηγικές.


Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πώς υπολογίζουμε γρήγορα πολλούς αριθμούς;

Τα παιδιά φτιάχνουν δανειστική βιβλιοθήκη στην τάξη τους. Τη Δευτέρα τα παιδιά έφεραν 11 βιβλία με παραμύθια. Την Τρίτη έφεραν άλλα 4 βιβλία με παραμύθια. Την Τετάρτη έφεραν τα υπόλοιπα παιδιά της τάξης 5 ακόμα βιβλία με παραμύθια. Η δασκάλα έφερε την Πέμπτη14 βιβλία με παραμύθια.

- Πόσα βιβλία με παραμύθια έφεραν τα παιδιά; Εκτιμώ περίπου............................
- Πόσα συνολικά παραμύθια έχει τώρα η βιβλιοθήκη; Περίπου.............................
  Υπολογίζουμε με ακρίβεια και ελέγχουμε τις εκτιμήσεις μας.

- Βοηθώ τα παιδιά να συμπληρώσουν τον πίνακα.

Έφεραν	Ακριβώς...	Περίπου...
τη Δευτέρα:	11	10
την Τρίτη:		
την Τετάρτη:		
την Πέμπτη:		
Σύνολο:		

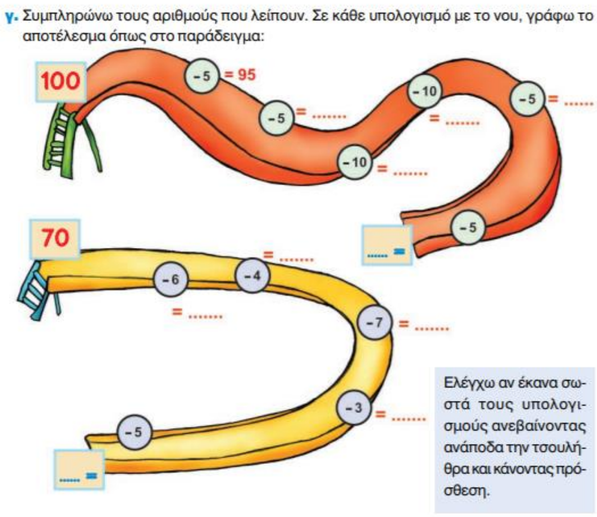
Ελέγχω με νοερές
11 + 4 + 5 + 14 =...........

και κάθετες πράξεις

ΔΜ	ΔΜ
11	14
+4	+5
...	...

Σύνολο: ... + ... = ...

Επίσης, υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες καλούνται οι μαθητές να επαληθεύσουν έναν νοερό υπολογισμό με την αντίστροφη πράξη, όπως η παρακάτω:



Υπάρχουν δύο ολόκληρα κεφάλαια αφιερωμένα στους νοερούς υπολογισμούς

46 Λύνω προβλήματα: Στρατηγικές νοερών υπολογισμών (α)

Στην υπεραγορά

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πώς υπολογίζουμε με μεγάλους αριθμούς;

Ο Νικόλας πήγε στην υπεραγορά με τη μητέρα του.

Παρατηρώ τις συσκευασίες:

1 κιλό | μισό κιλό | 250 γραμμάρια | 125 γραμμάρια

- Ποιες μπορεί να διαλέξει για να έχει 1 κιλό (1.000 γραμμάρια);

Το 1 κιλό είναι πολύ βαρύ. Θα διαλέξω μικρότερες συσκευασίες, δηλαδή αυτές των 125 γραμμαρίων.

Όσο πιο πολλές συσκευασίες παίρνουμε τόσο πιο πολύ μολύνουμε το περιβάλλον μας!

- Παρατηρώ προσεχτικά και συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν:
  - Το 1 κιλό γιαούρτι έχει 1.000 γραμμάρια. - Το μισό κιλό γιαούρτι έχει .... γραμμάρια.
- Πόσες συσκευασίες πρέπει να αγοράσουμε για να έχουμε:

250 γραμμάρια
125 γραμμάρια

1 κιλό; .... ή ....

μισό κιλό; .... ή ....

Εργασίες

1. Η Γιάννα έχει 8 ευρώ. Τι μπορεί να αγοράσει από τα παρακάτω προϊόντα χωρίς να πάρει ρέστα;

Προτείνω:	1ος τρόπος	2ος τρόπος	3ος τρόπος	4ος τρόπος
• μπισκότα	....	....	....	....
• σοκολάτες	....	....	....	....
• γιαούρτια	....	....	....	....
• κοκαλάκια για τα μαλλιά	....	....	....	....

- Αν διάλεξε να πάρει μόνο μπισκότα και γιαούρτι, πόσα κουτιά μπισκότα και πόσα γιαούρτια μπορεί να αγόρασε, αφού δεν πήρε ρέστα; ....

Συζητάμε στην τάξη λύσεις που βρήκαμε. Τι παρατηρούμε;

2. Τα έσοδα από μια παράσταση ήταν 1.000 €. Κάθε εισιτήριο κόστιζε 5 €.
   - Πόσα εισιτήρια έκοψε ο ταμίας; Εκτιμώ και βάζω ✓ στο σωστό, χωρίς να υπολογίσω με ακρίβεια.

   100 εισιτήρια ☐ 160 εισιτήρια ☐ 200 εισιτήρια ☐ 500 εισιτήρια ☐

   - Πώς θα υπολογίσουμε με ακρίβεια;

Συζητάμε στην τάξη τις στρατηγικές που βρήκαμε.

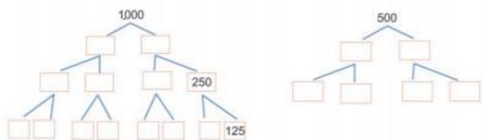
Συμπέρασμα

*Στην καθημερινή μας ζωή, όταν λύνουμε **προβλήματα με μεγάλους αριθμούς**, συχνά χρησιμοποιούμε την προπαίδεια **για να υπολογίσουμε γρήγορα, όπως κάναμε και με τους μικρούς αριθμούς**.*

Παραδείγματα:			
	2 x 5 = 10	3 x 3 = 9	5 x 2 = 10
	2 x 50 = 100	3 x 30 = 90	5 x 20 = 100
	2 x 500 = 1.000	3 x 300 = 900	5 x 200 = 1.000

46 Λύνω προβλήματα: Στρατηγικές νοερών υπολογισμών (α)

α. Συμπληρώνω τα δέντρα του 1.000 και του 500.



β. Βρίσκουμε το αριθμόλεξο.

Οριζόντια
1. Είναι το διπλάσιο του 500.
2. Είναι το μισό του 500.
3. 10 x 10 κάνει ....

Κάθετα
4. 8 x .... = 1.000.
5. Το μισό του 600.

Θέλω 1 κιλό ή 1.000 γραμμάρια!

γ. Πόσες ίδιες συσκευασίες πρέπει να αγοράσει η Άννα;

Πόσο ζυγίζει...	Για να έχει 1.000 γραμμάρια πρέπει να πάρει...	ή 1 κιλό
200 γραμμ.	+ + + + ή 200 + 200 + 200 + 200 + 200	5x200γραμμ.
100 γραμμ.		
500 γραμμ.		
250 γραμμ.		
125 γραμμ.		

δ. Παρατηρώ με προσοχή και στη συνέχεια συμπληρώνω τον πίνακα.

Είχαν	Έφαγαν	Έμειναν
500 γραμμ.	150 γραμμ.	500 – 150 = 500 – 100 – 50 = ...γραμμ.
900 γραμμ.	250 γραμμ.	..............................γραμμ.
1.000 γραμμ.	.... γραμμ.	200 γραμμ.
.... γραμμ.	750 γραμμ.	150 γραμμ.
1 κιλό	320 γραμμ.	..............................γραμμ.

Ελέγχω τους υπολογισμούς μου με την αριθμογραμμή ή με τον άβακα.

ε. Ποιο τυρί είναι πιο ακριβό;

- Πόσο κοστίζει το κιλό
  - από τη γραβιέρα Κρήτης; ....
  - από τη γραβιέρα Νάξου; .... Πιο ακριβή είναι ....
- Αν αγοράσουμε 250 γραμμ. από τη γραβιέρα Νάξου, θα πληρώσουμε .... €.
- Αν αγοράσουμε μισό κιλό από τη γραβιέρα Κρήτης, θα πληρώσουμε .... €.
- Αν αγοράσουμε ενάμισι κιλό από κάθε τυρί, πόσο θα πληρώσουμε;
  - γραβιέρα Νάξου .... € .... λ. • γραβιέρα Κρήτης .... € .... λ.

50 Λύνω προβλήματα: Στρατηγικές νοερών υπολογισμών (β)

Υγιεινή διατροφή

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Προπαίδεια χρησιμοποιούμε μόνο όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό;

1. Στην τάξη του Νικόλα τα παιδιά έμαθαν για την πυραμίδα της υγιεινής διατροφής.
- Κόβουν και κολλούν συσκευασίες των αγαπημένων τους προϊόντων.

Πυραμίδα Μεσογειακής Διατροφής

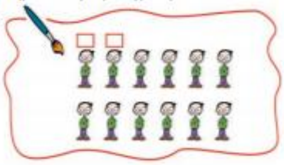
- Οι τροφές που βρίσκονται στη βάση της πυραμίδας είναι πιο υγιεινές και πρέπει να τις τρώμε πιο πολλές φορές. Παράδειγμα: ....
- Παρατηρώ τι γράφουν δύο συσκευασίες προϊόντων που έφεραν τα παιδιά:

Ποιο από τα δύο θα διάλεγες αν ήθελες να κάνεις υγιεινή διατροφή;

Συζητάμε στην τάξη για τις διατροφικές μας συνήθειες.

2. Πόσες ίδιες συσκευασίες 3 γιαουρτιών θα αγοράσουν 12 παιδιά για να φάει το καθένα από 2 γιαούρτια; Συμπληρώνω τις στρατηγικές των παιδιών.

- Θα ζωγραφίσω τα παιδιά και τα γιαούρτια ανά 1.



Θα χρειαστούν .... γιαούρτια ή
.... (συσκευασίες)

- Θα χρησιμοποιήσω την προπαίδεια:
12 x 2 = ... γιαούρτια
...... x (συσκευασία) = ☐ γιαούρτια.

Ζωγραφίζω τις συσκευασίες που θα χρειαστούν:

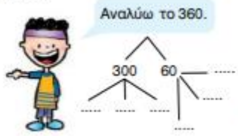
- Αν το ταψάκι έχει 2 κομμάτια μπουγάτσας, πόσα ταψάκια πρέπει να αγοράσουν τα 12 παιδιά για να φάει το καθένα από 1 κομμάτι;

Εξηγώ με αριθμούς:

Ελέγχω τις λύσεις που βρήκα με εποπτικό υλικό.

Εργασία

Η οικογένεια του Μιχάλη αγόρασε 3 ίδια ποδήλατα και πλήρωσε 360 €. Πόσο έκανε το κάθε ποδήλατο;



Βρίσκω με την προπαίδεια:
.... x 3 = 300
.... x 3 = ...
σύνολο ....

Άρα, το κάθε ποδήλατο κοστίζει .... €.

Συμπέρασμα

Στην καθημερινή μας ζωή ***χρησιμοποιούμε την προπαίδεια*** *για να υπολογίσουμε γρήγορα* ***προβλήματα μοιρασιάς.***

Παραδείγματα:
- 24 : 3 = 8 ή 3 x 8 = 24 ή 24 : 8 = 3
- 2 x 6 = 12 ή 12 : 2 = 6 ή 12 : 6 = 2

50 Λύνω προβλήματα: Στρατηγικές νοερών υπολογισμών (β)

α. Τα παιδιά στην τάξη είναι ....

- Όταν κάθονται ανά 2, φτιάχνουν .... ομάδες.
- Όταν κάθονται 4 παιδιά σε κάθε ομάδα η τάξη θα έχει .... ομάδες.
- Όταν κάθονται .... παιδιά σε κάθε ομάδα η τάξη θα έχει .... ομάδες.
- Όταν κάθονται .... παιδιά σε κάθε ομάδα η τάξη θα έχει .... ομάδες.

β. Ο Μιχάλης και ο Σταύρος αγόρασαν στη μητέρα τους λουλούδια. Έδωσαν συνολικά και οι δύο 17 €. Μοιράστηκαν στη μέση τα έξοδα. Πόσα χρήματα έδωσε ο καθένας;

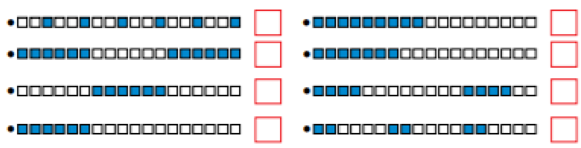
Εξηγώ με αριθμούς:

γ. Η μητέρα του Σταμάτη αγόρασε ύφασμα για να του φτιάξει 2 ίδιες κουρτίνες. Έδωσε συνολικά 130 €. Πόσο κόστισε το ύφασμα για κάθε κουρτίνα;

- Της έμειναν στο πορτοφόλι 128 ευρώ. Πόσα χρήματα είχε στην αρχή;

δ. Φτιάχνω ένα μοτίβο με άσπρα και μπλε κυβάκια. Τα άσπρα είναι διπλάσια από τα μπλε. Χρησιμοποιώ 18 κυβάκια. Θα χρειαστώ: .... μπλε κυβάκια.
.... άσπρα κυβάκια.

- Ποια μοτίβα μπορώ να φτιάξω;
- Ελέγχω ποιες από τις παρακάτω κατασκευές είναι σωστές. Βάζω ✓ στο σωστό.

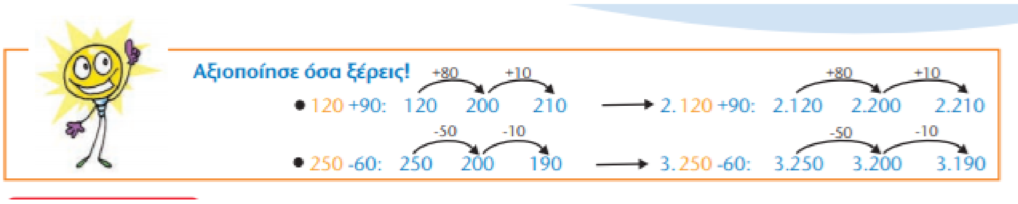


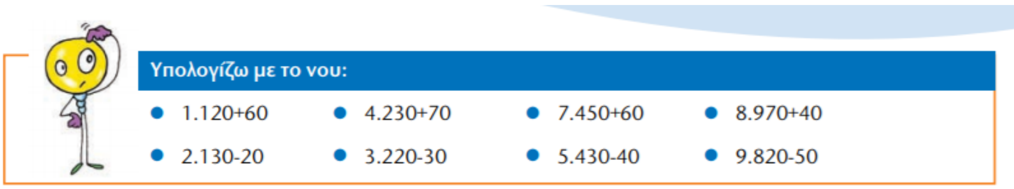
Συζητάμε στην τάξη για τα αποτελέσματα.

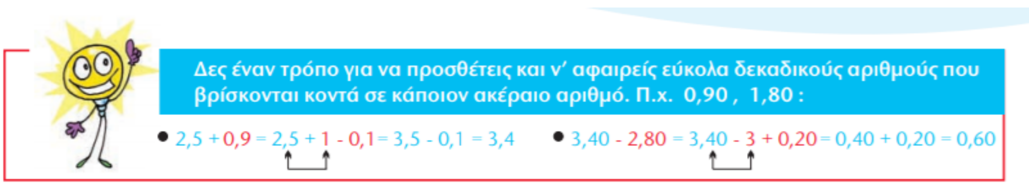
Επιπλέον δραστηριότητες νοερών υπολογισμών από το βιβλίο του μαθητή και το τετράδιο εργασιών της Β' τάξης παρατίθενται στο Παράρτημα 14, και της Γ' τάξης στο Παράρτημα 15 της εργασίας.

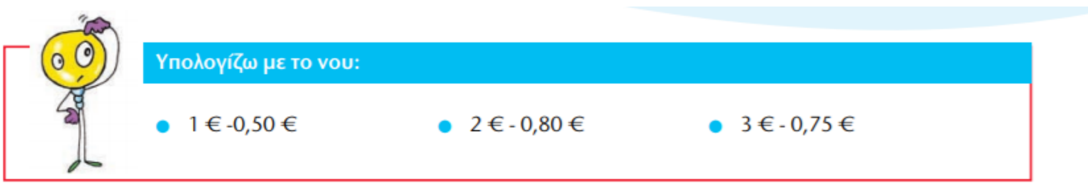
Το βιβλίο του δασκάλου της Δ' δημοτικού αναφέρει «Στα βιβλία των μαθηματικών υποστηρίζονται συστηματικά οι νοεροί υπολογισμοί. Πέρα από την πρακτική χρησιμότητά τους σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, οι νοεροί υπολογισμοί δίνουν στα παιδιά τη δυνατότητα να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς και κάποιες ιδιότητές τους (Βαμβακούση κ.ά,2006)».

Στο βιβλίο του μαθητή εμφανίζεται ο «Λαμπίτσας» για να δώσει χρήσιμες συμβουλές για έναν τρόπο εργασίας ή να μας θυμίσει κάτι. Ο ήρωας εμφανίζεται και στο τετράδιο εργασιών για να προτείνει να γίνουν κάποιες πράξεις με το νου, τόσο μεταξύ φυσικών αριθμών, όσο και μεταξύ δεκαδικών.









Στα σχολικά εγχειρίδια οι δραστηριότητες που ζητούν να πραγματοποιηθούν πράξεις με το νου έχουν διάφορες μορφές, μερικές από τις οποίες απεικονίζονται παρακάτω.

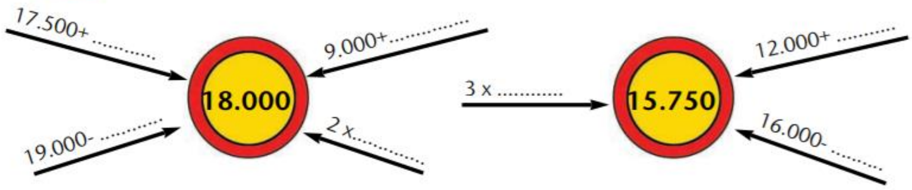
- Υπολογίζω τ' αθροίσματα με το νου:

2 + 0,04 = ...   23 + 2,3= .....   30,15 + 2,20 = ...

- Υπολογίζω τις διαφορές με το νου:

4 - 0,2 = ...   12 - 3,50= .....   2,2 - 1,15 = ...

3) Συμπληρώνουμε κατάλληλα, ώστε να φτάσουμε στους αριθμούς - στόχους.

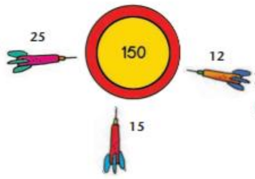


Αριθμοί - στόχοι

Πώς μπορώ να υπολογίσω πόσες φορές χωράει ένας αριθμός σ' έναν άλλον;

- Υπολογίζουμε με το νου :
  Πόσες φορές χωράει ο κάθε αριθμός στον αριθμό-στόχο; Τι περισσεύει κάθε φορά; Καταγράφουμε τις σκέψεις μας.

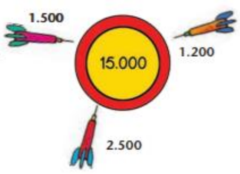
Χωράει .... φορές.
Περισσεύει ....



Χωράει .... φορές.
Περισσεύει ....

Χωράει .... φορές.
Περισσεύει ....

Χωράει .... φορές.
Περισσεύει ....



Χωράει .... φορές.
Περισσεύει ....

Χωράει .... φορές.
Περισσεύει ....

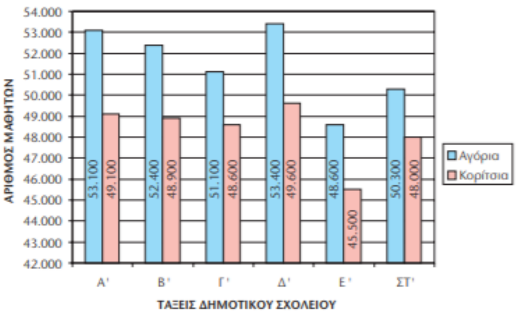
Υπάρχει ολόκληρο κεφάλαιο αφιερωμένο στους νοερούς υπολογισμούς.

39 Εκτιμώ και υπολογίζω με το νου

Στατιστικά στοιχεία για τους μαθητές του δημοτικού

Σε τι μας χρησιμεύει η γραφική απεικόνιση των δεδομένων, π.χ., με ραβδόγραμμα;

ΕΓΓΡΑΦΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΕ ΔΗΜΟΣΙΑ ΣΧΟΛΕΙΑ 2001-2002



ΕΣΥΕ (Στοιχεία στρογγυλοποιημένα στις εκατοντάδες)

α. Μεταφέρω τα στοιχεία του ραβδογράμματος στον παρακάτω πίνακα :

ΤΑΞΗ	Α'	Β'	....	....	....	....
Αγόρια	53.100					
Κορίτσια	49.100					

β. Εκτιμώ ποια τάξη έχει :
- τα περισσότερα παιδιά : ....
- τα λιγότερα παιδιά : ....

Εξηγώ πώς σκέφτηκα : ....

γ. Εκτιμώ σε ποιες τάξεις το σύνολο των παιδιών υπερβαίνει τις 100.000 :

....

δ. Υπολογίζω με το νου :
- πόσα παιδιά φοιτούν στη ΣΤ΄ τάξη : ....
- πόσα λιγότερα είναι τα κορίτσια από τα αγόρια στην Α' τάξη :

....

Εργασία

- Με τα στοιχεία του πίνακα απαντώ στις ερωτήσεις υπολογίζοντας με το νου :

Δάσκαλοι σε δημόσια σχολεία (σχολικό έτος 2001-2002)

Περιοχές		
αστικές	ημιαστικές	αγροτικές
25.000	6.500	10.100

ΕΣΥΕ (Στοιχεία στρογγυλοποιημένα στις εκατοντάδες)

α. Πόσοι συνολικά δάσκαλοι εργάζονται στα δημόσια σχολεία της Ελλάδας;

....

β. Πού εργάζονται περισσότεροι δάσκαλοι; Στις αστικές ή στις μη αστικές περιοχές; Πόσοι περισσότεροι;

....

Συμπέρασμα Η **γραφική απεικόνιση** των δεδομένων μάς επιτρέπει να κάνουμε **συγκρίσεις** και να διατυπώνουμε **συμπεράσματα.**

39 Εκτιμώ και υπολογίζω με το νου

1) Βρίσκω τ' αποτελέσματα :

⊕	49.009	49.099	49.999
1			

⊖	79.000	79.010	79.100
1			

⊖	9	99	999
159.999			

⊕	1	11	111
189.999			

2) Σπαζοκεφαλιά !

Βρήκα τον αριθμό χωρίς να κάνω καμία πράξη!

Έχω στο μυαλό μου έναν αριθμό. Για να τον βρεις ξεκίνα από το 50.000. Αφαίρεσε 12.375. Πρόσθεσε 1.080. Αφαίρεσε 1.080 και πρόσθεσε 12.375.

- Πώς τα κατάφερε ο Νικήτας; Σκέφτομαι και εξηγώ :

....

3) Συμπληρώνουμε το μαγικό τετράγωνο του **100.000**. (Κάθε γραμμή και κάθε στήλη έχει άθροισμα 100.000). Με βάση το μαγικό τετράγωνο του 100.000 ανακαλύπτουμε έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να φτιάξουμε μαγικά τετράγωνα για το **50.000** και για το **200.000.**

50.000

100.000

25.000		50.000
45.000		40.000
	60.000	

200.000

4) Με ποια σειρά θα προσθέσουμε τους αριθμούς με μεγαλύτερη ευκολία;

28.200 19.000 31.000 15.800

(.......... + ...) + (.......... + ...) = ... + ... = ...

18.050 40.025 21.950 25.075

(.......... + ...) + (.......... + ...) = ... + ... = ...

5) Συμπληρώνουμε με όσους περισσότερους τρόπους μπορούμε τις παρακάτω ισότητες :

28.200 + ... = ______.000

....

....

37.000 + ... = _____0.000

....

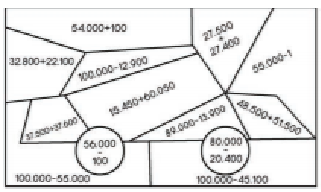
....

6) Παρατηρώ και συμπληρώνω κατάλληλα :

$10.000 \xrightarrow{+ \ldots} 12.500 \xrightarrow{- \ldots} 11.000 \xrightarrow{\ldots} 13.500 \xrightarrow{\ldots} 12.000 \xrightarrow{\ldots} \ldots \xrightarrow{\ldots} \ldots$

$100.000 \xrightarrow{- \ldots} 95.000 \xrightarrow{+ \ldots} 96.800 \xrightarrow{\ldots} 91.800 \xrightarrow{\ldots} 93.600 \xrightarrow{\ldots} \ldots \xrightarrow{\ldots} \ldots$

7) Κρυμμένη εικόνα !



Χρωματίζω κατάλληλα τα μέρη του σχήματος που δίνουν αποτέλεσμα :
- μεγαλύτερο του 75.000
- μικρότερο του 55.000
- ανάμεσα στο 55.000 και στο 75.000

Στην Ε΄ δημοτικού δίνεται μεγάλη βαρύτητα στις εκτιμήσεις, ενώ οι δραστηριότητες με νοερούς υπολογισμούς περιορίζονται. Ενδεικτικές δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια για τους νοερούς υπολογισμούς βρίσκονται στο Παράρτημα 16. Στην Στ΄ δημοτικού περιορίζονται οι δραστηριότητες με νοερούς υπολογισμούς, ενώ οι δραστηριότητες με εκτιμήσεις σε σχέση με την Ε΄ τάξη μειώνονται δραματικά. Σχετικά παραδείγματα δραστηριοτήτων με νοερούς υπολογισμούς της Στ΄ τάξης παρατίθενται στο Παράρτημα 17.

Ο μαθητής δέχεται γνώση και μάθηση από το σχολείο, αλλά και από το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον μέσα στο οποίο ζει, γι΄ αυτό οι διδακτικές καταστάσεις που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία πρέπει να συνάδουν με τον κόσμο του παιδιού. Επιπλέον, κατά τη διδασκαλία πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι προϋπάρχουσες γνώσεις και ικανότητες των παιδιών, καθώς επίσης και οι άτυπες γνώσεις τους (άτυπες στρατηγικές για επίλυση προβλημάτων).

Τα σχολικά εγχειρίδια και οι διδακτικές δραστηριότητες δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να ανακαλύπτουν μόνοι τους καινούριες έννοιες και να κατασκευάζουν τη γνώση τους, να υποθέτουν, να δοκιμάζουν και να εφαρμόζουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους. Οι δάσκαλοι θα πρέπει να μπορούν να καταλαβαίνουν και να αξιολογούν τον τρόπο σκέψης και τις γνώσεις των μαθητών και να τις προωθούν σε ανώτερα επίπεδα.

Η διδασκαλία πρέπει να παρέχει ερεθίσματα κατάλληλα να ενεργοποιούν τον μαθητή για τη διαδικασία της μάθησης, ώστε να μην είναι παθητικός δέκτης των πληροφοριών, αλλά να συμμετέχει, να προβληματίζεται, να δέχεται ερεθίσματα, να αλληλεπιδρά με τις καταστάσεις που του προσφέρονται και με τους συμμαθητές του για να συντελεστεί η κατασκευή της γνώσης.

Η τάξη θα πρέπει να είναι μια ζωντανή κοινωνική ομάδα, μέσα στην οποία γίνεται συζήτηση, εκθέτονται και δοκιμάζονται οι γνώσεις, αξιολογούνται οι προτάσεις και τα λάθη, αναπτύσσονται υποθέσεις, συλλογισμοί και τεκμηριώσεις, δημιουργείται και δοκιμάζεται η ορθολογική διαδικασία στην επικοινωνία των μαθητών.

Η ανάπτυξη της μεταγνωστικής διαδικασίας από την πλευρά του μαθητή τον βοηθάει σε μια καλύτερη κατανόηση. Για παράδειγμα, ζητώντας από τον μαθητή να πει τον τρόπο με τον οποίο βρήκε το αποτέλεσμα σε ένα νοερό υπολογισμό, ουσιαστικά τον βάζουμε να σκεφτεί, να κατανοήσει και να οργανώσει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε. Ανακοινώνονται οι ποικίλες μέθοδοι και οι διαφορετικοί τρόποι σκέψης σε όλη την τάξη κι ακολουθεί συζήτηση, στο πλαίσιο της οποίας κρίνονται, αξιολογούνται και επιλέγονται οι πιο σύντομοι και αποτελεσματικοί τρόποι.

Ο εκπαιδευτικός, από αναμεταδότης της γνώσης, γίνεται ενεργός συνεργάτης και διευκολυντής για την κατασκευή της γνώσης από τον ίδιο το μαθητή. Σήμερα στο επίκεντρο της διδασκαλίας τίθενται ο μαθητής. Ο δάσκαλος επιδιώκει να καταλάβει το επίπεδο των γνώσεων των μαθητών και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες, δίνει σημασία στα λάθη τους και προσπαθεί να ερμηνεύσει τις αιτίες τους.

Όσον αφορά τον παράγοντα περιεχόμενο του μαθήματος, ο δάσκαλος δε μένει προσκολλημένος στο διδακτικό βιβλίο και στη σειρά της ύλης όπως αυτή παρουσιάζεται, αλλά προσαρμόζεται στις ιδιαιτερότητες και στο επίπεδο των παιδιών της τάξης. Ο δάσκαλος θα κρίνει σε ποια περιεχόμενα θα πάει γρήγορα και σε ποια αργά, καθώς και πότε θα αφαιρέσει ή θα αντικαταστήσει κάποιες ασκήσεις. Επιπλέον, ο δάσκαλος επιλέγει τα μαθήματα στα οποία θα μπορούσε να κάνει μια διαθεματική προσέγγιση (μαθηματικά- ιστορία, γλώσσα, εικαστικά κτλ).

Όσον αφορά τη διαχείριση της τάξης, ο δάσκαλος δεν παίζει το ρόλο τους αυθεντίας της γνώσης και δε μονοπωλεί συνεχώς το λόγο. Προσπαθεί να οργανώσει τους μαθητές, να διαλέξει τις κατάλληλες δραστηριότητες για να προβληματίσει και να δοκιμάσει τις γνώσεις των μαθητών. Αν κριθεί απαραίτητο, τότε ο δάσκαλος επεμβαίνει για να δώσει οδηγίες και να προσφέρει βοήθεια.

Η διδασκαλία των πράξεων και η εισαγωγή των τυπικών αλγορίθμων διαφέρει σε σχέση με τα προηγούμενα αναλυτικά προγράμματα. Οι γραπτοί τυπικοί αλγόριθμοι των πράξεων δεν προτάσσονται εξαρχής και ξεκομμένα. Πριν από την εισαγωγή των γραπτών αλγορίθμων, οι μαθητές εξασκούνται στους νοερούς υπολογισμούς, στα πλαίσια των οποίων χρησιμοποιούνται και οι άτυπες μέθοδοι υπολογισμού των πράξεων. Στη συνέχεια, οι μαθητές προοδευτικά φτάνουν και ανακαλύπτουν μόνοι τους τυπικούς αλγόριθμους.

Η πορεία διδασκαλίας των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης διαφέρουν από το προηγούμενο αναλυτικό πρόγραμμα. Αρχικά, αφιερώνεται περισσότερος χρόνος σε καθημερινές εμπειρικές καταστάσεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, για να εδραιωθεί η σημασία τους και να αντιμετωπίσουν αυτές τις εμπειρικές καταστάσεις εφαρμόζοντας τις διαισθητικές ή άτυπες στρατηγικές της καταμέτρησης, της καταμέτρησης σε ομάδες, της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στη συνέχεια, περνούμε μια περίοδο κατά την οποία δίνουμε στα παιδιά τη δυνατότητα να λειτουργήσουν ανακατασκευαστικά, δηλαδή να υπολογίσουν άγνωστα γινόμενα με βάση ήδη γνωστές πράξεις και με αυτό τον τρόπο να ανακαλύψουν και να συζητήσουν καινούριες στρατηγικές. Σε μια τρίτη περίοδο, δίνουμε έμφαση στην απομνημόνευση και την εξάσκηση με τους πίνακες του πολλαπλασιασμού (πρώτα οι στήλες του 2,5,10, μετά οι στήλες του 3,4 και μετά οι στήλες των μεγαλύτερων αριθμών 6,7,8 και 9).

Μέσα στην τάξη είναι διαφορετικές οι δυνατότητες των μαθητών και οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν για να πραγματοποιήσουν τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις. Κάποιοι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν διαδικασίες με υλικά, κάποιοι άλλοι διαδικασίες απαρίθμησης βήμα προς βήμα και κάποιοι διαδικασίες υπολογισμού (Λεμονίδης, 1998). Ο δάσκαλος θα πρέπει να γνωρίζει τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές του για να μπορεί να χειριστεί τη διδασκαλία ανάλογα με τις δυνατότητές τους.

Οι νοεροί υπολογισμοί έχουν λάβει σήμερα σημαντική προσοχή στα σχολικά προγράμματα για το μάθημα των μαθηματικών στα Δημοτικά Σχολεία. Δίνεται μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς για την ανάπτυξη βασικών γεγονότων στην πρόσθεση, στην αφαίρεση, στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση. Οι μαθητές καταφέρνουν να αναπτύξουν ικανότητες και δεξιότητες, καθώς επίσης να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους.

Και σήμερα, ενώ γίνεται γενική αναφορά για τους νοερούς υπολογισμούς στους ρητούς αριθμούς (δεκαδικοί, κλάσματα, ποσοστά), στην πραγματικότητα δεν μεθοδεύεται και δεν προτείνεται μέσα από τα Προγράμματα και τα βιβλία μια διδασκαλία γι’ αυτούς, παρά μόνο σε μικρό βαθμό για τους δεκαδικούς αριθμούς. Συνεπώς, δεν διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί των ρητών αριθμών. Δεν παρουσιάζονται στα βιβλία, οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν πολλές γνώσεις γι’ αυτούς και οι μαθητές κάνουν πολλά λάθη στο νοερό υπολογισμό καθώς χρησιμοποιούν τις αλγοριθμικές τεχνικές χωρίς να τις κατανοούν. Η διδασκαλία των ρητών αριθμών θα έπρεπε να συμπεριλαμβάνει τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών των ρητών αριθμών και εν συνεχεία τη διδασκαλία των αλγόριθμων των πράξεων με ρητούς αριθμούς (Λεμονίδης, 2013).

