ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

Π.Μ.Σ.: ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Δίγλωσση Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση

Διπλωματική εργασία

Εκπαιδευτική παρέμβαση στην πρόσθεση διψήφιων αριθμών σε μαθητές δευτέρας δημοτικού με δυσκολίες στα μαθηματικά

της

Τζελέπη Λυδία - Λεμονιά

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αν. Καθηγητής ΠΤΔΕ/ΠΔΜ

Εξεταστές: Αλευριάδου Αναστασία, Αν. Καθηγήτρια ΠΤΝ/ΠΔΜ

Τσακιρίδου Ελένη, Καθηγήτρια ΠΤΔΕ/ΠΔΜ

Φλώρινα, Ιανουάριος 2016

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο, Αναπληρωτή καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, για την καθοδήγηση και τις χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου. Επίσης, ευχαριστώ τον Περιφερειακό Διευθυντή Εκπαίδευσης Δυτικής Μακεδονίας, κ. Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, για την χορήγηση άδειας για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας. Ακόμη, ευχαριστώ θερμότατα τον Διευθυντή του 5ου Δ.Σ. Κοζάνης, κ. Γάγαλη Ηλία, τις εκπαιδευτικούς των τμημάτων της Β΄ δημοτικού, κ. κ. Γκούτζιου Βασιλική και Μιλκοπούλου Ελένη, καθώς και τις κ. κ. Δερβένη Άννα, καθηγήτρια εικαστικών, και Κοτζαμανίδου Όλγα, καθηγήτρια μουσικής, για την πρόσβαση που μου παρείχαν στο σχολείο και στους μαθητές των τμημάτων. Ευχαριστώ τους γονείς και τους μαθητές των τμημάτων που δέχθηκαν να λάβουν μέρος στην παρούσα έρευνα. Τέλος, ευχαριστώ θερμά τον σύζυγό μου, Παπαδημητρίου Αρίσταρχο, για την συναισθηματική στήριξη και τις συμβουλές που μου παρείχε όλο αυτό το διάστημα.

Ονοματεπώνυμο: Τζελέπη Λυδία – Λεμονιά

Α.Ε.Μ.: 493

Ηλεκτρονική διεύθυνση: lydia_tzel@hotmail.com

Έτος εισαγωγής: 2014

Κατεύθυνση: Δίγλωσση Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση

Τίτλος διπλωματικής εργασίας: Εκπαιδευτική παρέμβαση στην πρόσθεση διψήφιων αριθμών σε μαθητές δευτέρας δημοτικού με δυσκολίες στα μαθηματικά

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής, είναι προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας, η βιβλιογραφία και οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει, έχουν δηλωθεί κατάλληλα με παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Επισημαίνεται πως η συγκεκριμένη επιλογή βοηθά στον περιορισμό της λογοκλοπής διασφαλίζοντας έτσι τη συγγραφέα.

Ημερομηνία 15 - 01 - 2016 Η δηλούσα

Τζελέπη Λυδία – Λεμονιά

Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων …………………………………………………………….... σελ. 6

Περίληψη ………………………………………………………………………… σελ. 7

1. Θεωρητικό πλαίσιο – Εισαγωγή ...…………………………………………... σελ. 9

1.1. Δυσκολίες Μάθησης στα Μαθηματικά ……………………………………... σελ. 10

1.2. Πρόγνωση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά ………………………... σελ. 12

1.3. Διδασκαλία των μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθητικά ………….... σελ. 15

1.4. Εκπαιδευτικές προσεγγίσεις για την υποστήριξη μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά ……………………………………………………………… σελ. 17

1.5 Αρχές σχεδιασμού ενός εκπαιδευτικού προγράμματος παρέμβασης …………. σελ. 19

1.6. Περιεχόμενο και αποτελέσματα εκπαιδευτικών παρεμβάσεων ………………. σελ. 20

1.7. Στρατηγικές διδασκαλίας και η εφαρμογή τους στις εκπαιδευτικές παρεμβάσεις………..…………………………………………………………......σελ.25

2. Σκοπός και Ερευνητικό Ερώτημα ……………………………………………. σελ. 27

2.1. Συμμετέχοντες ……………………………………………………………… σελ. 28

2.2. Σχεδιασμός έρευνας ….…………………………………………………….. σελ. 28

2.3. Διαδικασία διεξαγωγής έρευνας …………………………………………... σελ. 28

2.3.1. Επιλογή μαθητών για συμμετοχή στην εκπαιδευτική παρέμβαση……………… σελ. 28

2.3.2. Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας (Π.Μ.Ε.) της Ουτρέχτης ……..… σελ. 29

2.3.3. Χορήγηση του Κριτηρίου Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης … σελ. 31

2.3.4. Χορήγηση Pre- test και επιλογή συμμετεχόντων ………………………………. σελ. 33

2.3.5. Περιγραφή των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών που επιλέχθηκαν ……… σελ. 37

2.3.6. Εφαρμογή εκπαιδευτικής παρέμβασης - Ανάλυση περιεχομένου μαθημάτων … σελ. 41

2.3.7. Χορήγηση Post-test: Ανάλυση αποτελεσμάτων και η επίδοση των μαθητών .… σελ. 70

3. Συζήτηση ……………………………………..……………………..…. σελ. 81

4. Παράρτημα …..………………………………………………………… σελ. 88

5. Βιβλιογραφία – Αρθρογραφία ………………..………………………………….. σελ. 115

Κατάλογος πινάκων:

Πίνακας 1 : Αποτελέσματα Κριτηρίου Π.Μ.Ε. συγκριτικά με το φύλο των μαθητών

Πίνακας 2 : Αποτελέσματα Κριτηρίου Π.Μ.Ε. συγκριτικά με την ηλικιακή ομάδα των μαθητών

Πίνακας 3: Η βαθμολογική επίδοση των μαθητών στο Pre-test

Πίνακας 4 : Βαθμολογίες των τριών μαθητών (Επίπεδο Δ) στο Κριτήριο Π.Μ.Ε.

Πίνακας 5 : Βαθμολογίες των δύο μαθητών (Επίπεδο Ε) στο Κριτήριο Π.Μ.Ε.

Πίνακας 6: Καταγραφή λαθών των μαθητών στο Κριτήριο Π.Μ.Ε. και στο Pre-test

Πίνακας 7: Δημογραφικά στοιχεία συμμετεχόντων στην εκπαιδευτική παρέμβαση και επίπεδα Π.Μ.Ε.

Πίνακας 8 : Γνωστικοί στόχοι της εκπαιδευτικής παρέμβασης

Πίνακας 9: Περιεχόμενα ασκήσεων Pre & Post-test και οι γνωστικοί στόχοι τους

Πίνακας 10: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 1 στις δύο δοκιμασίες

Πίνακας 11: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 2 στις δύο δοκιμασίες

Πίνακας 12: Οι σωστές απαντήσεις της Μαθήτριας 1 στις δύο δοκιμασίες

Πίνακας 13: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 3 στις δύο δοκιμασίες

Πίνακας 14: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 4 στις δύο δοκιμασίες

Περίληψη

Οι μαθηματικές γνώσεις, έννοιες και διαδικασίες συχνά δυσκολεύουν τους μαθητές μικρών και μεγάλων τάξεων. Για την ενίσχυση και υποστήριξη αυτών προτείνονται προγράμματα εκπαιδευτικής παρέμβασης από τη σχετική βιβλιογραφία. Η παρούσα εργασία εξετάζει τα οφέλη της *πρώιμης* εκπαιδευτικής παρέμβασης σε μαθητές δευτέρας δημοτικού με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Η παρέμβαση σχεδιάστηκε βάσει των αρχών του προγράμματος Tier 2, έτσι όπως αυτό έχει περιγραφεί στη σχετική βιβλιογραφία. Στην έρευνα συμμετείχαν 23 μαθητές δευτέρας δημοτικού με σκοπό να εντοπιστούν ανάμεσά τους παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες. Μετά από τη χορήγηση δύο δοκιμασιών, του Κριτηρίου Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης και του pre-test που σχεδιάστηκε, επιλέχθηκαν 5 μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στα μαθήματα εκπαιδευτικής παρέμβασης. Η εκπαιδευτική παρέμβαση της εργασίας εστιάζει στη διδασκαλία βασικών αριθμητικών δεδομένων, στρατηγικών πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο και εννοιών θεσιακής αξίας και υποστηρίζεται από κατάλληλο εποπτικό υλικό και λογισμικό πρόγραμμα. Μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων, χορηγήθηκε στους 5 συμμετέχοντες post-test με στόχο την εκτίμηση της προόδου τους στους παραπάνω γνωστικούς στόχους. Η ποιοτική ανάλυση των επιδόσεων των μαθητών στα δύο τεστ και κατά τη διάρκεια των μαθημάτων παρέμβασης έδειξε πως ο συγκεκριμένος τύπος παρέμβασης (Tier 2) παρείχε ενίσχυση στους συμμετέχοντες, καθώς οι επιδόσεις τους βελτιώθηκαν ορατά. Επιπρόσθετα, η χρήση του εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος λειτούργησαν βοηθητικά, ώστε οι περισσότεροι μαθητές να κατακτήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Επομένως, τα οφέλη της πρώιμης εκπαιδευτικής παρέμβασης θα πρέπει να εκτιμώνται από τους ειδικούς της εκπαίδευσης, προκειμένου να παρέχεται ποιοτική εκπαίδευση σε όλους τους μαθητές, προσαρμοσμένη στις ιδιαίτερες ανάγκες τους.

Λέξεις κλειδιά: δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, πρόσθεση διψήφιων αριθμών, θεσιακή αξία, εκπαιδευτική παρέμβαση τύπου Tier 2, εποπτικό υλικό δεκάδων-μονάδων, Virtual Manipulatives

Abstract

Mathematical knowledge, concepts and procedures are often difficult for students of different grades. Relevant bibliographical references suggest the application of educational intervention programmes for their support. The present study examines the effects of an early mathematics intervention on the performance of second-grade students with difficulties on learning mathematics. Intervention was based on a Tier 2 intervention programme, which is part of a multitiered programme. The participants were 23 second-grade students who completed two tests before the intervention. The first, was the Utrecht Early Mathematical Competence Test and then they completed a pre-test. As a result, 5 students with low performance were identified with difficulties on learning mathematics. Mathematics intervention included teaching of basic addition facts, addition strategies between two-digit numbers without regrouping and place value concepts. Lessons were conducted by using appropriate educational material and software. Post-test was given to the 5 participants who attended the intervention programme. Qualitative analysis of their performance showed that Tier 2 had positive effects on their acquisition of mathematics knowledge and skills. Therefore, benefits from early intervention in mathematics should be seriously considered from teachers and education specialists. In this way, qualitative education will be provided to each student with or without difficulties on mathematics.

Key words: difficulties on learning mathematics, two-digit number addition, place value, Tier 2 Intervention Programme, Base-10 blocks, Virtual Manipulatives

1. Θεωρητικό πλαίσιο - Εισαγωγή

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα γνωστικό αντικείμενο με σημαντικές απαιτήσεις, καθώς πρόκειται για ένα «σύνθετο σύστημα αναπαράστασης σχέσεων, ιδεών, κανόνων και μοτίβων του περιβάλλοντος κόσμου» (Αγαλιώτης, 2013: 14). Οι γνώσεις και οι δεξιότητες που είναι απαραίτητες στους μαθητές για την επιτυχία τους είναι σύνθετες και η κατάκτησή τους επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, η φύση των μαθηματικών γνώσεων, οι συνθήκες της μαθησιακής διαδικασίας, οι αντιληπτικές ικανότητες κάθε μαθητή ως προς την 'έννοια του αριθμού' (number sense), καθώς και οι δυνατότητες της εργαζόμενης μνήμης του (working memory) επηρεάζουν την επιτυχία καθενός σε αυτό το γνωστικό αντικείμενο (Αγαλιώτης, 2013; Friso-van den Bos, 2014).

Οι γνώσεις και δεξιότητες που απαιτούνται στο αντικείμενο των μαθηματικών χρησιμοποιούνται συνδυαστικά στις μαθηματικές εφαρμογές κι έχουν κατηγοριοποιηθεί με σκοπό να μελετηθούν και να διδαχθούν. Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2013), οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες είναι οι παρακάτω: α) η κατάκτηση, η διατήρηση και η ανάκληση μαθηματικών δεδομένων, β) η χρήση αλγορίθμων, γ) η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και δ) η επίλυση προβλημάτων. Καθεμία από τις παραπάνω κατηγορίες είναι σύνθετη και απαιτεί κατάκτηση πολλών γνωστικών στόχων, γεγονός που αποτελεί πηγή δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά.

Επιπρόσθετα, σημαντικό ρόλο για την επιτυχία στα μαθηματικά παίζει η κατάκτηση αυτού που ονομάζουμε 'έννοια του αριθμού', 'number sense' όπως συναντάται στη διεθνή βιβλιογραφία. Η 'έννοια του αριθμού' είναι ένας όρος δύσκολος να προσδιοριστεί με σαφήνεια. Στην επιστημονική διατριβή της Friso-van den Bos (2014) παρατίθενται ορισμοί από διάφορους ερευνητές. Κάποιοι από αυτούς ορίζουν την 'έννοια του αριθμού' ως την ικανότητα του ατόμου να αναπαριστά νοητικά και να διαχειρίζεται αριθμούς και ποσότητες. Άλλοι ερευνητές την ορίζουν σαν την επίδοση που εκδηλώνεται λόγω της νοητικής κατανόησης των αριθμών στη μέτρηση, στην αναγνώριση και γνώση των αριθμών και στη σύγκριση αυτών. Πιο ολοκληρωμένα, μπορούμε να πούμε ότι ο όρος αφορά τη σαφή κατανόηση της απόλυτης και σχετικής ποσότητας αντικειμένων, καθώς και της συμβολικής αναπαράστασης των αντικειμένων αυτών (Geary et al., 2009). Με την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού και την εκπαίδευση της εργαζόμενης μνήμης τα παιδιά διαχειρίζονται ευκολότερα πληροφορίες και βελτιώνεται η επίδοσή τους στα μαθηματικά.

Το αναπτυξιακό μοντέλο για την κατάκτηση της έννοιας του αριθμού, όπως προτάθηκε από τους von Aster και Shalev το 2007 (Östergren, 2013), περιλαμβάνει τέσσερα στάδια: 1) την εσωτερική ικανότητα αναπαράστασης των αριθμών, 2) τη σύνδεση αντικειμένων με το λεκτικό αριθμητικό σύστημα, 3) την κατάκτηση του συστήματος των αραβικών αριθμών – ψηφίων και 4) το σχηματισμό νοητικής – συμβολικής αριθμογραμμής. Το πέρασμα από τα παραπάνω στάδια συμβάλει στη γνώση του αριθμητικού συστήματος, το οποίο παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατάκτηση των αριθμητικών δεδομένων και συνδυασμών, οπότε και στην επιτυχία του μαθητή μέσα στη σχολική τάξη.

Η 'έννοια του αριθμού' είναι μια εννοιολογική δομή, η οποία συνδέεται με τις μαθηματικές αρχές, σχέσεις και διαδικασίες (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Είναι εύκολο να την αναγνωρίσουμε, παρόλο που οι ερευνητές δεν κατέληξαν σε έναν κοινά αποδεκτό ορισμό προς το παρόν. Τα κύρια χαρακτηριστικά του όρου, που είναι η μέτρηση, η διάκριση ποσοτήτων και η χρήση της νοητικής αριθμογραμμής, φάνηκε ότι καλλιεργούνται, άτυπα και από μικρή ηλικία, στα παιδιά μέσα στο περιβάλλον που μεγαλώνουν. Οπότε, παιδιά που προέρχονται από υψηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα έχουν περισσότερο ανεπτυγμένη την έννοια του αριθμού από εκείνα που προέρχονται από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα (Gersten, Jordan & Flojo, 2005).

1.1 Δυσκολίες Μάθησης στα Μαθηματικά

Οι περισσότεροι μαθητές ανήκουν στην τυπική ανάπτυξη, οπότε δεν εμφανίζουν σημαντικές δυσκολίες στη μάθηση και οι γνώσεις τους ανταποκρίνονται στη βιολογική τους ηλικία και στο στάδιο της ανάπτυξής τους. Από την άλλη πλευρά, από τις αρχές του 20ου αιώνα εμφανίζονται παρατηρήσεις ερευνητών που αναφέρονται σε δυσκολίες μάθησης παιδιών στα μαθηματικά. Μέχρι σήμερα έχουν προκύψει διάφοροι όροι για τις δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά όπως 'μαθηματική/ες διαταραχή/ες', 'μαθηματικές δυσκολίες', 'μαθηματική αναπηρία' (Östergren, 2013). Επίσης, εμφανίζεται ο όρος 'ειδική μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά', ο οποίος αναφέρεται σε σημαντικές δυσκολίες στην κατάκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, οι δυσκολίες αυτές αφορούν στην κατανόηση των απλών αριθμητικών εννοιών, στην κατάκτηση των αριθμητικών συνδυασμών, στην απόκτηση δεξιοτήτων στην επίλυση προβλημάτων και στη συνολική αντίληψη της λειτουργίας των μαθηματικών (Αγαλιώτης, 2013). Ένας ακόμη, ιδιαίτερα διαδεδομένος όρος είναι αυτός της 'δυσαριθμησίας', ο οποίος προτάθηκε το 1961 από τον αμερικάνο ερευνητή Cohn και αφορά στις δυσκολίες πρόσκτησης των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων που εμφανίζουν ορισμένοι μαθητές (Αγαλιώτης, 2013). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η φράση 'δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά', καθώς η έρευνα που περιλαμβάνεται σε αυτή αφορά μαθητές γενικής τάξης του δημοτικού σχολείου, οι οποίοι έχουν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά, χωρίς να έχουν διαγνωσθεί από κάποιο επίσημο οργανισμό ή φορέα του ελληνικού κράτους ως μαθητές με Δυσαριθμησία ή με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά.

Οι αιτίες των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά είναι πολλές και συχνά δύσκολο να προσδιορισθούν από το δάσκαλο της γενικής τάξης, διότι οι ερευνητές τις αποδίδουν σε διάφορους παράγοντες, οι οποίοι μπορεί να συνυπάρχουν σε αρκετές περιπτώσεις μαθητών. Ταυτόχρονα, προκειμένου να εντοπιστούν οι παραπάνω παράγοντες χρειάζεται οι μαθητές να περάσουν από εξειδικευμένα τεστ ψυχολόγων και ειδικών. Ο Geary πρότεινε την ύπαρξη των παρακάτω ελλειμμάτων σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά: α) έλλειμμα στη λειτουργία της εργαζόμενης μνήμης (working memory), το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα δυσκολίες στην κατάκτηση αριθμητικών συνδυασμών και στη χρήση μαθηματικών γνώσεων, β) έλλειμμα στη φωνολογική και οπτικοχωρική αντίληψη των μαθητών, όπου οι μαθητές δυσκολεύονται στην αντιστοίχηση και κωδικοποίηση συμβόλων – λέξεων, αριθμών – λέξεων, καθώς και στη διαχείριση χωρικών στοιχείων στα μαθηματικά και γ) έλλειμμα στη γνώση της έννοιας του αριθμού, η οποία οδηγεί σε δυσκολίες στη μέτρηση, στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και στη σύνδεση εννοιών με το περιεχόμενό τους (Αγαλιώτης, 2013; Östergren, 2013). Κάποια από τα παραπάνω ελλείμματα μπορεί να συνυπάρχουν και οι συνέπειές τους είναι φανερές σε συμπεριφορικό και σε γνωστικό επίπεδο.

Σε ο,τι αφορά τις γνώσεις τους στα μαθηματικά, λόγω των παραπάνω ελλειμμάτων, οι μαθητές με δυσκολίες έχουν αδυναμίες στη σύνδεση συμβόλων με τις αντίστοιχες ποσότητες και τις λεκτικές τους εκφορές, στην κατανόηση του μεγέθους των αριθμών και των ποσοτήτων που αναπαριστούν, στην κατανόηση των σχέσεων μέρους - όλου, στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων, στις μετρήσεις μεγεθών, ποσοτήτων, όγκων και ανεπάρκειες κατά την εκτέλεση πράξεων. Επιπρόσθετα, έχουν δυσκολίες στην ανάγνωση γραφημάτων και στην τήρηση σχεδίων κατά την επίλυση προβλημάτων (Αγαλιώτης, 2013).

Σύμφωνα με σύγχρονες έρευνες, φαίνεται πως το 5% - 10% του μαθητικού πληθυσμού διαγιγνώσκεται με κάποια μορφή μαθησιακής δυσκολίας στα μαθηματικά

(Bryant, 2008a; Dennis et al., 2015; Geary, 2009). Οι ερευνητές τονίζουν πως είναι ιδιαίτερη ανάγκη η πρόωρη διάγνωση των μαθηματικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, κατά τη διάρκεια φοίτησής τους στις μικρές τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η έγκαιρη διάγνωση και η εκπαιδευτική παρέμβαση που ακολουθεί βοηθούν τους μικρούς μαθητές να αποκτήσουν ένα καλό επίπεδο στις μαθηματικές τους γνώσεις, ώστε να τα καταφέρουν στις επόμενες τάξεις, αλλά και αργότερα στα υψηλότερα επίπεδα εκπαίδευσης (Dennis et al., 2015). Αυτή η πρώιμη, όπως ονομάζεται, εκπαιδευτική παρέμβαση διαπιστώνεται πως έχει θετικά αποτελέσματα, παρόλο που στα μαθηματικά είναι πιο σπάνια από τις παρεμβάσεις στις αναγνωστικές δυσκολίες (Bryant, 2008a).

1.2. Πρόγνωση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά

Η πρόγνωση, καθώς και η πρόληψη, των μαθηματικών δυσκολιών επιδιώκονται από τους εκπαιδευτικούς, διότι οι σχετικές έρευνες δείχνουν πως τα εκπαιδευτικά προγράμματα παρέμβασης έχουν θετικά αποτελέσματα. Σημαντικό στοιχείο κατά τη διαδικασία πρόληψης και πρόγνωσης των μαθηματικών δυσκολιών είναι το να εφαρμόζεται το θεωρητικό πλαίσιο που σχετίζεται με την ιεραρχία των μαθηματικών γνώσεων και την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων (Αγαλιώτης, 2013). Τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα περιέχουν προσεγγίσεις για την πρόγνωση των μαθηματικών δυσκολιών, οι οποίες αποτελούν χρήσιμα μέσα για την υποστήριξη των μαθητών που το χρειάζονται.

Σύμφωνα με την έρευνα των Gersten, Jordan και Flojo (2005), υπάρχουν συγκεκριμένοι παράγοντες, με προβλεπτική αξία, για την ανίχνευση των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά. Επίσης, οι παραπάνω ερευνητές τονίζουν πως για την ανίχνευση και κατανόηση των δυσκολιών μάθησης ενός μαθητή περισσότερο αποτελεσματικές και έγκυρες είναι οι μακρόχρονες έρευνες κι όχι η εκτίμηση της επίδοσής του σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Οι μακρόχρονες έρευνες αποκαλύπτουν τη φύση και τον τύπο μαθηματικών δυσκολιών ενός μαθητή, καθώς αποδεικνύεται, κατά τη διάρκειά τους, αν οι δυσκολίες οφείλονται σε αναπτυξιακές καθυστερήσεις ή επιμένουν. Επιπρόσθετα, σχεδιάζονται πιο κατάλληλες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις για τους μαθητές με δυσκολίες. Οι ερευνητές υπογραμμίζουν πως έρευνες αυτού του τύπου απέδειξαν το πόσο στενά συνδέονται οι δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά με τις αναγνωστικές δυσκολίες και ταυτόχρονα ανέδειξαν τους υποτύπους των μαθηματικών δυσκολιών.

Παράγοντες πρόγνωσης των μαθηματικών δυσκολιών είναι: η εκτίμηση ποσοτήτων χωρίς απαρίθμηση, η χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης, η κατάκτηση της έννοιας του αριθμού, η κατάκτηση των αριθμητικών συνδυασμών, η καλή λειτουργία της εργαζόμενης μνήμης και η λειτουργική οπτικοχωρική ικανότητα (Αγαλιώτης, 2013; Dowker, 2005; Gersten, Jordan & Flojo, 2005).

Η *εκτίμηση ποσοτήτων χωρίς απαρίθμηση* αποτελεί συστατικό μέρος της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού, οπότε έχει μεγάλη προβλεπτική αξία για τις μαθηματικές δυσκολίες. Ακόμη, αποτελεί πρόδρομη γνώση της ικανότητας σύγκρισης αριθμών και φαίνεται ότι καλλιεργείται μέσω της άτυπης μάθησης που συντελείται στο οικογενειακό περιβάλλον κάθε μαθητή. Ωστόσο, η κατάλληλη διδασκαλία μέσα στα πλαίσια του σχολείου βοηθά μαθητές με δυσκολίες να τις ξεπεράσουν (Αγαλιώτης, 2013). Την εκτίμηση ποσοτήτων χωρίς απαρίθμηση ακολουθεί *η ανάπτυξη στρατηγικών απαρίθμησης*. Πρόκειται για την ικανότητα των μαθητών να απαριθμούν αντικείμενα εφαρμόζοντας την ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ αυτών και των αριθμητικών λέξεων, την αναγνώριση της αρχής ότι η σειρά αντιστοίχησης αντικειμένων – λέξεων δεν αλλάζει το αποτέλεσμα και τη διάκριση της σημασίας που έχει η αριθμητική λέξη που λέγεται τελευταία. Για τον έλεγχο αυτής της ικανότητας χρειάζεται να ελέγξουμε με προσοχή την ταχύτητα, την ακρίβεια και τη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων απαρίθμησης του μαθητή (Αγαλιώτης, 2013).

Η *ανάπτυξη και χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών μέτρησης* είναι ένας ακόμη παράγοντας που εξετάζεται για τη διαπίστωση δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά και στηρίζεται στην ανάπτυξη της ικανότητας απαρίθμησης. Οι στρατηγικές μέτρησης εξελίσσονται σε κάθε μαθητή με βάση την ηλικία και την ανάπτυξή του. Οι Siegler και Shrager, το 1984, περιέγραψαν σε μελέτη τους την αναπτυξιακή εξέλιξη των στρατηγικών μέτρησης στους μικρούς μαθητές (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Αρχικά, τα παιδιά χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους ή αντικείμενα για την εύρεση ενός αθροίσματος μονοψήφιων αριθμών, η οποία θεωρείται μη αποτελεσματική και ανώριμη στρατηγική μέτρησης. Στη συνέχεια, ξεκινούν από τον πρώτο αριθμό που τους δίνεται και «ανεβαίνουν» τόσους αριθμούς όσο ο δεύτερος που δίνεται. Αργότερα, θα ξεκινήσουν από τον μεγαλύτερο προσθετέο και θα «ανέβουν» τόσο όσο ο μικρότερος προσθετέος. Τέλος, το άθροισμα των μονοψήφιων προσθετέων κατακτάται και ανακαλείται αυτόματα από τη μνήμη του μαθητή σαν αριθμητικό δεδομένο (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά δυσκολεύονται στην κατάκτηση και αποτελεσματική χρήση στρατηγικών μέτρησης. Επιμένουν, ακόμα και σε μεγαλύτερες τάξεις, να χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους, ενώ συνομήλικοί τους μετρούν λεκτικά, χωρίς τη χρήση δαχτύλων, ή κάνουν τις πράξεις νοερά. Συνεπακόλουθα, οι μαθητές με δυσκολίες στη χρήση στρατηγικών μέτρησης δεν μπορούν να αποκτήσουν ευχέρεια στον υπολογισμό αριθμητικών συνδυασμών. Οπότε, οι στρατηγικές αυτές χρησιμοποιούνται και στην ανίχνευση των μαθηματικών δυσκολιών, αλλά και στο σχεδιασμό των εκπαιδευτικών προγραμμάτων παρέμβασης.

Επόμενος παράγοντας πρόγνωσης μαθηματικών δυσκολιών είναι *η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού*. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, πρόκειται για μία ιδιαίτερα σημαντική ικανότητα του ατόμου για την ανάπτυξη των γνώσεών του σχετικά με τις μαθηματικές αρχές, σχέσεις και διαδικασίες. Τα χαρακτηριστικά της ικανότητας αυτής που σχετίζονται με τη μαθηματική ικανότητα και επίδοση είναι: η αποτελεσματική μέτρηση (σωστή χρήση αριθμητικών λέξεων και ψηφίων), η διάκριση και σύγκριση ποσοτήτων με ευκολία (ποιο είναι μεγαλύτερο, το 3 ή το 5;), η ευχέρεια στους νοερούς υπολογισμούς και στη χρήση της νοητικής αριθμογραμμής (Αγαλιώτης, 2013; Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Επίσης, η έννοια του αριθμού καλλιεργείται σε άτυπα περιβάλλοντα μάθησης, όπως στο οικογενειακό πλαίσιο στο οποίο μεγαλώνει ένα παιδί, και η μη κατάκτησή της αποτελεί βασική ένδειξη για την ύπαρξη δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά.

Επιπρόσθετα, *η αδυναμία αυτόματης ανάκλησης* από τη μνήμη των αριθμητικών συνδυασμών είναι ένας ακόμη προγνωστικός παράγοντας των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά. Η παραπάνω αδυναμία θεωρείται πως είτε οφείλεται σε ανεπάρκεια της μνήμης (Αγαλιώτης, 2013) είτε στο γεγονός ότι οι εν λόγω μαθητές δεν έχουν αποκτήσει αποτελεσματικές και ώριμες στρατηγικές μέτρησης, οι οποίες συνεισφέρουν στην απαραίτητη υπολογιστική ευχέρεια (Bryant et al., 2008a). Επιπρόσθετα, δυσκολεύονται σημαντικά με την εκμάθηση και απομνημόνευση των βασικών αριθμητικών δεδομένων, καθώς δεν αναγνωρίζουν τις αριθμητικές σχέσεις και οι γνώσεις τους αποτελούν απομονωμένα γεγονότα (Baroody, 2006). Όταν οι μαθητές ανακαλύπτουν σχέσεις μεταξύ των αριθμών, οι οποίες δημιουργούν ένα δίκτυο αλληλοσυνδεόμενων ιδεών, μπορούν να απομνημονεύουν ευκολότερα και αυτό τους βοηθά να αναπτύξουν την έννοια του αριθμού. Οπότε, οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης δεν μπορούν εύκολα να περάσουν στην αυτόματη ανάκληση αριθμητικών δεδομένων (Baroody, 2006). Από μακρόχρονες έρευνες, φαίνεται πως οι εν λόγω μαθητές κατακτούν πιο απαιτητικούς γνωστικούς στόχους, όπως την εφαρμογή αλγορίθμων και την επίλυση απλών λεκτικών προβλημάτων, ενώ η αδυναμία αυτόματης ανάκλησης αριθμητικών δεδομένων παραμένει. Ταυτόχρονα όμως, η παραπάνω δυσκολία αναστέλλει την ικανότητα των μαθητών να κατακτήσουν περισσότερο σύνθετες αλγεβρικές έννοιες που παρουσιάζονται στη σχολική τάξη (Gersten, Jordan & Flojo, 2005).

Τέλος, *η καλή λειτουργία της οπτικο-χωρικής εργαζόμενης μνήμης*, η οποία εξασφαλίζει την εφαρμογή σωστών βημάτων κατά την επίλυση πράξεων με κρατούμενα ή δανεικά, με αλλαγές κατεύθυνσης στο χώρο (διαίρεση) και τη διάκριση αντικειμένων που μετρήθηκαν από αυτά που πρόκειται να μετρηθούν, αποτελεί προγνωστικό παράγοντα δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2013). Οι αδυναμίες αυτές ελέγχονται μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες με τους μαθητές. Ελλείμματα στη φωνολογική, οπτικο-χωρική και εκτελεστική λειτουργία της εργαζόμενης μνήμης είναι άλλωστε, χαρακτηριστικά των μαθητών με μαθηματικές δυσκολίες (Östergren, 2013).

Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τους προγνωστικούς παράγοντες των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά είναι απαραίτητο να μελετώνται και να αξιολογούνται μέσα από συγκεκριμένες διαδικασίες που ακολουθούνται από ειδικούς (π.χ. ψυχολόγο), τον ειδικό παιδαγωγό και το δάσκαλο της τάξης, ώστε να σκιαγραφείται το προφίλ των μαθητών με μαθηματικές δυσκολίες. Τα ευρήματα αυτά είναι απαραίτητο να αξιοποιούνται για το σχεδιασμό εκπαιδευτικών παρεμβάσεων με στόχο την υποστήριξη των μαθητών. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η διαδικασία αυτή θα πρέπει να είναι μακρόχρονη και να υπάρχει ωφέλιμη ανατροφοδότηση σε κάθε αναπτυξιακό στάδιο των μαθητών.

1.3. Διδασκαλία των μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθητικά

Είναι σαφές, από τη βιβλιογραφία και τις σχετικές έρευνες, πως η διδασκαλία στους μαθητές που εμφανίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά θα πρέπει να ακολουθεί κάποιες βασικές αρχές. Μετά από μία σωστή και έγκυρη διάγνωση των δυσκολιών μάθησης και προκειμένου να δοθεί σε αυτούς η ευκαιρία να συμβαδίσουν με τους συνομήλικους τους, θα πρέπει να εφαρμοστούν τα κατάλληλα προγράμματα διδασκαλίας. Για το σκοπό αυτό, είναι ωφέλιμο να ληφθούν υπόψη οι απαιτήσεις των μαθηματικών ως γνωστικό αντικείμενο, οι ιδιαίτερες ικανότητες των μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά και οι βασικές αρχές της αποτελεσματικής διδασκαλίας (Αγαλιώτης, 2013). Οι Fuchs et al. (2008) περιγράφουν ένα σύστημα παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο περιλαμβάνει τις παρακάτω επτά αρχές: Πρώτη είναι η «*σαφήνεια κατά τη διδασκαλία*». Σύμφωνα με τους συγγραφείς της παραπάνω έρευνας, οι μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες ωφελούνται όταν η διδασκαλία περιλαμβάνει σαφείς, ξεκάθαρες οδηγίες και όχι δραστηριότητες ανακάλυψης, οι οποίες είναι περισσότερο κατάλληλες για τους μαθητές τυπικής ανάπτυξης. Δεύτερη αρχή είναι η *«ελαχιστοποίηση της αρνητικής επίδρασης ελλιπών προϋποτιθέμενων γνώσεων»*. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό, η πρόοδος των μαθητών στα μαθηματικά να μην υπονομεύεται λόγω ελλείψεων σε προηγούμενες γνώσεις και δεξιότητες. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να γνωρίζει καλά ποιες γνώσεις είναι απαραίτητες για την κατάκτηση κάθε στόχου, καθώς και τις προϋπάρχουσες γνώσεις του εκάστοτε μαθητή, ώστε να αποφευχθούν συνεχόμενες αποτυχίες και απογοητεύσεις του τελευταίου (Αγαλιώτης, 2013). Είναι ιδιαίτερα σημαντική η οικοδόμηση της νέας γνώσης πάνω στις προϋπάρχουσες, ώστε να δημιουργούνται σχέσεις με νόημα μεταξύ των μαθηματικών εννοιών (Baroody, 2006; Van de Walle, 2007).

Τρίτη, ιδιαίτερα σημαντική αρχή, είναι η «*έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση»*. Οι γνώσεις και δεξιότητες των μαθηματικών θα πρέπει να βασίζονται σε μία ενιαία εννοιολογική δομή, με στόχο οι μαθητές να κατανοούν πραγματικά τις έννοιες των μαθηματικών και να μην απομνημονεύουν κανόνες χωρίς νόημα γι' αυτούς. Επόμενη αρχή είναι η *συνεχής εξάσκηση (drill and practice)*. Η συνεχής και με ταχύτητα εξάσκηση βοηθά τους μαθητές να αυτοματοποιούν τις ήδη κατακτημένες γνώσεις τους. Η πέμπτη αρχή σχετίζεται με *συχνή, συνδυαστική επανάληψη* και εφαρμογή των μαθηματικών σε διαφορετικά περιβάλλοντα, όπως προβλήματα με καθημερινές καταστάσεις και σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή. Επόμενη αρχή είναι εκείνη της «*παροχής κινήτρων για μάθηση και για αυτορρύθμιση της συμπεριφοράς τους»*. Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες έχουν αντιμετωπίσει πολύ συχνά την αποτυχία στη σχολική τους πορεία, γεγονός που οδηγεί σε αρνητικά συναισθήματα για τα μαθηματικά και στο φόβο της αποτυχίας. Έχοντας ως στόχο την αποτελεσματική διδασκαλία, ένα πρόγραμμα παρέμβασης θα πρέπει να δίνει κίνητρα μάθησης, όπως για παράδειγμα με τη χρήση θετικής ενίσχυσης (βραβεία, αστέρια) και με τη χρήση παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή του μαθητή. Έβδομη είναι η αρχή του *συνεχούς ελέγχου της προόδου του μαθητή και της ανατροφοδότησής του*. Η πρόοδος του μαθητή πρέπει να παρακολουθείται πολύ συχνά, ώστε να διαπιστώνεται αν η εκπαιδευτική παρέμβαση είναι αποτελεσματική και ωφέλιμη για το μαθητή. Έτσι, αν τα αποτελέσματα είναι θετικά, ο τελευταίος κινητοποιείται ώστε να συνεχίσει την προσπάθεια. Αντίθετα, αν τα αποτελέσματα είναι αρνητικά, ο εκπαιδευτικός καλείται να δοκιμάσει νέες προσεγγίσεις για το μαθητή του.

1.4. Εκπαιδευτικές προσεγγίσεις για την υποστήριξη μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά

Σύμφωνα με σύγχρονα ερευνητικά αποτελέσματα, τα τελευταία χρόνια εφαρμόζεται μία πολλά υποσχόμενη προσέγγιση για την προώθηση των μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων, αλλά και για τον περιορισμό των δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά (Dennis, 2015). Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται ‘Responsiveness to Intervention’ (RTI) και έχει δύο βασικούς στόχους. Πρώτον, τον εντοπισμό μαθητών σε κίνδυνο να εμφανίσουν νωρίς δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά και την άμεση υποστήριξή τους σε εκπαιδευτικά προγράμματα παρέμβασης. Δεύτερον, την εντατικότερη υποστήριξη των μαθητών που δεν ανταποκρίνονται στα μαθήματα εκπαιδευτικής παρέμβασης, μέσω εφαρμογής εξατομικευμένων προγραμμάτων σε τμήματα ειδικής αγωγής (Fuchs et al., 2007). Η παραπάνω προσέγγιση κάνει έναν ιδιαίτερα σημαντικό διαχωρισμό. Μέσω της εφαρμογής της, μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις αιτίες χαμηλής επίδοσης στα μαθηματικά, όπως τη φτωχή σε ποιότητα διδασκαλία και την ύπαρξη μαθησιακών δυσκολιών. Επιπρόσθετα, λόγω της θετικής ανταπόκρισης των περισσότερων παιδιών στις εκπαιδευτικές παρεμβάσεις που σχεδιάζονται με ακρίβεια και σύμφωνα με τα πορίσματα της σχετικής βιβλιογραφίας, η προσέγγιση RTI λειτουργεί προλαμβάνοντας και παρεμποδίζοντας τις δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά (Bryant et al., 2008b; Fuchs et al., 2007), γεγονός που αποτελεί ζητούμενο για τους εκπαιδευτικούς της γενικής και ειδικής αγωγής.

