UOWM-ICTE-GR
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Λήψη αποφάσεων με τη χρήση της πολυκριτηριακής μεθόδου AHP

Decision making with use of multi-criteria method

Διπλωματική εργασία των:

-Καλλιοντζή Ελένη (ΑΕΜ: 689)
-Μαργαριτοπούλου Μαρία-Ειρήνη (ΑΕΜ: 711)

Επιβλέποντες:

-Ιωάννης Μπακούρος
-Αμαλία Κουσκούρα

Κοζάνη, Μάρτιος 2019

Τίτλος: Λήψη αποφάσεων με τη χρήση της πολυκριτηριακής μεθόδου AHP

Περιγραφή: Διπλωματική εργασία στα πλαίσια απόκτησης του διπλώματος που απονέμεται από το Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας με τίτλο «Μηχανικός Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών»

Δημιουργοί: Καλλιοντζή Ελένη (AEM: 689), Μαργαριτοπούλου Μαρία-Ειρήνη (AEM: 711)

Ημερομηνία Δημιουργίας: 28/02/2019

Χρόνος Έκδοσης: 2019

Χώρα Έκδοσης: Ελλάδα (GR)

Γλώσσα Κειμένου: Ελληνικά (GRE)

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του διπλώματος που απονέμει το Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας με τίτλο:

«Μηχανικός Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών»

Δήλωση πνευματικών δικαιωμάτων

Υπογραφές φοιτητών:

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια της απόκτησης του διπλώματος «Μηχανικός Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας του αντίστοιχου τμήματος. Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αισθανόμαστε υποχρέωση να ευχαριστήσουμε ορισμένους από τους ανθρώπους που γνωρίσαμε, συνεργαστήκαμε και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίηση της.

Πρώτο από όλους θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας μας, Καθηγητή κ. Ιωάννη Μπακούρο, για την πολύτιμη καθοδήγηση του, την εμπιστοσύνη και την εκτίμηση που μας έδειξε καθώς και την βοηθό του και υποψήφια διδάκτωρ κ. Κουσκούρα Αμαλία.

Ακόμη θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε την επιτροπή αξιολόγησης της διπλωματικής εργασίας που δέχτηκαν να αναλάβουν αυτό το έργο.

Τέλος θα θέλαμε να πούμε ένα ευχαριστώ η μία στην άλλη για την καθοριστική βοήθεια που πρόσφερε η καθεμία, καθώς με υπομονή και κουράγιο υπήρξε η απαραίτητη συμπαράσταση και συνεργασία για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μας εργασίας.

Κοζάνη 2019
Καλλιοντζή Ελένη, Μαργαριτοπούλου Μαρία-Ειρήνη

Περιεχόμενα

Εικόνες

Πίνακες

Abstract

A frequent phenomenon of human activity is decision making. Decisions are taken on a daily basis, both individually and collectively. Multi-Criteria Decision Analysis has evolved into a major research field in the field of decision-making, administrative science and business research. It is important to use and develop decision-making methods such that they can safely drive to receipt rational decisions.

In general, decision-making is the choice of a solution between alternative proposals at our disposal. When it comes to multi-criterion problems, decision-making is a process and not the simple act of choosing a solution between different alternatives.

The Analytical Hierarchical Process (AHP) was developed by Thomas Saaty in the 1970s and has since been studied extensively. AHP provides an integrated framework for building a decision problem, to represent and quantitate its data to link them to the final goal and evaluate alternatives. It is used worldwide to make decisions in areas such as government, business, industry, health care and education. Thus, when reception on multi-criteria decisions, it is very important to define the priorities for the decision-making criteria and AHP is the most appropriate methodology.

AHP's strong point is its ability to hierarchically structure a complex, multi-faceted multi-criterion problem and then investigate each level of hierarchy separately, combining the results as the analysis progresses. The rationale behind the Analytical Hierarchical Process is quite simple and is summarized in four points that are presented below:

-Description of the problem.

- Determine relationships and interactions between the parts of the problem.

- A comparison is made between the parts of the problem.

- Obtain final target by decision-maker.

It is particularly important that these processes are carried out efficiently at both individual and social level, because through decision-making and problem-solving it is achieved:

- identifying factors that require attention.

- goal setting.

- designing alternative strategies / decisions.

- the choice of better alternatives.

- forecasting the results.

The following work analyzes the basic concepts and properties of the method. More specifically in the first and second chapters, we will refer to the theoretical and mathematical background of the method and in the third chapter we will implement an AHP application for a problem with Microsoft Excel software.

Πρόλογος

Ένα συχνό φαινόμενο της ανθρώπινης δραστηριότητας είναι η λήψη αποφάσεων. Αποφάσεις λαμβάνονται σε καθημερινή βάση τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο. Η πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων έχει εξελιχθεί σε ένα σημαντικό ερευνητικό πεδίο στο χώρο της λήψης αποφάσεων, της διοικητικής επιστήμης και της επιχειρησιακής έρευνας. Είναι σημαντικό να χρησιμοποιούνται και να αναπτύσσονται μέθοδοι λήψης αποφάσεων τέτοιες ώστε να οδηγούν με ασφάλεια στη λήψη ορθολογικών αποφάσεων.

Σε γενικές γραμμές η λήψη αποφάσεων είναι η επιλογή μιας λύσης μεταξύ εναλλακτικών προτάσεων που υπάρχουν στη διάθεσή μας. Όταν πρόκειται για προβλήματα πολλαπλών κριτηρίων, η λήψη αποφάσεων είναι μια διαδικασία και όχι η απλή ενέργεια επιλογής μιας λύσης μεταξύ διάφορων εναλλακτικών.

Η Αναλυτική Ιεραρχική Διαδικασία (AHP) αναπτύχθηκε από τον Thomas Saaty στη δεκαετία του 1970 και από τότε έχει μελετηθεί εκτενώς. Η AHP παρέχει ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο για τη δόμηση ενός προβλήματος απόφασης, για την αναπαράσταση και ποσοτικοποίηση των στοιχείων του, ώστε να τα συνδέσει με τον τελικό στόχο και να αξιολογήσει τις εναλλακτικές λύσεις. Χρησιμοποιείται σε όλο τον κόσμο για τη λήψη αποφάσεων σε τομείς όπως: η κυβέρνηση, επιχειρήσεις, βιομηχανία, υγειονομική περίθαλψη και εκπαίδευση. Έτσι κατά τη λήψη πολυκριτήριων αποφάσεων είναι πολύ σημαντικός ο καθορισμός των προτεραιοτήτων για τα κριτήρια που αφορούν το πρόβλημα απόφασης και η AHP είναι η πλέον κατάλληλη μεθοδολογία.

Το ισχυρό σημείο της AHP είναι η ικανότητά της να διαρθρώνει ιεραρχικά ένα πολύπλοκο, πολυπρόσωπο πρόβλημα πολλαπλών κριτηρίων και στη συνέχεια να ερευνά κάθε επίπεδο ιεραρχίας χωριστά, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα καθώς προχωρά η ανάλυση. Το σκεπτικό της Αναλυτικής Ιεραρχικής Διαδικασίας είναι αρκετά απλό και συνοψίζεται σε τέσσερα σημεία τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω:

--Περιγραφή του προβλήματος.

--Προσδιορισμός των σχέσεων και των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα μέρη του προβλήματος.

--Γίνεται σύγκριση ανάμεσα στα μέρη του προβλήματος.

--Λήψη τελικού στόχου από τον αποφασίζοντα.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό οι διαδικασίες αυτές να εκτελούνται αποτελεσματικά τόσο σε ατομικό αλλά και κοινωνικό επίπεδο διότι μέσα από τη λήψη αποφάσεων και την επίλυση προβλημάτων επιτυγχάνεται:

--ο εντοπισμός παραγόντων που απαιτούν προσοχή.

--η οριοθέτηση στόχων.

--ο σχεδιασμός εναλλακτικών στρατηγικών/αποφάσεων.

--η επιλογή καλύτερων εναλλακτικών.

--η πρόβλεψη των αποτελεσμάτων.

Στην παρακάτω εργασία γίνεται μια ανάλυση στις βασικές έννοιες και τις ιδιότητες της μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο, θα γίνει μια αναφορά στο θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου και στο τρίτο κεφάλαιο θα υλοποιήσουμε μια εφαρμογή της AHP για ένα πρόβλημα με το λογισμικό Excel Microsoft.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Η Ιεραρχική Ανάλυση Αποφάσεων (AHP) είναι μια τεχνική που αναπτύχθηκε πριν από μερικές δεκαετίες, το 1970. Σκοπεύει στην κατασκευή μοντέλων για τη λήψη αποφάσεων. Είναι βασισμένη στα μαθηματικά αλλά και στην ανθρώπινη ψυχολογία και έχει σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συνδυάζει τη λογική αλλά και τη διαίσθηση σε ένα πλαίσιο επίλυσης πολυκριτήριων προβλημάτων. Είναι απαραίτητο λοιπόν να προσμετρά όλους τους παράγοντες – κριτήρια που συμμετέχουν στη λήψη της απόφασης είτε έχουν υλική είτε άυλη μορφή.

Η μεθοδολογία της Ιεραρχικής Ανάλυσης Αποφάσεων είναι βασισμένη σε μια ομάδα αξιωμάτων, τα οποία οριοθετούν με σαφήνεια το πεδίο του προβλήματος, συγκεντρώνουν πληροφορίες και στοιχεία γύρω από αυτό, τα συσχετίζουν με απώτερους στόχους και αξιολογούν εναλλακτικές λύσεις, έως ότου βρεθεί η βέλτιστη. Η μέθοδος αντιμετωπίζει το πρόβλημα της κατανομής των βαρών (weights), όπου παρουσιάζονται δραστηριότητες και αξιολογούνται σύμφωνα με το βαθμό σημαντικότητας τους.

Οι μετρήσεις σε ένα μοντέλο AHP μπορούν να είναι είτε ποσοτικές είτε ποιοτικές. Εφαρμόζεται η μέθοδος Saaty, σύμφωνα με την οποία τα πάντα είναι μετρήσιμα έτσι ώστε να μπορούν να ιεραρχηθούν με συνέπεια και τελικά να προκύψει το πόρισμα σχετικά με την καλύτερη δυνατή απόφαση.

Η AHP συμπεριλαμβάνεται στις μεθόδους λήψης πολυκριτηριακών αποφάσεων όσο αφορά τα κριτήρια προβλημάτων, γνωστές ως Multi-Attribute Decision Methods (M.A.D.M's).

Ως μέθοδος έχει μια σειρά από συγκεκριμένες ιδιότητες, μερικές από τις οποίες είναι:

i. Γίνεται χρήση τόσο ποιοτικών όσο και ποσοτικών δεδομένων.

ii. Είναι κατάλληλη για περιπτώσεις όπου η απόφαση θα παρθεί από μια ομάδα και όχι από ένα άτομο.

iii. Υπάρχει πληθώρα εφαρμογών της AHP, γεγονός που την καθιστά προσιτή στο χρήστη.

iv. Είναι αποδεκτή σε περιπτώσεις αποφάσεων όπου υπάρχει αποκλειστικά υποκειμενική κρίση.

v. Μπορεί να τεκμηριωθεί, όπως επίσης και να αναπαραχθεί.

Ξεκινώντας λοιπόν από ένα θεωρητικό υπόβαθρο θα τεκμηριώσουμε αυτές τις ιδιότητες στην πορεία της εργασίας αφού πρώτα κάνουμε κατανοητή τη διαδικασία και τις βάσεις πάνω στα οποία στηρίζεται η AHP.

1.1 Η Ιεραρχική Ανάλυση Αποφάσεων (AHP)

Η λήψη αποφάσεων και η επίλυση προβλημάτων αποτελούν διαδικασίες, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με το έργο πολλών επαγγελμάτων, όπως είναι οι διοικητικοί υπάλληλοι, οι μηχανικοί, οι δικηγόροι και αρκετοί άλλοι. Έτσι, λοιπόν, αυτοί προκειμένου να καθοδηγήσουν τη συνολική πορεία μιας εταιρείας, ενός οργανισμού, μιας οικονομίας και ενδεχομένως μιας κοινωνίας, σχετίζονται άμεσα με τη λήψη αποφάσεων.

Μέσα από αυτήν, θέτονται στόχοι, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή τόσο στις εναλλακτικές αποφάσεις όσο και στην επιλογή λύσεων αλλά και προβλέπονται τα αποτελέσματα με βάση τις επιλογές που γίνονται. Αυτό σημαίνει, ότι αυτές οι διαδικασίες θα πρέπει να εκτελούνται όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματικά καθώς είναι σημαντικές τόσο σε κοινωνικό όσο και σε εθνικό επίπεδο.

Ο δημιουργός της μεθόδου AHP, Saaty, έχει παραθέσει τα εξής λόγια σε μια δημοσίευση του το 1977: *«…Είναι η πιο ισχυρή μέθοδος ταξινόμησης που χρησιμοποιείται από το ανθρώπινο μυαλό για να διατάσσει παρατηρήσεις, οντότητες, εμπειρίες και πληροφορίες. Αν και ακόμη δεν έχει οριστεί από τη νευρολογία και την ψυχολογία, η ιεραρχική ταξινόμηση πιθανόν να αντιπροσωπεύει την πρωταρχική λειτουργία του συντονισμού και της οργάνωσης. Η χρήση της ιεραρχικής διάταξης πρέπει να είναι όσο παλιά είναι και η ανθρώπινη σκέψη, συνειδητά και ασυνείδητα…».*

Για να μοντελοποιηθούν τέτοιου είδους προβλήματα είναι απαραίτητες οι σχετικές μετρήσεις. Αυτές μπορούν να ληφθούν αν τυχόν υπάρχουν οικονομικά μεγέθη ή δείκτες, ωστόσο υπάρχει περίπτωση οι παράγοντες να αφορούν την ποιότητα του περιβάλλοντος, την υγεία, τα κοινωνικά φαινόμενα και τέτοιου είδους πράγματα που δεν είναι μετρήσιμα. Αυτό ήταν ένα θέμα που επίλυσε ο Saaty και οι συνεργάτες του σχεδιάζοντας αντίστοιχες κλίμακες που έδιναν λύση σε κάθε είδος περίπτωσης.

Θα πρέπει λοιπόν να αναφερθεί ότι η AHP βαθμολογεί το πόσο σημαντικός είναι ένας παράγοντας σε σύγκριση με έναν άλλον. Αυτό σημαίνει, ότι βασίζεται αποκλειστικά στις δυαδικές συγκρίσεις, που σύμφωνα με την κλίμακα του Saaty παρέχουν και το αντίστοιχο αποτέλεσμα.

Θα φανεί και στην πορεία της ανάλυσης της AHP, ότι ο έλεγχος συνέπειας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην αποδοχή ενός αποτελέσματος. Αυτό είναι δύσκολο, καθώς υπάρχει υποκειμενικότητα στην κρίση του συνόλου ή σε αυτόν που βγάζει μια απόφαση. Για το λόγο αυτόν, θα δούμε με ποιον τρόπο θα μελετηθεί ιδιαίτερα η συνέπεια της κρίσης και της εγκυρότητας.

1.2 Περιπτώσεις εφαρμογής της AHP

Υπάρχουν αρκετές και σημαντικές περιπτώσεις όπου έχει χρησιμοποιηθεί η AHP μερικές από τις οποίες αναφέρονται παρακάτω.

- Αρχικά, χρησιμοποιήθηκε από την IBM, προκειμένου να βελτιωθεί η ποιότητα για το σχεδιασμό του υπολογιστή AS/400 και κέρδισε το διεθνές βραβείο Malcolm Baldrige National Quality Award.
- Το 1986, χρησιμοποιήθηκε από έναν κυβερνητικό οργανισμό, το Ινστιτούτο Στρατηγικών και Αμυντικών Μελετών, για την ανάλυση της αστάθειας και τις συγκρούσεις στη Νότια Αφρική, προκειμένου να προτείνει λύσεις για την εξομάλυνση της κατάστασης.
- Το 1987, η AHP εφαρμόστηκε από μια εταιρεία, προκειμένου να γίνει επιλογή του τύπου της πλατφόρμας, η οποία αφορούσε την εξόρυξη πετρελαίου στον Ατλαντικό. Για να βγει απόφαση σχετικά με αυτό, σημαντικότερος παράγοντας ήταν το κόστος της κατεδάφισης και όχι το κόστος υλοποίησης της πλατφόρμας.
- Το 1995, υπήρχε μια διαμάχη ανάμεσα στις ΗΠΑ και στην Κίνα για την πειρατική αντιγραφή που αφορούσε μουσική, ταινίες και λογισμικό. Η μέθοδος AHP, χρησιμοποιήθηκε αναλύοντας ως παράγοντες τα πλεονεκτήματα, το κόστος και το ρίσκο.

Το συμπέρασμα που προέκυψε ήταν ότι οι ΗΠΑ καλό θα ήταν να μην προχωρήσουν σε κυρώσεις. Έτσι, όχι μόνο δεν έγινε αυτό, αλλά μάλιστα οι ΗΠΑ βράβευσαν την Κίνα για τις εμπορικές της συναλλαγές.

- Επίσης, το 1998, εφαρμόστηκε η μέθοδος AHP από τις Βρετανικές αερογραμμές, προκειμένου να επιλέξουν το σύστημα ψυχαγωγίας που θα χρησιμοποιούσε ο στόλος τους.
- Εφαρμογή της AHP έγινε και το 1999 από την εταιρεία Xerox, η οποία έπρεπε να αποφασίσει για το αν θα αναθέσει ένα ποσό του ενός δισεκατομμυρίου δολαρίων σε κάποιο ερευνητικό της πρόγραμμα.
- Το 1999, επίσης, η Ford χρησιμοποίησε τη μέθοδο προκειμένου να καθορίσει ορισμένες προτεραιότητες, με σκοπό τη μεγαλύτερη ικανοποίηση των πελατών, βραβεύοντας το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε τότε για την αποτελεσματικότητά του.
- Το 2001, η χρησιμοποίηση της μεθόδου έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο στο να βρεθεί κατάλληλη τοποθεσία για την επανεγκατάσταση τουρκικής πόλης, η οποία καταστράφηκε έπειτα από σεισμό (Adapazari).

Αυτά ήταν μερικά παραδείγματα για το που έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος AHP. Πέρα από αυτά όμως, η AHP έχει εφαρμοστεί και σε θέματα που αφορούν το προσωπικό μιας επιχείρησης, είτε αυτό έχει να κάνει με ορισμένα προβλήματα σε θέματα επιλογής του, είτε με την αξιολόγηση του καθώς και με θέματα προαγωγής. Επιπλέον, έχει χρησιμοποιηθεί και στον αθλητικό τομέα, προκειμένου να επιλεγούν παίχτες σε ομάδες, ή για το ποιοι παίκτες θα παραμείνουν και την επόμενη χρονιά. Η εφαρμογή της πραγματοποιήθηκε και σε πολλά στρατιωτικά, αλλά και κυβερνητικά ζητήματα. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι εφαρμογές της είναι πάρα πολλές και αυτό έχει ως φυσικό επακόλουθο να είναι μεγάλη και η έρευνα που γίνεται πάνω σε αυτήν.

1.3 Η βασική σύνθεση της AHP

Η μέθοδος AHP λειτουργεί με τον εξής τρόπο, διαχωρίζει το πρόβλημα σε μικρότερα κομμάτια και στη συνέχεια χρησιμοποιεί δυαδικές συγκρίσεις, με σκοπό να καθορίσει τις προτεραιότητες σε κάθε ιεραρχία. Για να γίνει κατανοητό αυτό, θα πρέπει πρώτα να γίνουν αντιληπτές οι τρεις αρχές πάνω στις οποίες βασίζεται η AHP: ***η αποσύνθεση, οι σχετικές συγκρίσεις και η διάρθρωση των προτεραιοτήτων*** (Saaty,1986).

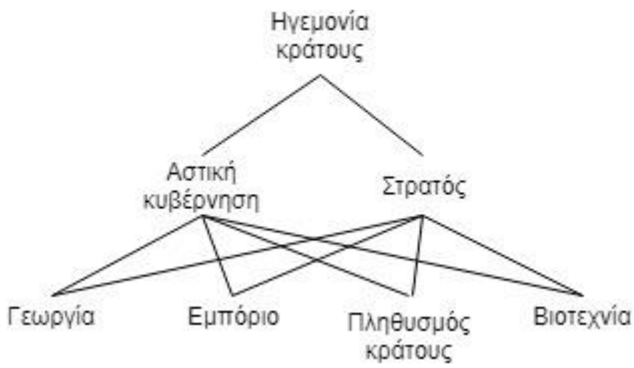
- **Αποσύνθεση:** είναι σημαντικό να βρεθούν τα βασικά στοιχεία του προβλήματος, με σκοπό να κατασκευαστεί μια ιεραρχία. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητη η ανάλυση του προβλήματος σε επίπεδα με τη μορφή δέντρου. Στο πρώτο επίπεδο (πάνω), βρίσκεται ο τελικός στόχος, δηλαδή η απόφαση που πρέπει να ληφθεί. Στο δεύτερο επίπεδο, τοποθετούνται τα βασικά κριτήρια που επηρεάζουν την απόφαση, τα υποκριτήρια αυτών στο τρίτο και συνεχίζεται αντίστοιχα. Στο τελευταίο επίπεδο του δέντρου, παραθέτονται οι εναλλακτικές λύσεις (αποφάσεις). Έτσι, λοιπόν, το πρόβλημα χωρίζεται σε επιμέρους κομμάτια, από τα οποία ορισμένες γενικές έννοιες γίνονται πιο ειδικές και σαφείς.
- **Σχετικές συγκρίσεις:** πραγματοποιούνται σε κάθε επίπεδο ανά ζεύγη και ποσοτικοποιούν τη σημασία του κάθε κριτηρίου, (ή υποκριτηρίου σε ανάλογο επίπεδο), σε σχέση με το στοιχείο με το οποίο συνδέεται στο ανώτερο επίπεδο. Μέσα από αυτές τις συγκρίσεις, δημιουργούνται πίνακες προτιμήσεων, οι οποίοι παρέχουν τα σχετικά βάρη για κάθε κριτήριο και για κάθε εναλλακτική.
- **Διάρθρωση των προτεραιοτήτων:** οδηγεί στην κατασκευή της ιεραρχίας, σύμφωνα με τα σχετικά βάρη που εμπεριέχονται εντός των πινάκων προτιμήσεων.

