ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΙΤΛΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η χρήση της έννοιας του εμβαδού για την επίλυση ιστορικών προβλημάτων γεωμετρίας αρχαίων πολιτισμών από μαθητές των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου.

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΓΚΑΝΤΩΝΑ (Α.Μ. 764)

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

Στο «Επιστήμες της Αγωγής και νέες τεχνολογίες»

Με κατεύθυνση: «Θετικές Επιστήμες και νέες τεχνολογίες»

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

ΦΛΩΡΙΝΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Θετικές Επιστήμες και νέες τεχνολογίες» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Η εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας έγινε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας, κ. Κωνσταντίνου Νικολαντωνάκη, τον οποίο ευχαριστώ θερμά για την εξαιρετική βοήθεια και καθοδήγησή του αλλά και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας, κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο και κ. Τσακιρίδου Ελένη που δέχτηκαν να είναι εξεταστές της διπλωματικής μου εργασίας και για τη χαρά που είχα να είμαι φοιτητής τους.

Αφιερώνω αυτήν την εργασία στην οικογένειά μου. Στη γυναίκα μου Ελευθερία και στις δύο μεγαλύτερες αγάπες της ζωής μου. Τον Παναγιώτη και τον Νικόλα μου!

Σὰ βγεῖς στὸν πηγαιμὸ γιὰ τὴν Ἰθάκη,
νὰ εὔχεσαι νἆναι μακρὺς ὁ δρόμος,
γεμάτος περιπέτειες, γεμάτος γνώσεις.

……………………………………………………..

Κι ἂν πτωχικὴ τὴν βρῇς, ἡ Ἰθάκη δὲν σὲ γέλασε.
Ἔτσι σοφὸς ποὺ ἔγινες, μὲ τόση πείρα,
ἤδη θὰ τὸ κατάλαβες ἡ Ἰθάκες τί σημαίνουν.

Κ. Π. Καβάφης

Εγκρίθηκε από Εξεταστική επιτροπή στην …/…/2019 αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1. ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	…………………………….
2. ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	…………………………….
3.ΤΣΑΚΙΡΙΔΟΥ ΕΛΕΝΗ	ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ	…………………………….

Ο συγγραφέας ……………………………………………………………………..

βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Περίληψη

Η καθημερινή εφαρμογή και χρήση των εμβαδών και οι πλούσιες μαθηματικές τους προεκτάσεις καθιστούν τη μέτρηση τους έννοια θεμελιώδους σημασίας. Στην παρούσα έρευνα γίνεται η εκτενής παρουσίαση μιας σειράς προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του εμβαδού με βάση τη βιβλιογραφία. Δυσκολίες όπως ο αλγόριθμος εφαρμογής, η σύγχυση με την περίμετρο, η επιλογή και οι επαναλήψεις των μονάδων μέτρησης και η δυσκολία εμπέδωσης των γεωμετρικών σχημάτων είναι μερικά που προβάλλουν ως τα κυριότερα μαθησιακά προσκόμματα. Η έρευνα έρχεται να δώσει μία σαφή εικόνα κατά πόσο απόφοιτοι της δεύτερης τάξης του Γυμνασίου είναι ικανοί να επιλύσουν ιστορικά προβλήματα γεωμετρίας αρχαίων πολιτισμών με τη βοήθεια της έννοιας του εμβαδού, κατά πόσο μπορούν να εφαρμόζουν βασικά γεωμετρικά θεωρήματα και υπολογιστικούς αλγορίθμους εμβαδών αλλά και ποιες είναι οι σημαντικότερες δυσκολίες - παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές, αυτοί στην προσπάθεια επίλυσης αυτών των προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά : Εμβαδόν, ιστορία των Μαθηματικών, δυσκολίες μαθητών, σχολικά εγχειρίδια, προβλήματα αρχαίων πολιτισμών, τεστ μαθηματικών.

Abstract

The daily application and use of areas and their rich mathematical extensions make their measurement a fundamental concept. The present study presents a series of problems that students face in trying to understand the notion of area based on literature. Difficulties such as implementation algorithm, confusion with perimeter, selection and repetition of units of measurement and difficulty of consolidating geometric shapes are some of which emerge as major learning obstacles. The research comes to give a clear picture of how high school graduates are able to solve historical problems of geometry of ancient civilizations by means of the notion of area, whether they can apply basic geometrical theorems and computational algorithms but major difficulties - misunderstandings that students face in trying to solve these problems.

Keywords: Area, History of Mathematics, Students' difficulties, Textbooks, Problems of ancient cultures, Mathematics tests.

Λίστα εικόνων

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η ιστορία των Μαθηματικών μας δείχνει ότι τα Μαθηματικά είναι μία σημαντική ανθρώπινη δραστηριότητα και αναπτύσσεται συνεχώς μέσα από την ανάγκη των ανθρώπων να επιλύσουν κυρίως πρακτικά προβλήματα της ζωής. Για αυτό και η εκπαίδευση στο μάθημα των Μαθηματικών αποτελεί αναμφίβολα ένα από τα σπουδαιότερα μέρη του εκπαιδευτικού συστήματος κάθε χώρας. Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι μια δεξιότητα την οποία τα παιδιά θα χρειαστούν σε πολλές πτυχές της ζωής τους κι όχι μόνο κατά τη διάρκεια του σχολικού μαθήματος. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο συμπεριλαμβάνεται και η κατανόηση βασικών γεωμετρικών εννοιών όπως του εμβαδού βασικών γεωμετρικών σχημάτων, η οποία είναι ουσιαστικής σημασίας, γιατί είναι μια έννοια που τα παιδιά συναντούν πολύ συχνά στην καθημερινή τους ζωή και καλούνται συχνά να λύσουν προβλήματα ή να αντιμετωπίσουν καταστάσεις που συνδέονται με αυτήν. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2003), «οι μαθητές μαθαίνουν τα γεωμετρικά σχήματα, τη δομή τους, αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους. Για να διαχειριστούμε και να περιγράψουμε το φυσικό χώρο που μας περιβάλει διαθέτουμε ως μέσον τα γεωμετρικά μοντέλα και τη συλλογιστική του χώρου. Αυτά αποτελούν σημαντικά εργαλεία για να λύνουμε διάφορα προβλήματα».

