ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Η ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΩΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Κυριακοπούλου Παρασκευή ΑΕΜ: 569

Επιβλέπων καθηγητής: Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος καθηγητής

Εξεταστές: 1) Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

2) Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2019

Με την πιο βαθιά ανθρώπινη αγάπη

στα παιδιά μου

Πασχάλη και Μαρία

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή κ. Ιωάννη Παπαδόπουλο, που πρόθυμα ανέλαβε την εποπτεία της εργασίας μου. Τον ευχαριστώ θερμά για την επιστημονική του υποστήριξη, την ανεκτίμητη βοήθεια, την καθοδήγηση, την συνεργασία και τις συμβουλές που μου έδωσε σε όλη την διαδρομή αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης θερμά

Τους συνεπιβλέποντες: Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη και Καθηγήτρια κ. Μαριάννα Τζεκάκη για τα σχόλια, τις παρατηρήσεις τους και ιδιαίτερα για το ανθρώπινο ενδιαφέρον.

Τους διδάσκοντες και συμφοιτητές μου , του ΠΜΣ Διδακτικής των Μαθηματικών.

Τους μαθητές που πρόθυμα συμμετείχαν στην παρούσα ερευνητική διαδικασία.

Τους φίλους και συναδέλφους μου για την υπομονή και την στήριξή τους.

Τον σύζυγό μου Δημήτρη Χατζόπουλο που πάντα ενθαρρύνει και στηρίζει κάθε μου νέα προσπάθεια.

Κυριακοπούλου Παρασκευή

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2019

Περίληψη

Η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου σε σχέση με την επίλυση προβλήματος (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017) εντάσσεται στον γενικότερο προβληματισμό σχετικά με την ταυτότητα της επίλυσης προβλήματος και με την αναζήτηση και δημιουργία ομαδικών δραστηριοτήτων κατάλληλων για την εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται σε τι βαθμό η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί να αποτελέσει δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος με τον εντοπισμό των σταδίων επίλυσης προβλήματος κατά Polya όταν σε ομάδες μαθητών δώσουμε ως «πρόβλημα» ένα άγνωστο μαθηματικό κείμενο. Εξετάζονται ταυτόχρονα τα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης που αναδύονται κατά την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου, μέσα από το μοντέλο του κοινωνικού μεταγνωστικού ελέγχου (Chiu & Kuo, 2009). Ως μαθηματικό κείμενο επιλέχθηκε η μαθηματική επαγωγή και εξετάστηκε η συμβολή της ανάγνωσης μαθηματικού κειμένου στην εννοιολογική κατανόησή της. Τα ευρήματα δείχνουν ότι η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου από ομάδες μαθητών μπορεί να θεωρηθεί δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος, αναδύονται χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης και συμβάλει στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής. Ωστόσο η έρευνα γύρω από την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος βρίσκεται σε πρώιμο στάδιο και κρίνεται αναγκαία η ενίσχυσή της μέσα από νέες έρευνες.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματική Επαγωγή, Επίλυση προβλήματος

Abstract

The reading of mathematical text in relation to problem solving (Mamon-Downs & Papadopoulos, 2017) is part of the general reflection on the problem solving identity and the search for and creation of group activities suitable for the conceptual understanding of mathematical concepts. This paper examines the extent to which mathematical text reading can be a problem solving activity by identifying the Polya problem solving stages when we give to groups of students as "problem" an unknown mathematical text. At the same time, the cooperative solution features emerging when reading mathematical text, through the model of social metacognition (Chiu & Kuo, 2009). As a mathematical text, mathematical induction was chosen and the contribution of reading mathematical text to its conceptual understanding was examined. The findings show that the reading of mathematical text by groups of students can be considered as a problem solving activity, cooperative resolution features emerge, and contributes to the conceptual understanding of mathematical induction. However, research on the reading of mathematical text as a problem solving activity is at an early stage and it is necessary to reinforce it through new research.

Key words: Mathematical induction, Problem solving

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΣΚΟΠΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι σκοποί της έρευνας, δηλαδή οι προβληματισμοί και οι λόγοι για τους οποίους έγινε η παρούσα εργασία. Παρουσιάζονται τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας και γίνεται μία ανάλυση της σημαντικότητας της έρευνας τόσο από την άποψη της προσφοράς της στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών όσο και από την άποψη του οφέλους που έχουν οι μαθητές αλλά και ο ερευνητής με την εμπλοκή τους στην συγκεκριμένη έρευνα. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μία επισκόπηση της παρούσας εργασίας όπου περιγράφεται με λίγα λόγια το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου.

1.1 Σκοποί της έρευνας

Οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017) προτείνουν την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος. Βασικός σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί πράγματι να αποτελέσει διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Η διερεύνηση αυτή γίνεται με τον εντοπισμό των σταδίων επίλυσης προβλήματος κατά Polya κατά την διαδικασία εμπλοκής ομάδων μαθητών στην ανάγνωση ενός άγνωστου σε αυτούς μαθηματικό κείμενο.

Δεδομένου ότι το πρόβλημα δόθηκε σε ομάδες μαθητών, εξετάζονται ταυτόχρονα με τα στάδια επίλυσης και τα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης που αναδύονται όπως αυτά περιγράφονται από τους Chiu και Kuo (2009).

Ως μαθηματικό κείμενο επιλέχθηκε το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής σε συνδυασμό με μία εφαρμογή του θεωρήματος και ένα λογοτεχνικό απόσπασμα από το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών: Καρλ Φρίντριχ Γκάους». Η βιβλιογραφική επισκόπηση αναδεικνύει τα προβλήματα και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής όταν αυτή διδάσκεται με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Δίνοντας ως πρόβλημα στους μαθητές το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής εξετάζεται ταυτόχρονα με τα στάδια επίλυσης και τα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης, σε ποιο βαθμό οι μαθητές προσεγγίζουν εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή μέσα από την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου.

1.2 Τα ερευνητικά ερωτήματα

Οι παραπάνω σκοποί εντάσσονται στον γενικότερο προβληματισμό που εστιάζει στην ευθύνη των ίδιων των μαθητών να κατανοήσουν ένα άγνωστο σε αυτούς μαθηματικό κείμενο (Μαμωνά και Παπαδόπουλος, 2017), στα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης που αναδύονται όταν οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες και τέλος στην εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών εννοιών και αποδεικτικών μεθόδων.

Τα ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

1. Κατά πόσο η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου αποτελεί δραστηριότητα -πρόβλημα για τους μαθητές και αναλύεται στα στάδια επίλυσης κατά Polya;

2. Κατά πόσο η συνεργατική ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου εμφανίζει όψεις του κοινωνικού μεταγνωστικού ελέγχου σύμφωνα με το μοντέλο των Chiu και Kuo (2009);

3. Κατά πόσο η συνεργατική ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου οδηγεί στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής;

1.3 Σημαντικότητα της έρευνας

Η παρούσα έρευνα εμφανίζει την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος. Ενώ μέχρι τώρα για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ή ενός μαθηματικού αντικειμένου γινόταν προσπάθεια εναλλακτικών μεθόδων διδασκαλίας από μέρους του καθηγητή, εδώ ο καθηγητής δεν αναλαμβάνει αυτήν την ευθύνη αλλά την μεταφέρει στους ίδιους τους μαθητές. Ταυτόχρονα, μία τέτοια διαδικασία προετοιμάζει τους μαθητές για την ευθύνη που θα αναλάβουν αργότερα ως φοιτητές κάποιου τμήματος να κληθούν να κατανοήσουν μόνοι τους ένα άγνωστο σε αυτούς επιστημονικό κείμενο.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες έχοντας να αντιμετωπίσουν ένα άγνωστο μαθηματικό κείμενο και μελετάται στην συγκεκριμένη έρευνα και η κοινωνική τους συμπεριφορά στην διαδικασία αυτή με την αναζήτηση των χαρακτηριστικών συνεργατικής επίλυσης που εμφανίζονται όπως αυτά παρουσιάζονται από τους Chiu και Kuo (2009).

Στο γνωστικό επίπεδο στόχος είναι η εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής. Η βιβλιογραφική επισκόπηση (βλ. κεφ.2) μας δείχνει ότι έχουν γίνει προσπάθειες προς αυτήν την κατεύθυνση με εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας της απόδειξης πέραν του παραδοσιακού μοντέλου. Η παρούσα έρευνα όμως κάνει κάτι τελείως διαφορετικό, δίνει απευθείας μία απόδειξη με μαθηματική επαγωγή χωρίς καμία άλλη εισαγωγή στο θέμα, μία απόδειξη σε μία σχετικά «σκληρή» και μινιμαλιστική μαθηματική γλώσσα και τους προσκαλεί να την ερμηνεύσουν μόνοι τους.

Από την οπτική γωνία της έρευνας πάνω στη Διδακτική των Μαθηματικών η συγκεκριμένη έρευνα παρουσιάζει ενδιαφέρον ως το πρώτο (ή ένα από τα πρώτα) βήματα προς την κατεύθυνση που υποδεικνύουν οι Mamona-Downs και Downs (2005) (και αναφέρουν ξανά οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017), αυτό δηλαδή της προσέγγισης της ανάγνωσης μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητας επίλυσης. Δεν υπάρχουν δεδομένα ως προς την χρήση της προσέγγισης αυτής ούτε ως προς το κατά πόσο όντως είναι διακριτά σε αυτήν τα στάδια της επίλυσης ούτε όμως και για την δυναμική της να συμβάλλει θετικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που διαπραγματεύονται αυτά τα μαθηματικά κείμενα. Έτσι, αυτή η εργασία ανοίγει ίσως σιγά-σιγά τον ερευνητικό ορίζοντα προς την κατεύθυνση αυτή..

1.4 Γενική επισκόπηση

Η εργασία αυτή αποτελείται από 6 κεφάλαια. Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται οι σκοποί και η σημαντικότητα της έρευνας και παρουσιάζονται τα ερευνητικά ερωτήματα. Στο 2^{ο} κεφάλαιο, της βιβλιογραφικής επισκόπησης, γίνεται αρχικά μία παρουσίαση της πρότασης των Μαμωνά και Παπαδόπουλου (2017) (όπως την αναπαράγουν από το Mamona-Downs και Downs (2005)), για την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος και των βημάτων επίλυσης προβλήματος κατά Polya. Στο ίδιο κεφάλαιο, στην συνέχεια, γίνεται μια προσπάθεια παρουσίασης των ερευνών που έχουν γίνει μέχρι σήμερα για την εκμάθηση, την χρησιμότητα και την διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής.

Στο 3^{ο} κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή της ερευνητικής διαδικασίας, η περιγραφή του δείγματος και του μαθηματικού υπόβαθρου των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα. Παρουσιάζονται αναλυτικά οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές και ο τρόπος με τον οποίο έγινε η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων.

Στο κεφάλαιο 4 γίνεται η παράθεση των αποτελεσμάτων που περιλαμβάνει τις πορείες επίλυσης των 5 ομάδων που συμμετείχαν στην έρευνα, ξεχωριστά για την κάθε μία, και σε ξεχωριστές παραγράφους για κάθε ομάδα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης που αναδύθηκαν κατά την διάρκεια της δραστηριότητας.

Στο 5^{ο} κεφάλαιο, γίνεται η συζήτηση γύρω από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και των ευρημάτων της έρευνας και απαντώνται στην ουσία τα ερευνητικά ερωτήματα.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας, πιθανοί περιορισμοί της έρευνας και προτάσεις για πιθανές μελλοντικές έρευνες πάνω σε ερωτήματα που εγείρει η συγκεκριμένη έρευνα με τα ευρήματά της.

Η εργασία τελειώνει με την παράθεση της βιβλιογραφίας και τα παραρτήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους ακολουθώντας τους βασικούς άξονες της ίδιας της έρευνας παρουσιάζεται μέσα από πέντε διαφορετικές υποενότητες. Η πρώτη καταπιάνεται με το θέμα της επίλυσης προβλήματος γενικά για να εστιάσει στη συνέχεια στην προσέγγιση της ανάγνωσης ενός μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος που αποτελεί και σχεδιαστική επιλογή της έρευνας αυτής. Η δεύτερη ενότητα παρουσιάζει το μοντέλο για την κοινωνική μεταγνώση των Chiou και Kuo (2009) που θα αποτελέσει το πλαίσιο με το οποίο θα αναλυθούν τα πρωτόκολα των μαθητών προκειμένου να αποτυπωθούν μεταγνωστικές όψεις στη συνεργατική επίλυση προβλήματος. Η 3η και η 4η ενότητα, αφορούν την παρουσίαση της εξέλιξης της έννοιας της επαγωγικής απόδειξης ιστορικά σε συνδυασμό με ερευνητικά ευρήματα που καταγράφουν τις δυσκολίες που παρουσιάζει για τους μαθητές και τις διδακτικές προτάσεις για αποτελεσματικότερη εμπλοκή των μαθητών στην αποδεικτική μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Τέλος, η 5η ενότητα αναφέρεται στην κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής που είναι και ένας από τους ερευνητικούς άξονες της παρούσας έρευνας.

2.1 Ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης κατά Polya

2.1.1 Επίλυση προβλήματος

O Polya (1888-1987) πίστευε ότι υπάρχει μία τέχνη της ανακάλυψης, ότι η ικανότητα να ανακαλύπτεις και η ικανότητα να επινοείς μπορούν να ενισχυθούν με την επιδέξια διδασκαλία η οποία κινητοποιεί το σπουδαστή στις αρχές της ανακάλυψης και του δίνει μία ευκαιρία να ασκήσει αυτές τις αρχές. Στο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» («How to solve it») (1945) παραθέτει, εκτός των άλλων, ένα σφαιρικό σχέδιο για τα στάδια της επίλυσης ενός προβλήματος (Davis & Hersh 2011) :

1) *Πρέπει να κατανοήσεις το πρόβλημα*
2) *Πρέπει να βρεις τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στο άγνωστο. Ίσως να είσαι υποχρεωμένος να εξετάσεις βοηθητικά προβλήματα, αν δεν μπορεί να βρεθεί μία άμεση σχέση. Πρέπει να βρεις ένα σχέδιο για τη λύση*
3) *Εκτέλεσε το σχέδιό σου*
4) *Εξέτασε τη λύση που βρήκες*

Σε κάθε στάδιο προτείνει ατομικές ενέργειες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν τις κατάλληλες στιγμές όπως τον περιορισμό ή την διεύρυνση των συνθηκών, την αναζήτηση ενός σχετικού προβλήματος, την αλλαγή του τρόπου σύλληψης της έννοιας κτλ.

Μετέπειτα ερευνητές προώθησαν τις ιδέες του Polya. Για παράδειγμα, ο Schoenfeld (1978) ταξινόμησε αργότερα τις ενέργειες που χρησιμοποιούνται σε κάθε στάδιο επίλυσης ενός προβλήματος.

Οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017) περιγράφουν τα στάδια επίλυσης του Polya και τις ενέργειες που σχετίζονται με καθένα από αυτά (σελ.20-21) ως εξής:

Α) Εξοικείωση με το πρόβλημα:

Κατανόηση του ζητούμενου

Κατανόηση της γλώσσας του προβλήματος (ανάκληση της σημασίας κάποιων τεχνικών όρων που αναφέρονται στο πρόβλημα)

Κατανόηση του χαρακτήρα της δυσκολίας ή του εμποδίου που παρουσιάζει το πρόβλημα

Είναι το πρόβλημα παρόμοιο με κάποιο άλλο που έχουμε λύσει;

Διερεύνηση κάποιων ειδικών περιπτώσεων

Β) Στο κυνήγι της πρόσφορης ιδέας για την επίλυση:

Γνωρίζετε κάποιο σχετικό πρόβλημα;

Προσπαθήστε να σκεφτείτε ένα γνωστό πρόβλημα που να έχει το ίδιο ή παρόμοιο ζητούμενο.

Διαμόρφωση ενός βοηθητικού προβλήματος

Διερεύνηση για την πιθανή ύπαρξη κάποιου μοτίβου

Διάσπαση και ανασύνθεση του προβλήματος

Αναπαράσταση του προβλήματος με ένα σχήμα

Χρησιμοποίηση άμεσης ή έμμεσης επιχειρηματολογίας

Γ) Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης:

Διαμόρφωση των κατάλληλων βημάτων ούτως ώστε στο τέλος να μπορεί να ελεγχθεί οτι καθένα από αυτά τα βήματα είναι σωστό

«Μαθηματικοποίηση» ή «Μοντελοποίηση του σχεδίου»

Δ) Κοιτάζοντας πίσω:

Αναστοχασμός της πορείας επίλυσης και έλεγχος του αποτελέσματος και των συλλογισμών

2.1.2 Η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου σε σχέση με την επίλυση προβλήματος

Ενώ οι περισσότερες έρευνες στην Διδακτική των Μαθηματικών είναι στραμμένες σε νέες εκπαιδευτικές προσεγγίσεις που έχουν σαν στόχο την πιο ξεκάθαρη και ευανάγνωστη παρουσίαση του προβλήματος όπως για παράδειγμα του Harel (2002) και των Palla, Potari, και Spyrou, (2012) για την εκμάθηση της μαθηματικής επαγωγής, οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017) προτείνουν ότι η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου μπορεί να αποτελέσει μια πραγματική δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος και ότι το να κατανοηθεί ένα μαθηματικό κείμενο μπορεί να αποτελέσει εξίσου μια πρόκληση, όπως και το να αναπτυχθεί μια στρατηγική για την επίλυση ενός προβλήματος. Το ενδιαφέρον που παρουσιάζει η πρόταση αυτή είναι ότι μεταφέρει την ευθύνη της κατανόησης του μαθηματικού κειμένου στους ίδιους τους μαθητές και όχι στον εκπαιδευτικό που σχεδιάζει την διδασκαλία ώστε να είναι όσο πιο ξεκάθαρη και ευανάγνωστη γίνεται.

Πιο συγκεκριμένα οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος λένε ότι η εκτίμηση ενός μαθηματικού κειμένου ενέχει πτυχές εκτελεστικού ελέγχου (βλ.παράγραφο 2.1.1), ιδιαίτερα εάν αυτή θεωρηθεί ότι αποσκοπεί στην επιβεβαίωση ενός αποτελέσματος. Έτσι είναι πιθανό ότι εδραιωμένες διδακτικές προσεγγίσεις άσκησης του εκτελεστικού ελέγχου (π.χ., Schoenfeld, 1985) θα μπορούσαν να προσαρμοστούν ώστε να παρέχουν μέρος της στήριξης που ίσως χρειαστούν οι μαθητές στην ανάγνωση μαθηματικών κειμένων.

Προτείνουν επίσης ότι για ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ίσως το πιο πρόσφορο κείμενο να είναι η απόδειξη. Η μινιμαλιστική της μορφή αποκρύπτει ένα μεγάλο μέρος της πραγματικής νοερής επιχειρηματολογίας που συντελείται όταν ο συγγραφέας δομεί την λύση ή την απόδειξη, που σημαίνει ότι ο αναγνώστης πρέπει να "ανακτήσει" ανεξάρτητα τη δική του προσωπική εκδοχή για το πώς να ερμηνεύσει, να εκτιμήσει και να αφομοιώσει το υλικό που έχει μπροστά του παρότι οι δεξιότητες αυτών που διαμόρφωσαν την καταγεγραμμένη επιχειρηματολογία μπορεί να διαφέρουν σημαντικά από εκείνες που απαιτούνται από τον αναγνώστη.

Επιπλέον προτείνουν τρόπους αντιμετώπισης στην δυσκολία των μαθητών να πεισθούν ότι μπορούν να μπουν αποτελεσματικά στην διαδικασία κατανόησης ενός δεδομένου μαθηματικού κειμένου. Ένας από αυτούς είναι να πούμε στους μαθητές ότι πιθανόν στο επιχείρημα, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο, να υπάρχει λάθος. Αυτό που πρέπει να κάνουν στη συνέχεια είναι να αποφασίσουν σχετικά με την εγκυρότητα του επιχειρήματος. Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να οργανώσουμε κάποια μαθήματα όπου οι μαθητές να ελέγχουν τις προσπάθειες απόδειξης των συμμαθητών τους. Μια άλλη πιθανή προσέγγιση θα ήταν να τεθεί ένα πρόβλημα που η λύση του θα εξαρτιόταν απαραίτητα από την κατανόηση γραπτού μαθηματικού υλικού που θα είχε δοθεί προηγουμένως στην τάξη. Ή να ζητηθεί να μελετήσουν οι μαθητές μια γραπτή απόδειξη, και αφού τους απομακρύνουμε το γραπτό κείμενο να τους κατευθύνουμε στο να αναπαραγάγουν το επιχείρημα. Όμως δραστηριότητες, όπως αυτές που περιγράφονται παραπάνω, απαιτούν προσεκτική παρέμβαση των εκπαιδευτικών για να είναι επιτυχείς. Είναι αναμενόμενο ότι η εκτίμηση ενός μαθηματικού κειμένου ενέχει πτυχές εκτελεστικού ελέγχου, ιδαίτερα εάν αυτή θεωρηθεί ότι αποσκοπεί στην επιβεβαίωση ενός αποτελέσματος.

2.2 Όψεις κοινωνικού μεταγνωστικού ελέγχου

2.2.1 Μεταγνώση

Η μεταγνώση (metacognition) αναφέρεται στη γνώση που έχει το ίδιο το άτομο για τις δικές του γνωστικές λειτουργίες. Ο Flavell στη δεκαετία του 1970 εισήγαγε στην ψυχολογία τον όρο μεταγνώση θέλοντας να εξηγήσει τους τρόπους μάθησης και οργάνωσης της γνώσης στη μνήμη. Όσον αφορά τις μεταγνωστικές εμπειρίες, μπορούμε να πούμε πως μερικές απ’ αυτές είναι η οικειότητα ή το αίσθημα του πρόσφατου (το άτομο νιώθει πως έχει ξανασυναντήσει το πρόβλημα), η ικανοποίηση (ολοκλήρωση του στόχου), η δυσκολία, η βεβαιότητα, οι χρονικές απαιτήσεις, τα αισθήματα αρέσκειας.

Ο όρος ‘μεταγνώση’ υιοθετήθηκε από τον Flavell, για να ερμηνεύσει εξελικτικά φαινόμενα στους τρόπους μάθησης και οργάνωσης της γνώσης στη μνήμη. Οι μεταγνωστικές διαδικασίες λαμβάνουν χώρα όταν αναλογιζόμαστε:

- εάν γνωρίζουμε κάτι (μεταγνώση),
- σε ποιες ενέργειες θα προβούμε για να μάθουμε ή να κατανοήσουμε κάτι (μεταγνωστικές δραστηριότητες),
- ποια είναι η τρέχουσα γνωστική μας κατάσταση (μεταγνωστική εμπειρία)

(Flavell, 1976).

2.2.2 Κοινωνική μεταγνώση και οφέλη της κοινωνικής μεταγνώσης

Ενώ η ατομική μεταγνώση (individual metacognition) παρακολουθεί και ελέγχει τις γνώσεις που έχει το άτομο, τα συναισθήματα και τις ενέργειες, η κοινωνική μεταγνώση συνίσταται στην παρακολούθηση των μελών της ομάδας και τον έλεγχο της γνώσης, των συναισθημάτων και των ενεργειών του άλλου. Η κοινωνική μεταγνώση (social metacognition) διανέμει μεταγνωστικές ευθύνες σε όλα τα μέλη της ομάδας, αυξάνει την προβολή της μεταγνώσης για τη διευκόλυνση της μάθησης και βελτιώνει τις ατομικές γνωσιακές διαδικασίες. Με τον τρόπο αυτό, η κοινωνική μεταγνώση βοηθά τα μέλη των ομάδων να αναγνωρίζουν τα λάθη, βοηθά στην δημιουργία της κοινής γνώσης και της διατήρησης των κινήτρων των μελών της ομάδας. Η κοινωνική μεταγνώση μετριάζει τις προκλήσεις των ανεπαρκών μεταγνωστικών πόρων, τις ανακριβείς αυτοαξιολογήσεις, την λανθασμένη κατανομή γνωστικών πόρων, την ακατάλληλη επιλογή στρατηγικής επίλυσης ή την κακή χρήση της ανατροφοδότησης. Ωστόσο, η κοινωνική μεταγνώση μπορεί να υποφέρει από κάποιες καταστάσεις: τις προκλήσεις της επικοινωνίας, τις συναισθηματικές συγκρούσεις και τις πολιτισμικές διαφορές.

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αποκτήσουν μεταγνωστικές δεξιότητες δημιουργώντας υποστηρικτική μάθηση ή εφαρμόζοντας μεταγνωστική διδασκαλία. Η μεταγνωστική διδασκαλία παρεμποδίζεται από τα επιπλέον γνωστικά γνωρίσματα της μεταγνώσης, τις δυσκολίες εφαρμογής της, τη συγκεκαλυμμένη φύση της, και την ανεπαρκή προετοιμασία των εκπαιδευτικών. Παρ 'όλα αυτά, αρκετά προγράμματα έχουν επιτυχώς διδάξει μεταγνωστικές δεξιότητες στους μαθητές, δείχνοντας ότι η βελτίωση των κοινωνικών μεταγνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών βοηθούν τη μάθηση και την σχολική επίδοσή τους.

Η μεταγνώση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν και να λύσουν προβλήματα προωθώντας τον αυτοσχεδιασμό, τη διαχείριση των προσωπικών τους εμπειριών και την μετάβαση από τις γνωστικές στις μεταγνωστικές διαδικασίες. Η κοινωνική μεταγνώση είναι μια επέκταση της μεταγνώσης στις αλληλεπιδράσεις της ομάδας. Θα δούμε παρακάτω τα οφέλη της μεταγνώσης και της κοινωνικής μεταγνώσης, τις δυσκολίες , τις επιπτώσεις στην εκμάθηση της μεταγνώσης των μαθητών και πώς να διδάξουμε τη μεταγνώση στο σχολείο (Chiu & Kuo, 2010).

Οι μαθητές επωφελούνται από τη μεταγνώση μέσω της προσωπικής γνωστικής σκαλωσιάς (self – scaffolding) και της διαχείρισης των γνωστικών και συναισθηματικών εμπειριών τους. Ο αυτοσχεδιασμός και ο προγραμματισμός δημιουργούν προσωρινές υποστηρίξεις για μάθηση και επίλυση προβλημάτων (self – scaffolding) (Holton & Clarke, (2006) in Chiu & Kuo, (2009)). Ένα σχέδιο μπορεί να βοηθήσει στον εντοπισμό συγκεκριμένων μαθησιακών στόχων, στην ευθυγράμμιση των πόρων, στη διόρθωση νέων πληροφοριών και στην ανάκτηση σχετικών πληροφοριών για την συμπλήρωση των κενών γνώσης (Oxford, Lavine, & Crookall, (1989) Pichert & Anderson, (1977) in Chiu & Kuo, (2009)).

Όπως η ατομική μεταγνώση, έτσι και η κοινωνική μεταγνώση έχει πολλά οφέλη. Ως κοινωνική η μεταγνώση κατανέμει τις μεταγνωστικές απαιτήσεις μεταξύ των μελών της ομάδας, αυξάνει την ορατότητα της μεταγνώσης του άλλου, βελτιώνει την ατομική γνώση, προάγει την αυτοεξέλιξη και ενισχύει τα κίνητρα.

Κατά τη διάρκεια συνεργατικών ομάδων, τα μέλη της ομάδας δεν περιορίζουν τις γνωστικές απαιτήσει των μελών (π.χ., καταμερισμός της εργασίας), αλλά και άμεσα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (Johnson, Johnson, & Smith, 2007 in Chiu & Kuo, (2009)). Όταν οι συνεργάτες κατευθείαν αλληλεπιδρούν, μπορούν να επωφεληθούν από την κατανεμημένη επεξεργασία. Τα μέλη μπορούν να παρατηρούν, να παρακολουθούν και να αξιολογούν το έργο του άλλου. Σε δομημένες καταστάσεις, κάθε μέλος της ομάδας μπορεί να έχει ένα συγκεκριμένο ρόλο (π.χ.πρόταση νέων ιδεών, υποστήριξη, διευκόλυνση κτλ). Αν ο δάσκαλος ή ο ηγέτης της ομάδας μπορεί να εκχωρήσει ρόλους, τα μέλη της ομάδας προσαρμόζονται συχνά στους ρόλους αυτούς και ενώ η συνεργασία εξελίσσεται, αμοιβαία οργανώνουν τους άλλους ρόλους και η διανομή των αρμοδιοτήτων εξαρτάται δυναμικά από τις ανάγκες και τις δεξιότητες του άλλου (Chiu, (2001), in Chiu & Kuo, (2009)).

Το μοντέλο των Chiu & Kuo (2009) σχετικά με τα οφέλη της μεταγνώσης κατά την εμπλοκή μαθητών στην επίλυση ενός προβλήματος καθώς και τα οφέλη της κοινωνικής μεταγνώσης που εντοπίζονται κατά την διάρκεια συνεργατικής επίλυσης ενός προβλήματος, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1: Οφέλη της μεταγνώσης και της κοινωνικής μεταγνώσης

Μεταγνώση	**Κοινωνική μεταγνώση**
Γνωστική σκαλωσιά (self scaffolding) • Δημιουργία στόχων • Οργάνωση πηγών • Αξιολόγηση πληροφοριών • Ανάκτηση σχετικών πληροφοριών	Αμοιβαία γνωστική σκαλωσιά (reciprocal scaffolding): • Η αναγνώριση των σωστών ιδεών (recognize correct ideas) • Ο εντοπισμός των λανθασμένων ιδεών (detect flowed ideas) • Η δόμηση της κοινής γνώσης (build shared Knowledge) • Η επέκταση της κατανόησης (expand understanding)
Διαχείριση προσωπικών εμπειριών • Οι πεποιθήσεις επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται κάποιος τις εμπειρίες του • Ενίσχυση των κινήτρων	Αμοιβαία Κινητοποίηση (motivate one another): • Ο κατανεμημένος κίνδυνος της αποτυχίας μειώνει τον ατομικό κίνδυνο • Προσφορά συναισθηματικής υποστήριξης (Aids emotional support)
Παρακολούθηση των γνωστικών διαδικασιών • Αύξηση της ορατότητας των γνωστικών διαδικασιών • Αύξηση της ορατότητας των συνεπειών τους	Κατανομή μεταγνωστικών απαιτήσεων (distribute metacognitive demands): • Περισσότεροι νοητικοί πόροι, περισσότερες μεταγνωστικοί πόροι • Επιμερισμός της ευθύνης • Μοιράζονται οι ρόλοι ανάλογα με τα δυνατά σημεία του κάθε μέλους
Διαχείριση της προσωπικής γνώμης • Συντονισμός των ατομικών γνωστικών διαδικασιών	Αύξηση της μεταγνωστικής ορατότητας (increasing metacognition visibility): • Κοινωνική, δημόσια έκφραση της μεταγνωστικής δράσης • Υπάρχει εστιασμένη προσοχή στα δράσεις από περισσότερα του ενός άτομα
	Ο επιμερισμός στη διαχείριση βελτιώνει την ατομική γνωστική ικανότητα (shared management improves individual cognition): • Τα μέλη της ομάδας παρακολουθούν και αξιολογούν ταυτόχρονα • Εστιάζουν σε ένα υποθέμα του προβλήματος • Μείωση της διάσπασης της προσοχής • Μείωση των λαθών

Η κοινωνική μεταγνώση επιμερίζει μεταγνωστικές ευθύνες, αυξάνει την ορατότητα της μεταγνώσης και βελτιώνει την ατομική γνώση. Έτσι, η κοινωνική μεταγνώση προσδιορίζει περιορισμούς, χτίζει κοινή γνώση, διευρύνει την κατανόηση και δημιουργεί κίνητρα Chiu & Kuo, (2009) .

O Schoenfeld (1985) υποστηρίζει τη διδασκαλία του μεταγνωστικού ελέγχου καθώς εργάζονται οι μαθητές σε μικρές ομάδες για νέα προβλήματα. Προτείνει ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν μικρές ομάδες εργασίας όχι μόνο για να παρακολουθήσουν την πρόοδο της μαθηματικής σκέψης, αλλά και να ρωτήσουν διερευνώντας ερωτήσεις σχετικά με τις στρατηγικές μεταγνωστικού ελέγχου των μαθητών:

1. Τι ακριβώς κάνετε; (Μπορείτε να το περιγράψετε με ακρίβεια;)
2. Γιατί το κάνετε; (Πώς φτάνει στη λύση;)
3. Πώς σας βοηθά; (Τι θα κάνετε με το αποτέλεσμα όταν το αποκτήσετε;)

Αυτές οι ερωτήσεις ενθαρρύνουν τους μαθητές να διατυπώσουν και να δικαιολογήσουν τη λογική τους, να κατανοήσουν τη συλλογιστική τους και να εντοπίσουν σφάλματα στη σκέψη τους. Το ερώτημα "Γιατί το κάνεις; "για παράδειγμα, ενθαρρύνει τους μαθητές να αναλύσουν το έργο τους, να εξετάσουν τις στρατηγικές τους και να υποβάλουν τις επόμενες ερωτήσεις. Αν και οι μαθητές πιθανόν να είναι απροετοίμαστοι να απαντήσουν αρχικά σε αυτές τις ερωτήσεις, ο Schoenfeld (1985) υποστηρίζει ότι η σκόπιμη εστίαση σε αυτά θα αναπτύξει τον μεταγνωστικό έλεγχο των μαθητών. Ο Schoenfeld δουλεύοντας με μικρές ομάδες μαθητών και εφαρμόζοντας τις παραπάνω τεχνικές παρατηρεί πως αν και οι μαθητές δεν έλυσαν όλες τις δυσκολίες που είχαν με τα μαθηματικά ωστόσο ο μεταγνωστικός έλεγχός τους άρχισε να μοιάζει περισσότερο με αυτό των μαθηματικών. Ο Schoenfeld (1985) διαπίστωσε ότι ο αριθμός των μαθητών που χρησιμοποίησαν τεχνικές μεταγνωστικής παρακολούθησης (οργάνωση ενός μαθηματικού σχεδίου, επιλέγοντας μια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων και παρακολουθώντας την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος κατά τη διάρκεια όλων των σταδίων της διαδικασίας) αυξήθηκε κατά 40% μετά από μεταγνωστικές τεχνικές ερωτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την αλληλεπίδραση μικρών ομάδων. Ακόμη και όταν οι μαθητές αντιμετώπισαν νέα προβλήματα, συνέχισαν να χρησιμοποιούν τα μεταγνωστικά ερωτήματα αυτοσχεδιάζοντας.

Καθώς τα μέλη της ομάδας συνεργάζονται για την επίλυση ενός προβλήματος, οι ερωτήσεις των μελών της ομάδας, οι αξιολογήσεις, οι επαναλήψεις και οι επεξεργασίες (reciprocal scaffolding) βοηθούν τα άτομα να βλέπουν τα όριά τους, να χτίζουν κοινές γνώσεις και να επεκτείνουν την κατανόησή τους. Οπως και τα ερωτήματα και οι διαφωνίες των μελών των ομάδων βοηθούν στον εντοπισμό των κενών και των εμποδίων. Εξίσου σημαντικό είναι ότι οι επαναλήψεις και οι συμφωνίες συνεισφέρουν στην δόμηση της κοινής γνώσης (build shared Knowledge). Οι επεξεργασίες των συνεργατών παρέχουν νέες σχετικές πληροφορίες. Τα μέλη της ομάδας μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτές τις νέες πληροφορίες για να εστιάσουν την προσοχή σε ένα κρίσιμο ζήτημα. Θα μπορούσαν να ενσωματώσουν τις νέες πληροφορίες στις κοινές κατανοήσεις τους, ή θα μπορούσαν να τις αναθεωρήσουν (Chiu & Kuo, 2009).

2.3 Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

2.3.1 Η μαθηματική επαγωγή στο πλαίσιο της απόδειξης στα μαθηματικά

Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη στην οποία υπάρχουν αποδείξεις.. Μετά την εισαγωγή των «νέων μαθηματικών» στα μέσα της δεκαετίας του 1950, η απόδειξη διαδόθηκε και στα άλλα μαθηματικά του σχολείου εκτός της Γεωμετρίας του Ευκλείδη, όπως στην άλγεβρα και θέματα όπως η Θεωρία Συνόλων εισήχθησαν εσκεμμένα, ώστε να αποτελέσουν το μέσο για την αξιωματική μέθοδο και την απόδειξη. Η απόδειξη, στις καλύτερες περιπτώσεις της, αυξάνει την κατανόηση αποκαλύπτοντας την ουσία του θέματος. Η απόδειξη γίνεται έναυσμα για νέα μαθηματικά. Ο αρχάριος που μελετά αποδείξεις έρχεται πιο κοντά στην δημιουργία νέων μαθηματικών. Η απόδειξη είναι μαθηματική δύναμη, το ηλεκτρικό δυναμικό του θέματος που ζωογονεί τις στατικές διαπιστώσεις των θεωρημάτων.

Τελικά η απόδειξη είναι τελετουργία και μια γιορτή για τη δύναμη της καθαρής λογικής. Μια τέτοια άσκηση για επαναβεβαίωση μπορεί να είναι πολύ αναγκαία όταν έχουμε υπόψη μας όλα τα μπερδέματα στα οποία μας βάζει η καθαρή σκέψη (Davis, , Hersh, & Marchisotto, 2011).

Επιλέον οι Brown (2008) και Harel (2002) αναφέρουν πως η επαναληπτική και άπειρη φύση της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή είναι μία πρόκληση. Από μια σκοπιά, τα μαθηματικά είναι η επιστήμη του απείρου. Εκεί που οι προτάσεις

«2+3=5», «$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$», «ο 71 είναι πρώτος αριθμός» αποτελούν παραδείγματα των πεπερασμένων μαθηματικών, φαίνεται να προβάλλουν αξιόλογα μαθηματικά όταν το διάστημα με το οποίο ασχολούμαστε επεκταθεί ώστε να αγκαλιάσει το άπειρο. Το σύγχρονο απόθεμα μαθηματικών αντικειμένων είναι γεμάτο απειρότητες. Είναι δύσκολο να αποφευχθεί το άπειρο και το πιο απλό από όλα τα άπειρα αντικείμενα είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων 1, 2, 3, 4, …. Τα παραπάνω θα μπορούσαν να γραφούν ως εξής: «τα μαθηματικά γίνονται αξιόλογα όταν αγκαλιάσουν το άπειρο» (Davis, Hersh, & Marchisotto, 2011). Αυτές οι διατυπώσεις που μεταφέρουν την αξία του άπειρου παίζουν έναν σημαντικό ρόλο για την επέκταση της μαθηματικής γνώσης στην έννοια του απείρου. Η έννοια του απείρου περιλαμβάνει διάφορες άλλες γενικές έννοιες όπως «ατελείωτο», «αιωνιότητα», «αθανασία», «μυστήριο» και «αυτοανανεωσιμότητα». Αυτό δημιουργεί την αίσθηση ότι η έννοια και η ανάπτυξη της μαθηματικής επαγωγής, γεφυρώνει το κενό μεταξύ της πεπερασμένης έννοιας της επιστημονικής επαγωγής και της άπειρης φύσης της μαθηματικής επαγωγής. Το άπειρο λοιπόν καθιστά την μαθηματική επαγωγή πολύτιμη και άξια μάθησης (Chin & Lin, 2000).

Ο ρόλος της εξειδίκευσης και της γενίκευσης επίσης είναι σημαντικός στη διαδικασία της ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης και αυτό είναι γνωστό στους μαθηματικούς αλλά και τους ερευνητές της εκπαίδευσης των μαθηματικών. Η αξία της γενίκευσης σε αυτήν την περίπτωση είναι η ολοκλήρωση της ανάπτυξης του θεωρήματος από το χάος στην τάξη. Επίσης αναδεικνύει την παράγωγη αξία της ομορφιάς της διαδικασίας της δημιουργίας τέτοιων μαθηματικών γνώσεων. Η έννοια της μαθηματικής επαγωγής αποκαλύπτει επίσης την δύναμη της γενίκευσης με την υπαγωγή της πεπερασμένης έννοιας σε άπειρο πεδίο (Chin & Lin, 2000).

Ο Fermat, ο εισηγητής της θεωρίας αριθμών χρησιμοποιεί την μαθηματική επαγωγή για την απόδειξη πολλών προτάσεων και ιδιοτήτων. Πέρα από την σημαντικότητά της ως τεχνική απόδειξης, η μαθηματική επαγωγή μπορεί να παρέχει ένα πλαίσιο για την ενίσχυση της αντίληψης των μαθητών για την απόδειξη. Ως εκ τούτου, πρέπει να είναι μέρος των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ειδικά στους μαθητές που προορίζονται για σπουδές (Harel, 2002).

2.3.2 Η μαθηματική επαγωγή στα σχολικά εγχειρίδια

Στα περισσότερα βιβλία άλγεβρας παρατηρείται ότι σχεδόν όλες οι ασκήσεις που αναφέρονται στην απόδειξη με μαθηματική επαγωγή ξεκινούν με την πρόταση «δείξτε ότι…» ή «αποδείξτε με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι….». Αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα δίνεται και οι μαθητές το μόνο που έχουν να κάνουν είναι να αποδείξουν τον ισχυρισμό. Αλλά δεν αναρωτιούνται πως προέκυψε το θεώρημα (Avital & Hansen, 1976). Οι περισσότεροι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στην διαδικαστική όψη της μαθηματικής επαγωγής παρά στην εννοιολογική αλλά ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση φαίνεται να είναι απροετοίμαστοι για τις απαιτήσεις της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή (Baker, 1996).

Για την μαθηματική επαγωγή και τον τρόπο παρουσίασής της στα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν πολλοί προβληματισμοί καθώς επίσης και για το αν θα πρέπει να διδάσκεται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η έννοια της μαθηματικής επαγωγής σε πολλά βιβλία απεικονίζεται με μια απείρως μακριά γραμμή στρατιωτών που στέκονται ομοιόμορφα κοντά μεταξύ τους. Παρόμοια απεικόνιση βλέπουμε και στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια με ένα ντόμινο. Εάν κάποιος σπρώξει τον πρώτο στρατιώτη και εάν ο στρατιώτης K ρίξει τον K+1 τότε θα πέσουν όλοι οι στρατιώτες. Αυτή η εικόνα μεταφράζεται σε έναν αλγόριθμο 3 προτάσεων:

1. Η πρόταση πρέπει να ισχύει για n=1 (ή για n=j αν η πρόταση ισχύει για n μεγαλύτερο ή ίσο του j)
2. Στην συνέχεια, υποθέτοντας ότι η πρόταση είναι αληθής για n=k πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι αληθής και για n=k+1
3. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση είναι αληθής και για κάθε θετικό ακέραιο n (ή για κάθε θετικό ακέραιο n μεγαλύτερο ή ίσο του j)

Το πρόβλημα βρίσκεται στο ότι το 3 δεν φαίνεται να ακολουθείται λογικά από τα 1 και 2. Τα βήματα 1 και 2 δίνουν ένα μέσο επαλήθευσης βήμα προς βήμα ότι η πρόταση S(n) ισχύει για συγκεκριμένες τιμές του n. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για n=100, σύμφωνα με τα παραπάνω, πρέπει να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για n=1, μετά για n=2, μετά για n=3 κοκ. Κανένα βήμα στην αλυσίδα δεν μπορεί να παραλειφθεί. Από τυπική μαθηματική άποψη, η μετάφραση της εικόνας (των στρατιωτών ή του ντόμινου) της έννοιας της μαθηματικής επαγωγής στον παραπάνω αλγόριθμο είναι λανθασμένη (Tall & Vinner, 1981).

Το πρόβλημα της μετάφρασης της εικόνας είναι γνωστό και υπάρχει εδώ και πολλά χρόνια. Ο Bell (1920) δήλωσε ότι «….η μαθηματική επαγωγή δεν έχει θέση μέσα στην στοιχειώδη διδασκαλία». Αλλά δεν ήταν ο μόνος που αμφισβήτησε την αξία της μαθηματικής επαγωγής στα σχολικά μαθηματικά. Οι Lowenthal και Eisenberg (1992) αναφέρουν ότι ο Poincare το 1946 άσκησε επίσης κριτική για το ίδιο θέμα και ο Kline το 1980 παρουσίασε την θέση του Poincare ως εξής:

« Η μέθοδος της επαγωγής περιλαμβάνει ένα άπειρο πλήθος ισχυρισμών. Καμία λογική αρχή δεν μπορεί να καλύψει ένα άπειρο πλήθος συλλογισμών και η μέθοδος δεν μπορεί να συναχθεί από τέτοιες αρχές»

Με λίγα λόγια μια απόδειξη δεν μπορεί να είναι απεριόριστη. Είναι εξ' ορισμού μία ακολουθία προτάσεων, έτσι ώστε κάθε μία από αυτές να είναι είτε ένα αξίωμα είτε συνέπεια προτάσεων. Μια τέτοια ακολουθία προτάσεων είναι αναγκαστικά πεπερασμένη. Η δήλωση ότι το 3^{ο} στάδιο του παραπάνω αλγόριθμου ακολουθεί το 1^{ο} και 2^{ο} στάδιο είναι ένα επιστημολογικό άλμα το οποίο δεν μπορεί να δικαιολογηθεί. Παρ' όλα αυτά μπορεί να καθοριστεί με έναν αισθητικό τρόπο. Εδώ ακριβώς βρίσκεται το πρόβλημα για το κατά πόσο ταιριάζει στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών (Lowenthal & Eisenberg, 1992).

Προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα, χρειάζεται ένα θεώρημα όπως το παρακάτω:

« εάν η πρόταση S(n) είναι αληθής για n=1 και η αλήθειά της για n=k συνεπάγεται την αλήθεια της πρότασης για n=k+1, τότε ο ισχυρισμός S(n) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο n»

Μ' άλλα λόγια, η μαθηματική επαγωγή είναι ένα θεώρημα που περιέχει ένα θεώρημα. Τα κοινώς αποδεκτά βήματα 1, 2 και 3 που αναφέρονται παραπάνω είναι μια αλλοιωμένη και λανθασμένη ερμηνεία του θεωρήματος. Η έννοια ενός τέτοιου θεωρήματος είναι βαθιά και δύσκολο να κατανοηθεί. Ωστόσο, το θεώρημα της επαγωγής ως αλγόριθμος είναι εύκολο να εφαρμοστεί.

Οι Lowenthal και Eisenberg (1992) αναφέρουν επίσης την προσπάθεια των Dubinsky (1986) και Sfard (1988) να ανακαλύψουν τις επιστημολογικές βάσεις που είναι απαραίτητες για να κατανοήσουν οι μαθητές το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής και όχι απλά να εφαρμόζουν την διαδικασία όπως και την προσπάθεια του Young το 1908 να δικαιολογήσει τον ρόλο και την λειτουργία της μαθηματικής επαγωγής στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο Bell (1920) βλέποντας πως μια βαθύτερη κατανόηση ξεφεύγει από τους μαθητές συνέστησε: « *Μέχρι το θεώρημα ή ένα παρόμοιό του να αποδειχθεί φαίνεται σκόπιμο να απαλλαγούμε από φράσεις όπως «όλοι οι αριθμοί» και «η ίδια πράξη μπορεί να επαναληφθεί επ' αόριστον»*. Μ' άλλα λόγια ο Bell πρότεινε να «πεταχτεί» η μαθηματική επαγωγή από τα σχολικά προγράμματα. Ο Harwitz (1920) σχολιάζοντας την κριτική του Bell, δήλωσε ότι: «ο Bell υπογραμμίζει ότι η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής δεν αναγνωρίζεται πάντοτε με σαφήνεια από τους εκπαιδευτικούς».