Ουσιαστικά για να επιλυθεί ένα πρόβλημα σχεδιάζεται ένα σύστημα το οποίο αντανακλά ένα μικρόκοσμο. Μέσα από αυτό το σύστημα, αξιολογούνται οι κατάλληλες συνιστώσες και με αυτό τον τρόπο βρίσκονται οι προτεραιότητες τους.

Η ***ιεραρχία,*** αποτελεί ένα συγκεκριμένο τύπο συστήματος, το οποίο βασίζεται στο σκεπτικό ότι τα στοιχεία που αποτελούν τις οντότητες, μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ασυνεχή-ασύνδετα σύνολα, με τις οντότητες της μιας ομάδας να επηρεάζουν μόνο μια ομάδα και να επηρεάζονται αντίστοιχα από μια μόνο ομάδα. Τα στοιχεία σε κάθε επίπεδο εξετάζονται χωριστά αν υπάρχει μεταξύ τους εξάρτηση και χωριστά αν είναι ανεξάρτητα.

Ο Saaty μέσα από διάφορα παραδείγματα προσπαθεί να καθορίσει τη δομή αυτής της ιεραρχίας και να εξηγήσει την πολυπλοκότητα που μπορεί να προκύψει μέσα σε αυτήν. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το ακόλουθο, στο οποίο παρουσιάζεται η βασική δομή ενός κράτους στη μεσαιωνική Ευρώπη. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται η ιεραρχία του έχει την ακόλουθη μορφή.

Εικόνα 1.1 Βασική δομή ενός κράτους στη μεσαιωνική Ευρώπη.



Σύμφωνα με την εικόνα, υπάρχουν τέσσερις παράγοντες στο τελευταίο επίπεδο: η γεωργία, το εμπόριο, ο πληθυσμός του κράτους και η βιοτεχνία, οι οποίοι επηρεάζουν άμεσα την οικονομική ισχύ του κράτους. Η οικονομική ισχύς από την άλλη, καθορίζει τη λειτουργία της αστικής κυβέρνησης καθώς επίσης και του στρατού, τα οποία αποτελούν τη δύναμη της κοινωνίας. Ακολούθως, λοιπόν, αυτά τα δύο επηρεάζουν την ηγεμονία του κράτους καθώς και την ευημερία του.

Ανεξάρτητα από την απλότητα αυτού του μοντέλου, σαφέστατα θα μπορούσαν να υπάρχουν και άλλες οντότητες και η ιεραρχία να βασιζόταν σε πολύ περισσότερα επίπεδα. Αυτό ουσιαστικά εξαρτάται από το μοντέλο και την πολυπλοκότητα του, καθώς και από τα ερωτήματα πάνω στα οποία αναζητούνται απαντήσεις.

Ωστόσο, ο χρήστης της μεθόδου θα πρέπει να είναι προσεκτικός κατά τη δόμηση της ιεραρχίας, καθώς θα πρέπει τα στοιχεία να είναι πραγματικά και να κατανοήσει πλήρως την κατάσταση, ώστε να λάβει όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες πάνω σε αυτήν.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση, όπως το συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορεί να υπάρχουν αμφίδρομες επιρροές. Για παράδειγμα εδώ, το εμπόριο δεν επηρεάζει μόνο την αστική κυβέρνηση αλλά επηρεάζεται και από αυτήν. Αυτό όμως είναι κάτι που αγνοείται από την ιεραρχία. Αναλύοντας, λοιπόν, πολλαπλά τέτοιου είδους μοντέλα προέκυψε το συμπέρασμα ότι μια ιεραρχία μπορεί να αντανακλά πιστά την πραγματικότητα, ακόμα και αν υπάρχουν περιπτώσεις σαν την παραπάνω, όπου μια κατάσταση αγνοείται από την ιεραρχία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, μια πολύπλοκη κατάσταση να αναπαρασταθεί από μια ιεραρχία εξαιρετικά απλή.

Το δύσκολο κομμάτι σε μια ιεραρχία σύμφωνα με τον Saaty, είναι πως θα εξάγουμε πληροφορίες στα υψηλότερα επίπεδα, λόγω των αλληλεπιδράσεων που υπάρχουν ανάμεσα τους. Σταδιακά εμφανίστηκαν πολλές σχετικές μέθοδοι που σχετίζονται με το σχεδιασμό και τον προγραμματισμό τέτοιων συστημάτων.

Η απλούστερη ιεραρχία είναι γραμμική, γιατί οδηγείται από το ένα επίπεδο στοιχείων σε κάποιο γειτονικό. Παράδειγμα της αποτελεί μια κατασκευαστική εταιρεία, στην οποία υπάρχει το επίπεδο των εργατών στη βάση της ιεραρχίας. Αυτό, επιβλέπεται από ένα επίπεδο εργοδηγών, το οποίο με τη σειρά του επιβλέπεται από τους μηχανικούς, αυτοί από τη διοίκηση και τέλος όλα αυτά από τον πρόεδρο της εταιρείας. Μια μη γραμμική ιεραρχία, θα περιείχε κύκλους, σύμφωνα με τους οποίους ένα υψηλότερο επίπεδο θα κυριαρχούνταν από κάποιο χαμηλότερο και το αντίθετο.

Όσο αφορά τη μαθηματική θεωρία των ιεραρχιών, ο Saaty και οι συνεργάτες του ανέπτυξαν μια μέθοδο προκειμένου να αξιολογούν το πώς επηρεάζει ένα επίπεδο, ένα ανώτερο γειτονικό επίπεδο. Η μέθοδος αυτή, αποτελεί τον κορμό της AHP και αναπτύσσεται από κάτω προς τα πάνω σε μια ιεραρχία.

Τα στοιχεία του ενός επιπέδου, συγκρίνονται ένα προς ένα με δυαδικές πάντα συγκρίσεις, βαθμολογείται η σημασία του ενός με βάση το άλλο, σύμφωνα με την κλίμακα του Saaty, και έτσι προκύπτει τελικά η σύνθεση των προτεραιοτήτων, η οποία φανερώνει και την επιρροή που υπάρχει μεταξύ των επιπέδων.

Τα πλεονεκτήματα των ιεραρχιών που δημιουργούνται είναι τα εξής:

- Η αναπαράσταση ενός συστήματος μέσα από μια ιεραρχία είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική, καθώς παρουσιάζει πως αλλάζουν οι προτεραιότητες στα ανώτερα επίπεδα και τι επίπτωση έχει αυτό στις προτεραιότητες των στοιχείων στα χαμηλότερα επίπεδα.
- Δίνουν πληροφορίες σχετικά με το σύστημα πάνω στο οποίο βασίζεται η ιεραρχία και κυρίως στη λειτουργία του συστήματος στα χαμηλότερα επίπεδα, καθώς παρέχει μια συνολική εικόνα των παραγόντων αυτών στα υψηλότερα επίπεδα. Θα πρέπει να επισημανθεί, ότι οι περιορισμοί που θέτονται στα στοιχεία ενός επιπέδου, φαίνεται αν είναι σωστοί από το πόσο ικανοποιούνται στο αμέσως υψηλότερο επίπεδο.
- Τα φυσικά συστήματα που συντίθενται ιεραρχικά, εξελίσσονται αποτελεσματικότερα από αυτά που συντίθενται σαν σύνολο. Αυτό συμβαίνει γιατί μια ιεραρχία χωρίζεται σε ενότητες-επίπεδα και συνθέτει τις ενότητες μεταξύ τους.
- Οι ιεραρχίες, αποτελούν όχι μόνο σταθερά αλλά και ευέλικτα συστήματα. Σταθερά, γιατί οι μικρές αλλαγές σε αυτά έχουν και μικρή επίδραση και ευέλικτα, γιατί οι προσθήκες σε μια καλά δομημένη ιεραρχία δεν αλλάζουν την απόδοση της ως σύστημα.

Σε μια ιεραρχία δεν υπάρχει στάνταρ διαδικασία για τη δημιουργία των στόχων, των κριτηρίων και των εναλλακτικών λύσεων. Αυτό εξαρτάται από την αντίληψη του κάθε ατόμου, η οποία είναι διαφορετική και προσαρμοσμένη υποσυνείδητα να εξυπηρετεί τις προσωπικές του ανάγκες.

Ωστόσο, για να γίνεται κατανοητός ο τρόπος που χρησιμοποιεί ο καθένας τις εμπειρίες του, πρέπει να είναι αντικειμενικός, ασχέτως αν και πάλι καταγράφεται υποκειμενικά. Η αποσύνθεση κάθε προβλήματος επιμερίζει την υποκειμενικότητα και έτσι δίνεται ένα αντικειμενικότερο σύνολο κατά τη σύνθεση της ιεραρχίας.

Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι, παρά το γεγονός ότι η λειτουργική αναπαράσταση ενός συστήματος διαφέρει από άτομο σε άτομο, οι άνθρωποι συνήθως συμφωνούν στο να τοποθετούν στο τελευταίο επίπεδο των ιεραρχιών, τις εναλλακτικές ενέργειες του προβλήματος και στο επίπεδο πάνω από αυτό, τα χαρακτηριστικά των εν λόγω ενεργειών που πρέπει να ληφθούν υπόψη.

Για όλους αυτούς τους λόγους, δεν θα εξυπηρετούσε η ύπαρξη αυστηρών δομών κατά τη σύνθεση μιας ιεραρχίας. Προκειμένου να δημιουργηθεί η δομή της ιεραρχίας, υπάρχει στην κορυφή ο απώτερος-τελικός στόχος όπου αποτελεί και το επίπεδο ένα της ιεραρχικής δομής. Έπειτα, υπάρχουν οι επιμέρους στόχοι στο επίπεδο δύο και οι περιορισμοί των διαφόρων παραγόντων αποτελούν το τρίτο επίπεδο. Στη συνέχεια, υπάρχει ένα επίπεδο με τους παράγοντες για τους οποίους υπάρχει ενδιαφέρον, το οποίο ακολουθείται από τις αντικειμενικές έννοιες – στόχους των παραγόντων του προβλήματος, και τέλος, ένα επίπεδο που συνοψίζει τα πιθανά αποτελέσματα του προβλήματος που εξετάζεται.

Παραπάνω, παρουσιάζεται μια πολύ γενική εικόνα της δομής ενός ιεραρχικού συστήματος. Προφανώς κάποια από τα επίπεδα μπορούν να παραλειφθούν, να αντικατασταθούν ή να προστεθούν και άλλα. Πριν ξεκινήσει η υλοποίηση της ιεραρχίας, θα ήταν σημαντικό να υπάρχει μια λίστα με όλα τα στοιχεία που αφορούν το πρόβλημα, χωρίς να υπάρχει θέμα με τις μεταξύ τους επιρροές ή και τη διάταξη τους. Εάν η λίστα είναι πλήρης, τότε μέσα από αυστηρή κριτική, αναθεώρηση και ακολουθώντας μια υποτυπώδη ιεραρχική δομή, η ιεραρχία που θα προκύψει θα είναι σωστά ορισμένη και επομένως, αποτελεσματική.

1.4 Μέτρηση και σχετικές συγκρίσεις

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, η μέθοδος AHP στηρίζεται κυρίως στις συγκρίσεις που γίνονται μεταξύ των επιπέδων (κριτήρια - υποκριτήρια), προκειμένου να εξάγουμε ένα μετρήσιμο αποτέλεσμα για τη σύνθεση των προτεραιοτήτων. Είναι, λοιπόν, ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς πώς ο Saaty έφτασε σε αυτόν τον τρόπο και για ποιον λόγο.

Σύμφωνα με την κρίση σπουδαίων μαθηματικών, θεμελιώδης μαθηματική διαδικασία για την εξαγωγή ορισμένων μετρήσεων αποτελούν οι άμεσες συγκρίσεις των αντικειμένων που είναι προς μέτρηση. Στην επιστήμη οι μετρήσεις καλύπτονται σχεδόν εξολοκλήρου από θεμελιώδεις κλίμακες. Έτσι, η μέτρηση των αντικειμένων και οι συγκρίσεις που γίνονται πάνω σε αυτήν την μέτρηση βασίζονται στην αντίστοιχη θεμελιώδη κλίμακα. Όταν οι μετρήσεις των παραγόντων γίνονται με διαφορετικές κλίμακες, οι οποίες πρέπει να συνδυαστούν με τη βοήθεια τύπων, αντιμετωπίζονται ορισμένα προβλήματα. Έτσι λοιπόν, η επιστήμη έχει ως πρότυπο συγκεκριμένες δομές και μετρά αντικειμενικά τα στοιχεία αλλά ερμηνεύει τη σημασία τους υποκειμενικά.

Στη λήψη αποφάσεων όμως αυτό δεν είναι δυνατό να συμβεί, καθώς σε κάθε αντίστοιχο πρόβλημα υπάρχει ποικιλομορφία στις επιρροές. Για να δομηθεί σωστά ένα πρόβλημα, χρειάζεται αρχικά να κατανοηθεί σε βάθος και έπειτα να υπάρξουν οι κατάλληλες κρίσεις, σύμφωνα με τις οποίες θα εξάγουμε τις προτεραιότητες. Η υποκειμενική άποψη, λοιπόν, καλό θα ήταν να έχει αντιπροσωπευτικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο θα δομηθεί ένα πρόβλημα και θα ληφθούν αποφάσεις.

Στα μαθηματικά υπάρχουν δύο θεμελιώδεις τοπολογίες που σχετίζονται με αυτό. Η τοπολογία των μετρικών, η οποία ασχολείται με την τιμή που θα ανατεθεί σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο με την αντίστοιχη κλίμακα, και η τοπολογία της διάταξης, η οποία ασχολείται με τον προσδιορισμό της θέσης ενός στοιχείου έναντι των υπολοίπων.

Μέχρι να έρθει στην επιφάνεια η λήψη αποφάσεων ως επιστήμη, δεν υπήρχε γενικά έρευνα και γνώση σχετικά με τη διάταξη των στοιχείων. Βέβαια ακόμα και τώρα εξακολουθούν να γίνονται προσπάθειες προκειμένου να αντιμετωπιστούν προβλήματα λήψης αποφάσεων μέσα από θεωρίες. Ωστόσο, οι μετρήσεις σε τέτοιου είδους προβλήματα, για να δημιουργηθεί η διάταξη και να μετρηθούν οι προτεραιότητες, έχουν ανάγκη την ανθρώπινη κρίση. Η μέτρηση των προτεραιοτήτων πρέπει να γίνεται βασισμένη πάντα στις ιδιότητες διάταξης.

Πρέπει όμως να ξεκαθαρίσουμε και το λόγο για τον οποίο οι συγκρίσεις είναι η καλύτερη λύση για να είναι όσο πιο συνεπής γίνεται η διάταξη. Πολύ πριν από την ύπαρξη των κλιμάκων, οι άνθρωποι μετρούσαν τη σημασία που είχε ένα αντικείμενο συγκρίνοντας το με κάποιο άλλο. Παρατηρείται, λοιπόν, ότι οι συγκρίσεις είναι πολύ σημαντικό κομμάτι για την πραγματοποίηση των μετρήσεων και αυτό συμβαίνει για τους εξής λόγους:

- Υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει η κατάλληλη κλίμακα για τη συγκεκριμένη μέτρηση.
- Μπορεί το αποτέλεσμα που θα προκύψει από σχετικές συγκρίσεις να είναι πολύ πιο λογικό και ορθό από το αποτέλεσμα που θα έδινε μια κλίμακα, η οποία δεν είναι φτιαγμένη για το δεδομένο πρόβλημα.
- Υπάρχουν πράγματα-παράμετροι, τα οποία δεν μπορεί να μετρήσει κανείς και αυτό συνήθως αφορά κοινωνικό-πολιτικούς παράγοντες που εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα λήψης αποφάσεων.

Γίνεται σαφές ότι η μέτρηση παραγόντων και κριτηρίων διαφέρει και σχετίζεται με την κατάσταση και την αξία που έχουν αυτά σε ένα άτομο, ανάλογα με την κρίση του. Έτσι, η σημασία τους πρέπει να προσδιορίζεται ατομικά και για να συμβεί αυτό, πρέπει να συγκριθεί η σχέση των παραγόντων βασιζόμενοι σε έναν απώτερο στόχο. Οι συγκρίσεις είναι σχετικές και δεν μπορούν να αντικατασταθούν από μετρήσεις κλίμακας. Μέσω των σχετικών συγκρίσεων προκύπτει μια κλίμακα προτεραιοτήτων, οι οποίες έχουν σχετικές τιμές.

Επομένως, η διαδικασία ξεκινά με την κρίση του αποφασίζοντος και έπειτα ακολουθούν οι προτεραιότητες που προκύπτουν από αυτήν.

Σε προηγούμενα χρόνια χρησιμοποιούνταν αποκλειστικά η κρίση των ανθρώπων για τη διάταξη των πραγμάτων. Υπήρχε η σύγκριση δύο πραγμάτων, από τα οποία εντόπιζαν το μεγαλύτερο ή το προτιμότερο. Κάνοντας αριθμητικά πολλές τέτοιου είδους δυαδικές συγκρίσεις, δημιουργείται μια διάταξη πραγμάτων χωρίς να μπουν αριθμητικές τιμές. Όταν, όμως, με την πέραση των χρόνων εμπλέκονταν πολλά κριτήρια σε κάθε πρόβλημα δεν ήταν εύκολο να συνδυαστεί η κάθε διάταξη, ώστε να δημιουργηθεί εν τέλει μια συνολική διάταξη που να εμπεριέχει όλα τα κριτήρια του προβλήματος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, λοιπόν, είναι χρήσιμο να υπάρχουν αριθμοί που σχετίζονται με κάθε επιμέρους διάταξη, ώστε να γίνεται πιο εύκολα η σύνδεση μεταξύ των αριθμών με τα κριτήρια.

Οι αριθμοί αυτοί για τους οποίους αναλύθηκαν όλα τα παραπάνω, είναι τα λεγόμενα βάρη ή οι προτεραιότητες, που βοηθούν στην επίλυση πολυσταδιακών προβλημάτων. Στα πολυσταδιακά προβλήματα, σκοπός είναι να φαίνεται πώς το ένα κριτήριο επηρεάζει το άλλο κατά τη βαθμολόγηση αυτών ή των υποκριτηρίων. Για να γίνουν αυτές οι συγκρίσεις και να γίνει ορθή βαθμολόγηση αυτών, το μέσο είναι οι απόλυτοι αριθμοί, διότι δεν χρειάζονται ως βάση κάποια μονάδα μέτρησης που τους προσδιορίζει. Ένας απόλυτος αριθμός σε μια δυαδική σύγκριση, φανερώνει πόσο προτιμότερο ή μεγαλύτερο είναι το ένα συγκρινόμενο μέρος από το άλλο.

Μια τέτοια κλίμακα με απόλυτους αριθμούς για κάθε πρόβλημα λήψης αποφάσεων δημιούργησε ο Saaty προκειμένου να καταστήσει ευκολότερη τη μέτρηση μέσω των σχετικών συγκρίσεων και να διασφαλίσει τη σωστή εξαγωγή προτεραιοτήτων. Πρόκειται για τη λεγόμενη κλίμακα του Saaty (fundamental scale of absolute numbers), για την οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Τέλος, η συνέπεια των σχετικών συγκρίσεων που τις καθιστά ιδανικές, είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Η συνέπεια μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη σε οποιονδήποτε τρόπο μέτρησης και αξιολόγησης των αντικειμένων. Παρόλα αυτά ακόμα και τα πιο εξελιγμένα εργαλεία μέτρησης μπορεί να δώσουν ένα ασυνεπές αποτέλεσμα.

Πρέπει να αναφερθεί, επίσης, πως η συνέπεια σχετίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό με τη γνώση του αποφασίζοντος στην προκειμένη κατάσταση, όταν οι συγκρίσεις επηρεάζουν μια απόφαση.

Με άλλα λόγια, όσο πιο καλά γνωρίζει κάποιος το πρόβλημα, τόσο περισσότερη θα είναι η συνέπεια που θα έχει στην επίλυση του.