Η ακριβής μέτρηση του εμβαδού λοιπόν βρίσκει εφαρμογή σε πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες, ιδιαιτέρως σε τομείς όπως η γεωργία, η αρχιτεκτονική και το εμπόριο αλλά και σε πολλές και ποικίλες απλές καθημερινές εφαρμογές όπως η ζωγραφική, η κηπουρική, οι επιστρώσεις και οι επικαλύψεις επιφανειών (Cavanagh, 2008). Ο τρόπος με τον οποίο αριθμούσε ο άνθρωπος και έκανε τους υπολογισμούς του ήταν αρχικά με τα δάχτυλα, το σώμα του, καθώς επίσης με κλαδιά, κοχύλια και πέτρες. Οι τρόποι όμως που χρησιμοποιούσαν παλιά οι άνθρωποι για τους μαθηματικούς υπολογισμούς σιγά-σιγά δεν τους κάλυπταν, διότι πλέον είχαν περισσότερες δραστηριότητες και προέκυψε η ανάγκη για πιο συστηματικούς τρόπους υπολογισμού (Clawson, 2008). Στην παρούσα έρευνα :

- Αρχικά παρουσιάζονται πληροφορίες σε σχέση με τη χρησιμότητα της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των ίδιων των Μαθηματικών.
- Στη συνέχεια παρατίθενται χρήσιμες ιστορικές πληροφορίες για την έννοια και τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού με γνώμονα τη μελέτη διαφόρων

πολύ σημαντικών αρχαίων πρώιμων πολιτισμών, και συγκεκριμένα της αρχαίας Αιγύπτου, Μεσοποταμίας, Κίνας, Ινδίας, Μεξικού, Ελλάδας και των Αράβων.

- Ακολουθεί η παρουσίαση μιας σειράς προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του εμβαδού με βάση προηγούμενες έρευνες.
- Παρουσιάζεται έπειτα η έννοια του εμβαδού όπως αυτή προτείνεται προς διδασκαλία μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου και των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα.
- Τέλος, με βασικό εργαλείο τη δημιουργία, την εφαρμογή, την αξιολόγηση και την ανάλυση ενός μαθηματικού τεστ αποτελούμενο από έξι ιστορικά προβλήματα, προσπαθούμε να δώσουμε απαντήσεις πάνω σε καίρια ερευνητικά ερωτήματα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και την ικανότητα επίλυσης ιστορικών προβλημάτων από σύγχρονους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, κάνοντας παράλληλα σύγκριση των αποτελεσμάτων με προϋπάρχουσες έρευνες αλλά και με λύσεις που προτάθηκαν στο μακρινό παρελθόν, οδηγούμενοι έτσι σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 1ο - Χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία

Στην προσπάθειά μας να πετύχουμε, μέσω της διδασκαλίας μας, όλο και καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα και να μπορέσουμε να κερδίσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών μας, είμαστε υποχρεωμένοι να αναζητήσουμε νέες μεθόδους, νέους τρόπους προσέγγισης των παιδιών ή να βελτιώσουμε αυτούς που ήδη χρησιμοποιούμε. Μεγάλη βοήθεια στην προσπάθειά μας αυτή θα μπορούσε να προσφέρει η Ιστορία. Ιστορία και Μαθηματικά φαντάζουν αρχικά δύο τομείς ξένοι μεταξύ τους. Στη σύγχρονη διδασκαλία όμως δύο φαινομενικά ξένοι τομείς μπορούν να γεφυρωθούν, να συνεργαστούν και να πετύχουν εξαιρετικά αποτελέσματα. Σήμερα πια, μπορούμε να ισχυριστούμε με ασφάλεια ότι η Ιστορία ως εργαλείο μπορεί να αναδείξει και την ιστορική πορεία και αξία των Μαθηματικών. Ενός μαθήματος που έτσι κι αλλιώς έχει τις ρίζες του στα βάθη των αιώνων. Τα Μαθηματικά, με αυτόν τον τρόπο, συναντιούνται με τα υπόλοιπα μαθήματα και προβάλλονται οι κοινές τους περιοχές. Κοινές περιοχές που μπορούν στη συνέχεια να αποτελέσουν εφόδιο στα χέρια του εκπαιδευτικού για να πετύχει την όσο το δυνατόν καλύτερη διδασκαλία.

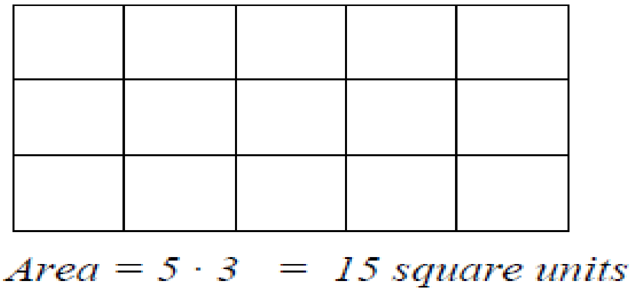
Από τη δεκαετία του 1790 ο Γάλλος μαθηματικός Joseph Louis Lagrange, στις διαλέξεις του σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών, πρότεινε να χρησιμοποιήσουν την ιστορία των Μαθηματικών ως καθοδήγηση για προβλήματα που πιθανώς να αντιμετωπίσουν και οι ίδιοι όπως ακριβώς οι μαθηματικοί του παρελθόντος που μέσα από λάθη και αδιέξοδα κατάφερναν να επιτύχουν τους στόχους που είχαν θέσει (Fasanelli, 2000). Η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη της ίδιας της μαθηματικής δραστηριότητας. Μέσα από τη χρήση του ιστορικού υλικού στο σχολείο ανακαλύπτουμε σταδιακά τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της πορείας των Μαθηματικών. Μιας πορείας που ξεκινάει από πολύ μακριά μέχρι να φτάσουμε στο σήμερα! Η ιστορία των Μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές μας να αντιληφθούν την εξελικτική φύση αυτού του μαθήματος. Η διαφορετική αυτή προσέγγιση δίνει στα Μαθηματικά ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο, κάνοντας τα σίγουρα λιγότερο τρομακτικά για τα παιδιά (Russ, et al., 1991). Οι μαθητές υιοθετούν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά και αντιλαμβάνονται ότι αποδείξεις, θεωρήματα, τύποι, αλγόριθμοι, επιχειρήματα, διάφορες εναλλακτικές προσεγγίσεις και διαμάχες του παρελθόντος μέθοδοι υπολογισμού, συλλογισμοί, τυχόν λάθη και σωστά, εξελίσσονται, αξιολογούνται συνεχώς και επανεκτιμώνται, ενισχύονται ή αποδομώνται μέχρι να φτάσουν στη σύγχρονη μορφή τους. Οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι μία μαθηματική ιδέα είναι στην πραγματικότητα αποτέλεσμα δουλειάς εκατοντάδων χρόνων και ότι η λύση ενός προβλήματος μπορεί να εμφανίζεται με διάφορες μορφές μέσα στους αιώνες.

