ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ*: *Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

Η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών: Μια μελέτη περίπτωσης

Του

Φωκά Δημήτριου, Α.Ε.Μ. 727

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή – Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια

Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Φλώρινα, 25/10/2019

*Όπως μετονομάστηκε η Παιδαγωγική Σχολή με τον Ν.4610/2019, ΦΕΚ70/τ.Α΄/07-5-2019

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται έρευνα με στόχο την διερεύνηση της κατανόησης της πυκνής διάταξης των ρητών αριθμών από 15 μαθητές της Β’ τάξης του λυκείου. Η δυσκολία της κατανόησης της πυκνής διάταξης των ρητών εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο των δυσκολιών που προκαλεί η παρεμβολή της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς στη μάθηση των ρητών. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό χρειάζεται εννοιολογική αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους φυσικούς και τους ρητούς αριθμούς. Η κατανόηση αναπτύσσεται σταδιακά περιοριζόμενη από την προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς και απαιτείται σημαντική αναδιοργάνωση. Στην παρούσα εργασία υιοθετήθηκε η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή, υπό το πρίσμα της οποίας εξετάστηκαν δύο πτυχές της πυκνής διάταξης των ρητών αριθμών, η απειρία μεταξύ δύο οποιονδήποτε αριθμών και η μη ύπαρξη του επόμενου στους ρητούς. Αυτές οι δύο πτυχές δυσκολεύουν τους μαθητές και υπάρχουν στοιχεία ότι η κατανόηση της μίας πτυχής δεν συνεπάγεται την άλλη, παρόλο που από μαθηματική άποψη συνδέονται άρρηκτα. Οι μαθητές συμμετείχαν σε ατομικές συνεντεύξεις. Στην πρώτη συνέντευξη έγινε προέλεγχος στον οποίο εξετάστηκε κατά πόσο οι μαθητές γνωρίζουν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ δύο ρητών αριθμών και κατά πόσο γνωρίζουν ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός οποιουδήποτε ρητού αριθμού. Οι μαθητές απάντησαν σε εννέα έργα. Οι επτά ερωτήσεις είχαν ως θέμα την απειρία μεταξύ δύο ρητών αριθμών και τα δύο έργα είχαν ως θέμα τον «επόμενο» αριθμό ενός ρητού αριθμού. Όπως φάνηκε στον προέλεγχο μόνο 5 από τους 15 μαθητές απαντούν σταθερά σε όλες τις ερωτήσεις ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ενδιάμεσα από δύο ρητούς αριθμούς σε όποια μορφή και αν είναι δοσμένοι οι αριθμοί. Κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός ενός ρητού αριθμού. Κάποιοι συμφωνούσαν στα δύο δεκαδικά ψηφία και κάποιοι πρότειναν έναν αριθμό με περισσότερα δεκαδικά ψηφία ως τον επόμενο ενός ρητού αριθμού. Χρησιμοποιήθηκε ο αριθμητικός μέσος δύο αριθμών, ο οποίος θεωρητικά θα μπορούσε να βοηθήσει στην κατανόηση των δύο πτυχών της πυκνής διάταξης. Μετά την παρέμβαση ακολούθησε ο μεταέλεγχος και στην συνέχεια ακολούθησαν δυο έργα μεταφοράς. Στο πρώτο ζητήθηκε από τους μαθητές η πρώτη και η τελευταία τιμή μιας μεταβλητής σε ένα ανοιχτό διάστημα και στο δεύτερο ζητήθηκε να προσδιορίσουν πόσοι αριθμοί είναι ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε αριθμούς α και β.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι κάποιοι μαθητές δέχονται την απειρία μεταξύ δύο αριθμών, αλλά όλοι οι μαθητές συνεχίζουν να θεωρούν ότι υπάρχει ο αμέσως επόμενος κάποιου ρητού αριθμού. Θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι, οι μαθητές που δέχονται την απειρία αλλά δεν δέχονται την μη ύπαρξη του επόμενου, έχουν μια συνθετική αντίληψη της διάταξης των ρητών αριθμών, όπως προβλέπεται από τη θεωρία πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή.

Λέξεις κλειδιά: εννοιολογική αλλαγή, ρητοί αριθμοί, πυκνότητα ρητών αριθμών, επόμενος αριθμός, ενδιάμεσοι αριθμοί, άπειροι, συνθετικά μοντέλα

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτή την εργασία διερευνάται η κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και συγκεκριμένα της Β’ τάξης του ενιαίου λυκείου, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή. Οι ρητοί αριθμοί παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες για τους μαθητές σε όλες τις βαθμίδες, αλλά και για φοιτητές και, εν γένει, για μορφωμένους ενήλικες. Πολλοί μαθητές ακόμη και μετά από διδασκαλία εξακολουθούν να έχουν δυσκολίες να συγκρίνουν το μέγεθος των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2015). Εκτός από τους μαθητές όμως έχει παρατηρηθεί, ότι πολλοί ενήλικες αλλά και φοιτητές πανεπιστημίων έχουν λανθασμένες αντιλήψεις σχετικά με τους ρητούς αριθμούς (DeWolf & Vosniadou, 2015). Στη βιβλιογραφία έχουν τεκμηριωθεί συστηματικά λάθη των μαθητών που περιλαμβάνουν λάθη στην σύγκριση αριθμών, στις πράξεις, στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των αριθμών αλλά και στην κατανόηση της πυκνής διάταξης.

Μια σημαντική παρανόηση των μαθητών είναι ότι «όσο μεγαλύτερος είναι ο ένας (ή και οι δύο) από τους όρους του κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα» (Clarke & Roche, 2009). Πολλοί μαθητές ακόμα και στο γυμνάσιο δεν κατανοούν ότι το 1/56 είναι μεγαλύτερο από το 1/72. Σε πολλές μελέτες (π.χ. McMullen, Van Hoof, Degrande, Verschaffel, & Van Dooren, 2018; Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof, & Verschaffel, 2013; VanHoof, Lijnen, Verschaffel & VanDooren, 2013) ακόμα και ενήλικες δείχνουν προκατάληψη στις συγκρίσεις κλασμάτων και δεκαδικών όταν τα μεγέθη δεν συμφωνούν με τις γνώσεις που έχουν από τους φυσικούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα ότι το 1/6 είναι μεγαλύτερο από το 1/7 παρόλο που το 6 είναι μικρότερο του 7. Επίσης κάποιοι μαθητές έχουν την αντίληψη της συμβολικής αναπαράστασης του κλάσματος α/β όχι ως ενιαίο αριθμό αλλά ως δύο διακριτούς αριθμούς με διαφορετικές τιμές και έτσι οδηγούνται στην πρόσθεση αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή (Koparan, Yildiz, Köğce, & Güven, 2010).

Οι μαθητές παρουσιάζουν παρανοήσεις και στους δεκαδικούς. Πολλοί μαθητές ισχυρίζονται ότι οι αριθμοί με περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτεροι από τους αριθμούς με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία. Για παράδειγμα ισχυρίζονται ότι το 0,6 είναι μικρότερο από το 0,29897 (Moss & Case, 1999; Peled & Awawdy-Shahbari, 2009; Van Dooren, Lehtinen, & Verschaffel, 2015). Αυτή η αντίληψη παρατηρείται τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ακόμα και κάποιοι φοιτητές πιστεύουν ότι τα μεγέθη των δεκαδικών αριθμών μπορούν να καθοριστούν από το μήκος του δεκαδικού ψηφίου (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Επίσης, πολλοί δάσκαλοι και καθηγητές δυσκολεύονται με την σύγκριση των ρητών αριθμών (Clarke & Roche, 2009; Merenluoto & Lehtinen, 2004; Van Dooren et al., 2015).

Ένα από τα πολύ γνωστά συστηματικά λάθη των μαθητών στις πράξεις οφείλεται στην παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει πάντα τους αριθμούς, ενώ η διαίρεση τους μικραίνει πάντα (Fischbein, 2002; Prediger, 2008). Αυτή η παρανόηση προέρχεται από τους φυσικούς αριθμούς και εμφανίζεται σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης.

Η πυκνότητα των ρητών αριθμών έχει βρεθεί ως μια εξαιρετικά δύσκολη αντίληψη για τους σπουδαστές αλλά και για τους ενήλικες (για μια ανασκόπηση, βλ. Βαμβακούση, 2009). Σχετικά με την απειρία δύο αριθμών πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στο να καταλάβουν ότι μεταξύ δύο ψευδοδιαδοχικών αριθμών όπως το 0,1 και το 0,2 υπάρχουν άπειροι αριθμοί (Merenluoto & Lehtinen, 2004, Vamvakoussi et al., 2004, όπως αναφ. σε Van Dooren et al., 2015). Θεωρούν ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς αριθμούς (όπως π.χ., το 0,2 και 0,3 ή το 3/7 και 4/7) δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί (Βαμβακούση, 2004). Ακόμα και μορφωμένοι ενήλικες, όταν σκέφτονται για την πυκνότητα των αριθμών εμφανίζουν σημάδια της φυσικής αριθμητική μεροληψίας (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Υπάρχουν ενδείξεις, ότι η συμβολική αναπαράσταση των αριθμών μπορεί να είναι ένας παράγοντας που παρεμβαίνει στην κατανόηση των μαθητών σχετικά με τη δομή των ρητών αριθμών (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006). Ακόμα και όταν μαθητές θεωρούν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ενδιάμεσα σε ένα διάστημα, εξακολουθούν να περιορίζονται από την ιδέα της διακριτότητας και δείχνουν απρόθυμοι να δεχτούν ότι οι ενδιάμεσοι αριθμοί μπορούν να γραφούν με διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις (Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, 2011).

Τα εμπόδια αυτά και οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την πυκνότητα μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα γενικότερο πλαίσιο των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς και τους πραγματικούς αριθμούς (Vamvakoussi et al., 2011). Η πηγή των συστηματικών σφαλμάτων των μαθητών είναι η διαφορά μεταξύ των φυσικών και των ρητών αριθμών διότι αντλούν τις γνώσεις που έχουν από τις ιδιότητες των φυσικών για να αντιμετωπίσουν τους ρητούς αριθμούς (Vamvakoussi, 2015). Οι δυσκολίες των μαθητών μπορούμε να πούμε ότι οφείλονται στο γεγονός ότι οι μαθητές μεταφέρουν τη διακριτότητα των φυσικών στους ρητούς αριθμούς. Αυτό αντανακλάται και στις δύο πτυχές της πυκνότητας: Την απειρία μεταξύ δύο ρητών αριθμών και το ότι δεν ορίζεται επόμενος αριθμός για κανένα ρητό αριθμό.

Γενικότερα, οι παρανοήσεις σχετικά με τα κλάσματα που προαναφέρθηκαν αποδίδονται στην αξιοποίηση προηγούμενων γνώσεων που μεταφέρουν οι μαθητές από τους φυσικούς αριθμούς (Moss, 2005, Ni & Zhou, 2005; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Prediger, 2008; Βαμβακούση, 2019). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να κάνουν λάθη στην σύγκριση αριθμών, στις πράξεις άλλα και στην πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών (Βαμβακούση, 2019). Αυτό το φαινόμενο είναι τόσο έντονο που έχει ονομαστεί «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Ο όρος «προκατάληψη» έχει οριστεί ως συστηματική και συχνή απόκλιση από έναν κανόνα (Ni & Zhou, 2005).

Οι αιτίες τις ύπαρξης αυτής της προκατάληψης παραμένουν αντικείμενο συζήτησης. Μία πιθανή αιτία της προκατάληψης του φυσικού αριθμού είναι τα χαρακτηριστικά του γνωστικού μηχανισμού, ο οποίος υποστηρίζει τις ικανότητες ποσοτικοποίησης στον άνθρωπο (Galistel & Gelman, 1992, όπως αναφ. σε Χρηστου, 2009). Σύμφωνα με κάποιους ερευνητές, λοιπόν, η προκατάληψη των φυσικών αριθμών είναι ένα έμφυτο εμπόδιο που οφείλεται όμως στην νοητική αναπαράσταση του αριθμού. Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει κανένα εγγενώς καθορισμένο μειονέκτημα για τα άτομα να μάθουν για το κλάσμα και τους ρητούς αριθμούς. Επομένως, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού τουλάχιστον εν μέρει, προκλήθηκε από την εκπαίδευση και από τον τύπο διδασκαλίας που πριμοδοτεί τους φυσικούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005). Επομένως, ίσως είναι αναπόφευκτη, μπορεί όμως τουλάχιστον να μετριαστεί, εάν γίνει διόρθωση της διδασκαλίας (Ni & Zhou, 2005). Πράγματι, αρχικά στην εκπαίδευση των μαθηματικών στα σχολεία οι πραγματικοί αριθμοί εμφανίζονται ως προϊόν μιας διαδικασίας εμπλουτισμού των φυσικών αριθμών (Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007). Επομένως, οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν για τους μαθητές τη βάση, επί της οποία βγάζουν συμπεράσματα σχετικά με τους ρητούς αριθμούς. Π.χ., με το συλλογισμό κατά αναλογία (Vamvakoussi, 2017).

Στην εργασία αυτή υιοθετείται ένα θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο δε δεσμεύεται σχετικά με το αν η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι έμφυτη, αλλά προσπαθεί να εξηγήσει πώς αναπτύσσεται και τι είδους επιδράσεις έχει στη μάθηση για τους μη φυσικούς αριθμούς. Πρόκειται για την προσέγγιση της «θεωρίας πλαισίου» στην εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, Vamvakousi & Skopeliti, 2008), η οποία θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Οι ρητοί αριθμοί εμφανίζονται ως μια νέα κατηγορία αριθμών στους μαθητές της Γ' τάξης του Δημοτικού στην Ελλάδα, αφού έχουν ήδη μάθει μόνο τους φυσικούς αριθμούς έως αυτή την τάξη και θα συνεχίσουν να διδάσκονται για τους ρητούς αριθμούς έως την Β' Γυμνασίου. Η μάθηση σχετικά με την πυκνότητα δεν είναι σαφής στόχος του ελληνικού προγράμματος σπουδών. Επίσης να σημειώσουμε ότι σε όλα τα σχολικά μαθηματικά δεν υπάρχει κάποιος τυπικός ορισμός για τους πραγματικούς αριθμούς (Giannakoulias et al., 2007).

Ένα από τα βασικά προβλήματα των μαθητών είναι η νέα πρόκληση που αντιμετωπίζουν όταν μαθαίνουν τους ρητούς, ότι ο ρητός αριθμός μπορεί να πάρει πολλές μορφές. Δηλαδή να παρασταθεί ως δεκαδικός, κλάσμα, ποσοστό κτλ. Το γεγονός αυτό έρχεται σε σύγκρουση με την προηγούμενη γνώση των μαθητών, οπού ο κάθε φυσικός αριθμός είχε μόνο έναν συμβολισμό αποκλειστικά (Moss, 2005). Τα παιδιά πριν πάνε σχολείο μαθαίνουν να μετράνε αντικείμενα, άρα μαθαίνουν τους φυσικούς αριθμούς. Τα μικρά παιδιά, ακόμα και τα βρέφη μαθαίνουν να διακρίνουν μικρά σύνολα αντικειμένων. Όμως υπάρχουν αμφιβολίες σχετικά με την υπόθεση ότι ένας αριθμητικός μηχανισμός εξαρτάται από αυτή την ικανότητά τους (Ni & Zhou, 2005). Υπάρχουν δεδομένα ότι τα μικρά παιδιά προσέχουν επίσης και τις ποσότητες, τις μεταβολές τους και τις μεταξύ τους σχέσεις ακόμα και για συνεχείς ποσότητες (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002 όπως αναφ. σε Βαμβακούση, 2019). Επίσης, οι μαθητές έχουν μια βασική παρανόηση όταν ξεκινούν να μαθαίνουν για τους ρητούς και αυτή είναι ότι θεωρούν τους ρητούς ως έναν ειδικό τύπο των φυσικών αριθμών (Moss & Case, 1999).

