ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός Κύκλος (13-18 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

«Η χρήση του αντιπαραδείγματος από μαθητές Γ Λυκείου ως εργαλείο αποδεικτικής διαδικασίας»

του

Μπαζούκη Γεωργίου

Α.Ε.Μ. :818

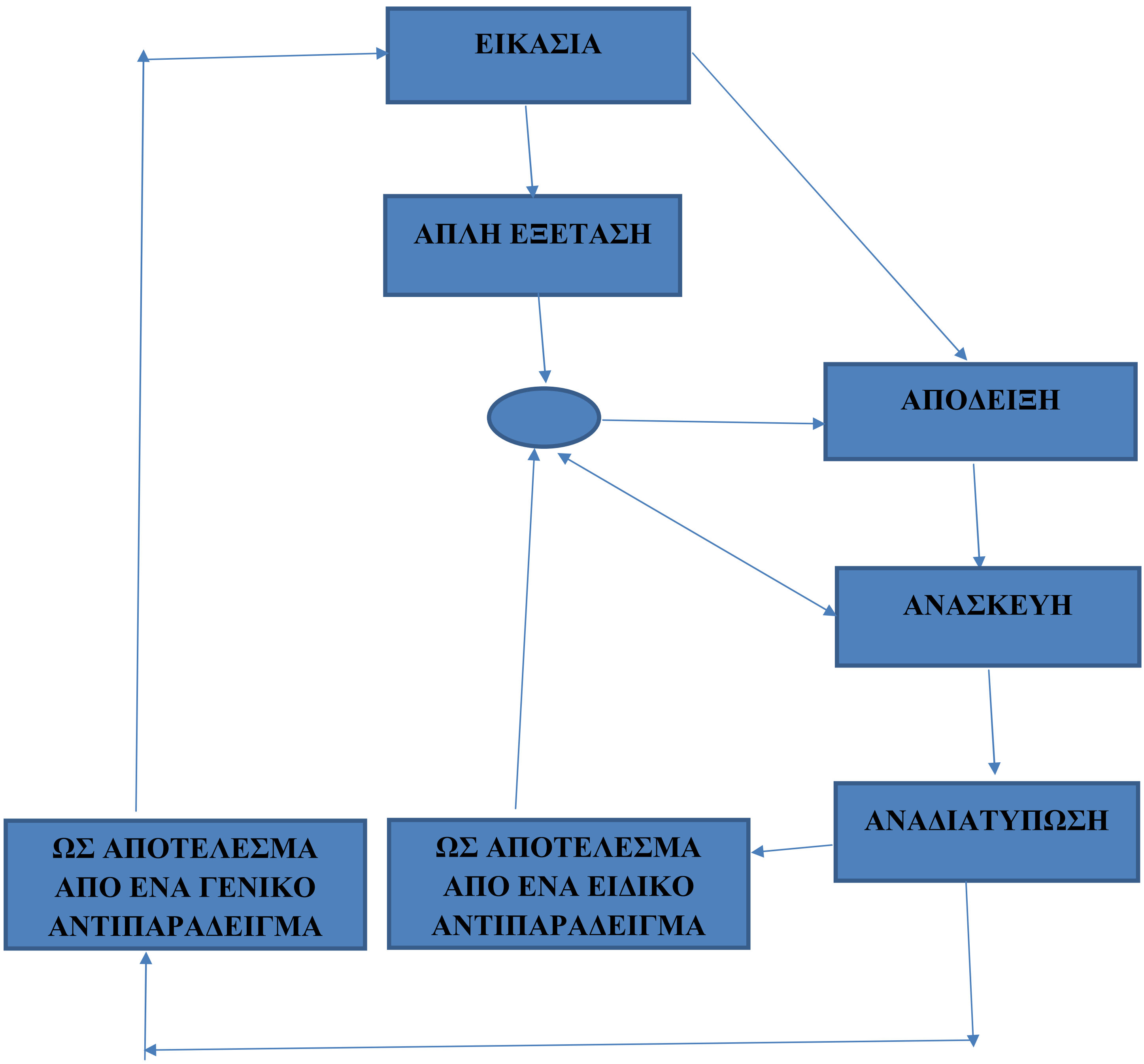
Επιβλέπων Καθηγητής : Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια

Ζαχαριάδης Θεοδόσης , Καθηγητής

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

«Το πρότυπο του LAKATOS για την μαθηματική ανακάλυψη»



Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο ο οποίος με τίμησε με την προθυμία του να τεθεί επιβλέπων στην διπλωματική μου εργασία καθώς και για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές του. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές Καλδρυμίδου Μαρία και Ζαχαριάδη Θεοδόση που με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή, αλλά και τους διδάσκοντες καθηγητές του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών και τους συμφοιτητές μου για την άριστη συνεργασία σε όλη τη διάρκεια του προγράμματος σπουδών. Τέλος, ιδιαίτερες ευχαριστίες στην οικογένεια μου για την συμπαράσταση και υπομονή της κατά τη διάρκεια των σποδών μου και συγκεκριμένα στη σύζυγο μου Αναστασία που ήταν πάντα δίπλα μου και με στήριζε στο δύσκολο αγώνα μου και στα παιδιά μου που έκαναν αυτή τη προσπάθεια πιο εύκολη και πιο όμορφη.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Γραφημάτων

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία με τίτλο «Η χρήση του αντιπαραδείγματος από μαθητές Γ Λυκείου ως εργαλείο αποδεικτικής διαδικασίας» μελετάει γενικά τις αποδεικτικές μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επιστήμη των Μαθηματικών αλλά και ειδικά την μέθοδο του αντιπαραδείγματος. Στο θεωρητικό μέρος κύριος στόχος της μελέτης είναι να παρουσιάσει με λεπτομέρεια τις αποδεικτικές μεθόδους και το αντιπαράδειγμα καθώς επίσης και τις έρευνες που χρησιμοποίησαν το αντιπαράδειγμα. Στο ερευνητικό μέρος κύριος στόχος είναι η διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να χρησιμοποιούν το αντιπαράδειγμα. Στην στατιστική ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν σχετικές συχνότητες, τα διαστήματα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής, οι παραμετρικοί έλεγχοι paired samples t-test και ANOVA. Η στάθμη σημαντικότητας σε όλους τους ελέγχους ορίστηκε στο 5%. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η απόδοση των μαθητών στην χρήση αντιπαραδειγμάτων ήταν μέτρια με το 28,3% των μαθητών να ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων. Οι μαθητές που είχαν ικανοποιητική απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων είχαν επίδοση στα Μαθηματικά άνω του 18. Τέλος, το 40% των μαθητών δεν κατασκεύασε κανένα αντιπαράδειγμα, ενώ αυτοί που μπόρεσαν να κατασκευάσουν προτίμησαν το αλγεβρικό έναντι του γεωμετρικού.

Λέξεις κλειδιά: Αποδεικτικές μέθοδοι, Αντιπαράδειγμα, Μαθητές Γ Λυκείου

Abstract

The present diploma thesis entitled “Use of counter examples by High School students as a tool of demonstration procedure” generally studies methods of proof that can be used in the science of Mathematics and specifically the counter example method. In the theoretical part, the main objective of the study is to present in detail the methods of proof and the counter example method as well as the surveys that used the counter-model. In the research part main goal is to investigate the ability of students to use the counter example. In the statistical analysis, percentages, the mean confidence intervals, the parametric tests paired samples and ANOVA were used. The level of significance in all test was set at 5%. The results of the survey showed that students' performance in using counter examples was moderate, with 28,3% of students responding well in most of questions. Students who performed well in the construction of counter examples performed more than 18 in Mathematics. Finally, 40% of students did not make any counter example, while those who managed, preferred algebraic versus geometric.

Key words : Methods of proof, Counter example, High School students

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως βασικό σκοπό να μελετήσει την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάσουν αντιπαραδείγματα. Η ιδέα για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας γεννήθηκε όταν ολοκληρώθηκε η βαθμολόγηση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων στα μαθηματικά προσανατολισμού της Γ Λυκείου. Στα 200 γραπτά που διορθώθηκαν διαπιστώθηκε ότι μόλις 28 από τους 200 μαθητές βρήκαν αντιπαράδειγμα στην πρόταση :«Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό» και αιτιολόγησαν πλήρως την απάντηση τους. Τα ερωτήματα που προέκυψαν ήταν αν οι μαθητές είναι ικανοί να κατασκευάσουν αντιπαραδείγματα σε έννοιες του Διαφορικού Λογισμού αλλά και ποιος είναι ο βαθμός ικανότητας παραγωγής αντιπαραδειγμάτων από μαθητές Γ Λυκείου ως απάντηση σε προτάσεις και ισχυρισμούς που πίστευαν ότι δεν είναι αληθείς.

Η αποδεικτική μέθοδος του αντιπαραδείγματος έχει μελετηθεί παλαιότερα από πολλούς ερευνητές όπως Lakatos (1976), Peled & Zaslavsky (1997), Alcock & Weber (2005), Seiden & Seiden (2003), Ko & Knuth, (2009) αλλά και πιο πρόσφατα στην έρευνα του Ευαγγελόπουλου (2018). Τα αποτελέσματα των ερευνών συμπίπτουν και αναδεικνύουν την δυσκολία των μαθητών είτε να αναγνωρίζουν ότι μία μαθηματική πρόταση είναι ψευδής είτε να αναπαράγουν αντιπαραδείγματα σε προτάσεις που θεωρούν ψευδείς.

Σε μία σύντομη παρουσίαση της δομής των κεφαλαίων στο 1^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται το σύνολο των αποδεικτικών μεθόδων στα Μαθηματικά και γίνεται και μία εισαγωγή στην έννοια του αντιπαραδείγματος το οποίο μελετάται εκτενέστερα στο 2^{ο} κεφάλαιο. Στο 3^{ο} κεφάλαιο πραγματοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών που χρησιμοποίησαν το αντιπαράδειγμα ενώ στο 4^{ο} και 5^{ο} κεφάλαιο συνθέτουν το εμπειρικό μέρος με την μεθοδολογία έρευνας και τα αποτελέσματα, τα οποία συνδέονται με το θεωρητικό πλαίσιο στο 6^{ο} κεφάλαιο των συμπερασμάτων.

Κεφάλαιο 1
Η απόδειξη και το αντιπαράδειγμα στην αποδεικτική διαδικασία

1.1 Η απόδειξη

1.1.1 Εισαγωγή

Η απόδειξη είναι ένας σημαντικός στόχος διδασκαλίας στα μαθηματικά στο Λύκειο. Το παιδαγωγικό ινστιτούτο για τη διδασκαλία των μαθηματικών αναφέρει: «Η απόδειξη αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των μαθηματικών και έχει πρωτεύοντα ρόλο σε όλα τα επίπεδα διδασκαλίας τους. Άλλωστε ένας από τους κεντρικούς στόχους που διαπερνά το Π.Ι, είναι η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, η ικανότητα παρακολούθησης και παραγωγής μαθηματικής επιχειρηματολογίας και η απόδειξη. Στο λύκειο η απόδειξη είναι περισσότερο αυστηρή από ότι στις άλλες τάξεις και οι μαθητές ασκούνται στο να εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα) για να επιβεβαιώσουν την αλήθεια των προτάσεων» (Παπασταυρίδης κ.α.,2016). Οι μαθητές στο Γυμνάσιο ουσιαστικά δεν έρχονται σε επαφή με τη μαθηματική απόδειξη. Αρχικά έρχονται αντιμέτωποι στο Γυμνάσιο με μη τυπικές αποδείξεις και στη συνέχεια στο Λύκειο με τυπικές αποδείξεις. Πως όμως ορίζεται η απόδειξη στα Μαθηματικά; Ποια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσει ένας μαθητής για να αποδείξει μία μαθηματική πρόταση; Με ποιον τρόπο οι μαθητές θα αφομοιώσουν τον αποδεικτικό τρόπο σκέψης ώστε να τον αναπαραγάγουν (Τουμάσης,1994). Η έννοια της απόδειξης έχει άμεση σχέση με την αξιωματική θεμελίωση και το Μαθηματικό Σύστημα μέσα στο οποίο εφαρμόζεται.

1.1.2 Η αξιωματική θεμελίωση

Έστω ότι Α είναι μια μαθηματική θεωρία. Καθορίζουμε αρχικά τα στοιχεία της Α, τις ιδιότητες τους, καθώς και σχέσεις και πράξεις που εκτελούνται στην Α με τα στοιχεία της. Για τον καθορισμό αυτών των εννοιών είναι απαραίτητο να έχουν οριστεί άλλες έννοιες, οι οποίες δεν μπορούν να οριστούν με άλλες απλούστερες.

Αρχικές έννοιες ονομάζονται έννοιες οι οποίες δεν μπορούν να οριστούν σε απλούστερες.

Με τη βοήθεια των αρχικών εννοιών καθορίζουμε νέες έννοιες που λέγονται **ορισμοί**.

Ορισμός είναι μία έκφραση που έχει ως στόχο να περιγράψει ή να οριοθετήσει την έννοια κάποιας λέξης, φράσης ή έννοιας δηλώνοντας τις βασικές ιδιότητες της και τα διακριτά χαρακτηριστικά της με ακρίβεια, σαφήνεια και πληρότητα. Κατά την σύνταξη του ορισμού δεν πρέπει να περιλαμβάνεται η ίδια λέξη, καθώς και σύνθετα ή παράγωγα αυτής. Επιπλέον πρέπει να ικανοποιούνται τα κριτήρια της γενίκευσης, δηλαδή να καλύπτονται όλες οι πτυχές της περιεχόμενης έννοιας καθώς και η διάκρισή της από οποιαδήποτε άλλη.

Τα είδη των ορισμών είναι δύο, ο αναλυτικός και ο συνθετικός.

Αναλυτικός ορισμός είναι ο ορισμός που προσεγγίζει την έννοια από το ειδικό προς το γενικό παραθέτοντας όλα τα χαρακτηριστικά της.

- Για παράδειγμα : Τρίγωνο είναι ένα σχήμα που έχει ακριβώς 3 γωνίες

Συνθετικός ορισμός είναι ο ορισμός που προσεγγίζει την έννοια από το γενικό προς το ειδικό, περιγράφοντας μία διαδικασία σχηματισμού της έννοιας από τα επιμέρους χαρακτηριστικά της.

- Για παράδειγμα : Κάθε σχήμα που έχει τρεις γωνίες ονομάζεται τρίγωνο.

Συνεχίσουμε με τον ορισμό της **πρότασης** και της **υπόθεσης.**

Πρόταση στην επιστήμη των Μαθηματικών εννοούμε μία έκφραση με αυτοτελές νόημα, η οποία επιδέχεται έναν και μόνο χαρακτηρισμό: αληθής ή ψευδής αποκλείοντας κάθε άλλη περίπτωση. Ο Αριστοτέλης στο έργο του «Αναλυτικά πρότερα» αναφέρει χαρακτηριστικά: «Πρότασις μεν ουν εστί λόγος καταφατικός ή αποφατικός τινός κατά τινός»

Υπόθεση είναι μία πρόταση της οποίας είναι άγνωστη η τιμή της αλήθειας.

Οι αρχικές έννοιες και οι ορισμοί αποτελούν το αλφάβητο της γλώσσας της δεδομένης μαθηματικής θεωρίας. Οι προτάσεις που υπάρχουν στην θεωρία Α προκύπτουν από άλλες προηγούμενες προτάσεις της θεωρίας μέχρι να καταλήξουμε σε προτάσεις που γίνονται δεκτές χωρίς απόδειξη και λέγονται **αξιώματα** της θεωρίας.

Αξίωμα είναι μία μαθηματική πρόταση η οποία δεν αποδεικνύεται αλλά θεωρείται προφανής, η αλήθεια της θεωρείται δεδομένη και χρησιμεύει ως αρχικό σημείο για την αναγωγή και το συμπέρασμα άλλων αληθών προτάσεων

Στη θεωρία Α ορίζονται και οι αποδεικτικοί κανόνες οι οποίοι καθορίζουν τον τρόπο και τη διαδικασία με την οποία μια πρόταση της θεωρίας προκύπτει από τις προηγούμενες της. Κάθε πρόταση της Α που προκύπτει από τις προηγούμενες της με τη βοήθεια και των αποδεικτικών κανόνων ονομάζεται **θεώρημα.** Συνεπώς:

Θεώρημα είναι μια πρόταση που αποδεικνύεται με βάση προηγουμένως αποδεκτές ή αποδεδειγμένες προτάσεις όπως τα αξιώματα.

Μια δόμηση της θεωρίας Α με τον παραπάνω τρόπο ονομάζεται **αξιωματική θεμελίωση** της Α. Τις **αρχικές έννοιες**, τους **ορισμούς**, τις **προτάσεις**, τις **υποθέσεις**, τα **αξιώματα**, τα **θεωρήματα** και γενικότερα την **αξιωματική μέθοδο** την ανέπτυξε θεωρητικά ο Αριστοτέλης στα έργα του «Αναλυτικά πρότερα» και «Αναλυτικά ύστερα» και την εφάρμοσε για πρώτη φορά σε ολόκληρη τη γεωμετρία ο Ευκλείδης (300 π.Χ.) στο έργο του «Στοιχεία» με την πεποίθηση ότι η αξιωματική μέθοδος συστηματοποιεί και προάγει τη λογική σκέψη παράγοντας «νέα και αναγκαία γνώση» (Γκουντουβάς,2015).

Η τυπική αξιωματική θεωρία

Πριν προχωρήσουμε στην **τυπική αξιωματική θεωρία** θα αναφερθούμε στον ορισμό της **μεταβλητής** και του **προτασιακού τύπου**.

Τυχαία μεταβλητή ονομάζεται μια συνάρτηση που απεικονίζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Κολυβά-Μαχαίρα & Μπόρα-Σέντα,1998)

Προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής x, που παριστάνεται με p(x), λέγεται μία μαθηματική έκφραση που περιέχει μία μόνο μεταβλητή x. (Τζουβάρας,1998)

Αν σε μια μαθηματική θεωρία αξιωματικά θεμελιωμένη, οι αρχικές έννοιες είναι μεταβλητές ποσότητες, τα αξιώματα είναι προτασιακοί τύποι των αρχικών εννοιών και τα θεωρήματα είναι και αυτά προτασιακοί τύποι, τότε η αξιωματική θεωρία που προκύπτει με διαδικασία ανάλογη με αυτή που αναπτύξαμε προηγουμένως, ονομάζεται **τυπική αξιωματική θεωρία.** Η μετάβαση από την **αξιωματική θεμελίωση** στην **τυπική αξιωματική θεωρία** πραγματοποιήθηκε από τον Hilbert τον 19^{o} αιώνα (Hartshorne,2000) ορίζοντας από την αρχή μια αξιωματική βάση για την Ευκλείδεια πάλι γεωμετρία, που ήταν το παγκόσμιο πρότυπο.

1.1.3 Η έννοια του Μαθηματικού συστήματος

Μαθηματικό Σύστημα είναι ένα μη κενό σύνολο Α, οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του Α, οι πράξεις και οι ιδιότητες των πράξεων που ορίζονται στο Α, το σύνολο των αξιωμάτων που χαρακτηρίζουν το Α και οι αποδεικτικοί κανόνες, οι οποίοι βοηθούν να δειχθεί η ισχύς μιας πρότασης στο Α που προκύπτει από τα αξιώματα ή ενδεχομένως και από προηγούμενες προτάσεις που ισχύουν στο Α (Εξαρχάκος,1995).

1.1.4 Απόδειξη και είδη αποδείξεων

Τα θεωρήματα λοιπόν, για να γίνουν αποδεκτά απαιτούν λογικούς συλλογισμούς, δηλαδή χρειάζονται **απόδειξη.**

Απόδειξη μιας πρότασης q μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα Α είναι η διαδικασία παραγωγής της ισχύος της q με τη βοήθεια πεπερασμένου πλήθους προτάσεων του μαθηματικού συστήματος, των οποίων η ισχύς είτε είναι δεδομένη είτε προκύπτει από άλλες γνωστές προτάσεις του συστήματος Α (Εξαρχάκος,1995).

Ο Haylock (2010) αναφέρει πως απόδειξη είναι ένα σύνολο επιχειρημάτων που χρησιμοποιείται για να αιτιολογηθεί η αλήθεια ενός ισχυρισμού στα Μαθηματικά και που επιτυγχάνεται σταδιακά μέσω λογικών βημάτων. Σύμφωνα με τον Τουμάση (1994) η απόδειξη είναι η συλλογιστική διαδικασία, η οποία έχει αφετηρία ένα σύνολο υποθέσεων και καταλήγει μέσα από μια σειρά διαδοχικών συμπερασμάτων σε ένα συμπέρασμα, ώστε, αν υπάρχει αμφιβολία για το τελικό συμπέρασμα, τότε αυτό αναζητείται στις υποθέσεις και όχι στη λογική των διαδοχικών συμπερασμάτων. Οι Harel & Sowder (2007) ορίζουν ως απόδειξη τη διαδικασία με την οποία ένα άτομο αφαιρεί αμφιβολίες σχετικά με την αλήθεια ενός ισχυρισμού. Ο Knipping (2003) ορίζει την απόδειξη ως μια ακολουθία, διαδοχικών συμπερασμάτων βασισμένων σε έννοιες ή σε επιτρεπτούς χειρισμούς συμβόλων και όχι σε κανόνες της κατηγορηματικής λογικής. Οι Hanna & Villiers (2008) αναφέρουν στο βιβλίο τους ότι μια κοινή άποψη της μαθηματικής απόδειξης θεωρείται ότι δεν είναι παρά μια αδιάκοπη σειρά βημάτων που καταλήγουν σε ένα αναγκαίο συμπέρασμα, όπου κάθε βήμα είναι μια εφαρμογή των κανόνων λογικής διατήρησης της αλήθειας. Στη μαθηματική πρακτική, στην πραγματικότητα, μια απόδειξη είναι συχνά μια σειρά από ιδέες, μια σειρά τυπικών βημάτων. Σύμφωνα με τον Stylianides (2009) μια απόδειξη ορίζεται ως έγκυρο επιχείρημα, που βασίζεται σε αποδεκτές αλήθειες υπέρ ή εναντίον ενός μαθηματικού ισχυρισμού, που κάνει ρητή αναφορά σε «βασικές» αποδεκτές αλήθειες που χρησιμοποιεί. Ο όρος «επιχείρημα» υποδηλώνει μια αλληλουχία συνδεδεμένων ισχυρισμών. Ο όρος «έγκυρο» υποδηλώνει ότι οι ισχυρισμοί αυτοί συνδέονται μέσω αποδεκτών κανόνων σωστής συμπερασματολογίας.

Σε κάθε απόδειξη διακρίνουμε:

(i) Την υπόθεση που είναι τα δεδομένα του προβλήματος.

(ii) Το συμπέρασμα που είναι τα ζητούμενα του προβλήματος.

(iii) Τα αποδεικτικά στοιχεία, που είναι οι αρχικές έννοιες, οι ορισμοί, τα αξιώματα και άλλες προτάσεις του Μαθηματικού Συστήματος, των οποίων γνωρίζουμε την ισχύ.

(iv) Τους αποδεικτικούς κανόνες, που είναι οι νόμοι ή οι αρχές που ισχύουν μέσα στο Σύστημα και μας εξασφαλίζουν τη σωστή πορεία από την αφετηρία μέχρι το τέρμα της διαδικασίας.

Έτσι όταν λέμε ότι θα αποδείξουμε την ισχύ της πρότασης q μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα Α, γνωρίζοντας ότι οι προτάσεις $p_1, p_2, \dots p_\nu$ ισχύουν στο Α, εννοούμε ότι:

- Έχουμε δεδομένη την ισχύ των προτάσεων $p_1, p_2, \dots p_\nu$ στο μαθηματικό σύστημα (υπόθεση) και
- Θέλουμε να δείξουμε την ισχύ της πρότασης q στο Α (συμπέρασμα).
- Για να επιτευχθεί αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις $p_1, p_2, \dots p_\nu$ καθώς και κάθε άλλη πρόταση του Α, η οποία θα μας χρειαστεί και της οποίας η ισχύς στο Α είναι γνωστή. Έτσι δημιουργούμε μια διαδοχή προτάσεων $q_1, q_2, \dots, q_\mu = q$ τέτοιων, ώστε κάθε μια από τις προτάσεις $q_1, q_2, \dots q_\mu$ είτε είναι φανερή από μόνη της στο Α είτε η ισχύς της προκύπτει από την υπόθεση ή από προτάσεις που ισχύουν στο Α ή από προηγούμενες προτάσεις της ακολουθίας ή από συνδυασμό των παραπάνω (Εξαρχάκος,1995).

Συνεπώς μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό του **Λήμματος** και του **Πορίσματος**.

Λήμμα είναι ένα θεώρημα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη άλλων θεωρημάτων

Πόρισμα είναι μία πρόταση που αποδεικνύεται απευθείας από θεώρημα που έχει αποδειχτεί.

Οι αποδείξεις μπορούν να διακριθούν στις **άμεσες (ή ευθείες)** και στις **έμμεσες** αποδείξεις.

Όταν η ισχύς του συμπεράσματος προκύπτει άμεσα από την υπόθεση, η απόδειξη ονομάζεται **ευθεία ή άμεση απόδειξη**.

Η **Ευθεία Απόδειξη** διακρίνεται στην **Συνθετική Ευθεία Απόδειξη** και στην **Αναλυτική Ευθεία Απόδειξη** στα οποία θα αναφερθούμε παρακάτω.

Όταν η ισχύς του συμπεράσματος δεν προκύπτει άμεσα από την υπόθεση αλλά με κάποιο πλάγιο (έμμεσο) τρόπο, η απόδειξη ονομάζεται **έμμεση απόδειξη.** (Εξαρχάκος,1995)

Έτσι καταφεύγουμε σε διάφορα τεχνάσματα και στρατηγικές χρησιμοποιώντας τους νόμους της μαθηματικής λογικής. Ανάλογα με τη στρατηγική, που ακολουθείται, διακρίνουμε διάφορα είδη αποδείξεων τα οποία ονομάζονται **μέθοδοι απόδειξης**. Τις αποδείξεις μπορούμε να τις διακρίνουμε σε δύο βασικούς τύπους απόδειξης. Την **παραγωγική απόδειξη** και την **επαγωγική απόδειξη** (Baroody,1993).

Ως **επαγωγική απόδειξη** ορίζεται η απόδειξη η οποία βρίσκει μια κοινή ιδιότητα μεταξύ πολλών διαφορετικών περιπτώσεων που επαναλαμβάνονται και η οποία μας οδηγεί να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα μας.

Η **παραγωγική απόδειξη** είναι η διαδικασία της εξαγωγής και διατύπωσης συμπερασμάτων η οποία βασίζεται σε λογικούς συλλογισμούς με αφετηρία τις προηγούμενες γνώσεις και το συμπέρασμα μας οδηγεί σε ένα τελικό συμπέρασμα.

1.1.5 Τρόποι παραγωγικών αποδείξεων

I. Η μέθοδος της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$

Με τη βοήθεια μιας σειράς λογικών συλλογισμών, ξεκινώντας από την αλήθεια των υποθέσεων (δεδομένων) της πρότασης καταλήγουμε στην αλήθεια του συμπεράσματος. Αρχίζοντας από την πρόταση p και ακολουθώντας μια σειρά από συλλογισμούς φτάνουμε στο συμπέρασμα q. Αναλυτικά δείχνουμε την αλήθεια μιας πρότασης q μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα Α ως εξής: Βρίσκουμε μια πρόταση p του Α η οποία είναι αληθής και κατόπιν αποδεικνύουμε ότι η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι πρόταση αληθής στο Α. Η απόδειξη αυτή μπορεί να γίνει με τους παρακάτω συνήθεις τρόπους.

i) Άμεση απόδειξη

Με αφετηρία την υπόθεση p-Συνθετική ευθεία απόδειξη

Στην **Συνθετική Ευθεία απόδειξη** το συμπέρασμα καθιερώνεται με το λογικό συνδυασμό των αξιωμάτων, των ορισμών και των προηγούμενων θεωρημάτων ξεκινώντας από την υπόθεση. Έχοντας δηλαδή, αφετηρία την αλήθεια της p κατασκευάζουμε μια ακολουθία προτάσεων p, p_1, p_2, …,p_v=q έτσι ώστε οι προτάσεις $p \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2$, $p_2 \Rightarrow p_3$,…., $p_{v-1} \Rightarrow p_v = q$ να είναι όλες αληθείς. Τότε η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι αληθής και επομένως η q είναι αληθής. Στην μέθοδο αυτή αναφέρθηκε ο Αριστοτέλης στο έργο του Αριστοτέλη «Πολιτικά», ωστόσο δημιουργός της θεωρείται ο Πλάτων μέσω των γεωμετρικών κατασκευών (Εξαρχάκος,1995).

- Για παράδειγμα: Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (Υπόθεση) $\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ (Συμπέρασμα).

Απόδειξη

Είναι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = [-(\beta + \gamma)]^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$

$-3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 = -3\beta\gamma(\beta + \gamma) = 3\alpha\beta\gamma$.

Με αφετηρία το συμπέρασμα q -Αναλυτική ευθεία απόδειξη

Στην **Αναλυτική Ευθεία απόδειξη** δεχόμαστε ότι το συμπέρασμα είναι αληθές και με ισοδυναμίες συνάγουμε την αλήθεια μιας πρότασης. Εφόσον η τελευταία πρόταση είναι αληθής, τότε και το συμπέρασμα είναι αληθές, εφόσον μπορούμε συνθετικά να καταλήξουμε σε αυτό από τις προηγούμενες προτάσεις κινούμενοι με την αντίστροφη πορεία. Προσπαθούμε δηλαδή να κατασκευάσουμε μια διαδοχή προτάσεων ξεκινώντας από το συμπέρασμα q. Κατασκευάζουμε ενδιάμεσες προτάσεις μεταξύ p και q τις p_1, p_2, …p_v οι οποίες είναι τέτοιες ώστε η αλήθεια της q να προέρχεται από την αλήθεια της p_v, η αλήθεια της $p_{\iota+1}$ να προέρχεται από την αλήθεια της p_i για i=1,2,…,ν-1 και η αλήθεια της p_1 να προέρχεται από την αλήθεια της p. Άρα η q είναι αληθής, επειδή η p είναι αληθής. Πολλές φορές η απόδειξη της ισχύς του συμπεράσματος κατευθείαν από την υπόθεση δεν είναι εύκολη και συγχρόνως ο έλεγχος του ψευδούς της αντίθετης προς το συμπέρασμα πρότασης δεν είναι φανερός. Στην μέθοδο αυτή αναφέρθηκε ο Αριστοτέλης στο έργο του «Αναλυτικά ύστερα» ωστόσο εμπνευστής της θεωρείται ο Πλάτων μέσω των γεωμετρικών κατασκευών (Εξαρχάκος,1995)

- Για παράδειγμα : Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (Υπόθεση) ⇒ αδ = βγ (Συμπέρασμα)

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι αδ = βγ (ισχύς συμπεράσματος) ⇔ $\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Με αφετηρία την υπόθεση p αλλά και το συμπέρασμα q -Συνδυασμός Συνθετικής και Αναλυτικής ευθείας απόδειξης

Ξεκινάμε από την p και κατασκευάζουμε μια ακολουθία προτάσεων $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ με $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots. \Rightarrow p_\nu$. Στη συνέχεια ξεκινάμε από το συμπέρασμα q και κατασκευάζουμε μια ακολουθία προτάσεων $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ με $q \Leftarrow q_1 \Leftarrow q_2 \Leftarrow \ldots. \Leftarrow q_\mu$, ενώ συγχρόνως να ισχύει μία από τις σχέσεις $p_\nu = q_\mu$ ή $p_\nu \Rightarrow q_\mu$. Τότε η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής. Επειδή η p είναι αληθής και η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, συμπεραίνουμε ότι και η q είναι αληθής. (Εξαρχάκος,1995)

ii) Μέθοδος με την «εις άτοπον απαγωγή»

Στη μέθοδο αυτή υποθέτουμε ότι η $\bar{q}$ είναι αληθής ή ότι η q είναι ψευδής, όπου η $\bar{q}$ είναι η άρνηση της πρότασης q. Ξεκινώντας από τη υπόθεση «η $\bar{q}$ είναι αληθής» κατασκευάζουμε μια ακολουθία τέτοιων προτάσεων, ώστε η αλήθεια της κάθε μιας να συνεπάγεται την αλήθεια της επόμενης της και να καταλήξουμε τελικά σε μια πρόταση, η οποία είναι αντίθετη σε μια άλλη πρόταση του Μαθηματικού Συστήματος, δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο. Τότε συμπεραίνουμε ότι η υπόθεση «η $\bar{q}$ είναι αληθής» δεν είναι αληθής πρόταση. Άρα η $\bar{q}$ είναι ψευδής και επομένως η q είναι αληθής. Η μέθοδος της «εις άτοπον απαγωγής» λέγεται ότι αποδίδεται στον Ευκλείδη στο έργο του «Στοιχεία»

- Για παράδειγμα : Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Συμπέρασμα)

Απόδειξη

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε ισχύει ότι $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ και λ είναι φυσικοί αριθμοί και το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ανάγωγο δηλαδή έχουν γίνει όλες οι απλοποιήσεις.

Τότε $(\sqrt{2})^2 = (\frac{\kappa}{\lambda})^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\lambda^2 \in 2Z$. Συνεπώς ο αριθμός κ^2 είναι άρτιος, άρα και ο κ είναι άρτιος, οπότε κ=2m.

Οπότε έχουμε διαδοχικά: $(2m)^2=2\lambda^2 \Leftrightarrow 4m^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2m^2 \in 2Z$. Συνεπώς ο αριθμός λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ άρτιος.

Συνεπώς επειδή κ και λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ μπορεί να απλοποιηθεί με το 2 και δεν είναι ανάγωγο (Άτοπο).

iii) Μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή αν η άρνηση μιας πρότασης q συνεπάγεται την άρνηση της πρόταση p, τότε η πρόταση p συνεπάγεται την πρόταση q. Αναλυτικά ξεκινούμε με την υπόθεση ότι η $\bar{q}$ είναι αληθής και προσπαθούμε να δείξουμε ότι η πρόταση $\bar{p}$ είναι αληθής, οπότε η $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ είναι αληθής (Οι $\bar{p}$, $\bar{q}$ είναι οι αρνήσεις των προτάσεων p,q αντίστοιχα). Τότε όμως η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής και επειδή η p είναι αληθής, θα είναι και η q αληθής. Η έμμεση απόδειξη με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής και η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής χρησιμοποιούν ως υπόθεση την άρνηση του συμπεράσματος. (Εξαρχάκος,1995) .

- Για παράδειγμα: Αν ο α^2 είναι άρτιος (Υπόθεση) τότε και ο α είναι άρτιος (Συμπέρασμα).

Απόδειξη

Έστω ότι α δεν είναι άρτιος (Άρνηση αλήθειας συμπεράσματος). Τότε θα είναι περιττός δηλαδή $\alpha=2\kappa+1$. Οπότε $\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 +4\kappa +1 = 2(2\kappa^2 +2\kappa) +1 =2\lambda +1 \in 2Z + 1$, δηλαδή ο α^2 περιττός (Άρνηση υπόθεσης).

II. Απόδειξη Ισοδυναμίας

Για να αποδείξουμε ότι η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής, αρκεί να δείξουμε ότι οι δύο προτάσεις $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ είναι ταυτόχρονα αληθείς. Συνήθως για να δείξουμε την αλήθεια της $p \Leftrightarrow q$ κατασκευάζουμε μια ακολουθία προτάσεων $p_1, p_2, \dots p_\nu = q$, τέτοιων ώστε $p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow p_\nu = q$. Τότε η $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής (Εξαρχάκος,1995).

III. Μέθοδος της τέλειας επαγωγής (μαθηματική επαγωγή)

Η μέθοδος της τέλειας επαγωγής χρησιμοποιείται για την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων που ισχύουν για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό. Η τέλεια επαγωγή ή η αρχή της μαθηματικής επαγωγής στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Έστω $P(\nu)$ ένας προτασιακός τύπος με μια μεταβλητή ν, $\nu \in N$. Αν

i) η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής

ii) η αλήθεια της $P(\kappa)$ συνεπάγεται την αλήθεια της $P(\kappa+1)$ για κάθε $\kappa \in N$, τότε η $P(\nu)$ είναι αληθής για κάθε $\nu \in N$.

- Για παράδειγμα $P(\nu)$: $1+3+5+7+\ldots\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$

Απόδειξη

Η $P(1)$ ισχύει καθώς $1=1^2$.

Η $P(2)$ ισχύει καθώς $1+3=4=2^2$

Η $P(3)$ ισχύει καθώς $1+3+5=9=3^2$

Η $P(4)$ ισχύει καθώς $1+3+5+7=16=4^2$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(\nu)$ δηλαδή ότι $1+3+5+7+\ldots\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$

Μένει να δείξουμε ότι ισχύει η $P(\nu+1)$ δηλαδή ότι

$1+3+5+7+\ldots\ldots+2\nu-1+ 2(\nu+1)-1=(\nu+1)^2$

Είναι $1+3+5+7+\ldots\ldots+2\nu-1+ 2(\nu+1)-1= \nu^2 +2\nu+2-1= (\nu+1)^2$

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στα βιβλία VII, VIII, IX των Στοιχείων του Ευκλείδη. Η μέθοδος διατυπώθηκε με σαφήνεια από τον Blaise Pascal το 1654 στην πραγματεία του για το αριθμητικό τρίγωνο. Οι όροι «μαθηματική επαγωγή» ή «τέλεια επαγωγή» καθιερώθηκαν στη διάρκεια του $19^{ου}$ αιώνα με τις εργασίες των Morgan (1838) και Dedekind (1887), για να γίνει διάκριση από την ατελή επαγωγή που χρησιμοποιείται στις Φυσικές Επιστήμες.

IV. Μέθοδος του αντιπαραδείγματος

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση $P(x)$ δεν ισχύει (είναι ψευδής) για κάθε x ενός συνόλου αναφοράς Α, αρκεί να βρούμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο x_0 του συνόλου αναφοράς Α τέτοιο, ώστε η πρόταση $P(x_0)$ να μην ισχύει (να είναι ψευδής). Το στοιχείο x_0 λέμε ότι αποτελεί αντιπαράδειγμα της ισχύος της πρότασης $P(x)$ για κάθε x του συνόλου αναφοράς Α. Σύμφωνα με τον Klymchuk (2001) αντιπαράδειγμα ονομάζεται ένα παράδειγμα που χρησιμοποιείται για να ανατρέψει μία υπόθεση, έναν ισχυρισμό. Για να διαψευστεί ένας ισχυρισμός, αρκεί να βρεθεί ένα μόνο παράδειγμα, το οποίο να αντικρούει αυτόν τον ισχυρισμό. Σε αυτήν την περίπτωση, το παράδειγμα που χρησιμοποιείται, για να καταρριφθεί αυτή η πρόταση, λέγεται αντιπαράδειγμα (Παπασταυρίδης & Ζαχαριάδης,2016). Για να καταρριφθεί ο ισχυρισμός της ορθότητας μιας μαθηματικής πρότασης, αρκεί μόνο ένα παράδειγμα για να την αποδείξει. Το παράδειγμα στην περίπτωση αυτή ονομάζεται αντιπαράδειγμα (Πούλος,2009). Με το αντιπαράδειγμα διαψεύδεται η αλήθεια του ισχυρισμού μιας πρότασης, χωρίς να επιβεβαιώνεται όμως η αντίθετη πρόταση. Η διάψευση αναφέρεται στη γενικότητα της ισχύος και στην καθολικότητα της αλήθειας μιας πρότασης. Προσοχή: Η άρνηση (το αντίθετο) του «πάντα», «για όλα» ή «για κάθε» δεν είναι το «ποτέ» ή το «για κανένα», αλλά το «όχι πάντα», «όχι για όλα». Επίσης, η άρνηση του «μικρότερο» δεν είναι το «μεγαλύτερο», αλλά το «όχι μικρότερο», δηλαδή το «μεγαλύτερο ή ίσο» (Παπασταυρίδης & Ζαχαριάδης,2016).

- Για παράδειγμα: Για κάθε $α>0$ ισχύει $α^2>α$.

Απόδειξη (μη ισχύς της πρότασης)

Η πρόταση αυτή δεν είναι αληθής αφού για $α=\frac{1}{2}$ έχουμε $α^2=\frac{1}{4}$, δηλαδή $α^2<α$.

Μία πρόταση p(x), με $x\in\Omega$, είναι αληθής διαφορετικά πρέπει να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα. Συνεπώς, το αντιπαράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει ότι μία πρόταση είναι ψευδής ή ισοδύναμα ότι η άρνηση της πρότασης είναι αληθής. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της πρότασης «Υπάρχει $x\in\Omega$ ώστε να ικανοποιείται η πρόταση p(x)» αρκεί να βρεθεί ένα αντιπαράδειγμα για την πρόταση «$\forall x\in\Omega : \overline{p(x)}$». Τότε η τελευταία θα είναι ψευδής, οπότε θα ισχύει ότι «$\exists x\in\Omega : p(x)$». Ομοίως, για την απόδειξη της πρότασης «Η συνθήκη p(x) είναι αναγκαία για την ισχύ του συμπεράσματος της q(x)» αρκεί να ανακαλυφθεί ένα στοιχείο $κ\in\Omega$ που να ικανοποιεί την πρόταση «$\overline{p(k)} \cap \overline{q(k)}$». Τότε η πρόταση «$\forall x\in\Omega : \overline{p(x)} \cap q(x)$» θα είναι ψευδής, συνεπώς η πρόταση «$\exists x\in\Omega: p(x) \cup \overline{q(x)}$» (1) αληθής. Επομένως, αν η πρόταση «$\exists x\in\Omega : q(x)$» είναι αληθής τότε η πρόταση «$\exists x\in\Omega : \overline{q(x)}$» θα είναι ψευδής και λόγω (1) η «$\exists x\in\Omega : p(x)$» είναι αληθής. Συνεπώς αποδείξαμε ότι $q(x)\Rightarrow p(x)$, δηλαδή αποδείχτηκε ότι «Η συνθήκη p(x) είναι αναγκαία για την ισχύ του συμπεράσματος της q(x)». Γενικότερα, αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι «$\forall x \in \Omega$: p(x)» είναι ψευδής, αρκεί να βρούμε αντιπαράδειγμα που να επαληθεύει την $\overline{p(x)}$. (Δρόσος,1986).

O Stylianides (2009) διακρίνει δύο είδη αποδείξεων: τα γενικά παραδείγματα και τις επιδείξεις. Ένα γενικό παράδειγμα είναι μια απόδειξη που χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη περίπτωση που θεωρείται αντιπροσωπευτική της γενικής περίπτωσης

(Balacheff (1988) και Mason & Pimm (1984) παρόμοια με εκείνη των Harel και Sowder's (1998) «transformational proof» και Movshovitz-Hadar's (1988) «transparent pseudo-proof»). Τα γενικά παραδείγματα είναι σημαντικά επειδή μπορούν να παρέχουν στους φοιτητές ένα εύκολο και ισχυρό μέσο κατανόησης και εξήγησης και μπορεί να τους επιτρέψει να αποδείξουν μαθηματικές προτάσεις ακόμη και όταν δεν χρησιμοποιούν μαθηματική γλώσσα για να εκφράσουν τις αποδείξεις τους με πιο εξελιγμένους τρόπους. Μια επίδειξη είναι μια απόδειξη που δεν βασίζεται στην «αντιπροσωπευτικότητα» μιας συγκεκριμένης περίπτωσης (αυτό είναι παρόμοιο με το Harel και Sowder's (1998) «axiomatic proof» και το Balacheff's (1988), «thought experinment»). Παραδείγματα επιδείξεων είναι το αντιπαράδειγμα, η αντίφαση, η μαθηματική επαγωγή, η εις άτοπον απαγωγή και η εξάντληση.

1.1.6 Ο ρόλος της απόδειξης

Η απόδειξη παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών και τη συναντάμε με διάφορες μορφές ανάλογα με το επίπεδο μάθησης.