Η ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία βοηθάει επίσης την ερευνητική και εξελικτική μορφή που οφείλει να έχει η ίδια η διδασκαλία. Δείχνει στους μαθητές, ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στο χρόνο και στο χώρο (Tzanakis, et al., 2000). Εξυπηρετείται έτσι ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών σύμφωνα με το ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα, που είναι η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης μέσα από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών. Κατανοώντας οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά δεν είναι ένα σύνολο άκαμπτων και αυστηρών κανόνων προς εφαρμογή που έρχονται από το παρελθόν, έμμεσα ενθαρρύνονται να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα, τις δικές τους αμφισβητήσεις και υποθέσεις και να μη διστάζουν να τις ερευνούν, γιατί όλα αυτά αποτελούν ζωντανό κομμάτι της μαθηματικής διαδικασίας. Τα παιδιά υιοθετούν νέους τρόπους κριτικής και δημιουργικής σκέψης, δεν αποθαρρύνονται από τυχόν δυσκολίες και αποτυχίες, το λάθος απενοχοποιείται και παίρνει μια νέα εποικοδομητική διάσταση.

Το μεγαλύτερο κέρδος όμως πιστεύω από τη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία είναι η πολιτισμική της συνεισφορά. Τα παιδιά συνειδητοποιούν ότι η εξέλιξη αυτού του μαθήματος οφείλεται σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας και ότι και η διαμόρφωση των Μαθηματικών έχει επηρεαστεί από αυτούς τους πολιτισμούς, αλλά και οι πολιτισμοί έχουν επηρεαστεί από την εξέλιξη των Μαθηματικών (Tzanakis, et al., 2000). Η μαθηματική γλώσσα γίνεται μέσο επικοινωνίας μεταξύ των διαφορετικών λαών και αποδεικνύει ότι τα Μαθηματικά βρίσκουν διαχρονική εφαρμογή σε κάθε πολιτισμό και ανθρώπινο περιβάλλον. Τα παιδιά συνειδητοποιούν ότι τα σύγχρονα Μαθηματικά δεν είναι αποκλειστικό προϊόν του δυτικού πολιτισμού αλλά είναι το συνονθύλευμα, το ζύμωμα, η συνεχής «σύγκρουση» αντιλήψεων διαφόρων πολιτισμών. Πολιτισμών ενδεχομένως υποτιμημένων στα μάτια των λαών της δυτικής κουλτούρας. Αυτό οδηγεί αναμφίβολα τους μαθητές μας σε μια επαναπροσέγγιση των πολιτισμών αυτών. Επαναπροσέγγιση που έχει ως αποτέλεσμα τον σεβασμό, την αναγνώριση και την αποδοχή του διαφορετικού, του άλλου.. Τον σεβασμό απέναντι στη συνεισφορά για την εξέλιξη των επιστημών, αυτή καθαυτή, ανεξάρτητα από τη φυλετική προέλευση αυτού που την προσφέρει, αποδεικνύοντας και αναδεικνύοντας έμπρακτα την ανθρωπιστική και πολιτισμική αξία των Μαθηματικών. Αξία που παίρνει μεγαλύτερη διάσταση όταν οι μαθηματικές έννοιες και τύποι βρίσκουν διαχρονική εφαρμογή σε κάθε ανθρώπινο περιβάλλον.

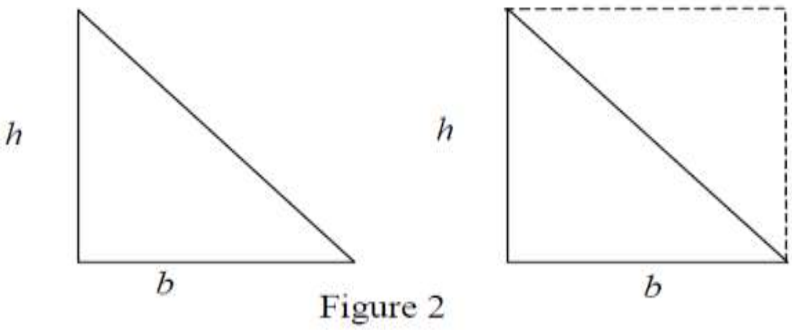
Κεφάλαιο 2ο - Η έννοια του εμβαδού μέσα στον χρόνο

Αναμφισβήτητα η μέτρηση είναι οικουμενική και κεφαλαιώδης δραστηριότητα, με οριζόντια πολιτισμική διάχυση, σε όλους ανεξαιρέτως τους λαούς και σε πολλές κοινωνικές εκφάνσεις, όπως στην επιστήμη, στην τεχνολογία αλλά και στην απλή καθημερινότητα (Κορδάκη, 1999). Δεδομένου ότι οι αγρότες έπρεπε να μετρήσουν τα μήκη των αρδευτικών διαύλων, τις περιοχές των αγρών και τις ποσότητες των συγκομιδών, πολλοί ιστορικοί πιστεύουν ότι οι μέθοδοι μέτρησης των μηκών, των εμβαδών και των όγκων προέρχονται από τους πρώτους αγροτικούς πολιτισμούς. Ο αρχαιότερος από αυτούς τους πολιτισμούς αναπτύχθηκε γύρω στα 3500 π. Χ. κατά μήκος των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη σε μια περιοχή γνωστή ως Γόνιμη Ημισέληνος ή Μεσοποταμία (σημερινό Ιράκ). Άλλοι πρώιμοι αγροτικοί πολιτισμοί αναπτύχθηκαν κατά μήκος του ποταμού Νείλου της Αιγύπτου, των ποταμών Huang και Yangtze της Κίνας, του ποταμού Indus του Πακιστάν και του ποταμού Γάγγη της Ινδίας. Όλοι οι πρώιμοι πολιτισμοί (Μεσοποταμίας, Αιγύπτου, Κίνας, Ινδίας) παρατήρησαν ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου μπορεί να υπολογιστεί ως το μήκος της βάσης του ως προς το ύψος του, μετρώντας τις τετραγωνικές μονάδες (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).



