ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α' ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

«Διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στη Δ΄ τάξη με αξιοποίηση της ιστορίας των δεκαδικών και χρήση παιχνιδιών».

της

Απιδοπούλου Μαρίας, Α.Ε.Μ 796

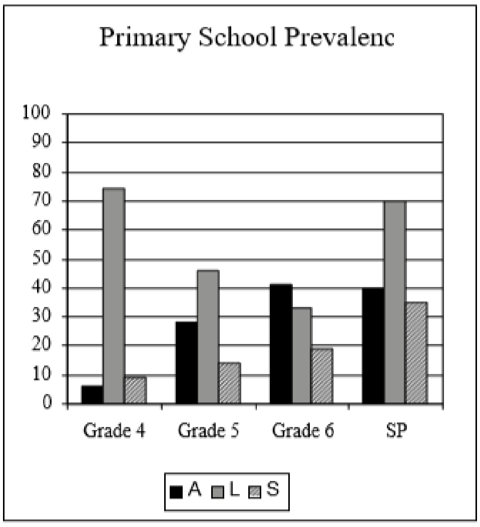
Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης, Καθηγητής
Εξεταστές: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής
Κωνσταντίνος Χρήστου, Επίκουρος καθηγητής

Φλώρινα, ………………. 2019

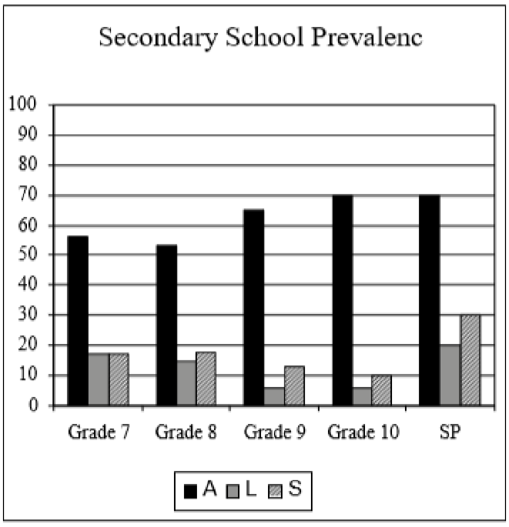
Περιεχόμενα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΚΟΝΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Εικόνες 1 και 2 (Εργασία σελ 18)



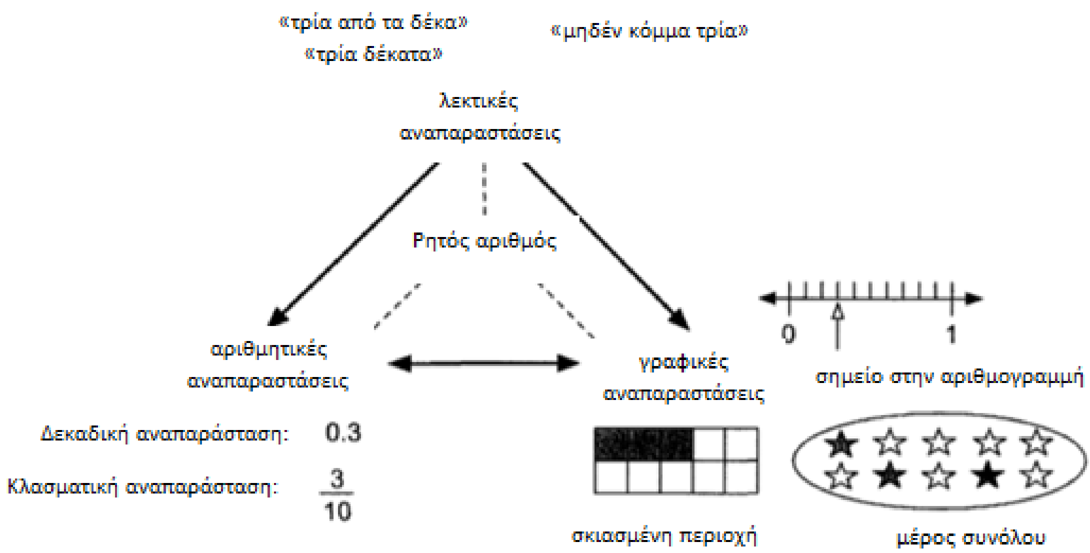
Εικόνα 1: Επικράτηση παρανοήσεων (A,L,S) στις τάξεις του δημοτικού σχολείου.



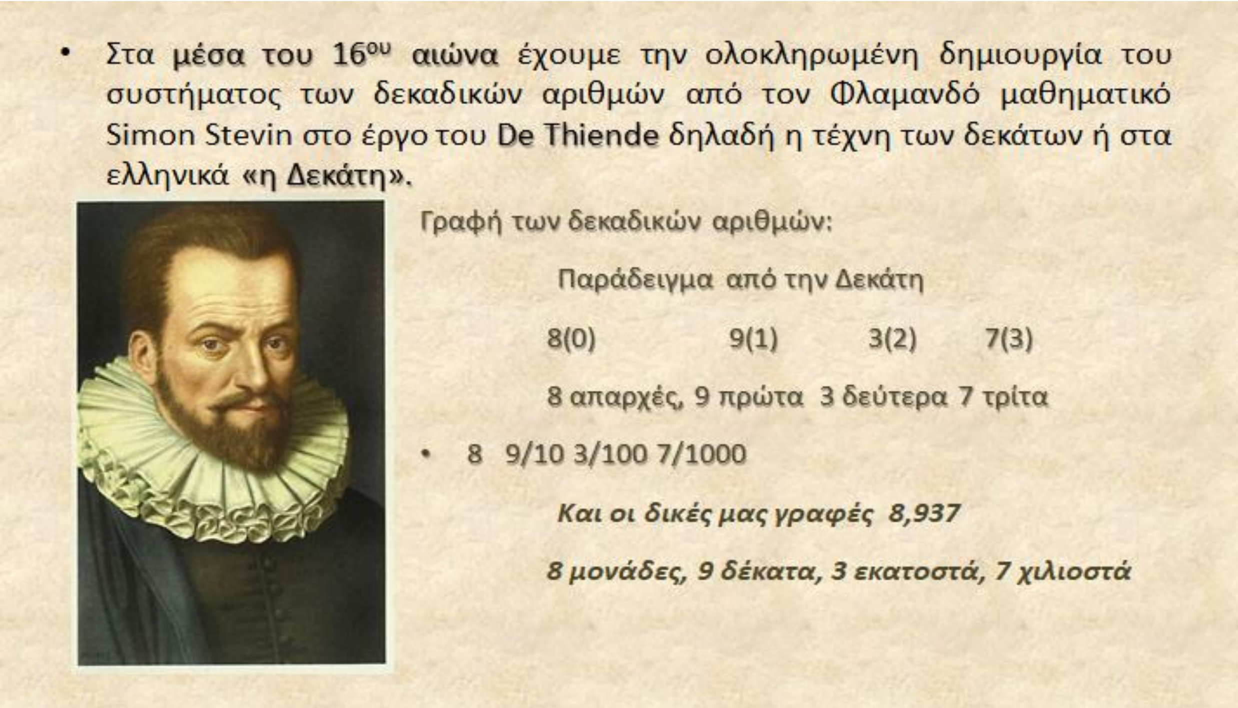
Εικόνα 2: Επικράτηση παρανοήσεων (A,L,S) σε τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Σχήμα 1, (Εργασία σελ 28)

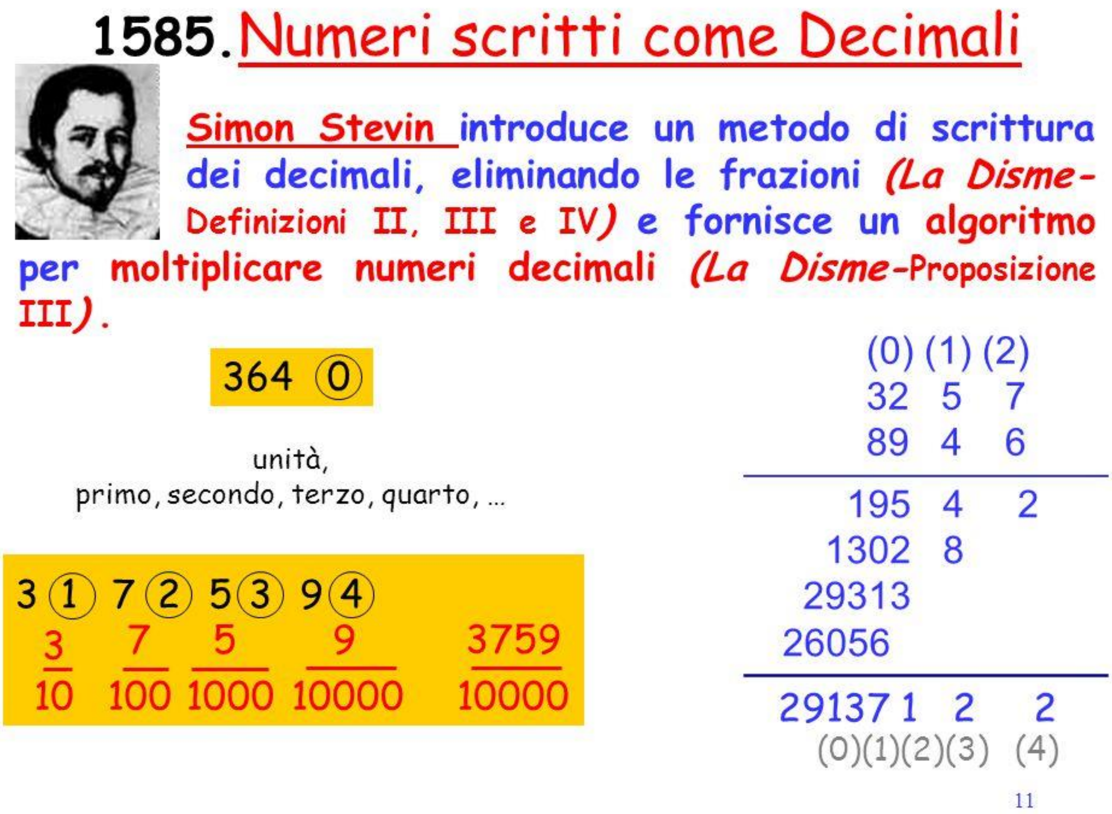
Σχήμα 1: Σύστημα αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών



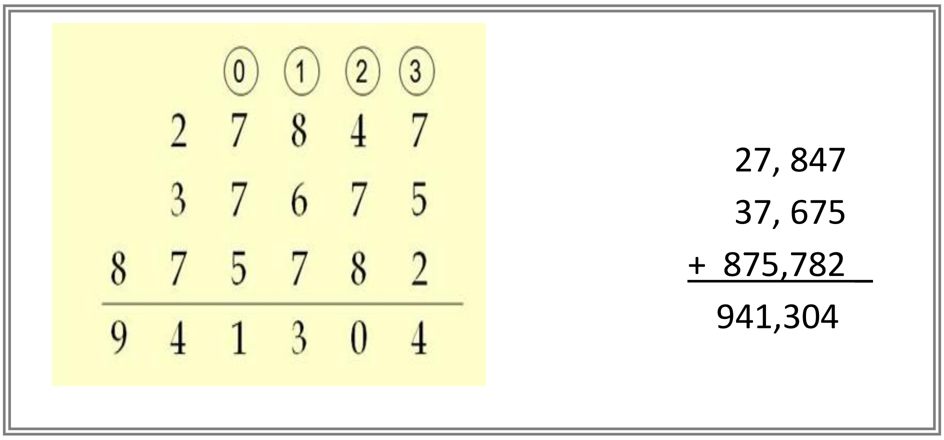
Εικόνα 3 (Εργασία σελ 36)



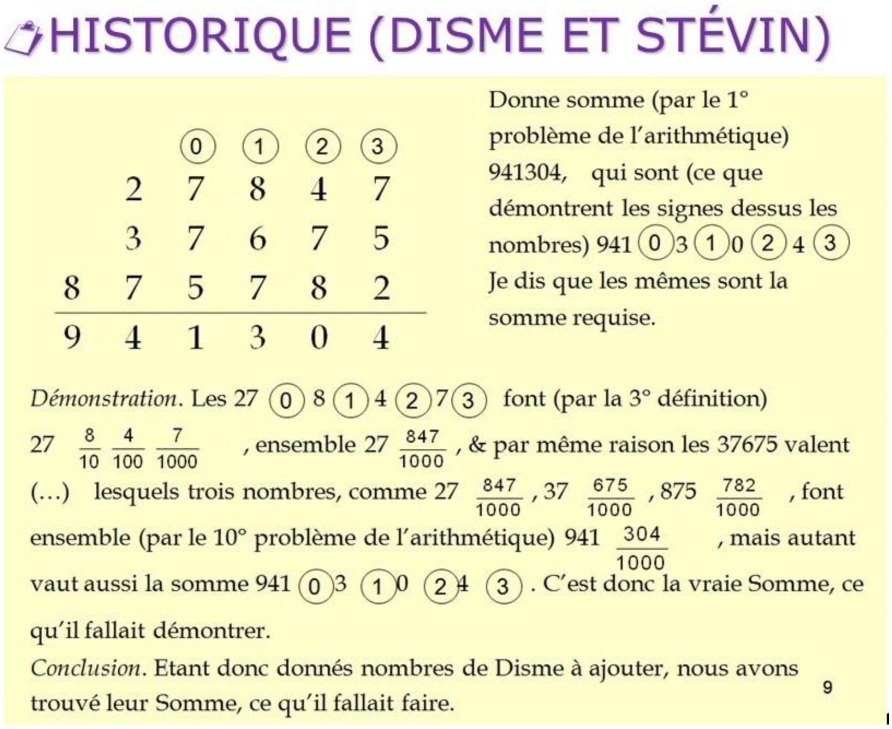
Εικόνα 4 (Εργασία σελ 36)



Εικόνα 4 (Εργασία σελ 36)



Εικόνα 4: Παράδειγμα πρόσθεσης στη «Δεκάτη» και στη σημερινή μορφή



Εικόνα 5 (Εργασία σελ 39)

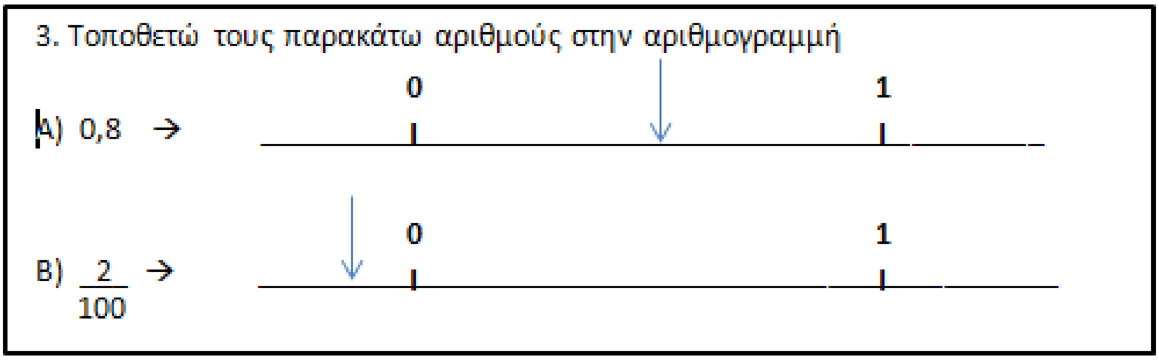
Author	Time	Notation
Before Simon Stevin		$37\frac{245}{1000}$
Simon Stevin	1585	$37\ 2^{(1)}\ \ 4^{(2)}\ \ 5^{(3)}$
Trigonometric Tables	1593	first decimal point
Franciscus Viete	1600	$37\vert_{245}$ $\quad 37,\frac{245}{1000}$ **37**, 245
John Kepler	1616	37 (245
John Napier	1617	$37 : 2^{I}\ 4^{II}\ 5^{III}$
Henry Briggs	1624	$37^{\,245}$
William Oughtred	1631	$37\,\vert\underline{245}$
Balam	1653	37 : 245
Ozanam	1691	$37 \cdot \overset{(1)}{2}\ \ \overset{(2)}{4}\ \ \overset{(3)}{5}$
Modern		37.245

Εικόνα 6 (Εργασία σελ 45)

ΠΑΙΧΝΙΔΙ	ΤΥΠΙΚΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ
*Διασκέδαση, ευχαρίστηση, απόλαυση, ικανοποίηση	*Χωρίς ενδιαφέρον, ανιαρή, πληκτική
*Επιλέγεται και οργανώνεται από τα παιδιά	*Επιλέγεται και οργανώνεται από τον εκπαιδευτικό
*Εθελοντική, αυθόρμητη, δεν επιβάλλεται (συμμετοχή παιδιών)	*Υποχρεωτική, επιβάλλεται από τον εκπαιδευτικό (συμμετοχή παιδιών)
*Ενεργή συμμετοχή των παιδιών (για τη νίκη)	*Παθητική συμμετοχή
*Χωρίς τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού	*Συμμετοχή και καθοδήγηση εκπαιδευτικού
*Κανόνες	*Οδηγίες
*Κίνητρο η διαδικασία	*Χωρίς κίνητρο
*Χωρίς εξωτερικό στόχο	*Με καθορισμένο μαθησιακό στόχο
*Μη κυριολεκτική, φαντασιακή κλπ. σκέψη	*Κυριολεκτική, συγκεκριμένη σκέψη
*Ομαδική (συνύπαρξη ανταγωνισμού/συνεργασίας)	*Ατομική
*Συνεχής ανατροφοδότηση	*Περιορισμένη ανατροφοδότηση
*Φασαρία, αταξία	*Ησυχία, τάξη
*Διαφοροποίηση ανάλογα με την ομάδα των παικτών	*Μη διαφοροποίηση
*Δημιουργικότητα, κριτική σκέψη κλπ.	*Εξάσκηση, εκμάθηση, κατανόηση, εμπέδωση κλπ.
*Ενεργητική μάθηση	*Παθητική μάθηση
*Άτυπη αξιολόγηση	*Τυπική αξιολόγηση
*Κοινωνικά, συναισθηματικά, γνωστικά οφέλη	*Γνωστικά οφέλη
*Μετρήσιμο αποτέλεσμα (νικητής)	*Μη μετρήσιμο αποτέλεσμα (γνωστικό)
*Αβέβαιη έκβαση	*Βέβαιη έκβαση

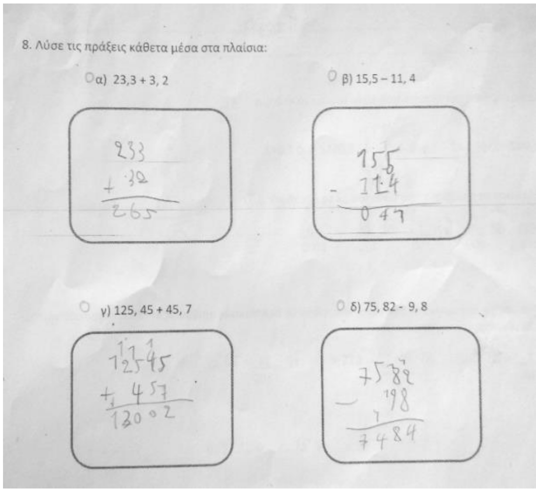
Εικόνα 6: Βασικά χαρακτηριστικά παιχνιδιού και τυπικής μαθησιακής δραστηριότητας

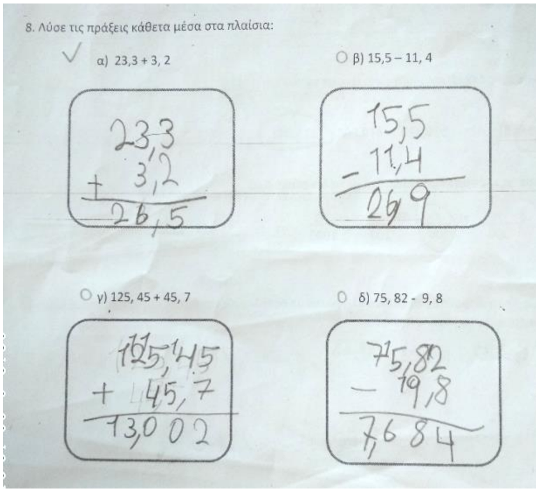
Εικόνα 7, (Εργασία σελ 64)



Εικόνα 7: Απάντηση Ελένης. Ι στην Άσκηση 3 του pre test

Εικόνες 8 και 9, (Εργασία σελ66)



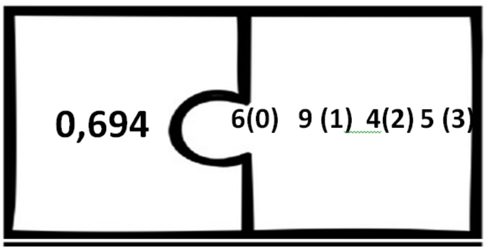


Εικόνες 6: Απάντηση Βασίλη, Άσκηση 9

Εικόνα 7: Απάντηση Ελένης. Ι, Άσκηση 9

Εικόνα 10, (Εργασία σελ 69)

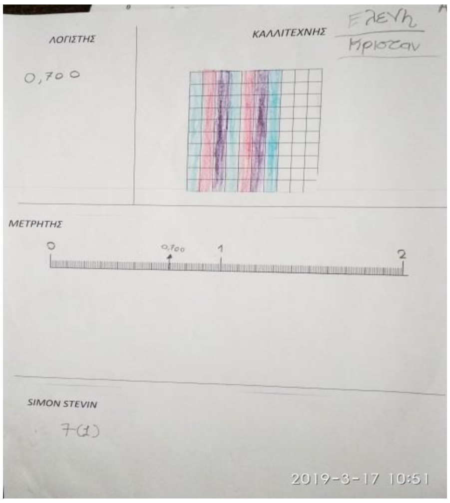
ΣΤΑΘΜΟΣ 4



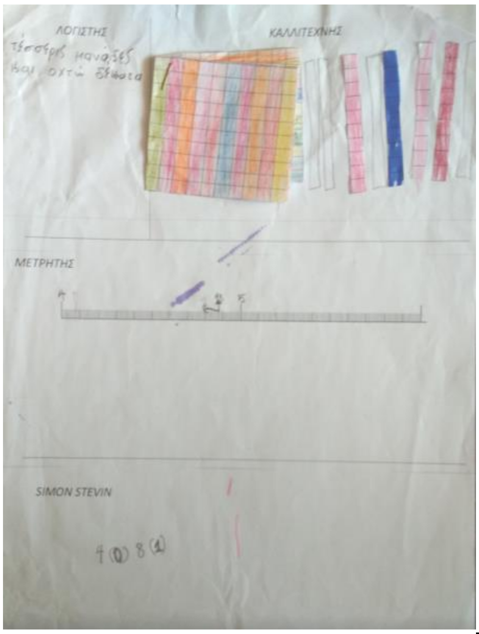
Εικόνα 8: Κομμάτια παζλ από την αποστολή 4 ενωμένα με λανθασμένο τρόπο

<u>Εικόνες 11 και 12, (Εργασία σελ 69)</u>

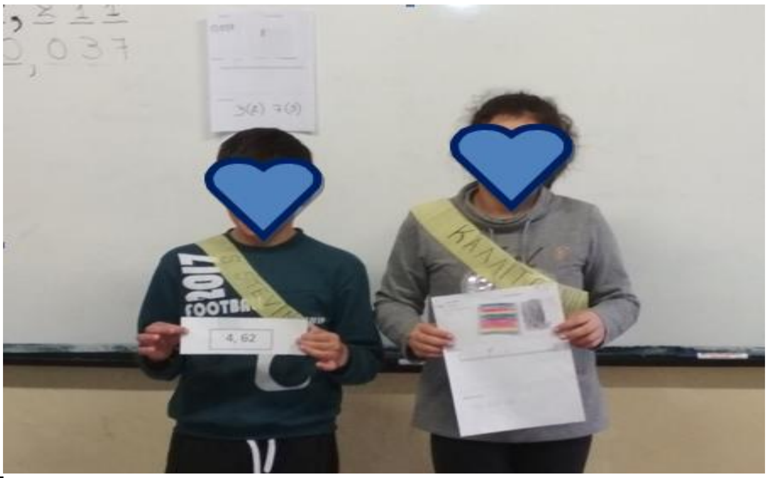
Εικόνα 11: Οι μαθητές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού ο «Κώδικας του Stevin».



Εικόνα 12: Φύλλο εργασίας όπου συμπλήρωσαν τα παιδιά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις.

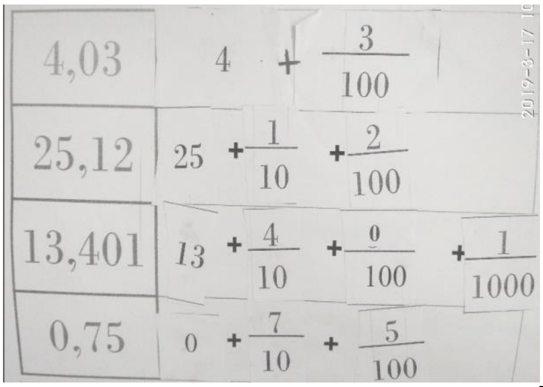


Εικόνα 13: Φύλλο εργασίας των Βασίλη, Ελένης.Μ και Κριστιάν με τον αριθμό 4,8 στη δραστηριότητα των αναπαραστάσεων

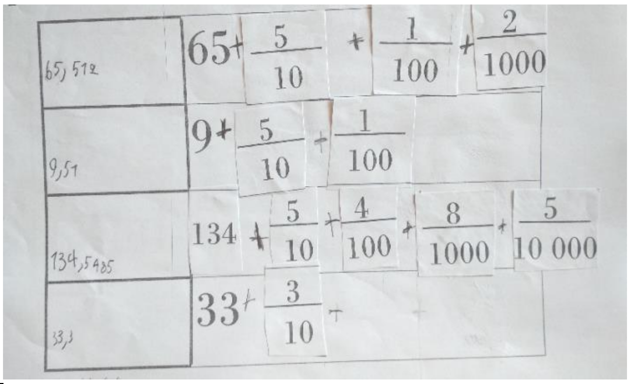


Εικόνα 14: Ο Πρόδρομος και η Βάσω παρουσιάζοντας τον αριθμό τους 4,62 στη δραστηριότητα των αναπαραστάσεων

Εικόνες 15, 16 και 17, (Εργασία σελ 71)



Εικόνα 15: Φύλλο εργασίας του Νίκου και της Βασιλικής από την πρώτη φάση του Εργοστασίου των δεκαδικών



Εικόνα 16: Φύλλο εργασίας του Βασίλη και του Πρόδρομου από τη δεύτερη φάση του Εργοστασίου των δεκαδικών

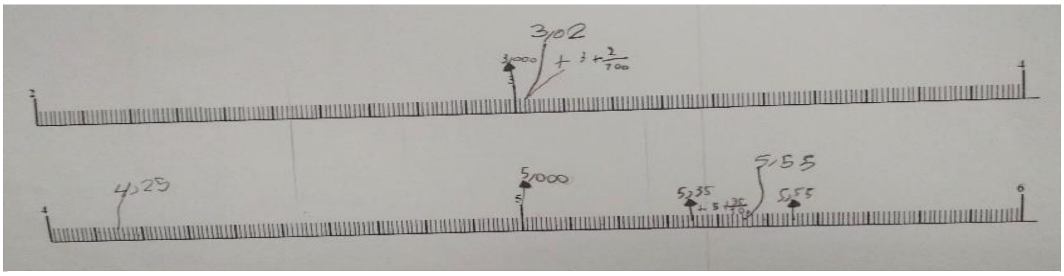
$\frac{7}{1000}$	$\frac{4}{1000}$	$\frac{3}{10\,000}$	$\frac{9}{10}$
251	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{6}{10}$
1340	$\frac{6}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{8}{1000}$
$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{6}{1000}$	$\frac{4}{10\,000}$

Εικόνα 17: Φύλλο εργασίας του Χρήστου και της Ελένης. Μ από την τρίτη φάση του Εργοστασίου των δεκαδικών για να ανακαλύψουν οι συμμαθητές τους ποιον αριθμό χρωμάτισαν (1340, 974)

Εικόνα 18, (Εργασία σελ 72)

Εικόνα 18 : Τα παιδιά κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού «Μπες στη σειρά». Βλέπουμε στα δεξιά 2 μαθητές να στέκονται πίσω από 2 άλλους κι αυτό συμβαίνει επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό σε διαφορετική αναπαράσταση.

Εικόνα 19, (Εργασία σελ 73)



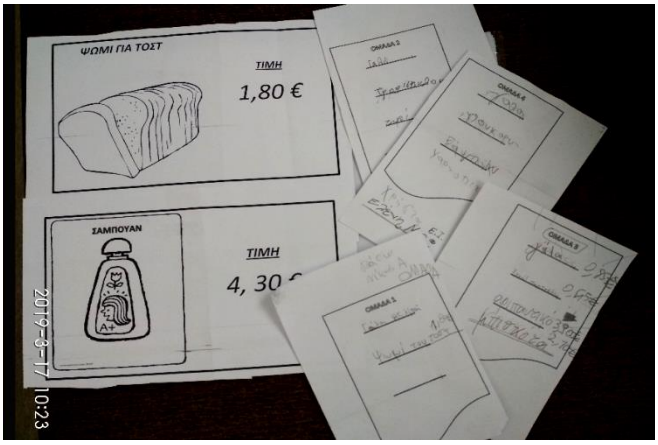
Εικόνα 19: Φύλλο εργασίας των Βασίλη και Πρόδρομου όπου τοποθέτησαν δεκαδικούς στη δραστηριότητα με τις αριθμογραμμές

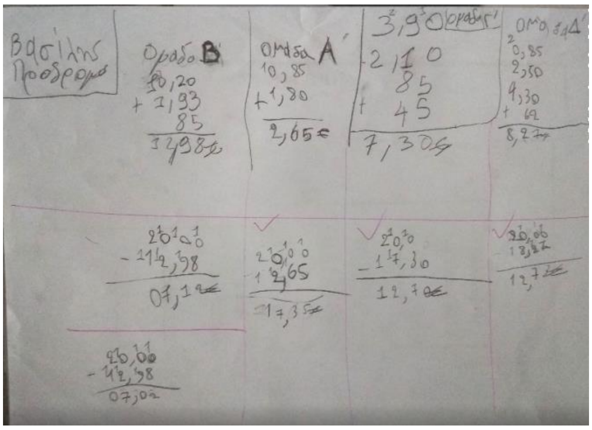
Εικόνα 20, (Εργασία σελ 74)

1 δεκάδα 15 εκατοστά	1 δεκάδα 1 δέκατο 5 εκατοστά	10 μονάδες 15 εκατοστά
10,15	1 μονάδα 358 χιλιοστά	1 μονάδα 3 δέκατα 5 εκατοστά 8 χιλιοστά

Εικόνα 18: Έξι κάρτες του παιχνιδιού «Μάχη», συγκρίνονται κάθε φορά ανά δύο, ανάλογα πως τις χρησιμοποιούν οι παίκτες

Εικόνα 21 και 22, (Εργασία σελ 74)

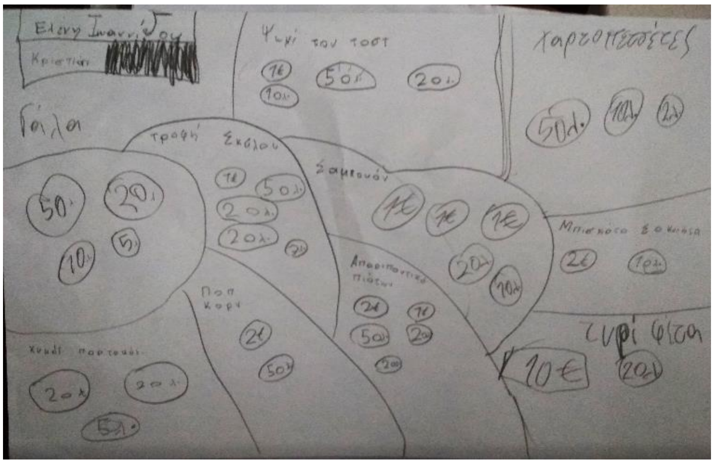




Εικόνα 21: Κάρτες δύο προϊόντων και οι λίστες των ομάδων με τα προϊόντα που κατάφεραν να βρούνε

Εικόνα 22: Φύλλο εργασίας των Βασίλη και Πρόδρομου με τους υπολογισμούς των προϊόντων

<u>Εικόνα 23, (Εργασία σελ 75)</u>



Εικόνα 23: Φύλλο εργασίας των Ελένη.Ι και Κριστιάν όπου ζωγράφισαν τα νομίσματα που θα χρειάζονταν για κάθε προϊόν

<u>Εικόνα 24, (Εργασία σελ 78)</u>

Εικόνα 24: Βάσω και Κριστιάν ως μασκοφόροι με αναπαράσταση του S. Stevin και του ζωγράφου αντίστοιχα.

Περίληψη

Με αφορμή τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση των δεκαδικών αριθμών, υπάρχει πάντα η ανάγκη για νέους τρόπους διδασκαλίας που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Η παρούσα έρευνα αφορά στον σχεδιασμό μιας πειραματικής διδασκαλίας για τους δεκαδικούς αριθμούς, για την Τετάρτη τάξη του δημοτικού αξιοποιώντας την ιστορία τους και τη χρήση παιχνιδιών. Η έρευνά μας έλαβε χώρα σε ένα μικρό σχολείο της περιφέρειας, με συμμετέχοντες οκτώ μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2018-2019. Στα αποτελέσματά μας από τις συνεντεύξεις των παιδιών για τα εννιά παιχνίδια που συμμετείχαν αλλά και μέσα από τη σύγκριση των επιδόσεών τους από τα pre και post test οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως η χρήση της ιστορίας των δεκαδικών στη διδασκαλία τους με παιγνιώδη τρόπο, όπως και η χρήση άλλων παιγνιωδών δραστηριοτήτων, μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν καλύτερα το μέγεθος και την αξία θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς, την ποικιλομορφία των αναπαραστάσεών τους όπως και το πέρασμα από τη μία μορφή στην άλλη και να εντείνει το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά.

Λέξεις κλειδιά: διδασκαλία δεκαδικών, ιστορία των δεκαδικών, παιχνίδια, «Ο κώδικας του Stevin», Simon Stevin

Abstract

Given the difficulties students face in learning decimal numbers, there is always a need for new ways of teaching that helps students understand more effectively. The present study was aimed to design an experimental teaching of decimal numbers using their history and games, for fourth graders in elementary school and took place in a 3rd '- 4rth grade classroom, in a small district school, with eight students attending during the school year 2018-2019. In our interview results about the nine games the students participated in and through the comparison of their performance in the pre and post tests, we are led to conclude that the use of decimal history in their teaching in a playful way, as the use of other play activities, can help children better understand the size and value of place of decimals, the variety of their representations as well as the transition from one form to another and intensify students' interest in mathematics.

Keywords: teaching decimals, history of decimals, games, "Stevin's Code", Simon Stevin

Εισαγωγή

Το δεκαδικό σύστημα και κατ’ επέκταση οι δεκαδικοί αριθμοί βρίσκονται σε κάθε πτυχή της καθημερινής μας ζωής (Yıldız,Taşkın, Aydın, & Köğce, 2011) όμως η κατανόησή τους αποτελεί ένα διαχρονικό πρόβλημα στην εκπαίδευση. Οι δεκαδικοί αποτελούν κομβικές έννοιες για την ομαλή συνέχιση στην εμβάθυνση της μαθηματικής σκέψης και πρακτικής τόσο για τα μαθηματικά όσο και για πολλές ακόμη επιστήμες, δραστηριότητες και επαγγέλματα (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015; Siegler et al., 2012).

Με δεδομένο ότι η κατανόηση των ρητών αριθμών έχει φανεί να συνδέεται με την επιτυχία στα μαθηματικά, στο δημοτικό σχολείο ένα από τα βασικότερα θέματα που απασχολούν εκπαιδευτικούς και μαθητές είναι οι δεκαδικοί αριθμοί κι αυτό γιατί η κατανόησή τους αποτελεί δύσκολο έργο και τροχοπέδη μέχρι τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και ως την ενήλικη ζωή (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Ένα εθνικά αντιπροσωπευτικό δείγμα δασκάλων της άλγεβρας στην Αμερική, που συμμετείχαν στην έρευνα, αξιολόγησαν τους μαθητές ως έχοντες πολύ κακή προετοιμασία στους «ρητούς αριθμούς και τις λειτουργίες που περιλαμβάνουν κλάσματα και δεκαδικά ψηφία» (*National Mathematics Advisory Panel,* 2008).Το ενδιαφέρον ολόκληρης της εκπαιδευτικής κοινότητας στρέφεται στην εύρεση του κατάλληλου τρόπου διδασκαλίας και στη δημιουργία ενός ευνοϊκότερου πεδίου για την αποτελεσματικότερη μάθηση, φέρνοντας στο φως τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών και συγκεκριμένα των δεκαδικών.

Έρευνες σε όλο τον κόσμο επιβεβαιώνουν τη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν και να διαχειριστούν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα δεκαδικά κλάσματα. Οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του δημοτικού αλλά και μεγαλύτερων τάξεων αφορούν κατά κύριο λόγο τη λανθασμένη διαχείριση των δεκαδικών ως ακέραιους, ως κλάσματα ή ως αρνητικούς αριθμούς (Irwin 2001, Steinle & Stacey 2004). Οι μαθητές κάνουν χρήση των γνώσεών τους για τους φυσικούς αριθμούς και ερμηνεύουν νέες πληροφορίες σχετικά με τους ρητούς αριθμούς. Αυτό δημιουργεί πολυάριθμες παρερμηνείες, που αφορούν τόσο την εννοιολογική κατανόηση όσο και την διαχείριση των ρητών αριθμών (Moskal & Magone, 2000; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, &Peled, 1989). Στη βιβλιογραφία συναντούμε διαφορετικές προτάσεις για να γίνει η διδασκαλία πιο αποτελεσματική ώστε να καταπολεμηθούν οι παρανοήσεις όπως η χρήση του παιχνιδιού (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης 2015, Vankus 2005) και η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών (Fauvel 1991, Fried 2001, Liu 2003).

Τα παιχνίδια εμπεριέχουν στοιχεία χαράς και διασκέδασης τα οποία, συχνά, ενθαρρύνουν τα παιδιά να συγκεντρωθούν και να επιμείνουν σε μια δραστηριότητα, τόσο ώστε να κατακτήσουν την επιδιωκόμενη γνώση (Edwards, Gandini & Forman, 1998). Υπάρχουν εκπαιδευτικοί οι οποίοι αντιλαμβάνονται και αναδεικνύουν την εκπαιδευτική αξία του παιχνιδιού και το θέτουν ως βάση των εκπαιδευτικών τους προγραμμάτων (Perry & Dockett, 2007) ή του προσφέρουν σημαντική θέση ως υποστηρικτικό πλαίσιο των μαθηματικών τους δραστηριοτήτων (Skoumpourdi & Σκουμπουρδή, 2015).

Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά είναι μια ζωντανή επιστήμη που εξελίσσεται. Καθώς μελετούν την ανάπτυξη των εννοιών στο χρόνο και τις προσπάθειες των επιστημόνων να φτάσουν σε αυτές, τα παιδιά έρχονται πιο κοντά στην επιστήμη και καταλαβαίνουν καλύτερα πώς λειτουργεί. Επίσης η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να συνυφαίνεται με βιωματικές και πειραματικές δράσεις. Οι μαθητές μετατρέπονται σε μικρούς ερευνητές και ακολουθούν τα βήματα των μεγάλων μαθηματικών κάθε εποχής. Με τη μέθοδο αυτή γίνονται κατανοητές οι πρακτικές ανάγκες που γέννησαν τις μαθηματικές θεωρίες και αντιληπτές ως κατακτήσεις του ανθρώπινου πολιτισμού (Fauvel & van Maanen, 2006).

Η διδασκαλία των δεκαδικών στη χώρα μας ξεκινάει στα μέσα της Γ΄ τάξης του δημοτικού και αναπτύσσεται αναλυτικότερα στη Δ΄ τάξη. Με βάση όλα τα παραπάνω σχεδιάστηκε μια πειραματική διδασκαλία για τους δεκαδικούς στη Δ' τάξη του δημοτικού με αξιοποίηση της ιστορίας των δεκαδικών αριθμών με παιγνιώδη τρόπο και χρήση διδακτικών παιχνιδιών έχοντας σκοπό την αποτελεσματικότερη κατανόησή των δεκαδικών για την καταπολέμηση των παρανοήσεων. Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αναφέρονται στοιχεία της βιβλιογραφίας που αφορούν στις παρανοήσεις που παρουσιάζονται στην εκμάθηση των δεκαδικών αριθμών και τρόποι διδασκαλίας τους ενώ στο δεύτερο και το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται δεδομένα για την ιστορία των δεκαδικών αριθμών και την αξιοποίησή τους στη διδασκαλία τους και για την αξία της χρήσης παιχνιδιών στη διδασκαλία αντίστοιχα. Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφονται ο στόχος της έρευνάς μας και η μέθοδος εργασίας μας και ακολουθούν στο πέμπτο κεφάλαιο τα αποτελέσματα της έρευνας και στο έκτο κεφάλαιο η αποτίμηση της έρευνάς μας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κεφάλαιο 1: Οι παρανοήσεις στους δεκαδικούς

Η έρευνα στον τομέα των παρανοήσεων στους δεκαδικούς αριθμούς έχει φανερώσει αρκετές διαφορετικές παρανοήσεις. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με αυτές που είναι ισχυρότερες και συναντώνται σε μεγαλύτερο ποσοστό στους μαθητές του δημοτικού. Σύμφωνα με ευρήματα διαφορετικών ερευνητών όπως για παράδειγμα των Irwin (2001), Moskal & Magone (2000), Moss (2005), Ni and Zhou (2005), Steinle & Stacey (2004), Shaughnessy (2009) και των Vamvakoussi & Vosniadou (2004), οι συχνότερα εμφανιζόμενες παρανοήσεις στους δεκαδικούς είναι οι παρακάτω:

1. Όσο αφορά το μέγεθος, δηλαδή ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή είναι απαραιτήτως μεγαλύτερος ή ο δεκαδικός με τα λιγότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή είναι απαραιτήτως μεγαλύτερος (π.χ 0,123> 0,25 ή 0,7 > 0,81)

2. Χρήση του μηδενός στο τέλος του δεκαδικού (π.χ βάζοντας στο τέλος το μηδέν τον δεκαπλασιάζουμε, 0,30 = 10 χ 0,3).

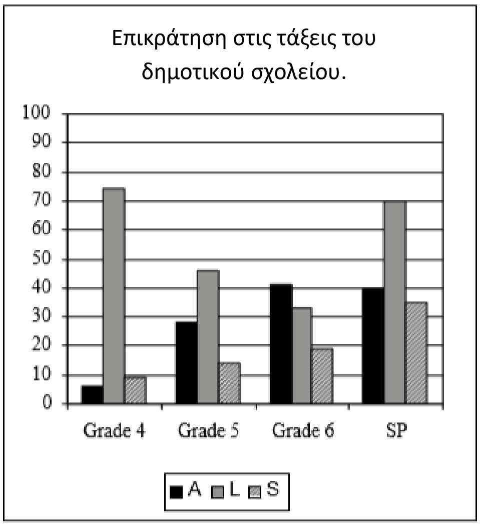
3. Σύγχυση της αξίας θέσης ψηφίου (π.χ Το ψηφίο δεξιά της υποδιαστολής έχει αξία Μονάδων (υποδιαστολή-καθρέφτης)).

4. Πυκνότητα των δεκαδικών αριθμών (π.χ δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στους 1,53 και 1,54).

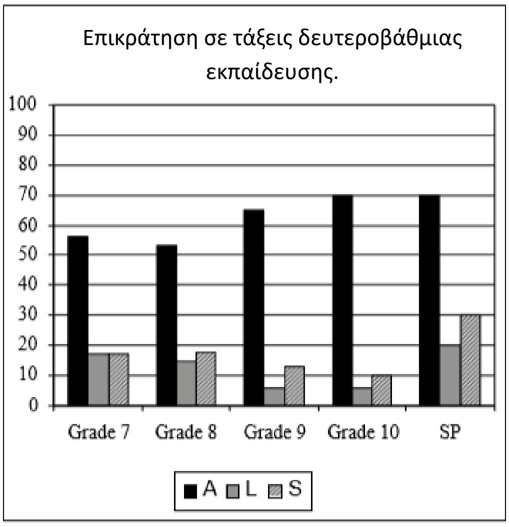
5. Δυσκολία στις μετατροπές (π.χ Το ένα εκατοστό γράφεται ως 0.100 και το ¼ μπορεί να γραφτεί ως 0,4 ή ως 0,25).

6. Πράξεις στους δεκαδικούς (π.χ λανθασμένη χρήση ή τοποθέτηση της υποδιαστολής, 3,5 + 13,2 = 48,2)

Σε έρευνα των Steinle & Stacey (2003) σε μαθητές από Τετάρτη τάξη (Grade 4) ως και τάξεις του λυκείου (Grade 10) μελετήθηκε κατά πόσο κάποιες παρανοήσεις επιμένουν στο χρόνο ή καταπολεμούνται. Από τις εικόνες 1 και 2 συμπεραίνουμε ότι στη Δ’ τάξη (Grade 4) κυριαρχεί η παρανόηση (L- Longer is larger), ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή έχει την μεγαλύτερη αξία. Καθώς περνούν τα χρόνια το ποσοστό της συγκεκριμένης παρανόησης μειώνεται ενώ το ποσοστό της παρανόησης (S- Shorter is bigger), ο αριθμός με τα λιγότερα ψηφία μετά την υποδιαστολή είναι μεγαλύτερος, δείχνει να αυξάνεται κατά τη διάρκεια του δημοτικού όπως και το ποσοστό των λυτών χωρίς συστηματικά λάθη (A-Apparent expert) (Steinle & Stacey, 2003).



Εικόνα 1: Επικράτηση παρανοήσεων (A,L,S) στις τάξεις του δημοτικού σχολείου.



Εικόνα 2: Επικράτηση παρανοήσεων (A,L,S) σε τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Υπάρχουν ευρήματα που δείχνουν ότι ακόμα κι όταν οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι οι προηγούμενες παρανοήσεις τους ήταν λάθος, δεν είναι απαραίτητο ότι κατανοούν τις σωστές ιδέες και αυτό μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν λανθασμένες ιδέες (Van Dooren et al., 2004). Οι εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές πρέπει να δίνουν προσοχή σε αυτές τις αλλαγές στις γνώσεις καθώς συμβαίνει η εννοιολογική αλλαγή και να προσδιορίζουν ποια χαρακτηριστικά να προσέξουν οι μαθητές όταν δομούν σύνθετες ιδέες (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Η Moss (2005) αναφέρει ότι υπάρχουν πολλοί λόγοι που εξηγούν τη δυσκολία των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς όπως α) οι διαφορετικές έννοιες που πρέπει να συλλάβουν και να διαχειριστούν (π.χ κλάσματα ως μέρος όλου, ως ποσοστά, ως αριθμοί), β) τα νέα σύμβολα και οι αναπαραστάσεις που ακολουθούν τους ρητούς (π.χ ½, 0,50, 50%), γ) οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις των ρητών στις οποίες πρέπει να στηριχθούν παρά τις προσθετικές που ήδη γνωρίζουν, δ) ο επαναπροσδιορισμός της κατανόησης των μονάδων και των πράξεων. Υπάρχουν λοιπόν πολλά νέα και σύνθετα δεδομένα που χρειάζεται να κατανοήσουν και να διαχειριστούν.

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού χαρακτηρίζει την τάση των μαθητών να αποδίδουν χαρακτηριστικά φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς, μια πρακτική που συχνά οδηγεί σε ορισμένα είδη λαθών εκ μέρους των μαθητών (Ni and Zhou 2005). Δυστυχώς, στη διδασκαλία σχετικά με τους ρητούς αριθμούς σε πολλές αίθουσες διδασκαλίας δε δίνεται επαρκής προσοχή στην εννοιολογική σύγκρουση που αναπτύσσεται και στην εννοιολογική αναδιάρθρωση που απαιτείται για να γίνει ο μετασχηματισμός από την έννοια των ακέραιων αριθμών στους ρητούς αριθμούς στα παιδιά. Αυτά τα λάθη εμφανίζονται λόγω των διαφορών μεταξύ φυσικών και μη φυσικών αριθμών, τα οποία είναι εμφανή στον τρόπο έκφρασης, τους τρόπους διάταξης και την πυκνότητα της δομής τους, μεταξύ άλλων λόγων (Christou, 2015).

Οι μαθητές που δεν έχουν κατανοήσει τα δεκαδικά ψηφία και τις δεκαδικές λειτουργίες προορίζονται να αντιμετωπίσουν σοβαρά προβλήματα καθώς υπολογίζουν, εκτελούν νοερούς υπολογισμούς και προσπαθούν να λύσουν προβλήματα στο σχολείο αλλά και τον "πραγματικό κόσμο". Οι μαθητές αυτοί αναπτύσσουν υπολογιστικές δεξιότητες που δημιουργούν παρερμηνείες και στερούνται οποιασδήποτε σημασίας. Η σύγχυση κυριαρχεί ως προς το πότε πρέπει να "ευθυγραμμίσουν τις υποδιαστολές", πότε να "προσθέσουν" μηδενικά, πότε να "μετρούν τα δεκαδικά ψηφία" και ούτω καθεξής. Επιπλέον, αυτοί οι μαθητές δεν μπορούν να καθορίσουν εάν οι λύσεις τους είναι σωστές ή ακόμα και λογικές (Steinle, 2004). Στην έρευνα για την διδασκαλία των μαθηματικών, υπάρχουν πολλά στοιχεία που δείχνουν ότι η προηγούμενη γνώση σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς εμποδίζει την κατανόηση των ρητών αριθμών. Αυτό δημιουργεί πολλές παρανοήσεις, που αφορούν τόσο την έννοια όσο και τη διαχείριση των δεκαδικών αριθμών. Οι ρητοί αριθμοί διαφέρουν από τους φυσικούς με πολλούς και σημαντικούς τρόπους, τους οποίους προσπερνούν οι μαθητές (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Οι κύριες διαφορές αφορούν το μέγεθος, τις αναπαραστάσεις, την πυκνότητα και τις πράξεις.

