ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία

“Η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας στην κατανόηση ιδιοτήτων των τετραπλεύρων από μαθητές Λυκείου”

της Μαρκοπούλου Ελένης

Α.Ε.Μ.: 815

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα

Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια
Λεμονίδης Χαράλαμπος, καθηγητής
Ψυχάρης Γεώργιος, επίκουρος καθηγητής

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια κα. Τζεκάκη Μαριάννα, για την πολύτιμη καθοδήγηση και το άριστο κλίμα συνεργασίας. Η συμβολή της σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, ήταν καθοριστική.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ψυχάρη Γεώργιο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μαθητές μου, που συμμετείχαν εθελοντικά στην έρευνα, καθώς και την οικογένειά μου και πιο συγκεκριμένα τον σύζυγο μου, τα τέσσερα παιδιά μου, τη μητέρα μου και τη θεία μου, που με στήριξαν μέχρι το πέρας της διπλωματικής μου εργασίας.

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία διερευνά την αποτελεσματικότητα της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, όπως είναι το λογισμικό Geogebra, σε σχέση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων (χάρακας, γνώμονας, μοιρογνωμόνιο και διαβήτης) για την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των τετραπλεύρων και για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην έρευνα συμμετέχουν 16 μαθητές της Α΄ Λυκείου, οι οποίοι χωρίζονται σε 2 ομάδες από 4 ζευγάρια μαθητών η κάθε μία. Η $1^η$ ομάδα χρησιμοποιεί το λογισμικό και η $2^η$ ομάδα τα παραδοσιακά εργαλεία. Δίνονται στους μαθητές φύλλα εργασίας, προκειμένου να εργαστούν οι μισοί χρησιμοποιώντας το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και οι υπόλοιποι τα παραδοσιακά εργαλεία. Οι δραστηριότητες περιλαμβάνουν κατασκευές, εύρεση ειδών τετραπλεύρων, γεωμετρικά προβλήματα και ερωτήσεις σχετικές με την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές που εργάστηκαν με το λογισμικό κατανόησαν καλύτερα τις ιδιότητες και τις σχέσεις των τετραπλεύρων και έλυσαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τα γεωμετρικά προβλήματα.

Λέξεις κλειδιά: κατασκευή σχημάτων, χρήση εργαλείων, παραδοσιακά εργαλεία, λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, ιδιότητες και σχέσεις τετραπλεύρων, επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

ABSTRACT

The present work investigates the effectiveness of using dynamic geometry tools such as Geogebra software in relation to the use of traditional tools such as ruler triangle, protractor and diabetes to understand the properties and relationships of quadrilateral and solving geometrical problems. There are 16 students in the 1st grade of high school who are divided into 2 groups of 4 pairs of students each. The first group uses software and the second group uses traditional tools. The worksheets given to the students in order half of them to work using the dynamic geometry environment and the rest using traditional tools. Activities include constructions, finding species quadrilateral geometrical problems, and questions about understanding quadrilateral properties and relationships. The results of the study show that students working with software have more understanding of quadrilateral properties and relationships and can solve geometric problems more easily.

Key words: construction of shapes, tool use, traditional tools, dynamic geometry software, quadrilateral properties and relationships, geometrical problem solving.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει κατά πόσο η χρήση της τεχνολογίας με το λογισμικό Geogebra είναι πιο αποτελεσματική από τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων, όπως ο χάρακας, ο γνώμονας, το μοιρογνωμόνιο και ο διαβήτης για την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων και για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου.

Σύμφωνα με τον Mariotti (2001), μια γεωμετρική κατασκευή αποτελείται από μια διαδικασία η οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγει ένα σχέδιο. Μια κατασκευή θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί βάσει καθορισμένων κανόνων. Υπάρχουν διαφορές στην κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, όταν το κατασκευάζουμε με γεωμετρικά όργανα πάνω σε χαρτί και όταν το κατασκευάζουμε σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας στον υπολογιστή.

Έτσι, όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με γεωμετρικά όργανα:

(1) η πρόσβαση στο χώρο σχεδίασης που είναι και ο Ευκλείδειος χώρος **είναι άμεση**

(2) κυριαρχεί το μη ισότροπο, διότι ο χώρος του χαρτιού είναι **υλικός, συγκεκριμένος, περιορισμένος** και **άδειος**

(3) ο μαθητής **τραβάει γραμμές**

(4) μπορούν να πραγματοποιηθούν μετρήσεις **σε όλα** τα κατασκευάσιμα στοιχεία

(5) οι κατασκευές είναι **στατικά αντικείμενα**

(6) είναι πολύ δύσκολο να διακρίνουμε αυτό που είναι **πολλές φορές** αληθές από αυτό που είναι **πάντα** αληθές, χωρίς να γίνουν περισσότερες κατασκευές

Αντίθετα, όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με λογισμικό:

(1) η πρόσβαση στο χώρο σχεδίασης **είναι έμμεση**, διότι το λογισμικό αποτελεί ένα είδος διαμεσολαβητή

(2) ο χώρος είναι **απεριόριστος, ομογενής** και **ισότροπος**

(3) ο μαθητής **ορίζει σημεία** και τραβά γραμμές αναδεικνύοντας την ύπαρξη σημείων

(4) η μέτρηση μπορεί να γίνει **μόνο** αν ορισθεί από το λογισμικό

(5) οι κατασκευές είναι **δυναμικές**

(6) οι σχέσεις που ορίσθηκαν στην κατασκευή συνεχίζουν να υπάρχουν και **οι μόνες** ιδιότητες που αλλάζουν είναι εκείνες που **δεν καθορίστηκαν** αυστηρά από την κατασκευή

Επίσης, για την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών σημαντικό παράγοντα αποτελεί το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, το οποίο γίνεται αντιληπτό κατά τη διάρκεια κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων καθώς και κατά τη διάρκεια επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων. Ο βαθμός κατανόησης των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων συνδέεται με το μοντέλο της γεωμετρικής σκέψης του van Hiele καθώς και των γνωστικών διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης του Duval. Η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων συνδέεται με την κατάκτηση από τους μαθητές του τρίτου επιπέδου γεωμετρικής σκέψης van Hiele. Σύμφωνα με τον Duval, η λειτουργική κατανόηση εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος και, για να κατακτήσει ένας μαθητής το στάδιο της λειτουργικής κατανόησης, είναι απαραίτητο να έχει κατακτήσει πρώτα την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν εφαρμόσει λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στην τάξη έχουν επισημάνει σημαντική διαφορά στην διερεύνηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές.

Τέλος, σύμφωνα με τους Yerushalmy & Chazan οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έγιναν πιο εύχρηστοι στη χρήση διαγραμμάτων και ήταν σε θέση να ξεπεράσουν τα τρία εμπόδια σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές δυσκολεύονται:

(1) να κατανοήσουν ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει χαρακτηριστικά που είναι ατομικά και όχι αντιπροσωπευτικά της κατηγορίας αυτής,

(2) να απομονώσουν μια περιοχή του γεωμετρικού σχήματος και

(3) να δουν ένα γεωμετρικό σχήμα με διαφορετικούς τρόπους.

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο **1ο κεφάλαιο** γίνεται μια εκτενής παρουσίαση της σχετικής βιβλιογραφίας και του θεωρητικού πλαισίου πάνω στο οποίο βασίζεται η παρούσα έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό έχει δομηθεί σε 5 ενότητες με αναφορά στα γεωμετρικά σχήματα, στις χαράξεις με γεωμετρικά όργανα, στα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας, στην αντίληψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και στη χρήση δυναμικών εργαλείων και αποτελεσμάτων στη διαχείριση, κατασκευή ή γενικότερη αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων.

Στο **2ο κεφάλαιο** περιγράφονται ο στόχος και τα ερωτήματα της έρευνας και παράλληλα διατυπώνονται εννοιολογικοί προσδιορισμοί, όπως η κατασκευή σχημάτων, η κατασκευή σχημάτων με παραδοσιακά εργαλεία, η κατασκευή σχημάτων με λογισμικό, η κατανόηση ιδιοτήτων και σχέσεων, η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και η χρήση εργαλείων, οι οποίοι βοηθούν στην αποσαφήνιση του θεωρητικού πλαισίου για την ορθή διεξαγωγή της έρευνας.

Στο **3ο κεφάλαιο** παρουσιάζεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε, οι δραστηριότητες στις οποίες εργάστηκαν οι μαθητές και οι μαθήτριες και ο τρόπος με τον οποίο έγινε η συλλογή των δεδομένων κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων. Επίσης, γίνεται αναφορά στην αξιοπιστία και εγκυρότητα της διαδικασίας του δείγματος και των εργαλείων.

Στο **4ο κεφάλαιο** γίνεται ανάλυση των δεδομένων της έρευνας ανά ερευνητικό εργαλείο και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Στο **5ο κεφάλαιο** γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα και σύνδεση τους με τη βιβλιογραφία.

Τέλος, στο **6ο κεφάλαιο** αναφέρονται τα συμπεράσματα της έρευνας, θέματα που αφορούν περιορισμούς της παρούσας έρευνας και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ & ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

1.1 Γεωμετρικά σχήματα

1.1.1 Γεωμετρικά αντικείμενα

Ο Fischbein (1993) αναφερόμενος στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος κάνει τη διαπίστωση ότι: «ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να περιγραφεί ως έχον εγγενώς εννοιολογικές ιδιότητες. Παρ' όλα αυτά, μια γεωμετρική μορφή δεν είναι απλή έννοια. Πρόκειται για μια εικόνα, μια οπτική εικόνα. Διαθέτει μια ιδιότητα που οι συνήθεις έννοιες δεν κατέχουν, δηλαδή περιλαμβάνει τη νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου» (σελ. 141). Επεκτείνοντας την άποψη αυτή, θεωρείται ότι η γεωμετρική σκέψη χαρακτηρίζεται από μια αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικού σχήματος (με την έννοια της γεωμετρικής φιγούρας / figure) και αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας.
Όταν, για παράδειγμα, ορίζουμε έναν κύκλο για να περιγράψουμε την στρογγυλότητά του, μπορούμε να πάρουμε όχι μόνο την ιδέα της στρογγυλότητας, όχι μόνο της εικόνας του κύκλου που συνδέεται με αυτό, αλλά και ενός τρίτου τύπου κατασκευής που είναι η γεωμετρική μορφή που ονομάζεται κύκλος (Fischbein, 1993).

Σε μια γεωμετρική μορφή υπάρχουν εσωτερικοί περιορισμοί οργάνωσης που δεν υπάρχουν στο σχέδιο ενός φυσικού αντικειμένου, ακόμα κι αν οι δύο αναπαραστάσεις έχουν κοινές εμφανίσεις. Το έργο κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος είναι γενικά μια ευκαιρία να ανακαλυφθούν αυτοί οι εσωτερικοί περιορισμοί. Αλλά πέρα από αυτό, υπάρχει μια λειτουργική διαφορά, γιατί ένα γεωμετρικό σχήμα πρέπει να βοηθήσει στην επίλυση ενός προβλήματος ή στην εύρεση της βασικής ιδέας μιας απόδειξης. Για αυτές τις δύο διαφορές ο τρόπος να δούμε ένα σχέδιο δεν μπορεί να είναι ο ίδιος, όταν αντιμετωπίζουμε ένα σχέδιο ενός φυσικού αντικειμένου, ακόμη και σχηματοποιημένο, και όταν βρισκόμαστε αντιμέτωποι με μια γεωμετρική μορφή. Η διαφορά αυτή διατηρείται, αν η αναπαράσταση είναι σε χαρτί ή στο μυαλό.

Η χρησιμότητα των γεωμετρικών μορφών στην επίλυση ενός προβλήματος της γεωμετρίας είναι αναμφισβήτητη. Παρέχουν μια διαισθητική παρουσίαση όλων των συνιστωσών σχέσεων μιας γεωμετρικής κατάστασης. Ωστόσο, πολύ συχνά δεν βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν μια εικόνα για μια λύση. Αντιμέτωποι με μια γεωμετρική μορφή συχνά το βλέπουν «τυφλά», επειδή μια γεωμετρική φιγούρα δεν λειτουργεί πάντα ευρετικά.

Για να αναλύσουμε μια γεωμετρική εικόνα, πρέπει πρώτα να σκεφτούμε μια φιγούρα ως μια γνωστική "κατανόηση". Επιλέγουμε αυτή τη λέξη για να επισημάνουμε ένα σημαντικό γεγονός: υπάρχουν διάφοροι τρόποι να δούμε ένα σχέδιο ή μια οπτική συστοιχία ερεθισμάτων. Διακρίνουμε τέσσερις γνωστικές ανησυχίες: αντιληπτικές, διαδοχικές, διακριτικές και λειτουργικές. Για να λειτουργήσει ως γεωμετρική μορφή ένα σχέδιο, πρέπει να προκαλέσει αντιληπτική ανησυχία και τουλάχιστον μία ακόμη από τα άλλες τρεις. Η καθεμία έχει τους συγκεκριμένους νόμους της οργάνωσης και επεξεργασίας της συστοιχίας οπτικών ερεθισμάτων, αλλά η χρήση των αριθμών στη γεωμετρία οδηγεί στη σύντηξη αυτών των διαφορετικών ανησυχιών, έτσι αντιμετωπίζονται σαν να ήταν μόνο ένα, ενώ η επίλυση των προβλημάτων πολύ συχνά απαιτεί τις αλληλεπιδράσεις τους (Duval, 1995).

Υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στο γεωμετρικό σχήμα και το σχέδιο ή χάραξη και αυτό αναδεικνύει τα προβλήματα που σχετίζονται με τα γεωμετρικά σχήματα.

Το γεωμετρικό σχήμα είναι το γεωμετρικό αντικείμενο που περιγράφεται από ένα κείμενο που το ορίζει, ενώ το σχέδιο ή χάραξη αναφέρεται στη γραφική αναπαράσταση των μαθηματικών αντικειμένων (Τζεκάκη, 1991).

Μια γεωμετρική κατασκευή αποτελείται από μια διαδικασία η οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγει ένα σχέδιο. Μια κατασκευή θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί βάσει καθορισμένων κανόνων.

Από τη σκοπιά της κλασικής γεωμετρίας, τα εργαλεία σχεδίασης, παρά το εμπειρικό τους χαρακτήρα, μπορούν να θεωρηθούν ως θεωρητικά εργαλεία που καθορίζουν μια συγκεκριμένη γεωμετρία. Με αυτή την έννοια η κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία παραδοσιακά ονομάζεται γεωμετρία χάρακα και διαβήτη που αναφέρεται τόσο στην προέλευση όσο και στους περιορισμούς των αντικειμένων της. Στην πραγματικότητα, η θεωρητική έννοια των γεωμετρικών κατασκευών, η σχέση μεταξύ μιας γεωμετρικής δομής και του θεωρήματος που το επιβεβαιώνει, είναι πολύ περίπλοκη.

Παρά τη μακρά παράδοσή τους, στα σχολικά εγχειρίδια δε δίνεται μεγάλη βαρύτητα στις γεωμετρικές κατασκευές. Στην Ιταλία, για παράδειγμα, εξαφανίστηκαν εντελώς από τη διδακτέα ύλη του μαθήματος της γεωμετρίας. Σπάνια μπορεί κανείς να αναφέρει οποιαδήποτε αναφορά σε «εργαλεία σχεδίασης», όταν δηλώνονται γεωμετρικά αξιώματα, ενώ οι γεωμετρικές κατασκευές δεν ανήκουν στη σειρά προβλημάτων που προτείνονται στα εγχειρίδια. Η εμφάνιση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας φαίνεται να προκαλεί ανανεωμένο ενδιαφέρον για τις κατασκευές, με τον βασικό τους ρόλο να ασκείται στην σκηνής από την οργανική προσέγγιση που σχετίζεται με τη χρήση γραφικών εργαλείων.

Όταν οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα, γίνονται δύο ξεχωριστά αιτήματα:

1. μια διαδικασία που αποσκοπεί στην απόκτηση ενός συγκεκριμένου σχεδίου
2. αιτιολόγηση μιας τέτοιας διαδικασίας, εξηγώντας τους λόγους της ορθότητας της (Mariotti, 2002).

Επίσης, μια γεωμετρική κατασκευή απαιτεί:

- Την υποχρεωτική ανάλυση του σχήματος στα θεμελιώδη στοιχεία (σημεία, ευθείες, κύκλους).
- Τη διάκριση των δεδομένων από τα κατασκευάσιμα στοιχεία.
- Τον έλεγχο του ΄΄κατασκευάσιμου΄΄ ενός στοιχείου, δηλαδή τον προσδιορισμό των απαραίτητων για την κατασκευή του στοιχείων (Τζεκάκη, 2001).

Υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά στην κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, όταν το κατασκευάζουμε με χαρτί και μολύβι και όταν το κατασκευάζουμε σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας: ενώ στην πρώτη είναι η κατασκευή μιας "συγκεκριμένης περίπτωσης", στην τελευταία είναι στην πραγματικότητα η κατασκευή μιας "γενικής περίπτωσης".

Οι γεωμετρικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν δύο τύπους επεξεργασιών των γεωμετρικών αντικειμένων: την οπτική επεξεργασία και την αντιληπτική αντιμετώπιση. Το λογισμικό ευνοεί την οπτική επεξεργασία, καθώς βοηθά στην αποφυγή της διαλογικής θεραπείας και της χρήσης της συμβολικής γλώσσας και αυτό με τη σειρά του επιτρέπει την άμεση πρόσβαση (Sánchez & Sacristán, 2003).

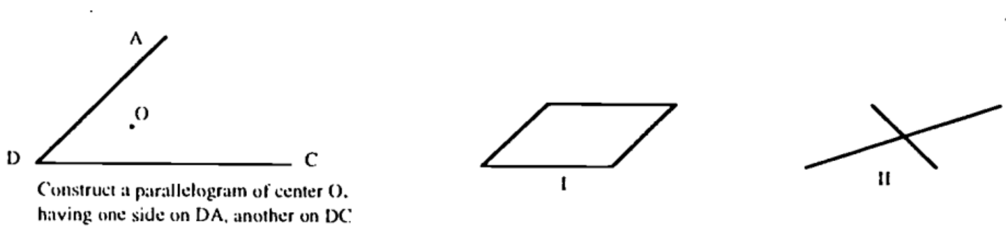
1.1.2 Αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων

Η αναπαράσταση και η απεικόνιση (οπτικοποίηση) αποτελούν τον πυρήνα της κατανόησης στα μαθηματικά. Η *αναπαράσταση* αναφέρεται σε ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων με νόημα: σταθερές και ολιστικές πεποιθήσεις για κάτι, διάφοροι τρόποι για να ανακαλυφθούν και να επισημανθούν αντικείμενα και μέθοδοι κωδικοποίησης των πληροφοριών. Αντίθετα, η *απεικόνιση* φαίνεται να τονίζει τις εικόνες και την εμπειρική διαίσθηση των φυσικών αντικειμένων και των ενεργειών. Από τη μία πλευρά, η χρήση των συστημάτων της σημειωτικής αναπαράστασης για τη μαθηματική σκέψη είναι απαραίτητη διότι, αντίθετα από τα άλλα πεδία της γνώσης (βοτανική, γεωλογία, αστρονομία, φυσική), δεν υπάρχουν άλλοι τρόποι πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα αλλά παραγωγής μερικών σημειωτικών αναπαραστάσεων. Στους άλλους τομείς της γνώσης, οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι εικόνες ή περιγραφές για ορισμένα φαινόμενα του πραγματικού εξωτερικού κόσμου, στα οποία μπορούμε να αποκτήσουμε μια αντιληπτική και οργανική πρόσβαση χωρίς αυτές τις αναπαραστάσεις. Στα μαθηματικά δεν συμβαίνει αυτό.

Από την άλλη πλευρά, η κατανόηση των μαθηματικών δεν απαιτεί σύγχυση των μαθηματικών αντικειμένων με τις χρησιμοποιούμενες αναπαραστάσεις. Αυτό αρχίζει νωρίς με αριθμούς, οι οποίοι δεν πρέπει να αναγνωρίζονται με ψηφία, αριθμητικά συστήματα (ρωμαϊκά, δυαδικά, δεκαδικά). Οι αριθμοί στη γεωμετρία, ακόμα και όταν είναι κατασκευασμένοι με ακρίβεια, είναι μόνο παραστάσεις με συγκεκριμένες τιμές που δεν είναι σχετικές και δεν μπορούν να ληφθούν ως αποδείξεις.

Οι μαθηματικές διαδικασίες αποτελούνται από δύο είδη μετασχηματισμών αναπαραστάσεων. Υπάρχουν μετασχηματισμοί που γίνονται μέσα στο ίδιο μητρώο αναπαράστασης, όπως αριθμητικός ή αλγεβρικός υπολογισμός. Χρησιμοποιούνται οι σημειωτικές δυνατότητες δημιουργίας μιας νέας αναπαράστασης από μια δεδομένη αναπαράσταση. Με τη δογματική δομή αυτές οι δυνατότητες εξαρτώνται τόσο από το σημειωτικό σύστημα όσο και από τους μαθηματικούς κανόνες. Τα γεωμετρικά σχήματα επιτρέπουν επίσης τους εγγενείς μετασχηματισμούς Gestalt των διαμορφώσεων εκτός από οποιαδήποτε προηγούμενη εξέταση των μαθηματικών ιδιοτήτων. Αυτοί οι μετασχηματισμοί Gestalt είναι σαν τον οπτικό μετασχηματισμό που οδηγεί σε αναμορφώσεις ή παζλ. Έχουμε ονομάσει "επεξεργασία" αυτού του είδους τον μετασχηματισμό.

Μερικές απλές δισδιάστατες γεωμετρικές μορφές διδάσκονται στο πρωτεύον επίπεδο: τρίγωνο, κύκλος, διαφορετικά τετράπλευρα, πολύγωνα. Αλλά όλα αυτά τα γεωμετρικά τα αριθμητικά στοιχεία είναι δισδιάστατες αναπαραστάσεις. Μπορούν να είναι εικονικές αναπαραστάσεις και δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα μετασχηματισμό Gestalt ή μπορούν να λειτουργήσουν ως παραστάσεις γεωμετρικών αντικειμένων και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να εμφανίζονται ως 2D οργανώσεις μονάδων αριθμητικών στοιχείων. Με άλλα λόγια, υπάρχουν πολύ διαφορετικές εκφράσεις των πιο στοιχειωδών γεωμετρικών μορφών. Έτσι, με την αντιληπτική έκφραση μπορούμε να έχουμε αρκετούς αριθμούς για το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο: για παράδειγμα, υπάρχουν δύο τυπικοί αριθμοί που αντιπροσωπεύουν ένα παραλληλόγραμμο (I και II στο παρακάτω σχήμα).



Ποια από τις δύο μορφές, I ή II, μπορεί να είναι χρήσιμη για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος; Με την οπτική βοήθεια του σχήματος I μπορεί κανείς μόνο κατά προσέγγιση να κάνει το σχέδιο με διαδοχικές προσπάθειες μετρήσεων των DA και DC. Με την οπτική βοήθεια του σχήματος II εύκολα επιτυγχάνεται τραβώντας το διαγώνιο DOD. Αν και γνώριζαν όλες τις ιδιότητες του παραλληλόγραμμου, οι περισσότεροι μαθητές απέτυχαν σαν να ήταν περιορισμένοι οι ίδιοι στην απεικόνιση I. Στην πραγματικότητα, οι I και II δίνουν μια οπτική βοήθεια, μόνο όταν κάποιος εργάζεται με διαμορφώσεις από μονάδες γραφικών 1D.

Αυτά τα φαινόμενα είναι όλο και ισχυρότερα, καθώς η γεωμετρική μορφή εμφανίζεται ως σύνθεση πολλών σχημάτων Gestalts (τρίγωνα, παράλληλα γραφήματα, κύκλοι, ευθείες γραμμές). Για τους περισσότερους μαθητές υπάρχει μια ευρετική έλλειψη γεωμετρικής ερμηνείας στην οπτικοποίηση. Όμως ο αμφιλεγόμενος χαρακτήρας των γεωμετρικών μορφών εμφανίζεται επίσης, όταν μια εικόνα λαμβάνεται άμεσα για απόδειξη και οδηγεί στην απόρριψη οποιασδήποτε προσφυγής σε παραπλανητική συλλογιστική. Σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός λειτουργεί ως αληθινή εικονική αναπαράσταση που καθιστά τη διαλεκτική κατανόηση άνευ σημασίας.

Για την απεικόνιση, σε κάθε μητρώο απεικόνισης υπάρχουν ορισμένοι κανόνες ή ορισμένοι εγγενείς περιορισμοί για την παραγωγή μονάδων και τη διαμόρφωση των σχέσεών τους. Έτσι, οι γεωμετρικές διαμορφώσεις μπορούν να κατασκευαστούν με εργαλεία και σύμφωνα με τις μαθηματικές ιδιότητες των αντιπροσωπευτικών αντικειμένων. Κάποιος δεν σχεδιάζει ένα πεντάγωνο σαν φύλλο δρυός ή σαν λουλούδι. Υπάρχει έμφαση ενός υλικού αντικειμένου. Στο πλαίσιο της μάθησης πρέπει να ληφθούν υπόψη τρία προβλήματα σχετικά με την οπτικοποίηση: το πρόβλημα των διακρίσεων, το πρόβλημα της επεξεργασίας και το πρόβλημα του συντονισμού με ένα μητρώο διαλογών.

- Δεν υπάρχει άμεση πρόσβαση στα μαθηματικά αντικείμενα, αλλά μόνο στις αναπαραστάσεις τους.
- Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε κανένα μαθηματικό αντικείμενο με τις αναπαραστάσεις του, όπως μπορούμε να συγκρίνουμε ένα μοντέλο με τη φωτογραφία του ή την εικόνα του.
- Αυτή η σύγκριση παραμένει συνδεδεμένη με επιστημολογικά πρότυπα για την ανάλυση της γνώσης και δεν μπορεί να είναι σχετική στα μαθηματικά και στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η μαθηματική δραστηριότητα έχει δύο πλευρές. Η ορατή ή οριστική πλευρά είναι αυτή των μαθηματικών αντικειμένων και των έγκυρων διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Η κρυφή και κρίσιμη πλευρά είναι αυτή των γνωστικών λειτουργιών, με τις οποίες ο καθένας μπορεί να εκτελέσει τις έγκυρες διαδικασίες και να αποκτήσει πρόσβαση σε ένα μαθηματικό αντικείμενο. Τα μητρώα της σημειωτικής αναπαράστασης και ο συντονισμός τους δημιούργησαν τη γνωστική αρχιτεκτονική, την οποία μπορεί να εκτελέσει ο καθένας τις γνωστικές λειτουργίες στις οποίες βασίζονται οι μαθηματικές διαδικασίες. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε γνωστική λειτουργία, όπως η επεξεργασία μέσα σε ένα μητρώο ή η μετατροπή της αναπαράστασης μεταξύ δύο μητρώων, εξαρτάται από πολλές μεταβλητές. Συγκεκριμένα, κάθε εργασία ή κάθε πρόβλημα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές απαιτεί μια διπλή ανάλυση, μαθηματικές και γνωστικές μεταβλητές: οι γνωστικές μεταβλητές πρέπει να λαμβάνονται υπόψη με τον ίδιο τρόπο, όπως η μαθηματική δομή για την έννοια, αλλά για αυτό οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν αυτές τις μεταβλητές και να τις λάβουν υπόψη ως διδακτικές μεταβλητές. Αυτοί πρέπει να είναι σε θέση να αναλύσουν τη λειτουργία που μπορεί να εκτελέσει κάθε οπτικοποίηση στο πλαίσιο μιας καθορισμένης δραστηριότητας (Duval, 1999).

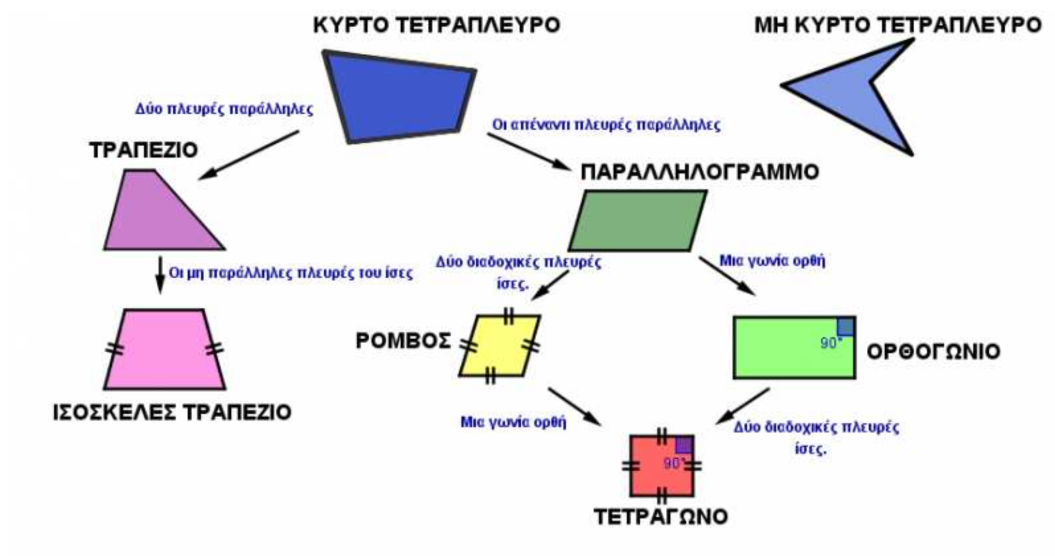
Οι εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών έχουν κάνει μια έντονη προσπάθεια να ενσωματώσουν τη χρήση της τεχνολογίας στις μαθηματικές τάξεις του Λυκείου. Πολλοί πιστεύουν ότι η χρήση της τεχνολογίας έχει τη δυνατότητα να ενισχύσει τη μάθηση των μαθητών και να τους παρέχει πρόσβαση σε ισχυρές μαθηματικές ιδέες. Ένα τέτοιο θέμα είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί. Η μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι σημαντική, διότι:

- παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να σκεφτούν σημαντικές μαθηματικές έννοιες (π.χ. συμμετρία),
- παρέχει ένα πλαίσιο εντός του οποίου μπορούν οι μαθητές να θεωρούν τα μαθηματικά ως μια διασυνδεδεμένη πειθαρχία και
- παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες συλλογιστικής υψηλότερου επιπέδου χρησιμοποιώντας μια ποικιλία παραστάσεων.

Σύμφωνα με την έρευνα η οποία διερεύνησε τη φύση των αντιλήψεων των μαθητών για γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, οι οποίες περιελάμβαναν μεταφράσεις, ανακλάσεις, περιστροφές και διαστολές, στο πλαίσιο του τεχνολογικού εργαλείου Sketchpad του Geometer, οι μαθητές οι οποίοι βασίζονται αποκλειστικά στις εμφανίσεις του σχεδίου φάνηκε να σκέφτονται για τους μετασχηματισμούς ως πράξεις. Καθώς οι μαθητές άρχισαν να σκέφτονται για τις ιδιότητες και τις συμπεριφορές των μετασχηματισμών (το σχήμα) και δεν βασίζονταν αποκλειστικά στις εμφανίσεις του σχεδίου, φαινόταν να δείχνουν σημάδια ότι λειτουργούσαν στα πραγματικά χαρακτηριστικά των μετασχηματισμών (Hollebrands,2003).

1.1.3 Ιδιότητες – σχέσεις γεωμετρικών σχημάτων

Στο σχολικό εγχειρίδιο Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου, στο κεφάλαιο 5, Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια, αναφέρονται οι ιδιότητες πλευρών και γωνιών, καθώς και οι διαγώνιες ιδιότητες των ειδών τετραπλεύρων, όπως του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου, του ρόμβου, του τετραγώνου, του τραπεζίου και του ισοσκελούς τραπεζίου. Επίσης, στο ίδιο κεφάλαιο μέσα από τη θεωρία μπορεί ο μαθητής να κατανοήσει τις σχέσεις μεταξύ των ειδών τετραπλεύρων και κυρίως του παραλληλογράμμου και των ειδών του, που είναι το ορθογώνιο, ο ρόμβος και το τετράγωνο. Οι σχέσεις αυτές είναι σχέσεις εγκλεισμού και πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν, όπως αναφέρεται διεξοδικά στην ενότητα1.4.1 “αντίληψη σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων” του 1^{ου} κεφαλαίου. Επίσης, οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων αναλύονται στην ενότητα 2.3 “εννοιολογικοί προσδιορισμοί” του 2^{ου} κεφαλαίου και πιο συγκεκριμένα στην υποενότητα με θέμα “κατανόηση ιδιοτήτων και σχέσεων”.



1.1.4 Κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων από μαθητές

Μία σημαντική γνωστική θεωρία ανάπτυξης είναι η *θεωρία των van Hiele (*van Hiele, 1999). Το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών γίνεται αντιληπτό κατά τη διάρκεια κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων καθώς και κατά τη διάρκεια επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων. Η *θεωρία των van Hiele* υποστηρίζει ότι οι μαθητές έχουν πέντε διαφορετικά επίπεδα σκέψης. Κάθε επίπεδο διαφέρει ως προς τη συμπεριφορά και τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Τα γενικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των πρώτων τεσσάρων επιπέδων, που συναντώνται στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

Επίπεδο 1^{ο} - αναγνώριση: οπτική αναγνώριση των σχημάτων από την ολική εμφάνιση τους χωρίς να διαχωρίζουν τις ιδιότητες.

Επίπεδο 2^{ο} - ανάλυση: αρχίζουν να αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των σχημάτων και μαθαίνουν την κατάλληλη ορολογία για την περιγραφή τους. Μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων.

Επίπεδο 3^{o}- διάταξη: διατάσσουν λογικά τις ιδιότητες των σχημάτων και καταλαβαίνουν τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των σχημάτων.

Επίπεδο 4^{o}- αφαίρεση/παραγωγικός συλλογισμός: αρχίζουν να καταλαβαίνουν τη σημασία της αφαιρετικής διαδικασίας, τον ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης (Gawlick, 2005).

Η εκμάθηση των σχέσεων ένταξης μεταξύ των τετραπλεύρων παρέχει στους μαθητές μια ευκαιρία για ανάπτυξη λογικών δεξιοτήτων συλλογιστικής και θεωρείται εισαγωγική. Όσον αφορά το van Hiele, στο επίπεδο 3 οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να συμπεράνουν ότι ένα ορθογώνιο είναι ένας ειδικός τύπος παραλληλογράμμου, με βάση τον ορισμό και τις ιδιότητες του καθενός τετραπλεύρου, ενώ στο επίπεδο 2 αναγνωρίζουν απλώς τις ιδιότητες του κάθε ενός σχήματος ξεχωριστά. Ωστόσο, έρευνες δείχνουν ότι ο ρυθμός προόδου από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3 είναι αργός και ότι πολλοί μαθητές παραμένουν στο επίπεδο 2 ακόμη και στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Έτσι, η κατανόηση από τους μαθητές των σχέσεων ένταξης μεταξύ των τετραπλεύρων, έχει αποδειχθεί ότι είναι ένα δύσκολο έργο (Okazaki & Fujita, 2007; de Villiers, 1994).

Έρευνες έχουν δείξει (Han, 2007), ότι οι εκπαιδευτικοί που έχουν εφαρμόσει λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στην τάξη έχουν επισημάνει σημαντική διαφορά στην διερεύνηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές. Σε μια έρευνα ο ερευνητής πραγματοποίησε τη μελέτη χρησιμοποιώντας τη θεωρία των van Hiele για την ανάλυση των δεδομένων του και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το Sketchpad έδειξαν περισσότερες κατανοήσεις στις ιδιότητες και ορισμούς κάθε τύπου σχέσεων μεταξύ των τετράπλευρων. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το Sketchpad του Geometer έδειξαν στατιστικά σημαντική υψηλότερη μέση βαθμολογία από ό, τι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν χάρακα και μοιρογνωμόνιο. Παράλληλα, η ομάδα που χρησιμοποίησε το Sketchpad του Geometer πέτυχε υψηλότερους βαθμούς απόκτησης για το επίπεδο 2 και 3 van Hiele από εκείνους της ομάδας που χρησιμοποίησε παραδοσιακά εργαλεία.