Ένα δεύτερο πρόβλημα των μαθητών εμφανίζεται στα κλάσματα και έγκειται στην ανικανότητα των μαθητών να κατανοήσουν τι πρέπει να κάνουν με τα σύμβολα (mix et al., 1999, Sophian et al., 1997 όπως αναφ. σε Ni & Zhou, 2005). Παρατηρούνται μεγάλα προβλήματα στην εναλλαξιμότητα των παραστάσεων από τους μαθητές (Moss & Case, 1999). Σχετικά με τα σύμβολα, μια σημαντική εννοιολογική δυσκολία που συναντούν οι μαθητές είναι η συνειδητοποίηση ότι οι ρητοί αριθμοί παραμένουν αμετάβλητοι όταν χρησιμοποιούνται διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Όταν τα παιδιά εισάγονται στα κλάσματα έχουν ήδη κάποιες σταθερές ιδέες για τους αριθμούς οι οποίες βασίζονται στους φυσικούς αριθμούς. Η ύπαρξη του επόμενου στους ρητούς αριθμούς η οποία ισχύει μόνο στους φυσικούς αριθμούς είναι μια συχνή αντίληψη των μαθητών. Οι μαθητές συμπεραίνουν ότι υπάρχει πάντα ένας επόμενος ενός αριθμού βασιζόμενοι στους φυσικούς αριθμούς (Harnett & Gelman, 1998, όπως αναφ. σε Ni & Zhou, 2005).

Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1 Η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή

Η γνώση και η κατανόηση σχετίζονται με την μάθηση σε βάθος χρόνου. Πολλοί σημαίνοντες θεωρητικοί της μάθησης γενικά, αλλά και της μάθησης των μαθηματικών έχουν κάνει αυτή την επισήμανση (Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015). Έχει επίσης τονιστεί η πρόκληση στην μαθηματική εκπαίδευση είναι ότι περιμένουμε από τα παιδιά να κατανοήσουν σε λίγα χρόνια πολύπλοκες ιδέες που ιστορικά χρειάστηκαν χιλιετίες για να εξελιχθούν μέσα από τη συλλογική εννοιολογική αλλαγή (Greer, 2004).

Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής στη μάθηση έχει τις ρίζες της τόσο στην εκπαιδευτική έρευνα για τις φυσικές επιστήμες, όσο και στην έρευνα της γνωστικής και αναπτυξιακής ψυχολογίας (Vosniadou, 1999; Vamvakoussi &

Vosniadou, 2004; Vosniadou & Verschaffel, 2004). Ο όρος εννοιολογική αλλαγή αναφέρεται στη διαδικασία της αναδιοργάνωσης της γνώσης που είναι απαραίτητη όταν κάποιος εκτίθεται σε πληροφορίες που δεν είναι συμβατές με τις προηγούμενες γνώσεις του (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Αυτό σημαίνει ότι αφήνουμε το προηγούμενο «ασφαλές» περιβάλλον και μπαίνουμε σε ένα νέο άγνωστο περιβάλλον σκέψης και συλλογισμού (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Η εννοιολογική αλλαγή είναι μια αναδιάρθρωση των προηγούμενων γνώσεων που βασίζονται στην καθημερινή εμπειρία και στο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο (Vosniadou, 2007). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η εννοιολογική αλλαγή να συνδέεται με την ιδέα του κονστρουκτιβισμού (ως άποψη του τρόπου με τον οποίο μαθαίνουν οι άνθρωποι) και των αντιλήψεων των μαθητών (Hewson, 1992). Σύμφωνα με Vosniadou (2007) η εννοιολογική αλλαγή χωρίζεται σε δύο κατηγορίες. Στην «αυθόρμητη εννοιολογική αλλαγή», η οποία συμβαίνει στο πλαίσιο του κοινωνικό - πολιτισμικού περιβάλλοντος με έναν φυσικό τρόπο και στην εννοιολογική αλλαγή που συμβαίνει στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης, η οποία είναι μια διαδικασία που απαιτεί χρόνια και συστηματική διδασκαλία για να επιτευχθεί με συγκεκριμένη καθοδήγηση.

Αρχικά η ιδέα της εννοιολογικής αλλαγής χρησιμοποιήθηκε στην εκπαιδευτική έρευνα για τις φυσικές επιστήμες ως μια προσέγγιση που μπορούσε να εξηγήσει τις παρανοήσεις των μαθητών, κυρίως για την φυσική, αλλά και για τη βιολογία (Hewson, 1992).

Η κύρια σχέση μεταξύ της αλλαγής της επιστημονικής θεωρίας και της μάθησης της επιστήμης έγινε η συνειδητοποίηση ότι οι μαθητές φέρνουν στην προκαταρκτική αντίληψη των μαθησιακών μαθημάτων «παρανοήσεις» ή «εναλλακτικές αντιλήψεις» που εμποδίζουν την εκμάθηση της επιστήμης (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006).

Το πρόβλημα των παρανοήσεων των μαθητών υπήρχε και στο χώρο της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση. Όπως αναφέρεται σε Vosniadou, 1999, πολλοί ερευνητές σε αυτό το χώρο (π.χ. Fischbein, 1987, Vergnaud, 1989, Sfard, 1987) είχαν επισημάνει ότι η προηγούμενη γνώση μπορεί να είναι εμπόδιο στην απόκτηση ορισμένων μαθηματικών εννοιών. Ένα θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε στο χώρο αυτό ήταν αυτό του Brousseau (1976/1983) ο οποίος ανέφερε ως «διδακτικά εμπόδια», τα εμπόδια τα οποία προκαλούνται από τον τρόπο διδασκαλίας και «επιστημολογικά εμπόδια» τα οποία οφείλονται στην δομή του μαθηματικού περιεχομένου, στην ιστορία του και στην ανάπτυξη των πεδίων εφαρμογής τους (Prediger, 2008).

Είναι πολύ πιθανό, κατά την διαδικασία της αναδιοργάνωσης, οι μαθητές να δημιουργήσουν παρανοήσεις (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Για παράδειγμα η λύση σε κάποιο πρόβλημα ή μία ενέργεια η οποία στους μαθητές φαίνεται λογική αρχικά σύμφωνα με τις προηγούμενες γνώσεις τους και πιθανόν να μην γνωρίζουν ότι δεν είναι μαθηματικά σωστή, μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις (Koparan et al., 2010).

Η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή διαμορφώθηκε αρχικά για να εξηγήσει τις παρανοήσεις των μαθητών στις φυσικές επιστήμες, και μεταφέρθηκε αργότερα στο χώρο της μάθησης των μαθηματικών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή υποθέτει ότι τα παιδιά έχουν σχηματίσει ένα αρχικό ερμηνευτικό πλαίσιο για τον αριθμό, το οποίο βασίζεται στην ζωή τους πριν ξεκινήσουν την σχολική τους εκπαίδευση. Για παράδειγμα οι μαθητές έχουν μάθει να μετρούν αντικείμενα ή να μετρούν με τα δάκτυλα. Από πολύ μικρή ηλικία 2 έως 4 ετών τα παιδιά δείχνουν να έχουν κάποια κατανόηση ότι οι λέξεις των αριθμών αφορούν διακριτή ποσότητα, η οποία γίνεται πιο ισχυρή καθώς μεγαλώνουν διότι τα παιδιά μαθαίνουν τις πιο ακριβείς σημασίες μεμονωμένων αριθμητικών λέξεων από τόσο νωρίς (Slusser, Ditta, & Sarnecka, 2013). Έχουν μάθει να μετρούν διακριτές ποσότητες. Δηλαδή η έννοια του φυσικού αριθμού διαμεσολαβείτε από νωρίς στην ανάπτυξη των παιδιών με την γλώσσα και την καταμέτρηση των δακτύλων, δηλαδή πολύ πριν τα παιδιά εκτεθούν σε τυπική εκπαίδευση στο σχολείο.

Στα πρώτα σχολικά χρόνια δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στους φυσικούς αριθμούς, τις ιδιότητές τους, τις σχέσεις τους όπως για παράδειγμα σχέσεις διάταξης και τις αριθμητικές πράξεις. Οπότε, πριν έρθουν σε επαφή με τους ρητούς στο σχολείο, τα παιδιά έχουν ήδη κατασκευάσει μία πλούσια κατανόηση του αριθμού που βασίζεται στην γνώση των φυσικών αριθμών (Gelman, 2000; Smith, Solomon, & Carey, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Οι Vosniadou και συνεργάτες υποθέτουν ότι αυτή η γνώση οργανώνεται σε μια συνεκτική δομή, που συνιστά την αρχική θεωρία πλαισίου για τον αριθμό (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010). Με τον όρο θεωρία, δηλώνεται μια σχεσιακή επεξηγηματική δομή και όχι μια ρητή καλά διαμορφωμένη και κοινωνικά διαμοιρασμένη επιστημονική θεωρία (Vosniadou, 2003). Πρόκειται, δηλαδή, για ένα σχετικά συνεκτικό σώμα γνώσεων γνώσης συγκεκριμένων τομέων, που χαρακτηρίζεται από μια ξεχωριστή οντολογία και μια αιτιότητα που μπορεί να οδηγήσει σε εξηγήσεις και προβλέψεις (Vosniadou, 2007).

Η ιδέα της διακριτότητας είναι μια βασική αρχή αυτής της αρχικής θεωρίας πλαισίου για τον αριθμό. Όπως είναι φυσικό όμως, οι μαθητές για να μάθουν τους ρητούς θα πρέπει να στηριχτούν σε προηγούμενες γνώσεις και να έχουν ως βάση τις γνώσεις τους στους φυσικούς αριθμούς με σκοπό να ενισχυθεί η μάθηση (Vosniadou, 2001b). Κάποιες φορές όμως, εμφανίζονται δυσκολίες των μαθητών στην εκμάθηση, όταν η νέα γνώση που αποκτάται έρχεται σε σύγκρουση με αυτό που ήδη γνωρίζουν (Βοσνιάδου, 1994a). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μια από αυτές τις παρανοήσεις είναι η ιδέα ότι όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι. Αυτή η ιδέα βασίζεται στους φυσικούς αριθμούς. Σε μεγαλύτερες ηλικίες όμως εμφανίζεται η παρανόηση, ακόμα και σε ενήλικους, ότι όσο λιγότερα ψηφία έχει ένας δεκαδικός τόσο μεγαλύτερος είναι (Desmet. Gregoire & Mussolin, 2010, όπως αναφ. σε Βαμβακούση, 2019). Σύμφωνα με την άποψη της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή αυτή είναι μια συνθετική αντίληψη. Μια άλλη παρανόηση που έχει αναφερθεί παραπάνω και αντανακλά την άμεση παρεμβολή της γνώσης για τους φυσικούς είναι ότι, ανάμεσα σε δύο μοναδιαία κλάσματα, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο παρανομαστή. Πολύ συνήθης είναι όμως και η παρανόηση ότι μεταξύ δυο οποιονδήποτε κλασμάτων μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρανομαστή (Gomez, Jimenez, Bobadilla, Reyes & Darnell, 2014, όπως αναφ. σε Βαμβακούση, 2019). Πρόκειται επίσης για μια συνθετική αντίληψη.

Η αλλαγή θεωρίας που αναφέραμε είναι μια αργή και προοδευτική διαδικασία και απαιτείται χρόνος για την αναδιοργάνωσή της (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Επομένως, όταν εκτίθενται στους ρητούς αριθμούς, σύμφωνα με την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή, υποθέτουμε ότι βασίζονται στις αρχικές τους θεωρίες για τον αριθμό (Βαμβακούση, 2019). Οι μαθητές επομένως εμπλουτίζουν τις αρχικές τους γνώσεις με νέες πληροφορίες συνήθως με προσθετικούς μηχανισμούς μάθησης όπως είναι η αφομοίωση, αλλά και ο συλλογισμός κατ’ αναλογία.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής οι μαθητές, επειδή πρώτα μαθαίνουν τους φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιούν όλες τις ιδιότητες και αναλογίες που γνωρίζουν, ακόμα και στους μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2019, όπως αναφ. σε Vamvakoussi, 2010).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής στη μάθηση, η κατασκευή γνώσης σε ένα πεδίο δεν είναι μια συσσωρευτική διαδικασία, όπου η νέα γνώση προστίθεται στην προηγούμενη εμπλουτίζοντας την (Χρηστου, 2009). Κάποιες φορές δεν αρκεί η απόκτηση νέων πληροφοριών, αλλά απαιτείται ριζική αναδιοργάνωση τις γνώσης που υπάρχει ήδη (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Prediger, 2008). Σε περιπτώσεις όπου η νέα μάθηση προϋποθέτει εννοιολογική αλλαγή, δηλαδή κατασκευή νέων αναπαραστάσεων και νέων επεξηγηματικών πλαισίων, σύμφωνα με την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή, η διαδικασία μάθησης είναι αργή και σταδιακή και εμφανίζονται παρανοήσεις και συνθετικές αντιλήψεις. Η νέα γνώση δεν αντικαθιστά την αρχική, η οποία συνεχίζει να παρεμποδίζει την απόκτηση της νέας γνώσης (DeWolf & Vosniadou, 2015). Εφαρμόζοντας την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην περίπτωση του αριθμού, γίνεται φανερό ότι, η ιδέα της προκατάληψης του φυσικού αριθμού συνδέεται στενά με το πρόβλημα της αναδιάρθρωσης της προηγούμενης γνώσης (Ni & Zhou, 2005; Vamvakousi, VanDooren & Verschaffel, 2012 όπως αναφ. σε Vamvakoussi, 2015). Έχει υποστηριχθεί ότι πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς σχετίζεται με το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, όπου απαιτείται σημαντική αναδιάρθρωση της εννοιολογικής οργάνωσης του αριθμού των μαθητών (Ni & Zhou, 2005, Smith et al., 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vosniadou et al., 2008).

Αυτή η δυσκολία τις εισαγωγής της νέας γνώσης οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι οι γενικές εννοιολογικές τους γνώσεις παραμένουν αξιοσημείωτα ανεπαρκείς παρόλο που οι περισσότεροι μαθητές μαθαίνουν αξιόλογους αλγορίθμους (Moss & Case, 1999).

Επίσης, να αναφέρουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές (8 στους 13) φάνηκε να αντιμετωπίζουν δυσκολία στην αναπαράσταση των κλασμάτων στην γραμμή των αριθμών σε έρευνα των Ni & Zhou, Y.-D., 2005. Άρα υπάρχουν δυσκολίες των μαθητών στην υποδιαίρεση της αριθμητικής γραμμής αλλά και στην αναγνώριση των εννοιών της συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης των αριθμών πάνω στην αριθμητική γραμμή (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983: Bright, Behr, Post & Wacsmuth, 1988 όπως αναφ. σε Μιχαηλίδου, 2004).

1.2 Πυκνή διάταξη των ρητών και πυκνή διάταξη των σημείων της ευθείας

Οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνά διατεταγμένοι. Ένα σύνολο αριθμών λέγεται πυκνά διατεταγμένο αν ανάμεσα σε δύο από τα στοιχεία του υπάρχει πάντα ένα τρίτο στοιχείο. Αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει πάντα άπειρο πλήθος αριθμών μεταξύ δύο οποιονδήποτε αριθμών (ακόμα και μεταξύ δύο ψευδοδιαδοχικών) και επίσης ότι κανένας αριθμός δεν έχει (μοναδικό) διάδοχο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Η ιδέα της πυκνότητας εμφανίστηκε αρχικά σε γεωμετρικό πλαίσιο ως χαρακτηριστικό της Ευκλείδειας γραμμής (Bell, 2005, όπως αναφ. σε Vamvakoussi, 2017).

Η πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών μπορεί να περιγραφεί με διαφορετικές εκφράσεις, ισοδύναμες από μαθηματική άποψη: α) μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών αριθμών, υπάρχει πάντα ένας άλλος ρητός, άρα υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε αυτό το διάστημα, β) κανένας ρητός αριθμός δεν έχει μοναδικό επόμενο αριθμό (αυτό συμβαίνει μόνο στους φυσικούς αριθμούς), γ) δεν υπάρχει μικρότερος θετικός ρητός αριθμός και δ) οι ρητοί αριθμοί είναι άπειρα διαιρούμενοι (Vamvakousi, 2017).