Οι ευκαιρίες να επεκτείνουν και να εφαρμόζουν τους νοερούς υπολογισμούς δεν συνεχίζονται ούτε επεκτείνονται στο γυμνάσιο και στο λύκειο (δευτεροβάθμια εκπαίδευση). Παρόλο που κάποιοι εξαιρετικοί μαθητές αναπτύσσουν άριστες νοητικές υπολογιστικές δεξιότητες από μόνοι τους, σχεδόν όλοι οι μαθητές μπορούν να επιτύχουν πολύ υψηλότερα επίπεδα νοερών υπολογισμών αρκεί να διδαχθούν τους κατάλληλες τεχνικές.

Όσον αφορά τη σημασία τους **εκτίμησης**, τόσο στην τάξη, όσο και στην καθημερινή ζωή, πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά για την ανάπτυξή της, σε σχέση με την ανάπτυξη άλλων βασικών ποσοτικών ικανοτήτων, όπως η καταμέτρηση και η πρόσθεση. Στην Ελλάδα η εκτίμηση εμφανίστηκε το 2003 στα προγράμματα σπουδών των Δ.Ε.Π.Π.Σ (Δ.Ε.Π.Π.Σ, 2003) και το 2006 εφαρμόστηκε στις σχολικές τάξεις με τα καινούργια σχολικά εγχειρίδια (Λεμονίδης και Μουράτογλου, 2014).

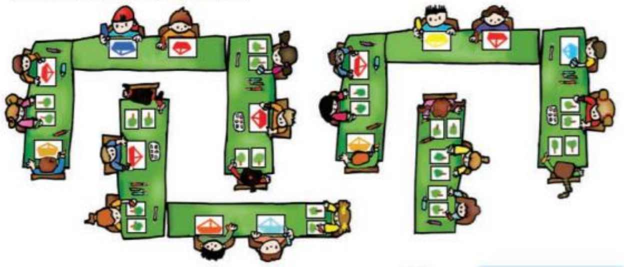
Ειδικότερα, στους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος για την Α' τάξη αναφέρεται *«να αναγνωρίζουν γρήγορα ποσότητες με δομημένη μορφή ενός, δύο και τριών στοιχείων (άμεση εκτίμηση)».* Στην Γ' και Στ' τάξη στοχεύουμε οι μαθητές να καταστούν ικανοί *«να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων».*

Στο βιβλίο του δασκάλου της Β' τάξης αναφέρεται πως *«στους νοερούς υπολογισμούς πλέον χρησιμοποιείται πολύ η εκτίμηση αποτελέσματος (όχι η στρογγυλοποίηση), π.χ. 38+47= περίπου 90 (40+50), 98:4=περίπου 20 (100:4)».* Ενδεικτικά παρατίθενται μερικές δραστηριότητες εκτίμησης.

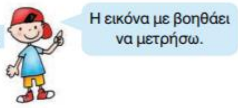
Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα;

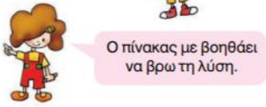
Τα παιδιά στόλισαν την τάξη τους με ζωγραφιές. Τα κορίτσια έφτιαξαν δέντρα. Τα αγόρια έφτιαξαν καραβάκια.



- Πόσα είναι όλα τα παιδιά; Εκτιμώ: Περίπου ....
- Πόσα είναι τα αγόρια; Πόσα είναι τα κορίτσια;



ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΗΣ ΑΝΝΑΣ	
Αγόρια	....
Κορίτσια	....
Όλα τα παιδιά	....



- Επαληθεύω με κάθετη πράξη.
- Πόσα περισσότερα είναι τα αγόρια;

Είναι .... περισσότερα.

Δ	Μ
☐	☐
+ ☐	☐
☐	☐

Η δανειστική βιβλιοθήκη

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πώς υπολογίζουμε γρήγορα πολλούς αριθμούς;

Τα παιδιά φτιάχνουν δανειστική βιβλιοθήκη στην τάξη τους. Τη Δευτέρα τα παιδιά έφεραν 11 βιβλία με παραμύθια. Την Τρίτη έφεραν άλλα 4 βιβλία με παραμύθια. Την Τετάρτη έφεραν τα υπόλοιπα παιδιά της τάξης 5 ακόμα βιβλία με παραμύθια. Η δασκάλα έφερε την Πέμπτη 14 βιβλία με παραμύθια.

- Πόσα βιβλία με παραμύθια έφεραν τα παιδιά; Εκτιμώ περίπου............................
- Πόσα συνολικά παραμύθια έχει τώρα η βιβλιοθήκη; Περίπου..............................

Υπολογίζουμε με ακρίβεια και ελέγχουμε τις εκτιμήσεις μας.

- Βοηθώ τα παιδιά να συμπληρώσουν τον πίνακα.

Έφεραν	Ακριβώς...	Περίπου...
τη Δευτέρα:	11	10
την Τρίτη:		
την Τετάρτη:		
την Πέμπτη:		
Σύνολο:		

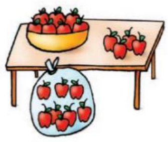
Ελέγχω με νοερές
11 + 4 + 5 + 14 =...........

και κάθετες πράξεις

ΔΜ	ΔΜ
11	14
+4	+5
...	...

Σύνολο: ... + ... = ...

γ. Πάνω στο τραπέζι υπάρχουν .... μήλα.



Στη σακούλα υπάρχουν .... μήλα.

Πόσα μήλα υπάρχουν συνολικά;

Εκτιμώ: περίπου ....

- Διαλέγω τους σωστούς υπολογισμούς για να λύσω το πρόβλημα και τους χρωματίζω κίτρινους.

19 = 8 + 11	3 + 1 + 7 = 11	19 = 7 + 8
8 + 7 + 4 = 19	8 + 3 + 1 + 7 = 18	4 + 7 + 8 = 19

Ο Πέτρος έχει 37 αυτοκόλλητα. Η Άννα έχει 27 αυτοκόλλητα.

- Ποιο παιδί έχει τα περισσότερα αυτοκόλλητα; Εκτιμώ ....

Πόσα περισσότερα έχει; ....

- Πόσα αυτοκόλλητα θα έπρεπε να πάρει κάθε παιδί ώστε να έχει το καθένα 40 αυτοκόλλητα; Εκτιμώ (βάζω Σ για σωστό ή Λ για λάθος):

Πέτρος:
- περισσότερα από 2 ....
- λιγότερα από 2 ....

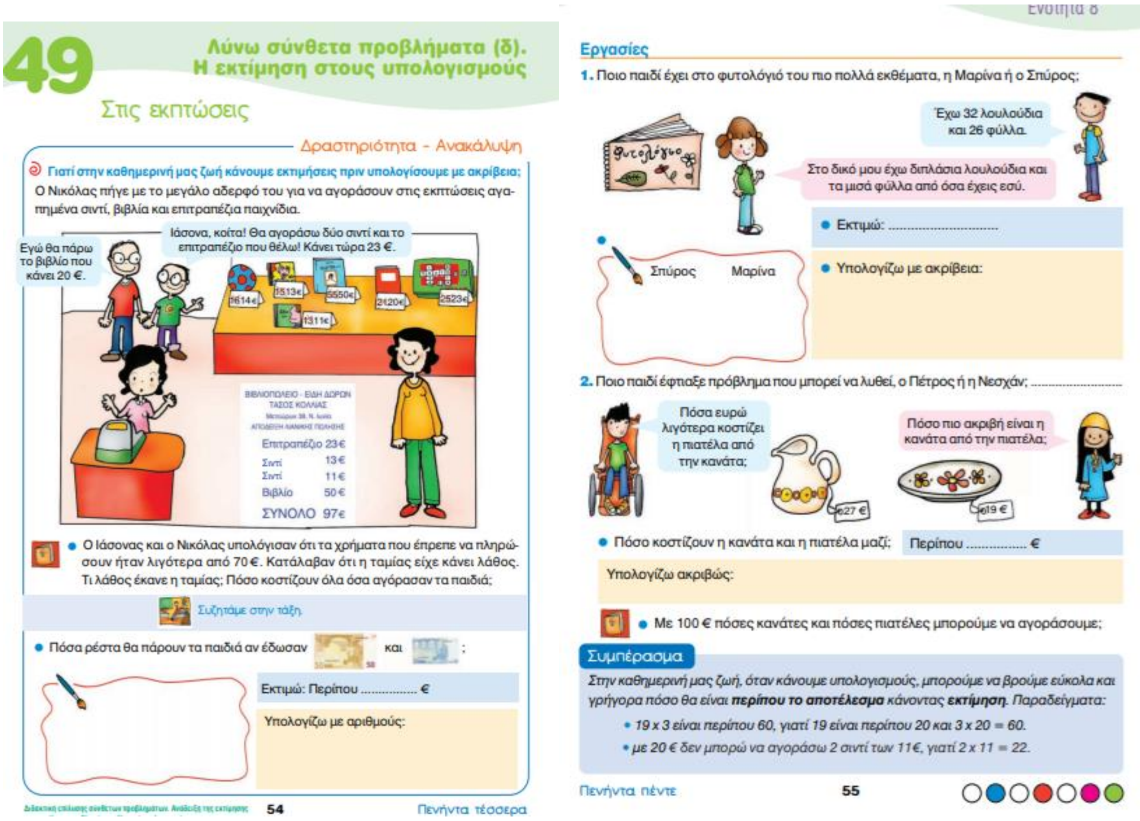
$37 \xrightarrow{+\ \dots\dots} 40$

Άννα:
- περισσότερα από 10 ....
- λιγότερα από 10 ....

$27 \xrightarrow{+\ \dots\dots} 40$, $40 \xrightarrow{-\ \dots\dots} 27$

- Χρησιμοποιώ τον άβακα και βρίσκω:
  - Η Άννα θα πρέπει να πάρει .... αυτοκόλλητα για να έχει συνολικά 40.
  - Ο Πέτρος θα πρέπει να πάρει .... αυτοκόλλητα για να έχει συνολικά 40.

Υπάρχει ολόκληρο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 49) αφιερωμένο στην εκτίμηση:



Ενότητα 8

49 Λύνω σύνθετα προβλήματα (δ). Η εκτίμηση στους υπολογισμούς

Στις εκπτώσεις

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Γιατί στην καθημερινή μας ζωή κάνουμε εκτιμήσεις πριν υπολογίσουμε με ακρίβεια;

Ο Νικόλας πήγε με το μεγάλο αδερφό του για να αγοράσουν στις εκπτώσεις αγαπημένα σιντί, βιβλία και επιτραπέζια παιχνίδια.

- Ο Ιάσονας και ο Νικόλας υπολόγισαν ότι τα χρήματα που έπρεπε να πληρώσουν ήταν λιγότερα από 70 €. Κατάλαβαν ότι η ταμίας είχε κάνει λάθος. Τι λάθος έκανε η ταμίας; Πόσο κοστίζουν όλα όσα αγόρασαν τα παιδιά;

Συζητάμε στην τάξη.

- Πόσα ρέστα θα πάρουν τα παιδιά αν έδωσαν [50] και [ ];

Εκτιμώ: Περίπου .... €

Υπολογίζω με αριθμούς:

54 Πενήντα τέσσερα

Εργασίες

1. Ποιο παιδί έχει στο φυτολόγιό του πιο πολλά εκθέματα, η Μαρίνα ή ο Σπύρος;

- Εκτιμώ: ....
- Υπολογίζω με ακρίβεια:

2. Ποιο παιδί έφτιαξε πρόβλημα που μπορεί να λυθεί, ο Πέτρος ή η Νεσχάν; ....

- Πόσο κοστίζουν η κανάτα και η πιατέλα μαζί; Περίπου .... €

Υπολογίζω ακριβώς:

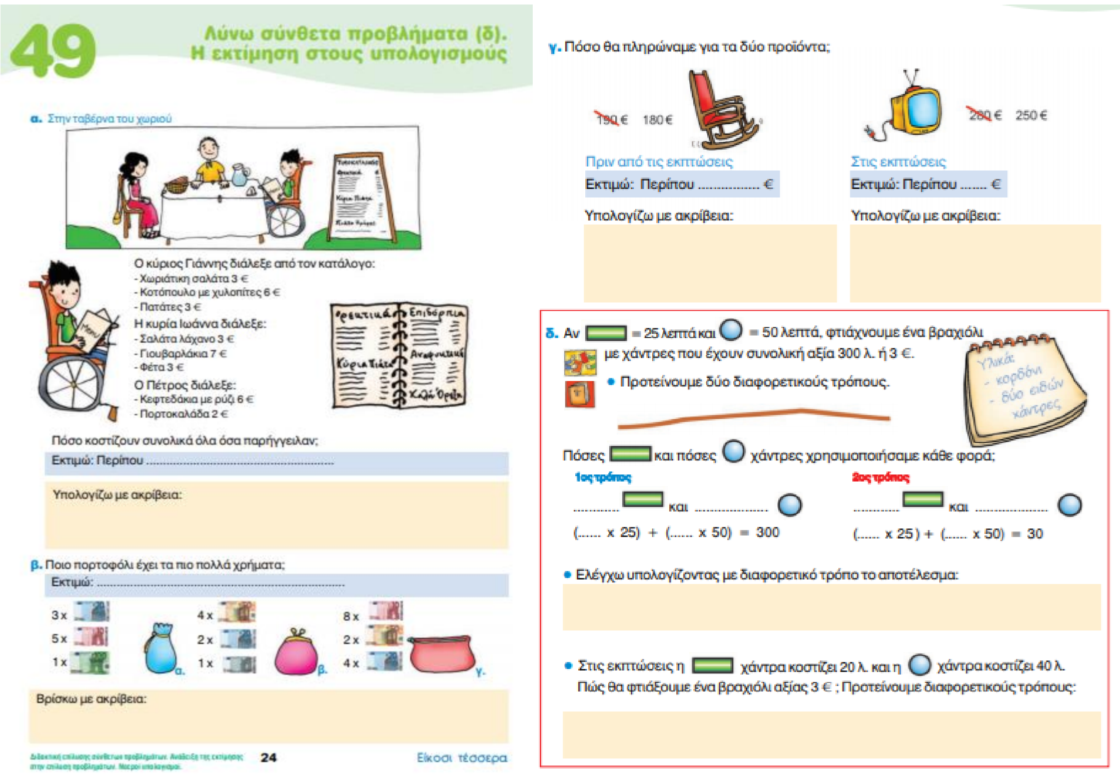
- Με 100 € πόσες κανάτες και πόσες πιατέλες μπορούμε να αγοράσουμε;

Συμπέρασμα

*Στην καθημερινή μας ζωή, όταν κάνουμε υπολογισμούς, μπορούμε να βρούμε εύκολα και γρήγορα πόσο θα είναι **περίπου το αποτέλεσμα** κάνοντας **εκτίμηση**. Παραδείγματα:*

- *19 x 3 είναι περίπου 60, γιατί 19 είναι περίπου 20 και 3 x 20 = 60.*
- *με 20 € δεν μπορώ να αγοράσω 2 σιντί των 11€, γιατί 2 x 11 = 22.*

Πενήντα πέντε 55



49 Λύνω σύνθετα προβλήματα (δ). Η εκτίμηση στους υπολογισμούς

α. Στην ταβέρνα του χωριού

Ο κύριος Γιάννης διάλεξε από τον κατάλογο:
- Χωριάτικη σαλάτα 3 €
- Κοτόπουλο με χυλοπίτες 6 €
- Πατάτες 3 €

Η κυρία Ιωάννα διάλεξε:
- Σαλάτα λάχανο 3 €
- Γιουβαρλάκια 7 €
- Φέτα 3 €

Ο Πέτρος διάλεξε:
- Κεφτεδάκια με ρύζι 6 €
- Πορτοκαλάδα 2 €

Πόσο κοστίζουν συνολικά όλα όσα παρήγγειλαν;

Εκτιμώ: Περίπου ....

Υπολογίζω με ακρίβεια:

β. Ποιο πορτοφόλι έχει τα πιο πολλά χρήματα;

Εκτιμώ: ....

α.	β.	γ.
3 x [ ]	4 x [ ]	8 x [ ]
5 x [ ]	2 x [ ]	2 x [ ]
1 x [ ]	1 x [ ]	4 x [ ]

Βρίσκω με ακρίβεια:

24 Είκοσι τέσσερα

γ. Πόσο θα πληρώναμε για τα δύο προϊόντα;

~~190~~ € 180 €

~~280~~ € 250 €

Πριν από τις εκπτώσεις	Στις εκπτώσεις
Εκτιμώ: Περίπου .... €	Εκτιμώ: Περίπου .... €
Υπολογίζω με ακρίβεια:	Υπολογίζω με ακρίβεια:

δ. Αν [ ] = 25 λεπτά και ◯ = 50 λεπτά, φτιάχνουμε ένα βραχιόλι με χάντρες που έχουν συνολική αξία 300 λ. ή 3 €.

- Προτείνουμε δύο διαφορετικούς τρόπους.

Πόσες [ ] και πόσες ◯ χάντρες χρησιμοποιήσαμε κάθε φορά;

1ος τρόπος	2ος τρόπος
.... [ ] και .... ◯	.... [ ] και .... ◯
(...... x 25) + (...... x 50) = 300	(...... x 25) + (...... x 50) = 30

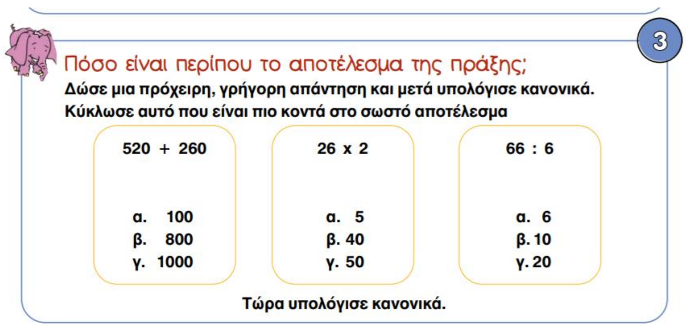
- Ελέγχω υπολογίζοντας με διαφορετικό τρόπο το αποτέλεσμα:

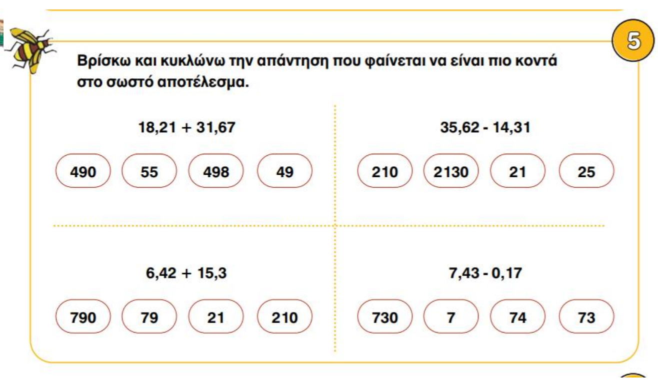
- Στις εκπτώσεις η [ ] χάντρα κοστίζει 20 λ. και η ◯ χάντρα κοστίζει 40 λ. Πώς θα φτιάξουμε ένα βραχιόλι αξίας 3 €; Προτείνουμε διαφορετικούς τρόπους:

Στο βιβλίο του δασκάλου της Γ’ τάξης (Λεμονίδης κ.ά., 2006β) αναφέρει για τους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς:

«Κάποιοι άλλοι υπολογισμοί οι οποίοι χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στην πράξη και πραγματοποιούνται νοερά είναι οι κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί. Για παράδειγμα, υπολογίζω περίπου κατά πόσο το άθροισμα 1.604+2.340 είναι λιγότερο ή περισσότερο από το 4.000. Οι υπολογισμοί αυτοί χρησιμοποιούνται στη ζωή για να βρούμε γρήγορα και κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού. Χρησιμοποιούνται συνήθως με σκοπό να ελέγξουμε το αποτέλεσμα που μας δίνει η αριθμομηχανή, να ελέγξουμε αν μας φτάνουν τα χρήματά μας κτλ».

Εκτίμηση συναντάμε στη διδασκαλία των φυσικών αριθμών, αλλά και των δεκαδικών αριθμών στη Γ’ τάξη, όπως φαίνεται στις παρακάτω παραδειγματικές δραστηριότητες.





Μεγάλη σημασία στην εκτίμηση δίνεται και στη Δ' δημοτικού, καθώς τη συναντάμε σε πολλές δραστηριότητες στα σχολικά εγχειρίδια, μερικές από τις οποίες είναι οι παρακάτω.

Επιτραπέζιο παιχνίδι

Πόσο **περίπου** είναι το άθροισμα 199+19;

- Τα παιδιά παίζουν ένα επιτραπέζιο παιχνίδι. Απαντούν σε ερωτήσεις και μαζεύουν πόντους. Οι 1.000 πόντοι ανταλλάσσονται μ' ένα ⭐. Κερδίζει όποιο παιδί φτάσει πρώτο στους 10.000 πόντους ή .... ⭐.

α. Μέχρι τώρα η Ηρώ έχει συγκεντρώσει : ⭐ ⭐ ⭐ ⭐ και 300 πόντους.
Έχει συνολικά .... πόντους.

β. Ο Πέτρος έχει συγκεντρώσει διπλάσιους πόντους από την Ηρώ.

- Σχεδιάζω τ' αστέρια του Πέτρου και σημειώνω τους πόντους του.

- Συμπληρώνω ό,τι λείπει:

4.000+300+4.000+300

.... + ... = ... πόντους έχει ο Πέτρος.

γ. Η Στέλλα έχει συγκεντρώσει τους μισούς πόντους από την Ηρώ. Κυκλώνω όσα ⭐ χρειάζεται και συμπληρώνω ό,τι λείπει για να βρω τους πόντους της Στέλλας.

⭐ ⭐ ⭐ ⭐ 300

150 + ...

- Η Στέλλα έχει .... πόντους.

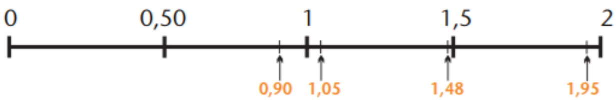
1) Ο Νικήτας έχει συγκεντρώσει 8.884 πόντους.

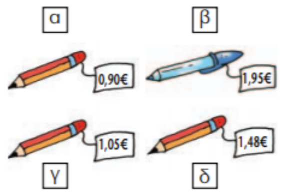
α) Ποιο παιδί έχει εκτιμήσει με **μεγαλύτερη ακρίβεια**; Εξηγούμε με τη βοήθεια της παραπάνω αριθμογραμμής.

Εκτιμώ και επιλέγω με ✔ όσα από τα παρακάτω αποτελέσματα είναι λανθασμένα.

- 2.798+3.979=5.777 ☐
- 9.675-2.958=7.717 ☐
- 5.100+2.300=7.400 ☐
- 3.295-1.773=4.522 ☐

8) Πόσο περίπου κοστίζει κάθε στυλό; Παρατηρώ την αριθμογραμμή και σημειώνω κατάλληλα τα γράμματα στον πίνακα.



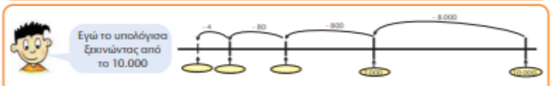


περίπου 1€	περίπου 1,5€	περίπου 2€
....	....	....

Όταν κάνεις υπολογισμούς, κάνε πρώτα μία γρήγορη **εκτίμηση** του αποτελέσματος. Δε θα βρεις το αποτέλεσμα ακριβώς, αλλά θα ξέρεις **περίπου** τι να περιμένεις!

β) Πόσους πόντους χρειάζεται **περίπου** ο Νικήτας για να φτάσει στους 10.000; Εκτιμώ: .... Στη συνέχεια υπολογίζω ακριβώς με τη βοήθεια μιας **πρόχειρης** αριθμογραμμής.

- Σημειώνω το αποτέλεσμα: ....



- Ο Πέτρος βρήκε : ....

2) Σε κάποια φάση του παιχνιδιού η Στέλλα είχε 2.999 πόντους, δηλαδή **περίπου** .... πόντους. Απάντησε σε μία δύσκολη ερώτηση που τριπλασιάζει τους πόντους του παίκτη. Πόσους **περίπου** πόντους έχει τώρα η Στέλλα; Εκτιμώ: ....

Για να υπολογίσω ακριβώς τους πόντους της Στέλλας, ξεκινώ βρίσκοντας το τριπλάσιο του 3.000.

3.000+3.000+3.000

+1 +1 +1

Έχω υπολογίσει 1 πόντο παραπάνω για κάθε 3.000 πόντους. Δηλαδή, θα αφαιρέσω 3 πόντους στο τέλος.

- Συμπληρώνουμε : 2.999 x 3 = (3.000-1) x 3 =
  = (3.000x3) - (1x3) =
  = ... - ..... = ...

Συμπέρασμα
Όταν κάνουμε πράξεις, μπορούμε να **εκτιμήσουμε** γρήγορα το αποτέλεσμα **αντικαθιστώντας** τους αριθμούς με κοντινούς "στρογγυλούς" αριθμούς. Όσο **πιο κοντά** είναι οι "στρογγυλοί" στους αρχικούς αριθμούς τόσο **μεγαλύτερη ακρίβεια** εξασφαλίζουμε στις εκτιμήσεις μας.


Εκτιμώ πόσο περίπου είναι το αποτέλεσμα και στη συνέχεια υπολογίζω ακριβώς με το νου. Το διπλανό μου παιδί ελέγχει το αποτέλεσμά μου με κάθετη πράξη.

- Ποια από τις τσάντες είναι ακριβότερη και πόσο;

Παραγγελία αναλώσιμων ειδών

Πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα μιας πράξης με δεκαδικούς αριθμούς;

- Ο διευθυντής του σχολείου των παιδιών παράγγειλε αναλώσιμα είδη από το βιβλιοπωλείο. Στο τιμολόγιο αγοράς έπεσε διορθωτικό υγρό και κάποια στοιχεία σβήστηκαν. Συμπληρώνω τα στοιχεία αυτά.

ΤΙΜΟΛΟΓΙΟ ΑΓΟΡΑΣ

ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΔΗΜ. ΣΧΟΛΕΙΟ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ
Α.Φ.Μ 093273102

ΕΙΔΟΣ	ΤΙΜΗ ΑΝΑ ΤΕΜΑΧΙΟ (€)	ΤΕΜΑΧΙΑ	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΞΙΑ (€)
χαρτί εκτυπωτή	4,22	5	21,10
μελάνια εκτυπωτή	20,14	2	40,28
στυλό		10	7,50
μαρκαδόροι	1,94	6	11,64
κόλλες αναφοράς	0,08		80
διαφάνειες φωτοτυπικού		100	18
ΣΥΝΟΛΟ			

- Πόσα χρήματα πρέπει να έχει μαζί του ο διευθυντής για να πληρώσει; Τα παιδιά εκτιμούν :

Σίγουρα χρειάζεται περισσότερα από:
21+40+7+11+80+18 €.
21,10+40,28+7,50+11,64+80+18 €.

Σίγουρα του φτάνουν:
22+41+8+12+80+18 €.
21,10+40,28+7,50+11,64+80+18 €.

-  Εξηγούμε πώς σκέφτηκε το κάθε παιδί.

....
....

- Ποιο παιδί έκανε την πιο χρήσιμη εκτίμηση; Εξηγώ προφορικά.
- Υπολογίζω ακριβώς την αξία της παραγγελίας.


Η Ηρώ και ο αδερφός της έχουν 60 €. Ποια απ' τα παρακάτω παιχνίδια μπορούν ν' αγοράσουν;

- Αρχικά εκτιμούμε : ....


Από τους παρακάτω αριθμούς επιλέγουμε αυτούς, που αν τους προσθέσουμε, θα φτάσουμε πολύ κοντά στο 20.000.

15.999 5.550 3.999

10.000 4.440

- Ελέγχουμε την εκτίμησή μας.

Στο Αναλυτικό πρόγραμμα για την Ε' και Στ' τάξη προτείνονται ενδεικτικές δραστηριότητες με ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος όπως «εκτιμώ και ελέγχω». Πιο συγκεκριμένα, στην Ε' τάξη, στη θεματική ενότητα «Αριθμοί και πράξεις: Μέθοδοι προσεγγιστικού υπολογισμού και στρογγυλοποίησης» ως στόχος αναφέρεται «*να ελέγχουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα μιας πράξης*» και ως ενδεικτική δραστηριότητα προτείνεται ο προσεγγιστικός υπολογισμός στην εκτίμηση της ορθότητας ενός αποτελέσματος. Στη θεματική ενότητα «Αριθμοί και πράξεις. Δεκαδικοί αριθμοί: πράξεις» προτείνεται ως ενδεικτική δραστηριότητα νοεροί υπολογισμοί και προσεγγιστικές εκτιμήσεις και χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων. Τέλος στην Στ' τάξη, στη θεματική ενότητα «Αριθμοί και πράξεις: Μέθοδοι προσεγγιστικού υπολογισμού και στρογγυλοποίησης» ως στόχος αναφέρεται «*να ελέγχουν το αποτέλεσμα μιας πράξης με νοερές διαδικασίες, εκτιμώντας το μέγεθος του αποτελέσματος αυτού*» και ως ενδεικτική δραστηριότητα προτείνεται ο προσεγγιστικός υπολογισμός στην εκτίμηση ενός αποτελέσματος πριν, μετά ή χωρίς την πραγματοποίηση μιας πράξης».

Τα σχολικά εγχειρίδια περιέχουν μεγάλο πλήθος δραστηριοτήτων που αφορούν την εκτίμηση (στις περισσότερες δραστηριότητες και σε όλα τα προβλήματα). Κάποιες από αυτές παρατίθενται παρακάτω.

Πόσα χρήματα εισέπραξε μια αεροπορική εταιρεία αν ο αριθμός των επιβατών ήταν 121.000 και το κόστος για κάθε εισιτήριο 190 €;

• Εκτιμώ:	• Υπολογίζω με ακρίβεια:	• Η διαφορά από την εκτίμηση:

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τις εκτιμήσεις του αποτελέσματος που δίνουν τα παιδιά: παιδιά που δεν έχουν καταλάβει την αξία θέσης ψηφίων στους αριθμούς θα κάνουν εκτιμήσεις με πολύ μεγάλο σφάλμα, με αποτέλεσμα να χρειαστεί να κάνουμε επανορθωτική διδασκαλία. Τέτοιες δραστηριότητες έχει αρκετές το σχολικό βιβλίο. Επίσης υπάρχουν σχετικές δραστηριότητες εκτίμησης που αφορούν τους δεκαδικούς αριθμούς, όπως παρατίθεται παρακάτω.

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πώς υπολογίζουμε γρήγορα με δεκαδικούς αριθμούς;

1. Πόσους γύρους στο αγαπημένο τους παιχνίδι μπορούν να κάνουν:

- η Ζωή στη ρόδα;
  Εκτιμώ περίπου: ....
  Υπολογίζω με ακρίβεια:
- ο Γιάννης και η αδερφή του;
  Εκτιμώ περίπου: .... στο τρενάκι.
  .... στα συγκρουόμενα.
  Υπολογίζω με ακρίβεια:
- Πόσα χρήματα θα τους περισσέψουν;

Στη Ζωή: ....   Στο Γιάννη και στην αδερφή του: ....

Είναι οι παρακάτω υπολογισμοί σωστοί; Εκτιμώ βάζοντας Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) στο τετραγωνίδιο. Υπολογίζω σωστά το αποτέλεσμα όπου χρειάζεται. Εξηγώ πώς σκέφτηκα.

Μ δ		Μ δ ε χ
2,5		0,135
x 0,7		x 1,1
175		0270
+ 00		+0135
17,5		0,01620

Παρακάτω συμπεριλήφθηκαν μερικές δραστηριότητες εκτίμησης που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ τάξης, προκειμένου να απεικονιστεί η μορφή που έχουν. Παρατηρήθηκε ότι υπήρχαν προβλήματα εκτίμησης μόνο στο κεφάλαιο της στρογγυλοποίησης

Εφαρμογή 1η

Μια συνηθισμένη κυψέλη έχει 12.475 μέλισσες. Πόσες μέλισσες έχει περίπου ένας μελισσοκόμος με 6 κυψέλες;

Λύση

Για να κάνουμε έναν γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 12.475 στην πλησιέστερη εκατοντάδα, θα γίνει δηλαδή 12.500.

Άρα 12.500 • 6 = 75.000

Απάντηση: Έχει περίπου 75.000 μέλισσες.

Εφαρμογή 2η

Ένα κουτί με CD εγγραφής κοστίζει 1,29 €. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε κατά προσέγγιση για 5 κουτιά;

Λύση

Για ένα γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε το 1,29 στο πλησιέστερο δέκατο, θα γίνει δηλαδή 1,30.

Άρα 1,30 • 5 = 6,50.

Απάντηση: Θα πληρώσουμε περίπου 6,5 €.

Πρόβλημα 1ο

Αν για 4 βιβλία πληρώσαμε 51 €, πόσο περίπου κοστίζει κάθε βιβλίο;

Λύση

Απάντηση: ....

Άσκηση 3η

Υπολογίζοντας κατά προσέγγιση με το νου, τοποθέτησε κάθε κλάσμα σε μία από τις τρεις κατηγορίες:

$\frac{49}{50}, \frac{2}{47}, \frac{14}{30}, \frac{9}{10}, \frac{12}{25}, \frac{4}{9}, \frac{13}{15}, \frac{1}{19}, \frac{89}{100}, \frac{3}{250}$

Κοντά στο 0	**Κοντά στο $\frac{1}{2}$**	**Κοντά στο 1**

Πρόβλημα 2ο

Για να περιφράξουμε ένα τετράγωνο οικόπεδο με πλευρά 78 μέτρα, πόσα μέτρα σύρματος χρειάζονται περίπου;

Λύση

Απάντηση: ....

Πρόβλημα 3ο

Αγοράσαμε έναν υπολογιστή που κοστίζει 885,99 € σε 9 μηνιαίες δόσεις. Κάνοντας μια γρήγορη εκτίμηση ποιο είναι το ποσό που πρέπει να πληρώνουμε σε κάθε δόση;

Λύση

Απάντηση: ....

3.6.3 Συμπεράσματα τρίτης περιόδου

Την περίοδο αυτή, η οποία διήρκησε από το 1982 μέχρι και σήμερα με τα Αναλυτικά Προγράμματα του 2003, παρατηρήθηκε ότι οι νοεροί υπολογισμοί απέκτησαν τη θέση που τους αξίζει στα Αναλυτικά προγράμματα και στα σχολικά εγχειρίδια, ενώ οι εκτιμήσεις άρχισαν να καταλαμβάνουν σημαντική θέση στη διδασκαλία, καθώς προβάλλουν και αναδεικνύουν την εκπαιδευτική σημασία και τη θέση τους στη διδασκαλία.