1.1 Οι παρανοήσεις στο μέγεθος

Τα παιδιά του δημοτικού στις πρώτες τάξεις, μαθαίνουν και χειρίζονται τους φυσικούς αριθμούς τους οποίους γνωρίζουν από το νηπιαγωγείο. Τα παιδιά καλούνται να μάθουν για τους δεκαδικούς και να δομήσουν πάνω στην προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς και κλασματικούς αριθμούς με αποτέλεσμα η νέα γνώση που αποκτάται να έρχεται σε σύγκρουση με αυτό που είναι ήδη γνωστό και να υπάρχουν φανερές δυσκολίες στην εκμάθηση της νέας γνώσης, κάτι που είναι συμβατό με το θεωρητικό πλαίσιο των εννοιολογικών αλλαγών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Η παρανόηση που βασίζεται στις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών για τους ακέραιους αναφέρεται στις έρευνες και ως προκατάληψη του αριθμού. Η έρευνα έχει δείξει ότι τα λάθη που αφορούν το μέγεθος των δεκαδικών αριθμών οφείλονται στην παρανόηση πως ότι ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς ισχύει και για τους δεκαδικούς, για παράδειγμα όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι π.χ 0,3 < 0,125 αφού 125>3 (Moskal & Magone, 2000, Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989, Van Hoof, Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel,2017). Επίσης, σύμφωνα με αυτόν τον τρόπο κατανόησης, υπήρξαν λάθη των μαθητών στην διάταξη δεκαδικών αριθμών, όπου 68 μαθητές (36%) διέταξαν δεκαδικούς αριθμούς ακολουθώντας τον κανόνα "όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχει ο αριθμός, τόσο μεγαλύτερος είναι" (Christou, 2015). Ωστόσο, αυτός ο τύπος σφάλματος φαίνεται να μειώνεται με την ηλικία, ενώ η παρανόηση ότι οι δεκαδικοί με λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτεροι π.χ 0,3>0,45, είναι ένα πιθανό αποτέλεσμα της εισβολής γνώσεων σχετικά με τα κλάσματα και εμφανίζονται σε μεγαλύτερα παιδιά και ενήλικες (Stacey and Steinle 1999 στο Christou, 2015). Βέβαια, το συγκεκριμένο είδος παρανόησης αφορά την ποικιλία έκφρασης των ρητών και όχι τη συσχέτιση των δύο συστημάτων των φυσικών και ρητών αριθμών.

Όσο αφορά το ρόλο του μηδενός στο τέλος ενός δεκαδικού παρατηρήθηκαν δυσκολίες και παρερμηνείες καθώς δεν είναι οικεία σε όλα τα παιδιά η πρακτική προσθήκης μηδενικών (χωρίς αξία) στο τέλος των δεκαδικών (π.χ 0,8=0,80=0,8000000) για την διευκόλυνση της σύγκρισης ή των πράξεων ανάμεσα σε δεκαδικούς (Steinle & Stacey, 2001). Άλλοι, πάλι, μαθητές μπερδεύονται και διαγράφουν το μηδενικό, ακόμη και όταν αυτό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ψηφία (ΑΠΣ, 2011).

Στην κατηγορία του μεγέθους περιλαμβάνεται και η παρανόηση «ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος» που αφορά τις μορφές έκφρασης του συστήματος των ρητών αριθμών όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ακολουθεί συνήθως τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών. Σύμφωνα με τον Irwin (2001) πολλοί μαθητές είχαν παρερμηνείες και λάθη σχετικά με τα δεκαδικά κλάσματα που θα μπορούσαν να έχουν επηρεάσει την κατανόηση των κοινών κλασμάτων. Στον δεκαδικό συμβολισμό ο παρονομαστής αποκρύπτεται όπως συμβαίνει και στην τιμή αξίας θέσης στην αρίθμηση των φυσικών αριθμών. Είναι ευκολότερο να ερμηνεύσουμε το κλάσμα 4/10 από τον δεκαδικό 0,4 όπου η αξία θέσης (δέκατα) δεν είναι τόσο φανερή όταν τον διαβάζουμε. Πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου αφού παραλληλίζουν το δεκαδικό μέρος των αριθμών με αυτό των παρονομαστών των κλασμάτων και θεωρούν για παράδειγμα ότι 1,35 = 1/35 όπως και 1,6 > 1,75 δηλαδή ο αριθμός με το μικρότερο δεκαδικό μέρος είναι και ο μεγαλύτερος αφού μπερδεύουν την ιδιότητα των κλασμάτων όπου κλάσματα με μικρότερο παρονομαστή έχουν μεγαλύτερη αξία, όταν έχουμε κοινό αριθμητή, π.χ 1/6 > 1/75 (Peled & Shahbari,2003; Sackur-Grisvard,1985;Steinle & Stacey,2004). Ωστόσο, φαίνεται επίσης ότι υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι ορισμένες παρανοήσεις αποκτώνται από τη σχολική διδασκαλία. Ορισμένες από τις επιλογές μπορεί να είναι προσωρινές, για παράδειγμα, οι μαθητές να δείξουν μια εσφαλμένη αντίληψη «αυτός με λιγότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος δεκαδικός», αμέσως μετά από μια διδασκαλία στα κλάσματα (Steinle & Stacey,1998).

1.2 Οι παρανοήσεις στις αναπαραστάσεις

Η κατανόηση των δεκαδικών είναι μία σύνθετη πρόκληση που απαιτεί συντονισμό πολλών ιδεών, χρήση των προηγούμενων γνώσεων και των αναπαραστάσεων αριθμού κάτι που θεωρείται πλεονέκτημα αλλά και μειονέκτημα. Αυτό που φαίνεται ως μεγαλύτερο εμπόδιο για τους μαθητές, είναι η εννοιολογική αλλαγή, ειδικά όταν πρόκειται να συνειδητοποιήσουν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στην ίδια ποσοτική σχέση ή σε ένα πιο αφηρημένο επίπεδο, τον ίδιο ρητό αριθμό (Markovits & Sowder, 1991 στο Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Διαφορετικές παρανοήσεις παραμένουν σε διαφορετικό βαθμό και σε διαφορετικές μορφές καθώς οι μαθητές περνούν στις μεγαλύτερες τάξεις (Steinle & Stacey, 2004). Διάφοροι ερευνητές έχουν παρατηρήσει ότι οι μαθητές μπερδεύουν τη γλώσσα, τα σύμβολα, την αξία θέσης των ψηφίων και τις διάφορες αναπαραστάσεις των δεκαδικών αριθμών. Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν με κλάσματα και δεκαδικούς και μέσα από αυτές τις δύο εκφράσεις να αναπαρασταθούν με αμέτρητους τρόπους όπως για παράδειγμα «ένα δεύτερο», «μισό», 0,5 αλλά και 0,50 ή 0,500, ½, 8/16, 50% κ.α. Η επέκταση των επιλογών αριθμητικής αναπαράστασης αντιπροσωπεύει μια θεμελιώδη αλλαγή στην έννοια του αριθμού, που μπορεί να είναι δύσκολη για τους μαθητές να κατανοήσουν (στο McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015) Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των δεκαδικών δυσκολεύουν ακόμα περισσότερο τους μαθητές, όπως συμβαίνει με την αριθμογραμμή και την τοποθέτηση του κλάσματος στη σωστή θέση, όταν αυτή είναι χωρισμένη σε διαφορετικό αριθμό μερών από τον παρονομαστή του κλάσματος. Δυσκολεύονται, για παράδειγμα, να τοποθετήσουν το κλάσμα 7/10 σε μια αριθμογραμμή που είναι χωρισμένη σε πέμπτα ή δεύτερα (Behr & Post, 1992) παρόλο που η αριθμογραμμή παρέχει το πλαίσιο για την καλύτερη κατανόηση των δεκαδικών όπως υποστηρίζει ο Irwin (2001). Η σύνδεση ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις είναι πάρα πολύ σημαντική για τα μαθηματικά και αποτελεί το καίριο σημείο για την κατανόηση των ρητών αριθμών για αυτό και οι μαθητές παλεύουν να την κατακτήσουν (Ni & Zhou, 2005).

1.3 Οι παρανοήσεις στη μορφή - Γλώσσα και Σύμβολα

Μία παρανόηση που μπορεί να συμβεί ανάμεσα στους δεκαδικούς και φυσικούς αριθμούς είναι να θεωρηθούν τα δέκατα ως μονάδες με τη λογική ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι συμμετρικοί ως προς την υποδιαστολή κι όχι ως προς τις μονάδες που κανονικά ισχύει. Αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου 0,42 = 4 δέκατα και 2 εκατοστά = 42 εκατοστά = 7 φορές τα 6 εκατοστά κτλ. (ΑΠΣ, 2011). Στο γνωστικό κομμάτι παρουσιάζουν δυσκολίες καθώς οι συνδέσεις ανάμεσα στα σύμβολα και τις ποσότητες είναι αδρές και η γλώσσα που χρησιμοποιούμε δεν βοηθάει στις συνδέσεις αυτές. Άλλη παρανόηση μπορεί να προκαλέσουν τα ονόματα των μονάδων κι έτσι τα εκατοστά να θεωρηθούν μεγαλύτερης αξίας από τα δέκατα ή ακόμη να μπερδεύουν τις δεκάδες με τα δέκατα (Hiebert, J.; 1992,Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I.;1989). Ομοίως, οι Behr και Post (1988) αναφέρουν μια συνέντευξη με έναν μαθητή στην οποία οι 0,37 και 0,73 έπρεπε να συγκριθούν. Ο μαθητής δήλωσε ότι 0,37> 0,73 επειδή, "0,37 ήταν 3 δεκάδες και 7 εκατοστά (όχι 3 δέκατα και 7 εκατοστά) και 0,73 ήταν 7 δεκάδες και 3 εκατοντάδες (όχι 7 δέκατα και 3 εκατοστά)» (Steinle; 2004,Irwin 2001;Resnick et al 1989). Ως εκ τούτου, αυτές οι συγχύσεις συμβόλων μπορεί να σχετίζονται με βαθιές συγχύσεις ιδεών (Steinle, 2004).

Μία ακόμη πηγή παρανοήσεων είναι και η υποδιαστολή, ο σκοπός της οποίας είναι να "δείξει πού βρίσκεται η στήλη των Μονάδων". Οι Μονάδες είναι τα δομικά στοιχεία των ακέραιων αριθμών, η επόμενη στήλη αξίας θέσης προς τα αριστερά δημιουργείται με την ομαδοποίηση δέκα μονάδων μαζί και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για να αποκτηθούν περισσότερες στήλες αξίας θέσης προς τα αριστερά. Για να δημιουργηθούν οι στήλες αξίας θέσης προς στα δεξιά, χωρίζουμε το ένα σε δέκα ίσα κομμάτια και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για να δημιουργηθούν περισσότερες στήλες αξίας θέσης προς τα δεξιά. Για παράδειγμα, ο Swan (1983, σελ 67) σημείωσε ότι μερικοί μαθητές φαινόταν να συγχέουν την υποδιαστολή με την τελεία στην ώρα (πχ. 3.59pm) ή το κόμμα στο ζεύγος συντεταγμένων (5,2). Οι μαθητές που βλέπουν την υποδιαστολή ως "διαχωριστικό ανάμεσα στις στήλες ολόκληρου του αριθμού" δυσκολεύονται να φανταστούν πώς ένα ψηφίο μπορεί να πηδήξει πάνω από αυτό το τείχος και είναι πιθανό να γράψει 30,50 όταν του ζητηθεί να πολλαπλασιάσει το 3,5 κατά δέκα (στο Steinle, 2004).

1.4 Οι παρανοήσεις στις μετατροπές

Στη μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς, μια παρανόηση που οδήγησε σε λάθος και παρατηρήθηκε από τον Irwin (2001) ήταν ότι οι μαθητές θεωρούσαν πως το ¼ μπορούσε να γραφτεί είτε ως 0,4 είτε ως 0,25. Οι Markovits και Sowder (1991) από συνεντεύξεις σε μαθητές της Στ' τάξης, διαπίστωσαν ότι 12 από τους 14 μαθητές έδειξαν ότι σκέφτονταν ότι το 1,4 ήταν το ίδιο με το ¼. Ο Hiebert (1986) σημείωσε αυτή την ακατάλληλη "μετατροπή" μεταξύ δεκαδικών και κοινών κλασμάτων από μαθητές που μετέτρεψαν το κλάσμα 4/10 σε 4.10. Ομοίως, οι Hiebert και Wearne (1986) παρατήρησαν μαθητές που μετέτρεψαν το 0.09 σε 0/9 (στο Steinle, 2004). Στην έρευνα της Shaughnessy (2009), τα παιδιά της τετάρτης τάξης βρέθηκαν να κάνουν λάθη στις μετατροπές σε κάποια δεκαδική μορφή όπως π. χ 3/10->3,10 ή και στην αξία θέσης π. χ 3/10 -> 0,03

1.5 Οι παρανοήσεις στην πυκνότητα

Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι πιο σύνθετοι σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς. Καθώς από ένα διακριτό σύστημα αρίθμησης ποσοτήτων πηγαίνουμε σε ένα σύστημα συνεχούς αρίθμησης ποσοτήτων (Hiebert, 1992). Ενώ οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτοί, οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί και δεν έχουν επόμενο διαδοχικό αριθμό, επειδή ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Αυτή η στοιχειώδης διαφορά ανάμεσα στους φυσικούς και τους ρητούς αριθμούς οδηγεί στην κοινή αντίληψη ότι δεν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε δύο «φαινομενικά» διαδοχικούς αριθμούς π. χ τους 1,2 και 1,3. Πολυάριθμες έρευνες έχουν δείξει ότι η πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών γίνεται δύσκολα αντιληπτή από μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Van Hoof, Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2017). Ο Brousseau (1997) σχολιάζει επίσης πως η επέκταση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών και στους δεκαδικούς υποστηρίζεται από τη διδασκαλία η οποία λειτουργεί αποκλειστικά με δεκαδικά ψηφία που έχουν εγγραφεί στον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων ή με δεκαδικά ψηφία που αντικατοπτρίζουν πάντοτε ένα ποσό χρήματος ή μέτρησης δηλαδή οι δεκαδικοί αριθμοί που εμφανίζονται κατά τη σχολική εκπαίδευση είναι σταθερού μήκους. Ακόμη και αν ο ορισμός υποστηρίζει ότι όλες οι μονάδες μεγέθους μπορούν να χωριστούν σε δέκα, αυτές οι διαιρέσεις δεν συμβαίνουν ποτέ στη στοιχειώδη διδασκαλία. Υπό αυτές τις συνθήκες, οι δεκαδικοί αριθμοί διατηρούν τη διακριτή τάξη, εκείνη των φυσικών αριθμών και με αυτό τον τρόπο πολλοί μαθητές που χρησιμοποιούν αυτόν τον ορισμό θα δυσκολευτούν να φανταστούν έναν αριθμό μεταξύ 10,849 και 10,850 (Steinle, 2004). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν ότι η στρογγυλοποίηση του αποτελέσματος ενός υπολογισμού με δύο δεκαδικά ψηφία μπορεί να ενισχύσει την πεποίθηση ότι τα δεκαδικά ψηφία αποτελούν ένα διακριτό σύστημα (Steinle & Stacey, 2004). Οι Bana, Farrell και McIntosh (1997) διαπίστωσαν ότι το 23% του δείγματος των Αυστραλών μαθητών (ηλικίας 14 ετών) θεωρούσε ότι δεν υπήρχαν δεκαδικά ψηφία μεταξύ 1,52 και 1,53. Το ίδιο ποσοστό των μαθητών στο σουηδικό δείγμα έδωσε την ίδια απάντηση, σε σύγκριση με σχεδόν 1 στους 2 μαθητές στο δείγμα των ΗΠΑ (στο Steinle, 2004)

Αυτό συμβαίνει γιατί από όσα γνωρίζουν από τους φυσικούς αριθμούς ανάμεσα, για παράδειγμα, στο 3 και το 4 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός (διακριτότητα των αριθμών), όμως όταν μιλάμε για το σύνολο των ρητών αριθμών, γίνεται δύσκολα αντιληπτό ότι ανάμεσα σε δύο φαινομενικά διαδοχικούς δεκαδικούς όπως οι 3,5 και 3,6 υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί. Για να αναπτυχθεί η έννοια της πυκνότητας, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η έννοια του ρητού αριθμού ενοποιεί τις έννοιες των δεκαδικών, κλασματικών και ακέραιων αριθμών. Η κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών, ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους, καθώς και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφόρων υποσυνόλων του συνόλου των ρητών αριθμών είναι δύσκολη (Carpenter et al., 1993; Gelman, 2000; Moskal & Magone, 2000 στο Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Η ιδέα της διακριτότητας είναι μόνο ένας από τους παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη για να εξηγηθούν οι δυσκολίες των μαθητών με την πυκνότητα των ρητών αριθμών όπως και η μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς. Συνοψίζοντας, προηγούμενη έρευνα έδειξε ότι η ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών γίνεται δύσκολα κατανοητή, με την ιδέα της διακριτότητας ως σημαντικό εμπόδιο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010)

Η πυκνότητα των ρητών αριθμών έχει βρεθεί στο παρελθόν ως φαινομενικά εξαιρετικά δύσκολη στην αντίληψη για τους μαθητές και ακόμη και για τους ενήλικες (π.χ.Merenluoto & Lehtinen, 2002, Βαμβακούση & Βοσνιάδου, 2004). Αποτελέσματα μελέτης αποκαλύπτουν ότι ακόμα και εκείνοι με καλά αναπτυγμένη κατανόηση των αναπαραστάσεων και μεγέθους των ρητών αριθμών δεν μπορούν να κατανοήσουν την έννοια της πυκνότητας (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015). Αυτό επιβεβαιώνει ότι υπάρχει ομάδα μαθητών οι οποίοι αν και φαίνεται να έχουν εξαιρετική κατανόηση των δεκαδικών αριθμών, στην πραγματικότητα επιτυγχάνουν να κατανοήσουν σε μικρό βαθμό ή και καθόλου, δηλαδή, λειτουργούν με επιτυχία σε περιορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων και πιστεύουν ότι το σύστημα αριθμών είναι διακριτό.

1.6 Οι παρανοήσεις στις πράξεις

Οι ιδιότητες των πράξεων στους φυσικούς, όπου το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι ένας μεγαλύτερος αριθμός ενώ το αποτέλεσμα της αφαίρεσης και της διαίρεσης ένας μικρότερος αριθμός, δεν ισχύουν απαραίτητα και στους ρητούς αριθμούς. Παρόλα αυτά οι μαθητές μπορεί να στηρίζονται σε αυτές και να οδηγούνται σε λάθη π.χ $0{,}99 \times 5 > 5$ (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985 στο Van Hoof, Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2017).

Ένας μαθητής που κατανοεί διεξοδικά την έννοια των δεκαδικών θα πρέπει να είναι σε θέση να δίνει νόημα στη συμβολική μορφή και να αιτιολογεί τους κανόνες των συμβόλων, όπως για παράδειγμα η ευθυγράμμιση των υποδιαστολών πριν από την πρόσθεση ή αφαίρεση ή η διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή για να γράψει ένα κοινό κλάσμα ως δεκαδικό (Hiebert, 1992). Πολλά παιδιά ασχολούνταν με δεκαδικά κλάσματα κατά τρόπο που υποδήλωνε ότι δεν βλέπουν τα δεκαδικά ψηφία να έχουν ένα νόημα που μπορεί να σχετίζεται με το μέγεθος ή την ποσότητα. Για παράδειγμα, ένας μαθητής (Irwin, 1995α) πρόσθεσε σωστά 1,5 και 0,1 για να πάρει 1,6. Ωστόσο, όταν ρωτήθηκε ποιος από τους τρεις αυτούς αριθμούς θα ήταν μεγαλύτερος, ήταν βέβαιος ότι ήταν το 1. Δεν κατάλαβε ότι το 1,5 ήταν μεγαλύτερο από 1 και ότι όταν το 0,1 προστέθηκε στο 1,5 το ποσό ήταν ακόμη μεγαλύτερο (Yusof, 2003).

Οι υπολογιστικές δεξιότητες των μαθητών στις τέσσερις πράξεις δεκαδικών αριθμών είναι απλώς διαδικαστικές και στερούνται κάθε σημασίας αφού η διαδικαστική γνώση χαρακτηρίζεται από την έλλειψη σχέσεων ενσωμάτωσης. Ο Hiebert (1992) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η εννοιολογική γνώση είναι η γνώση που είναι πλούσια σε σχέσεις αλλά όχι πλούσια σε τεχνικές για την ολοκλήρωση των εργασιών, ενώ η διαδικαστική γνώση είναι πλούσια σε κανόνες και στρατηγικές αλλά όχι πλούσια σε σχέσεις (Lai & Tsang, 2009).

1.7 Συνέπειες των παρανοήσεων

Οι δυσκολίες που παρατηρούνται στα κλάσματα και τους δεκαδικούς ακολουθούν τον μαθητή και σε μεγαλύτερες ηλικίες. Σε έρευνα που έγινε στις ΗΠΑ διαπιστώθηκε ότι ένας από τους κύριους παράγοντες για την δυσκολία των μαθητών στην Άλγεβρα είναι η κακή γνώση των κλασμάτων και των δεκαδικών (Hoffer, Venkataraman, Hendberg & Shagle, 2007). Παρά τις αλλαγές που εφαρμόστηκαν στην εκπαιδευτική διαδικασία κάποια πράγματα δεν μεταβλήθηκαν σημαντικά με την πάροδο των μαθητικών γενεών (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015). Οι παρανοήσεις στους δεκαδικούς έχουν ένα ευρύ φάσμα αιτιών, όπως η ανεπαρκής διδασκαλία, οι βαθιές αλληλεπιδράσεις μεταξύ του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί το μυαλό και του μαθηματικού περιεχομένου. Δυστυχώς, στη διδασκαλία σχετικά με τους ρητούς αριθμούς σε πολλές αίθουσες διδασκαλίας δε δίνεται επαρκής προσοχή στην εννοιολογική σύγκρουση που αναπτύσσεται και στην εννοιολογική αναδιάρθρωση που απαιτείται για να γίνει ο μετασχηματισμός από την έννοια των ακέραιων αριθμών στους ρητούς αριθμούς στα παιδιά (Ni & Zhou 2005). Η λανθασμένη ερμηνεία διδάσκει κανόνες και σχεδιάζει ψευδείς αναλογίες. Όπως σχολίασαν οι Graeber και Johnson (1991), είναι χρήσιμο για τους δασκάλους να γνωρίζουν ότι υπάρχουν παρανοήσεις και σφάλματα που επιμένουν κι ότι τα λάθη που προκύπτουν από εσφαλμένες αντιλήψεις ή συστηματικά σφάλματα δεν σηματοδοτούν δυστροπία, άγνοια ή ανικανότητα μάθησης και ότι υπάρχουν τεχνικές διδασκαλίας που φαίνονται πολλά υποσχόμενες για να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν ή να ελέγξουν την επίδραση των παρερμηνειών και των συστηματικών λαθών (στο Steinle,2004).

Κεφάλαιο 2: Η διδασκαλία των δεκαδικών

Οι εκπαιδευτικοί "γνωρίζουν" ότι οι μαθητές συχνά κάνουν ορισμένα λάθη σε συγκεκριμένους τομείς ή ότι ορισμένα θέματα είναι δύσκολα ή ότι ορισμένες αναπαραστάσεις είναι πολύ βοηθητικές. Αλλά επίσης βλέπουν την προσπάθεια των μαθητών, ακούν τις σκέψεις τους και βλέπουν τους μαθητές να επιλύουν τα προβλήματα. Για αυτόν τον λόγο, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να προβληματίζονται για το τι κάνουν ή τι σκέφτονται οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους για το θέμα και τις ιδέες τους για τους μαθητές (Hill, Ball, Schillling, 2008). Η κατανόηση της ιδέας των δεκαδικών μπορεί να υποστηριχθεί μέσω του έργου των εκπαιδευτικών οι οποίοι μπορούν να οργανώνουν τη διδασκαλία τους και να αναγνωρίζουν κατά τη διάρκειά της την εξέλιξη των μαθητών τους. Η κατανόηση των παρανοήσεων είναι ένα σημαντικό βήμα για τη βελτίωση της διδασκαλίας καθώς υπάρχουν, εν μέρει, εξαιτίας της ανάγκης των μαθητών να ερμηνεύουν με τον δικό τους τρόπο τη διδασκαλία που λαμβάνουν και θα μπορούσαν να ξεπεραστούν με την κατάλληλη στοχευμένη διδασκαλία (Steinle,2004).

2.1 Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών

Το σχολικό βιβλίο που χρησιμοποιείται σήμερα στα σχολεία έχει γραφτεί με τις αρχές του αναλυτικού προγράμματος του 2003, το οποίο πρεσβεύει τη διαθεματικότητα. Η πρώτη επαφή των μαθητών με τους δεκαδικούς αριθμούς γίνεται στη Β’ τάξη μέσα από την ενασχόληση με το ευρώ, συνεχίζει προς το τέλος της Γ’ τάξης όπου γίνεται εισαγωγή στους δεκαδικούς, μαθαίνουν για τα δεκαδικά κλάσματα πρώτα και μετά για τους δεκαδικούς αριθμούς (για να διατηρηθεί η λογική και ιστορική σειρά), τη συμβολική γραφή, την ονοματολογία, προσθέσεις και αφαιρέσεις με έμφαση στις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών (Λεμονίδης, 2007). Στη Δ’ τάξη γίνεται αναλυτικότερα η διδασκαλία των δεκαδικών αφού αφιερώνονται δέκα κεφάλαια του βιβλίου και 21 ώρες διδασκαλίας στη θεματική αυτή. Σύμφωνα με τη διάρθρωση του βιβλίου των μαθηματικών, η διδασκαλία των δεκαδικών ξεκινάει από το κεφάλαιο 15 ως το κεφάλαιο 20 (10 ώρες) και αφορά τους δεκαδικούς με δύο δεκαδικά ψηφία, δίνεται βάση στην αξία θέσης ψηφίου και τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στη συνέχεια, από το κεφάλαιο 21 ως το κεφάλαιο 26 (11 ώρες) προτείνεται η εισαγωγή στους δεκαδικούς με τρία δεκαδικά ψηφία, η διαχείριση των δεκαδικών γενικότερα και γίνεται χρήση της αριθμογραμμής για τοποθέτηση των δεκαδικών και τη σύγκριση με τους ακέραιους. Τα βιβλία του δασκάλου περιέχουν οδηγίες και προτείνουν τρόπους διδασκαλίας με σκοπό ένα πιο οργανωμένο πεδίο άσκησης των εκπαιδευτικών στην καθημερινή σχολική πρακτική. Προτείνεται στους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιήσουν τις προηγούμενες γνώσεις των παιδιών από την καθημερινή τους ζωή (π.χ ευρώ) και να ξεκινήσουν τη διδασκαλία των δεκαδικών πρώτα από τα δεκαδικά κλάσματα κι έπειτα να περάσουν στη διαχείριση των δεκαδικών αριθμών. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στη διαθεματικότητα, τη χρήση τεχνολογικών μέσων και τον παιγνιώδη τρόπο διδασκαλίας.

Το 2011 προτάθηκε ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα στο οποίο είναι σημαντική η σύνδεση του σχολείου με την καθημερινή ζωή των μαθητών. Εδώ έχουμε την κοινή χρήση των δύο αριθμητικών συστημάτων, των κλασμάτων και των δεκαδικών, με στόχο τη δόμηση της έννοιας αφού «και τα δύο συστήματα εκφράζουν τις ίδιες ιδέες». Ακόμη, θεωρείται χρήσιμη η σύνδεση των δεκαδικών με τα κλάσματα, για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη σύγκριση και την ταξινόμηση δεκαδικών και την προσέγγιση δεκαδικών αριθμών μέσω γνωστών αριθμών. Αφενός, όταν τα προβλήματα συνδέονται πολύ στενά με τη ζωή των μαθητών, τότε άλλοι παράγοντες εκτός από τους μαθηματικούς μπορούν να καθορίσουν τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων. Αφετέρου, όταν τα προβλήματα είναι πολύ απομακρυσμένα από την εμπειρία τους, οι μαθητές είτε αποτυγχάνουν να συσχετίσουν τα προβλήματα με τα μαθηματικά που γνωρίζουν είτε εφαρμόζουν γνωστές μαθηματικές δεξιότητες χωρίς να εξετάζουν την καταλληλότητα της απάντησης (Greer, 1987, Silver, Shapiro, & Deutsch στο Irwin, 2001)

Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ακολουθεί συνήθως τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, καθώς τα δύο συστήματα αναπαράστασης φαίνεται να συνδέονται μεταξύ τους και η κατανόηση των κλασμάτων και ειδικότερα των δεκαδικών κλασμάτων τίθεται ως προϋπόθεση για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών αφού είναι πιο σωστή ιστορικά και επιστημολογικά (Λεμονίδης, 2016). Η ποικιλότητα της ερμηνείας των δεκαδικών αριθμών φαίνεται να αποτελεί έναν από τους λόγους των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς. Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο, αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως σημείο στην αριθμογραμμή (ΑΠΣ 2011).

Κεφάλαιο 3: Παρουσίαση αποτελεσμάτων άλλων ερευνών

Οι Ni & Zhou, (2005) προτείνουν την εισαγωγή διδασκαλίας μη φυσικών αριθμών νωρίτερα στο πρόγραμμα σπουδών ή ακόμη και ταυτόχρονα με τους φυσικούς αριθμούς και βασίζονται στην έννοια της ίσης κατανομής ή μέτρησης. Επίσης, η εμπειρία από την πρώιμη εκμάθηση έχει επιδείξει ισχυρή επίδραση στη μεταγενέστερη μάθηση. Επομένως, δεν φαίνεται λογικό να καθυστερεί η διδασκαλία σχετικά με τους κλασματικούς αριθμούς μέχρι την τρίτη τάξη. Η καθυστέρηση μπορεί να μην σημαίνει απλώς μια καθυστέρηση, αλλά ως αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει επιπλέον περιορισμός στην επακόλουθη εκμάθηση σχετικά με τους κλασματικούς αριθμούς, καθώς η επαφή με το διακριτό σύστημα καταμέτρησης παίρνει μια βαθύτερη ρίζα στα παιδιά. Η εξέταση της διδασκαλίας στα κλάσματα σε προηγούμενες τάξεις προϋποθέτει την ταυτόχρονη διενέργεια σχετικής εκπαίδευσης σε ακέραιους αριθμούς και κλάσματα. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές βασίζονται σε διαδικασίες εις βάρος της αριθμητικής αίσθησης ή νοήματος όταν υπολογίζουν με δεκαδικά ψηφία (Roche & Clarke, 2004). Μια ομάδα ερευνητών προσδιόρισε τους πέντε δείκτες που μπορούν να μας φανερώσουν την κατανόηση της ιδέας των δεκαδικών : 1) ακριβής χρήση μαθηματικής γλώσσας κατά την ενασχόληση με τους δεκαδικούς αριθμούς, 2) ακριβής χρήση των αναπαραστατικών μοντέλων των δεκαδικών, 3) σύνθεση και ανάλυση των δεκαδικών με βάση τα μοντέλα αναπαραστάσεων ή/και κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου για τη διάταξη των δεκαδικών, 4) κατανόηση του μεγέθους των δεκαδικών στο «περίπου» για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ δεκαδικών, 5) χρήση μοντέλων αναπαράστασης αλλά και της δεξιότητας σύνθεσης και ανάλυσης των δεκαδικών για την δόμηση νοήματος των πράξεων με δεκαδικούς (Cramer, Monson, Ahrendt, Colum, Wiley & Wyberg, 2015).

3.1 Ευρήματα για τις αναπαραστάσεις

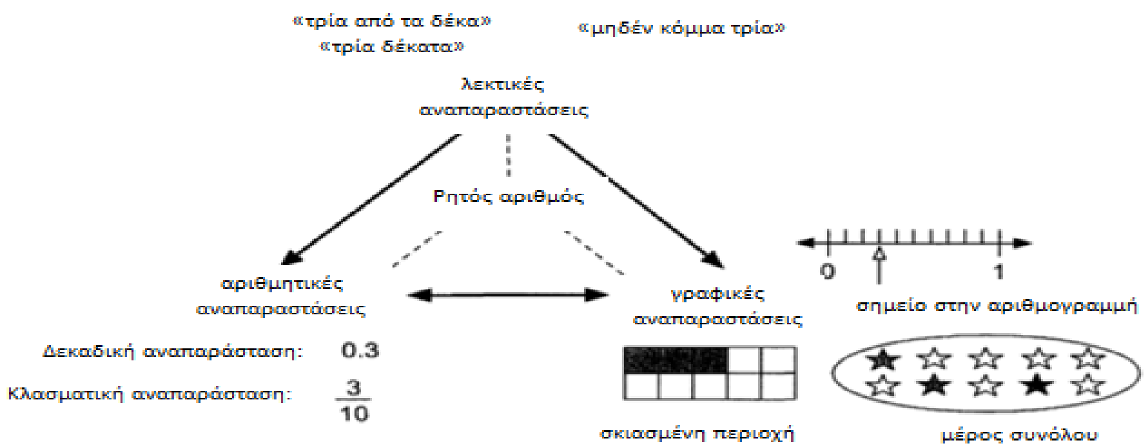
Στην εκπαίδευση των μαθηματικών, αρκετοί ερευνητές υποστήριξαν ότι η μαθηματική κατανόηση περιλαμβάνει την ικανότητα να μετακινείται κανείς με ευελιξία μεταξύ των αναπαραστάσεων του δεκαδικού αριθμού (Cramer, 2003; Hiebert, 1984; Lamon, 1999, 2007; Lesh, Post, & Behr, 1987; Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας 2001; Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM), 2000; Post, Behr, & Lesh, 1986, στο Shaughnessy, 2009). Αντίστοιχα, η διδασκαλία των δεκαδικών με ολοκληρωμένο τρόπο θα δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν ευέλικτα και να συνδέσουν μια ποικιλία αναπαραστάσεων σχετικά με τους δεκαδικούς αριθμούς: γραμμικά μοντέλα όπως η αριθμογραμμή, το χειραπτικό υλικό, η επιφάνεια, τα σύμβολα και το νόμισμα (Thomson & Walker, 1996 στο Michaelidou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004). Αυτό υπογραμμίζει τι απαιτεί η έρευνα και ο σχεδιασμός των προγραμμάτων σπουδών, μια πρόταση διδασκαλίας που εγγυάται στον μαθητή μια πραγματική κατανόηση της έννοιας του αριθμού.

Ωστόσο, η έρευνα έχει δείξει επίσης ότι οι εκπαιδευόμενοι τείνουν να χρησιμοποιούν απεικονίσεις μαθηματικών εννοιών μεμονωμένα (Duval, 2006). Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού εμφανίζεται όταν οι αναπαραστάσεις των μαθητών για το μέγεθος των ρητών αριθμών ή τις πράξεις ρητών αριθμών δεν είναι αρκετά ακριβείς ώστε να τις χρησιμοποιήσουν οι μαθητές σε συγκεκριμένα καθήκοντα σε συγκεκριμένα πλαίσια (Alibali & Sidney, 2015). Οι Μιχαηλίδου, Γαγάτσης & Πίττα-

Πανταζή (2004) και Gagatsis et al (2010) αποκαλύπτουν τις δυσκολίες μαθητών της Στ' τάξης στις εργασίες αναγνώρισης και μετατροπής στους δεκαδικούς οι οποίες δείχνουν ελλείψεις στην ευελιξία μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι οποίες είναι ενδεικτικές της αποσπασματικής μαθηματικής κατανόησης. Για αυτόν τον λόγο είναι απαραίτητη η συστηματική εργασία με τους διάφορους τύπους αναπαραστάσεων και τις μορφές τους σε ισοδυναμία, που δεν περιορίζονται στην απλή διαχείριση των συμβόλων που δεν έχουν νόημα. Οι αναπαραστάσεις πρέπει να αντιμετωπίζονται ως βασικά στοιχεία για την υποστήριξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων από τους μαθητές, στην επικοινωνία μαθηματικών προσεγγίσεων, επιχειρημάτων και κατανόησης στον εαυτό του και σε άλλους (NCTM 2000). Οι μαθηματικές ιδέες μπορούν να εκπροσωπούνται σε μια ποικιλία διαφορετικών αναπαραστάσεων, συμπεριλαμβανομένων αριθμών, εικόνων, λέξεων και γραφημάτων (Cramer, Wyberg, Leavitt, 2008). Συγκεκριμένα, η ενίσχυση των νοητικών αναπαραστάσεων των μαθητών για τους ρητούς αριθμούς αυξάνει την εξοικείωσή τους, ενεργοποιώντας τις πιο συχνά και ενδυναμώνοντας τις συνδέσεις τους με άλλα είδη αριθμών.

Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να προετοιμαστούν οι μαθητές κατά της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (Alibali & Sidney, 2015). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, οι ρητοί αριθμοί μπορούν να εκφραστούν με τρεις διαφορετικούς τύπους αναπαραστάσεων: λεκτικές εκφράσεις (ομιλούμενη γλώσσα), αριθμητικές εκφράσεις (όπως κλάσματα και δεκαδικές σημειώσεις) και γραφικές εκφράσεις (όπως σημεία σε αριθμογραμμή, σκιασμένα τμήματα της περιοχής και τμήματα ενός συνόλου).

Σχήμα 1: Σύστημα αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών



Μια αναπαράσταση ενός ρητού αριθμού σε μια συμβολική μορφή μπορεί να ερμηνευτεί ξανά σε μια άλλη μορφή. Για παράδειγμα, μια αριθμητική ένδειξη όπως το 3/10 μπορεί να ερμηνευτεί ως μια γραφική παράσταση, όπως ένα σκιασμένο τμήμα της περιοχής, και αυτό το σκιασμένο τμήμα της περιοχής μπορεί να ερμηνευτεί ως λεκτική έκφραση, όπως "τρία δέκατα" (Shaughnessy, 2009).

Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται μία από τις σημαντικότερες συγκρούσεις που απορρέει από την εσφαλμένη αντίληψη του ότι ένας αριθμός συνδέεται με ένα συγκεκριμένο "τύπο" αναπαράστασης (Konic, P. M., Godino, J. D., & Rivas, M. (2010). Ειδικά, η αριθμογραμμή καθιστά σαφή τα μεγέθη των συμβολισμών και μπορεί να χρησιμεύσει ως μέσο για τους μαθητές στη μετατροπή μεταξύ κλάσματος και δεκαδικών μορφών, τη σύγκριση δεκαδικών και τη δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων αφού να συμβάλει στην οπτικοποίηση σχέσεων και σημασιών που δεν αποδίδονται από τις συμβολικές αναπαραστάσεις (Λεμονίδης, 2016, Michaelidou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004, Shaughnessy, 2009). Η αριθμογραμμή είναι ένα πιο αφηρημένο μοντέλο και παρόλο που δεν υποστηρίζει την κατασκευή διανοητικών εικόνων από τους μαθητές για τα δεκαδικά ψηφία, μπορεί να προσφέρει μια αναπαράσταση στην οποία οι μαθητές θα αντιληφθούν εκ νέου την κατανόηση της μονάδας, της κατανομής και της αξίας θέσης. Η κατανόηση των δεκαδικών από τους μαθητές γίνεται βαθύτερη όταν συνδέονται αυτά τα δύο μοντέλα (Cramer, Monson, Ahrendt, Colum, Wiley & Wyberg, 2015) αντιθέτως όταν χρησιμοποιείται το δεκαδικό πλέγμα (χωρισμένο στα εκατό) έχει το μειονέκτημα ότι αντιπροσωπεύει επαρκώς μόνο τα εκατοστά (Roche, 2010). Αυτό που υποστηρίζεται από τους ερευνητές να έχει τη μεγαλύτερη σημασία, δεν είναι οι αναπαραστάσεις καθαυτές αλλά ο μετασχηματισμός τους. Η μεταφορά από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μεταξύ όλων αυτών των αναπαραστάσεων κάνει τις μαθηματικές έννοιες ουσιαστικές για τους μαθητές (Cramer, Wyberg, Leavitt,2008; Duval, 2006, Λεμονίδης, 2016).

3.2 Ευρήματα για τα χειραπτικά υλικά

Όσο αφορά τη χρήση χειραπτικών υλικών για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των δεκαδικών, έχουν προταθεί διάφορα εργαλεία αναπαράστασης για να βοηθήσουν τους μαθητές καθώς αναπτύσσουν την κατανόηση της αξίας των δεκαδικών θέσεων. Αυτά περιλαμβάνουν την αναπαράσταση των δεκαδικών με χωρισμένα ορθογώνια (decimats), με σωλήνες (decipipes), Γραμμικά Αριθμητικά Μπλοκ (LAB) (Helme & Stacey, 2000) και τα Πολυβασικά Αριθμητικά Μπλοκ (MAB) (Roche,2010).

Η κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς θεωρείται κρίσιμη για τους μαθητές, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν την ιδέα ότι το ένα δέκατο είναι ένα κομμάτι ενός συνόλου που έχει χωριστεί σε 10 ίσα κομμάτια (Young-Loveridge & Mills, 2011). Τα Decimats αποτελούνται από ένα κομμάτι χαρτί ορθογωνίου σχήματος, χωρισμένο σε δέκα ίσα μέρη (δύο σειρές των πέντε), με περαιτέρω υποδιαιρέσεις που επιτρέπουν στο κάθε ένα δέκατο μέρος να χωριστεί σε δέκα εκατοστά και τη δυνατότητα για κάθε ένα εκατοστό να διαιρείται σε δέκα χιλιοστά. Το decimat παρέχει ένα ισχυρό μοντέλο «πεδίου» για την απεικόνιση των δεκαδικών ποσοτήτων. Τα Decipipes (όπως και τα γραμμικά αριθμητικά μπλοκ [LAB]) βοηθούν τους μαθητές να εκτιμήσουν τα σχετικά μεγέθη των 0,1, 0,01 και 0,001, αλλά το κάνουν μέσω μιας γραμμικής αναπαράστασης (Helme & Stacey, 2000). Είναι σαφές ότι τα δεκαδικά κλάσματα έχουν διακριτό και συνεχή χαρακτήρα. Η οδηγία για τα δεκαδικά κλάσματα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα μπλοκ βάσης-10 τα οποία όμως τονίζουν τον διακριτό χαρακτήρα των δεκαδικών (Ni & Zhou, 2005). Το Deciwire (με εύκαμπτος λεπτός σωλήνας και χρήση κομματιών από καλαμάκι για δεκαδικά ψηφία) αναπτύχθηκε ως φθηνότερη, πιο εύκολα προσβάσιμη έκδοση των Decipipes (Young-Loveridge & Mills, 2011).

Πολλοί ερευνητές χρησιμοποίησαν μια εικόνα 10 × 10 (δεκαδικό πλέγμα) ως οπτικό μοντέλο για να φωτίσουν την υποκείμενη δομή του δεκαδικού συστήματος για τους μαθητές. Η κατανόηση εκ μέρους των μαθητών της μαθηματικής δομής του συστήματος των δεκαδικών αριθμών ενισχύθηκε καθώς μεταφράζονταν σε άλλες αναπαραστάσεις και με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές άρχισαν να αναπτύσσουν μια εννοιολογική κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου αλλά και των διαδικασιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Το πλέγμα (10Χ10) και όχι η αριθμογραμμή έδωσαν στους μαθητές ισχυρές διανοητικές εικόνες που υποστήριζαν τη λογική των δεκαδικών ψηφίων (Cramer, Wyberg & Leavitt 2008).

Επιπλέον, τα χρήματα μερικές φορές προτείνονται ως χρήσιμο πλαίσιο, και παρόλο που είναι ένα μαθηματικά κατάλληλο πλαίσιο για να συζητήσουμε τους δεκαδικούς, έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Τα ίδια τα κέρματα δεν «μοντελοποιούν» τη διαφορά μεγέθους μεταξύ δέκατων και εκατοστών και τα κέρματα θα μπορούσαν εύκολα να δώσουν την εντύπωση ακέραιων που θα μπορούσαν να επιβεβαιώσουν την εσφαλμένη αντίληψη του μαθητή ότι τα δεκαδικά ψηφία μπορούν να αντιμετωπίζονται όπως δύο ακέραιοι αριθμοί χωρισμένοι με την υποδιαστολή (Roche, 2010).

3.3 Ευρήματα σχετικά με την καθημερινή ζωή

Η μελέτη των Pramudiani et al. (2011) σε παιδιά πέμπτης δημοτικού στόχευσε στη διερεύνηση μιας κατάστασης που δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να μάθουν για τους δεκαδικούς κατά τρόπο ουσιαστικό για τα παιδιά βασιζόμενοι στη θεωρία των ρεαλιστικών μαθηματικών, συγκεκριμένα μέσω δραστηριοτήτων μέτρησης βάρους (ζύγιση σώματος, φρούτων) και όγκου ποτών. Στα ευρήματά τους είναι ότι οι μαθητές θα μπορούσαν μέσα από δραστηριότητες μέτρησης να ανακαλύψουν την έννοια των δεκαδικών, γεγονός που, στη συνέχεια, μπορεί να οδηγήσει στην ιδέα της χρήσης της αριθμογραμμής ως μοντέλου για την τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών. Η πτυχή μέτρησης του ρητού αριθμού παρέχει την ευκαιρία να χτιστεί η έννοια του αριθμού στην ίδια βάση για φυσικούς και μη φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον, η μέτρηση μπορεί να συσχετιστεί σταδιακά με τη γραμμή συνεχούς αριθμού, ένα εργαλείο αναπαραγωγής που μπορεί να υποστηρίξει τους μαθητές να αντιληφθούν φυσικούς και μη φυσικούς αριθμούς ως μέλη της ίδιας οικογένειας και να καταλάβει ότι οι διάφορες συμβολικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού αναφέρονται στην πραγματικότητα στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο (Λεμονίδης, 2016; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Στην ίδια θεωρία στηρίχτηκε και η έρευνα της Astuti (2014) σε παιδιά Τετάρτης δημοτικού όπου χρησιμοποιήθηκε η μέτρηση μήκους διαφόρων αποστάσεων και αντικειμένων μέσα στην τάξη για την εισαγωγή στους δεκαδικούς. Στα ευρήματα παρατηρήθηκε και η αξία της συζήτησης στην τάξη και των επιχειρημάτων των μαθητών πάνω στα διάφορα ερωτήματα για την καλύτερη κατανόηση των δεκαδικών κάτι που επισημάνθηκε και στην έρευνα της Bragg (2012).

Η διδασκαλία των δεκαδικών συνήθως προσεγγίζεται ακολουθώντας διάφορες ψυχοπαιδαγωγικές αρχές που εφαρμόζονται στην μαθηματική εκπαίδευση, δίνοντας περισσότερη ή λιγότερη έμφαση στην κατασκευή της γνώσης των μαθητών όπως βρέθηκε σε έρευνα που διεξήχθη από τον Guy Brousseau και Nadine για τη διδασκαλία ρητών στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Konic, Godino &

Rivas, 2010). Η μελέτη των δεκαδικών αριθμών θα ήταν επιθυμητό να ξεκινάει με μια ενδιαφέρουσα κατάσταση που να ανταποκρίνεται σε ένα ζήτημα της καθημερινής ζωής, το οποίο μπορεί να εμπλέξει συναισθηματικά τον μαθητή και στη δήλωση του οποίου υπάρχουν εκφράσεις που αναφέρονται στους δεκαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα όπως συνέβη στην πειραματική διδασκαλία των δεκαδικών σε δύο τάξεις τετάρτης δημοτικού, στη Βόρεια Ιταλία, με τη χρήση προσομοίωσης της επίσκεψης σε ένα εστιατόριο η οποία κατέδειξε τα θετικά αποτελέσματα ενός συνδυασμού στενά συνδεδεμένων παραγόντων: α) τη χρήση κατάλληλων πολιτιστικών αντικειμένων που επιτρέπουν στα παιδιά τον αποτελεσματικό έλεγχο των συμπερασμάτων και των αποτελεσμάτων και ενθαρρύνουν την κατανόηση της σχέσης μεταξύ των συμβόλων και των αναφορών τους, β) τη χρήση διαδικασιών εκτίμησης που επιτρέπουν τη σύνδεση μεταξύ των λύσεων και της λογικότητάς τους, γ) την εισαγωγή συγκεκριμένων κοινωνικο-μαθηματικών κανόνων, δ) την κατάλληλη ισορροπία μεταξύ των δραστηριοτήτων που παρουσιάζουν προβλήματα και των επιλύσεων προβλημάτων, (ε) τη συστηματική προσοχή στη φύση των προβλημάτων και στην κουλτούρα της τάξης (Bonotto, 2006; Konic, Godino & Rivas,2010).

3.4 Ευρήματα για την πυκνότητα

Το σύνολο των ρητών αριθμών χαρακτηρίζεται από την ιδέα της πυκνότητας των αριθμών, η οποία είναι μια θεμελιώδης προϋπόθεση που περιορίζει την κατανόηση της δομής των ρητών αριθμών από τους μαθητές. Ως εκ τούτου, αναμένεται από τους μαθητές να κάνουν σφάλματα που αντικατοπτρίζουν την προϋπόθεση αυτή. Βέβαια, η κατανόηση της πυκνότητας είναι μια αργή και σταδιακή διαδικασία, και όχι μια κατάσταση "καθόλου ή τίποτα". Ως εκ τούτου, θα πρέπει να γίνεται διάγνωση στα ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης, έτσι ώστε να επιβεβαιώνονται οι ικανότητες των μαθητών, να αφομοιώνουν νέες πληροφορίες σχετικά με τους ρητούς αριθμούς στις προϋπάρχουσες δομές γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς. Οι μαθητές που ανήκουν σε ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης έχουν παρανοήσεις που μπορούν να εξηγηθούν ως συνθετικά μοντέλα (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Έρευνες έχουν δείξει πως είναι επιθυμητό να επικεντρωθούμε στη συνεχή ποσότητα και μέτρηση και όχι σε ασυνεχή ποσότητα και καταμέτρηση, να τονιστούν δηλαδή οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης αναλογικών αριθμών (κλάσματα, δεκαδικά, ποσοστά) και να εφαρμόζουμε τις ίδιες διαισθητικές μορφές λειτουργίας (π.χ βρίσκοντας το μισό και τη "διαίρεση με το 10") στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης (Moss & Case, 1999).