Στους ρητούς έχουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις για τον ίδιο αριθμό, ενώ στους φυσικούς όχι. Οι φυσικοί είναι διακριτοί ενώ οι ρητοί είναι πυκνοί. Για παράδειγμα ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς 2 και 3 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός ενώ ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς 5/4 και 8/5 ή στους αριθμούς 1,25 και 1,6 υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι υποσύνολο των ρητών αριθμών ενώ το σύνολο των δεκαδικών (ρητών) αριθμών ταυτίζεται με το σύνολο των κλασμάτων, δηλαδή πρόκειται για διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις ενός ρητού οι οποίες αναφέρονται στον ίδιο αριθμό.

1.3 Προβλήματα και δυσκολίες των μαθητών με την πυκνότητα – Συνθετικά μοντέλα

Η πυκνή διάταξη των αριθμών είναι ένα θέμα το οποίο έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές τα τελευταία χρόνια. Αυτό συμβαίνει διότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα στην κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών αλλά και της διάταξης των ρητών αριθμών και της πυκνότητάς τους.

Δυσκολία στην απειρία των ενδιάμεσων αριθμών

Οι μαθητές λένε ότι υπάρχει πεπερασμένο/μηδενικό πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς. Σύμφωνα με Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, για παράδειγμα ένας μαθητής αναφέρει ότι ανάμεσα στο 0,005 και στο 0,006 δεν υπάρχει άλλος αριθμός γιατί μετά το 0,005 είναι το 0,006 ενώ ανάμεσα στους αριθμούς 3/8 και 5/8 αναφέρει ότι υπάρχει μόνο ένας, το 4/8, και αναφέρει συγκεκριμένα ότι είναι σίγουρος για αυτό.

Επίσης, οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις δυσκολεύουν τους μαθητές, οι οποίοι θεωρούν ότι αναφερόμαστε σε διαφορετικούς αριθμούς. Αυτό επιβεβαιώνεται από έρευνα 301 μαθητών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Ένας άλλος μαθητής, σύμφωνα με Vamvakoussi & Vosniadou, 2004 στην ερώτηση μεταξύ του 0,005 και 0,006 λέει ότι υπάρχουν 9 αριθμοί, αλλά αν τους μετατρέψουμε σε κλάσματα (εννοεί να αλλάξουμε την συμβολική αναπαράσταση) μπορούμε να βρούμε περισσότερους αριθμούς μεταξύ τους και αναφέρει ότι είναι άπειροι. Όπως καταλαβαίνουμε στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών, όπως και στην έννοια του «επόμενου» εμπλέκεται η έννοια του απείρου. Η δυσκολίες της έννοιας του απείρου γενικότερα έχουν εντοπιστεί και συζητηθεί ευρέως (Fischbein, 1987; Lakoff and Nunez, 2000; Tirosh, 1991; Tall and Tirosh, 2001 όπως αναφ. σε

Βαμβακούση, 2004). Επομένως, μια νέα ιδέα που απομακρύνεται από τους φυσικούς είναι ότι οι ρητοί είναι «πυκνοί», δηλαδή ότι μεταξύ δύο ρητών αριθμών μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο πλήθος άλλων αριθμών (Moss, 2005). Παρά το γεγονός ότι μαθητές αναφέρουν ότι υπάρχουν αριθμοί μεταξύ του 0 και του 1 δεν αναγνωρίζουν απαραίτητα ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε αυτό το διάστημα (Smith et al., 2005). Κάποιοι μαθητές χωρίζουν σε ομάδες τους αριθμούς με το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Αυτός ο διαχωρισμός όμως είναι μια αρχή που υπάρχει στους φυσικούς αριθμούς, όπως οι φυσικοί αριθμοί 0 και το 1, και οι μαθητές κάνουν μεταφορά στους ρητούς, αφού εννοούν ότι ανάμεσα τους υπάρχει κάποιο κενό, επομένως δεν έχουν κατανοήσει την δομή άρα και την απειρία των ρητών. Επίσης, συναντούν δυσκολία και στην γραμμή των αριθμών, διότι τείνουν να βλέπουν την αριθμητική γραμμή ως μια σειρά από «βήματα προς τα μπροστά» με κενό μεταξύ τους καθώς επίσης και ότι το πλήθος των ενδιαμέσων αριθμών είναι πεπερασμένο (English, 1993: Doritou & Grey, 2009 όπως αναφ. σε Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

Δυσκολία στον επόμενο

Για κάθε φυσικό αριθμό μπορεί να οριστεί ο αμέσως επόμενός του. Αυτή η ιδιότητα λέγεται «αρχή του επόμενου». Ένα παιδί που κατανοεί πραγματικά τη λειτουργία του επόμενου θα πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n, θα υπάρχει ένας μοναδικός επόμενος, και αυτός θα είναι ο n+1, άρα δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος αριθμός από όλους (Cheung, Rubenson, & Barner, 2017). Ακόμα και παιδιά στις πρώτες τάξεις του σχολείου μπορούν να βγάλουν το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός (Hartnett & Gelman, 1998). Οι δυσκολίες συχνά έγκεινται στην τάση των μαθητών να εφαρμόζουν ακατάλληλα τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους ρητούς αριθμούς (Van Dooren et al., 2015). Ενώ στους φυσικούς αριθμούς είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ο επόμενος αριθμός οποιουδήποτε αριθμού, δεν συμβαίνει το ίδιο και με τους ρητούς αριθμούς. Οι μαθητές έχουν την αντίληψη ότι και οι ρητοί αριθμοί είναι διακριτοί, όπως αυτό συμβαίνει με τους φυσικούς αριθμούς, ότι δηλαδή διαδέχονται ο ένας τον άλλο (Gelman, 2000, Smith, Solomon & Carey, 2005 όπως αναφ. σε Vamvakoussi, 2010). Στο σύνολο των ρητών αριθμών καταργείται η αρχή της διαδοχής, η οποία παρατηρείται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, ότι δηλαδή ανάμεσα σε δύο φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια των κλασμάτων, ενώ έχουν ήδη διαμορφώσει το σχήμα της καταμέτρησης και του επόμενου αριθμού. Οπότε ακόμα και για τα κλάσματα και τους δεκαδικούς, επομένως για τους ρητούς, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει πάντα ο επόμενος αριθμός (Hartnett & Gelman, 1998).

Η αρχή του επόμενου είναι δυσκολότερη

Παρόλα αυτά σύμφωνα με Vamvakoussi & Vosniadou, 2012, μελέτες (Vamvakoussi, 2010: Giannakoulias et al., 2007) έχουν δείξει ότι μερικοί μαθητές οι οποίοι απαντούν σωστά στην απειρία των ενδιαμέσων, επιμένουν ότι υπάρχει ο αμέσως επόμενος αριθμός του 3/5 για παράδειγμα. Επομένως, κατανοούν ως ένα βαθμό ότι σε ένα διάστημα μεταξύ δύο αριθμών υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Παρόλα αυτά ισχυρίζονται ότι υπάρχει ο επόμενος ενός αριθμού (Vamvakoussi, 2010). Σύμφωνα με Vamvakoussi και Vosniadou (2012), έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές τα πηγαίνουν καλύτερα στην απειρία των ενδιάμεσων αριθμών από ότι στην μη ύπαρξη του επόμενου. Παρόλα αυτά η μεγαλύτερη προθυμία των μαθητών να δεχτούν το άπειρο των σημείων δεν συνεπάγεται αναγκαστικά μια βαθιά κατανόηση της πυκνότητας στο πλαίσιο αυτό (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Επομένως, εάν κάποιος μαθητής αντιλαμβάνεται την απειρία μεταξύ δύο αριθμών αυτό δεν συνεπάγεται ότι θα γίνεται και παράλληλα κατανοητή η πυκνότητα των αριθμών σε σχέση με την έννοια ότι για κανέναν αριθμό δεν ορίζεται ο επόμενος αριθμός (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Άρα, είναι δυσκολότερη η πτυχή της πυκνότητας ότι δεν υπάρχει ο επόμενος από την πτυχή των απείρων ενδιάμεσα (Vamvakoussi, 2017). Επομένως, υπάρχουν στοιχεία που δείχνουν ότι η πτυχή «δεν υπάρχει ο επόμενος» της πυκνότητας είναι ιδιαίτερα δύσκολη για τους μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Hannula, Pehkonen, Maijala, & Soro, 2006) Hannula et al., 2006, Merenluoto & Lethinen, 2002 όπως αναφ. σε Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Μια πιθανή ερμηνεία για το εύρημα ότι ο «επόμενος» είναι πιο δύσκολα αντιληπτός από την απειρία των ενδιαμέσων σύμφωνα με Vamvakoussi και Vosniadou (2012) είναι το δυνάμει και το ενεργεία άπειρο. Το δυνάμει άπειρο είναι πιο προσιτό στους μαθητές με την έννοια της χρήσης μια επαναλαμβανόμενης διαδικασίας. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε το δυνητικό άπειρο και το πραγματικό άπειρο. Σύμφωνα με έρευνες οι έννοια του δυνητικού απείρου είναι πιο προσιτή στους μαθητές, ακόμα και σε μικρά παιδιά (Hartnett & Gelman, 1998, Singer & Voica, 2008, όπως αναφ. σε Vamvakoussi, 2010) από ότι του πραγματικού απείρου (Fischbein , 1987, Lakoff & Nunez, 2000, Tsamir & Tirosh, 1999 όπως αναφ. σε Vamvakoussi, 2010). Κατανοούν ότι μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός αλλά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών ρητών αριθμών υπάρχουν άπειρα ρητοί αριθμοί (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Συνθετικά μοντέλα

Οι δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών που προαναφέρθηκαν οφείλονται στη μεταφορά της ιδέας της διακριτότητας από τους φυσικούς στους ρητούς. Η διακριτότητα είναι βασική αρχή της αρχικής θεωρίας πλαισίου για τον αριθμό και αποδίδεται καταχρηστικά στους ρητούς (και στους πραγματικούς) αριθμούς από τους μαθητές. Η προϋπάρχουσα γνώση για τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών έρχεται σε αντίθεση με την απειρία των ρητών αριθμών και αυτό προκαλεί δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών σε μαθητές από ένα ευρύ φάσμα ηλικιών, μέχρι το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Βαμβακούση, 2004).

Καταρχήν, οι Vamvakoussi & Vosniadou (2004, 2007) παρατήρησαν ότι μαθητές κάποιες φορές μπορεί να εξετάσουν το άπειρο μεταξύ δύο αριθμών αλλά σε κάποιες περιπτώσεις δεν το σκέφτονται. Για παράδειγμα, οι συμμετέχοντες στην έρευνα των Vamvakoussi και Vosniadou (2007) ομαδοποιήθηκαν σε τρεις κατηγορίες: Στην κατηγορία *πεπερασμένο πλήθος, άπειρο πλήθος* και *μεικτή*. Στην κατηγορία *πεπερασμένο πλήθος* μπορούμε να χωρίσουμε δύο υποομάδες: Στην πρώτη τοποθετήθηκαν οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς αριθμούς δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσος, ενώ στη δεύτερη οι μαθητές που απάντησαν ότι υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Στην κατηγορία *άπειρο πλήθος* ορίστηκαν δύο υποομάδες. Στην πρώτη τοποθετήθηκαν μαθητές οι οποίοι απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι της ίδιας συμβολικής αναπαράστασης, ενώ στη δεύτερη τοποθετήθηκαν μαθητές οι οποίοι απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανεξάρτητα από την συμβολική τους αναπαράσταση σε όλες τις ερωτήσεις. Τέλος, στην κατηγορία μεικτή τοποθετήθηκαν οι μαθητές, οι οποίοι απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε ορισμένες ερωτήσεις αλλά όχι σε όλες.

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2007) οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι πολλοί μαθητές, πέρα από την ιδέα της διακριτικότητας η οποία τους περιορίζει, επηρεάζονται και από την συμβολική αναπαράσταση των αριθμών.

Οι μαθητές φαίνεται να είναι πιο επιρρεπείς στο να δεχτούν το άπειρο των ενδιαμέσων μεταξύ δύο φυσικών αριθμών από δύο μη φυσικούς αριθμούς και μεταξύ δύο δεκαδικών από ότι μεταξύ δύο κλασμάτων (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Πράγματι, οι μαθητές πρώτα αντιλαμβάνονται την απειρία των ενδιαμέσων σε δύο φυσικούς αριθμούς, μετά σε δύο δεκαδικούς και μετά σε δύο κλάσματα. Κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι μόνο οι δεκαδικοί έχουν άπειρους ενδιάμεσους και τα κλάσματα δεν έχουν ή το αντίστροφο (Βαμβακούση, 2019), ενώ κάποιοι θεωρούν ότι ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχουν κλάσματα και το αντίστροφο και αυτό μπορεί να συμβαίνει ακόμα και όταν θεωρούν ότι υπάρχουν άπειρα πολλοί ενδιάμεσοι αριθμοί (Vamvakoussi, 2010). Άρα, καταλαβαίνουμε ότι δεν αντιλαμβάνονται ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των ίδιων μαθηματικών αντικειμένων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ένας μαθητής στην έρευνα των Vamvakousi & Vosniadou (2004) ο οποίος υποστηρίζει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ δύο κλασμάτων, αλλά πεπερασμένοι αριθμοί μεταξύ δύο δεκαδικών και όταν τους ζητήθηκε να ξαναδεί τις απαντήσεις του αναφέρει ότι αν μετατρέψεις τα κλάσματα σε δεκαδικούς τότε θα μπορείς να βρεις περισσότερους αριθμούς μεταξύ τους (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007; Vamvakoussi, 2010). Συμπεραίνουμε επομένως, ότι ορισμένοι μαθητές σκέφτονται διαφορετικά για τους δεκαδικούς αριθμούς από ότι για τα κλάσματα σε σχέση με την δομή τους (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Παρανοήσεις σαν αυτές μπορούν να εξηγηθούν ως συνθετικά μοντέλα που σχηματίζονται από τους μαθητές στην προσπάθεια τους να αφομοιώσουν νέες πληροφορίες στην υπάρχουσα θεωρία πλαισίου (Vosniadou, 2003). Τα συνθετικά μοντέλα εμφανίζονται στα ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης της έννοιας του ρητού αριθμού και αντανακλούν, στην περίπτωση αυτή, την ιδέα της διακριτότητας και την πεποίθηση ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε διαφορετικούς αριθμούς (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006).