Ως βασικός στόχος της διδασκαλίας τέθηκε η εκτέλεση νοερών πράξεων πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Σημαντική επιδίωξη είναι η κατανόηση της υπολογιστικής τεχνικής (να μάθει να λογαριάζει σωστά) και η ανάπτυξη της υπολογιστικής δεξιότητας. Κάνοντας νοερούς υπολογισμούς οι μαθητές εξοικειώνονται με τις ιδιότητες των πράξεων και με την επιλογή της κατάλληλης πράξης.

Στα βιβλία του Δασκάλου δίνονται συμβουλές για την πορεία διδασκαλίας, τις διδακτικές ενέργειες, τις μαθητικές δραστηριότητες, αναλύονται οι στρατηγικές αριθμητικού υπολογισμού που πρέπει να διδαχθούν στους μαθητές. Επιπλέον, στο αναλυτικό πρόγραμμα του 2003 αναφέρεται ότι οι νοεροί υπολογισμοί αφορούν την εύρεση του αποτελέσματος με πολλές διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούμε με το μυαλό. Ειδικότερα σήμερα οι στρατηγικές υπάρχουν και στο βιβλίο του δασκάλου (Α’ και Γ’ τάξης) με πολλές οδηγίες για τον τρόπο διδασκαλίας, αλλά και στα σχολικά βιβλία με τη μορφή δραστηριοτήτων (ειδικότερα της Β’ τάξης). Σημαντική επιδίωξη της διδασκαλίας σήμερα είναι να εξηγούν οι μαθητές τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν τη λύση, καθώς επίσης και τον εντοπισμό διαφόρων τρόπων λύσεων ενός ζητούμενου από τις πρώτες κιόλας τάξεις του δημοτικού.

Οι νοεροί υπολογισμοί στην αρχή της περιόδου έπονταν των γραπτών, ενώ σήμερα οι νοεροί υπολογισμοί προηγούνται των γραπτών. Ωστόσο παρατηρήθηκε ότι οι νοεροί υπολογισμοί αναφέρονταν περισσότερο στις μικρότερες τάξεις, ενώ λιγότερο στις μεγαλύτερες (στη Στ’ τάξη δεν υπήρχε καμία αναφορά στο Αναλυτικό Πρόγραμμα και μόνο τρεις ασκήσεις στο βιβλίο του μαθητή). Οι ασκήσεις νοερών υπολογισμών ήταν και είναι σχετικά λιγότερες από τις ασκήσεις με γραπτούς υπολογισμούς. Ακόμη, υπήρχαν και υπάρχουν αναφορές μόνο σε νοερούς υπολογισμούς φυσικών αριθμών, ενώ δεν υπήρχαν αναφορές σε ρητούς με εξαίρεση το βιβλίο του μαθητή της Δ’ τάξης του 1984, το οποίο είχε νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών. Στην πράξη όμως παρατηρήθηκε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών ήταν μόνο αλγοριθμική.

Όσον αφορά την εκτίμηση στην αρχή της περιόδου αυτής αν και αναφέρεται η εισαγωγή της στη διδακτέα ύλη, ουσιαστικά δε διδάσκονταν, παρά μόνο στη Δ’ τάξη όπου εντοπίστηκαν προσεγγιστικοί υπολογισμοί αθροισμάτων και διαφορών δεκαδικών αριθμών. Σήμερα η εκτίμηση παρατηρείται συχνότερα στη διδακτέα ύλη, ειδικότερα της Ε’ τάξης, όπου δίνεται μεγάλη βαρύτητα. Από στις πρώτες τάξεις σήμερα εφαρμόζεται η εκτίμηση ως άμεση εκτίμηση, ως εκτίμηση αποτελέσματος, ως πρόβλεψη αποτελέσματος και διατύπωση υποθέσεων για την ύπαρξη μίας ή περισσότερων λύσεων. Η εκτίμηση εφαρμόζεται κυρίως σε φυσικούς και λίγο σε δεκαδικούς αριθμούς.

Στην αρχή της περιόδου αυτής η διδασκαλία δε βασίζονταν στις άτυπες γνώσεις των μαθητών. Οι υπολογισμοί γίνονταν για να ασκηθούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες, οι οποίες δίνονταν έτοιμες και καλούνταν οι μαθητές να τις εφαρμόσουν. Σήμερα, σε αντίθεση με το παρελθόν, τα προγράμματα και τα βιβλία είναι γραμμένα έτσι ώστε να λαμβάνονται υπόψη οι προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών, οι ικανότητές τους και οι άτυπες γνώσεις τους. Στόχος είναι ο εκπαιδευτικός να μην είναι η αυθεντία αλλά βοηθός και συνεργάτης των μαθητών. Στο επίκεντρο θα πρέπει να βρίσκεται ο μαθητής, ο οποίος κατασκευάζει μόνος του τη γνώση, ανακαλύπτει υποθέτει, δοκιμάζει, αλληλεπιδρά και δεν είναι παθητικός δέκτης της νέας γνώσης.

Συμπεράσματα

Με την παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια έρευνας σχετικά με τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων στο Δημοτικό Σχολείο του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος από την απελευθέρωση του ελληνικού κράτους μέχρι και σήμερα.

Έτσι λοιπόν, με το πέρασμα των χρόνων παρατηρήθηκε ότι την πρώτη περίοδο των παραδοσιακών μαθηματικών (1821-1912) υπήρχε έντονη χρήση των νοερών υπολογισμών στην εκπαίδευση. Τη δεύτερη περίοδο (1913-1981), όπου τα παραδοσιακά μαθηματικά παραχώρησαν τη θέση τους στα μοντέρνα μαθηματικά, οι νοεροί υπολογισμοί παραγκωνίστηκαν αισθητά κατά τη διδασκαλία. Την τρίτη περίοδο (1982-σήμερα) παρατηρήθηκε πως δόθηκε και δίνεται έμφαση στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.

Αρχικά, κατά τη διδασκαλία εφαρμόζονταν η αλληλοδιδακτική μέθοδος διδασκαλίας, ενώ από το 1880 επικράτησε η συνδιδακτική μέθοδος. Το 1930 εφαρμόστηκαν οι αρχές του Σχολείου εργασίας και το 1941 η Τριμερής πορεία. Σήμερα αξιοποιούνται διάφορες σύγχρονες διδακτικές πρακτικές και μέθοδοι.

Για την πρώτη περίοδο δεν υπήρχαν αρκετά διασωθέντα τεκμήρια που να μας παρέχουν λεπτομέρειες για τις διδακτικές μεθόδους και τον τρόπο που διδάσκονταν οι νοεροί υπολογισμοί την εποχή εκείνη. Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε παρατηρήθηκε ότι οι νοεροί υπολογισμοί διακρίνονταν από τους γραπτούς υπολογισμούς, οι οποίοι διδάσκονταν με στόχο την πραγματοποίηση των πράξεων. Τη δεύτερη περίοδο, εξαιτίας της λακωνικής αναφοράς των νοερών υπολογισμών στη διδασκαλία, δε δίνονταν οδηγίες για τον τρόπο που θα διδάσκονταν, ούτε και για τους λόγους που έπρεπε να διδαχτούν. Παρατηρήθηκε ότι γίνονταν χρήση των νοερών υπολογισμών με στόχο τη γρήγορη εύρεση του αποτελέσματος ενός προβλήματος. Στην τρίτη περίοδο και ειδικότερα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1982 τέθηκε ως βασικός στόχος της διδασκαλίας η εκτέλεση νοερών πράξεων πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, προτάσσοντας την κατανόηση της υπολογιστικής τεχνικής και την ανάπτυξη της υπολογιστικής δεξιότητας. Στόχος της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών ήταν η εξοικείωση με τις ιδιότητες των πράξεων και με την επιλογή της κατάλληλης πράξης. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 2003 αναφέρεται ότι οι νοεροί υπολογισμοί αφορούν την εύρεση αποτελέσματος με διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούμε με το μυαλό και με απώτερο σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Παλαιότερα οι συνθήκες διδασκαλίας ήταν διαφορετικές (ένας δάσκαλος-πολλοί μαθητές), δεν υπήρχαν Αναλυτικά Προγράμματα, δεν είχαν συγγραφεί σχολικά εγχειρίδια, οι δάσκαλοι δεν ήταν εκπαιδευμένοι, οι μαθητές λάμβαναν ως παθητικοί δέκτες τη γνώση, η μάθηση πραγματοποιούνταν μέσω της αποστήθισης, ούτε υπήρχε υλικοτεχνική υποδομή. Αργότερα, οι συνθήκες υπήρξαν καλύτερες, με Αναλυτικά Προγράμματα και σχολικά εγχειρίδια που με το πέρασμα των χρόνων βελτιώνονταν, με νέες μεθόδους διδασκαλίας που προήγαγαν την αυτενέργεια των μαθητών, τον αυτοέλεγχο, τη συνεργατικότητα, που λάμβαναν υπόψη τις ατομικές ικανότητες, ενδιαφέροντα και ανάγκες των μαθητών. Όμως, στην πραγματικότητα το μάθημα παρέμενε δασκαλοκεντρικό. Ουσιαστικά, παλαιότερα δε λαμβάνονταν υπόψη οι άτυπες γνώσεις των παιδιών και εφάρμοζαν τους υπολογισμούς για εξάσκηση στις ιδιότητες των πράξεων. Σήμερα υπάρχουν Αναλυτικά Προγράμματα τα οποία παρέχουν οδηγίες και συμβουλές στους εκπαιδευτικούς για την πορεία διδασκαλίας. Πλέον λαμβάνονται υπόψη οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, οι ατομικές ικανότητες και οι άτυπες γνώσεις. Στόχος πλέον είναι ο εκπαιδευτικός να είναι βοηθός και σύμβουλος των μαθητών και όχι η αυθεντία, όπως ήταν παλαιότερα.

Οι νοεροί υπολογισμοί την πρώτη περίοδο διδάσκονταν από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού μέχρι το τέλος, με εξαίρεση το Αναλυτικό Πρόγραμμα του Πετρίδη στο οποίο μειώνονταν στη Δ’ τάξη με τους γραπτούς να επικρατούν. Στα Αναλυτικά Προγράμματα της δεύτερης περιόδου προτείνονταν οι νοεροί υπολογισμοί να διδάσκονται από τις μικρότερες τάξεις (αν και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1977 δε διευκρινίζονταν πότε εισάγονταν), ενώ διέφεραν ως προς το πότε έπαυε η διδασκαλία τους. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1913 υποστηρίζονταν ότι οι νοεροί υπολογισμοί έπρεπε να διδάσκονται μέχρι και τη Γ’ τάξη, ενώ στις τρεις μεγαλύτερες δεν αναφέρονταν καθόλου. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1969 υποστηρίζονταν ότι οι νοεροί υπολογισμοί έπρεπε να διδάσκονται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού. Τέλος, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1977 οι νοεροί υπολογισμοί δεν αναφέρονταν πουθενά στην ανάλυση της διδακτέας ύλης, ενώ στα σχολικά εγχειρίδια εμφανίζονταν κυρίως στις μικρότερες τάξεις και ελάχιστα ή καθόλου στις μεγαλύτερες τάξεις. Την τρίτη περίοδο οι νοεροί υπολογισμοί συναντήθηκαν κυρίως στις μικρότερες τάξεις και λιγότερο στις μεγαλύτερες.

Επιπλέον, υπήρχαν κάποιες χρονικές περίοδοι όπου οι νοεροί υπολογισμοί δε διαχωρίζονταν καθόλου από τους γραπτούς υπολογισμούς, ενώ σε κάποιες άλλες τονίζονταν οι διαφορές μεταξύ τους και διαχωρίζονταν. Η σειρά διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και των γραπτών υπολογισμών διέφερε. Την πρώτη περίοδο στο Αναλυτικό πρόγραμμα του Κοκκώνη και του Πετρίδη προτάσσονταν πρώτα οι νοεροί υπολογισμοί και έπονταν οι γραπτοί, ενώ στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Παπαμάρκου δεν ήταν ξεκάθαρο. Τη δεύτερη περίοδο, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1913 δε διευκρινίζονταν αν διδάσκονταν πρώτα ή μετά οι νοεροί υπολογισμοί, αν και ο καθηγητής Σαφαρίκας συμβούλευε πως οι μαθητές πρώτα έπρεπε να μάθουν τον κανόνα (αποστήθιση), έπειτα να εξασκηθούν γραπτά και στο τέλος νοερά. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1969 υποστηρίχθηκε πως οι μαθητές έπρεπε να εξασκηθούν πρώτα νοερά και στη συνέχεια γραπτά. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1973 έπρεπε πρώτα να εξασκηθούν με τη χρήση εποπτικού υλικού, στη συνέχεια νοερά και στο τέλος γραπτά. Τέλος, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα του 1977 προτείνονταν να γίνει εξάσκηση με εποπτικό υλικό, έπειτα γραπτά και στο τέλος νοερά. Τέλος, την τρίτη περίοδο αρχικά με το Αναλυτικό πρόγραμμα του 1982 οι νοεροί υπολογισμοί έπονταν των γραπτών, ενώ σήμερα πρώτα διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί και μετά οι γραπτοί.

Μια ακόμη σημαντική επισήμανση είναι ότι τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούνταν οι νοεροί υπολογισμοί κυρίως στη διδασκαλία των πράξεων φυσικών αριθμών, ενώ σπάνια χρησιμοποιούνταν στη διδασκαλία των ρητών αριθμών, παρά τη προτροπή των Αναλυτικών Προγραμμάτων. Αναλυτικότερα, την πρώτη περίοδο, στα Αναλυτικά Προγράμματα του Ι. Κοκκώνη και του Πετρίδη προτείνονταν η διδασκαλία νοερών υπολογισμών φυσικών αριθμών, ενώ το Αναλυτικό Πρόγραμμα του Παπαμάρκου αναφέρονταν και νοεροί υπολογισμοί κλασμάτων στη Γ’ και Δ’ τάξη και δεκαδικών στη Δ’ τάξη. Τη δεύτερη περίοδο συναντήθηκαν νοεροί υπολογισμοί φυσικών αριθμών και κλασμάτων, αλλά πουθενά δεν εντοπίστηκαν νοεροί υπολογισμοί δεκαδικών αριθμών, με μόνη εξαίρεση το σχολικό εγχειρίδιο της Ε’ τάξης (1969) στο οποίο υπήρχαν νοεροί υπολογισμοί φυσικών αριθμών, κλασμάτων και δεκαδικών. Την τρίτη περίοδο διδάσκονταν κυρίως νοεροί υπολογισμοί φυσικών αριθμών και καθόλου ρητών αριθμών, με εξαίρεση το βιβλίο της Δ’ τάξης (1984), στο οποίο αναφέρονταν και νοεροί υπολογισμοί πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών αριθμών.

Επιπλέον, σε κάποιες περιόδους δίνονταν ολοκληρωτική προσοχή στο περιεχόμενο της διδασκαλίας και όχι στον τρόπο διδασκαλίας, μια ενέργεια η οποία δε συνάδει με το σημερινό εκπαιδευτικό σύστημα στη χώρα μας.

Ένα ακόμη συμπέρασμα που αντλήθηκε από αυτή την έρευνα είναι ότι την πρώτη και τη δεύτερη περίοδο δεν εντοπίστηκε η διδασκαλία και η ύπαρξη στρατηγικών, ενώ την τρίτη περίοδο παρατηρήθηκε ότι στα βιβλία του δασκάλου και στα αναλυτικά προγράμματα αναφέρονται οι στρατηγικές αριθμητικών υπολογισμών που πρέπει να διδαχτούν στους μαθητές.

Επιπλέον, τις δυο πρώτες περιόδους δεν αναλύονταν οι τρόπος σκέψης των μαθητών στην εύρεση των αποτελεσμάτων, παρά μόνο στο αναλυτικό πρόγραμμα του Πετρίδη ρωτούνταν η λόγος επιλογής της πράξης και στο Αναλυτικό πρόγραμμα του 1969 ρωτούνταν ο τρόπος σκέψης. Σήμερα, προτείνεται κατά τη διδασκαλία να ερωτάται ο τρόπος σκέψης των μαθητών προκειμένου να οργανώσει ο μαθητής και να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης του, αλλά και να ακουστούν διαφορετικοί τρόποι σκέψης.

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα ξεκίνησε η κυκλοφορία των σχολικών βιβλίων και των βιβλίων των δασκάλων με στόχους και οδηγίες για τη διδασκαλία από το 1982. Τότε υπήρχαν λίγες ασκήσεις με νοερούς υπολογισμούς στα σχολικά εγχειρίδια. Με το πέρασμα των χρόνων, φτάνοντας στη σημερινή εποχή, οι νοεροί υπολογισμοί υποστηρίζονται συστηματικά στα σχολικά βιβλία, ενώ παράλληλα έχουν εισαχθεί στη διδασκαλία και οι εκτιμήσεις.

Όσον αφορά την εκτίμηση, παρατηρήθηκε ότι οι πρώτες αναφορές υπήρξαν τη δεύτερη περίοδο με τα αναλυτικά προγράμματα του 1969 (ζητώντας από τους μαθητές να εκτιμούν το αποτέλεσμα της άσκησης ή του προβλήματος) και του 1973 χωρίς όμως στην πραγματικότητα να εφαρμόζεται η διδασκαλία της. Ουσιαστική εισαγωγή της εκτίμησης στη διδασκαλία έγινε την τρίτη περίοδο. Στο αναλυτικό πρόγραμμα του 1982 ναι μεν αναφέρονταν αλλά δεν εφαρμόζονταν ιδιαίτερα (με εξαίρεση το σχολικό εγχειρίδιο της Δ’ τάξης του 1984 στο οποίο υπήρχαν προσεγγιστικοί υπολογισμοί αθροισμάτων και διαφορών δεκαδικών αριθμών), ενώ μόνο τα νέα αναλυτικά προγράμματα του 2003 προωθούν την διδασκαλία της. Σήμερα η εκτίμηση υπάρχει εντονότερα στη διδακτέα ύλη από τις μικρές ακόμη τάξεις και με αποκορύφωνα την Ε’ τάξη. Κυρίως εφαρμόζεται σε φυσικούς αριθμούς και ελάχιστα σε δεκαδικούς αριθμούς.

Οι νοεροί αριθμητικοί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις είναι και θα είναι πάντα, για απλές αριθμητικές πράξεις, χρήσιμοι και απαραίτητοι στον καθένα γιατί είναι πάντα και θα είναι σε κάθε περίσταση διαθέσιμοι.

Παράρτημα

Παράρτημα 1

Αρχικά, ο Σαφαρίκας παρέχει κάποιες οδηγίες για τη μέθοδο διδασκαλίας. Αναλυτικότερα, αναφέρει:

«*Η πρόσθεση δυο μονοψήφιων αριθμών είναι εύκολη και πρέπει να ασκήσωμε τους μαθητές τους να την κάνουν γρήγορα. Προσοχή χρειάζεται όταν το άθροισμα ξεπερνά το 10. Π.χ. 9+7=16. Για να βρούμε το αποτέλεσμα εύκολα παίρνουμε μια μονάδα από το 7 και την προσθέτομε στο 9 κι έχομε 9+1=10. Έπειτα προσθέτομε στο 10 το υπόλοιπο, δηλαδή το 6, κι έχομε 10+6=16. Το ίδιο κάνομε και με τους αριθμούς π.χ. 6+8=14. Θα πούμε: 6+4=10, 10+4=14.*

Προτού φθάσωμε σ' τους τους υπολογισμούς είναι απαραίτητο ν' ασκήσωμε τους μαθητές τους στην πρόσθεση αριθμών, που το άθροισμά τους δεν ξεπερνά το 10, και ιδιαίτερα ν' ασκήσωμε τους να βρίσκουν γρήγορα τον αριθμό που πρέπει να προσθέσωμε σ' ένα δοθέντα αριθμό για να γίνει ο αριθμός 10».

Ακολουθούν ασκήσεις και προβλήματα για εξάσκηση των μαθητών. Οι ασκήσεις που δίνει πρέπει να ακολουθούν την παρακάτω περίπου σειρά:

- Μάθε ν' ανεβαίνεις ένα-ένα ως το 10. *Π.χ. 1+1=2, 2+1=3*

- ***Μάθε ν' ανεβαίνεις δυο-δυο ως το 10.*** *Π.χ. 2+2=4, 4+2=6*

- ***Ν' αναλύσεις τους αριθμούς 2,4,6,8,10, σε ίσους προσθετέους.*** *Π.χ. 2=1+1, 4=2+2*

- Να βρεις τον αριθμό που πρέπει να προσθέσεις στο 1,2,3,…,9 για να γίνει ο αριθμός 10.

Π.χ. 1+9=10, 2+8=10

-***Να βρεις γρήγορα πόσο κάνουν:***

1+4=	*2+5=*	*6+3=*	*3+4=*
2+3=	*3+6=*	*7+2=*	*2+4=*
4+5=	*5+3=*	*6+1=*	*3+1=*

-Κάμε τους λογαριασμούς:

1+;….=10	*2+;…..=10*	*9+;……=10*

3+;…..=10 4+;….=10 7+;…..=10

<u>Προβλήματα</u>

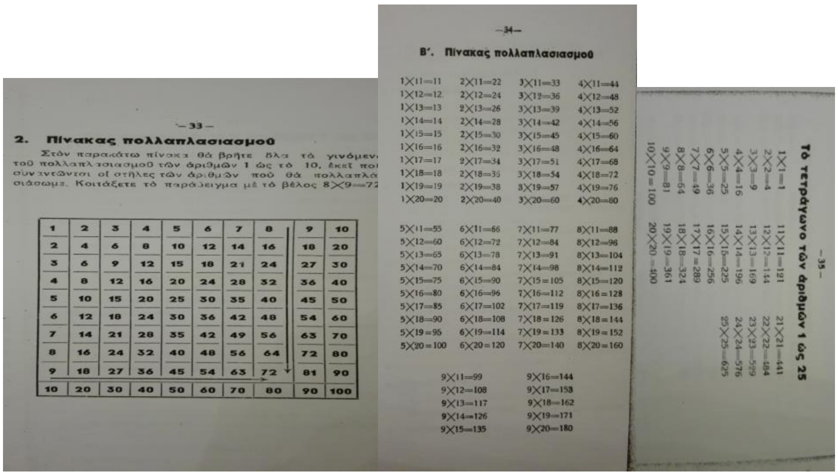
1. *Έχω μια δραχμή και ένα δίδραχμο. Πόσες δραχμές θέλω ακόμη για να γίνουν 10 δραχμές;*
2. *Δυο κουνελάκια πόσα πόδια έχουν όλα μαζί;*
3. *Έχω δύο δίδραχμα. Πόσες δραχμές θέλω ακόμη για να γίνουν 10 δραχμές;*

Παράρτημα 2

Όσον αφορά την πράξη του πολλαπλασιασμού ο Σαφαρίκας προτείνει:

«Τους μικρές τάξεις ο πολλαπλασιασμός περιορίζεται τους περιπτώσεις με πολλαπλασιαστή μονοψήφιο. Στην αρχή ασκούμε τους μαθητές να βρίσκουν το διπλάσιο των δεκάδων και των μισών δεκάδων. Οι αριθμοί 2,10 και 5, είναι αρκετοί για να αποκτήσουν οι μαθητές πλήρη έννοια του πολλαπλασιασμού.

Για τους λογαριασμούς από μνήμης είναι απαραίτητο να μάθουν οι μαθητές τους πολύ καλά τον πυθαγόρειο πίνακα. Πρέπει τους να μάθουν απ' έξω τα γινόμενα των 9 πρώτων ψηφίων επί όλους τους ακέραιους αριθμούς ως το 20, και τα τετράγωνα όλων των αριθμών, ως το 25».



— 33 —

2. Πίνακας πολλαπλασιασμοῦ

Στὸν παρακάτω πίνακα θὰ βρῆτε ὅλα τὰ γινόμεν… τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς τὸ 10, ἐκεῖ πο… συναντῶνται οἱ στῆλες τῶν ἀριθμῶν ποὺ θὰ πολλαπλα… σιάσωμε. Κοιτάξετε τὸ παράδειγμα μὲ τὸ βέλος 8×9=72

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

—34—

Β'. Πίνακας πολλαπλασιασμοῦ

1×11=11	2×11=22	3×11=33	4×11=44
1×12=12	2×12=24	3×12=36	4×12=48
1×13=13	2×13=26	3×13=39	4×13=52
1×14=14	2×14=28	3×14=42	4×14=56
1×15=15	2×15=30	3×15=45	4×15=60
1×16=16	2×16=32	3×16=48	4×16=64
1×17=17	2×17=34	3×17=51	4×17=68
1×18=18	2×18=36	3×18=54	4×18=72
1×19=19	2×19=38	3×19=57	4×19=76
1×20=20	2×20=40	3×20=60	4×20=80
5×11=55	6×11=66	7×11=77	8×11=88
5×12=60	6×12=72	7×12=84	8×12=96
5×13=65	6×13=78	7×13=91	8×13=104
5×14=70	6×14=84	7×14=98	8×14=112
5×15=75	6×15=90	7×15=105	8×15=120
5×16=80	6×16=96	7×16=112	8×16=128
5×17=85	6×17=102	7×17=119	8×17=136
5×18=90	6×18=108	7×18=126	8×18=144
5×19=95	6×19=114	7×19=133	8×19=152
5×20=100	6×20=120	7×20=140	8×20=160

9×11=99	9×16=144
9×12=108	9×17=153
9×13=117	9×18=162
9×14=126	9×19=171
9×15=135	9×20=180

— 35 —

Τὸ τετράγωνο τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 25

1×1=1	11×11=121	21×21=441
2×2=4	12×12=144	22×22=484
3×3=9	13×13=169	23×23=529
4×4=16	14×14=196	24×24=576
5×5=25	15×15=225	25×25=625
6×6=36	16×16=256	
7×7=49	17×17=289	
8×8=64	18×18=324	
9×9=81	19×19=361	
10×10=100	20×20=400	

Ειδικότερα, για το <u>γινόμενο τους αριθμού επί 2</u> δίνει τα εξής παραδείγματα:

1ο 43*2. Δεν υπάρχει κρατούμενο και αρκεί να διπλασιάσωμε όλα τα ψηφία, οπότε έχομε: 43*2=86

2ο 97*2. Εδώ έχομε ένα κρατούμενο και θα πούμε: 97*2=(90+7)*2=90*2+7*2=180+14=194

Για το γινόμενο τους αριθμού επί το 4 δίνει τα εξής παραδείγματα:

1^{o} 42*4=(40+2)*4=40*4+2*4=160+16=176

2^{o} 27*4=25*4+2*4=100+8=108

3^{o} 342*4=(340+2)*4=340*4+2*4=1360+8=1368

Για το γινόμενο τους αριθμού επί το 5 δίνει τα εξής παραδείγματα:

1^{o} 38*5.Το μισό του 38 είναι 19. Πολλαπλασιαζόμενο επί 10 τους δίνει τον αριθμό 190.

2^{o} 37*5. Το μισό του 36 είναι 18 κι έχομε αποτέλεσμα 180+5=185

Για ασκήσεις απλώς ζητούσε να κάνουν οι μαθητές γρήγορα τους πολλαπλασιασμούς,

Π.χ. 14*2=   19*2=   24*2=   38*4=

45*4=   34*5=   15*5=   29*5=

Παράρτημα 3

(1973, Καρκάνης, Γ' τάξη)

2. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

Πρόσθεσι καὶ ἀφαίρεσι μονοψηφίου, χωρὶς νὰ ξεπερνοῦμε τὴ δεκάδα

1. Νὰ σχηματίσετε τὶς σειρές:

α) 1+ 3= 11+ 3= 21+ 3= κλπ. ὡς τὸ 91+ 3=
β) 1+ 4= 11+ 4= 21+ 4= κλπ. ὡς τὸ 91+ 4=

2. Νὰ σχηματίσετε ὅμοιες σειρὲς μὲ δεύτερο προσθετέο τὸ 5, 6, 7, 8, 9.

3. Νὰ σχηματίσετε τὶς σειρές:

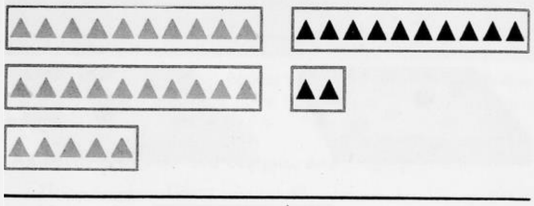
9 – 4=	8 – 6=	7 – 3=
19 – 4=	18 – 6=	17 – 3=
29 – 4=	28 – 6=	27 – 3=
κλπ. ὡς τὸ	ὡς τὸ	ὡς τὸ
99 – 4=	98 – 6=	97 – 3=
6 – 5=	5 – 2=	9 – 7=
16 – 5=	15 – 2=	19 – 7=
26 – 5=	25 – 2=	29 – 7=
ὡς τὸ	ὡς τὸ	ὡς τὸ
96 – 5=	95 – 2=	99 – 7=

4. α) 10 – 3 20 – 3 30 – 3 40 – 3 κλπ. ὡς τὸ 100 – 3
β) 10 – 4 20 – 4 30 – 4 40 – 4 κλπ. ὡς τὸ 100 – 4

Νὰ σχηματίσετε ὅμοιες σειρὲς μὲ ἀφαιρετέο τὸ 5, 6, 7, 8, 9.

Πρόσθεσι διψηφίων ἀπὸ μνήμης.

Παράδειγμα 1. Πόσα γίνονται 25 + 12 ;



Στὰ 25 προσθέτομε πρῶτα τὰ 10 κι' ἔπειτα τὰ 2 τρίγωνα· δηλαδὴ 25 + 12= 25 + 10 + 2 = 35 + 2 = 37.

Πῶς ἀλλιῶς μπορεῖτε νὰ λύσετε τὴν παραπάνω ἄσκησι;

Παράδειγμα 2. 47 + 28 = ;

'Απάντησι. 47 + 28 = 47 + 20 + 8 = 67 + 3 + 5 = = 70 + 5 = 75 (μὲ ἀνάλυσι τοῦ 8 σὲ 3 + 5).

'Αφαίρεσι διψηφίου ἀπὸ διψήφιο, ἀπὸ μνήμης

Παράδειγμα. Πόσα μένουν 47 – 19;

'Απάντησι: 47 – 19 = 47 – 10 – 9 = 37 – 9 καὶ 37 – 9 = 37 – 7 – 2 = 30 – 2 = 28.

Μὲ ποιόν ἄλλον τρόπο μπορεῖτε νὰ λύσετε τὴν παράνω ἄσκησι ;

'Ασκήσεις

1. Νὰ κάμετε τὶς ἀφαιρέσεις μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείξαμε:

19 – 10	64 – 20	19 – 16	86 – 44	20 – 14	21 – 13
71 – 10	93 – 60	18 – 18	75 – 23	60 – 49	83 – 57

2. Νὰ σχηματίσετε τὶς σειρές:

α) 26 – 20 36 – 20 46 – 20 κλπ. ὡς τὸ 96 – 20
β) 33 – 26 43 – 26 53 – 26 κλπ. ὡς τὸ 93 – 26

Πολλαπλασιασμὸς διψηφίου ἐπὶ μονοψήφιο ἀπὸ μνήμης

Πρόβλημα. 'Ο Γιαννάκης εἶναι 3 ἐτῶν. Πόσων μηνῶν εἶναι;

Σκέψι. Τὸ 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνες, τὰ 3 ἔτη ἔχουν 3 × 12. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ 3×12 πόσο μᾶς κάνει, πολλαπλασιάζομε 3×10 = 30 καὶ 3×2 = 6. Ἔπειτα προσθέτομε 30+6=36. Ὥστε 3×12 = 36.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

4 × 21	4 × 22	4 × 23	4 × 24	4 × 25	4 × 26
3 × 27	3 × 28	3 × 29	2 × 31	2 × 46	2 × 48
5 × 19	6 × 16	7 × 14	9 × 11	8 × 12	4 × 18

Στ' ὀπωροπωλεῖο

Στ' ὀπωροπωλεῖο τῆς γειτονιᾶς διαβάζομε τὶς παρακάτω τιμές:

σταφύλια	7 δραχ. τὸ κιλὸ	φράουλες	14 δραχ. τὸ κιλὸ
μῆλα	6 » » »	καρπούζια	2 » » »
ἀχλάδια	12 » » »	πεπόνια	3 » » »
ροδάκινα	9 » » »	ντομάτες	4 » » »
πορτοκάλια	4 » » »	κολοκυθάκια	6 » » »
μπανάνες	17 » » »	πατάτες	3 » » »

Νὰ βρῆτε τώρα:

1. Πόσο κάνουν 3 κιλὰ σταφύλια; 7, 9, 5 κιλά;

Σημείωσι. Τὴν τιμὴ θὰ τὴ δῆτε στὸ τιμολόγιο.

2. Ἡ μητέρα ἀγόρασε 4 κιλὰ μῆλα καὶ 2 κιλὰ ἀχλάδια. Γιὰ ποιά φροῦτα ἔδωσε περισσότερα χρήματα;
3. Ὁ μανάβης πούλησε 9 καρπούζια. Κάθε καρπούζι ζύγιζε κατὰ μέσον ὅρο 3 κιλά. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;
4. Πόσο κάνουν: α) ὀχτώμισυ κιλὰ πορτοκάλια; β) πεντέμισυ κιλὰ κολοκυθάκια; γ) ἑνάμισυ κιλὸ ἀχλάδια;

Διαίρεσι μερισμοῦ ἀπὸ μνήμης

Παράδειγμα 1. Νὰ μοιράσετε 12 μάρκες σὲ 3 παιδιά. Πόσες θὰ πάρη τὸ καθένα; Εὔκολα βρίσκομε ὅτι θὰ πάρη 4. Ἐδῶ ἔχομε μιὰ ἄλλη πρᾶξι, ποὺ δὲν μοιάζει μὲ τὶς τρεῖς προηγούμενες. Λέγεται διαίρεσι. Κι ἐπειδὴ χωρίζομε τὶς μάρκες ἢ ὁποιαδήποτε ἄλλα ἀντικείμενα σὲ ἴσα μερίδια, γι' αὐτὸ λέγεται διαίρεσι μερισμοῦ. Γράφομε τὴν πρᾶξι $12:3=4$. Τὸ σημεῖο τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ : (διὰ ἢ μέ). Ὁ ἀριθμὸς 12 ποὺ μοιράζομε λέγεται διαιρετέος. Ὁ ἀριθμὸς 3 ποὺ μᾶς λέει σὲ πόσα ἴσα μερίδια θὰ μοιράσωμε τὸν διαιρετέο λέγεται διαιρέτης. Καὶ ὁ ἀριθμὸς 3 ποὺ βρήκαμε λέγεται πηλίκο.

