ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' Ηλικιακός κύκλος

Διπλωματική εργασία

«Μελέτη της Αίσθησης του Αριθμού σε φοιτητές και απόφοιτους Μαθηματικών τμημάτων»

του/της

Γεωργιάδης Βασίλειος – Χρήστος, 802

Επιβλέπων Καθηγητής: Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής
Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων. Η αίσθηση του αριθμού αποτελεί σημαντικό τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης και η διεθνής βιβλιογραφία έχει δείξει πως εκπαιδευτικοί που καλούνται να διδάξουν μαθηματικά δεν έχουν απαραίτητα ανεπτυγμένη αίσθηση του αριθμού. Οι περισσότερες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι τώρα έχουν ως συμμετέχοντες μαθητές ή εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και αφορούν μια από τις δυο διαδικασίες μέσω των οποίων μελετάται η αίσθηση του αριθμού, που είναι οι κατ' εκτίμηση και οι νοεροί υπολογισμοί. Αντίθετα, στην εργασία αυτή επιλέχτηκε η χρήση εννοιολογικών χαρτών για τη μελέτη της αίσθησης του αριθμού. Το συγκεκριμένο εργαλείο δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε παρόμοιες έρευνες και για αυτό συνδυάστηκε με ένα Ερωτηματολόγιο Αίσθησης του Αριθμού 8 ερωτημάτων που βασίστηκε στην υπάρχουσα βιβλιογραφία ενώ παράλληλα ελέγχθηκε η συσχέτιση των δυο εργαλείων. Με βάση το γνωστικό υπόβαθρο των συμμετεχόντων (φοιτητές και απόφοιτοι Μαθηματικών τμημάτων) θα αναμέναμε πως οι επιδόσεις θα είναι υψηλές τόσο ως προς την ορθότητα των απαντήσεων όσο και προς τα επίπεδα της αίσθησης του αριθμού. Η κατασκευή ενός χάρτη με κέντρο το ½ χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της αίσθησης του αριθμού. Κατά τη συμπλήρωση του εννοιολογικού χάρτη αναμενόταν η παρουσίαση διαφόρων αναπαραστάσεων, ερμηνειών, παραδειγμάτων, εννοιών που αφορούν ειδικά τη δοσμένη έννοια αλλά και το σύνολο των κλασμάτων γενικότερα, στοιχεία που δείχνουν την πλήρη εικόνα που έχουν οι συμμετέχοντες για τη δοσμένη έννοια και που φανερώνουν χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού. Ελέγχθηκε αν υπάρχει σχέση μεταξύ της αίσθησης του αριθμού και των εννοιολογικών χαρτών και φάνηκε πως οι συμμετέχοντες με υψηλές επιδόσεις στο Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού σημείωσαν υψηλές επιδόσεις και στη

συμπλήρωση των εννοιολογικών χαρτών. Η υπόθεση ως προς την επίδοση των σωστών απαντήσεων υποστηρίζεται αφού η πλειοψηφία των απαντήσεων ήταν σωστές. Ωστόσο, η υπόθεση πως οι μαθηματικοί παρουσιάζουν υψηλά επίπεδα αίσθησης αριθμού, δεν υποστηρίζεται καθώς η πλειοψηφία των μαθηματικών σημείωσε χαμηλές επιδόσεις τόσο στο Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού όσο και στην συμπλήρωση εννοιολογικών χαρτών. Ενδιαφέρον ήταν ότι κανένας δεν παρουσίασε την έννοια ‘Τελεστής’ σε εννοιολογικό χάρτη. Τα αποτελέσματα συζητιούνται θεωρητικά ενώ προτείνονται και παιδαγωγικές εφαρμογές τους.

Abstract

The purpose of this research is to investigate the development or not, of the number sense in teachers of secondary education. Number sense is an important domain of mathematical education and the literature has shown that teachers who teach mathematics do not necessarily have developed number sense. Most of the researches have involved primary school students or teachers and concerns one of two processes through which number sense is studied, estimation or mental calculations. On the contrary, in this study it was chosen to investigate the number sense by means of a test whose completion reveals the existence or not of the components of number sense as recorded in the literature. The cognitive background of the participants (Graduates of Mathematics departments) leads us to assume that the results will be high both in the correctness of the answers and in number sense. Concept maps were used as a second data collection tool for further study. In this case, the participants were asked to structure the maps themselves, based on their own perspective, allowing us to have a more complete picture of the concept we sought to develop, which was a fraction, ½. Subsequently, it was checked whether there was a relationship between number sensing and concept maps and it appeared that the high-performing test participants

showed similar results in completing the concept maps. The results showed that the hypothesis was confirmed as the majority of the responses were correct. However, in terms of number sense, the results were unexpected as two thirds of the sample were characterized as having low sensitivity. Finally, concepts of concepts maps were grouped into five categories and tested if participants with a high number sense tend to display one or more of these categories more than those with low number of sense.

Εισαγωγή

Η μάθηση των μαθηματικών είναι τόσο παλιά όσο και η ανθρωπότητα και προέκυψε από την ανάγκη του ανθρώπου να απαριθμεί και να καταγράφει πράγματα γύρω του (Azuka, 2015). Ένας λόγος που οδήγησε στην ανάπτυξη των μαθηματικών ήταν η ανάγκη για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων καθώς και η επίλυση προβλημάτων μέσα στα ίδια τα μαθηματικά (Κολέζα, 2019). Καμία κοινωνία δεν μπορεί να αναπτυχθεί χωρίς την αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Ukeje, 2002, όπως αναφέρεται στο: Azuka, 2015). Οι βασικοί λόγοι που την καθιστούν αναγκαία είναι η συμβολή των μαθηματικών στην τεχνολογική και κοινωνικοοικονομική ανάπτυξη της κοινωνίας, η συμβολή τους στην πολιτική, ιδεολογική και πολιτιστική υποστήριξη της κοινωνίας καθώς και η παροχή των απαιτούμενων εφοδίων που θα βοηθήσουν τα μέλη της κοινωνίας να αντιμετωπίσουν δυσκολίες και εμπόδια σε τομείς όπως η ιδιωτική ή κοινωνική τους ζωή (Niss, 1996).

Η ανάπτυξη των μαθηματικών για την κάλυψη όλων των παραπάνω αναγκών, στηρίχτηκε στην πιο σημαντική και θεμελιώδη έννοια η οποία δεν αποτελεί επινόηση των τελευταίων χρόνων και δεν είχε πάντα την ίδια σημασία, την έννοια του αριθμού. Η έννοια του αριθμού άρχισε να γεννιέται από τη στιγμή που ο άνθρωπος συνειδητοποίησε την ανάγκη για αρίθμηση και μέτρηση αντικειμένων. Με το πέρασμα των αιώνων, ο αριθμός ως έννοια ανεξαρτητοποιείται από τη φύση των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται και παίρνει όλο και πιο αφηρημένη μορφή (Εξαρχάκος, 1993). Η ανάπτυξη των μαθηματικών και η ανάγκη για τη μάθησή τους οδήγησε στη διδασκαλία τους. Η διαδικασία αυτή περιέχει πολλά διαφορετικά αντικείμενα τα οποία οι διδάσκοντες καλούνται να διδάξουν και να καλλιεργήσουν στους μαθητές. Ένα από αυτά είναι η αίσθηση του αριθμού που αποτελεί το κεντρικό θέμα της παρούσας έρευνας.

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού παρουσιάζει ενδιαφέρον διεθνώς. Η αίσθηση του αριθμού «*είναι ένα τρόπος σκέψης που θα έπρεπε να διαχέεται σε όλες τις πτυχές της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης*» (Reys, 1994, σελ. 114). Λόγω της ανάδειξης της αξίας της αίσθησης του αριθμού, γίνεται συχνά αναφορά στην καλλιέργεια και την ανάπτυξη του συγκεκριμένου θέματος (NCTM, 1989, 2000; Markovits & Sowder, 1994). Η αξία και η σημαντικότητα της διδασκαλίας της αίσθησης του αριθμού οδηγεί στην ανάγκη για διερεύνηση του θέματος σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων που πιθανά θα αποτελέσουν μελλοντικούς εκπαιδευτικούς.

Στην Ελλάδα οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση προέρχονται στην πλειοψηφία τους από τμήματα μαθηματικών των πανεπιστημίων. Το υπόβαθρο των απόφοιτων των μαθηματικών τμημάτων ποικίλει καθώς ποικίλουν ανάλογα και τα προγράμματα σπουδών των τμημάτων. Υπάρχουν τμήματα όπου η διδακτική των μαθηματικών αποτελεί έναν τομέα του προγράμματος σπουδών, δίνοντας στους φοιτητές τη δυνατότητα να έρθουν σε επαφή με το εν λόγω επιστημονικό πεδίο. Παρόλα αυτά, σε άλλες περιπτώσεις παρουσιάζεται απουσία οποιουδήποτε μαθήματος σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών και δίνεται έμφαση μόνο στα θεωρητικά μαθηματικά. Όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τα δεδομένα διαφοροποιούνται. Τα μαθήματα που σχετίζονται με τα μαθηματικά αφορούν κυρίως τη διδακτική ενώ τα θεωρητικά μαθηματικά είναι πολύ περιορισμένα. Συγχρόνως, η έρευνα για την αίσθηση του αριθμού σε εκπαιδευτικούς είναι περιορισμένη στην Ελλάδα. Μάλιστα, συχνότερα αφορά τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και σπανιότερα αυτούς της δευτεροβάθμιας (Ουσταμπασίδου 2018, Χαντόγλου 2018).

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε η αίσθηση του αριθμού σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων. Συγκεκριμένα, αρχικά μελετήθηκε η γνώση περιεχομένου και στη συνέχεια η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού σε δείγμα 39 ατόμων μέσω του Ερωτηματολογίου Αίσθησης Αριθμού, η επίλυση του οποίου οδηγούσε άμεσα σε συμπεράσματα για τα παραπάνω. Επίσης με τη συμπλήρωση εννοιολογικών χαρτών διερευνήθηκε αν η αίσθηση του αριθμού συνδέεται με μια πιο σφαιρική γνώση και αντίληψη των μαθηματικών για απλές μαθηματικές έννοιες τις οποίες θα κληθούν να διδάξουν ως μελλοντικοί εκπαιδευτικοί.

Θεωρητικό πλαίσιο

Αίσθηση του αριθμού

Ορισμοί της Αίσθησης του Αριθμού

Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην γενική κατανόηση των αριθμών και των λειτουργιών τους, στην ικανότητα χρήσης των αριθμών ευέλικτα, στην ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών για τη χρήση των αριθμών και των αλγορίθμων καθώς και στη λογική κρίση και αξιολόγηση του αποτελέσματος (MacIntosh, Reys & Reys, 1992). Επίσης, περιλαμβάνει την ικανότητα να χρησιμοποιείται η κατανόηση αυτή ευέλικτα για τη δημιουργία χρήσιμων στρατηγικών με σκοπό τη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων (NCTM, 2000). Μάλιστα ο Sowder (1992) ορίζει την αίσθηση του αριθμού δίνοντας έμφαση στην κατανόηση αυτή λέγοντας πως η αίσθηση του αριθμού είναι ένα καλά οργανωμένο εννοιολογικό δίκτυο το οποίο επιτρέπει τη συσχέτιση των αριθμών, των πράξεων και των ιδιοτήτων τους με σκοπό την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων με δημιουργικό και ευέλικτο τρόπο.

Αρκετοί ερευνητές (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998; Yang, 2005) χαρακτηρίζουν και μελετάνε την αίσθηση του αριθμού με βάση εφτά χαρακτηριστικά: (1) την κατανόηση της σημασίας των αριθμών, (2) την αναγνώριση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών, (3) την χρήση σημείων αναφοράς, (4) την ικανότητα σύνθεσης και αποσύνθεσης των αριθμών, (5) την χρήση αναπαραστάσεων για τους αριθμούς και τις λειτουργίες τους, (6) την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων (7) την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικά ή μη.

Είναι ευρέως αποδεκτή η μελέτη της αίσθησης του αριθμού μέσω δύο διαφορετικών διαδικασιών, τους νοερούς υπολογισμούς και τις αριθμητικές εκτιμήσεις. Ο Greeno (1991) περιέγραψε την αίσθηση του αριθμού ως την ανάπτυξη ευέλικτων νοερών υπολογισμών, την πραγματοποίηση καλών αριθμητικών εκτιμήσεων, την κρίση και την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με ποσότητες. Για τους McIntosh et al. (1997), η αίσθηση αριθμού είναι ένας ευρύτερος τομέας από τους νοερούς υπολογισμούς ή από τις εκτιμήσεις, περιλαμβάνει όμως και τα δύο. Επίσης, ο Greeno (1991) σημειώνει πως ο όρος αίσθηση του αριθμού αναφέρεται σε πολλές σημαντικές αλλά απροσδιόριστες ικανότητες όπως οι ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς, τις αριθμητικές εκτιμήσεις και η αντίληψη των ποσοτικών μεγεθών. Οι νοεροί και οι κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί είναι σημαντικοί καθώς βοηθούν τους δασκάλους και τους μαθητές να αποκτήσουν καλύτερη αίσθηση και κατανόηση των αριθμών (Lemonidis, Tsakiridou, & Meliopoulou, 2015). Συγκεκριμένα για τους νοερούς υπολογισμούς αναφέρεται πως είναι ένα συστατικό ενός ιστού της γνώσης που καλείται αίσθηση αριθμού (Carrol, 1996).

Σύμφωνα με τη Maclellan (2001), δεν υπάρχει ξεκάθαρος ορισμός για τον όρο *calculation (υπολογισμός)* και γι' αυτό σε πολλές περιπτώσεις υπάρχει σύγχυση μεταξύ των λέξεων *calculation* και *computation*. Ωστόσο, αρκετοί ερευνητές διαφοροποιούνται από αυτή τη θέση. Ο Reys (1984) υποστηρίζει πως οι νοεροί υπολογισμοί παράγουν μια ακριβή απάντηση η οποία όμως υπολογίζεται νοερά χωρίς τη χρήση εξωτερικών εργαλείων όπως μολύβι και χαρτί. Η πλειοψηφία των ορισμών αναφέρεται στην περιορισμένη χρήση του μολυβιού και του χαρτιού, συγκλίνοντας σε αυτόν του Λεμονίδη (2013, σελ. 25) ο οποίος διατυπώνει τον εξής ορισμό: «*Νοερός είναι ο υπολογισμός που πραγματοποιείται νοερά και με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη*».

Ο δεύτερος βασικός άξονας στον οποίο μελετάται η αίσθηση των αριθμών είναι οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί οι οποίοι αν και παρουσιάζουν κοινά στοιχεία με τους νοερούς υπολογισμούς, όπως η νοερή εκτέλεσή τους χωρίς χρήση χαρτιού, διαφέρουν σε πολλά σημεία. Οι απαντήσεις που δίνονται από τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς δεν είναι ακριβείς αλλά προσεγγιστικές, όντας ωστόσο επαρκείς για τη λήψη αποφάσεων. Σε αυτήν την περίπτωση είναι εμφανής και ο παράγοντας του ατόμου που κάνει τις εκτιμήσεις καθώς συχνά φανερώνονται οι ατομικές του προσεγγίσεις, με αποτέλεσμα να έχουμε για μια εκτίμηση αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα (Reys, 1984). Η αξία και η χρησιμότητα των κατ' εκτίμηση υπολογισμών τονίζεται από τη Levine (1982) η οποία θεωρεί πως είναι μια διαδικασία που συναντάμε στην καθημερινότητά μας σε καταστάσεις που περιλαμβάνουν αριθμούς και συνεπώς αποτελεί βασική δεξιότητα.

Η ‘Μεταφορά του Περιβάλλοντος’ (Environment Metaphor)

Μια διαφορετική προσέγγιση για την αίσθηση του αριθμού είναι η περιγραφή της γνώσης τοποθετημένη σε ένα εννοιολογικό πεδίο*, το πεδίο των αριθμών και των ποσοτήτων* (Greeno, 1991). Από αυτήν την άποψη, βλέπουμε τις γνώσεις και τις δραστηριότητες ενός ατόμου ως κινήσεις ή συμπεριφορά σε ένα φυσικό περιβάλλον. Η γνώση σε ένα περιβάλλον σημαίνει να γνωρίζουμε πως να κινηθούμε, πως να φτάσουμε σε πράγματα που θέλουμε και πως να τα χρησιμοποιήσουμε. Σε διάφορα εννοιολογικά πεδία η γνώση απαιτεί τη συσχέτιση εννοιών και την επίλυση προβλημάτων. Η μεταφορά του περιβάλλοντος που αναφέρει ο Greeno (1991) συσχετίζει μαθηματικές ιδιότητες όπως η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στην πρόσθεση με χαρακτηριστικά ενός φυσικού περιβάλλοντος. Έτσι, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται είναι τρόποι μέσα από τους οποίους γίνεται χρήση αυτών των χαρακτηριστικών με σκοπό την επίτευξη κάποιου στόχου (Greeno, 1991).

Για να γίνει κατανοητή η παραπάνω παράγραφος θα διευκρινίσουμε τους όρους *πεδίο* και *περιβάλλον* που αναφέρονται σε αυτή. Το *πεδίο των αριθμών και των ποσοτήτων* αναφέρεται στις λειτουργίες και γνωστές ιδιότητες των αριθμών που μπορούμε να συναντήσουμε στα σχολικά βιβλία, ενώ το περιβάλλον αποτελεί ένα μεταφορικά χαρακτηρισμό για την αντίληψη κάθε ατόμου για το εκάστοτε εννοιολογικό πεδίο (Whitacre, 2012).

Η καινοτόμος πτυχή αυτής της προσέγγισης είναι πως βλέπουμε τη μαθηματική δραστηριότητα κάθε ατόμου τοποθετημένη σε ένα περιβάλλον κι όχι τοποθετημένη στο μυαλό κάθε ατόμου. Στη ‘Μεταφορά του περιβάλλοντος’ οι μαθητές δρούνε διαρκώς μέσα σε ένα μαθηματικό περιβάλλον. Οι εκπαιδευτικοί ως πιο έμπειροι αλλά ισότιμοι με τους μαθητές λειτουργούν όντας εξοικειωμένοι με το περιβάλλον. Μπορούν να οδηγήσουν κάποιον που βρίσκεται στα πρώτα στάδια ώστε να γνωρίσει καλύτερα το περιβάλλον (Lave & Wenger, 1991).

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε την πρόταση της Levine που περιγράφει την αξία των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Εφόσον όμως οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί αποτελούν κομμάτι της αίσθησης του αριθμού, αντιλαμβανόμαστε πως η παραπάνω πρόταση επεκτείνεται και χρειάζεται να αναφερθούμε στην αναγκαιότητα όχι μόνο των εκτιμήσεων αλλά συνολικά της αίσθησης του αριθμού.

Αναγκαιότητα Αίσθησης αριθμού

Πλέον θεωρείται απαραίτητο όλοι οι άνθρωποι να είναι σε θέση να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των προβλημάτων της πραγματικής ζωής και μαθηματικών. «*Η αίσθηση του αριθμού αντικατοπτρίζει μια κλίση ή μια ικανότητα να χρησιμοποιούμε τις αριθμητικές και τις ποσοτικές μεθόδους ως ένα μέσο επικοινωνίας, επεξεργασίας και ερμηνείας των πληροφοριών που λαμβάνουμε. Συνεπώς τα μαθηματικά αποτελούν πλέον αναγκαιότητα για όλους*» (McIntosh, Reys & Reys, 1992, σελ. 3).

Όταν ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών εξετάζεται σε γενικά πλαίσια είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τη χρησιμότητα της διδασκαλίας της αίσθησης του αριθμού. Εξάλλου η αίσθηση του αριθμού, έχει αναγνωριστεί ευρέως ως βασικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών (NCTM, 2000).

Αρχικά, η διδασκαλία των μαθηματικών είναι ένα εργαλείο για την καθημερινή ζωή των παιδιών και ένας τρόπος επικοινωνίας, ενώ η χρησιμότητα των μαθηματικών αναγνωρίζεται ως ένα εργαλείο για πνευματική άσκηση και ως ένα μέσο για την ενδυνάμωση των ανθρώπων (Huckstep, 1999). Από τα παραπάνω, η παραδοσιακή μέθοδος διδασκαλίας των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής ίσως καλύπτει μόνο το πρώτο ζητούμενο. Τα υπόλοιπα τρία υποδεικνύουν πως οι υπολογιστικές ικανότητες χωρίς ανεπτυγμένη αίσθηση αριθμού παρέχουν ανεπαρκή εκπαιδευτικές ευκαιρίες στα παιδιά. Η ευελιξία και η εφευρετικότητα που ταυτίζονται με την αίσθηση του αριθμού θα καθιερωθούν μόνο όταν τα παιδιά αναγνωρίσουν και κατανοήσουν τη δύναμη της μαθηματικής συλλογιστικής σκέψης (Anghileri, 2000).

Ωστόσο, παρά τις συστάσεις που γίνονται τα παιδιά συνεχίζουν να μαθαίνουν μαθηματικά εστιάζοντας κυρίως στη χρήση των παραδοσιακών αλγορίθμων χωρίς να γίνεται συστηματική προσπάθεια για ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Reys et al., 1999). Το αποτέλεσμα είναι πως εστιάζουν στην χρήση και εφαρμογή των γραπτών αλγορίθμων, έχοντας μειωμένη αίσθηση ως προς το γιατί, πώς και τί κάνουνε (Reys, 1985). Η αποστήθιση και η εφαρμογή των κανόνων εκτέλεσης των αλγορίθμων είναι σε μεγάλο βαθμό εφικτή από τα παιδιά χωρίς όμως να σχετίζεται με άλλη γνώση των αριθμών, ενισχύοντας έτσι την πεποίθηση πως τα μαθηματικά είναι αυθαίρετα (Plunkett, 1979). Η μηχανική εκτέλεση των πράξεων οδηγεί τους μαθητές σε λάθη τα οποία σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορούν να εντοπίσουν λόγω έλλειψης της αίσθησης των μεγεθών. Τα λάθη των μαθητών δεν παρατηρούνται μόνο στην οριζόντια αλλά και στην κάθετη παρουσίαση των πράξεων. Οι κάθετοι αλγόριθμοι προκαλούν κοινά λάθη που μπορούν να αποφευχθούν όταν λαμβάνεται υπόψη μια πιο ολιστική θεώρηση των αριθμών (Beishuizen & Anghileri, 1998).

Όπως συμπεραίνουμε από τα παραπάνω, οι παραδοσιακές διδασκαλίες εστιάζουν κυρίως στους γραπτούς υπολογισμούς με εφαρμογή κανόνων και αλγορίθμων, με αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Ωστόσο, αν απλά απορρίψουμε τις μεθόδους αυτές δε θα έχουμε βρει λύση στο θέμα που μελετάμε. Χρειάζεται να εξετάσουμε αν, πώς και από ποια ηλικία μπορούμε να καλλιεργήσουμε την αίσθηση του αριθμού.

Από ποια ηλικία μπορεί να διδαχθεί η αίσθηση του αριθμού;

Ο Berch (2005) υποστηρίζει πως αφού θεωρούμε ότι η αίσθηση του αριθμού είναι μια δεξιότητα ή κάποιο είδος γνώσης και όχι κάτι που υπάρχει εγγενώς (Robinson, Menchetti & Torgesen, 2002) τότε μπορεί να καλλιεργηθεί.

Ωστόσο, ορισμένοι μελετητές πιστεύουν ότι η αίσθηση του αριθμού καθορίζεται αποκλειστικά από τα βιολογικά μας χαρακτηριστικά και θέτουν ερωτήματα όπως ποια θα ήταν τα οφέλη από τη διδασκαλία της αίσθησης του αριθμού ή η αν θα μπορούσαμε να συμβάλλουμε στην ανάπτυξή της. Παρόλα αυτά οι περισσότεροι ερευνητές θεωρούν πως η αίσθηση του αριθμού έχει μεγάλη πορεία ανάπτυξης και πως ένα εγκεφαλικό υπόστρωμα δεν αρκεί για αρκεί για να κρίνουμε αν αποτελεί μια σταθερή ή μεταβλητή οντότητα (Dehaene, 1997). Ωστόσο η εμφάνιση στοιχειωδών χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού μπορεί να παρατηρηθεί σε πολύ μικρές ηλικίες '*αυθόρμητα χωρίς σαφή αίτια'*, τουλάχιστον σε μη προνομιούχες συνθήκες ανάπτυξης των παιδιών (Dehaene, 1997).

Σύμφωνα με τον Gelman (1990), τα νευρογνωστικά συστήματα που υποστηρίζουν αυτές τις στοιχειώδη αριθμητικές ικανότητες αναφέρονται ως «*θεμελιώδης αρχές*» (skeletal principles) (Gelman, 1990), αφού παρέχουν μόνο τη θεμελιώδη δομή για την απόκτηση αυτών των ικανοτήτων. Οι αρχές αυτές βοηθούν τα παιδιά σε πολύ μικρή ηλικία να αλληλοεπιδράσουν με το περιβάλλον τους καθώς υποστηρίζουν την συγκέντρωση και την κατανόησή τους. Αποτελούν ένα '*μηχανισμό'* που προηγείται της μάθησης αλλά δεν την υποκαθιστά. Η μάθηση είναι εξαιρετικά δύσκολη ακόμη και για ενήλικες όταν δεν υπάρχουν αυτές οι αρχές. Συνεπώς, θα ήταν αδύνατο να μην υπάρχουν για τα μικρά παιδιά εννοιολογικοί σκελετοί που βοηθούν στην ανάπτυξη και δημιουργία ενός βασικού κορμού γνώσεων. Ταυτόχρονα, η συμμετοχή των παιδιών σε αριθμητικά παιχνίδια και δραστηριότητες που περιλαμβάνουν αριθμούς μπορεί να αναδείξει αυτές τις αρχές (Berch, 2005). Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η επίδραση των επιτραπέζιων παιχνιδιών σε παιδιά από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως τόσο οι τυπικές όσο και οι άτυπες διαδικασίες μάθησης μπορούν να ενισχύσουν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού πριν την είσοδο των παιδιών στο σχολείο (Berch, 2005).

Ένας από τους στόχους αυτού του είδους παρέμβασης είναι η ενίσχυση της ικανότητας των παιδιών να χρησιμοποιούν μια νοητή αριθμογραμμή (Berch 2005). Γενικά, το μοντέλο των νοητών αριθμογραμμών είναι κατάλληλο για πρώιμες παρεμβάσεις σχετικά με την αίσθηση του αριθμού. Πώς όμως αυτά τα μοντέλα θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν ώστε να επιτευχθούν αξιόλογες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις;

Οι αριθμητικές πληροφορίες χρησιμοποιούνται από τα παιδιά κυρίως ως μια αναλογική μορφή στην οποία οι αριθμοί αναπαρίστανται ως η ενεργοποίηση κάποιων σημείων της νοητής αριθμογραμμής (Dehaene, 2001). Ωστόσο δεν έχει εξακριβωθεί ακόμη η ακριβής μορφή αυτών των αναπαραστάσεων (Siegler & Booth, 2005). Παρόλα αυτά προκύπτουν διαρκώς εκπαιδευτικά δεδομένα τα οποία δείχνουν πως αυτό το σύστημα εξελίχθηκε για τη διαχείριση προσεγγιστικών αριθμητικών καταστάσεων και όχι για ακριβείς λειτουργίες (Dehaene, 2001).

Η διδασκαλία της αίσθησης του αριθμού και ο ρόλος των εκπαιδευτικών

Ένα θέμα που συναντάμε συχνά στην βιβλιογραφία σχετικά με την αίσθηση του αριθμού είναι πως δεν μπορεί να διδαχτεί άμεσα ως κύριο αντικείμενο (Greeno, 1991; McIntosh, 1998). Σύμφωνα με τη Howden (1989) αναπτύσσεται σταδιακά ως αποτέλεσμα εξερεύνησης, οπτικοποίησης των αριθμών σε ποικίλα πλαίσια και συσχέτισής τους με τρόπους που δεν περιορίζονται από τους παραδοσιακούς αλγορίθμους.

Οι Verschaffel και De Corte (1996) τονίζουν τη σύνθετη, πολυδιάστατη και ιδιαίτερη φύση της αίσθησης του αριθμού, και επισημαίνουν ότι δεν μπορεί να χωριστεί σε κεφάλαια ενός εγχειριδίου ή σε διδακτικές ενότητες και ότι η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι αποτέλεσμα ενός συνόλου μαθηματικών δραστηριοτήτων και όχι μιας ενότητας με ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες.

Ο λόγος που τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν ένα από τα προβλήματα για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι πως δίνουν έμφαση στις γραπτές και βασισμένες σε κανόνες μεθόδους. Αυτή η οπτική συμβάλλει στην ενίσχυση της αντίληψης των μαθητών πως η αλγοριθμική μέθοδος είναι ο μόνος αποδεκτός τρόπος επίλυσης προβλήματος. Για να αλλάξει αυτή η πρακτική, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αναγνωρίσουν τη χρησιμότητα της ανάπτυξης δραστηριοτήτων για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016).

Η βελτίωση της αίσθησης του αριθμού είναι ένα επιθυμητό αποτέλεσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης (NCTM, 1989). Μια απάντηση είναι η βελτίωση της ευελιξίας στους νοερούς υπολογισμούς, στις εκτιμήσεις, στην αναγνώριση και την κρίση των ποσοτήτων και άλλων δεικτών της αίσθησης του αριθμού καθώς και ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων για το σκοπό αυτό.

Με βάση μια άλλη εναλλακτική προσέγγιση θα πρέπει να αντιμετωπίζουμε τις διάφορες ενδείξεις της αίσθησης του αριθμού ως συμπτώματα μιας γενικότερης κατάστασης όπου η γνώση αφορά την εννοιολογική κατανόηση των αριθμών και των ποσοτήτων. Σε αυτή την πιο σφαιρική θεώρηση της αίσθησης του αριθμού, η ανάπτυξή της θεωρείται αποτέλεσμα του συνόλου των μαθηματικών δραστηριοτήτων και όχι ειδικά σχεδιασμένων για την αίσθηση του αριθμού (Greeno, 1991). «*Η αίσθηση του αριθμού μπορεί να θεωρηθεί ως η καλή διαίσθηση των αριθμών και των σχέσεων μεταξύ τους. Αναπτύσσεται σταδιακά ως αποτέλεσμα εξερεύνησης, οπτικοποίησης των αριθμών ποικίλα περιβάλλοντα και μέσω της συσχέτισής τους με τρόπους που δεν περιορίζονται από τους παραδοσιακούς αλγόριθμους. Έτσι, εφόσον τα βιβλία περιορίζονται μόνο σε γραπτούς αλγορίθμους, μπορούν μόνο να προτείνουν ιδέες και θέματα προς εξερεύνηση, δεν μπορούν να αντικαταστήσουν το ‘κάνω μαθηματικά’ το οποίο είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού*» Howden (1989, σελ. 11).