Οι Vamvakoussi και Vosniadou (2012) παρατήρησαν ότι οι μαθητές τα πηγαίνουν συστηματικά καλύτερα στην «απειρία των ενδιαμέσων» από ότι στην «μη ύπαρξη του επόμενου», παρά το γεγονός ότι η «απειρία των ενδιαμέσων» και η «μη ύπαρξη του επόμενου» είναι ισοδύναμες όψεις της πυκνότητας από μαθηματική άποψη. Υπέθεσαν λοιπόν ότι υπάρχει διαφορετική συνθετική αντίληψη των μαθητών για την πυκνή διάταξη των αριθμών. Προσπαθώντας να δώσουν μια πιθανή ερμηνεία αυτής της συνθετικής αντίληψης αναφέρθηκαν στην διάκριση ανάμεσα στο *δυνάμει άπειρο* και το *ενεργεία άπειρο*. Το *δυνάμει άπειρο* έχει την μορφή ατέρμονης διαδικασίας, η οποία είναι πιο προσιτή προς τους μαθητές (βλ. και Hartnett & Gelman, 1998; Núñez & Lakoff, 2005; Singer & Voica, 2008). Αυτή η μορφή μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι φυσικοί δεν τελειώνουν ποτέ άρα το πλήθος τους είναι άπειρο, με την σκέψη ότι για κάθε φυσικό μπορούμε να βρούμε τον επόμενό του, προσθέτοντας μια μονάδα και να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι δεν θα σταματήσει ποτέ αυτή η διαδικασία άρα το πλήθος είναι άπειρο. Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με την μορφή επαναλήψιμης διαδικασίας, μπορούμε να παράγουμε ενδιάμεσους αριθμούς μεταξύ δύο δεκαδικών προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού τους μέρους ή μεταξύ δύο κλασμάτων μετατρέποντας τα σε ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους. Έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι οι ενδιάμεσοι αριθμοί είναι άπειροι εφόσον κατανοήσουμε ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται επ΄ άπειρο.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει και την πυκνότητα, δηλαδή ότι κανέναν αριθμό δεν ορίζεται ο επόμενος αριθμός. Στο πρώτο πείραμα που παρουσιάζεται στο άρθρο των Vamvakoussi & Vosniadou (2012), δόθηκαν έργα κλειστού τύπου για την απειρία των ενδιάμεσων και για την μη ύπαρξη του επόμενου δόθηκαν σενάρια στα οποία οι μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου έπρεπε να διαφωνήσουν ή να συμφωνήσουν και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Όπως φάνηκε στα αποτελέσματα τα έργα για τον επόμενο ήταν πιο απαιτητικά από τα έργα για την απειρία των ενδιάμεσων. Υπήρχαν κάποιοι μαθητές, οι οποίοι απαντούσαν συστηματικά ότι το πλήθος των ενδιάμεσων είναι άπειρο, όμως δεν απέρριπταν το ενδεχόμενο να υπάρχει ο επόμενος ενός ρητού αριθμού.

Η έρευνα των Vamvakoussiκαι Vosniadou (2012) ήταν ποσοτική, με πρόσβαση μόνο στις γραπτές εξηγήσεις των μαθητών. Αυτό δεν μας δίνει αρκετές πληροφορίες σχετικά με το πώς σκέφτονται οι μαθητές για τις δύο όψεις τις πυκνής διάταξης των ρητών. Για παράδειγμα δεν είναι ξεκάθαρο πως ερμηνεύουν οι μαθητές την έννοια του απείρου. Δηλαδή μπορεί όταν απαντούν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί να εννοούν ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Επίσης, στα έργα για τον επόμενο δεν είναι ξεκάθαρο αν οι μαθητές πιστεύουν ότι ο επόμενος υπάρχει ή όχι. Σύμφωνα με Vamvakoussi & Vosniadou (2012) υπάρχουν μαθητές που διαφώνησαν με τη δήλωση ότι το 2,002 είναι ο επόμενος του 2,001, αναφέροντας ότι:

> *Δεν είναι απαραίτητο το 2,002 να έρχεται αμέσως μετά το 2,001.*
> *Ας πούμε, υπάρχει και το 2,0015 και το 2,0012 (σελ. 277).*

Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει και με απαντήσεις του τύπου «δεν μπορώ να προσδιορίσω τον επόμενο» ή «δεν μπορεί να βρεθεί ο επόμενος», στις οποίες οι μαθητές δεν διευκρινίζουν αν πιστεύουν ότι ο επόμενος αριθμός υπάρχει ή όχι.

Κεφάλαιο 2: Έρευνα

2.1 Στόχος, ερευνητικά ερωτήματα και υπόθεση

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να εξεταστεί η κατανόηση μαθητών της δευτεροβάθμιας για την πυκνή διάταξη των ρητών πριν και μετά από σύντομη παρέμβαση βασισμένη στην αξιοποίηση της ύπαρξης αριθμητικού μέσου σε οποιοδήποτε διάστημα.

Τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν τα εξής:

Α) Κατανοούν οι μαθητές την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών, όσον αφορά α) την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς και β) τη (μη) ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς;

Β) Η έκθεση στην πληροφορία για την ύπαρξη αριθμητικού μέσου σε οποιοδήποτε διάστημα υποστηρίζει την κατανόηση των μαθητών όσον αφορά α) την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς και β) τη (μη) ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς;

Γ) Αξιοποιούν αυθόρμητα (δηλαδή, χωρίς καθοδήγηση) την ιδέα του αριθμητικού μέσου, προκειμένου να αντιμετωπίσουν έργα σχετικά με την πυκνή διάταξη των αριθμών;

Με βάση τη συζήτηση που προηγήθηκε, κεντρική υπόθεση της έρευνας ήταν ότι η έκθεση των μαθητών στην ιδέα του αριθμητικού μέσου θα οδηγούσε του μαθητές να συμπεράνουν την απειρία των ενδιάμεσων σε ένα διάστημα, αλλά όχι τη (μη) ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς.

Η υπόθεση αυτή διερευνήθηκε με τη μέθοδο της μικρογενετικής ανάλυσης, σύμφωνα με την οποία οι συμμετέχοντες εκτίθενται σε μια νέα πληροφορία και στη συνέχεια μελετώνται οι τρόποι με τους οποίους την αξιοποιούν, καθώς και οι αλλαγές που αυτή επιφέρει στον τρόπο που σκέφτονται και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν (Siegler & Crowley, 1991; Opfer & Siegler, 2004).

2.3 Δείγμα

Το δείγμα ήταν 15 μαθητές, αγόρια, της Β΄ τάξης του Λυκείου. Όλοι οι μαθητές ήταν της Θετικής κατεύθυνσης από διάφορα σχολεία της κεντρικής και δυτικής Θεσσαλονίκης που παρακολουθούσαν φροντιστηριακά μαθήματα σε διαφορετικά φροντιστήρια. Η συλλογή των δεδομένων έγινε μεταξύ 4 μηνών. Από τον Μάρτιο έως και τον Ιουνίου του 2018.

2.4 Ερευνητικά εργαλεία

Εργαλείο της έρευνας ήταν τα τεστ με τα έργα (Παράρτημα). Τα έργα αποτελούνταν από δύο τύπους σχετικά με την πυκνή διάταξη. Έργα σχετικά με το πλήθος των ενδιαμέσων αριθμών σε ένα διάστημα ρητών αριθμών και έργα για την μη ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς αριθμούς.

Σχετικά με τα έργα έχουμε πρώτα το ζευγάρι με δύο φυσικούς αριθμούς (Φ) το 0 και το1, στην συνέχεια δύο έργα με δεκαδικούς, ένα έργο με δεκαδικό με τρία δεκαδικά ψηφία (Δ1), το 1,512 και το 1,513 και ένα έργο με ένα δεκαδικό ψηφίο (Δ2), το 0,1 και το 0,2. Ακολουθούν τρία έργα με κλάσματα. Το πρώτο έργο με κλάσματα είναι, δύο κλάσματα που δεν υπερβαίνουν την μονάδα και είναι ομώνυμα (Κ1), το 2/5 και το 3/5. Το δεύτερο έργο με κλάσματα είναι δύο κλάσματα που υπερβαίνουν την μονάδα και τα δύο και έχουν ίδιους αριθμητές (Κ2), το 9/5 και το 9/4. Το τρίτο έργο, είναι δυο κλάσματα που υπερβαίνουν την μονάδα με διαφορετικούς αριθμητές και παρανομαστές (Κ3), το 9/5 και το 7/3. Το τελευταίο έργο στην απειρία είναι ένας δεκαδικός και ένα κλάσμα (Δ-Κ), το 0,5 και το 5/6.

Συνολικά στα πρώτα επτά έργα ρωτήθηκαν αν υπάρχει αριθμός ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς. Στην περίπτωση που η απάντηση τους ήταν άπειροι τους ζητήθηκε να εξηγήσουν. Στα δύο τελευταία έργα ρωτήθηκαν αν συμφωνούν σε μια υπόθεση της μορφής: Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 0,2 είναι το 0,3 διότι μετά το 2 είναι το 3 και ο αμέσως επόμενος αριθμός του 2/7 είναι το 3/7 διότι μετά το 2 είναι το 3. Σε κάθε περίπτωση τους ζητήθηκε να εξηγήσουν για ποιο λόγο συμφωνούν ή διαφωνούν.

Τέλος, στην δεύτερη συνάντηση (μετά - έλεγχος) ακολούθησαν δύο τελευταίες ερωτήσεις γενίκευσης χρησιμοποιώντας μεταβλητές α και β. Η πρώτη ερώτηση τους ρωτούσε αν μπορεί να προσδιοριστεί ποια θα είναι η πρώτη και ποια η τελευταία τιμή που θα πάρει το x όταν το x ανήκει σε ένα ανοιχτό διάστημα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών και η δεύτερη ερώτηση ήταν αν μπορεί να προσδιοριστεί πόσοι αριθμοί θα είναι ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α και β.

2.5 Παρέμβαση

Η παρέμβαση βασίστηκε στην ιδέα ότι είναι δυνατόν να βρεθεί πάντα ο αριθμητικός μέσος ανάμεσα σε οποιουσδήποτε αριθμούς. Δηλαδή, αν έχω δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α και β ότι μπορώ να βρω τον μέσο τους με τον τύπο (α+β)/2 σε κάθε περίπτωση. Άρα, ότι μπορώ να βρω πάντα κάποιον ακόμα, ενδιάμεσα σε ένα ζευγάρι ρητών αριθμών. Αυτή ιδέα μπορεί δυνητικά να υποστηρίξει τους μαθητές έτσι ώστε να καταλάβουν την απειρία και αντίστοιχα ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αφού αν πάρω έναν μεγαλύτερο αριθμό υποθέτοντας ότι είναι ο αμέσως επόμενος πάντα θα υπάρχει κάποιος ενδιάμεσος σύμφωνα με τον τύπο του αριθμητικού μέσου ανάμεσα στον αριθμό που είχα και στον επόμενο που έθεσα.

Στην περίπτωση που δεν θυμόντουσαν τον ορισμό και τον τύπο του αριθμητικού μέσου γινόταν μια υπενθύμιση και τους δινόταν ο τύπος. Τους ζητήθηκε να βρουν τον αριθμητικό μέσο σε διάφορα ζευγάρια φυσικών και μη φυσικών αριθμών. Σε κάθε ζευγάρι ρωτήθηκαν αν μπορούν να βρουν τον αριθμητικό μέσο ανάμεσα στον αριθμητικό μέσο που βρήκαν και σε έναν από τους δύο αρχικούς αριθμούς. Επίσης, δόθηκε στους μαθητές κομπιουτεράκι για να διευκολυνθούν στις πράξεις. Να αναφέρουμε ότι στον μετά έλεγχο δεν έγινε καμία ρητή αναφορά στον αριθμητικό μέσο, ώστε να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές είναι σε θέση να τον ανακαλέσουν και να τον χρησιμοποιήσουν από μόνοι τους.

2.6 Διαδικασία

Όλες οι συνεντεύξεις έγιναν ατομικά, κατ' οίκον ή στο φροντιστήριο. Με κάθε μαθητή πραγματοποιήθηκαν δύο συναντήσεις. Η κάθε συνάντηση είχε διάρκεια κατά μέσο όρο 30 - 40 λεπτά. Οι δύο συναντήσεις έγιναν μεταξύ δύο ή τριών εβδομάδων περίπου η μία από την άλλη. Η συλλογή έγινε σε διάστημα 4 μηνών από τον Μάρτιο έως τον Ιούνιο του 2018.

Στην πρώτη συνάντηση δόθηκε ένα τεστ με τις εννιά ερωτήσεις του προέλεγχου. Ρωτήθηκαν για το αν υπάρχει αριθμός ανάμεσα σε κάποια ζευγάρια αριθμών με σκοπό να εξεταστεί αν και κατά πόσο κατανοούν την απειρία μεταξύ ρητών αριθμών. Αυτό το ερώτημα έγινε σε επτά ερωτήσεις όπως αναφέραμε στην ενότητα ερευνητικά εργαλεία (2.4).

Στην συνέχεια ακολούθησε η παρέμβαση χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό μέσο δύο αριθμών. Τους ζητήθηκε να βρουν τον αριθμητικό μέσο, σε ζευγάρια φυσικών αριθμών, δεκαδικών και κλασμάτων. Αυτή η διαδικασία συνεχίστηκε, μεταξύ του αριθμητικού μέσου που βρήκαν και ενός από τους δύο αρχικούς αριθμούς. Ρωτήθηκαν για πόσο θα μπορούν να συνεχίζουν την διαδικασία του αριθμητικού μέσου και αν αυτή ή διαδικασία θα σταματάει κάπου.

Στην δεύτερη συνάντηση τους δόθηκε το ίδιο ερωτηματολόγιο με την πρώτη συνάντηση και ρωτήθηκαν αν θέλουν να αλλάξουν κάποια από τις ερωτήσεις τους από την πρώτη συνάντηση. Στην πρώτη ερώτηση που απαντούσαν ότι ενδιάμεσα υπάρχει πεπερασμένο πλήθος έγινε μια πρώτη νύξη ρωτώντας τους μαθητές για το αν ανάμεσα στους αριθμούς που αναφέρουν δεν υπάρχει κανένας άλλος αριθμός. Αν η απάντηση ήταν ότι δεν υπάρχει έγινε και μία δεύτερη νύξη για το αν μπορούν να βρουν τον αριθμητικό μέσο αυτών των δύο αριθμών. Μετά ρωτήθηκαν αν θέλουν να αλλάξουν κάποια απάντηση τους στις ερωτήσεις 8 και 9 που αναφέρονταν στον επόμενο αριθμό. Στην πρώτη ερώτηση που απαντούσαν ότι ο επόμενος είναι κάποιος άλλος αριθμός ή συμφωνούσαν με το παράδειγμα ρωτήθηκαν αν ανάμεσα σε αυτούς του δύο αριθμούς υπάρχει άλλος αριθμός. Αν η απάντηση ήταν ότι δεν υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ακολουθούσε μία δεύτερη νύξη για το αν θα μπορούσαν να βρουν τον αριθμητικό μέσο αυτών των δύο αριθμών και ζητήθηκε η τελική τους απάντηση για το αν υπάρχει ο αμέσως επόμενος και αν θα τον βρει τελικά το παιδί του σεναρίου στο έργο 8. Και τέλος ρωτήθηκαν αν θέλουν να αλλάξουν και κάτι στο έργο 9 ή όχι. Επιπλέον δόθηκαν τρία νέα ερωτήματα γενίκευσης με μεταβλητές στα οποία δεν έγινε καμία νύξη στον αριθμητικό μέσο.

Κεφάλαιο 3: Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε δύο ενότητες, μια για την απειρία μεταξύ δύο αριθμών και μια για την μη ύπαρξη επόμενου αριθμού. Κύριο μέλημα μας είναι να ερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές την απειρία και τον επόμενο πριν και μετά από την παρέμβαση. Ακόμα παρατηρούμε κατά πόσο μπορούν να μεταφέρουν την γνώση σε ένα πιο γενικό πλαίσιο με χρήση μεταβλητών.

3.1Απειρία

Στην ενότητα αυτή είχαμε κοινά έργα προ ελέγχου και μετά ελέγχου. Οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα για την απειρία κατηγοριοποιήθηκαν σε 5 κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσος αριθμός» (ΚΕ). Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» (ΠΠ-), όπου αναφέρονται σε «λίγους» ενδιάμεσους αριθμούς, συνήθως δεκαδικοί με το πολύ τρία δεκαδικά ψηφία. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» (ΠΠ+), με το πλήθος των ενδιάμεσων να προσδιορίζεται με τη χρήση «μεγάλων» αριθμών (για παράδειγμα, «είναι δισεκατομμύρια»). Τέλος, η τέταρτη κατηγορία περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι» (ΑΠ), στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και περιγραφές όπως «είναι αμέτρητοι», «δεν τελειώνουν ποτέ».