3.5 Συνέπειες της διδασκαλίας

Από όλα όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες (π.χ Alibali & Sidney,2015; Astuti, 2014;Ni & Zhou,2005;Shaughnessy,2009) είναι σημαντικό να δημιουργηθούν περιβάλλοντα μάθησης που να επιτρέπουν στους μαθητές να εκφράζουν και να επεξεργάζονται τις απόψεις τους, ώστε να συνειδητοποιούν τις πεποιθήσεις τους. Όταν η μάθηση απαιτεί αναδιοργάνωση δομών προηγούμενης γνώσης, δεν πρέπει να αναμένονται άμεσα αποτελέσματα, ακόμα και μετά από προσεκτικά σχεδιασμένη διδασκαλία. Η εννοιολογική αλλαγή μπορεί να αποδειχθεί αργή και χρονοβόρα διαδικασία. Ωστόσο, τα αποτελέσματα όσον αφορά την κατανόηση καθιστούν την προσπάθεια χρήσιμη (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Μέσω της προσπάθειας αυτής εκτιμάται ότι εστιάζοντας στους λανθασμένους χειρισμούς τόσο ο μαθητής όσο και ο εκπαιδευτικός θα σχεδιάσουν νέες πρακτικές ώστε να ξανά-ανακαλύψουν και να ανασυνθέσουν την εσφαλμένη γνώση στις δύσκολες έννοιες των δεκαδικών αριθμών. Ο τρόπος για να καταπολεμηθούν οι παρανοήσεις είναι βασικά η ίδια, να τονιστεί η υποκείμενη αξία θέσης ψηφίου του αριθμητικού συστήματος και να γίνουν σαφείς συνδέσεις μεταξύ των πολλών διαφορετικών αναπαραστάσεών του (Steinle & Stacey,2004) για να επιτευχθεί βαθύτερη κατανόηση των πράξεων αλλά και της πυκνότητας των ρητών αριθμών (Gabriel et al., 2012,2013 στο Van Hoof, Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2017). Οι Hiebert, Wearne και Taber (1991) έχουν περιγράψει την εκμάθηση με τον ακόλουθο τρόπο: «Η κατανόηση έρχεται σταδιακά, σε πολλές μικρές προόδους, καθώς οι μαθητές προσπαθούν να συντονίσουν και να συνδέσουν τις σχετικές πληροφορίες. Η κατανόηση συχνά δεν χαρακτηρίζεται από συστηματικές γενικές προόδους, αλλά από απρόβλεπτες μικρές αλλαγές που κάνουν τη διαδικασία να εμφανίζεται ανασταλτική και ασταθής " (στο Moskal & Magone, 2000).

Κεφάλαιο 4: Η ιστορία των δεκαδικών

Από πολύ νωρίς οι άνθρωποι ήρθαν αντιμέτωποι με το πρόβλημα της μοιρασιάς και έτσι βρέθηκαν αντιμέτωποι με την αδυναμία των ακεραίων να παρέχουν λύση. Η γέννηση των κλασμάτων προήλθε από τις οικονομικές, εμπορικές συναλλαγές ήδη από τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους. Παραδείγματα δεκαδικού αριθμού μπορούν να εντοπιστούν στην Αίγυπτο μέχρι τα μέσα της τέταρτης χιλιετίας π.Χ. , όταν έχουν ήδη δημιουργηθεί ειδικά σύμβολα για μια ολόκληρη σειρά δεκαδικών μονάδων μέχρι ένα εκατομμύριο (Sarton, 1935). Οι Αιγύπτιοι θεωρούσαν το κλάσμα ως ένα μοίρασμα και κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούσαν τα μοναδιαία κλάσματα, με εξαίρεση τα 2/3. Όλα τα κλάσματα γράφονταν υπό τη μορφή αθροίσματος μοναδιαίων κλασμάτων.

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τα Αιγυπτιακά εναδικά κλάσματα (με αριθμητή τον αριθμό ένα). Οι απόψεις διίστανται στο κατά πόσο τα κλάσματα που αναγνωρίζονται, τα ονομαζόμενα "quantièmes" (Caveing, 1992) είχαν τον ίδιο εννοιολογικό χαρακτήρα με τους αριθμούς που εμείς σήμερα ονομάζουμε κλάσματα. Τα χρησιμοποιούσαν στις καθημερινές τους συναλλαγές και ο τρόπος που τα ερμήνευαν μας θυμίζει την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος όλου. Για τη διερεύνηση της ύπαρξης πράξεων ανάμεσα στα εναδικά Αιγυπτιακά κλάσματα καταφεύγουν σε λογιστικά κείμενα, σε πίνακες μέτρησης και σε πηγές όπως π.χ. ο Πάπυρος του Rhind και ο Δερμάτινος Κύλινδρος (1600 π.Χ. - τα πρωτότυπα χρονολογούνται από το 1850 π.Χ.) (στο Rashed,1994)

Παράλληλα, όσον αφορά τους Βαβυλώνιους εκείνοι χρησιμοποιούν την εξηκονταδική αρίθμηση δηλαδή θέτουν ως παρονομαστή των κλασμάτων τους τον αριθμό εξήντα και τα πολλαπλάσιά του (π.χ. 1/60 ή 1/3600) (Το 60 χρησιμοποιούνταν ως βάση και από τους Σουμέριους) και όλα τα κλάσματα της μορφής m/n θεωρούνται ως γινόμενο m* 1/n, δηλαδή λαμβάνουν τη σημασία του αντίστροφου. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν σύνθετους πίνακες για να αναπαριστούν κοινά κλάσματα ως εξηκονταδικά. Θα ήταν σημαντικό να αναφερθεί ότι αντίθετα με τα Αιγυπτιακά εναδικά, τα εξηκονταδικά κλάσματα είχαν μορφή ακεραίου και προέκυψαν αρκετά φυσικά καθώς υποδιαιρούσαν τον χρόνο σε 360 μέρες, την ώρα σε 60' και το 1' σε 60'' (Burton, 1991).

Η καταγωγή του αριθμητικού μας συστήματος, όπως το γνωρίζουμε σήμερα, του δεκαδικού θεσιακού συστήματος, το οποίο συνήθως ονομάζεται ινδοαραβικό επειδή λέγεται ότι προέρχεται από την Ινδία και μεταβιβάστηκε από τους Άραβες στην Ευρώπη, βρίσκεται σε μεγάλο βαθμό πέρα από την ιστορική καταγραφή. Παρόλα αυτά θα αναφερθούν ερευνητικά ευρήματα για την καταγωγή και την ανάπτυξη του δεκαδικού συστήματος.

Η ιδέα της θέσης επανεμφανίστηκε σε μια καλύτερη μορφή στην Ινδία σε μια εποχή που δεν μπορεί να καθοριστεί (ας πούμε στους πρώτους αιώνες της εποχής μας). Ούτε μπορεί να είναι γνωστό αν η ινδουιστική κατασκευή ήταν ανεξάρτητη ή επηρεάζεται από παραδείγματα της Βαβυλώνας. Εν πάση περιπτώσει, η ιδέα της θέσης του Ινδουισμού συνδυάστηκε με μια καθαρά δεκαδική αριθμητική και αυτός ο συνδυασμός ήταν πραγματικά μία νέα οπτική εξαιρετικής σημασίας. Χάρη σε αυτό, κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί μονοσήμαντα με μόνο δέκα διαφορετικά σύμβολα (τους εννέα αριθμούς και το μηδέν) (Sarton, 1935).

Αυτό που μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα είναι ότι στην Ινδία από τον 8ο αιώνα υπήρχε ήδη ένα ανεπτυγμένο θεσιακό αριθμητικό σύστημα παρά το γεγονός ότι το 870 καταγράφεται η πρώτη αναφορά στο δεκαδικό θεσιακό σύστημα. Νωρίτερα το σύστημα αυτό είχε μεταβιβασθεί στην Κίνα και τη Βαγδάτη που τότε ήταν το κέντρο του αναπτυσσόμενου ισλαμικού κόσμου. Οι κινέζοι από πολύ νωρίς είχαν ένα πολλαπλασιαστικό σύστημα με βάση το δέκα, το οποίο προέρχεται από τον κινέζικο άβακα που χρησιμοποιούσαν και περιείχε στήλες καθεμία από τις οποίες αναπαριστούσε μια δύναμη του δέκα. Πιθανολογείται πως επειδή ο άβακας αυτός χρησιμοποιούνταν από τους κινέζους εμπόρους για τις συναλλαγές τους όταν αυτοί επισκέπτονταν την Ινδία, ίσως έγινε η υιοθέτηση του κινεζικού συστήματος αρίθμησης από τους Ινδούς.

Οι Άραβες δέχονται το κλάσμα ως τον λόγο δύο μηκών (π.χ. 2/3 , 3*2/3=2) και είναι οι πρώτοι που χρησιμοποιούν ως σύμβολο την κλασματική γραμμή. Δεν υπάρχουν ανάλογα τεκμήρια χρήσης τους στην Ινδία και είναι οι μουσουλμάνοι αυτοί που ολοκλήρωσαν το ινδικό γραπτό δεκαδικό σύστημα εισάγοντας τα δεκαδικά κλάσματα. Τον 9ο αιώνα μ.Χ. αρχίζουν Άραβες μαθηματικοί να μεταφράζουν κλασικά έργα Ελλήνων συγγραφέων όπως του Ευκλείδη, του Πτολεμαίου, του Απολλώνιου, του Αρχιμήδη, του Πάππου και του Διόφαντου (Rashed, 1994). Έτσι η ελληνική αριθμητική και γεωμετρία διαδίδονται ευρύτατα με τη συμβολή των έργων των Αράβων και τίθενται τα θεμέλια της Άλγεβρας (το όνομα άλγεβρα προέκυψε από τον τίτλο του έργου *Hisậb al-jabr wal-muqậbala30* του al-Hawarizmi - 820 μ.Χ.) και διαμορφώνεται μια διαφορετική σχέση ανάμεσα στην άλγεβρα και τη γεωμετρία που δίνει αφορμή σε τεχνικές τεράστιου δυναμικού.

Τον 11ο αιώνα με τη σχολή του al-Karaji έχουμε την «αριθμητικοποίηση» της Άλγεβρας (arithmetisation). Σύμφωνα με τον Rashed (1975) η «αριθμητικοποίηση» της Άλγεβρας ερμηνεύεται ως η εφαρμογή των πράξεων της στοιχειώδους αριθμητικής σε αλγεβρικές εκφράσεις. Πολλά αριθμητικά έργα που εξηγούσαν τις ινδικές μεθόδους γράφτηκαν στα αραβικά με παλαιότερο «*Το Βιβλίο των κεφαλαίων της ινδικής αριθμητικής*» του Abu l-Hasan al Uqlidisi το 952. Πέρα όμως από την χρησιμότητα των ινδικών ψηφίων ο συγγραφέας χρησιμοποιεί και τα δεκαδικά κλάσματα, των οποίων η εμφάνιση γίνεται για πρώτη φορά εκτός Κίνας, χωρίς όμως να γίνεται φανερό ότι συλλαμβάνει πλήρως το νόημά τους. Αφού στο έργο του διαιρεί μόνο δια του δύο και δια του πέντε αλλά δεν επιχειρεί να υπολογίσει τη δεκαδική μορφή του 14/3. Στην «*Αριθμητική πραγματεία»* του ο al-Samaw' al, το 1172, ασχολείται με προσεγγίσεις ρητών, άρρητων αριθμών και της νιοστής θετικής ρίζας ενός αριθμού. Επίσης, βλέπουμε να χρησιμοποιούνται δεκαδικά κλάσματα χωρίς να αναγνωρίζονται ως τέτοια: το μόνο που χρειάζεται κανείς είναι να θεωρεί όλες τις πράξεις με κλάσματα, με παρονομαστή τους μια δύναμη του δέκα το οποίο ονομάστηκε ο «κανόνας των μηδενικών» (Rashed, 1994). Σε θεωρητικό επίπεδο μπορεί δηλαδή κανείς να υπολογίσει ένα άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα για κάθε αριθμό και ότι τα πεπερασμένα δεκαδικά του «συγκλίνουν» στην ακριβή τιμή. Δείχνει λοιπόν να κατανοεί πλήρως τα δεκαδικά κλάσματα αν και χρησιμοποιεί λέξεις αντί για το πλήρες δεκαδικό σύστημα θέσης που χρησιμοποιούσε ο προκάτοχός του.
Όμως ακόμα και με αυτή τη σημαντική συμβολή δεν έχουμε το πλήρες νόημα ούτε τον συμβολισμό των δεκαδικών κλασμάτων μέχρι τα μέσα του 15ου αιώνα και το έργο του al-Kashi, Πέρση αστρονόμου, που χρησιμοποίησε τα δεκαδικά και τα εξηκονταδικά κλάσματα κι ο οποίος ξεχώριζε το ακέραιο με το δεκαδικό μέρος με μια κατακόρυφη γραμμή. Η ανακάλυψη των δεκαδικών αριθμών ίσως να οφείλεται στον al-Kashi όμως οι προσεγγίσεις που σχετίζονται με τους αλγεβρικούς

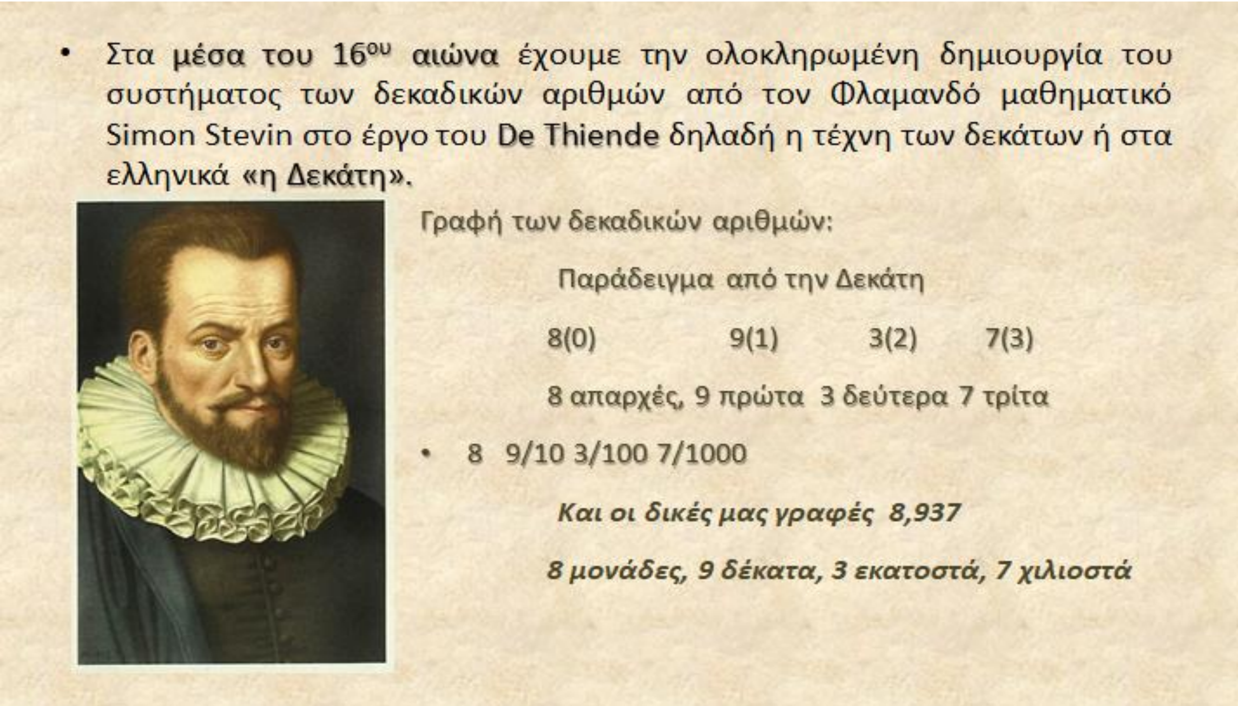
πραγματικούς αριθμούς, η μέθοδος Ruffini-Horner, η μέθοδος της προσέγγισης ή αλλιώς μέθοδος "al-Kashi-Newton", η θεωρία των δεκαδικών κλασμάτων ήταν έργο των μαθηματικών της άλγεβρας του 11^{ου} και του 12^{ου} αιώνα. Στο έργο του *«Περιφέρεια ενός κύκλου»* που μεταφράστηκε και αναλύθηκε από τον Luckey το 1953, ο al-Kashi καταφεύγει στα δεκαδικά κλάσματα για να προσεγγίσει τον αριθμό π (στο Rashed, 2013). Παρόλο που θεωρεί τον δεκαδικό αριθμό σαν μια μαθηματική ανακάλυψη, δεν τον θέτει κάτω από έλεγχο μιας θεωρίας που να σταθεροποιεί τον ορισμό, τις ιδιότητες και την επιστημολογική του θέση. Επίσης παραλληλίζει το εξηκονταδικό σύστημα με το δεκαδικό και προτείνει ξεκάθαρα το δέκα ως αντίστοιχο του εξήντα και θέτει την ιδέα αυτή της αντιστοιχίας για κάθε βάση «α». Ως κληρονόμος της σχολής "al –Karaji" δεν συγκέντρωσε απλώς την προηγούμενη γνώση αλλά πήγε ένα βήμα παραπέρα και παρουσίασε μια σημαντική διάσταση στην ιστορία των δεκαδικών κλασμάτων. Το έργο του είναι τόσο σημαντικό που ακόμη και τον 17ο αιώνα άραβες μαθηματικοί (για παράδειγμα ο al-Yazdi) παραπέμπουν στο τελευταίο έργο του. Η υπόθεση γίνεται πιο πολύπλοκη αν σκεφτεί κανείς την επιστήμη στη Δύση καθώς οι μαθηματικοί εκεί γνωρίζουν το έργο των Αράβων επιστημόνων αλλά η ολοκληρωμένη γνώση των δεκαδικών κλασμάτων αναζητείται ακόμη. Οι ιστορικοί Hunger και Vogel το 1963 γράφουν για ένα χειρόγραφο που βρέθηκε από το Βυζάντιο στη Βενετία το 1562 και στο οποίο αναφέρεται η χρήση των δεκαδικών κλασμάτων από τους Τούρκους. Η περίοδος της Αναγέννησης χαρακτηρίζεται από την παρουσία της ανθρωπιστικής παιδείας. Η ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας επηρεάζεται από την πνευματική αυτή κίνηση παρόλο που η επιστήμη και τα μαθηματικά είναι έξω από τον προσανατολισμό της (Katz, 2013).

Στα μέσα του 16^{ου} αιώνα έχουμε την ολοκληρωμένη δημιουργία του συστήματος των δεκαδικών αριθμών από τον Φλαμανδό μαθηματικό Simon Stevin στο έργο του «*De Thiende*» δηλαδή η τέχνη των δεκάτων ή στα ελληνικά «*Η Δεκάτη*». Ο Simon Stevin γεννήθηκε το 1548 στην Bruges (Μπρυζ) στη Φλαμανδία. Δεν γνωρίζουμε πολλά για την μικρή του ηλικία. Μετά από διοικητικές δραστηριότητες στην Αμβέρσα και την Bruges (1577) εγκαταστάθηκε στην πόλη Leyden στα 1581. Πέθανε στην La Haye στα 1620. Ήταν εργαζόμενος σε τράπεζα, πολιτικός και στρατιωτικός μηχανικός, παιδαγωγός του Maurice de Nassau, καθηγητής μαθηματικών στη σχολή μηχανικών στο Leyden, ένας άνθρωπος ο οποίος επηρέαζε ιδιαίτερα στη χώρα του. Έγινε γνωστός για τις εργασίες του στην υδροστατική (εξήγηση της αρχής του Αρχιμήδη σχετικά με την πίεση σε ένα υγρό) και στη μηχανική (σύνθεση των δυνάμεων). Ασχολήθηκε επίσης με την αστρονομία (λαμβάνοντας για λογαριασμό του τη θεωρία του Κοπέρνικου πολλά χρόνια πριν τον Γαλιλαίο), στην ναυσιπλοΐα (προσπάθεια προσδιορισμού του γεωγραφικού μήκους από την μαγνητική διάθλαση), στην κατασκευή των φραγμάτων, των ανεμόμυλων (δημιουργία κωνικών γραναζιών) και στις στρατιωτικές οχυρώσεις (ιδέες που εξερευνήθηκαν από τον Vauban) (Νικολαντωνάκης, 2017).

Στη «*Δεκάτη*» περιγράφεται η αριθμητική που βασίζεται στη γεωμετρική πρόοδο με λόγο το δέκα και χρησιμοποιεί τα ψηφία από 0 ως 9. Ο συμβολισμός που θέτει είναι όπως φαίνεται παρακάτω (Εικόνα 1) και έχει ως αρχή τον αριθμό αριστερά του 0 ο οποίος μπορεί να αποτελείται από πολλά ψηφία δηλαδή ως ακέραιος ενώ οι υπόλοιποι από μονά ψηφία αφού ο αριθμός αριστερά του 1 αποτελεί το δέκατο της αρχικής μονάδας και ακολούθως ο αριθμός αριστερά του 2 αποτελεί το δέκατο του πρώτου και ούτω καθεξής.

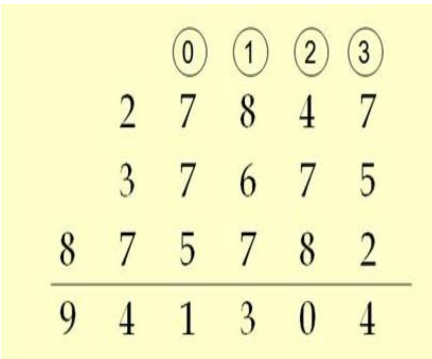
Για παράδειγμα ο αριθμός 3,759 γράφεται:

3 0 7 1 5 2 9 3



Εικόνα 1: Παρουσίαση των αριθμών όπως προτείνεται στη «Δεκάτη»

Δεν χρησιμοποιεί καμία κλασματική αναπαράσταση. Το βασικό πλεονέκτημα του δεκαδικού συστήματος που προτείνει ο Stevin είναι πως μπορείς να αποφεύγεις δύσκολες πράξεις στα κλάσματα για να οδηγηθείς σε λειτουργικούς κανόνες αριθμητικής που χρησιμοποιούνται για τους ακεραίους. Όλες οι πράξεις μπορούν να εκτελεστούν ακριβώς όπως και στους ακέραιους (Εικόνα 2).



27, 847
37, 675
\+ 875,782
941,304

Εικόνα 2: Παράδειγμα πρόσθεσης στη «Δεκάτη» και στη σημερινή μορφή

Με τον Stevin, επίσης, οι δεκαδικοί αριθμοί αποκτούν την υπόσταση μαθηματικής έννοιας, αφού μέσα από τους αριθμούς αυτούς δημιουργείται μια γενική έννοια του αριθμού που εφαρμόζεται στις λύσεις των αλγεβρικών προβλημάτων της εποχής του. Παρόλο που ο συμβολισμός που χρησιμοποιεί διαφέρει από αυτόν που έχουμε σήμερα, στη «*Δεκάτη*» περιγράφει τους βασικούς κανόνες και τη λογική χρήσης των δεκαδικών αριθμών. Στο έργο του, μετά την εισαγωγή ο Stevin σημειώνει τα περιεχόμενα του βιβλίου: 1. Ορισμοί, 2. Πράξεις ή Πρακτική και 3. Παράρτημα. Στον Πρώτο Ορισμό υπογραμμίζει το γεγονός ότι τα Ινδοαραβικά ψηφία έχουν διαφορετική αξία σύμφωνα με την θέση τους, δηλαδή μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κ.λπ. Με αυτό τον τρόπο στον αριθμό 1111 κάθε ψηφίο 1 αξίζει το δέκατο μέρος του 1 το οποίο βρίσκεται μια θέση προς τα αριστερά. Η πρόθεσή του είναι να προχωρήσει την εφαρμογή αυτής της επιλογής για τα δεκαδικά μέρη, σύμφωνα με την οποία όλοι οι υπολογισμοί που συμβαίνουν στις υποθέσεις των ανθρώπων, μπορεί να επεξεργαστούν και να λυθούν χωρίς κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς. Στον δεύτερο ορισμό ονομάζει τους ακέραιους αριθμούς (Μονάδες) ως απαρχές για παράδειγμα τον αριθμό 35 τον συμβολίζει 35 (0) ενώ αντίστοιχα στον τρίτο ορισμό αναφέρεται στα πρώτα, δεύτερα, τρίτα κ.ο.κ των απαρχών (δηλαδή δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά κ.ο.κ) που γράφονται στα δεξιά των απαρχών, για παράδειγμα ο αριθμός 35,725 γράφεται ως 35 (0) 7(1) 2(2) 5(3). Στον τέταρτο ορισμό ονομάζει τους αριθμούς του δεύτερου και τρίτου ορισμού ως αριθμούς της Δεκάτης δηλαδή δεκαδικούς αριθμούς (Νικολαντωνάκης, 2017). Στο δεύτερο μέρος της Πρακτικής ή των πράξεων, περιγράφει αναλυτικά τις θεμελιώδεις πράξεις που εκτελούνται με τον ίδιο τρόπο, όπως στους ακεραίους αριθμούς, όπως αυτό σημειώνεται στον τίτλο της Δεκάτης (Εικόνα 2). Στο τρίτο μέρος της Δεκάτης ο Stevin υπογραμμίζει τα πλεονεκτήματα των δεκαδικών αριθμών στους πρακτικούς υπολογισμούς. Για αυτό το σκοπό μια δεκαδική υποδιαίρεση των βασικών μονάδων του χρήματος, των βαρών και των σταθμών είναι απαραίτητη για αυτό προτείνει το δεκαδικό σύστημα προς χρήση σε διάφορα επαγγέλματα με μια βασική μονάδα ως αρχή και την εφαρμογή του συστήματός του με βάση το δέκα για τα κλάσματα αυτής της μονάδας (Νικολαντωνάκης, 2017)

Στην παρούσα εργασία, η επιλογή του Simon Stevin και του έργου του «Δεκάτη» αποτέλεσε το καταλληλότερο μέσο για την ένταξη της ιστορίας στη διδασκαλία μας, βασικά, μέσα από την αρχική παρουσίαση και το παιχνίδι «Ο κώδικας του Stevin» το οποίο δημιουργήθηκε με σκοπό την εξοικείωση με το σύστημα των δεκαδικών του Simon Stevin, την αναγνώριση και την αναγκαιότητα της δημιουργίας και της χρήσης του. Ως στόχοι τέθηκαν να οδηγηθεί ο μαθητής: α) να χρησιμοποιήσει τις λέξεις μονάδα, δέκατο, εκατοστό και χιλιοστό για να περιγράψει έναν δεκαδικό αριθμό, β) να αναπτύξει τις δεξιότητές μετατροπής της γραφής για τους δεκαδικούς, γ) να κατανοήσει την αξία θέσης ψηφίου. Ο Simon Stevin πρότεινε έναν νέο συμβολισμό για τους δεκαδικούς (όπως περιγράφηκε παραπάνω) που θα είχε πρακτική εφαρμογή σε πολλούς τομείς της καθημερινότητας και της επιστήμης και θα διευκόλυνε τις πράξεις με τους δεκαδικούς του αριθμούς αφού δεν περιλάμβαναν κλάσματα. Η πρότασή του την εποχή εκείνη (1600) πάνω στους δεκαδικούς αριθμούς, λοιπόν, ήταν απλή και με πολλά πρακτικά πλεονεκτήματα. Στη «Δεκάτη» γινόταν ξεκάθαρο ότι όλες οι αριθμητικές πράξεις μπορούν να εκτελεστούν ευκολότερα και με καλύτερο τρόπο, όπως γινόταν με τους ακέραιους αριθμούς, σε σχέση με αυτό που συνέβαινε μέχρι τότε, όταν χρησιμοποιούνταν ο παλαιότερος συμβολισμός (Νικολαντωνάκης, 2017). Η εφεύρεσή του αυτή είναι μια σύμβαση γραφής, που οδήγησε στη δημιουργία των «αριθμών της Δεκάτης», δηλαδή των

δεκαδικών, οι οποίοι ανήκουν στο σύνολο των ρητών. Επιπροσθέτως, ο Simon Stevin, όπως αναφέρεται στη Δεκάτη, προσπάθησε να πείσει για το έργο του τους άρχοντες της περιοχής και να πάρει την άδειά τους για τη χρήση του νέου συμβολικού συστήματος των δεκαδικών αλλά να πείσει και τους επαγγελματίες που θα χρησιμοποιούσαν και θα επωφελούνταν από το νέο αυτό σύστημα (αστρολόγους, χωρομέτρες, καταμετρητές χωρητικότητας, εμπόρους κτλ) (Νικολαντωνάκης, 2017). Το έργο του πάνω στη δημιουργία, ουσιαστικά, του δεκαδικού συστήματος που χρησιμοποιούμε και σήμερα, είναι πολύ σημαντικό και μπορεί να διδάξει στα παιδιά ότι τα μαθηματικά δεν είναι στατικά αλλά μια επιστήμη που εξελίσσεται με το πέρασμα του χρόνου και σε αυτό συμβάλλει η ανθρώπινη προσπάθεια.
Γεγονός είναι πως οι διαφορετικές μορφές των δεκαδικών κλασμάτων που αναφέρθηκαν παρέμειναν εκτός μαθηματικής πρακτικής μέχρι τον Napier και τον χειρισμό της λογαριθμικής λειτουργίας όπου χρησιμοποιήθηκαν οι δεκαδικοί αποτελεσματικά. Όσο αφορά το δεκαδικό σύστημα του Stevin αυτό έγινε αποδεκτό μετά από διακόσια χρόνια όταν εισήγαγαν το μετρικό σύστημα στη Γαλλία. Όσον αφορά τα κλάσματα, οι εφαρμογές δεν είναι ιδίου τύπου με τα προβλήματα διαίρεσης μερισμού όπως εμφανιζόταν στον πάπυρο του Rhind. Στην περίοδο αυτή έχουν να κάνουν με εφαρμογές, όπως προβλήματα διαίρεσης στο πλαίσιο της «αριθμητικής των εμπόρων» και γενικά στο πλαίσιο των υπολογισμών με διάφορες ποσότητες χρησιμοποιώντας «τη μέθοδο των τριών». Τον 15ο αιώνα οι δάσκαλοι της υπολογιστικής στην Ιταλία είχαν πολύ καλή επίδοση στις αριθμητικές πράξεις με ρητούς αριθμούς. Μετά την Γαλλική Επανάσταση μέσα από τη διάδοση της στοιχειώδους και μέσης εκπαίδευσης καθιερώνεται ευρύτατα η χρήση των δεκαδικών αριθμών ως εύχρηστο μέσο υπολογισμών˙ ως αποτέλεσμα αυτού η έννοια του αριθμού και κατά συνέπεια η έννοια του κλάσματος έχασαν την οντολογική τους υπόσταση. Τον 18ο αιώνα αρχίζει η «αξιωματικοποίηση» της άλγεβρας, δημιουργούνται νέες άλγεβρες, ορίζονται νέοι αριθμοί και οι ιδιότητές τους. Την περίοδο του Διαφωτισμού ο Newton χρησιμοποιεί τους δεκαδικούς αριθμούς για να εξηγήσει την προσέγγιση των συναρτήσεων και των ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Ο Euler δίνει έναν πλήρη ορισμό του κλάσματος ως μαθηματικής αφηρημένης έννοιας καθώς επίσης και όλες τις περιπτώσεις των διαφορετικών κλασμάτων, τις ιδιότητές τους, τη σχέση τους με την ακέραια μονάδα, τον τρόπο που διατάσσονται καθώς επίσης και τις διαδικασίες των πράξεων με κλάσματα. Ο Laplace το 1795 αφιέρωσε μάθημά του σε μαθηματικές έννοιες όπως των κλασμάτων, των ποσοστών, των ριζών, των προόδων και των λογαρίθμων (Katz,2013).

Κατά τον 19ο αιώνα αρχίζει πραγματικά η εξερεύνηση της θεμελίωσης της ανάλυσης. Η συμβολική εξέλιξη των δεκαδικών αριθμών φαίνεται καθαρά στην Εικόνα 3. Η θεωρητική θεμελίωση των κλασμάτων και των ρητών αριθμών με τον τρόπο που είναι και σήμερα αποδεκτός έρχεται έπειτα από εκατό περίπου χρόνια με την αξιωματική θεμελίωση των αριθμοσυνόλων, τα στοιχεία των οποίων πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες βασικές ιδιότητες.

Author	Time	Notation
Before Simon Stevin		$37\frac{245}{1000}$
Simon Stevin	1585	$37\ 2^{(1)}\ 4^{(2)}\ 5^{(3)}$
Trigonometric Tables	1593	first decimal point
Franciscus Viete	1600	$37\|_{245}$ $37,\frac{245}{1000}$ **37**, 245
John Kepler	1616	37 (245
John Napier	1617	$37 : 2^{\mathrm{I}}\ 4^{\mathrm{II}}\ 5^{\mathrm{III}}$
Henry Briggs	1624	$37^{\underline{245}}$
William Oughtred	1631	$37\|\underline{245}$
Balam	1653	37 : 245
Ozanam	1691	$37 \cdot \overset{(1)}{2}\ \overset{(2)}{4}\ \overset{(3)}{5}$
Modern		37.245

Εικόνα 3: Η συμβολική εξέλιξη των δεκαδικών αριθμών

Κεφάλαιο 5: Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους

Στον αιώνα που διανύουμε η μαθηματική επιστήμη έχει αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό και είναι αποτέλεσμα της εξέλιξης του σύγχρονου πολιτισμού. Οι σημερινοί μαθητές και αυριανοί πολίτες διαμορφώνουν την μαθηματική τους κουλτούρα μέσα από τη διδασκαλία, η οποία για να είναι επιτυχημένη θα πρέπει να τους φέρει κοντά στα μαθηματικά για να πειραματιστούν οι ίδιοι με κάθε νέα μαθηματική έννοια. Στη βιβλιογραφία συναντούμε ερευνητικά ευρήματα που συσχετίζουν την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους, με τον άνθρωπο και τη φύση του, τον συνδυασμό διαφορετικών επιστημών για την καλύτερη αξιοποίηση της ιστορίας τους και αναδεικνύουν μεθόδους που μπορεί να συμβούν όλα αυτά στη σημερινή σχολική τάξη.

5.1 Μαθηματικά και ανθρώπινη φύση

Μερικοί ερευνητές στην εκπαίδευση των μαθηματικών υποστηρίζουν ότι η ιστορική εξέλιξη ενός μαθηματικού θέματος μας λέει κάτι για το πώς ένα άτομο μπορεί να μάθει - ή να μην μάθει - αυτό το θέμα. Αυτή η προοπτική είναι σύμφωνη με την γενικότερη άποψη ότι ο τρόπος με τον οποίο η ανθρωπότητα αναπτύσσει τη μαθηματική γνώση μπορεί να εξομοιωθεί με την οδό που τα άτομα αποκτούν μαθηματική γνώση (Freudenthal 1973, 1991 στο Farmaki & Paschos, 2007). Από τις αρχές του 20ου αιώνα η ιστορία των μαθηματικών σχετίζεται με τη μαθηματική εκπαίδευση στη βάση του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» του Ernst Haeckel (1834–1919) σύμφωνα με τον οποίο η οντογένεση (δηλαδή η ανάπτυξη ενός οργανισμού), είναι μια βραχεία επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (δηλαδή της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους). Με τον ίδιο τρόπο, παραλληλίζεται η εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης με την γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου κι έτσι θα πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών να ακολουθεί κατά κάποιο τρόπο την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία της (Θωμαΐδης, 2014).

Η γνώση θεωρείται πολιτισμική μεσολάβηση γνωστικής πρακτικής που προκύπτει από τις δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται οι άνθρωποι (Radford et al.,2002). Από αυτή την άποψη, Η τάξη θεωρείται ως ένα μέρος του πολιτισμού και η κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές θεωρείται ως μια διαδικασία πολιτιστικής πνευματικής ιδιοποίησης εννοιών σύμφωνα με τις δραστηριότητες των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Η ιστορική ανάλυση στοχεύει να παρουσιάσει τόσο τα εμπόδια που συναντώνται στην ανάπτυξη διαφόρων εννοιών όσο και τις ιδέες και τις μεθόδους με τις οποίες τα εμπόδια αυτά έχουν ξεπεραστεί ιστορικά. Με την κατάλληλη οργάνωση, αυτό το ιστορικό υπόβαθρο μπορεί να είναι πολύτιμο για το σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων που θα βοηθήσουν να ξεπεραστούν οι δυσκολίες των μαθητών (οι οποίες λογικά αναμένεται να έχουν κάποια σχέση με αυτές που συναντήθηκαν στο παρελθόν) και να παρέχουν ένα κατάλληλο πλαίσιο για την εκμάθηση αυτών των μαθηματικών εννοιών (Farmaki & Paschos, 2007).

5.2 Μαθηματικά και διεπιστημονικότητα

Τα μαθηματικά, που θεωρούνται δύσκολα από πολλούς μαθητές, διδάσκονται με τρόπο που διαχωρίζονται από το πολιτισμικό πλαίσιο καθώς συνήθως δεν προσεγγίζονται διαθεματικά. Ως αποτέλεσμα, η εικόνα που κατέχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά είναι πολύ κακή: οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα πολύ βαρετό μάθημα, χωρίς καμία φαντασία, αποσπασμένο από την πραγματική ζωή (Furinghetti & Somaglia, 1998). Ένας δάσκαλος που εξετάζει το σχολικό πρόγραμμα με «διεπιστημονική ματιά» μπορεί να ανακαλύψει μια ποικιλία καταστάσεων στις οποίες οι μαθηματικές μέθοδοι μπορούν να μεταφερθούν αποτελεσματικά με φυσικό τρόπο. Αν εξετάσουμε με αυτόν τον τρόπο το σχολικό πρόγραμμα σπουδών, ο ρόλος των μαθηματικών αλλάζει και οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν μια πλουσιότερη εικόνα του επιστημονικού κλάδου. Όπως αναφέρουν οι Furinghetti & Somaglia (1998), στα έργα του Γαλιλαίου υπάρχει ένα απόσπασμα στο οποίο παραπονείται για τις επικρίσεις ορισμένων επιστημόνων της εποχής του, οι οποίοι ισχυρίζονται ότι οι μαθηματικές ιδέες πρέπει να αναπτυχθούν ξεχωριστά από άλλα θέματα όπως η φυσική ή η φιλοσοφία. Ο Γαλιλαίος γράφει ότι η αλήθεια είναι μοναδική και αποτελεί μέρος κάθε επιστήμης. Αυτή η άποψη ισχύει και για το σχολικό περιβάλλον.

Οι λειτουργίες των ακέραιων αριθμών, τα κλάσματα και τα δεκαδικά ψηφία αποτελούν απαραίτητο κομμάτι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Είναι δεξιότητες που χρειάζονται οι περισσότεροι καθ 'όλη τη διάρκεια της ζωής τους. Η ιστορία των μαθηματικών είναι ένα εργαλείο για την ενίσχυση της αξίας των μαθηματικών στην τάξη και για να διαφωτίσει τους μαθητές στο εύρος των μαθηματικών. Όταν οι δάσκαλοι έχουν την ευκαιρία να δουν πώς μπορούν να συνδεθούν τα μαθηματικά με τα πιο θεωρητικά μαθήματα πως τη γεωγραφία και την ιστορία και όχι μόνο, τότε το μάθημα μπορεί να αρχίσει να παίρνει έναν πιο ουσιαστικό ρόλο στην τάξη. Ενώ δεν υπάρχει καμία έρευνα για την επαλήθευση αυτής της θέσης, υπάρχει μια πληθώρα ανέκδοτων αναφορών από εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που έχουν χρησιμοποιήσει με επιτυχία την πρακτική της σύνδεσης της ιστορίας, της γεωγραφίας και της πολιτιστικής πλευράς των μαθηματικών με τη μελέτη των μαθηματικών (Fauvel & van Maanen, 2006).

5.3 Η ένταξη της ιστορίας των μαθηματικών στην σημερινή τάξη

Ο γενικός διδακτικός στόχος είναι να κατανοήσουμε τα μαθηματικά στη σύγχρονη μορφή τους (Tzanakis & Arcavi 2000) και με αυτό τον τρόπο η ιστορία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν ότι οι μαθηματικές έννοιες επινοούνται, τροποποιούνται και επεκτείνονται μέσω μιας διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων, ότι τα λάθη, οι αμφιβολίες, τα διαισθητικά επιχειρήματα, οι αμφισβητήσεις και οι εναλλακτικές προσεγγίσεις των προβλημάτων δεν είναι μόνο θεμιτές, αλλά στην πραγματικότητα αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών στην πράξη (Grugnetti & Rogers 2000 στο Farmaki & Paschos, 2007). Ωστόσο, υπάρχει μια αυξανόμενη συζήτηση σχετικά με το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση. Ένας από τους διάφορους κινδύνους στην εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση, είναι ο αναχρονισμός που συνίσταται στην απόδοση της ιστορίας και της καταλληλότητας της για τη σημερινή τάξη (Furinghetti, 2000).

Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη, αν και αμφισβητείται, κρίνεται απαραίτητη και αποτελεσματική, όμως δεν έχει μπει στις σχολικές τάξεις σε ικανοποιητικό βαθμό. Η μεγαλύτερη δυσκολία που προτάσσεται είναι ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να λάβουν την απαραίτητη εκπαίδευση για να κατανοήσουν την ιστορία των μαθηματικών και πώς συνδέονται με τη διδασκαλία τους αλλά και να έχουν πρόσβαση σε υλικά ή τουλάχιστον να έχουν καθοδήγηση σχετικά με το πού να αναζητήσουν υλικά ή πώς να δημιουργήσουν τα δικά τους υλικά για την τάξη. Επιπλέον πρόβλημα αποτελεί η έλλειψη χρόνου καθώς τα αναλυτικά προγράμματα θέτουν πολλούς και απαιτητικούς στόχους και αν ένας εκπαιδευτικός θέλει να χρησιμοποιήσει την ιστορία στη διδασκαλία του είτε θα το επιχειρήσει επιδερμικά με τον κίνδυνο να μην είναι ιστορικά συνεπής είτε θα χρειαστεί να αφιερώσει αρκετό χρόνο (Fauvel & Van Maanen, 2006, Fried, 2001).

5.4 Μέθοδοι εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία

Οι διάφοροι τρόποι για την εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στο πρόγραμμα διδασκαλίας περιλαμβάνουν, γενικά, δύο βασικές στρατηγικές. Η πρώτη αφορά την εισαγωγή ιστορικών ανέκδοτων, σύντομων βιογραφιών, μεμονωμένων προβλημάτων και ούτω καθεξής - αυτό μπορεί να ονομαστεί στρατηγική προσθήκης, διότι δεν μεταβάλλεται το πρόγραμμα σπουδών μόνο διευρύνεται. Αυτό μπορεί να είναι μια πολύ παθητική στρατηγική, όπως όταν οι καθηγητές δείχνουν στους μαθητές τις εικόνες από τα μαθηματικά (Fried,2001). Σύμφωνα με τον Swetz (1995) αυτή η τεχνική της προσθήκης που μπορεί να περιλαμβάνει και βιογραφικά στοιχεία ενός μαθηματικού και του έργου του δεν αποτελούν χρήσιμη πρόταση καθώς προσθέτουν πληροφορίες σε ένα ήδη γεμάτο πληροφορίες πρόγραμμα σπουδών . Αυτό που προτείνει είναι η χρήση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων στην τάξη προς λύση, διασκορπισμένα κατά τη διδασκαλία ή στις εργασίες για το σπίτι.

Η δεύτερη στρατηγική αλλάζει τον τρόπο που παρουσιάζεται το υλικό, για παράδειγμα, με τη χρήση μιας ιστορικής εξέλιξης σε μια εξήγηση μιας τεχνικής ή ιδέας ή οργανώνοντας μια θεματική σύμφωνα με ένα ιστορικό σχήμα. Αυτή η στρατηγική μπορεί να ονομαστεί στρατηγική της ενσωμάτωσης καθώς προσαρμόζεται το αναλυτικό πρόγραμμα σε ιστορικά γεγονότα ή σε ένα ιστορικό μοντέλο (Fried,2001). Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να εμπλουτίσει τη διδασκαλία και τη μάθηση από πολλές πλευρές. Θα αναφερθούν οι πιο σημαντικές: Α) Επίδραση της συναισθηματικής προδιάθεσης στα μαθηματικά κατανοώντας τα ως ανθρώπινη προσπάθεια κάνοντάς τα πιο ενδιαφέροντα, κατανοητά και προσιτά αλλά και προωθώντας την ερευνητική τάση θέτοντας ερωτήσεις, Β) Εκτίμηση των μαθηματικών ως πολιτιστική προσπάθεια, όπου γίνονται πιο ανθρώπινα μέσα από ιστορικά μοντέλα ρόλων, συνδέοντας τη μελέτη των μαθηματικών με τα ανθρώπινα συναισθήματα και κίνητρα. Προκειμένου να εξανθρωπιστούν τα μαθηματικά, είναι σαφές ότι πρέπει να συνδεθούν με τον άνθρωπο – την πραγματική ανθρώπινη πράξη, δημιουργία και σκέψη - και πρέπει να συνδέονται με πραγματικές ανθρώπινες συνθήκες, με το κοινωνικό και πνευματικό κλίμα (Fauvel, 1991; Fried, 2001; Jankvist 2009).

Όσο αφορά τους τρόπους ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία, υπάρχει ποικιλία από διαφορετικές κατηγορίες οι οποίες προτείνονται όπως για παράδειγμα ιστορικά αποσπάσματα και πηγές, φύλλα εργασίας, βιωματικές δραστηριότητες, παιχνίδια, ταινίες και υλικό από το διαδίκτυο. Η μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών μέσα από αυθεντικά κείμενα αναδεικνύει σημαντικές στιγμές των μαθηματικών εννοιών με πρωταγωνιστές μεγάλους μαθηματικούς της ιστορίας. Ακόμη περιλαμβάνει τα προβλήματα και τις εφαρμογές που οδήγησαν στη γέννηση και την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών αλλά και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι επιστήμονες στην προσπάθειά τους να τις εντάξουν στην μαθηματική γνώση κάθε εποχής. Η θεώρηση της ιστορίας των μαθηματικών ως συστατικού στοιχείου της διδακτικής πράξης απαιτεί ένα σαφές θεωρητικό πλαίσιο το οποίο να συνδέει την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθηματικών όπως καταγράφεται ιστορικά, με τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές μέσω μιας αποδοτικής μεθοδολογίας και διδασκαλίας (Radford et al. 2002). Στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου προτείνεται η ιστορικογεννητική παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών μελετώντας τα ιστορικά προβλήματα που τις γέννησαν. Με αυτόν τον τρόπο διαφαίνεται η αναγκαιότητα εισαγωγής των εννοιών αυτών και κατανοούνται καλύτερα. Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά μέσα από αυτή την ιστορική αναδρομή είναι δυνατό να μας δώσει κάποιες ιδέες για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές ακόμη και σήμερα στην κατανόηση των δεκαδικών (Lortie-Forgues,Tian, & Siegler, 2015). Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει την ευκαιρία να ενσωματωθεί η χρήση των παιχνιδιών με δύο τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους. Α) Τα παιχνίδια μπορούν να σχεδιαστούν για να ξαναζήσουν τη ζωή των μαθηματικών στο παρελθόν, ως τρόπος να εκτιμήσουν την ανθρώπινη πλευρά της μαθηματικής δραστηριότητας, Β) Οι αναπαραστάσεις μπορούν να σχεδιαστούν για να επαναλάβουν τα διάσημα επιχειρήματα στην ιστορία, να αφήσουν τους μαθητές να αναβιώσουν όχι μόνο τις ανθρώπινες πτυχές της ιστορίας των μαθηματικών αλλά και τα μαθηματικά ζητήματα, σαν να ήταν δικά τους (Fauvel & Van Maanen, 2006, Furinghetti, 2000).

Η μαθηματική παιδαγωγική, δηλαδή μια συνειδητή, οργανωμένη προσέγγιση για την εκπόνηση μαθηματικών διαδικασιών και εννοιών σε έναν μαθητή, έχει μια μακρά και πολύπλευρη ιστορία. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παραμένουν ενήμεροι για την εγγενή σχετικότητα της γνώσης και για το γεγονός ότι, μακροπρόθεσμα, παρέχοντας στους μαθητές επαρκή εικόνα για το πώς η επιστήμη συσσωρεύει τη γνώση είναι πολυτιμότερη από την απλή απόκτηση γνώσεων (Von Glasersfeld, 1991). Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη δεν υπόσχεται στους μαθητές μεγαλύτερες βαθμολογίες, όχι άμεσα τουλάχιστον, αλλά μπορεί να κάνει το μάθημα των μαθηματικών μια σημαντική και ζωντανή εμπειρία, έτσι ώστε η μάθηση να είναι ευκολότερη και εις βάθος. Στο παρελθόν, η διδασκαλία των μαθηματικών για όλους (το «όλους» στο παρελθόν ήταν μάλλον πιο περιορισμένο από ό, τι «θεωρείται σήμερα») μπορεί να ήταν αφιερωμένη κυρίως στην παραγωγή καλών υπαλλήλων που θα μπορούσαν να υπολογίσουν με ακρίβεια. Σήμερα, με την εμφάνιση των ελεύθερα διαθέσιμων αριθμομηχανών και των απαιτήσεων μιας τεχνολογικής κοινωνίας, η έμφαση στις αριθμητικές μετατοπίσεις προς την εκτίμηση, τη λογικότητα των απαντήσεων κλπ., καθώς και άλλες ενδείξεις μαθηματικού γραμματισμού μας οδηγούν σε ένα νέο περιβάλλον διδασκαλίας και μάθησης (Fauvel, 2006).

Κεφάλαιο 6: Το παιχνίδι στη διδασκαλία των μαθηματικών

Έως το 18ο αιώνα ο ρόλος του παιχνιδιού στην εκπαίδευση ήταν περιορισμένος, δεν αξιοποιούνταν εκπαιδευτικά παρά μόνο για να προσελκύσει το ενδιαφέρον των παιδιών. Αντίθετα, έγινε πολύ δημοφιλές στα χρόνια του 20ου και του 21ου αιώνα. Υπάρχουν εκατοντάδες έργα ψυχολογίας, κοινωνιολογίας, παιδαγωγικής και διδακτικής που ασχολούνται με αυτό το θέμα. Για τις ψυχολογικές θεωρίες, με κύριο εκφραστή τον Piaget, το παιχνίδι είναι ένα μέσο πειραματισμού και εξερεύνησης του κόσμου ώστε να ανακαλυφθούν δεξιότητες και να κατασκευαστεί η γνώση (Furth & Kane, 2001. Smith, 2001. Wood & Bennett, 2001). Για τις κοινωνιολογικές θεωρίες, με κύριο εκφραστή το Vygotsky, το παιχνίδι είναι το μέσω της επαφής του παιδιού με το κοινωνικό του περιβάλλον. Υποστηρίζεται ότι μέσα από τη φαντασιακή κατάσταση και τους κανόνες (Hannikainen, 2001. Smith, 2001. Wood & Attfield, 1996) τα παιδιά χρησιμοποιούν και προσαρμόζουν κατάλληλα τα πολιτισμικά εργαλεία (στο Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2015). Για τις παιδαγωγικές θεωρίες το παιχνίδι αποτελεί ένα μέσο κινητοποίησης των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ένα από τα μεγαλύτερα θετικά χαρακτηριστικά του παιχνιδιού είναι ότι είναι φυσικό μέσο παιδικής εκπαίδευσης. Έτσι, τα παιδιά θεωρούν το παιχνίδι ως επιθυμητή δραστηριότητα και το αγαπούν. Το παιχνίδι έχει για τα παιδιά στενό πλαίσιο και έτσι βοηθά να ξεπεραστούν κάποια εμπόδια της μάθησης. Τα βασικά εμπόδια μάθησης είναι οντογενετικά, διδακτικά και επιστημολογικά (Brousseau, 1986) και αφορούν αντίστοιχα την ωριμότητα των παιδιών, τις εκπαιδευτικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται και τη φύση της έννοιας που διδάσκεται (στο Vankúš, 2005).