Εικόνα 1.Εύρεση εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Παρατηρώντας επίσης ότι δύο αντίγραφα του ίδιου δεξιού τριγώνου θα μπορούσαν να ενωθούν για να σχηματίσουν ένα ορθογώνιο, κατέληξαν ότι το εμβαδόν ενός δεξιού τριγώνου είναι το ήμισυ του εμβαδού του ορθογωνίου, ή $A = ½ bh$.



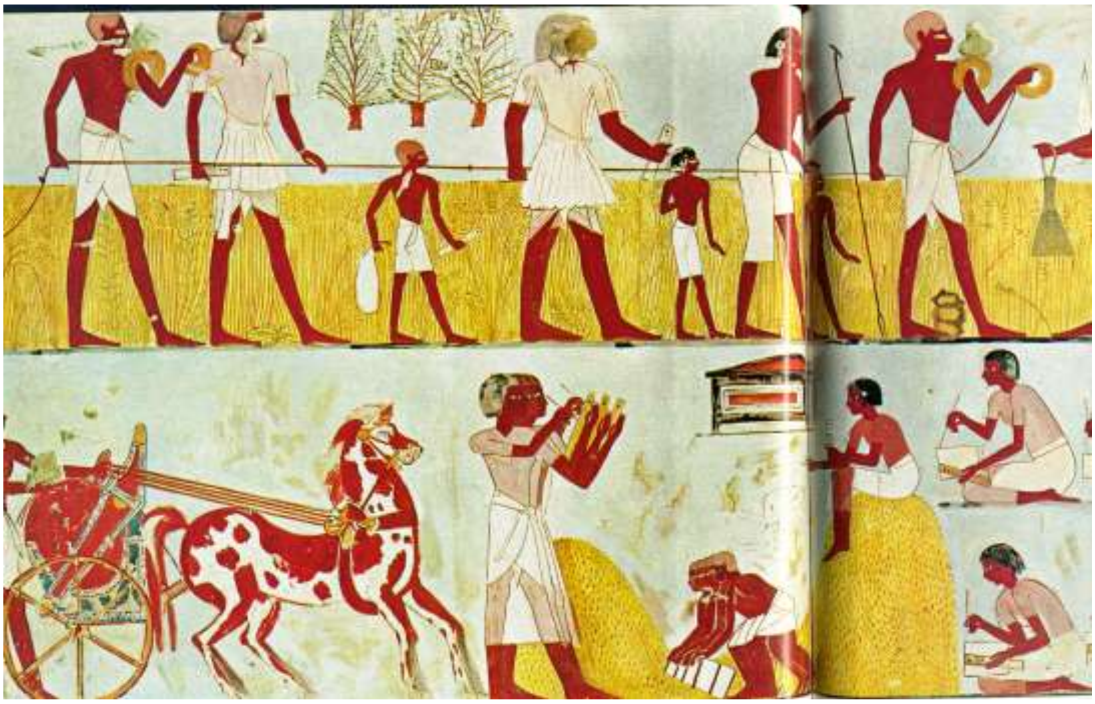
Εικόνα 2. Εύρεση εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου

Παρακάτω ακολουθεί μια πολύ ενδιαφέρουσα ιστορική αναδρομή όπου παρουσιάζεται η σχέση που είχαν κορυφαίοι πολιτισμοί της αρχαιότητας με την έννοια του εμβαδού και μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

2.1 Αιγύπτιοι

Εικόνα 3. Χάρτης της αρχαίας Αιγύπτου

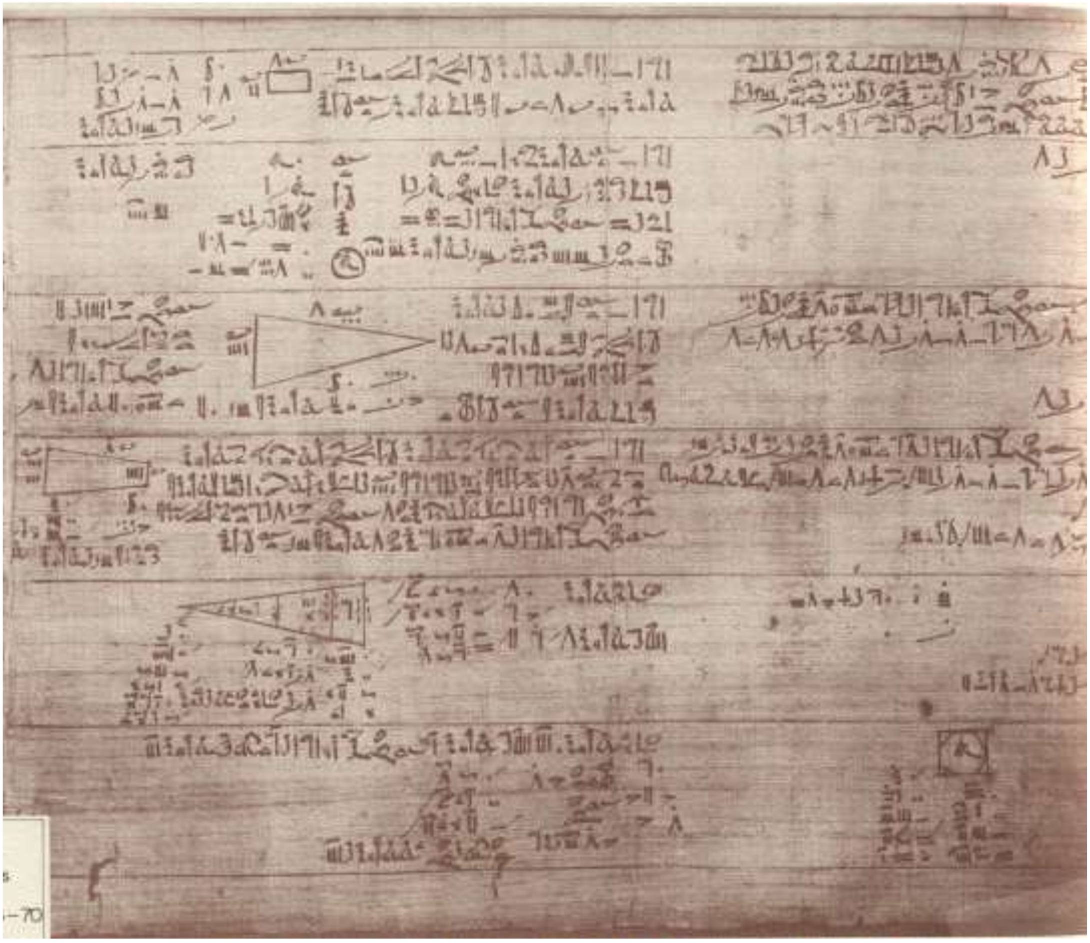
Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ζούσαν στις κοιλάδες του Νείλου της βορειοανατολικής Αφρικής και η κύρια δραστηριότητά τους ήταν η γεωργία. Ο πρωταρχικός σκοπός των τοπογράφων της εποχής εκείνης ήταν η μέτρηση της γεωργικής γης κατά μήκος του ποταμού Νείλου μετά από τις ετήσιες πλημμύρες, προκειμένου να καθορίσουν τους φόρους δίκαια. Μια τοιχογραφία ζωγραφισμένη στο Abd-el-Qurna γύρω στο 1400 π. Χ. δείχνει τοπογράφους να μετρούν ένα χωράφι με σιτηρά χρησιμοποιώντας σχοινί με κόμπους για μονάδες (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).



Εικόνα 4. Τοιχογραφία ζωγραφισμένη στο Abd-el-qura 1400 π.Χ.

Οι δύο πιο διάσημοι αιγυπτιακοί μαθηματικοί πάπυροι είναι ο πάπυρος Rhind, ή ο Αχμής, (περίπου το 1650 π. Χ.) και ο πάπυρος της Μόσχας (περίπου το 1850 π. Χ.). Ένας τρίτος πάπυρος, ο Πάπυρος του Καΐρου, ο οποίος χρονολογείται από το 300 π. Χ., περιέχει 40 μαθηματικά προβλήματα, συμπεριλαμβανομένων εννέα προβλημάτων που χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

Ένα μέρος του αιγυπτιακού πάπυρου Rhind που χρονολογείται περίπου το 1650 π. Χ. διατηρείται σήμερα στο Βρετανικό Μουσείο του Λονδίνου και φαίνεται παρακάτω. Ο πάπυρος του Rhind μήκους 6 μέτρων και πλάτους 33 εκατοστών αποτελεί ένα από τα αρχαιότερα μαθηματικά κείμενα και δίνει λύσεις σε ποικίλα πρακτικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν οι υπάλληλοι του μεγάλου αιγυπτιακού κράτους (Clawson, 2008).

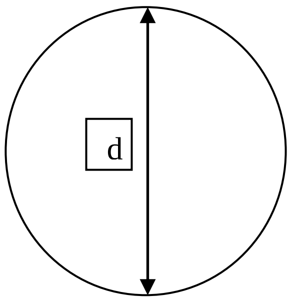


Εικόνα 5. Πάπυρος του Rhind, 1650 π.Χ.

Σύμφωνα με τα ιερογλυφικά στους τοίχους του Ναού του Χόρου στο Edfu, που χρονολογείται περίπου στα 100 π. Χ., οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν τον τύπο $A = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ για να βρουν το εμβαδόν οποιουδήποτε τετράπλευρου. Ένας τύπος που ήταν σωστός όμως μόνο για τα ορθογώνια γιατί εάν a = c και b = d, ο τύπος απλοποιείται στο A = a * b και χρησιμοποιήθηκε για να δώσει τις εκτάσεις αγροτεμαχίων που ανήκαν στην ιεροσύνη γύρω από τον Edfu. Πάπυροι όμως περίπου 1500 χρόνια νωρίτερα δείχνουν ότι οι παλαιότεροι Αιγύπτιοι γνώριζαν τους σωστούς τύπους για τα εμβαδά ειδικών τετράπλευρων όπως ορθογώνια και τραπεζοειδή. Τόσο στον Πάπυρο Rhind όσο και στον Πάπυρο της Μόσχας, υπάρχουν προβλήματα στα οποία βρίσκονται εμβαδά ορθογωνίων, τριγώνων και κύκλων. Οι ίδιοι τύποι που χρησιμοποιούμε σήμερα για τα εμβαδά των ορθογωνίων (A = b * h) και τρίγωνων (A = 1/2 b * h) χρησιμοποιήθηκαν σε αυτούς τους παπύρους (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

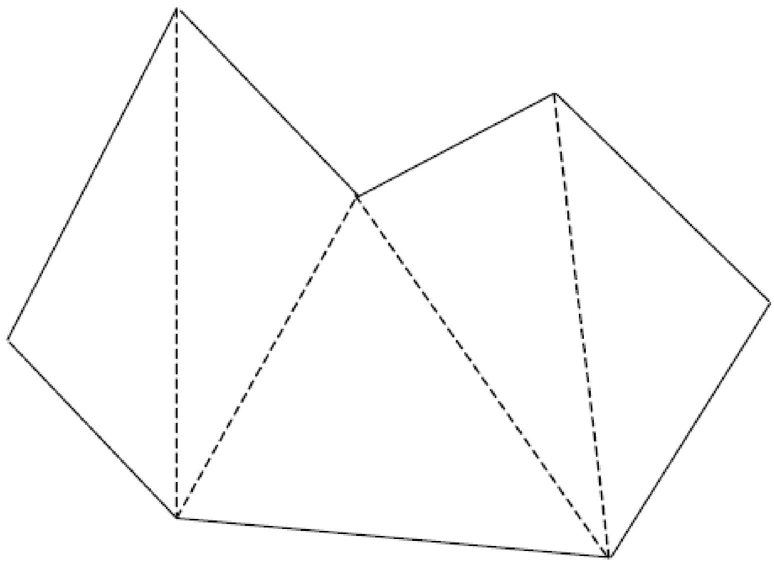
Σε πρόβλημα του παπύρου Rhind ο τύπος για το εμβαδόν ενός τραπεζοειδούς (ονομάζεται κόλουρο τρίγωνο) δίνεται από τον τύπο όπου ο μέσος όρος του μήκους των δύο βάσεων πολλαπλασιάζεται με το ύψος, και είναι ο ίδιος τύπος με αυτόν που χρησιμοποιούμε σήμερα: $A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$.

Στο πρόβλημα 48 του ίδιου παπύρου υποδεικνύεται ότι ο τύπος για το εμβαδόν ενός κύκλου ήταν: $A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ όπου d η διάμετρος του κύκλου. Εξομοιώνοντας τον τύπο αυτό με τον σημερινό $A = \pi * r^2$, παρατηρούμε μια αξιοσημείωτη προσέγγιση του π=3,1605.