Οι μαθητές που χρειάστηκαν νύξη είναι με κόκκινο και πλάγια γράμματα στον παρακάτω Πίνακα 2 (Μ10, Μ12, Μ7, Μ15, Μ14, Μ9, Μ8, Μ1, Μ6). Παρατηρούμε ότι χρειάστηκαν νύξη οι 9 από τους 15 μαθητές, έτσι ώστε να απαντήσουν «άπειροι ενδιάμεσοι». Από τους υπόλοιπους 6 μαθητές οι 4 απαντούσαν «άπειροι» στον προέλεγχο όπως και στον μετά έλεγχο. Οι βοηθητικές νύξεις έγιναν στο πρώτο έργο με τους δεκαδικούς 1,512 και 1,513. Οι νύξεις ήταν απαραίτητες σχεδόν σε όλους τους μαθητές, ενώ μόνο ένας μαθητής, ο μαθητής 4 (Μ4), δεν χρειάστηκε καμία νύξη και ενώ στην αρχή υποστήριζε πεπερασμένο πλήθος σε όλες τις ερωτήσεις, μεταφέρθηκε στην απειρία και στις επτά ερωτήσεις με αιτιολογία τον αριθμητικό μέσο, όπως είπε, σε όλες τις ερωτήσεις θα υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσα. Συγκεκριμένα απάντησε: «Το έψαξα και όλα είναι άπειρα». Του ζήτησα να εξηγήσει και ανέφερε χωρίς νύξη ότι σύμφωνα με τον αριθμητικό μέσο που λέγαμε την προηγούμενη φορά σε όλες τις ερωτήσεις θα υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσα. Στον μαθητή Μ14 έγινε μόνο μία νύξη και μετά άλλαξε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις σε απειρία, οπότε δεν χρειάστηκε δεύτερη νύξη. Συγκεκριμένα αναφέρει «θα σου βάλω και το σηματάκι του απείρου και κλειδώνω» και στις επόμενες ερωτήσεις αναφέρει «επειδή είναι ίδιας λογικής πάω με το πρώτο» και συνεχίζει αναφέροντας ότι «υπάρχουν άπειροι τελικά παντού, δηλαδή δεν τελειώνουν ποτέ». Στην ομάδα 2, ο μαθητής 10 (Μ10) στον προέλεγχο σε μια μόνο ερώτηση δεν είχε απαντήσει άπειροι. Μετά από τις νύξεις λέει ότι υπάρχει αριθμός ανάμεσα. Στην ερώτηση πόσοι υπάρχουν το σκέφτεται και λέει άπειροι.

Σε όλους Πίνακες που θα ακολουθήσουν υπάρχουν στήλες για τον προ έλεγχο (ΠροΕ) και στήλες για τον μετά έλεγχο (ΜεταΕ), οι οποίες δηλώνουν το πλήθος των απαντήσεων των μαθητών στον προέλεγχο και στον μετά έλεγχο αντίστοιχα.

Στον παρακάτω Πίνακα 1, παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας απάντησης των μαθητών ως προς την απειρία ανά έργο στον προέλεγχο (ΠροΕ) και στον μετά έλεγχο (ΜεταΕ). Στον πίνακα που ακολουθεί σε κάθε κελί είναι το πλήθος των απαντήσεων των μαθητών.

Πίνακας 1. Πλήθος απαντήσεων για απειρία ανά έργο (σύνολο μαθητών: 15)

Έργα	**ΚΕ**		**ΠΠ-**		**ΠΠ+**		**ΑΠ**	
	ΠροΕ	**ΜεταΕ**	**ΠροΕ**	**ΜεταΕ**	**ΠροΕ**	**ΜεταΕ**	**ΠροΕ**	**ΜεταΕ**
Φ	0	0	4	2	3	2	8	11
Δ1	5	0	5	2	0	1	5	12
Δ2	1	0	7	3	0	2	7	10
Κ1	2	0	7	3	0	1	6	11
Κ2	3	0	6	3	0	1	6	11
Κ3	1	0	7	2	0	2	7	11
Δ-Κ	0	0	7	4	1	0	7	11
Σύνολο απαντήσεων	12	0	43	19	4	9	46	77

Σημείωση: *Φ:0 - 1, Δ1: 1,512 - 1,513, Δ2: 0,1 - 0,2, Κ1: 2/5 – 3/5, Κ2: 9/5 - 9/4, Κ3: 9/5 - 7/3, Δ-Κ: 0,5 - 5/6.*

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται ότι η επικρατούσα απάντηση στον προέλεγχο είναι ότι το πλήθος των ενδιάμεσων είναι πεπερασμένο. Συνολικά, όλες οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές για τις ερωτήσεις σχετικά με την απειρία ήταν 105. Στον προέλεγχο οι απαντήσεις που αναφέρονται σε «κανένας ενδιάμεσα» (ΚΕ), «πεπερασμένοι λίγοι ως τρία δεκαδικά ψηφία» (ΠΠ-) και «πεπερασμένοι πολλοί, περισσότερα από τρία δεκαδικά ψηφία» (ΠΠ+) είναι συνολικά 59 (56,19 %), ενώ στον μετά έλεγχο είναι 28 (26,7 %). Οι απαντήσεις που αναφέρονται στο άπειρο στον προέλεγχο είναι 46 (43,81 %), ενώ στον μετά έλεγχο είναι 77 (73,3 %).Σημαντικό είναι το ότι στον μετά έλεγχο κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσα σε κανένα έργο. Η επικρατούσα απάντηση όπως φαίνεται στον μετά έλεγχο είναι το «άπειροι ενδιάμεσα» πάραυτα κάποιοι μαθητές συνεχίζουν να απαντούν με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Επιπλέον, παρατηρούμε στον παραπάνω Πίνακα 1 ότι τα διαφορετικά είδη αριθμών αντιμετωπίζονται διαφορετικά από τους μαθητές. Για παράδειγμα, στους φυσικούς αριθμούς (Φ) κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα τους. Αυτό ήταν αναμενόμενο διότι σύμφωνα με Vamvakoussiκαι Vosniadou (2004, 2007, 2010), οι μαθητές πρώτα αντιλαμβάνονται την απειρία των ενδιαμέσων σε δύο φυσικούς αριθμούς. Επίσης, μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών παρατηρούμε ότι 10 από τους 15 μαθητές στο έργο Δ1 λένε ότι δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσα. Υπάρχουν ελαφρές διαφορές μεταξύ των δύο ερωτήσεων των δεκαδικών (Δ1 και Δ2) όπως και μεταξύ των κλασμάτων (Κ1, Κ2 και Κ3).Επομένως, παρατηρούμε μία τάση των μαθητών στον προέλεγχο να απαντούν ότι δεν υπάρχει κανένας αριθμός ενδιάμεσα ή ότι υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί ενδιάμεσα. Μόνο 5 από τους 15 μαθητές απαντούν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσα σε δύο δεκαδικούς (Δ1). Μια άλλη τάση των μαθητών όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 είναι ότι στον μετά έλεγχο δεν απαντούν τόσο πεπερασμένους αριθμούς, αλλά τείνουν να απαντούν ότι υπάρχουν περισσότεροι ή άπειροι. Όσο αφορά τις στρατηγικές των μαθητών κάποιοι μαθητές, όπως για παράδειγμα, ο μαθητής 1, ο μαθητής 7 (Μ7) και ο μαθητής 8 (Μ8) χρησιμοποιούν παντού δεκαδικούς αριθμούς. Όπου συναντούν κλάσμα το μετατρέπουν σε δεκαδικό αριθμό κάνοντας την διαίρεση και όλες οι απαντήσεις τους είναι στην μορφή δεκαδικών.

Στον Πίνακα 2, φαίνεται το πλήθος των ρητών αναφορών σε πεπερασμένο πλήθος πριν και μετά την παρέμβαση με νύξη και χωρίς νύξη. Γίνεται μια προσέγγιση στο προφίλ των μαθητών για να δούμε ποιοι μαθητές έδωσαν απαντήσεις πεπερασμένοι και μη πεπερασμένοι και παρατηρούμε πως μετακινούνται οι μαθητές. Ρητές αναφορές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Στην κάθετη στήλη είναι ο προέλεγχος (ΠροΕ) και όλα τα έργα που δόθηκαν. Στην οριζόντια στήλη είναι ο μετά έλεγχος (ΜεταΕ) και τα ίδια έργα που δόθηκαν σε αυτόν. Σε κάθε κελί είναι οι μαθητές (Μ1 ο μαθητής 1, Μ2 ο μαθητής 2, Μ3 ο μαθητής 3 και ούτω καθεξής) ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν. Το 0 σημαίνει ότι δεν έκαναν καμία ρητή αναφορά σε πεπερασμένο πλήθος. Το 7 σημαίνει ότι σε όλες τις ερωτήσεις έκαναν ρητές αναφορές σε πεπερασμένο πλήθος.

Πίνακας 2. Πλήθος ρητών αναφορών σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων πριν και μετά την παρέμβαση με και χωρίς νύξη

ΠροΕ	**ΜεταΕ**							
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	M3 M5 M11 M13							
1	*M10*							
2								
3	M2							
4	*M12*							
5	*M7*							
6	*M15*						*M8*	
7	M4 *M14*			*M9*			*M1*	*M6*

Σημείωση: *Με κόκκινο χρώμα είναι οι μαθητές οι οποίοι χρειάστηκαν νύξη*

Όπως παρατηρούμε στον παραπάνω Πίνακα 2 έχουμε μια ομάδα μαθητών (ομάδα 1) που ξεκίνησαν καλά και παρέμειναν καλά. Αυτή θα την ονομάσουμε ομάδα 1 και ανήκουν οι μαθητές Μ3, Μ5, Μ11,Μ13 και είναι αυτοί που απαντούν και πριν και μετά την παρέμβαση άπειροι. Έχουμε μια ομάδα (ομάδα 2) οι οποίοι ξεκίνησαν στον προέλεγχο απαντώντας σε κάποιες ερωτήσεις πεπερασμένο αλλά μετά δεν το ξανά ανέφεραν στον μετά έλεγχο, την οποία θα ονομάσουμε ομάδα 2 (Μ2, Μ4, Μ7, Μ10, Μ12, Μ14, Μ15). Αυτοί ξεκίνησαν στον προ έλεγχο (ΠροΕ) με απαντήσεις πεπερασμένου πλήθους και στον μετά έλεγχο (ΜεταΕ) κανείς δεν αναφέρθηκε ρητά σε πεπερασμένο πλήθος ενδιαμέσων αριθμών όπως φαίνεται στον Πίνακα 2. Τέλος, έχουμε μια ομάδα (ομάδα 3) η οποία περιλαμβάνει τους μαθητές που ξεκίνησαν με απαντήσεις τύπου «πεπερασμένο πλήθος» και παρέμειναν και στον μετά έλεγχο (ΜεταΕ) σε αυτή την κατηγορία και ειδικά ο μαθητής 6 (Μ6) τα λέει όλα πεπερασμένα. Αυτή είναι η ομάδα 3 και ανήκει ο μαθητής 1 (Μ1), ο μαθητής 6 (Μ6), ο μαθητής 8 (Μ8) και ο μαθητής 9 (Μ9).

Από την ομάδα 3, υπάρχουν δύο μαθητές που τα πηγαίνουν «καλύτερα», ο μαθητής 1 και ο μαθητής 9 (Μ1, Μ9) και δύο μαθητές οι οποίοι δεν είχαν αλλαγές και παρέμειναν σε απαντήσεις τύπου πεπερασμένο πλήθος (Μ8, Μ6). Αυτοί είναι: ο ένας μαθητής 6 (Μ6) ο οποίος σε όλες τις ερωτήσεις ακόμα και στο μετά έλεγχο αναφέρεται σε πεπερασμένο πλήθος αριθμών και ο μαθητής 8 (Μ8) ο οποίος σε 6 ερωτήσεις αναφέρεται σε πεπερασμένο πλήθος αριθμών ενδιάμεσα, ενώ μόνο στην ερώτηση με τους δυο φυσικούς αριθμούς (το 0 και το 1) αναφέρει ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσα. Επίσης, ο μαθητής 1 (Μ1) και ο μαθητής 9 (Μ9) απάντησαν πεπερασμένο πλήθος αριθμών σε τουλάχιστον έξι από τα επτά έργα του προελέγχου και διατήρησαν αυτή την απάντηση σε τουλάχιστον 3 από τα 7 έργα του μετά ελέγχου. Συγκεκριμένα, ο μαθητής 9 (Μ9), ο οποίος ανήκει στην ομάδα 3, ενώ στον προέλεγχο αναφέρεται σε όλες τις ερωτήσεις σε πεπερασμένο πλήθος αριθμών, στον μετά έλεγχο αναφέρεται σε πεπερασμένο πλήθος σε τρεις ερωτήσεις. Στην ερώτηση με τους δεκαδικούς με ένα δεκαδικό ψηφίο, στην ερώτηση με τους φυσικούς αριθμούς και στην ερώτηση με τον ένα δεκαδικό και το κλάσμα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι ο μαθητής 1 (Μ1), όπου και αυτός ανήκει στην ομάδα 3 και αναφέρεται στον προέλεγχο σε όλες τις ερωτήσεις σε πεπερασμένο πλήθος και αλλάζει από πεπερασμένο σε άπειρο μόνο την πρώτη ερώτηση με τους αριθμούς με τα τρία δεκαδικά ψηφία στην οποία γίνονται και οι δύο νύξεις και στις επόμενες συνεχίζει να απαντάει ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ενδιάμεσα. Συγκεκριμένα στο δεύτερο έργο είδε την απάντηση που είχε δώσει ότι ανάμεσα υπάρχουν 20 με 25 αριθμοί και απάντησε κατευθείαν χωρίς σκέψη ότι κρατάει την ίδια απάντηση. Διαβάζει την επόμενη και από αρκετοί τώρα λέει 9. Το ίδιο συμβαίνει και στις επόμενες, δηλαδή συνεχίζει να πιστεύει ότι υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί και δεν φαίνεται να σκέπτεται καθόλου τις νύξεις που έγιναν στο πρώτο έργο.

Όμως, υπάρχουν και μαθητές με μεγάλες διαφορές, οι οποίοι ενώ στον προέλεγχο έκαναν ρητές αναφορές σε πεπερασμένο πλήθος σε όλες τις ερωτήσεις, στον μετά έλεγχο απαντούν σε όλες τις ερωτήσεις ότι έχουμε άπειρους ενδιάμεσα. Οι μαθητές Μ12, Μ7, Μ15, Μ4 και Μ14 (5 από τους 15) είχαν την μεγαλύτερη αλλαγή. Πριν την παρέμβαση αναφέρονταν σε πεπερασμένο πλήθος ενώ μετά την παρέμβαση αναφέρθηκαν σε απειρία σε όλες τις ερωτήσεις. Αυτοί οι μαθητές ανήκουν στην ομάδα 2.

Λίγο πιο αναλυτικά για τους μαθητές της ομάδας 2, έχουμε ότι ο μαθητής 12 (Μ12) αναφέρει στο πρώτο έργο, δηλαδή ανάμεσα στους αριθμούς 1,512 και 1,513 μετά την παρέμβαση ότι δεν υπάρχει αριθμός ο οποίος να έχει διαφορά ένα. Στην ερώτηση τι εννοείς απαντάει «όχι διαφορά ένα, να έχει .. εσωτερικά, μόνο οι δεκαδικοί είναι, αλλά εάν σκεφτείς τους φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει.. θα μου πεις δεν είναι φυσικοί αριθμοί.. το αφήνω έτσι όπως είναι αλλά ξέρω ότι δεν θα είναι σωστό γιατί θα μπορούσα να πω ότι είναι εννέα αλλά δεν θα το πω.. όχι θα απαντήσω ότι δεν υπάρχει». Στην συνέχεια γίνεται η νύξη για το αν μπορεί να βρει τον αριθμητικό μέσο και απαντάει ότι μπορεί και το αλλάζει και λέει ότι υπάρχει, το σκέφτεται και απαντάει ότι υπάρχουν 9. Στην συνέχεια γίνεται η δεύτερη νύξη και λέει ότι υπάρχουν άπειροι τελικά.