Παρόλο που οι δραστηριότητες μάθησης που βασίζονται στην αναγνώριση προτύπων και ισοδυναμιών περιλαμβάνουν εσκεμμένα μοτίβα εύρεσης και περιγραφής, πολλές από τις ιδιότητες και τις σχέσεις εμπλέκονται έμμεσα, αναπτύσσοντας μια ολιστική κατανόηση σε σχέση με τις διαδικασίες που είναι άμεσες και βασισμένες σε κανόνες (Greeno, 1991). Μάλιστα, ίσως είναι πιο ωφέλιμο να θεωρήσουμε την αίσθηση του αριθμού ως ένα παράγωγο της μάθησης παρά ως άμεσο στόχο μιας εισήγησης.

Το περιβάλλον στο οποίο ενθαρρύνεται η περιέργεια και η εξερεύνηση των μαθητών, δηλαδή το περιβάλλον της τάξης, οργανώνεται και συντονίζεται από το δάσκαλο ενώ οι μαθητές αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους και με το δάσκαλο σε θέματα όπως οι ποσότητες και οι αριθμοί. Σε τέτοια περιβάλλοντα, τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές εμπλέκονται σε συζητήσεις στις οποίες καλούνται να επιχειρηματολογήσουν για την σημασία εννοιών και να νοηματοδοτήσουν αριθμούς και ποσότητες σε διαφορετικές καταστάσεις (Markovitz, 1989). Παραδείγματα συζητήσεων με θεματολογία τους αριθμούς και τις ποσότητες συναντώνται κυρίως σε αίθουσες όπου οι δραστηριότητες οργανώνονται και εξελίσσονται στα πλαίσια της συνεργατικής μάθησης. Η Lampert (1990) κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στην πέμπτη δημοτικού σχεδίασε μια συνεργατική δραστηριότητα στην οποία αυτή και οι μαθητές δούλεψαν μαζί για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Δραστηριότητες μέσω των οποίων γίνεται διερεύνηση των αριθμών και των ποσοτήτων περιλαμβάνουν την κατασκευή μοτίβων και την αναγνώριση πολλών ειδών ισοδυναμιών. Η θεώρηση των μαθηματικών ως μια επιστήμη μοτίβων (Steen, 1988), παρά ως μιας τεχνολογίας για την παραγωγή διαδικασιών και πράξεων θα ήταν σε συμφωνία με αυτήν την οπτική. Καθώς τα μοτίβα και οι ισοδυναμίες φαίνεται να έχουν χρησιμότητα, η εύρεση διαφορετικών λύσεων σε προβλήματα μπορεί να συνεισφέρει στην γνώση των μαθητών για τη φύση των αριθμών και των ποσοτήτων καθώς και στην κατανόηση για το πώς τα μαθηματικά σχετίζονται με καταστάσεις όπου περιλαμβάνονται φυσικά αντικείμενα, όπως ποσότητες χρημάτων ή άλλα διακριτά πράγματα (Greeno, 1991). Η διδασκαλία οποιουδήποτε αντικειμένου επηρεάζεται και καθορίζεται άμεσα από τους ανθρώπους που αναλαμβάνουν αυτό το έργο. Συνεπώς, είναι ωφέλιμο να αναφέρουμε στοιχεία της βιβλιογραφίας που περιγράφουν το ρόλο του εκπαιδευτικού κατά τη διδασκαλία της αίσθησης του αριθμού.

Έχει αναγνωριστεί πως βασικός ρόλος των εκπαιδευτικών είναι να ωθήσουν τα παιδιά να εμπλακούν ενεργά στην διαδικασία της μάθησης και να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά ως μια διαδικασία σκέψης παρά ως ένα κατάλογο λειτουργιών και πράξεων που πρέπει να αποστηθίσουμε. Τα παιδιά δεν θεωρούνται πλέον παθητικοί αποδέκτες πληροφοριών αλλά εμπλέκονται ενεργά στην κατασκευή της γνώσης τους μέσα από συζητήσεις για τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι ίδιοι ή την κατανόηση των στρατηγικών των συμμαθητών τους. Εξηγώντας τι έχουν κάνει και δικαιολογώντας τις αποφάσεις που πήραν αναπτύσσουν την ικανότητα να αιτιολογούν και να επιχειρηματολογούν, δηλαδή δεξιότητες από τις οποίες θα ωφεληθούν σε όλα τα στάδια μάθησης των μαθηματικών (Anghileri, 2000).

Η κατανόηση της σχέσης μεταξύ δύο αριθμών και η ανάπτυξη μεθόδων για εκτιμήσεις θα πρέπει να αποτελεί πλέον το επίκεντρο της διδασκαλίας, αντικαθιστώντας το παραδοσιακό μοντέλο των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής στα προγράμματα σπουδών. «*Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτή τη διαδικασία δεν είναι μόνο να αποδέχεται τις προσωπικές μεθόδους των μαθητών που είναι λειτουργικές αλλά να τους βοηθάει να τις αναπτύξουν και να υιοθετήσουν ακόμη καλύτερες μεθόδους. Εξηγώντας, συζητώντας και συγκρίνοντας διάφορες μερικώς γραμμένες και μερικώς νοητές μεθόδους, ο εκπαιδευτικός μπορεί να οδηγήσεις τους μαθητές να επιλέξουν και να χρησιμοποιήσουν μεθόδους που είναι πιο γρήγορες, μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα μεγάλο εύρος* *περιπτώσεων και θα είναι χρήσιμες μαθησιακά»* (DfEE, 2001, σελ. 11, όπως αναφέρεται στο: Anghileri, 2000).

Η κατανόηση του μεγέθους των αριθμών περιλαμβάνει τη δυνατότητα σύγκρισης μεταξύ των αριθμών, τον προσδιορισμό ανάμεσα σε δυο αριθμούς ποιος είναι πιο κοντά σε ένα τρίτο αριθμό, την διάταξη αριθμών καθώς και την εύρεση ή την αναγνώριση ενός αριθμού μεταξύ πολλών άλλων. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να αναπτύξουν αυτές τις ικανότητες όταν η διδασκαλία εστιάζει απλά στο χειρισμό συμβόλων με αποτέλεσμα να παρατηρείται ο διαχωρισμός μεταξύ των αριθμών και των πράξεων από το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιούνται (Resnick, 1986). Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές θεωρούν πως οι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος είναι δυο διαφορετικές οντότητες (Kerslake, 1986).

Η έρευνα έχει δείξει πως οι εκπαιδευτικοί διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων. Σύμφωνα με την Reys (1994) οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών και οι δραστηριότητες που επιλέγουν για την μαθησιακή διαδικασία συμβάλουν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Ακόμη, βοηθώντας τα παιδιά να αναπτύξουν την αίσθηση του αριθμού και δημιουργώντας ένα καλό μαθησιακό περιβάλλον ενθαρρύνουν τα παιδιά να εξερευνήσουν τους αριθμούς, τις λειτουργίες τους και τις σχέσεις μεταξύ τους ελεύθερα και ουσιαστικά (McIntosh, 2004; Siegler & Booth 2005; Yang & Reys, 2001a, b). Το να αποκτήσουν όλοι οι μαθητές την αίσθηση αριθμού θα πρέπει να είναι ένα σημαντικός στόχος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Για να διδάξει κάποιος μαθηματικά, απαραίτητη είναι η σε βάθος κατανόησή τους (Ball, 1990). Η επιτυχημένη διδασκαλία προϋποθέτει από τους εκπαιδευτικού να έχουν αίσθηση των τυπικών αλγορίθμων αλλά και μη τυπικών διαδικασιών για να εκτελέσουν πράξεις καθώς και την ικανότητα να επιχειρηματολογούν ευέλικτα για τους αριθμούς και τις πράξεις. Οι εκπαιδευτικοί μπορεί να εκτελούν σωστά τις διαδικασίες αλλά να έχουν την τάση να αδυνατούν να δικαιολογήσουν τη λειτουργία των διαδικασιών αυτών (Whitacre, 2012). Ωστόσο, συχνά πολλοί εκπαιδευτικοί γνωρίζουν πολύ καλά τις διαδικασίες και τους αλγόριθμους των μαθηματικών χωρίς ωστόσο να έχουν βαθιά εννοιολογική αλλά και διαδικαστική κατανόηση του αντικειμένου (Ball, 1990; Ma, 1999). Η διαδικαστική γνώση είναι καθοδηγούμενη από κανόνες και αφορά τις μαθηματικές διαδικασίες και τη χρήση τους για υπολογισμούς. Η εννοιολογική γνώση, από την άλλη πλευρά, είναι μια ευρύτερη γνώση την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που επιτρέπουν την κατασκευή διαδικασιών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Lampert, 1986). Τέλος, μελέτες όπως αυτή του Tsao (2004) έχουν δείξει πως πολλοί εκπαιδευτικοί δεν έχουν ανεπτυγμένη αίσθηση αριθμού.

Μελέτες της αίσθησης του αριθμού σε εκπαιδευτικούς

Οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης προέρχονται από παιδαγωγικές σχολές και κατά τη διάρκεια των σπουδών τους παρακολουθούνε μαθήματα που σχετίζονται με την μαθηματική εκπαίδευση. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης προέρχονται από τμήματα μαθηματικών, όπου τα μαθήματα του προγράμματος σπουδών τους αφορούν κατά κύριο λόγο τα ‘καθαρά μαθηματικά’ χωρίς να δίνεται έμφαση στην μαθηματική εκπαίδευση (Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016). Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται και στην Ελλάδα όπου τα τμήματα Μαθηματικών των πανεπιστημίων εστιάζουν κυρίως στα θεωρητικά μαθηματικά, παραγκωνίζοντας σε πολλές περιπτώσεις την παιδαγωγική των μαθηματικών.

Τόσο στην ελληνική όσο και στην ξένη βιβλιογραφία, μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίζει η έρευνα σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν φοιτητές και απόφοιτοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στους νοερούς και κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς (Alajmi & Reys, 2007; Tsao, 2004; Yang, Reys & Reys, 2009; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014; Δεσλή & Ανεστάκης,

2014) σε σχέση με τις αντίστοιχες που αφορούν τη δευτεροβάθμια (Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016; Ουσταμπασίδου, 2018). Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των εργασιών που αφορούν τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αρχικά, οι Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz (2016) μελέτησαν τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού σε 67 φοιτητές μαθηματικού τμήματος και συνέκριναν τα αποτελέσματά τους με αυτά των Yang, Reys & Reys (2009), οι οποίοι μελέτησαν την αίσθηση του αριθμού εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ταϊβάν. Συνολικά, τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ήταν υψηλότερα στους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, η συχνότητα των απαντήσεων στις οποίες φανερωνόταν ένα ή περισσότερα από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού ήταν μεγαλύτερη στις απαντήσεις των φοιτητών του μαθηματικού τμήματος σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας, οι οποίοι σε μεγάλο ποσοστό έκαναν χρήση αλγόριθμων και κανόνων. Επίσης, οι φοιτητές του μαθηματικού τμήματος παρουσίασαν μεγαλύτερη ευελιξία καθώς ανέπτυξαν αρκετές διαφορετικές μεταξύ τους στρατηγικές.

Η Ουσταμπασίδου (2018) διερεύνησε τις στρατηγικές σε νοερούς υπολογισμούς, εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις 4 πράξεις. Σε αντίθεση, με την έρευνα τόσο των Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz (2016) όσο και των Yang, Reys & Reys (2009) οι οποίες εστίασαν στην εξέταση πράξεων στους ρητούς αριθμούς, η Ουσταμπασίδου (2018) μελέτησε πράξεις μόνο με φυσικούς αριθμούς. Στην έρευνά της συμμετείχαν 84 εν ενεργεία μαθηματικοί μέρος των οποίων απάντησε σε γραπτό τεστ ενώ οι υπόλοιποι συμμετείχαν με προφορική συνέντευξη. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθηματικοί είναι ικανοί να υπολογίζουν νοερά χρησιμοποιώντας στρατηγικές ενώ τα λάθη που έγιναν κατά τους νοερούς υπολογισμούς οφείλονται κατά κύριο λόγο σε λανθασμένους υπολογισμούς και κατά δευτερεύοντα σε κακή χρήση των στρατηγικών. Η σύγκριση μεταξύ γραπτών και προφορικών απαντήσεων δείχνει καλύτερα αποτελέσματα για τις δεύτερες. Ένας από τους λόγους που καθορίζει αυτή τη διαφοροποίηση είναι πως το δείγμα είναι ενήλικοι οι οποίοι καθημερινά βρίσκονται σε καταστάσεις που υπολογίζουν νοερά και συνεπώς είναι εξοικειωμένοι με αυτή την πρακτική (Ουσταμπασίδου, 2018).

Μια ακόμη έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας ήταν η διπλωματική εργασία του Χαντόγλου (2018) ο οποίος μελέτησε την γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου σε προβλήματα εκτίμησης που περιέχουν ρητούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν τις υποθέσεις της έρευνάς του δείχνοντας πως οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διαθέτουν καλύτερη γνώση περιεχομένου των ρητών αριθμών, συγκριτικά με την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των ρητών αριθμών.

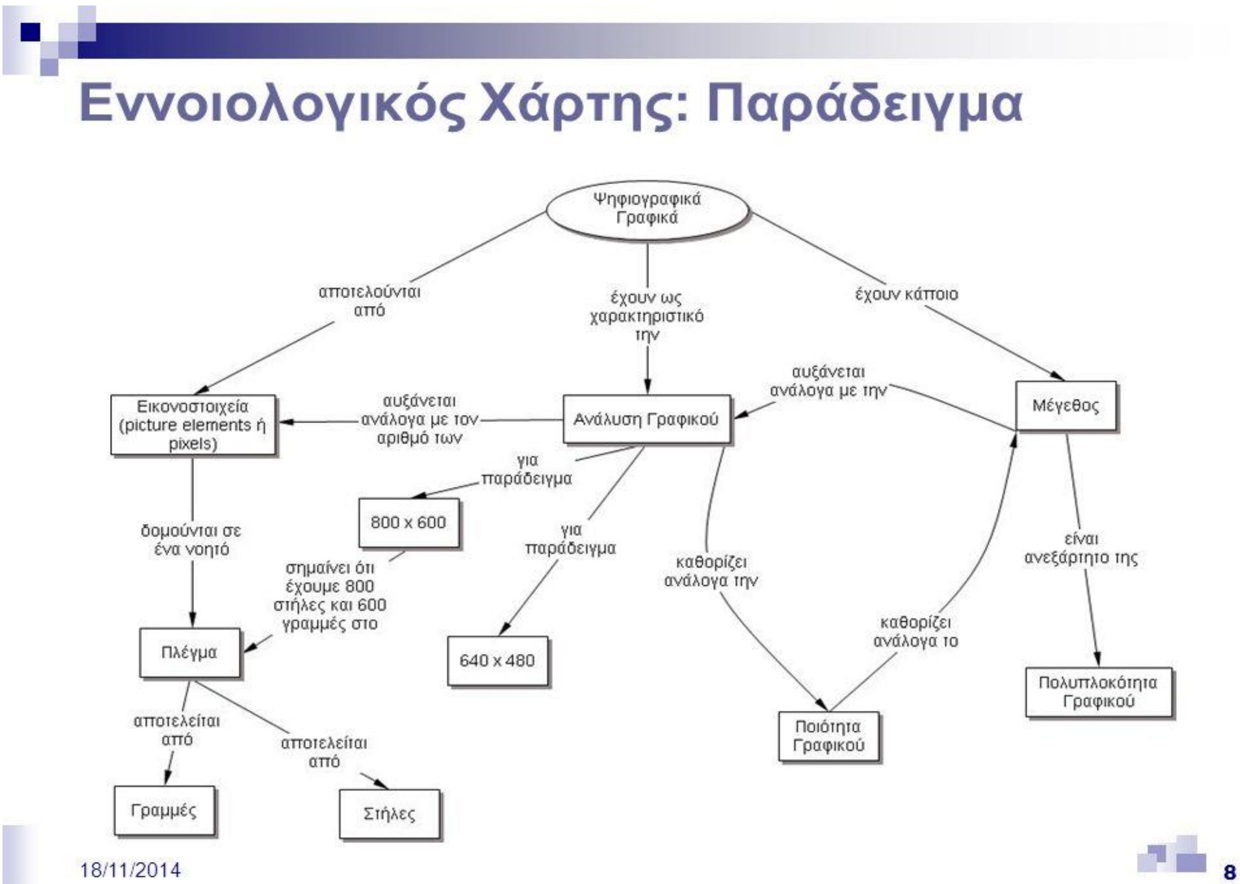
Η παρούσα μελέτη

Βασικό θέμα της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη της αίσθησης του αριθμού και συγκεκριμένα σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων που πιθανά θα αποτελέσουν μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Παρουσιάστηκε μια σύντομη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τους ορισμούς της αίσθησης του αριθμού, την αναγκαιότητά της και το ρόλο των εκπαιδευτικών οι οποίοι καλούνται να διδάξουν στους μαθητές. Η διερεύνηση της αίσθησης του αριθμού έγινε με χρήση δυο εργαλείων. Το Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού το οποίο εξετάζει την ύπαρξη ή μη των χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού. Το δεύτερο εργαλείο είναι η χρήση εννοιολογικών χαρτών. Από τους συμμετέχοντες, αφού πρώτα τους δόθηκαν συγκεκριμένες οδηγίες, ζητήθηκε να κατασκευαστεί ένας εννοιολογικός χάρτης με κέντρο ο ½. Με αυτόν τον τρόπο δόθηκε ο χώρος να αναπτυχθεί η εικόνα και οι σκέψεις των συμμετεχόντων σχετικά με την κεντρική έννοια που τέθηκε. Τα αποτελέσματα αναλύθηκαν και αξιοποιήθηκαν για τη διεξαγωγή συμπερασμάτων. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αναλυτικά τί είναι οι εννοιολογικοί χάρτες, πώς κατασκευάζονται, πώς αξιολογούνται καθώς και πως χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη ως εργαλείο μέτρησης της αίσθησης του αριθμού.

Εννοιολογικοί Χάρτες

Συστατικά στοιχεία του εννοιολογικού χάρτη

Ένας εννοιολογικός χάρτης αποτελείται από κόμβους και συνδέσμους. Κάθε κόμβος αναπαριστά τις έννοιες (*concept*), που μπορεί να είναι αντικείμενα ή γεγονότα και κάθε κόμβος έχει ετικέτα. Ο ρόλος των συνδέσμων είναι να προσδιορίζουν τη σχέση μεταξύ των κόμβων περιγράφοντας πώς μια έννοια συνδέεται με μια άλλη. Δυο κόμβοι συνδέονται μεταξύ τους με μια γραμμή, με ή χωρίς κατεύθυνση και κάθε γραμμή φέρει μια ετικέτα που προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ των δυο κόμβων. Η βασική έννοια που περιγράφεται συνήθως βρίσκεται στην κορυφή του χάρτη καλείται κεντρική έννοια (*central concept*) (Αναστασιάδης 2009). Στην Εικόνα 1 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εννοιολογικού χάρτη με κέντρο τα Ψηφιακά Γραφικά, όπως παρουσιάστηκε στο ‘Σεμινάριο Εννοιολογικής Χαρτογράφησης – Αθήνα, Σεπτέμβριος 2010’. Η κεντρική έννοια συνδέεται μέσω της φράσης ‘έχουν κάποιο’ με τον κόμβο ‘Μέγεθος’. Η τριάδα Κόμβος - Σύνδεσμος -Κόμβος δημιουργεί μια πρόταση (*proposition*). Ουσιαστικά, ένας εννοιολογικός χάρτης αποτελεί μια διαγραμματική αναπαράσταση συνδέσεων μεταξύ δύο ή περισσοτέρων εννοιών με τη μοροφή προτάσεων προβάλλοντας και αναδεικνύοντας τις συνδέσεις και τις σχέσεις μεταξύ των κόμβων. Η διαδικασία κατασκευής ενός χάρτη καλείται εννοιολογική χαρτογράφηση. Χαρακτηριστικά των εννοιολογικών χαρτών αποτελούν η ιεραρχική δομή τους, η ύπαρξη παραδειγμάτων και η ύπαρξη σύνθετων συνδέσεων (cross-links) μεταξύ των κόμβων (Αναστασιάδης, 2009).

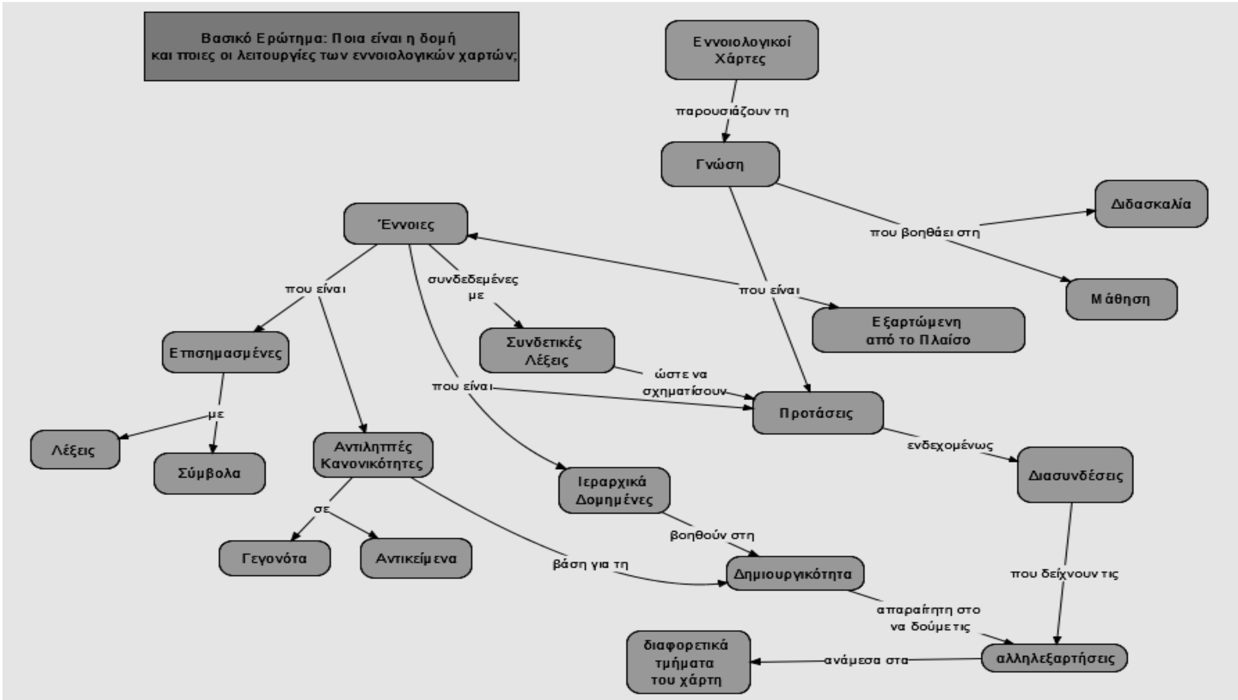


Εικόνα 1: Παράδειγμα εννοιολογικού χάρτη

Η εμφάνιση των εννοιολογικών χαρτών

Οι εννοιολογικοί χάρτες αναπτύχθηκαν το 1972 στα πλαίσια ενός ερευνητικού προγράμματος του Joseph Novak στο Cornell University με σκοπό την κατανόηση την αλλαγής της γνώσης των παιδιών για τις επιστήμες (Novak & Musonda, 1991). Κατά τη διάρκεια της μελέτης οι ερευνητές πήραν συνεντεύξεις από πολλά παιδιά και διαπίστωσαν πως ήταν πολύ δύσκολο να εντοπίσουν τις αλλαγές στην κατανόηση επιστημονικών εννοιών με αυτόν τον τρόπο. Το πρόγραμμα ήταν βασισμένο στη θεωρία μάθησης του Ausubel (1963). Η θεμελιώδης ιδέα της θεωρίας αυτής είναι πως η μάθηση συμβαίνει ως αφομοίωση νέων εννοιών σε ήδη υπάρχουσες γνώσεις. Από την ανάγκη για να βρεθεί καλύτερος τρόπος για την αναπαράσταση των γνωστικών αλλαγών των παιδιών προέκυψε η ιδέα της αναπαράστασης με τη μορφή των εννοιολογικών χαρτών. Έτσι δημιουργήθηκε ένα νέο εργαλείο που βρήκε εφαρμογή όχι μόνο στην έρευνα αλλά και σε άλλες χρήσεις, οργανόγραμμα του μαθήματος, εισαγωγικός χάρτης για την παρουσίαση μιας ενότητας, προ-οργανωτής (advance organizer), χάρτης επανάληψης. Οι εφαρμογές αυτές αναλύονται ξεχωριστά παρακάτω.

Οι εννοιολογικοί χάρτες εμφανίστηκαν στη βιβλιογραφία τη δεκαετία του 1970 με τον Joseph Novak να είναι ο πρώτος που έκανε συστηματική χρήση τους για με σκοπό τη μάθηση. Ο ίδιος περιγράφει τη χρήση των εννοιολογικών χαρτών ως μια διαδικασία που εμπλέκει την αναγνώριση των εννοιών σε ένα σύνολο υλικού μελέτης και την οργάνωση των εννοιών αυτών σε μια ιεραρχική διευθέτηση από τη γενική και περιεκτική, προς τη λιγότερο περιεκτική και περισσότερο εξειδικευμένη έννοια (Novak, Gowin & Johansen, 1983). Ο εννοιολογικός χάρτης είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για την εκπαίδευση των μαθητών αλλά και εργαζόμενων σε επιχειρήσεις ή και των ίδιων των εκπαιδευτικών. Ένας τρόπος για να απαντήσουμε στο ερώτημα «ποια είναι η δομή και ποιες οι λειτουργίες των εννοιολογικών χαρτών» είναι με χρήση του ίδιου εργαλείου. Στην Εικόνα 2 παρουσιάζεται ένας εννοιολογικός χάρτης που απαντά στο παραπάνω κομβικό ερώτημα (focus question). Στον παρακάτω χάρτη αναφέρονται συνοπτικά τα βασικά στοιχεία κάθε εννοιολογικού χάρτη όπως παρουσιάστηκαν από το (Novak, 2012).



Εικόνα 2: Παρουσίαση λειτουργιών και στοιχείων του εννοιολογικού χάρτη μέσω ενός χάρτη

Κατασκευή καλών εννοιολογικών χαρτών

Για να κατασκευαστεί ένας καλός εννοιολογικός χάρτης, είναι σημαντικό να δώσουμε ένα τομέα γνώσης που είναι πολύ οικείος στο πρόσωπο που δομεί το χάρτη. Είναι επίσης σημαντικό να οριστεί ο τομέας της γνώσης που πρόκειται να χαρτογραφηθεί και αυτό γίνεται καλύτερα με την προετοιμασία κατάλληλου ερωτήματος εστίασης. Συνήθως τα ερωτήματα εστίασης (ή κεντρικός κόμβος του χάρτη) που απαιτούν εξήγηση, και όχι μια απλή περιγραφή ή κατηγοριοποίηση οδηγούν σε καλύτερους εννοιολογικούς χάρτες. Γενικά, τα ερωτήματα εστίασης που χρειάζονται επεξήγηση απαιτούνε βαθύτερη και πιο ουσιαστική σκέψη σε σχέση με αυτά που ζητούν απλά περιγραφή (Derbentseva, Safayeni & Cañas, 2007).

Αφού οριστεί επαρκώς το θέμα του εννοιολογικού χάρτη είναι χρήσιμο να εντοπιστούν οι έννοιες κλειδιά που σχετίζονται με τον τομέα και να κατασκευαστεί μια λίστα. Αυτές οι έννοιες χρειάζεται να αξιολογηθούν και να ιεραρχηθούν από την πιο γενική και περιεκτική, που θα βρίσκεται στην κορυφή της λίστας προς την πιο εξειδικευμένη που θα βρίσκεται στο τέλος της λίστας. Αυτή η λίστα εννοιών ονομάζεται '*θέση στάθμευσης'* (parking lot), γιατί η θέση των εννοιών δεν είναι σταθερή αλλά αλλάζει με σκοπό την βέλτιστη τοποθέτησή τους στον εννοιολογικό χάρτη (Novak & Canas, 2008).

Στο επόμενο βήμα κατασκευάζεται ένας αρχικός εννοιολογικός χάρτης ο οποίος θα πρέπει να επανεξεταστεί στη συνέχεια. Η κατασκευή ενός εννοιολογικού χάρτη θα μπορούσε να μην τελειώσει πότε και διαρκώς να αναθεωρείται και να εμπλουτίζεται. Ωστόσο οι καλοί εννοιολογικοί χάρτες προκύπτουν από τουλάχιστον δυο με τρεις αναθεωρήσεις (Novak & Canas, 2008).

Στη συνέχεια γίνονται οι διασυνδέσεις μεταξύ των εννοιών. Οι συνδέσεις αυτές γίνονται με βέλη μεταξύ των κόμβων και μπορούν να συνοδεύονται με κάποια περιγραφή για τη σχέση που συνδέει τις δυο έννοιες. Προφανώς, αφού ο εννοιολογικός χάρτης αναπτύσσεται γύρω από ένα συγκεκριμένο θέμα, όλες οι έννοιες συνδέονται με κάποιο τρόπο μεταξύ τους. Γι' αυτό, οι διασυνδέσεις πρέπει να γίνονται επιλεκτικά και με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Σε μερικές περιπτώσεις οι μαθητές αναφέρουν πως είναι δύσκολο να κάνουν τις συνδετικές φράσεις στις γραμμές του εννοιολογικού τους χάρτη. Ο λόγος είναι το χαμηλό επίπεδο κατανόησης των εννοιών και της σύνδεσης που υπάρχει μεταξύ αυτών (Novak & Canas, 2008). Μόλις οι μαθητές αρχίσουν να εστιάζουν σε καλές συνδετικές λέξεις/φράσεις θα αντιλαμβάνονται πως δεν μπορούν όλες οι έννοιες να συνδεθούν μεταξύ τους. Θα πρέπει να προσδιορίσουν τις πιο εμφανείς και πιο χρήσιμες. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει αυτό που η Bloom (1956) έχει περιγράψει ως υψηλά γνωστικά επίπεδα και περιλαμβάνει την αξιολόγηση και σύνθεση της γνώσης. Η εννοιολογική χαρτογράφηση είναι ένας εύκολος τρόπος να διαπιστωθεί η υψηλή εννοιολογική κατανόηση και γι' αυτό το λόγο είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αξιολόγησης (Edmonson, 2000).

Μια άλλη μέθοδος για την ανάπτυξη εννοιολογικού χάρτη είναι οι ‘Χάρτες-Σκελετοί Ειδικών’ (*Expert skeleton maps).* Η ιδέα για την χρήση των *expert skeleton concept maps* είναι πως για πολλούς μαθητές και δασκάλους, είναι δύσκολο να ξεκινήσουν την κατασκευή ενός εννοιολογικού χάρτη σε μια λευκή και άδεια κόλλα χάρτη. Παρέχοντας έναν εννοιολογικό χάρτη που προετοιμάστηκε από έναν ειδικό με 10-15 κόμβους που αφορούν ένα θέμα (skeleton concept map), οι μαθητές μπορούν ευκολότερα να ξεκινήσουν τη δόμηση του εννοιολογικού χάρτη τους γύρω από μια ‘σκαλωσιά’ επιτυγχάνοντας ένα πιο σύνθετο αποτέλεσμα (Novak & Canas, 2009). Οι Berk & Winsler (1995) τονίζουν πως οι μαθητές είναι συνήθως πολύ ανασφαλείς για τις γνώσεις τους και χρειάζονται τόσο γνωστική όσο και συναισθηματική στήριξη. Ο δάσκαλος μπορεί να παρέχει την συναισθηματική στήριξη, ο ‘skeleton map’ μπορεί να παρέχει τη γνωστική στήριξη για τα πάνε καλά με το ζητούμενο θέμα. Επιπλέον, οι μαθητές (συχνά και οι δάσκαλοι) έχουν παρανοήσεις ή κάποιες λάθος απόψεις για ένα θέμα, που θα εμπόδιζαν τη μάθηση τους αν πρόκειται να ξεκινήσουν από ‘λευκό χαρτί’.

Τρόποι αξιοποίησης και λειτουργίες του εννοιολογικού χάρτη στο περιβάλλον της τάξης

Ο εννοιολογικός χάρτη μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό διδακτικό εργαλείο εμπλουτίζοντας τη διδακτική προσέγγιση του διδάσκοντος καθώς και ένα εργαλείο σχεδιασμού και οργάνωσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως: 1) οργανόγραμμα του μαθήματος, 2) εισαγωγικός χάρτης για την παρουσίαση μιας ενότητας, 3) προ-οργανωτής (advance organizer) 4) χάρτης επανάληψης (Novak & Gowin, 1984; Canas & Novak, 2006). Στη συνέχεια γίνεται περιγραφή των τεσσάρων λειτουργιών.

Πρώτον, η αξιοποίηση του εννοιολογικού χάρτη ως οργανόγραμμα μαθήματος δίνει τη δυνατότητα παρουσίασης ενός πλάνου του γνωστικού αντικειμένου που θα αφορά τις βασικές έννοιες καθώς και την παρουσίαση ενός σχεδίου μαθήματος που θα περιέχει τους στόχους, το εποπτικό υλικό και τις εκπαιδευτικές τεχνικές (Novak, 1998). Στην πρώτη περίπτωση παρουσιάζονται κυρίως οι έννοιες που πρόκειται να παρουσιαστούν, η έκτασή τους καθώς και οι προ-απαιτούμενη υπάρχουσα γνώση. Στην δεύτερη περίπτωση, δίνεται η δυνατότητα στο διδάσκοντα να οργανώσει με διαγραμματικό τρόπο συνδέοντας τις βασικές συνιστώσες.

Δεύτερον, σύμφωνα με το Novak (1998), η παρουσίαση μιας νέας ενότητας και των εννοιών που θα μελετηθούν, μπορεί να γίνει με τη χρήση εννοιολογικού χάρτη. Κατά την εξέλιξη της νέας θεματικής θα παρουσιάζονται νέοι εννοιολογικοί χάρτες για τις επιμέρους έννοιες. Οι χάρτες αυτοί μπορεί να προέρχονται όχι μόνο από το δάσκαλο αλλά και από τη συνεργασία δασκάλου-μαθητών.

Τρίτον, ο εννοιολογικός χάρτης ως προοργανωτής (Ματσαγγούρας, 2001) χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία και την εισαγωγή νέων εννοιών απεικονίζοντας όμως έννοιες που ήδη γνωρίζουν οι μαθητές. Αποτελεί δηλαδή μια γέφυρα για τη σταδιακή εισαγωγή της νέας πληροφορίας και επιτρέπει τη δόμηση σχέσεων μεταξύ αυτής και της υπάρχουσας γνώσης (Novak, 1998).

Τέταρτον, η λειτουργία του εννοιολογικού χάρτη ως χάρτη επανάληψης μπορεί να πραγματοποιηθεί μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής ενότητας. Μπορεί να κατασκευαστεί τόσο από το διδάσκοντα όσο και από τους μαθητές και συνοψίζει τις σημαντικότερες έννοιες και τις σχέσεις που τις συνδέουν (Novak, 1998).

Ο εννοιολογικός χάρτης σαν εργαλείο αξιολόγησης

Ο εννοιολογικός χάρτης έχει αξιοποιηθεί σε διάφορα γνωστικά πεδία όπως στη βιολογία, στην περιβαλλοντική εκπαίδευση και στη διδακτική των επιστημών. Σε ερευνητικές μελέτες, οι εννοιολογικοί χάρτες έχουν χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση της πρότερης γνώσης των εκπαιδευόμενων (Pearsall, Skipper & Mintzes. 1997), τη διερεύνηση των αναπαραστάσεων των εκπαιδευόμενων σχετικά με το υπό εξέταση θέμα (Κόλλιας κ.ά. 2000), ως εργαλείο συνεργασίας (Κόμης & Φειδάς 2000, Canas et al. 2004), ως εργαλείο εννοιολογικής αλλαγής και αξιολόγησης.

Παραδοσιακές μορφές αξιολόγησης όπως ερωτήσεις πολλαπλή επιλογής ή ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού χαρακτηρίζονται συνήθως από αντικειμενικότητα και αξιοπιστία. Ωστόσο, οι απαντήσεις βασίζονται κυρίως σε διαδικασίες ανάκλησης και αναγνώρισης, ενώ πολλές φορές περιορίζονται από την ερώτηση, με αποτέλεσμα σημαντικές διαφορές στη γνωστική δομή να συγκαλύπτονται (McClure, Sonak & Suen, 1999). Επίσης, οι ερωτήσεις αυτού του τύπου μένουν πολλές φορές αναπάντητες είτε λόγω του δύσκολου λεξιλογίου που δεν μπορούν να καταλάβουν οι μαθητές είτε επειδή δεν τις γνωρίζουν. Τέλος, η περιορισμένη έκταση κάθε ερώτησης οδηγεί τους διδάσκοντες σε μια διαδικασία σύνθεσης των απαντήσεων των μαθητών, προκειμένου να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα σχετικά με τις γνώσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών (McClure, Sonak & Suen, 1999).

Η αξιοποίηση του εννοιολογικού χάρτη ως εργαλείο αξιολόγησης δίνει τη δυνατότητα αντικειμενικής αξιολόγησης του μαθητή και τη δυνατότητα αναπαράστασης της γνωστικής του δομής. Επίσης, μπορεί να λειτουργήσει ως μια γέφυρα μεταξύ των αντικειμενικών και υποκειμενικών μορφών αξιολόγησης που αναφέρθηκαν παραπάνω. Για τους Novak & Gowin (1984), οι εννοιολογικοί χάρτες αποτελούν ένα είδος σχηματικής περίληψης του τί γνωρίζει ο μαθητής για το εξεταζόμενο θέμα. Αν και η κατασκευή ενός εννοιολογικού χάρτη είναι χρονοβόρα διαδικασία οι πληροφορίες που τελικά αντλούμε από αυτόν αντισταθμίζουν αυτό το μειονέκτημα. Για παράδειγμα, αν ένας χάρτης περιέχει οχτώ έννοιες, αυτό μας δίνει πληροφορίες με τη μορφή εφτά τουλάχιστον προτάσεων, ενώ αν υπάρχουν σύνθετες συνδέσεις ο αριθμός μεγαλώνει σημαντικά. Επιπλέον, οι ικανότητες που είναι απαραίτητες για την κατασκευή του εννοιολογικού χάρτη είναι αρκετά απλούστερες από εκείνες των υποκειμενικών μορφών αξιολόγησης (McClure, Sonak & Suen, 1999). Τέλος, η κατασκευή του εννοιολογικού χάρτη δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν σφαιρικά τη γνώση τους σχετικά με το ζητούμενο θέμα χωρίς να περιορίζονται σε ένα πολύ μικρό κομμάτι αυτής (Αναστασιάδης, 2009).

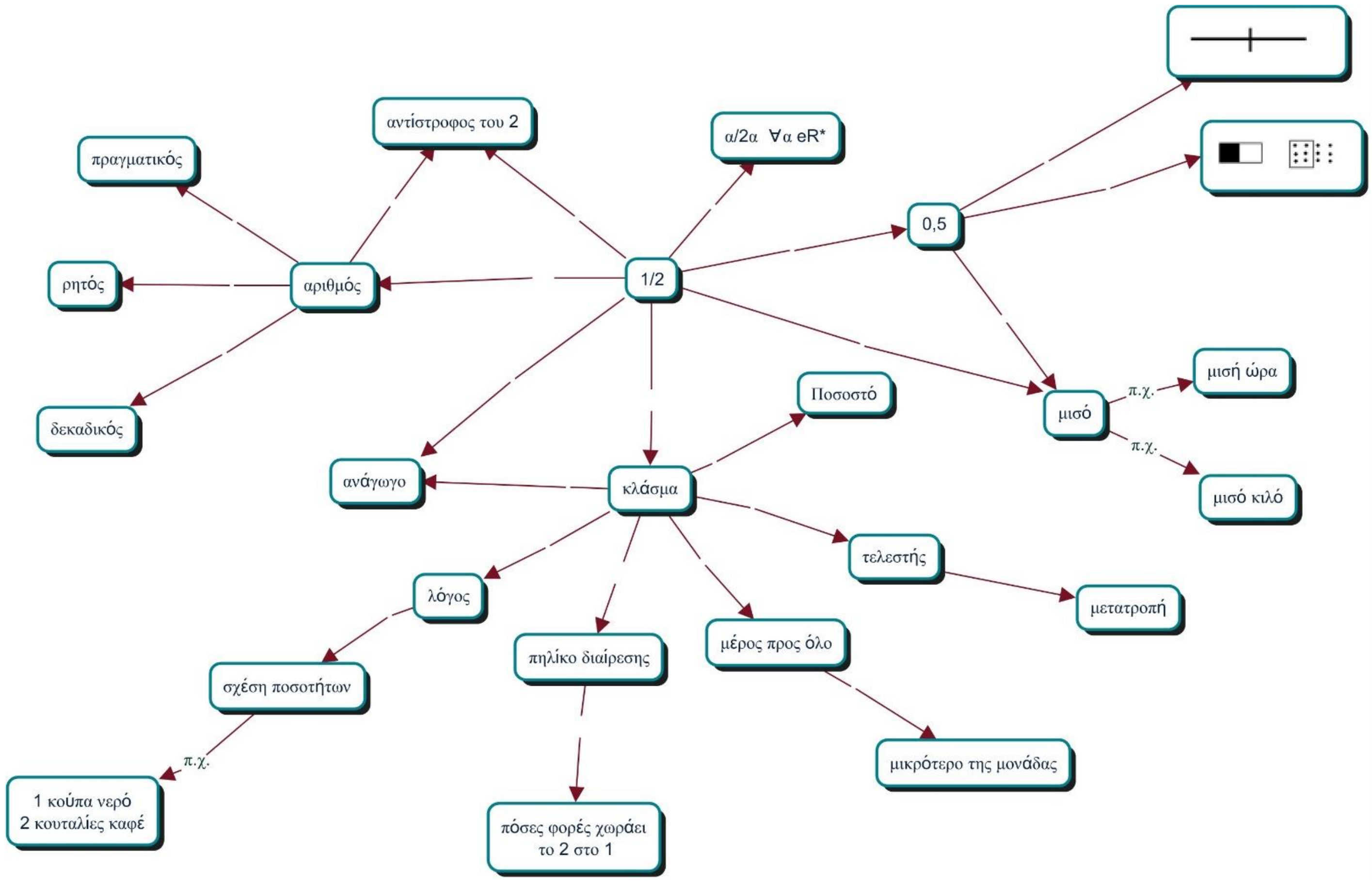
Βαθμολόγηση εννοιολογικών χαρτών

Εφόσον οι εννοιολογικοί χάρτες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία αξιολόγησης είναι λογικό πως θα πρέπει να βαθμολογηθούν. Στη βιβλιογραφία συναντάμε τρεις κύριες προσεγγίσεις για τη βαθμολόγηση ενός εννοιολογικού χάρτη: 1) Η αξιολόγηση των δομικών του στοιχείων 2) η σύγκριση με έναν εννοιολογικό χάρτη κατασκευασμένο από έναν ειδικό 3) ο συνδυασμός των δύο παραπάνω (Ruiz-Primo, Shavelson & Schultz, 1997). Λαμβάνοντας πως υπόψιν η βαθμολόγηση των εννοιολογικών χαρτών γίνεται συνήθως με τη σύγκριση του εννοιολογικού χάρτη ενός μαθητή με αυτόν ενός ειδικού, σημειώνεται πως οι δυο πιο συνηθισμένες μέθοδοι βαθμολόγησης είναι η ***δομική μέθοδος*** η οποία αξιολογεί ποσοτικά τους εννοιολογικούς χάρτες εξετάζοντας τα έγκυρα δομικά στοιχεία και τις σχέσεις των εννοιών και η ***σχεσιακή προσέγγιση***, η οποία εστιάζει στην ακρίβεια κάθε πρότασης (Gouli et al., 2005). Στη βάση αυτής της ανάλυσης προτείνεται η κατηγοριοποίηση των βαθμολογικών σχημάτων με τη χρήση πέντε κριτηρίων: 1) τύπος βαθμολόγησης (ποιοτική, ποσοτική ή συνδυασμός) 2) μέθοδος βαθμολόγησης: δομική, σχεσιακή ή συνδυασμός, 3) βαθμολόγηση με βάση έναν χάρτη κατασκευασμένο από κάποιον ειδικό ή χωρίς τη χρήση του, 4) ένα σύστημα που χρησιμοποιείται για αυτόματη βαθμολόγηση ή βαθμολόγηση βασισμένη σε άνθρωπο, 5) την παρουσία ή την έλλειψη περιορισμών όσον αφορά την εφαρμογή ενός σχήματος (Grundspenkis & Anohina, 2009).

Η δομική βαθμολόγηση προτάθηκε από τους Novak & Gowin (1984). Εφαρμόζεται κυρίως σε ιεραρχικά δομημένους εννοιολογικούς χάρτες επειδή σε τέτοιες μορφές τα επίπεδα ιεράρχησης και οι διασυνδέσεις είναι αυτά τα οποία λαμβάνονται υπόψιν. Έχει παρατηρηθεί ότι η επίδοση αυξάνεται με αυτό το είδος βαθμολόγησης ιδιαίτερα μετά από διδασκαλία (West et al., 2002).

Η σύγκριση του εννοιολογικό χάρτη ενός μαθητή με αυτόν ενός ειδικού ως προς τις ομοιότητες συνήθως δείχνει σε ποιο βαθμό ταιριάζουν/ταυτίζονται (δείκτης ομοιότητας/closeness index) οι δύο εννοιολογικοί χάρτες. Ο δείκτης αυτός μπορεί να υπολογιστεί λαμβάνοντας υπόψιν μόνο δομικά στοιχεία ή και την αξία των προτάσεων. Ο πιο δημοφιλής δείκτης ομοιότητας είναι ο δείκτης του Goldsmith (1991, όπως αναφέρεται στο: Αναστασιάδης 2009) με βάση τον οποίο συγκρίνονται μόνο σύνολα εννοιών μεταξύ του εννοιολογικού χάρτη του μαθητή και του μαθητή. Επίσης, κάποιοι ερευνητές προτείνουν τη σύγκριση του εννοιολογικού χάρτη του μαθητή με δυο διαφορετικούς χάρτες κατασκευασμένους από ειδικούς (Klein et al., 2002, όπως αναφέρεται στο Αναστασάδης, 2009). Με τη σειρά τους οι Herl et al. (1997) χρησιμοποιούν έναν αλγόριθμο αντιστοίχισης, ο οποίος περιλαμβάνει αρκετούς εννοιολογικούς χάρτες κατασκευασμένους από ειδικούς, αξιολογώντας έτσι τον χάρτη κάθε μαθητή.

Στην παρούσα έρευνα οι εννοιολογικοί χάρτες βαθμολογούνται με τη μέθοδο της σύγκρισης μεταξύ των εννοιολογικών χαρτών των μαθητών και του ειδικού (Εικόνα 3) που είναι ο ερευνητής της παρούσας μελέτης.



Εικόνα 3: Πρότυπος εννοιολογικός χάρτης

Ανάλυση Πρότυπου εννοιολογικού χάρτη

Η κατασκευή του πρότυπου εννοιολογικού χάρτη με κεντρική έννοια το ½ βασίστηκε σε δυο βασικούς άξονες. Ο πρώτος άξονας είναι οι συνδέσεις που αφορούν συγκεκριμένα τη δοσμένη κεντρική έννοια. Σχηματικά οι συνδέσεις αυτές γίνονται μόνο με το ½ χωρίς οι νέοι κόμβοι που προστίθενται να επεκτείνονται, να γενικεύονται ή να συνδέονται με άλλους κόμβους. Ο άξονας αυτός αποτελείται από τους κόμβους: ‘Μικρότερο της μονάδας’ δηλαδή την αναγνώριση του μεγέθους του δοσμένου κλάσματος, ‘Αντίστροφος του 2’ που είναι μια ιδιότητα συγκεκριμένα του ½ και ένα ΄Παράδειγμα΄ το οποίο δείχνει την ικανότητα να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν το ½ σε καταστάσεις πέρα από ένα καθαρά μαθηματικό πλαίσιο. Οι συνδέσεις αυτές αναμένεται να έχουν μεγάλη συχνότητα εμφάνισης καθώς οι συμμετέχοντες είναι εξοικειωμένοι με την αναγνώριση και τη διαχείριση συγκεκριμένων αριθμών.

Ο δεύτερος άξονας περιέχει δώδεκα κόμβους οι οποίοι μπορούν να γενικευτούν και να αναφερθούν πέρα από το ½ . Οι εννοιολογικοί χάρτες που περιέχουν αυτές τις συνδέσεις είναι πιο πολύπλοκοι καθώς κόμβοι που συνδέονται με το ½ επεκτείνονται και γενικεύονται. Ο άξονας αυτός αποτελείται από τρεις κατηγορίες κόμβων. Αρχικά οι 'Αναπαραστάσεις' (Δεκαδική, Σχηματική, Λεκτική) δείχνουν την ευελιξία του ατόμου που συμπληρώνει το χάρτη να παρουσιάσει τη δοσμένη έννοια με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Η δεύτερη κατηγορία κόμβων είναι οι ερμηνείες (Λόγος, Πηλίκο διαίρεσης, Μέρος προς όλο, Τελεστής, Ποσοστό). Τα κλάσματα είναι μια μαθηματική έννοια στην οποία αρκετά παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Συνεπώς, είναι σημαντικό οι μαθηματικοί να γνωρίζουν αλλά και να είναι σε θέση να παρουσιάσουν όλες τις ερμηνείες του κλάσματος αποφεύγοντας τη μονοδιάστατη παρουσίαση τους και ενισχύοντας την εννοιολογική κατανόηση. Τέλος οι γενικές έννοιες κλασμάτων (Ανάγωγο κλάσμα, Ισοδύναμο κλάσμα, Αριθμός, Κλάσμα) είναι συνδέσεις που αναμένεται να γίνουν είτε απευθείας με το ½ είτε ως επιπλέον διακλαδώσεις, για παράδειγμα από το κλάσμα μπορεί να προκύψει μια σύνδεση με το 'Ισοδύναμο κλάσμα'.

Με βάση όσα αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, στην παρούσα μελέτη διερευνήθηκε η αίσθηση του αριθμού σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων. Ο εννοιολογικός χάρτης όπως και το Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού αποτέλεσαν τα εργαλεία της έρευνας. Αν και το Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού είναι εργαλείο που έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως ο εννοιολογικός χάρτης είναι ένα νέο εργαλείο για τη μέτρηση της αίσθησης του αριθμού. Βασικός λόγος που θεωρήθηκε κατάλληλο εργαλείο είναι η ελευθερία που δίνει στον συμμετέχοντα να αναπτύξει τις γνώσεις γύρω από το κέντρο του χάρτη. Κάθε συμμετέχον αναπτύσσει την προσωπική του οπτική. Έτσι, παρουσιάζεται η ιεράρχηση των γνώσεων του καθώς και πως αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Επίσης, για το συγκεκριμένο κεντρικό κόμβο φαίνεται αν η γνώση αφορά την εννοιολογική σημασία του κλάσματος, τις διαδικασίες που πραγματοποιούνται με αυτό ή και τα δυο. Το γνωστικό υπόβαθρο των συμμετεχόντων μας οδηγεί να αναμένουμε πως θα απαντήσουν σωστά στο Ερωτηματολόγιο Αίσθηση Αριθμού, θα παρουσιάσουν υψηλή αίσθηση του αριθμού και θα δομήσουν πλούσιους εννοιολογικούς χάρτες. Επίσης αναμένεται πως θα υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δυο εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν. Τα στοιχεία που καταγράφηκαν από τη διεθνή βιβλιογραφία αποτέλεσαν τη βάση για την ανάλυση των δεδομένων με σκοπό την απάντηση των παρακάτω ερευνητικών ερωτημάτων.

Ερευνητικά Ερωτήματα

1. Απαντούνε οι μαθηματικοί σωστά στο Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού;
2. Ποιο είναι το επίπεδο αίσθησης του αριθμού των φοιτητών μαθηματικών τμημάτων;
3. Ποιες είναι οι επιδόσεις των φοιτητών στη συμπλήρωση των εννοιολογικών χαρτών;
4. Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δυο εργαλείων;

Μεθοδολογία

Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 39 άτομα (Πίνακας 1) και συγκεκριμένα από 22 άνδρες (56,4%) και 17 γυναίκες (43,6%), φοιτητές ή απόφοιτοι μαθηματικών τμημάτων. Από το σύνολο των 39 μαθηματικών οι 15 είναι μεταπτυχιακοί φοιτητές ενώ 24 φοιτούν στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών. Όσον αφορά το έτος σπουδών, 10 φοιτητές είναι μεταξύ του 1^{ου} και του 4^{ου} έτος των σπουδών τους ενώ οι υπόλοιποι 14 τουλάχιστον στο 5^{ο} έτος του προπτυχιακού προγράμματος (Πίνακας 2).

Φύλλο	Συχνότητα	Ποσοστό
Άνδρας	22	56,4%
Γυναίκα	17	43,6%
Σύνολο	39	100%

Πίνακας 1: Συμμετέχοντες ανά φύλλο

Έτος	Προπτυχιακό	Μεταπτυχιακό
1^{ο}	5	5
2^{ο}	1	8
3^{ο}	1	2
4^{ο}	3	0
5^{ο}	7	0
6^{ο}	3	0
7^{ο}	1	0
8^{ο}	2	0
9^{ο}	1	0
Σύνολο	24	15

Πίνακας 2: Έτος φοίτησης ανά βαθμίδα

Το δείγμα προέρχεται από τα τμήματα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης και του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Το πρόγραμμα σπουδών και στα δυο πανεπιστήμια αναπτύσσεται γύρω από τους κλάδους της Άλγεβρας, Ανάλυσης, Γεωμετρίας, Στατιστικής και της Επιστήμης των Υπολογιστών. Κοινό στοιχείο των συμμετεχόντων είναι η παρακολούθηση των επιλεγόμενων μαθημάτων που αφορούν τη παιδαγωγική και ειδικά την Μαθηματική Εκπαίδευση.

Υλικά

Το πρώτο εργαλείο για τη συλλογή δεδομένων είναι Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού (ΕρΑΑ) Η δημιουργία του μέσου συλλογής των δεδομένων (βλ. Παράρτημα Β) είχε ως βασικό σκοπό την εύρεση ερωτημάτων, η απάντηση των οποίων να φανερώνει κάποια από τα εφτά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού: (1) η κατανόηση του νοήματος των αριθμών, (2) η αναγνώριση των σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών, (3) η χρήση σημείων αναφοράς, (4) η ικανότητα σύνθεσης και αποσύνθεσης αριθμών, (5) η χρήση διαφόρων αναπαραστάσεων των αριθμών και των λειτουργιών, (6) η κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων και (7) η ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικών ή μη. Το ΕρΑΑ αποτελείται από 8 ερωτήματα και στον Πίνακα 3 φαίνεται η αντιστοίχιση μεταξύ των ερωτημάτων του ΕρΑΑ και των χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού που μπορεί να φανερωθεί σε αυτά.

Ερωτήματα	1	2	3	4	5	6	7	8
Χαρακτηριστικά Αίσθησης Αριθμού	1, 2, 3	2, 3, 4	3, 6	6,7	6, 7	1, 2, 3, 4, 7	1, 2, 6	1, 3, 4, 6

Πίνακας 3: Χαρακτηριστικά της Αίσθηση του αριθμού που φανερώνονται ανά ερώτημα

Αναλυτικά οι ερωτήσεις παρουσιάζονται παρακάτω μαζί με τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων. Τα πέντε πρώτα προέρχονται από τη μελέτη που έκαναν οι Yang, Reys & Reys, (2009) για την αίσθηση του αριθμού σε εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ταϊβάν. Το 6^{ο} ερώτημα βασίστηκε στη μελέτη των από τους Alajmi & Reys (2007), οι οποίοι μελέτησαν την ικανότητα αναγνώρισης και επιλογής λογικών απαντήσεων, δηλαδή ένα από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού, σε μαθητές της Β’ Γυμνασίου. Το 7^{ο} ερώτημα προέρχεται από τη διπλωματική έρευνα του Χαντόγλου (2018), ο οποίος εξέτασε την γνώση εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας σε προβλήματα εκτιμήσεων ενώ το 8^{ο} ερώτημα χρησιμοποιήθηκε από τον Tsao (2004) στην μελέτη του για την σύνδεση μεταξύ αίσθησης του αριθμού, των νοερών υπολογισμών και των γραπτών υπολογισμών, εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

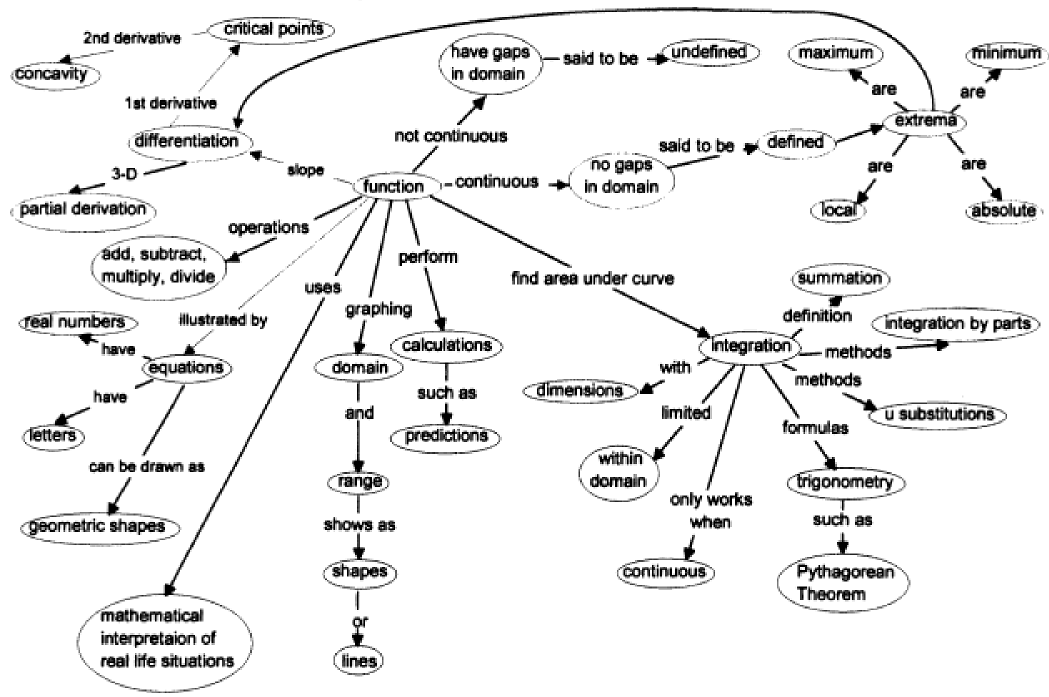
Τα ερωτήματα του ΕρΑΑ επιλέχθηκαν ώστε να λύνονται *a priori* με χρήση των στρατηγικών που φανερώνουν την αίσθηση του αριθμού ενώ για την απάντηση των ερωτημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν περισσότερες από μια στρατηγικές ξεχωριστά ή ακόμη και να γίνει ταυτόχρονη χρήση δυο ή περισσότερων στρατηγικών.

Το δεύτερο μέσο που χρησιμοποιήθηκε για τη συλλογή των δεδομένων, ήταν η κατασκευή εννοιολογικού χάρτη με κεντρική έννοια το 1/2. Ο εννοιολογικός χάρτης είναι ένα εργαλείο που οι συμμετέχοντες καλούνται να δομήσουν μόνοι τους χωρίς να τίθεται κανένας περιορισμός από την πλευρά του ερευνητή. Με αυτόν τον τρόπο, παρουσιάζεται μια πιο ευρεία εικόνα για τη σκέψη των συμμετεχόντων και τί αντιπροσωπεύει γι’ αυτούς ένας κλασματικός αριθμός. Η δομή και η ανάπτυξη του εννοιολογικού χάρτη σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του ΕρΑΑ θα δώσει μια πληρέστερη εικόνα για την αίσθηση του αριθμού των συμμετεχόντων και θα διερευνηθεί αν ο εννοιολογικός χάρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μελέτη της αίσθησης του αριθμού.

Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη συλλογή των δεδομένων ήταν ίδια σε όλη τη διάρκεια της έρευνας για όλους τους συμμετέχοντες. Αρχικά, κλήθηκαν να συμπληρώσουν το ΕρΑΑ. Οι οδηγίες που τους δόθηκαν ήταν πως πρώτα γίνεται η συμπλήρωση των δημογραφικών στοιχείων που αφορούσαν το φύλλο, τη βαθμίδα εκπαίδευσης, το έτος φοίτησης και τα έτη προϋπηρεσίας στην περίπτωση των αποφοίτων. Στη συνέχεια, προχωρούσαν στην συμπλήρωση του ΕρΑΑ για την οποία δόθηκαν οι εξής οδηγίες: 1) Απαντήστε στα ερωτήματα χωρίς να κάνετε, αν είναι δυνατό, γραπτούς υπολογισμούς 2) Αιτιολογήστε τις απαντήσεις αναλυτικά ώστε να είναι ξεκάθαρος ο τρόπος σκέψης σας και η στρατηγική που αναπτύσσετε για να φτάσετε στο αποτέλεσμα 3) Έχετε στη διάθεσή σας πέντε λεπτά για την απάντηση κάθε ερωτήματος.

Μετά την ολοκλήρωση του ΕρΑΑ ακολούθησε η κατασκευή του εννοιολογικού χάρτη. Το σύνολο των συμμετεχόντων δήλωσαν πως δεν έχουν εργαστεί στο παρελθόν με το συγκεκριμένο εργαλείο. Οι οδηγίες που δόθηκαν είναι πως ο εννοιολογικός χάρτης είναι μια μορφή διαγράμματος, αναπτύσσεται γύρω από μια κεντρική ιδέα/θέμα και οι έννοιες τοποθεντούνται σε κόμβους (κουτάκια). Η ανάπτυξη γίνεται με συνδέσεις (βέλη/γραμμές) μεταξύ των κόμβων, ώστε να σχηματίζονται λογικές προτάσεις. Πάνω από κάθε γραμμή μπορεί να υπάρχει ένα ρήμα ή μια φράση που ξεκαθαρίζει τον τρόπο σύνδεσης.. Οι γραμμές μπορούν να ξεκινούν όχι μόνο από την κεντρική έννοια/θέμα αλλά από κάθε κόμβο που τοποθετούμε στο χάρτη. Οι έννοιες που θα τοποθετηθούν στον χάρτη δεν χρειάζεται να είναι αυστηρά μαθηματικοί όροι. Μπορεί να είναι λεκτική περιγραφή, αναπαράσταση, αριθμοί, προβλήματα, παραδείγματα ή οτιδήποτε άλλο μπορείτε να συνδέσετε με την κεντρική έννοια του χάρτη. Σε αυτό το σημείο δινόταν ένα υπόδειγμα εννοιολογικού χάρτη (Εικόνα 4) με σκοπό την πληρέστερη εικόνα του εργαλείου για τη βέλτιστη αξιοποίησή του. Ο πρότυπος εννοιολογικός χάρτης περιέχει αγγλικές έννοιες αλλά όλοι οι συμμετέχοντες γνώριζαν την αγγλική γλώσσα οπότε ήταν εφικτή η κατανόησή του.



Εικόνα 4: Υπόδειγμα εννοιολογικού χάρτη

Αποτελέσματα

Επιδόσεις στο ΕρΑΑ και κατηγοριοποίηση των απαντήσεων

Σε κάθε ερώτημα η ανάλυση των αποτελεσμάτων γίνεται σε δυο επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο, γίνεται έλεγχος ως προς την ορθότητα των απαντήσεων (Σωστό-Λάθος) όπου οι σωστές απαντήσεις κωδικοποιούνται με 1 ενώ οι λανθασμένες με 0.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι σχετικές και οι απόλυτες συχνότητες των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων. Οι περισσότερες σωστές απαντήσεις δόθηκαν στα Ερ1, Ερ5 και Ερ7. όπου 37 από τους 39 συμμετέχοντες (95%) δίνουν σωστές απαντήσεις ενώ η χαμηλότερη επίδοση εμφανίζεται στο Ερ6 όπου πρέπει να γίνει η επιλογή των αριθμών (μεικτά κλάσματα, κλάσματα , δεκαδικοί) που επαληθεύουν την ανίσωση $3\frac{3}{8}: - > 4$, με 14 (35%) μαθηματικούς να απαντάνε σωστά.

`	Ερ1	Ερ2	Ερ3	Ερ4	Ερ5	Ερ6	Ερ7	Ερ8
Σωστό	37 (95%)	32 (82%)	22 (56%)	29 (74%)	37 (95%)	14 (35%)	37 (95%)	28 (71%)
Λάθος	2 (5%)	7 (18%)	17 (44%)	10 (26%)	2 (5%)	25 (65%)	2 (5%)	11 (29%)
Σύνολο	39	39	39	39	39	39	39	39

Πίνακας 4: Αριθμός συμμετεχόντων που έδωσαν Σωστές/Λάθος απαντήσεις ανά ερώτημα

Το αυξημένο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων που εμφανίζεται στο Ερ6, που αφορούσε την κατανόηση του νοήματος των αριθμών, τη χρήση σημείων αναφοράς, την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων και την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικών ή μη, οφείλεται στην πολυπλοκότητα του ερωτήματος. Αρχικά έπρεπε να αναγνωριστεί η αξία του δοσμένου μικτού αριθμού $3\,\frac{3}{8}$ και στη συνέχεια να αποφασιστεί ποιοι αριθμοί, από τις επιλογές που υπάρχουν, επαληθεύουν την ανίσωση ($3\,\frac{3}{8}$: __ >4). Η πλειοψηφία από τις εικοσιπέντε απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως Λάθος επέλεξαν ως απαντήσεις τις $\frac{3}{5}$, 0,9 και 0,05. Η επιλογή αυτή μας δείχνει πως αναγνωρίστηκε με επιτυχία η αξία του μικτού αριθμού ως μικρότερη του 4 και αφού με τη διαίρεση πρέπει να προκύψει μεγαλύτερος αριθμούς ο ζητούμενος διαιρέτης θα πρέπει να είναι μικρότερος της μονάδας. Οι περισσότερες απαντήσεις ολοκληρώθηκαν σε αυτό το σημείο. Ωστόσο, η παραπάνω ανίσωση δεν επαληθεύεται για κάθε αριθμό μικρότερο του ένα. Οι συμμετέχοντες δεν προχώρησαν σε δοκιμές για την επαλήθευση των απαντήσεων τους. Η διαδικασία που αποτελεί και ένα από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού, δηλαδή η ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικών ή μη το οποίο φάνηκε να απουσιάζει από το Ερ6 με αποτέλεσμα οι συμμετέχοντες να οδηγηθούν σε λανθασμένες απαντήσεις.

Στο Ερ3, που αφορούσε τη χρήση σημείων αναφοράς και την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων παρουσιάστηκε το δεύτερο μεγαλύτερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων (44%) που αντιστοιχεί 17 απαντήσεις. Το ζητούμενο ήταν η τοποθέτηση της υποδιαστολής στο αποτέλεσμα ενός γινομένου δεκαδικών αριθμών (0,4975x9428,2=4690828). Η πλειοψηφία των απαντήσεων εφάρμοσαν τον κανόνα μέτρησης των δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή πως όσα δεκαδικά ψηφία έχουν αθροιστικά οι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται τόσα πρέπει να έχει και το αποτέλεσμα. Οι λανθασμένες απαντήσεις δείχνουν έλλειψη των χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού που αφορούν την κατανόηση του νοήματος των αριθμών, την αναγνώριση των σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών, τη χρήση σημείων αναφοράς, την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων καθώς και την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικών ή μη.

Το δεύτερο επίπεδο της ανάλυσης αφορά τον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες έφτασαν στο αποτέλεσμα. Σε αυτή τη φάση της ανάλυσης αποφασίστηκε η δημιουργία μιας ιεραρχημένης κατηγορικής μεταβλητής πέντε επιπέδων. Η μεγαλύτερη τιμή της νέας μεταβλητής ήταν 4 και με αυτή βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες η μέθοδος που αναπτύχθηκε, φανέρωνε κάποια από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού (Αίσθηση Αριθμού). Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην κατανόηση του νοήματος των αριθμών καθώς και στις στρατηγικές που αναπτύσσουμε για τη διαχείρισή τους. Για παράδειγμα, στη σύγκριση των κλασμάτων $\frac{3}{8} και \frac{7}{12}$ μια απάντηση που κατηγοριοποιείται ως 'Αίσθηση Αριθμού' είναι η χρήση του $\frac{1}{2}$ ως σημείο αναφοράς και όχι η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς με σκοπό τη σύγκρισή τους.

Κάθε απάντηση μπήκε σε μια από τις παρακάτω πέντε κατηγορίες: ‘Αίσθηση Αριθμού’, ‘Κανόνες’, ‘Μερική ΑΑ’ (συντομογραφία Μερική Αίσθηση Αριθμού), ‘Ασαφής’ ή ‘Λάθος’. Με 3 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις που έδειξαν μερική ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Μερική ΑΑ). Στις περιπτώσεις αυτές η μέθοδος επίλυσης ανέδειξε τόσο χαρακτηριστικά αίσθησης του αριθμού όσο κανόνες ή αλγόριθμους. Οι απαντήσεις στις οποίες εφαρμόστηκαν μόνο μνημονικοί αλγόριθμοι και βασίστηκαν σε κανόνες (Κανόνες) βαθμολογήθηκαν με 2. Για παράδειγμα, αν το ζητούμενο είναι σύγκριση των κλασμάτων $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{5}$ αλλά οι συμμετέχοντες μετατρέψουν τα κλάσματα σε δεκαδικούς 0,75 και 0,8 και συγκρίνουν αυτούς τότε η απάντηση αυτή κατηγοριοποιείται ως Κανόνες. Τέλος, οι ελλιπείς ή χωρίς αιτιολόγηση απαντήσεις (Ασαφής) βαθμολογήθηκαν με 1 ενώ οι λανθασμένες αιτιολογήσεις (Λάθος) με 0.

Στις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στρατηγικές που δεν είχαν προβλεφθεί, αυτές αναλύθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν με τον ίδιο τρόπο. Σε κάθε ερώτημα η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 39x4=156 και αυτό θα συνέβαινε στην περίπτωση το σύνολο των συμμετεχόντων έδινε απάντηση που κατηγοριοποιείται ως Αίσθηση Αριθμού.

Αποτελέσματα Αίσθησης αριθμού ανά ερώτημα

Αποτελέσματα Ερωτήματος 1

Ερώτημα 1ο (Διάταξη κλασμάτων και δεκαδικών)

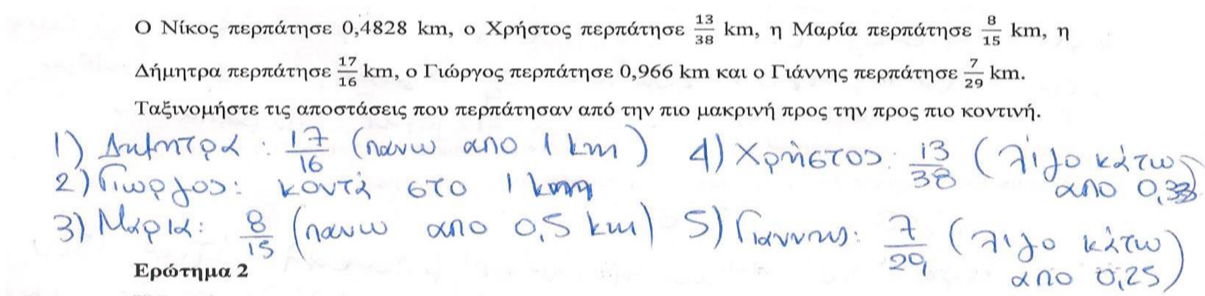
Ο Νίκος περπάτησε 0,4828 km, ο Χρήστος περπάτησε $\frac{13}{38}$ km, η Μαρία περπάτησε $\frac{8}{15}$ km, η Δήμητρα περπάτησε $\frac{17}{16}$ km, ο Γιώργος περπάτησε 0,966 km και ο Γιάννης περπάτησε $\frac{7}{29}$ km. Ταξινομήστε τις αποστάσεις που περπάτησαν από την πιο μακρινή προς την προς πιο κοντινή.

Στο Ερ1 εξετάζεται η χρήση σημείων αναφοράς για τη σύγκριση κλασματικών και δεκαδικών αριθμών, χωρίς τη μετατροπή του συνόλου των αριθμών σε δεκαδικούς ή σε κλάσματα με κοινούς παρονομαστές. Στην κατηγορία ‘Αίσθηση Αριθμού’ ανήκουν οι απαντήσεις στις οποίες η σύγκριση γίνεται με χρήση σημείων αναφοράς χωρίς να πραγματοποιηθούν πράξεις. Τα σημεία αναφοράς αναμένεται να είναι οι αριθμοί 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Αντίθετα, οι απαντήσεις στις οποίες γίνονται μετατροπές της μορφής των αριθμών κατηγοριοποιούνται ως ’Κανόνες’. Τέλος, ως ‘Μερική ΑΑ’ χαρακτηρίζονται οι απαντήσεις που θα περιέχουν συνδυασμό των παραπάνω μεθόδων.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5 οι απαντήσεις της κατηγορίας Αίσθηση Αριθμού αποτέλεσαν την πλειοψηφία με ποσοστό 61,5%. Στο σύνολο της κατηγορίας αυτή έγινε χρήση των αριθμών 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ως σημεία αναφοράς για τη σύγκριση των δοσμένων αριθμών (Εικόνα 5). Στο 8% των απαντήσεων πραγματοποιήθηκε μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς ή το αντίστροφο και κατηγοριοποιήθηκαν ως Κανόνες. Από τις 39 απαντήσεις οι 5 (12,8%) δόθηκαν χωρίς πλήρη διευκρίνηση (Ασαφής) ενώ σε δυο περιπτώσεις (5,2%) δόθηκαν απαντήσεις όπου υπήρχε συνδυασμός εφαρμογής κανόνων και χρήση σημείων αναφοράς και κατηγοριοποιήθηκαν ως Μερικά ΑΑ.

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	0	0
Ασαφής	5	12,8
Κανόνες	8	20,5
Μερική ΑΑ	2	5,2
Αίσθηση Αριθμού	24	61,5
Σύνολο	39	100

Πίνακας 5: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ1



Ο Νίκος περπάτησε 0,4828 km, ο Χρήστος περπάτησε $\frac{13}{38}$ km, η Μαρία περπάτησε $\frac{8}{15}$ km, η Δήμητρα περπάτησε $\frac{17}{16}$ km, ο Γιώργος περπάτησε 0,966 km και ο Γιάννης περπάτησε $\frac{7}{29}$ km.

Ταξινομήστε τις αποστάσεις που περπάτησαν από την πιο μακρινή προς την προς πιο κοντινή.

1) Δημητρα: $\frac{17}{16}$ (πανω απο 1 km) 4) Χρήστος: $\frac{13}{38}$ (λίγο κάτω απο 0,33)

2) Γιωργος: κοντά στο 1 km

3) Μαρια: $\frac{8}{15}$ (πανω απο 0,5 km) 5) Γιαννης: $\frac{7}{29}$ (λίγο κάτω απο 0,25)

Ερώτημα 2

Εικόνα 5: Παράδειγμα απάντησης Αίσθηση Αριθμού του πρώτου ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 2

Ερώτημα 2ο (Χρωματιστές κορδέλες)

Η Βικτώρια και η Μαρία χρησιμοποίησαν χρωματιστές κορδέλες για μια εργασία στην τάξη. Η Βικτώρια χρησιμοποίησε $\frac{30}{31}$ m και η Μαρία $\frac{36}{37}$ m. Ποια χρησιμοποίησε μεγαλύτερη κορδέλα;

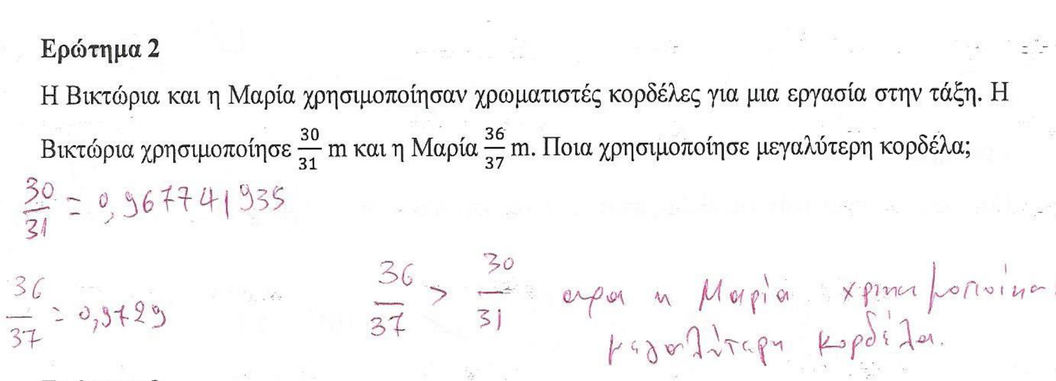
Το Ερ2 αφορά τη σύγκριση των κλασμάτων $\frac{30}{31}, \frac{36}{37}$ χρησιμοποιώντας ως σημείο αναφοράς το 1 και συγκρίνοντας τα υπόλοιπα των κλασμάτων $\frac{1}{31}, \frac{1}{37}$ ως αποσύνθεση του όλου. Επίσης, για να οδηγηθούν οι μαθηματικοί στη λύση είναι απαραίτητη η αναγνώριση σχετικού και απόλυτου μεγέθους των αριθμών. Οι απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Αίσθηση Αριθμού' ήταν αυτές στις οποίες έγινε σύγκριση των υπολοίπων κλασμάτων ενώ ως 'Κανόνες' κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες έγινε ακριβής μετατροπή σε κλάσμα ή εφαρμόστηκε κάποιος άλλος μαθηματικός αλγόριθμος.

Στο Ερ2 οι απαντήσεις της κατηγορίας Κανόνες (Εικόνα 6) είναι περισσότερες από τις απαντήσεις στην κατηγορία Αίσθηση Αριθμού. Δεκαεννιά από τους συμμετέχοντες (48,7%) στήριξαν τις απαντήσεις τους στην εφαρμογή γραπτών κανόνων και αλγορίθμων για τη σύγκριση κλασμάτων (Πίνακας 6). Οι στρατηγικές που ακολούθησαν αφορούν κυρίαρχα την μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς με σκοπό τη σύγκριση αυτών ή την τυχαία υπόθεση πως το $\frac{30}{31} > \frac{36}{37}$

και δουλεύοντας με ισοδυναμίες να καταλήξουν σε άτοπο. Στις απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως Αίσθηση Αριθμού (30,8%) έγινε σύγκριση των υπολοίπων $\frac{1}{31}$, $\frac{1}{37}$ των κλασμάτων και παρατηρήθηκε πως το $\frac{30}{31}$ απέχει περισσότερο από τη μονάδα συνεπώς είναι ο μικρότερος αριθμός από τους δύο. Επίσης, στο παρόν ερώτημα σημειώνεται ο δεύτερος μεγαλύτερος αριθμός που κατηγοριοποιήθηκαν ως Ασαφής (15,4%) στις οποίες παρατηρείται έλλειψη αιτιολόγησης (Πίνακας 6). Τέλος, δόθηκε μια λανθασμένη απάντηση στην οποία διατυπώθηκε ότι *“*$\frac{30}{31} > \frac{36}{37}$ *γιατί 31<37”* δηλαδή αγνοώντας τους αριθμητές έγινε σύγκριση μόνο των παρονομαστών.

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	1	2,6
Ασαφής	6	15,4
Κανόνες	19	48,7
Μερική ΑΑ	1	2,6
Αίσθηση Αριθμού	12	30,8
Σύνολο	39	100

Πίνακας 6: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ2


Ερώτημα 2

Η Βικτώρια και η Μαρία χρησιμοποίησαν χρωματιστές κορδέλες για μια εργασία στην τάξη. Η Βικτώρια χρησιμοποίησε $\frac{30}{31}$ m και η Μαρία $\frac{36}{37}$ m. Ποια χρησιμοποίησε μεγαλύτερη κορδέλα;

$\frac{30}{31} = 0,967741935$

$\frac{36}{37} = 0,9729$ $\frac{36}{37} > \frac{30}{31}$ άρα η Μαρία χρησιμοποίησε μεγαλύτερη κορδέλα.

Εικόνα 6: Παράδειγμα απάντησης Κανόνες του δεύτερο ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 3

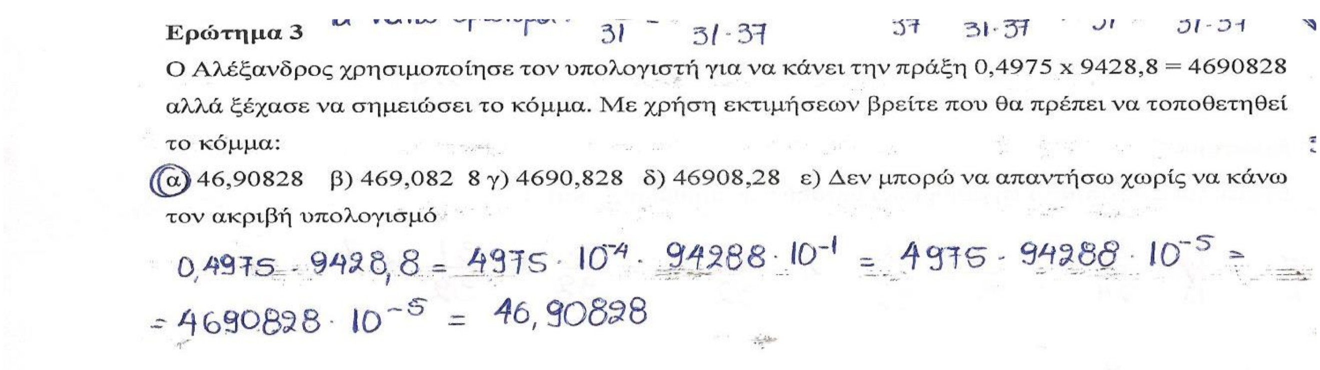
Ερώτημα 3 (Θέση του κόμματος στους δεκαδικούς)
Ο Αλέξανδρος χρησιμοποίησε τον υπολογιστή για να κάνει την πράξη 0,4975 x 9428,8 = 4690828 αλλά ξέχασε να σημειώσει το κόμμα. Με χρήση εκτιμήσεων βρείτε που θα πρέπει να τοποθετηθεί το κόμμα:
α) 46,90828 β) 469,082 8 γ) 4690,828 δ) 46908,28 ε) Δεν μπορώ να απαντήσω χωρίς να κάνω τον ακριβή υπολογισμό

Στο Ερ3 εξετάζονται τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού που αφορούν τη χρήση σημείων αναφοράς και την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων. Το ζητούμενο είναι η τοποθέτηση της υποδιαστολής σε ένα αριθμό που είναι το αποτέλεσμα γινομένου δυο δεκαδικών (0,4975 x 9428,8 = 4690828). Στην κατηγορία 'Αίσθηση Αριθμού' ανήκουν οι απαντήσεις στις οποίες αναφέρεται ότι 0,4975≈0,5 οπότε στο γινόμενο 0,4975x9428,2 δεν πολλαπλασίασαν τους δυο αριθμούς αλλά υπολόγισαν το μισό του 9428,2 δηλαδή το $\frac{9428,2}{2}$. Οι απαντήσεις που περιείχαν ακριβείς υπολογισμούς, εκτέλεση πράξεων ή κανόνες που αφορούν την τοποθέτηση της υποδιαστολής ανάλογα με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Κανόνες'. Σε όλες τις απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως Αίσθηση Αριθμού (46,2%) οι μαθηματικοί θεωρούσαν πως το 0,4975 είναι σχεδόν 0,5 οπότε στο γινόμενο 0,4975x9428,2 δεν πολλαπλασίασαν τους δυο αριθμούς αλλά υπολόγισαν το μισό του 9428,2 δηλαδή το $\frac{9428,2}{2}$, καταλήγοντας προσεγγιστικά στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 7, το πλήθος των απαντήσεων στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν κανόνες και αλγόριθμοι (35,9%) αντιστοιχεί σε 4 λιγότερες σε σχέση με αυτές που εμφάνισαν χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού. Σε όλες τις απαντήσεις της κατηγορίας Κανόνες η αιτιολόγηση ήταν κάποιος από τους κανόνες για την τοποθέτηση της υποδιαστολής ή η εκτέλεση της πράξης με αριθμομηχανή. Χαρακτηριστικά, μια από τις απαντήσεις ανέφερε: «*Το ε) Διότι μετά την υποδιαστολή τυχόν μηδενικά δεν λαμβάνονται υπόψη*» ή «*Στο γινόμενο των δεκαδικών μετράω 5 δεκαδικά ψηφία συνολικά, άρα το αποτέλεσμα πρέπει να έχει ίδιο πλήθος δεκαδικών*» (Εικόνα 7). Επίσης, σε 6 (15,4%) από τις 39 απαντήσεις δεν υπήρξε αιτιολόγηση του αποτελέσματος και κατηγοριοποιήθηκαν ως Ασαφής.

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	1	2,6
Ασαφής	6	15,4
Κανόνες	14	35,9
Μερική ΑΑ	0	0
Αίσθηση Αριθμού	18	46,2
Σύνολο	39	100

Πίνακας 7: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ3


Ερώτημα 3

Ο Αλέξανδρος χρησιμοποίησε τον υπολογιστή για να κάνει την πράξη 0,4975 x 9428,8 = 4690828 αλλά ξέχασε να σημειώσει το κόμμα. Με χρήση εκτιμήσεων βρείτε που θα πρέπει να τοποθετηθεί το κόμμα:

α) 46,90828 β) 469,082 8 γ) 4690,828 δ) 46908,28 ε) Δεν μπορώ να απαντήσω χωρίς να κάνω τον ακριβή υπολογισμό

$0,4975 \cdot 9428,8 = 4975 \cdot 10^{-4} \cdot 94288 \cdot 10^{-1} = 4975 \cdot 94288 \cdot 10^{-5} =$

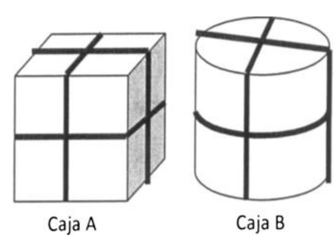
$= 4690828 \cdot 10^{-5} = 46,90828$

Εικόνα 7: Παράδειγμα απάντησης Κανόνες του τρίτου ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 4

Ερώτημα 4 (Κουτιά)

Έχουμε δυο κουτιά για δώρα και θέλουμε να τα τυλίξουμε με ταινία όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Το ένα κουτί είναι κύβος πλευράς 10cm. Το ύψος και η διάμετρος στην δεύτερη περίπτωση είναι επίσης 10cm. Για πιο κουτί θα χρειαστούμε περισσότερη ταινία;

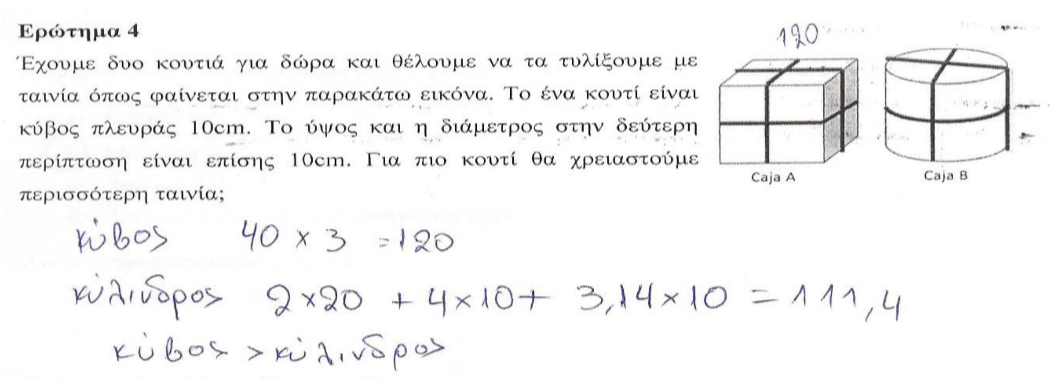


Στο Ερ.4 το ζητούμενο είναι η ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση του αποτελέσματος. Στον Πίνακα 8 φαίνεται πως η κατηγορία 'Αίσθηση Αριθμού' παρουσιάζεται με ποσοστό 20,4% και περιέχει απαντήσεις στις οποίες οι μαθηματικοί ανέπτυξαν μια στρατηγική σύμφωνα με την οποία αρκούσε η σύγκριση μόνο της μιας από τις τρεις ταινίες χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός του συνολικού της μήκους. Μια διαφορετική στρατηγική που αναπτύχθηκε είναι η παρατήρηση πως εφόσον η πλευρά του κύβου ισούται με τη διάμετρο του κυλίνδρου, ο δεύτερος μπορεί να τοποθετηθεί ολόκληρος μέσα στον κύβο. Παρά τη γεωμετρική προσέγγιση οι απαντήσεις αυτές κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Αίσθηση Αριθμού' γιατί δεν πραγματοποιήθηκαν πράξεις και υπολογισμοί αλλά φανερώνεται η διαισθητική αντίληψη του χώρου και του όγκου των κουτιών.

Αντίθετα, στις περιπτώσεις όπου έγινε χρήση μαθηματικών τύπων για την περίμετρο ή τον όγκο των σχημάτων και υπολογίστηκε το συνολικό μήκος της ταινίας που χρειάζεται για κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Κανόνες' (61,5%). Στις απαντήσεις αυτές οι συμμετέχοντες υπολόγισαν ακριβώς το μήκος της κορδέλας που χρειαζόταν για κάθε κουτί και κατέληξαν στο αποτέλεσμα (Εικόνα 8). Σε άλλες περιπτώσεις παρατηρήθηκε χρήση τύπων για τον υπολογισμό του όγκου των δυο κουτιών. .Στις 2 λανθασμένες απαντήσεις (5.1%) υπήρξε η ίδια αιτιολόγηση πώς εφόσον όλες οι διαστάσεις είναι 10cm θα χρειαστούμε και για τα δύο κουτιά το ίδιο συνολικά μήκος ταινίας. Τέλος, από τον Πίνακα 8 παρατηρούμε ότι σε 4 περιπτώσεις (10,3%) δόθηκαν απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση και χαρακτηρίστηκαν Ασαφής.

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	2	5,1
Ασαφής	4	10,3
Κανόνες	24	61,5
Μερική ΑΑ	1	2,6
Αίσθηση αριθμού	8	20,5
Σύνολο	39	100

Πίνακας 8: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ4


Ερώτημα 4

Έχουμε δυο κουτιά για δώρα και θέλουμε να τα τυλίξουμε με ταινία όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Το ένα κουτί είναι κύβος πλευράς 10cm. Το ύψος και η διάμετρος στην δεύτερη περίπτωση είναι επίσης 10cm. Για πιο κουτί θα χρειαστούμε περισσότερη ταινία;

κύβος 40 x 3 = 120

κύλινδρος 2x20 + 4x10 + 3,14x10 = 111,4

κύβος > κύλινδρος

Εικόνα 8: Παράδειγμα απάντησης Κανόνες του τέταρτου ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 5

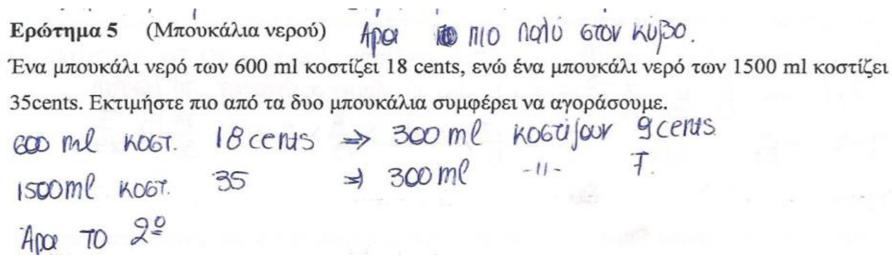
Ερώτημα 5 (Μπουκάλια νερού)

Ένα μπουκάλι νερό των 600 ml κοστίζει 18 cents, ενώ ένα μπουκάλι νερό των 1500 ml κοστίζει 35cents. Εκτιμήστε πιο από τα δυο μπουκάλια συμφέρει να αγοράσουμε.

Σκοπός του συγκεκριμένου ερωτήματος ήταν η χρήση αναλογιών και η εκτίμηση του αποτελέσματος. Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται οι σχετικές και οι απόλυτες συχνότητες του πλήθους των απαντήσεων κάθε κατηγορίας. Η κατηγορία 'Αίσθηση Αριθμού' περιέχει τις απαντήσεις που περιείχαν χρήση αναλογιών και όχι τον ακριβή υπολογισμό της τιμής για δεδομένη ποσότητα νερού και εμφάνισε ποσοστό (43,6%). Για παράδειγμα, η παρατήρηση πως το δεύτερο μπουκάλι περιέχει υπερδιπλάσια ποσότητα νερού από το πρώτο ενώ η τιμή του είναι μικρότερη από την διπλάσια του πρώτου φανερώνει 'Αίσθηση Αριθμού'. Σε μια από αυτές τις απαντήσεις παρατηρήθηκε η εξής στρατηγική: το μεγάλο μπουκάλι είναι 1500ml=2,5x600ml όμως η τιμή του είναι 35< 2,5x18=45cent, συνεπώς συμφέρει να αγοράσω το μεγάλο. Μάλιστα στο συγκεκριμένο παράδειγμα πέρα από τη από το χαρακτηριστικό της αίσθησης του αριθμού που αφορά την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων εμφανίζεται και η ικανότητα σύνθεσης και αποσύνθεσης των αριθμών καθώς για τον υπολογισμό της τιμής 2,5x18 γίνεται αρχικά η αποσύνθεση του 2,5 σε 2 και 0,5 τα οποία πολλαπλασιάζονται το καθένα με το 18 και τα αποτελέσματα τους προστίθενται, δηλαδή 2x18=36 και 0,5x18=9 συνεπώς 2,5x18= 36+9=45. Ως ‘Κανόνες’ κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες έγιναν ακριβείς υπολογισμοί όπως η αξία ml/cent ή αναγωγές της τιμής στην ίδια ποσότητα νερού (Εικόνα 9). Για παράδειγμα, μια από τις απαντήσεις έγινε η σύγκριση των τιμών ανά ml: 18/600=0,03cent/ml ενώ 35/1500=0.02cent/ml. Το ποσοστό των απαντήσεων αυτών ήταν (51,3%) ενώ οι απαντήσεις με απουσία αιτιολόγησης (Ασαφής) ήταν μόνο 2 (5,1%). Στο συγκεκριμένο ερώτημα δεν παρατηρήθηκαν απαντήσεις των κατηγοριών Λάθος και Μερική ΑΑ (Πίνακας 9).

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	0	0
Ασαφής	2	5,1
Κανόνες	20	51,3
Μερική ΑΑ	0	0
Αίσθηση Αριθμού’	17	43,6
Σύνολο	39	100

Πίνακας 9: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ5


Ερώτημα 5 (Μπουκάλια νερού) Άρα πιο πολύ στον κύβο.
Ένα μπουκάλι νερό των 600 ml κοστίζει 18 cents, ενώ ένα μπουκάλι νερό των 1500 ml κοστίζει 35cents. Εκτιμήστε πιο από τα δυο μπουκάλια συμφέρει να αγοράσουμε.
600 ml κοστ. 18 cents ⇒ 300 ml κοστίζουν 9 cents
1500ml κοστ. 35 ⇒ 300ml -11- 7.
Άρα το 2ο

Εικόνα 9: Παράδειγμα απάντησης Κανόνες του πέμπτου ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 6

Ερώτημα 6ο

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς αποτελούν λογική απάντηση: $3\frac{3}{8}: - > 4$

$3\frac{3}{4}$, 1,54 , $1\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, 0,9 , 0,05 , 2,5

Στο Ερ6 ζητείται από τους συμμετέχοντες να συμπληρώσουν τον διαιρέτη μιας διαίρεσης δυο ρητών αριθμών ώστε να ισχύει η ανίσωση $3\frac{3}{8}: - > 4$. Αρχικά, καλούνται να αναγνωρίσουν την αξία του μεικτού αριθμού και στη συνέχεια να επιλέξουν μια από τις απαντήσεις. Ως 'Αίσθηση Αριθμού' κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αρχικά αναγνωρίστηκε η αξία του μεικτού αριθμού η οποία είναι μικρότερη του 4 με συνέπεια την απόρριψη των απαντήσεων που είναι μεγαλύτεροι της μονάδας. Οι δοκιμές για τους αριθμούς 0,9 και $\frac{3}{5}$ είναι αποδεκτές στην κατηγορία 'Αίσθηση Αριθμού'. Η κατηγορία 'Κανόνες' περιέχει απαντήσεις στις οποίες όλοι οι αριθμοί μετατράπηκαν σε δεκαδικούς και πραγματοποιήθηκαν δοκιμές.

Το 6ο ερώτημα είναι το μοναδικό στο οποίο οι απαντήσεις κατανέμονται σχεδόν ισόποσα σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες (Πίνακας 10). Οι απαντήσεις της κατηγορίας Αίσθηση Αριθμού (30,8%) ήταν 12 και σε όλες παρατηρήθηκε η εξής στρατηγική. Αρχικά, αναγνωρίστηκε η αξία του μεικτού αριθμού $3\frac{3}{8}$ ως μεγαλύτερη της μονάδας αλλά μικρότερη του 3,5. Στη συνέχεια, αποκλείστηκαν οι επιλογές που ήταν μεγαλύτερες από το ένα, αφού η διαίρεση με αυτούς θα μας έδινε αποτέλεσμα μικρότερο από τον αρχικό μας αριθμό. Οι αριθμοί που έμειναν ως επιλογές ήταν το 0,9 , $\frac{3}{5}$ και το 0,05. Από αυτούς, δοκιμές χρειάστηκε να γίνουν μόνο για τους δυο πρώτους. Στις δοκιμές που έγιναν δεν πραγματοποιήθηκε διαίρεση του μεικτού αριθμού με το 0,9 και το $\frac{3}{5}$

αλλά πολλαπλασιασμός του 4 με τις διαθέσιμες επιλογές. Το 0,05 < $\frac{3}{5}$ συνεπώς δεν χρειάστηκε να γίνει δοκιμή (Εικόνα 10).

Η κατηγορία Μερική ΑΑ (12,8%) περιέχει απαντήσεις στις οποίες παρατηρήθηκε πως αρκεί ο διαιρέτης να είναι μικρότερος της μονάδας. Οι συμμετέχοντες επέλεξαν τους αριθμούς που ικανοποιούσαν τη συνθήκη αυτή χωρίς να γίνει έλεγχος για το κατά πόσο θα μεγαλώσει ο δοσμένος αριθμός. Ως Κανόνες κατηγοριοποιήθηκαν απαντήσεις στις οποίες έγινε εφαρμογή κανόνων και ακριβείς πράξεις για όλες τις περιπτώσεις μέχρι να καταλήξουν στο αποτέλεσμα ενώ ακριβώς ίδιο ήταν το πλήθος των απαντήσεων στις οποίες δεν υπήρξε αιτιολόγηση, δηλαδή η κατηγορία Ασαφής αφορά 28.2% του συνόλου (Πίνακας 10).

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	0	0
Ασαφής	11	28,2
Κανόνες	11	28,2
Μερική ΑΑ	5	12,8
Αίσθηση Αριθμού	12	30,8
Σύνολο	39	100

Πίνακας 10: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ6

$3\frac{3}{8} = 27/8$ και $24/8 < 27/8 < 32/8$ δηλαδή $3 < 27/8 < 4$. Δηλαδή είναι λίγο μικρότερο του 3,5

Απορρίπτονται όλοι οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 1.

Με δοκιμές είναι δεκτοί οι 3/5 και 0,05

Το 0,9 απορρίπτεται γιατί $27/8 : 9/10 = 27/8 \times 10/9 = 15/4 < 4$

Εικόνα 10: Παράδειγμα απάντησης Αίσθηση Αριθμού έκτου ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 7

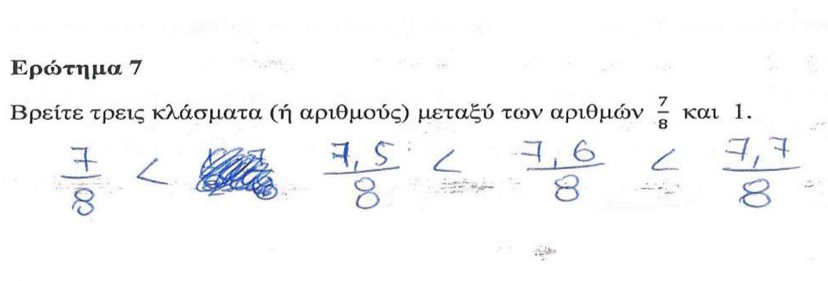
Ερώτημα 7ο : Βρείτε τρια κλάσματα (ή αριθμούς) μεταξύ των αριθμών $\frac{7}{8}$ και 1.

Το Ερ7 αφορά την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες καλούνται να βρούνε 3 αριθμούς μεταξύ του $\frac{7}{8}$ και του 1. Στόχος είναι να εξεταστεί αν οι συμμετέχοντες αντιλαμβάνονται την ύπαρξη άπειρων κλασμάτων μεταξύ δυο αριθμών και πως τους ρητούς αριθμούς δεν υπάρχει επόμενος ή προηγούμενος, όπως συμβαίνει στους φυσικούς και τους ακέραιους αριθμούς. Η κατηγορία ‘Αίσθηση Αριθμού’ περιέχει απαντήσεις στις οποίες δημιουργήθηκαν ισοδύναμα κλάσματα για την εύρεση των ζητούμενων αριθμών. Αντίθετα, οι περιπτώσεις που έγινε μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό κατηγοριοποιήθηκαν ως ’Κανόνες’. Τέλος, ως ‘Λάθος’ κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αναφέρθηκαν κλάσματα που δεν είναι σύμφωνα με τον ορισμό των ρητών αριθμών όπως $\frac{7{,}1}{8}$.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11 οι απαντήσεις της κατηγορίας Αίσθηση Αριθμού αφορούν το 71,8% του συνόλου και είναι η μέγιστη συχνότητα Αίσθηση Αριθμού απαντήσεων του ΕρΑΑ. Σε αυτή την κατηγορία οι απαντήσεις περιείχαν δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων όπως για παράδειγμα `$\frac{7}{8}=\frac{28}{32}$ $\;\kappa\alpha\iota\;$ $1=\frac{32}{32}$ με αποτέλεσμα οι ζητούμενοι αριθμοί να είναι οι $\frac{29}{32},\frac{30}{32},\frac{31}{32}$. Επίσης, στο Ερ7 εμφανίζεται και η ελάχιστη συχνότητα απαντήσεων της κατηγορίας Κανόνες με ποσοστό 10,3% (Πίνακας 11). Στις απαντήσεις της κατηγορίας αυτής έγινε η μετατροπή (διαίρεση) του $\frac{7}{8}=0{,}875$ με αποτέλεσμα την εύρεση τριών δεκαδικών αριθμών μεταξύ του 0,875 και του 1. Ως Λάθος κατηγοριοποιήθηκαν 3 απαντήσεις (7,7%) στις οποίες οι συμμετέχοντες έδωσαν ως απαντήσεις αριθμούς της μορφής $\frac{7{,}1}{8},\frac{7{,}2}{8}\frac{7{,}3}{8}$ οι οποίοι παραβιάζουν τον ορισμό των ρητών αριθμών αφού στον αριθμητή δεν υπάρχει ακέραιος (Εικόνα 11). Τέλος οι απαντήσεις της κατηγορίας Μερική ΑΑ που αφορούν τον συνδυασμό χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού και εφαρμογής κανόνων εμφανίστηκαν με ποσοστό 7,7% και ενώ μια απάντηση δεν είχε σαφή αιτιολόγηση (Ασαφής).

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	3	7,7
Ασαφής	1	2,6
Κανόνες	4	10,3
Μερική ΑΑ	3	7,7
Αίσθηση Αριθμού	28	71,8
Σύνολο	39	100

Πίνακας 11: Ανάλυση επίδοσης της αίσθησης του αριθμού στο Ερ7



Εικόνα 11: Παράδειγμα απάντησης Λάθος έβδομου ερωτήματος

Αποτελέσματα ερωτήματος 8

Ερώτημα 8ο : Χωρίς να κάνετε ακριβή υπολογισμούς εκτιμήστε αν το γινόμενο $\frac{21}{36} x \frac{7}{16}$ είναι:

Α)Μεγαλύτερο από $\frac{21}{64}$

Β) Μικρότερο από $\frac{21}{64}$

Γ) Ίσο με $\frac{21}{64}$

Δ) Είναι αδύνατο να δοθεί απάντηση χωρίς να γίνουν υπολογισμοί

Στο Ερ8 ζητείται από τους φοιτητές να εκτιμήσουν το γινόμενο δυο κλασμάτων. Ως ‘Αίσθηση Αριθμού’ κατηγοριοποιούνται οι απαντήσεις στις οποίες γίνεται χρήση των σημείων αναφοράς $\frac{2}{3}$ $\kappa\alpha\iota \frac{1}{2}$ ενώ ως ‘Κανόνες’ οι απαντήσεις στις οποίες γίνονται αναλυτικά οι πράξεις ή μετατροπές σε δεκαδικούς και στη συνέχεια ο πολλαπλασιασμός.

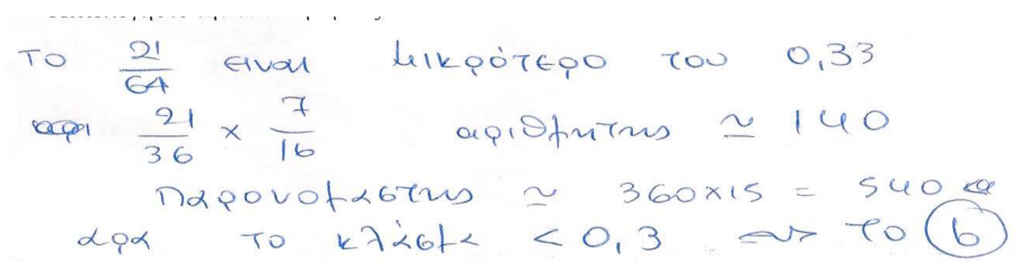
Στον Πίνακα 12 φαίνεται πως στο Ερ8 δόθηκαν 28 σωστές απαντήσεις που αντιστοιχούν στο 71% του δείγματος και ήταν η τρίτη χαμηλότερη επίδοση που σημειώθηκε συνολικά στο ΕρΑΑ. Ωστόσο, χαρακτηριστικό των αποτελεσμάτων είναι το ποσοστό της κατηγορίας Αίσθηση Αριθμού καθώς το 15,4% (5 απαντήσεις) είναι το χαμηλότερο που συναντάμε στο σύνολο των ερωτημάτων. Στις τέσσερις από τις απαντήσεις αυτής της κατηγορίας έγινε χρήση σημείων αναφοράς. Συγκεκριμένα, οι συγκρίσεις που πραγματοποιήθηκαν σε όλες τις περιπτώσεις είναι $\frac{21}{36} < \frac{2}{3}$ $\kappa\alpha\iota \frac{7}{16} < \frac{1}{3}$. Συνεπώς, με αντικαταστάσεις στο ζητούμενο γινόμενο προκύπτει ότι $\frac{21}{36} x \frac{7}{16} < \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \approx \frac{21}{64}$ (Εικόνα 12). Η πέμπτη απάντηση της κατηγορίας Αίσθηση Αριθμού έδειξε ένα διαφορετικό τρόπο. Ξεκινώντας από το γινόμενο που δόθηκε πραγματοποιήθηκαν μετατροπές στους αριθμούς διατηρώντας την ισοδυναμία με σκοπό την εμφάνιση του $\frac{21}{64}$ το οποίο τελικά πολλαπλασιάζεται με αριθμό μικρότερο της μονάδας, δηλαδή: $\frac{21}{64} x \frac{7}{16} = \frac{21}{4.9} x \frac{7}{2.8} = \frac{21}{4.2.8} x \frac{7}{9} = \frac{21}{64} x \frac{7}{9} < \frac{21}{64}$.

Οι απαντήσεις της κατηγορίας Κανόνες στις οποίες έγιναν ακριβείς πράξεις και υπολογισμός του γινομένου είχαν την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης με ποσοστό 41%. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν της μορφής : $\frac{21}{64} x \frac{7}{16} = \frac{21x7}{64x16} = \frac{147}{1024} = 0{,}14 < \frac{21}{64} = 0.32$. Όλες οι απαντήσεις που περιείχαν πράξεις κατέληξαν σε σωστά αριθμητικά αποτελέσματα. Από τις υπόλοιπες απαντήσεις οι 7 (17,9%) ήταν συνδυασμός κανόνων και χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού και κατηγοριοποιήθηκαν ως Μερική ΑΑ ενώ οι 5 ως

Ασαφής καθώς γινόταν επιλογή μιας απάντησης χωρίς καμία αιτιολόγηση ή αναφέροντας πως διάλεξαν στην τύχη. Τέλος, σε 5 απαντήσεις δόθηκαν αιτιολογήσεις που ήταν λανθασμένες και κατηγοριοποιήθηκαν ως Λάθος.

	Συχνότητα	*Ποσοστό %*
Λάθος	5	12,8
Ασαφής	5	12,8
Κανόνες	16	41
Μερική ΑΑ	7	17,9
Αίσθηση Αριθμού	6	15,4
Σύνολο	39	100

Πίνακας 12: Επίδοση της αίσθησης του αριθμού, Ερ8



Εικόνα 12: Παράδειγμα απάντησης Αίσθηση Αριθμού του όγδοου ερωτήματος

Συνολικά αποτελέσματα του Ερωτηματολογίου Αίσθησης Αριθμού

Στον Πίνακα 13 παρουσιάζονται οι επιδόσεις που καταγράφηκαν ανά ερώτημα και ο μέσος όρος βαθμολόγησης σε κάθε ερώτημα. Η μέγιστη επίδοση ως προς την Αίσθηση Αριθμού ήταν 130 και τη συναντήσαμε στο Ερ7 που αφορούσε την πυκνότητα των ρητών αριθμών και το ζητούμενο ήταν η εύρεση δυο αριθμών μεταξύ των $\frac{7}{8}$ και 1, (*Μ.Ο.=3.33* , *Τ.Α.=1.24*). Αντίθετα, στο Ερ8 είχαμε τη μικρότερη εμφάνιση των χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού με επίδοση 82 (*Μ.Ο.=2.10* , *Τ.Α.=1,20*).

Ερωτήματα	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μέγιστο	Ελάχιστο	Επίδοση στην Αίσθηση αριθμού
Ερ1	3,15	1,15	4	1	123
Ερ2	2,44	1,16	4	0	95
Ερ3	2,72	1,27	4	0	106
Ερ4	2,23	1,06	4	0	87
Ερ5	2,82	1,07	4	1	110
Ερ6	2,46	1,21	4	1	96
Ερ7	3,33	1,24	4	0	130
Ερ8	2,10	1,20	4	0	82

Πίνακας 13: Μέσες επιδόσεις ως προς την αίσθηση του αριθμού ανά ερώτημα

Παρατηρώντας τους Πίνακες 4 και 13 βλέπουμε πως τα τρια ερωτήματα με την μεγαλύτερη επίδοση ως προς το Σωστό/Λάθος (Ερ1, Ερ3, Ερ7) παρουσίασαν και τις μεγαλύτερες βαθμολογίες ως προς την Αίσθηση αριθμού. Οι χαμηλότερες επιδόσεις ως προς την Αίσθηση αριθμού παρατηρούνται στα Ερ8 και Ερ4. Στο Ερ4, που αφορά την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων και την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικών ή μη, οι συμμετέχοντες έπρεπε να συγκρίνουν το μήκος της κορδέλας που χρειάζεται για να τυλιχτεί ένα κουτί σχήματος κύβου και ένα κυλινδρικό. Η πλευρά του κουτιού ήταν η ίδια με τη διάμετρο και το ύψος του κυλίνδρου. Το υψηλό γνωστικό υπόβαθρο των συμμετεχόντων τους οδήγησε συχνά στον ακριβή υπολογισμό του μήκους της κορδέλας με χρήση τύπων για την περίμετρο ή ακόμη και στον υπολογισμό του όγκου των σχημάτων. Παρόλο που η χρήση των στρατηγικών αυτών οδήγησε σε σωστές απαντήσεις δεν φανερώνουν κάποιο από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού. Αυτά παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις όπου έγινε η σύγκριση μόνο μιας από τις τρεις διαστάσεις. Σε αυτές τα απαντήσεις το χαρακτηριστικό που φανερώνει την αίσθηση του αριθμού είναι η ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικών ή μη.

Στο Ερ8 παρατηρήθηκε η ελάχιστη επίδοση (82) στην αίσθηση του αριθμού (Πίνακας 5). Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να εκτιμήσουν αν το αποτέλεσμα του γινομένου : $\frac{21}{64}x\frac{7}{16}$ είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο του $\frac{21}{64}$. Η χαμηλή επίδοση στην αίσθηση του αριθμού παρουσιάστηκε επειδή μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων μετέτρεψε τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και έκανε πράξεις με αυτούς. Αντίθετα για να βαθμολογηθεί μια απάντηση ως Αίσθηση Αριθμού θα έπρεπε να γίνει χρήση σημείων αναφοράς $\frac{21}{64} < \frac{2}{3}\ και \frac{7}{16} < \frac{1}{2}\ άρα\ \frac{21}{64}x\frac{7}{16} < \frac{2}{3}\ x\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\ \approx \frac{21}{64}$. Στη συνέχεια θα γίνει η καταγραφή των αποτελεσμάτων για κάθε ερώτημα του test ώστε κάθε απάντηση να κατηγοριοποιηθεί ως ‘Αίσθηση αριθμού’, ‘Κανόνες’, ‘Μερική ΑΑ’, ‘Ασαφής’ ή ‘Λάθος’.

Αποτελέσματα στον Εννοιολογικού Χάρτη

Η κεντρική έννοια του εννοιολογικού χάρτη που ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν είναι το ½. Η αξιοποίηση και η βαθμολόγηση των αποτελεσμάτων βασίστηκε στην εξής διαδικασία. Αρχικά, κατασκευάστηκε από τον ερευνητή ένας εννοιολογικός χάρτης πρότυπο αποτελούμενος από δεκαπέντε κόμβους/έννοιες που σχετίζονται με το 1/2. Οι κόμβοι αυτοί μπορεί να περιέχουν διάφορες ‘Αναπαραστάσεις’ ενός αριθμού (Λεκτική, Σχηματική, Δεκαδική), ‘Ερμηνείες του κλάσματος’ (Λόγος, Πηλίκο, Μέρος προς όλο, Τελεστής, Ποσοστό), να είναι ‘Ειδικές έννοιες για το ½’ (Αντίστροφος του 2, Μικρότερο του 1) ή ‘Γενικές έννοιες κλασμάτων’ (Ανάγωγο κλάσμα, Ισοδύναμα κλάσματα, Αριθμός, Κλάσμα). Επίσης αναμένεται να δοθεί κάποιο ‘Παράδειγμα με το ½’.

Δεν δόθηκαν κατευθύνσεις που να αφορούν αποκλειστικά τη δοσμένη έννοια αλλά γενικά τη συμπλήρωση και τη μορφή που έχει ένας εννοιολογικός χάρτης, συνεπώς οι συμμετέχοντες είχαν την ευκαιρία να αναπτύξουν ελεύθερα τις σκέψεις τους γύρω από αυτό. Επίσης, όπως αναφέρεται και στο θεωρητικό πλαίσιο ένας καλός εννοιολογικός χάρτης προκύπτει ύστερα από αναθεώρηση και επανεξέταση, ίσως παραπάνω από μια φορές, του αρχικού χάρτη (Novak & Canas, 2008) κάτι το οποίο δεν παρατηρήθηκε από τους συμμετέχοντες. Δεν υπάρχει συντελεστής βαρύτητας μεταξύ των κόμβων. Κάθε κόμβος που αναφέρεται στον εννοιολογικό χάρτη βαθμολογείται με μια μονάδα.

Στον Πίνακα 14 φαίνεται πως οι 39 συμμετέχοντες έδωσαν αθροιστικά 208 κόμβους που βαθμολογήθηκαν με μια μονάδα. Ο κόμβος με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης ήταν το 'Κλάσμα' καθώς 29 (74,3%) από τους 39 συμμετέχοντες την συμπεριέλαβαν στους εννοιολογικούς τους χάρτες. Αντίθετα, μηδενική συχνότητα εμφάνισης είχε ο κόμβος 'Τελεστής' που δεν αναφέρθηκε από κανέναν στο σύνολο του δείγματος (0%). Όπως παρατηρούμε τρεις κόμβοι εμφανίζονται με συχνότητα μεγαλύτερη του 50%, δυο από αυτούς είναι η 'Λεκτική αναπαράσταση' και η 'Δεκαδική αναπαράσταση' του ½ που εμφανίστηκαν 27 (69,2%) και 25 (64,1%) φορές αντίστοιχα ενώ ο τρίτος είναι το 'Κλάσμα' με τη μέγιστη συχνότητα εμφάνισης 74,3%. Οι υπόλοιποι έντεκα κόμβοι εμφανίστηκαν σε λιγότερους από τους μισούς εννοιολογικούς χάρτες. Συγκεκριμένα τρεις κόμβοι παρουσιάστηκαν με ποσοστό μεταξύ του 40% και 50%, τα 'Ισοδύναμα κλάσματα' (48,7%), ο 'Αριθμός' (43,5%) και 'Παράδειγμα' (46,1%). Συχνότητα εμφάνισης μεγαλύτερη του 30% και μικρότερη του 40% είχαν οι κόμβοι 'Σχηματική αναπαράσταση' και 'Πηλίκο διαίρεσης' καθέ ένας από τους οποίους εμφανίστηκε 15 φορές (38,4%). Μεταξύ του 20% και 30% παρουσιάστηκαν τρεις κόμβοι 'Μέρος προς όλο', 'Μικρότερο της μονάδας' με συχνότητα 25,6% ο καθένας καθώς και το 'Ποσοστό' (28,2%). Τέλος, 4 απαντήσεις εμφανίστηκαν με συχνότητα μικρότερη του 20%. Αυτές ήταν ο 'Λόγος' (10,2%) και ο 'Αντίστροφος του 2' (15,3%) ενώ οι δυο τελευταίες είχαν ποσοστά μικρότερα ακόμη και του

10%: ‘Ανάγωγο κλάσμα’ (5%) και ‘Τελεστής’ (0%). Από τα στοιχεία του Πίνακα 14 παρουσιάζει ενδιαφέρον η απουσία του κόμβου ‘Τελεστής’ από τους εννοιολογικούς χάρτες, το γεγονός ότι τα δυο από τα τρια μεγαλύτερα ποσοστά εμφανίζονται στις Αναπαραστάσεις του κλάσματος καθώς και τα χαμηλά ποσοστά κόμβων που αναφέρονται ειδικά στο δοσμένο κλάσμα, ½ .

Κόμβοι Εννοιολογικού χάρτη	Πλήθος (N=39)
Κλάσμα	29 (74,3%)
Λεκτική αναπαράσταση	27 (69,2%)
Δεκαδική αναπαράσταση	25 (64,1%)
Ισοδύναμα κλάσματα	19 (48,7%)
Παράδειγμα	18 (46,1%)
Αριθμός	17 (43,5%)
Σχηματική αναπαράσταση	15 (38,4%)
Πηλίκο διαίρεσης	15 (38,4%)
Ποσοστό	11 (28,2%)
Μικρότερο του 1	10 (25,6%)
Μέρος προς όλο	10 (25,6%)
Αντίστροφος του 2	6 (10,2%)
Λόγος	4 (10,2%)
Ανάγωγο κλάσμα	2 (5%)
Τελεστής	0 (0%)
Σύνολο	208

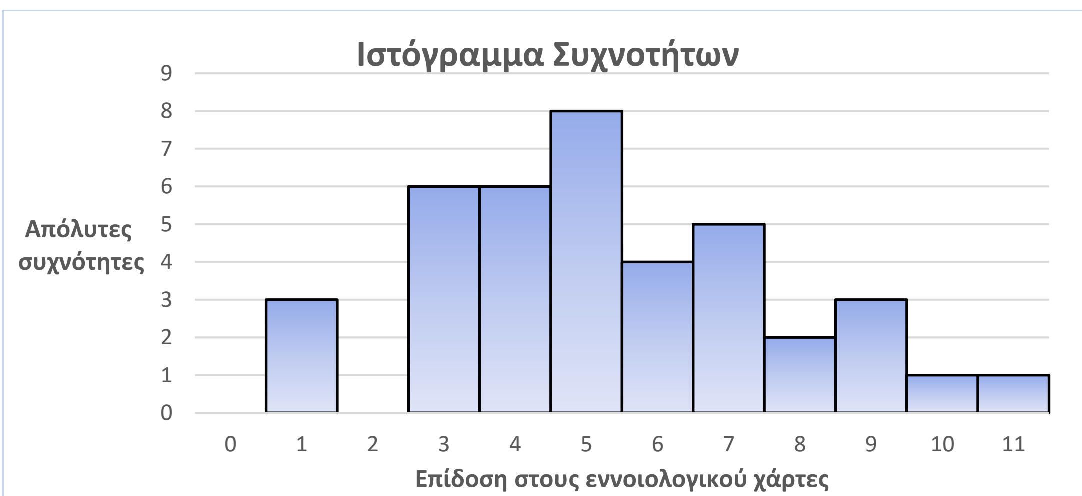
Πίνακας 14: Συχνότητα εμφάνισης των κόμβων στο σύνολο των εννοιολογικών χαρτών

Επιδόσεις των συμμετεχόντων στους εννοιολογικούς χάρτες

Κατά τη συμπλήρωση του εννοιολογικού χάρτη η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 15, όσοι δηλαδή και οι κόμβοι του εννοιολογικού χάρτη του ειδικού όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή.

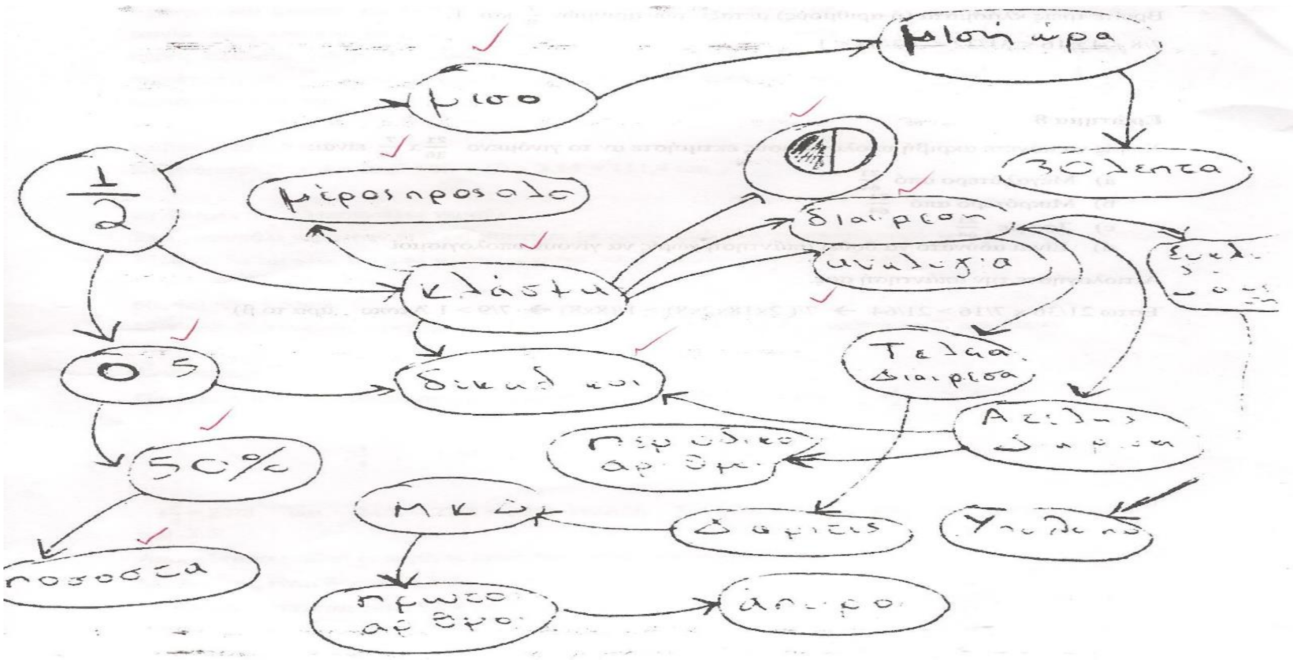
Ωστόσο, η συγκεκριμένη βαθμολογία δεν παρουσιάστηκε στην έρευνα καθώς κανείς από τους συμμετέχοντες δεν παρουσίασε όλους τους κόμβους του πρότυπου χάρτη. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν μη αναμενόμενο για μαθηματικούς καθώς το γνωστικό τους υπόβαθρο θα αναμένονταν να έχουν μια πιο σφαιρική οπτική για την κεντρική έννοια του εννοιολογικού χάρτη.

Στον Πίνακα 15 (βλ. Παράρτημα Α) παρουσιάζονται οι επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς τους εννοιολογικούς χάρτες με βάση μια νέα μεταβλητή που ορίζεται στη συνέχεια για τη δημιουργία των προφίλ των φοιτητών. Στον Πίνακα 15 φαίνεται πως από το σύνολο των 39 εννοιολογικών χαρτών μόνο δυο (5,1%) είχαν βαθμολογία μεγαλύτερη ή ίση του 10. Η πλειοψηφία εννοιολογικών χαρτών βαθμολογήθηκε μεταξύ του πέντε και του δέκα (*M*=5.3, *SD*=2.41) όπου συναντάμε 22 χάρτες (56,4%) ενώ οι υπόλοιποι δεκαπέντε (38,5%) βαθμολογήθηκαν με 5 ή και χαμηλότερα (Εικόνα 11).



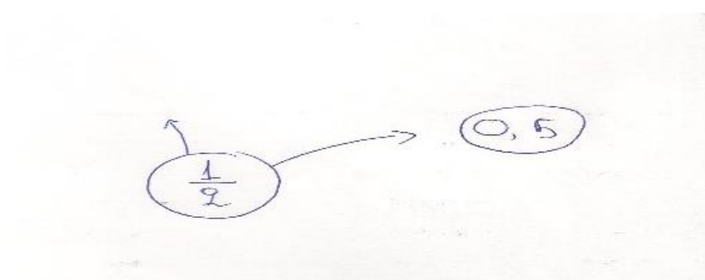
Εικόνα 11: Ιστόγραμμα συχνοτήτων της επίδοσης των συμμετεχόντων στους εννοιολογικούς χάρτες

Η μέγιστη βαθμολογία επιτεύχθηκε από το Συμμετέχων 24 (Σ24) που συμπλήρωσε έντεκα κόμβους που ανήκαν και στον πρότυπο εννοιολογικό χάρτη (Εικόνα 12).



Εικόνα 12: Εννοιολογικός χάρτης Σ24 – Μέγιστη βαθμολογία εννοιολογικού χάρτη

Η ελάχιστη ήταν ένα και προήλθε από τους Σ11, Σ31 και Σ35. Συγκεκριμένα ο Σ11 παρουσίασε στον εννοιολογικό του χάρτη μόνο τη δεκαδική αναπαράσταση του ½ (Εικόνα 13).



Εικόνα 13: Εννοιολογικός χάρτης με την ελάχιστη βαθμολογία 1

Προφίλ Συμμετεχόντων

Για την δημιουργία προφίλ των συμμετεχόντων έγινε μια νέα βαθμολόγηση της ήδη υπάρχουσας μεταβλητής. Η ανάλυση που ακολουθείται αφορά μόνο την 'Αίσθηση του Αριθμού' συνεπώς οι απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Αίσθηση Αριθμού' βαθμολογήθηκαν εκ νέου με 2, οι απαντήσεις της κατηγορίας 'Μερική ΑΑ' βαθμολογήθηκαν με 1 ενώ οι 'Κανόνες', 'Ασαφής' και 'Λάθος' βαθμολογήθηκαν με 0. Με βάση τη νέα μεταβλητή η μέγιστη δυνατή βαθμολογία που μπορεί να σημειωθεί στο ΕρΑΑ είναι 16. Οι βαθμολογίες παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 15 (βλ. Παράρτημα Α) μαζί με τις αντίστοιχες βαθμολογίες των εννοιολογικών χαρτών. Η δημιουργία των ομάδων αίσθησης του αριθμού βασίστηκε στην επίδοσή τους και στο αν ήταν υψηλότερη ή χαμηλότερη από το μισό της μέγιστης δυνατής βαθμολογίας όπως αυτή διαμορφώθηκε με βάση τη νέα μεταβλητή. Οι συμμετέχοντες διαχωρίστηκαν σε αυτούς που η επίδοσή τους ήταν μεγαλύτερη ή ίση του 9 και εμφάνισαν υψηλή αίσθηση αριθμού (Υψηλή ΑΑ) και αυτούς που είχαν επίδοση μικρότερη ή ίση του 8 και εμφάνισαν χαμηλή αίσθηση αριθμού (Χαμηλή ΑΑ). Στον Πίνακα 16 φαίνεται η κατανομή των συμμετεχόντων στις δύο κατηγορίες. Με τον τρόπο αυτό οι συμμετέχοντες χωρίστηκαν σε δυο ομάδες, αυτούς με Χαμηλή αίσθηση του αριθμού (Χαμηλή ΑΑ) που αποτελείται από 26 άτομα (66,6%) και σε αυτούς που χαρακτηρίζονται από Υψηλή ΑΑ και είναι 13 άτομα, δηλαδή το 33,3% του συνόλου του δείγματος.

	Πλήθος	Ποσοστό	Ελάχιστη βαθμολογία	Μέγιστη βαθμολογία	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Χαμηλή ΑΑ	26	66,6%	2	8	5,04	1,8
Υψηλή ΑΑ	13	33,3%	9	13	10,62	1,26
Σύνολο	39	100%	-	-	-	-

Πίνακας 16: Συχνότητες συμμετεχόντων και οι βαθμολογίες ανά ομάδα Αίσθησης αριθμού

Προφίλ συμμετεχόντων ανά ομάδα Αίσθησης αριθμού

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα προφίλ και τα χαρακτηριστικά κάθε μιας από τις δυο ομάδες αίσθησης του αριθμού καθώς και τα ατομικά προφίλ των συμμετεχόντων ανάλογα με την ομάδα στην οποία κατηγοριοποιήθηκαν.

Προφίλ ατόμων με Χαμηλή Αίσθηση Αριθμού

Στην ομάδα με Χαμηλή ΑΑ κατηγοριοποιήθηκαν είκοσι έξι συμμετέχοντες (36,6%) και στους εννοιολογικούς τους χάρτες εμφάνισαν αθροιστικά εκατό δέκα οχτώ κόμβους. Η ελάχιστη βαθμολογία στην ομάδα με Χαμηλή ΑΑ είναι 2 ενώ η μέγιστη είναι 8. Ο μέσος όρος βαθμολογίας της ομάδας είναι 5 (*Μ.Ο.=5.04 , Τ.Α.= 1.8*).

Προφίλ Σ2

Ο Σ2 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6 ενώ στον εννοιολογικό του χάρτη αναφέρονται τρεις από τους δεκαπέντε αναμενόμενους κόμβους. Συγκεκριμένα αναφέρει δυο μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (λεκτική και δεκαδική) καθώς και ότι ο δοσμένος αριθμός είναι ‘Κλάσμα’ ενώ δεν υπάρχει καμία από τις δυνατές ερμηνείες του κλάσματος.

Προφίλ Σ3

Ο Σ3 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 4. Ο αντίστοιχος εννοιολογικός χάρτης βαθμολογήθηκε με 7 βρίσκεται δυο μονάδες υψηλότερα από το μέσο όρο της βαθμολογίας των εννοιολογικών χαρτών στο σύνολο του δείγματος. Συγκεκριμένα δόθηκε μια αναπαράσταση του ½ (λεκτική), δυο από τις ερμηνείες του κλάσματος (Πηλίκο διαίρεσης και Ποσοστό), δυο κόμβοι που αφορούν γενικά το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα και Κλάσμα). Τέλος αναφέρθηκε συγκεκριμένα για το ½ πως είναι ‘Μικρότερο του 1’ ενώ δόθηκε και ένα παράδειγμα που περιείχε τη δοσμένη κεντρική έννοια.

Προφίλ Σ7

Ο Σ7 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 7 και η βαθμολογία του εννοιολογικού του χάρτη ήταν 7. Οι κόμβοι που παρουσιάστηκαν στον εννοιολογικό χάρτη ήταν το ‘Πηλίκο διαίρεσης’ που αφορά τις ερμηνείες ενός κλάσματος καθώς και δυο κόμβοι γενικά για τους κλασματικούς αριθμούς (Κλάσμα και Αριθμός). Ειδικά για την δοσμένη κεντρική έννοια αναφέρθηκε πως είναι ο ‘Αντίστροφος του 2’ ενώ χρησιμοποιήθηκε και σε ‘Παράδειγμα’. Τέλος, δεν έγινε καμία αναφορά στις διάφορες αναπαραστάσεις του κλάσματος.

Προφίλ Σ9

Ο Σ9 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 4. Ο εννοιολογικός χάρτης του Σ9 περιείχε πέντε κόμβους. Συγκεκριμένα, περιέχει μια αναπαράσταση του κλάσματος (Σχηματική), μια από τις ερμηνείες του κλάσματος (Ποσοστό), ένα κόμβο που αφορά το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα) καθώς και το ‘Μικρότερο του 1’ που αναφέρεται στο ½.

Προφίλ Σ10

Ο Σ10 ανήκει στην κατηγορία Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6. Στον εννοιολογικό χάρτη παρουσίασε τη δεύτερη μικρότερη βαθμολογία με επίδοση 3. Οι κόμβοι που αναφέρθηκαν είναι δυο από τις τρεις μορφές αναπαράστασης (Δεκαδική, Σχηματική) καθώς και ο ‘Αριθμός΄. Δεν παρουσιάστηκε καμία από τις ερμηνείες του κλάσματος ούτε και κόμβοι που να αφορούν ειδικά το ½.

Προφίλ Σ11

Ο Σ11 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6. Όσον αφορά τον εννοιολογικό χάρτη ο Σ11 παρουσίασε μια έναν κόμβο, δηλαδή την ελάχιστη βαθμολογία που συναντάμε στο σύνολο του δείγματος. Ο κόμβος ήταν μια μορφή αναπαράστασης του ½ (Δεκαδική).

Προφίλ Σ12

Ο Σ12 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση τη μέγιστη δυνατή βαθμολογία της κατηγορίας, 5. Ο εννοιολογικός χάρτης βαθμολογήθηκε με 4, δηλαδή μια μονάδα χαμηλότερα από το μέσο όρο που ήταν 5. Ο Σ12 ήταν η μια από τις τέσσερις περιπτώσεις που αναφέρθηκε η ερμηνεία του κλάσματος ως 'Λόγος'. Επίσης, υπήρχε μια μορφή αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών (Λεκτική) καθώς και δυο κόμβοι που αφορούν ευρέως τους κλασματικούς αριθμούς (Ισοδύναμα κλάσματα και Κλάσμα).

Προφίλ Σ13

Ο Σ13 εμφάνισε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 4. Επίσης με 4 βαθμολογήθηκε και ο εννοιολογικός χάρτης. Μάλιστα, ο Σ13 αποτελεί μια από τις δυο μόνες περιπτώσεις στις οποίες αναφέρθηκε η ερμηνεία του κλάσματος ως Λόγος. Ακόμη, έγινε αναφορά σε μία μορφή αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική) καθώς και σε τρεις κόμβους που αφορούν ευρύτερα τους κλασματικούς αριθμούς (Ανάγωγο κλάσμα, Ισοδύναμα κλάσματα και Κλάσμα). Δεν αναφέρθηκε κάποιο παράδειγμα ή κάποιος κόμβος ειδικά για το ½ .

Προφίλ Σ14

Ο Σ14 εμφάνισε τη δεύτερη μικρότερη επίδοση που ήταν 3 και κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ. Ο εννοιολογικός χάρτης του Σ14 βαθμολογήθηκε με 4. Ωστόσο, οι τρεις από τους κόμβους που παρουσίασε αφορούν τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική) και ο τέταρτος ήταν το 'Κλάσμα'. Δεν αναφέρθηκε κανένας κόμβος από τις ομάδες που αφορούν τις διάφορες ερμηνείες του κλάσματος ή ειδικά το ½ . Τέλος δεν δόθηκε κάποιο 'Παράδειγμα' που να περιείχε τη δοσμένη έννοια.

Προφίλ Σ17

Ο Σ17 εμφάνισε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 2 που αποτελεί και τη χαμηλότερη στο σύνολο του δείγματος. Ο αντίστοιχος εννοιολογικός χάρτης περιείχε εφτά κόμβους που βαθμολογήθηκαν με 1. Ένας από αυτούς αφορούσε τις μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Σχηματική), δυο τις ερμηνείες του κλάσματος (Πηλίκο διαίρεσης, Μέρος προς όλο), δυο αναφέρονται γενικά στους κλασματικούς αριθμούς (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα) καθώς και ένας ειδικά για το ½ (Αντίστροφος του 2). Τέλος δόθηκε ‘Παράδειγμα’ που περιείχε τη δοσμένη έννοια.

Προφίλ Σ18

Ο Σ18 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 4. Ο εννοιολογικός χάρτης του Σ18 περιείχε μια από τις τρεις αναπαραστάσεις το κλάσματος (Δεκαδική), δυο κόμβους που αφορούν το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα, Κλάσμα) καθώς και ένα ‘Παράδειγμα’ που περιείχε το ½ . Δεν δόθηκε καμία από τις δυνατές ερμηνείες του κλάσματος.

Προφίλ Σ19

Ο Σ19 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 8 που αποτελεί τη μέγιστη της συγκεκριμένης ομάδας (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός του χάρτης περιείχε έξι κόμβους. Οι δύο ήταν αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική), ένας αφορούσε την ερμηνεία του κλάσματος ως ‘Μέρος προς όλο’ και οι δυο γενικά την έννοια του κλάσματος (Κλάσμα, Αριθμός). Τέλος η δοσμένη κεντρική έννοια ½ συμπεριλήφθηκε σε ‘Παράδειγμα’.

Προφίλ Σ21

Ο Σ21 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ καθώς η επίδοση του ήταν 8 και ίση με τη μέγιστη δυνατή της ομάδας αυτής (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός χάρτης είχε τη δεύτερη μεγαλύτερη βαθμολογία στο σύνολο του δείγματος αφού εμφάνισε δέκα από τους αναμενόμενους κόμβους. Στον συγκεκριμένο χάρτη συμπεριλήφθηκαν όλοι οι κόμβοι για τις διάφορες αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική) και δυο από τις ερμηνείες των κλασμάτων ως 'Λόγος' και 'Μέρος προς όλο'. Επίσης, ο Σ21 είναι η δεύτερη και τελευταία περίπτωση που αναφέρει τον κόμβο 'Ανάγωγο κλάσμα' και δυο ακόμη κόμβους που αφορούν γενικά τα κλάσματα (Κλάσμα, Αριθμός) . Ακόμη, σημειώνεται πως ειδικά το ½ είναι 'Μικρότερο του 1' ενώ δόθηκε και 'Παράδειγμα' που περιείχε το δοσμένο κλάσμα.

Προφίλ Σ22

Ο Σ22 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 8. Ο εννοιολογικός του χάρτης κυμαίνεται στον μέσο όρο του δείγματος δηλαδή περιείχε πέντε κόμβους. Οι τρεις προήλθαν από τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική) ενώ ένας αφορά το σύνολο των κλασμάτων (Ισοδύναμα). Επίσης δόθηκε παράδειγμα με χρήση του ½ . Δεν αναφέρθηκε καμία από τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος καθώς και κανένας κόμβος που να αφορά ειδικά το ½ .

Προφίλ Σ25

Ο Σ25 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 4. Ο εννοιολογικός του χάρτης βαθμολογήθηκε με 3, δηλαδή δύο μονάδες χαμηλότερα από τον μέσο όρο βαθμολογίας στο σύνολο του δείγματος. Οι κόμβοι που εμφανίστηκαν ανήκουν σε δύο κατηγορίες, πρώτων στις μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική) και δεύτερον στο σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα). Δεν παρουσιάστηκε καμία από τις ερμηνείες των κλασμάτων όπως και κανένας κόμβος που να αναφέρεται ειδικά στο ½. Τέλος δεν δόθηκε κάποιο 'Παράδειγμα'.

Προφίλ Σ26

Ο Σ26 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 2 που είναι και η ελάχιστη που συναντάμε στο σύνολο του δείγματος. Στον εννοιολογικό του χάρτη ο οποίος βαθμολογήθηκε με 3 περιείχε δύο κόμβους σχετικά με τις μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική) καθώς και ένα παράδειγμα με το ½ . Δεν υπήρχε καμία αναφορά σε κάποια από τις ερμηνείες του κλάσματος ή σε κόμβους που αφορούν το σύνολο των κλασματικών αριθμών. Επίσης δεν παρουσιάστηκε κάποια έννοια που αναφέρεται ειδικά στο ½ .

Προφίλ Σ27

Ο Σ27 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6 (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός του χάρτης βαθμολογήθηκε με 8 δηλαδή τρεις μονάδες υψηλότερα από το μέσο όρο. Εμφανίζεται ένας κόμβος που αφορά τις αναπαραστάσεις του κλάσματος ‘Δεκαδική’, δυο από τις ερμηνείες του κλάσματος ως ‘Πηλίκο διαίρεσης’ και ‘Ποσοστό’ καθώς και τρεις για το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα, Αριθμός). Επίσης ειδικά για το ½ αναφέρθηκε πως είναι ‘Μικρότερο του 1’ ενώ χρησιμοποιήθηκε και σε ‘Παράδειγμα’.

Προφίλ Σ28

Ο Σ28 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ και μάλιστα με τη χαμηλότερη επίδοση στο σύνολο του δείγματος, 2. Ο εννοιολογικός του χάρτης βαθμολογήθηκε με 7. Εμφανίστηκαν και οι τρεις κόμβοι που αφορούν τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική) καθώς και δύο που αφορούν γενικά τους κλασματικούς αριθμούς (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα). Επίσης, περιείχε μια από τις ερμηνείες του κλάσματος ως ‘Μέρος προς όλο’. Τέλος, δόθηκε ένα ‘Παράδειγμα’ όπου χρησιμοποιήθηκε το ½ .

Προφίλ Σ29

Ο Σ29 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6, μια μονάδα ψηλότερα από το μέσο όρο της ομάδας (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός του χάρτης περιείχε έξι από τους αναμενόμενους κόμβους. Συγκεκριμένα εμφανίστηκαν όλες οι μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική), μια ερμηνεία του κλάσματος ως ‘Μέρος προς όλο’ και δυο κόμβοι που αφορούν το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα). Επίσης δόθηκε παράδειγμα με χρήση του ½ .

Προφίλ Σ30

Ο Σ30 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ και είχε επίδοση 6 (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός του χάρτης βαθμολογήθηκε με 4 και περιείχε δυο μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική) καθώς και δυο κόμβους που αφορούν το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Κλάσμα, Αριθμός). Δεν εμφανίστηκε καμία από τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος ή κάποιος κόμβος ειδικά για το ½ .

Προφίλ Σ31

Ο Σ31 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6, μια μονάδα πάνω από το μέσο όρο της συγκεκριμένης ομάδας. Ο εννοιολογικός του χάρτης είναι ο δεύτερος με την ελάχιστη επίδοση στο σύνολο του δείγματος. Ο μοναδικός από τους δεκαπέντε αναμενόμενους κόμβους που εμφανίστηκε ήταν ο ‘Αριθμός’. Δεν έγινε καμία αναφορά σε κάποια από τις διάφορες μορφές αναπαράστασης ή τις ερμηνείες του κλάσματος.

Προφίλ Σ33

Ο Σ33 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 6. Όμοια βαθμολογία παρουσίασε και στον εννοιολογικό χάρτη με δυο από τις τρεις μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική), μια ερμηνεία του κλάσματος ως ‘Πηλίκο διαίρεσης’, δυο κόμβοι που αφορούν γενικά κλασματικούς αριθμούς (Κλάσμα, Αριθμός) καθώς και ένας ειδικά για το ½ (Μικρότερο του 1).

Προφίλ Σ34

Ο Σ34 παρουσίασε Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 4, δηλαδή λίγο χαμηλότερα από το μέσο όρο της ομάδας αυτής. Ο εννοιολογικός χάρτης βαθμολογήθηκε με 5 και περιείχε δυο από τις ερμηνείες του κλάσματος (Πηλίκο διαίρεσης, Ποσοστό), δυο κόμβους που αφορούν το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα, Αριθμός) καθώς και ότι το ½ είναι 'Μικρότερο του 1'. Δεν αναφέρθηκε καμία από τις τρεις αναπαραστάσεις των κλασμάτων.

Προφίλ Σ35

Ο Σ35 κατηγοριοποιήθηκε ως Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 5. Ο εννοιολογικός του χάρτης είναι η τρίτη περίπτωση ελάχιστης βαθμολογίας στο σύνολο των εννοιολογικών χαρτών αφού εμφάνισε μόνο έναν κόμβο. Συγκεκριμένα ο κόμβος που αναφέρθηκε ήταν η ερμηνεία του κλάσματος ως 'Ποσοστό'. Δεν παρουσιάστηκε καμία αναπαράσταση του κλάσματος όπως και κανένας κόμβος που να αφορά είτε το σύνολο των κλασματικών αριθμών είτε το ειδικά το ½ .

Προφίλ Σ36

Ο Σ36 παρουσίασε ΄ Χαμηλή ΑΑ με επίδοση 3 που είναι και η δεύτερη μικρότερη στο σύνολο του δείγματος. Ο εννοιολογικός χάρτης που συμπληρώθηκε βαθμολογήθηκε με 3, δηλαδή χαμηλότερα από το μέσο όρο που είναι πέντε. Οι κόμβοι που περιείχε ο χάρτης ήταν μια 'Λεκτική' και μια 'Σχηματική' αναπαράσταση του ½ καθώς και η ερμηνεία του κλάσματος ως 'Πηλίκο διαίρεσης'. Δεν έγινε αναφορά σε κόμβους που αφορούν ευρύτερα τα κλάσματα ή συγκεκριμένα το ½ ούτε δόθηκε κάποιο 'Παράδειγμα'.

Προφίλ Σ37

Ο Σ37 κατηγοριοποιήθηκε Χαμηλή ΑΑ αφού η επίδοσή του ήταν 6 (Πίνακας 17). Όσον αφορά τον αντίστοιχο εννοιολογικό χάρτη, βαθμολογήθηκε με 3 αφού παρουσίασε μόνο δύο από τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική) και ανέφερε ότι η δοσμένη έννοια είναι ‘Κλάσμα’. Δεν συμπεριλήφθηκε στον χάρτη καμία από τις ερμηνείες του κλάσματος ή κόμβους που αφορούν ειδικά το ½ .

Προφίλ ατόμων με Υψηλή ΑΑ

Η ομάδα των συμμετεχόντων με Υψηλή ΑΑ αποτελείται από δεκατρείς συμμετέχοντες (33.3%) και εμφάνισαν αθροιστικά στους εννοιολογικούς τους χάρτες ογδόντα εννιά κόμβους. Η ελάχιστη επίδοση σε αυτήν την ομάδα είναι 9 ενώ η μέγιστη είναι 13 και αποτελεί ταυτόχρονα τη μέγιστη στο σύνολο του δείγματος. Κατά μέσο όρο οι απαντήσεις οι συμμετέχοντες της ομάδας βαθμολογήθηκαν με 10,62 μονάδες (*M=10.62 , SD = 1,26*)

Προφίλ Σ1

Ο Σ1 παρουσίασε Υψηλή ΑΑ με επίδοση 13 και ο εννοιολογικός του χάρτης βαθμολογήθηκε με 7, δηλαδή πάνω από το μέσο όρο. Παρουσιάστηκαν και οι τρεις κόμβοι που αφορούν την αναπαράσταση ενός κλάσματος (λεκτική, δεκαδική, σχηματική), μια από τις ερμηνείες του κλάσματος (πηλίκο διαίρεσης), δυο κόμβοι που αφορούν ευρύτερα την έννοια του κλάσματος (Ισοδύναμα κλάσματα και κλάσμα) καθώς και ένα παράδειγμα από την καθημερινότητα (μισό ποτήρι νερό).

Προφίλ Σ4

Ο Σ4 κατηγοριοποιήθηκε ως ‘Υψηλή ΑΑ με επίδοση 10, δηλαδή ίση με το μέσο όρο της συγκεκριμένης κατηγορίας (Πίνακας 17). Οι κόμβοι του εννοιολογικού καλύπτουν τέσσερεις από τις πέντε κατηγορίες κόμβων. Αρχικά, αναφέρθηκαν δυο αναπαραστάσεις (Λεκτική και Δεκαδική) καθώς και δυο ερμηνείες του κλάσματος (Μέρος προς όλο και Ποσοστό). Όσον αφορά τις γενικές έννοιες για τα κλάσματα παρουσιάστηκαν το ‘Κλάσμα’ και ο ‘Αριθμός’ και τα ‘Ισοδύναμα κλάσματα’ ενώ δόθηκε και ‘Παράδειγμα΄. Η κατηγορία από την οποία δεν παρουσιάστηκε κάποιος κόμβος είναι αυτή αφορά συγκεκριμένα τη δοσμένη έννοια.

Προφίλ Σ5

Ο Σ5 παρουσίασε Υψηλή ΑΑ με επίδοση 10 που ταυτίζεται με το μέσο όρο της κατηγορίας (Πίνακας 17) ενώ η βαθμολογία του αντίστοιχου εννοιολογικού χάρτη είναι 5. Από τις αναπαραστάσεις και τις ερμηνείες του κλάσματος δόθηκε ένας κόμβος για κάθε κατηγορία (Λεκτική και Πηλίκο διαίρεσης). Επίσης αναφέρθηκε ότι η κεντρική έννοια είναι ‘Αριθμός’ και ‘Κλάσμα’ χωρίς να γίνεται αναφορά σε κόμβους που αφορούν συγκεκριμένα το ½ . Η κεντρική έννοια χρησιμοποιήθηκε σε παράδειγμα που αφορούσε την καθημερινότητα (μισή ώρα).

Προφίλ Σ6

Ο Σ6 παρουσίασε Υψηλή ΑΑ με την επίδοσή του να ταυτίζεται με το μέσο όρο της κατηγορίας δηλαδή 12. Ο εννοιολογικός χάρτης του Σ6 περιείχε πέντε από τους αναμενόμενους κόμβους. Ο ένας από αυτούς αφορούσε την αναπαράσταση του κλάσματος (Λεκτική), ένας ακόμη ήταν μια από τις ερμηνείες της έννοιας του κλάσματος (Πηλίκο διαίρεσης) και δυο αφορούσαν γενικότερα τους κλασματικούς αριθμούς (Κλάσμα και Αριθμός). Τέλος, δόθηκε ένας κόμβος που αφορά συγκεκριμένα το ½ (Μικρότερο του 1) ενώ δεν παρουσιάστηκε κάποιο παράδειγμα.

Προφίλ Σ8

Ο Σ8 παρουσίασε Υψηλή ΑΑ με επίδοση 10 δηλαδή ίση με το μέσο όρο της κατηγορίας αυτής. Ο εννοιολογικός χάρτης που κατασκευάστηκε από το Σ8 εμφάνισε την τρίτη μεγαλύτερη βαθμολογία στο σύνολο του δείγματος καθώς αναφέρθηκαν εννιά από τους δεκαπέντε αναμενόμενους κόμβους.

Προφίλ Σ15

Ο Σ15 ανήκε στην ομάδα με τη Υψηλή ΑΑ και η επίδοσή του ταυτίζεται με το μέσο όρο της ομάδας που είναι 12 (Πίνακας 17). Ως προς τον εννοιολογικό χάρτη παρουσίασε τέσσερις από τους αναμενόμενους κόμβους. Οι δυο από αυτούς αφορούν γενικά τους κλασματικούς αριθμούς (Κλάσμα, Αριθμός) ενώ οι δύο αναφέρονται στην 'Λεκτική' αναπαράσταση του κλάσματος καθώς και στην ερμηνεία του ως 'Πηλίκο διαίρεσης'. Δεν παρουσιάστηκε κάποιος κόμβος που να αναφέρεται ειδικά στο ½ ή κάποιο 'Παράδειγμα'.

Προφίλ Σ16

Ο Σ16 κατηγοριοποιήθηκε ως Υψηλή ΑΑ με επίδοση 10, ίση με το μέσο όρο της συγκεκριμένης ομάδας. Ο εννοιολογικός χάρτης που ήταν περιεκτικός καθώς παρουσιάστηκαν 9 κόμβοι.. Συγκεκριμένα, αναφέρθηκαν δυο μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική) τέσσερις από τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος (Λόγος, Πηλίκο διαίρεσης, Μέρος προς όλο, Ποσοστό) καθώς και τρεις από τους τέσσερις κόμβους που αφορούν γενικά τους κλασματικούς αριθμούς (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα, Αριθμός).

Προφίλ Σ20

Ο Σ20 κατηγοριοποιήθηκε ως Υψηλή ΑΑ με επίδοση 9, που αποτελεί την ελάχιστη βαθμολογία της ομάδας. Η βαθμολογία του εννοιολογικού χάρτης ταυτίζεται με τον μέσο όρο του συνόλου του δείγματος που είναι 5. Από τους πέντε κόμβους ο ένας αφορούσε την 'Σχηματική' αναπαράσταση του κλάσματος, ένας την ερμηνεία του κλάσματος ως 'Ποσοστό' ενώ αναφέρθηκε πως το ½ είναι 'Κλάσμα' και μάλιστα 'Μικρότερο του 1'. Τέλος, δόθηκε παράδειγμα στο οποίο χρησιμοποιήθηκε το ½ .

Προφίλ Σ23

Ο Σ23 παρουσίασε Υψηλή ΑΑ με επίδοση 9. Ο εννοιολογικός του χάρτης αποτελείται από πέντε κόμβους, δυο αναπαραστάσεις των κλασματικών αριθμών (Λεκτική, Σχηματική), μια ερμηνεία του κλάσματος ως 'Μέρος προς όλο', την αναφορά ότι το ½ είναι 'Μικρότερο του 1' καθώς και ότι η δοσμένη έννοια είναι 'Κλάσμα'.

Προφίλ Σ24

Ο Σ24 κατηγοριοποιήθηκε ως Υψηλή ΑΑ με επίδοση ίση με το μέσο όρο της ομάδας αυτής, 10. Ο εννοιολογικός του χάρτης είναι αυτός που φέρει τη μέγιστη βαθμολογία στο σύνολο του δείγματος (Πίνακας 15) με βαθμολογία 11. Περιείχε και τις τρεις μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική), τέσσερις από τις πέντε ερμηνείες του κλάματος ως 'Πηλίκο διαίρεσης', 'Μέρος προς όλο', 'Ποσοστό' και 'Λόγο' καθώς και δύο κόμβους που αφορούν το σύνολο των κλασματικών αριθμών (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα). Ειδικά για το ½ αναφέρθηκε ότι είναι 'Μικρότερο του 1' ενώ χρησιμοποιήθηκε και σε 'Παράδειγμα'.

Προφίλ Σ32

Ο Σ32 παρουσίασε Υψηλή ΑΑ με επίδοση 12 που αποτελεί και το μέσο όρο της κατηγορίας (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός χάρτης του Σ32 βαθμολογία με την τρίτη υψηλότερη βαθμολογία (9) στο σύνολο του δείγματος αφού περιείχε εννιά κόμβους. Αναφέρθηκαν όλες οι μορφές αναπαράστασης του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική), δυο από τις ερμηνείες του κλάσματος ως 'Πηλίκο διαίρεσης' και 'Μέρος προς όλο' καθώς και δυο κόμβοι που αφορούσαν ειδικά το ½ (Αντίστροφος του 2, Μικρότερο του 1). Τέλος δόθηκαν δυο κόμβοι που αναφέρονται στο σύνολο των κλασματικών αριθμών (Κλάσμα, Αριθμός).

Προφίλ Σ38

Ο Σ38 ανήκει στην ομάδα Υψηλή ΑΑ με επίδοση 11 δηλαδή μια μονάδα χαμηλότερα από το μέσο όρο της ομάδας (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός χάρτης βαθμολογήθηκε με 6. Περιείχε δυο αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική), τρεις κόμβους που αφορούν ευρύτερα τους κλασματικούς αριθμούς (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα, Αριθμός) καθώς και την αναφορά ότι το ½ είναι ‘Μικρότερο’ της μονάδας. Δεν αναφέρθηκε καμία από τις ερμηνείες του κλάσματος ούτε και δόθηκε κάποιο ‘Παράδειγμα’.

Προφίλ Σ39

Ο Σ39 κατηγοριοποιήθηκε ως Υψηλή ΑΑ με επίδοση 10 δηλαδή ίση με το μέσο όρο ομάδας αυτής (Πίνακας 17). Ο εννοιολογικός χάρτης του Σ39 βαθμολογήθηκε με 7. Δυο από τους εφτά κόμβους που περιείχε ήταν αναπαραστάσεις του κλάσματος (Λεκτική, Δεκαδική), η ερμηνεία του κλάσματος ως ‘Ποσοστό’ ενώ τρεις αφορούν γενικά τους κλασματικούς αριθμούς (Ισοδύναμα κλάσματα, Κλάσμα, Αριθμός). Τέλος, ειδικά για το ½ σημειώθηκε πως είναι ‘Μικρότερο του 1’ χωρίς όμως να δοθεί κάποιο ‘Παράδειγμα’ που να περιέχει τη δοσμένη έννοια.

Ανάλυση εννοιολογικών χαρτών ανά ομάδα αίσθησης αριθμού

Στον Πίνακα 17 παρουσιάζονται οι συχνότητες εμφάνισης κάθε κόμβου ξεχωριστά στις δύο ομάδες Αίσθησης Αριθμού. Όπως φαίνεται κανένας από τους συμμετέχοντες δεν έκανε σύνδεση με τον κόμβο ’Τελεστής’. Αντίθετα, περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες κάθε ομάδας που είναι συνολικά 29 (74,3%) έκαναν συνδέσεις με το ‘Κλάσμα’, τη ‘Λεκτική αναπαράσταση’ και τη ‘Δεκαδική αναπαράσταση’. Ο κόμβος του εννοιολογικού χάρτη που εμφάνισε την μικρότερη συχνότητα είναι το ‘Ανάγωγο κλάσμα’ ενώ ο δεν αναφέρθηκε από κανένα άτομο με Υψηλή ΑΑ.

Κόμβοι Εννοιολογικού χάρτη	Υψηλή ΑΑ (Ν=13)	Χαμηλή ΑΑ (Ν=26)
Κλάσμα	13 (100%)	16 (61,5%)
Λεκτική αναπαράσταση	11 (84,6%)	16 (61,5%)
Δεκαδική αναπαράσταση	9 (69,2%)	16 (61,5%)
Ισοδύναμα κλάσματα	7 (53,8%)	12 (46,1%)
Παράδειγμα με το ½	6 (41,6%)	12 (46,1%)
Αριθμός	8 (61,5%)	9 (34,6%)
Σχηματική αναπαράσταση	6 (46,1%)	9 (34,6%)
Πηλίκο διαίρεσης	7 (53,8%)	8 (30,7%)
Ποσοστό	6 (46,1%)	5 (19,2%)
Μικρότερο του 1	6 (41,6%)	4 (15,3%)
Μέρος προς όλο	6 (46,1%)	4 (15,3%)
Αντίστροφος του 2	3 (23%)	3 (11,5%)
Λόγος	2 (15,3%)	2 (7,6%)
Ανάγωγο κλάσμα	0 (0%)	2 (7,6%)
Τελεστής	0 (0%)	0 (0%)

Πίνακας 17: Συχνότητα εμφάνισης των κόμβων του εννοιολογικού χάρτη ανά ομάδα αίσθησης αριθμού

Στον Πίνακα 18 υπολογίστηκε η σχετική και απόλυτη συχνότητα των ομαδοποιημένων κόμβων του εννοιολογικού χάρτη που εμφανίστηκε σε κάθε μια από τις δυο ομάδες αίσθησης του αριθμού. Οι κατηγορίες των χαρτών είναι οι ‘Αναπαραστάσεις’ (Λεκτική, Δεκαδική, Σχηματική), οι ‘Ερμηνείες κλάσματος’ (Μέρος προς όλο, Πηλίκο διαίρεσης, Λόγος, Τελεστής, Ποσοστό), οι ‘Γενικές έννοιες κλασμάτων’ (Κλάσμα, Αριθμός, Ισοδύναμα κλάσματα, Ανάγωγο κλάσμα), οι ‘Ειδικές έννοιες για το ½’ (Μικρότερο του 1, Αντίστροφος του 2) και το ‘Παράδειγμα με το ½’ Αρχικά, παρατηρούμε πως και στις δυο ομάδες αίσθησης αριθμού οι ‘Αναπαραστάσεις’ είναι η κατηγορία που εμφανίζει τη μεγαλύτερη συχνότητα (66,6% και 52,5% αντίστοιχα). Για τους συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ η ελάχιστη συχνότητα εμφανίζεται στις ‘Ερμηνείες κλάσματος’

(32,3%) ενώ για την ομάδα με Χαμηλή ΑΑ στις 'Ειδικές έννοιες για το ½' (13,4%). Επίσης παρατηρούμε πως ανεξάρτητα από την κατηγορία, τα άτομα με Υψηλή ΑΑ εμφανίζουν σε όλες τις περιπτώσεις μεγαλύτερα ποσοστά με μοναδική εξαίρεση το 'Παράδειγμα με το ½' όπου συναντάμε ακριβώς το ίδιο ποσοστό (46,1%).

Πίνακας 18: Συχνότητα εμφάνισης των κατηγοριών του εννοιολογικού χάρτη ανά ομάδα Αίσθησης αριθμού

	Υψηλή ΑΑ (N=13)	Χαμηλή ΑΑ (N=26)
Αναπαραστάσεις	26 (66,6%)	41 (52,5%)
(Σύνολο αναπαραστάσεων: 3)	39 (100%)	78 (100%)
Ερμηνείες κλάσματος	21 (32,3%)	19 (14,6%)
(Σύνολο ερμηνειών: 5)	65 (100%)	130 (100%)
Γενικές έννοιες κλασμάτων	28 (54%)	39 (37%)
(Σύνολο γενικών εννοιών: 4)	52 (100%)	104 (100%)
Ειδικές έννοιες για το ½	9 (34,6%)	7 (13,4%)
(Σύνολο ειδικών εννοιών: 2)	26 (100%)	52 (100%)
Παράδειγμα με το ½	6 (46,1%)	12 (46,1%)
(Σύνολο παραδειγμάτων: 1)	13 (100%)	26 (100%)
Σύνολο	90 (46%)	118 (30,2%)
(ν=15)	195 (100%)	390 (100%)

Σημείωση: Οι αριθμοί που αναφέρονται μέσα στις παρενθέσεις κάτω από το όνομα των ομάδων είναι ο μέγιστος αριθμός κόμβων κάθε κατηγορίας που θα μπορούσαν να εμφανιστούν σε ένα χάρτη. Για παράδειγμα, αν και τα 13 άτομα με Υψηλή ΑΑ παρουσίαζαν όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις τότε αυτές θα ήταν 13x3=39.

Για να ελέγξουμε αν η αίσθηση του αριθμού που μετρήθηκε από το ΕρΑΑ συσχετίζεται με το πλήθος συνδέσεων του εννοιολογικού χάρτη προχωρήσαμε σε έλεγχο ανεξαρτησίας χ^2. Η συσχέτιση αυτών των μεταβλητών είναι στατιστικά σημαντική $\chi^2(1, N=585)= 14,155$, $p<0.001$.

Οι συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ εμφανίζουν περισσότερους κόμβους του εννοιολογικού χάρτη σε σχέση με τα άτομα με Χαμηλή ΑΑ. Στη συνέχεια γίνεται μια ανάλυση με σκοπό να εξεταστεί η ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα στις ομάδες αίσθησης αριθμού και τις πέντε κατηγορίες του εννοιολογικού χάρτη.

Στον Πίνακα 19 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των κόμβων που κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Αναπαραστάσεις’ ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 19 τα άτομα με Υψηλή ΑΑ εμφάνισαν ποσοστιαία περισσότερες ‘Αναπαραστάσεις’ από τους συμμετέχοντες με Χαμηλή ΑΑ χωρίς όμως η διαφορά αυτή να είναι στατιστικώς σημαντική, $\chi^2(1, N_1=117)= 2{,}070$, $p>0{,}5$.

Αναπαραστάσεις			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	26 (66,6%)	13 (33,4%)	39 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	41 (52,5%)	37 (47,5%)	78 (100%)

Πίνακας 19: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) τουλάχιστον μια αναπαράσταση στον εννοιολογικό χάρτη

Στον Πίνακα 20 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των κόμβων που κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Ερμηνείες Κλάσματος’ ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 20 τα άτομα με Υψηλή ΑΑ εμφάνισαν στατιστικώς σημαντικά περισσότερες ‘Ερμηνείες Κλάσματος’ από τους συμμετέχοντες με Χαμηλή ΑΑ, $\chi^2(1, N_2=195)= 7{,}599$, $p<0.001$

Ερμηνείες κλάσματος			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	21 (32,3%)	44 (67,7%)	65 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	19 (14,6%)	111 (85,4%)	130 (100%)

Πίνακας 20: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) τουλάχιστον μια από τις 'Ερμηνείες κλάσματος' στον εννοιολογικό χάρτη

Στον Πίνακα 21 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των κόμβων που κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Γενικές Έννοιες Κλασμάτων' ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Όπως φαίνεται τα άτομα με Υψηλή ΑΑ εμφάνισαν στατιστικώς σημαντικά περισσότερες 'Γενικές Έννοιες Κλασμάτων' από τους συμμετέχοντες με Χαμηλή ΑΑ, $\chi^2(1, N_3=156)= 4{,}069$, $p<0.05$.

Γενικές Έννοιες Κλασμάτων			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	28 (54%)	25 (46%)	52 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	39 (37%)	65 (63%)	104 (100%)

Πίνακας 21: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) 'Γενικές έννοιες των κλασμάτων' στον εννοιολογικό χάρτη

Στον Πίνακα 22 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των κόμβων που κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Ειδικές έννοιες για το ½' ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Όπως φαίνεται τα άτομα με Υψηλή ΑΑ εμφάνισαν στατιστικώς σημαντικά περισσότερες 'Ειδικές έννοιες για το ½' από τους συμμετέχοντες με Χαμηλή ΑΑ, $\chi^2(1, N_4=78)=5{,}113$, $p<0.05$.

Ειδικές έννοιες για το ½			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	9 (34,6%)	17 (65,4%)	26 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	7 (13,4%)	45 (86,6%)	52 (100%)

Πίνακας 22: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) 'Ειδικές έννοιες για το ½' στον εννοιολογικό χάρτη

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 23 τα ποσοστά των ατόμων που παρουσίασαν 'Παράδειγμα με το ½' είναι παρόμοια για κάθε ομάδα αίσθησης αριθμού (46%). Συνεπώς δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά μεταξύ των απαντήσεων που δίνουν οι συμμετέχοντες κάθε ομάδας, $\chi^2(1, N_5=39)=0,1161$, $p>0,5$.

Παράδειγμα με το ½			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	6 (46,1%)	7 (53,9%)	13 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	12 (46,1%)	14 (53,9%)	26 (100%)

Πίνακας 23: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) 'Παράδειγμα με το ½' στον εννοιολογικό χάρτη

Βασικές κατηγορίες του εννοιολογικού χάρτη ανά ομάδα αίσθησης αριθμού

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε επιπλέον ομαδοποίηση των κατηγοριών του εννοιολογικού χάρτη. Η ομαδοποίηση βασίστηκε στους δυο βασικούς άξονες που αναφέρθηκαν κατά την ανάλυση του πρότυπου εννοιολογικού χάρτη στο θεωρητικό πλαίσιο. Όλες οι απαντήσεις των κατηγοριών ‘Αναπαραστάσεις’, ‘Ερμηνείες κλάσματος’ και ‘Γενικές έννοιες κλασμάτων’ είναι κόμβοι που δεν αναφέρονται αποκλειστικά στο ½ αλλά γενικότερα στο κλάσμα και θα μπορούσαν να εμφανιστούν ακόμη και αν ως κεντρικό ερώτημα δινόταν κάποιο άλλο κλάσμα. Συνεπώς οι απαντήσεις αυτές δείχνουν την εικόνα που έχουν οι συμμετέχοντες γενικά για τα κλάσματα. Η νέα αυτή κατηγορία αποτέλεσε την νέα κατηγορία που ονομάστηκε ‘Γενικές μαθηματικές έννοιες’. Αντίθετα, οι απαντήσεις των ομάδων ‘Ειδικές έννοιες για το ½’ και ‘Παράδειγμα με το 1/2’ αφορούν αποκλειστικά το δοσμένο κεντρικό ερώτημα και κανένας κόμβος των ομάδων αυτών δε θα μπορούσε να γενικευτεί για όλα τα κλάσματα. Η νέα αυτή κατηγορία ονομάστηκε ‘Έννοιες εξειδικευμένες για το ½’. Στον Πίνακα 24 παρουσιάζονται οι συχνότητες εμφάνισης των νέων κατηγοριών ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Ο Πίνακας 24 είναι μια σύμπτυξη του Πίνακα 18 με βάση τις δυο νέες κατηγορίες που δημιουργήθηκαν.

	Υψηλή ΑΑ (N=13)	Χαμηλή ΑΑ (N=26)
Γενικές μαθηματικές έννοιες (ν=12)	75 (48%) 156 (100%)	99 (31,7%) 312 (100%)
Έννοιες εξειδικευμένες για το ½ (ν=3)	15 (38,4%) 39 (100%)	19 (24,3%) 78 (100%)

Πίνακας 24: Συχνότητα και ποσοστό εμφάνισης Γενικών μαθηματικών εννοιών και εννοιών εξειδικευμένες για το ½ ανά ομάδα αίσθησης αριθμού

Με βάση τις νέες κατηγορίες του εννοιολογικού χάρτη οι συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ παρουσιάζουν και στις δυο μεγαλύτερα ποσοστά από τα άτομα με Χαμηλή ΑΑ. Τα ποσοστά εμφάνισης των γενικών μαθηματικών εννοιών είναι 48% και 31,7% στα άτομα με Υψηλή ΑΑ και Χαμηλή ΑΑ αντίστοιχα, ενώ όσον αφορά τις εξειδικευμένες έννοιες για το ½ τα ποσοστά είναι 38,4% και 24,3%. Όμοια σε αυτή την περίπτωση μελετήθηκε ξεχωριστά η σχέση μεταξύ των ομάδων της αίσθησης του αριθμού και των δυο μεγάλων κατηγοριών των κόμβων του εννοιολογικού χάρτη.

Στον Πίνακα 25 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των κόμβων που κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Γενικές μαθηματικές έννοιες’ ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Όπως φαίνεται οι συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ παρουσιάζουν στατιστικώς σημαντικά περισσότερες ‘Γενικές μαθηματικές έννοιες’ σε σχέση με τα άτομα με Χαμηλή ΑΑ, $\chi^2(1, N_1=468)=11,356$, $p<0.001$. Η διαφορά αυτή μας δείχνει ότι οι συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ μπορούν να κάνουν συνδέσεις που δεν περιορίζονται στη δοσμένη έννοια. Είναι σε θέση να γενικεύουν και να παρουσιάζουν τις γνώσεις τους σφαιρικά για τη δοσμένη έννοια και όχι να περιορίζονται σε αυτή. Τέλος φανερώνεται η εννοιολογική γνώση των ατόμων με Υψηλή ΑΑ σχετικά με τα κλάσματα.

Γενικές μαθηματικές έννοιες			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	75 (48%)	81 (52%)	156 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	99 (32%)	213 (68%)	312 (100%)

Πίνακας 25: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) ‘Γενικές μαθηματικές έννοιες’ στον εννοιολογικό χάρτη

Στον Πίνακα 26 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των κόμβων που κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Έννοιες εξειδικευμένες για το ½’ ανά ομάδα αίσθησης αριθμού. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 26 οι συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ παρουσιάζουν υψηλότερα ποσοστά Εννοιών εξειδικευμένες για το ½ σε σχέση με την ομάδα με Χαμηλή ΑΑ αλλά η διαφορά δεν είναι στατιστικώς σημαντική, $\chi^2(1, N_2=117)=2,817$, $p>0,05$.

Έννοιες εξειδικευμένες για το ½			
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Υψηλή ΑΑ	15 (39%)	24 (61%)	39 (100%)
Χαμηλή ΑΑ	19 (24%)	59 (76%)	78 (100%)

Πίνακας 26: Συχνότητες συμμετεχόντων ανά ομάδα αίσθησης αριθμού που παρουσιάζουν (Ναι ή Όχι) 'Έννοιες εξειδικευμένες για το ½' στον εννοιολογικό χάρτη

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε πως η ομάδα συμμετεχόντων με Υψηλή ΑΑ παρουσιάζει στατιστικώς περισσότερες συνδέσεις σε τρεις από τις πέντε κατηγορίες του εννοιολογικού χάρτη (Ερμηνείες κλάσματος, Γενικές έννοιες κλασμάτων, Ειδικές έννοιες για το ½) σε σχέση με τα άτομα με Χαμηλή ΑΑ. Παρατηρούμε πως σε κάθε κατηγορία που πραγματοποιήθηκαν στατιστικοί έλεγχοι τα άτομα με Υψηλή ΑΑ παρουσίασαν υψηλότερα ποσοστά από τα άτομα με Χαμηλή ΑΑ. Ακόμη και στην κατηγορία 'Αναπαραστάσεις' όπου η διαφορά δεν είναι στατιστικώς σημαντική, τα ποσοστά εμφάνισης των κόμβων από τους συμμετέχοντες με Υψηλή ΑΑ συνεχίζουν να είναι υψηλότερα. Η διαφορά ήταν στατιστικώς σημαντική στις κατηγορίες Ερμηνείες κλάσματος, τις Ειδικές έννοιες για το ½ και τις Γενικές έννοιες κλασμάτων ενώ δεν παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις στις Αναπαραστάσεις και στο Παράδειγμα με το ½.

Συσχέτιση Αίσθησης αριθμού – Εννοιολογικού χάρτη

Στη συνέχεια εξετάζεται αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων που εμφανίστηκαν στο ΕρΑΑ και των επιδόσεων στους εννοιολογικούς χάρτες όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 15 (βλ. Παράρτημα Α). Οι μεταβλητές στις οποίες έγινε η στατιστική ανάλυση είναι η επίδοση των συμμετεχόντων στο ΕρΑΑ και η βαθμολογία τους στους εννοιολογικούς χάρτες. Έλεγχος spearman έδειξε στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στη δόμηση εννοιολογικών χαρτών και τη βαθμολογία της αίσθησης αριθμού (r=0,436, N=39, p=0.006). Επίσης, έλεγχος διακύμανσης έδειξε πως η επίδοση των συμμετεχόντων στο ΕρΑΑ αίσθησης του αριθμού αποτελεί στατιστικά σημαντικό παράγοντα που επηρεάζει την επίδοση στη δόμηση των εννοιολογικών χαρτών (F(6,32)=2,924, df=38, p=0.022).

Συζήτηση - Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκε η αίσθηση του αριθμού σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων. Ο λόγος για την πραγματοποίηση της μελέτης ήταν η σημασία της αίσθησης και η ανάγκη για την ανάπτυξή της. Η αίσθηση του αριθμού αφορά την ικανότητα να αναγνωρίζουμε και να διαχειριζόμαστε αριθμούς και ποσότητες ευέλικτα, να ερμηνεύουμε και να επεξεργαζόμαστε πληροφορίες κρίνοντας λογικά τα δεδομένα.

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η υπόθεση της ως προς την ορθότητα των απαντήσεων υποστηρίχτηκε από τις επιδόσεις των συμμετεχόντων καθώς ήταν υψηλές και σύμφωνες με αυτές της έρευνας της Dowker (1992). Συγκεκριμένα, περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες έδωσαν σωστές απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα. Μόνο στο έκτο ερώτημα όπου χρειάστηκε να επιλέξουν τους αριθμούς για τους οποίους ισχύει η ανισότητα: $3\frac{3}{8}: - > 4$ 25 από τις 39 απαντήσεις ήταν λάθος. Η πολυπλοκότητα του ερωτήματος και το γεγονός πως στο ίδιο ερώτημα συναντήσαμε το μεγαλύτερο ποσοστό απαντήσεων που κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Ασαφής’, δηλαδή είτε δεν υπήρχε αιτιολόγηση είτε ήταν ελλιπής, οφείλεται στο ότι τα άτομα με ειδίκευση στα μαθηματικά συχνά μπορούν να αναπτύξουν στρατηγικές και να εφαρμόσουν κανόνες χωρίς όμως να είναι σε θέση να δικαιολογήσουν ή να εξηγήσουν γιατί ‘δουλεύουν’ αυτές οι διαδικασίες (Ball, 1990; Ma, 1999).

Στο Ερώτημα 8 ζητήθηκε να γίνει εκτίμηση του γινομένου $\frac{21}{36} x \frac{7}{16}$ και να αποφασιστεί αν είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο του $\frac{21}{64}$. Δυνατή απάντηση ήταν και ότι δεν υπάρχει τρόπος να αποφασίσουν χωρίς γίνουν υπολογισμοί. Έξι από τους συμμετέχοντες που έκαναν λάθος επέλεξαν πως το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο από το $\frac{21}{64}$. Οι απαντήσεις τους δεν ήταν πλήρως τεκμηριωμένες. Η επιλογή που περιείχε την ανισότητα 'μεγαλύτερο' πιθανά οφείλεται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού και την παρανόηση πως ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει ενώ η διαίρεση πάντα μικραίνει. Η παρανόηση αυτή δείχνει πως το σύνολο των φυσικών αριθμών πολλές φορά δρα ως εμπόδιο στην κατανόηση των ρητών αριθμών, καθώς ιδιότητες που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς μεταφέρονται συχνά στο σύνολο των ρητών όπου δεν ισχύουν (Christou 2015a, 2015b, 2019).

Αντίθετα από τα ευρήματα της Dowker (1992), τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης ως προς την αίσθηση του αριθμού ήταν χαμηλότερα από αυτά που αναμένονταν καθώς τα δυο τρίτα του δείγματος παρουσίασαν βαθμολογία κάτω από το μισό της μέγιστης δυνατής στο Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού. Επίσης, από τα οχτώ ερωτήματα του Ερωτηματολογίου, μόνο στα τέσσερα η πλειοψηφία των απαντήσεων στηρίχτηκε αποκλειστικά σε κάποιο από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού ενώ στα άλλα τέσσερα ερωτήματα υπερείχαν οι απαντήσεις που βασίστηκαν στη χρήση κανόνων και αλγορίθμων. Οι μαθηματικοί έτειναν να χρησιμοποιούνε στρατηγικές που περιλαμβάνουν την κατανόηση των αριθμητικών ιδιοτήτων και σχέσεων με την ίδια συχνότητα που χρησιμοποιούν στρατηγικές που περιλαμβάνουν τεχνικές χρήσης κανόνων που διδάχθηκαν στο σχολείο.

Ωστόσο, στις απαντήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως 'Αίσθηση αριθμού' εμφανίστηκε ποικιλία και όχι μόνο ένας τρόπος επίλυσης των προβλημάτων. Αυτό δείχνει πως εφόσον γνωρίζουν ότι υπάρχουν κι άλλοι τρόποι επίλυσης, η οδηγία να 'μην χρησιμοποιήσουν αλγορίθμους ή κανόνες' τους οδήγησε σε διαφορετικές στρατηγικές τις οποίες είχαν τη δυνατότητα να αναπτύξουν λόγω του γνωστικού υπόβαθρού τους. Κάποιες από τις στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν έχουν αποτυπωθεί και από άλλους ερευνητές που μελέτησαν άτομα με υψηλές ικανότητες στις εκτιμήσεις και τους νοερούς υπολογισμούς που αποτελούν μέρος της αίσθησης του αριθμού. Συγκεκριμένα, η Lavine (1982) βρήκε πως τα άτομα με καλές αριθμητικές ικανότητες χρησιμοποίησαν κλασματικές σχέσεις περισσότερο από εκείνα με φτωχότερες αριθμητικές ικανότητες ενώ οι Reys et al. (1982) βρήκαν πως οι καλοί εκτιμητές έψαχναν για 'καλούς αριθμούς ή πολλαπλάσια για στρογγυλοποίηση', στρατηγικές που στην παρούσα έρευνα αντιστοιχούν στη 'χρήση σημείων αναφοράς' και στην 'κατανόηση της επίδρασης των πράξεων' που εμφανίστηκαν σε πολλές περιπτώσεις.

Από την άλλη μεριά, η χρήση κανόνων και αλγορίθμων ήταν συχνότερη από ότι αναμενόταν. Οι λόγοι που οι μαθηματικοί οδηγήθηκαν στην ακριβή εκτέλεση πράξεων συνδέεται πιθανά με το γνωστικό τους υπόβαθρο το οποίο αναπτύχθηκε τόσο κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους στο πανεπιστήμιο όσο και κατά τη σχολική τους φοίτηση. Τα ερωτήματα του Ερωτηματολογίου Αίσθησης Αριθμού περιείχαν αριθμούς που ήταν εύκολα διαχειρίσιμοι για τα συγκεκριμένα άτομα. Συνεπώς, μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων επέλεξε την λύση με εφαρμογή των γνωστών κανόνων τους οποίους εφάρμοζαν κατά τη μεγαλύτερη διάρκεια της σχολικής τους φοίτησης αλλά και μετά το πέρας της. Πέραν από τους συμμετέχοντες των οποίων η πρώτη επιλογή ήταν η χρήση κανόνων υπήρξαν αρκετοί που προσπάθησαν να βρουν εναλλακτικές λύσεις που να φανερώνουν αίσθηση του αριθμού. Ωστόσο, η αδυναμία να βρουν άμεσα αυτές τις λύσεις σε συνδυασμό με το χαμηλό γνωστικό υπόβαθρο που προϋποθέτουν τα ερωτήματα, τους οδήγησαν στην ασφαλή λύση των αλγορίθμων και των κανόνων. Σε πολλές περιπτώσεις, δήλωναν πως ένιωθαν αμήχανα που δεν μπορούσαν να βρουν άλλες λύσεις αλλά αρνούνταν να μην απαντήσουν σωστά με οποιοδήποτε τρόπο.