Στην ίδια έρευνα αναλύθηκαν οι δεξιότητες των μαθητών σχετικά με τα τρία πρώτα επίπεδα van Hiele σε σχέση με την κατανόηση των ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων και πιο συγκεκριμένα:

Επίπεδο 1^{ο} - Αναγνώριση ή οπτικοποίηση:

- Οι μαθητές αναγνωρίζουν σχήματα (π.χ. τετράγωνα, ορθογώνια, ρομβοειδή, τραπεζοειδή) και άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις (π.χ. γωνίες, παράλληλες γραμμές) ανάλογα με την εμφάνισή τους.
- Οι μαθητές προσδιορίζουν περιπτώσεις τετραπλεύρου από την εμφάνισή του ως σύνολο.
- Οι μαθητές ονομάζουν ή επισημαίνουν τετράπλευρα και άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις και χρησιμοποιούν τυπικά ή μη τυπικά κατάλληλα ονόματα.
- Οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν, να σχεδιάσουν ή να αντιγράψουν ένα τετράπλευρο.
- Οι μαθητές περιγράφουν προφορικά τα τετράπλευρα με την εμφάνισή τους ως σύνολο.
- Οι μαθητές συγκρίνουν και ταξινομούν τα τετράπλευρα σε οπτική βάση ως σύνολο.

Επίπεδο 2^{ο} - Ανάλυση:

- Οι μαθητές αναλύουν το σχήμα με βάση τα στοιχεία του, καθορίζουν τις ιδιότητες εμπειρικά και τις χρησιμοποιούν για την επίλυση προβλημάτων.
- Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα είδη των τετραπλεύρων και χρησιμοποιούν το κατάλληλο λεξιλόγιο για τα είδη και τις σχέσεις
- Οι μαθητές συγκρίνουν δύο σχήματα ανάλογα με το είδος και τις σχέσεις μεταξύ τους.
- Οι μαθητές ταξινομούν τα τετράπλευρα με διαφορετικούς τρόπους σύμφωνα με ορισμένες ιδιότητες.
- Οι μαθητές ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν λεκτική περιγραφή ενός τετραπλεύρου από την άποψη της ιδιότητας και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες για να σχεδιάσουν ή να κατασκευάσουν το σχήμα.
- Οι μαθητές ανακαλύπτουν εμπειρικά ιδιότητες συγκεκριμένων τετραπλεύρων και τις γενικεύουν.
- Οι μαθητές περιγράφουν μια κατηγορία τετραπλεύρων (π.χ. τετράγωνα, ορθογώνια) μέσω των ιδιοτήτων τους.
- Οι μαθητές προσδιορίζουν ποιες ιδιότητες χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν ένα είδος τετραπλεύρου και να συγκρίνουν τα τετράπλευρα σύμφωνα με τις ιδιότητές τους.

Επίπεδο 3ο - Άτυπη αφαίρεση:

- Οι μαθητές αναγνωρίζουν τις σχέσεις υποκατηγοριών μεταξύ διαφορετικών τύπων τετραπλεύρων, διαμορφώνουν και χρησιμοποιούν ορισμούς.
- Οι μαθητές αναγνωρίζουν διαφορετικά σύνολα ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν κάθε είδος τετραπλεύρου
- Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα ελάχιστα σύνολα ιδιοτήτων που μπορούν να χαρακτηρίσουν ένα σχήμα.
- Οι μαθητές είναι σε θέση να διατυπώσουν και να χρησιμοποιήσουν ορισμούς για μια κατηγορία τετραπλεύρων.
- Οι μαθητές είναι σε θέση να ταξινομήσουν λογικά τα τετράπλευρα (Han, 2007).

Επίσης, σχετικά με την κατανόηση των ιδιοτήτων των τετράπλευρων, έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σε φοιτητές αρχικής εκπαίδευσης έχουν δείξει ότι σε φοιτητές, των οποίων τα επίπεδα γεωμετρικών σκέψεων ήταν χαμηλά, η ερμηνεία και η κατανόηση των ιδιοτήτων των τετράπλευρων δεν ήταν αρκετά βαθιά. Οι αρχικοί καθηγητές μπέρδεψαν τα χαρακτηριστικά και τις ιεραρχικές σχέσεις μεταξύ των τετράπλευρων (Günhan, 2014; Fujita & Jones, 2007).

Τέλος, έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης 3 van Hiele έχουν καλή ικανότητα να λύσουν προβλήματα αλγεβρικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τις δεξιότητες σκέψης αφαίρεσης (Suwito, Yuwono, Parta, Irawati, & Oktavianingtyas, 2016).

Τα σχήματα αρχικά δημιουργούνται και στη συνέχεια εξερευνώνται και μετασχηματίζονται σε έννοιες. Οι μαθητές εξωτερικεύουν στην οθόνη κατασκευές που έχουν σχηματίσει νοητικά, χρησιμοποιώντας τα πρωτότυπα γεωμετρικά αντικείμενα του λογισμικού και τα εργαλεία ή εντολές του μενού, προσπαθώντας να αποκωδικοποιήσουν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις σε ενέργειες στο λογισμικό. Επομένως, αποκτούν την ικανότητα να μεταφράσουν ένα σχήμα με την χρήση εργαλείων του λογισμικού.

Σε αντίθεση με τη θεωρία των van Hiele που αναφέρεται στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσα από τα οποία διέρχεται ένας μαθητής, ο Duval επιχειρεί μια προσπάθεια καθορισμού των γνωστικών διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης. Υπάρχουν τέσσερις τύποι γνωστικής κατανόησης μέσα από τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν τη γεωμετρική εικόνα. Κάθε είδος κατανόησης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος. Ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα, προϋποθέτει σίγουρα την αντιληπτική κατανόηση και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη κατανόησης.

Η Αντιληπτική κατανόηση σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Περιλαμβάνει δεξιότητες, όπως την ονομασία του σχήματος και αναγνώριση υποσχημάτων του σχήματος.

Η Σειριακή κατανόηση απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες. Σε αυτή την περίπτωση τα τμήματα του σχήματος δεν δημιουργούνται με βάση τα αισθητηριακά κριτήρια (δηλ. από το τι βλέπουν οι μαθητές), αλλά μαθηματικούς και τεχνικούς περιορισμούς (π.χ. κανόνας και διαβήτης ή κάποιο κατάλληλο λογισμικό πρόγραμμα).

Η Λεκτική κατανόηση συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Κάποιες ιδιότητες και σχέσεις πρέπει πρώτα να δίνονται λεκτικά.

Τέλος, *η λειτουργική κατανόηση* εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος. Αυτός ο τύπος εμπλέκει το χειρισμό των σχημάτων (είτε νοητικά είτε φυσικά), ο οποίος μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε σχέσεις που δεν είναι άμεσα και αντιληπτικά ορατές, αλλά και στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Επιπλέον, η λειτουργική κατανόηση δεν είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τύπους κατανόησης. Ο Duval υποστηρίζει ότι, για να κατακτήσει ένας μαθητής το στάδιο της λειτουργικής κατανόησης, είναι απαραίτητο να έχει κατακτήσει πρώτα την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση (Duval 1995).

Όλα τα παραπάνω που αναφέρθηκαν από τον Duval το 1995 σχετίζονται με γεωμετρικά σχέδια. Όμως ο Duval το 1998 προχώρησε ακόμα παραπέρα αναφέροντας ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός εμπλέκει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών.

Αυτές οι γνωστικές διαδικασίες είναι:

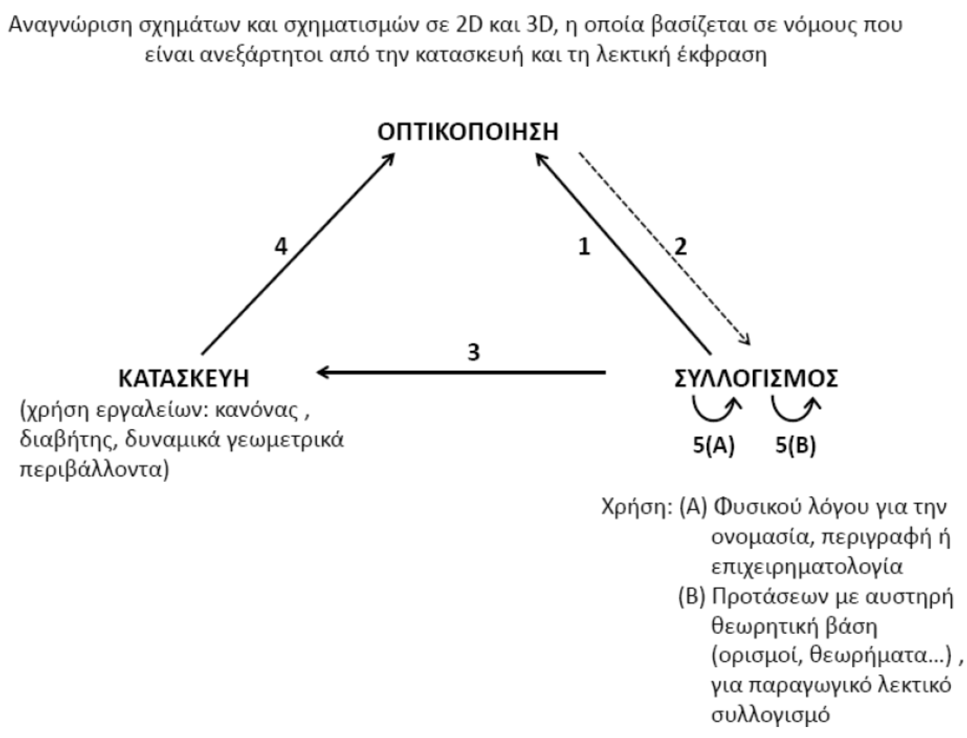
Διαδικασίες Οπτικοποίησης, όπως για παράδειγμα η οπτική αναπαράσταση μίας γεωμετρικής πρότασης ή η εξερεύνηση μίας περίπλοκης γεωμετρικής κατάστασης.

Διαδικασίες Κατασκευής με τη χρήση εργαλείων, όπως ο κανόνας και ο διαβήτης ή κάποιο πρόγραμμα στον υπολογιστή.

Διαδικασίες Συλλογισμών θεωρούνται οι λεκτικές διαδικασίες για την επέκταση της γνώσης, την επεξήγηση και την απόδειξη και οι οποίες ενεργοποιούνται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Ο Duval αναφέρει ότι οι τρεις αυτές διαδικασίες δεν είναι απαραίτητο να δρουν όλες μαζί αλλά και ξεχωριστά. Ωστόσο, επισημαίνει ότι "τα τρία αυτά είδη γνωστικών διαδικασιών σχετίζονται στενά και η σύμπραξή τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την «κατάκτηση» της γεωμετρίας".

Στο παρακάτω σχήμα ο Duval περιγράφει τις συνδέσεις μεταξύ των τριών ειδών των γνωστικών διαδικασιών στη Γεωμετρία.



Κάθε βέλος αναπαριστά τον τρόπο με τον οποίο ένα είδος γνωστικής διαδικασίας μπορεί να υποστηρίξει ένα άλλο σε μία δραστηριότητα γεωμετρίας. Ο Duval έχει κάνει το βέλος 2 διακεκομμένο, για να συμβολίσει το γεγονός ότι η Οπτικοποίηση δεν βοηθά πάντα τη Συλλογιστική. Τα βέλη 5Α και 5Β απεικονίζουν την εξέλιξη της συλλογιστικής διαδικασίας με έναν τρόπο ανεξάρτητο από τις διαδικασίες της κατασκευής και της οπτικοποίησης (Duval 1998).

Μία τρίτη προσέγγιση, η οποία σχετίζεται με την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, είναι αυτή των Michal Yerushalmy και Daniel Chazan. Σύμφωνα με αυτή την έρευνα υπάρχουν τρία εμπόδια, τα οποία οι μαθητές πρέπει να ξεπεράσουν κατά την εξέταση και ερμηνεία των διαγραμμάτων.

1^{ο} εμπόδιο: Κάθε διάγραμμα έχει χαρακτηριστικά που είναι ατομικά και όχι αντιπροσωπευτικά της κατηγορίας αυτής. Παραδείγματος χάριν, ένα συγκεκριμένο οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ δεν αντιπροσωπεύει όλα τα τρίγωνα. Αυτό το εμπόδιο αναγκάζει τους μαθητές να είναι παγιδευμένοι σε μια συγκεκριμένη περίπτωση μιας εικόνας ή ενός διαγράμματος (το οποίο) μπορεί να συνδέσει τις σκέψεις με τις άσχετες πληροφορίες ή ακόμη και να εισαγάγει ψευδή δεδομένα Επίσης, μερικοί από τους μαθητές θεωρούν ότι οι γραμμές είναι παράλληλες, αν φαίνονται παράλληλες.

2^{ο} εμπόδιο: Η ιδιαιτερότητα των διαγραμμάτων σχετίζεται επίσης με τις δυσκολίες των μαθητών να απομονώσουν μια περιοχή του διαγράμματος, διότι εξ ορισμού μία περιοχή είναι μια συλλογή σημείων και μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της επικάλυψής της σε πολλά διαγράμματα ή ως μεταβολή σε ένα μόνο διάγραμμα. Κατά την περιγραφή μια περιοχής, θα πρέπει ο μαθητής να υπερβεί το συγκεκριμένο διάγραμμα και να περιγράψει τη διαδρομή που θα προέκυπτε από ένα συγκεκριμένο στοιχείο του διαγράμματος το οποίο έχει κάποια χαρακτηριστικά του αρχικού διαγράμματος που πρέπει να αλλάζει συνεχώς.

3^{ο} εμπόδιο: Οι μαθητές μαθαίνουν έναν ορισμό, μόνο όταν εξετάζουν τα «τυποποιημένα» διαγράμματα. Η ιδιαιτερότητα των διαγραμμάτων μπορεί να οδηγήσει σε ένα άλλο βήμα: «μια εικόνα ενός τυπικού σχήματος (διάγραμμα) μπορεί να προκαλέσει ανελαστική σκέψη που εμποδίζει την αναγνώριση μιας έννοιας σε ένα μη τυπικό διάγραμμα. Οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους. Οι ορισμοί των μαθητών μπορούν να περιλαμβάνουν ένα άσχετο χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων, προκαλώντας δυσκολίες στη δημιουργία ή την ερμηνεία διαγραμμάτων.

Σύμφωνα με αυτή την έρευνα, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έγιναν πιο (εύχρηστοι) επιδέξιοι στη χρήση διαγραμμάτων και ήταν σε θέση να ξεπεράσουν τα τρία εμπόδια. (Yerushalmy & Chazan,1990).

1.2 Χαράξεις με γεωμετρικά όργανα

1.2.1 Είδη γεωμετρικών οργάνων

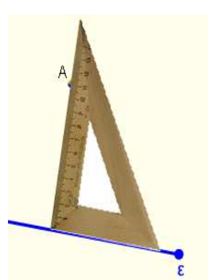
Οι περισσότερες γεωμετρικές χαράξεις πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων. Τα γεωμετρικά όργανα είναι ο χάρακας, ο διαβήτης, το τρίγωνο και το μοιρογνωμόνιο (Τζεκάκη, 1991).

Στη σχολική τάξη της γεωμετρίας στο δημοτικό και το γυμνάσιο, κατά την διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών γίνεται χρήση ορισμένων εργαλείων τόσο για την κατασκευή, το σχεδιασμό και τη μέτρηση των σχημάτων και των γεωμετρικών μεγεθών, όσο και για την επαλήθευση σχέσεων που συνδέονται με αυτά.

Ως τέτοια θα μπορούσαμε να αναφέρουμε για τη σχολική τάξη της γεωμετρίας τον κανόνα, τον γνώμονα, τον διαβήτη και το μοιρογνωμόνιο. Τα διαχωρίζουμε από τα άλλα μέσα διδασκαλίας, διότι αυτά χρησιμοποιούνταν σε όλες τις σχολικές τάξεις όπου διδάσκονταν οι γεωμετρικές έννοιες. Παράλληλα, είναι από τα πρώτα όργανα που εφοδιάζονται οι μαθητές και οι μαθήτριες σχεδόν από το ξεκίνημα της εκπαιδευτικής τους πορείας. Όλα αυτά δείχνουν την σημασία που αποδίδεται στη χρήση τους από την εκπαιδευτική κοινότητα, τουλάχιστον όσον αφορά στην επεξεργασία των γεωμετρικών εννοιών (Σδρόλιας, 2004).

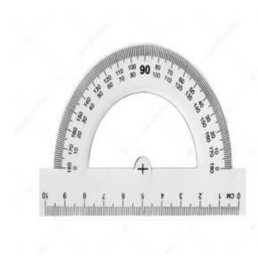
Κανόνας

Γνώμονας



Διαβήτης

Μοιρογνωμόνιο



1.2.2 Λειτουργία και χρήση γεωμετρικών οργάνων

Η εργασία με χαρτί και μολύβι και με χρήση παραδοσιακών εργαλείων παίζει σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, έχει όμως δύο βασικά μειονεκτήματα: είναι χρονοβόρα (ή αμφίβολης ποιότητας) και το τελικό αποτέλεσμα είναι στατικό. Οι κατασκευές με χρήση παραδοσιακών εργαλείων είναι στατικά αντικείμενα (σαν τα σχέδια στα βιβλία και τον πίνακα).

Κάποια πράγματα που μπορεί να φαίνονται αληθή σε μια κατασκευή (για παράδειγμα ότι ορισμένες γωνίες είναι ίσες) από μαθηματική άποψη είναι πραγματικά αληθή. Άλλα πράγματα μπορεί απλώς να φαίνονται αληθή λόγω των επιλογών που έγιναν κατά την κατασκευή. Είναι πολύ δύσκολο να διακρίνουμε αυτό που είναι πολλές φορές αληθές από αυτό που είναι πάντα αληθές, χωρίς να γίνουν περισσότερες κατασκευές (Morris, 2002).

Μια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να αναλυθεί σε 2 μέρη:

- Επιλογή των στοιχείων του σχήματος που θεωρούνται ή δίνονται (από μια εκφώνηση) ως δεδομένα
- Κατασκευή των στοιχείων που είναι κατασκευάσιμα με βάση τα δεδομένα ή άλλα στοιχεία που έχουν ήδη κατασκευαστεί (Τζεκάκη, 1992).

Η δραστηριότητα της χάραξης μαζί με τα όργανα περιλαμβάνει:

- Το μέσο πάνω στο οποίο πραγματοποιείται η χάραξη, δηλαδή το φύλο σχεδίασης. Ο χώρος του χαρτιού είναι υλικός, συγκεκριμένος, περιορισμένος (οριζόντια – κατακόρυφα) και άδειος, σε αντίθεση με το γεωμετρικό χώρο που είναι απεριόριστος, ομογενής και ισότροπος.

- Τα μέσα χάραξης, δηλαδή τα γεωμετρικά όργανα τα οποία είναι ο κανόνας, ο διαβήτης και το τρίγωνο.

- Τα αποτελέσματα της χάραξης, δηλαδή το σχέδιο που αναπαριστά το αντιμετωπιζόμενο γεωμετρικό σχήμα με τρόπο συμβατικό και συγκεκριμένο. Τα αποτελέσματα της χάραξης είναι επίσης ένα σύνολο από γραμμές συνήθως συνεχείς που καθορίζονται από τη θέση και τον προσανατολισμό τους μέσα στο χώρο του χαρτιού, σε αντίθεση με το γεωμετρικό αντικείμενο που είναι ομογενές και ανεξάρτητο από την τοποθέτησή του, με χαρακτηριστικά που ορίζονται από τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχειώδη γεωμετρικά αντικείμενα

*Ο κανόνας (χάρακας)*υλοποιεί ένα μέρος της υποτιθέμενης ευθείας, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνήθως καθορίζεται από ένα αριθμητικό στοιχείο, το μήκος του και αγνοεί την ευθεία – φορέα και τα άκρα.

Ο διαβήτης χαράσσει μια συνεχή καμπύλη γραμμή της οποίας το κέντρο συχνά αγνοείται.

Το τρίγωνο (γνώμονας), αν δεν υποκαθιστά το χαράκι, υλοποιεί μια ορθή γωνία της οποίας αγνοεί τις πλευρές – ημιευθείες και την κορυφή (Τζεκάκη, 1991).

1.2.3 Ποιες ιδιότητες των σχημάτων προσεγγίζουν - αναδεικνύουν τα γεωμετρικά όργανα

Οι γεωμετρικές δραστηριότητες με χρήση των οργάνων έχουν:

- Τη δυνατότητα άμεσης πρόσβασης με αποτέλεσμα τη σύγχυση κατασκευάσιμων στοιχείων
- Τη δυνατότητα άμεσης δράσης και χειρισμού των οργάνων χωρίς περιορισμούς με αποτέλεσμα την αγνόηση ή υποκατάσταση των γεωμετρικών σχέσεων
- Την έλλειψη αναγκαιότητας συμβολισμού που καλύπτει κυρίως ανάγκες επικοινωνίας, άχρηστες ή δευτερεύουσες σε μια κατασκευή, και τέλος,
- Την έλλειψη ελέγχου άλλης μορφής, εκτός από τον οπτικό, ή της σύγκρισης με διαφανές χαρτί (Τζεκάκη, 1992).

Οι χαράξεις των γεωμετρικών σχημάτων δεν αντιστοιχούν σε μια μαθηματική διαδικασία γεωμετρικής κατασκευής, αλλά σε μια πρακτική διαδικασία χειρισμού των οργάνων. Κατά συνέπεια, οι μαθητές αντικαθιστούν στην αντίληψή τους τα γεωμετρικά αντικείμενα, όπως σημεία, ευθείες, κύκλοι κ.α. με την υλική αναπαράστασή τους, δηλαδή τις γραμμές του σχεδίου τους.

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, στα γεωμετρικά όργανα αποδίδεται ένας διπλός ρόλος και πιο συγκεκριμένα ένα ρόλος τεχνικός, δηλαδή σχεδιασμού και στη συνέχεια ένας ρόλος θεωρητικός, δηλαδή ακρίβειας και σεβασμού στα αξιώματα , τους ορισμούς και τα θεωρήματα. Έτσι, τα γεωμετρικά όργανα παρά την υλική και συγκεκριμένη φύση τους, εκφράζουν μια θεωρητική δυνατότητα κατασκευής σχημάτων με βάση τα γεωμετρικά αντικείμενα, όπως σημεία, ευθείες, κύκλοι κ.α. και τις στοιχειώδεις κατασκευές (Τζεκάκη, 1991).

1.2.4 Ποιες είναι οι αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με τα γεωμετρικά αντικείμενα και πώς μπορούν να ξεπεραστούν

Στην αντίληψη των μαθητών με την εισαγωγή τους στη θεωρητική γεωμετρία προκαλούνται ρήξεις σε σχέση με τα γεωμετρικά αντικείμενα και τις σχέσεις τους στα ακόλουθα σημεία:

- Όχι ανάλυση σε στοιχεία και σχέσεις, αλλά ανάλυση σε στοιχεία χαράξιμα που είναι κυρίως τα ευθύγραμμα τμήματα ή τα στερεότυπα σχήματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές, αφού χαράξουν το σχήμα που αντιστοιχεί στην εκφώνηση ενός προβλήματος, να εγκαταλείψουν το κείμενο και να διαπραγματεύονται το σχήμα με βάση μια οπτική αντίληψη που καθορίζεται από το παραπάνω σημείο.
- Όχι σύνδεση των στοιχείων με γεωμετρικές σχέσεις, αλλά αγνόησή τους ή υποκατάστασή τους από τοπολογικές ιδιότητες ή κινητικές ιδιότητες ή ιδιότητες εξωτερικές του σχήματος, όπως οι κυρίαρχες διευθύνσεις του φύλλου σχεδίασης.
- Έλλειψη αναγκαιότητας συμβολισμού που καλύπτει κυρίως ανάγκες επικοινωνίας, άχρηστες ή δευτερεύουσες σε μια διαδικασία οπτικής αντίληψης.
- Έλλειψη ελέγχου άλλης μορφής εκτός από τον οπτικό ή τις άμεσες συγκρίσεις.

Οι διαδικασίες αυτές δημιουργούν ορισμένες αντιλήψεις για τα εμπλεκόμενα γεωμετρικά αντικείμενα και σχέσεις όπως:

- τα σημεία κυρίως αγνοούνται, καθώς περιορίζονται στα άκρα των γραμμών ή σε σημεία επαφής,
- οι ευθείες υποκαθίστανται από τα ευθύγραμμα τμήματα και οι κύκλοι από συνεχείς καμπύλες γραμμές.
- τέλος, τα ευθύγραμμα τμήματα αντιμετωπίζονται σαν το περίγραμμα των σχημάτων ή τη γραμμή φορέα μιας μέτρησης.

Αντίστοιχα, οι τοποθετήσεις γίνονται επιλεκτικά, οι διευθύνσεις καθορίζονται από τις κυρίαρχες του χαρτιού και το ´´ανήκειν´´ γίνεται τοποθέτηση ´´επί´´.

Υπάρχουν δύο βασικά στοιχεία που απαιτούνται για να ξεπεραστούν οι αντιλήψεις των μαθητών κατά την εισαγωγή τους στη θεωρητική γεωμετρία.

1. Η στήριξη στην εποπτεία για τη λύση των γεωμετρικών προβλημάτων με συνέπεια.

2. Η αντιμετώπιση του σχήματος που αναπαριστά το γεωμετρικό αντικείμενο σαν το ίδιο το γεωμετρικό αντικείμενο.

Αυτό απαιτεί διαδικασίες γενίκευσης των γεωμετρικών αντικειμένων που περνούν μέσα από δραστηριότητες οι οποίες εισάγουν αβεβαιότητα για αυτό που βλέπουμε και βάζουν περιορισμούς σε αυτό που κάνουμε. Τέτοιες μπορεί να είναι γεωμετρικές κατασκευές με όργανα, μέσα από διαδικασίες που δεν θα φαίνονται ψεύτικες ή από τα έξω επιβαλλόμενες, τα προγράμματα κατασκευής ή οι μοντελοποιήσεις πραγματικών καταστάσεων (Τζεκάκη, 1991).

1.3 Εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας

1.3.1 Είδη εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

Οι *γνωστικές τεχνολογίες* εννοιολογικά αποσαφηνίζουν τη φύση και τον αντίκτυπο της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Στην εκπαίδευση των μαθηματικών οι **γνωστικές τεχνολογίες** περιλαμβάνουν συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας, μικρόκοσμους, εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας, εργαστηριακές συσκευές που βασίζονται στην τεχνολογία (εργαστηριακές συσκευές υπολογιστών [CBLs] και εργαστηριακές συσκευές με μικροϋπολογιστές [MBLs]) και αριθμομηχανές γραφικών. Καθένα βοηθά να ξεπεράσουν τα όρια του νου με διαφορετικούς τρόπους. Τα συστήματα άλγεβρας των υπολογιστών επιτρέπουν στους χρήστες να παράγουν συμβολικές, γραφικές και αριθμητικές παραστάσεις και να αιτιολογούν μέσα και μεταξύ τους. Τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας παρέχουν κόσμους υπολογιστών στους οποίους οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν, να αναπτύξουν και να ερευνήσουν μαθηματικές ιδέες. Οι εργαστηριακές συσκευές που βασίζονται σε υπολογιστές προσφέρουν στους μαθητές εύκολη πρόσβαση στη συλλογή και ανάλυση δεδομένων πραγματικού κόσμου και οι αριθμομηχανές γραφικών τους παρέχουν εύκολη πρόσβαση σε υπολογιστικά και γραφικά αποτελέσματα. Κάθε μία από αυτές τις τεχνολογίες καθιστά αυτές και άλλες μαθηματικές δραστηριότητες ανώτερου επιπέδου προσβάσιμες στους μαθητές.

Δύο χαρακτηριστικά των γνωστικών τεχνολογιών που επηρεάζουν τους τρόπους με τους οποίους η τεχνολογία επιδρά στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών είναι ο βαθμός διαφάνειας και ο βαθμός στον οποίο προωθούν την εξωτερίκευση των μαθηματικών παραστάσεων.

Τα εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας ανοίγουν νέους μαθηματικούς κόσμους στα γεωμετρικά δεδομένα, παρέχοντάς τους τρόπους δημιουργίας και χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων, διατηρώντας τα καθοριστικά χαρακτηριστικά αυτών. Εργαλεία όπως το Cabri και το Geometer's Sketchpad και ο προκάτοχός τους, το Geometric Supposer, είναι εργαλεία γεωμετρίας που επιτρέπουν στον χρήστη να κατευθύνει την τεχνολογική παραγωγή των γεωμετρικών κατασκευών (Heid M. K., 1997). Το εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας που θα χρησιμοποιηθεί στην έρευνα είναι το λογισμικό Geogebra.

1.3.2 Χαρακτηριστικά και λειτουργικότητα των εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

Το GeoGebra είναι ένα δυναμικό λογισμικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών που ενώνει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και το λογισμό. Αναπτύχθηκε από τον Markus Hohenwarter στο Florida Atlantic University για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στο σχολείο.

Ο χρήστης μπορεί να κάνει κατασκευές με σημεία, διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, κωνικές τομές καθώς χρήση συναρτήσεων, τις οποίες στη συνέχεια μπορεί να τροποποιήσει με έναν δυναμικό τρόπο.

Το λογισμικό επιτρέπει, επίσης, την απευθείας εισαγωγή εξισώσεων και συντεταγμένων. Το GeoGebra έχει τη δυνατότητα να χειρίζεται μεταβλητές για αριθμούς, διανύσματα και σημεία, να βρίσκει παραγώγους και ολοκληρώματα συναρτήσεων και να παρέχει εντολές για την εύρεση *Ριζών* και *Ακρόταtων*.

Αυτές οι δύο όψεις είναι χαρακτηριστικές του GeoGebra: μια έκφραση (αναπαράσταση) στο παράθυρο της άλγεβρας αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο στο παράθυρο της γεωμετρίας και αντίστροφα.

Η GeoGebra προσφέρει στο χρήστη μια σειρά από γεωμετρικά εργαλεία με τα οποία μπορεί να δημιουργήσει τις δικές του γεωμετρικές κατασκευές ή ακόμα και καινούρια εργαλεία.

Στο παράθυρο γεωμετρίας παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση σημείων, διανυσμάτων, ευθύγραμμων τμημάτων, πολυγώνων, συναρτήσεων, ευθειών και κωνικών τομών. Σύμφωνα με τις λειτουργίες του λογισμικού, τα γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν:

- να εμφανίζονται ή να αποκρύπτονται από τον πίνακα σχεδίασης
- να αφήνουν ίχνη καθώς μετακινούνται πάνω στην οθόνη
- να αλλάζουν μέγεθος (μεγέθυνση – σμίκρυνση)
- να αλλάζουν εμφάνιση (π.χ., χρώμα, στυλ γραμμής)

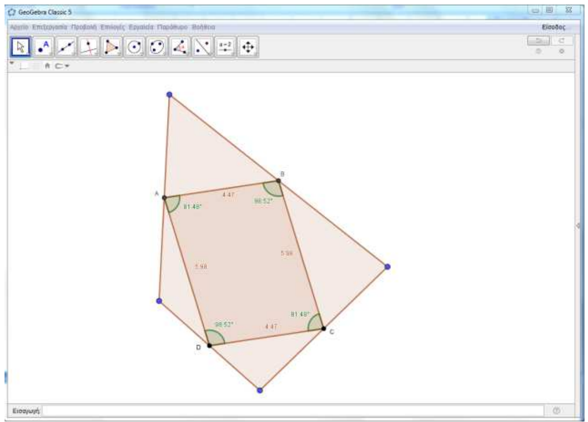
Επίσης, το λογισμικό GeoGebra προσφέρει μια μπάρα για την πλοήγηση στα βήματα μιας έτοιμης κατασκευής. Επιτρέπει στον χρήστη να επαναλάβει μια έτοιμη κατασκευή βήμα προς βήμα χρησιμοποιώντας την μπάρα πλοήγησης. Είναι, επίσης, δυνατή η εισαγωγή νέων βημάτων κατασκευής και η διαφοροποίηση της σειράς των βημάτων.

Οποιοδήποτε εξαρτημένο αντικείμενο μπορεί να επαναπροσδιοριστεί και αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για αλλαγές στην κατασκευή. Ο επαναπροσδιορισμός αντικειμένων είναι ένα πολύ εύχρηστο εργαλείο για την τροποποίηση μιας κατασκευής και αυτό μπορεί να γίνει, επίσης, αλλάζοντας τη σειρά των βημάτων κατασκευής του.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι το GeoGebra:

- Είναι ένα δωρεάν λογισμικό και μπορεί πολύ εύκολα να εγκατασταθεί σε οποιοδήποτε σταθερό ή φορητό υπολογιστή.
- Επιτρέπει στους μαθητές να ανακαλύψουν γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των σχημάτων με τη διαδικασία του συρσίματος.
- Δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές που δεν τα καταφέρνουν με τον κανόνα και το διαβήτη να παράγουν σχήματα ακριβείας.
- Έχει forum για ερωτήσεις και βοήθεια. Μέσω διαφόρων κοινωνικών δικτύων όπως facebook, twitter κ.α. γίνεται ανταλλαγή απόψεων, εκπαιδευτικών σεναρίων, ερευνών κ.τ.λ.
- Δεν περιορίζει τη χρήση στο σχολείο, καθώς ο δάσκαλος μπορεί μέσω διαδικτύου να αναθέτει εργασίες στους μαθητές.
- Παρέχει στους χρήστες πληθώρα εκπαιδευτικών σεναρίων σε κάθε γλώσσα που ανεβαίνουν από μαθηματικούς στο Geogebra Tube για κοινή χρήση.

Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα μέτρησης ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών για να μπορεί ο μαθητής κάνοντας εικασίες, να επαληθεύει τις αρχικές του υποθέσεις και να καταλήγει σε σωστά συμπεράσματα, όπως φαίνεται και πιο συγκεκριμένα στο παρακάτω παράδειγμα: «αν σε ένα τετράπλευρο ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του, το τετράπλευρο που θα προκύψει θα είναι ένα τυχαίο τετράπλευρο ή θα έχει κάποιες επιπλέον ιδιότητες και γιατί;».



Έρευνες έχουν δείξει ότι το GeoGebra ως ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα αποτελεσματικό εργαλείο στην εκμάθηση μέσω οπτικοποίησης, προώθησης της μάθησης και ενίσχυσης της κατανόησης.

Ως εκ τούτου, μπορεί να συνιστάται στους μαθηματικούς να χρησιμοποιούν το DGS GeoGebra στην εκπαιδευτική διαδικασία στο σχολείο. Αυτό το λογισμικό παρέχει στους καθηγητές και τους μαθητές ένα δωρεάν νέο εργαλείο, έναν νέο τρόπο χρήσης της τεχνολογίας με οπτικά βοηθήματα για να αλληλεπιδράσουν οι μαθητές με τις μαθηματικές έννοιες μεμονωμένα ή σε ομάδες, στην τάξη ή και στο σπίτι ή σε ένα πιο βολικό μέρος ανάλογα με τις ανάγκες των εκπαιδευτικών και των μαθητών που χρησιμοποιούν υπολογιστές. Αυτό το εργαλείο μπορούν να το χρησιμοποιούν ως συμπληρωματική δραστηριότητα στην τάξη, όπου οι μαθητές μπορούν να λάβουν άμεση ανατροφοδότηση των ευρημάτων τους, στις δραστηριότητες των τάξεων καθώς και στις εργασίες τους (Saha, Ayub & Tarmizi, 2010).

1.3.3 Ομοιότητες και διαφορές των εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας από τα κοινά εργαλεία

Ομοιότητες

- Το οπτικό τεχνούργημα που παράγεται από την αλληλεπίδραση με το λογισμικό μοιάζει με την παραδοσιακή αναπαράσταση της γεωμετρίας του χαρτιού και του μολυβιού.

- Για την κατασκευή του σχήματος με το λογισμικό απαιτείται περίπου ο ίδιος χρόνος με αυτόν που απαιτείται όταν το σχήμα κατασκευάζεται με παραδοσιακά εργαλεία.