Η παραπάνω προσέγγιση έχει εφαρμοστεί εκτενώς πάνω στις αναγνωστικές δυσκολίες, με επιτυχία στον εντοπισμό και την υποστήριξη παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στην ανάγνωση. Όσον αφορά στα μαθηματικά, η σχετική βιβλιογραφία είναι πιο περιορισμένη (Bryant et al., 2008a; Fuchs et al., 2007). Οι παλιότερες έρευνες εστίαζαν κυρίως στην απόκτηση ευχέρειας στον υπολογισμό αριθμητικών δεδομένων και η εκπαιδευτική παρέμβαση στηριζόταν κυρίως στη συνεχή εξάσκηση (*drill and practice*). Επίσης, σε παλαιότερη βιβλιογραφία, τα προγράμματα παρέμβασης εφαρμόζονταν σε μαθητές μεγαλύτερων τάξεων. Αντιθέτως, η σύγχρονη αρθρογραφία παρουσιάζει την παραπάνω εναλλακτική προσέγγιση, RTI, η οποία αφορά την *πρώιμη* εκπαιδευτική παρέμβαση σε μαθητές με κίνδυνο να εμφανίσουν δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, η οποία είναι πιο ολοκληρωμένη και συστηματοποιημένη (Bryant et al., 2008α, 2008b).

Αναλυτικότερα, η προσέγγιση ‘Responsiveness to Intervention’, η οποία είναι γνωστή και ως ‘Multi–Tier System of Supports’ (MTSS), προωθεί αποτελεσματικά εκπαιδευτικά διδακτικά προγράμματα παρέμβασης στη γενική και ειδική εκπαίδευση (Dennis, 2015). Το μοντέλο MTSS περιλαμβάνει κλιμακωτή διδασκαλία και πρώιμη εκπαιδευτική παρέμβαση, η οποία γίνεται πιο εντατική και εξατομικευμένη, όσο ο μαθητής εισέρχεται σε υψηλότερα επίπεδα παρέμβασης. Τα προγράμματα παρέμβασης κλιμακωτής εντατικοποίησης περιγράφονται παρακάτω.

Το λιγότερο εντατικό πρόγραμμα ονομάζεται Tier 1 και πρόκειται για εκείνο που εφαρμόζεται σε ολόκληρη την τάξη, στις αρχές του δημοτικού σχολείου, και περιλαμβάνει κοινή, σαφή διδασκαλία για όλους τους μαθητές. Λίγες, όμως, είναι οι έρευνες που περιλαμβάνουν διδασκαλία σε ολόκληρο τμήμα μαθητών (Bryant et al., 2008a). Οι μαθητές που δεν ανταποκρίνονται στη διδασκαλία που περιλαμβάνει το πρόγραμμα Tier 1 εντοπίζονται και εισάγονται στο πρόγραμμα Tier 2. Αυτό το δεύτερο πρόγραμμα εκπαιδευτικής παρέμβασης περιλαμβάνει συμπληρωματική διδασκαλία και συνεχή παρακολούθηση της προόδου των μαθητών που παρουσιάζουν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά (Bryant et al., 2008a). Αρκετές έρευνες περιλαμβάνουν εκπαιδευτικές παρεμβάσεις προσαρμοσμένες στο πρόγραμμα Tier 2. Χαρακτηριστικά του προγράμματος αυτού είναι οι μικρές, ευέλικτες ομάδες μαθητών, η παροχή συμπληρωματικής διδασκαλίας, η οποία στηρίζεται σε ερευνητικά δεδομένα, και η συχνή παρακολούθηση της προόδου τους (Bryant et al., 2008a; Dennis, 2015). Στη συνέχεια, μαθητές που δεν ανταποκρίνονται ικανοποιητικά ούτε στο δεύτερο πρόγραμμα παρέμβασης εισάγονται στο τελευταίο, τριτοβάθμιο πρόγραμμα του μοντέλου, Tier 3. Το εν λόγω πρόγραμμα είναι το πιο εντατικό, καθώς πραγματοποιείται εξατομικευμένα ή σε πολύ μικρές ομάδες μαθητών και είναι απόλυτα προσαρμοσμένο στις μαθησιακές ανάγκες και ικανότητές τους (Bryant et al., 2008b).

Όσον αφορά στα μοντέλα διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται στα προγράμματα παρεμβάσεων, η σύγχρονη αρθρογραφία προτείνει για το πρόγραμμα Tier 1 τη συνεργασία με τους συμμαθητές μέσω της εργασίας τους σε ζευγάρια ή μικρές ομάδες, τη χρήση εγκεκριμένων προγραμμάτων διδασκαλίας για όλη την τάξη, όπως το πρόγραμμα 'Number Worlds'(1994) στις Η.Π.Α., το οποίο σχεδιάστηκε από την ερευνητική ομάδα της Griffin S.A. (Bryant et al., 2008a). Επίσης, προτείνεται από σχετικές έρευνες, η χρήση κατάλληλων λογισμικών προγραμμάτων για την εκμάθηση αριθμητικών δεδομένων και συνδυασμών (Fuchs et al., 2006), η εφαρμογή της προφορικής εξωτερίκευσης από τους μαθητές για την περιγραφή των γνωστικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν (Bryant et al., 2008a) και η χρήση εικόνων και φυσικών υλικών για την αναπαράσταση των αριθμητικών σχέσεων

(Bryant et al., 2008a). Στα προγράμματα Tier 2 και Tier 3, η διδασκαλία σε μικρές ομάδες μαθητών και η εξατομικευμένη διδασκαλία προσφέρουν έντονη αλληλεπίδραση των μαθητών με τον εκπαιδευτικό, έτσι ώστε οι μαθητές να ανατροφοδοτούνται και να αξιολογούνται πολύ συχνότερα από ο,τι κατά τη διδασκαλία σε ολόκληρη την τάξη (Bryant et al., 2008a). Επιπρόσθετα, η τριτογενής παρέμβαση Tier 3 περιλαμβάνει εντατικά μαθήματα, σε καθημερινή βάση, για την υποστήριξη των μαθητών με έντονες δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά (Dennis, 2015).

Στην παρούσα εργασία, εστιάζουμε στην εφαρμογή εκπαιδευτικού προγράμματος παρέμβασης, το οποίο στηρίζεται στον τύπο Tier 2 και στις αρχές οργάνωσης της διδασκαλίας του παραπάνω σταδίου εκπαιδευτικής παρέμβασης.

1.5 Αρχές σχεδιασμού ενός εκπαιδευτικού προγράμματος παρέμβασης

Τα ερευνητικά ευρήματα από την εφαρμογή του προγράμματος Tier 2 είναι περιορισμένα, καθώς είναι λίγες οι σχετικές έρευνες. Παρά το γεγονός αυτό, η οργάνωση των μαθημάτων της εκπαιδευτικής παρέμβασης Tier 2 διέπεται από αρχές, οι οποίες έχουν γίνει κοινά αποδεκτές από τους ερευνητές του σχετικού πεδίου.

Σύμφωνα με τις ερευνητικές εργασίες των Bryant et al. (2008a, 2008b), η εκπαιδευτική παρέμβαση πρέπει να περιλαμβάνει σαφή και δομημένη διδασκαλία, προκειμένου να έχει ικανοποιητικά θετικά αποτελέσματα, τα οποία θα διατηρούνται στο χρόνο για τους συμμετέχοντες. Κάθε συνάντηση με τους μαθητές πρέπει να είναι δομημένη με συγκεκριμένη *ρουτίνα*, η οποία θα συνδέει τις συναντήσεις αυτές μεταξύ τους. Η δομή των μαθημάτων, σύμφωνα με την παραπάνω ερευνητική εργασία, περιλαμβάνει: *εισαγωγή*, η οποία συνδέει το κάθε μάθημα με τις γνώσεις που κατακτήθηκαν στο προηγούμενο, *παρουσίαση νέας γνώσης – διδασκαλία*, όπου παρουσιάζεται το γνωστικό αντικείμενο κι εφαρμόζεται καθοδηγούμενη εξάσκηση από τους μαθητές, *εξάσκηση* σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές και *πολύ συχνή αξιολόγηση* της πορείας του κάθε παιδιού.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά επιβεβαιώνονται από αντίστοιχες ερευνητικές εργασίες. Σύμφωνα με την Dennis (2015), η διδασκαλία στο πλαίσιο των εκπαιδευτικών παρεμβάσεων πρέπει να περιέχει σαφή και εντατική καθοδήγηση, η οποία θα στηρίζεται σε πορίσματα της ερευνητικής βιβλιογραφίας. Ακόμη, απαιτείται εντατική εξάσκηση των μαθητών και παροχή ευκαιριών για ανατροφοδότηση από τον εκπαιδευτικό. Επιπρόσθετα, στην έρευνα των Dennis, Bryant και Drogan (2015), οι συγγραφείς τονίζουν πως, για όσους μαθητές αγωνίζονται σκληρά να κατακτήσουν τις βασικές μαθηματικές έννοιες και ικανότητες, οι συμπληρωματικές εκπαιδευτικές παρεμβάσεις πρέπει να είναι συστηματικές και να περιλαμβάνουν: πρώτον, διδασκαλία με συγκεκριμένη *ρουτίνα*, δηλαδή την *εισαγωγή της νέας γνώσης*, την *εξάσκηση* με τη χρήση της προφορικής εξωτερίκευσης (verbalization) και την παροχή διορθωτικής *ανατροφοδότησης*. Δεύτερον, είναι σημαντικό να παρέχονται σε αυτούς πολλές ευκαιρίες πρακτικής *εξάσκησης* και, τρίτον, να γίνεται συνεχής χρήση μαθηματικού λεξιλογίου. Τέλος, οι παραπάνω ερευνητές υπογραμμίζουν το γεγονός ότι αυτή η συστηματική εκπαιδευτική παρέμβαση, η οποία περιλαμβάνει συστηματική διδασκαλία, παρέχει στους μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά πλούσια και αποτελεσματική εμπειρία στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο.

1.6. Περιεχόμενο και αποτελέσματα εκπαιδευτικών παρεμβάσεων

Οι πρώιμες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις του προγράμματος Tier 2, όπως αναφέρθηκε, πραγματοποιούνται σε μικρές τάξεις του δημοτικού και το περιεχόμενό τους καθορίζεται βάσει των στόχων που θέτουν οι ερευνητές και του επίσημου αναλυτικού προγράμματος του εκάστοτε εκπαιδευτικού συστήματος για το επίπεδο των συγκεκριμένων τάξεων. Πιο συγκεκριμένα, η σχετική βιβλιογραφία περιλαμβάνει κυρίως εκπαιδευτικές παρεμβάσεις σε μαθητές πρώτης, δευτέρας και τρίτης δημοτικού, όπως είναι για παράδειγμα οι έρευνες των Bryant et al. 2008a και 2008b, των Dennis, Bryant & Drogan, 2015, των Fuchs et al., 2006 και 2010. Φυσικά, εκπαιδευτικές παρεμβάσεις πραγματοποιούνται και σε μεγαλύτερες τάξεις, αλλά σε αυτές τις περιπτώσεις δεν πρόκειται για πρώιμες παρεμβάσεις.

Καθώς τα μαθήματα του προγράμματος Tier 2 χαρακτηρίζονται από τους ερευνητές ως ‘*booster lessons*’, δηλαδή μαθήματα ενίσχυσης των παιδιών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, το περιεχόμενό τους καθορίζεται βάσει των αδυναμιών που εντοπίζονται στους συμμετέχοντες. Οι μαθητές ‘ενισχύονται’ στο πεδίο της έννοιας του αριθμού και στη διαχείριση αριθμών, μέσω συστηματικής διδασκαλίας, σχεδιασμένης με ακρίβεια, η οποία παρέχεται σε μικρές ομάδες μαθητών κατά τη διάρκεια της σχολικής μέρας (Bryant et al., 2008a). Για την υποστήριξη των παραπάνω μαθητών, των μικρών τάξεων του δημοτικού σχολείου, παρατηρείται πως οι γνωστικοί στόχοι που τίθενται είναι, ως ένα βαθμό, κοινοί ανάμεσα στις σχετικές έρευνες, όπως σε αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η ομάδα των Bryant et al. (2008a), για την ενίσχυση 26 μαθητών πρώτης και 25 μαθητών δευτέρας δημοτικού, μέσω του προγράμματος Tier 2, αφού προσδιόρισε τις δυσκολίες τους μέσω στοχευμένων δοκιμασιών, προχώρησε σε εκπαιδευτική παρέμβαση για την υποστήριξή τους. Οι γνωστικοί στόχοι της παρέμβασης, η οποία διήρκησε 18 εβδομάδες, περιελάμβαναν διδασκαλία *αριθμητικών σχέσεων, μετρήσεων και συγκρίσεων, θεσιακής αξίας αριθμών και αριθμητικών συνδυασμών με πρόσθεση και αφαίρεση*. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές διδάχθηκαν έννοιες και δεξιότητες όπως: σχέσεις αριθμών με '1 ή 2 περισσότερο από…' και '1 ή 2 λιγότερο από…', σχέσεις 'μέρους-όλου' αριθμητικών συνόλων, γραφή αριθμών και μέτρηση μπρος και πίσω ανά 2, ανά 5 και ανά 10. Όσον αφορά τη διδασκαλία της θεσιακής αξίας, διδάχθηκαν τις έννοιες και το αντίστοιχο λεξιλόγιο για τις μονάδες, δεκάδες και εκατοντάδες, τη γραφή και τον τρόπο ανάγνωσης έως και τριψήφιων αριθμών στη δευτέρα δημοτικού. Τέλος, διδάχθηκαν βασικά αριθμητικά δεδομένα, καθώς και στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης. Οι στρατηγικές πρόσθεσης περιελάμβαναν εξάσκηση στα βασικά αριθμητικά δεδομένα, στις προσθέσεις 'διδύμων' και 'διδύμων + 1' και στη στρατηγική υπέρβασης της δεκάδας. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας έδειξε πως οι μαθητές της πρώτης δημοτικού που δέχθηκαν την παρέμβαση δεν είχαν σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους. Οι ερευνητές εξηγούν το παραπάνω αποτέλεσμα λέγοντας πως οι γνωστικοί στόχοι για την πρώτη δημοτικού είναι απαιτητικοί και χρειάζεται να δίνεται στους μαθητές περισσότερος χρόνος εκπαιδευτικής παρέμβασης. Αντιθέτως, η παρέμβαση Tier 2 είχε θετικά αποτελέσματα για τη μαθηματική επίδοση των παιδιών δευτέρας δημοτικού που συμμετείχαν στο πρόγραμμα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές είχαν βελτίωση σε δραστηριότητες έννοιας του αριθμού, θεσιακής αξίας και αριθμητικών συνδυασμών. Όμως, η βελτιωμένη αυτή επίδοση των μαθητών της δευτέρας δημοτικού παρέμεινε χαμηλότερη από εκείνη των συμμαθητών τους, γεγονός που δείχνει πως απαιτείται εντατικότερη ενίσχυσή τους, ώστε να μειωθεί αυτή η απόκλιση.

Παρομοίως, σε συνέχεια της παραπάνω εργασίας, στην έρευνα των Bryant et al. (2008b), οι ερευνητές εφάρμοσαν εκπαιδευτική παρέμβαση του ίδιου προγράμματος (Tier 2), η οποία διήρκησε 23 εβδομάδες και περιελάμβανε εικοσάλεπτες συναντήσεις, με στόχο την υποστήριξη 42 μαθητών πρώτης δημοτικού με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Μετά τον προσδιορισμό των δυσκολιών τους, ορίστηκε το περιεχόμενο της παρέμβασης σύμφωνα με το οποίο τα παιδιά διδάχθηκαν έννοιες και δεξιότητες όπως: την *'έννοια του αριθμού'*, *μετρήσεις* μπρος και πίσω, *αναγνώριση και γραφή αριθμών* από το 0 έως το 99, *αριθμητικές σχέσεις* ('1 ή 2 περισσότερο από', '1 ή 2 λιγότερο από'). Ακόμη, διδάχθηκαν τη *θεσιακή αξία* των ψηφίων (μονάδες - δεκάδες), την ανάγνωση και τη γραφή διψήφιων αριθμών και τη χρήση του αντίστοιχου λεξιλογίου. Τέλος, διδάχθηκαν *βασικά αριθμητικά δεδομένα* και *στρατηγικές πρόσθεσης* και *αφαίρεσης*, όπως την ανάκληση των 'δίδυμων ζευγαριών' (π.χ. 1+1, 2+2, κ.ο.κ.) και τον υπολογισμό των 'διδύμων +1', τη μέτρηση προς τα πάνω (πρόσθεση), τη μέτρηση προς τα κάτω (αφαίρεση) και την πρόσθεση ολόκληρης δεκάδας (+10) στον πρώτο προσθετέο. Τα αποτελέσματα ήταν περισσότερο ενθαρρυντικά για τους μαθητές της πρώτης δημοτικού σε αυτήν την έρευνα. Τα αποτελέσματα του post-test ήταν υψηλότερα συγκριτικά με εκείνα του pre-test. Σύμφωνα με την ερευνητική ομάδα, η μεγαλύτερη διάρκεια της εκπαιδευτικής παρέμβασης, ο πιο λεπτομερής σχεδιασμός της και η εμπειρία των εκπαιδευτικών που διεξήγαγαν τα μαθήματα συνέβαλαν στην επιτυχία της παρέμβασης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές είχαν υψηλά αποτελέσματα σε δραστηριότητες έννοιας του αριθμού, πρόσθεσης/αφαίρεσης και σύγκρισης ποσοτήτων, αλλά όχι στις δραστηριότητες θεσιακής αξίας. Μάλιστα, η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε (CSA – Concrete - Semi-concrete - Abstract) στην αναπαράσταση των αριθμητικών σχέσεων ήταν ιδιαίτερα βοηθητική για τους μαθητές με χαμηλότερη επίδοση, οι οποίοι επωφελήθηκαν περισσότερο από τα μαθήματα Tier 2, σύμφωνα με την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Σε συμφωνία με το περιεχόμενο των παραπάνω ερευνών είναι και η έρευνα των Dennis, Bryant και Drogan (2015), η οποία πραγματοποιήθηκε σε 16 μαθητές δευτέρας δημοτικού, μέσω καθημερινών μαθημάτων διάρκειας 30 λεπτών για περίοδο 10 εβδομάδων. Οι στόχοι της συγκεκριμένης έρευνας διαφοροποιούνται σε μικρό βαθμό από τους στόχους των δύο παραπάνω ερευνών, όμως και σε αυτή το περιεχόμενο των μαθημάτων παρέμβασης σχετίζεται με τη διδασκαλία δεξιοτήτων σχετικών με την '*έννοια του αριθμού*', εννοιών *θεσιακής αξίας αριθμών*, ανάκλησης *βασικών αριθμητικών δεδομένων* και στρατηγικών *υπολογισμού διψήφιων προσθέσεων και αφαιρέσεων*. Αναλυτικότερα, οι συμμετέχοντες στα μαθήματα εκπαιδευτικής παρέμβασης διδάχθηκαν στρατηγικές για την ευχέρεια στην ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων, όπως τη μέτρηση προς τα πάνω ή προς τα κάτω και τα δεδομένα των 'δίδυμων ζευγαριών'. Επίσης, διδάχθηκαν σύγκριση και σειροθέτηση έως και τριψήφιων αριθμών, καθώς και τη χρήση σχετικού εποπτικού υλικού (π.χ. αριθμογραμμές), την αξία θέσης των ψηφίων σε διψήφιους και τριψήφιους αριθμούς, το σχηματισμό τριψήφιων αριθμών με τη χρήση σχετικού εποπτικού υλικού (base-10 blocks), τη χρήση του σχετικού λεξιλογίου και συγκρίσεις μεταξύ αριθμών. Τέλος, διδάχθηκαν στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης μέσω επίλυσης προβλημάτων. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν χωρισμένοι σε δύο ομάδες (1 και 2). Η ομάδα 1 αποτελούνταν από μαθητές που φοιτούσαν στο δεύτερο εξάμηνο της Β΄ δημοτικού, ενώ η ομάδα 2 αποτελούνταν από μαθητές του πρώτου εξαμήνου της ίδιας τάξης. Σύμφωνα με την ανάλυση των επιδόσεων των παιδιών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, η ομάδα 1 είχε πολύ θετικά αποτελέσματα, τα οποία διατηρήθηκαν και κατά την περίοδο μετά την παρέμβαση. Η ομάδα 2 παρουσίασε βελτίωση στις επιδόσεις της, αλλά σε μικρότερο βαθμό από την πρώτη. Οι ερευνητές αποδίδουν τη διαφορά αυτή στο γεγονός ότι η ομάδα 1, που ήταν μεγαλύτερη σε ηλικία, είχε διδαχθεί προγενέστερα την ύλη της παρέμβασης και μέσω αυτής μπόρεσε να ενισχύσει και να αποσαφηνίσει τις γνώσεις της κι έτσι να βελτιώσει πολύ τις επιδόσεις της. Οι ερευνητές καταλήγουν πως οι δύο ομάδες ωφελήθηκαν από την παρέμβαση Tier 2 στους γνωστικούς στόχους που σχετίζονται με την απόκτηση ευχέρειας στη γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων, στις αριθμητικές έννοιες και στις έννοιες της θεσιακής αξίας.

Οι ερευνητικές ομάδες των Fuchs et al. (2006 και 2010) εφάρμοσαν εκπαιδευτικές παρεμβάσεις σε μαθητές πρώτης και τρίτης δημοτικού, αντίστοιχα, με στόχο τη διδασκαλία στρατηγικών για τους υπολογισμούς των *αριθμητικών συνδυασμών* (Number Combination-NC). Το περιεχόμενο αυτών των παρεμβάσεων ήταν προσαρμοσμένο στο συγκεκριμένο γνωστικό στόχο. Στην πρώτη έρευνα, 16 μαθητές συμμετείχαν σε πρόγραμμα παρέμβασης για την ενίσχυσή τους στα μαθηματικά, το οποίο στηρίχθηκε στην εφαρμογή δραστηριοτήτων μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή (computer-assisted instruction ─ CAI). Μετά τον προσδιορισμό των δυσκολιών τους, οι μαθητές δέχθηκαν ενίσχυση στο πεδίο της ‘έννοιας του αριθμού’ και στον υπολογισμό αριθμητικών συνδυασμών πρόσθεσης και αφαίρεσης, μέσω χρήσης εποπτικού υλικού (π.χ. αριθμογραμμές) και του σχετικού λογισμικού προγράμματος, με στόχο την απόκτηση ευχέρειας στην ανάκληση ή στον υπολογισμό μονοψήφιων αριθμητικών δεδομένων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας έδειξε πως η μέθοδος CAI είχε θετικά, στατιστικώς σημαντικά αποτελέσματα για τους μαθητές στο πεδίο των αριθμητικών δεδομένων, καθώς τα αριθμητικά δεδομένα κυρίως της πρόσθεσης εγκαταστάθηκαν στη μακρόχρονη μνήμη τους. Όσον αφορά τα δεδομένα αφαίρεσης, η μεταβολή της επίδοσης της ομάδας παρέμβασης δεν ήταν ιδιαίτερα έντονη, διότι οι μαθητές είχαν λιγότερες ευκαιρίες να εργαστούν πάνω σε αυτή κατά τη διάρκεια του προγράμματος.

Στη δεύτερη έρευνα της ομάδας Fuchs et al. (2010), οι μαθητές κατηγοριοποιήθηκαν ως: μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά (n=44) και μαθητές με μαθηματικές και αναγνωστικές δυσκολίες (n=136). Στη συνέχεια χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες για τη διεξαγωγή της έρευνας: 60 μαθητές διδάχθηκαν *στρατηγικές μέτρησης με μεθοδική εξάσκηση*, 61 μαθητές διδάχθηκαν *στρατηγικές μέτρησης χωρίς μεθοδική εξάσκηση* και 59 μαθητές αποτέλεσαν την *ομάδα ελέγχου*. Το περιεχόμενο της παρέμβασης που δέχθηκαν, βάσει των δυσκολιών τους και του σχεδιασμού της έρευνας, ήταν διδασκαλία *στρατηγικών μέτρησης*, *εκμάθηση αλγόριθμων* πρόσθεσης και αφαίρεσης διψήφιων αριθμών και στρατηγικές για *επίλυση λεκτικών προβλημάτων* με την εφαρμογή του λογισμικού προγράμματος Pirate Math. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως η *εξάσκηση* προσφέρει σημαντικά οφέλη στους μαθητές, καθώς οι ομάδες παρέμβασης είχαν καλύτερα αποτελέσματα από την ομάδα ελέγχου. Ταυτόχρονα, η διδασκαλία στρατηγικών μέτρησης με μεθοδική εξάσκηση προσέφερε μεγαλύτερα οφέλη στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες από τη διδασκαλία χωρίς μεθοδική εξάσκηση.

Παρατηρούμε λοιπόν, πως οι μαθητές των μικρών τάξεων του δημοτικού σχολείου, με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, αποτυγχάνουν στην κατάκτηση συγκεκριμένων εννοιών και δεξιοτήτων, οι οποίες πρέπει να αποσαφηνιστούν από τον εκάστοτε εκπαιδευτικό και να αντιμετωπιστούν στα πλαίσια ενός προγράμματος παρέμβασης, προκειμένου οι εν λόγω μαθητές να καλύψουν τη διαφορά με τους συνομηλίκους τους και να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών. Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τους ερευνητές, τα πεδία στα οποία χρειάζονται υποστήριξη οι μαθητές σε κίνδυνο να εμφανίσουν δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά είναι η κατάκτηση της ‘έννοιας του αριθμού’ (συγκρίσεις, αριθμητικές σχέσεις μέρους - όλου), η εκμάθηση στρατηγικών υπολογισμού αριθμητικών συνδυασμών με πρόσθεση και αφαίρεση, η κατανόηση της θεσιακής αξίας, η διαχείριση αριθμών και η επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Βέβαια, το παραπάνω συμπέρασμα διατυπώνεται εν γένει για τους μικρούς μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες, πρώτης έως τρίτης δημοτικού, βάσει ορισμένων από τις σχετικές έρευνες. Κάθε παιδί έχει συγκεκριμένες ανάγκες μαθησιακής υποστήριξης, καθώς οι δυσκολίες του και οι ικανότητές του είναι ξεχωριστές, ατομικές και διαφορετικές από εκείνες των υπολοίπων. Οπότε, κάθε ειδικός που αναλαμβάνει την εκπαιδευτική υποστήριξη μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά οφείλει να τις προσδιορίζει με μεγάλη προσοχή, ώστε το περιεχόμενο της εκάστοτε παρέμβασης να ανταποκρίνεται στις πραγματικές ανάγκες του παιδιού.

1.7. Στρατηγικές διδασκαλίας και η εφαρμογή τους στις εκπαιδευτικές παρεμβάσεις

Όσον αφορά στις στρατηγικές διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή των εκπαιδευτικών παρεμβάσεων, εντοπίζονται κοινές στρατηγικές που περιγράφονται από τους ερευνητές με θετικά αποτελέσματα για τους συμμετέχοντες. Πιο συγκεκριμένα, στις σχετικές έρευνες, εφαρμόζεται ακριβής και συστηματική διδασκαλία, με συνεχή καθοδήγηση και ενεργό εμπλοκή των μαθητών που συμμετέχουν στα μαθήματα της εκπαιδευτικής παρέμβασης (Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Η διδασκαλία πραγματοποιείται με τη χρήση μοντέλων-προτύπων και παραδειγμάτων από τους εκπαιδευτικούς (Άμεση Διδασκαλία). Ακόμη, χρησιμοποιείται η προφορική εξωτερίκευση από τον εκπαιδευτικό, ώστε ο μαθητής να μπορεί να παρακολουθεί τη διαδικασία σε κάθε της στάδιο. Σε κάθε συνάντηση παρουσιάζονται πολλά παραδείγματα και δίνεται συνεχώς η ευκαιρία για εξάσκηση στους μαθητές, οι οποίοι εργάζονται σε ομαδικές ή ατομικές ασκήσεις ενός φύλλου εργασίας, ανάλογα με τους γνωστικούς στόχους που θέτει ο εκπαιδευτικός και το είδος της εκάστοτε δραστηριότητας (Dennis, 2015).

Επιπρόσθετα, οι μαθητές εμπλέκονται με τις μαθηματικές δραστηριότητες σε πραξιακό, εικονιστικό και συμβολικό επίπεδο (Concrete-Representational-Abstract approach ─ CRA), προκειμένου να κατανοήσουν και να κατακτήσουν μαθηματικές έννοιες που τους δυσκολεύουν. Αυτού του είδους η εργασία εφαρμόζεται ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία της θεσιακής αξίας των ψηφίων και των στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης διψήφιων αριθμών με ή χωρίς κρατούμενο, όπου κατά το πραξιακό επίπεδο οι μαθητές χρησιμοποιούν κατάλληλο εποπτικό υλικό (base-10 blocks), κατά το εικονιστικό χρησιμοποιούν ζωγραφιές, εικόνες αντικειμένων και αριθμογραμμές, ενώ κατά το συμβολικό-αφηρημένο επίπεδο μαθαίνουν να διαχειρίζονται τους αριθμούς (Bryant et al., 2008a; Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Το πέρασμα των μαθητών από τα τρία αυτά επίπεδα κρίνεται απαραίτητο από τη σχετική βιβλιογραφία και ο εκπαιδευτικός οφείλει να σέβεται την ακολουθία των τρόπων αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης, προκειμένου οι μαθητές με δυσκολίες να κατακτήσουν μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες. Ο χειρισμός των πραξιακών και εικονιστικών αναπαραστάσεων δε χρειάζεται να είναι μακροχρόνιος, αλλά είναι απαραίτητος, προκειμένου ο μαθητής να αποδώσει νόημα και να ενστερνιστεί τις συμβολικές αναπαραστάσεις (Αγαλιώτης, 2013). Μάλιστα, οι μαθητές δεν πρέπει να πιέζονται να περάσουν στο επόμενο επίπεδο αναπαράστασης, καθώς κάτι τέτοιο οδηγεί σε απομνημόνευση ενεργειών και αύξηση του μνημονικού βάρους το οποίο διαχειρίζονται τα παιδιά με μαθηματικές δυσκολίες. Η αύξηση του μνημονικού βάρους οδηγεί συχνά στην απλούστευση διαδικασιών και στη λανθασμένη εφαρμογή τους (Αγαλιώτης, 2013).

Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με τους ερευνητές των παραπάνω εργασιών, κατά τη διδασκαλία των γνωστικών στόχων που σχετίζονται με τις έννοιες και την κατανόηση της θεσιακής αξίας χρησιμοποιήθηκε εποπτικό υλικό εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων (Base-10 blocks), διδάχθηκε το σχετικό λεξιλόγιο προκειμένου να χρησιμοποιείται από τους μαθητές και εφαρμόστηκε η τεχνική της ανταλλαγής εκατοντάδων-δεκάδων-μονάδων μεταξύ των μαθητών (Bryant et al., 2008a; Dennis, 2015). Επιπρόσθετα, κατά τη διδασκαλία προσθέσεων και αφαιρέσεων με πολυψήφιους αριθμούς χρησιμοποιήθηκε πάλι το εποπτικό υλικό εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων και για την κάθετη πρόσθεση χρησιμοποιήθηκαν καρτέλες τοποθέτησης εκατοντάδων-δεκάδων-μονάδων (place value mats, όπως αναφέρονται στην εργασία της Dennis, 2015).

Συμπερασματικά, οι σχετικές έρευνες παρουσιάζουν κοινές στρατηγικές, μεθόδους και περιεχόμενο που εφαρμόζονται στις εκπαιδευτικές παρεμβάσεις του τύπου Tier 2. Σημαντικό στοιχείο αποτελεί το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών είναι συνήθως θετικά για τους συμμετέχοντες στις παρεμβάσεις αυτές, ανάλογα με τις ειδικές παραμέτρους κάθε έρευνας. Είναι όμως κοινή παραδοχή πως η *πρώιμη* εκπαιδευτική παρέμβαση (Tier 2) αποτελεί μία πολλά υποσχόμενη μέθοδος υποστήριξης για τους μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά (Bryant et al., 2008a).

Η έρευνα της παρούσας εργασίας έχει σαν βασικό στόχο να εξετάσει τα αποτελέσματα μίας εκπαιδευτικής παρέμβασης του τύπου Tier 2 σε μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, η οποία στηρίζεται στις αρχές που περιέγραψαν οι παραπάνω ερευνητικές ομάδες στις σχετικές εργασίες τους. Ο σχεδιασμός, το περιεχόμενο και η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε κατά την εκπαιδευτική παρέμβαση που διεξήχθη βασίστηκαν στις προτάσεις των ερευνητών, στο περιεχόμενο των παραπάνω εργασιών και στα αποτελέσματά τους. Η εκπαιδευτική παρέμβαση εφαρμόστηκε σε μαθητές της Β΄ δημοτικού, καθώς στη συγκεκριμένη βαθμίδα οι παρεμβάσεις φαίνεται να έχουν κυρίως θετικά αποτελέσματα (Bryant et al., 2008a; Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Οι τεχνικές διδασκαλίας που επιλέχθηκαν να εφαρμοστούν ήταν η άμεση διδασκαλία μέσω προτύπων, η καθοδηγούμενη και συνεχής εξάσκηση και η προφορική εξωτερίκευση, όπως προτείνονται από τις σχετικές έρευνες (Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη το περιεχόμενο των παραπάνω παρεμβάσεων και του τρόπου επιλογής των συμμετεχόντων μαθητών, ακολουθήθηκε αντίστοιχη διαδικασία, ώστε να διεξαχθεί η έρευνα όσο το δυνατόν αρτιότερα.

Οι συμμετέχοντες στην εκπαιδευτική παρέμβαση ενεπλάκησαν με γνωστικούς στόχους οι οποίοι αφορούσαν *στρατηγικές πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο* και *έννοιες θεσιακής αξίας*. Τα δύο αυτά γνωστικά πεδία επιλέχθηκαν διότι, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, μπορούν να διδαχθούν με τη βοήθεια σχετικού εποπτικού υλικού και λογισμικών προγραμμάτων και να έχουν θετικά αποτελέσματα για τους μαθητές. Ταυτόχρονα, μέσω της παρούσας έρευνας γίνεται μία προσπάθεια να ελεγχθεί αν όντως υπάρχουν δυσκολίες στην κατανόηση της θεσιακής αξίας από τους μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες (Bryant et al., 2008b), όπως επίσης αν η συστηματική εξάσκηση και η CRA προσέγγιση προσφέρουν θετικά αποτελέσματα στους εν λόγω μαθητές (Bryant et al., 2008a; Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015; Fuchs et al., 2010).

2. Σκοπός και Ερευνητικό Ερώτημα

Με βάση τη σχετική, υπάρχουσα βιβλιογραφία, ο γενικός σκοπός της παρούσας έρευνας εξετάζει την αποτελεσματικότητα ενός προγράμματος εκπαιδευτικής παρέμβασης τύπου Tier 2, η οποία σχεδιάζεται σύμφωνα με τις αρχές που περιέγραψαν οι παραπάνω ερευνητές (Bryant et al., 2008a; Bryant et al., 2008b; Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015; Fuchs et al., 2010) και εφαρμόζεται σε μαθητές της Β΄ δημοτικού με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Ειδικότερα μελετάται η εκμάθηση και η χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο από τους εν λόγω μαθητές.

Συνεπώς, τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας διαμορφώνονται ως εξής:

- Ποια είναι τα αποτελέσματα, σε γνωστικό επίπεδο, μαθητών της Β΄ δημοτικού με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά μετά την εφαρμογή ενός προγράμματος εκπαιδευτικής παρέμβασης, το οποίο σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε βάσει των αρχών του προγράμματος Tier 2 και στοχεύει στην εκμάθηση στρατηγικών πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο;
- Μπορεί η επίδοση των μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά να βελτιωθεί στο πεδίο των στρατηγικών πρόσθεσης και στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των

ψηφίων με τη βοήθεια κατάλληλου, σχετικού εποπτικού υλικού και λογισμικού προγράμματος;

2.1. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα είναι 23 μαθητές της Β΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Κοζάνης. Οι παραπάνω μαθητές συμμετείχαν στην έρευνα μετά από γραπτή συναίνεση των γονέων τους, οι οποίοι συμπλήρωσαν και υπέγραψαν σχετική υπεύθυνη δήλωση (βλ. παράρτημα). Οι συμμετέχοντες στα μαθήματα εκπαιδευτικής παρέμβασης επιλέχθηκαν από το παραπάνω σύνολο μαθητών μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.

2.2. Σχεδιασμός έρευνας

Για τη διεξαγωγή της έρευνας χορηγήθηκε σχετική άδεια από τον Περιφερειακό Διευθυντή Εκπαίδευσης Δυτικής Μακεδονίας (βλ. παράρτημα). Στη συνέχεια, με τη σύμφωνη γνώμη του Διευθυντή του δημοτικού σχολείου και των εκπαιδευτικών των τμημάτων της Β΄ τάξης, πραγματοποιήθηκε ενημέρωση των γονέων των μαθητών. Μετά από δική τους έγκριση, χορηγήθηκε στους 23 μαθητές της Β΄ δημοτικού το Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης και το Pre-test, προκειμένου να διαμορφωθεί η εικόνα των γνωστικών ικανοτήτων κάθε συμμετέχοντα. Η παραπάνω διαδικασία οδήγησε στην επιλογή 5 μαθητών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, οι οποίοι συμμετείχαν στα μαθήματα εκπαιδευτικής παρέμβασης τύπου Tier 2. Μετά το πέρας των μαθημάτων χορηγήθηκε στους 5 μαθητές Post-test, αντίστοιχο του Pre-test, το οποίο αναλύθηκε προκειμένου να εκτιμήσουμε τα αποτελέσματα της παρέμβασης.

2.3. Διαδικασία διεξαγωγής έρευνας

2.3.1. Επιλογή μαθητών για συμμετοχή στην εκπαιδευτική παρέμβαση

Έχοντας σαν στόχο να εντοπίσουμε τους μαθητές Β΄ τάξης του συγκεκριμένου δημοτικού σχολείου οι οποίοι παρουσιάζουν δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, εφαρμόστηκε μία διαδικασία μέσω της οποίας μπορέσαμε με ασφάλεια να επιλέξουμε τους μαθητές που είχαν ανάγκη εκπαιδευτικής παρέμβασης στα μαθηματικά. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μαθηματικές γνώσεις είναι αλληλοσυνδεόμενες και απαραίτητο στοιχείο για την κατάκτησή τους είναι η δημιουργία ενιαίων εννοιολογικών δομών (Αγαλιώτης, 2013; Van de Walle, 2007). Οπότε, για την κατάκτηση της πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο πρέπει οι μαθητές να έχουν κατακτήσει σε πολύ καλό επίπεδο προηγούμενες γνώσεις. Οι γνώσεις αυτές περιλαμβάνουν βασικές έννοιες και δεξιότητες, όπως η έννοια του αριθμού, η αρίθμηση (δομημένη και μη), η έννοια της θεσιακής αξίας. Ακόμη, χρειάζεται να αναγνωρίζουν και να γράφουν σωστά το σύμβολο της πράξης της πρόσθεσης, καθώς και να κατανοούν το νόημά της. Επιπρόσθετα, χρειάζεται να ανακαλούν από τη μνήμη βασικά αριθμητικά δεδομένα, να γνωρίζουν στρατηγικές για τον υπολογισμό αριθμητικών συνδυασμών και να είναι σε θέση να ανακαλούν και να ακολουθούν τα απαραίτητα βήματα για την επίλυση αριθμητικών πράξεων, όπως για παράδειγμα στη στρατηγική αποδόμησης του προσθετέου.