Όπως παρατηρούμε στον παραπάνω Πίνακα 2, οι 9 από τους 15 είχαν αλλαγή στις απαντήσεις τους μετά την παρέμβαση, όμως έφτασαν στο άπειρο σε κάποιες ερωτήσεις. Απάντησαν πεπερασμένο πλήθος, σε όλες τις ερωτήσεις και σε 6 ερωτήσεις αντίστοιχα και δεν άλλαξαν τις απαντήσεις στον μετά έλεγχο.

Σημαντικό είναι ότι κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι ανάμεσα σε κάποιο διάστημα δεν υπάρχει κανένας αριθμός. Επίσης, κανένας μαθητής μετά την παρέμβαση δεν μετακινήθηκε προς το πεπερασμένο πλήθος.

3.2 Επόμενος

Τα έργα για την μη ύπαρξη του επόμενου είναι κοινά στον προ έλεγχο και στον μετά έλεγχο. Οι απαντήσεις των μαθητών στα δύο τελευταία έργα του προελέγχου για τη (μη) ύπαρξη του επόμενου ομαδοποιήθηκαν στις εξής κατηγορίες:

Κατηγορία Α: Ο επόμενος είναι ο δεδομένος αριθμός. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που συμφώνησαν με τις δηλώσεις «ο επόμενος του 0,15 είναι ο 0,16» και «ο επόμενος του 2/7 είναι ο 3/7».

Κατηγορία Β: Ο επόμενος είναι άλλος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι διαφώνησαν με τις παραπάνω δηλώσεις, και πρότειναν έναν εναλλακτικό «επόμενο». Στην περίπτωση του δεκαδικού, οι απαντήσεις τύπου Β προέκυψαν συνήθως προσθέτοντας δεκαδικά ψηφία στον αριθμό (για παράδειγμα 0,151), αλλά και προθέτοντας μια υποδιαστολή ακόμα (0,15.1 ή 0,15 κόμμα κάτι).

Στην περίπτωση των κλασμάτων, οι απαντήσεις τύπου Β προέκυψαν πάλι είτε προσθέτοντας δεκαδικά ψηφία στον αριθμητή (για παράδειγμα 2,1/7), είτε με μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό, συχνά λαμβάνοντας υπόψη μόνο ορισμένα αρχικά ψηφία της δεκαδικής μορφής (για παράδειγμα 0,29 ως επόμενος του 2/7 που είναι ίσο με 0,28 ή 0,286 ως επόμενος του 2/7 που είναι ίσο με 0,285).

Κατηγορία Γ: Ο επόμενος είναι άλλος (άπειρα δεκαδικά ψηφία). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρθηκαν σε ένα δεκαδικό με άπειρα δεκαδικά ψηφία ως τον επόμενο, είτε του 0,15 είτε του 2/7 (για παράδειγμα 0,1500…0001 ή 0,2857142850…001). Να αναφέρουμε ότι τα ψηφία 0,285714285 είναι τα ψηφία που έβγαζε το κομπιουτεράκι στην διαίρεση 2 δια 7.

Κατηγορία Δ: Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που υποστήριξαν ότι ο επόμενος υπάρχει και μπορεί να προσδιοριστεί (χωρίς να τον προσδιορίζουν, για παράδειγμα κάποιος θα υπάρχει. Θα είναι 0,155, αλλά μετά, αν συνεχίσει, θα βρει άπειρους, δεν θα σταματάνε. Θα τον βρει με δυσκολία. Άλλο παράδειγμα: όχι το 0,151, θα είναι άλλος. Αν κάτσει και ψάξει θα το βρει, φυσικά και υπάρχει. Άλλο παράδειγμα είναι ότι υπάρχουν και άλλοι αριθμοί ανάμεσα τους. Θα τον βρει αν το κάνει με υπολογιστή, θα είναι πιο εύκολο για να κάνει τον τύπο που κάναμε με τις πράξεις.

Κατηγορία Ε: Υπάρχει ο επόμενος (δεν προσδιορίζεται). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που υποστηρίζουν ότι ο επόμενος υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια (εξαιτίας της απειρίας των αριθμών, για παράδειγμα υπάρχει επόμενος, αλλά δεν θα τον βρει γιατί, όπως πριν, θα βρίσκει συνέχεια αριθμούς και δεν θα σταματά ποτέ).

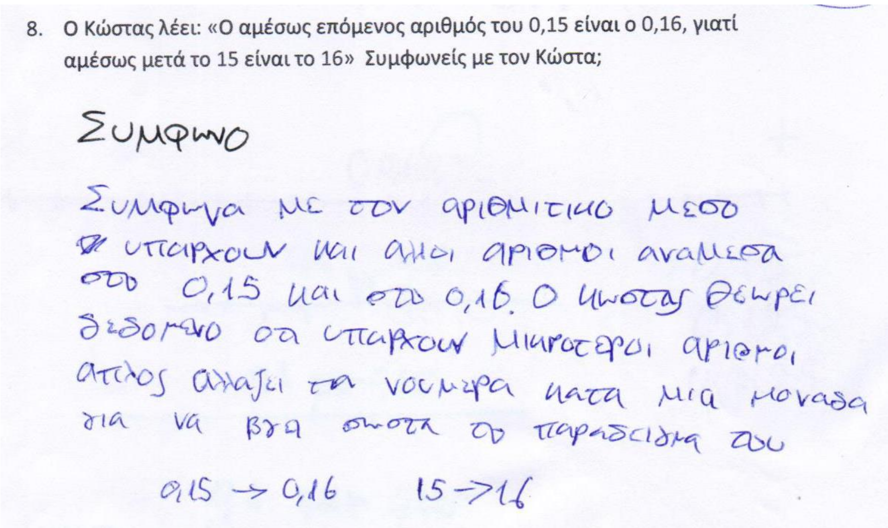
Κατηγορία Ζ: Άλλη απάντηση. Σε αυτή την κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις οι οποίες δεν μπορούσαν να ενταχθούν σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες. Πρόκειται για τις απαντήσεις δύο μαθητών (Μ6, Μ11), οι οποίοι απάντησαν ότι ο επόμενος αριθμός εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια (για παράδειγμα ναι, υπάρχει, αλλά θα πρέπει να είναι πιο συγκεκριμένη η εκφώνηση στο πόσα ψηφία θέλει να έχει. Άλλο παράδειγμα σύμφωνα με τον αριθμητικό μέσο θα υπάρχουν κι άλλοι. Αλλά συμφωνώ [ότι το 0,16 είναι ο επόμενος του 0,15] γιατί ο Κώστας [το παιδί του σεναρίου] αλλάζει τα νούμερά του ανά μία μονάδα. Θα πρέπει να είναι πιο συγκεκριμένη η εκφώνηση στο πόσα ψηφία θέλει να έχει. Αυτοί οι μαθητές στην ουσία παρακάμπτουν το πρόβλημα, δεν απαντούν ευθέως.

Σημειώνουμε ότι στις απαντήσεις και των δύο πρώτων κατηγοριών (Α, Β), ο «επόμενος» των δεδομένων αριθμών αναζητείται σε ένα διακριτό, πεπερασμένο, σύνολο αριθμών που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών. Η ορθή απάντηση («Δεν υπάρχει επόμενος») δε δόθηκε από κανένα μαθητή, ούτε στο προέλεγχο, ούτε στο μετά έλεγχο και δεν εμφανίζεται στα αποτελέσματα. Όλοι υποστηρίζουν ότι υπάρχει ο επόμενος και οι περισσότεροι αναφέρουν κάποιον αριθμό είτε με τρία δεκαδικά ψηφία είτε με πολλά δεκαδικά ψηφία. Στον προέλεγχο μόνο ένας μαθητής και μόνο στην ερώτηση 9 αναφέρει ότι δεν μπορεί να προσδιορίσει ποιος θα είναι ο επόμενος του 2/7 (ερώτηση 9). Στον μετά έλεγχο λίγοι μαθητές (4 από τους 15 μαθητές) αναφέρουν ότι σίγουρα υπάρχει αλλά δεν μπορούν οι ίδιοι να τον προσδιορίσουν.

Για παράδειγμα τρεις μαθητές από τους 15 αναφέρουν ότι ο επόμενος του 0,15 ότι είναι ο 0,150000….01 και αναφέρουν ότι είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε τα μηδενικά, στον προέλεγχο. Αυτοί οι μαθητές κατατάσσονται στην κατηγορία υπάρχει επόμενος με άπειρο πλήθος ψηφίων. Επίσης, αρκετοί (6 από τους 15 μαθητές), στον προέλεγχο, αναφέρουν τον επόμενο του 0,15 ως τον 0,151. Ένας άλλος μαθητής συμφωνεί ότι ο επόμενος του 0,15 είναι ο 0,16 γιατί με βάση το 0,15 που έχει δύο δεκαδικά ψηφία είναι λογικό, όπως αναφέρει, ο επόμενος να είναι αριθμός με δύο δεκαδικά ψηφία (μαθητής Μ2).

Ο μαθητής 6 (Μ6), ο οποίος ανήκει στην ομάδα 3, μετά την παρέμβαση αναφέρει για τον επόμενο του 0,15 ότι σύμφωνα με τον αριθμητικό μέσο υπάρχουν και άλλοι αριθμοί ανάμεσα στο 0,15 και στο 0,16, ο Κώστας (αναφέρεται στην ερώτηση 8) όμως, θεωρεί δεδομένο ότι υπάρχουν μικρότεροι αριθμοί ανάμεσα απλός αλλάζει τα νούμερα κατά μία μονάδα για να βγει σωστά το παράδειγμα του, δηλαδή όπως πάμε από το 15 στο 16 προσθέτοντας 1 έτσι πάει από το 0,15 στο 0,16 αντίστοιχα.

Απάντηση που έδωσε ο μαθητής 6 (Μ6) στην ερώτηση 8



8. Ο Κώστας λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 0,15 είναι ο 0,16, γιατί αμέσως μετά το 15 είναι το 16» Συμφωνείς με τον Κώστα;

Συμφωνο

Συμφωνα με τον αριθμιτικο μεσο
υπαρχουν και αλλοι αριθμοι αναμεσα
στο 0,15 και στο 0,16. Ο κωστας θεωρει
δεδομενο οτι υπαρχουν μικροτεροι αριθμοι,
απλος αλλαζει τα νουμερα κατα μια μοναδα
για να βγει σωστο το παραδειγμα του

0,15 → 0,16 15 → 16

Στην ερώτηση με τον επόμενο του 2/7 κάποιοι μαθητές συμφωνούν. Αρκετοί μαθητές μετατρέπουν το κλάσμα σε δεκαδικό κάνοντας την διαίρεση 2 δια 7 στο κομπιουτεράκι. Ένας μαθητής (μαθητής Μ3), ο οποίος ανήκει στην ομάδα 1, για να βρει τον επόμενο, γράφει όσα ψηφία εμφάνισε το κομπιουτεράκι και μετά βάζει ένα μηδέν με μια παύλα από πάνω και στο τέλος τον αριθμό ένα. Στο σημείο αυτό με ρώτησε αν μπορεί να βάλει την παύλα πάνω από το μηδέν. Στην συνέχεια ο συγκεκριμένος μαθητής ρωτήθηκε τι σημαίνει η παύλα και πόσα μηδενικά θα έχει και απάντησε δεν ξέρω θα τείνει στο άπειρο και μετά ο αριθμός 1.

Ένας άλλος μαθητής (Μ11), της ομάδας 1 απαντάει ότι επόμενος του 2/7 είναι το 2,5/7 και μετά λέει «αυτό όμως δεν στέκει οπότε συμφωνώ ότι ο επόμενος του 2/7 είναι το 3/7».

Σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι στον μετά έλεγχο λιγοστεύουν οι απαντήσεις στον επόμενο με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία και απαντούν με περισσότερα δεκαδικά ψηφία.

Στους Πίνακες 3 και 4 παρατηρούμε τις μετατοπίσεις των μαθητών ως προς την κατηγορία απάντησης που έδωσαν στον προέλεγχο και το μετά έλεγχο για τον επόμενο αριθμό ενός δεκαδικού και ενός κλάσματος, αντίστοιχα. Με μπλε γράμματα είναι οι μαθητές της ομάδας 1 (Μ3, Μ5, Μ13, Μ11). Με κόκκινα γράμματα είναι οι μαθητές της ομάδας 3 (Μ1, Μ6, Μ8, Μ9) και με μαύρα γράμματα είναι οι μαθητές της ομάδας 2 (Μ2, Μ4, Μ7, Μ12, Μ10, Μ14, Μ15). Ενώ αυτοί που χρειάστηκαν νύξη είναι με έντονη γραμματοσειρά.

Οι βοηθητικές νύξεις έγιναν στο πρώτο έργο για τον επόμενο, δηλαδή στο έργο που αναφέρει ότι ο επόμενος του 0,15 είναι το 0,16 και τους ρωτάει αν συμφωνούν. Κανείς μαθητής δεν άλλαξε αυθόρμητα την αρχική του απάντηση. Οι νύξεις ήταν απαραίτητες σε όλους τους μαθητές.

Πίνακας 3. Μετατόπιση των μαθητών ως προς τις κατηγορίες απάντησης στο πρώτο έργο («επόμενος» του 0,15) από τον προέλεγχο (ΠροΕ) στο μετά έλεγχο (ΜεταΕ).

ΠροΕ	ΜεταΕ					
	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ(άλλη)
Α	**Μ2**				**Μ10**	**Μ6**
Β				**Μ1 Μ4 Μ7 Μ9 Μ12**	**Μ8 Μ14 Μ15**	
Γ			**Μ3**			
Δ						
Ε					**Μ5 Μ13**	
Ζ						**Μ11**

Σημείωση:
Α: Ο δεδομένος είναι ο επόμενος αριθμός
Β. Υπάρχει άλλος επόμενος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων)
Γ. Υπάρχει άλλος επόμενος (άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων)
Δ. Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί
Ε. Υπάρχει επόμενος, δεν μπορεί να προσδιοριστεί.
Ζ: Άλλη

Με μπλε είναι οι μαθητές της ομάδας 1
Με μαύρο είναι οι μαθητές της ομάδας 2
Με κόκκινο είναι οι μαθητές της ομάδας 3

Πίνακας 4. Μετατόπιση των μαθητών ως προς τις κατηγορίες απάντησης στο («επόμενος» του 2/7) από τον προέλεγχο (ΠροΕ) στο μετά έλεγχο (ΜεταΕ).

ΠροΕ	ΜεταΕ					
	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
Α	Μ2 Μ9			Μ1 Μ4 Μ7	Μ10	Μ6
Β		Μ12 Μ15			Μ8 Μ14	
Γ			**Μ3**		**Μ13**	
Δ						
Ε					**Μ5**	
Ζ						**Μ11**

Σημείωση:

Α: Ο δεδομένος είναι ο επόμενος αριθμός

Β. Υπάρχει άλλος επόμενος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων)

Γ. Υπάρχει άλλος επόμενος (άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων)

Δ. Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί

Ε. Υπάρχει επόμενος, δεν μπορεί να προσδιοριστεί.

Ζ: Άλλη

Με μπλε είναι οι μαθητές της ομάδας 1
Με μαύρο είναι οι μαθητές της ομάδας 2
Με κόκκινο είναι οι μαθητές της ομάδας 3

Στον Πίνακα 3, παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι μαθητές στον προ έλεγχο (ΠροΕ) είναι στην Α και Β κατηγορία ενώ στον μετά έλεγχο (ΜεταΕ) μετατοπίζονται σε πιο εκλεπτυσμένες κατηγορίες, δηλαδή υπάρχει ενός τύπου βελτίωση. Παρατηρούμε ότι μόνο οι μαθητές της ομάδας 1 δεν μετακινούνται καθώς και ο μαθητής 2 (Μ2), ο οποίος συμφωνεί ότι ο επόμενος του 0,15 είναι 0,16. Η ομάδα 2 (Μ2, Μ4, Μ7, Μ10, Μ12, Μ14, Μ15), εκτός από τον μαθητή Μ2 μετακινούνται από τις κατηγορίες Α και Β στις κατηγορίες Δ και Ε. Αντίστοιχα και η ομάδα 3 βλέπουμε ότι από τις κατηγορίες Α και Β μετακινείται στις κατηγορίες Δ, Ε και Ζ.