Συμπέρασμα. Διαίρεσι μερισμοῦ εἶναι ἡ πρᾶξι στὴν ὁποία μᾶς δίνονται δύο ἀριθμοὶ καὶ μοιράζομε τὸν ἕνα σὲ τόσα ἴσα μέρη, ὅσα δείχνουν οἱ μονάδες ποὺ ἔχει ὁ ἄλλος.
Στὴ διαίρεσι μερισμοῦ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀριθμοὶ ἑτεροειδεῖς.

Παράδειγμα 2. Ἂν μοιράσωμε τὶς μάρκες σὲ δύο παιδιά, θὰ πάρη τὸ καθένα ἀπὸ 6. Δηλαδὴ $12:2=6$. Τὸ λέμε κι ἔτσι: τὸ μισὸ τοῦ $12=6$. Τὸ μισὸ τὸ γράφομε $\frac{1}{2}$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψωμε: τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ $12=6$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε εὔκολα ὅτι τὸ τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ 12 εἶναι 3· δηλαδή, ἂν μοιράσωμε τὸ 12 σὲ 4 παιδιά, τὸ καθένα θὰ πάρη ἀπὸ 3. Δηλαδὴ $12:4=3$ ἢ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ $12=3$.

Ἀσκήσεις

$16:2=$;	$35:5=$;	$\frac{1}{2}$ τοῦ $10=$;	$\frac{1}{2}$ τοῦ $36=$;
$20:4=$;	$72:9=$;	$\frac{1}{2}$ » $30=$;	$\frac{1}{2}$ » $60=$;
$32:8=$;	$56:8=$;	$\frac{1}{2}$ » $28=$;	$\frac{1}{2}$ » $42=$;
$54:6=$;	$81:9=$;		
		$\frac{1}{4}$ τοῦ $8=$;	
		$\frac{1}{4}$ » $40=$;	
		$\frac{1}{4}$ » $24=$;	

Προβλήματα

1. Ἕνας ποδηλάτης διέτρεξε 54 χιλιόμετρα σὲ 3 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε σὲ 1 ὥρα;
2. Ἕνα βιβλίο ἔχει 100 σελίδες. Πόσες εἶναι οἱ μισὲς σελίδες του; Πόσο εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ (ἕνα τέταρτο) τῶν σελίδων;
3. Δύο μικροὶ λαχειοπῶλες κέρδισαν μαζὶ ἀπὸ τὴν ἐργασία τους σὲ μιὰ μέρα 90 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ὁ καθένας;

Ἀπάντησι. Θὰ μοιράσωμε τὸ 90 σὲ 2 καὶ ὁ καθένας θὰ πάρη τὸ $\frac{1}{2}$ (μισὸ) τοῦ 90. Δηλαδὴ $90:2=45$ ἢ $\frac{1}{2}$ τοῦ $90=45$.

Ἂν κέρδιζαν 80, 60, 70, 76, 72, 84, 50 δραχμές, πόσες θὰ ἔπαιρνε ὁ καθένας; Νὰ γράψετε τὶς ἀπαντήσεις καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους.

Διαίρεσι μετρήσεως ἀπὸ μνήμης

Ἐ ρ γ α σ ί ε ς. Νὰ γεμίσετε μὲ νερὸ ἄδειες φιάλες ἀπὸ γάλα ἢ ἄλλα δοχεῖα. Χρησιμοποιῆστε γιὰ μονάδα μικρὰ πρόχειρα κυπελλάκια πλαστικὰ ἢ φλιτζανάκια ἢ ποτηράκια. Νὰ μετρᾶτε κάθε φορὰ πόσα κυπελλάκια, φλιτζανάκια κλπ. νερὸ χωροῦν στὸ κάθε δοχεῖο.

Ὅταν τὸ γεμίσετε, νὰ κάνετε τὴν ἀντίθετη ἐργασία: θὰ μοιράζετε τὸ νερὸ τοῦ δοχείου σὲ κυπελλάκια στὴ σειρὰ καὶ θὰ μετρᾶτε πόσα χρειάζεστε κάθε φορά. Θὰ πρέπη νὰ βρίσκετε τὸν ἴδιο ἀριθμό, καὶ ὅταν γεμίζετε καὶ ὅταν ἀδειάζετε.

Σ η μ ε ί ω σ ι. Ἂν δὲν ἔχετε πολλὰ κυπελλάκια, θὰ γεμίζετε ἕνα καὶ θὰ χύνετε τὸ νερό. Θὰ μετρᾶτε πόσες φορὲς τὸ γεμίσατε. Εἶναι τὸ ἴδιο, σὰ νὰ εἴχατε πολλὰ κυπελλάκια στὴ σειρὰ καὶ τὰ γεμίσατε.

Παράδειγμα 1. Ἕνα δοχεῖο γεμάτο λάδι περιέχει 10 κιλὰ λάδι. Μοιράζομε τὸ λάδι τοῦ δοχείου σὲ φιάλες τῶν 2 κιλῶν, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Μετροῦμε καὶ βρίσκομε ὅτι θὰ χρειαστοῦμε 5 τέτοιες φιάλες.

Ἂν ρίξωμε τὸ λάδι ποὺ εἶναι τώρα στὶς φιάλες πάλι μέσα στὸ δοχεῖο, θὰ τὸ χωρέση ὅλο καὶ μόνο αὐτό. Δηλαδὴ θὰ χωρέση 5 φιάλες λάδι. Ἂν δὲν ἔχωμε 5 φιάλες ἀλλὰ μόνο 1, τότε, γιὰ νὰ γεμίσωμε τὸ δοχεῖο, θὰ πρέπη νὰ γεμίσωμε καὶ ν' ἀδειάσωμε στὸ δοχεῖο τὴ 1 φιάλη πέντε φορές.

Ὥστε τὰ 2 κιλὰ περιέχονται μέσα στὰ 10 κιλὰ πέντε φορές.

Γράφομε τὴν πρᾶξι· $10 : 2 = 5$.

Ἂν ἔχωμε δοχεῖο μὲ 20 κιλὰ λάδι καὶ γεμίσωμε τὶς φιάλες, θὰ τὶς μετρήσωμε καὶ θὰ βροῦμε ὅτι εἶναι 10 στὴ σειρά, δηλαδὴ εἶναι τόσες, ὅσες φορὲς περιέχονται τὰ 2 κιλὰ μέσα στὰ 20 κιλά. Γράφομε τὴν πρᾶξι· $20 : 2 = 10$.

Ἐδῶ ἔχομε ἄλλο εἶδος διαιρέσεως. Ἡ διαίρεσι αὐτὴ λέγεται δ ι α ί ρ ε σ ι μ ε τ ρ ή σ ε ω ς. Γιατί;

Συμπέρασμα. Διαίρεσι μετρήσεως εἶναι ἡ πρᾶξι μὲ τὴν ὁποία βρίσκομε πόσες φορὲς ἕνας ἀριθμὸς χωράει σ' ἕναν ἄλλο ἀριθμό.

Στὴ διαίρεσι μετρήσεως ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς.

Ἀσκήσεις

Τὸ 3 στὸ 15 πόσες φορὲς χωράει;
» 2 » 16 » » »
» 4 » 20 » » »
» 6 » 30 » » »
» 7 » 56 » » »
» 9 » 63 » » »
» 8 » 32 » » »
» 5 » 45 » » »
Τὸ 3 στὸ 17 χωράει 5 φορὲς καὶ μένουν 2
» 6 » 39 » ; » » » ;
» 7 » 45 » ; » » » ;
» 8 » 68 » ; » » » ;

Σ η μ ε ί ω σ ι. Τὶς ἴδιες ἀσκήσεις μποροῦμε νὰ τὶς γράψωμε καὶ μὲ τὸ : (διά). Π.χ. Τὸ 3 στὸ 15 χωράει 5, ἢ $15 : 3 = 5$.

Τὸ 3 στὸ 17 χωράει 5 φορὲς καὶ μένουν 2, ἢ 17 : 3 μᾶς δίνει πηλίκο 5 καὶ ὑπόλοιπο 2.

Προβλήματα

1. Μὲ 48 δραχμὲς πόσα κιλὰ μῆλα ἀγοράζομε; πόσα κιλὰ ἀχλάδια; Τὶς τιμὲς θὰ τὶς βρῆτε στὸ τιμολόγιο τοῦ ὀπωροπωλείου.
2. Νὰ βρῆτε πόσα κιλὰ ἀπὸ κάθε εἶδος τοῦ ὀπωροπωλείου ἀγοράζομε μὲ 50 δραχμὲς καὶ τί ρέστα θὰ ἔχωμε κάθε φορά.
3. 90 ἐκδρομεῖς πῆγαν ἐκδρομὴ μὲ λεωφορεῖα. Σὲ κάθε λεωφορεῖο ἦταν 30 ἐκδρομεῖς. Πόσα ἦταν τὰ λεωφορεῖα;
4. Σὲ μερικὰ ἐλαιουργεῖα τοποθετοῦν τὸ λάδι σὲ σφραγισμένα δοχεῖα τοῦ ἑνός, τῶν 2, τῶν 3, τῶν 5 κιλῶν. Πόσα δοχεῖα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ χρειαστοῦν, γιὰ νὰ βάλουν 50 κιλὰ λάδι; 60 κιλά, 80, 90, 75 κιλά;

2. ΠΡΟΣΘΕΣΙ

α) Πρόσθεσι δεκάδων

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις προφορικῶς καὶ γραπτῶς. Χρησιμοποιῆστε κατάλληλα ἀντικείμενα καὶ σχήματα.

1) $110 + 30$ $120 + 50$ $130 + 60$ $170 + 20$
   $140 + 40$ $130 + 40$

2) $120 + ; = 140$ $110 + ; = 180$ $130 + ; = 190$
   $160 = 130 + ;$ $; + 50 = 170$

3) $; + ; = 120$ $; + ; = 180$ $120 + 20 + 30 = ;$
   $130 + 0 + 40 = ;$

4) Τὸ 140 γίνεται, ἂν προσθέσωμε $100 + 20 + 20$ ἢ $110 + 20 + 10$ ἢ $80 + 20 + 40$ ἢ $60 + 60 + 20$ ἢ $100 + 40 + 0$ κλπ. Μὲ ποιούς ἄλλους ὅμοιους συνδυασμοὺς μπορεῖτε νὰ κάμετε τὸ 140;
Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 160, 180, 190.

β) Πρόσθεσι μονοψηφίων μὲ τριψηφίους

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις ἀπὸ μνήμης κι ἔπειτα νὰ τὶς γράψετε:

1) $110 + 1$ $130 + 2$ $180 + 3$ $190 + 7$
   $140 + 6$ $170 + 0$

2) $112 + 3 =$ 1 ἑκ. + 1 δεκ. + 2 μον. + 3 μον. = 115.

4) Πόσα κάνουν $145 + 27$; Λέμε: $145 + 20 = 165$· καὶ 7 (μὲ ἀνάλυσι σὲ $5 + 2$) 172.

Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε καὶ μὲ ἄλλο τρόπο. Δοκιμάστε. Νὰ ἐκτελέσετε ἀπὸ μνήμης μὲ ὅποιο τρόπο θέλετε τὶς προσθέσεις: $123 + 18$ $166 + 25$ $118 + 54$ $93 + 49$ $98 + 36$ $95 + 58 + 43$

Στὴν τελευταία ἄσκησι ἔχομε τρεῖς προσθετέους. Προσθέτομε τοὺς δύο πρώτους καὶ στὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ βροῦμε προσθέτομε καὶ τὸν τρίτο. Π.χ. $134 + 28 + 17 = ;$ Λέμε: $134 + 20 = 154$· καὶ 8 162. Ὥς ἐδῶ ἔχομε προσθέσει τοὺς δύο πρώτους προσθετέους. Συνεχίζομε: $162 + 10 = 172$· καὶ 7 179. Μπορεῖτε ν' ἀκολουθήσετε καὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο τρόπο θέλετε σεῖς.

3. ΑΦΑΙΡΕΣΙ

Ἀπὸ μνήμης

α) Ἀφαίρεσι δεκάδων

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις. Χρησιμοποιῆστε τ' ἀντικείμενά σας.

1) 150 – 20 = ; 180 – 50 190 – 40
180 – 60 110 – 10 200 – 20

2) 110 – 20 = ; 120 – 40 150 – 60
180 – 90 140 – 80 190 – 100

3) 180 – ; = 110 140 – ; = 100 ; – 20 = 130
; – 50 = 140 190 – ; = 150

4) 180 – 50 – 60 – 30 = ; 160 – 80 – 30 – 50 = ;
140 – 50 – 10 – 60 = ;

5) 190 – 30 + 20 – 60 = ; 150 + 20 – 60 – 40 = ;
160 + 20 – 90 + 10 = ;

6) 140 – 30 = 110. Ἀντίστροφα 110 + 30 = 140.
140 – 110 = 30. » 30 + 110 = 140.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ ἐργαστῆτε καὶ στὶς παρακάτω ἀσκήσεις· νὰ γράψετε καὶ νὰ βρῆτε καὶ τὶς ἀντίστροφες πράξεις.

200 – 50 = ; 170 – 80 = ; 120 – 70 = ;
180 – 60 = ; 140 – 90 = ; 190 – 100 = ;

β) Ἀφαίρεσι μονοψήφιου ἀριθμοῦ ἀπὸ τριψήφιο

1) 115 – 3 = ; 147 – 4 = ; 182 – 0 = ;
136 – 5 = ; 184 – 3 = ;

2) 120 – 5 = ; 150 – 4 = ; 170 – 6 = ;
190 – 2 = ; 200 – 7 = ;

3) Πόσα μένουν 124 – 6 ;
Λέμε: 124 – 4 = 120· πλὴν 2 118.

132 – 5 = ; 157 – 9 = ; 181 – 6 = ;
155 – 7 = ; 173 – 7 = ;

γ) Ἀφαίρεσι διψηφίων ἢ τριψηφίων ἀπὸ τριψηφίους

1) 195 – 70 = ; 146 – 60 = ; 165 – 120 =
191 – 150 = ; 129 – 120 = ;

2) Πόσα μένουν 184 – 51 ; Λέμε: 184 – 50 = 134· πλὴν 1 133.
176 – 62 = ; 164 – 111 = ; 181 – 121 =;
152 – 102 = ; 175 – 74 = ;

3) Πόσα μένουν 140 – 23 ; Λέμε: 140 – 20 = 120, 120 – 3 = 117.
160 – 38 = ; 170 – 24 = ; 150 – 105 = ;
170 – 95 = ; 110 – 78 = ;

Προβλήματα (ἀπὸ μνήμης)

1) Ὁ Πέτρος εἶχε 29 δραχμὲς καὶ ὁ Παῦλος 25. Ὁ πατέρας τους ἔδωσε στὸν καθένα ἀπὸ ἕνα δεκάδραχμο. Πόσες δραχμὲς περισσότερες εἶχε ὁ Πέτρος ἀπὸ τὸν Παῦλο; καὶ πόσες περισσότερες ἔχει τώρα;

2. Ὁ Θάνος εἶναι 15 ἐτῶν καὶ ὁ Γιάννης 9. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας των; Μετὰ 10 ἔτη πόση θὰ εἶναι ἡ διαφορά ; Πόση ἦταν ἡ διαφορὰ πρὶν ἀπὸ 5 ἔτη ;

2. ΠΡΟΣΘΕΣΙ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

Πρόσθεσι καὶ ἀφαίρεσι δεκάδων

α) Χωρὶς νὰ ξεπερνοῦμε τὴν ἑκατοντάδα.

Νὰ κάμετε τὶς παρακάτω ἐργασίες:

1. 200 + 10 = ; 200 + 20 = ; 200 + 30 = ; κλπ. ὥς τὸ 200+100 =;

Συνεχίστε τὴν ἴδια ἐργασία καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες.

2. 210+10= ; 210+ 20= ; 210+30= ; κλπ. ὥς τὸ 210+90 = ;

Συνεχίστε καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες.

Κάμετε τὸ ἴδιο μὲ πρῶτο προσθετέο τὸ 220, 320, 420 κλπ., ἔπειτα μὲ τὸ 230, 330, 430 κλπ., ὕστερα μὲ τὸ 240, 340, 440 κλπ. Σὰν δεύτερο προσθετέο θὰ προσθέτετε κάθε φορὰ 10, 20, 30 κλπ.

3. 1.000—10= ; 1.000—20= ; 1.000—30 = ; κλπ. ὥς τὸ 1.000—100= ;

Συνεχίστε καὶ στὶς ἄλλες ἑκατοντάδες πρὸς τὰ κάτω.

β) Μὲ ξεπέρασμα τῆς ἑκατοντάδας.

Παράδειγμα. 280+30= ; Ἀπάντησι. 280+20+10= 300+10=310. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε:

290+50= 340+90= 560+70= 730+90= 740+70= 860+60=

Παράδειγμα. 320—50= ; Ἀπάντησι. 320—20—30=300—30=270.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε:

330—70= 550—70= 740—50= 850—90= 610—80= 410—60=

Πρόσθεσι διψηφίων καὶ τριψηφίων (ἀπὸ μνήμης)

Πόσα γίνονται 385+247;
Ἀπάντησι. 385+200=585· καὶ 40 625· καὶ 5 630· καὶ 2 632 (μὲ ἀνάλυσι τῶν 7 μονάδων σὲ 5+2).
Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε καὶ μὲ ἄλλον τρόπο.

Μὲ ὅποιον τρόπο θέλετε, νὰ ἐκτελέσετε τὶς προσθέσεις:
178+35= 382+264= 537+398= 729+193=
806+95=

Ἀφαίρεσι διψηφίων καὶ τριψηφίων ἀπὸ τριψηφίους.

Πόσα μένουν 520–273 ;

Ἀπάντησι. 520–200=320· πλὴν 20 300· πλὴν 50 250 (μὲ ἀνάλυσι τοῦ 70 σὲ 20+50)· πλὴν 3 247.
Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε καὶ μὲ ἄλλον τρόπο.

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις ἀπὸ μνήμης:
356–145= 519–374= 795–406= 906–307= 815–89=
803–504=

7. Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρῶτα ἀπὸ μνήμης κατὰ προσέγγισι κι ἔπειτα γραπτῶς, γιὰ νὰ βρῆτε ἀκριβῶς τὸ ἀποτέλεσμα.

α) Ἀσκήσεις

177 + 52 + 98	84 – 29
325 + 246 + 407	700 – 93
603 + 166 + 51	512 – 158
455 + 98 + 254	947 – 675
509 + 187 + 62	819 – 346
5 × 89	92 : 3
19 × 43	756 : 5
3 × (97 + 206)	824 : 4
4 × (509 – 378)	(573 – 152) : 7
(6 × 163) – (7 × 115)	(368 + 407) : 8

β) Προβλήματα

1. Πόσα μέτρα γίνονται 385 + 152 + 127 ;
2. Ἀγοράσαμε εἴδη ἀξίας 571 δραχμῶν. Τί ὑπόλοιπο θὰ πάρωμε ἀπὸ ἕνα χιλιάρικο ;
3. Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο 185 δραχμὲς καὶ ξοδεύει τὴν ἡμέρα κατὰ μέσον ὅρο 117. Πόσες δραχμὲς θὰ ἐξοικονομήσῃ σὲ 6 μέρες ;

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις ἀπὸ μνήμης μὲ ὅποιον τρόπο θέλετε.

170+230+285+115	1.007+315+183+205
147+375+ 83+225	461+759+540+180
508+694+ 76+102	376+183+641+203
954+249+120+397	523+367+110+412

Τὶς παραπάνω ἀσκήσεις νὰ τὶς λύσετε καὶ γραπτῶς.

6. Ἀπὸ μνήμης μὲ τεχνάσματα. Ἔπειτα καὶ γραπτῶς.

α)	745 — 150	1.910 — 1.043	1.851 — 874
	1.408 — 639	1.705 — 987	1.592 — 1.107
	1.613 — 785	2.000 — 414	
	1.004 — 636	2.000 — 1.381	
β)	356 + 518 + 709 — 409	1.600 — 400 — 150 — 45	
	295 + 163 + 644 — 807	1.908 — 619 — 470 — 308	
	1.005 + 134 + 79 — 605	1.742 — 330 — 412 — 526	
	1.896 + 104 + 0 — 996	1.480 — 649 — 351 — 80	

7. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς

Παράδειγμα 1. 2 × 8 × 35 = ; Λύσι ἀπὸ μνήμης (μὲ ἀντιμετάθεσι καὶ προσεταιρισμό). 2 × 8 × 35 = 2 × 35 × 8 = 70 × 8 = 560

62 × 5 × 2 × 3	4 × 20 × 3 × 5	40 × 3 × 1 × 14
25 × 8 × 2 × 4	7 × 15 × 9 × 2	65 × 4 × 7
3 × 15 × 11 × 4	6 × 30 × 10	27 × 5 × 11

Παράδειγμα 2. 75 × 24 = ; Λύσι ἀπὸ μνήμης μὲ ἀντικατάστασι ἑνὸς παράγοντα μὲ ἄλλους ποὺ ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενο: 75 × 24 = 75 × 4 × 6 = 300 × 6 = 1.800

5. Ἀπὸ μνήμης

α)	1.400 : 40	1.780 : 10	1.320 : 5
	1.920 : 80	1.638 : 10	1.045 : 5
	1.560 : 30	1.900 : 100	1.800 : 50
	1.845 : 20	1.652 : 100	1.675 : 50

8. Νὰ βρῆτε ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα:

360 : 3	(2.000 — 660) : 4	(1.250 + 350) : 5
480 : 4	(1.850 — 350) : 6	(1.100 + 720) : 14
930 : 2	(1.900 — 570) : 7	(800 + 960) : 16
1.000 : 8	(1.580 — 680) : 9	(480 + 1.200) : 12

Παράρτημα 4

(1973, Σαμαράς, Δ' τάξη)

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 102 + 98 β) 105 + 95 γ) 115 + 200 δ) 200 + 315 ε) 140 + 60 στ) 145 + 155 ζ) 395 + 405 η) 310 + 690 θ) (6+5) + 19 ι) 3 + (4 + 23)

2. Γραπτῶς

α)	β)	γ)	δ)	ε)
216	304	617	713	310
365	493	708	298	301
+ 673	+ 177	+ 19	+ 319	+ 609

στ)	ζ)	η)	θ)	ι)
362	872	1.001	904	1.200
810	598	608	33	199
608	289	110	890	86
+ 220	+ 176	+ 69	+ 103	+ 7

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 100 — 30 β) 258 — 18 γ) 1.000 — 300 δ) 1.000 — 700 ε) 100 — 51 στ) 200 — 101 ζ) 400 — 201 η) 2.000 — 1.100 θ) 1.900 — 800 ι) 1.999 — 909

2. Γραπτῶς

1. Νὰ κάμετε τὶς ἀφαιρέσεις :

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
473	633	821	1.201	1.300	1.804
— 385	— 376	— 596	— 340	— 842	— 1.087
;	;	;	;	;	;

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 15 : 3 β) 25 : 5 γ) 36 : 6 δ) 45 : 9 ε) 80 : 8 στ) 99 : 9 ζ) 100 : 10 η) 90 : 15 θ) 100 : 20 ι) 150: 50 ια) 1.000 : 100 ιβ) 2.000 : 200

2. Γραπτῶς

α) 150 : 3 β) 225 : 9 γ) 378 : 6 δ) 770 : 7 ε) 864:8 στ) 936 : 9 ζ) 1.008 : 36 η) 1.350 : 25 θ) 1.540 : 44 ι) 1.638 : 63 ια) 1.610 : 35 ιβ) 1.863 : 69 ιγ) 1.500: 125 ιδ) 1.375 : 125 ιε) 1.632 : 136 ιστ) 1.450 : 145 ιζ) 1.692 : 188 ιη) 2.000 : 250

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 3 × 10 β) 10 × 3 γ) 10 × 30 δ) 30 × 10 ε) 11 × 30 στ) 5 × 2 × 4 ζ) 5 × 1 × 0 η) 10 × (5 + 4) θ) 5 × (8 + 6) ι) 6 × (10 + 5) ια) 0 × 10 ιβ) 5 × (0 + 1) ιγ) 0 × (9 + 6) ιδ) 3 × 5 × 0 ιε) 2 × 10 × 15

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 81 : 9 β) 105 : 5 γ) 210 : 2 δ) 250 : 5 ε) 500:10 στ) 600 : 6 ζ) 230 : 10 η) 1.000 : 50 θ) 1.500 : 15 ι) 1.800 : 180 ια) 2.000 : 100 ιβ) 2.000 : 500

2. Γραπτῶς

α) 1.955: 25 β) 1.711 : 50 γ) 1.650 : 75 δ) 1.859 : 11 ε) 1.980 : 99 στ) 1.875 : 75 ζ) 2.000 : 65 η) 1.908 : 81 θ) 1.050 : 25 ι) 1.625 : 45 ια) 1.020 : 34 ιβ) 2.000 : 125 ιγ) 1.800 : 150 ιδ) 1.238 : 119 ιε) 1.632 : 408 ιστ) 1.835 : 145 ιζ) 2.000 : 154 ιη) 1.909 : 173

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 250 + 800 β) 2.000 + 1.500 γ) 2.200 + 3.000 + 2.800 δ) 8.100 + 7.900 ε) 4 + 6 + (7+3+6) + 20 στ) 7 + 8 + (9 + 11) + (3+2) + 12 + (6+2)

2. Γραπτῶς

α)	β)	γ)	δ)	ε)
2.619	5.061	21.302	40.408	63.018
3.080	6.985	39.898	8.795	9.172
+ 296	+ 839	+ 38.800	+ 637	+ 62

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 2.100 −600 β) 3.400 −900 γ) 12.050 −1.000 δ) 20.000 −10.001 ε) 1.953 −1.000 στ) 21.000 −6.000 ζ) 22.350 −2.000 η) 25.500 −10.500

2. Γραπτῶς

Μιὰ δύσκολη ἀφαίρεσι γίνεται εὔκολη, ἂν προσθέσωμε στὸν μειωτέο καὶ ἀφαιρετέο της ἢ ἀφαιρέσωμε τὸν ἴδιο, ἀλλὰ κατάλληλο ἀριθμό· π.χ. 371 −85 = (371 +15) − (85 +15) = 386 −100 = 286, 2.500 −1.147 = (2.500 −147) − (1.147 −147) = 2.353 −1.000 = 1.353

Ὕστερα ἀπὸ τὴν παρατήρησι αὐτὴ προσπαθῆστε καὶ σεῖς νὰ κάμετε εὐκολώτερες τὶς ἀφαιρέσεις ποὺ ἀκολουθοῦν :

1. α) 2.861 −1.885 β) 3.325 −2.916 γ) 5.667 −4.638 δ) 7.068 −3.479.

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 7×10 β) 37×10 γ) 41×100 δ) 58×1.000 ε) 126×10 στ) 321×100 ζ) 823×1.000 η) 30×10×20 θ) 10×(7+9) ι) 10× (9+11) ια) 55× (10+10) ιβ) 25× (4+6) ιγ) (15×6) × 10 ιδ) (20+10) ×100 ιε) (0×15) ×6 ιστ) 20 ×3 × 0 × 4 ιζ) 100×(1+0) ιη) 1.000× (1×0×4) ιθ) 1×2×3×4×5 κ) 10× (3×5×100) κα) 30×(1×2×3×0)

2. Γραπτῶς

α) 4.200	β) 5.600	γ) 6.720	δ) 35	ε) 75
× 30	× 50	× 60	× 250	× 200
στ) 636	ζ) 428	η) 272	θ) 305	ι) 403
× 38	× 45	× 126	× 208	× 105

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 5.000 : 10 β) 5.000 : 100 γ) 5.000 : 1.000 δ) 6.000 : 10 ε) 6.000 : 50 στ) 6.000 : 60 ζ) 7.000 : 10 η) 7.000 : 70 θ) 7.000 : 100 ι) 7.000 : 1.000

2. Γραπτῶς

α) 2.250 : 25 β) 4.500 : 125 γ) 3.150 : 105 δ) 6.300 : 210 ε) 18.018 : 302 στ) 80.029 : 243 ζ) 91.315 : 315 η) 100.709: 503 θ) 208.008 : 104 ι) 202.020 : 101 ια) 30.625 : 175 ιβ) 82.008 : 402 ιγ) 163.827 : 327 ιδ) 10.600 : 1325 ιε) 9.180: 1.020 ιστ) 38.529 : 4.281 ιζ) 40.821 : 3.711 ιη) 45.317 : 5.015 ιθ) 60.180 : 5.015 κ) 70.409 : 7.040

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 1,2 + 1,8 β) 1,3 + 1,7 γ) 0,7 + 0,3 δ) 0,35 + 0,15 ε) 4,6 + 0,4 στ) 10,9 + 0,05 ζ) 15,08 + 10,2 η) 20 + 0,002 θ) 35,005 + 5.

2. Γραπτῶς

1. α) 1,02	β) 13,8	γ) 14,03	δ) 25	ε) 100
2,41	0,003	2,2	3,014	0,25
+ 0,325	+ 17,1	+ 0,001	+ 6,001	+ 425,157

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

α) 1,2 − 0,2 β) 1,5 − 0,6 γ) 10 − 1,2 δ) 20 − 1,5 ε) 100 − 10,5 στ) 1 − 0,9 ζ) 2 − 0,50 η) 5 − 4,1 θ) 6 − 5,9 ι) 7,01 − 0,02

2. Γραπτῶς

α) 131,105	β) 1,782	γ) 67,08	δ) 14,8	ε) 13
− 48,009	− 0,895	− 9,396	− 5,936	− 0,189

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ μνήμης

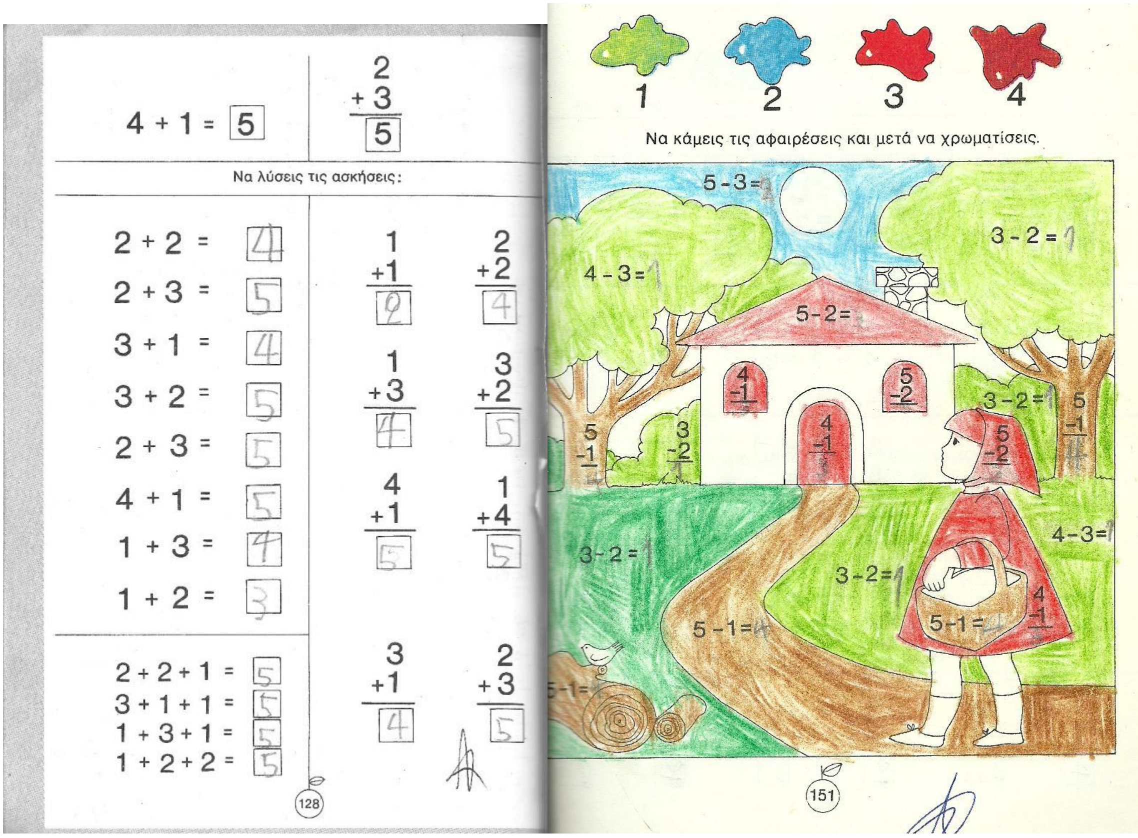
α) 2,5 × 4 β) 3,2 × 3 γ) 4,3 × 3 δ) 5,8 × 5 ε) 6,1 × 5 στ) 10,6 × 3

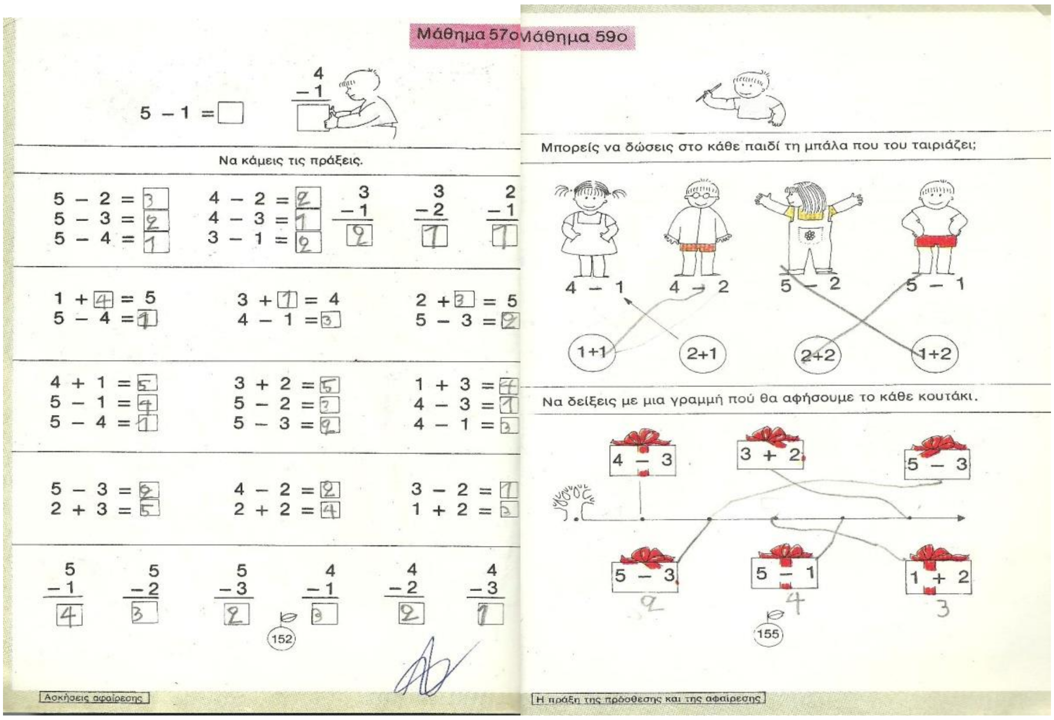
2. Γραπτῶς

α) 3,265	β) 4,008	γ) 618	δ) 1084
× 12	× 126	× 0,95	× 0,003

Παράρτημα 5

(Α’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)





Να βάλεις σε κύκλο τις πράξεις, που δίνουν αποτέλεσμα τον αριθμό που είναι αποπάνω.