1.5 Η κλίμακα απόλυτων αριθμών του Saaty

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, οι δυαδικές συγκρίσεις μεταξύ των κριτηρίων ή των υποκριτηρίων και τα βάρη (προτεραιότητες) που εξάγονται, αποτελούν ένα πολύ σημαντικό μέρος της μεθόδου AHP. Οι συγκρίσεις αυτές, βασίζονται και στην κρίση του αποφασίζοντος αλλά και πολλές φορές σε κριτήρια που είναι ακαθόριστα. Ο Saaty, λοιπόν, βασίστηκε στο εξής, αντί να χρησιμοποιούνται δύο αριθμοί $\mathbf{w_i}$ και $\mathbf{w_j}$ (ή ο λόγος τους, $\mathbf{w_i / w_j}$), από μια κλίμακα στη διάρκεια των συγκρίσεων, να καθορίζεται η κάθε σύγκριση από έναν απόλυτο αριθμό που θα ανήκει σε μια θεμελιώδη κλίμακα και θα αντιπροσωπεύει το λόγο $\mathbf{(w_i / w_j)/1}$. Ο λόγος αυτός, αποτελεί μια αρκετά καλή προσέγγιση του $\mathbf{w_i / w_j}$ και από την κλίμακα που θα δημιουργηθεί, θα προκύψουν πληροφορίες για τους αριθμούς $\mathbf{w_i}$ και $\mathbf{w_j}$ που αποτελούν ουσιαστικά τα βάρη για το πρόβλημα. Παρακάτω παρουσιάζεται επακριβώς η κλίμακα απόλυτων αριθμών του Saaty που βασίζεται πάνω σε αυτό (Πίνακας 1.1). Όπως δημοσιεύθηκε από τον ίδιο, η κλίμακα αυτή προέρχεται από βασικές αρχές και αξιώματα, τα οποία θα παρουσιασθούν στην πορεία (Κεφάλαιο 2).

Είναι επίσης χρήσιμο να αναφερθεί πως η παρακάτω κλίμακα απόλυτων αριθμών μπορεί να προκύψει από το νόμο των Weber – Fechner, όσο αφορά το μαθηματικό κομμάτι. Από τη μία, ο Weber ήταν ένας επιστήμονας, ο οποίος από τους πρώτους προσέγγισε με ποσοτικό τρόπο την ανθρώπινη ανταπόκριση σε ένα φυσικό ερέθισμα. Από την άλλη, ο Fechner, μελέτησε τη θεωρία του πρώτου και δημιούργησε μια ερμηνεία πάνω σε αυτή την οποία και αποκάλεσε νόμο του Weber.

Ένταση της σχετικής σημασίας	Ορισμός	Ερμηνεία
1	Ίση βαρύτητα	Δύο δραστηριότητες συνεισφέρουν εξίσου στο στόχο.
3	Μέτρια βαρύτητα του ενός στοιχείου ως προς ένα άλλο	Η εμπειρία και η κρίση ευνοούν ελαφρώς μια δραστηριότητα έναντι της άλλης.
5	Σημαντική βαρύτητα του ενός στοιχείου ως προς ένα άλλο	Η εμπειρία και η κρίση ευνοούν σημαντικά μια δραστηριότητα έναντι της άλλης.
7	Εκδηλωμένη βαρύτητα	Μια δραστηριότητα ευνοείται ισχυρά και η κυριαρχία της εκδηλώνεται στην πράξη.
9	Μέγιστη βαρύτητα	Οι λόγοι που ευνοούν τη μια δραστηριότητα έναντι της άλλης είναι του υψηλότερου δυνατού βαθμού επιβεβαίωσης.
2,4,6,8	Ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα σε δύο παρακείμενες κρίσεις	Όταν απαιτείται συμβιβασμός.
Αντίστροφοι των παραπάνω αριθμών	Αν σε μια δραστηριότητα αντιστοιχίζεται ένας από τους παραπάνω αριθμούς, όταν αυτή συγκρίνεται με δεύτερη δραστηριότητα, τότε η δεύτερη έχει την αντίστροφη τιμή όταν συγκρίνεται με την πρώτη.	Δεν υπάρχει καμία ερμηνεία
Ρητοί αριθμοί	Αναλογίες που προκύπτουν από την κλίμακα.	Αν επιβαλλόταν η συνέπεια λαμβάνοντας n αριθμητικές τιμές για το σχηματισμό του πίνακα.

Πίνακας 1.1 Κλίμακα απόλυτων αριθμών του Saaty.

Ο Weber σε ένα πείραμα του διαπίστωσε, πως οι άνθρωποι μπορούν να διακρίνουν τη διαφορά βάρους μεταξύ αντικειμένων αν τα κρατάνε στα χέρια τους. Μπορούν, για παράδειγμα, να καταλάβουν τη διαφορά ανάμεσα σε ένα αντικείμενο βάρους 30 γραμμαρίων και σε ένα άλλο 31 γραμμαρίων. Ωστόσο αν το αντικείμενο είναι 30,5 η διαφορά δεν γίνεται αντιληπτή. Στη γενική του μορφή, λοιπόν, ένα ερέθισμα s, το οποίο έχει μετρήσιμο μέγεθος, πρέπει να αυξηθεί κατά ελάχιστη ποσότητα Δs, ώστε να φτάσει σε σημείο όπου οι ανθρώπινες αισθήσεις θα μπορούν να το διαχωρίσουν από το s. Η ποσότητα Δs ονομάζεται *παρατηρηθείς διαφορά*. Ο λόγος $r = \frac{\Delta s}{s}$ είναι ανεξάρτητος από το s. Σύμφωνα με το νόμο του Weber, η αλλαγή στην αίσθηση παρατηρείται όταν το ερέθισμα αυξάνεται κατά ένα σταθερό ποσοστό του ίδιου ερεθίσματος. Αυτό όμως ισχύει σε περιπτώσεις όπου το Δs είναι μικρό συγκριτικά με το s. Ωστόσο, στην πράξη δεν ισχύει όταν το s είναι πολύ μικρό ή πολύ μεγάλο.

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ο νόμος του Weber, είναι σημαντική η ομαδοποίηση ή η αποσύνθεση των ερεθισμάτων, για να χωριστεί η ιεραρχία σε επίπεδα. Μετά τον Weber, ο Fechner αξιοποιώντας το νόμο του πρώτου, αύξησε τα ερεθίσματα στην προσπάθεια να εξετάσει μια σειρά από παρατηρηθείς διαφορές. Ξεκίνησε με ένα ερέθισμα s_0, και τα διαδοχικά ερεθίσματα προέκυψαν με την ακόλουθη μορφή:

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0 (1 + r)$$

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1 (1 + r) = s_0 (1 + r)^2 \equiv s_0 a^2$$

.

.

.

$$s_n = s_{n-1} a = s_0 a^n \quad (n=0,1,2,\dots) \qquad (0.1)$$

Από τους παραπάνω τύπους παρατηρείται ότι τα ερεθίσματα ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο. Επίσης, ο Fechner παρατήρησε πως οι αντιδράσεις θα πρέπει να βρίσκονται σε μια αριθμητική ακολουθία, στην οποία τα διακριτά σημεία θα είναι οι παρατηρηθείς διαφορές. Εάν λυθεί η εξίσωση (0.1) ως προς n, τότε προκύπτει ότι η αίσθηση είναι μια γραμμική εξίσωση λογαρίθμου:

$$n = (\log s_n - \log s_0)/\log a$$

Οπότε ο νόμος των Weber–Fechner μπορεί να αναπαρασταθεί σύμφωνα με τη σχέση:

$$M = a \log s + b, \quad a \neq 0,$$

όπου M είναι η αίσθηση και s το ερέθισμα.

Αν υποθέσουμε ότι τα ερεθίσματα προκύπτουν μέσα από δυαδικές συγκρίσεις και εξετάζονται οι αντιδράσεις που γίνονται πάνω σε αυτά τα ερεθίσματα, οι αριθμητικές τιμές τους έχουν τη μορφή λόγου. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι οι αντιδράσεις μετρούνται σε μια κλίμακα λόγων *(b=0)*. Μια αντίδραση δίνεται από τη σχέση $M_i = a \log a^i, i = 1, \dots, n$ και αντίστοιχα η αριθμητική ακολουθία θα έχει τη μορφή:

$$M_1 = a \log a, \quad M_2 = 2a \log a, \dots, \; M_n = na \log a$$

Αν παρατηρήσει κανείς τους λόγους των αντιδράσεων $M_i/M_1, i = 1, \ldots, n$ προσδιορίζονται οι ακέραιες τιμές 1,2,…,n και δίνεται η ακολουθία 1,2,3,….Έτσι καταλήγουμε σε ένα σύνολο S πεπερασμένων θετικών πραγματικών αριθμών, όπου ο καθένας δίνει ένα μέτρο στη σημασία που έχουν οι δύο παράγοντες πάνω στη γνώμη του αποφασίζοντα. Το σύνολο S αποτελεί ένα πεπερασμένο σύνολο για την αποφυγή δημιουργίας μιας παραπλανητικής εντύπωσης ότι η ανθρώπινη κρίση μπορεί να κάνει αυθαίρετα οποιαδήποτε σύγκριση ανεξάρτητα από την ανομοιογένεια των συγκρινόμενων μερών. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.1, ο Saaty προτείνει ως επαρκές σύνολο το:

$$S = \{1/9, 1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Επιτρέπει επίσης τη βελτίωση του επεκτείνοντας το ως εξής:

$$\{1/9, 1/8, 1/7, \ldots, 1, \ldots, 7, 8, 9\}.$$

Αναφερόμενοι στην κλίμακα του Saaty θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ορισμένους από τους λόγους που καθιστούν το 9 το άνω όριο της κλίμακας:

- Ο πρώτος λόγος είναι πως μεταξύ των συγκρινόμενων μερών απαιτείται ομοιογένεια. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ποιοτικές συγκρίσεις έχουν νόημα στην πράξη και παρέχουν ακρίβεια μόνο όταν τα στοιχεία είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Η ικανότητα του ανθρώπου να εντοπίζει ποιοτικές διαφορές σε μια σύγκριση, αντιπροσωπεύεται από πέντε χαρακτηρισμούς: ίση, ασθενής, δυνατή, ισχυρή και απόλυτη (equal, weak, strong, very strong & absolute). Βέβαια υπάρχει και η έννοια του συμβιβασμού όταν απαιτείται περισσότερη ακρίβεια. Η έννοια του συμβιβασμού παρατηρείται ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία της κριτικής σκέψης. Γι’ αυτό και το σύνολο που προκύπτει αποτελείται από 9 διαδοχικές τιμές.

- Η γνώμη του Saaty ήταν να παρατηρήσουμε μια κατάσταση περισσότερο από μια πρακτική σκοπιά, παρά από μαθηματική. Αν για παράδειγμα θέλουμε να σημειώσουμε την προτίμηση ανάμεσα σε δύο στοιχεία, ένας άνθρωπος θα σκεφτεί αμέσως τρεις επιλογές που αφορούν το πρώτο στοιχείο: χαμηλή, μέση, υψηλή. Κάθε μια από αυτές τις επιλογές θα τις αντιστοιχήσει και στο δεύτερο στοιχείο. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται εννιά επίπεδα διάκρισης μεταξύ των στοιχείων. Έτσι η χαμηλότερη προτίμηση δίνεται με το ζεύγος στο οποίο αντιστοιχεί το επίπεδο 1 και η υψηλότερη με το ζεύγος στο επίπεδο 9. Με αυτόν τον τρόπο καλύπτεται το εύρος των προτιμήσεων.
- Υπάρχει επιπλέον και το λεγόμενο ψυχολογικό όριο. Αυτό δείχνει ότι σε μια παράλληλη σύγκριση, αν πάρουμε 7±2 στοιχεία τα οποία παρουσιάζουν ναι μεν ομοιογένεια, αλλά είναι και λίγο διαφορετικά μεταξύ τους, θα χρειαστούν 9 ακριβώς σημεία για να διακριθούν οι μεταξύ τους διαφορές.

- Ο Saaty έχει αποδείξει μέσω των δεικτών συνέπειας ότι ο χρήστης δεν χρειάζεται να λαμβάνει υπόψη του περισσότερα από 7±2 επίπεδα σύγκρισης. Η κλίμακα του συνδέεται άμεσα με τη σημασία που δίνεται στις αποφάσεις. Ακόμα και αν υπάρχει μια ακριβής μέτρηση σε ένα κριτήριο έναντι σε κάποιο άλλο, π.χ. 3,527, ο χρήστης μπορεί να τη χρησιμοποιήσει χωρίς προσέγγιση. Αυτό είναι καθαρά στην κρίση του καθώς έχει διαπιστωθεί ότι μικρές αλλαγές σε αυτήν, οδηγούν σε μικρές αλλαγές στις προτεραιότητες που προκύπτουν.

- Τέλος, χρησιμοποιείται η συσταδοποίηση (clusterization), σε περιπτώσεις όπου υπάρχει ανομοιογένεια μεταξύ των στοιχείων που συγκρίνονται και η κλίμακα κρίνεται ανεπαρκής. Τα στοιχεία τοποθετούνται σε συστάδες των οποίων οι αριθμητικές τιμές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Στην πράξη, οι ποσοτικές διαφορές δεν είναι πολλές. Στο εσωτερικό κάθε συστάδας διατηρείται η βαθμολόγηση σύμφωνα με την υπάρχουσα κλίμακα και έτσι επεκτείνεται όσο είναι απαραίτητο για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα.

1.6 Συνέπεια και ερεθίσματα (προτεραιότητες)

Όπως προαναφέρθηκε, μια ιεραρχία αποτελεί απεικόνιση μιας πραγματικής κατάστασης, η οποία μπορεί να είναι λιγότερο ή περισσότερο πιστή με την πραγματικότητα. Μια ιεραρχία περιλαμβάνει τα πιο σημαντικά στοιχεία ενός προβλήματος και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Κάτι που πρέπει να προσδιοριστεί σε αυτά, είναι το πώς τα στοιχεία ενός επιπέδου επιδρούν στο αμέσως ανώτερο στην ιεραρχία. Αυτό που πρέπει να υπολογιστεί είναι η σχετική ισχύς των στοιχείων του χαμηλότερου επιπέδου στους γενικούς στόχους. Για να γίνει αυτό ξεκινάμε από το χαμηλότερο επίπεδο της ιεραρχίας και υπολογίζουμε την προτεραιότητα που έχει ένα στοιχείο του σε σχέση με αυτό με το οποίο συγκρίνεται από το ανώτερο του επίπεδο. Συνεχίζοντας ανάλογα και κάνοντας τις απαραίτητες συγκρίσεις υπολογίζονται οι προτεραιότητες μέχρι το ανώτατο σημείο της ιεραρχίας. Για να υπολογιστούν οι παραπάνω προτεραιότητες χρησιμοποιούνται πίνακες και οι αντίστοιχες ιδιότητές τους.

Έστω ότι δίνονται τα στοιχεία του τέταρτου επιπέδου μιας ιεραρχίας και έχουμε και ένα στοιχείο *e* του επόμενου υψηλότερου επιπέδου. Συγκρίνουμε τα στοιχεία στο επίπεδο τέσσερα κατά ζεύγη σε σχέση με το στοιχείο *e*. Εισάγουμε τους αριθμούς που αντιπροσωπεύουν τις συγκρίσεις σε έναν πίνακα και βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα αυτού με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Αυτό το ιδιοδιάνυσμα παρέχει την κατάταξη της προτεραιότητας ενώ η ιδιοτιμή το μέτρο της συνέπειας.

Το βασικό εργαλείο οπότε για να βρεθούν οι προτεραιότητες είναι ένας πίνακας αριθμών, που αντιπροσωπεύει την κρίση του αποφασίζοντος και απεικονίζει τις δυαδικές συγκρίσεις. Στην πορεία, θα αναφερθεί ο λόγος για τον οποίο ο Saaty επέλεξε το ιδιοδιάνυσμα με την μεγαλύτερη τιμή για την εξαγωγή των προτεραιοτήτων.

1.6.1 Η προτεραιότητα ως ιδιοδιάνυσμα

Έστω τα στοιχεία $C_1,\ldots,C_n$ ενός επιπέδου της ιεραρχίας. Πρέπει να βρεθούν τα σχετικά βάρη $w_1,\ldots w_n$ που φανερώνουν πως επηρεάζουν τα στοιχεία $C_1,\ldots C_n$, κάποιο στοιχείο του αμέσως επόμενου επιπέδου.

Αναπαριστούμε έναν αριθμό που υποδεικνύει την ισχύ του C_i όταν συγκρίνεται με το C_j, ως a_{ij}. Ο πίνακας των a_{ij} είναι ο πίνακας A, όπου:

$$A = (a_{ij}).$$

Ισχύει ότι: $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας Α έχει αντίστροφο. Επίσης ο πίνακας Α θεωρείται συνεπής αν και μόνο αν ισχύει:

$$a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk} \text{ για κάθε } i\ ,j\ ,k.$$

Όταν οι συγκρίσεις βασίζονται σε ακριβείς μετρήσεις, τότε ο πίνακας Α θα είναι συνεπής. Στην περίπτωση που συμβαίνει αυτό τα βάρη $w_1,\ldots,w_n$ είναι ήδη γνωστά. Τότε:

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad i,j = 1,\ldots,n \qquad (1.1)$$

Οπότε:

$$a_{ij}a_{jk} = \frac{w_i}{w_j}\frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik}$$

Άρα και λόγω αντιστροφής ισχύει:

$$a_{ij} = \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{w_i/w_j} = \frac{1}{a_{ij}}$$

Έστω λοιπόν η εξίσωση: $y = A \cdot x$, όπου x = (x_1,…x_n) και y = (y_1,…,y_n). Ένας άλλος συμβολισμός του συνόλου εξισώσεων είναι:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = y_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Από τη σχέση (1.1) κρατάμε ότι:

$$a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} = 1 \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Και επομένως:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \frac{1}{w_i} = n \qquad i = 1, \dots, n$$

ή

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = n w_i \qquad i = 1, \dots, n$$

Το οποίο ισοδυναμεί με:

$$Aw = nw \qquad (1.2)$$

Η παραπάνω έκφραση δηλώνει ότι το w είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α με ιδιοτιμή n. Αν σχεδιάζαμε τη σχέση (1.2) σε μορφή πίνακα θα ήταν η εξής:

	A_1	A_2	…	A_n			
A_1	w_1/w_1	w_1/w_2	…	w_1/w_n	w_1		w_1
A_2	w_2/w_1	w_2/w2	…	w_2/w_n	w_2		w_2
.	.	.			w_3	$= n$	w_3
.	.	.			...		...
.	.	.			w_n		w_n
A_n	w_n/w_1	w_n/w_2	…	w_n/w_n			

Μέχρι τώρα όλα τα παραπάνω βασίζονται στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις είναι ακριβείς και ο πίνακας Α θα ήταν συνεπής. Πρακτικά όμως, οι αριθμοί a_{ij}, επειδή βασίζονται στην υποκειμενική κρίση του χρήστη που πραγματοποιεί τις συγκρίσεις, θα αποκλίνουν από το λόγο $^{w_i}/_{w_j}$ και η σχέση (1.2) δεν θα ισχύει.

Έτσι θα πρέπει να ληφθούν υπόψη δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες των πινάκων:

<u>Ιδιότητα 1η:</u> Αν οι τιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ικανοποιούν την εξίσωση,

$$Ax=\lambda x,$$

τότε $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα Α και αν $a_{ii} = 1$ για όλα τα i, τότε:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

Συνεπώς, αν ισχύει η σχέση (1.2) τότε όλες οι ιδιοτιμές είναι μηδενικές εκτός από μια που θα ισούται με n. Άρα στην περίπτωση που ο πίνακας Α είναι συνεπής, η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ισούται με n.

<u>Ιδιότητα 2η:</u> Εάν σε έναν πίνακα Α, ο οποίος είναι ένας θετικός αντιστρέψιμος πίνακας, οι τιμές a_{ij} υποστούν μικρή αλλαγή, τότε και οι ιδιοτιμές θα υποστούν αντίστοιχα ανάλογη αλλαγή.

Εξάγουμε λοιπόν το συμπέρασμα ότι αν η διαγώνιος του Α είναι μοναδιαία $(a_{ii}=1)$ και ο πίνακας είναι συνεπής, ακόμη και να υπάρξουν μικρές μεταβολές στις τιμές των στοιχείων, η μεγαλύτερη ιδιοτιμή θα παραμείνει κοντά στο n και οι υπόλοιπες κοντά στο μηδέν.

Οπότε προκύπτει το εξής συμπέρασμα: αν Α ο πίνακας που περιέχει τις τιμές των δυαδικών συγκρίσεων, για να βρεθεί το διάνυσμα των προτεραιοτήτων, πρέπει να βρεθεί το διάνυσμα *w*, τέτοιο ώστε:

$$Aw=\lambda_{max}w$$

Για να εξασφαλίσουμε μια κανονικοποιημένη λύση όπως είναι επιθυμητό, μεταβάλλεται ελαφρώς το διάνυσμα *w*, θέτοντας $a = \sum_{i=1}^{n} w_i$ και βάζοντας στη θέση του *w* τη σχέση *(1/a)w*. Η αλλαγή αυτή διασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μοναδικό και επιπλέον ότι $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

1.6.2 Συνέπεια και ιδιοτιμές:

Είναι πλέον εμφανές ότι η συνέπεια του πίνακα σχετίζεται άμεσα με τη συνέπεια των κρίσεων και των αποφάσεων. Γενικά με τον όρο συνέπεια ενός πίνακα εννοούμε ότι, όταν γνωρίζουμε ένα βασικό ποσοστό των στοιχείων μιας σειράς του πίνακα, τα υπόλοιπα στοιχεία μπορούν να εξαχθούν λογικά από αυτό. Στη δεδομένη περίπτωση όπου έχουμε *n* στοιχεία, έχουμε *n-1* δυαδικές συγκρίσεις. Το βασικό εργαλείο για τον έλεγχο της συνέπειας είναι η τιμή της πρωτεύουσας ιδιοτιμής, από την οποία προκύπτει το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα, το οποίο όταν κανονικοποιείται γίνεται το διάνυσμα των προτεραιοτήτων.