Οι μαθηματικές ανησυχίες που αναφέρθηκαν παραπάνω, πολλές εκ των οποίων εκφράστηκαν σχεδόν στις αρχές του 20ου αιώνα, φαίνεται τελικά να έχουν αγνοηθεί. Παρ' όλα αυτά, αυτά τα προβλήματα δημιουργούν ένα σύνολο παιδαγωγικών θεμάτων που φαίνονται πολύ σημαντικά για να αγνοηθούν. Όμως τα NCTM (2000) standards δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη του συλλογισμού και της απόδειξης ως θεμελιώδεις όψεις των μαθηματικών και για την μαθηματική επαγωγή καλούν τους εκπαιδευτικούς να παρακολουθήσουν μαθήματα σχετικά με την διδασκαλία της. Δεν γίνεται καμία αναφορά στα προβλήματα που συνδέονται με την εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής που εξετάστηκαν από τους Bell, Poincare, και Hurwitz.

Όμως γιατί τα αναφέρουμε όλα αυτά; Πριν μιλήσουμε για τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η μαθηματική επαγωγή αμφισβητήθηκε από τις αρχές του 20ου αιώνα ως μέθοδος απόδειξης και κατά συνέπεια αμφισβητήθηκε η χρησιμότητά της και η διδασκαλία της στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση από ερευνητές μαθηματικούς. Και ενώ οι ίδιοι οι μαθηματικοί διαπιστώνουν μια ασάφεια στην μέθοδο παρόλα αυτά η μαθηματική επαγωγή συχνά είχε μία εξέχουσα θέση στα σχολικά εγχειρίδια και στα προγράμματα σπουδών. Όλος αυτός ο προβληματισμός όμως δείχνει και την δυσκολία της μεθόδου, μια δυσκολία που όπως φαίνεται δεν έχει ξεπεραστεί ούτε από την διεθνή μαθηματική κοινότητα.

Στην Ελληνική Δευτεροβάθμια εκπαίδευση η διδασκαλία των μαθηματικών, κατά συνέπεια και της μαθηματικής επαγωγής, είναι μάλλον παραδοσιακή και στηρίζεται κυρίως στα σχολικά εγχειρίδια. Οι μαθητές στο λύκειο κυρίως συναντάνε την απόδειξη, στο πλαίσιο της γεωμετρίας και σε κάποιες περιοχές της άλγεβρας. Η μαθηματική επαγωγή διδασκόταν μέχρι πριν από 2 χρόνια στην Β λυκείου για 3 σαρανταπεντάλεπτα μαθήματα σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών ωστόσο παραμένει μέσα στο σχολικό εγχειρίδιο. Η διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής επικεντρωνόταν στην απόδειξη προτάσεων που ισχύουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής δηλώνονταν με έναν φορμαλιστικό τρόπο. Οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου έχουν το στυλ των ταυτοτήτων και των ανισοτικών σχέσεων.

Συζητώντας με 10 καθηγητές μαθηματικών (Palla, , Potari, & Spyrou, 2012) γύρω από την διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής, οι καθηγητές φαίνεται να αναλογίζονταν την μαθηματική επαγωγή ως εννοιολογικά δυσνόητη για τους μαθητές. Έτσι, προτιμούσαν να την διδάσκουν μηχανικά, βήμα προς βήμα αποφεύγοντας την δομική της όψη. Πολλοί μάλιστα καθηγητές αφιέρωναν μόνο 2 αντί για 3 σαρανταπεντάλεπτα μαθήματα που προέβλεπε το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Από τους 10 καθηγητές μόνο μία καθηγήτρια θεώρησε την μαθηματική επαγωγή ως σημαντικό μέρος του αναλυτικού προγράμματος σπουδών και επικεντρωνόταν στις αναδρομικές σχέσεις και την διαδικασία της δόμησής τους ως μία πρώτη προσέγγιση για την μαθηματική επαγωγή.

2.3.3 Δυσκολίες των μαθητών

Οι δυσκολίες των μαθητών με την μαθηματική επαγωγή είναι αυτές από τις οποίες προκύπτει ο προβληματισμός για εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας πέραν του παραδοσιακού μοντέλου. Οι αιτίες των δυσκολιών, όπως αναφέρθηκαν και στην παράγραφο 3.2, με την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή φαίνεται να είναι:

Α) Το ανεπαρκές μαθηματικό υπόβαθρο

Β) Η αδυναμία αναγνώρισης ουσιωδών στοιχείων σε παραδείγματα αποδείξεων

Γ) Οι λανθασμένες γενικεύσεις που λειτουργούσαν ως πρωτότυπα για την αξιολόγηση άλλων αποδείξεων

Δ) Οι προσπάθειες να αναπαράγουνε την καθημερινή συλλογιστική και να δημιουργούνε ανεπισήμως κανόνες συμπερασμάτων.

Ε) Η εστίαση στην διαδικαστική κυρίως όψη της μαθηματικής επαγωγής και σχεδόν καθόλου στην εννοιολογική όψη

(Baker, 1996)

Ένας πιθανός λόγος που καθορίζει την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής, η οποία έχει σχεδιαστεί για την γενίκευση μοτίβων, είναι η τυπική εκπαιδευτική της μεταχείριση (Harel, 2002). Ειδικότερα η εισαγωγή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής είναι απότομη. Οι μαθητές δεν βλέπουν πως γεννιέται η αρχή της μαθηματικής επαγωγής από μία ανάγκη, από μία διανοητική ανάγκη επίλυσης προβλημάτων. Έτσι, χρησιμοποιούν την μαθηματική επαγωγή σαν συνταγή. Ενισχύονται έτσι τα έγκυρα και συμβολικά, μη ποσοτικά συστήματα απόδειξης.

Τα προβλήματα που σχετίζονται με την μαθηματική επαγωγή, στα σχολικά εγχειρίδια, έχουν μία αυξανόμενη δυσκολία που όμως δεν είναι ανάλογη με την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών. Ως, συνέπεια, το έργο της χρήσης της μαθηματικής επαγωγής σε όλα τα προβλήματα είναι ξένο προς τους μαθητές και ενισχύει την κακή τους άποψη για τα μαθηματικά.

Η πλειοψηφία των μαθητών εμφανίζονται να δουλεύουν κυρίως στο πρακτικό επίπεδο και έχουν παρόμοιες δυσκολίες που αναφέρονται σε διάφορες μελέτες (Dubinsky & Lewin 1986, Fischbein & Engel 1989, Harel 2002, Stylianidis et al. 2007, Wistedt & Brattstrom 2005 in Palla, Potari, & Spyrou, 2012) όπως η κυκλική λογική, η έλλειψη νοήματος της μεταβλητής και η δυσκολία του επαγωγικού βήματος. Η μαθηματική επαγωγή συνήθως περιγράφεται από τους μαθητές με έναν εξατομικευμένο τρόπο ως βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν ανακαλώντας στην ουσία τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική επαγωγή παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια. Μερικοί μαθητές βέβαια κατανοούν ότι η μαθηματική επαγωγή δουλεύει κυρίως στο σύνολο των φυσικών αριθμών αλλά χωρίς να αναγνωρίζουν τον λόγο και τις ιδιότητες αυτού του συνόλου. Αν και οι μαθητές της δευτεροβάθμιας δυσκολεύονται να κατανοήσουν την δομή της μαθηματικής επαγωγής ωστόσο υπάρχουν ευρήματα που δείχνουν ότι οι μαθητές της ηλικίας αυτής μπορούν να συνειδητοποιήσουν τα κρίσιμα σημεία που χαρακτηρίζουν την μαθηματική επαγωγή σε ένα διαισθητικό επίπεδο, όταν καλούνται να προβληματιστούν (Palla, Potari. & Spyrou, 2012)

Οι δυσκολίες των μαθητών με την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή (Baker, 1996) σχετίζονται με:

α) Μαθηματικές πηγές

- Οι μαθητές φάνηκε να έχουν πολλές δυσκολίες με την επαγωγική λογική
- Οι μαθητές έχουν δυσκολία με τα αλγεβρικά βήματα
- Δυσκολεύονται στις πράξεις με δυνάμεις
- Η εξάρτηση από άτυπους κανόνες της λογικής φαινόταν να παρεμβαίνει στην ικανότητα να δούνε οι μαθητές την λογική των επιχειρημάτων της μαθηματικής επαγωγής
- Αντιμετωπίζουν πρόβλημα σύνδεσης της βασικής υπόθεσης με την εγκυρότητα της υπόθεσης του επαγωγικού βήματος
- Πολλοί θεωρούν ότι πρόκειται για μία τεχνική απόδειξης που βασίζεται σε υποθέσεις
- Κάποιοι τονίζουν την αναγκαιότητα για την επαλήθευση περισσότερων από μία βασικές υποθέσεις

β) Εννοιολογική κατανόηση

- Παρουσιάζοντας οι μαθητές δυσκολία με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής εξέφρασαν και την έλλειψη εμπιστοσύνης στην τεχνική απόδειξης. Συγκεκριμένα ένας μαθητής είπε: «Όταν κάνω επαγωγή, δεν πιστεύω ότι είναι αλήθεια»
- Οι μαθητές δεν φάνηκε να εκτιμούν την πειστική επιχειρηματολογία σε μία απόδειξη με μαθηματική επαγωγή

γ) Πειστικά στοιχεία

- Υπάρχουν αποδείξεις ότι τα παραδείγματα έπαιξαν ρόλο για την παροχή πειστικών αποδείξεων για τους μαθητές. Συγκεκριμένα, παραδείγματα που βρέθηκαν να είναι πειστικά για τους μαθητές ήταν αυτά που επαλήθευαν τις προτάσεις αλλά ήταν και οδηγοί για το πώς να γίνει μία απόδειξη
- Πολλοί μαθητές επαλήθευαν την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων με παραδείγματα πέρα από την βασική περίπτωση
- Τα παραδείγματα δίνουν την πεποίθηση ότι οι προτάσεις είναι πραγματικές
- Τα παραδείγματα δίνουν μια εικόνα για το πώς να προχωρήσουν για να κάνουν κάποιες αποδείξεις οι μαθητές με μαθηματική επαγωγή

δ) Καθημερινή λογική

- Οι μαθητές προσπαθούν να συσχετίσουν την λογική της απόδειξης με την καθημερινή τους συλλογιστική. Οι μαθητές φτιάχνουν κανόνες για να καθοδηγήσουν την δράση τους σε μαθηματικές καταστάσεις όπως θα ήταν αναμενόμενο σε καταστάσεις καθημερινής λογικής

ε) Ικανότητα για λύση

- Ο Ernest (1984) ανέφερε ότι, επικρατεί η εσφαλμένη εντύπωση ότι στην απόδειξη με μαθηματική επαγωγή υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε

στ) Σημαντικότητα

- Οι μαθητές θεώρησαν ότι δεν έχουν αρκετό χρόνο για να κατανοήσουν την νέα μέθοδο απόδειξης

ζ) Συναισθηματικούς παράγοντες

- Αρνητικά συναισθήματα φαίνεται να συνοδεύουν την δυσκολία με την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Οι μαθητές τείνουν να εστιάζουν την προσοχή τους στις διαδικασίες και όχι στις ιδέες ή τις εφαρμογές

Στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας της μαθηματικής επαγωγής οι μαθητές μαθαίνουν τις αρχές της μαθηματικής επαγωγής χωρίς να κατανοούν πως προκύπτουν αυτές από την ανάγκη επίλυσης προβλημάτων ούτε κατανοούν πως προέρχεται η μαθηματική επαγωγή από προηγούμενες στοιχειώδεις εμπειρίες. Τους παρέχεται ως μία συνταγή που πρέπει να ακολουθήσουν. Επίσης τα προβλήματα που χρησιμοποιούν τα σχολικά συγγράμματα είναι κυρίως προβλήματα ταυτοτήτων, ανισοτήτων και διαιρετότητας και δεν βοηθούν στην κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής (Harel, 2002).

Όταν οι μαθητές μαθαίνουν απόδειξη με μαθηματική επαγωγή συνήθως ξεκινάνε αποδεικνύοντας τύπους όπως $\underset{i=1}{\overset{n}{S}} i = \frac{n(n+1)}{2}$ και άλλους παρόμοιους τύπους. Αυτός ο τρόπος διδασκαλίας της μαθηματικής επαγωγής ισχύει τόσο στα λύκεια όσο και στα πανεπιστήμια γιατί εμφανίζονται τέτοιοι τύποι προβλημάτων στα αντίστοιχα εγχειρίδια. Όμως ο Baker (1996) βρήκε ότι διάφορα προβλήματα και δυσκολίες αναδύονται με αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας. Ένα άλλο πρόβλημα αναδύεται κατά την εφαρμογή του επαγωγικού βήματος της απόδειξης γιατί οι μαθητές πιστεύουν ότι υποθέτουν αυτό που θέλουν να αποδείξουν. Ένας άλλος κίνδυνος επίσης είναι ότι κάποιοι μαθητές που εφαρμόζουν με ευκολία την απόδειξη, συχνά δεν καταλαβαίνουν γιατί η επαγωγή δουλεύει (Allen, 2001).

Στις δυσκολίες αναφέρεται και «το πρόβλημα της άπειρης επανάληψης». Πρόκειται για μια δυναμική κατηγορία επιστημολογικού εμποδίου (David, Grassil, Hauk, Mendosa-Spencer & Yestness 2009) η οποία περιλαμβάνει την έννοια της άπειρης διαδικασίας και του απείρου που συνήθως σχετίζονται με προχωρημένα (advanced) μαθηματικά. Παρ’ όλα αυτά πρόσφατη εργασία του Brown (2008) προτείνει ότι η ιδέα του απείρου, ιδιαίτερα των άπειρων επαναλήψεων είναι προσβάσιμη σε 12-χρονα παιδιά. Η επαναληπτική και άπειρη φύση της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή είναι μία διδακτική πρόκληση (Brown, 2008; Harel, 2002).

Επίσης οι μαθητές συχνά αμελούν το αρχικό βήμα της μαθηματικής επαγωγής (η περίπτωση για n=1) (Dubinsky & Lewin, 1986, Stylianides, Stylianides & Philippou 2007) και ένα άλλο θέμα σχετικό με την μαθηματική επαγωγή είναι κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η μαθηματική επαγωγή λειτουργεί μέσα στο σύνολο των φυσικών αριθμών (Palla, Potari, & Spyrou, 2012).

2.3.4 Διδακτικά προβλήματα

Το θεώρημα της επαγωγής είναι μία μέθοδος απόδειξης η οποία εφαρμόζεται σε προτάσεις που φαίνεται να προήλθαν από τον ουρανό (Lowenthal & Eisenberg, 1992). Υπάρχουν προφανή πλεονεκτήματα στην ενασχόληση με τέτοια προβλήματα. Ένα τέτοιο πλεονέκτημα είναι οι δεξιότητες και οι τεχνικές που χρειάζονται προκειμένου να αποδειχθεί το επαγωγικό βήμα, ότι η πρόταση S(k) συνεπάγεται την πρόταση S(k+1). Το πιο σημαντικό ερώτημα είναι από πού προέρχονται αυτές οι προτάσεις. Παρόλο που η μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται για να τις αποδείξει δεν δίνει πληροφορίες για την προέλευσή τους. Συχνά αυτό είναι προτιμότερο από μία απόδειξη γιατί η γενική ανάπτυξη μιας πρότασης μπορεί να θεωρηθεί και ως απόδειξη της εγκυρότητας της πρότασης.

Ο ρόλος της μαθηματικής επαγωγής ως μέθοδος απόδειξης φαίνεται ασαφής ακόμα και από έμπειρους καθηγητές μαθηματικών. Η Hanna (1989), διαχωρίζοντας τις αποδείξεις σε αυτές που αποδεικνύουν και αυτές που εξηγούν, και κατατάσσοντας την μαθηματική επαγωγή σε αυτές που αποδεικνύουν και όχι που εξηγούν, λέει: « ως καθηγητές μαθηματικών αποστολή μας είναι να κάνουμε τους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά….. οι αποδείξεις που εξηγούν θα πρέπει να ευνοούνται σε σχέση με αυτές που αποδεικνύουν».

Όμως, παρά τις αντιρρήσεις των Bell (1920) και Hanna (1989), δεδομένου ότι ο στόχος της απόδειξης είναι να πείσει κάποιον, με έναν κοινωνικά αποδεκτό τρόπο, φαίνεται να χρειάζεται η μαθηματική επαγωγή στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Το ερώτημα είναι αν κερδίζουν κάτι οι μαθητές αποδεικνύοντας προτάσεις που ισχύουν μόνο για θετικούς ακέραιους.

Το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής είναι γεμάτο με μαθηματικά, φιλοσοφικά και παιδαγωγικά προβλήματα. Σπάνια δίνει μία ιδέα για την προέλευση των προτάσεων στις οποίες εφαρμόζεται. Εφαρμόζεται σε προτάσεις που ισχύουν για μια μικρή τάξη αριθμών (θετικοί ακέραιοι) αλλά πολλές φορές οι προτάσεις αυτές ισχύουν και για μεγαλύτερες τάξεις αριθμών (ρητοί ή πραγματικοί). Για την πλειοψηφία των μαθητών, η μαθηματική επαγωγή είναι μία μηχανική διαδικασία που ενεργοποιείται με την πρόταση «απέδειξε ότι….» (Lowenthal & Eisenberg, 1992).

Αν και το σύνολο της γλώσσας, των συμβολισμών και της διαδικασίας για την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή μπορεί να δημιουργηθεί και να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές με πολλούς επιτυχημένους τρόπους, μία αναδιοργάνωση της σκέψης για τα μαθηματικά, ειδικά για την επίλυση προβλήματος και για την φύση της απόδειξης εμφανίζεται με την ανάγκη της ανάπτυξης του εννοιολογικού πλούτου και την σύνδεση με την εννοιολογική εικόνα της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή (David, Grassl, Hauk, Mendosa-Spenser & Yestness, 2009).

2.4 Διδακτικές προτάσεις για την μαθηματική επαγωγή

Αναλογιζόμαστε το ερώτημα (Leron & Zazkis, 1986): ποιος θα ήταν ένας καλός τρόπος να εισάγουμε σε αρχάριους την έννοια της μαθηματικής επαγωγής; Ένας τρόπος είναι να τους προκαλέσουμε με ένα ενδιαφέρον πρόβλημα. Για παράδειγμα ποιο είναι το μέγιστο πλήθος περιοχών (regions) που σχηματίζονται από n ευθείες γραμμές, δεδομένου ότι ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν συντρέχουν.

Η απάντηση είναι δύσκολο να δοθεί απευθείας, χρειάζεται διερεύνηση. Για μία ευθεία, για δύο ευθείες, για τρεις ευθείες κ.ο.κ. Στην συνέχεια ψάχνουμε για ένα μοτίβο και μία γενίκευση. Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος. Να μην αναζητήσουμε το συγκεκριμένο μοτίβο αλλά τον τρόπο με τον οποίο αυτό εξελίσσεται. Δηλαδή να αναζητήσουμε απάντηση στο ερώτημα πόσες περιοχές μεταξύ των ευθειών δημιουργούνται στο επίπεδο από τις τεμνόμενες ευθείες με την πρόσθεση μιας ακόμα ευθείας; Εδώ είναι που ξεκινάει ο επαγωγικός τρόπος σκέψης.

Διδακτικά το ερώτημα θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής: Αν υποθέσουμε ότι έχουμε 3 ευθείες στο επίπεδο πόσες περιοχές σχηματίζονται αν προσθέσουμε και μία τέταρτη ευθεία; Μπορούμε να το βρούμε αυτό χωρίς να μετράμε κάθε φορά τις περιοχές; Το επαναλαμβάνουμε για 4, 5 κ.ο.κ. μέχρι η τάξη να βαρεθεί. Στο σημείο αυτό μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει κατά την μετάβαση από n ευθείες σε n+1 ευθείες ακόμα κι αν δεν γνωρίζουμε την απάντηση για τις n ευθείες. Έτσι, η μαθηματική επαγωγή πιάνει το μοτίβο του ισχυρισμού ενώ πηγαίνουμε από έναν αριθμό στον επόμενό του.

Παρόμοια εισαγωγή μπορούμε να κάνουμε για την αναδρομή στην επιστήμη των υπολογιστών αν και δεν είναι συνηθισμένη διαδικασία. Εδώ μπορεί να γεννηθεί το ερώτημα: Είναι πιο απλή η υπολογιστική αναδρομή ή ή μαθηματική επαγωγή; Τι θα πρέπει να προηγηθεί στην μαθησιακή ακολουθία: Παρ ότι οι μαθηματικοί υποστηρίζουν ότι είναι πιο εύκολη η μαθηματική επαγωγή, είναι πιο συνηθισμένο τα 13χρονα παιδιά να χρησιμοποιούν αναδρομικά προγράμματα αλλά δύσκολο να μαθαίνουν απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Γενικότερα θεωρούνται ευκολότερες οι αναδρομικές δραστηριότητες στον υπολογιστή παρά οι αποδείξεις με μαθηματική επαγωγή με χαρτί και μολύβι. Το ένα είναι δράση (άρα εύκολο), το άλλο απόδειξη (άρα δύσκολο). Για τους περισσότερους ανθρώπους είναι ευκολότερο να ζωγραφίσουν εικόνες με τον υπολογιστή παρά να αποδεικνύουν προτάσεις με αριθμούς. Θα μπορούσαμε όμως να πούμε ότι η αναδρομή μπορεί να αποτελέσει ένα βήμα το οποίο θα επηρεάσει την καλύτερη κατανόηση της επαγωγής (Leron & Zazkis, 1986).

Διδάσκοντας οποιαδήποτε μαθηματική έννοια, το κλειδί είναι η εμπλοκή των μαθητών. Κατά την διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής βρίσκουμε 4 φάσεις εμπλοκής

Α) Την διασκέδαση του πειράματος με τις ειδικές περιπτώσεις που επιβεβαιώνουν την εικασία

Β) Την ανάπτυξη της ικανότητας να διατυπώνονται εικασίες

Γ) Την εξέταση της αλήθειας μιας εικασίας

Δ) Την εκτέλεση των αποδείξεων με μαθηματική επαγωγή

Δεν πρέπει να αφιερώνουμε όλη μας την ώρα με το να επεξεργαζόμαστε ένα συγκεκριμένο σημείο αλλά μάλλον να επιλέγουμε έτσι τα παραδείγματα μας ώστε κάθε μία από τις παραπάνω φάσεις να γίνει μέρος ολόκληρης της έννοιας. Έτσι, ο μαθητής θα αποκτήσει όχι μόνο μία κατανόηση της έννοιας αλλά επίσης και μία αίσθηση για τον τρόπο που δημιουργούνται τα μαθηματικά (Avital & Hansen, 1976).

Τα παραδείγματα διαδραματίζουν έναν κρίσιμο ρόλο για πολλούς μαθητές στην επαλήθευση, στην διορατικότητα και ως πρότυπα για τον τρόπο διεξαγωγής μιας απόδειξης (Baker, 1996)

Η νέα εκπαιδευτική προσέγγιση της μαθηματικής επαγωγής λαμβάνει υπόψη τις πιθανές αιτίες για την αποτυχία της τυποποιημένης προσέγγισης. Αποτελείται από φάσεις που αντιστοιχούν σε επίπεδα εννοιολογικής ανάπτυξης. Ξεκινά με την ψευδοεπαγωγή (quosi induction), μετά με την εσωτερίκευση και καταλήγει στην μαθηματική επαγωγή. Η έννοια της ψευδοεπαγωγής φαίνεται ζωτικής σημασίας στην διαδικασία εκμάθησης της αρχής της μαθηματικής επαγωγής. Η παρατήρηση αυτή είναι συνεπής και με την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής επαγωγής (Harel 2002).

Το σημαντικότερο αποτέλεσμα είναι ότι με αυτήν την εκπαιδευτική προσέγγιση οι μαθητές προσεγγίζουν τον τρόπο σκέψης τους κυρίως από την απλή εμπειρική συλλογιστική – με την μορφή γενίκευσης μοτίβων – στην μετασχηματιστική συλλογιστική – με την μορφή της διαδικασίας της γενίκευσης μοτίβων.

Για την προσέγγιση της μαθηματικής επαγωγής, οι μαθητές, και με βάση τα σχολικά εγχειρίδια φαίνεται να έχουν να αντιμετωπίσουν κυρίως προβλήματα ταυτοτήτων, ανισοτήτων και διαιρετότητας. Τυπικά αναδρομικά προβλήματα (προβλήματα επανάληψης όπως για παράδειγμα «Οι Πύργοι του Hanoi») δεν συναντά κανείς στα σχολικά εγχειρίδια. Με τον τρόπο αυτό, όπως είδαμε και στα προβλήματα που δημιουργεί η διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής με τον παραδοσιακό τρόπο, οι μαθητές μαθαίνουν τις αρχές της μαθηματικής επαγωγής αλλά χωρίς να κατανοούν πως προέρχονται αυτές από την ανάγκη επίλυσης προβλημάτων. Τους παρέχεται απλά ως μία συνταγή που πρέπει να ακολουθήσουν για να αποδείξουν ταυτότητες ισοτήτων, ανισοτήτων και προβλήματα διαιρετότητας. Ο Harel (2002) υποστηρίζει ότι αυτά τα προβλήματα είναι χρήσιμα και μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο αρκεί να εισαχθούν σε ένα κατάλληλο στάδιο με βάση την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών. Έτσι προτείνει μία νέα διδασκαλία η οποία περιλαμβάνει 3 φάσεις ανταποκρινόμενη σε 3 επίπεδα της εννοιολογικής ανάπτυξης:

Α) Στους μαθητές αποκαλύπτεται η μαθηματική επαγωγή μέσω σιωπηρών αναδρομικών προβλημάτων (ψευδοεπαγωγή – quosi induction), όπως:

1. Δίνονται 3^n νομίσματα, όλα όμοια εκτός από ένα που είναι βαρύτερο. Αποδείξτε ότι μπορείτε να βρείτε ποιο είναι το βαρύ κέρμα μόνο μέσα από n ζυγίσεις.
2. Ο Πύργος του Hanoi: Τρείς πάσσαλοι είναι κολλημένοι στο έδαφος. Σε έναν από αυτούς υπάρχει ένας σωρός δίσκων με τον μικρότερο στην κορυφή. Πρέπει να μεταφέρετε τον σωρό των δίσκων στους άλλους δύο πασσάλους, μετακινώντας κάθε δίσκο μόνο μία φορά, έτσι ώστε ένας δίσκος να μην τοποθετείται ποτέ πάνω από μικρότερο δίσκο. Πόσες κινήσεις χρειάζονται για την μεταφορά ενός σωρού από δίσκους:

Β) Σε μία δεύτερη φάση προτείνονται προβλήματα όπως τα παρακάτω αναδρομικά προβλήματα:

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 1$ ισχύει $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
2. Βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+....+\alpha^n$
3. Υπολογίστε το άθροισμα 1+3+…..+ $2n-1$

Ο στόχος των σιωπηρών αλλά σαφών αναδρομικών προβλημάτων είναι να κινητοποιήσει τους μαθητές στην εύρεση μεθόδου που χρειάζεται προκειμένου να αποδειχθούν οι παραπάνω προτάσεις.

Οι μαθητές όμως δεν φαίνεται γενικά να συνειδητοποιούν την σχέση μεταξύ των προβλημάτων της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ φάσης. Ότι ουσιαστικά τα δεύτερα μπορούν να αναχθούν στην μορφή των πρώτων και να αποδειχθούν.

Γ) Η τρίτη φάση είναι η αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Από μαθηματική άποψη, η επίσημη αρχή της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να θεωρηθεί ως η ακριβής διατύπωση της $1^{ης}$ φάσης. Από την άλλη πλευρά, το χάσμα μεταξύ των δύο είναι σημαντικό. Στην 1^{η} φάση, η πεποίθηση ότι ένας ισχυρισμός P(n) είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό n προέρχεται από την ικανότητα κάποιου, ξεκινώντας από τον ισχυρισμό P(1) να μεταβεί τον ισχυρισμό P(2) μετά στον P(3) κ.ο.κ. Προφανώς κάποιος δεν συνεχίζει σε πολλά βήματα αλλά αντιλαμβάνεται και μετά από λίγα βήματα ότι ο ισχυρισμός P(n) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n. Στην μαθηματική επαγωγή, από την άλλη, κάποιος βλέπει το συμπέρασμα $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ και κρίνει ότι δεν χρειάζεται να εκτελέσει τα βήματα $P(1) \Rightarrow P(2)$, $P(2) \Rightarrow P(3)$ κ.τ.λ. Έτσι, η πρώτη φάση μπορεί να θεωρηθεί ως μία περίληψη της μαθηματικής επαγωγής.

Το μοντέλο διδασκαλίας που προτείνει παραπάνω ο Harel βασίζεται σε 3 παιδαγωγικές αρχές, της δυαδικότητας (duality system), της αναγκαιότητας (necessity principle) και της επαναλαμβανόμενης συλλογιστικής (repeated reasoning)

Η αρχή της δυαδικότητας

Βασική αρχή της δυαδικότητας είναι η διάκριση μεταξύ των τρόπων σκέψης και των τρόπων κατανόησης. Οι τρόποι σκέψης των μαθητών επηρεάζουν τους τρόπους κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Και αντίστροφα, οι τρόποι κατανόησης των μαθηματικών επηρεάζουν τους τρόπους σκέψης των μαθητών.

Παρεμβάλλοντας, στους τρόπους κατανόησης των μαθητών μιας συγκεκριμένης έννοιας, στην περίπτωση μας αυτή των σιωπηρών προβλημάτων κατανόησης, οι μαθητές αλλάζουν τους τρόπους σκέψης τους για το τι αποτελεί απόδειξη.

Η αρχή της αναγκαιότητας

Οι μαθητές πιθανόν να μάθουν να βλέπουν την ανάγκη να προχωρήσουμε σε αυτό που θέλουμε να τους διδάξουμε. Λέγοντας «ανάγκη» εννοούμε την πνευματική ανάγκη σε αντίθεση με την κοινωνική ή οικονομική ανάγκη.

Η αρχή της επαναλαμβανόμενης συλλογιστικής

Ενώ η αρχή της αναγκαιότητας στοχεύει στην αρχική διαμόρφωση μιας έννοιας, η αρχή της επαναλαμβανόμενης συλλογιστικής οδηγεί στην εσωτερικοποίηση της έννοιας. Τα σιωπηρά αναδρομικά προβλήματα στην αρχή και τα ρητά στην συνέχεια βοηθούν τους μαθητές αρχικά να εσωτερικοποιήσουν και στην συνέχεια να αναπαραστήσουν την ψευδοεπαγωγή.

Ο Harel (2002) θεωρεί την αναδρομικότητα ως μία σημαντική διάσταση της μαθηματικής επαγωγής. Ισχυρίζεται ότι όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν αναδρομικά προβλήματα προτρέπονται προς την διαδικασία του γενικευμένου μοτίβου και όχι στο αποτέλεσμα του γενικευμένου μοτίβου.. Η διαδικασία αυτή του γενικευμένου μοτίβου σχετίζεται με την ανακάλυψη ενός κοινού τρόπου μετάβασης για το πέρασμα από οποιοδήποτε βήμα στο επόμενο. Από την άλλη, το αποτέλεσμα του γενικευμένου μοτίβου δείχνει ένα εμπειρικό σχήμα απόδειξης όπου η γενίκευση βασίζεται σε αριθμητικές σχέσεις συγκεκριμένων περιπτώσεων. Η διαδικασία του γενικευμένου μοτίβου είναι ένας τρόπος σκέψης που χαρακτηρίζει την δομή της μαθηματικής επαγωγής.

Μια κατανόηση σε σχέση με τις ιδιότητες των συνόλων των αριθμών είναι απαραίτητη προκειμένου οι μαθητές να συλλάβουν την δομή της μαθηματικής επαγωγής. Ιδιαίτερα η έννοια του ανάδοχου αριθμού μπορεί να συγκριθεί με την έννοια της πυκνότητας στους πραγματικούς αριθμούς. Μία ερώτηση, όσον αφορά τους λόγους για τους οποίους η μαθηματική επαγωγή λειτουργεί μόνο για τους θετικούς ακέραιους και όχι σε άλλα σύνολα αριθμών μπορεί να διευκολύνει την υπέρβαση των μαθητών από την καθαρά πρακτική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής. Επιπλέον, εξετάζοντας την έννοια της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών, κάτι το οποίο δεν έγινε σαφές από τα σχολικά μαθηματικά, φαίνεται να βοηθάει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ της δομής των συνόλων των φυσικών και των πραγματικών αριθμών (Palla, Potari, & Spyrou, 2012).

Συνοψίζοντας, οι Leron και Zazkis (1986) προτείνουν ότι ένας αποτελεσματικός τρόπος εισαγωγής της μαθηματικής επαγωγής είναι η κινητοποίηση των μαθητών με ένα ενδιαφέρον αναδρομικό πρόβλημα ή ένα πρόβλημα που να σχετίζεται με την υπολογιστική αναδρομή. Οι Avital και Hansen (1976) και ο Baker (1996) συμφωνούν ότι πριν από την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή πρέπει να προηγηθεί η εμπλοκή των μαθητών με διατυπώσεις εικασιών και μοτίβων ενώ ο Harel (2002) ισχυρίζεται ότι όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν αναδρομικά προβλήματα προτρέπονται προς την διαδικασία του γενικευμένου μοτίβου και όχι στο αποτέλεσμα του γενικευμένου μοτίβου. Οι Palla, Potari, και Spyrou (2012) αναφέρουν ότι μια κατανόηση σε σχέση με τις ιδιότητες των συνόλων των αριθμών είναι απαραίτητη προκειμένου οι μαθητές να συλλάβουν την δομή της μαθηματικής επαγωγής.

2.5 Η κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής

Η κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει μέσω της κατανόησης της δομικής σχέσης της με το σύνολο των φυσικών αριθμών και μέσω του τρόπου με τον οποίο η μαθηματική επαγωγή λειτουργεί για την απόδειξη αναδρομικών προβλημάτων.

Η πλειοψηφία των μαθητών, ενώ κάνει σωστές εικασίες δεν μπορεί να διατυπώσει μία αλγεβρική πρόταση ώστε στην συνέχεια να την αποδείξει. Η ασυνέχεια μεταξύ του ισχυρισμού και της απόδειξης αποδίδεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν μπορούν να κατασκευάσουν μία απόδειξη με μαθηματική επαγωγή γιατί έχουν εστιάσει στο αποτέλεσμα του γενικευμένου μοτίβου και όχι στην διαδικασία δημιουργίας του. Ωστόσο, οι μαθητές αισθάνονται την ανάγκη να αποδείξουν την εικασία τους αλλά αποτυγχάνουν να κάνουν συμβολικές γενικεύσεις (Palla, Potari & Spyrou, 2012).

Η μαθηματική επαγωγή μπορεί να διδαχθεί με τρόπο ουσιαστικό στην ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν καθήκοντα που ενθαρρύνουν την επικέντρωσή τους στις κρίσιμες ιδιότητες της μαθηματικής επαγωγής, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των συνόλων των αριθμών με τα οποία είναι εξοικειωμένοι . Μια τέτοια έμφαση θα μπορούσε να ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν μαθηματική επαγωγή με νόημα και να κατασκευάσουν σημαντικές δομικές αποδείξεις (Weber, 2005). Εξ άλλου, τα γεωμετρικά μοτίβα μπορούν να αποτελέσουν ένα αποτελεσματικό πλαίσιο για την πρόκληση των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να κάνουν εικασίες, να διατυπώσουν αλγεβρικές σχέσεις και τέλος να παράγουν μία απόδειξη, κυρίως αντιστοιχώντας κατάλληλα την αναδρομικότητα της μαθηματικής επαγωγής στην δομή του μοτίβου (Palla, Potari, & Spyrou, 2012).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κεφάλαιο της μεθοδολογίας παρουσιάζεται μέσα από 3 διαφορετικές υποενότητες. Η πρώτη αφορά την περιγραφή του δείγματος δηλαδή τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, την τάξη στην οποία φοιτούσαν, τις ομάδες στις οποίες χωρίστηκαν και την περιγραφή του μαθηματικού υπόβαθρου των μαθητών δηλαδή τις γνώσεις τους στα μαθηματικά και τις γνώσεις τους σχετικά με το πρόβλημα που τους ζητήθηκε να επιλύσουν. Στην δεύτερη ενότητα παρουσιάζεται η δραστηριότητα της έρευνας δηλαδή τι δόθηκε στους μαθητές ως πρόβλημα, σε πόσο χρόνο ζητήθηκε να απαντήσουν, που, πόσο και πότε παρενέβαινε ο ερευνητής. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζεται η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων δηλαδή η μεταγραφή σε κείμενο από τα αρχεία ήχου, η αρίθμηση και η ανάλυση των πρωτόκολλων και ο εντοπισμός στοιχείων ενδιαφέροντος της έρευνας σε αυτά.

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

3.1.1 Περιγραφή του δείγματος

Δεδομένου ότι η μαθηματική επαγωγή παραδοσιακά διδάσκεται στο Λύκειο λόγω του ότι απαιτεί δεξιότητες σε αλγεβρικές πράξεις, για την έρευνα επιλέχθηκαν μαθητές Λυκείου. Συνολικά συμμετείχαν στην έρευνα 15 μαθητές εκ των οποίων οι 10 ήταν κορίτσια και οι 5 αγόρια. Συγκεκριμένα η έρευνα έγινε με 5 ζεύγη μαθητών ή ομάδες μαθητών με περισσότερα από δύο άτομα:

1) 2 ομάδες μαθητών της Α λυκείου με 3 μέλη η κάθε μία. Η έρευνα με την μία ομάδα έγινε στον χώρο του σπιτιού του ερευνητή και με την άλλη σε φροντιστήριο στην Ευκαρπία Θεσσαλονίκης

2) 2 ομάδες μαθητών της Β λυκείου με 2 μέλη η μία ομάδα και 5 μέλη η άλλη ομάδα. Η έρευνα με την μία ομάδα με τα 2 μέλη έγινε στον χώρο του σπιτιού του ερευνητή και με την άλλη με τα 5 μέλη σε φροντιστήριο στο Φίλυρο Θεσσαλονίκης.

3) 1 ομάδα μαθητών της Γ λυκείου με 2 μέλη. Η έρευνα έγινε στο ΓΕΛ Μουριών του Ν. Κιλκίς.

3.1.2 Μαθηματικό υπόβαθρο

Η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή απαιτεί κυρίως στο επαγωγικό της βήμα κάποιες δεξιότητες σε αλγεβρικές πράξεις. Επειδή ο στόχος ήταν η εννοιολογική κατανόηση της μεθόδου και όχι τόσο η κατανόηση του αλγοριθμικού της μέρους, επιλέχθηκαν για την έρευνα μαθητές που είχαν ένα καλό και στοιχειώδες επίπεδο στα μαθηματικά ώστε να μην αναλωθούν τον περισσότερο χρόνο στην κατανόηση των πράξεων που γίνονται στο επαγωγικό βήμα. Για την συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές που συμμετείχαν θα έπρεπε να είναι σε θέση:

1) Να απαλείφουν παρενθέσεις και να κάνουν αναγωγή όμοιων όρων με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας
2) Να έχουν εμπεδώσει τις ιδιότητες των δυνάμεων
3) Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες
4) Να μετατρέπουν πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων
5) Να γνωρίζουν την έννοια της ρητής αλγεβρικής παράστασης, να απλοποιούν ρητές παραστάσεις, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν ρητές παραστάσεις, να προσθέτουν και να αφαιρούν ρητές παραστάσεις

Δεδομένου ότι παραδοσιακά η μαθηματική επαγωγή διδάσκεται σε μαθητές λυκείου, και το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής συναντάται σε σχολικά εγχειρίδια λυκείου από την εισαγωγή των μοντέρνων μαθηματικών και έπειτα, οι μαθητές που επιλέχθηκαν για την έρευνα ήταν μαθητές Α, Β και Γ λυκείου που ως απόφοιτοι Γυμνασίου είχαν μία ευχέρεια στις αλγεβρικές πράξεις που αναφέρονται παραπάνω όπως να κάνουν παραγοντοποίηση, να εφαρμόζουν την επιμεριστική ιδιότητα, να κάνουν πράξεις με κλασματικές παραστάσεις και δυνάμεις. Επίσης ήταν μαθητές οι οποίοι έδειξαν στην πορεία των μαθητικών τους χρόνων ένα ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και κατά συνέπεια και ένα ενδιαφέρον για την συμμετοχή τους στην συγκεκριμένη έρευνα και την εμπλοκή τους στην ανάγνωση ενός άγνωστου μαθηματικού κειμένου αλλά κανείς από αυτούς δεν γνώριζε την μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτική διαδικασία εφόσον τα τρία τελευταία χρόνια το κεφάλαιο της Θεωρίας Αριθμών στα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β λυκείου είναι εκτός διδακτέας ύλης. Οι μαθητές της Α λυκείου προσανατολίζονταν προς την θετική κατεύθυνση, της Β λυκείου ήταν μαθητές της θετικής κατεύθυνσης και οι 2 μαθητές της Γ λυκείου ήταν μαθητές της ομάδας προσανατολισμού οικονομίας και πληροφορικής. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί πως από τις 5 ομάδες, οι δύο, μία της Β λυκείου και μία της Γ λυκείου αποτελούνταν από 2 μόνο άτομα. Αυτό όπως θα δούμε παρακάτω στις πορείες επίλυσης δεν διαφοροποίησε σημαντικά τις ομάδες αυτές σε σχέση με τις ομάδες περισσότερων ατόμων ως προς τα στάδια επίλυσης προβλήματος κατά Polya που εντοπίστηκαν ούτε ως προς τα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης που αναδύθηκαν.

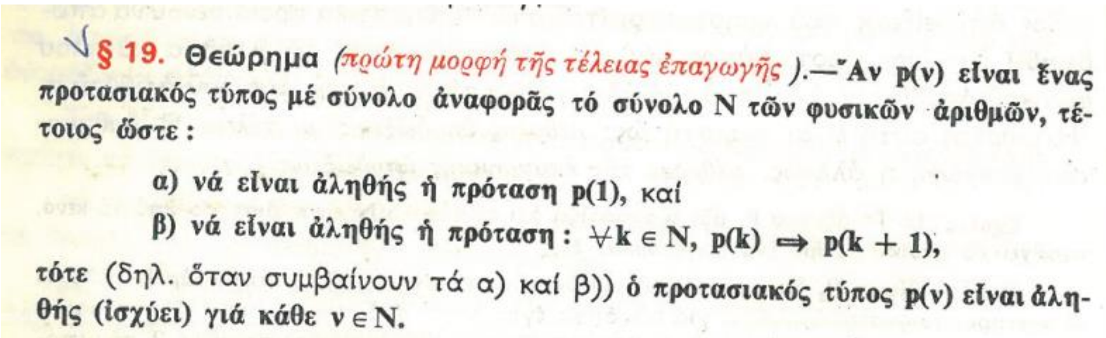
3.2 Παρουσίαση των δραστηριοτήτων

Οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017) προτείνουν ότι οι μαθητές μπορούν να μπουν αποτελεσματικά στην διαδικασία κατανόησης ενός δεδομένου μαθηματικού κειμένου στα πλαίσια της απόδειξης και προτείνουν τρόπους ώστε να γίνει αυτό, όπως να πούμε στους μαθητές ότι πιθανόν στο επιχείρημα, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο, να υπάρχει λάθος ή να οργανώσουμε κάποια μαθήματα όπου οι μαθητές να ελέγχουν τις προσπάθειες απόδειξης των συμμαθητών τους ή να τεθεί ένα πρόβλημα που η λύση του θα εξαρτιόταν απαραίτητα από την κατανόηση γραπτού μαθηματικού υλικού που θα είχε δοθεί προηγουμένως στην τάξη ή να ζητηθεί να μελετήσουν οι μαθητές μια γραπτή απόδειξη, και αφού τους απομακρύνουμε το γραπτό κείμενο να τους κατευθύνουμε στο να αναπαραγάγουν το επιχείρημα. Στα πλαίσια μιας τέτοιας προσέγγισης στην παρούσα έρευνα προσεγγίζεται το γεγονός της ανάγνωσης μαθηματικού κειμένου από τους μαθητές (ένα αυθεντικό κείμενο απόδειξης), ως πρόβλημα, εντάσσοντάς το στο πλαίσιο της ανάγνωσης μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος και ζητώντας να τεκμηριώσουν γιατί τα βήματα της απόδειξης είναι όντως απόδειξη η οποία τεκμηρίωση αποτελεί και την λύση του προβλήματος.

Στις 5 ομάδες μαθητών δώσαμε

1) ένα απόσπασμα από το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών : Καρλ Φριντριχ Γκαους» της Tent Margaret (σελ.57-60), (βλ. Παράρτημα Α).
2) το θεώρημα της Μαθηματικής Επαγωγής από το σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β Λυκείου Άλγεβρα του Ηλία Β. Ντζιώρα (1978, σελ. 22)

Εικόνα 1: Το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής από το σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β Λυκείου Άλγεβρα του Ηλία Β. Ντζιώρα (1978, σελ. 23)



§ 19. Θεώρημα *(πρώτη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς)*.—**Ἂν p(ν) εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τέτοιος ὥστε :**

α) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση p(1), καί

β) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση : $\forall k \in N$, $p(k) \Rightarrow p(k+1)$,

τότε (δηλ. ὅταν συμβαίνουν τά α) καί β)) **ὁ προτασιακός τύπος p(ν) εἶναι ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε** $\nu \in N$.

3) μία εφαρμογή του θεωρήματος από το σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β Λυκείου Άλγεβρα του Ηλία Β. Ντζιώρα (1978, σελ. 23)

Εικόνα 2: Εφαρμογή του θεωρήματος της μαθηματικής επαγωγής από το σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β Λυκείου Άλγεβρα του Ηλία Β. Ντζιώρα (1978, σελ. 23).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η : Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει ὁ τύπος :

$$p(\nu): \qquad 1+2+3+\cdots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη **α)** Γιά $\nu = 1$ ἡ (1) γίνεται : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, ἀληθής.

β) Ἄς δεχθοῦμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu = k$ $(k \in \mathbf{N})$, δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (2)$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$, δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad (3)$$

Πράγματι, ἄν προσθέσουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $(k+1)$ ἔχουμε:

$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, δηλαδή ἡ (3) ἰσχύει.

γ) Συμπέρασμα : Στό α) ἀποδείξαμε ὅτι $p(1)$ εἶναι ἀληθής. Στό β) ἀποδείξαμε ὅτι: ἄν $p(k)$ εἶναι ἀληθής, τότε καί ἡ πρόταση $p(k+1)$ εἶναι ἀληθής *. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

και τους ζητήσαμε να διαβάσουν τα τρία κείμενα και να απαντήσουν στην συνέχεια στις παρακάτω ερωτήσεις

1) Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του λογοτεχνικού κειμένου και της εφαρμογής του Θεωρήματος;
2) Τι λέει το Θεώρημα της Μαθηματικής επαγωγής. Μπορείτε να διακρίνετε τα βήματα σε μια απόδειξη Μαθηματικής επαγωγής; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτή η σειρά από βήματα αποτελεί όντως απόδειξη; Πώς μας πείθει για την αλήθεια της πρότασης που αποδεικνύει;

Τα συγκεκριμένα κείμενα επιλέχθηκαν για την έρευνα επειδή θέλαμε να εμπλακούν οι μαθητές σε ένα τελείως άγνωστο σε αυτούς μαθηματικό κείμενο όχι μόνο ως προς το περιεχόμενο αλλά και ως προς τον μαθηματικό συμβολισμό. Ταυτόχρονα ένα κείμενο που προέρχεται από μαθηματικό σχολικό εγχειρίδιο διασφαλίζει ότι το θεώρημα απευθύνεται σε μαθητές λυκείου αλλά διασφαλίζει ως σχολικό εγχειρίδιο και την εγκυρότητα της διατύπωσης και του συμβολισμού. Όσον αφορά το λογοτεχνικό κείμενο από το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών: Καρλ Φριντριχ Γκαους», δόθηκε συμπληρωματικά στους μαθητές προκειμένου να σχετιστεί και να γίνει μια αντιπαραβολή με την εφαρμογή του θεωρήματος της μαθηματικής επαγωγής.