<u>Διαφορές</u>

- Όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με χαρτί και μολύβι η πρόσβαση στο χώρο σχεδίασης που είναι και ο Ευκλείδειος χώρος είναι άμεση, ενώ όταν η κατασκευή γίνεται με λογισμικό η πρόσβαση στον Ευκλείδειο χώρο είναι έμμεση, διότι το λογισμικό αποτελεί ένα είδος διαμεσολαβητή.
- Όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με χαρτί και μολύβι, κυριαρχεί το μη ισότροπο, διότι ο χώρος του χαρτιού είναι υλικός, συγκεκριμένος, περιορισμένος (οριζόντια – κατακόρυφα) και άδειος, σε αντίθεση με το γεωμετρικό χώρο που είναι απεριόριστος, ομογενής και ισότροπος.
- Με το μολύβι ο μαθητής τραβάει γραμμές, ενώ με το λογισμικό ορίζει σημεία και τραβά γραμμές αναδεικνύοντας την ύπαρξη σημείων.
- Όταν η κατασκευή πραγματοποιείται με χαρτί και μολύβι, μπορεί με τα όργανα να πραγματοποιηθούν μετρήσεις σε όλα τα κατασκευάσιμα στοιχεία, διότι υπάρχουν κυρίαρχες θέσεις και ο μαθητής μπορεί να ψηλαφεί το σχήμα, ενώ με τη χρήση λογισμικού δεν υπάρχουν κυρίαρχες θέσεις και η μέτρηση μπορεί να γίνει μόνο αν ορισθεί από το λογισμικό.
- Οι κατασκευές με χαρτί και μολύβι με χρήση παραδοσιακών εργαλείων είναι στατικά αντικείμενα ενώ οι κατασκευές με χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας είναι δυναμικές. Μία γεωμετρική κατασκευή μπορεί να μετακινηθεί, να συρρικνωθεί, να μεγεθυνθεί ή να μεταβληθεί με άλλους τρόπους διατηρώντας ανέπαφες όλες τις μαθηματικές ιδιότητες.
- Κάποια πράγματα που μπορεί να φαίνονται αληθή σε μια κατασκευή με παραδοσιακά εργαλεία (για παράδειγμα ότι ορισμένες γωνίες είναι ίσες) από μαθηματική άποψη είναι πραγματικά αληθή. Άλλα πράγματα μπορεί απλώς να φαίνονται αληθή λόγω των επιλογών που έγιναν κατά την κατασκευή. Είναι πολύ δύσκολο να διακρίνουμε αυτό που είναι πολλές φορές αληθές από αυτό που είναι πάντα αληθές, χωρίς να γίνουν περισσότερες κατασκευές.
- Κατά τους χειρισμούς ενός σχεδίου μέσω του λογισμικού οι σχέσεις που ορίσθηκαν στην κατασκευή του (για παράδειγμα ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι κάθετο στο άλλο) συνεχίζουν να υπάρχουν και οι μόνες ιδιότητες που αλλάζουν

είναι εκείνες που δεν καθορίστηκαν αυστηρά από την κατασκευή. Επομένως, υπάρχει η δυνατότητα να διερευνηθούν πολλές από τις πιθανές μορφές που μπορεί να λάβει το σχήμα κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Αυτό διευκολύνει στη διάκριση των ιδιοτήτων που ορισμένες φορές είναι αληθείς από τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς.

1.4 Αντίληψη ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων

1.4.1 Αντίληψη σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων

Ορισμένες διεθνείς μελέτες έχουν δείξει ότι πολλοί μαθητές έχουν προβλήματα με την ιεραρχική ταξινόμηση των τετράπλευρων καθώς και τους ορισμούς αυτών (Fujita & Jones, 2007; Pickreign, 2007; Erez & Yerushalmy, 2006; De Villiers, 1994).
Ειδικότερα, οι μαθητές συχνά έχουν δυσκολίες με τους τυπικούς ορισμούς των σχημάτων και επιπλέον η γεωμετρική τους συλλογιστική συχνά επηρεάζεται σημαντικά από τις νοητικές εικόνες των σχημάτων τους.

Οι ιεραρχικές σχέσεις περιλαμβάνουν τουλάχιστον τα ακόλουθα:

- Την ικανότητα να ταξινομηθεί ένα σχήμα με διαφορετικούς τρόπους και να χαρακτηρισθεί με διαφορετικά ονόματα όπως για παράδειγμα, ένας ρόμβος μπορεί επίσης να ονομάζεται πολύγωνο, τετράπλευρο, ένας ειδικός τύπος παραλληλογράμμου κ.α..
- την ανάγκη κατανόησης των μεταβατικών σχέσεων μεταξύ των εννοιών των σχημάτων, όπως για παράδειγμα, ένα τετράγωνο είναι ρόμβος και ένας ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο, τότε ένα τετράγωνο είναι επίσης ένα παραλληλόγραμμο.
- την ανάγκη να κατανοηθεί η ασυμμετρία των σχέσεων μεταξύ των τετράπλευρων. Για παράδειγμα, ότι κάθε ορθογώνιο είναι ένα παραλληλόγραμμο, αλλά όχι κάθε παραλληλόγραμμο ένα ορθογώνιο.
- την ανάγκη να κατανοήσουμε την αντίθετη ασυμμετρία και τις μεταβατικές σχέσεις των κρίσιμων ιδιοτήτων ενός σχήματος: για παράδειγμα, ότι τα κρίσιμα χαρακτηριστικά του ορθογωνίου περιλαμβάνονται στα κρίσιμα χαρακτηριστικά του τετραγώνου, αλλά τα κρίσιμα χαρακτηριστικά του τετραγώνου δεν περιλαμβάνονται σε αυτά του ορθογωνίου.

Σε παρόμοιες έρευνες καθηγητές στοιχειωδών μαθηματικών χρησιμοποίησαν ιδιότητες καθορισμένες ως κρίσιμες κατά την κατασκευή τετραγώνων, ορθογωνίων, παραλληλογράμμων και ρομβοειδών καθώς και των ενώσεων μεταξύ τους. Επιπλέον, οι μη-κρίσιμες ιδιότητες χρησιμοποιήθηκαν από τους συμμετέχοντες για τη συσχέτιση μερικών τετράπλευρων και αυτό τους προκάλεσε να κάνουν ερμηνείες σαν να μην έχουν και τα δύο τετράπλευρα την ιδιότητα αυτή. Είναι προφανές ότι με τη χρήση κρίσιμων και μερικές φορές μη κρίσιμων ιδιοτήτων κατασκευάζονται σχέσεις εγκλεισμού που θα προκαλέσουν κάποια λάθη λόγω της επίδρασης των εννοιολογικών εικόνων. Για παράδειγμα, ενώ οι ορθές γωνίες ενός τετραγώνου είναι μια κρίσιμη ιδιότητα, το γεγονός ότι αυτό δεν είναι μια κρίσιμη ιδιότητα για ένα ρόμβο προκάλεσε σύγχυση σε άτομα όπως, ο ρόμβος είναι ένα τετράγωνο χωρίς ορθές γωνίες.

Παρατηρείται ότι τα λάθη που παρουσιάζονται σε τέτοια ευρήματα οφείλονται σε σφάλματα γενίκευσης και μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Για την ένωση τετραγώνου - ορθογωνίου: εκτός από τα τετράγωνα, όσον αφορά τα πλευρικά μήκη ορθογωνίων, δεν μπορούν ποτέ να είναι ίσα.
- Για σύνδεση παραλληλογράμμου - ορθογωνίου: εκτός από ορθογώνια, οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου δεν μπορεί ποτέ να είναι 90 °.
- Για την σχέση παραλληλόγραμμο - ρόμβος: εκτός από ένα ρόμβο, σχετικά με τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου, δεν μπορεί ποτέ να είναι ίσες.
- Για την ένωση τετραγώνου - ρόμβου: εκτός από ένα τετράγωνο, οι γωνίες ενός ρόμβου δεν μπορεί ποτέ να είναι 90°.

Τέτοιες λανθασμένες γενικεύσεις μοιάζουν με τα ευρήματα άλλων μελετών (Trünüklü, Akkaş, Alaylı, 2013; Fujita, 2012; Berkün, 2011; De Villiers, 1994), δεδομένου ότι όλοι αυτοί θεωρούν ότι οι συμμετέχοντες αντιστοιχούν στο "μερικό πρωτότυπο" της Fujita και σε κάποιο βαθμό στο "πρωτότυπο" επίπεδο στην οικοδόμηση σχέσεων ένταξης. Αυτά τα επίπεδα μπορούν να πάρουν τετράγωνο, ορθογώνιο και ρόμβο στην οικογένεια παραλληλόγραμμων και υποδεικνύουν ότι οι συμμετέχοντες μπορούν να κάνουν λάθη γενίκευσης λόγω εικόνας και πρωτότυπου σχήματος.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι τα παραλληλόγραμμα είναι μια οικογένεια που καλύπτει ορθογώνια και κάθε ορθογώνιο έχει ιδιότητα παραλληλογράμμου. Ωστόσο, ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να μην έχει ιδιότητες ορθογωνίου. Τα άτομα που δεν μπορούν να κατανοήσουν αυτήν την κατάσταση, δηλαδή εκείνοι που δεν κατασκευάζουν σωστά αρνητικές (αντίθετες) σχέσεις εγκλεισμού, μπορούν να φτάσουν σε μια γενίκευση που μπορεί να προκαλέσει λάθη, όπως στην ακόλουθη έκφραση: «τα τετράπλευρα που έχουν ορθές γωνίες είναι παραλληλόγραμμα». Τέτοιες εκφράσεις οδηγούν σε ευρήματα για κάθε τετράπλευρη σχέση.

Συμπερασματικά, όταν όλες αυτές οι ενώσεις και στο βαθμό που έχουν μελετηθεί χωρίς λάθη λαμβάνονται υπόψη, είναι δυνατόν να σχεδιαστεί η γνωστική διαδρομή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και αποτελεί τη κοινή γνωστική διαδρομή "στην κατασκευή σχέσεων ένταξης σε ειδικά τετράπλευρα.

Ο προσδιορισμός κοινής γνωστικής πορείας στην κατασκευή σχέσεων εγκλεισμού των τετραπλεύρων είναι χρήσιμη στην ορθή κατασκευή των σχέσεων. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν να αποφευχθούν τα πιθανά εννοιολογικά λάθη με την οικοδόμηση σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων και να σχηματίσουν σωστές εικόνες στην εκπαίδευση αυτών των θεμάτων (Turnuklu, 2014).

Οι σχέσεις εγκλεισμού των τετραπλεύρων είναι τομέας μελέτης που μπορεί να βοηθήσει στην προώθηση της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης και των μαθηματικών επιχειρημάτων, ειδικότερα της αφηρημένης συλλογιστικής και της απόδειξης (Fujita & Jones, 2007). Για να διασαφηνιστεί με επιτυχία το αν ένας ρόμβος είναι (ειδικό είδος) παραλληλογράμμου (δηλαδή υπάρχει σχέση συμπερίληψης μεταξύ παραλληλογράμμου και ρόμβου), χρειάζονται δεξιότητες σε (τουλάχιστον) δύο κύριους τομείς, δηλαδή δεν πρέπει ο μαθητής να επεξεργαστεί την εικόνα του σχήματος στο μυαλό του, αλλά και να εξετάσει τις ιδιότητές της τόσο με εννοιολογικό τρόπο όσο και με την κατανόηση των θεωρημάτων που σχετίζονται με αυτό. Για παράδειγμα, ένας επίσημος ορισμός ενός ρόμβου είναι «τετράπλευρο του οποίου οι πλευρές είναι ίσες στο μήκος» και οι παράλληλες γραμμές δεν αναφέρονται ρητά στον παρόντα ορισμό. Για να συμπεράνουμε ότι αυτό είναι επίσης ένα παραλληλόγραμμο, οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν διάφορες προσεγγίσεις, π.χ. υποθέτοντας ότι έχει δύο σειρές παράλληλων γραμμών, αναγνωρίζοντας ίσες γωνίες σε αυτό, φαντάζοντας ή σχεδιάζοντας μια εικόνα ενός ρόμβου και αναγνωρίζοντας παράλληλες πλευρές, αναφέροντας τον ορισμό ενός παραλληλογράμμου και συγκρίνοντάς τον με αυτό που παρατηρείται σε έναν ρόμβο, συμπεριλαμβανομένων των φανταστικών εικόνων κ.ο.κ.

Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι γενικά πάνω από το ήμισυ των μαθητών άνω του μέσου όρου είναι πιθανό να αναγνωρίσουν τα τετράπλευρα κυρίως με πρωτότυπα παραδείγματα, παρόλο που γνωρίζουν τον σωστό ορισμό και αυτό τους προκαλεί δυσκολία στην κατανόηση των σχέσεων εγκλεισμού των τετραπλεύρων. Φαίνεται ότι υπάρχει μια τάση οι μαθητές να κατανοήσουν πρώτα τον τυπικό ορισμό του παραλληλογράμμου αλλά να μην μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτόν τον ορισμό για να δεχτούν και να κατανοήσουν την έννοια του «τετραγώνου ως ειδικού τύπου παραλληλογράμμου», δηλ. η «σχέση αντίθετης κατεύθυνσης εγκυρότητας» είναι ή δεν είναι κατανοητή ιδιαίτερα στη κατεύθυνση από τους ορισμούς στα χαρακτηριστικά. Δείχνουν, επίσης, αδυναμία στην κατανόηση άλλων τετραπλεύρων (ιδίως ρόμβων) και των σχέσεών τους. Για να βελτιωθεί αυτή η κατάσταση, είναι σημαντικό να δοθεί στους μαθητές μια ευκαιρία μάθησης στην οποία θα μπορούσαν να αντικατοπτρίζουν τις οπτικές και εννοιολογικές πτυχές των σχημάτων με προσεκτική εξέταση των ορισμών (Fujita, 2012).

Σε μια άλλη έρευνα δάσκαλοι στοιχειωδών μαθηματικών ορίζουν σωστά τις ιδιότητες που σχετίζονται με τις γωνίες και τις πλευρές των τετραπλεύρων, αλλά έχουν προβλήματα με τις διαγώνιες ιδιότητες. Εκτός από αυτό, μερικοί δάσκαλοι δεν ταξινομούν τα τετράπλευρα και αυτοί που χρησιμοποιούν ιεραρχική ταξινόμηση δεν ομαδοποιούν πλήρως τις σχέσεις. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι οι δάσκαλοι δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν την εικόνα του τραπεζοειδούς. Ο λόγος για αυτό ήταν ότι οι εκπαιδευτικοί επικεντρώθηκαν μόνο σε γωνίες και πλευρικές ιδιότητες και δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν και να συσχετίσουν όλες τις ιδιότητες μαζί.

Η ταξινόμηση των τετράπλευρων θεωρείται σημαντική στην πραγματοποίηση σχέσεων μεταξύ τετραπλεύρων και ως εκ τούτου στην επίλυση προβλημάτων και αποδείξεων στη γεωμετρία. Αν ένα τετράπλευρο είναι στην ίδια οικογένεια με ένα άλλο τετράπλευρο, οι ιδιότητες που διατυπώθηκαν για αυτό το τετράπλευρο θα ήταν έγκυρες και για το άλλο. Με αυτή την έννοια, ο De Villiers (1994) επισημαίνει ότι τα άτομα μπορούν να κάνουν δύο τύπους ταξινόμησης των τετράπλευρων. Ο πρώτος είναι η ιεραρχική ταξινόμηση που γίνεται με τη συσχέτιση τετραπλεύρων με το υποσύνολο ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν. Το άλλο είναι ταξινόμηση κατατμήσεων, που σημαίνει ταξινόμηση των τετράπλευρων σε ξεχωριστά σύνολα μεμονωμένα ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν. Σύμφωνα με τον De Villiers (1994), η ιεραρχική ταξινόμηση ορίστηκε ως ένας τύπος ταξινόμησης που καθιστά τις οικογενειακές σχέσεις των τετράπλευρων πιο κατανοητές. (Türnüklü, Akkaş, Alaylı, 2013).

Σε μία έρευνα πραγματοποιήθηκε σύγκριση δεδομένων από την Ιαπωνία και το Ηνωμένο Βασίλειο (Σκωτία). Διερευνήθηκαν τα κοινά γνωστικά μονοπάτια που υποδηλώνουν ότι οι μαθητές ακολουθούν συνήθως την κατανόηση των συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών σχημάτων, ξεκινώντας από την ευκολότερη και προχωρώντας σε πιο δύσκολους εννοιολογικούς δεσμούς. Τέτοιες πληροφορίες θα προτείνουν τρόπους με τους οποίους οι μαθητές θα μπορούν να κατανοήσουν αποτελεσματικότερα τις σχέσεις ένταξης μεταξύ των τετραπλεύρων.

Όπως φαίνεται στα σχήματα 1 και 2, εντοπίζονται κοινά γνωστικά μονοπάτια. Οι μαθητές κατανοούν τη σχέση μεταξύ ρόμβου / παραλληλογράμμου και στις δύο χώρες. Όπως φαίνεται, το μονοπάτι των Ιαπώνων μαθητών είναι τετράγωνο / ρόμβος, ορθογώνιο / παραλληλόγραμμο και τέλος τετράγωνο / ορθογώνιο, ενώ το μονοπάτι των Σκωτσέζων μαθητών είναι ορθογώνιο / παραλληλόγραμμο, τετράγωνο / ορθογώνιο και τετράγωνο / ρόμβος (Okazaki & Fujita, 2007).

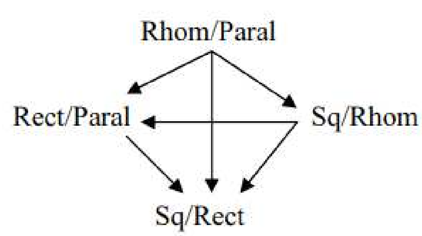


Figure 1. Common cognitive paths in Japanese 9th graders. ($p < 0.01$)

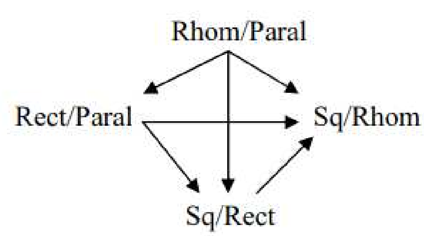
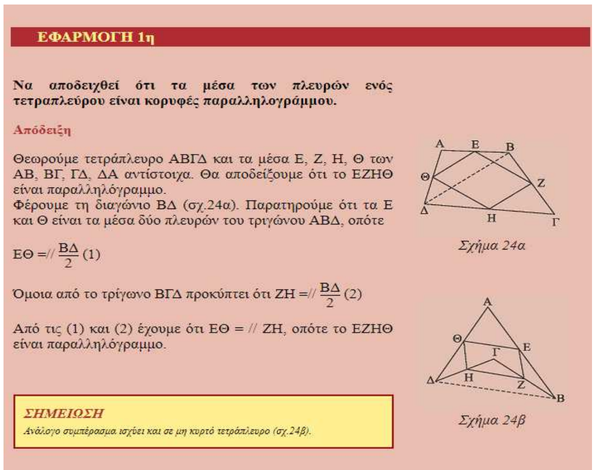


Figure 2. Common cognitive paths in Scottish trainee teachers. ($p < 0.05$)

Τα προβλήματα στα οποία αναφερόμαστε είναι προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής που για την επίλυσή τους θα πρέπει να γίνει κατασκευή ενός σχήματος το οποίο θα βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος. Παράδειγμα τέτοιου προβλήματος αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου, στο κεφάλαιο 5, Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια, σελ 111, 1η εφαρμογή.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε

$ΕΘ =// \frac{ΒΔ}{2}$ (1)

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι $ΖΗ =// \frac{ΒΔ}{2}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΘ = // ΖΗ, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).

Σχήμα 24α

Σχήμα 24β

Η επίλυση των προβλημάτων γεωμετρίας αποτελεί μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, καθώς εμπλέκονται τόσο οι ικανότητες συλλογιστικής όσο και ο χειρισμός των αντιληπτικών - φυσικών παραμέτρων.

Στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, οι λύτες προβλημάτων συχνά πρέπει να υπερβούν την αρχική αναπαράσταση του προβλήματος που διαμορφώνεται στο μυαλό τους. Αυτή η αρχική αναπαράσταση καθορίζεται επίσης από οπτικές πτυχές (ως επί το πλείστον χωρικές) οι οποίες είτε βρίσκονται υπό παρατήρηση είτε διανοητικά απεικονίζονται είτε και οι δύο.

Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει τη σημασία των αντιθέτων στην αντίληψη και τη συλλογιστική. Έχει αποδειχθεί ότι:

(1) τα αντίθετα αποτελούν μια πρωταρχική αντιληπτική σχέση, διαφορετική από την ποικιλομορφία και την ομοιότητα, και είναι ιδιαίτερα εμφανή στην χωρική αντίληψη.
(2) τα αντίθετα επηρεάζουν θετικά τη συλλογιστική σε δοκιμές υποθέσεων. Έχει αποδειχθεί ότι είναι μια αποτελεσματική στρατηγική για να ξεπεραστεί η επιβεβαιωτική προκατάληψη που τυπικά χαρακτηρίζει τη διαδικασία αναζήτησης μιας λύσης.

Η συλλογιστική σε σχέση με τα αντίθετα παρακινεί τους λύτες προβλημάτων να εστιάζουν στην μία ή την άλλη πτυχή ενός προβλήματος και να προβληματιστούν εάν η λύση μπορεί να απαιτήσει τη μετατροπή αυτής της κατάστασης στο αντίθετο. Για παράδειγμα, αν μια φιγούρα τοποθετείται οριζοντίως ή το γεγονός ότι τα τμήματα που συγκροτούν τις πλευρές της είναι ενιαία για να σχηματίσουν ένα κλειστό σχήμα αποτελεί απαραίτητο περιορισμό. Μάλλον, μπορεί η λύση να απαιτεί την τοποθέτηση της φιγούρας κάθετα ή τα τμήματα που σχηματίζουν τις πλευρές της να είναι ξεχωριστά και να μην σχηματίζουν πλέον ένα κλειστό περίγραμμα(Branchini, Burro, Bianchi, & Savardi, 2015).

1.4.2 Αντίληψη του ρόλου του σχήματος σε σύνδεση με το θεωρητικό γεωμετρικό αντικείμενο

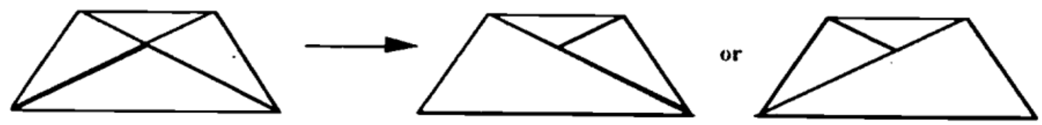
Η γεωμετρία είναι η μελέτη του χώρου και του σχήματος. Μελετά χωρικά αντικείμενα όπως γραμμές, σχήματα και πλέγματα, σχέσεις όπως "παράλληλες" και μετασχηματισμούς όπως στροφές. Η χωρική λογική περιλαμβάνει την οικοδόμηση και τον χειρισμό των διανοητικών αναπαραστάσεων αυτών των αντικειμένων, σχέσεων και μετασχηματισμών (Clements, 1998).

Υπάρχουν 3 διαφορετικές καταστάσεις σχετικά με τις γεωμετρικές έννοιες. Αυτές είναι ο ορισμός, η εικόνα και οι ιδιότητες του σχήματος της γεωμετρικής έννοιας. Οι ορισμοί είναι δομημένοι με τρόπο να περιέχουν ελάχιστες πληροφορίες για τις ιδιότητες της έννοιας. Στόχος είναι οι ορισμοί να είναι σύντομοι και περιεκτικοί (De Villiers, 1998; Fujita, 2012). Εκτός από τους ορισμούς των εννοιών, κάθε γεωμετρική έννοια έχει μια οπτική εικόνα. Η οπτική εικόνα μπορεί να είναι ένα βήμα πιο πέρα από την έννοια. Με αυτή την έννοια, το τυπικό (πρωτότυπο) δείγμα είναι το κλειδί παράγοντας. Οι ιδιότητες των εννοιών είναι βασικοί παράγοντες στο πλαίσιο της δημιουργίας σχέσεων μεταξύ των εννοιών, διαφοροποίησης των εννοιών, γενίκευσης των εννοιών και, τελικά, ταξινόμησής τους (Türnüklü, Akkaş, Alaylı, 2013).

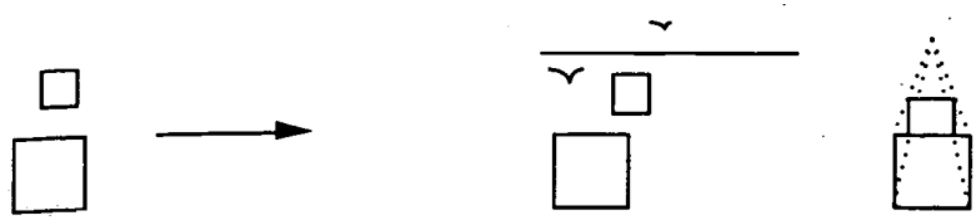
Σύμφωνα με τον Duval (1999), μπορούμε να διακρίνουμε τρία είδη λειτουργίας, ανάλογα με τον τρόπο της τροποποίησης, μιας δεδομένης φιγούρας:

- **Ο απλός τρόπος**: μπορεί να διαιρεθεί ολόκληρη η δεδομένη φιγούρα σε τμήματα διαφόρων σχημάτων (ταινίες, ορθογώνια) και μπορούν να συνδυαστούν αυτά τα μέρη σε μια άλλη ολόκληρη φιγούρα ή μπορούν να εμφανιστούν νέες υποδιαιρέσεις. Με αυτόν τον τρόπο, αλλάζουν τα σχήματα που εμφανίστηκαν με την πρώτη ματιά, όπως για παράδειγμα ένα παραλληλόγραμμο μετατρέπεται σε ορθογώνιο ή ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να εμφανιστεί συνδυάζοντας τρίγωνα. Συνεπώς, προκύπτει μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο το σχήμα παρουσιάζεται με την πρώτη ματιά.

Την πιο τυπική λειτουργία σε αυτό το είδος τροποποίησης αποτελεί η αναδιαμόρφωση του σχήματος , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- **Ο οπτικός τρόπος**: μπορεί ένα σχήμα να γίνει μεγαλύτερο ή μικρότερο ή να εμφανίζεται λοξό σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τον τρόπο αυτό τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Επίπεδα σχήματα δύναται να θεωρηθούν ως τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο. Επιπλέον, μια τυπική λειτουργία είναι να παρουσιαστούν δύο όμοια σχήματα επικαλυμμένα στο βάθος, ώστε το μικρότερο σχήμα να φαίνεται σαν να ήταν το μεγαλύτερο από απόσταση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- **Η αλλαγή θέσης**: μπορεί να γίνει αλλαγή προσανατολισμού του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας. Είναι η ασθενέστερη αλλαγή. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες οπτικά αποτελούνται από κάθετες και οριζόντιες γραμμές.

Αυτές οι διάφορες λειτουργίες αποτελούν μια συγκεκριμένη επεξεργασία των εικόνων, η οποία παρέχει μορφές με ευρετική λειτουργία. Μια από αυτές τις λειτουργίες μπορεί να δώσει μια εικόνα για την επίλυση ενός προβλήματος (Duval, 1999).

1.5 Χρήση δυναμικών εργαλείων και τα αποτελέσματα στη διαχείριση, κατασκευή ή , γενικότερα , αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων

Πολλές έρευνες έχουν γίνει, σύμφωνα με τις οποίες η χρήση δυναμικών αναπαραστάσεων σε καταστάσεις μοντελοποίησης ενισχύει τη διαλεκτική μεταξύ της εμπειρικής πλευράς και της θεωρητικής πλευράς των μαθηματικών αντικειμένων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι κατά την μετάβαση από στατικές σε δυναμικές αναπαραστάσεις η τεχνολογία μπορεί να προωθήσει τη δυναμική σκέψη των μαθητών για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Τα δεδομένα υποδεικνύουν ότι τα δυναμικά χαρακτηριστικά της τεχνολογίας υποστηρίζουν τη γένεση των εικασιών και την επικύρωσή τους ή την απόρριψη τους, μαζί με την επιλογή ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών. Επίσης, η μεταφορά σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας είναι ένα εργαλείο για τη διερεύνηση σχέσεων σε γεωμετρικά σχήματα τόσο σε αντιληπτικό όσο και σε τυπικό επίπεδο

Διάφορες DGE έχουν αναπτυχθεί σε ολόκληρο τον κόσμο και μπορεί κανείς να πει ότι υπάρχουν σήμερα περίπου 70 τέτοια περιβάλλοντα. Ωστόσο, οι περισσότερες από αυτές είναι κλώνοι των αρχικών DGE, τα οποία δεν υπερβαίνουν τα δέκα. Οι DGE που οδήγησαν τις έρευνες στην εκπαίδευση των μαθηματικών αλφαβητικά, περιλαμβάνουν: Cabri - géomètre (Laborde, Baulac,& Bellemain, 1988; Laborde & Bellemain, 1995; Laborde, 1999), GEOLOG (Ολλανδία, 2002), το Sketchpad του Geometer (Jackiw, 1991), η Geometry Inventor (Brock, Cappo, Carmon, Erdös, Kamay, Kaplan & Rosi, 2003), Geometric Supposer (Schwartz, Yerushalmy & Shternberg, 1985, 2000) και Thales (Kadunz & Kautschitsch,1993).

Έρευνες έχουν δείξει ότι τα εργαλεία που παρέχονται από τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας (DGS) βοηθούν τους μαθητές στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και πιο συγκεκριμένα:

- η λειτουργία του συρσίματος στη DGE υπήρξε ένα μοναδικό παιδαγωγικό εργαλείο που μπορεί να διευκολύνει και να δώσει στους μαθητές τη δυνατότητα να πειραματιστούν με δυναμικά γεωμετρικά αντικείμενα που μπορούν να οδηγήσουν στη δημιουργία των μαθηματικών εικασιών. Όταν ο χρήστης σύρει ένα στοιχείο του διαγράμματος, αυτό τροποποιείται ανάλογα με τη γεωμετρία των κατασκευών του και όχι σύμφωνα με τις επιθυμίες του χρήστη. Αυτό δεν συμβαίνει στα διαγράμματα χαρτιού και μολυβιού που μπορούν να παραμορφωθούν ελαφρώς από τους μαθητές προκειμένου να ανταποκριθούν στις προσδοκίες τους. Εκτός από τη λειτουργία μεταφοράς, τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας προσφέρουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως οι μακρο-κατασκευές και το ίχνος που διαφέρουν από τα παραδοσιακά εργαλεία.
- το οπτικό τεχνούργημα που παράγεται από την αλληλεπίδραση με το λογισμικό μοιάζει με την παραδοσιακή αναπαράσταση της γεωμετρίας του χαρτιού και του μολυβιού. Ωστόσο, σε αντίθεση με την αναπαράσταση του χαρτιού και του μολυβιού,

η οπτική έξοδος του εργαλείου δυναμικής γεωμετρίας δεν είναι ένα σχέδιο μιας εμφάνισης γεωμετρίας, αλλά μάλλον μπορεί να μετακινηθεί ή να τραβηχτεί - γύρω από την οθόνη με τις κατασκευασμένες ιδιότητές της να διατηρούνται. Έτσι, το σύστημα προσφέρει ανατροφοδότηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακρίνει διαγράμματα που σχεδιάζονται με το λογισμικό από διαγράμματα που προκύπτουν από τη χρήση γεωμετρικών παραδοσιακών εργαλείων

- υπογραμμίζουν πτυχές, όπως η «ιεραρχία των γεωμετρικών αντικειμένων» και η σχέση του «σχεδίου και εικόνας». Οι εξαρτήσεις των γεωμετρικών αντικειμένων παίζουν σημαντικό ρόλο σε τέτοια υπολογιστικά μέσα. Η σχέση του σχεδίου και της φιγούρας έρχεται στο προσκήνιο λόγω της φύσης του τρόπου μεταφοράς.
- επηρεάζουν την προσέγγιση των μαθητών στην διερεύνηση ανοιχτών προβλημάτων στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Η δυναμική είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό εργαλείων και υπάρχει επίσης στην οθόνη ενός υπολογιστή. Ένα γεωμετρικό σχήμα κατασκευάζεται με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (DGS) και όλα τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να στραφούν και να εξεταστούν από διαφορετικές οπτικές γωνίες(Arzarello, Ferrara&Robutti, 2012; Leung, 2011; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strässer, 2006; Healy & Hoyles, 2001; Holzl, 1996).

Όπως δείχνουν μερικές μελέτες τα τελευταία χρόνια, δυναμικά και διαδραστικά λογισμικά γεωμετρίας μπορεί να επηρεάσουν θετικά τη διδασκαλία της γεωμετρίας (Polášek & Sedlacek, 2015). Οι επιπτώσεις της ενσωμάτωσης της δυναμικής γεωμετρίας στη μάθηση και τα αποτελέσματα των μαθητών έχουν δύο σημαντικά οφέλη:

- Θετικό αντίκτυπο στην απόδοση των μαθητών και στη διαδικασία μάθησης, ειδικά από την άποψη της κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών,
- Υποστήριξη του πειραματικού έργου των μαθητών, ανακάλυψη υποθέσεων και διευκόλυνση της επαλήθευσής τους

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων τα DGS, μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο, διότι:

- Πρώτον, οι μαθητές βοηθιούνται στο να κατανοήσουν τα προβλήματα και στο να εξερευνούν τις πιθανές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα. Αποδείχθηκε ότι το σύρσιμο είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων και η μέτρηση είναι ένα σημαντικό εργαλείο για τον έλεγχο της ορθότητας των εικασιών των μαθητών.

- Δεύτερον, τα DGS ως μέσο διαμεσολάβησης ενθαρρύνουν τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην επίλυση προβλημάτων θέτοντας τις διαδικασίες μοντελοποίησης, εικασίας, πειραματισμού και γενίκευσης. Μέσα από τη μοντελοποίηση, οι μαθητές δημιουργούν ακριβείς εικόνες του προβλήματοςοι οποίες τους βοηθούν να διερευνήσουν οπτικά τα προβλήματα και να προβληματιστούν.
- Τρίτον, το περιβάλλον DGS μπορεί να προκαλέσει γνωστικές συγκρούσεις. Οι μαθητές μπορούν να τραβήξουν μια φιγούρα και κατά συνέπεια πιο πιθανό να σταματήσουν σε μια ειδική περίπτωση και να αντιμετωπίσουν τις συνέπειες.
- Τέλος, σε πρακτικό επίπεδο, το περιβάλλον DGS μπορεί να ωφελήσει τους εκπαιδευτικούς και τους υπεύθυνους ανάπτυξης προγραμμάτων σπουδών. Οι διδάσκοντες που αντιμετωπίζουν περιορισμένο χρόνο μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα της έρευνας για να εντοπίσουν γόνιμες ιδέες στις γλωσσικές και εκπαιδευτικές ενέργειες των μαθητών τους. Επιπλέον, οι προγραμματιστές του προγράμματος σπουδών μπορούν να βρουν έμπνευση για νέες δραστηριότητες που στοχεύουν στις ανάγκες των μαθητευόμενων με δυναμική γεωμετρία (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2005).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

2.1 Στόχος της έρευνας

Στόχος της έρευνας είναι η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, όπως το λογισμικό Geogebra σε σχέση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων (χάρακας, γνώμονας. μοιρογνωμόνιο, και διαβήτης) για την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των τετραπλεύρων και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από μαθητές Λυκείου.

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

1. Κατά πόσο η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, σε σχέση με τα παραδοσιακά εργαλεία, βοηθάει την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων;
2. Κατά πόσο η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας, σε σχέση με τα παραδοσιακά εργαλεία, συμβάλλει στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων;

2.3 Εννοιολογικοί προσδιορισμοί

Η διατύπωση εννοιολογικών αποσαφηνίσεων είναι απαραίτητη, διότι βοηθά στην ορθή διεξαγωγή της έρευνας. Οι έννοιες αυτές είναι η κατασκευή σχημάτων, η κατασκευή σχημάτων με παραδοσιακά εργαλεία, η κατασκευή σχημάτων με λογισμικό, η κατανόηση ιδιοτήτων και σχέσεων, η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και η χρήση εργαλείων, οι οποίες αναλύονται ως εξής:

Κατασκευή σχημάτων

Γεωμετρική κατασκευή είναι μια διαδικασία η οποία, μέσω της χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων και σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες, παράγει ένα γεωμετρικό σχέδιο. Μια κατασκευή θεωρείται σωστή, αν τα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί βάσει καθορισμένων κανόνων.

Σύμφωνα με τον Mariotti (2001), όταν οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα, γίνονται δύο ξεχωριστά αιτήματα:

1. μια διαδικασία που αποσκοπεί στην απόκτηση ενός συγκεκριμένου σχεδίου
2. αιτιολόγηση μιας τέτοιας διαδικασίας, εξηγώντας τους λόγους της ορθότητας της.

Επίσης, μια γεωμετρική κατασκευή απαιτεί:

- την υποχρεωτική ανάλυση του σχήματος στα θεμελιώδη στοιχεία (σημεία, ευθείες, κύκλους).
- τη διάκριση των δεδομένων από τα κατασκευάσιμα στοιχεία.
- τον έλεγχο του ΄΄κατασκευάσιμου΄΄ ενός στοιχείου δηλαδή τον προσδιορισμό των απαραίτητων για την κατασκευή του στοιχείων (Τζεκάκη, 1992).

Κατασκευή σχημάτων με παραδοσιακά εργαλεία

Η κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος γίνεται με χρήση παραδοσιακών γεωμετρικών εργαλείων, όπως ο γνώμονας, ο κανόνας, ο διαβήτης και το μοιρογνωμόνιο. Το μέσο πάνω στο οποίο πραγματοποιείται η χάραξη είναι το φύλο σχεδίασης. Τα αποτελέσματα της χάραξης είναι επίσης ένα σύνολο από γραμμές συνήθως συνεχείς που καθορίζονται από τη θέση και τον προσανατολισμό τους μέσα στον χώρο του χαρτιού και είναι στατικά αντικείμενα. Η πρόσβαση στο χώρο σχεδίασης που είναι και ο Ευκλείδειος χώρος είναι άμεση, κυριαρχεί το μη ισότροπο, διότι ο χώρος του χαρτιού είναι υλικός, συγκεκριμένος, περιορισμένος (οριζόντια – κατακόρυφα) και άδειος. Με το μολύβι ο μαθητής τραβάει γραμμές και με τα όργανα μπορεί να πραγματοποιήσει μετρήσεις σε όλα τα κατασκευάσιμα στοιχεία, διότι υπάρχουν κυρίαρχες θέσεις και ο μαθητής μπορεί να ψηλαφεί το σχήμα. Έτσι, ο μαθητής παρατηρεί και ελέγχει τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με τα όργανα.

Κατασκευή σχημάτων με λογισμικά

Η κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος γίνεται με τη χρήση του λογισμικού. Το μέσο πάνω στο οποίο πραγματοποιείται η κατασκευή του σχήματος είναι η οθόνη του υπολογιστή. Όταν η κατασκευή γίνεται με λογισμικό, η πρόσβαση στον Ευκλείδειο χώρο είναι έμμεση, διότι το λογισμικό αποτελεί ένα είδος διαμεσολαβητή. Με το λογισμικό ο μαθητής ορίζει σημεία και τραβά γραμμές αναδεικνύοντας την ύπαρξη σημείων, δεν υπάρχουν κυρίαρχες θέσεις και η μέτρηση μπορεί να γίνει μόνο αν ορισθεί από το λογισμικό.

Οι κατασκευές είναι δυναμικές, διότι μια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να μετακινηθεί, να συρρικνωθεί, να μεγεθυνθεί ή να μεταβληθεί με άλλους τρόπους διατηρώντας ανέπαφες όλες τις μαθηματικές ιδιότητες.

Με το λογισμικό κατά την κατασκευή του σχήματος μπορεί ο μαθητής να εισάγει περιορισμούς δύσκολα προσπελάσιμους και η χάραξη ενός σχήματος πρακτικά μετατρέπεται σε μια πραγματική μαθηματική διαδικασία.

Επομένως, υπάρχει η δυνατότητα να διερευνηθούν πολλές από τις πιθανές μορφές που μπορεί να λάβει το σχήμα κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Αυτό διευκολύνει στη διάκριση των ιδιοτήτων που ορισμένες φορές είναι αληθείς από τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς.

Κατανόηση ιδιοτήτων και σχέσεων

Οι ιδιότητες που αναφέρονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α’ Λυκείου στο $5^{ο}$ κεφάλαιο είναι οι εξής:

- Στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
- Στο ορθογώνιο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, όλες οι γωνίες είναι ορθές, οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες.
- Στο ρόμβο, οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, οι διαγώνιοι διχοτομούνται, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

- Στο τετράγωνο, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες όλες οι πλευρές είναι ίσες, όλες οι γωνίες είναι ορθές, οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
- Στο τραπέζιο, μόνο δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες
- Στο ισοσκελές τραπέζιο, μόνο δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες, οι διαγώνιοι είναι ίσες και οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Επίσης μέσα από τη θεωρεία του σχολικού εγχειριδίου μπορούν να αναλυθούν οι σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων ως εξής:

- Ένα τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος, όμως δεν ισχύει το αντίθετο.
- Ένα ορθογώνιο, ένας ρόμβος και ένα τετράγωνο είναι και παραλληλόγραμμα, όμως δεν ισχύει το αντίθετο.

Ο βαθμός κατανόησης των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων συνδέεται με το μοντέλο της γεωμετρικής σκέψης του van Hiele, καθώς και των γνωστικών διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης του Duval.

Οι δεξιότητες των μαθητών σχετικά με τα τρία πρώτα επίπεδα van Hiele για την κατανόηση των ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων είναι οι εξής:

Στο 1^{ο} επίπεδο - Αναγνώριση ή οπτικοποίηση, οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν σχήματα (π.χ. τετράγωνα, ορθογώνια, ρομβοειδή, τραπεζοειδή) και άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις (π.χ. γωνίες, παράλληλες γραμμές) ανάλογα με την εμφάνισή τους.
- προσδιορίζουν περιπτώσεις τετραπλεύρου από την εμφάνισή του ως σύνολο.
- ονομάζουν ή επισημαίνουν τετράπλευρα και άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις και χρησιμοποιούν τυπικά ή μη τυπικά κατάλληλα ονόματα.
- μπορούν να κατασκευάσουν, να σχεδιάσουν ή να αντιγράψουν ένα τετράπλευρο.
- περιγράφουν προφορικά τα τετράπλευρα με την εμφάνισή τους ως σύνολο.
- συγκρίνουν και ταξινομούν τα τετράπλευρα σε οπτική βάση ως σύνολο.

Στο 2^{ο} επίπεδο – Ανάλυση, οι μαθητές:

- αναλύουν το σχήμα με βάση τα στοιχεία του, καθορίζουν τις ιδιότητες εμπειρικά και τις χρησιμοποιούν για την επίλυση προβλημάτων.
- αναγνωρίζουν τα είδη των τετραπλεύρων και χρησιμοποιούν το κατάλληλο λεξιλόγιο για τα είδη και τις σχέσεις

- συγκρίνουν δύο σχήματα ανάλογα με το είδος και τις σχέσεις μεταξύ τους.
- ταξινομούν τα τετράπλευρα με διαφορετικούς τρόπους σύμφωνα με ορισμένες ιδιότητες.
- ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν λεκτική περιγραφή ενός τετραπλεύρου από την άποψη της ιδιότητας και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες για να σχεδιάσουν ή να κατασκευάσουν το σχήμα.
- ανακαλύπτουν εμπειρικά ιδιότητες συγκεκριμένων τετραπλεύρων και τις
- γενικεύουν.
- περιγράφουν μια κατηγορία τετραπλεύρων (π.χ. τετράγωνα, ορθογώνια) μέσω των τις ιδιοτήτων τους.
- προσδιορίζουν ποιες ιδιότητες χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν ένα είδος τετραπλεύρου και να συγκρίνουν τα τετράπλευρα σύμφωνα με το
- τις ιδιότητές τους.

Στο 3^{ο} επίπεδο - Άτυπη αφαίρεση, οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν τις σχέσεις υποκατηγοριών μεταξύ διαφορετικών τύπων τετραπλεύρων, διαμορφώνουν και χρησιμοποιούν ορισμούς.
- αναγνωρίζουν διαφορετικά σύνολα ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν κάθε είδος τετραπλεύρου
- αναγνωρίζουν τα ελάχιστα σύνολα ιδιοτήτων που μπορούν να χαρακτηρίσουν ένα σχήμα.
- είναι σε θέση να διατυπώσουν και να χρησιμοποιήσουν ορισμούς για μια κατηγορία τετραπλεύρων.
- είναι σε θέση να ταξινομήσουν λογικά τα τετράπλευρα (Han, 2007).

Οι δεξιότητες των μαθητών σχετικά με τους τέσσερις τύπους γνωστικής κατανόησης του Duval, μέσα από τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν τη γεωμετρική εικόνα και κατανοούν ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων, είναι οι εξής:

Η Αντιληπτική κατανόηση σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Περιλαμβάνει δεξιότητες, όπως την ονομασία του σχήματος και αναγνώριση υποσχημάτων του σχήματος.

Η Σειριακή κατανόηση απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες. Σε αυτή την περίπτωση τα τμήματα του σχήματος δεν δημιουργούνται με βάση τα αισθητηριακά κριτήρια (δηλ. από το τι βλέπουν οι μαθητές), αλλά μαθηματικούς και τεχνικούς περιορισμούς (όπως π.χ. κανόνας και διαβήτης ή κάποιο κατάλληλο λογισμικό πρόγραμμα).

Η Λεκτική κατανόηση συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Κάποιες ιδιότητες και σχέσεις πρέπει πρώτα να δίνονται λεκτικά.

Τέλος, *η λειτουργική κατανόηση* εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος. Αυτός ο τύπος εμπλέκει το χειρισμό των σχημάτων (είτε νοητικά, είτε φυσικά), ο οποίος μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε σχέσεις που δεν είναι άμεσα και αντιληπτικά ορατές, αλλά και στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Κάθε είδος κατανόησης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος. Ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα πρέπει να υπάρχει σίγουρα η αντιληπτική κατανόηση και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη κατανόησης.

Επιπλέον, η λειτουργική κατανόηση δεν είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τύπους κατανόησης. Ο Duval υποστηρίζει ότι, για να κατακτήσει ένας μαθητής το στάδιο της λειτουργικής κατανόησης, είναι απαραίτητο να έχει κατακτήσει πρώτα την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση (Duval, 1995).

Επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων

Η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων συνδέεται με την κατάκτηση από τους μαθητές του τρίτου επιπέδου γεωμετρικής σκέψης van Hiele. Επίσης σύμφωνα με τον Duval η λειτουργική κατανόηση εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος και, για να κατακτήσει ένας μαθητής το στάδιο της λειτουργικής κατανόησης, είναι απαραίτητο να έχει κατακτήσει πρώτα την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση. Επίσης, η λειτουργική κατανόηση σχετίζεται άμεσα με τους διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος, με μετασχηματισμούς φυσικούς ή νοερούς που οδηγούν στην επιδιωκόμενη λύση .

Ειδικά για την λειτουργική κατανόηση ο Duval αναφέρει τρία είδη δυνατών τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος:

Ο απλός τρόπος: μπορεί να διαιρεθεί ολόκληρη η δεδομένη φιγούρα σε τμήματα διαφόρων σχημάτων (ταινίες, ορθογώνια) και μπορούν να συνδυαστούν αυτά τα μέρη σε μια άλλη ολόκληρη φιγούρα ή μπορούν να εμφανιστούν νέες υποδιαιρέσεις. Με αυτόν τον τρόπο, αλλάζουν τα σχήματα που εμφανίστηκαν με την πρώτη ματιά, όπως για παράδειγμα ένα παραλληλόγραμμο μετατρέπεται σε ορθογώνιο ή ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να εμφανιστεί συνδυάζοντας τρίγωνα. Συνεπώς, προκύπτει μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο το σχήμα παρουσιάζεται με την πρώτη ματιά.

Ο οπτικός τρόπος: μπορεί ένα σχήμα να γίνει μεγαλύτερο ή μικρότερο ή να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τον τρόπο αυτό τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή.

Η αλλαγή θέσης: μπορεί να γίνει αλλαγή προσανατολισμού του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας. Είναι η ασθενέστερη αλλαγή. Επηρεάζει κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες οπτικά αποτελούνται από κάθετες και οριζόντιες γραμμές.

Αυτές οι διάφορες λειτουργίες αποτελούν μια συγκεκριμένη επεξεργασία των εικόνων, η οποία παρέχει μορφές με ευρετική λειτουργία. Μια από αυτές τις λειτουργίες μπορεί να δώσει μια εικόνα για την επίλυση ενός προβλήματος (Duval, 1999).

Έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης 3 van Hiele έχουν καλή ικανότητα να λύσουν προβλήματα αλγεβρικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τις δεξιότητες σκέψης αφαίρεσης (Suwito, Yuwono, Parta, Irawati, & Oktavianingtyas, 2016).

Χρήση εργαλείων

Η χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας συνδέεται με την καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και πιο συγκεκριμένα η οπτική έξοδος του εργαλείου δυναμικής γεωμετρίας δεν είναι ένα σχέδιο μιας εμφάνισης

γεωμετρίας, αλλά μάλλον μπορεί να μετακινηθεί ή να τραβηχτεί - γύρω από την οθόνη με τις κατασκευασμένες ιδιότητές της να διατηρούνται.
Οι γεωμετρικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν δύο τύπους επεξεργασιών των γεωμετρικών αντικειμένων: την οπτική επεξεργασία και την αντιληπτική αντιμετώπιση. Το λογισμικό ευνοεί την οπτική επεξεργασία, καθώς βοηθά στην αποφυγή της διαλογικής θεραπείας και της χρήσης της συμβολικής γλώσσας και αυτό με τη σειρά του, επιτρέπει την άμεση πρόσβαση (Sánchez & Sacristán, 2003).

Επίσης σύμφωνα με τους Yerushalmy και Chazan, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έγιναν πιο εύχρηστοι στη χρήση διαγραμμάτων και ήταν σε θέση να ξεπεράσουν τα τρία εμπόδια τα οποία αναλύονται ως εξής:.

1^ο^ εμπόδιο: Κάθε διάγραμμα έχει χαρακτηριστικά που είναι ατομικά και όχι αντιπροσωπευτικά της κατηγορίας αυτής. Παραδείγματος χάριν, ένα συγκεκριμένο οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ δεν αντιπροσωπεύει όλα τα τρίγωνα. Αυτό το εμπόδιο αναγκάζει τους μαθητές να είναι παγιδευμένοι σε μια συγκεκριμένη περίπτωση μιας εικόνας ή ενός διαγράμματος (το οποίο) μπορεί να συνδέσει τις σκέψεις με τις άσχετες πληροφορίες ή ακόμη και να εισαγάγει ψευδή δεδομένα. Επίσης, μερικοί από τους μαθητές θεωρούν ότι οι γραμμές είναι παράλληλες αν φαίνονται παράλληλες.

2^ο^ εμπόδιο: Η ιδιαιτερότητα των διαγραμμάτων σχετίζεται επίσης με τις δυσκολίες των μαθητών να απομονώσουν μια περιοχή του διαγράμματος, διότι εξ ορισμού μία περιοχή είναι μια συλλογή σημείων και μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της επικάλυψης της σε πολλά διαγράμματα ή ως μεταβολή σε ένα μόνο διάγραμμα. Κατά την περιγραφή μια περιοχής θα πρέπει ο μαθητής να υπερβεί το συγκεκριμένο διάγραμμα και να περιγράψει τη διαδρομή που θα προέκυπτε από ένα συγκεκριμένο στοιχείο του διαγράμματος, το οποίο έχει κάποια χαρακτηριστικά του αρχικού διαγράμματος που πρέπει να αλλάζει συνεχώς.

3^ο^ εμπόδιο: μαθητές μαθαίνουν έναν ορισμό, μόνο όταν εξετάζουν τα «τυποποιημένα» διαγράμματα, η ιδιαιτερότητα των διαγραμμάτων μπορεί να οδηγήσει σε ένα άλλο βήμα: «μια εικόνα ενός τυπικού σχήματος (διάγραμμα) μπορεί να προκαλέσει ανελαστική σκέψη που εμποδίζει την αναγνώριση μιας έννοιας σε ένα μη τυπικό διάγραμμα. Οι μαθητές δυσκολεύονται δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους. Οι ορισμοί των μαθητών μπορούν να περιλαμβάνουν ένα άσχετο χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων, προκαλώντας δυσκολίες στη δημιουργία ή την ερμηνεία διαγραμμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}:ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Μέθοδος

Πρόκειται για μια συγκριτική μελέτη στην οποία χρησιμοποιήθηκε η ποιοτική μέθοδος, για να διερευνηθούν οι διαφορές στην προσέγγιση ιδιοτήτων και σχέσεων των τετράπλευρων μεταξύ των μαθητών που χρησιμοποίησαν το λογισμικό και των μαθητών που χρησιμοποίησαν παραδοσιακά εργαλεία.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2018-2019 και οι συμμετέχοντες ήταν 16 μαθητές της Α΄ Λυκείου, οι οποίοι χωριστήκαν σε 2 ομάδες. Η 1^{η} ομάδα οκτώ ατόμων χρησιμοποίησε το λογισμικό και η 2^{η} ομάδα επίσης οκτώ ατόμων, χρησιμοποίησε τα γεωμετρικά όργανα. Και οι δύο ομάδες εργάστηκαν σε ζευγάρια. Για την κατάταξη των μαθητών σε ζευγάρια καθώς και για την επιλογή των ζευγαριών μεταξύ των οποίων πραγματοποιήθηκε η σύγκριση, οι μαθητές συμπλήρωσαν ο καθένας ξεχωριστά ένα διαγνωστικό τεστ, το οποίο βοήθησε σε αυτή την κατεύθυνση.

Οι μαθητές και των 2 ομάδων διδάχτηκαν σε αίθουσα διδασκαλίας του Κοινωνικού Φροντιστηρίου το κεφ.5 «Παραλληλόγραμμα– τραπέζια» του σχολικού εγχειριδίου και κλήθηκαν να ασχοληθούν με δραστηριότητες κατασκευής και εύρεσης γεωμετρικών σχημάτων, επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων και εύρεσης ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων, μέσα από τα οποία επρόκειτο να αναδειχθεί ο βαθμός κατανόησης των ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων, καθώς και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Επίσης οι μαθητές της 1^{ης} ομάδας, πριν από την ενασχόληση με τις δραστηριότητες, ήρθαν σε επαφή με βασικές λειτουργίες του λογισμικού με στόχο την εξοικείωσή τους με αυτό.

Κατά τη φάση των δραστηριοτήτων οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ζεύγη. Για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα παραδοσιακά εργαλεία, έγινε καταγραφή των στρατηγικών που ακολούθησαν, μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες τους και συμπλήρωσαν όλα τα φύλλα εργασίας. Για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό καταγράφηκαν στον υπολογιστή σε μορφή βίντεο με το λογισμικό Bandicam screen recorder οι στρατηγικές που ακολούθησαν, μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες τους και συμπληρώθηκαν όλα τα φύλλα εργασίας, εκτός από την $1^{η}$ δραστηριότητα του $1^{ου}$ φύλλου εργασίας που σχετίζεται με τις κατασκευές, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν αποκλειστικά μέσω του λογισμικού στον υπολογιστή. Η μαγνητοφώνηση έγινε με τη χρήση κινητού.

3.2 Δείγμα

Οι συμμετέχοντες ήταν 16 μαθητές της Α΄ Λυκείου και προέρχονταν από τα τρία γενικά Λύκεια της πόλης της Φλώρινας, το $1^{ο}$ ΕΠΑΛ Φλώρινας καθώς και το Εκκλησιαστικό Γυμνάσιο – Λύκειο Φλώρινας και παρακολούθησαν πρόγραμμα ενισχυτικής διδασκαλίας στο κοινωνικό φροντιστήριο της Μητρόπολης Φλώρινας το οποίο στεγάζεται και λειτουργεί τις απογευματινές ώρες στο κτίριο του Εκκλησιαστικού Γυμνασίου – Λυκείου Φλώρινας στο οποίο υπάρχει και αίθουσα υπολογιστών.

3.3 Εργαλείο μέτρησης

Για να διερευνηθούν οι γνώσεις των μαθητών σχετικά με τις ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων καθώς και η ικανότητα επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων, κατασκευάστηκαν τέσσερα εργαλεία μέτρησης τα οποία περιλάμβαναν, ένα διαγνωστικό τεστ, δύο φύλλα εργασίας και ένα τεστ αξιολόγησης (βλέπε παράρτημα 1).

Αρχικά οι 16 μαθητές και μαθήτριες (5 αγόρια και 11 κορίτσια) που συμμετείχαν στην έρευνα κλήθηκαν να συμπληρώσουν μεμονωμένα χωρίς να υπάρχει συνεργασία μεταξύ τους ένα διαγνωστικό τεστ. Αυτό βοήθησε στην επιλογή των μαθητών που θα απαρτίζουν το κάθε ζευγάρι καθώς και στην επιλογή των ζευγαριών μεταξύ των οποίων θα πραγματοποιηθεί η σύγκριση. Το διαγνωστικό τεστ περιλαμβάνει τρεις ενότητες ($1^{η}$ έως $3^{η}$) σχετικές με την κατανόηση από τους μαθητές των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ των τετραπλεύρων και οι οποίες συνδέονται με το $1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα και μία ενότητα ($4^{η}$) που αφορά στην επίλυση προβλήματος και η οποία συνδέεται με το $2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα Πιο συγκεκριμένα:

- η $1^{η}$ ενότητα περιλαμβάνει 8 προτάσεις σχετικές με τη συμπλήρωση κενών
- η $2^{η}$ ενότητα περιλαμβάνει 3 ζεύγη ειδών τετραπλεύρων και καταγραφή των κοινών ιδιοτήτων που αφορούν πλευρές, γωνίες και διαγώνιους
- η $3^{η}$ ενότητα περιλαμβάνει 5 προτάσεις, τύπου σωστού – λάθους που αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων

- η 4^{η} ενότητα, αφορά στην επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος που απαιτεί και την κατασκευή του σχήματος.

Αναλύοντας στη συνέχεια τις δραστηριότητες του κάθε φύλλου εργασίας, μπορούμε να πούμε ότι στην 1^{η} δραστηριότητα του 1^{ου} φύλου εργασίας δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε πλάγια κατεύθυνση και με βάση αυτό το κάθε ζευγάρι πρέπει να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, ένα ρόμβο και ένα τετράγωνο. Στη 2^{η} δραστηριότητα του 1^{ου} φύλου εργασίας δίνεται ένα έτοιμο σύνθετο γεωμετρικό σχήμα, το οποίο αποτελείται από δύο παράλληλες ευθείες μεταξύ των οποίων υπάρχουν διάφορα είδη γεωμετρικών σχημάτων και το κάθε ζευγάρι πρέπει να ανακαλύψει είδη τετραπλεύρων όπως τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο και να αιτιολογήσει την απάντησή του με γνώμονα τις ιδιότητες των τετραπλεύρων. Στη συνέχεια η 1^{η} και η 2^{η} δραστηριότητα του 2^{ου} φύλλου εργασίας περιλαμβάνουν επίλυση δύο γεωμετρικών προβλημάτων που απαιτούν και κατασκευή του σχήματος. Το 1^{ο} φύλλο εργασίας συνδέεται με το 1^{ο} ερευνητικό ερώτημα ενώ το 2^{ο} φύλλο εργασίας με το 2^{ο} ερευνητικό ερώτημα.

Τέλος, το τεστ αξιολόγησης περιλαμβάνει:

- ιδιότητες πλευρών, γωνιών και διαγώνιες ιδιότητες μεταξύ των τετραπλεύρων τις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να αντιστοιχήσουν σε έξι είδη τετραπλεύρων που είναι τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο
- επτά προτάσεις τύπου σωστό – λάθος οι οποίες αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων.

Με τη συμπλήρωση του τεστ αξιολόγησης οι μαθητές θα αναγνωρίσουν τις ιδιότητες του κάθε είδους τετραπλεύρου και θα βρουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων. Θα γίνει αντιπαραβολή της μιας ομάδας με την άλλη και μέσα από αυτό θα φανεί πως το λογισμικό βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν ιδιότητες και σχέσεις, σε σχέση με τους μαθητές που χρησιμοποιούν παραδοσιακά εργαλεία. Για την καλύτερη επεξεργασία του τεστ αξιολόγησης οι απαντήσεις αναλύθηκαν ως εξής:

- όταν για την ιδιότητα πρέπει να γίνει αντιστοίχιση σε ένα είδος τετραπλεύρου τότε υπάρχουν 2 είδη απαντήσεων: σωστή και λάθος απάντηση
- όταν για την ιδιότητα πρέπει να γίνει αντιστοίχιση σε δύο είδη τετραπλεύρου, τότε υπάρχουν 3 είδη απαντήσεων: σωστή, ημιτελής και λάθος απάντηση

- όταν για την ιδιότητα πρέπει να γίνει αντιστοίχιση σε τρία είδη τετραπλεύρου, τότε υπάρχουν 4 είδη απαντήσεων: σωστή, ημιτελής με 2 σωστά, ημιτελής με 1 σωστό και λάθος απάντηση
- όταν για την ιδιότητα πρέπει να γίνει αντιστοίχιση σε τέσσερα είδη τετραπλεύρου, τότε υπάρχουν 5 είδη απαντήσεων: σωστή, ημιτελής με 3 σωστά, ημιτελής με 2 σωστά, ημιτελής με 1 σωστό και λάθος απάντηση.

Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί ότι, πριν τη διεξαγωγή της έρευνας, πραγματοποιήθηκε μια πιλοτική έρευνα με δύο ζευγάρια μαθητριών. Το ένα ζευγάρι χρησιμοποίησε το λογισμικό και το άλλο τα παραδοσιακά εργαλεία και αφού ολοκλήρωσαν τις δραστηριότητες των δύο φύλλων εργασίας, συμπλήρωσαν το τεστ αξιολόγησης. Μετά την ολοκλήρωση της πιλοτικής, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό είχε περισσότερες κατανοήσεις σε ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Αντίθετα, όσον αφορά την επίλυση προβλήματος, το ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα είχε καλύτερα αποτελέσματα και αυτό γιατί η επιλογή των μαθητριών έγινε τυχαία χωρίς την χρήση του διαγνωστικού τεστ. Επομένως, το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητριών δεν ήταν στο ίδιο επίπεδο. Όλα αυτά αποτέλεσαν γνώμονα για την βελτίωση της διαδικασίας της έρευνας και την αξιόπιστη εφαρμογή των εργαλείων.

3.4 Ερευνητική διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το χρονικό διάστημα 21/01/2019 έως 11/05/19, δηλαδή διήρκησε περίπου τέσσερις μήνες μαζί με την πιλοτική.

Τα μαθήματα και οι δραστηριότητες της έρευνας πραγματοποιήθηκαν τις απογευματινές ώρες από Δευτέρα έως Παρασκευή και μέσα στο Σαββατοκύριακο ανάλογα με τις εξωσχολικές υποχρεώσεις των μαθητών, σε αίθουσες διδασκαλίας του Εκκλησιαστικού Γυμνασίου – Λυκείου Φλώρινας, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο της πόλης της Φλώρινας και στο οποίο στεγάζεται το Κοινωνικό Φροντιστήριο. Το Κοινωνικό Φροντιστήριο Φλώρινας αποτελεί πλέον έναν θεσμό και λειτουργεί υπό την αιγίδα της Ιερά Μητρόπολης Φλώρινας. Εκπαιδευτικοί του ιδιωτικού και δημοσίου τομέα προσφέρουν εθελοντικά τις υπηρεσίες τους σε μαθητές που το έχουν ανάγκη.

Τέλος, η εκμάθηση χρήσης του λογισμικού και οι δραστηριότητες των μαθητών που ασχολήθηκαν με το λογισμικό πραγματοποιήθηκαν στην αίθουσα υπολογιστών του Εκκλησιαστικού Γυμνασίου – Λυκείου.

3.5 Αξιοπιστία και εγκυρότητα διαδικασίας, δείγματος και εργαλείων

Προκειμένου να εξασφαλισθεί η αξιοπιστία της επιλογής του δείγματος και του εργαλείου, έχουν ληφθεί υπόψη τα παρακάτω:

- Το βολικό δείγμα (το δείγμα αποτελούν μαθητές, οι οποίοι προέρχονται από όλα τα Λύκεια της πόλης της Φλώρινας και παρακολούθησαν τα μαθήματα του Κοινωνικού Φροντιστηρίου της Μητρόπολης Φλώρινας).
- Η χρήση του διαγνωστικού τεστ για την κατάταξη των μαθητών σε οκτώ ζευγάρια ανάλογα με το γνωστικό και αντιληπτικό τους επίπεδο και η κατάταξη των ζευγαριών σε δυάδες, ώστε να πραγματοποιηθεί η σύγκριση μεταξύ των ζευγαριών που χρησιμοποίησαν το λογισμικό και αυτών που χρησιμοποίησαν τα παραδοσιακά εργαλεία.
- Η παροχή ομοιόμορφων εργαλείων και στις δύο ομάδες έρευνας.
- Η πραγματοποίηση της έρευνας σε σταθερό χρόνο και η δυνατότητα καταγραφής όλων των βημάτων που ακολούθησαν οι μαθητές για την κατασκευή και εύρεση των γεωμετρικών σχημάτων και την επίλυση προβλημάτων.

Επίσης η εγκυρότητα του περιεχομένου του εργαλείου εξασφαλίστηκε με:

- Την αντιστοιχία της έρευνας με τις εννοιολογικές αποσαφηνίσεις όπως συνδέονται με τη βιβλιογραφία.
- Τη δυνατότητα βελτίωσής του εργαλείου μετά την εφαρμογή της πιλοτικής έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Ανάλυση διαγνωστικού τεστ

Το διαγνωστικό τεστ βοήθησε στην κατάταξη των μαθητών ανάλογα με το γνωστικό και αντιληπτικό τους υπόβαθρο, οδηγώντας στην επιλογή των μαθητών που θα απαρτίζουν το κάθε ζευγάρι καθώς και στην επιλογή των ζευγαριών μεταξύ των οποίων θα πραγματοποιηθεί η σύγκριση.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα των εργαλείων, οι μαθητές εξετάστηκαν στην ορθότητα προτάσεων αναφορικά με συμπλήρωση κενών στην ενότητα 1, με την εύρεση κοινών ιδιοτήτων μεταξύ ζευγών τετραπλεύρων στην ενότητα 2, με την ορθότητα προτάσεων που περικλείουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων στην ενότητα 3 και τέλος ,με την επίλυση προβλήματος στην ενότητα 4 και καταγράφηκε ο συνολικός αριθμός σωστών απαντήσεων για την επιλογή των ζευγαριών (βλ. σχετικό πίνακα. 2, παράρτημα 2).

Με βάση τα ευρήματα του διαγνωστικού τεστ οι 16 μαθητές και μαθήτριες παρουσιάζονται με κωδικοποιημένη μορφή λόγω ασφάλειας των προσωπικών τους δεδομένων και πιο συγκεκριμένα:

- η μαθήτρια Λ.1.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 18 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε το πρόβλημα
- ο μαθητής Λ.1.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 19 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε το πρόβλημα
- ο μαθητής Ο.1.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 16 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε το πρόβλημα
- η μαθήτρια Ο.1.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 18 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε το πρόβλημα
- η μαθήτρια Λ.2.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 17 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- η μαθήτρια Λ.2.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 18 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- η μαθήτρια Ο.2.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 15 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- η μαθήτρια Ο.2.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 15 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- ο μαθητής Λ.3.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 14 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- ο μαθητής Λ.3.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 11 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- η μαθήτρια Ο.3.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 13 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα

- η μαθήτρια Ο.3.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 16 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και έλυσε μερικώς το πρόβλημα
- η μαθήτρια Λ.4.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 12 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και δεν έλυσε το πρόβλημα
- η μαθήτρια Λ.4.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 13 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και δεν έλυσε το πρόβλημα
- η μαθήτρια Ο.4.1 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 10 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και δεν έλυσε το πρόβλημα
- ο μαθητής Ο.4.2 συγκέντρωσε συνολική βαθμολογία 9 από τις τρεις ενότητες, κατασκεύασε σωστά το σχήμα και δεν έλυσε το πρόβλημα

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι από τους 16 μαθητές / μαθήτριες, μόνο οι 4 κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν σωστά το πρόβλημα, οι 8 κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν μερικώς το πρόβλημα, ενώ οι υπόλοιποι 4 κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και δεν έλυσαν το πρόβλημα. Σχετικά με τις υπόλοιπες 3 ενότητες του διαγνωστικού τεστ, οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα είχαν περισσότερες σωστές απαντήσεις και κατατάχθηκαν σε 2 ζευγάρια περίπου του ίδιου γνωστικού και αντιληπτικού επιπέδου και επέλεξαν αν θα ασχοληθούν με το λογισμικό ή με τα γεωμετρικά όργανα. Επίσης, οι 8 μαθητές που κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και έλυσαν μερικώς το πρόβλημα κατηγοριοποιήθηκαν σε ζευγάρια, όπως φαίνεται παρακάτω, και συγκρίθηκαν ανά 2 δηλαδή το 2^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό με το 2^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα. Επίσης το 3^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό με το 3^{ο}ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα

Τέλος, οι 4 μαθητές που κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και δεν έλυσαν το πρόβλημα κατηγοριοποιήθηκαν σε 2 ζευγάρια και ο αριθμός των σωστών απαντήσεων που έδωσε ο κάθε μαθητής στις τρεις πρώτες ενότητες τους κατέταξε σε 2 ζευγάρια, το 4^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό με το 4^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα

Τελικά τα οκτώ ζευγάρια κατατάσσονται ως εξής:

- 1^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό (Λ.1.1 μαθήτρια και Λ.1.2 μαθητής)
- 1^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα (Ο.1.1 μαθητής και Ο.1.2 μαθήτρια)

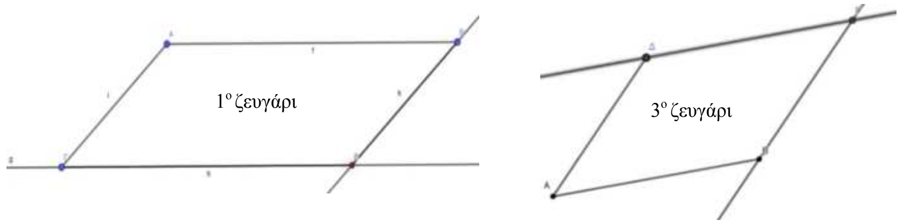
- $2^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό (Λ.2.1 μαθήτρια και Λ.2.2 μαθήτρια)
- $2^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα (Ο.2.1 μαθήτρια και Ο.2.2 μαθήτρια)
- $3^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό (Λ.3.1 μαθητής και Λ.3.2 μαθητής)
- $3^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα (Ο.3.1 μαθήτρια και Ο.3.2 μαθήτρια)
- $4^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό (Λ.4.1 μαθήτρια και Λ.4.2 μαθήτρια)
- $4^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα (Ο.4.1 μαθήτρια και Ο.4.2 μαθητής).

4.2 Ανάλυση κατασκευών του $1^{ου}$ φύλλου εργασίας

Στην $1^{η}$ δραστηριότητα του $1^{ου}$ φύλλου εργασίας τα ζευγάρια κλήθηκαν να κατασκευάσουν για το $1^{ο}$ φύλλο εργασίας τα τέσσερα γεωμετρικά σχήματα: ένα παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, ένα ρόμβο και ένα τετράγωνο με βάση ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με πλάγιο προσανατολισμό όπως αναφέρεται πιο αναλυτικά στην ενότητα 3.3 εργαλείο μέτρησης του $3^{ου}$ κεφαλαίου. Τα 4 ζευγάρια έκαναν τις κατασκευές με το λογισμικό Geogebra στον υπολογιστή, ενώ τα υπόλοιπα 4 ζευγάρια με τα γεωμετρικά όργανα στο φύλλο εργασίας.