Ορισμός 1.1:

Έστω ένας πίνακας $A = (a_{ij})$. Ένας πίνακας ορίζεται ως πολλαπλασιαστικός του A^r όταν για κάθε στοιχείο του a_{ij} ισχύει:

$$a_{ji}^{r} = \frac{1}{a_{ij}}$$

Η συνέπεια ενός θετικά ορισμένου πίνακα A^r είναι ισοδύναμη με την απαίτηση ότι η μέγιστη ιδιοτιμή λ_{max} πρέπει να είναι ίση με *n*.

Όπως αναφέρθηκε στην Ιδιότητα 2, οι μικρές αλλαγές στις τιμές των στοιχείων επιφέρουν και μικρές αλλαγές στην πρωτεύουσα ιδιοτιμή. Έτσι η σχέση λ_{max}-*n* αποτελεί το μέτρο για τη συνέπεια. Εάν αυτή κανονικοποιηθεί σύμφωνα με το μέγεθος του πίνακα, προκύπτει ο δείκτης συνέπειας, ο οποίος φανερώνει την απόκλιση της συνέπειας.

$$\textbf{Δείκτης συνέπειας: } \mathrm{C.I.} = \frac{(\lambda_{\max} - \mathrm{n})}{\mathrm{n}-1}$$

Για να προσδιορίσουμε το δείκτη συνέπειας ενός τυχαία παραγόμενου πίνακα A^r με στοιχεία από το σύνολο του Saaty, ορίστηκε ο τυχαίος δείκτης **R.I** (random index). Το σύνολο του Saaty, αποτελεί ένα πεπερασμένο σύνολο θετικών αριθμών, που στην επεκταμένη μορφή του είναι το εξής: {1/9, 1/8, …, 1, …, 8, 9}. Ο R.I. είναι ένας τυχαίος δείκτης, ο οποίος έχει υπολογιστεί με τη χρήση τυχαίων θετικά ορισμένων πινάκων A^r αυξανόμενης τάξης. Οι τιμές του τυχαίου δείκτη δίνονται από έναν πίνακα που έχει δημιουργήσει ο Saaty, χρησιμοποιώντας μεγάλο δείγμα πινάκων έως και 15ης τάξης, υπολογίζοντας κατά μέσο όρο το δείκτη συνέπειας για κάθε τάξη. Αυτό παρουσιάζεται παρακάτω στον Πίνακα 1.2.

Μέγεθος πίνακα	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
R.I.	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Πίνακας 1.2: Τιμές του τυχαίου δείκτη R.I.

Ο λόγος του δείκτη C.I. προς τον αντίστοιχης τάξης R.I. καλείται λόγος συνέπειας (C.R.). Αυτός είναι και ο δείκτης που κρίνει τη συνέπεια των αποτελεσμάτων και ολοκληρώνει τον έλεγχο της συνέπειας. Όπως φαίνεται και στη σχέση, C.R. = C.I. / R.I., είναι αντιστρόφως ανάλογος με τη συνέπεια των κρίσεων. Ο Saaty έχει ως αποδεκτό όριο για τα αποτελέσματα την τιμή 0,10. Αν ο C.R. είναι μεγαλύτερος από αυτήν την τιμή θεωρείται ασυνεπής. Στην πράξη βέβαια, τιμές λίγο πάνω από το 0,10 γίνονται αποδεκτές. Η ιδανική τιμή για τη συνέπεια της διαδικασίας είναι το μηδέν.

Κλείνοντας λοιπόν να επισημάνουμε ότι οι τρεις αυτοί δείκτες ολοκληρώνουν τον έλεγχο της συνέπειας της μεθόδου. Το γεγονός ότι, η ίδια η μέθοδος προβλέπει τρόπους για τη μέτρηση της συνέπειας των κρίσεων, την καθιστά ως μια από τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους.

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνεται το θεωρητικό υπόβαθρο για τη μέθοδο της ιεραρχικής ανάλυσης αποφάσεων και περιγράφονται τα σημεία κλειδιά της. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο θεμελιώνεται. Θα δούμε με ακρίβεια πως προκύπτει η ιεραρχική ανάλυση των αποφάσεων με τη μέθοδο του ιδιοδιανύσματος μέσα από ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα που παρέχουν στην AHP μια λειτουργική βάση.

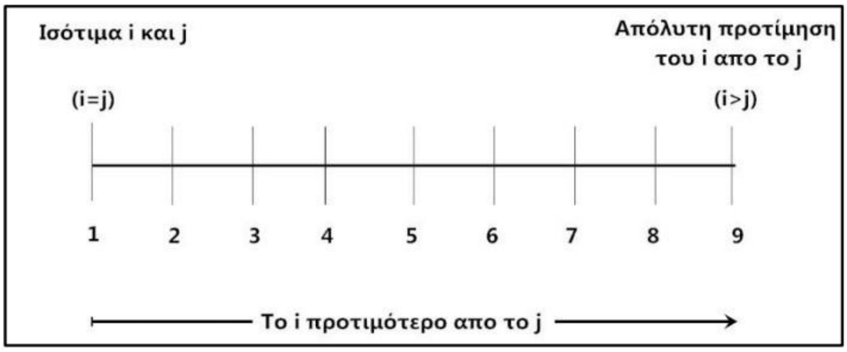
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ AHP

Στο προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 1^{ο}), πραγματοποιήθηκε ανάλυση του θεωρητικού μέρους της AHP. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν θεωρήματα (αξιώματα) πάνω στα οποία έχει βασιστεί η Ιεραρχική Ανάλυση Αποφάσεων και με ποιον τρόπο συνδέονται αυτά με το θεωρητικό της υπόβαθρο.

Η πρώτη μέθοδος, είναι η μέθοδος του ιδιοδιανύσματος, σύμφωνα με την οποία υπολογίζονται τα σχετικά βάρη των εναλλακτικών αποφάσεων. Η κατάταξη των προτεραιοτήτων δίνεται από το ιδιοδιάνυσμα w, το οποίο προκύπτει από τη σχέση:

$$Aw = \lambda_{max} w,$$

όπου A είναι ο πίνακας που περιέχει τις τιμές από τις δυαδικές συγκρίσεις και λ_{max}, η πρωτεύουσα ιδιοτιμή του πίνακα. Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται οι τιμές των δυαδικών συγκρίσεων a_{ij}, που φανερώνουν τη σημασία του παράγοντα i ως προς τον παράγοντα j:



Εικόνα 2.1: Σχετική σημασία των παραγόντων i και j

Το διάνυσμα των προτεραιοτήτων w υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη συνοπτική διαδικασία:

1. Υπολογίζεται το άθροισμα της κάθε γραμμής του πίνακα A από τη σχέση:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

2. Για κάθε γραμμή του πίνακα Α υπολογίζονται τα βάρη w_i από το πηλίκο: $w_i = {s_i}/{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}}$, από το οποίο προκύπτει το κανονικοποιημένο διάνυσμα $\widehat{w}$. Είναι γνωστό ότι ισχύει πάντα $\sum_i w_i = 1$.

3. Τέλος υψώνεται ο πίνακας Α στο τετράγωνο και αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι οι δύο διαδοχικές εκτιμήσεις του $\widehat{w}$ να μην διαφέρουν.

Μετά τον υπολογισμό του διανύσματος των προτεραιοτήτων για κάθε πίνακα δυαδικών συγκρίσεων, πρέπει να υπολογιστούν οι προτεραιότητες συνολικά για κάθε εναλλακτική λύση-απόφαση. Μέσα από πράξεις πολλαπλασιασμού μεταξύ των βαρών του κάθε πίνακα, από το κατώτερο προς το ανώτερο επίπεδο, προκύπτει και η συνολική προτεραιότητα.

Στην συνέχεια, λοιπόν, θα αναλυθεί η μέθοδος του ιδιοδιανύσματος μέσα από θεμελιώδη αξιώματα του Saaty.

2.1. Αξιώματα που αφορούν τη δημιουργία μιας θεμελιώδους κλίμακας

Έστω το σύνολο ***A*** το οποίο αποτελείται από *n* στοιχεία, τις λεγόμενες εναλλακτικές. Έστω το σύνολο ***C*** στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι ιδιότητες και τα γνωρίσματα σύμφωνα με τα οποία γίνονται οι συγκρίσεις στο ***A***. Για να κατανοήσουμε τη σημασία των εννοιών ας δώσουμε μερικούς ορισμούς. **Ιδιότητες** ορίζονται τα χαρακτηριστικά που έχει μια οντότητα. **Γνωρίσματα** ορίζονται τα χαρακτηριστικά που εμείς αποδίδουμε σε μια οντότητα. Έπειτα τις ιδιότητες και τα γνωρίσματα τα αναφέρουμε ως κριτήρια.

Λέμε ότι πραγματοποιούμε μια δυαδική σύγκριση όταν δύο στοιχεία του συνόλου ***A*** συγκρίνονται σύμφωνα με ένα κριτήριο του ***C***. Έστω λοιπόν μια δυαδική σχέση στο ***A***, η $>_c$, η οποία αντιπροσωπεύει τη σύγκριση «προτιμώμενο από» σε σχέση με ένα κριτήριο *C* στο σύνολο ***C***. Επίσης η δυαδική σχέση $—_c$, η οποία αντιπροσωπεύει την έκφραση «αδιάφορο σε σχέση με» ένα κριτήριο *C* στο σύνολο ***C***. Έτσι έχοντας δύο στοιχεία A_i, A_j, τα οποία ανήκουν στο ***A***, δημιουργούνται τρεις σχέσεις, από τις οποίες χρησιμοποιείται η μια, για να υποδείξουν τη μεγαλύτερη προτίμηση ή το αδιάφορο. Οι σχέσεις αυτές είναι οι εξής, $A_i >_c$, ή $A_j >_c$, ή $A_i —_c A_j$ για κάθε *C* που ανήκει στο σύνολο ***C***.

Έστω ***B*** ένα σύνολο απεικονίσεων του A×A στο R^+. Έστω f: C→B. Έστω και P_c ανήκει *f(C)* για κάθε *C* που ανήκει στο σύνολο ***C***. Ο αριθμός P_c αντιστοιχίζει ένα θετικό πραγματικό αριθμό σε κάθε ζεύγος (A_i, A_j) που ανήκουν στο συνδυασμό A×A. Αν ισχύει και ότι P_c (A_i,A_j)= a_{ij} που ανήκει στο R^+, για A_i,A_j που ανήκει στο A, τότε για κάθε *C* που ανήκει στο σύνολο ***C***, η τριάδα (A×A, R^+ , P_c), αποτελεί μια θεμελιώδη κλίμακα, η οποία σύμφωνα με τον Saaty αποτελεί μια απεικόνιση των αντικειμένων ή των στοιχείων σε ένα αριθμητικό σύστημα.

Παρακάτω αναφέρονται ορισμοί και αξιώματα στα οποία βασίζεται η μελέτη πάνω στο κομμάτι των συγκρίσεων και της μεθόδου.

Ορισμός 2.1: Ισχύει για κάθε A_i, A_j που ανήκουν στο ***A*** και *C* που ανήκει στο σύνολο ***C*** ότι:

$$A_i >_c A_j \text{ αν και μόνο αν } P_c (A_i, Aj)>1$$

$$A_i —_c A_j \text{ αν και μόνο αν } P_c (A_i, Aj) =1$$

Αν $A_i >_c A_j$ λέμε ότι το A_i υπερισχύει του A_j **αναφορικά** με το κριτήριο *C*. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός P_c αντιπροσωπεύει την ένταση ή την δύναμη της προτίμησης μιας εναλλακτικής σε σχέση με μια άλλη.

Αξίωμα 2.1: Για κάθε A_i, A_j που ανήκουν στο ***A*** και *C* που ανήκει στο σύνολο ***C*** ξέρουμε ότι ισχύει:

$$P_c\left(A_{i,}A_j\right) = \frac{1}{P_{c(Aj,Ai)}}.$$

Έστω A = (a_{ij}) = (P_c (A_i, A_j)) το σύνολο που περιγράφει το σύνολο των ζευγών των συγκρίσεων των εναλλακτικών που αναφέρονται σε ένα κριτήριο *C*. Από το αξίωμα 2.1 και τοn ορισμό 1.1 ο πίνακας A είναι ένας θετικός A' πίνακας. Σκοπός είναι η ταξινόμηση των εναλλακτικών σε μια κλίμακα σχετικής κυριαρχίας σύμφωνα με τις συγκρίσεις στον πίνακα A.

Έστω $R_{M(n)}$ το σύνολο των *(n×n)* θετικών πολλαπλασιαστικών πινάκων A= (a_{ij}) = (P_c (A_i, A_j)) για κάθε C. Έστω $[0,1]^n$ το n - διάστατο καρτεσιανό γινόμενο του διαστήματος [0,1] και έστω ψ: $R_{M(n)} \rightarrow [0,1]^n$ για κάθε A που ανήκει στο $R_{M(n)}$, όπου το ψ(A) αποτελεί ένα διάνυσμα *n* διαστάσεων του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στο διάστημα [0,1]. Η τριάδα ($R_{M(n)}$, $[0,1]^n$, ψ) αποτελεί μια παραγόμενη κλίμακα, η οποία αποτελεί μια απεικόνιση μεταξύ δύο αριθμητικών συστημάτων σχετικών μεταξύ τους.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η σειρά κατάταξης που προκύπτει από την κλίμακα ψ, πιθανόν να μην ταυτίζεται με αυτή των δυαδικών συγκρίσεων. Έστω $ψ_i$(A) το *i-οστό* στοιχείο του διανύσματος ψ(A).

Αυτό υποδηλώνει τη σχετική σημασία που έχει η *i-οστή* εναλλακτική. Ξέρουμε ότι για κάθε A_i, A_j που ανήκει στο A όταν $A_i >_c A_j$ συνεπάγεται ότι $P_c(A_i, A_j) > 1$. Ωστόσο αν ισχύει αυτό, στην παραγόμενη κλίμακα μπορεί να ισχύει $\psi_i(A) > \psi_j(A)$. Αυτό οφείλεται στη συνέπεια του στοιχείου P_c.

Ορισμός 2.2: Η απεικόνιση P_c είναι συνεπής αν και μόνο αν ισχύει

$$P_c(A_i, A_j)\, P_c(A_j, A_k) = P_c(A_i, A_k) \text{ για κάθε } i, j, k.$$

Ομοίως ο πίνακας A είναι συνεπής αν και μόνο αν $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ για κάθε i, j, k.
Αν λοιπόν ισχύει η συνέπεια, τότε ισχύει και το αξίωμα 2.1 και σύμφωνα με τον Saaty, η σειρά με την οποία κατατάσσονται οι εναλλακτικές ταυτίζεται με τη σειρά κατάταξης των συγκρίσεων.

2.2 Αξιώματα σχετικά με την ιεραρχία

Ορισμός 2.3: Ένα σύνολο ***S*** με μια διμερή σχέση $\leq$ ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- ✓ Ανακλαστική: Για κάθε *x* που ανήκει στο ***S***, $x \leq x$.
- ✓ Μεταβατική: Για κάθε *x, y, z* που ανήκει στο ***S***, αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
- ✓ Αντισυμμετρική: Για κάθε *x, y* που ανήκει στο ***S***, αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$.

Ορισμός 2.4: Για κάθε σχέση $x \leq y$, προσδιορίζουμε $x < y$ υπό την έννοια ότι $x \leq y$ και $x \neq y$. Το *y* λέμε ότι κυριαρχεί του *x* όταν $x < y$ και δεν υπάρχει ενδιάμεση τιμή *t*, δηλαδή $x < t < y$.
Μπορούμε εύκολα να αναπαραστήσουμε διατεταγμένα σύνολα με συγκεκριμένο αριθμό στοιχείων με ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Κάθε στοιχείο του συνόλου αντιπροσωπεύεται από μια κορυφή ώστε να έχουμε μετάβαση από το x στο y, αν ισχύει $x < y$.

Ορισμός 2.5: Έστω σύνολο ***E***, το οποίο αποτελεί υποσύνολο του συνόλου ***S***. Λέμε ότι το ***E*** είναι φραγμένο πάνω ή κάτω αν υπάρχει στοιχείο *s* που ανήκει στο ***S***, τέτοιο ώστε $x \leq s$ ή $x \geq s$ αντίστοιχα, για κάθε *x* που ανήκει στο ***E***. Το στοιχείο *s* καλείται άνω ή κάτω φράγμα του ***E***.
Λέμε, λοιπόν, ότι το ***E*** έχει ένα supremum ή infimum αν έχει άνω ή κάτω φράγματα και αν το σύνολο αυτών *U ή L* έχει ένα στοιχείο u_1 ή l_1, τέτοιο ώστε $u_1 \leq u$, για κάθε *u* που ανήκει στο *U* ή $l_1 \geq l$ για κάθε *l* που ανήκει στο *L*, αντίστοιχα.

Ορισμός 2.6: Έστω ***H*** ένα πεπερασμένο σύνολο με το μεγαλύτερο του στοιχείο να είναι το *b*. Λέμε ότι το ***H*** αποτελεί ιεραρχία αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1) Μπορεί να γίνει διαμερισμός του ***H*** σε σύνολα τα οποία καλούνται επίπεδα, $\{L_k, k = 1, 2,\dots, h\}$, όπου $L_1=\{b\}$.
2) Αν το *x* ανήκει στο L_k, δηλαδή αν το $x^- \subseteq L_{k+1}$, όπου $x^- = \{ y|x$ περιλαμβάνει το $y\}$, $k = 1, 2,\dots, h-1$.
3) Αν το *x* ανήκει στο L_k, υποδηλώνει επίσης ότι $x^+ \subseteq L_{k-1}$, όπου $x^+ = \{ y|y$ περιλαμβάνει το $x\}$, $k = 2, 3,\dots, h$.

<u>Ορισμός 2.7:</u> Έχοντας ένα θετικό πραγματικό αριθμό $\rho \geq 1$ και ένα μη κενό σύνολο $x^- \subseteq L_{k+1}$ λέμε ότι το ρ είναι ομογενές αναφορικά με το *x* το οποίο ανήκει στο L_k, αν για κάθε ζεύγος στοιχείων y_1, y_2, τα οποία ανήκουν στο x^- ισχύει ότι $\frac{1}{\rho} \leq P_c(y_1, y_2) \leq \rho$. Πιο συγκεκριμένα το αξίωμα της αντίστροφης ιδιότητας (Αξίωμα 2.1) υπονοεί ότι $P_c(y_i, y_i) = 1$.

<u>Αξίωμα 2.2:</u> Έχοντας μια ιεραρχία ***H***, το *x* ανήκει στο ***H*** και *x* ανήκει στο L_k, $x^- \subseteq L_{k+1}$ είναι ρ ομογενές για $k = 1,\dots, h-1$.

Όσο αφορά τις συγκρίσεις κατά ζεύγη είναι απαραίτητη η ομοιογένεια. Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας ως κριτήριο το μέγεθος δεν μπορούμε να συγκρίνουμε ένα κεράσι με ένα καρπούζι. Σε περιπτώσεις που έχουμε ανομοιογένεια των στοιχείων, χρησιμοποιείται η *συσταδοποίηση*, στην οποία τα στοιχεία τοποθετούνται σε συστάδες ώστε τα μεγέθη να είναι συγκρίσιμα.

Η έννοια της θεμελιώδους και της παραγόμενης κλίμακας μπορεί να επεκταθεί στο *x* ανήκει στο L_k, $x^- \subseteq L_{k+1}$ αντικαθιστώντας το κριτήριο *C* και το σύνολο ***A*** αντίστοιχα. Η παραγόμενη κλίμακα που προέρχεται από τις συγκρίσεις των στοιχείων στο x^- αναφορικά με τα στοιχεία στο *x* καλείται τοπικά παραγόμενη κλίμακα ή τοπική προτεραιότητα.

Δοθέντος L_k, $L_{k+1} \subseteq H$, η τοπικά παραγόμενη κλίμακα για *y* το οποίο ανήκει στο x^- και *x* που ανήκει στο L_k, υποδηλώνεται ως: $\psi_{k+1}(y/x)$, $k = 2, 3,\dots, h-1$. Μπορεί επιπλέον να γίνει η υπόθεση ότι $\sum_{y \in x} -\psi_{k+1} \left({}^{y}\!/_{x} \right) = 1$. Δίνεται λοιπόν ο πίνακας $\psi_k(L_k/L_{k+1})$ του οποίου οι στήλες είναι παραγόμενες κλίμακες των στοιχείων στο L_k αναφορικά με τα στοιχεία στο L_{k-1}.

Ορισμός 2.8: Ένα σύνολο ***A*** λέμε ότι είναι εξωτερικά εξαρτώμενο από ένα σύνολο ***C***, αν μια θεμελιώδης κλίμακα μπορεί να οριστεί στο ***A*** με κάθε *c* να ανήκει στο ***C***.

Η διαδικασία συσχέτισης των εναλλακτικών ενός επιπέδου της ιεραρχίας με αυτές στο αμέσως υψηλότερο επίπεδο, εκφράζει την εξάρτηση των χαμηλότερων στην ιεραρχία στοιχείων με αυτά που βρίσκονται υψηλότερα έτσι ώστε να μπορούν να γίνουν οι μεταξύ τους συγκρίσεις.

Τα στοιχεία ενός επιπέδου μιας ιεραρχίας μπορεί να εμφανίζουν εξάρτηση με στοιχεία ενός άλλου επιπέδου στην ιεραρχία αναφορικά με ένα κριτήριο, το οποίο να ανήκει σε κάποιο άλλο επίπεδο στην ιεραρχία. Πρόκειται για την περίπτωση εσωτερικής εξάρτησης. Ο Saaty προτείνει ότι το καλύτερο παράδειγμα για την κατανόηση της ιδέας της εσωτερικής εξάρτησης είναι η εξάρτηση των εισροών -εκροών σε μια βιομηχανία.