1) Η μαθηματική απόδειξη είναι το εργαλείο με το οποίο τα μαθηματικά επιβεβαιώνουν μια αλήθεια μέσω ενός δρόμου που αναδεικνύει την ομορφιά των μαθηματικών. Θεμελιωτής της θεωρείται ο Αριστοτέλης. Σύμφωνα με τον Rav (1999) οι αποδείξεις είναι ο «τρόπος ενός μαθηματικού να απεικονίσει το μαθηματικό μηχανισμό για την επίλυση προβλημάτων και να αιτιολογήσει ότι μια προτεινόμενη λύση ενός προβλήματος είναι πράγματι μια λύση». Οι μαθηματικοί αποδεικνύουν για να πείσουν για την ισχύ ενός θεωρήματος (Weber, Inglis & Mejia-Ramos,2014).

2) Οι μαθηματικοί αναγνωρίζουν ότι πρωταρχικός ρόλος της απόδειξης στα μαθηματικά είναι να διαπιστωθεί η αλήθεια ενός αποτελέσματος αλλά ίσως πιο σημαντικός, ιδιαίτερα από εκπαιδευτική άποψη, είναι η αναγνώρισή τους για το ρόλο που διαδραματίζει στην ενίσχυση της κατανόησης των λεπτών σημείων των μαθηματικών, προάγοντας τη μαθηματική κατανόηση και ως εκ τούτου, η πιο σημαντική πρόκληση των εκπαιδευτικών είναι να βρουν πιο αποτελεσματικούς τρόπους για να χρησιμοποιήσουν την απόδειξη για το σκοπό αυτό.

Ο Manin (1977) αναφέρει ότι η καλύτερη απόδειξη είναι αυτή που βοηθά να κατανοήσουμε την έννοια του θεωρήματος που αποδείχθηκε, να δούμε όχι μόνο ότι είναι αληθές αλλά και γιατί είναι αληθές. Φυσικά, μια τέτοια απόδειξη είναι επίσης πιο πειστική και πιο πιθανή να οδηγήσει σε περαιτέρω ανακαλύψεις. Ο επεξηγηματικός ρόλος της απόδειξης υποστηρίχτηκε και από τον Villiers (1990). Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μία κλήση από πολλούς ερευνητές στον επεξηγηματικό ρόλο της απόδειξης (Stylianides,2009). Οι μαθηματικοί αποδεικνύουν για να αποκτήσουν γνώση και κατανόηση στα μαθηματικά ή στους μαθηματικούς τρόπους σκέψης (Weber,2010), για να αναπτύξουν και να μεταδώσουν τη γνώση (Schoenfeld, 2009).

Συνεπώς, εκτός από το ρόλο της στην διαπίστωση της αλήθειας ενός αποτελέσματος, η απόδειξη στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πρέπει επίσης να χρησιμεύει σε αυτή την επεξηγηματική λειτουργία. Στην πραγματικότητα, ορισμένοι εκπαιδευτικοί μαθηματικών υποστηρίζουν ότι αυτός ο ρόλος θα πρέπει να είναι η κύρια λειτουργία της απόδειξης στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, ο πρώην πρόεδρος της Μαθηματικής Ένωσης Αμερικής υποστηρίζει: «ότι στα σχολικά μαθηματικά η έμφαση στην απόδειξη πρέπει να δίνεται περισσότερο στην εκπαιδευτική αξία της παρά στην επίσημη ορθότητα της. Ο χρόνος δεν χρειάζεται να χάνεται στις τεχνικές λεπτομέρειες των αποδείξεων ή ακόμα και σε ολόκληρες αποδείξεις που δεν οδηγούν σε κατανόηση» (Ross,1998).

3) Μια απόδειξη μπορεί να έχει και άλλα πολύτιμα οφέλη. Μπορεί να καταδείξει την ανάγκη καλύτερων ορισμών, να δώσει έναν χρήσιμο αλγόριθμο, να συμβάλει ακόμη και στη συστηματοποίηση ή στην επικοινωνία των αποτελεσμάτων ή στην τυποποίηση ενός σώματος μαθηματικών γνώσεων. Οι μαθηματικοί αποδεικνύουν

για να οργανώσουν ή να συστηματοποιήσουν ένα σύνολο γνώσεων (de Villiers, 1990) και για να κάνουν μαθηματικές ανακαλύψεις (Komatsu,Tsujiyama & Sakamaki,2014).

4) Η απόδειξη αναπτύσσει την κριτική ικανότητα μέσω της επεξηγηματικής της λειτουργίας. Η απόδειξη αποτελεί κριτήριο της διάκρισης των μαθηματικών από τις εμπειρικές επιστήμες. Αυτή η άποψη υποδηλώνει την πεποίθηση ότι η επεξήγηση της απόδειξης βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση της φύσης των μαθηματικών και μπορεί να αναπτύξει κριτική σκέψη στα μαθηματικά.

Οι Samkoff & Weber (2015) στην έρευνα τους διαπίστωσαν ότι ορισμένοι μαθητές θα μπορούσαν να κατανοήσουν καλύτερα τις αποδείξεις, αν διδάσκονταν στρατηγικές κατανόησης της. Οι Harel & Rabin (2010) διερεύνησαν τάξεις σχολικής άλγεβρας και αναγνώρισαν τις διδακτικές πρακτικές που οδήγησαν στο σωστό σύστημα απόδειξης. Η δραστηριότητα της αιτιολόγησης και απόδειξης ήταν κεντρική σε όλες τις μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών, πολλοί μαθητές όμως αντιμετώπιζαν σοβαρές δυσκολίες με αυτή τη δραστηριότητα. Η απόδειξη της ορθότητας μιας μαθηματικής πρότασης δεν επιβεβαιώνεται με τον έλεγχο κάποιων περιπτώσεων, που επιβεβαιώνουν την ισχύ της αλλά με τις μεθόδους απόδειξης των Μαθηματικών. Ο ρόλος όμως του ελέγχου είναι σημαντικός, διότι προσφέρει κατανόηση της πρότασης, ελέγχει τα όρια εγκυρότητας της, όμως δεν αποδεικνύει την ίδια την πρόταση. Στην περίπτωση της πρότασης «κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα προς ένα», η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αποτελεί ένα παράδειγμα ισχύος της πρότασης αλλά δεν αποδεικνύει ότι η συγκεκριμένη πρόταση ισχύει για κάθε πραγματική συνάρτηση. Η έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών υποδηλώνει ότι οι δραστηριότητες όπως η συζήτηση, η παρουσίαση, η εικασία και η κριτική είναι σημαντικές γενικότερα για την εκμάθηση των μαθηματικών (από τους μαθητές) επειδή μπορούν να εμπλέξουν τους μαθητές στους ρόλους της απόδειξης (Bleiler-Baxter & Pair,2017).

Επομένως αν και ο κύριος σκοπός της απόδειξης είναι να επιβεβαιώσει την αλήθεια των αποτελεσμάτων, η απόδειξη διαδραματίζει άλλους ρόλους στην κοινότητα των μαθηματικών, περιλαμβανομένων της «εξήγησης, συστηματοποίησης, ανακάλυψης, επικοινωνίας, κατασκευής εμπειρικής θεωρίας, διερεύνησης ορισμών και συνεπειών εικασιών και ενσωμάτωσης νέων δεδομένων σε ένα νέο πλαίσιο» (Yackel & Hanna, 2003). Στην αποδεικτική διαδικασία οι διάφορες μορφές των αποδείξεων παρουσιάζουν διαφορετικές παιδαγωγικές ιδιότητες και διδακτικές λειτουργίες (Hanna & De Villiers,2008). Η διδακτική των μαθηματικών πρέπει να προσφέρει στον μαθητή και την επαλήθευση με την εφαρμογή στην πράξη και την απόδειξη με τους κανόνες της λογικής, η οποία στερεώνει την αλήθεια των ισχυρισμών επιστημονικά. Η σύνταξη εγγράφων απόδειξης αποτελεί στόχο των πρόσφατων εγγράφων μεταρρύθμισης: «Οι μαθητές γυμνασίου πρέπει να είναι σε θέση να παρουσιάσουν γραπτά μαθηματικά επιχειρήματα, μορφές που θα ήταν αποδεκτές από τους επαγγελματίες μαθηματικούς» (NCTM,2000). Εκτός από την κατασκευή αποδείξεων, οι μαθητές αναμένεται να «αναπτύξουν ένα ρεπερτόριο όλο και πιο εξελιγμένων μεθόδων αιτιολόγησης και απόδειξης», παραδείγματος χάριν, χρησιμοποιώντας αντιπαραδείγματα. (NCTM,2000).

1.1.7 Εικασία

Η έννοια της **εικασίας** είναι πολύ σημαντική και χρήσιμη γιατί μας βοηθάει να φτάσουμε στη διατύπωση μιας πρότασης. Όμως, αν δεν ακολουθήσει η απόδειξη, δεν παράγεται μαθηματικό αποτέλεσμα. **Εικασία** είναι μια πρόταση, χωρίς απόδειξη για την οποία πιστεύουμε ότι ισχύει. Αν αποδειχθεί η γενική ισχύς της πρότασης μέσω παραγωγικών συλλογισμών, τότε ονομάζεται θεώρημα. Δηλαδή το μονοπάτι για την επαγωγική απόδειξη οδηγεί από την εξερεύνηση μέσω εικασιών στην πρόταση και στη συνέχεια, από την πρόταση μέσω απόδειξης στο θεώρημα. Βεβαίως, αν υπάρχει ένα λάθος όσον αφορά στις υποκείμενες παραδοχές, ή μια ρωγμή στη λογική του συλλογισμού, η απόδειξη είναι λανθασμένη. Συνεπώς δίνουμε παρακάτω τον ορισμό της **εικασίας:**

Εικασία ορίζεται ως μια αιτιολογημένη υπόθεση για μία γενική μαθηματική σχέση που βασίζεται σε ελλιπή αποδεικτικά στοιχεία. Ο όρος «αιτιολογημένος» υπογραμμίζει το μη αυθαίρετο χαρακτήρα της υπόθεσης. Ο όρος «υπόθεση» υποδηλώνει ένα επίπεδο αβεβαιότητας σχετικά με την αλήθεια μιας **εικασίας** και υποδηλώνει ότι χρειάζεται περαιτέρω δράση για την αποδοχή ή την απόρριψή της (Cañadas & Castro 2005; Reid 2002; Arzarello 1998). Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1998) εικασία είναι η παρατήρηση που κάνει ένα άτομο και έχει αμφιβολίες για την αλήθεια της. Όταν το άτομο είναι σίγουρο για την αλήθεια της, τότε παύει να είναι εικασία.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα για πολλά χρόνια θεωρούνταν εικασία μέχρι την απόδειξη του. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις εικασιών που καταρρίφθηκαν όταν ανακαλύφθηκαν κατάλληλα αντιπαραδείγματα που αποδείκνυαν την μη ισχύ τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ήταν η εικασία του Fermat ότι οι αριθμοί της μορφής

$2^{2^n}+1$, όπου n φυσικός, είναι πρώτοι. Ενώ αυτή η πρόταση ισχύει για n=0,1,2,3,4

ο Euler έναν αιώνα μετά ανακάλυψε ότι για n=5 ο αριθμός που προκύπτει είναι σύνθετος.

1.1.8 Διαφορά απόδειξης και αποδεικτικής διαδικασίας

Ο Boero (1999) διαφοροποιεί την απόδειξη από την αποδεικτική διαδικασία. Συγκεκριμένα διαιρεί την αποδεικτική διαδικασία σε φάσεις. Στην πρώτη φάση παράγεται η εικασία που περιλαμβάνει τα στάδια της διερεύνησης της προβληματικής κατάστασης, του προσδιορισμού κανονικοτήτων και των αντίστοιχων συνθηκών κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται και του προσδιορισμού των επιχειρημάτων για την αξιοπιστία των παραγόμενων εικασιών ενώ στη δεύτερη φάση έχουμε τη διατύπωση της εικασίας. Στην τρίτη και τέταρτη φάση ακολουθεί η διερεύνηση του περιεχομένου και των ορίων ισχύος της εικασίας και προσδιορίζονται τα κατάλληλα επιχειρήματα για την επικύρωση της πρότασης. Στην πέμπτη και έκτη φάση οργανώνονται τα μαθηματικά επιχειρήματα που έλεγξαν την ορθότητα της πρότασης και οδήγησαν στην απόδειξη της. Αν στην πέμπτη φάση προκύψει ένα σφάλμα κατά την ενοποίηση των επιχειρημάτων, τότε αυτό μπορεί να απαιτήσει μια νέα διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης και συνεπώς την ενίσχυση των υποθέσεων στην πρώτη φάση με μια νέα δήλωση στη δεύτερη φάση.

Το λεξικό Webster ορίζει την επιχειρηματολογία ως την πράξη διαμόρφωσης των λόγων, την πραγματοποίηση των επαφών, την εξαγωγή συμπερασμάτων και την εφαρμογή τους στην υπό συζήτηση υπόθεση. Η διάκριση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία ως διαδικασία και την επιχειρηματολογία ως προϊόν έγκειται στο ότι η πρώτη αποτελεί μια διαδικασία που αποδεικνύει, ενώ η δεύτερη συνδέεται με την μαθηματική απόδειξη. Η επιχειρηματολογία χωρίζεται σε τρεις φάσεις. Οι δύο πρώτες αφορούν την εσωτερική ανάλυση της προβληματικής κατάστασης, αμφισβητώντας την εγκυρότητα και τη σημασία της ανακαλυφθείσας κανονικότητας, διευκρινίζοντας υποθέσεις, συζητώντας πιθανές μορφές. Στην τρίτη φάση, η επιχειρηματολογία παίζει τρεις σημαντικούς ρόλους; δημιουργεί επιχειρήματα για επικύρωση, συζητά την αποδοχή τους και εντοπίζει πιθανούς δεσμούς από τον έναν ρόλο στον άλλον.

Η επιχειρηματολογία είναι καθοριστική, όχι μόνο για την απόδειξη, αλλά και για την αποδεικτική διαδικασία. Σύμφωνα με τη Mariotti (2000) η αποδεικτική διαδικασία αποτελείται από τα λογικά επιχειρήματα και την επιχειρηματολογία με την οποία απομακρύνονται οι αμφιβολίες για την ισχύ μιας πρότασης. Σύμφωνα με τον Duval (2007) η διάκριση μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης βασίζεται στην ερμηνεία των διαφορετικών δηλώσεων και στη σημασιολογική τους σχέση. Η επιχειρηματολογία συνδέεται στενά με το ζήτημα της κατανόησης του «γιατί» μια συγκεκριμένη κατάσταση είναι αληθής και συνήθως έχει επεξηγηματικό χαρακτήρα.

Πριν, προχωρήσουμε στον ορισμό της αποδεικτικής διαδικασίας, δίνουμε τον ορισμό της εξακρίβωσης και της πειθώς.

Η **εξακρίβωση** είναι η διαδικασία που χρησιμοποιεί ένα άτομο, για να απομακρύνει τις δικές του αμφιβολίες (Harel & Sowder,1998).

Η **πειθώ** είναι η διαδικασία που χρησιμοποιεί κάποιος για να για την απομάκρυνση άλλων αμφιβολιών (Harel & Sowder,1998).

Ο δρόμος από την αρχική διατύπωση της εικασίας μέχρι την κατασκευή της απόδειξης μέσω των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων αποτελεί την **αποδεικτική διαδικασία.** Οι Harel & Sowder (1998) ορίζουν την **αποδεικτική διαδικασία** ως την διαδικασία που χρησιμοποιείται από ένα άτομο, για να αφαιρέσει ή να δημιουργήσει αμφιβολίες σχετικά με την αλήθεια ενός ισχυρισμού και αποτελείται από δύο υπό-διαδικασίες, την εξακρίβωση και την πειθώ.

1.2. Το αντιπαράδειγμα στην αποδεικτική διαδικασία

1.2.1 Εισαγωγή

Η απόδειξη και το αντιπαράδειγμα έχουν λάβει ένα αυξανόμενο επίπεδο προσοχής στην εκπαιδευτική κοινότητα των μαθηματικών, επειδή διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών. Η απόδειξη και το αντιπαράδειγμα είναι θεμελιώδους σημασίας για την εμβάθυνση της εκμάθησης και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές (Knuth 2002;Peled & Zaslavsky 1997;Yackel & Hanna 2003). Η σωστή χρήση αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία βοηθά το μαθητή να βελτιώσει τις αποδεικτικές του ικανότητες. Η απόδειξη χρησιμοποιείται και σε καθημερινά ζητήματα. Όταν κάποιος θέλει να αιτιολογήσει κάτι που ισχυρίζεται στηριζόμενος σε επιχειρήματα, τότε λέμε ότι προσπαθεί να αποδείξει τον ισχυρισμό του. Για την στήριξη της απόδειξης είναι αναγκαία τα αξιώματα τα οποία δεν είναι σαφή στην καθημερινότητα. Όμως σε μία κατάσταση από την καθημερινή ζωή μια απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστη όταν χρησιμοποιώντας ένα αντιπαράδειγμα στη συζήτηση για τον ισχυρισμό αυτό, τον απορρίπτουμε χωρίς μάλιστα οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες να γνωρίζουν την έννοια του αντιπαραδείγματος. Το αντιπαράδειγμα λοιπόν χρησιμοποιείται κατά κόρον στην καθημερινή ζωή αποδεικνύοντας ότι μία πρόταση δεν ισχύει.

1.2.2 Το αντιπαράδειγμα ως τρόπος απόδειξης

Η απόδειξη και η διάψευση είναι χρήσιμα εργαλεία στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη αφού βοηθούν να αποδειχθεί εάν και γιατί μία πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Η απόρριψη εικασιών και εσφαλμένων ισχυρισμών αντιμετωπίζεται με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων και την ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων, που θεμελιώνονται στη διερεύνηση και στον πειραματισμό, οι οποίες αποτελούν βασικές συνιστώσες της κατασκευής του μαθηματικού νοήματος και της μαθηματικής κατανόησης. Στην κοινότητα των μαθηματικών, η απόδειξη και η διάψευση είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, δεδομένου του ρόλου που διαδραματίζει η καθεμιά στην κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Lakatos,1976).

Το αντιπαράδειγμα είναι μια αρχαία αποδεικτική μέθοδος και κατέχει σημαντική θέση στην αποδεικτική διαδικασία. Είναι ένα μέσο επικοινωνίας και μετάδοσης της μαθηματικής γνώσης. Κατά την αποδεικτική διαδικασία οι μαθητές πρέπει να μπορούν να διακρίνουν την ισοδυναμία από τη συνεπαγωγή και με αντιπαραδείγματα να αιτιολογούν γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία, σε ορισμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Διατυπώνουν το αντίστροφο και διερευνούν την ισχύ του (με ευθεία απόδειξη ή και με χρήση αντιπαραδείγματος). Οι Alcock & Inglis (2008) ανέλυσαν τις απαιτήσεις που αποδεικνύουν ότι ένας μαθηματικός ισχυρισμός είναι αληθής και τις απαιτήσεις που δημιουργούν ένα αντιπαράδειγμα για να αποδείξουν ότι ένας μαθηματικός ισχυρισμός είναι ψευδής. Στην πρόταση «κάθε συνάρτηση ένα προς ένα είναι και γνησίως μονότονη συνάρτηση», η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα της πρότασης αυτής, αφού αποδεικνύει τη μη ισχύ της διότι είναι ένα προς ένα συνάρτηση αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο R. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή χρειάστηκε μόνο ένα παράδειγμα για να την απορρίψει.

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η κατασκευή αντιπαραδειγμάτων δεν είναι τόσο απλή. Μια μαθηματική απόδειξη πρέπει να χρησιμοποιεί ορισμούς και θεωρήματα σε αντίθεση με τη δημιουργία αντιπαραδείγματος, η οποία περιλαμβάνει την παραγωγή ενός παραδείγματος του οποίου η κατασκευή βασίζεται σε επιχειρήματα που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή. Το παράδειγμα και το αντιπαράδειγμα ενισχύουν την πεποίθηση για την ορθότητα μαθηματικών προτάσεων και θεωρούνται ο πρόδρομος της αποδεικτικής διαδικασίας. Οι Bleiler-Baxter & Pair (2017) στην έρευνα τους ζήτησαν από τους μαθητές να εξετάσουν την ισχύ μιας εικασίας. Αν αυτή είναι αληθής να την αποδείξουν, ενώ αν είναι ψευδής να κατασκευάσουν ένα αντιπαράδειγμα που να την καταρρίπτει. Το συμπέρασμα ήταν ότι οι μαθητές για να μπορέσουν να εξετάσουν τον ερμηνευτικό ρόλο της απόδειξης, ίσως ήταν χρήσιμο να τους δοθούν ευκαιρίες να εξετάσουν πολλαπλά επιχειρήματα για την ίδια πρόταση και να εξετάσουν την επεξηγηματική ισχύ του καθενός.

Σύμφωνα με τους Mooney & all (2014) μία από τις μεθόδους απόδειξης που θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε διδακτικά είναι η διάψευση από το αντιπαράδειγμα. Θεμελιώνεται από τις παιδαγωγικές προτάσεις του Bruner (1960) ότι δηλαδή οποιαδήποτε έννοια μπορεί να διδαχθεί στα παιδιά αρκεί να προσαρμοστεί στο νοητικό τους επίπεδο. Η διάψευση παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών (Lakatos,1976) και εκπροσωπείται συνήθως με τη μορφή αντιπαραδειγμάτων στην κοινότητα των μαθηματικών. Στο Πρόγραμμα Σπουδών και τα Πρότυπα Αξιολόγησης για τα Μαθηματικά του Σχολείου (NCTM,1989), αναφέρεται ότι οι μαθητές στην βαθμίδα 9-12 θα πρέπει να είναι σε θέση να «διατυπώνουν αντιπαραδείγματα» και να «αναζητούν αντιπαραδείγματα». Ενώ ο πρωταρχικός σκοπός των αντιπαραδειγμάτων είναι να διαψεύδουν εικασίες, βοηθούν τους μαθητές να ανακαλούν μαθηματικές έννοιες και να βλέπουν λογικά λάθη σε προτάσεις (Peled & Zaslavsky,1997). Η σπουδαιότητα της απόδειξης και του αντιπαραδείγματος υπογραμμίζεται και στο πρότυπο NCTM (2000), το οποίο υποστηρίζει ότι οι μαθητές και οι φοιτητές θα πρέπει να έχουν πλούσιες ευκαιρίες να ασχοληθούν με την επιβεβαίωση της αλήθειας και την διάψευση μαθηματικών προτάσεων και να βιώσουν την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα. O Wittmann (2009) υπογραμμίζει τη σημασία της αιτιολόγησης μέσω παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, κάνοντας εικασίες, αξιολογώντας ιδέες και δουλεύοντας με σκιαγραφημένες αποδείξεις. Ζητά από τους μαθητές να δώσουν ένα αντιπαράδειγμα σε μια ψευδή αξίωση ή ένα επεξηγηματικό παράδειγμα για μια πραγματική αξίωση. Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις του για τις επαγγελματικές πρακτικές των μαθηματικών και τις τυπικές δυσκολίες των μαθητών με τη μαθηματική απόδειξη, δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην παιδαγωγική σημασία μέσω παραδείγματος.

1.2.3 Έρευνες για τη χρήση της απόδειξης και του αντιπαραδείγματος στην εκπαίδευση

Ωστόσο, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία πολλοί μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν καταφέρνουν να ελέγξουν την αξιοπιστία των προτάσεων (Hoyles & Kuchemann,2002). Προτιμούν τα εμπειρικά παραδείγματα ως απόδειξη (Bieda & Holden & Knuth,2006), πιστεύουν ότι ένα αντιπαράδειγμα είναι μια εξαίρεση (Balacheff,1991), ή δεν γνωρίζουν ότι ένα μόνο αντιπαράδειγμα είναι επαρκές για να αντικρούσει μια ψευδή πρόταση (Galbraith,1981). Ακόμη και φοιτητές που έχουν διδαχθεί αρκετά μαθήματα μαθηματικών ανώτατου επιπέδου σε συλλογικό επίπεδο, εξακολουθούν να έχουν σημαντική δυσκολία με την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα (Alcock & Weber 2005;Ko & Knuth 2009;Seiden & Seiden 2003) και έχουν πρόβλημα να αναγνωρίσουν την ισχύ των προτάσεων (Ko & Knuth,2009). Στα προπτυχιακά μαθήματα μαθηματικών, οι περισσότεροι σπουδαστές περνούν πολύ χρόνο παρατηρώντας και διαβάζοντας παθητικά τις σημειώσεις, καθώς οι καθηγητές παρουσιάζουν αποδείξεις (Weber,2004) αντί να γράφουν από μόνοι τους αποδείξεις και αντιπαραδείγματα. Συνεπώς, δεν μπορούν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες που απαιτούνται για να διατυπώσουν γραπτές αποδείξεις και αντιπαραδείγματα, διότι απλά αντιγράφουν τα τελικά συμπεράσματα (Alcock &

Weber 2005;Seiden & Seiden 1995). Επειδή οι μαθητές καλούνται συνήθως να αποδείξουν μια πρόταση και όχι να διαψεύσουν ή να ανασκευάσουν μία πρόταση στην τάξη, είναι πιθανό ότι οι περισσότεροι μαθητές οδηγούνται να πιστέψουν ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι a priori αληθείς (Smith,2006). Οι Harel & Sowder (1998), διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές δεν δέχθηκαν ως σωστή την απόδειξη με αντιπαράδειγμα, επειδή αντιλήφθηκαν το αντιπαράδειγμα ως εξαίρεση. Οι περιορισμένες μελέτες Ko & Knuth (2009) και Goetting (1995) που διερευνούν τις ικανότητες των προπτυχιακών φοιτητών για επαλήθευση ισχυρισμών δείχνουν ότι οι προπτυχιακοί φοιτητές αντιμετωπίζουν επίσης δυσκολίες στην αναγνώριση ισχυρισμών ως αληθείς ή ψευδείς. Τα αποτελέσματα της μελέτης του Dreyfus (1999) υποδεικνύουν ότι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να εκφραστούν σωστά χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα όταν τους ζητήθηκε να δικαιολογήσουν την αλήθεια ή την διάψευση των δηλώσεων. Λαμβάνοντας υπόψη τις στρατηγικές αξιολόγησης της επαλήθευσης των προτάσεων, η έρευνα δείχνει ότι ορισμένοι φοιτητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν ως μεθόδους αιτιολόγησης βασικά παραδείγματα. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία καταδεικνύει επίσης ότι πολλοί φοιτητές δεν διαθέτουν γλωσσικές ικανότητες να εκφράζουν τις ιδέες τους χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα όταν επιχειρούν να κατασκευάσουν αποδείξεις και αντιπαραδείγματα, καθώς είναι ανεπαρκής η κατανόηση των εννοιών που απαιτούνται για την κατασκευή αποδείξεων και αντιπαραδειγμάτων. Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών διερεύνησε φοιτητές του πανεπιστημίου, μαθητές και καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως προς την ικανότητα να κατανοούν και να παράγουν αποδείξεις και αντιπαραδείγματα. Τα αποτελέσματα έχουν δείξει ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι προπτυχιακοί φοιτητές, και οι καθηγητές των μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν σοβαρή δυσκολία με την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα (Knuth 2002;Peled & Zaslavsky 1997;Selden & Selden 2003;Weber 2010).

1.2.4 Στρατηγικές για την επικύρωση και κατασκευή των αποδείξεων και των αντιπαραδειγμάτων

Στην έρευνα του ο Stylianides (2009) παρουσιάζει τις στρατηγικές που οι μαθητές χρησιμοποιούν για την επικύρωση αποδείξεων και αντιπαραδειγμάτων και για την εκτίμηση ισχυρισμών. Οι στρατηγικές που αναφέρει για την επαλήθευση των αποδείξεων και των αντιπαραδειγμάτων είναι

- Ανάκληση συμβόλων, ορισμών, ιδιοτήτων και / ή θεωρημάτων που σχετίζονται με την πρόταση
- Εύρεση της λογικής δομής της απόδειξης ή του αντιπαραδείγματος
- Έλεγχος γραμμής προς γραμμή της απόδειξης ή του αντιπαραδείγματος
- Κατανόηση συμβόλων, ορισμών, ιδιοτήτων και θεωρημάτων στην απόδειξη ή στο αντιπαράδειγμα
- Εστίαση στην εξοικείωση με την απόδειξη ή το αντιπαράδειγμα
- Εστίαση στην έκφραση μαθηματικών συμβόλων στην απόδειξη ή στο αντιπαράδειγμα

Κατά την επικύρωση των αποδείξεων ή των αντιπαραδειγμάτων, η προσοχή (ορισμένων ατόμων) επικεντρώνεται κυρίως στη μορφή των επιχειρημάτων (Dickerson 2008;Yoo 2008), στον όγκο των ορισμών ή των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται στα επιχειρήματα (Alcock & Weber 2005;Yoo 2008), στις εκφράσεις των μαθηματικών συμβόλων που χρησιμοποιούνται στα επιχειρήματα (Seiden & Seiden 2003;Yoo 2008), στην εξοικείωσή τους με τη δομή των επιχειρημάτων (Yoo,2008), στη λογική δομή των επιχειρημάτων (Weber 2008;Yoo 2008) ή τη συλλογιστική τους και την κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου (π.χ. συμβόλων, ορισμών ή ιδιοτήτων) που χρησιμοποιούνται στα επιχειρήματα (Alcock & Weber 2005;Seiden & Seiden 2003;Yoo 2008).

Σύμφωνα με τις στρατηγικές που αναφέρει ο Stylianides (2009) για την επαλήθευση των προτάσεων, αν και τα άτομα πρέπει να είναι σε θέση να αποφασίσουν με ακρίβεια την αλήθεια ή την παραδοχή μιας πρότασης πριν από την κατασκευή μιας απόδειξης ή τη δημιουργία αντιπαραδείγματος, μια τέτοια απόφαση εξαρτάται πραγματικά από το αν τα άτομα πιστεύουν ή όχι ότι η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Όταν τα άτομα αξιολογούν τις προτάσεις, φαίνεται να χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους για να τους βοηθήσουν να κρίνουν την ισχύ τους. Ορισμένα άτομα έχουν την τάση να βασίζουν την αποφασιστικότητά τους σε στρατηγικές που βασίζονται σε παραδείγματα. Επιπλέον, τείνουν να δοκιμάζουν διαφορετικούς αριθμούς (Goetting,1995),να χρησιμοποιούν γενικά ή ειδικά παραδείγματα που σχετίζονται με την πρόταση (Alock & Inglis,2008), ή να σχεδιάζουν διαγράμματα για να τους βοηθήσουν στην κατανόηση της πρότασης και κατά τις διαδικασίες επαλήθευσης των μαθηματικών εικασιών (Gibson 1998; Goetting 1995). Κατά την αξιολόγηση της επαλήθευσης των προτάσεων, άλλοι χρησιμοποιούν τις αντιλήψεις τους για τους ακριβείς γνωστούς ορισμούς, τα θεωρήματα ή τα αξιώματα που εμπλέκονται στο πρόβλημα (Alock & Inglis,2008) ή αρχίζουν να κατασκευάζουν μια απόδειξη και στη συνέχεια βρίσκουν ένα αντιπαράδειγμα αν καταλήξουν σε κάτι λάθος (Weber,2009b). Άλλοι προβαίνουν σε κρίσεις βασισμένοι σε ότι θυμούνται από παρόμοιες εικασίες, ώστε να αρχίσουν να παράγουν μια απόδειξη, να ψάχνουν για ένα αντιπαράδειγμα ή να κάνουν δοκιμές και στη συνέχεια να επιχειρήσουν να κατασκευάσουν μια απόδειξη (Goetting,1995).

Σύμφωνα με τις στρατηγικές για την παραγωγή αποδείξεων και αντιπαραδειγμάτων κατά την κατασκευή των αποδείξεων ή των αντιπαραδειγμάτων, τα άτομα θα πρέπει να είναι σε θέση να θυμούνται παρόμοια σχετικά δεδομένα, καθώς και να αντλούν έγκυρα συμπεράσματα σχετικά με τις δοθείσες εικασίες (Seiden & Seiden 2003;Weber & Alcock 2005). Παρόλο που η έρευνα έχει τεκμηριώσει ότι πολλοί προπτυχιακοί φοιτητές και μαθηματικοί (εκπαιδευτικοί) δυσκολεύονται να παράγουν αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα, λίγοι έχουν δώσει ιδιαίτερη προσοχή στις στρατηγικές που οι μαθητές χρησιμοποίησαν για να γράψουν αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα (Stylianides,2009). Στις διαδικασίες της σύνταξης αποδείξεων ή αντιπαραδειγμάτων, ορισμένα άτομα αρχίζουν να κατανοούν τις δοσμένες προτάσεις (Smith,2006), άλλοι αρχίζουν με το χειρισμό των συμβολικών παραστάσεων που σχετίζονται με την πρόταση (Smith 2006;Weber & Alcock 2005) και άλλοι ψάχνουν για σχετικές εννοιολογικές αντιλήψεις που εμπλέκονται στο πρόβλημα ή ακόμη ανακαλούν παρόμοιες αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα και τα αντιγράφουν (Smith,2006). Επιπλέον, ορισμένα άτομα προτιμούν να χρησιμοποιούν παραδείγματα, για να βοηθήσουν στην αναγνώριση σχετικών προτύπων, δομών κλειδιών ή παραστατικών στοιχείων που απαιτούνται για την παραγωγή αποδείξεων ή αντιπαραδειγμάτων (Goetting 1995;Weber & Alcock 2005). Σύμφωνα με τον Stylianides (2009) οι στρατηγικές για την παραγωγή αποδείξεων και αντιπαραδειγμάτων είναι

- Να συλλάβουν οι εκπαιδευόμενοι το νόημα της πρότασης
- Να χειρίζονται επακριβώς ιδιότητες, ορισμούς και / ή θεωρήματα
- Να αναζητούν εννοιολογική κατανόηση
- Να ανακαλούν από τη μνήμη τους παρόμοια στοιχεία για αντιγραφή
- Να βασίζονται σε παραδείγματα για τη σύνδεση ιδεών

Μια μαθηματική απόδειξη παρέχει βεβαιότητα σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ το αντιπαράδειγμα αποδεικνύει ότι μια συγκεκριμένη εικασία είναι ψευδής. Στα μαθηματικά, ο πρωταρχικός ρόλος της απόδειξης και του αντιπαραδείγματος είναι η επαλήθευση ή η διάψευση προτάσεων. Ωστόσο, οι μαθηματικοί ενδιαφέρονται περισσότερο για το γιατί μια μαθηματική δήλωση είναι αληθινή ή ψευδής από το αν είναι αληθής (Hanna 1995;Peled & Zaslavsky 1997). Η Hanna (1995) επεσήμανε ότι «η καλύτερη απόδειξη είναι αυτή που βοηθά επίσης τους μαθηματικούς να κατανοήσουν την έννοια του θεωρήματος που αποδείχθηκε, για να δούμε όχι μόνο ότι είναι αληθής, αλλά και γιατί είναι αληθής». Οι Peled & Zaslavsky (1997) ισχυρίστηκαν ότι τα αντιπαραδείγματα όχι μόνο εξηγούν γιατί μια εικασία είναι ψευδής, αλλά επίσης παρέχει τον τρόπο να δημιουργούν και άλλα αντιπαραδείγματα. Εν ολίγοις, η απόδειξη και το αντιπαράδειγμα θεωρούνται ως ένα σημαντικό εργαλείο για τους μαθητές για την βαθύτερη κατανόηση των υποκείμενων εννοιών που κάνουν μια εικασία αληθινή ή ψευδής. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία έχει θεωρήσει μια απόδειξη με αντιπαράδειγμα ως μαθηματική απόδειξη (Goetting 1995;Riley 2003;Yoo 2008). Στην κοινότητα των μαθηματικών, τα αντιπαραδείγματα χρησιμεύουν ως μέσα επικοινωνίας των μαθηματικών σκέψεων, για να διαψεύσουν τις εικασίες (Carpenter & Franke,2001). Τα αντιπαραδείγματα διαδραματίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στην τροποποίηση των εικασιών γιατί είναι χρήσιμο να βρεθούν οι «κρυμμένες» υποθέσεις στις εικασίες και τροποποιούν τις εικασίες με τέτοιο τρόπο ώστε να λειτουργούν ως αναθεωρημένες αξιώσεις (Lakatos 1976; Larsen & Zandieh 2008). Έτσι, οι μαθηματικοί και οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών έχουν δει την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα ως κοινωνική δραστηριότητα στην οποία τα μέλη ασχολούνται με μαθηματικές πρακτικές (Carpenter & Franke 2001;Hanna 1991; Lakatos 1976;Recio & Godino 2001;Thurston 1995). Επιπλέον, οι ερευνητές στην απόδειξη γενικά έχουν εντοπίσει παρόμοιες κοινωνικές πτυχές για να διαπραγματευτούν τις έννοιές τους. Κατά την άποψη αυτή, η απόδειξη θεωρείται ως «φόρουμ συζητήσεων», «ένα κοινωνικό κατασκεύασμα και ένα προϊόν μαθηματικού λόγου και μια αιτιολόγηση που προκύπτει από κοινωνικές αλληλεπιδράσεις». Ομοίως, το αντιπαράδειγμα θεωρείται ως κοινωνικό προϊόν των διαδικασιών του μαθηματικού λόγου. (Carpenter & Franke,2001). Σύμφωνα με τον (Stylianides,2009) οι απόψεις του για τη μαθηματική απόδειξη και το αντιπαράδειγμα και οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως εννοιολογικό πλαίσιο για τη μελέτη του, ώστε να αξιολογήσει τις πεποιθήσεις των προπτυχιακών φοιτητών σε ότι αποτελεί απόδειξη και αντίστροφα είναι:

- Επιβεβαιώνουν ή διαψεύδουν την ισχύ μιας πρότασης
- Εξηγούν γιατί μια δήλωση είναι αληθής ή ψευδής
- Μεταδίδουν τη μαθηματική γνώση στα μέλη της κοινότητας

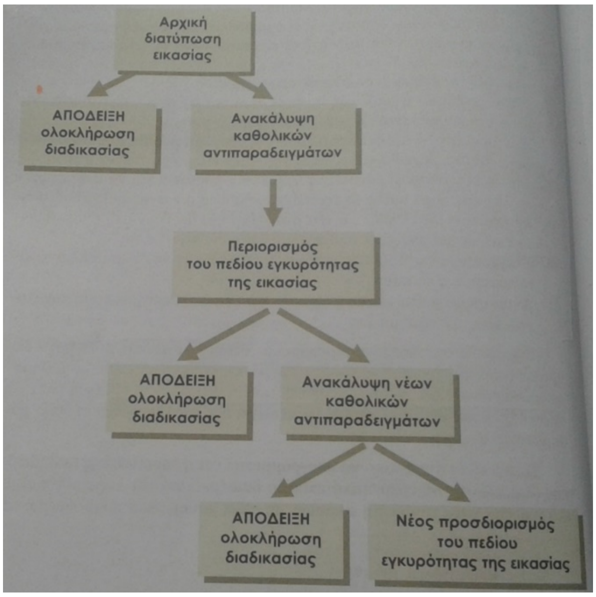
1.2.5 Εικασία και αντιπαράδειγμα

Η διαδικασία των αποδείξεων και των ανασκευών που περιγράφονται από τον Lakatos (1976) είναι απαραίτητη στα σχολικά μαθηματικά για να παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να βιώσουν πώς η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται δυναμικά μέσα από την εξάσκηση με τα Μαθηματικά. Ένα πλαίσιο για την περιγραφή των μαθησιακών διαδικασιών των αποδείξεων και των ανασκευών κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας ένα σύνολο κανόνων που διατυπώνονται από τον Lakatos. Ο Lakatos υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά δεν αναπτύσσονται με τη μονότονη προσθήκη θεωρημάτων αλλά με τη βελτίωση εικασιών, με τη δοκιμή και την κριτική και με τη λογική των αποδείξεων και των ανασκευών. Αναφέρει χαρακτηριστικά τη ρήση του Polya ότι «πρέπει να μαντέψεις ένα μαθηματικό θεώρημα πριν το αποδείξεις» αφού οι εικασίες προηγούνταν των αποδείξεων στην ευρετική διαδοχή, κάτι που ήταν κοινός τόπος για τους αρχαίους Μαθηματικούς. Το μαθηματικό πρόβλημα που εξετάζει είναι η σχέση που υπάρχει μεταξύ του αριθμού των κορυφών, των ακμών και των εδρών ενός πολυέδρου. Πρόκειται για τον τύπο Κ+Ε=Α+2 που απέδειξαν οι Καρτέσιος και Euler, ο οποίος ισχύει όμως για μια ορισμένη μορφή πολυέδρων και όχι για κάθε πολύεδρο, αφού υπάρχουν αντιπαραδείγματα που το απέδειξαν. Σύμφωνα με τον Lakatos η κατασκευή αντιπαραδείγματος είναι μια σοβαρή και δημιουργική εργασία που πρέπει να αποτελεί μέρος της δουλειάς ενός μαθηματικού. Το έργο του έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία των διαδικασιών που συμβαίνουν κατά την απόδειξη των μαθηματικών θεωρημάτων και στη διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών. Διακηρύσσει ότι τα Μαθηματικά δεν αναπτύσσονται με τη μονότονη προσθήκη αναμφισβήτητων θεωρημάτων αλλά με τη βελτίωση εικασιών, με τη δοκιμή και την κριτική και με τη λογική των αποδείξεων και των ανασκευών. Δίνοντας στους μαθητές να ελέγξουν την ισχύ μιας εικασίας προσπαθούν να βρουν τους περιορισμούς και τις προϋποθέσεις που είναι απαραίτητες για να ισχύει. Αν βρουν ένα αντιπαράδειγμα τη διαψεύδουν και προχωρούν στην ανασκευή της εικασίας. Με τη διαδικασία αυτή οι μαθητές ανακαλύπτουν εκ νέου την έννοια προχωρώντας έτσι στην βαθύτερη κατανόηση της. Ο Κόσυβας (2008) αναφέρει ότι όταν η εικασία γίνει αντικείμενο συζήτησης μέσα στην τάξη, δημιουργούνται οι προϋποθέσεις αφομοίωσης των επικείμενων εννοιών. Ο αναστοχασμός, η αλληλεπίδραση και το λάθος με εργαλείο το αντιπαράδειγμα δημιουργούν όχι μια τάξη σε ρόλο παθητικού δέκτη αλλά μια τάξη ερευνητών δίνοντας έτσι θεμελιώδη σημασία στην απόδειξη. Συνεπώς οι μαθητές αποκτούν κριτική, δημιουργική και ενορατική σκέψη στα μαθηματικά. Οι Larsen & Zandieh (2008) υποστηρίζουν ότι η μέθοδος του Lakatos των αποδείξεων και ανασκευών με εργαλείο το αντιπαράδειγμα μπορεί να εφαρμοστεί στη μαθηματική εκπαίδευση.

Σύμφωνα με τον Χαλάτση (1993), η εικασία και η απόδειξη συμπληρώνουν η μία την άλλη, εφόσον αν κάποιος δεν εικάσει, δεν έχει τίποτα να αποδείξει. Ο Lakatos υπογραμμίζει ότι οι εικασίες προηγούνται των αποδείξεων και θεωρεί ότι δεν υπάρχουν στεγανά ανάμεσα στις αποδείξεις και τις ανασκευές, δηλαδή ανάμεσα στην αρχική μορφή ενός θεωρήματος και στις διασκευασμένες εκδοχές του. Συνοψίζει τη διαδικασία ανακάλυψης σε τρία βήματα.

1. Διατυπώνεται αρχικά μια πρώτη εικασία. Ακολουθεί μία άτυπη απόδειξη (πείραμα σκέψης).
2. Απόδειξη και ανασκευή της εικασίας με την αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων
3. Αν βρεθεί καθολικό αντιπαράδειγμα, τροποποιούμε την αρχική εικασία , ώστε να μην απορρίπτεται από αυτό
4. Αν βρεθεί τοπικό αντιπαράδειγμα, ελέγχουμε αν πρόκειται για καθολικό αντιπαράδειγμα
5. Οι αποδείξεις επανεξετάζονται και υπάρχει μια νέα εικασία

Το παρακάτω Γράφημα (Πούλος,2009,σελ.20) που ακολουθεί δείχνει τα βήματα και τα στάδια της αποδεικτικής διαδικασίας μιας επιστημονικής εικασίας.



Γράφημα 1. Στάδια αποδεικτικής διαδικασίας

Σύμφωνα με τους Stylianides & Thabit Al-Murani (2010) η απόδειξη και η ανασκευή διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στη μαθηματική έρευνα. Η διαδικασία της επικύρωσης ισχυρισμών ακολουθεί συχνά μια «ζιγκ-ζαγκ» διαδρομή μεταξύ των προσπαθειών να δημιουργηθούν αποδείξεις για την αλήθεια των ισχυρισμών και την ανακάλυψη αντιπαραδειγμάτων που αντικρούουν τους ισχυρισμούς και απαιτούν την τελειοποίησή τους προτού υποστούν νέες προσπάθειες απόδειξης (Lakatos,1976). Μια θεμελιώδης ιδέα που στηρίζει αυτή τη διαδικασία επικύρωσης είναι ότι δεν είναι δυνατό να έχουμε μια απόδειξη και ένα αντιπαράδειγμα για τον ίδιο ισχυρισμό: η ανακάλυψη και αποδοχή ενός αντιπαραδείγματος σε έναν ισχυρισμό καθιστά παράλογη οποιαδήποτε περαιτέρω προσπάθεια να αποδείξει την αλήθεια του, διότι ο ισχυρισμός δεν μπορεί να είναι αληθινός. Συγκεκριμένα, οι ερευνητικές μελέτες εντόπισαν δύο μαθησιακές αντιλήψεις των οποίων ο συνδυασμός οδηγεί στην ακόλουθη υπόθεση: ορισμένοι φοιτητές πιστεύουν ότι είναι δυνατόν να έχουμε μια απόδειξη και ένα αντιπαράδειγμα για τον ίδιο ισχυρισμό. Η πρώτη αντίληψη που έχουν ορισμένοι μαθητές είναι ότι τα αντιπαραδείγματα δεν αντικρούουν πραγματικά: οι μαθητές τείνουν να αντιμετωπίζουν τα αντιπαραδείγματα σε γενικές προτάσεις ως εξαιρέσεις που δεν επηρεάζουν πραγματικά την αλήθεια των ισχυρισμών (Balacheff,1988). Η δεύτερη αντίληψη που έχουν κάποιοι μαθητές είναι ότι οι αποδείξεις δεν αποδεικνύουν πραγματικά: οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι μια απόδειξη αποδίδει την καθολική αλήθεια μιας γενικής πρότασης, καθιστώντας έτσι περιττούς τους ελέγχους (Fischbein,1982). Η έρευνα τους αποσκοπούσε στη δημιουργία θεωρητικών και πρακτικών γνώσεων σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους η διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόησή τους όσον αφορά την απόδειξη και τις συναφείς έννοιες (εξαίρεση, γενίκευση κ.λπ.). Τα αποτελέσματα του Goetting (1995) δείχνουν ότι το 15% των προπτυχιακών φοιτητών δέχτηκαν τόσο το σωστό αντιπαράδειγμα όσο και την εσφαλμένη απόδειξη για την ίδια πρόταση. Η απόδειξη μιας γενίκευσης εξαλείφει την πιθανότητα ύπαρξης αντιπαραδειγμάτων, ανεξάρτητα από τον τρόπο της επιχειρηματολογίας. Οι σπουδαστές που στερούνται αυτής της αντίληψης μπορεί να πιστεύουν ότι μπορούν να συνυπάρχουν αποδείξεις και αντιπαραδείγματα (Balacheff 1991,Galbraith 1981,Potari & Zachariades & Zaslavsky 2010,Stylianides & Al-Murani 2010)

1.2.6 Ο εκπαιδευτικός και το αντιπαράδειγμα

Στην πραγματικότητα, οι γνώσεις περιεχομένου των καθηγητών των μαθηματικών και οι πεποιθήσεις σχετικά με την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα επηρεάζουν τους τρόπους με τους οποίους υλοποιούν αποδείξεις κατά τη διδασκαλία, τις ευκαιρίες που προσφέρουν στους μαθητές να δοκιμάσουν και να αντικρούσουν, τις προσδοκίες που λαμβάνουν για τη μάθηση των μαθητών και τις αποφάσεις τους σε επιχειρήματα των μαθητών (Stylianides 2007,Stylianou & Blanton & Rotou 2015). Οι μαθηματικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το σε τι συνίσταται αποδεκτή αιτιολόγηση έχουν αντίκτυπο στον τρόπο με τον οποίο παρέχουν ανατροφοδότηση σχετικά με τις αιτιολογήσεις των μαθητών στην τάξη (Bieda,2010). Προκειμένου να αναπτυχθεί η κατανόηση των αποδεκτών αιτιολογήσεων στις μαθηματικές τάξεις των μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διαθέτουν επαρκή γνώση του περιεχομένου της απόδειξης και του αντιπαραδείγματος από τους ίδιους. Εδώ ο ρόλος του εκπαιδευτικού μαθηματικού είναι κρίσιμος. Εκτός από συγκεκριμένες έννοιες για το μαθηματικό θέμα, ο μαθηματικός πρέπει να εξοικειώσει τους μαθητές με τους κανόνες της αιτιολόγησης, τα επιχειρήματα και τους κατάλληλους όρους (π.χ. υπόθεση, εικασία, παράδειγμα, ανασκευή, θεώρημα και αξίωμα). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν πραγματικά αυτές τις έννοιες είναι, δυστυχώς, ζήτημα γνώσης που οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν ακόμη επιλύσει, αν και οι ερευνητές που διερευνούν αυτό το θέμα έχουν προτείνει πολλά υποσχόμενα μοντέλα γνωστικής λειτουργίας. Ένα τέτοιο μοντέλο, η «γνωστική ανάπτυξη της απόδειξης», συνδυάζει τρεις κόσμους των μαθηματικών τον εννοιολογικό /ενσώματο, τον αντιληπτικό/συμβολικό και τον αξιωματικό/τυπικό (Hanna & Villiers,2012). Ένα άλλο μοντέλο χρησιμοποιεί ένα ψυχολογικό πλαίσιο «συστημάτων αποδείξεων» (Harel & Sowder,1998). Επιπλέον, η επικέντρωση στην απόδειξη και στο αντιπαράδειγμα μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν μια καλύτερη κατανόηση των έγκυρων δομών (π.χ. απόδειξη με επαγωγή, απόδειξη με αντίθεση) και λεπτών ορισμών, θεωρημάτων και ιδιοτήτων που παρουσιάζονται στα επιχειρήματα.

Πρόσφατα, ορισμένοι ερευνητές έχουν στρέψει την προσοχή τους στην ανάγνωση των μαθηματικών επιχειρημάτων και έχουν επικαλεστεί τις επιδόσεις των καθηγητών μαθηματικών στην επικύρωση των αποδείξεων (Alcock & Weber 2005; Knuth 2002;Selden & Selden 2003;Weber 2010). Οι τρέχουσες μεταρρυθμίσεις στην εκπαίδευση των μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες δείχνουν ότι η ενσωμάτωση της απόδειξης και του αντιπαραδείγματος σε όλους τους τομείς περιεχομένου του μαθηματικού προγράμματος σπουδών για τη διδασκαλία των μαθηματικών, είναι απαραίτητη για να υποστηρίξει την ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής των μαθητών (Ko & Knuth,2009) και ως στόχος πρέπει να θεωρείται να κατανοήσουν τα αποδεικτικά στοιχεία και να παράγουν τόσο αποδείξεις όσο και αντιπαραδείγματα. Για να επιτύχουν τους προαναφερθέντες στόχους, οι καθηγητές των μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης «πρέπει να συζητήσουν τη λογική δομή των επιχειρημάτων που οι μαθητές παρουσιάζουν και να βοηθήσουν τους μαθητές να επικρίνουν τα επιχειρήματά τους» (NCTM, 2000).

Η περιορισμένη βιβλιογραφία που διερευνά τις επιδόσεις των ατόμων στην επικύρωση των επιχειρημάτων, ωστόσο, δείχνει ότι ορισμένοι προπτυχιακοί φοιτητές και καθηγητές μαθηματικών δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν δεδομένα επιχειρήματα ως έγκυρα μαθηματικά αποδεικτικά στοιχεία (Alcock & Weber 2005; Knuth 2002;Selden & Selden 2003;Weber 2010). Οι Seiden & Seiden (2003) και Alcock & Weber (2005) στην έρευνα τους εντόπισαν ότι οι μαθητές επέδειξαν μια περιορισμένη κατανόηση των εννοιών κατά τη διαδικασία των αποδείξεων, επειδή επικεντρώθηκαν σε επιφανειακά σφάλματα, όπως οι αλγεβρικές εκφράσεις και οι συμβολικοί χειρισμοί, παρά τα σφαιρικά λάθη, όπως η απόδειξη του αντίστροφου των προτάσεων και τα θεμελιώδη κενά στα δεδομένα επιχειρήματα. Για να κατανοηθεί τι περιβάλλον μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να μάθουν δεξιότητες για την επικύρωση των επιχειρημάτων σε διάφορους μαθηματικούς τομείς, πρέπει να κατανοηθούν οι στρατηγικές που οι φοιτητές χρησιμοποιούν ήδη για τέτοιες εργασίες. Οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν τις ακόλουθες στρατηγικές για την επικύρωση των επιχειρημάτων: «τυπική συλλογιστική και κατασκευή αυστηρών αποδείξεων, άτυπη επαγωγική συλλογιστική και παραδειγματική συλλογιστική» (Weber,2008).

Κεφάλαιο 2

Το παράδειγμα και η μέθοδος του αντιπαραδείγματος

2.1 Το παράδειγμα

Ο όρος **«παράδειγμα»** αναφέρεται σε συγκεκριμένη περίπτωση μιας κλάσης που βοηθά το συλλογισμό με στόχο τη γενίκευση και την επαγωγική αιτιολόγηση (Watson & Mason,2002a,2002b). Οι Bills & Rowland (1999) αναφέρουν ότι το **παράδειγμα** αποτελεί μία πρόκληση για το μαθητή και έχει ως στόχο τη γενίκευση, χωρίς όμως πάντα να προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Είναι μία συγκεκριμένη περίπτωση μίας γενικής κατηγορίας από την οποία μπορούμε να αιτιολογήσουμε μία πρόταση και να την γενικεύσουμε (Zodik & Zaslavsky,2008). Το παράδειγμα είναι ο καθρέφτης των εννοιών και είναι ένα προσιτό μέσο επικοινωνίας του μαθητή με τα μαθηματικά (Rissland,1991).

Το **παράδειγμα** είναι ένας θεμελιώδης τρόπος επικοινωνίας για να δίνει εξηγήσεις, να προκαλεί μαθηματικές συζητήσεις (Leinhardt,2001) και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής σκέψης, της μάθησης και της διδασκαλίας, ιδιαίτερα όσον αφορά την επεξήγηση εννοιών, τη γενίκευση, την αφαίρεση, την ανάδειξη διαισθητικών σχέσεων, την επιχειρηματολογία και την αναλογική σκέψη.

2.2 Κατηγορίες παραδειγμάτων

Τα παραδείγματα ταξινομούνται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τα κριτήρια ταξινόμησης που είναι ο **παιδαγωγικός ρόλος**, η **χρήση** και η **περιγραφική κατηγορία**.

- **Ταξινόμηση παραδειγμάτων ως προς τον παιδαγωγικό ρόλο**

Ο Sowder (1980) ως προς τον παιδαγωγικό τους ρόλο διαχώρισε τα παραδείγματα σε **παραδείγματα εφαρμογής διαδικασιών** και σε **παραδείγματα απεικονίσεων εννοιών**.

Τα **παραδείγματα εφαρμογής διαδικασιών** διαχωρίζονται στα **λυμένα παραδείγματα**, όπου ο εκπαιδευτικός τα χρησιμοποιεί ως επεξηγηματικό εργαλείο και στις **ασκήσεις** που δίνονται στο μαθητή ως εργασία, είναι ενδεικτικά και προσανατολισμένα στην πράξη.

Συνήθως, έχοντας μάθει μια τεχνική, ο εκπαιδευόμενος την επαναλαμβάνει σε αρκετά παραδείγματα άσκησης προς διατήρηση της τεχνικής με επανάληψη και στην ανάπτυξη ευχέρειας (Rowland & Zaslavsky,2005).

Τα **παραδείγματα απεικονίσεων εννοιών** είναι τα παραδείγματα που χαρακτηρίζουν τις έννοιες και τον ορισμό τους.

Όμως ο παραπάνω διαχωρισμός δεν είναι ακριβής διότι το ίδιο το παράδειγμα μπορεί να θεωρηθεί και ως **εφαρμογή διαδικασίας** και ως **απεικόνιση έννοιας**. Για παράδειγμα η αναπαράσταση y=2x+3 δίνεται από τον εκπαιδευτικό και ως παράδειγμα γραμμικής συνάρτησης δηλαδή ως παράδειγμα απεικόνισης έννοιας αλλά και ως παράδειγμα διαδικασίας για το σχεδιασμό μίας γραφικής παράστασης (Gray & Tall,1994).

- **Ταξινόμηση παραδειγμάτων ως προς την χρήση**

Οι Rissland & Michener (1978) διακρίνουν τέσσερις κατηγορίες παραδειγμάτων σύμφωνα με την χρήση τους τα οποία έχουν επιστημολογική σημασία και είναι τα **παραδείγματα εκκίνησης**, τα **παραδείγματα αναφοράς**, τα **γενικά παραδείγματα** (πρότυπα παραδείγματα) και τα **αντιπαραδείγματα**.

Τα **παραδείγματα εκκίνησης** είναι τα παραδείγματα που βοηθούν στην αρχικοποίηση βασικών ορισμών, ελέγχουν την ισχύ της διαίσθησης σε ένα νέο θέμα και γενικά χρησιμοποιούνται για την έναρξη της μελέτης ενός θέματος.

Τα **παραδείγματα αναφοράς** είναι τα τυπικά παραδείγματα μιας έννοιας που αναφέρονται στην ανάπτυξη της θεωρίας, χρησιμοποιούνται για τη δοκιμή εικασιών και την απεικόνιση τεχνικών.

Τα **γενικά (πρότυπα) παραδείγματα** είναι τα παραδείγματα εννοιών

Τα **αντιπαραδείγματα** είναι τα παραδείγματα τα οποία αποδεικνύουν ότι μια εικασία είναι ψευδής και χρησιμοποιούνται για να δείξουν τη σημασία υποθέσεων ή συνθηκών σε θεωρήματα και ορισμούς. Τα **αντιπαραδείγματα** σχετίζονται με την ορθότητα ισχυρισμών και χρησιμοποιούνται για την ανάδειξη των σημείων τους που χρειάζονται ανασκευή.

Στα Μαθηματικά υπάρχει μικρή διαφορά μεταξύ ενός παραδείγματος και ενός αντιπαραδείγματος. Όλα εξαρτώνται από το πού εστιάζουμε και από τι επιδιώκουμε. Έτσι ένα παράδειγμα μιας έννοιας ή ενός θεωρήματος είναι ένα αντιπαράδειγμα μιας άστοχης παραλλαγής του ορισμού της έννοιας ή του θεωρήματος. Ένα αντιπαράδειγμα σε μια παραλλαγή ενός ορισμού ή ενός θεωρήματος απεικονίζει τον ρόλο και τη σημασία του, αλλά μπορεί επίσης να αποτελέσει παράδειγμα για έναν αναθεωρημένο ορισμό ή ισχυρισμό. Αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία είναι ότι οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ποια χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου αποτελούν παράδειγμα και ποια χαρακτηριστικά μπορούν να μεταβληθούν για να σχηματίσουν μια κλάση παρόμοιων ή σχετικών παραδειγμάτων. Κάθε μαθηματική έννοια χωρίζει τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφέρεται σε δύο κλάσεις: Στην κλάση των παραδειγμάτων που την πληρούν και στην κλάση των αντιπαραδειγμάτων που δεν την πληρούν.

- **Ταξινόμηση παραδειγμάτων ως προς την περιγραφική κατηγορία**

Οι Bills κ.α. (2006) διακρίνουν τρεις ειδικές περιγραφικές κατηγορίες παραδειγμάτων: Τα **γενικά παραδείγματα**, το **αντιπαράδειγμα** και το **μη παράδειγμα**.

Τα **γενικά** παραδείγματα μπορούν να αποτελέσουν το παράδειγμα πυρήνα μιας γενικής «απόδειξης». Χαρακτηριστικό των γενικών παραδειγμάτων είναι ότι είναι ισοδύναμα και εκπροσωπούν εξίσου καλά την τάξη στην οποία ανήκουν. Αυτό εξηγεί το ρόλο που παίζουν τα αποκαλούμενα γενικά παραδείγματα στα μαθηματικά (Courant,1981).

Τα **μη παραδείγματα** χρησιμεύουν για τον ορισμό και την αποσαφήνιση των ορίων μιας έννοιας, μιας διαδικασίας που δεν μπορεί να εφαρμοστεί ή δεν παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα καθώς και στην εμβάθυνση στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Σχετίζονται με την έννοια και τους ορισμούς και χρησιμεύουν για την ανάδειξη κρίσιμων χαρακτηριστικών μιας έννοιας και στην εξέταση της ισχύος των προϋποθέσεων μιας πρότασης ή ενός θεωρήματος. Βοηθούν τον μαθητή να διαπιστώσει ότι προηγούμενες υποθέσεις και διαισθήσεις του δεν ισχύουν πλέον στη γενικότερη κλάση (Zodik & Zaslavsky,2008).

Έτσι σε μία πρόταση, αν μια συνθήκη είναι αναγκαία για να ισχύει η πρόταση ή το θεώρημα, ένα μη παράδειγμα μπορεί να αποτελέσει αντιπαράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ αποτελεί μη παράδειγμα στον ισχυρισμό ότι υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ένα προς ένα και γνησίως μονότονες ενώ αποτελεί αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό ότι κάθε συνάρτηση που είναι ένα προς ένα είναι και γνησίως μονότονη. Και τα δύο, μη παραδείγματα και αντιπαραδείγματα μπορούν να χρησιμεύσουν για να οξύνουν τις διακρίσεις και να εμβαθύνουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Ο Charles (1980) υποστηρίζει ότι ενώ για τις «εύκολες» έννοιες μια ακολουθία από παραδείγματα με στόχο τη γενίκευση μπορεί να είναι αρκετή, για πιο «δύσκολες» έννοιες τα μη παραδείγματα είναι απαραίτητα να οριοθετήσουμε τα όρια της έννοιας. Η Hershkowitz (1987) διαπίστωσε ότι οι μαθητές δίνουν μεγαλύτερη προσοχή σε παραδείγματα παρά σε μη παραδείγματα. Ο Halmos (1985) αναφέρει κάθε φορά που μαθαίνω μια νέα έννοια αναζητώ παραδείγματα και μη παραδείγματα. Τα παραδείγματα πρέπει να περιλαμβάνουν, όπου είναι δυνατόν, τα τυπικά και τα ακραία σημεία και συμπληρώνει ο Feynman (1985), ότι δεν μπορούμε να καταλάβουμε τίποτα εν γένει, αν δεν μεταφέρουμε στο μυαλό μας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Σύμφωνα με τον Vinner (1991), η μάθηση θα μπορούσε να ενισχυθεί από την επαφή με μια πλούσια ποικιλία παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων. Είναι αρκετά προφανές ότι μια περιορισμένη εμπειρία παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων μπορεί να οδηγήσει σε μια περιορισμένη εικόνα της έννοιας, αλλά είναι επίσης γεγονός ότι περιορίζοντας τα μαθηματικά στις ακολουθίες των παραδειγμάτων αντί να διδαχθούν σύνολα παραδειγμάτων, μπορεί να ωθήσει τους εκπαιδευόμενους να επικεντρωθούν στην ολοκλήρωση των καθηκόντων τους και όχι στην κατανόηση των καθηκόντων στο σύνολό τους (Watson & Mason,2006).

2.3 Χώρος παραδειγμάτων

Παραδείγματα που έρχονται στο μυαλό σε διαφορετικές καταστάσεις σχηματίζουν αυτό που οι Watson & Mason (2005) αναφέρουν ως ένα **χώρο παραδειγμάτων.**

Χώρος παραδειγμάτων είναι μία συλλογή παραδειγμάτων συμπεριλαμβανομένων των τεχνικών για τη διδασκαλία και την κατασκευή που αποτελούν μια συνεκτική και γενετική συνιστώσα της κατανόησης και της εκτίμησης των μαθηματικών όρων.

Τον **χώρο των παραδειγμάτων** τον ορίζουν τα παραδείγματα που παράγουν οι μαθητές και που προκύπτουν από μια μικρή ομάδα ιδεών ως απάντηση σε συγκεκριμένες προβληματικές καταστάσεις. Η συλλογή των παραδειγμάτων στα οποία έχει πρόσβαση ο εκπαιδευόμενος ανά πάσα στιγμή και ο πλούτος της διασύνδεσης μεταξύ αυτών των παραδειγμάτων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ικανότητα των μαθητών να εκτελούν τις εργασίες και τις δραστηριότητες που εμπλέκονται κατά τη διδασκαλία και να κατανοούν το αντικείμενο της.

Οι Watson και Mason (2005) διατύπωσαν την έννοια του **προσωπικού παραδείγματος.**

Προσωπικό παράδειγμα είναι το παράδειγμα που λειτουργεί ως εργαλείο εκπαιδευόμενων και εκπαιδευτικών, για να συνειδητοποιήσουν καλύτερα τις δυνατότητες τους.

Οι Watson και Mason (2005) αναγνωρίζουν ως βασική αρχή ότι η μάθηση των μαθηματικών επιτυγχάνεται από την εξερεύνηση, την αναδιάταξη, την απόκτηση γνώσης και επεκτείνοντας τους χώρους παραδείγματος και τις σχέσεις εντός αυτών. Η εμπειρία επεκτάσεων των χώρων παραδείγματος συμβάλλει στην ευελιξία της σκέψης και την υιοθέτηση νέων εννοιών. Παραδείγματα χώρων μπορούν να διερευνηθούν ή να επεκταθούν με την αναζήτηση παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές μετά την αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές τους.

Τα παραδείγματα χώρων **είναι δυναμικά**, δηλαδή μπορούν να αναπτυχθούν και να αλλάξουν και **έχουν εσωτερική ιδιοσυγκρασιακή δομή** όσον αφορά τον τρόπο αλληλεξάρτησης τους μέσω της οποίας παράγονται τα παραδείγματα. Το περιεχόμενό τους και οι δομές τους είναι ατομικές και περιστασιακές (Watson & Mason,2010).

Σύμφωνα με τους Zaslavsky & Zodik (2007) οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παράγουν συνεχώς νέα παραδείγματα. Χαρακτηριστικό της πρακτικής των εκπαιδευτικών που αντικατοπτρίζει την ευελιξία τους είναι να αντλούν νέα παραδείγματα. Έτσι βρίσκονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να αναπτυχθεί η γνώση. Μια πτυχή της μάθησης των εκπαιδευτικών έχει να κάνει με την επέκταση του προσωπικού τους χώρου παραδειγμάτων που χρησιμεύει ως εργαλείο για να αποκτήσουν μεγαλύτερη επίγνωση των δυνατοτήτων με παραδείγματα. Πρόσφατες έρευνες υποδεικνύουν ότι οι ψυχολογικές και οι κοινωνικές παράμετροι διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο είδος των παραδειγμάτων στα οποία έχουν πρόσβαση οι μαθητές, δηλαδή, στη διαμόρφωση του προσωπικού χώρου παραδειγμάτων (Watson & Mason,2005), καθώς και στο μαθηματικό νόημα που συγκροτούν με βάση αυτά και τις μεταξύ τους σχέσεις (Zaslavsky & Peled,1996).

Η εμπλοκή του μαθητή στην οικοδόμηση των δικών του παραδειγμάτων εμφανίζεται να συνιστά μια ιδιαίτερα αποτελεσματική στρατηγική μεταφοράς πρωτοβουλίας από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή (Zazkis,2001). Επιπλέον, η επινόηση ή η δημιουργία παραδειγμάτων από τους μαθητές, σύμφωνα με τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα, μπορεί να θεωρηθεί ως ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο εμπλουτισμού της μάθησης των μαθηματικών σε πολλά επίπεδα (Zazkis & Leikin,2008). Σύμφωνα με τον Lakatos (1976), όποιος και να είναι ο προσωπικός χώρος παραδείγματος του μαθητή, ο ίδιος πρέπει να μάθει να επεμβαίνει σε αυτόν τον χώρο με στόχο την επέκταση του, να τον τροποποιεί και να παράγει νέα αντιπαραδείγματα.

Τα παραδείγματα χώρων συσσωρεύονται και αναπτύσσονται με την πάροδο του χρόνου και δεν εμφανίζονται ξαφνικά ως αποτέλεσμα μιας ανάγνωσης ή της παρακολούθησης μιας διδασκαλίας. Τα πρώτα παραδείγματα που έρχονται στο μυαλό είναι αυτά που χρησιμοποιούνται συχνά. Το σημαντικό χαρακτηριστικό ενός παραδείγματος χώρου είναι ότι τα πιο οικεία παραδείγματα παρέχουν πρόσβαση στα λιγότερο γνωστά αντικείμενα που αποθηκεύονται. Συνεπώς είναι ζωτικής σημασίας τα παραδείγματα να συνδέονται μεταξύ τους, όταν συναντώνται ώστε να δημιουργήσουν δεσμούς με άλλα πιο οικεία αντικείμενα. Με αυτόν τον τρόπο, πιο ακραία και λιγότερο εξοικειωμένα παραδείγματα μπορούν να έρθουν στο μυαλό ως μέρος ενός εμπλουτισμένου χώρου παραδειγμάτων.

Ένα αντιπαράδειγμα αρκεί για να δείξει ότι μια εικασία είναι ψευδής. Μπορεί ακόμη όμως και να προτείνει πώς πρέπει να τροποποιηθεί η εικασία για να είναι σωστή και αιτιολογημένη. Η επέκταση ενός παραδείγματος σε μια τάξη παραδειγμάτων εμπλουτίζει την σκέψη σχετικά με το γιατί η εικασία είναι ψευδής και το πώς χρειάζεται να τροποποιηθεί, καθώς και τη μετάβαση στη σκέψη ότι υπάρχουν μόνο λίγα σφάλματα που θα μπορούσαν να αποκλειστούν. Λαμβάνοντας ένα θεώρημα και βρίσκοντας αντιπαραδείγματα στις οποίες αφαιρείται μια υπόθεση ή μια επιβαλλόμενη συνθήκη, μπορεί να εκτιμηθεί η αναγκαιότητα κάθε συνθήκης. Συνεπώς οι μαθητές είναι πιο πιθανό στο μέλλον να σκεφτούν να ελέγξουν τις συνθήκες και τις υποθέσεις πριν προσπαθήσουν να εφαρμόσουν ένα θεώρημα. Οι περισσότεροι άνθρωποι, όταν συναντούν έναν τεχνικό όρο, αναζητούν αμέσως ένα οικείο παράδειγμα για να δοκιμάσουν τι λέει. Πρόκειται για μία εξαιρετική μαθηματική δραστηριότητα, αλλά παρεμποδίζεται σοβαρά, εάν υπάρχουν μόνο μερικά παραδείγματα που πρέπει να παραδοθούν ή εάν τα διαθέσιμα παραδείγματα δεν εμφανίζουν όλα τα σχετικά χαρακτηριστικά. Εάν τα μόνα παραδείγματα που έχουν οι εκπαιδευόμενοι είναι σχετικώς ασήμαντα, τότε μπορεί να μην είναι αρκετά εξελιγμένα για να απεικονίσουν τις δυσκολίες. Ένας από τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές συχνά δεν δίνουν προσοχή στις συνθήκες ενός θεωρήματος ή μιας τεχνικής είναι ότι τα μόνα παραδείγματα με τα οποία έχουν οποιαδήποτε εξοικείωση «φυσικά» πληρούν όλες τις προϋποθέσεις. Εάν δεν έχουν συναντήσει ποτέ πιο ακραία παραδείγματα των σχετικών εννοιών, μπορεί ποτέ να μην αντιληφθούν γιατί απαιτούνται αυτές οι προϋποθέσεις,

Οι Watson και Mason (2005) αναφέρθηκαν στις καταστάσεις που ενεργοποιούν την πρόσβαση σε ένα χώρο παραδειγμάτων. Ορισμένα παραδείγματα έρχονται στο μυαλό των μαθητών αμέσως. Αν αυτά είναι ξεχωριστά και συγκεκριμένα τότε ο παραδειγματικός χώρος είναι στοιχειώδης. Εάν, αντί αυτού, μεμονωμένα παραδείγματα ενεργοποιούν την κατανόηση των τρόπων με τους οποίους τα παραδείγματα μπορούν να τροποποιηθούν για να παράγουν ολόκληρες τάξεις παραδειγμάτων, ο χώρος είναι πιο πλούσια διασυνδεδεμένος. Παρατήρησαν ότι ένα μόνο παράδειγμα δίνει πρόσβαση σε ολόκληρες τάξεις παρόμοιων ή σχετικών παραδειγμάτων, όταν το άτομο μπορεί να διαφοροποιήσει ορισμένα χαρακτηριστικά του. Σημείωσαν ότι οι διδάσκοντες και οι μαθητές συχνά δίνουν διαφορετικές διαστάσεις, όταν σκέπτονται ένα παράδειγμα. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να σκέφτεται «κάθε πραγματικό αριθμό», ενώ οι μαθητές υποσυνείδητα περιορίζουν την προσοχή σε ακέραιους αριθμούς, χωρίς να γνωρίζουν ότι κάνουν περιοριστικές υποθέσεις. Τα παραδείγματα χώρων είναι σε μεγάλο βαθμό ιδιοσυγκρασιακά και εξαρτώνται από την κατάσταση. Με την πάροδο του χρόνου οι διαφορές αρχίζουν να μειώνονται, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται ισχυρά συνήθη παραδείγματα. Είναι ζωτικής σημασίας να μην επιτρέπεται η απομόνωση των κανονικών παραδειγμάτων, αλλά να παρέχεται πρόσβαση σε ευρύτερες τάξεις μέσω της συνειδητοποίησης των διαστάσεων των πιθανών παραλλαγών και των αντίστοιχων σειρών αλλαγών (Goldenberg & Mason,2008).

Για να χρησιμεύσει ένα παράδειγμα, θα πρέπει ο μαθητευόμενος να το αποδέχεται ως «υποδειγματικό». Ένα στρατηγικό παράδειγμα που είναι ζωτικής σημασίας για έναν μαθητή σε μια δεδομένη κατάσταση, μπορεί να μην είναι χρήσιμο σε κάποιον άλλο μαθητή ή σε άλλη κατάσταση. Όπως σημείωσε ο Mason (2006), «η παραδειγματικότητα δεν ανήκει στο παράδειγμα, αλλά στο πώς αντιλαμβάνεται το παράδειγμα». Με το να εξασκούνται πάνω και μέσα από σύνολα «παραδειγμάτων», οι εκπαιδευόμενοι αντιμετωπίζουν αποχρώσεις νοήματος, παραλλαγές παραμέτρων και άλλες πτυχές που μπορούν να αλλάξουν (Goldenberg & Mason,2008). Τα παραδείγματα στα οποία έχουν πρόσβαση οι μαθητές και ο πλούτος των μεταξύ τους σχέσεων διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο νόημα που αποδίδουν στα έργα που τους ανατίθενται και γενικότερα στη δράση στην οποία εμπλέκονται στην τάξη των μαθηματικών και στον τρόπο με τον οποίο την ερμηνεύουν.

2.4 Βασικά παραδείγματα και παραδείγματα χώρων

Σύμφωνα με τους Watson & Mason (2005) **παραδείγματα χώρων** είναι συλλογές παραδειγμάτων που εκπληρώνουν μια συγκεκριμένη λειτουργία. Υποδεικνύουν ότι τα **παραδείγματα χώρου** επηρεάζονται από την εμπειρία και τη μνήμη ενός ατόμου, καθώς και από συγκεκριμένες απαιτήσεις των καθηκόντων. Μεταξύ διαφόρων τύπων χώρων παραδείγματος διακρίνουν τον **προσωπικό (ατομικό) χώρο,** τον **τοπικό χώρο,** τον **συμβατικό χώρο** και **τον συλλογικό και τοποθετημένο χώρο** παραδειγμάτων.

Προσωπικός (ατομικός) χώρος παραδείγματος, είναι ο χώρος που προκαλείται από μια εργασία, από το περιβάλλον, καθώς και από μια πρόσφατη εμπειρία.

Τοπικός χώρος είναι ο χώρος που δημιουργείται από τον προσωπικό χώρο παραδειγμάτων, αποτελούμενος από την πρόσφατη εμπειρία ενός ατόμου και ο οποίος ενδέχεται να μην είναι δομημένος με τρόπους που παρέχουν εύκολη πρόσβαση.

Συμβατικός χώρος παραδείγματος, είναι ο χώρος στον οποίο ο δάσκαλος ελπίζει να διδάξει τους μαθητές του.

Ο **συλλογικός και τοποθετημένος χώρος παραδειγμάτων** είναι ο χώρος που λειτουργεί ως τοπικός συμβατικός σε μια τάξη ή άλλη ομάδα σε ένα συγκεκριμένο χρόνο.

2.5 Ο ρόλος του παραδείγματος στη μάθηση και την διδασκαλία

Από τα παλαιότερα ιστορικά στοιχεία προκύπτει ότι τα παραδείγματα διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη μάθηση, τη διδασκαλία και την ανάπτυξη των μαθηματικών (Watson & Mason,2010). Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι τα παραδείγματα έχουν βρει μια θέση σε πολλές θεωρίες μάθησης των μαθηματικών. Είναι αδύνατο να θεωρηθεί η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών χωρίς να ληφθούν υπόψη συγκεκριμένα παραδείγματα. Η απαραίτητη προσοχή στα παραδείγματα προσφέρει τόσο πρακτική χρήση όσο και μια θεωρητική προοπτική για το σχεδιασμό των διδακτικών δραστηριοτήτων, για την εκτίμηση των εμπειριών των μαθητών και για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών των μαθηματικών.

Τα παραδείγματα θεωρούνται ως «απεικονίσεις εννοιών και αρχών» και βασικό χαρακτηριστικό τους είναι ότι επιλέγονται από ένα εύρος πιθανών περιπτώσεων (Watson & Mason,2005). Το παράδειγμα χρησιμοποιείται ως εργαλείο εισαγωγής και ανάπτυξης μιας έννοιας κατά τη διδασκαλία, ως μέσο επεξήγησης μαθηματικών αντικειμένων (Watson & Mason,2002a,2002b), για διευκρινίσεις, αποσαφηνίσεις, επισημάνσεις και επεξηγήσεις σε εμπόδια που συναντούν οι μαθητές σε μαθηματικά προβλήματα (Leinhardt,2001), ως εργαλείο αλληλεπίδρασης μαθητή - εκπαιδευτικού με στόχο την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, ως μέσο ανάδειξης σχέσεων, ως εργαλείο γενίκευσης και εκπρόσωπο αυτής της γενικευμένης κατηγορίας (Peled & Zaslavsky,1997). Είναι απαραίτητα επίσης για την αφαίρεση, την επιχειρηματολογία, την αναλογική και επαγωγική σκέψη. Τα παραδείγματα προσφέρουν γνώση της φύσης των μαθηματικών μέσω της χρήσης τους σε πολύπλοκες εργασίες για την επίδειξη μεθόδων, στην ανάπτυξη της έννοιας για την ανάδειξη σχέσεων και σε επεξηγήσεις και αποδείξεις. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η χρήση παραδειγμάτων είναι ένα αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών ενώ υπογραμμίζουν τη σημασία των παραδειγμάτων για τη μάθηση προχωρημένων μαθηματικών (Weber & Alcock 2009;Dahlberg & Housman 1997).

Τη χρήση παραδειγμάτων από τους μαθητές οι Goldenberg & Mason (2008) τη χαρακτηρίζουν ως μια μορφή επικοινωνίας με τον εαυτό τους και μερικές φορές και με άλλους. Στη μελέτη τους για τη χρήση παραδειγμάτων με σκοπό την προώθηση της εννοιολογικής κατανόησης, την ενοποίηση και την αναδιοργάνωση των δομών γνώσης, εστιάζουν το πώς κατασκευάζεται το μαθηματικό νόημα κατά τη διάρκεια της κατασκευής παραδείγματος και ανέπτυξαν ένα σύνολο πέντε χρήσεων για την κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές:

- **Να βιώνουν τη δομή.**

Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εκτέλεσης και αναστροφής των διαδικασιών, μέσω των παραδειγμάτων εντός των περιορισμών στις μεταβλητές και διά μέσου των μαθηματικών προτάσεων.

- **Να βιώνουν και να επεκτείνουν το εύρος των μεταβολών.**

Επιτυγχάνεται βλέποντας παραδείγματα άλλων μέσω της χρήσης και της ανάπτυξης παραστάσεων, μέσω της προσφοράς διαφορετικών περιορισμών, μέσω της κατασκευής διαφορετικών ερωτήσεων που δίνουν την ίδια απάντηση και διαφορετικών απαντήσεων στην ίδια ερώτηση.

- **Να βιώνουν τη γενικότητα.**

Επιτυγχάνεται βλέποντας ένα μοτίβο στα παραγόμενα παραδείγματα. Μέσω της παραγωγής ιδιαίτερων-ιδιότυπων γενικών παραδειγμάτων και μέσω της δοκιμής μιας σειράς παραδειγμάτων.

- **Να βιώνουν τους περιορισμούς**.

Επιτυγχάνεται μέσω της σύγκρισης με τις συμβατικές μεθόδους τις δικές τους μαθηματικές δημιουργίες, τις δικές τους προτάσεις για το τι μπορεί να είναι χρήσιμο, διότι ζητείται να δώσουν ένα παράδειγμα ενός συγκεκριμένου τύπου, μέσω της έκφρασης νέων εννοιών.

- **Επέκταση χώρων παραδειγμάτων και διερεύνηση ορίων.**

Επιτυγχάνεται μέσω της επεξήγησης του τι είναι και τι δεν είναι, τι μπορεί να είναι και τι δεν μπορεί να είναι.

Οποιοδήποτε παράδειγμα φέρει κάποια χαρακτηριστικά που προορίζονται να αποτελέσουν παράδειγμα για άλλα χαρακτηριστικά που είναι άσχετα. Όπως επισημαίνει ο Rissland (1991) «μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα ως ένα σύνολο γεγονότων ή χαρακτηριστικών που βλέπουμε από μία συγκεκριμένη οπτική γωνία». Στους όρους του Skemp (1971), «οι άσχετες πληροφορίες που ένα παράδειγμα φέρνει μπορούν να θεωρηθούν ως θόρυβος. Όσο μεγαλύτερος είναι ο θόρυβος, τόσο πιο δύσκολο είναι να διαμορφώσουμε μια έννοια». Έτσι, ένας δάσκαλος μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για την απεικόνιση ορισμένων ιδεών μέσω της δικής του οπτικής γωνίας, ενώ ένας μαθητής μπορεί να επικεντρωθεί στα άσχετα χαρακτηριστικά του.

Συνεπώς, στην περίπτωση των εννοιών, ο ρόλος των παραδειγμάτων είναι να διευκολυνθεί η αφαίρεση. Με βάση την ιδέα του σχεδίου του Piaget, ο Skemp (1969) έγραψε για την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών μέσω της αφαίρεσης από τα παραδείγματα, πράγμα που σήμανε ότι η επιλογή των παραδειγμάτων από τους εκπαιδευτικούς για να παρουσιαστούν στους μαθητές ήταν ζωτικής σημασίας. Οι συμβουλές του σχετικά με αυτό το θέμα περιλαμβάνουν την εξέταση του θορύβου, δηλαδή των εμφανών χαρακτηριστικών του παραδείγματος που δεν είναι απαραίτητα για την έννοια, και των μη παραδειγμάτων, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να επιστήσουν την προσοχή στη διάκριση μεταξύ ουσιωδών και μη ουσιωδών χαρακτηριστικών της έννοιας και, ως εκ τούτου, να τελειοποιήσουν τα όριά της. Από τη στιγμή που σχηματίζεται μια έννοια, τα επόμενα παραδείγματα μπορούν να εξομοιωθούν με αυτή την έννοια (Skemp,1979) και μπορεί να διαμορφωθεί μια πιο εξελιγμένη εικόνα (Tall & Vinner,1981). Όταν ένα σύνολο παραδειγμάτων έχει ενοποιηθεί με τη διαμόρφωση μιας έννοιας, τα επόμενα παραδείγματα μπορούν να εξομοιωθούν με την έννοια. Αν ο μαθητής καλείται να παράγει ένα παράδειγμα παρόμοιο με ένα που ήδη γνωρίζει, τότε είναι πιθανή κάποια γενίκευση, σε επίπεδο ταυτοποίησης χαρακτηριστικών ή δομών που ίσως είναι κοινά, να πραγματοποιηθεί σε όλη αυτή την πορεία προς την επεξήγηση με παράδειγμα. Εάν ζητηθεί από τους μαθητές να παράγουν παραδείγματα που να είναι διαρθρωμένα ελαφρώς διαφορετικά από το δεδομένο, είναι πιθανό να πραγματοποιηθεί μετασχηματισμός της γνώσης πέρα από τη γενίκευση μιας μορφής.

Πολλοί ερευνητές συνδέουν τη γένεση της μαθηματικής γνώσης με τις διαδικασίες προσέγγισης της και επισημαίνουν τον κεντρικό ρόλο των παραδειγμάτων στην γενίκευση των διαδικασιών και την εννοιοποίηση νέων αντικειμένων. Τα παραδείγματα που επιλέγει ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχουν στόχο τη γενίκευση. Δηλαδή το παράδειγμα, διαδραματίζει βασικό ρόλο στην εκπαιδευτική εξήγηση. Οι Mason & Pimm (1984) υποδεικνύουν ότι όταν ένας δάσκαλος παρουσιάζει ένα παράδειγμα, βλέπει τη γενικότητά του και σχετίζεται με αυτό που αντιπροσωπεύει το παράδειγμα. Οι Watson & Mason (2005) τονίζουν ότι η διαδικασία παραγωγής παραδειγμάτων είναι, στην πραγματικότητα, η εμπρόσθια όψη της γενίκευσης. Μαθηματική σκέψη είναι η αναζήτηση παραδειγμάτων και όχι το τελικό προϊόν που προωθεί τη μάθηση και είναι σημαντικό για τους εκπαιδευόμενους να δημιουργήσουν μια δυναμική μεταξύ των παραδειγμάτων και τη γενίκευση τους. Σύμφωνα με τον Zaslavsky (1995), η ανάπτυξη της έννοιας μέσω παραδείγματος δεν χρειάζεται να είναι τυχαία ή απροσδόκητη αλλά μπορεί να είναι ένας σαφής παιδαγωγικός στόχος. Ένα γενικό παράδειγμα το οποίο επιτυγχάνει τη γενικότητα για τους μαθητές έχει την ποιότητα μιας τέτοιας διαρθρωτικής γενίκευσης (Mason & Pimm,1984).

Όλα αυτά τα επιχειρήματα, καθώς και τα συναφή ευρήματα των Dahlberg & Housman (1997), μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η πράξη παραγωγής παραδειγμάτων, ιδιαίτερα μη-συνηθισμένων παραδειγμάτων, είναι μια πράξη μάθησης, μια γνωστική πράξη. Η κατασκευή παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές έχει αποδειχθεί ότι συμβάλλει στην βαθύτερη μάθηση/γνώση από την απλή παρουσίαση παραδειγμάτων στους μαθητές (Dahlberg & Housman 1997;Mason 2002;Zazkis 2001;Zaslavsky & Peled 1996). Η πράξη δημιουργίας ενός παραδείγματος είναι μια πράξη γνώσης, συχνά με θετική αντιμετώπιση (Watson & Mason,2010).

Σύμφωνα με τους Watson & Mason (2005) αν και η σημασία των παραδειγμάτων στην εννοιολογική ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης είναι δεδομένη είναι λίγοι οι συγγραφείς που αναγνωρίζουν τον ρόλο αυτό. Η ανάδειξη των ερωτήσεων με μεγάλο ενδιαφέρον στα Μαθηματικά και η εστίαση στη δομή είναι όλα τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης που συμβάλλουν στην εννοιολογική κατανόηση. Το να ζητάμε από τους μαθητές να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα και να δείξουν την εκμάθησή τους με παραδείγματα αναμένεται να έχει θετικές γνωστικές επιπτώσεις. Η διαδικασία αναζήτησης και κατασκευής παραδειγμάτων απαιτεί λεπτομερή, προσεκτική και δημιουργική εργασία σχετικά με τις προϋποθέσεις που απαιτούνται (Watson & Mason,2010). Ο Sowder (1980) στην έρευνα του διατυπώνει ότι οι μαθητές για να έχουν κατανοήσει πλήρως και σε βάθος μια έννοια και να μπορούν να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν έναν ορισμό, πρέπει να είναι ικανοί να δημιουργούν τα δικά τους παραδείγματα. Η κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές απαιτεί σωστή οργάνωση, καλή γνώση του μαθηματικού αντικειμένου και διδακτική εμπειρία. Σύμφωνα με τους Zazkis & Leikin (2007) η δημιουργία παραδειγμάτων από τους μαθητές, θεωρείται ένα ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο μάθησης των μαθηματικών σε διάφορα επίπεδα.

Η χρήση παραδειγμάτων στην τάξη περιλαμβάνει προσεκτικές επιλογές συγκεκριμένων παραδειγμάτων που διευκολύνουν την καθοδήγηση της προσοχής κατάλληλα ώστε να εξηγηθούν και να προκληθούν γενικεύσεις. Οι Mason & Spence

(1999) θεωρούν το παράδειγμα ως μια άλλη σημαντική πτυχή της γνώσης των εκπαιδευτικών που σχετίζεται με τους δημιουργικούς τρόπους ανταπόκρισης των εκπαιδευτικών στις πραγματικές (συχνά απροσδόκητες) καταστάσεις στην τάξη που απαιτούν άμεση δράση. Η επιλογή και η δημιουργία παραδειγμάτων για τη διδασκαλία απαιτεί συχνά αποφάσεις που λαμβάνονται κατά τη στιγμή που ανταποκρίνονται στις αλληλεπιδράσεις στην τάξη. Όταν εισάγεται μια νέα έννοια ή ένα θεώρημα μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές τρία ή περισσότερα αντικείμενα και να τους ζητήσουν να πουν τι είναι το ίδιο και τι είναι διαφορετικό με αυτά. Με τον τρόπο αυτό η προσοχή τους κατευθύνεται σε λεπτομέρειες που διαφορετικά θα αγνοούσαν. Επιλέγοντας προσεκτικά τα παραδείγματα που πρέπει να προσφέρουμε, η προσοχή μπορεί να στραφεί σε κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας ή των συνθηκών του θεωρήματος. Πολύ συχνά το ότι οι εκπαιδευόμενοι παραβλέπουν τις συνθήκες και τις υποθέσεις οφείλεται στο ότι η προσοχή τους δεν είχε κατευθυνθεί προηγουμένως στο να κάνουν τις κατάλληλες διακρίσεις (Mason,2003). Τα ακραία παραδείγματα, επομένως μας ενθαρρύνουν να αμφισβητούμε και μας προετοιμάζουν για νέες εννοιολογικές αντιλήψεις (Watson & Mason,2005).

Η επιθυμητή επιλογή παραδειγμάτων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως οι στόχοι διδασκαλίας και η συνειδητοποίηση των προκαταλήψεων και των δυνατοτήτων των μαθητών. Έχει προταθεί (Tall & Vinner 1981,Chapman 1997) ότι το βασικό χαρακτηριστικό της μάθησης δεν είναι αυτό που παρουσιάζεται αλλά μάλλον αυτό που κωδικοποιείται στο μυαλό του μαθητή, τι κατασκευάζει ο εκπαιδευόμενος, ποιες πρακτικές εσωτερικεύονται. Οι Ball, Bass, Sleep & Thames (2005) διατυπώνουν τις ανησυχίες τους σχετικά με τη γνώση που χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί για να επιλέξουν προσεκτικά τα κατάλληλα παραδείγματα που είναι χρήσιμα «για την επισήμανση σημαντικών μαθηματικών ζητημάτων». Η επιλογή παραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι πολύ πιο πολύπλοκη και περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα προβληματισμών (Zaslavsky & Lavie 2005;Zodik & Zaslavsky 2007). Η σωστή επιλογή των παραδειγμάτων μπορεί να διευκολύνει ή να παρεμποδίσει τη μάθηση των μαθητών, παρουσιάζει, έτσι τον εκπαιδευτικό με μια πρόκληση, που συνεπάγεται πολλά ζητήματα που πρέπει να ζυγίζονται. Η επιλογή του κατάλληλου παραδείγματος κατά τη διδασκαλία είναι σημείο εκκίνησης για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών διότι οι μαθητές έχουν την τάση να απορρίπτουν παραδείγματα που δεν τα αντιλαμβάνονται ακριβώς (MacHale,1980).

Ο Vinner (1983,1991) περιγράφει ένα κενό μεταξύ της εικόνας της έννοιας των μαθητών και του ορισμού της έννοιας. Οι εικόνες των εννοιών μπορούν να βασιστούν σε μια πολύ περιορισμένη εξερεύνηση των παραδειγμάτων, ώστε τα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων που δεν αποτελούν μέρος της έννοιας να διατηρούν την έννοια της εικόνας, μιας διαδικασίας αναγνωρισμένης και επεξεργασμένης από τον Fischbein (1987) ως έντυπη έννοια. Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συχνά παραδείγματα για να καταδείξουν και να προβάλλουν την ουσία των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών (Tall & Vinner,1981). Συνεπώς, οι εικόνες εννοιών περιορίζονται συχνά σε τομείς με τους οποίους οι μαθητές είναι πολύ εξοικειωμένοι και έτσι μπορεί να είναι πολύ περιορισμένοι για να είναι χρήσιμοι. Ένα σημαντικό μέρος των αποτελεσμάτων της έρευνας σχετικά με τις λανθασμένες, εναλλακτικές και μερικές αντιλήψεις μπορεί να ερμηνευθεί πειστικά με αυτόν τον τρόπο. Έτσι, η βελτίωση των αντιλήψεων των μαθητών ισοδυναμεί με τη μείωση του χάσματος μεταξύ των εικόνων και του ορισμού των εννοιών.

Οι Tall & Vinner υπογραμμίζουν τη σημασία των παραδειγμάτων για τη γεφύρωση αυτού του κενού. Κάθε φορά που ένας μαθηματικός συναντά μια πρόταση που δεν είναι άμεσα προφανής, το «φυσικό» πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να κατασκευάσουμε ή να βρούμε ένα παράδειγμα για να δούμε το γενικό με την οικεία εμπειρία του συγκεκριμένου (Courant,1981). Οι μαθητές δεν πρέπει να εστιάζουν σε συγκεκριμένα παραδείγματα, διότι μπορεί να μην αποκτήσουν συνολική εικόνα της αντίληψης τους (Charles 1980;Fischbein 1993). Ο Waywood (1992), ζήτησε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν παραδείγματα για να απεικονίσουν αυτά που είχαν μάθει. Βρήκε ότι η χρήση των παραδειγμάτων αυξήθηκε με την πάροδο του χρόνου.

Ο Thorndike (1924) ακολούθησε μια συμπεριφοριστική γραμμή χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα ως ερεθίσματα που προκαλούν αντίδραση στην μάθηση. Ο Gagné (1985) ανέπτυξε τις απόψεις αυτές αναπτύσσοντας μια ιεραρχία συμπεριφορών αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Ο Dienes (1960) χρησιμοποίησε έξυπνα κατασκευασμένα παιχνίδια και δομημένες καταστάσεις ως παραδείγματα μαθηματικών δομών στις οποίες «βυθίστηκαν» οι εκπαιδευόμενοι, ώστε να βιώσουν παραδείγματα περίπλοκων μαθηματικών εννοιών μέσω της δικής τους άμεσης εμπειρίας. Η Sfard (1991) υιοθετεί τις απόψεις του Freudenthal (1983) βλέποντας τους μαθητές να κινούνται από μια λειτουργική σε μια δομική κατανόηση των εννοιών μέσα από μια διαδικασία εσωτερίκευσης και συμπύκνωσης που οδηγεί στην αναπαράσταση της γνώσης. Η εσωτερίκευση και η συμπύκνωση πραγματοποιούνται σε στάδια και με επαναλαμβανόμενες χρήσεις παραδειγμάτων. Ο Dubinsky (1991) εισήγαγε τη θεωρία της ανάπτυξης των μαθηματικών γνώσεων και την ονόμασε θεωρία APOS (ενέργειες, διαδικασίες, αντικείμενα, σχήματα). Η θεωρία προβλέπει ότι η χρήση παραδειγμάτων είναι μέρος της διαδικασίας με την οποία οι εκπαιδευόμενοι θα μετακινηθούν από τη δράση στη διαδικασία και στην αντίληψη του αντικειμένου. Το μοντέλο Pirie & Kieren (1994) για την ανάπτυξη της κατανόησης επικεντρώνεται στην κατασκευή εικόνων και αναγνωρίζει ότι η χρήση παραδειγμάτων συμβάλλει στη διαμόρφωση προσωπικών εικόνων και γνώσεων.

Τρεις πτυχές της γνώσης των εκπαιδευτικών σχετίζονται έντονα με τα παραδείγματα στα μαθηματική εκπαίδευση: η γνώση των μαθηματικών, η γνώση της μάθησης των μαθητών και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Η ποιότητα των μαθηματικών γνώσεων ενός εκπαιδευτικού επηρεάζει αυτό που διδάσκεται και πώς διδάσκεται. Όσον αφορά την επεξήγηση, η μαθηματική όψη ενός παραδείγματος έχει να κάνει με την ικανοποίηση ορισμένων μαθηματικών συνθηκών ανάλογα με την έννοια ή την αρχή που προορίζεται να απεικονίσει. Η γνώση της μάθησης των μαθητών αναφέρεται στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο καταλαβαίνουν οι μαθητές και πώς οι υπάρχουσες γνώσεις τους επηρεάζουν την κατασκευή νέων γνώσεων. Αναφέρεται επίσης στην ευαισθησία του εκπαιδευτικού στα δυνατά σημεία και τις αδυναμίες των μαθητών και σε σχέση με τα παραδείγματα. Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου έχει να κάνει με το μετασχηματισμό των μαθηματικών σε μέσα που μπορεί να διευκολυνθεί η εκμάθησή τους. Αυτό περιλαμβάνει «τρόπους εκπροσώπησης και διατύπωσης του θέματος που καθιστούν κατανοητό σε άλλους» (Shulman,1986).

2.6 Το αντιπαράδειγμα

Το αντιπαράδειγμα χρησιμοποιείται για την ανασκευή μαθηματικών προτάσεων, λειτουργώντας ως μέσο διάψευσης λανθασμένων ισχυρισμών ενώ επιπλέον χρησιμοποιείται και για την παραγωγή της γνώσης. Στην καθημερινότητα το αντιπαράδειγμα χρησιμοποιείται αρκετά συχνά. Στα πρώτα χρόνια οι άνθρωποι ισχυρίζονταν ότι όλοι είναι λευκοί. Όταν παρουσιάστηκε κάποιος άνθρωπος διαφορετικού χρώματος του λευκού, ο ισχυρισμός αυτός καταρρίφθηκε. Μια γλαφυρή αρχαία χρήση του αντιπαραδείγματος την αναφέρει ο Διογένης ο Λαέρτιος στο έργο του «Βίοι Φιλοσόφων», αποδίδεται στο Διογένη τον Κυνικό, ο οποίος θέλοντας να γελοιοποιήσει τον λανθασμένο ισχυρισμό του Πλάτωνα περί ανθρώπου, ότι δηλαδή είναι «όν άπτερον δίπουν» (Ο άνθρωπος είναι ένα όν χωρίς φτερά) ξεπουπούλιασε έναν κόκορα και τον πήγε στην σχολή του Πλάτωνα λέγοντας, «Ιδού ο άνθρωπος του Πλάτωνος!». Ο Πλάτωνας υποχρεώθηκε τότε να διορθώσει τον ορισμό του, προσθέτοντας μια επί πλέον προϋπόθεση να είναι και πλατυώνυξ. (Με πλατιά νύχια). Βεβαίως και ένας πίθηκος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως αντιπαράδειγμα στον ήδη «διορθωμένο» ορισμό του Πλάτωνος, αλλά δεν ανέφερε τίποτε για αυτό ο Διογένης ο Λαέρτιος (Παπασταυρίδης, & Ζαχαριάδης,2016). Το αντιπαράδειγμα χρησιμοποιείται και σε άλλα επιστημονικά πεδία όπως οι Φυσικές επιστήμες, οι Κοινωνικές επιστήμες, η Λογική και η Φιλοσοφία ενώ στην ψυχολογία έχει μελετηθεί ο τρόπος που οι άνθρωποι καταλήγουν σε μία έννοια μέσα από αντιπαραδείγματα.

2.7 Κατηγορίες αντιπαραδειγμάτων

Ορισμένοι ερευνητές έχουν καταλήξει σε διαφορετικούς τύπους κατηγοριών για να προσδιορίσουν τα αντιπαραδείγματα. Αυτές οι κατηγορίες βοηθούν να αποδειχθεί, αν τα αντιπαραδείγματα των μαθητών αρκούν για να αντικρούσουν τις ψευδείς προτάσεις και ποιες είναι οι πιθανές δυσκολίες που μπορούν να αντιμετωπίζουν οι μαθητές (Peled & Zaslavsky 1997;Zaslavsky & Ron 1998). O Lakatos διακρίνει τα αντιπαραδείγματα σε καθολικά και τοπικά ανάλογα με το μέγεθος και την έκταση της ισχύς που εμπεριέχουν για τη ριζική ή τοπική ανασκευή μιας εικασίας. Οι Peled & Zaslavsky (1997) διαχωρίζουν τα αντιπαραδείγματα σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο που τα χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, ανάλογα με το βαθμό γενικότητας που εμφανίζουν και ανάλογα με τη δομή τους σε **γενικά**, **ειδικά (συγκεκριμένα) και ημιγενικά**

Τα **γενικά αντιπαραδείγματα** είναι τα αντιπαραδείγματα που εξηγούν και δίνουν πληροφορίες γιατί ένας ισχυρισμός δεν είναι αληθής και δείχνουν τις στρατηγικές και τους τρόπους που μπορεί να δημιουργηθεί μια κλάση αντιπαραδειγμάτων για αυτό τον ισχυρισμό. Δηλαδή παρέχουν όλα τα επιχειρήματα που αποδεικνύουν ότι μια εικασία είναι ψευδής και προτείνει κατά κάποιο τρόπο μια γενική μέθοδο κατασκευής και άλλων σχετικών αντιπαραδειγμάτων.

Οι μαθητές που έχουν ασχοληθεί με την κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων που πληρούν ορισμένους περιορισμούς και έχουν υιοθετήσει μια εποικοδομητική άποψη της μαθηματικής σκέψης και της επίλυσης προβλημάτων θα έχουν πολύ πιο πλούσια παραδείγματα από τους συμμαθητές τους που βλέπουν τα μαθηματικά ως μια συλλογή διαδικασιών και είναι σε καλύτερη θέση να κάνουν αποτελεσματική χρήση των μαθηματικών στο δικό τους θέμα. Οι μαθητές που έχουν εργαστεί στις προϋποθέσεις – συνθήκες των θεωρημάτων για να ανακαλύψουν τι είναι σημαντικό για το θεώρημα, δηλαδή, γιατί περιλαμβάνονται οι συνθήκες, είναι πιθανότερο να ελέγξουν τις συνθήκες πριν εφαρμόσουν θεωρήματα και χρησιμοποιώντας τεχνικές.

Ειδικά αντιπαραδείγματα θεωρούνται τα αντιπαραδείγματα που αντικρούουν τον ισχυρισμό και έρχονται σε αντίθεση με την ορθότητα της πρότασης. Δεν δίνουν όμως καμιά πληροφορία ούτε για τον τρόπο κατασκευής τους και καμία ένδειξη ως προς τον τρόπο κατασκευής παρόμοιων ή σχετικών αντιπαραδειγμάτων της πρότασης αυτής.

Ημιγενικά αντιπαραδείγματα χαρακτηρίζονται αυτά που παρέχουν κάποια πληροφορία για το πώς κάποιος μπορεί να δημιουργήσει παρόμοια ή συναφή αντιπαραδείγματα, αλλά δεν παράγουν ολόκληρο τον χώρο των αντιπαραδειγμάτων. Δηλαδή βοηθά στη δημιουργία άλλων παρόμοιων ή σχετικών αντιπαραδειγμάτων για την πρόταση αυτή αλλά δεν καλύπτει όλες τις δυνατές μορφές τους.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ είναι ειδικό αντιπαράδειγμα συνεχούς συνάρτησης αφού είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \alpha, & x \in Q \\ \beta, & x \notin Q \end{cases}$ είναι ένα ημιγενικό αντιπαράδειγμα συνεχούς συνάρτησης αφού για τις διάφορες τιμές των $\alpha \neq \beta$ παίρνουμε άπειρα αντιπαραδείγματα με τη ζητούμενη ιδιότητα που όμως δεν καλύπτει όλη την κλάση αντιπαραδειγμάτων.

Ο προτασιακός τύπο $(x-1)^2>0$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x και έχει μοναδικό αντιπαράδειγμα το x=1. Υπάρχουν προτάσεις που διαθέτουν άπειρα αντιπαραδείγματα, όπως: για κάθε x∈R ισχύει x>1 που έχει άπειρα αντιπαραδείγματα, τους αριθμούς x με x≤ 1.

2.8 Αντιπαράδειγμα και γνωστική σύγκρουση

Ο όρος εννοιολογική αλλαγή χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει «το είδος της μάθησης που απαιτείται όταν οι νέες πληροφορίες που πρέπει να μάθουμε έρχονται σε σύγκρουση με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών που αποκτήθηκαν συνήθως με βάση τις καθημερινές εμπειρίες» (Vosniadou & Verschaffel,2004). Σύμφωνα με τους Zazkis & Chernoff (2008), η προοπτική στην έννοια της εννοιολογικής αλλαγής υπογραμμίζει τη σημασία μιας γνωστικής σύγκρουσης μεταξύ της πληροφορίας και της εμπειρίας. Ωστόσο, οι πληροφορίες δεν πρέπει να είναι «νέες», αλλά «πρόσφατα συνειδητοποιημένες» και η εμπειρία μπορεί να προέρχεται από προηγούμενες ευκαιρίες μάθησης.

Η γνωστική σύγκρουση επέρχεται όταν ένας μαθητής αντιμετωπίζει αντιφάσεις ή ασυνέπεια στις ιδέες του. Σύμφωνα με τον Ernest (1996) η χρήση τεχνικών γνωστικών συγκρούσεων λειτουργεί ως μια επιθυμητή παιδαγωγική στρατηγική για την αντιμετώπιση παρανοήσεων. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να προβληματίσουν τη δική τους σκέψη και μέσω αυτής της σύγκρουσης αναπτύσσουν τις δικές τους έννοιες ή τουλάχιστον προσπαθούν να διορθώσουν τη σύγκρουση. Σήμερα μέσα από τις έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης έγινε κατανοητό ότι τα λάθη των μαθητών έχουν σαφείς και συγκεκριμένες αιτίες και αποτελούν ευκαιρίες για βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Η διδασκαλία με εργαλείο το αντιπαράδειγμα έγινε θέμα αρκετών ερευνών για τη γνωστική σύγκρουση που προκαλείται από αυτό. (Klymchuk 2001;Peled & Zaslavsky 1997;Zaslavsky & Ron 1998). Ο τελικός στόχος της διδασκαλίας είναι το αντιπαράδειγμα όχι μόνο να προκαλεί μια γνωστική σύγκρουση αλλά και να την επιλύει. Η νέα γνώση αναδομεί την ήδη υπάρχουσα γνώση γνωστή ως επιστημολογικό εμπόδιο και τις εγκατεστημένες δομές στη σκέψη των μαθητών. Έτσι δομείται η νέα γνώση και όπως λέει ο Kline «Τα μαθηματικά μεγαλώνουν σαν το δέντρο. Όσο αναπτύσσεται ο κορμός, τα κλαδιά και τα φύλλα, τόσο πιο βαθιά εισχωρούν και οι ρίζες στο έδαφος. Ο Bachelard (1983) αναφέρθηκε για πρώτη φορά στην έννοια του επιστημολογικού εμποδίου και αργότερα ο Brousseau του προσδίδει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Το επιστημολογικό εμπόδιο είναι μια σταθερή γνώση και η απόρριψη της στοιχίζει στους μαθητές περισσότερο από μια προσπάθεια προσαρμογής της σε καταστάσεις που ξεφεύγουν από το πεδίο εγκυρότητάς της. (Θωμαΐδης & Καστάνης,1987). Συνεχίζοντας ο Brousseau (1983) αναφέρει ότι το **επιστημολογικό εμπόδιο** μπορεί να ξεπεραστεί μόνο σε ειδικές καταστάσεις απόρριψης, τις διδακτικές καταστάσεις, και αυτή η απόρριψη είναι συστατικό στοιχείο της νέας γνώσης (Γαγάτσης,1992). Συνεπώς, ένας επιπλέον ρόλος λοιπόν των αντιπαραδειγμάτων είναι η αλλαγή του νου καθώς μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπροσαρμόσουν τις αντιλήψεις τους ή τις πεποιθήσεις τους για τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων.

Οι Zazkis & Chernoff (2008) εστιάζοντας ιδιαίτερα στον παιδαγωγικό ρόλο των αντιπαραδειγμάτων και στην πειστική τους δύναμη για να προκαλέσουν όχι μόνο γνωστική σύγκρουση αλλά και να την επιλύσουν εισάγουν τις έννοιες του **παραδείγματος μεταστροφής** και του **παραδείγματος γεφύρωσης.**

Το **παράδειγμα μεταστροφής** είναι το αντιπαράδειγμα που δημιουργεί ένα σημείο μεταστροφής στη γνωστική αντίληψη των μαθητών βοηθώντας το μαθητή να επιτύχει μια εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou & Verschaffel,2004).

Το **παράδειγμα γεφύρωσης** είναι το αντιπαράδειγμα που βοηθά στην επίλυση της γνωστικής σύγκρουσης λειτουργώντας ως γέφυρα μεταξύ της αρχικής (ελλιπούς ή λανθασμένης) αντίληψης και της τελικής (σωστής) μαθηματικής αντίληψης.

Η χρήση επίλεκτων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, μπορεί να ελαττώσει σημαντικό μέρος της ισχύος σε συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια που παρουσιάζονται κατά την διδασκαλία. Θεωρείται, ότι ο βασικότερος ρόλος ενός δασκάλου των μαθηματικών, είναι να δημιουργεί, να εφευρίσκει και να ανακαλύπτει καταστάσεις που να ευνοούν την «σύγκρουση γνώσεων». Παλαιότερες εδραίες και πρωταρχικές γνώσεις που θεωρούνται «κοινές» και συνήθως έχουν καθιερωθεί και με την βοήθεια των αισθήσεων, συγκρούονται με την νέα γνώση που παράγεται με σκέψη και συλλογισμό. Σε αυτή την διαδικασία το αντιπαράδειγμα κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Για παράδειγμα, οι μαθητές γνωρίζουν την πανάρχαια προφανή «κοινή έννοια» στον Ευκλείδη ότι «το όλον, μείζον του μέρους εστί». Έτσι, δεν έχουν κανένα πρόβλημα να παραδεχθούν ότι $x > \frac{1}{2}x$ για κάθε x. Οι ίδιοι μαθητές, παραλλήλως, γνωρίζουν πολύ καλά ότι -2>-4. Εδώ το αντιπαράδειγμα που θα προκαλέσει την γνωστική σύγκρουση, συνίσταται στην εξεύρεση λύσης στην ανίσωση $x<\frac{1}{2}x$, η οποία αληθεύει για κάθε αρνητικό αριθμό.

Να επισημάνουμε όμως, ότι σύμφωνα με την γνώμη πολλών ερευνητών, μόνο η παράθεση του αντιπαραδείγματος δεν αρκεί για να προκαλέσει την γνωστική σύγκρουση. Ό εκπαιδευτικός πρέπει να γνωρίζει τα λάθη των μαθητών και τυχόν παρανοήσεις που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία των εννοιών, ώστε να επιλέξει τα κατάλληλα αντιπαραδείγματα που θα προκαλέσουν την γνωστική ρήξη στο κατάλληλο πλαίσιο. Το αντιπαράδειγμα κατά την διαδικασία ελέγχου της ισχύος ενός ισχυρισμού πρέπει να επιφέρει πιθανή γνωστική σύγκρουση με τις ήδη διαμορφωμένες γνώσεις των μαθητών (Klymchuk 2001;Peled & Zaslavsky 1997). Οι εκπαιδευόμενοι μπορεί να έχουν αντιφατικές ιδέες χωρίς να αντιμετωπίζουν ή να αναγνωρίζουν μια σύγκρουση. Ως εκ τούτου, ένα αντιπαράδειγμα, όταν παρουσιάζεται σε έναν μαθητή, μπορεί να μην δημιουργήσει μια γνωστική σύγκρουση, μπορεί απλώς να απορριφθεί ή να αντιμετωπιστεί ως εξαίρεση. Μπορεί να χρειαστεί ένα βασικό παράδειγμα. Ένα παράδειγμα είναι ζωτικής σημασίας για έναν εκπαιδευόμενο εάν δημιουργεί ένα σημείο καμπής στη γνωστική αντίληψη του εκπαιδευόμενου ή στις προσεγγίσεις επίλυσης προβλημάτων του. Τέτοια παραδείγματα ενδέχεται να εισάγουν μια σύγκρουση ή να την επιλύσουν. Επομένως βασικά παραδείγματα είναι παραδείγματα που βοηθούν τους εκπαιδευόμενους να επιτύχουν αυτό που αποκαλείται «εννοιολογική αλλαγή» (Tirosh & Tsamir 2004; Vosniadou & Verschaffel 2004).

Ωστόσο, τα αντιπαραδείγματα μπορεί να μην είναι επαρκή σε μια επίλυση συγκρούσεων, η οποία είναι και ο τελικός στόχος της διδασκαλίας. Για αυτό οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αναζητήσουν στρατηγικά παραδείγματα. Αν ο εκπαιδευτικός ωθήσει τους μαθητές σε ψευδείς εικασίες τότε η εποικοδομητική συζήτηση που θα προκύψει θα οδηγήσει το μαθητή μέσω του αντιπαραδείγματος σε μία γνωστική σύγκρουση που θα άρει αυτές τις τυχόν παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές. Η διδασκαλία μέσω του αντιπαραδείγματος απαιτεί προσεκτικό διδακτικό σχεδιασμό για την επίκληση της γνωστική σύγκρουσης αλλά και της επίλυσης της.

Οι Swedosh & Clark (1997) χρησιμοποίησαν συγκρούσεις στη μέθοδο παρέμβασης τους, για να βοηθήσουν προπτυχιακούς φοιτητές να εξαλείψουν τις παρανοήσεις τους. Η μέθοδος ουσιαστικά περιελάμβανε παραδείγματα για τα οποία η εσφαλμένη αντίληψη θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι οδήγησε σε παραπλανητικό συμπέρασμα και έχοντας δημιουργήσει μια σύγκρουση στα μυαλά των μαθητών, διδάχθηκε η σωστή έννοια. Ο κύριος στόχος της μελέτης των Gruenwald & Klymchuk (2003) ήταν να ελέγξει την αποτελεσματικότητα της χρήσης αντιπαραδειγμάτων σε μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, εξαλείφοντας τις παρερμηνείες των μαθητών και την ανάπτυξη δημιουργικού περιβάλλοντος μάθησης στη διδασκαλία του διαφορικού λογισμού. Το θεωρητικό πλαίσιο αυτής της μελέτης βασίστηκε στην έννοια της γνωστικής σύγκρουσης του Piaget.

2.9 Γιατί να δουλέψει κανείς με το αντιπαράδειγμα

Οι Watson & Mason (2006) ενθαρρύνουνε τους μαθητές να εργαστούν με τα αντιπαραδείγματα για τους ακόλουθους σκοπούς:

- **Για βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση.**

Πολλοί μαθητές έχουν συνηθίσει να επικεντρώνονται σε τεχνικές και γνωστές μαθηματικές διαδικασίες, συχνά υπό τη καθοδήγηση των καθηγητών τους. Δεν δίνουν μεγάλη προσοχή σε ορισμούς, έννοιες, συνθήκες των θεωρημάτων, στις ιδιότητες των συναρτήσεων και στην αιτιολόγηση των αποδεικτικών μεθόδων. Όταν οι σπουδαστές καλούνται να εφαρμόσουν ένα θεώρημα ή μια τεχνική, συχνά αποτυγχάνουν να ελέγξουν ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή τους. Αυτό μάλλον συμβαίνει συνήθως, επειδή απλώς δεν σκέφτονται, επειδή δεν χρησιμοποιούν σωστά τη χρήση κατάλληλων ορισμών, ιδιοτήτων ή δεν αναγνωρίζουν το ρόλο τέτοιων συνθηκών. Μια πρόσφατη μελέτη περίπτωσης που έγινε στη Νέα Ζηλανδία (Klymchuk,2005) έδειξε ότι η χρήση του αντιπαραδείγματος στη διδασκαλία θα μπορούσε να συμβάλει σημαντικά στη βελτίωση της απόδοσης των μαθητών σε δοκιμαστικές ερωτήσεις που απαιτούσαν εννοιολογική κατανόηση. Εστιάζοντας την προσοχή τους στις συνθήκες των θεωρημάτων οι φοιτητές μηχανικών εκπαιδεύονται να εξετάζουν τις ακραίες συνθήκες στις οποίες υποβάλλονται οι νέες συσκευές και συνεπώς τα νέα αεροσκάφη σχεδιάζονται για να πετούν σε καταιγίδες και αναταράξεις και όχι μόνο σε ιδανικές καιρικές συνθήκες.

- **Για την μείωση και την εξάλειψη των παρανοήσεων**

Τα τελευταία χρόνια, η παραδοσιακή προσέγγιση στην διδασκαλία του Λογισμού που είναι η διατύπωση ορισμού, θεωρήματος, η παρουσίασης της απόδειξης και παραδείγματος εφαρμογής έχει ελαχιστοποιηθεί λόγω της εκτεταμένης χρήσης της τεχνολογίας. Οι σπουδαστές συνηθίζουν να βασίζονται στην τεχνολογία και μερικές φορές στερούνται λογικής σκέψης και εννοιολογικής κατανόησης. Μερικές φορές τα μαθήματα Λογισμού διδάσκονται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ξεχωριστά. Οι δύσκολες περιπτώσεις αποφεύγονται και οι μαθητές εκτίθενται μόνο σε «συμπαθητικές» συναρτήσεις και «καλά» παραδείγματα, ειδικά σε επίπεδο σχολείου. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να δημιουργήσει πολλές παρανοήσεις που μπορούν να εξηγηθούν από την αρχή της γενικής επέκτασης του Tall: «Εάν ένα άτομο εργάζεται σε ένα περιορισμένο πλαίσιο στο οποίο όλα τα παραδοθέντα παραδείγματα έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, τότε, αν δεν υπάρχουν αντιπαραδείγματα, γνωστές ιδιότητες παραμένουν σιωπηρές σε άλλα περιβάλλοντα» (Tall,1991).

- **Για την προώθηση της μαθηματικής σκέψης**

Η δημιουργία παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων δεν είναι ούτε αλγοριθμική ούτε διαδικαστική. Μπορεί να απαιτεί προηγμένη μαθηματική σκέψη, η οποία σπάνια εξασκείται στο σχολείο. Σύμφωνα με τους Selden & Selden (1998) «Η προσέγγιση με τα παραδείγματα απαιτεί διαφορετικές γνωστικές δεξιότητες από την εκτέλεση αλγορίθμων αφού είναι απαραίτητο να αλλάξουμε την προοπτική και να δούμε τα μαθηματικά από την άποψη των ιδιοτήτων τους. Αρχικά, το να ζητήσουμε ένα αντιπαράδειγμα από τους μαθητές, μπορεί να είναι απαιτητικό, αν οι μαθητές δεν έχουν εκτεθεί σε παράδειγμα κατασκευής». Η πρακτική στην κατασκευή των δικών τους παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να ενισχύσουν τη δημιουργικότητά τους και να προωθήσουν τη μαθηματική σκέψη τους.

- **Για τη βελτίωση γενικών δεξιοτήτων κριτικής σκέψης**

Η δημιουργία αντιπαραδειγμάτων σε λανθασμένες προτάσεις έχει ένα μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με την κατασκευή παραδειγμάτων των συναρτήσεων που πληρούν ορισμένες προϋποθέσεις, διότι τα αντιπαραδείγματα αφορούν την αντίρρηση, την αιτιολόγηση, την επιχειρηματολογία, τη συλλογιστική και την κριτική σκέψη, που είναι η ουσία της μαθηματικής σκέψης. Πολλοί μαθητές ανέφεραν ότι η δημιουργία αντιπαραδειγμάτων ήταν στενά συνδεδεμένη με την ενίσχυση των δεξιοτήτων κριτικής σκέψης τους. Η δημιουργία αντιπαραδειγμάτων μπορεί να δώσει στους μαθητές να οικοδομήσουν έννοιες, να τους βοηθήσει (τους μαθητές) να κατανοήσουν ορισμούς ή ισχυρισμούς, να παρέχει τα αποδεικτικά στοιχεία για το αν ένας ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής. Επίσης να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν γιατί ισχύει ένας ισχυρισμός και να χρησιμεύσουν ως βάση για την κατασκευή μιας επίσημης απόδειξης. Αυτές οι δεξιότητες θα ωφελήσουν τους μαθητές μακροπρόθεσμα όχι μόνο στην πανεπιστημιακή τους μελέτη αλλά και σε άλλους τομείς της ζωής.

- **Για την επέκταση του «χώρου παραδειγμάτων»**

Αφού δημιουργήσουν ή εξασκηθούν σε πολλές συναρτήσεις με ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι μαθητές επεκτείνουν το «παράδειγμα του χώρου» τους, αξιοποιώντας καλύτερα τις ιδέες τους στα μαθηματικά και στις πρακτικές εφαρμογές. Κατά τη δημιουργία αντιπαραδειγμάτων, οι μαθητές μαθαίνουν πολλά για τη συμπεριφορά των συναρτήσεων και μπορούν αργότερα να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους στην επίλυση προβλημάτων πραγματικής ζωής. Όπως επισήμανε ο Henry Pollak από τις Bell Laboratories στις ΗΠΑ, «Η κοινωνία παρέχει χρόνο στα μαθηματικά να διδάσκονται στα σχολεία, τα κολέγια και τα πανεπιστήμια όχι επειδή τα μαθηματικά είναι όμορφα, τα οποία είναι, ή διότι παρέχουν μεγάλη κατάρτιση για το μυαλό, αλλά επειδή είναι τόσο χρήσιμα».

- **Για μια εκμάθηση πιο ενεργή και πιο δημιουργική**

Η εμπειρία των καθηγητών Μαθηματικών έδειξαν ότι η χρήση αντιπαραδειγμάτων ως παιδαγωγική στρατηγική σε διαλέξεις μπορεί να δημιουργήσει κίνητρα στους μαθητές για ανακάλυψη και να κάνει την μάθηση πιο ενεργή. Μια πρόσφατη διεθνής μελέτη με περισσότερους από 600 φοιτητές από 10 πανεπιστήμια σε διάφορες χώρες των Gruenwald & Klymchuk (2003) έδειξε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των συμμετεχόντων φοιτητών (92%) διαπίστωσε ότι η χρήση αντιπαραδειγμάτων είναι πολύ αποτελεσματική. Συγκεκριμένα, ανέφεραν ότι τους βοήθησε να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες, να προλάβουν τα λάθη, να αναπτύξουν λογική και κριτική σκέψη και να συμμετάσχουν πιο ενεργά σε διαλέξεις.

➢ **Για την αξιολόγηση των μαθητών**

Οι Gruenwald & Klymchuk (2003) προτείνουν τη χρήση του αντιπαραδείγματος ως παιδαγωγική στρατηγική στους συναδέλφους τους για να την δοκιμάσουν στους μαθητές τους. Δηλαδή, δίνοντας στους μαθητές ένα μείγμα ορθών και εσφαλμένων προτάσεων, κάνοντας ένα σκόπιμο λάθος κατά τη διδασκαλία, ζητώντας από τους μαθητές να εντοπίσουν ένα σφάλμα σε μία συγκεκριμένη σελίδα του εγχειριδίου ή δίνοντας στους μαθητές μπόνους στη βαθμολογία φοιτητές για την παροχή εξαιρετικών αντιπαραδειγμάτων σε δύσκολες ερωτήσεις κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Τα αντιπαραδείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την αξιολόγηση των μαθητών.

2.10 Χρήσιμες στρατηγικές στη διδασκαλία του αντιπαραδείγματος

Οι Watson & Mason (2010) περιγράφουν στρατηγικές που πρέπει να ακολουθούνται κατά τη διδασκαλία του αντιπαραδείγματος οι οποίες έχουν διπλό σκοπό. Αρχικά, είναι χρήσιμες για να προσελκύσουν τους μαθητές να εμβαθύνουν με τα θεωρήματα και τις τεχνικές που πρέπει να αντιμετωπίσουν, καθώς και τις βασικές έννοιες και τους ορισμούς. Έπειτα, να φωτίζουν τις παρερμηνείες των εκπαιδευομένων, τους ακατάλληλους περιορισμούς και τις υποθέσεις. Αφαίρεση ή προσαρμογή ενός περιορισμού σε μια πρόταση και η εξεύρεση αντιπαραδείγματος στην αναθεωρημένη πρόταση, εμπλουτίζει την εκτίμηση του ρόλου του περιορισμού και αναγκάζει τους εκπαιδευόμενους να εξετάσουν τον ρόλο αυτό με περισσότερη λεπτομέρεια. Όταν οι μαθητές αναζητούν ένα παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα που ικανοποιεί αρκετούς περιορισμούς, είναι συχνά χρήσιμο να ξεκινήσουν χωρίς περιορισμούς και να προσπαθήσουν να αποκτήσουν μια αίσθηση της πιο γενικής κατηγορίας αντικειμένων που εξετάζονται. Περιορισμοί μπορούν να προστεθούν διαδοχικά, αναζητώντας την πιο γενική κατηγορία παραδειγμάτων που πληρούν ένα σύνολο συνθηκών πριν συμπεριλάβουμε τον επόμενο περιορισμό.

Η επέκταση ενός ή δύο παραδειγμάτων σε κατηγορίες παραδειγμάτων επεκτείνει την εκτίμηση των μαθητών για το σκοπό και τη σημασία του αντιπαραδείγματος.

Είναι πολύ χρήσιμο να προσέξουμε τις διαστάσεις πιθανής παραλλαγής (Watson & Mason,2005): Τι μπορεί να μεταβληθεί και το αντικείμενο εξακολουθεί να παραμένει ένα παράδειγμα; Επιπλέον, με κάθε πτυχή που μπορεί να μεταβληθεί, λαμβάνοντας υπόψη το εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής συχνά αποκαλύπτει ότι οι εκπαιδευόμενοι έχουν πολύ περιορισμένη αίσθηση επιτρεπτής αλλαγής. Ξεκινώντας από ένα μαθηματικό αντικείμενο (σε αυτή την περίπτωση πιθανώς μια συνάρτηση), οι μαθητές μπορούν να κληθούν να βρουν όσα θεωρήματα το απεικονίζουν. Μπορούν επίσης να κατασκευάσουν μερικές «εικασίες» που οι άλλοι μπορεί να θεωρούν αληθείς. Καθώς οι μαθητές αρχίζουν να βλέπουν μαθηματικά λειτουργούν όχι ως απομονωμένα αντικείμενα αλλά ως εκπρόσωποι των τάξεων, η εκτίμησή τους για τα θεωρήματα βελτιώνεται. Ζητώντας από τους μαθητές να περιγράψουν, ακόμη και να χαρακτηρίσουν όλα τα άλλα παραδείγματα (αντιπαραδείγματα) όπως αυτά που δίνονται, είναι ένας άλλος τρόπος να τους ζητήσουμε να εξετάσουν τι μπορεί να τροποποιηθεί ή να μεταβληθεί και σε ποιο βαθμό και διατηρεί ακόμα την ιδιότητα να αποτελεί παράδειγμα (ή αντί-παράδειγμα). Όπως υπογράμμισε ο Papert (1993), η γαλλική έννοια του bricolage, αποτελεί κεντρικό στοιχείο της εμπειρίας και προσφέρει σημαντική συμβολή στη μάθηση. Το να ζητά κανείς από τους μαθητές ποια ελάχιστη αλλαγή μπορεί να γίνει σε ένα παράδειγμα, για να το καταστήσει αντιπαράδειγμα, δεν επεκτείνει μόνο την εκτίμηση των μαθητών για τις σχετικές συνθήκες και τους περιορισμούς αλλά συμβάλλει επίσης στην αίσθηση ότι έχουν τη δύναμη να αλλάξουν. Αυτό, με τη σειρά του, εμπλουτίζει όλη την αίσθηση του παραδείγματος του χώρου (Papert,1993).

Κάθε γενιά καθηγητών ξαναρχίζει τη συζήτηση μεταξύ εκείνων που τάσσονται υπέρ της διατήρησης των πραγμάτων όσο το δυνατόν απλούστερων για τους μαθητές ώστε να μην τους οδηγούν σε σύγχυση ή να τους κατακλύζουν και εκείνων που τάσσονται υπέρ της έκθεσής τους σε «παθολογικά παραδείγματα» που θα μπορούσαν να επεκτείνουν και να εμπλουτίσουν την ευαισθητοποίησή τους στο πεδίο των ορισμών, των θεωρημάτων και των τεχνικών. Όταν συζητάμε για το αν θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε μια πρόταση ή να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα, ο Polya (1962) προτείνει μια προσέγγιση δύο επιπέδων: Ένα καλό σχέδιο (όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα) είναι να εργαστούμε εναλλάξ και προς τις δύο κατευθύνσεις. Έτσι, μαθαίνοντας από την εργασία μας και προς τις δύο κατευθύνσεις έρχεται η επίτευξη του στόχου.

Κεφάλαιο 3

Έρευνα στην ικανότητα αναπαραγωγής αντιπαραδειγμάτων

3.1 Σημασία αντιπαραδείγματος

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο υποκεφάλαιο(2.9), η διδακτική εμπειρία έχει δείξει ότι η χρήση αντιπαραδειγμάτων ενισχύει την ανακάλυψη, κάνει την εκμάθηση πιο ενεργή και δημιουργική και οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Σε μια έρευνα των Gruenwald & Klymchuk (2003), στην οποία συμμετείχαν 600 φοιτητές από 10 πανεπιστήμια σε διάφορες χώρες, το 92% των συμμετεχόντων βρήκε ότι η χρήση των αντιπαραδειγμάτων είναι πολύ αποτελεσματική. Οι φοιτητές διαπίστωσαν ότι τους βοήθησε να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες, να αποφύγουν τα λάθη, να αναπτύξουν λογική και κριτική σκέψη και έκανε τη μάθηση των μαθηματικών πιο προκλητική, ενδιαφέρουσα και δημιουργική. Μια άλλη έρευνα του Klymchuk (2005), έδειξε ότι η χρήση αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία βελτίωσε την απόδοση των φοιτητών σε μαθηματικά αντικείμενα που απαιτούσαν εννοιολογική κατανόηση.

Οι Dahlberg & Housman (1997) στην έρευνα τους υποστηρίζουν ότι η χρήση του παραδείγματος, ιδίως η παραγωγή και η επαλήθευση, είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση μιας νέας έννοιας. Στο πλαίσιο της έρευνας αυτής συμμετείχαν προπτυχιακοί φοιτητές μαθηματικών στους οποίους δόθηκε ένας τυπικός γραπτός ορισμός και παρατηρήθηκαν οι τεχνικές και τα ερεθίσματα που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να φτάσουν στην κατανόηση του ορισμού. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη δημιουργία παραδειγμάτων ως αναπόσπαστο μέρος της μαθησιακής τους στρατηγικής, είχαν πληρέστερη κατανόηση της υπό εξέταση έννοιας. Εν γένει, όταν οι εκπαιδευόμενοι καλούνται να δημιουργήσουν τα δικά τους παραδείγματα, βιώνουν την ανακάλυψη, την κατασκευή ή αναδιατύπωση ενός χώρου αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Η δημιουργία ενός παραδείγματος δεν είναι ένα απλό έργο και πολλές φορές απαιτεί δημιουργία εννοιολογικών δεσμών μεταξύ των εννοιών (Hazzan & Zazkis, 1999). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές συνήθως παράγουν αντιπαραδείγματα έχει παραδοσιακά συνδεθεί με ψευδείς εικασίες (Bills et al.,2006) ή με παραδείγματα στη διαδικασία της απόδειξης (Zaslavsky & Ron,1998). Μπορεί να είναι δύσκολο για τους μαθητές που δεν έχουν εξασκηθεί στη κατασκευή παραδειγμάτων να τα καταφέρουν, καθώς χρειάζονται διαφορετικές γνωστικές δεξιότητες και προηγμένη μαθηματική σκέψη (Selden & Selden,1998). Επομένως, όταν οι μαθητές παράγουν τις δικές τους αναπαραστάσεις, ερωτήσεις και προβλήματα, διερευνούν και αποκρυσταλλώνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις σε μεγαλύτερο βάθος, από ότι όταν τους δοθεί έτοιμη η γνώση. Για να πετύχουν οι μαθητές την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, να τις χρησιμοποιούν και να τις αναπαράγουν, πρέπει να είναι ικανοί να κατασκευάζουν τα δικά τους αντιπαραδείγματα (Watson & Mason,2005) και να μην τα δέχονται παθητικά. Η ενεργός συμμετοχή του μαθητή κατά τη διδασκαλία του αντιπαραδείγματος ενισχύει τη μάθηση και οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα, σε αντίθεση με μια παθητική στάση του μαθητή απέναντι σε αυτό. Οπότε, η κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές δεν αποτελεί μόνο μια αποτελεσματική στρατηγική για την μεταφορά μαθησιακής πρωτοβουλίας από τον δάσκαλο στον εκπαιδευόμενο αλλά και μια καλή στρατηγική για την κατανόηση της μαθηματικής γνώσης (Zaslavsky 1995; Dahlberg & Housman 1997; Hazzan & Zazkis 1999; Zazkis 2001; Watson & Mason, 2005).

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι Mason & Klymchuk (2009) προτρέπουν τους μαθητές να κατασκευάσουν αντιπαραδείγματα. Μέσα από το βιβλίο τους «Using counter-examples in calculus» προωθούν μια προσέγγιση στη διδασκαλία η οποία ως επίκεντρο της έχει το να κάνουν χρήση οι εκπαιδευόμενοι των δικών τους φυσικών δυνάμεων. Ακόμη και όταν οι μαθητές διδάσκονται λογισμό για καθαρά ρεαλιστικούς σκοπούς, πιστεύουν ότι το ενδιαφέρον και η συμμετοχή τους μπορεί να ενισχυθεί με την εμπλοκή τους στη δραστηριότητα της κατασκευής παραδειγμάτων. Εάν δεν εκτιμούν το πεδίο εφαρμογής και τη σειρά των μαθηματικών αντικειμένων που υποτίθεται ότι μαθαίνουν, τότε δεν είναι σωστά προετοιμασμένοι να χρησιμοποιήσουν τις τεχνικές σε άλλες καταστάσεις. Επίσης, παρακινούν τους εκπαιδευόμενους να κατασκευάσουν όχι μόνο ένα αλλά πολλά παραδείγματα για τον εαυτό τους, προκειμένου να επεκτείνουν και να εμπλουτίσουν τους προσωπικούς τους χώρους παραδειγμάτων και να αναπτύξουν μια πλήρη εκτίμηση των εννοιών, των ορισμών και των τεχνικών που διδάσκονται.

Οι Watson & Mason (2005) ισχυρίζονται ότι τα παραδείγματα που παράγονται από τους εκπαιδευόμενους χρησιμεύουν ως ένα ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο για την ενίσχυση της μάθησης των μαθηματικών σε διάφορα επίπεδα, αλλά και ως ερευνητικό εργαλείο δηλαδή, εξετάζοντας παραδείγματα που παράγονται από τους μαθητές, οι ερευνητές μπορούν να αντλήσουν συμπεράσματα σχετικά με τις γνώσεις τους (τόσο τις γνώσεις του αντικειμένου όσο και τις παιδαγωγικές).

Δεδομένης της μεγάλης σημασίας των αντιπαραδειγμάτων για την επαλήθευση και την επεξήγηση στα μαθηματικά, οι μαθητές και οι φοιτητές έχουν συνειδητοποιήσει το πόσο σημαντικό είναι να παράγουν οι ίδιοι αντιπαραδείγματα αλλά και γενικότερα το ρόλο του αντιπαραδείγματος (Balacheff 1991; Ko & Knuth, 2009; Zaslavsky & Ron 1998).

3.2 Κατανόηση και κατασκευή αντιπαραδείγματος

Η μεγάλη σημασία του αντιπαραδείγματος για την μάθηση οδήγησε στην διεξαγωγή ερευνών κατά καιρούς, για να μελετηθεί τόσο το κατά πόσο οι εκπαιδευόμενοι κατανοούν το αντιπαράδειγμα, όσο και η ευχέρεια παραγωγής αντιπαραδειγμάτων με σκοπό την αποδοχή ή απόρριψη προτάσεων.

Στην έρευνα του ο Lin (2005) μελέτησε τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές για να καταρρίψουν ψευδείς ισχυρισμούς. Πιο συγκεκριμένα ζητήθηκε από 2196 μαθητές να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν έξι προτάσεις (τρεις γεωμετρικές και τρεις αλγεβρικές) αιτιολογώντας την απάντηση τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπήρχαν μαθητές που απέρριψαν έναν ισχυρισμό με υποκειμενικό και όχι αποδεικτικό λόγο, άλλοι μαθητές απέρριψαν έναν ισχυρισμό και ως αιτιολογία διατύπωσαν τη διορθωμένη πρόταση κατά την άποψη τους και άλλοι μαθητές κατέρριψαν τον ισχυρισμό με χρήση αντιπαραδείγματος. Από αυτούς, άλλοι ανέφεραν ότι υπάρχει αντιπαράδειγμα, άλλοι περιέγραψαν μια γενική διαδικασία για την κατασκευή αντιπαραδείγματος, χωρίς όμως να κατασκευάσουν συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα, άλλοι μαθητές έδωσαν αντιπαράδειγμα, χωρίς όμως να αποδείξουν ότι πληροί τις συνθήκες για να είναι αντιπαράδειγμα και άλλοι έδωσαν αντιπαράδειγμα αποδεικνύοντας τις συνθήκες του.

Οι Peled & Zaslavsky (1997) στην έρευνα τους για το αν οι μαθητές μπορούν να παράγουν αντιπαραδείγματα σε προτάσεις που τους δόθηκαν, διαπίστωσαν ότι ορισμένοι συμμετέχοντες παρήγαγαν είτε ένα παράδειγμα το οποίο δεν ικανοποιούσε την προϋπόθεση ως αντιπαράδειγμα ή ένα αντιπαράδειγμα που δεν υπήρχε. Μόνο το 17% των φοιτητών που διαπίστωσαν ότι ήταν ψευδής η πρόταση, έκανε αναφορά σε αντιπαραδείγματα. Επίσης, υπήρχε τουλάχιστον ένα 33% των μαθητών, οι οποίοι δεν ήταν σε θέση να καθορίσουν ότι η πρόταση ήταν λανθασμένη. Φαίνεται ότι για αυτούς τους μαθητές, η απροθυμία χρήσης αντιπαραδειγμάτων εμπόδισε την ικανότητά τους να καθορίσουν σωστά την εγκυρότητα της πρότασης. Μόνο το 10% των μαθητών, χρησιμοποίησε σωστά τα αντιπαραδείγματα σε περισσότερες από μία περιπτώσεις. Τα δύο τρίτα των μαθητών είτε δεν χρησιμοποίησαν σωστά τα αντιπαραδείγματα ή δεν μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν σωστά αντιπαραδείγματα. Εδώ παρατηρείται μια άλλη πτυχή της κατανόησης του ρόλου και της χρήσης των αντιπαραδειγμάτων, η οποία έχει να κάνει με τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα αντιπαράδειγμα. Πολλοί μαθητές που φαίνεται να κατανοούν τον ειδικό ρόλο και την κατάσταση του αντιπαραδείγματος, δεν είναι σε θέση να δημιουργήσουν ένα σωστό αντιπαράδειγμα. Σε μια προσπάθεια να δημιουργήσουν ένα αντιπαράδειγμα, είτε δίνουν ένα παράδειγμα που δεν ικανοποιεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις προκειμένου να χαρακτηριστεί ως αντιπαράδειγμα ή δίνουν ένα παράδειγμα που είναι αδύνατο, δηλαδή, δεν υπάρχει.

Ένα χρόνο αργότερα, οι Zaslavsky & Ron (1998) σε μια νέα έρευνα, εξέτασαν τον βαθμό κατανόησης από τους μαθητές, της αντίληψης του αντιπαραδείγματος αλλά και τους τρόπους που κατασκευάζουν τα αντιπαραδείγματα. Στην έρευνα συμμετείχαν 150 μαθητές και τα συμπεράσματα που προέκυψαν ήταν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη χρήση αντιπαραδειγμάτων και δεν πείθονται ότι ένα αντιπαράδειγμα μπορεί να διαψεύσει έναν ισχυρισμό. Αυτό οφείλεται στον συλλογισμό ότι, αφού ένα παράδειγμα δεν μπορεί να αποδείξει έναν ισχυρισμό, τότε και το αντιπαράδειγμα (που είναι παράδειγμα) δεν μπορεί να αποδείξει την μη ισχύ του ισχυρισμού. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι και μαθητές οι οποίοι γνώριζαν τον ρόλο του αντιπαραδείγματος, δεν μπόρεσαν να δώσουν ένα σωστό αντιπαράδειγμα. Μερικοί μαθητές έδωσαν αντιπαραδείγματα τα οποία δεν υπήρχαν, ενώ άλλοι μαθητές έδωσαν λανθασμένα αντιπαραδείγματα, διότι δεν πληρούσαν τις προϋποθέσεις ώστε να απορριφθούν οι ισχυρισμοί. Σε μια προσπάθεια για να καταλάβουν γιατί συμβαίνει αυτό, εξέτασαν τα βιβλία των μαθηματικών για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα εν λόγω εκπαιδευτικά συγγράμματα δεν δίνουν μεγάλη σημασία στη διευκόλυνση της χρήσης και κατανόησης των αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές. Παρόλα αυτά καταλήγουν στο ότι τα τελευταία χρόνια οι μαθητές ενθαρρύνονται στο να συλλέγουν αποδεικτικά στοιχεία και να δημιουργούν επιχειρήματα με σκοπό να υποστηρίξουν ή να διαψεύσουν εικασίες, ενώ ακόμη επισημαίνουν την ανάγκη εκτίμησης του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων για την ανίχνευση ψευδών μαθηματικών ισχυρισμών και για την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων.

Τη σπουδαιότητα των αντιπαραδειγμάτων στα μαθηματικά και τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να τα παράγουν και να τα κατανοήσουν, δείχνουν και οι έρευνες οι οποίες έχουν επικεντρωθεί ειδικά στις ικανότητες των μαθητών να παράγουν αντιπαραδείγματα στον τομέα των συνεχών συναρτήσεων.

Οι Μανάρας & Μπαρούτης & Χριστοδουλίδης (2018) μελέτησαν την ικανότητα δημιουργίας αντιπαραδείγματος από μαθητές της Γ' Λυκείου της ομάδας Προσανατολισμού Θετικών και Οικονομικών Σπουδών στις Πανελλαδικές εξετάσεις του 2017. Ο ισχυρισμός στον οποίο καλούνταν οι μαθητές να απαντήσουν, αν ήταν δηλαδή αληθής ή ψευδής και να δημιουργήσουν αντιπαράδειγμα ήταν η παρακάτω πρόταση: «Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_0 είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό». Το δείγμα ήταν 1821 μαθητές από περιοχές του Νομού Φθιώτιδας, του Νομού Κορινθίας και από περιοχές των δυτικών βόρειων προαστίων της Αθήνας οι οποίοι φοιτούσαν σε δημόσια ή ιδιωτικά Λύκεια. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το 20,7 % των μαθητών δεν γνώριζαν ότι ο ισχυρισμός ήταν ψευδής και το 15,38% μπόρεσαν να δημιουργήσουν αντιπαράδειγμα και να αιτιολογήσουν γιατί ο ισχυρισμός είναι ψευδής. Μόλις το 3,79 % των μαθητών απάντησαν ότι ο ισχυρισμός ήταν ψευδής, αλλά δεν μπόρεσαν να αιτιολογήσουν πλήρως γιατί είναι ψευδής, ενώ το 60,13% των μαθητών απλά απάντησαν ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής, χωρίς όμως να μπορέσουν να κατασκευάσουν αντιπαράδειγμα.

Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγει και η έρευνα του Ευαγγελόπουλου (2018) ο οποίος παρουσίασε τα ευρήματα της στατιστικής επεξεργασίας της βαθμολογίας των γραπτών εξεταστικών δοκιμίων των Μαθηματικών του 2017, που συγκεντρώθηκαν στο 52ο Βαθμολογικό Κέντρο, σε δείγμα μεγέθους 1758 μαθητών. Αναλυτικά, το 16,75% απάντησε ότι ο ισχυρισμός ήταν ψευδής και έδωσαν σωστά αντιπαράδειγμα δικαιολογώντας τον ισχυρισμό τους. Το 20% των μαθητών απάντησε ότι ο ισχυρισμός ήταν σωστός ενώ το 50% ισχυρίστηκε ότι η πρόταση ήταν λανθασμένη, χωρίς να μπορέσει να δώσει αντιπαράδειγμα. Αν και στο σχολικό εγχειρίδιο υπάρχουν τα αντιπαραδείγματα, εντούτοις τα αποτελέσματα ήταν απογοητευτικά. Από την ίδια έρευνα προκύπτουν επίσης τα εξής συμπεράσματα: Υποψήφιοι με πολύ κακό γραπτό απαντάνε στις ερωτήσεις σωστού λάθους κατά μεγάλη πλειοψηφία σωστά στα ερωτήματα αυτά ή τουλάχιστον στα περισσότερα. Αντίθετα, μαθητές με καλό ή άριστο γραπτό, σε πολλές περιπτώσεις χάνουν κάποιο από αυτά τα ερωτήματα. Τα αποτελέσματα αυτά αναδεικνύουν την χρησιμότητα της ύπαρξης ερώτησης σωστού – λάθους με αιτιολόγηση μέσω αντιπαραδείγματος ως τρόπου αξιολόγησης.

Οι Ko & Knuth (2009) ερεύνησαν την ικανότητα παραγωγής αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις και προσπάθησαν να προσδιορίσουν τον βαθμό κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι οι προπτυχιακοί φοιτητές χρειάζονται επαρκείς γνώσεις σχετικά με την επιλογή αποδεκτών ορισμών και δεδομένων κατά τη δημιουργία αντιπαραδείγματος και πρέπει να δοθεί μεγαλύτερη προσοχή στα αντιπαραδείγματα, καθώς οι συμμετέχοντες έδειξαν δυσκολία στο να δημιουργήσουν κατάλληλα αντιπαραδείγματα.

Οι Tirosh, Hadar & Movshovitz-Hadar (1991) από την μεριά τους επισημαίνουν ότι είναι αρκετά δύσκολο οι μαθητές να παράγουν ένα αντιπαράδειγμα που μπορεί να προκαλέσει μια γνωστική σύγκρουση ώστε να δουλέψει η σκέψη τους και μέσω αυτής της σύγκρουσης να οδηγηθούν στην δημιουργία δικών τους εννοιών ή τουλάχιστον να προσπαθήσουν να επιλύσουν αυτή την σύγκρουση (Ernest,1996). Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει συχνά καθώς προτιμάται να επιλέγονται από τους εκπαιδευτικούς μέθοδοι διδασκαλίας με προσαρμοσμένες περιπτώσεις που δε θα «ζορίσουν» τους μαθητές. Σύμφωνα και με τον Huang (2014), η συμβατική εκπαίδευση του λογισμού δίνει έμφαση μόνο σε «εύκολες» συναρτήσεις και παραδείγματα. Ως εκ τούτου, οι σπουδαστές έχουν συνηθίσει να χρησιμοποιούν οικείες δεξιότητες και να χειρίζονται σύμβολα, παρά να επικεντρώνονται στη συλλογιστική και την επαλήθευση μαθηματικών εννοιών, ορισμών και θεωρημάτων. Αυτός ο τύπος διδακτικού και μαθησιακού προσανατολισμού δημιουργεί παρανοήσεις μεταξύ των μαθητών και μπορεί να εξηγηθεί από την αρχή της γενικής επέκτασης. Σύμφωνα με τον Skemp (1987), για να διαμορφωθεί μια έννοια, απαιτείται μια σειρά από εμπειρίες ή παραδείγματα που έχουν κάτι κοινό.

Το 2001, οι Mason & Watson χρησιμοποίησαν μια μέθοδο των λεγόμενων «οριακών παραδειγμάτων» (boundary examples) και πρότειναν να δημιουργηθούν από τους μαθητές παραδείγματα για να κατανοήσουν τεχνικές, προτάσεις, θεωρήματα και συνθήκες που τα ικανοποιούν. «Όταν οι μαθητές πρόκειται να εφαρμόσουν ένα θεώρημα (ή μια τεχνική), συχνά αποτυγχάνουν να ελέγξουν ότι πληρούνται οι συνθήκες για την εφαρμογή του (της)». Αυτό συμβαίνει γιατί απλά δεν το σκέφτονται και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν χρησιμοποιούν κατάλληλους όρους, σημειώσεις, ιδιότητες ή δεν αναγνωρίζουν το ρόλο τέτοιων συνθηκών. Στην έρευνα τους αποτύπωσαν ότι οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στη μάθηση της δημιουργικής ανακάλυψης η οποία είχε σαν αποτέλεσμα να τονώσει την ανάπτυξη της προηγμένης μαθηματικής σκέψης. Χρησιμοποιώντας και δημιουργώντας αντιπαραδείγματα οι μαθητές επεκτείνουν τον προσωπικό χώρο παραδειγμάτων με αποτέλεσμα να κατανοούν καλύτερα τα εν λόγω μαθηματικά αντικείμενα. Στην ίδια άποψη καταλήγει και ο O'Connor (1998), ο οποίος περιγράφει έναν μαθητή που ενώ δεν μπορούσε να παράγει αντιπαραδείγματα για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα, τα χρησιμοποιούσε με ευχέρεια. Καταλήγοντας, αναφέρει ότι η ανικανότητα ενός μαθητή να επεξηγήσει μια έννοια με παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα, θα μπορούσε να υποδηλώσει έλλειψη εξοικείωσης με τα εμπλεκόμενα μαθηματικά.

Η Yi-Yin Ko (2010) στην έρευνα της αναφέρει ότι οι προπτυχιακοί φοιτητές αν και έχουν διδαχθεί μια σειρά μαθημάτων ανώτατου επιπέδου για να ενισχύσουν τις δεξιότητες που απαιτούνται για την επαλήθευση των εικασιών, καθώς και για να διαβάζουν και να γράφουν αποδείξεις και αντιπαραδείγματα, η βιβλιογραφία δείχνει ότι οι σπουδαστές εξακολουθούν να έχουν σημαντικές δυσκολίες. Στη μελέτη της, εστιάστηκε κυρίως στις διαδικασίες μέσω των οποίων προπτυχιακοί μαθηματικοί:

1. επικύρωσαν δεδομένα επιχειρήματα με σωστές αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα.
2. αξιολόγησαν την αλήθεια ή το αναληθές των προτάσεων και
3. έκαναν μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα, ανάλογα με το αν πίστευαν ότι η πρόταση ήταν αληθής ή ψευδής.

Αυτή η μελέτη επίσης, υποδεικνύει ότι ορισμένοι προπτυχιακοί φοιτητές δε διαθέτουν επαρκείς μαθηματικές γνώσεις σχετικά με την ανάγνωση και τη σύνταξη αποδείξεων και αντιπαραδειγμάτων καθώς επίσης και την κατανόηση του τι αποτελεί απόδειξη και αντιπαράδειγμα. Προβλήματα με την κατανόηση του αντιπαραδείγματος αναφέρονται και στις έρευνες των Balacheff (1991) και Harel & Sowder (1998), οι οποίοι διαπιστώνουν ότι η αποτυχία των μαθητών και φοιτητών να δεχθούν μια απόδειξη ως σωστή με τη χρήση αντιπαραδείγματος, οφείλεται στο γεγονός ότι το αντιλαμβάνονται ως εξαίρεση παρά ως αυστηρό μαθηματικό εργαλείο.

3.3 Ο παράγοντας «Γνώση Μαθηματικών»

Όπως μαρτυρούν τα αποτελέσματα των ερευνών των O'Connor (1998), Mason & Watson (2001) και Yi-Yin Ko (2010) για τα οποία μιλήσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο και αποτυπώνονται και στην έρευνα των Barkai, Tsamir, Tirosh & Dreyfus (2002), πολλοί μαθητές δεν είναι ικανοί να αξιολογήσουν μια συγκεκριμένη πρόταση ως σωστή ή λανθασμένη λόγω της ανεπαρκούς κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου. Οι Gruenwald & Klymchuk (2003) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δεν έχουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση των βασικών θεωρημάτων και μερικές φορές τα παρερμηνεύουν.

Ο Huang (2014) στην έρευνα του είχε ένα ερωτηματολόγιο με τρεις ψευδείς μαθηματικούς ισχυρισμούς. Σε αυτήν συμμετείχαν 112 πρωτοετείς φοιτητές μηχανικής σε ένα πανεπιστήμιο της Ταιβάν οι οποίοι είχαν προηγουμένως ολοκληρώσει μαθήματα με παραγώγους. Οι μαθητές κλήθηκαν να καθορίσουν την εγκυρότητα τριών μαθηματικών ισχυρισμών και να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Οι ισχυρισμοί που δόθηκαν ήταν:

- Αν $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ τότε $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$
- Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (a,b)$τότε $f'(x) > g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$.
- Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $f'(x) > g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$ τότε $f(x) > g(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Το 41% των μαθητών δεν κατάφερε να προσδιορίσει ότι οι τρεις μαθηματικοί ισχυρισμοί ήταν ψευδείς. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν κατανοούν εννοιολογικά τις προτάσεις και βασίζονται στη διαίσθησή τους. Περίπου το 21% των μαθητών χρησιμοποίησαν γραφικές παραστάσεις για τη δημιουργία αντιπαραδειγμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές μπόρεσαν να παράγουν αντιπαραδείγματα πιο εύκολα για τις έννοιες του διαφορικού λογισμού, παρά για τις έννοιες του ολοκληρωτικού λογισμού. Αυτό το εύρημα υποστηρίζει το επιχείρημα των Perkins & Salomon (1989) ότι η ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν αντιπαραδείγματα συνδέεται πολύ με το γνωσιακό πλαίσιο και εξαρτάται από το μαθηματικό περιεχόμενο. Σύμφωνα με τον Huang (2014), τα αντιπαραδείγματα που παράγονται από τους συμμετέχοντες μπορούν να χρησιμεύσουν ως βασικά παραδείγματα ή παραδείγματα γεφύρωσης. Η δυναμική αυτών των παραδειγμάτων αποδεικνύεται επίσης από το γεγονός ότι τείνουν να εντυπωσιάζουν τη μνήμη των μαθητών, λόγω των ιδιότυπων χαρακτηριστικών τους, βοηθώντας έτσι περαιτέρω την μαθησιακή τους διαδικασία. Επομένως, η εκπαίδευση των μαθηματικών πρέπει να επιτρέπει στους μαθητές να κατανοούν τις επαρκείς και αναγκαίες συνθήκες σε λογικές προτάσεις και να τους εξοικειώνει με τη χρήση της λογικής.

Οι Yi-Yin Ko, Eric Knuth (2009) στην έρευνα τους ζήτησαν από τους μαθητές να δημιουργήσουν αντιπαραδείγματα για προτάσεις που πίστευαν ότι ήταν ψευδείς. Διαπίστωσαν ότι για να απαντήσει ένας μαθητής αν ένας μαθηματικός ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένος, πρέπει να έχει μια πλήρη κατανόηση της έννοιας και της σωστής αιτιολόγησης. Οι μαθητές έδειξαν ανεπαρκή κατανόηση των εννοιών του διαφορικού λογισμού καθώς δεν μπορούσαν να δημιουργήσουν κατάλληλα αντιπαραδείγματα για να αντικρούσουν τις ψευδείς μαθηματικές προτάσεις. Δεν κατάφεραν να ελέγξουν εάν πληρούνταν οι προϋποθέσεις των προτάσεων. Προκειμένου να βελτιωθεί η κατανόηση των μαθητών σχετικά με τις έννοιες του διαφορικού λογισμού, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να καταλάβουν τις παρερμηνείες που μπορεί να έχουν οι μαθητές και να αφιερώσουν επιπλέον χρόνο για να επεξηγήσουν τις σχετικές έννοιες.

3.4 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Οι στρατηγικές διδασκαλίας που απαιτούν τη δημιουργία αντιπαραδειγμάτων μπορούν να δώσουν έναν βιώσιμο προσανατολισμό διδασκαλίας. Η δημιουργία παραδειγμάτων από τους μαθητές ενισχύει την μάθηση των μαθηματικών εννοιών και είναι ένα πολύτιμο εργαλείο που αποφέρει τη δική του δυναμική στην εκπαίδευση (Watson & Mason,2005) αλλά μπορεί να είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, τόσο για τους σπουδαστές, όσο και για τους εκπαιδευτικούς (Zaslavsky & Peled,1996). Ο ρόλος ειδικά του τελευταίου είναι καθοριστικής σημασίας, καθώς ένα από τα σημαντικότερα καθήκοντα του διδάσκοντα είναι να βοηθά τους μαθητές του. Αυτό όμως δεν είναι και τόσο εύκολο καθώς απαιτεί χρόνο, κόπο, εξάσκηση, αφοσίωση και σταθερές αρχές (Polya,1988).

Αν ο μαθητής αφεθεί μόνος, χωρίς καθόλου βοήθεια ή ανεπαρκή βοήθεια, είναι πιθανό να μη σημειώσει καμία πρόοδο. Ο δάσκαλος πρέπει να βάλει τον εαυτό του στη θέση του μαθητή και να προσπαθήσει να καταλάβει τι συμβαίνει στο μυαλό του. Ο Polya (1988) θέτει δύο βασικούς κανόνες διδασκαλίας. Ο πρώτος κανόνας είναι ο δάσκαλος να γνωρίζει αυτό που πρόκειται να διδάξει και ο δεύτερος κανόνας να γνωρίζει λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξει, για να μπορέσει να αντεπεξέλθει και να λύσει τις απορίες των μαθητών. Εκτός από έννοιες που αφορούν ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα, ο δάσκαλος οφείλει να φέρει τους μαθητές του σε επαφή με κανόνες της αιτιολόγησης, τα επιχειρήματα και τη βασική ορολογία όπως η υπόθεση, η πρόταση, το θεώρημα και το αξίωμα.

Οι έρευνες των Alcock & Weber (2005), Knuth (2002) και Weber (2010) εστίασαν στις επιδόσεις των ατόμων στην επικύρωση των επιχειρημάτων και ιδιαίτερα στις επιδόσεις των καθηγητών μαθηματικών, οι οποίοι δυσκολεύονταν να δεχθούν δεδομένα επιχειρήματα ως έγκυρη μαθηματική απόδειξη. Μέσα από την έρευνα του ο Weber διαπιστώνει ότι πολλοί από τους εκπαιδευτικούς κατέχουν περιορισμένες απόψεις για τη φύση της απόδειξης στα μαθηματικά και μάλιστα πολλοί από αυτούς κατέδειξαν ανεπαρκή κατανόηση του τι αποτελεί απόδειξη.

Το ίδιο γεγονός παρατηρείται και στη μελέτη των Potari, Zachariades και Zaslavski (2010). Στην έρευνα τους, μελέτησαν τον τρόπο με τον οποίο καθηγητές Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απορρίπτουν εσφαλμένους ισχυρισμούς μαθητών. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν οι διαφορετικοί τύποι επιχειρημάτων που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικοί για την αντιμετώπιση μιας μη έγκυρης αξίωσης στο πλαίσιο της γεωμετρίας. Το 25% των καθηγητών που συμμετείχαν στην έρευνα θεωρούσε ότι η μη εφαρμογή των γνωστών θεωρημάτων στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελούσε απόδειξη ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος, ενώ το 50% που χρησιμοποίησε αντιπαράδειγμα έδωσε λανθασμένο αντιπαράδειγμα καθώς είτε δεν υπήρχε, είτε δεν ικανοποιούσε τις απαιτήσεις για να είναι αντιπαράδειγμα.

Σε άλλη έρευνα εξετάστηκαν 18 καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αποδείχτηκε ότι λίγοι μαθηματικοί εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα αντιπαραδείγματα στην επιχειρηματολογία τους και γενικά υποτιμούν την αξία τους ως μέθοδο αποδείξεως. (Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. 2010)

Μια κεντρική δραστηριότητα στην οποία εμπλέκονται καθηγητές των μαθηματικών στην καθημερινή τους πρακτική είναι η ερμηνεία των απαντήσεων ή των ερωτήσεων των μαθητών και η παροχή μαθηματικών και παιδαγωγικών κατάλληλων απαντήσεων. Συγκεκριμένα, όταν ένας μαθητής κάνει μια άκυρη αξίωση, ο μαθηματικός πρέπει να υποστηρίξει προσφέροντας ένα αντιπαράδειγμα για να πείσει για την ακυρότητα της αξίωσής της και να την βοηθήσει να αναπτύξει μια κατανόηση της μαθηματικής κατάστασης. Ένας αριθμός ερευνητών έχουν μελετήσει τη δομή της επιχειρηματολογίας χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Toulmin (2003). Αυτό το μοντέλο υποστηρίζει ότι τα περισσότερα επιχειρήματα αποτελούνται από έξι βασικά μέρη, καθένα από τα οποία παίζει διαφορετικό ρόλο σε ένα επιχείρημα. Το μοντέλο του Toulmin χρησιμοποιήθηκε πρόσφατα στην εκπαίδευση των μαθηματικών ως εργαλείο για τη μελέτη της μάθησης των μαθητών καθώς προχωρά σε μια τάξη (Krummheuer 2007; Yackel 2001; Yackel & Rasmussen 2002) ή την ποιότητα ενός ορισμένου μαθηματικού επιχειρήματος (Inglis et al. 2007; Pedemonte 2007; Weber & Alcock 2005). Ο Pedemonte (2007) διερεύνησε την ποιότητα εστιάζοντας στη δομική ανάλυση των επιχειρημάτων που προσφέρονται από τους μαθητές σε δύο συγκεκριμένα μαθηματικά προβλήματα. Η ανάλυσή της από το μοντέλο του Toulmin έδειξε ότι υπάρχουν διαρθρωτικές συνέπειες και διαρθρωτικές αποστάσεις μεταξύ των επιχειρημάτων που υποστηρίζουν μια εικασία και της απόδειξής της. Οι Weber και Alcock (2005) χρησιμοποίησαν το σχήμα του Toulmin για να δείξουν ότι κατά την ανάγνωση των μαθηματικών αποδείξεων χρειάζεται να καθοριστεί εάν οι επιπτώσεις είναι δικαιολογημένες. Ο Inglis (2007) επικεντρώθηκε στο ρόλο του προκριματικού στο σχέδιο Toulmin και εντόπισαν τρεις τύπους ενταλμάτων στα επιχειρήματα των μεταπτυχιακών μαθηματικών μαθητών: το επαγωγικό, το δομικό-διαισθητικό και το αφαιρετικό. Στην μελέτη αυτή 18 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συμμετείχαν και οι δάσκαλοι είχαν ένα πρώτο πτυχίο στα μαθηματικά και ήταν μαθητές σε ένα πρόγραμμα μάστερ στην Εκπαίδευση Μαθηματικών. Μερικοί από αυτούς ήταν έμπειροι ενώ άλλοι ήταν αρχάριοι δάσκαλοι. Όσον αφορά το λάθος του μαθητή οι μισοί από τους δασκάλους στήριζαν την επιχειρηματολογία τους στη θεωρία και λιγότερο από το ένα τέταρτο από αυτούς σε αντιπαραδείγματα. Οι περισσότεροι μαθηματικοί στη μελέτη δεν χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα, αλλά προσπάθησαν να αντικρούσουν έναν ισχυρισμό αναπτύσσοντας επιχειρήματα βασισμένα στη θεωρία.

Η γνώση που χρειάζεται να έχουν οι εκπαιδευτικοί για να μπορέσουν να αναπτύξουν σημαντικές μαθηματικές έννοιες μέσα από την κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων αποτελεί αντικείμενο προβληματισμού για τους Ball, Bass, Sleep & Thames (2005), καθώς δεν θα μπορούν να ανταπεξέλθουν στις αναπάντεχες καταστάσεις που προκύπτουν κατά τη διάρκεια του μαθήματος και χρήζουν άμεσης επίλυσης (Mason & Spence,1999), αφού η επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων μπορεί να επηρεάσει θετικά ή αρνητικά την μάθηση. Οπότε ο εκπαιδευτικός όχι μόνο χρειάζεται να έχει καλή γνώση του θέματος που διδάσκει αλλά απαιτείται να έχει κατανοήσει τη σημασία της απόδειξης και των αντιπαραδειγμάτων για να μπορέσει να τα μεταδώσει στους μαθητές.

Παρά τη σπουδαιότητα των διδακτικών και μαθησιακών αποδείξεων και των αντιπαραδειγμάτων, ο Thurston (1994) διαπίστωσε ότι από τη μία οι μαθηματικοί διδάσκουν στους μαθητές τους πώς να κατασκευάζουν αντιπαραδείγματα αλλά από την άλλη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι χρειάζονται πιο αποτελεσματικοί τρόποι διδασκαλίας.

Κεφάλαιο 4

Μεθοδολογία

4.1 Ερευνητικά ερωτήματα – στόχοι έρευνας

Η παρούσα έρευνα μελετάει την ικανότητα των μαθητών στην κατασκευή κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων. Στόχος της έρευνας είναι να διερευνήσει τους τρόπους και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για την επίτευξη του στόχου αυτού. Επιπλέον σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να αξιολογήσει την απόδοση των μαθητών να κατασκευάσουν κατάλληλα αντιπαραδείγματα ώστε να αποδείξουν την ορθότητα ή μη ισχυρισμών και εικασιών που τους δόθηκαν καθώς επίσης και αν η απόδοση των μαθητών εξαρτάται από την επίδοση στα μαθηματικά. Τέλος, θα μελετηθεί αν υπάρχουν συγκεκριμένες ομάδες μαθητών που ανταποκρίνονται στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων.

Για την επίτευξη του στόχου θα πρέπει να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

1. Με ποιους τρόπους οι μαθητές αντιμετωπίζουν προτάσεις που δεν ισχύουν;
2. Ποια είναι η απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων;
3. Επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων από την επίδοση στα μαθηματικά;
4. Υπάρχουν συγκεκριμένες ομάδες μαθητών που ανταποκρίνονται στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων;
5. Οι μαθητές που κατασκεύασαν σωστό αντιπαράδειγμα προτίμησαν το αλγεβρικό ή το γεωμετρικό; Ποια η συχνότητα χρήσης αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές;

Με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα διατυπώνονται παρακάτω οι ερευνητικές υποθέσεις:

- Οι μαθητές αναμένεται να δώσουν αντιπαραδείγματα χωρίς όμως να αιτιολογήσουν πλήρως την απάντηση τους (Ευαγγελόπουλος 2018;Zaslavsky & Ron 1998).
- Η απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων αναμένεται να χαρακτηριστεί μέτρια (Barkai, Tsamir, Tirosh & Dreyfus 2002;Stylianides 2009; Lakatos 1976; Larsen & Zandieh 2008; Seiden & Seiden 2003).

- Λόγω της άμεση σχέσης των μαθηματικών με το αντιπαράδειγμα, οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά αναμένεται να έχουν καλύτερη απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων (Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus 2002; Seiden & Seiden 2003).
- Η μειοψηφία των μαθητών αναμένεται να έχει ικανοποιητική απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων (Peled & Zaslavsky 1997;Perkins & Salomon 1989).
- Οι μαθητές που θα χρησιμοποιήσουν σωστό αντιπαράδειγμα αναμένεται να προτιμήσουν το αλγεβρικό, ενώ γενικότερα αναμένεται να υπάρξει δυσκολία στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων (Alcock & Inglis 2008;Gibson 1998; Goetting 1995; Smith 2006; Lakatos 1976; Larsen & Zandieh 2008; Seiden & Seiden 2003; Hoyles & Kuchemann 2002;Alcock & Weber 2005; Ko & Knuth 2009).

4.2 Σχεδιασμός έρευνας

Η παρούσα έρευνα είναι πρωτογενής ποσοτική, περιγραφική και συσχέτισης, με χρήση ημιδομημένου ερωτηματολογίου. Οι ποσοτικές έρευνες έχουν μεγάλο πλεονέκτημα ότι μπορούν να αποθηκεύσουν μεγάλο όγκο πληροφοριών σε μικρό χρονικό διάστημα τα οποία μετατρέπονται σε δεδομένα και αξιοποιούνται για την εξαγωγή συμπερασμάτων τα οποία είναι αντικειμενικά και δεν υπόκεινται στην υποκειμενική κρίση του ερευνητή (Cohen, Manion & Morrison,2007). Ακόμη, δίνεται η δυνατότητα συσχέτισης μεταβλητών και ελέγχου υποθέσεων προκειμένου να γενικευτούν τα συμπεράσματα (Creswell, 2013).

4.3 Πληθυσμός-Δείγμα

Ο πληθυσμός της παρούσας έρευνας είναι το σύνολο των μαθητών της Γ τάξης του Ενιαίου Λυκείου στην Ελλάδα. Αναφορικά με το δείγμα στην έρευνα συμμετείχαν 60 μαθητές, 33 αγόρια και 27 κορίτσια, από έξι διαφορετικά λύκεια του Νομού Ημαθίας. Οι μαθητές προέρχονταν από το $2^{ο}$ επιστημονικό πεδίο τεχνολογικών και θετικών σπουδών και από το $4^{ο}$ επιστημονικό πεδίο, σπουδών οικονομίας και πληροφορικής, οι οποίοι διδάσκονται τα μαθηματικά προσανατολισμού. Ακόμη, οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι με το μαθηματικό περιεχόμενο των προηγούμενων τάξεων σχετικά με τις έννοιες του διαφορικού λογισμού, καθώς είχε ολοκληρωθεί το τμήμα της ύλης που αναφέρεται σε αυτό το κομμάτι των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου. Επιπλέον, πριν την έρευνα οι μαθητές είχαν ασχοληθεί με την απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών και είχαν συζητήσει τον ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στην απόρριψη τέτοιων ισχυρισμών. Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων στην έρευνα ήταν σε θέση να αξιολογήσει σωστά τις προτάσεις που είχαν δοθεί, καθώς και να παράγει αντιπαραδείγματα σχετικά με έννοιες και θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού αφού όλοι οι μαθητές είχαν διδαχθεί τις συγκεκριμένες έννοιες.

4.4 Διαδικασία-Μέθοδος συλλογής δεδομένων

Η έρευνα διεξήχθη συλλέγοντας δεδομένα με τη χρήση του ημιδομημένου ερωτηματολογίου σε μαθητές. Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε περιλαμβάνει 7 ερωτήσεις εκ των οποίων η πρώτη αναφέρεται στο φύλο και οι υπόλοιπες 6 σε ερωτήσεις σχετικές με έννοιες του διαφορικού λογισμού των Μαθηματικών προσανατολισμού. Ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν τις ερωτήσεις ως αληθής (Α) ή ψευδείς (Ψ). Σε περίπτωση που οι μαθητές χαρακτήριζαν μία πρόταση ως ψευδή έπρεπε να την αιτιολογήσουν και να βρουν κατάλληλο αντιπαράδειγμα. Όλες οι προτάσεις ήταν ψευδείς και αναφέρονταν σε έννοιες ορίου συνάρτησης, θεωρημάτων Bolzano, μέσης τιμής και σταθερής συνάρτησης, καθώς επίσης και στο πρόσημο παραγώγου συνάρτησης και στη μονοτονία.

Η συλλογή των στοιχείων πραγματοποιήθηκε τους μήνες Φεβρουάριο και Μάρτιο του 2019. Ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν περίπου 1 διδακτική ώρα. Η επιλογή έγινε με τη μορφή της βολικής δειγματοληψίας (Creswell,2013). Δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού, όμως αναμένεται να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα.

Οι απαντήσεις κωδικοποιήθηκαν σε μία επταβάθμια κλίμακα από το 0 έως το 6 όπου η τιμή 0 αντιπροσωπεύει την απάντηση «Αληθής», η 1 την «Απλά ψευδής», η 2 την «Ψευδής με ελλιπής αιτιολόγηση», η 3 την «Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση», η 4 την «Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα», η 5 την «Ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση» και η 6 την «Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση».

4.5 Εργαλεία ανάλυσης

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε στο στατιστικό πρόγραμμα IBM SPSS 24, με παράλληλη χρήση του Microsoft office Excel 2016 και χωρίστηκε στο στάδιο της Περιγραφικής και Επαγωγικής Στατιστικής. Στην Περιγραφική Στατιστική οι ποιοτικές-κατηγορικές μεταβλητές της έρευνας παρουσιάστηκαν με χρήση σχετικών συχνοτήτων (ποσοστών). Στην Επαγωγική Στατιστική μελετήθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα. Στο 1^o ερευνητικό ερώτημα, χρησιμοποιήθηκαν σχετικές συχνότητες (ποσοστά) που αναφέρονται στο σύνολο των απαντήσεων των μαθητών στις 6 ερωτήσεις. Στο 2^o ερευνητικό ερώτημα, για τις 6 ερωτήσεις αλλά και για την ομαδοποιημένη μεταβλητή των 6 ερωτήσεων χρησιμοποιήθηκε ο αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής και τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης της, τα οποία δίνονται από τον τύπο ($\bar{x}$ – $z_{\alpha/2}$ $\frac{s}{\sqrt{n}}$, $\bar{x}$ + $z_{\alpha/2}$ $\frac{s}{\sqrt{n}}$), όπου $\bar{x}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$ η μέση τιμή της απόδοσης των μαθητών, xi η απόδοση του i μαθητή, n το μέγεθος το δείγματος, s=$\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x}\right)^2}$ η τυπική απόκλιση της απόδοσης, z η μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1) και α η στάθμη σημαντικότητας. Ο παραπάνω τύπος των 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης χρησιμοποιήθηκε λόγω μεγέθους δείγματος ($n \geq 30$). Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν ποσοστά για τις σωστές και λανθασμένες απαντήσεις. Στο 3^o ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκε ο παραμετρικός έλεγχος ANOVA, για έλεγχο ισότητας μέσων τιμών της ποσοτικής μεταβλητής που αναφέρεται στην απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων στις κατηγορίες της ποιοτικής μεταβλητής με περισσότερες από 2 κατηγορίες, που αναφέρεται στην επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά. Η αρχική υπόθεση είναι ότι οι μέσες τιμές της απόδοσης στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων είναι ίσες μεταξύ των κατηγοριών της επίδοσης στα Μαθηματικά και η εναλλακτική ότι διαφέρουν. Στις περιπτώσεις όπου εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά χρησιμοποιήθηκε Post hoc analysis Bonferonni για να διαπιστωθεί ποιες κατηγορίες διαφοροποιούνται. Ο παραμετρικός έλεγχος ANOVA, χρησιμοποιήθηκε γιατί τα δείγματα ακολουθούσαν την κανονική κατανομή. Ο έλεγχος κανονικότητας έγινε με χρήση του Shapiro Wilk test. Η αρχική υπόθεση είναι ότι οι μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή και η εναλλακτική ότι δεν την ακολουθούν. Στο 4^o ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκαν ποσοστά για την κατηγοριοποίηση της απόδοσης των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων.