Με σκοπό τον εντοπισμό των μαθητών της Β΄ δημοτικού με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, εφαρμόσαμε αρχικά το Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης. Το συγκεκριμένο σταθμισμένο κριτήριο μας έδωσε τη δυνατότητα εκτίμησης του επιπέδου πρώιμης μαθηματικής επάρκειας κάθε παιδιού. Κατόπιν χορηγήσαμε στους μαθητές φύλλο εργασίας (Pre-test) με ασκήσεις πρόσθεσης και θεσιακής αξίας για εκτίμηση των προϋπαρχουσών γνώσεών τους σε αυτούς τους γνωστικούς στόχους.

2.3.2. Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας (Π.Μ.Ε.) της Ουτρέχτης

Όπως αναφέρθηκε, στους μαθητές της έρευνας χορηγήθηκε το Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης, το οποίο έχει σαν στόχο την εκτίμηση της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας παιδιών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας. Πιο αναλυτικά, το κριτήριο χορηγείται σε παιδιά από 4 ετών και 6 μηνών έως 7 ετών και 5 μηνών, σχεδιάστηκε στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης από ομάδα επιστημόνων του Τμήματος Ειδικής Αγωγής και σταθμίστηκε στην Ολλανδία το 1993. Η αξιοπιστία και η εγκυρότητά του ελέγχθηκαν σε ευρωπαϊκές χώρες την περίοδο 1997 – 1999, ενώ το 2008 πραγματοποιήθηκε η στάθμιση του κριτηρίου στην Ελλάδα στο πλαίσιο του έργου ΕΠΕΑΕΚ «Ψυχομετρική – Διαφορικά Αξιολόγηση Παιδιών και Εφήβων με Μαθησιακές Δυσκολίες».

Η *πρώιμη μαθηματική επάρκεια*, βάσει του εγχειριδίου του κριτηρίου, αναφέρεται στο σύνολο των γνώσεων και των δεξιοτήτων που αποτελούν προϋπόθεση για να εισαχθεί αποτελεσματικά ένα παιδί προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας στα σχολικά μαθηματικά της τυπικής εκπαίδευσης. Αυτές οι γνώσεις και δεξιότητες αφορούν κυρίως την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, η οποία αποτελεί βασικό τομέα των σχολικών μαθηματικών στις πρώτες τάξεις της τυπικής εκπαίδευσης και καλλιεργείται μέσω της επεξεργασίας αριθμητικών εννοιών και σχέσεων.

Στα ευρήματα για τις φάσεις ανάπτυξης της δεξιότητας της καταμέτρησης, αλλά και στις ικανότητες οι οποίες κατά τον Piaget βρίσκονται στον πυρήνα της διαμόρφωσης της έννοιας του αριθμού, στηρίζεται το Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης. Έτσι, το παρόν κριτήριο διαμορφώθηκε ώστε να περιλαμβάνει τις παρακάτω ενότητες: Σύγκριση, Ταξινόμηση, Αντιστοίχιση, Σειριοθέτηση, Χρήση Λέξεων Αρίθμησης, Δομημένη καταμέτρηση, Αποτελεσματική καταμέτρηση, Γενική γνώση αριθμών.

Αναλυτικότερα, τα έργα – δραστηριότητες στα οποία καλείται να απαντήσει κάθε μαθητής ανήκουν στις παραπάνω οκτώ κατηγορίες και κάθε μία από αυτές περιλαμβάνει από πέντε έργα:

- ***Σύγκριση:*** Περιλαμβάνει σύγκριση αντικειμένων στα ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά τους. Εκτιμάται ο βαθμός στον οποίο τα παιδιά έχουν κατακτήσει έννοιες όπως: πιο χαμηλά, πιο ψηλά, λιγότερα, περισσότερα.
- ***Ταξινόμηση:*** Περιλαμβάνει ταξινόμηση αντικειμένων με βάση ένα ή δύο κριτήρια. Εκτιμάται η ικανότητά τους να διακρίνουν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε αντικείμενα και να τα ταξινομούν.
- ***Αντιστοίχηση:*** Περιλαμβάνει τη σύγκριση ποσοτήτων με χρήση της «ένα-προς-ένα» αντιστοίχησης. Εκτιμάται η ικανότητά τους να συσχετίζουν στοιχεία συνόλων και να τα συγκρίνουν χρησιμοποιώντας το σωστό τρόπο αντιστοίχισης.
- ***Σειριοθέτηση:*** Περιλαμβάνει σειριοθέτηση αντικειμένων βάσει ορισμένων κριτηρίων. Στα έργα αυτά εκτιμάται η ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν αν τα αντικείμενα είναι σε σωστή σειρά και αν είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τη σειριακή αντιστοίχιση ανάμεσα σε δύο σύνολα.

- ***Χρήση λέξεων αρίθμησης:*** Περιλαμβάνει καταμέτρηση κανονική, αντίστροφη και από ένα σημείο και μετά. Ακόμη, περιλαμβάνει τη χρήση απόλυτων και τακτικών αριθμητικών λέξεων. Έτσι, εκτιμάται η ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν απόλυτους και τακτικούς αριθμούς ως το είκοσι.
- ***Δομημένη καταμέτρηση:*** Περιλαμβάνει καταμέτρηση υλικών (κυβάκια). Εκτιμάται η ικανότητα των παιδιών να μετρούν μη συνεχείς ποσότητες με συγχρονισμένο και δομημένο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, εκτιμάται αν τα παιδιά οργανώνουν το υλικό τους για να κάνουν την καταμέτρηση και αν αναγνωρίζουν συγκεκριμένες αριθμητικές δομές, όπως τις εικόνες των κουκίδων του ζαριού.
- ***Αποτελεσματική καταμέτρηση:*** Περιλαμβάνει καταμέτρηση δομημένων και μη-δομημένων αντικειμένων. Εκτιμάται να τα παιδιά έχουν δημιουργήσει νοερές αριθμητικές δομές και στρατηγικές που τους επιτρέπουν να καταμετρήσουν ποσότητες, οι οποίες δίνονται με τη μορφή δομημένων ή μη- δομημένων συνόλων.
- ***Γενική γνώση αριθμών:*** Περιλαμβάνει απλές εφαρμογές αριθμητικών προβλημάτων κι εκτιμάται ο βαθμός στον οποίο τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμούς μέχρι το είκοσι σε καθημερινές καταστάσεις.

Τα έργα του κριτηρίου περιλαμβάνουν εικόνες, πάνω στις οποίες ο μαθητής καλείται να δείξει τις απαντήσεις. Κάποια έργα παρουσιάζονται με τη μορφή ερωτήσεων, σε άλλα οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν κάποιο υλικό και σε ορισμένα οι μαθητές σχεδιάζουν τις απαντήσεις σε φύλλα εργασίας.

2.3.3. Χορήγηση του Κριτηρίου Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Π.Μ.Ε.)

Το κριτήριο χορηγήθηκε στους 23 μαθητές της Β΄ δημοτικού. Οι οδηγίες εφαρμογής του ακολουθήθηκαν με ακρίβεια και προσοχή, προκειμένου τα αποτελέσματα εκτίμησης του επιπέδου πρώιμης μαθηματικής επάρκειας κάθε μαθητή να είναι έγκυρα.

Η εξέταση κάθε παιδιού πραγματοποιήθηκε εξατομικευμένα, σε μικρή αίθουσα του δημοτικού σχολείου, με ησυχία και χωρίς πολλά ερεθίσματα, ώστε να μην αποσπάται η προσοχή των παιδιών. Σε κάθε μαθητή χορηγήθηκαν τα απαιτούμενα υλικά, βάσει των οδηγιών του κριτηρίου, τα φύλλα εργασίας και τα 20 κυβάκια. Κάθε παιδί είχε από ένα μολύβι και μία γόμα. Τα στοιχεία και οι απαντήσεις των παιδιών σημειώνονταν στο φυλλάδιο του εξεταστή. Επιπρόσθετα, οι ηλικίες των μαθητών υπολογίστηκαν με ακρίβεια, σύμφωνα με τις οδηγίες του κριτηρίου, ώστε να διαπιστωθεί σε ποια ηλικιακή ομάδα ανήκε κάθε μαθητής και να υπολογιστεί το επίπεδο μαθηματικής επάρκειας.

Οι μαθητές της Β΄ δημοτικού ανήκαν στις ηλικιακές ομάδες VI (6,06 ετών – 6,11 ετών) και VII (7 ετών - 7,05 ετών). Τα επίπεδα πρώιμης μαθηματικής επάρκειας, σύμφωνα με τη στάθμιση του συγκεκριμένου κριτηρίου, είναι: Επίπεδο Α (καλό έως πολύ καλό), Επίπεδο Β (αρκετά καλό έως καλό), Επίπεδο Γ (μέτριο έως αρκετά καλό), Επίπεδο Δ (αδύναμο έως μέτριο) και Επίπεδο Ε (πολύ αδύναμο έως αδύναμο).

Μετά τη χορήγηση του κριτηρίου, τα αποτελέσματα στα επίπεδα πρώιμης μαθηματικής επάρκειας ανάλογα με το φύλο του κάθε μαθητή ήταν τα παρακάτω:

ΦΥΛΟ * ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ Crosstabulation

			ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ				Total
			Β	**Γ**	**Δ**	**Ε**	
ΦΥΛΟ	**ΑΓΟΡΙ**	Count	4	7	3	2	16
		% within ΦΥΛΟ	25,0%	43,8%	18,8%	12,5%	100,0%
	ΚΟΡΙΤΣΙ	Count	3	2	2	0	7
		% within ΦΥΛΟ	42,9%	28,6%	28,6%	0,0%	100,0%
Total		Count	7	9	5	2	23
		% within ΦΥΛΟ	30,4%	39,1%	21,7%	8,7%	100,0%

Πίνακας 1: Αποτελέσματα Κριτηρίου Π.Μ.Ε. συγκριτικά με το φύλο των μαθητών

Παρατηρούμε λοιπόν πως, τα περισσότερα αγόρια ανήκαν στο επίπεδο επάρκειας Γ (7 μαθητές), λιγότερα ήταν στο επίπεδο Β (4 μαθητές), ακόμα λιγότερα ήταν στο επίπεδο Δ (3 μαθητές) και 2 μαθητές βρέθηκαν στο επίπεδο Ε. Όσον αφορά στα κορίτσια, τα περισσότερα ανήκαν στο επίπεδο Β (3 μαθήτριες), ενώ στα επίπεδα Γ και Δ ήταν από 2 μαθήτριες.

Τα αποτελέσματα στα επίπεδα πρώιμης μαθηματικής επάρκειας ανάλογα με την ηλικιακή ομάδα κάθε μαθητή ήταν:

ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ * ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ Crosstabulation

			ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ				Total
			Β	Γ	Δ	Ε	
ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ	VI	Count	1	1	0	0	2
		% within ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ	50,0%	50,0%	0,0%	0,0%	100,0%

	VII	Count	6	8	5	2	21
		% within ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ	28,6%	38,1%	23,8%	9,5%	100,0%
Total		Count	7	9	5	2	23
		% within ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ	30,4%	39,1%	21,7%	8,7%	100,0%

Πίνακας 2: Αποτελέσματα Κριτηρίου Π.Μ.Ε. συγκριτικά με την ηλικιακή ομάδα των μαθητών

Βάσει των ηλικιακών ομάδων, τα 2 παιδιά της μικρής ηλικιακής ομάδας (VI) μοιράζονται στα επίπεδα Β και Γ εξίσου. Τα υπόλοιπα 21 παιδιά της μεγάλης ηλικιακής ομάδας (VII) ήταν μοιρασμένα ως εξής: 8 παιδιά βρέθηκαν στο επίπεδο Γ, 6 παιδιά ήταν στο επίπεδο Β, 5 παιδιά στο επίπεδο Δ και 2 παιδιά στο επίπεδο Ε.

Οι μαθητές των Επιπέδων Β και Γ είχαν πολύ καλές επιδόσεις στους τομείς σύγκρισης αντικειμένων, ταξινόμησης, αντιστοίχισης, σειριοθέτησης και καταμέτρησης. Ορισμένοι από αυτούς δυσκολεύτηκαν στη χρήση λέξεων αρίθμησης (τακτικά αριθμητικά) και στην αποτελεσματική καταμέτρηση. Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε στις ανάγκες των μαθητών των Επιπέδων Δ και Ε, καθώς οι βαθμολογίες τους, βάσει της στάθμισης του κριτηρίου, κυμαίνονται για το Επίπεδο Δ κάτω από το ανώτερο 75% και πάνω από το κατώτερο 10% των βαθμών επάρκειας, ενώ για το Επίπεδο Ε βρίσκονται κάτω από το κατώτερο 10% των βαθμών επάρκειας. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δυσκολεύτηκαν κυρίως στις ενότητες δομημένη και αποτελεσματική καταμέτρηση, χρήση λέξεων αρίθμησης και λιγότερο στη σειριοθέτηση. Οι σημαντικές δυσκολίες στην καταμέτρηση δείχνουν πως οι μαθητές δεν μπορούν να διακρίνουν και να απομνημονεύσουν αριθμητικές δομές ή να οργανώσουν αποτελεσματικά το υλικό τους ώστε να το καταμετρήσουν.

2.3.4. Χορήγηση Pre- test και επιλογή συμμετεχόντων

Στη συνέχεια, δόθηκε στα παιδιά να συμπληρώσουν φύλλο εργασίας (pre-test) με ασκήσεις πρόσθεσης και θεσιακής αξίας (βλ. Παράρτημα), ώστε να διαπιστωθεί το επίπεδο των γνώσεών τους σε συγκεκριμένους γνωστικούς στόχους και να επιλεχθούν οι μαθητές που θα συμμετείχαν στην εκπαιδευτική παρέμβαση πάνω στην πρόσθεση των διψήφιων αριθμών. Η επιλογή ασκήσεων βασίστηκε εν μέρει στο Number Sets Test (Geary et al., 2009) και στο Dowker's (1998) test (Dowker, 2009). Επίσης, οι ασκήσεις διαμορφώθηκαν σύμφωνα με τους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος του ΥΠ.Π.Ε.Θ. για τα μαθηματικά της Β΄ δημοτικού και το αντίστοιχο σχολικό βιβλίο.

Το Number Sets Test (2009) σχεδιάστηκε με στόχο την εκτίμηση της ακρίβειας των παιδιών να διαχειρίζονται και να επεξεργάζονται αριθμητικές ποσότητες. Μέσα από τις δραστηριότητές του προβλέπεται αν ένας μαθητής βρίσκεται σε κίνδυνο (at risk) να παρουσιάσει δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά ή αν θα έχει επιτυχία στο συγκεκριμένο γνωστικό τομέα. Το τεστ επικεντρώνεται στην εκτίμηση κατάκτησης της έννοιας του αριθμού από κάθε παιδί, της δυνατότητας επίλυσης αριθμητικών και λεκτικών προβλημάτων, καθώς και των στρατηγικών μέτρησης που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Το Dowker's test (1998) περιέχει δραστηριότητες με τις οποίες αξιολογείται η χρήση αριθμητικών αρχών και στρατηγικών για τον υπολογισμό αριθμητικών δεδομένων. Οι δραστηριότητες περιλαμβάνουν αριθμητικά δεδομένα μέσα στη δεκάδα, αριθμητικά δεδομένα μέχρι το 25 και πράξεις διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενα και δανεικά.

Στο pre-test που δόθηκε, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ασκήσεις των παρακάτω ομάδων: *12 προσθέσεις μονοψήφιων αριθμών* (π.χ. 4+3=_), *4 προσθέσεις διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό* (π.χ. 55+8=_), *5 προσθέσεις διψήφιων αριθμών* (π.χ. 34+_=44) και *4 προσθέσεις με χρήση προσεταιριστικής ιδιότητας* (π.χ. 10+4+20=_). Στις παραπάνω ασκήσεις τα παιδιά χρειάστηκε να υπολογίσουν: αθροίσματα ή τον β΄ προσθετέο σε βασικά αριθμητικά δεδομένα, αθροίσματα ή τον β΄ προσθετέο με χρήση της στρατηγικής της υπέρβασης της δεκάδας και αθροίσματα με τη χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας (προσθέτω τις δεκάδες και στο τέλος τις μονάδες). Στη συνέχεια, για την εκτίμηση των γνώσεών τους στη θεσιακή αξία οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στις παρακάτω ασκήσεις: *καταμέτρηση μονάδων-δεκάδων, σύνθεση διψήφιων αριθμών, απεικόνιση μονάδων και δεκάδων και ποσοτική σχέση μεταξύ αυτών*.

Ο σχεδιασμός του φύλλου εργασίας (pre-test) έγινε με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις τις οποίες θα πρέπει να έχει ένας μαθητής, ώστε να δομήσει πάνω σε αυτές τη νέα γνώση για την πρόσθεση των διψήφιων αριθμών (Αγαλιώτης, 2013). Η γνώση της αξίας της δεκάδας, της σχέσης της με τη μονάδα και η πρόσθεση δεκάδων είναι σημαντικό να κατακτηθούν, πριν την εισαγωγή των μαθητών στην πρόσθεση των διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο (Fuson, 1990). Επιπρόσθετα, η γνώση ώριμων στρατηγικών εύρεσης αριθμητικών συνδυασμών (αυτόματη ανάκληση από τη μνήμη, μέτρηση προς τα πάνω ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο), καθώς και η γνώση της στρατηγικής υπέρβασης της δεκάδας (αποδόμηση προσθετέου) είναι πολύ χρήσιμες στους μαθητές κατά την εκμάθηση της πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο, καθώς βελτιώνουν τις υπολογιστικές ικανότητές τους (Dowker, 2009). Είναι σημαντικό, όμως, το γεγονός ότι τέτοιες στρατηγικές στους υπολογισμούς χρησιμοποιούνται κυρίως από μαθητές τυπικής ανάπτυξης και όχι σε μεγάλο βαθμό από τα παιδιά με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά (Dowker, 2009). Για το λόγο αυτό, η παρούσα έρευνα εστιάζει στην εκμάθηση και χρήση στρατηγικών υπολογισμού από μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά, με απώτερο στόχο οι τελευταίοι να βελτιωθούν στην πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο.

Οι σωστές απαντήσεις των μαθητών στο pre-test φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ			ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΓΝΩΣΤΙΚΟΥΣ ΣΤΟΧΟΥΣ									
Α/Α	**ΦΥΛΟ**	**ΕΠΙΠΕΔΟ Π.Μ.Ε**	**Β.Α.Δ**	**Πρόσθεση διψήφιου με μονοψήφιο αρ.**	**Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος**	**Πρόσθ. με πολλαπλάσια του 10**	**Καταμέτρηση Δεκάδων – Μονάδων**	**Ποσοτική σχέση Δ-Μ**	**Σύνθεση Διψήφιων**	**Απεικόνιση Δ-Μ**	**ΣΥΝΟΛΟ ΒΑΘΜΩΝ**
1	Α	Γ	9/9	3/3	8/9	4/4	6/6	2/3	6/6	10/10	48/50
2	Κ	Γ	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	Α	Γ	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	1/3	6/6	10/10	45/50
4	Α	Γ	9/9	3/3	9/9	4/4	6/6	3/3	6/6	10/10	50/50
5	**Α**	**Δ**	**9/9**	**3/3**	**4/9**	**4/4**	**5/6**	**0/3**	**0/6**	**5/10**	**30/50**
6	Α	Β	9/9	3/3	7/9	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	45/50
7	Κ	Β	9/9	3/3	5/9	3/4	6/6	1/3	3/6	10/10	40/50
8	Α	Δ	9/9	3/3	9/9	4/4	6/6	1/3	6/6	10/10	48/50
9	Α	Γ	9/9	2/3	9/9	4/4	6/6	0/3	5/6	10/10	45/50
10	Α	Β	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	0/3	3/6	10/10	41/50
11	Κ	Β	9/9	3/3	6/9	3/4	5/6	0/3	6/6	10/10	42/50
12	**Α**	**Δ**	**9/9**	**2/3**	**4/9**	**4/4**	**3/6**	**0/3**	**4/6**	**5/10**	**31/50**
13	Α	Β	9/9	3/3	8/9	4/4	6/6	2/3	3/6	10/10	45/50
14	Κ	Β	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	44/50
15	Κ	Δ	9/9	2/3	5/6	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	43/50
16	Α	Β	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	44/50

17	Α	Γ	9/9	2/3	4/9	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	41/50
18	Α	Γ	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	1/3	3/6	10/10	42/50
19	Α	Γ	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	44/50
20	Κ	Γ	9/9	3/3	6/9	4/4	6/6	0/3	6/6	10/10	44/50
21	**Κ**	**Δ**	**8/9**	**3/3**	**3/9**	**0/4**	**0/6**	**0/3**	**1/6**	**10/10**	**24/50**
22	**Α**	**Ε**	**2/9**	**0/3**	**0/9**	**0/4**	**4/6**	**0/3**	**0/6**	**0/10**	**6/50**
23	**Α**	**Ε**	**8/9**	**0/3**	**4/9**	**1/4**	**6/6**	**0/3**	**3/6**	**0/10**	**22/50**

Πίνακας 3: Η βαθμολογική επίδοση των μαθητών στο pre-test. (Α= Αγόρι, Κ= Κορίτσι)

Παρατηρούμε πως οι μαθητές των επιπέδων Β και Γ του κριτηρίου Π.Μ.Ε. πήγαν αρκετά καλά στις ασκήσεις αναγνώρισης της θεσιακής αξίας, αλλά οι περισσότεροι δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις για την ποσοτική σχέση μεταξύ μονάδων-δεκάδων, π.χ.: *«Με πόσες μονάδες μπορώ να ανταλλάξω 50 μονάδες; Με πόσες μονάδες μπορώ να ανταλλάξω 3 δεκάδες;»*. Επιπρόσθετα, οι παραπάνω μαθητές πήγαν πολύ καλά στις ασκήσεις πρόσθεσης, όμως κάποιοι από αυτούς δυσκολεύτηκαν στις περιπτώσεις όπου έπρεπε να βρεθεί το συμπλήρωμα του αθροίσματος. Οι περισσότεροι μαθητές των επιπέδων Δ και Ε σημείωσαν χαμηλότερες επιδόσεις στις ασκήσεις αναγνώρισης της θεσιακής αξίας και στις ερωτήσεις για τη σχέση μεταξύ δεκάδων-μονάδων. Επιπρόσθετα, δυσκολεύτηκαν στις προσθέσεις όπου έπρεπε να υπολογίσουν το συμπλήρωμα του αθροίσματος, στη χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας (πρόσθεση των πολλαπλάσιων του 10), ενώ ένας από τους μαθητές δεν μπόρεσε να απαντήσει στις ασκήσεις βασικών αριθμητικών δεδομένων. Τέλος, από την παρατήρηση των μαθητών κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης των ασκήσεων, οι μαθητές των επιπέδων Δ και Ε άργησαν περισσότερο να ολοκληρώσουν τις ασκήσεις και χρησιμοποιούσαν κυρίως τα δάχτυλά τους για να υπολογίσουν τις προσθέσεις. Αντιθέτως, δύο μαθητές του επιπέδου Δ είχαν πολύ καλές επιδόσεις σε όλες τις ασκήσεις του pre-test, ενώ μία μαθήτρια ήταν απούσα και δε συμπλήρωσε το pre-test.

Με τη χορήγηση του κριτηρίου Π.Μ.Ε. εκτιμήθηκε η κατάκτηση της έννοιας του αριθμού από τους μαθητές και οι δεξιότητές τους στην καταμέτρηση. Στη συνέχεια, με τη συμπλήρωση του pre-test, φάνηκαν οι γνώσεις τους σχετικά με τους αριθμητικούς συνδυασμούς, τις στρατηγικές πρόσθεσης και τη θεσιακή αξία. Μελετώντας συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κριτηρίου Π.Μ.Ε. για κάθε μαθητή, καθώς και την επίδοση τους στις ασκήσεις του pre-test σχηματίστηκε ένα αρκετά ολοκληρωμένο γνωστικό προφίλ για κάθε συμμετέχοντα της έρευνας. Έτσι, επιλέχθηκαν 3 μαθητές από το Επίπεδο Δ και 2 μαθητές από το Επίπεδο Ε για να συμμετάσχουν στην εκπαιδευτική παρέμβαση με στόχο την εκμάθηση στρατηγικών για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο.

2.3.5. Περιγραφή των γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών που επιλέχθηκαν

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι μαθητές που επιλέχθηκαν για να παρακολουθήσουν την εκπαιδευτική παρέμβαση ανήκαν στα επίπεδα Δ και Ε του Κριτηρίου Π.Μ.Ε.. Επιπρόσθετα, οι επιδόσεις τους στις ασκήσεις πρόσθεσης και θεσιακής αξίας ήταν αρκετά χαμηλές, συγκριτικά με τους συμμαθητές τους και το απαιτούμενο επίπεδο της τάξης. Φυσικά, η εκτίμηση αυτή αφορά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και δεν αποκλείεται κάποιοι από αυτούς να καταφέρουν να καλύψουν την απόσταση με τους συμμαθητές τους κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους. Με στόχο την εκπαιδευτική υποστήριξη των παραπάνω μαθητών, οι τελευταίοι επιλέχθηκαν για το πρόγραμμα εκπαιδευτικής παρέμβασης στα πλαίσια της παρούσας έρευνας. Παρακάτω γίνεται η περιγραφή των γνωστικών ικανοτήτων τους, σύμφωνα με την αξιολόγηση που πραγματοποιήθηκε.

Οι μαθητές του Επιπέδου Δ είναι ο Μαθητής 1 (Α/Α: 5), ο Μαθητής 2 (Α/Α: 12) και η Μαθήτρια 1 (Α/Α: 21). Όλοι τους ανήκουν στη μεγάλη ηλικιακή ομάδα (7.00-7.05), σύμφωνα με το κριτήριο Π.Μ.Ε.. Τα δύο αγόρια έχουν καταγωγή από την Αλβανία, όμως γεννήθηκαν και μεγάλωσαν στην Ελλάδα. Σύμφωνα με πληροφορίες από τη δασκάλα της τάξης, οι δύο μαθητές είναι δίγλωσσοι, δηλαδή μιλούν αλβανικά και ελληνικά. Η Μαθήτρια 1 είναι Ελληνίδα. Παρακάτω φαίνονται οι επιδόσεις των τριών μαθητών στο κριτήριο Π.Μ.Ε.:

ΜΑ-ΘΗ-ΤΗΣ	*ΗΛΙΚ. ΟΜΑ-ΔΑ*	*ΕΠΙ-ΠΕΔΟ*	*ΣΥΓΚΡΙ-ΣΗ*	*ΤΑΞΙΝΟ ΜΗΣΗ*	*ΑΝΤΙ-ΣΤΟΙΧΙΣΗ*	*ΣΕΙΡΙΟΘΕ-ΤΗΣΗ*	*ΧΡ. ΛΕΞΕ-ΩΝ ΑΡΙΘΜ.*	*ΔΟΜΗ-ΣΗ ΑΡΙΘΜ.*	*ΑΠΟΤ. ΚΑΤΑΜΕ-ΤΡΗΣΗ*	*ΓΕΝ. ΓΝΩΣΗ ΑΡΙΘ.*
Μ.1	VII	Δ	5/5	5/5	4/5	4/5	3/5	3/5	3/5	4/5
Μ.2	VII	Δ	5/5	4/5	5/5	2/5	5/5	4/5	3/5	4/5
Μ/ ρια1	VII	Δ	5/5	3/5	4/5	4/5	4/5	4/5	3/5	4/5

Πίνακας 4: Βαθμολογίες των τριών μαθητών (Επίπεδο Δ) στο Κριτήριο Π.Μ.Ε.

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα οι τρείς μαθητές πήγαν πολύ καλά στα έργα σύγκρισης αντικειμένων, ταξινόμησης, αντιστοίχησης, σειριοθέτησης (μόνο ο Μαθητής 1 και η Μαθήτρια 1) και γενικής γνώσης αριθμών, όμως δυσκολεύτηκαν στα έργα αποτελεσματικής καταμέτρησης και στη χρήση λέξεων αρίθμησης, όπως για παράδειγμα στη χρήση τακτικών αριθμητικών λέξεων. Όσον αφορά στις ασκήσεις πρόσθεσης και θεσιακής αξίας (pre-test), ο Μαθητής 1 υπολόγισε σωστά τα βασικά αριθμητικά δεδομένα και τις προσθέσεις διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό, ενώ είχε λάθη στην άσκηση εύρεσης συμπληρώματος αθροίσματος. Ταυτόχρονα, είχε σωστές απαντήσεις στις προσθέσεις με πολλαπλάσια του 10. Στις ασκήσεις θεσιακής αξίας έκανε λάθη στις ερωτήσεις πάνω στην ποσοτική σχέση δεκάδων και μονάδων, στην απεικόνισή τους και στη σύνθεση διψήφιων αριθμών. Απάντησε σωστά στην άσκηση καταμέτρησης δεκάδων και μονάδων. Ο Μαθητής 2 είχε αντίστοιχες σωστές και λάθος απαντήσεις με τον Μαθητή 1 στις προσθέσεις. Έκανε λάθη στην καταμέτρηση δεκάδων-μονάδων, στις ερωτήσεις της ποσοτικής τους σχέσης, στη σύνθεση διψήφιων αριθμών καθώς και στην απεικόνιση δεκάδων και μονάδων. Η Μαθήτρια 1 επίσης, υπολόγισε σωστά τα βασικά αριθμητικά δεδομένα, όμως είχε αρκετά λάθη στις προσθέσεις διψήφιων με μονοψήφιους και στην εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος. Ακόμη, δεν μπόρεσε να απαντήσει στην άσκηση όπου χρειάστηκε η εφαρμογή της προσεταιριστικής ιδιότητας με τα πολλαπλάσια του 10. Έκανε λάθη στη σύνθεση διψήφιων αριθμών, στην καταμέτρηση μονάδων-δεκάδων και στις ερωτήσεις της ποσοτικής τους σχέσης.

Οι μαθητές του Επιπέδου Ε είναι ο Μαθητής 3 (Α/Α: 22) και ο Μαθητής 4 (Α/Α: 23), οι οποίοι ανήκουν επίσης στη μεγάλη ηλικιακή ομάδα, σύμφωνα με το κριτήριο Π.Μ.Ε.. Ο Μαθητής 3 έχει καταγωγή από την Αλβανία, γεννήθηκε και μεγάλωσε στην Ελλάδα και είναι δίγλωσσος. Ο Μαθητής 4 είναι από την Ελλάδα. Παρακάτω φαίνονται οι βαθμολογίες τους στο κριτήριο Π.Μ.Ε.:

ΜΑ-ΘΗ-ΤΗΣ	*ΗΛΙΚ. ΟΜΑ-ΔΑ*	*ΕΠΙ-ΠΕΔΟ*	*ΣΥΓΚΡΙ-ΣΗ*	*ΤΑΞΙΝΟ ΜΗΣΗ*	*ΑΝΤΙ-ΣΤΟΙΧΙΣΗ*	*ΣΕΙΡΟΘΕ-ΤΗΣΗ*	*ΧΡ. ΛΕΞΕ-ΩΝ ΑΡΙΘΜ.*	*ΔΟΜΗ-ΣΗ ΑΡΙΘΜ.*	*ΑΠΟΤ. ΚΑΤΑΜΕ-ΤΡΗΣΗ*	*ΓΕΝ. ΓΝΩΣΗ ΑΡΙΘ.*
Μ. 3	VII	Ε	4/5	2/5	3/5	2/5	2/5	1/5	4/5	1/5
Μ. 4	VII	Ε	5/5	4/5	3/5	2/5	4/5	4/5	4/5	3/5

Πίνακας 5: Βαθμολογίες των δύο μαθητών (Επίπεδο Ε) στο Κριτήριο Π.Μ.Ε.

Στα έργα του κριτηρίου, οι δύο μαθητές πήγαν καλά στη σύγκριση αντικειμένων, στην αντιστοίχιση και στις δραστηριότητες αποτελεσματικής καταμέτρησης. Στις υπόλοιπες ομάδες έργων είχαν σημαντικές δυσκολίες κι έκαναν λάθη στα έργα ταξινόμησης (κυρίως ο Μαθητής 3), σειριοθέτησης, στη χρήση λέξεων αρίθμησης και στις δραστηριότητες γενικής γνώσης αριθμών. Στις ασκήσεις του pre-test ο Μαθητής 3 μπόρεσε να υπολογίσει μόνο τα βασικά αριθμητικά δεδομένα μετρώντας με τα δάχτυλα. Ακόμη, απάντησε εν μέρει σωστά στην άσκηση καταμέτρησης μονάδων-δεκάδων. Δεν μπόρεσε να υπολογίσει τις προσθέσεις διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, ούτε τις προσθέσεις διψήφιων. Τέλος, έκανε αρκετά λάθη στις ασκήσεις θεσιακής αξίας των ψηφίων και δεν απάντησε στις ερωτήσεις της ποσοτικής τους σχέσης. Ο Μαθητής 4 υπολόγισε σωστά τα βασικά αριθμητικά δεδομένα, ορισμένα από τα συμπληρώματα αθροίσματος και ένα από τα αριθμητικά προβλήματα όπου εφάρμοσε την προσεταιριστική ιδιότητα στα πολλαπλάσια του 10. Επίσης, απάντησε σωστά στις ασκήσεις καταμέτρησης μονάδων-δεκάδων, αλλά δεν τα κατάφερε στην απεικόνιση της θεσιακής αξίας των ψηφίων, ούτε στις ερωτήσεις της ποσοτικής τους σχέσης.

Συμπερασματικά, οι μαθητές έχουν κατακτήσει από την προηγούμενη τάξη τα βασικά αριθμητικά δεδομένα, τα οποία είτε ανακαλούν από τη μνήμη, είτε τα υπολογίζουν. Τα παιδιά του Επιπέδου Δ τα καταφέρνουν στις προσθέσεις διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, ακόμα και αν το άθροισμα ξεπερνάει τη δεκάδα, αλλά δυσκολεύονται σημαντικά στις προσθέσεις διψήφιων χωρίς κρατούμενο. Ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 καταμετρούν και απεικονίζουν σωστά δεκάδες και μονάδες, σε αντίθεση με την Μαθήτρια 1 που δεν απάντησε σωστά στις αντίστοιχες ασκήσεις. Οι μαθητές του Επιπέδου Ε βρίσκονται σε χαμηλότερο γνωστικό επίπεδο συγκριτικά με τα παιδιά του Επιπέδου Δ, αφού υπολόγισαν σωστά μόνο τα αριθμητικά προβλήματα των βασικών αριθμητικών δεδομένων και κάποιες από τις ερωτήσεις στην καταμέτρηση δεκάδων και μονάδων. Επιπρόσθετα, δεν έχουν κατακτήσει υπολογισμούς με διψήφιους αριθμούς, ούτε την αξία των ψηφίων βάσει της θέσης τους σε έναν αριθμό. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά τα λάθη των εν λόγω μαθητών στο pre-test:

Επίπεδο Π.Μ.Ε.	**Μαθητές**	**Λάθη Κριτηρίου Π.Μ.Ε.**	**Λάθη στο Pre-Test**
Επίπεδο Δ	Μαθητής 1	Αποτελεσματική καταμέτρηση, χρήση λέξεων	Πρόσθεση διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, Ποσοτική σχέση Δεκάδων-Μονάδων

		αρίθμησης, δόμηση αρίθμησης	
	Μαθητής 2	Σειριοθέτηση, αποτελεσματική καταμέτρηση	Πρόσθεση διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, Ποσοτική σχέση Δεκάδων-Μονάδων, Καταμέτρηση Δεκάδων-Μονάδων
	Μαθήτρια 1	Ταξινόμηση, αποτελεσματική καταμέτρηση	Πρόσθεση διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, Ποσοτική σχέση Δεκάδων-Μονάδων, Καταμέτρηση Δεκάδων-Μονάδων, Προσθέσεις με πολλαπλάσια του 10, Απεικόνιση θεσιακής αξίας ψηφίων
Επίπεδο Ε	Μαθητής 3	Ταξινόμηση, Αντιστοίχιση, Σειριοθέτηση, Γενική γνώση αριθμών, Χρήση λέξεων αρίθμησης, δόμηση αρίθμησης	Πρόσθεση διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, Ποσοτική σχέση Δεκάδων-Μονάδων, Καταμέτρηση Δεκάδων-Μονάδων, Προσθέσεις με πολλαπλάσια του 10, Αναγνώριση και απεικόνιση θεσιακής αξίας ψηφίων
	Μαθητής 4	Σειριοθέτηση, Αντιστοίχηση, Γενική γνώση αριθμών	Πρόσθεση διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, Προσθέσεις με πολλαπλάσια του 10, Ποσοτική σχέση Δεκάδων-Μονάδων, Απεικόνιση θεσιακής αξίας ψηφίων

Πίνακας 6: Καταγραφή λαθών των μαθητών στο Κριτήριο Π.Μ.Ε. και στο pre-test

Σαν αποτέλεσμα, οι παραπάνω μαθητές επιλέχθηκαν για να συμμετέχουν στην εκπαιδευτική παρέμβαση με στόχο την κατάκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων σχετικά με την πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο. Τα δημογραφικά τους χαρακτηριστικά περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Όνομα	**Ηλικία**	**Φύλο**	**Καταγωγή**	**Επίπεδο Π.Μ.Ε.**
ΜΑΘΗΤΡΙΑ 1	7.02	Κορίτσι	Ελληνική	Δ
ΜΑΘΗΤΉΣ 1	7.05	Αγόρι	Αλβανική	Δ
ΜΑΘΗΤΉΣ 2	7.05	Αγόρι	Αλβανική	Δ
ΜΑΘΗΤΉΣ 3	7.03	Αγόρι	Αλβανική	Ε
ΜΑΘΗΤΗΣ 4	7.03	Αγόρι	Ελληνική	Ε

Πίνακας 7: Δημογραφικά στοιχεία συμμετεχόντων στην εκπαιδευτική παρέμβαση και επίπεδα Π.Μ.Ε.

2.3.6. Εφαρμογή εκπαιδευτικής παρέμβασης - Ανάλυση περιεχομένου μαθημάτων

Τα μαθήματα της εκπαιδευτικής παρέμβασης στηρίζονται στη σχετική βιβλιογραφία σχεδιασμού και διεξαγωγής εκπαιδευτικών παρεμβάσεων σε μαθητές Β΄ δημοτικού με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά (Bryant et al., 2008a; Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Έτσι, όλα τα μαθήματα σχεδιάζονται με μεγάλη προσοχή και περιλαμβάνουν την ίδια ρουτίνα.