Ορισμός 2.9: Έστω ότι το σύνολο ***A*** είναι εξωτερικά εξαρτώμενο από το σύνολο ***C***. Τα στοιχεία στο ***A*** λέμε ότι είναι εσωτερικά εξαρτώμενα αν για κάποια *A* τα οποία ανήκουν στο σύνολο ***A***, το σύνολο ***A*** είναι εξωτερικά εξαρτώμενο από το *A*.

Αξίωμα 2.3: Έστω ότι ***H*** είναι μια ιεραρχία με επίπεδα $L_1, L_2, \ldots, L_h$. Για κάθε L_k, $k = 1, 2, \ldots, h-1$ ισχύει:

i. Το L_{k+1} είναι εξωτερικά εξαρτώμενο από το L_k.
ii. Το L_{k+1} δεν είναι εσωτερικά εξαρτώμενο με όλα τα x που ανήκουν στο L_k.
iii. Το L_k δεν είναι εξωτερικά εξαρτώμενο από το L_{k+1}.

Αρχή της Ιεραρχικής Σύνθεσης

Αν ισχύει το Αξίωμα 2.3, η τελική παραγόμενη κλίμακα κάθε στοιχείου στο ***H*** προσδιορίζεται από τις συνιστώσες του στο αντίστοιχο διάνυσμα, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\psi_1 (b) = 1,$$
$$\psi_2 (L_2) = \psi_2 (b^- / b), \ldots..,$$
$$\psi_k (L_k) = \psi_k (L_k / L_{k-1})\ \psi_{k-1} (L_{k-1}),\ k = 3, \ldots, h.$$

Αν παραλειφθεί το Αξίωμα 2.3, τότε η Αρχή της Ιεραρχικής Σύνθεσης δε θα ισχύει πλέον της εσωτερικής και εξωτερικής εξάρτησης ανάμεσα στα επίπεδα ή στα συστατικά τους, τα οποία δεν χρειάζεται να συγκροτούν ιεραρχία.

Η κατάλληλη αρχή σύνθεσης προήλθε από την προσέγγιση των supermatrix, στην όποια η Αρχή της Ιεραρχικής Σύνθεσης είναι μια ειδική περίπτωση. Μια ιεραρχία είναι μια ειδική περίπτωση ενός συστήματος, ο ορισμός του οποίου μπορεί να δοθεί ως εξής:

Ορισμός 2.10: Έστω ***C*** μια οικογένεια μη-κενών συνόλων ***C1, C2,…, Cn,*** όπου το C_i αποτελείται από τα στοιχεία $\{e_y, j=1,\ldots,m_i\}$, $i = 1, 2,.., n$. Το ***C*** αποτελεί σύστημα αν:

1. Είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος του οποίου οι κορυφές είναι οι C_i και τα τόξα του προσδιορίζονται μέσω της εξωτερικής εξάρτησης.
2. Δοθέντος δυο στοιχείων C_i,C_j που ανήκουν στο ***C***, υπάρχει ένα τόξο από το C_i στο C_j αν το C_j είναι εξωτερικά εξαρτώμενο από το C_i.

Ωστόσο, πολλές από τις έννοιες που εξάγονται σχετικά με τις ιεραρχίες αναφέρονται σε γενικά συστήματα με ανατροφοδότηση. Στη συνέχεια πρέπει να χαρακτηριστεί η εξάρτηση ανάμεσα στα στοιχεία. Για το σκοπό αυτό θα διατυπωθεί ένα κριτήριο:

- Έστω $D_A \subseteq A$ το σύνολο των στοιχείων στο σύνολο ***A*** που εξαρτώνται εξωτερικά από το *A*, το οποίο ανήκει στο σύνολο ***A***.
- Έστω $\psi_{Ai,C}$ (A_j), A_j ανήκει στο σύνολο ***A***, η παραγόμενη κλίμακα των στοιχείων στο ***A*** σε σχέση με τα A_i που ανήκουν στο σύνολο ***A*** για ένα κριτήριο *C* που ανήκει στο σύνολο ***C***.
- Έστω ψ_C (A_j), A_j ανήκει στο σύνολο ***A***, η παραγόμενη κλίμακα των στοιχείων στο σύνολο ***A*** σε σχέση με ένα κριτήριο *C* που ανήκει στο σύνολο ***C***.

→ Τότε το βάρος της εξάρτησης προσδιορίζεται ως:

$$\varphi_c(A_j) = \sum_{A_\iota \in D_{\mathrm{Aj}}} \psi_{A\iota,C}(A_j)\psi_c\,(A_i)$$

Εάν τα στοιχεία στο σύνολο ***A*** είναι εσωτερικά εξαρτώμενα σε σχέση με το κριτήριο *C* το οποίο ανήκει στο σύνολο ***C***, τότε $\varphi_c\,(A_j) \neq \psi_c\,(A_j)$ για κάποια A_j που ανήκουν στο ***A***.

Οι *προσδοκίες* είναι πεποιθήσεις σχετικά με την ταξινόμηση των εναλλακτικών. Κάνοντας την υπόθεση ότι ο αποφασίζων έχει κατά νου μια ιεράρχηση, η οποία προέρχεται από τη διαίσθηση του, τότε υπάρχει ένα σύνολο εναλλακτικών ***A*** το οποίο σχετίζεται με το σύνολο των κριτηρίων ***C***.

Αξίωμα 2.4:

$$C \subset H - L_h,\ A = L_h.$$

Το παραπάνω αξίωμα δείχνει ότι οι αποφασίζοντες πρέπει να επιβεβαιώνουν ότι οι ιδέες τους εκπροσωπούνται επαρκώς κατά τη διαδικασία, ώστε το αποτέλεσμα να ταιριάζει με τις προσδοκίες τους. Δεν μπορεί να γίνει βέβαια η υπόθεση ότι οι προσδοκίες κάποιου είναι απαραίτητα λογικές, ούτε υποθέτεται ότι υπάρχει μόνο ένα λογικό πλαίσιο. Είναι άλλωστε αναμενόμενο ο εκάστοτε αποφασίζων να βρίσκει κάτι λογικό ενώ κάποιος άλλος να το θεωρεί παράλογο. Πρέπει όμως να διασφαλίζεται σίγουρα ότι **όλες οι εναλλακτικές και όλα τα κριτήρια αντιπροσωπεύονται στην ιεραρχία.**

2.3 Θεωρήματα: Επακόλουθο των αξιωμάτων

Σε αυτήν την ενότητα, αναφέρονται τα θεωρήματα, καθώς και οι αποδείξεις τους, που προκύπτουν από τα αξιώματα που έχουν προαναφερθεί. Είναι γνωστό ότι αν η P_c είναι συνεπής, τότε ισχύει το Αξίωμα 2.1, στο οποίο η συνέπεια συνεπάγεται την ιδιότητα της αντιστροφής. Τα πρώτα θεωρήματα που θα δοθούν βασίζονται σε αυτήν την ιδιότητα της συνέπειας. Στη συνέχεια, τα θεωρήματα που θα παρουσιαστούν δείχνουν ότι για τον υπολογισμό των αναλογιών είναι χρήσιμες οι συγκρίσεις κατά ζεύγη, αλλά και το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα.

Έστω ότι $R_{C(n)} \subset R_{M(n)}$ το σύνολο των (n × n) συνεπών πινάκων.

Θεώρημα 1^{ο}: Έστω A ανήκει στο $R_{M(n)}$. Ισχύει ότι το A ανήκει στο $R_{C(n)}$ αν και μόνο αν $rank\ [A] = 1$.

Απόδειξη: Αν A ανήκει στο $R_{C(n)}$, τότε $a_{ij}*a_{jk}=a_{ik}$ για κάθε i, j, k. Έτσι δεδομένης της γραμμής του πίνακα A, $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$, όλες οι άλλες γραμμές μπορούν να παραχθούν μέσω της σχέσης $a_{jk} = {a_{ik}}/{a_{ij}}$ και $rank\ [A] = 1$.

Έστω τώρα ότι $rank\ [A] = 1$. Έχοντας δεδομένη μια γραμμή a_{jh} (j≠I, h = 1, 2,…, n), a_{jk} = Ma_{ih} (h = 1, 2,…, n) όπου M μια θετική σταθερά. Επίσης, για οποιονδήποτε πολλαπλασιαστικό πίνακα, a_{ii} =1 (i = 1, 2,…, n). Έτσι, για $i = h$ έχουμε $a_{jh} = a_{ji}*a_{ih}$ για κάθε i, j, k και ο πίνακας A είναι συνεπής.

Θεώρημα 2^{ο}: Έστω A ανήκει στο $R_{M(n)}$ * A ανήκει στο $R_{C(n)}$, αν και μόνο αν η πρωτεύουσα ιδιοτιμή λ_{max} είναι ίση με n.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 1^{ο} έχουμε ότι η τάξη του πίνακα A ισούται με 1. Επιπλέον, όλες οι ιδιοτιμές του A, εκτός από μια, μηδενίζονται. Έτσι:

$$Trace\ (A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n\ και\ Trace\ (A) = \sum_{k} \lambda_k = n, \qquad τότε\ \lambda_{max} \equiv \lambda_1 = n.$$

Αν $\lambda_{max} = n$,

$$n\lambda_{max} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j w_i^{-1}$$
$$= n + \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_{ij} w_j w_i^{-1} + a_{ij} w_i w_j^{-1}\right) \equiv n + \sum_{1 \le i < j \le n} (y + {}^{1}/_{y_{ij}})$$

Καθώς $y_{ij} + y_{ij}^{-1} \ge 2$ και $n\lambda_{max} = n^2$, η ισότητα επιτυγχάνεται αν θέσουμε $y_{ij} = 1$, που σημαίνει $a_{ij} = {}^{w_i}/_{w_j}$. Η συνθήκη $a_{ij} * a_{jk} = a_{ik}$, ισχύει για κάθε *i, j, k* και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

<u>Θεώρημα 3ο:</u> Έστω $A = (a_{ij})$, το οποίο ανήκει στο $R_{C(n)}$. Υπάρχει μια συνάρτηση $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, τέτοια ώστε $\psi : R_{C(n)} \rightarrow [0,1]^n$ και:

a. $a_{ij} = \psi_i (A) / \psi_j (A)$,
b. Η σχετική κυριαρχία της i – *οστής* εναλλακτικής, $\psi_i (A)$, είναι το i – *οστό* στοιχείο του πρωτεύοντος δεξιού ιδιοδιανύσματος του ***A*** και,
c. Δεδομένων δύο εναλλακτικών, A_i, A_j που ανήκουν στο σύνολο ***A***, ισχύει $A_i \ge_c A_j$ αν και μόνο αν $\psi_i (A) \ge \psi_j (A)$.

<u>Απόδειξη:</u> Η σχέση *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, υπονοεί ότι $a_{ij} = a_{ik} a_{jk}^{-1}$ για κάθε *k, i και j*. Επίσης, από το Θεώρημα 1ο, έχουμε ότι rank [A] = 1 και μπορούμε να γράψουμε $a_{ij} = x_i / x_j$, όπου $x_i, x_j > 0$ (i, j = 1, 2,…, n). Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα *A* με το διάνυσμα $x^r = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, έχουμε $Ax = nx$. Διαιρώντας και τα δύο μέρη αυτής της σχέσης με $\sum_{i=1}^{n} x_i$ και γράφοντας $w = {}^{x}/_{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ έχουμε $Aw = nw$ και $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Από το Θεώρημα 2ο έχουμε ως *n* τη μεγαλύτερη θετική πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα *A* και ως *w* το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν. Καθώς $a_{ij} = x_i / x_j = w_i / w_j$ για κάθε i και j, έχουμε $\psi_i(A) = w_i$, i = 1, 2,…, n και οι σχέσεις a και b ακολουθούν. Από το Αξίωμα 2.1, για κάθε πίνακα *A* που ανήκει στο $R_{C(n)}$, ισχύει $A_i \ge_c A_j$ αν και μόνο αν $a_{ij} \ge 1$ για κάθε i και j, επομένως έχουμε $\psi_i (A) \ge \psi_j (A)$ για κάθε i και j.

<u>Θεώρημα 4ο:</u> Έστω *A* το οποίο ανήκει στο $R_{C(n)}$ και έστω $\lambda_1 = n$ και $\lambda_2 = 0$ οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* με πολλαπλότητα ίση με 1 και *(n – 1)* αντίστοιχα. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε εάν

$$\left|a_{ij} + \tau_{ij} - a_{ij}\right| = \left|\tau_{ij}\right| \le \delta \text{ για κάθε i, j = 1, 2,…, n,}$$

ο πίνακας $B = (a_{ij} + \tau_{ij})$ έχει ακριβώς 1 και (n – 1) ιδιοτιμές στους κύκλους $|\mu - n| < \varepsilon$ και $|\mu - 0| < \varepsilon$ αντίστοιχα.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon_0 = {}^1\!/_2\,(n)$ και $\varepsilon < {}^n\!/_2$. Οι κύκλοι C1: $|\mu - n| = \varepsilon$ και C2: $|\mu - 0| = \varepsilon$ είναι ασύνδετοι. Έστω, f(μ, A) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα *A*. Έστω $r_j = \min |f(\mu, A)|$ για μ στον κύκλο C_j. Σημειώνεται ότι το min |f (μ, A)| ορίζεται, καθώς η *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση του μ και $r_j > 0$ αφού οι ρίζες της f (μ, A) = 0 συνιστούν τα κέντρα των κύκλων.
Η f (μ, B) είναι μια συνεχής συνάρτηση των $1+n^2$ μεταβλητών μ και $a_{ij} + \tau_{ij}$, όπου i, j = 1, 2,…, n και για κάποιο δ > 0, f (μ, B) ≠ 0 για μ πάνω σε οποιονδήποτε C_j, όπου j = 1, 2, εάν $|\tau_{ij}| \leq \delta$, όπου i, j = 1, 2,…, n.
Από τη θεωρία των συναρτήσεων μιας σύνθετης μεταβλητής, ο αριθμός των ριζών μ της f (μ, B) = 0 που βρίσκονται μέσα στον κύκλο C_j, όπου $j = 1, 2$, δίνεται από τη σχέση

$$n_j(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} \frac{f'(\mu, B)}{f(\mu, B)}\, d\mu, j = 1,2$$

που είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση των n^2 μεταβλητών $a_{ij} + \tau_{ij}$ με $|\tau_{ij}| \leq \delta$.
Για *B* = *A* έχουμε $n_1(A) = 1$ και $n_2(A) = n - 1$. Καθώς η συνάρτηση n_j (B) , j = 1, 2 είναι συνεχής δεν μπορεί να πηδήξει από το n_j (A) στο n_j (B) και τα δύο πρέπει να είναι ίσα και να έχουν την τιμή $n_1(B) = 1$ και $n_2(B) = n - 1$ και για κάθε B με $|a_{ij} + \tau_{ij} - a_{ij}| = |\tau_{ij}| \leq \delta$, όπου i, j = 1, 2,…, n.

Θεώρημα 5ο: Έστω *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$ και έστω *w* το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα του. Έστω ΔA = (δ_{ij}) ένας πίνακας διαταραχών των εισόδων του πίνακα *A* τέτοιος ώστε A' = A + ΔA ανήκει $R_{M(n)}$ και έστω *w'* το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα του. Δεδομένου ότι ε > 0, υπάρχει ένα δ > 0 τέτοιο ώστε: εάν $|\delta_{ij}| \leq \delta$ για κάθε i, j τότε $|w_i' - w_i| \leq \varepsilon$, όπου i = 1, 2,…,n.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4ο δοθέντος ότι *ε > 0,* υπάρχει ένα *δ > 0*, τέτοιο ώστε αν $|\delta_{ij}| \leq \delta$ για κάθε i, j η πρωτεύουσα ιδιοτιμή του A' ικανοποιεί τη σχέση $|\lambda_{max} - n| \leq \varepsilon$. Έστω ΔA = τB. O Wilkinson (1965) έδειξε ότι για ένα επαρκώς μικρό *τ*, η λ_{max} μπορεί να δοθεί από μια συγκλίνουσα δυναμική σειρά $\lambda_{max} = n + k_1\tau + k_2\tau^2 + \ldots$. Τώρα, $\lambda_{max} \rightarrow n$ καθώς $\tau \rightarrow 0$ και $|\lambda_{max} - n| = o(\tau) \leq \varepsilon$.

Έστω *w* το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην απλή ιδιοτιμή *n* του πίνακα *A*. Εφόσον *n* είναι μια απλή ιδιοτιμή, ο *(A – nI)* έχει τουλάχιστον μια ελάσσονα ορίζουσα που δεν χάνεται, τάξης *(n – 1).* Έστω ότι αυτή βρίσκεται στις πρώτες *(n -1)* γραμμές του *(A – nI).* Τότε από τη θεωρεία των γραμμικών εξισώσεων, τα στοιχεία του *w* θα μπορούσαν να είναι $(A_{n1}, A_{n2},\ldots, A_{nn})$, όπου A_{ni} χαρακτηρίζει το συμπαράγοντα του στοιχείου *(n, i)* του *(A – nI),* και είναι πολυώνυμο του *n*, με βαθμό όχι μεγαλύτερο από *(n-1).*

Τα στοιχεία του *w'* είναι πολυώνυμα της λ_{max} και του τ, καθώς η επέκταση της δυναμικής σειράς της λ_{max} είναι συγκλίνουσα για όλα τα επαρκώς μικρά τ, κάθε στοιχείο του *w'* αναπαριστάται από μια δυναμική συγκλίνουσα σειρά του τ. Έτσι έχουμε:

$$w' = w + \tau z_1 + \tau^2 z_2 + \ldots \text{ και } |w' - w| = o(\tau) \leq \varepsilon.$$

Από τα Θεωρήματα 4^o και 5^o λοιπόν, συνεπάγεται ότι μια μικρή διαταραχή *A'* του πίνακα A μετασχηματίζει το πρόβλημα της ιδιοτιμής $(A - nI)w = 0$ στο $(A' - \lambda_{max}I)w' = 0$.

<u>Θεώρημα 6^o:</u> Έστω A ανήκει στο $R_{M(n)}$ και έστω *w* το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα. Έστω $\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} w_j w^{-1}$ για κάθε i, j και έστω $1-\tau < \varepsilon_{ij} < 1 + \tau$, $\tau > 0$ για κάθε i,j. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ και $\tau < \varepsilon$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, $xi > 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$ αν

$$1-\delta < \frac{\alpha_{ij}}{x_i/x_j} < 1+\delta \ \text{για κάθε } i \text{ και } j. \quad (2.1)$$

τότε

$$1-\varepsilon < \frac{w_i/w_j}{x_i/x_j} < 1+\varepsilon \ \text{για κάθε } i \text{ και } j. \quad (2.2).$$

<u>Απόδειξη:</u> Αντικαθιστώντας με $\alpha_{ij}\,\varepsilon_{ij}^{-1}$ το λόγο w_i/w_j στη σχέση (2.2) έχουμε:

$$\left|\frac{w_i/w_j}{x_i/x_j} - 1\right| = \left|\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\frac{a_{ij}}{x_i/x_j} - 1\right| \leq \frac{1}{\varepsilon_{ij}}\left|\frac{a_{ij}}{x_i/x_j} - 1\right| + \left|\frac{1}{\varepsilon_{ij}} - 1\right|.$$

Εξ' ορισμού $\varepsilon_{ij} = 1/\varepsilon_{ji}$ για κάθε i, j έτσι έχουμε

$$\left|\frac{w_i/w_j}{x_i/x_j} - 1\right| = \varepsilon_{ji}\left|\frac{a_{ij}}{x_i/x_j} - 1\right| + |\varepsilon_{ji} - 1| < (1+\tau)\delta + \tau.$$

Δεδομένου ότι $\varepsilon > 0$ και $0 < \tau < \varepsilon$, υπάρχει ένα $\delta = (\varepsilon-\tau) / (1+\tau) > 0$ τέτοιο ώστε η σχέση (2.1) να συνεπάγεται τη σχέση (2.2). Αυτό το θεώρημα λέει ότι αν ο συντελεστής της σύγκρισης κατά ζεύγη των a_{ij} είναι κοντά σε μια υποκρύπτουσα αναλογία x_i/x_j, τότε το ίδιο ισχύει και για την αναλογία w_i/w_j και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια προσέγγιση της.

Θεώρημα 7ο: Έστω ο πίνακας $A=(a_{ij})$ που ανήκει στο $R_{M(n)}$. Έστω λ_{max} η πρωτεύουσα ιδιοτιμή του και έστω w το αντίστοιχο δεξί ιδιοδιάνυσμα του με $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Τότε $\lambda_{max} \geq n$.

Απόδειξη: Έστω $a_{ij} = w_i w_j^{-1} \varepsilon_{ij}$, όπου i, j = 1, 2,…, n. Αφού $Aw = \lambda_{max} w$ και $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda_{max}$, έχουμε

$$\lambda_{max} - n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j - n = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij} - n.$$

Εξ' ορισμού ο πίνακας (ε_{ij}) ανήκει στο $R_{M(n)}$. Έχουμε $\varepsilon_{ii} = 1$ για όλα τα i και $\varepsilon_{ii} > 0$ για κάθε i και j. Έτσι, έχουμε $\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij} - n = \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij} > 0$ και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

Θεώρημα 8ο: Έστω A ανήκει στο $R_{M(n)}$. Έστω λ_{max} η πρωτεύουσα ιδιοτιμή του πίνακα A και έστω w το αντίστοιχο πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα του με $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Τότε, η ποσότητα $\mu=(\lambda_{max} - n)/(n-1)$ είναι ένα μέτρο της μέσης παρέκκλισης από τη συνέπεια.