Τέλος, στο 5^o ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκε ο παραμετρικός έλεγχος paired sample t-test για έλεγχο διαφοράς στην μέση τιμή του ποσοστό χρήσης αλγεβρικού και γεωμετρικού παραδείγματος. Η αρχική υπόθεση είναι ότι οι μέσες τιμές είναι ίσες και η εναλλακτική ότι διαφέρουν. Η επιλογή του παραμετρικού τεστ έγινε λόγω κεντρικού οριακού θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο η μέση τιμή ακολουθεί την κανονική κατανομή για δείγματα άνω των 30 (Κολυβά-Μαχαίρα & Μπόρα-Σέντα, 1998). Επιπλέον χρησιμοποιήθηκαν ποσοστά για το πλήθος των χρησιμοποιούμενων αντιπαραδειγμάτων. Η στάθμη σημαντικότητας σε όλα τα τεστ ορίστηκε στο 5%. Συνεπώς η αρχική υπόθεση γίνεται δεκτή όταν p-value $\geq 0,05$ και απορρίπτεται όταν p-value<0,05. (Σιώμκος & Μαύρος ,2008).

4.6 Ηθικά ζητήματα

Τα θέματα ηθικής δεοντολογίας θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικά στην ψυχολογία των συμμετεχόντων και απαραίτητα να ληφθούν υπόψιν από τον ερευνητή όπως ορίζει η Αμερικανική ψυχολογική εταιρεία (APA,2001) αλλά και η Βρετανική (BPS,2014). Συγκεκριμένα οι κανόνες που θα τηρηθούν είναι οι ακόλουθοι:

Οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν ότι η συμμετοχή τους στην έρευνα είναι ανώνυμη, εθελοντική και ότι δε θα χρησιμοποιηθεί κανένα προσωπικό στοιχείο τους. Επίσης διασαφηνίστηκε ότι οι απαντήσεις τους θα χρησιμοποιηθούν μόνο για ερευνητικούς σκοπούς αλλά και για μελλοντικές έρευνες.

4.7 Αξιοπιστία και εγκυρότητα δεδομένων

Η αξιοπιστία και η εγκυρότητα των δεδομένων ελέγχθηκε με τον συντελεστή αξιοπιστίας Cronbach Alpha. Για να χαρακτηρίσουμε ένα ερωτηματολόγιο αξιόπιστο θα πρέπει ο δείκτης αξιοπιστίας Cronbach Alpha να είναι μεγαλύτερος του 0,70 (Nunnaly & Bernstein, 1994, 2011: 54 Vaske, Beaman & Sponarski, n.d.: 5-6 Pallant, 2005: 90). Για τις ερωτήσεις που αναφέρονται σε προτάσεις Μαθηματικών υπήρχε μεγάλη αξιοπιστία με την τιμή του Cronbach Alpha να είναι 0,845.

4.8 Περιορισμοί-προβλήματα έρευνας

Μοναδικός περιορισμός της έρευνας είναι ότι πραγματοποιήθηκε βολική δειγματοληψία και όχι απλή τυχαία με αποτέλεσμα το δείγμα να μην είναι κατά ανάγκη αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Στην πραγματικότητα οι αποδόσεις των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων πιθανόν να είναι υψηλότερες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες σε μία τυχαία δειγματοληψία.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα

5.1 Απαντήσεις των μαθητών στα 6 ερωτήματα

Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν 6 ερωτήσεις και να τις αξιολογήσουν ως αληθής (Α) ή ψευδείς (Ψ). Σε περίπτωση που η πρόταση ήταν ψευδής, οι μαθητές έπρεπε να την αιτιολογήσουν αλλά και να δώσουν ένα αντιπαράδειγμα. Η κωδικοποίηση των απαντήσεων πραγματοποιήθηκε σε μία επταβάθμια κλίμακα από το 0 έως το 6, όπου η τιμή 0 αντιπροσωπεύει την απάντηση «Αληθής», η 1 την «Απλά ψευδής», η 2 την «Ψευδής με ελλιπής αιτιολόγηση», η 3 την «Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση», η 4 την «Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα», η 5 την «Ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση» και η 6 την «Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση». Όλες οι ερωτήσεις έπρεπε να απαντηθούν ότι είναι ψευδής και να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση.

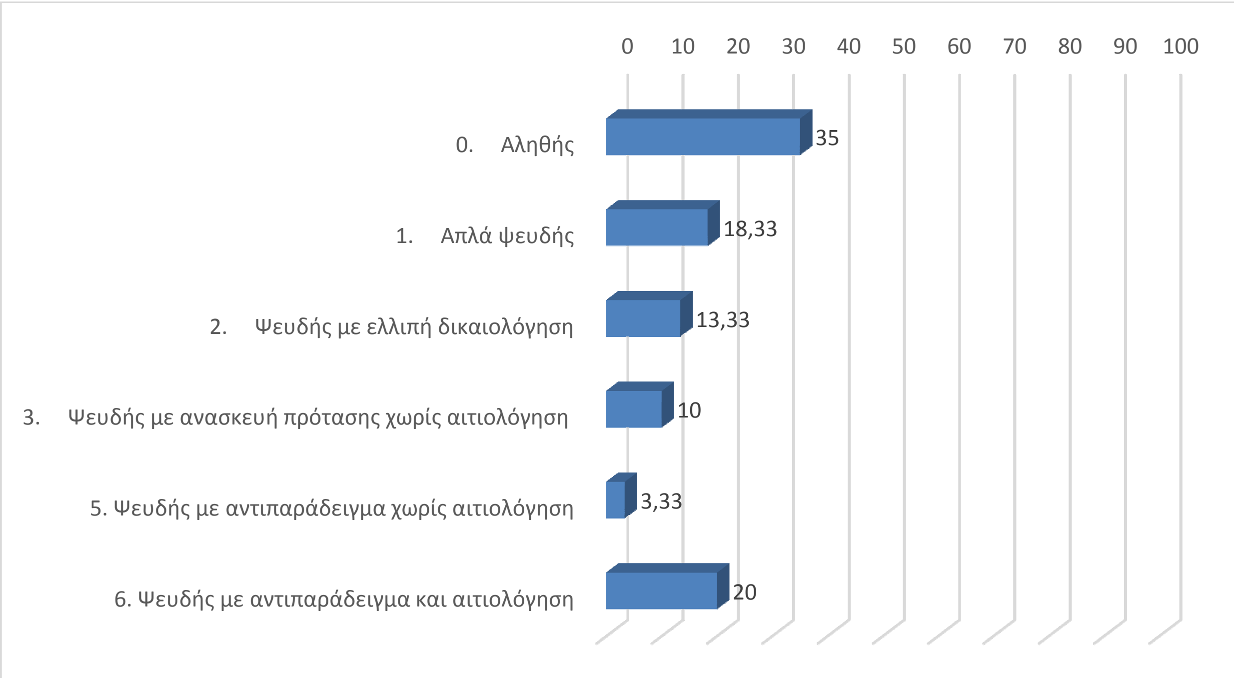
1^o ερώτημα

Στο 1^o ερώτημα, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την πρόταση: «Αν υπάρχει το $\lim_{x\to xo} f(x) * g(x)$ τότε κατά ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to xo} f(x)$ και $\lim_{x\to xo} g(x)$». Από τον Πίνακα 1 (και Γράφημα 2) προκύπτει ότι το 35,00% (N=21) των μαθητών απάντησε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής, το 20,00% (N=12) ότι είναι ψευδής χρησιμοποιώντας αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, το 18,33% (N=11) δήλωσε ότι είναι απλά ψευδής χωρίς καμία αιτιολόγηση και το 13,33% (N=8) ότι είναι ψευδής αλλά με ελλιπή δικαιολόγηση. Το 10,00% (N=6) δήλωσε ότι είναι ψευδής και έκανε ανασκευή της πρότασης χωρίς όμως αιτιολόγηση και τέλος το 3,33% (N=2) δήλωσε ότι είναι ψευδής και έδωσε αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση.

Πίνακας 1. Είδη απαντήσεων στο 1^{ο} ερώτημα

Απάντηση	N	f %
0. Αληθής	21	35,00
1. Απλά ψευδής	11	18,33
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	8	13,33
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	6	10,00
5. Ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση	2	3,33
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	12	20,00

N : Συχνότητα   f % : Σχετική συχνότητα



Γράφημα 2. Είδη απαντήσεων στο 1^{ο} ερώτημα

Είδη απαντήσεων στο 1^{ο} ερώτημα

Επιπλέον, από τους 21 μαθητές που δήλωσαν ότι η πρόταση είναι αληθής, οι 13 δήλωσαν απλά αληθής, οι 6 αληθής διότι «είναι ιδιότητα ορίων» και οι 2 αληθής διότι «αν δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to xo} f(x)$ και $\lim_{x\to xo} g(x)$ δεν τηρείται η ιδιότητα διάσπασης των ορίων».

Από τους 8 μαθητές που ανέφεραν ότι η πρόταση είναι ψευδής δίνοντας ελλιπή δικαιολόγηση, οι 3 από αυτούς έδωσαν γενικόλογες απαντήσεις χωρίς αποδεικτικό λόγο χρησιμοποιώντας τις εξής εκφράσεις ως επιχειρήματα: «Δεν το ξέρουμε αυτό», «Δεν ισχύει για κάθε συνάρτηση». Οι υπόλοιποι 5 μαθητές που διέψευσαν την πρόταση και δεν βρήκαν αντιπαράδειγμα διατύπωσαν ως αιτιολόγηση την πρόταση που εμπεριέχεται στο σχολικό βιβλίο: Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to xo} f(x)$ και $\lim_{x\to xo} g(x)$

τότε υπάρχει το $\lim_{x\to xo} f(x) * g(x)$ και ισχύει ότι $\lim_{x\to xo} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to xo} f(x) * \lim_{x\to xo} g(x)$, εστιάζοντας στα χαρακτηριστικά της πρότασης αυτής με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λάθος συμπεράσματα.

Επιπλέον 6 μαθητές ισχυρίστηκαν ότι η πρόταση είναι ψευδής και κατόπιν ανασκεύασαν τον ισχυρισμό διατυπώνοντας ότι «το όριο του γινομένου μπορεί να υπάρχει αλλά μπορεί να μην υπάρχει κάποιο από τα επιμέρους όρια».

Ακόμη, 2 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση ψευδής, κατασκεύασαν σωστό αντιπαράδειγμα, όμως δεν απέδειξαν ότι διαψεύδει τον ισχυρισμό.

Τέλος, 12 μαθητές χαρακτήρισαν λανθασμένη την πρόταση και έδωσαν σωστό αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση. Συγκεκριμένα οι 8 μαθητές έδωσαν παραδείγματα συναρτήσεων όπου μία μόνο από τις δύο είχαν όριο (ενώ υπήρχε το όριο του γινομένου) όπως οι $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x^3}$ με $\lim_{x\to 0} f(x) * g(x) = +\infty$ (δεν υπάρχει το όριο της g) ενώ 3 μαθητές συναρτήσεις όπου δεν υπήρχαν και τα 2 όρια όπως $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}$ με $\lim_{x\to 0} f(x) * g(x) = +\infty$, ενώ 1 μαθητής χρησιμοποίησε και συνάρτηση πολλαπλού τύπου με $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x)=x$ με $\lim_{x\to 0} f(x) * g(x) = 0$, όπου δεν υπήρχε το 1 όριο (το όριο της f).

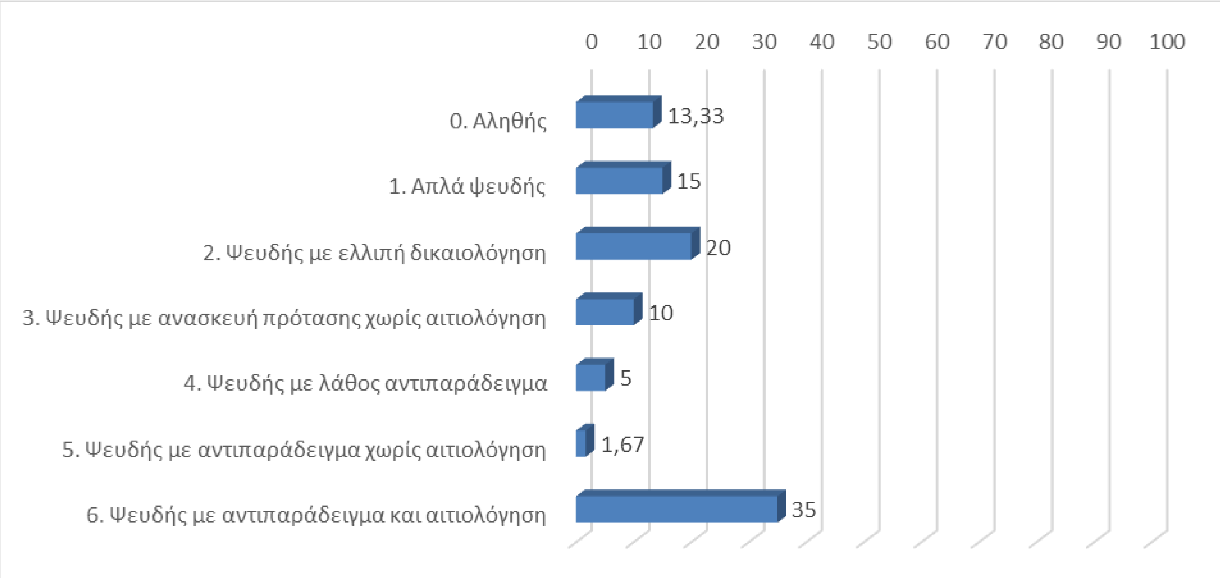
2^o ερώτημα

Στο 2^o ερώτημα, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την πρόταση: «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$ τότε κατά ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$». Από τον Πίνακα 2 (και Γράφημα 3), προκύπτει ότι το 35,00% (N=21) των μαθητών δήλωσε ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής και το υποστήριξε χρησιμοποιώντας αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, το 20,00% (N=12) δήλωσε ότι είναι ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση ενώ το 15,00% (N=9) ότι είναι απλά ψευδής χωρίς καμία αιτιολόγηση. Επιπλέον, το 13,33% (N=8) των μαθητών απάντησε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής, το 10,00% (N=6) θεώρησε τον ισχυρισμό ψευδή και έκανε ανασκευή της πρότασης χωρίς να δώσει αιτιολόγηση, το 5,00% (N=3) δήλωσε ότι είναι ψευδής αλλά έδωσε λάθος αντιπαράδειγμα και το 1,67% (N=1) ότι είναι ψευδής δίνοντας αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση.

Πίνακας 2. Είδη απαντήσεων στο $2^{ο}$ ερώτημα

Απάντηση	**N**	**f %**
0. Αληθής	8	13,33
1. Απλά ψευδής	9	15,00
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	12	20,00
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	6	10,00
4. Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα	3	5,00
5. Ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση	1	1,67
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	21	35,00

N : Συχνότητα   f % : Σχετική συχνότητα



Γράφημα 3. Είδη απαντήσεων στο $2^{ο}$ ερώτημα

Είδη απαντήσεων στο $2^{ο}$ ερώτημα

Επιπλέον από τους 8 μαθητές που δήλωσαν ότι η πρόταση είναι αληθής 5 μαθητές ανέφεραν ότι η πρόταση είναι αληθής «λόγω του θεωρήματος Bolzano» ενώ οι υπόλοιποι 3 μαθητές απάντησαν ότι η πρόταση είναι αληθής χωρίς αιτιολόγηση.

Από τους 12 μαθητές που ανέφεραν ότι η πρόταση είναι λανθασμένη χωρίς επαρκή αιτιολόγηση οι 9 διατύπωσαν το Θ.Bolzano και οι 3 είχαν ασαφείς αιτιολογήσεις του τύπου «Δεν ισχύει για κάθε συνάρτηση» και «Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κάποιο άλλο θεώρημα».

Οι 6 μαθητές που ισχυρίστηκαν ότι η πρόταση είναι ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση ανέφεραν ότι το αντίστροφο του Θ. Bolzano δεν ισχύει διατυπώνοντας διορθωμένο τον ισχυρισμό: «Ψευδές διότι το αντίστροφο του Θ.

Bolzano δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\rightarrow R$ που έχουν ρίζα στο (a,b) αλλά δεν είναι συνεχείς ή δεν ισχύει $f(\alpha)*f(\beta)<0$.

Επιπλέον, 3 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση ψευδής δίνοντας ως λάθος αντιπαράδειγμα με έναν από αυτούς να αναφέρει την συνάρτηση $f(x)=x$, $x\in[0,1]$.

Ακόμη, 1 μαθητής χαρακτήρισε την πρόταση ψευδής, κατασκεύασε σωστό αντιπαράδειγμα, όμως δεν απέδειξε ότι διαψεύδει τον ισχυρισμό.

Στον ισχυρισμό αυτό 21 μαθητές δήλωσαν ότι η πρόταση είναι ψευδής προτιμώντας να παρουσιάσουν αντιπαραδείγματα με χρήση γραφικής παράστασης. Για να διαψεύσουν τον ισχυρισμό 14 μαθητές κατασκεύασαν αντιπαράδειγμα χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση συνάρτησης ενώ 5 μαθητές κατασκεύασαν αντιπαράδειγμα δίνοντας τον αλγεβρικό τύπο συνάρτησης. Υπήρχαν και 2 μαθητές που έδωσαν αντιπαράδειγμα και με τους δύο τρόπους. Στο γεωμετρικό αντιπαράδειγμα 7 απαντήσεις αναφέρθηκαν σε γραφικές παραστάσεις με 1 ρίζα που έμοιαζαν με την συνάρτηση x^2, ενώ 9 απαντήσεις σε γραφικές παραστάσεις με 2 ρίζες ή παραπάνω όπου $f(\alpha)$, $f(\beta) >0$, $f(x_o)=0$, με $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Στο αλγεβρικό αντιπαράδειγμα 4 μαθητές χρησιμοποίησαν τις συναρτήσεις x^2-1, $(x-1)^2$ και 3 μαθητές την συνάρτηση $|x-1|$.

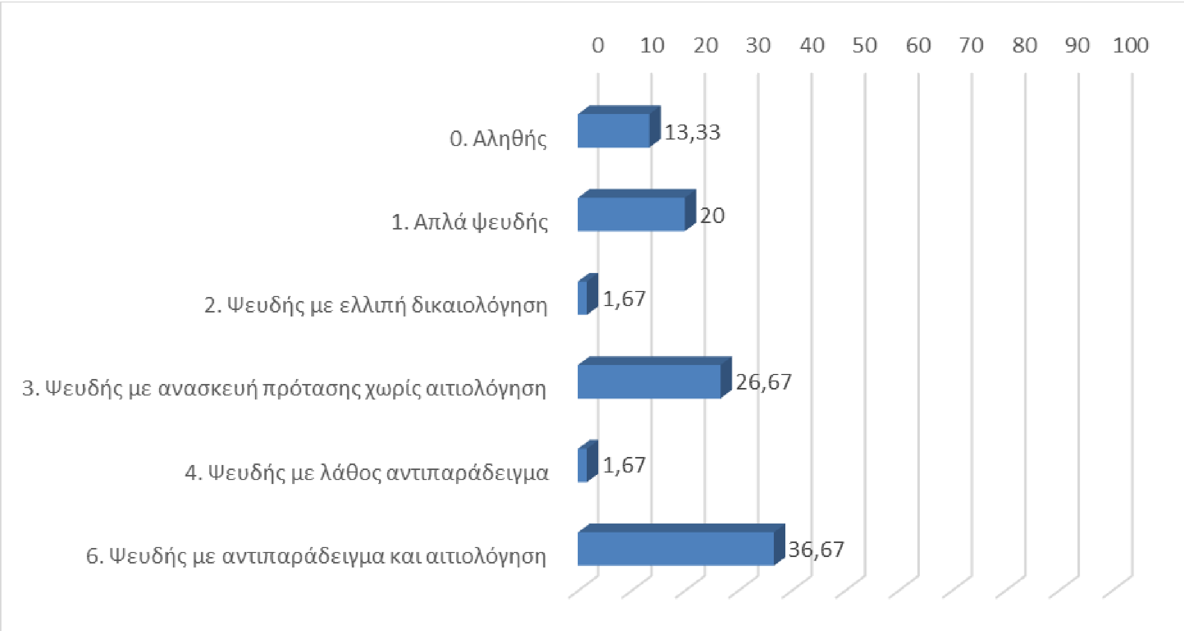
3ο ερώτημα

Στο 3ο ερώτημα, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την πρόταση: «Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ . Αν για τις f, g ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε οπωσδήποτε ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$». Από τον Πίνακα 3 (και Γράφημα 4) προκύπτει ότι το 36,67% (N=22) απάντησε ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής και έδωσε αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, το 26,67% (N=16) ότι είναι ψευδής και έκανε ανασκευή της πρότασης χωρίς αιτιολόγηση, ενώ το 20,00% (N=12) ότι είναι απλά ψευδής χωρίς αιτιολόγηση. Επιπλέον, το 13,33% (N=8) απάντησε ότι η πρόταση είναι αληθής, το 1,67% (N=1) ότι είναι ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση και επίσης το 1,67% (N=1) ότι είναι ψευδής και έδωσε λάθος αντιπαράδειγμα.

Πίνακας 3. Είδη απαντήσεων στο 3^o ερώτημα

Απάντηση	N	f %
0. Αληθής	8	13,33
1. Απλά ψευδής	12	20,00
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	1	1,67
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	16	26,67
4. Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα	1	1,67
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	22	36,67

N : Συχνότητα f % : Σχετική συχνότητα



Γράφημα 4. Είδη απαντήσεων στο 3^o ερώτημα

Είδη απαντήσεων στο 3^o ερώτημα

Στο ερώτημα αυτό υπήρξαν όπως και στο προηγούμενο, 8 μαθητές που απάντησαν ότι η πρόταση είναι αληθής, χωρίς όμως αυτή τη φορά να έχουν αποδεικτικό λόγο μιας και η απάντηση τους ήταν απλά αληθής.

Υπήρξε μία μόνο απάντηση στην οποία ο μαθητής ανέφερε ότι δεν ισχύει η ισότητα των συναρτήσεων, χαρακτηρίζοντας την λανθασμένη, χωρίς ωστόσο η αιτιολόγηση να είναι πλήρης.

Ακόμη 16 μαθητές διέψευσαν την πρόταση ανασκευάζοντας και διατυπώνοντας την πρόταση του σχολικού βιβλίου χωρίς όμως να την αποδείξουν. Χαρακτηριστικά ένας μαθητής αναφέρει : Ψευδές σύμφωνα με το πόρισμα : «Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει f(x)=g(x) + c».

Επιπλέον, 1 μαθητής χαρακτήρισε την πρόταση ψευδής δίνοντας ωστόσο λάθος αντιπαράδειγμα τις συναρτήσεις f(x)=In(x) και g(x)=- $\frac{1}{x^2}$.

Στον ισχυρισμό αυτό παρατηρήθηκε το υψηλότερο ποσοστό παραγωγής αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές οι οποίοι είχαν πλουραλισμό στις απαντήσεις τους δίνοντας διαφορετικά αντιπαραδείγματα. Αυτό υποδηλώνει ότι σε αυτές τις έννοιες οι μαθητές υπέστησαν μεγάλη εννοιολογική κατανόηση. Από τους 22 μαθητές που έδωσαν σωστό αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, οι 12 επέλεξαν τα ζεύγη των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+c$, οι 2 τα ζεύγη $f(x)=x^4$, $g(x)= x^4+ c$, οι 6 τα ζεύγη $f(x)=e^x$, $g(x)= e^x +c$ και οι 2 τα ζεύγη f(x)=In(x), g(x)=In(x)+c.

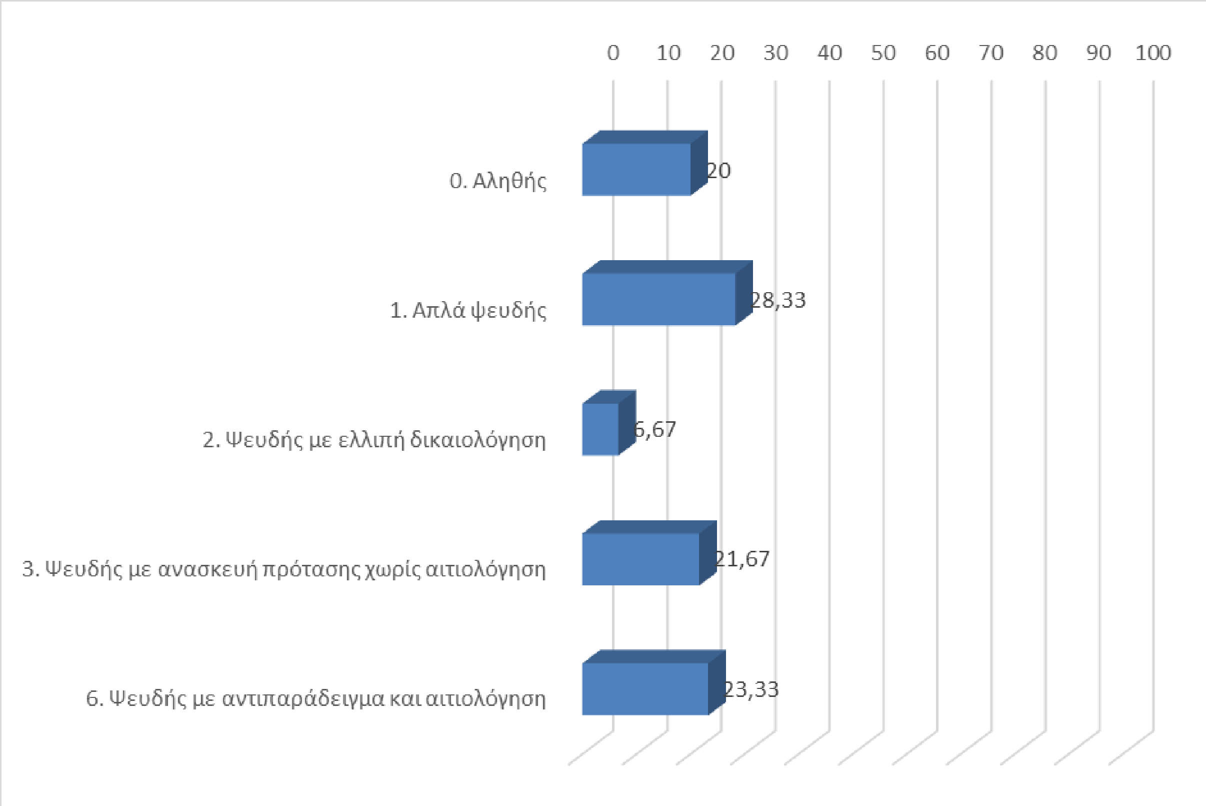
4^o ερώτημα

Στο 4^o ερώτημα, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την πρόταση: «Κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει f'(x)=0 για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$». Από τον Πίνακα 4 (και Γράφημα 5) προκύπτει ότι το 28,33% (Ν=17) δήλωσε ότι ο ισχυρισμός είναι απλά ψευδής χωρίς κάποια δικαιολόγηση, το 23,33% (Ν=14) ότι είναι ψευδής και έδωσε αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση και το 21,67% (Ν=13) ότι είναι ψευδής και έκανε ανασκευή της πρότασης χωρίς αιτιολόγηση. Τέλος το 20,00% (Ν=12) δήλωσε ότι η πρόταση είναι αληθής ενώ το 6,67% (Ν=4) ότι είναι ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση.

Πίνακας 4. Είδη απαντήσεων στο 4^o ερώτημα

Απάντηση	**N**	**f %**
0. Αληθής	12	20,00
1. Απλά ψευδής	17	28,33
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	4	6,67
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	13	21,67
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	14	23,33

N : Συχνότητα f % : Σχετική συχνότητα



Γράφημα 5. Είδη απαντήσεων στο 4^o ερώτημα

Είδη απαντήσεων στο 4^o ερώτημα

Επιπλέον, από τους 12 μαθητές οι οποίοι απάντησαν ότι η πρόταση είναι αληθής, 1 μαθητής απάντησε ότι η πρόταση είναι αληθής χρησιμοποιώντας ως απόδειξη ένα παράδειγμα επιβεβαίωσης της πρότασης, θεωρώντας τη συνάρτηση: $f(x)=1,\ x\in(\alpha,\ x_0) \cup (x_0\ ,\ \beta)$, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\ x_0) \cup (x_0,\beta)$ ενώ 3 μαθητές απάντησαν αληθής λόγω του θ. Fermat. Οι υπόλοιποι 8 ανέφεραν ότι η απάντηση είναι αληθής χωρίς να έχουν αποδεικτικό λόγο.

Και οι 4 μαθητές από αυτούς που έδωσαν ελλιπή δικαιολόγηση ισχυρίστηκαν ότι η πρόταση δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων χωρίς όμως να αιτιολογήσουν την απάντηση τους.

Στον ισχυρισμό αυτό παρατηρήθηκε το υψηλότερο ποσοστό μαθητών που ανασκεύασαν τον ισχυρισμό. Συγκεκριμένα 13 μαθητές ανασκεύασαν την πρόταση τονίζοντας ότι η συνθήκη της συνέχειας καθιστά τον ισχυρισμό αληθή.

Συνολικά 14 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση λανθασμένη, δίνοντας σωστό αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση. Το χαρακτηριστικό σε αυτή την πρόταση, ήταν ότι οι περισσότεροι μαθητές βασίστηκαν στο αντιπαράδειγμα του σχολικού βιβλίου, δηλαδή τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ επιβεβαιώνοντας την ύπαρξη του πρωτότυπου παραδείγματος στον προσωπικό χώρο παραδειγμάτων. Όλα τα αντιπαραδείγματα που έδωσαν οι μαθητές περιείχαν συναρτήσεις της μορφής $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{c1}, & x < 0 \\ \mathrm{c2}, & x > 0 \end{cases}$. Υπήρχαν και 2 μαθητές οι οποίοι έδωσαν και αλγεβρικό και γεωμετρικό αντιπαράδειγμα.

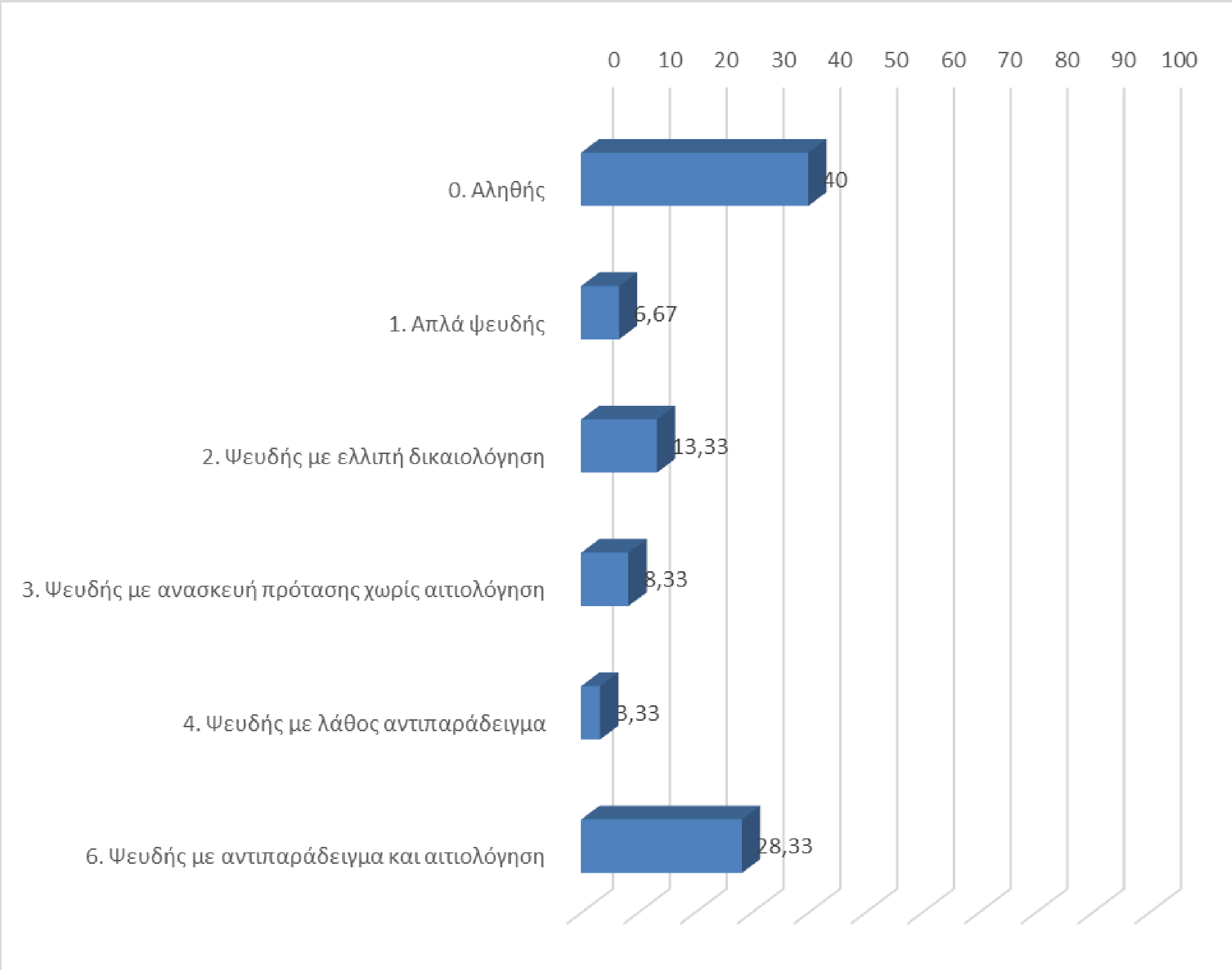
5ο ερώτημα

Στο 5ο ερώτημα, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την πρόταση: «Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά θετική στο Δ». Από τον Πίνακα 5 (και Γράφημα 6) προκύπτει ότι το 40,00% (N=24) των μαθητών απάντησαν ότι ο ισχυρισμός αληθεύει ενώ το 28,33% (N=17) ότι είναι ψευδής και έδωσε αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση. Επίσης το 13,33% (N=8) θεώρησε τον ισχυρισμό ψευδή και έδωσε ελλιπή δικαιολόγηση, το 8,33% (N=5) ότι είναι ψευδής και έκανε ανακατασκευή της πρότασης χωρίς αιτιολόγηση, το 6,67% (N=4) τον θεώρησε απλά ψευδή και τέλος το 3,33% (N=2) απάντησε ότι είναι ψευδής και έδωσε λάθος αντιπαράδειγμα.

Πίνακας 5. Είδη απαντήσεων στο 5ο ερώτημα

Απάντηση	**N**	**f %**
0. Αληθής	24	40,00
1. Απλά ψευδής	4	6,67
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	8	13,33
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	5	8,33
4. Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα	2	3,33
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	17	28,33

N : Συχνότητα f % : Σχετική συχνότητα



Γραφημα 6. Είδη απαντήσεων στο 5^{ο} ερώτημα

Είδη απαντήσεων στο 5^{ο} ερώτημα

Από τους 24 μαθητές που απάντησαν ότι η πρόταση είναι αληθής, 6 μαθητές διατύπωσαν ότι η πρόταση είναι αληθής δίνοντας την εξής απάντηση: «Αν σε ένα διάστημα Δ ισχύει f'(x)>0 τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ». Επιπλέον, 1 μαθητής ανέφερε ότι είναι αληθής και επιχείρησε να αποδείξει την πρόταση εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής. Οι υπόλοιποι 17 μαθητές απάντησαν απλά ότι η πρόταση είναι αληθής χωρίς αιτιολόγηση.

Από τους 8 μαθητές που χαρακτήρισαν την πρόταση λανθασμένη με ελλειπή αιτιολόγηση, οι 4 διατύπωσαν ως αιτιολόγηση την πρόταση του βιβλίου γράφοντας χαρακτηριστικά: «Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι θετική τότε η f είναι γνησίως αύξουσα». Ακόμη, 2 μαθητές έδωσαν ασαφείς αιτιολογήσεις, ενώ οι υπόλοιποι 2 μαθητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν το θεώρημα μέσης τιμής προφανώς επηρεασμένοι από την αντίστοιχη πρόταση του θεωρήματος στη μονοτονία συνάρτησης η οποία στηρίζεται στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ.

Επιπλέον 5 μαθητές ανασκεύασαν την πρόταση αλλά δεν την απέδειξαν. Χαρακτηριστικά ανέφεραν: «Η f'(x) μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός».

Ακόμη, 2 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση ψευδής δίνοντας ως λάθος αντιπαράδειγμα την συνάρτηση $f(x)=x^4$.

Τέλος, 17 μαθητές έδωσαν σωστό αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, χρησιμοποιώντας το αντιπαράδειγμα του σχολικού βιβλίου με $f(x)=ax^3$, $a>0$. Στα αποτελέσματα της έρευνας μας φαίνεται η δυναμική αυτών των παραδειγμάτων από το γεγονός ότι τείνουν να εντυπωσιάζουν στη μνήμη των μαθητών, λόγω των ιδιότυπων χαρακτηριστικών τους, βοηθώντας έτσι περαιτέρω την μαθησιακή τους διαδικασία.

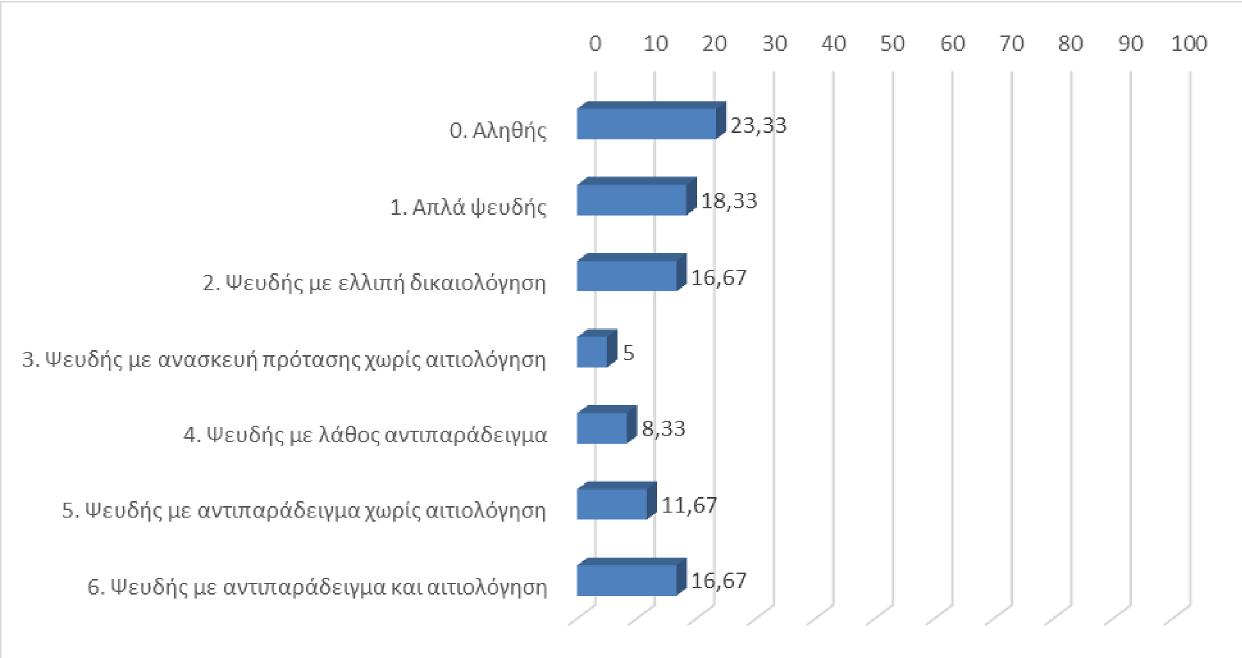
6ο ερώτημα

Στο 6ο ερώτημα, οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την πρόταση: «Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_1 του πεδίου ορισμού της και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_2 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι υποχρεωτικά γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$». Από τον Πίνακα 6 (και Γράφημα 7) προκύπτει ότι το 23,33% (N=14) θεώρησε τον ισχυρισμό αληθή, το 18,33% (N=11) απλά ψευδή χωρίς κάποια αιτιολόγηση και το 16,67% (N=10) ψευδή με ελλιπή δικαιολόγηση. Επίσης το 16,67% (N=10) απάντησε ότι η πρόταση είναι ψευδής και έδωσε αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, το 11,67% (N=7) ψευδή και έδωσε αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση, το 8,33% (N=5) ψευδή και έδωσε λάθος αντιπαράδειγμα και τέλος το 5,00% (N=3) δήλωσε ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής και έκανε ανασκευή της πρότασης χωρίς αιτιολόγηση.

Πίνακας 6. Είδη απαντήσεων στο 6ο ερώτημα

Απάντηση	N	f %
0. Αληθής	14	23,33
1. Απλά ψευδής	11	18,33
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	10	16,67
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	3	5,00
4. Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα	5	8,33
5. Ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση	7	11,67
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	10	16,67

N : Συχνότητα, f % : Σχετική συχνότητα



Γράφημα 7. Είδη απαντήσεων στο 6^{ο} ερώτημα

Είδη απαντήσεων στο 6^{ο} ερώτημα

Από τους 14 μαθητές που απάντησαν ότι η πρόταση είναι αληθής, 1 μαθητής διατύπωσε ότι η πρόταση είναι αληθής αναφέροντας ότι ισχύει η πρόταση και σε ένωση διαστημάτων ενώ οι υπόλοιποι 13 μαθητές απλά ότι η πρόταση είναι αληθής.

Από τους 10 μαθητές που διέψευσαν την πρόταση αλλά δεν δικαιολόγησαν σωστά την απάντηση τους οι 7 ανέφεραν ως αιτιολόγηση «ψευδής, διότι η πρόταση δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων». Αυτό ερμηνεύεται ότι ο μαθητής διδάχθηκε ότι η πρόταση δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων αλλα ίσως δεν την κατανόησε εννοιολογικά. Οι υπόλοιποι 3 μαθητές έδωσαν ασαφείς απαντήσεις.

Ακόμη, 3 μαθητές τόνισαν ότι η ύπαρξη της συνέχειας στο x_0 μετατρέπει τον ισχυρισμό σε σωστό όμως είναι ικανή συνθήκη αλλά και όχι αναγκαία. Υπάρχει συνάρτηση η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, αλλά είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Επιπλέον, 5 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση ψευδής δίνοντας ωστόσο λάθος αντιπαράδειγμα με έναν από αυτούς να αναφέρει την συνάρτηση $f = \begin{cases} \mathrm{x}, & x < 0 \\ \mathrm{x}^2, & x > 0 \end{cases}$. Το χαρακτηριστικό σε αυτή την περίπτωση είναι ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα Δ1 και Δ2 και δεν είναι συνεχής τότε δεν είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1 ∪ Δ2.