Ο χώρος των μαθημάτων της παρέμβασης είναι μία μικρή, φωτεινή αίθουσα του δημοτικού σχολείου, με λίγα θρανία, πίνακα και ηλεκτρονικούς υπολογιστές, η οποία χρησιμοποιείται για ενισχυτική διδασκαλία.

Οι γνωστικοί στόχοι των μαθημάτων της εκπαιδευτικής παρέμβασης επιλέχθηκαν με στόχο την υποστήριξη των μαθητών κατά την εκμάθηση στρατηγικών πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο και με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις που απαιτούνται κατά την εκμάθηση των στρατηγικών αυτών. Συνεπώς, βάσει του περιεχομένου σχετικών ερευνών και των γνωστικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές που επιλέχθηκαν, οι γνωστικοί στόχοι που τίθενται στην παρούσα εκπαιδευτική παρέμβαση είναι οι εξής:

Γνωστικό πεδίο	**Γνωστικοί στόχοι**
Βασικά Αριθμητικά Δεδομένα (Β.Α.Δ.)	Υπολογισμός των Β.Α.Δ. έως το 10
Πρόσθεση διψήφιων αριθμών	Εκμάθηση στρατηγικής πρόσθεσης με ***μέτρηση προς τα πάνω*** ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο αριθμό (count-up)
	Εκμάθηση στρατηγικής πρόσθεσης με ***αποδόμηση του β΄ προσθετέου***
	Εκμάθηση στρατηγικής ***οριζόντιας και κάθετης πρόσθεσης διψήφιων*** (Δεκάδες + Δεκάδες, Μονάδες + Μονάδες)
	Εκμάθηση ***εύρεσης συμπληρώματος αθροίσματος***
	Εκμάθηση ***εύρεσης αθροισμάτων με προσθετέους πολλαπλάσια του 10***
Θεσιακή αξία	Απεικόνιση δεκάδων και μονάδων (με χρήση εποπτικού υλικού και με σχεδιασμό εικόνας)
	Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους

	αριθμούς
	Ανάλυση διψήφιων αριθμών σε δεκάδες και μονάδες
	Μέτρηση ανά 10 και ανά 20 έως το 100 (με χρήση αριθμογραμμής και προφορικά)
	Εκμάθηση και χρήση του αντίστοιχου λεξιλογίου από τους μαθητές

Πίνακας 8: Γνωστικοί στόχοι της εκπαιδευτικής παρέμβασης

Στη συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά οι συναντήσεις με τους συμμετέχοντες μαθητές κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής παρέμβασης και καταγράφεται ο σχεδιασμός και η πορεία διδασκαλίας εκάστης.

<u>Μάθημα 1^{ο}:</u>

Κατά το πρώτο μάθημα της εκπαιδευτικής παρέμβασης, εξήγησα αναλυτικά στους μαθητές το σκοπό των συναντήσεών μας, τις μέρες και ώρες των μαθημάτων, καθώς και το πρόγραμμα που θα ακολουθείται κάθε φορά. Αφού έλυσα τις απορίες τους σχετικά με τις συναντήσεις μας, ξεκίνησα τη διαδικασία της παρέμβασης.

Γνωστικοί στόχοι μαθήματος: Επανάληψη των βασικών αριθμητικών δεδομένων μέχρι το 10,

Εξοικείωση με τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω ξεκινώντας από το μεγαλύτερο προσθετέο.

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό Υλικό: ξύλινα κυβάκια, εικόνες με τα αριθμητικά δεδομένα του 10, αριθμογραμμή μέχρι το 10

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Θέλοντας να βεβαιωθώ πως οι μαθητές γνωρίζουν τα βασικά αριθμητικά δεδομένα (Β.Α.Δ.) και να μάθω ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν αν δεν μπορούν να τα ανακαλέσουν αυτόματα από τη μνήμη, ασχοληθήκαμε με υπολογισμούς μονοψήφιων αριθμών μέσα στη δεκάδα. Αρχικά, κάθε παιδί μέτρησε μέχρι το 20, χωρίς καμία δυσκολία. Στη συνέχεια, δόθηκαν σε κάθε μαθητή κυβάκια διαφόρων χρωμάτων και ζητήθηκε από τον καθένα να κάνει μία πρόσθεση μεταξύ αυτών (π.χ. 4+3=; ή 2+6=;).

Στο σημείο αυτό, οι μαθητές κλήθηκαν να εξηγήσουν δυνατά σε όλους (προφορική εξωτερίκευση) τον τρόπο που σκέφτονται ώστε να βρουν το αποτέλεσμα. Ο Μαθητής 1 φάνηκε πως χρησιμοποιεί ήδη τη στρατηγική των διδύμων, καθώς στην πρόσθεση 4+3 εξήγησε πως: «Αφού 3+3=6 (έδειξε το άθροισμα με τους κύβους), αν βάλουμε 1 κύβο ακόμα μας κάνει 7». Στη συνέχεια, η Μαθήτρια 1 στην πρόσθεση 2+6 έβαλε δύο κυβάκια μπροστά της και μέτρησε μετά το 2 άλλα 6, οπότε απάντησε σωστά 8. Ο Μαθητής 2 στην πρόσθεση 8+2 είπε αμέσως 10 χωρίς να δημιουργήσει το άθροισμα με τα κυβάκια του και ανέφερε πως αυτό το γνωρίζει χωρίς να μετρήσει τους κύβους. Ο Μαθητής 3 κλήθηκε να βρει το άθροισμα 5+3. Έβαλε τους κύβους μπροστά του και αφού μέτρησε κάθε προσθετέο, στη συνέχεια μέτρησε όλα τα κυβάκια από την αρχή και απάντησε σωστά 8. Τέλος, ο Μαθητής 4 στο άθροισμα 4+5 χρησιμοποίησε επίσης τη στρατηγική των διδύμων και εξήγησε πως: «Αφού 4+4=8, αν βάλουμε ακόμη 1 μας κάνει 9».

Παρατηρώντας λεπτομερώς τις στρατηγικές που χρησιμοποίησε κάθε παιδί για την εύρεση των μονοψήφιων αθροισμάτων, έδειξα, με τη χρήση κύβων και με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο προσθετέο σαν πιο αποτελεσματικό τρόπο εύρεσης αθροισμάτων. Όλα τα παιδιά έδειξαν ότι έχουν ξαναδεί τη μέθοδο αυτή, όμως ο Μαθητής 3 δυσκολεύτηκε να την εφαρμόσει στη συνέχεια.

Για την εφαρμογή και εξάσκηση στις στρατηγικές εύρεσης μονοψήφιων αθροισμάτων, δόθηκε στους μαθητές το 1^{o} φύλλο εργασίας (βλ. παράρτημα). Οι δραστηριότητές του έχουν σαν στόχο το πέρασμα από το πραξιακό, στο εικονιστικό επίπεδο και στη συνέχεια στο συμβολικό (Αγαλιώτης, 2013; Dennis, 2015). Σαφώς, οι μαθητές της Β΄ δημοτικού είναι εξοικειωμένοι και κατανοούν τις προσθέσεις με ψηφία, όμως επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες δραστηριότητες για την εξάσκηση στη στρατηγική που περιγράφηκε παραπάνω. Οι τρεις από τους μαθητές, ο Μαθητής 1, ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4, εφάρμοσαν τη στρατηγική χωρίς δυσκολία, εφόσον άλλωστε γνωρίζουν τρόπους να υπολογίζουν τα βασικά αριθμητικά δεδομένα ή τα ανακαλούν αυτόματα. Η Μαθήτρια 1 στη δεύτερη άσκηση του φύλλου εργασίας συνέχισε να μετράει μετά τον πρώτο προσθετέο, ακόμη και αν ήταν ο μικρότερος. Στις επόμενες κατάφερε να εντοπίζει τον μεγαλύτερο, αφού της υπενθύμιζα *«ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;»,* και να μετράει προς τα πάνω για να υπολογίσει το άθροισμα. Τέλος, ο Μαθητής 3 δυσκολεύτηκε πολύ να εφαρμόσει τη στρατηγική. Βοηθήθηκε από το διπλανό συμμαθητή του και αρχικά μετρούσε όλους τους προσθετέους, όπως έκανε με τα κυβάκια. Στις ασκήσεις 3 και 5 του ζήτησα να υπολογίσει δυνατά ορισμένα αθροίσματα εφαρμόζοντας τη νέα, για εκείνον, στρατηγική. Με ερωτήσεις καθοδήγησης κατάφερε να απαντήσει σωστά και δήλωσε πως: *«Είναι πιο γρήγορα έτσι!»*.

Όσον αφορά στα αθροίσματα των διδύμων, οι τέσσερεις μαθητές συμπλήρωσαν τα αποτελέσματα ανακαλώντας τα αυτόματα. Ο Μαθητής 3 χρησιμοποίησε τα δάχτυλά του για τα αθροίσματα 3+3, 4+4, 5+5, αλλά συμπλήρωνε τα αποτελέσματα χωρίς καταμέτρηση, μόνο βλέποντας την εικόνα των δακτύλων του. Στην άσκηση 1, με στόχο τον εντοπισμό του σωστού συμβόλου για την πρόσθεση, κανένα από τα παιδιά δεν έκανε λάθος.

Στο τέλος αυτής της πρώτης συνάντησης οι μαθητές ανταμείφτηκαν με ένα αυτοκόλλητο, για τη συμμετοχή, την εργασία και τη σωστή τους συμπεριφορά. Ο ρόλος του ενισχυτή θετικών συμπεριφορών και δράσεων υποστηρίζεται από τη σχετική βιβλιογραφία και θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικός στο σχεδιασμό των εκπαιδευτικών παρεμβάσεων (Dennis, 2015).

Συμπερασματικά, οι μαθητές χρησιμοποιούν αποτελεσματικές στρατηγικές υπολογισμού μονοψήφιων αθροισμάτων, όπως την αυτόματη ανάκληση από τη μνήμη, τη χρήση διδύμων και τη μέτρηση προς τα πάνω. Η τελευταία στρατηγική διδάχθηκε και εφαρμόστηκε από τα δύο παιδιά που δεν την χρησιμοποιούσαν. Φυσικά, θα πάρει χρόνο, ώστε και τα δύο παιδιά να την εφαρμόσουν αποτελεσματικά και με ευχέρεια στα επόμενα μαθήματα.

Μάθημα 2^{ο}:

Γνωστικοί στόχοι: Εικονιστική απεικόνιση μονάδων και δεκάδων, Αναγνώριση μονάδων-δεκάδων στους διψήφιους αριθμούς, Σχηματισμός διψήφιων αριθμών με τη χρήση αντίστοιχου εποπτικού υλικού

*Διάρκεια:*40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: ράβδοι Cuisenaire, αριθμογραμμή ως το 100, κυβάκια

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Ξεκινώντας το δεύτερο μάθημα, δόθηκαν πάλι στους μαθητές κυβάκια ώστε να υπολογίσουν μονοψήφια αθροίσματα. Ο Μαθητής 1, ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4 απάντησαν αμέσως χωρίς καταμέτρηση, ενώ η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 κλήθηκαν να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική που διδάχθηκαν στο προηγούμενο μάθημα. Για τον Μαθητή 3 είναι δύσκολο να θυμάται τα βήματα, γι’ αυτό τα υπενθύμισα. Στη συνέχεια μέτρησαν όλοι δυνατά μέχρι το 20 χωρίς δυσκολία.

Για την εισαγωγή στην έννοια των δεκάδων και των μονάδων χρησιμοποίησα τις ράβδους Cuisenaire, καθώς αντίστοιχα υλικά χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της θεσιακής αξίας σε έρευνες εκπαιδευτικών παρεμβάσεων (Dennis, 2015; Dennis et al., 2015). Αρχικά, δημιούργησα διψήφιους αριθμούς με μία δεκάδα και ζήτησα από κάθε παιδί να μου πει πόσα κυβάκια είναι όλα μαζί. Τα παιδιά δε δυσκολεύτηκαν και όταν εξοικειώθηκαν με τα υλικά απαντούσαν με μεγαλύτερη ταχύτητα. Στη συνέχεια, αύξησα τις δεκάδες και πάλι οι μαθητές δεν έκαναν λάθη στον υπολογισμό των κύβων. Φάνηκε λοιπόν, πως τα παιδιά μπορούν να «ανεβαίνουν» ανά 10 σωστά και στο τέλος να λένε των αριθμό των κύβων χωρίς να μετρήσουν από την αρχή τα υλικά. Τότε, μετρήσαμε όλοι μαζί δυνατά μέχρι το 100 ανά δέκα και ζήτησα από την Μαθήτρια 1 να δείχνει τις δεκάδες στην αριθμογραμμή. Το έκανε σωστά.

Συνεχίζοντας, τους μοίρασα το φύλλο εργασίας του δεύτερου μαθήματος (βλ. παράρτημα). Ξεκινήσαμε από τη δεύτερη άσκηση, όπου έπρεπε να υπολογίσουν μόνοι τον αριθμό των κύβων που έχουν μπροστά τους. Στο σημείο αυτό παρατήρησα πως, ενώ ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 ακολούθησαν τη μέθοδο μέτρησης ανά 10, ο Μαθητής 4, η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 μετρούσαν ένα-ένα τα κυβάκια των δεκάδων. Έτσι, χρειάστηκε να καθοδηγήσω τους τρεις μαθητές, δίνοντάς τους ξανά τις ράβδους των δεκάδων για να ανεβαίνουν ανά 10. Ο Μαθητής 3 και η Μαθήτρια 1 συνεργάστηκαν, μέτρησαν τις δεκάδες και απάντησαν σωστά. Ο Μαθητής 4 εργάστηκε μόνος μετρώντας τις ράβδους ανά 10 και ξεχωριστά τα κυβάκια, οπότε κατάφερε να υπολογίσει σωστά τις ποσότητες. Στην επόμενη δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τις δεκάδες και τις μονάδες με δικές τους εικόνες. Αρχικά, όλοι τους σχεδίασαν τις μονάδες και τις δεκάδες με το ίδιο μέγεθος. Τότε έκανα ερωτήσεις σχετικά με την αξία του 10 και του 1: *«Τα 10 κυβάκια που έχω μπροστά μου είναι ίσα με το 1;», «Η μία δεκάδα είναι ίση με τη μία μονάδα;»*. Από τη συζήτηση και έχοντας μπροστά τους τα υλικά, παρατήρησαν πως η δεκάδα έχει μεγαλύτερη αξία από τη μονάδα και σχεδίασαν σωστά τις δεκάδες και τις μονάδες κάθε αριθμού. Στη συνέχεια, κάθε παιδί σχημάτισε με τις ράβδους Cuisenaire από έναν διψήφιο αριθμό, δήλωσε πόσες μονάδες και δεκάδες έχει κι έδειξε τον αριθμό στην αριθμογραμμή. Εδώ δεν έγιναν λάθη. Τέλος, κάναμε ανταλλαγές μεταξύ μονάδων και δεκάδων, ώστε να απαντήσουν στην πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας. Οι μαθητές δυσκολεύθηκαν στο να ανταλλάσουν σωστά μονάδες με τις αντίστοιχες δεκάδες. Τους υπενθύμισα πως κάθε *μία* δεκάδα έχει ίδια αξία με *δέκα* μονάδες. Ο Μαθητής 2, ο Μαθητής 1, η Μαθήτρια 1, και ο Μαθητής 4 απάντησαν σωστά και γρήγορα. Ο Μαθητής 3 έκανε λάθος όταν ήρθε η σειρά του, καθώς απάντησε πως: «20Μ τις ανταλλάσω με 20Δ». Έδειξα πάλι τις ράβδους και τα σχέδια στον πίνακα, προκειμένου να απαντήσει σωστά. Στο τέλος της συνάντησης τα παιδιά επιβραβεύτηκαν κερδίζοντας από ένα αυτοκόλλητο.

Συμπερασματικά, οι τέσσερεις μαθητές κατάφεραν να συσχετίσουν την αξία της δεκάδας με τις μονάδες, να τις αναπαραστήσουν και να τις καταμετρήσουν σωστά. Για τον Μαθητή 3, πιθανώς είναι δύσκολο να κατανοήσει την έννοια της δεκάδας, παρόλο που έχει διδαχθεί το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο στην τάξη, οπότε θα ασχοληθεί και στο επόμενο μάθημα με τον ίδιο γνωστικό στόχο, προκειμένου να εξασκηθεί περισσότερο.

<u>Μάθημα 3^{o}:</u>

Γνωστικοί στόχοι: Υπενθύμιση των αριθμητικών δεδομένων του 10 και εξοικείωση με τα «πλαίσια του 10» (ten-frames), Εύρεση αθροισμάτων με πολλαπλάσια του 10 και μονοψήφιους αριθμούς

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: χρήση των «πλαισίων του 10», ράβδοι Cuisenaire, κυβάκια, αριθμογραμμή μέχρι το 100

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Κατά την έναρξη του μαθήματος, κάθε παιδί ξεχωριστά μέτρησε ανά δέκα μέχρι το 100, δείχνοντας τις δεκάδες στην αριθμογραμμή, και απάντησε σε ερωτήσεις όπως: *«Πόσες Μονάδες έχουν οι 2 Δεκάδες; οι 3 Δεκάδες; κ.ο.κ.».* Σε αυτή την προφορική δραστηριότητα όλοι απάντησαν σωστά, καθώς τους έδινα κάθε φορά τις αντίστοιχες ράβδους Cuisenaire. Τέσσερεις μαθητές απάντησαν αμέσως, εκτός από τον Μαθητή 3, ο οποίος μέτρησε τα κυβάκια τις πρώτης ράβδου (ήταν 10) και στη συνέχεια απάντησε «*ανεβαίνοντας*» ανά 10.

Στη συνέχεια, μοίρασα σε κάθε μαθητή από μία κάρτα, «πλαίσιο του 10», κι εξήγησα πως χρησιμοποιείται. Ακόμη, κάθε παιδί πήρε από 10 κυβάκια και το φύλλο εργασίας του τρίτου μαθήματος (βλ. παράρτημα). Αρχικά, ασχοληθήκαμε με την πρώτη άσκηση, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να «*γεμίζουν το πλαίσιο*» με τόσα κυβάκια όσο ήταν ο πρώτος προσθετέος και να μετρούν τις άδειες θέσεις, ώστε να βρίσκουν τον δεύτερο προσθετέο. Η δραστηριότητα ήταν ατομική, αλλά κάθε παιδί, όταν ερχόταν η σειρά του, έπρεπε να εξηγήσει δυνατά τη διαδικασία με την οποία βρίσκει τον δεύτερο προσθετέο του 10. Παρόλο που οι μαθητές γνωρίζουν τα αριθμητικά δεδομένα του 10, χρησιμοποίησα τα «πλαίσια του 10» προκειμένου να οπτικοποιήσουν αυτές τις προσθέσεις και για να εξοικειωθούν με τη χρήση τους, καθώς θα τα χρειαστούμε και σε προσθέσεις με μεγαλύτερες δεκάδες. Τα παιδιά συμπλήρωσαν σωστά την άσκηση, όμως ο Μαθητής 4 και ο Μαθητής 3 δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν πως χρησιμοποιούμε τα «πλαίσια του 10». Στην αρχή τοποθετούσαν τους κύβους λανθασμένα στο πλαίσιο, χωρίς ο αριθμός των κύβων να αντιπροσωπεύει το γνωστό προσθετέο. Αφού είδαν τη διαδικασία από τους συμμαθητές τους, κατάφεραν κι εκείνοι να τα χρησιμοποιήσουν σωστά.

Στη συνέχεια, ασχοληθήκαμε με προσθέσεις «ολόκληρων» δεκάδων (10, 20 κ.ο.κ.) με μονοψήφιους αριθμούς. Πριν από την ενασχόλησή μας με τη δεύτερη άσκηση του φύλλου εργασίας, χρησιμοποιήσαμε δεκάδες και μονάδες από τις ράβδους Cuisenaire για να αναπαραστήσουμε διψήφιους αριθμούς και κάθε παιδί ξεχωριστά έδειχνε και έλεγε δυνατά τα μέρη του αριθμού, π.χ. *'Το 32 φτιάχνεται από το 30 (έδειχνε τις δεκάδες) και το 2 (έδειχνε τις μονάδες)'*. Οι μαθητές απάντησαν σωστά σε αυτή την προφορική δραστηριότητα. Στο σημείο αυτό, περάσαμε στη δεύτερη άσκηση του φύλλου εργασίας, όπου οι μαθητές έπρεπε να βρουν τα αθροίσματα μεταξύ «ολόκληρων» δεκάδων και μονοψήφιων αριθμών. Ο Μαθητής 2, ο Μαθητής 1 και η Μαθήτρια 1 υπολόγισαν μόνοι τους, γρήγορα και σωστά τα αθροίσματα. Οι άλλοι δύο μαθητές έκαναν το εξής λάθος: «10+5= **105**, 20+8= **208**». Παρατηρώντας αυτό, ζήτησα από τον Μαθητή 1 να εξηγήσει πως βρήκε το πρώτο άθροισμα και πως το έγραψε. Ο Μαθητής 1 είπε: «*Να δέκα και πέντε κάνει δεκαπέντε. Βάζω 1 μπροστά και 5 πίσω*». Όταν ρώτησα γιατί δεν γράφουν ολόκληρο το 10, ο Μαθητής 2 απάντησε: «*Γιατί μπροστά είναι **μία** δεκάδα.*». Εξήγησα αναλυτικότερα πως γράφουμε τους διψήφιους και τα δύο παιδιά μπόρεσαν να γράψουν σωστά τα επόμενα αθροίσματα. Ακόμη, ζήτησα από τον Μαθητή 3 να εφαρμόσει τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω ξεκινώντας από το μεγαλύτερο προσθετέο. Ο Μαθητής 3 ξεκινώντας από τη 'στρόγγυλη' δεκάδα και αναπαριστώντας το δεύτερο προσθετέο με τα δάχτυλά του κατάφερε να εφαρμόσει σωστά τη στρατηγική και να υπολογίσει αθροίσματα. Στο τέλος, κάθε μαθητής ανταμείφθηκε με ένα αυτοκόλλητο για την προσπάθεια και τη σωστή συμπεριφορά του.

Συμπερασματικά, οι μαθητές αντιλαμβάνονται πλέον καλύτερα την αξία της δεκάδας και των ψηφίων που βρίσκονται στην αντίστοιχη θέση. Ο Μαθητής 3 και ο Μαθητής 4 έχουν περισσότερες αδυναμίες από τους υπόλοιπους μαθητές και αυτή, η πιο εντατική, ενασχόλησή τους με τους παραπάνω γνωστικούς στόχους τους βοηθά να κατανοήσουν περισσότερο τις συγκεκριμένες μαθηματικές γνώσεις.

Μάθημα 4^{ο}:

Γνωστικοί στόχοι: Πρόσθεση πολλαπλάσιων του 10 με μονοψήφιους αριθμούς, Σχηματισμός διψήφιων με τη χρήση των ράβδων Cuisenaire, Εξάσκηση στη μέτρηση μέχρι το 100

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: Αριθμογραμμή, ράβδοι Cuisenaire

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Ξεκινώντας το μάθημα κι εφόσον μεσολάβησαν τέσσερεις ημέρες από την τελευταία μας συνάντηση με τα παιδιά, ασχοληθήκαμε με μία επαναληπτική, προφορική δραστηριότητα και ζήτησα από τον καθένα να μετρήσει ανά δέκα μέχρι το 100. Οι τέσσερεις μαθητές απάντησαν σωστά και με ταχύτητα. Ο Μαθητής 3 δεν ήθελε αρχικά να μετρήσει, αλλά, αφού του το ζήτησα ξανά, δέχθηκε και μέτρησε με τη βοήθειά μου. Κατά το ‘ανέβασμα’ έκανε λάθος τις δεκάδες και είπε: «πενήντα-εβδομήντα-ογδόντα». Τότε, του έδειξα την αριθμογραμμή και του ζήτησα να παρατηρήσει τις «στρόγγυλες» δεκάδες. Έτσι, δοκίμασε ξανά, κοιτώντας την αριθμογραμμή και τα κατάφερε καλύτερα.

Στη συνέχεια, μοίρασα δεκάδες και μονάδες σε κάθε παιδί και τους ζήτησα να σχηματίσουν από ένα διψήφιο αριθμό. Ο Μαθητής 4, ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 δε δυσκολεύτηκαν σε αυτή την άσκηση. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3, παρόλο που είδαν τους προηγούμενους μαθητές, κατέβαλαν μεγαλύτερη προσπάθεια. Η Μαθήτρια 1 άργησε να σχηματίσει τον αριθμό 54 κι έκανε αρκετές δοκιμές, μετρώντας επανειλημμένα τις δεκάδες. Ο Μαθητής 3 προκειμένου να σχηματίσει τον αριθμό 21 έβαλε πρώτα 2 μικρά κυβάκια κι όχι 2 δεκάδες. Ο Μαθητής 2, θέλοντας να τον βοηθήσει, του έδειξε τις ράβδους των δεκάδων για να σχηματίσει σωστά τον αριθμό. Αφού δημιουργήσαμε διψήφιους αριθμούς με τις ράβδους, ασχοληθήκαμε με την τρίτη άσκηση του τρίτου φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα). Κάθε παιδί έπρεπε να αναπαραστήσει τα αθροίσματα με τις ράβδους και τα κυβάκια και να βρει το αποτέλεσμα. Ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 1 έλυσαν την άσκηση με ευκολία και κάθε φορά που τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν τα αθροίσματα το κατάφεραν σωστά. Τα υπόλοιπα παιδιά δυσκολεύτηκαν. Ο Μαθητής 4 στο άθροισμα 40+20+6 έγραψε 46. Όταν του ζήτησα να μας εξηγήσει με τη βοήθεια των δεκάδων πως το υπολόγισε, κατάλαβε πως δεν πρόσθεσε το 20. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 δεν μπορούσαν να ανακαλέσουν από τη μνήμη τα βασικά αριθμητικά δεδομένα για να υπολογίσουν το άθροισμα των «στρόγγυλων» δεκάδων. Οπότε σχημάτιζαν το άθροισμα με τις ράβδους, τις μετρούσαν και πρόσθεταν τις μονάδες στο τέλος. Ο Μαθητής 3 μάλιστα θέλησε να εφαρμόσει την στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω για να βρει το τελικό αποτέλεσμα. Του υπενθύμισα τη διαδικασία και απάντησε σωστά. Στο τέλος, κάθε παιδί σηκώθηκε κι έδειξε στην αριθμογραμμή κάποια από τα αθροίσματα.

Για την επόμενη δραστηριότητα, κάθε παιδί έδειχνε στην αριθμογραμμή τον αρχικό αριθμό κι έβρισκε τον επόμενο. Παρατήρησα πως ο Μαθητής 4, ο Μαθητής 3 και η Μαθήτρια 1 δεν μπορούσαν να βρουν το ζητούμενο αριθμό, αν δεν εντόπιζαν τον προηγούμενο στην αριθμογραμμή. Ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 1 μπόρεσαν να συμπληρώσουν τους αριθμούς που λείπουν χωρίς να αναφερθούν στην αριθμογραμμή. Στο τέλος του μαθήματος τα παιδιά μέτρησαν μέχρι το 100 και κάθε ένα ανταμείφθηκε με αυτοκόλλητο για την προσπάθειά του.

Συμπερασματικά, ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 δε δυσκολεύονται σημαντικά με τη διαχείριση των δεκάδων, ενώ ο Μαθητής 4, ο Μαθητής 3 και η Μαθήτρια 1 κάνουν λάθη στους υπολογισμούς των αθροισμάτων με πολλαπλάσια του 10 και στη διαχείριση διψήφιων αθροισμάτων. Επιπρόσθετα, δυσκολεύονται στο να ξεκινούν την καταμέτρηση από έναν μεγάλο αριθμό, όπως το 46 ή το 89. Εκεί χρειάζονται τη βοήθεια της αριθμογραμμής. Για το λόγο αυτό, σε επόμενα μαθήματα, θα γίνουν ξανά αντίστοιχες δραστηριότητες.

Μάθημα 5ο:

Γνωστικοί στόχοι: Εξάσκηση στην εφαρμογή στρατηγικών στην πρόσθεση διψήφιου αριθμού με μονοψήφιο χωρίς κρατούμενο.

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό Υλικό: ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες), καρτέλα τοποθέτησης δεκάδων-μονάδων, πίνακας της τάξης

Εκπαιδευτικό λογισμικό πρόγραμμα: ‘Virtual Manipulatives’

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Στο μάθημα αυτό, κύριος στόχος ήταν η εφαρμογή της στρατηγικής μέτρησης προς τα πάνω ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο προσθετέο. Ακόμη, οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με την κάθετη πρόσθεση, προκειμένου να γνωρίσουν και αυτή τη μέθοδο εύρεσης αθροισμάτων. Στο φύλλο εργασίας του πέμπτου μαθήματος (βλ. παράρτημα) οι προσθέσεις δεν ξεπερνούσαν το 20.

Στην πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας κάθε μαθητής κλήθηκε να υπολογίσει τα οριζόντια αθροίσματα και να εξηγήσει δυνατά στην ολομέλεια τον τρόπο με τον οποίο κατάφερε να βρει κάθε αποτέλεσμα. Από τα παιδιά, η Μαθήτρια 1, ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 δε δυσκολεύονται με τους αριθμούς και εργάζονται γρήγορα. Οι υπολογισμοί τους είναι σωστοί. Ο Μαθητής 4, επίσης, γνωρίζει τη στρατηγική και υπολογίζει σωστά τα αθροίσματα, αλλά είναι πιο αργός σε σχέση με τα παραπάνω παιδιά. Ο Μαθητής 3, που τώρα μαθαίνει να εφαρμόζει τη στρατηγική, είναι πιο αργός και υπολογίζει μόνος τα αθροίσματα όταν έρχεται η σειρά του να εξηγήσει δυνατά. Όταν εργάζεται ατομικά, ζητάει τη βοήθεια του διπλανού του, πιθανώς γιατί δεν εμπιστεύεται τον εαυτό του. Για το λόγο αυτό, του ζητάω να εξηγήσει τον τρόπο υπολογισμού συχνότερα από τους υπόλοιπους μαθητές, ώστε να κατακτήσει τη διαδικασία και να μπορέσει να εργαστεί ατομικά. Παρόλο που αργεί στον υπολογισμό των αθροισμάτων, βρίσκει τα περισσότερα αποτελέσματα σωστά, καθώς ορισμένες φορές κάνει λάθη στην καταμέτρηση.

Συνεχίζοντας στην επόμενη δραστηριότητα του φύλλου εργασίας, παρουσιάζω στους μαθητές την κάθετη πρόσθεση διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό. Παρουσιάζω αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο τοποθετούμε τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλο και προσθέτουμε πρώτα τις μονάδες και μετά τη δεκάδα του διψήφιου αριθμού. Από τις ερωτήσεις που κάνω παρατηρώ πως τα παιδιά θυμούνται να αναγνωρίζουν τις μονάδες και τις δεκάδες των αριθμών, καθώς και να σχηματίζουν τους αριθμούς με τη βοήθεια του αντίστοιχου εποπτικού υλικού. Στο σημείο αυτό, ασχολούμαστε με τις πέντε πρώτες προσθέσεις. Κάθε παιδί με τη σειρά εξηγεί δυνατά τον τρόπο εργασίας στην κάθετη πρόσθεση, αναπαριστά τους προσθετέους με τα κυβάκια και τις ράβδους δεκάδων και τα τοποθετεί στην αντίστοιχη καρτέλα για να βρει το αποτέλεσμα. Σε αυτή την πρώτη επαφή τους με τη νέα γνώση οι μαθητές συναντούν δυσκολίες. Ο Μαθητής 4 και ο Μαθητής 3 τοποθέτησαν τις μονάδες στη θέση των δεκάδων, ενώ η Μαθήτρια 1, παρόλο που τοποθέτησε σωστά το υλικό, χρησιμοποίησε την προηγούμενη στρατηγική (μέτρηση προς τα πάνω) για να υπολογίσει το αποτέλεσμα. Ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 περιέγραψαν σωστά τη διαδικασία και αναπαράστησαν τους αριθμούς με επιτυχία.

Στις επόμενες προσθέσεις κλήθηκαν να τοποθετήσουν οι ίδιοι κάθετα τους αριθμούς και να υπολογίσουν το αποτέλεσμα. Κάθε παιδί σηκωνόταν στον πίνακα για να εξηγήσει τον τρόπο εργασίας μας. Όσο οι μαθητές εξασκούνταν, κατανοούσαν καλύτερα τη διαδικασία. Ο Μαθητής 3 τοποθέτησε ξανά τις μονάδες στη θέση των δεκάδων και ζήτησα από την Μαθήτρια 1 να εξηγήσει τη σωστή λύση. Ο Μαθητής 4 εργάστηκε σωστά. Στο τέλος, κάθε παιδί εφάρμοσε την ίδια διαδικασία στο λογισμικό πρόγραμμα ‘Virtual Manipulatives’, κάτι που τους άρεσε πολύ, καθώς το βρήκαν ενδιαφέρον και διασκεδαστικό.

Με την παραπάνω διδασκαλία, θέλησα να διδάξω τη νέα γνώση δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να εργαστούν στο πραξιακό, στο εικονιστικό και στο συμβολικό επίπεδο, πιστεύοντας πως η χρήση τρισδιάστατων υλικών και του αντίστοιχου λογισμικού προγράμματος θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν σωστότερα τη διαφορά της αξίας μεταξύ δεκάδων και μονάδων και τη διαδικασία της κάθετης πρόσθεσης. Ολοκληρώνοντας το μάθημα, παρατήρησα πως οι μαθητές ήταν ικανοποιημένοι με όσα κατάφεραν τη συγκεκριμένη ώρα, την οποία κι εγώ θεώρησα αρκετά εποικοδομητική. Κλείνοντας, κάθε παιδί επιβραβεύτηκε με ένα αυτοκόλλητο για τη συνολική του στάση κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

<u>Μάθημα 6^{ο}:</u>

Γνωστικοί στόχοι: Εμπέδωση της κάθετης πρόσθεσης διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό, Εξάσκηση στην πρόσθεση πολλαπλάσιων του 10 με το νου και κάθετα, Εκμάθηση πρόσθεσης διψήφιου αριθμού με το 10.

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες), πίνακας της τάξης, αριθμογραμμμή από χάντρες, καρτέλα τοποθέτησης δεκάδων-μονάδων

Εκπαιδευτικό λογισμικό πρόγραμμα: Virtual Manipulatives

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Στόχοι του έκτου μαθήματος ήταν η εμπέδωση και εξάσκηση στην κάθετη πρόσθεση διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό, η εξάσκηση στη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω και η εκμάθηση πρόσθεσης του 10 σε διψήφιο αριθμό.

Ξεκινώντας με την πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα), οι μαθητές εφάρμοσαν την ήδη γνωστή στρατηγική εύρεσης αθροισμάτων σε αριθμούς με περισσότερες δεκάδες. Διαπίστωσα ότι δε δυσκολεύονται στο να μετρούν ξεκινώντας από ένα μεγάλο αριθμό, όπως για παράδειγμα το 73, το 42 ή το 81. Αυτή τη φορά όμως, χρειάστηκε να δείχνουν τους αριθμούς σε αριθμογραμμή από χάντρες πάνω στην οποία είναι σημειωμένες οι δεκάδες με κόκκινο χρώμα, ενώ οι υπόλοιποι αριθμοί έχουν λευκό χρώμα (Καραγιαννάκης, 2012). Αφού τους εξήγησα πως μπορούν να βρίσκουν τη θέση κάθε αριθμού, τους ζήτησα να εντοπίσουν τα αθροίσματα της άσκησης εφόσον τα υπολογίσουν. Η εύρεση των αθροισμάτων δε δυσκόλεψε ιδιαίτερα κάποιο παιδί. Η Μαθήτρια 1, ενώ υπολόγισε σωστά τα αθροίσματα, δυσκολεύτηκε στην περιγραφή της διαδικασίας. Ο Μαθητής 3 περιέγραψε σωστά τον τρόπο εύρεσης του αθροίσματος, όταν ήρθε η σειρά του, αλλά υπολόγισε κάποιες από τις προσθέσεις με τη βοήθεια του Μαθητή 4. Ο Μαθητής 1, στην πρόσθεση 81+7 εξήγησε πως: «*Αφού 1+7 κάνει 8, μας κάνει 88 όλο μαζί*». Ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4 περιέγραψαν σωστά τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω και υπολόγισαν τα αθροίσματα. Τα παιδιά δυσκολεύτηκαν να δείξουν τους αριθμούς στην καινούρια αριθμογραμμή από χάντρες, καθώς δεν ήταν αριθμημένη. Έκαναν λάθη στον εντοπισμό της σωστής δεκάδας και στην καταμέτρηση των μονάδων. Ο Μαθητής 2, για παράδειγμα, που έπρεπε να εντοπίσει το 48, μέτρησε σωστά 4 δεκάδες, αλλά μετά το 40, μέτρησε βιαστικά και δεν εφάρμοσε την ένα-προς-ένα αντιστοίχιση, οπότε έδειξε το 49.

Για να μπορέσουν να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν την κάθετη πρόσθεση, τους θύμισα τη διαδικασία με την οποία εργαζόμαστε δείχνοντας ένα παράδειγμα στον πίνακα και δίνοντάς τους τις ράβδους δεκάδων και τα κυβάκια. Βασικός στόχος, στο σημείο αυτό, είναι να κατανοήσουν την πρόσθεση των μονάδων ξεχωριστά από τις δεκάδες με τη βοήθεια του εποπτικού υλικού. Οπότε κάθε παιδί τοποθετεί στην καρτέλα τις δεκάδες και τις μονάδες στη σωστή θέση και στη συνέχεια προσθέτει τις μονάδες μεταξύ τους και στο τέλος τις δεκάδες. Ο Μαθητής 1 εφαρμόζει ήδη τη στρατηγική αυτή στην οριζόντια πρόσθεση και δε δυσκολεύεται να τοποθετήσει σωστά το εποπτικό υλικό στις σωστές θέσεις. Οι υπόλοιποι μαθητές κάνουν λάθη στη σωστή τοποθέτηση δεκάδων και μονάδων στις αντίστοιχες στήλες, για παράδειγμα ο Μαθητής 2 έγραψε το 23 στη στήλη των μονάδων, παρόλο που στην καρτέλα είχε 2 δεκάδες και 3 μονάδες. Το ίδιο λάθος έκαναν και τα άλλα τρία παιδιά. Χρειάστηκε να τους κάνω ερωτήσεις καθοδήγησης για να συμπληρώσουν σωστά τα πινακάκια της άσκησης 2, ενώ χρησιμοποιούσαν σωστά το εποπτικό υλικό δεκάδων-μονάδων.