Απόδειξη: Για τον πίνακα A που ανήκει στο $R_{C(n)}$ το οποίο ανήκει στο $R_{M(n)}$, από το Θεώρημα 2ο έχουμε $\lambda_{max} = n$, επομένως έχουμε $\mu = 0$. Για τον πίνακα A που ανήκει στο $R_{M(n)} - R_{C(n)}$, έστω $a_{ij} = w_i \varepsilon_{ij} / w_j$ για κάθε i και j. Οπότε έχουμε:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij},$$

$$n\lambda_{max} = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = n + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}})$$

$$\frac{\lambda_{max} - n}{n-1} = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}})$$

Καθώς $\varepsilon_{ij} \to 1$, δηλαδή προσεγγίζεται η συνέπεια, τότε $\mu \to 0$. Επιπλέον, η μ είναι κυρτή στην ε_{ij}, αφού η $(\varepsilon_{ij} + 1/\varepsilon_{ij})$ είναι κυρτή και έχει ελάχιστο στο $\varepsilon_{ij} = 1$, i, j =1, 2,…, n. Συνεπώς, το πόσο μικρό ή μεγάλο είναι το μ εξαρτάται από το πόσο κοντά ή μακριά είναι το ε_{ij} στη μονάδα, δηλαδή πόσο προσεγγίζει τη συνέπεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_j w_i^{-1} - n^2 = n(n-1)\mu$ είναι επίσης ένα μέτρο της απόκλισης από τη συνέπεια.

Ορισμός 2.11: Η ένταση των κρίσεων που συνδέονται με ένα μονοπάτι από το *i* έως το *j* καλείται *η ένταση του μονοπατιού* και είναι ίση με τα προϊόντα των εντάσεων που συνδέονται με τα τόξα του μονοπατιού.

Ορισμός 2.12: Ένας κύκλος είναι ένα μονοπάτι συγκρίσεων ανά ζεύγη που τελειώνει στο αρχικό του σημείο.

Θεώρημα 9ο: Αν *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, οι εντάσεις όλων των κύκλων είναι ίσες με α_{ii}, i = 1, 2,…, n.

Απόδειξη: Αφού *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, συνεπάγεται ότι $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ για κάθε *i, j και k.* Έτσι, έχουμε $\alpha_{ii} = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki} = 1$ για κάθε i = 1, 2,…, n. Επαγωγικά, εάν $\alpha_{ii1}\ldots\alpha_{in-1i} = 1$ για κάθε $i_1\ldots i_{n-1}$, τότε $\alpha_{ii1}\ldots\alpha_{in-1in}\alpha_{ini} = 1$ και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

Θεώρημα 10ο: Αν *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, οι εντάσεις όλων των μονοπατιών από το *i* έως το *j* είναι ίσες με α_{ij}.

Απόδειξη: Συνεπάγεται από τη σχέση $\alpha_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{kj}$ για κάθε *i, j και k.*

Πρόταση 1: Αν *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, η είσοδος στη θέση *(i, j)* μπορεί να απεικονιστεί με την ένταση των μονοπατιών οποιουδήποτε μήκους που ξεκινούν από το *i* και τελειώνουν στο *j*.

Απόδειξη: Συνεπάγεται από την απόδειξη του Θεωρήματος 10.

Πρόταση 2: Αν *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, η είσοδος στη θέση *(i, j)* είναι η μέση ένταση των μονοπατιών μήκους *k* από το *i* στο *j* και $A^k = n^{k-1} A$ ($k \geq 1$).

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 10 γνωρίζουμε ότι η ένταση ενός μονοπατιού οποιουδήποτε μήκους από το *i* έως το *j* είναι ίση με α_{ij}.

Μια αυθαίρετη είσοδος του A^k δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} \alpha_{ii1}\alpha_{i1i2}\ldots\ \alpha_{ik-1j}$$

Αφού $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ για κάθε *i, j και k* έχουμε

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{i_{k-1}=1}^{n} a_{ij} = n^{k-1}a_{ij}$$

Επαγωγικά, αν $\alpha_{ij}^{(k)} = n^{k-1}\alpha_{ij}$ για k=1, 2,…, m-1, για *k = m* έχουμε:

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_{m-1}}^{n}\alpha_{ii1}\dots\ a_{im-1j} =$$

$$= n^{m-2}\sum_{i_{m-1=1}}^{n} a_{iim-1}a_{im-1j} = n^{m-1}a_{ij}.$$

Έτσι έχουμε

$$a_{ij} = \frac{1}{n^{m-1}}a_{ij}^{(m)} \text{ για κάθε m} \geq 1,$$

και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

<u>Θεώρημα 11ο:</u> Αν *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, η είσοδος στη θέση *(i, j)* δίνεται από το μέσο των εντάσεων όλων των μονοπατιών που ξεκινούν από το *i* και τελειώνουν στο *j*.

<u>Απόδειξη:</u> Από τη δεύτερη πρόταση του Θεωρήματος 10 έχουμε

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{n^{m-1}}\sum_{i1=1}^{n}\dots\sum_{im-1=1}^{n}\alpha_{ii1}\dots\ \alpha_{im-1j}$$

Έτσι έχουμε $\alpha_{ij} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{n^{m-1}}a_{ij}^{(m)}$ και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

<u>Θεώρημα 12ο:</u> Αν *A* ανήκει στο $R_{C(n)}$, η κλίμακα σχετικής κυριαρχίας δίνεται από οποιαδήποτε από τις κανονικοποιημένες στήλες του πίνακα και συμπίπτει με το πρωτεύον δεξί ιδιοδιάνυσμα του.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω α^j η *j-οστή* στήλη του πίνακα A. Τότε έχουμε:

$$A\ \cdot\ \alpha^j = \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ij}\right) = \left(n\alpha_{ij}\right)\ \ (i,j = 1,2,\dots,n),$$

και οποιαδήποτε στήλη του πίνακα *A* (είτε είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα είτε όχι) είναι μια λύση του προβλήματος της ιδιοτιμής *Ax = nx*. Από τη δεύτερη πρόταση του 10ου θεωρήματος έχουμε $A^k = n^{k-1} A$. Έχουμε:

$$\psi(A) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{A^k e}{e^T A^k e} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{Ae}{e^T Ae} = \frac{Ae}{e^T Ae}.$$

Έτσι, έχουμε:

$$\psi_i(A) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\Big/\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij} = \alpha_{ih}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{hj}\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ih}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{hj}\right) = \frac{\alpha_{ih}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ih}}$$

για κάθε *i και h*, και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

Πρόταση: Το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα είναι μοναδικό για μια πολλαπλασιαστική σταθερά.

Απόδειξη: Συνεπάγεται από την απόδειξη του 12[ου] θεωρήματος.

Θεώρημα 13º: Αν *A* ανήκει στο $R_{M(n)}$ η ένταση όλων των μονοπατιών μήκους *k* από το *i* στο *j* δίνεται από:

$$\sum_{i1=1}^{n}\sum_{i2=1}^{n}\dots\sum_{ik-1=1}^{n}\alpha_{ii1}\alpha_{i1i2}\dots\alpha_{ik-1j.}$$

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι ο αριθμός των προεκτάσεων των τόξων μήκους *n* ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές ενός κατευθυνόμενου γράφου του οποίου ο πίνακας είναι ο *V* δίνεται από τον V^n. Εάν επιπρόσθετα κάθε τόξο έχει συνδέσει έναν αριθμό ($\neq 1$) που αναπαριστά την ένταση (ή ικανότητα) του τόξου, τότε ο V^n αντιπροσωπεύει την ένταση όλων των προεκτάσεων των τόξων μήκους *n* ανάμεσα σε δύο κορυφές. Έστω λοιπόν, $V = A$. Οι είσοδοι του πίνακα A^k δίνουν την ένταση όλων των μονοπατιών μήκους *k* ανάμεσα σε δύο κορυφές. Έστω $A^k = \left(\alpha_{ij}^{(k)}\right)$.

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \sum_{i1=1}^{n}\dots\sum_{ik-1=1}^{n}\alpha_{ii1}\dots\alpha_{ik-1j}$$

και το αποτέλεσμα συνεπάγεται.

<u>Θεώρημα 14ο:</u> Έστω *A* ανήκει στο $R_{M(n)}$, *A* δεν ανήκει στο $R_{C(n)}$. Το πρωτεύον δεξί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A* δίνεται από το όριο της κανονικοποιημένης έντασης των μονοπατιών μήκους *k*,

$$w_i = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}, \text{ i = 1, 2,…, n, για κάθε h = 1, 2, …, n.}$$

<u>Απόδειξη:</u> Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{is}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{is}^{(k)}} \qquad h, s = 1, 2, \dots, n. \qquad (2.3)$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης δόθηκε από τους Saaty και Vargas. Επίσης, γνωρίζουμε ότι το πρωτεύον δεξί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A* δίνεται από τη σχέση:

$$w'_i = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το δεξί μέρος της σχέσης (2.4) μέσα στο όριο με $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}$ και αναδιατάσσοντας τους όρους έχουμε

$$w'_i = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}} \right] =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}} \right] \left[\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i,h=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}} \right]$$

Και από τη σχέση (2.4) έχουμε

$$w'_i = \left[\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{is}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{is}} \right] \sum_{h=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i,h=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}$$

απ’ όπου προκύπτει και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση: Έστω *A* ανήκει στο $R_{M(n)}$, και *A* δεν ανήκει στο $R_{C(n)}$. Το πρωτεύον δεξί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A* είναι μοναδικό για μια πολλαπλασιαστική σταθερά.

Απόδειξη: Συνεπάγεται από την απόδειξη του 14^{ου} θεωρήματος.

Θεώρημα 15^{o}: Έστω ***A*** ένα πεπερασμένο σύνολο *n* στοιχείων $A_1, A_2, \ldots, A_n$,και έστω *C* που ανήκει στο σύνολο ***C*** ένα κριτήριο που όλα τα στοιχεία του ***A*** έχουν κοινό. Έστω *A* ο προκύπτων πίνακας των δυαδικών συγκρίσεων. Το *i-οστό* στοιχείου του πρωτεύοντος δεξιού ιδιοδιανύσματος του πολλαπλασιαστικού πίνακα των δυαδικών συγκρίσεων *A* δίνει τη σχετική κυριαρχία του A_i,i = 1, 2,…, n.

Απόδειξη: Από το 14^{o} θεώρημα, το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A* δίνεται από τη σχέση

$$w_i = \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_{ij}^{(m)}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jh}^{(m)}}, \;\; i = 1,2,\ldots,n,$$

για οποιοδήποτε h = 1, 2,…, n. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Saaty ισχύει:

$$w_i = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(m)}}{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(m)}}, \;\; i = 1,2,\ldots,n.$$

Έτσι, η σχετική κυριαρχία μιας εναλλακτικής σε σχέση με όλα τα μονοπάτια μήκους $k \leq m$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}}.$$

Έστω

$$s_k = \frac{\alpha_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}^{(k)}} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; t_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} s_k.$$

Μπορεί να δειχθεί ότι εάν το όριο $\lim_{k \to \infty} s_k$ υπάρχει, τότε και το όριο $\lim_{m \to \infty} t_m$ υπάρχει και μάλιστα τα δύο όρια συμπίπτουν. Από το 14ο θεώρημα γνωρίζουμε ότι το $s_k \to w$ καθώς το $k \to \infty$, όπου w το πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A. Έτσι και το $t_m \to w$ καθώς το $m \to \infty$ και $\psi_i(A) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Το παραπάνω θεώρημα υπογραμμίζει το γεγονός ότι το δεξί ιδιοδιάνυσμα δίνει τη σχετική κυριαρχία (κατάταξη) κάθε εναλλακτικής σχετικά με τις υπόλοιπες εναλλακτικές και ισχύει για κάθε πολλαπλασιαστικό πίνακα A ακόμη και αν δεν είναι συνεπής.

2.4 Όταν ο αποφασίζων είναι ομάδα

Έχει γίνει ήδη γνωστό ότι οι μέθοδοι λήψης πολυκριτήριων αποφάσεων είναι πολλές. Σημαντικό πλεονέκτημα αποτελεί η έννοια της ομάδας στην εφαρμογή τους. Σαφώς είναι επιθυμητό η διαδικασία για τη λήψη μιας απόφασης ομαδικά να είναι δομημένη και εύκολη στην εφαρμογή. Η Αναλυτική Ιεραρχική Διαδικασία είναι μια από τις μεθόδους λήψης αποφάσεων όπου στηρίζουν τις ομαδικές αποφάσεις με έναν αρκετά απλό και κατανοητό τρόπο.

Ο Saaty σημείωσε δύο βασικά ερωτήματα που προκύπτουν κατά την ανάλυση ομαδικών αποφάσεων. Το πρώτο αφορά το πώς θα συγκεντρωθούν οι ατομικές κρίσεις έτσι ώστε ο συνδυασμός τους να δώσει ένα αντιπροσωπευτικό αποτέλεσμα για την ομαδική κρίση και το δεύτερο ζήτημα είναι πως θα κατασκευαστεί η τελική ομαδική απόφαση από τις μεμονωμένες επιλογές των ατόμων της ομάδας.

Στην πραγματικότητα κατά τη λήψη ομαδικών αποφάσεων δεν θα πρέπει να αναμένεται ή να απαιτείται ομοφωνία, διότι κάθε άνθρωπος αντιμετωπίζει διαφορετικά κάθε ερέθισμα. Το ***αξίωμα της αμοιβαιότητας*** διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στο συνδυασμό των κρίσεων των διαφόρων ατόμων για να λάβουν μια απόφαση για την ομάδα. Οι κρίσεις πρέπει να συνδυαστούν με τέτοιο τρόπο, ώστε η σύνθεση των κρίσεων της ομάδας που θα δημιουργηθεί να ισούται με την αντίστοιχη σύνθεση των αντίστροφων κρίσεων. Έχει αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός μέσος όρος είναι ο μόνος τρόπος να πραγματοποιηθεί αυτό.

Κατά την εφαρμογή της AHP λοιπόν, όταν ο αποφασίζων δεν είναι ένα άτομο αλλά μια ομάδα, χρησιμοποιείται ο γεωμετρικός μέσος όρος για τον καθορισμό της σχετικής σημασίας των συγκρινόμενων στοιχείων για την ομάδα. Εάν παραδείγματος χάριν η ομάδα αποτελείται από τρία άτομα και έχουμε εξ' ορισμού ότι α_{ij} η σχετική σημασία του παράγοντα i συγκριτικά με τον παράγοντα j με βάση κάποιο κριτήριο c_1, τότε η τιμή του α_{ij} θα δίνεται από το γεωμετρικό μέσο των τριών τιμών που ανέθεσαν τα άτομα της ομάδας κατά τη σύγκριση των i και j. Πιο συγκεκριμένα εάν οι τιμές b_1, b_2, b_3, δίνουν αντίστοιχα τις κρίσεις των ατόμων για τη σχετική σημασία του παράγοντα i συγκριτικά με τον παράγοντα j με βάση κάποιο κριτήριο c_1. Τότε $\alpha_{ij} = \sqrt[3]{b_1 \times b_2 \times b_3}$.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι αντίστοιχα υποστηρίζεται η ανάλυση ομαδικών αποφάσεων και από ένα είδος λογισμικού της AHP, το οποίο έχει τη δυνατότητα να λειτουργεί για περιπτώσεις ομαδικών αποφάσεων χωρίς να απαιτείται κάποια προσθήκη ή κάποιο άλλο πρόγραμμα, το οποίο θα αναλυθεί στο παρακάτω κεφάλαιο.

Έχοντας ολοκληρώσει τη θεωρητική και αξιωματική θεμελίωση της AHP, πρέπει να γίνει πλέον κατανοητή η δόμηση της μεθόδου και ο τρόπος με τον οποίο αναλύεται κάθε πρόβλημα για να οδηγήσει στην κατασκευή της ιεραρχικής δομής αυτού. Επιπλέον, είδαμε πλέον τεκμηριωμένα τα αξιώματα στα οποία βασίζεται μια θεμελιώδης κλίμακα όπως αυτή του Saaty. Παραθέσαμε επίσης την περίπτωση όπου ο αποφασίζων είναι ομάδα κάνοντας κατανοητό το αξίωμα της αμοιβαιότητας. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου σε ένα πραγματικό πρόβλημα απόφασης πολλαπλών κριτηρίων μέσα από το λογισμικό που δημιουργήσαμε.

Κεφάλαιο 3^{ο} : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν τα βασικά στοιχεία της Αναλυτικής Ιεραρχικής Διαδικασίας με τη χρήση ενός απλού παραδείγματος. Στόχος είναι η αγορά ενός καινούριου φορητού υπολογιστή. Η αγορά βασίζεται σε διαφορετικά κριτήρια όπως το κόστος, οι περιφερειακές προδιαγραφές, η φυσική εμφάνιση και τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή. Υπάρχουν δύο εναλλακτικές λύσεις: Υπολογιστής 1 και Υπολογιστής 2.

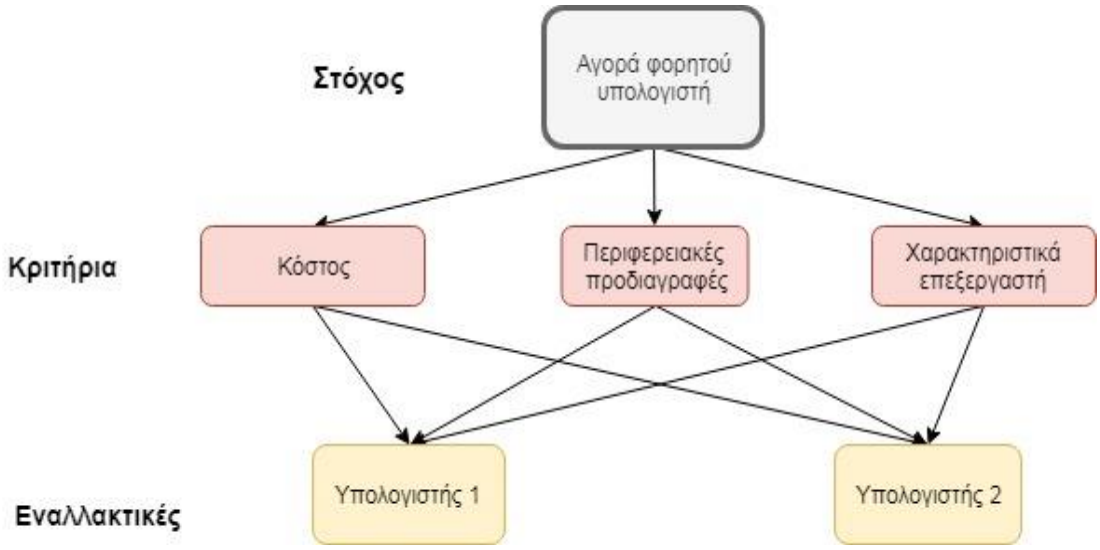
Για να αναλυθεί η απόφαση αγοράς ενός φορητού υπολογιστή χρησιμοποιώντας την αναλυτική ιεραρχία θα πρέπει να ακολουθηθούν τα επόμενα βήματα:

1. Ανάπτυξη ενός προτύπου για την απόφαση: διαχωρισμός της απόφασης σε μια ιεραρχία στόχων, κριτηρίων και εναλλακτικών λύσεων.

2. Ανάθεση προτεραιοτήτων (βάρη) για τα κριτήρια: Η σημασία των κριτηρίων είναι να συγκρίνονται τα ζεύγη σε σχέση με τον επιθυμητό στόχο για να αντλήσουν τα βάρη τους. Στη συνέχεια, γίνεται έλεγχος στη συνοχή των κρίσεων δηλαδή, μια αναθεώρηση των αποφάσεων προκειμένου να διασφαλιστεί ένα λογικό επίπεδο συνοχής όσον αφορά την αναλογικότητα και τη μεταβατικότητα.

3.1 Ανάπτυξη ενός μοντέλου

Το πρώτο βήμα σε μια ανάλυση AHP είναι η οικοδόμηση μιας ιεραρχίας για την απόφαση. Αυτό ονομάζεται μοντελοποίηση απόφασης, διότι η διαδικασία της αναλυτικής ιεραρχίας (AHP) διαρθρώνει το πρόβλημα ως ιεραρχία. Η Εικόνα 3.1 δείχνει την ιεραρχία που προτείνεται για το παράδειγμά μας.



Εικόνα 3.1. Ιεράρχηση αποφάσεων για την αγορά ενός υπολογιστή.

Λεκτική Κρίση	Αριθμητική Αξία
Απόλυτα προτιμητέο	9
	8
Ισχυρά προτιμητέο	7
	6
Μέτρια προτιμητέο	5
	4
Ελαφρά προτιμητέο	3
	2
Εξίσου προτιμητέο	1

Πίνακας 3.1. Η κλίμακα σύγκρισης ζευγαριών του Saaty.

Το πρώτο επίπεδο αφορά το στόχο που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η αγορά του υπολογιστή. Το δεύτερο επίπεδο αφορά τα κριτήρια που αναφέρθηκαν τα οποία είναι: το κόστος, οι περιφερειακές προδιαγραφές και τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή. Το τρίτο επίπεδο αποτελείται από τις διαθέσιμες εναλλακτικές λύσεις. Στην περίπτωση αυτή: Υπολογιστής 1 και Υπολογιστής 2.