Τα αποτελέσματα στους εννοιολογικούς χάρτες υποστήριξαν τα χαμηλά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν από το Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού. Ο μέσος όρος των βαθμολογιών απείχε κατά πολύ από την πλήρη συμπλήρωση του χάρτη με βάση τον πρότυπο εννοιολογικό χάρτη που θα ανέπτυσσε ένας ειδικός. Αρχικά, πιθανός παράγοντας για τις χαμηλές επιδόσεις είναι το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε. Κανένας από τους συμμετέχοντες δεν είχε συμπληρώσει ξανά εννοιολογικό χάρτη άρα χρειάστηκε χρόνος ώστε να καταλάβουν και να μπορούν να τον αναπτύξουν. Η έλλειψη εμπειρίας όλων των συμμετεχόντων με εννοιολογικούς χάρτες ενισχύει τις διαφοροποιήσεις που παρατηρήθηκαν ανάμεσα στα άτομα με υψηλή και χαμηλή αίσθηση του αριθμού. Τα άτομα με υψηλή αίσθηση παρουσίασαν πλουσιότερους χάρτες και πιθανά αυτό οφείλεται στην αμεσότερη αντίληψη για τη φύση, τη λειτουργία του χάρτη αλλά και πως θα το δομήσουν.

Ο δεύτερος λόγος που οδήγησε σε χαμηλά αποτελέσματα ήταν η φύση του ερωτήματος εστίασης που δόθηκε. Το κλάσμα σαν έννοια παρουσιάζει πολλαπλές αναπαραστάσεις, ερμηνείες και ιδιότητες, αλλά παρόλα αυτά σε πολλές περιπτώσεις οι συμμετέχοντες εστιάζουν σε μία από αυτές τις κατηγορίες. Κανένας από τους συμμετέχοντες δεν ανέφερε την ερμηνεία του κλάσματος ως Τελεστής. Μάλιστα, με την ολοκλήρωση της διαδικασίας, πολλοί από τους συμμετέχοντες που ζητούσαν να δουν τον πρότυπο εννοιολογικό χάρτη ανέφεραν πως δεν γνωρίζουν καν την έννοια του τελεστή. Ο λόγος που συναντάμε αυτό το φαινόμενο είναι πως σε όλη τη διάρκεια της σχολικής φοίτησης η παρουσίαση των κλασμάτων αφορά τη διαδικαστική γνώση ενώ δεν δίνεται η ίδια βαρύτητα σε όλες τις ερμηνείες του κλάσματος. Η λέξη ‘Τελεστής’ δεν αναφέρεται σε κανένα σημείο της Ε' Δημοτικού όπου παρουσιάζονται οι πράξεις των κλασμάτων (Βρυώνης κ.ά., 2016).

Άλλο εύρημα ήταν πως οι 'Αναπαραστάσεις', όπως Λεκτική, Δεκαδική και Σχηματική εμφανίστηκαν συχνότερα από κάθε κατηγορία. Το φαινόμενο αυτό πιθανά οφείλεται στην εξοικείωση των συμμετεχόντων τόσο με τα κλάσματα, όσο και με τους δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη, είναι η αναπαράσταση του ½ (μισό) είναι αρκετά εύκολη και μπορεί να γίνει με ακρίβεια. Τέλος, οι αναπαραστάσεις του μέρους προς όλου είναι κυρίαρχες στο σχολείο σε αντίθεση με την έννοια του τελεστή. Παρόλο που στο παράδειγμα εννοιολογικού χάρτη που παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντας για να έχουν μια εικόνα για τι τους ζητείται να κάνουν δεν υπήρχαν αναπαραστάσεις, σύμβολα ή ολοκληρωμένες προτάσεις, οι συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από το επίπεδο αίσθησης του αριθμού, εμφάνισαν με μεγάλη συχνότητα αναπαραστάσεις του κλάσματος και αναφέρθηκαν προτάσεις που περιείχαν παράδειγμα με το ½. Αυτό δείχνει μια εξοικείωση με τις αναπαραστάσεις των κλασμάτων και αυτό φάνηκε στις απαντήσεις τους στους εννοιολογικούς χάρτες.

Στατιστικές αναλύσεις έδειξαν πως οι εννοιολογικοί χάρτες συσχετίζονται με την αίσθηση του αριθμού. Μάλιστα, η σχέση που υπάρχει είναι πως η αίσθηση του αριθμού επιδρά στη συμπλήρωση του εννοιολογικού χάρτη. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως οι εννοιολογικοί χάρτες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο αξιολόγησης της ύπαρξης αίσθησης αριθμού. Η σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές δείχνει πως οι χάρτες θα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο για την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού στο σχολείο.

Τα άτομα με Υψηλή αίσθηση του αριθμού παρουσίασαν στατιστικώς σημαντικά περισσότερους κόμβους που αφορούν την γενικά έννοια των κλασμάτων (Αναπαραστάσεις, Ερμηνείες κλάσματος, Γενικές έννοιες κλασμάτων), ενώ η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική όταν πρόκειται για κόμβους που αφορούν συγκεκριμένα το ½ (Παράδειγμα, Εξειδικευμένες Έννοιες για το ½). Φαίνεται έτσι πως όλοι συμμετέχοντες ανεξάρτητα από την ομάδα αίσθησης του αριθμού που ανήκαν ήταν σε θέση να αναφέρουν κόμβους που αφορούν ειδικά το ½, αλλά όχι γενικές. Αντίθετα κόμβοι που αφορούν γενικά τα κλάσματα παρουσιάστηκαν κυρίως από άτομα με υψηλή αίσθηση αριθμού. Το πρώτο από τα εφτά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού είναι η κατανόηση της σημασίας των αριθμών και συνδέεται με τις στατιστικά σημαντικές διαφορές στις Ερμηνείες, στις Γενικές και Ειδικές Έννοιες. Τα άτομα με Υψηλή ΑΑ, έχουν πιο ανεπτυγμένο αυτό το χαρακτηριστικό και, όχι μόνο γνωρίζουν βαθύτερα την εννοιολογική σημασία των κλασμάτων και τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να παρουσιαστούν αλλά είναι σε θέση να διαχειριστούν το ½ και να κάνουν πράξεις με αυτό. Αντίθετα, οι μη σημαντικές διαφορές στις Αναπαραστάσεις και στο Παράδειγμα με το ½ πιθανά οφείλονται στην εξοικείωση όλων με τη δεκαδική αναπαράσταση μέσω συνεχών μετατροπών των κλασμάτων σε δεκαδικούς που γίνεται σε όλη τη σχολική φοίτηση καθώς και στην συνήθη παρουσίαση των κλασμάτων ως μέρος προς όλο μέσω εικόνων. Μάλιστα, οι δύο αυτές κατηγορίες συνδέονται αφού στο πολύ συνηθισμένο παράδειγμα της πίτσας η σχηματική αναπαράσταση του ½ αποτελεί ταυτόχρονα και παράδειγμα. Τα αποτελέσματα αυτά ήταν αναμενόμενα και υποστηρίχτηκε η υπόθεση πως τα άτομα που έχουν ανεπτυγμένη αίσθηση του αριθμού θα μπορούν να δομήσουν πλούσιους εννοιολογικούς χάρτες.

Καθώς οι συμμετέχοντες αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα της αίσθησης του αριθμού και τις διαφορετικές χρήσεις της, είναι πολύ πιθανόν αυτή η τάση τους να μεταφέρεται και στη σχολική τάξη. Κάτι τέτοιο θα ενισχύει τις ικανότητες υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών και κατ' επέκταση την εφαρμογή μαθηματικής γνώσης με ευέλικτους τρόπους (Λεμονίδης, 2013), που αποτελεί και έναν από τους βασικούς στόχους στη σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών.

Συνεπώς, αναδεικνύεται η ανάγκη αφενός για μεγαλύτερη ένταξη των υπολογιστικών εκτιμήσεων στο σχολικό πρόγραμμα των μαθηματικών σχολείου και αφετέρου για ενίσχυση της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών σε ζητήματα εκτιμήσεων (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

Εφαρμογές στην εκπαίδευση

Η χρήση των εννοιολογικών χαρτών στην ελληνική σχολική πραγματικότητα είναι αρκετά περιορισμένη. Η άποψη αυτή υποστηρίχτηκε από τους συμμετέχοντες της έρευνας καθώς κανείς δεν γνώριζε τι είναι ο εννοιολογικός χάρτης ως έννοια ή πως θα μπορούσε να αξιοποιηθεί. Ωστόσο, η αξία και η χρησιμότητα της εννοιολογικής χαρτογράφησης ως εργαλείο αξιολόγησης, ως προοργανωτής ή ως εργαλείο διδασκαλίας ενός θέματος, στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει αναδειχθεί μέσα από διάφορες έρευνες. Συγκεκριμένα, ο Pankratius (1990) έδειξε ότι η χρήση εννοιολογικών χαρτών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στο αντικείμενο της Φυσικής και συγκεκριμένα της «Δύναμης» και του «Έργου», βελτίωσε την ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Οι Markow και Lonning (1998) έδειξαν πως οι μαθητές είχαν θετική στάση στην χρήση εννοιολογικών χαρτών για την κατανόηση βασικών εννοιών στο γνωστικό αντικείμενο της Χημείας. Τα θετικά ευρήματα από την χρήση εννοιολογικών χαρτών σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μας δείχνει πως η εισαγωγή και η αξιοποίηση του εργαλείου μπορεί να γίνει με επιτυχία και στο μάθημα των μαθηματικών. Βέβαια, τα αποτελέσματα της έρευνας μας δείχνουν πως απαραίτητη προϋπόθεση είναι η επιμόρφωση και η εκπαίδευση των ίδιων των εκπαιδευτικών σχετικά με το εργαλείο και τους τρόπους αξιοποίησής τους.

Στο βιβλίο των μαθηματικών της Ε’ Δημοτικού όπου για πρώτη φορά παρουσιάζεται εκτενώς η έννοια του κλάσματος παρατηρούμε πως αν και στο κεφάλαιο «Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα» εμφανίζεται το κλάσμα ως τελεστή, τα παραδείγματα και οι οδηγίες αφορούν κυρίαρχα τον τρόπο με τον οποίο πολλαπλασιάζονται τα δυο κλάσματα (διαδικαστική γνώση) χωρίς να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Μάλιστα, οι ερμηνείες που συναντάμε είναι μόνο οι: Μέρος προς όλο και Πηλίκο διαίρεσης. Η μη ολοκληρωμένη διδασκαλία των κλασμάτων και η εστίαση στη διαδικαστική γνώση οδηγεί στις μεγάλες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην έννοια αυτή. Για την αντιμετώπιση του φαινομένου κρίνεται απαραίτητη τόσο η εννοιολογική παρουσίαση και κατανόηση όσο και η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Μέσα από αυτή οι μαθητές θα είναι σε θέσει να ερμηνεύουν και να νοηματοδοτούν τις πράξεις που κάνουν.

Περιορισμοί της έρευνας

Θα πρέπει να τονιστεί πως τα αποτελέσματα που καταγράφηκαν και αναλυθήκαν στην παρούσα έρευνα προήλθαν από φοιτητές οι οποίοι δέχτηκαν να συμμετάσχουν στη διαδικασία κι άρα το δείγμα είναι εθελοντικό κι έτσι μη αντιπροσωπευτικό. Ωστόσο, αρκετοί ήταν και αυτοί που αρνήθηκαν τη συμμετοχή. Οι κυριότεροι λόγοι άρνησης ήταν η έλλειψη χρόνου και ο φόβος της έκθεσης τους σε περίπτωση που δεν απαντήσουν σωστά στο Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού. Συμπεραίνουμε δηλαδή, πως οι συμμετέχοντες της έρευνας είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό την αυτοπεποίθηση πως, ανεξάρτητα από τον τρόπο, θα καταφέρουν να απαντήσουν σωστά. Η συμμετοχή και φοιτητών που αμφέβαλλαν για τις επιδόσεις τους πιθανό να οδηγούσε σε διαφορετικά αποτελέσματα.

Ένας βασικός περιορισμός της μελέτης ήταν ο αριθμός των συμμετεχόντων καθώς και το πανεπιστήμιο στο οποίο σπουδάζουν. Μόλις πέντε από τους συμμετέχοντες ήταν φοιτητές του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων ενώ οι υπόλοιποι φοιτούσαν στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο

Θεσσαλονίκης. Ο λόγος για την περιορισμένη συμμετοχή ήταν η δυσκολία του ερευνητή να μετακινηθεί σε πόλεις που υπάρχουν τμήματα Μαθηματικών ενώ το μικρό δείγμα οφείλεται στην άρνηση πολλών φοιτητών να συμμετάσχουν.

Ένας ακόμη περιορισμός αφορούσε το σχεδιασμό της έρευνας και τη συμπλήρωση του ΕρΑΑ. Παρόλο που η διαδικασία κύλησε ομαλά και με επιτυχία παρατηρήθηκε πως η συμπλήρωση του ΕρΑΑ ήταν αρκετά πιο χρονοβόρα από ότι αναμενόταν με αποτέλεσμα ορισμένοι συμμετέχοντες να προχωρούσαν στη συμπλήρωση του εννοιολογικού χάρτη βιαστικά χωρίς την απαραίτητη συγκέντρωση. Τέλος, παρά τις οδηγίες που δόθηκαν είναι πιθανό το υπόδειγμα εννοιολογικού χάρτη που παρουσιάστηκε να περιόρισε τους συμμετέχοντες καθώς δεν περιείχε εικόνες, σύμβολα ή προτάσεις.

Μελλοντικές Έρευνες – Προεκτάσεις της μελέτης

Αν συνοψίσουμε τα ευρήματα της παρούσας έρευνας θα λέγαμε πως οι φοιτητές και μελλοντικοί εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν χαμηλή αίσθηση του αριθμού, δεν αναγνωρίζουν την ερμηνεία του κλάσματος ως Τελεστή ενώ παράλληλα δεν γνωρίζουν τι είναι οι εννοιολογικοί χάρτες και πως μπορούν να αξιοποιηθούν.

Θα είχε ενδιαφέρον να εξεταστεί ποια θα ήταν τα αποτελέσματα αν πρώτα ζητούσαμε από τους συμμετέχοντες να κατασκευάσουν τους εννοιολογικούς χάρτες και μετά να συμπληρώσουν το ΕρΑΑ. Τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να συγκριθούν με τα αποτελέσματα της μελέτης μας και να εξεταστεί αν υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε αυτούς που έκαναν το χάρτη πριν από το ΕρΑΑ και σε αυτούς που τον έκαναν μετά τη συμπλήρωση του ΕρΑΑ. Ένα ακόμη θέμα που με βάση τα ευρήματα θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθεί είναι η ίδια η αίσθηση του αριθμού σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα θα ήταν ενδιαφέρον η δημιουργία εργαλείων αξιολόγησης που θα εστιάζουν ξεχωριστά στη μελέτη καθ’ ενός από τα εφτά χαρακτηριστικά (1) την κατανόηση της σημασίας των αριθμών, (2) την αναγνώριση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών, (3) την χρήση σημείων αναφοράς, (4) την ικανότητα σύνθεσης και αποσύνθεσης των αριθμών, (5) την χρήση αναπαραστάσεων για τους αριθμούς και τις λειτουργίες τους, (6) την κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων (7) την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ως λογικά ή μη. Έτσι θα εντοπιστούν και θα χαρτογραφηθούν οι δυσκολίες των μαθηματικών οι οποίες είναι πιθανό να αποτελέσουν μελλοντικές δυσκολίες και των μαθητών.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Alajmi, A., & Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers’ perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 77-94.

Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(5), 959-978.

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London, UK: Continuum.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune and Stratton.

Azuka, B. F. (2015). Mathematics education for sustainable development: Implications to the production and retention of mathematics teachers in Nigerian schools. British Journal of Education, 3(1), 44-51.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90,* 449-466.

Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519-538.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*, 333-339.

Berk, L. E., & Winsler, A. (1995). *Scaffolding children's learning: Vygotsky and early childhood education.* Washington: National Association for the Education of Young Children.

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives; the classification of educational goals* (1st ed.). New York: Longmans Green.

Cañas, A. J., Hill, G., Carff, R., Suri, N., Lott, J., Eskridge, T., *et al*. (2004b). CmapTools: A knowledge modeling and sharing environment. In A. J. Cañas, J. D. Novak & F. M. González (Eds.), *Concept maps: Theory, methodology, technology*. *Proceedings* - 32 - *of the first international conference on concept mapping* (Vol. I, pp. 125-133). Pamplona, Spain: Universidad Pública de Navarra.

Carroll, W. M. (1996). Mental Computation of Students in a Reform-Based Mathematics Curriculum. *School Science and Mathematics, 96*(6), 305-311.

Christou, K. P. (2015a). The dual aspect of Natural Number Bias in Arithmetic Operations. *Mediterranean Journal for research in Mathematics Education, 14*, 107-121.

Christou, K. P. (2015b). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 747-758. doi:10.1007/s11858-015-0675-6

Christou, K. P. (2019). Conceptual Change and the Natural Number Bias phenomenon in understanding the concept of variable. In N. Kyriakopoulou & E. Skopeliti (Eds.), *Cognition and learning under the lens of Conceptual Change: New Investigations and Reflections*. Athens, Greece: Gutenberg

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (2001a). Precis of the number sense. *Mind & Language, 16,* 16–36.

Derbentseva, N., Safayeni, F., & Cañas, A. J. (2007). Concept maps: Experiments on dynamic thinking. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *44*(3), 448-465.

Edmondson, K. M. (2005). Assessing science understanding through concept maps. In *Assessing science understanding* (pp. 15-40). Academic Press.

Gelman, R. (1990). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and the animate–inanimate distinction as examples. *Cognitive Science, 14,* 79–106.

Gouli, E., Gogoulou, A., Papanikolaou, K., & Grigoriadou, M. (2005). Evaluating learner's knowledge level on concept mapping tasks. In *Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT'05)* (pp. 424-428). IEEE.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), 170–218.

Grundspenkis, J., & Anohina, A. (2009). Evolution of the concept map based adaptive knowledge assessment system: implementation and evaluation results. *Scientific Journal of Riga Technical University. Computer Sciences*, *38*(38), 13-24.

Herl, H. E., O'Neil Jr, H. F., Chung, G. K., Dennis, R. A., & Lee, J. J. (1997). Feasibility of an On-line Concept Mapping Construction and Scoring System.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 36*, 6-11

Huckstep, P. (1999). How can mathematics be useful?. *Mathematics in School*, *28*(2), 15-17.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors: A report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. Windsor, England: NFER-Nelson

Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplcation. *Cognition and Instruction , 3* (4), pp. 305-342.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. American Educational Research Journal, 27.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Legitimate peripheral participation. New York, NY: Cambridge University Press.

Lemonidis, C., Mouratoglou, A., & Pnevmatikos, D. (2014). Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *Menon: Journal of Educational Research, 1st special issue*, 144-158.

Lemonidis, C., Tsakiridou, H., & Meliopoulou, I. (2015). In-service teachers' number sense content knowledge and teaching practice in rational numbers. In *Symposium: SIG*.

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 350-359.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster studies in education*, *24*(2), 145-154.

Markovitz, Z. & Sowder, J.T. (1994). Developing number sense: An intervention study ingrade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4–29.

Markovitz, Z. (1989). Reactions to the number sense conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), Establishing foundations for research on number sense and related topics.: Report of a conference (pp. 78-81). San Diego, CA: Center for Research in Mathematics and Science Education, San Diego State University.

Markow, P. G., & Lonning, R. A. (1998). Usefulness of concept maps in college chemistry laboratories: Students' perceptions and effects on achievement. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *35*(9), 1015-1029.

McClure, J., Sonak, B., & Suen, H. (1999). Concept map assessment of classroom learning: eliability, validity, and logistical practicality. *Journal of Research in Science Teaching , 36* (4), pp. 475-492.

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 yearbook* (pp. 44-48). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A. (2004). Where we are today? In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), Beyond written computation (pp. 3–14). Perth, Western Australia: Mathematics, Science & Technology Education Centre, Edith Cowan University

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). Number sense in school mathematics: Student performance in four countries.

Mintzes, J. Wandersee & J. Novak (Eds.), *Assessing science understanding* (pp. 19-40). San Diego: Academic Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Springer, Dordrecht.

Novak, J. D. (1998). *Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Novak, J. D. (2012). *Learning, Creating and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations* (2nd ed.). Abingdon: Routledge Taylor and Francis Group.

Novak, J. D., & Cañas, A. J. (2006). The theory underlying concept maps and how to construct them. *Florida Institute for Human and Machine Cognition*, *1*, 2006-2001.

Novak, J., & Cañas, A. (2008). *The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them (Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 2008-01).* Pensacola, FL: Institute for Human and Machine Cognition.

Novak, J. D., & Cañas, A. J. (2009). The development and evolution of the concept mapping tool leading to a new model for mathematics education. In *Concept Mapping in Mathematics*(pp. 3-16). Springer, Boston, MA.

Novak, J. D., Gowin, D. B. & Johansen, G. T. (1983). The use of concept mapping and knowledge vee mapping with junior high school science students. *Science education*, *67*(5), 625-645.

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984). *Learning how to Learn.* New York: Cambridge University Press.

Novak, J. D., & Musonda, D. (1991). A twelve-year longitudinal study of science concept learning. *American Educational Research Journal, 28*(1), 117-153.

Pankratius, W. J. (1990). Building an organized knowledge base: Concept mapping and achievement in secondary school physics. *Journal of research in science teaching*, *27*(4), 315-333.

Pearsall, N. R., Skipper, J. E. J., & Mintzes, J. J. (1997). Knowledge restructuring in the life sciences: A longitudinal study of conceptual change in biology. *Science Education*, *81*(2), 193-215.

Plunkett, S. (1979) Decomposition and all that rot, *Mathematics in Schools,* 8(3), pp. 2-7.

Resnick, L. B. (1986) “The Development of Mathematical Intuition.” In M. Perlmutter (ed.), Perspectives on Intellectual Development. Vol. 19. Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 183-201.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547-557.\

Reys, B. J. (1985). Mental Computation. *Arithmetic Teacher*, *32*(6), 43-46.

Reys, B. J. (1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(2), 114-20.

Reys, B. J. & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. Journal for Research in Mathematics Education, 29(2), 225–237.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, *99*(2), 61-70.

Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgesen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *17*(2), 81-89.

Ruiz-Primo, M. A., Schultz, S. E., & Shavelson, R. J. (1997). *On the validity of concept map-base assessment interpretations: An experiment testing the assumption of hierarchical concept maps in science*. CRESST.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation. *Handbook of mathematical cognition*, 197-212.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 245–275). New York, NY: MacMillan.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. Science, 240, 611

Tsao, Y. L. (2004). Exploring the Connections among Number Sense, Mental Computation Performance, and the Written Computation Performance of Elementary Preservice School Teachers. *Journal of College Teaching & Learning*, *1*(12), 71-90.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In *International handbook of mathematics education* (pp. 99-137). Springer, Dordrecht.

West, D. C., Park, J. K., Pomeroy, J. R., & Sandoval, J. (2002). Concept mapping assessment in medical education: a comparison of two scoring systems. *Medical education*, *36*(9), 820-826.

Whitacre, I. M. (2012). *Investigating number sense development in a mathematics content course for prospective elementary teachers* (Doctoral dissertation, UC San Diego).

Yang, D. C. & Reys, R. E. (2001a). Developing number sense. Mathematics Teaching, 176, 39–41.

Yang, D. C. & Reys, R. E. (2001b). One fraction problem: Many solution paths. Mathematics Teaching in the Middle School, 7(3), 164–166.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by sixth grade students in Taiwan. Educational Studies, 31(3), 317–334.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383-403.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Αναστασιάδης, Ν. (2009). *Η εννοιολογική χαρτογράφηση στην ενίσχυση της μάθησης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων, Πειραιάς.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., Σταύρου, Ι., (2016), Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, (Βιβλίο Μαθητή, α' τεύχος), Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων Διόφαντος, Αθήνα

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών. *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Ε. ΝΕ. ΔΙ. Μ)*.

Εξαρχάκος, Θ., (1993): Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα (Γ έκδοση).

Κολλέζα, Ε. (2019), Φιλοσοφία ενός Π.Σ. για τα Μαθηματικά. Ανακτήθηκε 2 Ιανουαρίου 2019, από: http://www.mathlab.upatras.gr/wp-content/uploads/2013/09/

Κόλλιας, Α., Μαργετουσάκη, Α., Κόμης, Β., & Γουμενάκης, Γ. (2000). Αναπαραστάσεις μαθητών του δημοτικού για τις νέες τεχνολογίες από τη χρήση εννοιολογικών χαρτών και κειμένων. *Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση*, 551-562.

Κόμης, Β., & Φείδας, Χ. (2000). Παιδαγωγικές και τεχνολογικές αρχές σχεδίασης ενός λογισμικού συνεργατικής εννοιολογικής χαρτογράφησης βασισμένο στο Διαδίκτυο. *Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση*, 297-308.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Ματσαγγούρας, Η. (2001). Στρατηγικές Διδασκαλίας. *Η κριτική σκέψη στη Διδακτική Πράξη, Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.*

Ουσταμπασιδου, Σ. (2018). *Διερεύνηση στρατηγικών σε νοερούς υπολογισμούς από μαθηματικούς* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης)

Χαντόγλου, Π. (2018), *Η αίσθηση του αριθμού στους εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης)

Παράρτημα Α

Πίνακας 15: Επιδόσεις συμμετεχόντων στους εννοιολογικούς χάρτες και βαθμολογία με τις νέες τιμές

Συμμετέχοντες	Βαθμολογία	Εννοιολογικός Χάρτης
Σ1	13	7
Σ2	6	3
Σ3	4	7
Σ4	10	8
Σ5	10	5
Σ6	12	5
Σ7	7	5
Σ8	10	9
Σ9	4	5
Σ10	6	3
Σ11	6	1
Σ12	5	4
Σ13	4	4
Σ14	3	4
Σ15	12	4
Σ16	10	9
Σ17	2	7
Σ18	4	4
Σ19	8	6
Σ20	9	5
Σ21	8	10
Σ22	8	5
Σ23	9	5
Σ24	10	11
Σ25	4	3
Σ26	2	3
Σ27	6	8
Σ28	2	7
Σ29	6	6
Σ30	6	4
Σ31	6	1
Σ32	12	9
Σ33	6	6
Σ34	4	5
Σ35	5	1
Σ36	3	3
Σ37	6	3
Σ38	11	6
Σ39	10	7
Σύνολο	269	208

Παράρτημα Β

Ημερομηνία: ……../………../……..

Φύλλο: ☐ **Άνδρας** ☐ **Γυναίκα**

Τμήμα Φοίτησης:………………………………………………..

Έτος φοίτησης: …………… **Έτη Προϋπηρεσίας:……….**

Σπουδές: ☐ **Πτυχίο** ☐ **Μεταπτυχιακό** ☐ **Διδακτορικό**

Ερώτημα 1

Ο Νίκος περπάτησε 0,4828 km, ο Χρήστος περπάτησε $\frac{13}{38}$ km, η Μαρία περπάτησε $\frac{8}{15}$ km, η Δήμητρα περπάτησε $\frac{17}{16}$ km, ο Γιώργος περ`πάτησε 0,966 km και ο Γιάννης περπάτησε $\frac{7}{29}$ km. Ταξινομήστε τις αποστάσεις που περπάτησαν από την πιο μακρινή προς την προς πιο κοντινή.

Ερώτημα 2

Η Βικτώρια και η Μαρία χρησιμοποίησαν χρωματιστές κορδέλες για μια εργασία στην τάξη. Η Βικτώρια χρησιμοποίησε $\frac{30}{31}$ m και η Μαρία $\frac{36}{37}$ m. Ποια χρησιμοποίησε μεγαλύτερη κορδέλα;

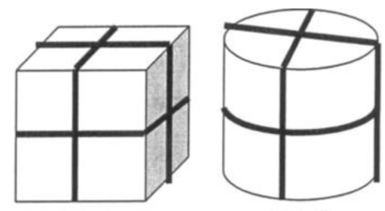
Ερώτημα 3

Ο Αλέξανδρος χρησιμοποίησε τον υπολογιστή για να κάνει την πράξη 0,4975 x 9428,8 = 4690828 αλλά ξέχασε να σημειώσει το κόμμα. Με χρήση εκτιμήσεων βρείτε που θα πρέπει να τοποθετηθεί το κόμμα:

α) 46,90828 β) 469,082 8 γ) 4690,828 δ) 46908,28 ε) Δεν μπορώ να απαντήσω χωρίς να κάνω τον ακριβή υπολογισμό

Ερώτημα 4

Έχουμε δυο κουτιά για δώρα και θέλουμε να τα τυλίξουμε με ταινία όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Το ένα κουτί είναι κύβος πλευράς 10cm. Το ύψος και η διάμετρος στην δεύτερη περίπτωση είναι επίσης 10cm. Για πιο κουτί θα χρειαστούμε περισσότερη ταινία;



Ερώτημα 5 (Μπουκάλια νερού)

Ένα μπουκάλι νερό των 600 ml κοστίζει 18 cents, ενώ ένα μπουκάλι νερό των 1500 ml κοστίζει 35cents. Εκτιμήστε πιο από τα δυο μπουκάλια συμφέρει να αγοράσουμε.

Ερώτημα 6

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς αποτελούν λογική απάντηση: $3\frac{3}{8} : - > 4$

$3\frac{3}{4}$, 1,54 , $1\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, 0,9 , 0,05 , 2,5

Ερώτημα 7

Βρείτε τρεις κλάσματα (ή αριθμούς) μεταξύ των αριθμών $\frac{7}{8}$ και 1.

Ερώτημα 8

Χωρίς να κάνετε ακριβή υπολογισμούς εκτιμήστε αν το γινόμενο $\frac{21}{36} x \frac{7}{16}$ είναι:

a) Μεγαλύτερο από $\frac{21}{64}$
b) Μικρότερο από $\frac{21}{64}$
c) Ίσο με $\frac{21}{64}$
d) Είναι αδύνατο να δοθεί απάντηση χωρίς να γίνουν υπολογισμοί

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.