6.1 Παιχνίδι και Διδακτικό παιχνίδι

Πολύ συχνά στις τάξεις των μαθηματικών χρησιμοποιείται ο όρος «παιχνίδι» για να χαρακτηρίσει κάθε είδους δραστηριότητα, όπως για παράδειγμα τις δραστηριότητες με παιγνιώδη μορφή, τις δραστηριότητες που κάνουν χρήση υλικού, τις δραστηριότητες που παρέχουν μεγάλο βαθμό ελευθερίας στα παιδιά κλπ. Ανάλογα με το περιεχόμενο που αποδίδεται στον όρο «παιχνίδι», η αντίστοιχη δραστηριότητα μπορεί να έχει διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά. Μπορεί να είναι παιχνίδι, με την τυπική σημασία του όρου, μπορεί να είναι παιγνιώδης δραστηριότητα, αλλά μπορεί να είναι και μια τυπική μαθησιακή δραστηριότητα, χωρίς πάντα να είναι σαφή τα όρια τους (Σκουμπουρδή, 2015).

Ο ορισμός του παιχνιδιού προσεγγίζεται από διαφορετικές σκοπιές και περιγράφεται με ποικίλα χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να οργανωθούν στις εξής κατηγορίες: Α) σε εξωτερικά περιγραφικά στοιχεία, όπως το πού λαμβάνει χώρα το παιχνίδι, η ηλικία των συμμετεχόντων, ο αριθμός των συμμετεχόντων και το τμήμα του οργανισμού που ενεργοποιείται, Β) σε εσωτερικά στοιχεία, δηλαδή αν το παιχνίδι έχει κανόνες ή όχι, σε ποιο είδος ανήκει, ποιος ρόλος επικρατεί, τι εξοπλισμός απαιτείται, Γ) σε λειτουργικά στοιχεία, ως προς τη σχολική τάξη και ως προς το γνωστικό αντικείμενο (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2015). Με τον όρο διδακτικό παιχνίδι, στην παιδαγωγική, εννοούμε μια δραστηριότητα που δίνει χαρά και ευχαρίστηση στους μαθητές και επίσης φέρνει εις πέρας τους εκπαιδευτικούς στόχους του τέθηκαν. Οι κύριες διαφορές με το παιχνίδι είναι: α) στο παιχνίδι τα παιδιά είναι τελείως ελεύθερα ενώ στο διδακτικό παιχνίδι όλοι οι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν, β) το διδακτικό παιχνίδι χρησιμοποιείται για να εκπληρώσει κάποιους διδακτικούς στόχους αντίθετα στο παιχνίδι στόχος είναι μόνο η χαρά κι η ευχαρίστηση, γ) στο διδακτικό παιχνίδι υπάρχει εξωτερικός διαχειριστής (ο εκπαιδευτικός). Οι εκπαιδευτικοί βλέπουν τα παιχνίδια ως ένα παιδαγωγικό εργαλείο που προάγει ένα θετικό περιβάλλον για μάθηση (Dienes, 1963). Τα παιχνίδια εμφανίζονται επίσης για να δημιουργήσουν θετική στάση (Bragg, 2003), κοινωνική αλληλεπίδραση (Bragg, 2006a), αυτοεκτίμηση και για να ενισχύσουν τα κίνητρα για μάθηση (Ernest, 1986 στο Bragg, 2006). Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών και περιβάλλοντος του διδακτικού παιχνιδιού θα πρέπει να κινητοποιούν τους μαθητές να εργαστούν σύμφωνα με τους στόχους του παιχνιδιού. Ο Χασάπης (2012) παρουσίασε πιο οργανωμένα (Εικόνα 4) τι συμβαίνει όταν μια μαθησιακή δραστηριότητα και συγκεκριμένα η εκμάθηση των αλγόριθμων για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, πραγματοποιηθεί ως τυπική μαθησιακή δραστηριότητα και ως παιχνίδι σε μια τάξη μαθηματικών. Σχολιάζει ότι το περιεχόμενο των δύο δραστηριοτήτων είναι εντελώς διαφορετικό, παρόλο που ίσως οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα. Η τυπική δραστηριότητα όπως και το παιχνίδι, πραγματοποιείται στο κοινωνικό πλαίσιο του σχολείου και συγκεκριμένα στην κοινότητα της σχολικής τάξης. Όμως, στην πρώτη περίπτωση, κυριαρχούν οι ρόλοι και οι ιεραρχίες των εκπαιδευτικών και των μαθητών με βάση τους κανόνες λειτουργίας του σχολείου και το διδακτικό συμβόλαιο της τάξης, ενώ στη δεύτερη οι ρόλοι και οι κανόνες επιβάλλονται από το παιχνίδι.

ΠΑΙΧΝΙΔΙ	ΤΥΠΙΚΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ
*Διασκέδαση, ευχαρίστηση, απόλαυση, ικανοποίηση	*Χωρίς ενδιαφέρον, ανιαρή, πληκτική
*Επιλέγεται και οργανώνεται από τα παιδιά	*Επιλέγεται και οργανώνεται από τον εκπαιδευτικό
*Εθελοντική, αυθόρμητη, δεν επιβάλλεται (συμμετοχή παιδιών)	*Υποχρεωτική, επιβάλλεται από τον εκπαιδευτικό (συμμετοχή παιδιών)
*Ενεργή συμμετοχή των παιδιών (για τη νίκη)	*Παθητική συμμετοχή
*Χωρίς τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού	*Συμμετοχή και καθοδήγηση εκπαιδευτικού
*Κανόνες	*Οδηγίες
*Κίνητρο η διαδικασία	*Χωρίς κίνητρο
*Χωρίς εξωτερικό στόχο	*Με καθορισμένο μαθησιακό στόχο
*Μη κυριολεκτική, φαντασιακή κλπ. σκέψη	*Κυριολεκτική, συγκεκριμένη σκέψη
*Ομαδική (συνύπαρξη ανταγωνισμού/συνεργασίας)	*Ατομική
*Συνεχής ανατροφοδότηση	*Περιορισμένη ανατροφοδότηση
*Φασαρία, αταξία	*Ησυχία, τάξη
*Διαφοροποίηση ανάλογα με την ομάδα των παικτών	*Μη διαφοροποίηση
*Δημιουργικότητα, κριτική σκέψη κλπ.	*Εξάσκηση, εκμάθηση, κατανόηση, εμπέδωση κλπ.
*Ενεργητική μάθηση	*Παθητική μάθηση
*Άτυπη αξιολόγηση	*Τυπική αξιολόγηση
*Κοινωνικά, συναισθηματικά, γνωστικά οφέλη	*Γνωστικά οφέλη
*Μετρήσιμο αποτέλεσμα (νικητής)	*Μη μετρήσιμο αποτέλεσμα (γνωστικό)
*Αβέβαιη έκβαση	*Βέβαιη έκβαση

· Εικόνα 4: Βασικά χαρακτηριστικά παιχνιδιού και τυπικής μαθησιακής δραστηριότητας

6.2 Προϋποθέσεις ένταξης του παιχνιδιού στη διδασκαλία

Γενικά, το παιχνίδι, θα πρέπει να είναι ελκυστικό για τα παιδιά και κατάλληλο για την ηλικία και τις ικανότητές τους. Επιπρόσθετα, οι κανόνες του παιχνιδιού καθορίζουν τον τρόπο οργάνωσης εργασίας των μαθητών και είναι απαραίτητο να εμπεριέχουν παιγνιώδη στοιχεία όπως η ανταγωνιστικότητα μεταξύ των ομάδων. Τα παιδιά θα πρέπει να ενθαρρύνονται να μοιράζονται στρατηγικές και ιδέες μέσω συζητήσεων σε ολόκληρη την τάξη και ενός προς έναν. Παρόλο που ο σκοπός ενός παιχνιδιού είναι η νίκη και ως εκ τούτου μπορεί να επηρεάσει την επιθυμία των μαθητών να μοιραστούν τις αποκτηθείσες τακτικές, ένα περιβάλλον ανταλλαγής και υποστήριξης θα βοηθήσει τα παιδιά να αποκαλύψουν τις στρατηγικές τους (Bragg, 2003). Ως τελική αξιολόγηση, ελέγχεται η εκπλήρωση των στόχων, δίνεται επιβράβευση στους μαθητές και κινητοποιούνται για τις επόμενες δραστηριότητες (Vankúš, 2005). Τα παιχνίδια εμπεριέχουν στοιχεία χαράς και διασκέδασης τα οποία, συχνά, ενθαρρύνουν τα παιδιά να συγκεντρωθούν και να επιμείνουν σε μια δραστηριότητα, τόσο ώστε να κατακτήσουν την επιδιωκόμενη γνώση (Edwards, Gandini & Forman, 1998). Για να έχει το μέγιστο αποτέλεσμα το παιχνίδι πρέπει να αποτελεί τη βάση ενός ολόκληρου μαθήματος κάθε φορά που παίζεται, και όχι να χρησιμοποιείται μόνο για "ζέσταμα" (Roche, 2010). Υπάρχουν εκπαιδευτικοί οι οποίοι αντιλαμβάνονται και αναδεικνύουν την εκπαιδευτική αξία του παιχνιδιού και το θέτουν ως βάση των εκπαιδευτικών τους προγραμμάτων (Perry & Dockett, 2007) ή του προσφέρουν σημαντική θέση ως υποστηρικτικό πλαίσιο των μαθηματικών τους δραστηριοτήτων κι άλλοι οι οποίοι δε γνωρίζουν πώς να εντάξουν το παιχνίδι στη διδασκαλία τους ώστε να επιτυγχάνουν τους γνωστικούς τους στόχους (Σκουμπουρδή, 2015). Για να είναι εκπαιδευτικά χρήσιμο ένα (ομαδικό) παιχνίδι, σύμφωνα με τις Kamii και DeVries (1980:4) και Onslow (1990) (στο Vankúš, 2005) θα πρέπει: 1. να προτείνει κάτι ενδιαφέρον που να προκαλεί τα παιδιά να ασχοληθούν με αυτό, 2. να δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να κρίνουν την επιτυχία τους και 3. να επιτρέπει σε όλους τους παίκτες να συμμετέχουν ενεργά στη διάρκεια του παιχνιδιού. Επιπλέον, το παιχνίδι θα πρέπει να είναι κατάλληλο για την ηλικία των παιδιών. Για παράδειγμα, για τα μικρά παιδιά προτείνονται περισσότερο τα συνεργατικά παιχνίδια που έχουν κοινό σκοπό γιατί είναι πιθανότερο να ενθαρρύνουν τη συζήτηση και την αιτιολόγηση από ότι τα παιχνίδια στα οποία οι συμμετέχοντες ανταγωνίζονται μεταξύ τους. Όταν επιλέγεται ένα παιχνίδι για την τάξη, θα πρέπει πρώτα να το έχει παίξει ο εκπαιδευτικός, αφενός για να εξοικειωθεί με τους κανόνες και τις ιδιαιτερότητές του και αφετέρου για να εντοπίσει τις μαθηματικές ιδέες που ενσωματώνει καθώς και το πώς αυτές μπορεί να αναδυθούν από το παιχνίδι (Olson, 2007, Vankúš, 2005).

Στη μαθηματική εκπαίδευση το παιχνίδι παίζει σημαντικό ρόλο καθώς ενισχύει τη σχέση του μαθητή με το συγκεκριμένο μάθημα, του προσφέρει κίνητρα για μάθηση κι επιτρέπει στους μαθητές να ενασχοληθούν με τα μαθηματικά με ευχάριστο τρόπο. Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν το παιχνίδι στη διδασκαλία τους για να πετύχουν τους στόχους που θέτουν στην καθημερινή σχολική πρακτική και να προσφέρουν στα παιδιά έναν νέο τρόπο μάθησης, πιο ενδιαφέρον. Από την άλλη πλευρά, οι γονείς των παιδιών μπορεί να μη θεωρούν το παιχνίδι ως τον πιο ενδεδειγμένο τρόπο διδασκαλίας για τα μαθηματικά και οι ίδιοι οι μαθητές να θεωρούν τα εκπαιδευτικά παιχνίδια ως επιπλέον εργασίες (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης). Ένας σημαντικός παράγοντας που πρέπει να λάβουν υπ’ όψιν οι εκπαιδευτικοί είναι η κατανόηση των παιδιών σχετικά με τη σχέση μεταξύ μαθησιακών και ευχάριστων δραστηριοτήτων. Τα δεδομένα της Bragg (2003) παρέχουν μια εικόνα της στάσης των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά και το παιχνίδι καθώς όταν τους ζητήθηκε να προσδιορίσουν πότε θεωρούσαν ότι μαθαίνουν, οι μαθητές θυμήθηκαν και επέδειξαν τις δραστηριότητες διασκέδασης.

6.3 Η συμβολή του παιχνιδιού στη διδασκαλία

Η συνεισφορά του παιχνιδιού στην ανάπτυξη και τη μάθηση των παιδιών διαπιστώνεται στη συμβολή του παιχνιδιού στην καλλιέργεια της επικοινωνίας και της κοινωνικής αλληλεπίδρασης όσο και στην ανάπτυξη του συναισθηματικού τομέα. Τα παιδιά που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες και όχι μόνο, μπορούν να εκφραστούν μέσω του παιχνιδιού, να επικοινωνήσουν τον τρόπο σκέψης τους με ποικίλους τρόπους, μέσω της ζωγραφικής και της σχεδίασης, μέσω της γλώσσας του σώματος και με χειρονομίες. Η ενασχόληση με παιχνίδια στα μαθηματικά επιτρέπει στα παιδιά να έρθουν αντιμέτωποι και να υπερνικήσουν τους φόβους τους για το συγκεκριμένο μάθημα, αποκτώντας θετική προδιάθεση προς αυτά (Γκιάστας, 2012). Η έρευνα του Vankúš (2005) έδειξε ότι το διδακτικό παιχνίδι είναι μια κατάλληλη μέθοδος για τη διδασκαλία των μαθηματικών λόγω της αποτελεσματικότητάς του αφού κινητοποιεί τους μαθητές να εργαστούν με μεγαλύτερο ενδιαφέρον και το κίνητρο στη διαδικασία της μάθησης είναι πολύ σημαντικό. Επομένως, εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το διδακτικό παιχνίδι, πρέπει να επιλέξουμε το σωστό παιχνίδι για την ηλικία των μαθητών μας, τα ενδιαφέροντά τους και τις ικανότητές τους. Αυτό το παιχνίδι πρέπει να έχει κατάλληλο περιεχόμενο για να οδηγήσει στην υλοποίηση εκπαιδευτικών στόχων που θέσαμε (Bragg, 2012). Ο Booker (1996) δήλωσε ότι ένα πλεονέκτημα του παιχνιδιού με τους συνομηλίκους είναι η άμεση ανατροφοδότηση που λαμβάνουν τα παιδιά μέσω της συζήτησης που γίνεται όταν προκύψουν δυσκολίες χωρίς καθυστερήσεις αφού τις επιλύουν χωρίς να περιμένουν την παρέμβαση του εκπαιδευτικού. Φαίνεται ότι η συζήτηση που δημιουργείται όταν παίζουν παιχνίδια μπορεί να ενθαρρύνει τη μαθηματική κατανόηση των παιδιών (Bragg, 2003). Το παιχνίδι πρέπει να ενσωματωθεί στο πρόγραμμα σπουδών και να το διαχειριστούμε με οργανωτικό τρόπο. Εάν εκπληρώσουμε όλες αυτές τις ανάγκες, το παιχνίδι μας μπορεί πραγματικά να οδηγήσει σε μια πιο αποτελεσματική διδασκαλία και στην κατάρριψη των εμποδίων μάθησης.

Τα τελευταία χρόνια, έχει αρχίσει να γίνεται αποδεκτή, όλο και περισσότερο, η θετική επιρροή του παιχνιδιού στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία εφόσον ενισχύει την επιθυμία των παιδιών για συμμετοχή στις δραστηριότητες της τάξης και μάθηση (Αυγητίδου, 2001). Τα παιχνίδια ενδυναμώνουν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών (Ceglowski, 1997; Rutherford, 2015; Smith, 2001; Stebler, Vogt, Wolf, Hauser & Rechsteiner, 2013; Van Oers, 1996; Williams, 1986), ειδικά εκείνα που σχετίζονται με τα μαθηματικά και χρησιμοποιούνται κυρίως για διδασκαλία, συμβάλλοντας στην εξάσκηση της μνήμης, στην ικανότητα πρόβλεψης και εύρεσης σχέσεων, στην όξυνση της συγκέντρωσης, της προσοχής και της παρατηρητικότητας, στην αντίληψη του χώρου, στην ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού (Bishop, 1991; Szendrei, 1996), υπολογιστικών ικανοτήτων (Olson, 2007) λογικομαθηματικής (Kamii & De Clark, 1995; Kamii & Rummelsburg, 2008) και πιθανολογικής σκέψης (Tatsis, Kafoussi & Skoumpourdi, 2008; Skoumpourdi, Kafoussi & Tatsis, 2009)(στο Σκουμπουρδή, 2015). Συγκεκριμένα, τα διδακτικά παιχνίδια μπορεί να έχουν τη μορφή διαγωνισμού ομάδων ή ατόμων, ενός ενδιαφέροντος στρατηγικού παιχνιδιού, γρίφων ή μίμησης της πραγματικής ζωής (Vankúš, 2005).

Ερευνητικές επισκοπήσεις, αναδεικνύουν την εκπαιδευτική αξία του παιχνιδιού, αναφέροντας ότι το παιχνίδι πράγματι συμβάλλει από κάθε άποψη στη μάθηση και την ανάπτυξη, αλλά ταυτόχρονα τονίζουν και τον σημαντικό ρόλο του εκπαιδευτικού πλαισίου. Ο τρόπος με τον οποίο το παιχνίδι θα ενταχθεί στην πράξη εξαρτάται από το εκάστοτε εκπαιδευτικό πλαίσιο και διαφέρει σημαντικά μεταξύ των χωρών, μεταξύ των σχολείων, αλλά και μεταξύ των τάξεων (Whitebread, 2008 στο Σκουμπουρδή, 2015). Βέβαια, σε έρευνα που πραγματοποίησε η Bragg (2012) σε παιδιά 10-12 ετών σε δημοτικά στην Αυστραλία όπου σύγκρινε την διδακτική αξία του παιχνιδιού για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των δεκαδικών με τη χρήση παιχνιδιού και με συμβατικό τρόπο, βρέθηκε ότι τα παιχνίδια δεν βοήθησαν τα παιδιά να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες κι αυτό υποδηλώνει ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εξετάσουν πολύ προσεκτικά την εφαρμογή και την καταλληλότητα των παιχνιδιών πριν τα χρησιμοποιήσουν ως μέσο για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών.

Στη σημερινή εποχή, η μαθηματική εκπαίδευση έχει βαθύτερο σκοπό να οδηγήσει τους μαθητές να διαχειρίζονται πολύπλοκα δεδομένα και καταστάσεις και να βρίσκουν λύσεις σε σύνθετα προβλήματα. Κατά συνέπεια θα πρέπει να προσφέρονται στους μαθητές τα κατάλληλα μαθήματα στο πρόγραμμα σπουδών τους, ο σχεδιασμός των οποίων θα προβλέπει τα εμπόδια που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές σε κάθε θεματική. Εφόσον το παιχνίδι αποτελεί ένα μέσο για τη μάθηση και την ανάπτυξη του παιδιού, ένας εκπαιδευτικός ο οποίος δίνει στα παιδιά την ευκαιρία ενασχόλησης με παιγνιώδεις δράσεις, συνυπολογίζοντας τις ανάγκες των μαθητών του, είναι δυνατόν να επιφέρει μαθηματική γνώση μέσω του παιχνιδιού.

Κεφάλαιο 7: Πρακτικό μέρος

7.1 Στόχος της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Μέσα από την καθημερινή εμπειρία στο σχολείο με μαθητές να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο μάθημα των μαθηματικών και συγκεκριμένα με τους δεκαδικούς αριθμούς, σε συνδυασμό με τα μαθήματα του μεταπτυχιακού προγράμματος «Διδακτική των μαθηματικών», γεννήθηκε η ιδέα για τη δημιουργία μιας διδασκαλίας, με σκοπό τη διερεύνηση των παρανοήσεων στους δεκαδικούς αριθμούς. Η έμπνευση ήρθε από το μάθημα «Ιστορία και επιστημολογία των μαθηματικών και της Μ.Ε» του Α' εξαμήνου, κατά το οποίο συζητήθηκαν και μελετήθηκαν τα οφέλη της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία. Συνάμα, από την επαφή με τα παιδιά δημιουργήθηκε η ιδέα ενός συνδυασμού της αξιοποίησης της ιστορίας των δεκαδικών με το παιχνίδι καθώς αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της παιδικής ηλικίας αλλά και ισχυρό εργαλείο για την επίτευξη των διδακτικών στόχων που τίθενται, όπως αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι ο σχεδιασμός μιας διδασκαλίας για τη διερεύνηση των παρανοήσεων στους δεκαδικούς αριθμούς στη Δ' τάξη με αξιοποίηση της ιστορίας τους και χρήση παιχνιδιών. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι:

1. Πώς έχει επηρεάσει η πειραματική διδασκαλία για τους δεκαδικούς αριθμούς, με αξιοποίηση της ιστορίας τους και χρήση παιχνιδιών, το επίπεδο γνώσεων των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς;

2. Ποιο είναι το επίπεδο γνώσεων των μαθητών της Δ΄ τάξης στους δεκαδικούς μετά την διδασκαλία τους με την αξιοποίηση της ιστορίας τους και τη χρήση παιχνιδιών;

Η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στη διερεύνηση νέων τρόπων διδασκαλίας και την αξιοποίηση ερευνητικών ευρημάτων για την αποδοτικότερη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στην Δ' τάξη του δημοτικού σχολείου. Μέσα από αυτή την πειραματική διδασκαλία, δύναται να προστεθούν στοιχεία στο τοπίο της διδασκαλίας των δεκαδικών αριθμών, τα οποία θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα σε εκπαιδευτικούς που αναζητούν νέες ιδέες για να εμπλουτίσουν τον τρόπο που διδάσκουν τους δεκαδικούς αριθμούς αλλά και σε μελλοντικούς ερευνητές του συγκεκριμένου πεδίου.

7.1.1 Προεργασία έρευνας

Για την εκπόνηση της έρευνάς μας, αρχικά, ζητήθηκε η άδεια από τη διευθύντρια του δημοτικού σχολείου και αφού υπήρχε θετική απόκριση στη συνέχεια έγινε αναλυτική ενημέρωση των γονέων των συμμετεχόντων μαθητών για τον σκοπό της έρευνάς μας και τη διαδικασία που θα ακολουθούσαμε δηλαδή το pre test, την πειραματική διδασκαλία των δεκαδικών, το post test με κατ' ιδίαν συνεντεύξεις αλλά και τη φωτογράφηση, την ηχογράφηση και τη βιντεοσκόπηση της διαδικασίας (με χρήση του υλικού μόνο για ερευνητικούς σκοπούς, χωρίς να εκτίθενται τα πρόσωπα και προσωπικά στοιχεία των μαθητών). Οι γονείς των συμμετεχόντων ήταν πολύ θετικοί στο να πάρουν μέρος τα παιδιά τους στη συγκεκριμένη έρευνα, δείχνοντας εμπιστοσύνη στη διευθύντρια του σχολείου και την εκπαιδευτικό της τάξης - ερευνήτρια. Έπειτα ενημερώθηκαν οι μαθητές ότι θα συμμετείχαν σε μια πειραματική διδασκαλία για τους δεκαδικούς αριθμούς, κάτι που τους ενθουσίασε, επιπλέον, δόθηκαν εξηγήσεις για τη χρήση των pre και post tests. Από την αρχή της έρευνας, έγινε ξεκάθαρο στα παιδιά ότι οι ασκήσεις αυτές (pre test) χρησιμοποιούνταν για να δούμε τι θυμόντουσαν για τους δεκαδικούς από όσα είχαν μάθει στη Γ΄ τάξη και το σχεδιασμό της κατάλληλης διδασκαλίας και ότι δεν θα παίξει ρόλο η απόδοσή τους για τον βαθμό που θα πάρουν στο τρίμηνο στο μάθημα των μαθηματικών, για το οποίο είχαν εκφράσει τις ανησυχίες τους. Αναλόγως, ενημερώθηκαν και για τη διαδικασία του post test, για να μειωθεί το πιθανό τους άγχος και να έχουμε όσο το δυνατόν ανεπηρέαστα δεδομένα.

7.2 Μέθοδος

Η μέθοδος που υιοθετήθηκε στην έρευνά μας ήταν η ποιοτική προσέγγιση και συγκεκριμένα εφαρμόστηκε μία πειραματική παρέμβαση (Issari, Pourkos, Ίσαρη & Πουρκός, 2015) η οποία έλαβε χώρα τη σχολική χρονιά 2018-2019, σε ένα μικρό ολιγοθέσιο δημοτικό σχολείο της περιφέρειας του νομού Πέλλας, σε μία Γ' – Δ' τάξη όπου γίνεται συνδιδασκαλία. Συμμετείχαν οι 4 μαθητές και οι 3 μαθήτριες της Δ' τάξης αλλά και 1 μαθητής της Γ' τάξης ο οποίος είναι πολύ δυνατός στο μάθημα των μαθηματικών και κρίθηκε ότι θα μπορεί να συμμετέχει καθώς η διδασκαλία που σχεδιάστηκε αφορά ουσιαστικά την εισαγωγή στους δεκαδικούς. Αρχικά καταγράφηκαν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς μέσα από μια σειρά ασκήσεων, pre test, που σχεδιάστηκαν με βάση την ύλη των δεκαδικών της Γ΄ τάξης του δημοτικού. Έπειτα έλαβε χώρα η πειραματική διδακτική μας παρέμβαση η οποία είχε διάρκεια δέκα ωρών (πέντε δίωρα) όπου συλλέχθηκαν στοιχεία (από παρατήρηση και ηχογράφηση) για την ανταπόκριση των μαθητών στις διαφορετικές παιγνιώδεις δραστηριότητες (Ο κώδικας του Stevin, Εργοστάσιο δεκαδικών, Παιχνίδι των αναπαραστάσεων, Μπες στη σειρά, Παιχνίδι των αριθμογραμμών, Μετράω- Συγκρίνω-Διατάσσω, Μάχη, Μυστική τιμή και Bingo) (Παράρτημα Φύλλα εργασίας σελ 19 - 46) και στη συνέχεια μετά την παρέμβασή μας συγκεντρώθηκαν δεδομένα μέσα από μια σειρά ασκήσεων που σχεδιάστηκαν σε αναλογία με το pre test αλλά και τις δραστηριότητες της παρέμβασής μας για να ελεγχθεί το επίπεδο γνώσεων των μαθητών (post test) αλλά και οι προτιμήσεις τους όσο αφορά τις δραστηριότητες που προηγήθηκαν, με μορφή ημιδομημένης συνέντευξης.

7.3 Προφίλ συμμετεχόντων

Η περιγραφή που ακολουθεί βασίζεται στην γνωριμία λίγων μηνών που είχε η ερευνήτρια με τους μαθητές ως δασκάλα της συγκεκριμένης τάξης. Τα σχόλια που γίνονται για κάθε παιδί εκφράζουν τη γνώμη της ερευνήτριας και έχουν σκοπό να σκιαγραφήσουν με απλό τρόπο κάποια χαρακτηριστικά των παιδιών για να έχει ο αναγνώστης μία εικόνα για το κάθε παιδί.

Ο Βασίλης είναι ο πρόεδρος της τάξης, ένα παιδί ήρεμο και με καλλιτεχνικές ανησυχίες. Στα μαθηματικά είναι πολύ δυνατός, συχνά βρίσκει διαφορετικές, δικές του, λύσεις.

Η Βάσω είναι δυναμική και εργατική, ένα παιδί με φιλότιμο και ενσυναίσθηση. Στα μαθηματικά είναι καλή, αντιμετωπίζει κάποιες δυσκολίες.

Η Ελένη. Ι είναι δυναμική και ανταγωνιστική, ένα παιδί με καλλιτεχνικές ανησυχίες αλλά και προβλήματα συμπεριφοράς. Στα μαθηματικά είναι πολύ δυνατή.

Η Ελένη. Μ είναι ευαίσθητη και ντροπαλή, ένα παιδί που προσπαθεί αλλά απογοητεύεται εύκολα και τα παρατάει. Στα μαθηματικά αντιμετωπίζει δυσκολίες και η επίδοσή της δεν είναι σταθερή, συχνά τα πηγαίνει πολύ καλά, κάποιες φορές δείχνει εντελώς χαμένη.

Ο Κριστιάν είναι ισχυρός χαρακτήρας αλλά και ήρεμη δύναμη, ένα παιδί που θέλει πάντα να είναι άριστος. Στα μαθηματικά είναι πολύ δυνατός.

Ο Νίκος είναι δυναμικός αλλά πολύ κλειστό και ευαίσθητο παιδί. Τα μαθηματικά είναι το αγαπημένο του μάθημα και σπάνια αντιμετωπίζει μικρές δυσκολίες.

Ο Πρόδρομος είναι πολύ ντροπαλός αλλά και πολύ αγαπητός από τους συμμαθητές του, ένα παιδί με ευαισθησίες που θέλει πάντα να βοηθάει. Στα μαθηματικά έχει πολύ καλή αντίληψη όμως συχνά κάνει μικρά λάθη απροσεξίας.

Ο Χρήστος είναι αγχώδης και παρορμητικός, ένα παιδί με πολλά προβλήματα συμπεριφοράς και κοινωνικοποίησης. Στα μαθηματικά είναι πολύ καλός στο διαδικαστικό κομμάτι αλλά αντιμετωπίζει πολλές δυσκολίες σε ό, τι χρειάζεται σκέψη, είναι αναγκαίο να του δίνονται πολύ αναλυτικές οδηγίες στην επίλυση ασκήσεων.

7.4 Σχεδιασμός του pre test

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της Γ΄ τάξης τα παιδιά ολοκληρώνοντας την Γ' τάξη είναι ικανά:

- να διαβάζουν, να γράφουν και να κατανοούν τους δεκαδικούς αριθμούς (αξία θέσης ψηφίων),
- να συνδέουν τα δεκαδικά κλάσματα με τους δεκαδικούς αριθμούς και να κάνουν τις ανάλογες μετατροπές,
- να συγκρίνουν και να διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς,
- όπως και να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις δεκαδικών.

Αφού μελετήθηκε η βιβλιογραφία σχετικά με τις παρανοήσεις στους δεκαδικούς, το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της Γ' τάξης και το βιβλίο του δασκάλου σχεδιάστηκε μια σειρά ασκήσεων (pre test) για τον έλεγχο του επιπέδου γνώσεων των παιδιών στους δεκαδικούς από όσα είχαν διδαχθεί στην Γ' τάξη και την εύρεση πιθανών παρανοήσεων (Παράρτημα σελ 6 - 7). Η διαδικασία του pre test έλαβε χώρα τον μήνα Δεκέμβριο, σε κατ’ ιδίαν συναντήσεις των μαθητών με τη δασκάλα της τάξης τους, διάρκειας 30 - 40 λεπτών. Το pre test αποτελείται από εννέα ασκήσεις. Στην πρώτη ελέγχεται η ονοματολογία των δεκαδικών και η σύνδεση ονόματος με τη δεκαδική και κλασματική μορφή. Στη δεύτερη άσκηση ζητείται σύγκριση δεκαδικών, όπου περιλαμβάνονται οι παρανοήσεις 1, 2 και 3 (Θεωρητικό πλαίσιο σελ. 17) αφού μέσα από τη σύγκριση φανερώνεται η κατανόηση μεγέθους (π.χ Moskal & Magone, 2000, Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989, Van Hoof, Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel,2017) αυτού του είδους η άσκηση έχει χρησιμοποιηθεί και στις έρευνες των Stanley και Stacey (1998) για τη διερεύνηση των παρανοήσεων στους δεκαδικούς. Στην τρίτη άσκηση, τα παιδιά πρέπει να τοποθετήσουν έναν δεκαδικό αριθμό και ένα δεκαδικό κλάσμα στην αριθμογραμμή καθώς η τοποθέτηση στην αριθμογραμμή μπορεί να μας δείξει την κατανόηση σχέσης μεγέθους (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013). Στην τέταρτη άσκηση τους δίνεται ένα δεκαδικό κλάσμα και πρέπει να επιλέξουν με ποιον δεκαδικό από τους δοθέντες είναι ίσο και στην πέμπτη το αντίστροφο όπου δίνεται ο δεκαδικός και πρέπει να επιλέξουν με ποιο κλάσμα είναι ίσα. Στην έκτη και την έβδομη άσκηση, ζητούνται μετατροπές από δεκαδική στην κλασματική μορφή και ελέγχεται η παρανόηση 5 (Θεωρητικό πλαίσιο σελ. 17). Το πέρασμα από τη μία αναπαράσταση στην άλλη μπορεί να κάνει φανερή τη βαθύτερη κατανόηση των δεκαδικών όπως και η διάταξη να δείξει τις σχέσεις μεγέθους (π.χ Alibali & Sidney, 2015, Shaughnessy, 2009). Στην όγδοη άσκηση ελέγχεται η αξία θέσης ψηφίου όπου δίνονται αριθμοί και πρέπει οι μαθητές να βρούνε τι αξία έχει σε κάθε δεκαδικό ο αριθμός 5. Στην ένατη άσκηση γίνεται έλεγχος της παρανόησης 6 (Θεωρητικό πλαίσιο σελ. 17), οι μαθητές καλούνται να γράψουν κάθετα και να εκτελέσουν δύο προσθέσεις και δύο αφαιρέσεις. Οι δύο πράξεις είναι ανάμεσα σε δύο αριθμούς με ίσο δεκαδικό μέρος και οι άλλες δύο σε αριθμούς με άνισο δεκαδικό μέρος για να ελεγχθεί ο κανόνας προσθήκης του μηδενός αλλά και αν θα τοποθετηθούν οι αριθμοί σωστά ο ένας κάτω από τον άλλο.

Παρανοήσεις	Ασκήσεις pre test
1. Προκατάληψη μεγέθους: Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία ή ο δεκαδικός με τα λιγότερα ψηφία	2η, 3η ,4η, 5η,
2. Χρήση του μηδενός στο τέλος του δεκαδικού	2η , 4η , 5η
3. Σύγχυση της αξίας θέσης ψηφίου	1η, 2η,4η, 5η, 8η, 9η,
5. Δυσκολία στις μετατροπές	3η, 6η, 7η,
6. Πράξεις (πρόσθεση και αφαίρεση)	9η

Μετά τη συμπλήρωση των pre test σε ατομικό επίπεδο, με το κάθε παιδί ξεχωριστά, καταγράφηκαν οι παρανοήσεις και αναλύθηκαν τα αποτελέσματα σε ατομικό και ομαδικό επίπεδο. Με βάση τα όσα βρέθηκαν αλλά και τη βιβλιογραφία που μελετήθηκε για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών αλλά και του ρόλου του παιχνιδιού στην τάξη των μαθηματικών, σχεδιάστηκε η προτεινόμενη διδασκαλία. Η σειρά των μαθημάτων που σχεδιάστηκε βασίστηκε στη βιβλιογραφία και η πρωτοτυπία της έγκειται στην αξιοποίηση της ιστορίας των δεκαδικών με παιγνιώδη τρόπο αλλά και τη χρήση διαφορετικών παιγνιωδών δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στη Δ΄ τάξη. Η προτεινόμενη διδασκαλία εφαρμόστηκε τον μήνα Φεβρουάριο του 2019.

7.5 Διδακτική πρόταση

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στη Δ΄ τάξη, προτείνεται να αφιερωθούν 10 διδακτικές ώρες για την εισαγωγή στους δεκαδικούς αριθμούς και 11 διδακτικές ώρες για εμβάθυνση και επέκταση. Στη δική μας πρόταση θα αφιερώσουμε 10 ώρες, οργανωμένες σε 5 δίωρα με τους στόχους εναρμονισμένους με αυτούς του αναλυτικού προγράμματος, για την εισαγωγή στους δεκαδικούς με τη βοήθεια της ιστορίας τους από το έργο του Simon Stevin με παιγνιώδη τρόπο (Παιχνίδι κρυμμένου θησαυρού «Ο κώδικας του Stevin», το Παιχνίδι των Αναπαραστάσεων), τη χρήση της μορφής των δεκαδικών στη «Δεκάτη» ως μια διαφορετική αναπαράσταση των αριθμών αλλά και παιχνιδιών με βάση την καθημερινή ζωή (Ας ανα…μετρηθούμε, Μυστική τιμή) ή τη διασκέδαση (Μάχη, Μπίνγκο, Μπες στη σειρά, Εργοστάσιο δεκαδικών) μαζί με το αντίστοιχο χειραπτικό υλικό. Τα παιχνίδια Μπίνγκο, Μάχη και το Εργοστάσιο των δεκαδικών ήταν παιχνίδια τα οποία χρησιμοποιήθηκαν αυτούσια όπως προτείνονταν στο διαδίκτυο ενώ η Μυστική τιμή ήταν παραλλαγή ενός παιχνιδιού. Τα υπόλοιπα παιχνίδια δημιουργήθηκαν για τη συγκεκριμένη παρέμβαση. Συγκεκριμένα στο:

1ο Δίωρο: Αναγνώριση, ανάγνωση και γραφή δεκαδικών αριθμών με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Εξοικείωση με την αξία θέσης ψηφίου (μέσα από το επιτραπέζιο παιχνίδι «ο κώδικας του Stevin»).

2ο Δίωρο: Δεκαδικές αναπαραστάσεις. Εξάσκηση στις μετατροπές (Παιχνίδι των αναπαραστάσεων, Εργοστάσιο δεκαδικών)

3ο Δίωρο: Σύγκριση και διάταξη δεκαδικών. Τοποθέτηση δεκαδικών στην αριθμογραμμή (Παιχνίδι των αριθμογραμμών, Μπες στη σειρά)

4ο Δίωρο: Διαχείριση δεκαδικών μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής (μέτρο). Σύγκριση. Διάταξη (Ας ανα…μετρηθούμε, Μάχη).

5ο Δίωρο: Διαχείριση δεκαδικών μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής (ευρώ). Εξοικείωση στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δεκαδικών. Εξάσκηση και εμπέδωση των δεκαδικών (Μυστική τιμή, Μπίνγκο δεκαδικών).

7.5.1 1ο Δίωρο

Διδακτικοί στόχοι: Σχέση των δεκαδικών ψηφίων με τη μονάδα, ονοματολογία, συμπλήρωση της μονάδας, εκτίμηση, μέσα από την ιστορία των δεκαδικών.

Στόχος μας είναι τα παιδιά να μπορούν : α) να εφαρμόσουν και να σταθεροποιήσουν τις γνώσεις τους για τους δεκαδικούς αριθμούς, β) να διακρίνουν τη σημασία καθενός από τα ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού (αξία θέσης ψηφίου), γ) να γνωρίζουν ότι η μονάδα αποτελείται από 10 δέκατα, 100 εκατοστά, 1.000 χιλιοστά, δ) να γνωρίσουν το σύστημα της «Δεκάτης».

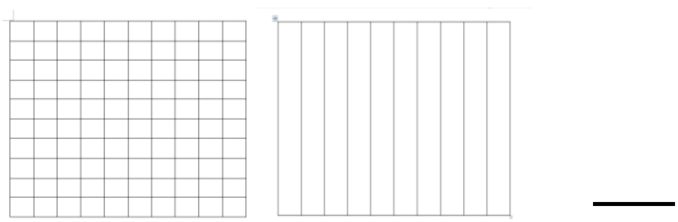
Στο πρώτο δίωρο έγινε μια εισαγωγική αφήγηση-παρουσίαση (Παράρτημα σελ 8 - 12) μαζί και συζήτηση με τα παιδιά, για την ανάγκη της δημιουργίας των δεκαδικών, τη γνωριμία με τον Simon Stevin, το έργο του «Δεκάτη» και με τον τρόπο που παρουσιάζονται σε αυτή οι δεκαδικοί αριθμοί αλλά και τον τρόπο που γίνονται απλές πράξεις να κερδίσουν. Στα πλαίσια της παρουσίασης και εισαγωγής στους δεκαδικούς, μοιράστηκε μοντέλο Μονάδας από χαρτί για να το κόψουν σε δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά κ.ο.κ και συζητήθηκε η μορφή τους (π.χ ο ρόλος υποδιαστολής). Στη συνέχεια, έπαιξαν το επιτραπέζιο παιχνίδι «Ο κώδικας του Stevin» (σελ 56) όπου παραλληλίζουν δεκαδικούς από το σύστημα που προτάθηκε από τον Stevin στο έργο του «Δεκάτη», με τη μορφή που χρησιμοποιούμε σήμερα. Τα παιδιά χωρίστηκαν σε ζευγάρια για να παίξουν το παιχνίδι, όπου τους δίνονταν μία μία οι κάρτες του παιχνιδιού με τις δοκιμασίες (μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη και απλές πράξεις) (Παράρτημα σελ 13 - 21) τις οποίες έπρεπε να ολοκληρώσουν αλλά και να συνεργαστούν οι ομάδες μεταξύ τους για να βρούνε τη λύση της τελευταίας αποστολής για να κερδίσουν.

7.5.2 2ο Δίωρο

Διδακτικοί στόχοι: Εισαγωγή στις διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις. Μετατροπή. Εκτίμηση και τοποθέτηση δεκαδικών στην αριθμογραμμή. Σχηματισμός και ανάλυση δεκαδικών. Αναλυτικά τα παιδιά θα είναι ικανά να περνούν από μία δεκαδική μορφή σε μία άλλη. Όπως και να εκτιμούν και να τοποθετούν έναν δεκαδικό σε σχέση με έναν ακέραιο με τη βοήθεια της αριθμογραμμής.

Στο δεύτερο δίωρο δόθηκαν στους μαθητές καρτελάκια με ονόματα αριθμών και χειραπτικό υλικό (Παράρτημα σελ 40, 41), χωρισμένα τετράγωνα (Μονάδες) σε 10 και 100 ίσα μέρη, μαζί με λωρίδες (δέκατα), μικρά τετράγωνα (εκατοστά), ψιλές λωρίδες (χιλιοστά).

Εικόνα 3: Παραδείγματα από τις καρτέλες που δόθηκαν στα παιδιά



Εικόνα 4: Παραδείγματα από το χειραπτικό υλικό που δόθηκε στα παιδιά

Τα παιδιά σχημάτισαν με το χειραπτικό υλικό τους αριθμούς, τους έγραψαν με δεκαδική και κλασματική μορφή και έκαναν εξάσκηση στις μετατροπές. Τα παιδιά χρωμάτισαν σε λευκά χωρισμένα τετράγωνα τους αριθμούς που τους δόθηκαν σε καρτελάκια. Επομένως, με την ομάδα τους σχημάτισαν διάφορους αριθμούς με διαφορετικές αναπαραστάσεις παίζοντας το «Παιχνίδι των αναπαραστάσεων» (σελ 57) με τους ρόλους: α) του Καλλιτέχνη (φτιάχνει τους αριθμούς με το χειραπτικό υλικό σαν κολάζ), β) του επιστήμονα Simon Stevin (παρουσιάζει τους αριθμούς με το δεκαδικό σύστημα της «Δεκάτης»), γ) του Λογιστή (παρουσιάζει τους αριθμούς με δεκαδικό κλάσμα και αριθμό) και δ) του Μετρητή (τοποθετεί τον αριθμό στην αριθμογραμμή) (Παράρτημα σελ 22). Τα παιδιά εναλλάσσονταν στους διαφορετικούς ρόλους και παρουσίαζαν τους αριθμούς τους και στις άλλες ομάδες. Μετά ενασχολήθηκαν με το παιχνίδι «Εργοστάσιο δεκαδικών» (σελ 57) στο οποίο τα παιδιά ανέλυσαν και συνέθεσαν δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια δεκαδικών κλασμάτων.

7.5.3 3^{ο} Δίωρο

Διδακτικοί στόχοι: Εκτίμηση και τοποθέτηση δεκαδικών στην αριθμογραμμή. Σύγκριση. Διάταξη. Τα παιδιά θα είναι σε θέση να συγκρίνουν και να διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς και δεκαδικά κλάσματα. Να τοποθετούν δεκαδικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή.

Στο τρίτο δίωρο δόθηκαν στα παιδιά πολλά διαφορετικά δεκαδικά κλάσματα από τα οποία κάποια έπρεπε να τα αντιστοιχίσουν με τους αριθμούς που σχημάτισαν στο 2^{ο} δίωρο και τα υπόλοιπα να τα μετατρέψουν σε δεκαδικούς αριθμούς και να εργαστούν όπως και στο δεύτερο δίωρο. Στη συνέχεια έπαιξαν το παιχνίδι «Μπες στη σειρά» (σελ 58), στην αρχή μοιράστηκαν στα παιδιά καπέλα όπου επάνω τοποθέτησαν τον δεκαδικό που έτυχαν στη μοιρασιά. Η δασκάλα καλούσε κάποια νούμερα και τα παιδιά που άκουγαν τον αριθμό τους σηκώνονταν και έπρεπε να μπούνε στη σωστή σειρά. Η διαδικασία αυτή έγινε σε μικρές ομάδες και με όλη την τάξη. Στη συνέχεια έπαιξαν το «Παιχνίδι των αριθμογραμμών» (σελ 58) στις ομάδες τους, κατά το οποίο έπρεπε να τοποθετούν τον αριθμό που τους τύχαινε στην αριθμογραμμή τους (Παράρτημα σελ 27).

7.5.4 4^{ο} Δίωρο

Διδακτικοί στόχοι: Υπολογισμός μήκους. Σχέση μονάδων μέτρησης μήκους και των υποδιαιρέσεών του. Σύγκριση. Διάταξη.

Στόχος μας είναι τα παιδιά μέσα από βιωματικές δραστηριότητες α) να γνωρίζουν τις συνήθεις μονάδες μήκους και τη σχέση ανάμεσα στο μέτρο και τις υποδιαιρέσεις του, να μπορούν να χρησιμοποιούν το χάρακα και τη μεζούρα, γ) να εμπεδώσουν τη συνηθισμένη τεχνική εκτέλεσης της πρόσθεσης δεκαδικών, να μετατρέπουν οριζόντιες γραφές σε κάθετες.

Στο τέταρτο δίωρο οι ομάδες έπαιξαν το παιχνίδι Ας ανα…μετρηθούμε (σελ 58), δούλεψαν με πληροφορίες για διάφορους αθλητές (πληροφορίες που συλλέχθηκαν για το μάθημα της Μελέτης Περιβάλλοντος) (Παράρτημα σελ 41 - 42), μέτρησαν το ύψος του κάθε μέλους της ομάδας τους αλλά και το μήκος διάφορων μελών του σώματός τους (π.χ. μαλλιά, μύτη), σύγκριναν και σχολίασαν τα ευρήματά τους στην τάξη. Η επόμενη δραστηριότητα με την οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές ήταν το παιχνίδι «Μάχη» (σελ 59) κατά το οποίο τα παιδιά σε ζευγάρια μοιράζονται κάρτες με δεκαδικούς και κάθε φορά βγάζουν από μία κάρτα και συγκρίνουν. Όποιος έχει τον μεγαλύτερο αριθμό παίρνει την κάρτα του αντιπάλου, κερδίζει ο παίχτης που έχει στο τέλος τις περισσότερες κάρτες.

7.5.5 5ο Δίωρο

Διδακτικοί στόχοι: Εξοικείωση με τα νομίσματα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Εξάσκηση, εμπέδωση και έλεγχος γνώσεων και δεξιοτήτων στους δεκαδικούς αριθμούς και τα δεκαδικά κλάσματα. Πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών.

Τα παιδιά θα πρέπει να διαχειριστούν τα νομίσματα, να εμπεδώσουν τη χρήση δεκαδικών αριθμών για το συμβολισμό χρηματικών ποσών, να κατανοήσουν την αξία θέσης ψηφίου και να εξοικειωθούν με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στο πέμπτο δίωρο τα παιδιά έπαιξαν το παιχνίδι «Μυστική τιμή» (Μυστικός αριθμός) (σελ 59) όπου τα παιδιά έψαχναν να βρούνε την τιμή διάφορων προϊόντων του σούπερ μάρκετ για να συμπληρώσουν την κενή λίστα τους, μέσα από ερωτήσεις (π.χ. Κοστίζει περισσότερο από 10€; Θα χρειαστούμε κέρματα των 2λ. για να συμπληρώσουμε την τιμή;). Κερδίζει η ομάδα που συμπληρώνει πρώτη τη λίστα της. Στη συνέχεια βρήκανε το άθροισμα των τιμών των προϊόντων τους αλλά και πόσα ρέστα θα πάρουν από νόμισμα των 20€. Όταν έβρισκαν τις τιμές, ζωγράφιζαν τα απαραίτητα νομίσματα. Έπειτα έπαιξαν το γνωστό παιχνίδι «Bingo» (Μπίνγκο) (σελ 59) με καρτέλες με δεκαδικούς αριθμούς σε διάφορες αναπαραστάσεις για εξάσκηση και εμπέδωση.

7.6 Περιγραφή παιχνιδιών

7.6.1 «Ο κώδικας του Simon Stevin»

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι
Σκοπός αυτού του παιχνιδιού είναι η εξοικείωση με το σύστημα των δεκαδικών του Simon Stevin και η αναγνώριση και η αναγκαιότητα της δημιουργίας και της χρήσης του.
Ως στόχοι τέθηκαν να οδηγηθεί ο μαθητής: α) να χρησιμοποιήσει τις λέξεις μονάδα, δέκατο, εκατοστό και χιλιοστό για να περιγράψει έναν δεκαδικό αριθμό, β) να αναπτύξει τις δεξιότητές μετατροπής της γραφής για τους δεκαδικούς, γ) να κατανοήσει την αξία θέσης ψηφίου.

Τα παιδιά πρέπει μέσα από επτά αποστολές – σταθμούς στον χάρτη της πόλης Μπρυζ (Ταμπλό του παιχνιδιού, Παράρτημα σελ), να βρούνε και να φτάσουν στην πλατεία με το άγαλμα του Simon Stevin αφού περάσουν από όλους τους ενδιάμεσους σταθμούς της πόλης Μπρυζ (γενέτειρας του Simon Stevin) και ανακαλύψουν τον «κώδικα», δεκαδικό σύστημα. Οι ομάδες (ζευγάρια) έχοντας η καθεμία το πιόνι τους στο ταμπλό του παιχνιδιού παίρνουν μία μία τις κάρτες- αποστολές του παιχνιδιού (Παράρτημα σελ 13), όποια ομάδα βρίσκει την απάντηση, παίρνει την επόμενη κάρτα και προχωράει στον επόμενο σταθμό. Στην τελευταία κάρτα-αποστολή οι ομάδες πρέπει να συνεργαστούν και να συμπληρώσουν τα παζλ με τις εικόνες (του Simon Stevin και του χάρτη της πόλης Μπρυζ, Παράρτημα σελ20) που θα τους φέρουν στην πλατεία με το άγαλμα του Simon Stevin. Κερδίζει η ομάδα που θα φτάσει πρώτη στον προτελευταίο σταθμό αν και θα χρειαστεί η συμβολή όλων των ομάδων για τον τελευταίο σταθμό (θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα κομμάτια των παζλ που έχουν όλες οι ομάδες για να σχηματιστούν οι εικόνες).

7.6.2 Παιχνίδι των αναπαραστάσεων!

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι να αποκτήσουν τα παιδιά τη δεξιότητα να περνούν από τη μία αναπαράσταση των δεκαδικών στην άλλη και να σταθεροποιήσουν τις γνώσεις τους στους δεκαδικούς.

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορούν οι μαθητές: α) να αναγνωρίζουν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις, β) να βρίσκουν με βάση την αναπαράσταση που τους δίνεται και τις άλλες που τους ζητούνται

Τα παιδιά διαχειρίζονται ποικιλία δεκαδικών (Παράρτημα σελ 23) και συμπληρώνουν φύλλα εργασίας (Παράρτημα σελ 22) με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τους. Στη συνέχεια παρουσιάζουν σε όλη την τάξη τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που βρήκαν, παίζοντας τους ρόλους α) του Καλλιτέχνη (θα φτιάχνει τους αριθμούς με το χειραπτικό υλικό σαν κολάζ), β) του επιστήμονα Simon Stevin (θα παρουσιάζει τους αριθμούς με το δεκαδικό σύστημα της «Δεκάτης»), γ) του Λογιστή (θα παρουσιάζει τους αριθμούς με δεκαδικό κλάσμα και αριθμό) και δ) του Μετρητή (θα τοποθετεί τον αριθμό στην αριθμογραμμή). Τα παιδιά θα εναλλάσσονται στους διαφορετικούς ρόλους και θα παρουσιάζουν τους αριθμούς τους και στις άλλες ομάδες.

7.6.3 Εργοστάσιο δεκαδικών

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η καλύτερη κατανόηση του δεκαδικού συστήματος.

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να αναγνωρίζει την αξία θέσης ψηφίου, β) να αναλύει και να συνθέτει δεκαδικούς.

Το παιχνίδι περιλαμβάνει τρία εργαστήρια δημιουργίας δεκαδικών με διαφορετικά φύλλα εργασίας (Παράρτημα σελ 24 - 26) για την κάθε ομάδα ώστε σε κάθε εργαστήριο να δημιουργούνται πολλοί διαφορετικοί αριθμοί. Στο Εργαστήριο 1, οι ομάδες τοποθετούν τους ακεραίους αριθμούς και τα αντίστοιχα κλάσματα που τους επιτρέπουν να κατασκευάσουν τον δεκαδικό αριθμό που ζητείται στον πίνακα του φύλλου εργασίας. Τοποθετούν τις κάρτες, που έκοψαν από το φύλλο αριθμών που τους δόθηκε, στον πίνακα δίπλα στον αντίστοιχο αριθμό. Για αυτό τα φύλλο εργασίας δίνεται στο τέλος στις ομάδες φύλλο αυτοελέγχου. Στο Εργαστήριο 2, οι ομάδες συμπληρώνουν ένα, δύο ή τρία κλάσματα από αυτά που τους δόθηκαν στο φύλλο αριθμών, τα τοποθετούν στον πίνακα και στη συνέχεια σημειώνουν στα αριστερά του πίνακα τον δεκαδικό αριθμό που δημιουργήθηκε (κάποιες φορές το ακέραιο μέρος είναι ήδη σημειωμένο). Στο Εργαστήριο 3, οι ομάδες διαλέγουν 4 κάρτες, μια μαύρη (ακέραιος αριθμός), μια πράσινη (δέκατα), μια κόκκινη (εκατοστά) και μια μπλε (χιλιοστά), τοποθετούν αυτές τις 4 κάρτες στο φύλλο και στη συνέχεια ανταλλάσσουν φύλλα οι ομάδες ώστε να συμπληρώσουν - συνθέσουν στα αριστερά του πίνακα τον αριθμό που τους ετοίμασε η άλλη ομάδα. Σε κάθε εργαστήριο κερδίζει η πιο γρήγορη ομάδα με τα λιγότερα λάθη.

7.6.4 Μπες στη σειρά

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η κατανόηση της διάταξης των δεκαδικών αριθμών.

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να αναγνωρίζει το μέγεθος των δεκαδικών αριθμών, β) να τοποθετεί σε αύξουσα σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς.

Στο παιχνίδι αυτό τα παιδιά φορούν καπέλα με διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς και ο εκπαιδευτικός «φωνάζει» κάποιους αριθμούς σε ομάδες των 2 αρχικά και έπειτα περισσότερων αριθμών. Οι μαθητές οι οποίοι ακούν το νούμερό τους, θα πρέπει να σηκώνονται και να διατάσσονται (να μπαίνουν στη σειρά) ανάλογα με το μέγεθός τους. Στο τέλος μπορούν να σηκωθούν και όλοι οι μαθητές μαζί.

7.6.5 Παιχνίδι των αριθμογραμμών

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η επαφή με την αριθμογραμμή και η τοποθέτηση δεκαδικών σε αυτή.

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να αναγνωρίζει την αξία θέσης ψηφίου, β) να τοποθετεί τους δεκαδικούς στην αριθμογραμμή.

Στο παιχνίδι αυτό δίνονται στις ομάδες καρτελάκια με δεκαδικούς αριθμούς (Παράρτημα σελ 26 - 28) και φύλλα εργασίας στα οποία υπάρχουν αριθμογραμμές με διαφορετικούς αριθμούς (όπως φαίνεται στο φύλλο εργασιών). Το κάθε παιδί θα πρέπει να τοποθετήσει τους δεκαδικούς που θα του δοθούν στις σωστές αριθμογραμμές και στο σωστό σημείο. Κερδίζει ο μαθητής που θα κάνει τα λιγότερα λάθη στην ομάδα του.

7.6.6 Ας ανα…μετρηθούμε

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η μέτρηση με χάρακα και μεζούρα και η χρήση των διαφορετικών μονάδων μέτρησης μήκους (μέτρα, εκατοστά κ.τλ.)

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να τοποθετεί σωστά τη μεζούρα/χάρακα για να μετρήσει, β) να χρησιμοποιήσει τις μονάδες μέτρησης του μέτρου, γ) να συγκρίνει και να διατάσσει μήκη.

Στη δραστηριότητα αυτή τα παιδιά παίρνουν μεζούρες και μετρούν διάφορα μέρη του σώματός τους τα οποία καταγράφουν σε ένα φύλο (π.χ. μαλλιά, χέρι, μύτη κ.τλ.), στη συνέχεια μετρούν και το ύψος τους. Στο τέλος, παρουσιάζουν τις μετρήσεις τους σε όλη την τάξη, γράφονται στον πίνακα και έπειτα τις διατάσσουν ή τις τοποθετούν στην αριθμογραμμή (την μεγάλη του πίνακα), μπορούν να διατάξουν μήκη όπως αυτά των μαλλιών ή της μύτης και να χρησιμοποιήσουν την αριθμογραμμή για τα ύψη.

7.6.7 Μάχη

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η κατανόηση του μεγέθους των δεκαδικών αριθμών και η σύγκρισή τους. Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να αναγνωρίζει την αξία θέσης ψηφίου, β) να συγκρίνει δεκαδικούς αριθμούς.

Στο παιχνίδι αυτό δίνονται στις ομάδες κάρτες (σε μονό αριθμό) με δεκαδικούς αριθμούς τις οποίες τις μοιράζονται τυχαία αλλά εξίσου (Παράρτημα σελ 29). Ο κάθε παίκτης κρατάει κλειστές τις κάρτες του και κάθε φορά κατεβάζει και ανοίγει μία κάρτα. Οι δύο παίκτες συγκρίνουν κάθε φορά τους αριθμούς που κατεβάζουν και όποιος έχει τον μεγαλύτερο αριθμό παίρνει και τις δύο κάρτες και τις βάζει στην άκρη. Κερδίζει ο παίκτης με τις περισσότερες κάρτες.

7.6.8 Μυστική τιμή

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η επαφή και η διαχείριση του ευρώ.

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να διαχειρίζεται ποσά σε λεπτά και ευρώ, β) να διαχειρίζεται κέρματα, γ) να εκτελεί προσθέσεις και αφαιρέσεις με δεκαδικούς αριθμούς.

Το παιχνίδι αυτό χωρίζεται σε δύο φάσεις, στην πρώτη μοιράζονται στις ομάδες κενές λίστες για ψώνια (για 3-4 προϊόντα). Έπειτα κολλιούνται εικόνες προϊόντων (Παράρτημα σελ 33) στον πίνακα αλλά με κρυμμένη την τιμή τους. Οι ομάδες με διάφορες ερωτήσεις προσπαθούν να βρούνε την ακριβή τιμή του κάθε προϊόντος και όποια ομάδα τη βρίσκει καταγράφει το προϊόν στη λίστα της. Κερδίζει η ομάδα που θα γεμίσει πρώτη τη λίστα της. Στη δεύτερη φάση οι ομάδες καλούνται να βρούνε πόσα χρήματα θα πληρώσουν στο σούπερ μάρκετ για τα προϊόντα της λίστας τους και πόσα ρέστα θα τους επιστραφούν αν πληρώσουν με 20€. Μόλις βρούνε τις σωστές απαντήσεις, ζωγραφίζουν τα ανάλογα νομίσματα (στο τελευταίο μέρος μπορούν να χρησιμοποιηθούν ψεύτικα νομίσματα και να γίνουν οι συναλλαγές που γίνονταν και σε ένα πραγματικό σούπερ μάρκετ).

7.6.9 Bingo των δεκαδικών

Σκοπός και Διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του παιχνιδιού είναι η καλύτερη κατανόηση του δεκαδικού συστήματος.

Ως στόχοι τέθηκαν να μπορεί ο μαθητής: α) να αναγνωρίζει το όνομα των δεκαδικών (λεκτική αναπαράσταση, β) να αναγνωρίζει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των δεκαδικών.

Στο παιχνίδι αυτό μοιράζεται στις ομάδες ένα φύλλο εργασίας με έναν πίνακα με διάφορους δεκαδικούς (Παράρτημα σελ 36). Ο εκπαιδευτικός έχει κάρτες όπου αναγράφονται δεκαδικοί αριθμοί και αρχίζει να τους διαβάζει έναν – έναν. Τα παιδιά ακούν τους αριθμούς και θα πρέπει να αναγνωρίζουν αν ο αριθμός που ακούν βρίσκεται στο φύλλο εργασίας που έχουν μπροστά τους και αν υπάρχει τον σημειώνουν. Κερδίζει η ομάδα που θα έχει σημειώσει πρώτη όλους τους αριθμούς στο φύλλο εργασίας της.

7.7 Σχεδιασμός του post test

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τη διδασκαλία που εφαρμόστηκε και το pre test που προηγήθηκε, δημιουργήθηκε μια σειρά τριών ασκήσεων, post test (Παράρτημα σελ 43), για τον έλεγχο του επιπέδου γνώσεων των μαθητών η οποία περιλαμβάνει σύγκριση των δεκαδικών με χρήση ονοματολογίας τους και αιτιολόγηση, προσθέσεις και αφαιρέσεις δεκαδικών όπως και τη συμπλήρωση ενός πίνακα αναπαραστάσεων διαφορετικών μορφών δεκαδικών. Επομένως, ακολουθεί μια σειρά ερωτήσεων, συνέντευξη, για την καταγραφή των απόψεων των μαθητών για τη διδασκαλία που παρακολούθησαν, όσο αφορά τα παιχνίδια γενικά και ιδιαιτέρως για το παιχνίδι «ο Κώδικας του Stevin» το οποίο δημιουργήθηκε για την αξιοποίηση της ιστορίας των δεκαδικών, που αποτελεί τον πυρήνα της έρευνάς μας, αλλά και κατά πόσο έμαθαν για τους δεκαδικούς αριθμούς.

Στην πρώτη άσκηση ελέγθηκαν μέσω της σύγκρισης οι παρανοήσεις 1 και 3 (σελ 17) για να αναδείξουν τις γνώσεις των μαθητών για το μέγεθος των δεκαδικών αλλά και η παρανόηση 2 για να φανερώσει αν κατανοούν οι μαθητές πότε το μηδέν αλλάζει το μέγεθος του δεκαδικού αριθμού. Στη δεύτερη άσκηση ελέγχεται η παρανόηση 6, η διαχείριση των δεκαδικών στις κάθετες πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Στην τρίτη άσκηση γίνεται έλεγχος της παρανόησης 5, οι μαθητές έχουν να διαχειριστούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των δεκαδικών (π.χ. Alibali & Sidney, 2015, Shaughnessy, 2009) και να κάνουν τις ανάλογες μετατροπές (π.χ. τοποθετούν δεκαδικούς στην αριθμογραμμή, ζωγραφίζουν, γράφουν δεκαδικά κλάσματα και αριθμούς, αριθμούς σύμφωνα με τη «Δεκάτη») καθώς το πέρασμα από την μία αναπαράσταση στην άλλη φαίνεται να δείχνει την βαθύτερη κατανόηση των δεκαδικών. Η τοποθέτηση στην αριθμογραμμή χρησιμοποιήθηκε γιατί μπορεί να φανερώσει την κατανόηση σχέσης μεγέθους αφού ένας βασικός μηχανισμός που συνδέει την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση είναι η ικανότητα να τοποθετεί ένας μαθητής ρητούς αριθμούς σε μια αριθμογραμμή (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013).

Παρανοήσεις	Ασκήσεις και ερωτήματα post test	Ασκήσεις pre test
1. Μέγεθος: Ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία ή ο δεκαδικός με τα λιγότερα ψηφία	1Α, 1Γ, 1 Ε,	$2^η$,$3^η$,$4^η$, $5^η$,
2. Χρήση του μηδενός στο τέλος του δεκαδικού	1Β, 1Δ,	$2^η$, $4^η$, $5^η$
3. Σύγχυση της αξίας θέσης ψηφίου	$2^η$, $3^η$	$1^η$, $2^η$,$4^η$, $5^η$, $8^η$, $9^η$,
5. Δυσκολία στις μετατροπές	1Ζ,1Η, 1Θ, $3^η$	$3^η$, $6^η$, $7^η$,
6. Πράξεις (πρόσθεση και αφαίρεση)	$2^η$	$9^η$

Όσο αφορά τις ερωτήσεις συνέντευξης, σχεδιάστηκαν για να καταγραφούν οι απόψεις των μαθητών για τη διδασκαλία που παρακολούθησαν. Στην πρώτη ερώτηση τα παιδιά καλούνται να επιλέξουν τα παιχνίδια που τους άρεσαν και να τα κατατάξουν με σειρά προτίμησης αλλά και να αιτιολογήσουν την άποψή τους. Η δεύτερη ερώτηση σχετίζεται με το παιχνίδι «Ο κώδικας του Stevin», όπου οι μαθητές αναφέρουν τι θυμούνται από το παιχνίδι και τον S.Stevin ενώ στην τρίτη ερώτηση απαντούν στο πώς θεωρούν ότι ωφελήθηκαν από τα παιχνίδια που έπαιξαν. Η τέταρτη και η πέμπτη ερώτηση αφορούν τις αναπαραστάσεις και κατά πόσο τους είναι εύκολο να περνούν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη κι αν υπάρχει κάποια που τους δυσκολεύει ακόμα. Στην τελευταία ερώτηση τα παιδιά απαντούν στο αν πιστεύουν ότι έχουν κατανοήσει εν γένει τους δεκαδικούς αλλά και τις πράξεις με δεκαδικούς.

Κεφάλαιο 8: Αποτελέσματα

8.1 PRE TEST

Στην έρευνάς μας, συμμετείχαν οι 7 μαθητές της Δ' τάξης και ένας μαθητής της Γ΄ τάξης (παρόλο που δεν είχε διδαχθεί καθόλου τους δεκαδικούς, αφού διδάσκονται προς το τέλος της χρονιάς και έτσι δεν αναμενόταν να ανταπεξέλθει). Στα παιδιά δόθηκε ένα τεστ για τον έλεγχο του επιπέδου των γνώσεών τους όσο αφορούσε τους δεκαδικούς από όσα είχαν διδαχθεί στη Γ ' τάξη και την διερεύνηση πιθανών παρανοήσεων. Με την ολοκλήρωση του ελεγκτικού τεστ και την επεξεργασία των δεδομένων που συλλέχθηκαν, έγινε φανερό πως τα παιδιά χρειάζονταν μία εκ νέου διδασκαλία για τους δεκαδικούς αριθμούς. Αναλυτικά, στην πρώτη άσκηση όπου τα παιδιά διάβαζαν το όνομα του αριθμού και έπρεπε να γράψουν τη δεκαδική και κλασματική μορφή του, κατάφεραν να βρούνε την κλασματική μορφή οι 5 από τους 7 μαθητές από τους υπόλοιπους δύο ο Βασίλης είτε σημείωσε κλάσματα τα οποία δεν αντιστοιχούσαν στους αριθμούς π.χ. πενήντα δύο εκατοστά = 50/2 είτε λανθασμένα κλάσματα π.χ. τρία χιλιοστά = 3/0 ενώ η Ελένη.Ι δεν σημείωσε κανένα κλάσμα παρά μόνο δεκαδικούς. Όμως, δυσκολεύτηκαν με τη δεκαδική μορφή καθώς κανένα παιδί δεν έγραψε τη σωστή δεκαδική μορφή σε κανένα από τα 4 ονόματα, π.χ. Τριάντα επτά χιλιοστά = 3,7 ή Εννιά δέκατα = 9,10 και όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 1.

Πίνακας 1: Απαντήσεις των παιδιών στην Άσκηση 1Α του pre test

Άσκηση 1^{A}	**Βασίλης**	**Βάσω**	**Ελένη. Ι**	**Ελένη. Μ**	**Νίκος**	**Πρόδρομος**	**Χρήστος**	**Κριστιάν**
Πενήντα δύο εκατοστά	5,2	52,	5,200	52,100	100,52	52,100	50,2	52,100
Εννιά δέκατα	9,0	9,	9,100	9,10	10,9	9,10	9,10	9,10
Τρία χιλιοστά	3,0	3,	3,000	3,1000	1.000,3	3,1.000	3,1.000	3,1000
Τριάντα επτά χιλιοστά	3,7	37,	37,000	37,1.000	1.000,37	37,1.000	30,7	37,1000

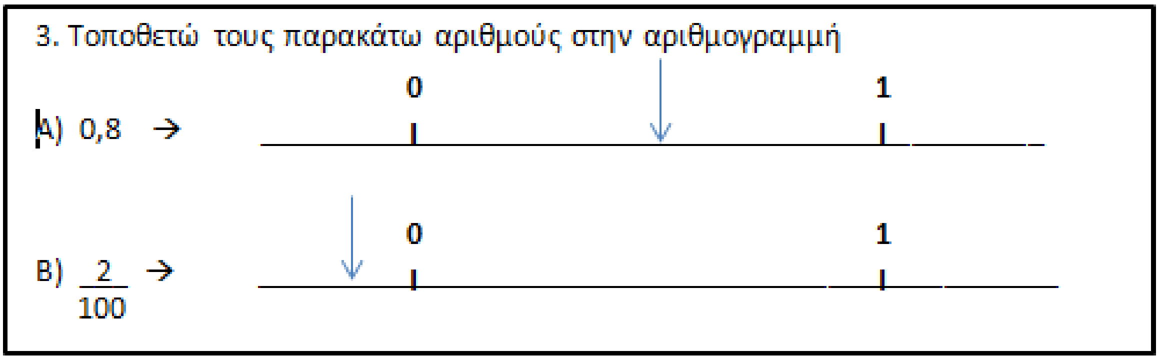
Στη δεύτερη άσκηση που αφορούσε τη σύγκριση δεκαδικών αριθμών και δεκαδικών κλασμάτων, τα παιδιά, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, δεν θυμόντουσαν τον τρόπο που συγκρίνουμε τους αριθμούς όμως επίσης αντιμετώπισαν την άσκηση κάπως βιαστικά. Στα ερωτήματα Α και Γ που αφορούσαν τις παρανοήσεις σχετικά με το μέγεθος του αριθμού (Παρανοήσεις 1 και 2, σελ 5, απάντησε σωστά μόνο ο Νίκος, τα υπόλοιπα παιδιά θεώρησαν 0,3 < 0,125 και 2,17 > 2,9 ενώ στα ερωτήματα Β και Δ που αφορούσαν τις παρανοήσεις 1, 2 και 3 παρατηρούμε μεγάλη απόκλιση καθώς κανένας δεν απάντησε σωστά στο Β ερώτημα (Σημείωσαν 3,5 < 3,500) ενώ στο Δ ερώτημα απάντησαν σωστά οι τέσσερις από τους επτά, οι υπόλοιποι σημείωσαν 0,8 = 0,08. Στα ερωτήματα Ε, Ζ και Η όπου είχαμε σύγκριση του δεκαδικού κλάσματος 15/100 με τρεις διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς, έχουμε διαφορετικά ποσοστά επιτυχίας. Στο ερώτημα Ε έχουμε μόνο μία σωστή απάντηση από τον Πρόδρομο, τα περισσότερα παιδιά απάντησαν 15/100 = 1,5 και ο Βασίλης 15/100 > 1,5. Στο ερώτημα Ζ μπερδεύτηκαν όλα τα παιδιά και δεν είχαμε καμία σωστή απάντηση, όλα τα παιδιά θεώρησαν 15/100= 15,100 ενώ στο τελευταίο ερώτημα παρατηρούμε ότι τα περισσότερα παιδιά απάντησαν σωστά εκτός από την Ελένη. Ι, τον Κριστιάν και τον Χρήστο, οι οποίοι σημείωσαν 15/100 > 0,15.

Πίνακας 2: Απαντήσεις των παιδιών στην Άσκηση 2 του pre test

Άσκηση 2 (>,<,=)	**Βασίλης**	**Βάσω**	**Ελένη. Ι**	**Ελένη. Μ**	**Νίκος**	**Πρόδρομος**	**Χρήστος**	**Κριστιάν**
Α. 0,3….. 0,125	-	-	-	-	√	-	-	-
Β. 3,5…… 3,500	-	-	-	-	-	-	-	-
Γ. 2,17…..2,9	-	-	-	-	√	-	-	-
Δ. 0,8……0,08	-	√	-	√	√	√	-	-
Ε. 15/100….1,5	-	-	-	-	-	√	-	-
Ζ. 15/100….15,100	-	-	-	-	-	-	-	-
Η. 15/100…..0,15	√	√	-	√	√	√	-	-

*√: Σωστό σύμβολο , -- : Λάθος σύμβολο

Στην άσκηση 3 ζητήθηκε από τους μαθητές να τοποθετήσουν έναν δεκαδικό αριθμό (τον 0,8) και ένα δεκαδικό κλάσμα (το 2/100) το καθένα σε μία αριθμογραμμή από 0 έως 1. Τα αποτελέσματα μας έδειξαν ότι τα παιδιά δεν γνώριζαν την αριθμογραμμή και με ποιον τρόπο θα τοποθετούσαν τους αριθμούς σε αυτή. Μετά από κάποιες εξηγήσεις, προσπάθησαν να τοποθετήσουν τους αριθμούς μας στις αριθμογραμμές τους, με κάποια επιτυχία στον 0,8, τον οποίο τοποθέτησαν σωστά η Βάσω και ο Πρόδρομος (σχετικά κοντά στη θέση όπου θα βρισκόταν ο 0,8) ενώ τα άλλα παιδιά τον τοποθέτησαν στη μέση στη θέση του 0,5. Όμως κανένα παιδί δεν κατάφερε να τοποθετήσει σωστά ή έστω να πλησιάσει τη θέση του 2/100, η Ελένη. Ι και ο Κριστιάν τον τοποθέτησαν πριν το μηδέν όπως φαίνεται στη παρακάτω εικόνα, ο Νίκος , ο Βασίλης, ο Πρόδρομος και η Βάσω τον σημείωσαν ως 2/10 και ο Χρήστος με την Ελένη.Μ κοντά στον αριθμό ένα.



Εικόνα 5: Απάντηση Ελένης. Ι στην Άσκηση 3 του pre test

Στις ασκήσεις 4 και 5 ,που ήταν πολλαπλής επιλογής, δόθηκε στα παιδιά ένα δεκαδικό κλάσμα (το 42/100) και ένας δεκαδικός αριθμός (ο 0,07), αντίστοιχα, και τα παιδιά έπρεπε να επιλέξουν τον δεκαδικό και το κλάσμα, αντίστοιχα, με το οποίο ήταν ίσα. Τους δόθηκαν πέντε επιλογές αριθμών γα να κυκλώσουν, με δύο από αυτές να είναι σωστές. Οι απαντήσεις κρίθηκαν σωστές και με μία σωστή επιλογή των παιδιών. Εδώ μόνο δύο παιδιά, ο Νίκος και ο Πρόδρομος, βρήκαν τον έναν δεκαδικό που ήταν ίσος με το δοθέν δεκαδικό κλάσμα 42/100 και το ενδιαφέρον είναι πως και τα δύο παιδιά επέλεξαν τον 0,420 και όχι τον 0,42 ενώ τα υπόλοιπα παιδιά επέλεξαν είτε τον 0,042 είτε τον 1,042. Στην άσκηση 5, είχαμε σχεδόν πλήρη επιτυχία στο να βρούνε το δεκαδικό κλάσμα που ήταν ίσο με τον δοθέντα δεκαδικό 0,07 και σχεδόν όλα τα παιδιά επέλεξαν τον 7/100, αφού μόνο ο Χρήστος και ο Κριστιάν επέλεξαν τον 70/100. Κανένα παιδί δεν κύκλωσε τον 70/1.000.

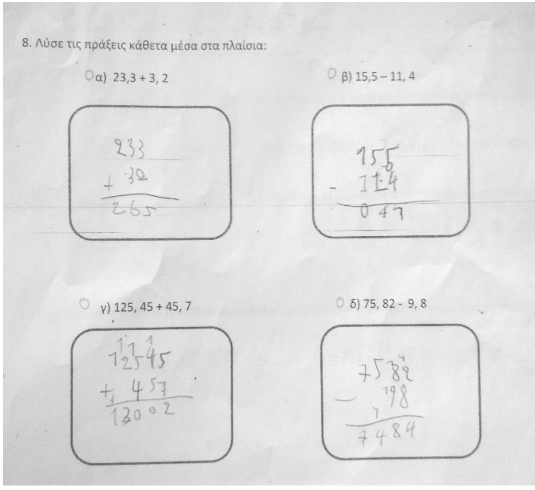
Στις ασκήσεις 6 και 7, τα παιδιά κλήθηκαν να κάνουν μετατροπές από την κλασματική στη δεκαδική μορφή (Άσκηση 6) και αντίστροφα από τη δεκαδική στην κλασματική μορφή (Άσκηση 7). Στις μετατροπές από την κλασματική στη δεκαδική μορφή (6 (Α,Β,Γ)) απάντησαν σωστά ο Πρόδρομος και η Βάσω. Ενώ στις μετατροπές από τη δεκαδική στην κλασματική μορφή (7 (Α,Β,Γ)) απάντησαν σωστά η Βάσω, ο Βασίλης και ο Πρόδρομος αλλά από μία σωστή απάντηση έδωσαν η Ελένη. Ι και ο Νίκος.

Πίνακας 3: Παραδείγματα απαντήσεων στα ερωτήματα 6 (Α,Β,Γ) και 7 (Α,Β, Γ) του pre test

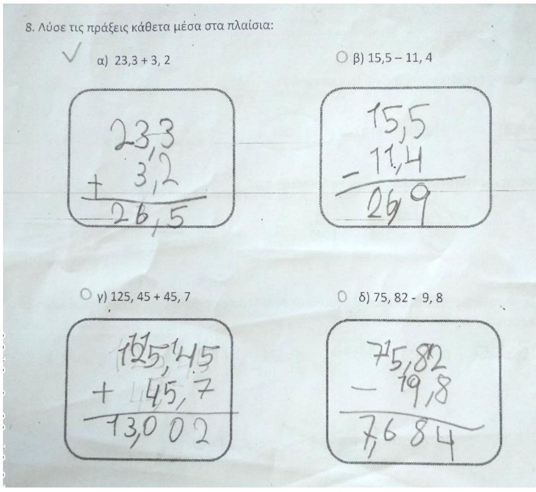
Όνομα	***Άσκηση 6***	***Άσκηση 7***
Βασίλης	*6Β. 655/1.000 = 655,00*	*Όλα σωστά στα 7Α, 7Β,7Γ*
Ελένη. Ι	*6Γ. 24/100 = 2,4*	*7Β. 3,4 = 34/68*
Ελένη. Μ	*6Α. 8/10 = 8,10*	*7Α. 0,07 = 70/0*
Νίκος	*6Γ. 24/100 = 100,24*	*7Β. 3,4 = 4/100*
Χρήστος	*6Α. 8/10 = 8,10*	*7Γ. 0,505 = 505/0*
Κριστιάν	*6Β. 655/1.000 = 655,1.000*	*7Α.0,07 = 0/7*

Στην άσκηση 8, όπου έπρεπε να βρούνε την αξία θέσης του 5 σε καθέναν από τους δεκαδικούς αριθμούς, τα παιδιά μπερδεύτηκαν αρκετά καθώς δεν θυμόντουσαν τη σειρά και την αξία των δεκαδικών ψηφίων (π.χ. μετά την υποδιαστολή αν ήταν πρώτα τα εκατοστά ή τα δέκατα). Στα ερωτήματα Β (5,42) και Θ (5,740) όπου το 5 είχε αξία Μονάδων απάντησε σωστά μόνο η Ελένη. Ι. Στα ερωτήματα Γ (9,5) και Ζ (11,5) όπου το 5 είχε αξία δέκατων δεν απάντησε κανένας σωστά. Στα ερωτήματα Α (12,25) και Δ (7,85), που το 5 είχε αξία εκατοστών απάντησαν σωστά στο Δ, η Ελένη. Μ και ο Πρόδρομος ενώ στο Α δεν απάντησε κανένας σωστά. Στα ερωτήματα Ε (0,005) και Η (10,045), όπου το 5 είχε αξία χιλιοστών απάντησαν σωστά ο Βασίλης και ο Πρόδρομος. Γενικότερα, σε αυτή την άσκηση, με τις μεγάλες αποκλίσεις στις απαντήσεις του κάθε παιδιού, φαίνεται πως δεν αναγνώριζαν την αξία θέσης κι έτσι απαντούσαν στην τύχη χωρίς να τα πολυσκεφτούν.

Στην άσκηση 9, τα παιδιά είχαν να εκτελέσουν από δύο πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης. Τα ερωτήματα Α (23,3 + 3,2) και Β (15,5 – 11,4) αφορούσαν μία πρόσθεση και μία αφαίρεση ανάμεσα σε αριθμούς με ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων και σε αυτές τα ποσοστά επιτυχίας ήταν υψηλότερα. Τα ερωτήματα Γ (125,45 + 45,7) και Δ (75,82 – 9,8) αφορούσαν μία πρόσθεση και μία αφαίρεση με άνισο δεκαδικό μέρος και το ποσοστό επιτυχίας ήταν αρκετά χαμηλότερο. Η Βάσω και η Ελένη. Ι δεν διαχειρίστηκαν σωστά την υποδιαστολή στα ερωτήματα Γ και Δ ενώ ο Βασίλης δεν χρησιμοποίησε καθόλου την υποδιαστολή, σε καμία πράξη, τις έλυσε όλες σωστά αλλά από τα αποτελέσματα έλειπε η υποδιαστολή. Ο Χρήστος, η Ελένη. Μ, και ο Πρόδρομος διαχειρίστηκαν σωστά τους αριθμούς και την υποδιαστολή παρόλο που έκαναν κάποια λάθη στις πράξεις όπως π.χ. δεν υπολόγισαν τα κρατούμενα, ενώ ο Νίκος δεν έβαλε σωστά την υποδιαστολή μόνο στο ερώτημα 9Γ. Ο Κριστιάν δεν τοποθέτησε σε καμία πράξη σωστά τους αριθμούς και δεν είχε καμία σωστή απάντηση. Κανένα παιδί δεν έκανε χρήση της τεχνικής προσθήκης του μηδενός για να λύσει τις πράξεις.



Εικόνες 6: Απάντηση Βασίλη, Άσκηση 9



Εικόνα 7: Απάντηση Ελένης. Ι, Άσκηση 9

8.1.1 Συμπεράσματα από το Pre test

Όσο αφορά την ονοματολογία (Άσκηση 1), τα παιδιά βρήκαν το αντίστοιχο δεκαδικό κλάσμα για το όνομα των δεκαδικών που τους δίνονταν αλλά δεν μπορούσαν να βρούνε τον δεκαδικό αριθμό και έγραφαν δεκαδικούς αριθμούς που φανέρωναν την πιθανή ύπαρξη παρανοήσεων όπως για παράδειγμα στο ερώτημα 1Β. Εννιά δέκατα = 9,10 = 9/10 και στο ερώτημα 1Γ. Τρία χιλιοστά = 0,3= 3/1.000. Στην άσκηση 2 που αφορούσε την σύγκριση των δεκαδικών, τα αποτελέσματα έδειξαν τη σύγχυση των παιδιών στην αξία θέσης ψηφίου και πιθανές παρανοήσεις αφού σύμφωνα με τις απαντήσεις των περισσότερων στο ερώτημα 2Β. 3,5 < 3,500 αλλά και στο ερώτημα 2Ζ. 15/100 = 15,100 παρόλο που βρήκαν στο ερώτημα 2Η. 15/100 = 0,15. Επίσης στην άσκηση 3 όπου τα παιδιά έπρεπε να τοποθετήσουν δύο δεκαδικούς σε αριθμογραμμές, εύκολα τοποθέτησαν τον 0,8 ανάμεσα στον 0 και 1 με επιτυχία στο ερώτημα 3Α αλλά κανένας δεν κατάφερε να τοποθετήσει σωστά τον 2/100 σε ίδια αριθμογραμμή από 0 ως 1 κάτι που δείχνει την απουσία εξάσκησης και τη δυσκολία κατανόησης της αριθμογραμμής και της συνέχειας των αριθμών σε αυτή αφού τα παιδιά δεν μπορούσαν να φανταστούν να υπάρχουν κλάσματα στην αριθμογραμμή και ζήτησαν επιπλέον εξηγήσεις για το πώς θα τοποθετούσαν και τον 0,8 στη γραμμή. Στις ασκήσεις 4 και 5 όπου ελέγχονταν η αξία θέσης ψηφίου μέσα από την αντιστοίχιση ουσιαστικά των αριθμών, τα παιδιά ήταν ελεύθερα να κυκλώσουν όσες επιλογές πίστευαν ότι ήταν σωστές όμως δεν το κατάφεραν, κάτι που μας φανερώνει ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την αξία θέσης των αριθμών και δεν μπόρεσαν να παραλληλίσουν τις διαφορετικές μορφές των δεκαδικών αριθμών.

Στην άσκηση 8 ζητήθηκε από τα παιδιά να αναγνωρίσουν την αξία θέσης του αριθμού 5 σε κάθε περίπτωση, εδώ παρουσιάστηκε μια σαφής εικόνα ότι οι μαθητές δεν γνωρίζουν για τη λειτουργία του δεκαδικού μας συστήματος ή τουλάχιστον δεν ξεχωρίζουν την ονοματολογία της κάθε θέσης αφού πέρα από τα δεκαδικά ψηφία δεν αναγνώρισαν ούτε το ακέραιο ψηφίο των Μονάδων. Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να σχολιάσουμε τη δυσκολία κατανόησης του δεκαδικού συστήματος και της λειτουργίας του όπως υπογραμμίζουν πολλαπλές έρευνες που έχουν αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας (π.χ Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Οι ασκήσεις 6 και 7 αφορούσαν τη μετατροπή από δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και το αντίστροφο. Στη μετατροπή από δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό, τα παιδιά δεν μπόρεσαν να βρούνε τους αντίστοιχους δεκαδικούς, όπως συνέβη και σε προηγούμενες ασκήσεις, ενώ τα κατάφεραν αρκετά καλύτερα στη μετατροπή από δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα. Αυτό μας δείχνει ότι τα παιδιά περνούν πιο εύκολα από τη δεκαδική στην κλασματική μορφή παρά το αντίστροφο. Στην ένατη άσκηση, τα παιδιά είχαν να λύσουν δύο προσθέσεις και δύο αφαιρέσεις αφού τοποθετούσαν σωστά τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλο. Εδώ, παρουσιάστηκαν κάποια λάθη στην κάθετη τοποθέτηση των αριθμών, δεν τοποθετήθηκαν σε πολλές περιπτώσεις οι υποδιαστολές αλλά και λάθη όπως ο μη υπολογισμός των δανεικών που παρατηρείται συνήθως στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης εν γένει.

Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές που τα κατάφεραν καλύτερα ήταν ο Πρόδρομος και η Βάσω οι οποίοι απάντησαν σωστά περίπου στα μισά ερωτήματα ενώ τα υπόλοιπα παιδιά είχαν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Ο Κριστιάν, ο μαθητής της Γ΄ τάξης, δεν κατάφερε να ανταπεξέλθει στις ασκήσεις του ελεγκτικού τεστ, όπως αναμενόταν αφού δεν είχε διδαχθεί ακόμα ούτε τα δεκαδικά κλάσματα ούτε τους δεκαδικούς αριθμούς. Σύμφωνα με τις απαντήσεις των παιδιών, διαφαίνεται η ύπαρξη και των πέντε παρανοήσεων που τέθηκαν υπό έλεγχο. Τα δεδομένα από το pre test, μας έδειξαν ότι η διδασκαλία μας πρέπει να ξεκινήσει από την αρχή, για την κατανόηση μεγέθους των δεκαδικών αριθμών, την εξάσκηση στις αναπαραστάσεις τους και διαχείρισή τους με σκοπό την αποφυγή των παρανοήσεων που ακολουθούν τους δεκαδικούς.

8.2 Διδασκαλία ανά δίωρο

Η διδασκαλία μας έλαβε χώρα από τα τέλη του Γενάρη ως το τέλος του Φλεβάρη του 2019 καθώς αφιερωνόταν περίπου ένα δίωρο την εβδομάδα για τη διδακτική μας παρέμβαση.

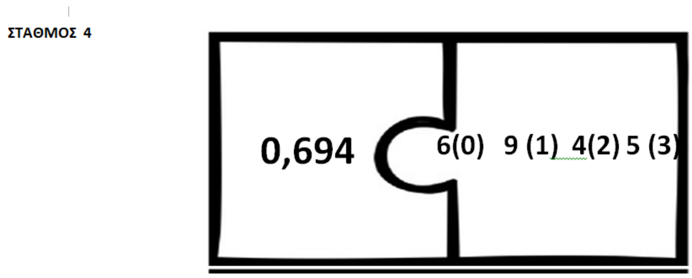
8.2.1 Δίωρο 1ο , Πέμπτη 24 Ιανουαρίου 2019

Στην αρχή τα παιδιά ήταν ξαφνιασμένα γιατί περίμεναν ότι θα δούμε κάποια ταινία όταν είδαν στην τάξη τον βιντεοπροβολέα. Στην πραγματικότητα, παρακολούθησαν μια παρουσίαση για την ανάγκη δημιουργίας των δεκαδικών και το έργο «Δεκάτη» του Simon Stevin, ταυτόχρονα συζητήθηκε η αναγκαιότητα των δεκαδικών δηλαδή αν τους χρειαζόμαστε στην καθημερινότητά μας και που, όπως και τι σημαίνει να είναι ένας αριθμός δεκαδικός. Η συζήτηση ξεκίνησε κατά τη διάρκεια της παρουσίασης (Παράρτημα σελ) όπου τα παιδιά ανέφεραν αρχικά τη χρησιμότητα των δεκαδικών στα χρήματα στην καθημερινότητά τους. Αφού δεν είχαν απορίες για τους δεκαδικούς, τέθηκαν κάποια ερωτήματα από την εκπαιδευτικό όπως για παράδειγμα «Πώς θα μετρούσαμε την απόσταση από το σχολείο μας στο γήπεδο του χωριού;» (το γήπεδο βρίσκεται αρκετά μακριά από το σχολείο) όπου τα παιδιά αρχικά σκέφτηκαν βήματα αλλά γρήγορα κατάλαβαν ότι είναι αρκετά μακριά και πρότειναν χιλιόμετρα, η Ελένη.Μ σκέφτηκε να μετρήσουμε την απόσταση με τον χιλιομετρητή του αυτοκινήτου. Μέσα από τέτοιου είδους ερωτήματα και έπειτα από συζήτηση, προέκυψε ότι οι δεκαδικοί είναι απαραίτητοι και στις μετρήσεις μήκους και βάρους όμως δυσκολεύονταν να ορίσουν την έννοια του δεκαδικού αριθμού. Ο Πρόδρομος υποστήριξε ότι οι δεκαδικοί είναι οι αριθμοί που έχουν κόμμα κι αμέσως όλα τα παιδιά συμφώνησαν πως ήταν πολύ καλή η ιδέα του. Γράψαμε στον πίνακα δεκαδικούς αριθμούς που πρότειναν τα παιδιά (πρότειναν αριθμούς με ένα δεκαδικό ψηφίο και μετά από ενίσχυση και αριθμούς με δύο δεκαδικά ψηφία). Σχολιάστηκε, τι μπορεί να είναι η υποδιαστολή και γιατί βρίσκεται στους δεκαδικούς αριθμούς. Παρατήρησαν το μοντέλο μονάδας (10x10) και την έκοψαν σε δέκατα , εκατοστά, χιλιοστά και δεκάκις χιλιοστά. Σύγκριναν τα μεγέθη, έβγαλαν συμπεράσματα και έφτιαξαν ένα μοντέλο Μονάδας, δέκατου, εκατοστού και χιλιοστού τα οποία κολλήσαμε στην τάξη για να ανατρέχουν σε αυτά όταν το χρειάζονται.

Ελένη.Ι: «Όσο φεύγουμε από το κόμμα…μικραίνουν τα κομμάτια γίνονται ψειρούλια, μετά δεν θα τα βλέπουμε».

Προς το τέλος της παρουσίασης και της συζήτησης τα παιδιά έδειχναν να κουράστηκαν αλλά η ιδέα του παιχνιδιού που θα ακολουθούσε, ο «Κώδικας του Stevin», τον οποίο έπρεπε να ερευνήσουν και να χρησιμοποιήσουν κατά το παιχνίδι, τους ανέβασε τη διάθεση και ενίσχυσε την προσοχή τους. Όταν ήρθε η ώρα για το παιχνίδι τα παιδιά ήταν ενθουσιασμένα και μπήκαν αμέσως στο κλίμα. Υπήρχε μεγάλος ανταγωνισμός ανάμεσα στις ομάδες από την αρχή παρά την παρατήρηση ότι για να κερδίσουν θα πρέπει να συνεργαστούν όλες οι ομάδες μαζί και γενικώς επικρατούσε μεγάλη ένταση. Στον πίνακα έβλεπαν το ταμπλό του παιχνιδιού με τους σταθμούς των αποστολών και παρακολουθούσαν την πορεία της κάθε ομάδας. Κάθε ομάδα που έλυνε μια αποστολή σωστά, έπαιρνε την επόμενη και προχωρούσε το πιόνι της. Οι ομάδες δημιουργήθηκαν ώστε να είναι περίπου ισότιμες αλλά και με βάση τις προτιμήσεις των παιδιών. Οι ομάδες που σχηματίστηκαν ήταν: Α. Βασίλης και Ελένη. Μ, Β. Χρήστος και Κριστιάν, Γ. Βάσω και Πρόδρομος, Δ. Νίκος και Ελένη. Ι. Όλες οι ομάδες συνεργάστηκαν με συμμετοχή όλων των μελών εκτός από την ομάδα Α όπου ο Βασίλης ανέλαβε να απαντάει στις αποστολές του παιχνιδιού μέχρι την τέταρτη αποστολή και μετά από παρατήρηση συνέχισε η Ελένη.Μ στις υπόλοιπες και μάλιστα με επιτυχία αφού τερμάτισαν πρώτοι. Γενικότερα, επικράτησε ένταση σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού, οι ομάδες είχαν ανταγωνισμό για το ποια θα είναι πιο γρήγορη, στις πρώτες δοκιμασίες που αφορούσαν βασικές πληροφορίες για τον Simon Stevin και τον τρόπο γραφής των δεκαδικών, τα παιδιά απάντησαν σχετικά γρήγορα και σωστά αφού μόλις τα είχαμε συζητήσει κατά την παρουσίαση. Στη συνέχεια, όπου ακολούθησαν δοκιμασίες με αντιστοιχήσεις δεκαδικών του σημερινού συστήματος με αυτό της «Δεκάτης» και απλές πράξεις όπως ορίζεται στη «Δεκάτη», τα παιδιά έκαναν κάποια λάθη στη σωστή γραφή και τοποθέτηση των αριθμών τα οποία όμως διόρθωναν μόνοι τους με την παρατήρηση της εκπαιδευτικού ότι δεν είχε ολοκληρωθεί σωστά η αποστολή. Με την παρατήρηση αυτή, τα παιδιά έτρεχαν να βρούνε το λάθος τους και διόρθωνε ο ένας τον άλλο όπως ο Νίκος θέλοντας να διορθώσει τη Βάσω στην τέταρτη αποστολή:

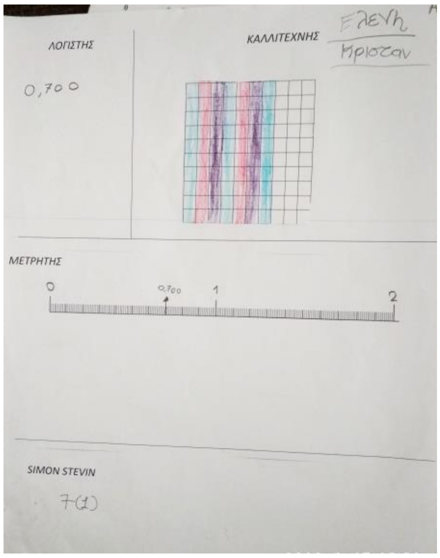
«Αυτά δεν είναι απαρχές πρέπει να το βάλουμε στα πρώτα, θέλουμε το άλλο κομμάτι με το 6 (1)»



Εικόνα 8: Κομμάτια παζλ από την αποστολή 4 ενωμένα με λανθασμένο τρόπο

Συνεχώς έλεγχαν το ταμπλό για να δούνε που βρίσκονται σε σχέση με τις άλλες ομάδες κι αν κάποια ομάδα πλησίαζε στο τέλος. Στην τελευταία δοκιμασία που απαιτούσε τη συνεργασία των ομάδων, τα παιδιά ήταν πολύ χαρούμενα που ολοκλήρωσαν τις αποστολές και τους άρεσε πολύ όταν είδαν να συμπληρώνονται, με τα κομμάτια παζλ που είχε η κάθε ομάδα, οι εικόνες του S. Stevin και του χάρτη της Μπρυζ (εικόνα του ταμπλό).

Εικόνα 9: Οι μαθητές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού ο «Κώδικας του S. Stevin*».*

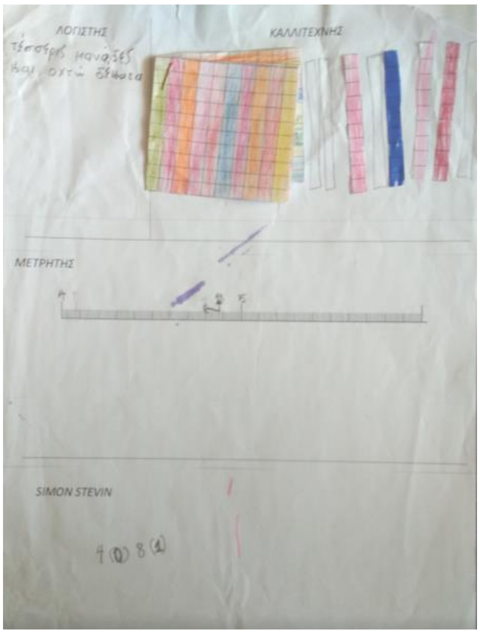


Εικόνα 10: Φύλλο εργασίας όπου συμπλήρωσαν τα παιδιά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις.

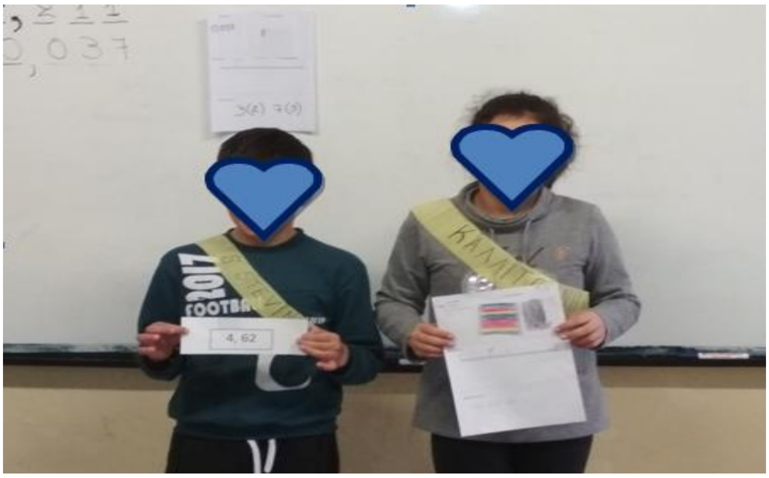
8.3.2 Δίωρο 2ο , *Παρασκευή 25 Ιανουαρίου 2019*

Στο δεύτερο δίωρο μοιράστηκαν στα παιδιά κάρτες με ονόματα αριθμών και υλικό για να σχηματίσουν τους αριθμούς αυτούς (τετράγωνα 10x10) και να τους αναπαραστήσουν με διάφορους τρόπους πάνω σε φύλλο εργασίας (Εικόνα 10) (με ζωγραφική (λωρίδες, κουτάκια κτλ), δεκαδική μορφή (κλάσμα και δεκαδικό), σύμφωνα με τη «Δεκάτη» και στην αριθμογραμμή) παίζοντας τους ρόλους του Καλλιτέχνη, του Λογιστή, του S. Stevin και του Μετρητή αντίστοιχα. Τα παιδιά βρήκαν τη δραστηριότητα ενδιαφέρουσα κι εύκολη καθώς δεν έκαναν λάθη στη διαδικασία συμπλήρωσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων παρά μόνο στη ζωγραφική όταν χρειάστηκαν επιπλέον τετράγωνα για να ζωγραφίσουν τον αριθμό τους, κάτι το οποίο λύθηκε άμεσα αλλά και στην αριθμογραμμή, όπου με λίγη καθοδήγηση για το τι μετρούν οι γραμμές στην αριθμογραμμή, κατάφεραν να τη χρησιμοποιήσουν σωστά. Μόνο ο Χρήστος δυσκολεύτηκε αρκετά δεν μπορούσε να συνδέσει τους αριθμούς με τις διαφορετικές τους αναπαραστάσεις, δεν ήθελε να συμμετέχει κι έτσι παρακολούθησε τον Κριστιάν που συνεργάστηκε με την Ελένη. Μ και τον Βασίλη, οι οποίοι συμπλήρωσαν δύο φύλλα εργασίας (Εικόνα 10 και 11). Όταν ρωτήθηκε για ποιο λόγο δεν ήθελε να συμμετέχει, η απάντησή του ήταν:

Χρήστος: «Δεν μου άρεσε αυτή η δραστηριότητα με τη χειροτεχνία….ήταν βαρετό»



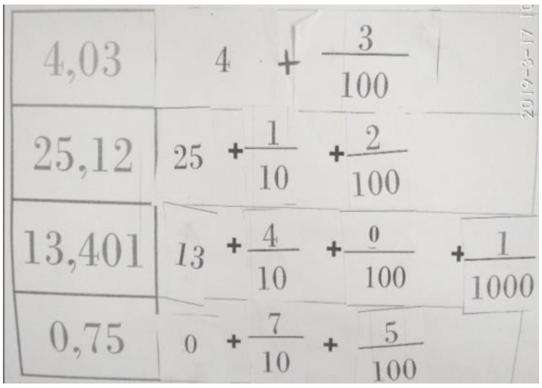
Εικόνα 11: Φύλλο εργασίας των Βασίλη, Ελένης.Μ και Κριστιάν με τον αριθμό 4,8 στη δραστηριότητα των αναπαραστάσεων



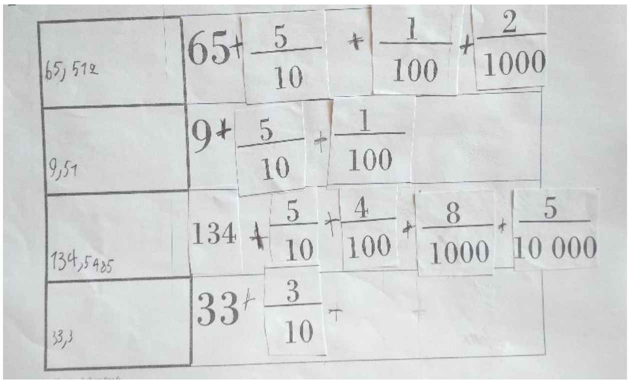
Εικόνα 12: Ο Πρόδρομος και η Βάσω παρουσιάζοντας τον αριθμό τους 4,62 στη δραστηριότητα των αναπαραστάσεων

Τα παιδιά παρουσίασαν τους αριθμούς τους, αναπαριστώντας τους ρόλους του Καλλιτέχνη, του Λογιστή, του S. Stevin και του Μετρητή και εξηγούσαν στους συμμαθητές τους πώς δούλεψαν με την ομάδα τους για τον αριθμό τους (Εικόνα 12).

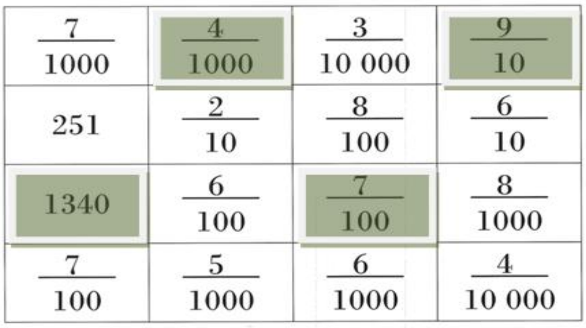
Έπειτα, τα παιδιά έπαιξαν το παιχνίδι «Εργοστάσιο δεκαδικών», πέρασαν και από τις τρεις φάσεις δραστηριοτήτων α) Έφτιαξαν τους δεκαδικούς που τους ζητήθηκαν, β) Συμπλήρωσαν τους δεκαδικούς με δικά τους ψηφία και έφτιαξαν τους δικούς τους δεκαδικούς, γ) Ετοίμασαν δεκαδικούς που έπρεπε να ανακαλύψουν οι άλλες ομάδες (με χρώματα έβαψαν κάποια δεκαδικά από την καρτέλα και οι άλλες ομάδες έπρεπε να βρούνε ποιος δεκαδικός είναι). Εδώ οι ομάδες ήταν: Α. Νίκος και Βάσω, Β. Βασίλης και Πρόδρομος, Γ. Ελένη. Ι και Κριστιάν και Δ. Χρήστος και Ελένη. Μ. Οι ομάδες εργάστηκαν με ευκολία μόλις κατάλαβαν τι έπρεπε να κάνουν, διόρθωναν μόνοι τους κάποια λάθη μέσα στην ομάδα, όπως να κολλήσουν τον λάθος αριθμό, χωρίς την παρέμβαση της εκπαιδευτικού και διασκέδασαν περισσότερο με την τρίτη δραστηριότητα όπου οι άλλες ομάδες μάντευαν τον αριθμό που χρωμάτισαν.



Εικόνα 13: Φύλλο εργασίας του Νίκου και της Βασιλικής από την πρώτη φάση του Εργοστασίου των δεκαδικών



Εικόνα 14: Φύλλο εργασίας του Βασίλη και του Πρόδρομου από τη δεύτερη φάση του Εργοστασίου των δεκαδικών



Εικόνα 15: Φύλλο εργασίας του Χρήστου και της Ελένης. Μ από την τρίτη φάση του Εργοστασίου των δεκαδικών για να ανακαλύψουν οι συμμαθητές τους ποιον αριθμό χρωμάτισαν (1340, 974)

8.2.3 Δίωρο 3^{o}, Παρασκευή 8 Φεβρουαρίου 2019

Αρχικά σε αυτό το μάθημα, στα παιδιά μοιράστηκαν δεκαδικοί σε διάφορες αναπαραστάσεις, τους οποίους αφού τους αναλύσαμε στον πίνακα, τους τοποθέτησαν στην μεγάλη αριθμογραμμή (που κολλήσαμε στο μήκος όλου του πίνακα). Βέβαια, το κομμάτι της σωστής τοποθέτησης των δεκαδικών ήταν αυτό που δυσκόλεψε τα παιδιά πάρα πολύ αφού τους έπαιρνε πολύ χρόνο για να αντιληφθούν πώς λειτουργεί η αριθμογραμμή και να μπορέσουν τελικά με βοήθεια από την εκπαιδευτικό να κολλήσουν τον αριθμό τους στη σωστή θέση (ηχογράφηση). Μέσα από τις συζητήσεις προέκυψε η απορία για την αξία του μηδενός στο τέλος των δεκαδικών και τα παιδιά αφού σύγκριναν αριθμούς όπως για παράδειγμα τους 3,5 και 3,500 τους οποίους τοποθετήσαμε τον έναν κάτω από τον άλλο σε πινακάκι, τα παιδιά παρατήρησαν ότι το ζεύγος των αριθμών είναι στην ουσία ο ίδιος αριθμός και κατέληξαν στον κανόνα ότι «τα μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού δεν έχουν αξία».

- Χρήστος: (τα μηδενικά) «Είναι σαν να μην έχουμε ούτε από τα κουτάκια (εκ.) ούτε από τις γραμμούλες (χιλ.) ούτε από κανένα άλλο ψειρούλι».

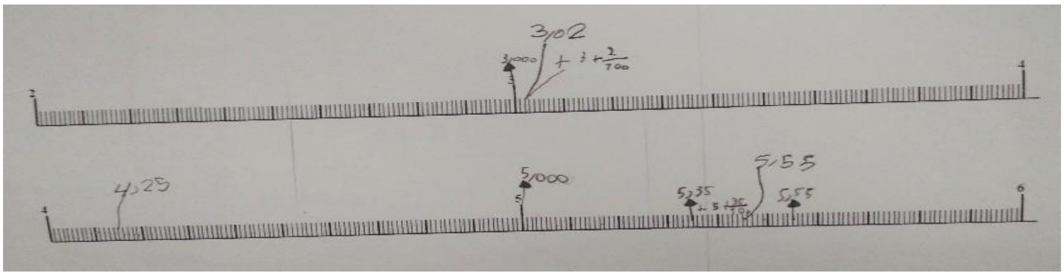
- Ελένη. Μ: ….μμμμμ άρα δεν έχουν σημασία.. μπορείς να βάλεις όσα θες!!!

Τα παιδιά κουράστηκαν με τη διαδικασία τοποθέτησης των δεκαδικών στην αριθμογραμμή που είχε αναρτηθεί στον πίνακα της τάξης, καθώς περίμεναν τη σειρά τους κι έχαναν το ενδιαφέρον τους κάποιες στιγμές με αποτέλεσμα να επαναλαμβάνουμε τα ίδια σχεδόν για τον καθένα και να δαπανούμε χρόνο. Για να αλλάξει αυτό το κλίμα ακολούθησε το παιχνίδι «Μπες στη σειρά», τα παιδιά έβαλαν στο καπέλο τους δεκαδικούς αριθμούς (εύκολους) και έπρεπε να μπούνε στη σειρά ανάλογα με τους αριθμούς που ήταν δίπλα τους. Η πρώτη αυτή φάση ολοκληρώθηκε με επιτυχία αφού τα παιδιά δεν έκαναν κανένα λάθος και ήταν πολύ χαρούμενα με το παιχνίδι. Στη δεύτερη φάση έβαλαν στα καπέλα τους πιο δύσκολους αριθμούς και δεκαδικά κλάσματα και ακολούθησαν την ίδια διαδικασία. Εδώ υπήρχαν κάποια λάθη που διορθώθηκαν ομαδικά, για παράδειγμα (από βιντεοσκόπηση του παιχνιδιού):

Ο Βασίλης αλλάζει θέση στον Πρόδρομο: «Εσύ (602/10) είσαι πιο μεγάλος από μένα (55/100), εγώ δεν έχω ούτε μια μονάδα!

Εικόνα 16 : Τα παιδιά κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού «Μπες στη σειρά». Βλέπουμε στα δεξιά 2 μαθητές να στέκονται πίσω από 2 άλλους κι αυτό συμβαίνει επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό σε διαφορετική αναπαράσταση.

Στη συνέχεια έπαιξαν το «Παιχνίδι των αριθμογραμμών» στο οποίο δύο ομάδες (Νίκος-Βάσω, Βασίλης-Πρόδρομος) το ολοκλήρωσαν γρήγορα και πήραν και έξτρα αριθμούς για να τοποθετήσουν στις αριθμογραμμές ενώ μια ομάδα (Ελένη.Ι και Κριστιάν) το ολοκλήρωσε με επιτυχία αλλά με μικρά λάθη όπως να μετρούν τα εκατοστά για δέκατα, τα οποία τους επισημάνθηκαν και τα διόρθωσαν. Μονάχα μια ομάδα στην αρχή δεν συνεργάστηκαν τα μέλη της (Ελένη.Μ και Χρήστος) κι έτσι έχασαν χρόνο και δεν πρόλαβαν να ολοκληρώσουν τη δραστηριότητα.



Εικόνα 17: Φύλλο εργασίας των Βασίλη και Πρόδρομου όπου τοποθέτησαν δεκαδικούς στη δραστηριότητα με τις αριθμογραμμές

8.2.4 Δίωρο 4^{ο}, Παρασκευή 15 Φεβρουαρίου 2019

Η ώρα της μεζούρας και της μέτρησης, «Ας ανα…μετρηθούμε», τα παιδιά πήραν το καθένα από μια μεζούρα και με την ομάδα τους μέτρησαν το ύψος τους αλλά και διάφορα μήκη από μέλη του σώματός τους (π.χ. χέρι, μύτη, αυτί), τα διάφορα μήκη τα κατέγραφαν σε ένα φύλλο, μια διαδικασία την οποία απόλαυσαν πραγματικά αφού ρωτούσαν ο ένας τον άλλο για παράδειγμα τι μήκος έχει το αυτί του και έδιναν ιδέες η μία ομάδα στην άλλη για να μετρήσει. Επιπλέον, ρωτούσαν την εκπαιδευτικό αν μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα χιλιοστά για πιο ακριβείς μετρήσεις και ήθελαν να είναι ακριβείς για τις συγκρίσεις. Έπειτα, έγινε σύνδεση με ένα προηγούμενο μάθημα της Μελέτης Περιβάλλοντος όπου είχαμε μιλήσει για διάφορα αθλήματα και αθλητές και χρησιμοποίησαν τα όσα είχαν συζητηθεί (για τα χαρακτηριστικά των αθλητών) για τα συγκρίνουν με τις δικές τους μετρήσεις. Διαβάσαμε όλοι μαζί στο διαδίκτυο πληροφορίες για τους αγαπημένους τους αθλητές (π.χ. Πετρούνιας, Κορακάκη) και βάλαμε τα ύψη όλων μας και των αθλητών στην αριθμογραμμή.

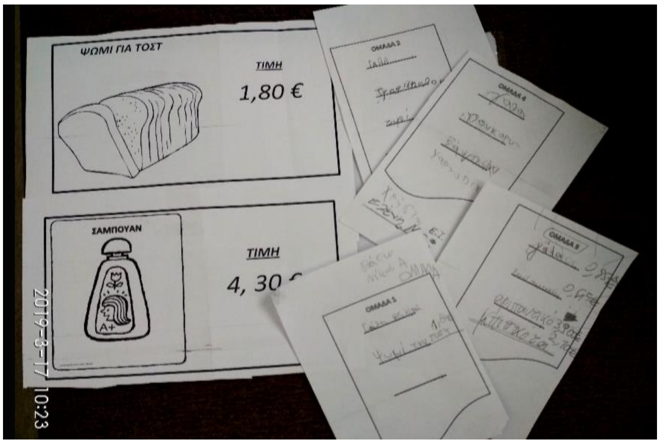
Ακολούθησε το παιχνίδι «Μάχη», κατά το οποίο τα παιδιά μοιράζονται κάρτες και κάθε φορά κατεβάζουν μία και τη συγκρίνουν με αυτή του αντιπάλου (εδώ οι κάρτες περιείχαν δεκαδικούς αριθμούς σε διαφορετικές αναπαραστάσεις), στην αρχή έπαιξαν το παιχνίδι τα μέλη των ομάδων όπου δυσκολεύονταν συχνά να βρούνε ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος και ζητούσαν τη βοήθεια της εκπαιδευτικού για να αποφασίσουν όπως για παράδειγμα στη σύγκριση που έτυχε ανάμεσα στον 1 δεκάδα, 15 εκατοστά και στον 1024 εκατοστά όπου ο Χρήστος με την Ελένη.Μ δεν μπορούσαν να αποφασίσουν ποιος κερδίζει, μετά από τη μετατροπή που έκαναν όπως τους συμβούλευσε η εκπαιδευτικός, επέλεξαν να μετατρέψουν τη δεκάδα σε 1000 εκατοστά κι έτσι αποφάσισαν πως κερδίζει ο Χρήστος με τον 1024 εκατοστά. Στη συνέχεια, έπαιξαν το παιχνίδι οι ομάδες αντίπαλες κι εκεί δημιουργήθηκε διδακτικός θόρυβος χωρίς προηγούμενο, τα παιδιά παθιάστηκαν και κάποιες φορές έκρυβαν τις κάρτες με μεγάλους δεκαδικούς, με τους οποίους είχαν κερδίσει προηγουμένως, για να τις ξαναπαίξουν και να κερδίσουν κι άλλες κάρτες από τον αντίπαλο όπως με τον 10,15 ή τον 1024 εκατοστά. Όταν αποκαλύφθηκε αυτή η διπλή χρήση της ίδιας κάρτας στο ίδιο παιχνίδι, τα παιδιά άρχισαν να μαλώνουν μεταξύ τους και να κατηγορούν ο ένας τον άλλο, μία κατάσταση η οποία ήρθε σε ηρεμία μετά από πρόταση των παιδιών να σημειώνουν με μια χρωματιστή βούλα την κάθε κάρτα που έχει χρησιμοποιηθεί αφού η υπόσχεση ότι δεν θα επαναληφθεί η διπλή χρήση κάρτας δεν ήταν ικανό επιχείρημα.

1 δεκάδα 15 εκατοστά	**1 δεκάδα 1 δέκατο 5 εκατοστά**	**10 μονάδες 15 εκατοστά**
10,15	**1 μονάδα 358 χιλιοστά**	**1 μονάδα 3 δέκατα 5 εκατοστά 8 χιλιοστά**

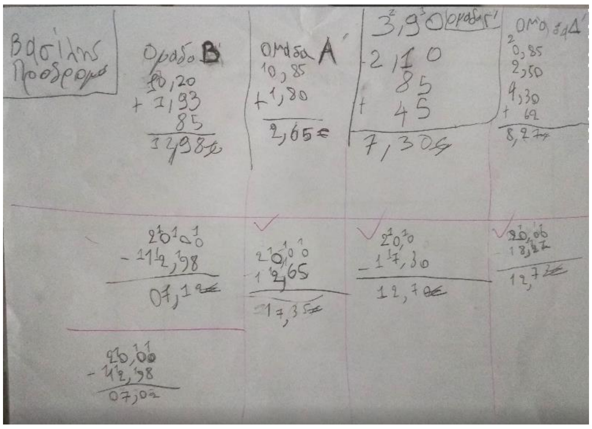
Εικόνα 18: Έξι κάρτες του παιχνιδιού «Μάχη», συγκρίνονται κάθε φορά ανά δύο, ανάλογα πως τις χρησιμοποιούν οι παίκτες

8.2.5 Δίωρο 5^{ο} , Δευτέρα 18 Φεβρουαρίου 2019

Στο τελευταίο δίωρο αφού δόθηκαν εξηγήσεις στα παιδιά για τον σκοπό του παιχνιδιού «Μυστική τιμή», να μαντέψουν δηλαδή την τιμή του κάθε προϊόντος που θα έβλεπαν στις εικόνες, μέσα από ερωτήσεις, για να το γράψουν στη λίστα τους. Όποια ομάδα συμπλήρωνε πρώτη τη λίστα της θα ήταν και η νικήτρια. Τα παιδιά έκαναν ερωτήσεις για να βρούνε την κάθε τιμή όπως «Κοστίζει πάνω από 5 ευρώ;», «Χρειαζόμαστε χάλκινα νομίσματα για αυτή την τιμή;» ή «Κοστίζει κάτω από 2,40 ευρώ;». Όποια ομάδα έβρισκε την ακριβή τιμή, έγραφε το προϊόν στη λίστα της αλλά και κάθε ομάδα ζωγράφιζε τα νομίσματα που θα χρειάζονταν για να αγοράσουν το προϊόν (Εικόνες 19 και 21).

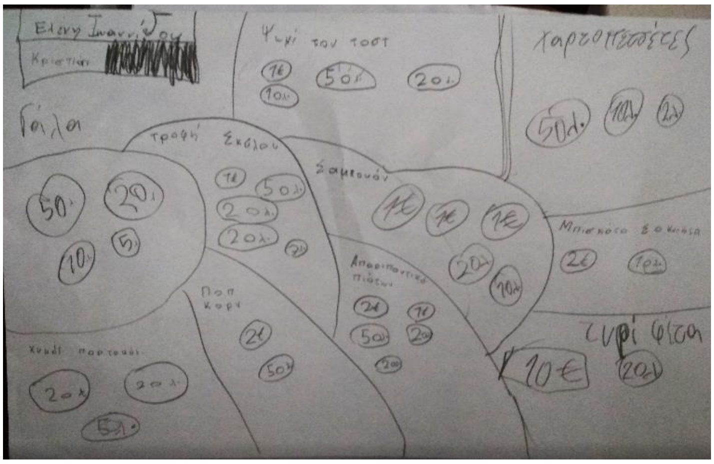


Εικόνα 19: Κάρτες δύο προϊόντων και οι λίστες των ομάδων με τα προϊόντα που κατάφεραν να βρούνε



Εικόνα 20: Φύλλο εργασίας των Βασίλη και Πρόδρομου με τους υπολογισμούς των προϊόντων

Η διαδικασία όπου έπρεπε να μαντεύουν τις τιμές, τους άρεσε πολύ και έβρισκαν όλο και πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις ώστε να βρίσκουν πιο εύκολα την τιμή όπως για παράδειγμα στο γάλα μισού λίτρου (0,85 €) όπου η Ελένη. Μ ρώτησε «Κοστίζει πάνω από ένα ευρώ;» και αμέσως ακολούθησαν οι ερωτήσεις «Κοστίζει πάνω από 75 λεπτά;» από τη Βάσω και «Θα μας ήταν χρήσιμο το νόμισμα των 5 λεπτών;» από τον Πρόδρομο. Κέρδισε η ομάδα Δ (Ελένη. Μ και Χρήστος), ακολούθησαν η ομάδα Γ (Ελένη. Ι και Κριστιάν), η ομάδα Β (Πρόδρομος και Βασίλης) και τελευταία η ομάδα Α (Βάσω και Νίκος). Έπειτα τα παιδιά υπολόγισαν το κόστος της λίστας τους αλλά και των άλλων ομάδων για επαλήθευση (Εικόνα 20).



Εικόνα 21: Φύλλο εργασίας των Ελένη.Ι και Κριστιάν όπου ζωγράφισαν τα νομίσματα που θα χρειάζονταν για κάθε προϊόν

Στο τέλος ζητήθηκε από τους μαθητές να βρούνε τα ρέστα που θα πάρουν από είκοσι ευρώ αφού είχαν βρει το σύνολο της λίστας τους. Κατά τη διάρκεια της αφαίρεσης, προέκυψε το ερώτημα από τη Βάσω για το πώς θα τοποθετούσαν τους αριθμούς και τι θα γινόταν με το 20 που δεν έχει δεκαδικό μέρος (στην πράξη 20 - 3,65), η απάντηση ήρθε από τον συνεργάτη της τον Νίκο ο οποίος σηκώθηκε στον πίνακα και έδειξε στα παιδιά, αυτό που είχαμε συζητήσει σε προηγούμενο μάθημα για τα επιπλέον μηδενικά στο τέλος των δεκαδικών, γράφοντας την πράξη ως 20,00 – 3,65 και με αυτή την υπενθύμιση, τα παιδιά προχώρησαν με ευκολία και τις δικές τους αφαιρέσεις.

Στο τέλος, έπαιξαν το κλασικό παιχνίδι Bingo (Μπίνγκο) αλλά με δεκαδικούς, τους άρεσε πάρα πολύ και το διασκέδασαν. Το βρήκαν εύκολο να αναγνωρίζουν τους αριθμούς που εμφανίζονταν και έπρεπε να βρούνε στην καρτέλα τους. Το συγκεκριμένο παιχνίδι ζητούσαν να το ξαναπαίξουν από τη στιγμή που πλησίαζαν προς το τέλος, πριν να το ολοκληρώσουν για πρώτη φορά.

8.3.6 Πάρτι των δεκαδικών μασκοφόρων (μια ιδέα των παιδιών), Παρασκευή 22 Φεβρουαρίου 2019

Καθώς ήταν η εποχή της αποκριάς, τα παιδιά επηρεασμένα από τις διδασκαλίες για τους δεκαδικούς, όταν έφτιαξαν αποκριάτικες μάσκες, σκέφτηκαν να βάλουν στις μάσκες τους, έναν δεκαδικό με όποια μορφή - αναπαράσταση ήθελαν με στόχο οι συμμαθητές τους να αποκωδικοποιήσουν ποιον αριθμό διάλεξαν (βιντεοσκόπηση). Οι περισσότεροι, διάλεξαν τη μορφή του καλλιτέχνη και του S.Stevin (κανένας αριθμογραμμή ή κλάσμα). Την ημέρα εκείνη, σχημάτισαν ζευγάρια και βιντεοσκοπήθηκε η διαδικασία της ανακάλυψης των δεκαδικών στις μάσκες όπου και παρατηρήθηκαν λάθη στις ονομασίες των δεκαδικών όσο αφορά την αξία θέσης τους όπως για παράδειγμα στο ζευγάρι Βασίλης – Χρήστος:

Βασίλης: Το νούμερό μου είναι τρεις μονάδες…..δύο δεκάδες και δύο εκατοστά

Εκπαιδευτικός: Είσαι σίγουρος; Για να το πούμε άλλη μία φορά..

Βασίλης: Είμαι τρεις μονάδες….δύο δεκάδες…

Εκπαιδευτικός: Πάλι λες δεκάδες………πώς λέγονται αυτά που ζωγράφισες;

Βασίλης: Αααααα…..τρεις μονάδες και δύο δέκατα και δύο εκατοστά!

όπως και από τη μορφή του S.Stevin όπου μπέρδεψαν τις απαρχές υπολογίζοντας τις για δέκατα αντί για Μονάδες. Αξίζει να σημειωθεί ότι διάβαζαν τα νούμερα αναλυτικά και τα έλεγαν μετά με τη μορφή του λογιστή (π. χ 3 Μ και 34 εκ. δηλαδή 3 κόμμα 34).

8.2.7 Συμπεράσματα από τη διδασκαλία

Από την αρχή της διδασκαλίας, τα παιδιά έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για ό, τι καινούριο συνέβαινε στο μάθημα των μαθηματικών, το οποίο κάποιοι μαθητές το αγαπούσαν ιδιαιτέρως (όπως ο Κριστιάν, ο Νίκος και ο Πρόδρομος) και κάποιοι δυσκολεύονταν αρκετά και τους άγχωνε (όπως η Ελένη. Μ και ο Χρήστος). Η αρχή έγινε με την ιστορία των δεκαδικών και το δημιουργό τους S. Stevin με το έργο του «Δεκάτη», στα οποία οι μαθητές συμμετείχαν με έντονο ενδιαφέρον, ειδικά όταν έφτασε η ώρα του παιχνιδιού ο «Κώδικας του S.Stevin». Τα παιδιά ήταν πολύ χαρούμενα και ενθουσιασμένα κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού αλλά περισσότερο στην τελευταία αποστολή που συνεργάστηκαν για να συνδέσουν σωστά τα κομμάτια των παζλ που είχε η κάθε ομάδα.

Στη «Δεκάτη» και τον τρόπο αναπαράστασης των δεκαδικών σε αυτή, οι μαθητές κατάλαβαν εξ αρχής πώς λειτουργεί το σύστημα του S.Stevin και χρησιμοποιούσαν τη μορφή αυτή σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασής μας ως μια ακόμα αναπαράσταση. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι στη διάρκεια της διδασκαλίας μας τα παιδιά προσαρμόζονταν πολύ γρήγορα στα νέα δεδομένα που ανακάλυπταν, όπως για παράδειγμα τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, τις οποίες διαχειρίστηκαν άμεσα και είχαν τη δυνατότητα να τις αναπαράγουν και να περνούν από τη μία μορφή στην άλλη από το δεύτερο κιόλας δίωρο, όπου έκαναν εξάσκηση για πρώτη φορά. Όσο αφορά την κατανόηση της αριθμογραμμής, στο δεύτερο δίωρο τη συνάντησαν ως αναπαράσταση, στο τρίτο και τέταρτο δίωρο τη διαχειρίστηκαν μέσα από την τοποθέτηση δεκαδικών αριθμών σε αυτή. Τα παιδιά στην αρχή μπερδεύτηκαν όμως γρήγορα μπόρεσαν να τοποθετήσουν σωστά τους δεκαδικούς και στο «Παιχνίδι των αριθμογραμμών» χρειάστηκαν πολύ λίγες διορθώσεις, όπως συνέβη και στη δραστηριότητα με τα ύψη των παιδιών και των αθλητών στο τέταρτο δίωρο, κάτι που θα μπορούσε να σχολιαστεί ως ένα πολύ θετικό σημάδι αφού η αριθμογραμμή αποτελεί ένα σημείο δυσνόητο για τα παιδιά.

Στη σύγκριση και διάταξη των δεκαδικών τα παιδιά αντιμετώπισαν μικρές δυσκολίες τις οποίες και έλυναν ομαδικά στο παιχνίδι «Μπες στη σειρά», που έπαιξαν στο τρίτο δίωρο, χωρίς καμία βοήθεια από την εκπαιδευτικό ενώ στο παιχνίδι η «Μάχη» το οποίο έπαιξαν στο τέταρτο δίωρο, οι μαθητές ζητούσαν, ειδικά στην αρχή, συνεχώς τη βοήθεια της εκπαιδευτικού για να αποφασίσουν ποιος αριθμός ήταν μεγαλύτερος. Με βοήθεια και κάποιες εξηγήσεις που δόθηκαν στις ομάδες, το παιχνίδι συνεχίστηκε και ολοκληρώθηκε με επιτυχία αν και δημιούργησε μεγάλο ανταγωνισμό στις ομάδες και κάποιοι μαθητές προσπαθούσαν να κρύψουν τις κάρτες με τους μεγαλύτερους δεκαδικούς με σκοπό να τις χρησιμοποιήσουν ξανά και ξανά για να κερδίσουν περισσότερες κάρτες από τους αντιπάλους τους.

Στο πέμπτο δίωρο, τα παιδιά ασχολήθηκαν με το παιχνίδι «Μυστική τιμή» όπου είχαν να διαχειριστούν τιμές του ευρώ για προϊόντα που χρησιμοποιούν στο σπίτι τους, στην καθημερινότητά τους και οι απαντήσεις-μαντεψιές τους ήταν σε κάθε περίπτωση λογικές και σε προϊόντα όπως για παράδειγμα τα μπισκότα έβρισκαν πολύ γρήγορα με δύο το πολύ ερωτήσεις την ακριβή τιμή. Στις πράξεις που έκαναν προσθέτοντας τις τιμές των προϊόντων της λίστας τους και βρίσκοντας τα ρέστα από νόμισμα των είκοσι ευρώ, τα παιδιά έκαναν κάποια λάθη κυρίως στην αφαίρεση όπου χρειαζόταν να τοποθετήσουν σωστά τους δεκαδικούς αριθμούς που είχαν βρει κάτω από το είκοσι, το οποίο στην αρχή τους μπέρδεψε αλλά με μια υπενθύμιση του κανόνα τα παιδιά προχώρησαν στις αφαιρέσεις παρόλο που έγιναν κάποια λάθη όπως ο μη υπολογισμός των κρατουμένων. Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε ότι οι πράξεις των δεκαδικών ήταν από τα εύκολα σημεία όπου τα παιδιά αντεπεξήλθαν κατά την παρέμβασή μας.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας μας ασχολήθηκαν σε διαφορετικές δραστηριότητες με τον τρόπο έκφρασης των δεκαδικών που αναφέρεται στη «Δεκάτη», το έργο του S. Stevin, και είχαν επηρεαστεί αρκετά και ζητούσαν να ξαναπαίξουν το παιχνίδι και ανέφεραν συχνά το όνομα του S. Stevin. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι πρότειναν να κάνουμε «το πάρτι των δεκαδικών μασκοφόρων», όπως το ονόμασαν, δηλαδή να φτιάξουν μάσκες όπου ο καθένας να γράψει επάνω στη μάσκα του έναν δεκαδικό σε όποια αναπαράσταση ήθελε και να μαντεύουν οι συμμαθητές του τον δεκαδικό αριθμό που έχει επιλέξει. Η ιδέα αυτή των παιδιών αποτέλεσε μεγάλη και ευχάριστη έκπληξη αφού δείχνει ότι η επιλογή της ιστορίας των δεκαδικών στη διδασκαλία μας ενδιέφερε τα παιδιά και τα κινητοποίησε να δημιουργήσουν μια δική τους παιγνιώδη δραστηριότητα. Όσο αφορά την επίδοσή τους στη δραστηριότητα αυτή, παρατηρήθηκαν αρκετά λάθη στην ονοματολογία των δεκαδικών, τα οποία διόρθωναν τα παιδιά μετά από την επισήμανση ότι έχει γίνει κάποιο λάθος σε αυτό που είπαν ή και επανάληψη της φράσης που χρησιμοποίησαν για να καταλάβουν που βρισκόταν το λάθος τους και να το διορθώσουν μόνοι τους.

Εικόνα 22: Βάσω και Κριστιάν ως μασκοφόροι με αναπαράσταση του S. Stevin και του ζωγράφου αντίστοιχα.

8.3 POST TEST

8.3.1 Ασκήσεις

Ακολούθησε η δημιουργία ενός διαγνωστικού τεστ (post test) για τον έλεγχο του επιπέδου γνώσεων των μαθητών μας μετά τη διδασκαλία μας και την ύπαρξη πιθανών παρανοήσεων οι οποίες ανθίστανται. Το post test (Παράρτημα σελ 43) έλαβε χώρα περίπου μια εβδομάδα μετά το πέρας της διδασκαλίας (τον Μάρτιο του 2019) και έγινε ατομικά, σε συνδυασμό με συνέντευξη όπου ζητήθηκε η γνώμη των παιδιών για τις δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στη διδασκαλία μας. Τα δεδομένα αναλύθηκαν και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Στην πρώτη άσκηση, τα παιδιά κλήθηκαν να συγκρίνουν διάφορα ζεύγη δεκαδικών, στη σύγκριση των οποίων ανταποκρίθηκαν σωστά σε κάθε ένα όλοι οι μαθητές. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνονταν περιπτώσεις όπου έπρεπε να συμπληρώσουν το σωστό σύμβολο σύγκρισης (>,<, =) όπως για παράδειγμα το ερώτημα Α. 0,8 ….. 0,655 όπου ελέγχεται η παρανόηση που αφορά το μέγεθος των δεκαδικών ψηφίων, το ερώτημα Δ. 0,09 ….. 0,90 όπου ελέγχεται η παρανόηση που σχετίζεται με τον ρόλο του μηδενός αλλά και ερωτήματα όπως το Ζ. 25/100 ….. 2,5 όπου ελέγχεται η παρανόηση στις μετατροπές.

Στη δεύτερη άσκηση τα παιδιά χρειάστηκε να γράψουν κάθετα και να λύσουν δύο προσθέσεις (με άνισο αριθμό ακέραιων και δεκαδικών ψηφίων) και δύο αφαιρέσεις (με άνισο αριθμό ακέραιων ή δεκαδικών ψηφίων) για να ελεγχθεί εάν θα τοποθετήσουν σωστά τους αριθμούς για τις πράξεις και αν θα χρησιμοποιήσουν βοηθητικά μηδενικά όπου χρειάζεται. Στις πράξεις όλοι οι μαθητές κατάφεραν να τις λύσουν σωστά εκτός από την περίπτωση όπου ο Πρόδρομος ενώ τοποθέτησε σωστά τους αριθμούς στη δεύτερη πρόσθεση (Β. 6,75 + 12,9), ξέχασε να υπολογίσει το κρατούμενο στις Μονάδες και δεν βρήκε το σωστό αποτέλεσμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές έκαναν χρήση των βοηθητικών μηδενικών για τη διευκόλυνση των πράξεων εκτός από τον Κριστιάν και την Ελένη. Μ οι οποίοι δεν χρησιμοποίησαν σε καμία πράξη βοηθητικά μηδενικά.

Η τρίτη άσκηση περιλάμβανε έναν πίνακα με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις με τις οποίες ήρθαν σε επαφή οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των δεκαδικών (του Λογιστή (δεκαδικός αριθμός και δεκαδικό κλάσμα), του Μετρητή (αριθμογραμμή), του S. Stevin (από το έργο του «Δεκάτη») και του Καλλιτέχνη (ζωγραφική)), τον οποίο οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν. Ο πίνακας αυτός αποτελείται από πέντε στήλες (τις πέντε διαφορετικές αναπαραστάσεις) και πέντε γραμμές με ένα παράδειγμα και τέσσερις γραμμές με δεκαδικούς σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, με ζητούμενο να συμπληρώσουν τα παιδιά τις αναπαραστάσεις που λείπουν σε κάθε γραμμή. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι χαμηλότερες επιδόσεις των μαθητών στις μετατροπές για το πέρασμα από τη μία μορφή των δεκαδικών σε άλλη.

Πίνακας 4: Μετατροπές όπου παρουσιάστηκαν τα περισσότερα λάθη στην Άσκηση 3 του post test

Μετατροπή από δεκαδικό κλάσμα σε μορφή S. Stevin	*3 από τους 8 μαθητές*
Μετατροπή από αριθμογραμμή σε μορφή S. Stevin	*3 από τους 8 μαθητές*
Μετατροπή από δεκαδικό αριθμό σε αριθμογραμμή	*4 από τους 8 μαθητές*
Μετατροπή από δεκαδικό αριθμό σε μορφή S. Stevin	*5 από τους 8 μαθητές*

Στο ερώτημα Α, τα παιδιά ξεκινούν με δεδομένο το δεκαδικό κλάσμα 35/100 για να συμπληρώσουν τις άλλες αναπαραστάσεις και όπως δείχνουν τα αποτελέσματα με αρκετά λάθη στη μορφή της Δεκάτης και μεμονωμένα λάθη στις υπόλοιπες αναπαραστάσεις. Στο ερώτημα Β υπάρχει ο αριθμός 0,035, όπου κατά τη συμπλήρωση τα παιδιά δυσκολεύτηκαν στην αριθμογραμμή και στη μορφή της Δεκάτης. Στο ερώτημα Γ από το 0,2 που ήταν σημειωμένο στην αριθμογραμμή, τα παιδιά περνώντας στις υπόλοιπες αναπαραστάσεις έκαναν ο καθένας κάποιο μεμονωμένο λάθος αλλά σε διαφορετικά σημεία, όπως για παράδειγμα ο Κριστιάν που ενώ ζωγράφισε σωστά δύο δέκατα και στη μορφή της «Δεκάτης» 2(1) στο κλάσμα έγραψε 2/100 και στον δεκαδικό 0,02. Στο Δ ερώτημα όπου ήταν σκιασμένος στο πλέγμα ο αριθμός 0,15 τα παιδιά ανταποκρίθηκαν στο πέρασμα στις άλλες μορφές εκτός από δύο περιπτώσεις μαθητών που παρερμήνευσαν τον αριθμό και έτσι όλες οι μετατροπές καταγράφηκαν ως λανθασμένες παρόλο που κάποιες είχαν αντιστοιχία μεταξύ τους. Για παράδειγμα η Ελένη. Μ ερμήνευσε το σκιασμένο μέρος του πλέγματος ως 0,105 αντί για 0,15 και συμπλήρωσε σωστά τα 105 χιλ. σε όλες τις υπόλοιπες μορφές αντίθετα ο Χρήστος που το ερμήνευσε ως 1,5 έγραψε το δεκαδικό κλάσμα 15/10 μόνο σε αντιστοιχία, χωρίς να συμπληρώσει σωστά ούτε την αριθμογραμμή ούτε τη μορφή της Δεκάτης. Στις περιπτώσεις όπου χρειάστηκε να συμπληρώσουν τον δεκαδικό αριθμό (Άσκηση 3 ερωτήματα Α, Γ και Δ στη μορφή του Λογιστή – δεκαδικού αριθμού) παρουσιάστηκαν τέσσερα λάθη, η Ελένη. Μ έκανε λάθος στα ερωτήματα Α και Δ, ο Κριστιάν στο Γ και ο Χρήστος στο Δ. Στα ερωτήματα όπου έπρεπε να συμπληρώσουν το δεκαδικό κλάσμα (Άσκηση 3 ερωτήματα Β, Γ, Δ στη μορφή του κλάσματος), έγιναν τρία λάθη, ο Κριστιάν έκανε λάθος στο ερώτημα Γ και η Ελένη. Μ με τον Χρήστο στο ερώτημα Δ. Στις αριθμογραμμές, (Άσκηση 3, ερωτήματα Α, Β, Δ στη μορφή του Μετρητή – αριθμογραμμή), βρέθηκαν πέντε λάθη, ο Χρήστος μπερδεύτηκε στα Α, Β και Δ ερωτήματα ενώ η Ελένη. Μ στα ερωτήματα Β και Δ. Το ερώτημα Β στη μορφή του Μετρητή, όπου έπρεπε να τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή τον αριθμό 0,035, φαίνεται να παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυσκολία καθώς δεν το απάντησαν σωστά τα μισά παιδιά. Στη μορφή της Δεκάτης του S. Stevin (Άσκηση 3, ερωτήματα Α, Β, Γ, Δ), ο Βασίλης, η Ελένη. Μ και ο Χρήστος δεν θυμόντουσαν καθόλου τη μορφή αυτή όπως δήλωσαν και δεν μπορούσαν να συμπληρώσουν καθόλου τη στήλη αυτή. Αντιθέτως, η Βάσω, ο Νίκος και ο Πρόδρομος απάντησαν σε όλα με ευκολία όπως και η Ελένη. Ι με τον Κριστιάν αν και έκαναν το ίδιο λάθος στο ερώτημα Β, στον 0,035 = 3 (1) 5 (2) αντί για 3(2) 5(3). Όσο αφορά το κομμάτι της απεικόνισης μέσα από τη ζωγραφική στο πλέγμα όπως φαίνεται στα ερωτήματα Α, Β και Γ, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν υψηλά εκτός από τις δύο περιπτώσεις, του Χρήστου στο ερώτημα Β όπου ζωγράφισε 35 εκατοστά αντί για 35 χιλιοστά και της Ελένης. Ι στο ερώτημα Γ που ζωγράφισε 2 εκατοστά αντί για 2 δέκατα.

8.3.2 Συμπεράσματα από τις ασκήσεις του post test

Οι επιδόσεις των παιδιών στις ασκήσεις του post test ήταν σε γενικές γραμμές αρκετά ικανοποιητικές. Πιο αναλυτικά, όλα τα παιδιά κατάφεραν να διαχειριστούν με απόλυτη επιτυχία τους δεκαδικούς στις συγκρίσεις στα διαφορετικά ερωτήματα της πρώτης άσκησης, με αποτέλεσμα να μη διαφαίνεται καμία παρανόηση όσο αφορά το μέγεθος των δεκαδικών και τον ρόλο του μηδενός. Στη δεύτερη άσκηση, με τις προσθέσεις και αφαιρέσεις των δεκαδικών, όλα τα παιδιά έλυσαν σχεδόν όλες τις πράξεις σωστά, εκτός από ένα μικρό λάθος ενός μαθητή στον υπολογισμό του κρατούμενου στη δεύτερη πρόσθεση, κάτι όμως που δεν αξιολογείται ως σημαντικό για την παρουσία παρανόησης στις πράξεις των δεκαδικών καθώς το κρατούμενο αποτελεί γενικότερα ζητούμενο στην εκτέλεση πράξεων και με ακεραίους. Όσο αφορά τις αναπαραστάσεις των δεκαδικών στις οποίες εξασκήθηκαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μας και ελέγχθηκαν στην τρίτη άσκηση του post test, εδώ φανερώθηκαν κάποιες αδυναμίες των παιδιών στις μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη. Τα χαμηλότερα ποσοστά παρατηρούνται στις αριθμογραμμές και ειδικά όταν έπρεπε να τοποθετήσουν σε αυτή χιλιοστά (3ΒΜ - 0,035) όπως επίσης και στη μορφή της Δεκάτης την οποία όπως ανέφεραν συγκεκριμένοι μαθητές (Βασίλης, Ελένη. Μ και Χρήστος) δεν θυμόντουσαν ακριβώς πώς να τη σχηματίσουν. Η μορφή της «Δεκάτης» η οποία αξιοποιήθηκε στη διδασκαλία μας ως κομμάτι της ιστορίας των δεκαδικών και προστέθηκε στις δραστηριότητές μας ως μια ακόμη αναπαράσταση, είχε ως σκοπό την επαφή των παιδιών με την ιστορία των δεκαδικών και δεν αποτέλεσε στοιχείο για την βαθύτερη κατανόηση των δεκαδικών. Με τη λογική αυτή, η μορφή της «Δεκάτης» συμπεριλήφθηκε στο post test για να αξιολογηθεί εάν έμεινε κάτι στους μαθητές από αυτή, ως στοιχείο της ιστορίας των δεκαδικών. Οι υψηλές επιδόσεις των πέντε μαθητών συγκριτικά με τις σχετικά χαμηλές επιδόσεις των τριών παιδιών, στο να αποδώσουν τους δεδομένους αριθμούς στην άσκηση τρία στη μορφή της «Δεκάτης» μας φανερώνει ότι η ιστορία των μαθηματικών στην παρέμβασή μας είχε θετική επιρροή στα παιδιά. Ως κάτι εντελώς καινούριο, για το οποίο αφιερώθηκαν λίγες ώρες εξάσκησης, είναι πραγματικά αισιόδοξο το γεγονός ότι τα παιδιά διαχειρίστηκαν την αναπαράσταση αυτή ικανοποιητικά. Τα υπόλοιπα λάθη που έγιναν στην τρίτη άσκηση δεν ήταν συστηματικά παρόλα αυτά μας δείχνουν τη δυσκολία της μορφής και έκφρασης των δεκαδικών αριθμών (π.χ Ni & Zhou, 2005, Steinle & Stacey, 2004, Vamvakoussi & Vosniadou, 2010) και δημιουργούν πιθανές υποψίες για την ύπαρξη παρανόησης όσο αφορά την αριθμογραμμή, μονάχα όμως στην περίπτωση του Χρήστου, λόγω της αδυναμίας του να διαχειριστεί την αναπαράσταση αυτή στις τρεις από τις τέσσερις περιπτώσεις αριθμών της τρίτης άσκησης, αν και όταν έπρεπε να την αποκωδικοποιήσει στην τέταρτη περίπτωση και από τη μορφή της αριθμογραμμής να περάσει στις υπόλοιπες τα κατάφερε απόλυτα.

8.3.3 Ερωτήσεις συνέντευξης

Στο post test μετά τις ασκήσεις ακολούθησε συνέντευξη με το κάθε παιδί για να συζητηθούν και να καταγραφούν οι απόψεις του για τις δραστηριότητες στις οποίες συμμετείχε. Πριν τη συνέντευξη γινόταν προσπάθεια να χαλαρώσουν οι μαθητές, ξεκινώντας τη συζήτηση με κάτι που τους απασχολούσε και έπειτα περνούσε η συζήτηση στο πόσο σημαντική είναι η γνώμη τους και πως είναι απαραίτητη για να γίνει η διδασκαλία καλύτερη. Η συνέντευξη αποτελούνταν από έξι ερωτήσεις (Α ως Ζ). Στις Α και Γ ερωτήσεις τα παιδιά κλήθηκαν να σχολιάσουν εάν τους άρεσαν οι δραστηριότητες στις οποίες πήραν μέρος κατά την παρέμβαση, να βάλουν σε σειρά προτίμησης τα παιχνίδια και τις παιγνιώδεις δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκαν αλλά και να πούνε τη γνώμη τους στο πώς τους βοήθησαν. Κατά κοινή ομολογία, στα παιδιά άρεσαν όλα τα παιχνίδια γιατί τους κράτησαν το ενδιαφέρον και περνούσε ευχάριστα η ώρα των μαθηματικών καθώς μάθαιναν διάφορα πράγματα. Όπως δήλωσαν οι περισσότεροι, όλες αυτές οι δραστηριότητες τους βοήθησαν να μάθουν για την ιστορία των δεκαδικών, για το πώς λειτουργούν οι δεκαδικοί αλλά και ότι περνούσε ευχάριστα η ώρα των μαθηματικών (μέσα από την επιλογή όλα τα παραπάνω) εκτός από τον Χρήστο οποίος δήλωσε πως έμαθε απλώς για τους δεκαδικούς. Όσο αφορά τη σειρά προτίμησης, υπήρχαν διαφορετικές γνώμες όμως αναδείχθηκαν ως αγαπημένα των παιδιών τα εξής «Ο κώδικας του S. Stevin», η «Μάχη», το «Μυστική τιμή» και το «Παιχνίδι των αναπαραστάσεων» αφού ήταν πάντα στις πρώτες θέσεις προτίμησης, με τον «κώδικα του S. Stevin» να βρίσκεται στην πρώτη θέση προτίμησης στα πέντε από τα οκτώ παιδιά αλλά και σε υψηλή θέση προτίμησης και για τα υπόλοιπα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά δήλωσαν πως τους άρεσε πολύ το παιχνίδι ο «Κώδικας του S. Stevin» γιατί είχε πολλή αγωνία και εκτυλισσόταν γρήγορα.

- *Είχε πολλή αγωνία (το παιχνίδι «Κώδικας του S. Stevin») και ήταν ωραία που όλοι τρέχαμε να προλάβουμε (Ελένη.Ι)*
- *Μου άρεσε πολύ που κερδίσαμε γιατί το θέλαμε και το προσπαθήσαμε πάρα πολύ (Βασίλης)*

Το παιχνίδι η «Μάχη» ήταν και αυτό στα αγαπημένα των παιδιών για τους ίδιους λόγους, για τον έντονο ανταγωνισμό και την ταχύτητα του παιχνιδιού κάτι που δήλωσαν και για το παιχνίδι «Βρες την τιμή», μόνο που σε αυτό το παιχνίδι πρόσθεσαν έναν ακόμα λόγο, το ότι έπρεπε να μαντεύουν τις τιμές και μπορούσε να κερδίσει η κάθε ομάδα. Η ερώτηση Β αφορούσε τον S. Stevin, το έργο του «Δεκάτη» και το σχετικό παιχνίδι που έπαιξαν. Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά πως ο S. Stevin ήταν επιστήμονας που «έφτιαξε» τους δεκαδικούς και μία μαθήτρια απλώς ότι ήταν μαθηματικός (Ελένη. Ι). Στο θέμα της Δεκάτης και της μορφής των δεκαδικών σε αυτή, οι πιο πολλοί μαθητές έγραψαν ένα σωστό παράδειγμα όπως ο Νίκος τον 0,21 = 2(1) 1(2) ή η Ελένη.Ι τον 0,356=3(1) 5(2) 6(3), εκτός από τον Χρήστο και τον Βασίλη που δεν τη θυμόντουσαν καθόλου, όπως φάνηκε και στην άσκηση 3 του post test που προηγήθηκε αλλά και την Ελένη.Μ η οποία προσπάθησε να γράψει για παράδειγμα τον 0,35 ως 3 (2) 5(3) που όμως δεν είναι σωστό (το σωστό θα ήταν 3(1) 5(2)). Οι ερωτήσεις Δ και Ε περιλάμβαναν τις αναπαραστάσεις των δεκαδικών και κατά πόσο τους ήταν εύκολο το πέρασμα από τη μια μορφή στην άλλη αλλά και αν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη μορφή που τους δυσκόλευε αρχικά ή/και τους δυσκολεύει ακόμα. Από τις απαντήσεις των παιδιών καταλαβαίνουμε ότι τους είναι εύκολη η εναλλαγή των αναπαραστάσεων αν και αναφέρθηκαν ως δυσκολότερες τα δεκαδικά κλάσματα (Πρόδρομος, Ελένη.Ι), η αριθμογραμμή (Βάσω, Ελένη.Μ, Χρήστος), της «Δεκάτης» (Βασίλης, Χρήστος) και η απεικόνιση των δεκαδικών με ζωγραφική (Ελένη.Μ, Κριστιάν). Στην τελευταία ερώτηση Ζ, μόνο η Ελένη.Μ παραδέχτηκε ότι χρειάζεται περισσότερη εξάσκηση στους δεκαδικούς για να αισθανθεί μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση, τα υπόλοιπα παιδιά υποστήριξαν ότι τους έχουν κατανοήσει πλήρως τους δεκαδικούς και το πώς να τους διαχειριστούν. Επιπλέον, θεώρησαν πολύ εύκολες τις πράξεις (πρόσθεση και αφαίρεση) μεταξύ των δεκαδικών, χαρακτηριστικά σχολίασαν:

- *Οι πράξεις κυρία είναι πανεύκολες, αρκεί να βάλεις όσα μηδενικά χρειάζονται στο τέλος (Ελένη.Ι)*
- *Δεν είναι τίποτα… (οι πράξεις των δεκαδικών) εάν βάλεις το κόμμα κάτω από το κόμμα (Κριστιάν)*

Η Βάσω σχολίασε πως δυσκολευόταν αρχικά όταν οι αριθμοί δεν είχαν ίσο αριθμό ψηφίων στο δεκαδικό μέρος τους αλλά μέσα από τη συνεργασία της, στην ομάδα με τον Νίκο, κατάφερε να κατανοήσει τις πράξεις πλήρως με τη χρήση των μηδενικών.

8.3.4 Συμπεράσματα από τη συνέντευξη

Στην αρχή της συνέντευξης, με βάση τη σχέση εμπιστοσύνης και σεβασμού που υπάρχει ανάμεσα σε μαθητές και εκπαιδευτικούς, ιδιαιτέρως στο δημοτικό σχολείο όπου περνούν πολλές ώρες την ημέρα μαζί, τα παιδιά είχαν καλή διάθεση να συμμετέχουν στη διαδικασία και να πούνε τη γνώμη τους. Από τα λόγια των παιδιών, φαίνεται ότι σε όλους άρεσαν οι παιγνιώδεις δραστηριότητες και συμμετείχαν με ενδιαφέρον. Οι μαθητές θυμόντουσαν κάποιες πληροφορίες για τον S. Stevin και τον τρόπο έκφρασης των δεκαδικών στο έργο του «Δεκάτη». Επίσης, όπως δήλωσαν μέσα από τη διδασκαλία που συμμετείχαν θεώρησαν πως έμαθαν για τους δεκαδικούς αριθμούς και την ιστορία τους παρόλο που παρατηρήθηκαν δυσκολίες σε κάποιους μαθητές στο να διαχειριστούν τη μορφή αυτή όπως φάνηκε και στις μετατροπές που χρειάστηκαν στην τρίτη άσκηση του post test. Τα παιδιά ανέφεραν τα σημεία που τους δυσκόλεψαν ή/και τους δυσκολεύουν ακόμη στους δεκαδικούς και αυτά ήταν σχετικά με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα ο Πρόδρομος και η Ελένη. Ι ανέφεραν ότι στην αρχή αντιμετώπιζαν προβλήματα με τα κλάσματα αλλά ότι τώρα τα έχουν μάθει ή η Ελένη.Μ και ο Κριστιάν που είπαν πως για τη μορφή του καλλιτέχνη χρειάζονταν περισσότερη εξάσκηση. Ως δυσκολότερο σημείο ανέφεραν την αριθμογραμμή, ο Χρήστος, η Ελένη.Μ και η Βάσω με την παρατήρηση ότι την έχουν καταλάβει τώρα πια αλλά θα ήθελαν επιπλέον εξάσκηση. Οι δηλώσεις των μαθητών σχετικά με τις αναπαραστάσεις ήταν κάτι αναμενόμενο καθώς σύμφωνα με την βιβλιογραφία που έχει μελετηθεί το πέρασμα από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη είναι ένα στοιχείο που φανερώνει την βαθύτερη κατανόηση των δεκαδικών και ειδικά η αριθμογραμμή αποτελεί μια πολύ χρήσιμη αλλά και δυσνόητη έκφραση των δεκαδικών (Irwin, 2001, Shaughnessy, 2009). Βέβαια, στην τρίτη άσκηση του post test οι μαθητές τα πήγαν πολύ καλά με τις μετατροπές, με κάποιες συγκεκριμένες εξαιρέσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Όσο αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση των δεκαδικών τα παιδιά υποστήριξαν πως τις βρίσκουν πολύ εύκολες κάτι που ταιριάζει απόλυτα και με τις επιδόσεις τους στη δεύτερη άσκηση του post test. Σύμφωνα με τις επιδόσεις των μαθητών και στη διδασκαλία αλλά και στο post test λαμβάνονται θετικά δεδομένα για το επίπεδο γνώσεων των παιδιών στους δεκαδικούς και δεν συγκεντρώνονται στοιχεία τα οποία να μας οδηγούν στην ύπαρξη παρανοήσεων.

8.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων pre test και post test

Στα αποτελέσματά μας από τις σειρές ασκήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο των γνώσεων των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς πριν και μετά την πειραματική μας παρέμβαση (pre test και post test) φανερώνονται μεγάλες αποκλίσεις σε κάθε μαθητή. Όσο αφορά το μέγεθος των δεκαδικών και τη χρήση του μηδενός στο pre test, είχαμε κάποιες σωστές απαντήσεις στις ασκήσεις 2,4 και 5. Στην άσκηση 2, είχαμε πολλά λάθη όπως στο ερώτημα Β. 3,5 < 3,500 και το Ζ. 15/100=15,100. Στην άσκηση 4, είχαμε πολλές λάθος απαντήσεις όπως 42/100= 0,042 ή και 42/100=1,042 ενώ στην άσκηση 5 έγιναν λάθη μόνο από τον Κριστιάν και τον Χρήστο οι οποίοι θεώρησαν πως 0,07 = 70/100=17/100. Αντιθέτως, στο post test δεν καταγράφηκε κανένα λάθος ως προς το μέγεθος των δεκαδικών ή τη χρήση του μηδενός. Στην αξία θέσης ψηφίου στο pre test είχαμε πολλά λάθη στην άσκηση 1 στη σύνδεση ονόματος με τον δεκαδικό για παράδειγμα πενήντα δύο εκατοστά = 52,100 και στην άσκηση 8, όπου επίσης έγιναν πολλά λάθη όσο αφορά την αξία του αριθμού 5 στους διαφορετικούς δεκαδικούς, όπως στο Α. 12,25 -> 5Μ ενώ στο Β. 5,42 -> 5 δέκατα όμως αντίστοιχα στο post test δεν καταγράφηκαν λάθη στην αξία θέσης ψηφίου. Όσο αφορά τις μετατροπές στο pre test είχαμε λάθη κυρίως στην άσκηση 3, στις αριθμογραμμές αλλά και στις ασκήσεις 6 και 7 με συχνότερα λάθη στις μετατροπές από κλάσμα σε δεκαδικό όπως 8/10 = 8,10. Οι μετατροπές αποτέλεσαν το δυσκολότερο σημείο στο post test, αφού εκεί καταγράφηκαν λάθη που σχετίζονταν με το πέρασμα στην αναπαράσταση της αριθμογραμμής αλλά και στο πέρασμα από και στην αναπαράσταση σκιασμένης περιοχής. Στις πράξεις στους δεκαδικούς (πρόσθεση και αφαίρεση), έχουμε τη μικρότερη απόκλιση, τα παιδιά που έκαναν περισσότερα λάθη στο pre test ήταν ο Βασίλης που δεν χρησιμοποίησε καθόλου την υποδιαστολή και ο Κριστιάν που δεν τοποθέτησε σωστά τους αριθμούς ενώ στο post test δεν υπήρχαν λάθη.

9. Αποτίμηση

Τα μαθηματικά θεωρούνται από τα πιο δύσκολα αλλά και από τα σημαντικότερα μαθήματα στο σχολείο. Οι εκπαιδευτικοί, αυτό που προσπαθούν να επιτύχουν είναι να δημιουργήσουν ένα ευνοϊκότερο περιβάλλον για μάθηση, υιοθετώντας στη διδασκαλία τους μεθόδους για να γίνει το μάθημα πιο ενδιαφέρον και ευχάριστο. Στην παρούσα έρευνα έγινε προσπάθεια για δημιουργία γόνιμων συνθηκών για τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στη Δ΄ τάξη του δημοτικού, με την αξιοποίηση της ιστορίας των δεκαδικών με παιγνιώδη τρόπο αλλά και τη χρήση διαφόρων παιγνιωδών δραστηριοτήτων. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ιστορία των μαθηματικών (π.χ Fauvel & van Maanen, 2006, Fried, 2001, Furinghetti, 2000) στη διδασκαλία τους αλλά και η χρήση παιχνιδιών (π.χ Bragg, 2006, Vankúš, 2005, Σκουμπουρδή, 2015) σε αυτή βελτιώνουν την εικόνα των μαθηματικών στα παιδιά, κάνουν τα μαθηματικά πιο οικεία, ενδιαφέροντα και ελκυστικά.

9.1 Ερευνητικό ερώτημα Α

9.1.1 Η χρήση της ιστορίας των δεκαδικών

Η χρήση της ιστορίας των δεκαδικών που αποτέλεσε τη βασική ιδέα της παρέμβασής μας και αποτέλεσε το μέσο για τη διδασκαλία των δεκαδικών, όπως έχει καταγραφεί και στη βιβλιογραφία, βοήθησε τους μαθητές να έρθουν πιο κοντά με τα μαθηματικά, να ασχοληθούν με τους δεκαδικούς με όρεξη και ενδιαφέρον (Fauvel & van Maanen, 2006, Fried, 2001, Furinghetti, 2000). Σύμφωνα με τις απαντήσεις των παιδιών στις ερωτήσεις της συνέντευξης, γίνεται φανερό ότι η ιστορία του Simon Stevin και της δημιουργίας της «Δεκάτης» κινητοποίησε τα παιδιά αφού κατέταξαν τον παιχνίδι «Ο κώδικας του Stevin» στην πρώτη θέση προτίμησης ανάμεσα στις παιγνιώδεις δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκαν, θυμόντουσαν ποιος ήταν ο Simon Stevin και ήταν σε θέση να γράψουν, οι περισσότεροι, έναν αριθμό της επιλογής τους με τη μορφή της «Δεκάτης». Επιπλέον, ανέφεραν συχνά το όνομά του Simon Stevin κατά την παρέμβαση και επέλεγαν την αναπαράσταση της «Δεκάτης» σε πολλά από τα παιχνίδια αλλά και σε αυτό που δημιούργησαν οι ίδιοι (το παιχνίδι των δεκαδικών μασκοφόρων).

9.1.2 Η χρήση των παιγνιωδών δραστηριοτήτων

Η χρήση παιχνιδιών και γενικότερα παιγνιωδών δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών όπως έχει γίνει ήδη γνωστό από πολλούς ερευνητές βοηθάει τους μαθητές να ασχοληθούν με ενδιαφέρον με το μάθημα των μαθηματικών και να μείνουν συγκεντρωμένοι σε αυτό (π.χ. Bragg, 2006, Vankúš, 2005, Σκουμπουρδή, 2015). Στη δική μας παρέμβαση, καταγράφηκαν αποτελέσματα κοινά με αυτά της βιβλιογραφίας, καθώς οι μαθητές, ακόμα και εκείνοι που κατά δήλωσή τους δυσκόλευε πολύ το συγκεκριμένο μάθημα (π.χ. Ελένη.Μ), συμμετείχαν σε όλες τις δραστηριότητες με ευχαρίστηση και ανέμεναν κάθε φορά το επόμενο μάθημα. Ένα καλό επιχείρημα που αναδεικνύει την ευνοϊκή χρήση των παιχνιδιών ήταν και η δημιουργία ενός πρωτότυπου παιχνιδιού από τους ίδιους τους μαθητές στο τέλος της παρέμβασής μας που σχετιζόταν απόλυτα με τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί γενικότερα.

9.1.3 Σύγκριση χρήσης παιχνιδιών με την ιστορία των δεκαδικών και χωρίς τη χρήση ιστορίας τους

Στην παρέμβασή μας χρησιμοποιήθηκαν παιγνιώδεις δραστηριότητες και από τις δύο κατηγορίες και οι μαθητές συμμετείχαν εξίσου σε όλες. Σε γενικές γραμμές, επειδή στην παρέμβασή μας δόθηκε βαρύτητα στη χρήση της ιστορίας των δεκαδικών, τα παιδιά ήταν σε κάποιο βαθμό επηρεασμένα αφού η χρήση της ιστορίας επεκτάθηκε μέσα από την αναπαράσταση της «Δεκάτης» σε πολλές και διαφορετικές δραστηριότητες με τους μαθητές να την επιλέγουν πολύ συχνά όταν χρειαζόταν να επιλέξουν ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις όπως για παράδειγμα στο παιχνίδι ρόλων ή στο παιχνίδι των δεκαδικών μασκοφόρων. Ένα επιπλέον στοιχείο που θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε μία σύγκριση των δύο κατηγοριών παιχνιδιών, για τη συγκεκριμένη παρέμβαση, είναι οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στην πρώτη ερώτηση κατά τη συνέντευξη όπου έβαλαν τις δραστηριότητες σε φθίνουσα σειρά ανάλογα με το ποια τους άρεσε περισσότερο. Στις απαντήσεις τους οι μαθητές επέλεξαν στις πρώτες θέσεις τον «Κώδικα του Stevin», τη «Μάχη», το «Κυνήγι της λίστας» και το «Παιχνίδι των αναπαραστάσεων». Στα δύο παιχνίδια γίνεται χρήση της ιστορίας ενώ στα άλλα δύο όχι. Αυτό που θα μπορούσε ίσως να σχολιαστεί είναι μια τάση των παιδιών προς τις δραστηριότητες όπου χρησιμοποιήθηκε η ιστορία αφού σε αυτή δόθηκε η περισσότερη σημασία χωρίς αυτό να αποτελεί κάποιου είδους γενικότερο συμπέρασμα. Η αξία του παιχνιδιού διαφαίνεται στο σύνολο των δραστηριοτήτων της παρέμβασής μας όπως έχει καταγραφεί και στη βιβλιογραφία που μελετήθηκε (Bragg, 2006, Vankúš, 2005, Σκουμπουρδή, 2015).

9.2 Ερευνητικό ερώτημα Β

Σύμφωνα με το δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα, αναζητήθηκε το επίπεδο γνώσεων των οκτώ μαθητών, που συμμετείχαν στην έρευνά μας, στους δεκαδικούς αριθμούς για να σχεδιαστεί πληρέστερα η διδακτική μας παρέμβαση. Με αυτόν τον στόχο, τα παιδιά συμμετείχαν αρχικά σε ένα pre test, το οποίο σχεδιάστηκε ώστε να αντιστοιχεί στα όσα διδάχθηκαν οι μαθητές για τους δεκαδικούς αριθμούς στην ύλη της Γ’ τάξης του δημοτικού σχολείου. Συγκεκριμένα, περιλήφθηκαν ασκήσεις ονοματολογίας, μετατροπής (από δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και το αντίστροφο), σύγκρισης και πράξεων ανάμεσα σε δεκαδικούς αριθμούς (πρόσθεση και αφαίρεση). Τα αποτελέσματα από το συγκεκριμένο τεστ έδειξαν, όπως αναμενόταν, ότι οι μαθητές δεν θυμόντουσαν τους δεκαδικούς αριθμούς και τον τρόπο διαχείρισής τους.
Σύμφωνα με τις τόσο χαμηλές επιδόσεις των μαθητών στο pre test μπορούμε να παρατηρήσουμε λάθη που μπορεί να οφείλονται σε παρανοήσεις σχετικά με το μέγεθος των δεκαδικών την αξία θέσης ψηφίου (Irwin, 2001, Steinle & Stacey,2004), και τις μετατροπές από δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και το αντίστροφο (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015, Ni & Zhou, 2005, Shaughnessy, 2009) όπως επίσης και άγνοια των μαθητών με την αξία του μηδενός στο δεκαδικό μέρος των αριθμών (Irwin, 2001). Αναφορικά με τις πράξεις των δεκαδικών, έγιναν λάθη που αφορούσαν τη σωστή χρήση της υποδιαστολής (Hiebert, 1992, Yusof, 2003) αλλά και συνήθη λάθη στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης που συμβαίνουν από απροσεξία, όπως για παράδειγμα ο μη υπολογισμός ενός κρατουμένου. Με βάση αυτά τα δεδομένα, κρίθηκε απαραίτητο να δημιουργηθεί μια πρόταση διδασκαλίας για τους δεκαδικούς από μηδενική βάση με σκοπό την καταπολέμηση των παρανοήσεων.

Πίνακας 5: Σωστές απαντήσεις των μαθητών στο Pre Test σε κάθε παρανόηση

Παρανοήσεις/Όνομα	Βασίλης	Βάσω	Ελένη.Ι	Ελένη.Μ	Κριστιάν	Νίκος	Πρόδρομος	Χρήστος
Ως προς το μέγεθος	-	Σωστή σύγκριση δεκαδικών (σε 1 από 7 περιπτώσεις)	-	Σωστή σύγκριση δεκαδικών (σε 1 από 7 περιπτώσεις)	-	Σωστή σύγκριση δεκαδικών(σε 2 από 7 περιπτώσεις)	Σωστή σύγκριση δεκαδικών (σε 2 από 7 περιπτώσεις)	-
Αξία θέσης ψηφίου	-	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	-	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	-	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα
Μετατροπές *(Από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο)*	Από δεκαδικό σε κλάσμα	Από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο **Τοποθέτησε τον δεκαδικό αριθμό στην Αριθμογραμμή**	Από δεκαδικό σε κλάσμα (σε 2 από τις 5 περιπτώσεις)	Από δεκαδικό σε κλάσμα (σε 2 από τις 5 περιπτώσεις)	-	Αντιστοίχιση δεκαδικού με κλάσμα και το αντίστροφο μόνο Ασκ 4 κ 5	Από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο **Τοποθέτησε τον δεκαδικό αριθμό στην Αριθμογραμμή**	-
Ρόλος του μηδενός	-	-	-	-	-	Μηδέν (σε 1 από 5 περιπτώσεις)	Μηδέν (σε 1 από 5 περιπτώσεις)	-
Πράξεις (+, -)	(Δεν χρησιμοποίησε τις υποδιαστολές)	Μόνο σε ίσο αριθμό ψηφίων	Την πρώτη πρόσθεση	3 από τις 4 πράξεις	(Δεν τοποθέτησε σωστά τους αριθμούς)	Μόνο σε ίσο αριθμό ψηφίων	Μόνο τις προσθέσεις	3 από τις 4 πράξεις

Αφού μελετήθηκε η σχετική βιβλιογραφία (π.χ. Irwin, 2001, Moskal & Magone, 2000, Moss, 2005, Steinle & Stacey, 2004, Shaughnessy, 2009, Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) που αφορούσε τις παρανοήσεις που παρατηρούνται στην κατανόηση των δεκαδικών αριθμών αλλά και ερευνητικά αποτελέσματα από τρόπους καταπολέμησης των παρανοήσεων αυτών (π.χ. Bragg, 2006, Fauvel & Van Maanen, 2006, Fried,2001, Furinghetti, 2000, Vankúš, 2005, Σκουμπουρδή, 2015) σχεδιάστηκε η διδασκαλία μας, που βασίστηκε στην ιστορία των δεκαδικών αριθμών με παιγνιώδη τρόπο και τη χρήση παιγνιωδών δραστηριοτήτων. Τα αποτελέσματά μας ήταν κοινά με όσα είχαν μελετηθεί στη βιβλιογραφία αφού κατά τη διάρκεια της παρέμβασης τα παιδιά όσο αφορά του δεκαδικούς αριθμούς παρουσίασαν αξιόλογη επίδοση, τα κατάφερναν με ομαδική εργασία (ζευγάρια) με ελάχιστη βοήθεια από την εκπαιδευτικό (κάτι το οποίο συνέβη σε κάποιες μόνο δραστηριότητες όπου κρίθηκε απαραίτητο για τη διεξαγωγή της διδασκαλίας), όπως επίσης, έδειχναν μεγάλο ενδιαφέρον και συμμετείχαν με θέρμη σε όλα τα παιχνίδια-δραστηριότητες.

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του post test που διεξήχθη για να ελεγχθεί το επίπεδο γνώσεων των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς και τη διαχείρισή τους μας έδειξαν ότι μετά την παρέμβασή μας τα παιδιά είχαν κατανοήσει τους δεκαδικούς αριθμούς και είχαν την ευχέρεια τόσο να περνούν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη όσο και να κάνουν σωστά συγκρίσεις και πράξεις. Στην παρέμβασή μας σε διάφορες δραστηριότητες χρησιμοποιήθηκε ο τρόπος έκφρασης των δεκαδικών αριθμών όπως αναφέρεται στη «Δεκάτη», το έργο του Simon Stevin, ως ένας επιπλέον τρόπος αναπαράστασης, περισσότερο για να εντάξουμε την ιστορία στη διδασκαλία και να φέρουμε τα παιδιά σε επαφή με αυτή και όχι για να την αξιολογήσουμε στις μετατροπές των αναπαραστάσεων. Με αυτό το σκεπτικό, η μορφή της «Δεκάτης» προστέθηκε στην τρίτη άσκηση του post test ως αναπαράσταση για να ελεγχθεί αν και κατά πόσο τη θυμούνται οι μαθητές και όχι για να πιστοποιήσει την κατανόησή τους στους δεκαδικούς. Τα αποτελέσματα του post test όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, μας δείχνουν ότι σε γενικές γραμμές τα παιδιά ανταποκρίθηκαν θετικά όσο αφορά τη διαχείριση των δεκαδικών, με κάποια λάθη στις μετατροπές παρόλο που κατά τη διάρκεια της παρέμβασής μας, δεν σημειώθηκαν λάθη στο κομμάτι των μετατροπών, αντίθετα οι μαθητές έβρισκαν εύκολες τις μετατροπές τις οποίες δούλευαν σε κάθε δίωρο της παρέμβασης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μέσα από τη βιβλιογραφία, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις είναι ένα στοιχείο που δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές στην κατανόηση των δεκαδικών (Shaughnessy, 2009), όπως και το πέρασμα από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη αποτελεί κριτήριο για την βαθύτερη κατανόησή τους. Παρατηρήθηκε, λοιπόν μια παλινδρόμηση στη διαχείριση δεκαδικών σε μερικούς μαθητές και κυρίως στην Ελένη.Μ και τον Χρήστο. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα, που έχει καταγραφεί και στη βιβλιογραφία, ότι για να δομηθεί η νέα γνώση χρειάζεται χρόνος και για να επιτευχθεί μια εννοιολογική αλλαγή, πρέπει ο μαθητής να περάσει από διαφορετικά μικρότερα στάδια επεξεργασίας της νέας γνώσης (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Πίνακας 6: Λάθη των μαθητών στο Post Test σε κάθε παρανόηση

Παρανοήσεις/Όνομα	Βασίλης	Βάσω	Ελένη.Ι	Ελένη.Μ	Κριστιάν	Νίκος	Πρόδρομος	Χρήστος
Ως προς το μέγεθος	-	-	-	-	-	-	-	-
Αξία θέσης ψηφίου	-	-	-	-	-	-	-	-
Μετατροπές	-	-	>>Από αριθμογραμμή σε σκιασμένη περιοχή	>>Από κλάσμα σε δεκαδικό **>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή** >>Από σκιασμένη περιοχή στις άλλες τρεις μορφές *(**οι 3 άλλες μορφές συμφωνούν**)*	**>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή** >>Από αριθμογραμμή σε δεκαδικό και κλάσμα	-	**>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή**	>>Από κλάσμα σε αριθμογραμμή **>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή** >> Από δεκαδικό σε σκιασμένη περιοχή >>Από σκιασμένη περιοχή στις άλλες τρεις μορφές (***μόνο ο δεκαδικός και το κλάσμα συμφωνούν***)
Ρόλος του μηδενός	-	-	-	-	-	-	-	-
Πράξεις (+, -)	-	-	-	-	-	-	-	-

9.3 Περιορισμοί της έρευνας

Στους περιορισμούς της έρευνας ανήκει η επιλογή του δείγματος, το οποίο καθορίστηκε με βάση τη δυνατότητα πρόσβασης της ερευνήτριας. Θα ήταν χρήσιμο η έρευνά μας να διεξαγόταν σε μεγαλύτερο αριθμό μαθητών για να μας παρέχονταν περισσότερα δεδομένα προκειμένου να είναι δυνατό να γενικευτούν τα αποτελέσματα και να εξεταστεί σε βάθος η κατάσταση όσον αφορά τη διδασκαλία των δεκαδικών με τη χρήση της ιστορίας τους. Επιπλέον, το χρονικό περιθώριο για τη διεξαγωγή και την ολοκλήρωση της έρευνας ήταν μικρό. Θα αποτελούσε διευκόλυνση να είχε μεγαλύτερη διάρκεια με στόχο να λαμβάνει χώρα η έρευνα στην τάξη χωρίς να περιορίζεται από τα στενά χρονικά περιθώρια του σχολικού προγράμματος της τάξης αλλά και της εκπαιδευτικού (π.χ. κενά της εκπαιδευτικού ή και τα διαλείμματα).

9.4 Μελλοντική έρευνα

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας, μας υποδεικνύουν ότι η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών μπορεί να εμπλουτιστεί με διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης όπως η χρήση της ιστορίας τους για να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την εκμάθηση των δεκαδικών αριθμών και να ωθήσει τους μαθητές να συμμετέχουν με ενδιαφέρον. Η μελλοντική έρευνα μπορεί να επικεντρωθεί στη δημιουργία μιας σειράς μαθημάτων που θα παρέχει τα κατάλληλα μέσα για την «πρόληψη» και την καταπολέμηση των παρανοήσεων που ακολουθούν τη διδασκαλία των δεκαδικών, μέσα από διαφορετικούς τρόπους εισαγωγής της ιστορίας στη διδασκαλία τους.

10. Βιβλιογραφικές αναφορές

Alibali, M. W., & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction*, *37*, 56-61.

Astuti, P. (2014). Learning One-Digit Decimal Numbers by Measurement and Game Predicting Length. *Journal on Mathematics Education*, *5*(1), 35-46.

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods*, *2*, 201-248.

Bonotto, C. (2006, July). Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 193-200).

Bragg, L. (2003, January). Children's perspectives on mathematics and game playing. In *Mathematics education research: innovation, networking, opportunity: proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, held at Deakin University* (pp. 160-167). MERGA Inc..

Bragg, L. A. (2006). 'Hey, I'm Learning This'. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(4), 4.

Bragg, L. A. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children's learning. *International journal of science and mathematics education*, *10*(6), 1445-1467.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield: Eds. and Trans.).

Burton, D. M. (1991). *The History of Mathematics*, Wm. C.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Common Core State Standards Initiative. (2000). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Colum, K., Wiley, B., & Wyberg, T. (2015). 5 Indicators of Decimal Understandings. *Teaching Children Mathematics*, *22*(3), 186-195.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics teaching in the middle school*, *13*(8), 490.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Edwards, C. P., Gandini, L., & Forman, G. E. (Eds.). (1998). *The hundred languages of children: The Reggio Emilia approach--advanced reflections*. Greenwood Publishing Group.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 83-106.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Fauvel, J., & van Maanen, J. A. (Eds.). (2006). *History in mathematics education: The ICMI study* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science & Education*, *10*(4), 391-408.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School (*History of mathematics - Extra special issue), 27(4), 48-51.

Furinghetti, F. (2000). The long tradition of history in mathematics teaching. [eds.] V. Katz. *Using history to teach mathmatics: An international perspective*. Washington, D.C. : The Mathematical Association of America, pp. 49-58

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2010). Tracing primary and secondary school students representational flexibility profiles in decimals. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 211-222.

Helme, S., & Stacey, K. (2000). Can minimal support for teachers make a difference to students' understanding of decimals. *Mathematics Teacher Education and Development*, *2*, 105-120.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, 283-322.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Hoffer, T. B., Venkataraman, L., Hedberg, E. C., & Shagle, S. (2007). *Final report on the national survey of algebra teachers for the National Math Panel*. NORC at the University of Chicago ανακτήθηκε από www.researchgate.net 05/04/2019

Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for research in mathematics education*, 399-420.

Issari, P., Pourkos, M., Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). Ποιοτική μεθοδολογία έρευνας.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(1), 67-101.

Katz, V. (2013), *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Konic, P. M., Godino, J. D., & Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *74*, 57-74.

Lai, M. Y., & Tsang, K. W. (2009, November). Understanding primary children's thinking and misconceptions in decimal numbers. In *International Conference on Primary Education* (pp. 1-8).

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching. *Mathematics Teacher*, *96*(6), 416-421.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, *38*, 201-221.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept (s). *Learning and Instruction*, *37*, 14-20.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 232-257). Springer, Dordrecht.

Michaelidou, N., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). The Number Line as a Representation of Decimal Numbers: A Research with Sixth Grade Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational studies in Mathematics*, *43*(3), 313-335.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. *How students learn: Mathematics in the classroom*, 121-162.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for research in mathematics education*, 122-147.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. US Department of Education.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Olson, C. K. (2007). Children and Video Games: How Much Do We Know?. *Psychiatric Times*, *24*(12), 41-41.

Peled, I., & Shahbari, J. A. (2003). Improving Decimal Number Conception by Transfer from Fractions to Decimals. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 1-6.

Perry, B., Dockett, S., & Harley, E. (2007). Preschool Educators' Sustained Professional Development in Young Children's Mathematics Learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, *8*, 117-134.

Pramudiani, P., Zulkardi, Z., Hartono, Y., & Amerom, B. V. (2011). A concrete situation for learning decimals. *IndoMS. JME*, *2*(2), 215-230.

Radford L. et al. (2002) Historical formation and student understanding of mathematics. In: Fauvel J., Van Maanen J. (eds) *History in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 6. Springer, Dordrecht

Rashed, R. (1994). The beginnings of algebra. In *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra* (pp. 8-84). Springer, Dordrecht.

Rashed, R. (2013). *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra* (Vol. 156). Springer Science & Business Media.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, 8-27.

Roche, A. (2010). Decimats: Helping Students to Make Sense of Decimal Place Value. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(2), 4-10.

Roche, A., & Clarke, D. M. (2004). When does successful comparison of decimals reflect conceptual understanding. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*, 486-493.

Sackur-Grisvard, C., & Léonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and instruction*, *2*(2), 157-174.

Sarton, G. (1935). The first explanation of decimal fractions and measures (1585). Together with a history of the decimal idea and a facsimile (no. XVII) of STEVIN'S "Disme" (26 p. facsimile). *Isis, 23*(1), p. 153.

Shaughnessy, M. M. (2009). *Students' flexible use of multiple representations for rational number: Decimals, fractions, parts of area, and number lines*. University of California, Berkeley.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science*, *23*(7), 691-697.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences*, *17*(1), 13-19.

Skoumpourdi, C., & Σκουμπουρδή, Χ. (2015). *ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ*

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students’ understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers*. University of Melbourne, Department of Science and Mathematics Education

Steinle, V. (2004). Detection and remediation of decimal misconceptions. *Towards excellence in mathematics*, 460-478

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: An overview and refined results. In *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 541-548).

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). Persistence of Decimal Misconceptions and Readiness to Move to Expertise. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. In *Teaching Mathematics in New Times: Proceedings of the 21st Annual Conference of MERGA* (Vol. 2, pp. 548-555).

Steinle, V., & Stacey, K. (2001). Visible and invisible zeros: Sources of confusion in decimal notation. In *Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 434-441).

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-Related Trends in the Prevalence and Persistence of Decimal Misconceptions. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 259-266.

Swetz, F. (1995). To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 73-88.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study* (pp. 201–240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearityQ a teaching experiment aiming at conceptual change. Learning and Instruction, 14, 485-501.

Van Hoof, J., Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2017). The Transition from Natural to Rational Number Knowledge. *Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts*, *3*, 101.

Vankúš, P. (2005). Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a–didactic situation. *Quaderni di ricerca in Didattica*, *15*.

Vankúš, P. E. T. E. R. (2005). History and present of didactical games as a method of mathematics' teaching. *Acta Didactica Universitatis Comenianae-Mathematics*, *5*, 53-68.

Von Glasersfeld, E. (1991). An exposition of constructivism: Why some like it radical. In *Facets of systems science* (pp. 229-238). Springer, Boston, MA.

Xenia Vamvakoussi & Stella Vosniadou (2010) How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation, *Cognition and Instruction*, 28:2, 181-209, DOI: 10.1080/07370001003676603

Yıldız, C., Taşkın, D., Aydın, M., & Köğce, D. (2011). The effect of instructional materials on decimal fractions to the conceptual change. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 899-903.

Young-Loveridge, J., & Mills, J. (2011). Deciwire: An Inexpensive Alternative for Constructing Linear Representations of Decimals. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *16*(2), 8-13.

Yusof, J. (2003). *Mathematics errors in fractions work: a longitudinal study of primary level pupils in Brunei* (Doctoral dissertation, Curtin University).

Αυγητίδου, Σ. (2001). Εισαγωγή. Στο Σ. Αυγητίδου (επιμ.) *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις* (σελ. 13-51). ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος, Αθήνα

Γκιάστας, Γ. (2012). Μια ψυχαναλυτική ματιά στη σχέση των μαθηματικών με το παιχνίδι. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *10ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών: Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σελ. 45-55), Αθήνα.

ΔΕΠΠΣ, (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Ινστιτούτο, Π. (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό): Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». *Αθήνα. Ανακτήθηκε από http://www. pi-schools. gr/programs/depps*.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους». *Επιστήμες της Αγωγής*, Θεματικό τεύχος 2014, (σελ 16-37)

Λεμονίδης Χ. (2007). Ο εκσυγχρονισμός των μαθηματικών περιεχομένων στα νέα βιβλία της Α΄ και Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. *Γέφυρες*, 31:24-31.

Λεμονίδης, Χ. (2016). Στην Τροχιά των Ρητών. Εκδόσεις Κυριακίδη.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2010). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2007). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου* (2η έκδ.) ΥΠΕΠΘΠΙ, ΟΕΔΒ.

Νικολαντωνάκης, Κ. (2017). *Η δεκάτη του Simon Stevin της Bruges: Μετάφραση, Διδακτικές προτάσεις*, Φλώρινα: Παιδαγωγική Σχολή – Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Σκουμπουρδή, Χ. (2015). Το παιχνίδι στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών. *Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών*, 20-22.

Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. (2015). Ο ρόλος του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση: ανταγωνιστικές στάσεις και ψευδαίσθηση ομοθυμίας. *Παιδαγωγική επιθεώρηση*, *47*.

Σκουμπουρδή, Χ., & Καλαβάσης, Φ. Σχεδιασμός ένταξης του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία ανακτήθηκε από www.researchgate.net 5/4/2019

Χασάπης, Δ. (2012). Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *10ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών: Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σελ. 67-88), Αθήνα.

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

http://jeuxpourlaclasse.free.fr **(**Εργοστάσιο δεκαδικών)

http://site79.poitou-charentes.iufm.fr/jeux-et-maths/IMG/pdf/Bataille_decimaux.pdf
(cartablesan5) (Μάχη)

http://www.scalpa.info/logiciels_news.php (Μυστική τιμή)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Περιεχόμενα Παραρτήματος

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακες

Πίνακας 1, (Εργασία σελ 62)

Πίνακας 1: Απαντήσεις των παιδιών στην Άσκηση 1Α του pre test

Άσκηση 1Α	Βασίλης	Βάσω	Ελένη. Ι	Ελένη. Μ	Νίκος	Πρόδρομος	Χρήστος	Κριστιάν
Πενήντα δύο εκατοστά	5,2	52,	5,200	52,100	100,52	52,100	50,2	52,100
Εννιά δέκατα	9,0	9,	9,100	9,10	10,9	9,10	9,10	9,10
Τρία χιλιοστά	3,0	3,	3,000	3,1000	1.000,3	3,1.000	3,1.000	3,1000
Τριάντα επτά χιλιοστά	3,7	37,	37,000	37,1.000	1.000,37	37,1.000	30,7	37,1000

Πίνακας 2, (Εργασία σελ 63)

Πίνακας 2: Απαντήσεις των παιδιών στην Άσκηση 2 του pre test

Άσκηση 2 (>,<,=)	Βασίλης	Βάσω	Ελένη. Ι	Ελένη. Μ	Νίκος	Πρόδρομος	Χρήστος	Κριστιάν
Α. 0,3….. 0,125	-	-	-	-	√	-	-	-
Β. 3,5…… 3,500	-	-	-	-	-	-	-	-
Γ. 2,17…..2,9	-	-	-	-	√	-	-	-
Δ. 0,8……0,08	-	√	-	√	√	√	-	-
Ε. 15/100….1,5	-	-	-	-	-	√	-	-
Ζ. 15/100….15,100	-	-	-	-	-	-	-	-
Η. 15/100…..0,15	√	√	-	√	√	√	-	-

*√: Σωστό σύμβολο , -- : Λάθος σύμβολο

Πίνακας 3, (Εργασία σελ 64)

Πίνακας 3: Παραδείγματα απαντήσεων στα ερωτήματα 6 (Α,Β,Γ) και 7 (Α,Β, Γ) του pre test

Όνομα	*Άσκηση 6*	*Άσκηση 7*
Βασίλης	*6Β. 655/1.000 = 655,00*	*Όλα σωστά στα 7Α, 7Β,7Γ*
Ελένη. Ι	*6Γ. 24/100 = 2,4*	*7Β. 3,4 = 34/68*
Ελένη. Μ	*6Α. 8/10 = 8,10*	*7Α. 0,07 = 70/0*
Νίκος	*6Γ. 24/100 = 100,24*	*7Β. 3,4 = 4/100*
Χρήστος	*6Α. 8/10 = 8,10*	*7Γ. 0,505 = 505/0*
Κριστιάν	*6Β. 655/1.000 = 655,1.000*	*7Α.0,07 = 0/7*

<u>Πίνακας 4, (Εργασία σελ 78)</u>

Πίνακας 4: Μετατροπές όπου παρουσιάστηκαν τα περισσότερα λάθη στην Άσκηση 3 του post test

Μετατροπή από δεκαδικό κλάσμα σε μορφή S. Stevin	*3 από τους 8 μαθητές*
Μετατροπή από αριθμογραμμή σε μορφή S. Stevin	*3 από τους 8 μαθητές*
Μετατροπή από δεκαδικό αριθμό σε αριθμογραμμή	*4 από τους 8 μαθητές*
Μετατροπή από δεκαδικό αριθμό σε μορφή S. Stevin	*5 από τους 8 μαθητές*

<u>Πίνακας 5, (Εργασία σελ 85)</u>

Πίνακας 5: Σωστές απαντήσεις των μαθητών στο Pre Test σε κάθε παρανόηση

Παρανοήσεις/Όνομα	Βασίλης	Βάσω	Ελένη.Ι	Ελένη.Μ	Κριστιάν	Νίκος	Πρόδρομος	Χρήστος
Ως προς το μέγεθος	-	Σωστή σύγκριση δεκαδικών (σε 1 από 7 περιπτώσεις)	-	Σωστή σύγκριση δεκαδικών (σε 1 από 7 περιπτώσεις)	-	Σωστή σύγκριση δεκαδικών(σε 2 από 7 περιπτώσεις)	Σωστή σύγκριση δεκαδικών (σε 2 από 7 περιπτώσεις)	-
Αξία θέσης ψηφίου	-	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	-	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	-	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα	Σύνδεση ονοματολογίας με δεκαδικά κλάσματα
Μετατροπές *(Από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο)*	Από δεκαδικό σε κλάσμα	Από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο **Τοποθέτησε τον δεκαδικό αριθμό στην Αριθμογραμμή**	Από δεκαδικό σε κλάσμα (σε 2 από τις 5 περιπτώσεις)	Από δεκαδικό σε κλάσμα (σε 2 από τις 5 περιπτώσεις)	-	Αντιστοίχιση δεκαδικού με κλάσμα και το αντίστροφο μόνο Ασκ 4 κ 5	Από δεκαδικό σε κλάσμα και το αντίστροφο **Τοποθέτησε τον δεκαδικό αριθμό στην Αριθμογραμμή**	-
Ρόλος του μηδενός	-	-	-	-	-	Μηδέν (σε 1 από 5 περιπτώσεις)	Μηδέν (σε 1 από 5 περιπτώσεις)	-
Πράξεις (+, -)	(Δεν χρησιμοποίησε τις υποδιαστολές)	Μόνο σε ίσο αριθμό ψηφίων	Την πρώτη πρόσθεση	3 από τις 4 πράξεις	(Δεν τοποθέτησε σωστά τους αριθμούς)	Μόνο σε ίσο αριθμό ψηφίων	Μόνο τις προσθέσεις	3 από τις 4 πράξεις

<u>Πίνακας 6, (Εργασία σελ 86)</u>

Πίνακας 6: Λάθη των μαθητών στο Post Test σε κάθε παρανόηση

Παρανοήσεις/Όνομα	Βασίλης	Βάσω	Ελένη.Ι	Ελένη.Μ	Κριστιάν	Νίκος	Πρόδρομος	Χρήστος
Ως προς το μέγεθος	-	-	-	-	-	-	-	-
Αξία θέσης ψηφίου	-	-	-	-	-	-	-	-
Μετατροπές	-	-	>>Από αριθμογραμμή σε σκιασμένη περιοχή	>>Από κλάσμα σε δεκαδικό **>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή** >>Από σκιασμένη περιοχή στις άλλες τρεις μορφές ***(οι 3 άλλες μορφές συμφωνούν)***	**>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή** >>Από αριθμογραμμή σε δεκαδικό και κλάσμα	-	**>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή**	>>Από κλάσμα σε αριθμογραμμή **>>Από δεκαδικό σε αριθμογραμμή** >> Από δεκαδικό σε σκιασμένη περιοχή >>Από σκιασμένη περιοχή στις άλλες τρεις μορφές (***μόνο ο δεκαδικός και το κλάσμα συμφωνούν***)
Ρόλος του μηδενός	-	-	-	-	-	-	-	-
Πράξεις (+, -)	-	-	-	-	-	-	-	-

Pretest, (Εργασία σελ 51)

1. Γράφω τους παρακάτω αριθμούς με δεκαδικό αριθμό και με δεκαδικό κλάσμα.

Πενήντα δύο εκατοστά ……………………… ………………..

Εννιά δέκατα …………………….. ………………….

Τρία χιλιοστά ……………………. ………………….

Τριάντα επτά χιλιοστά …………………… ………………….

2. Συγκρίνω τους αριθμούς, βάζοντας το κατάλληλο σύμβολο **(<, = , >)**

Α) 0, 3 …….. 0,125

Β) 3,5 ……… 3,500

Γ) 2,17 ……… 2,9

Δ) 0,8 ……… 0,08

Ε) $\frac{15}{100}$ …….. 1,5

Ζ) $\frac{15}{100}$ …….. 15,100

Η) $\frac{15}{100}$ …….. 0,15

3. Τοποθετώ τους παρακάτω αριθμούς στην αριθμογραμμή

Α) 0,8 →

0 1

Β) $\frac{2}{100}$ →

0 1

4. Κύκλωσε τους δεκαδικούς που είναι ίσοι με το κλάσμα $\frac{42}{100}$

α) 0,042 β) 0,42 γ) 0,420 δ) 0.0042 ε) 1,042

5. Κύκλωσε τα κλάσματα που είναι ίσα με το δεκαδικό: 0,07

α) $\frac{700}{100}$ β) $\frac{70}{100}$ γ) $\frac{7}{100}$ δ) $\frac{17}{100}$ ε) $\frac{70}{1000}$

Pretest, (Εργασία σελ 51)

6. Μετάτρεψε τα παρακάτω **δεκαδικά κλάσματα** σε **δεκαδικούς αριθμούς** και έπειτα τοποθέτησέ τους από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

α) $\frac{8}{10}$ = …………. , β) $\frac{655}{1000}$ = ………… , γ) $\frac{24}{100}$ = ………..

7. Μετάτρεψε τους παρακάτω **δεκαδικούς αριθμούς** σε **δεκαδικά κλάσματα** και έπειτα τοποθέτησέ τα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

α) 0,07 = -------- , β) 3, 4 = -------- , γ) 0, 505 = ---------

8. Τι αξία έχει ο αριθμός **5** στους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς;
Σημείωσε Μ (Μονάδες), δεκ. (δέκατα), εκ. (εκατοστά) ή χιλ. (χιλιοστά) δίπλα σε κάθε αριθμό ανάλογα με τη θέση του.

12, 25 …………….. 5,42 ……………… 9,5 …………… 7,85 …………

0,005 …………….. 11, 5 …………….. 10, 045 ……….. 5, 740 ………..

9. Λύσε τις πράξεις κάθετα μέσα στα πλαίσια:

α) 23,3 + 3, 2

β) 15,5 – 11, 4

γ) 125, 45 + 45, 7

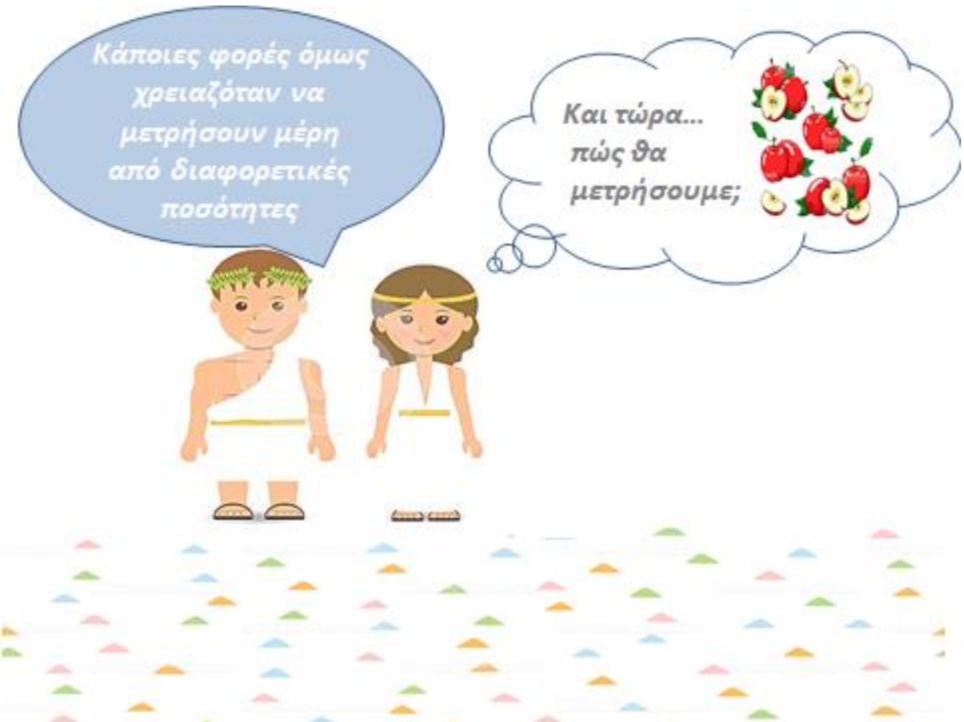
δ) 75, 82 - 9, 8

Παρουσίαση για τους δεκαδικούς και τη «Δεκάτη», 1^{o} Δίωρο, (Εργασία σελ 53)

Διαφάνεια 1η

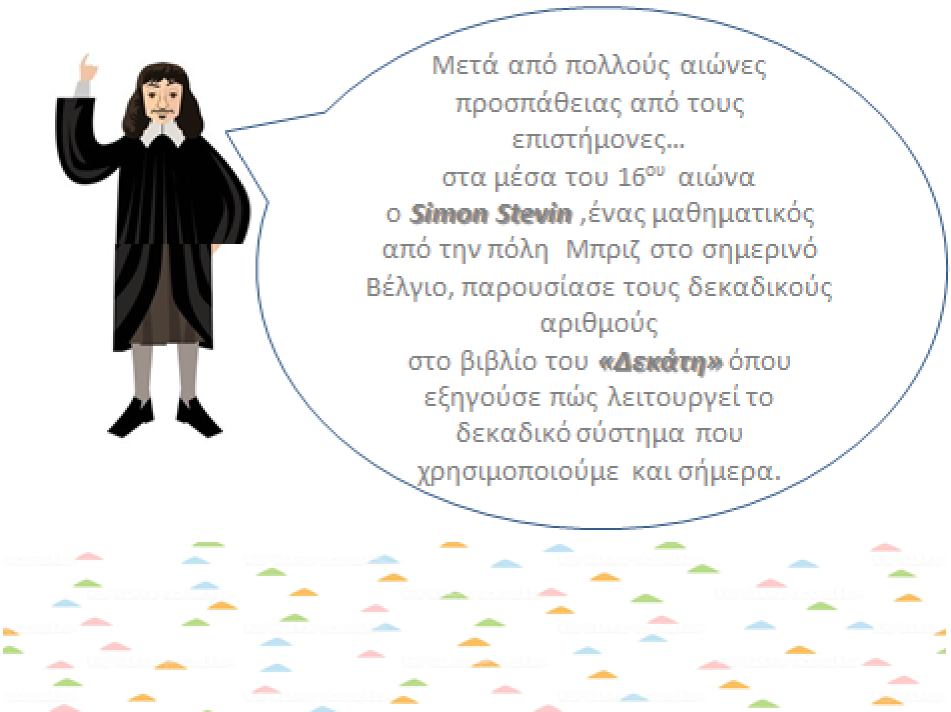
Διαφάνεια 2η

Διαφάνεια 3η

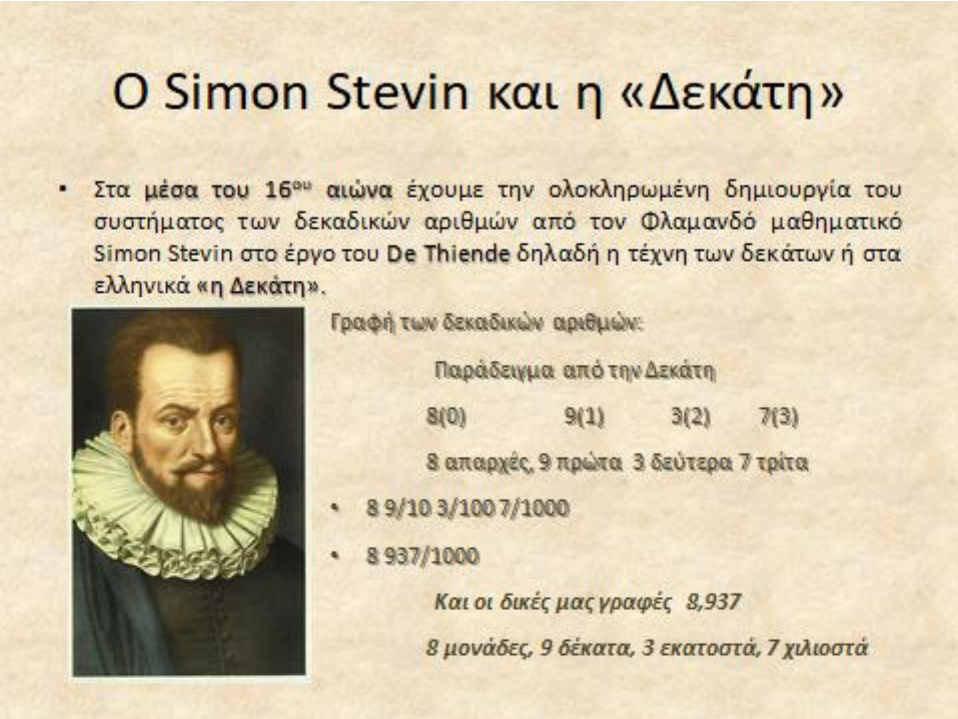


Διαφάνεια 4η

Διαφάνεια 5η

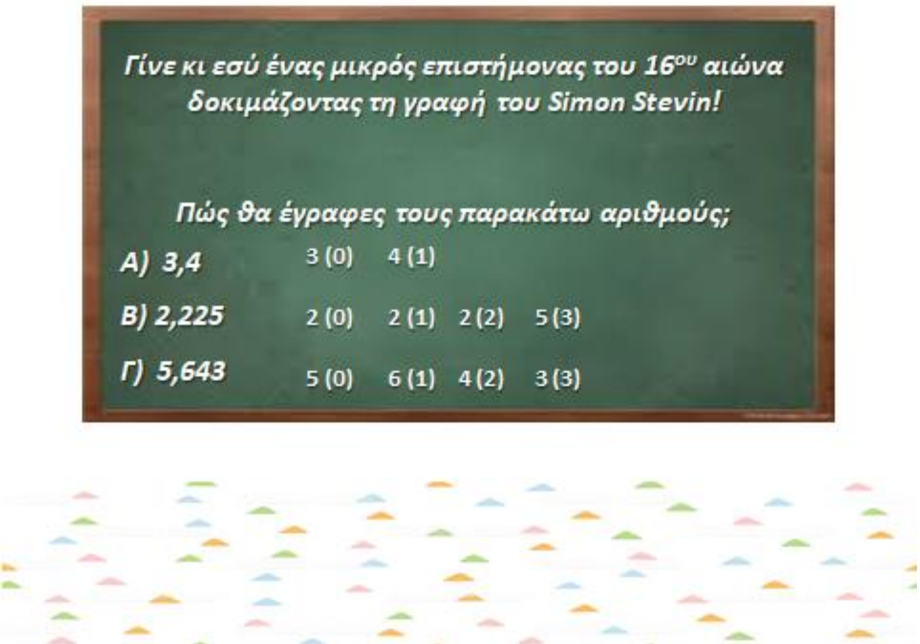


Διαφάνεια 6η

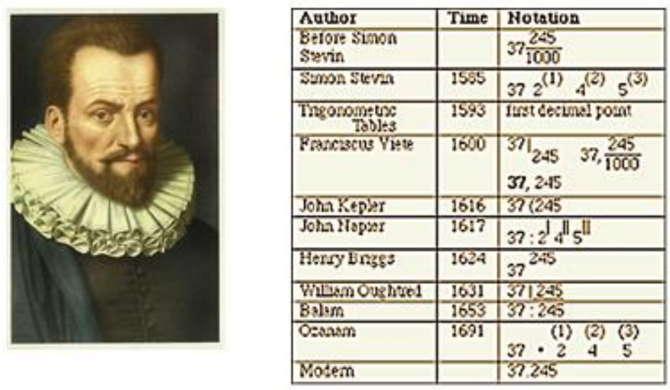


Διαφάνεια 7η

Διαφάνεια 8η



Διαφάνεια 9η



Author	Time	Notation
Before Simon Stevin		$37\frac{245}{1000}$
Simon Stevin	1585	$37\ 2^{(1)}\ 4^{(2)}\ 5^{(3)}$
Trigonometric Tables	1593	first decimal point
Franciscus Viete	1600	$37\vert_{245}$ $37,\frac{245}{1000}$ 37, 245
John Kepler	1616	37 (245
John Napier	1617	$37:2^{\mathrm{I}}\,4^{\mathrm{II}}\,5^{\mathrm{II}}$
Henry Briggs	1624	$37^{\underline{245}}$
William Oughtred	1631	$37\vert\underline{245}$
Balam	1653	37 : 245
Ozanam	1691	$37 \cdot \overset{(1)}{2}\ \overset{(2)}{4}\ \overset{(3)}{5}$
Modern		37.245

Διαφάνεια 10η

Διαφάνεια 11η

Υλικό παιχνιδιών (Εργασία σελ 56 – 59)

Ο κώδικας του S.Stevin, $1^{ο}$ Δίωρο, (Εργασία σελ 53, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 56)

ΣΤΑΘΜΟΣ 1

«Ο κώδικας του Stevin»

Ο Πρώτος σταθμός

Γραφή των δεκαδικών αριθμών χωρίς υποδιαστολή (**,**)
Ο αριθμός στην πρώτη θέση στα αριστερά δηλώνει μονάδα δέκα φορές μεγαλύτερη από τον αριθμό που βρίσκεται αμέσως δεξιά του.