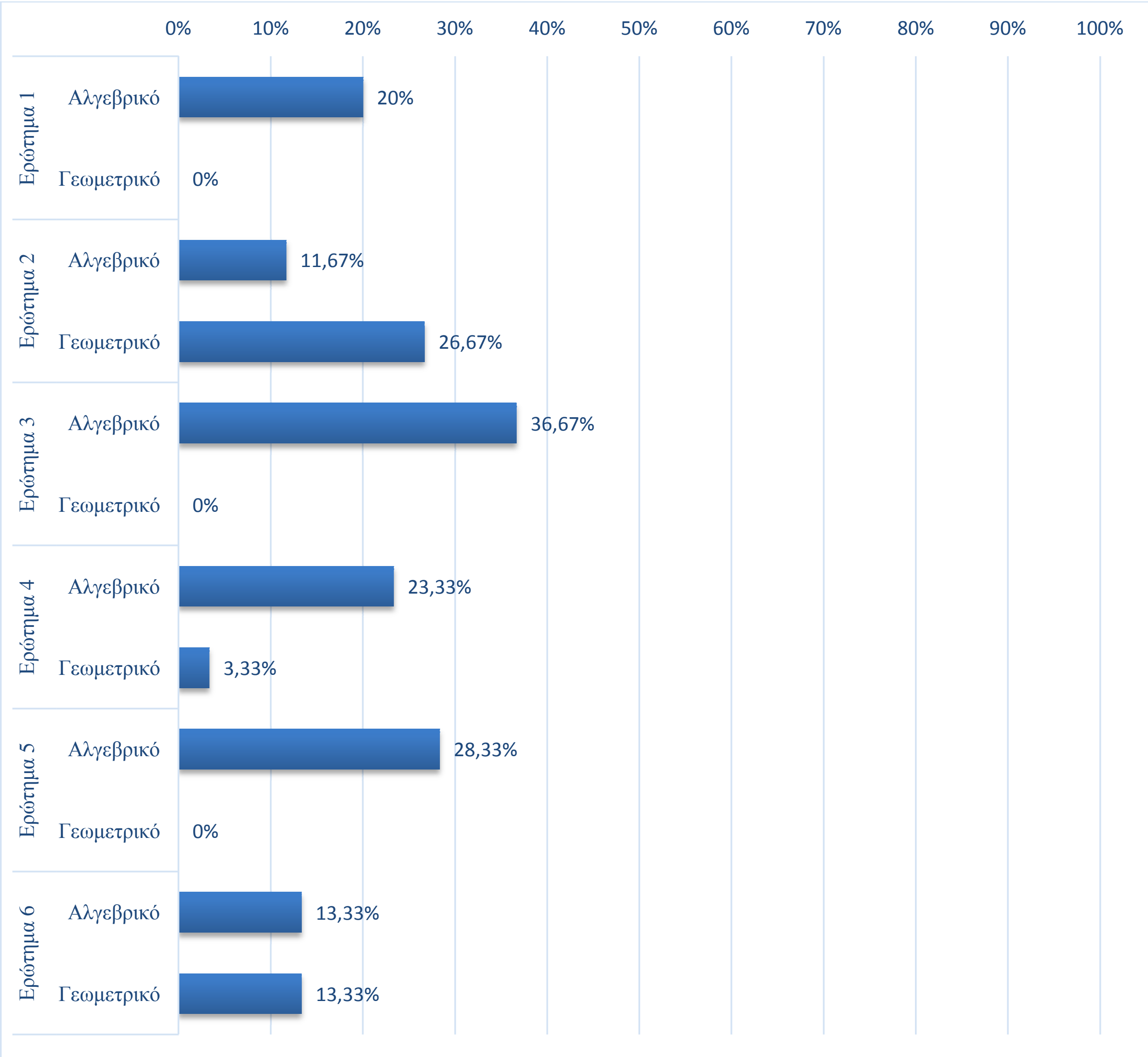
Ακόμη, 7 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση ψευδής, κατασκεύασαν σωστό αντιπαράδειγμα, όμως δεν απέδειξαν ότι διαψεύδει τον ισχυρισμό. Το σημείο αυτό χρίζει ιδιαίτερης προσοχής μιας και οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αιτιολογήσουν γιατί η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ1 ∪ Δ2.

Τέλος, 10 μαθητές χαρακτήρισαν την πρόταση λανθασμένη δίνοντας σωστό αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση. Συγκεκριμένα οι μισοί μαθητές χρησιμοποίησαν την συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{x}$, ενώ οι υπόλοιποι συναρτήσεις πολλαπλού τύπου τις οποίες κατασκεύασαν με τη βοήθεια των βασικών συναρτήσεων $f(x)=ax+b$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=e^x$, w(x)=In(x). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές πιο εύκολα αντλούν παραδείγματα βασικών συναρτήσεων από τον χώρο παραδειγμάτων και μετατοπίζοντας τις συναρτήσεις οριζόντια ή κατακόρυφα κατασκευάζουν τη συνάρτηση του αντιπαραδείγματος. Τέλος, 6 μαθητές έδωσαν αλγεβρικό και γεωμετρικό αντιπαράδειγμα.

Ο Πίνακας 7 (και το Γράφημα 8) παρουσιάζει τα αποτελέσματα σχετικά με το σωστό είδος του αντιπαραδείγματος που χρησιμοποίησαν σωστά οι μαθητές σε κάθε ερώτημα. Στα ερωτήματα 1, 3, 4 και 5 το αλγεβρικό αντιπαράδειγμα συγκέντρωσε αντίστοιχα 20% (N=12), 36,67% (N=22), 23,33% (N=14) και 28,33% (N=17) υψηλότερα από το γεωμετρικό αντιπαράδειγμα που δεν εμφανίστηκε καθόλου στα ερωτήματα 1, 3 και 5 ενώ στο 4 συγκέντρωσε μόλις 3,33% (N=2). Στο ερώτημα 6 υπήρξε ισορροπία με 13,33% (N=8) ενώ μόνο στο ερώτημα 2 το γεωμετρικό αντιπαράδειγμα εμφάνισε υψηλότερο ποσοστό της τάξης του 26,67% (N=16) έναντι του αλγεβρικού με 11,67% (N=7).

Πίνακας 7. Ορθό αλγεβρικό και γεωμετρικό αντιπαράδειγμα ανά ερώτημα

Ερωτήματα	**Κατηγορίες**	**N**	**f%**
Ερώτημα 1	Αλγεβρικό	12	20%
	Γεωμετρικό	0	0%
Ερώτημα 2	Αλγεβρικό	7	11,67%
	Γεωμετρικό	16	26,67%
Ερώτημα 3	Αλγεβρικό	22	36,67%
	Γεωμετρικό	0	0%
Ερώτημα 4	Αλγεβρικό	14	23,33%
	Γεωμετρικό	2	3,33%
Ερώτημα 5	Αλγεβρικό	17	28,33%
	Γεωμετρικό	0	0%
Ερώτημα 6	Αλγεβρικό	8	13,33%
	Γεωμετρικό	8	13,33%



Γράφημα 8. Ορθό αλγεβρικό και γεωμετρικό αντιπαράδειγμα ανά ερώτημα

5.2 Απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα

5.2.1 1^{o} ερευνητικό ερώτημα

«Με ποιους τρόπους οι μαθητές αντιμετωπίζουν προτάσεις που δεν ισχύουν;»

Ο Πίνακας 8 (και το Γράφημα 9) παρουσιάζει την συνολική εικόνα των απαντήσεων των 60 μαθητών στα 6 ερωτήματα. Κάθε μαθητής απάντησε 6 ερωτήσεις και το δείγμα αποτελούνταν από 60 μαθητές, επομένως το σύνολο των απαντήσεων ήταν 360. Προκύπτει ότι το 26,67% (N=96) των απαντήσεων ανέφεραν ότι η πρόταση είναι ψευδής και δόθηκε αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση, το 24,17% (N=87), ότι είναι αληθής, το 17,78% (N=64) απλά ψευδής, το 13,61% (N=49) ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση (N=49), το 11,94% (N=43) ψευδής και δόθηκε ελλιπής αιτιολόγηση, το 3,06% (N=11) ψευδής χρησιμοποιώντας λάθος αντιπαράδειγμα και το 2,78% (N=10) ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση.

Συνολικά αναδεικνύεται ότι 1 στις 4 απαντήσεις ήταν τελείως λανθασμένες χαρακτηρίζοντας αληθείς τις προτάσεις ενώ επίσης 1 στις 4 απαντήσεις ήταν σωστές χαρακτηρίζοντας τις προτάσεις ψευδείς, δίνοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση. Περίπου οι μισές απαντήσεις ανέφεραν σωστά ότι οι προτάσεις είναι ψευδείς, χωρίς όμως να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Πίνακας 8. Τα είδη των απαντήσεων των 60 μαθητών και στις 6 ερωτήσεις

Απαντήσεις	**N**	**f%**
0. Αληθής	87	24,17
1. Απλά ψευδής	64	17,78
2. Ψευδής με ελλιπή δικαιολόγηση	43	11,94
3. Ψευδής με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση	49	13,61
4. Ψευδής με λάθος αντιπαράδειγμα	11	3,06
5. Ψευδής με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση	10	2,78
6. Ψευδής με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση	96	26,67
Σύνολο	360	100,00

Γράφημα 9.Τα είδη των απαντήσεων των 60 μαθητών και στις 6 ερωτήσεις

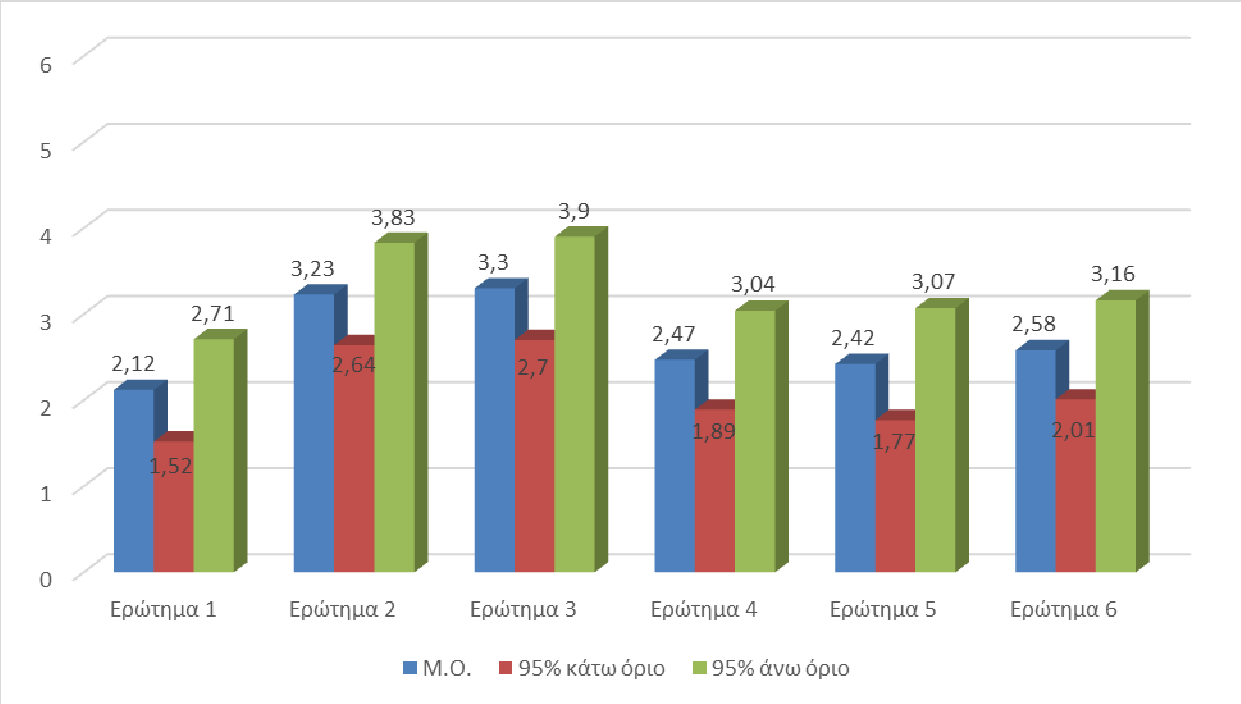
5.2.2 2ο ερευνητικό ερώτημα

«Ποια είναι η απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων;»

Ο πίνακας 9 (και το Γράφημα 10) παρουσιάζει τις μέσες τιμές και τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για την απόδοση των μαθητών. Η κλίμακα των απαντήσεων είναι από 0-6, όπου οι μεγαλύτερες τιμές υποδηλώνουν καλύτερη απόδοση. Προκύπτει ότι στα ερωτήματα 3 και 2 η μέση απόδοση των μαθητών ήταν μέτρια (Μ.Ο.=3,30 και 3,23 αντίστοιχα), έπειτα ακολούθησε η μέση απόδοση στα ερωτήματα 6,4,5 (Μ.Ο.=2,58 και 2,47 και 2,42 αντίστοιχα) και τέλος η απόδοση στο ερώτημα 1 (Μ.Ο.=2,12). Τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης υποδηλώνουν ότι οι διαφορές δεν είναι στατιστικά σημαντικές λόγω της μη κενής τομής των διαστημάτων. Η γενικότερη εικόνα είναι ότι οι αποδόσεις των μαθητών είναι μέτριες στα 6 ερωτήματα. Η τυπική απόκλιση κυμάνθηκε στο διάστημα [2,21, 2,52].

Πίνακας 9. Απόδοση μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων

Ερωτήματα	Μ.Ο.	95% κάτω όριο	95% άνω όριο	Τ.Α.
Ερώτημα 1	2,12	1,52	2,71	2,29
Ερώτημα 2	3,23	2,64	3,83	2,30
Ερώτημα 3	3,30	2,70	3,90	2,31
Ερώτημα 4	2,47	1,89	3,04	2,21
Ερώτημα 5	2,42	1,77	3,07	2,52
Ερώτημα 6	2,58	2,01	3,16	2,23

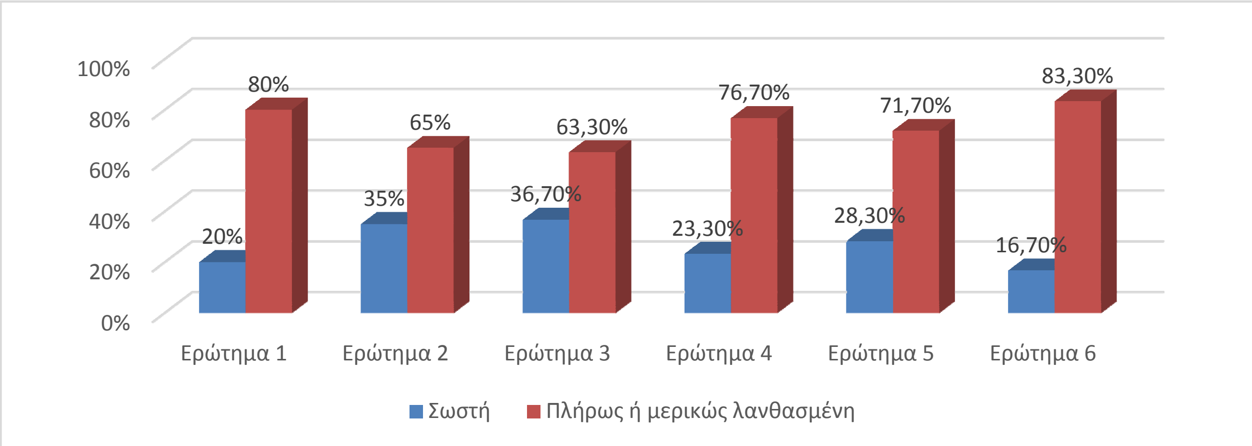


Γράφημα 10. Αποδόσεις μαθητών ανά ερώτημα.

Ο Πίνακας 10 (Γράφημα 11) παρουσιάζει τα αποτελέσματα των σωστών και πλήρως ή μερικώς λανθασμένων απαντήσεων για τα 6 ερωτήματα. Προκύπτει ότι στα ερωτήματα 3 και 2 υπήρξε η υψηλότερη απόδοση καθώς απάντησε σωστά το 36,7% (Ν=22) και 35% (Ν=21) των μαθητών αντίστοιχα. Ακολούθησαν τα ερωτήματα 5,4 με τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων να είναι 28,3% (Ν=17) και 23,3% (Ν=14). Τέλος , τα μικρότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων εμφανίστηκαν στις ερωτήσεις 6 και 1 με 20% (Ν=12) και 16,7% (Ν=10) αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα του πίνακα 10 έρχονται σε συμφωνία με αυτά του Πίνακα 9 με τη μόνη διαφορά να εντοπίζεται στο ερώτημα 6, όπου υπήρξε μέτρια προς χαμηλή απόδοση με τις πλήρως σωστές απαντήσεις ωστόσο να βρίσκονται σε πολύ μικρό ποσοστό.

Πίνακας 10. Ποσοστά σωστών και λανθασμένων απαντήσεων στα 6 ερωτήματα

Ερωτήματα	**Σωστή**	**Πλήρως ή μερικώς λανθασμένη**
Ερώτημα 1	20%(N=12)	80%(N=48)
Ερώτημα 2	35%(N=21)	65%(N=39)
Ερώτημα 3	36,7%(N=22)	63,3%(N=38)
Ερώτημα 4	23,3%(N=14)	76,7%(N=46)
Ερώτημα 5	28,3%(N=17)	71,7%(N=43)
Ερώτημα 6	16,7%(N=10)	83,3%(N=50)



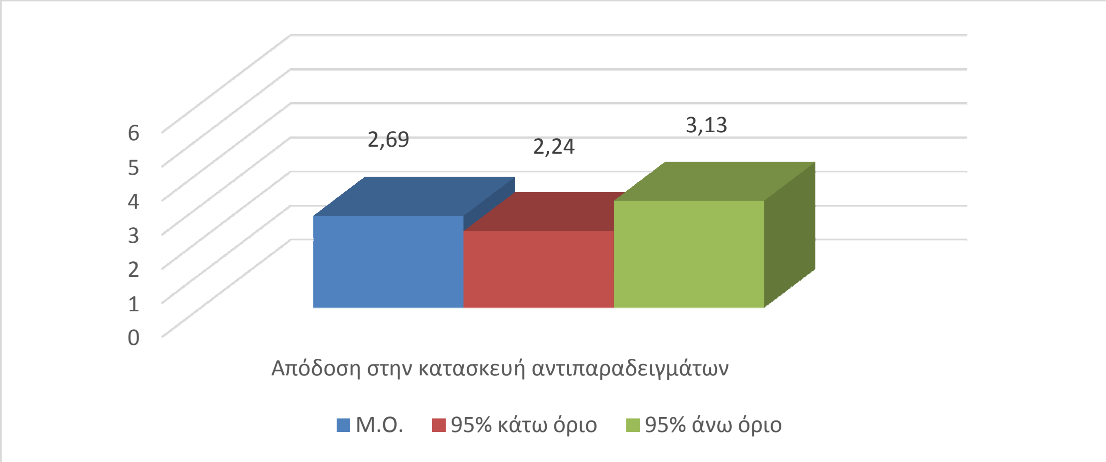
Γράφημα 11. Ποσοστά σωστών και λανθασμένων απαντήσεων στα 6 ερωτήματα

Οι 6 ερωτήσεις που αναφέρονται στην απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων ομαδοποιήθηκαν με χρήση της μέση τιμής. Η νέα μεταβλητή ονομάστηκε «Απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων». Τα περιγραφικά στοιχεία της νέας μεταβλητής παρουσιάζονται στον Πίνακα 11 (Γράφημα 12).

Προκύπτει ότι από το πιθανό εύρος τιμών 0-6 η ελάχιστη τιμή είναι 0 και η μέγιστη τιμή 6 επιβεβαιώνοντας ότι υπήρχαν μαθητές που απάντησαν λάθος ή σωστά σε όλες τις απαντήσεις. Επιπλέον η μέση τιμή είναι 2,69 εκφράζοντας μια μέτρια απόδοση, η οποία επιβεβαιώνεται και από τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης.

Πίνακας 11. Απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων

Μεταβλητή	**Ελάχιστη**	**Μέγιστη**	**Μ.Ο.**	**95% κάτω όριο**	**95% άνω όριο**	**τ.α.**
Απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων	0,00	6,00	2,69	2,24	3,13	1,73



Γράφημα 12. Απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων

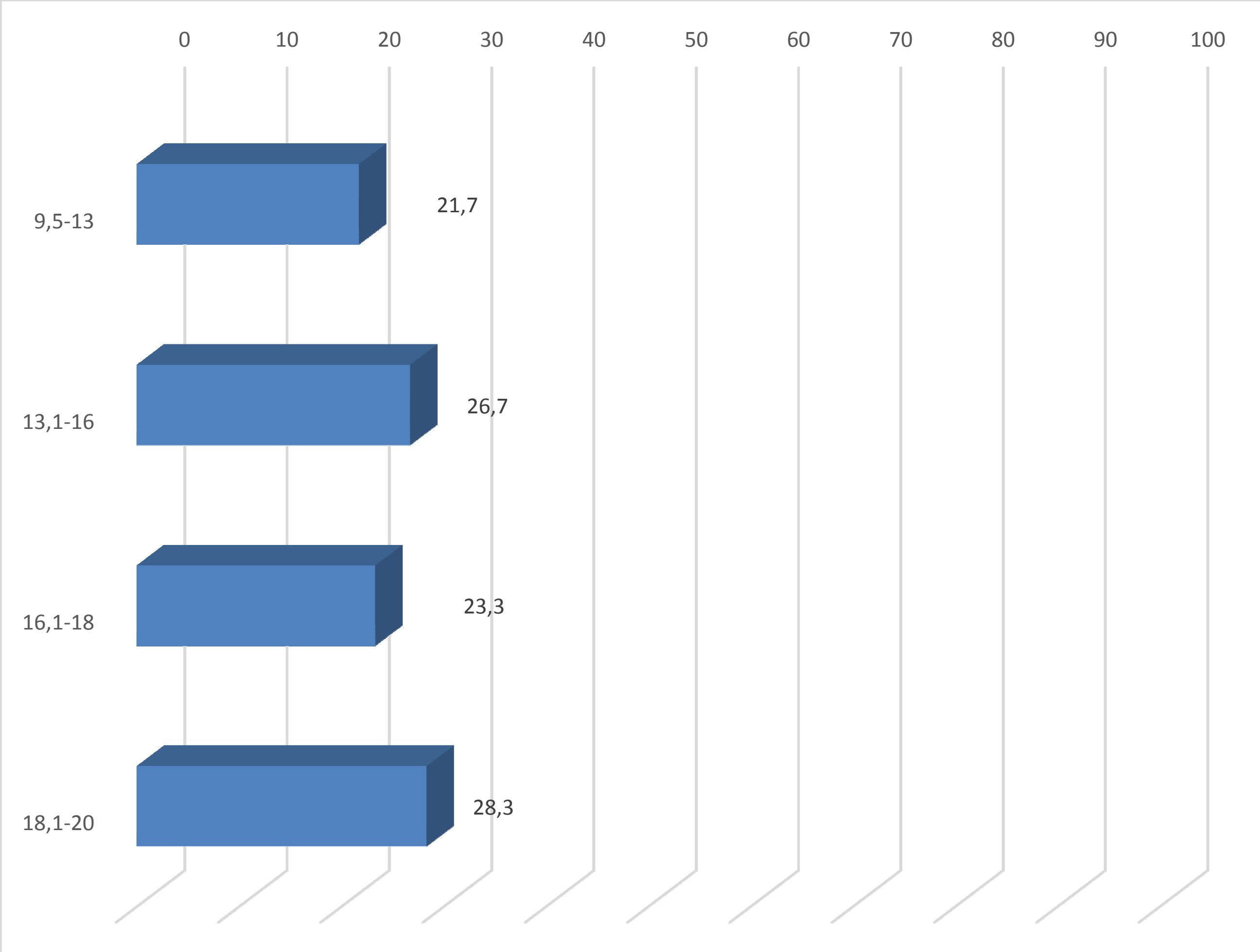
5.2.3 3ο ερευνητικό ερώτημα

«Επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων από την επίδοση στα μαθηματικά;»

Ο Πίνακας 12 (Γράφημα 13) παρουσιάζει τα αποτελέσματα σχετικά με την επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά. Προκύπτει ότι το 28,3% (N=17) είχε επίδοση 18,1-20, το 26,7% (N=16) επίδοση 13,1-16, το 23,3% (N=14) επίδοση 16,1-18 και το 21,7% (N=13) επίδοση 9,5-13.

Πίνακας 12. Επίδοση στα Μαθηματικά

Κατηγορίες	**N**	**f%**
9,5-13	13	21,7
13,1-16	16	26,7
16,1-18	14	23,3
18,1-20	17	28,3



Γράφημα 13. Επίδοση στα Μαθηματικά

Ο Πίνακας 13 παρουσιάζει τα αποτελέσματα του ελέγχου κανονικότητας για την μεταβλητή της απόδοσης στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων στις κατηγορίες της επίδοσης στα Μαθηματικά με χρήση του Shapiro Wilk test. Προκύπτει ότι η υπόθεση της κανονικότητας γίνεται δεκτή σε κάθε περίπτωση (p>0,05).

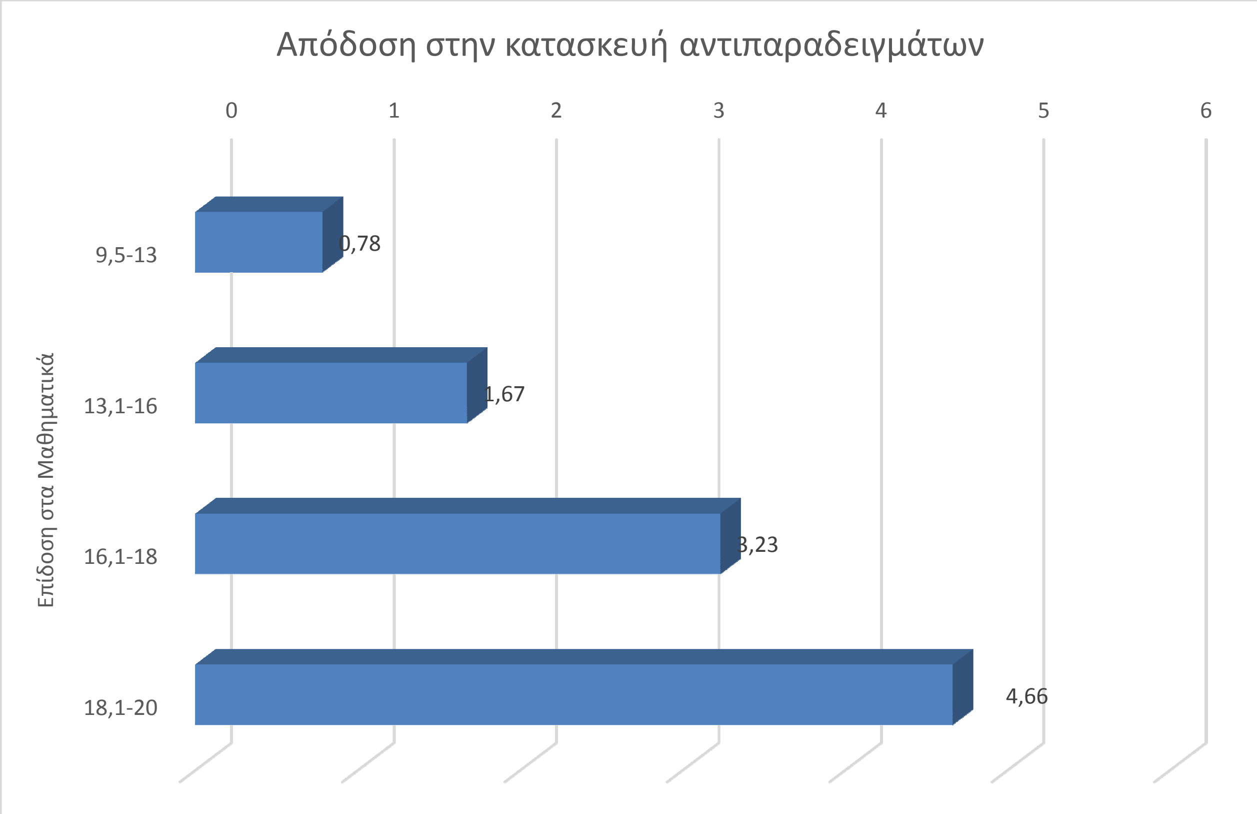
Πίνακας 13. Έλεγχος κανονικότητας με χρήση Shapiro Wilk test

Μεταβλητή	**Επίδοση στα Μαθηματικά**	**Statistic**	**df**	**p**
Απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων	9,5-13	,927	13	,310
	13,1-16	,897	16	,072
	16,1-18	,947	14	,516
	18,1-20	,942	17	,347

Λόγω ύπαρξης κανονικότητας, για έλεγχο διαφοροποίησης της μέσης τιμής της απόδοσης στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων στις κατηγορίες της επίδοσης στα Μαθηματικά χρησιμοποιήθηκε ο παραμετρικός έλεγχος ANOVA. Από τον Πίνακα 14 (Γράφημα 14) προκύπτει ότι εντοπίζεται στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση ($F(3)=57{,}192$, $p=0{,}000<0{,}05$) των μέσων τιμών της απόδοσης στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων στις κατηγορίες της επίδοσης στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα η μέση απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων των μαθητών που έχουν επίδοση στα Μαθηματικά 18,1-20 (Μ.Ο.=4,66) είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των μαθητών που έχουν επίδοση 16,1-18 (Μ.Ο.=3,23). Ομοίως η μέση απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων των μαθητών που έχουν επίδοση στα Μαθηματικά 16,1-18 (Μ.Ο.=3,23) είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των μαθητών που έχουν επίδοση 13,1-16 (Μ.Ο.=1,67) και 9,5-13 (Μ.Ο.=0,78). Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνονται και από την Post hoc analysis του Πίνακα 15.

Πίνακας 14. Στατιστικά σημαντικές διαφορές για απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων*επίδοση στα Μαθηματικά με χρήση ANOVA

Επίδοση στα Μαθηματικά	**N**	**Απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων**	**F(3)**	**p**
9,5-13	13	0,78	57,192	**0,000**
13,1-16	16	1,67		
16,1-18	14	3,23		
18,1-20	17	4,66		



Γράφημα 14. Στατιστικά σημαντικές διαφορές για απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων*επίδοση στα Μαθηματικά

Πίνακας 15. Post hoc analysis Bonferonni για απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων*επίδοση στα Μαθηματικά

Επίδοση I	**Επίδοση J**	**Μέση διαφορά (I-J)**	**p**
9,5-13	13,1-16	-0,88462	0,058
	16,1-18	-2,44414*	**0,000**
	18,1-20	-3,87481*	**0,000**
13,1-16	9,5-13	0,88462	0,058
	16,1-18	-1,55952*	**0,000**
	18,1-20	-2,99020*	**0,000**
16,1-18	9,5-13	2,44414*	**0,000**
	13,1-16	1,55952*	**0,000**
	18,1-20	-1,43067*	**0,000**
18,1-20	9,5-13	3,87481*	**0,000**
	13,1-16	2,99020*	**0,000**
	16,1-18	1,43067*	**0,000**

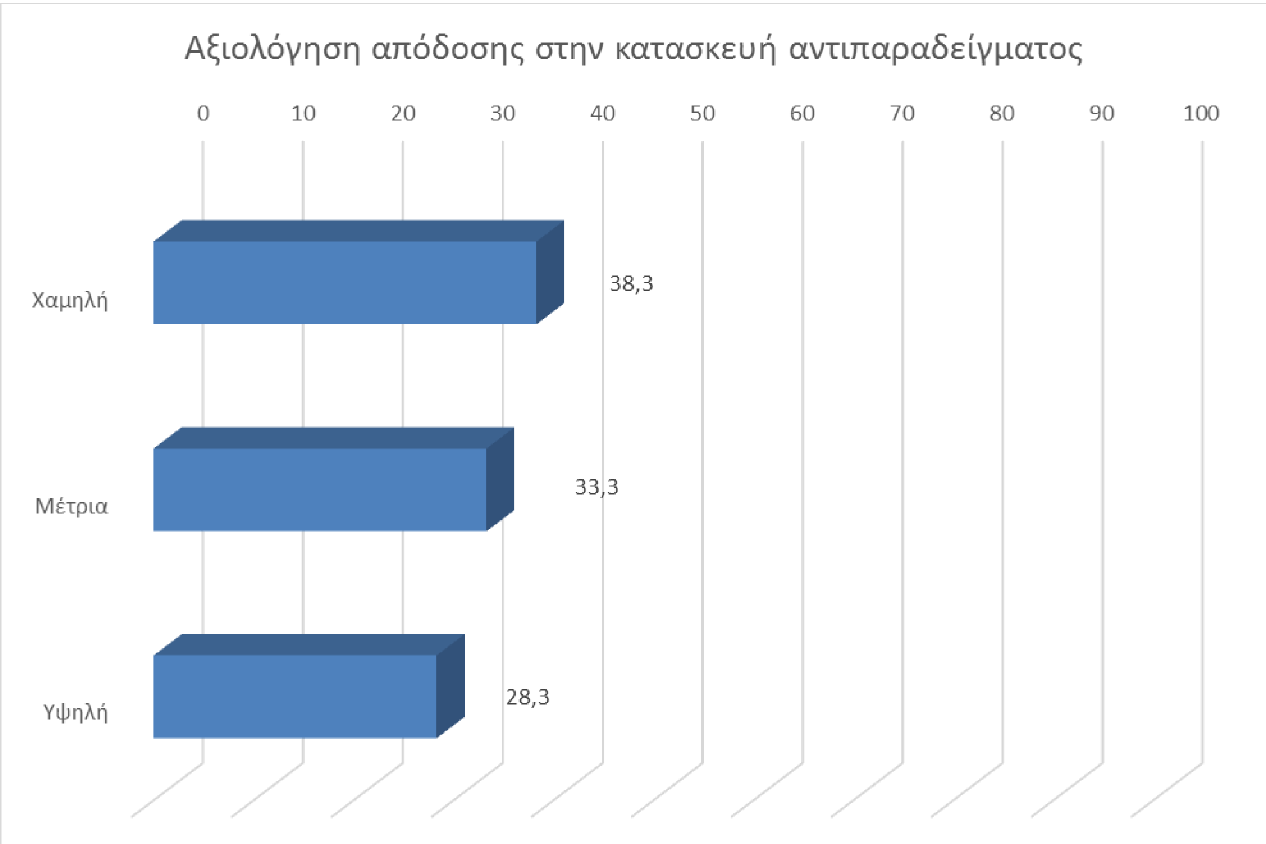
5.2.4 4^{ο} ερευνητικό ερώτημα

«Υπάρχουν συγκεκριμένες ομάδες μαθητών που ανταποκρίνονται στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων;»

Η απόδοση των μαθητών στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων χωρίστηκε στις κατηγορίες «Χαμηλή» για τιμές στο διάστημα [0,2), «Μέτρια» για τιμές στο διάστημα [2,4) και «Υψηλή» για τιμές στο διάστημα [4,6]. Από τον Πίνακα 16 (Γράφημα 15) προκύπτει ότι το 38,3% (N=23) των μαθητών είχε χαμηλή απόδοση, το 33,3% (N=20) μέτρια και το 28,3% (N=17) υψηλή. Παρατηρώντας τους μαθητές που είχαν υψηλή απόδοση διαπιστώθηκε ότι είναι η ομάδα των μαθητών που είχε επίδοση στα Μαθηματικά άνω του 18.

Πίνακας 16. Αξιολόγηση απόδοσης στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων

Κατηγορίες	N	f%
Χαμηλή	23	38,3
Μέτρια	20	33,3
Υψηλή	17	28,3



Γράφημα 15. Αξιολόγηση απόδοσης στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων

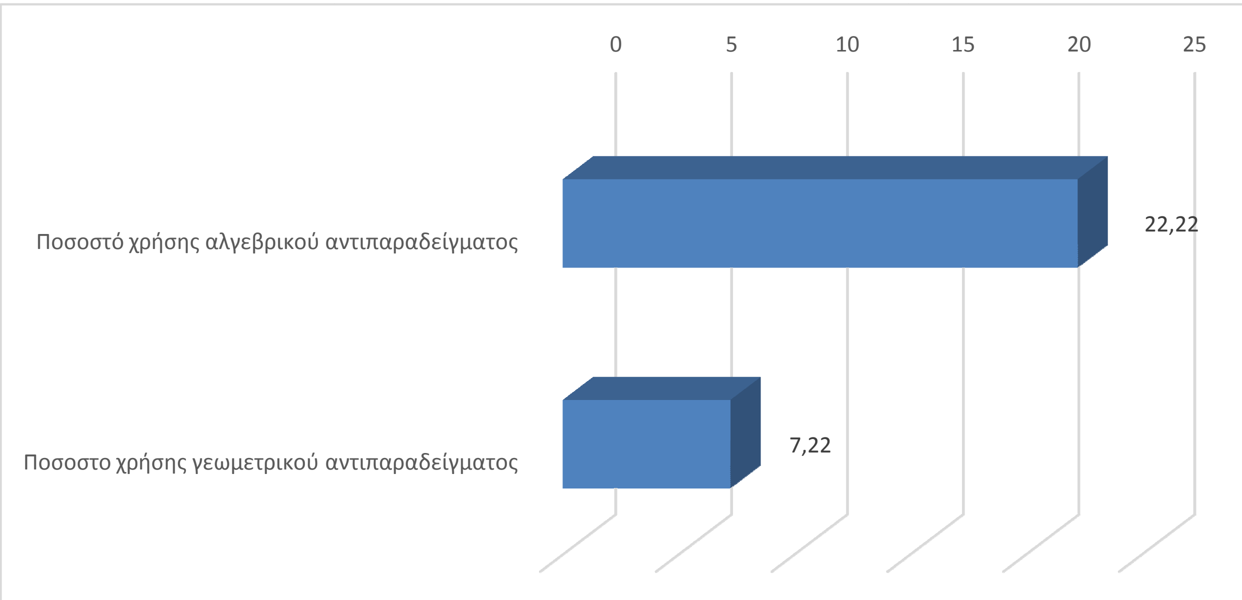
5.2.5 5ο ερευνητικό ερώτημα

«Οι μαθητές που κατασκεύασαν σωστό αντιπαράδειγμα προτίμησαν το αλγεβρικό ή το γεωμετρικό; Ποια η συχνότητα χρήσης αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές;»

Προκειμένου να μελετηθεί η διαφορά της χρήσης αλγεβρικού και γεωμετρικού αντιπαραδείγματος οι αντίστοιχες μεταβλητές ομαδοποιήθηκαν εκτιμώντας το ποσοστό χρήσης αντιπαραδείγματος για κάθε μαθητή. Οι νέες μεταβλητές ονομάστηκαν «Ποσοστό χρήσης αλγεβρικού αντιπαραδείγματος» και «Ποσοστό χρήσης γεωμετρικού αντιπαραδείγματος». Ο Πίνακας 17 (βλέπε και Γράφημα 16) παρουσιάζει τα αποτελέσματα του ελέγχου paired sample t-test για έλεγχο διαφοράς της μέσης τιμής στο ποσοστό χρήσης μεταξύ αλγεβρικού και γεωμετρικού αντιπαραδείγματος. Προκύπτει ότι η μέση τιμή της μεταβλητής «Ποσοστό χρήσης αλγεβρικού αντιπαραδείγματος» (Μ.Ο.=22,22%) είναι στατιστικά υψηλότερη ($t(59)=4{,}86$, *p-value*<0,05) από την αντίστοιχη της μεταβλητής «Ποσοστό χρήσης γεωμετρικού αντιπαραδείγματος» (Μ.Ο.=7,22%)

Πίνακας 17. Paired sample t-test για το είδος του ορθού αντιπαραδείγματος που χρησιμοποιήθηκε

Μεταβλητές	**M.O.**	**N**	**df**	**t**	**p-value**
Ποσοστό χρήσης αλγεβρικού αντιπαραδείγματος	22,22	60	59	4,86	**0,000**
Ποσοστο χρήσης γεωμετρικού αντιπαραδείγματος	7,22	60			

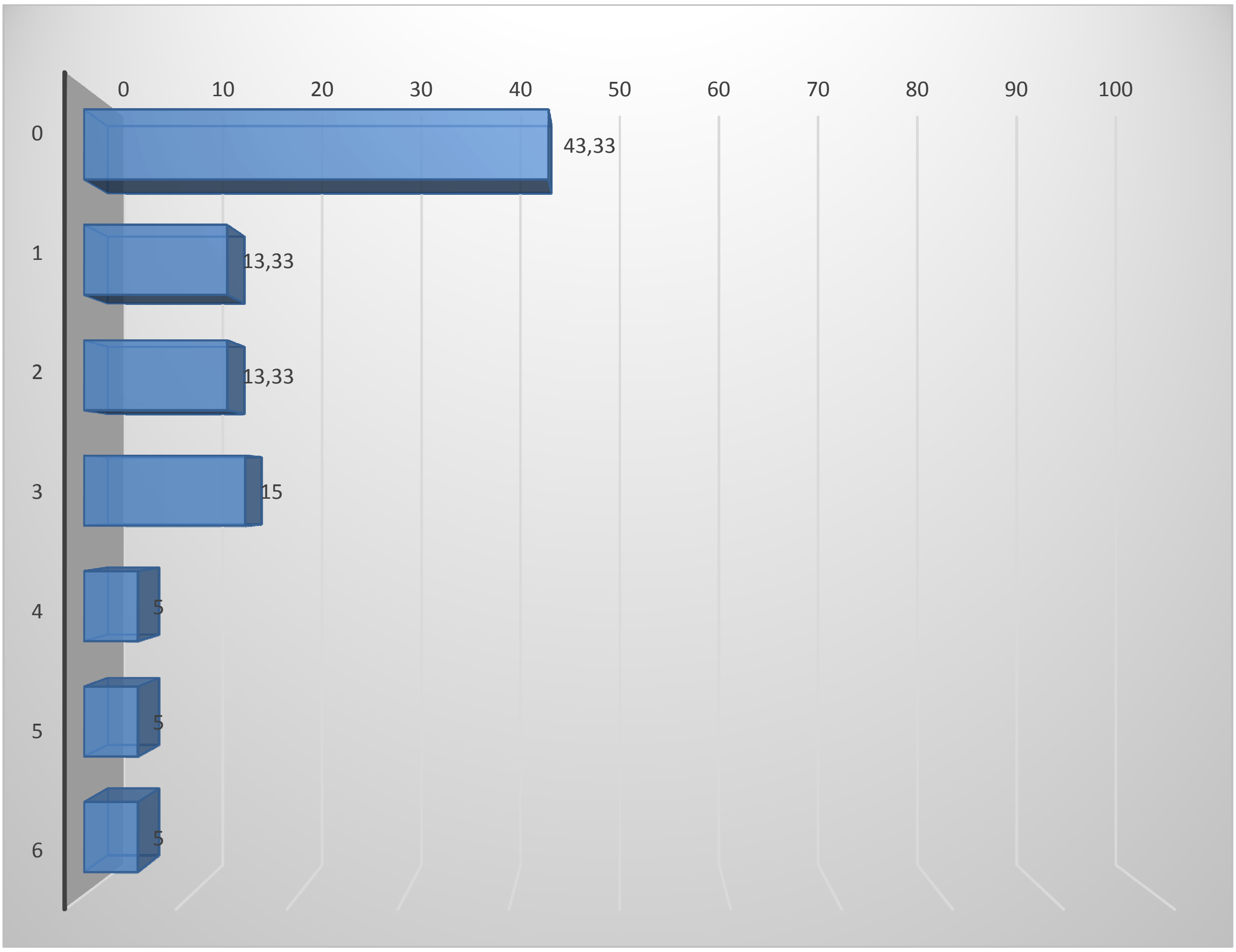


Γράφημα 16. Είδη του ορθού αντιπαραδείγματος που χρησιμοποιήθηκε

Τέλος, ο Πίνακας 18 (και το Γράφημα 17) παρουσιάζει το πλήθος των συνολικών αντιπαραδειγμάτων που χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής και στα 6 ερωτήματα ανεξάρτητα με το αν η απάντηση του ήταν απόλυτα ορθή. Προκύπτει ότι το 43,33% (N=26) δυσκολεύτηκε πάρα πολύ και δεν βρήκε κανένα αντιπαράδειγμα, το 15% (N=9) 3, το 13,33% (N=8) 1 ή 2, και το 5% (N=3) 4, 5 ή 6 αντιπαραδείγματα αντίστοιχα.

Πίνακας 18. Συνολικό πλήθος αντιπαραδειγμάτων

Πλήθος αντιπαραδειγμάτων	**N**	**f%**
0	26	43,33
1	8	13,33
2	8	13,33
3	9	15
4	3	5
5	3	5
6	3	5



Γράφημα 17. Συνολικό πλήθος αντιπαραδειγμάτων

Κεφάλαιο 6

6.1 Εμπειρικό μέρος και σύνδεση με βιβλιογραφία

Στην έρευνα συμμετείχαν 60 μαθητές της Γ τάξης Ενιαίου Λυκείου ισόποσα κατανεμημένοι ως προς το φύλο από 6 διαφορετικά λύκεια του Νομού Ημαθίας. Οι μαθητές προέρχονταν από το 2^{o} επιστημονικό πεδίο τεχνολογικών και θετικών σπουδών και από το 4^{o} επιστημονικό πεδίο, σπουδών οικονομίας και πληροφορικής, οι οποίοι διδάσκονται τα μαθηματικά προσανατολισμού, ήταν εξοικειωμένοι με το μαθηματικό περιεχόμενο των προηγούμενων τάξεων σχετικά με τις έννοιες του διαφορικού λογισμού, είχαν ασχοληθεί με την απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών και είχαν συζητήσει τον ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στην απόρριψη τέτοιων ισχυρισμών.

Όσον αφορά το 1^{o} ερευνητικό ερώτημα οι μαθητές χαρακτήρισαν τις προτάσεις ως αληθής, απλά ψευδείς, ψευδείς με ελλιπή δικαιολόγηση, ψευδείς με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση, ψευδείς με λάθος αντιπαράδειγμα ψευδείς με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση και ψευδείς με αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση. Γενικότερα οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ότι όλες οι προτάσεις ήταν ψευδείς και να δώσουν αντιπαράδειγμα και σωστή αιτιολόγηση. Περίπου 1 στις 4 απαντήσεις ήταν ορθά διατυπωμένη χαρακτηρίζοντας τις προτάσεις ψευδείς δίνοντας σωστό αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση ενώ επίσης 1 στις 4 απαντήσεις ήταν τελείως λανθασμένη θεωρώντας τις προτάσεις αληθής. Περίπου οι μισές απαντήσεις χαρακτήρισαν τις προτάσεις σωστά ως ψευδείς χωρίς ωστόσο να υπάρχει τεκμηριωμένη αιτιολόγηση και αντιπαράδειγμα.

Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξε και η έρευνα του Ευαγγελόπουλου (2018) ο οποίος παρουσίασε τα ευρήματα της στατιστικής επεξεργασίας της βαθμολογίας των γραπτών εξεταστικών δοκιμίων των Μαθηματικών του 2017, που συγκεντρώθηκαν στο 52ο Β.Κ σε δείγμα μεγέθους 1758 μαθητών. Αναλυτικά το 16,75% απάντησε ότι ο ισχυρισμός ήταν ψευδής και έδωσαν σωστό αντιπαράδειγμα δικαιολογώντας τον ισχυρισμό τους. Το 20% των μαθητών απάντησε ότι ο ισχυρισμός ήταν σωστός ενώ το 50% ισχυρίστηκε ότι η πρόταση ήταν λανθασμένη χωρίς να μπορέσει να δώσει αντιπαράδειγμα.

Επιπλέον, ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών του δείγματος, παρά το ότι είχαν ασχοληθεί, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων, δεν δέχονταν εύκολα ότι ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό για να απορριφθεί ένας μαθηματικός ισχυρισμός. Ίσως ήταν επηρεασμένοι από το ρόλο των παραδειγμάτων. Δηλαδή, το ότι ένα παράδειγμα δεν αποτελεί απόδειξη για την ισχύ ενός θεωρήματος τους δημιουργούσε την αντίληψη ότι ομοίως και ένα αντιπαράδειγμα, αφού είναι παράδειγμα, δεν μπορεί να αποτελέσει απόδειξη ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει. Οι Zaslavsky & Ron (1998) στην έρευνα τους εξέτασαν τον βαθμό κατανόησης από τους μαθητές της αντίληψης του αντιπαραδείγματος και τους τρόπους που κατασκευάζουν οι ίδιοι αντιπαραδείγματα. Εξέτασαν 150 μαθητές και τα συμπεράσματα που προέκυψαν ήταν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη χρήση αντιπαραδειγμάτων και δεν πείθονται ότι ένα αντιπαράδειγμα μπορεί να διαψεύσει έναν ισχυρισμό. Αυτό οφείλεται στον συλλογισμό ότι αφού ένα παράδειγμα δεν μπορεί να αποδείξει έναν ισχυρισμό και το αντιπαράδειγμα που είναι παράδειγμα δεν μπορεί να αποδείξει την μη ισχύ του ισχυρισμού. Αυτή η αμφισβήτηση του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στα Μαθηματικά αποτέλεσε ιστορικά ένα επιστημολογικό εμπόδιο στην ανάπτυξη τους (Lakatos,1976).

Σχετικά με το 2^{o} ερευνητικό ερώτημα οι αποδόσεις των μαθητών στις ερωτήσεις των Μαθηματικών χαρακτηρίστηκαν μέτριες με ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα να εμφανίζονται στα θεωρήματα Bolzano και στο πόρισμα του θεωρήματος μέση τιμής, ενδιάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης, στην σταθερή συνάρτηση και στο πρόσημο παραγώγου συνάρτησης ενώ χειρότερα στα όρια.

Στα όρια, το 35% των μαθητών απάντησε ότι η πρόταση είναι αληθής που υποδηλώνει ότι αυτοί οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως την ιδιότητα του γινομένου του ορίου δύο συναρτήσεων ενώ μόλις το 20% έδωσε πλήρη σωστή απάντηση. Αυτό έρχεται να επιβεβαιώσει έρευνες που αναφέρουν ότι οι μαθητές έχουν πρόβλημα να αναγνωρίσουν την ισχύ των προτάσεων (Ko & Knuth, 2009) και δεν καταφέρνουν να ελέγξουν την αξιοπιστία των προτάσεων (Hoyles & Kuchemann, 2002) και να φέρει στο φως παρανοήσεις και λανθασμένες πεποιθήσεις για τις έννοιες των προτάσεων που τους δόθηκαν. Αυτό ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν εννοιολογική κατανόηση ή δεν μπόρεσαν να βρουν αντιπαράδειγμα που να την απορρίπτει, όπως τους ζητήθηκε και βασίστηκαν περισσότερο στη διαίσθησή τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με μερικές έρευνες που αποτυπώνουν ότι πολλοί μαθητές δεν είναι ικανοί να αξιολογήσουν μια συγκεκριμένη πρόταση ως σωστή ή λανθασμένη διότι πολλοί από αυτούς δυσκολεύονται να απαντήσουν λόγω της ανεπαρκούς κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου (Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus,2002).

Στο αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano το 35% των μαθητών έδωσε σωστό αντιπαράδειγμα με αιτιολόγηση δείχνοντας πλήρη κατανόηση. Ωστόσο το 20% διέψευσε τον ισχυρισμό δίνοντας λάθος αιτιολόγηση ή απλά διατύπωναν το Θ.Bolzano ως αιτιολογία επιβεβαιώνοντας την αναφορά του Stylianides (2009) ότι μία από τις στρατηγικές που παρουσιάζουν οι μαθητές και χρησιμοποιούν για την επικύρωση αποδείξεων και για την εκτίμηση ισχυρισμών είναι η ανάκληση θεωρημάτων και ιδιοτήτων. Το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν αντιπαράδειγμα έρχεται να επιβεβαιώσει έρευνες που αναφέρουν ότι οι μαθητές εξακολουθούν να έχουν σημαντική δυσκολία με την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα (Alcock & Weber,2005; Ko & Knuth,2009; Seiden & Seiden,2003). Ωστόσο, μόλις το 13,33% έδωσε πλήρως λανθασμένη απάντηση.

Στο πόρισμα του θεωρήματος της μέσης τιμής, το 36,67% δήλωσε ότι η πρόταση είναι ψευδής με σωστό αντιπαράδειγμα και αιτιολόγηση παρουσιάζοντας μία πλήρη και σωστή απάντηση. Ωστόσο, το 26,67% διέψευσε την πρόταση ανασκευάζοντας και διατυπώνοντας την πρόταση του σχολικού βιβλίου χωρίς όμως να την αποδείξουν. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας του Lin (2005) τα οποία έδειξαν ότι υπήρχαν μαθητές που απέρριψαν έναν ισχυρισμό και ως αιτιολογία διατύπωσαν τη διορθωμένη πρόταση κατά την άποψη τους. Και εδώ επιβεβαιώνεται η αναφορά του Stylianides (2009) ότι μία από τις στρατηγικές που παρουσιάζουν οι μαθητές και χρησιμοποιούν για την επικύρωση αποδείξεων και για την εκτίμηση ισχυρισμών είναι η ανάκληση θεωρημάτων και πορισμάτων. Μόλις το 13,33% έδωσε πλήρως λανθασμένη απάντηση.

Στο θεώρημα σταθερής συνάρτησης, το 23,33% έδωσε πλήρη και αιτιολογημένη σωστή απάντηση. Επιπλέον, το 28,33% απλά διέψευσε τον ισχυρισμό και το 21,6% ανασκεύασε την πρόταση τονίζοντας ότι η συνθήκη της συνέχειας καθιστά τον ισχυρισμό αληθή. Το τελευταίο έρχεται να επιβεβαιώσει ότι τα αντιπαραδείγματα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην τροποποίηση των εικασιών και τροποποιούν τις εικασίες με τέτοιο τρόπο ώστε να λειτουργούν ως αναθεωρημένες αξιώσεις (Lakatos,1976;Larsen & Zandieh,2008). Το 20% έδωσε πλήρως λανθασμένη απάντηση.

Στο πρόσημο παραγώγου συνάρτησης το 40% θεώρησε τον ισχυρισμό αληθή, δείχνοντας ότι στην παρούσα μελέτη όπως και στην αντίστοιχη των Seiden & Seiden (2003) αρκετοί μαθητές δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν ποιο πλαίσιο απόδειξης θα χρησιμοποιήσουν. Το 28,33% ωστόσο έδωσε σωστή απάντηση με αιτιολογημένο αντιπαράδειγμα.

Στη μονοτονία συνάρτησης, το 80% περίπου θεώρησε την πρόταση λανθασμένη, ωστόσο μόνο το 16,67% έδωσε πλήρη αιτιολογημένη απάντηση.

Στο 3^{ο} ερευνητικό ερώτημα, αναδείχτηκε ότι καλύτερη απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων έχουν οι μαθητές που έχουν επίδοση στα Μαθηματικά άνω του 18. Ακολούθησαν οι μαθητές με επίδοση 16-18 και τέλος οι μαθητές με επίδοση 9,5-16. Τα αποτελέσματα ήταν αναμενόμενα αφού η ικανότητα κατασκευής αντιπαραδειγμάτων συνδέεται άμεσα με την γνώση των Μαθηματικών (Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus 2002; Seiden & Seiden 2003).

Στο 4^{ο} ερευνητικό ερώτημα ταξινομήθηκαν οι αποδόσεις των μαθητών σε 3 ομάδες και συγκεκριμένα στις ομάδες της χαμηλής, μέτριας και υψηλής απόδοσης. Στην χαμηλή απόδοση ταξινομήθηκαν οι μαθητές οι οποίοι κατά μέσο όρο χαρακτήρισαν τις προτάσεις αληθείς ή απλά ψευδείς ή ψευδείς με ελλιπή δικαιολόγηση, στην μέτρια απόδοση οι μαθητές που τις χαρακτήρισαν ψευδείς με ανασκευή πρότασης χωρίς αιτιολόγηση ή με λάθος αντιπαράδειγμα και στην υψηλή οι μαθητές που τις χαρακτήρισαν ψευδείς με αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση ή με αιτιολόγηση. Προέκυψε ότι περίπου 4 στους 10 μαθητές είχαν χαμηλή απόδοση, 1 στους 3 μέτρια και περίπου 3 στους 10 υψηλή. Υψηλή απόδοση στην κατασκευή αντιπαραδειγμάτων, είχαν οι μαθητές που είχαν επίδοση στα Μαθηματικά άνω του 18.

Τα αποτελέσματα της έρευνας εμφανίζουν αρκετές ομοιότητες με την έρευνα των Peled & Zaslavsky (1997) οι οποίοι διαπίστωσαν ότι ορισμένοι συμμετέχοντες στην έρευνα παρήγαγαν είτε ένα παράδειγμα το οποίο δεν ικανοποιούσε την προϋπόθεση ως αντιπαράδειγμα ή ένα αντιπαράδειγμα που δεν υπήρχε. Τα ευρήματα τους υποστήριξαν την άποψη του Perkins και Salomon (1989) ότι η ικανότητα παραγωγής αντιπαραδειγμάτων εξαρτάται πολύ από το πλαίσιο. Τα δύο τρίτα των σπουδαστών είτε δεν χρησιμοποίησαν σωστά τα αντιπαραδείγματα ή δεν μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν σωστά αντιπαραδείγματα ενώ μόνο το 10% των μαθητών χρησιμοποίησε σωστά τα αντιπαραδείγματα.

Τέλος, στο 5^{ο} ερευνητικό ερώτημα, αν και η χρήση της γραφικής παράστασης είναι μια απλή μέθοδος παραγωγής αντιπαραδειγμάτων, οι μαθητές προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν την αλγεβρική αναπαράσταση. Στην ερώτηση 2 όμως έχουμε το μεγαλύτερο ποσοστό αντιπαραδειγμάτων κάνοντας χρήση γραφικής παράστασης. Οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν τον ισχυρισμό αυτό έδωσαν μεγάλη ποικιλία αντιπαραδειγμάτων και στην περίπτωση με χρήση γραφικής παράστασης και στην περίπτωση με χρήση αλγεβρικού τύπου. Αυτό φανερώνει ότι οι μαθητές πετυχαίνουν μεγαλύτερη εννοιολογική κατανόηση από τις γραφικές παραστάσεις. Έτσι, οι γνώσεις οπτικής εικόνας και οι απλές σχετικές δεξιότητες με τις συναρτήσεις είναι ζωτικής σημασίας για τους μαθητές να δημιουργήσουν τα κατάλληλα αντιπαραδείγματα. Ακόμη, υπήρχαν ισχυρισμοί που οι μαθητές δεν κατάφεραν να παράγουν αντιπαράδειγμα με χρήση της γραφικής παράστασης αν και φάνηκε ότι υπήρχαν σχεδόν από τους περισσότερους μαθητές προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή. Τέλος, περίπου 4 στους 10 μαθητές δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν κανένα αντιπαράδειγμα.

Σε προηγούμενες έρευνες για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα ορισμένοι έδειξαν την τάση να χρησιμοποιούν γενικά ή ειδικά παραδείγματα που σχετίζονται με την πρόταση (Alock & Inglis,2008). Κάποιοι μαθητές σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις για να τους βοηθήσει στην κατανόηση της πρότασης και κατά τις διαδικασίες επαλήθευσης των μαθηματικών εικασιών (Gibson 1998; Goetting 1995). Ακόμα άλλοι πραγματοποίησαν κρίσεις βασισμένοι σε ότι θυμούνται από παρόμοιες εικασίες, ώστε να αρχίσουν να παράγουν μια απόδειξη, να ψάχνουν για ένα αντιπαράδειγμα ή να κάνουν δοκιμές και στη συνέχεια να επιχειρήσουν να κατασκευάσουν μια απόδειξη (Goetting,1995). Άλλοι έψαξαν για σχετικές εννοιολογικές αντιλήψεις που εμπλέκονται στο πρόβλημα ή ανακαλούν παρόμοιες αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα και τα αντιγράφουν (Smith,2006).

Στην έρευνα μας διαπιστώνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατασκευή σωστών αντιπαραδειγμάτων. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι τα αντιπαραδείγματα που δίνουν στις απαντήσεις τους δεν έχουν όλες τις ιδιότητες που διαψεύδουν τις λανθασμένες προτάσεις. Επίσης, η δυσκολία εύρεσης σωστών αντιπαραδειγμάτων έγκειται και στην μη κατανόηση του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στα Μαθηματικά. Ωστόσο πολλοί μαθητές, αν και κατανοούν τον ιδιαίτερο ρόλο των αντιπαραδειγμάτων δεν μπόρεσαν να τα δημιουργήσουν ή έδωσαν παραδείγματα που δεν ικανοποιούσαν τις προϋποθέσεις ή δεν υπήρχαν. Τα αποτελέσματα συνδέονται με την προ υπάρχουσα βιβλιογραφία. Η μη εύρεση αντιπαραδείγματος από αρκετούς μαθητές στην έρευνα μας ανέδειξε παρανοήσεις και λανθασμένες πεποιθήσεις για τις έννοιες των προτάσεων που τους δόθηκαν και έρχεται να επιβεβαιώσει έρευνες που αναφέρουν ότι οι μαθητές εξακολουθούν να έχουν σημαντική δυσκολία με την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα (Alcock & Weber 2005; Ko & Knuth 2009; Seiden & Seiden 2003) και έχουν πρόβλημα να αναγνωρίσουν την ισχύ των προτάσεων (Ko & Knuth,2009). Επιπλέον, πολλοί μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν καταφέρνουν να ελέγξουν την αξιοπιστία των προτάσεων (Hoyles & Kuchemann, 2002).

Για τους μαθητές που απάντησαν ότι οι ισχυρισμοί είναι σωστοί ενδεχομένως κάποιοι μαθητές που δεν απέρριψαν τους ισχυρισμούς να απάντησαν σωστά με το σκεπτικό ότι η πρόταση ισχύει αφού δεν μπόρεσαν να βρουν αντιπαραδείγματα που να την απορρίπτουν. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί εφαρμόζουν έναν πιο φορμαλιστικό τρόπο διδασκαλίας κάνοντας χρήση αλγορίθμων και διαδικασιών (λόγω Πανελλαδικών Εξετάσεων) και δεν επιμένουν στην κατανόηση των εννοιών και τις προϋποθέσεις ισχύς προτάσεων. Τα βιβλία των μαθηματικών για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν δίνουν μεγάλη σημασία στη διευκόλυνση της χρήσης και κατανόησης των αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές. Η μη εύρεση αντιπαραδείγματος από τους μαθητές ανέδειξε παρανοήσεις και λανθασμένες πεποιθήσεις για τις έννοιες των προτάσεων που τους δόθηκαν. Ακόμη και φοιτητές που έχουν πάρει αρκετά μαθήματα μαθημάτων ανώτατου επιπέδου σε συλλογικό επίπεδο, εξακολουθούν να έχουν σημαντική δυσκολία με την απόδειξη και το αντιπαράδειγμα (Alcock & Weber 2005; Ko & Knuth,2009; Seiden & Seiden 2003) και έχουν πρόβλημα να αναγνωρίσουν την ισχύ των προτάσεων (Ko & Knuth,2009).

Η έρευνα ανέδειξε ότι οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν τη μαθηματική γνώση μέσα από τα ίδια τους τα λάθη. Η κατασκευή αντιπαραδείγματος από τους μαθητές δεν είναι μία αλγοριθμική διαδικασία αλλά μία διαδικασία σκέψης που βγάζει στην επιφάνεια παρανοήσεις και λανθασμένες πεποιθήσεις. Μέσω της συζήτησης εικασιών και ισχυρισμών κατά τη διδασκαλία μέσα στην τάξη, οι μαθητές εξετάζοντας την ισχύ τους διατυπώνουν ιδέες, άλλες εικασίες, αναστοχάζονται και γενικά βιώνουν τον τρόπο δημιουργίας των μαθηματικών εννοιών και βιώνουν τις προϋποθέσεις για να ισχύει ένα θεώρημα. Δημιουργείται έτσι ένα περιβάλλον έρευνας, προβληματισμού, αναστοχασμού και επικοινωνίας. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής διαμορφώνει μια δική του μαθηματική συμπεριφορά μέσα από την οργάνωση της προσωπικής δραστηριοποίησης και των εμπειριών του. Έτσι ο μαθητής κατασκευάζει δυναμικά τη γνώση, οργανώνοντας το δικό του εμπειρικό κόσμο. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο ο μαθητής παρατηρεί, επιλέγει, αποφασίζει, παράλληλα όμως εκφράζει με λόγια ή άλλα αναπαραστατικά μέσα, διατυπώνει αυτό που κάνει, αναπτύσσει στρατηγικές που τον βοηθούν, όπως άλλωστε επιβεβαιώνει τη δράση του ή την απόφασή του, διορθώνει σε περιπτώσεις λάθους, με την απόδειξη να αποκτά θεμελιακή σημασία μέσω του ελέγχου των ισχυρισμών.

6.2 Προτάσεις

Στην εργασία αυτή μετά τη μελέτη πολλών ερευνών έγινε προσπάθεια να αναδειχτεί ο κεντρικός ρόλος που μπορεί να παίξει το αντιπαράδειγμα στην διδασκαλία των μαθηματικών. Η κατασκευή αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές αποδείχθηκε δυσκολότερη από μια συνήθη αλγοριθμική και διαδικαστική εύρεση αποτελεσμάτων μιας και η κατασκευή τους εμπεριέχει το στοιχείο του αυτοσχεδιασμού με το οποίο δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές και το στοιχείο της αβεβαιότητας λόγω των λεπτών μαθηματικών στοιχείων που πρέπει να εμπεριέχουν ώστε να καταρρίψουν τον ισχυρισμό. Ίσως και η διδασκαλία μιας έννοιας, ενός ορισμού ή ενός θεωρήματος ως «έτοιμη» γνώση» και η μη διδασκαλία των λεπτών σημείων μέχρι την τελική διατύπωση τους μέσω ελέγχων και αντιπαραδειγμάτων να στερούν από τον μαθητή να αποτυπώσει στο μυαλό του την πραγματική τους εικόνα ώστε να μπορέσει να την αναπαράγει και να αποφύγει τυχόν παρανοήσεις κατά την αναπαραγωγή αυτή.

Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι πρέπει να δοθεί μεγαλύτερη προσοχή στα αντιπαραδείγματα, καθώς οι συμμετέχοντες έδειξαν δυσκολία στο να δημιουργήσουν κατάλληλα αντιπαραδείγματα. Διαπιστώνουμε ότι για να απαντήσει ένας μαθητής αν ένας μαθηματικός ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένος, πρέπει να έχει μια πλήρη κατανόηση της έννοιας και της σωστής αιτιολόγησης. Προκειμένου να βελτιωθεί η κατανόηση των μαθητών σχετικά με τις έννοιες του διαφορικού λογισμού, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να κατανοήσουν τις παρερμηνείες των μαθητών και να αφιερώσουν επιπλέον χρόνο για να ερμηνεύσουν τις σχετικές έννοιες. Το αντιπαράδειγμα είναι απαραίτητο για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθώς κοινή διαπίστωση είναι ότι ο φορμαλιστικός τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών έχει διαμορφώσει την αντίληψη ότι τα μαθηματικά αναπτύσσονται χωρίς προβληματισμούς και ελέγχους. Οι εκπαιδευτικοί προτιμούν να παραθέτουν την τελική διατύπωση των θεωρημάτων και όχι τον δρόμο μέχρι την τελική διατύπωση και της μετατροπής τους σε θεώρημα. Η γεωμετρική ερμηνεία φανερώνει την μεγάλη αντιληπτική ισχύ στην κατανόηση της αλήθειας διάφορων ισχυρισμών από τους μαθητές και επομένως δίνει διδακτική ισχύ στον εκπαιδευτικό.

Πρέπει το αντιπαράδειγμα να αποτελέσει αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας του σημερινού εκπαιδευτικού και οι εκπαιδευτικοί να το χρησιμοποιούν για την απόρριψη λανθασμένων ισχυρισμών και όχι να απορρίπτουν τον ισχυρισμό παραπέμποντας το μαθητή σε θεωρήματα και πορίσματα. Τότε ο μαθητής θα αφομοιώσει τα μαθηματικά αντικείμενα και θα σχηματίσει την εικόνα τους, θα μπορέσει να τα αναπαράγει, να αναγνωρίσει τα κρίσιμα χαρακτηριστικά τους και να δημιουργήσει το δικό του προσωπικό χώρο παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Το αντιπαράδειγμα είναι ένα βασικό εργαλείο κατανόησης μαθηματικών εννοιών και εξάλειψης παρανοήσεων και γι αυτό πρέπει να προτείνεται ως ένας βασικός τρόπος αντιμετώπισης τους. Γι αυτό πρέπει να εμπεριέχεται στα σχολικά εγχειρίδια και να χρησιμοποιείται από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία του. Όμως ο μαθητής για να καρπωθεί όλα τα οφέλη του χρειάζεται μεγαλύτερη εξοικείωση με αυτό, προτείνεται ο εμπλουτισμός του σχολικού εγχειριδίου με άλλα αντιπαραδείγματα ώστε να αναδειχθεί η τεράστια διδακτική αξία του από τις πρώτες κιόλας τάξεις. Απαιτείται λοιπόν η εισαγωγή στα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών ορισμένων επιπλέον αντιπαραδειγμάτων τα οποία είναι ελεγμένα τόσο διδακτικά και επιστημονικά διευρύνοντας το γνωστικό πεδίο των μαθητών, διευκρινίζοντας δυσδιάκριτες πτυχές των εννοιών και αίροντας ένα μέρος τουλάχιστον της ισχύος σε συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια.

Η διδασκαλία η οποία περιλαμβάνει εικασίες και αντιπαραδείγματα βοηθάει τους μαθητές να προσεγγίζουν μαθηματικές καταστάσεις με τέτοιο τρόπο που τους μαθαίνει να σκέφτονται, να κρίνουν και να συμπεραίνουν, προκειμένου να απαντήσουν. Χρησιμοποιώντας αντιπαραδείγματα ο εκπαιδευτικός διαψεύδει εικασίες οι οποίες όμως μπορούν να λειτουργήσουν ως μέσο προσέλκυσης ενδιαφέροντος και ως μέσο διδασκαλίας της επιχειρηματολογίας και του αποδεικτικού μηχανισμού. Η μαθηματική αναζήτηση πολλές φορές καταλήγει σε μια εικασία, οπότε η συνήθης πρακτική είναι η αναζήτηση αντιπαραδείγματος για την απόρριψή της (Davis & Hersh,1981). Η απόρριψη εικασιών και εσφαλμένων ισχυρισμών απαιτεί τη γένεση αντιπαραδειγμάτων και την ανάπτυξη λογικών επιχειρημάτων, που θεμελιώνονται στη διερεύνηση και στον πειραματισμό, οι οποίες αποτελούν βασικές συνιστώσες της κατασκευής του μαθηματικού νοήματος και της μαθηματικής κατανόησης. Πρέπει οι εκπαιδευτικοί να αναπροσαρμόσουν τη διδασκαλία τους ώστε οι μαθητές να ανταποκρίνονται στην αντιμετώπιση εικασιών και αντιπαραδειγμάτων και να διαμορφώσουν τέτοιες συνθήκες διδασκαλίας που να ενσωματώσουν την δυναμική και παιδαγωγική αξία των εικασιών και των αντιπαραδειγμάτων.

Ιδιαίτερα επωφελές αναμένεται να αποδειχθεί η προσπάθεια δημιουργίας αντιπαραδειγμάτων από τον ίδιο τον μαθητή. Γι αυτό προτρέπονται οι μαθητές να κατασκευάσουν αντιπαραδείγματα προωθώντας μια προσέγγιση στη διδασκαλία η οποία βλέπει τους εκπαιδευόμενους να κάνουν χρήση των δικών τους φυσικών δυνάμεων ως κίνητρο για αποτελεσματικότερη μάθηση. Ακόμη και όταν οι μαθητές διδάσκονται λογισμό για καθαρά ρεαλιστικούς σκοπούς, το ενδιαφέρον και η συμμετοχή τους μπορεί να ενισχυθεί με την εμπλοκή τους στη δραστηριότητα της κατασκευής παραδείγματος. Εάν δεν εκτιμούν το πεδίο εφαρμογής και της σειράς των μαθηματικών αντικειμένων που υποτίθεται ότι μαθαίνουν, τότε δεν είναι σωστά προετοιμασμένοι να χρησιμοποιήσουν τις τεχνικές σε άλλες καταστάσεις. Προτρέπονται οι εκπαιδευόμενοι να κατασκευάσουν όχι μόνο ένα, αλλά τάξεις παραδειγμάτων για τον εαυτό τους, προκειμένου να επεκτείνουν και να εμπλουτίσουν τους δικούς τους χώρους παραδειγμάτων και να αναπτύξουν μια πλήρη εκτίμηση των εννοιών, των ορισμών και των τεχνικών που διδάσκονται.

Τέλος, αναφορικά με τις προτάσεις για μελλοντική έρευνα προτείνεται να πραγματοποιηθεί απλή τυχαία δειγματοληψία σε μαθητές Γ Λυκείου θετικών και τεχνολογικών σπουδών και σπουδών οικονομίας και πληροφορικής με περισσότερες από 20 ερωτήσεις προκειμένου να ισχυροποιηθούν τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης η οποία χρησιμοποίησε βολική δειγματοληψία και μικρό αριθμό ερωτήσεων.

Παράρτημα

Ερωτηματολόγιο
Φύλο:…………
Καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να τους χαρακτηρίσετε γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής και κατόπιν να δικαιολογήσετε την απάντηση σας

1. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ τότε κατά ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}g(x)$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ τότε κατά ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

3. Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ . Αν για τις f,g ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε οπωσδήποτε ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

4. Κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\left(\alpha,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$ είναι σταθερή στο $\left(\alpha,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

………
……..

5. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά θετική στο Δ

………
………
………
………
………
………

6. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_1 του πεδίου ορισμού της και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_2 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι υποχρεωτικά γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$

………
………
………
………
………
………

Βιβλιογραφία

Ξένη

Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 111–129.

Alcock, L. & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.

Arzarello, F., Andriano, V., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). *Abduction and conjecturing in mathematics*, *Philosophica,* 61(1), 77–94.

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. *In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (pp. 284–297). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. *In D.Pimm, (Ed.), Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1991).Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. *In E. von Glaserfeld (Ed.),Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89–110). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ball, D., Bass, H., Sleep, L., & Thames, M. (2005). A theory of mathematical knowledge for teaching. *The Fifteenth ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*.

Baroody, A. J. (1993). *Problem Solving, Reasoning, and Communicating (K-8): Helping Kids Think Mathematically.* New York, NY: Macmillan.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). *Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers*.

Bieda, K., Holden, C, & Knuth, E. (2006). Does proof prove? Students' emerging beliefs about generality and proof in middle school. *In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, M., & A.Méndez, (Eds.), Proceedings ofthe Twenty-eighth Annual Meeting ofthe North American Chapter ofthe International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2,pp. 395-402). México: Universidad Pedagogical Nacional.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351-382.

Bills, L., Dreyfus T., Mason J., Tsamir P., Watson A. and Zaslavsky O., (2006) *Exemplification in Mathematics Education*.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. *Research in Mathematics Education*, 1(1), 103-116.

Blaise Pascal (1654), *Trait Du Triangle Arithm Tique.*

Bleiler-Baxter, S. K., & Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *Journal of Mathematical Behavior*, 47, 16–34.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7(8).

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques, 4(2), 165-198.

Bruner, J. (1960). *The process of education.* Cambridge: Harvard University Press.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2005). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 401–408). Saint Feliu de Guixols, Spain.

Carpenter, T. & Franke, M. (2001*).* Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. *In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the Twelfth International Commission on Mathematical Instruction* (Vol. 1, pp. 155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Chapman, C. S. (1997). Reflections on a contingent view of accounting. *Accounting, organizations and society*, 22(2), 189-205.

Charles, R.I. (1980). Exemplification and characterization moves in the classroom teaching of geometry concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 10-21.

Chih-Hsien Huang (2014*). Engineering students' generating counterexamples of calculus concepts.*

Cohen Louis & Manion Lawrence & Morrison Keith (2007). *Research Methods in Education.*

Courant, R. (1981). Reminiscences from Hilbert's Gottingen*. Mathematical Intelligencer*, 3(4), 154–164.

Creswell J.W.(2013). *Research design*.

Dahlberg, R.P., & Housman, D.L. (1997). Facilitating learning events through example generation*. Educational Studies in Mathematics*, 33, 283-299.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Brighton UK: Harvester

Dedekind R. (1877): *Sur la théorie des nombres entiers algébriques*. Paris: Gauthier-Villars.

De Morgan, (1838) *Induction (mathematics)*, *The Penny Cyclopedia*

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.

Dickerson, D. S. (2008). *High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof.* Unpublished doctoral dissertation, Syracuse University, Syracuse.

Dienes, L. (1960). Controversial aspects of the morphology of PPLO. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 79(10), 356-368.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 85-109.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In D. O. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Dorfrecht: Kluwer.

Duval, R. (2007).Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. *In Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice, ed. P. Boero*, 137 62. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ernest, P. (1996) *A Bibliography of Mathematics Education*, Exeter: University of Exeter School of Education, 1996, retrieved on 3 May 2015 from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/reflist6.htm.

Feynman, R. (1985). *Surely you're joking, Mr Feynman!*: *Adventures of a Curious Character* (W. W. Norton: New York).

Fischbein, E. (1982). *Intuition and proof. For the Learning of Mathematics*.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Gagatsis, A. (1992). Introduction: Concepts and methods of Didactics of mathematics-Relations between history and didactics of mathematics. *Topics on didactics of mathematics*, 11-28.

Gagné, F. (1985). Giftedness and talent: Reexamining a reexamination of the definitions. *Gifted child quarterly*, 29(3), 103-112.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-28.

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(3), 160-168.

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. InA. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof.* Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland, Maryland.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Spreading light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 183-194.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). *Using counter-examples in teaching Calculus*.
Paul Halmos (1985). I want to be a Mathematician: An Automathography. Springer-Verlag. ISBN 0-387-96470-3. OCLC 230812318.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, 54–61. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42–49.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education*. ZDM, 40(2), 329-336.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2012) *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education,*.

Harel G. & J. M. Rabin (2010), Teaching Practices That Can Promote the Authoritative Proof Scheme, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.

Harel, G. and Sowder, L. (2007) Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In: Lester, F., Ed., *Second Handbook of Research on Mathematics Education*, Information Age Pub Inc., Greenwich

Hartshorne, R. (2000, April). Teaching geometry according to Euclid. Notices of the AMS (American Mathematical Society)
Haylock. D. with Manning, R. (2010). *Student Workbook for Mathematics Explained for Primary Teachers.* London: Sage Publications.

Hazzan, O., & Zazkis, R. (1999). A perspective on" give an example" tasks as opportunities to construct links among mathematical concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 21(4), 1-14.

Hershkowitz, Rina (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry-Or when "a little learning is a dangerous thing.". *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*

Hoyles, C, & Kuchemann, D. (2002a). Students' explanations in geometry: Insights from a large-scale longitudinal survey. *Proceedings ofthe International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, 9-22.

Huang, C. (2014). Engineering students' generating counterexample of calculus concepts. *Global Journal of Engineering Education*, 16(2), 93-97.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics 66* (1), 3 – 21.

Klymchuk, S. (2001). *Counter examples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistakes*

Klymchuk, S. (2005). Counter-examples in teaching/learning of Calculus: Students' performance. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 42(1), pp. 31-38.

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. *European Research in Mathematics Education III,* Thematic Group 4.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 379–405.

Ko, Y.Y, & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 68-77.

Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1109-1129.

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., & Sakamaki, A. (2014). Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 7(45), 1053–1067.

Krummheuer G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom:: Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*.

Lakatos, I. (1976), *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2008*).* Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 205-216.

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4th edition, pp. 333-357). Washington DC, USA: American Educational Research Association.

Lin, F.L. (2005). Modelling students' learning on mathematical proof and refutation. *In H. L. Chick and J.L. Vincent (Eds.)*, *Proceedings of the 29th of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 3-18). Melbourne, Australia

MacHale, D. (1980). The Predictability of Counterexamples, *American Mathematical Monthly*, 87, pp. 752.

Manin, Yu.: (1977), *A course in mathematical logic*, Springer-Verlag, New York.

Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1/2), 25-53.

Mason, J. & Klymchuk, S.: *Counterexamples in Calculus Imperial College Press,* London, 2009, 116 pp, paperback, ISBN: 9781848163607 Issic K. C. Leung

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*,15, 277–289.

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *In Forms of Mathematical Knowledge* (pp. 135-161). Springer, Dordrecht.

Mason, J., Watson, A., Getting students to create boundary examples. *MSOR, Connections*, 1, 1, 9-11 (2001).

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge, Falmer.

Mason, J. (2003). Structure of Attention in the Learning of Mathematics*, in J.Novotna (Ed.) Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* (Charles University, Prague), pp. 9-16.

Michener, E. (1978). Understanding Mathematics. *Cognitive Science*, 2, pp. 361-383.

Mooney, C., Hansen, A., Ferrie, L., Fox S., & Wrathmell, R. (2014). *Primary Mathematics: Knowledge and Understanding*. London: Learning Matters.

Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 12–19, 30.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM):2000, *Principles and Standards for School Mathematics*, Commission on Standards for School Mathematics.

Nunnaly J. & Bernstein I. (1994). *Psycometric Theory*(3rd ed.). New York: McGraw-Hill, Inc.

O'Connor, J. R. (Ed.). (1998). *Natural causes: Essays in ecological Marxism*. Guilford Press.

Papert, S. (1993). *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer*. (Basic Books: New York).

Pedemonte B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed? *Educational Studies in Mathematics*, Volume 66, Number 1, Page 23.

Peled, L, & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 19(3), 49-61.

Perkins, D.N. and Salomon, G., Are cognitive skills content bound?. *Educational Researcher*, 18, 1, 16-25 (1989).

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it?. *In Learning Mathematics* (pp. 61-86). Springer, Dordrecht.

Pollak H. (2007) *Mathematical Modelling — a Conversation with Henry Pollak*. In: Blum W., Galbraith P.L., Henn HW., Niss M. (eds) Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Combined edition). New York, USA: Wiley

Polya, G. (1988). *How To Solve It*. New Jersey, NJ: Princeton University.

Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2010). *Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims.* Proceedings of CERME6, 281-290.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica. Mathematical Instruction* (Vol. 1,pp. 155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(\), 83-99.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5–29.

Riley, K. J. (2003). *An investigate of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations*. Unpublished doctoral dissertation, Montana State University, Bozeman.

Rissland-Michener, E. (1978). Understanding mathematics. *Cognitive Science*, 2, 361-383.

Rissland, E. L. (1991). Example-based reasoning. In J. F. Voss, D. N. Parkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning in education* (pp. 187–208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Ross, Kenneth. "Doing and Proving: The Place of Algorithms and Proof in School Mathematics." *American Mathematical Monthly 3* (March 1998): 252-55.

Rowland, T., & Zaslavsky, O. (2005). Pedagogical Example-Spaces. *Notes for the miniconference on Exemplification in Mathematics*, Oxford University, June 2005.

Samkoff, A., & Weber, K. (2015). Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 28–50

Schoenfeld, A. H. (2009). *Series editor's foreword: The soul of mathematics.* In D. A.

Selden, A. & Selden J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics* 29 (2): 123–151.

Selden, A., Selden J. (1998) . *The role of examples in learning mathematics*. MAA Online: www.maa.org/t and l/sampler/rs_5.html.

Selden, A & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34 (1), 4-36.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher,* 15(2), 4-14.

Skemp, R. (1971) *The Psychology of Learning Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associatives, New Jersey.

Skemp, R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action: A foundation for theory and practice in education*, Chichester, W. Sussex: John Wiley.

Skemp, R., (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* London, UK: Penguin Books

Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 73-90.

Sowder, B. J., & Burt, M. R. (1980). *Children of heroin addicts: An assessment of health, learning, behavioral, and adjustment problems.* New York: Praeger.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65.

Stylianides, A. J., & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 21–36.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 91–134.

Swedosh, P., Clark, J., Mathematical misconceptions – can we eliminate them? *Proc. Inter. Conf. of Mathematics Education Research Group Australasia*. Rotorua, New Zealand, 492-499 (1997).

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.

Tall, D. (1991) The psychology of advanced mathematical thinking. *In: Tall (ed) Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer: Dordrecht, 3–21.

Thorndike, E. L. (1924). Mental Discipline in High School Studies. *Journal of Educational Psychology*, 15(2), 83.

Thurston, C. F. (1994). The structure and function of fungal laccases. *Microbiology*, 140(1), 19-26.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29-37.

Tirosh, D., Hadar R., & Movshovitz-Hadar N. (1991). Overcoming overgeneralizations: The case of commutativity and associativity. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Assisi, Italy, 3, 310-315.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education?. *Learning and Instruction*, 5(14), 535-540.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updated ed.). Cambridge: Cambridge University Press. (1st ed. 1958; paperback ed. 1964)

Vinner S. 1983: Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent, *Proceedings of P.M.E. 6*, Antwerp.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *In D.O. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1992). *The function concept as a prototype for problems in mathematics learning*.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). *Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching.*

Watson, A., & Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377- 385). Norwich, UK: PME.

Watson, A., & Mason, J. (2002b). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 237-249.

Watson, A. and Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: The Role of Learner-Generated Examples* (Erlbaum: Mahwah).

Watson, A., & Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.

Watson & Mason, 2010. *Student-generated examples in the learning of Mathematics*.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 12(2), 34-43.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics classrooms: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23, 115-133.

Weber, K., & Alcock, L. (2005). *Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof.* © Routledge.

Weber, K., & Alcock, L. (2009). Undergraduates' example use in proof production: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematical Learning*

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 59(4), 431-459.

Weber, K. (2009b). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(2-3), 200-208.

Weber, K. (2010). Proofs that develop insight. *For the Learning of Mathematics*, 30, 32–36.

Weber, K., Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist*, 49, 36–58.

Wittmann, E. C. (2009). *Operative proof in elementary mathematics* (Vol. 2, pp. 251–256).

Yackel, E. (2001).Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms. *In: Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 25th*, Utrecht.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yackel E., Rasmussen C. (2002) *Beliefs and Norms in the Mathematics Classroom*. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (eds) Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, vol 31. Springer, Dordrech.

Yi-Yin Ko, Eric Knuth (2009). *Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions*

Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers.* Unpublished doctoral dissertation, University of Texas at Austin, Austin.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, 15, 15-20.

Zaslavsky, G. M. (1995). From Hamiltonian chaos to Maxwell's demon. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *5*(4), 653-661.

Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 143-155.

Zaslavsky, O., & Lavie, O. (2005, May). Teachers' use of instructional examples. In 15th ICMI study conference: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics.* Águas de Lindóia, Brazil.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 67-78.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In Olivier A. & Newstead K. (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225-232).Stellenbosch, South Africa

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via ‘‘big’’ numbers. *In Proceedings of the international congress of mathematics education study on algebra*. Melbourne, Australia

Zazkis, R. & Chernoff, E.J., What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68,195-208 (2008).

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to research tool. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 15–21.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 165-182.

Ελληνική

Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., *Μαθηματικά Β' Τάξη Γενικού Λυκείου,* Ομάδα Προσανατολισμού, Θετικών επιστημών, Έκδοση Διόφαντος.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβερκός Α., Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων,* Α΄ Γενικού Λυκείου, Έκδοση Η΄, 2012, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Αριστοτέλης: Όργανον, *Αναλυτικά Ύστερα,* μτφρ. Η.Π. Νικολούδης, εκδόσεις Κάκτος, Αθήνα (1994).

Αριστοτέλης: *Αναλυτικά Πρότερα*, μτφρ. Η.Π. Νικολούδης, εκδόσεις Κάκτος, Αθήνα (1994).

Αριστοτέλης: *Πολιτικά,* πηγή: Ηλεκτρονική Βιβλιοθήκη MUSAIOS.

Δρόσος Κ. (1986). *Περιήγηση στα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Πανεπιστήμιο Πατρών

Εξαρχάκος Θ., (1995). *Η απόδειξη στα Μαθηματικά και Η Ιστορική Αναδρομή της.*

Ευαγγελόπουλος Α. (2018)Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών 2016-2017. Στατιστική Επεξεργασία της Βαθμολογίας των Γραπτών Δοκιμίων των Μαθηματικών, του 52ου Βαθμολογικού Κέντρου, *Εισηγήσεις της Μαθηματικής εβδομάδας*

Θωμαΐδης, Γ. & Ν. Καστάνης (1987). *Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της Ιστορίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών*. *Ευκλείδης Γ'*, 16, 61– 92.

Κολυβά-Μαχαίρα Φ. Μπόρα-Σέντα Ε.(1998). *Στατιστική Θεωρία Εφαρμογές,* Ζήτη εκδόσεις, Θεσσαλονίκη.

Κόσυβας. Γ. (2008) *Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη*. 25ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής παιδείας.

Μανάρας & Μπαρούτης & Χριστοδουλίδης (2018), *35ο πανελλήνιο συνέδριο μαθηματικής παιδείας, Μαθηματικά: έρευνα και εκπαίδευση στον 21ο αιώνα*, Αθήνα

Σιώμκος, Γ. Ι., & Μαύρος, Δ. Α. (2008).*Έρευνα Αγοράς*. Αθήνα: Σταμούλη.

Σωτήρης Χ. Γκουντουβάς (2015), *Γεωμετρικές Διαδρομές,* εκδόσεις Κορφιάτη, Αθήνα.

Τζουβάρας Αθ. (1998), *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής,* Ζήτη ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Θεσσαλονίκη.

Τουμάσης, Μ. (1994), *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Παπασταυρίδης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ. Α. Κ., Ευγενία Αξιολόγηση Μπάραλος, Γ., Πολύζος, Γ. Α. Σ., & Ανδρέας Αξιολόγηση Σκούρας, Α. (2016). *Οδηγός για τον εκπαιδευτικό: Μαθηματικά (Τάξεις: Α΄, Β΄, Γ΄)*: Γενικό Λύκειο.

Πούλος Α. (2009). *Εικασίες και αντιπαραδείγματα.* Εκδόσεις Μαυρίδη.

Χαλάτσης, Α. (1993). *Εικασία, απόδειξη και διδασκαλία των μαθηματικών*, 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (σελ.4-13). Καλαμάτα: Ε.Μ.Ε.