6	7	8	9	10
5 + 1	9 − 2	7 + 1	3 + 6	9 + 1
4 + 2	6 + 2	4 + 3	5 + 4	5 + 5
9 − 3	9 − 2	9 − 1	7 + 2	8 + 2
3 + 3	4 + 3	4 + 4	10 − 2	6 + 4
2 + 4	10 − 3	5 + 4	6 + 3	3 + 6
10 − 3	5 + 2	6 + 2	7 + 3	3 + 7

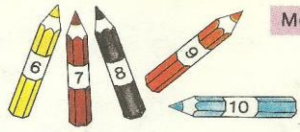
Να ενώσεις με μια γραμμή την κάθε πράξη με το αποτέλεσμά της.

10 − 3	8
4 + 4	7
9 − 4	5

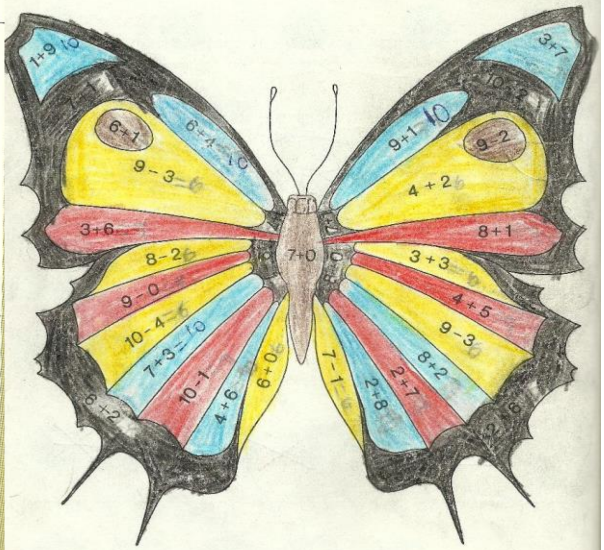
3 + 7	7
9 − 2	9
4 + 5	10

9 − 0	6
5 + 0	5
8 − 2	9

Μάθημα 88ο



Να κάμεις τις πράξεις και μετά να χρωματίσεις.



+2	
6	8
8	10

−1	
7	6
9	8

Να συμπληρώσεις τους πίνακες.

+2	
5	
6	
7	
4	
8	

+3	
5	
6	
7	
4	
3	

+4	
5	
6	
4	
3	
2	

−2	
7	
8	
10	
9	
6	

−3	
10	
7	
9	
8	
6	

−4	
6	
10	
8	
9	
7	

+0	
7	
9	
6	
8	

−5	
7	
9	
6	
8	

+6	
2	
4	
0	
3	

5 + 2 = ☐

15 + 2 = ☐

7 − 2 = ☐

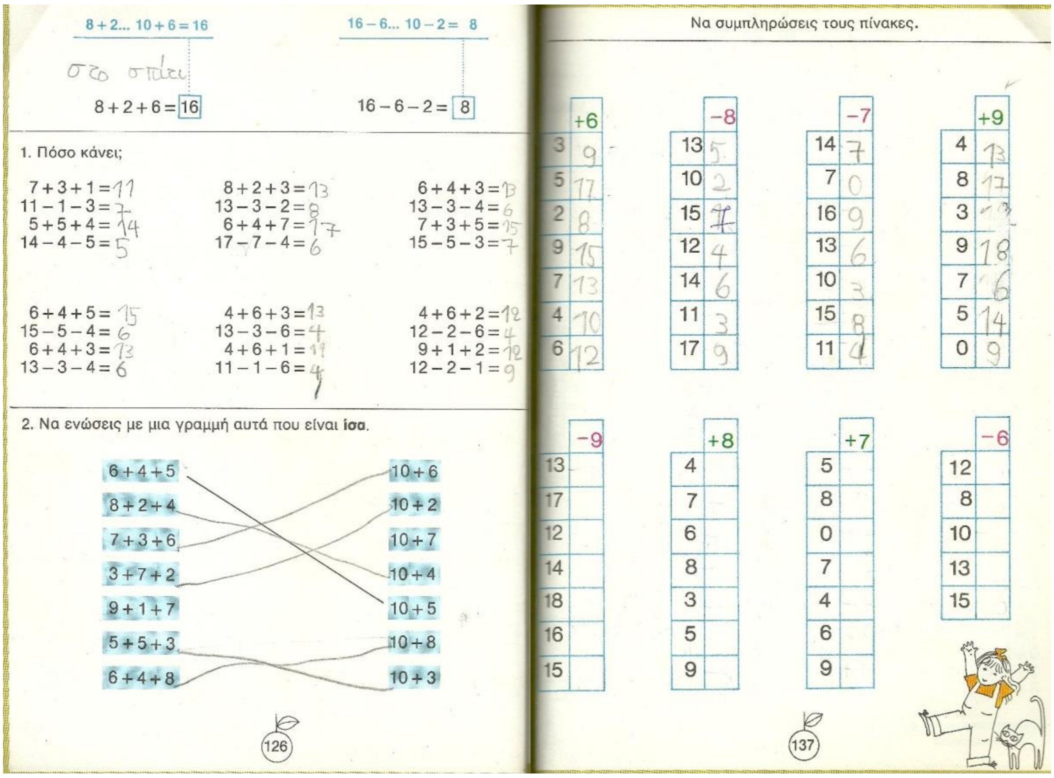
17 − 2 = ☐

1.Να βάλεις σε κάθε τετραγωνάκι τον αριθμό που λείπει.

5 + 1 = ☐	5 − 1 = ☐	7 + 1 = ☐	7 − 1 = ☐
15 + 1 = ☐	15 − 1 = ☐	17 + 1 = ☐	17 − 1 = ☐
5 + 2 = ☐	5 − 2 = ☐	7 + 2 = ☐	7 − 2 = ☐
15 + 2 = ☐	15 − 2 = ☐	17 + 2 = ☐	17 − 2 = ☐
2 + 3 = ☐	5 − 3 = ☐	5 + 4 = ☐	9 − 4 = ☐
12 + 3 = ☐	15 − 3 = ☐	15 + 4 = ☐	19 − 4 = ☐
2 + 4 = ☐	6 − 4 = ☐	5 + 5 = ☐	10 − 5 = ☐
12 + 4 = ☐	16 − 4 = ☐	15 + 5 = ☐	20 − 5 = ☐
6 + ☐ = 8	4 + ☐ = 8	7 − ☐ = 5	15 + 3 = ☐
16 + ☐ = 18	14 + ☐ = 18	17 − ☐ = 15	18 − 3 = ☐
6 − ☐ = 5	10 − ☐ = 9	6 − ☐ = 1	11 + 4 = ☐
16 − ☐ = 15	20 − ☐ = 19	16 − ☐ = 11	15 − 4 = ☐

2.Να ενώσεις με μια γραμμή...

17 + 2 •	• 16	13 + 3 •	• 15 − 2
15 + 3 •	• 19	17 − 4 •	• 17 + 1
18 − 2 •	• 20	16 + 2 •	• 12 + 3
16 + 4 •	• 18	16 − 1 •	• 20 − 4



8 + 2... 10 + 6 = 16

στο σπίτι

8 + 2 + 6 = 16

16 − 6... 10 − 2 = 8

16 − 6 − 2 = 8

1. Πόσο κάνει;

7 + 3 + 1 = 11
11 − 1 − 3 = 7
5 + 5 + 4 = 14
14 − 4 − 5 = 5

8 + 2 + 3 = 13
13 − 3 − 2 = 8
6 + 4 + 7 = 17
17 − 7 − 4 = 6

6 + 4 + 3 = 13
13 − 3 − 4 = 6
7 + 3 + 5 = 15
15 − 5 − 3 = 7

6 + 4 + 5 = 15
15 − 5 − 4 = 6
6 + 4 + 3 = 13
13 − 3 − 4 = 6

4 + 6 + 3 = 13
13 − 3 − 6 = 4
4 + 6 + 1 = 11
11 − 1 − 6 = 4

4 + 6 + 2 = 12
12 − 2 − 6 = 4
9 + 1 + 2 = 12
12 − 2 − 1 = 9

2. Να ενώσεις με μια γραμμή αυτά που είναι **ίσα**.

6 + 4 + 5 | 10 + 6
8 + 2 + 4 | 10 + 2
7 + 3 + 6 | 10 + 7
3 + 7 + 2 | 10 + 4
9 + 1 + 7 | 10 + 5
5 + 5 + 3 | 10 + 8
6 + 4 + 8 | 10 + 3

126

Να συμπληρώσεις τους πίνακες.

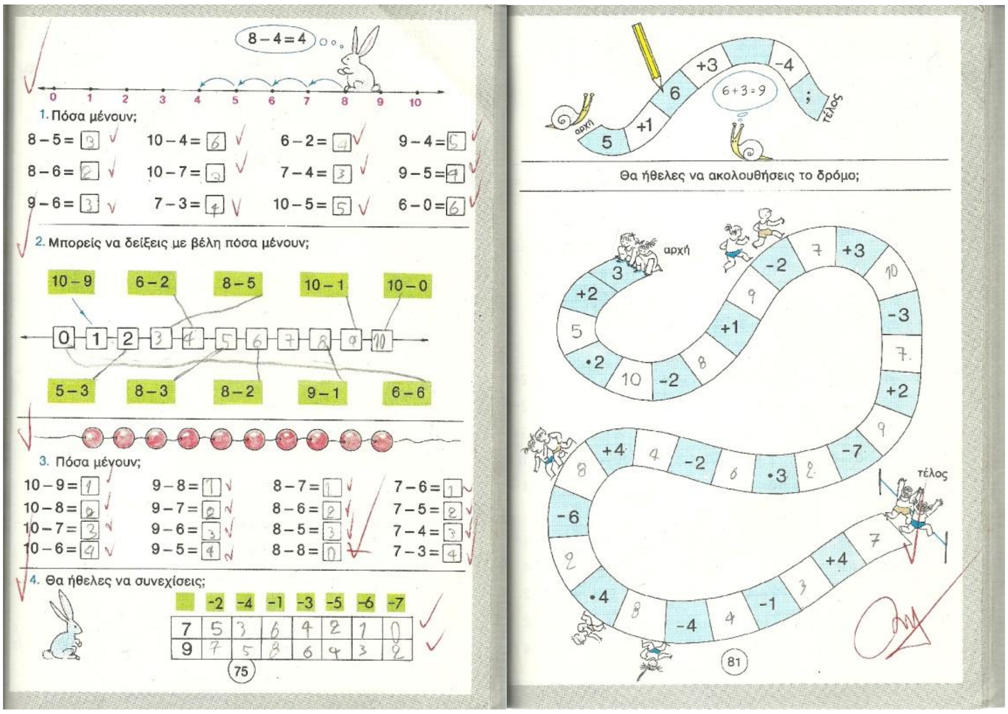
+6		−8		−7		+9	
3	9	13	5	14	7	4	13
5	11	10	2	7	0	8	17
2	8	15	7	16	9	3	12
9	15	12	4	13	6	9	18
7	13	14	6	10	3	7	16
4	10	11	3	15	8	5	14
6	12	17	9	11	4	0	9

−9		+8		+7		−6	
13		4		5		12	
17		7		8		8	
12		6		0		10	
14		8		7		13	
18		3		4		15	
16		5		6			
15		9		9			

137

Παράρτημα 6

(Β' τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)



8 − 4 = 4

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1. Πόσα μένουν;

8 − 5 = 3 | 10 − 4 = 6 | 6 − 2 = 4 | 9 − 4 = 5
8 − 6 = 2 | 10 − 7 = 3 | 7 − 4 = 3 | 9 − 5 = 4
9 − 6 = 3 | 7 − 3 = 4 | 10 − 5 = 5 | 6 − 0 = 6

2. Μπορείς να δείξεις με βέλη πόσα μένουν;

10 − 9 | 6 − 2 | 8 − 5 | 10 − 1 | 10 − 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

5 − 3 | 8 − 3 | 8 − 2 | 9 − 1 | 6 − 6

3. Πόσα μένουν;

10 − 9 = 1 | 9 − 8 = 1 | 8 − 7 = 1 | 7 − 6 = 1
10 − 8 = 2 | 9 − 7 = 2 | 8 − 6 = 2 | 7 − 5 = 2
10 − 7 = 3 | 9 − 6 = 3 | 8 − 5 = 3 | 7 − 4 = 3
10 − 6 = 4 | 9 − 5 = 4 | 8 − 8 = 0 | 7 − 3 = 4

4. Θα ήθελες να συνεχίσεις;

	−2	−4	−1	−3	−5	−6	−7
7	5	3	6	4	2	1	0
9	7	5	8	6	4	3	2

75

6 + 3 = 9

αρχή 5 +1 6 +3 −4 ; τέλος

Θα ήθελες να ακολουθήσεις το δρόμο;

αρχή 3 +2 5 •2 10 −2 8 +1 9 −2 7 +3 10 −3 7 +2 9 −7 2 •3 6 −2 4 +4 8 −6 2 •4 8 −4 4 −1 3 +4 7 τέλος

81

1. Να ενώσεις με μια γραμμή τις αφαιρέσεις που δίνουν **ίδιο** αποτέλεσμα.

1	11 − 3 8	10 − 3
2	12 − 5 7	10 − 1
3	13 − 7	10 − 2 8
4	14 − 5	10 − 3
5	15 − 7	10 − 4
6	16 − 9	10 − 1
7	17 − 8	10 − 2
8	18 − 9	10 − 1

2. Πόσο κάνει;

1	11 − 4	= 10 − 3 = 7
2	13 − 5	= 10 − 2 = 8
3	16 − 7	= 10 − 1 = 9
4	15 − 8	= 10 − 3 = 7
5	14 − 6	= 10 − 2 = 8
6	14 − 9	= 10 − 5 = 5
7	12 − 7	= 10 − 5 = 5
8	13 − 8	= 10 − 5 = 5
9	17 − 8	= 10 − 1 = 9
10	14 − 9	= 10 − 5 = 5
11	11 − 6	= 10 − 5 = 5
12	12 − 7	= 10 − 5 = 5
13	14 − 8	= 10 − 6 = 4
14	13 − 9	= 10 − 4 = 4
15	15 − 7	= 10 − 2 = 8
16	16 − 9	= 10 − 3 = 7
17	14 − 8	= 10 − 4 = 6
18	14 − 6	= 10 − 2 = 8
19	13 − 4	= 10 − 1 = 9
20	17 − 9	= 10 − 2 = 8

101

1. Να ενώσεις με μια γραμμή τις προσθέσεις που δίνουν **ίδιο** αποτέλεσμα.

1	8 + 4	10 + 4
2	9 + 5	10 + 1
3	8 + 9	10 + 5
4	6 + 5	10 + 6
5	9 + 7	10 + 2
6	7 + 6	10 + 7
7	9 + 6	10 + 3

2. **Πόσο κάνει;**

1	9 + 2	= 10 + 1 = 11
2	8 + 4	= 10 + 2 = 12
3	6 + 9	= 10 + 5 = 15
4	5 + 8	= 10 + 3 = 13
5	7 + 6	= 10 + 3 = 13
6	4 + 7	= 10 + 1 = 11
7	3 + 8	= 10 + 1 = 11
8	9 + 7	= 10 + 6 = 16
9	8 + 9	= 10 + 7 = 17
10	6 + 6	= 10 + 2 = 12
11	8 + 6	= 10 + 4 = 14
12	7 + 5	= 10 + 2 = 12
13	9 + 4	= 10 + 3 = 13
14	7 + 8	= 10 + 5 = 15
15	8 + 9	= 10 + 7 = 17
16	9 + 7	= 10 + 6 = 16
17	8 + 8	= 10 + 6 = 16
18	8 + 5	= 10 + 3 = 13
19	7 + 7	= 10 + 4 = 14
20	9 + 5	= 10 + 4 = 14

99

3. Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

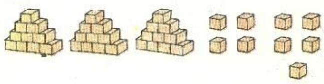
4. Να γράψεις στο τετραγωνάκι **πόσες φορές** πήρες το 8, για να φτιάξεις:

- το 16 2
- το 24 3
- το 32 4
- το 40 5
- το 48 6
- το 56 7
- το 64 8
- το 72 9
- το 80 10

5. Πόσο κάνει:

(2 · 8) + 4 = 20
(3 · 8) + 6 = 30
(4 · 8) + 8 = 40
(6 · 8) + 2 = 50
(7 · 8) + 4 = 60
(3 · 8) − 4 = 20
(4 · 8) − 2 = 30
(5 · 8) − 0 = 40
(7 · 8) − 6 = 50
(8 · 8) − 4 = 60

125



39 − 5 = 34

Πόσο κάνει;

37 − 4 = 3.3	66 − 3 = 6..
29 − 3 = 2..3	86 − 4 = 8.2
85 − 4 = 8.1	27 − 5 = 2.2
46 − 3 = 4.1	89 − 6 = 8.1

22

Αφαίρεση μονοψήφιου από διψήφιο χωρίς κρατούμενο

1. Να ενώσεις τα ίσα αθροίσματα.

3 + 9	8 + 7	60
7 + 8	1 + 59	70
67 + 3	9 + 3	15
59 + 1	2 + 98	80
2 + 78	3 + 67	12
98 + 2	78 + 2	100

2. Μπορείς να βάλεις σε κάθε τετραγωνάκι τον αριθμό που λείπει;

19 + 1 = 1 + $\boxed{19}$ 88 + $\boxed{2}$ = 2 + $\boxed{88}$

27 + 3 = $\boxed{3}$ + 27 $\boxed{1}$ + 49 = $\boxed{49}$ + 1

37 + 3 = 3 + 37

3 + 7 = $\boxed{10}$ 7 + 3 = $\boxed{10}$

•Και οι δύο βρήκαν το ίδιο αποτέλεσμα. Γιατί;...
•Ποιο παιδί λογάριασε με τον πιο εύκολο τρόπο;...

3. Να λογαριάσεις με τον πιο εύκολο τρόπο.

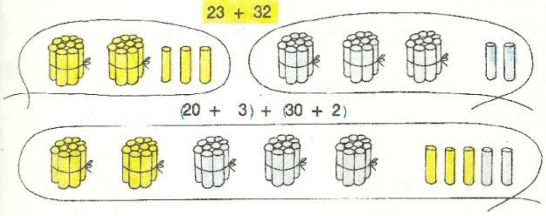
2 + 8 = $\boxed{10}$ 45 + 5 = $\boxed{50}$ 98 + 2 = $\boxed{100}$

5 + 25 = $\boxed{30}$ 16 + 4 = $\boxed{20}$ 3 + 37 = $\boxed{40}$

1 + 39 = $\boxed{40}$ 79 + 1 = $\boxed{80}$ 5 + 45 = $\boxed{50}$

Μάθημα 63ο

23 + 32



(20 + 3) + (30 + 2)

20 + 30 ... 50
3 + 2 ... 5 ... 55

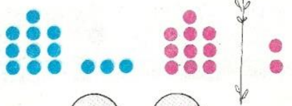
Να λογαριάσεις με το νου σου με τον ίδιο τρόπο.

23 + 41 = 64 36 + 33 = 69

32 + 16 = 48 46 + 12 = 58

24 + 35 = 59 53 + 24 = 77

13 + 12



13 + 10 ... 23 + 2 = 25

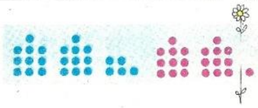
+10 +2
13 → 23 → 25

13 + 12 = $\boxed{25}$

Μάθημα 64ο

Να λογαριάσεις με το νου σου με τον ίδιο τρόπο.

25 + 21



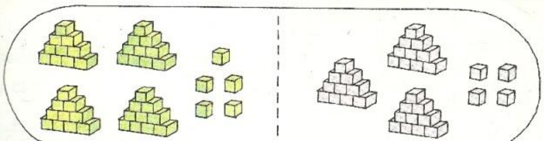
+20 +1
25 → 45 → $\boxed{46}$

25 + 21 = 46 65 + 23 = 88

26 + 12 = 38 46 + 32 = 78

34 + 32 = 66 55 + 24 = 79

42 + 36 = 78 37 + 12 = 49



Ο Κώστας λογάριασε

έτσι: 45 + 34 και αλλιώς:

40 + 30 ... 70
5 + 4 ... 9 ... 79

45 + 30 ... 75 + 4 ... 79

Να λογαριάσεις με το νου σου με όποιο τρόπο θέλεις.

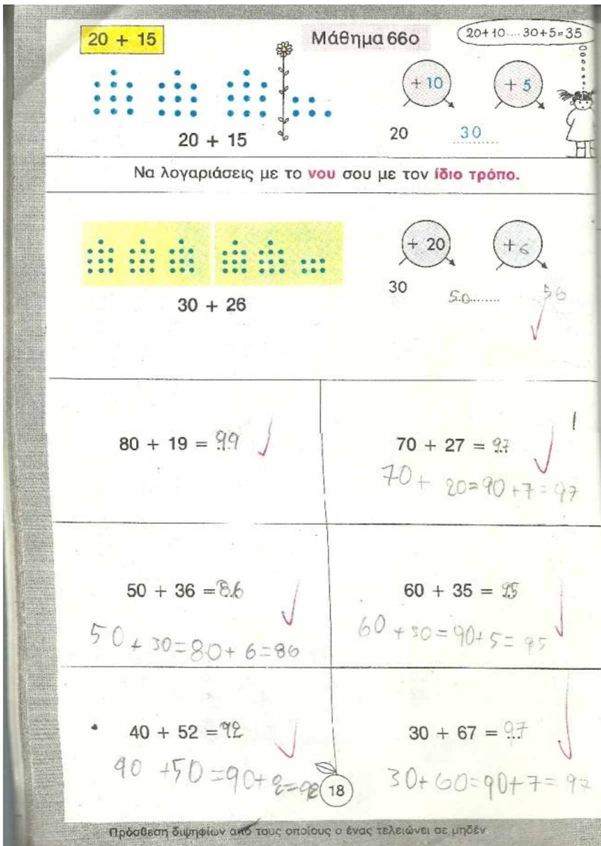
36 + 22 = 58 64 + 33 = 97

24 + 52 = 76 31 + 27 = 58

72 + 27 = 99 81 + 17 = 98

64 + 18 = 82 56 + 23 = 79

Πρόσεχε



20 + 15

Μάθημα 66ο

20+10....30+5=35

+10 +5

20 + 15

20 30

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**.

+20 +6

30 + 26

30 50 56

80 + 19 = 99

70 + 27 = 97
70 + 20=90+7=97

50 + 36 = 86
50 + 30=80+ 6=86

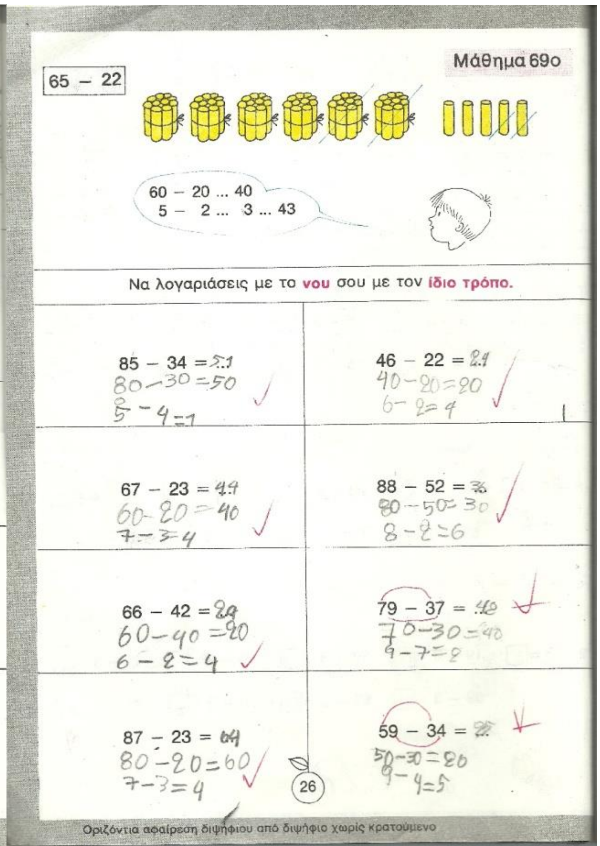
60 + 35 = 95
60 + 30 = 90+5 = 95

40 + 52 = 92
40 + 50 = 90+ 2=92

30 + 67 = 97
30+ 60=90+7= 97

18

Πρόσθεση διψηφίων από τους οποίους ο ένας τελειώνει σε μηδέν



65 – 22

Μάθημα 69ο

60 – 20 ... 40
5 – 2 ... 3 ... 43

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**.

85 – 34 = 51
80–30=50
5 – 4=1

46 – 22 = 24
40–20=20
6– 2= 4

67 – 23 = 44
60- 20 = 40
7 – 3 = 4

88 – 52 = 36
80 – 50= 30
8 – 2 =6

66 – 42 = 24
60–40 =20
6 – 2 = 4

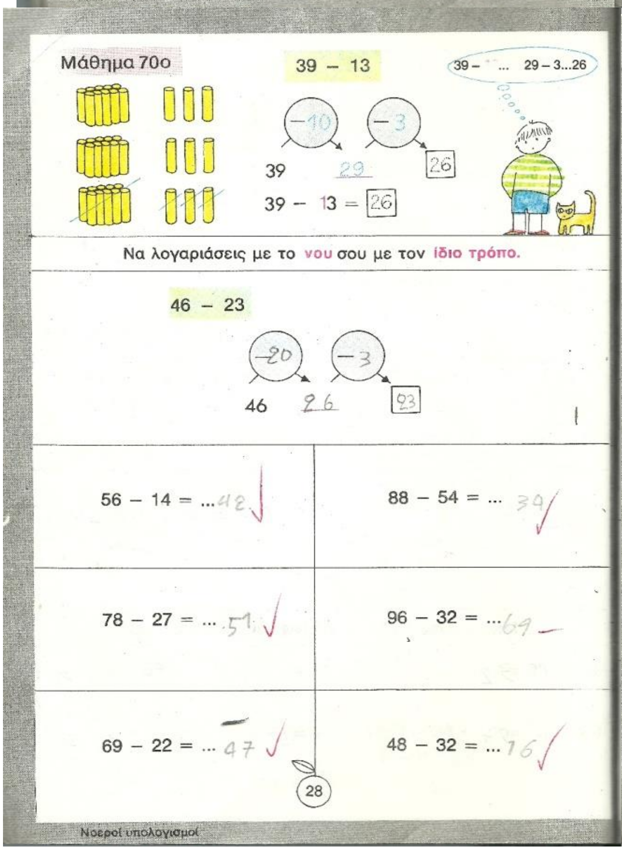
79 – 37 = 42
70–30=40
9–7=2

87 – 23 = 64
80 –20=60
7–3=4

59 – 34 = 25
50–30=20
9– 4=5

26

Οριζόντια αφαίρεση διψήφιου από διψήφιο χωρίς κρατούμενο



Μάθημα 70ο

39 – 13

39 – ... 29 – 3...26

–10 –3

39 29 26

39 – 13 = 26

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**.

46 – 23

–20 –3

46 26 23

56 – 14 = ... 42

88 – 54 = ... 34

78 – 27 = ... 51

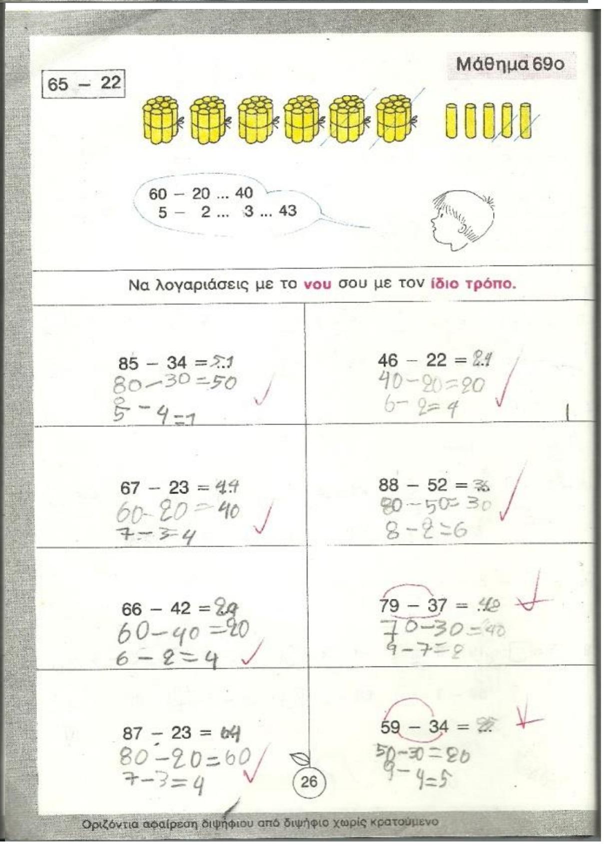
96 – 32 = ... 64

69 – 22 = ... 47

48 – 32 = ... 16

28

Νοεροί υπολογισμοί



65 – 22

Μάθημα 69ο

60 – 20 ... 40
5 – 2 ... 3 ... 43

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**.

85 – 34 = 51
80–30=50
5 – 4=1

46 – 22 = 24
40–20=20
6– 2= 4

67 – 23 = 44
60- 20 = 40
7 – 3 = 4

88 – 52 = 36
80 – 50= 30
8 – 2 =6

66 – 42 = 24
60–40 =20
6 – 2 = 4

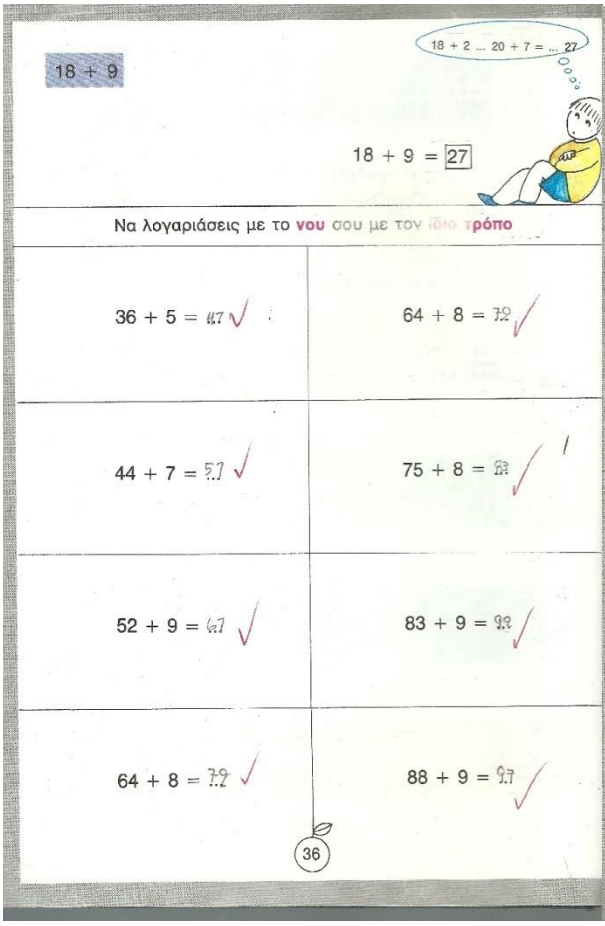
79 – 37 = 42
70–30=40
9–7=2

87 – 23 = 64
80 –20=60
7–3=4

59 – 34 = 25
50–30=20
9– 4=5

26

Οριζόντια αφαίρεση διψήφιου από διψήφιο χωρίς κρατούμενο


18 + 9

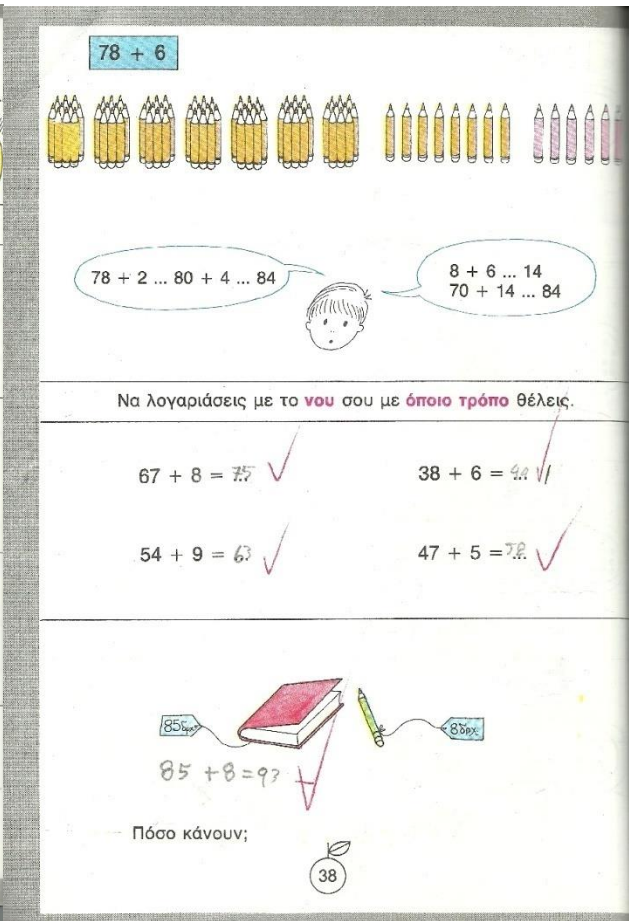
18 + 2 ... 20 + 7 = ... 27

18 + 9 = $\boxed{27}$

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**

36 + 5 = 41	64 + 8 = 72
44 + 7 = 51	75 + 8 = 83
52 + 9 = 61	83 + 9 = 92
64 + 8 = 72	88 + 9 = 97

36


78 + 6

78 + 2 ... 80 + 4 ... 84

8 + 6 ... 14
70 + 14 ... 84

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με **όποιο τρόπο** θέλεις.

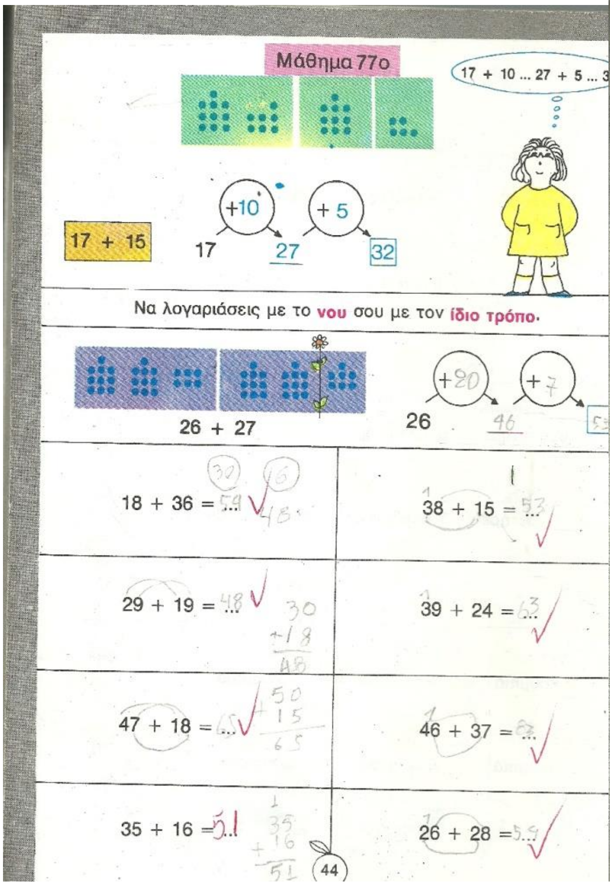
67 + 8 = 75	38 + 6 = 44
54 + 9 = 63	47 + 5 = 52

85δρχ. 8δρχ.

85 + 8 = 93

Πόσο κάνουν;

38


Μάθημα 77ο

17 + 10 ... 27 + 5 ... 3

17 + 15

+10 +5
17 27 32

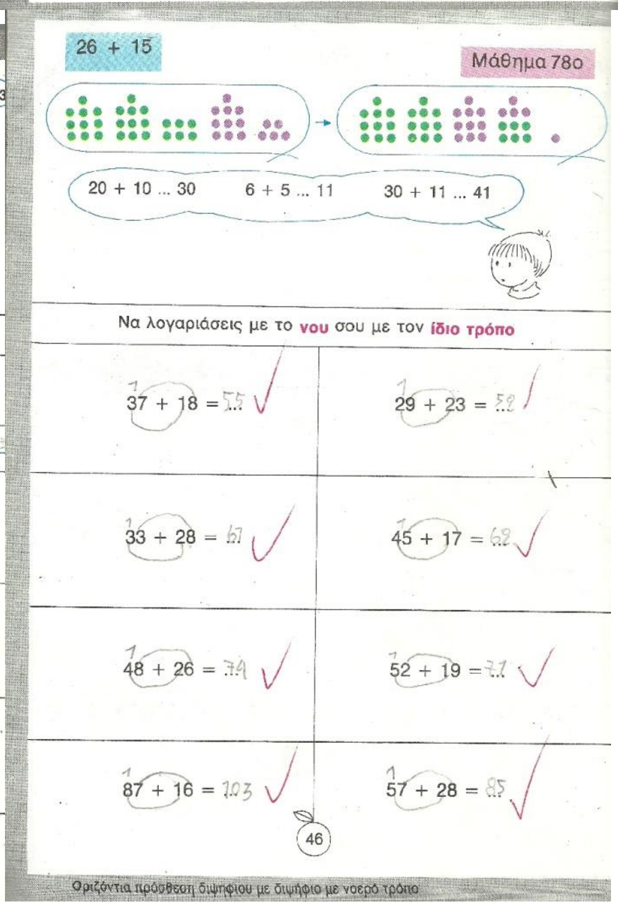
Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**.

26 + 27

+20 +7
26 46 5

18 + 36 = 54	38 + 15 = 53
29 + 19 = 48 (30 + 18 = 48)	39 + 24 = 63
47 + 18 = 65 (50 + 15 = 65)	46 + 37 = 83
35 + 16 = 51 (35 + 16 = 51)	26 + 28 = 54

44


26 + 15

Μάθημα 78ο

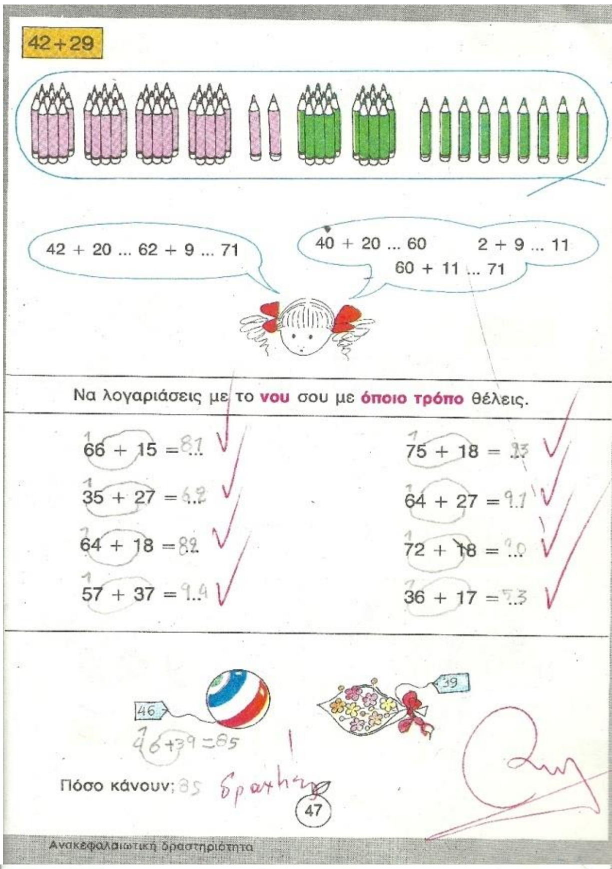
20 + 10 ... 30
6 + 5 ... 11
30 + 11 ... 41

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο**

37 + 18 = 55	29 + 23 = 52
33 + 28 = 61	45 + 17 = 62
48 + 26 = 74	52 + 19 = 71
87 + 16 = 103	57 + 28 = 85

46

Οριζόντια πρόσθεση διψήφιου με διψήφιο με νοερό τρόπο



42+29

42 + 20 ... 62 + 9 ... 71

40 + 20 ... 60   2 + 9 ... 11
60 + 11 ... 71

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με **όποιο τρόπο** θέλεις.

66 + 15 = 81	75 + 18 = 93
35 + 27 = 62	64 + 27 = 91
64 + 18 = 82	72 + 18 = 90
57 + 37 = 94	36 + 17 = 53

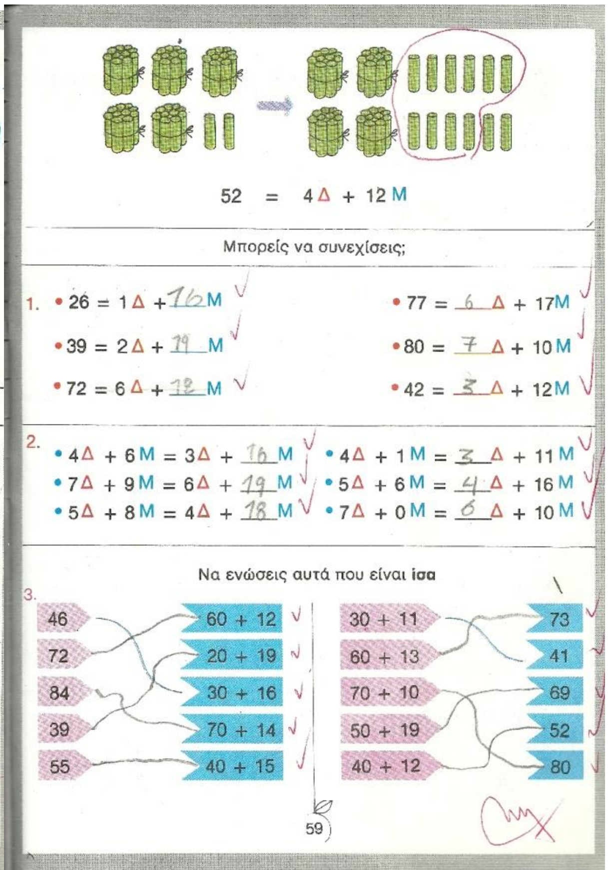
46   39

46+39=85

Πόσο κάνουν; 85 δραχμές

47

Ανακεφαλαιωτική δραστηριότητα



52 = 4Δ + 12M

Μπορείς να συνεχίσεις;

1.
- 26 = 1Δ + 16 M
- 39 = 2Δ + 19 M
- 72 = 6Δ + 12 M
- 77 = 6 Δ + 17M
- 80 = 7 Δ + 10M
- 42 = 3 Δ + 12M

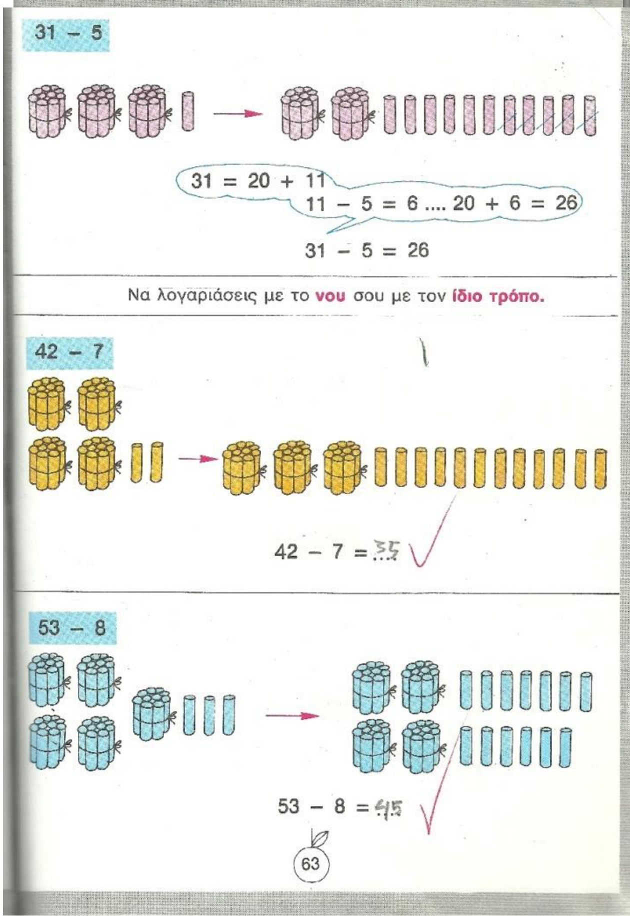
2.
- 4Δ + 6M = 3Δ + 16 M
- 7Δ + 9M = 6Δ + 19 M
- 5Δ + 8M = 4Δ + 18 M
- 4Δ + 1M = 3 Δ + 11M
- 5Δ + 6M = 4 Δ + 16M
- 7Δ + 0M = 6 Δ + 10M

Να ενώσεις αυτά που είναι **ίσα**

3.

46	60 + 12	30 + 11	73
72	20 + 19	60 + 13	41
84	30 + 16	70 + 10	69
39	70 + 14	50 + 19	52
55	40 + 15	40 + 12	80

59



31 − 5

31 = 20 + 11
11 − 5 = 6 .... 20 + 6 = 26

31 − 5 = 26

Να λογαριάσεις με το **νου** σου με τον **ίδιο τρόπο.**

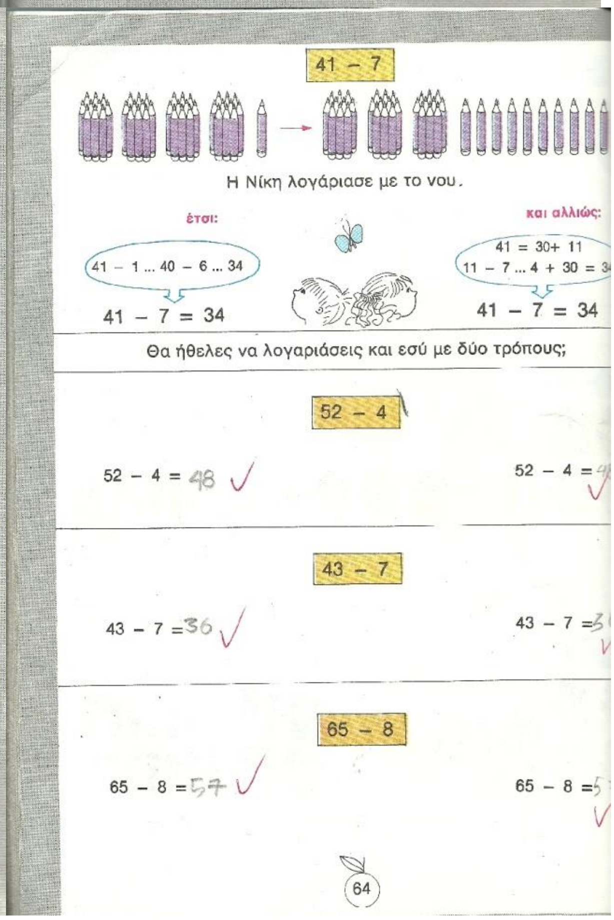
42 − 7

42 − 7 = 35

53 − 8

53 − 8 = 45

63



41 − 7

Η Νίκη λογάριασε με το νου.

έτσι:

41 − 1 ... 40 − 6 ... 34

41 − 7 = 34

και αλλιώς:

41 = 30+ 11
11 − 7 ... 4 + 30 = 34

41 − 7 = 34

Θα ήθελες να λογαριάσεις και εσύ με δύο τρόπους;

52 − 4

52 − 4 = 48   52 − 4 = 48

43 − 7

43 − 7 = 36   43 − 7 = 36

65 − 8

65 − 8 = 57   65 − 8 = 57

64

32 − 10 ... 22 − 5

32 − 15 =

Μπορείς να συνεχίσεις;

42 − 13 = 29

45 − 17 = 28

55 − 28 =

74 − 58 =

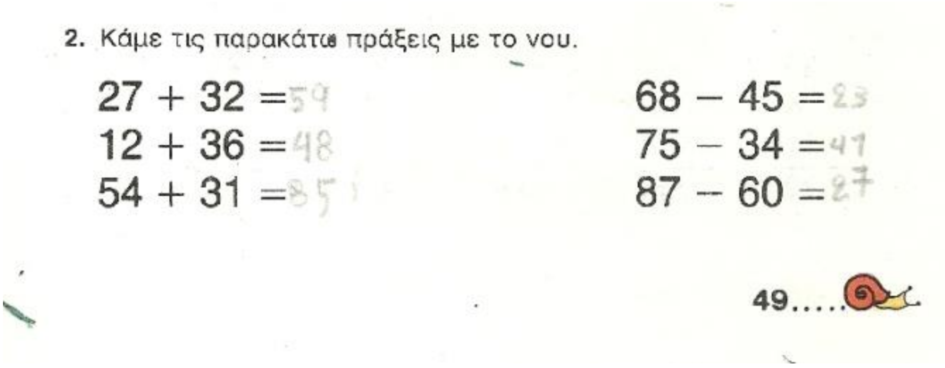
73 − 26 =

65 − 27 =

70

Παράρτημα 7

(Γ’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)

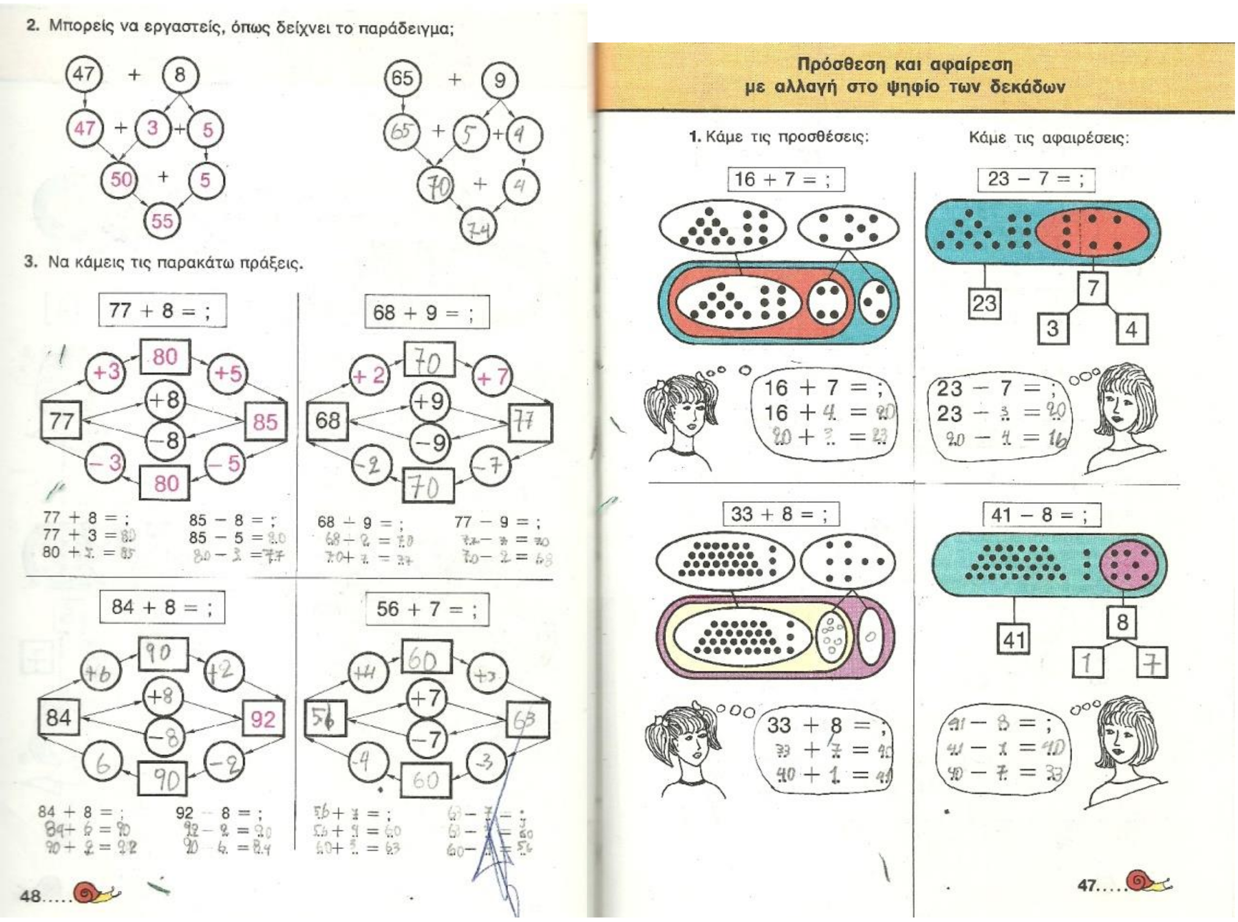


2. Κάμε τις παρακάτω πράξεις με το νου.

27 + 32 = 59
12 + 36 = 48
54 + 31 = 85

68 − 45 = 23
75 − 34 = 41
87 − 60 = 27

49.....



2. Μπορείς να εργαστείς, όπως δείχνει το παράδειγμα;

47 + 8
47 + 3 + 5
50 + 5
55

65 + 9
65 + 5 + 4
70 + 4
74

3. Να κάμεις τις παρακάτω πράξεις.

77 + 8 = ;

77 + 8 = ;
77 + 3 = 80
80 + 5 = 85

85 − 8 = ;
85 − 5 = 80
80 − 3 = 77

68 + 9 = ;

68 + 9 = ;
68 + 2 = 70
70 + 7 = 77

77 − 9 = ;
77 − 7 = 70
70 − 2 = 68

84 + 8 = ;

84 + 8 = ;
84 + 6 = 90
90 + 2 = 92

92 − 8 = ;
92 − 2 = 90
90 − 6 = 84

56 + 7 = ;

56 + 7 = ;
56 + 4 = 60
60 + 3 = 63

63 − 7 = ;
63 − 3 = 60
60 − 4 = 56

48.....

Πρόσθεση και αφαίρεση με αλλαγή στο ψηφίο των δεκάδων

1. Κάμε τις προσθέσεις:

16 + 7 = ;
16 + 4 = 20
20 + 3 = 23

33 + 8 = ;
33 + 7 = 40
40 + 1 = 41

Κάμε τις αφαιρέσεις:

23 − 7 = ;
23 − 3 = 20
20 − 4 = 16

41 − 8 = ;
41 − 1 = 40
40 − 7 = 33

47.....

στο σπίτι

4. Να κάμεις τις παρακάτω προσθέσεις.

7 + 6 = 13	9 + 3 = 12	9 + 5 = 14
8 + 4 = 12	7 + 8 = 15	7 + 4 = 11
6 + 5 = 11	9 + 7 = 16	3 + 8 = 11
7 + 5 = 12	8 + 6 = 14	2 + 9 = 11

5. Βάλε σε κάθε κουτάκι τον αριθμό που πρέπει.

7 + [8] = 15	4 + [7] = 11	[7] + 4 = 11
[8] + 6 = 14	9 + [6] = 15	[5] + 7 = 12
5 + [6] = 11	[4] + 8 = 12	9 + [4] = 13
[7] + 6 = 13	[6] + 7 = 13	3 + [9] = 12

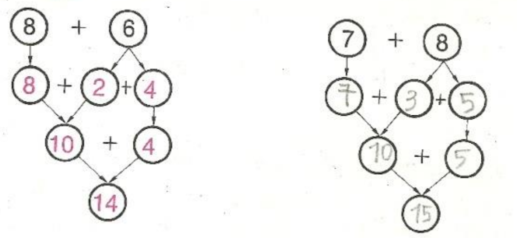
15 − [7] = 8	11 − [4] = 7	11 − [7] = 4
14 − [6] = 8	15 − [6] = 9	12 − [7] = 5
11 − [6] = 5	12 − [4] = 8	13 − [4] = 9
13 − [6] = 7	13 − [7] = 6	12 − [3] = 9

6. Μπορείς να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν;

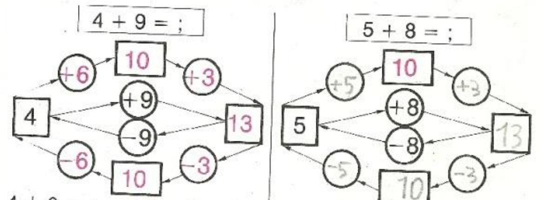
7 → +8 → 15 → −7 → 8 → +6 → 14 → −6 → 8

9 → +2 → 11 → −2 → 9 → +5 → 14 → −5 → 9

2. Μπορείς να εργαστείς, όπως δείχνει το παράδειγμα;



3. Να εργαστείς, όπως στο παράδειγμα.

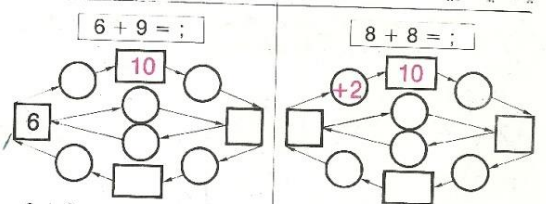


4 + 9 = ;
4 + 6 = 10
10 + 3 = 13

13 − 9 = ;
13 − 3 = 10
10 − 6 = 4

5 + 8 = ;
5 + 5 = 10
10 + 3 = 13

13 − 8 = ;
13 − 3 = 10
10 − 5 = 5



6 + 9 = ;
.. + .. = ..
.. + .. = ..

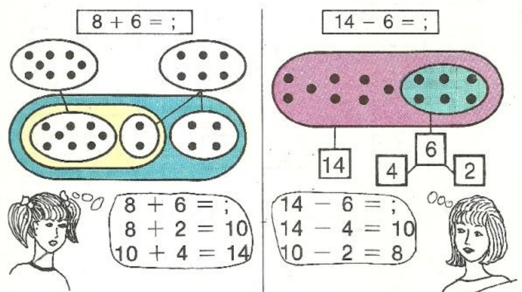
15 − 9 = ;
.. − .. = ..
.. − .. = ..

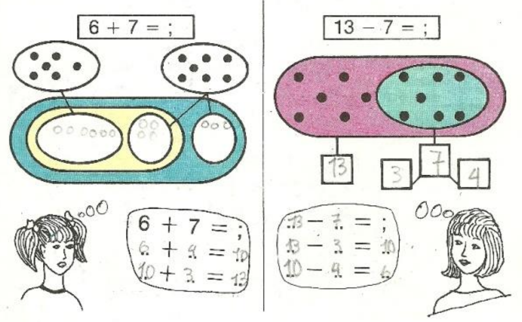
.. + .. = ;
.. + .. = ..
.. + .. = ..

.. − .. = ;
.. − .. = ..
.. − .. = ..

Η πρόσθεση και η αφαίρεση με βάση το 10

1. Να κάμεις τις προσθέσεις. **2.** Κάμε τις αφαιρέσεις.





20. Προσπάθησε να κάμεις με το νου τις παρακάτω πράξεις.

50 + 100 = 150	550 + 100 = 650	950 − 100 = 850	450 − 100 = 350
250 + 100 = 350	750 + 100 = 850	750 − 100 = 650	250 − 100 = 150
450 + 100 = 550	890 + 100 = 990	550 − 100 = 450	1000 − 100 = 900

385 + 100 = 485	799 + 100 = 899	408 + 100 = 508	736 + 100 = 836
511 + 100 = 611	899 + 100 = 999	321 + 100 = 421	651 + 100 = 751
823 + 100 = 923	636 + 100 = 736	775 + 100 = 875	307 + 100 = 407

5. Υπολόγισε τα παρακάτω αθροίσματα.

125 + 75 + 25	125 + 75 + 25
200 + 25	125 + 100
225	225
(125+75)+25	125+(75+25)
200+25	125+100
225	225

33.....

2. Μπορείς να κάμεις με το νου τις παρακάτω προσθέσεις;

708 + 256 = 964	665 + 316 = 981	807 + 87 = 894
437 + 437 = 874	446 + 138 = 584	312 + 79 = 391

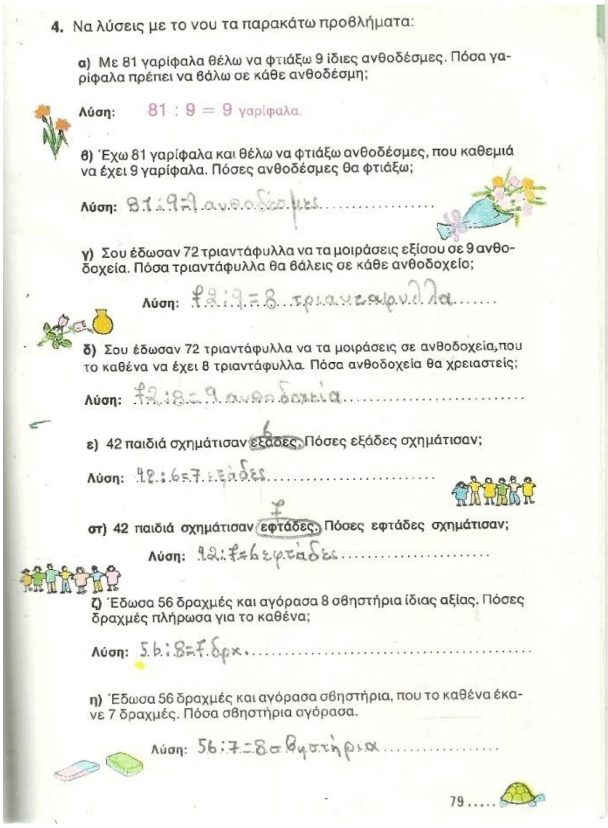
36

2. Μπορείς να κάμεις τις παρακάτω αφαιρέσεις με το νου;

487 − 348	665 − 323	807 − 27
139	342	780

5. Να κάμεις τις παρακάτω πράξεις με το νου.

88 · 10 = 880	10 · 71 = 710	80 · 10 = 800	10 · 8 = 80
36 · 10 = 360	10 · 18 = 180	30 · 10 = 300	10 · 78 = 780
99 · 10 = 990	10 · 33 = 330	90 · 10 = 900	10 · 58 = 580



4. Να λύσεις με το νου τα παρακάτω προβλήματα:

α) Με 81 γαρίφαλα θέλω να φτιάξω 9 ίδιες ανθοδέσμες. Πόσα γαρίφαλα πρέπει να βάλω σε κάθε ανθοδέσμη;

Λύση: 81 : 9 = 9 γαρίφαλα.

β) Έχω 81 γαρίφαλα και θέλω να φτιάξω ανθοδέσμες, που καθεμιά να έχει 9 γαρίφαλα. Πόσες ανθοδέσμες θα φτιάξω;

Λύση: 81:9=9 ανθοδέσμες

γ) Σου έδωσαν 72 τριαντάφυλλα να τα μοιράσεις εξίσου σε 9 ανθοδοχεία. Πόσα τριαντάφυλλα θα βάλεις σε κάθε ανθοδοχείο;

Λύση: 72:9=8 τριαντάφυλλα

δ) Σου έδωσαν 72 τριαντάφυλλα να τα μοιράσεις σε ανθοδοχεία, που το καθένα να έχει 8 τριαντάφυλλα. Πόσα ανθοδοχεία θα χρειαστείς;

Λύση: 72:8=9 ανθοδοχεία

ε) 42 παιδιά σχημάτισαν εξάδες. Πόσες εξάδες σχημάτισαν;

Λύση: 42:6=7 εξάδες

στ) 42 παιδιά σχημάτισαν εφτάδες. Πόσες εφτάδες σχημάτισαν;

Λύση: 42:7=6 εφτάδες

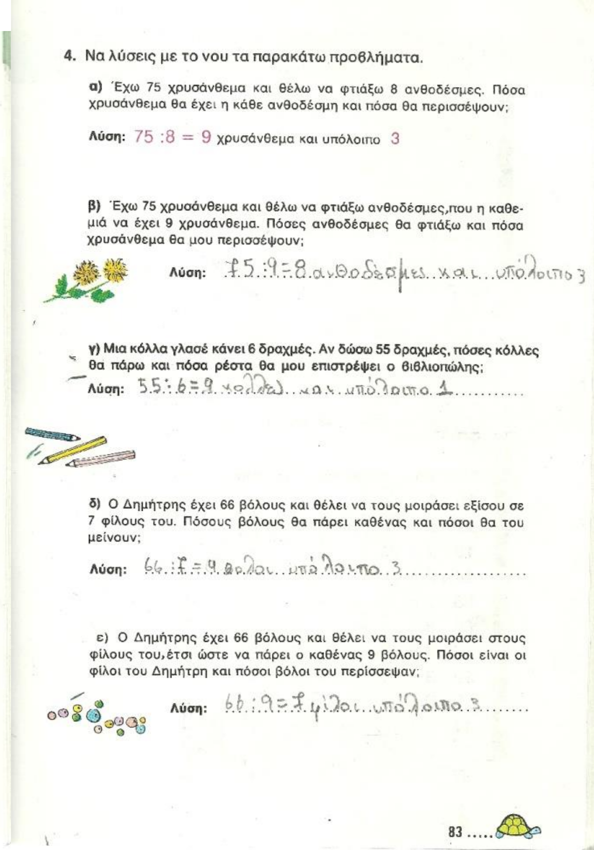
ζ) Έδωσα 56 δραχμές και αγόρασα 8 σβηστήρια ίδιας αξίας. Πόσες δραχμές πλήρωσα για το καθένα;

Λύση: 56:8=7 δρχ.

η) Έδωσα 56 δραχμές και αγόρασα σβηστήρια, που το καθένα έκανε 7 δραχμές. Πόσα σβηστήρια αγόρασα.

Λύση: 56:7=8 σβηστήρια

79



4. Να λύσεις με το νου τα παρακάτω προβλήματα.

α) Έχω 75 χρυσάνθεμα και θέλω να φτιάξω 8 ανθοδέσμες. Πόσα χρυσάνθεμα θα έχει η κάθε ανθοδέσμη και πόσα θα περισσέψουν;

Λύση: 75 :8 = 9 χρυσάνθεμα και υπόλοιπο 3

β) Έχω 75 χρυσάνθεμα και θέλω να φτιάξω ανθοδέσμες, που η καθεμιά να έχει 9 χρυσάνθεμα. Πόσες ανθοδέσμες θα φτιάξω και πόσα χρυσάνθεμα θα μου περισσέψουν;

Λύση: 75:9=8 ανθοδέσμες και υπόλοιπο 3

γ) Μια κόλλα γλασέ κάνει 6 δραχμές. Αν δώσω 55 δραχμές, πόσες κόλλες θα πάρω και πόσα ρέστα θα μου επιστρέψει ο βιβλιοπώλης;

Λύση: 55:6=9 κόλλες και υπόλοιπο 1

δ) Ο Δημήτρης έχει 66 βόλους και θέλει να τους μοιράσει εξίσου σε 7 φίλους του. Πόσους βόλους θα πάρει καθένας και πόσοι θα του μείνουν;

Λύση: 66:7=9 βόλοι υπόλοιπο 3

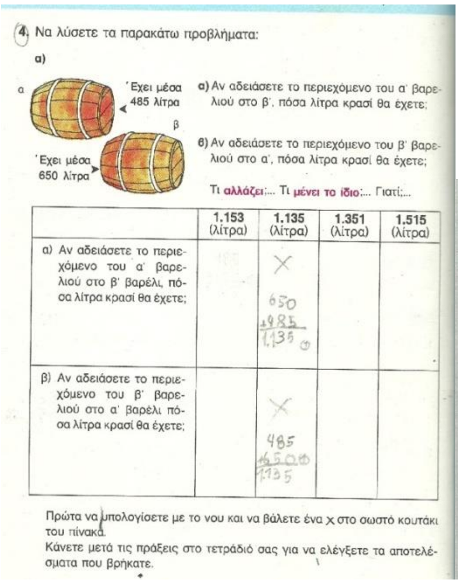
ε) Ο Δημήτρης έχει 66 βόλους και θέλει να τους μοιράσει στους φίλους του, έτσι ώστε να πάρει ο καθένας 9 βόλους. Πόσοι είναι οι φίλοι του Δημήτρη και πόσοι βόλοι του περίσσεψαν;

Λύση: 66:9=7 φίλοι υπόλοιπο 3

83

Παράρτημα 8

(Δ' τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)



4. Να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα:

α)

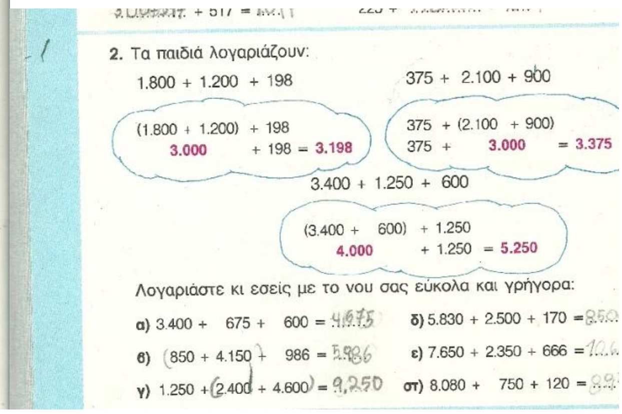
α) Αν αδειάσετε το περιεχόμενο του α' βαρελιού στο β', πόσα λίτρα κρασί θα έχετε;

β) Αν αδειάσετε το περιεχόμενο του β' βαρελιού στο α', πόσα λίτρα κρασί θα έχετε;

Τι **αλλάζει**;... Τι **μένει το ίδιο**;... Γιατί;...