Στη συνέχεια, ασχοληθήκαμε με την πρόσθεση του 10 σε διψήφιο αριθμό με τη βοήθεια της αριθμογραμμής (με νούμερα) και του λογισμικού προγράμματος 'Virtual Manipulatives'. Έδειξα στα παιδιά, πως προσθέτοντας 10 σε ένα διψήφιο αριθμό, αλλάζει κατά 1 η δεκάδα, ενώ οι μονάδες μένουν ίδιες. Οι μαθητές εξασκήθηκαν με προφορικά παραδείγματα στην αριθμογραμμή με νούμερα και στη συνέχεια ασχολήθηκαν με την τρίτη άσκηση του φύλλου εργασίας. Ο Μαθητής 3 έκανε το εξής λάθος: «23-30-40-50-60-70» και για να τον βοηθήσω του έδωσα ράβδους δεκάδων και μονάδες κι εργαστήκαμε μαζί. Τότε κατανόησε πως οι μονάδες μένουν ίδιες και συμπλήρωσε πιο σωστά τις επόμενες αλυσίδες. Τα υπόλοιπα παιδιά δεν έκαναν λάθη στην άσκηση αυτή.

Ολοκληρώνοντας το μάθημα, οι μαθητές κλήθηκαν να προσθέσουν πολλαπλάσια του 10 μεταξύ τους. Κάθε παιδί χρησιμοποίησε το λογισμικό πρόγραμμα για να απαντήσει και να εξηγήσει δυνατά το αποτέλεσμα. Στις οριζόντιες προσθέσεις πήγαν πολύ καλά και βοηθήθηκαν από το 'Virtual Manipulatives'. Στις κάθετες προσθέσεις, όμως, έγιναν λάθη στη σωστή τοποθέτηση των ψηφίων στις στήλες, καθώς η Μαθήτρια 1 δεν έβαζε 0 στη στήλη των μονάδων, ενώ ο Μαθητής 3 και ο Μαθητής 4 έγραψαν το 30 και το 20 στη στήλη των μονάδων. Με δική μου καθοδήγηση και με τα παραδείγματα που είχαμε στον πίνακα έκαναν τις διορθώσεις. Στο τέλος του μαθήματος τα παιδιά επιβραβεύτηκαν κερδίζοντας το αυτοκόλλητό τους.

Συμπερασματικά, η χρήση του εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος έχει βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν τις διαδικασίες για την πρόσθεση διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, χωρίς όμως κάποια από αυτά να μπορούν να εργαστούν αυτόνομα και απόλυτα σωστά στις κάθετες προσθέσεις. Οπότε χρειάζεται να συνεχιστεί η εργασία πάνω στην κάθετη πρόσθεση, ώστε να μάθουν αυτή τη μέθοδο.

Μάθημα 7ο:

Γνωστικοί στόχοι: Εισαγωγή στη στρατηγική πρόσθεσης με αποδόμηση του β΄ προσθετέου (προσθέσεις με υπέρβαση της δεκάδας)

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό μαθήματος: πλαίσια του 10 (ten frames), κυβάκια (μονάδες), αριθμογραμμή με νούμερα

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Στο μάθημα αυτό, βασικός στόχος ήταν η εισαγωγή των μαθητών στη στρατηγική πρόσθεσης με αποδόμηση του β΄ προσθετέου συμπληρώνοντας τη δεκάδα. Η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται στην πρόσθεση διψήφιων αριθμών, οπότε χρειάζεται οι μαθητές να τη γνωρίζουν, ώστε να είναι πιο ευέλικτοι στους υπολογισμούς τους. Επίσης, πρόκειται για μία πιο ώριμη στρατηγική πρόσθεσης και η χρήση της σχετίζεται με την καλή κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων.

Για να παρουσιάσω αυτή τη στρατηγική πρόσθεσης, ξεκίνησα με προσθέσεις μονοψήφιων αριθμών, ώστε τα αθροίσματα να μη ξεπερνούν το 20. Χρησιμοποιώντας τα πλαίσια του 10 και τα κυβάκια παρουσίασα τη διαδικασία, κατά την οποία ξεκινάμε από τον πρώτο προσθετέο, συμπληρώνουμε τη δεκάδα του 10 προσθέτοντας μέρος του β΄ προσθετέου (γνώση των βασικών αριθμητικών δεδομένων του 10) και στη συνέχεια προσθέτουμε στο 10 την ποσότητα που έμεινε από το β΄ προσθετέο (γνώση των βασικών αριθμητικών δεδομένων των μονοψήφιων αριθμών). Ταυτόχρονα, έδειξα στα παιδιά τον τρόπο εργασίας μας σε αυτή τη στρατηγική χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή με τα νούμερα.

Κατά την εφαρμογή της στρατηγικής από τους μαθητές, παρατήρησα πως δυσκολεύονται αρκετά με αυτό τον τρόπο εργασίας. Πρωτίστως, οι μαθητές, έχοντας κατακτήσει τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω, συνεχίζουν να την εφαρμόζουν στους υπολογισμούς τους και δεν κάνουν προσπάθεια ώστε να μάθουν να εφαρμόζουν τη νέα στρατηγική. Επίσης, βασική δυσκολία τους είναι να αποδομήσουν σωστά τον προσθετέο έτσι ώστε να συμπληρωθεί η δεκάδα και, ταυτόχρονα, δυσκολεύονται σημαντικά στο να θυμούνται τα βήματα της διαδικασίας, γεγονός που είναι αναμενόμενο για τα παιδιά με δυσκολίες μάθησης (Αγαλιώτης, 2013).

Πιο αναλυτικά, παρατήρησα αρχικά πως όλοι οι μαθητές είχαν σημαντική δυσκολία στο να θυμούνται τους συνδυασμούς πρόσθεσης των μονοψήφιων αριθμών. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως: 'Από το 7 πήρα τα 4, πόσα ακόμα μας μένουν;' ο Μαθητής 3, ο Μαθητής 4 και η Μαθήτρια 1 μέτρησαν τα κυβάκια για να βρουν το υπόλοιπο. Εφόσον δυσκολεύονταν πολύ όταν εργάζονταν μόνοι, έβρισκαν το αποτέλεσμα μετρώντας με τα δάχτυλα προς τα πάνω, εφαρμόζοντας την προηγούμενη στρατηγική πρόσθεσης που έμαθαν. Ο Μαθητής 2 επίσης ακολουθούσε τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω, παρόλο που απαντούσε σωστά στις ερωτήσεις καθοδήγησης που του έκανα για να υπολογίσει με το νου τις προσθέσεις. Ο Μαθητής 1 προσπάθησε πολύ κατά τη διάρκεια του μαθήματος να εφαρμόσει σωστά τη διαδικασία, αλλά έκανε λάθη στους υπολογισμούς, καθώς δε χώριζε σωστά τον β΄ προσθετέο (π.χ. στην πρόσθεση 8 +7 έγραψε 8 +**2** = 10, 10 + **3** = 13, χώρισε δηλαδή το 7 σε 2 + 3 αντί για 2 + 5). Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, καθώς έβλεπα πως τα παιδιά είχαν δυσκολίες με τη σωστή εφαρμογή της παραπάνω στρατηγικής, ζήτησα από τον καθένα να χρησιμοποιεί το πλαίσιο του 10 και τα κυβάκια και να περιγράφει δυνατά, σε όλους, τον τρόπο εργασίας του (προφορική εξωτερίκευση). Παρακολουθώντας τον τρόπο εργασίας τους, παρατήρησα πως ο Μαθητής 3, η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 4 δε μπορούν να εφαρμόσουν τη στρατηγική, διότι δε μπορούν να θυμούνται τα βήματά της. Επίσης, κάνουν μεγάλη προσπάθεια στο να βρουν το συμπλήρωμα του 10 και του β΄ προσθετέου, μετρώντας τις κενές θέσεις του πλαισίου και τα κυβάκια. Ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 τα καταφέρνουν καλύτερα, αλλά επίσης κάνουν λάθη στην εύρεση του συμπληρώματος του β΄ προσθετέου. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος αυτού και οι πέντε μαθητές έκαναν αρκετά λάθη στις προσθέσεις με τη χρήση της νέας στρατηγικής και δεν κατάφεραν να κάνουν σωστούς υπολογισμούς χωρίς καθοδήγηση. Στο τέλος του μαθήματος, οι μαθητές και πάλι επιβραβεύτηκαν με αυτοκόλλητα, καθώς προσπάθησαν πολύ στο να εφαρμόσουν και να κατανοήσουν τη νέα γνώση.

Συμπερασματικά, χρειάζεται περισσότερος χρόνος ώστε οι μαθητές να μάθουν να εφαρμόζουν και να κατανοήσουν τη νέα στρατηγική πρόσθεσης. Ακόμη, είναι απαραίτητη η χρήση του εποπτικού υλικού, καθώς τους βοηθά να θυμούνται τα βήματα της στρατηγικής και να βρίσκουν γρηγορότερα κι ευκολότερα το συμπλήρωμα του 10 και του β' προσθετέου.

Μαθήματα 8ο και 9ο:

Γνωστικοί στόχοι: Εφαρμογή και εμπέδωση της στρατηγικής πρόσθεσης διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό με υπέρβαση της δεκάδας

Διάρκεια: 40 λεπτά ανά συνάντηση

Εποπτικό υλικό: πλαίσια του 10 (ten frames), κυβάκια (μονάδες), αριθμογραμμή με νούμερα

Λογισμικό πρόγραμμα: χρήση του προγράμματος Virtual Manipulatives (κατά το 9ο μάθημα)

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Καθώς στο προηγούμενο μάθημα φάνηκε πως ήταν αρκετά δύσκολο για τους μαθητές να κατανοήσουν τη νέα στρατηγική πρόσθεσης, αφιερώσαμε τα επόμενα δύο μαθήματα στην εφαρμογή και κατανόησή της. Για την επίτευξη του στόχου, δόθηκαν στα παιδιά πλαίσια του 10, κυβάκια και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας (βλ. παράρτημα) για ατομική εξάσκηση. Επίσης, οι μαθητές εξασκήθηκαν στη στρατηγική μέσω του προγράμματος 'Virtual Manipulatives', στο περιβάλλον του οποίου υπάρχει το αντίστοιχο εικονικό πλαίσιο του 10 και κυβάκια που συμβολίζουν τις μονάδες. Βασική επιδίωξη κατά τη διάρκεια των δύο μαθημάτων είναι η εφαρμογή της στρατηγικής από το πραξιακό (κύβοι, χάρτινα πλαίσια του 10) στο εικονιστικό επίπεδο (λογισμικό πρόγραμμα) και στη συνέχεια στο συμβολικό επίπεδο (εργασία με το νου). Ο παραπάνω τρόπος εργασίας στοχεύει στην κατανόηση της στρατηγικής και στην κατάκτηση ενός πιο ευέλικτου τρόπου υπολογισμού προσθέσεων, καθώς και στην κατανόηση των αντίστοιχων αριθμητικών σχέσεων.

Κατά την έναρξη του 8ου μαθήματος, έκανα μία σύντομη επανάληψη, ώστε τα παιδιά να θυμηθούν το νέο γνωστικό στόχο με τον οποίο επρόκειτο να ασχοληθούμε. Θύμισα τον τρόπο υπολογισμού των αθροισμάτων χρησιμοποιώντας το διαθέσιμο εποπτικό υλικό. Στη συνέχεια, επαναλάβαμε όλοι μαζί τα αριθμητικά δεδομένα του 10. Παρατήρησα πως οι μαθητές τα θυμούνται καλά κι έτσι τους ζήτησα να συμπληρώσουν ατομικά την πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας. Στην άσκηση αυτή, όλοι οι μαθητές εργάστηκαν σωστά και γρήγορα, εκτός από τον Μαθητής 3 ο οποίος μετρούσε με τα δάχτυλά του προκειμένου να βρει τα «*ζευγαράκια*» του 10. Κατάφερε να βρει σωστά τα συμπληρώματα σε κάθε άθροισμα.

Συνεχίζοντας στην επόμενη άσκηση, τα παιδιά εργάζονταν ομαδικά και καθένα με τη σειρά εξηγούσε δυνατά πως υπολογίζει το άθροισμα χρησιμοποιώντας το εποπτικό υλικό και την αριθμογραμμή. Έτσι, όλοι μπορούσαν να δουν τον τρόπο εργασίας και να τον εμπεδώσουν. Η πρόσθετη δεξιότητα, που απαιτούνταν κατά την εργασία αυτή, ήταν το να βρίσκουν οι μαθητές την επόμενη, μεγαλύτερη του α΄ προσθετέου, 'στρόγγυλη' δεκάδα. Για το λόγο αυτό η Μαθήτρια 1 έδειξε τις δεκάδες στην αριθμογραμμή (10-20-30-40-50-60-70-80-90-100) και τις διαβάσαμε φωναχτά όλοι μαζί.

Κατά τη διάρκεια του 8ου μαθήματος ασχοληθήκαμε με τις πέντε πρώτες προσθέσεις, ώστε κάθε παιδί να μιλήσει από μία φορά. Ο Μαθητής 4 υπολόγισε δυνατά το πρώτο άθροισμα με μονοψήφιους προσθετέους (7+5). Χρησιμοποίησε το πλαίσιο του 10, τοποθέτησε τα κυβάκια και μέτρησε τις άδειες θέσεις για να βρει το συμπλήρωμα, παρόλο που νωρίτερα βρήκε σωστά τα αριθμητικά δεδομένα του 10. Τη συνέχεια της διαδικασίας δεν τη θυμόταν, οπότε του έκανα καθοδηγητικές ερωτήσεις *(«Αφού πήρες 3 από το 5, πόσο σου έμεινε ακόμη να προσθέσεις;»)* για να βρει το τελικό άθροισμα. Η Μαθήτρια 1 βρήκε το συμπλήρωμα του 10 χωρίς να μετρήσει, αλλά ούτε εκείνη θυμόταν τη συνέχεια της διαδικασίας, οπότε χρειάστηκε να τη βοηθήσω με ερωτήσεις. Δυσκολεύτηκε επίσης, στο να βρει την επόμενη 'στρόγγυλη' δεκάδα μετά το 35. Για να τη βρει, βοηθήθηκε από την αριθμογραμμή. Ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 βρήκαν την επόμενη δεκάδα και το συμπλήρωμα του 10 σωστά. Στη συνέχεια, μέτρησαν τα κυβάκια που είχαν μείνει και απάντησαν σωστά. Ο Μαθητής 3 δεν μπόρεσε να ακολουθήσει τα βήματα της διαδικασίας και τον κατηύθυνα, ώστε να βρει την επόμενη δεκάδα, το συμπλήρωμα του 10 και το τελικό αποτέλεσμα. Παρόλο που τα παιδιά δυσκολεύονταν με τη διαδικασία και σε αυτή τη συνάντησή μας, είχαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με την προηγούμενη.

Κατά τη διάρκεια του 9ου μαθήματος συνεχίσαμε με τις προσθέσεις του φύλλου εργασίας και τη χρήση του εποπτικού υλικού, όμως συμπληρωματικά, οι μαθητές ασχολήθηκαν και με την αντίστοιχη δραστηριότητα του λογισμικού προγράμματος (πλαίσιο του 10 και κυβάκια). Κάθε παιδί υπολόγισε τις προσθέσεις ακολουθώντας τη νέα στρατηγική, χρησιμοποιώντας σε κάποιες το εποπτικό υλικό και σε άλλες το λογισμικό πρόγραμμα. Η διαδικασία ήταν η ίδια. Τα παιδιά εργάζονταν ατομικά αυτή τη φορά. Παρατηρώντας τον τρόπο εργασίας τους, συμπέρανα πως ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 κατανόησαν τη στρατηγική και την εφάρμοσαν σωστά. Ο Μαθητής 4 έκανε πάλι λάθη στην αποδόμηση του β΄ προσθετέου και γι' αυτό του τόνισα πως πρέπει να μετράει τα κυβάκια που μένουν αφού συμπληρώσει η δεκάδα. Το ίδιο λάθος έκανε και η Μαθήτρια 1, αλλά στη συνέχεια έβρισκε σωστά τα αποτελέσματα. Ο Μαθητής 3 χρειάστηκε σε όλες τις προσθέσεις καθοδήγηση. Στις τελευταίες, καθώς εργαζόταν στον υπολογιστή, βρήκε σωστά αποτελέσματα, όμως θα του είναι δύσκολο να θυμάται τη διαδικασία και μετά από λίγες μέρες. Στο τέλος και των δύο μαθημάτων τα παιδιά επιβραβεύτηκαν για την προσπάθειά τους με αυτοκόλλητα.

Συμπερασματικά, η εφαρμογή και κατανόηση της παραπάνω στρατηγικής δυσκόλεψε πολύ τους μαθητές, οι οποίοι είχαν μάθει να εφαρμόζουν σε όλες τις προσθέσεις τη μέτρηση προς τα πάνω. Θα έχει ενδιαφέρον, στη συνέχεια, η παρατήρηση της διατήρησης της νέας αυτής γνώσης.

<u>Μάθημα 10^{ο}:</u>

Γνωστικοί στόχοι: Εισαγωγή στην εκμάθηση της οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο.

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες), καρτέλα τοποθέτησης τρισδιάστατων δεκάδων - μονάδων

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Σε αυτή τη συνάντηση με τους μαθητές βασικός στόχος ήταν η εισαγωγή τους στην εκμάθηση της οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων αριθμών. Ξεκινώντας το μάθημα, κάναμε μία σύντομη επανάληψη, με παραδείγματα στον πίνακα, των μεθόδων που είχαμε μάθει μαζί για την πρόσθεση των διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς. Στη συνέχεια, περάσαμε στο νέο γνωστικό στόχο, τον οποίο παρουσίασα στα παιδιά μέσω μετωπικής διδασκαλίας, χρησιμοποιώντας τις ράβδους δεκάδων, τα κυβάκια και την καρτέλα τοποθέτησης των τρισδιάστατων υλικών. Έτσι, εξήγησα τον τρόπο εργασίας μας κατά την οριζόντια πρόσθεση διψήφιων και το πως προκύπτει το άθροισμα κάθε φορά. Κατόπιν, οι μαθητές εργάστηκαν πάνω στην άσκηση 1 του σχετικού φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα) και ο καθένας εξηγούσε δυνατά (προφορική εξωτερίκευση) τον τρόπο εργασίας του, όταν ερχόταν η σειρά του.

Κατά την εργασία των μαθητών, παρατήρησα πως, αρχικά, δύο από τα παιδιά δυσκολεύτηκαν να τοποθετήσουν σωστά τις δεκάδες και τις μονάδες στην καρτέλα, παρόλο που είχαν εργαστεί με τον ίδιο τρόπο σε προηγούμενο μάθημα. Πιο συγκεκριμένα, η Μαθήτρια 1, αντί να τοποθετήσει 1 δεκάδα και 6 μονάδες στις αντίστοιχες θέσεις της καρτέλας, τοποθέτησε 16 κυβάκια-μονάδες στη θέση των μονάδων. Το ίδιο λάθος έγινε και από τον Μαθητής 3, όταν ήρθε η σειρά του. Τότε, χρειάστηκε να διακόψουμε τη διαδικασία για να υπενθυμίσω στα παιδιά την αξία της δεκάδας σε σχέση με τις μονάδες. Ακόμη, ο Μαθητής 3 εργαζόταν με πολύ αργούς ρυθμούς στις προσθέσεις, καθώς χρησιμοποιούσε τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω και τα δάχτυλά του στους υπολογισμούς των βασικών αριθμητικών δεδομένων, όπως στο άθροισμα «*4M+5M=;*», στο οποίο απάντησε λανθασμένα '*8 μονάδες*'. Ο Μαθητής 4 τοποθετούσε σωστά το εποπτικό υλικό στην καρτέλα, όμως έκανε ορισμένα λάθη στους υπολογισμούς, για παράδειγμα έγραψε «*3M+6M=10M και 4Δ+3Δ=8Δ*». Για να διορθώσουν τα λάθη τους στα αθροίσματα ζήτησα από τους μαθητές να μετρήσουν δυνατά, ξεκινώντας από το μεγαλύτερο αριθμό. Οι απαντήσεις τους ήταν σωστές.

Ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 1 έκαναν βιαστικά τους υπολογισμούς χωρίς να εργαστούν με το εποπτικό υλικό. Έτσι, έγιναν λάθη στους υπολογισμούς των αθροισμάτων. Ο Μαθητής 2 σε δύο από τα αθροίσματα τοποθέτησε το αποτέλεσμα τον μονάδων στη θέση των δεκάδων και αντίστροφα. Ο Μαθητής 1 στην πρώτη από τις προσθέσεις τοποθέτησε το διψήφιο αποτέλεσμα στη θέση των μονάδων. Διόρθωσε, όταν παρακολούθησε ξανά τον τρόπο εργασίας μας, καθώς σε κάθε άθροισμα κάποιο από τα παιδιά περιέγραφε τη διαδικασία δυνατά. Όταν τους ζήτησα να εργαστούν με το εποπτικό υλικό δεν έκαναν λάθη. Στο τέλος, τα παιδιά επιβραβεύτηκαν για την εργασία τους με αυτοκόλλητο.

Συμπερασματικά, οι μαθητές χρειάζονται περισσότερο χρόνο και εξάσκηση για την κατανόηση και εκμάθηση της νέα γνώσης. Τα λάθη τους δείχνουν πως ακόμη δεν είναι εξοικειωμένοι σε μεγάλο βαθμό με τις έννοιες της θεσιακής αξίας και πως δεν τις έχουν κατανοήσει απόλυτα. Οπότε και στην επόμενη συνάντησή μας θα ασχοληθούμε με το ίδιο γνωστικό αντικείμενο.

Μάθημα 11^{ο}:

Γνωστικοί στόχοι: Εφαρμογή και κατανόηση της οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες), καρτέλα τοποθέτησης τρισδιάστατων δεκάδων - μονάδων

Λογισμικό πρόγραμμα: χρήση του προγράμματος Virtual Manipulatives

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Σε αυτή τη συνάντηση με τους μαθητές συνεχίσαμε την εργασία μας με στόχο την κατανόηση της οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων χωρίς κρατούμενο. Οι μαθητές εργάστηκαν με το σχετικό εποπτικό υλικό, αλλά και στον υπολογιστή με το πρόγραμμα Virtual Manipulatives. Στην αρχή του μαθήματος συζητήσαμε για τον τρόπο εργασίας μας σε αυτού του είδους τις προσθέσεις. Ο Μαθητής 1 υπενθύμισε στην ολομέλεια της τάξης πως; *«Για να βρούμε πόσο κάνει προσθέτουμε τα πορτοκαλί ραβδάκια μόνα τους και τα άσπρα κυβάκια μόνα πάλι»*. Έτσι, έδειξα ξανά στα παιδιά τον τρόπο εργασίας μας, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα, όπου υπάρχουν οι δεκάδες και οι μονάδες στην ίδια μορφή με αυτή του εποπτικού υλικού που χειρίζονται οι μαθητές.

Τα παιδιά εξασκήθηκαν στη στρατηγική πρόσθεσης υπολογίζοντας τα αθροίσματα της άσκησης 2 του αντίστοιχου φύλλου εργασίας (κοινό με το φύλλο εργασίας του 10^{ου} μαθήματος). Κάθε παιδί χρησιμοποιούσε το εποπτικό υλικό, όταν ερχόταν η σειρά του να εξηγήσει δυνατά πως υπολογίζουμε το αποτέλεσμα. Ταυτόχρονα, εργάζονταν με τη βοήθεια του λογισμικού προγράμματος, ώστε η διαδικασία να είναι πιο ευχάριστη κι ενδιαφέρουσα γι’ αυτούς.

Ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 δεν έκαναν τα ίδια λάθη με το προηγούμενο μάθημα, καθώς τοποθετούσαν σωστά τις δεκάδες και τις μονάδες στις αντίστοιχες θέσεις. Μετά τις πρώτες προσθέσεις εργάζονταν κάνοντας τους υπολογισμούς με το νου. Ο Μαθητής 2 έκανε λίγα λάθη καθώς υπολόγιζε τις δεκάδες και τις μονάδες των αθροισμάτων, τα οποία εύκολα διόρθωσε όταν του τα επισήμανα. Ο Μαθητής 1 εργάστηκε με περισσότερη επιμέλεια κι έτσι δεν είχε λάθη στους υπολογισμούς του. Η Μαθήτρια 1 εργάστηκε με περισσότερη ευχέρεια σε αυτό το μάθημα, χρησιμοποιώντας το λογισμικό πρόγραμμα. Τοποθετούσε σωστά δεκάδες και μονάδες και οι υπολογισμοί της ήταν σωστοί. Ένα λάθος που έκανε ήταν στην ανάλυση των προσθετέων, καθώς έγραψε *«33+22=(3+2)+(3+2)=55»*, παρόλο που στις προηγούμενες προσθέσεις είχε αναλύσει σωστά κάθε αριθμό σε δεκάδες και μονάδες. Διόρθωσε, όταν τη ρώτησα για την αξία του πρώτου ψηφίου στους διψήφιους αριθμούς και δεν το επανέλαβε. Επίσης, ο Μαθητής 4 εργάστηκε με μεγαλύτερη άνεση σε αυτό το μάθημα από το προηγούμενο. Χρησιμοποίησε σωστά το εποπτικό υλικό και περιέγραψε σωστά τα βήματα της πρόσθεσης. Ακόμη, βοηθήθηκε από το λογισμικό πρόγραμμα, καθώς οι υπολογισμοί του δεν είχαν λάθη αυτή τη φορά. Παρατήρησα, όμως, πως μετρούσε όλες τις μονάδες σε ορισμένες περιπτώσεις, αντί να τις υπολογίζει.

Αντιθέτως, ο Μαθητής 3 δυσκολεύτηκε πολύ και σε αυτό το μάθημα με τις συγκεκριμένες προσθέσεις. Δεν μπορούσε να αναλύσει σωστά τους προσθετέους, παρόλο που σχημάτιζε σωστά τους διψήφιους με το εποπτικό υλικό. Για παράδειγμα, έγραψε επανειλημμένα τις δεκάδες χωρίς μηδενικό (π.χ. *«35+34=(**3**+**3**)+(5+4)=69»*). Για να παρατηρήσει τη διαφορά της αξίας χρησιμοποίησα το εποπτικό υλικό δεκάδων και μονάδων. Στις τελευταίες τρεις προσθέσεις δεν έκανε το παραπάνω λάθος. Ακόμη, οι υπολογισμοί του ήταν πολύ αργοί και μετρούσε τα κυβάκια για να βρει το άθροισμα των μονάδων και τις ράβδους για να βρει το άθροισμα των δεκάδων. Δηλαδή, δε χρησιμοποιούσε τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω, με την οποία εργάστηκε επιτυχώς σε προηγούμενα φύλλα εργασίας. Το γεγονός αυτό δείχνει πως δεν κατέκτησε πλήρως τη στρατηγική αυτή, ώστε να τη χρησιμοποιεί όταν εργάζεται μόνος, παρόλο που την εφαρμόζει σωστά όταν του το ζητάω. Γίνεται, λοιπόν, φανερό πως, σε μία απαιτητική εργασία, χρησιμοποιεί μεθόδους πιο εύκολες γι' αυτόν και δεν εφαρμόζει έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού αθροισμάτων, καθώς τον δυσκολεύει περισσότερο.

Στην επόμενη εργασία του φύλλου εργασίας, οι μαθητές κλήθηκαν να κάνουν τους υπολογισμούς με το νου, χωρίς να αναλύσουν τους προσθετέους σε δεκάδες και μονάδες, αλλά μπορούσαν να χρησιμοποιούν το εποπτικό υλικό ή το λογισμικό πρόγραμμα. Ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 εργάστηκαν σωστά σε αυτούς τους υπολογισμούς, χωρίς να χρησιμοποιήσουν το εποπτικό υλικό. Ο Μαθητής 4, αφού χρωμάτισε με το ίδιο χρώμα τις δεκάδες και με άλλο χρώμα τις μονάδες, απάντησε σωστά. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 δεν πρόλαβαν να ασχοληθούν με την άσκηση αυτή, καθώς οι ρυθμοί εργασίας τους ήταν πιο αργοί από των υπολοίπων. Στο τέλος, κάθε παιδί επιβραβεύτηκε με ένα αυτοκόλλητο για την προσπάθειά του.

Συμπερασματικά, η εφαρμογή της παραπάνω στρατηγικής για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών δυσκόλεψε τους μαθητές, οι οποίοι εξασκήθηκαν αρκετά για να πετύχουν το γνωστικό στόχο του μαθήματός μας. Οι τέσσερις μαθητές, εκτός από τον Μαθητή 3, εφάρμοσαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τη στρατηγική σε αυτό το μάθημα, αλλά δεν είναι σίγουρο πως την κατέκτησαν, ώστε να διατηρήσουν τη γνώση αυτή και να την εφαρμόζουν με ακρίβεια, χωρίς να χρειάζονται καθοδήγηση. Ο Μαθητής 3 εξακολουθεί να δυσκολεύεται σημαντικά με τις έννοιες της θεσιακής αξίας και με τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω, οπότε δεν μπορεί να κατακτήσει πιο σύνθετους γνωστικούς στόχους με ευκολία.

Μάθημα 12^{ο}:

Γνωστικοί στόχοι: Εμπέδωση και απόκτηση ευχέρειας στον υπολογισμό οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο, Εισαγωγή στην κάθετη πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο.

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες), καρτέλα τοποθέτησης τρισδιάστατων δεκάδων – μονάδων

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Κατά τη διάρκεια αυτής της συνάντησης με τους μαθητές, ασχοληθήκαμε επαναληπτικά με την οριζόντια πρόσθεση, με στόχο να εξασκηθούν ατομικά και να αποκτήσουν ευχέρεια όσοι στο προηγούμενο μάθημα έδειξαν να κατανοούν αυτόν τον τρόπο υπολογισμού. Όσον αφορά στον Μαθητής 3, ο οποίος δυσκολεύτηκε σημαντικά και δεν μπόρεσε να κατακτήσει τη νέα γνώση, επαναλάβαμε τα βήματα της στρατηγικής με τη χρήση του εποπτικού υλικού.

Αρχικά, οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά στην πρώτη άσκηση του αντίστοιχου φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα). Όποιος ήθελε μπορούσε να χρησιμοποιήσει τις ράβδους των δεκάδων και τα κυβάκια. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 4 εργάστηκαν σχηματίζοντας τους αριθμούς με το εποπτικό υλικό, ενώ ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 εργάστηκαν με το νου. Ο Μαθητής 4 χρωμάτισε και πάλι τις δεκάδες και τις μονάδες με διαφορετικό χρώμα, έτσι βοηθήθηκε και δεν έκανε λάθη στους υπολογισμούς του. Τα άλλα τρία παιδιά, ο Μαθητής 1, ο Μαθητής 2 και η Μαθήτρια 1, είχαν σωστά τα αποτελέσματα. Ο Μαθητής 3 εργάστηκε με τη δική μου καθοδήγηση. Στις πρώτες προσθέσεις σχημάτιζε τις δεκάδες και τις μονάδες με το εποπτικό υλικό και τις πρόσθετε ξεχωριστά για να βρει το αποτέλεσμα. Προσπάθησα να του θυμίζω τη μέτρηση προς τα πάνω, ώστε να μην καθυστερεί και κουράζεται στους υπολογισμούς του. Στη συνέχεια, εργάστηκε όπως ο Μαθητής 4, δηλαδή χρωμάτισε τις δεκάδες και τις μονάδες με διαφορετικό χρώμα, τις πρόσθετε ξεχωριστά κι έγραφε το αποτέλεσμα. Σε ορισμένα αθροίσματα έγραψε ανάποδα το άθροισμα των μονάδων και των δεκάδων, π.χ. στο 80+17 έγραψε 79. Διόρθωσε, όταν του υπενθύμισα πως το άθροισμα των δεκάδων (κόκκινο χρώμα) γράφεται μπροστά, ενώ των μονάδων (πράσινο χρώμα) γράφεται πίσω. Παρόλο που ο Μαθητής 3 είχε καλύτερη επίδοση σε αυτή τη δραστηριότητα, δε χειρίζεται με ευχέρεια και ακρίβεια τη στρατηγική πρόσθεσης διψήφιων.

Πριν να προχωρήσουν στην επόμενη δραστηριότητα του φύλλου εργασίας, έδειξα στους μαθητές τη στρατηγική της κάθετης πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο. Με τη χρήση του εποπτικού υλικού και με παραδείγματα στον πίνακα της τάξης εξήγησα πως τοποθετούνται κάθετα οι αριθμοί και τα βήματα που ακολουθούμε για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα. Τα βήματα της στρατηγικής τα έγραψα στον πίνακα, ώστε να τα ακολουθούν τα παιδιά κατά την εξάσκηση. Στη συνέχεια, τα παιδιά κλήθηκαν να τοποθετούν κάθετα τους αριθμούς των οριζόντιων προσθέσεων και να ελέγχουν αν τα αποτελέσματα είναι ίδια κάθε φορά.

Αρχικά δυσκολεύτηκαν με αυτόν τον τρόπο εργασίας. Παρατήρησα πως δε θυμούνταν πως τοποθετούμε κάθετα τους αριθμούς, παρόλο που σε προηγούμενο μάθημα εργάστηκαν με κάθετες προσθέσεις διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό. Η Μαθήτρια 1, στο άθροισμα 23+36 τοποθέτησε το 23 στη στήλη των δεκάδων και το 36 στη στήλη των μονάδων. Ο Μαθητής 4 και ο Μαθητής 2 σε ορισμένες προσθέσεις τοποθετούσαν τα ψηφία στην αντίθετη στήλη από τη σωστή. Ο Μαθητής 3 δεν μπόρεσε να εργαστεί μόνος και ζήτησε τη βοήθειά μου για να τοποθετήσει τους προσθετέους στα πινακάκια. Ο Μαθητής 1 εργάστηκε ατομικά και πήγε πολύ καλά στους υπολογισμούς. Για να διορθώσουν τα λάθη τους και να κατανοήσουν τα βήματα της κάθετης πρόσθεσης, κάθε παιδί εξηγούσε δυνατά τον τρόπο εργασίας του (προφορική εξωτερίκευση) και σε περίπτωση δυσκολίας του έκανα ερωτήσεις καθοδήγησης. Μάλιστα, χρησιμοποιήσαμε ξανά τα χρώματα, κόκκινο για τις δεκάδες και πράσινο για τις μονάδες, ώστε να θυμούνται πως τις προσθέτουμε ξεχωριστά. Στο τέλος, παρατήρησα πως με αυτό τον τρόπο (προφορική επεξήγηση, χρήση χρωμάτων), οι μαθητές θυμούνταν τα βήματα και έκαναν σωστούς υπολογισμούς. Ο Μαθητής 3 τα κατάφερε καλύτερα σε αυτό το μάθημα, αν και του παρείχα συνεχή καθοδήγηση. Τέλος, οι μαθητές επιβραβεύτηκαν με αυτοκόλλητα.

Συμπερασματικά, σε αυτό το μάθημα, οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στις οριζόντιες προσθέσεις. Ο Μαθητής 3 και ο Μαθητής 4 βοηθήθηκαν από την τεχνική χρωματισμού των ψηφίων των δεκάδων και των μονάδων και έκαναν πιο σωστούς υπολογισμούς. Όσον αφορά στις κάθετες προσθέσεις, χρειάζεται περισσότερος χρόνος και εξάσκηση ώστε οι μαθητές να κατακτήσουν αυτή τη μέθοδο υπολογισμού πρόσθεσης διψήφιων αριθμών.

Μάθημα 13^{ο}:

Γνωστικοί στόχοι: Κατάκτηση και απόκτηση ευχέρειας στην κάθετη πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο, εξάσκηση στην εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες), αριθμογραμμή με χάντρες και με νούμερα

Λογισμικό πρόγραμμα: χρήση του προγράμματος Virtual Manipulatives

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Σε αυτό το μάθημα τα παιδιά εξασκήθηκαν στην κάθετη πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο, με στόχο να αποκτήσουν ευχέρεια και ακρίβεια στην εφαρμογή αυτής της στρατηγικής πρόσθεσης. Επίσης, εργάστηκαν πάνω στην εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος κι εξασκήθηκαν στο να μετρούν ανά 10 και ανά 20.

Αρχικά, κάναμε μία εισαγωγική συζήτηση για τα βήματα που ακολουθούμε στην κάθετη πρόσθεση (αναγνώριση δεκάδων και μονάδων, σωστή τοποθέτηση ψηφίων, πρόσθεση των ψηφίων βάσει της θέσης τους, ανάγνωση του αθροίσματος). Παρατήρησα πως τα παιδιά θυμούνταν αρκετά καλά τα βήματα, οπότε ξεκίνησαν να εργάζονται ατομικά στην πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα). Ταυτόχρονα, σχηματίζοντας τους προσθετέους στο πρόγραμμα Virtual Manipulatives, μπορούσαν να ελέγχουν αν υπολόγισαν σωστά τα αθροίσματα.

Ο Μαθητής 1 , ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4 εργάστηκαν πολύ σωστά και με ταχύτητα στην άσκηση αυτή. Η Μαθήτρια 1 ζήτησε τη βοήθειά μου προκειμένου να τοποθετήσει σωστά τους προσθετέους, αλλά μόνο στις πρώτες προσθέσεις. Στη συνέχεια εργάστηκε μόνη της χρωματίζοντας με διαφορετικά χρώματα τις δεκάδες και τις μονάδες. Με τον τρόπο αυτό δεν έκανε λάθη στην τοποθέτηση των ψηφίων, παρά μόνο σε ορισμένους υπολογισμούς. Ο Μαθητής 3 χρειάστηκε περισσότερο τη βοήθειά μου στην τοποθέτηση των προσθετέων και στους υπολογισμούς. Αρκετές φορές του υπενθύμισα τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω προκειμένου να βρίσκει τα αθροίσματα. Επίσης, κανένα από τα παιδιά δεν έκανε λάθη στην αναπαράσταση των αριθμών με δεκάδες και μονάδες κατά τη χρήση του λογισμικού προγράμματος. Ο Μαθητής 3, ενώ στην ερώτηση *«Πόσες δεκάδες έχει το 23;»* απάντησε *«23»*, γεγονός που δείχνει ότι δεν έχει κατανοήσει την έννοια της δεκάδας, σχημάτισε σωστά τον αριθμό στο λογισμικό πρόγραμμα. Συνεπώς, βοηθιέται πολύ από την οπτική αναπαράσταση των αριθμών, καθώς οι έννοιες είναι ακόμη δύσκολες γι' αυτόν στην κατανόηση.