Όλες οι ομάδες μελέτησαν το παραπάνω αυθεντικό μαθηματικό κείμενο για μισή ώρα περίπου και στην συνέχεια ξεκίνησε η συζήτηση. Όλες οι ομάδες είχαν στην διάθεσή τους περίπου 1,5 ώρα ώστε να απαντήσουν στις παραπάνω ερωτήσεις.

Από τους μαθητές ζητήθηκε να εκφράζουν δυνατά την σκέψη τους και να συζητάν μεταξύ τους το πρόβλημα που τους είχε τεθεί. Ο ερευνητής παρενέβαινε για να λύνει απορίες σχετικές με την ορολογία και τα μαθηματικά σύμβολα του κειμένου και για να επαναφέρει ανά τακτά χρονικά διαστήματα τους μαθητές στο ερώτημα «γιατί η σειρά βημάτων της μαθηματικής επαγωγής είναι όντως απόδειξη;».

Το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής, συνοδευόμενο με την εφαρμογή και την απόδειξη επιλέχθηκαν από ένα παλαιότερο βιβλίο άλγεβρας για 2 λόγους. Ο ένας σχετίζεται με την πρόταση των Μαμωνά και Παπαδόπουλου (2017) πως ίσως το πιο πρόσφορο κείμενο για ανάγνωση μαθηματικού κειμένου είναι η απόδειξη και ο άλλος λόγος είναι πως σε παλαιότερα σχολικά εγχειρίδια διασφαλίζεται η πληρότητα και το μέγιστο πλήθος πληροφοριών που μπορεί να περιέχει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής σε σχέση με την παρουσίασή του σε πιο σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια. Το 2^{ο} από τα δύο ερωτήματα που δόθηκε στους μαθητές είχε στόχο να τους κινητοποιήσει σε μία προσπάθεια επίλυσης του «προβλήματος» (τι ψάχνω να βρω διαβάζοντας το άγνωστο μαθηματικό κείμενο;) ώστε να εντοπιστούν από τον ερευνητή τα διαφορετικά βήματα επίλυσης κατά Polya. Ενθαρρύνθηκε η συνεργασία των μελών των ομάδων στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος ώστε να εξεταστεί αν αναδύονται όψεις κοινωνικού μεταγνωστικού ελέγχου.

Στο 2^{ο} ερώτημα επίσης ζητείται από τους μαθητές να τεκμηριώσουν γιατί τα βήματα της επαγωγής αποτελούν απόδειξη, ερώτημα που σχετίζεται με το 3^{ο} ερευνητικό ερώτημα της παρούσας έρευνας. Ως εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής ορίζουμε την τεκμηρίωση γιατί τα βήματα της επαγωγής (η απόδειξη της πρότασης αρχικά για ν=1 και στην συνέχεια για ν=κ+1 με προϋπόθεση ότι ισχύει η πρόταση για ν=κ) αποτελούν απόδειξη. Πως σχετίζονται αυτά τα βήματα μεταξύ τους, γιατί χρησιμοποιείται σαν πρώτο βήμα η απόδειξη της πρότασης για ν=1 και πως διασφαλίζει την γενίκευση της πρότασης το επαγωγικό βήμα της απόδειξης.

3.3 Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Όλες οι συναντήσεις ηχογραφήθηκαν από την αρχή μέχρι το τέλος. Από την πρώτη στιγμή κάθε συνεδρίας, ζητήθηκε από τους μαθητές να «σκέφτονται φωναχτά» (thinking aloud). Υπήρχαν αρκετά μεγάλα διαστήματα (των 10 και των 15 λεπτών) που οι μαθητές δεν μιλούσαν και έτσι ο ερευνητής τους υπενθύμιζε ότι πρέπει να εκφράζουν ανοιχτά τις σκέψεις τους και να τις συζητάν μεταξύ τους. Έγινε προσπάθεια η αλληλεπίδραση των μαθητών με τον ερευνητή να περιοριστεί όσο το δυνατόν στο ελάχιστο αλλά με κάποιες ομάδες αυτό ήταν εξαιρετικά δύσκολο λόγω της δυσκολίας τους να κατανοήσουν το κείμενο ή να εκφράσουν προφορικά τις σκέψεις τους.

Τη συλλογή των δεδομένων, ακολούθησε η απομαγνητοφώνησή τους (transcription of data). Συγκεκριμένα, αφού απομαγνητοφωνήθηκε η συνέντευξη της κάθε ομάδας, το πρωτόκολλο χωρίστηκε σε γραμμές, οι οποίες αριθμήθηκαν, με τη χρήση του προγράμματος Microsoft Office Word (βλ. Παράρτημα Β). Η αρίθμηση αυτή διευκολύνει την αναγνώριση και την περεταίρω ανάλυση κάποιου μέρους του απομαγνητοφωνημένου πρωτοκόλλου. Ο ερευνητής είχε στη διάθεσή του για μελέτη το απομαγνητοφωνημένο πρωτόκολλο της συνέντευξης της κάθε ομάδας. Τα αριθμημένα πρωτόκολλα υπάρχουν ως Παράρτημα στο τέλος της εργασίας αυτής.

Στη συνέχεια, το αριθμημένο απομαγνητοφωνημένο πρωτόκολλο αναλύθηκε στη γραμμή της ποιοτικής ανάλυσης περιεχομένου (Mayring, 2014) . Σε πρώτη φάση, πραγματοποιήθηκε μία ανίχνευση στιγμιότυπων στη διαδικασία επίλυσης, τα οποία φάνηκαν να σχετίζονται με τα στάδια επίλυσης προβλήματος κατά Polya (κατανόηση, επινόηση σχεδίου, εκτέλεση του σχεδίου, ανασκόπηση του προβλήματος) έτσι όπως αυτά παρουσιάζονται από τους Μαμωνά και Παπαδόπουλο (2017) (βλ. παρ. 2.1.1) καθώς και κατά πόσο κατανοούν εννοιολογικά οι μαθητές την μαθηματική επαγωγή με την έννοια ότι αντιλαμβάνονται γιατί τα βήματα της μαθηματικής επαγωγής αποτελούν απόδειξη . Αυτό οδήγησε στην περιγραφή της πορείας επίλυσης της κάθε ομάδας. Πιο συγκεκριμένα περιγράφηκαν τα στάδια από τα οποία πέρασαν οι λύτες προκειμένου να ολοκληρώσουν τη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος και αναλύθηκαν εκείνα τα σημεία, τα οποία έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση του «προβλήματος», την επινόηση ενός σχεδίου λύσης του, την εκτέλεση του σχεδίου και την επαλήθευση του.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, τα δεδομένα αναλύθηκαν στη βάση εντοπισμού αποσπασμάτων των πρωτόκολλων με χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης, σύμφωνα με το μοντέλο για την κοινωνική μεταγνώση (social metacognition in groups) των Chiou και Kuo (2009).

Αυτό με τη σειρά του οδήγησε στην αποτύπωση των χαρακτηριστικών επίλυσης της κάθε ομάδας. Σε αυτό παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της συνεργατικής επίλυσης (ενέργειες ελέγχου κατά Chiu και Kuo, 2009) που εντοπίσθηκαν κατά την ανάλυση του πρωτοκόλλου της κάθε ομάδας λυτών. Και στα δυο κείμενα παρατίθενται οι απαραίτητες παραπομπές όπως και αποσπάσματα από τους διαλόγους μεταξύ των λυτών, προκειμένου να διευκολύνεται η σύνδεση του αναλυμένου κειμένου και του πρωτοκόλλου της κάθε ομάδας λυτών αλλά και να διευκρινίζονται σημεία που έχουν κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Όσον αφορά τις παραπομπές, είναι της μορφής «Αχ.ψ». Αρχικά, το «Α» σημαίνει την τάξη της ομάδας για το πρωτόκολλο του οποίου γίνεται αναφορά (Α για την Α λυκείου, Β για την Β λυκείου, Γ για την Γ λυκείου). Το «χ» σημαίνει τον αριθμό της ομάδας, πχ έχουμε 2 ομάδες από την Α τάξη, τις χωρίσαμε σε Α1 και Α2. Το «ψ» παραπέμπει στη γραμμή του αριθμημένου πρωτοκόλλου για την οποία γίνεται η αναφορά. Αν γίνεται αναφορά σε περισσότερες από μία γραμμές του αριθμημένου πρωτοκόλλου, η παραπομπή είναι της μορφής «$ψ_1$-$ψ_2$». Για παράδειγμα, η παραπομπή «Α1.1-5», σημαίνει ότι το σημείο που αναλύεται βρίσκεται στο αριθμημένο πρωτόκολλο της ομάδας Α1 (της μίας από τις δύο της Α τάξης) και πρόκειται για τις γραμμές ένα έως πέντε. Τα πρωτόκολλα βρίσκονται στο τέλος της εργασίας στο παράρτημα Β.

ΚΕΦ.4: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ενότητα των αποτελεσμάτων περιλαμβάνει τις πορείες επίλυσης καθώς και τα χαρακτηριστικά της συνεργατικής επίλυσης των 5 ομάδων που συμμετείχαν στην έρευνα. Τα μέλη της κάθε ομάδας κλήθηκαν να μελετήσουν ένα απόσπασμα από το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των μαθηματικών», το θεώρημα της Μαθηματικής Επαγωγής και μία εφαρμογή του θεωρήματος και στην συνέχεια να απαντήσουν σε δύο ερωτήματα που αφορούν την σχέση του λογοτεχνικού κειμένου με την εφαρμογή, την αναγνώριση των βημάτων του θεωρήματος στην εφαρμογή και την αιτιολόγηση γιατί τα βήματα αυτά είναι απόδειξη (βλ. κεφ.3). Τα παραπάνω μαθηματικά κείμενα και οι ερωτήσεις δόθηκαν στους μαθητές στο πλαίσιο της ανάγνωσης μαθηματικού κειμένου ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος (Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017)) και από την διαδικασία συλλογής δεδομένων προέκυψαν 5 πρωτόκολλα.

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται οι πορείες επίλυσης κάθε ομάδας όπως και τα χαρακτηριστικά της συνεργατικής επίλυσης για κάθε μία από αυτές. Η παρουσίαση των πορειών είναι απαραίτητη γιατί αποτυπώνουν την σειρά ενεργειών στην διαδικασία επίλυσης όπως αυτή προκύπτει μέσα από τα πρωτόκολλα. Η διαδικασία αυτή συναντάται συνήθως σε έρευνες που αναλύουν πρωτόκολλα (Schoenfeld, 1985).

Επισημαίνονται στις πορείες αυτές τα σημεία που σχετίζονται με κάθε έναν από τους ερευνητικούς άξονες (στάδια επίλυσης προβλήματος κατά Polya, εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής, χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης κατά Chiou και Kuo (2009)).

Οποιαδήποτε αναφορά σε αποσπάσματα των πρωτοκόλλων συνοδεύεται από ένα αλφαριθμητικό κομμάτι μέσα σε αγκύλη. Αυτό περιλαμβάνει την ομάδα, και τους αριθμούς των σειρών από το πρωτόκολλο (π.χ. Α1. 72-75) και σε κάποιες περιπτώσεις μέσα σε παρένθεση παρατίθενται αυτούσια τα λόγια των μαθητών που μας παραπέμπει το αλφαριθμητικό κομμάτι.

4.1 Πορεία επίλυσης της ομάδας Α1

Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν το μαθηματικό κείμενο διαβάζουν το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής και την εφαρμογή του θεωρήματος για 20 λεπτά ($1^{ο}$ στάδιο επίλυσης προβλήματος κατά Polya, την *εξοικείωση με το πρόβλημα*). Περιγράφουν το πρώτο βήμα της επαγωγής, δηλαδή την αντικατάσταση του ν με το 1, και κάνουν χρήση συγκεκριμένων περιπτώσεων στον τύπο της εφαρμογής [Α1. 11-12 και 17-18], προσπαθώντας να καταλάβουν τα δεδομένα και να κατανοήσουν πως λειτουργεί ο προτασιακός τύπος [Α1. 33].

Οι μαθητές εντοπίζουν στην εφαρμογή (α) το πρώτο βήμα (ν=1), (β) στη συνέχεια τη χρήση μεταβλητής («αντικαθιστούμε με έναν άγνωστο αριθμό», Α1.70) και τέλος (γ) το τρίτο αλγοριθμικό μέρος της επαγωγικής διαδικασίας [Α1. 72-73].

Στην προσπάθειά τους να αντιληφθούν τι είναι αυτό που στην ουσία πραγματεύεται το συγκεκριμένο μαθηματικό κείμενο, αποφασίζουν να κάνουν χρήση συγκεκριμένων περιπτώσεων αντικαθιστώντας το κ με συγκεκριμένους αριθμούς [Α1.97] (*επινόηση σχεδίου επίλυσης*).

Η προσπάθεια αυτή χαρακτηρίζεται από περιοδική επιστροφή των λυτών στο κείμενο όπου ξαναδιαβάζουν τα δεδομένα. (*κατανόηση του προβλήματος*), Αντιλαμβάνονται τη γενικότητα που διαπραγματεύεται το κείμενο («Καταλήγουμε ότι ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό», Α1.155]), δηλαδή ότι η απόδειξη περιλαμβάνει το στοιχείο της γενίκευσης χωρίς ωστόσο να είναι ακόμα σε θέση να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί τα συγκεκριμένα βήματα συνιστούν μια απόδειξη.

Αυτό είναι και το ερώτημα που περιοδικά φέρνει στο προσκήνιο η παρέμβαση του ερευνητή. Οι μαθητές στο διάστημα αυτό φτάνουν σε μια διαπίστωση που είναι κομβικής σημασίας για την μέθοδος της επαγωγικής απόδειξης και που συνδέεται με την εννοιολογική κατανόηση της επαγωγής που είναι και το ζητούμενο: «Είναι διαδοχικοί αριθμοί» [Α1.169]. Η διαδοχικότητα των φυσικών εξασφαλίζει ουσιαστικά το «Για κάθε» της εκφώνησης και άρα τη γενική ισχύ της συγκεκριμένης αποδεικτικής διαδικασίας.

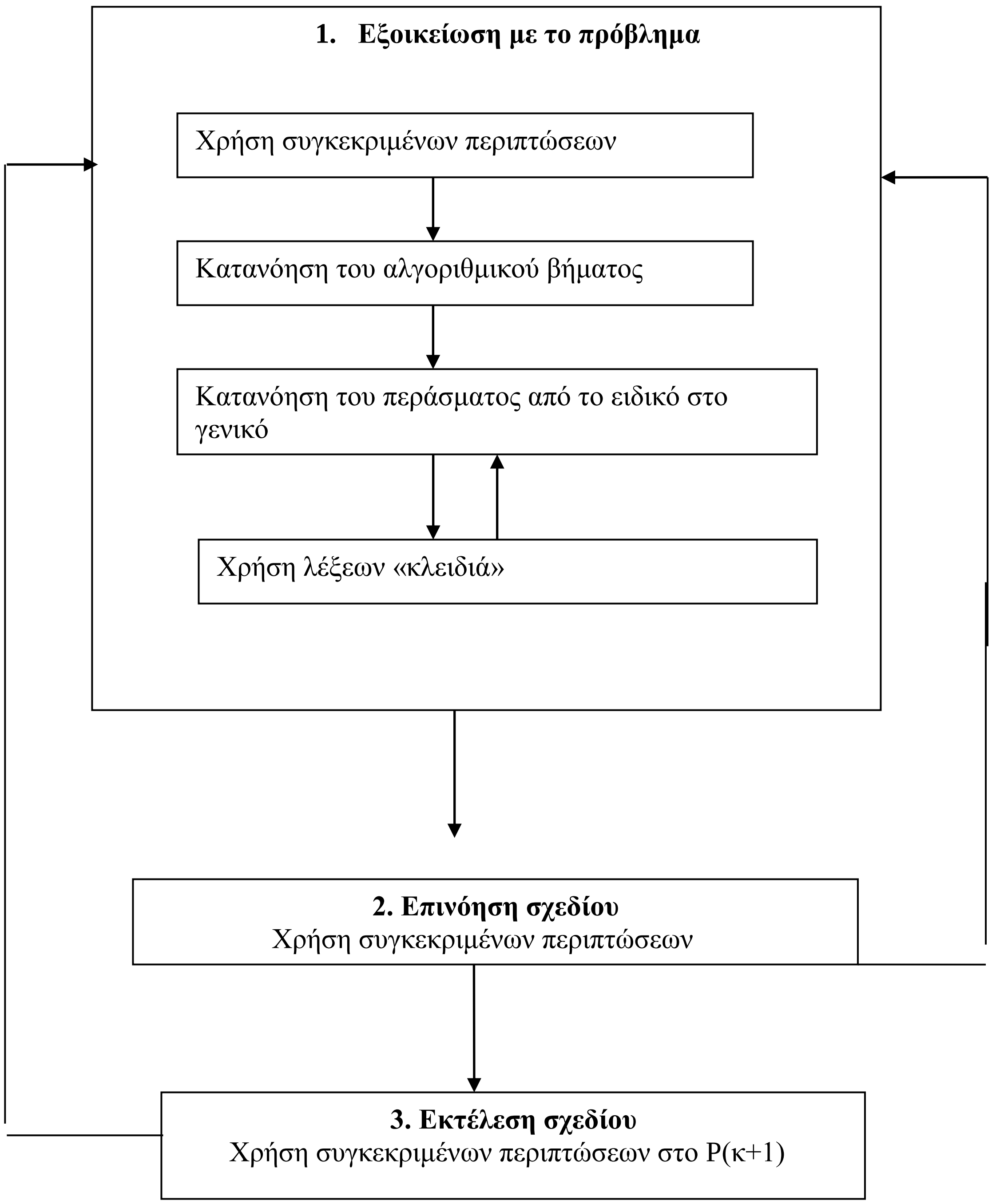
Αντικαθιστώντας στο P(κ+1) το κ=1 (*Εκτέλεση σχεδίου Επίλυσης*), και βλέποντας ότι με βάση την ισχύ για το 1 πετυχαίνουν την ισχύ για το 2 και ότι αυτό εξασφαλίζει την ισχύ για το 3 («Θα προσθέσουμε 1» [Α.209, 216]) αρχίζουν και κατανοούν σταδιακά πως οι επιλογές των μεταβλητών (ν=1, ν=κ, ν=κ+1) στα βήματα της επαγωγής δεν είναι τυχαία [Α1.213-215] και ότι υπάρχει σαφής συσχέτιση σε αυτό που ισχύει για κάποιον αριθμό και για τον επόμενό του («Αφού μας λέει ότι ισχύει για το 1 ισχύει και για το επόμενο», [Α.1.220]. Αυτό όμως δεν φαίνεται να είναι αρκετό ώστε να φτάσουν στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής και να είναι σε θέση να την εξηγήσουν.

Συνολικά θα πρέπει να τονισθεί ότι οι μαθητές παραμένουν στο μεγαλύτερο μέρος της διαδικασίας σε μια διαδοχική μετάβαση από την *εξοικείωση(κατανόηση) με το πρόβλημα*, στην *αναζήτηση ενός σχεδίου* επίλυσης και ξανά επιστροφή στην κατανόηση. Μετά τη μελέτη συγκεκριμένων περιπτώσεων και την κατανόηση των βημάτων του αλγοριθμικού μέρους της διαδικασίας της επαγωγής οι λύτες κινούνται συνεχώς στη σφαίρα της κατανόησης τού πώς αυτό που οι ίδιοι διαπιστώνουν να ισχύει στις ειδικές περιπτώσεις μπορεί να αναχθεί σε κάτι που μοιάζει να έχει γενική ισχύ. Στην προσπάθεια αυτή πλησιάζουν πολλές φορές στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης όπως φαίνεται από τη συχνή χρήση λέξεων κομβικής σημασίας που συνδέονται με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής.

Η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών είχε να λύσει ένα πρόβλημα και αυτό ήταν η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου που διαπραγματευόταν την απόδειξη με επαγωγή. Η λύση του προβλήματος θα ήταν να φτάσει η ομάδα στο να αντιληφθεί το περιεχόμενο του κειμένου και να είναι σε θέση να τεκμηριώσει γιατί η προτεινόμενη ακολουθία βημάτων αποτελεί απόδειξη. Η ομάδα, μέσα στη μιάμιση ώρα που είχε στη διάθεσή της, δεν έφτασε στο να λύσει το πρόβλημα αυτό. Αντιλήφθηκε τα απαιτούμενα βήματα, όμως δεν μπόρεσε να τεκμηριώσει πλήρως γιατί αυτά τα συγκεκριμένα βήματα αποτελούν απόδειξη.

Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα καθώς και σε όλα τα σχεδιαγράμματα στο τέλος κάθε πορείας επίλυσης, μέσα σε κάθε πλαίσιο περιγράφονται τα στάδια επίλυσης κατά Polya με έντονα γράμματα και ακολουθούν σε κάθε πλαίσιο οι ενέργειες που εντοπίστηκαν και σχετίζονται με το συγκεκριμένο στάδιο. Για παράδειγμα, η «χρήση συγκεκριμένων περιπτώσεων» είναι μία ενέργεια που σχετίζεται με το $1^{ο}$ στάδιο επίλυσης κατά Polya, την εξοικείωση με το πρόβλημα (βλ. παρ. 2.1.1). Τα βέλη δείχνουν την μετάβαση της ομάδας από την μία ενέργεια στην άλλη και από το ένα στάδιο επίλυσης στο άλλο. Το πλαίσιο με την επίλυση προβλήματος, που δεν υπάρχει στο συγκεκριμένο σχεδιάγραμμα σχετίζεται με το αν έφτασαν οι μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής έτσι όπως την ορίσαμε στην παράγραφο 3.2.

Σχεδιάγραμμα 1. Σχηματική αναπαράσταση της πορείας λύσης του προβλήματος της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από την ομάδα Α1.



4.1.1 Χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης της ομάδας Α1

Η συγκεκριμένη ομάδα δεν παρουσίασε χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης. Οι μαθητές μελετούσαν πολύ ώρα το κείμενο μόνοι τους, δεν εξωτερίκευαν με ευκολία την άποψή τους και παρότι ενθαρρύνθηκαν από τον ερευνητή να συζητούν μεταξύ τους και να εκφράζουν δυνατά τις σκέψεις τους, δεν ανταποκρίθηκαν σε αυτό.

4.2 Πορεία επίλυσης της ομάδας Α2

Μετά από 20 λεπτά ανάγνωσης , οι μαθήτριες ξεκινούν συγκρίνοντας το πρόβλημα με άλλα παρόμοια που έχουν λύσει (*εξοικείωση με το πρόβλημα*) και τους είναι οικεία όπως προβλήματα με ακολουθίες και αριθμητική πρόοδο [Α2. 9-11]. Προσπαθούν να περιγράψουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια [Α2.25-29] (χαρακτηριστικό του σταδίου της κατανόησης του προβλήματος), και ακριβώς στα πλαίσια της κατανόησης αντιλαμβάνονται ότι το σύνολο αναφοράς στο θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής είναι οι φυσικοί αριθμοί [Α2.33] και εντοπίζουν ότι το θεώρημα αναφέρεται σε κάποιες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου να αποδειχθεί η πρόταση [Α2. 34-36].

Σε μία πρώτη φάση δεν κατανοούν πλήρως το επαγωγικό βήμα. Κατανοούν ότι πρέπει να αποδείξουμε την πρόταση για ν=κ+1 αλλά δεν βλέπουν την επαγωγική υπόθεση, ότι υποθέτουμε δηλαδή ότι η πρόταση ισχύει για ν=κ. Νομίζουν ότι και αυτό είναι βήμα αποδεικτικό [Α2. 42-43].

Συνεχίζουν περιγράφοντας το πρόβλημα με δικά τους λόγια [Α2. 48-53] παραμένοντας στην κατάσταση εξοικείωσης με το πρόβλημα και κατανοούν το αλγοριθμικό μέρος του επαγωγικού βήματος [Α2. 58-59].

Στην ερώτηση που σχετίζεται με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής δηλαδή γιατί τα βήματα της εφαρμογής είναι απόδειξη της πρότασης , οι μαθήτριες απαντούν πως πείθονται για την απόδειξη επειδή εφαρμόζονται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος [Α2. 86-88].

Περνάν στο *στάδιο της επινόησης και ταυτόχρονα της επινόησης σχεδίου* που είναι η επαλήθευση της εφαρμογής των βημάτων του θεωρήματος [Α2. 103- 108 και 125-126].

Επιστρέφουν στην εξοικείωση με το πρόβλημα και ξαναβλέπουν το αλγοριθμικό μέρος του επαγωγικού βήματος [Α2. 162, 163] με τον προβληματισμό της επιλογής των κ και κ+1. Περιγράφουν το διαδικαστικό κομμάτι των απαραίτητων πράξεων

[A2.179,180] και στην διάρκεια αυτής της διαδικασίας έχουμε μία πρώτη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασία αφού αντιλαμβάνονται το εν δυνάμει γενικεύσιμο της πρότασης για κάθε φυσικό αριθμό [A2. 183-184].

Επιστρέφουν στην προσπάθεια κατανόησης του επαγωγικού βήματος [A2.197], όμως έχουν την αίσθηση πως έχουν λύσει το πρόβλημα που τους τέθηκε [A2.215]. Γι αυτούς η κατανόηση του αλγοριθμικού μέρους αποτελεί και την απόδειξη [A2. 222-223]

Η όλη τους κουβέντα δίνει την αίσθηση ότι η συζήτηση για την απόδειξη πρέπει να αφορά τα βήματα και κατά πόσο αυτά είναι μαθηματικά ορθά. Έτσι, επικεντρώνονται ουσιαστικά μόνο στο να ρίξουν φως στο αλγοριθμικό μέρος της απόδειξης [A2. 230-231 και 233-237]. Συνεχίζουν επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό, δίνοντας την αίσθηση ότι δεν μπορούν να πάνε παραπέρα [A2. 264-265].

Διακρίνουν ότι ο κ+1 δεν είναι επιλεγμένος τυχαία αλλά είναι επιλεγμένος ως διαδοχικός του κ ωστόσο δεν μπορούν να αντιληφθούν με ποιόν τρόπο αυτό συμβάλλει στην απόδειξη [A2. 273-274] και ψάχνουν για ένα μοτίβο που να δικαιολογεί την απόδειξη του τύπου για κ+1 [A2. 280-281].

Συνεχίζοντας να διαβάζουν την απόδειξη, λίγη ώρα μετά έχουμε μία δεύτερη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής [A2. 328-329] που προέκυψε από τον προηγούμενο προβληματισμό τους γύρω από την διαδοχικότητα των κ και κ+1 [A2. 357-359]. Οι μαθητές συζητούν την γενίκευση της ιδέας ότι αφού ισχύουν τα παραπάνω για δυο διαδοχικούς αριθμούς θα ισχύουν τελικά για κάθε φυσικό.

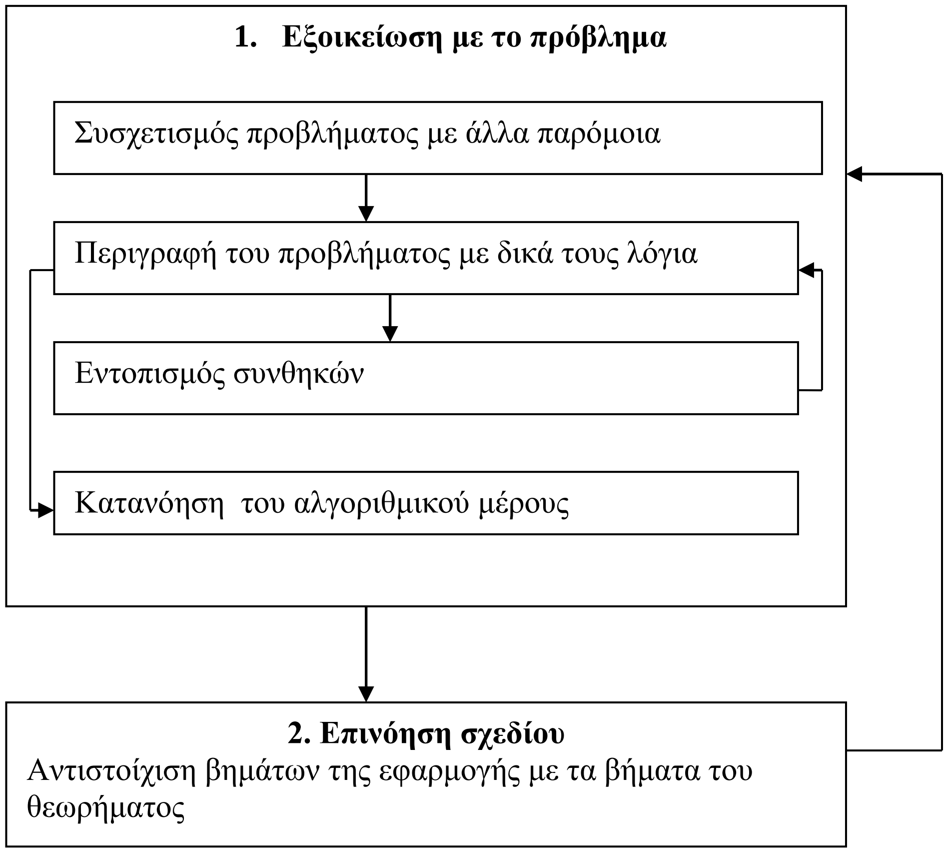
Επιστρέφουν στην εξοικείωση με το πρόβλημα και βλέπουν ξανά από την αρχή τα δεδομένα [A2. 368-369] και καταφέρνουν να συνειδητοποιήσουν το πέρασμα από το ειδικό στο γενικό. Στο σημείο αυτό έχουμε μία τρίτη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής [A2. 392-394] όπου οι μαθητές κάνουν ξεκάθαρο ότι αυτό που επιχειρεί να δείξει το θέωρημα είναι ότι αφού ισχύει για τον πρώτο φυσικό αριθμό μπορεί να δειχθεί ότι θα ισχύει για όλους. Ωστόσο, επειδή δεν είναι ακόμα σε θέση να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί τα παραπάνω βήματα είναι απόδειξη επιστρέφουν και πάλι στην εξοικείωση με το πρόβλημα και προσπαθούν να το συσχετίσουν με άλλα προβλήματα που έχουν λύσει [A2. 402-405].

Μία τέταρτη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής εμφανίζεται χωρίς όμως ακόμη να μπορούν να εξηγήσουν πλήρως γιατί τα συγκεκριμένα βήματα είναι απόδειξη [A2. 410-41]. Οι μαθητές επικεντρώνουν την προσπάθειά τους στο να κινηθούν από κάτι που αποδεδειγμένα ισχύει (ν=1, και άρα ν=2 και ν=3) σε μια γενική ισχύ («να την επεκτείνουμε για όλους τους φυσικούς [Α2.413-414]»)

Συνολικά θα πρέπει να τονισθεί ότι οι μαθητές παραμένουν στο μεγαλύτερο μέρος της διαδικασίας σε μια διαδοχική μετάβαση από την *εξοικείωση(κατανόηση) με το πρόβλημα*, στην *αναζήτηση ενός σχεδίου* επίλυσης και ξανά επιστροφή στην κατανόηση. Θεωρώντας ότι έχουν απαντήσει στο πρόβλημα εστιάζουν στην κατανόηση του αλγοριθμικού μέρους του επαγωγικού βήματος στο μεγαλύτερο μέρος της συζήτησης ενώ εμφανίζονται στην διάρκεια κάποιες ενδείξεις εννοιολογικής κατανόησης. Στην προσπάθεια αυτή πλησιάζουν πολλές φορές στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης όπως φαίνεται από τη συχνή χρήση λέξεων κομβικής σημασίας που συνδέονται με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής.

Η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών, μέσα στην μιάμιση ώρα που είχε στην διάθεσή της δεν έφτασε στο να λύσει το πρόβλημα της ανάγνωσης του μαθηματικού κειμένου που διαπραγματευόταν την απόδειξη με επαγωγή. Ενώ αντιλήφθηκε τα απαιτούμενα βήματα και πλησίασε στην εννοιολογική κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής δεν μπόρεσε να τεκμηριώσει πλήρως γιατί αυτά τα συγκεκριμένα βήματα αποτελούν απόδειξη που ήταν και το ζητούμενο του προβλήματος.

Σχεδιάγραμμα 2. Σχηματική αναπαράσταση της πορείας λύσης του προβλήματος της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από την ομάδα Α2



4.2.1 Χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης της ομάδας Α2

Η συνεργατική μορφή επίλυσης φάνηκε να συντέλεσε στην ενεργή εμπλοκή και των 3 μελών της ομάδας. Στο αρχικό στάδιο της κατανόησης, στην περιγραφή του θεωρήματος της μαθηματικής επαγωγής, η Χ συμπληρώνει και επεκτείνει την σκέψη της Σ (Σ: «μας λέει ότι προκύπτει ένας τύπος ο οποίος για να ισχύει πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις Χ: Ναι, εγώ συμφωνώ με την Σοφία… πρέπει να ισχύουν κάποια πράγματα … μετά μπορούμε να αποδείξουμε ακόμα περισσότερα» [Α2. 25-29, 32-38], ομοίως η Χ συμπληρώνει και επεκτείνει την σκέψη της Σ (Σ: Ουσιαστικά μας δίνει τον τύπο οπότε εμείς πρέπει να πούμε πως πρέπει να πληροί και τις δύο προϋποθέσεις Χ: Και μετά παίρνει ότι… αποδεικνύει ότι ν… αυτό που βρήκαμε στην πρώτη περίπτωση και μετά το κάνει για ν=κ+1) (*reciprocal scaffolding, expand* *understanding*) στην διάκριση των βημάτων της μαθηματικής επαγωγής στην εφαρμογή [Α2. 48-55]. Παρόμοια ενέργεια ελέγχου (*reciprocal scaffolding, expand understanding*) έχουμε και μετά στην προσπάθεια κατανόησης γιατί τα βήματα της εφαρμογής είναι απόδειξη, όπου η Χ και η Π συμπληρώνουν και αναδιατυπώνουν της σκέψη της Σ (Σ: «πρώτα επιβεβαιώνει την $1^{η}$ προϋπόθεση του θεωρήματος, στη συνέχεια επιβεβαιώνει τη δεύτερη και στην συνέχεια καταλήγει σε κάτι που ισχύει» Π: «Βασικά στο τέλος κάνει συν συνδυασμό και από την $1^{η}$ απόδειξη που κάναμε και από την δεύτερη» Χ: «Ναι βασικά ξεκινάει αποδεικνύει το $1^{ο}$ σκέλος του θεωρήματος….») [Α2. 86-94].

Τα μέλη της ομάδας μοιράζονται την γνώση (*reciprocal scaffolding, build shared Knowledge*) και συμπληρώνουν η μία την άλλη με ό,τι ξεχωριστά η κάθε μία έχει κατανοήσει [Α2. 214-223] και εκφράζουν τι έχουν καταλάβει για την επιλογή του κ+1 στο επαγωγικό βήμα [Α2. 272-277, 280-282].

Η συνεχής επανάληψη και η παραμονή στην σφαίρα της κατανόησης οδηγεί την Χ να συνειδητοποιήσει ότι δεν έχει λυθεί το πρόβλημα [Α2.333] ενώ νωρίτερα ήταν βέβαιη ότι είχε λυθεί και δεν χρειαζόταν παραπάνω διερεύνηση (*reciprocal scaffolding, detect flowed ideas)* [Α2. 215].

Οι λύτες δεν καταλήγουν τελικά στην επίλυση του προβλήματος που είναι να τεκμηριώσουν γιατί τα βήματα του θεωρήματος είναι απόδειξη ωστόσο διορθώνοντας η μία την άλλη [Α2.387-390] (*reciprocal scaffolding, detect flowed ideas*) και επεκτείνοντας η μία την σκέψη της άλλης [Α2. 421, 423] (*reciprocal scaffolding, expand understanding*) πλησιάζουν αρκετές φορές στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης όπως φαίνεται από την παραπάνω πορεία επίλυσης.

Η ύπαρξη της ομάδας θα μπορούσε να πει κανείς ότι λειτούργησε θετικά στην κινητοποίηση των μαθητών, αφού υπήρχε η αίσθηση ότι η ατομική ευθύνη δεν είναι τόσο μεγάλη [Α2. 216-227] *(motivate one another)*. Κατά την επίλυση στην ομάδα, τα μέλη της διαχειρίζονταν από κοινού την επίλυση του προβλήματος .

4.3 Πορεία επίλυσης της ομάδας Β1

Οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν το μαθηματικό κείμενο διαβάζουν το θεώρημα της Μαθηματικής επαγωγής και την εφαρμογή του θεωρήματος για μισή ώρα ($1^{ο}$ στάδιο επίλυσης προβλήματος κατά Polya, εξοικείωση με το πρόβλημα). Ξεκινούν προσπαθώντας να ξεκαθαρίσουν τις εμπλεκόμενες έννοιες και τα σύμβολα [Β1.7-12], επαληθεύουν τις πράξεις του επαγωγικού βήματος [Β1.20-22] και συνεχίζουν με το ξεκαθάρισμα των εμπλεκόμενων εννοιών διακρίνοντας τα δύο βήματα της αποδεικτικής διαδικασίας της μαθηματικής επαγωγής [Β1.32-44].

Οι μαθητές εντοπίζουν στην εφαρμογή α) το πρώτο βήμα (για ν=1), β) το επαγωγικό βήμα [Β1. 105-106] και φαίνεται να κατανοούν το αλγοριθμικό μέρος του επαγωγικού βήματος [Β1. 108-109].

Στο ερώτημα γιατί τα βήματα της εφαρμογής είναι απόδειξη και αφού οι μαθητές φαίνεται να έχουν ξεκαθαρίσει το αλγοριθμικό μέρος, το επιχείρημα των μαθητών είναι πως είναι απόδειξη διότι επαληθεύονται τα δύο βήματα του θεωρήματος [Β1.178-179] και αισθάνονται στο σημείο αυτό ότι έχουν λύσει το πρόβλημα. Η παρέμβαση του ερευνητή για περαιτέρω αναζήτηση του θέματος επιστρέφει τους μαθητές στην προσπάθεια κατανόησης του κειμένου [Β1.185-186] συγκρίνοντας το πρόβλημα με κάποιο άλλο που έχουν λύσει.

Στο στάδιο της κατανόησης έχουμε και μία πρώτη ένδειξη της διαδρομής προς την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής [Β1. 191, 196-197, 199] όπου οι μαθητές αναρωτιούνται γιατί στα 3 βήματα της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή επιλέγονται οι αριθμοί 1, κ, κ+1 και γιατί μόνο 3 αριθμοί (ποια είναι τα δεδομένα, είναι αρκετή η πληροφορία που μας δίνεται) ;

Οι μαθητές, προκειμένου να απαντήσουν το ερώτημα γιατί τα 3 βήματα είναι απόδειξη, περνάνε στην **επινόηση ενός σχεδίου**, ψάχνουν για την ύπαρξη μοτίβου αναλύοντας την λογική με την οποία ο Gauss βρήκε το άθροισμα των 100 πρώτων φυσικών αριθμών πιστεύοντας ότι εκεί ίσως βρίσκεται το κλειδί της κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής [Β1.202-205].

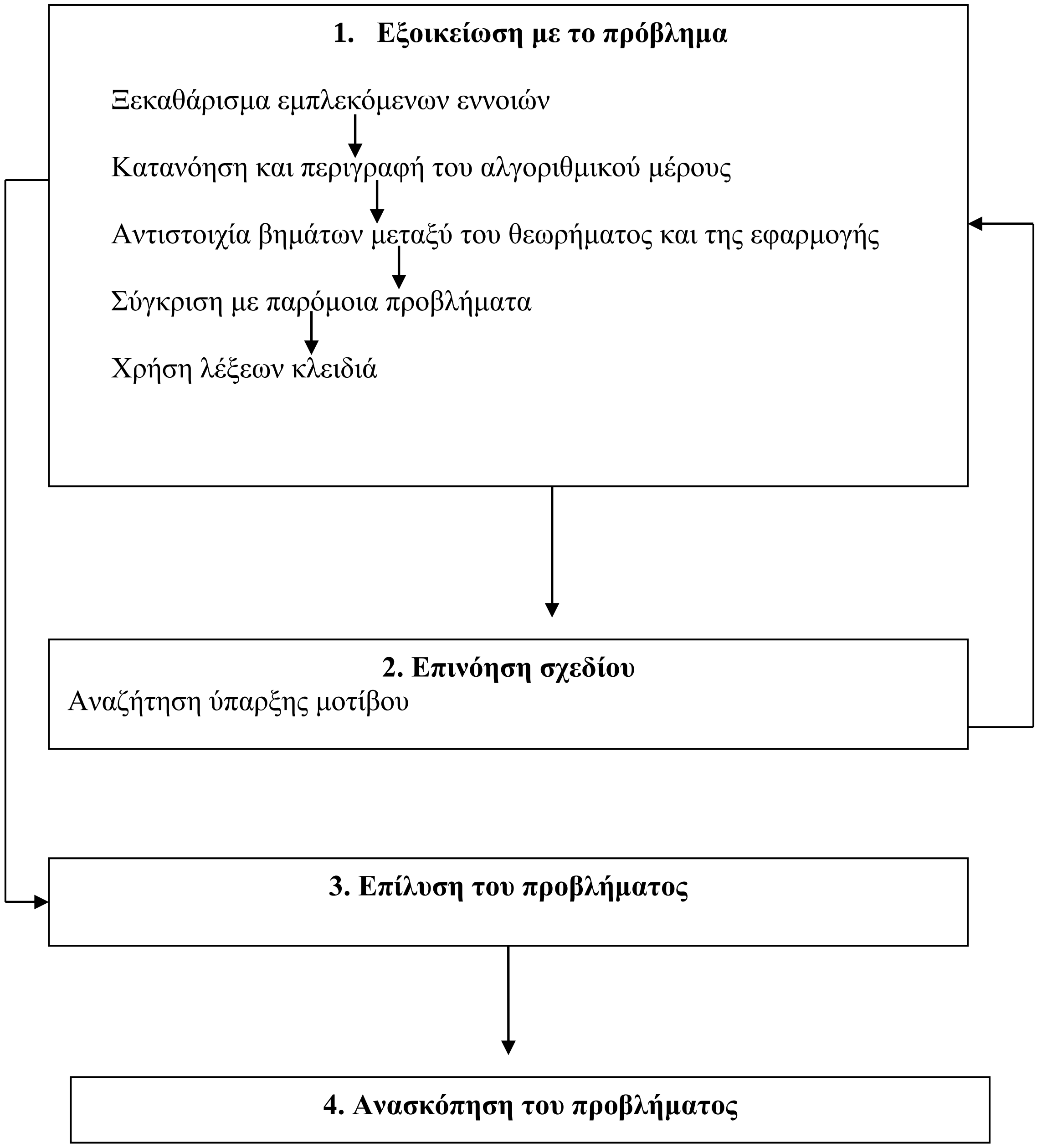
Η προσπάθειά τους αυτή χαρακτηρίζεται από περιοδική επιστροφή των λυτών στο κείμενο όπου ξαναδιαβάζουν τα δεδομένα και θέτουν νέους προβληματισμούς [Β1.249-253] που συνεχίζουν να σχετίζονται όμως με το αλγοριθμικό μέρος της επαγωγής και όχι ακόμα την εννοιολογική κατανόησή της. Αυτό είναι και το πρόβλημα (της εννοιολογικής κατανόησης) που σταδιακά φέρνει στο προσκήνιο η παρέμβαση του ερευνητή. Στο διάστημα αυτό οι μαθητές φτάνουν σε μία διαπίστωση που είναι κομβικής σημασίας για την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής: « είναι διαδοχικοί αριθμοί», «είναι τυχαίοι», «ο κ+1 είναι επόμενος του κ» [Β1.311] και καταλήγουν στην εννοιολογική κατανόηση [Β1. 312-314] που είναι και το ζητούμενο. Συγκεκριμένα η Ε λέει: « Επίσης είναι τυχαίοι… δηλαδή ο κ είναι τυχαίος! Και ο κ+1 είναι ο αμέσως επόμενος… Άρα εφόσον ισχύει η Ρ(ν) για τον πρώτο φυσικό αριθμό του συνόλου ν και για έναν τυχαίο αριθμό και τον αμέσως επόμενό του το λογικό θα είναι να ισχύει αυτός ο τύπος».

Οι μαθητές ολοκληρώνουν την συζήτηση με μία **ανασκόπηση του προβλήματος** περιγράφοντας τα βήματα της απόδειξης και τον λόγο για τον οποίο τα βήματα αυτά είναι απόδειξη [Β1. 338-340, 343-345, 354-355, 357].

Οι μαθητές παραμένουν στο μεγαλύτερο μέρος της διαδικασίας σε μία διαδοχική μετάβαση από την εξοικείωση (κατανόηση) με το πρόβλημα στην αναζήτηση ενός σχεδίου επίλυσης και ξανά επιστροφή στην κατανόηση. Η συγκεκριμένη ομάδα σε τακτικά διαστήματα επανέρχεται στο βήμα της κατανόησης και της εξοικείωσης που καταλαμβάνει και το μεγαλύτερο μέρος στην διαδικασία επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος. Μετά την κατανόηση των βημάτων του αλγοριθμικού μέρους και την αντιστοίχιση των βημάτων του θεωρήματος με τα βήματα της εφαρμογής, οι λύτες κινούνται συνεχώς στην σφαίρα της κατανόησης του γιατί επιλέχθηκαν οι αριθμοί 1, κ, κ+1. Στην προσπάθεια αυτή πλησιάζουν στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης και τεκμηριώνουν τελικά πλήρως γιατί τα βήματα της επαγωγής είναι απόδειξη.

Η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών έφτασε στην επίλυση του προβλήματος μέσα στην 1,5 ώρα που είχε στην διάθεσή της.

Σχεδιάγραμμα 3. Σχηματική αναπαράσταση της πορείας λύσης του προβλήματος της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από την ομάδα Β1.



4.3.1 Χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης της ομάδας Β1

Η συνεργατική μορφή επίλυσης φάνηκε να συντέλεσε στην ενεργή εμπλοκή των μελών της ομάδας. Η Ε προκειμένου να σιγουρευτεί για το τι λέει το θεώρημα θέτει ερώτημα στην Δ (Ε: « Προσπαθώ να κατανοήσω την επαγωγή…..Το θεώρημα μας

λέει ότι ο προτασιακό τύπος P(ν) είναι αληθής για κάθε ν, ν ανήκει στους φυσικούς αριθμούς» Δ: « Ναι») (reciprocal scaffolding, build shared Knowledge) [B1.32-42].
Όταν η Ε αντιλαμβάνεται με λάθος τρόπο το 1ο βήμα της επαγωγής, η Δ που νιώθει πιο σίγουρη για τον εαυτό της διορθώνει την Ε (Ε:… «ενώ εδώ που λέει 1 γίνεται αμέσως το 1. Οι άλλοι αριθμοί δεν μπαίνουν» Δ: «Ναι, γιατί… το ν…. αφού ισούται με το 1… πιθανότατα… όχι πιθανότατα… τα μεσαία 2 3 και οι υπόλοιποι αριθμοί δεν υπάρχουν, αφού είναι μέχρι το 1»), (reciprocal scaffolding, detect flowed ideas) [B1. 45-51]. Επιβεβαιώνουν η μία την σκέψη της άλλης (Δ: « ισχύει η απάντηση που έδωσε το παιδί στο κείμενο» Ε: « Δηλαδή αν βάλεις το 100 στο ν») [B1. 73-78] (reciprocal scaffolding, recognize correct ideas).
Ενώ η Ε αντιστοιχεί τα βήματα του θεωρήματος με αυτά της εφαρμογής, η Δ επεκτείνει την σκέψη της Ε (Ε: « Ουσιαστικά πρέπει να αποδείξουμε ότι… ο προτασιακός τύπος ισχύει για ν=1 και στην συνέχεια για ν=κ και συνεχίζει για ν=κ+1» Δ: « Ναι αυτό κάνει… ναι και στην συνέχεια προσθέτει το κ+1 και στα δύο μέλη… των προηγούμενων δύο αποδείξεων ώστε να βγει στο συμπέρασμα ότι και η 3η σχέση ισχύει») οδηγώντας την ομάδα στην κατανόηση του αλγοριθμικού μέρους της επαγωγής (reciprocal scaffolding, build shared Knowledge), [B1. 105, 108-110].
Η Ε θέτει σημαντικά για την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής ερωτήματα όπως « γιατί ν=1?», « γιατί 3 αριθμοί ?», η Δ φαίνεται να έχει τον ίδιο προβληματισμό αλλά διαισθάνεται ότι βρίσκονται στην σωστή κατεύθυνση και προτείνει να αναζητήσουν απαντήσεις μέσα από το παράδειγμα του Gauss που ανήκει στα δεδομένα του προβλήματος (reciprocal scaffolding, build shared Knowledge) [B1 191-213]. (Ε: « πήρε το 100 πήρε και το 1» Δ: « και τα πρόσθεσε» Ε: « Βγήκε 101 και πολ/σιασε με το μισό του 100… Δ: « Μέχρι ένα σημείο»)
Καταλήγουν με την συζήτηση να επαληθεύσουν τον τύπο της εφαρμογής και καθώς καταλαβαίνουν ότι έχουν χάσει τον προσανατολισμό τους (increasing metacognition visibility) αναζητούν ανατροφοδότηση [B1. 222-223]
Η Δ επεκτείνει την σκέψη της Ε (reciprocal scaffolding, build shared Knowledge) στην ανασκόπηση του προβλήματος (Ε: «Μας έπεισε επειδή πήρε έναν συγκεκριμένο αριθμό που είναι ο πρώτος φυσικός αριθμός, το 1 και πήρε και έναν τυχαίο το κ και μετά για κ+1, το απέδειξε αφού υπέθεσε για ν=κ, τα επαλήθευσε όλα αυτά και… πειστήκαμε ότι ισχύει. Δηλαδή και χωρίς το θεώρημα, η λογική σειρά… θα έπρεπε να το σκεφτούμε να τα κάνουμε όλα αυτά…» Δ: «Θεωρώ ότι μας έχει πείσει αφού έχει πάρει όλες τις περιπτώσεις, με τον πρώτο αριθμό το 1 είδαμε ότι επαληθεύεται και επίσης με το κ το οποίο αναπαριστά όλους τους φυσικούς αριθμούς

οπότε μας πείθει πως ισχύει») [Β1. 333-340] και καταλήγουν η κάθε μία ξεχωριστά να είναι σε θέση να απαντήσουν στο ερώτημα γιατί αυτή η σειρά βημάτων στην εφαρμογή αποτελεί απόδειξη [Β1. 354, 359].

4.4 Πορεία επίλυσης της ομάδας Β2

Οι μαθητές ξεκινούν την συζήτησή τους με την σχέση μεταξύ του τύπου που επινόησε ο Gauss για το άθροισμα των 100 πρώτων φυσικών αριθμών και του τύπου της εφαρμογής εκτιμώντας σωστά ότι ο τύπος της εφαρμογής είναι η γενίκευση του τύπου του Gauss [Β2. 1-6] (*Γ: « για την πρώτη ερώτηση, φυσικά και έχει σχέση, κατά την γνώμη μου τουλάχιστον γιατί… είναι σαν παράδειγμα το λογοτεχνικό κείμενο που.. δίνει ως παράδειγμα την πρόσθεση όλων των διαδοχικών αριθμών από το 1 μέχρι το 100).* Προσπαθούν να συσχετίσουν το πρόβλημα με κάποιο άλλο που έχουν λύσει ($1^{ο}$ στάδιο επίλυσης κατά Polya, εξοικείωση με το πρόβλημα). και να το συνδέσουν με γνωστές σε αυτούς έννοιες όπως αυτή της ακολουθίας [Β2.22-24] *(Γ: «Ναι ας πούμε και στην εφαρμογή για παράδειγμα σε αυτό που έχει και στο λογοτεχνικό κείμενο μας λέει για μια ακολουθία που αυξάνει κατά 1 κάθε φορά. Ε αυτό το θεώρημα ισχύει για κάθε ακολουθία που αυξάνει κατά 1;»).* Στο ίδιο στάδιο κατανόησης οι μαθητές επαληθεύουν τον τύπο για διάφορες τιμές του ν [Β2.29-33].

Στο ερώτημα τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής αντιλαμβάνονται ότι για να ισχύει ένας προτασιακός τύπος πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις και περιγράφουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια, ενέργεια σχετική με την κατανόηση του προβλήματος [Β2.41-43] (*Κ1: «Λέει ότι αν έχουμε έναν προτασιακό τύπο που αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς, εεεε και πληροί αυτές τις προϋποθέσεις α και β ισχύει για κάθε ν που ανήκει στους φυσικούς αριθμούς»).*

Αντιστοιχίζουν χωρίς δυσκολία το πρώτο βήμα, το Ρ(1), του θεωρήματος με το πρώτο βήμα της εφαρμογής [Β2.62-64] και αντιλαμβάνονται ότι η απόδειξη περιλαμβάνει το στοιχείο της γενίκευσης [Β2.67-68] *(Γ: «Δεν ξέρω… κι εγώ πιστεύω ότι είναι ευδιάκριτα γιατί μας δίνει το 1 που είναι φυσικός αριθμός για να δείξει ότι ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς ώστε να μπορεί να κάνει την δεύτερη υπόθεση, ότι αν δείξουμε ότι ισχύει ας πούμε για ν=κ, για να τους γενικεύσει ουσιαστικά…»).* Κατανοούν το αλγοριθμικό μέρος του επαγωγικού βήματος και κατανοούν επίσης ότι το επαγωγικό βήμα σχετίζεται με την γενίκευση της πρότασης [Β2. 71-74]. Παραμένοντας στο στάδιο της εξοικείωσης με το πρόβλημα , συνεχίζουν να αναλύουν τα δεδομένα του προβλήματος και να προβληματίζονται («αν έπαιρνε για ν=2 δεν θα πληρούσε την $1^{η}$ προϋπόθεση έστι δεν είναι;) [Β2.75-78].

Καταλαβαίνουν οι μαθητές ότι το $2^{ο}$ βήμα της απόδειξης στοχεύει στο να γενικεύσει την πρόταση [B2.104] και έτσι έχουμε μία πρώτη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής *(Γ: «Εγώ στο $2^{ο}$ βήμα πιστεύω ότι απλά το γενικεύει»).* Ωστόσο οι μαθητές παραμένουν στο στάδιο της κατανόησης και αναρωτιούνται αν η πληροφορία που τους δίνεται είναι περιττή [B2.107-109] αλλά παρά την λάθος εκτίμηση πλησιάζουν στο γιατί είναι απόδειξη [B2.113-114] *(«Διότι είναι ακόμα ένας φυσικός αριθμός Δηλαδή από την στιγμή που βρήκαμε πριν ότι για κ ανήκει Ν ισχύει αυτό άρα εννοείται ότι για κ+1 θα ισχύει»)* . Μία δεύτερη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής έχουμε όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η διαδοχικότητα των αριθμών παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη [B2.115-116]. Παραμένουν στο στάδιο της εξοικείωσης και αναλύουν προσεκτικότερα τις λέξεις και τα δεδομένα [B2.121]. Στην συζήτηση των μαθητών εισάγονται και λέξεις κομβικής σημασίας για την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής όπως «επόμενος αριθμός», «οποιοσδήποτε αριθμός» [B2.127-130] και περιγράφουν τις πράξεις του επαγωγικού βήματος [B2.138-139].

Στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν γιατί τα βήματα της επαγωγής είναι απόδειξη προσπαθούν να προσαρμόσουν το πρόβλημα σε μεθόδους απόδειξης που τους είναι οικείες όπως αυτή της «απαγωγής σε άτοπο» [B2.177-179] (**επινόηση σχεδίου**).

Μια τρίτη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης έχουμε όταν αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι οι αριθμοί κ, κ+1 είναι τυχαίοι [B2.185-186] ενώ λείπει προς το παρόν η σαφής αναφορά ότι είναι διαδοχικοί. Επιστρέφουν στην εξοικείωση με το πρόβλημα και την κατανόηση των δεδομένων [B2.200-201] και εμφανίζεται μία $4^{η}$ ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής με τη λέξη «γενίκευση» [B2.202-205].

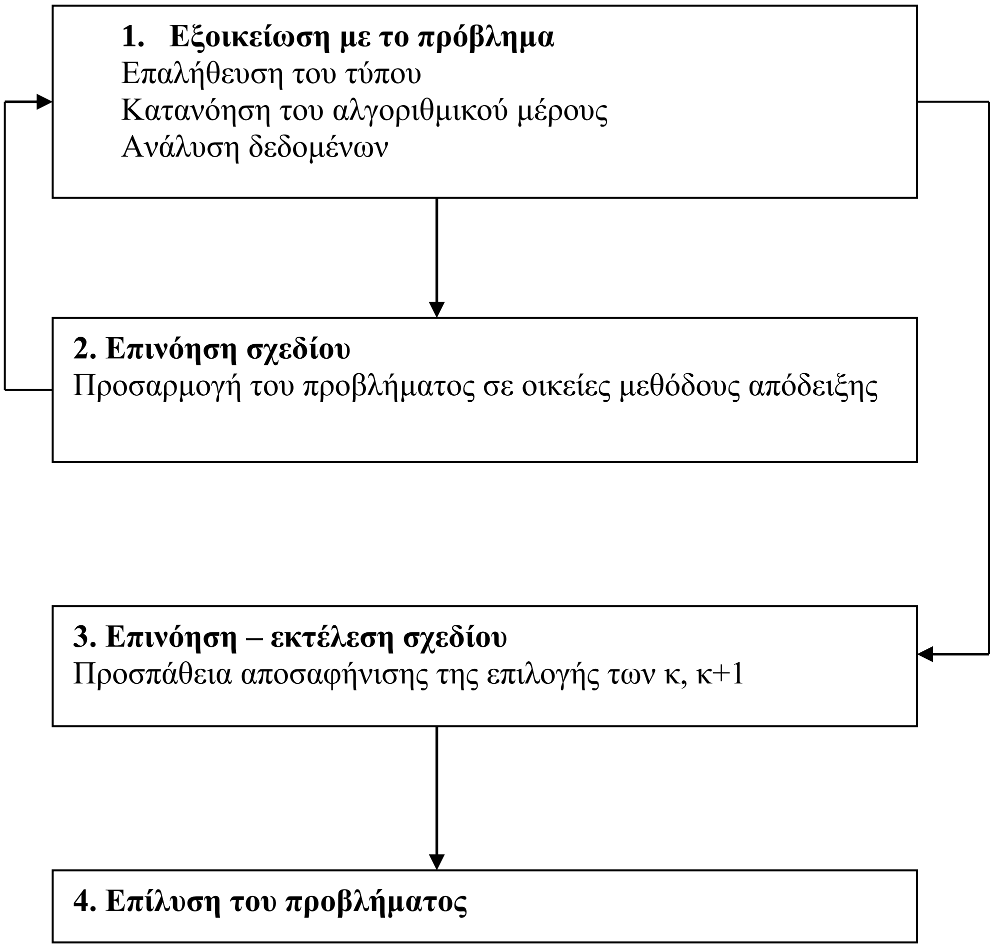
Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η πρόταση ισχύει μόνο για τους φυσικούς αριθμούς [B2.207-210] και ότι η χρήση του κ+1 στο επαγωγικό βήμα γενικεύει τον τύπο για κάθε φυσικό αριθμό ν [B2.211-213, 220]. Παραμένοντας στο στάδιο της εξοικείωσης μελετάν και πάλι τα δεδομένα [B2.229-230, 232-233]. Κατανοούν εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή αλλά ακόμα δεν είναι σε θέση να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί αυτά τα βήματα είναι απόδειξη [B2.242-244] και αντιστοιχούν ξανά τα βήματα του θεωρήματος με τα βήματα της εφαρμογής [B2.247-250]. Δικαιολογούν τελικά ότι τα βήματα είναι απόδειξη γιατί επαληθεύονται τα βήματα του θεωρήματος [B2.254-255] και κρίνουν ότι έχουν λύσει το πρόβλημα [B2.269]

Η παρέμβαση του ερευνητή τους επιστρέφει σε προηγούμενο συλλογισμό και στην αναζήτηση της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τι γίνεται στο κάθε βήμα, ότι ο κ είναι ένας τυχαίος φυσικός αριθμός, αλλά ακόμα δεν μπορούν να συνδυάσουν τα βήματα [Β2.278-280]. Μια πρώτη σημαντική ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής εμφανίζεται όταν οι μαθητές συζητούν για σαφή διαχωρισμό των βημάτων της μαθηματικής επαγωγής, ότι ενώ το 1^{ο} βήμα είναι ειδική περίπτωση, το επαγωγικό βήμα γενικεύει την πρόταση [Β2.289-292] και όταν διατυπώνεται σαφώς ότι ο κ+1 είναι ο επόμενος του κ [Β2.300-303].

Επινοούν και ταυτόχρονα εκτελούν ένα σχέδιο που είναι η προσπάθεια να αποσαφηνίσουν, πεπεισμένοι πια ότι εκεί βρίσκεται το κλειδί για την λύση του προβλήματος, γιατί επιλέγονται οι αριθμοί κ και κ+1 [Β2.303-307]. Παραμένοντας σταθεροί σε αυτόν τον συλλογισμό καταλήγουν να αντιληφθούν εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή [Β2.353-355, 359] *(Γ: «Α, νομίζω κατάλαβα. Στην αρχή μας δίνει την απόδειξη του 1, μετά μας λέει για το κ και μετά μας λέει ότι αυτό θα ισχύει για κάθε αριθμό που προσθέτουμε. Οπότε λέει ουσιαστικά αν ισχύει για το 1 άμα θέσουμε όπου κ=1»)* και στο τέλος ξεκαθαρίζουν και το πρώτο βήμα της απόδειξης [Β2.382-383] *(Ι: «.. Το 1 είναι το πιο μικρό το πιο απλό που μπορούμε να ξεκινήσουμε»)*

Οι μαθητές παραμένουν στο μεγαλύτερο μέρος της διαδικασίας σε μία διαδοχική μετάβαση από την εξοικείωση (κατανόηση) με το πρόβλημα στην αναζήτηση ενός σχεδίου επίλυσης και ξανά επιστροφή στην κατανόηση. Επαληθεύουν τον τύπο βάζοντας διάφορες τιμές στο ν, κατανοούν το αλγοριθμικό μέρος, αντιστοιχούν τα βήματα της εφαρμογής με τα βήματα του θεωρήματος και στην συνέχεια επινοούν ένα σχέδιο προσαρμογής του προβλήματος σε οικείες μεθόδους απόδειξης το οποίο τελικά εγκαταλείπουν. Επιστρέφουν στην κατανόηση και μετά ξανά στην επινόηση και εκτέλεση νέου σχεδίου που είναι η αποσαφήνιση του γιατί επιλέχθηκαν οι αριθμοί 1, κ, κ+1. Πλησιάζουν στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης και φτάνουν στην λύση του προβλήματος η οποία είναι να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί τα βήματα της επαγωγής είναι απόδειξη. Η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών έφτασε στην επίλυση του προβλήματος μέσα στην 1,5 ώρα που είχε στην διάθεσή της.

Σχεδιάγραμμα 4. Σχηματική αναπαράσταση της πορείας λύσης του προβλήματος της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από την ομάδα Β2.



4.4.1 Χαρακτηριστικά της συνεργατικής επίλυσης της ομάδας Β2

Η συνεργατική μορφή επίλυσης φάνηκε να συντέλεσε στην ενεργή εμπλοκή όλων των μελών της ομάδας με λίγο περισσότερη δραστηριότητα των Ι, Γ και Μ.

Ο Κ1 αναγνωρίζει ως σωστή (reciprocal scaffolding – recognize correct ideas) και γενικεύει την σκέψη του Γ (reciprocal scaffolding – expand understanding) στην σχέση μεταξύ της μεθόδου του Gauss και της εφαρμογής [Β2.1-6]

(*Γ: «….είναι σαν παράδειγμα το λογοτεχνικό κείμενο που.. δίνει ως παράδειγμα την πρόσθεση όλων των διαδοχικών αριθμών από το 1 μέχρι το 100» Κ1: «Ναι συμφωνώ, συμφωνώ γιατί στο πρώτο πχ στην σχέση 1 αντί για να προσθέσει 100 αριθμούς έβαλε ν οπότε είναι για όσους αριθμούς θέλουμε…»*).

Ο Κ1 και ο Γ διορθώνουν τον Κ2 [Β2.31,32] όταν ο Κ2 κάνει λάθος υπολογισμό στον τύπο της εφαρμογής για ν=2 (reciprocal scaffolding – detect flowed ideas)
(*Κ2: «Αν βάλεις όπου ν το 2, θα βγει 2=3» Κ1: «όχι…» Γ: «όχι σωστό είναι γιατί 3=3»*).

Οι Γ, Μ περιγράφουν τα βήματα της μαθηματικής επαγωγής συμπληρώνοντας ο ένας τον άλλον, θέτοντας ταυτόχρονα και ερωτήσεις όπου οι άλλοι απαντούν επιβεβαιώνοντας [Β2. 65-78, 83-98] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge)

(*Γ: «….μας δίνει το 1 που είναι φυσικός αριθμός για να δείξει ότι ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς ώστε να μπορεί να κάνει την δεύτερη υπόθεση…»*

Γ: «….ε και μετά προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1 για να δείξει… ότι μπορούμε να πάρουμε όποιο σύνολο θέλουμε από τους φυσικούς…»

Μ: «Νομίζω ότι για ν=1 δεν το κάνει παράδειγμα ότι γίνεται για κάθε φυσικό αριθμό, για να πληροί την πρώτη προϋπόθεση»

Κ2- Γ: «Για ξαναπές το λίγο Μάρθα..»

Μ: «Ότι το για ν=1 δεν το παίρνει τυχαία, το παίρνει για να εκπληρώσει την πρώτη προϋπόθεση»

Ι: «Ε ναι, αυτό είπε ο Γιάγκος»).

Όμοια ενέργεια ελέγχου έχουμε και για τις πράξεις στο επαγωγικό βήμα μεταξύ Γ και Ι [Β2.137-139]. Η ομάδα προσπαθεί να ξεκαθαρίσει που καταλήγει το επαγωγικό βήμα μετά τις πράξεις [Β2.145-164] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge).

Η Μ περιγράφει τα βήματα [Β2.173-176] της απόδειξης και δίνει μία αιτιολόγηση στο γιατί τα βήματα αυτά είναι απόδειξη [Β2.184] και ο Κ1 επεκτείνει την σκέψη της Μ [Β2.185-186] φτάνοντας σε ένα κομβικής σημασίας σημείο για την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής (reciprocal scaffolding – expand understanding). Οι Γ, Ι και Κ στην συνέχεια, επιβεβαιώνοντας ο ένας την σκέψη του άλλου (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge) αλλά προσθέτοντας και κάθε φορά κάτι στον συλλογισμό του άλλου (expand understanding) περιγράφουν εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή [Β2.207-217] χωρίς ωστόσο να είναι ακόμα έτοιμοι να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί τα βήματα της επαγωγής είναι απόδειξη

(*Γ: «Ναι κι εγώ εκεί θέλω να σταθώ ότι στην αρχή αποδεικνύει ουσιαστικά την 1, εεε βάζοντας όπου ν=1 για… το σύνολο των φυσικών μόνο.. Ουσιαστικά παίρνει έτσι… και μετά δέχεται ότι ισχύει αυτή η πρόταση και μετά αντικαθιστά το κ που είναι μόνο φυσικός. Και μετά δείχνει ότι το κ+1… για να δείξει ότι… Αυτό ισχύει για κάθε* *ακολουθία επομένως; Για κάθε ακολουθία με βάση το 1 και μετά.... Προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1 για να δείξει ότι αυτή η ακολουθία μπορεί να έχει οποιοδήποτε μέγεθος... να το πω έτσι..δηλαδή δεν χρειάζετια να είναι μέχρι το 100, μπορεί μέχρι το 1000 και πάει λέγοντας» Ι: «Στην αρχή όμως παίρνει το ν=κ, έναν τυχαίο αριθμό και μετά παίρνει ότι ισχύει το ν με το κ .. συν τον επόμενό του. Αρα πάλι ισχύει, άρα το γενικεύει ακόμα περισσότερο. Αυτό ήθελα να πω πριν ότι είναι με δύο διαφορετικούς αριθμούς»*).

Ο Ι περιγράφει τα βήματα της απόδειξης προσεγγίζοντας την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής [Β2.240-244], ο Γ κάνει στην συνέχεια το ίδιο αντιστοιχίζοντας όμως τα βήματα που περιέγραψε ο Ι με αυτά της επαγωγής [Β2.247-250] και καταλήγουν ότι τα βήματα είναι απόδειξη εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος [Β2.267-269]. Εδώ, έχουμε και πάλι μια ενέργεια ελέγχου όπου μαζί τα μέλη της ομάδας καταλήγουν σε ένα αποτέλεσμα καθώς ο ένας επιβεβαιώνει και συμπληρώνει την σκέψη του άλλου (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge). Ίδια ενέργεια ελέγχου έχουμε και σε άλλα σημεία του κειμένου [Β2. 281-294, 308-313, 320-323, 327, 332, 341, 345]. Οι Ι και Μ διορθώνουν τον Γ [Β2. 361-365] (detect flowed ideas) στο τελευταίο στάδιο της πορείας επίλυσης όπου οι μαθητές περιγράφουν το πρώτο βήμα της επαγωγής και το συνδυάζουν με το επαγωγικό βήμα της απόδειξης.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι κατά την επίλυση του προβλήματος τα μέλη της ομάδας συνεργάστηκαν και διαχειρίστηκαν από κοινού την επίλυση επιβεβαιώνοντας, διορθώνοντας και συμπληρώνοντας ο ένας την σκέψη του άλλου.

4.5 Πορεία επίλυσης της ομάδας Γ

Οι μαθητές διαβάζουν το μαθηματικό κείμενο, το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής και την εφαρμογή του θεωρήματος για περίπου μισή ώρα. Παρουσιάζουν το περιεχόμενο του προβλήματος με δικά τους λόγια [Γ. 1-3] και φαίνεται να κατανοούν το χαρακτηριστικό της γενίκευσης της πρότασης της εφαρμογής [Γ. 5-6] *(Δ: «Και αν το κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς... τότε είναι λογικό και αυτό να ισχύει ....για όλους τους φυσικούς»)*. Συσχετίζουν με ευκολία τον προτασιακό τύπο της εφαρμογής με το κείμενο που περιγράφει πως ο Gauss βρήκε το άθροισμα των 100 πρώτων φυσικών αριθμών [Γ. 19-21] (1^{ο} στάδιο επίλυσης κατά Polya – **εξοικείωση με το πρόβλημα**) και κατανοούν ότι η πρόταση είναι μια γενίκευση αυτού που έκανε ο Gauss [Γ. 24].

Παραμένοντας στο στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, οι μαθητές προσπαθούν να καταλάβουν τα δεδομένα του προβλήματος και να κατανοήσουν την γλώσσα που χρησιμοποιείται σε αυτό [Γ. 31-32, 34] και αντιλαμβάνονται πως οι αριθμοί κ και κ+1 είναι φυσικοί αριθμοί [Γ. 35-37]. Συνεχίζουν, μελετώντας τις πράξεις του επαγωγικού βήματος [Γ. 41-44] και προσπαθούν να τις περιγράψουν. Αντιλαμβάνονται ότι στον αρχικό τύπο γίνεται αντικατάσταση του ν με το 1 και στην συνέχεια αντικατάσταση του ν με το κ+1 [Γ. 76-77] *(Β: «Το 1=1(1+1)/2… είναι σαν να προσθέτει αυτό με το κ=κ…» Δ: «Αν θέσουμε το κ+1 με ν, το κ+1 γίνεται ίσο με ν και το κ+1+1 γίνεται κ+2»).*

Στο ερώτημα γιατί τα βήματα της απόδειξης της εφαρμογής αποτελούν απόδειξη απαντούν ότι είναι απόδειξη διότι τα βήματα αυτά σχετίζονται με τα βήματα του θεωρήματος της μαθηματικής επαγωγής [Γ. 96] και αγγίζουν την ουσία της επαγωγής όχι όμως εντελώς συνειδητά [Γ. 97-99] *(Δ: «Γιατί έγραφε το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο αλλά... το αποτέλεσμα έμενε ίδιο… είτε θέσουμε το ν=κ+1 είτε θέσουμε ν=κ και το ν=1, το κ+1 και το κ και το 1 είναι όλοι φυσικοί αριθμοί»).*

Ο Δ προσεγγίζει την ουσία της επαγωγής ότι μία πρόταση αφού ισχύει για κάθε επόμενο θα ισχύει και για όλους τους φυσικούς αριθμούς [Γ. 148 – 149] *(Δ: «Αν το ν είναι 1 το ν-1 είναι 0. Οπότε πήρε για τον αριθμό 0 πήρε και για τον 1. Και απέδειξε έτσι ότι ισχύει αυτό για όλους τους φυσικούς αριθμούς»)* και παραμένει στην επεξεργασία αυτού του ζητήματος [Γ. 153 - 154].

Ενώ η ομάδα κινείται στην σφαίρα της κατανόησης επιστρέφει στην εφαρμογή αναζητώντας πλέον τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των φυσικών αριθμών 1 και κ που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη [Γ. 191]. Στην συνέχεια έχουμε μία πρώτη ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής και μία πρώτη **επινόηση με ταυτόχρονη εκτέλεση ενός σχεδίου** καθώς οι μαθητές προσπαθούν να προσαρμόσουν την σκέψη τους για να δουν το πρόβλημα από άλλη οπτική γωνία από αυτή που τους ζητείται. Στο στάδιο αυτό οι μαθητές σταματούν να ασχολούνται με τις πράξεις του επαγωγικού βήματος και προσπαθούν να καταλάβουν το ρόλο των βημάτων στην απόδειξη [Γ. 194, 207, 211-212] *(Β: «Δηλαδή το ν=κ, ουσιαστικά είναι ένας πολύ μεγάλος…» Β: «Δεν πρέπει να σκεφτούμε με μαθηματικά πρέπει να σκεφτούμε με βάση την λογική» Δ: «Το 1 το ξέρουμε. Είναι ένας φυσικός αριθμός. Το κ είναι ένας τυχαίος φυσικός αριθμός»).*

Οι μαθητές αναζητούν επίσης την ύπαρξη μοτίβου για την επίλυση του προβλήματος αναλύοντας την λογική με την οποία ο Gauss βρήκε το άθροισμα των πρώτων 100 φυσικών αριθμών [Γ. 227-229] (2ο στάδιο επίλυσης κατά Polya - **επινόηση σχεδίου**

). Επιστρέφουν στο στάδιο της κατανόησης και στην συνέχεια επιστρέφουν στο $1^{ο}$ σχέδιο επίλυσης που είναι να ψάξουν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών που εμπλέκονται στα 3 βήματα [Γ. 232 – 234] *(Δ: «Για να παίρνει το ν=1 και όχι κάποιον άλλον αριθμό, ο 1 θα έχει κάποια ιδιαιτερότητα.. Τι ιδιαιτερότητα έχει όμως ο αριθμός 1; Μπορούσε να πάρει για ν= οποιονδήποτε αριθμό έτσι; Αλλά πήρε για ν=1»)* εστιάζοντας στην ιδιαιτερότητα της επιλογής των φυσικών 1, κ, κ+1.

Προσεγγίζουν την ουσία της μαθηματικής επαγωγής τεκμηριώνοντας τον συλλογισμό τους [Γ. 239, 247, 249]

(Δ: «Ο 1 είναι ο μόνος αριθμός που μπορεί να διαιρέσει όλους τους ακέραιους… όχι»

Β: «Γιατί θα βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα»

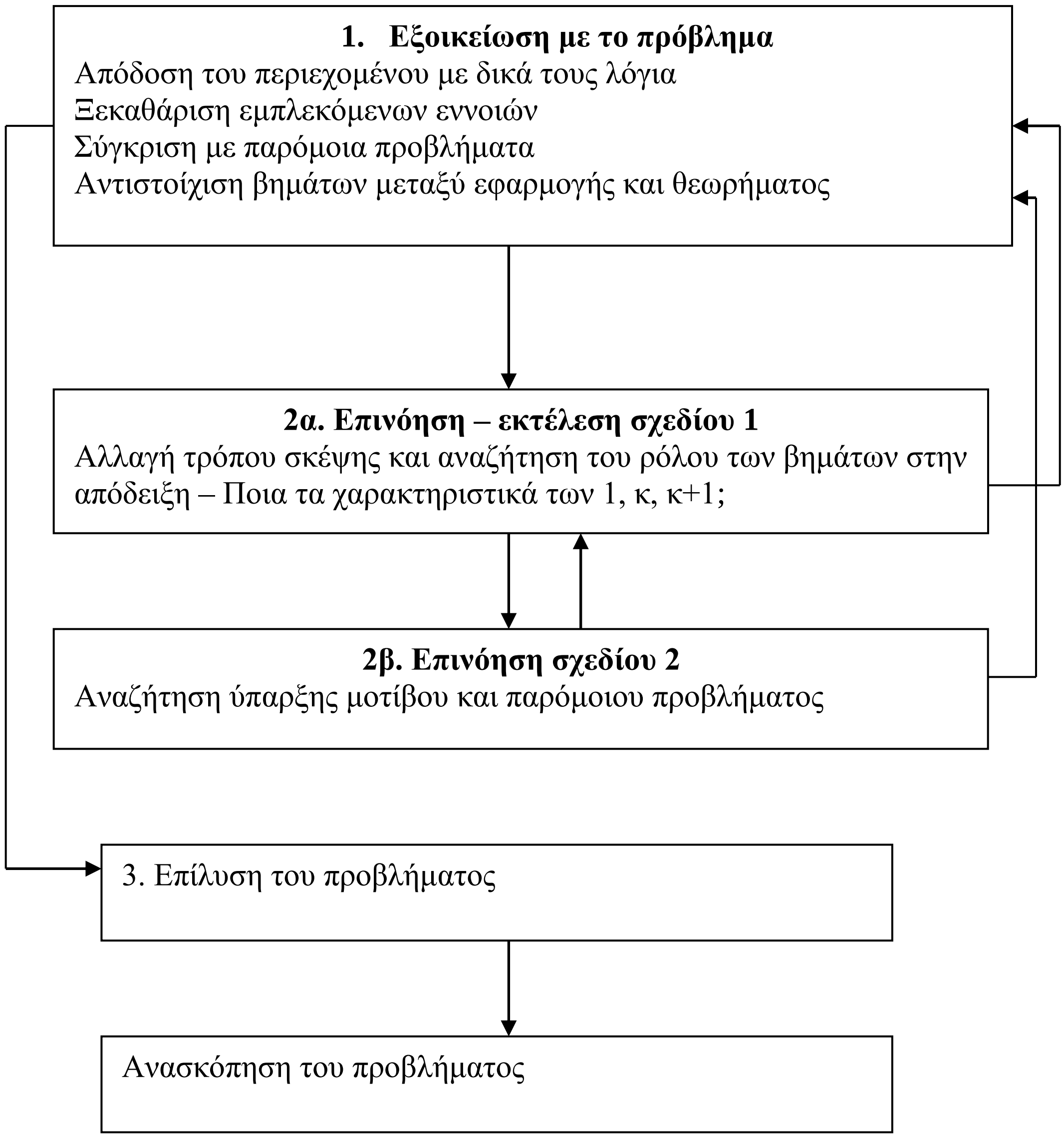
Δ: «Γιατί είναι ο μικρότερος…» Δ: «άρα ο κ μπορεί να είναι ένας μεγαλύτερος»

Δ: «κ+1 έναν ακόμα μεγαλύτερο του κ»). Αγγίζουν την ουσία της μαθηματικής επαγωγής [Γ. 275, 294-297] (Β: «Αφού ισχύει για τον μικρότερο αν προσθέσουμε κάτι…» Β: «άρα θα ισχύει και για τον μεθεπόμενο»)

και τεκμηριώνουν γιατί τα βήματα της απόδειξης της εφαρμογής αποτελούν απόδειξη [Γ. 313-314] *(Δ: «Οπότε ισχύει και για το 3, οπότε ισχύει και για το 4» Β: «Ναι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς»*. Ολοκληρώνουν με μία ανασκόπηση του προβλήματος ελέγχοντας το αποτέλεσμα και για άλλους φυσικούς αριθμούς [Γ. 315-316] *Δ: «και αφού ισχύει για το 4 θα ισχύει για το 5 και αφού ισχύει για το 5 θα ισχύει για το 6»).*

Συνολικά θα πρέπει να τονισθεί ότι το βήμα της κατανόησης ($1^{ο}$ στάδιο επίλυσης κατά Polya- κατανόηση, εξοικείωση με το πρόβλημα) στο συγκεκριμένο πρόβλημα καταλαμβάνει την μεγαλύτερη έκταση. Η ομάδα μεταβαίνει από την κατανόηση στην αναζήτηση ενός σχεδίου επίλυσης και επιστρέφει στην κατανόηση. Αφού τα μέλη της ομάδας αντιληφθούν την εφαρμογή ως μία γενική ισχύ του προτασιακού τύπου, κατανοήσουν την γλώσσα που χρησιμοποιείται στο πρόβλημα και τους κ, κ+1 ως φυσικούς αριθμούς αγγίζουν έστω και μη συνειδητά την ουσία της επαγωγής. Ενώ επεξεργάζονται συνεχώς, παραμένοντας στην σφαίρα της κατανόησης, την επιλογή των φυσικών 1, κ, κ+1 στα τρία βήματα της απόδειξης καταλήγουν να τεκμηριώσουν γιατί τα βήματα του θεωρήματος είναι απόδειξη και να κάνουν έλεγχο του αποτελέσματος και για άλλους φυσικούς αριθμούς.

Σχεδιάγραμμα 5. Σχηματική αναπαράσταση της πορείας λύσης του προβλήματος της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από την ομάδα Γ.



4.5.1 Χαρακτηριστικά της συνεργατικής επίλυσης της ομάδας Γ

Η συνεργατική μορφή επίλυσης συντέλεσε στην ενεργή εμπλοκή των μελών της ομάδας με περισσότερη την εμπλοκή του Δ και λιγότερο της Β. Τα μέλη της ομάδας συμπληρώνουν το ένα το άλλο για να καταλήξουν στην σχέση μεταξύ της εφαρμογής και της μεθόδου που εφάρμοσε ο Gauss [Γ. 18-21] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge):

(Β: «Απέδειξε ο Gauss ότι..»

Δ: «Είναι η απόδειξη αυτού που είπε ο Gauss, δηλαδή…»

Β: «Αυτό που έκανε με τους αριθμούς ο δάσκαλος το απέδειξε στο…»

Δ: «Με έναν τύπο»)

Ομοίως, η Β συμφωνεί και επιβεβαιώνει την προσπάθεια του Δ να επαληθεύσει τον προτασιακό τύπο για ν=1 [Γ. 32, 34] και στην συνέχεια η Β συμπληρώνει τον Δ στην προσπάθεια κατανόησης του αλγοριθμικού μέρους της απόδειξης [Γ. 35-38] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge):

(Δ: «Μετά επειδή βάζει κ δεν αλλάζει κάτι γιατί και το κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς… οπότε ισχύει και αυτό… και το κ+1 και αυτό ανήκει στους φυσικούς αριθμούς γιατί και το κ και το 1 είναι φυσικοί αριθμοί»

Β: «Προσθέτει μετά κατά μέλη και…»

Δ: «Οπότε… ναι εδώ είναι λίγο περίεργο»)

Ενώ η Β προσπαθεί να συσχετίσει το 1ο με το $3^{ο}$ βήμα της εφαρμογής (το οποίο φαίνεται να μην το αντιλαμβάνεται σωστά μια και θεωρεί ότι το $3^{ο}$ βήμα προέρχεται από το $1^{ο}$ και όχι από το $2^{ο}$ βήμα), ο Δ συμπληρώνει την σκέψη της Β για την αντικατάσταση του ν στον τύπο αρχικά με 1 και στην συνέχεια με κ+1 [Γ. 76-77] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge):

(Β: «Το 1=1(1+1)/2… είναι σαν να προσθέτει αυτό με το κ=κ….»

Δ: «Αν θέσουμε το κ+1 με ν, το κ+1 γίνεται ίσο με ν και το κ+1+1 γίνεται κ+2»)

Ομοίως, οι Β και Δ συμπληρώνοντας ο ένας τον άλλον αγγίζουν την ουσία της επαγωγικής απόδειξης [Γ. 275- 276] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge):

(Β: «Αφού ισχύει για τον μικρότερο αν προσθέσουμε κάτι…»

Δ: «Αν ο κ+1 θεωρήσουμε ότι είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός…»)

Χαρακτηριστική είναι η συνεργασία των δύο μελών της ομάδας στον έλεγχο στον έλεγχο του αποτελέσματος στο στάδιο της ανασκόπησης του προβλήματος καθώς περιγράφουν, συμπληρώνουν ο ένας τον άλλον [Γ. 312-316] (reciprocal scaffolding – build shared Knowledge):

(Β: «Ναι 1+1 κάνει 2»

Δ: «Οπότε ισχύει και για το 3, οπότε ισχύει και για το 4»

Β: «Ναι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς»

Δ: «και αφού ισχύει για το 4 θα ισχύει για το 5 και αφού ισχύει για το 5 θα ισχύει για το 6»)

Η ύπαρξη της ομάδας λειτούργησε θετικά στην κινητοποίηση των μελών της σε κάποια σημεία όχι όμως σε όλη την διάρκεια της επίλυσης. Η κινητοποίηση του Δ ήταν πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με της Β αλλά σε κάποια σημεία, αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, η Β αν και λιγότερο ενεργή ωστόσο συμπλήρωνε και ενεργοποιούσε την σκέψη του Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΖΗΤΗΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο αποτελείται από τρία μέρη, επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις στα βασικά ερωτήματα της έρευνας. Αρχικά, το θέμα της συζήτησης επικεντρώνεται στην εμπλοκή των μαθητών στην ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου και σε τι έκταση αυτή η εμπλοκή αυτή μπορεί να θεωρηθεί δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος. Στην συνέχεια η συζήτηση εστιάζει στις όψεις του κοινωνικού μεταγνωστικού ελέγχου που εμφανίζονται κατά την διάρκεια της συνεργατικής επίλυσης σύμφωνα και με το πλαίσιο των Chiu και Kuo (2009). Η συζήτηση ολοκληρώνεται με την επίδραση που έχει η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής.

5.1 Ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος

Οι Μαμωνά και Παπαδόπουλος (2017) προτείνουν ότι η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί να αποτελέσει μία πραγματική δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος και αναφέρουν την πρόκληση τόσο του να κατανοηθεί ένα κείμενο όσο και του να αναπτυχθεί μία στρατηγική για την επίλυσή του. Με την πρόταση τους αυτή σχετίζεται το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας (βλ. κεφ.1-ερευνητικά ερωτήματα).

Η ανάλυση των πρωτοκόλλων παρέχει ενδείξεις ότι η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί πράγματι να αποτελέσει δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος στην οποία τα κατά Polya βήματα της επίλυσης προβλήματος είναι διακριτά με το *βήμα της κατανόησης* να καταλαμβάνει την μεγαλύτερη έκταση στην διαδικασία επίλυσης. Οι ομάδες επανέρχονται ξανά και ξανά στο στάδιο της κατανόησης ακόμη και μετά την επινόηση και την εκτέλεση ενός σχεδίου (βλ. σχεδιαγράμματα κεφ.4). Τα στάδια της *κατανόησης του προβλήματος* και της *επινόησης ενός σχεδίου* εμφανίζονται σε όλες τις ομάδες, (η επινόηση με ταυτόχρονη εκτέλεση ενός σχεδίου εμφανίζεται μόνο στις ομάδες Α1, Β2 και Γ) και η *ανασκόπηση του προβλήματος* εμφανίζεται μόνο στις ομάδες Β1 και Γ. Γενικά, τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης είναι διακριτά αλλά δεν ακολουθούνται γραμμικά από τους λύτες κάτι που συναντάται εν γένει στην επίλυση προβλήματος.

Η κατανόηση του προβλήματος καταλαμβάνει την μεγαλύτερη έκταση στην διαδικασία επίλυσης. Οι μαθητές επιστρέφουν στην σφαίρα της κατανόησης ακόμα και μετά την επινόηση και την εκτέλεση ενός σχεδίου το οποίο δεν αποδίδει ή όταν δεν είναι σίγουροι πώς να συνεχίσουν. Αυτό ήταν μια κρίσιμη απόφαση αφού στις δύο από τις τρεις ομάδες (Β1 και Γ) που έφτασαν στην λύση του προβλήματος, το στάδιο της κατανόησης ήταν αυτό που τις οδήγησε στην λύση.

Ενέργειες των λυτών που εντοπίστηκαν και που σχετίζονται με το $1^{ο}$ στάδιο επίλυσης κατά Polya, το **στάδιο της εξοικείωσης** με το πρόβλημα είναι οι παρακάτω:

1) Χρήση συγκεκριμένων τιμών

Στην ομάδα Α1 και στην προσπάθεια να κατανοήσουν τα μέλη της ομάδας πως λειτουργεί ο προτασιακός τύπος της εφαρμογής σε κάθε βήμα της απόδειξης της επαγωγής ένα από τα μέλη της ομάδας προτείνει την αντικατάσταση συγκεκριμένων τιμών για το κ (Α1.11-12). Η χρήση συγκεκριμένων τιμών αποσκοπούσε στο να συνδέσουν τον προτασιακό τύπο με αυτόν του λογοτεχνικού κειμένου που πρότεινε ο Gauss για το άθροισμα των 100 πρώτων φυσικών αριθμών (Α1.17-18).

2) Διατύπωση ερωτήσεων που αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση

Στην ομάδα Β2 ένα μέλος αναρωτιέται γιατί το πρώτο βήμα της επαγωγής εφαρμόζεται μόνο για ν=1 και κατά πόσο αυτή είναι μία ισχυρή προϋπόθεση για την απόδειξη (Β2.75-78). Όμοια στην ομάδα Γ τα μέλη της διατυπώνουν το ερώτημα πως προκύπτει το κ+2 στο επαγωγικό βήμα της απόδειξης της εφαρμογής προκειμένου να καταλάβουν τις πράξεις του επαγωγικού βήματος (Γ.77) και ομοίως τα μέλη της ομάδας Α2 διατυπώνουν το ερώτημα πως προκύπτει το κ+1 στο επαγωγικό βήμα (Α2.162-163)

3) Χρήση μεταβλητής

Οι μαθητές της ομάδας Α1 αφού εντοπίσουν στην απόδειξη της εφαρμογής το πρώτο βήμα (για ν=1), στην συνέχεια συζητούν για την αντικατάσταση του ν με έναν «άγνωστο αριθμό». Αντιλαμβάνονται το κ ως έναν άγνωστο αριθμό, μία δηλαδή μεταβλητή που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές και όχι ακόμα ως μία προσπάθεια γενίκευσης της πρότασης (Α1.70).

4) Σύγκριση του προβλήματος με άλλα παρόμοια

Ιδιαίτερα χαρακτηριστική είναι αυτή η ενέργεια όπου τα μέλη των ομάδων συγκρίνουν το περιεχόμενο του προβλήματος με άλλα μαθηματικά αντικείμενα που τους είναι οικεία, όπως στην ομάδα Α2 όπου η συσχέτιση γίνεται με την αριθμητική πρόοδο (Α2.9-11), στην ομάδα Β1 με τον τρόπο που σκέφτηκε ο Gauss (Β1.185-186) και στην ομάδα Β2 με ακολουθία που αυξάνει κατά 1 (Β2.22-24).

5) Περιγραφή του προβλήματος με δικά τους λόγια

Σε αρκετά σημεία οι μαθητές περιγράφουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια. Στην ομάδα Α2 ένα μέλος περιγράφει με δικά του λόγια τα βήματα του θεωρήματος χρησιμοποιώντας τον όρους *«σύνολο φυσικών αριθμών», «προϋποθέσεις», «αληθής πρόταση», «μπορούμε στην θέση του ν να βάλουμε και κ+1»* (Α2.25-29) ενώ παρόμοιους όρους χρησιμοποιεί μέλος της ομάδας Β2 (Β2.41-43). Στην ομάδα Γ2 βλέπουμε επίσης μία προσπάθεια περιγραφής του δεύτερου μέλους του προτασιακού τύπου (*«δηλαδή αυτό το ν(ν+1)/2 επαληθεύει για κάθε ν ανήκει στους φυσικούς αριθμούς… το άθροισμα των φυσικών αριθμών»)* (Γ.1-3)

6) Καταλαβαίνω τις λέξεις, τους όρους και τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται;

Επειδή το πρόβλημα έχει δοθεί στους μαθητές σε μία μαθηματική γλώσσα που δεν τους είναι οικεία ρωτάνε για το ξεκαθάρισμα συμβόλων και λέξεων. Τους απασχολεί ιδιαίτερα η έννοια του «προτασιακού τύπου» και το σύμβολο $\forall$ που εμφανίζονται στο κείμενο (Β1.7-12)

7) Ενδιάμεση επαλήθευση αριθμητικών πράξεων

Δεδομένου ότι το πρόβλημα περιλαμβάνει την απόδειξη ενός προτασιακού τύπου και ως εκ τούτου έχει στο επαγωγικό βήμα της απόδειξης πράξεις μετά την αντικατάσταση του ν με 1 στο $1^{ο}$ βήμα, με κ και κ+1 στα άλλα δύο βήματα, τα μέλη των ομάδων κάνουν υπολογισμούς και πράξεις προκειμένου να επαληθεύσουν τα ενδιάμεσα αποτελέσματα (Β1.20-22) και (Β2.29-33).

8) Προσπάθεια αποσαφήνισης της επιλογής των κ, κ+1

Τα μέλη της ομάδας Β2 κατανοώντας πως το «κλειδί» της κατανόησης της απόδειξης βρίσκεται στην διαδοχικότητα των κ και κ+1 μένουν στην προσπάθεια ερμηνείας αυτής της διαδοχικότητας (Β2.303-307). Δηλαδή προσπαθούν να κατανοήσουν γιατί στο ένα βήμα το ν αντικαθίσταται με το κ και στο αμέσως επόμενο βήμα το ν αντικαθίσταται με τον επόμενο του κ δηλαδή τον κ+1.

9) Προσπάθεια κατανόησης του ρόλου των βημάτων

Στην ομάδα Γ, τα μέλη ερμηνεύουν το κ ως έναν «πολύ μεγάλο» αριθμό αφού προηγουμένως έχουν διερωτηθεί γιατί γίνεται η επιλογή των κ και κ+1 (Γ.194). Αυτή είναι μία ενέργεια κατανόησης του προβλήματος αλλά που την συγκεκριμένη ομάδα την οδηγεί στην λύση του προβλήματος. Το ίδιο και την ομάδα Β2 στην προηγούμενη ενέργεια. Τα όρια μεταξύ της κατανόησης του προβλήματος, της επινόησης και της εκτέλεσης δεν είναι σαφή μιας και οι μαθητές σκέφτονται, ταυτόχρονα εκτελούν και μέσα από την διαδικασία κατανόησης επιλύουν το πρόβλημα (βλ. σχεδιαγράμματα κεφ.4).

Ενέργειες που σχετίζονται με το $2^{ο}$ στάδιο επίλυσης κατά Polya, το **στάδιο της επινόησης ενός σχεδίου**, είναι οι παρακάτω:

1) Χρήση συγκεκριμένων περιπτώσεων

Θα πρέπει να σημειωθεί πως η ενέργεια αυτή διαφέρει από την αντίστοιχη της χρήση συγκεκριμένων τιμών στο στάδιο της εξοικείωσης γιατί εδώ οι μαθητές δεν αντικαθιστούν το κ με συγκεκριμένους αριθμούς προκειμένου να κατανοήσουν το πρόβλημα αλλά προκειμένου να διερευνήσουν την πιθανή ύπαρξη μοτίβου, ενέργεια σχετική με την επινόηση ενός σχεδίου (Μαμωνά και Παπαδόπουλος, 2017). Μία τέτοια ενέργεια φαίνεται στην ομάδα Α1 (Α1.97)

2) Αναζήτηση μοτίβου

Τα μέλη των ομάδων Β1 και Γ στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν γιατί ισχύει ο προτασιακός τύπος της εφαρμογής αναζητούν την ύπαρξη ενός μοτίβου, μιας διαδικασίας που θα τους επιτρέψει να ερμηνεύσουν την απόδειξη (κάτι ανάλογο με τη μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Gauss, τα βήματα δηλαδή με τα οποία υπολόγισε το άθροισμα των 100 πρώτων φυσικών αριθμών). Στην ουσία δεν προσπαθούν να ερμηνεύσουν τα βήματα της επαγωγής αλλά να κάνουν μια δική τους απόδειξη για τον τύπο ακολουθώντας τα βήματα του Gauss προκειμένου οι ίδιοι να πεισθούν για την ισχύ του τύπου (Β1.202-205) και (Γ.227-229).

3) Προσαρμογή του προβλήματος σε μεθόδους απόδειξης που είναι οικείες

Αυτή είναι μία ενέργεια ελέγχου που μοιάζει με την «σύγκριση του προβλήματος με άλλα παρόμοια» στο στάδιο της κατανόησης αλλά διαφέρει από το στάδιο της κατανόησης στο εξής: Εδώ οι μαθητές δεν προσπαθούν απλά να συγκρίνουν το πρόβλημα με κάποιο παρόμοιο αλλά να αποδείξουν τον προτασιακό τύπο της εφαρμογής με οικεία σε αυτούς μέθοδο απόδειξης όπως αυτή της απαγωγής σε άτοπο (Β2.177-179) εφαρμόζοντάς την όμως για τα βήματα της επαγωγής και όχι για τον τύπο. Δηλαδή δεν ξεκινούν με την υπόθεση «έστω ότι δεν ισχύει ο τύπος» αλλά με την υπόθεση «έστω ότι δεν ισχύει η προϋπόθεση 1». Είναι λάθος προφανώς ο συλλογισμός τους και δεν καταλήγουν στην απόδειξη του τύπου αλλά είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστικό πως οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν έναν άλλον τρόπο απόδειξης και νιώθουν πιο ασφαλείς ανακαλώντας μεθόδους απόδειξης που έχουν μάθει να χρησιμοποιούν.

Οι ενέργειες που σχετίζονται με το $3^{ο}$ στάδιο επίλυσης κατά Polya, το **στάδιο της εκτέλεσης ενός σχεδίου**, δεν εμφανίζονται ανεξάρτητες αλλά ταυτόχρονα με την επινόηση σχεδίου:

1) Αντικατάσταση στο P(k+1) το κ ίσο με 1

Τα μέλη της ομάδας Α1 πιστεύουν πως το «κλειδί» για την κατανόηση της απόδειξης βρίσκεται στην αντικατάσταση του κ με συγκεκριμένους αριθμούς, ένα σχέδιο επίλυσης το οποίο εκτελούν στην συνέχεια αντικαθιστώντας στο P(κ+1) το κ=1, και βλέποντας ότι με βάση την ισχύ για το 1 πετυχαίνουν την ισχύ για το 2 και ότι αυτό εξασφαλίζει την ισχύ για το 3 («*Θα προσθέσουμε 1*») (Α.209, 216). Μέσα από την εκτέλεση αυτού του σχεδίου αρχίζουν και κατανοούν σταδιακά πως οι επιλογές των μεταβλητών (ν=1, ν=κ, ν=κ+1) στα βήματα της επαγωγής δεν είναι τυχαία (Α1.213-215) και ότι υπάρχει σαφής συσχέτιση σε αυτό που ισχύει για κάποιον αριθμό και για τον επόμενό του.

2) Επαλήθευση της εφαρμογής των βημάτων της απόδειξης

Τα μέλη της ομάδας Α2 θεωρούν πως η απάντηση στο ερώτημα γιατί τα βήματα της εφαρμογής αποτελούν απόδειξη βρίσκεται στην επαλήθευση των βημάτων της εφαρμογής και εκτελούν το σχέδιό τους στο οποίο προσπαθούν να αντιστοιχίσουν ένα ένα τα βήματα της απόδειξης της εφαρμογής με αυτά του θεωρήματος: «*Βασικά κάνει ότι λέει το θεώρημα. Βάζει για ν=1, δεν μπορεί να πει για ν=2, αφού μας λέει ν=1*» (Α2.103-108, 125-126).

Τέλος, ενέργειες που σχετίζονται με το 4^{ο} στάδιο επίλυσης κατά Polya, το στάδιο της **ανασκόπησης του προβλήματος**, είναι οι παρακάτω:

1) Περιγραφή των βημάτων της απόδειξης

Στην ανασκόπηση του προβλήματος φτάνει η ομάδα Β1 (Β1.338-340) όπου γίνεται η περιγραφή των βημάτων της απόδειξης με την εννοιολογική τους πλέον ερμηνεία, όπου το πρώτο βήμα, για ν=1, περιγράφεται ως το βήμα που αποδεικνύει τον τύπο για τον «*πρώτο φυσικό αριθμό*» και στο επαγωγικό βήμα ο αριθμός κ αναπαριστά «*όλους τους φυσικούς αριθμούς*».

2) Έλεγχος του αποτελέσματος και για άλλους φυσικούς αριθμούς

Εκτός από την ομάδα Β1, στην ανασκόπηση του προβλήματος φτάνει και η ομάδα Γ η οποία παρουσιάζει το αποτέλεσμα ακόμα πιο αναλυτικά χρησιμοποιώντας και άλλους διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, το 4, μετά το 5 κ.ο.κ (Γ.315-316).

5.2 Όψεις κοινωνικού μεταγνωστικού ελέγχου

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αναφέρεται στα οφέλη που φαίνεται να έχει η συνεργατική επίλυση κατά την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος σύμφωνα με το πλαίσιο των Chiu και Kuo (2009) (βλ. κεφάλαιο 2- Οφέλη της κοινωνικής μεταγνώσης). Κατά την διαδικασία επίλυσης προβλήματος αναδύθηκαν κάποια από αυτά τα οφέλη:

1) <u>Η επέκταση της κατανόησης (expand understanding)</u>. Στην ομάδα Α2 η Σ περιγράφει με δικά της λόγια τα βήματα της εφαρμογής του θεωρήματος και η Χ ανταποκρίνεται άμεσα επεκτείνοντας την σκέψη της Σ περιγράφοντας τα βήματα της εφαρμογής φαινομενικά πιο γενικά και αόριστα από την Σ αλλά ουσιαστικά σπάει το φράγμα της τυποποίησης και εισάγει το πλαίσιο μέσα στο οποίο λειτουργεί η μαθηματική επαγωγή κλείνοντας την φράση της με το «μπορούμε να αποδείξουμε ακόμα περισσότερα» (Α2.25-29)

2) <u>Η δόμηση της κοινής γνώσης (build shared Knowledge)</u>. Η ενέργεια αυτή εμφανίζεται σε όλα τα πρωτόκολλα και είναι η ενέργεια που καταλαμβάνει την μεγαλύτερη έκταση. Τα μέλη των ομάδων αλληλεπιδρούν και χτίζουν από κοινού την γνώση συμπληρώνοντας, διορθώνοντας ο ένας τον άλλον και συζητώντας μεταξύ τους. Στην ομάδα Β2 όταν ο Γ περιγράφει τα βήματα της απόδειξης της εφαρμογής με δικά του λόγια, η Μ συμπληρώνει τον συλλογισμό του διατυπώνοντας το πρώτο βήμα της επαγωγής με περισσότερη μαθηματική αυστηρότητα και εμβαθύνουν συζητώντας για το αν ο τύπος ισχύει και για ν=2 εκτός από την περίπτωση ν=1 (Β2.65-78)

3) <u>Ο εντοπισμός των λανθασμένων ιδεών/ενεργειών (detect flowed ideas)</u>. Στην συζήτηση μεταξύ των μελών της ομάδας εμφανίζεται η ενέργεια του εντοπισμού των λανθασμένων ιδεών όπου ένα ή περισσότερα μέλη αντιλαμβάνονται το λάθος που κάνει ένα άλλο μέλος και το διορθώνουν. Στην ομάδα Β1 η Ε στην αντικατάσταση του ν με 1 στο πρώτο μέλος του προτασιακού τύπου κάνει λάθος και η Δ την διορθώνει (Β1.45-51). Στην ομάδα Β2 όμοια ο Κ2 υπολογίζει λάθος τα δύο μέλη του προτασιακού τύπου κατά την αντικατάσταση του ν με 2 και οι Κ1 και Γ τον διορθώνουν (Β2.31-32)

4) <u>Η αναγνώριση των σωστών ιδεών (recognize correct ideas)</u> Η συναισθηματική υποστήριξη της ομάδας και το επιμερισμένο ρίσκο της αποτυχίας επιτρέπει στα μέλη να εκφράζουν τις απορίες τους και τους συλλογισμούς τους ακόμα και όταν δεν είναι εντελώς σίγουρα για αυτούς. Η Σ στην ομάδα Α2 δεν μπορεί να αντιστοιχίσει τα βήματα του θεωρήματος με αυτά της εφαρμογής («*εγώ βασικά δεν μπορώ να καταλάβω, λέει ν=κ+1, όμως από κάτω σαν ν έχει το κ, βλέπετε ότι εδώ έχει το κ;»)*

και η Π της ξεκαθαρίζει πως λειτουργεί το επαγωγικό βήμα, ότι αρχικά όπου ν είναι το κ και στην συνέχεια προστίθεται και στα δύο μέλη το κ+1. Αμέσως μετά η Σ φαίνεται να είναι σε θέση να αντιστοιχίσει τα βήματα του θεωρήματος με αυτά της εφαρμογής («*Λέει ότι ισχύει για ν=κ και μετά λέει ότι ισχύει και για ν=κ+1»)* (Α2.216-22).

Κατά την ανάλυση των πρωτοκόλλων φάνηκαν ως επικρατέστερες ενέργειες ελέγχου η δόμηση της κοινής γνώσης (build shared Knowledge) και η επέκταση της κατανόησης (expand understanding) καθώς στην διάρκεια επίλυσης του προβλήματος ένα ή περισσότερα μέλη των ομάδων επεκτείνουν ή συμπληρώνουν την πρόταση ενός άλλου μέλους οδηγώντας τελικά την ομάδα είτε στην επίλυση του προβλήματος είτε σε διατυπώσεις και συλλογισμούς που προσεγγίζουν την λύση του προβλήματος. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί πως από τις 5 ομάδες που εξετάσαμε οι 4 εμφάνισαν χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης ενώ η Α1 δεν εμφάνισε χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης.

5.3 Η εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής

Το 3^{o} ερευνητικό ερώτημα αφορά στο κατά πόσο η προσέγγιση της ανάγνωσης του συγκεκριμένου μαθηματικού κειμένου διευκόλυνε η συνέβαλε στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής με την έννοια αν οι μαθητές έφτασαν να τεκμηριώσουν γιατί η σειρά των βημάτων στο θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής αποτελεί απόδειξη. Η βιβλιογραφία μας πληροφορεί ότι οι περισσότεροι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στην διαδικαστική όψη της μαθηματικής επαγωγής παρά στην εννοιολογική. Για χρόνια η διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής επικεντρωνόταν στην απόδειξη προτάσεων που ισχύουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών και η αρχή της μαθηματικής επαγωγής δηλωνόταν με ένα φορμαλιστικό τρόπο. Παρουσιάζοντας οι μαθητές δυσκολία με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής εξέφρασαν και την έλλειψη εμπιστοσύνης στην τεχνική απόδειξης (Baker, 1996). O Ernest (1984) αναφέρει επίσης ότι επικρατεί η εσφαλμένη εντύπωση ότι στην απόδειξη με μαθηματική επαγωγή υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. Τα προβλήματα, τέλος, που χρησιμοποιούν τα σχολικά συγγράμματα είναι κυρίως προβλήματα ταυτοτήτων, ανισοτήτων και διαιρετότητας και δεν βοηθούν στην κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής (Harel, 2002).

Στην παρούσα έρευνα η ευθύνη της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής μεταφέρεται στους ίδιους τους μαθητές μέσα από την προσέγγιση της ανάγνωσης ενός σχετικού μαθηματικού κειμένου ως μια διαδικασία επίλυσης

προβλήματος. Το «πρόβλημα» είναι ένα αυθεντικό λοιπόν μαθηματικό κείμενο, η αρχή της μαθηματικής επαγωγής συνοδευόμενη από μία εφαρμογή της, και από τους μαθητές ζητείται να απαντήσουν στο ερώτημα γιατί τα βήματα της εφαρμογής αποτελούν απόδειξη. Οι μαθητές της Β και Γ λυκείου κατάφεραν να φτάσουν στην λύση του προβλήματος ενώ οι μαθητές της Α λυκείου δεν έφτασαν στην λύση του προβλήματος αλλά πλησίασαν πολλές φορές στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης. Στην ερώτηση που σχετίζεται με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής δηλαδή γιατί τα βήματα της εφαρμογής είναι απόδειξη οι μαθητές απαντούν πως πείθονται για την απόδειξη επειδή εφαρμόζονται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος. Η απάντηση αυτή εμφανίζεται σε όλες τις ομάδες εκτός από την ομάδα Α1. («*Εγώ νομίζω ότι είναι απόδειξη… δηλαδή.. πρώτα επιβεβαιώνει την 1η προϋπόθεση του θεωρήματος, στη συνέχεια επιβεβαιώνει τη δεύτερη και στην συνέχεια καταλήγει σε κάτι που ισχύει*») (Α2.86-88), («*Είναι απόδειξη αφού ουσιαστικά έχουμε επαληθεύσει το α και το β, δηλαδή έχουμε τις προυποθέσεις για να ισχύει το Ρ(ν)*») (Β1.178-179) («*Διότι στο… αρχικά αποδεικνύει το α μέρος του θεωρήματος λέγοντας ότι για ν=1 αυτό ισχύει. Μετά στο β μέρος το αποδεικνύει λέγοντας ότι από το Ρ(κ) μπορούμε να πάμε στο Ρ(κ+1)*») (Β2.258-260), («*Γιατί έχει σχεση το α και το β*») (Γ.96).
και στο σημείο αυτό έχουν οι μαθητές την αίσθηση ότι έχουν λύσει το πρόβλημα («*Γιατί είναι απόδειξη… μα δεν το έχουμε απαντήσει αυτό;*») (Α2.215), («*μα είναι το θεώρημα, κάνει τα βήματα από κάτω. Μια χαρά τα αποδεικνύει όλα*») (Α2.328-329).
Τα μέλη των ομάδων επικεντρώνονται ιδιαίτερα στο να ρίξουν φως στο αλγοριθμικό μέρος της μαθηματικής επαγωγής. Η Π στην ομάδα Α2 αναρωτιέται για το πώς προέκυψε η παρένθεση στο επαγωγικό βήμα (Α2.230-231) και τα μέλη της ομάδας Β1 προσπαθούν να διατυπώσουν με δικά τους λόγια τις πράξεις του επαγωγικού βήματος («προσθέτουμε ουσιαστικά αυτές τις δύο σχέσεις») (Β1.249-153)
Η συνεχής επαναφορά του ερευνητή στο ερώτημα γιατί τα βήματα αποτελούν απόδειξη οδηγεί τις ομάδες της Α λυκείου σε ενδείξεις εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής όπως φαίνεται από την συχνή χρήση λέξεων και φράσεων κομβικής σημασίας που συνδέονται με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής όπως «όποιον φυσικό αριθμό αν βάλουμε…» (Α2.183-184), «την ισότητα θέλουμε να την επεκτείνουμε για όλους τους φυσικούς αριθμούς», «επόμενος αριθμός» (Α2.410-416), «διαδοχικοί αριθμοί» (Α1.169).
Η ίδια παρέμβαση του ερευνητή οδηγεί τις ομάδες Β και Γ σε νέους προβληματισμούς και τελικά στην επίλυση του προβλήματος και οι ομάδες αυτές

περνούν επίσης από το στάδιο της χρήσης λέξεων κομβικής σημασίας για την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής Η ομάδα Β1 φτάνει στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής περιγράφοντας ότι αν ισχύει η Ρ(ν) για τον πρώτο φυσικό αριθμό, για έναν τυχαίο και για τον επόμενό τους τότε λογικό είναι να ισχύει αυτός ο τύπος για κάθε φυσικό αριθμό (Β1.312-314). Μέλος της ομάδας Β2 περιγράφει με δικά του λόγια τα βήματα της επαγωγής (Β2.353-355) και στην ομάδα Γ αντιλαμβάνονται οι μαθητές πως αν η πρόταση ισχύει για έναν φυσικό αριθμό τότε θα ισχύει και για τον επόμενο και τον μεθεπόμενο (Γ.297).Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η διαδοχικότητα των αριθμών παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε σχετικά με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής πως και οι 5 ομάδες στο ερώτημα γιατί τα βήματα της εφαρμογής αποτελούν απόδειξη απαντούν με το επιχείρημα ότι είναι απόδειξη εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μαθηματικής επαγωγής. Με την παρέμβαση του ερευνητή και την επαναφορά των ομάδων στο ερώτημα γιατί τα βήματα είναι απόδειξη, οι μαθητές των ομάδων της Α λυκείου προσεγγίζουν την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής και αυτό φαίνεται από την χρήση λέξεων όπως «επόμενος», «διαδοχικοί φυσικοί», «πολύ μεγάλος αριθμός», «γενίκευση» αλλά δεν φτάνουν να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί τα βήματα της εφαρμογής αποτελούν τελικά απόδειξη. Οι ομάδες της Β και Γ λυκείου περνώντας από τα ίδια στάδια και τους ίδιους προβληματισμούς με αυτούς των ομάδων της Α λυκείου φτάνουν στην λύση του προβλήματος, τεκμηριώνουν δηλαδή γιατί τα βήματα της εφαρμογής είναι απόδειξη αφού αντιλαμβάνονται το γεγονός ότι μια συγκεκριμένη σχέση ισχύει για τον πρώτο αριθμό και στη συνέχεια για κάθε επόμενό του αυτό αποτελεί μια τεκμηρίωση πως η συγκεκριμένη σχέση ισχύει τελικά για κάθε φυσικό αριθμό. Εξηγούν έτσι την γενικευμένη ισχύ της πρότασης στο σύνολο των φυσικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια είδαμε τις πορείες επίλυσης της κάθε ομάδας, τα χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης που προέκυψαν και απαντήσαμε στα ερευνητικά ερωτήματα. Στο κεφάλαιο αρχικά γίνεται μία σύνοψη των αποτελεσμάτων της έρευνας σε συνδυασμό με την σημαντικότητά της και στην συνέχεια παράθεση των περιορισμών της και προτάσεις για νέα έρευνα.

6.1 Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα εμφανίζει την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα προβλήματος. Οι μαθητές εμπλέκονται στην ανάγνωση μαθηματικού κειμένου αναλαμβάνοντας την ευθύνη της κατανόησής του χωρίς να έχει προηγηθεί παρουσίαση από τον καθηγητή όπως συνηθίζεται στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Η σημαντικότητα της έρευνας, της διερεύνησης δηλαδή του κατά πόσο η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί να αποτελέσει δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος, έγκειται σε δύο στοιχεία. Το ένα είναι ότι ενώ μέχρι τώρα για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ή ενός μαθηματικού αντικειμένου γινόταν προσπάθεια εναλλακτικών μεθόδων διδασκαλίας από μέρους του καθηγητή, εδώ ο καθηγητής δεν αναλαμβάνει αυτήν την ευθύνη αλλά την μεταφέρει στους ίδιους τους μαθητές. Ταυτόχρονα όμως είναι παρόν στην διαδικασία και βοηθά τους μαθητές στην αποσαφήνιση συμβόλων, την ερμηνεία λέξεων, το ξεκαθάρισμα αλγεβρικών πράξεων και παρεμβαίνει μόνο όταν οι μαθητές χάνουν τον προσανατολισμό τους και τον στόχο της κατανόησης της έννοιας. Το άλλο στοιχείο είναι ότι μία τέτοια διαδικασία προετοιμάζει τους μαθητές για την ευθύνη που θα αναλάβουν αργότερα ως φοιτητές κάποιου τμήματος να κληθούν να κατανοήσουν μόνοι τους ένα άγνωστο σε αυτούς επιστημονικό κείμενο, δεδομένου ότι στα μαθητικά τους χρόνια δεν προέκυψε ποτέ αυτή η ανάγκη. Ο εκπαιδευτικός του σχολείου ήταν πάντα υπεύθυνος για την μετάδοση της γνώσης και την αποσαφήνιση ή επεξήγηση εννοιών.

Η ανάλυση των πρωτοκόλλων παρέχει ενδείξεις ότι η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί πράγματι να αποτελέσει δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος στην οποία τα κατά Polya βήματα της επίλυσης προβλήματος είναι διακριτά, με το *βήμα της κατανόησης* να καταλαμβάνει την μεγαλύτερη έκταση στην διαδικασία επίλυσης και είναι το στάδιο που οδηγεί τις δύο από τις πέντε ομάδες στην λύση του προβλήματος. Σε όλες τις ομάδες εμφανίζεται το *στάδιο της επινόησης* σχεδίου και σε δύο από τις πέντε ομάδες *η ανασκόπηση του προβλήματος*. Τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης είναι διακριτά αλλά δεν ακολουθούνται γραμμικά από τους λύτες καθώς μπορεί να υπάρχει επιστροφή από το *στάδιο της επινόησης* και *εκτέλεσης σχεδίου* στο *στάδιο της κατανόησης* και μετά στην λύση και την *ανασκόπηση του προβλήματος*.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες έχοντας να αντιμετωπίσουν ένα άγνωστο μαθηματικό κείμενο και δεδομένου ότι δεν είναι συνηθισμένοι σε μία τέτοια διαδικασία, μελετάται στην συγκεκριμένη έρευνα και η κοινωνική τους συμπεριφορά στην διαδικασία αυτή με την αναζήτηση των χαρακτηριστικών συνεργατικής επίλυσης που εμφανίζονται όπως αυτά παρουσιάζονται από τους Chiu και Kuo (2009). Κατά την διαδικασία επίλυσης, αναδύθηκαν οφέλη της κοινωνικής μεταγνώσης όπως η *επέκταση της κατανόησης* (expand understanding), η *δόμηση της κοινής γνώσης* (build shared Knowledge), ο *εντοπισμός των λανθασμένων ιδεών* (recognized flowed ideas), *η αναγνώριση σωστών ιδεών* (recognize correct ideas) με επικρατέστερες την *επέκταση της κατανόησης* και την *δόμηση της κοινής γνώσης*.

Η σημαντικότητα της έρευνας έγκειται και στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής. Η βιβλιογραφική επισκόπηση (βλ. κεφ.2) μας δείχνει ότι με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας οι μαθητές δεν κατανοούν εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή ακόμα κι αν είναι σε θέση να την εφαρμόζουν και να αποδεικνύουν προτάσεις. Η βιβλιογραφική επισκόπηση μας δείχνει επίσης ότι έχουν γίνει προσπάθειες προς αυτήν την κατεύθυνση με εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας της απόδειξης πέραν του παραδοσιακού μοντέλου προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν την μέθοδο. Στην παρούσα έρευνα όμως, δεν σχεδιάζεται μια δραστηριότητα που μπορεί σταδιακά να μυήσει τους μαθητές στον τρόπο απόδειξης με μαθηματική επαγωγή αλλά τους δίνει απευθείας μία τέτοια απόδειξη και τους αφήνει να την ερμηνεύσουν μόνοι τους. Πάντα όμως με την παρουσία και την παρέμβαση όπου χρειάζεται του εκπαιδευτικού. Η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου εμφανίζεται για πρώτη φορά ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος και για την περίπτωση της μαθηματικής επαγωγής υπάρχουν ενδείξεις πως αυτή η διαδικασία οδηγεί στην εννοιολογική κατανόησή της. Οι τρεις από τις πέντε ομάδες κατάφεραν να απαντήσουν στο ερώτημα γιατί τα βήματα του θεωρήματος της μαθηματικής επαγωγής αποτελούν απόδειξη και ήταν οι μαθητές της Β και Γ λυκείου. Οι μαθητές της Α λυκείου πλησίασαν πολλές φορές στην ουσία της επαγωγικής απόδειξης αλλά δεν κατάφεραν να τεκμηριώσουν πλήρως γιατί τα βήματα του θεωρήματος είναι απόδειξη. Τα πρωτόκολλα παρέχουν ενδείξεις πως η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου μπορεί να οδηγήσει στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής τους μαθητές της Β και Γ λυκείου αλλά όχι τους μαθητές της Α λυκείου.

6.2 Περιορισμοί της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα οι μαθητές συμμετείχαν εθελοντικά και ενδιαφέρονταν για τα μαθηματικά. Οι δύο από τις πέντε ομάδες αποτελούνταν από μαθητές της θετικής κατεύθυνσης της Β λυκείου και η μία αποτελούνταν από μαθητές της κατεύθυνσης οικονομίας και πληροφορικής της Γ λυκείου περιορισμός που σχετίζεται και με την φύση της συγκεκριμένης έρευνας εφόσον απαιτούσε συμμετοχή μαθητών που είχαν στα μαθηματικά ένα υπόβαθρο. Επίσης, ο αριθμός των μαθητών που συμμετείχαν δεν ήταν μεγάλος και το μεγαλύτερο ποσοστό ήταν από την ίδια πόλη. Ωστόσο ήταν ένας αντιπροσωπευτικός αριθμός μαθητών ώστε να διαπιστωθούν τα βήματα επίλυσης κατά Polya, να αναδυθούν χαρακτηριστικά συνεργατικής επίλυσης και να εξεταστεί αν κάποιες από τις ομάδες, μέσα από την συγκεκριμένη διαδικασία, μπόρεσαν να φτάσουν στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής.
Ένας άλλος περιορισμός ήταν και η περιορισμένη χρονική διάρκεια εμπλοκής των μαθητών στην ανάγνωση μαθηματικού κειμένου και ότι η έρευνα εστιάζει μόνο στον μαθητή και δεν μελετά τον εκπαιδευτικό και τις παρεμβάσεις του.

6.3 Προτάσεις για νέα έρευνα

Κατά τη διερεύνηση του παρόντος θέματος, φάνηκε να ανακύπτουν και διάφορα άλλα ενδιαφέροντα ερωτήματα και προβληματισμοί που σχετίζονται με το υπόβαθρο των μαθητών, την παρέμβαση του εκπαιδευτικού, το υλικό που δόθηκε στους μαθητές και το γνωστικό αντικείμενο που διερευνήθηκε. Μία πρόταση για μελλοντική έρευνα θα ήταν να μελετηθεί η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος για κάποιο άλλο γνωστικό αντικείμενο εκτός της μαθηματικής επαγωγής, ένα αντικείμενο στο οποίο οι μαθητές παρουσιάζουν προβλήματα με την εννοιολογική κατανόησή του.

Μία άλλη πρόταση για επέκταση της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθεί αν οι μαθητές, φτάνοντας στην εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής μέσα από την ανάγνωση μαθηματικού κειμένου, μπορούν στην συνέχεια να εφαρμόσουν την απόδειξη και να συγκριθεί η αποτελεσματικότητά τους σε σχέση με μαθητές που μαθαίνουν την απόδειξη με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Allen, L. G. (2001). Teaching mathematical induction: An alternative approach. *The Mathematics Teacher*, *94*(6), 500-504.

Avital, S., & Hansen, R. T. (1976). Mathematical induction in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(4), 399-411

Baker, J. D. (1996). Students' difficulties with proof by mathematical reasoning. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York*.

Barnes, M., Gordon, S., & Adamson, P. (1987). *Mathematical induction*. Mathematics Learning Centre, University of Sydney.

Bell, E. T. (1920). Discussion: On Proofs by Mathematical Induction. *The American Mathematical Monthly*, *27*(11), 413-415

Brown, S. (2008). Exploring epistemological obstacles to the development of mathematical induction. In M. Zandieh (Ed.), *Proceedings of the 11th Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education*. Retrieved June 28, 2008 from http://mathed.asu.edu/crume2008/Proceedings/S_Brown_LONG.pdf

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173-189.

Chin, C., & Lin, F. L. (2000). Values and values statement emerged in students' preferences on test items: A case study from mathematical induction. In *History and Pedagogy of Mathematics 2000 Conference*, Taipei, Taiwan.

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschovich, J. & Munoz, A. (2001). Learning to graph linear functions: A case study of conceptual change. Cognition and Instruction, 19, 215-252.

Chiu, M. M., & Kuo, S. W. (2009). Social metacognition in groups: Benefits, difficulties, learning, and teaching. In C.B. Larson (Ed.), *Metacognition: New research developments* (pp. 117-136). Hauppauge, NY: Nova Science Publishers

Chiu, M. M., & Kuo, S. W. (2010). From metacognition to social metacognition: Similarities, differences, and learning. *Journal of Education Research*, *3*(4), 321-338.

Μαμωνά, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

David, M., Grassl, R., Hauk, S., Mendoza Spencer, B., & Yestness, N. (2009). Learning proof by mathematical induction. In M. Zandieh (Ed.), *Proceedings of the 12th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* Raleigh, North Carolina. (Published electronically at ………… θέλει την ηλ διευθυνση).

Davis, P., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2011). *The mathematical experience*. Springer Science & Business Media.

Dubinsky E.(1986).On teaching mathematical induction.Journal of Mathematical Behavior,5(3),
305-17

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*(1), 55-92

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173-189.

Fischbein, E. & Engel, H. (1989). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. I (pp. 276–282). Paris, France.

Flavell, J. H. (1976). **Metacognitive Aspects of Problem Solving**. In L. B. Resnick (Ed.), The Nature of Intelligence (pp. 231-235). Hillsdale, NJ Earlbaum

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13

Guy, R. K. (1988). The strong law of small numbers. *The American Mathematical Monthly*, *95*(8), 697-712.

Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNRBased Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.) Learning and Teaching Number Theory. New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. (2002). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model
for DNR-based instruction. In S. Campell & R. Zaskis (Eds.), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction (pp. 185–212). New Jersey: Ablex Publishing.

Harel, G. (2008). Mathematical induction: Cognitive and instructional considerations. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education. Note 73* (pp. 111–124). Washington, DC: Mathematical Association of America

Holton, D. and Clarke, D. (2006). Scaffolding and metacogniti
on. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37 (2), 127-143.

Hurwitz,W.A.(1920).Discussions.American Mathematical Monthly,27,407-409.

Johnson, D., Johnson, R., & Smith, K. (2007). The state of cooperative learning in postsecondary and professional settings. Educational Psychology Review, 19, 15-29.

Leron, U., & Zazkis, R. (1986). Computational recursion and mathematical induction. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 25-28.

Lowenthal, F., & Eisenberg, T. (1992). Mathematical Induction in School: An illusion of Rigor?. *School Science and Mathematics*, *92*(5), 233-238.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. Journal of Mathematical Behavior, 24, 385-401

Mayring, Philipp. "Qualitative content analysis: theoretical foundation, basic procedures and software solution." (2014): 143.

Moore, R. (1990). College students' difficulties in learning to do mathematical proofs, unpublished doctoral dissertation. Athens, GA: University of Georgia.

Nardi, E., & Iannone, P. (2003). The rough journey towards a consistent mathematical proof: the P (n+ 1)-P (n+ 1) step in mathematical induction. In *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 621-628).

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Natl Council of Teachers of.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of mathematics

Oxford, R. L., Lavine, R. Z., & Crookall, D. (1989). Language learning strategies, the communicative approach, and their classroom implication. Foreign Language Journal, 22(1), 29-39.

Palla, M., Potari, D., & Spyrou, P. (2012). Secontary school students' understanding of mathematical induction: Structural characteristics and the process of proof constraction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(5), 1023-1045.

Pichert, J. W. , & Anderson, R. C. (1977). Taking different perspectives on a story. Journal of Educational Psychology, 69(4), 309-315

Porteous, K. (1990). What do children really believe? Educational Studies in Mathematics, 21, 589-598.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, *89*(4), 361-380.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive science and mathematics education, 189,* 215.´

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of "out loud" problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4*(2), 171-191.

Sfard,A.(1988).Operational vs.structural method of teaching mathematics: A case study.Proceedings of PME XII(yo\.2)(pp.560-567).Hungary

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 145–166.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40,* 314–352.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving and learning: The relationship between problem-solving and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior, 24,* 351–360.

Webster's International Dictionary of the English Language, 2nd Edition 1951, p.2070

Wistedt, I. & Brattstrom, G. (2005). Understanding mathematical induction in a cooperative setting. In A. Chronaki & I. M. Christiansen (Eds.), Challenging perspectives on mathematics classroom communication (pp. 173–203). Greenwich: Information Age Publishing.

Young, J. W. A. (1908). On mathematical induction. *The American Mathematical Monthly*, *15*(8-9), 145-153.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) Δημοτικού - Γυμνασίου (ΦΕΚ 303, τ. Β - 13/03/2003).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Λογοτεχνικό απόσπασμα από το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των μαθηματικών: Καρλ Φρίντριχ Γκάους»

Μετά τα δύο πρώτα χρόνια στο σχολείο, ήρθε ο καιρός να αρχίσει ο Καρλ την αριθμητική. Μια ημέρα που ο *Herr* Μπίτνερ ήθελε να κρατήσει τα αγόρια ήσυχα για κάμποση ώρα, τους ανέθεσε να ολοκληρώσουν μια εργασία που γνώριζε ότι θα τον βοηθούσε να πετύχει το σκοπό του. Συγκεκριμένα τους ζήτησε να υπολογίσουν το άθροισμα των πρώτων 100 διαδοχικών ακεραίων αριθμών: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 +... + 96 + 97 + 98 + 99 + 100. Τα περισσότερα παιδιά άρχισαν χωρίς δεύτερη σκέψη να εργάζονται με τον κλασικό τρόπο εκτελώντας επανειλημμένες προσθέσεις 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15, 15 + 6 = 21,... Αυτή η διαδικασία θα τους έπαιρνε κάμποση ώρα, η βέργα όμως του κυρίου Μπίτνερ ήταν έτοιμη να επαναφέρει στην τάξη όποιο αγόρι εγκατέλειπε την προσπάθεια.

Ο Καρλ όμως επέλεξε μια άλλη μέθοδο. Αντί να αρχίσει αμέσως τις προσθέσεις, έκατσε και σκέφτηκε για λίγο. Κατόπιν έγραψε πάνω στην πλάκα του την απάντηση, κατευθύνθηκε στο μπροστινό μέρος της αίθουσας και την απόθεσε πρώτος από όλα τα αγόρια επάνω στην έδρα του κυρίου Μπίτνερ. Όταν τα άλλα παιδιά θα ολοκλήρωναν την εργασία τους, έπρεπε να στοιβάξουν κι εκείνα τις πλάκες τους επάνω από εκείνη του Καρλ, με τη σειρά που τελείωνε ο καθένας. Ο *Herr* Μπίτνερ εξέτασε την πλάκα του Καρλ, είδε γραμμένο σ' αυτήν μόλις έναν αριθμό και τον αγριοκοίταξε. Για το *Herr* Μπίτνερ θα ήταν απόλαυση η στιγμή που θα επιτιμούσε αυτό το υπεροπτικό αγόρι όταν θα έλεγχε τις απαντήσεις. Στο μεταξύ ο Καρλ γύρισε στο θρανίο του και περίμενε υπομονετικά τους άλλους να τελειώσουν. Ήταν βέβαιος ότι η λύση του ήταν σωστή. Εάν κλονιζόταν η πίστη του στο αποτέλεσμα, αρκούσε μόνο το βλέμμα του κυρίου Μπίτνερ για να αρχίσει να τρέμει. Η εμπιστοσύνη όμως που είχε ο Γκάους στη δική του συλλογιστική, τόσο στα πρώτα όσο και στα κατοπινά χρόνια της ζωής του, ήταν ακλόνητη. Ήταν πλέον ώρα να προχωρήσει στην επόμενη πρόκληση.

Η σκέψη του ήδη βρισκόταν μακριά. «Λοιπόν, 13 × 13 = 169. Αν πολλαπλασιάσω έναν αριθμό κατά ένα μικρότερο του 13 επί έναν αριθμό κατά ένα μεγαλύτερο του 13 (δηλαδή, 12 × 14), παίρνω 168, που είναι κατά ένα μικρότερος του 169. Ωραία. Τι γίνεται όμως με το 14 × 14; 14 × 14 = 196. Αν πολλαπλασιάσω έναν αριθμό κατά ένα μικρότερο του 14 επί έναν αριθμό κατά ένα μεγαλύτερο του 14 (δηλαδή, 13 φορές το 15) θα πάρω 195. Θα έχω πάλι έναν αριθμό κατά ένα μικρότερο του 196. Ισχύει πάντα κάτι τέτοιο άραγε; Στοιχηματίζω ότι ισχύει. Για να δούμε. 25 × 25 δίνει 625. 24 × 26 κάνει– ναι,

ναι– κάνει 624, πάλι κατά ένα μικρότερο του 625. Σαν καλό μου φαίνεται. Είμαι σίγουρος ότι το αποτέλεσμα θα είναι πάντοτε ένας αριθμός κατά ένα μικρότερος του τετραγώνου του αριθμού που βρίσκεται ανάμεσά τους.»

Μια ώρα αργότερα, όταν όλες οι πλάκες είχαν πλέον στοιβαχτεί και ήταν έτοιμες για έλεγχο, ο Μπίτνερ έψαξε στην τσέπη του για το χαρτάκι με τη σωστή απάντηση και στη συνέχεια άρχισε να ελέγχει τις πλάκες. Η μία μετά την άλλη, όλες οι πλάκες είχαν λάθος αποτέλεσμα. Ορισμένα παιδιά είχαν κάνει λάθος στους πρώτους υπολογισμούς τους, συνεπώς ήταν εξαρχής καταδικασμένα να αποτύχουν κι έτσι το μεγαλύτερο μέρος της προσπάθειάς τους πήγαινε ολοκληρωτικά χαμένο. Άλλα παιδιά πάλι έκαναν το λάθος τους λίγο πριν από το τέλος των επίπονων υπολογισμών, οπότε και αυτών οι απαντήσεις ήταν επίσης λαθεμένες. Η εργασία αυτή αποδείχτηκε πως ήταν μια σκληρή δοκιμασία για τα αγόρια. Η βέργα δούλεψε πολύ.

Τελικά ο *Herr* Μπίτνερ έφτασε στην πλάκα του Καρλ, η οποία βρισκόταν στη βάση της στοίβας, και διάβασε τη σωστή απάντηση: 5.050. Πώς τα κατάφερε ο Καρλ, αναρωτήθηκε; Είχε απαντήσει σχεδόν αμέσως, στην πλάκα του δεν υπήρχε ούτε ένας υπολογισμός γραμμένος, και έτσι του γεννήθηκαν υποψίες. Απαιτούσε συνεπώς μια εξήγηση. «Για πες μου, παιδί μου, πώς έφτασες σ' αυτό το συμπέρασμα;»

Ο Καρλ σηκώθηκε, τεντώθηκε, και άρχισε να εξηγεί. «Λοιπόν, κύριε, σκέφτηκα ως εξής: Διαπίστωσα ότι αυτοί οι αριθμοί βρίσκονται όλοι σε μια σειρά, είναι διαδοχικοί, και έτσι συμπέρανα ότι πρέπει να υπάρχει κάποιος τύπος που να τους συνδέει. Πρόσθεσα λοιπόν τον πρώτο και τον τελευταίο αριθμό: 1 + 100 = 101. Στη συνέχεια πρόσθεσα τον δεύτερο και τον προτελευταίο: 2 + 99 = 101. Τότε ακριβώς άρχισα να κατανοώ το μηχανισμό: 3 + 98 = 101, 4 + 97 = 101, 5 + 96 = 101. Κατάλαβα λοιπόν ότι αν συνέχιζα να προσθέτω τους αριθμούς των ζευγαριών που δημιουργούνται με αυτόν τον τρόπο, θα έφτανα τελικά στο 50 + 51. Αυτό σήμαινε πως θα έβρισκα 50 ζεύγη που θα αποτελούνται από αριθμούς που θα έχουν πάντοτε άθροισμα 101, οπότε το ολικό άθροισμα θα έπρεπε να είναι 50 × 101 = 5.050. Δεν ήταν απαραίτητο συνεπώς να προσθέσω όλους τους αριθμούς, κύριε.»

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές

Το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές περιλάμβανε μαζί με το λογοτεχνικό κείμενο του Παραρτήματος Α, τα 2 παρακάτω μαθηματικά κείμενα από το σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά Β Λυκείου: Άλγεβρα» του Ηλία Β. Ντζιώρα (1978, σελ. 22) και τις παρακάτω ερωτήσεις:

§ 19. Θεώρημα *(πρώτη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς)*.—**Ἂν p(ν) εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τέτοιος ὥστε :**

α) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση p(1), καί

β) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση : $\forall k \in N$, $p(k) \Rightarrow p(k+1)$,

τότε (δηλ. ὅταν συμβαίνουν τά α) καί β)) **ὁ προτασιακός τύπος p(ν) εἶναι ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε $\nu \in N$.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η : Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει ὁ τύπος:

$$p(\nu):\qquad 1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2} \tag{1}$$

Ἀπόδειξη α) Γιά $\nu = 1$ ἡ (1) γίνεται : $1=\frac{1(1+1)}{2}$, ἀληθής.

β) Ἂς δεχθοῦμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu = k$ ($k \in N$), δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \tag{2}$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$, δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{3}$$

Πράγματι, ἄν προσθέσουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $(k+1)$ ἔχουμε:

$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, δηλαδή ἡ (3) ἰσχύει.

γ) Συμπέρασμα : Στό α) ἀποδείξαμε ὅτι p(1) εἶναι ἀληθής. Στό β) ἀποδείξαμε ὅτι: ἄν p(k) εἶναι ἀληθής, τότε καί ἡ πρόταση p(k + 1) εἶναι ἀληθής *. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in N$.

Ερωτήσεις του φύλλου εργασίας:

- Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του λογοτεχνικού κειμένου και της εφαρμογής του Θεωρήματος;
- Τι λέει το Θεώρημα της Μαθηματικής επαγωγής. Μπορείτε να διακρίνετε τα βήματα σε μια απόδειξη Μαθηματικής επαγωγής; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτή η σειρά από βήματα αποτελεί όντως απόδειξη; Πώς μας πείθει για την αλήθεια της πρότασης που αποδεικνύει;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Πρωτόκολλα ομάδων

<u>Πρωτόκολλο ομάδας Α1:</u>

Συμμετείχαν οι μαθήτριες της Α λυκείου Εύα (Ε), Μαρία (Μ), Νεφέλη (Ν).

Μετά από 20 λεπτά ανάγνωσης:

Κ – Καταρχάς πρώτη φορά έρχεστε σε επαφή με κάτι τέτοιο; Είναι η πρώτη φορά που διαβάζετε άγνωστο μαθηματικό κείμενο που δεν έχετε διδαχθεί κάτι γύρω από ευτό; Βγάλατε κάποια άκρη;

Ε – Ε, βασικά.. αν αντικαταστήσουμε το ν με το 1… βγάζει 1….. Αντικαταστήσαμε το ν και με το 1 και με το κ βγάζει και 1 και κ

Ν – Ναι αντικαθιστούμε με το κ και μετά αν αντικαταστήσουμε το 1 με κάποιον αριθμό βγαίνει…

Κ – Για το πρώτο ερώτημα, αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του κειμένου και της εφαρμογής;

Ν – Το αποτέλεσμα που καταλήγει ο μαθητής στο κείμενο είναι το ίδιο με της εφαρμογής

Κ – Δηλαδή η εφαρμογή αποδεικνύει ότι το άθροισμα από 1 έως 100 είναι… πόσο βγαίνει ή αποδεικνύει κάτι άλλο;

Ε – Το ίδιο είναι

Κ – Κοίτα ότι είναι κάτι παρόμοιο είναι

Ε – Αν προσθέσουμε το 1 μέχρι το 8 βγαίνει το αποτέλεσμα

Κ – άρα λοιπόν η σχέση που βλέπετε ανάμεσα στο κείμενο και την εφαρμογή είναι αυτό.. αποδεικνύεται το ίδιο πράγμα.. Αλλά κάτι δεν σας κάθετε… Τι κάνει η εφαρμογή που δεν έκανε ο Gauss σ εκείνη την ηλικία

Κ – Λίγο εδώ θα βοηθήσω… ο Gauss βρήκε το αποτέλεσμα 1+2+…..+100 ενώ η εφαρμογή είναι κάτι πιο γενικό. Αυτό το αποτέλεσμα που έβγαλε εδώ η εφαρμογή το καταλαβαίνετε; Μπορείτε να πείτε ένα παράδειγμα;

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

Κ – Δηλαδή πως θα εφαρμόσετε αυτήν την εφαρμογή αν σας πω κάντε 1+2+3+…..+10;

Μ – Εεεε 10(10+1)/2

Κ – Μπράβο, δηλαδή θα μας βγάλει 55… Απλά αυτό ο Gauss το έκανε για μέχρι το 100. Δεν μπορείς να πεις ότι είναι μια απόδειξη

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

Κ – Πάμε στο άλλο το ερώτημα, τι λέει to θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής;

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

Κ – Με Ρ(κ) ονομάζει μία πρόταση… με σύνολο αναφοράς το σύνολο των φυσικών αριθμών, εννοεί ότι οι προτάσεις αυτές είναι προτάσεις που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Αν λοιπόν Ρ(κ) είναι μία τέτοια πρόταση… εεεε Ρ(ν) συγγνώμη….Αν λοιπόν Ρ(ν) είναι μία πρόταση τέτοια ώστε να είναι αληθής η πρόταση Ρ(1), να ισχύει δηλαδή για ν=1 όπως λέει παρακάτω η εφαρμογή και να είναι αληθής η πρόταση Ρ(κ) να συνεπάγεται Ρ(κ+1) τότε λέει η πρόταση είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό. Δείτε το λίγο με την εφαρμογή… Αυτό είναι ένα θεώρημα…. Που σου λέει ότι έτσι αποδεικνύεις μία πρόταση. Διακρίνετε εσείς τα βήματα του θεωρήματος κάτω στην εφαρμογή; Είναι ευδιάκριτα;

Ν – Πρέπει να αντικαταστήσουμε τον αριθμό κ, δηλαδή… με 4

Κ – Δηλαδή να πούμε πόσο κάνει 1+2+3+4;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Κ – Η απόδειξη γιατί μας πείθει;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Κ – Δείτε το θεώρημα, δείτε και την εφαρμογή και προσπαθείστε να διακρίνετε τα βήματα του θεωρήματος

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

Κ – Εγώ πιστεύω ότι έχετε καταλάβει πιο πολλά πράγματα από αυτά που λέτε

Ε – Όταν λέτε τα βήματα… ας πούμε να πούμε ότι αντικαθιστούμε με έναν οποιονδήποτε αριθμό το ν και…

Κ – Στο 1^{ο} βήμα λες;

Ε – Ναι ναι, και…

Κ – Στο 1^{ο} βήμα δεν είναι για οποιονδήποτε αριθμό, για ν=1

Ε – Ναι.. μετά… αντικαθιστούμε με έναν άγνωστο αριθμό

Κ – Τον κ εννοείς;

Ε – Ναι…εεε και μετά… το προσθέτουμε με τον κ+1 και μετά… βγαίνει (κ+1)(κ+2)/2

Κ – Σε έπεισε εσένα αυτό ότι η πρόταση ισχύει;

Ε – Ναι γιατί αν αντικαταστήσουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς στο κ… βγαίνει

Κ – Σωστές είναι οι παρατηρήσεις σου… Πάνω σου δίνει ένα θεώρημα και σου λεει ότι για να αποδείξεις μία πρόταση ακολουθώ αυτά τα βήματα. Κι εσύ λες τώρα ότι τα βήματα είναι ότι αντικαθιστώ το κ με έναν φυσικό αριθμό, έτσι; Και διαπιστώνω τι;

Ε – Ότι αυτό το αποτέλεσμα που βγαίνει είναι ίσο με το άθροισμα των 1+2+3 κτλ

Ν – Μέχρι τον αριθμό που αντικαταστήσαμε

Κ - ¨όχι, λέω στο 1^{ο} βήμα, που αντικαταστήσαμε το 1, λέει γίνεται εκείνο και δίπλα γράφει και αληθής

Ν – Ναι γιατί ισχύει επειδή 1(2)/2=1

Κ – Α, άρα αυτό που ισχύει είναι η πρόταση που λέει πάνω

Κ – Μετά είπε η Εύα ότι αντικαθιστούμε… στην θέση του ν βάζουμε έναν τυχαίο αριθμό το κ Και τι βλέπουμε βάζοντας έναν τυχαίο αριθμό το κ, βλέπουμε κάτι καταρχάς; Προσέξτε πάνω λέει, ας δεχθούμε ότι η σχέση ισχύει για ν=κ, την θεωρεί δεδομένη. Άρα εδώ δεν αποδεικνύει κάτι

Μ- Ε Ν – Όχι

Κ – Και μετά τι κάνει; Να αποδείξουμε λέει ότι η 1

Ν – Ότι τώρα το ν είναι κ+1

Κ – Εδώ γιατί τώρα παίρνει το κ+1; Δεν σας κάνει εντύπωση; Γιατί παίρνει το κ+1 και δεν παίρνει κάτι άλλο; Το 100 ας πούμε…Ή μάλλον ας το δούμε ολοκληρωμένα, παίρνει το κ+1 και τι αποδεικνύει;

Ν – Ότι πάλι αυτή η ισότητα ισχύει

Κ – Ναι, από πού το καταλαβαίνετε ότι ισχύει η ισότητα;

Ε – Άμα αντικαταστήσουμε το κ με έναν αριθμό

Κ – Από εκεί το καταλαβαίνετε; Λέει, θα αποδείξουμε τώρα ότι η 1 ισχύει και για ν=κ+1, βλέπετε ποια είναι η 1 σχέση, δηλαδή ότι, εκείνο που βλέπετε 1+2+….+κ+1, ότι κάνει (κ+1)(κ+2)/2. Και το αποδεικνύει όντως

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Κ – Η εφαρμογή εδώ λέει ότι έχεις το 100; Πρέπει να βγάζει 100(100+1)/2, έχεις το κ, πρέπει να βγάζει (κ+1)(κ+2)/2. Άρα το αποδεικνύει ότι όντως ισχύει αυτή η πρόταση, το θέμα είναι λοιπόν ότι εμάς γιατί μας πείθει, γιατί έκανε αυτά τα βήματα, που βλέπετε εσείς το πειστικό επιχείρημα. Γιατί ουσιαστικά έκανε τα βήματα του θεωρήματος. Λέει το θεώρημα για να αποδείξω ότι ισχύει μία πρόταση πρέπει να αποδείξω ότι είναι αληθής η πρόταση P(1), δηλαδή για ν=1, ότι είναι αληθής η συνεπαγωγή P(κ) συνεπάγεται το P(κ+1), δηλαδή αν θεωρήσεις δεδομένο το P(κ), δηλαδή ότι η πρόταση ισχύει για κ, τότε θα ισχύει και για κ+1. Πρέπει να αποδείξεις ότι ισχύει για κ+1. Και αν καταφέρεις θεωρώντας δεδομένη ότι ισχύει για κ, τότε έχεις αποδείξει την αρχική σου πρόταση. Καταλάβαμε τι απόδειξη κάνει;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………..

Κ – Ή θεωρείτε ότι είναι πάρα πολύ δύσκολο το θεώρημα

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Κ – Τι σας προβληματίζει; βλέπω ότι υπάρχει ένας προβληματισμός αλλά έχετε καταλάβει και κάποια πράγματα. Πείτε μου λίγο τι σας προβληματίζει

Ε – Στο τελευταίο, όχι κατάλαβα πως πήγε εκεί δεν κατάλαβα αυτό που μας ρωτάτε δηλαδή πως ισχύει αυτό;

Κ – Εγώ αυτό που σας ρωτάω είναι ότι εδώ πέρα βλέπω μια απόδειξη, δηλαδή ένας έκανε τα εξής βήματα. Θέλω να αποδείξω αυτήν την πρόταση για τους φυσικούς αριθμούς. Αποδεικνύω ότι ισχύει για ν=1, μετά υποθέτω ότι ισχύει για ν=κ και μετά αποδεικνύω ότι ισχύει για ν=κ+1.. Ο κ+1 είναι ο επόμενος του κ, έτσι; Και μετά λέει αποδείξαμε ότι ισχύει η πρόταση 1

Πείτε μου τι προβληματισμούς έχετε..

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Ν – Ότι αφού ισχύει για κ και το κ+1 είναι φυσικός αριθμός έχουμε αποδείξει αυτό που λέει στην αρχή

Κ – Από πού το έχουμε αποδείξει αυτό;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

Κ – Αν τα πάρουμε λίγο με τη σειρά… τα ερωτήματα, καταρχάς τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής Λέει ότι αν μία πρόταση είναι αληθής για ν=1 και μετά αν είναι αληθής η πρόταση P(κ) συνεπάγεται P(κ+1) τότε η πρότασή μου είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό ν Αυτό το ξεκαθαρίσαμε; Καταλάβαμε τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής

(Θετικές αντιδράσεις)

Κ – Ωραία, τώρα πάει σε μία εφαρμογή και εφαρμόζει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής. Διακρίνετε τα βήματα;

Ε – Ν – Μ – Ναι

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

(τα ξαναλέμε)

Κ – Πάμε τώρα στο δεύτερο ερώτημα, μπορείτε να εξηγήσετε – αυτό τώρα πρέπει να το εξηγήσετε με το μυαλό σας – γιατί αυτή η σειρά από βήματα είναι όντως απόδειξη;

Ν – Γιατί καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει;

Κ – Μμμμ από πού είσαι επηρεασμένη και το λες αυτό;

Μ – Γιατί καταλήγουμε ότι ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό

Κ – Στο ένα αποδεικνύει ότι ισχύει για ν=1, στο άλλο υποθέτει ότι ισχύει για ν=κ και μετά αποδεικνύει ότι ισχύει για ν=κ+1

Ε – Αμα πάρουμε έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό και το αντικαταστήσουμε είτε με το ν είτε με το κ… θα βγει

Κ – Γιατί άμα πάρουμε έναν οποιονδήποτε φυσικό αριθμό, ισχύει; Εμείς όμως δεχτήκαμε ότι ισχύει αυτή η πρόταση γιατί μας έδωσαν αυτήν την απόδειξη, αλλιώς… γιατί να την δεχτούμε;

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

Κ – Να βοηθήσω λίγο διαφορετικά, μείνετε λίγο στην συνεπαγωγή αυτή, το Ρ(κ) να συνεπάγεται το Ρ(κ+1). Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κ και μετά αποδεικνύουμε ότι ισχύει για ν=κ+1. Γιατί για κ+1 και όχι για κ+2; Μπορείτε να το καταλάβετε;

Ν – Είναι διαδοχικοί αριθμοί;

Κ – Είναι διαδοχικοί αριθμοί, ωραία, άρα υποθέτει ότι η πρόταση ισχύει για ένα κ και μετά αποδεικνύει ότι ισχύει για τον επόμενο του κ. Άρα γιατί μας πείθει για την αλήθεια της πρότασης;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

Κ – Μείνετε σε αυτό το ερώτημα, μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτή η σειρά από βήματα είναι απόδειξη;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………….

(Δίνω ένα παράδειγμα από Ευκλείδεια Γεωμετρία για να τους θυμίσω την έννοια της απόδειξης . Τους εξηγώ ότι αυτή είναι μία άλλου τύπου απόδειξη, δεν έχει την σειρά βημάτων που έχουν συνηθίσει από την γεωμετρία)

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Κ – Είπε κάτι νωρίτερα η Εύα, ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό το για όλους τους φυσικούς αριθμούς…

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

(Σε όλη την διάρκεια διαβάζουν διαρκώς, προσπαθώντας να βρουν απαντήσεις)

(Επαναλαμβάνω κάθε τόσο το ίδιο ερώτημα)

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Κ – Να σας ρωτήσω κάτι, σε σχέση με τις γνώσεις που έχετε στα μαθηματικά σας φαίνεται δύσκολο αυτό το θεώρημα;

Ε – Ε όχι εντάξει δεν είναι κάτι που δεν το καταλαβαίνεις με τίποτα

Κ – Η εφαρμογή πως σας φαίνετε;

Μ – Ε και οι εφαρμογές με κάποιες γνώσεις που έχουμε μπορούμε…

Κ – Μένει να καταλάβουμε γιατί το επιχείρημα εδώ του θεωρήματος είναι αληθές. Γιατί τελικά αυτή η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.. Επειδή μας το λέει πάνω το θεώρημα;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

(Συνεχίζουν να διαβάζουν ασταμάτητα)

Κ – Να σας πω… η γν/ωμη μου είναι ότι δεν έχει νόημα να διαβαζετε άλλο Επικεντρωθείτε στην έννοια

Ν – Αν αντικαταστήσουμε το ν=1 και μετά πάρουμε το 1+1, θα βγει..

Κ – Καταλάβατε τι είπε;

Ε – Ναι..οτι

Ν – άμα το κ είναι το ν και μετά θέλουμε να βρούμε το κ+1 μπορούμε να θεωρήσουμε το ν+1 και αφού μας έχει δώσει για παράδειγμα το ν=1 θα κάνουμε 1+1 και θα αντικαταστήσουμε όπου 1 το 2

Κ – Και μετά αν θέλω να δω αν ισχύει για ν=3;

Ν – Θα προσθέσουμε 1

Κ – άρα, αποδεικνύοντας αυτή την συνεπαγωγή, είναι σαν να μου λέει ότι ισχύει για κάθε αριθμό αρκεί να ξέρουμε ότι ισχύει και για τον προηγούμενο του

(Συμφωνούν)

Ν – Και αφού μας λέει ότι ισχύει για το 1 ισχύει και για τον επόμενο

Κ – Και για το 2, και αφού ισχύει για το 2 ισχύει και για το 3, και πως ξέρουμε ότι ισχύει και για κάθε επόμενο; Το έχουμε αποδείξει στην συνεπαγωγή

Ν- Μ – Ε – Ναι

Κ – Και πως σας φάνηκε αυτό το κειμενάκι;

Ν – Αν μας φάνηκε εύκολο;

Κ – Εύκολο, δύσκολο, σε σχέση με τα μαθηματικά που έχετε διδαχθεί..

Ν – Από αυτά που έχουμε κάνει λίγο πιο δύσκολο αλλά βατό

Μ – Ναι, κάτι ξέραμε αλλά χρειαζόταν και λίγο εξήγηση.. Αυτό…

Κ – Κρίνετε ότι αν ήσασταν εντελώς μόνοι αντιμέτωποι με αυτό, χωρίς έναν καθηγητή να σας εξηγήσει κάποια βηματάκια, είναι λίγο χαοτικό για κάποιον μαθητή;

Ν – Μπορεί να έπαιρνε λίγο παραπάνω ώρα

Κ – Α ρα τελικά ας καταλήξουμε.. πως αποδεικνύουμε προτάσεις με μαθηματική επαγωγή… πείτε το λίγο με δικά σας λόγια…

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

Κ – Μου κάνει εντύπωση που ενώ δεν μιλάτε τόση ώρα παρόλα αυτά το θεωρήσατε βατό. Πως σας φάνηκε να διαβάζετε μία μαθηματική απόδειξη; Πως σας φάνηκε αυτή η διαδικασία. Νιώθετε ότι σας προσφέρει κάτι ή προτιμάτε την παραδοσιακή διδασκαλία;

Μ – Εγώ πιστεύω ότι τα κατανοώ καλύτερα αν με βοηθάει κάποιος και μου εξηγεί

Ν – Ή να με βοηθάει ταυτόχρονα

Ν – Αμα είχαμε να καταλάβουμε το θεώρημα χωρίς την εφαρμογή…

Κ – Πολύ πιο δύσκολα;

Ν – Ναι!!

<u>Πρωτόκολλο ομάδας Α2</u>

Συμμετείχαν οι μαθήτριες της Α λυκείου Σοφία (Σ), Χριστίνα (Χ), Πασχαλιά (Π).

Μετά από 20 λεπτά ανάγνωσης:

Αν υπάρχει σχέση μεταξύ του κειμένου και της εφαρμογής του θεωρήματος…

Βασικά εγώ πιστεύω ότι υπάρχει γιατί… όλα βασίζονται στο να αποδείξεις κάτι αρχικά….αν αποδείξεις κάτι…

Βασικά… έχουν σχέση με την πρόσθεση φυσικών αριθμών…

Εγώ σκέφτηκα ότι και στις δύο περιπτώσεις πρόκειται για μία αριθμητική πρόοδο

Ναι ακολουθία

Αυτό ναι

Κ- Αυτά για το πρώτο ερώτημα; Δηλαδή η απάντησή σας για το αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του λογοτεχνικού κειμένου και της εφαρμογής…

- Είναι ότι υπάρχει

- Επειδή και στις δύο περιπτώσεις, πιστεύω δηλαδή ότι αναφερόμαστε σε μία αριθμητική πρόοδο και…. Νομίζω έτσι όπως το εξηγεί και στο κείμενο, ουσιαστικά χρησιμοποιεί το ίδιο πράγμα

- Ναι

- για να αποδείξει και το θεώρημα

Κ- Επομένως αυτή είναι η απάντησή σας στο $1^{ο}$ ερώτημα.. Να πάμε τότε στο $2^{ο}$ ερώτημα.. τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής..

- Λοιπόν… με δικά μας λόγια πρέπει να το πούμε… ή…

Κ- Εγώ θα προτιμούσα με δικά σας. Ή όπως θέλετε..

Σ- Ότι ουσιαστικά έχουμε ένα σύνολο αριθμών και σε αυτή την περίπτωση είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών και…μας λέει ότι προκύπτει ένας τύπος ο οποίος για να ισχύει πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις. Πρώτον να είναι αληθής η πρόταση ότι στη θέση του ν θα βάλουμε το 1 και δεύτερον ότι το ν θα είναι ίσο με το κ από το οποίο θα συνεπάγεται ότι μπορούμε στην θέση του ν να βάλουμε και κ+1

Κ- Οι υπόλοιποι τι λέτε; Εγώ δεν θα απαντάω αν είναι σωστά ή λάθος αυτά που λέτε…

Χ- Ναι, εγώ συμφωνώ με την Σοφία… δηλαδή πρέπει να είναι ένα σύνολο όπως το λέει εδώ αναφοράς και στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι φυσικοί αριθμοί όπου πρέπει να ισχύουν κάποια πράγματα όπως το Ρ(1) και μετά από αυτό βγαίνουν και άλλα πράγματα, δηλαδή αν αποδείξουμε κάτι… μετά μπορούμε να αποδείξουμε ακόμα περισσότερα

Σ- Ναι

Χ- Αν ισχύει το πρώτο

Κ- Εκεί που λέει να είναι αληθής η πρόταση Ρ(κ)-→Ρ(κ+1) τι καταλαβαίνετε;

Π- Ότι το άθροισμα των φυσικών αριθμών πρέπει να είναι ίσο με το… Ρ(κ+1)… όχι… μισό…

Σ- Ε… εγώ νομίζω ότι το ν είναι ίσο με κ+1 και ότι θα καταλήξουμε σε αυτό αφού αποδείξουμε ότι το ν είναι ίσο με κ

Κ- Αρα νομίζω ότι στην ερώτηση τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής έχουμε απαντήσει, εκτός κι αν έχετε να πείτε κάτι άλλο… να συμπληρώσετε.. Μπορούμε να πάμε στο επόμενο ερώτημα, μπορείτε να διακρίνετε τα βήματα της μαθηματικής επαγωγής;

Σ- Θέλω να πω κάτι για το θεώρημα, έχω την εντύπωση πως αναφέρεται αποκλειστικά σε φυσικούς αριθμούς… Ουσιαστικά μας δίνει τον τύπο οπότε εμείς πρέπει να πούμε πως πρέπει να πληροί και τις δύο προϋποθέσεις που αναφέραμε στο θεώρημα, πρώτα ότι στην θέση του ν… ότι το ν είναι ίσο με 1 οπότε λύνουμε εεεε…ναι.. λύνουμε ως προς 1, στη συνέχεια αυτό που προκύπτει ισχύει ..οπότε θα πάρουμε την επόμενη προϋπόθεση που λέει ότι ν είναι ίσο με κ

Χ- Και μετά παίρνει ότι… αποδεικνύει ότι ν… αυτό που βρήκαμε στην πρώτη περίπτωση και μετά το κάνει για ν=κ+1. Ότι μετά προσπαθεί να αποδείξει και αυτό

…………………………………………………………………………………….

Κ- Και πως το αποδεικνύει αυτό που προσπαθεί να αποδείξει;

Χ- Προσθέτει και τα δύο μέλη, της δεύτερης εξίσωσης με το κ+1… και κάνει τις κατάλληλες πράξεις και καταλήγει σε κάτι που ισχύει

……………………………………………………………………………………..

Κ- Είναι ευδιάκριτο τι πράξεις κάνει;

………………………………………………………………………………………

Κ- Μπορείτε να μου περιγράψετε μία ακόμη φορά βήμα βήμα τι έκανε στην εφαρμογή;

Σ- Ουσιαστικά πρώτα μας έδωσε έναν τύπο και εμείς πρέπει να αποδείξουμε σύμφωνα με το θεώρημα ότι ο τύπος αυτός ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό. Εεεε… ναι. Στην συνέχεια για να το αποδείξει βάζει στην θέση του ν το 1 οπότε λύνει ως προς 1 και αυτό που προκύπτει είναι κάτι που ισχύει, μετά… για να οδηγηθεί στο ν=κ+1 πρώτα λέει ότι ν είναι ίσο με κ οπότε αφού το ν είναι ίσο με κ και αφού αποδείξαμε ότι ισχύει ισχύει και για το κ

Κ- Αυτό λίγο το τελευταίο που είπες μου το ξαναεξηγείς;

Σ- Ναι ότι ουσιαστικά στο τέλος… θέλει να… στο $3^{ο}$ βήμα… θέλει να δείξει ότι το ν είναι ίσο με κ+1. Γι αυτό… σαν προηγούμενο βήμα έχει ότι το ν είναι ίσο με κ και εφόσον το ν είναι ίσο με κ και εμείς στο $1^{ο}$ βήμα βάλαμε στην θέση του ν το 1 για να αποδείξουμε ότι αυτό που προκύπτει μετά ισχύει άρα και αν στην θέση του ν βάλουμε το κ, αφού ν= με κ άρα και αυτό που θα προκύψει ισχύει

Κ- Συμφωνείτε οι υπόλοιπες με αυτό που λέει η συμμαθήτριά σας; Έτσι το αντιλαμβάνεστε κι εσείς;

Χ- Μπερδεύτηκα λίγο στην σκέψη βασικά

Σ- Και με τον περιορισμό ότι ανήκει στους φυσικούς αριθμούς

…………………………………………………………………………………….

Κ- Θέλετε να πάμε λίγο στο επόμενο ερώτημα που λέει ότι μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτή η σειρά από βήματα είναι όντως απόδειξη; Και πως μας πείθει για την αλήθεια της πρότασης που αποδεικνύει;

…………………………………………………………………………………......

Σ- Εγώ νομίζω ότι είναι απόδειξη… δηλαδή.. πρώτα επιβεβαιώνει την $1^{η}$ προϋπόθεση του θεωρήματος, στη συνέχεια επιβεβαιώνει τη δεύτερη και στην συνέχεια καταλήγει σε κάτι που ισχύει

Π- Βασικά στο τέλος κάνει συν συνδυασμό και από την $1^{η}$ απόδειξη που κάναμε και από την δεύτερη.

Χ- Ναι βασικά ξεκινάει αποδεικνύει το $1^{ο}$ σκέλος του θεωρήματος και μετά επειδή βρήκε ότι είναι αληθής προσπαθεί με αυτόν τον τρόπο να αποδείξει ότι είναι το επόμενο σκέλος το β. Και αφού το αποδείξει καταλήγει σε κάποιο συμπέρασμα… που… μας λέει πάνω ότι ισχύει.

Κ- Ωραία, ας εστιάσουμε τώρα στο ερώτημα γιατί αυτή η σειρά από βήματα είναι απόδειξη

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………….

Κ- Εννοώ γιατί πείθεσθε εσείς; Γιατί απόδειξη σημαίνει έχω πειστεί γι αυτό που διαβάζω και το λέω…

……………………………………………………………………………………..

....

Σ- Βασικά ότι εκτελεί το θεώρημα στην πράξη… αυτό. Γιατί λέει στο α να είναι αληθής η πρόταση και μετά σαν πρώτο βήμα στην απόδειξη αληθεύει την απόδειξη αυτή, μετά στο β λέει να είναι αληθής η άλλη πρόταση για τον ν=κ και μετά ότι ν=κ+1 που το ξανακάνει πάλι σαν $2^{ο}$ και $3^{ο}$ βήμα και πάλι καταλήγει σε κάτι που ισχύει και στο τέλος… καταφέρνει και συνδυάζει και τα τρία για να καταλήξει και σε κάτι που ισχύει και στο γενικό συμπέρασμα του θεωρήματος

Κ- Έχετε κάτι να προσθέσετε πάνω στον συλλογισμό της Σοφίας;

Χ- Όχι εγώ συμφωνώ μαζί της, ότι είναι μια σειρά από βήματα που αποδεικνύει ξεχωριστά την κάθε πρόταση του θεωρήματος. Την θεωρία την κάνει πράξη μετά κάτω πιστεύω..

Κ- Ωραία, τότε να αλλάξω το ερώτημα… τα βήματα του θεωρήματος γιατί μας πείθουν ότι είναι απόδειξη; Δηλαδή γιατί αν κάνουμε αυτά τα βήματα πιστεύουμε αυτόν τον ισχυρισμό τελικά; Εννοώ γιατί αυτά και όχι κάποια άλλα, έχουν κάποια ιδιαιτερότητα αυτά τα βήματα; Οδηγούν στην αλήθεια του ισχυρισμού της εφαρμογής;

Π- Βασικά είναι βάση με έναν τύπο… τον τύπο που μας δίνει στην αρχή. Άρα ουσιαστικά αφού μας δίνει έναν τύπο εμείς πρέπει να τον εφαρμόσουμε για να αποδείξουμε αυτό που μας ζητάει.

Κ- Εννοείς τον $1+2+3+\ldots\nu=\nu(\nu+1)/2$; Αυτόν θέλουμε να τον αποδείξουμε τον τύπο

Π- Ναι όμως τον παίρνουμε θεωρώντας ότι τον έχουμε αποδείξει για να καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει… για να αποδείξουμε ότι είναι αληθής…

……………………………………………………………………………………..

Σ- Βασικά κάνει ότι λέει το θεώρημα. Βάζει για $\nu=1$, δεν μπορεί να πει για $\nu=2$, αφού μας λέει $\nu=1$.

………………………………………………………………………………………

Κ- άρα λοιπόν η απάντηση γιατί αυτή η σειρά από βήματα είναι απόδειξη είναι επειδή ακολουθούνται τα βήματα του θεωρήματος που έχει παραπάνω.

Σ- Ναι και καταλήγει σε κάτι που ισχύει

Χ- Ναι

Π- Ναι

……………………………………………………………………………………

Κ- Ωραία, εγώ τώρα θέλω να επιμείνετε στο σκεπτικό γιατί αυτά τα βήματα αποτελούν απόδειξη. Τι είναι αυτό που μας έπεισε τελικά

Σ- Επειδή ουσιαστικά επαληθεύει τον τύπο με τις πληροφορίες που μας δίνει στο θεώρημα

Κ- Μπορείς να γίνεις λίγο πιο συγκεκριμένη να πεις τι εννοείς;

Σ- Ότι το θεώρημα λέει πως για να ισχύει αυτό, υπάρχουν αυτές οι δύο προυποθέσεις που είπαμε πριν και… στην εφαρμογή μας δίνει τον τύπο Οπότε, προκειμένου για να

δείξει τις δύο προηγούμενες θέσεις κάνει αυτό που είπαμε, ότι ν=1 αφού θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι αληθής η πρόταση και στην συνέχεια ν=κ και μετά… ν=κ+1.
Κ- Επομένως έχουμε απαντήσει στα ερωτήματα;
Σ-Χ-Π- Ναι
Κ- Και στα δύο;
Σ-Χ-Π- Ναι
Κ- έχετε να προσθέσετε να πείτε κάτι άλλο; Να το δείτε λίγο παραπάνω; Χρόνο χρειάζεστε;
Χ- Αυτό το θεώρημα είναι εκτός ύλης γενικά ή στην $1^{η}$ λυκείου;
Κ- Αυτό το θεώρημα κάποτε διδασκόταν στην $1^{η}$ λυκείου. Τώρα υπάρχει σαν θεώρημα στο βιβλίο των μαθηματικών κατεύθυνσης της 2ας λυκείου. Όχι ακριβώς έτσι διατυπωμένο όπως είναι εδώ, παρόμοια. Αλλά δεν διδάσκεται πλέον είναι εκτός διδακτέας ύλης εδώ και 2 χρόνια. Κάποτε ήταν στο βιβλίο μαθηματικών της Α λυκείου. Δηλαδή αυτό το κείμενο είναι από βιβλίο μαθηματικό που διδασκόταν κάποτε.
Κ- Θέλω να ξαναδείτε τα ερωτήματα μία τελευταία φορά και να μου πείτε αν έχετε να προσθέσετε κάτι
Χ- Εγώ δεν έχω κάτι…
Π- Ούτε εγώ
Σ- Ούτε εγώ
Σ- Βασικά… δεν είναι κάτι που θέλω να προσθέσω… βασικά δεν μπορώ να καταλάβω εεε στο τέλος που θέλει να καταλήξει σε κάτι που ισχύει ουσιαστικά στην θέση του ν βάζει το κ και μετά προσθέτει το κ+1;
Χ- Π- Ναι
Κ- Στην σχέση 2, βάζει όπου ν το κ και μετά προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1
Σ- Εντάξει…
(έχουν έναν προβληματισμό και παρότι τους είπα ότι τελειώσαμε, συνεχίζουν να διαβάζουν και να προβληματίζονται…)
Κ- Σίγουρα εντάξει; Η κάτι δεν…
Π- Εγώ βασικά δεν κατάλαβα γιατί λέει κ+2
Χ- Σ Ναι
Κ – Ωραία ερώτηση.. απαντήστε γιατί λέει κ+2; Όπως βλέπετε έχει και άλλα πράγματα να δείτε
Π- Βασικά, ο κ+2 δεν είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός από το κ+1; Άρα…

Κ- Για δείτε το λίγο αυτό… ενδιαφέρουσα προσέγγιση αυτή.. Προσπαθήστε να το καταλάβετε.. και όταν έχετε να μου πείτε κάτι πείτε μου… Καταρχάς είστε καλά, σας κουράζει η διαδικασία αυτή;
Π-Χ-Σ- Όχι όχιιιι
Σ- βασικά έχω την εντύπωση ότι τα κάνει ομώνυμα και μετά προκύπτει 2κ+1, το πάει στον αριθμητή και μετά κάνει παραγοντοποίηση και καταλήγει σε (κ+1)(κ+2)/2
Κ- Ναι έχεις δίκιο, η πράξη έτσι βγαίνει…… Και τι απέδειξε στην ουσία;
Χ- Ότι το ν είναι… ίσο με κ+1… απέδειξε;
Σ- Νομίζω ότι όποιον φυσικό αριθμό αν βάλουμε στην θέση του κ, αυτό που θα προκύψει ισχύει, δηλαδή…
Κ- Εγώ απλά θα πω ότι αρχίζετε και μπαίνετε τώρα με αυτά που συζητάτε στην ουσία
Σ- Α πριν λέγαμε…
(γέλια)
Κ- Όχι, μια χαρά τα είπατε… αλλά βλέπετε ότι με μία 2η ματιά είδατε και άλλα πράγματα που πρέπει να ερμηνευτούν
Χ-Π-Σ- Ναι
Κ- Οπότε με ενδιαφέρει εμένα αυτή η δεύτερη ματιά και όλα αυτά τα πράγματα που πρέπει να ερμηνευτούν για να πει κάποιος «Α ναι, αποδείχθηκε αυτή η πρόταση». Εντάξει; Οπότε κατά την γνώμη μου είστε σε καλό δρόμο… η δεύτερη ματιά είναι πάντα πιο ενδιαφέρουσα
…………………………………………………………………………………….
(Ξαναδιαβάζουν προβληματισμένοι…)
Σ- εγώ δεν καταλαβαίνω γιατί για να το αποδείξει προσθέτει το κ+1 και στα δύο μέλη
Κ- Ωραία ερώτηση
……………………………………………………………………………………..
Κ- Να Βοηθήσω λίγο στο σκεπτικό, όταν θέλουμε να αποδείξουμε κάτι, καταρχήν πρέπει να ξέρουμε τι θέλουμε να αποδείξουμε. Εδώ τι θέλουμε να αποδείξουμε;
Σ- Ότι ο τύπος που έχει πάνω αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό
Κ- Και στην συνέχεια σε κάθε απόδειξη ακολουθούνται κάποια βήματα που μας οδηγούν στην απόδειξη. Λοιπόν… αυτό δεν έχω να σας πω κάτι άλλο..
………………………………………………………………………………….
(Ξαναδιαβάζουν προβληματισμένοι)
Κ- Πάντως αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε τώρα είναι να καταλάβουμε γιατί αυτό είναι απόδειξη… πέρα από αυτό που είπατε πιο πάνω ότι επαληθεύει τα βήματα

του θεωρήματος άρα είναι απόδειξη. Να το καταλάβουμε εμείς γιατί είναι απόδειξη, γιατί πειστήκαμε εμείς.

………………………………………………………………………………………

(Ξαναδιαβάζουν προβληματισμένοι)

(Περνάει λίγη ώρα… τα παιδιά προβληματίζονται…)

Π- Τι ρώτησε;

Χ- Γιατί είναι απόδειξη… μα δεν το έχουμε απαντήσει αυτό;

Σ- Είπε εκτός από το θεώρημα… πως το καταλαβαίνουμε εμείς ότι είναι απόδειξη…

Σ- Εγώ βασικά δεν μπορώ να καταλάβω, λέει ν=κ+1, όμως από κάτω σαν ν έχει το κ, βλέπετε ότι εδώ έχει το κ;

Π- Ε ναι, αφού θεωρεί ότι από το β το έχουμε θεωρήσει το ν κ. Αρα δεν γράφουμε πια ν γράφουμε κ.

Σ- Λέει ότι ισχύει για ν=κ και μετά λέει ότι ισχύει και για ν=κ+1

Π- Ναι εδώ προσθέτει το κ+1Δηλαδή από αυτό που έχουμε εδώ, που έχουμε στο 2 προσθέτει το κ+1. Και το $1^{ο}$ μέλος και στο $2^{ο}$

Εγώ αυτό κατάλαβα. Εγώ συνήθως όταν μας δίνει μια απόδειξη λέω ααα απόδειξη είναι.

Σ- Ναι ισχύει..

(Γέλια)

Χ- μα είναι το θεώρημα, κάνει τα βήματα από κάτω. Μια χαρά τα αποδεικνύει όλα

Αλλά δεν μπορώ να το εξηγήσω…

Π- βασικά εδώ αυτό γιατί είναι σε παρένθεση;

Σ- Γιατί προσθέτει σε όλα αυτό το κ+1

Π- Εντάξει.. και να μην την είχε.. πάλι επειδή είχε το κ+1… Α όχι έχεις δίκιο…

Σ- έχω την εντύπωση, ότι γι αυτό για την απόδειξη, επειδή στο τέλος θέλει να καταλήξει σε μία ισότητα… γι αυτό που λέει ότι αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη το κ+1, το προσθέτει και μετά αν δεις άμα στην θέση της $1^{ης}$ παρένθεσης βάλουμε αυτό που αποδείξαμε στο β, κ(κ+1)/2 ουσιαστικά προκύπτει μία ισότητα γιατί και το $1^{ο}$ μέλος και το $2^{ο}$ είναι ίσα. Μήπως αυτό; Και γι αυτό μετά λέει ότι ισχύει;

Χ- ¨όλα είναι πιθανά

(Γέλια)

Χ- Δύσκολο είναι

Σ- Είπα μία σκέψη, αυτό με το κ+1 που το προσθέτει, το προσθέτει γιατί θέλει να δει αν καταλήξει σε μία ισότητα, επειδή αν στο $1^{ο}$ μέλος, στην πρώτη παρένθεση εδώ πέρα, βάλουμε αυτό που αποδείξαμε ότι αληθεύει..

Κ- Ποιο αποδείξαμε ότι αληθεύει;

Σ- Ότι… για ν=κ..

Κ- Εκείνο το αποδείξαμε;

Π- Βασικά λέει ας δεχθούμε…

Κ- Λέει ας δεχθούμε… Και μετά τι κάνει είπατε;

Σ- Ότι, επειδή βασικά σκεφτόμουνα ότι σε αυτό που καταλήγει ισχύει. Οπότε σκέφτηκα πως μπορεί να καταλήγει σε μία ισότητα. Γιατί αφού ουσιαστικά στο τέλος στην θέση του ν βάζει το κ. Οπότε αν εμείς στην $1^{η}$ παρένθεση αντικαταστήσουμε την πρώτη παρένθεση με το κ+1, ουσιαστικά μετά δεν αληθεύει ο τύπος;

Κ- Εγώ δεν έχω πρόβλημα αν εσύ πείθεσαι…

Σ- Εγώ νομίζω πείθομαι. Στην αρχή δεν το είχα καταλάβει.. αλλά μετά που το είδαμε περισσότερο αυτό το σημείο, πιστεύω πως ναι.

Κ- Πειστήκατε δηλαδή ότι ισχύει ο τύπος 1 που θέλουμε να αποδείξουμε;

Χ-Σ-Π- Ναι

Κ- Επειδή κάνει αυτά τα βήματα;

Κ- Δηλαδή αν δεν πρόσθετε το κ+1 και στα 2 μέλη και πρόσθετε το κ+2 και έβγαζε ένα αποτέλεσμα πάλι θα είχαμε πειστεί;

Σ- Δηλαδή αν αντί για ν έλεγε κ+2 ;

Κ- Ναι, ή κ+3… ή κάτι άλλο

……………………………………………………………………………………..

Σ- Νομίζω ότι το κ+1 είναι συγκεκριμένο. Στην αρχή απέδειξε για ν=1. Οπότε μπορεί γι αυτό μετά να το έκανε κ+1. Αν είχε διαφορετικό ν τότε ναι θα το δεχόμουν.

Κ- Αν είχε διαφορετικό ν…

……………………………………………………………………………………..

Π- Μέχρι τι ώρα θα είμαστε εδώ;

Χ- Βράδυ…

(Γέλια)

……………………………………………………………………………………..

Σ- βασικά νομίζω όχι, δηλαδή αν δεν είχε κ+1, είχε κ+3 νομίζω πως δεν θα…

Π- βασικά εγώ πιστεύω ότι δεν θα ίσχυε αν είχε πχ κ+2 γιατί θέλει έναν αριθμό διαδοχικό του ν. Δηλαδή τον αμέσως επόμενο όχι τον μεθεπόμενο

Σ- Γιατί στο θεώρημα,,, βασικά ναι λέει ότι θέλει να είναι αληθής η πρόταση για ν=1 και στον τύπο έχει ν+1. Οπότε μπορεί και γι αυτό να έβαλε κ+1. Μάλλον σχετίζεται με τον τύπο, Αν ήταν διαφορετικός ο τύπος…

Κ- Να προχωρήσουμε λίγο την σκέψη της Πασχαλίας; Είπε ότι πήρε το κ+1 γιατί είναι διαδοχικό του κ. Αυτό… νομίζω έχει κάποιο ενδιαφέρον

Π- Ναι γιατί οι αριθμοί πάνε 1, 2, 3, 4… δεν πάνε 1,3, 5,…..Δηλαδή μεγαλώνουν κατά 1 γι αυτό…

Σ- άρα αν ήτανε κ+2, τότε αντί για κ θα είχε κ+1. Αυτό είναι.

Κ- Κι εγώ επαναλαμβάνω το ερώτημα μετά από όλα αυτά που είπατε,,, γιατί τελικά μας πείθει ότι είναι απόδειξη

(Γέλια)

……………………………………………………………………………………..

Κ- Να επαναδιατυπώσω το ερώτημα. Λέει ότι αν κάνει κάποιος αυτά τα 3 βήματα σε μία πρόταση που θέλει να αποδείξει, την έχει αποδείξει.

Π- Και εμείς πρέπει να πούμε γιατί πρέπει να κάνει αυτά τα 3 βήματα;

Κ- Ακριβώς

…………………………………………………………………………………….

Σ- Νομίζω ότι τα 2 πρώτα είναι αυτονόητα γιατί τα περιλαμβάνει το θεώρημα. Μας λέει όταν συμβαίνουν αυτά τότε ο τύπος αυτός ισχύει.

Κ- Όταν λέτε τα 2 πρώτα τι εννοείται; Γιατί εγώ 2 βήματα βλέπω.

Σ- βασικά επειδή το 3 προκύπτει από το 2

Κ- Η σχεση 3απο την σχέση 2 εννοείς. Αυτό νομίζω το καταλάβατε. Παίρνει την σχέση 2, προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1 και βγάζει και κάτι. Αρα λέει η 1 ισχύει. Γιατί, δεν σας κάνει εντύπωση γιατί ισχύει η 1 τελικά; Εννοώ να το καταλάβετε εννοιολογικά. Εσείς αυτό που έχετε πει μέχρι στιγμής, είναι το εξής. Έχω πάνω ένα θεώρημα, εφαρμόζω το θεώρημα και είμαι καλυμμένος. Τώρα θέλω να το καταλάβετε εσείς γιατί είμαι καλυμμένος. Γιατί το θεώρημα έχει αυτά τα δύο βήματα; Και γιατί στην εφαρμογή κάτω καταλήγουμε να πειστούμε ότι η σχέση 1 ισχύει που θέλει να αποδείξει;

Χ- Δεν αποδείξαμε ότι το P(k) είναι αληθής και το P(κ+1) είναι αληθής;

Κ- Ότι το P(κ+1) είναι αληθής το αποδείξαμε. Ότι το P(κ) είναι αληθής το δεχτήκαμε.

Χ- Ναι αλλά αφού ισχύει ότι το P(κ) είναι αληθής δεν ισχύει και ότι το P(κ+1) ότι είναι αληθής;

Κ- Ενδιαφέρον ερώτημα.Τι έχετε να πείτε πάνω σε αυτό;

Χ- Το λέει και στο θεώρημα επάνω, ότι από το P(κ) συνεπάγεται το P(κ+1)

Π- Μήπως αποδεικνύοντας ότι το ν=κ+1 αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για το ν=κ;
Βασικά αφού το κ+1 είναι ίσο με το ν άρα και το κ θα είναι ίσο με το ν

Σ- Εγώ βασικά δεν καταλαβαίνω αφού το ν=κ και μετά κ+1 γιατί δεν λέει ν+1;

Κ- Αυτό είναι τελείως συμβολικό, θα μπορούσε να λέει και ν+1. Απλά το ν το ονομάζει κ στο $2^{ο}$ βήμα, θα μπορούσε όμως να λέει και ν+1

Χ- Το Ρ(κ+1) δεν ισχύει μόνο όταν το Ρ(κ) είναι αληθές;

Κ- Έτσι όπως το θέτει εδώ, ναι. Δηλαδή δεχόμαστε εκείνο, αφού εκείνο χρησιμοποιείς, σε κείνη την σχέση προσθέτεις το κ+1

Χ- Τότε αυτό.. δεν θα ισχύει για κάθε…

Κ- Ναι αλλά γιατί;

Σ- Γιατί ισχύει;

Κ- Γιατί τελικά λέει ισχύει η πρόταση.. και στο τέλος όπως βλέπετε γράφει, συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής η πρόταση ισχύει για κάθε ν ανήκει Ν. Γιατί αυτά τα βήματα την κάνουν απόδειξη αυτήν;

……………………………………………………………………………………

Κ- Ειπώθηκε κάτι νωρίτερα που μπορεί να σας βοηθήσει να πειστείτε ότι είναι απόδειξη. Είπε κάποια στιγμή η Πασχαλία ότι ο κ+1 είναι επόμενος του κ. Αυτό μήπως κάτι σημαίνει για την απόδειξη:

Π- Μήπως επειδή αποδείξαμε ότι ο τύπος 1 ισχύει για 2 διαδοχικούς αριθμούς, το κ και το κ+1 συμπεραίνουμε ότι ισχύει για κάθε ν; Για κάθε φυσικό αριθμό;

Κ- Εσύ τι λες πάνω σε αυτό; Ανέλυσε λίγο την σκέψη σου παραπάνω…..

Κ- Είναι μία σπαζοκεφαλιά τελικά το γιατί αυτό είναι απόδειξη ε;

(Γέλια)

Χ- Ξέρουμε ότι ισχύει και δεν μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

(Καμία συζήτηση για αρκετά λεπτά. Οι μαθήτριες σκέφτονται…)

Κ- Πείτε ότι σκέφτεστε

Σ- Ότι στην σχέση 2 θεωρεί σαν ν και σαν τελευταίο αριθμό του τύπου το κ. Οπότε στην σχέση 3 εφόσον θεωρεί σαν τελευταίο αριθμό το κ+1 δηλαδή τον επόμενο του κ, γι αυτό προσθέτει το κ+1.

Κ- Ωραία, ας μείνουμε σε αυτό. Λέει ας δεχθούμε ότι η πρόταση ισχύει για ν=κ. Και μετά λεει θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1. Και το αποδεικνύει με πράξεις. Αρα λέει μετά η 1 ισχύει. Εδώ λίγο μείνετε. Γιατί κάνοντας αυτή τη διαδικασία τελικά η 1 ισχύει;

Σ- Επειδή μπορεί από την απόδειξη της σχέσης 3 να πούμε ότι όποιον φυσικό αριθμό κι αν βάλουμε στην θέση του κ επαληθεύει τον τύπο.

Κ- έχετε να πείτε κάτι πάνω σε αυτό που είπε η Σοφία;

Π- Βασικά κι εγώ αυτό είχα σκεφτεί από την αρχή. Ότι.. να παράδειγμα δεχόμαστε ότι το ν είναι ίσο με το κ και αποδεικνύουμε εεε ναι ότι το ν είναι ίσο με το κ+1 άρα αυτό που δεχθήκαμε στο προηγούμενο… στην προηγούμενη σχέση ήταν σωστό. Αρα και για οποιονδήποτε αριθμό ισχύει η σχέση 1.

Κ- Πείτε αν έχετε να προσθέσετε κάτι πάνω σε αυτόν τον τελευταίο σας συλλογισμό Γιατί δεν ξέρω αν το έχετε καταλάβει, έχετε περάσει τώρα σε ένα άλλο στάδιο σκέψης. Δηλαδή εκεί που είπατε α εντάξει κάνουμε τα βήματα του θεωρήματος και είμαστε εντάξει τώρα βλέπετε και άλλα πράγματα. Ότι δεν πήραμε τυχαία το κ+1… δηλαδή πέρα από το πρακτικό ότι προσθέσαμε και στα δύο μέλη το κ+1…

Σ- Ότι ουσιαστικά θεωρεί το κ ως έναν τυχαίο φυσικό αριθμό, και το κ+1 τον επόμενο του κ τυχαίο πάλι φυσικό αριθμό για να αποδείξει ότι ο τύπος αυτός ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Κ- Βλέπετε ότι αυτό που λέτε είναι διαφορετικό από αυτό που είπατε στην αρχή για τα βήματα του θεωρήματος…. Ωραία …..να κάνω μία ακόμα ερώτηση….παρόμοια με αυτή που έκανα νωρίτερα. Αν ρωτήσω γιατί η σχέση 1 ισχύει αν βάλω όπου ν το 100 τι θα μου απαντήσετε; Γιατί λέει στο τέλος ότι τελικά αποδείξαμε ότι ισχύει για κάθε ν φυσικό. Γιατί λοιπόν ισχύει και για ν=100 και για ν=1005…

Π- Μήπως επειδή βασίζεται στην ιστορία που διαβάσαμε πριν;

Κ- Δεν βασίζεται εκεί αλλά είναι σχετική η ιστορία ναι. Η ιστορία αυτό απέδειξε δηλαδή ότι το άθροισμα των πρώτων 100 αριθμών ισούται με αυτό που λέει η σχέση 1. Εκείνος το έκανε για 100 αριθμούς.

Σ- Ενώ εμείς το κάνουμε για ν αριθμούς

Κ- Άρα επιβεβαιώνουμε τον ισχυρισμό του και επιβεβαιώνουμε τον ισχυρισμό του κάνοντας αυτήν την απόδειξη… έχετε να προσθέσετε κάτι σε όλα αυτά που είπατε;

………………………………………………………………………………………

Κ- Εκείνο το για ν=1 γιατί το παίρνει στην αρχή; Είναι κάτι που χρειάζεται;

Π- Μήπως το κάνει σαν παράδειγμα;

Κ- Γιατί το παίρνει αυτό; Δεν του αρκούσε ο ισχυρισμός β; Στον ισχυρισμό υποθέσαμε ότι ισχύει για ν=κ και αποδείξαμε ότι ισχύει για ν=κ+1. Θα ήταν αυτό αρκετό αν δεν υπήρχε και το 1^{o} βήμα;

Σ- Νομίζω ότι το β βασίζεται στο πρώτο βήμα. Έτσι όπως και στο κείμενο πήρε το πρώτο ζεύγος για να καταλήξει στα επόμενα, έτσι παίρνει το 1……..

…………………………………………………………………………………………

(Σιωπή ξανά)

Κ- Αποδεικνύει την πρόταση για ν=1

Σ- Παίρνει βασικά…
Κ- Για πες
Χ- Αφού το αποδεικνύει για ν=1 τότε δεν θα ισχύει για κάθε ν;
Κ- Τι λέτε;
Π- βασικά αν βάλουμε έναν φυσικό αριθμό, παράδειγμα 2 βγαίνει 2=4 άρα δεν ισχύει…
Σ- Όχι…
Π- Αααααα
(Εξηγούμε…)
Σ- Νομίζω ότι χρησιμοποιεί τον πρώτο για να δείξει πρώτα ότι ισχύει για τον πρώτο φυσικό αριθμό και στην συνέχεια συνεχίζει για να δείξει ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Για κάθε φυσικό αριθμό
Κ- Και πως ακριβώς το κάνει αυτό;
Κ- Ο τρόπος σκέψης σας προχώρησε πάρα πολύ σε σχέση με το αρχικό που είπατε ότι κάνει απλά τα βήματα του θεωρήματος Βλέπετε.. έχει από πίσω και άλλα πράγματα να ψάξεις..
(Πολλά γέλια)
Κ- όπως καταλαβαίνεται το πώς γίνεται είναι το εύκολο, το γιατί γίνεται είναι το δύσκολο. Μας μένει το γιατί, γιατί το 1 γιατί το κ και γιατί τελικά πειστήκαμε
Σ- Το κ είναι ένας τυχαίος αριθμός, δηλαδή θα μπορούσε να το είχε ονομάσει και λ άλλα είναι φυσικός αριθμός, εεεε. Τώρα το «ας δεχθούμε» εμένα μου μοιάζει όπως σε διάφορες ασκήσεις που παίρνουμε περιπτώσεις ότι έστω το ν=.. τόσο οπότε το κάνει και εδώ πέρα
Κ- Σου είναι οικεία δηλαδή σαν έκφραση μαθηματική το «ας δεχθούμε»
Σ- Ναι
Κ- Και μετά αποδεικνύει κάτι άλλο με βάση αυτό που δέχθηκε
Κ- έχετε πει πολλά ενδιαφέροντα πράγματα
Σ- Βασικά νομίζω ότι αυτό που είπαμε στην αρχή ότι…στην πρώτη σχέση είπαμε ότι ν=1, οπότε μετά είναι αληθής γιατί καταλήγει ότι 1=1. Και αν πούμε ότι… αυτό που είπε η Πασχαλία αν αντί για ν=1 πούμε για ν=2 που μετά καταλήξει 3=3 άρα ισχύει πάλι η ισότητα. Και εμείς αυτήν την ισότητα θέλουμε να την επεκτείνουμε για όλους τους φυσικούς αριθμούς γι αυτόν τον λόγο παίρνουμε και κ ως έναν τυχαίο φυσικό αριθμό και κ+1 ως τον επόμενό του αριθμό και καταλήγουμε στο ίδιο πράγμα απλά με τύπους για να ισχύει για όλα.
Κ- Συμφωνείτε οι υπόλοιποι ή έχετε να προσθέσετε κάτι παραπάνω;

Χ- Π- Όχι
Κ- Εγώ λοιπόν θα κάνω μία τελευταία ερώτηση. Γιατί η πρόταση ισχύει για ν=2, χωρίς να αντικαταστήσουμε όπου ν το 2 στην πάνω σχέση
Σ-Π-Χ- Επειδή είναι φυσικός αριθμός
Κ- Μόνο;
Χ- Και… διαδοχικός του 1 θα έλεγα
Κ- Ωραία, εμείς τι αποδείξαμε στο βήμα 2; Αποδείξαμε ότι αν ισχύει για τον κ….
Χ- Θα ισχύει και για τον κ+1
Κ- άρα λοιπόν αν ισχύει για το 1 θα ισχύει και για το…
Π-Χ-Σ- Το 2..
Κ- Και αν ισχύει για το 2 θα ισχύει και για το…
Π-Χ-Σ- το 3…
Κ- Να λοιπόν γιατί μας πείθει η απόδειξη
(Γέλια και ικανοποίηση)
Συζητάμε μετά, οι μαθητές δείχνουν πρόθυμοι για περαιτέρω κουβέντα

<u>Πρωτόκολλο ομάδας Β1</u>

Συμμετείχαν οι μαθήτριες Ελένη (Ε) και Δανάη (Δ).

Μετά από 20 λεπτά ανάγνωσης:

Ε – Στην 3 σελίδα εκεί πέρα που λέει θεώρημα και… στο β λέει να είναι αληθής η πρόταση και έχει μετά έναν τύπο

Κ – Στο θεώρημα:

Ε – Ναι

Κ – Λοιπόν, εκείνο το ανάποδο Α σημαίνει «για κάθε»

Ε – «για κάθε» ωραία.. αυτό

Κ – Ότι για κάθε κ που ανήκει στους φυσικούς αριθμούς η Ρ(κ) που είναι η πρόταση να συνεπάγεται την Ρ(κ+1), να συνεπάγεται την πρόταση αν όπου ν βάλεις το κ+1

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Κ – Τι γράφεις Ελένη;

Ε – Έκανα κάποιους υπολογισμούς να δω αν όντως είναι σωστά αυτά

(Μου δείχνει τις πράξεις στο επαγωγικό βήμα)

Κ – Α, πράξεις, για να επαληθεύσεις τις πράξεις που έχει εδώ;

Ε - Ναι

…………………………………………………………………………………….

(Μετά από 20 λεπτά περίπου)

Κ – Πείτε όποτε είστε έτοιμοι να απαντήσετε στις ερωτήσεις

Ε – Πιστεύω ότι είμαι μερικώς έτοιμη να απαντήσω την 2^{η} ερώτηση

Κ – Την 1^{η};

Ε – Δεν το έχω σκεφτεί ακόμη

Δ – Εγώ νομίζω πιο πολύ για την 1^{η}

Κ – Ωραία για συζητήστε το, μεταξύ σας απαντήστε τις ερωτήσεις

Ε – Προσπαθώ να κατανοήσω την επαγωγή. Εσύ τι έχεις καταλάβει έως τώρα; Εννοώ εδώ στις εφαρμογές. Περίπου… δηλαδή… τι έχεις καταλάβει;

Ε – Το θεώρημα μας λέει ότι ο προτασιακό τύπος Ρ(ν) είναι αληθής για κάθε ν, ν ανήκει στους φυσικούς αριθμούς

Δ – Ναι

Ε – Και στην εφαρμογή μας λέει να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει ο τύπος Ρ(ν), δηλαδή αυτό μας λέει το θεώρημα ότι πρέπει να… δηλαδή το θεώρημα μας δίνει τις προυποθέσεις για να ισχύει αυτός ο τύπος. Οπότε πρέπει να ακολουθήσουμε το α και το β και ξεκινάμε πρώτα με το α και πρέπει να αποδείξουμε ότι η πρόταση P(1) ισχύει για τον προτασιακό τύπο P(ν), έτσι;

Δ – Ναι

Ε – Οπότε εκεί που είναι ν μπαίνει το..

Δ – Το 1

Ε – Αυτό που δεν κατάλαβα είναι ότι μας δίνει ο τύπος P(ν) 1+2+3+….+ν εεε και συνεχίζει, ενώ εδώ που λέει 1 γίνεται αμέσως το 1. Οι άλλοι αριθμοί δεν μπαίνουν.

Δ – Ναι γιατί… το ν…. αφού ισούται με το 1… πιθανότατα… όχι πιθανότατα… τα μεσαία 2 3 και οι υπόλοιποι αριθμοί δεν υπάρχουν, αφού είναι μέχρι το 1

Ε – Μα είναι +. Δεν είναι, ας πούμε, αν ήταν 1+2+3+ και…. 6 τέλος πάντως, δηλαδή αν ήταν 1+2+3+4+5+6 το άθροισμα δεν θα έκανε 6, θα έκανε 1+2+3+4+5+6…… κατάλαβες; Αυτό ρωτάω,,, δηλαδή οι υπόλοιποι αριθμοί που έχουν πάει;

Κ – Να παρέμβω εγώ εδώ πέρα; Η Δανάη το είπε σωστά, επειδή το ν είναι 1, έχει το 1, για ν=2 έχεις το 1+2, για ν=3 έχεις το 1+2+3

Ε – Ναι

Κ – Οπότε για ν=1 έχεις αν το 1 όντως ισούται με κείνο εκεί, το ν(ν+1)/2 αν βάλεις όπου ν το 1

Κ – Κανονικά αυτήν την παρέμβαση δεν έπρεπε να την κάνω αλλά για να κερδίσετε λίγο χρόνο, οπότε λύθηκε η απορία σου Ελένη σε αυτό;

Ε – Ναι

Ε – Ωραία… αυτή αποδεικνύεται ότι είναι αληθής και συνεχίζει στο $2^{ο}$ στο β

Κ – Και θες να πεις ότι αυτό αντιστοιχεί στο βήμα α του θεωρήματος

Ε – Ναι.. ότι για κάθε κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς P(κ) συνεπάγεται P(κ+1)

Ε – Εεεεε έστω ότι ισχύει ότι για ν=κ με κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς, αυτό υποθέτουμε ότι ισχύει και τώρα θέλει να αποδείξει ότι… για ν=κ+1 ισχύει…. Εεεεε… ισχύει ουσιαστικά η P(ν)

Ε – Αυτό δεν είναι;

Κ – Ναι

Δ – Ναι

Ε – Ωραία

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Ε – Σχετικά με την $1^{η}$ ερώτηση τι βρήκες εσύ;

Δ – Πως συνδέεται με το κείμενο; Εεεεε στην θέση του ν προφανώς είναι το 100 και… ότι βάλεις στην θέση του επαληθεύεται οπότε… ισχύει η απάντηση που έδωσε το παιδί στο κείμενο…εεε

Ε – Δηλαδή αν βάλεις το 100 στο ν

Δ – Ναι… νομίζω πως έτσι βγαίνει

Κ – Καταρχάς νομίζω ότι είναι αρκετά ευδιάκριτο ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο κείμενο και στο θεώρημα… την εφαρμογή μάλλον του θεωρήματος. Νομίζω ότι αυτό το απαντήσατε. Έχετε κάτι άλλο να προσθέσετε σε αυτό το ερώτημα; Δεν….. θέλω να σας επηρεάσω, μπορεί να υπάρχει και κάτι άλλο που δεν έχω βρει εγώ και να το βρείτε εσείς

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Κ – Επομένως, ας τα πάρουμε λίγο με την σειρά για να είμαστε λίγο πιο στοχευμένοι σε αυτό που ψάχνουμε. Για το πρώτο ερώτημα έχετε να προσθέσετε κάτι άλλο εκτός από αυτό που είπαμε;

Ε – Όχι

Δ – Όχι

Κ – Ωραία άρα αυτό έληξε. Ωραία, στο $2^{ο}$ ερώτημα. Τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής; Είναι ένα θεώρημα. Έχετε ξαναδεί θεωρήματα στα μαθηματικά. Τι λέει εδώ το θεώρημα… μπορείτε να το περιγράψετε… ας το πω… με δικά σας λόγια;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Κ – Αν δεν έχετε καταλάβει ακριβώς τι λέει δεν είναι πρόβλημα. Μπορείτε να πάτε στο άλλο ερώτημα που λέει να μπορείτε να βρείτε τα βήματα σε μια απόδειξη μαθηματικής επαγωγής

Ε – Ουσιαστικά πρέπει να αποδείξουμε ότι… ο προτασιακός τύπος ισχύει για ν=1 και στην συνέχεια για ν=κ και συνεχίζει για ν=κ+1

Κ – Ωραία, αυτό κάνει δηλαδή στην εφαρμογή;

Δ – Ναι αυτό κάνει… ναι και στην συνέχεια προσθέτει το κ+1 και στα δύο μέλη… των προηγούμενων δύο αποδείξεων ώστε να βγει στο συμπέρασμα ότι και η $3^{η}$ σχέση ισχύει

Κ – Ωραία….. Τότε πάμε στο επόμενο ερώτημα… και γιατί αυτό είναι απόδειξη; Και γιατί πειστήκαμε τώρα εμείς ότι αυτό είναι απόδειξη; Εκείνη η σχέση πάνω λέει ότι το άθροισμα των πρώτων ν φυσικών αριθμών ισούται με ν(ν+1)/2… και κάτω έχει μια απόδειξη. Αρα μας έχει πείσει. Γιατί μας πείθει; Ποιο είναι τελικά εκείνο το επιχείρημα που μας πείθει ότι η πρόταση είναι τελικά αληθής; Ψάξτε με την ησυχία σας, χωρίς να αγχώνεστε ότι πρέπει να απαντήσετε και ότι πρέπει να απαντήσετε και σωστά. Είναι ένας γρίφος τώρα αυτό το πράγμα, προσπαθείστε να λύσετε τον γρίφο. Αυτό.. Δείτε βήμα βήμα τι ακριβώς κάνει στην απόδειξη και αφού δείτε τι κάνει, βρείτε γιατί το κάνει

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..

Κ – Εκεί που λέει, θα αποδείξουμε για ν=κ+1… τι απέδειξε δηλαδη;

Ε – Απέδειξε για ν έβαλε όπου ν το κ+1

Κ – Και το απέδειξε όπως είπε πριν και η Δανάη προσθέτοντας και στα δύο μέλη το κ+1

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Κ – Νιώθετε ότι το έχετε κατανοήσει αυτό το κομμάτι;

Ε – Περίπου… όχι, δεν…. Για τίποτα δεν είμαι απόλυτη

Κ – Να κατανοήσουμε πρώτα αυτό και μετά να πάμε στο γιατί είναι απόδειξη. Λέει για ν=1, τι κάνει;

Ε – Για ν=1, όπου ν το 1, το οποίο αποδεικνύεται

Κ – Ωραία, επαληθεύεται, μετά…

Ε – Όπου ν το κ

Κ – Και βλέπετε ότι έχουμε την πάνω σχέση, με όπου ν το κ

Ε – Δ – Ναι

Κ – Θα αποδείξουμε τώρα ότι η 1, η πάνω πάνω σχέση ισχύει για ν=κ+1, δηλαδή ότι ισχύει εκείνο κάτω, η σχέση 3 δηλαδή.. η σχέση 3 με την σχέση 1 τι σχέση έχει;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
Ε – έχω μια ερώτηση… δεν θα μπορούσε απλά στην απόδειξη 3 όπου ν=κ+1 να βάλει 1+2+3+……………κ+1 αντί να βάλει 1+2+3+……κ+κ+1
Κ – Θα μπορούσε, θέλει να δώσει έμφαση ότι υπάρχει και το κ εκεί
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
Κ – Αυτό το βημα, με ποιο βήμα σχετίζεται με του θεωρήματος πάνω;
Ε – Με το β
Κ- Άρα εκείνο το Ρ(κ) συνεπάγεται Ρ(κ+1), τι εννοεί;
Ε – Ουσιαστικά πρόσθεσε το κ+1 στην… σε αυτό που ισχυρίστηκε ότι ισχύει, στην 2. Πρόσθεσε και στα δύο μελη της εξίσωσης το κ+1
Κ – Και που κατέληξε;
Ε – Ε, ότι ισχύει, όπου ν =κ+1. Ότι, εεε…
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
Κ – Η σχέση 1 είναι αυτή που θέλουμε να αποδείξουμε. Η σχέση 2 είναι αυτή που υποθέτουμε ότι ισχύει και η σχέση 3 είναι αυτή που θέλουμε να αποδείξουμε και όπως είπατε την αποδεικνύει, παίρνοντας την σχέση 2 και προσθέτοντας και στα 2 μέλη το κ+1. Και όντως εκείνο το 1+2+……+κ+(κ+1) βγαίνει (κ+1)(κ+2)/2. Όσον αφορά αυτό το διαδικαστικό έχετε καμιά απορία;
Ε – Δ – Όχι
Κ – Τώρα έρχεται το μεγαλο ερώτημα, Γιατί πειστήκαμε ότι είναι απόδειξη;
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
Κ – Δηλαδή εσύ Ελένη πείστηκες ότι ισχύει αυτή η σχέση;
Ε – Το ψάχνω
Κ - Εάν σου έδειχναν στο σχολείο αυτήν την απόδειξη θα είχες πειστεί;
Ε – Όχι, θα ήθελα κάποιος να μου πει αυτό που προσπαθώ να σκεφτώ εγώ τώρα
Κ – Άρα έτσι από μόνο του δεν είναι τελείως κατανοητό
Ε – Θέλει λίγο χρόνο να το σκεφτείς και να το κατανοήσεις… αλλά δεν πιστεύω ότι είναι και… άπιαστο
Κ – Προφανώς, εγώ θέλω να το καταλάβετε μόνοι σας

Ε - Είναι απόδειξη αφού ουσιαστικά έχουμε επαληθεύσει το α και το β, δηλαδή έχουμε τις προυποθέσεις για να ισχύει το Ρ(ν)

Κ – Άρα λοιπόν ένα επιχείρημα είναι αυτό που λες. Έχω ένα θεώρημα από πάνω και έχω κάνω τα βήματα του θεωρήματος, συνεπώς αφού αυτό είναι θεώρημα, εμείς εφαρμόσαμε τα βήματα και είμαστε οκ

Κ – Εγώ τώρα θέλω να πάτε πέρα από αυτό, θέλω με την κοινή λογική σας να καταλάβετε την απόδειξη

Ε – Πρέπει να σκεφτούμε αυτό που σκέφτηκε ο Καρλ έτσι;

Κ – Όχι απαραίτητα. Το λογοτεχνικό κείμενο βοηθάει για να δούμε πόσο παλιά διατυπώθηκαν τέτοιες προτάσεις. Αλλά ναι ενδεχομένως να βοηθάει.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

Ε – Γιατί να βάλουμε για ν=1;

Δ – Για οποιονδήποτε αριθμό θα ίσχυε η πρόταση, δεν νομίζω να παίζει ρόλο αν είναι το 1 ή το 2

Ε – Ωραία γιατί βάλαμε έναν συγκεκριμένο αριθμό;

Δ – Γιατί κάποιος έπρεπε να μπει για να αποδειχθεί

Ε – εεεε και δεν θέλουμε μόνο έναν αριθμό, θέλουμε 2 αριθμούς; Βασικά έχουμε το 1 έχουμε το κ και έχουμε και το κ+1. Αρα 3 αριθμοί. Ναι;

Δ- Ναι

Ε – Ναι αλλά γιατί 3 αριθμοί;

Ε – Ας δούμε τι έκανε ο Gauss. Είχε 100 αριθμούς

Δ – Ναι πρόσθετε κάθε φορά…

Ε – Λες αν ακολουθήσουμε την λογική του να βρούμε γιατί το έκανε αυτό; Πήρε τον $1^{ο}$ και τον τελευταίο, τους πρόσθεσε και μετά… πολ/σε επί 50…. Αν πάρουμε έναν αριθμό, τον διαιρέσουμε δια 2 και μετά τον πολ/σουμε με το άθροισμα που προκύπτει από τον αριθμό….αυτόν, συν… το 1… θα προκύψει

Δ – λες να διαιρεθεί….

Ε – Έχω έναν αριθμό…χ… τι έκανε αυτός… πήρε το 500 πήρε και το 1, όχι.. αυτό δεν έκανε… πήρε το 100 πήρε και το 1

Δ – Και τα πρόσθεσε

Ε – Βγήκε 101 και το πολ/σε επί το μισό του 100. Οπότε αν πάρουμε έναν αριθμό χ, τον πολ/σουμε με τον ίδιο τον αριθμό συν το 1 και τον διαιρ…..τον πολ/σουμε με το μισό του αριθμού αυτού θα προκύψει… εεε το τελικό άθροισμα… Κατάλαβες;

Δ – Μέχρι ένα σημείο

(Γέλια και απορία)

…………………………………………………………………………………………

Ε – Τι είπες; Στο ν βάζουμε το 100; Οπότε παίρνοντας μόνο αυτό, θα πρέπει να ισούται με αυτό

(Επαληθεύουν την σχέση της εφαρμογής για ν=100)

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Κ – Να κάνω μια μικρή παρέμβαση;

Ε – Δ – Ναι ναι!

Κ – Παρακολουθώντας τον συλλογισμό σας, νομίζω ότι με αυτά που λέτε τώρα τελευταία είναι σαν να απαντάτε στο $1^{ο}$ ερώτημα, δηλαδή τι σχέση έχει αυτό που έκανε ο Gauss με την εφαρμογή. Ενώ εμάς το ερώτημά μας είναι γιατί αυτό αποτελεί απόδειξη. Θα σας ξαναγυρίσω λίγο σε κάτι που είπατε στην αρχή και νομίζω ότι εκείνο θα σας βοηθήσει να καταλάβετε γιατί είναι απόδειξη. Είπατε ότι το αποδεικνύουμε για ν=1, για ν=κ και για ν=κ+1. Γιατί αυτούς τους 3 αριθμούς; Από κεί λίγο να το πιάσετε γιατί μετά φύγατε λίγο…

Ε – Προσπαθούμε να καταλάβουμε τον συλλογισμό του, να βρούμε εμείς τον τύπο

Κ – Α, ενταξει

Ε – Γίνεται και έτσι;

Κ – Ενδεχομένως να γίνεται, αν είναι αυτός ο στόχος… απλά… ίσως εγώ κατάλαβα λάθος.. δείτε το όπως θέλετε

Κ – Θέλετε να πείτε πειστήκατε με κείνο που έκανε ο Gauss και προσπαθείτε να δείτε αν εκείνο ταιριάζει με την απόδειξη ώστε να πειστείτε και με αυτήν την απόδειξη; Αυτό κάνετε;

Ε – Ναι, αλλά τώρα που το ξανασκέφτομαι δεν φαίνεται να έχει και τόσο πολύ σχέση. Όχι ίσως έχει σχέση..

Κ – Ίσως έχει όντως

………………………………………………………………………………………

Κ – Θα ήθελα όμως να μείνετε σε αυτό που είπατε πριν. Το αποδεικνύει για ν=1, το υποθέτει για ν=κ και το αποδεικνύει για ν=κ+1. Γιατί χρειάζεται αυτά τα 3 βήματα για να σε πείσει ότι η πρόταση πάνω είναι αληθής; Που όντως βρήκατε ότι είναι τα βήματα πάνω του θεωρήματος… και νομίζω ότι πρέπει να μείνετε εκεί

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

Ε – Σκέφτομαι ότι έχουμε.. ν=1, ν=κ, ισχύουν και τα δύο. Και θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για ν=κ+1. Οπότε προσθέτουμε ουσιαστικά αυτές τις δύο… αυτά τα δύο… πώς να το πω…επειδή τις θεωρούμε.. ισχύουσες.. Οπότε αν ισχύει αυτό.. με αυτές τις δύο προυποθέσεις θα είναι σωστό όλο… Πρέπει να το διατυπώσω καλύτερα.

Κ – Κατάλαβα τι θέλεις να πεις. Έχουμε δύο σχέσεις που ισχύουν και αν τις προσθέσουμε κατά μέλη παίρνουμε πάλι κάτι που ισχύει

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….

Κ – Κάνατε νωρίτερα και ένα άλλο ενδιαφέρον ερώτημα αλλά δεν το απαντήσατε. Κάποια από τις δυο σας ρώτησε γιατί πήρε για ν=1 και δεν πήρε για ν=2 ή έναν άλλον αριθμό; Αυτό κάποιος το ρώτησε και δεν απαντήθηκε ούτε από τον άλλον ούτε από τον εαυτό του.

……………………………………………………………………………………………..

Κ – Το πρώτο βήμα λέει για ν=1, όπως και το πρώτο βήμα του θεωρήματος. Θέλω λέει να δείξω ότι πρώτα είναι αληθής η πρόταση για ν=1. Αυτό γιατί;

………………………………………………………………………………………..

Κ – Γιατί σας άκουσα κάποια στιγμή να λέτε γιατί για ν=1, θα μπορούσε και για ν=2 και για ν=3… αλλά το αφήσατε να περάσει έτσι.. ενώ σας έκανε εντύπωση… απαντήστε τώρα. Γιατί για ν=1;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Ε – Αν πάρουμε για ν=2… 2=2(2+1)/2.. δεν ισχύει

Κ – Αν πάρεις για ν=2 στο $1^{ο}$ μέλος θα έχεις 1+2=3 και το $2^{ο}$ μέλος θα έχεις…

Ε – Α ναι ναι

Κ – Και στο θεώρημα το λέει, να αποδείξω πρώτα ότι η πρόταση είναι αληθής για ν=1. Είναι απαραίτητο βήμα της απόδειξης

Ε – Αν δεν είναι αληθές αυτό…εεεε τελείωσε δεν είναι αληθής η πρόταση

Ε – Αλλά γιατί πήραμε το 1;

Κ – Γιατί;

Ε – εεεεε

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

Κ – Δανάη εσύ τι λες, γιατί πήραμε για ν=1;

Δ – Ίσως γιατί είναι ο μόνος αριθμός που….δεν θα προστεθεί με κάποιον άλλον στο $1^{ο}$ μέλος;

Κ – έχει αυτήν την ιδιαιτερότητα λες; Λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας;

Δ – Ας πούμε αν έπαιρνε το 2 ή το 3 θα το προσθέταμε με τους προηγούμενους

Κ – Για σκεφτείτε… αυτό το 1 έχει ένα χαρακτηριστικό το 1. Κι αυτό που είπες έχει κάποια σχέση

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Κ – Να βοηθήσω λίγο; Διαβάστε το θεώρημα τι λέει λέξη προς λέξη. Τι λέει από την αρχή

Δ – Αν Ρ(ν) είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών τέτοιος ώστε α)…

Κ – Ωραία, στάσου τώρα λίγο Δανάη, τα βήματα τα έχετε καταλάβει, τα διαβάσαμε τα αναλύσαμε είδαμε που αντιστοιχούν στην εφαρμογή.. αν λέει «Ρ(ν) είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών»

Ε – Το 1 είναι ο πρώτος αριθμός του συνόλου των φυσικών αριθμών

Κ – Μπράβο! Άρα λοιπόν το 1 δεν είναι τυχαία επιλογή. Σου λέει θα μου αποδείξεις μία πρόταση που ισχύει στους φυσικούς αριθμούς και σε βάζω πρώτα να μου την αποδείξεις για ν=1. Πάμε τώρα παρακάτω γιατί για ν=κ και μετά για ν=κ+1.

Ε – Αυτοί είναι 2 διαδοχικοί αριθμοί.

…………………………………………………………………………………

Ε – Επίσης είναι τυχαίοι… δηλαδή ο κ είναι τυχαίος!! Και ο κ+1 είναι ο αμέσως επόμενος…. Εεεε άρα εφόσον και αν ισχύει η Ρ(ν) για τον πρώτο φυσικό αριθμό του συνόλου ν και για έναν τυχαίο αριθμό και τον αμέσως επόμενό του το λογικό θα είναι να ισχύει αυτός ο τύπος.

Κ – Για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Για ν=2 δηλαδή ισχύει;

Ε – Ναι

Κ – Γιατί;

Ε – Το 2… αν κ=2… ά όχι, αν κ=1 τότε κ+1=2 και αποδείξαμε ότι ισχύει αυτό

Κ – Αρα και για το 3…

Δ – Ε – Ναι!

Κ – Για πείτε μου όμως ποια παρέμβαση σας βοήθησε να καταλάβετε;

Ε – Εμένα με βοήθησε αυτό που είπατε για το 1…..

Κ – Τώρα μπορείτε να μου περιγράψετε το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής;

Ε – Λοιπόν… το θεώρημα λέει ότι ένας τύπος που μας δίνεται αποδεικνύεται για κάθε αριθμό που ανήκει στους φυσικούς αριθμούς. Και… μας δίνει τους… ουσιαστικά 2 προυποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να είναι αληθής αυτός ο τύπος Ότι αν ο πρώτος φυσικός αριθμός 1 επαληθεύει τον τύπο και ένας τυχαίος αριθμός επαληθεύει τον τύπο και ο επόμενός του τότε είναι αληθές.

Κ – Δανάη έχεις να προσθέσεις κάτι;

Δ – Ε όχι, και μετά αυτό το εφαρμόζει βάζοντας στην θέση του ν το 1, στην συνέχεια το κ και μετά το κ+1

Κ – Και όσον αφορά το γιατί μας έπεισε αυτή η απόδειξη…

Ε – Μας έπεισε επειδή πήρε έναν συγκεκριμένο αριθμό που είναι ο πρώτος φυσικός αριθμός, το 1 και πήρε και έναν τυχαίο το κ και μετά για κ+1, το απέδειξε αφού υπέθεσε για ν=κ, τα επαλήθευσε όλα αυτά και… πειστήκαμε ότι ισχύει. Δηλαδή και χωρίς το θεώρημα, η λογική σειρά… θα έπρεπε να το σκεφτούμε να τα κάνουμε όλα αυτά…

Δ – Θεωρώ ότι μας έχει πείσει αφού έχει πάρει όλες τις περιπτώσεις, με τον πρώτο αριθμό το 1 είδαμε ότι επαληθεύεται και επίσης με το κ το οποίο αναπαριστά όλους τους φυσικούς αριθμούς οπότε μα ς πείθει πως ισχύει.

Κ – Λίγο καλύτερα αυτό το τελευταίο το λες; Μου άρεσε αυτό που είπες έχει πάρει όλες τις περιπτώσεις…

Δ – Έχει πάρει το 1 και στην συνέχεια, το κ θα μπορούσε να είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός και στην συνέχεια αποδεικνύοντας πως ισχύει για ν=κ, φαίνεται πως οποιοσδήποτε αριθμός θα μπορούσε να επαληθεύσει την σχέση

Κ – Συγνώμη, δεν αποδεικνύει, θεωρεί δεδομένο ότι ισχύει για ν=κ και αποδεικνύει για ν=κ+1, .εχει μία διαφορά έτσι; Καλά είναι φοβερό, την μια το λέτε τέλεια και μετά το μπερδεύετε. Επιμένω λοιπόν στην ερώτηση γιατί πειστήκαμε; Αυτό πολύ μου άρεσε που είπες… ότι έχουμε πάρει ολες τις περιπτώσεις.. Πως έχουμε πάρει όλες τις περιπτώσεις;

Ε – Επειδή πήραμε έναν συγκεκριμένο αριθμό, τον πρώτο του συνόλου Ν και έναν τυχαίο αριθμό

Κ – Υποθέσαμε για έναν τυχαίο αριθμό

Ε – Υποθέσαμε για έναν τυχαίο αριθμό και αποδείξαμε για τον αμέσως επόμενο του αριθμού αυτού. Άρα θα ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς

Κ – Δηλαδή για ν=2 γιατί ισχύει;

Ε – Επειδή ισχύει για ν=1 και… ισχύει και για ν=1+1=2..

Κ – Για ν=3 θα ισχύει;

Δ – Με τον ίδιο τρόπο… αφού ισχύει για ν=2…

Κ – Ωραία, θα κάνω μία τελευταία ερώτηση. Τώρα που την είδατε και την ξαναείδατε πως σας φαίνεται η απόδειξη σε σχέση με την πρώτη στιγμή που την διαβάσατε

Δ – Πιο κατανοητή

Κ – Και κάτι τελευταίο, αν είχα πάρει αυτήν την σχέση και έγραφα.. για ν=1 ισχύει, για ν=2, για ν=3, για ν=4, πράξεις και την επαλήθευα κάθε φορά…, αν το είχα κάνει αυτό για τους 100 πρώτους αριθμούς θα είχα αποδείξει την πρόταση;

Ε – Όχι, γιατί πήρα μόνο συγκεκριμένους αριθμούς. Δεν πήρα κάποιον τυχαίο, δεν πήρα όλες τις περιπτώσεις

Κ – Πως σας φάνηκε

Ε – Πολύ ωραία!

Δ – Ωραία ήταν!

Ε – Μέσα σε μία ώρα μάθαμε ένα θεώρημα!!

Ε – Ευχαριστούμε πάρα πολύ ήταν πολύ ενδιαφέρον!!

(Στην Συνέχεια η Ελένη έδειξε πολύ ενδιαφέρον να μάθει την ιστορία της μεθόδου και για τον επαγωγικό τρόπο σκέψης και γιατί δεν διδάσκεται πλέον στα λύκεια)

<u>Πρωτόκολλο ομάδας Β2</u>

Συμμετείχαν οι μαθητές Μάρθα (Μ), Κωνσταντίνος 1 (Κ1), Κωνσταντίνος 2 (Κ2), Γιάγκος (Γ) και Ιωάννης (Ι).

Μετά από 20 λεπτά ανάγνωσης:

Γ- όσο αναφορά την πρώτη ερώτηση, φυσικά και έχει σχέση, κατά την γνώμη μου τουλάχιστον γιατί… είναι σαν παράδειγμα το λογοτεχνικό κείμενο που.. δίνει ως παράδειγμα την πρόσθεση όλων των διαδοχικών αριθμών από το 1 μέχρι το 100.

Κ1- Ναι συμφωνώ, συμφωνώ γιατί στο πρώτο πχ στην σχέση 1 αντί για να προσθέσει 100 αριθμούς έβαλε ν οπότε είναι για όσους αριθμούς θέλουμε… κάπως έτσι.. οπότε έχει σχέση

Αναγνώριση σωστών ιδεών - επέκταση της κατανόησης

Κ- άλλος κανείς έχει να προσθέσει κάτι;

Κ2- Ι -Μ- Όχι εντάξει… μας κάλυψαν απόλυτα

Κ- Λοιπόν μετά τι λέει το άλλο ερώτημα, στο 2ο ερώτημα λέει τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής. Τι λέει αυτό το θεώρημα.. έχετε δει θεωρήματα και στην άλγεβρα και στην γεωμετρία, ξέρετε την έννοια του θεωρήματος. Αυτό το θεώρημα τι λέει;

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

Μ- Να πω για το θεώρημα…. Στην ουσία το θεώρημα μας λέει ότι για τον υπολογισμό ενός αθροίσματος διαδοχικών αριθμών ν αρκεί να κάνουμε το ν(ν+1)/2, δηλαδή δεν χρειάζεται να λες ν+ν+1 κτλ… αυτό… είναι ένας πιο σύντομος τρόπος να προσθέσεις διαδοχικούς αριθμούς

Κ- Αυτό το λέει η εφαρμογή, που λες

Γ- Α μισό λεπτό, το θεώρημα ισχύει για κάθε ακολουθία αριθμών

Κ- Το θεώρημα.. είναι ένα θεώρημα..

Γ- Ναι ας πούμε και στην εφαρμογή για παράδειγμα σε αυτό που έχει και στο λογοτεχνικό κείμενο μας λέει για μια ακολουθία που αυξάνει κατά 1 κάθε φορά. Ε αυτό το θεώρημα ισχύει για κάθε ακολουθία που αυξάνει κατά 1;

Κατανόηση του προβλήματος (Συσχέτιση του προβλήματος με κάποιο άλλο)

Κ- Εσύ πες μου πως το αντιλαμβάνεσαι

Γ- ότι ισχύει για κάθε ακολουθία απλά θα αλλάξει, στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχει +3, 1+3+6+…

Κ- Τι έχετε να πείτε πανω σε αυτό που λέει ο συμμαθητής σας;

Κ2- Εγώ λέω ότι δεν βγαίνει… αν βάλουμε…3

Μ- Μόνο με 1 βγαίνει

Κ2- Αν βάλεις όπου ν το 2, θα βγει 2=3

Κ1- ¨όχι…

Αναγνώριση λάθος ιδεών

Γ- ¨όχι σωστό είναι γιατί 3=3, άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό

Κατανόηση του προβλήματος (επαλήθευση του τύπου της εφαρμογής)

Μ- άρα ισχύει σε κάθε ακολουθία;

Κ- Το θεώρημα ισχύει γενικώς

Γ- Ο τύπος μάλλον ισχύει

Κ- Ο τύπος ναι προφανώς αφού αποδεικνύεται

Κ1- Εντάξει

Κ- Αλλά από ότι κατάλαβα εσείς τόση ώρα μιλάτε για την εφαρμογή, η ερώτηση είναι τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής πάνω

Κ1- Λέει ότι αν έχουμε έναν προτασιακό τύπο που αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς, εεεε και πληροί αυτές τις προϋποθέσεις α και β ισχύει για κάθε ν που ανήκει στους φυσικούς αριθμούς

Κατανόηση του προβλήματος (ο λύτης λέει το πρόβλημα με δικά του λόγια)

Κ- έχετε να προσθέσετε κάτι;

(Το ξαναλένε)

Γ- Εγώ δεν κατάλαβα τίποτα, μπορείς να μου το ξαναεξηγήσεις; έναν προτασιακό τύπο…..

Κ- Προτασιακός τύπος ρώτησε πριν η Μάρθα τι είναι, είναι μία μαθηματική πρόταση, αυτή εδώ η σχέση είναι ένας προτασιακός τύπος

Γ- Μάλιστα…

Κ- Βοήθησε αυτό

Γ- Λίγο.. ξέρω εγώ;;;

(Γέλια)

Κ- έχετε να συμπληρώσετε κάτι σε αυτό που είπε ο Κωνσταντίνος; Όσον αφορά τι λέει το θεώρημα;

Κ2-Γ- Ι- Μ- Όχι

Κ- Ωραία.. πάμε λίγο σε πιο ενδιαφέρον ερώτημα, μπορείτε να διακρίνεται τα βήματα αυτά που είπε ο Κωνσταντίνος σε μια απόδειξη μαθηματικής επαγωγής; Από κάτω έχετε μια απόδειξη. Μπορείτε να διακρίνεται αυτά τα βήματα του θεωρήματος;

Κ1 – Το α και β ή από την απόδειξη τα βήματα;

Κ – Να διακρίνετε στην εφαρμογή τα βήματα του θεωρήματος. Είναι ευδιάκριτα;

Ι – Ε, αφού είπε να βάλουμε στον Ρ το 1, βάζει εδώ για ν το 1 και ότι 1=1, που βάλαμε επάνω το ν, 1(1+1)/2 και βγαίνει πάλι και μετά λέει ότι για τυχαίους αριθμούς και βάζει το ν το κ εεε και καταλήγει ότι πάλι βγαίνει.

Δόμηση της κοινής γνώσης

Γ - Δεν ξέρω… κι εγώ πιστεύω ότι είναι ευδιάκριτα γιατί μας δίνει το 1 που είναι φυσικός αριθμός για να δείξει ότι ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς ώστε να μπορεί να κάνει την δεύτερη υπόθεση, ότι αν δείξουμε ότι ισχύει ας πούμε για ν=κ, για να τους γενικεύσει ουσιαστικά, για να πει ότι…. Για κάθε κ ισχύει αυτό, όχι μόνο για το 1

Μ- Όχι….με το…

Γ- Κάτσε περίμενε… μετά προσθέτει το κ+1 για να δείξει ότι ισχύει για άλλες ακολουθίες ότι….έτσι το βλέπω εγώ τουλάχιστον.. ε και μετά προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1 για να δείξει… ότι μπορούμε να πάρουμε όποιο σύνολο θέλουμε από τους φυσικούς…

Ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής (συσχετισμός του επαγωγικού βήματος με την γενίκευση της πρότασης)

Μ – Νομίζω ότι για ν=1 δεν το κάνει παράδειγμα ότι γίνεται για κάθε φυσικό αριθμό, για να πληροί την πρώτη προϋπόθεση, Δηλαδή να ρωτήσω κάτι… αν έπαιρνε για ν=2, δεν πληροί την πρώτη προϋπόθεση έτσι δεν είναι;

Κατανόηση του προβλήματος (ανάλυση δεδομένων)

Γ- Την πληροί

Κ- Δεν πληροί λες την πρώτη προϋπόθεση του θεωρήματος. Ναι έτσι όπως έχει διατυπωθεί εδώ δεν την πληροί

Μ – Άρα το ν=1 το κάνει για να κάνει την πρώτη προϋπόθεση

Κ – Έχετε να συμπληρώσετε κάτι σε αυτό;

Δόμηση της κοινής γνώσης

Κ2 – Γ – Για ξαναπές το λίγο Μάρθα..

Μ – Ότι το για ν=1 δεν το παίρνει τυχαία, το παίρνει για να εκπληρώσει την πρώτη προϋπόθεση

Ι – Ε ναι, αυτό είπε ο Γιάγκος

Μ – Όχι, επειδή είπε ότι το δίνει σαν παράδειγμα το ν=1 για να δείξει….

Γ – Μα η πρώτη προυπόθεση ισχύει για κάθε ν που ανήκει στο Ν

Ι - όχι από το θεώρημα το πρώτο λέει

Γ – Α για Ρ(1), όχι θα μπορούσε το οποιοδήποτε να είναι το 2, απλά θέλει να το ταιριάξει με το προηγούμενο παράδειγμα στο κείμενο

Μ – Ααα δεν ξέρω…

Γ – Ε ναι, από τη στιγμή που για κάθε αριθμό που ισχύει αυτό άρα είτε πάρει το 1 είτε πάρει το 2 πάλι θα ισχύει

Ι – ναι αλλά πρέπει πρώτα να πει για Ρ(1) γιατί το έχει σαν α και μετά να πάει για κάθε… τέτοιο.. για κάθε ν

Γ – Εντάξει ναι, άμα δεχθούμε ας πούμε ότι το α μπορούσε να λέει για οποιοδήποτε Ρ
Ι – Ε δεν λέει όμως . Εδώ λέει το 1
Κ – Πάντως νομίζω ότι όλοι σας καταλάβετε την αντιστοιχία του $1^{ου}$ βήματος του θεωρήματος με το $1^{ο}$ βήμα της απόδειξης
Όλοι – Ε ναι
Κ – Υπάρχει και ένα δεύτερο βήμα
Κ1 – Εντάξει είναι σαν να είναι συνέχεια του $1^{ου}$. Είναι η ίδια λογική
Γ – Εγώ στο $2^{ο}$ βήμα πιστεύω ότι απλά το γενικεύει

Ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής

Ι – Αλλά… το κ+1 έχει σχέση και με το θεώρημα
……………………………………………………………………………………..
Γ- Το τρίτο βήμα βασικά δεν είναι λίγο άχρηστο; Γιατί ουσιαστικά..ο k+1 είναι άλλος ένας αριθμός που ανήκει στο N, άρα εμπεριέχεται στο….απλά είναι σαν να κάνει άλλο ένα παράδειγμα

Κατανόηση του προβλήματος (οι λύτες αναρωτιούνται αν η πληροφορία που μας δίνεται είναι περιττή)

Κ- Το τρίτο βήμα όταν λες ποιο εννοείς:
Γ- Αυτό (δείχνει την σχέση 3 που προκύπτει από την σχέση 2)
Κ – Γιατί το θεωρείς άχρηστο βήμα;
Γ- Διότι είναι ακόμα ένας φυσικός αριθμός Δηλαδή από την στιγμή που βρήκαμε πριν ότι για κ ανήκει N ισχύει αυτό άρα εννοείται ότι για κ+1 θα ισχύει
Ι – Ας πούμε αν βάζαμε όπου κ το 2 θα μπορούσαμε να πάρουμε όπου κ το 3 για να γλιτώσουμε αυτή την κίνηση
Κ – Μμμ ενδιαφέρουσα προσέγγιση, δηλαδή θεωρείς ότι εκείνο το βήμα που λέει για ν=κ+1 και αποδεικνύει την πρόταση είναι περιττό;
Γ – Ναι θεωρώ ότι απλά την ξανααποδεικνύει
Κ – Πιο πριν την έχει αποδείξει δηλαδή;
Γ – ααα μισό… Α ναι πριν λέει «αν δεχθούμε»

Κατανόηση του προβλήματος (προσπαθούν να καταλάβουν τις λέξεις)

Κ – Λέει «ας δεχθούμε». Άρα δεν έχει αποδείξει κάτι
Γ – Α, κατάλαβα
Μ – Στην ουσία το 2 και το 3 είναι που.. εντάξει στην αρχή κάνει αυτό για το πρώτο βήμα και μετά στα άλλα δύο είναι που το αποδεικνύει, ότι κ και κ+1
Κ – Και γιατί τα κάνει αυτά τα βήματα;
Γ – Α μετά μας δίνει ότι αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ισχύει πάλι;

Κατανόηση του προβλήματος (προσπαθούν να καταλάβουν τις λέξεις)

Μ- Όχι οποιονδήποτε… τον επόμενό του
Γ – Ε ναι… τον επόμενό του… τον επόμενο της ίδιας ακολουθίας

Ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής («επόμενος αριθμός»)

Κ1- Λέει «πράγματι».. «αν προσθέσουμε», έχει καταλήξει…

…………………………………………………………………………………………

Κ – σκεφτείτε με την ησυχία σας

Γ – Μετά την 3 καταλήγει στο 1

Κ - Έχει και ένα διαδικαστικό κομμάτι πράξεων όπως βλέπετε εκεί πέρα. Αυτό το κομμάτι πράξεων το έχετε καταλάβει; Τι ακριβώς κάνει σαν πράξεις;

Γ – τα κάνει ομώνυμα

Κατανόηση του προβλήματος (αποσαφηνίζουν τις πράξεις)

Ι – Αφού προσθέτει το κ+1, μετά τα κάνει ομώνυμα και βγαίνει αυτή η σχέση και στην ουσία αν αντικαταστήσουμε το κ+1 με το ν βγαίνει πάλι η πρώτη

Κ- Αυτό εκεί που λέει ισχύει πάλι η 3, το καταλαβαίνουμε γιατί ισχύει η 3;

Μ – Προσθέτει κατά μέλη το κ+1

Κ – Και καταλήγει εκεί που θέλει να καταλήξει;

Γ – Ακριβώς

Κ – Που θέλει να καταλήξει δηλαδή;

Γ – Στην πρώτη σχέση

Ι – Στο β

Μ – Στην Τρίτη σχέση

Γ – Όχι στο πρωτο αφού βάζουμε όπου κ το ν+1, στην πρώτη

Ι – Εξαρτάται πως θα το δεις…

(Γέλια…)

Δόμηση της κοινής γνώσης

Ι – Εννοώ έτσι όπως είναι γραμμένα..

Γ – Ουσιαστικά υποθέτει την πρώτη και μετά από την στιγμή που μέσω πράξεων ξανακαταλήγει σε αυτήν

Μ – Την πρώτη την απέδειξε δεν την υποθέτει

Ι – Το «ας δεχθούμε»…

Γ- Αυτό που λέμε ν(ν+1)/2, εκεί ξανακαταλήγει

Κ1- Όχι το ξέρουμε αυτό

Γ – Αφού σου λέει να το αποδείξεις αυτό

Κ1 – Μετά αντικαθιστά το κ+1 με ν, που καταλήγει; Στην πρώτη, εδώ

Ι – Όχι, στην δεύτερη

Γ – Ναι στην δεύτερη καταλήγει

Μ – Στην πρώτη καταλήγει

Γ – Ουσιαστικά εμείς λέμε ότι καταλήγει στην πρώτη γιατί η πρώτη είναι που σου ζητάει να αποδείξεις, αυτή η μορφή είναι, ας το πω έτσι

Κ – Η μορφή ναι. Θα το ξεκαθαρίσουμε λίγο αυτό. Δηλαδή… η σχέση 2 είναι μία σχέση που υποθέτει και θέλει να αποδείξει την σχέση 3. Και τι κάνει; Πάει στην 2 και προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1. Και κάνοντας αυτό καταλήγει να αποδεικνύει την 3. Αυτό λέγατε; Και μετά λέει ότι με αυτό που έκανα απέδειξα την σχέση 1

Μ – Από την στιγμή που ισχύει η 3 δεν γίνεται να μην ισχύει η 1. έτσι δεν είναι;

Κ1 – επειδή πήραμε σαν βάση την 1

Κ – Το επόμενο ερώτημα είναι το γιατί αυτά τα βήματα μας πείθουν ότι τελικά ισχύει η πρόταση

Επέκταση της κατανόησης

Μ – Γιατί μας δίνει έναν τύπο και λέει θα τον αποδείξουμε και μας δείχνει τον τρόπο της απόδειξης και από την στιγμή που καταλήγει να αποδεικνύει την σχέση 3 και βασίστηκε πρώτα στην 1 και αντίστοιχα και στην 2 που είναι ίδιες άρα σίγουρα ισχύει και η 2 και η 1

Κ1 – Και με απαγωγή σε άτοπο δεν θα μπορούσαμε να το κάνουμε; Ας πούμε, αν υποθέσουμε ότι η 1 δεν ισχύει κάνουμε τα βήματα και καταλήγουμε ότι η 3 ισχύει.

Επινόηση σχεδίου (προσαρμογή σε οικείες μεθόδους απόδειξης)

Αρα θα είναι λανθασμένο. Δηλαδή καταλήξαμε λανθασμένα, αφού η 1 δεν ισχύει δεν θα έπρεπε να ισχύει και η 3

Κ – Πιθανόν, αυτό δεν το έχω σκεφτεί, ενδεχομένως να υπάρχουν και άλλοι τρόποι απόδειξης. Εγώ θα ήθελα όμως τώρα να εστιάσουμε σε αυτόν τον τρόπο απόδειξης και να μου πείτε εσείς τελικά γιατί πειστήκατε ότι αυτό είναι απόδειξη

Μ – Γιατί ισχύει η 3, η οποία είναι βασισμένη στην 1

Κ1 – δεν είναι στην ουσία για 2 τυχαίους αριθμούς δηλαδή το ν είναι ένας τυχαίος αριθμός και το κ+1 ένας δεύτερος τυχαίος αριθμός

Ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής

Ι – Αφού λέει ότι είναι ίσα, λέει ότι είναι ίσο με κ+1

Μ – Δεν είναι δύο, το ν είναι ίσο με το κ

Γ – Εγώ το πήρα ότι… είναι σαν απαγωγή σε άτοπο αλλά το ανάποδο δηλαδή κάνουμε μία σωστή υπόθεση και καταλήγουμε σε ένα σωστό αποτέλεσμα.

Κ – Οπότε εσείς έχετε πειστεί για την αλήθεια της πρότασης από αυτά τα βήματα;

………………………………………………………………………………………

Κ – Θα μου ξαναπείτε γιατί πειστήκατε;

Κ1 – Εγώ από την απαγωγή στο άτοπο. Το σκέφτηκα έτσι

Κ – Α με απαγωγή σε άτοπο

Κ1 – Επειδή μπορεί να ξεκινήσει από μία λανθασμένη υπόθεση και να καταλήξει σε ένα σωστό συμπέρασμα. Από τη στιγμή που το συμπέρασμα είναι σωστό…

Γ – Εγώ απ ότι καταλαβαίνω, η 1 είναι η υπόθεση..

Κ – Συγνώμη που διακόπτω, η 1 είναι η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε

Γ – Ναι αλλά από τη στιγμή που θέλουμε να την αποδείξουμε… πως την χρησιμοποιεί για να φτιάξει την 2;

Κατανόηση του προβλήματος (κατανόηση των δεδομένων ξανά)

Ι – Α μήπως απλά παίρνει το 1 που είναι ίσως σαν ειδική περίπτωση και μετά τα βήματα που κάνει για να το γενικεύσει; Επειδή άντε έχουμε την σχέση, για να το αποδείξει θα πάρουμε κάποιες άλλες περιπτώσεις ας πούμε; Προσπαθεί να το γενικεύσει όσο μπορεί

Ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής (Χρήση του όρου «γενίκευση»)

Κ – ναι αυτή νομίζω είναι καλή προσέγγιση ότι προσπαθεί να το γενικεύσει

Δόμηση της κοινής γνώσης

Γ – Ναι κι εγώ εκεί θέλω να σταθώ ότι στην αρχή αποδεικνύει ουσιαστικά την 1, εεε βάζοντας όπου ν=1 για… το σύνολο των φυσικών μόνο.. Ουσιαστικά παίρνει έτσι… και μετά δέχεται ότι ισχύει αυτή η πρόταση και μετά αντικαθιστά το κ που είναι μόνο φυσικός. Και μετά δείχνει ότι το κ+1… για να δείξει ότι… Αυτό ισχύει για κάθε ακολουθία επομένως; Για κάθε ακολουθία με βάση το 1 και μετά…. Προσθέτει και στα δύο μέλη το κ+1 για να δείξει ότι αυτή η ακολουθία μπορεί να έχει οποιοδήποτε μέγεθος… να το πω έτσι..δηλαδή δεν χρειάζετια να είναι μέχρι το 100, μπορεί μέχρι το 1000 και πάει λέγοντας

Ενδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής

Ι – Στην αρχή όμως παίρνει το ν=κ, έναν τυχαίο αριθμό και μετά παίρνει ότι ισχύει τ ν με το κ .. συν τον επόμενό του. Αρα πάλι ισχύει, άρα το γενικεύει ακόμα περισσότερο. Αυτό ήθελα να πω πριν ότι είναι με δύο διαφορετικούς αριθμούς

Ενδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής

Κ – Νομίζω ότι αρχίζει και ωριμάζει η σκέψη σας.. Και τελικά γιατί είναι απόδειξη αυτό… γιατί αυτά τα βήματα θεωρούνται απόδειξη για την πρόταση 1

Ι – Γιατί αν ισχύουν, αν αποδεικνύουμε ότι ισχύουν για κάθε φυσικό αριθμό άρα ισχύει και ο τύπος

Κ – Αυτά τα 3 βήματα δηλαδή απέδειξαν ότι ισχύει για κάθε αριθμό;

Ι – Φυσικό αριθμό

Κ – θεωρείτε ότι είναι αρκετά βήματα δηλαδή για να πούμε ότι μία πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό

………………………………………………………………………………………

Κ – εκεί λίγο θέλω να μείνετε

……………………………………………………………………………………….

Γ – Μάλλον εκεί που δεν με πείθει εμένα είναι στο ότι γιατί η 1 ισχύει για κ=ν, μας δίνει απλά μια ένδειξη.. για ν=1

Κατανόηση του προβλήματος (κατανόηση των δεδομένων)

Κ – Στο α βήμα… ναι συμφωνώ..

Μ – Να ρωτήσω κάτι; Δίνει μια ένδειξη ή μας λέει ότι πρέπει να ισχύει για να ισχύει αυτό το θεώρημα, ότι πρέπει να ισχύει το ν=1

Κ – Ναι αν το δεις με αντιστοιχία με τα βήματα του θεωρήματος.. ναι έχεις δίκιο Αλλά αν το δεις και τελείως μεμονωμένο, το πρώτο βήμα σου λέει ότι για ν=1 ισχύει η πρόταση που έχω παραπάνω. Αλλά προφανώς ναι, αυτό το είπατε και νωρίτερα ότι υπάρχει αντιστοιχία με τα βήματα του θεωρήματος. Και στο β κάνει όλο εκείνο που βλέπετε. Και λέει στο τέλος άρα ισχύει η πρόταση. Εκεί θέλω να εστιάσετε, στο άρα ισχύει η πρόταση, δηλαδή πως μας πείθει εμάς.

Ι – Μήπως αν βάλουμε μία τιμή στο κ, οποιαδήποτε τιμή και σε όλα τα βήματα βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα, πρέπει να ισχύει για κάθε βήμα. Εεεε… πώς να το πω… μήπως θέλει να μας δείξει.. μήπως μας πείθει επειδή δείχνει ότι αν προσθέσουμε το κ+1, δηλαδή έναν αριθμό που όσο πάει μεγαλώνει ανάλογα με το τι αριθμό θα βάλουμε στο κ ισχύει και συνεχίζει να ισχύει και συνεχίζει να ισχύει…..

Ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής ωστόσο οι λύτες δεν τεκμηριώνουν ακόμα γιατί αυτά τα βήματα είναι απόδειξη.

Δόμηση της κοινής γνώσης

Κ – Ναι δεν λες κάτι λάθος, περιμένω απλά να συμπληρώσει κάποιος την δική σου σκέψη

Γ- Να κάνω μια ερώτηση όσον αφορά το θεώρημα αυτό που λέει.. αυτό που κατάλαβα είναι ότι από την πρώτη σχέση που λέει για ν=1 ότι ισχύει καλύπτει το α οπότε ξεμπερδεύει με αυτό. Μετά για το β εκεί που λέει ότι για κάθε κ ανήκει Ν λέει ότι το Ρ(κ) μπορεί να γίνει Ρ(κ+1)

Κατανόηση του προβλήματος (αντιστοίχιση των βημάτων του θεωρήματος με τα βήματα της εφαρμογής)

Κ – Λέει συνεπάγεται το Ρ(κ+1)

Κ1 – Ναι αλλά το Ρ(κ+1) δεν πάει Ρ(κ) δεν είναι απαραίτητο, δεν είναι αμφίδρομη η σχέση

Γ – άρα ουσιαστικά αποδεικνύει το θεώρημα αποδεικνύοντας μόνο το β, γιατί δείχνει ότι από το Ρ(κ) πάει στο Ρ(κ+1) και ότι αυτό ισχύει όντως και ότι μπορεί να επιστρέψει στην πρώτη σχέση. Εντάξει, εμένα με έπεισε.

Ο μαθητής ισχυρίζεται ότι είναι απόδειξη γιατί επαληθεύει τα βήματα του θεωρήματος άρα έχει λυθεί το πρόβλημα

Κ – Μου ξαναλές λίγο γιατί πείστηκες;

Γ – Διότι στο… αρχικά αποδεικνύει το α μέρος του θεωρήματος λέγοντας ότι για ν=1 αυτό ισχύει. Μετά στο β μέρος το αποδεικνύει λέγοντας ότι από το Ρ(κ) μπορούμε να πάμε στο Ρ(κ+1)

Κ – Συγνώμη που σε διακόπτω.. εννοείς το β μέρος του θεωρήματος

Γ – Ναι

Κ – Οκ

Γ – Μετά λέει ότι από το Ρ(κ) όπου βάζει για ν=κ το οποίο ανήκει στους φυσικούς μπορεί να πάει στο Ρ(κ+1)..

Κ – Προσθέτοντας και στα δύο μέλη το κ+1

Γ – Ναι το οποίο μετά με την σειρά του αν πούμε ότι κ+1=ν μας οδηγεί πάλι στην 1η σχέση που ήδη ξέρουμε ότι ισχύει. Αρα… ναι.. αυτό..

Ι – Δεν βρίσκουμε κάποιο λάθος σε αυτά που κάνει οπότε αφού αυτά είναι σωστά..

Κ – Ωραίαα…. Οι άλλοι έχετε να πείτε κάτι;

………………………………………………………………………………………

Κ – Να το δούμε τώρα σε λίγο μεγαλύτερο βάθος; Δηλαδή.. εάν δεν είχαμε τα βήματα του θεωρήματος πάνω και βλέπατε αυτά τα βήματα σε μία απόδειξη μιας πρότασης…πως θα καταλαβαίνατε ότι αυτό είναι απόδειξη; Τι θα σας έπειθε δηλαδή; Θέλω δηλαδή να μπείτε στο θέμα εννοιολογικά. Πολύ σωστά παρατηρήσατε ότι εφαρμόστηκαν τα βήματα του θεωρήματος πάνω. Ας βγάλουμε λοιπόν το θεώρη και βλέπουμε μία απόδειξη μαθηματική

Ι – Γιατί χρησιμοποιεί το κ, το οποίο είναι ένας άγνωστος αριθμός και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή φυσικού αριθμού, δεν είναι δηλαδή για συγκεκριμένες περιπτώσεις ή για όλο το σύνολο των φυσικών αριθμών

Ο μαθητής και πάλι αντιλαμβάνεται ότι το επαγωγικό βήμα είναι γενίκευση της πρότασης αλλά δεν είναι σε θέση να τεκμηριώσει πλήρως γιατί τα βήματα αυτά είναι απόδειξη. Με άλλα λόγια αντιλαμβάνεται τι κάνει το κάθε βήμα αλλά δεν μπορεί να συνδυάσει τα βήματα

Δόμηση της κοινής γνώσης

Γ – Ναι αλλά γιατί ισχύει;

Κ1 – Εγώ θα πω ότι παίρνουμε έναν γνωστό αριθμό και καταλήγουμε πα παίρνουμε έναν τυχαίο και πάλι καταλήγει στην 1η. Οπότε αν..

Γ – Ναι αλλά καταλήγει στην 1η θα μπορούσε να γίνει και με λάθος βήματα, όταν λέει για ν=κ έχουμε αυτό και μετά για ν=κ+1 αυτό.. οπότε είναι πολύ εύκολο να καταλήξει στην πρώτη και δεν κάνει κάτι φοβερό για να πούμε ότι έχει μπερδέψει τους αριθμούς

Ι – Ναι αλλά παίρνει ας πούμε το 1 σαν ειδική περίπτωση και μετά το κ+1 ουσιαστικά αποκλείει το κ να είναι 1, ότι ό,τι και να προσθέσεις θα είναι πιο πάνω από το 1 και το δείχνει… βασικά πώς να το πω… κάπως έτσι, δηλαδή δείχνει ότι ισχύει για έναν φυσικό αριθμό έ και μετά…με το κ δείχνει ότι ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό και πάλι οι πράξεις που κάνει είναι αληθείς

Σημαντική ένδειξη της εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής

Κ2 – Το αποδεικνύει για κ και μετά και για κ+1

Κ – Το δέχεται για κ…και το αποδεικνύει για κ+1

Γ – Εντάξει, από την στιγμή που αποδεικνύεται για κ+1 μετά αντίστροφα μπορεί και για κ

Ι – Ναι όντως

Κ – Είστε πολύ κοντά πάντως στο να το περιγράψετε ακόμα πιο τέλεια

Γ – Από το 2 στο 3 μας δείχνει ότι προσθέτοντας τον οποιονδήποτε άλλον φυσικό αριθμό ότι μέσω κάποιων πράξεων, κάνοντας ομώνυμα κτλ καταλήγει πάλι στην 1η σχέση

Μ – Όχι οποιονδήποτε αριθμό, τον επόμενο

Σημαντική ένδειξη της εννοιολογικ ής κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής

Κ – Ακούσατε τι είπε η Μάρθα; όχι οποιονδήποτε αριθμό, τον επόμενο. Νομίζω κάπου ξαναααναφέρθηκε αυτό

Γ – Μήπως μας δίνει τον επόμενο αριθμό της συγκεκριμένης αλληλουχίας, γιατί δεν λέει κ+χ λέει κ+1, κι εδώ έχουμε και 1 και 2 και 3…

Επινόηση και ταυτόχρονα εκτέλεση ενός σχεδίου (γιατί εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι για να συπληρώσουν το παζλ της γενίκευσης και να απαντήσουν στο πρόβλημα του γιατί τα βήματα αυτά είναι απόδειξη, πρέπει να καταλάβουν, και μπαίνουν σε αυτή την διαδικασία, γιατί γίνεται η συγκεκριμένη επιλογή των αριθμών κ και κ+1)

Δόμηση της κοινής γνώσης

Μ – Δεν το έπιασα αυτό που είπες

Γ – Γιατί.. η αλληλουχία των αριθμών είναι… απλά προσθέτεις 1 σε κάθε περίπτωση, οπότε εδώ προσθέτει το κ+1, δηλαδή δεν προσθέτει έναν οποιονδήποτε επόμενο αριθμό

Μ – Τι εννοείς έναν οποιονδήποτε επόμενο αριθμό, ο επόμενος είναι…

Ι – Δηλαδή 10 θα πάει 11…διαδοχικοί

Κ – έχετε πει πάρα πολλά ενδιαφέροντα πράγματα. Απλά θέλω να μου πείτε.. αυτό που δεν άκουσα. Γιατί τελικά είναι απόδειξη; Εκτός κι αν το είπατε και δεν το κατάλαβα εγώ. Το είπε κάποιος και δεν το κατάλαβα;

Γ – Με βάση το θεώρημα μόνο.. αλλά χωρίς το θεώρημα…

Κ – Χωρίς το θεώρημα. Να βγάλουμε το θεώρημα λοιπόν. Με βάση τα βήματα. Γιατί μας πείθει;

Δόμηση της κοινής γνώσης

Ι – Γιατί έχει το κ που είναι στην ουσία οποιοσδήποτε αριθμός. Οπότε οποιονδήποτε αριθμό και να βάλουμε στο κ θα βγει πάλι σωστό θα ισχύει

Γ – Ε ναι αλλά γιατί θα ισχύει λέμε…

Ι – Μα λέει το ν=κ, τι να πεις ν τι να πεις κ, το ίδιο πράγμα είναι

Κ – Λέει ας δεχτούμε όμως για ν=κ

Ι – Ναι το ν στην 1 την σχέση, ο ν δεν ανήκει στους φυσικούς;

Κ – Ναι φυσικά

Ι – Ε άρα και ποια η διαφορά..

Κ1 – Το ας δεχθούμε…

Δόμηση της κοινής γνώσης

Ι – Ε αφού ισχύει αυτό, ισχύει αυτό…

Κ2 – στην ουσία αφού αποδείξαμε ότι ισχύει για έναν αριθμό που ξέρουμε και μετά πήραμε έναν τυχαίο κ, με μια υπόθεση και με κάποιες πράξεις καταλήξαμε πάλι σε κάτι που ισχύει

Κ – Πες το λίγο καλύτερα αυτό που είπες…

Ι – Θα το διατυπώσουμε καλύτερα

Κ2 – Αφού πήραμε έναν γνωστό αριθμό το 1 και μετά πήραμε έναν τυχαίο αριθμό κ, μετά από πράξεις καταλήξαμε ότι πάλι ισχύει. Εδώ έχουμε έναν γνωστό και έναν τυχαίο αριθμό, μια σχέση που ισχύει.. Ναι δεν μου βγαίνει…

Οι μαθητές επανέρχονται και μένουν στο ίδιο. Είναι απόδειξη γιατί αποδείχθηκε για έναν συγκεκριμένο φυσικό και μετά γενικεύτηκε η πρόταση για έναν τυχαίο φυσικό. Είναι προφανές πλέον ότι φτάνουν μέχρι αυτό το σημείο και δεν συνδυάζουν τα

(Γέλια)

Κ – Πάντως εγώ νομίζω ότι νωρίτερα το είπες καλύτερα.. έχετε να συμπληρώσετε κάτι στον συλλογισμό του συμμαθητή σας:

Δόμηση κοινής γνώσης

Γ – Δώστε μας ένα λεπτό..

Ι – Να προσθέσουμε κάτι.. δεν είναι ακριβώς πρόσθεση.. είναι σαν δοκιμή αν το $\nu=1$ και ισχύει ε και μετά αφού κάνουμε την παρατήρηση ότι ισχύει για $\nu=1$, προσπαθούμε να το γενικεύσουμε με το κ που είναι οποιοσδήποτε αριθμός και πάλι ισχύει

Κ – Εσύ δηλαδή είσαι απόλυτα ικανοποιημένος ότι έχει αποδειχθεί αυτή η πρόταση;

Ι – Μμμμ νομίζω ναι. Βασικά όχι, δεν είμαι απόλυτα.

Κ – Επειδή όμως μιλάμε για μαθηματικά πρέπει να είμαστε απόλυτοι

Μ – Μπορεί να είναι και βλακεία.. από την στιγμή που λέμε $\nu=1$ και από κάτω $\nu=\kappa$, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στην ουσία το κ το παίρνει ως 1;

Κ – Προσωπικά με καλύπτει πιο πολύ αυτό που λέγατε πριν ότι το κ το γενικεύει Λέει ας δεχθούμε για $\nu=\kappa$. Αυτό λίγο ξεκαθαρίστε το.

Γ – Α, νομίζω κατάλαβα. Στην αρχή μας δίνει την απόδειξη του 1, μετά μας λέει για το κ και μετά μας λέει ότι αυτό θα ισχύει για κάθε αριθμό που προσθέτουμε. Οπό λέει ουσιαστικά αν ισχύει για το 1 άμα θέσουμε όπου $\kappa=1$

Εδώ ο μαθητής αντιλαμβάνεται εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή

Ι – Θα ισχύει και για το άλλο

Κ – Ποιο άλλο;

Ι – Οποιοσδήποτε διαδοχικός του

Γ – Δηλαδή αν στο 1 προσθέσουμε το 2 και στα δύο μέλη πάλι θα ισχύει αυτό

Αυτό σε συνδυασμό με το προηγούμενο δείχνει ότι οι μαθητές κατάλαβαν εννοιολογικά την μαθηματική επαγωγή

Κ – Αν στο 1 προσθέσουμε το 1

Αναγνώ-ριση λάθος ιδεών

Ι – Ε ναι

Γ – Αν στο 1 προσθέσουμε το 2 δεν είναι;

Μ – Όχι, το 1

Ι – Το 1

Γ – Α ναι το 1

Κ – Παιδιά νομίζω ότι πιάσατε την ουσία της μαθηματικής επαγωγής. Για να κάνουμε λίγο μία ανασκόπηση. Η πρόταση λέει ότι ισχύει για $\nu=1$. Θα ισχύει και για $\nu=2$ και αν ναι γιατί;

Κ1 – Κανονικά θα πρέπει.

Μ – Ναι γιατί και αυτός είναι φυσικός αριθμός

Γ – Αν θέσουμε όπου $1=\kappa$ …

Κ – Θα ισχύει και για $\nu=3$;

Γ – Ι – Κ1 – Κ2 – Μ – Ναι

Κ – Ναι με την ίδια λογική

Μ – Για το 0;

Ι – Ναι και για το 0 ισχύει

Κ – Μία ακόμα ερώτηση. Γιατί ξεκίνησε με το ν=1;

Ι – Ε γιατί είναι εύχρηστος αριθμός

Μ – Ε ναι άλλο να πάρουμε για ν=55…

Κ – Γιατί, ποια η διαφορά;

Ι – Γιατί ίσως είναι… το ν είναι αριθμός που ξεκινάει η πιο απλή ακολουθία.. Δηλαδή άλλο να ξεκινήσεις από 5.. Το 1 είναι το πιο μικρό το πιο απλό που μπορούμε να ξεκινήσουμε

Ξεκαθαρίζει και το 1ο βήμα της απόδειξης

Μ – Η αρχή κάθε ακολουθίας δεν είναι;

Γ – Ναι βασικά αυτό

Πρωτόκολλο ομάδας Γ

Συμμετείχαν οι μαθητές Βάσω (Β) και Δαμιανός (Δ).

Μετά από 20 λεπτά ανάγνωσης:

Δ-Δηλαδή αυτό το θεώρημα επαληθεύει τις διαδοχικές πράξεις όλων των φυσικών αριθμών… δηλαδή αυτό το ν(ν+1)/2 επαληθεύει για κάθε ν ανήκει στους φυσικούς αριθμούς… το άθροισμα των φυσικών αριθμών

Κ- Αυτό λέει η εφαρμογή

Δ- Και αν το κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς… τότε είναι λογικό και αυτό να ισχύει ….για όλους τους φυσικούς

Κ- Να πάρουμε λίγο με την σειρά τα ερωτήματα;

Β- Αυτός πίστευε ότι οι αριθμοί επειδή βρίσκονται σε μία σειρά είναι διαδοχικοί άρα έχουν κάποια σχέση;

Κ- Ναι… λες για τον Gauss τώρα..

Β – Και ότι υπάρχει ένας τύπος που τα συνδέει

Κ – Δηλαδή για το πρώτο ερώτημα τι έχετε να πείτε; Αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του λογοτεχνικού κειμένου και του θεωρήματος…

Β- Υπάρχει

Κ – Ποια είναι αυτή η σχέση;

…………………………………………………………………………………………

Κ – Το βλέπετε όμως ότι υπάρχει σχέση. Δηλαδή τι είπε ο Gauss, τι λέει η εφαρμογή;

Β – Απέδειξε ο Gauss ότι..

Δ – Είναι η απόδειξη αυτού που είπε ο Gauss, δηλαδή…

Β – Αυτό που έκανε με τους αριθμούς ο δάσκαλος το απέδειξε στο…

Δ – Με έναν τύπο

Κ – Με έναν τύπο… άρα μια γενίκευση. Ο Gauss το έκανε μέχρι το 100 και αυτός ο τύπος..

Δ – Μέχρι όσο πάει

Κ – Όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα, τι λέει το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής:

…………………………………………………………………………………………

Κ – Τι λέει αυτό το θεώρημα; Καταλάβατε τι λέει:

Δ – Ότι…. Το άθροισμα των αριθμών με πλήθος ν……… βγαίνει… δηλαδή ότι… στην αρχή αποδεικνύει το Ρ(1) έτσι;

Κ – Τι σημαίνει αυτό το P(1);
Δ – Ότι… για ν=1, το 1 μπορεί να γραφτεί και έτσι δηλαδή (δείχνει το 1(1+1)/2)
Κ – Ωραία
Β – Ναι και βάζει όπου ν το 1
Δ – Μετά επειδή βάζει κ δεν αλλάζει κάτι γιατί και το κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς… οπότε ισχύει και αυτό… και το κ+1 και αυτό ανήκει στους φυσικούς αριθμούς γιατί και το κ και το 1 είναι φυσικοί αριθμοί
Β – Προσθέτει μετά κατά μέλη και…
Δ – Οπότε… ναι εδώ είναι λίγο περίεργο
Κ – Εδώ ψάξτε το λίγο… κατ αρχάς μην βλέπετε μόνο τις σχέσεις, δείτε τι λέει
Δ – Μια ισότητα για να ισχύει, αν προσθέσουμε κάτι στο ένα μέλος πρέπει να προσθέσουμε και στο άλλο…
Β – Ε ναι το προσθέτει
Δ – Το προσθέτει…
……………………………………………………………………………………..
Β – Αλλά πως γίνεται να το… προσθέσει;
Κ – Δεν μου λέτε… για δείτε λίγο τα ερωτήματα… θα σας βοηθήσουν να το πάτε βήμα βήμα… Μπορείτε να διακρίνετε τα βήματα σε μια απόδειξη μαθηματικής επαγωγής; Δηλαδή, υπάρχει ένα θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής υπάρχει και μία εφαρμογή από κάτω… Λοιπόν, το θεώρημα πάνω έχει 2 βήματα, λέει ότι εάν ισχύει αυτό και αυτό το βήμα τότε έχεις αποδείξει την πρόταση.. ωραία… στην εφαρμογή διακρίνετε αυτά τα δύο βήματα; Στην απόδειξη της εφαρμογής;
Β – Ναι
Δ – Ναι
Κ – Ωραία.. το πρώτο βήμα όπως είπε ο Δαμιανός, αυτό το P(1) που λέει πάνω η εφαρμογή είναι το για ν=1… ωραία.. το δεύτερο βήμα… έχετε καταλάβει τι κάνει; Τι λέει το θεώρημα και τι κάνει η εφαρμογή;
Β – P(k)…ότι το P(κ)…
Δ – Ότι το P(κ)…. Ισούται με το P(κ+1).. με το…
Κ – Ισούται;;
Δ – Συνεπάγεται με το P(κ+1)
Κ – Δηλαδή; Μπορείς να το πεις αυτό με δικά σου λόγια;
……………………………………………………………………………………..
Β – Βάζει όπου ν το κ
Κ – Σε μία πρώτη φάση

………………………………………………………………………………………

Κ – Και μετά;…. Βάζει όπου ν το κ+1…. Και τι αποδεικνύει τελικά;

Β – Ότι το πρώτο μαζί με το δεύτερο… η πρόσθεση αυτών των δύο….

…………………………………………………………………………………………..

Κ – Εγώ απ΄ότι κατάλαβα από αυτά που είπατε καταλάβατε την σχέση του κειμένου με την εφαρμογή, καταλάβατε το πρώτο βήμα της μαθηματικής επαγωγής και στο θεώρημα και στην εφαρμογή άρα δεν καταλαβαίνετε σε αυτήν την φάση τι γίνεται στο δεύτερο βήμα… οπότε εστιάστε εκεί σε συνδυασμό με το θεώρημα πάνω γιατί όλη η ουσία είναι εκεί.. στο δεύτερο βήμα

………………………………………………………………………………………..

Β – Το 1=1(1+1)/2… είναι σαν να προσθέτει αυτό με το κ=κ….

Δ – Αν θέσουμε το κ+1 με ν, το κ+1 γίνεται ίσο με ν και το κ+1+1 γίνεται κ+2

Κ – Μπράβο, ναι ωραία…πολύ ωραία… και πάμε τώρα στο άλλο ερώτημα…και γιατί μας πείθει αυτή η απόδειξη ότι το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών είναι ν(ν+1)/2. Πάμε στο επόμενο.. έχουμε την απόδειξη, εμείς γιατί πειστήκαμε; Θέλω να δείτε βήμα βήμα τι κάνει στην απόδειξη και γιατί το κάνει. Καταλάβατε τι θέλω να βρείτε; Την λογική με την οποία δουλεύει η μαθηματική επαγωγή. Γιατί το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής είναι μια απόδειξη για τέτοιες προτάσεις;

………………………………………………………………………………………….

Δ – Το ν(ν+1)/2 όποιος κι αν είναι ο ν… βγάζει άρτιο αποτέλεσμα, έτσι;… Όχι δεν βγάζει…

…………………………………………………………………………………………

Κ – Τώρα αν καταλάβατε απαντάτε στο δεύτερο ερώτημα. Πως μας πείθουν τα βήματα για την αλήθεια της πρότασης που αποδεικνύει;

………………………………………………………………………………………….

Δ – Αυτό που κάνει είναι… αν ένας αριθμός ν ισούται με το μισό αυτού του αριθμού εις το τετράγωνο συν τον εαυτό του… με λίγα λόγια..

Κ – Το μισό του τετραγώνου…

Δ – Το μισό του τετραγώνου, το μισό του, το άθροισμά τους κάνει ν

Κ – Το θέμα είναι γιατί το παρακάτω είναι μια απόδειξη;

Β – Γιατί έχει σχεση το α και το β

Δ – Γιατί έγραφε το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο αλλά… το αποτέλεσμα έμενε ίδιο… είτε θέσουμε το ν=κ+1 είτε θέσουμε ν=κ και το ν=1, το κ+1 και το κ και το 1 είναι όλοι φυσικοί αριθμοί

Κ – Αααα και πως είμαστε σίγουροι ότι αν θέσουμε κ+100 θα βγει το ίδιο;….. Δηλαδή αυτό που είπες τώρα αν κατάλαβα καλά και νομίζω καλά κατάλαβα και νομίζω κι εσύ κατάλαβες…. Σου λέει, έκανα ένα πείραμα για ν=1…

Δ – Δηλαδή αυτά τα τρία βήματα…

Κ – Καταρχάς αυτά τα τρία βήματα, το πρώτο είναι για ν=1. Το για ν=κ δεν θεωρείται βήμα, ουσιαστικά εδώ σου λέει ας δεχθούμε για ν=κ, δεν το αποδεικνύει και ας αποδείξουμε μετά ότι ισχύει για ν=κ+1

Β – Απλά το θέτει

Κ – Εκείνο λοιπόν το θέτει. Αρα ουσιαστικά ως απόδειξη έχει ότι για ν=1 ότι ισχύει η πρόταση και για ν=κ+1 ότι ισχύει η πρόταση και λέει ωραία το αποδείξαμε. Αν έπαιρνε για ν=κ+2 πάλι θα έλεγε ωραία το αποδείξαμε; Και αν έπαιρνε για ν=500 πάλι θα έλεγε ωραία το αποδείξαμε; Άρα κάτι άλλο κρύβεται πίσω από το «ωραία, το αποδείξαμε». Δηλαδή.. αποδεικνύοντας ουσιαστικά μόνο για ν=1 και για ν=κ+1 το έχει δεχθεί ως αληθές. Γιατί; (άρχισαν να ξαναδιαβάζουν την απόδειξη και να βλέπουν τις σχέσεις) Τώρα δεν είναι τόσο μαθηματικά όσο λογική…Τώρα όσο και να το κοιτάτε δεν θα σας οδηγήσει στην λύση του προβλήματος. Πρέπει να σκεφτείτε γιατί παίρνει αυτές τις δύο περιπτώσεις

Δ – Γιατί το 1 είναι περιττός και το κ+1 είναι…. Όχι όχι μπορεί να είναι και άρτιος. Περιττός δεν μπορεί να είναι…

Κ – Το κ+1; Οι περιττοί, παρένθεση τώρα αυτό, έχουν την μορφή 2κ+1 και οι άρτιοι 2κ. Το κ+1 δεν είναι ούτε άρτιος ούτε περιττός

……………………………………………………………………………………..

Δ – (Αποφασισμένος) Είπε ν=1 πρώτα. Μετά είπε ότι ας δεχθούμε ν=κ…. Αρα θα μπορούσαμε να πούμε και ότι το κ κάνει 1 (απογοητευμένος)

Β – ν=1 άρα όλο αυτό εδώ είναι το κ

Κ – Ποιο;

Β – Το κλάσμα

Κ – Α ναι… για ν=1 βγαίνει εκείνο το κλάσμα (μου έδειξε το 1(1+1)/2). Μετά λέει ας δεχθούμε για κ και μετά λέει….. θα αποδείξουμε για κ+1. Και το αποδεικνύει όντως

Δ – Το ν-1 κάνει κ.

Κ – Το ν-1 κάνει κ;

Δ – Το ν=κ+1… Το ν-1 κάνει κ

Κ – Γιατί;

Δ – Επειδή το ν=κ+1, αν πάμε το 1 από την άλλη

Ψάχνω για ποια σχέση μιλάνε

Τελικά μου εξηγούν, την σχέση που λέει για ν=κ+1

Κ – Αααααα

Δ – Δεχθήκαμε για ν=κ…….

Κ – Σας φαίνεται ενδιαφέρον;

Β Δ – Ναι

Κ – Ξαναεπαναλαμβάνω τον συλλογισμό. Το ερώτημά μας είναι: αποδεικνύοντας αυτή την πρόταση για ν=1 και για ν=κ+1, γιατί έχει θεωρηθεί αυτό απόδειξη της πρότασης; Απόδειξη σημαίνει ότι επαληθεύεται αυτή η πρόταση για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό. Και αυτός πήρε δύο περιπτώσεις για να το αποδείξει. Την ν=1 και υποθέτοντας την ν=κ απέδειξε την πρόταση για ν=κ+1. Και αυτό μας κάνει να αποδεχθούμε αυτόν τον ισχυρισμό για κάθε φυσικό αριθμό ν. Πρεπει να καταλάβουμε….

Δ – Αν το ν είναι 1 το ν-1 είναι 0. Οπότε πήρε για τον αριθμό 0 πήρε και για τον 1. Και απέδειξε έτσι ότι ισχύει αυτό για όλους τους φυσικούς αριθμούς

Κ – Ενδιαφέρουσα σκέψη αυτή

Δ – Ναι γιατί αν βάλουμε όπου κ το 0….

Κ – Το κ δεν μπορεί να είναι 0 γιατί το ν δεν μπορεί να είναι 0

Δ – Ναι αλλά αν πάρουμε το ν=κ+1 και το ν είναι 1 τότε το κ είναι 0. Αν το δούμε έτσι…

Κ – ναι κοίταξε, όταν το ν είναι 1 το κ είναι σαν να μην υπάρχει, είναι άλλη σχέση

Κ – Πάλι επαναλαμβάνω ότι το ερώτημα είναι ότι αποδεικνύοντας ότι αυτή η σχέση ισχύει για ν=1, υποθέτοντας ότι ισχύει για ν=κ και αποδεικνύοντας ότι ισχύει για ν=κ+1, το έχει αποδείξει. Γιατί αυτό το πράγμα θεωρείται απόδειξη;

(Ξανακοιτάν τις σχέσεις)

Κ – Δεν νομίζω ότι σας βοηθάει τώρα να ψάχνεστε μέσα στις σχέσεις. Οι σχέσεις κάνουν αυτό που είπατε πριν, αυτό το βρήκατε αμέσως. Πρέπει να βρείτε τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω από αυτό. Γιατί αυτό είναι απόδειξη;

Β – Έχει σχέση το κείμενο;

Κ – Μπορεί το κείμενο να σας βοηθήσει. Μπορεί να σας βοηθήσει με την έννοια ότι μπορεί να σας φέρει κάποια έμπνευση όχι με την έννοια ότι η απάντηση αυτού του ερωτήματος είναι μέσα στο κείμενο. Η απάντηση αυτού που ρωτάω βρίσκεται γενικά στα μαθηματικά. Δηλαδή γιατί κάτι είναι λογικό και γιατί δεν είναι. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, έχετε δει αποδείξεις. Και στον διαφορικό λογισμό και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, πάντα σας πείθουνε λογικά έτσι; Δηλαδή… δεν λες ά εντάξει το δέχομαι επειδή το είπε κάποιος. Υπάρχει μία λογική εξήγηση. Καταλήγει κάπου με λογικά βήματα.

(Κουνάνε καταφατικά το κεφάλι)

Β – ναι σε ένα λογικό συμπέρασμα

Κ – Κι εδώ υπάρχουν κάποια λογικά βήματα. Ποια είναι αυτά τα λογικά βήματα; Ποια είναι τα μαθηματικά που υπάρχουν από πίσω; Δεν είναι τόσο ευδιάκριτο. Βλέπετε ότι ενώ έχετε καταλάβει τι γίνεται με τις πράξεις εκεί πέρα, δεν έχετε καταλάβει τελικά αυτό γιατί είναι απόδειξη. Οπότε εστιάστε σε αυτό. Εστιάστε στο να καταλάβετε γιατί αυτά τα βήματα αποτελούν μια απόδειξη.

……………………………………………………………………………………..

Δ – αυτό το θεώρημα έχει αποδειχθεί; Είναι ορθό;

Κ – Ναι ναι… αν ανοίξεις το βιβλίο των μαθηματικών κατεύθυνσης της Β λυκείου, είναι το τελευταίο κεφάλαιο, η μαθηματική λογική, εκεί είναι αυτό το θεώρημα στην θεωρία αριθμών. Είναι το θεώρημα με το οποίο αποδεικνύονται τέτοιου είδους προτάσεις. Ας πούμε, βλέπεις ότι αυτή η πρόταση δεν είναι η $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Έχει μέσα τις άπειρες τελίτσες…άπειρες τελίτσες σημαίνει έννοια του απείρου. Μιλάμε για μία πρόταση μαθηματική η οποία έχει μέσα το στοιχείο του απείρου.

Β – Ξεκινάει με το 1 και μετά προσπαθεί….

………………………………………………………………………………

Κ – Μετά προσπαθεί να κάνει κάτι

Β – Δηλαδή το $\nu=\kappa$, ουσιαστικά είναι ένας πολύ μεγάλος…

Κ – ένας τυχαίος ας το πούμε

……………………………………………………………………………………..

Κ – θέλετε να κάνετε ένα διάλειμμα να ξεκουράσετε το μυαλό σας και μετά να το ξαναδούμε;

(10λεπτο διάλειμμα)

Δ – Το $\nu=1$ το έχουμε αποδείξει.Το $\nu=\kappa$ δεχόμαστε ότι ισχύει. Αν τα προσθέσουμε κατά μέλη γίνεται $\nu=\kappa+1$

Κ – Αν τα προσθέσουμε κατά μέλη; Δεν νομίζω ότι βγάζουμε κάποια ακρη, πάλι αποπροσανατολίζεστε από αυτό που κάνουμε. Το γιατί είναι απόδειξη αυτή η διαδικασία αυτών των 3 βημάτων.

Β – Δεν πρέπει να σκεφτούμε με μαθηματικά πρέπει να σκεφτούμε με βάση την λογική.

Κ – Πρέπει να σκεφτείτε μαθηματικά αλλά όχι έτσι όπως το πάτε μέσα από τις σχέσεις.

Δ – Το 1 το ξέρουμε. Είναι ένας φυσικός αριθμός. Το κ είναι ένας τυχαίος φυσικός αριθμός

Κ – Ωραία….

Β – Ναι αυτό σας είπα πριν ότι ξεκινάει με κάτι που ξέρουμε για να καταλήξει σε κάτι που δεν ξέρουμε…

Κ – Ναι σε κάτι πιο γενικό

Β – Και για αυτό λέω ότι κάτι που είναι πιο γενικό συν αυτό που ξέρουμε μας δίνει…

…………………………………………………………………………………….

Κ – Πείθεσαι δηλαδή εσύ;

Β – Όχι… εντάξει….

Κ – Θέλω να πειστείς εσύ σαν Βάσω.

Δ – Το ν=κ δεν το αποδεικνύει..

Κ – Όχι το υποθέτει

Δ – Το δεχόμαστε

Κ – Το δεχόμαστε. Και αποδεικνύει ότι ισχύει για ν=κ+1

………………………………………………………………………………………….

Δ - Λοιπόν αυτό που είπε ο Gauss 1+100=101 κτλ. Αρα αν πάρουμε εμείς αυτήν την σχέση 1+2+3+….+ν μπορούμε να πούμε ότι 1+ν=… 2+ν-1=ν+1….Αν το πάμε έτσι διαδοχικά πάλι θα μας βγάζει αυτό το κάτι. Έτσι;

Κ – Ξέρεις κάτι; Αυτό που κάνεις τώρα είναι πάλι αλγεβρική σκέψη. Θέλεις να αποδείξεις με αλγεβρικό τρόπο την πρόταση

Δ – Για να παίρνει το ν=1 και όχι κάποιον άλλον αριθμό, ο 1 θα έχει κάποια ιδιαιτερότητα.. Τι ιδιαιτερότητα έχει όμως ο αριθμός 1; Μπορούσε να πάρει για ν= οποιονδήποτε αριθμό έτσι; Αλλά πήρε για ν=1.

Κ – Γιατί; Καλά σκέφτεται ο Δαμιανός. Γιατί πήρε το ν=1;

Β – Γιατί έτσι βγαίνει η σχέση

Δ – Ο 1 είναι ο μόνος αριθμός που μπορεί να διαιρέσει όλους τους ακέραιους… όχι

Β – Γιατί θα βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα

Δ – Γιατί είναι ο μικρότερος…

Κ – Γιατί είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός

Δ - ¨όταν ισχύει για τον μικρότερο αριθμό ισχύει για τους μεγαλύτερους αριθμούς… Αλλά αυτό είναι…

Κ – Κι εσύ καταλαβαίνεις ότι κάτι δεν πάει καλά..

Δ – Ναι ναι κάτι δεν…

Κ – Ωραία, ο 1 είναι ο πρώτος φυσικός αριθμός. Άρα έχει μια λογική. Αποδεικνύει την πρόταση για τον μικρότερο φυσικό αριθμό

Δ – άρα ο κ μπορεί να είναι ένας μεγαλύτερος

Κ – Και μετά αποδεικνύει για τον…

Δ – κ+1 έναν ακόμα μεγαλύτερο του κ

Κ – Γιατί τον κ+1; Και ο κ+2 είναι μεγαλύτερος του κ

Δ – είναι ο πιο μικρός μεγαλύτερος του κ.

Κ – Πείτε το λίγο καλύτερα αυτό. Ο κ+1 με τον κ τι σχέση έχουν;

Β – Ο k+1 είναι μεγαλύτερος του κ.

Κ – Απλά μεγαλύτερος; Μόνο μεγαλύτερος είναι; Μεγαλύτερος είναι και ο κ+100. Γιατί δεν πήρε τον κ+100;

Β – Είπαμε ν=1

Κ – Ο κ με τον κ+1 τι σχέση έχουν;

Β – Τώρα θυμήθηκα μια άσκηση από την Β λυκείου, που μας έλεγε ότι αν το άθροισμα δύο….

Κ – Δύο;;;

Β – Δύο φυσικών αριθμών;

Κ – Δεν έλεγε απλά δύο φυσικών αριθμων αυτή η άσκηση…

Κ – Πάντως διαισθάνεστε ότι έχουν κάτι κοινό και ότι δεν πήρε τυχαία το κ+1…

Δ – κ+1 είναι ο μικρότερος μεγαλύτερος του κ….

Κ – Με απλά ελληνικά;;

Δ – Ο πρώτος μεγαλύτερος του.

Κ – Ο επόμενός του δεν είναι βρε παιδιά;

(Γελάμε και διασκεδάζουμε)

Β – ναι ναι… Αυτό!!

Κ – Αρα… ας το δούμε από την αρχή…Αποδεικνύει για ν=1 και είπατε ότι ο ν=1 είναι ο πρώτος φυσικός αριθμός. Δέχεται για ν=κ που είναι ένας τυχαίος και αποδεικνύει για ν=κ+1 που είναι ο επόμενός του. Και γιατί αποδεικνύοντας αυτά έχει δεχθεί ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό; Νομίζω ότι τώρα είστε στο τελικό στάδιο

Β – Αφού ισχύει για τον μικρότερο αν προσθέσουμε κάτι…

Δ – Αν ο κ+1 θεωρήσουμε ότι είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός…

Κ – Δεν υπάρχει μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, είναι άπειροι

Κ – Πάντως καταλαβαίνεται ότι αυτό το ν=1 και το ν=κ+1 δεν είναι τυχαίες επιλογές έτσι;. Καταλαβαίνεται ότι αρχίζει και φαίνεται μία λογική μαθηματική πίσω από αυτό. Ποια είναι λοιπόν αυτή η μαθηματική λογική; Τι πετυχαίνει αυτός αποδεικνύοντας ότι μία πρόταση αν ισχύει για κ ισχύει και για κ+1;

…………………………………………………………………………………….

Κ – Να σας δώσω ένα παράδειγμα; Αν ένας έπαιρνε αυτήν την πρόταση και αποδείκνυε ότι ισχύει για ν=1 και ισχύει και για ν=50 και ισχύει και για ν=51 θα την είχε αποδείξει; Είναι πολύ συγκεκριμένα παραδείγματα αυτά. Πάντα θα αναρρωτιόμαστε αν ισχύει και για άλλους φυσικούς αριθμούς

Δ – ‘Οχι

Κ - Άρα παίρνει γενικά ότι ισχύει για ν=κ και αποδεικνύει ότι ισχύει για ν=κ+1. Τι έχει αποδείξει ακριβώς; Ας μείνουμε σε αυτό το βήμα. Αποδεικνύοντας για μία πρόταση ότι αν ισχύει για ν=κ θα ισχύει και για ν=κ+1 τι έχουμε αποδείξει γι αυτήν την πρόταση;

Κ – θα ξεκινήσω εγώ και συνεχίστε εσείς. Έχουμε αποδείξει ότι αν μία πρόταση ισχύει για έναν τυχαίο φυσικό αριθμό τον κ θα ισχύει και για τον

Δ – Επόμενό του

Κ – Τον επόμενό του…

Δ – και για τον προηγούμενο θα ισχύει

Β – άρα θα ισχύει και για τον μεθεπόμενο

Δ – Περιμένουμε σε αυτήν την σχέση 1+2+…+ν ο ν να είναι τεράστιος αριθμός

Κ – Ένας τυχαίος, όχι απαραίτητα τεράστιος

Κ – Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτή η πρόταση ισχύει για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό του κόσμου.. Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι. Αρα δεν μπορούμε να πάρουμε όλες τις περιπτώσεις, να εξετάσουμε για καθέναν ξεχωριστά.

Β – Εξετάζουμε διαδοχικά….

Κ – Εξετάζει όμως ότι αν ισχύει για έναν τυχαίο αριθμό κ τότε ισχύει και για τον επόμενό του άρα θα ισχύει όπως είπες και…

Β – για τον επόμενο και για τον μεθεπόμενο…

Κ – Και; Τώρα πρέπει να το ολοκληρώσουμε λίγο το σκεπτικό. Δηλαδή… αφού ισχύει για ν=1, για ποιον άλλον φυσικό αριθμό θα ισχύει;

Β – Το 2.

Κ – Μπράβο. Και γιατί θα ισχύει για το 2; γιατί πιο κάτω αποδείξαμε ότι αν ισχύει για κ θα ισχύει και για κ+1

Β – Ναι 1+1 κάνει 2

Δ – Οπότε ισχύει και για το 3, οπότε ισχύει και για το 4

Β – Ναι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς

Δ – και αφού ισχύει για το 4 θα ισχύει για το 5 και αφού ισχύει για το 5 θα ισχύει για το 6 (χαμόγελα ικανοποίησης!!)

Κ – Καλυφθήκατε γιατί είναι απόδειξη αυτό;

B, D- Ναι

Κ – Ωραία… λοιπόν πως σας φάνηκε όλη αυτή η διαδικασία;

Β – Ωραία….

Κ – Ο συνδυασμός του με το λογοτεχνικό κείμενο;

Β – Βοήθησε

Κ – Σε τι βοήθησε;

Δ – Στο πως σκέφτηκε ο Gauss, στο… πως δεν χρειάζεται να το σκεφτείς με πράξεις… αλλά με την… με ένα άλλο μοτίβο. Είδε ένα μοτίβο ανάμεσα σε 100 αριθμούς το οποίο μια ολόκληρη τάξη δεν το σκέφτηκε, οπότε σκέφτηκε έξω από το κουτί στην ουσία κάτι που θα έπρεπε να κάνουμε κι εμείς. Οι άλλοι σκέφτηκαν με αριθμούς αυτός σκέφτηκε για οποιουσδήποτε αριθμούς.

Κ – Εσάς τι πιστεύετε ότι ήταν αυτό που σας εμπόδισε να δείτε την μαθηματική λογική που περιγράψαμε τώρα τελευταία;

Δ – έτσι όπως έχουμε μάθει στο σχολείο… ‘εχουμε μάθει με έναν… δεν έχουμε μάθει να αποδεικνύουμε… αποδείξεις. Δηλαδή τις μαθαίνουμε έτσι όπως μας τις δείχνουν, και στις πανελλήνιες αυτό κάνουμε

Β – Ναι δεν σκεφτόμαστε γιατί είναι έτσι

Δ – Πολύ λίγες μπορούμε από μόνοι μας να τις βρούμε και να τις αναπτύξουμε

Κ – και να δείτε ποια μαθηματική λογική κρύβεται από πίσω

Δ – Εντάξει… τώρα έχουμε τις προυποθέσεις αν κάποτε φτιάξουμε δικό μας θεώρημα… (Ο Δαμιανός κάνει χιούμορ)

Κ – χα χα εντάξει… γιατί όχι… όλα είναι πιθανά!

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