	1.153 (λίτρα)	1.135 (λίτρα)	1.351 (λίτρα)	1.515 (λίτρα)
α) Αν αδειάσετε το περιεχόμενο του α' βαρελιού στο β' βαρέλι, πόσα λίτρα κρασί θα έχετε;		X 650 +485 1.135		
β) Αν αδειάσετε το περιεχόμενο του β' βαρελιού στο α' βαρέλι πόσα λίτρα κρασί θα έχετε;		X 485 +650 1135		

Πρώτα να υπολογίσετε με το νου και να βάλετε ένα x στο σωστό κουτάκι του πίνακα.
Κάνετε μετά τις πράξεις στο τετράδιό σας για να ελέγξετε τα αποτελέσματα που βρήκατε.



2. Τα παιδιά λογαριάζουν:

1.800 + 1.200 + 198

(1.800 + 1.200) + 198
3.000 + 198 = 3.198

375 + 2.100 + 900

375 + (2.100 + 900)
375 + 3.000 = 3.375

3.400 + 1.250 + 600

(3.400 + 600) + 1.250
4.000 + 1.250 = 5.250

Λογαριάστε κι εσείς με το νου σας εύκολα και γρήγορα:

α) 3.400 + 675 + 600 = 4.675
β) (850 + 4.150) + 986 = 5.986
γ) 1.250 + (2.400 + 4.600) = 9.250
δ) 5.830 + 2.500 + 170 = 8.50...
ε) 7.650 + 2.350 + 666 = 10.6...
στ) 8.080 + 750 + 120 = 8.9...

2. Τα παιδιά λογαριάζουν:

1.280 + 220 + 2.100 +900

(1.280 + 220) + (2.100 + 900)

1.500 + **3.000** = **4.500**

1.350 + 780 + 150 + 220

(1.350 + 150) + (780 + 220)

1.500 + **1.000** = **2.500**

Λογαριάστε κι εσείς με το νου σας εύκολα και γρήγορα:

α) 1.820 + 600 + 180 + 1.400 = 4.000 **δ)** 3.450 + 2.600 + 550 + 1.400 = 8.000

β) 430 + 1.780 + 570 + 220 = 2.800 **ε)** 4.010 + 1.990 + 75 + 925 = 7.000

γ) 1.020 + 420 + 2.020 + 980 = 4.440 **στ)** 69 + 7.150 + 1.350 + 31 = 8.590

5. Λογαριάστε με το νου σας εύκολα και γρήγορα:

α) 2.300 + 700 + 1.400 + 600 = 5000

β) 5.100 + 2.700 + 900 + 300 = 9000

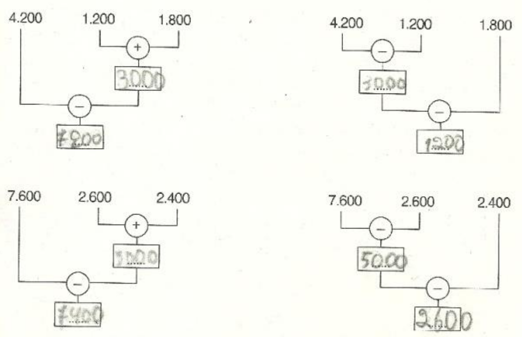
γ) 6.400 + 2.800 + 1.200 + 600 = 11.000

δ) 1.080 + 1.020 + 800 + 100 = 3.000

ε) 2.200 + 3.300 + 1.400 + 100 = 7000

Εργασίες

1. Να κάνετε τις πράξεις με το νου:



3. Να εκτελέσετε με το νου τις παρακάτω πράξεις:

α) 8 • 17 = ... • (..... + ...) = (..... • .....) + (..... • .....) = ... + ... = ...

β) 9 • 16 = ...

γ) 7 • 19 = ...

δ) 6 • 25 = ...

ε) 24 • 5 = ...

στ) 26 • 6 = ...

Εργασίες

1. Μπορείτε να βρείτε με το νου σας τα πηλίκα των διαιρέσεων;

45 : 15 = 3	60 : 20 = 3	100 : 25 = 4	180 : 90 = 2
28 : 14 = 2	80 : 20 = 4	150 : 25 = 6	96 : 32 = 3
36 : 18 = 2	90 : 45 = 2	200 : 40 = 5	84 : 28 = 3
54 : 27 = 2	100 : 50 = 5	300 : 60 = 5	75 : 25 = 3
70 : 35 = 2	120 : 30 = 4	400 : 80 = 5	84 : 42 = 2

Εργασίες

1. Να πολλαπλασιάσετε σύντομα τους παρακάτω αριθμούς:

25 · 10 = 250 ....
37 · 100 = 3800 ....
49 · 1000 = 49000 ....
64 · 10000 = 640000 ....

137 · 10 = 1380 ....
256 · 100 = 25600 ....
407 · 1000 = 407000 ....
500 · 10000 = 5000000 ....

2. Μπορείτε να κάμετε με το νου, τους πολλαπλασιασμούς;

6 · 90 = 540   40 · 60 = 2400   50 · 400 = 20000   150 · 400 = 60000
4 · 900 = 3600   70 · 60 = 4200   60 · 400 = 24000   250 · 400 = 100000
7 · 9.000 = 6300   80 · 60 = 4800   70 · 400 = 28000   800 · 400 = 320000

3. Να κάμετε σύντομα τους πολλαπλασιασμούς:

38(0	5.900	206	680
× 3(00	× 130	× 2.400	× 470
114.000	767000	494400	319600

4. Μπορείτε να συμπληρώσετε τους πίνακες;

Διαίρεση	Πηλίκο	Υπόλοιπο
8.942 : 10	894	2
8.942 : 100	89	42
8.942 : 1.000	8	942

Διαίρεση	Πηλίκο	Υπόλοιπο
24.400 : 10	2440	0
24.400 : 100	244	00
24.400 : 1.000	24	400

5. Μπορείτε να κάμετε με το νου, τις διαιρέσεις;

7.500 : 10 = 750 ....
7.500 : 100 = 75 ....
36.000 : 100 = 360 ....
36.000 : 10 = 3600 ....
36.000 : 1.000 = 36 ....

60 : 20 = 3 ....
2.700 : 300 = 9 ....
3.600 : 40 = 90 ....
48.000 : 6.000 = 8 ....
72.000 : 900 = 80 ....

6. Να κάμετε σύντομα τις διαιρέσεις:

613.560 | 30
20452

234.400 | 800
293

370.000 | 5.000
74

5. Μπορείτε να υπολογίσετε με το νου σας τις διαφορές;

2,8 μ. – 1,8 μ. = 1,0 ....
3,60 μ. – 0,60 μ. = 300 ....
2 μ. – 0,750 μ. = ...
2 μ. – 0,50 μ. = 1,50 ....

0,1 μ. – 0,09 μ. = 0,01 ....
0,2 μ. – 0,02 μ. = 0,18 ....
0,8 μ. – 0,75 μ. = 0,05 ....
0,01 μ. – 0,005 μ. = 0,005 ....

Παράρτημα 9

(Ε’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)

5. α. Να κάμετε με το νου τις παρακάτω πράξεις και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα:

(7.000.000 + 3.000.000) – 2.000.000 = 10.000.000 – 2.000.000
= 8.000.000

(7.000.000 – 2.000.000) + 3.000.000 = 5.000.000 + 3.000.000
= 8.000.000

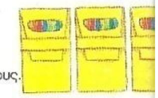
6. Αντιστοιχίστε τα μεταξύ τους ίσα, χωρίς να κάμετε τις πράξεις:

385 • 987   •   • (827 • 212) + (827 •
827 • (212 + 325)   •   • 236 • (685 • 824)
236 • 685 • 824   •   • 987 • 385

7. Υπολογίστε με το νου τα γινόμενα:

7.845.212 • 10 = 78452120 ....
264.890 • 100 = 26489000 ....
5.202 • 1000 = 5202000 ....
7.845.212 • 10.000 = 784521 ....

Ασκήσεις και προβλήματα



1. Λογαριάστε με το νου:

α. 3 κουτιά περιέχουν 36 μαρκαδόρους.
10 όμοια κουτιά περιέχουν ..120.. μαρκαδόρους.

36 | 3
06 | 12
0

10×12=120

β. Για 7 γυναικεία φορέματα χρειάζονται 21 μ. ύφασμα.
Για 12 όμοια φορέματα χρειάζονται ..36.. μ. ύφασμα.

21 | 7
00 | 3

12
×3
36

γ. Οι 5 τρυγητές τρυγούν το αμπέλι σε 8 ώρες.
Οι 10 ίσης απόδοσης τρυγητές τρυγούν το ίδιο αμπέλι σε ..4.. ώρες.

8
×5
40

40 | 10
0 | 4

Ασκήσεις και προβλήματα

1. Λογαριάστε με το νου πόσο κάνουν:

2,500 κιλ. + 3,400 κιλ. 7,25 μ. + 2,75 μ. 13,40 τ.μ. + 6,60 τ.μ.

2. Λογαριάστε με το νου πόσο κάνει. Κάντε τους καλύτερους συνδυασμούς.

α. 3,50 + 2,785 + 1,50 **β.** 4,850 + 6,3 + 2,700
γ. 74,25 + 0,75 + 25 **δ.** 2,95 + 0,05 + 6,85 + 0,15

3. Οι κατασκηνωτές βρίσκονται στο δάσος και θέλουν να πάνε στο γήπεδο. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή, που μπορούν να ακολουθήσουν; Λογαριάστε με το νου.
Με τα στοιχεία της εικόνας διατυπώστε και λύστε με το νου και άλλα προβλήματα.

4. Να κάμετε τις προσθέσεις:

α. 3,5 + 214 + 0,525 + 18,43
β. 12.075 + 1.5 + 0.6125 + 8

5. Το φορτηγό μεταφέρει 2,750 κ.μ. ξυλεία από καρυδιά, 3 κ.μ. ξυλεία από καστανιά και 0,250 κ.μ. ξυλεία από βελανιδιά. Πόσα κ.μ. ξυλεία μεταφέρει συνολικά;

6. Το κόστος ενός προϊόντος είναι 750 δρχ., το κέρδος του εμπόρου 122,50 δρχ. και ο Φ.Π.Α. 37,5 δρχ. Πόσο θα αγοράσει το προϊόν ο καταναλωτής;

122

1. Να κάμετε με το νου τις αφαιρέσεις:

α. 18,75 μ. - 12,60 μ. **β.** 375,5 τόν. - 75,5 τόν.
β. 8,50 τ.μ. - 4,25 τ.μ. **δ.** 18,500 στρέμ. - 4,500 στρέμ.

6. Λογαριάστε με το νου και γράψτε:

- τα $\frac{7}{10}$ του κιλού πόσα γραμμάρια είναι: $\frac{7}{10} \cdot 1.000 = \frac{7.000}{10} = 700$ γραμ.
- τα $\frac{3}{4}$ της ώρας πόσα λεπτά είναι: $\frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{180}{4} = 45$ λεπτά
- τα $\frac{2}{5}$ του χιλιόμετρου πόσα μέτρα είναι: $\frac{2}{5} \cdot 1000 = \frac{2000}{5} = 400$μ
- τα $\frac{3}{10}$ του αιώνα πόσα έτη είναι: $\frac{3}{10} \cdot 100 = \frac{300}{10} = 30$ έτη
- τα $\frac{23}{30}$ του μήνα πόσες μέρες είναι: $\frac{23}{30} \cdot 30 = \frac{690}{30} = 23$ μέρες

3. Υπολογίστε με το νου τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων.

6 : 3 = 2	21 : 7 = 3	125 : 5 = 25
0,6 : 0,3 = 6:3=2	0,21 : 0,07 = 21:7=3	12,5 : 0,5 = 125:5=25
3 : 1,5 = 30:15=2	7 : 3,5 = 70:35=2	1,2 : 0,6 = 12:6=2

Παράρτημα 10

(Στ’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)

Να υπολογίσετε με το νου :

125 • 11 = 1375

335 • 12 = 4020

612 : 6 = 102

5. Να εκτελέσετε τις πράξεις. Ύστερα να στρογγυλοποιήσετε τους αριθμούς και να υπολογίσετε με τον νου, για να δείτε αν η εκτέλεση των πράξεων ήταν σωστή.

Αριθμητικές πράξεις	Εκτέλεση πράξεων	Στρογγυλοποίηση, υπολογισμός με το νου και έλεγχος του εξαγομένου των πράξεων
14,7 • 4,2 • 9,8	14,7 × 42 = 294 + 588 = 61,74 ; 61,74 × 9,8 = 49392 + 55566 = 605,052	15 • 4 • 10 = 600 σωστός
5,2 • 7,7 • 4,9		
29,7 • (9,6 – 4,8)		

1. Στα παρακάτω προβλήματα:

α) Να υπολογίσετε με το **νου** και να υπογραμμίσετε τη σωστή απάντηση.

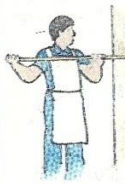
β) Να ελέγξετε την απάντησή σας κάνοντας τις πράξεις στο τετράδιό σας.

α. Η μητέρα αγόρασε ένα κουτί μαρμελάδα για τα παιδιά, που φτάνει για 10 ημέρες, αν τρώνε 100 γραμ. την ημέρα. Πόσες ημέρες θα περάσουν με την ίδια μαρμελάδα, αν τρώνε 200 γραμ. την ημέρα;

α) 10 ημέρες
β) 20 ημέρες
γ) 5 ημέρες

β. Ο οινοπαραγωγικός συνεταιρισμός, για να εμφιαλώσει 15.000 λίτρα κρασί χρειάστηκε 20.000 φιάλες. Αν ήθελε να εμφιαλώσει 22.500 λίτρα κρασί πόσες φιάλες θα χρειαζόταν;

α) 10.000 φιάλες
β) 20.000 φιάλες
γ) 30.000 φιάλες



γ. Ένας φούρνος όταν λειτουργεί 6 ώρες την ημέρα παράγει 9.000 πίτες. Αν λειτουργήσει 7 ώρες την ημέρα, πόσες τέτοιες πίτες θα παράγει;

α) 12.000 πίτες
β) 6.000 πίτες
γ) 10.500 πίτες

14 Λύνουμε προβλήματα ποσοστών (1)

Πρόβλημα

Μια θεατρική παράσταση την παρακολούθησαν 400 άτομα. Από αυτά το 30% ήταν παιδιά. Πόσα ήταν τα παιδιά που παρακολούθησαν την παράσταση;

Σκεφτόμαστε

– Το 30% του αριθμού των ατόμων σημαίνει: τα $\frac{30}{100} = 0,30$ του αριθμού των ατόμων.

Επομένως το 30% του 400 είναι: 0,30 x 400 = 120,00 άτομα

ή **αλλιώς:**

Τα $\frac{100}{100}$ των ατόμων είναι **400** άτομα.

Τα $\frac{1}{100}$ είναι $\frac{1}{100} \cdot 400 = \frac{400}{100}$ άτομα

Τα $\frac{30}{100}$ είναι $30 \cdot \frac{400}{100} = 120$ άτομα

Άρα τα παιδιά που παρακολούθησαν την παράσταση ήταν 120.

Σκεφτόμαστε ακόμα

- Λύνουμε το προηγούμενο πρόβλημα με αναλογία
- Λογαριάζουμε με το **νου**, πόσο είναι:

– Το 10% των χιλίων ευρώ; 100€ – Το 50% του κιλού; 500 γραμ
– Το 25% του χιλιόμετρου; 250μ – Το 75% του τόνου; 750 κιλά

Εργασίες

1. Να λογαριάσετε με το **νου** και να γράψετε την απάντηση:

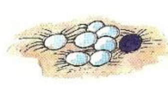
α. Ο πατέρας της Βαγγελιώς έβγαλε από το χωράφι του 1.800 κιλά πατάτες. Από αυτά κράτησε το 10% για το σπίτι τους. Πόσα κιλά πατάτες κράτησε;

1800.0,10 = 180 κιλά

Απάντηση: Κράτησε 180 κιλά πατάτες.

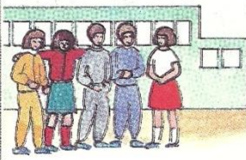
β. Ο πατέρας του Γιώργου μάζεψε από τα ελαιόδεντρα 900 κιλά ελιές, που του έδωσαν 20% λάδι. Πόσα κιλά λάδι έβγαλε;

Απάντηση: Έβγαλε 180 κιλά λάδι



γ. Ο πτηνοτρόφος μάζεψε 2.500 αυγά. Στη συσκευασία, του έσπασαν 2%. Πόσα αυγά του έσπασαν;

Απάντηση: Που έσπασαν 50 αυγά



δ. Το σχολείο του Στρατή έχει 350 μαθητές. Από αυτούς το 40% είναι αγόρια.

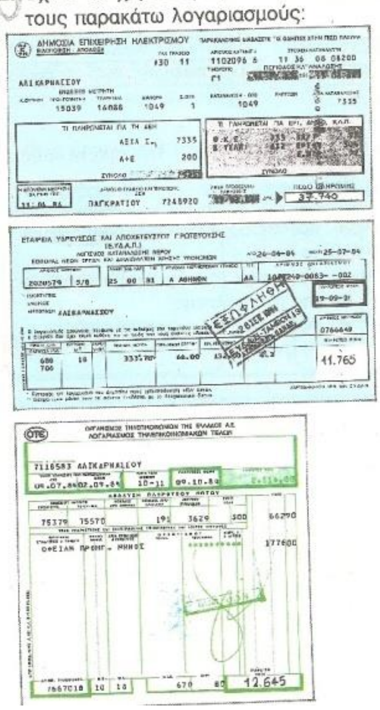
Απάντηση: • Τα αγόρια είναι: 140

• Τα κορίτσια είναι: 210

Παράρτημα 11

(Εκτίμηση, Αναλυτικό Πρόγραμμα 1982-85/1992)

2. Έχετε 50 χαρτονομίσματα των 1.000 δρχ. και θέλετε να πληρώσετε τους παρακάτω λογαριασμούς:



α) Φτάνουν τα χρήματα που έχετε για να εξοφλήσετε τους τρεις λογαριασμούς;

(υπογραμμίζετε το σωστό)

ΝΑΙ ΟΧΙ

β) Αν πληρώσετε μόνο τους λογαριασμούς της Δ.Ε.Η. και του Ο.Τ.Ε., πόσα χρήματα σας λείπουν;

γ) Αν πληρώσετε μόνο τους λογαριασμούς του Ο.Τ.Ε. και της Ύδρευσης, πόσα χρήματα σας περισσεύουν;

Α. Μαντεύουμε το αποτέλεσμα και ύστερα το επαληθεύουμε.

1. Ο πίνακας δείχνει τα **έσοδα** και τα **έξοδα** ενός κτηνοτρόφου.

ΕΣΟΔΑ		ΕΞΟΔΑ	
ΑΙΤΙΟΛΟΓΙΑ	ΠΟΣΟ ΔΡΧ.	ΑΙΤΙΟΛΟΓΙΑ	ΠΟΣΟ ΔΡΧ.
Από γάλα Από μαλλιά Από κρέας	150.000 80.000 370.000	Για τρόφιμα Για ρούχα Για ζωοτροφές Για φάρμακα	120.000 80.000 130.000 20.000
ΣΥΝΟΛΟ	....	ΣΥΝΟΛΟ	....

– Πόσα χρήματα του περισσεύουν;

Μαντεύουμε... Επαληθεύουμε... 600 000 −350 000 250 000

α) 150.000 150.000
β) 250.000 80.000
γ) 350.000 +370.000
600.000

2. Σε μια αθλητική εκδήλωση στο Ολυμπιακό Στάδιο κόπηκαν:
– 12.000 εισιτήρια με 3.000 δρχ. το ένα. 36.000.000
– 18.000 εισιτήρια με 2.000 δρχ. το ένα. 36.000.000
– 9.000 εισιτήρια με 1.000 δρχ. το ένα. 9.000.000
Η αθλητική εκδήλωση κόστισε 50.000.000 δρχ. 31.000.000

– Πόσες δρχ. κέρδισε ο διοργανωτής της;

Μαντεύουμε...

α) 21.000.000
β) 31.000.000
γ) 41.000.000

Επαληθεύουμε...

3.

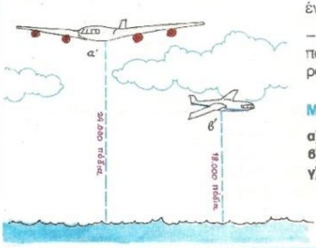
Ο αθλητής α' βρίσκεται 2.850 μ. πριν από το τέρμα των 10.000 μ. και ο αθλητής β' 150 μ. πίσω από τον α'.

– Πόσα μέτρα μέχρι τώρα έχει τρέξει ο β' αθλητής;

Μαντεύουμε... Επαληθεύουμε...

α) 7.000 μ.
β) 10.150 μ.
γ) 7.150 μ.

4.



Τρία πόδια κάνουν περίπου ένα μέτρο.

– Μπορείτε να υπολογίσετε πόσα περίπου μέτρα ψηλότερα πετάει το α' αεροπλάνο;

Μαντεύουμε... Επαληθεύουμε...

α) 6.600 μ.
β) 2.200 μ.
γ) 2.000 μ.

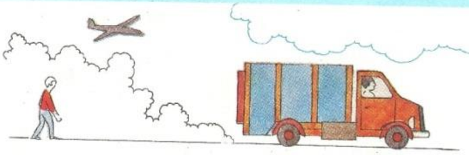
5.

Ο Δημήτρης έκαμε τις διπλανές αγορές. Έδωσε στον καταστηματάρχη 4 χαρτονομίσματα των 5.000 δρχ. και πήρε ρέστα 2.975 δρχ.

– Έγινε σωστά ο λογαριασμός;

Μαντεύουμε... Επαληθεύουμε...

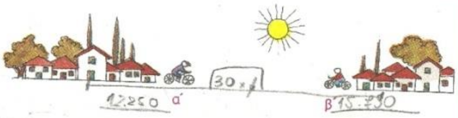
ΝΑΙ ΟΧΙ



6. Ο πεζός περπατάει με ταχύτητα 4 χμ. την ώρα.
Η ταχύτητα του φορτηγού είναι 14/πλάσια από την ταχύτητα του πεζού.
Η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι 8/πλάσια από την ταχύτητα του φορτηγού.
– Με ποια ταχύτητα πετάει το αεροπλάνο;

Μαντεύουμε... Επαληθεύουμε...

α) 600 χμ.
β) 400 χμ.
γ) 448 χμ.



7. Δυο παιδιά ξεκίνησαν από το χωριό τους, για να συναντηθούν. Το α' έχει διατρέξει 12 χμ. και 250 μ. και το β' 3 χμ. και 500 μ. περισσότερα από το α'. Η απόσταση που τα χωρίζει τώρα είναι 2 χμ..

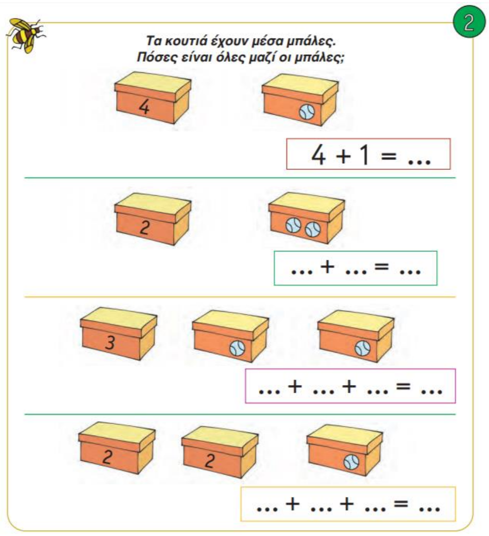
· Πόση είναι η απόσταση ανάμεσα στα δύο χωριά τους; 12.250 15.750 28.000

Μαντεύουμε... 12.250 +3.500 15.750 Επαληθεύουμε...

α) 28 χμ.
β) 30 χμ.
γ) 32 χμ.

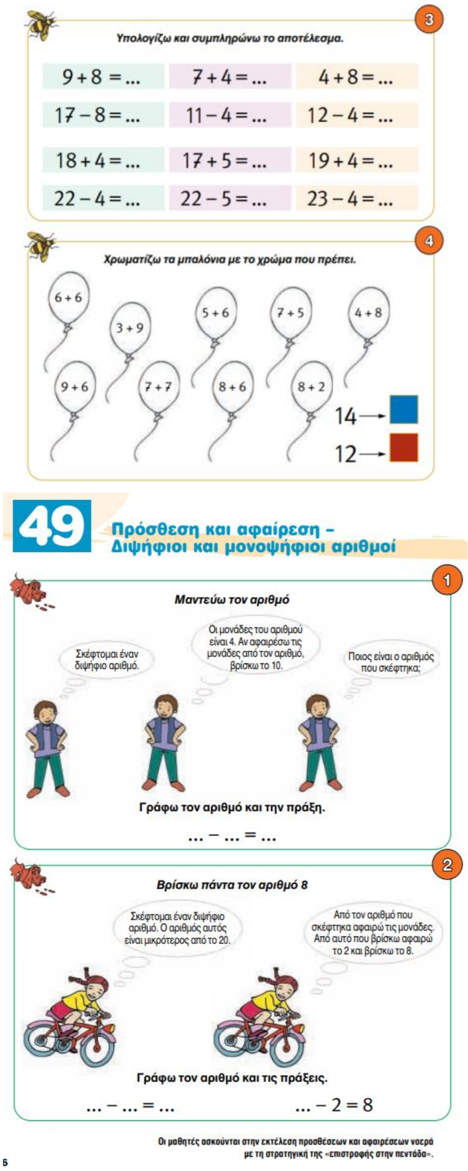
57

[Παράρτημα 12](#)



Παράρτημα 13

(Α’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 2003)



3

Υπολογίζω και συμπληρώνω το αποτέλεσμα.

9 + 8 = …	7 + 4 = …	4 + 8 = …
17 − 8 = …	11 − 4 = …	12 − 4 = …
18 + 4 = …	17 + 5 = …	19 + 4 = …
22 − 4 = …	22 − 5 = …	23 − 4 = …

4

Χρωματίζω τα μπαλόνια με το χρώμα που πρέπει.

49 Πρόσθεση και αφαίρεση – Διψήφιοι και μονοψήφιοι αριθμοί

1

Μαντεύω τον αριθμό

Γράφω τον αριθμό και την πράξη.

… − … = …

2

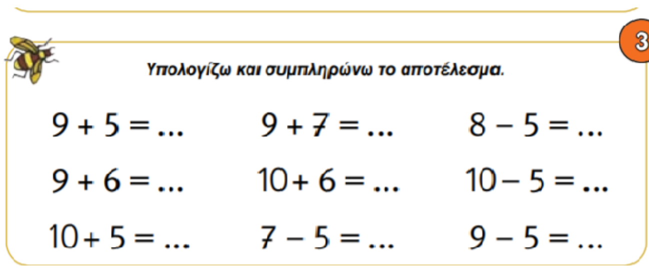
Βρίσκω πάντα τον αριθμό 8

Γράφω τον αριθμό και τις πράξεις.

… − … = …   … − 2 = 8

Οι μαθητές ασκούνται στην εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων νοερά με τη στρατηγική της «επιστροφής στην πεντάδα».

6



3

Υπολογίζω και συμπληρώνω το αποτέλεσμα.

9 + 5 = …	9 + 7 = …	8 − 5 = …
9 + 6 = …	10 + 6 = …	10 − 5 = …
10 + 5 = …	7 − 5 = …	9 − 5 = …

1

Το μαγικό τετράγωνο

4	9	2	
3	5	7	
8	1	6	

Στο τετράγωνο αυτό υπάρχει κάτι το μαγικό. Προσθέτω τους τρεις αριθμούς οριζοντίως, καθέτως και διαγωνίως. Τι παρατηρώ;

3

Υπολογίζω και συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν.

10	4
	2

Όλα μαζί είναι 20.

10	10
6	

Όλα μαζί είναι 30.

5	5
5	

Όλα μαζί είναι 18.

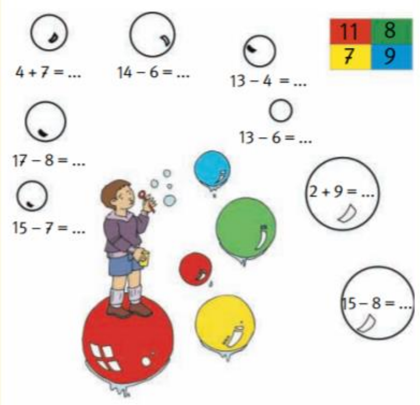
5	5
4	

Όλα μαζί είναι 17.

4 *Υπολογίζω και συμπληρώνω τον αριθμό που λείπει.*

60 + 10 = ...	43 + 20 = ...	67 – 20 = ...
40 + 20 = ...	52 – 30 = ...	40 + ... = 70
60 – 30 = ...	35 + 40 = ...	30 + ... = 60
70 – 40 = ...	58 – 30 = ...	20 + ... = 70

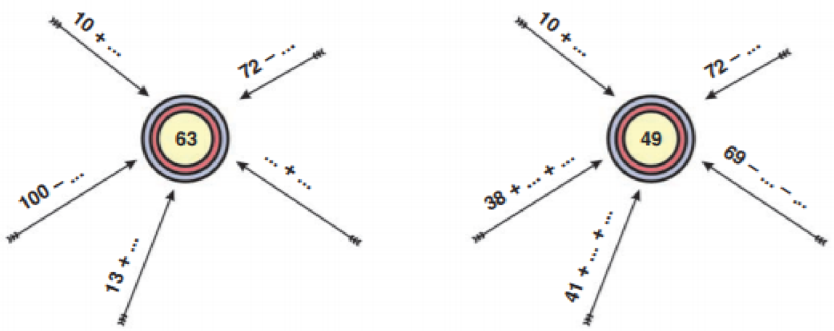
5 *Χρωματίζω τις μπάλες με το αντίστοιχο χρώμα.*



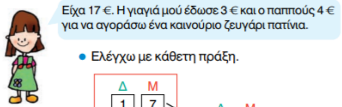
Παράρτημα 14

(Β΄ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 2003)

α. Συμπληρώνω.



α. Πόσο έκαναν τα πατίνια;



- Υπολογίζω με το νου

17 + 3 + 4 =

10 + 7 + 3 + 4 = ☐

17 + 7

10 + 7 + 7

10 + 14 = ...

- Ελέγχω με κάθετη πράξη.

Δ M

1 7

\+

Τα πατίνια κόστισαν .... €

β. Η μητέρα αγόρασε 23 μήλα. Στο σπίτι είχαμε και άλλα 19. Πόσα μήλα έχουμε συνολικά;

- Υπολογίζω με το νου:
- Ελέγχω με κάθετη πράξη:

γ. Τα παιδιά έπαιξαν μπάσκετ. Πόσα καλάθια έβαλαν όλα τα παιδιά συνολικά;

- Εκτιμώ: Συνολικά έβαλαν περίπου .... καλάθια.
- Υπολογίζω με το νου:
- Ελέγχω με κάθετη πράξη:

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

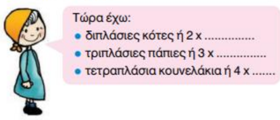
Τι υπολογισμούς κάνουμε στην καθημερινή μας ζωή;

- Η γιαγιά το Πάσχα αγόρασε 3 κότες και 2 κουνελάκια. Πόσα ζώα θα έχει στην αυλή της η γιαγιά συνολικά;

- Υπολογίζω με το νου:

.... κότες
.... σκύλος
.... πάπιες
.... κουνελάκια
Συνολικά .... ζώα.

- Μέχρι το καλοκαίρι η γιαγιά απέκτησε και άλλα ζώα. Μέτρησε και βρήκε:



	το Πάσχα	το καλοκαίρι
κότες	....	....
σκύλος	....	....
πάπιες	....	....
κουνελάκια	....	....
Συνολικά	....	....

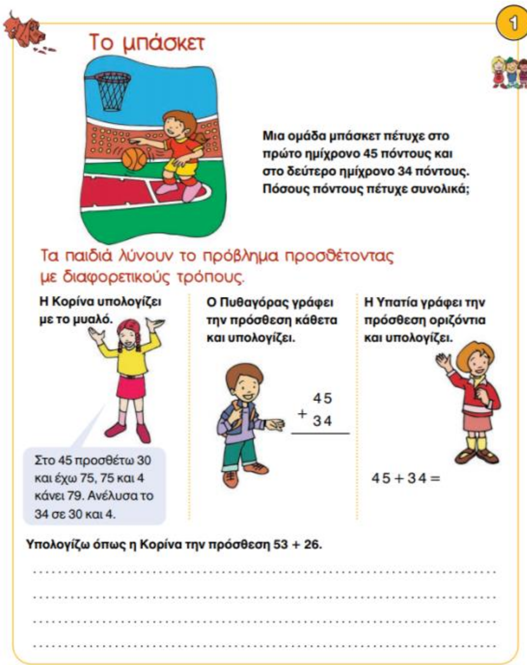
- Η γιαγιά έδωσε το καλοκαίρι τα μισά κουνελάκια στα εγγονάκια της. Πόσα ζώα συνολικά έχει τώρα στην αυλή της η γιαγιά;

Υπολογίζω με ακρίβεια:

Ελέγχω με κάθετες πράξεις:

Παράρτημα 15

(Γ’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 2003)



1

Το μπάσκετ

Μια ομάδα μπάσκετ πέτυχε στο πρώτο ημίχρονο 45 πόντους και στο δεύτερο ημίχρονο 34 πόντους. Πόσους πόντους πέτυχε συνολικά;

Τα παιδιά λύνουν το πρόβλημα προσθέτοντας με διαφορετικούς τρόπους.