Ένα παράδειγμα μη μετατόπισης είναι ο μαθητής 5 (Μ5), ο οποίος αναφέρει στον προέλεγχο ότι ο επόμενος υπάρχει στην ερώτηση 8 αλλά λέει:

> *Δεν συμφωνώ ότι ο επόμενος του 0,15 είναι ο 0,16, γιατί ο επόμενος του 15 δεν είναι ο 16. Δεν μπορώ να προσδιορίσω τον επόμενο του. Θα μπορούσε να έχει άπειρα μηδενικά και στο τέλος τον αριθμό 1 ο ακριβώς επόμενος*

Ο ίδιος μαθητής (Μ5), της ομάδας 1, στην ερώτηση 9 λέει ότι δεν προσδιορίζεται και λέει ότι δεν θα τον βρει. Δηλαδή, δεν κάνει ρητή αναφορά στον επόμενο. Στον μετά έλεγχο λέει ότι αναιρεί αυτό που είχε πει ότι θα μπορούσε να έχει άπειρα δεκαδικά και στο τέλος τον αριθμό 1 και λέει ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί, διότι δεν μπορεί να υπολογιστεί πόσα μηδενικά θα έχει, δεν μπορεί να το συλλάβει ο ανθρώπινος νους. Τέλος, και στα δύο έργα για τον επόμενο, απαντάει ότι υπάρχει αλλά εμείς δεν μπορούμε να τον προσδιορίσουμε.

Οι μαθητές 8 και 14 (Μ8, Μ14), της ομάδας 3 και 2 αντίστοιχα, στον μετά έλεγχο και στα δύο έργα αναφέρουν ότι υπάρχει σίγουρα ο επόμενος αλλά δεν προσδιορίζεται. Συγκεκριμένα, ο μαθητής 14 (Μ14) είπε ότι ένας επόμενος αριθμός θα υπάρχει, πάντα υπάρχει ο αμέσως επόμενος αλλά δεν θα τον βρει ο Κώστας (που αναφέρετε στην ερώτηση μας) ούτε με την βοήθεια του υπολογιστή γιατί είναι άπειροι δεν τελειώνουν ποτέ. Οι μαθητές 10, 13 και 15 αναφέρουν μόνο σε μία από τις δύο ερωτήσεις ότι ο επόμενος υπάρχει αλλά δεν προσδιορίζεται. Οι μαθητές Μ1, Μ2, Μ3, Μ4, Μ6, Μ7, Μ9, Μ11, Μ12 και στις δύο ερωτήσεις κάνουν ρητή αναφορά στον επόμενο είτε με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων είτε με άπειρο πλήθος ψηφίων.

Αρκετοί μαθητές συμφωνούν (7 στους 15 στον προέλεγχο και 3 στους 15 στον μετά έλεγχο) ότι ο επόμενος του 2/7 είναι ο 3/7. Μόνο οι μαθητές 8 (Μ8) και 14 (Μ14),των ομάδων 3 και 2 αντίστοιχα, δεν αναφέρονται ρητά στον επόμενο αριθμό σε καμία από τις δύο ερωτήσεις. Ο μαθητής 8 (Μ8), της ομάδας 3, είπε:

> *Δεν θα τον βρει τελικά γιατί αν κάνει την πράξη θα βρίσκει συνέχεια και άλλους αριθμούς. Σίγουρα υπάρχει, αλλά δεν είναι το 0,29 επόμενος του 2/7 γιατί δεν θα σταματάει ποτέ*

Να αναφέρουμε ότι στον προέλεγχο είχε κάνει την διαίρεση του 2 με το 7 και βρήκε 0,2857.. και είχε πει ότι ο επόμενος είναι το 0,29.

Ο Μ11, ο οποίος ανήκει στην ομάδα 1, παρέκαμψε στην ουσία, το πρόβλημα του επόμενου, λέγοντας ότι ο επόμενος εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια. Στο μετά έλεγχο διατήρησε αυτού του τύπου την απάντηση, αναγνωρίζοντας ταυτόχρονα την απειρία των ενδιάμεσων. Για παράδειγμα:

Δεν συμφωνώ [ότι το 0,16 είναι ο επόμενος του 0,15] . Γιατί μπορεί να είναι πάλι άπειροι, 0,151 ή 0,1511, ανάλογα πόσα ψηφία θέλω. Θα μπορούσε να τον βρει, αν ο επόμενος αριθμός θέλω να έχει 3 ψηφία και τα λοιπά. Αν ήταν πιο συγκεκριμένη η εκφώνηση θα μπορούσε να τον βρει.

Οι υπόλοιποι μαθητές της Ομάδας 1 (Μ3, Μ5, Μ13) έδωσαν απαντήσεις τύπου Γ ή Ε και στα δύο έργα στον προέλεγχο, τις οποίες διατήρησαν και στο μετά έλεγχο. Παρά τις νύξεις που τους έγιναν, δεν έφτασαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει επόμενος, καθώς δεν μπορούσαν να φανταστούν με ποιο τρόπο ένας αριθμός που δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον τύπο για να υπολογιστεί ο αριθμητικός μέσος.

Δεν μπορώ να βρω τον αριθμητικό μέσο γιατί δεν ξέρω πόσα μηδενικά έχει το 0,15000…..01 και είναι ένας θεωρητικός αριθμός. Δεν θα τον βρει ακριβώς ποτέ. Θα μπορούσαμε να δώσουμε κάποιον αριθμό που θα πλησιάζει. […] Ούτε με τον υπολογιστή θα τον βρω. Δεν μπορεί να προσεγγιστεί εύκολα, γιατί έχω απροσδιόριστα μηδενικά […]. Υπάρχει, αλλά δεν μπορώ να τον βρω. Κατά προσέγγιση θα μπορεί να είναι ο επόμενος το 0,15000000.....01 (Μ13)

Ο μαθητής 3 (Μ3), ο οποίος ανήκει στην ομάδα 1, στην ερώτηση 9 έκανε τις διαιρέσεις 2 δια 7 και 3 δια 7 με το κομπιουτεράκι και απάντησε:

Δεν συμφωνώ ότι ο 3/7 είναι ο επόμενος του 2/7 γιατί δεν γίνεται μετά το 0,285… να είναι ο 0,4… Παρατηρώ ότι για το 0,285… είναι ο άλλος αριθμός συν 0,2, ή λάθος το λέω; Ναι λάθος το λέω. Βρήκα ένα μοτίβο σε αυτούς τους δύο αριθμούς, όπου η διαίρεση του 2 δια 7 δίνει 0,285714285 και η διαίρεση του 3 δια 7 δίνει τον ίδιο με ένα 4 μπροστά. Έχει καμία σχέση αυτό; […] όχι δεν συμφωνώ με την Μαρία γιατί όπως είπαμε και στα προηγούμενα ερωτήματα υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα τους. Τελικά ο επόμενος είναι ο 0,285714285000….001. Τα μηδενικά τείνουν στο άπειρο

Την ίδια απάντηση διατήρησε και στον μετά έλεγχο.

Κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι δεν υπάρχει επόμενος. Κάποιοι μαθητές (7 από τους 15) απάντησαν ότι δεν μπορούν να τον προσδιορίσουν αλλά σίγουρα υπάρχει. Οι δύο μαθητές από αυτούς υποστηρίζουν ότι δεν θα τον βρούμε τον επόμενο γιατί δεν ξέρουμε πόσα μηδενικά θα έχει.

Οι μαθητές της Ομάδας 2 ξεκίνησαν στον προέλεγχο δίνοντας απαντήσεις τύπου Α ή Β και στα δύο έργα. Στο μετά έλεγχο, μετακινούνται σε απαντήσεις τύπου Δ ή Ε στο πρώτο έργο σχετικά με τον επόμενο (επόμενος του 0,15 είναι ο 0,16) με την εξαίρεση του Μ2 που παραμένει στην απάντηση Α, την οποία και διατηρεί και στο δεύτερο έργο (επόμενος του 2/7 είναι ο3/7). Δύο μαθητές της ομάδας αυτής (Μ12, Μ15) δίνουν λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις (τύπου Β) στο πρώτο έργο, σε σχέση με το δεύτερο έργο.

Παρόμοια, οι μαθητές της Ομάδας 3, ξεκινούν από απαντήσεις τύπου Α ή Β στο πρώτο έργο του επόμενου στον προέλεγχο και μετακινούνται προς τις κατηγορίες Δ και Ε, με την εξαίρεση του Μ6 που, παρόμοια με τον Μ11 της Ομάδας 1, παρακάμπτει το πρόβλημα, λέγοντας ότι ο επόμενος εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια. Στο δεύτερο έργο του επόμενου, ένας μαθητής (Μ9) της ομάδας αυτής ξεκινά και παραμένει στην απάντηση τύπου Α, ενώ οι υπόλοιποι απαντούν παρόμοια με το δεύτερο έργο του επόμενου.

Στον μετά έλεγχο, οι μαθητές της Ομάδας 2 και 3 που μετατοπίστηκαν προς πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις, χρησιμοποιούν τον αριθμητικό μέσο και την ιδέα της επαναλήψιμης διαδικασίας προκειμένου να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Για παράδειγμα:

> Μπορώ να βρω το μέσο [του 0,15 και του 0,151], ναι, υπάρχει, είναι ο 0,1505. Μπορεί να μη τον βρει [τον επόμενο του 0,15], γιατί αν κάνει συνέχεια την πράξη δε θα σταματήσει ποτέ .Δε θα τον βρει. Υπάρχει, αλλά δεν ξέρουμε ποιος είναι. (Μ8)

Επομένως, παρατηρούμε ότι στον δεκαδικό («επόμενος» του 0,15) οι περισσότεροι ξεκινάνε από τις κατηγορίες Α και Β και μετά μετατοπίζονται προς τις κατηγορίες Γ, Δ, Ε και Ζ εκτός από τον μαθητή Μ2, της ομάδας 2, παρόλο που σε αυτή την ερώτηση έγινε και η νύξη.

3.3 Έργα μεταφοράς με μεταβλητές

Οι μαθητές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες. Σε αυτούς που θεώρησαν ότι η απάντηση εξαρτάται από το ποιες τιμές θα πάρουν οι μεταβλητές α και β, σε αυτούς που έθεσαν αυτό τον περιορισμό και σε αυτούς που απαντούν ότι υπάρχουν άπειροι.

Στην πρώτη κατηγορία είναι οι μαθητές Μ1, Μ6, της ομάδας 3 και ο Μ10 της ομάδας 2, οι οποίοι ανέφεραν ότι εξαρτάται από τις μεταβλητές ή τα γράμματα. Αντίθετα οι μαθητές Μ6 και Μ10 έδωσαν συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές και αναφέρθηκαν σε πεπερασμένο πλήθος ενδιαμέσων αριθμών. Να σημειώσουμε ο μαθητής Μ10, παρόλο που στον προ έλεγχο απάντησε μόνο σε μία ερώτηση πεπερασμένο πλήθος και στον μετά έλεγχο σε καμία δεν κατάφερε να γενίκευση και να απαντήσει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ενδιάμεσα σε οποιοδήποτε διάστημα ρητών αριθμών.

Στον παρακάτω Πίνακα 5, παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση «αν έχω δυο οποιουσδήποτε αριθμούς α και β μπορεί να προσδιοριστεί πόσοι αριθμοί είναι ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς;».

Πίνακας 5. Αν έχω δυο οποιουσδήποτε αριθμούς α και β μπορεί να προσδιοριστεί πόσοι αριθμοί είναι ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς;

Απαντήσεις μαθητών	Αναφέρουν ρητά πλήθος αριθμών	Δεν προσδιορίζεται γιατί έχω μεταβλητές	Άπειροι αλλά θα σταματάει (δεν προσδιορίζεται)	Άπειροι
Μαθητές	Μ7	Μ6	Μ14	Μ2 Μ3 Μ4 Μ5 Μ8 Μ9 Μ11 Μ12 Μ13 Μ15
	Μ1	Μ10		

Ο μαθητής 6 (Μ6), της ομάδας 3, αναφέρει εξαρτάται από το ποιους έχω (π.χ. αν έχω 3 με 100 είναι πολλοί ενώ αν έχω 2 με 3 είναι λιγότεροι). Ο μαθητής 10 (Μ10), της ομάδας 2, αναφέρει δεν μπορώ να προσδιορίσω γιατί έχω μεταβλητές και δεν ξέρω τι τιμές παίρνουν. Ο μαθητής 7 (Μ7), της ομάδας 2, αναφέρει ότι ένας υπολογιστής θα βρει αμέτρητους αλλά ο άνθρωπος θα βαρεθεί να το κάνει. Αν πρέπει να πω αριθμό θα πω ένα εκατομμύριο. Παρομοίως και ο μαθητής 1 (Μ1), της ομάδας 3, αναφέρεται σε 20 με 30 αριθμούς. Ο μαθητής 14 (Μ14), της ομάδας 2, αναφέρει ότι υπάρχουν άπειροι αλλά θα σταματάει κάποια στιγμή, αλλά δεν μπορεί να προσδιορίσει πόσοι θα είναι, αν και το άπειρο σημαίνει ότι δεν θα σταματάει, όπως λέει. Η πλειοψηφία των μαθητών (10 στους 15) απαντούν ότι ανάμεσα στους αριθμούς α και β θα υπάρχουν άπειροι.

Στην τρίτη κατηγορία, στην οποία είναι οι μαθητές που απαντούν ότι υπάρχουν άπειροι, ενδιαφέρον παρουσιάζει ο μαθητής 9(Μ9), της ομάδας 3, ο οποίος αναφέρεται σε μια επαναλήψιμη διαδικασία, δηλαδή ότι θα είναι άπειροι, διότι ο αριθμός θα πάει 0,1 0,01 0,001 και ο μαθητής Μ12, της ομάδας 2, ο οποίος αναφέρει:

> *Δεν μπορεί να προσδιοριστούν οι αριθμοί γιατί είναι μεταβλητές, γιατί είναι πολλοί αριθμοί, είναι άπειροι. Στο πεδίο ορισμού δεν λέει μέχρι πόσους αριθμούς μπορώ να επιλέξω. Μπορεί το ένα να είναι εκατομμύριο το άλλο μείων ένα δισεκατομμύριο. Δεν μπορεί να προσδιοριστεί γιατί είναι πάρα μα πάρα πολλοί. Είναι άπειροι. Όταν λέω άπειροι εννοώ άπειροι* (Μ12)

και ο μαθητής 13 (Μ13), της ομάδας 1, ο οποίος αναφέρει:

> *Υπάρχουν άπειροι αλλά το άπειρο είναι ένας αριθμός που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε. Είναι ένα κατασκεύασμα.* (Μ13)

Όλοι οι μαθητές που αναφέρουν άπειροι θεωρούν ότι δεν προσδιορίζεται το πλήθος των ενδιαμέσων αριθμών. Τυπικά οι απαντήσεις τους έχουν την μορφή «όχι (δεν μπορεί να προσδιοριστεί), γιατί είναι άπειροι».

Στον Πίνακα 6, αναφέρονται οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση « Αν έχω έναν πραγματικό αριθμό $x \in (0,1)$.Μπορεί να προσδιοριστεί ποια θα είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;». Όπου Μ1 είναι ο μαθητής 1, όπου Μ2 ο μαθητής 2, όπου Μ3 ο μαθητής 3 και ούτω καθεξής.