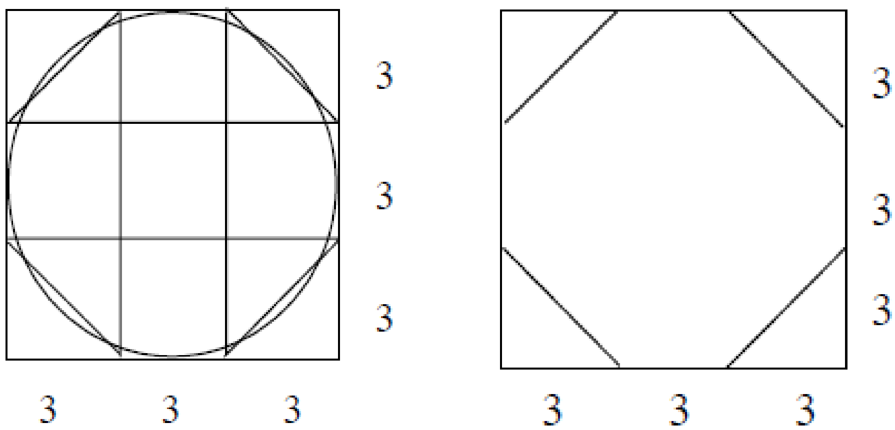
Εικόνα 6. Εμβαδόν κύκλου, Πρόβλημα 48 του πάπυρου Rhind

Σε άλλο αιγυπτιακό πρόβλημα του ίδιου παπύρου οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός ακανόνιστου σχήματος, αφού προηγουμένως το χωρίσουν σε τρίγωνα. Θα πρέπει να μετρήσουν τις πλευρές και τα ύψη των τριγώνων και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον τύπο να υπολογίσουν το εμβαδόν τους. Επομένως το εμβαδόν του αρχικού σχήματος θα προκύψει από το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους τριγώνων.



Εικόνα 7. Εμβαδόν ακανόνιστου σχήματος, πάπυρος Rhind

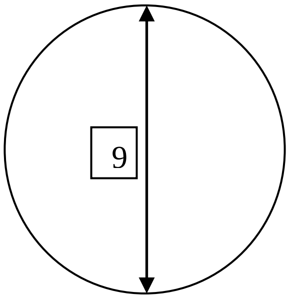
Σε άλλο πρόβλημα του παπύρου Rhind ζητείται να συγκρίνουμε το εμβαδόν του οκταγώνου και του περιγεγραμμένου τετραγώνου. Συγκεκριμένα ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδού του οκταγώνου. Για τη λύση του προβλήματος υπολογίζεται το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου, με διάμετρο 9. Το εμβαδόν του οκταγώνου διαμέτρου 9 προσεγγίζει το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου 9.



Εικόνα 8. Εμβαδόν οκταγώνου και περιγεγραμμένου τετραγώνου, πάπυρος Rhind

Το εμβαδόν του τετραγώνου που φαίνεται στο σχήμα, είναι $9^2 = 81$ τετραγωνικές μονάδες ενώ το εμβαδόν του οκταγώνου που εμφανίζεται, είναι 63 τετραγωνικές μονάδες. Γιατί όμως υπολόγισε ο Ahmes το εμβαδόν του ως $8^2 = 64$; Πολλοί σύγχρονοι μελετητές πιστεύουν ότι στην πραγματικότητα προσπάθησε να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου 9, για τον οποίο ο τύπος $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ θα έδινε $A = 8^2 = 64\ setat.$

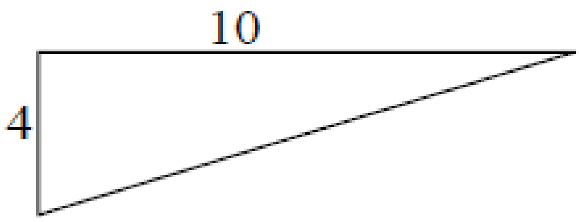
Στο πρόβλημα 50 του Παπύρου Rhind δίνεται κυκλικό χωράφι διαμέτρου 9 khet και ζητείται το εμβαδόν του.



Εικόνα 9. Εμβαδόν κυκλικού χωραφιού, Πρόβλημα 50 του πάπυρου Rhind

Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το εμβαδόν A του κύκλου που έχει $A = \pi\,(4.5)^2 \approx 63.61725$ square $khet$. Εδώ, όπως και στο πρώτο πρόβλημα, χρησιμοποιείται ο τύπος $A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$. για το εμβαδόν κύκλου με διάμετρο d ίση με 9 και π ως $\frac{256}{81} \approx 3.1605$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα εμβαδόν 64 τετραγωνικών khet = 64 setat.

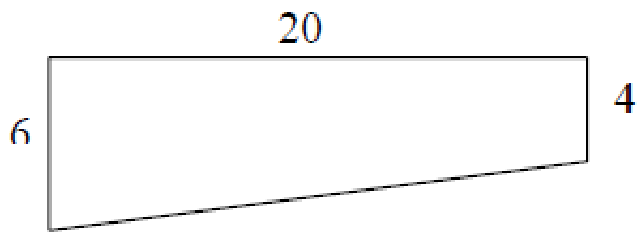
Στο Πρόβλημα 51 του Παπύρου Rhind δίνεται ένα τριγωνικό χωράφι με πλευρά 10 khet και βάση 4 khet και ζητείται να υπολογίσουμε το εμβαδόν του.



Εικόνα 10.Εμβαδόν τριγωνικού χωραφιού, Πρόβλημα 51 του Πάπυρου Rhind

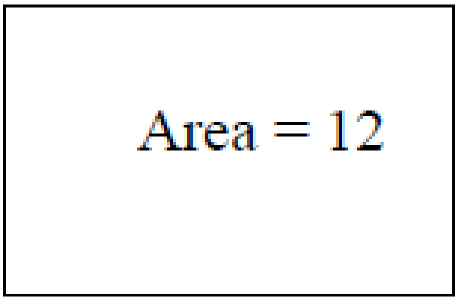
Δεδομένου ότι το τρίγωνο που φαίνεται στο διάγραμμα είναι ένα σωστό (ορθογώνιο) τρίγωνο, οι μαθητές θα πρέπει να υπολογίζουν το εμβαδόν του ως $A = (1/2)(4)(10) = 20$ square *khet,* or 20 *setat.* Υποθέτουν πως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, οπότε το εμβαδόν του υπολογίζεται ως εξής: Παίρνουν το 1/2 του 4 προκειμένου να γίνει ορθογώνιο. Πολλαπλασιάζουν το 10 με το 2 που δίνει 20. Επομένως το εμβαδόν είναι 20 setat.

Στο Πρόβλημα 52 του πάπυρου Rhind ζητείται το εμβαδόν της αποκομμένης τριγωνικής γης με μήκος κάθε πλευράς 20 khet, μήκος βάσης 6khet και μήκος γραμμής αποκοπής 4 khet.



Εικόνα 11. Εμβαδόν αποκομμένης τριγωνικής γης, Πρόβλημα 52 του πάπυρου Rhind

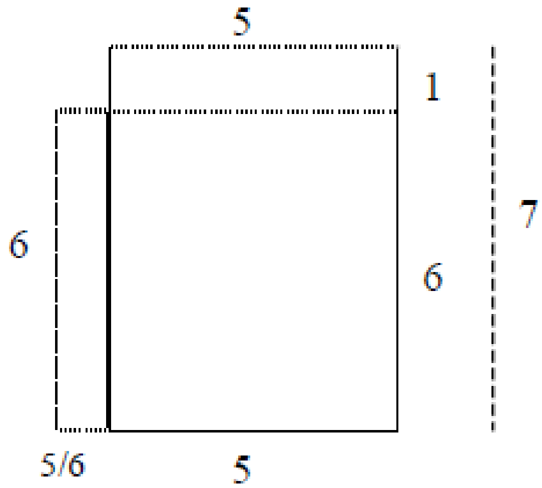
Το πρόβλημα 6 του πάπυρου της Μόσχας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού ενός ορθογωνίου. Συγκεκριμένα δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 12 που έχει το (1/2+1/4) του μήκους για πλάτος και ζητούνται οι διαστάσεις του (μήκος και πλάτος).



Εικόνα 12. Διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου, Πρόβλημα 6 του πάπυρου της Μόσχας

Για τη λύση του προβλήματος «υπολογίστε 1/2 + 1/4 έως ότου λάβετε 1. Αποτέλεσμα 1 + 1/3. Περιοχή = 12. Υπολογίστε με αυτά τα 12, 1 + 1/3 φορές. Αποτέλεσμα 16. Υπολογίστε τη γωνία (τετραγωνική ρίζα). Αποτέλεσμα 4 για το μήκος. Το 1/2 + 1/4 είναι 3 για το πλάτος».

Το Πρόβλημα 8 από τον Πάπυρο του Καΐρου λέει: «Ένα μέτρο του υφάσματος που έχει 7 πήχεις ύψος και πέντε πήχεις πλάτος ανέρχεται σε 35 πήχεις ύφασμα. Αφαιρέστε ένα πήχη από το ύψος του, προσθέστε το στο πλάτος. Τι είναι αυτό το οποίο προστίθεται στο πλάτος του;».



Εικόνα 13. Εμβαδόν ορθογωνίου υφάσματος, Πρόβλημα 8 του παπύρου του Καΐρου

Η ιδέα είναι ότι το κομμάτι του υφάσματος πρέπει να διατηρήσει το ορθογώνιο σχήμα του και ότι το συνολικό εμβαδόν του πρέπει να διατηρηθεί. Αυτό προϋποθέτει ότι η επιφάνεια που αφαιρείται είναι ίση με την έκταση που προστέθηκε. Εδώ υπολογίζουν πρώτα το νέο ύψος: 7 - 1 = 6. Αναφέρεται στη συνέχεια, «Η ληφθείσα έκταση κάνει 5 πήχεις υφάσματος». Έπειτα διαιρείται το 5 με το 6 και τέλος προσθέτουν το αποτέλεσμα 5 / 6 στο πλάτος 5. ‘Αρα το νέο πλάτος είναι 5 και 5/6 και το μήκος είναι 6 . Άρα το εμβαδόν θα είναι ίδιο με το αρχικό.

Οι Αιγυπτιακές μονάδες μέτρησης, όπως μερικές από τις μονάδες μέτρησης σήμερα (για παράδειγμα, το πόδι), βασίζονταν στο ανθρώπινο σώμα. Εκατοντάδες βασιλικοί πήχες ονομάζονταν khet και ένα τετράγωνο khet ονομάστηκε setat. Το εμβαδόν ενός πεδίου γενικά δίνεται σε setat.

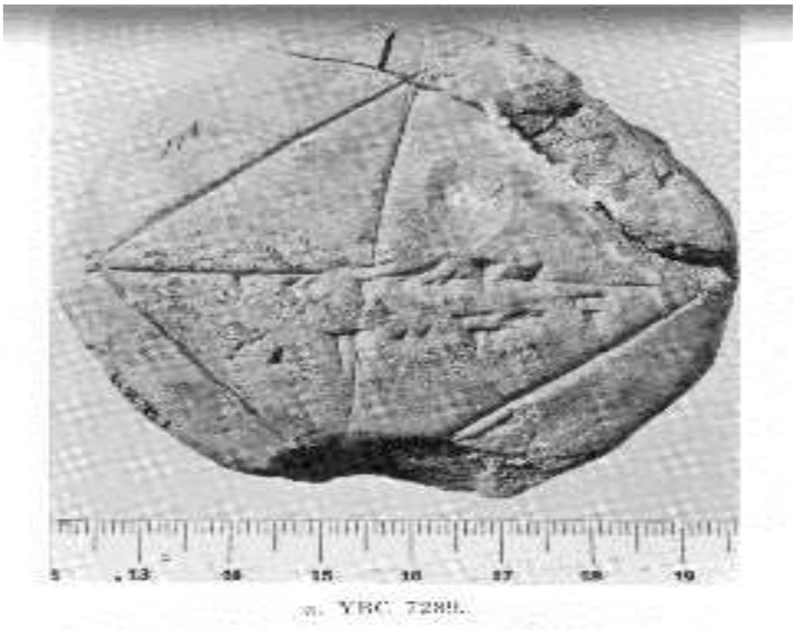
1 setat = 1 τετραγωνικό khet = 10.000 τετράγωνα πηχάκια ≈ 3.280 τετραγωνικά μέτρα (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

2.2. Μεσοποταμία

Εικόνα 14. Χάρτης αρχαίας Μεσοποταμίας

Η Μεσοποταμία ή η «γη μεταξύ των ποταμών» κατέλαβε την περιοχή μεταξύ των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη. Σήμερα η περιοχή αυτή περιλαμβάνει το Ιράκ και τμήματα της Συρίας και του Ιράν. Η αρχαία Μεσοποταμία ονομαζόταν και ως «Γόνιμη Ημισέληνος». Η περιοχή αυτή εκτείνεται από την Ιεριχώ (Ισραήλ), έως βόρεια τη Δαμασκό και το Χαλέπι (Συρία) και νοτιοανατολικά, έως τη Βαγδάτη και τη Βασόρα (Ιράκ) και ακόμα πιο πέρα, έως τα Σούσα (Ιράν) (Clawson, 2008).