Η Κορίνα υπολογίζει με το μυαλό.

Στο 45 προσθέτω 30 και έχω 75, 75 και 4 κάνει 79. Ανέλυσα το 34 σε 30 και 4.

Ο Πυθαγόρας γράφει την πρόσθεση κάθετα και υπολογίζει.

$$\begin{array}{r} 45 \\ +\ 34 \\ \hline \end{array}$$

Η Υπατία γράφει την πρόσθεση οριζόντια και υπολογίζει.

45 + 34 =

Υπολογίζω όπως η Κορίνα την πρόσθεση 53 + 26.

....

....

....

....

1

Το μαγαζί της τάξης

Έχω στην τσέπη μου 76 ευρώ. Αν αγοράσω ένα αυτοκίνητο ράλι που κάνει 35 ευρώ, πόσα ευρώ θα μου περισσέψουν;

Τα παιδιά λύνουν το πρόβλημα αφαιρώντας με διαφορετικούς τρόπους.

Η Κορίνα υπολογίζει με το <u>μυαλό</u>.

Στο 35 προσθέτω 5 και έχω 40, 40 και 30 κάνει 70, 70 και 6 κάνει 76. Πρόσθεσα 5 και 30 και 6 που κάνει 41.

Ο Πυθαγόρας γράφει την αφαίρεση <u>κάθετα</u> και υπολογίζει.

$$\begin{array}{r} 7\,6 \\ -\ 3\,5 \\ \hline \end{array}$$

Η Υπατία γράφει την αφαίρεση <u>οριζόντια</u> και υπολογίζει.

7 6 - 3 5 =

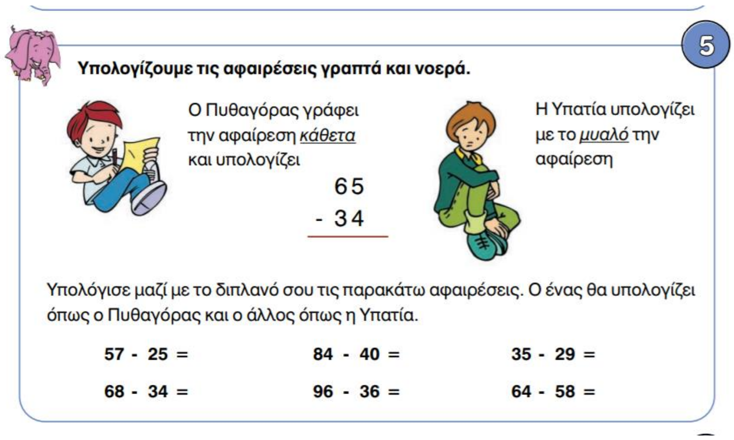
Υπολογίζω όπως η Κορίνα την αφαίρεση 87 – 68.

....

....

....

....



5

Υπολογίζουμε τις αφαιρέσεις γραπτά και νοερά.

Ο Πυθαγόρας γράφει την αφαίρεση *<u>κάθετα</u>* και υπολογίζει

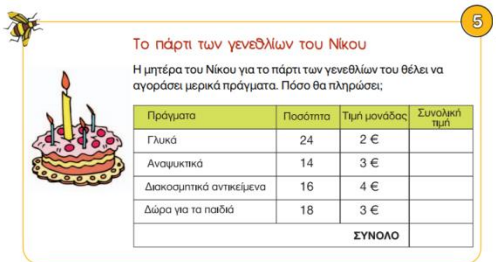
$$\begin{array}{r} 65 \\ -\ 34 \\ \hline \end{array}$$

Η Υπατία υπολογίζει με το *<u>μυαλό</u>* την αφαίρεση

Υπολόγισε μαζί με το διπλανό σου τις παρακάτω αφαιρέσεις. Ο ένας θα υπολογίζει όπως ο Πυθαγόρας και ο άλλος όπως η Υπατία.

57 - 25 =   **84 - 40 =**   **35 - 29 =**

68 - 34 =   **96 - 36 =**   **64 - 58 =**



5

Το πάρτι των γενεθλίων του Νίκου

Η μητέρα του Νίκου για το πάρτι των γενεθλίων του θέλει να αγοράσει μερικά πράγματα. Πόσο θα πληρώσει;

Πράγματα	Ποσότητα	Τιμή μονάδας	Συνολική τιμή
Γλυκά	24	2 €	
Αναψυκτικά	14	3 €	
Διακοσμητικά αντικείμενα	16	4 €	
Δώρα για τα παιδιά	18	3 €	
		ΣΥΝΟΛΟ	

5

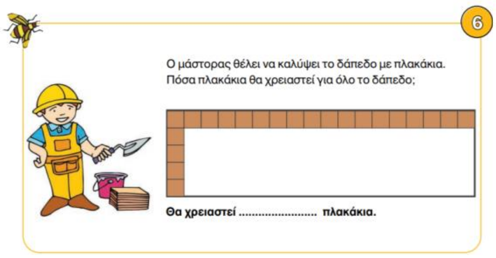
Σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ

Σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ συμμετέχουν 58 μαθητές. Σε κάθε ομάδα παίζουν 5 παίκτες. Πόσες ομάδες σχηματίζονται; Περισσεύουν παίκτες;

Απάντηση: ....

....

....



6

Ο μάστορας θέλει να καλύψει το δάπεδο με πλακάκια. Πόσα πλακάκια θα χρειαστεί για όλο το δάπεδο;

Θα χρειαστεί .... πλακάκια.

6

Στο παλάτι της Κνωσού

Στο παλάτι της Κνωσού, στις αίθουσες ψυχαγωγίας έπαιζαν παιδιά σε ομάδες των 6 παικτών. 42 παιδιά έπαιζαν ζατρίκιο (σκάκι) και 24 έπαιζαν επιτραπέζια παιχνίδια με ζάρια. Πόσες ομάδες παιδιών έπαιζαν και στα δύο παιχνίδια συνολικά;

Απάντηση: ....

....

....

Παράρτημα 16

(Ε’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 2003)

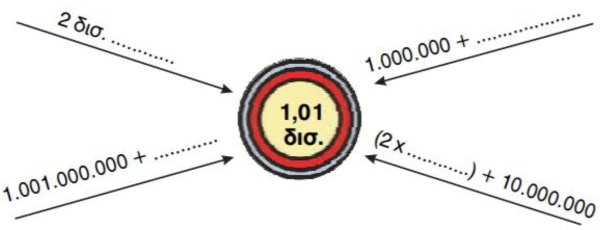
- Συμπληρώνω τους αριθμούς που λείπουν και στη συνέχεια ελέγχω με το αποτέλεσμα.

• $\frac{2}{10} \times \frac{3}{5} =$ ……..	• $\frac{5}{10} \times \frac{2}{100} =$ ……..	• $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ ……..
ή 0,2 x 0,6 = ……..	ή 0,5 x …. = ……..	• …. x …. = ……..
• ……..	• ……..	• ……..

Βρίσκω τους αριθμούς που λείπουν κάθε φορά. Εξηγώ (επαλήθευση).

- 3,5 : 0,5
$\frac{35}{10} : \frac{5}{10}$ = χωράει $\boxed{7}$ φορές γιατί 7 x 0,5 ή $7 \times \frac{5}{10} = \frac{35}{10}$
- 9,9 : 1, …..
$\frac{99}{10} : \frac{11}{10}$ = χωράει 9 φορές γιατί
- 0,80 : …..
$\frac{8}{10} : \frac{....}{10}$ = χωράει 8 φορές γιατί
- 1,50 : 0,25
$\frac{150}{10} : \frac{25}{100}$ = χωράει $\boxed{}$ φορές γιατί

Συμπληρώνουμε ό,τι λείπει για να σχηματίσουμε τον αριθμό - στόχο.



Εργασία

Συμπληρώνω τον πίνακα.

	:2	:10	:20	:100	:200	:1.000
80 €	40 €	8 €	4 €	0,8 €	0,4 €	0,08 €
200 €	100 €					
42 €						

Παράρτημα 17

(Στ’ τάξη, Αναλυτικό Πρόγραμμα 2003)

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 25ου Δημοτικού Σχολείου Τρικάλων θέλησαν να καταγράψουν το ύψος τους. Μετρήθηκαν λοιπόν και κατέγραψαν στον παρακάτω πίνακα τον αριθμό των παιδιών που αντιστοιχούν σε κάθε ύψος.

ΥΨΟΣ ΣΕ ΜΕΤΡΑ	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61
ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	1	1	1	1	0	2	2	4	3	3	2	2	0	1
ΥΨΟΣ ΣΕ ΕΚΑΤΟΣΤΑ														

- Τι αριθμούς χρησιμοποίησαν για να καταγράψουν τις μετρήσεις τους;
- Επαρκούν οι φυσικοί αριθμοί για να εκφράσουμε μετρήσεις;
- Μπορείς να συμπληρώσεις την τελευταία σειρά του πίνακα;
- Τι αριθμούς χρησιμοποίησες; Γιατί;

....

....

Εφαρμογή 2η

Υπολογίστε με το νου το άθροισμα 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1= ....

Λύση

Παρατήρησε δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους υπολογίζεται το άθροισμα:

Επιλέγω ένα ζευγάρι προσθετέων και βρίσκω το άθροισμά τους. Μετά επιλέγω έναν από τους υπόλοιπους προσθετέους για να τον κάνω ζευγάρι με το προηγούμενο άθροισμα και συνεχίζω έτσι μέχρι να τελειώσουν όλοι οι προσθετέοι. ...

Αλλάζω τη σειρά των προσθετέων ώστε να γίνουν ζευγάρια που έχουν άθροισμα το 10. Μετά προσθέτω όσους δεν έχουν ζευγάρι. Π.χ. (9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ...

Δραστηριότητα 1η *Πού πήγαν τα 90 λεπτά μου;*

Ο Τοτός πήγε στο βιβλιοπωλείο της γειτονιάς για να αγοράσει κάποια πράγματα έχοντας 10 €. Αγόρασε 10 τετράδια προς 0,45 € το ένα, 2 ντοσιέ προς 0,80 € το ένα και 1 μπλοκ ακουαρέλας προς 1,90 €. Έδωσε το χαρτονόμισμα των 10 € και πήρε 2 € ρέστα.

- Κάνοντας με το νου τις πράξεις υπολογίστε με την ομάδα σας τα χρήματα που ξόδεψε και γράψτε το αποτέλεσμα.

τετράδια		ντοσιέ		μπλοκ		Σύνολο
10 • 0,45	+	2 • 0,80	+	1,90	=	

Ο Τοτός, για να είναι σίγουρος, προτίμησε να κάνει τις πράξεις με τη σειρά στον υπολογιστή τσέπης που είχε: 10 X 0,45 + 2 X 0,80 + 1,90 = [illegible]

- Ακολούθησε και συ την ίδια λογική και κάνε τις πράξεις με το μολύβι και την ίδια σειρά:

  10 • 0,45 + 2 • 0,80 + 1,90 = ...
- Με ποια σειρά έγιναν οι πράξεις με το νου;

  ....
- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις με το μολύβι στη δεύτερη περίπτωση;

  ....
- Ποιο αποτέλεσμα είναι σωστό;

  ....
- Μπορείτε με την ομάδα σας να προτείνετε έναν κανόνα για τη σειρά των πράξεων;

  ....

Το μαγικό τετράγωνο ανακαλύφθηκε από τους Κινέζους το 90 μ.Χ. Στο τετράγωνο αυτό το άθροισμα κάθε γραμμής, κάθε στήλης και κάθε διαγωνίου είναι το ίδιο.
Να συμπληρώσετε με την ομάδα σας τα παρακάτω μαγικά τετράγωνα:

10		8
	7	
		4

18		16
	15	
		12

		44
52	33	14

	2	
	2,4	2,6
2,3	2,8	

145		71
	182	
293		

Άσκηση 1η

Συμπληρώστε τις ισότητες:

9,75 • .... = 97,5	8,75 • 1.000 = ...	978,87 • 0,1 = ...
4,75 • 100 = ...	0,97 • 10=	965,89 • .... = 9,6589
6,97 • .... = 6.970	8,7 • .... = 0,87	678,5 • 0,001 = ...

Άσκηση 2η

Υπολογίζω τα παρακάτω γινόμενα:

15 • (3 + 2) = ...	1,5 • (3 + 2) = ...
15 • (3 + 0,2) = ...	10 • (2,3 + 3,2) = ...
15 • (0,3 + 0,2) = ...	0,15 • (3 + 2) = ...

Άσκηση 3η

Σημπληρώστε τους παρακάτω πίνακες πολλαπλασιασμού:

X				4				7	
				8					
8	80	40							
4					32	24			36
								42	
5			15				10		

X		6		4			8		
	10		45						50
3						9		21	30
	18	54		36			72		
									0
7					35				

Άσκηση 4η

Με τη βοήθεια του πρώτου γινομένου κάθε στήλης να υπολογίσεις με το νου τα παρακάτω γινόμενα:

42 • 85 = 3.570	583 • 97 = 56.551	498 • 638 = 317.724
4,2 • 8,5 = ...	58,3 • 97 = ...	49,8 • 6,38 = ...
0,42 • 850 = ...	5,83 • 0,97 = ...	4.980 • 63.800 = ...

Άσκηση 1η

Να υπολογίσεις με το νου τα παρακάτω πηλίκα:

(22+30) : 2 = ...	148 : 1.000 = ...	0,25 : 0,1 = ...
(80+160) : 8 = ...	0,99 : 10 = ...	17 : 0,001 = ...
0 : 3 = ...	3,05 : 100 = ...	5.000 : 50 = ...

Άσκηση 2η

Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν από τον πίνακα, κάνοντας τις πράξεις με το νου:

Διαιρετέος Δ	διαιρέτης δ	πηλίκο π	υπόλοιπο υ	Δ = δ • π + υ
181	9	20	1	181 = 9 • 20 + 1
124		10	4	
	7	9	0	
450		225	0	
	8	12	4	

Άσκηση 1η

Κάνε με το νου τις παρακάτω διαιρέσεις και σημείωσε με ένα ✓ αυτές που είναι τέλειες:

48 : 2	48 : 3	48 : 4	48 : 5	48 : 6	48 : 7	48 : 8	48 : 9
45 : 2	45 : 3	45 : 4	45 : 5	45 : 6	45 : 7	45 : 8	45 : 9

Γράψε **όλους** διαιρέτες:

- Για το 48:...
- Για το 45: ....

Άσκηση 2η

Υπολόγισε με το νου και γράψε κάθε αριθμό ως γινόμενο **πρώτων** παραγόντων:

10:	30:	50:	70:
20:	40:	60:	80:

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

-Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. *In I. Thompson (Ed.), Issues in teaching numeracy in primary school* (pp. 184-194). Buckingham: Open University Press.

-Ashcraft, M. H. (1990). Strategic mental processing in children's mental arithmetic: A review and proposal. *In D. F. Bjorklund (Ed.), Children's strategies* (pp. 185–211). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

-Baek, J. M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. *Teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 151-160.

- Baek, J. M. (2005). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics, 12(5)* , pp. 242-247.

-Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 333-339.

-Beishuizen, M. (1985). Evaluation of the use of structured materials in the teaching of primary mathematics. *New directions in education and training technology: Aspects of educational technology*, *18*, 246-258.

-Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 294-323.

-Blote, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, 10, 221-247.

-Carroll, W. (1996). Mental computation of students in a reform-based mathematics curriculum. *School Science and Mathematics*, 96(6) , pp. 305-311.

- Case, R., & Sowder, J. T. (1990). The development of computational estimation: A neo-Piagetian analysis. *Cognition and Instruction*, *7*(2), 79-104.

-Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. OUP USA.

-Dowker, A. (1992). Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians. *Journal of Research in Mathematics Education*, 23 (1), pp. 45-55.

-Dowker, A. (2003). Young children estimating for addition: The zone for practical knowledge and understanding*. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds), The development of arithmetic concepts and skills* (pp243-266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

-Geary, D. C. (1994). Children's mathematical development: Research and practical implications. Washington, DC: American Psychological Association.-Hope, J. (1987). *A case study of a highly skilled mental calculator* . Journal for Research in Mathematics Education, 18(5) , pp. 331-342.

- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, 170-218.

-Heirdsfield, A., & Lamb, J. (2005). *Mental computation: The benefits of informed teacher instruction.* In P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Building connections: Research, theory and practice (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 419-426). Melbourne: MERGA.

- Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies.

- Heirdsfield, A. (2000). Mental Computation: Is It More Than Mental Architecture?

-Heirdsfield, A., & Cooper, T. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior,* 23, 443-463.

-Hope, J. A. (1986). Mental calculation: Anachronism or basic skill. *Estimation and mental computation*, 45-54.

-Hope, J., & Sherrill, J. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators . *Journal for Research in Mathematics Education, 18(2)* , pp. 98-111.

-Josephina, Sr. (1960). Mental arithmetic in today's classroom. *Arithmetic Teacher*, 7, 199-207.

- Karantzis, I. (2010-2011). Mental arithmetic calculation in the addition and subtraction of two-digit numbers: The case of third and fourth grade elementary school pupils. *International Journal for Mathematics in Education,* 3, 3-24

-Levine, D. (1982*).* Strategy use and estimation ability of college students*. Journal for Research in Mathematics Education,* 13(5) , pp. 350-359.

-Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanomi, M., & Siegel, L. S. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade.*Educational Psychology*, *23*(5), 507-520.

-Maclellan, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, 24:2 , pp. 145-154.

-McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense . *For the Learning of Mathematics*, 12(3) , pp. 2-8.

-McIntosh, A., Nohda, N., Reys, B., & Reys, R. (1995). Mental computation performance in Australia, Japan and the United States. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 237-258

-McIntosh, A., Reys, R., & Reys, B. (1997). Mental computation in the middle grades: the importance of thinking strategies*. Mathematics Teaching in the Middle School,* 2(5) , pp. 322- 327.

-McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). Number sense in school mathematics: Student performance in four countries.

-National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

-Reys, R., W., Bestgen, B., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1980). Identification and characterization of computational estimation processes used by in-school pupils and out-of-school adults (No. ED 197963). Washington, DC: National Institute of Education.

-Reys, R., & Bestgen, B. (1981). Teaching and assessing computational estimation skills . *The Elementary School Journal*, 82(2) , pp. 116-127.

-Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future*. The Elementary School Journal*, 84 (5), 546-557.

-Reys, B. J. (1985). Mental computation. A*rithmetic Teacher, 3*2 (6), 43-46

-Reys, R., Reys, B., & Carlow, C. (1986). Estimation and mental computation . *The Arithmetic Teacher, 34(4)* , pp. 16-17

- Reys, R., Reys, B., & Hope, J. (1986). Estimation and mental computation . *The Arithmetic Teacher, 34(2)* , pp. 24-25.

-Reys, B. J., Reys, R. E., & Penafiel, A. F. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(4), 353-375.

- Reys, B. J., Reys, R. E., & Hope, J. A. (1993). Mental computation: A snapshot of second, fifth and seventh grade student performance. *School Science and Mathematics*, *93*(6), 306-315

-Reys, B. J., & Barger, R. H. (1994). *Mental computation: Issues from the United States perspective*. Computational alternatives for the twenty-first century, 31-47.

-Reys, R., Reys, B., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4) , pp. 304-326.

-Reys, R., & Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2) , pp. 225-237.

-Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. School Science and Mathematics, 99(2), 61-70

-Rubenstein, R.N. (1983). Mathematical variables related to computational estimation. *Dissertation Abstracts International*, 44, 695A

-Rubenstein, R.N. (1985). Computational estimation and Related Mathematical Skills, *Journal for Research on Mathematics Education*, 16 (2), pp. 106-119

-Rubenstein, R. N. (2001). Mental Mathematics beyond the Middle School: Why? What? How? *The Mathematics Teacher*, 94 (6) , pp. 442-446.

-Segovia Alex, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics

Department.

-Siegel, A. W., Goldsmith, L. T., & Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 211-232.

-Siegler RS., Booth JL., (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children, *Child Development*, Volume 75, Number 2, Pages 428 – 444.

-Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 182-197). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

-Sowder, J. (1990). *Mental computation and number sense*. The Arithmetic Teacher. 37 (7), 18.

-Sowder, J. (1992). *Estimation and number sense*. In D. Grouws, Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-389). The National Council of Teachers of Mathematics

-Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *102*(4), 408-426.

-Thompson, I. (1999). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools. Buckingham: Open University Press

-Thompson, I. (1999a). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School*. November, 2-4-Threlfall, J. (2002). Flexible neutral calculation. Educational Studies in Mathematics, 50, 29-47.

-Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in school*, *29*(1), 24-26.

-Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies . *Research in Mathematics Education, 2:1* , pp. 77-90.

- Threlfall, J. (2002). *Flexible neutral calculation.* Educational Studies in Mathematics, 50, 29-47.

-Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41 , pp. 541–555 .

-Threadgill-Sowder, J. (1984). Computational estimation procedures of school children. *The Journal of Educational Research*, *77*(6), 332-336.

-Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental arithmetic: Important components of computation. *In M. Suydam & R. E. Reys (Eds.), Developing Computational Skills* (pp. 196-213). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

- Usiskin, Z. (1986). "Reasons for estimating", In H.L. Schoen, and M.J Zweng, Eds., Es- timation and Mental Computation (pp.225-238), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Van de Walle, J. (2007). Διδάσκοντας Μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια Αναπτυξική Διαδικασία. Εκδόσεις ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ:Αθήνα

-Van de Walle, J. (2007). Strategies for whole-number computation. In J. Van de Walle, Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (6th ed.) (pp. 216- 244). United States of America: Pearson Education.

-Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, *35*(1), 89-94.

-Wandt, E., & Brown, G. (1957). Non-occupational uses of mathematics mental and written approximate and exact. *The Arithmetic Teacher*, 4(4) , pp. 151-154.

-Whitacre, I. (2012). Investigating number sense development in a mathematics content course for prospective elementary teachers. *Unpublished doctoral dissertation* . University of California, San Diego and San Diego State University.

- www.wikipedia.com

-Yang, D.-C., Reys, R., & Reys, B. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7(2) , pp. 383-403

-Αγνώστου (1832). *Αριθμητική, εις την οποία οι λόγοι του εργάζεσθαι δι' αριθμών εξηγούνται αναλυτικώς και εφαρμόζονται συνθετικώς.* Εκ της Αμερικανικής Τυπογραφίας: Εν Μελίτη.

-Αθανασάκης, Α., Αλεξανδράκης, Γ., Δήμου, Γ. (1999). *Τα μαθηματικά μου. Γ' τάξη δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Αλβανός, Γ., Δήμου, Γ., Ζέρβας, Γ., Μπρούμας, Κ. (2001). *Τα μαθηματικά μου. Ε' τάξη δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Αλβανός, Γ., Αποστολίκας, Γ., Δήμου, Γ., Ζέρβας, Γ., Μάγκος, Μ., Μπρούμας, Κ., Σαλβαράς, Γ. (2002). *Τα μαθηματικά μου. Στ' τάξη δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Αποστολίκας, Γ., Διονυσοπούλου, Τ., Σαλβαράς, Γ. (1982). *Τα μαθηματικά μου. Α' τάξη δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Αποστολίκας, Γ., Διονυσοπούλου, Τ., Σαλβαράς, Γ. (1998). *Τα μαθηματικά μου. Β' τάξη δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Αποστολίκας, Γ., Διονυσοπούλου, Τ., Σαλβαράς, Γ. (2000). *Τα μαθηματικά μου. Δ' τάξη δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Αποστολόπουλος, Α., (1995). *Οι Νοεροί Αριθμητικοί Υπολογισμοί και οι Στρατηγικές τους*, Πάτρα

-Βαϊνάς, Κ., (1997). *Ανάλυση της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα.* Εκδόσεις Γρηγόρη: Αθήνα

- Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α., Σαΐτης, Α.,(2006). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού.* Βιβλίο Δασκάλου. Βιβλίο για το μαθητή. Τετράδιο Εργασιών για το μαθητή. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

- Βουτσινάς, Σ., (1928). *Μελέτη Αναφερόμενη εις την Μεθοδικήν Διδασκαλίας της Πρακτικής Αριθμητικής. Κέρκυρα*

- Γεωργούλης, Κ. (1974). *Γενική Διδακτική*. Εκδόσεις Παπαδήμα: Αθήνα

-Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. *Στα Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

-Δεσλή, Δ., & Μυρόβαλη, Β. (2014). Η Αίσθηση του Αριθμού σε παιδιά Ε' και Στ΄ Δημοτικού και οι Στρατηγικές τους κατά την Επίλυση Πλαισιωμένων και Μη Πλαισιωμένων Προβλημάτων.

-Δημαράς, Α. (1983). *Η μεταρρύθμιση που δεν έγινε (Τεκμήρια ιστορίας).* Τόμος Α’ (1821-1984). Εκδόσεις ΕΡΜΗΣ: Αθήνα

-Διαμαντοπούλου, Ν. (1969). *Αριθμητική – Γεωμετρία Στ’ Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Διαμαντοπούλου, Ν. (1973). *Αριθμητική – Γεωμετρία Στ’ Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., Χρονοπούλου, Γ. (2006). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού.* Βιβλίο Δασκάλου. Βιβλίο για το μαθητή. Τετράδιο Εργασιών για το μαθητή. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

- Κανδήρου, Γ. (2012). *Ο Παιδαγωγός Θεόδωρος Κάστανος και το Σχολείο Εργασίας στην Ελλάδα. Η ζωή και η δράση του Θ. Κάστανου με επίκεντρο την εφαρμογή του Σχολείου Εργασίας στην Ελλάδα.* Διδακτορική διατριβή, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη

-Καραντζής, Ι., & Τόλλου, Μ. (2009). *Ο νοερός αριθμητικός υπολογισμός των μαθητών της Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου στις προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών*. Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 48, 107-123.

- Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., Σοφού Β. (2006). *Μαθηματικά Β' Δημοτικού.* Βιβλίο Δασκάλου. Βιβλίο για το μαθητή. Τετράδιο εργασιών του μαθητή. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα

- Καρκάνη, Ν. (1973). *Αριθμητική – Γεωμετρία Γ' Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Καρφοπούλου, Α., Χαλκιαδάκη, Ε., Τζούφλα, Ι., Τζούφλα, Μ. (1981). *Αριθμητική – Γεωμετρία Ε' Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού.* Βιβλίο Δασκάλου. Βιβλίο για το μαθητή. Τετράδιο Εργασιών για το μαθητή. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

- Καψάλης, Α., Λεμονίδης, Χ. (1999). *Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών.* ΜΑΚΕΔΝΟΝ, Περιοδική επιστημονική έκδοση της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας του ΑΠΘ. Τεύχος 6, σσ. 95-115

- Κοκκώνης, Ι. (1830). *Εγχειρίδιον ή Οδηγός Αλληλοδιδακτικής Μεθόδου.* Αθήνα: Χ. Νικολαΐδου Φιλαδέλφεως.

-Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία *και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Αθήνα: Τόπος.

-Κυριαζοπούλου, Δ., Αλεξοπούλου, Β. (1969). *Αριθμητική – Γεωμετρία Ε' Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Κωστάκη, Γ. (1979). *Αριθμητική – Γεωμετρία Γ' Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Λεμονίδης, Χ. (2002α). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας στα Μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, *3*(1), 5-22.

- Λεμονίδης, Χ., (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου*. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα.

-Λεμονίδης, Χ., Καψάλης, Α., Πνευματικός, Δ., και Θεοδώρου, Α. (2006α). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής.* Βιβλίο Δασκάλου. Βιβλίο για το μαθητή. Τετράδιο εργασιών του μαθητή. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. και Σπανακά, Α. (2006β). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής.* Βιβλίο Δασκάλου. Βιβλίο για το μαθητή. Τετράδιο εργασιών του μαθητή. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Λεμονίδης, Χ., Λυγούρας, Γ., (2008). Η επίδοση και η ευελιξία των μαθητών της τρίτης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. *Ευκλείδης Γ'*, 68, 20-44.

-Λεμονίδης, Χ., (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί: Λογαριάζω με το τζιμίδι μ'*. Εκδόσεις ΖΥΓΟΣ: Θεσσαλονίκη.

-Λεμονίδης, Χ., & Μουράτογλου, Α. (2014). *Συμπεριφορές των δασκάλων της πράξης σε* *προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης*. Πρακτικά 5ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Ε.ΝΕ.ΔΙ.Μ). Φλώρινα: ΕΝΕΔΙΜ.

-Λιουδάκη, Μ., Αλοΐζου Σ. (1936). *Αριθμητικά Προβλήματα Ε' Δημοτικού. Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Δημητράκου.*

-Λυγούρας, Γ. (2006). *Η επίδοση και η ευελιξία μαθητών της Γ΄ Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς και το κοινωνικό τους υπόβαθρο*.

-Μέγας, Π. (1979). *Αριθμητική – Γεωμετρία Στ' Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα

- Μονοκρούσος, Α. (1938). *Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικά και Γεωμετρικά. Στ' Δημοτικού Σχολείου.* Αθήνα.

- Μπαμπινιώτης, Γ. (2012). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας.* ΑΘΗΝΑ. Εκδόσεις Κέντρο Λεξικολογίας.

-Λέφας, Χ. (1942) Ιστορία της εκπαιδεύσεως, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων

-Μάνιου-Βακάλη, Μ., (1983). *Στρατηγικές Λύσης Προβλημάτων Πρόσθεσης και Αφαίρεσης και η Εξέλιξή της κατά την Παιδική Ηλικία*. Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας (ΕΜΕ). Αθήνα

-Ντούζος, Δ., Παπανδρέου, Α. (1952). *Αριθμητική τάξις Στ'*. Αθήνα: Ρεα

-Παπαμάρκος, Χ., (1894). *Αναλυτικόν Πρόγραμμα των μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου.* Αθήνα: Εκ του Εθνικού Τυπογραφείου.

- Παπανικητόπουλος, Κ. (1929). *Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής. Δ' τάξις Δημοτικού.* Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Τζάκα - Δελαγραμμάτικα.

- Παπανικητόπουλος, Κ. (1929). *Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής. Στ΄ τάξις Δημοτικού.* Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Τζάκα - Δελαγραμμάτικα.

- Παπανικητόπουλος, Κ. (1934). *Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής. Στ΄ τάξις Δημοτικού.* Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Τζάκα - Δελαγραμμάτικα.

- Παπανικητόπουλος, Κ. (1946). *Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής. Στ΄ Δημοτικού.* Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Τζάκα - Δελαγραμμάτικα.

- Παπανικητόπουλος, Κ. (1946). *Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής. Ε΄ Δημοτικού.* Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Τζάκα - Δελαγραμμάτικα.

-Πετρίδης, Δ., (1880). *Στοιχειώδεις πρακτικαί οδηγίαι περί διδασκαλίας μαθημάτων εν τοις* δημοτικοίς *σχολείοις.* Αθήνα: Εκδόσεις Βλαστού.

-Σακελλαρίου, Α., Κοντομάρη, Α. (1927). *Αριθμητικά Προβλήματα δια την Γ΄ τάξη των Δημοτικών Σχολείων.* Αθήνα: Εκδοτική Εταιρεία «Αθήνα».

-Σακελλαρόπουλος, Μ., (1899). *Συλλογή αριθμητικών προβλημάτων προς χρήσιν των Δημοτικών Σχολείων.* Τεύχος Α΄. Αθήνα: Εκδόσεις Κασδόνης.

-Σαμαράς, Η. (1973). *Αριθμητική – Γεωμετρία Δ΄ Δημοτικού*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Σαμαράς, Η. (1974). *Αριθμητική – Γεωμετρία Ε΄ Δημοτικού*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα

-Σαφαρίκας, Α., (1965). *Μέθοδος Λογαριασμών από Μνήμης*. Ηράκλειο Κρήτης.

-Σπυριδάκης, Ι. (1929). *Προβλήματα Αριθμητικής Ε΄ τάξη.* Αθήνα: Εκδοτικός Οίκος Δημητράκου.

-Τζούφλα, Ι., Τζούφλα, Μ. (1979). *Αριθμητική Γεωμετρία Δ΄ Δημοτικού.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Αθήνα.

-Τριανταφυλλίδης, Μ., (2009), *Λεξικό της κοινής νεοελληνικής.* ΑΘΗΝΑ. Εκδόσεις Ίδρυμα Τριανταφυλλίδη.

-Υπουργείον Εκκλησιαστικών και της Δημόσιας Εκπαιδεύσεως, (1913). *Προγράμματα Ωρολόγια και Αναλυτικά παντός είδους πλήρων Δημοτικών Σχολείων.* Εκ του Εθνικού Τυπογραφείου. Εν Αθήναις.

-ΥΠΕΠΘ, (1969). *Ωρολόγιον και Αναλυτικόν Πρόγραμμα Μαθημάτων Δημοτικού Σχολείου.* Έκδοσις ΔΟΕ. Αθήνα.

-ΥΠΕΠΘ, (1977). *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα του Δημοτικού.* Εκδόσεις ΔΟΕ. Αθήνα

-ΦΕΚ Α' 107/31.08.1982. *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα των Α' και Β' τάξεων του Δημοτικού Σχολείου.*

-ΦΕΚ Α' 168/18.11.1983. *Αναλυτικό και Ωρολόγιο Πρόγραμμα Μαθημάτων: 1) Μελέτη Περιβάλλοντος και Μαθηματικά Γ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου, 2) Νεοελληνική Γλώσσα Γ' και Δ' Τάξεων του Δημοτικού Σχολείου.*

-ΦΕΚ Α' 185/26.11.1984. *Αναλυτικό Πρόγραμμα μαθηματικών Δ' και Ε' τάξεων και νεοελληνικής γλώσσας Ε' και ΣΤ' τάξεων του δημοτικού σχολείου, τροποποίηση και συμπλήρωση του αναλυτικού προγράμματος του μαθήματος μελέτης περιβάλλοντος της Β' τάξης και εβδομαδιαία ωρολόγια προγράμματα μαθημάτων του δημοτικού σχολείου.*

-ΦΕΚ Α' 140/1.8.1985. *Αναλυτικό Πρόγραμμα Φυσικών Ε' τάξης και Μαθηματικών Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου.*

-ΦΕΚ Β' 303/13.3.2003. *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού – Γυμνασίου.*

-Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2004). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Δαρδανός.

-Χαλάτσης Α. (1990) : Αριθμητική με το νου και αριθμητικοί υπολογισμοί με προσέγγιση. Ευκλείδης Γ' Τεύχ. 24 (1990) σελ. 24 - 37.