1

- **Παράδειγμα από την Δεκάτη**

8(0) 9(1) 3(2) 7(3) -------> 8, 937

8 απαρχές 9 πρώτα 3 δεύτερα 7 τρίτα 8 μονάδες, 9 δέκατα, 3 εκατοστά, 7 χιλιοστά

Πώς ονομάζεται ο μαθηματικός που μας έφερε τους δεκαδικούς αριθμούς; ....

Σε ποιο έργο του περιγράφει τους δεκαδικούς; ....

ΣΤΑΘΜΟΣ 2

«Ο κώδικας του Stevin»

Δεύτερος σταθμός

Κάθε προτεινόμενος αριθμός, ονομάζεται Αρχή (απαρχή), του οποίου το σύμβολο είναι έτσι $(^{0})$.

2

Παράδειγμα: ο αριθμός 45 θα γραφτεί **45 $(^{0})$** στο σύστημα της δεκάτης.

Να γράψετε τους προτεινόμενους αριθμούς : 56 και 839 σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό.

....

ΣΤΑΘΜΟΣ 3

«Ο κώδικας του Stevin»

3

<u>Ο Τρίτος σταθμός</u>

Κάθε δέκατο μέρος της μονάδας της Αρχής, το ονομάζουμε **ως πρώτο**, του οποίου το σύμβολο είναι έτσι **(^{1})** και κάθε δέκατο μέρος της μονάδας του πρώτου, ονομάζουμε το <u>δεύτερο</u>, του οποίου το σύμβολο είναι <u>(^{2})</u> και ούτω καθεξής για τα άλλα.

Παράδειγμα: ο αριθμός **5 δέκατα** θα γραφτεί **5 (1)**

και ο αριθμός **34 εκατοστά** θα γραφτεί **3 (1) 4 (2)**

Πώς θα γραφτούν οι αριθμοί 9 δέκατα και 17 εκατοστά;

……………………… ……………………

ΣΤΑΘΜΟΣ 4

«Ο κώδικας του Stevin»

4

Βρες τα ζευγάρια δεκαδικών στο παζλ και πήγαινε στον επόμενο σταθμό!

ΣΤΑΘΜΟΣ 4

******Τα κομμάτια δίνονται κομμένα και μπερδεμένα***

6,549

6(0) 5 (1) 4(2) 9 (3)

60,945

60(0) 9 (1) 4(2) 5 (3)

6,945

6(0) 9 (1) 4(2) 5 (3)

0,694

6(1) 9 (2) 4(3)

ΣΤΑΘΜΟΣ 5

«Ο κώδικας του Stevin»

5

Η Πρόσθεση στη «Δεκάτη» μοιάζει πολύ με την πρόσθεση δεκαδικών σήμερα!!!!

Παράδειγμα: 27 (^{0}), 8 (^{1}), 4 (^{2}), 7 (^{3}) και **37 (^{0}), 8 (^{1}), 7 (^{2}), 5 (^{3})**

	(0)	(1)	(2)	(3)
2	7	8	4	7
3	**7**	**8**	**7**	**5**
6	5	7	2	2

Να γράψετε τους αριθμούς 25,5 και 19,354 με τη μορφή της δεκάτης και να τους προσθέσετε όπως στο παράδειγμα.

…………………. ……………….

ΣΤΑΘΜΟΣ 6

«Ο κώδικας του Stevin»

6

Αποστολή η αφαίρεση!!!!! Το σωστό αποτέλεσμα θα σας δώσει τον κρυφό χάρτη που θα σας οδηγήσει στην πλατεία με το άγαλμα του Simon Stevin!

Να κάνετε την αφαίρεση των αριθμών

15(0) 7(1) 4(2) 6 (3) και 7 (0) 3(1) 4(2) 8(3)

ΣΤΑΘΜΟΣ 7

«Ο κώδικας του Stevin»

7

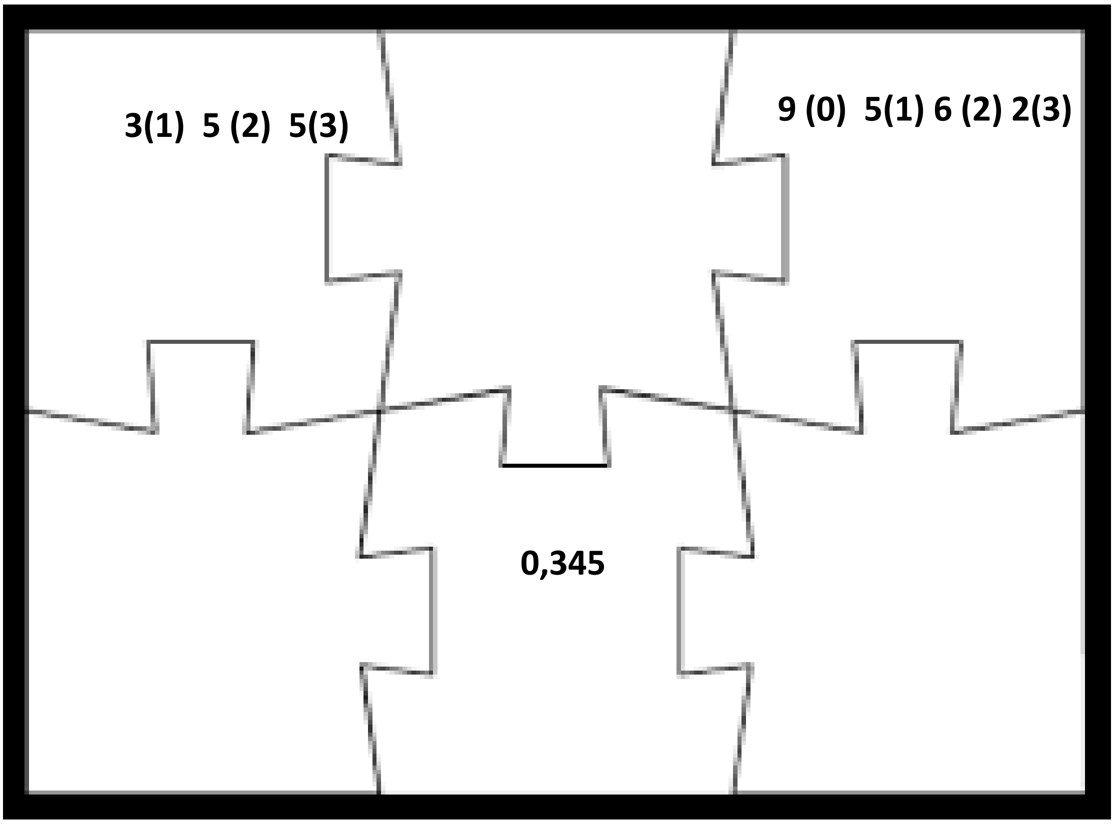
Τελευταία αποστολή!!!

Συνεργαστείτε με τις άλλες ομάδες, βρείτε ποια έχει τους αριθμούς που χρειάζεστε για να συμπληρώσετε μαζί τους κρυφούς χάρτες!

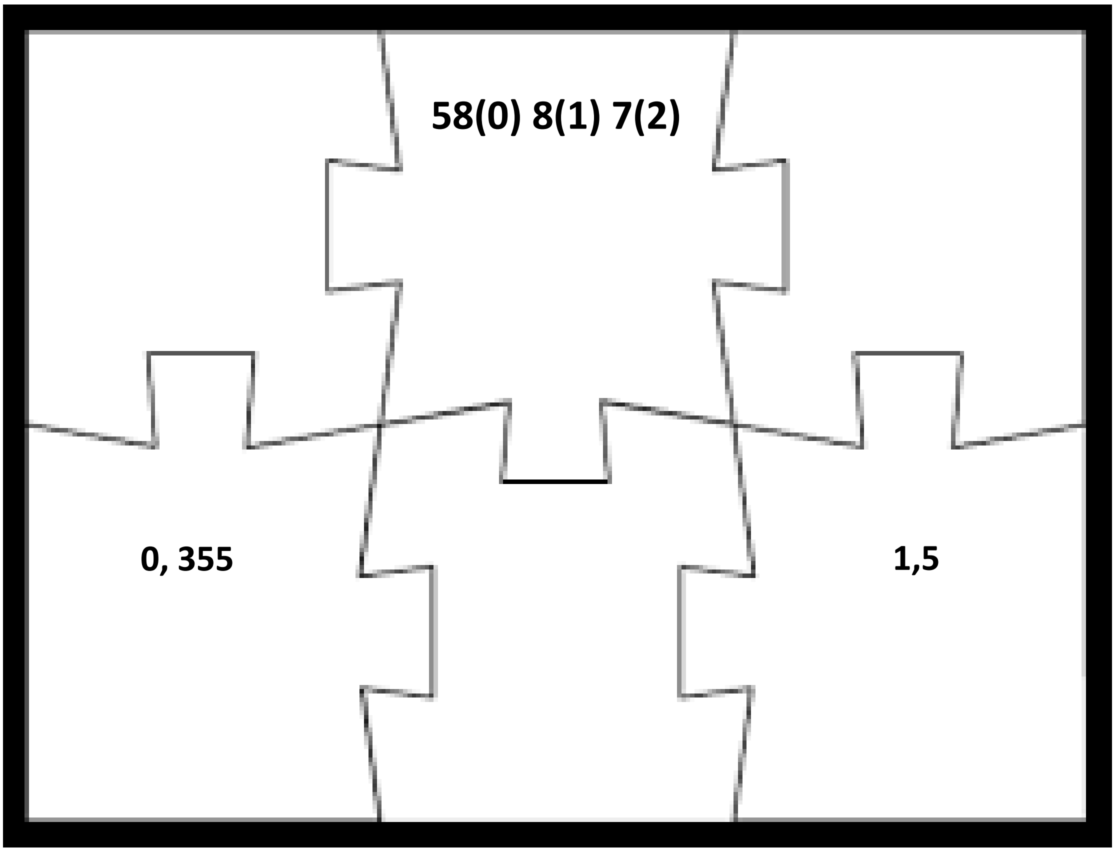
****Στην κάθε ομάδα δόθηκαν τα κομμάτια που έχουν γραμμένους αριθμούς έτσι ώστε όλες οι ομάδες μαζί να συμπληρώσουν τα 2 παζλ και να φανερωθούν οι εικόνες που κρύβονται από την πίσω πλευρά.

ΑΘΜΟΣ 7

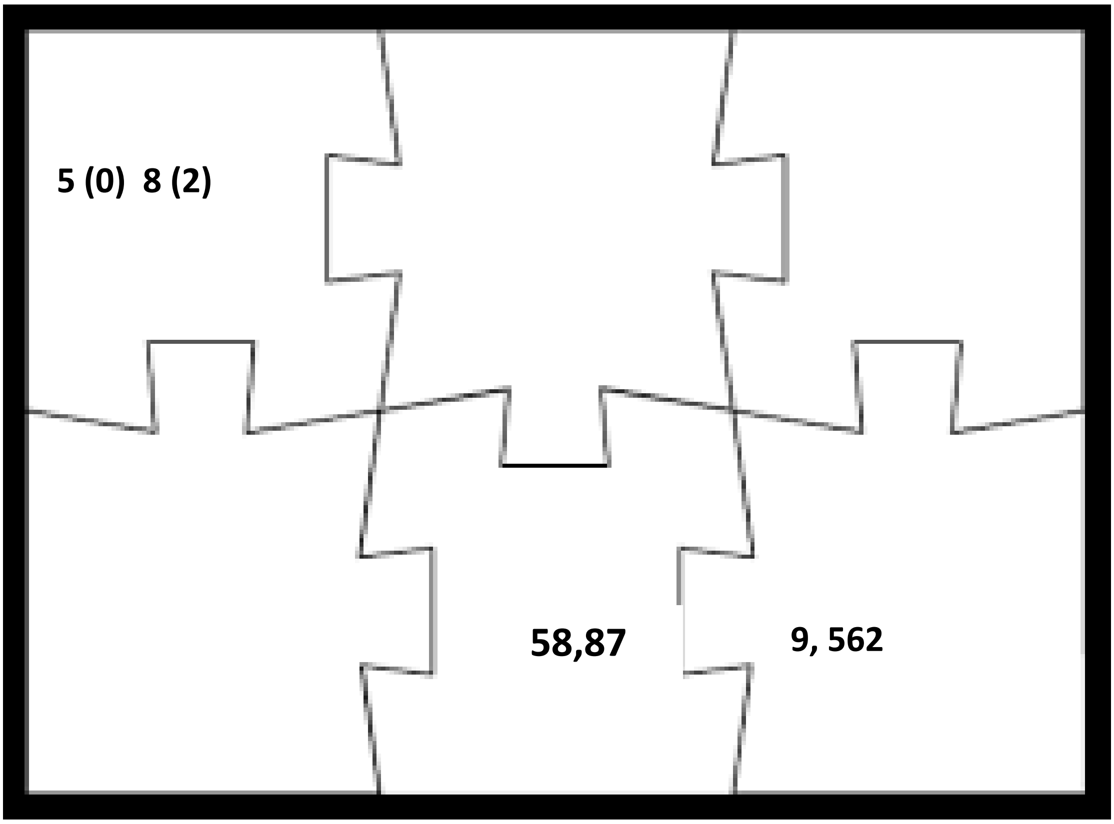
ΟΜΑΔΑ 1



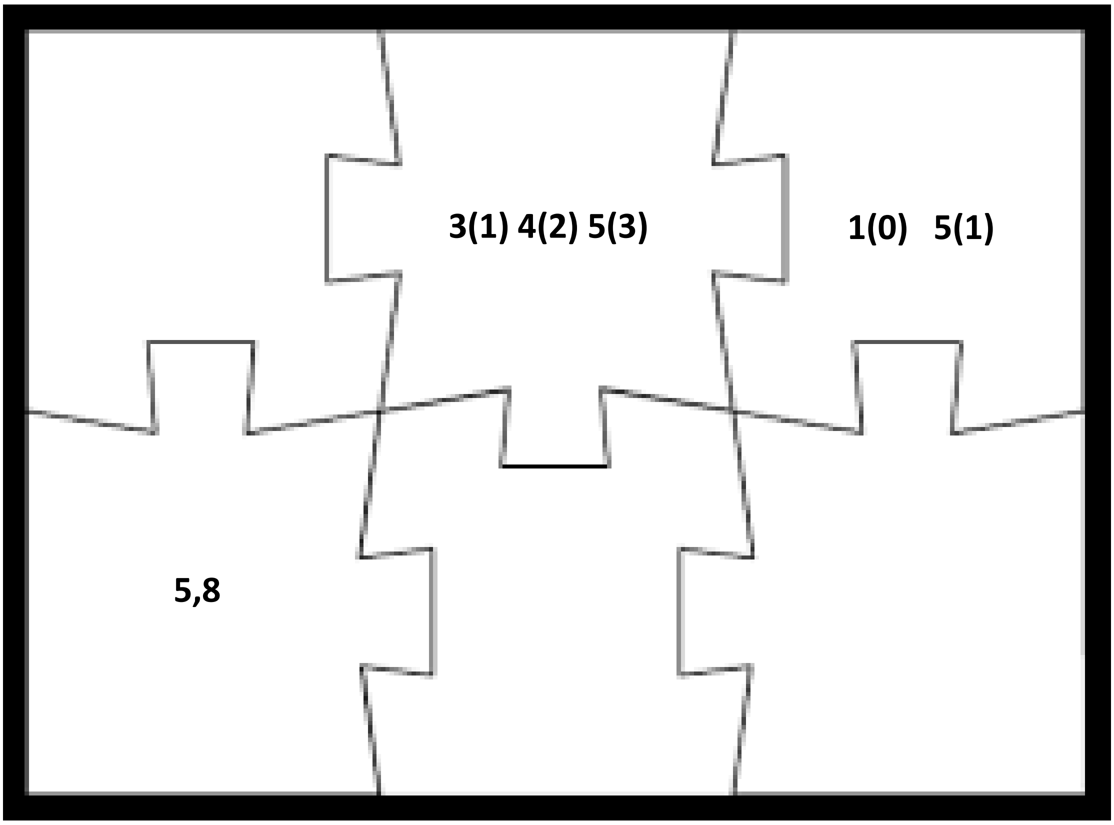
ΟΜΑΔΑ 2



ΟΜΑΔΑ 3

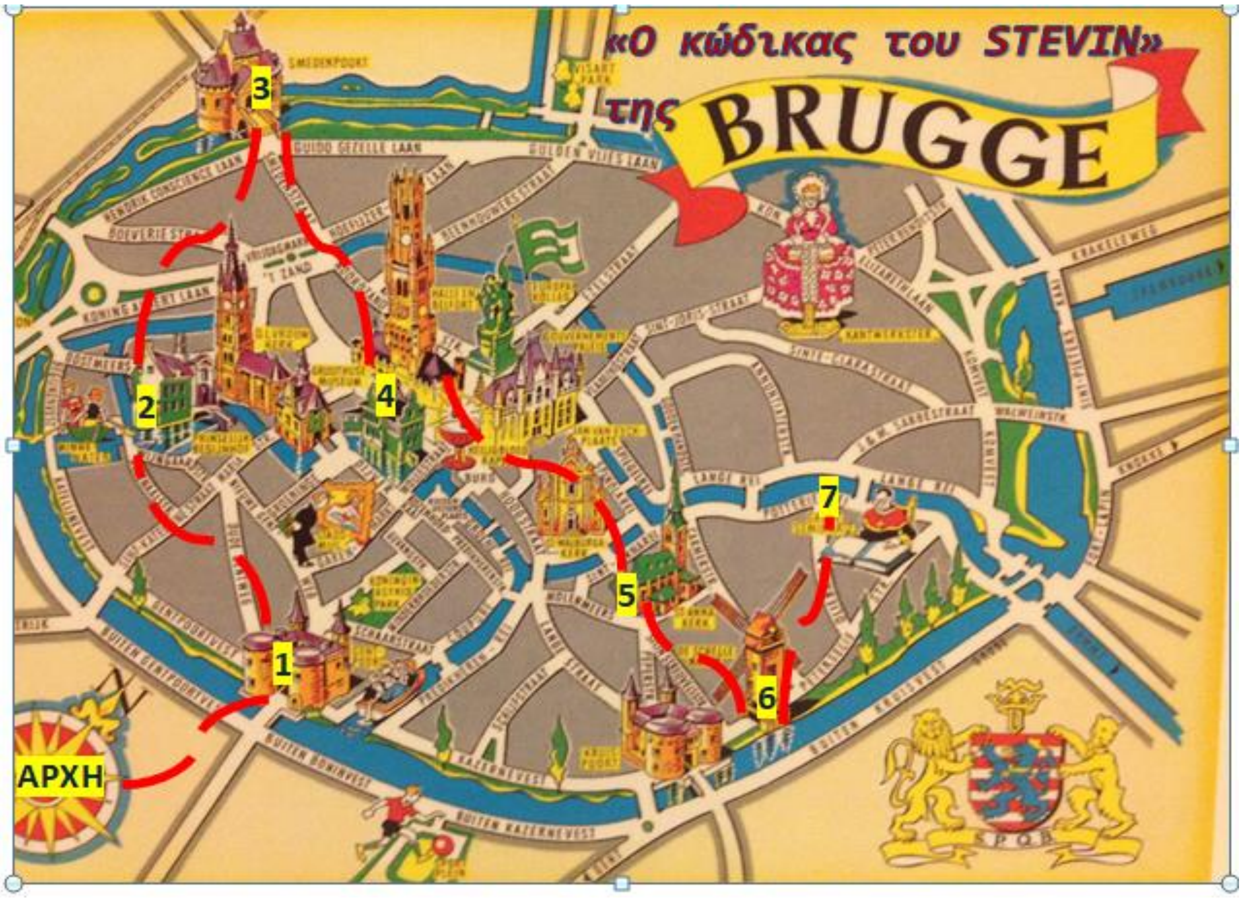


ΟΜΑΔΑ 4



<u>*ΕΙΚΟΝΕΣ ΠΟΥ ΘΑ ΚΡΥΒΟΝΤΑΙ ΠΙΣΩ ΑΠΟ ΤΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΑ ΤΙΣ ΑΠΟΚΑΛΥΨΟΥΝ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΦΤΙΑΧΝΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΣΩΣΤΟΥΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ</u>**

<u>Ταμπλό παιχνιδιού ο «Κώδικας του Stevin», (Εργασία σελ 56)</u>



Παιχνίδι των αναπαραστάσεων, 2ο Δίωρο, (Εργασία σελ 54, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 57)

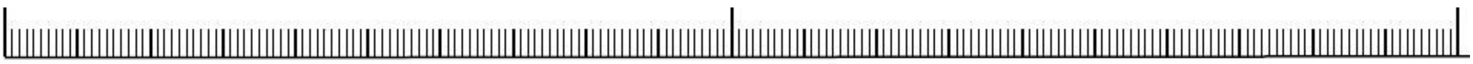
ΛΟΓΙΣΤΗΣ

Δεκαδικός αριθμός:

Δεκαδικό κλάσμα:

ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΗΣ

ΜΕΤΡΗΤΗΣ



SIMON STEVIN

Καρτέλες με ονόματα αριθμών για το **Παιχνίδι των αναπαραστάσεων** (2 για κάθε ομάδα)

ΔΕΚΑΕΝΝΙΑ ΔΕΚΑΤΑ	ΠΕΝΗΝΤΑ ΔΥΟ ΕΚΑΤΟΣΤΑ
ΕΠΤΑ ΔΕΚΑΤΑ	ΤΡΙΑΝΤΑ ΕΠΤΑ ΧΙΛΙΟΣΤΑ
ΕΙΚΟΣΙ ΔΕΚΑΤΑ	ΕΚΑΤΟΝ ΕΙΚΟΣΙ ΕΚΑΤΟΣΤΑ
ΕΙΚΟΣΙ ΔΕΚΑΤΑ	ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΙΛΙΟΣΤΑ

<u>Εργοστάσιο δεκαδικών, 2ο Δίωρο, (Εργασία σελ 54, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 57)</u>

<u>Πρώτο εργαστήριο</u>

Διαθέσιμοι αριθμοί για να τους κόψουν και να συνθέσουν τους δεκαδικούς αριθμούς της παρακάτω σελίδας

4	$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{1000}$
25	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{100}$	251
13	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{100}$	1	$\frac{3}{10}$

40,3	
2,512	
134,01	
7,5	

1 *

Φύλλο αυτοελέγχου

4,03	4 + 0/10 + 3/100
25,12	25 + 1/10 + 2/100
13,401	13 + 4/10 + 0/100 + 1/1000
0,75	0 + 7/10 + 5/100

Δεύτερο εργαστήριο

Διαθέσιμοι αριθμοί για να τους κόψουν και να συνθέσουν τους δικούς δεκαδικούς αριθμούς συμπληρώνοντας αυτούς της παρακάτω σελίδας

☆ ☆

4	$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{1000}$
25	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{100}$	251
13	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{100}$	1	$\frac{3}{10}$

	87 + + +
	102 + + +
	6 + + +
	+ + +

Τρίτο εργαστήριο

Διαθέσιμοι αριθμοί για να αναλύσουν τους δικούς δεκαδικούς αριθμούς ώστε να τους βρούνε και να τους συνθέσουν οι συμμαθητές τους και να τους συμπληρώσουν στην παρακάτω σελίδα

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	7
$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{2}{1000}$	12
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{1000}$	325
$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{4}{1000}$	4589

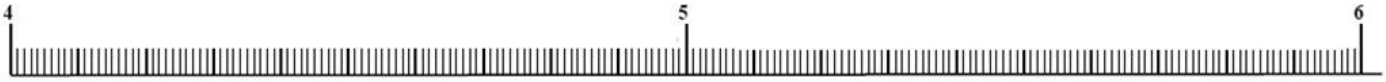
	+ + +
	+ + +
	+ + +
	+ + +

Το παιχνίδι των αριθμογραμμών, 3ο Δίωρο, (Εργασία σελ 55, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 58)

0,35	0,30	0,42	0,45
3,02	$3+\frac{2}{100}$	0,11	0,15
5,35	5,55	$5+\frac{35}{100}$	5
3	1	0,25	0,3
$2+\frac{15}{100}$	0,22	2,2	2,02

1,15	$1+\frac{1}{10}+\frac{5}{100}$	1,33	1,34
$1+\frac{39}{100}$	4,25	4,4	3,32
5,35	5,55		

Φύλλο αριθμογραμμών



Παιχνίδι η «Μάχη», 4ο Δίωρο, (Εργασία σελ 55, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 59)

41 κάρτες του παιχνιδιού

1 μονάδα 5 δέκατα 7 εκατοστά	15 δέκατα 7 εκατοστά	1 μονάδα 57 εκατοστά
157 εκατοστά	1,57	1 δεκάδα 1 δέκατο
101 δέκατα	10,1	10 μονάδες 1 δέκατο

10 μονάδες 24 εκατοστά	1 δεκάδα 2 δέκατα 4 εκατοστά	1024 εκατοστά
10,24	1,358	

109 εκατοστά	1,09	1 μονάδα 35 εκατοστά
1 μονάδα 3 δέκατα 5 εκατοστά	135 εκατοστά	1,35
1 δεκάδα 2 χιλιοστά	10 μονάδα 2 χιλιοστά	10,002

1 μονάδα 5 δέκατα	15 δέκατα	150 εκατοστά
1,5	1 δεκάδα 8 εκατοστά	10 μονάδες 8 εκατοστά
1008 εκατοστά	10,08	1 δεκάδα 24 εκατοστά

10,15	1 μονάδα 358 χιλιοστά	1 μονάδα 3 δέκατα 5 εκατοστά 8 χιλιοστά
1 μονάδα 9 εκατοστά	1 μονάδα 35 εκατοστά 8 χιλιοστά	1358 χιλιοστά

1 δεκάδα 15 εκατοστά	1 δεκάδα 1 δέκατο 5 εκατοστά	10 μονάδες 15 εκατοστά

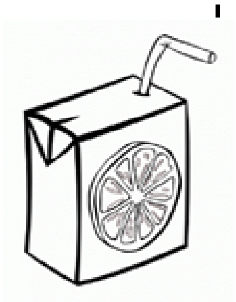
<u>Παιχνίδι «Μυστική τιμή». 5^{o} Δίωρο, (Εργασία σελ 56, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 59)</u>

Καρτέλες προϊόντων

<u>ΤΙΜΗ</u>

0,85 €

ΧΥΜΟΣ ΠΟΡΤΟΚΑΛΙ 0,330 lt.



<u>ΤΙΜΗ</u>

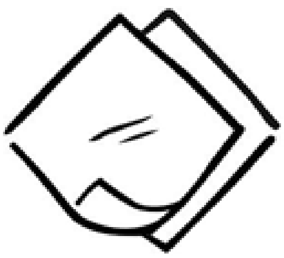
0,45 €

ΤΥΡΙ ΦΕΤΑ *1,2 κιλά*

<u>ΤΙΜΗ</u>

10,20 €

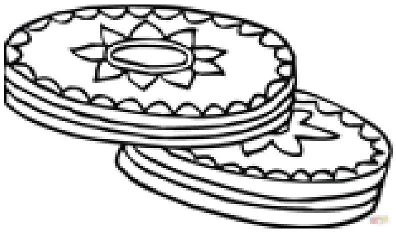
ΧΑΡΤΟΠΕΤΣΕΤΕΣ



<u>ΤΙΜΗ</u>

0, 62 €

ΜΠΙΣΚΟΤΑ ΣΟΚΟΛΑΤΑΣ *0,150 κιλά*

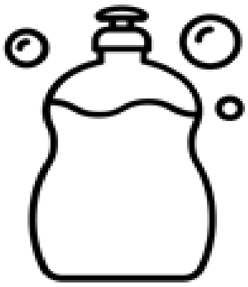


ΤΙΜΗ

2,10 €

ΑΠΟΡΡΥΠΑΝΤΙΚΟ ΠΙΑΤΩΝ

0,750 LT.



ΤΙΜΗ

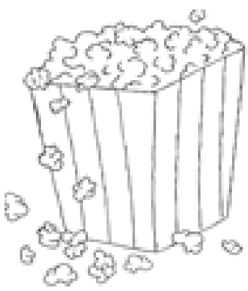
3, 90 €

ΤΡΟΦΗ ΣΚΥΛΟΥ *1 κιλό*

ΤΙΜΗ

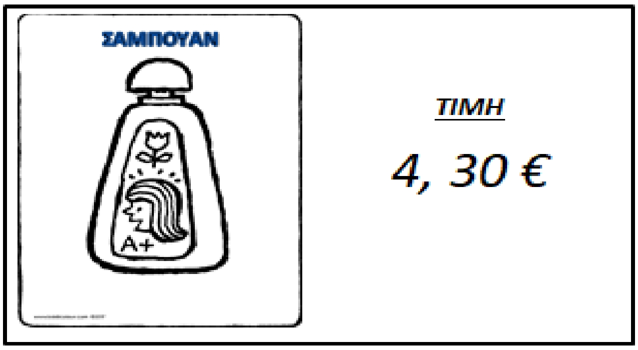
1,93 €

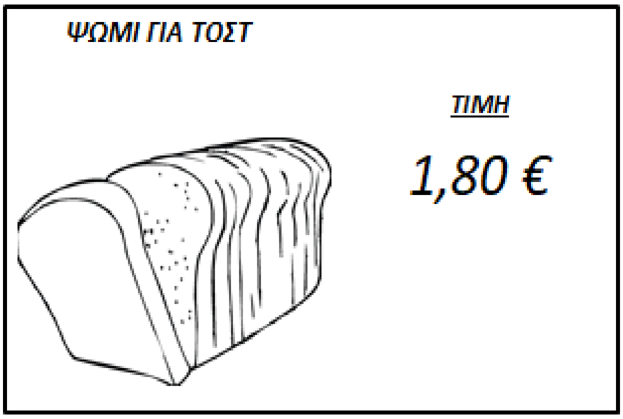
ΠΟΠ ΚΟΡΝ *0,250 κιλά*



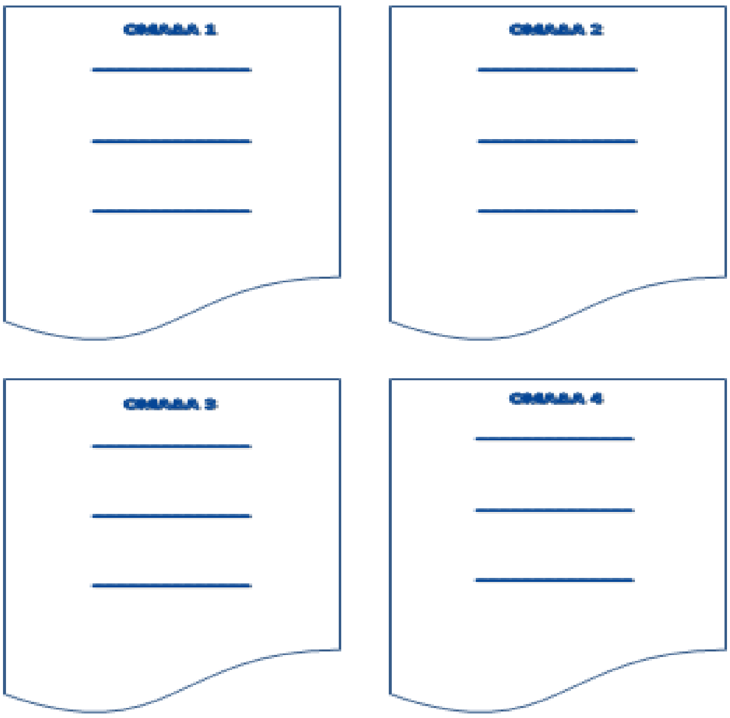
ΤΙΜΗ

2,50 €





Λίστες των ομάδων, όπου έγραφαν τα προϊόντα των οποίων έβρισκαν την τιμή (οι τιμές ήταν κρυμμένες κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού)



Παιχνίδι «Μπίνγκο των δεκαδικών», 5ο Δίωρο, (Εργασία σελ 56, Περιγραφή παιχνιδιού σελ 59)

Καρτέλες των ομάδων

	2,002	5,01
0,042	2,12	
0,07	2,2	5,05
0,5		5,75

10,025	12,014	20,02
10,06		20,12
	12,4	
10,8	12,6	20,5

0,03	2,02	
	2,12	5,05
0,3	2,5	5,35
0,75		5,6

10,025		20,002
10,8	12,08	20,5
	12,4	20,75
10,92	12,75	

Καρτέλες δεκαδικών που ανακοινώνει ο εκπαιδευτικός

20,75 20 μονάδες 75 εκατοστά	20,12 20 μονάδες 12 εκατοστά	0,042 42 χιλιοστά
2,2 2 μονάδες 2 δέκατα	5,05 5 μονάδες 5 εκατοστά	5,005 5 μονάδες 5 χιλιοστά
5,35 5 μονάδες, 3 δέκατα 5 εκατοστά	5,01 5 μονάδες 1 εκατοστό	5,6 5 μονάδες 6 δέκατα
5,5 5 μονάδες 5 δέκατα	10,25 10 μονάδες 25 εκατοστά	10,8 10 μονάδες 8 δέκατα
10,92 10 μονάδες, 9 δέκατα, 2 εκατοστά	12,75 12 μονάδες, 7 δέκατα, 5 εκατοστά	12,014 12 μονάδες 14 χιλιοστά
20,002 20 μονάδες 2 χιλιοστά	20,5 20 μονάδες 5 δέκατα	5,75 5 μονάδες, 7 δέκατα, 5 εκατοστά

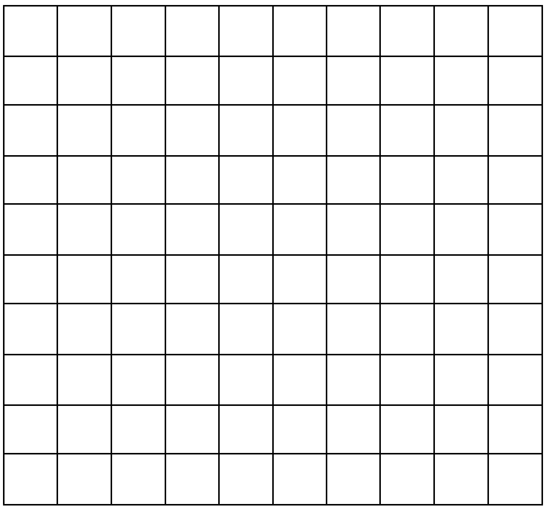
10,06 10 μονάδες 6 εκατοστά	5,1 5 μονάδες 1 δέκατο	0,07 7 εκατοστά
0,007 7 χιλιοστά	2,02 2 μονάδες 2 εκατοστά	0,3 3 δέκατα
0,5 5 δέκατα	2,15 2 μονάδες, 1 δέκατο, 5 εκατοστά	0,42 4 δέκατα 2 εκατοστά
0,03 3 εκατοστά	2,12 2 μονάδες 12 εκατοστά	0,75 75 εκατοστά
2,002 2 μονάδες, 2 χιλιοστά	2,5 2 μονάδες, 5 δέκατα	10,6 10 μονάδες 6 δέκατα
10,75 10 μονάδες, 7 δέκατα, 5 εκατοστά	10,025 10 μονάδες 25 χιλιοστά	12,06 12 μονάδες 6 εκατοστά

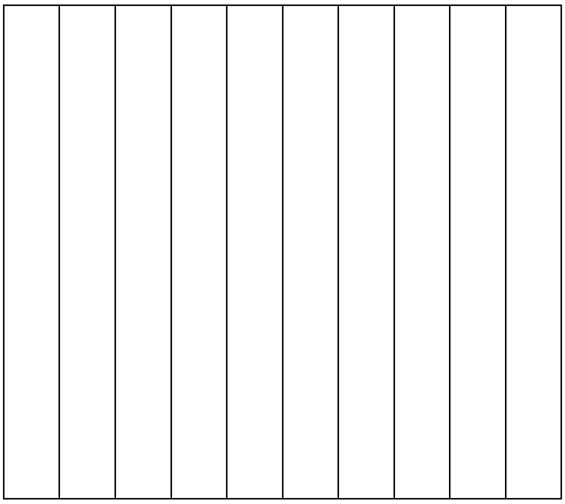
12,14 12 μονάδες 14 εκατοστά	12,4 12 μονάδες 4 δέκατα	20,6 20 μονάδες 6 δέκατα
20,02 20 μονάδες 2 εκατοστά	20,2 20 μονάδες 2 δέκατα	12,08 12 μονάδες 8 εκατοστά
12,6 12 μονάδες 6 δέκατα		

Υλικό που χρησιμοποιήθηκε ανά δίωρο (εκτός των παιχνιδιών)

1ο Δίωρο, (Εργασία σελ 53)

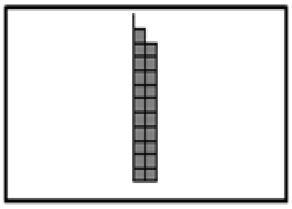
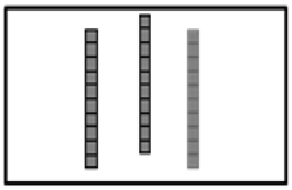
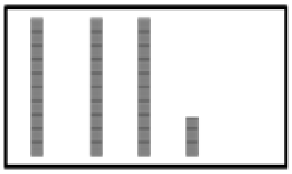
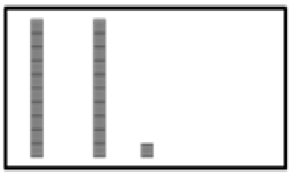
Μοντέλο μονάδας που χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες δραστηριότητες





2^{o} Δίωρο, (Εργασία σελ 54)

Καρτέλες με δεκαδικούς που χρησιμοποιήθηκαν σε διάφορες δραστηριότητες

4, 62	$\frac{42}{10}$	ΔΩΔΕΚΑ ΔΕΚΑΤΑ	
4, 8	$\frac{42}{100}$	ΠΕΝΗΝΤΑ ΔΥΟ ΕΚΑΤΟΣΤΑ	
4, 750	$\frac{42}{1000}$	ΕΠΤΑ ΔΕΚΑΤΑ	
4, 050	4,2	ΤΡΙΑΝΤΑ ΕΠΤΑ ΧΙΛΙΟΣΤΑ	

4^{o} Δίωρο, (Εργασία σελ 55)

Γιάννης Αντετοκούνμπο

Καλαθοσφαιριστής

Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο είναι Έλληνας επαγγελματίας καλαθοσφαιριστής νιγηριανής καταγωγής. Έχει ύψος 2,11 μ. και αγωνίζεται σε όλες τις θέσεις καλαθοσφαίρισης ως παίκτης των Μιλγουόκι Μπακς και της Εθνικής Ελλάδος. Βικιπαίδεια

Γέννηση: 6 Δεκεμβρίου 1994 (ηλικία 24 έτη), Αθήνα

Ύψος: 2,11 μ.

Βάρος: 110 kg

Μισθός: 24,16 εκατομμύρια USD (2018)

Αδέρφια: Κώστας Αντετοκούνμπο, Θανάσης Αντετοκούνμπο, Αλέξης Αντετοκούνμπο, Φράνσις Αντετοκούνμπο

Γονείς: Τσαρλς Αντετοκούνμπο, Βερόνικα Αντετοκούνμπο

Λευτέρης Πετρούνιας

Ολυμπιονίκης

Ο Λευτέρης Πετρούνιας είναι Έλληνας γυμναστής και ολυμπιονίκης με ύψος 1,64 μ. και βάρος 62 κιλών και διακρίνεται ιδιαίτερα στο αγώνισμα των κρίκων. Έχει αναδειχθεί χρυσός ολυμπιονίκης το 2016, 3 φορές παγκόσμιος πρωταθλητής και 4 φορές πρωταθλητής Ευρώπης. Βικιπαίδεια

Γέννηση: 30 Νοεμβρίου 1990 (ηλικία 28 έτη), Αθήνα

Ύψος: 1,64 μ.

Βάρος: 62 kg

Κατερίνα Στεφανίδη

Ολυμπιονίκης

Η Κατερίνα Στεφανίδη είναι Ελληνίδα πρωταθλήτρια του άλματος επί κοντώ, χρυσή Ολυμπιονίκης και παγκόσμια πρωταθλήτρια.Αγωνίστηκε στους Ολυμπιακούς αγώνες του 2012 και του 2016. Βικιπαίδεια

Γέννηση: 4 Φεβρουαρίου 1990 (ηλικία 28 έτη), Χολαργός

Ύψος: 1,72 μ.

Βάρος: 62 kg

Εκπαίδευση: Πανεπιστήμιο Στάνφορντ

Σύζυγος: Μίτσελ Κρίερ (νύμφ. 2015)

Γονείς: Zoi Stefanidi, George Stefanidi

Άννα Κορακάκη

Ολυμπιονίκης

Η Άννα Κορακάκη είναι Ελληνίδα σκοπεύτρια και ολυμπιονίκης. Βικιπαίδεια

Γέννηση: 8 Απριλίου 1996 (ηλικία 22 έτη), Δράμα

Ύψος: 1,75 μ.

Βάρος: 65 kg

Γονείς: Tasos Korakakis, Fotini Christodoulou

<u>Post test, (Εργασία σελ 60)</u>

1. **<u>Διαβάζω δυνατά</u>** τους αριθμούς και συμπληρώνω το κατάλληλο σύμβολο **(<, >, =)** στα παρακάτω ζευγάρια και **<u>εξηγώ το γιατί</u>**:

Α.	0,8 ……….. 0,655	
Β.	50,80 ……….. 50,800	
Γ.	2,6 ……….. 2,15	
Δ.	0,09 ……….. 0,90	
Ε.	3,25 ……….. 3,4	
Ζ.	$\frac{25}{100}$ ……….. 2,5	
Η.	$\frac{25}{100}$ ……….. 0,25	
Θ.	$\frac{25}{100}$ ……….. 25,100	

2. Λύνω τις παρακάτω πράξεις.

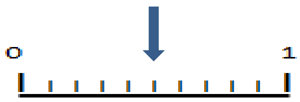
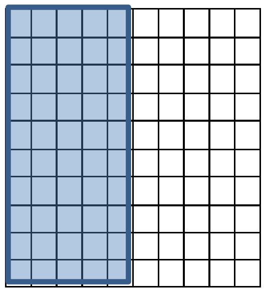
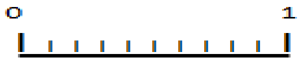
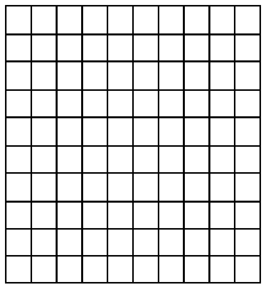
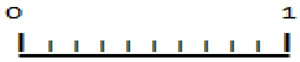
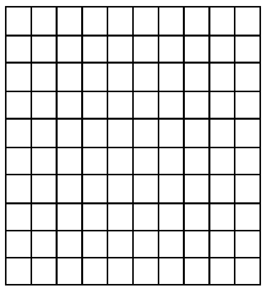
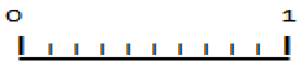
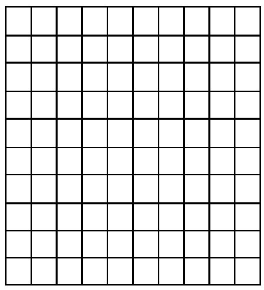
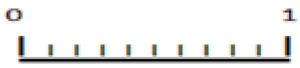
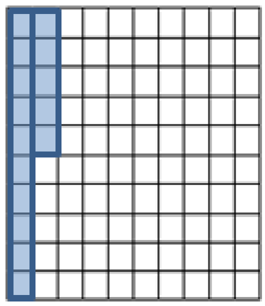
Α) 20,5 + 0,222

Β) 6,75 + 12,9

Γ) 15,3 - 8,5

Δ) 45, 125 - 25,5

3. Συμπληρώνω τον πίνακα όπως στο παράδειγμα:

ΛΟΓΙΣΤΗΣ	*ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ*	*ΜΕΤΡΗΤΗΣ*	*S. STEVIN*	*ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΗΣ*
0,5	$\frac{5}{10}$		5 (1)	
	$\frac{35}{100}$			
0,035				
				
				

<u>Ερωτήσεις συνέντευξης</u>

Α) Σου άρεσαν οι δραστηριότητες που κάναμε για τους δεκαδικούς; Γιατί;
Να τις βάλεις σε σειρά ξεκινώντας από αυτή που σου άρεσε περισσότερο.

1. *«Ο κώδικας του S. Stevin» (Χρήση της ιστορίας των δεκαδικών και αντιστοίχηση των δύο μορφών του δεκαδικού συστήματος)*
2. *Παιχνίδι ρόλων (Καλλιτέχνης, Λογιστής, Μετρητής, S. Stevin) για τις διαφορετικές αναπαραστάσεις*
3. *«Το εργοστάσιο» των δεκαδικών (Δημιουργία δεκαδικών από Μ, δεκ., εκ., χιλ)*
4. *Παιχνίδι με τις ετικέτες (Αριθμογραμμή)*
5. *«Μάχη» (Ο μεγαλύτερος κερδίζει!!!)*
6. *«Μετράω και συγκρίνω και διατάσσω μήκη και ύψη» (Ύψη αθλητών και μαθητών, σύγκριση και διάταξη)*
7. *«Κυνήγι της λίστας» του σούπερ μάρκετ (Βρίσκω την τιμή, συμπληρώνω τη λίστα και υπολογίζω το κόστος της)*
8. *«Bingo των δεκαδικών»*
9. *«Μπες στη σειρά» (Διάταξη δεκαδικών)*

Β) Τι σου άρεσε στο παιχνίδι «Ο κώδικας του Stevin»;
Τι θυμάσαι για τον S. Stevin; Θυμάσαι να γράψεις κάποιον αριθμό με τη μορφή του S. Stevin;

Γ) Μέσα από αυτές τις δραστηριότητες πιστεύεις ότι:

- **έμαθες για την ιστορία των δεκαδικών**
- **έμαθες για τους δεκαδικούς**
- **περνούσε πιο ευχάριστα η ώρα των μαθηματικών**
- **όλα τα παραπάνω**
- **τίποτα από τα παραπάνω** (Συμπλήρωσε σε τι σου φάνηκαν χρήσιμες……………………………)

Δ) Σου είναι εύκολο να περνάς από τη μία μορφή των δεκαδικών στην άλλη; (Π.χ 0,25 → 25/100)

Ε) Ποια μορφή πιστεύεις ότι σε δυσκόλεψε/δυσκολεύει περισσότερο; Γιατί; (Π.χ αριθμογραμμή, κλάσμα, δεκαδικός, όνομα)

Ζ) Πιστεύεις ότι έχεις κατανοήσει τους δεκαδικούς; Όσο αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση των δεκαδικών;