Πίνακας 6. Αν έχω έναν πραγματικό αριθμό x∈(0,1). Μπορεί να προσδιοριστεί ποια θα είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;

Απαντήσεις μαθητών	0,100..	0,1 ή 0,01 ή 0,001	0,00…01	Δεν προσδιορίζεται γιατί έχει άπειρα μηδενικά	Δεν προσδιορίζεται γιατί είναι άπειροι οι αριθμοί
Μαθητές	M4	M1 M9 M6 M8	M2 M3 M7 M14 M11 M13 M15	M5	M10 M12

Οι 13 μαθητές από τους 15 μαθητές αναφέρονται σε κάποιον αριθμό ο οποίος θα είναι οι πρώτη τιμή. Για παράδειγμα ο μαθητής 4 (Μ4) αναφέρει ως πρώτη τιμή του διαστήματος τον αριθμό 0,100… Οι τέσσερις μαθητές (Μ1, Μ9, Μ6, Μ8) αναφέρονται σε κάποιον αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, όπως ο αριθμός 0,1 ή 0,01 ή 0,01. Οι 7 μαθητές από τους 15 αναφέρουν ως πρώτη τιμή τον αριθμό 0,00…01. Συγκεκριμένα, ο μαθητής 15 (Μ15) αναφέρει ως πρώτη τιμή του διαστήματος (0,1) τον αριθμό 0,000…001 αλλά αναφέρει ότι δεν ξέρει πόσα μηδενικά θα έχει αυτός ο αριθμός. Την ίδια απάντηση δίνουν και οι μαθητές Μ2, Μ3, Μ7, Μ14, Μ11, Μ13 και Μ15.

Συνολικά, οι 9 από τους 15 μαθητές αναφέρουν πρώτη τιμή ως έναν αριθμό με άπειρο πλήθος δεκαδικών αριθμών. Μόνο 2 μαθητές αναφέρουν ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή που θα πάρει το διάστημα, γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι.

Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα – Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να διερευνηθεί η κατανόηση μαθητών της δευτεροβάθμιας για την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών, πριν και μετά από μια παρέμβαση βασισμένη στην ύπαρξη αριθμητικού μέσου ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο αριθμούς. Εξετάστηκαν δύο πτυχές της πυκνής διάταξης, η απειρία των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς και η (μη) ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς.

Όπως αναμενόταν πριν την παρέμβαση οι περισσότεροι μαθητές έχουν την αντίληψη της διακριτής δομής των ρητών αριθμών, αν και παρατηρήθηκαν κάποιες διαβαθμίσεις ως προς το μέγεθος του πλήθους των ενδιαμέσων, με ένα εύρος από «κανένας αριθμός ενδιάμεσα» μέχρι «ένα μεγάλο πλήθος της τάξης του δισεκατομμυρίου». Επιπλέον, όλοι οι μαθητές αναφέρονται στον επόμενο αριθμό, οι περισσότεροι επικαλούμενοι συνήθεις (με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων) κοντινούς αριθμούς. Μετά την παρέμβαση στην απειρία των ενδιάμεσων υπήρξε μια βελτίωση. Κάποιοι μαθητές σταματούν να λένε πεπερασμένο πλήθος αλλά όχι όλοι. Παρατηρούμε ότι και στο έργο μεταφοράς κάποιοι μαθητές ξαναγυρνούν σε αρχικές απαντήσεις με πεπερασμένους ενδιάμεσα.

Με βάση τις απαντήσεις στον προέλεγχο και το μετά έλεγχο στα έργα για την απειρία των ενδιάμεσων, προέκυψαν τρεις ομάδες μαθητών. Η ομάδα 1 περιελάμβανε τους μαθητές που απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσα εξαρχής και έτσι συνεχίστηκαν οι απαντήσεις τους και μετά την παρέμβαση, όμως αυτή η επαναλήψιμη διαδικασία παραγωγής ενδιαμέσων στην οποία εκτέθηκαν δεν μπόρεσε να τους οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός.

Η ομάδα 2 περιελάμβανε τους μαθητές η οποίοι στον προέλεγχο έδιναν απαντήσεις της μορφής πεπερασμένου πλήθους ενδιάμεσα αλλά στον μετά έλεγχο άλλαξαν τις απαντήσεις τους σε άπειροι ενδιάμεσα. Βέβαια σημαντικό είναι ότι ήταν απαραίτητες οι νύξεις για τον αριθμητικό μέσο και οι νύξεις αυτές δεν εξασφάλισαν σε όλα τα επόμενα έργα πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις. Επίσης, ενώ μετατοπίστηκαν σε πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις, ούτε οι μαθητές της ομάδας 2 κατάφεραν να συμπεράνουν ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός.

Η ομάδα 3, περιελάμβανε μαθητές που δίνουν απαντήσεις τύπου πεπερασμένου πλήθους στον προέλεγχο, αλλά ακόμα και μετά τις νύξεις, συνεχίζουν να δίνουν απαντήσεις τύπου πεπερασμένου πλήθους σε τρία έως και εφτά έργα. Κάποιοι μαθητές χρησιμοποίησαν τον αριθμητικό μέσο και τα πήγαν «καλύτερα» στο έργο μεταφοράς σχετικά με τις δύο μεταβλητές και πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα. Αλλά στο αντίστοιχο έργο μεταφοράς σχετικά με την πρώτη τιμή που μπορεί να πάρει ένας άγνωστος αριθμός χσε ένα διάστημα (α, β) ξαναγύρισαν σε λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι κανένας μαθητής δεν κατάφερε να φτάσει στην μη ύπαρξη του επόμενου, ούτε οι μαθητές της ομάδας 1, οι οποίοι αντίθετα με τους υπόλοιπους είχαν ήδη στο μυαλό τους στρατηγικές που τους βοηθούσαν να κατανοήσουν την απειρία των ενδιαμέσων. Δηλαδή, αν και έχουν κατακτήσει την έννοια του απείρου των ενδιαμέσων με κάποια μορφή ατέρμονης διαδικασίας, συνεχίζουν να πιστεύουν ότι θα υπάρχει ο επόμενος κάποιου δεδομένου αριθμού και είναι βέβαιοι για αυτό.

Τα αποτελέσματα μας επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό των Vamvakoussi & Vosniadou (2012) ότι οι δύο παραπάνω όψεις τις πυκνότητας των ρητών αριθμών δεν είναι ίδιας δυσκολίας για τους μαθητές, αν και μαθηματικά είναι ισοδύναμες. Όπως ήταν αναμενόμενο σύμφωνα με Vamvakoussi, 2017, η μη ύπαρξη του επόμενου είναι πιο απαιτητική από την κατάκτηση της πτυχής των απείρων ενδιάμεσων.

Οι μαθητές διαπιστώνεται ότι δημιουργούν συνθετικά μοντέλα για την πυκνή διάταξη των ρητών, τα οποία επιτρέπουν την απειρία των ενδιαμέσων και, ταυτόχρονα, την ύπαρξη του επόμενου. Αυτό είναι συμβατό με τις προβλέψεις της προσέγγισης της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή (Βαμβακούση, 2019). Γενικότερα, τα αποτελέσματα της έρευνας μας είναι συμβατά με τη θεωρητική θέση ότι απαιτούνται σημαντικές εννοιολογικές αλλαγές για μια καλά αναπτυγμένη κατανόηση των ρητών αριθμών (Merenluoto & Lehtinen, 2004; Vamvakoussi et al., 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; McMullen et al., 2014). Όπως φαίνεται, η δυσκολία στην αναθεώρηση της διακριτότητας, όπως προβλέπεται από την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή, φανερώνει ότι οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών είναι τόσο παγιωμένες που δεν μπορούν να αλλάξουν εύκολα.

Τέλος, σημειώνουμε ότι ο τύπος των άκρων του διαστήματος (φυσικοί, δεκαδικοί κλάσματα) φάνηκε να παίζει ρόλο στις απαντήσεις των μαθητών για την πυκνή διάταξη, όπως έχουν δείξει οι Vamvakoussi & Vosniadou (2007, 2010). Από τα δεδομένα μας φαίνεται ότι αυτό ίσως οφείλεται στην περιορισμένη ευχέρεια που έχουν οι μαθητές με τις αναπαραστάσεις και την εφαρμογή ιδιοτήτων των κλασμάτων. Ένας μαθητής για παράδειγμα απαντάει ότι επόμενος του 2/7 είναι το 2,5/7 και μετά λέει «αυτό όμως δεν στέκει, οπότε συμφωνώ ότι ο επόμενος του 2/7 είναι το 3/7». Εδώ παρατηρούμε ότι ο μαθητής μεταφέρει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτεται τους δεκαδικούς στα κλάσματα και βάζει δεκαδικό αριθμό στον αριθμητή του κλάσματος, αλλά αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη στερεότυπη εικόνα που έχει για την αναπαράσταση του κλάσματος. Παρόμοια, αρκετοί μαθητές, ενώ στους δεκαδικούς σκέφτονται ότι ο επόμενος του 0,15 δεν είναι ο 0,16 γιατί υπάρχει άλλος ανάμεσα (προσθέτοντας δεκαδικά ψηφία), στα κλάσματα δυσκολεύονται να σκεφτούν κάποιον αριθμό, οπότε συμφωνούν ότι ο επόμενος του 2/7 είναι ο 3/7. Σε κάθε περίπτωση, δεν αξιοποιούν το γεγονός ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007, 2010).

Τα αποτελέσματα της έρευνας, μας παρέχουν ενδείξεις για τη χρησιμότητα του αριθμητικού μέσου για την κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών, καθώς υποστήριξε τους μαθητές να οδηγηθούν στην απειρία των ενδιάμεσων. Ωστόσο, η παρέμβαση αυτή δεν ήταν αρκετή για να οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός στους ρητούς. Από διδακτική πλευρά, η αξιοποίηση του αριθμητικού μέσου θα μπορούσε ενδεχομένως να επιφέρει αλλαγές στην αντίληψη των μαθητών για τη (μη) ύπαρξη του επόμενου, αν εντασσόταν σε μια συστηματική διδασκαλία για μεγάλο χρονικό διάστημα, ώστε οι μαθητές να οικειοποιηθούν το εργαλείο αυτό. Αυτό θα μπορούσε να δοκιμαστεί και πάνω στην αριθμογραμμή στην οποία κάθε φορά που βρίσκαμε τον αριθμητικό μέσο θα φέρναμε πιο κοντά τους νέους αριθμούς (θα κάναμε «ζουμ»), ενδεχομένως με την χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η πυκνή διάταξη των ρητών δεν αποτελεί ρητό στόχο στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά. Ωστόσο, έρευνες σαν την παρούσα αναδεικνύουν το γεγονός ότι η εννοιολογική κατανόηση των ρητών δεν είναι κάτι απλό που μπορεί να κατακτηθεί εύκολα από όλους τους μαθητές. Ειδικότερα, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι ένα ζήτημα η αντιμετώπιση του οποίου απαιτεί ενημερότητα των εκπαιδευτικών, έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των ρητών στη διδασκαλία και συστηματική υποστήριξη των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cheung, P., Rubenson, M., & Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Children generalize the successor function to all possible numbers years after learning to count. *Cognitive Psychology*, *92*, 22–36. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2016.11.002

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127–138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39–49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21–29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students ' Thinking About Fundamental Real Number Properties. *Cerme 5*, *5*, 416–425. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Jan_De_lange/publication/46700297_The_role_of_spatial_configurations_in_early_numeracy_problems/links/5416c8f50cf2fa878ad42884.pdf#page=19

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337. https://doi.org/10.5485/tmcs.2006.0129

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *8*(4), 341–374. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00026-1

Hewson, P. W. (1992). CONCEPTUAL CHANGE IN SCIENCE TEACHING AND TEACHER EDUCATION Peter W . Hewson Madison , Wisconsin , United

States of America. *Education*, *24*(June), 1–15. Retrieved from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/10342769

Koparan, T., Yildiz, C., Köğce, D., & Güven, B. (2010). The effect of conceptual change approach on 9th grade students' achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 3926–3931. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.618

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37*, 14–20. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

McMullen, J., Van Hoof, J., Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Profiles of rational number knowledge in Finnish and Flemish students – A multigroup latent class analysis. *Learning and Individual Differences*, *66*(November 2016), 70–77. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.005

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*(5 SPEC.ISS.), 519–534. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.016

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. *How Students Learn*, 309–251. https://doi.org/10.17226/11101

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122–147. https://doi.org/10.2307/749607

Ni, Y., & Zhou, Y. Di. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, *28*, 64–72. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.05.003

Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2004). Revisiting preschoolers' living things concept: A microgenetic analysis of conceptual change in basic biology. *Cognitive Psychology*, *49*(4), 301–332. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2004.01.002

Peled, I., & Awawdy-Shahbari, J. (2009). Journey to the past: Verifying and modifying the conceptual sources of decimal fraction knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(2), 73–85. https://doi.org/10.1080/14926150902908776

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*(1), 3–17. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(6), 877–891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Slusser, E., Ditta, A., & Sarnecka, B. (2013). Connecting numbers to discrete quantification: A step in the child's construction of integer concepts. *Cognition*, *129*(1), 31–41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.05.011

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*(2), 101–140. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5 SPEC.ISS.), 503–518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Vamvakoussi, X. (2010). The 'numbers are points on the line' analogy: does it have an instructional value?. Chapter 11.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction*, *37*, 50–55. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.002

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(4), 497–507. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0857-5

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*(5), 676–685. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344–355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5 SPEC.ISS.), 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction.*, 265–282. Retrieved from http://ovidsp.ovid.com/ovidweb.cgi?T=JS&PAGE=reference&D=psyc5&NEWS=N&AN=2007-04764-018%5Cnhttp://www.academia.edu/download/12189484/93._vamvakoussi___vosniadou_-_delphi_book.pdf

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181–209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265–284. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717378

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Vosniadou, S. (2007). Conceptual change and education. *Human Development*, *50*(1), 47–54. https://doi.org/10.1159/000097684

Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2006). Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments. *… . Sixteen Essays in Honour of Erik …*, 55–70. Retrieved from http://calteach.ucsc.edu/aboutus/documents/vosniadou-mathlearningconcchg.pdf

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*(5 SPEC.ISS.), 445–451. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

Βαμβακούση, Ξ. (2019). *Μάθηση και διδασκαλία*. *37*(2015), 1–8.

Εννοιολογική Αλλαγή Στα Μαθηματικά : Η Κατανόηση Της Πυκνής Δομής Των Ρητών Διδακτορική Διατριβή Ξανθής Βαμβακούση. (n.d.).

Χρηστου, Κ. Π. (2009). *« ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ : Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ »*.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγιο:

Διευκρινήσεις: όπου συναντήσουμε την λέξη αριθμός θα αναφέρεται σε όλους του αριθμούς που ξέρεις. Μπορείς να σημειώσεις απαντήσεις και ότι θέλεις στο κενό που υπάρχει σε κάθε ερώτηση. Το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και δεν θα βαθμολογηθεί.

Ερώτηση 1. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 1,512 και στο 1,513;

Ερώτηση 2. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 2/5 και στο 3/5;

Ερώτηση 3. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 0,1 και στο 0,2;

Ερώτηση 4. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 9/5 και στο 9/4;

Ερώτηση 5. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 0 και στο 1;

Ερώτηση 6. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 9/5 και στο 7/3;

Ερώτηση 7. Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 0,5 και στο 5/6;

<u>Ερώτηση 8.</u> Ο Κώστας λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 0,15 είναι ο 0,16, γιατί αμέσως μετά το 15 είναι το 16». Συμφωνείς με τον Κώστα;

<u>Ερώτηση 9.</u> Η Μαρία λέει: «Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 2/7 είναι το 3/7, διότι αμέσως μετά το 2 έρχεται το 3». Συμφωνείς με την Μαρία;

<u>Έργα μεταφοράς με μεταβλητές</u>

Διευκρινήσεις: όπου συναντήσουμε την λέξη αριθμός θα αναφέρεται σε όλους του αριθμούς που ξέρεις.

<u>Ερώτηση 1:</u> Αν έχω έναν πραγματικό αριθμό $x \in (0,1)$

α) Μπορεί να προσδιοριστεί ποια θα είναι η πρώτη τιμή που θα πάρει;

β) μπορεί να προσδιοριστεί ποια θα είναι η τελευταία τιμή που θα πάρει;

<u>Ερώτηση 2:</u> Αν έχω δυο οποιουσδήποτε αριθμούς α και β μπορεί να προσδιοριστεί πόσοι αριθμοί είναι ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς;