**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ**

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

# Ανάπτυξη περιβάλλοντος μικτής πραγματικότητας με την χρήση δυναμικών αλληλεπιδραστικών αριθμογραμμών για την κατανόηση των κλασμάτων στο Δημοτικό

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ**

**ΛΙΑΚΟΥ ΣΟΦΙΑΣ**

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ στις «Επιστήμες της Αγωγής»**

**με ειδίκευση «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»**

**ΦΛΩΡΙΝΑ**

**ΙΟΥΝΙΟΣ 2019**

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου, κ. Παλαιγεωργίου Γεώργιο που βοήθησε πολύ στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, με την καθοδήγησή του και τις πολύτιμες υποδείξεις και συμβουλές του, οι οποίες συνέβαλαν στη βελτίωση και ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, τον κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο και την κ. Τσακιρίδου Ελένη για τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή. Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν και βοήθησαν, τους εκπαιδευτικούς για την άμεση ανταπόκριση και την όρεξη που έδειξαν, καθώς και τους διδάσκοντες τριτοβάθμιας εκπαίδευσης που συμμετείχαν στην έρευνα. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με τον τρόπο τους ώσπου να ολοκληρωθεί η εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

## Περιεχόμενα


Περίληψη ........................................ 5

Εισαγωγή ........................................ 8

Κεφάλαιο 1. Κλάσματα ........................................ 10

1.1 Σχήματα των ρητών αριθμών – νοητικές κατασκευές ........................................ 10

1.1.1 Το κλάσμα ως μέρος-όλο ........................................ 10

1.1.2 Το κλάσμα ως πηλίκο ........................................ 11

1.1.3. Το κλάσμα ως λόγος ........................................ 11

1.1.4 Το κλάσμα ως μέτρηση ........................................ 11

1.1.5 Το κλάσμα ως τελεστής ........................................ 11

1.2 Εξωτερικές αναπαραστάσεις- μοντέλα ........................................ 12

1.3 Δυσκολίες που εντοπίζονται στους ρητούς και στα κλάσματα ........................................ 15

1.4 Αριθμογραμμή ως διδακτικό εργαλείο ........................................ 17

1.4.1 Νοερή αριθμογραμμή ........................................ 21

1.4.2 Δυσκολίες στην χρήση αριθμογραμμής ........................................ 22

Κεφάλαιο 2. Ενσώματη μάθηση ........................................ 24

2.1 Ενσώματη μάθηση (Embodied cognition) ........................................ 24

2.2 Ενσώματη Μάθηση και Μαθηματικά ........................................ 28

2.2.1 Dance mat ........................................ 31

2.2.2 Walk the number line ........................................ 32

2.2.3 Gestures ........................................ 34

2.2.4 Mathematical Imagery Trainer for Proportion (MIT) ........................................ 35

Κεφάλαιο 3. Απτές διεπαφές ........................................ 38

3.1 Συστήματα απτών διεπαφών – επαυξημένη πραγματικότητα ........................................ 38

3.2 Συστήματα απτών διεπαφών και αριθμητικές έννοιες ........................................ 40

3.3 Εικονικά χειραπτικά υλικά (virtual manipulatives) ........................................ 43

3.4 Ηλεκτρονικές εφαρμογές με αριθμογραμμές ........................................ 48

3.4.1 Motion math......48
3.4.2 Rescue Calcularis......50
3.4.3 Math snacks......52
Κεφάλαιο 4. Διεπαφή παρούσας μελέτης......55
4.1 Makey Makey......55
4.2 Ο «Μαραθώνιος των κλασμάτων»......56
4.2.1 Σενάριο παιχνιδιού......60
4.4 Ακολουθία δραστηριοτήτων και διδακτικοί στόχοι......62
Κεφάλαιο 5. Μεθοδολογία......67
5.1 Σκοπός και Ερευνητικά ερωτήματα......67
5.2 Δείγμα......68
5.3 Διαδικασία......68
5.4 Εργαλεία συλλογής δεδομένων......69
Κεφάλαιο 6. Αποτελέσματα......72
6.1 Αποτελέσματα πρώτης φάσης......72
6.1.1 Ερωτηματολόγιο στάσεων......72
6.1.2 Συνεντεύξεις......79
6.1.3 Βιντεοσκόπηση......81
6.2 Αποτελέσματα δεύτερης φάσης......83
6.2.1 Συνεντεύξεις......83
6.3 Αποτελέσματα τρίτης φάσης......86
Κεφάλαιο 7. Συζήτηση......93
Βιβλιογραφία......99

## Περίληψη

Η διδασκαλία των κλασμάτων είναι ένα προκλητικό θέμα για τους εκπαιδευτικούς καθώς περιλαμβάνει σύνθετο εννοιολογικό περιεχόμενο. Η αριθμογραμμή είναι ένα εργαλείο οπτικής αναπαράστασης που φαίνεται να είναι αποτελεσματικό για την αντιμετώπιση των κλασμάτων. Σε αυτή τη μελέτη, στοχεύουμε στο να μετατρέψουμε τη στατική αριθμογραμμή σε ένα πρακτικό, χρήσιμο και δυναμικό εργαλείο μέτρησης σε ένα αυθεντικό τυποποιημένο πλαίσιο. Έτσι, δημιουργήθηκε και παρουσιάζεται το μικτό πραγματικό περιβάλλον "Μαραθώνιος των Κλασμάτων" το οποίο δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να τοποθετήσουν πολλές αριθμογραμμές σε οποιοδήποτε σημείο, να αυξήσουν το μέγεθος τους και να προσαρμόσουν τα χαρακτηριστικά τους όπως επιθυμούν. Οι αριθμογραμμές χρησιμοποιούνται για την τοποθέτηση αθλητών και άλλων αντικειμένων σε ένα ενισχυμένο στάδιο. Η πρόταση αξιολογήθηκε σε 3 φάσεις. Αρχικά, 28 μαθητές της 6ης τάξης συμμετείχαν σε ομάδες των δύο σε 14 συνεδρίες που διήρκεσαν περίπου 45 λεπτά. Στο τέλος κάθε συνεδρίασης, οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με την εμπειρία τους, ενώ 16 μαθητές συμμετείχαν επίσης σε σύντομες συνεντεύξεις. Για την συλλογή επιπλέον δεδομένων η διαδικασία βιντεοσκοπήθηκε. Σε δεύτερη φάση, 10 μαθητές της 6ης τάξης συμμετείχαν σε 5 συνεδρίες παραδοσιακής διδασκαλίας και στην συνέχεια ανά δύο αλληλεπίδρασαν με το περιβάλλον και συμμετείχαν σε σύντομες συνεντεύξεις. Στην τελευταία φάση, το περιβάλλον παρουσιάστηκε σε διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και σε εκπαιδευτικούς γενικής αγωγής, οι οποίοι συμμετείχαν και αυτοί σε συνεντεύξεις. Οι μαθητές αξιολόγησαν το περιβάλλον ως αποτελεσματικό, ευχάριστο, καινοτόμο, χρήσιμο και εκφραστικό και ισχυρίστηκαν ότι έκλεψε την προσοχή τους για 45 λεπτά, παρόλο που η μάθηση του πεδίου είναι ένα μη δημοφιλές θέμα. Προσδιόρισαν επίσης ως κύρια πλεονεκτήματα του προτεινόμενου περιβάλλοντος την αντιπροσωπευτική ισχύ των αλληλεπιδραστικών αριθμογραμμών, την αυθεντικότητα του περιβάλλοντος, το μηχανισμό ανάδρασης, τον ψυχαγωγικό χαρακτήρα της δραστηριότητας και τη συνεργασία που απαιτείται. Οι διδάσκοντες και οι εκπαιδευτικοί ήταν επίσης πολύ θετικοί, υποστηρίξαν ως δομικά στοιχεία της εφαρμογής τις δυναμικές αριθμογραμμές και τις δυνατότητές τους, το περιβάλλον μικτής πραγματικότητας, την ενσώματη μάθηση και τον παιγνιώδη χαρακτήρα του περιβάλλοντος. Υποστήριξαν πως είναι ικανό να προσελκύσει το ενδιαφέρον και να

ενταχθεί σε πλαίσιο τάξης, ωστόσο οφείλουν να γίνουν περαιτέρω έρευνες για την επίπτωση του στο γνωστικό τομέα.

## Abstract

Teaching about fractions is a challenging topic for teachers since it includes complex conceptual content. The number line is a visual representation tool that seems to be effective for dealing with fractions. In this study, we aim at transforming the static uncontextualized paper-and-pencil number line into a practical, useful and dynamic measurement tool in an authentic gamified context. We present the mixed reality environment "Marathon of Fractions" which enables learners to position multiple number lines in any place of the augmented space and adjust their characteristics as they wish. The number lines are used for positioning athletes and other props on an augmented stadium. The proposal was evaluated in 3 phases. Initially, 28 students of the 6th grade participated in groups of two in 14 sessions that lasted about 45 minutes. At the end of each meeting, students were asked to complete a questionnaire on their experience, while sixteen students also participated in short interviews. The registration process was used to collect the above items. In the second phase, 10 students of the 6th grade participated in 5 traditional teaching sessions, then in groups of two they interacted with the environment and finally participated in short interviews. At the last stage, the environment was presented to professors of the University of Florina and to primary school teachers, who also participated in interviews. The students rated the environment as effective, enjoyable, innovative, useful and expressive and claimed to have excluded his attention for 45 minutes, although learning the field is an unpopular theme. It has been identified as representative power of interactive number lines, environmental authenticity, response mechanism, recreational nature of the activity, and collaboration required. Professors and teachers were also very positive, they supported as building blocks of the environment the dynamic numberlines and their capabilities, the environment of mixed reality, the embodied learning and the gaming nature of the environment. They argued that this environment is capable of attracting interest and becoming part of teaching sequence in a classroom, but further research on its impact on the field of knowledge must be carried out.

# Εισαγωγή

Η διδασκαλία των κλασμάτων είναι ένα από τα πιο δύσκολα και απαιτητικά θέματα στο σχολείο καθώς περιέχει δύσκολο εννοιολογικό περιεχόμενο και απαιτεί διαφορετικό τρόπο αντίληψης από ότι ήξεραν οι μαθητές ως τώρα. Ωστόσο, η ικανότητα καλού χειρισμού των κλασμάτων είναι επιτακτική για την μετέπειτα επίλυση προβλημάτων στην επιστήμη, την τεχνολογία και τη μηχανική και για την αντιμετώπιση καθημερινών δραστηριοτήτων (Jordan et. al., 2013., Siegler et. al., 2012), ενώ η κατανόησή τους αποτελεί προϋπόθεση για την εκμάθηση αναλογιών, δεκαδικών, ποσοστών καθώς και τα προηγμένα μαθηματικά. Η αριθμογραμμή, ως ένα εργαλείο οπτικής αναπαράστασης ικανό να ενισχύσει την κατανόηση των κλασμάτων, μετατράπηκε στην παρούσα μελέτη, από στατική σε ένα πρακτικό, χρήσιμο και δυναμικό εργαλείο μέτρησης σε ένα αυθεντικό τυποποιημένο πλαίσιο.

Μια ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας παρείχε αρκετό υλικό ώστε να γίνει αντιληπτό πως οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα στο να κατανοήσουν την έννοια των κλασμάτων, αλλά και να τα χειριστούν. Τα κλάσματα αποτελούν ένα κεφάλαιο που θεωρείται δύσκολο για πολλά παιδιά του δημοτικού καθώς δεν είναι εξοικειωμένα με την γραπτή αναπαράστασή τους και παρουσιάζουν δυσκολίες κατά την ενασχόληση με αυτά και γενικότερα με ρητούς αριθμούς (Muzheve & Capraro, 2012). Επιπλέον, τα παιδιά δυσκολεύονται στη σύνδεση των κλασμάτων με πραγματικά παραδείγματα, αφού αδυνατούν πολλές φορές να κατανοήσουν τι εκφράζει ένα κλάσμα. Αυτό κυρίως οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας των κλασμάτων από τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι συχνά χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις εννοιών που δεν βοηθούν την κατανόηση τους από τους μαθητές (Pekkan, 2015) ή ακόμα και σε δικές τους γνωστικές ελλείψεις αναφορικά με τα κλάσματα. Θεωρείται επίσης, από πολλούς ερευνητές ότι η ελλιπής γνώση των κλασμάτων οδηγεί σε περαιτέρω δυσκολίες στα μαθηματικά, καθώς παρεμβαίνει στη μάθηση και άλλων μαθηματικών εννοιών (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015., Petit, Laird & Marsden, 2010).

Κατά την παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια για βελτίωση της διδασκαλίας των κλασμάτων με ανάπτυξη ενός περιβάλλοντος μικτής πραγματικότητας με τη χρήση αριθμογραμμής για την κατανόηση τους. Συγκεκριμένα, μέσω μιας αλληλεπιδραστικής κατασκευής, που ονομάστηκε Μαραθώνιος Κλασμάτων, προωθείται η κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων, η κατασκευή και τοποθέτηση τους, η εκτέλεση πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων, αλλά και η κατανόηση της λειτουργίας και χρήσης της αριθμογραμμής σαν εργαλείο. Αυτό πραγματοποιήθηκε με έμφαση στην χρήση των μοντέλων μήκους και συγκεκριμένα, με την χρήση πολλαπλών αριθμογραμμών, καθώς και με τη χρήση προβολικού το οποίο πρόβαλε τις δυναμικές αριθμογραμμές. Οι αριθμογραμμές αυτές έχουν 3 πολύ ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά:

1. Αλλάζουν μήκος,
2. Μετακινούνται δεξιά και αριστερά
3. Η υποδιαίρεσή τους σε κλασματικές μονάδες μπορεί αλλάξει

κατά συνέπεια ο μαθητής μπορεί να δημιουργεί, να μετακινεί και να χειρίζεται με ευκολία και ευελιξία κάθε κλάσμα που του παρουσιάζεται.

Στην μελέτη που ακολουθεί, δημιουργήθηκε το εκπαιδευτικό περιβάλλον «Μαραθώνιος των κλασμάτων», το οποίο αρχικά παρουσιάστηκε στα πλαίσια μια έκθεσης σε 28 μαθητές Δημοτικού, έπειτα παρουσιάστηκε μετά από 5 διδασκαλίες σε φάση εμπέδωσης, σε 10 μαθητές Στ’ Δημοτικού και τέλος παρουσιάστηκε διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και σε εκπαιδευτικούς γενικής αγωγής, με στόχο να αξιολογηθεί ως προς την χρησιμότητα και την καταλληλότητα του.

# Κεφάλαιο 1. Κλάσματα

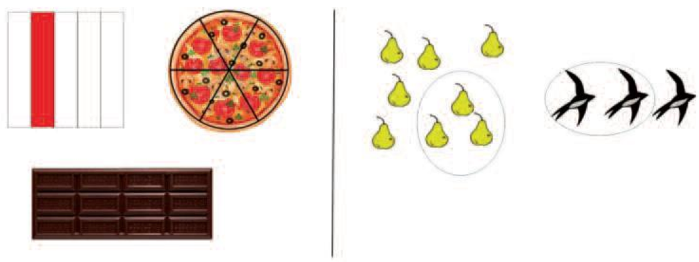
## 1.1 Σχήματα των ρητών αριθμών – νοητικές κατασκευές

Τα σχήματα είναι ο όρος που χρησιμοποιείται από τους επιστήμονες για να περιγράψει τις νοητικές κατασκευές ενός ατόμου, τις οποίες το ίδιο το άτομο δημιουργεί για να μπορέσει να λειτουργήσει μέσα στο περιβάλλον του. Κάθε άτομο χρησιμοποιεί στοιχεία των γνώσεων του για να δομήσει σχήματα ώστε να επιλύσει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σε συγκεκριμένες συνθήκες (Κολέζα, 2000).

Πολλοί είναι οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με την ερμηνεία των ρητών αριθμών. Αυτή στην οποία θα βασιστούμε είναι η κατηγοριοποίηση της Marshall (1993), όπου οι ρητοί και συνεπώς τα κλάσματα, έχουν τα εξής σχήματα (νοητικές κατασκευές), μέρος – όλου, πηλίκο, λόγος, μέτρο (μέτρηση), τελεστής. Αναλυτικότερα:

### 1.1.1 Το κλάσμα ως μέρος-όλο

Στο συγκεκριμένο σχήμα η έννοια του κλάσματος αντιμετωπίζεται ως ολότητα που συντίθεται από ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών μερών. Για το κλάσμα α/β, το όλο χωρίζεται σε β κομμάτια, κάθε κομμάτι συμβολίζεται με 1/β. Το «όλο» μπορεί να είναι συνεχής ποσότητα ή ένα σύνολο διακριτών ποσοτήτων (Λεμονίδης, 2016). Η ερμηνεία μέρος-όλου προσφέρεται για γνήσια κλάματα (κλάσματα <1, π.χ. 3⁄4) αλλά δεν προσφέρεται για καταχρηστικά (κλάσματα >1, π.χ. 5⁄3). Η ερμηνεία αυτή αν και είναι θεμελιακή και απλή για τον αρχάριο μαθητή εντούτοις επιδέχεται αρκετή κριτική (Λεμονίδης, 2016) καθώς υποστηρίζεται ότι καλλιεργεί στους μαθητές μια περιορισμένη αντίληψη για τον κλασματικό αριθμό και ευθύνεται για την αδυναμία να γίνει το κλάσμα αντιληπτό ως αριθμός.



**Εικάνα:** Κλάσμα ως μέρος – όλου (Λεμονίδης, 2016)

### 1.1.2 Το κλάσμα ως πηλίκο

Η ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο διαίρεσης (α/β) θεωρεί το ρητό ως διαίρεση α πραγμάτων σε β ίσα μέρη. Έτσι, το κλάσμα μπορεί να γραφεί σε μια ισοδύναμη δεκαδική μορφή. Συνεπώς, υπάρχουν διαφορετικοί συμβολισμοί (notations), κλάσμα, δεκαδικός ή και ποσοστό, για τον ίδιο αριθμό (Smith, 2002, αναφορά στον Long, 2009). Στην ερμηνεία μέρος-όλο χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό α/β με την ερμηνεία του πηλίκου. Στις καταστάσεις του πηλίκου όμως το α δεν αναπαριστά τα μέρη ενός όλου αλλά την ποσότητα που θα διαιρεθεί ισομερώς και το β αναπαριστά τον αριθμό των μερών της διαίρεσης. Επίσης τα α και β αναπαριστούν διαφορετικά είδη πραγμάτων και δεν υπάρχει ο περιορισμός ώστε α < β.

Για παράδειγμα, για να μοιράσουμε τέσσερα ψωμιά σε εννιά άτομα θα πρέπει να χωρίσουμε και τα εννιά ψωμιά σε τέσσερα ίσα μέρη. Το σύμβολο 4/9 μπορεί να σημαίνει «διαιρώ 4 μονάδες με το 9» και δεύτερον, ότι το αποτέλεσμα αυτής της διαίρεσης είναι «τέσσερα ένατα της μονάδας». Έτσι, το σύμβολο αναπαριστά ταυτόχρονα μια οδηγία προς εκτέλεση αλλά και το αποτέλεσμα μιας πράξης (Λεμονίσης, 2016).

### 1.1.3. Το κλάσμα ως λόγος

Σε αυτήν την περίπτωση ο ρητός ως λόγος εκφράζει τη σχέση δύο ποσοτήτων, συγκρίνονται δηλαδή μεταξύ τους δύο ποσότητες. Άρα στην ερμηνεία του λόγου δεν υπάρχει διαμέριση μιας ποσότητας ή ενός συνόλου αντικειμένων όπως συνέβαινε στις ερμηνείες του μέρος-όλο και του πηλίκου (Λεμονίδης, 2016). Η Lamon (1999, αναφορά στους Charalambous & Pitta – Pantazi, 2007) διαφοροποιεί την αναλογία από τον λόγο, ορίζοντας την πρώτη ως τη σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων διαφορετικού είδους, σε αντίθεση με το λόγο που, σύμφωνα με την ίδια, αφορά μια σύγκριση ποσοτήτων ίδιου είδους.

### 1.1.4 Το κλάσμα ως μέτρηση

Στο συγκεκριμένο νοητικό σχήμα, η θεώρηση του κλάσματος α/β ως σημείο πάνω σε έναν άξονα ή ως μέτρηση, προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος 1/β για τον καθορισμό μιας απόστασης. (Λεμονίδης, 2016).

### 1.1.5 Το κλάσμα ως τελεστής

Το κλάσμα ως τελεστής λειτουργεί ως μια μηχανή που μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη (Κολεζά, 2000). Λειτουργεί δηλαδή ως μια συνάρτηση η οποία εφαρμόζεται σε κάποιο αριθμό, σύνολο ή αντικείμενο (Λεμονίδης, 2016). Οι Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) εξηγούν ότι η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει αντιληπτή ως μια διαδικασία δύο βημάτων: αρχικά γίνεται ένας πολλαπλασιασμός μιας ποσότητας με τον αριθμητή και στη συνέχεια το αποτέλεσμα που προκύπτει διαιρείται με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Αυτά τα σχήματα, αν και διαφορετικά μεταξύ τους, δομούν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών, αλληλοσυνδέονται και συνθέτουν την έννοια του κλάσματος και είναι σημαντικό οι μαθητές να τα κατανοήσουν ώστε να διαχειρίζονται σωστά τους αριθμούς. Για την οικοδόμηση των σχημάτων και την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος κατά τη διδασκαλία, είναι καλό να χρησιμοποιούνται εξωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές να σκιαγραφήσουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος (Rau et al., 2013). Συναντάται μια πληθώρα διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως τα μοντέλα περιοχής (πίτες, ορθογώνια), τα μοντέλα συνόλων και τα μοντέλα μήκους (αριθμογραμμές) (Van de Walle, 2007).

Η διαφοροποίηση του μοντέλου μήκους από τα υπόλοιπα, σύμφωνα με τους Bright, Behr, Post, & Wachsmuth (1988, αναφορά στους Petit, Laird & Marsden, 2010) είναι:

1. Το όλο αναπαρίσταται από ένα μήκος, και όχι από μια περιοχή ή ένα σύνολο αντικειμένων.
2. Σε ένα μοντέλο μήκους χρειάζεται να υπάρχουν σύμβολα τα οποία να οριοθετούν το όλο/μονάδα, ενώ στα άλλα μοντέλα αυτό είναι προφανές.
3. Δεν υπάρχουν οπτικοί διαχωρισμοί ανάμεσα στις διαφορετικές μονάδες, καθώς οι μονάδες είναι συνεχόμενες.
4. Οι μονάδες μπορούν να υποδιαιρεθούν χωρίς περιορισμούς

### 1.2 Εξωτερικές αναπαραστάσεις- μοντέλα

Για τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν διατυπωθεί πολλές διαφορετικές θεωρήσεις. Για τους Chiappini & Bottino (1999) τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αφηρημένα, δεν έχουν υλική υπόσταση, δεν είναι απτά και κατά συνέπεια είναι προσιτά μόνο μέσω της σκέψης μας. Πλέον, οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων που κατασκευάζονται από τους μαθητές είναι αποτέλεσμα νοητικών κατασκευών, αποτελούμενων αφενός από εξωτερικές αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ή υλικών σημειώσεων (Kaput, 1999; Goldin & Shteingold, 2001) και των διαδικασιών που μπορούν να αντιμετωπιστούν ή να παραχθούν από τους μαθητές σε ένα ευρύ φάσμα μέσων (οπτικά ή ακουστικά, λεκτικά ή μη, στατικά ή δυναμικά κ.λπ.), και αφετέρου από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών. Στόχος είναι να γίνεται μια διάκριση μεταξύ της αναπαράστασης της έννοιας ως ένα κοινό τεχνούργημα και των ξεχωριστών νοητικών αναπαραστάσεων κάθε μαθητή (Goldin & Shteingold, 2001).

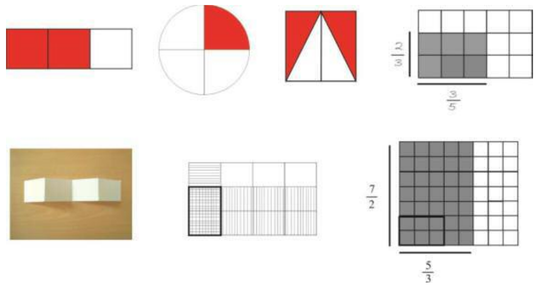
Τα σχήματα των ρητών, που προαναφέρθηκαν αποτελούν τις νοητικές αναπαραστάσεις των μαθητών. Για την οικοδόμηση όμως αυτών των σχημάτων και την επίτευξη ουσιαστικής κατανόησης της έννοιας του κλάσματος, είναι ύψιστης σημασίας κατά την διδασκαλία να χρησιμοποιούνται και εξωτερικές αναπαραστάσεις. Αυτές έχουν στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να σκιαγραφήσουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος (Rau et al., 2013, Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) και έτσι να δημιουργήσουν ακριβέστερα νοητικά μοντέλα της έννοιας (Rau, 2013).

Ο Van de Walle (2007) αναφέρεται στις εξής κατηγορίες μοντέλων για την αναπαράσταση κλασμάτων: μοντέλα περιοχής ή εμβαδού (αναπαράσταση επιφάνειας), μοντέλα συνόλων (αναπαράσταση διακριτών ποσοτήτων) και μοντέλα μήκους ή μέτρησης.

**Μοντέλα εμβαδού**

Στα μοντέλα εμβαδού υπάρχει μια επιφάνεια η οποία αποτελεί τη μονάδα αναφοράς και διαιρείται σε ίσα μέρη. Η χρήση των μοντέλων περιοχής προϋποθέτει ανάπτυξη συλλογισμών πάνω σε σχέσεις μέρους – όλο (Λεμονίδης, 2016; Petit, Laird & Marsden, 2010). Τα μεγέθη στα μοντέλα αυτά είναι συνεχή. Το όλο προσδιορίζεται από το εμβαδόν μιας ορισμένης επιφάνειας. Τα ίσα μέρη είναι ίσες επιφάνειες και το κλάσμα δείχνει το χώρο που καλύπτουν τα μέρη σε σχέση με τη μονάδα του όλου στο εμβαδόν.

Μοντέλα περιοχής αποτελούν οι ορθογώνιες επιφάνειες, οι κυκλικοί δίσκοι, οι γεωπίνακες, οι διάστικτοι και οι ορθογώνιοι καμβάδες κ.α. Υποστηρίζεται πως το μεγαλύτερο πλεονέκτημά τους σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα περιοχής είναι η έμφαση που προσδίδουν στην ποσότητα που απομένει για να σχηματιστεί το όλο.



**Εικόνα:** Μοντέλα εμβαδού (Λεμονίδης, 2016)

### Μοντέλα συνόλου

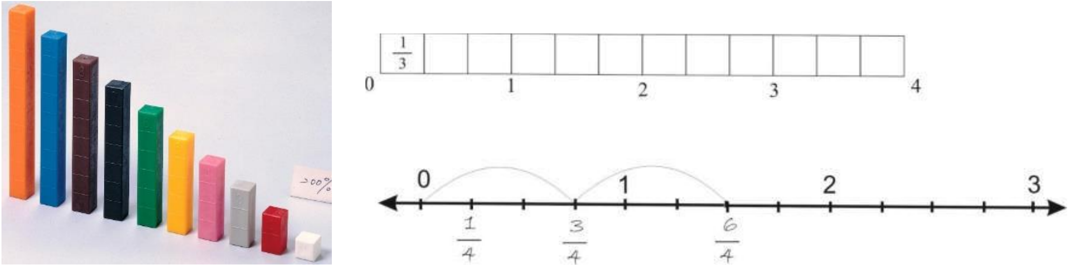
Τα μεγέθη σε αυτά τα μοντέλα αποτελούνται από σύνολα διακριτών αντικειμένων. Το όλο προσδιορίζεται από όλα τα στοιχεία του συνόλου και τα ίσα μέρη ορίζονται από ίσο αριθμό αντικειμένων, ενώ το κλάσμα δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων σ’ ένα υποσύνολο προς τον αριθμό των αντικειμένων του όλου. Τα 2 χελιδόνια είναι τα 2/3 των 3 χελιδονιών. Ο Van de Walle (2007) αναφέρει ότι η ιδέα της αναφοράς σε ένα σύνολο από αντικείμενα ως μεμονωμένη οντότητα είναι κάτι που δυσκολεύει την κατανόηση των μοντέλων αυτής της κατηγορίας.

**Εικόνα:** Μοντέλα συνόλου (Λεμονίδης, 2016)

### Μοντέλα μήκους ή αριθμογραμμής

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες κατηγορίες, εδώ αντί για εμβαδά υπάρχουν μήκη, δίνοντας έμφαση στις αποστάσεις επάνω στην αριθμογραμμή ή την θέση ενός κλάσματος σε αυτή (Λεμονίδης, 2016). Τα μεγέθη είναι συνεχή. Το όλο είναι η μονάδα του μήκους και τα ίσα μέρη ορίζονται από ίσες αποστάσεις, ενώ το κλάσμα δείχνει την θέση ενός σημείου π.χ. το 3/4, σε σχέση με την απόσταση από το μηδέν με βάση την ορισμένη μονάδα (το 1/4).

Ο Van de Walle (2007) αναφέρει ότι σε αυτή την κατηγορία μοντέλων είτε σχεδιάζουμε και υποδιαιρούμε ευθείες γραμμές, είτε συγκρίνουμε χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος τους. Τέτοια μοντέλα είναι οι κλασματικές λωρίδες, οι ράβδοι Cuisenaire, τα ευθύγραμμα τμήματα, οι διπλωμένες λωρίδες χαρτιού και η αριθμογραμμή.




**Εικόνα:** Μοντέλα μήκους (Λεμονίδης, 2016)

### 1.3 Δυσκολίες που εντοπίζονται στους ρητούς και στα κλάσματα

Τα παραπάνω σχήματα φανερώνουν την πολυδιάστατη και αφηρημένη έννοια των κλασμάτων, γεγονός που μας προϊδεάζει για την ύπαρξη δυσκολιών στην κατανόηση τους. Τα λάθη τα οποία συναντώνται δεν είναι τυχαία, είναι συστηματικά και συχνά επίμονα. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφερθούν ορισμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την διδασκαλία των κλασμάτων.

Οι Lortie-Forgues, και Siegler, (2015) διακρίνουν δύο μεγάλες κατηγορίες δυσκολιών: 1) τις εγγενείς δυσκολίες της αριθμητικής των κλασμάτων και των δεκαδικών και 2) τις δυσκολίες πολιτισμικής προέλευσης που αναφέρονται στη διδασκαλία και τις προϋπάρχουσες γνώσεις των εκπαιδευόμενων. Ορισμένες κατηγορίες λαθών είναι:

- **Η αντίληψη ότι η κλασματική μονάδα είναι σταθερό μέγεθος.** Στο Mathematics Navigator (2015) αναφέρεται ότι οι μαθητές τείνουν να υπεργενικεύουν τις έννοιες και δεν αναγνωρίζουν το γεγονός ότι το μέγεθος του όλου καθορίζει και το μέγεθος του κλάσματος.

- **Εφαρμογή κανόνων των ακεραίων στους ρητούς.** Σύμφωνα με τις Vamvakoussi & Vosniadou (2010, οπ. αναφ. Fazio & Siegler, 2011), μια βασική δυσκολία της έννοιας του κλάσματος έγκειται στο γεγονός πως αποτελεί την πρώτη περίπτωση που συναντούν οι μαθητές, όπου οι ιδιότητες που ισχύουν για τους φυσικούς και ακέραιους αριθμούς, δε βρίσκουν πλέον εφαρμογή, ενώ είναι χαρακτηριστικό το γεγονός πως ακόμη και μαθητές γυμνασίου δυσκολεύονται να αντιληφθούν πως ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί (πυκνότητα κλασμάτων).

- **Λάθη στις πράξεις.**
    - Οι McLeod & Newmarch (2006) αναφέρουν ότι ίσως το πιο συχνό λάθος των μαθητών στην πρόσθεση είναι η προσθήκη των αντίστοιχων όρων του κλάσματος, όπως θα γινόταν με τους ακέραιους αριθμούς, δηλαδή οι μαθητές προσθέτουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές μεταξύ τους.
    - Οι Fazio & Siegler (2011) σημειώνουν ότι στα προβλήματα πολλαπλασιασμού, όταν τα κλάσματα έχουν ίδιο παρονομαστή, οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τον παρονομαστή στην πράξη. Το Mathematics Navigator (2015) αναφέρει ότι κατά τον πολλαπλασιασμό παρατηρείται καμιά φορά και η περίπτωση κάποιοι μαθητές να διαιρούν τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή του ενός κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου. Επίσης, μπορεί τα παιδιά να πολλαπλασιάζουν τον αριθμητή του πρώτου κλάσματος με τον παρονομαστή του δεύτερου και αντίστροφα και να προσθέτουν τα αποτελέσματα μεταξύ τους.

- **Δυσκολία αντίληψης της φύση των μικτών αριθμών και των καταχρηστικών κλασμάτων**. Οι Fazio & Siegler (2011) σημειώνουν ότι κάποιοι μαθητές αγνοούν το κλασματικό μέρος των μικτών και ασχολούνται μόνο με το ακέραιο μέρος. Επιπλέον, άλλοι αντιμετωπίζουν το ακέραιο μέρος ως ένα κλάσμα το οποίο έχει όμοιο παρονομαστή με το κλάσμα που δίνεται.

- **Λάθη στην αναγνώριση κλάσματος ως μέτρου**. Ο Hannula (2003) διαπιστώνει ότι κάποιοι μαθητές δεν θεωρούν το κλάσμα αριθμό, οπότε πιστεύουν ότι δεν μπορούν να το τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή ενώ άλλοι εντοπίζουν τη θέση του κλάσματος πάντα στα δεξιά της μονάδας αντί του μηδενός. Ο ερευνητής αναφέρει επίσης ότι κάποιοι μαθητές αναζητούν το κλάσμα θεωρώντας ότι ολόκληρη η αριθμογραμμή αποτελεί το όλο και όχι μόνο το τμήμα από το 0 μέχρι το 1. Επίσης, τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία το πλήθος των υποδιαιρέσεων στην αριθμογραμμή δεν αντιστοιχεί στον παρονομαστή του κλάσματος.

Φαίνεται πως τα κλάσματα αποτελούν μια από τις δυσκολότερες έννοιες προς διδασκαλία, καθώς οι παρανοήσεις των μαθητών εξελίσσονται σε πολλαπλά επίπεδα. Σε έρευνες στις οποίες διδάχτηκαν κλάσματα με τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων φάνηκαν θετικές επιδράσεις στις υπολογιστικές ικανότητες των μαθητών (Cramer, Post, & delMas, 2002). Άρα οι οπτικές αναπαραστάσεις είναι ικανές να συνεισφέρουν τα μέγιστα στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, αλλά και των διαδικασιών, που διέπουν τη διδασκαλία στην τάξη. Μια χρήσιμη αναπαράσταση είναι η αριθμογραμμή, η χρήση της οποίας έχει υποστηριχθεί από πολλούς ερευνητές (Wu, 2011., Siegler, Thompson, & Schneider, 2011) πως συνεισφέρει πολύ θετικά στην κατανόηση του μεγέθους και διαχείριση των κλασμάτων.

Ένα κρίσιμο ζήτημα εδώ, είναι το κατά πόσο οι αναπαραστάσεις και η διαφοροποιημένη διδασκαλία ενός πολυδιάστατου και δύσκολου μαθησιακού αντικειμένου όπως τα κλάσματα, μπορεί να επιφέρουν αλλαγή στις προηγούμενες λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών αλλά και το αν οι εκπαιδευτικοί είναι σε θέση να το επιτύχουν.

### 1.4 Αριθμογραμμή ως διδακτικό εργαλείο

Σε πολλές από τις υπάρχουσες έρευνες για την διδασκαλία των κλασμάτων γίνεται λόγος για αλληλεπίδραση του μαθητή με τα κλάσματα με σκοπό την κατανόηση των εννοιών γύρων από αυτά. Παρόλα αυτά στην εκπαιδευτική πράξη, είναι γνωστό πως οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί προσκολλώνται στο σχήμα του κλάσματος ως μέρος-όλο, με άμεσο αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η σωστή εννοιολογική κατανόηση. Η επικέντρωση προς το συγκεκριμένο σχήμα (Baturo, 2004; Charalambous, & Pitta-Pantazi, 2007; Misquitta, 2011) δημιουργεί μια περιορισμένη αντίληψη για τα κλάσματα η οποία στη συνέχεια γίνεται εμπόδιο για τη δημιουργία αφηρημένης σκέψης για αυτά. Για παράδειγμα, η κατανόηση των καταχρηστικών κλασμάτων αλλά και η ιδιότητα των κλασμάτων ως συνεχείς ποσότητες οι οποίες μπορούν να διαχωρίζονται επ’ άπειρον (Vamvakoussi, & Vosniadou, 2007), αποτελούν πεδίο δυσκολιών και παρανοήσεων με την προαναφερθείσα προσκόλληση. Η αφηρημένη συνεπώς, κατανόηση των κλασμάτων σε μεγάλο βαθμό συντελείται από την αναγνώριση ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί και μπορούν να τοποθετηθούν επάνω σε μια αριθμητική γραμμή (Λεμονίδης, 2016).

Οι Fazio & Siegler (2011) υπογραμμίζουν τη σημασία της αναπαράστασης των ιδεών, επισημαίνοντας τη θετική συσχέτιση μεταξύ της κατανόησης και της εκμάθησης των υπολογιστικών διαδικασιών. Όπως αναφέρουν επίσης οι ίδιοι, τοποθετώντας κλάσματα σε μια αριθμογραμμή, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συγκρίνουν τα μεγέθη τους, καθώς και να εντοπίσουν κάποια κλάσματα που είναι ισοδύναμα, όπως 3/4 και 6/8. Επιπρόσθετα, στην αριθμογραμμή αναπαρίστανται και οι ακέραιοι αριθμοί π.χ. 6/3, έτσι οι μαθητές κατανοούν ότι οι ακέραιοι μπορούν να γραφούν και ως κλάσματα. Μπορεί επίσης, να συγκριθούν δύο κλάσματα με διαφορετικούς παρονομαστές π.χ. 2⁄3 και 3⁄5, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές αριθμογραμμές. Ακόμη, μπορεί να επεκταθεί η αντίληψη των μαθητών στα αρνητικά κλάσματα, στα καταχρηστικά κλάσματα καθώς και στους δεκαδικούς αριθμούς και τα ποσοστά. Τοποθετώντας στην ίδια αριθμογραμμή κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά αναπτύσσεται η ευελιξία των μαθητών στην χρήση διαφορετικών συμβολικών αναπαραστάσεων για τους ρητούς αριθμούς (Λεμονίδης, 2016).

Οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν συνεπώς να κάνουν την διαφορά στην διδασκαλία αφηρημένων εννοιών και θεμάτων, ειδικά σε ένα πεδίο όπως τα Μαθηματικά. Υποστηρίζεται μάλιστα, πως η αναπαράσταση και η χρήση της αριθμογραμμής είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για να αντιληφθούν οι μαθητές τα κλάσματα ως αριθμούς. Όπως αναφέρουν οι Siegler, Thompson, & Schneider, (2011, οπ. αναφ. Riconscente, 2012) «*το να κατανοείς τα κλάσματα ως αφηρημένη έννοια σημαίνει να αναγνωρίζεις πως είναι αριθμοί και μπορούν να τοποθετηθούν στην αριθμογραμμή*». Παράλληλα, ο Wu (2008) υποστηρίζει πως «*η χρήση της αριθμογραμμής έχει το άμεσο πλεονέκτημα ότι προσδίδει συνοχή στη μελέτη των αριθμών στα μαθηματικά του σχολείου*». Σύμφωνα με τον ίδιο οι κλασματικές μονάδες αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία των κλασμάτων, με τον ίδιο τρόπο που ο αριθμός 1 αποτελεί τη βάση για όλους τους ακέραιους αριθμούς. Έτσι, το μοντέλο της αριθμογραμμής είναι ιδανικό για την αναπαράσταση των κλασμάτων, καθώς σε αυτήν είναι ευκολότερο να διαιρέσει κανείς το όλο σε ίσα τμήματα, λαμβάνοντας υπόψη μόνο το μήκος της. Έτσι, οι προσθέσεις και αφαιρέσεις των κλασμάτων γίνονται ευκολότερα αντιληπτές ενώ παύουν πλέον να είναι αφηρημένες. Φυσικά όπως προαναφέρθηκε η εξοικείωση με τον τρόπο λειτουργίας της αριθμογραμμής είναι ύψιστης σημασίας και οφείλει να αποτελεί αντικείμενο άμεσης διδασκαλίας, ώστε να αμβλυνθούν τυχόν δυσκολίες.

Η αριθμογραμμή ως μέσο αναπαράστασης παρέχει πολλές δυνατότητες στον εκπαιδευτικό να παρουσιάσει οπτικά πολλές αφηρημένες έννοιες της φύσης των ρητών. Για παράδειγμα, μια αριθμογραμμή μπορεί να χωρίζεται με δύο ή περισσότερους διαφορετικούς τρόπους, πάνω και κάτω από τη γραμμή, ώστε να καθίσταται δυνατή η σύγκριση των μεγεθών, μπορεί να είναι χρήσιμη για την αποσαφήνιση της έννοιας της πυκνότητας των κλασμάτων, μιας και ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των κλασμάτων είναι ότι υπάρχουν άπειρα κλάσματα μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κλασμάτων, ενώ θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια ένδειξη της συμβολής πολλών υποεννοιών ταυτόχρονα (Hannula, 2003). Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2016), η αριθμογραμμή είναι ένα πολύ καλό αναπαραστατικό μέσο για να δείξει:

- την ανάλυση ή δημιουργία του κλάσματος π.χ. του 3⁄4 από τις κλασματικές μονάδες (τρεις φορές το 1⁄4),
- την πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων,
- την αναγκαιότητα μετατροπής των ετερωνύμων κλασμάτων σε ομώνυμα για την πρόσθεση και την αφαίρεση,
- τον πολλαπλασιασμό κλάσματος με ακέραιο αριθμό.

Η αριθμογραμμή αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο προκειμένου οι μαθητές να κατασκευάσουν, να χωρίσουν, να ενώσουν, να συγκρίνουν ή να κάνουν πράξεις με αριθμούς και κλάσματα. Όμως, δεν θα μπορέσει να χρησιμοποιηθεί εποικοδομητικά από τους μαθητές, αν πρώτα δεν έχουν κατανοήσει τις βασικές λειτουργίες της (Saxe, Diakow & Gearhart, 2013). Βασικές ιδέες των αναπαραστάσεων σε μια αριθμογραμμή είναι η ακόλουθες:

- Η σειρά, το διάστημα και το μηδέν ως σημείο αναφοράς. Η σειρά αυξάνεται όσο κινούμαστε προς τα δεξιά, και μειώνεται προς τα αριστερά. Η αξία του αριθμού δηλώνεται από την απόσταση που έχει αυτός, πάνω στην αριθμογραμμή, από το μηδέν.
- Η ισότητα των αριθμητικών μεγεθών γίνεται αντιληπτή από το γεγονός ότι τα μεγέθη αυτά αναπαρίστανται στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής.

- Η έννοια του μοναδιαίου διαστήματος περιλαμβάνει τις έννοιες των διαστημάτων πολλαπλών μονάδων και των διαστημάτων υπομονάδων. Συγκεκριμένα, το διάστημα της υπομονάδας είναι η διαίρεση του μοναδιαίου διαστήματος σε τμήματα ίσου μήκους, ενώ λειτουργεί σαν βάση για τον ορισμό του παρονομαστή και του αριθμητή σε ένα κλάσμα.

Παρουσιάζοντας τις αριθμογραμμές είναι σημαντικό να υπάρχει μια διαβάθμιση στις δραστηριότητες. Στόχος είναι να μπορέσουν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την αριθμογραμμή ως σκαλωσιά για την κατανόηση των κλασμάτων και όχι να αποτελεί η ίδια τροχοπέδη. Κατά συνέπεια, οι αριθμογραμμές μπορούν αρχικά να είναι προσημειωμένες και σε δυσκολότερα επίπεδα ο χωρισμός τους να απαιτείται από τους μαθητές. Η σύγκριση των κλασμάτων με διαφορετικούς παρονομαστές μπορεί να γίνει ευκολότερη αν η αριθμογραμμή χωριστεί με διαφορετικούς τρόπούς ή ακόμα καλύτερα αν υπάρξουν δύο ίδιες αριθμογραμμές χωρισμένες με διαφορετικό τρόπο. Ποια θα ήταν άραγε η επίδραση των αριθμογραμμών αν οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να τις προσαρμόζουν μόνοι τους άμεσα σε ένα εικονικό περιβάλλον; Τέλος, η αριθμογραμμή μπορεί να καταστεί χρήσιμη για έννοιες δύσκολές και αρκετά περίπλοκες για τους μαθητές, όπως για παράδειγμα η έννοια της πυκνότητας των κλασμάτων που έρχεται σε αντιδιαστολή με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών, οι οποίες όπως αναφέρθηκε, βασίζονται αποκλειστικά στους ακέραιους. Παρόλο που αυτή η έννοια είναι δύσκολη για τους μαθητές, μπορεί να αναπαρασταθεί αποτελεσματικά πάνω σε μια αριθμογραμμή.

Συμπερασματικά, η αριθμογραμμή αποτελεί μία από τις αποτελεσματικότερες και σημαντικότερες εξωτερικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων. Η ικανότητα να τοποθετεί κανείς ένα κλάσμα πάνω σε μια αριθμογραμμή, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια ένδειξη της συμβολής πολλών σχημάτων ταυτόχρονα (Hannula, 2003) και όχι μονάχα του σχήματος μέρος-όλο. Ως μοντέλο αναπαράστασης διαφέρει από τα άλλα μοντέλα -του συνόλου και του εμβαδού- σε τρία βασικά χαρακτηριστικά (Λεμονίδης, 2016): α) η μονάδα αναπαρίσταται από ένα μήκος, υποδηλώνοντας όχι μόνο επανάληψη της μονάδας αλλά επίσης ταυτόχρονες υποδιαιρέσεις των επαναλαμβανόμενων μονάδων, β) στην αριθμογραμμή για τον προσδιορισμό της μονάδας απαιτούνται σύμβολα, ενώ στο μοντέλο του εμβαδού και του συνόλου η μονάδα είναι υπονοούμενη στο μοντέλο και, γ) στην αριθμογραμμή δεν υπάρχουν οπτικά διακριτοί διαχωρισμοί μεταξύ των διαδοχικών μονάδων, δηλαδή οι μονάδες είναι συνεχείς σε αντίθεση με τα μοντέλα του εμβαδού και του συνόλου στα οποία οι μονάδες είναι φυσικά διαχωρισμένες. Εάν το μοντέλο αυτό χρησιμοποιηθεί με τρόπο που να αναδεικνύει την ξεχωριστή φύση των ρητών και ενισχύει τις νέες γνώσει για αυτούς, τότε είναι καλό να αποτελέσει και το βασικό μέσο διδασκαλίας.

### 1.4.1 Νοερή αριθμογραμμή

Ο όρος νοερή αριθμογραμμή ή εσωτερική αριθμογραμμή, αναφέρεται σε μία, ανεξαρτήτου γλώσσας, χωρική, αναλογική και σε αύξουσα σειρά αναπαράσταση αριθμητικών μεγεθών, όπου μικροί αριθμοί αντιστοιχούν στα αριστερά ενώ μεγαλύτεροι στα δεξιά (Schneider, Grabner & Paetsch, 2009). Παρατηρήθηκε ότι ακόμα και η στροφή του βλέμματος σε έναν αριθμό, μπορεί να προκαλέσει χωρικές μετατοπίσεις της προσοχής, ενώ η χωρική κατεύθυνση των ματιών ή οι κινήσεις του κεφαλιού, συχνά προβλέπουν τα μεγέθη των αριθμών που αναπαράγονται σε τυχαία σειρά, στα πλαίσια κάποιας δραστηριότητας.

Η συσχέτιση των αριθμών με το χώρο είναι αυτοματοποιημένη και αμφίδρομη διαδικασία που λαμβάνει χώρα από τις πολύ μικρές ηλικίες Η χωρική αναπαράσταση των αριθμών, η οποία παρουσιάζεται ως νοερή αριθμογραμμή, είναι μια κυρίαρχη αναπαράσταση που καθορίζει με την σειρά της και την επιτυχή επεξεργασία των αριθμών. Την καλλιέργεια της νοερής αριθμογραμμής, συνοδεύουν και άλλες αναπαραστάσεις, όπως η αναπαράσταση της αξίας θέσης, ή οι διάφορες στρατηγικές αναλογίας κατά την τοποθέτηση αριθμών στο χώρο (Moeller, Fischer, Nuerk & Cress, 2015). Σύμφωνα με τους Schneider, Grabner & Paetsch, (2009), αν καλλιεργηθούν τέτοιου είδους αναπαραστάσεις και στρατηγικές, γίνεται δυνατή και η μετέπειτα εξέλιξη των αυτοματοποιημένων μηχανισμών, οι οποίοι, δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίζονται άμεσα ερωτήματα αριθμητικών συγκρίσεων και εκτιμήσεων, χωρίς ιδιαίτερη ανάλυση και σκέψη σχετικά με τον τρόπο επίλυσης τέτοιων ερωτημάτων.

Με την δημιουργία δεσμών μεταξύ της αριθμογραμμής και άλλων λεκτικών και οπτικών αναπαραστάσεων των αριθμητικών συμβόλων, αναδύονται υψηλότερου επιπέδου πολιτισμικές εξελίξεις στον τομέα της αριθμητικής (Dehaene, 2001). Ασφαλώς, προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης τέτοιου είδους αναπαραστάσεων μπορεί να συνεισφέρει η αξιοποίηση της τεχνολογίας. Αν δε, προστεθούν στα τεχνολογικά μέσα χαρακτηριστικά ενσώματης μάθησης, όπου οι μαθητές με κινήσεις των χεριών ή ολόκληρου του σώματος προς τα δεξιά ή αριστερά, αυξάνουν ή μειώνουν αντίστοιχα, το ζητούμενο αριθμό, θα μπορέσουν να αναδυθούν υψηλότερου επιπέδου εξελίξεις στην αντίληψη των αριθμών.

### 1.4.2 Δυσκολίες στην χρήση αριθμογραμμής

Έρευνες στην γνωστική ψυχολογία και τη διδακτική των μαθηματικών έδειξαν επανειλημμένα ότι τα παιδιά αλλά και οι ενήλικες δυσκολεύονται να κατανοήσουν διάφορες πλευρές των ρητών αριθμών (Lemonidis, Kaiafa, 2014; Stafylidou, & Vosniadou, 2004; Vamakoussi, & Vosniadou, 2010). Πολλές έρευνες επίσης, δείχνουν ότι οι μαθητές συναντούν αρκετές δυσκολίες κατά την εισαγωγή της αριθμητικής γραμμής στα κλάσματα και την χρήση της ως ένα οπτικό μοντέλο (Bright, Behr, Post, & Wachsmuth, 1988., Hannula, 2003., Mitchell, & Horne, 2008., Petit, Laird, Marsden, & Ebby, 2010., Saxe et al. 2007).

Οι Bright et al. (1988) υποστηρίζουν ότι μια ερμηνεία αυτής της δυσκολίας με την αριθμογραμμή είναι σχετική με τα χαρακτηριστικά της ως μοντέλο. Το μοντέλο της αριθμογραμμής αποτελείται από πληροφορίες εικόνας που συνοδεύονται από σύμβολα και υπάρχει δυσκολία στη σύνδεση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτούς τους δύο τύπους αναπαράστασης. Έτσι οι συγγραφείς αυτοί (οπ. αναφ. Λεμονίδης, 2016) καταλήγουν στην υπόθεση ότι «*η ανάγκη του συντονισμού των συμβολικών και εικονικών πληροφοριών με το μοντέλο της αριθμογραμμής θέτει δυσκολία στην αντιστοίχιση των ονομάτων των κλασμάτων με τις αναπαραστάσεις της αριθμογραμμής*».

Όταν οι μαθητές αλληλεπιδρούν για πρώτη φορά με την αριθμογραμμή συχνά λειτουργούν με τη λογική των ακεραίων και τοποθετούν τα κλάσματα επάνω στην αριθμογραμμή με τη σειρά του μεγέθους του αριθμητή ή του παρονομαστή τους (Petit, Laird, Marsden, & Ebby, 2010). Στις πρώτες τρεις τάξεις μετατοπίζονται από τις στρατηγικές της διαδοχής στις στρατηγικές της αναλογίας για την τοποθέτηση των αριθμών επάνω στην αριθμογραμμή (Pettito, 1990). Ένα άλλο συχνό λάθος όταν υπάρχουν πολλές μονάδες, είναι ότι παίρνουν το κλασματικό μέρος ολόκληρης της αριθμογραμμής και όχι του μοναδιαίου μέρους (Clarke, Roche, & Mitchell, 2007). Την ίδια δυσκολία τόνισε και ο Novillis- Larson (1980, όπ, αναφ, Hannula, 2003), ο οποίος έδωσε σε μαθητές δραστηριότητες όπου έπρεπε να τοποθετήσουν κλάσματα πάνω σε μια αριθμογραμμή, η οποία αποτελούνταν από 2 μονάδες. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών χρησιμοποίησε όλη τη αριθμογραμμή ως μονάδα αναφοράς. Επιπλέον, είναι πιθανό αντί οι μαθητές να μετρούν τα διαστήματα που υπάρχουν από το μηδέν μέχρι το σημείο του κλάσματος, να μετρούν τις κάθετες μικρές γραμμούλες της βαθμολόγησης της αριθμογραμμής (Pearn & Stephens, 2007). Ακόμα, δυσκολίες μπορεί να συναντηθούν όταν τα παιδιά καλούνται να τοποθετήσουν κλάσματα τα οποία έχουν πολλαπλάσιους συντελεστές (δηλαδή είναι ισοδύναμα) σε σχέση με τη βαθμολόγηση της ευθείας (Hannula, 2003., Petit, Laird, Marsden, & Ebby, 2010) αλλά και στη περίπτωση όπου η βαθμολόγηση της ευθείας είναι ημιτελής (Saxe et al., 2007).

# Κεφάλαιο 2. Ενσώματη μάθηση

Οι σύγχρονες θεωρίες μάθησης υποστηρίζουν πως η διαδικασία μάθησης αποτελεί μια ενεργητική και κατασκευαστική διαδικασία, η οποία υλοποιείται με τη βοήθεια ιδιαίτερων εργαλείων και δραστηριοτήτων. Όσον αφορά στα μαθηματικά, ο ρόλος του δασκάλου είναι να δημιουργήσει τα κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα με τη βοήθεια ή μη της τεχνολογίας, καθώς κάθε μαθητής θα εκφράζεται, θα ενεργοποιείται και θα κατασκευάζει μόνος του τη νέα γνώση. Ο Dewey (1992) στην προσπάθεια του να ερμηνεύσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατακτούν τη γνώση, έθεσε την προσωπική εμπειρία του καθενός στο επίκεντρο. Για να επιτευχθεί λοιπόν η κατάκτηση της γνώσης ο εκπαιδευτικός και γενικότερα το εκπαιδευτικό σύστημα οφείλει να εμπλέξει τους μαθητές σε ουσιαστικές μαθησιακές εμπειρίες. Η διαδικασία η οποία βασίζει τη μάθηση στην ενεργητική δραστηριότητα ενέχει χαρακτηριστικά του κονστρουκτιβισμού, καθώς δίνει σου μαθητές ευκαιρίες για «μάθηση μέσω πράξης». Ιδιαίτερα σημαντικό είναι οι παρεχόμενες δραστηριότητες να έχουν αυξανόμενη σειρά δυσκολίας, ώστε να γίνονται αντιληπτές όπως η σκαλωσιά μάθησης που αναφέρει ο Vygotsky. Άμεσο αποτέλεσμα μια τέτοιας μορφής διδασκαλίας είναι η αλλαγή στην ισορροπία των δυνάμεων μεταξύ δασκάλου και μαθητή. Η επικοινωνιακή διάσταση των νέων τεχνολογιών έχει σαν αποτέλεσμα την υπονόμευση της εξουσίας του εκπαιδευτικού και τη δημιουργία πολλαπλών υποκειμενικοτήτων (Lauzon, 1999, σε Macdonald & Twining, 2002).

## 2.1 Ενσώματη μάθηση (Embodied cognition)

Όταν ασχολούμαστε με μια πρακτική, εφαρμόζουμε συγκεκριμένους τρόπους να εξετάσουμε τις καταστάσεις (Goodwin, 1994) και να αφομοιώσουμε τις νέες γνώσεις. Τις τελευταίες δεκαετίες συναντάται μια συλλογική επανεκτίμηση όσων γνωρίζουμε για την ανθρώπινη γνωστική αρχιτεκτονική (Núñez & Freeman, 1999). Οι μεταφορές του νου, ως κεντρική μονάδα επεξεργασίας, έχουν εξαφανιστεί, δημιουργώντας χώρο για εναλλακτικές επιστημολογικές αντιλήψεις (Kiverstein, 2012). Μια ενδιαφέρουσα σειρά προτάσεων, αναφερόμενη ως θεωρία ενσωμάτωσης, θεωρεί τις απόψεις του νου ως προεκτάσεις από το κεφάλι και μέσα από το σώμα, προς την φυσική και κοινωνικοπολιτισμική οικολογία (Anderson, 2003, Wilson, 2002, Yanchar, Spackman & Faulconer, 2013). Με αυτές τις απόψεις, οι οποίες μπορεί να ποικίλουν ευρέως στις δεσμεύσεις και τις λεπτομέρειες, το μυαλό και το σώμα δεν είναι ξεχωριστές οντότητες αλλά σχηματίζουν μια αμείωτη οντολογία, όπου η αισθητικοκινητική δραστηριότητα είναι εγγενής στη μάθηση, τη γνώση και τη συλλογιστική. Επιπλέον, ορισμένοι συγγραφείς προωθούν την προοπτική ότι η ανθρώπινη συμπεριφορά στις κοινωνικές οικολογίες μοντελοποιείται καλύτερα μέσα από μια συστηματική προοπτική που περιλαμβάνει πολλούς ανθρώπους που αλληλεπιδρούν σε σύνθετες δομές που ρυθμίζονται από πολιτισμικές μορφές οι οποίες εξελίσσονται συνεχώς (Malafouris, 2013, Melser, 2004).

Η θεωρία της ενσωμάτωσης απέρριψε θεμελιώδεις αρχές του καρτεσιανού δυϊσμού, την κυρίαρχη ιστορική επιστημολογία. Σύμφωνα με την Καρτεσιανή άποψη, το ενισχυμένο σώμα είναι ένας αγωγός εισόδου / εξόδου για τον εγκέφαλο, καθώς οι φυσικές ενέργειες εκτελούν εγκεφαλικές εντολές, ενώ οι αντιληπτικές ικανότητες καθοδηγούν και παρακολουθούν αυτές τις ενέργειες, συλλέγοντας πληροφορίες για τα αποτελέσματα των δράσεων. Ο καρτεσιανός μηχανισμός φέρει έξυπνη επεξηγηματική έκκληση, η οποία μπορεί να εξηγήσει την ιστορική ανθεκτικότητα του, και παρόλα αυτά το μοντέλο έχει αμφισβητηθεί όλο και περισσότερο από διάφορα πεδία υποτροφιών (Abrahamson & Bakker, 2016). Έτσι, με το πέρασμα των χρόνων η σωματική κίνηση κατέκτησε όλο και μεγαλύτερη αξία στο τομέα της εκπαίδευσης και την μάθησης. Η σωματική κίνηση δεν θεωρείται πια ο εκτελεστικός βραχίονας μιας αφηρημένης νοημοσύνης αλλά, αντίθετα, η κίνηση θεωρείται ως μια δυναμική γνώση, η οποία σηματοδοτεί μια προσαρμοστική, αυτο-οργανωτική, στοχοκατευθυνόμενη και συστηματική νοημοσύνη που αναπτύσσεται (Kelso, 2000, σε Abrahamson & Bakker, 2016). Η στροφή προς της ενσώματη μάθηση των γνωστικών επιστημών απέκτησε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους εκπαιδευτικούς ερευνητές, όπως φαίνεται στη βιβλιογραφία, που επιδιώκει να κατανοήσει τις επιπτώσεις αυτής της φιλοσοφικής στροφής στην παιδαγωγική θεωρία και πρακτική (Begg, 1999, Hall & Nemirovsky, 2012; Hutto, Kirchhoff, & Abrahamson, 2015). Η ενσώματη μάθηση θεωρήθηκε βασικός παράγοντας μάθησης και για τις περισσότερες επιστήμες, οι εξωτερικές εκδηλώσεις φυσικών κινήσεων, είναι σημάδια εκδήλωσης της μάθησης αυτής. Ωστόσο, οι κινήσεις κατά τη διάρκεια της Μαθηματικής δραστηριότητας μπορεί να είναι φανταστικές.

Σε πολλούς τομείς, ιδιαίτερα στην επιστήμη, την τεχνολογία, τη μηχανική και τα μαθηματικά (STEM), οι γνώσεις είναι δυσκολότερο να επιτευχθούν καθώς εισάγουν αναλυτικές προοπτικές που απομακρύνονται από τους νατουραλιστικούς τρόπους ύπαρξης στον κόσμο (Bamberger & diSessa, 2003) ενώ παράλληλα αποτελούνται συνήθως από αφηρημένες έννοιες. Οι Abrahamson & Lindgren (2015), υποστηρίζουν πως η ενσώματη μάθηση μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν περιβάλλοντα μάθησης που οδηγούν τους μαθητές σε πειθαρχικές προοπτικές που απαιτούνται για την εκμάθηση κυρίως των φυσικών επιστημών, ώστε οι αφηρημένες έννοιες να αποκτήσουν νόημα. Ο όρος «ενσώματος σχεδιασμός» εισάχθηκε από τον Abrahamson (2009) στο χώρο των επιστημών μάθησης, για να περιγράψει την τέχνη της δημιουργίας παιδαγωγικών έργων και δραστηριοτήτων προσαρμοσμένων στον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται τον κόσμο και τον επανεξετάζει. Σε ένα περιβάλλον σχεδιασμένο με ενσώματες αρχές σχεδιασμού, οι μαθητές θα μπορούν να προσεγγίσουν ένα πρόβλημα στη χημεία, τη βιολογία, τη φυσική, την επιστήμη των υλικών ή τα μαθηματικά χρησιμοποιώντας το σώμα και κινήσεις τους, με αποτέλεσμα η μάθηση να γίνει βιωματική και ισχυρή. Οι Abrahamson & Lindgren (2015), έκαναν μια προσπάθεια να αποτυπώσουν τις βασικές αρχές για την δημιουργία μια ενσώματης σχεδίασης, οι οποίες βασίζονται στους εξής πυλώνες:

- ✓ <u>Δραστηριότητες:</u> Για να είναι αποτελεσματικές οι δραστηριότητες οφείλουν να αντλούν δεδομένα από την προϋπάρχουσα ικανότητα των μαθητών να προσανατολίζονται και να κινητοποιούνται σε πραγματικό ή εικονικό περιβάλλον. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να απαιτούν την χρήση των αντιληπτικών αισθήσεων και του συντονισμού των κινήσεων των μαθητών κατά την εκτέλεση νέων ενεργειών. Ιδιαιτέρα σημαντική είναι η διαβάθμιση της δυσκολίας, καθώς οι αρχικές δραστηριότητες πρέπει να είναι φαινομενικά απλές και οι πιο σύνθετοι στόχοι να εμφανίζονται με την πάροδο του χρόνου.
- ✓ <u>Υλικά:</u> Το περιβάλλον στο οποίο λαμβάνουν χώρα οι δραστηριότητες οφείλει να είναι καλά οργανωμένο και να περιλαμβάνει ενημερωτικά μέσα και παράγοντες διευκόλυνσης, ώστε οι μαθητές να βρίσκουν σκοπό και νόημα σε αυτό. Το μαθησιακό περιβάλλον πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε οι σωματικές ενέργειες - που κυμαίνονται από την κίνηση ενός μόνο δακτύλου μέχρι το άλμα ολόκληρου του σώματος - να συσχετίζονται με κάποια ανατροφοδότηση για την συνέχεια. Στην περίπτωση των υπολογιστικών περιβαλλόντων, όπως η επαυξημένη πραγματικότητα, οι δράσεις επάνω στις διεπαφές θα πρέπει να εισαχθούν σταδιακά καθώς οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν βαθμιαία νέες αντιληπτικές ικανότητες

που θα τους επιτρέπουν να ελέγξουν αποτελεσματικά τα αντικείμενα που λειτουργούν με πιο εξελιγμένο στόχο.

- ✓ Διευκολύνσεις: Τα μοτίβα κίνησης και εμπλοκής του σώματος που διευκολύνουν την εννοιολογική ανάπτυξη δεν πρέπει να εμφανίζονται πάντα από μόνα τους. Οι μαθητές χρειάζονται συχνά καθοδήγηση για να αναλάβουν δράση και να μετακινηθούν, γι' αυτό οφείλουν να εφαρμοστούν φυσικές προσεγγίσεις και ανατροφοδότηση σε πραγματικό χρόνο για να ενισχυθούν αυτές οι μετακινήσεις ώστε να προκληθούν τα είδη κίνησης που οδηγούν σε επιθυμητές εννοιολογικές γνώσεις.

Αν ο ενσώματος σχεδιασμός γίνει με τις παραπάνω αρχές και παράλληλα ζητηθεί στους μαθητές να διατυπώσουν τις στρατηγικές τους για την αλληλεπίδραση με τα υλικά στο περιβάλλον τότε είναι πολύ πιθανό να επέλθει εννοιολογική αλλαγή. Ένας σημαντικός αριθμός ερευνητών έχουν εμπνευστεί από τη θεωρία της ενσώματης μάθησης για να οραματιστούν καινοτόμες πλατφόρμες, υλικά, δραστηριότητες και τεχνικές διευκόλυνσης που αξιοποιούν τις φυσικές ενέργειες μέσω εκμάθησης (Lee, 2015; Malinverni, Ackermann, & Pares,2016; Manches & O'Malley, 2016). Οι Ayala, Mendívil, Salinas & Rios, (2013), υποστηρίζουν πως οι κινήσεις του σώματος είναι ένας παράγοντας καθοριστικός για την εκμάθηση κυρίως των Μαθηματικών, εφόσον, μάλιστα εμπλέκονται μηχανικές, και εικονικές συσκευές, οι οποίες είναι δυνατόν να επεκτείνουν τη γνώση των μαθητών, να μην αποσπούν την προσοχή τους και να ενισχύουν την εστίαση τους σε δύσκολα θέματα και πρακτικές. Η ενσώματη γνωστική λειτουργία είναι μια επιστημονική θεωρία που βασίζεται στην ιδέα ότι τα άτομα αναπτύσσουν καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου με βάση την ικανότητα τους να δημιουργούν «προσομοιώσεις» της νοητικής τους αντίληψης. Ουσιαστικά, η γνώση τους ενισχύεται όταν μπορούν να αισθανθούν ή να δράσουν, σε αντίθεση με μια απλή παθητική παρακολούθηση μιας προσομοίωσης ή λεκτικής διδασκαλίας. Ως προσομοίωση χαρακτηρίζεται η νευρική εμπειρία της εκτέλεσης ή της παρατήρησης μιας συγκεκριμένης δράσης, με σκοπό οι αισθητήριες προ-κινητικές και κινητικές περιοχές του εγκεφάλου να ενεργοποιούνται κατάλληλα (Allibali & Nathan, 2012).

Όπως ήδη αναφέρθηκε η ενσώματη σχεδίαση ενός διδακτικού πλάνου είναι ικανή να βελτιώσει την μάθηση σε πολλά γνωστικά αντικείμενα. Στην παρούσα εργασία μας αφορά η προσφορά της ενσώματης μάθησης στο τομέα των Μαθηματικών εννοιών και ακόμα πιο συγκεκριμένα των κλασμάτων. Οι ρητοί αριθμοί είναι ένα δύσκολο θέμα προς διαπραγμάτευση και οι ιδιότητες τους (π.χ. σειρά, ισοδυναμία, πυκνότητα) είναι έννοιες αφηρημένες.

## 2.2 Ενσώματη Μάθηση και Μαθηματικά

Ο ενσωματωμένος σχεδιασμός είναι ένα πλαίσιο που επιδιώκει να προωθήσει τη μάθηση δημιουργώντας καταστάσεις στις οποίες οι μαθητές καθοδηγούνται να διαπραγματευτούν σιωπηρούς και πειθαρχικούς τρόπους αντίληψης και δράσης (Abrahamson & Trninic, 2015). Συνεπώς, η πρακτική φύση των ενσωματωμένων μαθησιακών δραστηριοτήτων καθιστά τις σιωπηρές ενέργειες των χρηστών σαφείς και επομένως προσιτές. Στον γνωστικό πεδίο των πεδίο των Μαθηματικών υπάρχει πληθώρα ερευνών γύρω από την δημιουργία και δραστηριοτήτων ή διαδραστικών περιβαλλόντων που βασίζονται στις αρχές της ενσώματης μάθησης. Για παράδειγμα, σε δραστηριότητες με αριθμογραμμές, ο ενσώματος σχεδιασμός πραγματοποιείται με μετακίνηση των μαθητών επάνω σε μια τέτοια ή ακόμα με τη μετακίνηση κάποιου αντικειμένου επάνω της, σε πραγματικό χώρο με την χρήση απτών αντικειμένων.

Όπως τονίστηκε από τις αρχές του ενσώματου σχεδιασμού, η αλληλεπίδραση των μαθητών πρέπει να είναι σωστά οργανωμένη και δομημένη, ειδικά σε ένα πεδίο όπως αυτό των Μαθηματικών. Στο παράδειγμα της αριθμογραμμής, οι μαθητές λαμβάνουν άμεσες οδηγίες για το πώς να μετακινούνται και, στη συνέχεια ασκούν την κατάλληλη μετακίνηση (Abrahamson & Bakker, 2016). Η ύπαρξη άμεσων εντολών φαίνεται λογική, ώστε η μετακίνηση να σχετίζεται με εξειδικευμένη μαθηματική πρακτική, αφού σε όλους σχεδόν τους ανθρώπινους κλάδους και τις τέχνες, οι αρχάριοι μαθητευόμενοι παίρνουν σαφείς οδηγίες για το πώς να χειρίζονται τα αντικείμενα του εμπορίου τους (Ingold, 2000). Όμως πως οι οδηγίες για την κίνηση μπορούν να δουλέψουν στα Μαθηματικά; Πως θα εργαστείς με ένα εργαλείο που δεν βλέπεις; Τα «εργαλεία» των Μαθηματικών είναι οι αναλογίες, οι εξισώσεις ή ακόμα και τα κλάσματα. Πώς να δουλέψεις με αυτά; Πώς να τα δεις; Παρομοίως λοιπόν, με μια σπάτουλα ή ένα τόξο, μια αναλογία ή ένα κλάσμα πρέπει να ληφθούν υπόψη ως υπαρκτές πραγματικότητες. Σε αντίθεση με τα υλικά αντικείμενα, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι προφανείς αναφορές του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος (Bakker & Hoffmann, 2005), αλλά πρέπει να συνυπάρχουν σε διακριτικό χώρο (Nemirovsky et al., 2012). Η νοερή φύση των Μαθηματικών αντικειμένων επιβαρύνει τις διδακτικές πρακτικές, εφόσον απαιτεί μια αρχική κοινή ανταπόκριση – συμφωνία μεταξύ εκπαιδευτικού και εκπαιδευομένου (Flood, Harrer, & Abrahamson, 2016). Αν δεν ληφθούν τα κατάλληλα μέτρα η ενσώματη μάθηση στο Μαθηματικό πεδίο θα αποτελεί περισσότερο δυσκολία παρά διευκόλυνση. Οι μαθητές δεν είναι εφικτό να ανακαλύψουν το πώς να κινηθούν και το τι πρέπει να ανακαλύψουν. Αντίθετα, θα πρέπει να ανακαλύψουν πώς να κινηθούν ανακαλύπτοντας αυτό που επιδιώκουν και αντίστροφα (Abrahamson & Bakker, 2016). Τονίζεται συνεπώς, η αξία της έμμεσης διδασκαλίας σε περιβάλλοντα εκμάθησης ενσώματων αλληλεπιδράσεων. Η έμμεση διδασκαλία παρέχει στους μαθητές το χρόνο, το διάστημα και την άδεια να προσαρμόσουν την εσωτερική τους δυναμική (Kostrubiec, Zanone, Fuchs & Kelso, 2012).

Σύμφωνα με την θεωρία της ενσώματης μάθησης, οι αλληλεπιδράσεις των ανθρώπων με τα φυσικά αντικείμενα, δημιουργούν τις βάσεις και ανοίγουν το δρόμο για την μεταγενέστερη «κατασκευή» μη φυσικών οντοτήτων, που εμπεριέχονται στους τυπικούς μαθηματικούς ορισμούς (Moore-Russo, Ferrara & Edwards, 2014). Σύμφωνα με τους Nemirovsky & Rasmussen (2005) οι κιναισθητικές εμπειρίες μπορούν γεφυρώσουν την γνώση, συγκεντρώνοντας κάποια εμπειρικά αποτελέσματα που έλαβαν οι μαθητές από το χειρισμό των συμβόλων με καταστάσεις στις οποίες έχουν εμπλακεί σωματικά. Η Μαθηματική νόηση είναι βασισμένη στην αντίληψη και τη δράση, και είναι θεμελιωμένη στο φυσικό περιβάλλον, γεγονός που την καθιστά ενσώματη Alibali & Nathan (2012) και επιτρέπει την δημιουργία ενσώματων περιβαλλόντων για την ανάπτυξη της. Οι χειρονομίες αποτελούν και αυτές κομμάτι της της ενσώματης έκφρασης των μαθηματικών ιδεών και μπορούν να θεωρηθούν ως απόδειξη ότι το σώμα εμπλέκεται στην διαδικασία σκέψης (Hostetter & Aliballi, 2008). Όπως υποστηρίζει και ο Goldin-Meadow (2003), όταν οι πληροφορίες μεταφέρονται ταυτόχρονα με τον λόγο και τις χειρονομίες, τότε υπάρχει μια αναντιστοιχία ομιλίας-χειρονομιών. Η αντιστοιχία αυτή είναι πιθανό να υποδηλώνει πως το άτομο βρίσκεται σε μια γνωστική μετάβαση, κι ενώ υπάρχει μια αλλαγή στην αντίληψή του για κάποια ιδέα, αυτή δεν έχει καταφέρει ακόμη να εκφραστεί με την ομιλία, παρά μόνο με τις κινήσεις του σώματος. Αυτό συμβαίνει συχνά στο χώρο των θετικών επιστημών και, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, τα λάθη πολλών μαθητών στα κλάσματα μπορεί να οφείλονται στην δυσκολία έκφρασης των λανθασμένων ιδεών τους. Συνεπώς, οι χειρονομίες και η ενσώματη λειτουργία θα μπορούσε να χρησιμεύσει και ως εργαλείο ανίχνευσης των πιθανών παρερμηνεύσεων μαθηματικών εννοιών. Οι Alibali & Nathan (2012) υποστηρίζουν την ύπαρξη των εξής κατηγοριών χειρονομιών:

α) χειρονομίες υπόδειξης: απεικονίζουν τη θεμελίωση της νόησης στο φυσικό περιβάλλον

β) κινήσεις αναπαράστασης: εκδηλώνουν νοερές προσομοιώσεις της δράσης και αντίληψης

γ) μεταφορικές κινήσεις: απεικονίζουν κάποιες εννοιολογικές μεταφορές με βάση το σώμα

Πολλές από τις εννοιολογικές μεταφορές βασίζονται σε εικονικά σχήματα σχετικά με το χώρο, την κίνηση, τις δυνάμεις και άλλες πτυχές της ανθρώπινης εμπειρίας, ενώ στα πλαίσια των Μαθηματικών, πολλές εννοιολογικές μεταφορές σχετίζονται εγγενώς με το χώρο. Η κίνηση των μαθητών δεξιά και αριστερά, ή η κίνηση των χεριών τους προς αυτές τις κατευθύνσεις, προκειμένου να τοποθετήσουν κλάσματα στην αριθμογραμμή, είναι μια εννοιολογική μεταφορά του μεγέθους των αριθμών στο χώρο. Παράλληλα, η ικανότητα μετακίνησης της ίδιας της αριθμογραμμής κάνει αντιληπτή της έννοια της ως μέτρο ικανό να αλλάξει και να προσαρμοστεί. Έννοιες όπως το μοναδιαίο διάστημα, το ισοδύναμο κλάσμα, το μεγαλύτερο ή το μικρότερο γίνονται αντιληπτές τόσο οπτικά, όσο και κιναισθητικά μέσω της μετακινήσεις του σώματος ή των χεριών με συνέπεια να αποφεύγονται τυχόν παρανοήσεις.

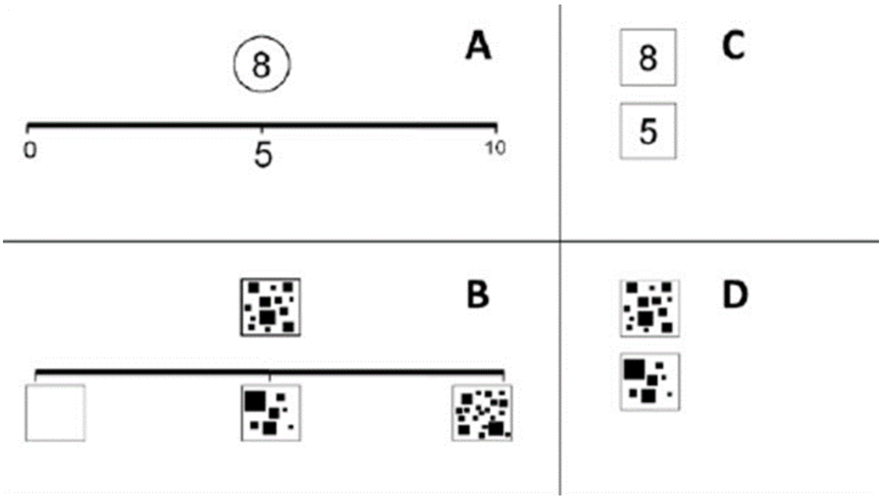
Η ενσώματη μάθηση σταδιακά κατέκτησε περισσότερο έδαφος στην μάθηση, γεγονός που μέχρι πρόσφατα δεν ίσχυε, αφού κυριαρχούσε η αντίληψη ότι το σώμα δεν επηρεάζει τις γνωστικές λειτουργίες του ανθρώπου (Stolz, 2015). Στο πεδίο των Μαθηματικών, τα τελευταία χρόνια οι έρευνες άρχισαν να μελετούν τις σχέσεις μεταξύ της ενσώματης μάθησης, της δράσης, των αντικειμένων και του λόγου στην ανάπτυξη των μαθηματικών, φυσικών ή υπολογιστικών εννοιών. Για παράδειγμα, οι Ruiter, Loyens & Paas (2015), διερεύνησαν εάν οι κινήσεις του σώματος που σχετίζονται με την εργασία αποφέρουν ευεργετικά αποτελέσματα στην εκμάθηση των διψήφιων αριθμών και κατά πόσο αυτά τα μαθησιακά αποτελέσματα επηρεάζονται από την αυτοπαρατήρηση αυτών των κινήσεων μέσω του καθρέφτη. Συνέκριναν ένα δείγμα 118 μαθητών, σε δύο συνθήκες κίνησης έναντι δύο μη κινητικών συνθηκών. Συγκεκριμένα, στις συνθήκες κίνησης, τα παιδιά έλαβαν οδηγίες προφέρουν δυνάτα τους διψήφιους αριθμούς που λαμβάνουν και παράλληλα να τους κατασκευάσουν κάνοντας βήματα διαφορετικού μήκους σε ένα χάρακα (αριθμογραμμή) που βρισκόταν στο πάτωμα. Στην μια από τις δύο κινητικές συνθήκες οι μαθητές παρατηρούσαν τον εαυτό τους στον καθρέφτη. Στις μη κινητικές συνθήκες οι μαθητές εκφωνούσαν και τοποθετούσαν τον διψήφιο σε ένα χάρακα σχεδιασμένο σε ένα χαρτί. Στη δεύτερη κατάσταση ελέγχου, τα παιδιά βρίσκονταν μπροστά από τον χάρακα στο πάτωμα και εφόσον έβλεπαν και ανέλυαν σε βήματα τον διψήφιο, έπρεπε να περπατήσουν στην κατάλληλη θέση του αριθμού επάνω στο χάρακα. Τα αποτελέσματα του τεστ αξιολόγησης που δόθηκε στους μαθητές, επιβεβαίωσαν την υπόθεση ότι οι συνθήκες μετακίνησης οδηγούν σε υψηλότερες επιδόσεις από ότι η μη κινητήρια συνθήκη. Η αυτοπαρατήρηση δεν έπαιξε δραστικό ρόλο. Στην συνέχεια παρουσιάζονται μερικές ακόμα έρευνες σχετικά με την ενίσχυση της μαθηματικής νόησης μέσω την ενσώματης μάθησης.

### 2.2.1 Dance mat

Οι Fischer, Moeller, Bientzle, Cress, & Nuerk (2011), ανέπτυξαν ένα αισθησιο-κινητικό, χωρικό εκπαιδευτικό πρόγραμμα για μαθητές νηπιαγωγείου, στο οποίο η παρουσίαση και η ανταπόκριση συνδέονταν με μια αντίστοιχη χωρική αριθμητική αναπαράσταση. Συγκεκριμένα, οι μαθητές για να ανταποκριθούν στο έργο έπρεπε να πάρουν μέρος σε μια ενσώματη δράση ολόκληρου του σώματος. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν ένα ψηφιακό στρώμα χορού πάνω στο οποίο λάμβαναν χώρα οι σωματικές κινήσεις των παιδιών, οι οποίες με την σειρά ενίσχυαν την αίσθηση του αριθμού επάνω στην αριθμογραμμή. Βασική υπόθεση ήταν πως όσο η ενεργοποίηση του σώματος αυξάνεται, η ακρίβεια στην αναπαράσταση της νοερής αριθμογραμμής θα βελτιωθεί συγκριτικά με ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα σε tablet και πως οι επιδράσεις της ενσώματης εκπαίδευσης θα πρέπει να μεταφερθούν και σε άλλες αριθμητικές εργασίες που δεν αφορούν άμεσα τις χωρο-αριθμητικές σχέσεις.

Έτσι, 19 μαθητές από δύο νηπιαγωγεία εκπαιδεύτηκαν στη σύγκριση αριθμητικών μεγεθών σε μια πειραματική συνθήκη και μια ελέγχου. Και στις δύο συνθήκες, πραγματοποίησαν την ίδια δουλειά με το ίδιο περιεχόμενο. Οι όροι διαφέρουν μόνο ως προς τη μορφή παρουσίασης και απάντησης. Ενώ στην πειραματική κατάσταση, η απάντηση των παιδιών στις δραστηριότητες περιλάμβανε και πρόσθετη παρουσίαση την απάντησης επάνω στο χαλί της αριθμογραμμής, στην συνθήκη ελέγχου η απάντηση αποτυπωνόταν στο tablet χωρίς καμία πρόσθετη εξωτερική κίνηση.

Στην πειραματική συνθήκη, οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν το μέγεθος ενός αριθμού τετραγώνων που τους παρουσιαζόταν, με έναν άλλο που έβλεπαν ταυτόχρονα. Για να δοθεί η απάντηση έπρεπε να κινηθούν κάνοντας ένα βήμα προς τα αριστερά αν ο αριθμός ήταν μικρότερος από αυτόν που παρουσιάζεται στην αριθμογραμμή ή προς τα δεξιά αν ήταν μεγαλύτερος. Στην ομάδα ελέγχου, η απάντηση δινόταν απλά με την επιλογή του μεγαλύτερου αριθμού.



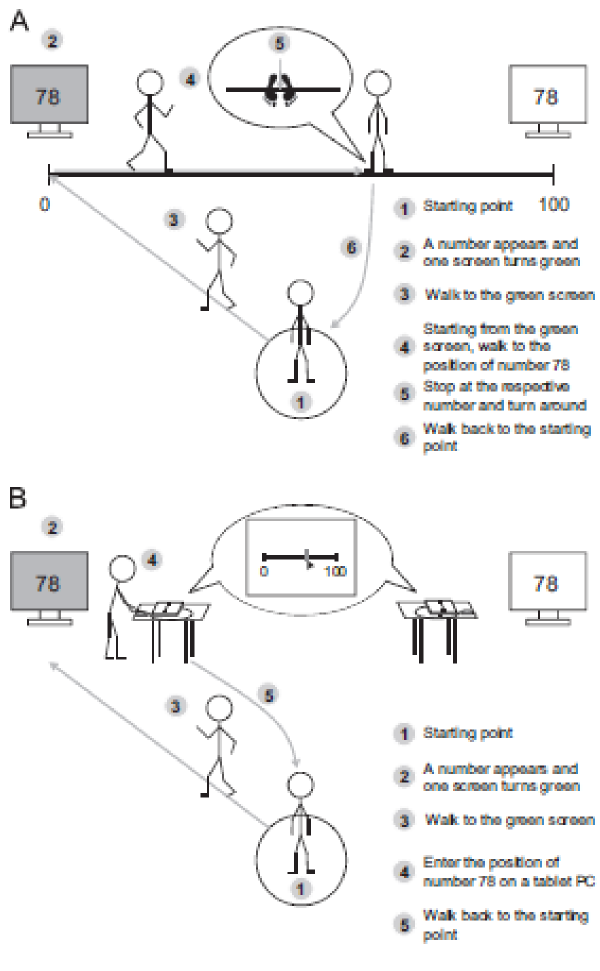

**Εικόνα 1:** Dance mat (Fischer et al., 2011)

Τα αποτελέσματα έδειξαν μεγαλύτερα οφέλη από την ενσώματη εμπειρία της πειραματικής ομάδας σε σύγκριση με την ομάδα ελέγχου στην ακρίβεια τοποθέτησης και εκτίμησης αριθμών στην αριθμογραμμή αλλά και γενικότερη βελτίωση στην αριθμητική.

### 2.2.2 Walk the number line

Οι Link Moeller, Huber, Fischer, & Nuerk (2013), ανέπτυξαν ένα ενσωματωμένο πρόγραμμα παρέμβασης για την αντιμετώπιση της χωρικής αναπαράστασης του μεγέθους των αριθμών. Μαθητές Α’ τάξης εκπαιδεύτηκαν στην τοποθέτηση ενός αριθμού, περπατώντας προς την εκτιμώμενη θέση του επάνω σε μια αριθμογραμμή που βρισκόταν στο πάτωμα. Η παρέμβαση αυτή συγκρίθηκε με μία πανομοιότυπη (Fischer et al., 2011), η οποία δεν περιλάμβανε την κίνηση ολόκληρου του σώματος για να δειχθεί η θέση του συγκεκριμένου αριθμού με το σώμα τους. Υποστηρίχθηκε ότι όταν η κίνηση στον αριθμητικό χώρο περιορίζεται μόνο σε ένα βήμα, (αριστερά ή δεξιά) δεν έχει εξίσου σημαντικά αποτελέσματα.

Στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε η επίδραση της ενσώματης παρέμβασης με ελεύθερη κίνηση στο χώρο. Συγκεκριμένα, σε μια κενή αριθμογραμμή με μοναδικά σημεία το 0 και το 100, οι μαθητές αφού έκαναν εκτίμηση για την θέση του αριθμού, περπατούσαν επάνω σε μια αριθμογραμμή 3 μέτρων και τοποθετούσαν το σώμα τους εκεί που πίστευαν πως θα μπορούσε να είναι ο αριθμός. Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου εκτιμούσαν τη θέση του αριθμού σε μια ηλεκτρονική απεικόνιση μιας αριθμογραμμής, με τη χρήση του ποντικιού.




**Εικόνα 2:** Walk the number line (Link, et. al., 2013)

Οι μαθητές και στις δύο συνθήκες ξεκινούσαν από συγκεκριμένο σημείο. Σε περίπτωση λάθους η ανατροφοδότηση στην πειραματική συνθήκη έβλεπαν την σωστή θέση από μια οθόνη και καλούνταν να περπατούσαν ως εκεί, ενώ στην συνθήκη ελέγχου η απάντηση δίνονταν αυτόματα από το πρόγραμμα. Οι συμμετέχοντες έδειξαν καλύτερα αποτελέσματα κατάρτισης της γνώσης μετά την ενσωματωμένη εκπαίδευση. Οι ικανότητες που αποκτήθηκαν γενικεύθηκαν και σε δεξιότητες μη άμεσα διδαγμένες.

Η συγκεκριμένη παρέμβαση οδήγησε σε βελτίωση της ακρίβειας στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή αλλά και σε βελτίωση σε άλλες αριθμητικές ικανότητες των μαθητών. Με αυτόν τον τρόπο, τα στοιχεία αυτά επιβεβαιώνουν τα ευεργετικά αποτελέσματα της ενσώματης μάθησης για την κατάρτιση των φαινομενικά αφηρημένων γνωστικών αναπαραστάσεων.

### 2.2.3 Gestures

Οι Swart et. al. (2015), ανέπτυξαν το ψηφιακό περιβάλλον Iteration-1 με μια σειρά οτι. Το συγκεκριμένο παιχνίδι εκμάθησης αποτελείται από 5 επίπεδα δυσκολίας αποτελούμενα όλα από κλάσματα. Στο πρώτο μέρος, οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν χειρονομίες για να εκτιμήσουν, να ονομάσουν και να αριθμήσουν τα κλάσματα με το χειρισμό μιας ράβδου, η οποία είναι ένα υβριδικό μοντέλο που συνδυάζει το μοντέλο περιοχής και την κλασσική αριθμογραμμή, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Στο μέρος 2, προσδιορίζουν την ισοδυναμία μεταξύ των κλασμάτων, διατάσσοντάς τα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο κατά μήκος ενός οριζόντιου άξονα, από αριστερά προς τα δεξιά και στη συνέχεια επαληθεύουν το ύψος τους κάθετα από κάτω προς τα πάνω.

**Εικόνα 3:** Μέρος 1 (αριστερά), Μέρος 2 (δεξιά)

Αντιμετωπίζοντας τις χειρονομίες ως προσομοιωμένες ενέργειες, οι ερευνητές συνέκριναν τις δεικτικές χειρονομίες με τις εννοιολογικές (μεταφορικές/συμβολικές). Επιπρόσθετα, μιας και η αφήγηση έχει αποδειχθεί πως δρα επικουρικά στην διατύπωση διδακτικών σεναρίων και στην οικοδόμηση νοητικών μοντέλων, δόθηκαν στους συμμετέχοντες δύο αφηγηματικά έργα: 1) ισχυρό αφήγημα βασισμένο σε παιδική ταινία, εισάγοντας κλασματικές έννοιες και, 2) μη ισχυρό αφήγημα, το οποίο περιείχε τις ίδιες κλασματικές έννοιες χωρίς τους χαρακτήρες της ταινίας.

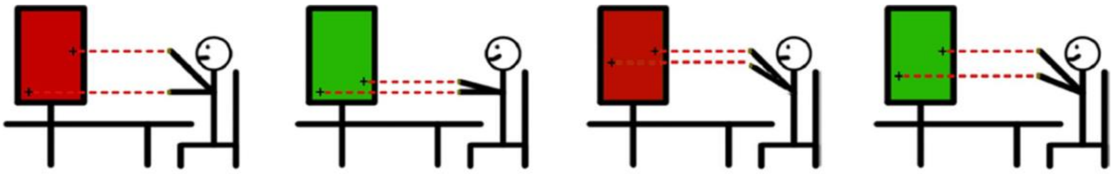

**Εικόνα 4:** Ισχυρό αφήγημα (αριστερά), Μη ισχυρό αφήγημα (δεξιά)

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές Γ’, Δ’ και Ε’ τάξης, στους οποίους ανατέθηκε τυχαία ένα από τέσσερα περιβάλλοντα. Τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα στο γνωστικό τομέα και των τεσσάρων ομάδων, όμως από ημερολόγια που κρατήθηκαν κατά την έρευνα φάνηκε πως οι μαθητές που χρησιμοποιούν εννοιολογικές χειρονομίες ήταν σημαντικά ακριβέστεροι στην εκτίμηση και την ονομασία των κλασμάτων από ό, τι οι μαθητές που χρησιμοποιούν δεικτικές χειρονομίες. Επιπλέον, παρατηρήθηκε πως πολλοί μαθητές χρησιμοποίησαν χειρονομίες των δασκάλων στις εξηγήσεις τους σχετικά με τα κλάσματα.

Η συλλογή δεδομένων από την συγκεκριμένη διεπαφή, γνωστοποιεί τον αντίκτυπο των χειρονομιών στην εκμάθηση των κλασμάτων, καθώς και τον επιβοηθητικό χαρακτήρα τους κατά την εκτίμηση και τοποθέτηση κλασμάτων επάνω στην αριθμογραμμή. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι χειρονομίες αποτελούν μια μορφή ενσώματης μάθησης και αποδεδειγμένα η ενίσχυση τους βελτιώνει την μάθηση.

### 2.2.4 Mathematical Imagery Trainer for Proportion (MIT)

Το Mathematical Imagery Trainer για αναλογίες (MIT-P) είναι ένα παράδειγμα ενός είδος σχεδιασμού που βασίζεται στη δράση για την προώθηση της ενσώματης μάθησης στα Μαθηματικά. Το MIT-P υπολογίζει το ύψος των χεριών του χρήστη από την επιφάνεια. Όταν αυτά τα ύψη σχετίζονται με την άγνωστη για τον χρήστη αναλογία (πχ 1:2), η οθόνη του υπολογιστή είναι πράσινη. Εάν ο χρήστης σηκώνει τότε τα χέρια του μπροστά από την οθόνη με κατάλληλο ρυθμό, η οθόνη θα παραμείνει πράσινη. διαφορετικά, εάν διατηρεί μια σταθερή απόσταση μεταξύ των χεριών της, ενώ τα μετακινεί, η οθόνη θα γίνει κόκκινη, καθώς η αναλογία δεν είναι πια σχετική. Οι συμμετέχοντες καλούνται αρχικά να κάνουν την οθόνη πράσινη και έπειτα να την διατηρήσουν έτσι καθώς κινούν τα χέρια τους (Howison et al., 2011).



a b c d

Αρχικά, η αναλογία είναι 1:2 και δεν δίνεται κανενός είδος ανατροφοδότηση, στην συνέχεια εμφανίζονται σταυροί που αντικατοπτρίζουν» τη θέση των χεριών των συμμετεχόντων. Έπειτα, εμφανίζεται ένα πλέγμα μαζί με τους σταυρούς ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να σχεδιάσουν, να εκτελέσουν και να ερμηνεύσουν τους χειρισμούς τους και έτσι να αρχίσουν να εκφράζουν ποσοτικούς λεκτικούς ισχυρισμούς. Τέλος, με την πάροδο του χρόνου στα αριστερά του πλέγματος εμφανίζονται οι αριθμοί 1,2,3… ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να κατασκευάσουν περισσότερες έννοιες με πιο εύκολη πρόσληψη αριθμητικών γνώσεων και δεξιοτήτων και επιλύσουν αποτελεσματικότερα το πρόβλημα.

Οι Howison et al. (2011), διερεύνησαν την αποτελεσματικότητα της ενσώματης μάθησης που προσφέρεται από το MIT-P και κατέληξαν πως όλοι οι συμμετέχοντες κατάφεραν να σχεδιάσουν, να εκτελέσουν και να διατυπώσουν στρατηγικές για την πράσινη οθόνη. Αυτές οι αυθόρμητες στρατηγικές φέρουν λογικές και γλωσσικές δομές που παρατηρούνται στον μαθηματικό λόγο για τις αναλογίες. Συμπερασματικά ανέφεραν πως ο απομακρυσμένος χειρισμός δεν είναι απλά κυματισμοί των χεριών, αλλά μια ευκαιρία να προβληματιστεί το μυαλό. Υποστήριξαν πως οι ενσωματωμένες αλληλεπιδράσεις μπορούν να οδηγήσουν τόσο στην υλοποίηση όσο και στην επίλυση των γνωστικών συγκρούσεων μεταξύ των σιωπηρών υποθέσεων των χρηστών και των παρατηρήσιμων συμπερασμάτων τους, ενώ με προσεκτική καθοδήγηση, αυτές οι εμπειρίες μπορούν να αναδιαμορφωθούν από την άποψη των αναδυόμενων μαθηματικών αρχών.

Οι Abrahamson & Trninic (2015), εμπνευσμένοι από την φιλοσοφία ενεργοποίησης αναρωτήθηκαν ποια θεωρίας ενσώματης μάθησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί καλύτερα στο πεδίο των μαθηματικών γνώσεων και ποια η αξία της θεωρίας αυτής. Στο βωμό αυτό, χρησιμοποίησαν το MIT-P ώστε να διερευνήσουν τα ερωτήματα τους. Οι ερευνητές υποστήριξαν πως η ενσώματη δράση και συμμετοχή μπορεί να ρίξει φως στις αναδυόμενες εννοιολογικές κατανοήσεις των μαθητών. Τα συμπεράσματα τους υποστήριξαν την ύπαρξη ακαδημαϊκών βελτιώσεων μέσω της ενσώματης μάθησης. Φυσικά διατύπωσαν και επιφυλάξεις, καθώς συνάντησαν παραδείγματα ομαλής αλλά και απότομης μετατροπής των νοητικών σχημάτων των μαθητών. Ιδιαίτερη αξία δίνεται στο ρόλο της συνειδητής ερμηνείας των μεταβάσεων σε νέες κινήσεις. Συνεπώς, η ενσώματη μάθηση ναι μεν υποστηρίζεται, εφίσταται όμως η προσοχή στις αλλαγές που οι εκπαιδευόμενοι ενσωματώνουν στα νοητικά τους σχήματα όταν αλληλεπιδρούν με δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων που απαιτούν χειρονακτικό συντονισμό.

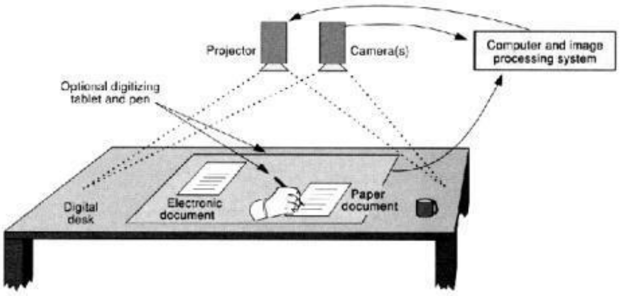
# Κεφάλαιο 3. Απτές διεπαφές

## 3.1 Συστήματα απτών διεπαφών – επαυξημένη πραγματικότητα

Τα τελευταία χρόνια, νέες τεχνολογίες μάθησης αναδύονται στη διασταύρωση μεταξύ δυναμικών απεικονίσεων, απτών διεπαφών και φυσικών χειρισμών. Οι συσκευές απτικής ανάδρασης είναι ένα σύνολο και έχουν χρησιμοποιηθεί ως δομικά στοιχεία πολλών εργαλείων και περιβαλλόντων μάθησης που βασίζονται στην τεχνολογία. Οι απτές διεπαφές μπορούν να υποστηρίξουν τη φυσική χειραγώγηση εικονικών αντικειμένων αλλά και να δώσουν τις δυνάμεις τους για να δημιουργήσουν την ψευδαίσθηση της αίσθησης αυτών των αντικειμένων (Davis, Orta, Schneider, MacLean, Okamura, & Blikstein, 2017). Η χρήση απτών διεπαφών μπορεί να συνδυάσει τα προτερήματα της ενσώματης μάθησης, αν σχεδιαστεί με τις αρχές της, αλλά και τα προτερήματα που προσφέρει η τεχνολογία καθαυτή στην μάθηση. Με την προσθήκη τέτοιων διεπαφών στο φυσικό περιβάλλον μάθησης των μαθητών, η πραγματικότητα αλλάζει, δίνει νέες δυνατότητες και αποκτά νόημα. Τέτοια περιβάλλοντα μάθησης, αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως περιβάλλοντα επαυξημένης πραγματικότητας (augmented reality- AR). Αναλυτικότερα, η επαυξημένη πραγματικότητα συνδυάζει το εικονικό με το πραγματικό περιβάλλον. Το επαυξημένο περιβάλλον αποτελείται πλέον από εικόνες που δημιουργούνται από τον υπολογιστή, οι οποίες επικαλύπτουν άμεσα το πραγματικό περιβάλλον, σε πραγματικό χρόνο (Salinas, 2017), καθιστώντας έτσι εφικτή την αλληλοεπικάλυψη μεταξύ εικονικού και πραγματικού κόσμου. Οι τεχνολογίες που υποστηρίζουν την AR είναι αρκετά ισχυρές και συμπαγείς ώστε να δώσουν την εμπειρία χρήσης της AR μέσω κινητών και άλλων συσκευών, υποστηρίζοντας έτσι και την χρήση μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας (Lee, 2012 σε Salinas, 2017).

Οι Wu, Lee, Chang & Liang (2013, σε Salinas, 2017), υπογραμμίζουν την σημασία της εφαρμογής επαυξημένης πραγματικότητας στην εκπαίδευση. Τονίζουν δύο βασικούς εκπαιδευτικούς σκοπούς, πρώτον η AR βοηθάει τους μαθητές να ενασχοληθούν με αυθεντική αναζήτηση γνώσης στο πραγματικό περιβάλλον, όπου έχουν εισαχθεί οπτικά αντικείμενα όπως κείμενα, εικόνες, βίντεο και δεύτερον, η AR επιτρέπει την ενσωμάτωση ψηφιακών μορφών μάθησης στον πραγματικό κόσμο, δίνοντας στους μαθητές την δυνατότητα πρόσβασης σε φαινόμενα και καταστάσεις που δεν είναι διαφορετικά προσβάσιμες. Η επαυξημένη πραγματικότητα λοιπόν, αναφέρεται σε τεχνολογίες που συνδυάζουν δυναμικά περιβάλλοντα πραγματικού κόσμου και ψηφιακές πληροφορίες που βασίζονται σε περιβάλλον. Πιο επίσημα, η AR έχει οριστεί ως σύστημα που ικανοποιεί τρία χαρακτηριστικά (Azuma, 1997), α) συνδυάζει τον πραγματικό και τον εικονικό κόσμο, β) επιτρέπει την αλληλεπίδραση σε πραγματικό χρόνο, γ) ευθυγραμμίζει πραγματικά αντικείμενα ή μέρη και ψηφιακές πληροφορίες σε 3D. Σύμφωνα με την Mackay (1998), η επαύξηση της πραγματικότητας μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε επαύξηση του ίδιου του χρήστη ο οποίος φορά ή κρατά μια συσκευή μέσω της οποίας αποκτάει πληροφορίες για τα φυσικά αντικείμενα. Στη δεύτερη έχουμε επαύξηση του φυσικού αντικειμένου με ενσωμάτωση συσκευών εισόδου ή εξόδου και στην τρίτη περίπτωση έχουμε επαύξηση του περιβάλλοντος του χρήστη και των αντικειμένων που βρίσκονται μέσα σε αυτό. Συσκευές όπως κάμερες, σαρωτές ανάγνωσης γραμμωτών κλπ, προσλαμβάνουν πληροφορίες για το περιβάλλον και τη διάδραση του χρήστη ενώ έπειτα προβάλλουν την πληροφορία αυτή σε συσκευές εξόδου ή και πάνω στα ίδια τα αντικείμενα.

Η ιδέα των επιφανειών εργασίας που υποστηρίζονταν από υπολογιστική ισχύ εισήχθηκε για πρώτη φορά με το DigitalDESK από τον Wellmer (1993), στο οποίο ένα κλασικό γραφείο εμπλουτίστηκε με κάμερα και προβολέα επιτρέποντας τους χρήστες να αλληλεπιδρούν με το ψηφιακό περιεχόμενο μέσω των δακτύλων τους.




**Εικόνα 5:** To DigitalDesk (Wellner, 1993)

Αργότερα, οι Fitzmaurice et al. (1995) εισήγαγαν την έννοια των απτών διεπαφών (graspable interfaces) σε συστήματα στα οποία χρησιμοποιούνταν χειραπτικά αντικείμενα για να ελέγξουν τα ψηφιακά. Στα συστήματα απτών διεπαφών χρήστη επιχειρείται η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων της πολυαισθητηριακής και πολυτροπικής αλληλεπίδρασης με τον εξωτερικό κόσμο. Τα συστήματα απτών διεπαφών χρήστη (tangible user interfaces - TUIs) καθιερώθηκαν σαν όρος και σαν ένα καινοτόμο στυλ διεπαφής από τους Ishii & Ullmer (1997) οι οποίοι συνέδεσαν καθημερινά αντικείμενα και επιφάνειες με ψηφιακά δεδομένα. Συνεπώς, πολλοί ερευνητές στην συνέχεια όρισαν τα TUIs σαν διεπαφές που χρησιμοποιούν φυσικές αναπαραστάσεις για χειρισμό ψηφιακών δεδομένων και προσφέρουν αλληλεπίδραση μεταξύ των φυσικών τεχνημάτων με την υπολογιστικά διαμεσολαβούμενη πληροφορία. Οι όροι απτές διεπαφές χρήστη και απτή αλληλεπίδραση αναφέρονται πλέον συχνά στο πεδίο της αλληλεπίδρασης ανθρώπου -υπολογιστή (HumanComputer Interaction - HCI) (Hornecker & Buur, 2006).

Ο τρόπος αλληλεπίδρασης που εισήγαγαν οι απτές διεπαφές χρήστη επηρέασε την ανάπτυξη των συστημάτων επαυξημένης πραγματικότητας οδηγώντας σε συστήματα απτής επαυξημένης πραγματικότητας. Έτσι η διεθνής έρευνα οδηγήθηκε στην ανάπτυξη και μελέτη τέτοιων συστημάτων σε ποικίλα γνωστικά αντικείμενα, ένα εκ των οποίων είναι και οι υπολογισμοί και τα μαθηματικά. Τη διαπίστωση αυτή υποστηρίζουν και οι Antle & Wise (2013), οι οποίοι αναφέρουν πως τα συστήματα απτών διεπαφών μπορούν να υποστηρίξουν τη μαθησιακή διαδικασία καθώς προσφέρουν αμεσότητα και φυσικότητα στην αλληλεπίδραση των χρηστών, προωθούν την διερεύνηση, την έκφραση, τον αναστοχασμό και την ενεργό εμπλοκή τους, προσφέρουν ένα περιβάλλον συνεργατικής μάθησης καθώς παρέχουν χειροπιαστές αναπαραστάσεις αφηρημένων εννοιών. Η δυνατότητα αυτή δεν οφείλεται στο γεγονός ότι τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται είναι χειροπιαστά (Clements, 2000) αλλά στη φυσική δραστηριότητα που αναπτύσσεται λόγω της αλληλεπίδρασης.

### 3.2 Συστήματα απτών διεπαφών και αριθμητικές έννοιες

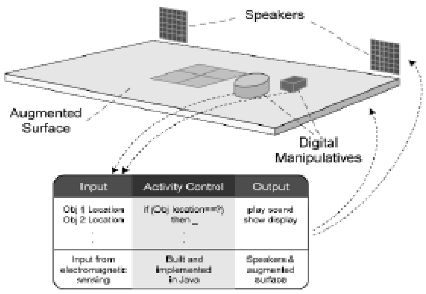
Ένα μεγάλος εύρος των εργασιών που βασίζονται στην εκπαιδευτική απτική ανατροφοδότηση, αφορά στη δημιουργία πιο ρεαλιστικών προσομοιώσεων (προσομοιώσεις αυτοκινήτων, χειρουργίου κλπ), οι οποίες έχουν στόχο να δημιουργήσουν ρεαλιστικές εικονικές εμπειρίες που θα προετοιμάζουν καλύτερα τους εκπαιδευόμενους να εκτελούν τις αντίστοιχες εμπειρίες στον πραγματικό κόσμο. Βέβαια, οι απτικές διεπαφές όπως αναφέρεται και στους Davis, et. al. (2017), έχουν χρησιμοποιηθεί εξίσου στην μαθηματική και την επιστημονική εκπαίδευση, όπου οι μαθητές μπορούν να αισθάνονται τις μαθηματικές λειτουργίες και έννοιες, τις παραγόμενες δυνάμεις επάνω σε εικονικά αντικείμενα, ή ακόμη και τις μοριακές δυνάμεις που διαφορετικά δεν θα ήταν προσβάσιμες και επεξεργάσιμες.

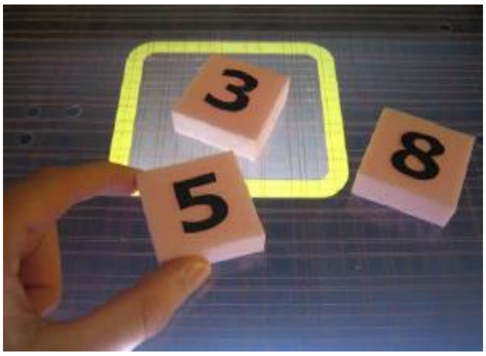
Προς ενίσχυση της θέσης των απτών διεπαφών στην μάθηση αριθμητικών εννοιών κινήθηκαν οι O'Malley & Stanton (2002), οι οποίοι ανέπτυξαν το Kidstory project. Στην διεπαφή αυτή, τα παιδιά πλοηγούνται και αλληλεπιδρούν σε προβολές που γίνονται σε επιφάνειες τοίχων. Οι Fotijn & Mendels (2005) προτείνουν το StoryToy, ένα παιχνίδι στο οποίο τα παιδιά δημιουργούν ιστορίες με ζωάκια και το οποίο χρησιμοποιεί RFID τεχνολογία και αισθητήρες αφής. Σε άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι ενεργοί κύβοι (Watanabe et. al., 2005) μέσω των οποίων τα παιδιά δημιουργούν νέες μορφές (πχ ζώων) οι οποίες εμφανίζονται σαν εικονικά αντικείμενα στην οθόνη.

**Εικόνες 6,7:** Ενεργοί κύβοι (Watanabe et. al., 2005)

Αδιαμφισβήτητα, η χρήση απτών διεπαφών στην εκπαίδευση είναι ένα ενδιαφέρον και πολυδιάστατο φαινόμενο στο οποίο, πέραν τον πλεονεκτημάτων, ελλοχεύουν και κίνδυνοι. Συγκεκριμένα ο Marshall (2007) αναφέρει πως οι απτές διεπαφές προσφέρουν φυσική και άμεση μορφή αλληλεπίδρασης προσβάσιμη στους μαθητές, προωθούν την ενεργή εμπλοκή, επιτρέπουν την διερεύνηση, την ανακάλυψη και τον αναστοχασμό, παρέχουν στους μαθητές εργαλεία σκέψης για την προσέγγιση αφηρημένων εννοιών με απτά αντικείμενα και προσφέρουν ευκαιρίες συνεργατικής μάθησης. Τονίζει όμως παράλληλα και τον προβληματισμό του για την σύνδεση των απτών διεπαφών χρήστη με τη μαθησιακή διαδικασία ως προς τη δυνατότητα των χρηστών να αντιλαμβάνονται νοητικά τους νόμους και τους κανόνες του γνωστικού αντικειμένου.

Η δημιουργία απτών διεπαφών στον τομέα των Μαθηματικών μοιάζει αναπόφευκτη, καθώς αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα γνωστικά αντικείμενα για τους περισσότερους μαθητές. Μια τέτοια προσπάθεια για βελτίωση της μαθησιακής εμπειρίας παιδιών προσχολικής ηλικίας στα Μαθηματικά, αποτελεί το Teaching Table (Khandelwal, Madhur, Mazalek, Ali ,2007)

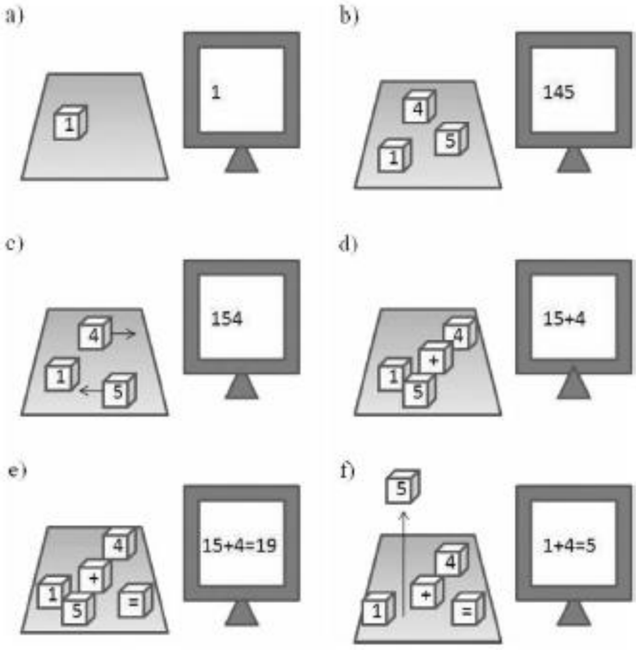





**Εικόνες 8,9:** Teaching Table (Khandelwal, Madhur, Mazalek, Ali ,2007)

Στη συγκεκριμένη διεπαφή, οι δραστηριότητες που πραγματοποιούνται αφορούν την ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας του αριθμού, τη διαχείριση απλών μοτίβων, την ταξινόμηση αντικειμένων, την ανάπτυξη της έννοιας του χώρου μέσα από την κατανόηση απλών γεωμετρικών σχημάτων και ζητημάτων μέτρησης. Όσον αφορά το τεχνολογικό κομμάτι, χρησιμοποιούνται ηλεκτρομαγνήτες σαν αισθητήρες, εντοπίζεται ο τύπος και η θέση του αντικειμένου και έτσι παρέχεται σαν ανατροφοδότηση οπτική και ηχητική πληροφορία. Στόχος των δραστηριοτήτων που αναπτύχθηκαν ήταν η κατανόηση μαθηματικών εννοιών, με βασικό μηχανισμό την παροχή υποστήριξης (scaffolding) στο παιδί όταν αυτό έκανε λάθος. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από ηχητικά μηνύματα που πληροφορούν το παιδί για τη λανθασμένη ενέργειά του. Τα μηνύματα αυτά αρχικά ήταν γενικά, ενώ αν το παιδί συνέχιζε να επαναλαμβάνει το ίδιο λάθος τότε η ανατροφοδότηση παρείχε επιπρόσθετες πληροφορίες (ηχητικές και οπτικές) ώστε να ανακαλυφθεί η σωστή απάντηση. Βασικό μειονέκτημα της διεπαφής είναι πως η διαχείριση του αριθμού αφορά μόνο το συμβολικό επίπεδο και επίσης δεν έχει διερευνηθεί η παιδαγωγική του αξία.

Μια ακόμα έρευνα πραγματοποιήθηκε από τους Starcic & Zajc (2011) και εξέταζε τις επιδόσεις παιδιών της δευτέρας Δημοτικού στην επίλυση προβλημάτων προσθετικού τύπου με την υποστήριξη ενός δραδραστικού τραπεζιού. Το δείγμα αποτελούνταν από 25 μαθητές. Το παρών σύστημα απτών διεπαφών περιλάμβανε fiducials (κυβάκια) που ήταν προσαρτημένα στην μία πλευρά του αντικειμένου ενώ στην απέναντι πλευρά τους υπήρχε το σύμβολο του αριθμού τον οποίο αντιπροσώπευε το κάθε αντικείμενο. Για την πράξη της πρόσθεσης χρησιμοποιούνταν ένα φυσικό αντικείμενο με το σύμβολο της πρόσθεσης και για το αποτέλεσμα ένα φυσικό αντικείμενο με το σύμβολο της ισότητας. Το αποτέλεσμα εμφανίζονταν κάθε φορά σε μια διπλανή οθόνη υπολογιστή μέσω του οποίου υλοποιούνταν το λογισμικό της εφαρμογής που αναγνώριζε τα fiducials (τα κυβάκια) και διεκπεραίωνε τις αντίστοιχες λειτουργίες. Στην έρευνα τονίζεται η δυνατότητα συνεργασίας των μαθητών αλλά και η πολυαισθητηριακή εμπειρία τους, οπτική, ακουστική, κιναισθητική και απτική.



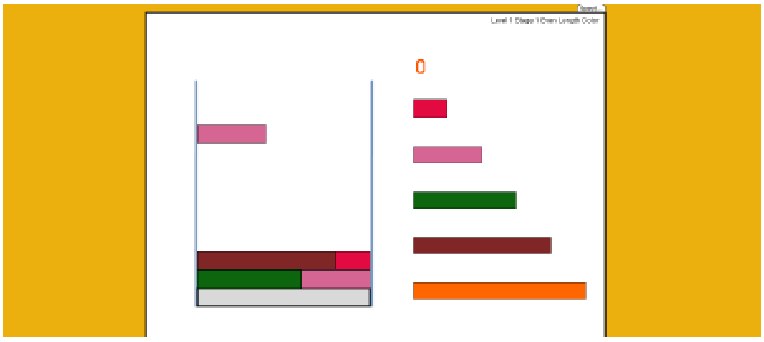

**Εικόνα 10:** Διεπαφή Starcic & Zajc (2011)

### 3.3 Εικονικά χειραπτικά υλικά (virtual manipulatives)

Σύμφωνα με τον Pea (1987) ένα γνωστικό τεχνολογικό εργαλείο παρέχει στον χρήστη το μέσο να ενεργεί σε αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων και να αλληλεπιδρά με αυτόν. Ένα τέτοιου είδους εργαλείο παρέχει στον χρήστη παρατηρήσιμο δείγμα των ενεργειών του και αναλαμβάνει τμήμα του γνωστικού φορτίου. Τα εικονικά χειραπτικά υλικά αποτελούν ένα τύπο γνωστικού τεχνολογικού εργαλείου και ως τέτοια παρέχουν μια εξωτερική αναπαράσταση της μαθηματικής διαδικασίας, αντανακλούν τις μαθηματικές ιδιότητες, τις συμβάσεις και τις στρατηγικές επιλογές που ο χρήστης κάνει καθώς εμπλέκεται με την μαθηματική δραστηριότητα (Zbiek et al., 2007).

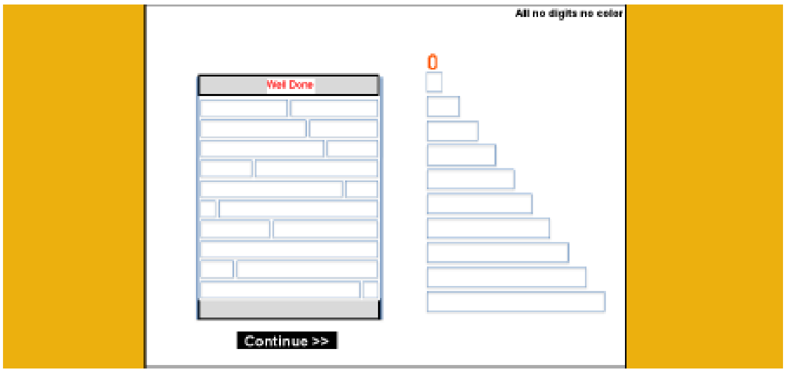
Αρκετοί ερευνητές μελέτησαν τη συμβολή των εικονικών χειραπτικών υλικών στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος (Suh et al 2005). Διαπιστώθηκε πως η χρήση των εικονικών χειραπτικών υλικών επιτρέπει στους μαθητές να ελέγξουν τις απαντήσεις τους χωρίς την κριτική του δασκάλου και να συνδέουν συμβολικές και οπτικές αναπαραστάσεις με ευκολία. Έρευνες επίσης έχουν υποστηρίξει ότι ο συνδυασμός εικονικών και φυσικών χειραπτικών υλικών συνεισφέρει περισσότερο στη μαθησιακή διαδικασία σε σχέση με τα εικονικά ή φυσικά χειρατπικά υλικά που χρησιμοποιούνται μόνα τους (Moyer et al 2008). Οι Sarama & Clements (2009) ισχυρίζονται ότι τα εικονικά χειραπτικά υλικά μπορούν να υποστηρίξουν την μεταφορά ανάμεσα στις ρεαλιστικές αναπαραστάσεις αριθμών και ποσοτήτων στις αντίστοιχες συμβολικές. Μάλιστα υποστηρίζουν ότι η σύνδεση αυτή μπορεί να προγραμματιστεί να γίνει σε πραγματικό χρόνο. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας μπορούν επίσης να προσφέρουν μαθησιακά πλεονεκτήματα (Durmus & Karakink 2006).

Μια εκδοχή εικονικών χειραπτικών υλικών αποτελεί το Numberbonds, το οποίο προτάθηκε από τους Lyons & Beilock (2011). Με το συγκεκριμένο λογισμικό δίνεται έμφαση στη σχέση μεταξύ των αριθμών παρά στην πληθικότητα. Οι αριθμοί εμφανίζονται σαν ράβδοι τύπου Cuisinaire οι οποίοι κινούνται με ένα τρόπο παρόμοιο με του tetris. Καθώς κινούνται καθοδικά θα πρέπει ο μαθητής να επιλέξει από ένα σύνολο ράβδων εκείνο που συμπληρώνει την ράβδο που είναι ήδη σε κίνηση. Όταν οι επιλογές ολοκληρωθούν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί στο επόμενο στάδιο, στο οποίο υπάρχουν περισσότερες ράβδοι προς επιλογή και μεγαλύτερη ταχύτητα ροής προς τα κάτω.



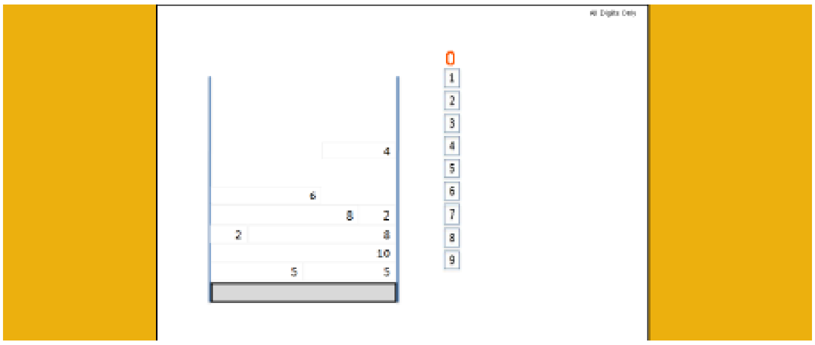

**Εικόνα 11:** Αρχικό στάδιο Numberbonds Lyons & Beilock (2011)

Στο επόμενο στάδιο αφαιρείται το χρώμα καθώς και μια βοήθεια.



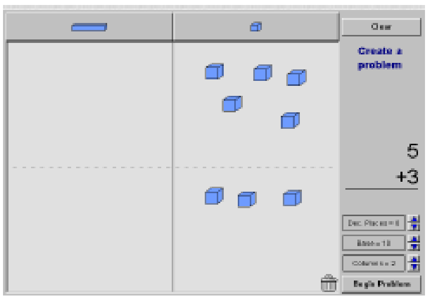

**Εικόνα 12:** Άχρωμο στάδιο Numberbonds Lyons & Beilock (2011)

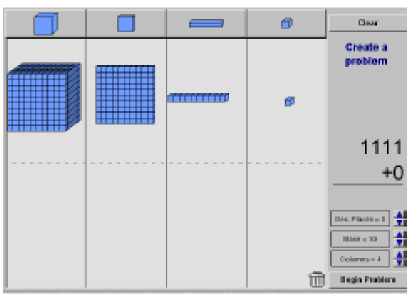
Και τέλος, υπάρχουν μόνο σύμβολα αριθμών που επιλέγονται συμπληρωματικά.



**Εικόνα13:** Τελικό στάδιο Numberbonds Lyons & Beilock (2011)

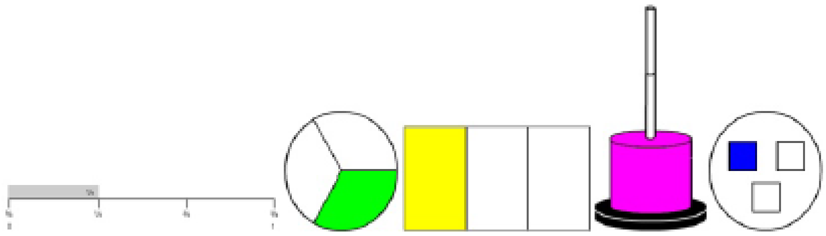
Ένα ακόμα παράδειγμα εικονικών χειραπτικών υλικών στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι τα Base Blocks. Το ψηφιακό περιβάλλον αποτελείται από στήλες, οι οποίες αντιστοιχούν σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες και χιλιάδες. Το μικρότερο πλήθος στηλών που μπορεί να επιλεγεί είναι δύο και αντιστοιχεί σε πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μέχρι το πολύ διψήφιων αριθμών. Ο μαθητής είναι σε θέση να δημιουργήσει το δικό του πρόβλημα μετακινώντας εικονικά χειραπτικά υλικά στις επιφάνειες της εφαρμογής, να δει οπτικά τις διαφοροποιήσεις στην έννοια της θέση ψηφίου ή ακόμα και να επιλύσει προβλήματα που έχουν τεθεί από τον εκπαιδευτικό.





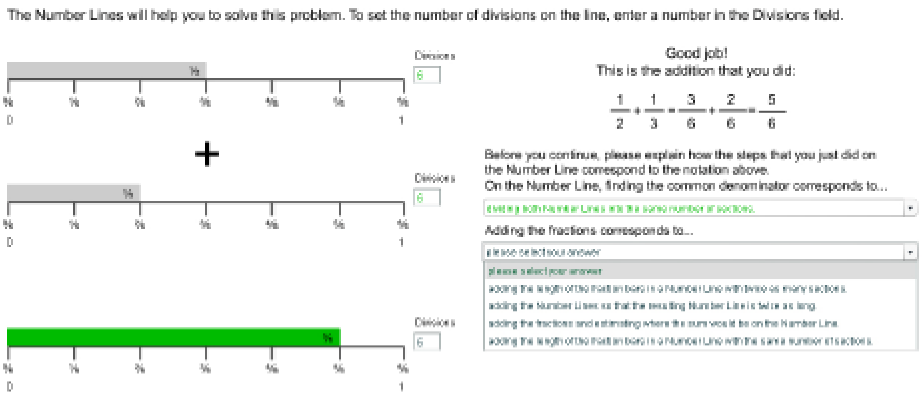

**Εικόνες 14,15:** Base Blocks

Οι Rau et al. (2009) εξέτασαν την αξία των πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη μάθηση των κλασμάτων με μια σειρά δραστηριοτήτων που ονόμασαν Cognitive Tutors. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας, αναπτύχθηκαν δραστηριότητες μετατροπής και πρόσθεσης κλασμάτων με την χρήση εικονικών χειραπτικών υλικών, ώστε να εξασκηθούν οι μαθητές. Κάποιοι από αυτούς εργάστηκαν με 5 διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων, ενώ άλλοι μόνο με μία (την αριθμογραμμή). Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται οι 5 διαφορετικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στις δραστηριότητες.



Οι ερευνητές υπέθεσαν ότι αν παρέχουμε στους μαθητές πολλαπλές γραφικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων σε συνδυασμό με τη συμβολική μορφή του κλάσματος, τα μαθησιακά αποτελέσματα θα είναι καλύτερα σε σχέση με το να δουλέψουν μόνο με μία αναπαράσταση. Αναμενόταν πως όσοι εργάστηκαν με πολλαπλές αναπαραστάσεις θα έπρεπε να ανταπεξέλθουν σε πιο απαιτητικό έργο, καθώς θα απαιτούνταν ο συνδυασμός των αναπαραστάσεων μεταξύ τους. Τέλος, υποτέθηκε ότι, αν οι μαθητές ωθούνται να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους, αυτό θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν σε βάθος τις πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Στην πειραματική φάση, το δείγμα αποτελούταν από 112 μαθητές της 6ης τάξης, οι οποίοι χρησιμοποίησαν το σύστημα για 2,5 ώρες στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών. Όλοι εργάστηκαν στους υπολογιστές σε δραστηριότητες που είχαν σχεδιαστεί ειδικά για την έρευνα. Σχετικά με τα προβλήματα που αφορούσαν την χρήση αριθμογραμμής, ο μαθητής ήταν σε θέση να καθορίσει σε πόσα κομμάτια θα χωριστεί η αριθμογραμμή και σε ποιο σημείο της βρίσκεται το ζητούμενο κλάσμα. Γίνεται φανερό πως η χρήση της ήταν αρκετά διαδραστική. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ήταν όλες οι αναπαραστάσεις το ίδιο διαδραστικές. Σε κάποιους μαθητές ζητούνταν να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο φαίνεται στην αναπαράσταση ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος. Τους δινόταν μια σειρά επιλογών σε ένα μενού και οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή. Σε περίπτωση λάθους, δινόταν ανατροφοδότηση με στόχο να επανεξετάσουν την απάντησή τους. Σε πρώτο στάδιο, τους δινόταν μια επιπλέον επεξήγηση για το ζητούμενο. Έπειτα, τους δινόταν βοήθεια που σχετιζόταν με τις έννοιες του προβλήματος και τελικά τους δινόταν η σωστή απάντηση.




Οι ερευνητές κατέληξαν να υποστηρίζουν την υπόθεση ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα τις έννοιες των κλασμάτων, όταν έρχονται σε επαφή με πολλαπλές αναπαραστάσεις σε σχέση με την περίπτωση που χρησιμοποιούν μόνο μια αναπαράσταση. Ωστόσο, η έρευνα έδειξε ότι αυτό ισχύει μόνο όταν ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους.

Γίνεται φανερό, πως τα εικονικά χειραπτικά υλικά είναι σε θέση να συνεισφέρουν στη συνειδητοποίηση των μαθηματικών εννοιών μέσω του χειρισμού ψηφιακών αναπαραστάσεων, υποστηρίζουν τις διανοητικές ενέργειες πάνω σε φυσικά αντικείμενα, συμβολίζουν μαθηματικές έννοιες, συνδέουν τα χειραπτικά αντικείμενα με τα σύμβολα, παρέχουν ανατροφοδότηση ενώ μερικά έχουν τη δυνατότητα καταγραφής των ενεργειών των μαθητών κατά την αλληλεπίδραση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στο πεδίο των Μαθηματικών τα κλάσματα αποτελούν βασικό σημείο δυσκολιών τόσο για μαθητές όσο και ενήλικες, ή ακόμα και για τους ίδιους τους δασκάλους. Επιπρόσθετα το μοντέλο της αριθμογραμμής έχει υποστηριχθεί, όπως πρωτύτερα αναφέρθηκε πως επιδρά σημαντικά στην κατανόηση και την χρήση των κλασμάτων. Δεν θα ήταν άξιο να διερευνηθεί λοιπόν ποια θα ήταν η σημασία μια απτής αριθμογραμμής με την χρήση τόσο χειραπτικών υλικών όσο και ψηφιακών; Τι αποτέλεσμα θα είχε ο συνδυασμός μια τέτοιας πολυαισθητηριακής αναπαράστασης και εφαρμογής;

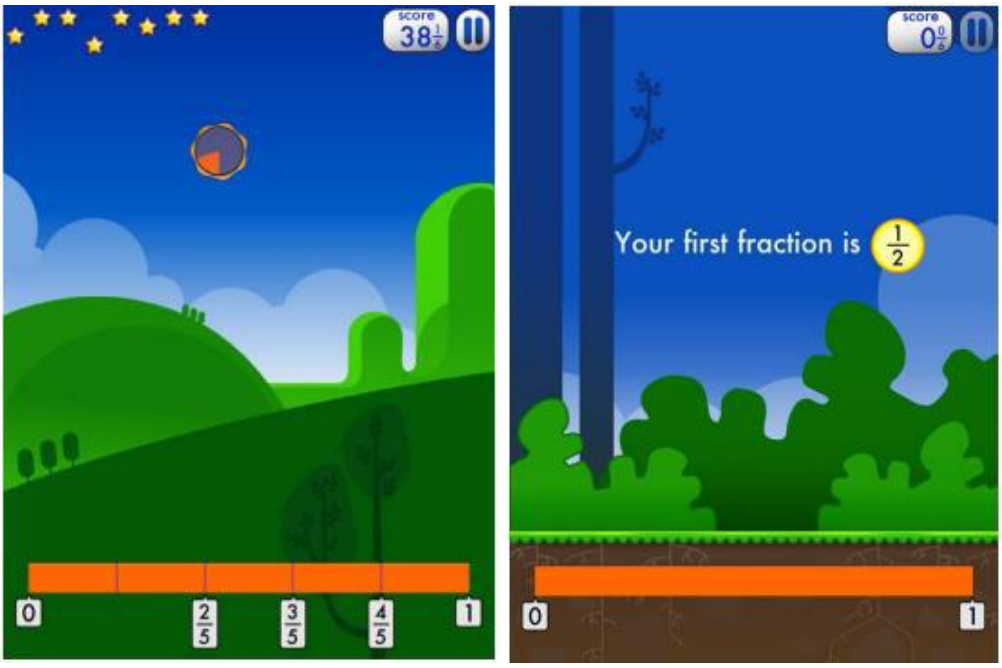
### 3.4 Ηλεκτρονικές εφαρμογές με αριθμογραμμές

Πέραν τον χειραπτικών υλικών και των απτών διεπαφών, αρκετές έρευνες πραγματοποιήθηκαν σχετικά με τη χρήση των κινητών συσκευών στην ενίσχυση της διδασκαλίας των κλασμάτων με αριθμογραμμές. Όταν οι εκτιμήσεις επάνω στην αριθμογραμμή ταιριάζουν με μια γραμμική λειτουργία, οι μαθητές αποδίδουν επίσης καλά και σε ένα ευρύ φάσμα αριθμητικών δραστηριοτήτων, όπως η σύγκριση των αριθμητικών μεγεθών, η αριθμητική και η μαθηματική επίδοση σε τεστ (Ramani, Siegler, & Hitti, 2012). Αυτός είναι από τους βασικούς λόγους που εφαρμόζονται πειραματικά γραμμικά παιχνίδια και εφαρμογές που έχουν αριθμογραμμές. Η πλειοψηφία των ερευνών αυτών καταλήγει σε θετικά αποτελέσματα σχετικά με τη μάθηση των μαθητών (Aslan, 2011., Boticki, Looi, Wong, 2010., Nygren et al. 2012., Riconscente 2013), μέσω τέτοιων ηλεκτρονικών εφαρμογών. Ακόμα όμως πιο θετικά είναι τα αποτελέσματα όταν οι αριθμογραμμές χρησιμοποιούνται σε ένα πιο ρεαλιστικό περιβάλλον, υπάρχουν στο χώρο και οι μαθητές μπορούν να αλληλεπιδράσουν σε πραγματικό χρόνο με αυτές και όχι μονάχα μέσα από την οθόνη των tablet, όπως θα γίνει φανερό μέσω ερευνών στην συνέχεια.

#### 3.4.1 Motion math

Η Riconscente (2013) εξέτασε κατά πόσο η ενασχόληση των μαθητών με την εφαρμογή Motion Math για κινητές συσκευές μπορεί να οδηγήσει σε θετικά αποτελέσματα σχετικά με την κατάκτηση της έννοιας του ρητού αριθμού αλλά και με τη στάση τους απέναντι στους ρητούς αριθμούς. Το Motion Math είναι διαθέσιμο μέσω των εφαρμογών του iTunes, δημιουργήθηκε από φοιτητές του Standford University, με σκοπό να ενισχύσει τις κατανοήσεις των μαθητών για τη σχέση κλασμάτων, αναλογιών και ποσοστών στην αριθμογραμμή. Αυτό που διαφοροποιεί αισθητά το Motion Math από τις υπόλοιπες εφαρμογές σε κινητές συσκευές είναι ότι βασίζεται στην τεχνολογία των «επιταχυνσιομέτρων» που συναντάται στα ipad, iphone και άλλες κινητές συσκευές, γεγονός που σημαίνει πως η συσκευή είναι σε θέση να ανιχνεύσει τον τρόπο με τον οποίο ο χρήστης κινεί τη συσκευή με το σώμα του, δίνοντάς του τη δυνατότητα να αλληλεπιδρά με αυτή σε πραγματικό χρόνο.

Αναφορικά με το παιχνίδι, στόχος είναι ο παίκτης να γέρνει τη συσκευή για να μετακινήσει ένα αστέρι που πέφτει κάθε φορά και να το οδηγήσει στη σωστή θέση πάνω σε μια αριθμογραμμή. Το αστέρι εκφράζει μια διαφορετική οπτική αναπαράσταση των ρητών αριθμών κάθε φορά, ενώ μπορεί να είναι ένα κλάσμα, δεκαδικός, ποσοστό ή ένα γεωμετρικό σχήμα- πίτα. Αν ο μαθητής απαντήσει σωστά, επιβεβαιώνεται ηχητικά και οπτικά, σε αντίθετη περίπτωση δέχεται από το παιχνίδι διδακτικές υποδείξεις, μέχρις ότου απαντήσει σωστά. Οι υποδείξεις αυτές ξεκινούν με ένα βέλος που κατευθύνει τον παίκτη να κινηθεί πιο δεξιά ή αριστερά στην αριθμογραμμή, συνεχίζουν με τον χωρισμό της αριθμογραμμής σε όσα τμήματα πρέπει, ενώ εάν ο μαθητής δώσει πάλι λάθος απάντηση, εμφανίζονται ετικέτες στα σημεία χωρισμού. Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν το επίκεντρο και μέσω της συνεχούς ανατροφοδότησης υπάρχει μια συνεχής αλληλεπιδραστική εμπειρία μάθησης.




Στην έρευνα συμμετείχαν 122 μαθητές δημοτικού της 5ης τάξης από δύο σχολεία της Νότιας Καλιφόρνια, με στόχο να διαπιστώσουν κατά πόσο η ενασχόληση των μαθητών με το Motion Math μπορεί να οδηγήσει σε θετικά αποτελέσματα αναφορικά με την κατάκτηση της έννοιας του ρητού αριθμού αλλά και με τη στάση τους απέναντι στους ρητούς αριθμούς και το ίδιο το παιχνίδι. Το παιχνίδι προϋποθέτει την ύπαρξη προηγούμενης γνώσης και δεν απαιτεί κάποιου είδους συνδυαστική διδασκαλία, αντίθετα αποτελεί αυτόνομο εκπαιδευτικό εργαλείο. Σε κάθε σχολείο της έρευνας δημιουργήθηκαν δύο ομάδες, μία πειραματική και μία ελέγχου. Τις πρώτες 5 ημέρες η πειραματική ομάδα σε κάθε σχολείο χρησιμοποίησε την εφαρμογή Motion Math για 20΄ της ώρας. Τις επόμενες 5 ημέρες οι ομάδες άλλαξαν και η ομάδα ελέγχου χρησιμοποίησε την εφαρμογή Motion Math για 20΄ της ώρας, με αποτέλεσμα όλοι οι μαθητές να έχουν απασχοληθεί τον ίδιο ακριβώς χρόνο με την εφαρμογή. Όλοι οι μαθητές εξετάστηκαν 3 φορές. Στην αρχή, προκειμένου να διαπιστωθούν οι προηγούμενες γνώσεις, ενδιάμεσα και στο τέλος της έρευνας.

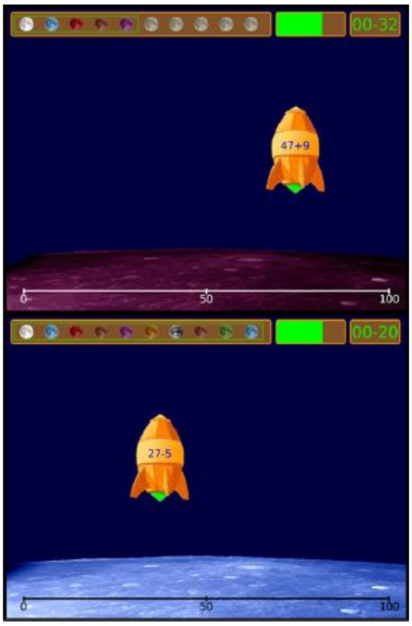
Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν βελτιωμένη γνώση των μαθητών αναφορικά με τους ρητούς αριθμούς καθώς επίσης και ενίσχυση της αυτό-αποτελεσματικότητάς τους. Επιπλέον οι μαθητές όπως ήταν αναμενόμενο δήλωσαν πολύ ευχαριστημένοι από την ενασχόλησή τους με τη συγκεκριμένη εφαρμογή καθώς βαθμολόγησαν υψηλά το παιχνίδι. Τα θετικά αποτελέσματα αποδόθηκαν στην άμεση ανατροφοδότηση και στο γεγονός ότι η αποτυχία θεωρήθηκε αποδεκτή ως μέρος του παιχνιδιού, ενώ παράλληλα η χρονομέτρηση του παιχνιδιού έδινε πολλές ευκαιρίες για εξάσκηση και κινητοποίηση λόγω της διασκεδαστικής φύσης του. Αναφέρθηκε επίσης πως οι μαθητές ανέπτυξαν την νοερή τους αριθμογραμμή εξαιτίας της ενσώματης φύσης του παιχνιδιού, δηλαδή τις ανάγκης να στρέφουν την συσκευή για να τοποθετήσουν το αστέρι.

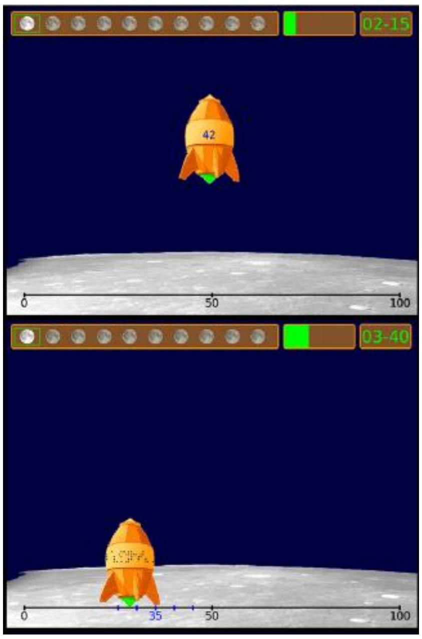
### 3.4.2 Rescue Calcularis

Οι Kucian et al. (2011), ανέπτυξαν μια ηλεκτρονική εφαρμογή με στόχο της δομής και της πρόσβασης στη νοερή αριθμογραμμή για μαθητές με αναπτυξιακή δυσαριθμησία, μια αναπτυξιακή δυσκολία που επηρεάζει την απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων σε παιδιά με κανονική νοημοσύνη και κατάλληλα παρεχόμενη εκπαίδευση, σύμφωνη με την σχολική ηλικία. Σύμφωνα με τους ερευνητές, ένα σημαντικό βήμα στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης είναι η δημιουργία και η αυτοματοποίηση της πρόσβασης σε μια χωρική αναπαράσταση των αριθμών. Πολλά παιδία με ειδική μαθησιακή δυσκολία στα Μαθηματικά, έχουν βελτιωθεί με την χρήση χωρικών αναπαραστάσεων, όπως αυτό της αριθμογραμμής.

Στην συγκεκριμένη έρευνα, οι μαθητές εκπαιδεύτηκαν για 5 εβδομάδες στην χρήση των υπολογιστών και στην συνέχεια όλοι έπαιζαν το παιχνίδι 15 λεπτά την ημέρα, για 5 ημέρες την εβδομάδα. Η αποτελεσματικότητα της εκπαίδευσης αξιολογήθηκε με τη βοήθεια νευροψυχολογικών δοκιμασιών και λειτουργικής απεικόνισης μαγνητικού συντονισμού (fMRI) κατά τη διάρκεια των εργασιών επάνω στις αριθμογραμμές. Πριν και μετά από την παρέμβαση, η χωρική αναπαράσταση των αριθμών μετρήθηκε με δραστηριότητες σε προκαθορισμένα τεστ.

Οι μαθητές έπρεπε να υποδείξουν, σε μια αριθμογραμμή προσανατολισμένη από τα αριστερά προς τα δεξιά με άκρα το 0 και το 100, τη θέση ψηφίων, το αποτέλεσμα προσθέσεων και αφαιρέσεων ή τον εκτιμώμενο αριθμό των κουκκίδων που έβλεπαν σε μία κάρτα. Οι πρώτες εργασίες πραγματοποιήθηκαν γραπτά και το παιδί σημείωνε αρχικά με μολύβι την θέση του αριθμού που έπρεπε να τοποθετήσει επάνω σε ένα χαρτί και στην συνέχεια τον επόμενο, ώσπου να ολοκλήρωνε 20 αριθμούς. Στη συνέχεια έπρεπε να υπολογίζει το αποτέλεσμα προσθέσεων και ούτε καθεξής. Τέλος, αφού αξιολογούνταν και η χωρική εργαζόμενη μνήμη των μαθητών μέσω του Corsi-Block Tapping test (Corsi & Michael, 1972), οι μαθητές δραστηριοποιήθηκαν στην εφαρμογή "Rescue Calcularis", που είχαν κατασκευάσει οι ερευνητές. Η συγκεκριμένη εφαρμογή αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε με την δυνατότητα εγκατάστασης και αναπαραγωγής σε οποιονδήποτε οικιακό υπολογιστή. Το πρόγραμμα στοχεύει στη βελτίωση της χωρικής αναπαράστασης των αριθμών και της αυτοματοποιημένης πρόσβασης στην νοερή αριθμογραμμή, συμπεριλαμβανομένης της βελτίωση της σύνδεσης μεταξύ των αναπαραστάσεων αριθμών και χώρου, της κατανόηση της κανονικότητας των αριθμών, της εκτίμηση και γενικότερα την βελτίωση των αριθμητικών ικανοτήτων.



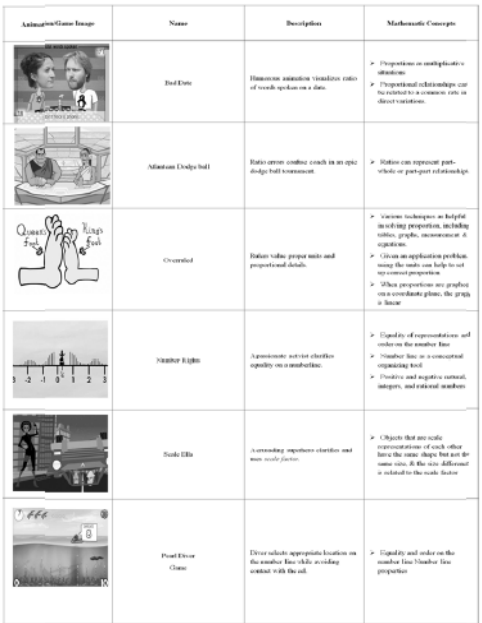

Το πρόγραμμα περιείχε μια ιστορία όπου οι μαθητές έπρεπε να οδηγήσουν το διαστημόπλοιο στην ακριβή τοποθεσία της αριθμογραμμής, η οποία αντιστοιχεί σε ένα αραβικό ψηφίο, στην εκτιμώμενη θέση των κουκκίδων ή στο αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης ή μιας αφαίρεσης, όπως έκαναν στις πρωτύτερες εργασίες τους στο χαρτί.

Τα αποτελέσματα ήταν θετικά υπέρ της εφαρμογής, δείχνοντας βελτιωμένη ικανότητα χωρικής αναπαράστασης στην αριθμογραμμή, αυξημένη ακρίβεια πάνω σε αυτής και περισσότερη νευρική και εγκεφαλική ενεργοποίηση κατά την ενασχόληση με την εφαρμογή, η οποία με την σειρά της φανερώνει μια περαιτέρω διευκόλυνση στην επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων και γνώσεων με τα οποία ήρθαν αντιμέτωποι οι συμμετέχοντες.

### 3.4.3 Math snacks

Οι Valdez, Trujino & Wiburg (2013), πραγματοποίησαν μια έρευνα με στόχο να διερευνήσουν την επίδραση ενός εκπαιδευτικού υλικού, του Math Snacks σε συνδυασμό με τη διδασκαλία θα έφερνε θετικά αποτελέσματα σε γνωστικά αντικείμενα όπως ο λόγος, η αναλογία, ο συντελεστής μεγέθους και η αριθμογραμμή.

Το Math snacks αποτελείται από ένα σύνολο διαδραστικών εφαρμογών που αναπτύχθηκαν για χρήση στο διαδίκτυο και τις κινητές τεχνολογίες ώστε να διδάξουν αναλογίες, λόγους, συντελεστές και αριθμογραμμές χρησιμοποιώντας μια πολυτροπική προσέγγιση. Η εφαρμογή περιλαμβάνει animations που προωθούν την απεικόνιση μιας έννοιας, διδασκαλίες που παρέχουν γνωστική πολυπλοκότητα με στόχο την κατανόηση, καθώς και ενεργητικές μαθησιακές δραστηριότητες που προωθήσουν την ουσιαστική κατανόηση. Κάθε μικρο-εφαρμογή είχε ένα αντίστοιχο σχέδιο μαθήματος για τους εκπαιδευτικούς ως προς την χρήση του. Αυτά περιείχαν μια καθοδηγούμενη συζήτηση για τις κινούμενες εικόνες, μια δραστηριότητα μάθησης που έπρεπε να πραγματοποιηθεί μετά τα κινούμενα σχέδια και προτεινόμενες ερωτήσεις για να προωθηθεί η σε βάθος κατανόηση των μαθητών.




| Animation/Game Image | Name | Description | Mathematic Concepts |
|---|---|---|---|
| | Bad Date | Humorous animation visualizes ratio of words spoken on a date. | [illegible] |
| | Atlantean Dodgeball | Ratio errors confuse coach in an epic dodge ball tournament. | Ratios can represent part-whole or part-part relationships |
| | Overruled | [illegible] | [illegible] |
| | Number Rights | A passionate activist clarifies equality on a numberline. | [illegible] |
| | Scale Ella | [illegible] | [illegible] |
| | [illegible] | [illegible] | [illegible] |

**Εικόνα 17:** Math Snacks (Valdez, Trujino & Wiburg, 2013)

Στην έρευνα, η παρέμβαση διήρκησε οκτώ εβδομάδες. Σε πέντε από τις εννέα τάξεις (πειραματική ομάδα), οι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν τον Οδηγό για τους Δασκάλους που αντιστοιχούσε με τα πέντε κινούμενα σχέδια του Math Snacks και ένα ακόμα παιχνίδι, ενώ στις υπόλοιπες τέσσερις τάξεις (ομάδα ελέγχου), οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν τα ίδια κινούμενα σχέδια και ένα παιχνίδι, αλλά ήταν ελεύθεροι να αναπτύξουν τα δικά τους μαθήματα χρησιμοποιώντας διαθέσιμους διαδικτυακούς πόρους.

Οι ερευνητές απέδειξαν πως η εφαρμογή επέφερε θετικά αποτελέσματα σε συγκεκριμένες περιοχές των Μαθηματικών. Ωστόσο, ιδιαίτερα σημαντικά οφέλη παρουσιάστηκαν, για τα παιδιά ηλικίας 11-12, μόνο κατά την χρήση του Οδηγού για τους Δασκάλους της εφαρμογής. Σε παρόμοια αποτελέσματα αναφορικά με την εκπαιδευτική αξία του Math Snacks κατέληξαν και οι Wiburg, Chamberlin, Valdez, Trujillo, & Stanford (2016), οι οποίοι αναφέρουν πως παρατηρήθηκε βελτίωση σε όσους έλαβαν την παρέμβαση με την χρήση του Math Snacks, καθώς η επίδοση τους ήταν σημαντικά υψηλότερη από την ομάδα που δεν έλαβε την παρέμβαση.

Παρατηρείται μια πληθώρα παιχνιδιών και εφαρμογών σχετικά με τα κλάσματα και τους ρητούς. Όπως φάνηκε, τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων είναι ενθαρρυντικά και ενισχύουν το ενδιαφέρον για την αποτελεσματικότερη ένταξη της τεχνολογίας στο σχολείο. Όμως στις περισσότερες έρευνες και εφαρμογές, η αριθμογραμμή δεν αποτελεί το βασικό αναπαραστατικό μέσο και δεν χρησιμοποιείται. Σε όσες γίνεται χρήση της (Link et. al., 2013, Peeters et. al., 2016), η αριθμογραμμή είναι σταθερή, συνήθως είναι χωρισμένη στα απαιτούμενα τμήματα, έχει σημεία αναφοράς το 0, 1/2, 1 ως βοηθητικούς δείκτες, και η χρήση της γίνεται κυρίως με στόχο την τοποθέτηση κλασμάτων επάνω της. Στους Peeters et. al. (2016), ανατέθηκε στους μαθητές να τοποθετήσουν κλάσματα σε αριθμογραμμές στις οποίες παρέχονται ορισμένα σημεία αναφοράς (benchmarks) κάθε φορά, και μελετήθηκαν οι στρατηγικές εκτίμησης που χρησιμοποιήθηκαν για την σωστή τοποθέτηση τους από τους συμμετέχοντες. Πανομοιότυπους στόχους είχαν και οι Link et. al. (2013), όπως περιεγράφηκε παραπάνω, με την προσθήκη στοιχείων της ενσώματης μάθησης. Η αριθμογραμμή εδώ, δεν χρησιμοποιήθηκε για ρητούς αλλά για ακέραιους.

Τα μαθησιακά αποτελέσματα όλων σχεδόν των παρεμβάσεων ήταν ενθαρρυντικά. Ανάμεσα στα θετικά στοιχεία που καταγράφονται είναι ότι δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις αφηρημένες έννοιες που μαθαίνουν και έτσι να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση (Thambi & Eu, 2013, Garcia & Pacheco, 2013). Ακόμη, η άμεση ανατροφοδότηση βοηθά τους μαθητές να αναστοχαστούν και να διορθώσουν μόνοι τους στα λάθη τους (Garcia & Pacheco, 2013). Τα τεχνολογικά εργαλεία βοηθούν τους μαθητές να λάβουν πιο ενεργό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία και να γίνουν πιο αυτόνομοι (Liang & Zhou, 2009). Ο ρόλος των χειραπτικών υλικών σε μια μαθησιακή διαδικασία αντανακλά την αντιληπτική πληροφορία που τα υλικά παρέχουν και κατ' επέκταση τον τρόπο που κάποιος μπορεί να τη διαχειριστεί. Σε έρευνες τους οι Martin & Schwartz (2005) έδειξαν ότι ο χειρισμός φυσικών αντικειμένων συντελεί στη μείωση του γνωστικού φορτίου του προβλήματος, βοηθάει στη μάθηση αφηρημένων εννοιών και παροτρύνει τα παιδιά να κάνουν νέες ερμηνείες

Όσον αφορά τις χειρονομίες, πέραν από ενδείξεις της ενσώματης φύσης της μάθησης, αποτελούν ένα μέσο σύνδεσης της ενέργειας σε απτό αντικείμενο με το αφηρημένο σύμβολο ή λειτουργία με τρόπο που η προσοχή του μαθητή κατευθύνεται σε σημαντικές συσχετίσεις. Η Goldin-Meadow (2003) θεωρεί ότι οι χειρονομίες που συνοδεύουν τον λόγο αποφορτίζουν τον ομιλητή υποβοηθώντας την παράλληλη επεξεργασία της πληροφορίας. Φυσικά οι χειρονομίες από μόνες τους δεν είναι σε θέση να συσχετίσουν την νέα με την προηγούμενη γνώση παιδιών ή ενηλίκων.

# Κεφάλαιο 4. Διεπαφή παρούσας μελέτης

Είναι γεγονός, πως παρά τα θετικά στοιχεία που καταγράφονται από τις έρευνες, δεν είναι τόσο εύκολο να ενταχθούν οι νέες τεχνολογίες στην καθημερινότητα του σχολείου. Οι Keengwe et al. (2008) επισημαίνουν ότι πρέπει πρώτα να εξασφαλιστεί η ύπαρξη κατάλληλων υποδομών στα σχολεία, αλλά και η επαρκής εκπαίδευση και υποστήριξη των εκπαιδευτικών. Επίσης, η ένταξη των νέων τεχνολογιών στην τάξη προϋποθέτει την αναβάθμιση του εκπαιδευτικού και τη συμπερίληψη του στη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τις διδακτικές πρακτικές που θα εφαρμόζει στην τάξη του, καθώς αυτός είναι που γνωρίζει καλύτερα τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών του (Thambi & Eu, 2013). Όπως επισημαίνουν οι Keengwe et al. (2008), η τεχνολογία από μόνη της δεν μπορεί να βελτιώσει ή να αλλάξει την ποιότητα της διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τους Dahaene, Bossini & Giraux (1993, όπ, αναφ Fischer, Moeller, Bientzle, Cress & Nuerk, 2011), η αξία των αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί σε αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά μιας νοερής αριθμογραμμής, πάνω στην οποία οι αριθμοί είναι χωρικά κωδικοποιημένοι και αντικατοπτρίζονται με αναλογική μορφή. Επιπρόσθετα, οι Moeller, Fischer, Nuerk & Cress (2015) αναφέρουν πως τα μαθησιακά περιβάλλοντα που υποστηρίζονται από Η/Υ προωθούν τόσο την εξάσκηση της νοερής αριθμογραμμής μέσω σωματικής κίνησης στο χώρο, όσο και την ενσωμάτωση των φυσικών χειραπτικών υλικών σε παρεμβάσεις που υποστηρίζονται από Η/Υ ως «Απτά περιβάλλοντα χρήστη» (Tangible Users Interfaces).

Με γνώμονα τον συνδυασμό των θετικών αποτελεσμάτων της τεχνολογίας και της ίδιας της αριθμογραμμής στην κατανόηση των κλασμάτων, δημιουργήθηκε ένα επαυξημένο περιβάλλον μικτής πραγματικότητας για την διδασκαλία των κλασμάτων. Στην παρούσα λοιπόν διεπαφή, η επιφάνεια ενός ξύλου μετατράπηκε σε διαδραστική επιφάνεια όπου εμφανίζονταν δύο δυναμικές αριθμογραμμές. Βασικός στόχος ήταν να δομηθεί μια μικρή μαθησιακή ακολουθία, η οποία δομεί σταδιακά την έννοια του κλάσματος και σταδιακά φτάνει να παρουσιάσει την έννοια της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων.

## 4.1 Makey Makey

Το MIT Media Lab, με στόχο την εύρεση καινοτόμων τεχνολογιών για την μάθηση μέσω πράξης, σχεδίασαν την πλακέτα Makey Makey. Η συγκεκριμένη πλακέτα αποτελείται από καλώδια που έχουν στην άκρη τους κροκοδειλάκια, ώστε να επιτρέπουν τη σύνδεση του υπολογιστή με φυσικά αντικείμενα καθημερινής χρήσης, μετατρέποντάς τα σε συσκευές εισόδου (Martinez & Stager, 2013; Gubbels & Froehlich, 2014).

**Εικόνα 18:** Makey Makey

Το Makey Makey προωθεί τη η διάθεση για παιχνίδι, προσφέροντας μία σημαντική ευκαιρία για εισαγωγή των μαθητών σε φυσικά διαδραστικά συστήματα με τη χρήση απτών διεπαφών (Collective & Shaw 2012; Martinez & Stager, 2013). Πιθανά φυσικά αντικείμενα που μπορούν να συνδεθούν με αυτό μπορεί να είναι φυτά, νερό, μολύβι, βρώσιμα υλικά και γενικότερα αγώγιμα μέσα ώστε να κλείνει το κύκλωμα μέσω του ανθρώπινου σώματος. Σύμφωνα με τους Collective & Shaw (2012), οι βασικοί στόχοι της κατασκευής του Makey Makey συνδυάζουν πέντε χαρακτηριστικά των απτών περιβαλλόντων αλληλεπίδρασης χρηστών, α) γρήγορη πρόσβαση για αρχάριους, β) λειτουργικότητα με κάθε λογισμικό, γ) περιβάλλοντα βασισμένα σε φυσικά αντικείμενα, δ) δεν απαιτείται προγραμματισμός για τη σύνδεση με τον υπολογιστή, ε) δεν απαιτούνται εξειδικευμένες διαδικασίες συνδεσμολογίας για τη δημιουργία του κυκλώματος.

Συνοπτικά, ο χρόνος που απαιτείται για την εξοικείωση με το Makey Makey είναι σύντομος συγκριτικά με αντίστοιχες τεχνολογίες και η τρόπος σύνδεσης και χρήσης τους με απτά καθημερινά αντικείμενα είναι εύκολος και προσιτός. Πολλοί ερευνητές κατά καιρούς (Martinez & Stager, 2013 κ.α.), έχουν δημιουργήσει μικρά παιχνίδια με το λογισμικό Scratch, το οποίο σε συνδυασμό με τις δυνατότητες της πλακέτας, έκανε το παιχνίδι ακόμα πιο διαδραστικό.

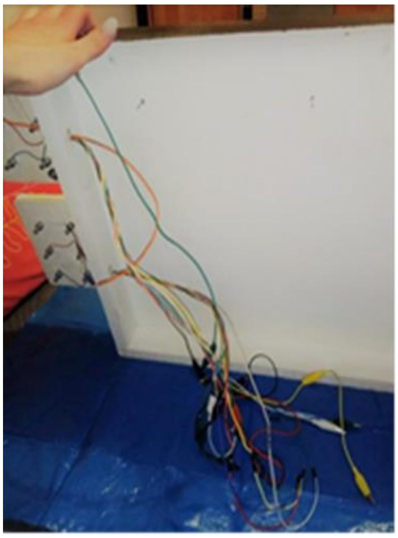
### 4.2 Ο «Μαραθώνιος των κλασμάτων»

Με βάση την θεωρία της ενσώματης μάθησης, τις απτές διεπαφές για την εκμάθηση των κλασμάτων και την αξιολόγηση της αριθμογραμμής ως χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση των κλασμάτων, σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε στα πλαίσια αυτής της μελέτης ένα τεχνούργημα το οποίο ονομάστηκε «Μαραθώνιος κλασμάτων».

Συγκεκριμένα, ένα ξύλο 120*40 μετατράπηκε σε αγώνα δρόμου. Σκοπός ήταν οι χρήστες να είναι σε θέση να βλέπουν τις αριθμογραμμές ανά πάσα στιγμή και να είναι σε θέση να τις τροποποιούν όπως αυτοί κρίνουν απαραίτητο. Για να γίνει αυτό εφικτό δημιουργήθηκε ο απαιτούμενος κώδικας μέσω Scratch, για την δημιουργία δύο δυναμικών αριθμογραμμών.

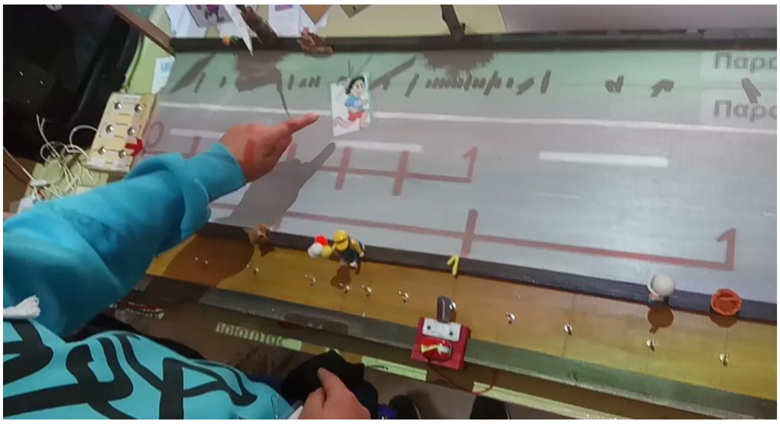
**Εικόνες 19,20:** Προγραμματισμός Scratch

Οι αριθμογραμμές θεωρούνται δυναμικές, καθώς οι χρήστες είχαν την δυνατότητα μέσω δύο ξεχωριστών χειριστηρίων, τα οποία ήταν τοποθετημένα επάνω στην κατασκευή, να αλληλεπιδρούν με αυτές. Συγκεκριμένα, οι χρήστες είχαν την δυνατότητα να αυξήσουν ή να μειώσουν το μέγεθος των αριθμογραμμών, να τις μετακινήσουν ολόκληρες δεξιά ή αριστερά, ακόμα και να αλλάξουν τον αριθμό των μερών στα οποία θα χωρίζεται η κλασματική μονάδα (πχ σε τέταρτα, πέμπτα κλπ).

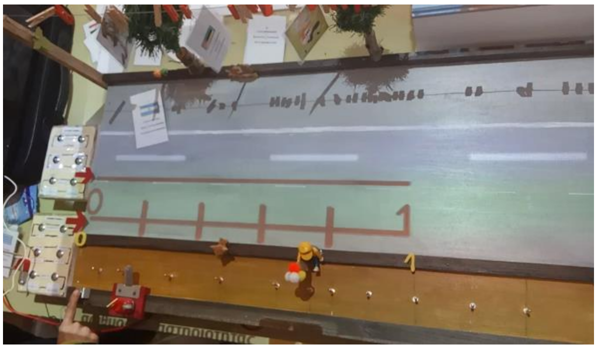
 

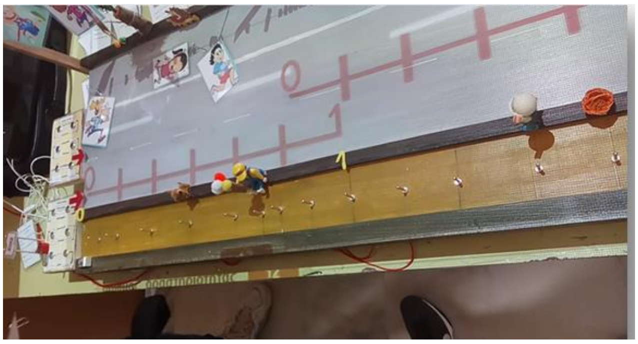
**Εικόνες 21,22:** Χειριστήρια και συνδεσμολογία με το Makey Makey

Τα πλήκτρα των χειριστηρίων ήταν μεταλλικά, και από το κάτω μέρος ήταν τους συνδεμένα μέσω του Makey Makey, με τον Η/Υ. Συνεπώς, κάθε ενέργεια επάνω στα χειριστήρια επέφερε αλλαγές στο Scratch και κατ' επέκταση στο περιβάλλον του παιχνιδιού. Θέλοντας να γίνει η αλληλεπίδραση με την διεπαφή ακόμα πιο ρεαλιστική και άμεση, προστέθηκε στον υπολογιστή ένα προβολικό το οποίο «μετέφερε» την οθόνη του υπολογιστή και του περιβάλλοντος του Scratch, επάνω στην ξύλινη επιφάνεια. Τέλος, στο κάτω μέρος της κατασκευής υπήρχαν μικρά σιδερένια μπαστούνια και ένα αυτοκινητάκι, με τα οποία ο χρήστης επέλεγε το σημείο που θεωρούσε ότι έπρεπε να τοποθετηθεί το κλάσμα που ζητήθηκε. Αν είχε κατασκευάσει σωστά την αριθμογραμμή, τότε διάλεγε το σωστό μπαστούνι και έπαιρνε θετική ανατροφοδότηση. Σε άλλη περίπτωση, του δίνονταν η δυνατότητα να επιλέξει το κουμπί βοήθειας και να παρακολουθήσει (επάνω στην ίδια επιφάνεια) μια σειρά βημάτων που απλοποιούσαν την λύση, δίνοντας οδηγίες για τον τρόπο σκέψης που έπρεπε να ακολουθηθεί και όχι την λύση καθαυτή.

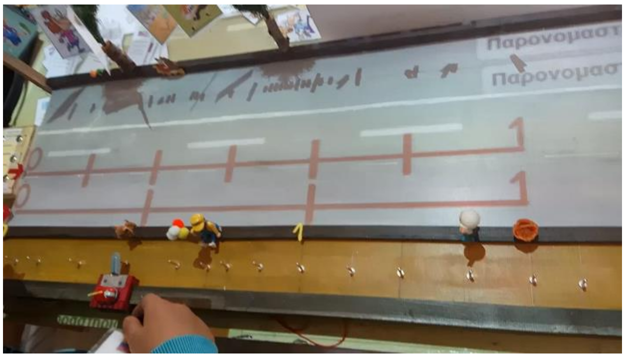


**Εικόνα 23:** Δυναμικές αριθμογραμμές





**Εικόνες 24, 25**: Διάστημα 0-1, Αναπαράσταση πρόσθεσης



**Εικόνες 25:** Αναπαράσταση ισοδυναμίας

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για να λειτουργήσει το παιχνίδι απαιτείται η χρήση φορητού υπολογιστή, δύο πλακετών Makey Makey, τον προγραμματισμό στο Scratch, καθώς και το προβολικό ώστε να «μεταφερθεί» η εικόνα στην ξύλινη κατασκευή και να δημιουργηθεί έτσι ένα μικτό αλληλεπιδραστικό περιβάλλον. Κάθε φορά λοιπόν, που επιλεγόταν (με φυσική διεπαφή) ένα κουμπάκι (από τα χειριστήρια ή από τα μπαστούνια), έκλεινε το κύκλωμα με τον υπολογιστή και δινόταν μια εντολή σε αυτόν. Με αυτό τον τρόπο, το λογισμικό Scratch, δεχόταν τις απαιτούμενες πληροφορίες, ώστε να τροποποιήσει αναλόγως την εκάστοτε αριθμογραμμή ή να δώσει ανατροφοδότηση στον παίκτη.

### 4.2.1 Σενάριο παιχνιδιού

Πριν την έναρξη της δραστηριότητας, οι συμμετέχοντες έρχονται σε επαφή με το σενάριο του παιχνιδιού, ώστε αυτό να αποκτήσει νόημα και να ξεφύγει από την στείρα τοποθέτηση κλασμάτων και εκτέλεση πράξεων. Επιπλέον, γινόταν μια παρουσίαση των δυνατοτήτων των χειριστηρίων των αριθμογραμμών και του τρόπου χρήση τους, ώστε να μην αποτελούν επιπλέον οι ίδιες τροχοπέδη αλλά διευκόλυνση προς τους παίκτες.

**Εικόνα 26:** Κάρτες παιχνιδιού

Το σενάριο βασίστηκε αρχικά στην Διπλωματική εργασία της Μπιλαδέρη (2016) από την οποία λήφθηκε και η ιδέα, ενώ στην συνέχεια με την προσθήκη των δυναμικών αριθμογραμμών και τη χρήση του προβολικού, δόθηκαν περαιτέρω δυνατότητες και τόσο αυτό, όσο και οι δραστηριότητες τροποποιήθηκαν. Ο λόγος της τροποποίησης ήταν η ανάγκη να δομηθεί μια μικρή μαθησιακή ακολουθία για την φύση και τον τρόπο χρήσης της αριθμογραμμής με κλάσματα. Το σενάριο λοιπόν έχει ως εξής:

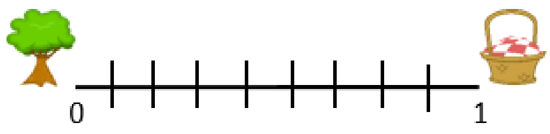
*«Η μεγάλη μέρα έφτασε!! Ο Μαραθώνιος 2 χιλιομέτρων ξανά - ξεκίνησε! 20 δρομείς από διάφορες χώρες ξεκίνησαν έλαβαν μέρος όμως λόγω ισχυρών βροχοπτώσεων, αυτός έπρεπε να αναβληθεί. Σήμερα ο αγώνας θα αρχίσει ξανά και ο κάθε αθλητής πρέπει να μεταφερθεί στη θέση που είχε μείνει. Θα τους βοηθήσεις προκειμένου να επανατοποθετηθούν στην θέση τους και να ξεκινήσει ο αγώνας;»*

Οι συμμετέχοντες παίρνουν μέρος ανά 2, ώστε ο ένας να έχει το ρόλο του οδηγού του αμαξιού που μεταφέρει του αθλητές και επιλέγει την θέση τους, ενώ ο άλλος έχει τον ρόλο του βοηθού-συμβούλου. Οι ρόλοι φυσικά εναλλάσσονται. Οι αθλητές που πρέπει να τοποθετηθούν απεικονίζονται σε κάρτες, στο πίσω μέρος των οποίων δίνεται η θέση τους σε μορφή κλάσματος. Εκτός των καρτών με τους αθλητές, οι συμμετέχοντες καλούνται να τοποθετήσουν στάσεις ανεφοδιασμού, βραβεία κ.α., των οποίων η θέση δίνεται και πάλι με κλάσματα.

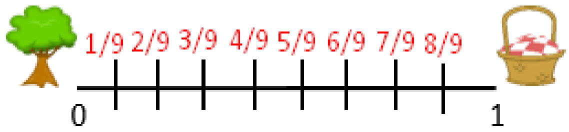
Σε κάθε τοποθέτηση, οι συμμετέχοντες λαμβάνουν ακριβείς οδηγίες σχετικά με την απόσταση την οποία πρέπει να ορίσουν ως μονάδα με την αριθμογραμμή. Επάνω στην κατασκευή υπάρχουν σημεία στα οποία είναι τοποθετημένα δέντρα, ζωάκια, playmobil αστυνόμος, κύριος με παγωτό κ.α., τα οποία λειτουργούν ως ορόσημα. Για παράδειγμα, μια εντολή έλεγε: *«Τα βραβεία είναι τοποθετημένα στα 8/9 της απόστασης που υπάρχει ανάμεσα από το πρώτο δέντρο μέχρι το καλάθι»*. Ο παίκτης καλείται αρχικά να μετακινήσει και να προσαρμόσει κατάλληλα την αριθμογραμμή σε αυτή την απόσταση, έπειτα να την χωρίσει σε ένατα και τέλος, να τοποθετήσει με το αμάξι τα βραβεία στα 8/9, επιλέγοντας το μπαστούνι που βρισκόταν στο αντίστοιχο σημείο με τα 8/9, στο κάτω μέρος της κατασκευής.

Σε περίπτωση που ο παίκτης βρίσκει την σωστή απάντηση επιβραβεύεται ηχητικά και λεκτικά αλλά και με βαθμούς. Σε περίπτωση λάθους το παιχνίδι τον προτρέπει να πάρει βοήθεια και μειώνει μερικούς βαθμούς. Αν επιλέξει την βοήθεια, ο δρόμος μπροστά του μετατρέπεται σε οθόνη, η οποία σε συνδυασμό με τις ηχητικές οδηγίες, του δείχνουν βηματικά τον τρόπο επίλυσης. Οι ακόλουθες εικόνες αποτελούν την βοήθεια για την θέση των βραβείων:

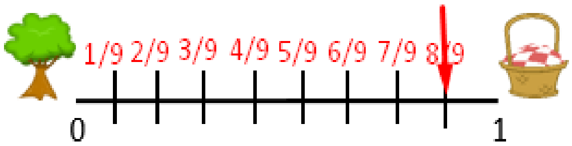

*«Όρισε την αριθμογραμμή σου στην απόσταση από το δέντρο ως το καλάθι»*




*«Χώρισέ την σε εννιά ίσα μέρη»*




*(εμφανίζονται και απαριθμούνται σταδιακά τα 9/9)*




*«Τοποθέτησε τα βραβεία στα 8/9»*

*(Παράλληλα, εμφανίζεται και το κόκκινο βέλος)*

**Εικόνα 27:** Βοήθεια συστήματος

**4.4 Ακολουθία δραστηριοτήτων και διδακτικοί στόχοι**

Οι δραστηριότητες, η επιλογή των κλασμάτων καθώς και η αλληλουχία με την οποία εμφανίζονται οι κάρτες δημιουργήθηκαν με στόχο τόσο της δημιουργική και ευχάριστη ενασχόληση των μαθητών με τα κλάσματα, όσο για την εξυπηρέτηση συγκεκριμένων μαθησιακών στόχων. Το παιχνίδι, ανάλογα με τον τρόπο χρήσης του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε κατά την πρώτη επαφή με τα κλάσματα ως εργαλείο παρέμβασης και εκπαίδευσης με δομημένη μαθησιακή ακολουθία, είτε σε μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού ως εργαλείο αξιολόγησης της ήδη αποκτειθήσας γνώσης.

Η αριθμογραμμή σαν εργαλείο δεν χρησιμοποιείται σχεδόν καθόλου στην ελληνική πραγματικότητα, γεγονός που προσδίδει μια έξτρα δυσκολία. Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε αυτή είναι αποδεδειγμένα, ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία για την κατανόηση των κλασμάτων. Ο «Μαραθώνιος των κλασμάτων» δίνει την δυνατότητα σε οποιοδήποτε εκπαιδευτικό, με μικρές αλλαγές στο Scratch, να δομήσει μια διαφορετική αλληλουχία, με διαφορετικά κλάσματα και διαφορετικά ζητούμενα. Έτσι, η ξύλινη επιφάνεια του από ένα γνωστικό μονοπάτι προς την κατανόηση των κλασμάτων μπορεί να μετατραπεί σε μια σειρά δραστηριοτήτων με έμφαση για παράδειγμα στα ισοδύναμα κλάσματα, ή στην πρόσθεση κλασμάτων κ.α.

Αναμένεται ότι μέσα από το παιχνίδι, η γνώση περί των κλασμάτων δε θα περιοριστεί μόνο στη σχέση μέρους-όλου και το κλάσμα θα αρχίσει να αντιμετωπίζεται πιο αφαιρετικά, ως αριθμός με συγκεκριμένη αξία, μέγεθος και θέση. Οι δραστηριότητες της διεπαφής στοχεύουν σε μαθησιακούς στόχους που εμπλέκουν τα εξής:

- ✓ Αντίληψη του μοναδιαίου διαστήματος αριθμογραμμής και ικανότητα σωστού χωρισμού της σε ίσα μέρη
- ✓ Τοποθέτηση κλασμάτων σε αριθμογραμμή
- ✓ Πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων. Οι πράξεις δεν απαιτούν την χρήση του κανόνα. Εκφράζονται ως αποστάσεις μεταξύ αθλητών και οι μαθητές έχοντας έτοιμη την μια αριθμογραμμή από προηγούμενη δραστηριότητα, μετακινούν την δεύτερη εμπρός (για πρόσθεση) ή πίσω (για αφαίρεση) για να τοποθετήσουν τον επόμενο αθλητή. Τους δίνεται μια ευκαιρία να δουν τις προσθαφαιρέσεις ανάλογα με το αποτέλεσμα τους και με την μετακίνηση στο χώρο και όχι απλά σαν αλγόριθμο.
- ✓ Σύγκριση κλασμάτων, μέσω ενσώματης δράσης και αλληλεπίδρασης με τα κλάσματα
- ✓ Ισοδυναμία κλασμάτων, έχοντας την ευκαιρία να παρατηρήσουν διαφορετικά κλάσματα, τα οποία όμως βρίσκονται στην ίδια θέση πάνω στην αριθμογραμμή. Γεγονός που γίνεται ακόμα πιο εύκολα αντιληπτό με την παράλληλη χρήση των δύο αριθμογραμμών, με διαφορετικό χωρισμό στην καθεμία.

**Μέρος 1ο Κάρτες**

- Οι δύο πρώτες κάρτες καλούν τον παίκτη να τοποθετήσει τα κλάσματα 3/4 και 1/2 του πρώτου χιλιομέτρου, όπου και είναι αρχικά τοποθετημένες οι κενές αριθμογραμμές. **Οι συμμετέχοντες καλούνται ρητά να τοποθετήσουν ένα παίκτη στην μία αριθμογραμμή και έναν στην άλλη.**
- Οι δύο επόμενες αποτελούν μία αλληλουχία. Τοποθετείται πρώτα 1/5 και στην συνέχεια ζητείται να τοποθετηθεί ο επόμενος αθλητής 4/5 πιο μπροστά (1/5+4/5=5/5). **Οι συμμετέχοντες καλούνται ρητά να τοποθετήσουν ένα παίκτη στην μία αριθμογραμμή και έναν στην άλλη.**

- Ζητείται να τοποθετηθεί το 7/10 στην απόσταση με αρχή την αρχή της διαδρομής και τέλος τον τερματισμό. Απαιτείται η αλλαγή στο μέγεθος της αριθμογραμμής.

Η επόμενη 5αδα καρτών δίνεται σε άλλο φοιτητή.

- Η πρώτη κάρτα απαιτεί μια απλά τοποθέτηση του 2/3 στο πρώτο χιλιόμετρο
- Οι δύο επόμενες αποτελούν αλληλουχία. Τοποθετείται πρώτα 2/4 και στην συνέχεια ζητείται να τοποθετηθεί ο επόμενος αθλητής 1/4 πιο μπροστά (2/4+1/4=3/4). **Οι συμμετέχοντες καλούνται ρητά να τοποθετήσουν τους παίκτες στην ίδια αριθμογραμμή.**
- Οι δύο τελευταίες του κάρτες είναι επίσης αλληλουχία, όμως δυσκολότερη καθώς απαιτείται η προσθήκη ολόκληρης μονάδας. Τοποθετείται πρώτα το 5/6 και στην συνέχεια ζητείται να τοποθετηθεί ο επόμενος αθλητής 6/6 πιο μπροστά. **Οι συμμετέχοντες καλούνται ρητά να τοποθετήσουν ένα παίκτη στην μία αριθμογραμμή και έναν στην άλλη.**

Πριν από έναρξη επισημαίνετε πως σε κάθε κάρτα πρέπει να ρυθμίσουν τις αριθμογραμμές ώστε να είναι ίδιο μέγεθος.

**Μέρος 2ο Κάρτες**

- Ο παίκτης καλείται να τοποθετήσει το 1/3 της απόστασης από την αρχή μέχρι το σκυλί - **απαιτείται σμίκρυνση της αριθμογραμμής**
- Ο παίκτης καλείται να τοποθετήσει την Τίνα στα 2/3 της απόστασης από την αρχή μέχρι το καλαθάκι που υπάρχει πάνω στη διαδρομή - **απαιτείται η μεγέθυνση της αριθμογραμμής.**
- Ο παίκτης καλείται να οριοθετήσει το μοναδιαίο διάστημα της αριθμογραμμής στην απόσταση από την αρχή μέχρι το καλάθι που υπάρχει πάνω στη διαδρομή και να τοποθετήσει την κάρτα στο 1/2 αυτής της απόστασης - **απαιτείται η μεγέθυνση της αριθμογραμμής**
- Η επόμενη κάρτα καλεί τον παίκτη να τοποθετήσει την Άννα στην **ίδια** απόσταση (αρχή μέχρι το καλαθάκι) 2/6 πιο πίσω από την Τίνα- **απαιτείται να χρησιμοποιηθούν παράλληλα και οι δύο αριθμογραμμές.** Η μια να δείχνει την θέση της Τίνας και η άλλη να γίνει ίδια σε μέγεθος (δηλαδή ίσες

κλασματικές μονάδες) και έπειτα να μετακινηθεί κατάλληλα ώστε να βρεθεί η θέση που είναι 2/6 πιο πίσω (2/3-2/6 → 2/3-1/3=1/3)

**Μέρος 3ο «Πιάσε το λάστιχο»:**

Σε αυτή τη φάση παρουσιάζεται μια σειρά μπλε καρτών. Οι φοιτητές παίρνουν στα χέρια τους 2 ράβδους, οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με λάστιχο. Κάθε κάρτα απαιτεί την σύγκριση 2 κλασμάτων. Οι κάρτες του <u>ενός παίκτη</u> για παράδειγμα ήταν οι ακόλουθες:

1) Ο Δημήτρης έτρεξε πολύ γρήγορα και βρίσκεται στα 2/5 του πρώτου χιλιομέτρου. Ο Μάριος έπεσε όμως βρίσκεται στα 4/5 του πρώτου χιλιομέτρου. Έλεγξε με τη σούστα τις θέσεις τους. Ποιος είναι πιο κοντά στον τερματισμό και γιατί; (σύγκριση με ΙΔΙΟ παρονομαστή)

2) Η Σάρα έτρεξε και αυτή. Βρίσκεται στο 3/4 του πρώτου χιλιομέτρου, ενώ η Ευτυχία βρίσκεται 3/5 της ίδιας απόστασης. Ποια είναι πιο κοντά στον τερματισμό; Πως το κατάλαβες; (σύγκριση με ΙΔΙΟ αριθμητή)

3) Ο Κωνσταντίνος και ο Γιάννης είναι και αυτοί εκεί. Ο Κώστας είναι 4/7 του πρώτου χιλιομέτρου, ενώ ο Γιάννης στα 2/6. Ποιος είναι πιο κοντά στον τερματισμό; Πως το κατάλαβες; (σύγκριση με σημείο αναφοράς το 1/2)

Οι δραστηριότητες αποσκοπούν στο:

1. Να εξοικειωθούν με την χρήση της αριθμογραμμής
2. Να αντιληφθούν την φύση, τη λειτουργία της και τα βασικά της χαρακτηριστικά
3. Να αντιληφθούν τα κλάσματα ως αριθμούς
4. Να είναι σε θέση να τοποθετήσουν κλάσματα επάνω στην αριθμογραμμή
5. Να είναι σε θέση να συγκρίνουν κλάσματα μεταξύ τους

Βασικός γνώμονας για την δημιουργία του, ήταν η επιθυμία να δημιουργηθεί μια ακολουθία δραστηριοτήτων, οπτικών αναπαραστάσεων, εμπειριών και επαφής με φυσικά αντικείμενα σε ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον, έτσι ώστε ακόμα και ένας μαθητής που δεν έχει τις απαιτούμενες γνώσεις στα κλάσματα και τις αριθμογραμμές να καταφέρει, ολοκληρώνοντας το παιχνίδι να πάρει αυτές τις βασικές γνώσεις. Βέβαια, για όσους έχουν έστω στοιχειώδεις γνώσεις, στόχος είναι να κατανοήσουν καλύτερα και σε βάθος. Τέλος, υποστηρίζεται πως εφόσον οι παίκτες δεν ήταν καθηλωμένοι μπροστά από ένα υπολογιστή, το σώμα τους εμπλέκεται και αυτό στην διαδικασία μάθησης μέσω του χειρισμού αντικειμένων και της κίνησης του κεφαλιού και του βλέμματος δεξιά και αριστερά, ανάλογα με το μέγεθος του κλάσματος, καθώς και της στάσης του σώματος μιας και ο παίκτης για να μετρήσει και να τοποθετήσει τα κλάσματα έπρεπε να έχει τα χέρια ανοιχτά. Έτσι, τα χέρια του θα δείχνουν κάθε στιγμή το αριθμητικό μέγεθος του κλάσματος ως γεωμετρική απόσταση. Ακόμα και οι ξεχωριστοί και έντονοι χτύποι των χεριών τους στο χειριστήριο ενώ χώριζε σε ίσα τμήματα της αριθμογραμμές, είναι σε θέση να αποτυπώσουν την διάτμηση της αριθμογραμμής στον εγκέφαλο ως «ίσα χτυπήματα-ίσα μέρη». Επιπρόσθετα, με τα λάστιχα οι συμμετέχοντες εμπλέκονται ακόμα πιο ενεργά αφού απαιτείται κατάλληλη δύναμη κάθε φορά ώστε να προσαρμοστεί η απόσταση.

Με όσα αναφέρθηκαν και λαμβάνοντας υπόψη τις έρευνες που στηρίζουν ξεχωριστά, τα θετικά οφέλη των εφαρμογών διάχυτου υπολογισμού, της συνεργατικότητας, της αριθμογραμμής όσον αφορά στην κατανόηση των κλασμάτων αλλά και της τεχνολογίας στην μάθηση γενικότερα, αναμένεται ο συνδυασμός όλων αυτών να δώσει ένα ελκυστικό, ευχάριστο προϊόν με οφέλη στο γνωστικό και συναισθηματικό τομέα.

# Κεφάλαιο 5. Μεθοδολογία

## 5.1 Σκοπός και Ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα διεπαφή σχεδιάστηκε έχοντας ως βασικό στόχο την βελτίωση της αναπαράστασης της νοερής αριθμογραμμής και κατ' επέκταση των κλασμάτων, καθώς και την κατάκτηση βασικών αριθμητικών ικανοτήτων με την εξάλειψη κυρίαρχων δυσκολιών που υπάρχουν στο πεδίο των κλασμάτων. Επιμέρους διδακτικοί στόχοι ήταν οι ακόλουθοι:

1. Να εξοικειωθούν οι μαθητές με την χρήση της αριθμογραμμής
2. Να αντιληφθούν την φύση, τη λειτουργία της και τα βασικά της χαρακτηριστικά
3. Να κατανοήσουν την έννοια των κλασμάτων ως αριθμούς
4. Να είναι σε θέση να τοποθετήσουν κλάσματα επάνω στην αριθμογραμμή και,
5. Να είναι σε θέση να συγκρίνουν κλάσματα μεταξύ τους

Ωστόσο, πέραν των γνωστικών στόχων, η δημιουργία του παρόντος περιβάλλοντος αποσκοπούσε στην

- Ανάπτυξη θετικών στάσεων, την πρόκληση ενδιαφέροντος και απόλαυσης της μαθησιακής εμπειρίας
- Αντίληψη της χρησιμότητας και της λειτουργικότητας σχετικά με την κατανόηση των κλασμάτων
- Σύνδεση σωματικών κινήσεων με τους αριθμούς

Στην παρούσα διπλωματική είναι η δημιουργήθηκε μιας διεπαφής επαυξημένης πραγματικότητας και αξιολογήθηκε. Η αξιολόγηση της πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια. Αρχικά, έγινε μια μεγάλη πιλοτική φάση όπου συμμετείχαν μαθητές Ε' και ΣΤ' Δημοτικού στο νομό Φλώρινας, έπειτα πραγματοποιήθηκε παρουσίαση και αξιολόγηση σε ένα τμήμα Στ' Δημοτικού στο νομό Άρτας και τέλος, αξιολογήθηκε από εν ενεργεία εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας καθώς και από διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Συγκεκριμένα, ζητήθηκε η αξιολόγηση της διεπαφής ως προς

- Την ευχρηστία της στο πλαίσιο της τάξης

- Της λειτουργικότητα της σχετικά με τον τομέα των κλασμάτων
- Την ύπαρξη ή μη, παρακίνησης των μαθητών στην γνώση
- Την ικανότητα της διεπαφής να προωθήσει την κατανόηση των κλασμάτων καθώς και τον τρόπο με τον οποίο το καταφέρνει

Τα ερευνητικά ερωτήματα που επιχείρησε η μελέτη να διερευνήσει είναι τα ακόλουθα:

1. Είναι η παρούσα διεπαφή κατάλληλη για την διδασκαλία των κλασμάτων στο Δημοτικό;
2. Ποια είναι τα δομικά στοιχεία της διεπαφής που θα βελτιώσουν την κατανόηση των κλασμάτων;
3. Είναι ικανή η διεπαφή να ενταχθεί στο πλαίσιο της τάξης;

## 5.2 Δείγμα

Το δείγμα αποτελούνταν από 38 μαθητές (28 στο Νομό Φλώρινας και 10 στο Νομό Άρτας), 4 εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και 3 διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

## 5.3 Διαδικασία

Η αξιολόγηση πραγματοποιήθηκε σε 3 φάσεις. Στην πρώτη φάση συμμετείχαν μαθητές από Δημοτικά του Νομού Φλώρινας, στην δεύτερη φάση αξιολόγησαν την διεπαφή μαθητές ενός τμήματος Στ' τάξης στην Άρτα και στην τρίτη φάση, η διεπαφή παρουσιάστηκε και αξιολογήθηκε από διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας και από εν ενεργεία εκπαιδευτικούς.

Αναλυτικότερα, η πρώτη φάση διεξήχθη στα πλαίσια μιας ετήσιας έκθεσης αλληλεπιδραστικών διεπαφών που κατασκευάζονται κάθε χρόνο από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές των «Επιστημών Αγωγής», τις οποίες και παρουσιάζουν σε ελεύθερο χώρο του Παιδαγωγικού Τμήματος Δυτικής Μακεδονίας και είχε ως στόχος να εντοπιστούν σημεία που απαιτούν βελτίωση. Για κάθε μια δυάδα μαθητών, Ε' ή ΣΤ' τάξης, η ερευνήτρια με την βοήθεια μιας ακόμα μεταπτυχιακής φοιτήτριας, αφού εξηγούσε στους μαθητές περί τίνος πρόκειται, αφηγούνταν την ιστορία και έδινε καθοριστικές οδηγίες κυρίως για τα χειριστήρια ενώ έπειτα τους ζητούσε να εμπλακούν στην διαδικασία. Έτσι, όταν ολοκλήρωναν το παιχνίδι ήταν σε θέση να εκφράσουν την άποψη τους και την εμπειρία μέσω μιας συνέντευξης που λάμβανε χώρα αμέσως μετά την αλληλεπίδραση. Επιπλέον, μέσω ενός ερωτηματολογίου εξέφραζαν την άποψη τους σχετικά με την ευχρηστία και την καταλληλόλητα της διεπαφής. Τέλος, όλη η διαδικασία αλληλεπίδρασης μαγνητοσκοπήθηκε με βίντεο, ώστε να υπάρξει ανατροφοδότηση σχετικά με τον τρόπο αλληλεπίδρασης, τις κινήσεις των μαθητών κατά την ενασχόληση τους με το παιχνίδι, αλλά και την αποκωδικοποίηση του τρόπου σκέψης που ακολούθησαν και της συνεργασίας μεταξύ τους.

Στην δεύτερη φάση, η διεπαφή στήθηκε μέσα στην τάξη και οι μαθητές (μαθητές=10) ανά δυάδες είχαν την ευκαιρία να παίξουν. Είχαν προηγηθεί μικρο-διδασκαλίες για τα κλάσματα με την βοήθεια αριθμογραμμών με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν από την ερευνήτρια 5 διδακτικές ώρες αναφορικά με την χρήση αριθμογραμμών, την τοποθέτηση κλασμάτων, τα ομώνυμα κλάσματα και την σύγκριση κλασμάτων. Στην συνέχεια οι μαθητές έπαιξαν με την εφαρμογή και την αξιολόγησαν.

Στην τρίτη φάση, η διεπαφή παρουσιάστηκε στους 3 διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας, οι οποίοι κλήθηκαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις της συνέντευξης. Έπειτα, η διεπαφή παρουσιάστηκε σε 4 εκπαιδευτικούς οι οποίοι είχαν την ευκαιρία να παίξουν και να δουν τόσο την διεπαφή όσο και τον προγραμματισμό που απαιτείται για να λειτουργήσει.

### 5.4 Εργαλεία συλλογής δεδομένων

Με στόχο την αξιολόγηση της διεπαφής όπως προαναφέρθηκε, οι συμμετέχοντες αρχικά δραστηριοποιήθηκαν στην εφαρμογή. Πραγματοποιήθηκε παρουσίαση των δυνατοτήτων της και γινόταν παράλληλα εκπαιδευτικές νύξεις αναφορικά με τον τρόπο χρήσης της. Με το πέρας των δραστηριοτήτων οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο για την αξιολόγηση της ευχρηστίας και αποτελεσματικότητας και πήραν μέρος σε μια συνέντευξη, όπου θα αναλυθεί στην συνέχεια. Οι διδάσκοντες τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και οι εκπαιδευτικοί πήραν και αυτοί μέρος σε μία συνέντευξη με διαφορετικές και πιο εξειδικευμένες ερωτήσεις.

Η συλλογή δεδομένων στην πρώτη φάση βασίστηκε σε ερωτηματολόγιο συμπεριφοράς και σε ημιδομημένες συνεντεύξεις ομάδων. Το ερωτηματολόγιο στάσεων συνίστατο σε 22 ερωτήσεις 5 βάθμιας κλίμακας Likert και εκεί αξιολογήθηκε το απτό περιβάλλον όσον αφορά τη χρηστικότητα και την ελκυστικότητά του. Μερικά από τα στοιχεία των ερωτηματολογίων προέκυψαν από το AttrakDiff (Hassenzahl & Monk, 2010) και το Flow State Scale (Jackson & Marsh, 1996).

Οι ημιδομημένες συνεντεύξεις έλαβαν χώρα αμέσως μετά το πέρας κάθε συνεδρίας με στόχο την αναγνώριση των ποιοτικών απόψεων των μαθητών για το περιβάλλον. Οι μαθητές άκουγαν ορισμένες ερωτήσεις, έχοντας παράλληλα την δυνατότητα να σχολιάσουν ελεύθερα ότι επιθυμούσαν σχετικά με την διεπαφή. Οι ερωτήσεις επικεντρώθηκαν σε αυτό που οι μαθητές απολάμβαναν, σε ότι δεν τους άρεσε και τους δυσκόλευε και τις αντιλήψεις τους όσον αφορά την επιτυχία της μάθησης, την αποτελεσματικότητα του περιβάλλοντος και την σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Όλες οι συνεντεύξεις μεταγράφηκαν και στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν και συγκρίθηκαν εντός και μεταξύ περιπτώσεων.

Οι συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών και των διδασκόντων είχαν 5 κοινές ερωτήσεις με πυλώνες την ευχρηστία, το ενδιαφέρον των μαθητών, την καταλληλότητα της διεπαφής, και την αξιολόγηση των δραστηριοτήτων και των δύο δυναμικών αριθμογραμμών. Στην συνέχεια το επιστημονικό προσωπικό είχε 5 διαφορετικές και πιο εξειδικευμένες ερωτήσεις και αντίστοιχα και οι εκπαιδευτικοί. Αναλυτικότερα, για τους διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας οι μεταβλητές προς διερεύνηση ήταν

- η καινοτομία της διεπαφής
- η ένταξη σε σχολικό πλαίσιο
- η προώθηση της ενσώματης μάθησης
- η χρησιμότητα της

Οι μεταβλητές στις ερωτήσεις των εκπαιδευτικών ήταν

- η συνεισφορά της διεπαφής στην εκμάθηση των κλασμάτων
- η σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία
- ο εντοπισμός δυσκολιών που αντιμετωπίζει η διεπαφή
- ο εντοπισμός εννοιών που γίνονται αντιληπτές
- η ικανότητα χρήσης της διεπαφής σε σχολικό πλαίσιο

Οι ερωτήσεις κινήθηκαν γύρω από τις έννοιες της λειτουργικότητας, της απεικόνισης και της συνάφειας. Σύμφωνα με τον Kalawsky (1999), η διεπαφή θα πρέπει να είναι σε θέση να παρέχει το επίπεδο της λειτουργικότητας που αναμένει ο χρήστης για να ολοκληρωθεί μια εργασία, οι πληροφορίες που εμφανίζονται στον χρήστη πρέπει να είναι κατανοητές, ενώ η διεπαφή πρέπει να είναι σαφής και απαραίτητη για την ολοκλήρωση του έργου, καθώς επίσης θα πρέπει να λειτουργεί με αναμενόμενο και αξιόπιστο τρόπο. Στόχος των ερωτήσεων είναι να αξιολογηθεί τόσο η λειτουργικότητα όσο και η καταλληλότητα της διεπαφής για την ενίσχυση της μάθησης των κλασμάτων που αποτελεί ένα από το δυσκολότερο πεδία στο σχολικό πλαίσιο.

# Κεφάλαιο 6. Αποτελέσματα

## 6.1 Αποτελέσματα πρώτης φάσης

### 6.1.1 Ερωτηματολόγιο στάσεων

Όπως προαναφέρθηκε, από την χρήση των AttrakDiff (Hassenzahl & Monk, 2010) και Flow State Scale (Jackson & Marsh, 1996) και από την ανάλυση των ερωτήσεων προέκυψαν οι ακόλουθες μεταβλητές:

- **Ευκολία στη χρήση** (3 στοιχεία): Μετρούν πόσο εύκολο είναι να χρησιμοποιηθεί το σύστημα.

- **Αυτόνομη εμπειρία** (3 στοιχεία): Μέτρηση του βαθμού στον οποίο προσφέρει το σύστημα εσωτερική εκπλήρωση των χρηστών.

- **Αντιληπτή μάθηση** (3 στοιχεία): Μετράει τις αντιλήψεις των μαθητών για την εκπαιδευτική αξία του συστήματος ·

- **Συγκέντρωση χρήστη** (3 στοιχεία): Μετράει την αντίληψη των μαθητών για την συγκέντρωσή τους κατά τη χρήση του συστήματος ·

- **Πραγματική ποιότητα** (4 στοιχεία): Μέτρηση του βαθμού στον οποίο το σύστημα καθιστά δυνατή στο χρήστη την επίτευξη των στόχων του

- **Ποιότητα προσομοιώσεων (Hedonic Quality – Stimulation)** (3 στοιχεία): Μέτρηση του βαθμού στον οποίο το σύστημα θεωρείται καινοτόμο και ενδιαφέρον, προκαλεί κίνητρο και διέγερση

- **Ταύτιση με το εκπαιδευτικό περιβάλλον (Hedonic Quality-Identity)** (3 στοιχεία): Μέτρηση του βαθμού στον οποίο το σύστημα επιτρέπει στο χρήστη να ταυτίζεται με αυτό.

Όλες οι ερωτήσεις ήταν ερωτήσεις κλίμακας Likert 5 σημείων και όλες οι μεταβλητές μπορούν να είναι θεωρούνται συνεπείς δεδομένου ότι είχαν ικανοποιητικό Cronbach's a όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.

| | *Min.* | *Max.* | *Mean* | *SD* | *Cronbach's a* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ευκολία* | 3.33 | 5.00 | 4.32 | 0.51 | 0.75 |
| *Συγκέντρωση* | 2.67 | 5.00 | 4.40 | 0.62 | 0.82 |
| *Αυτόνομη εμπειρία* | 3.67 | 5.00 | 4.67 | 0.45 | 0.76 |
| *Προτιμήσεις μάθησης* | 1 | 5.00 | 3.92 | 1.08 | 0.83 |
| *Πραγματική ποιότητα* | 2.5 | 5.00 | 4.21 | 0.67 | 0.75 |
| *Ταύτιση* | 3.33 | 5.00 | 4.62 | 0.53 | 0.75 |
| *Ποιότητα προσομοιώσεων* | 3.33 | 5.00 | 4.62 | 0.51 | 0.80 |

**Πίνακας 1.** Απαντήσεις μαθητές στο ερωτηματολόγιο στάσεων

Η συνολική αξιολόγηση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών ήταν πολύ θετική. Όπως φαίνεται στον Πίνακας 1, οι μαθητές αξιολόγησαν το προτεινόμενο περιβάλλον ως εύκολο στη χρήση και το έδειξε να κρατάει την προσοχή τους για όλη τη διάρκεια της εκπαιδευτικής συνεδρίασης. Οι μαθητές ήταν ευχαριστημένοι από την εμπειρία τους (αυτόνομη εμπειρία) και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία αν θεωρήσουμε ότι αλληλεπιδρούν με ένα απαιτητικό και δύσκολο, ως προς την κατανόηση, περιεχόμενο για 45 λεπτά χωρίς διακοπή. Είναι ενδιαφέρον ότι οι μαθητές δεν είχαν μια συγκλίνουσα άποψη σχετικά με το αν η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι ένας προτιμητέος τρόπος για να μάθουν για τα κλάσματα στο σχολικό περιβάλλον, καθώς η σχετική μεταβλητή είχε μέτρια θετική αξία και την υψηλότερη τυπική απόκλιση. Μελετώντας περισσότερο τις απαντήσεις των μαθητών, εντοπίστηκε ότι πέντε μαθητές ήταν έντονα αρνητικοί στην εκμετάλλευση του περιβάλλοντος στο σχολείο (M = 1,99, SD = 0,52) ενώ οι υπόλοιποι μαθητές ήταν θετικοί (M = 4,34, SD = 0,59). Φαίνεται ότι αυτοί οι πέντε μαθητές, ενώ σκέφτονται θετικά την εμπειρία τους και το δυναμικό του περιβάλλοντος, πίστευαν ότι το περιβάλλον δεν είναι επαρκές για να μάθουν για τα κλάσματα στα περιβάλλοντα της τάξης. Αυτό το εύρημα αξίζει να διερευνηθεί περισσότερο.

Οι απαντήσεις των μαθητών στο μίνι ερωτηματολόγιο AttrakDiff επιβεβαίωσαν ότι θεωρούν το περιβάλλον κατάλληλο για την επίτευξη κατανόησης των κλασμάτων (πραγματική ποιότητα). Εκτίμησαν επίσης το περιβάλλον ως διασκεδαστικό, πρωτότυπο και συμμετείχαν χωρίς στιγμές πλήξης και δυσφορίας (ποιότητα). Οι απαντήσεις των μαθητών έδειξαν ότι αυτοπροσδιορίστηκαν με αυτό (ταύτιση) και πίστευαν ότι πρόσφερε εμπνευσμένες και νέες λειτουργίες και αλληλεπιδράσεις (προσομοιώσεις).

Πιο αναλυτικά τα αποτελέσματα για τις εκάστοτε ερωτήσεις αναλύονται παρακάτω. Όσον αφορά τον άξονα της ευχρηστίας, για λόγους αξιοπιστίας οι προτάσεις Α.2 και Α.3 είναι αντίστροφα διατυπωμένες. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (85,7%) διαφώνησε με την άποψη πως το παιχνίδι είναι ανεξήγητα πολύπλοκο και μάλιστα το 60,7% διαφώνησε απόλυτα. Παράλληλα, το 89,3% υποστήριξε πως η διεπαφή ήταν εύκολη στην χρήση. Τέλος, εμπλέκοντας και το συναισθηματικό παράγοντα, το 82,2% θα επιθυμούσε να χρησιμοποιεί την εφαρμογή συχνά, ενώ κανένας μαθητής δεν απάντησε το αντίθετο.

**Ευχρηστία**

| | *Διαφωνώ απόλυτα* | *Διαφωνώ* | *Ούτε συμφωνώ Ούτε διαφωνώ* | *Συμφωνώ* | *Συμφωνώ απόλυτα* | *Σύνολο μαθητών που απάντησαν* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Α.1*** *Θα ήθελα να χρησιμοποιώ την εφαρμογή συχνά* | *0%* | *0%* | *17,8%* | *42,9%* | *39,3%* | *100%* |
| ***Α.2*** *Η εφαρμογή μου φάνηκε πολύπλοκη χωρίς να υπάρχει λόγος* | *60,7%* | *25%* | *3,5%* | *7,1%* | *3,5%* | *100%* |
| ***Α.3*** *Μου φάνηκε εύκολο να χρησιμοποιήσω την εφαρμογή* | *0%* | *0%* | *10,7%* | *39,3%* | *50%* | *100%* |

Η δεύτερη κατηγορία αφορά την άποψη των μαθητών σχετικά με το αν η διεπαφή κατάφερε να διατηρήσει την προσοχή τους. Όπως φαίνεται παρακάτω, το 85,1% του δείγματος απάντησε πως ήταν απόλυτα εστιασμένοι σε αυτό που έκαναν, ενώ κανένας μαθητής δεν διαφώνησε με αυτό. Επιπλέον, οι μαθητές σε ποσοστό 82,1%, υποστήριξαν πως ήταν προσηλωμένοι τόσο στις περιγραφές, όσο και στον τρόπο με τον οποίο έπρεπε να αλληλεπιδράσουν. Όσον αφορά στο αν υπήρξαν δυσκολίες στην διατήρηση τις προσοχής, οι περισσότεροι μαθητές (82,2%) απάντησαν πως δεν είχαν δυσκολίες με εξαίρεση ένα 10%, το οποίο υποστήριξε πως ορισμένες φορές αυτές υπήρξαν.

**Συγκέντρωση προσοχής**

| | *Διαφωνώ απόλυτα* | *Διαφωνώ* | *Ούτε συμφωνώ Ούτε διαφωνώ* | *Συμφωνώ* | *Συμφωνώ απόλυτα* | *Σύνολο μαθητών που απάντησαν* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Β.1*** *Κατά τη χρήση της εφαρμογής, η προσοχή μου ήταν απολύτως εστιασμένη σε αυτό που έκανα* | 0% | 0% | 14,8% | 25,9% | 59,2% | 100% |
| ***Β.2*** *Ήμουν συγκεντρωμένος στις περιγραφές της εφαρμογής αλλά και στο τι πρέπει να κάνω* | 3,5% | 0% | 10,7% | 21,4% | 60,7% | 100% |
| ***Β.3*** *Δεν είχα δυσκολίες στο να μείνω συγκεντρωμένος* | 7,1% | 3,5% | 7,1% | 39,3% | 42,9% | 100% |

Η τρίτη κατηγορία έχει να κάνει με τον συναισθηματικό αντίκτυπο (αυτόνομη εμπειρία) που άφησε η εμπειρία αλληλεπίδρασης στους μαθητές. Πάνω από το 93% του δείγματος (με το 75% να συμφωνεί απόλυτα) απάντησε πως απόλαυσαν την εμπειρία μάθησης, πως ήταν ιδιαίτερα ικανοποιητική και πως τους άφησε ένα όμορφο συναίσθημα. Σχεδόν κανένας από τους μαθητές δεν διαφώνησε με τις παραπάνω προτάσεις.

**Αυτόνομη εμπειρία**

| | *Διαφωνώ απόλυτα* | *Διαφωνώ* | *Ούτε συμφωνώ Ούτε διαφωνώ* | *Συμφωνώ* | *Συμφωνώ απόλυτα* | *Σύνολο μαθητών που απάντησαν* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Γ.1*** *Απόλαυσα πραγματικά την εμπειρία μάθησης* | 0% | 0% | 7,1% | 17,9% | 75% | 100% |
| ***Γ.2*** *Η μαθησιακή εμπειρία αυτή μου άφησε ένα όμορφο συναίσθημα* | 3,5% | 0% | 0% | 28,6% | 67,9% | 100% |
| ***Γ.3*** *Η μαθησιακή εμπειρία αυτή ήταν ιδιαίτερα ικανοποιητική* | 0% | 0% | 3,5% | 21,4% | 75% | 100% |

Η τέταρτη κατηγορία, αφορά στις απόψεις των μαθητών για την γνωστική αποτελεσματικότητα της εμπειρίας τους συγκριτικά με το σχολείο. Το 67,8% των μαθητών θα προτιμούσε να μάθει τα κλάσματα στο σχολείο με τη χρήση αυτής της εφαρμογής, ενώ το 25% περίπου του δείγματος διαφώνησε με την πρόταση. Οι περισσότεροι μαθητές (67,9%) θεώρησαν ότι με την εφαρμογή αυτή είναι σε θέση να μάθει πιο γρήγορα από ότι στο σχολείο, ενώ γύρω στο 27% του δείγματος διαφώνησε ή δήλωσε αναποφάσιστο. Τέλος, το 68% του δείγματος θεώρησε πως με την διεπαφή μπορεί να μάθει περισσότερα και καλύτερα από ότι στο σχολείο.

**Προτιμήσεις μάθησης**

| | *Διαφωνώ απόλυτα* | *Διαφωνώ* | *Ούτε συμφωνώ Ούτε διαφωνώ* | *Συμφωνώ* | *Συμφωνώ απόλυτα* | *Σύνολο μαθητών που απάντησαν* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Δ.1*** *Θα προτιμούσα να μάθαινα στο σχολείο για το συγκεκριμένο θέμα με τη χρήση αυτής της εφαρμογής* | 14,3% | 10,7% | 7,1% | 21,4% | 46,4% | 100% |
| ***Δ.2*** *Με αυτή την εφαρμογή, μπορώ να μάθω πιο γρήγορα από ότι στο σχολείο* | 3,5% | 10,7% | 17,9% | 17,9% | 50% | 100% |
| ***Δ.3*** *Έτσι, μπορώ να μάθω περισσότερα και καλύτερα από ότι στο σχολείο* | 7,1% | 7,1% | 17,9% | 25% | 42,9% | 100% |

Η πέμπτη και τελευταία κατηγορία αφορά στην αξιολόγηση του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος από τους μαθητές. Σε γενικές γραμμές, όπως παρουσιάζεται παρακάτω, η διεπαφή άρεσε στους μαθητές και την αξιολόγησαν θετικά στην πληθώρα των κατηγοριών. Για παράδειγμα, το 85,7% του δείγματος βαθμολόγησε την εφαρμογή ως ελκυστική, το 82,1% ως πολύ πρακτική και καλόγουστη, το 92,9% ως καλής ποιότητας διεπαφή, το 82% ως ξεκάθαρη στη χρήση και πάνω από το 83% ως πολύ δημιουργική. Αξίζει να σημειωθεί πως στην συγκεκριμένη κατηγορία δεν συμμετείχε το 100% των μαθητών σε όλες τις προτάσεις, εξαιτίας έλλειψης χρόνου. Συνεπώς, στις περισσότερες απαντήσεις έχουν ανταποκριθεί περίπου 27 μαθητές, δηλαδή το 96,4% του συνόλου που αλληλεπίδρασαν με την διεπαφή.

**Αξιολόγηση εκπαιδευτικού περιβάλλοντος**

| | *Διαφωνώ απόλυτα* | *Διαφωνώ* | *Ούτε συμφωνώ Ούτε διαφωνώ* | *Συμφωνώ* | *Συμφωνώ απόλυτα* | *Σύνολο μαθητών που απάντησαν* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Ε.1** απλό – περίπλοκο* | 35,7% | 28,6% | 28,6% | 3,5% | 3,5% | 100% |
| ***Ε.2** άσχημο - ελκυστικό* | 0% | 3,5% | 7,1% | 25% | 60,7% | 96,4% |
| ***Ε.3** πολύ πρακτικό - καθόλου πρακτικό* | 57,1% | 25% | 10,7% | 3,5% | 3,5% | 100% |
| ***Ε.4** καλόγουστο - κακόγουστο* | 71,4% | 10,7% | 10,7% | 3,5% | 0% | 96,4% |
| ***Ε.5** προβλέψιμο – καθόλου προβλέψιμο* | 42,9% | 21,4% | 10,7% | 17,9% | 3,5% | 96,4% |
| ***Ε.6** κακής ποιότητας - καλής ποιότητας* | 3,5% | 0% | 0% | 14,3% | 78,6% | 96,4% |
| ***Ε.7** χωρίς φαντασία - δημιουργικό* | 0% | 0% | 7,1% | 17,9% | 71,4% | 96,4% |
| ***Ε.8** καλό – κακό* | 67,9% | 21,4% | 3,5% | 0% | 0% | 92,9% |
| ***Ε.9** σε μπερδεύει - ξεκάθαρη η χρήση του* | 0% | 3,5% | 10,7% | 35,7% | 46,4% | 96,4% |
| ***Ε.10** βαρετό - συναρπαστικό* | 0% | 3,5% | 3,5% | 28,6% | 60,7% | 96,4% |

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, πέραν των ερωτηματολογίων συλλέχθηκαν και ποιοτικά δεδομένα μέσω ημιδομημένων συνεντεύξεων, όπου οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εκφράσουν πιο ανοιχτά τις απόψεις τους. Επιπλέον, καθ’ όλη τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης των μαθητών με την διεπαφή, η διαδικασία βιντεοσκοπήθηκε με στόχο την ύπαρξη πιο ολοκληρωμένων συμπερασμάτων για τον τρόπο χρήσης της από τους μαθητές. Όλα τα δεδομένα μεταγράφηκαν και κωδικοποιήθηκαν.

### 6.1.2 Συνεντεύξεις

Στις συνεντεύξεις, οι μαθητές αποκάλυψαν την αρχική τους ενόχληση όταν ξεκίνησαν το παιχνίδι, καθώς η συντριπτική πλειοψηφία τους είχε αρνητική προδιάθεση για να μάθει για τα κλάσματα. Ήταν ένα σημαντικό επίτευγμα ότι το περιβάλλον αντέστρεψε αυτή την άποψη και κέρδισε την προσοχή τους. Οι μαθητές θεώρησαν ότι το περιβάλλον ήταν πιο πρακτικό, πιο συμμετοχικό και πιο παιγνιώδες από την τυπική μάθηση στα σχολεία. Υποστήριξαν επίσης ότι το περιβάλλον τους βοήθησε να αναπτύξουν την κατανόησή τους τόσο σε σχέση με τις αριθμογραμμές όσο και με τις κλασματικές έννοιες.

> *Μας άρεσε ο τρόπος που διδάσκετε μαθηματικά, γιατί εμείς στο σχολείο κάνουμε μόνο θεωρία και πρακτική.*
>
> *Μου άρεσε όλο το παιχνίδι, αλλά αυτό δεν το περίμενα αφού δεν μου άρεσε τα κλάσματα, αλλά ήταν πραγματικά καλό.*
>
> *Σκεφτήκαμε ότι αυτό το παιχνίδι θα ήταν πολύ δύσκολο γιατί ήταν για τα κλάσματα, αλλά τώρα που έχουμε παίξει, ήταν διαφορετικό, εύκολο.*
>
> *... αλλά τώρα κατάλαβα καλύτερα τις αριθμογραμμές και νομίζω ότι το παιχνίδι είναι χρήσιμο και τα άλλα παιδιά θα τα καταλάβουν καλύτερα.*
>
> *Το περιβάλλον με βοήθησε εξαιτίας του τρόπου παρουσίασης των κλασμάτων και των ωραίων ερωτημάτων, τα καταλάβαμε καλύτερα.*

Οι μαθητές χαρακτήρισαν τα ακόλουθα 5 στοιχεία ως τα κύρια πλεονεκτήματα του προτεινόμενου περιβάλλοντος:

(Α) ***την αντιπροσωπευτική ισχύ της αλληλεπιδραστικής αριθμογραμμής και τον εύκολο χειρισμό της.*** Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις αριθμογραμμές σε διαφορετικές θέσεις, με διαφορετικά μεγέθη και διαφορετικά τμήματα, αποκτώντας έτσι μια πιο δυναμική και ευέλικτη αντίληψη γι' αυτές. Η επαύξηση των αριθμογραμμών σε ένα χώρο με φυσικά αντικείμενα τις έκανε πιο εκδηλωτικές, ενώ η χρησιμότητά τους στο παιχνίδι ήταν καθοριστική. Ως εκ τούτου, οι αλληλεπιδραστικές αριθμογραμμές ήταν ένα εύκολο και γρήγορο εργαλείο για χρήση.

> *Τις καταλαβαίνω καλύτερα (αριθμογραμμές), διότι, εδώ, είναι πιο εκφραστικές και είναι σαν να τα μάθαμε μόνοι μας.*

*Αντιμετώπισα πολλές δυσκολίες με τις σχολικές ασκήσεις και φαινόταν πολύ πιο εύκολη εδώ. Εδώ δεν γράφω, κάνω ένα κλικ στα κουμπιά και καταλαβαίνω αν η επιλογή μου ήταν σωστή, ενώ στο σχολείο διορθώνετε από τον δάσκαλο και πρέπει να περιμένω, δεν ξέρω αν απάντησα σωστά [αμέσως].*

*[Μου άρεσε] γιατί σε κάνει να σκέφτεσαι. Δεν δίνει τις λύσεις όπως το κάνει το βιβλίο. Σκέφτεσαι. Είναι ακόμα πιο διασκεδαστικό.*

*(Β)* ***Την αυθεντικότητα του περιβάλλοντος.*** Το περιβάλλον αντιπροσώπευε με πρακτικό τρόπο και σε πραγματικό κόσμο, μαθηματικές έννοιες που οι μαθητές είχαν προσεγγίσει στο παρελθόν μόνο θεωρητικά. Για παράδειγμα, η προσθήκη των κλασμάτων, η οποία απαιτούσε τη χρήση και των δύο αριθμογραμμών, έλαβε μια απτή μορφή. Οι αλληλεπιδραστικές αριθμογραμμές σε αυτά τα παραδείγματα λειτουργούσαν ως υπολογιστικά εργαλεία που οπτικοποιούσαν και βοηθούσαν τους μαθητές να κατανοήσουν τις αντίστοιχες δραστηριότητες.

*Για παράδειγμα, όταν μιλούσαμε για τα 2/8 τα οποία δεν μας ήταν γνωστά [τους ζητήθηκε να προσθέσουν αυτό το κλάσμα στη θέση ενός αθλητή], το σκεφτήκαμε καλύτερα στο παιχνίδι και το λύσαμε. Το περιβάλλον με βοήθησε. Ήταν εύκολο. Παρείχε περισσότερα πράγματα για να τοποθετήσουμε [σε μια αριθμογραμμή] και ήταν ευκολότερο να τα βρεις ενώ όταν βρίσκεσαι στο σχολείο, για παράδειγμα, έχεις ένα πράγμα και απλά πρέπει να το βάλεις σε αριθμογραμμή.*

(Γ) ***Το σύστημα ανάδρασης***. Η ανατροφοδότηση διαρθρώθηκε με βάση τα βήματα που απαιτούνται για τη διαχείριση των αλληλεπιδραστικών αριθμογραμμών. Ωστόσο, η καθοδήγηση ανατροφοδότησης προωθούσε επίσης έναν συγκεκριμένο τρόπο σκέψης. Το σύστημα ανάδρασης ανέλυε πάντα στους μαθητές πώς να μετακινήσει αρχικά την αρχή της αριθμογραμμής στην κατάλληλη θέση, πώς να προσαρμόσετε το μήκος της, πώς να αλλάξετε τις διαιρέσεις της και, στη συνέχεια, πώς να προσδιορίσετε το κλάσμα στη αριθμογραμμή σε κάθε δραστηριότητα. Αυτός είναι ακριβώς ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές έπρεπε να σκεφτούν για την ολοκλήρωση των καθηκόντων.

*Ήταν ευκολότερο να καταλάβουμε τα κλάσματα όπως εξηγούνται από το σύστημα.*

*Είχε επίσης το σύστημα βοήθειας που μας βοήθησε πολύ ... γιατί εξηγεί [τα κλάσματα] σε εμάς.*

(Δ) ***Ο ψυχαγωγικός χαρακτήρας***. Οι δραστηριότητες ήταν παιγνιώδεις και οι μαθητές υπογράμμισαν ότι έμαθαν σχετικά με τα κλάσματα ενώ διασκέδαζαν. Τους άρεσαν ιδιαιτέρως τα διάφορα στοιχεία-βοηθήματα για το ενισχυμένο μοντέλο (π.χ. μικρά ζώα, playmobil, κάρτες αθλητών) και σύγκριναν συχνά αυτό το είδος μάθησης με εκείνο της ανάγνωσης ενός βιβλίου.

*Δεν μας αρέσει πολύ το βιβλίο. Εδώ είχαμε ένα μάθημα που μας άρεσε.*

*Με αυτόν τον τρόπο τα καταλαβαίνουμε καλύτερα [κλάσματα], αλλά περνάμε και καλά*

(Ε) ***Συνεργασία***. Οι μαθητές σημείωσαν αρκετές φορές ότι η συνεργασία και η συνεχής ανταλλαγή ρόλων ήταν πολύ επωφελείς για την πρόοδο του παιχνιδιού και την ανάπτυξη της κατανόησης. Δήλωσαν ότι αισθάνονται πιο σίγουροι σε αυτό το πλαίσιο συνεργασίας και τόνισαν ότι ήταν σε θέση να βοηθήσουν ο ένας τον άλλον.

*Ναι, συνεργαστήκαμε πολύ και με βοήθησε πολύ αυτό.*

*Εργαζόμασταν μαζί. Αν κάποιος δεν μπορούσε να συνεχίσει, ο άλλος τον βοήθησε.*

*Η συνεργασία μας βοήθησε να κερδίσουμε.*

### 6.1.3 Βιντεοσκόπηση

Οι μαθητές, όπως φαίνεται και στο βίντεο, χρειάστηκαν κάποιο χρόνο για να εξοικειωθούν με τον χειρισμό των αριθμογραμμών και να αναγνωρίσουν τον τρόπο εφαρμογής τους στα προβλήματα που παρουσιάζονταν. Μετά από αυτό, οι περισσότεροι αγωνιζόταν με τον τρόπο που έπρεπε να χωριστεί η αριθμογραμμή. Το κύριο πρόβλημα ήταν ότι αντιστοιχούσαν τον αριθμό του παρονομαστή με τις διαχωριστικές γραμμές και δεν μπορούσαν να διακρίνουν ότι τα τμήματα της αριθμογραμμής ήταν περισσότερο κατά ένα. Για παράδειγμα, στο κλάσμα α/β, οι μαθητές χώριζαν την αριθμογραμμή σε β+1 μέρη, αφού δεν υπολόγιζαν το τελευταίο τμήμα. Το εννοιολογικό αυτό λάθος έχει επισημανθεί και σε άλλες έρευνες (Pearn & Stephens, 2007) και είναι μια καλά εντοπισμένη εσφαλμένη αντίληψη.

Σύμφωνα με την ανάλυση βίντεο, οι μαθητές απέφευγαν να χρησιμοποιήσουν την δεύτερη αριθμογραμμή μέχρι το τέλος της πρώτης ομάδας δραστηριοτήτων.

Οι μαθητές αντιμετώπισαν επίσης δυσκολίες σε δραστηριότητες που απαιτούσαν να τοποθετηθεί ένας αθλητής σε σύγκριση με έναν άλλο (προς τα εμπρός ή προς τα πίσω). Αυτές οι δραστηριότητες απαιτούσαν την ταυτόχρονη χρήση και των δύο αλληλεπιδραστικών αριθμογραμμών. Αρκετοί μαθητές δεν μπορούσαν να φανταστούν πώς οι δύο αριθμογραμμές θα μπορούσαν να σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς δεν έχουν κάνει κάτι παρόμοιο στο παρελθόν. Η δυσκολία ήταν ακόμη μεγαλύτερη όταν η θέση του δεύτερου αθλητή καθοριζόταν από ένα κλάσμα με έναν διαφορετικό παρονομαστή σε σύγκριση με τον πρώτο. Οι μαθητές δεν είχαν δει ποτέ το άθροισμα δύο τέτοιων κλασμάτων μπροστά τους. Η χρήση του μηχανισμού ανάδρασης εδώ ήταν καθοριστική, καθώς και η εκφραστική δύναμη του περιβάλλοντος.

Επιπρόσθετα, δύο ακόμα δυσκολίες εντοπίστηκαν. Η μία αφορούσα την έννοια της «ίδιας απόστασης», καθώς τα παιδιά δυσκολεύονταν να αντιληφθούν πως για να συγκρίνουν, να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν κλάσματα μεταξύ τους, οι αριθμογραμμές έπρεπε να ορίζουν το ίδιο διάστημα. Έτσι, ενώ μερικοί τοποθετούσαν σωστά τον αθλητή 1 που βρισκόταν, για παράδειγμα στα 2/3 της απόστασης από την έναρξη ως την κερκίδα, τοποθετούσαν λάθος τον επόμενο που η κάρτα ανέφερε πως βρίσκεται «1/4 της ίδιας απόστασης πιο μπροστά», αφού η δεύτερη αριθμογραμμή δεν ήταν ορισμένη στο διάστημα έναρξη-κερκίδα. Η δεύτερη δυσκολία αφορά την προσθήκη μια ολόκληρης μονάδας από ένα σημείο. Αυτή πιθανά οφείλεται είτε στην γενική δυσκολία που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την πρόσθεση α/β+1, είτε στην δυσκολία που προαναφέρθηκε σχετικά με την ίδια απόσταση, καθώς δεν έπρεπε να ορίσουν το ολόκληρο αυθαίρετα, αλλά σύμφωνα με τον κλασματική μονάδα που αφορούσε και τον προηγούμενο αθλητή.

Τέλος, ήταν ενδιαφέρον ότι η συνεργασία ήταν πιο έντονη στο τέλος των δραστηριοτήτων. Οι μαθητές ανέφεραν πως ένιωθαν πιο σίγουροι μέσα στο πλαίσιο συνεργασίας, ένιωθαν πως εμπλέκονται σε ένα παιχνίδι αλλά κυρίως, τόνισαν πως είχαν την δυνατότητα να βοηθούν ο ένας τον άλλον. Μετά από κάθε δραστηριότητα, οι μαθητές γινόταν πιο δραστήριοι, διαβάζουν τις κάρτες, παρείχαν εξηγήσεις και ερμηνείες, πρότειναν λύσεις ή ζητούσαν έντονα τη γνώμη των συνομηλίκων τους.

## 6.2 Αποτελέσματα δεύτερης φάσης

### 6.2.1 Συνεντεύξεις

Κατά την διάρκεια των διδασκαλιών για τα κλάσματα και τις αριθμογραμμές φανερώθηκε η δυσαρέσκεια των παιδιών να ασχοληθούν με τα κλάσματα. Όταν εμφανίστηκε η διεπαφή, οι μαθητές έδειξαν έντονο ενδιαφέρον και έμειναν προσηλωμένοι καθ' όλη την διάρκεια του μαθήματος. Θεώρησαν πως το περιβάλλον είναι πιο πρακτικό και παιγνιώδες και αυξήθηκε η επιθυμία τους για συμμέτοχη. Στην δεύτερη αυτή εφαρμογή σε πλαίσιο τάξης, η εφαρμογή φάνηκε να ανατρέπει την ισχύουσα αρνητική στάση των μαθητών και να κρατάει το ενδιαφέρον όσων συμμετείχαν αλλά και των υπολοίπων που λειτουργούσαν επικουρικά.

*Μου άρεσε πολύ αυτό. Ήθελα να παίξω εκεί, όχι να γράφω.*

*Μου άρεσε περισσότερο από το βιβλίο γιατί ήταν τρισδιάστατο και ήθελα να βλέπω εκεί τα κλάσματα. Το προτιμώ.*

Με βάση τις απαντήσεις των παιδιών σημειώθηκαν οι ακόλουθες (4) κατηγορίες:

(1) ***ενσώματη δραστηριότητα.*** Οι μαθητές τόνισαν την ενσώματη συμμετοχή που είχαν κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων. Καθώς είχαν προηγηθεί διδασκαλίες αποκλειστικά στον πίνακα και στο βιβλίο με τον παραδοσιακό τρόπο. Σε αντίθεση με την πρώτη φάση, όπου οι μαθητές ήταν σε ένα περιβάλλον έκθεσης, εδώ η ενσώματη δράση φάνηκε πιο καθοριστική. Οι μαθητές είδαν άμεσα την εναλλαγή από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Έκανα συχνές συγκρίσεις με το βιβλίο και αναφορές στην ενσώματη μάθηση.

*Θα δούλευα καλύτερα εδώ νομίζω γιατί στο βιβλίο έχει θεωρίες ενώ εδώ το έβλεπα συνέχεια, είχε παραδείγματα και τα έφτιαχνα όλα μόνη μου με τα χέρια.*

*…στο βιβλίο πρέπει να φαντάζομαι ενώ εδώ μπορούσα να το δω και να το κάνω με τα χέρια μου και νομίζω ότι όλα τα παιδιά θα το καταλάβαιναν καλύτερα*

*ήταν πιο διασκεδαστικό και πιστεύω ότι μπορεί να διευκολύνει περισσότερο τους μαθητές να καταλάβουν τις αριθμογραμμές και τα κλάσματα γιατί στα βιβλίο μπορεί να βαριούνται κιόλας, αφού κάθονται*

*Απλά με τον τρόπο που είναι φτιαγμένες οι αριθμογραμμές και μετακινούνται μπορώ να το δω καλύτερα και βασικά να το πιάσω μόνη μου με βοηθάει πολύ περισσότερο*

(2) ***Την αυθεντικότητα του περιβάλλοντος***. Οι αλληλεπιδραστικές αριθμογραμμές λειτουργούσαν ως υπολογιστικά εργαλεία που οπτικοποιούσαν και βοηθούσαν τους μαθητές να κατανοήσουν τις αντίστοιχες δραστηριότητες. Το περιβάλλον έμοιαζε πραγματικό και παιχνιδιάρικο.

*Μου άρεσε πολύ όταν μεγέθυνα τις αριθμογραμμές και δεν χρειαζόταν να κάνω πράξεις για να βρω τις θέσεις.*

*…είναι κάτι (τα κλάσματα) που τώρα το βλέπω στην πραγματικότητα είναι πιο κατανοητό*

*Θα με βοηθούσε (η διεπαφή) γιατί το βλέπω, το ακούω και γενικά μπορώ να βάλω περισσότερες αισθήσεις*

*Στο σχολείο είναι απλά μάθημα. Εδώ έμοιαζε με παιχνίδι αλλά μάθαινα κιόλας.*

*Το καταλάβαινες πιο εύκολα, πιο πρακτικά γιατί έπιανα με τα χέρια μου*

(3) ***αντιπροσωπευτική ισχύς της αλληλεπιδραστικής αριθμογραμμής και τον εύκολο χειρισμό της.*** Όπως και στην πρώτη φάση, φάνηκε πως η επαύξηση των αριθμογραμμών σε ένα χώρο με φυσικά αντικείμενα τις έκανε πιο εκδηλωτικές, ενώ η χρησιμότητά τους στο παιχνίδι ήταν καθοριστική.

*Σίγουρα θα με βοηθούσε γιατί είναι πιο εύκολο και δεν χρειάζεται να κάνεις πράξεις. Είναι παιχνίδι αλλά μπορώ να μάθω και τα κλάσματα*

*…γιατί αν κάποιος μπερδεύεται και δεν μπορεί να χωρίσει τις αριθμογραμμές όπως πρέπει μπορεί μέσα από αυτή την εφαρμογή θα καταλάβει ακόμα πιο καλά πως γίνεται αυτό*

*είναι ένας τρόπος να καταλάβει κάποιος καλύτερα τα κλάσματα και το πώς να τα τοποθετεί σε αριθμογραμμή. Μου φάνηκε συναρπαστικό.*

(4) ***συγκέντρωση***. Τα εξωτερικά γνωρίσματα της διεπαφής και το θέμα του μαραθωνίου κέντρισαν το ενδιαφέρον των μαθητών και κράτησαν την προσοχή τους. Γεγονός που δύσκολα παρατηρείται στον τομέα των κλασμάτων. Η αύξηση του χρόνου επαφής με ένα γνωστικό αντικείμενο που δεν θεωρείται αγαπητό είναι στόχος των περισσότερων δραστηριοτήτων, καθώς αυξάνονται οι γνωστικοί πόροι των μαθητευόμενων για το εκάστοτε θέμα. Οι συγκρίσεις με το βιβλίο ήταν επίσης συχνές στις απαντήσεις των μαθητών.

> *…μου άρεσε περισσότερο από ότι στο σχολείο γιατί μέσα στην τάξη είμαστε πολλά παιδιά και ζορίζομαι ενώ εδώ ήμουν πιο συγκεντρωμένη και θυμάμαι περισσότερα πράγματα*
>
> *Το μάθημα είναι κουραστικό. Εδώ είχαμε μια μορφή τεχνολογίας που όσο να ναι με έκανε να είμαι πιο προσεκτική.*
>
> *Με εμπνέουν τα παιχνίδια και με κάνουν να θέλω να ασχοληθώ.*
>
> *Μου άρεσε το μέγεθος των πραγμάτων, τα πιόνια που τα έβλεπα σαν ζωντανά, τα χρώματα. Είχε ωραία ιστορία και ήθελα να φτάσω στο τέλος*

(5) ***κατανόηση***. Αξιολογώντας την κατανόηση τους υποστήριξαν πως έκαναν τις τοποθετήσεις με μεγαλύτερη σιγουριά, ο χωρισμός των αριθμογραμμών ήταν ευκολότερος. Οι δυσκολίες στο χωρισμό των διαστημάτων μειώθηκαν καθώς διαμόρφωναν μόνοι τους τις αριθμογραμμές, ενώ η ύπαρξη της δεύτερης αριθμογραμμής φάνηκε να βοηθά τους σχετικά δυνατούς στα κλάσματα αλλά να δυσκολεύει τους αδύναμους. Πολλοί τόνισαν ως βοηθητικά στοιχεία την ικανότητα των αριθμογραμμών να μετακινούνται και να αλλάζουν χωρίς κόπο, το μέγεθος της κατασκευής, την ύπαρξη της αναλυτικής βοήθειας αλλά οι περισσότεροι έμειναν στην ικανότητα χωρισμού της αριθμογραμμής χωρίς κόπο γεγονός που τους βοήθησε να καταλάβουν το σωστό τρόπο δημιουργίας της. Γεγονός που αποτελεί ένα από τα βασικότερα πεδία δυσκολιών στα κλάσματα.

> *δεν αγχωνόμουν για τα διαστήματα που έπρεπε να αφήσω και το πώς πρέπει να την χωρίσω. Όταν το κάνω στο χαρτί ζορίζομαι. Δεν ξέρω πόσα διαστήματα να βάλω. Εδώ απλά μετρούσα.*

*…αν κάποιος μπερδεύεται και δεν μπορεί να χωρίσει τις αριθμογραμμές όπως πρέπει μπορεί μέσα από αυτή την εφαρμογή να καταλάβει ακόμα πιο καλά πως γίνεται αυτό. Θα καταλάβει και τα κλάσματα καλυτέρα μετά*

### 6.3 Αποτελέσματα τρίτης φάσης

Σε αυτή την φάση, η διεπαφή παρουσιάστηκε στους διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση καθώς και σε εκπαιδευτικούς γενικής αγωγής και μέσω συνεντεύξεων συλλέχθηκαν ποιοτικά δεδομένα για την περαιτέρω αξιολόγηση της εφαρμογής. Όλοι στήριξαν πως τα κλάσματα σαν γνωστικό αντικείμενο είναι ίσως το δυσκολότερο στα σχολικά χρόνια, δεν είναι αγαπητό από τα παιδιά και σε πολλές περιπτώσεις είναι αποκρουστικό.

*Η έννοια του κλάσματος είναι, ειδικά για τους μαθητές του Δημοτικού, μία από τις πιο δύσκολες έννοιες των μαθηματικών στην κατανόησή της*

*Η διδασκαλία των κλασμάτων είναι ένα δύσκολο κομμάτι στη διδασκαλία των μαθηματικών*

*Τα κλάσματα είναι κάτι μη ελκυστικό για τους μαθητές. Σχεδόν αποκρουστικό.*

Ωστόσο, εκτιμήθηκε από τους συμμετέχοντες πως η εφαρμογή είναι ικανή να κάνει ένα δύσκολο γνωστικό αντικείμενο, πιο ελκυστικό για τα παιδιά και να κρατήσει την προσοχή τους, γεγονός που είναι πολύ σημαντικό για την διδασκαλία οποιουδήποτε γνωστικού αντικειμένου.

*Κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και παράλληλα αυξάνουν την αυθόρμητη επιθυμία των μαθητών, να έρθουν σε επαφή με τη νέα γνώση, όποια και αν είναι αυτή.*

*…θα κάνει ένα δύσκολο αντικείμενο ελκυστικό*

Με βάση τις απαντήσεις των συμμετεχόντων εμφανίστηκαν ως δομικά στοιχεία της διεπαφής τα ακόλουθα:

(Α) **οι δυναμικές αριθμογραμμές.** Όλοι οι συμμετέχοντες ανέφεραν ως το κυριότερο πλεονέκτημα την παράλληλη χρήση των δύο δυναμικών αριθμογραμμών. Η συνδυαστική χρήση των δύο με τις ιδιότητες που παρείχαν και το εκάστοτε πρόβλημα ήταν αυτό που έδινε νόημα στην εφαρμογή. Η οπτικοποίηση εννοιών όπως η σύγκριση κλασμάτων, τα ισοδύναμα και η δυνατότητα οπτικοποίησης των πράξεων κρίθηκαν καίρια. Η συνεχής αλλαγή αποστάσεων και η αναπροσαρμογή δεδομένων αποκαλύπτουν βασικές πτυχές των κλασμάτων με τρόπο προσιτό στα παιδιά. Όμως πολλοί δάσκαλοι υποστήριξαν πως οι δύο αριθμογραμμές είναι ικανές να προκαλέσουν σύγχυση στους μαθητές και κυρίως στους πιο αδύναμους γνωστικά.

*Αυτή η, ταυτόχρονη, οπτική απεικόνιση δύο διαφορετικών κλασμάτων, σε δυο διαφορετικές αριθμογραμμές, διευκολύνει τη σύγκρισή τους αλλά και την οπτική αποτύπωση της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης δύο κλασμάτων*

*..ενδεχομένως κάποια παιδιά να τα μπέρδεψε, παρόλα αυτά θεωρώ ότι στο τέλος τα βοήθησε αρκετά γιατί βλέπουν πραγματικά με άμεση σύγκριση τις μεταβολές που συμβαίνουν όσον αφορά απόλυτες αποστάσεις*

*Νομίζω ότι αυτό ήταν και το μεγάλο μυστικό στη συγκεκριμένη διεπαφή. Η δεύτερη δυναμική αριθμογραμμή οπτικοποιεί πολλά στοιχεία κλασμάτων που τα παιδιά δεν τα είχαν ξαναδεί ποτέ σε ένα αυθεντικό περιβάλλον. Ο συνδυασμός με την πρώτη την κάνει ακόμα πιο σημαντική.*

*..ήταν πολύ σημαντική η δεύτερη αριθμογραμμή ήταν σημαντικός και ο τρόπος με τον οποίο την συνδύαζες με την πρώτη. Από μόνη της δεν έλεγε κάτι αλλά ο συνδυασμός των δύο, όταν χρειαζόταν να βάλεις τη μία δίπλα στην άλλη ή πάνω από την άλλη τότε είχε νόημα. Τα προβλήματα που έθετες και ο τρόπος με τον οποίο έπρεπε να χρησιμοποιηθεί αριθμογραμμή ήταν αυτά που είχαν ενδιαφέρον εκπαιδευτικά.*

(Β) **το περιβάλλον μικτής πραγματικότητας.** Η χρήση υπολογιστή, σε συνδυασμό με το επαυξημένο περιβάλλον αξιολογήθηκαν ως σημαντικά. Το περιβάλλον είναι ευπροσάρμοστο, δίνει την δυνατότητα άμεσης προβολής ενώ λόγω του μεγέθους του μοιάζει πολύ πραγματικό. Η οπτικοποίηση που παρέχεται είναι πολύ ισχυρή για την συμμετοχή των παιδιών, την κατανόηση του περιεχομένου και την δέσμευση στις δραστηριότητες.

*…είναι ένα περιβάλλον μικτής πραγματικότητας που δεν είναι απλά στον υπολογιστή, οπότε τα παιδιά χρησιμοποιούν τα χέρια τους. Το περιβάλλον είναι ελκυστικό και διαφορετικό και μια τέτοια οπτικοποίηση είναι ένα από τα στοιχεία που σίγουρα βοηθάει*

(Γ) **η ενσώματη μάθηση**. Η διεπαφή είναι ένα μεγάλο αναπαραστατικό εργαλείο, το οποίο οδηγεί στην αναγκαστική χρήση ολόκληρου του σώματος. Η εμπειρία γίνεται πιο βιωματική καθώς οι μαθητές παύουν να είναι παθητικοί δέκτες πληροφοριών αλλά ενεργούν οι ίδιοι. Το επαυξημένο περιβάλλον σε συνδυασμό με την συνεχή σωματική αλληλεπίδραση που απαιτείται αξιολογήθηκε ως ένα ακόμα δομικά στοιχείο της διεπαφής. Η ενσώματη δράση κάνει το περιβάλλον πιο αλληλεπιδραστικό, πιο άμεσο και πιο πραγματικό, καθιστώντας την διεπαφή χρήσιμη. Οι εκπαιδευτικοί υποστήριξαν πως ο ενσώματος τρόπος αλληλεπίδρασης θα δράσει ως κυρίαρχο κίνητρο ενδιαφέροντος και προσοχής.

> *(η ενσώματη)το κάνει ακόμα πιο αλληλεπιδραστικό, το κάνει πιο πραγματικό για τα παιδιά. Βλέπουν τα αποτελέσματα των επιλογών τους και των σκέψεων τους και έχουν άμεση ανατροφοδότηση*

> *..κεντρίζει το ενδιαφέρον και θεωρώ πως προσελκύει το ενδιαφέρον καθώς είναι διαφορετικός ο τρόπος μάθησης, συμμετέχουν με το σώμα*

Ωστόσο, αυτή η πεποίθηση δεν ήταν καθολική καθώς ορισμένοι διδάσκοντες υποστήριξαν πως αφενός η μάθηση γίνεται ενσώματα, αφετέρου όμως αυτό συμβαίνει αποκλειστικά εξαιτίας του μεγέθους της εφαρμογής και δεν πρεσβεύεται η δημιουργία γνωστικών στόχων μέσω αυτού: *«Άρα η ενσώματη ενασχόληση στην πραγματικότητα είναι απλά σε ένα επίπεδο συσχέτισης με το μέγεθος αυτής της τρισδιάστατης εφαρμογής, χωρίς να διαμεσολαβεί γνωστικός στόχος»*.

(Δ) **παιγνιώδης μάθηση**. Ο παιγνιώδης χαρακτήρας της διεπαφής, τόσο οπτικά όσο και σε περιεχόμενο είναι στοιχεία που προσελκύουν τους μαθητές. Η διδασκαλία γίνεται ευχάριστη, αποτυπώνονται περισσότερες πληροφορίες στην μνήμη των μαθητών και παραμένει το ενδιαφέρον, ακόμα και όταν το περιεχόμενο είναι δύσκολο.

> *..η συμμετοχή τους σε παιχνίδι θα έχει ως αποτέλεσμα να μείνει στη μνήμη των μαθητών για αρκετό καιρό*

> *Όταν το παιδί στην πρώτη του επαφή με τα κλάσματα θα τα δει σαν παιχνίδι, θα κινητοποιηθεί να μάθει*

Πέραν των τεσσάρων αυτών δομικών στοιχείων, η διεπαφή αξιολογήθηκε και σε περαιτέρω πτυχές. Από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων παρουσιάστηκαν οι εξής μεταβλητές:

(Ε) **προσέλκυση ενδιαφέροντος**. Η διαφοροποίηση της διεπαφής από τον παραδοσιακό τρόπο, η ενσώματη δραστηριοποίηση, το θέμα του παιχνιδιού και ο ανταγωνισμός που προκαλείται από αυτό, καθώς και η χρήση νέων τεχνολογιών καθ' αυτή επισημάνθηκαν ως κυρίαρχα χαρακτηριστικά διατήρησης ενδιαφέροντος. Ένα δύσκολο αντικείμενο γίνεται ελκυστικό και δίνεται κίνητρο για συμμετοχή και δράση που κατ' επέκταση μπορεί να βελτιώσει το γνωστικό πεδίο.

*Αλλά το βασικότερο όλων, το οποίο θα κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών, είναι η χρήση υπολογιστή και προτζέκτορα, τα οποία αυξάνουν την αυθόρμητη επιθυμία των μαθητών, να έρθουν σε επαφή με τη νέα γνώση, όποια και αν είναι αυτή.*

*Έχει ένα θέμα το οποίο υπάρχει στην καθημερινότητα τους, αλλά και έναν ενσώματο τρόπο που θα τους «κρατήσει»*

(ΣΤ) **γνωστική καταλληλότητα**. Οι συμμετέχοντες υποστήριξαν πως θεωρούν κατάλληλη και χρήσιμη την διεπαφή για την διδασκαλία των κλασμάτων. Ως δομικά στοιχεία της καταλληλότητας κρίθηκαν οι ιδιότητες των αριθμογραμμών, η γνωστική ευελιξία και η πολυδιάστατη κατανόηση των αριθμογραμμών και κατ' επέκταση των κλασμάτων και η οπτικοποίηση αφηρημένων εννοιών. Επιπλέον, η σειρά των δραστηριοτήτων με την διαβαθμισμένη δυσκολία θεωρήθηκε λογική και ευνοϊκή για τους λιγότερο καλούς μαθητές, καθώς τους παρείχε ένα ικανοποιητικό επίπεδο εξοικείωσης κατά τις πρώτες δραστηριότητες.

*Η αριθμογραμμή αποκαλύπτει ορισμένα πράγματα τα οποία είναι περίεργα στο μυαλό των παιδιών*

*..νομίζω ότι η διεπαφή αυτή έρχεται να αποκαλύψει κάποιες πτυχές της υποκείμενης θεωρίας των κλασμάτων και αφουγκράζομαι ότι μπορεί να τους βοηθήσει να καταλάβουν*

*Έτσι όπως έχει δημιουργηθεί (η σειρά των δραστηριοτήτων) ξεκαθαρίζουν τα πράγματα και στην επόμενη σκάλα τα εφαρμόζουν και βλέπουν αν κατάλαβαν καλά ή όχι*

(Ζ) **ευχρηστία**. Τα μεγάλα και ευδιάκριτα πλήκτρα, το μέγεθος των καρτών και οι ξεκάθαρες οδηγίες κάνουν την εφαρμογή εύκολη στην χρήση. Βέβαια, βασικό σημείο της ευχρηστίας είναι να υπάρξει μια περίοδος εξοικείωσης τόσο με τον τρόπο λειτουργίας της διεπαφής, όσο και με την κατανόηση της ίδιας της αριθμογραμμής. Όταν η περίοδος εξοικείωσης επέλθει, η εφαρμογή λειτουργεί επικουρικά στην κατάκτηση τους γνωστικού περιεχομένου.

> *..ίσως χρειαστούν μία μικρή μόνο εξοικείωση με τα χειριστήρια στην αρχή*

> *Θα έλεγα ότι η εφαρμογή δεν είναι τόσο εύκολη στην εξοικείωση και απαιτείται χρόνος για να εξοικειωθεί ο κάθε μαθητής. Όταν γίνει, η διεπαφή εξυπηρετεί την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον*

Από την άλλη πλευρά, υποστηρίχθηκαν στοιχεία που δεν θεωρούνται εύχρηστα, όχι αναφορικά με τα εξωτερικά γνωρίσματα αλλά με τα νοητική υπόβαθρο που απαιτείται. Η κατανόηση της ίδιας της αριθμογραμμής και των λειτουργιών της και η ανάγκη επίλυσης προβλημάτων αποτελούν τροχοπέδη κατά την πρώτη επαφή. Υποστηρίχθηκε πως η διεπαφή δεν είναι εύκολη στην εξοικείωση μέχρι να αναπτυχθεί το νοητικό μοντέλο ώστε να την χειριστούν.

> *Νομίζω ότι η διεπαφή σε επίπεδο του νοητικού μοντέλου των χρηστών δεν είναι εύκολη. Για να γίνει ο χειρισμός της αριθμογραμμής προϋπόθεση είναι τα παιδιά να την καταλάβουν. Η αριθμογραμμή σε αυτή την εφαρμογή έχει κάποιες ποιότητες τις οποίες δεν τις συναντάει ένας μαθητής στην καθημερινότητα του αρά θα πρέπει να εξοικειωθεί και με αυτήν τη διάσταση της αριθμογραμμής, αλλά και με τα χειριστήρια. Επίσης, ο μαθητής για πρώτη φορά μπαίνει σε ένα πλαίσιο προβλημάτων. Θα έλεγα ότι η εφαρμογή δεν είναι τόσο εύκολη στην εξοικείωση και απαιτείται χρόνος για να εξοικειωθεί ο κάθε μαθητής ώστε να αναπτύξει το νοητικό του μοντέλο για να μπορέσει να χειριστεί αυτή την εφαρμογή*

(Η) **καινοτομία**. Η παρούσα κατηγορία αφορά κυρίως το ειδικό προσωπικό, τους διδάσκοντες, οι οποίο ανέφεραν πως η παρούσα διεπαφή δίνει πολλές ερευνητικές ευκαιρίες, ανήκει σε μια μικρή κατηγορία ερευνών στο συγκεκριμένο τομέα, ενώ η μικτή πραγματικότητα και οι ξεχωριστές ιδιότητες που δίνονται στις δυναμικές αριθμογραμμές την καθιστά καινοτόμα. Επιπλέον, η διεπαφή είναι ευπροσάρμοστη και μπορεί να ανοίξει περαιτέρω ερευνητικούς δρόμους.

*Υπάρχει ελαφρώς στη βιβλιογραφία τα τελευταία χρόνια αλλά αυτό επειδή είναι και ένα περιβάλλον μικτής πραγματικότητας*

*Είναι κάτι που προσωπικά δεν το έχω ξαναδεί τουλάχιστον για τη διδασκαλία των κλασμάτων με αυτό τον τρόπο (επαύξηση και ενσώματη επαφή)*

*Το καλό της είναι ότι μπορεί να προσαρμοστεί σε άλλα πράγματα, μπορούμε για παράδειγμα να το κάνουμε δεκαδικούς, να κάνουμε για οτιδήποτε…*

(Θ) **ένταξη σε τάξη και εξάλειψη γνωστικών δυσκολιών**. Σχετικά με την ένταξη σε πλαίσιο τάξης οι απαντήσεις ήταν κυρίως θετικές με ορισμένες επιφυλάξεις κυρίως από την πλευρά των διδασκόντων εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Όλοι οι εκπαιδευτικοί ήταν ιδιαίτερα θετικοί και όλοι υποστήριξαν πως η διεπαφή ταξινομείται σε μια φάση εμπέδωσης των κλασμάτων, απαιτείται δηλαδή να έχει προηγηθεί διδασκαλία στα κλάσματα. Οι περισσότεροι ήταν σκεπτικοί για το αν η διεπαφή είναι ικανή να υποστηρίξει την εισαγωγική φάση της διδασκαλίας χωρίς προηγούμενη διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί τόνισαν δυσκολίες οι οποίες μπορεί να ξεπεραστούν μέσω της διεπαφής. Δυσκολίες όπως η σύγκριση κλασμάτων, τα ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα μέσω της οπτικοποίησης τους, τα ισοδύναμα, ο διαχωρισμός του παρονομαστή από τα μέρη κατάτμησης της αριθμογραμμής και η διαδικασία απλής τοποθέτησης στο διάστημα 0-1. Οι περιορισμοί που αναφέρθηκαν είχαν να κάνουν κυρίως με τον τρόπο στησίματος και όχι με το περιεχόμενο.

*Οι περιορισμοί δεν αφορούν το περιεχόμενο, αλλά τον τρόπο στησίματος και λειτουργίας της καθώς λόγω του μεγέθους της κατασκευής, δεν υπάρχει δυνατότητα να υπάρχουν 3-4 τέτοιες στην τάξη, οπότε θα πρέπει να βρεθεί άλλη δραστηριότητα, στο τετράδιο εργασιών*

Επιπλέον, επισημάνθηκε από τους εκπαιδευτικούς ότι είναι ιδιαίτερα θετικοί να το χρησιμοποιήσουνε γιατί θα αυξηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών και θα μειωθεί το άγχος που έχουν στο βιβλίο όταν αντιμετωπίζουν ένα δύσκολο γνωστικά θέμα.

*Θα το ήθελα γιατί τα παιδιά θα την αντιμετωπίσουν πιο θετικά από το βιβλίο, το οποίο σε αρκετές περιπτώσεις, τους δημιουργεί στρες, άγχος, αλλά και μία αρνητικότητα*

Από την άλλη, οι διδάσκοντες τριτοβάθμιας ήταν και αυτοί θετικοί ως προς την ικανότητα ένταξης της διεπαφής σε τάξης ωστόσο υπήρξαν αρκετές επιφυλάξεις ως το πλήθος μαθητών που θα ενεργούν, τις τροποποιήσεις του περιβάλλοντος που απαιτούνται αλλά και την ικανότητα του να επιφέρει σταθερά και ικανοποιητικά γνωστικά αποτελέσματα από μόνη της.

> *Θεωρώ ότι η εφαρμογή που έχεις κάνει ένας ενδιαφέρον καμβάς ο οποίος όμως θέλει φοβερή λεπτομέρεια και περαιτέρω μελέτες. Νομίζω ότι η πραγματικότητα της αλληλεπίδρασης των παιδιών θα αναδείξει τη δυσαρέσκεια που έχουν με τα κλάσματα, που μπορεί να το ξεπεράσεις αλλά δεν θα γίνουν θαύματα.*

> *Δεν θεωρώ ότι θα το έβαζα μέσα σε τάξη και θα ήμουν βέβαιος ότι θα έφερνε αποτέλεσμα. Όμως είναι μία ενδιαφέρουσα και διαφορετική σχεδιαστική ιδέα που αξίζει τον κόπο να πειραματιστεί καθώς μαζί της.*

# Κεφάλαιο 7. Συζήτηση

Οι ενισχυμένοι χώροι φαίνεται να προσφέρουν μια εναλλακτική διέγερση στα μαθηματικά εννοιολογικά εργαλεία. Από τη γεωμετρία έως την αριθμητική και από τις προσθήκες σε κλάσματα, τα μικτά περιβάλλοντα πραγματικότητας μπορούν να λειτουργήσουν ως δημιουργικός καμβάς για την εφαρμογή μαθηματικών παραστάσεων σε αυθεντικά περιβάλλοντα και με πιο δυναμικό τρόπο. Εργαλεία όπως οι αριθμογραμμές μπορούν να γίνουν ενδιαφέροντα παιχνίδια αλληλεπίδρασης για τους μαθητές ενώ παίζουν ένα παιχνίδι ή λύνουν ένα πρόβλημα.

Στην βιβλιογραφία παρατηρείται μεγάλη ποικιλία εφαρμογών σχετικά με τα κλάσματα. Τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων με τέτοιες εφαρμογές είναι ενθαρρυντικά και ενισχύουν το ενδιαφέρον για την αποτελεσματικότερη ένταξη της τεχνολογίας στο σχολείο. Ωστόσο, στις περισσότερες εφαρμογές, όπου χρησιμοποιείται η αριθμογραμμή, αυτή είναι σταθερή, είναι συνήθως χωρισμένη στα απαιτούμενα τμήματα, έχει σημεία αναφοράς το 0, 1/2, 1 ως βοηθητικούς δείκτες, και η χρήση της γίνεται κυρίως με στόχο την τοποθέτηση κλασμάτων επάνω σε αυτή (Link et. al., 2013, Peeters et. al., 2016). Στην παρούσα διπλωματική, το αναπαραστατικό αυτό εργαλείο άλλαξε, έγινε δυναμικό και απέκτησε δυνατότητες που ως τώρα δεν συναντώνται βιβλιογραφικά και μόνο βελτιωτικά αποτελέσματα μπορούν να επέλθουν.

Συγκεκριμένα, σε αυτή την διπλωματική παρουσιάστηκε το μαθησιακό περιβάλλον "Μαραθώνιος των Κλασμάτων" το οποίο είχε ως στόχο να μετατρέψει τη στατική αριθμογραμμή σε ένα πρακτικό, χρήσιμο και δυναμικό εργαλείο μέτρησης που μπορεί εύκολα να επαναδιαμορφωθεί σε ένα αυθεντικό πλαίσιο. Το περιβάλλον επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν λάθη, να εκθέτουν τις παρανοήσεις τους και να εξασκηθούν με μεγάλη ποικιλία δραστηριοτήτων στα κλάσματα. Προσφέρει οπτικοποιήσεις που αντιμετωπίζουν αρκετά εννοιολογικά ζητήματα και απαιτεί επίσης ενσώματες ενέργειες από τους μαθητές προκειμένου να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητές τους.