Τα πλεονεκτήματα αυτής της ιεραρχικής ανάλυσης είναι σαφή. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν να κατανοηθεί καλύτερα η απόφαση που πρέπει να επιτευχθεί. Αυτό το βήμα είναι κρίσιμο και είναι δυνατόν να ζητηθεί η συμμετοχή εμπειρογνωμόνων για να διασφαλιστεί ότι έχουν ληφθεί υπόψη όλα τα κριτήρια και οι πιθανές εναλλακτικές λύσεις.

Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι σε περίπλοκα προβλήματα ίσως είναι απαραίτητο να συμπεριληφθούν επιπλέον επίπεδα στην ιεραρχία, όπως τα δευτερεύοντα κριτήρια.

3.2 Παραγωγή προτεραιοτήτων (βάρη) για τα κριτήρια

Δεν θα έχουν όλα τα κριτήρια την ίδια σημασία. Ως εκ τούτου, το δεύτερο βήμα της διαδικασίας AHP είναι να εξαχθούν οι σχετικές προτεραιότητες (βάρη) για τα κριτήρια. Είναι σαφές ότι όταν λαμβάνεται μια απόφαση δεν είναι όλα τα κριτήρια εξίσου σημαντικά σε δεδομένη χρονική στιγμή. Είναι ξεκάθαρο ότι η σημασία ή το βάρος κάθε κριτηρίου θα είναι διαφορετικά και εξαιτίας αυτού απαιτείται να επιτευχθούν ζευγαρωτές συγκρίσεις της σχετικής προτεραιότητας κάθε κριτηρίου σε σχέση με κάθε μία από τις άλλες χρησιμοποιώντας μια αριθμητική κλίμακα για την ανάπτυξη της σύγκρισης από τον Saaty, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1.

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Κόστος			
Περιφερειακές Προδιαγραφές			
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή			

Πίνακας 3.2. Συγκριτικός πίνακας κριτηρίων για την αγορά ενός υπολογιστή.

Για την εκτέλεση της σύγκρισης ζευγών, πρέπει να δημιουργηθεί ένας πίνακας σύγκρισης με τα κριτήρια που περιλαμβάνονται στην απόφαση, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2. Τα κελιά των πινάκων σύγκρισης θα έχουν μια τιμή από την αριθμητική κλίμακα που φαίνεται στον Πίνακα 3.1 για να αντανακλά τη σχετική προτίμηση σε κάθε συγκριτικό ζεύγος. Για παράδειγμα, αν θεωρηθεί ότι το κόστος είναι πολύ πιο σημαντικό από τον παράγοντα προδιαγραφές, τη σύγκριση κόστους / προδιαγραφές (δηλ. η τομή της γραμμής «κόστος» και η στήλη «Περιφερειακές Προδιαγραφές») θα περιέχει το 7 όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3.

Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι ο λόγος της σημασίας του κόστους σε σχέση με τη σημασία των προδιαγραφών είναι επτά (κόστος / προδιαγραφές = 7). Επομένως, η αντίθετη σύγκριση, η σημασία των προδιαγραφών σε σχέση με τη σημασία του κόστους, θα αποδώσει την αμοιβαιότητα αυτής της αξίας (προδιαγραφές / κόστος = 1/7) όπως παρουσιάζεται στο κελί κόστους / προδιαγραφών στον Πίνακα 3.3.

Αν θεωρηθεί ότι το κόστος είναι μετρίως πιο σημαντικό από τα χαρακτηριστικά επεξεργαστή (κόστος / χαρακτηριστικά επεξεργαστή = 3), θα εισαχθεί η τιμή 3 στο κελί κόστους / χαρακτηριστικών (χρησιμοποιώντας την κλίμακα από τον Πίνακα 3.1) και το κελί κόστους / χαρακτηριστικών θα περιέχει το αμοιβαίο 1/3. Τέλος, αν θεωρηθεί ότι τα χαρακτηριστικά υπολογιστή είναι μετρίως πιο σημαντικά από τις περιφερειακές προδιαγραφές, το κελί χαρακτηριστικά επεξεργαστή/προδιαγραφές θα περιέχει την τιμή 3 και η σύγκριση προδιαγραφές/ χαρακτηριστικά θα λάβει την τιμή 1/3.

Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται όλες οι κρίσεις που έχουν εισαχθεί. Σε αυτό το στάδιο, είναι εμφανές ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα της αναλυτικής ιεραρχικής διαδικασίας: η φυσική της απλότητα. Ανεξάρτητα από τον αριθμό των παραγόντων που εμπλέκονται με τη λήψη της απόφασης, η μέθοδος AHP απαιτεί μόνο να συγκρίνει ένα ζεύγος στοιχείων οποιαδήποτε στιγμή. Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι επιτρέπει τη συμπερίληψη των συγκεκριμένων μεταβλητών (π.χ. κόστος) καθώς και άυλων (π.χ. προδιαγραφές) ως κριτήρια στην απόφαση. Ο πίνακας σύγκρισης (Πίνακας 3.3) δείχνει το ζεύγος σχετικών προτεραιοτήτων για τα κριτήρια.

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Κόστος	1	7	3
Περιφερειακές Προδιαγραφές	1/7	1	1/3
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	1/3	3	1

Πίνακας 3.3. Συγκριτικός πίνακας με τα βάρη κριτηρίων.

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Κόστος	1,00	7,00	3,00
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,14	1,00	0,33
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,33	3,00	1,00
Άθροισμα	1,48	11,00	4,33

Πίνακας 3.4. Προσθήκη στηλών.

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Κόστος	0,677419355	0,636363636	0,692307692
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,096774194	0,090909091	0,076923077
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,225806452	0,272727273	0,230769231

Πίνακας 3.5. Κανονικοποιημένος πίνακας.

Τώρα πρέπει να υπολογιστούν οι συνολικές προτεραιότητες ή βάρη των κριτηρίων. Για το σκοπό αυτό υπάρχουν δύο μέθοδοι: η ακριβής και η κατά προσέγγιση. Κύριος στόχος είναι η επεξήγηση των γενικών στοιχείων της μεθόδου AHP, που θα χρησιμοποιηθεί η κατά προσέγγιση μέθοδος στο παράδειγμα, λόγω της απλότητάς της.

Η προσεγγιστική μέθοδος απαιτεί την κανονικοποίηση του πίνακα σύγκρισης δηλαδή να προστεθούν οι τιμές σε κάθε στήλη (Πίνακας 3.4). Στη συνέχεια, διαιρείται κάθε κελί από το σύνολο της στήλης (Πίνακας 3.5). Ο κανονικοποιημένος πίνακας παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.5. Από αυτόν τον κανονικοποιημένο πίνακα επιτυγχάνονται οι τελικές προτεραιότητες (Πίνακας 3.8) με τον απλό υπολογισμό της μέσης τιμής κάθε σειράς (π.χ. για τη σειρά κόστους: 0.677 + 0.636 + 0.692) / 3 = 0.669).

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Προτεραιότητες
Κόστος	0,677419355	0,636363636	0,692307692	0,668696895
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,096774194	0,090909091	0,076923077	0,08820212
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,225806452	0,272727273	0,230769231	0,243100985

Πίνακας 3.6. Υπολογισμός προτεραιοτήτων: Μέσος όρος κάθε σειράς.

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Προτεραιότητες
Κόστος	1,00	7,00	3,00	0,668696895
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,143	1,00	0,333	0,08820212
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,333	3,00	1,00	0,243100985

Πίνακας 3.7. Παρουσίαση αποτελεσμάτων: Αρχικές κρίσεις και προτεραιότητες.

Στον Πίνακα 3.7 παρουσιάζονται οι αρχικές κρίσεις που είχαν δοθεί για την απόφαση και οι υπολογισμένες προτεραιότητες από τον Πίνακα 3.6. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.7, είναι σαφές ότι - για αυτό το παράδειγμα – δίνεται μεγαλύτερη σημασία για το κριτήριο κόστους (0.668), ακολουθούμενη από τα χαρακτηριστικά επεξεργαστή (0.243). Ο συντελεστής περιφερειακών προδιαγραφών έχει ένα ελάχιστο βάρος (0,088) στην απόφαση αγοράς. Επιπρόσθετα οι προτεραιότητες δεν έχουν εκχωρηθεί αυθαίρετα, αλλά προέρχονται από τις κρίσεις και τις προτιμήσεις. Αυτές οι προτεραιότητες έχουν μαθηματική ισχύ, ως τιμές μέτρησης που προέρχονται από μια κλίμακα αναλογιών, και έχουν επίσης μια διαισθητική ερμηνεία. Από τον Πίνακα 3.7 μπορεί να ερμηνευθεί ότι το κόστος έχει 66,9% της συνολικής σημασίας, ακολουθούμενη από χαρακτηριστικά με 24,3% και προδιαγραφές (8,8%), αντίστοιχα.

3.3 Συνέπεια

Μόλις καταχωρηθούν οι κρίσεις, είναι απαραίτητο να γίνει έλεγχος της συνέπειας. Η ιδέα της συνέπειας απεικονίζεται καλύτερα στο ακόλουθο παράδειγμα: Σε ένα συγκριτικό πίνακα εάν ανατεθεί η τιμή 2 στο πρώτο κριτήριο έναντι του δεύτερου κριτηρίου και γίνει ανάθεση τιμής 3 στο δεύτερο κριτήριο όσον αφορά το τρίτο, η αξία προτίμησης του πρώτου κριτηρίου σε σχέση με το τρίτο πρέπει να είναι 2 × 3 = 6. Ωστόσο, εάν ο υπεύθυνος για τη λήψη αποφάσεων έχει αποδώσει μια τιμή όπως 4, 5 ή 7, θα υπήρχε ένα επίπεδο ασυνέπειας στον πίνακα των κρίσεων. Στην ανάλυση AHP είναι αναμενόμενη και επιτρεπτή κάποια ασυνέπεια.

Δεδομένου ότι οι αριθμητικές τιμές προέρχονται από τις υποκειμενικές προτιμήσεις των ατόμων, είναι αδύνατο να αποφευχθούν ορισμένες ασυνέπειες στο τελικό πίνακα κρίσεων. Το ερώτημα είναι πόση ασυνέπεια είναι αποδεκτή. Για το σκοπό αυτό, η AHP υπολογίζει έναν λόγο συνέπειας (CR) που συγκρίνει τον δείκτη συνέπειας (CI) του συγκεκριμένου πίνακα (αυτόν με τις κρίσεις) έναντι του δείκτη συνέπειας ενός τυχαίου πίνακα (RI). Ένας τυχαίος πίνακας είναι εκείνος όπου οι κρίσεις έχουν εισαχθεί τυχαία και ως εκ τούτου αναμένεται να είναι εξαιρετικά ασυνεπής. Πιο συγκεκριμένα το RI είναι ο μέσος όρος του δείκτη CI 500 τυχαίων συμπληρωμένων πινάκων. Ο Saaty παρέχει την υπολογισμένη τιμή RI για πίνακες διαφορετικών μεγεθών όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.8.

Στην AHP, ο λόγος συνέπειας ορίζεται ως CR όπου CR = CI / RI. Ο Saaty έχει δείξει ότι ένας λόγος συνέπειας (CR) που έχει τιμή 0,10 ή μικρότερη είναι αποδεκτός για να συνεχιστεί η ανάλυση AHP. Εάν ο λόγος συνέπειας είναι μεγαλύτερος από 0,10, είναι απαραίτητο να αναθεωρηθούν οι κρίσεις για να εντοπιστεί η αιτία της ασυνέπειας και να διορθωθεί.

Δεδομένου ότι ο υπολογισμός του λόγου συνέπειας γίνεται εύκολα από προγράμματα στον υπολογιστή, γίνεται μια προσπάθεια εκτίμησης αυτού του λόγου ως εξής:

- Ξεκινήστε με τον πίνακα που δείχνει τις συγκρίσεις κρίσεων και τις προερχόμενες προτεραιότητες (Πίνακας 3.7) που ανατυπώνεται για λόγους ευκολίας στον Πίνακα 3.9.
- Χρησιμοποιήστε τις προτεραιότητες ως παράγοντες (βάρη) για κάθε στήλη, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.10.
- Πολλαπλασιάστε κάθε τιμή στην πρώτη στήλη του πίνακα σύγκρισης στον Πίνακα 2.10 από την πρώτη προτεραιότητα κριτηρίου (δηλ., 1.000 × 0.669 = 0.669; 0,143 × 0,699 = 0,096; 0.333 × 0.669 = 0.223) όπως φαίνεται στην πρώτη στήλη του Πίνακα 3.11. Πολλαπλασιάστε κάθε τιμή στη δεύτερη στήλη της δεύτερης προτεραιότητας κριτηρίου. Συνεχίστε αυτή τη διαδικασία για όλες τις στήλες στον συγκριτικό πίνακα. Ο πίνακας 3.11 δείχνει τον πίνακα αποτελεσμάτων μετά την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας.
- Προσθέστε τις τιμές σε κάθε σειρά για να αποκτήσετε ένα σύνολο τιμών που ονομάζεται σταθμισμένο άθροισμα όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.12.

- Διαιρέστε τα στοιχεία του σταθμισμένου αθροίσματος με την αντίστοιχη προτεραιότητα κάθε κριτηρίου, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.13.
- Υπολογίστε τον μέσο όρο των τιμών από το προηγούμενο βήμα. Αυτή η τιμή ονομάζεται λmax.

$$\lambda max = (3.013 + 3.001 + 3.004) / 3 = 3.006$$

- Στην συνέχεια πρέπει να υπολογισθεί ο δείκτης συνοχής (CI) ως εξής:
  C. I. = (λmax-n)/(n-1), όπου n είναι ο αριθμός των συγκρινόμενων στοιχείων (στο παράδειγμα αυτό n = 3). Επομένως,

$$CI = (\lambda max - n) = /(n - 1) = (3.006\text{-}3)/(3 - 1) = 0.004$$

- Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο συνέπειας, που ορίζεται ως:

$$CR = CI / RI$$

Επομένως,

$$CR = CI / RI = 0.004 / 0.58 = 0.006$$

-CI είναι ο δείκτης συνέπειας που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα με τιμή 0.004.
-RI είναι ο δείκτης συνέπειας ενός τυχαία παραγόμενου πίνακα σύγκρισης και είναι διαθέσιμο στο κοινό σε πίνακες (Πίνακας 3.8).
Με άλλα λόγια, ο RI είναι η συνέπεια δείκτη που θα λαμβανόταν εάν οι τιμές κρίσης ήταν εντελώς τυχαίες.

Δεδομένου ότι αυτή η τιμή 0,006 για το ποσοστό της ασυνέπειας CR είναι μικρότερη από 0.10, μπορεί να αναγνωριστεί ότι ο πίνακας κρίσεων είναι λογικά συνεπής έτσι μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία λήψης αποφάσεων με τη χρήση της AHP.

n	3	4	5	6
RI	0,58	0,9	1,12	1,24

Πίνακας 3.8 Δείκτες συνέπειας τυχαίου πίνακα

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Προτεραιότητες
Κόστος	1,00	7,00	3,00	0,668696895
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,143	1,00	0,333	0,08820212
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,333	3,00	1,00	0,243100985

Πίνακας 3.9 Παρουσίαση προτεραιοτήτων

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Βάρη κριτηρίων	0,668696895	0,08820212	0,243100985
Κόστος	1,00	7,00	3,00
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,14	1,00	0,33
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,33	3,00	1,00

Πίνακας 3.10 Παρουσίαση προτεραιοτήτων ως βάρη

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Κόστος	0,67	0,62	0,73
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,10	0,09	0,08
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,22	0,26	0,24

Πίνακας 3.11 Υπολογισμός σταθμισμένων στηλών

Αγορά υπολογιστή	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Σταθμισμένο Άθροισμα
Κόστος	0,668696895	0,617414843	0,729302955	2,015414693
Περιφερειακές Προδιαγραφές	0,095623656	0,08820212	0,080952628	0,264778404
Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	0,222676066	0,264606361	0,243100985	0,730383412

Πίνακας 3.12 Υπολογισμός του σταθμισμένου αθροίσματος

Σταθμισμένο Άθροι	Προτεραιότητα	
2,015414693	0,668696895	3,013943551
0,264778404	0,08820212	3,001950554
0,730383412	0,243100985	3,004444479
	Σύνολο	9,020338584
	Διαίρεση του συνόλου με το 3 για να προκύψει το λmax=	3,006779528

Πίνακας 3.13 Υπολογισμός του λmax

3.4 Παραγωγή τοπικών προτεραιοτήτων (προτιμήσεις) για τις εναλλακτικές λύσεις

Το τρίτο βήμα συνίσταται στην εξαγωγή των σχετικών προτεραιοτήτων (προτιμήσεων) των εναλλακτικών λύσεων σε σχέση με το κάθε κριτήριο. Ποιες είναι οι προτεραιότητες των εναλλακτικών λύσεων όσον αφορά το κόστος, τις προδιαγραφές και τα χαρακτηριστικά αντίστοιχα; Από αυτά οι προτεραιότητες ισχύουν μόνο για κάθε συγκεκριμένο κριτήριο, ονομάζονται τοπικές προτεραιότητες για τη διαφοροποίησή τους από τις συνολικές προτεραιότητες που πρέπει να υπολογιστούν αργότερα.

Όπως υποδείχθηκε, πρέπει να καθοριστούν οι προτεραιότητες των εναλλακτικών λύσεων σε σχέση με καθένα από τα κριτήρια. Για το σκοπό αυτό, γίνεται μια σύγκριση ανά ζεύγη όλων των εναλλακτικών λύσεων, σε σχέση με κάθε κριτήριο, που περιλαμβάνονται στο μοντέλο λήψης αποφάσεων.

Σε ένα μοντέλο με δύο εναλλακτικές λύσεις απαιτείται μία μόνο σύγκριση (Εναλλακτική λύση 1 με την Εναλλακτική 2) για κάθε κριτήριο. Ένα μοντέλο με τρεις εναλλακτικές λύσεις θα απαιτούσε τρεις συγκρίσεις (Εναλλακτική 1 με Εναλλακτική 2, Εναλλακτική 2 με Εναλλακτική 3 και Εναλλακτική 1 με Εναλλακτική 3) για κάθε κριτήριο και ούτω καθεξής. Θα υπάρξουν τόσες συγκρίσεις ανά ζεύγη όσα και τα κριτήρια που υπάρχουν. Στο παράδειγμα, υπάρχουν μόνο δύο εναλλακτικές λύσεις: Υπολογιστής 1 και Υπολογιστής 2 και υπάρχουν τρία κριτήρια.

Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν τρεις πίνακες σύγκρισης που αντιστοιχούν στις ακόλουθες τρεις συγκρίσεις:

- Όσον αφορά το κριτήριο κόστους: σύγκριση του Υπολογιστή 1 με τον Υπολογιστή 2
- Όσον αφορά το κριτήριο προδιαγραφών: σύγκριση του Υπολογιστή 1 με τον Υπολογιστή 2
- Όσον αφορά το κριτήριο χαρακτηριστικών: σύγκριση του Υπολογιστή 1 με τον Υπολογιστή 2.

Οι συγκρίσεις αυτές μπορούν να γίνουν μέσω μιας σειράς ερωτήσεων όπως φαίνεται παρακάτω:

Ερώτηση 1: Όσον αφορά το κριτήριο κόστους, ποια εναλλακτική λύση είναι προτιμητέα: Υπολογιστής 1 ή Υπολογιστής 2;

Για παράδειγμα ας γίνει ο ισχυρισμός ότι ο χρήστης προτιμά πολύ τον Υπολογιστή 1 σε σχέση με τον Υπολογιστή 2. Αυτό σημαίνει ότι στο κελί Υπολογιστής 1-Υπολογιστής 2 της σύγκρισης (πίνακας 3.14), εκχωρείται η τιμή 7 ώστε να αντικατοπτρίζει την προτίμηση. Ομοίως, αντιστοιχίζεται η αμοιβαία αντίστροφη 1/7 στο κελί Υπολογιστής 2-Υπολογιστής 1 στον πίνακα. Με την κανονικοποίηση του πίνακα και την εύρεση του μέσου όρου των σειρών επιτυγχάνονται οι προτεραιότητες (ή προτιμήσεις) για κάθε μία από τις εναλλακτικές λύσεις (Πίνακας 3.15) σε σχέση με το κόστος. Επειδή αυτές οι προτεραιότητες ισχύουν μόνο για το κριτήριο κόστους, ονομάζονται τοπικές προτεραιότητες όσον αφορά το κόστος. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται για λόγους ευκολίας στον Πίνακα 3.16.

Ερώτηση 2: Όσον αφορά το κριτήριο περιφερειακές προδιαγραφές, ποια εναλλακτική λύση είναι προτιμητέα: Υπολογιστής 1 ή Υπολογιστής 2;

Υποθέτουμε ότι ο Υπολογιστής 2 προτιμάται έντονα έναντι του Υπολογιστή 1. Σε αυτή την περίπτωση εκχωρείται η τιμή 5 στο κελί Υπολογιστής 2- Υπολογιστής 1 στον πίνακα σύγκρισης όσον αφορά τις εναλλακτικές λύσεις προδιαγραφών και η αμοιβαία αντίστροφη τιμή ισοδυναμεί με 1/5 στο κελί Υπολογιστής 1- Υπολογιστής 2. Με την κανονικοποίηση του πίνακα και την εύρεση του μέσου όρου των σειρών γίνεται λήψη των τοπικών προτεραιοτήτων για κάθε μία από τις εναλλακτικές λύσεις σε σχέση με τις προδιαγραφές.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 3.19.