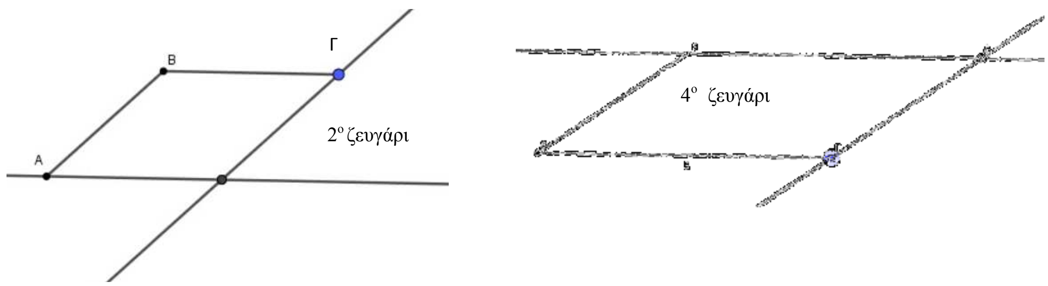
4.2.1.1 Κατασκευές παραλληλογράμμου με λογισμικό

Αρχικά, και τα 4 ζευγάρια ακολούθησαν παρόμοια στρατηγική για την κατασκευή του παραλληλογράμμου με το λογισμικό. Τα 2 ζευγάρια ($1^{ο}$ και $3^{ο}$ ζευγάρι), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 1, αλλάξανε την κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε οριζόντια, έφεραν παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από σημείο εκτός της ΑΒ. Στη συνέχεια ένωσαν το σημείο αυτό με το Α και έφεραν παράλληλη από το σημείο Β στο ευθύγραμμο τμήμα που κατασκεύασαν (ΑΓ το $1^{ο}$ ζευγάρι και ΑΔ το $2^{ο}$). Τέλος, πήραν το σημείο τομής μεταξύ των ευθειών ΓΕ και ΒΕ για το $1^{ο}$ ζευγάρι και ΔΓ και ΓΒ για το $2^{ο}$ ζευγάρι.



Σχηματικό παράδειγμα 1: Κατασκευή παραλληλογράμμου με λογισμικό από το $1^{ο}$ και $3^{ο}$ ζευγάρι.

Τα υπόλοιπα 2 ζευγάρια (2^{o} και 4^{o} ζευγάρι),όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 2, έφεραν τυχαίο διαδοχικό ευθύγραμμο τμήμα στο ΑΒ. Από το σημείο Α ή Β έφεραν παράλληλη στο διαδοχικό τμήμα του ΑΒ. Αν υποθέσουμε ότι το διαδοχικό τμήμα του ΑΒ είναι το ΒΓ για το 2^{o} ζευγάρι και το ΑΓ για το 4^{o} ζευγάρι, έφεραν παράλληλη από το σημείο Γ στο ΑΒ και πήραν το σημείο τομής μεταξύ των δύο ευθειών και, πιο συγκεκριμένα για το 2^{o} ζευγάρι, της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Γ και της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και για το 4^{o} ζευγάρι της ευθείας ΒΔ και της ευθείας ΓΔ.



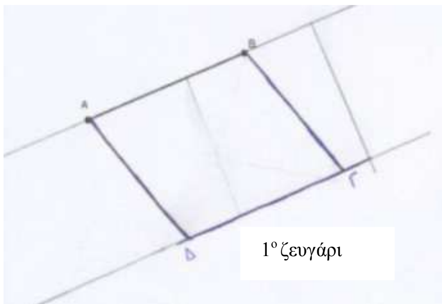
Σχηματικό παράδειγμα 2: Κατασκευή παραλληλογράμμου με λογισμικό από το 2^{o} και 4^{o} ζευγάρι.

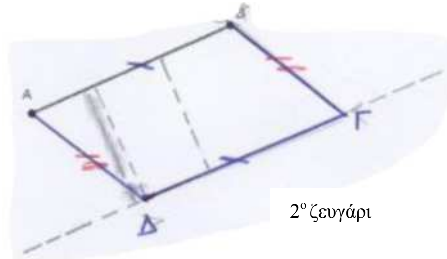
Κατά τη διάρκεια κατασκευής και τα 4 ζευγάρια αφιέρωσαν χρόνο να δοκιμάζουν εντολές του λογισμικού και να αναιρούν ώστε να εξοικειωθούν περισσότερο με τις λειτουργίες του. Στο τέλος με τη λειτουργία του συρσίματος και μετά από δοκιμές και αποτυχημένες προσπάθειες, όπως για παράδειγμα το 4^{o} ζευγάρι στις πρώτες προσπάθειες κατασκευής του παραλληλογράμμου δεν πήρε σωστά το σημείο τομής Δ μεταξύ των ευθειών ΒΔ και ΓΔ, με συνέπεια οι πλευρές του τετραπλεύρου να αποκόπτονται και να μην διατηρούνται οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου.

Έτσι, διαπίστωσαν ότι το σχήμα που κατασκεύασαν διατηρεί τις ιδιότητες κατασκευαστικά και μετά από διάφορες μετατοπίσεις παραμένει παραλληλόγραμμο. Χρησιμοποίησαν την ιδιότητα: οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, στηριζόμενοι στις παραλληλίες και εντοπίζοντας και χαράζοντας σημεία τομής.

4.2.1.2 Κατασκευές παραλληλογράμμου με γεωμετρικά όργανα

Από τα 4 ζευγάρια τα 2 ακολούθησαν παρόμοια στρατηγική για την κατασκευή του παραλληλογράμμου με τα γεωμετρικά όργανα. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 3, τα 2 ζευγάρια (1^{o} και 2^{o} ζευγάρι) έφεραν παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Πιο συγκεκριμένα, από σημεία εκτός της ευθείας ΑΒ έφεραν δύο κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους στην ευθεία ΑΒ και ένωσαν τα άκρα τους και τα προέκτειναν προς τις δύο κατευθύνσεις. Πάνω στη ευθεία που κατασκεύασαν η οποία είναι παράλληλη στην ΑΒ πήραν ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ = ΑΒ. Στη συνέχεια ένωσαν τα σημεία Δ και Α και τα σημεία Γ και Β ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. Βασίστηκαν στην ιδιότητα ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Στο τέλος μέτρησαν και τις πλευρές ΔΑ και ΒΓ και διαπίστωσαν ότι είναι ίσες.

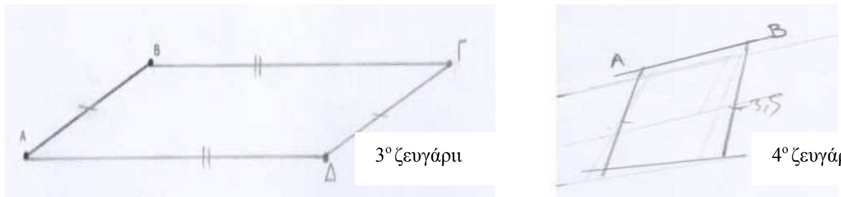




Σχηματικό παράδειγμα 3: Κατασκευή παραλληλογράμμου με γεωμετρικά όργανα από το 1ο και 2ο ζευγάρι.

Τα υπόλοιπα 2 ζευγάρια (3ο και 4ο ζευγάρι), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 4, ακολούθησαν μια παραπλήσια στρατηγική με τη διαφορά ότι στο 4ο ζευγάρι υπήρχαν περισσότερες παρανοήσεις σχετικά με τον τρόπο κατασκευής ενός παραλληλογράμμου. Πιο συγκεκριμένα, το 3ο ζευγάρι έφερε στο ΑΒ διαδοχικό τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και ίσο με 7,5cm, αφού το μέτρησε με τον χάρακα. Στη συνέχεια κατασκεύασε ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ το οποίο μέτρησε με το χάρακα να είναι μήκους 3,5cm, δηλαδή ίσου μήκους με το ΑΒ. Το ΓΔ το κατασκεύασε τυχαία να φαίνεται παράλληλο με το ΑΒ χωρίς να ορίσει σωστά κατασκευαστικά τις ιδιότητες της παραλληλίας. Στο τέλος αναφέρθηκε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, επειδή οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.

Το 4ο ζευγάρι έφερε τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα διαδοχικό του ΑΒ από τη μεριά του Β και το μέτρησε με τον χάρακα να είναι ίσο με το ΑΒ δηλαδή με 3,5cm. Από το άκρο του ευθυγράμμου τμήματος Β, το οποίο δεν ονόμασε, έφερε παράλληλη στην ΑΒ με τρόπο όχι κατασκευαστικά σωστό, δηλαδή να φαίνεται ότι είναι παράλληλη. Στη συνέχεια ένωσε το σημείο Α σε ένα σημείο της παράλληλης στην ΑΒ ώστε το τετράπλευρο να φαίνεται παραλληλόγραμμο. Όλη η κατασκευή πραγματοποιήθηκε χωρίς να ληφθούν υπόψη ιδιότητες που διέπουν κατασκευαστικά το παραλληλόγραμμο.

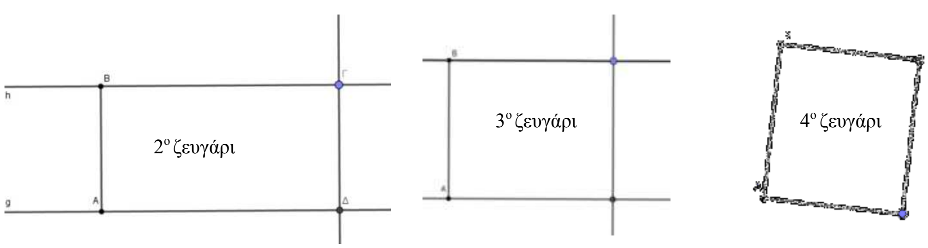


Σχηματικό παράδειγμα 4: Κατασκευή παραλληλογράμμου με γεωμετρικά όργανα από το 3^{ο} και 4^{ο} ζευγάρι.

Έτσι, από τα 4 ζευγάρια των μαθητών που ασχολήθηκαν με τα όργανα, μόνο τα 2 μπόρεσαν και κατασκεύασαν σωστά το παραλληλόγραμμο, ενώ τα υπόλοιπα 2 ζευγάρια (3^{ο} και 4^{ο} ζευγάρι) έδειξαν παρανοήσεις στην διάρκεια της κατασκευής και βασίστηκαν περισσότερο στην οπτική εικόνα του παραλληλογράμμου και όχι στις ιδιότητες που ορίζονται κατασκευαστικά.

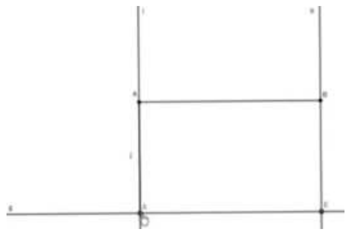
4.2.2.1 Κατασκευές ορθογωνίου με λογισμικό

Αρχικά, από τα τέσσερα ζευγάρια τα τρία ακολούθησαν παρόμοια στρατηγική για την κατασκευή του ορθογωνίου με το λογισμικό. Τα 3 ζευγάρια (2^{ο}, 3^{ο}και 4^{ο}ζευγάρι), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 5, αλλάξανε την κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε κατακόρυφη. Έφεραν κάθετες από τα σημεία Α και Β στην ΑΒ. Στη συνέχεια, έφεραν παράλληλη στην ΑΒ από ένα σημείο που ανήκει στην κάθετη από το Β στην ΑΒ και πήραν το σημείο τομής αυτής με την κάθετη από το Α στην ΑΒ. Απέκρυψαν τις ευθείες και ένωσαν τα σημεία. Με τη διαδικασία του συρσίματος διαπίστωσαν ότι το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο. Βασίστηκαν στην ιδιότητα ότι όλες οι γωνίες είναι ορθές.



Σχηματικό παράδειγμα 5: Κατασκευή ορθογωνίου με λογισμικό από το 2^{ο}, 3^{ο}και 4^{ο} ζευγάρι.

Αντίθετα, το 1^{ο} ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 6, άλλαξε τη κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε οριζόντια. Έφερε παράλληλη g στο ΑΒ από τυχαίο σημείο Γ εκτός της ΑΒ. Από τα Α και Β έφερε κάθετες στη g, τις j και h. Απέκρυψε το σημείο Γ και έφερε την τομή των ευθειών g και j, στο Δ και την τομή των ευθειών g και h, στο Ε. Ένωσε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΕ, ΕΔ και ΑΔ και απέκρυψε τις τρεις ευθείες. Με το σύρσιμο διαπίστωσε ότι το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

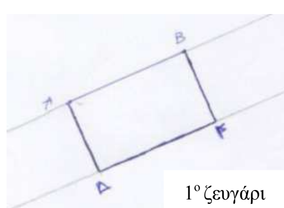


Σχηματικό παράδειγμα 6: Κατασκευή ορθογωνίου με λογισμικό από το $1^{ο}$ ζευγάρι.

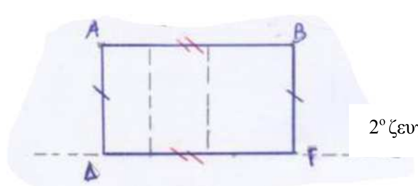
Οι παραπάνω κατασκευές ήταν αποτέλεσμα πολλών προσπαθειών στις οποίες δεν γινόταν ανάδειξη των σημείων τομής και των ιδιοτήτων και το σύρσιμο οδηγούσε στην διάλυση των σχημάτων. Μετά από τη σωστή χρήση των εντολών του λογισμικού οι μαθητές διαπίστωσαν ότι το σχήμα που κατασκεύασαν διατηρεί τις ιδιότητες κατασκευαστικά και μετά από διάφορες μετατοπίσεις παραμένει ορθογώνιο.

4.2.2.2 Κατασκευές ορθογωνίου με γεωμετρικά όργανα

Από τα 4 ζευγάρια τα 2 ακολούθησαν παρόμοια στρατηγική για την κατασκευή του ορθογωνίου με τα γεωμετρικά όργανα με τη διαφορά ότι το $2^{ο}$ ζευγάρι έκανε την κατασκευή παίρνοντας το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε οριζόντια κατεύθυνση. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 7, τα 2 ζευγάρια ($1^{ο}$ και $2^{ο}$ ζευγάρι) έφεραν δύο κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους από τα σημείο Α και Β στην ΑΒ, τα οποία ονόμασαν ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα και τα οποία μέτρησαν με τον γνώμονα. Στη συνέχεια ένωσαν τα σημεία Δ και Γ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο. Χρησιμοποίησαν την ιδιότητα ότι όλες οι γωνίες είναι ορθές.



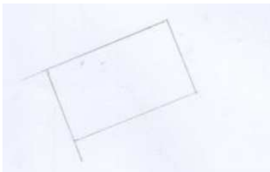
$1^{ο}$ ζευγάρι



$2^{ο}$ ζευγάρι

Σχηματικό παράδειγμα 7: Κατασκευή ορθογωνίου με γεωμετρικά όργανα από το $1^{ο}$ και $2^{ο}$ ζευγάρι.

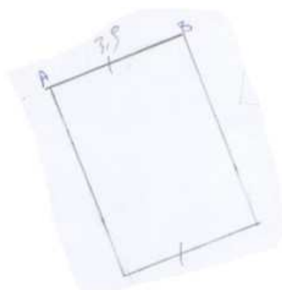
Το $3^{ο}$ ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 8, έφερε κάθετες ευθείες από τα σημεία Α και Β στην ΑΒ. Στη συνέχεια από τυχαίο σημείο της κάθετης που διέρχεται από το σημείο Α, έφερε κάθετη πάνω στην ίδια. Με αυτό τον τρόπο και προεκτείνοντας όλες τις ευθείες που κατασκεύασε συμπέρανε ότι το τετράπλευρο που προέκυψε έχει όλες τις γωνίες ορθές επομένως είναι ορθογώνιο.



.

Σχηματικό παράδειγμα 8: Κατασκευή ορθογωνίου με γεωμετρικά όργανα από το 3ο ζευγάρι

Το 4ο ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 9,έφερε κάθετα τμήματα από τα σημεία Α και Β στο ΑΒ και με το μάτι υπολόγισε να φαίνονται ίσα, αφού δεν τα μέτρησε και στη συνέχεια ένωσε τα άκρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων.



Σχηματικό παράδειγμα 9: Κατασκευή ορθογωνίου με γεωμετρικά όργανα από το 4ο ζευγάρι

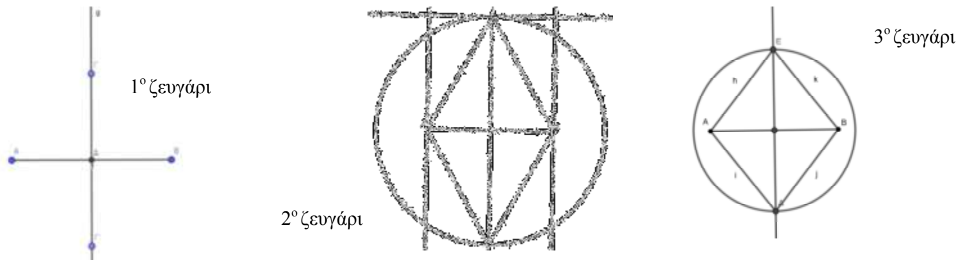
Έτσι, από τα 4 ζευγάρια των μαθητών που ασχολήθηκαν με τα όργανα, μόνο τα 3 μπόρεσαν και κατασκεύασαν το ορθογώνιο, έφεραν κάθετες από σημεία που ανήκουν σε ευθεία πάνω στην ευθεία, μέτρησαν τα ευθύγραμμα τμήματα που προέκυψαν και χρησιμοποίησαν κυρίως τον γνώμονα για να κάνουν τις μετρήσεις. Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι ή κατασκευή κάθετων ευθειών δεν δυσκόλεψε τους μαθητές σε αντίθεση με την κατασκευή παράλληλων ευθειών που, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, πολλές παράλληλες ευθείες κατασκευάστηκαν με το μάτι.

Τέλος, το ένα ζευγάρι έδειξε παρανοήσεις και βασίστηκε περισσότερο στην οπτική εικόνα του ορθογωνίου και όχι στις ιδιότητες που ορίζονται κατασκευαστικά.

4.2.3.1 Κατασκευές ρόμβου με λογισμικό

Αρχικά, και τα 4 ζευγάρια ακολούθησαν παρόμοια στρατηγική για την κατασκευή του ρόμβου με το λογισμικό. Όλα τα ζευγάρια αλλάξανε την κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε οριζόντια, φέρανε τη μεσοκάθετη στο ΑΒ (με το λογισμικό Geogebraμπορεί ο μαθητής να επιλέξει με μία μόνο εντολή ένα ευθύγραμμο τμήμα και να πάρει τη μεσοκάθετη, χωρίς να μπει στη διαδικασία να πάρει το μέσο και από το μέσο να φέρει κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος που επέλεξε) και πήραν το σημείο τομής της ΑΒ με τη μεσοκάθετο. Από το σημείο αυτό και μετά ακολούθησαν διαφορετικές στρατηγικές και, ενώ τα τρία πρώτα ζευγάρια κατασκεύασαν σωστά τον ρόμβο, το 4^{ο}ζευγάρι με τυχαίο τρόπο κατασκεύασε τετράγωνο. Πιο συγκεκριμένα και όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 10, το 1^{ο} ζευγάρι ονόμασε Δ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου g με το ΑΒ, πήρε τυχαίο σημείο Γ της g και έφερε το συμμετρικό του Γ ως προς το Δ, το Γ. Ένωσε τα σημεία ΓΑ, ΑΓ, ΓΒ και ΒΓ. Απέκρυψε τη g και το ΑΒ και το σημείο Δ και με τη λειτουργία του συρσίματος διαπίστωσε ότι είναι ρόμβος. Το 2^{ο} ζευγάρι έφερε δύο κάθετες ευθείες από τα σημεία Α και Β στο ΑΒ και στη συνέχεια έφερε παράλληλη στο ΑΒ από τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου και πήρε το σημείο τομής της παράλληλης με τη μεσοκάθετο. Έφερε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με το ΑΒ και ακτίνα το σημείο τομής της παράλληλης με τη μεσοκάθετο και πήρε το σημείο τομής του κύκλου με τη μεσοκάθετο κάτω από το ΑΒ. Ένωσε τα σημεία Α και Β με τα 2 σημεία τομής του κύκλου με τη μεσοκάθετο και απέκρυψε το ΑΒ, τη μεσοκάθετο, τον κύκλο και τις ευθείες. Με το σύρσιμο διαπίστωσε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Το 3^{ο} ζευγάρι ονόμασε Γ το μέσο του ΑΒ και από το σημείο Γ έφερε κύκλο τυχαίας ακτίνας και πήρε τα σημεία τομής του κύκλου και της μεσοκαθέτου τα οποία ονόμασαν Ε και Δ. Ένωσε τα σημεία Ε, Α, Δ και Β και διαπίστωσαν ότι το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι ρόμβος. Απέκρυψε τον κύκλο, τη μεσοκάθετο, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το σημείο Γ. Με το σύρσιμο διαπίστωσαν ότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος.



Σχηματικό παράδειγμα 10: Κατασκευή ρόμβου με λογισμικό από το 1^o, 2^oκαι 3^o ζευγάρι.

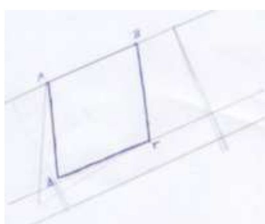
Και τα τρία ζευγάρια βασίστηκαν στην ιδιότητα ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.

Τέλος, το 4^o ζευγάρι με κέντρο το σημείο τομής του ΑΒ με τη μεσοκάθετο έφερε κύκλο με ακτίνα το σημείο τομής έως το Α, ο οποίος τέμνει τη μεσοκάθετο σε 2 σημεία, τα οποία ονόμασαν Ε και Δ. Αφού απέκρυψε τον κύκλο και τη μεσοκάθετο, ένωσε τα σημεία Α, Δ, Β και Ε. Με το σύρσιμο διαπίστωσε ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο, δηλαδή ένας ειδικός ρόμβος. Παρόλη τη λάθος κατασκευή δεν προβληματίστηκε λόγω θέσης για να ξαναπροσπαθήσει να κατασκευάσει τον ρόμβο και να ελέγξει ποια ιδιότητα πρέπει κατασκευαστικά να εφαρμόσει για να οδηγηθεί στη σωστή κατασκευή.

Κατά τη διάρκεια της κατασκευής και τα 4 ζευγάρια αφιέρωσαν χρόνο να δοκιμάζουν εντολές του λογισμικού και να αναιρούν. Πιο συγκεκριμένα, το 2^o ζευγάρι έφερε κύκλους με κέντρα τα Α και Β και ακτίνες μήκους ίσου με το μισό του ΑΒ, οι οποίοι εφάπτονταν στο σημείο τομής του ΑΒ με τη μεσοκάθετο. Αυτό διαπίστωσαν ότι δεν του βοήθησε στην κατασκευή του ρόμβου με συνέπεια να αλλάξουν στρατηγικές. Στο τέλος το σχήμα που κατασκεύασαν διατηρούσε τις ιδιότητες κατασκευαστικά και μετά από διάφορες μετατοπίσεις παρέμενε ρόμβος.

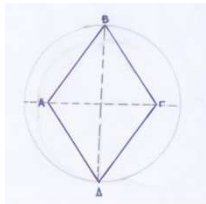
4.2.3.2 Κατασκευές ρόμβου με γεωμετρικά όργανα

Και τα 4 ζευγάρια για την κατασκευή του ρόμβου με τα γεωμετρικά όργανα ακολούθησαν διαφορετικές στρατηγικές. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 11, το 1^oζευγάρι προέκτεινε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και από τις δύο κατευθύνσεις και έφερε παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, κατασκευαστικά σωστή. Πιο συγκεκριμένα, από δύο τυχαία σημεία της ΑΒ έφερε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους, ένωσε τα σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων που ισαπέχουν από την ΑΒ και προέκτεινε το ευθύγραμμο τμήμα που προέκυψε και από τις δύο κατευθύνσεις. Στη συνέχεια παρατήρησε ότι για να είναι ρόμβος θα πρέπει το τετράπλευρο να έχει όλες τις πλευρές ίσες και ανέφερε ότι οι διαγώνιοι πρέπει να τέμνονται κάθετα το οποίο δεν χρησιμοποίησε. Έφερε τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ίσου μήκους με το ΑΒ, αφού το μέτρησε με τον χάρακα και από το σημείο Β έφερε παράλληλη στην ευθεία ΑΒ (έφερε από το σημείο Δ κάθετη στην ευθεία ΑΒ και μέτρησε την απόσταση και πήρε και $2^{ο}$ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στην ΑΒ και ένωσε τα σημεία που ισαπέχουν την ΑΒ, δηλαδή το Δ και το άλλο σημείο το οποίο δεν ονόμασε).Στη συνέχεια πήρε πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το Δ και είναι παράλληλη στην ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα ίσου μήκους με το ΑΒ το οποίο μέτρησε και το ονόμασε ΔΓ. Μέτρησε με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες ΔΑΒ και ΔΓΒ και βρήκε ότι είναι ίσες με $108^{ο}$και τις γωνίες ΑΔΓ και ΑΒΓ και βρήκε ότι είναι ίσες με $72^{ο}$. Βασίστηκε στην ιδιότητα ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και όλες οι πλευρές είναι ίσες. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο ρόμβος που κατασκευάστηκε με αυτό τον τρόπο είναι ένα σταθερό σχήμα και αν κατασκευάζονταν με τη χρήση λογισμικού δεν θα μπορούσε να αυξομειωθεί με τη λειτουργία του συρσίματος.



Σχηματικό παράδειγμα 11: Κατασκευή ρόμβου με γεωμετρικά όργανα από το $1^{ο}$ ζευγάρι.

Το $2^{ο}$ ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 12, κατασκεύασε γωνία $60^{ο}$ της οποίας κορυφή είναι το σημείο Α και πλευρά η ΑΒ και γωνία $30^{ο}$της οποίας κορυφή είναι το σημείο Β και πλευρά η ΒΑ. Κατασκεύασε το σχήμα οπτικά χωρίς να χρησιμοποιήσει σωστά τις ιδιότητες, αφού θεώρησε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι $180^{ο}$. Έτσι, το σχήμα φαίνεται ρόμβος και με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων έφερε κύκλο και διαπίστωσαν ότι διέρχεται από τις κορυφές Β και Δ. Το σχήμα κατασκευάστηκε έτσι ώστε με μετρήσεις να φαίνεται ρόμβος, αλλά ουσιαστικά δεν χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή οι ιδιότητες. Η μόνη ιδιότητα που προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν ήταν η ιδιότητα του παραλληλογράμμου ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

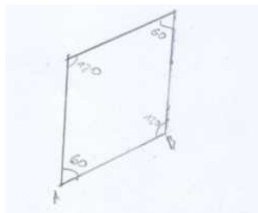


Σχηματικό παράδειγμα 12: Κατασκευή ρόμβου με γεωμετρικά όργανα από το $2^{ο}$ ζευγάρι.

Το $3^{ο}$ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 13, έφερε διαδοχικό τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ίσου μήκους με το ΑΒ, αφού το μέτρησε. Στη συνέχεια, έφερε παράλληλο στο ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ, ίσο με το ΑΒ, αφού το μέτρησε. Το παράλληλο τμήμα ΔΓ κατασκευάστηκε μόνο οπτικά, δηλαδή με το μάτι ώστε να φαίνεται παράλληλο αλλά ουσιαστικά να μην είναι και ένωσε το Γ με το Β. Βασίστηκε στην ιδιότητα ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες και οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

Σχηματικό παράδειγμα 13: Κατασκευή ρόμβου με γεωμετρικά όργανα από το $3^{ο}$ ζευγάρι.

Τέλος, το $4^{ο}$ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 14, κατασκεύασε με το μοιρογνωμόνιο γωνία $60^{ο}$της οποίας κορυφή είναι το σημείο Β και πλευρά της είναι ίση με ΑΒ την οποία μέτρησε με το χάρακα 3,5cm. Στη συνέχεια, κατασκεύασαν με το μοιρογνωμόνιο γωνία $120^{ο}$ με κορυφή Α και πλευρά ίση με 3,5cm, ίση με το ΑΒ, την οποία μέτρησε. Με την κατασκευή τεσσάρων διαδοχικών γωνιών με πλευρές 3,5cm, το τετράπλευρο που προέκυψε είχε τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες. Βασίστηκε στην ιδιότητα ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και όλες οι πλευρές είναι ίσες. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο ρόμβος που κατασκευάστηκε με αυτό τον τρόπο είναι ένα σταθερό σχήμα και αν κατασκευάζονταν με τη χρήση λογισμικού δεν θα μπορούσε να αυξομειωθεί με τη λειτουργία του συρσίματος.

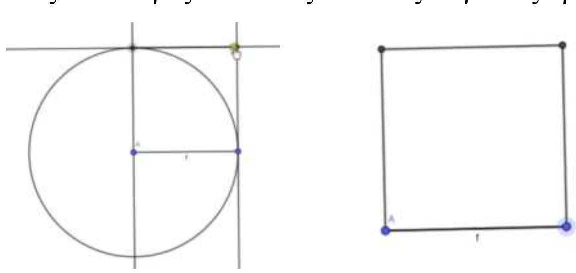


Σχηματικό παράδειγμα 14: Κατασκευή ρόμβου με γεωμετρικά όργανα από το $4^{ο}$ ζευγάρι.

Έτσι, από τα 4 ζευγάρια των μαθητών που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα μόνο τα δύο μπόρεσαν να κατασκευάσουν τον ρόμβο. Το $2^{ο}$ και το $3^{ο}$ ζευγάρι δεν έκαναν σωστά την κατασκευή κατασκευάζοντας γωνίες και φέρνοντας παράλληλες μόνο οπτικά, χωρίς να κάνουν σωστά τις μετρήσεις, όπως να μετρήσουν τις γωνίες με το μοιρογνωμόνιο ή να φέρουν κάθετα τμήματα ίσου μήκους και να ενώσουν τα σημεία. Αντίθετα, το $1^{ο}$ και το $4^{ο}$ ζευγάρι κατασκεύασαν τον ρόμβο κάνοντας χρήση της ιδιότητας ότι οι απέναντι γωνίες και όλες οι πλευρές είναι ίσες, με τη διαφορά ότι το σχήμα που προέκυψε είναι ένα σταθερό σχήμα.

4.2.4.1 Κατασκευές τετραγώνου με λογισμικό

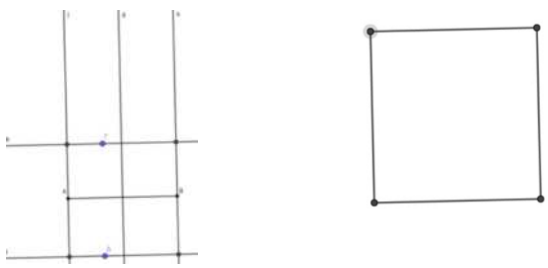
Για την κατασκευή του τετραγώνου με το λογισμικό και τα 4 ζευγάρια ακολούθησαν διαφορετικές στρατηγικές. Πιο συγκεκριμένα, το $1^{ο}$ ζευγάρι έφερε κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ και κάθετες από τα σημεία Α και Β στο ΑΒ και πήρε το σημείο τομής της καθέτου από το σημείο Α με τον κύκλο. Στη συνέχεια, έφερε κάθετη από το προαναφερόμενο σημείο τομής στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 15, και πήρε το σημείο τομής αυτής με την κάθετο από το σημείο Β στο ΑΒ. Ένωσε τα 3 σημεία και απέκρυψε τις κάθετες ευθείες και τον κύκλο. Με τη διαδικασία του συρσίματος διαπίστωσε ότι το τετράπλευρο που προέκυψε ήταν τετράγωνο. Η ιδιότητα που αναδείχθηκε είναι ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες και όλες οι γωνίες ορθές.



Σχηματικό παράδειγμα 15: Κατασκευή τετραγώνου με λογισμικό από το $1^{ο}$ ζευγάρι

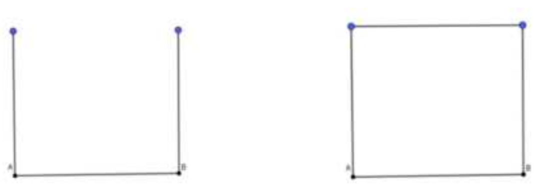
Το 2ο ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 16, άλλαξε την κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε οριζόντια και έφερε τη μεσοκάθετη g στο ΑΒ. Δεν αξιοποίησε την προγενέστερη κατασκευή που είχε κάνει για την κατασκευή του ρόμβου και έφερε δύο τυχαίες παράλληλες ευθείες στο ΑΒ εκατέρωθεν του ΑΒ, τις h και i αντίστοιχα. Στη συνέχεια, έφερε δύο κάθετες ευθείες από τα σημεία Α και Β στην ΑΒ, j και k αντίστοιχα και πήρε τις τομές των παράλληλων ευθειών h και i με τις κάθετες j και k. Απέκρυψε το ΑΒ, και όλες τις ευθείες και ένωσαν τα τέσσερα σημεία που προέκυψαν από την τομή των παράλληλων ευθειών h και i με τις κάθετες j και k.

Το τετράπλευρο που κατασκεύασαν έμοιαζε με τετράγωνο, όμως, επειδή ήταν στατικό, διότι όλα τα σημεία ήταν σταθερά, δεν μπόρεσε να ελέγξει αν έκανε σωστά την κατασκευή. Έπρεπε να παρατηρήσει ότι η αποστάσεις των 2 ευθειών h και i από το ΑΒ δεν είναι ίσες με τις αποστάσεις των j και k από τη μεσοκάθετο g. Επίσης, ότι η απόσταση της h από το ΑΒ δεν είναι ίση με την απόσταση της i από το ΑΒ.



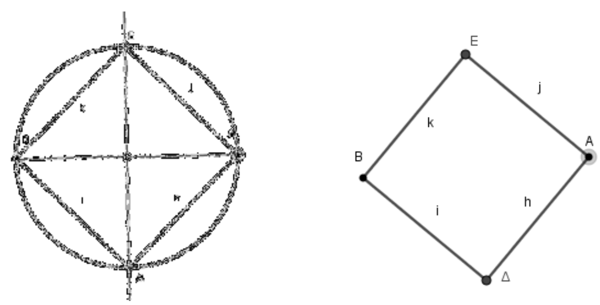
Σχηματικό παράδειγμα 16: Κατασκευή τετραγώνου με λογισμικό από το 2ο ζευγάρι

Το 3ο ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 17, άλλαξε την κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε οριζόντια και έφερε τυχαία ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ να φαίνονται κάθετα στο ΑΒ και ίσα με αυτό. Στη συνέχεια, ένωσε τα σημεία Γ και Δ χωρίς να ελέγξει αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο είτε με τη βοήθεια του συρσίματος είτε με έλεγχο των ιδιοτήτων που δεν όρισε κατά την κατασκευή και ολοκλήρωσε τη διαδικασία.



Σχηματικό παράδειγμα 17: Κατασκευή τετραγώνου με λογισμικό από το 3ο ζευγάρι

Το $4^{ο}$ ζευγάρι, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 18, άλλαξε την κατεύθυνση του ΑΒ από πλάγια σε οριζόντια και έφερε τη μεσοκάθετη g στο ΑΒ. Στη συνέχεια, πήρε το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με το ΑΒ και με κέντρο το σημείο τομής έφερε κύκλο με ακτίνα το σημείο τομής και το Α, ο οποίος τέμνει τη μεσοκάθετο σε 2 σημεία, τα οποία ονόμασε Ε και Δ. Αφού απέκρυψε τον κύκλο και τη μεσοκάθετο, ένωσε τα σημεία Α, Δ, Β και Ε. Με το σύρσιμο διαπίστωσε ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο. Η κατασκευή αυτή πραγματοποιήθηκε με τυχαίο τρόπο κατά τη φάση κατασκευής του ρόμβου. Δεν βασίστηκε σε ιδιότητες και ολοκλήρωσε χωρίς να προβληματιστεί για τον τρόπο κατασκευής και το αποτέλεσμα.

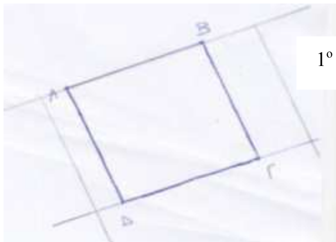


Σχηματικό παράδειγμα 18: Κατασκευή τετραγώνου με λογισμικό από το $4^{ο}$ ζευγάρι

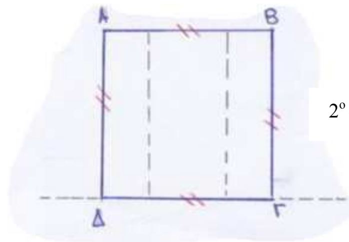
Από τα 4 ζευγάρια που ασχολήθηκαν με την κατασκευή του τετραγώνου με το λογισμικό μόνο το $1^{ο}$ ζευγάρι έκανε σωστά την κατασκευή. Το $2^{ο}$ και το $3^{ο}$ ζευγάρι ακολούθησαν λάθος διαδικασίες και δεν επέμειναν στην εφαρμογή των ιδιοτήτων του τετραγώνου κατασκευαστικά. Τέλος, το $4^{ο}$ ζευγάρι έκανε σωστά την κατασκευή με τυχαίο όμως τρόπο.

4.2.4.2 Κατασκευές τετραγώνου με γεωμετρικά όργανα

Από τα 4 ζευγάρια που κατασκεύασαν το τετράγωνο με τα γεωμετρικά όργανα τα 2 ακολούθησαν την ίδια στρατηγική. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 19, το $1^{ο}$ και το $2^{ο}$ ζευγάρι έφεραν παράλληλη στην ευθεία ΑΒ (από δύο τυχαία σημεία της ΑΒ έφεραν με το γνώμονα κάθετα τμήματα μήκους ίσου με 3,5cm, αφού τα μέτρησαν και ένωσαν τα σημεία που ισαπέχουν από την ΑΒ, ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στην ΑΒ). Από τα σημεία Α και Β έφεραν με τον γνώμονα κάθετες στην ευθεία ΑΒ και ονόμασαν Δ και Γ αντίστοιχα τα σημεία τομής των κάθετων με την παράλληλη στην ΑΒ που κατασκεύασαν προγενέστερα. Στη συνέχεια, ένωσαν τα σημεία Δ και Α και τα σημεία Γ και Β και με μετρήσεις διαπίστωσαν ότι είναι ίσα. Βασίστηκαν στην ιδιότητα ότι όλες οι γωνίες είναι ορθές και όλες οι πλευρές ίσες.



$1^{ο}$ ζευγάρι

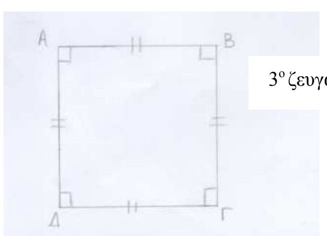


$2^{ο}$ ζευγάρι

Σχηματικό παράδειγμα 19: Κατασκευή τετραγώνου με γεωμετρικά όργανα από το $1^{ο}$και $2^{ο}$ζευγάρι.

Επίσης, το $3^{ο}$ και το $4^{ο}$ ζευγάρια ακολούθησαν τις ίδιες στρατηγικές, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 20, με τον γνώμονα έφεραν κάθετα ευθύγραμμα τμήματα από τα σημεία Α και Β στο ΑΒ και μέτρησαν να είναι ίσα με το ΑΒ, τα ονόμασαν ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα και ένωσαν τα σημεία Δ και Γ. Βασίστηκαν στην ιδιότητα ότι όλες οι πλευρές και γωνίες είναι ίσες.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι το $2^{ο}$ και το $3^{ο}$ ζευγάρι πήρε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ οριζόντιο αντί πλάγιο.



$3^{ο}$ ζευγάρι

$4^{ο}$ ζευγάρι

Σχηματικό παράδειγμα 20: Κατασκευή τετραγώνου με γεωμετρικά όργανα από το $3^{ο}$ και $4^{ο}$ ζευγάρι.

Έτσι, και τα 4 ζευγάρια των μαθητών που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα κατασκεύασαν το τετράγωνο, με τη διαφορά ότι το σχήμα με τον τρόπο που κατασκευάστηκε είναι ένα σταθερό σχήμα και αν κατασκευάζονταν με αυτό τον τρόπο με τη χρήση λογισμικού δεν θα μπορούσε να αυξομειωθεί με τη χρήση του συρσίματος. Επίσης, όλα τα ζευγάρια βασίστηκαν στην ιδιότητα ότι όλες οι πλευρές και γωνίες είναι ίσες.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό όρισαν κατασκευαστικά σωστά τις ιδιότητες στις περισσότερες κατασκευές σε σχέση με τα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου που ασχολήθηκαν με τα όργανα. Πιο συγκεκριμένα, το 1^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό και το 1^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα κατασκεύασαν σωστά όλες τις κατασκευές με τη διαφορά ότι το 1^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα κατασκεύασε τον ρόμβο και το τετράγωνο κατασκευαστικά με σωστό τρόπο, όμως το σχήμα που προέκυψε να είναι ένα σταθερό σχήμα και το οποίο, αν κατασκευάζονταν στο λογισμικό, δεν θα μπορούσε να αυξομειώνεται με τη χρήση του συρσίματος, δηλαδή έκαναν μια τυχαία αλλά συγκεκριμένη επιλογή. Το 2^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό έκανε σωστά όλες τις κατασκευές εκτός από το τετράγωνο, το οποίο προέκυψε να είναι ένα σταθερό σχήμα και να μην μπορεί να αυξομειωθεί με τη χρήση του συρσίματος, αφού ολοκλήρωσαν χωρίς να κάνουν στο τέλος χρήση των δυνατοτήτων που τους έδινε το λογισμικό. Αντίθετα, το 2^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα κατασκεύασε σωστά το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο, δεν μπόρεσε να ορίσει σωστά τις ιδιότητες στην κατασκευή του ρόμβου και κατασκεύασε το τετράγωνο ώστε το σχήμα που προέκυψε να είναι ένα σταθερό σχήμα, δηλαδή έκαναν μια τυχαία αλλά συγκεκριμένη επιλογή.

Το 3^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό κατασκεύασε σωστά όλες τις κατασκευές εκτός από το τετράγωνο το οποίο κατασκεύασε μόνο οπτικά να φαίνεται τετράγωνο, αλλά να μην είναι και χωρίς να κάνει έλεγχο με τη διαδικασία του συρσίματος και να διαπιστώσει ότι το σχήμα που φαίνεται τετράγωνο θα αλλάξει σχήμα. Επίσης, το 3^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα κατασκεύασε σωστά το ορθογώνιο, ενώ δεν όρισε σωστά τις ιδιότητες στην κατασκευή του παραλληλογράμμου και του ρόμβου και στην κατασκευή του τετραγώνου, το σχήμα που προέκυψε ήταν ένα σταθερό σχήμα.

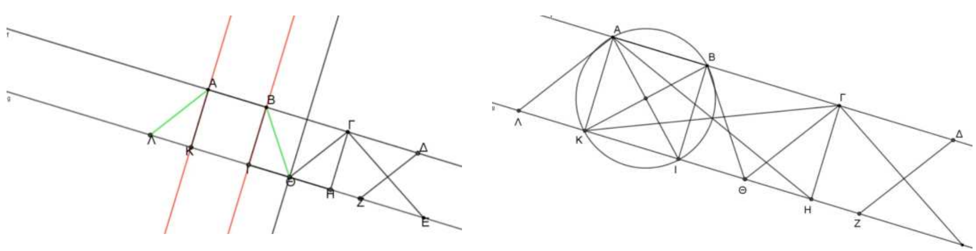
Τέλος, το 4^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό κατασκεύασε σωστά το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο, δεν μπόρεσε να κατασκευάσει τον ρόμβο και στην προσπάθεια κατασκευής του ρόμβου κατασκεύασε τυχαία τετράγωνο. Αντίθετα, το 4^{o} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα δεν μπόρεσε να κατασκευάσει σωστά το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο, ενώ κατασκεύασε τον ρόμβο και το τετράγωνο έτσι ώστε το σχήμα που προέκυψε ήταν ένα σταθερό σχήμα. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνοψίζονται στον πίνακα (βλ. σχετικό πίνακα 3, παράρτημα 2),

4.3 Αποτελέσματα για την δραστηριότητα εύρεσης τετραπλεύρων του1^{ου} φύλλου εργασίας

Στη 2^{η} δραστηριότητα του 1^{ου} φύλλου εργασίας τα ζευγάρια κλήθηκαν να αναγνωρίσουν από ένα έτοιμο σύνθετο δοθέν γεωμετρικό σχήματα είδη τετραπλεύρων, όπως τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους με γνώμονα τις ιδιότητες των τετραπλεύρων που ανακάλυψαν. Το σύνθετο δοθέν γεωμετρικό σχήμα αποτελείται από 2 παράλληλες ευθείες μεταξύ των οποίων υπάρχουν διάφορα είδη τετραπλεύρων. Τα 4 ζευγάρια χρησιμοποίησαν το λογισμικό Geogebra, ενώ τα υπόλοιπα 4 ζευγάρια χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά όργανα για να ανακαλύψουν τα είδη τετραπλεύρων.

4.3.1 Εύρεση τετραπλεύρων με τη βοήθεια λογισμικού

Έτσι, τα 3 από τα 4 ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό ακολούθησαν παραπλήσιες στρατηγικές για να ανακαλύψουν τα είδη τετραπλεύρων στο σύνθετο σχήμα το οποίο τους δόθηκε σε ηλεκτρονική μορφή και υπήρχε η δυνατότητα μετακίνησης τμημάτων του σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 21, φέρανε κάθετες, παράλληλες, μεσοκαθέτους, κύκλους, πήραν την τομή ευθυγράμμων τμημάτων, χρωμάτισαν ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα, μετακίνησαν τμήματα του σύνθετου σχήματος και γενικά χρησιμοποίησαν πολλές από τις δυνατότητες που τους έδωσε το λογισμικό για να ανακαλύψουν είδη τετραπλεύρων και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.



Σχηματικό παράδειγμα 21: Διαδικασία εύρεσης ειδών τετραπλεύρων από δοθέν σύνθετο σχήμα από ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό

Έτσι το 1^{ο} ζευγάρι βρήκε τα παρακάτω είδη τετραπλεύρων και τεκμηρίωσε βάσει ιδιοτήτων, όπως φαίνεται παρακάτω:

1. το ΑΛΘΒ ισοσκελές τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα και οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες, ΑΛ=ΒΘ και ΑΛ=ΒΘ

2. το ΒΙΗΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες (ΒΙ//ΗΓ και ΒΓ//ΙΗ) και υπάρχει μία τουλάχιστον ορθή γωνία (ΒΙ κάθετο στο ΙΗ)
3. το ΑΚΙΒ τετράγωνο, διότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσες και τέμνονται κάθετα
4. το ΑΚΗΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες (ΑΓ//ΚΗ και ΑΚ//ΓΗ) και υπάρχει μία τουλάχιστον ορθή γωνία (ΑΓ κάθετο στο ΓΗ)
5. το ΒΩΛΙ τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα (ΒΩ//ΗΓ)
6. το ΦΙΗΓ τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα (ΦΙ//ΗΓ)
7. το ΑΚΙΩ τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα(ΑΚ//ΩΙ)
8. το ΓΗΖΔ τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα (ΓΔ//ΖΗ)

Αντίστοιχα, το $2^{ο}$ ζευγάρι βρήκε τα παρακάτω είδη τετραπλεύρων και τεκμηρίωσε βάσει ιδιοτήτων, όπως φαίνεται παρακάτω:

1. το ΑΒΙΚ τετράγωνο, καθώς οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσοι και οι πλευρές είναι ίσες
2. το ΛΑΔΖ παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες
3. το ΛΑΒΘ ισοσκελές τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα (ΑΒ//ΛΘ) και κατέληξαν στο λάθος συμπέρασμα ότι οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες. Με γνώμονα αυτό το συμπέρασμα σύγκριναν τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΙΒΘ και απέδειξαν ότι, αφού οι κάθετες πλευρές ΑΛ και ΒΘ και οι υποτείνουσες είναι ίσες, άρα και οι γωνίες Λ και Θ είναι ίσες
4. το ΑΓΗΚ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες (ΑΓ//ΚΗ και ΑΚ//ΓΗ) και οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες
5. το ΛΑΓΕ τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα (ΑΓ//ΛΕ)

Τέλος, το $3^{ο}$ ζευγάρι βρήκε τα παρακάτω είδη τετραπλεύρων και τεκμηρίωσε βάσει ιδιοτήτων, όπως φαίνεται παρακάτω:

1. το ΑΒΘΛ είναι τραπέζιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες από το δοθέν σχήμα (ΑΒ//ΛΘ) και ΑΛ δεν είναι παράλληλη με τη ΒΘ, δεν έλεγξε όμως αν είναι ή όχι ίσες
2. το ΑΒΙΚ είναι τετράγωνο, καθώς οι αποστάσεις των 2 παράλληλων ΚΑ και ΒΙ είναι ίσες αφού ΑΚ και ΒΙ κάθετα στη g, άρα και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ, ΑΒ, ΒΙ, ΚΙ. Ανέφερε την ιδιότητα ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες και υπάρχει μία τουλάχιστον ορθή γωνία
3. το ΒΓΗΙ είναι ορθογώνιο, διότι Θ μέσο της ΙΗ (έφεραν τη μεσοκάθετο της ΒΓ, η οποία διέρχεται από το Θ) άρα, αφού τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΙΗ βρίσκονται στη μεσοκάθετο, άρα και ΒΓ=ΙΗ, συμπέρασμα το οποίο είναι λάθος Επίσης, ανέφερε ότι η γωνία ΒΙΘ είναι ορθή φέρνοντας κάθετη στη gκαι μετακινώντας την ταυτίζεται με την ΒΙ. Ανέφερε την ιδιότητα ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες και υπάρχει μία τουλάχιστον ορθή γωνία.

Το 4^{ο} ζευγάρι μετακίνησε μόνο τμήματα του σύνθετου σχήματος και μόνο οπτικά χωρίς να το αποδείξει βρήκε ότι:

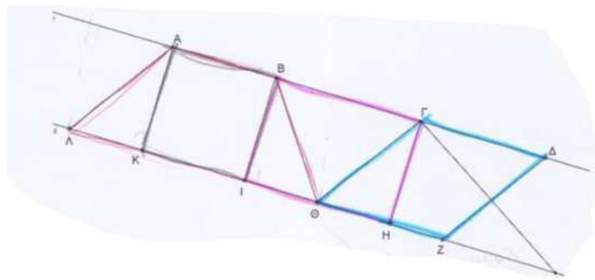
1. το ΑΚΒΙ τετράγωνο, καθώς οι διαγώνιοι διχοτομούνται και οι γωνίες είναι ίσες
2. το ΒΓΙΗ ορθογώνιο, διότι οι δύο πλευρές είναι παράλληλες (ΒΓ // ΙΗ) και ΒΙ είναι κάθετη στη ΓΗ(εδώ υπάρχει παρανόηση στις ιδιότητες)
3. το ΛΒΙΚ τραπέζιο, γιατί τα τρίγωνα ΛΑΚ και ΙΒΘ είναι ίσα (εδώ υπάρχει παρανόηση στις ιδιότητες)

4.3.2 Εύρεση τετραπλεύρων με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων

Όσον αφορά στα ζευγάρια που ασχολήθηκα με τα γεωμετρικά όργανα, και τα 4 ζευγάρια ακολούθησαν παραπλήσιες στρατηγικές. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στις παρακάτω φωτογραφίες, έκαναν μετρήσεις με τον χάρακα και τον γνώμονα και δεν χρησιμοποίησαν καθόλου το μοιρογνωμόνιο και τον διαβήτη.

Φωτογραφίες δραστηριότητας εύρεσης ειδών τετραπλεύρων από δοθέν σύνθετο σχήμα από ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα

Επίσης, το 2ο ζευγάρι χρωμάτισε τα τετράπλευρα με διάφορα χρώματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχηματικό παράδειγμα 22.



Σχηματικό παράδειγμα 22: Διαδικασία εύρεσης ειδών τετραπλεύρων από δοθέν σύνθετο σχήμα από το 2ο ζευγάρι που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα

Έτσι το 1ο ζευγάρι βρήκε τα παρακάτω είδη τετραπλεύρων:

1. το ΑΒΙΚ τετράγωνο, καθώς έχει 4 πλευρές ίσες (3εκ).Μέτρησε με τον κανόνα τις πλευρές και βρήκε ότι είναι όλες ίσες 2,9 με 3 εκατοστά, όμως δεν έλεγξε ότι είναι και κάθετες
2. το ΒΓΗΙ ορθογώνιο διότι ΒΓ = ΙΗ και ΒΙ = ΓΗ. Μέτρησε με τον κανόνα τις πλευρές ΒΓ και ΙΗ και βρήκε ότι είναι 4,2 εκατοστά και τις πλευρές ΒΙ και ΓΗ και βρήκε ότι είναι 2,9 εκατοστά, όμως δεν έλεγξε ότι είναι και κάθετες
3. το ΓΔΖΘ παραλληλόγραμμο, διότι ΓΔ//ΔΖ και ΓΘ//ΔΖ και οι 4 πλευρές είναι ίσες. Χωρίς να ελέγξει, ανέφερε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, μόνο όπως τις είδε οπτικά, φάνηκε παραλληλόγραμμο και μέτρησε με τον κανόνα όλες τις πλευρές και βρήκε ότι είναι ίσες με 3,6 εκατοστά. Δεν αντιλήφθηκαν ότι είναι ρόμβος, ενώ ανέφερε την ιδιότητα.
4. το ΑΓΗΚ ορθογώνιο διότι ΑΓ= ΚΗ και ΑΚ = ΓΗ, οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Μέτρησε με τον κανόνα τις πλευρές ΑΓ και ΚΗ και βρήκαν ότι είναι 7,1 εκατοστά και τις πλευρές ΑΚ και ΓΗ και βρήκε ότι είναι 2,9 εκατοστά. Δεν έλεγξε ότι είναι και κάθετες
5. το ΑΓΘΛ παραλληλόγραμμο, διότι ΑΓ//ΛΘ και ΑΛ//ΓΘ και οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Μέτρησε με τον κανόνα τις πλευρές ΑΓ και ΛΘ και βρήκε ότι είναι 7,1 εκατοστά και τις πλευρές ΑΛ και ΓΘ και βρήκαν ότι είναι 3,6 εκατοστά
6. το ΑΣΖΛ παραλληλόγραμμο, διότι ΑΔ//ΛΖ και ΑΛ//ΔΖ και οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Μέτρησαν με τον κανόνα τις πλευρές ΑΔ και ΛΖ και βρήκε ότι είναι 10 και κάτι εκατοστά και τις πλευρές ΑΛ και ΔΖ και βρήκε ότι είναι 3,6 εκατοστά

Το $2^{ο}$ ζευγάρι, ανακάλυψε:

1. το ΑΒΙΚ τετράγωνο, διότι ΑΒ//ΚΙ, Α γωνία ορθή, άρα και οι υπόλοιπες γωνίες ορθές, διότι σε ένα τετράπλευρο, αν μία γωνία είναι ορθή, είναι και οι υπόλοιπες. Η μία από τις μαθήτριες διατύπωσε αμφιβολίες σχετικά με την τεκμηρίωση, αλλά δεν μπορούσε να σκεφτεί ότι αυτό ισχύει, μόνο όταν το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Δεν έλεγξαν αν οι πλευρές είναι ίσες και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ορθές.
2. το ΑΒΘΛ τραπέζιο, διότι ΑΒ // ΛΘ. Δεν έλεγξαν αν είναι ίσες η ΑΛ και η ΒΘ.
3. Το ΒΓΗΙ ορθογώνιο, διότι ΒΓ//ΙΗ και ξέρουμε ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Έβγαλαν αυθαίρετο συμπέρασμα μόνο οπτικά χωρίς να ελέγξουν και δεν έλεγξαν τις γωνίες
4. Το ΓΔΖΘ παραλληλόγραμμο, διότι ΓΔ//ΘΖ, εφόσον οι ευθείες f και g είναι παράλληλες, άρα και ΓΘ//ΔΖ. Έβγαλαν αυθαίρετο συμπέρασμα μόνο οπτικά χωρίς να ελέγξουν και δεν έλεγξαν τις πλευρές αν είναι ίσες.

Αντίστοιχα το $3^{ο}$ ζευγάρι ανακάλυψε:

1. το ΑΒΙΚ τετράγωνο, διότι όλες οι πλευρές είναι ίσες με 2,9 cm και έχει τέσσερις ορθές γωνίες. Έκαναν μετρήσεις των πλευρών με κανόνα και με γνώμονα για τον έλεγχο των ορθών γωνιών.
2. Το ΒΓΗΙ ορθογώνιο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. Αυτό το συμπέρασμα το έβγαλαν από την υπόθεση αφού f//g. Μπέρδεψαν όμως το ορθογώνιο με το πλάγιο παραλληλόγραμμο, αφού δεν έλεγξαν τις γωνίες και δεν έλεγξαν την παραλληλία των πλευρών ΒΙ με ΓΗ.
3. Το ΑΓΗΚ ορθογώνιο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Αυτό το συμπέρασμα το έβγαλαν από την υπόθεση αφού f//g και μέτρησαν τις πλευρές με τον κανόνα. Μπέρδεψαν όμως το ορθογώνιο με το πλάγιο παραλληλόγραμμο, αφού δεν έλεγξαν τις γωνίες
4. Το ΓΔΖΘ ρόμβος, διότι όλες οι πλευρές είναι ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα. Έκαναν μετρήσεις με κανόνα των πλευρών, αλλά δεν έλεγξαν τις διαγώνιους ΓΖ και ΘΔ αν τέμνονται κάθετα. Έτσι, μόνο με τον έλεγχο των πλευρών διαπιστώνεται το είδος του τετραπλεύρου ότι είναι ρόμβος.
5. Το ΑΒΘΛ ισοσκελές τραπέζιο, διότι η μικρή και η μεγάλη βάση είναι παράλληλες και οι διαγώνιοι είναι ίσες. Αυτό το συμπέρασμα το έβγαλαν από την υπόθεση αφού f//g, δεν μέτρησαν όμως τις διαγώνιους ΑΘ και ΛΒ με τον κανόνα.

5. Το ΑΔΖΛ πλάγιο παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και οι διαγώνιοι είναι ίσες. Το συμπέρασμα βγήκε μόνο οπτικά χωρίς να κάνουν μετρήσεις. Εδώ υπάρχει παρανόηση μεταξύ πλάγιου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Τέλος το 4^{ο} ζευγάρι, ανακάλυψε:

1. το ΑΒΚΙ τετράγωνο, διότι έχει όλες τις πλευρές και τις γωνίες ίσες Έκαναν μετρήσεις με κανόνα και γνώμονα για τον έλεγχο των πλευρών και των ορθών γωνιών.
2. Το ΒΓΙΗ ορθογώνιο, διότι όλες οι γωνίες είναι ίσες. Έκαναν έλεγχο των ορθών γωνιών με τον γνώμονα.
3. Το ΓΔΖΗ τραπέζιο, διότι έχει 2 παράλληλες πλευρές
4. Το ΑΛΘΒ ισοσκελές τραπέζιο (δεν έκαναν μετρήσεις αλλά το αναγνώρισαν μόνο οπτικά)

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι το 1^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό ανακάλυψε 8 είδη τετραπλεύρων, 4 τραπέζια, ένα ισοσκελές τραπέζιο, 2 ορθογώνια και 1 τετράγωνο με σωστή τεκμηρίωση, ενώ το 1^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα ανακάλυψε 5 είδη τετραπλεύρων, 2 παραλληλόγραμμα με σωστή τεκμηρίωση και 2 ορθογώνια και 1 τετράγωνο με λάθος τεκμηρίωση ιδιοτήτων. Επίσης, το 2^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό ανακάλυψε 5 είδη τετραπλεύρων, ένα από κάθε είδος εκτός του ρόμβου με σωστή τεκμηρίωση, ενώ το 2^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα ανακάλυψε 1 παραλληλόγραμμο, 1 ορθογώνια και 1 τετράγωνο με λάθος τεκμηρίωση ιδιοτήτων. Το 3^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό ανακάλυψε 3 είδη τετραπλεύρων, ένα τραπέζιο, ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο με σωστή τεκμηρίωση, ενώ το 3^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα ανακάλυψε 6 είδη τετραπλεύρων, 1 τετράγωνο με σωστή τεκμηρίωση και 1 ισοσκελές τραπέζιο, 1 παραλληλόγραμμο, 2 ορθογώνια και 1 ρόμβο με λάθος τεκμηρίωση ιδιοτήτων.

Τέλος, το 4^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό ανακάλυψε 3 είδη τετραπλεύρων, 1 ορθογώνιο με σωστή τεκμηρίωση και 1 τραπέζιο και ένα τετράγωνο με λάθος τεκμηρίωση, ενώ το 4^{ο} ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα ανακάλυψε 4 είδη τετραπλεύρων, ένα τραπέζιο, ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο με σωστή τεκμηρίωση και ένα ισοσκελές τραπέζιο με λάθος τεκμηρίωση. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνοψίζονται στον πίνακα (βλ. σχετικό πίνακα. 4, παράρτημα 2). Επίσης, κάποια ζευγάρια ανακάλυψαν είδη τετραπλεύρων τα οποία δεν αντιστοιχούν στο σωστό είδος, για παράδειγμα αναφέρουν ένα τετράπλευρο ως παραλληλόγραμμο το οποίο όμως είναι ορθογώνιο. Τα εν λόγω τετράπλευρα δεν αποτυπώνεται στον 4^{ο} πίνακα του 2^{ου} παραρτήματος, ενώ αναφέρθηκαν παραπάνω στην παράγραφο που αναλύει τι ανακάλυψε το κάθε ζευγάρι ξεχωριστά. Επίσης στον πίνακα που αναφερόμαστε το πράσινο χρώμα δηλώνει ότι το είδος τετραπλεύρου είναι το σωστό καθώς και η τεκμηρίωση είναι σωστή με βάση τις ιδιότητες και το κόκκινο χρώμα δηλώνει ότι το είδος τετραπλεύρου είναι το σωστό αλλά η τεκμηρίωση είναι λάθος.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό ανακάλυψαν περισσότερα είδη τετραπλεύρων και κατά την τεκμηρίωση έδειξαν περισσότερες κατανοήσεις σε σχέση με τις ιδιότητες των τετραπλεύρων.

4.4 Ανάλυση επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων του 2^{ου} φύλλου εργασίας

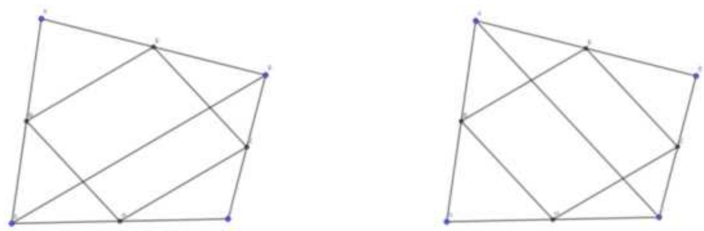
Στις δραστηριότητες του 2^{ου} φύλλου εργασίας τα ζευγάρια κλήθηκαν να επιλύσουν δύο γεωμετρικά προβλήματα για τα οποία υπήρχε μόνο η εκφώνηση και απαιτούνταν εκτός από τη λύση και η κατασκευή του σχήματος. Τα 4 ζευγάρια κατασκεύασαν τα γεωμετρικά σχήματα στον υπολογιστή χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra, ενώ τα υπόλοιπα 4 ζευγάρια με τα γεωμετρικά όργανα στο φύλλο εργασίας.

4.4.1.1 Επίλυση 1^{ου} γεωμετρικού προβλήματος με τη βοήθεια λογισμικού

Αρχικά, και τα 4 ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό κατασκεύασαν σωστά το σχήμα του 1^{ου} προβλήματος του 2^{ου} φύλλου εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, κατασκεύασαν τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και πήραν τα μέσα των ΔΓ, ΑΒ, ΑΔ και ΒΓ και τα ονόμασαν της ΑΒ με Ε, της ΒΓ με Ζ, της ΔΓ με Η και της ΑΔ με Θ.

Στη συνέχεια από τα 4 ζευγάρια μόνο τα δύο έλυσαν σωστά το πρόβλημα κάνοντας χρήση των δυνατοτήτων που δίνει το λογισμικό και χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έτσι, το 1^{ο} ζευγάρι, αφού κατασκεύασε το σχήμα, μετακίνησε το ΑΒΓΔ και έφερε τις διαγώνιους ΔΒ και ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 23, έσβησε τις διαγώνιους ΔΒ και ΑΓ και έφερε τις διαγώνιους ΕΗ και ΘΖ και το σημείο τομής τους. Αναίρεσε και έφερε την ΑΓ. Έτσι, κατέγραψε ότι στο τρίγωνο ΔΒΑ, Θ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα άρα το ΘΕ//= ΑΒ/2 (1)

Στο τρίγωνο ΓΔΒ, Ζ και Η είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, άρα το ΗΖ//= ΑΒ/2 (2). Από (1) και (2) αποδεικνύεται ότι η ΒΕ είναι παράλληλη και ίση με τη ΗΖ.

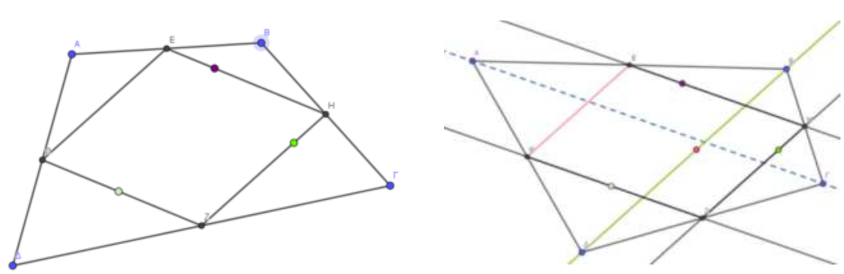


Σχηματικό παράδειγμα 23: Κατασκευή σχήματος $1^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $1^{ο}$ ζευγάρι με χρήση λογισμικού

Επομένως, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το τετράπλευρο ΘΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.

Απομονώνοντας τη διαγώνιο ΔΒ προσέγγισε καλύτερα την επίλυση του προβλήματος, διότι μπορούσε καλύτερα να αντιληφθεί το σχήμα και να χρησιμοποιήσει τα θεωρήματα του σχολικού εγχειριδίου. Επίσης, με τη διαδικασία του συρσίματος μπόρεσε να αντιληφθεί και οπτικά ότι το ΘΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Το $2^{ο}$ ζευγάρι κατασκεύασε το σχήμα που στην αρχή φαινόταν τραπέζιο και μετακινώντας το φάνηκε ότι είναι τυχαίο τετράπλευρο, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 24, έφερε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ και χρωμάτισε τη ΒΔ πράσινη και τη ΑΓ διακεκομμένη μπλε. Έφερε παράλληλη στη ΔΒ και διαπίστωσε ότι ταυτίζεται με τη ΖΗ άρα η ΖΗ είναι παράλληλη με την ΔΒ. Έφερε παράλληλη στην ΕΗ και διαπίστωσε ότι είναι παράλληλη με την ΑΓ και την ΘΖ.



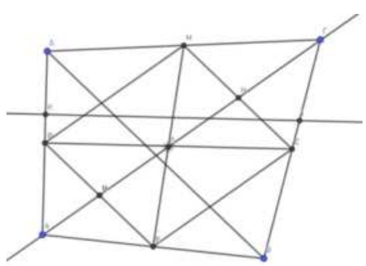
Σχηματικό παράδειγμα 24: Κατασκευή σχήματος $1^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $2^{ο}$ ζευγάρι με χρήση λογισμικού

Έτσι κατέγραψε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί φέρνοντας διαγώνιους και παράλληλες διαπίστωσε ότι:

- το ΘΕ συνδέει τα μέσα ΔΑ και ΔΒ άρα ΕΘ// ΔΒ και ΖΗ//ΔΒ επομένως και ΕΘ//ΖΗ.
- το ΕΗ συνδέει τα μέσα ΑΒ και ΒΓ άρα ΕΗ// ΑΓ και ΘΖ//ΑΓ επομένως και ΕΗ//ΘΖ

Επομένως, το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

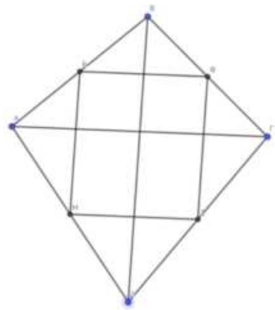
Τα υπόλοιπα 2 ζευγάρια (3^{ο} και το 4^{ο} ζευγάρι), παρόλο που χρησιμοποίησαν αρκετές από τις λειτουργίες του λογισμικού, δεν μπόρεσαν να λύσουν σωστά το πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, το 3^{ο} ζευγάρι κατασκεύασε ένα πολύπλοκο σχήμα, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 25, έφερε τις διαγώνιες ΗΕ και ΘΖ και παράλληλη στη ΘΖ και στη ΗΕ και ονόμασε Κ το σημείο τομής της παράλληλης στη ΘΖ με την ΑΔ. Έφερε παράλληλη στη ΘΗ και διαπίστωσε ότι διέρχεται από τα σημεία Α και Γ και από το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ. Ονόμασε Ι το σημείο τομής της παράλληλης στη ΘΖ με την ΓΒ. Πήρε το σημείο τομής της ΘΕ με ΑΓ και της ΗΖ με ΑΓ και τα ονόμασε Μ και Ν αντίστοιχα. Στη συνέχεια, έφερε την ευθεία ΔΘ και ονόμασε Λ το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ.



Σχηματικό παράδειγμα 25: Κατασκευή σχήματος 1^{ου} γεωμετρικού προβλήματος από το 3^{ο} ζευγάρι με χρήση λογισμικού

Στο τέλος ανέφερε ότι το τετράπλευρο ΘΗΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, διότι ΗΘ//ΜΝ και ΜΝ//ΕΖ επομένως ΗΘ//ΕΖ, ΘΖ τέμνεται κάθετα από ΗΕ και ΘΛ=ΛΖ και ΗΛ=ΛΕ. Η αναφορά ότι ΘΖ τέμνεται κάθετα από ΗΕ παραπέμπει σε ρόμβο. Εξάλλου, τα συμπεράσματα ήταν περισσότερο αυθαίρετα και κάποια βασίζονταν στην οπτική εικόνα.

Το 4^{ο} ζευγάρι έφερε τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 26.



Σχηματικό παράδειγμα 26:Κατασκευή σχήματος $1^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $4^{ο}$ ζευγάρι με χρήση λογισμικού

Ανέφερε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας, οι διαγώνιοι είναι κάθετες και διχοτομούνται και οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του και ΑΓ//ΕΘ και ΑΓ//ΗΖ. Αυτό δηλώνει λάθος αντίληψη των δεδομένων της κατασκευής και αδυναμία απόδειξης του προβλήματος.

4.4.1.2 Επίλυση $1^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων

Όσον αφορά στα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα, τα 2 ζευγάρια εφάρμοσαν τις ίδιες περίπου στρατηγικές προκείμενου να λύσουν το $1^{ο}$ πρόβλημα. Κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και πήραν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τυχαίου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κάνοντας μετρήσεις και τα ονόμασαν της ΑΒ με Ε, της ΒΓ με Ζ, της ΔΓ με Η και της ΑΔ με Θ, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 27.

Βασίστηκαν μόνο σε μετρήσεις και στο πώς φαίνεται το σχήμα, δεν χρησιμοποίησαν για την απόδειξη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και στο τέλος, στην τεκμηρίωση, δεν είχαν εξάγει ορθά συμπεράσματα.

Πιο συγκεκριμένα, το $1^{ο}$ ζευγάρι μέτρησε το ΑΒ 3,4cm, παρόλο που στην πραγματικότητα είναι 3 cm, πήρε το μέσο Ε σωστά, διότι ΑΕ=1,5cm. Το ΒΓ είναι 2,5 cm και πήρε το μέσο Ζ, έτσι ώστε ΒΖ=1,4 cm (από λάθος μέτρηση). Το ΔΓ=6,6 cm και πήρε το μέσο Η, έτσι ώστε ΔΗ=3,3 cm. Τέλος το ΔΑ είναι 3cm και πήρε το μέσο Θ, έτσι ώστε ΔΘ=1,5cm.

Στη συνέχεια μέτρησε όλες τις πλευρές του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ και διαπίστωσε ότι ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΘΕ=2,7 cm, δηλαδή ότι όλες οι πλευρές είναι ίσες. Επίσης, μέτρησε με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες ΗΘΕ και ΘΕΖ και διαπίστωσε ότι είναι αντίστοιχα 45^{o}

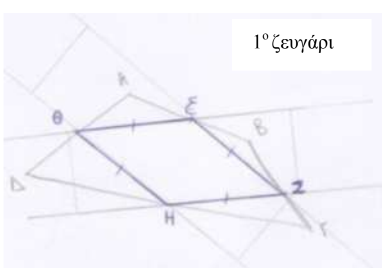
και 135^{o}. Το ίδιο έκανε και για τις γωνίες ΕΖΗ και ΖΗΘ και βρήκε ότι είναι αντίστοιχα 45ο και 135ο και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.

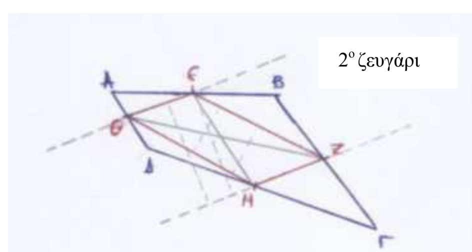
Στην συνέχεια ανέφερε ότι, για να αποδείξει ότι είναι παραλληλόγραμμο, θα πρέπει να αποδείξει ότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες,

Προέκτεινε τις ΘΕ και ΗΖ και μέτρησε τη μεταξύ τους απόσταση, παίρνοντας 2 σημεία στη ΘΕ και μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών από την ΗΖ και διαπίστωσε ότι είναι ίδια. Το ίδιο επανέλαβε προεκτείνοντας τις ΕΖ και ΘΗ και μέτρησε την μεταξύ τους απόσταση, παίρνοντας 2 σημεία στη ΕΖ και μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών από την ΘΗ και διαπίστωσε ότι είναι ίδια.

Άρα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι οι πλευρές του είναι ίσες, οι πλευρές παράλληλες και οι γωνίες παραπληρωματικές και είπε, ότι αφού είναι παραλληλόγραμμο, θα είναι και ρόμβος.

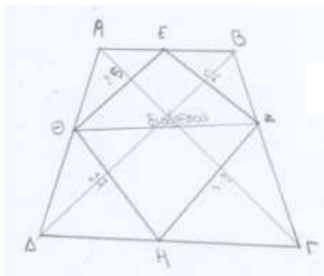
Το 2^{o} ζευγάρι προέκτεινε τις πλευρές ΕΘ και ΖΗ και πήρε τις διαγώνιους ΕΗ και ΖΘ. Στη συνέχεια, πήρε 2 τυχαία σημεία της ΕΘ και έφερε 2 κάθετα τμήματα στη ΖΗ και διαπίστωσε ότι είναι ίσα μεταξύ τους, επομένως ΕΘ//ΖΗ. Μετά μέτρησε τις πλευρές ΕΘ και ΖΗ και βρήκε ότι είναι ίσες με 1,6 cm. Προσπάθησε να συγκρίνει τρίγωνα αλλά δεν ήξερε ποια και με ποιον τρόπο. Τέλος, ανέφερε ότι τα Ε, Ζ Θ μέσα των πλευρών ΖΗ//ΕΘ, άρα και η γωνία Θ θα είναι ίση με τη Ζ και η Ε με την Η, άρα το τετράπλευρο είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο.



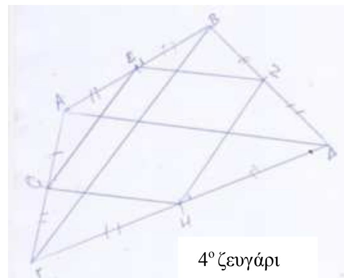


Σχηματικό παράδειγμα 27: Κατασκευή σχήματος 1^{ου} γεωμετρικού προβλήματος από το 1^{o} και 2^{o} ζευγάρι με χρήση γεωμετρικών οργάνων

Το 3^{o} και 4^{o} ζευγάρι κατασκεύασε το σχήμα ώστε να φαίνεται τραπέζιο και όχι τυχαίο τετράπλευρο και έφερε τις διαγώνιους ΑΓ και ΔΒ, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 28. Το 3^{o} ζευγάρι ανέφερε ότι στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΘΖ είναι διάμεσος, αφού ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων. Επίσης, το τμήμα που σχηματίζεται από την τομή της διαμέσου ΘΖ και τις 2 διαγώνιες ΑΓ και ΔΒ είναι παράλληλο με τις βάσεις ΑΒ και ΔΓ και ισούται με την ημιδιαφορά τους. Επιπλέον, έβγαλε αυθαίρετα συμπεράσματα, αφού δεν έφτιαξε σωστά το σχήμα από την αρχή και δεν απάντησε στο ζητούμενο του προβλήματος. Το 4ο ζευγάρι ανέφερε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο το οποίο αναγνώρισε μόνο οπτικά και χωρίς να μπορεί να το αποδείξει.



3ο ζευγάρι



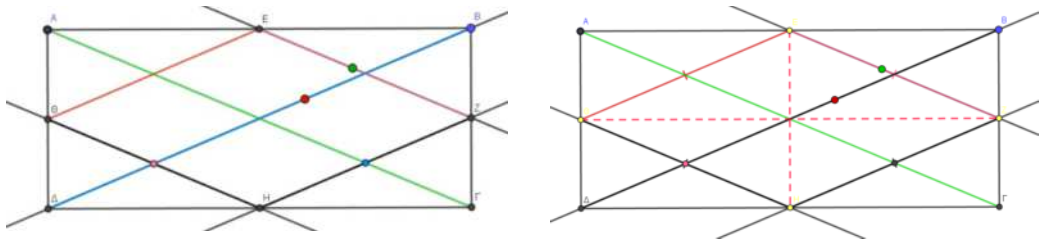
Σχηματικό παράδειγμα 28: Κατασκευή σχήματος 1ου γεωμετρικού προβλήματος από το 3ο και 4ο ζευγάρι με χρήση γεωμετρικών οργάνων

4.4.2.1 Επίλυση 2ου γεωμετρικού προβλήματος με τη βοήθεια λογισμικού

Αρχικά, και τα 4 ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό κατασκεύασαν σωστά το σχήμα του 2ου προβλήματος του 2ου φύλλου εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, κατασκεύασαν ορθογώνιο ΑΒΓΔ και πήραν τα μέσα των ΔΓ, ΑΒ, ΑΔ και ΒΓ και τα ονόμασαν της ΑΒ με Ε, της ΒΓ με Ζ, της ΔΓ με Η και της ΑΔ με Θ, εκτός από το 4ο ζευγάρι που ονόμασε το ορθογώνιο ΑΒΓΕ και δεν ονόμασε τα μέσα των πλευρών του.

Στη συνέχεια από τα 4 ζευγάρια μόνο το 2ο ζευγάρι έλυσε σωστά το πρόβλημα με μία μικρή παράλειψη, κάνοντας χρήση των δυνατοτήτων που δίνει το λογισμικό και χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έτσι το 2οζευγάρι, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 29,έφερε τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ και παράλληλη στη ΘΕ και διαπίστωσε ότι είναι παράλληλη και στη ΒΔ και ΖΗ. Επίσης, έφερε παράλληλη στη ΘΗ και διαπίστωσε ότι είναι παράλληλη και στη ΑΓ και ΕΖ. Χρωμάτισε την ΑΓ πράσινη και την ΕΖ ροζ. Χρωμάτισε την ΒΔ γαλάζια και την ΕΘ. Στη συνέχεια έφερε τις διαγώνιους ΕΗ και ΘΖ και τις χρωμάτισε κόκκινες, με διακεκομμένη γραμμή. Απέδειξε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι η ΘΖ διχοτομεί την ΕΗ. Επειδή ΑΓ//ΕΖ και ΑΓ//ΘΗ, επομένως ΕΖ//ΘΗ και, επειδή ΔΒ//ΒΕ και ΔΒ//ΘΗ, επομένως ΘΕ//ΖΗ.

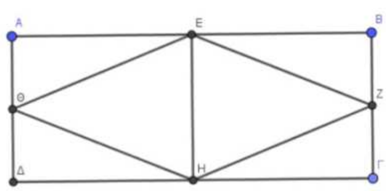
Ανέφερε ότι, επειδή από την υπόθεση το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, άρα ΕΘ=ΒΔ/2 και, επειδή ΕΘ//ΖΗ, ΖΗ=ΒΔ/2 και ΘΗ = ΑΓ/2 και, επειδή ΘΗ //ΕΖ, το ΕΖ = ΑΓ/2, επομένως ΘΕΖΗ είναι ρόμβος. Δεν ανέφερε όμως, μάλλον από παράλειψη, την ιδιότητα του ορθογωνίου ότι οι διαγώνιες είναι ίσες.



Σχηματικό παράδειγμα 29: Κατασκευή σχήματος $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $2^{ο}$ ζευγάρι με χρήση λογισμικού

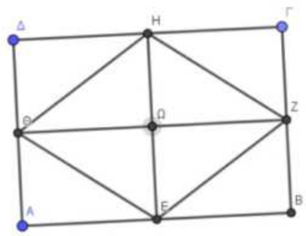
Το $1^{ο}$ ζευγάρι αναφέρθηκε στην απόδειξη του προηγούμενου προβλήματος ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. Στη συνέχεια, έφερε τη διαγώνιο ΕΗ, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 30, και σύγκρινε τα τρίγωνα ΕΘΗ και ΕΖΗ. Είπε ότι έχουν τη ΕΗ κοινή, ΕΘ=ΖΗ από τα δεδομένα και ΘΗ = ΕΖ, άρα, σύμφωνα με το $3^{ο}$ κριτήριο ισότητας τριγώνων, τα τρίγωνα είναι ίσα άρα η ΕΗ διχοτόμος των γωνιών ΘΕΖ και ΘΗΖ και επομένως το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

Εδώ δεν κατάλαβε ότι η γωνία ΘΕΗ δεν είναι ίση με την ΗΕΖ αλλά με την ΕΗΖ και δεν αξιοποίησε το δεδομένο ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



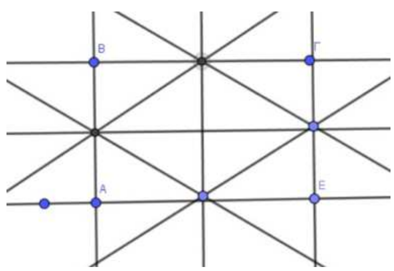
Σχηματικό παράδειγμα 30: Κατασκευή σχήματος $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $1^{ο}$ ζευγάρι με χρήση λογισμικού

Το $3^{ο}$ ζευγάρι έφερε τις διαγώνιους ΗΕ και ΘΖ και ονόμασαν Ω το σημείο τομής τους, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 31, και ανέφερε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι ΘΖ=ΕΗ, ΗΘ//=ΖΕ και ΗΖ//=ΘΕ. Εδώ φαίνεται ότι υπάρχει παρανόηση σχετικά με μία ιδιότητα του ρόμβου. Πιο συγκεκριμένα οι διαγώνιοι στο ρόμβο δεν είναι ίσες και φυσικά υπάρχει και αδυναμία απόδειξης ότι ΘΖ=ΗΕ. Επίσης, δεν έκανε χρήση της υπόθεσης ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και βασίστηκε στην προηγούμενη απόδειξη ότι το ΘΗΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχηματικό παράδειγμα 31: Κατασκευή σχήματος 2^{ου} γεωμετρικού προβλήματος από το 3^{ο} ζευγάρι με χρήση λογισμικού

Τέλος, το 4^{ο} ζευγάρι, όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 32, έφερε τις μεσοκαθέτους των πλευρών ΑΓ και ΑΒ και πήρε τα σημεία τομής αυτών με τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ και στις πλευρές ΓΕ και ΕΑ πήρε μόνο σημεία. Ανέφερε ότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος, γιατί έχει όλες τις πλευρές ίσες ΑΒ//ΓΕ, οι διαγώνιοι του είναι άξονες συμμετρίας και οι διαγώνιοι είναι διχοτόμοι των γωνιών του. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει λάθος αντίληψη των δεδομένων της κατασκευής και αδυναμία απόδειξης του προβλήματος.



Σχηματικό παράδειγμα 32: Κατασκευή σχήματος 2^{ου} γεωμετρικού προβλήματος από το 4^{ο} ζευγάρι με χρήση λογισμικού

4.4.2.2 Επίλυση 2^{ου} γεωμετρικού προβλήματος με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων

Όσον αφορά στα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα, και τα 4 ζευγάρια εφάρμοσαν τις ίδιες περίπου στρατηγικές προκείμενου να λύσουν το 2^{ο} πρόβλημα. Κατασκεύασαν σωστά το σχήμα και πήραν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ, τυχαίου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κάνοντας μετρήσεις και τα ονόμασαν της ΑΒ με Ε, της ΒΓ με Ζ, της ΔΓ με Η και της ΑΔ με Θ, όπως φαίνεται στο σχηματικό

παράδειγμα 33. Βασίστηκαν μόνο σε μετρήσεις και στο πώς φαίνεται το σχήμα, δεν χρησιμοποίησαν για την απόδειξη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και στο τέλος στην τεκμηρίωση δεν είχαν εξάγει ορθά συμπεράσματα.
Πιο συγκεκριμένα, το $1^{ο}$ ζευγάρι προέκτεινε τις ΘΕ και ΗΖ και μέτρησε τη μεταξύ τους απόσταση, παίρνοντας 2 σημεία στη ΘΕ και μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών από την ΗΖ και διαπίστωσε ότι είναι ίσα. Το ίδιο επανέλαβε προεκτείνοντας τις ΕΖ και ΘΗ και μέτρησε την μεταξύ τους απόσταση, παίρνοντας 2 σημεία στη ΕΖ και μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών από την ΘΗ και διαπίστωσε το ίδιο. Ανέφερε ότι, αφού οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Στη συνέχεια, μέτρησε όλες τις πλευρές του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ και διαπίστωσε ότι ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΘΕ=3,3cm ενώ πραγματικά είναι 3 cm, δηλαδή όλες οι πλευρές είναι ίσες. Είπε ότι αυτή τη φορά θα ελέγξει και αν οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του. Πράγματι, με τον γνώμονα έλεγξε τις διαγώνιους ΕΗ και ΘΖ και διαπίστωσε ότι τέμνονται κάθετα.

Άρα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι οι πλευρές του είναι ίσες, οι πλευρές παράλληλες και οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.

1. Το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, διότι:
- Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες
- Όλες οι πλευρές είναι ίσες
2. Το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι:
- Οι διαγώνιοι διχοτομούνται
- Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα

Δεν χρησιμοποίησε για την απόδειξη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά βασίστηκε μόνο σε μετρήσεις και στο πώς φαίνεται το σχήμα. Επίσης, φαίνεται να υπάρχει παρανόηση σχετικά με τις εγκλειστικές ιδιότητες παραλληλογράμμου και ρόμβου.

Το $2^{ο}$ ζευγάρι αποτύπωσε όλα τα δεδομένα του προβλήματος δηλαδή, ΑΒ//ΔΗ, ΑΒ=ΔΓ, ΑΔ//ΒΓ, ΑΔ=ΒΓ και όλες οι γωνίες ορθές.

Ένωσε τα Ε, Θ, Η και Ζ και τις πλευρές χρωμάτισε κόκκινες. Στη συνέχεια έφερε τις διαγώνιους ΘΖ και ΕΖ και με τον γνώμονα διαπίστωσε ότι τέμνονται κάθετα.

Σύγκρινε τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΕΒΖ, ΖΓΗ και ΘΔΗ και είπε ότι είναι ίσα χωρίς να χρησιμοποιήσει κριτήρια ισότητας παρά μόνο οπτικά και κατέληξε ότι όλες οι πλευρές του ΘΕΖΗ είναι ίσες.

Συμπέρανε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι έχει όλες τις πλευρές ίσες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα. Επίσης, ανέφερε ότι, αφού δεν έχει ορθές γωνίες, δεν είναι τετράγωνο αλλά ρόμβος.

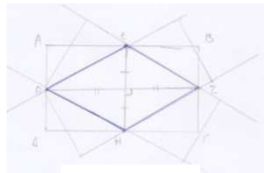
Αυθαίρετα και μόνο οπτικά διαπίστωσε ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούντα και δεν χρησιμοποίησε για την απόδειξη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά βασίστηκε μόνο σε μετρήσεις και το μόνο που χρησιμοποίησε ήταν η σύγκριση τριγώνων, χωρίς όμως να γίνει αυτή με τη χρήση κριτηρίων.

Το 3^o ζευγάρι ένωσε τα Ε, Θ, Η και Ζ και έφερε τις διαγώνιους ΘΖ και ΖΗ του ΘΕΖΗ. Συμπέρανε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι έχει όλες τις πλευρές ίσες, οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Επίσης, ανέφερε ότι είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του.

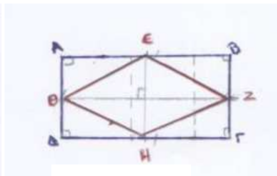
Έκανε μετρήσεις και διαπίστωσε με τη βοήθεια του κανόνα ότι ΘΕ=ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ. Επίσης, πήρε τις αποστάσεις μεταξύ ΘΕ και ΗΖ και διαπίστωσε ότι είναι ίσες άρα ΘΕ//ΗΖ. Τέλος, με τη βοήθεια του γνώμονα έλεγξε τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διαγωνίων ΘΖ και ΗΕ και διαπίστωσε ότι είναι ορθή.

Αυθαίρετα και μόνο οπτικά ανέφερε ότι οι διαγώνιες του ΕΖΗΘ διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του και δεν χρησιμοποίησε για την απόδειξη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά βασίστηκε μόνο σε μετρήσεις.

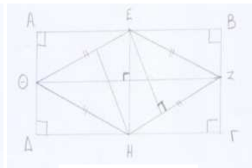
Τέλος, το 4^o ζευγάρι μέτρησε με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες του τετραπλεύρου ΘΕΖΗ και βρήκε ότι ΘΕΖ=ΘΗΖ=120^o και ΕΘΗ=ΕΖΗ=60^o.Συμπέρανε ότι το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος, διότι έχει τις απέναντι γωνίες ίσες. Εδώ φαίνεται ότι υπάρχουν πολλές παρανοήσεις σχετικά με τις ιδιότητες των τετραπλεύρων και επίσης δεν χρησιμοποίησε για την απόδειξη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά βασίστηκε μόνο σε μετρήσεις και στο πώς φαίνεται το σχήμα, αφού στο τέλος στην τεκμηρίωση δεν έχει εξάγει ορθά συμπεράσματα.



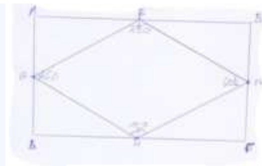
$1^{ο}$ ζευγάρι



$2^{ο}$ ζευγάρι



$3^{ο}$ ζευγάρι



$4^{ο}$ ζευγάρι

Σχηματικό παράδειγμα 33: Κατασκευή σχήματος $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος από το $1^{ο}$, $2^{ο}$, $3^{ο}$ και $4^{ο}$ ζευγάρι με χρήση γεωμετρικών οργάνων

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι το $1^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε το λογισμικό έλυσε σωστά το $1^{ο}$ γεωμετρικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ έδειξε αδυναμία στην επίλυση του $2^{ου}$ γεωμετρικού προβλήματος. Επίσης, το $1^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα δεν μπόρεσε να λύσει κανένα από τα 2 προβλήματα. Το $2^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό έλυσε σωστά και τα δύο γεωμετρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ αντίθετα το $2^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα δεν μπόρεσε να λύσει κανένα από τα 2 προβλήματα. Όλα τα υπόλοιπα ζευγάρια έδειξαν αδυναμία στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα προσπάθησαν να λύσουν τα προβλήματα, κάνοντας μετρήσεις με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και ψηλαφώντας το σχήμα και δεν προσανατολίστηκαν στο να χρησιμοποιήσουν θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας τα οποία είχανε διδαχθεί. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνοψίζονται στον πίνακα (βλ. σχετικό πίνακα 5, παράρτημα 2).

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό έλυσαν πιο αποτελεσματικά τα γεωμετρικά προβλήματα του $2^{ου}$ φύλλου εργασίας σε σχέση με τα ζευγάρια του ίδιου επιπέδου που ασχολήθηκαν με τα όργανα. Επίσης, όλα τα ζευγάρια κατασκεύασαν σωστά τα σχήματα που απαιτούσαν τα δύο γεωμετρικά προβλήματα.

4.5 Αποτελέσματα από το ερωτηματολόγιο μετά τις δραστηριότητες

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του τεστ αξιολόγησης, τα ζευγάρια που δούλεψαν με λογισμικό και τα ζευγάρια που δούλεψαν με όργανα, απάντησαν σε κάθε μία από τις οκτώ ιδιότητες γωνιών και πλευρών, καθώς και σε κάθε μία από τις 4 διαγώνιες ιδιότητες. Η επεξεργασία των απαντήσεων αναλύεται διεξοδικά στην ενότητα 3.3

“εργαλεία μέτρησης” και για κάθε ιδιότητα αναλύονται οι απαντήσεις των οκτώ ζευγαριών ως εξής:

- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.1 Δύο πλευρές είναι παράλληλες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 2 είδη τετραπλεύρων (τραπέζιο και ισοσκελές τραπέζιο), από την 1η ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ μόνο το ένα ζευγάρι απάντησε μερικώς. Από την 2η ομάδα τα δύο ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ τα άλλα δύο απάντησαν μερικώς.
- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.2 Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 4 είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος και τετράγωνο) και οι 2 ομάδες απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.3 Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 3 είδη τετραπλεύρων (ισοσκελές τραπέζιο, ορθογώνιο και τετράγωνο), από την 1η ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ μόνο το ένα ζευγάρι απάντησε λάθος. Από την 2η ομάδα το ένα ζευγάρι έδωσε σωστή απάντηση, τα δύο έδωσαν ημιτελή απάντηση με δύο σωστά, ενώ το ένα απάντησε λάθος.
- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.4 Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 4 είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο), από την 1η ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ μόνο το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση με 3 σωστά. Από την 2η ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ μόνο το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση με 1 σωστό.
- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.5 Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 4 είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο), από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση. Από την 2η ομάδα τα δύο ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ τα υπόλοιπα δύο έδωσαν ημιτελή απάντηση με 2 σωστά.
- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.6 Όλες οι γωνίες είναι ορθές) η οποία αντιστοιχίζεται σε 2 είδη τετραπλεύρων (ορθογώνιο και τετράγωνο) και οι 2 ομάδες απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.7 Όλες οι πλευρές είναι ίσες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 2 είδη τετραπλεύρων (ρόμβο και τετράγωνο) και οι 2 ομάδες απάντησαν σωστά.

- σχετικά με την ιδιότητα (Ι.Π.Γ.8 Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 1 είδος τετραπλεύρου (ισοσκελές τραπέζιο), από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση. Από την $2^η$ ομάδα τα 3 ζευγάρια απάντησαν σωστά και το 1 ζευγάρι έδωσε λάθος απάντηση.
- σχετικά με την ιδιότητα (Δ.Ι.1 Οι διαγώνιοί διχοτομούνται) η οποία αντιστοιχίζεται σε 4 είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβο και τετράγωνο), από την $1^η$ ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση με ένα σωστό. Από την $2^η$ ομάδα όλα τα ζευγάρια απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την ιδιότητα (Δ.Ι.2 Οι διαγώνιοί είναι ίσες) η οποία αντιστοιχίζεται σε 3 είδη τετραπλεύρων (ισοσκελές τραπέζιο, ορθογώνιο και τετράγωνο), από την $1^η$ ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ το ένα ζευγάρια έδωσαν ημιτελή απάντηση με ένα 2 σωστά. Από την $2^η$ ομάδα το ένα ζευγάρι έδωσε σωστή απάντηση, το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση με ένα 2 σωστά, ενώ τα δύο ζευγάρια έδωσαν ημιτελή απάντηση με ένα 1 σωστό.
- σχετικά με την ιδιότητα (Δ.Ι.3 Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα) η οποία αντιστοιχίζεται σε 2 είδη τετραπλεύρων (ρόμβο και τετράγωνο), από την $1^η$ ομάδα τα δύο ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση και το άλλο ζευγάρι έδωσε λάθος απάντηση. Από την $2^η$ ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση.
- τέλος, σχετικά με την ιδιότητα (Δ.Ι.4 Οι διαγώνιοί διχοτομούν τις γωνίες του) η οποία αντιστοιχίζεται σε 2 είδη τετραπλεύρων (ρόμβο και τετράγωνο), από την $1^η$ ομάδα τα τρία ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, το ένα ζευγάρι έδωσε ημιτελή απάντηση. Από την $2^η$ ομάδα το ένα ζευγάρι έδωσε σωστή απάντηση, τα δύο ζευγάρια έδωσαν ημιτελή απάντηση, ενώ το ένα ζευγάρι έδωσε λάθος απάντηση.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνοψίζονται στον πίνακα (βλ. σχετικό πίνακα. 6, παράρτημα 2). Επίσης, στον πίνακα που ακολουθεί ο οποίος είναι ένας συγκεντρωτικός πίνακας, αποτυπώνονται οι σωστές και οι ημιτελείς απαντήσεις στις ιδιότητες αντιστοίχισης του τεστ αξιολόγησης που έδωσαν συνολικά τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό και τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα. Οι λάθος απαντήσεις δεν αναφέρονται, όμως είναι προφανείς και οι ιδιότητες έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις κατηγορίες, ιδιότητες πλευρών, γωνιών και διαγώνιες ιδιότητες.

Συγκεντρωτικός πίνακας με σωστές απαντήσεις στις ιδιότητες αντιστοίχησης

		με λογισμικό	με όργανα
Ιδιότητες πλευρών	Ι.Π.Γ.1 Δύο πλευρές είναι παράλληλες	3 (1)*	2 (2)*
	Ι.Π.Γ.2 Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες	4	4
	Ι.Π.Γ.5 Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες	4	2 (2)*
	Ι.Π.Γ.7 Όλες οι πλευρές είναι ίσες	4	3
	Ι.Π.Γ.8 Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες	4	3 (1)*
Ιδιότητες γωνιών	Ι.Π.Γ.3 Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες	3	1 (2)*
	Ι.Π.Γ.4 Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες	3 (1)*	3 (1)*
	Ι.Π.Γ.6 Όλες οι γωνίες είναι ορθές	4	4
Διαγώνιες ιδιότητες	Δ.Ι.1 Οι διαγώνιοι διχοτομούνται	3 (1)*	4
	Δ.Ι.2 Οι διαγώνιοι είναι ίσες	3 (1)*	1 (3)*
	Δ.Ι.3 Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα	2 (1)*	3 (1)*
	Δ.Ι.4 Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του	3 (1)*	1 (2)*

* Ημιτελής απάντηση

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι:

- σχετικά με τις ιδιότητες πλευρών, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό είχανε μία μόνο ημιτελή απάντηση, ενώ τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα είχανε πέντε ημιτελείς απαντήσεις και μία λάθος απάντηση.
- σχετικά με τις ιδιότητες γωνιών, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό είχανε μία μόνο ημιτελή και μία λάθος απάντηση, ενώ τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα είχανε τρεις ημιτελείς και μία λάθος απάντηση.
- τέλος, σχετικά με τις διαγώνιες ιδιότητες, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό είχανε τέσσερις ημιτελείς και μία λάθος απάντηση, ενώ τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα είχανε έξι ημιτελείς και μία λάθος απάντηση.

Επίσης, στον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα αναλύονται οι σωστές απαντήσεις που έδωσαν σε κάθε μία από τις επτά προτάσεις σωστού λάθους, οι οποίες αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων, τα ζευγάρια που δούλεψαν με λογισμικό και τα ζευγάρια που δούλεψαν με όργανα.

Συγκεντρωτικός πίνακας με σωστές απαντήσεις στις προτάσεις τύπου σωστού λάθους

		με λογισμικό	με όργανα
Σχέσεις	Σ_1 Το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο;	4	2
	Σ_2 Το ορθογώνιο είναι ρόμβος;	4	3
	Σ_3 Το παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο;	4	2
	Σ_4 Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο;	4	1
	Σ_5 Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο;	4	3
	Σ_6 Το τετράγωνο είναι ρόμβος;	1	3
	Σ_7 Το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο;	1	1

Πιο συγκεκριμένα:

- σχετικά με την πρόταση (το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο) η οποία είναι σωστή, από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ από την 2η ομάδα μόνο τα δύο ζευγάρια απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την πρόταση (το ορθογώνιο είναι ρόμβος), η οποία είναι λάθος, από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ από την 2η ομάδα τα 3 ζευγάρια απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την πρόταση (το παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο;) η οποία είναι λάθος, από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ από την 2η ομάδα μόνο τα δύο ζευγάρια απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την πρόταση (το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο) η οποία είναι σωστή, από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ από την 2η ομάδα μόνο το ένα ζευγάρι απάντησε σωστά.
- σχετικά με την πρόταση (ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο) η οποία είναι σωστή, από την 1η ομάδα όλα τα ζευγάρια έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ από την 2η ομάδα τα τρία ζευγάρια απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την πρόταση (το τετράγωνο είναι ρόμβος) η οποία είναι σωστή, από την 1η ομάδα μόνο το ένα ζευγάρι απάντησε σωστά, ενώ από την 2η ομάδα τα τρία ζευγάρια απάντησαν σωστά.
- σχετικά με την πρόταση (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο) η οποία είναι λάθος, από την 1η ομάδα μόνο το ένα ζευγάρι απάντησε σωστά, ενώ από την 2η ομάδα μόνο το ένα ζευγάρι απάντησε σωστά.

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό έδειξαν πολύ περισσότερες κατανοήσεις στις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων.

Τέλος, πραγματοποιήθηκε σύγκριση μεταξύ των ζευγαριών που βρίσκονται στο ίδιο περίπου γνωστικό και αντιληπτικό επίπεδο σχετικά με τις κατανοήσεις που είχαν στις ιδιότητες και στις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Σύμφωνα με το σχετικό πίνακα (βλ. σχετικό πίνακα 8, παράρτημα 2), το κάθε ζευγάρι ξεχωριστά απάντησε σε κάθε μία από τις οκτώ ιδιότητες γωνιών και πλευρών καθώς και σε κάθε μία από τις 4 διαγώνιες ιδιότητες. Τα 4 ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό κωδικοποιούνται με αύξουσα σειρά ως Λ.1, Λ.2, Λ.3 και Λ.4, ενώ τα 4 ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα κωδικοποιούνται με αύξουσα σειρά ως Ο.1, Ο.2, Ο.3 και Ο.4

Ξεκινώντας από το $1^{ο}$ ζευγάρι (Λ.1) που ασχολήθηκε με το λογισμικό και το $1^{ο}$ ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα όργανα (Ο.1) μπορούμε να πούμε ότι απάντησαν σωστά στις περισσότερες αντιστοιχίσεις όμως το $1^{ο}$ ζευγάρι (Λ.1) έκανε μόνο 2 λάθη (στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.1 και Ι.Π.Γ.7 έδωσε ημιτελή απάντηση), ενώ το $1^{ο}$ ζευγάρι (Ο.1), έκανε 4 λάθη (στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.1, Ι.Π.Γ.3 και Ι.Π.Γ.5 έδωσε ημιτελή απάντηση και στην ιδιότητα Ι.Π.Γ.8 έδωσε λάθος απάντηση).

Το $2^{ο}$ ζευγάρι (Λ.2) και το $2^{ο}$ ζευγάρι (Ο.2), απάντησαν σωστά σε όλες τις ερωτήσεις αντιστοίχισης και το $3^{ο}$ ζευγάρι (Λ.3), έκανε μόνο 3 λάθη (στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.4, Ι.Π.Γ.7 και Δ.Ι.3 έδωσε ημιτελή απάντηση), ενώ το $3^{ο}$ ζευγάρι (Ο.3) έκανε 4 λάθη (στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.3, Δ.Ι.2, Δ.Ι.3 και Δ.Ι.4 έδωσε ημιτελή απάντηση).

Τέλος, το $4^{ο}$ ζευγάρι (Λ.4) έκανε 5 λάθη (στις ιδιότητες Δ.Ι.1, Δ.Ι.2 και Δ.Ι.4 έδωσε ημιτελή απάντηση και στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.3 και Δ.Ι.3έδωσε λάθος απάντηση), ενώ το $4^{ο}$ ζευγάρι (Ο.4) έκανε 7 λάθη (στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.1, Ι.Π.Γ.4, Ι.Π.Γ.5,Δ.Ι.2 και Δ.Ι.3 έδωσε ημιτελή απάντηση και στις ιδιότητες Ι.Π.Γ.3 και Δ.Ι.4 έδωσε λάθος απάντηση).

Για να υπάρχει για πιο σφαιρική εικόνα σχετικά με την κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων ανά ζευγάρι μαθητών, ο πίνακας που ακολουθεί είναι ένας συγκεντρωτικός πίνακας, στον οποίο αποτυπώνονται οι σωστές και οι ημιτελείς απαντήσεις στις ιδιότητες αντιστοίχισης του ερωτηματολογίου, που έδωσε το κάθε ζευγάρι ξεχωριστά που ασχολήθηκε με το λογισμικό και το κάθε ζευγάρι ξεχωριστά που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα. Οι ιδιότητες έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις κατηγορίες: ιδιότητες πλευρών, γωνιών και διαγώνιες ιδιότητες.

Συγκεντρωτικός πίνακας με σωστές απαντήσεις στις ιδιότητες αντιστοίχισης ανά ζευγάρι

		Λ.1	Ο.1	Λ.2	Ο.2	Λ.3	Ο.3	Λ.4	Ο.4
Ιδιότητες πλευρών	Ι.Π.Γ.1 Δύο πλευρές είναι παράλληλες	Η	Η	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Η
	Ι.Π.Γ.2 Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
	Ι.Π.Γ.5 Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες	Σ	Η	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Η
	Ι.Π.Γ.7 Όλες οι πλευρές είναι ίσες	Σ	Σ	Σ	Σ	Η	Σ	Σ	Σ
	Ι.Π.Γ.8 Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
Ιδιότητες γωνιών	Ι.Π.Γ.3 Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες	Σ	Η	Σ	Σ	Σ	Η	Λ	Λ
	Ι.Π.Γ.4 Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες	Σ	Σ	Σ	Σ	Η	Σ	Σ	Η
	Ι.Π.Γ.6 Όλες οι γωνίες είναι ορθές	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
Διαγώνιες ιδιότητες	Δ.Ι.1 Οι διαγώνιοι διχοτομούνται	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Η	Σ
	Δ.Ι.2 Οι διαγώνιοι είναι ίσες	Σ	Η	Σ	Σ	Σ	Η	Η	Η
	Δ.Ι.3 Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα	Σ	Σ	Σ	Σ	Η	Η	Λ	Η
	Δ.Ι.4 Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του	Σ	Η	Σ	Σ	Σ	Η	Η	Λ

Σ:σωστή απάντηση – Η: ημιτελής απάντηση – Λ:λάθος απάντηση

Έτσι, μπορούμε να πούμε, όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, ότι κατά τη σύγκριση των ζευγαριών μεταξύ τους προέκυψαν τα παρακάτω ευρήματα:

- το Λ.1 ζευγάρι είχε μία ημιτελή απάντηση στις ιδιότητες πλευρών, ενώ το Ο.1 ζευγάρι είχε 5 ημιτελείς απαντήσεις (από τις οποίες οι δύο αφορούσαν ιδιότητες πλευρών, η μία ιδιότητες γωνιών και οι δύο διαγώνιες ιδιότητες) και μία λάθος απάντηση στις ιδιότητες πλευρών.
- τα Λ.2 και το Ο.2 ζευγάρια απάντησαν σωστά σε όλες τις ιδιότητες αντιστοίχισης.
- το Λ.3 ζευγάρι είχε τρεις ημιτελείς απαντήσεις, μία στις ιδιότητες πλευρών, μία στις ιδιότητες γωνιών και μία στις διαγώνιες ιδιότητες. Αντίθετα, το Ο.3 ζευγάρι είχε 4 ημιτελείς απαντήσεις από τις οποίες η μία αφορούσε ιδιότητες γωνιών, οι τρεις διαγώνιες ιδιότητες.
- τέλος το Λ.4 ζευγάρι είχε τρεις ημιτελείς απαντήσεις στις διαγώνιες ιδιότητες και μία λάθος απάντηση στις ιδιότητες γωνιών. Αντίθετα, το Ο.4 ζευγάρι είχε 5

ημιτελείς απαντήσεις (από τις οποίες οι δύο αφορούσαν ιδιότητες πλευρών, η μία ιδιότητες γωνιών, οι δύο διαγώνιες ιδιότητες) και δύο λάθος απαντήσεις από τις οποίες η μία αφορούσε ιδιότητες γωνιών και η άλλη διαγώνιες ιδιότητες.

Τέλος, στον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα αναλύονται οι σωστές απαντήσεις και οι λάθος απαντήσεις που έδωσε σε κάθε μία από τις επτά προτάσεις σωστού λάθους, οι οποίες αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων, το κάθε ζευγάρι που δούλεψε με το λογισμικό και κάθε ζευγάρι που δούλεψε με τα όργανα.

Συγκεντρωτικός πίνακας στις προτάσεις τύπου σωστού λάθους, ανά ζευγάρι

		Λ.1	**Ο.1**	**Λ.2**	**Ο.2**	**Λ.3**	**Ο.3**	**Λ.4**	**Ο.4**
Σχέσεις	Σ_1 Το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο;	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ
	Σ_2 Το ορθογώνιο είναι ρόμβος;	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ
	Σ_3 Το παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο;	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ
	Σ_4 Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο;	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ
	Σ_5 Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο;	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ
	Σ_6 Το τετράγωνο είναι ρόμβος;	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ
	Σ_7 Το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο;	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ

Σ: σωστή απάντηση – Λ: λάθος απάντηση

Πιο αναλυτικά:

- το $1^{ο}$ ζευγάρι (Λ.1) που ασχολήθηκε με το λογισμικό απάντησε σωστά σε όλες τις προτάσεις, ενώ το $1^{ο}$ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα όργανα (Ο.1) έκανε λάθος στην πρόταση Σ_3 (το παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο).
- Το $2^{ο}$ ζευγάρι (Λ.2) που ασχολήθηκε με το λογισμικό έκανε λάθος σε δύο προτάσεις τη Σ_6 (ο τετράγωνο είναι ρόμβος) και τη Σ_7 (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο), ενώ το $2^{ο}$ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα όργανα (Ο.2) έκανε λάθος σε 3 προτάσεις τη Σ_4 (το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο;), τη Σ_5 (ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο) και τη Σ_7 (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο).
- Το $3^{ο}$ ζευγάρι (Λ.1) που ασχολήθηκε με το λογισμικό έκανε λάθος σε δύο προτάσεις: τη Σ_6 (ο τετράγωνο είναι ρόμβος) και τη Σ_7 (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο), ενώ το $3^{ο}$ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα όργανα (Ο.3) έκανε λάθος σε 4 προτάσεις: τη Σ_1 (το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο), τη Σ_3 (το

παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο), τηΣ_4 (το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο;) και τη Σ_7 (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο).

- Τέλος, το 4ο ζευγάρι (Λ.4) που ασχολήθηκε με το λογισμικό έκανε λάθος σε 2 προτάσεις: τη Σ_6 (ο τετράγωνο είναι ρόμβος) και τη Σ_7 (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο), ενώ το 4ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα όργανα (Ο.4) έκανε λάθος σε 5 προτάσεις: τη Σ_1 (το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο), τη Σ_2 (το ορθογώνιο είναι ρόμβος), τη Σ_4 (το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο), Σ_6 (ο τετράγωνο είναι ρόμβος) και τη Σ_7 (το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο).

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι, κατά τη σύγκριση μεταξύ των ζευγαριών τα οποία κατατάχτηκαν στο ίδιο γνωστικό και αντιληπτικό επίπεδο, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό έδειξαν πολύ περισσότερες κατανοήσεις στις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων σε σχέση με τα αντίστοιχα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της έρευνας, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο 4ο κεφάλαιο, θα αναλυθεί το κάθε φύλλο εργασίας ξεχωριστά και θα γίνει σύνδεσή του με τη βιβλιογραφία.

Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων του 1ου φύλλου εργασίας, το οποίο συνδέεται με το 1ο ερευνητικό ερώτημα, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό μπόρεσαν και κατασκεύασαν σωστά τα περισσότερα είδη τετραπλεύρων ορίζοντας κατασκευαστικά τις ιδιότητες στις περισσότερες κατασκευές και βοηθήθηκαν πολύ από τις δυνατότητες που δίνει το ίδιο το λογισμικό. Κατά τη διάρκεια της 2ης δραστηριότητας, ανακάλυψαν περισσότερα είδη τετραπλεύρων και τεκμηρίωσαν καλύτερα σε σχέση με τις ιδιότητες τα ευρήματα αυτά. Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει και με τη βιβλιογραφία (Hölzl, 1996), διότι με τη χρήση του λογισμικού οι κατασκευές είναι δυναμικές, αφού μια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να μετακινηθεί, να συρρικνωθεί, να μεγεθυνθεί ή να μεταβληθεί με άλλους τρόπους διατηρώντας ανέπαφες όλες τις μαθηματικές ιδιότητες. Ο μαθητής κατά την κατασκευή του σχήματος με το λογισμικό μπορεί να εισάγει περιορισμούς δύσκολα προσπελάσιμους και η χάραξη ενός σχήματος πρακτικά μετατρέπεται σε μια πραγματική μαθηματική διαδικασία. Επομένως, υπάρχει η δυνατότητα να διερευνηθούν πολλές από τις πιθανές μορφές που μπορεί να λάβει το σχήμα κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

Αυτό διευκολύνει τη διάκριση των ιδιοτήτων, οι οποίες ορισμένες φορές είναι αληθείς από τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς (Morris, 2002).

Σύμφωνα με τους Healy και Hoyles (2002), τα εργαλεία που παρέχονται από τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας (DGS) βοηθούν τους μαθητές στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και πιο συγκεκριμένα, η οπτική έξοδος του εργαλείου δυναμικής γεωμετρίας δεν είναι ένα σχέδιο μιας εμφάνισης γεωμετρίας, αλλά μπορεί να μετακινηθεί ή να τραβηχτεί - γύρω από την οθόνη με τις κατασκευασμένες ιδιότητές της να διατηρούνται. Έτσι, το σύστημα προσφέρει ανατροφοδότηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακρίνει διαγράμματα που σχεδιάζονται με το λογισμικό από διαγράμματα που προκύπτουν από τη χρήση γεωμετρικών παραδοσιακών εργαλείων

Αντίθετα, τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα ολοκλήρωσαν σωστά λιγότερες κατασκευές και κατέληξαν και στην κατασκευή σταθερών σχημάτων κυρίως στην περίπτωση κατασκευής τετραγώνου. Ενώ η κατασκευή του τετραγώνου φαίνεται πολύ εύκολη, με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων, το σχήμα που κατασκευάστηκε είναι συγκεκριμένο (καθορισμένων διαστάσεων) και αν υπήρχε η δυνατότητα δεν θα μπορούσε να αυξομειωθεί. Κατά τη διάρκεια της 2^{ης} δραστηριότητας, ανακάλυψαν λιγότερα είδη τετραπλεύρων και είχαν ελλείψεις στην τεκμηρίωση σε σχέση με τις ιδιότητες των τετραπλεύρων που ανακάλυψαν. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Τζεκάκη, 1991), το μέσο πάνω στο οποίο πραγματοποιείται η χάραξη είναι το φύλλο σχεδίασης. Τα αποτελέσματα της χάραξης είναι επίσης ένα σύνολο από γραμμές συνήθως συνεχείς που καθορίζονται από τη θέση και τον προσανατολισμό τους μέσα στο χώρο του χαρτιού και είναι στατικά αντικείμενα. Έτσι, δεν υπάρχει η δυνατότητα μετακίνησης του σχήματος ώστε να αντιληφθεί ο μαθητής αν το σχήμα που κατασκεύασε είναι όντως, για παράδειγμα, ένα παραλληλόγραμμο και όχι ένα σχήμα που φαίνεται παραλληλόγραμμο αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.

Σχετικά με το 2^{ο} φύλλο εργασίας το οποίο συνδέεται με το 2^{ο} ερευνητικό ερώτημα, τα δύο πρώτα ζευγάρια που έλυσαν σωστά τα πρόβλημα (το 1^{ο} ζευγάρι έλυσε το 1^{ο} γεωμετρικό πρόβλημα και το 2^{ο} ζευγάρι έλυσε τα δύο γεωμετρικά προβλήματα)και βρήκαν τις περισσότερες ιδιότητες του διαγνωστικού τεστ, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο van Hiele. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν τις σχέσεις υποκατηγοριών μεταξύ διαφορετικών τύπων τετραπλεύρων και επίσης έχουν κατακτήσει τη λειτουργική κατανόηση του Duval, η οποία εξασφαλίζει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος.

Στο ίδιο επίπεδο βρίσκονται και το 1ο και 2ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με τα γεωμετρικά όργανα, παρόλα αυτά δεν μπόρεσαν να λύσουν κανένα από τα 2 γεωμετρικά προβλήματα του 2ου φύλλου εργασίας, διότι δεν είχαν την επιπλέον βοήθεια που ήταν η χρήση του λογισμικού. Σύμφωνα με έρευνες (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2005), τα λογισμικά, μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο, διότι οι μαθητές βοηθιούνται στο να κατανοήσουν τα προβλήματα και να εξερευνούν τις πιθανές απαντήσεις σε ένα πρόβλημα με σημαντικό εργαλείο το σύρσιμο. Επίσης, αποτελούν μέσο διαμεσολάβησης ενθαρρύνοντας τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην επίλυση προβλημάτων θέτοντας τις διαδικασίες μοντελοποίησης, εικασίας, πειραματισμού και γενίκευσης.

Σύμφωνα με έρευνες (Suwito, Yuwono, Parta, Irawati, & Oktavianingtyas, 2016), που σχετίζονται με το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης 3 van Hiele έχουν καλή ικανότητα να λύσουν προβλήματα αλγεβρικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τις δεξιότητες σκέψης αφαίρεσης. Σύμφωνα με τους Yerushalmy και Chazan (1990), οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το λογισμικό έγιναν πιο ευέλικτοι στη χρήση διαγραμμάτων και ήταν σε θέση να ξεπεράσουν τα τρία εμπόδια και να δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους. Έτσι, το 1ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό και έλυσε το 1ο πρόβλημα του 1ου φύλλου εργασίας μπόρεσε και ξεπέρασε το 2οεμπόδιο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να απομονώσουν μια περιοχή του διαγράμματος, διότι εξ ορισμού μία περιοχή είναι μια συλλογή σημείων και μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της επικάλυψης της σε πολλά διαγράμματα ή ως μεταβολή σε ένα μόνο διάγραμμα. Πιο συγκεκριμένα, απομόνωσε τις διαγώνιους ΒΔ και ΑΓ όπως φαίνεται στο σχηματικό παράδειγμα 23, προσέγγισε καλύτερα την επίλυση του προβλήματος, διότι μπορούσε καλύτερα να αντιληφθεί το σχήμα και να χρησιμοποιήσει τα θεωρήματα του σχολικού εγχειριδίου. Τέλος, ορισμένες από τις στρατηγικές που ακολούθησε το 2ο ζευγάρι που ασχολήθηκε με το λογισμικό, όπως το να φέρει παράλληλες, να χρωματίσει ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα, να μετακινήσει το σχήμα, βοήθησαν στην κατανόηση περιοχών του σχήματος που τους δυσκόλευαν και στην καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος. Αντίθετα, το 1ο και το 2ο ζευγάρι που ασχολήθηκαν με τα γεωμετρικά όργανα, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης Van Hiele 3 με αυτό των δύο πρώτων ζευγαριών που ασχολήθηκαν με το λογισμικό, προσπάθησαν να λύσουν τα προβλήματα κάνοντας μετρήσεις με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και ψηλαφώντας το σχήμα και δεν προσανατολίστηκαν στο να χρησιμοποιήσουν θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας τα οποία είχανε διδαχθεί. Έτσι, αυτό επιβεβαιώνεται και από τη βιβλιογραφία (Morris, 2002), διότι είναι πολύ δύσκολο να διακρίνουμε αυτό που είναι πολλές φορές αληθές από αυτό που είναι πάντα αληθές, χωρίς να γίνουν περισσότερες κατασκευές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα μελέτη, στη βάση των ποιοτικών δεδομένων που συνέλεξε, κατέληξε σε αρκετά συμπεράσματα. Τα ζευγάρια που χρησιμοποίησαν το Geogebra προσέγγισαν με μεγαλύτερη κατανόηση τις ιδιότητες κάθε τύπου τετραπλεύρου, αλλά και τις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων. Τα ευρήματα της έρευνας συνάδουν με ερευνητικές μελέτες (Han, 2007) στο γεγονός πως η χρήση του λογισμικού ενθάρρυνε τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ευέλικτη σκέψη στην εκμάθηση των ιδιοτήτων των σχημάτων και των σχέσεων μεταξύ τους.

Η διαφορά των μαθητών που εργάστηκαν με το λογισμικό σε σχέση με τους μαθητές που εργάστηκαν με τα όργανα είναι ότι διαπίστωσαν ότι δεν μπορούν να ερευνήσουν και να αναδείξουν τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων με τη διαδικασία της οπτικής αντίληψης. Έτσι, καθώς προσπάθησαν να κάνουν την κατασκευή (1η δραστηριότητα του 1ου φύλλου εργασίας) ή να βρουν είδη τετραπλεύρων και να τεκμηριώσουν το πώς τα βρήκαν (2η δραστηριότητα του 1ου φύλλου εργασίας) με το λογισμικό, ανακάλυψαν ιδιότητες και σχέσεις.

Επίσης, τα ζευγάρια που δούλεψαν με το λογισμικό για την επίλυση των δύο γεωμετρικών προβλημάτων (1η και 2η δραστηριότητα του 2ου φύλλου εργασίας) μπόρεσαν να προσεγγίσουν τη λύση του προβλήματος, ακολουθώντας διάφορες δυνατότητες που τους δίνει το λογισμικό, όπως το σύρσιμο (dragging), η απομόνωση κάποιων περιοχών του γεωμετρικού σχήματος, ο χρωματισμός ευθειών και ευθυγράμμων τμημάτων κ.α. Τα ζευγάρια που χρησιμοποίησαν τα όργανα επικεντρώθηκαν μόνο στις μετρήσεις και δεν βοηθήθηκαν από το στατικό σχήμα της κατασκευής με συνέπεια να καταλήξουν σε λάθος συμπεράσματα. Τέλος, όλες οι ιδιότητες και σχέσεις που αναδείχθηκαν στο $1^{ο}$ φύλλο εργασίας χρησιμοποιήθηκαν για τις αποδείξεις στις δραστηριότητες του $2^{ου}$ φύλλου εργασίας.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι για την επίλυση προβλήματος σημαντικό ρόλο έπαιξε και το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης 3 van Hiele έχουν καλή ικανότητα να λύσουν προβλήματα αλγεβρικής γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τις δεξιότητες σκέψης αφαίρεσης (Suwito, Yuwono, Parta, Irawati, & Oktavianingtyas, 2016). Παράλληλα, όσοι μαθητές έχουν κατακτήσει τη λειτουργική κατανόηση του Duval έχουν εξασφαλίσει πρόσβαση στην επίλυση του προβλήματος.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με το λογισμικό απέκτησαν κατά πολύ περισσότερες κατανοήσεις στις ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων και έλυσαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τα γεωμετρικά προβλήματα σε σχέση με τα ζευγάρια που ασχολήθηκαν με τα όργανα.

Από την παρούσα έρευνα διαφαίνεται πως η εφαρμογή εναλλακτικών μεθόδων διδασκαλίας και η χρήση καινοτόμων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων (π.χ. χρήση λογισμικών) σε αντιδιαστολή με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας (π.χ. χρήση παραδοσιακών εργαλείων) είναι δυνατό να συμβάλει στη βελτίωση της κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές. Η παρούσα έρευνα αποτελεί μία πιλοτική εφαρμογή η οποία υλοποιήθηκε για μικρό χρονικό διάστημα σε περιορισμένο αριθμό μαθητών. Συνεπώς, τα συμπεράσματα αυτής δεν είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε γενικεύσεις σχετικά με τη θετική ή όχι συμβολή της χρήσης των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, στην καλύτερη κατανόηση του συνόλου της διδακτέας ύλης στο μάθημα της γεωμετρίας. Ωστόσο τα αποτελέσματά της θα μπορούσαν να επιβεβαιωθούν σε μελλοντικές έρευνες, οι οποίες θα χρησιμοποιούσαν αφενός μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και αφετέρου θα μπορούσαν να επεκταθούν και σε άλλες ενότητες της διδακτέας ύλης των σχολικών εγχειριδίων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α΄ αλλά και στη Β΄ Λυκείου, όπως για παράδειγμα στο $11^{ο}$ κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Λυκείου με τίτλο "Μέτρηση κύκλου". Με τον τρόπο αυτό ενδεχομένως ακόμα και οι πιο αδύναμοι μαθητές θα ήταν πιθανό να αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερο ενδιαφέρον το μάθημα της γεωμετρίας, συμμετέχοντας πιο ενεργά σε δραστηριότητες που απαιτούν τη χρήση λογισμικών, διευρύνοντας παράλληλα το γνωστικό τους επίπεδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ιστότοποι

Geogebra, επίσημη ιστοσελίδα, https://www.geogebra.org/

Σχολικά Εγχειρίδια

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ. και Σιδέρης Π. (2016). *Ευκλείδεια Γεωμετρία,* τεύχος Α', Αθήνα, Διόφαντος.

Ελληνικές βιβλιογραφικές αναφορές

Σδρόλιας, Κ. Α. (2004). *Η οικοδόμηση των γεωμετρικών εννοιών κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο.* Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Τζεκάκη, Μ. (1991). *Γεωμετρικές δραστηριότητες στο Γυμνάσιο: τι συμβόλαιο υπογράφουμε;* Ανακοίνωση στο 8^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Μ.Ε. Θεσσαλονίκη.

Τζεκακη, Μ. (1992). *Αξιοποίηση του Η/Υ σε θέματα Γεωμετρίας.* Στο Μ. Μεϊμάρης & Φ, Καλαβάσης (εκδ.), Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών (σσ. 115 - 128), Αθήνα, Προτάσεις.

Τζεκάκη, Μ. (2001). *Η Γεωμετρική Κατασκευή στη διδασκαλία της Γεωμετρίας*. Στο Β. Παπαντωνίου & Δ. Πόταρη (επιμ.), Πρακτικά Πανελλήνιου Συνεδρίου Γεωμετρίας, Πάτρα, 1999, Εκδόσεις Πατάκη.

Ξένες βιβλιογραφικές αναφορές

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *31*(1), 20-30. https://doi.org/10.1093/teamat/hrr027

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Branchini, E., Burro, R., Bianchi, I., & Savardi, U. (2015). Contraries as an effective strategy in geometrical problem solving. *Thinking & Reasoning*, *21*(4), 397-430. https://doi.org/10.1080/13546783.2014.994035

Günhan, B. C. (2014). An Investigation of Pre-Service Elementary School Teachers' Knowledge Concerning Quadrilaterals. *Çukurova University. Faculty of Education Journal*, *43*(2), 137-154.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast*, *2*(2), 125-143. Retrieved from http://scholarworks.umt.edu/tme/vol2/iss2/6/

Clements, D. H. (1998). Geometric and Spatial Thinking in Young Children. (ERIC Document Reproduction Service No. ED436232)

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (1998, July). To teach definitions in geometry or teach to define? In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 2-248).

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*(pp. 37-51)).

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 25(1), 3–26.

Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2006). “If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle...” Young students experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(3), 271-299. https://doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners’ understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3–20. https://doi.org/10.1080/14794800008520167

Fujita, T. (2012). Learners’ level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 60-72. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003

Gawlick, T. (2005). Connecting arguments to actions - Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *ZDM. International Journal on Mathematics Education*, *37*(5), 361-370. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0024-2

Han, H. (2007). *Middle school students' quadrilateral learning: A comparison study* (pp. 1-188). University of Minnesota.

Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 235-256. https://doi.org/10.1023/A:1013305627916

Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, *106*(1), 5-61.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students’ understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 55-72.

Hölzl, R. (1996). How does ‘dragging’affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 169-187. https://doi.org/10.1007/BF00571077

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Brill Sense.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM. International Journal on Mathematics Education, 43*(3), 325-336. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2

Mariotti, M. A. (2002). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281. https://doi.org/10.1023/A:1013357611987

Morris, I. N. (2002). The Geometer's Sketchpad Workshop Guide. *Innovator in Mathematics Education* (pp. 3–55).

Okazaki, M., & Fujita, T. (2007, July). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41-48).

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, *19*(1), 79-92.

Pickreign, J. (2007). Rectangles and Rhombi: How Well Do Preservice Teachers Know Them?. *Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers*, *1-7*.

Polášek, V.,& Sedlacek, L. (2015). Dynamic Geometry Environments As Cognitive tool in mathematic education. *Journal of Technology and Information Education*, *7*(2), 45-55. https://doi.org/10.5507/jtie.2015.017

Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *8*, 686-693. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.095

Sánchez, E., & Sacristán, A. I. (2003). Influential Aspects of Dynamic Geometry Activities in the Construction of Proofs. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 111-118.

Suwito, A., Yuwono, I., Parta, I. N., Irawati, S., & Oktavianingtyas, E. (2016). Solving Geometric Problems by Using Algebraic Representation for Junior High School Level 3 in Van Hiele at Geometric Thinking Level. *International Education Studies*, *9*(10), 27-33. https://doi.org/10.5539/ies.v9n10p27

Türnüklü, E., Akkaş, E. N., & Alaylı, F. G. (2013, February). Mathematics teachers' perceptions of quadrilaterals and understanding the inclusion relations. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 705-714).

Türnüklü, E. B. (2014). Construction of inclusion relations of quadrilaterals: Analysis of pre-service elementary mathematics teachers' lesson plans. *Egitim ve Bilim*, *39*(173).

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, *6*, 310-316.

Yerushalmy, M. & Chazan D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 199–219. https://doi.org/10.1007/BF00305090

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ1

Διαγνωστικό τεστ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να είναι ορθές οι παρακάτω προτάσεις:

α) Οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ....

β) Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ....

γ) Σε ένα τραπέζιο οι γωνίες μεταξύ των παραλλήλων πλευρών είναι ....

δ) Οι διαδοχικές πλευρές ενός ρόμβου είναι ....

ε) Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου …………………………………

ζ) Οι πλευρές ενός τετραγώνου είναι ……………. και οι γωνίες του είναι ……………………………

η) Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι και οι μη παράλληλες πλευρές είναι ……………………......

θ) Οι διαδοχικές γωνίες ενός ρόμβου είναι ………………………………

2. Να αναφέρετε τις κοινές ιδιότητες που αφορούν τις πλευρές, γωνίες και διαγωνίους για τα παρακάτω ζεύγη σχημάτων:

α) παραλληλόγραμμο – ρόμβος

β) ορθογώνιο - τετράγωνο

γ) τετράγωνο – ρόμβος

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Κάθε ρόμβος είναι και ορθογώνιο

β) Κάθε τετράγωνο είναι και παραλληλόγραμμο

γ) Κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο

δ) Κάθε παραλληλόγραμμο είναι και ορθογώνιο

ε) Κάθε παραλληλόγραμμο είναι και τραπέζιο

4. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.*

Δραστηριότητες φύλλων εργασίας

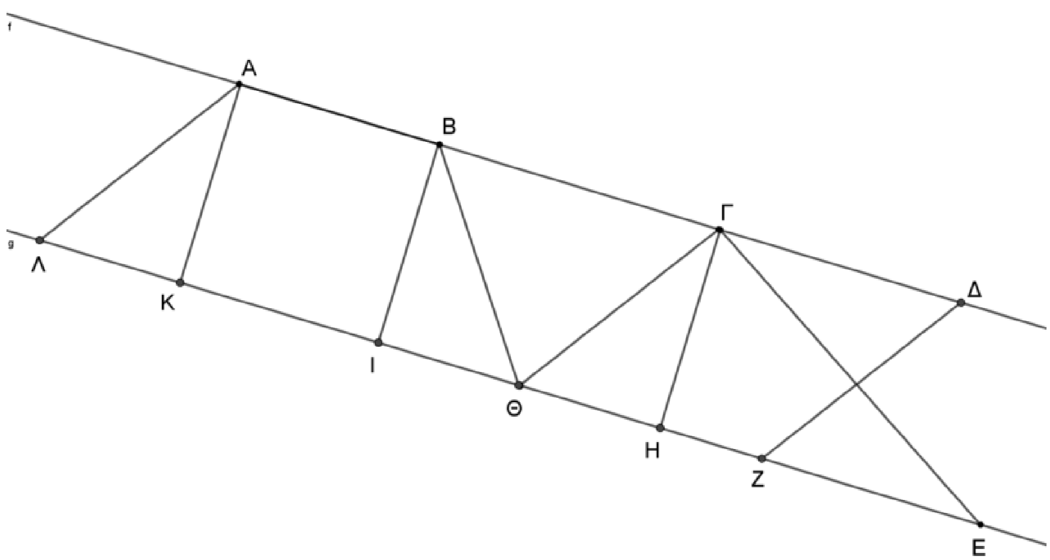
1ο φύλλο εργασίας

1η δραστηριότητα

Έχοντας ως βάση το παρακάτω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, κατασκευάστε ένα παραλληλόγραμμο, ένα ορθογώνιο, ένα ρόμβο και ένα τετράγωνο, με βάση τις ιδιότητες που γνωρίζετε.

2η δραστηριότητα

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες f και g είναι παράλληλες. Να ονομάσετε τα είδη τετράπλευρων που διακρίνετε και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας με βάση τις ιδιότητες των πλευρών και των γωνιών.



2ο φύλλο εργασίας

1ο πρόβλημα

Κατασκευάστε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Ε, Ζ, Η και Θ, είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, τι σχήμα πιστεύετε ότι είναι το ΕΖΗΘ; Μπορείτε να το αποδείξετε;

2ο πρόβλημα

Κατασκευάστε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ε, Ζ, Η και Θ, είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, τι σχήμα πιστεύετε ότι είναι το ΕΖΗΘ; Μπορείτε να το αποδείξετε;

Ερωτήσεις που αναδεικνύουν ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των τετραπλεύρων

Α. Λαμβάνοντας υπόψη τις δραστηριότητες και τα προβλήματα των 2 φύλλων εργασίας, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας την κάθε ιδιότητα σε ένα ή και περισσότερα είδη τετραπλεύρων.

Είδη τετραπλεύρων	**Τραπέζιο**	**Ισοσκελές τραπέζιο**	**Παραλληλόγραμμο**	**Ορθογώνιο**	**Ρόμβος**	**Τετράγωνο**
Ιδιότητες πλευρών και γωνιών						
Δύο πλευρές είναι παράλληλες						
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες						
Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες						
Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες						
Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες						
Όλες οι γωνίες είναι ορθές						
Όλες οι πλευρές είναι ίσες						
Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες						
Διαγώνιες ιδιότητες						
Οι διαγώνιοί διχοτομούνται						
Οι διαγώνιοί είναι ίσες						
Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα						
Οι διαγώνιοί διχοτομούν τις γωνίες του						

Β. Για τις ερωτήσεις 1 έως 7, απαντήστε εάν κάθε πρόταση είναι σωστή ή λάθος.

α/α	**Σχέσεις μεταξύ των ειδών τετραπλεύρων**	**Σωστό**	**Λάθος**
1	Το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο;		
2	Το ορθογώνιο είναι ρόμβος;		
3	Το παραλληλόγραμμο είναι τραπέζιο;		
4	Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο;		
5	Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο;		
6	Το τετράγωνο είναι ρόμβος;		
7	Το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο;		

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Πίνακας 1: Επεξεργασία διαγνωστικού τεστ με αναλυτικές απαντήσεις ανά ενότητα

	Λ.1.1	Λ.1.2	Λ.2.1	Λ.2.2	Λ.3.1	Λ.3.2	Λ.4.1	Λ.4.2	Ο.1.1	Ο.1.2	Ο.2.1	Ο.2.2	Ο.3.1	Ο.3.2	Ο.4.1	Ο.4.2
1η ενότητα - συμπλήρωση κενών																
1_α	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
1_β	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	_	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
1_γ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
1_δ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	_	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ
1_ε	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
1_ζ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	_	Σ
1_η	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	_	_	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	_
1_θ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	_	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	_
2η ενότητα - εύρεση ιδιοτήτων																
2_α	1	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	2	1	2	1	1
2_β	3	2	1	3	2	1	1	1	2	3	2	3	1	3	1	1
2_γ	2	2	3	2	1	1	1	1	2	3	1	2	3	3	1	1
3η ενότητα - σχέσεις σωστού λάθους																
3_α	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ
3_β	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ
3_γ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ
3_δ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ
3_ε	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ
3η ενότητα - επίλυση προβλήματος																
Σχήμα	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ
Λύση	Σ	Σ	Η	Η	Η	Η	Λ	Λ	Σ	Σ	Η	Η	Η	Η	Λ	Λ

Πίνακας 2: Επεξεργασία διαγνωστικού τεστ με συγκεντρωτικές απαντήσεις ανά ενότητα

	Λ.1.1	Λ.1.2	Λ.2.1	Λ.2.2	Λ.3.1	Λ.3.2	Λ.4.1	Λ.4.2	Ο.1.1	Ο.1.2	Ο.2.1	Ο.2.2	Ο.3.1	Ο.3.2	Ο.4.1	Ο.4.2
1η ενότητα	7	8	7	7	5	4	5	5	7	6	6	4	6	6	4	4
2η ενότητα	6	6	7	8	4	3	4	5	6	8	4	7	5	8	3	3
3η ενότητα	5	5	3	3	5	4	3	3	3	4	5	4	2	2	3	2
4η ενότητα	3	3	2	2	2	2	1	1	3	3	2	2	2	2	1	1

Πίνακας 3: Ανάλυση κατασκευών ανά ζευγάρι

		Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο
1ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή
	Όργανα	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα
2ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα
	Όργανα	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα
3ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες
	Όργανα	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα
4ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστή κατασκευή	Σωστή κατασκευή	Δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν	Τυχαία σωστή κατασκευή
	Όργανα	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Δεν ορίστηκαν σωστά οι ιδιότητες	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα	Σωστή κατασκευή σταθερό σχήμα

Πίνακας 4: Εύρεση ειδών τετραπλεύρων ανά ζευγάρι

		Τραπέζιο	Ισοσκελές τραπέζιο	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο	Ρόμβος	Τετράγωνο	Σύνολο
1ο ζευγάρι	Λογισμικό	4	1		2		1	8
	Όργανα			2	2		1	5
2ο ζευγάρι	Λογισμικό	1	1	1	1		1	5
	Όργανα			1	1		1	3
3ο ζευγάρι	Λογισμικό	1			1		1	3
	Όργανα		1	1	2	1	1	6
4ο ζευγάρι	Λογισμικό	1			1		1	3
	Όργανα	1	1		1		1	4

Πίνακας 5: Ανάλυση για κατασκευή σχήματος και επίλυση γεωμετρικού προβλήματος ανά ζευγάρι

		Επίλυση 1ου γεωμετρικού προβλήματος	Επίλυση 2ου γεωμετρικού προβλήματος
1ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Σωστή λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
2ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Σωστή λύση	Σωστό σχήμα - Σωστή λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
3ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
4ο ζευγάρι	Λογισμικό	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση
	Όργανα	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση	Σωστό σχήμα - Λάθος λύση

Πίνακας 6: Επεξεργασία ερωτηματολογίου για τις ιδιότητες αντιστοίχησηςανά ομάδα

	με λογισμικό	με όργανα
Ι.Π.Γ.1 Δύο πλευρές είναι παράλληλες		
Σωστή απάντηση	3	2
Ημιτελής απάντηση	1	2
Ι.Π.Γ.2 Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες		
Σωστή απάντηση	4	4
Ι.Π.Γ.3 Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες		
Σωστή απάντηση	3	1
Ημιτελής απάντηση με 2 σωστά	0	2
Λάθος απάντηση	1	1
Ι.Π.Γ.4 Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες		
Σωστή απάντηση	3	3
Ημιτελής απάντηση με 3 σωστά	1	0
Ημιτελής απάντηση με 1 σωστό	0	1
Ι.Π.Γ.5 Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες		
Σωστή απάντηση	4	2
Ημιτελής απάντηση με 2 σωστά	0	2
Ι.Π.Γ.6 Όλες οι γωνίες είναι ορθές		
Σωστή απάντηση	4	4
Ι.Π.Γ.7 Όλες οι πλευρές είναι ίσες		
Σωστή απάντηση	4	4
Ι.Π.Γ.8 Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες		

Σωστή απάντηση	4	3
Λάθος απάντηση	0	1
Δ.Ι.1 Οι διαγώνιοί διχοτομούνται		
Σωστή απάντηση	3	4
Ημιτελής απάντηση με 1 σωστό	1	0
Δ.Ι.2 Οι διαγώνιοί είναι ίσες		
Σωστή απάντηση	3	1
Ημιτελής απάντηση με 2 σωστά	1	1
Ημιτελής απάντηση με 1 σωστό	0	2
Δ.Ι.3 Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα		
Σωστή απάντηση	2	3
Ημιτελής απάντηση	1	1
Λάθος απάντηση	1	0
Δ.Ι.4 Οι διαγώνιοί διχοτομούν τις γωνίες του		
Σωστή απάντηση	3	1
Ημιτελής απάντηση	1	2
Λάθος απάντηση	0	1

Πίνακας : Επεξεργασία ερωτηματολογίου για τις ιδιότητες αντιστοίχησης ανά ζευγάρι

	Λ.1	**Ο.1**	**Λ.2**	**Ο.2**	**Λ.3**	**Ο.3**	**Λ.4**	**Ο.4**
Ι.Π.Γ.1 Δύο πλευρές είναι παράλληλες								
Σωστή απάντηση			1	1	1	1	1	
Ημιτελής απάντηση	1	1						1
Ι.Π.Γ.2 Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες								
Σωστή απάντηση	1	1	1	1	1	1	1	1
Ι.Π.Γ.3 Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες								
Σωστή απάντηση	1		1	1	1			
Ημιτελής απάντηση με 2 σωστά		1				1		
Λάθος απάντηση							1	1
Ι.Π.Γ.4 Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες								
Σωστή απάντηση	1	1	1	1		1	1	
Ημιτελής απάντηση με 3 σωστά					1			
Ημιτελής απάντηση με 1 σωστό								1
Ι.Π.Γ.5 Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες								
Σωστή απάντηση	1		1	1	1	1	1	
Ημιτελής απάντηση με 2 σωστά		1						1
Ι.Π.Γ.6 Όλες οι γωνίες είναι ορθές								
Σωστή απάντηση	1	1	1	1	1	1	1	1
Ημιτελής απάντηση								
Ι.Π.Γ.7 Όλες οι πλευρές είναι ίσες								

Σωστή απάντηση	1	1	1	1		1	1	1
Ημιτελής απάντηση					1			
Ι.Π.Γ.8 Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες								
Σωστή απάντηση	1		1	1	1	1	1	1
Λάθος απάντηση		1						
Δ.Ι.1 Οι διαγώνιοί διχοτομούνται								
Σωστή απάντηση	1	1	1	1	1	1		1
Ημιτελής απάντηση με 1 σωστό							1	
Δ.Ι.2 Οι διαγώνιοί είναι ίσες								
Σωστή απάντηση	1		1	1	1			
Ημιτελής απάντηση με 2 σωστά		1					1	
Ημιτελής απάντηση με 1 σωστό						1		1
Δ.Ι.3 Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα								
Σωστή απάντηση	1	1	1	1				
Ημιτελής απάντηση					1	1		1
Λάθος απάντηση							1	
Δ.Ι.4 Οι διαγώνιοί διχοτομούν τις γωνίες του								
Σωστή απάντηση	1		1	1	1			
Ημιτελής απάντηση		1				1	1	
Λάθος απάντηση								1