Στη συνέχεια, οι μαθητές κλήθηκαν να μετρήσουν δυνατά ανά 10 και ανά 20, ξεκινώντας από έναν τυχαίο αριθμό. Στο σημείο αυτό χρησιμοποίησα το εποπτικό υλικό (ράβδοι δεκάδων και κυβάκια) κι έδειξα στην αριθμογραμμή πως, προσθέτοντας τη «*στρόγγυλη*» δεκάδα, οι δεκάδες αλλάζουν κατά 1 ή 2, ενώ οι μονάδες μένουν ίδιες. Τα παιδιά κατάφεραν να μετρούν σωστά ανά 10 και ανά 20, καθώς είχαμε ασχοληθεί με τον ίδιο στόχο και σε προηγούμενο μάθημα. Ο Μαθητής 3 ήταν πιο αργός στο 'ανέβασμα' ανά 10 και ανά 20, μετρούσε τις δεκάδες με τα δάχτυλά του, αλλά απάντησε σωστά στις προφορικές ασκήσεις. Για τον υπολογισμό του συμπληρώματος του αθροίσματος, ζήτησα από τους μαθητές να σκέφτονται ως εξής: *«Πόσα χρειάζεται να 'βάλω' μέχρι να φτάσω στο αποτέλεσμα;»* και να μετρούν την απόσταση μεταξύ α΄ προσθετέου και αθροίσματος. Με τον τρόπο αυτό υπολόγισαν σχετικά εύκολα τα συμπληρώματα, αν και σε αυτή την άσκηση εργάστηκαν με καθοδήγηση και όχι ατομικά. Κάθε παιδί περιέγραφε δυνατά τον τρόπο σκέψης του (προφορική εξωτερίκευση) κάθε φορά που ερχόταν η σειρά του, δείχνοντας το συμπλήρωμα στην αριθμογραμμή από χάντρες ή στην αριθμογραμμή με τα νούμερα. Ο Μαθητής 4, ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 2 βρήκαν σωστά τα συμπληρώματα, ενώ η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 δυσκολεύτηκαν περισσότερο. Ο Μαθητής 3 είχε πολλά λάθη στους υπολογισμούς, όπως για παράδειγμα στο *73+__= 93* συμπλήρωσε ***23*** αντί για 20. Για να τους βοηθήσω, χρησιμοποιήσαμε μαζί την αριθμογραμμή με τα νούμερα, ώστε να προσθέτουν ολόκληρες δεκάδες και να βρίσκουν το αποτέλεσμα. Η Μαθήτρια 1 έκανε πιο σωστούς υπολογισμούς μόλις κατάλαβε τον τρόπο εργασίας μας. Ο Μαθητής 3 δεν κατάφερε να υπολογίσει σωστά τα συμπληρώματα χωρίς καθοδήγηση από εμένα ή τους συμμαθητές του. Στο τέλος του μαθήματος οι μαθητές επιβραβεύτηκαν για την προσπάθειά τους με αυτοκόλλητο.

Συμπερασματικά, τα παιδιά κατανόησαν σε μεγαλύτερο βαθμό την κάθετη πρόσθεση διψήφιων χωρίς κρατούμενο σε αυτή τη συνάντηση. Ο Μαθητής 2 , ο Μαθητής 1 και ο Μαθητής 4 απέκτησαν ταχύτητα και ευχέρεια στις πράξεις αυτές. Η Μαθήτρια 1 έμαθε να τοποθετεί σωστά τα ψηφία, αλλά εργάστηκε με πιο αργούς ρυθμούς. Ο Μαθητής 3 χρειάζεται καθοδήγηση, όμως βελτιώνεται στους υπολογισμούς προσπαθώντας να χρησιμοποιεί τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω. Όσον αφορά στην εύρεση των συμπληρωμάτων, τα παιδιά κατάφεραν να βρίσκουν σωστά τον προσθετέο που λείπει χρησιμοποιώντας τις αριθμογραμμές. Ο Μαθητής 3 και η Μαθήτρια 1 δυσκολεύτηκαν περισσότερο σε αυτή τη δραστηριότητα, αλλά η χρήση του εποπτικού υλικού βοηθά τους υπολογισμούς τους.

Μάθημα 14^{ο}:

Γνωστικοί στόχοι: Εξάσκηση και εμπέδωση της κάθετης και οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων αριθμών με κρατούμενο, εξάσκηση και απόκτηση ευχέρειας στην εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: αριθμογραμμή με χάντρες και με αριθμούς, ράβδοι Cuisenaire (δεκάδες), κυβάκια (μονάδες)

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Κατά τη διάρκεια αυτού του μαθήματος, κύριος στόχος ήταν η εμπέδωση και η εξάσκηση των μαθητών στη στρατηγική πρόσθεσης διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο, σε οριζόντιες και κάθετες προσθέσεις, την οποία ήδη διδάχθηκαν. Καθώς εξοικειώθηκαν αρκετά με τη χρήση του εποπτικού υλικού, μπορούν να κάνουν πλέον συνδυασμούς κατά τη διαδικασία της πρόσθεσης. Για παράδειγμα, ο Μαθητής 1 στο άθροισμα *56+31* ανέλυσε τους διψήφιους και είπε: *«Ξέρω ότι 50 και 30 μας κάνει 80. Βάζω και άλλα 6, μας κάνει 86. Βάζω και άλλο ένα μας κάνει 87».* Αυτός ο τρόπος σκέψης δείχνει πως κατανόησε τη διαφορά της θεσιακής αξίας και προσθέτει ξεχωριστά δεκάδες και μονάδες. Στην πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα) οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά και χρησιμοποιούσαν το εποπτικό υλικό μόνο αν το χρειάζονταν. Ο Μαθητής 1, ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4 εργάστηκαν με το νου, χωρίς να κάνουν λάθη στους υπολογισμούς. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 συνεργάστηκαν αυτή τη φορά και χρησιμοποιούσαν μαζί το εποπτικό υλικό. Τα δύο παιδιά τοποθετούσαν σωστά τους αριθμούς στις κάθετες προσθέσεις και οι περισσότεροι υπολογισμοί τους ήταν σωστοί. Ο Μαθητής 3 βοηθήθηκε από την Μαθήτρια 1 στους υπολογισμούς του, ενώ χρησιμοποιούσε τα δάχτυλά του στην εύρεση μερικών αθροισμάτων.

Στην επόμενη δραστηριότητα οι μαθητές εργάστηκαν πάλι ατομικά με στόχο να εξασκηθούν περισσότερο στις μετρήσεις ανά 10 και ανά 20, καθώς και στην εύρεση του συμπληρώματος αθροίσματος. Πριν ξεκινήσουν να εργάζονται, κάναμε προφορικές ασκήσεις όπου οι μαθητές μετρούσαν ανά 10 και ανά 20. Τα τέσσερα από τα παιδιά μπόρεσαν με ευκολία να ανταποκριθούν στη δραστηριότητα αυτή, οπότε συμπλήρωσαν σωστά τις αλυσίδες των αριθμών και βρήκαν τα συμπληρώματα. Η Μαθήτρια 1 έκανε ορισμένα λάθη στην εύρεση του συμπληρώματος, όπως για παράδειγμα στην παρακάτω πράξη έγραψε: 68+**20** = 78 (αντί για 10). Της ζήτησα να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή με τις χάντρες για να υπολογίσει το συμπλήρωμα. Έτσι, αφού μέτρησε τη διαφορά, βρήκε τη σωστή απάντηση. Ο Μαθητής 3 μετρούσε με τα δάχτυλα τις δεκάδες ή κοιτούσε την αριθμογραμμή. Παρατήρησα ότι χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή με τα νούμερα βρίσκει σωστά το συμπλήρωμα κάθε αθροίσματος, αλλά δεν μπορεί να το υπολογίσει με το νου. Τέλος, οι μαθητές επιβραβεύτηκαν με αυτοκόλλητο για την προσπάθειά τους.

Συμπερασματικά, οι μαθητές διατηρούν την ακρίβεια στην εφαρμογή της στρατηγικής που διδάχθηκαν για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο. Ακόμη και οι μαθητές που δυσκολεύονταν κατάφεραν με πιο αργούς ρυθμούς να υπολογίζουν σωστά τα αθροίσματα. Όσον αφορά στην εύρεση των συμπληρωμάτων, η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 δυσκολεύονται περισσότερο, καθώς πρόκειται για πιο σύνθετη διαδικασία. Η χρήση των αριθμογραμμών τους βοηθά σημαντικά.

Μάθημα 15^{o}:

Γνωστικοί στόχοι: Επανάληψη των στρατηγικών που διδάχθηκαν οι μαθητές για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο (μέτρηση προς τα πάνω, κάθετη και οριζόντια πρόσθεση, αποδόμηση β΄ προσθετέου), εξάσκηση και απόκτηση ευχέρειας στη μέτρηση ανά 10, ανά 20 και στην εύρεση συμπληρώματος προσθετέου.

Διάρκεια: 40 λεπτά

Εποπτικό υλικό: αριθμογραμμή με χάντρες και νούμερα

Πορεία διδασκαλίας και παρατηρήσεις:

Σε αυτό το τελευταίο μάθημα, στόχος των ασκήσεων 2 και 3 του αντίστοιχου φύλλου εργασίας (βλ. παράρτημα) είναι οι μαθητές να κάνουν επανάληψη πάνω στις στρατηγικές που έμαθαν για να προσθέτουν διψήφιους αριθμούς χωρίς κρατούμενο. Οι στρατηγικές που διδάχθηκαν ήταν η μέτρηση προς τα πάνω και η αποδόμηση του β΄ προσθετέου στην περίπτωση πρόσθεσης διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό, καθώς και η πρόσθεση ξεχωριστά των δεκάδων και των μονάδων (οριζόντια και κάθετα) στην περίπτωση των δύο διψήφιων προσθετέων. Η πρώτη άσκηση στοχεύει στην εξάσκηση και απόκτηση ευχέρειας στην εύρεση του συμπληρώματος αθροίσματος.

Αρχικά, οι μαθητές ασχολήθηκαν με τη μέτρηση ανά 10 και ανά 20, την οποία θυμούνταν καλά. Αφού κάναμε μερικές προφορικές ασκήσεις, τα παιδιά ασχολήθηκαν με την πρώτη άσκηση, στην οποία συμπλήρωσαν τις ακολουθίες των αριθμών. Ο Μαθητής 1, ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4 εύκολα και γρήγορα συμπλήρωσαν τις ακολουθίες, χωρίς λάθη. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 χρησιμοποιούσαν τα δάχτυλά τους για να βρίσκουν την επόμενη δεκάδα, αλλά συμπλήρωσαν σωστά τις αλυσίδες των αριθμών.

Στη συνέχεια, κλήθηκαν να υπολογίσουν το συμπλήρωμα του αθροίσματος, το οποίο ήταν πολλαπλάσιο του 10 (άσκηση 1Α). Αφού τους θύμισα πως εργαζόμαστε, με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, τα παιδιά εργάστηκαν ατομικά και έκαναν σωστούς υπολογισμούς. Ο Μαθητής 1, ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 4 εργάστηκαν με το νου. Η Μαθήτρια 1 και ο Μαθητής 3 χρησιμοποιούσαν την αριθμογραμμή με τα νούμερα για να βρίσκουν το συμπλήρωμα. Στην άσκηση 1Β χρειάστηκε να υπολογίσουν το συμπλήρωμα του αθροίσματος, το οποίο είναι διψήφιος αριθμός, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 10. Σε αυτή την άσκηση χρησιμοποιήσαμε πάλι την αριθμογραμμή κι έδειξα στα παιδιά πως από τον α΄ προσθετέο 'φτάνουμε' στο άθροισμα ως εξής: *«Από το 12 βάζω 10 και φτάνω στο 22. Μετά μετράω πόσα είναι μέχρι το 25, είναι 3. Οπότε 10+3=13 που χρειάζομαι ακόμη»*. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην πρώτη τους επαφή με αυτούς τους υπολογισμούς και για το λόγο αυτό εργαστήκαμε ομαδικά. Κάθε μαθητής υπολόγιζε το συμπλήρωμα περιγράφοντας δυνατά τον τρόπο που εργαζόμαστε. Ο Μαθητής 2 και ο Μαθητής 1 τα πήγαν αρκετά καλά, αφού οι υπολογισμοί τους ήταν σωστοί. Ωστόσο, η Μαθήτρια 1, ο Μαθητής 4 και ο Μαθητής 3 δυσκολεύτηκαν περισσότερο, καθώς δεν μπόρεσαν να υπολογίσουν το συμπλήρωμα χωρίς καθοδήγηση. Ταυτόχρονα, χρησιμοποιούσαν και την αριθμογραμμή με τις χάντρες για να βρίσκουν την 'απόσταση' μεταξύ των αριθμών.

Στις κάθετες και οριζόντιες προσθέσεις διψήφιων χωρίς κρατούμενο της άσκησης 2, οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά και είχαν αρκετά καλή επίδοση. Ο Μαθητής 2, ο Μαθητής 4, ο Μαθητής 1 και η Μαθήτρια1 δεν είχαν λάθη στους υπολογισμούς. Η Μαθήτρια 1 χρησιμοποίησε ξανά τα διαφορετικά χρώματα για να ξεχωρίσει τις δεκάδες από τις μονάδες, ενώ τα άλλα τρία παιδιά έκαναν τους υπολογισμούς μετρώντας με το νου ή με τα δάχτυλα, όπου δυσκολεύονταν. Ο Μαθητής 3 είχε ορισμένα λάθη, όπως για παράδειγμα στην κάθετη πρόσθεση 80+16 απάντησε 90, γεγονός που δείχνει ότι δεν έχει κατανοήσει τις ιδιότητες του 0 ή ότι δεν πρόσεξε πως το 16 έχει 6 μονάδες. Ήταν αρκετά αργός στους υπολογισμούς του και αρκετές φορές ζήτησε τη βοήθειά μου στις οριζόντιες προσθέσεις, όπου δεν μπορούσε να θυμηθεί τη διαδικασία που ακολουθούμε. Με καθοδήγηση κατάφερε να κάνει τις προσθέσεις, όμως επειδή η διαδικασία τον δυσκόλευε, έκανε τους υπολογισμούς με τα δάχτυλά του.

Στην επόμενη άσκηση, όπου οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τη μέτρηση προς τα πάνω και την αποδόμηση του β΄ προσθετέου για να βρουν τα αποτελέσματα, παρατήρησα σημαντικές διαφορές στην εφαρμογή των δύο στρατηγικών. Όλα τα παιδιά υπολόγισαν σωστά τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη μέτρηση προς τα πάνω. Σημαντικές όμως ήταν οι δυσκολίες τους στην εφαρμογή της αποδόμησης του β΄ προσθετέου. Τα βήματα της στρατηγικής αυτής τα θυμόταν μόνο ο Μαθητής 1. Οι υπόλοιποι μαθητές ζήτησαν τη βοήθειά μου. Αφού εργαστήκαμε όλοι μαζί στο πρώτο άθροισμα και τους θύμισα τα βήματα που ακολουθούμε, ζήτησα από τα παιδιά να εργαστούν ατομικά στη συνέχεια. Ο Μαθητής 2 και η Μαθήτρια 1 συμπλήρωσαν σωστά τα κενά, αλλά ο Μαθητής 4 και ο Μαθητής 3 δεν μπόρεσαν να εργαστούν σωστά. Ο Μαθητής 3 δε συμπλήρωσε τα κενά των προσθέσεων. Ο Μαθητής 4 , ενώ κατάφερε να βρει τα συμπληρώματα της δεκάδας, έκανε λάθη στο συμπλήρωμα του β΄ προσθετέου. Για παράδειγμα στο άθροισμα 34+**8** έγραψε 34+**6**=40, 40+**6**=46, δηλαδή, δεν μπόρεσε να υπολογίσει το συμπλήρωμα του 8 (**6+2**) σωστά. Ακόμη, στο άθροισμα 26+**7** έγραψε 26+**4**=30, 30+**4**=34. Στο τέλος, κάθε παιδί επιβραβεύτηκε με αυτοκόλλητο για την προσπάθειά του.

Συμπερασματικά, οι στρατηγικές που διδάχθηκαν για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών και διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς έγιναν σε διαφορετικό βαθμό κατανοητές από τους μαθητές. Για την κατανόηση και επιτυχή εφαρμογή κάθε στρατηγικής απαιτούνταν ορισμένες προϋπάρχουσες γνώσεις και δεξιότητες. Οπότε, άλλες ήταν πιο εύκολες και άλλες δυσκολότερες στην κατάκτησή τους από τα παιδιά. Από τις δυσκολίες και τα λάθη των παιδιών είναι φανερό πως η στρατηγική της αποδόμησης του β΄ προσθετέου είναι δύσκολη στο να την αντιληφθούν οι μαθητές, να κατανοήσουν τα βήματά της και να την εφαρμόσουν, καθώς απαιτεί πολύ καλή αντίληψη των αριθμητικών σχέσεων και την ικανότητα να θυμούνται τα «*βήματά*» της. Αντίθετα, η μέτρηση προς τα πάνω είναι απλούστερη στην εφαρμογή της. Φυσικά, κάθε παιδί μπορεί να διαλέξει τη στρατηγική που το διευκολύνει στους υπολογισμούς αυτών των αθροισμάτων, αρκεί να είναι αποτελεσματική.

2.3.7. Χορήγηση Post-test: Ανάλυση αποτελεσμάτων και η επίδοση των μαθητών

Μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων της εκπαιδευτικής παρέμβασης χορηγήθηκε στους πέντε μαθητές που συμμετείχαν σε αυτά το post-test (βλ. παράρτημα) προκειμένου να διαπιστωθεί η διατήρηση των γνώσεων που αποκτήθηκαν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Το post-test χορηγήθηκε μία εβδομάδα μετά το πέρας των μαθημάτων και η διεξαγωγή του διήρκησε μία διδακτική ώρα (45 λεπτά).

Το post-test σχεδιάστηκε έτσι ώστε οι ασκήσεις του να είναι αντίστοιχου επιπέδου με εκείνες του pre-test. Ταυτόχρονα, εκτός από τις ασκήσεις που ελέγχουν κοινούς γνωστικούς στόχους στα δύο test, προστέθηκαν δύο ασκήσεις για τον έλεγχο κατάκτησης και διατήρησης των νέων γνώσεων που διδάχθηκαν κατά την παρέμβαση. Πιο αναλυτικά, στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το είδος των ασκήσεων και οι γνωστικοί τους στόχοι σε κάθε ένα από τα δύο test. Οι ασκήσεις που είναι σημειωμένες με έντονα μαύρα γράμματα είναι εκείνες που ελέγχουν την κατάκτηση και διατήρηση των στρατηγικών που διδάχθηκαν για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Στο post-test δεν υπήρχαν αθροίσματα με βασικά αριθμητικά δεδομένα, καθώς η γνώση υπολογισμού τους εμπεριέχεται στις προσθέσεις διψήφιων αριθμών.

PRE-TEST *(*ΑΣΚΗΣΕΙΣ – *ΤΙ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ)*		***POST – TEST*** *(*ΑΣΚΗΣΕΙΣ – *ΤΙ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ)*	
Αθροίσματα με τα βασικά αριθμητικά δεδομένα	*Ικανότητα υπολογισμού των β.α.δ.*	Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	*Γνώση και χρήση στρατηγικών για υπολογισμό τέτοιων αθροισμάτων*
Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	*Γνώση και χρήση στρατηγικών για*	**Αθροίσματα διψήφιων**	*Γνώση και χρήση στρατηγικών για*

	υπολογισμό τέτοιων αθροισμάτων	**αριθμών (οριζόντια και κάθετα)**	*υπολογισμό τέτοιων αθροισμάτων*
Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	*Γνώση στρατηγικών για υπολογισμό συμπληρώματος αθροίσματος*	Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	*Γνώση στρατηγικών για υπολογισμό συμπληρώματος αθροίσματος*
Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	*Γνώση χρήσης των πολλαπλάσιων του 10 για γρήγορους υπολογισμούς*	Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	*Γνώση χρήσης των πολλαπλάσιων του 10 για γρήγορους υπολογισμούς*
Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	*Ικανότητα αποτελεσματικής καταμέτρησης δεκάδων και μονάδων*	Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	*Κατανόηση θεσιακής αξίας*
Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	*Κατανόηση θεσιακής αξίας*	Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	*Κατανόηση θεσιακής αξίας*
Σχηματισμός αριθμών με συγκεκριμένες μονάδες και δεκάδες στον άβακα	*Κατανόηση θεσιακής αξίας*	Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων σε διψήφιους αριθμούς και εικονιστική αναπαράσταση αυτών	*Κατανόηση θεσιακής αξίας*
Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους αριθμούς και εικονιστική	*Κατανόηση θεσιακής αξίας*	**Υπολογισμοί αθροισμάτων με χρήση της στρατηγικής**	*Γνώση και χρήση των στρατηγικών αυτών για υπολογισμό*

αναπαράσταση αυτών		**αποδόμησης του β΄ προσθετέου και της μέτρησης προς τα πάνω**	*αθροισμάτων με διψήφιους προσθετέους*

Πίνακας 9: Περιεχόμενα ασκήσεων pre & post-test και οι γνωστικοί στόχοι τους.

Η ανάλυση της επίδοσης κάθε παιδιού στις ασκήσεις του post-test μας δείχνει τις γνωστικές ικανότητές του τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, μετά την ολοκλήρωση της εκπαιδευτικής παρέμβασης.

- *Η επίδοση του Μαθητή 1* στις ασκήσεις του post-test ήταν πολύ καλή, καθώς απάντησε σωστά σχεδόν σε όλες. Συγκεκριμένα, έκανε σωστά τους υπολογισμούς των αθροισμάτων μεταξύ διψήφιων και μονοψήφιων αριθμών, όπως και στο pre-test. Υπολόγισε σωστά το συμπλήρωμα του αθροίσματος, είτε αυτό ήταν πολλαπλάσιο του 10, είτε άλλος μονοψήφιος ή διψήφιος αριθμός. Σχετικά με αυτόν τον γνωστικό στόχο παρατηρείται βελτίωση από το pre-test, καθώς σε εκείνο ο Μαθητής 1 δεν είχε μπορέσει να υπολογίσει το συμπλήρωμα του αθροίσματος στις περιπτώσεις όπου το συμπλήρωμα ήταν πολλαπλάσιο του 10 ή άλλος διψήφιος αριθμός. Επίσης, υπολόγισε σωστά τα αθροίσματα με τα πολλαπλάσια του 10, όπως και στο pre-test. Σχετικά με τις νέες γνώσεις με τις οποίες ήρθε σε επαφή κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, ο Μαθητής 1 υπολόγισε σωστά τα αθροίσματα διψήφιων αριθμών σε οριζόντιες και κάθετες προσθέσεις. Μάλιστα, κατάφερε να τοποθετήσει σωστά τους αριθμούς κάθετα. Ακόμη, εφάρμοσε σωστά την στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω και τη στρατηγική αποδόμησης του β΄ προσθετέου.

Όσον αφορά στις ασκήσεις κατανόησης της θεσιακής αξίας, έκανε σωστά την καταμέτρηση δεκάδων και μονάδων, την αναγνώριση και την εικονιστική τους αναπαράσταση, όπως και στο pre-test. Έκανε, όμως, λάθη στην ανάλυση των διψήφιων αριθμών σε δεκάδες και μονάδες, καθώς έγραψε 33 = 30Δ + 3 Μ, γεγονός που δείχνει πως δεν κατανόησε πλήρως την αξία της δεκάδας σε σχέση με την αξία της μονάδας. Στις ερωτήσεις για τη σχέση δεκάδων-μονάδων απάντησε σωστά μόνο στην πρώτη *(«Πόσες μονάδες έχει μέσα της μία δεκάδα;»)*, ενώ δεν μπόρεσε να απαντήσει στις υπόλοιπες.

Η επίδοση του Μαθητή 1 σημείωσε πρόοδο σχετικά με εκείνη του pre-test. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης παρατήρησα πως γνωρίζει τα βασικά αριθμητικά δεδομένα έως το 10, τα οποία τα ανακαλεί από τη μνήμη ή τα υπολογίζει κάνοντας αριθμητικούς συνδυασμούς (π.χ. χρήση των δίδυμων αθροισμάτων + 1). Ακόμη, μετράει σωστά ανά 10 και μπορεί να προσθέτει σωστά τα πολλαπλάσια του 10 μεταξύ τους και με μονοψήφιους αριθμούς. Χρησιμοποιεί αποτελεσματικά στρατηγικές για τον υπολογισμό αθροισμάτων με διψήφιους αριθμούς χωρίς κρατούμενο, τις οποίες δε γνώριζε πριν την εκπαιδευτική παρέμβαση. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζει σωστά τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω και κατάφερε με προσπάθεια να εκτελεί σωστά την οριζόντια και κάθετη πρόσθεση διψήφιων αριθμών, καθώς και τη στρατηγική αποδόμησης του β΄ προσθετέου. Για την εκμάθηση των στρατηγικών αυτών ωφελήθηκε σημαντικά από τη χρήση του εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος. Όσον αφορά στους γνωστικούς στόχους που σχετίζονται με τη θεσιακή αξία των ψηφίων, ενώ κατά τη διάρκεια των μαθημάτων απαντούσε σωστά σε ερωτήσεις για την ποσοτική σχέση δεκάδων-μονάδων, δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά στις αντίστοιχες ερωτήσεις του post-test. Οπότε, χρειάζεται ακόμη εξάσκηση και χρόνο για την κατανόηση των σχέσεων αυτών. Οι απαντήσεις του Μαθητή 1 στις δύο δοκιμασίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα με αριθμητικά αποτελέσματα:

Είδος άσκησης	**ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΗ 1 – ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**	
	PRE-TEST	*POST-TEST*
Αθροίσματα με τα βασικά αριθμητικά δεδομένα	9/9	--
Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	3/3	3/3
Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	4/9	6/6
Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	4/4	3/3
Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	5/6	2/2
Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	0/3	1/3
Σχηματισμός αριθμών με συγκεκριμένες μονάδες και δεκάδες στον άβακα	0/5	--
Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους αριθμούς και εικονιστική αναπαράσταση αυτών	5/10	10/10
Αθροίσματα διψήφιων αριθμών (οριζόντια και κάθετα)	--	9/9

Υπολογισμοί αθροισμάτων με χρήση της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου και της μέτρησης προς τα πάνω	--	6/6
ΣΥΝΟΛΟ (%)	60%	95,24%

Πίνακας 10: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 1 στις δύο δοκιμασίες.

- *Η επίδοση του Μαθητή 2* στο post-test παρουσιάζει βελτίωση σε σχέση με εκείνη στο pre-test. Υπολόγισε σωστά τις προσθέσεις διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας τη μέτρηση προς τα πάνω, όπως και στο pre-test. Ακόμη, υπολόγισε σωστά τις οριζόντιες προσθέσεις διψήφιων, προσθέτοντας τις δεκάδες μεταξύ τους και τις μονάδες μεταξύ τους. Όσον αφορά στους υπολογισμούς συμπληρώματος αθροίσματος, βρήκε σωστά τα συμπληρώματα που ήταν πολλαπλάσια του 10 και τους μονοψήφιους που συμπλήρωναν τη δεκάδα, αλλά έκανε λάθη στα συμπληρώματα που ήταν άλλοι διψήφιοι αριθμοί. Στην αντίστοιχη άσκηση του pre-test είχε υπολογίσει σωστά μόνο τους μονοψήφιους που συμπλήρωναν τη δεκάδα. Στις επόμενες ασκήσεις υπολόγισε σωστά τα αθροίσματα με τα πολλαπλάσια του 10, όπως και στο pre-test, και τις κάθετες προσθέσεις με διψήφιους αριθμούς. Έκανε λάθη κατά την εφαρμογή της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου, καθώς δε θυμόταν σωστά τα βήματά της. Για παράδειγμα, στην πρόσθεση *16+9* έγραψε: 16+**4**=20, 20+**20**=**40**, ενώ παραπάνω, χρησιμοποιώντας τη μέτρηση προς τα πάνω είχε βρει πως: 16+9=**25**.

Όσον αφορά στις ασκήσεις κατανόησης της θεσιακής αξίας, αντιθέτως με την επίδοσή του στο pre-test, ο Μαθητής 2 έκανε σωστά την καταμέτρηση δεκάδων και μονάδων, την ανάλυση των διψήφιων αριθμών και την εικονιστική αναπαράσταση των δεκάδων και μονάδων. Απάντησε όμως λανθασμένα στις ερωτήσεις σχετικά με την ποσοτική τους σχέση, γεγονός που φανερώνει το ότι δεν την έχει αντιληφθεί.

Η επίδοση του Μαθητή 2 σημείωσε βελτίωση μετά την εκπαιδευτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχε. Κατά την εκπαιδευτική παρέμβαση έμαθε να χρησιμοποιεί σωστά τις στρατηγικές για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο. Πιο αναλυτικά, κατέκτησε την οριζόντια και κάθετη πρόσθεση διψήφιων αριθμών, αλλά δεν κατάφερε να κατανοήσει και να εφαρμόσει με ακρίβεια τη στρατηγική αποδόμησης του β΄ προσθετέου, αν και με τη βοήθεια του εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος είχε καλύτερα αποτελέσματα κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Επίσης, χειρίζεται με ευχέρεια τα πολλαπλάσια του 10, καθώς τα προσθέτει σωστά μεταξύ τους και με μονοψήφιους αριθμούς. Κατά την παρέμβαση δείχνει να κατανόησε καλύτερα την αξία θέσης ψηφίου και να κατέκτησε τους σχετικούς γνωστικούς στόχους, αλλά χρειάζεται περισσότερος χρόνος και εξάσκηση ώστε να κατανοήσει πλήρως την ποσοτική σχέση δεκάδων-μονάδων. Στον επόμενο πίνακα αποτυπώνονται οι σωστές απαντήσεις που έδωσε ο Μαθητής 2 στις δύο δοκιμασίες:

Είδος άσκησης	**ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΗ 2 – ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**	
	PRE-TEST	*POST-TEST*
Αθροίσματα με τα βασικά αριθμητικά δεδομένα	9/9	--
Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	2/3	3/3
Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	4/9	4/6
Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	4/4	3/3
Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	3/6	2/2
Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	0/3	1/3
Σχηματισμός διψήφιων αριθμών με συγκεκριμένες μονάδες και δεκάδες στον άβακα	4/6	--
Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους αριθμούς και εικονιστική αναπαράσταση αυτών	5/10	10/10
Αθροίσματα διψήφιων αριθμών (οριζόντια και κάθετα)	--	9/9
Υπολογισμοί αθροισμάτων με χρήση της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου και της μέτρησης προς τα πάνω	--	3/6
ΣΥΝΟΛΟ (%)	62%	87,5%

Πίνακας 11: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 2 στις δύο δοκιμασίες.

- *Η επίδοση της Μαθήτριας 1* ήταν επίσης καλύτερη στο post-test από εκείνη στο pre-test. Η Μαθήτρια 1 υπολόγισε σωστά τα αθροίσματα με διψήφιους και μονοψήφιους προσθετέους, όπως επίσης τα οριζόντια και κάθετα αθροίσματα διψήφιων χωρίς κρατούμενο. Μοναδικό λάθος της ήταν το άθροισμα 27+51, όπου έγραψε 88, αντί για 78. Ακόμη, βρήκε σωστά τα συμπληρώματα αθροίσματος, είτε εκείνα ήταν πολλαπλάσια του 10, είτε άλλος διψήφιος αριθμός. Στην αντίστοιχη άσκηση του pre-test δεν είχε υπολογίσει σωστά τα συμπληρώματα αθροίσματος. Επίσης τοποθέτησε σωστά τους διψήφιους αριθμούς στις κάθετες προσθέσεις, εφάρμοσε σωστά τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω και τη στρατηγική αποδόμησης του β΄ προσθετέου, παρόλο που είχε δυσκολευτεί πολύ να την κατανοήσει κατά τη διάρκεια των μαθημάτων παρέμβασης. Στους υπολογισμούς αθροισμάτων με πολλαπλάσια του 10 δεν έκανε κανένα λάθος, σε αντίθεση με το pre-test όπου δεν είχε καταφέρει να υπολογίσει κανένα από τα αθροίσματα.

Στις ασκήσεις κατανόησης της θεσιακής αξίας έκανε σωστά την καταμέτρηση δεκάδων και μονάδων, την εικονιστική τους απεικόνιση και την ανάλυση των διψήφιων αριθμών. Ακόμη, απάντησε σωστά στις 2 από τις 3 ερωτήσεις σχετικά με την ποσοτική σχέση δεκάδων και μονάδων. Στις αντίστοιχες ασκήσεις του pre-test δεν είχε καταφέρει να κάνει την καταμέτρηση δεκάδων και μονάδων και να απαντήσει σωστά στις ερωτήσεις της ποσοτικής σχέσης μεταξύ δεκάδων-μονάδων. Στο post-test απάντησε λανθασμένα μόνο στην ερώτηση *«Με πόσες δεκάδες μπορώ να ανταλλάξω 30μονάδες;»*.

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης η Μαθήτρια 1 έμαθε να εφαρμόζει αποτελεσματικά τις στρατηγικές για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενο, αν και δυσκολευόταν αρκετά με την κατάκτηση κάθε νέου γνωστικού στόχου κατά την παρέμβαση. Έμαθε να χειρίζεται σωστά τα πολλαπλάσια του 10, να τα προσθέτει μεταξύ τους και με μονοψήφιους αριθμούς. Είναι μαθήτρια που χρειάζεται περισσότερο χρόνο και καθοδήγηση κατά την εκμάθηση νέων γνωστικών διαδικασιών. Έχει ανάγκη από περαιτέρω εξάσκηση, ώστε να αποκτήσει ευχέρεια και ακρίβεια κατά την εφαρμογή τους, καθώς δυσκολεύεται με το να συγκρατεί και να ακολουθεί τα βήματα μιας διαδικασίας. Επίσης, σημείωσε πρόοδο στην κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου με τη βοήθεια του σχετικού εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος, αλλά δεν διατηρεί την ακρίβεια στις δεξιότητες που διδάχθηκε. Για παράδειγμα, χρειάζεται χρόνο για να την καλύτερη κατανόηση της ποσοτικής σχέσης μεταξύ δεκάδων-μονάδων, καθώς πρόκειται για μία δύσκολη έννοια. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι σωστές απαντήσεις της Μαθήτριας 1 στο pre-test και στο post-test:

Είδος άσκησης	ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΡΙΑΣ 1 – ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	
	PRE-TEST	*POST-TEST*
Αθροίσματα με τα βασικά αριθμητικά δεδομένα	8/9	--
Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	3/3	3/3
Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	3/9	6/6
Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	0/4	3/3
Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	0/6	2/2
Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	0/3	2/3
Σχηματισμός αριθμών με συγκεκριμένες μονάδες και δεκάδες στον άβακα	1/6	--
Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους αριθμούς και εικονιστική αναπαράσταση αυτών	10/10	10/10
Αθροίσματα διψήφιων αριθμών (οριζόντια και κάθετα)	--	8/9
Υπολογισμοί αθροισμάτων με χρήση της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου και της μέτρησης προς τα πάνω	--	6/6
ΣΥΝΟΛΟ (%)	50%	95,24%

Πίνακας 12: Οι σωστές απαντήσεις της Μαθήτριας 1 στις δύο δοκιμασίες.

- *Η επίδοση του Μαθητή 3* ήταν αρκετά καλύτερη στο post-test από εκείνη του pre-test. Μετά τα μαθήματα παρέμβασης ο Μαθητής 3 κατάφερε να υπολογίζει σωστά αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω, ενώ στο pre-test είχε υπολογίσει μετρώντας με τα δάχτυλα μόνο τα αθροίσματα βασικών αριθμητικών δεδομένων. Ακόμη, υπολόγισε σωστά κι εκείνα με διψήφιους προσθετέους, τοποθετώντας σωστά τους αριθμούς κάθετα και προσθέτοντας τις δεκάδες μεταξύ τους και τις μονάδες μεταξύ τους. Ο Μαθητής 3 εργάστηκε με πιο αργή ταχύτητα από τους συμμαθητές του, αλλά τα αποτελέσματά του ήταν σωστά. Επίσης, μπόρεσε να υπολογίσει χωρίς λάθη τα αθροίσματα με τα πολλαπλάσια του 10, ενώ στην αντίστοιχη άσκηση του pre-test δεν είχε καταφέρει να κάνει αυτούς τους υπολογισμούς. Όμως, δεν μπόρεσε να κατανοήσει και να εφαρμόσει σωστά τη στρατηγική αποδόμησης του β΄ προσθετέου, καθώς απαιτεί καλή γνώση των αριθμητικών σχέσεων. Όπως φάνηκε και κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, ο Μαθητής 3 δεν μπορεί να συγκρατεί τα βήματα μίας γνωστικής διαδικασίας και χρειάζεται συνεχή καθοδήγηση.

Όσον αφορά στις ασκήσεις κατανόησης της θεσιακής αξίας, ο Μαθητής 3 δεν έκανε σωστά την καταμέτρηση των δεκάδων και των μονάδων, όπως και στις αντίστοιχες ερωτήσεις του pre-test. Στην ανάλυση των διψήφιων αριθμών είχε δύο λανθασμένες απαντήσεις όπου έγραψε «30=30Δ+3Μ», γεγονός που δείχνει ότι δεν κατανόησε τελικά το συγκεκριμένο γνωστικό στόχο. Ακόμη, δεν κατάφερε να κάνει σωστά την απεικόνισή τους, ούτε να απαντήσει σωστά σε όλες τις ερωτήσεις της ποσοτικής τους σχέσης. Για παράδειγμα, στην ερώτηση: «*Με πόσες δεκάδες μπορώ να ανταλλάξω 30μονάδες;*» απάντησε λανθασμένα «*10*», ενώ στις άλλες δύο ερωτήσεις απάντησε σωστά. Οπότε, η κατανόηση των εννοιών που σχετίζονται με τη θεσιακή αξία των ψηφίων είναι απαιτητικό και δύσκολο γνωστικό αντικείμενο για εκείνον.

Συμπερασματικά, ο Μαθητής 3 ωφελήθηκε από τα μαθήματα της εκπαιδευτικής παρέμβασης, καθώς εξασκήθηκε πολύ στη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω σε αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς και διψήφιων αριθμών. Ακόμη, έμαθε να τοποθετεί σωστά κάθετα τους αριθμούς και να υπολογίζει αθροίσματα με πολλαπλάσια του 10, μετρώντας ανά 10. Δυσκολεύεται, όμως, σημαντικά στην εύρεση του συμπληρώματος αθροίσματος, στην εφαρμογή της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου και στην κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων. Στον επόμενο πίνακα αποτυπώνονται οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 3 στις δύο δοκιμασίες:

Είδος άσκησης	**ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΗ 3 – ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**	
	PRE-TEST	*POST-TEST*
Αθροίσματα με τα βασικά αριθμητικά δεδομένα	2/9	--
Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	0/3	3/3
Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	0/9	2/9

Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	0/4	3/3
Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	4/6	0/2
Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	0/3	2/3
Σχηματισμός αριθμών με συγκεκριμένες μονάδες και δεκάδες στον άβακα	0/6	--
Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους αριθμούς και εικονιστική αναπαράσταση αυτών	0/10	10/10
Αθροίσματα διψήφιων αριθμών (οριζόντια και κάθετα)	--	8/9
Υπολογισμοί αθροισμάτων με χρήση της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου και της μέτρησης προς τα πάνω	--	1/6
ΣΥΝΟΛΟ (%)	12%	69%

Πίνακας 13: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 3 στις δύο δοκιμασίες.

- *Η επίδοση του Μαθητή 4* παρουσίασε μικρότερη βελτίωση συγκριτικά με εκείνη των παραπάνω παιδιών. Στο post-test ο Μαθητής 4 έκανε σωστούς υπολογισμούς στα αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς, όπως και στις οριζόντιες και κάθετες προσθέσεις, ενώ σε αντίστοιχες ασκήσεις του pre-test δεν μπόρεσε να υπολογίσει τα αθροίσματα. Ακόμη, υπολόγισε σωστά τα αθροίσματα με τα πολλαπλάσια του 10, όπως έκανε και κατά την παρέμβαση, ενώ στο pre-test είχε υπολογίσει σωστά μόνο ένα άθροισμα. Από την άλλη πλευρά, δεν κατάφερε να υπολογίσει τα περισσότερα συμπληρώματα αθροίσματος, παρόλο που στα μαθήματα απαντούσε σωστά στις ασκήσεις με αυτόν τον γνωστικό στόχο. Ακόμη, εφάρμοσε σωστά τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω, αλλά έκανε πολλά λάθη στην εφαρμογή της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου, γεγονός που δείχνει πως δεν την κατανόησε ώστε να τη χειρίζεται με ακρίβεια και χωρίς καθοδήγηση.

Ταυτόχρονα, έκανε σωστά την καταμέτρηση δεκάδων και μονάδων, την απεικόνισή τους και τα περισσότερα ερωτήματα της ανάλυσης διψήφιων αριθμών. Σε δύο περιπτώσεις απάντησε λανθασμένα, καθώς έγραψε 33=30Δ+3Μ και 79=70Δ+9Μ. Επίσης, δεν απάντησε στις ερωτήσεις της ποσοτικής σχέσης μεταξύ δεκάδων-μονάδων. Στις αντίστοιχες ασκήσεις του pre-test, είχε κάνει σωστά την καταμέτρηση, αλλά δεν είχε απαντήσει στις υπόλοιπες ασκήσεις που ήταν σχετικές με την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων.

Συμπερασματικά, ο Μαθητής 4 εφαρμόζει με επιτυχία τη στρατηγική που διδάχθηκε για την πρόσθεση διψήφιων αριθμών σε οριζόντια και κάθετα αθροίσματα, τοποθετεί σωστά τους αριθμούς κάθετα και υπολογίζει σωστά τα αθροίσματα με πολλαπλάσια του 10. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων βοηθήθηκε από τη χρήση του εποπτικού υλικού, του λογισμικού προγράμματος, αλλά και από την τεχνική του χρωματισμού δεκάδων και μονάδων με διαφορετικό χρώμα προκειμένου να θυμάται τα βήματα της διαδικασίας πρόσθεσης. Ακόμη, εφαρμόζει σωστά τη στρατηγική μέτρησης προς τα πάνω αλλά δεν μπορεί να εφαρμόσει σωστά και χωρίς καθοδήγηση τη στρατηγική αποδόμησης του β΄ προσθετέου. Τέλος, δεν κατανόησε πλήρως την αριθμητική σχέση δεκάδων-μονάδων, αν και μπορεί πλέον να τις απεικονίζει σωστά και να αναλύει τους διψήφιους αριθμούς. Η τελευταία αυτή δεξιότητα δεν έχει αυτοματοποιηθεί κατά τη χρήση της από τον μαθητή, με αποτέλεσμα ο τελευταίος να κάνει λάθη κατά την ανάλυση διψήφιων αριθμών και στις ερωτήσεις της ποσοτικής τους σχέσης. Στον επόμενο πίνακα αποτυπώνονται οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 4 στις δύο δοκιμασίες πριν και μετά την εκπαιδευτική παρέμβαση:

Είδος άσκησης	**ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΗ 4 – ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**	
	PRE-TEST	*POST-TEST*
Αθροίσματα με τα βασικά αριθμητικά δεδομένα	8/9	--
Αθροίσματα διψήφιων με μονοψήφιους αριθμούς	0/3	3/3
Εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος	4/9	2/6
Υπολογισμοί με πολλαπλάσια του 10	1 /4	3/3
Καταμέτρηση αντικειμένων τοποθετημένων σε δεκάδες και μονάδες	6/6	2/2
Αντιστοίχιση αξίας δεκάδων και μονάδων	0/3	0/3
Σχηματισμός αριθμών με συγκεκριμένες μονάδες και	3/6	--

δεκάδες στον άβακα		
Αναγνώριση δεκάδων και μονάδων στους διψήφιους αριθμούς και εικονιστική αναπαράσταση αυτών	0/10	10/10
Αθροίσματα διψήφιων αριθμών (οριζόντια και κάθετα)	--	9/9
Υπολογισμοί αθροισμάτων με χρήση της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου και της μέτρησης προς τα πάνω	--	1/6
ΣΥΝΟΛΟ (%)	44%	71,4%

Πίνακας 14: Οι σωστές απαντήσεις του Μαθητή 4 στις δύο δοκιμασίες.

3. Συζήτηση

Η παρούσα έρευνα έχει ως βασικό στόχο να εξετάσει την αποτελεσματικότητα ενός προγράμματος εκπαιδευτικής παρέμβασης τύπου Tier 2 στην εκμάθηση στρατηγικών πρόσθεσης και εννοιών θεσιακής αξίας σε μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, το οποίο στηρίζεται στις αρχές που περιέγραψαν οι ερευνητές στη σχετική βιβλιογραφία (Bryant et al., 2008a, 2008b; Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Επιπρόσθετα, εξετάζεται η αποτελεσματικότητα των μεθόδων και τεχνικών διδασκαλίας που προτείνονται στη βιβλιογραφία για τη βελτίωση της επίδοσης των εν λόγω μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζεται η άμεση διδασκαλία μέσω προτύπων, η καθοδηγούμενη και συνεχής εξάσκηση των μαθητών και η προφορική εξωτερίκευση (Dennis, 2015; Dennis, Bryant & Drogan, 2015; Fuchs et al., 2010). Τέλος, είναι απαραίτητο να διαπιστώσουμε αν η χρήση του εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος, η οποία στηρίζεται στην προσέγγιση C-R-A (Concrete-Representational-Abstract approach) και εφαρμόστηκε κατά την εκπαιδευτική παρέμβαση, βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τις σχετικές μαθηματικές έννοιες.

Η εκπαιδευτική παρέμβαση εφαρμόστηκε σε μαθητές της Β΄ δημοτικού, οι οποίοι φάνηκε να αντιμετωπίζουν δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Οι γνωστικές ικανότητες των μαθητών εκτιμήθηκαν μέσω χορήγησης του Κριτηρίου Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης και του pre-test στους μαθητές του δείγματος. Από το δείγμα των

23 μαθητών επιλέχθηκαν 5, οι οποίοι είχαν αρκετά χαμηλότερη επίδοση στις δύο δοκιμασίες συγκριτικά με τους συμμαθητές τους, για να συμμετάσχουν στα μαθήματα εκπαιδευτικής παρέμβασης. Η λεπτομερής ανάλυση των αποτελεσμάτων του post-test φανερώνει την επίδραση των μαθημάτων παρέμβασης στην επίδοση των συμμετεχόντων μαθητών.

Σχετικά με την κατανόηση, την εκμάθηση και τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης διψήφιου με μονοψήφιο αριθμό διαπιστώνουμε πως ευκολότερη στην εφαρμογή της είναι η μέτρηση προς τα πάνω ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο προσθετέο, καθώς όλοι οι συμμετέχοντες την εφάρμοζαν σωστά κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τη θεωρία των Siegler και Shrager (1984), οι οποίοι περιέγραψαν την αναπτυξιακή εξέλιξη των στρατηγικών μέτρησης στους μικρούς μαθητές (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Μάλιστα, κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, φάνηκε πως ένας από τους μαθητές χρησιμοποιούσε συστηματικά τα δάχτυλά του στις μετρήσεις, γεγονός που αποδεικνύει πως ο τελευταίος δεν έχει αποκτήσει ώριμες στρατηγικές μέτρησης και έχει χαμηλή κατανόηση της ‘έννοιας του αριθμού’ (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Αντίθετα, η εφαρμογή της αποδόμησης του β΄ προσθετέου είναι πιο σύνθετη και δύσκολη, καθώς οι μαθητές αδυνατούν να την κατανοήσουν, οπότε δεν καταφέρνουν να απομνημονεύσουν τα βήματά της. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνεται από την παρακολούθηση της γνωστικής εξέλιξης των μαθητών κατά τη διάρκεια των μαθημάτων 7, 8, 9 και από τις επιδόσεις του Μαθητή 3 και του Μαθητή 4 στη σχετική άσκηση του post-test. Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνει την άποψη ότι οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης δυσκολεύονται στην απομνημόνευση των βημάτων μιας διαδικασίας, όταν δεν κατανοούν τα βήματά της και τις αριθμητικές σχέσεις που περιλαμβάνονται σε αυτή (Αγαλιώτης, 2013; Baroody, 2006; Dowker, 2009). Στις περιπτώσεις αυτές τα παιδιά δεν πρέπει να πιέζονται να χρησιμοποιήσουν μία στρατηγική που δεν κατανοούν, διότι κάτι τέτοιο επιβαρύνει τη μνήμη τους. Αντίθετα, οι γνώσεις τους πρέπει να αποτελούν ένα αλληλοσυνδεόμενο, εννοιολογικό δίκτυο, στο οποίο πραγματοποιείται η δημιουργία και η επεξεργασία των αριθμητικών σχέσεων (Αγαλιώτης, 2013; Baroody, 2006; Fuchs et al., 2008; Van de Walle, 2007). Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές της έρευνας κατάφεραν να κατανοήσουν τη μέθοδο πρόσθεσης διψήφιων αριθμών μεταξύ τους και να εφαρμόζουν σωστά τον *αλγόριθμο* που διδάχθηκαν στις κάθετες και οριζόντιες προσθέσεις (πρόσθεση μονάδων, πρόσθεση δεκάδων). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει την άποψη πως οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά έχουν τη δυνατότητα να απομνημονεύουν διαδικασίες, όταν κατανοούν τα βήματά τους και ανακαλύπτουν σχέσεις μεταξύ των αριθμών (Baroody, 2006).

Επιπρόσθετα, η εκμάθηση της οριζόντιας και κάθετης πρόσθεσης διψήφιων αριθμών παρουσιάστηκε στους μαθητές μέσω της C-R-A προσέγγισης (Concrete - Representational - Abstract approach). Η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που παρουσιάστηκαν σταδιακά από το πραξιακό, στο εικονιστικό και τέλος στο συμβολικό επίπεδο τους βοήθησε να κατακτήσουν τη στρατηγική αυτή, καθώς οι επιδόσεις τους κατά τη διάρκεια των αντίστοιχων μαθημάτων και στο post-test ήταν αρκετά καλές. Οπότε, η χρήση του εποπτικού υλικού που προτείνεται στις έρευνες παρέμβασης (Base-10 blocks) συνέβαλε θετικά στην κατανόηση των παραπάνω μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, καθώς τα παιδιά κατάφεραν να αναπαριστούν μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς και να τους προσθέτουν κάθετα και οριζόντια μεταξύ τους. Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται από τις πληροφορίες που παίρνουμε από την ανάλυση των μαθημάτων 2, 4, 5, 6, 10, 12 όπως επίσης και από τα αποτελέσματα των μαθητών στο post-test στις ασκήσεις πρόσθεσης διψήφιων αριθμών, στην ανάλυση και αναπαράστασή τους. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με συμπεράσματα των Bryant et al. (2008a), της Dennis (2015) και των Dennis, Bryant & Drogan (2015).

Η κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων σε διψήφιους αριθμούς είναι ένας δύσκολος γνωστικός στόχος για τους μαθητές αυτής της ηλικίας. Ειδικότερα, οι μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά δεν καταφέρνουν να σχηματίσουν εννοιολογικές δομές, όπου τα ψηφία να αντιστοιχούν σε ποσότητες οντοτήτων (π.χ. μία εκατοντάδα, τρεις δεκάδες κ.τ.λ.) (Fuson, 1990). Οι μαθητές της παρούσας έρευνας, με τη βοήθεια του εποπτικού υλικού (Base-10 blocks), κατάφεραν να κατανοήσουν ως ένα βαθμό την έννοια της θεσιακής αξίας, αλλά όχι σε τέτοιο επίπεδο που να διατηρούν όλοι την ακρίβεια στις απαντήσεις τους χωρίς καθοδήγηση. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται από την έρευνα των Bryant et al. (2008b). Προκειμένου οι μαθητές να προχωρήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό κατανόησης των εννοιών της θεσιακής αξίας, χρειάζεται περισσότερος χρόνος ενασχόλησής τους με τις έννοιες αυτές και συνεχής χρήση του εποπτικού υλικού έως ότου να μην το χρειάζονται πλέον. Άλλωστε, σε καμία περίπτωση δεν πιέζουμε τους μαθητές να εγκαταλείψουν τη χρήση του εποπτικού υλικού, εάν δεν το επιθυμούν από μόνοι τους (Αγαλιώτης, 2013). Επίσης, η χρήση του λογισμικού προγράμματος ενίσχυσε το βαθμό κατανόησης των σχετικών εννοιών και το ενδιαφέρον τους για τις δραστηριότητες, διότι όταν οι μαθητές το χρησιμοποιούσαν είχαν σωστά αποτελέσματα στις ασκήσεις των φύλλων εργασίας, όπως φαίνεται από την ανάλυση των μαθημάτων 9, 12 και 13. Μέρος των μαθητών (Μαθήτρια 1, Μαθητής 3, Μαθητής 4) με τη βοήθεια του λογισμικού προγράμματος έκανε σωστά την ανάλυση των διψήφιων αριθμών και σωστούς υπολογισμούς στις κάθετες προσθέσεις. Η αποτελεσματικότητα των λογισμικών προγραμμάτων επιβεβαιώνεται από τις ομάδες των Bryant et al. (2008a) και των Fuchs et al. (2006).

Ακόμη, οι γνωστικοί στόχοι σχετικά με τον υπολογισμό και την ανάκληση των βασικών αριθμητικών δεδομένων κατακτήθηκαν σε διαφορετικό βαθμό από τους μαθητές. Οι τρεις από αυτούς καταφέρνουν να ανακαλούν από τη μνήμη τους τα βασικά αριθμητικά δεδομένα έως το 10, γεγονός που αποδεικνύει τη χρήση μιας ιδιαίτερα αποτελεσματικής και ώριμης στρατηγικής (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Μάλιστα η συχνή εξάσκηση σε αυτά βοηθά τους μαθητές να βελτιώνουν τις επιδόσεις τους, όπως φάνηκε από την πορεία των μαθημάτων και επιβεβαιώνεται από την εργασία των Fuchs et al. (2008). Παρά την συνεχή ενασχόληση με αυτά, ένας από τους μαθητές (Μαθητής 3) δεν έχει τη δυνατότητα της αυτόματης ανάκλησης των περισσότερων συνδυασμών, οπότε χρησιμοποιεί τη μέτρηση προς τα πάνω και τα δάχτυλά του. Επιπρόσθετα, τρεις από τους μαθητές έμαθαν να υπολογίζουν το συμπλήρωμα αθροίσματος βασιζόμενοι σε αριθμητικά δεδομένα, ενώ δύο από αυτούς δεν το κατάφεραν χωρίς καθοδήγηση και τη χρήση αριθμογραμμής. Τα παραπάνω δείχνουν δυσκολία στην κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, στην επεξεργασία τους και στην κατανόηση της ‘έννοιας του αριθμού’ (Jordan et al., 2003). Οπότε, μία εκπαιδευτική παρέμβαση στη συνέχεια θα πρέπει να εστιάσει αποκλειστικά σε αυτούς τους γνωστικούς στόχους.

Ο σχεδιασμός και η διεξαγωγή της παρούσας εκπαιδευτικής παρέμβασης στηρίχθηκε σε μεγάλο βαθμό στις αρχές του παρεμβατικού προγράμματος που πρότειναν στη θεωρητική τους εργασία η ομάδα των Fuchs et al. (2008), όπως επίσης και στις αρχές που ακολουθούν στα προγράμματα παρέμβασης που διεξάγουν οι ομάδες των Bryant et al. (2008a, 2008b) και η ομάδα των Dennis, Bryant και Drogan (2015). Η εφαρμογή των προτάσεων των παραπάνω ερευνητών φαίνεται να έχει θετικά αποτελέσματα για τους συμμετέχοντες μαθητές στην εκπαιδευτική παρέμβαση, καθώς όλοι τους είχαν βελτίωση στις επιδόσεις τους και αισθάνονταν ικανοποίηση κάθε φορά που ολοκληρώναμε τις συναντήσεις μας. Οπότε, η εφαρμογή της συγκεκριμένης ρουτίνας σε κάθε μάθημα βοήθησε τους μαθητές να προσαρμοστούν στο περιβάλλον των συναντήσεων και στον τρόπο εργασίας μας. Η σαφήνεια κατά τη διδασκαλία και η έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση ήταν βασικοί κανόνες κατά την εφαρμογή της παρέμβασης και συνέβαλαν στην βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Ακόμη, η συστηματική επιβράβευσή τους στο τέλος κάθε συνάντησης αποτέλεσε κίνητρο για εκείνους, ώστε να έχουν κατάλληλη συμπεριφορά και να συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα. Η επαναλαμβανόμενη εξάσκηση πάνω στους γνωστικούς στόχους και ο συνεχής έλεγχος της προόδου τους βοήθησαν στη διαμόρφωση του γνωστικού προφίλ κάθε παιδιού και στον προσδιορισμό των δυνατοτήτων και των αδυναμιών τους. Τέλος, η εφαρμογή της προφορικής εξωτερίκευσης από την εκπαιδευτικό και τους μαθητές, η οποία προτείνεται από τις σχετικές έρευνες (Bryant et al., 2008a; Dennis, 2015), ήταν πολύ βοηθητική. Μέσω αυτής οι μαθητές παρακολουθούσαν όλα τα βήματα κάθε διαδικασίας αναλυτικά, ενώ ταυτόχρονα η εκπαιδευτικός έπαιρνε πληροφορίες για τον τρόπο σκέψης και εργασίας καθενός από τους συμμετέχοντες. Οι πληροφορίες αυτές ήταν ιδιαίτερα πολύτιμες για παροχή ανατροφοδότησης στους μαθητές και εμπλουτισμού του γνωστικού τους προφίλ. Μάλιστα, κατά την εφαρμογή της, οι μαθητές βοηθήθηκαν στην εκμάθηση των βημάτων της κάθετης και οριζόντιας πρόσθεσης διψήφιων αριθμών, όπως φαίνεται από την ανάλυση των μαθημάτων παρέμβασης (π.χ. στο μάθημα 12) και από τα αποτελέσματα του post-test στο συγκεκριμένο γνωστικό στόχο.

Επιπρόσθετα, από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των δοκιμασιών στις οποίες υποβλήθηκαν οι συμμετέχοντες στην παρούσα έρευνα (Κριτήριο Π.Μ.Ε., pre & post-test), καθώς και από την ανάλυση των μαθημάτων της εκπαιδευτικής παρέμβασης, παίρνουμε σημαντικές πληροφορίες που σχετίζονται με την πρώιμη ανίχνευση δυσκολιών μάθησης στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, τα ευρήματα της παρέμβασης βρίσκονται σε συμφωνία με την εργασία των Gersten, Jordan και Flojo (2005), όπου προσδιορίζονται οι παράγοντες με προβλεπτική αξία για τις δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Οι Μαθητές 1,2,3 και η Μαθήτρια 1 είχαν χαμηλότερες επιδόσεις στην *αποτελεσματική καταμέτρηση* και στη *δόμηση αρίθμησης* στο Κριτήριο Π.Μ.Ε. συγκριτικά με τους συμμαθητές τους. Οπότε, επιβεβαιώνεται ότι η έλλειψη ευχέρειας κατά τη μέτρηση ποσοτήτων αποτελεί προγνωστικό παράγοντα για τις δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Ακόμη, οι επιδόσεις των μαθητών στα pre & post-test έδειξαν αδυναμίες στις *στρατηγικές μέτρησης* (Μαθητές 3, 4 και Μαθήτρια 1) και σημαντικές δυσκολίες όλων στην κατανόηση γνωστικών στόχων που σχετίζονται με τη *θεσιακή αξία* των ψηφίων (καταμέτρηση και ποσοτική σχέση δεκάδων-μονάδων, σύνθεση και ανάλυση διψήφιων αριθμών). Επίσης, τα λάθη στην εύρεση συμπληρώματος αθροίσματος και στις προσθέσεις με πολλαπλάσια του 10 (pre-test) δείχνουν *αδυναμία στην κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων*, οπότε και στην κατάκτηση της *έννοιας του αριθμού* (Dennis, Bryant & Drogan, 2015). Καθώς οι επιδόσεις των πέντε μαθητών ήταν χαμηλότερες σε αυτούς τους γνωστικούς στόχους συγκριτικά με τους συμμαθητές τους, συμπεραίνουμε πως οι παραπάνω αδυναμίες αποτελούν προγνωστικούς παράγοντες για τις δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων παρέμβασης καταγράφηκαν λάθη των μαθητών που σχετίζονται με την λειτουργία της *οπτικο-χωρικής εργαζόμενης μνήμης*, καθώς οι τελευταίοι έκαναν συχνά λάθη στην τοποθέτηση των δεκάδων και των μονάδων στη σωστή στήλη. Το εύρημα αυτό αποτελεί έναν ακόμη προβλεπτικό παράγοντα των δυσκολιών στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2013). Τέλος, η μεγάλη δυσκολία του Μαθητή 3 στην *κατάκτηση των αριθμητικών συνδυασμών*, στην εκμάθ*ηση των στρατηγικών πρόσθεσης* και η επιμονή του στη *χρήση δαχτύλων κατά την πρόσθεση* κατά τη διάρκεια της παρέμβασης επιβεβαιώνει σχετικές έρευνες και απόψεις που υπογραμμίζουν πως και αυτές οι δυσκολίες είναι χαρακτηριστικές των παιδιών με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2013; Bryant et al., 2008a; Dowker, 2009; Jordan et al., 2003). Συνεπώς, παράγοντες με προβλεπτική αξία για τις δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά αποτελούν η αδυναμία στην κατάκτηση στρατηγικών μέτρησης, στην κατάκτηση στρατηγικών πρόσθεσης, στην κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, στην κατάκτηση αριθμητικών συνδυασμών και στην οπτικο-χωρική ικανότητα.

Συνοψίζοντας, η παρούσα εκπαιδευτική παρέμβαση είχε θετικά αποτελέσματα για τους περισσότερους μαθητές στην κατάκτηση εννοιών θεσιακής αξίας, στρατηγικών πρόσθεσης και κατάκτησης μαθηματικών σχέσεων. Οι αρχές στις οποίες στηρίχθηκε ο σχεδιασμός και η διεξαγωγή της συνέβαλαν στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Ταυτόχρονα, ένας από τους μαθητές (Μαθητής 3) φαίνεται πως χρειάζεται περισσότερο εντατική και εξατομικευμένη ενίσχυση, καθώς οι αδυναμίες του οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών που τον εμποδίζουν στην κατάκτηση νέων γνώσεων. Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα θα ήταν η εξατομικευμένη έρευνα και εργασία με τον παραπάνω μαθητή σε ένα πρόγραμμα εντατικότερης εκπαιδευτικής παρέμβασης τύπου Tier 3.

Συνεπώς, απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν, η παρέμβαση τύπου Tier 2, η οποία σχεδιάστηκε βάσει των ερευνητικών εργασιών που περιγράφηκαν παραπάνω, μπορεί να βοηθήσει αρκετά τα παιδιά με δυσκολίες μάθησης στα πεδία των στρατηγικών πρόσθεσης, θεσιακής αξίας, αριθμητικών σχέσεων και συνδυασμών. Ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας είναι ο χρόνος που αφιερώνεται σε αυτές τις παρεμβάσεις, καθώς θα πρέπει να σεβόμαστε τους ρυθμούς μάθησης των παιδιών με δυσκολίες. Οπότε, χρειάζεται να δίνεται περισσότερος χρόνος για την κατανόηση και κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών. Ιδιαίτερα η κατανόηση εννοιών σχετικών με τη θεσιακή αξία απαιτεί περισσότερη ενασχόληση, καθώς επίσης εντατική και στοχευμένη εργασία. Επιπρόσθετα, η C-R-A προσέγγιση, δηλαδή η αναπαράσταση αριθμητικών σχέσεων αρχικά στο πραξιακό, μετά στο εικονιστικό και τέλος στο αφηρημένο επίπεδο, βοηθά σε μεγάλο βαθμό τους εν λόγω μαθητές να επεξεργαστούν και να κατανοήσουν βαθύτερα μαθηματικές σχέσεις και έννοιες, οι οποίες σχετίζονται με τη θεσιακή αξία και τις στρατηγικές πρόσθεσης. Οπότε το εποπτικό υλικό και το λογισμικό πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την παρέμβαση συνέβαλαν αποτελεσματικά προς αυτήν την κατεύθυνση. Αντίστοιχο εποπτικό υλικό (ράβδοι δεκάδων, κυβάκια μονάδων, πλαίσια του 10, αριθμογραμμές, καρτέλες τοποθέτησης δεκάδων-μονάδων) και σχετικά λογισμικά προγράμματα θα πρέπει να αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας των βασικών μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, προκειμένου όλοι οι μαθητές, όπως και εκείνοι με δυσκολίες μάθησης στα μαθηματικά, να οικοδομούν ένα ενιαίο εννοιολογικό δίκτυο γνώσεων, το οποίο θα αποτελεί τη βάση για τη μετέπειτα γνωστική τους εξέλιξη στα μαθηματικά.

Ολοκληρώνοντας, περιορισμοί στην εν λόγω έρευνα αποτελούν το μικρό δείγμα μαθητών από το οποίο προέκυψαν οι συμμετέχοντες στην παρέμβαση, καθώς και το γεγονός ότι οι πέντε μαθητές δεν αξιολογήθηκαν πιο εξειδικευμένα (π.χ. με κάποιο ψυχομετρικό τεστ ή με ένα τεστ νοημοσύνης), ώστε να έχουμε ένα πιο ολοκληρωμένο προφίλ των γνωστικών και αντιληπτικών ικανοτήτων τους. Ακόμη, ο αριθμός των μαθημάτων ήταν περιορισμένος συγκριτικά με τον όγκο των γνωστικών στόχων που τέθηκαν πριν την έναρξη της παρέμβασης. Οπότε, αντίστοιχες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις θα πρέπει να πραγματοποιούνται σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Τέλος, για την αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης που αντιμετωπίζουν οι εν λόγω μαθητές στα μαθηματικά, περισσότερο ωφέλιμη θα ήταν μία μακρόχρονη έρευνα μέσω της οποίας θα αποκαλυπτόταν η φύση των μαθηματικών δυσκολιών τους (Gersten, Jordan & Flojo, 2005). Έτσι, θα υπήρχε η δυνατότητα να προσδιοριστεί σαφέστερα το αν οι δυσκολίες αυτές οφείλονται σε αναπτυξιακές καθυστερήσεις ή σε ειδική μαθησιακή δυσκολία στα μαθηματικά. Κατά συνέπεια, θα μπορούσαν να σχεδιαστούν καταλληλότερες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις βάσει των ατομικών αναγκών των μαθητών. Είναι, λοιπόν, απαραίτητες οι μακρόχρονες έρευνες που μελετούν τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών από την προσχολική ηλικία ακόμη, διότι μας παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες πάνω στην πρόγνωση μαθηματικών δυσκολιών, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόληψη και άμεση αντιμετώπιση αυτών κατά την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία (Jordan et al., 2003).

Παράρτημα

Η Υπεύθυνη Δήλωση που υπογράφηκε από τους γονείς των 23 συμμετεχόντων στην έρευνα:

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Ο/Η κάτωθι υπογεγραμμένος ……………………………………………………………, γονέας του / της ……………………………………………….. μαθητή/τριας της Β' τάξης του 5ου Δημοτικού Σχολείου Κοζάνης, δηλώνω υπεύθυνα πως δέχομαι τη συμμετοχή του γιου / κόρης μου στην έρευνα της μεταπτυχιακής φοιτήτριας Τζελέπη Λυδίας – Λεμονιάς, η οποία πραγματοποιείται στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας της.

Ο / Η δηλών/ούσα

…………………………...

Η άδεια που χορηγήθηκε από τον Περιφερειακό Διευθυντή Εκπαίδευσης Δυτικής Μακεδονίας, στις 7/10/2015, η οποία επέτρεπε τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας στο 5ο Δ.Σ. Κοζάνης:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Π.Ε. & Δ.Ε.
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ & ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
ΚΑΘΟΔΗΓΗΣΗΣ Α/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ

Ταχ. Δ/νση: Μακρυγιάννη 5
Τ.Κ.-Πόλη: 50132 Κοζάνη
Email: gramsvai@dmaked.pde.sch.gr
Πληροφορίες: Θωμάς Γκέκας
Τηλ.: 2461021353
FAX: 2461049962

Κοζάνη, 07-10-2015
Αρ.Πρωτ.: Φ.33/5182

ΠΡΟΣ
1. **Διεύθυνση Α/θμιας Εκπαίδευσης Κοζάνης**
2. **Μήλιου Ζωή, Σχολική Σύμβουλο**

Θέμα: «Άδεια για έρευνα στο 5ο Δημοτικό Σχολείο Κοζάνης».
Σχετ. : Τη με αριθμ.πρωτ. 5182/7-10-2015 αίτηση της ενδιαφερομένης.

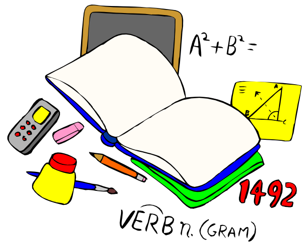
Σε απάντηση του παραπάνω σχετικού, σας γνωρίζουμε ότι εγκρίνεται η αίτηση της κ. Τζελέπη Λυδία-Λεμονιά, μεταπτυχιακής φοιτήτριας κλάδου ΠΕ70 του Τμήματος Νηπιαγωγών της Παιδαγωγικής Σχολής Δυτικής Μακεδονίας, για πραγματοποίηση έρευνας στο 5ο Δημοτικό Σχολείο Κοζάνης, με τη χρήση του Κριτηρίου Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης και εφαρμογή σύντομου προγράμματος παρέμβασης για διεξαγωγή έρευνας με τίτλο : «Εκπαιδευτική παρέμβαση σε μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά .Πρόσθεση διψήφιων αριθμών» στα πλαίσια της διπλωματικής της εργασίας και με την προϋπόθεση η ενδιαφερόμενη που αιτείται:

α) να έχει και τη σύμφωνη γνώμη – έγκριση του Διευθυντή του Δημοτικού Σχολείου που θα επισκεφτεί μετά από συνεννόηση με τους Σχολικούς Συμβούλους Δημοτικής και Α/θμιας Εκπαίδευσης
β) οι δραστηριότητές της να μην παρακωλύουν την εύρυθμη λειτουργία του Δημοτικού Σχολείου.

Ο ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΟΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΔΥΤ.ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΩΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

Το pre-test έτσι όπως χορηγήθηκε στους μαθητές της Β΄ δημοτικού:



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

✓ Προσπάθησε να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

4 + 3 = ☐	3 + 6 = ☐	4 + 8 = ☐	23 + 7 = ☐
5 + 3 = ☐	4 + 6 = ☐	7 + 5 = ☐	55 + 8 = ☐
2 + 7 = ☐	1 + 9 = ☐	8 + 6 = ☐	34 + 7 = ☐

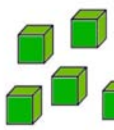
✓ Προσπάθησε να συμπληρώσεις τα κενά:

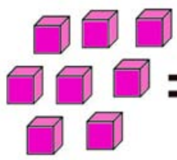
6 + ____ = 10	13 + _____ = 20	34 + ____ = 44
2 + ____ = 8	22 + _____ = 40	25 + ____ = 39
4 + ____ = 10	31 + _____ = 60	48 + ____ = 70

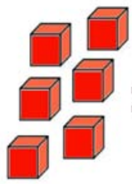
✓ Υπολογίζω τα αποτελέσματα:

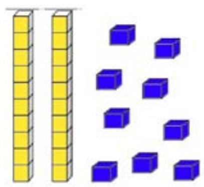
10 + 4 +20 = ◯ 40 +6 + 30 = ◯ 8+ 50 + 10 = ◯ 20 + 40 + 7 = ◯

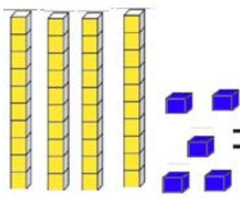
✓ Πόσα κυβάκια έχω κάθε φορά;

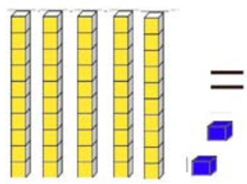
 = ___

 = ___

 = ___

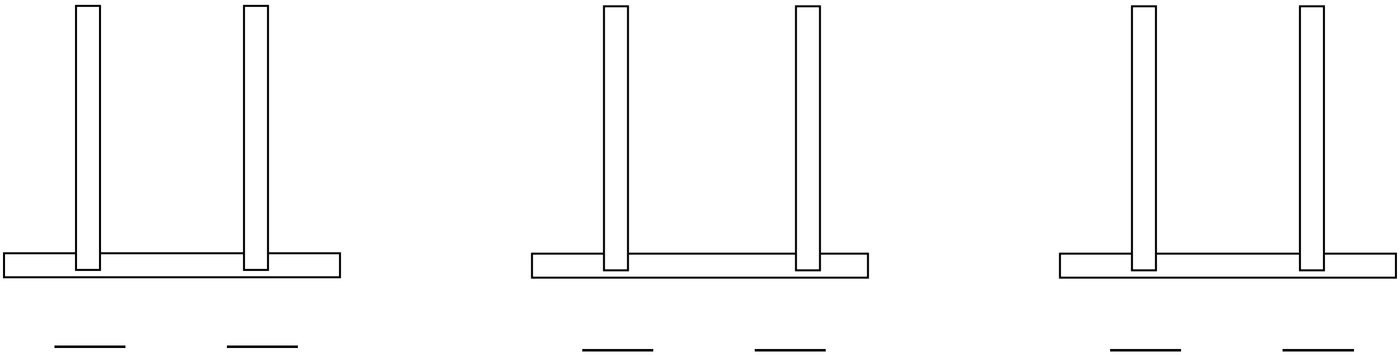
 = ___

 = ___

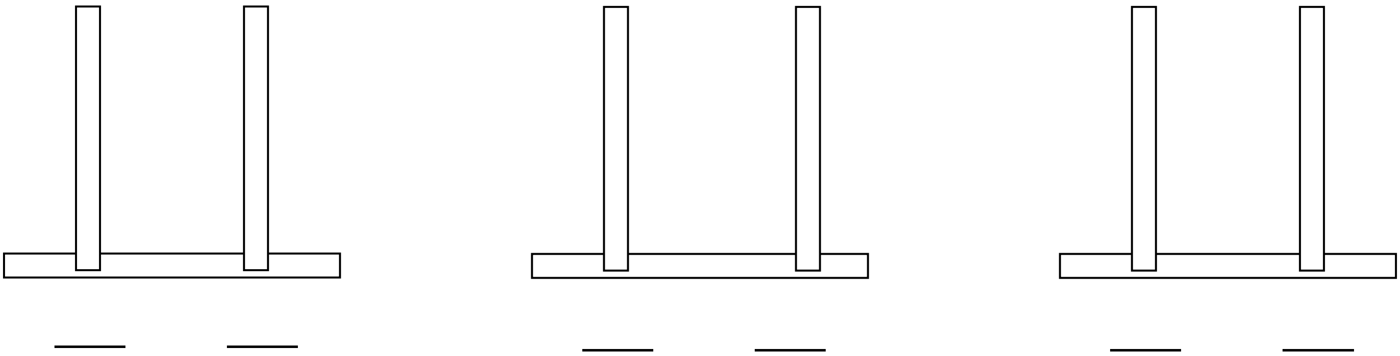
 = ___

- ✓ Πόσες μονάδες έχει μία δεκάδα; …………………
- ✓ Με πόσες δεκάδες μπορώ να ανταλλάξω 50 μονάδες; ……………
- ✓ Με πόδες μονάδες μπορώ να ανταλλάξω 3 δεκάδες; ……………

- ✓ Σχηματίζω στους άβακες και γράφω τρεις αριθμούς που να έχουν 7 στο ψηφίο των μονάδων:



- ✓ Σχηματίζω στους άβακες και γράφω τρεις αριθμούς που να έχουν 4 στο ψηφίο των δεκάδων



- ✓ Πόσες Δεκάδες και πόσες Μονάδες έχουν οι αριθμοί; Τις ζωγραφίζω…

	Δεκάδες	Μονάδες	Ζωγραφιά
56 →			
90 →			
21 →			
77 →			
83 →			

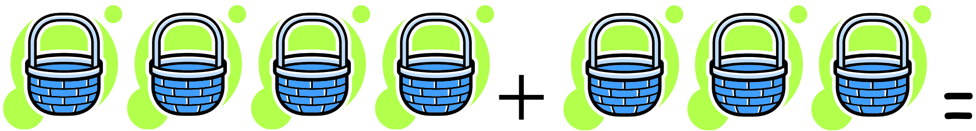
Τα φύλλα εργασίας των μαθημάτων της εκπαιδευτικής παρέμβασης:

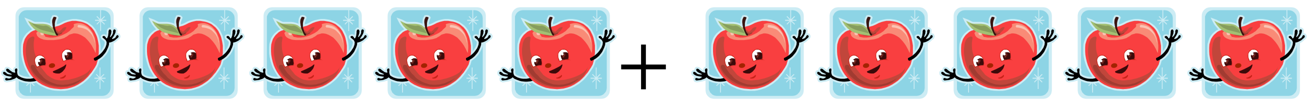
1° μάθημα: Επανάληψη – Προσθέσεις μέχρι το 10 ! ! !

1. Ποιο είναι το σύμβολο της πρόσθεσης; Κυκλώνω τα σωστά:

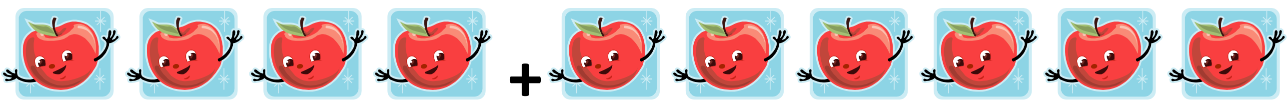
* + = - +

2. Πόσο κάνουν;

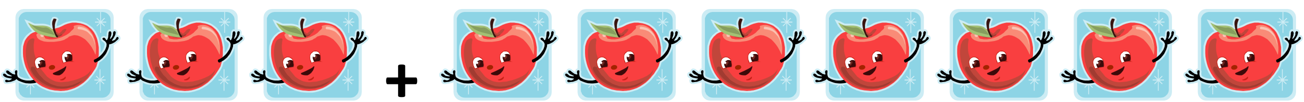




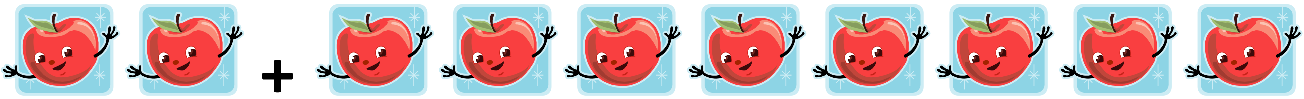
$\boxed{}$ + $\boxed{}$ =



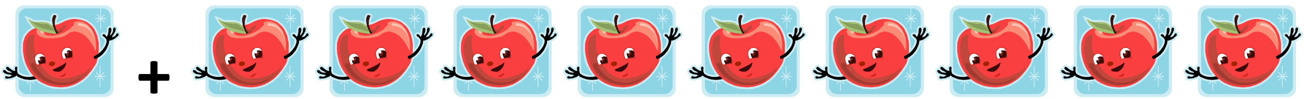
$\boxed{}$ + $\boxed{}$ =



$\boxed{}$ + $\boxed{}$ =



☐ + ☐ =



☐ + ☐ =

3. Πόσα φρούτα έχει κάθε παιδί;

- ✓ Ο Έργκι έχει: 7 +  = ____
- ✓ Η Κατερίνα έχει: 6 +  = _____
- ✓ Ο Φρέντι έχει: 5 +  = _____
- ✓ Ο Νικάνορας έχει: 4 +  = _____
- ✓ Ο Κρίστι έχει: 7 +  = ______

4. Πόσο κάνουν οι δίδυμοι;

1 + 1 = ____

2 + 2 = ____

3 + 3 = ____

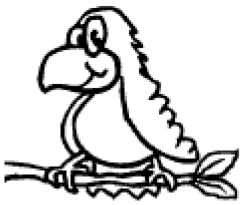
4 + 4 = ____

5 + 5 = ____

5. Βρίσκω πόσο κάνουν οι προσθέσεις:

2 + 5 = ______	4 + 5 = _____
2 + 7 = ______	4 + 3 = _____
3 + 6 = ______	5 + 2 + 2 = _____
3 + 5 = ______	6 + 1 + 3 = _____
4 + 6 = ______	4 + 2 + 3 = _____

2ο μάθημα: Παίζω με Μονάδες και Δεκάδες ! ! !



1. Ανταλλάσσω μονάδες με δεκάδες:

10 Μ ⟶ ☐ Δ

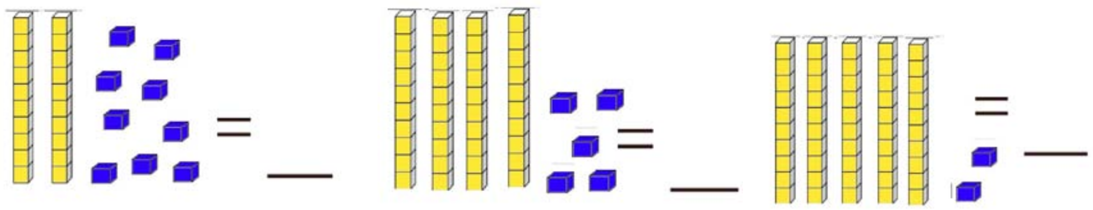
20 Μ ⟶ ☐ Δ

30 Μ ⟶ ☐ Δ

40 Μ ⟶ ☐ Δ

50 Μ ⟶ ☐ Δ

2. Βρείτε τον κρυμμένο αριθμό!!



3. Ζωγραφίζω τις Μονάδες και τις Δεκάδες και τις φτιάχνω με τα κυβάκια!

Δ	Μ	
3	5	⟶
4	3	⟶
7	2	⟶
1	1	⟶
2	0	⟶

4. Φτιάχνω τους αριθμούς με τα κυβάκια!

28 **45** **80**
16 **33**

3ο – 4ο μάθημα: Προσθέσεις με δεκάδες …

1. Συμπληρώνω τη δεκάδα:

1 + __ = 10   2 + ____ = 10   3 + ____ = 10   4 + ____ = 10   5 + ____= 10

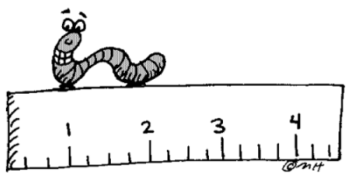
9 + __ = 10   8 + ____ = 10   7 + ____ = 10   6 + ____ = 10

2. Προσθέτω με τις δεκάδες και δείχνω στην αριθμογραμμή:

10 + 5 = ____   30 + 9 = ____   50 + 1 = ____

20 + 8 = ____   10 + 4 = ____   70 + 7 = ____

40 + 6 = ____   60 + 2 = ____   80 + 0 = ____



3 . Βάζω πολλές δεκάδες μαζί!

10 + 20 + 4 = _____   40 + 40 + 8 = ____

30 + 50 + 3 = _____   60 + 10 + 9 = ____

40 + 20 + 6 = _____   20 + 5 + 10 = ____

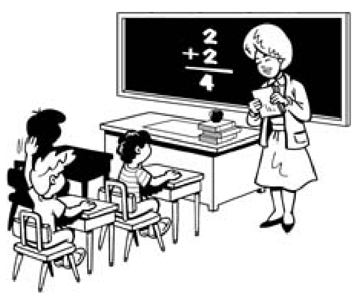
80 + 10 + 5 = _____   70 + 20 + 7 = ____

4. Ποιος αριθμός λείπει; Τον βρίσκω στο κομπολόι με τις χάντρες!

46, _______ , 48   50, ______, 52   19, _______, 21

23, _______ , 24   39, ______ , 41   57, _______ , 59

11, _______ , 13   29, ____, 31   89, _____ , 91   33, _____ , 35



5ο μάθημα: Προσθέτω

11 + 1 = ____	13 + 3 = ____	15 + 3 = ____
13 + 2 = ____	15 + 2 = ____	3 + 15 = ____
2 + 13 = ____	2 + 15 = ____	6 + 13 = ____
4 + 11 = ____	3 + 14 = ____	13 + 6 = ____
11 + 4 = ____	14 + 3 = ____	16 + 2 = ____

Να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις βάζοντας κάθετα τους αριθμούς!

Δ Μ	Δ Μ	Δ Μ	Δ Μ	Δ Μ
1 5	1 7	1 4	1 6	1 5
+ 2	+ 2	+ 5	+ 2	+ 4

Δ	Μ

13+5 = _____

Δ	Μ

12 + 4 = _____

Δ	Μ

16 + 4 = _____

Δ	Μ

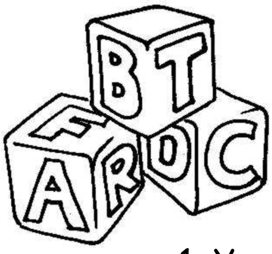
16 + 1 = _____

Δ	Μ

12 + 7 = _____

Δ	Μ

14 + 4 = ____



6ο μάθημα: Προσθέτω κάθετα και οριζόντια ! !

1. Υπολογίζω τα αποτελέσματα μετρώντας από το μεγαλύτερο αριθμό προς τα πάνω… Ύστερα δείχνω τους αριθμούς στο κομπολόι με τις χάντρες!

23 + 6 = _____ 45 + 3 =_____ 28 + 1 = _____ 67 + 2 =_____

34 + 4 = _____ 81 + 7 = _____ 42 + 6 =_____ 73 + 6 = _____

17 + 2 = _____ 93 + 4 =______ 22 + 5 = _____ 52 + 6 = _____

2. Τοποθετώ τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλον και προσθέτω!!

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

23+4=_____ 72+6=______ 84+5=____ 77+1=____

Δ	Μ

Δ	Μ

Δ	Μ

Δ	Μ

93+2=____ 26+2=_____ 44+5=______ 82+4=_____

3. Συμπληρώνω τις αλυσίδες των αριθμών!

+10 +10 +10 +10 +10

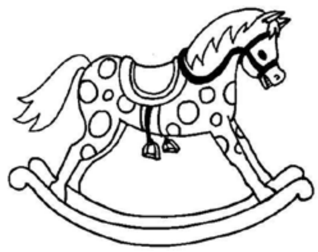
23					

+10 +10 +10 +10 +10

35					

+10 +10 +10 +10 +10

41					



4. Προσθέτω τις 'στρόγγυλες' δεκάδες ! !

20 + 40 =_____ 30 + 30 =______ 40 + 40 = _____

10 + 70 = _____ 20 + 40 = ______ 60 + 10 = _____

Τώρα γράφω 3 από τις προσθέσεις κάθετα!

Δ	Μ
+	

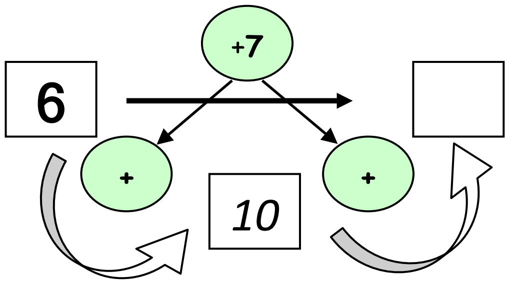
Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

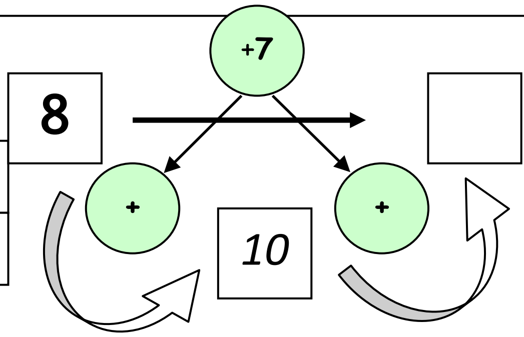
7ο μάθημα: ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ ΜΕ 'ΠΑΤΗΜΑ' ΣΤΗ ΔΕΚΑΔΑ

1. <u>Παρατηρώ και συμπληρώνω:</u>

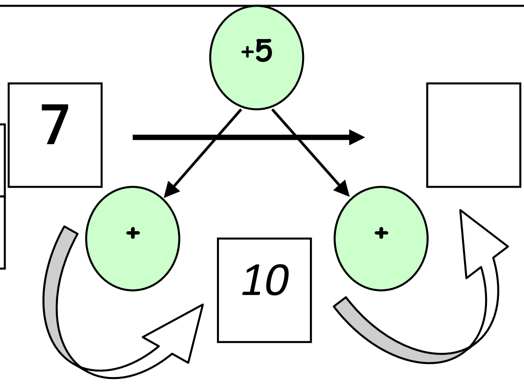
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
●	●	●	●	●	●				
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



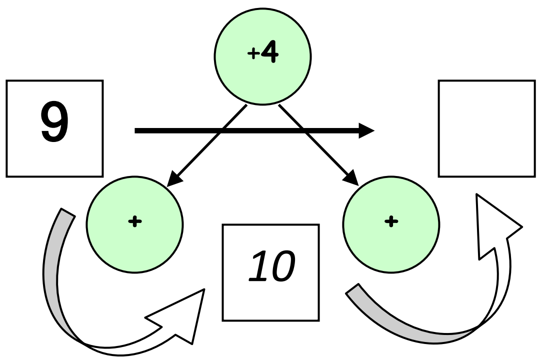
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
●	●	●	●	●	●	●	●		
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
●	●	●	●	●	●	●			
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
●	●	●	●	●	●	●	●	●	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



2. <u>Συμπληρώνω τα κενά κάνοντας «στάση» στο «σταθμό» 10:</u>

8 + 5 = 13
8 + 2 = 10
10 + 3 = 13

2 + 9 = ___
2 + ___ = 10
10 + ___ = ___

8 + 4 = ___
8 + ___ = 10
10 + ___ = ___

8 + 4 = ___
8 + ___ = 10
10 + ___ = ___

7 + 4 = ___
7 + ___ = 10
10 + ___ = ___

6 + 9 = ___
6 + ___ = 10
10 + ___ = ___

6 + 7 = ___
6 + ___ = 10
10 + ___ = ___

5 + 8 = ___
5 + ___ = 10
10 + ___ = ___

$8 + 6 = \square$

$8 + \_\_ = 10$

$10 + \_\_ = \square$

$7 + 9 = \square$

$7 + \_\_ = 10$

$10 + \_\_ = \square$

$7 + 5 = \square$

$7 + \_\_ = 10$

$10 + \_\_ = \square$

$4 + 9 = \square$

$4 + \_\_ = 10$

$10 + \_\_ = \square$

Καλή Επιτυχία

8ο - 9ο μάθημα: Προσθέσεις με … "πάτημα" στη δεκάδα !!!

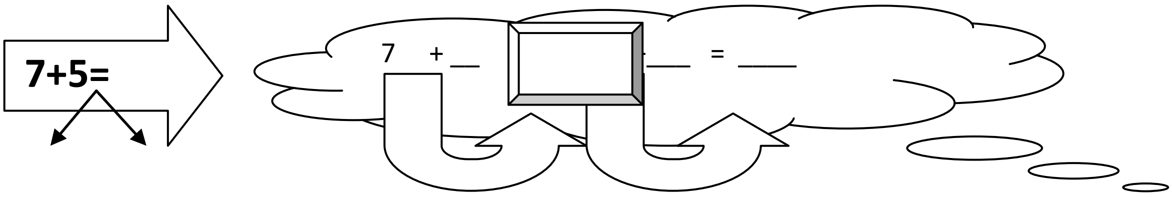
Προσοχή! Σε αυτό το φυλλάδιο πρέπει να κάνεις τις πράξεις με το μυαλό! Όχι με τα δάχτυλα… Σε αυτό θα σε βοηθήσουν τα ζευγαράκια του 10.

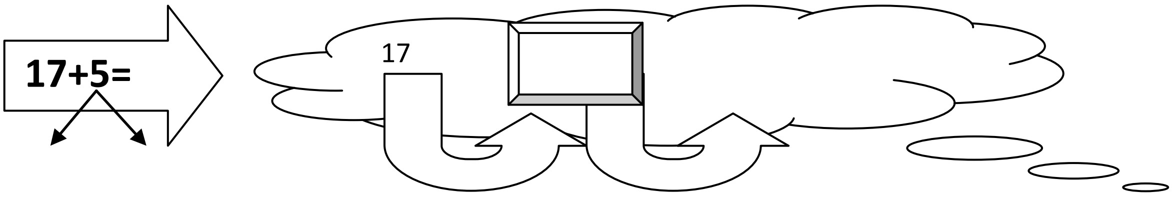
Ας τα θυμηθούμε…

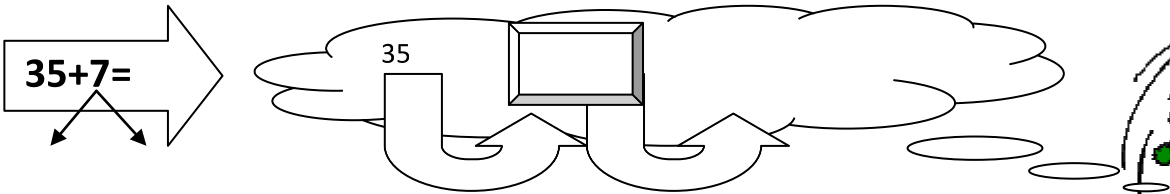
7 + 3 = 10	9 + …… = ……	3 + …… = ……
0 + …… = ……	5 + …… = ……	8 + …… = ……
10 + …… = ……	1 + …… = ……	6 + …… = ……
4 + …… = ……		2 + …… = ……

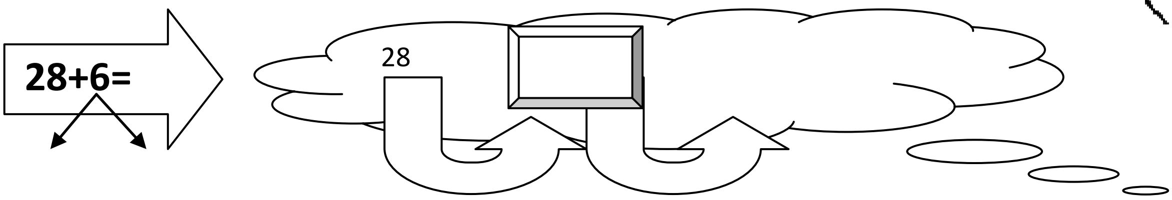
Πάμε να κάνουμε τις πράξεις. Μην ξεχνάς να πατάς στα μαξιλαράκια(10, 20, …)!

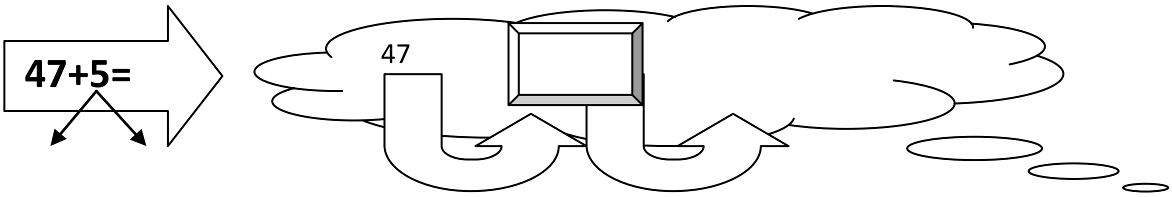
Χωρίζεις δηλαδή τον αριθμό όπως σε βολεύει για να πατήσεις στα μαξιλαράκια.











56+5=

56

29+4=

29

79+6=

79

43+8=

43

87+4=

87

7+6=

7

37+6=

37

9+3=

9

49+3=

49

26+8=

26

$10^{ο}$ – $11^{ο}$ μάθημα: Προσθέτω τους διψήφιους οριζόντια …

Όταν προσθέτω διψήφιους αριθμούς,
προσθέτω **Μονάδες με Μονάδες** και
Δεκάδες με Δεκάδες !!!

Παράδειγμα:

Δ	Μ		Δ	Μ		Δ	Μ
1	5	+	1	3	=	2	8

2 8

ή αλλιώς : 15 + 13 = (10 + 10) + (5 + 3) = 20 + 8 = 28

1. Προσθέτω τους αριθμούς με τον τρόπο που έμαθα:

Δ	Μ		Δ	Μ		Δ	Μ
1	6	+	2	3	=		

Δ	Μ		Δ	Μ		Δ	Μ
3	4	+	2	5	=		

Δ	Μ		Δ	Μ		Δ	Μ
4	7	+	3	1	=		

Δ	Μ		Δ	Μ		Δ	Μ
8	8	+	1	1	=		

Δ	Μ		Δ	Μ		Δ	Μ
5	3	+	4	6	=		

2. Υπολογίζω πόσο κάνει:

23 + 45 = (__+ __) + (__+__) = _____

26 + 12 = (__+__) + (__+__) = _____

34 + 51 = (__+__) + (__+__) = _____

11 + 46 = (__+__) + (__+__) = _____

66 + 23 = (__+__) + (__+__) = _____

35 + 34 = (__+__) + (__+__) = _____

40 + 45 = (__+__) + (__+__) = _____

82 + 12 = (__+__) + (__+__) = _____

74 + 20 = (__+__) + (__+__) = _____

68 + 21 = (__+__) + (__+__) = _____

25 + 73 = (__+__) + (__+__) = _____

52 + 12 = (__+__) + (__+__) = _____

77 + 11 = (__+__) + (__+__) = _____

33 + 22 = (__+__) + (__+__) = _____

20 + 62 = (__+__) + (__+__) = _____

3. Τώρα κάνω τις προσθέσεις με το νου!

45 + 22 = _____   71 + 23 =______   34 + 42 =______

62 + 26 = ______   13 +17 = ______

12ο μάθημα: Προσθέτω κάθετα και οριζόντια ! !

Τοποθετώ τους αριθμούς κάθετα και υπολογίζω τα αποτελέσματα:

23 + 36 =_____ 15 +33 =_____ 48 + 11 = _____ 42 +22 =_____

34 + 24 = _____ 80 + 17 = _____ 26 + 60 =_____ 83 + 16 = _____

17 + 26= _____ 30 + 42 =______ 66 + 22 = _____ 20 + 18 = _____

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

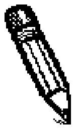
Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	



13° μάθημα: ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΚΑΘΕΤΑ!!!

1. Τοποθετώ τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλο και βρίσκω πόσο κάνει! Σχηματίζω το αποτέλεσμα με ράβδους και κυβάκια.

23 + 14 = ____

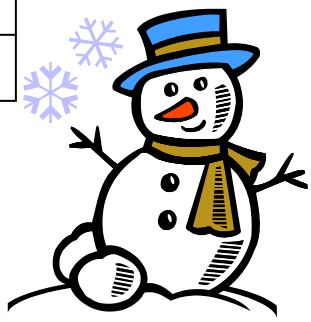
Δ	Μ
+	

35 + 16 = _____

Δ	Μ
+	

72 + 16 = ____

Δ	Μ
+	



62 + 35 = _____

Δ	Μ
+	

50 + 27 = _____

Δ	Μ
+	

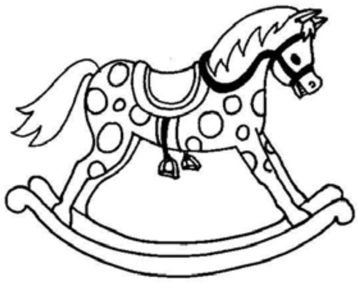
2. Συμπληρώνω τα κενά στις παρακάτω προσθέσεις! (μετράω ανά 10, 20)

33 + ____ = 43 56 + ____ = 76 49 + ____ = 69

45 + _____= 65 73 + _____ = 93 34 + _____ = 54

67 + _____ = 77 27 + _____ = 47 72 + _____ = 82

19 + _____ = 39 42 + _____ = 62 22 + _____ = 42



14ο μάθημα: ΠΡΟΣΘΕΤΩ …

1.Υπολογίζω τις προσθέσεις κάθετα και οριζόντια:

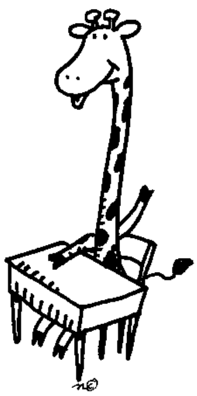
52	47	34	61	24	83	44	35	16	48
+47	+50	+34	+27	+35	+11	+15	+22	+43	+21
99									

56 + 31 = _____ 13 + 74 = _____ 82 + 4 =_____

43 + 44 = _____ 36 + 42 = _____ 49 + 50 = _____

17 + 12 = _____ 26 + 13 = _____ 72 + 6 = _____

25 + 25 = _____ 45 + 40 = _____ 30 + 57 = _____



2. Συμπληρώνω τα κενά :

Ανεβαίνω ανά 10 !!

Α) 15 - ………… - 35 – 45 – 55 - …………- 65

23 - ………… - 43 – 53 – 63 - …………- 83 - …………

45 + _____ = 55 68 + _____ = 78 19 + _____ = 29

81 + _____ = 91 33 + _____ = 43 57 + ____ = 67

Β) 23 - ……… - 63 - ………

Ανεβαίνω ανά 20 !!

36 - ……… - 76 - ………

67 + _____ = 87 14 + 20 = _____ 45 + _____ = 65

15ο μάθημα: Κάνω επανάληψη ! !

1. Συμπληρώνω τα κενά:

- 18 - ………… - 38 – 48 – 58 - …………- 78

- 35 - ……… - 75 - ………

Α) 85 + _____ = 95 23 + _____ = 43 79 + _____ = 99

19 + _____ = 29 45+ _____ = 65 27 + ___ = 47

Β) 12 + _____ = 25 67 + _____ = 78 53 + ___= 77

61 + _____= 85 50+______= 75 60+_____= 75

72 +_____= 96 33 +______= 57 22 +_____ = 47

2. Προσθέτω κάθετα και οριζόντια:

13	57	65	15	20	80	54	28	62	56
+45	+22	+11	+52	+23	+16	+34	+21	+23	+21

65 + 21 = _____ 16 + 70 = _____ 34 +24 =_____

54 + 22 = _____ 25 + 13 = _____ 42 + 6 = _____

3. Βρίσκω πόσο κάνει συμπληρώνοντας τη "στρογγυλή" δεκάδα!

45+8 =_____

45 +_____= 50

50+_____= ___

34+8 = _____

34+_____= 40

40+_____=_____

26 + 7 =____

26+_____= 30

30+_____=______

Το post-test έτσι όπως χορηγήθηκε στους 5 συμμετέχοντες της εκπαιδευτικής παρέμβασης:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

✓ Προσπάθησε να κάνεις τις παρακάτω προσθέσεις:

14 + 3 = ☐ 23 + 26 = ☐ 43 + 22 = ☐

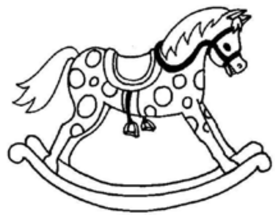
25 + 4 = ☐ 44 + 35 = ☐ 27 + 51 = ☐

42 + 7 = ☐ 51 + 16 = ☐ 84 + 6 = ☐

✓ Προσπάθησε να συμπληρώσεις τα κενά:

7 + ____ = 10 16 + _____ = 20 38 + ____ = 50

12 + ____ = 22 24 + _____ = 44 45 + ____ = 69



✓ Υπολογίζω τα αποτελέσματα:

30 + 4 +10 = ____ 30 +2 + 30 =____ 8+ 50 + 20 =____

✓ Προσθέτω κάθετα τους διψήφιους:

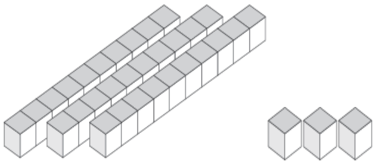
32+45 = ____ 55 + 14 = _____ 62 + 25 = _____

Δ	Μ
+	

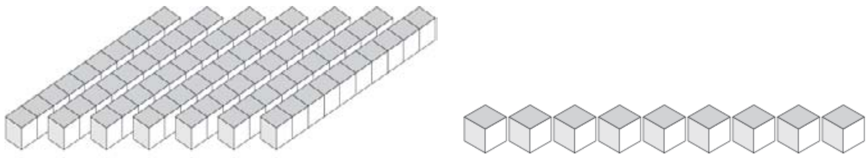
Δ	Μ
+	

Δ	Μ
+	

✓ Πόσα κυβάκια έχω; Πόσες είναι οι Δεκάδες και πόσες οι Μονάδες κάθε αριθμού;



= ____ = __ Δ + __ Μ



= ____ = __ Δ+__Μ

✓ Πόδες μονάδες έχει μέσα της μία δεκάδα; ……………

✓ Με πόσες δεκάδες μπορώ να ανταλλάξω 30 μονάδες; ……………

✓ Με πόσες μονάδες μπορώ να ανταλλάξω 7 δεκάδες; ………………

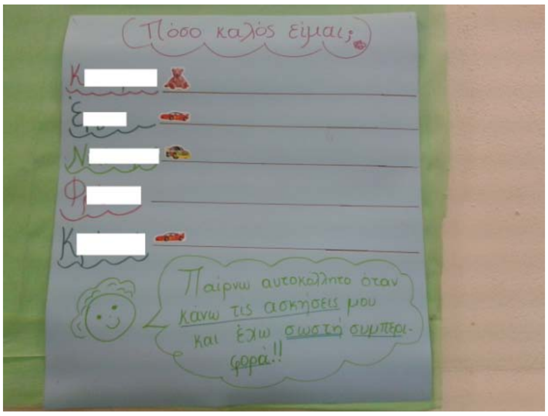
✓ Πόσες Δεκάδες και πόσες Μονάδες έχουν οι αριθμοί; Τις ζωγραφίζω…

	Δεκάδες	Μονάδες	Ζωγραφιά
78 →			
82 →			
33 →			
20 →			
19 →			

✓ Προσθέτω φτάνοντας στη "στρόγγυλη" δεκάδα!

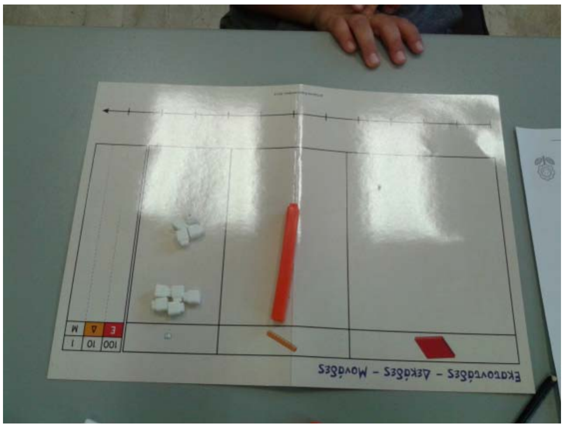
34 + 8 = ______	59 + 8 = ______	16 + 9 =______
34 + _____= 40	59 +_____= 60	16 + _____ = 20
40 + _____=____	60 + _____=_____	20 +_____ =____

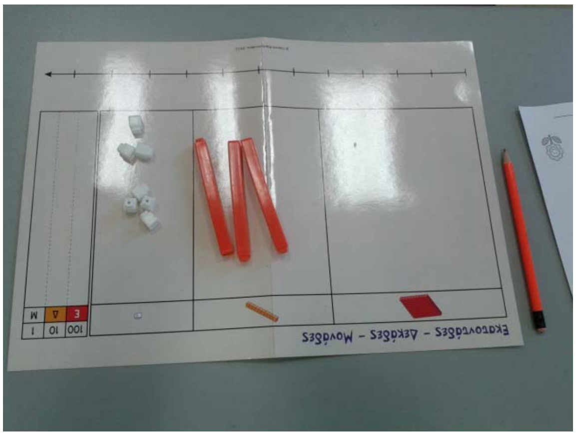
Φωτογραφικό υλικό από τα μαθήματα παρέμβασης:



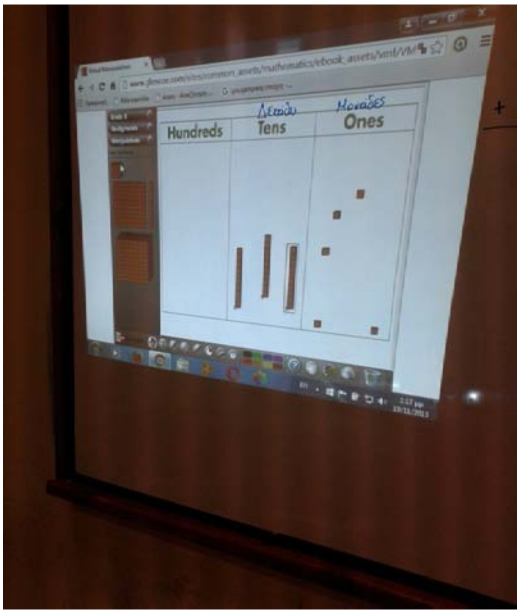
Πίνακας επιβράβευσης μαθητών.

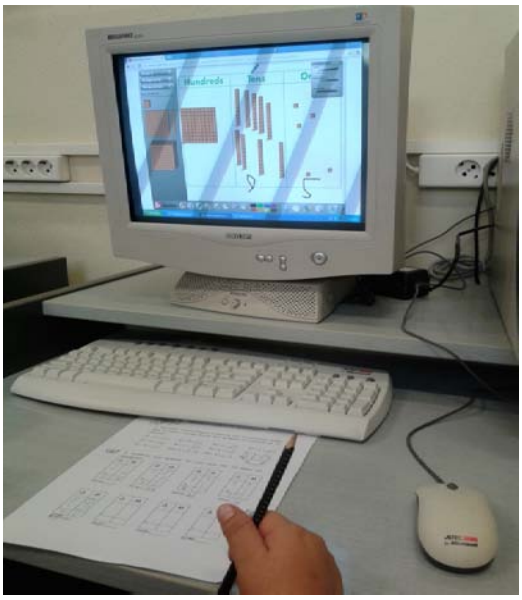
Βασικά Αριθμητικά Δεδομένα του 10.



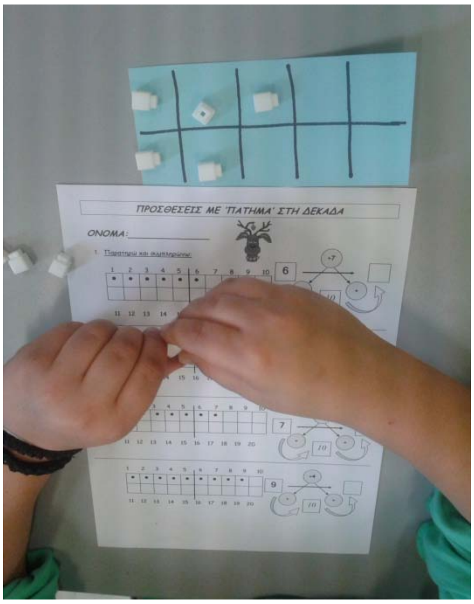


Χρήση δεκάδων και μονάδων για την αναπαράσταση διψήφιων αριθμών.

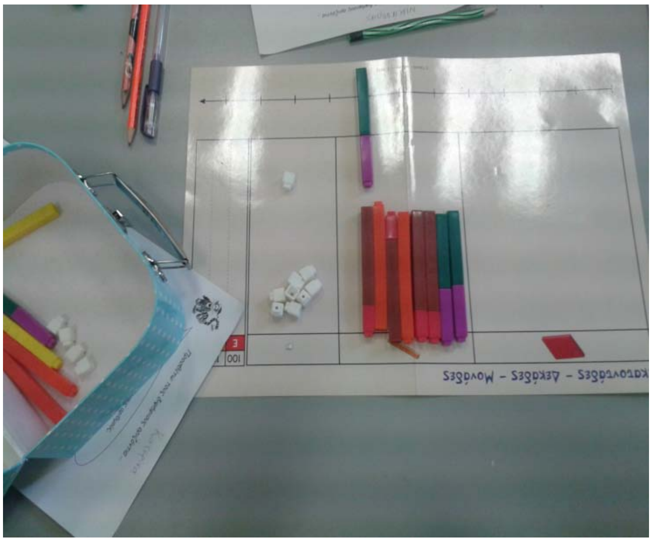


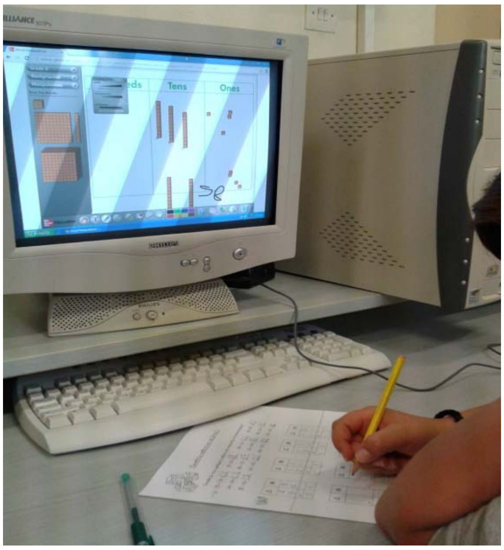


Χρήση του λογισμικού προγράμματος για αναπαράσταση διψήφιων αριθμών και πρόσθεση αυτών.

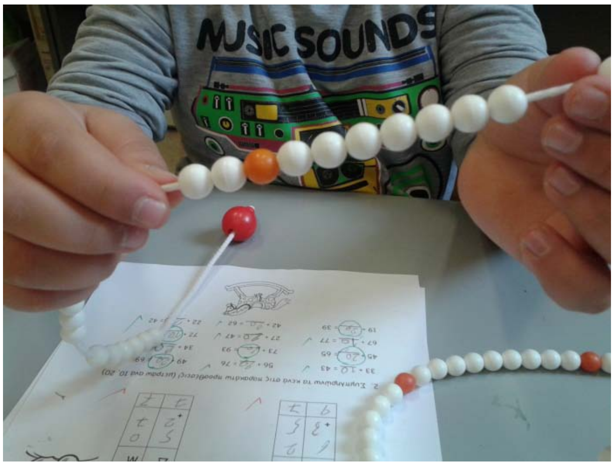


Χρήση των πλαισίων του 10 κατά την εφαρμογή της στρατηγικής αποδόμησης του β΄ προσθετέου.





Χρήση του εποπτικού υλικού και του λογισμικού προγράμματος κατά την οριζόντια και κάθετη πρόσθεση των διψήφιων αριθμών.



Εύρεση του συμπληρώματος αθροίσματος

με τη βοήθεια της αριθμογραμμής με χάντρες.

Βιβλιογραφία – Αρθρογραφία

Αγαλιώτης Ι. (2013). *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση. Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα: Γρηγόρη.

Baroody A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the Basic Number Combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, 22-31.

Bryant D. P., Bryant B. R., Gersten R., Scammacca N., & Chavez M. M. (2008a). Mathematics Intervention for First- and Second-Grade Students With Mathematics Difficulties. *Remedial and Special Education*, 29(1), 20-32. doi: 10.1177/0741932507309712

Bryant D. P., Bryant B. R., Gersten R. M., Scammacca N. N., Funk C., Winter A., Shih M., & Pool C. (2008b). The Effects of Tier 2 Intervention on the Mathematics Performance of First-Grade Students Who Are at Risk for Mathematics Difficulties. *Learning Disability Quarterly*, 31(2), 47-63.

Dennis M. S. (2015). Effects of Tier 2 and Tier 3 Mathematics Interventions for Second Graders with Mathematics Difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(1), 29-42.

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003). Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών και αναλυτικά προγράμματα σπουδών υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003. Διαθέσιμο από: http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Dennis M. S., Bryant B. R., & Drogan R. (2015). The Impact of Tier 2 Mathematics Instruction on Second Graders with Mathematics Difficulties. *Exceptionality*, 23, 124-145. doi: 10.1080/09362835.2014.986613

Dowker A. (2005). Early Identification and Intervention for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 324-332. doi: 10.1177/00222194050380040801

Dowker A. (2009). Use of derived fact strategies by children with mathematical difficulties. *Cognitive Development*, 24, 401-410. doi: 10.1016/j.cogdev.2009.09.005

Friso-van den Bos (2014). *Making sense of numbers - Early mathematics achievement and working memory in primary school children*. GVO drukkers & vormgevers B.V. ISBN: 978-90-393-6197-9

Fuchs L. S., Fuchs D., Hamlet C. L., Powel S. R., Capizzi A. M., & Seethaler P. M. (2006). The Effects of Computer-Assisted Instruction on Number Combination Skill in At-Risk First Graders. *Journal of Learning Disabilities*, 39(5), 467-475.

Fuchs L. S., Fuchs D., & Hoollenbeck K. N. (2007). Extending Responsiveness to Intervention to Mathematics at First and Third Grades. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22(1), 13-24.

Fuchs L. S., Fuchs D., Powell S. R., Seethaler P. M., Cirino P. T., & Fletcher J. M. (2008). Intensive Intervention for Students with Mathematics Disabilities: Seven Principles of Effective Practice. *Learning Disability Quarterly*, 31(2), 79-92.

Fuchs L. S., Powell S. R., Seethaler P. M., Cirino P. T., Fletcher J. M., Fuchs D., & Hamlett C. L. (2010). The effects of strategic counting instruction, with and without deliberate practice, on number combination skill among students with mathematics difficulties. *Learning and Individual Differences*, 20, 89-100.

Fuson K. C. (1990). Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction Learning and Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 273-280.

Geary D. C., Bailey D. H., & Hoard M. K. (2009). Predicting Mathematical Achievement and Mathematical Learning Disability With a Simple Screening Tool. The Number Sets Test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 265-279. doi: 10.1177/0734282908330592

Gersten R., Jordan N. C., & Flojo J. R. (2005). Early Identification and Interventions for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293-304.

Jordan N. C., Hanich L. B., & Kaplan D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 103-119. doi: 10.1016/S0022-0965(03)00032-8

Καραγιαννάκης Γ. (2012). *Οι αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες*. Αθήνα: Διερευνητική Μάθηση.

Καργιωτάκης Γ., Μαραγκού Α., Μπελίτσου Ν., Σοφού Β. (2013). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Διόφαντος.

Östergren R. (2013). *Mathematical Learning Disability. Cognitive Conditions, Development and Predictions*. *Linköping University*. ISBN 978-91-7519-565-0.

Van Luit J. E. H., Van de Rijt B. A. M., & Pennings A. H. (1993). Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης. Προσαρμογή – στάθμιση για την Ελλάδα Μπάρμπας Γ. & Βερμέουλεν Φ. (2008). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Van de Walle J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Ηλεκτρονικές Πηγές:

www.glencoe.com (Virtual Manipulatives)