Εμβαθύνοντας περισσότερο, ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση έγινε σύμφωνα με κάθε φάση και κάθε κατηγορία συμμετεχόντων (μαθητές, εκπαιδευτικοί, διδάσκοντες), ώστε να υπάρχει πιο ολοκληρωμένη εικόνα.

Οι μαθητές αξιολόγησαν το περιβάλλον ως αποτελεσματικό, ευχάριστο, καινοτόμο, χρήσιμο και εκφραστικό και ισχυρίστηκαν ότι έκλεψαν την προσοχή τους για 45 λεπτά, παρά το γεγονός ότι η μάθηση των κλασμάτων είναι ένα ελάχιστα ελκυστικό αντικείμενο. Οι δυναμικές αριθμογραμμές και οι δυνατότητες που προσέφεραν σε συνδυασμό με το επαυξημένο περιβάλλον οδήγησαν τα παιδιά στο να τις αξιολογήσουν ως χρήσιμες και εύκολες. Το περιβάλλον αντιπροσώπευε με πρακτικό τρόπο και σε πραγματικό κόσμο, μαθηματικές έννοιες που οι μαθητές είχαν προσεγγίσει στο παρελθόν μόνο θεωρητικά, γεγονός που επίσης τους βοήθησε. Το σύστημα ανατροφοδότησης, όπως αυτό διαρθρώθηκε, η ευελιξία στην δημιουργία λαθών, η καθοδήγηση ως προς τον τρόπο σκέψης και η συνεργία που προωθούνταν ήταν επίσης βασικά στοιχεία της διεπαφής που αναφέρθηκαν ως χρήσιμα από τους μαθητές. Πέραν των όσων ανέφεραν οι μαθητές, υπήρξε πολύ υλικό μέσω της βιντεοσκόπησης. Από αυτή φάνηκαν πολλές δυσκολίες και λάθη που έγιναν κατά την χρήση. Συγκεκριμένα, φάνηκε πως χρειάστηκε αρκετός χρόνος εξοικείωσης τόσο με την διεπαφή όσο και την ίδια την νοερή αριθμογραμμή. Κυρίαρχα λάθη, που έχουν εντοπιστεί από την βιβλιογραφία στον τομέα των κλασμάτων αναδείχθηκαν μέσω της χρήσης της διεπαφής. Πιο αναλυτικά, σε ένα κλάσμα α/β, οι μαθητές χώριζαν την αριθμογραμμή σε β+1 μέρη, αφού δεν υπολόγιζαν το τελευταία τμήμα. Συνεπώς, το λάθος είναι εννοιολογικό και έχει επισημανθεί ερευνητικά (Pearn & Stephens, 2007). Αντιμετώπισαν δυσκολίες σε δραστηριότητες που απαιτούνταν ταυτόχρονη χρήση των δύο αριθμογραμμών με ετερώνυμα κλάσματα, καθώς και κατά την αντιμετώπιση δραστηριοτήτων που απαιτούνταν οι πρώτες έννοιες πράξεων (πιο μπροστά, πιο πίσω). Αρκετοί μαθητές δεν μπορούσαν να φανταστούν πώς οι δύο αριθμογραμμές θα μπορούσαν να σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς δεν έχουν κάνει κάτι παρόμοιο στο παρελθόν. Δεν υπάρχει ως τώρα διεπαφή που να είναι σε θέση να οπτικοποιεί το άθροισμα δύο ετερώνυμων κλασμάτων. Η χρήση του μηχανισμού ανάδρασης καθώς και η εκφραστική δύναμη του περιβάλλοντος ήταν καθοριστικές. Τέλος, μια ακόμα δυσκολία που αναδείχθηκε ήταν η αντίληψη πως οι αριθμογραμμές πρέπει αρχικά να καθοριστούν σε ίδιες απόλυτες αποστάσεις και έπειτα να γίνει η όποια δράση. Μη κάνοντας ίδιες τις αριθμογραμμές, η καθεμία όριζε άλλο διάστημα και το αποτέλεσμα ήταν λανθασμένο χωρίς οι μαθητές να αντιλαμβάνονται το λόγο. Εκεί η ανάδραση του συστήματος έπαιξε κυρίαρχο ρόλο.

Στη δεύτερη ομάδα μαθητών, οι αξιολογήσεις σχετικά με το περιβάλλον και την χρησιμότητα ήταν πολύ θετικές, όμως λόγω της άμεσης αλλαγής από την παραδοσιακή διδασκαλία εμφανίστηκαν επιπλέον μεταβλητές. Συγκεκριμένα, σε όλες τις απαντήσεις πρωταρχικό ρόλο είχε η αναφορά στο βιβλίο και η υπεροχή του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Οι μαθητές στην φάση αυτή, τόνισαν ιδιαίτερα την ενσώματη μάθηση ως βασικό κριτήριο αποτελεσματικότητας της μάθησης και ευχαρίστησης, έναντι της προηγούμενης ομάδας. Αυτό πιθανά οφείλεται στο γεγονός ότι στην προηγούμενη φάση οι μαθητές προηγουμένως δεν ήταν σε πλαίσιο τάξης αλλά σε μία έκθεση, ενώ σε αυτή την φάση οι μαθητές ήταν καθηλωμένοι στις καρέκλες τους, έγραφαν στο βιβλίο και κοιτούσαν τον πίνακα. Ήταν ευκολότερο να γίνει μια έμμεση σύγκριση και να αναδειχθεί ο τρόπος εμπλοκής τους στην μάθηση ως βασικό πλεονέκτημα της χρησιμότητας της εφαρμογής. Επίσης, πέραν όσων επισήμανε και η πρώτη ομάδα, όπως οι δυνατότητες των αριθμογραμμών, το περιβάλλον και άλλα, εδώ επισημάνθηκε πως η διεπαφή και ο παιγνιώδης χαρακτήρας της μείωνε το άγχος και το στρες για το γνωστικό κομμάτι και για την πιθανότητα λαθών, είχαν μεγαλύτερη ικανοποίηση και δεν φοβόταν να κάνουν λάθη γιατί ένιωθαν πως θα μπορέσουν να τα διορθώσουν και να νιώσουν πιο σίγουροι καταλαβαίνοντας τι πήγε στραβά.

Αναφορικά με την ανάλυση των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών και των διδασκόντων, αξίζει να σημειωθεί ότι βρέθηκαν κοινά στοιχεία με τα όσα είχαν ήδη επισημανθεί από τους μαθητές ως βασικά στοιχεία της διεπαφής και την κάνουν χρήσιμη. Σε γενικές γραμμές η στάση όλων ήταν πολύ θετική για τα αποτελέσματα που θα μπορούσε να επιφέρει τόσο στο γνωστικό όσο και στον συναισθηματικό τομέα. Πιο συγκεκριμένα, επισημάνθηκε πως το πεδίο των κλασμάτων είναι ιδιαίτερα δύσκολο και μη επιθυμητό από τους μαθητές, ωστόσο η διεπαφή αξιολογήθηκε από όλους ως ικανή να κεντρίσει το ενδιαφέρον τους, γεγονός που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και σημαντικό για την εκμάθηση δύσκολων θεμάτων. Ως δομικά στοιχεία που καθιστούν το περιβάλλον κατάλληλο και χρήσιμο επισημάνθηκαν οι δυναμικές αριθμογραμμές, καθώς η συνδυαστική χρήση των δύο με τις ιδιότητες που παρείχαν και το εκάστοτε πρόβλημα ήταν αυτό που έδινε νόημα στην εφαρμογή, το περιβάλλον μικτής πραγματικότητας, το οποίο είναι ευπροσάρμοστο, δίνει την δυνατότητα άμεσης προβολής, η οπτικοποίηση που παρέχεται είναι πολύ ισχυρή για την συμμετοχή και την κατανόηση, ο ενσώματος τρόπος μάθησης που κάνει τους μαθητές να είναι πιο ενεργητικοί στην κατάκτηση της νέας γνώσης και ο παιγνιώδης χαρακτήρας που κάνει την διδασκαλία πιο ευχάριστη.

Το γεγονός ότι τα δομικά αυτά στοιχεία επισημάνθηκαν και από τα ίδια τα παιδιά κάνουν ακόμα πιο ισχυρή την πεποίθηση περί καταλληλότητας της διεπαφής και των πυλώνων που οδηγούν σε αυτή (ερευνητικά ερωτήματα 1 & 2). Επιπλέον, για την καταλληλότητα της διεπαφής επισημάνθηκε πως η γνωστική ευελιξία στην αριθμογραμμή και κατά επέκταση στα κλάσματα, δηλαδή η ικανότητα να εφαρμοστεί σε διαφορετικά πλαίσια, σε διαφορετικά μεγέθη και με διαφορετικές διαβαθμίσεις, είναι αυτή που θα δώσει στους μαθητές μία πολυδιάστατη κατανόηση τον αριθμογραμμών και κατ' επέκταση των κλασμάτων.

Οι εκπαιδευτικοί, έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς την διεπαφή. Την αξιολόγηση ως κατάλληλη για τα κλάσματα, εύκολη, χρήσιμη, ενδιαφέρον εργαλείο εμπέδωσης και συγκέντρωσης και τόνισαν το σημαντικό ρόλο των νέων τεχνολογιών μέσα στην τάξη. Οι διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας, αξιολόγησαν την εφαρμογή ως καινοτόμα, ενδιαφέρουσα σχετικά με το περιβάλλον μικτής πραγματικότητας, τις δυνατότητες των δυναμικών αριθμογραμμών και την ενσώματη μάθηση που προωθεί. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετές επιφυλάξεις ακόμα για την σταθερότητα των συγκεκριμένων γνωστικών αποτελεσμάτων που πιθανά να επιφέρει αλλά και στον τρόπο με το οποίο μπορεί να τα επιφέρει.

Πιο αναλυτικά, οι εκπαιδευτικοί και οι διδάσκοντες εκπαιδευτικής τεχνολογίας, αξιολογώντας και άλλες πτυχές του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, τόνισαν πως είναι ικανό να προσελκύσει και να κρατήσει το ενδιαφέρον σε ένα μη αρεστό γνωστικό πεδίο. Η ενσώματη δραστηριοποίηση, το θέμα του παιχνιδιού και η χρήση νέων τεχνολογιών καθ' αυτή επισημάνθηκαν ως κυρίαρχα χαρακτηριστικά διατήρησης ενδιαφέροντος. Ωστόσο, υπήρξαν αμφιβολίες από τους διδάσκοντες για το πόσο θα βελτιωθεί το γνωστικό επίπεδο στο συγκεκριμένο ζήτημα. Το γνωστικό περιβάλλον αξιολογήθηκε ως εύχρηστο και εύκολο αφού όμως υπάρξει πρώτα ένα χρονικό διάστημα εξοικείωσης, κάτι που φάνηκε έντονα και από την βιντεοσκόπηση. Το χρονικό αυτό διάστημα απαιτείται καθώς πολύ μαθητές δεν γνωρίζουν τίποτα για τις αριθμογραμμές. Όπως φάνηκε και από την βιβλιογραφία, σαν εργαλείο είναι αρκετά δύσκολο και ενέχει αρκετές γνωστικές πληροφορίες για να δομηθεί ένα νοητικό μοντέλο χρήσης της. Όταν αυτό γίνει, οι χρήστες τις διεπαφής θα είναι σε θέση να αφουγκραστούν, να δουν και να κατανοήσουν πολύ μεγαλύτερη ποσότητα γνώσεων και με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Αναφορικά, με την καινοτομία του περιβάλλοντος επισημάνθηκε πως η παρούσα διεπαφή δίνει πολλές ερευνητικές ευκαιρίες, ανήκει σε μια μικρή κατηγορία ερευνών στο συγκεκριμένο τομέα, ενώ η μικτή πραγματικότητα, η προσαρμοστικότητά της και οι ξεχωριστές ιδιότητες που δίνονται στις δυναμικές αριθμογραμμές την καθιστούν καινοτόμα.

Δίνοντας έμφαση στην ένταξη του παρόντος εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο πλαίσιο τάξης οι απόψεις διίστανται. Οι εκπαιδευτικοί ήταν πολύ θετικοί και ένιωθαν ικανοί να το εντάξουν στο μάθημα τους, ενώ οι διδάσκοντες εξέφρασαν ορισμένες επιφυλάξεις ως προς την σταθερότητα ύπαρξης βελτιωτικών αποτελεσμάτων σε γνωστικό επίπεδο. Δεν υποστήριξαν με σιγουριά την ικανότητα ένταξης της διεπαφής, τονίζονται την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα στο γνωστικό τομέα. Η διεπαφή υποστηρίχθηκε πως αφορά την φάση εμπέδωσης των κλασμάτων, απαιτείται δηλαδή να έχει προηγηθεί διδασκαλία στα κλάσματα. Οι περισσότεροι ήταν σκεπτικοί για το αν η διεπαφή είναι ικανή να υποστηρίξει την εισαγωγική φάση της διδασκαλίας χωρίς προηγούμενη διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί τόνισαν επίσης πως η διεπαφή και ο τρόπος λειτουργίας της θα μειώσει το άγχος και το στρες των μαθητών για την δημιουργία λαθών και έτσι θα είναι σε θέση να μάθουν καλύτερα και πιο ουσιαστικά. Το ίδιο επισημάνθηκα και από τους μαθητές. Τέλος, οι περισσότεροι συμμετέχοντες της φάσης αυτής, σε ερώτηση σχετικά με το ποιες έννοιες των κλασμάτων πρεσβεύονται και ποιες δυσκολίες πιστεύουν ότι μπορούν να εξαλείψουν με την χρήση της διεπαφής, ανέφεραν δυσκολίες όπως η σύγκριση κλασμάτων, η κατανόηση ομώνυμων, ετερώνυμων και ισοδύναμων κλασμάτων, ο διαχωρισμός του παρονομαστή από τα μέρη κατάτμησης της αριθμογραμμής αλλά ακόμη και η διαδικασία απλής τοποθέτησης στο διάστημα 0-1 (ερευνητικό ερώτημα 3).

Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, υπήρξαν επιφυλάξεις, οι οποίες από πλευράς εκπαιδευτικών αφορούσαν στο μέγεθος της κατασκευής και στο τρόπο στησίματος της μέσα στην αίθουσα. Όλοι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν μικρά διδακτικά πλάνα και εφαρμογές που θα μπορούσαν να γίνουν και είχαν θετική αυτοαντίληψη για την ικανότητα τους να την εφαρμόσουν. Από πλευράς διδασκόντων, οι επιφυλάξεις αφορούσαν αφενός στον αριθμό των μαθητών που μπορούν να συμμετέχουν και την παράλληλη απασχόληση των υπόλοιπων, γεγονός που δεν φάνηκε να ανησυχεί τους εκπαιδευτικούς. Αφετέρου, επιφυλάξεις υπήρξαν σχετικά με την ικανότητα του εκπαιδευτικού αυτού περιβάλλοντος να επιφέρει σταθερή και σίγουρη βελτίωση των νοητικών αναπαραστάσεων των μαθητών στο γνωστικό πεδίο των κλασμάτων, μιας και δεν έχουν υπάρξει έρευνες που να τεκμηριώνουν μια τέτοια διαπίστωση.

Οι αλλαγές που θα μπορούσαν να γίνουν, αφορούν εξωτερικούς παράγοντες, όπως για παράδειγμα η εμφάνιση των καρτών, του ξύλου ή των χρωμάτων και αποσκοπούν περισσότερο στον εντυπωσιασμό. Η επαύξηση του περιβάλλοντος μπορεί να αυξηθεί ακόμα περισσότερο με την χρήση επιπλέον αλληλεπιδραστικών διεπαφών ή ακόμα και ρομπότ. Όσον αφορά στο περιεχόμενο, θα μπορούσαν να γίνουν και άλλες έρευνες ώστε να βελτιωθεί στο έπακρο το γνωστικό πεδίο που προσφέρεται ή ακόμα και να αναπροσαρμοστεί. Ένα από τα πλεονεκτήματα της διεπαφής είναι η ικανότητα αναπροσαρμογής της, με αποτέλεσμα να μπορεί να αποτελέσει έναν καμβά για διδαχθούν και να οπτικοποιηθούν ακόμα περισσότερες έννοιες, για παράδειγμα καταχρηστικά κλάσματα, δεκαδικοί και άλλα.

Είναι σημαντικό, η κατασκευή του περιβάλλοντος να είναι προσβάσιμη, προσιτή και αναπαραγόμενη. Τέτοιες προτάσεις είναι ευκολότερο να διαχυθούν στις καθημερινές σχολικές δραστηριότητες και να προσφέρουν επίσης τη δυνατότητα εκμετάλλευσης της νέας τάσης του πολιτισμού. Ωστόσο, απαιτούνται περισσότερες μελέτες για τον εντοπισμό και την αξιολόγηση των μαθησιακών επιπτώσεων του προτεινόμενου περιβάλλοντος. Όπως αναφέρθηκε, τα δομικά στοιχεία στα οποία βασίζοντα όλα τα οφέλη και οι δυσκολίες τις εφαρμογής είναι η παιγνιώδης μορφή, η ενσώματη μάθηση, το περιβάλλον μικτής πραγματικότητας και φυσικά η χρήση δυο δυναμικών αριθμογραμμών. Έχει ενδιαφέρον τα δομικά στοιχεία που αναφέρθηκαν να παραμετροποιηθούν και να ερευνηθούν περαιτέρω ώστε να έρθει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Προτεινόμενες προεκτάσεις θα μπορούσαν να αφορούν την ανάδειξη σταθερών γνωστικών αποτελεσμάτων στο τομέων των κλασμάτων, τον εντοπισμό και την αξιολόγηση των μαθησιακών επιπτώσεων του προτεινόμενου περιβάλλοντος ή ακόμα και την σύγκριση με παραδοσιακή διδασκαλία και προτιμήσεις μαθητών.

# Βιβλιογραφία


Abrahamson, D., & Bakker, A. (2016). Making sense of movement in embodied design for mathematics learning. *Cognitive Research: Principles and Implications*, *1*(1), 33.

Abrahamson, D., Black, J. B., DeLiema, D., Enyedy, N., Hoyer, D., Fadjo, C. L., & Trninic, D. (2012). You're it! Body, action, and object in STEM learning. In *Proceedings of the International Conference of the Learning Sciences: Future of Learning (ICLS 2012)* (Vol. 1, pp. 283-290).

Abrahamson, D., & Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. *ZDM*, *47*(2), 295-306.

Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners' and Teachers' Gestures. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(2), 247–286. http://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446

Anderson, M. L. (2003). Embodied cognition: A field guide. *Artificial intelligence, 149,* 91-130.

Anderson-Pence, Moyer-Packenham, Westenskow, Shumway, & Jordan, (2014). Relationships Between Visual Static Models and Students' Written Solutions to Fraction Tasks. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Antle, A. N., & Wise, A. F. (2013). Getting down to details: Using learning theory to inform tangibles research and design for children. *Interacting with Computers*, *25*(1), 1-20.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics *Educational Studies in Mathematics,*52, 215–241.

Aslan, S. (2011). Game-based Improvement of Learning Fractions Using iOS Mobile Devices. Unpublished master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.

Ayala, N. A. R., Mendívil, E. G., Salinas, P., & Rios, H. (2013). Kinesthetic Learning Applied to Mathematics Using Kinect. *Procedia Computer Science, 25*, 131–135. http://doi.org/10.1016/j.procs.2013.11.016

Azuma, R. T. (1997). A survey of augmented reality. *Presence: Teleoperators and virtual environments*, *6*(4), 355-385.

Bakker, A., & Hoffmann, M. H. G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 333-358.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The elementary school journal*, *90*(4), 449-466.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to Help Year 5 Students Construct Fraction Understanding. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Begg, A. (1999). Enactivism and mathematics education. In J. M. Truran & K. M. Truran (Eds.), *Making the difference: Proceedings of the twenty-second annual conference of The Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA-22)* (pp. 68-75). Adelaide: MERGA.

Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48-69.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?. *Journal for research in mathematics education*, 194-222.

Boticki, I., Looi, C. K., & Wong, L. H. (2010). *Doing collaboration and learning fractions with mobile devices.* In Proceedings of Global Chinese Conference on Computers in Education 2010. Singapore: National Institute of Education.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 215-232.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293–316.

Chiappini, G., & Bottino, R. M. (1999). Visualisation in teaching-learning mathematics: the role of the computer. *Proceedings of Graphics and Visualization Education, Coimbra, Portugal*.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2007). Year six fraction understanding: A part of the whole story. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice.* (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA), Hobart, Vol. 1, pp. 207-216). Sydney: MERGA

Clements, D. H. (2000). 'Concrete'manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *1*(1), 45-60.

Clement, L. L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*,11, 97-102.

Collective, B. S. M., & Shaw, D. (2012, February). Makey Makey: improvising tangible and nature-based user interfaces. *In Proceedings of the sixth international conference on tangible, embedded and embodied interaction (pp. 367-370).* ACM.

Corsi, P. M., & Michael, P. (1972). *Human memory and the medial temporal region of the brain* (Vol. 34, p. 819B). Montreal: McGill University.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), p.111-144.

Davis, R. L., Orta Martinez, M., Schneider, O., MacLean, K. E., Okamura, A. M., & Blikstein, P. (2017, June). The Haptic Bridge: Towards a Theory for Haptic-Supported Learning. In *Proceedings of the 2017 Conference on Interaction Design and Children* (pp. 51-60). ACM.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language*, *16*(1), 16-36.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Kelchtermans, G., & Verschaffel, L. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*(8), 2e92.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. In *Proceedings of the 33rd annual conference of the cognitive science society* (pp. 1751-1756). Cognitive Science Society Austin, TX.

Durmus, S., & Karakirik, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: A theoretical framework. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *5*(1).

Fazio, L.& Siegler, R. (2011). Teaching fractions. Vol. 22 of *Educational practices series*,Geneva: International Academy of Education-International Bureau of Education.

Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(1), 177–183. http://doi.org/10.3758/s13423-010-0031-3

Fitzmaurice, G. W., Ishii, H., & Buxton, W. A. (1995, May). Bricks: laying the foundations for graspable user interfaces. In *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems* (pp. 442-449). ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

Flood, V. J., Harrer, B. W., & Abrahamson, D. (2016). The interactional work of configuring a mathematical object in a technology-enabled embodied learning environment. In C.-K. Looi, J. L. Polman, U. Cress, & P. Reimann (Eds.), *"Transforming learning, empowering learners," Proceedings of the International Conference of the Learning Sciences (ICLS 2016)* (Vol. 1, "Full Papers", pp. 122- 129). Singapore: International Society of the Learning Sciences.

Fontijn, W., & Mendels, P. (2005). StoryToy the interactive storytelling toy. In *Second International Workshop on Gaming Applications in Pervasive Computing Environments at Pervasive*.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, *22*(3-4), 455–479.

Garcia, I., & Pacheco, C. (2013*).* A constructivist computational platform to support mathematics education in elementary school. *Computers & Education*, 66, p. 25-39.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics*, *2001*, 1-23.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gesture: How our hands help us think.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Goldin-Meadow, S., Nusbaum, H., Kelly, S. D., & Wagner, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science*, *12*(6), 516-522.

Gubbels, M., & Froehlich, J. E., (2014). *Physically Computing Physical Computing: Creative Tools for Building with Physical Materials and Computation.* Retrieved from: http://idc2014.org/wp-content/uploads/2014/09/idc20140_submission_194.pdf

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover.

Hall, R., & Nemirovsky, R. (Eds.). (2012). Modalities of body engagement in mathematical activity and learning [Special issue]. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(2).

Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction on a Number Line. *27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, 3, p.17- 24. Honolulu, Hawaii, International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Hassenzahl, M., & Monk, A. (2010). The inference of perceived usability from beauty. *Human–Computer Interaction*, *25*(3), 235-260.

Hornecker, E., & Buur, J. (2006, April). Getting a grip on tangible interaction: a framework on physical space and social interaction. In *Proceedings of the*

*SIGCHI conference on Human Factors in computing systems* (pp. 437-446). ACM.

Hostetter, A. B., & Alibali, M. W. (2008). Visible embodiment: Gestures as simulated action. *Psychonomic bulletin & review*, *15*(3), 495-514.

Howison, M., Trninic, D., Reinholz, D., & Abrahamson, D. (2011, May). The Mathematical Imagery Trainer: from embodied interaction to conceptual learning. In *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 1989-1998). ACM.

Hutto, D. D., Kirchhoff, M. D., & Abrahamson, D. (2015). The enactive roots of STEM: Rethinking educational design in mathematics. In P. Chandler & A. Tricot (Eds.), Human movement, physical and mental health, and learning [Special issue]. *Educational Psychology Review, 27*(3), 371-389.

Ingold, T. (2000). *The perception of the environment: Essays on livelihood, dwelling, and skill (2nd edition)*. London and New York: Routledge.

Ishii, H., & Ullmer, B. (1997, March). Tangible bits: towards seamless interfaces between people, bits and atoms. In *Proceedings of the ACM SIGCHI Conference on Human factors in computing systems* (pp. 234-241). ACM.

Jackson, S. A., & Marsh, H. W. (1996). Development and validation of a scale to measure optimal experience: The Flow State Scale. *Journal of sport and exercise psychology*, *18*(1), 17-35.

Kalawsky, R. S. (1999). VRUSE—a computerised diagnostic tool: for usability evaluation of virtual/synthetic environment systems. *Applied ergonomics*, *30*(1), 11-25.

Kaput, J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265-281.

Khandelwal, M., & Mazalek, A. (2007, February). Teaching table: a tangible mentor for pre-k math education. In *Proceedings of the 1st international conference on Tangible and embedded interaction* (pp. 191-194). ACM.

Keengwe, J., Onchwari, G., & Wachira, P. (2008). The use of computer tools to support meaningful learning. *AACE Journal*, 16(1), p. 77-92.

Kelso, J. A. S. (2000). Principles of dynamic pattern formation and change for a science of human behavior. In L. Lars R. Bergman, R. B. Cairns, L.-G. Nilsson, & L. Nystedt (Eds.), *Developmental science and the holistic approach (Proceedings of a conference at Wiks Castle and the Nobel Institute, Stockholm, Sweden)* (pp. 63- 83). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kiverstein, J. (2012). The meaning of embodiment. *Topics in Cognitive Science, 4*(4), 740-758. doi:10.1111/j.1756-8765.2012.01219.x

Kloosterman, P. (2010). Mathematics skills of 17-year-olds in the United States: 1978 to 2004. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20-51.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Leader Books.

Kostrubiec, V., Zanone, P.-G., Fuchs, A., & Kelso, J. A. S. (2012). Beyond the blank slate: Routes to learning new coordination patterns depend on the intrinsic dynamics of the learner -- experimental evidence and theoretical model. *Frontiers in Human Neuroscience, 6*. doi:10.3389/fnhum.2012.00222

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage*, *57*(3), 782-795.

Lee, V. R. (Ed.) (2015). *Learning technologies and the body: Integration and implementation*. New York: Routledge.

Lemonidis, C., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth-grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem-solving ability. *MENON: Journal Of Educational Research. 1st Thematic Issue*, 61-74.

Lemonidis, Ch., Tsakiridou, H., Meliopoulou, I. (2015). In-service teachers’ number sense content knowledge and teaching practice in rational numbers. Symposium: SIG 11 – Teaching and Teacher Education, 16th Conference EARLI 2015, Cyprus.

Liang, X. & Zhou, Q. (2009). Students’ experiences of mathematics learning in technology integrated classrooms. *International Journal of Technology in Teaching and Learning*, 5(1), p. 62–74.

Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., & Nuerk, H. C. (2013). Walk the number line–An embodied training of numerical concepts. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 74-84.

Lortie-Forgues, H., Siegler, R., (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?Developmental Review, 38, 201-221.

Lyons, I. M., & Beilock, S. L. (2011). Numerical ordering ability mediates the relation between number-sense and arithmetic competence. *Cognition*, *121*(2), 256-261.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*: *Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Malafouris, L. (2013). *How things shape the mind*. Cambridge, MA: M.I.T. Press.

Malinverni, L., Ackermann, E., & Pares, N. (2016). Experience as an object to think with: From sensing-in-action to making-sense of action in full-body interaction learning environments. In B. Hengeveld, D. Saakes, & L. Geurts (Eds.), *Tenth Anniversary Conference on Tangible, Embedded, and Embodied Interaction* (Vol. Demos and Posters, pp. 332-339). Eindhoven, The Netherlands: TEI.

Manches, A., & O'Malley, C. (2016). The effects of physical manipulatives on children's numerical strategies. *Cognition and Instruction, 34*(1), 27-50. doi:10.1080/07370008.2015.

Marshall, P. (2007, February). Do tangible interfaces enhance learning?. In *Proceedings of the 1st international conference on Tangible and embedded interaction* (pp. 163-170). ACM.

Martin, W. G., Strutchens, M. E., & Elliott, P. C. (2007). *The learning of mathematics* (Vol. 69). National Council of Teachers of English.

Martin, T., & Schwartz, D. L. (2005). Physically distributed learning: Adapting and reinterpreting physical environments in the development of fraction concepts. *Cognitive science*, *29*(4), 587-625.

Martinez, S. L., & Stager, G. (2013). *Invent to learn: Making, tinkering, and engineering in the classroom. Constructing modern knowledge press.* Retrieved from: http://delivery.acm.org/10.1145/2150000/2148219/p367-silver.pdf?ip=82.116.203.212&id=2148219&acc=ACTIVE%20SERVICE&key=46424AF8A0B77BBD.01CD99770352EB37.4D4702B0C3E38B35.4D4702B0C3E38B35&CFID=565177731&CFTOKEN=40903206&__acm__=1449008215_78507295e22018c3903ac306296d788b

*Mathematics Navigator: A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2-8)*. (2015) America's Choice. Ανάκτηση από τη διεύθυνση https://pearsonnacommunity.force.com/coco/articles/Documentation/Math-Navigator-A-Sample-of-Mathematics-Misconceptions-Errors

Mackay, W. E. (1998, May). Augmented reality: linking real and virtual worlds: a new paradigm for interacting with computers. In *Proceedings of the working conference on Advanced visual interfaces* (pp. 13-21). ACM.

McLeod, R. & Newmarch, B. (2006). *Fractions*. London, NRDC.

Melser, D. (2004). *The act of thinking*. Cambridge, MA: M.I.T. Press.

Misquitta, R. (2011). A review of the literature: Fraction instruction for struggling learners in mathematics. *Learning Disabilities Research & Practice*, *26*(2), 109-119.

Mitchell, A., & Horne, M. (2008). Fraction number line tasks and the additivity concept of length measurement. In *Proceedings of the 31st annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 353-360).

Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H. C., & Cress, U. (2015). Computers in mathematics education–Training the mental number line. Computers in Human Behavior, 48, 597-607.

Moore-Russo, D., Ferrara, F., & Edwards, L. D. (2014). *Emerging Perspectives on Gesture and Embodiment in Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Moss, J. (2005). *Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system.* In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), How students learn: Mathematics in the classroom (pp. 121–162). Washington, DC: National Academic Press.

Moyer-Packenham, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *8*(3), 202.

Muzheve, M. T. & Capraro, R. M. (2012). An exploration of the role natural language and idiosyncratic representations in teaching how to convert among fractions, decimals, and percents. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 1-14.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Rhodehamel, B. (2012). Gesture and imagination: On the constitution and uses of phantasms. *Gesture, 2*, 130–165. doi:10.1075/gest.12.2.02nem

Nemirovsky, R., & Rasmussen, C. (2005). A case study of how kinesthetic experiences can participate in and transfer to work with equations. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 9.

Ni, Y., and Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.

Núñez, R. E., & Freeman, W. J. (Eds.). (1999). *Reclaiming cognition: The primacy of action, intention, and emotion (Journal of Consciousness Studies 6, 11-12)*. Thorverton, UK: Imprint Academic.

Nygren E. et al. (2012). The UFractions Mobile Manipulative Game: Opportunities For South African Grade 8 Learners. *International Journal of Ubiquitous Computing ( IJUC )*, 2(1).

O'Malley, C., & Stanton, D. (2002). Tangible technologies for collaborative storytelling. In *First European Workshop on Mobile and Contextual Learning*(pp. 3-6). University of Bath.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. *Cognitive science and mathematics education*, 89-122.

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help develop fraction concepts. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), Mathematics: Essential research, essential practice. (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA), Hobart, Vol. 2, pp. 601-610). Sydney: MERGA.

Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, *31*(2), 117-134.

Petit, M. M., Laird R. E. & Marsden E. L. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom.* New York & London, Routledge.

Petitto, A. (1990). Development of number line and measurement concepts. *Cognition and Instruction*, 7(1), 55-78.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M., & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. *Integrating research on teaching and learning mathematics*, 177-198.

Presmeg, N. C. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 25-32.

Ramani, G. B., Siegler, R. S., & Hitti, A. (2012). Taking it to the classroom: Number board games as a small group learning activity. *Journal of educational psychology*, *104*(3), 661.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2013). How to use multiple graphical representations to support conceptual learning? Research-based principles in the Fractions Tutor. In *Artificial Intelligence in Education* (pp. 762-765). Springer Berlin Heidelberg.

Riconscente, M. (2012). *Mobile Learning Game Improves 5th Graders' Fraction Knowledge and Attitudes*. Los Angeles: GameDesk Institute.

Riconscente, M. (2013). Results from a controlled study of the iPad fractions game Motion Math. *Games and Culture, 8*(4), 186-214.

Ruiter, M., Loyens, S., & Paas, F. (2015). Watch your step children! Learning two-digit numbers through mirror-based observation of self-initiated body movements. *Educational Psychology Review, 27*(3), 457-474.

Salinas, P. (2017). Augmented Reality: Opportunity for Developing Spatial Visualization and Learning Calculus. In *Mobile Technologies and Augmented Reality in Open Education* (pp. 54-76). IGI Global.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). "Concrete" computer manipulatives in mathematics education. *Child Development Perspectives, 3*(3), 145-150.

Saxe, G. B., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: A study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. ZDM, 45(3), 343-364.

Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Shannon, A., Langer-Osuna, J. M., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number Line. In W. G. Martin, M. E.

Schneider, M., Grabner, R. H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, *101*(2), 359.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology*, *62*(4), 273-296.

Sommerauer, P., & Müller, O. (2014). Augmented reality in informal learning environments: A field experiment in a mathematics exhibition. *Computers & Education*, *79*, 59-68.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction, 14*(5), 503-518.

Starcic, A. I., & Zajc, M. (2011). An interactive tangible user interface application for learning addition concepts_1217 131.. 135. *British Journal of Educational Technology*, *42*(6), E131-E135.

Stolz, S. A. (2015). Embodied Learning. *Educational Philosophy and Theory*, *47*(5), 474–487. http://doi.org/10.1080/00131857.2013.879694

Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: Sixty-ninth yearbook* (pp. 221-237). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Suh, J., Moyer, P. S., & Heo, H. J. (2005). Examining technology uses in the classroom: Developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning*, *3*(4), 1-21.

Swart, M. I., Friedman, B., Kornkasem, S., Black, J. B., & Vitale, J. M. (2015). M3-Situating Embodied Learning: Embedding Gestures in Narratives to Learn Mathematical FrActions in a digital tablet environment. In *CogSci*.

Thambi, N. & Eu, L. K. (2013). Effect of Students' Achievement in Fractions using GeoGebra. *SAINSAB*, 16, p. 97 - 106.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, 5-25.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. Learning and Instruction, 21, 676-685.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31,344-355.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453–467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 265-282.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Valdez, A., Trujillo, K., & Wiburg, K. (2013). Math Snacks: Using animations and games to fill the gaps in Mathematics. *Journal of Curriculum and Teaching*, *2*(2), 154.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. Learning and Instruction, 37, 1-4.

Van Hoof, J., Verschaffel, L & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. Educational Studies of Mathematics 90, 39–56.

Van de Walle, J.A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή Διαδικασία* Αθήνα. Επίκεντρο.

Watanabe, R., Itoh, Y., Kitamura, Y., Kishino, F., & Kikuchi, H. (2005, December). Distributed autonomous interface using ActiveCube for interactive multimedia contents. In *Proceedings of the 2005 international conference on Augmented tele-existence* (pp. 22-29). ACM.

Wellner, P. (1993). Interacting with paper on the DigitalDesk. *Communications of the ACM*, *36*(7), 87-96.

Wiburg, K., Chamberlin, B., Valdez, A., Trujillo, K., & Stanford, T. (2016). Impact of Math Snacks games on students' conceptual understanding. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *35*(2), 173-193.

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, *9*(4), 625-636.

Wu, H. (2011). Teaching fractions according to the Common Core Standards.*Retrieved February*, *24*, 2014.

Yanchar, S. C., Spackman, J. S., & Faulconer, J. E. (2013). Learning as embodied familiarization. *Journal of Theoretical and Philosophical Psychology*, *33*(4), 216- 232. doi:10.1037/a0031012

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 1169-1207.

Zeki, S., Romaya, J. P., Benincasa, D. M. T., & Atiyah, M. F. (2014). The experience of mathematical beauty and its neural correlates. *Frontiers in Human Neuroscience, 8*. doi:10.3389/fnhum.2014.00068

Zhou, Z., Peverly, S. T., & Xin, T. (2006). Knowing and teaching fractions: A cross-cultural study of American and Chinese mathematics teachers. *Contemporary educational psychology*, *31*(4), 438-457.