Κόστος	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2
Υπολογιστής 1	1,00	7,00
Υπολογιστής 2	0,14	1,00
Άθροισμα	1,14	8,00

Πίνακας 3.14 Σύγκριση όσον αφορά το κόστος

Κόστος	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2	Προτεραιότητα
Υπολογιστής 1	0,875	0,875	0,875
Υπολογιστής 2	0,125	0,125	0,125

Πίνακας 3.15 Προτεραιότητα όσον αφορά το κόστος

Κόστος	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2	Προτεραιότητα
Υπολογιστής 1	1,00	7,00	0,875
Υπολογιστής 2	0,14	1,00	0,125

Πίνακας 3.16 Αποτελέσματα όσον αφορά το κόστος

Ερώτηση 3: Όσον αφορά το κριτήριο των χαρακτηριστικών, ποια εναλλακτική λύση είναι προτιμητέα: Υπολογιστής 1 ή Υπολογιστής 2;
Για παράδειγμα, ας θεωρηθεί ότι ο Υπολογιστής 2 είναι εξαιρετικά προτιμότερος από τον Υπολογιστή 1 όσον αφορά αυτό το κριτήριο. Αυτές οι κρίσεις εισάγονται αριθμητικά στα αντίστοιχα κελιά του Πίνακα 3.20. Με την κανονικοποίηση του πίνακα και την εύρεση του μέσου όρου των σειρών γίνεται λήψη των τοπικών προτεραιοτήτων για κάθε μία από τις εναλλακτικές λύσεις όσον αφορά την τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 3.22. Παρατηρείται ότι έχοντας μόνο δύο εναλλακτικές λύσεις προς σύγκριση σε σχέση με κάθε κριτήριο, απλοποιεί τους υπολογισμούς σε σχέση με τη συνέπεια. Όταν υπάρχουν μόνο δύο στοιχεία για σύγκριση (στο παράδειγμα αυτό, Υπολογιστής 1 και Υπολογιστής 2), οι αντίστοιχοι πίνακες σύγκρισης (Πίνακες 3.14, 3.17 και 3.20) θα είναι πάντοτε συνεπείς (CR = 0). Ωστόσο, πρέπει να ελέγχεται η συνέπεια εάν ο αριθμός των ζευγαριών που συγκρίνονται είναι 3 ή περισσότεροι.

Περιφερειακές Προδιαγραφές	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2
Υπολογιστής 1	1,00	0,20
Υπολογιστής 2	5,00	1,00
Άθροισμα	6,00	1,20

Πίνακας 3.17 Σύγκριση όσον αφορά τις περιφερειακές προδιαγραφές

Περιφερειακές Προδιαγραφές	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2	Προτεραιότητες
Υπολογιστής 1	0,166666667	0,166666667	0,166666667
Υπολογιστής 2	0,833333333	0,833333333	0,833333333

Πίνακας 3.18 Προτεραιότητες όσον αφορά τις περιφερειακές προδιαγραφές

Περιφερειακές Προδιαγραφές	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2	Προτεραιότητες
Υπολογιστής 1	1,00	0,20	0,166666667
Υπολογιστής 2	5,00	1,00	0,833333333

Πίνακας 3.19 Αποτελέσματα όσον αφορά τις περιφερειακές προδιαγραφές

Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2
Υπολογιστής 1	1,00	0,11
Υπολογιστής 2	9,00	1,00
Άθροισμα	10,00	1,11

Πίνακας 3.20 Σύγκριση όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή

Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2	Προτεραιότητες
Υπολογιστής 1	0,10	0,10	0,10
Υπολογιστής 2	0,90	0,90	0,90

Πίνακας 3.21 Προτεραιότητες όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή

Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Υπολογιστής 1	Υπολογιστής 2	Προτεραιότητες
Υπολογιστής 1	1,00	0,11	0,10
Υπολογιστής 2	9,00	1,00	0,90

Πίνακας 3.22 Αποτελέσματα όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή

Εναλλακτικές Λύσεις	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9

Πίνακας 3.23 Τοπικές προτεραιότητες των εναλλακτικών για όλα τα κριτήρια

Τα αποτελέσματα αυτού του βήματος υποδεικνύουν ότι αν το μόνο κριτήριο ήταν το κόστος, ο Υπολογιστής 1 θα ήταν η καλύτερη επιλογή (προτεραιότητα = 0.875 στον Πίνακα 3.16). Αν το μόνο κριτήριο ήταν η οι περιφερειακές προδιαγραφές, η καλύτερη επιλογή θα ήταν ο Υπολογιστής 2 (0.833 προτεραιότητα στον Πίνακα 3.19) και τέλος, εάν τα μοναδικά κριτήρια αγορών ήταν τα χαρακτηριστικά του επεξεργαστή, η καλύτερη επιλογή θα ήταν ο Υπολογιστής 2 (προτεραιότητα 0.900 στον Πίνακα 3.22).

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι προτεραιότητες των εναλλακτικών λύσεων, σε σχέση με κάθε κριτήριο, καλούνται τοπικές προτεραιότητες. Η περίληψη των τοπικών προτεραιοτήτων για την κάθε εναλλακτική λύση παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.23.

3.5 Εξαγωγή συνολικών προτεραιοτήτων (Σύνθεση μοντέλου)

Έως τώρα έχουν δηλωθεί οι τοπικές προτεραιότητες που υποδεικνύουν τις προτιμώμενες εναλλακτικές λύσεις για κάθε κριτήριο. Σε αυτό το τέταρτο βήμα, πρέπει να υπολογιστεί η συνολική προτεραιότητα (ή τελική προτεραιότητα) για κάθε εναλλακτική λύση. Δηλαδή, πρέπει να ληφθεί υπόψη όχι μόνο η προτίμηση των εναλλακτικών λύσεων για κάθε κριτήριο, αλλά και το γεγονός ότι κάθε κριτήριο έχει διαφορετικό βάρος.

Δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές που παρέχονται στο μοντέλο, αυτό το βήμα ονομάζεται σύνθεση μοντέλου. Για τον υπολογισμό της συνολικής προτεραιότητας χρησιμοποιείται η τοπική προτεραιότητα κάθε εναλλακτικής ως αφετηρία (Πίνακας 3.24). Στη συνέχεια, πρέπει να συμπεριληφθούν τα βάρη κάθε κριτηρίου (από 3.8) και για το σκοπό αυτό εισάγονται στον πίνακα όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.25.

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9

Πίνακας 3.24 Πίνακας τοπικών προτεραιοτήτων

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή
Βάρη Κριτηρίων	0,669	0,088	0,243
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9

Πίνακας 3.25 Προετοιμασία για τη στάθμιση των προτεραιοτήτων

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Συνολικές Προτεραιότητες
Βάρη Κριτηρίων	0,669	0,088	0,243	
Υπολογιστής 1	0,585375	0,014696	0,0243	0,624371
Υπολογιστής 2	0,083625	0,073304	0,2187	0,375629

Πίνακας 3.26 Υπολογισμός συνολικών προτεραιοτήτων

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Συνολικές Προτεραιότητες
Βάρη Κριτηρίων	0,669	0,088	0,243	
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1	0,624371
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9	0,375629

Πίνακας 3.27 Σύνθεση μοντέλου

Για παράδειγμα, το κριτήριο κόστους έχει προτεραιότητα (ή βάρος) 0.669 και ο Υπολογιστής 1 έχει τοπική προτεραιότητα (ή προτίμηση) 0,875 σε σχέση με το κόστος. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.26. Τέλος, η συνολική προτεραιότητα του Υπολογιστή 1 επιτυγχάνεται προσθέτοντας αυτά τα αποτελέσματα κατά μήκος της σειράς.

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε μία από τις εναλλακτικές λύσεις που αξιολογούνται. Οι συνολικές προτεραιότητες των εναλλακτικών λύσεων παρουσιάζονται στη δεξιά στήλη του Πίνακα 3.26. Οι υπολογισμοί για κάθε εναλλακτική λύση παρουσιάζονται παρακάτω και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.27 ακολουθώντας τη σύμβαση της εμφάνισης των τοπικών προτεραιοτήτων και τα βάρη για κάθε κριτήριο. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται σύνθεση του μοντέλου (Πίνακας 3.27).

Συνεπώς:

- Συνολική προτεραιότητα του Υπολογιστή 1: $0.875 \times 0.669 + 0.167 \times 0.088 + 0.100 \times 0.243 = 0.624$
- Συνολική προτεραιότητα του Υπολογιστή 2: $0.125 \times 0.669 + 0.833 \times 0.088 + 0.900 \times 0.243 = 0.376$

Τώρα μπορούμε να απαριθμήσουμε τις εναλλακτικές λύσεις που ταξινομούνται βάσει της συνολικής προτεραιότητας ή της προτίμησής τους ως εξής:

Γενικές προτεραιότητες εναλλακτικών λύσεων

1. Υπολογιστής 1 0.624
2. Υπολογιστής 2 0.376

Με άλλα λόγια, δεδομένης της σημασίας (ή του βάρους) κάθε κριτηρίου αγοράς (κόστος, άνεση και ασφάλεια), ο Υπολογιστής 1 είναι προτιμότερος (συνολική προτεραιότητα = 0,624) σε σύγκριση με τον Υπολογιστή 2 (συνολική προτεραιότητα = 0,376).

3.6 Ανάλυση ευαισθησίας

Οι συνολικές προτεραιότητες θα επηρεαστούν σε μεγάλο βαθμό από το βάρος που δίνεται στα αντίστοιχα κριτήρια. Είναι χρήσιμο να εκτελεστεί μια ανάλυση για να εμφανίσει πώς θα είχαν αλλάξει τα τελικά αποτελέσματα εάν τα βάρη των κριτηρίων θα ήταν διαφορετικά. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανάλυση ευαισθησίας και αποτελεί το πέμπτο βήμα στη μεθοδολογία AHP. Η ανάλυση ευαισθησίας επιτρέπει να κατανοήσει ο χρήστης πόσο ισχυρή είναι η αρχική απόφαση και ποιοι είναι οι οδηγοί (δηλαδή ποια κριτήρια επηρέασαν τα πρωτότυπα αποτελέσματα). Αυτό είναι ένα σημαντικό μέρος της διαδικασίας και καμία τελική απόφαση δεν πρέπει να γίνει χωρίς να γίνει ανάλυση ευαισθησίας.

Σημειώστε ότι στο παράδειγμα (Πίνακας 3.27), το κόστος έχει μεγάλη σημασία (προτεραιότητα 0.669) και δεδομένου ότι ο Υπολογιστής 1 έχει υψηλή τοπική προτεραιότητα (0.875) για αυτό το κριτήριο, αναμφίβολα αυτό επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα ευνοϊκά για τον Υπολογιστή 1. Τα ερωτήματα που μπορούν να τεθούν σε αυτό το στάδιο είναι: Ποια θα ήταν η καλύτερη εναλλακτική λύση εάν άλλαζε η προτεραιότητα των κριτηρίων; Τι γίνεται αν δοθεί η ίδια προτεραιότητα για όλα τα κριτήρια; Και τι γίνεται αν δοθεί περισσότερη προτεραιότητα στα χαρακτηριστικά επεξεργαστή ή αν θεωρήσει ο χρήστης ότι είναι τόσο σημαντικά όσο το κόστος;

Για να εκτελεστεί μια ανάλυση ευαισθησίας, είναι απαραίτητο να γίνουν αλλαγές στα βάρη του κριτηρίου και να παρατηρηθούν οι αλλαγές που προκύπτουν στις συνολικές προτεραιότητες των εναλλακτικών λύσεων.

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Συνολικές Προτεραιότητες
Βάρη Κριτηρίων	0,669	0,088	0,243	
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1	0,624371
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9	0,375629

Πίνακας 3.28 Αρχικό σενάριο-Σύνθεση μοντέλου

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Συνολικές Προτεραιότητες
Βάρη Κριτηρίων	0,333	0,333	0,333	
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1	0,38
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9	0,619

Πίνακας 3.29 Σενάριο-Όλα τα κριτήρια έχουν τα ίδια βάρη

	Κόστος	Περιφερειακές Προδιαγραφές	Χαρακτηριστικά Επεξεργαστή	Συνολικές Προτεραιότητες
Βάρη Κριτηρίων	0,5	0,25	0,25	
Υπολογιστής 1	0,875	0,167	0,1	0,504
Υπολογιστής 2	0,125	0,833	0,9	0,496

Πίνακας 3.30 Τρίτο σενάριο-το βάρος όσον αφορά το κόστος οδηγεί σε ίσες προτιμήσεις των εναλλακτικών λύσεων

Για να γίνει εύκολα κατανοητό θα αναλυθούν τα ακόλουθα σενάρια: (α) όταν όλα τα κριτήρια έχουν το ίδιο βάρος και β) τι βάρος χρειάζεται για να οδηγήσει το κριτήριο κόστους σε σχέση με τις συνολικές προτεραιότητες των εναλλακτικών λύσεων.

Ο Πίνακας 3.28 παρουσιάζει την αρχική σύνθεση μοντέλου όπου η πλέον προτιμώμενη επιλογή είναι ο Υπολογιστής 1 (0.624). Ο Πίνακας 3.29 δείχνει την περίπτωση όπου και τα 3 κριτήρια έχουν το ίδιο βάρος (0.333). Σε αυτό το δεύτερο σενάριο, η τελική επιλογή δεν είναι πλέον ο Υπολογιστής 1 αλλά ο Υπολογιστής 2. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο Υπολογιστής 2 κερδίζει σε όλα τα κριτήρια εκτός από το κόστος.

Μειώνοντας το βάρος του κόστους (από 0.669 στο αρχικό σενάριο σε 0.333 στο δεύτερο στάδιο), το μειονέκτημα κόστους του δεν είναι τόσο αισθητό. Αυτό επίσης υποδηλώνει ότι και οι δύο εναλλακτικές λύσεις προτιμώνται εξίσου όταν το κόστος ζυγίζει στο εύρος των 0,333-0,669. Για να υπολογιστεί το σημείο ισορροπίας, μπορούμε να δοκιμάσουμε διαφορετικά βάρη για το κόστος και να διαπιστωθεί ότι όταν το κόστος ζυγίζει περίπου 0,5 της συνολικής σημασίας του κριτηρίου, ο Υπολογιστής 1 και ο Υπολογιστής 2 έχουν την ίδια προτίμηση για πρακτικούς σκοπούς. Δηλαδή, και οι δύο εναλλακτικές προτιμώνται εξίσου όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.30.

3.7 Τελική απόφαση

Αφού ολοκληρωθούν τα παραπάνω βήματα, είναι πλέον δυνατή η λήψη απόφασης. Αυτό αποτελεί το τελευταίο βήμα της ανάλυσης AHP. Για το σκοπό αυτό, είναι απαραίτητο να συγκριθούν οι συνολικές προτεραιότητες που έχουν ληφθεί και αν οι διαφορές είναι αρκετά μεγάλες να γίνει μια σαφής επιλογή.

Είναι επίσης απαραίτητο να αναλυθούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας (Πίνακες 3.28, 3.29 και 3.30). Από αυτή την ανάλυση, μπορεί να εκφραστεί η τελική σύσταση ως εξής: Εάν η σπουδαιότητα του κόστους είναι περισσότερο από το 50% της συνολικής σημασίας των κριτηρίων στην απόφαση, η καλύτερη εναλλακτική λύση είναι ο Υπολογιστής 1 (Πίνακας 3.28). Ωστόσο, αν η σημασία του κόστους είναι πολύ λιγότερο από το 50%, ο Υπολογιστής 2 είναι η καλύτερη απόφαση (Από τους Πίνακες 3.29 και 3.30).

3.8 Συμπεράσματα

Συμπερασματικά, μέσα από τη βιβλιογραφική έρευνα που πραγματοποιήθηκε κατά την συγγραφή αυτής της εργασίας, είναι εμφανές ότι η AHP είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση πολύπλοκων αποφάσεων. Πρόκειται για μια μέθοδο η οποία έχει εφαρμοστεί σε εκατοντάδες παραδείγματα τόσο πραγματικά όσο και υποθετικά. Η χρήση της από οργανισμούς επιχειρηματικούς και μη αλλά και από ακαδημαϊκούς φορείς είναι συνεχής και αυξανόμενη, αφού η πολυπλοκότητα των αποφάσεων σήμερα γίνεται όλο και εντονότερη.

Επιπλέον, το γεγονός ότι η βιβλιογραφία που υπάρχει για την Αναλυτική Ιεραρχική Διαδικασία είναι εξαιρετικά μεγάλη, ενώ ως μέθοδος προτάθηκε και χρησιμοποιήθηκε μόλις τριάντα πέντε περίπου χρόνια πριν, υπογραμμίζει την σημασία και την χρησιμότητα της με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Ακόμη και οι ερευνητές οι οποίοι έχουν κατά καιρούς αμφισβητήσει την εγκυρότητα της, έχουν ωστόσο σημειώσει σε αρκετές περιπτώσεις την αποτελεσματικότητα της στην πράξη. Ο κατάλογος με τις εφαρμογές της μεθόδου είναι πολύ μακρύς και στην παρούσα εργασία αναφέρθηκαν πολύ λίγες εξ' αυτών. Αντίστοιχα πολλά είναι τα σημεία που συναντήσαμε στην βιβλιογραφία όπου ερευνούν κομμάτια της μεθόδου και προτείνουν εναλλακτικούς τρόπους ή και βελτιώσεις σε ορισμένα σημεία. Για να μην μακρηγορούμε πρόκειται για μια μέθοδο η οποία είναι πρακτικά αποτελεσματική, ευκολονόητη και αποτελεί ένα ενδιαφέρον ερευνητικό αντικείμενο. Κατά τη διάρκεια της έρευνας εντοπίσαμε σε δημοσιεύσεις διάφορους λόγους για τους οποίους οι ερευνητές επέλεξαν την AHP για την εργασία τους.

Κλείνοντας αξίζει να σημειώσουμε την άποψη μας ότι τόσο η AHP ως μέθοδος, όσο και το λογισμικό για την εφαρμογή της αποτελούν ευκολονόητα και εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία για την αντιμετώπιση αποφάσεων πολλαπλών κριτηρίων, και θα μπορούσαν να εξυπηρετήσουν σε πολλούς τομείς διευκολύνοντας ανθρώπους οι οποίοι δεν είναι «ειδικοί» στον αποτελεσματικό χειρισμό πολύπλοκων ζητημάτων – αποφάσεων. Το σημείο στο οποίο είναι σημαντικό ο εκάστοτε χρήστης να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός είναι κατά την πραγματοποίηση των συγκρίσεων, την στιγμή δηλαδή που ο ίδιος κρίνει την σημαντικότητα των παραγόντων που επηρεάζουν την απόφαση που έχει να πάρει. Πρέπει ο χρήστης να έχει στραμμένη την προσοχή του εξ' ολοκλήρου στο πρόβλημα και να διαθέτει βέβαια και την κατάλληλη γνώση επ' αυτού ώστε οι κρίσεις του να είναι συνεπής, διότι σε διαφορετική περίπτωση η μέθοδος μπορεί να γίνει κουραστική αφού ο χρήστης θα αναγκάζεται να γυρίζει συνέχεια πίσω στην διαδικασία.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πέρα από την θεωρητική ανάλυση της μεθόδου γίνεται ξεκάθαρη η ψηφιοποίησή της μέσω του προγράμματος Excel. Η μέθοδος αποτελεί ένα σύγχρονο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων και την λήψη αποφάσεων, που την καθιστά ένα ενδιαφέρον θέμα για περαιτέρω έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΚΤΗΣΗΣ ΑΡΘΡΩΝ

- T.L. Satty Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation RWS Publications (1990)
- T.L Saaty, J.M. Alexander Conflict Resolution: The Analytical Hierarchy Approach Praeger Publishers, New York, NY (1989)
- T.L. Decision Making for Leaders, AHP Series, vol. II, RWS Publ. (2001) (New edition)
- Porter, M.E., The Economic performance of regions, Regional Studies 37 (2003), PP.549-578
- Ramik, J., Hanclova, J., Multicriteria methods for evaluating competitiveness of regions in V4 countries, Trzaskalik. T. Multiple Criteria Decision Making ’12, Katowice: The Karol Adamiecki University of Economics, 2012
- Camani, R., Capello, R., & Nijkamp, P. (2009). Territorial capital and regional development. Handbook of regional growth and development theories, 118-132
- Formica, S., & Uysal, M. (2006). Destination attractiveness based on supply and demand evaluations: An analytical framework. Journal of Travel Research, 44(4), 418-430
- Saaty, T.L. (2008). Decision making with the analytic hierarchy process. International Journal of Services Sciences, 1(1), 83-98

- International Society on Multiple Criteria Decision Making (MCDM)
  url: www.mdcmsociety.org

- International Journal of the Analytic Hierarchy Process (IJAHP)
  url: www.ijahp.com

- International Journal of Operations and Production Management, MBC university, διαθέσιμο στο διαδίκτυο από την Emerald Group Publishing
  url: www.emeraldinsight.com

- Outdoor Education Research and Evaluation Center
  url: www.wilderdom.com

- European Society for Fuzzy Logic and Technology
  url: www.eusflat.org

- Wiley online library
  url: onlinelibrary.wiley.com

- CiteSeerX (scientific literature digital library)
  url: citeseerx.ist.psu.edu

- JSTOR (online library for academic content)
  url: www.jstor.org

- Genamics journal seek
  url: journalseek.net

- Elsevier (online library)
  url: www.elsevier.com

- Science Direct (online library)
  url: www.sciencedirect.com

- Production and Operation Management Society (POMS)
  url: www.poms.org

- Social Science Research Network (SSRN)
  url: www.ssrn.com

- https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0270025587904738
- https://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_hierarchy_process
- http://www.dii.unisi.it/~mocenni/Note_AHP.pdf
- https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915015586
- https://www.pmi.org/learning/library/analytic-hierarchy-process-prioritize-projects-6608