Ο πολιτισμός αυτός σταμάτησε σταδιακά μετά την κατάκτηση των Περσών, υπό την ηγεσία του Μεγάλου Κύρου το 538 π. Χ., και των Ελλήνων, υπό την ηγεσία του Μεγάλου Αλεξάνδρου 330 π. Χ. Παρά τις διαδοχικές εισβολές, οι πολιτιστικές παραδόσεις της Μεσοποταμίας, συμπεριλαμβανομένης της γραφής και των Μαθηματικών, παρέμειναν εξαιρετικά σταθερές κατά τη διάρκεια των 3000 ετών από το 3500 έως το 500 π. Χ. και αποτελείται από μια σειρά πολιτισμών, όπως ο πολιτισμός των Ακκαδιτών, των Αμοριτών, των Χεττιτών, των Ασσυρίων, των Χαλδαίων. Αργιλικές πινακίδες από την πόλη Ουρούκ από το 3000 π. Χ. δείχνουν υπολογισμούς για την εύρεση εμβαδών πεδίων, συμπεριλαμβανομένων των τραπεζοειδών πεδίων. Πλάκες που χρονολογούνται από το 2500 π. Χ., πιθανότατα, χρησιμοποιούμενες σε σχολεία, παρουσιάζουν κύκλους εγγεγραμμένους σε τετράγωνα όπου ο αναγνώστης καλείται να βρει το εμβαδόν του κύκλου και του τετραγώνου.



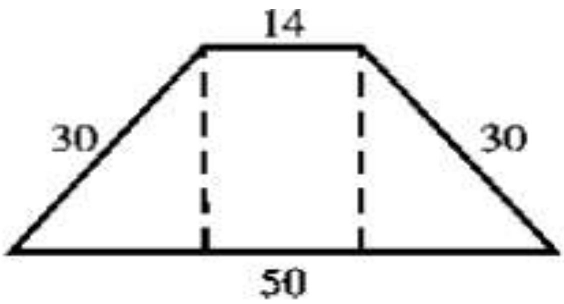
Εικόνα 15. Μεσοποτάμια πλάκα 2500 π.Χ.

Από διασωθέντες πινακίδες συμπεραίνουμε ότι στη Μεσοποταμία ήξεραν πώς να βρουν εμβαδά τριγώνων και τραπεζοειδών. Για να βρούνε το εμβαδό ενός κύκλου περιφέρειας C, χρησιμοποίησαν τον τύπο $A = \frac{1}{12}C^2$ ισοδύναμο με τον τύπο μας $A = \pi * r^2$ αν αντικαταστήσουμε π με 3. Επίσης, μερικές φορές χρησιμοποίησαν τον τύπο $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2}$, όπου D είναι η διάμετρος του κύκλου. Υπολογίστηκαν επίσης τμήματα κυκλικών τμημάτων και διπλών τόξων αποτελούμενων από δύο τμήματα κύκλων. Άλλες πινακίδες περιέχουν τύπους για το μήκος και το εμβαδόν με τη μορφή καταλόγων συντελεστών. Συγκεκριμένα όσον αφορά το εμβαδόν ο πίνακας είναι:

(S είναι το μήκος της πλευράς του σχήματος και C το μήκος του κύκλου).

Γεωμετρικό σχήμα	**Συντελεστής**	**Τύπος**
Ισόπλευρο τρίγωνο	7 /16	(7/ 16) . S^2
Κανονικό εξάγωνο	21/ 8	(21/ 8) . S^2
Κύκλος	1/ 12	(1/ 12) . C^2

Σε πρόβλημα από αρχαία μεσοποτάμια πινακίδα ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τραπεζίου του οποίου οι πλάγιες πλευρές έχουν μήκος 30 μονάδες και οι βάσεις του τραπεζίου έχουν μήκος 14 και 50 μονάδες.



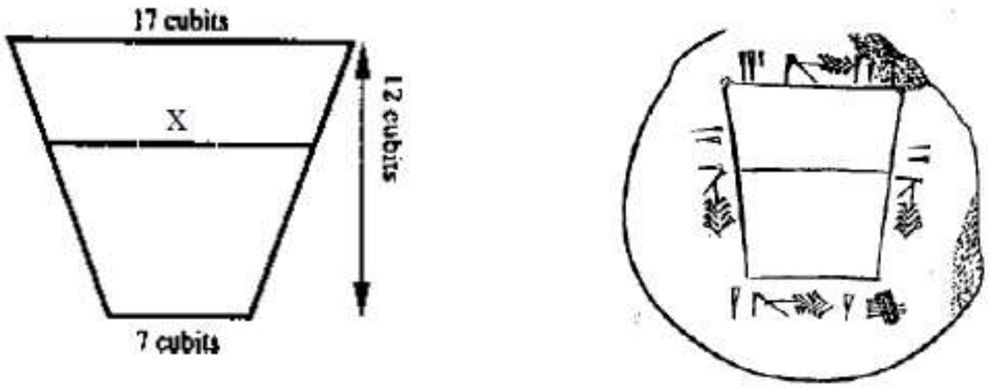
Εικόνα 16. Εμβαδόν ισοσκελούς τραπεζίου, Πρόβλημα αρχαίας μεσοποτάμιας πινακίδας

Για να υπολογίσουν το εμβαδόν αυτού του τραπεζίου, πρώτα βρίσκουν το ύψος του τραπεζίου. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε ένα από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές h και (50-14)/2=18 και υποτείνουσα μήκους 30, έχουμε:

$$h^2 + 18^2 = 30^2 \text{, or } h = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου είναι: $\frac{50+14}{2} \cdot 24 = 768$ τετραγωνικές μονάδες. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του τραπεζίου υπολογίζοντας τα εμβαδά των δύο τριγώνων και του ορθογώνιου ξεχωριστά και στη συνέχεια να τα προσθέσουμε.

Σε ένα άλλο μεσοποτάμιο πρόβλημα του 2300 π. Χ. δίνεται ένα ισοσκελές τραπέζιο. Οι διαστάσεις του τραπεζίου φαίνονται στην εικόνα. Ζητείται να βρεθεί το μήκος x του εγκάρσιας γραμμής που χωρίζει το τραπέζιο σε δύο τραπέζια ίσης έκτασης.



Εικόνα 17. Μεσοποτάμιο πρόβλημα διαχωρισμού ισοσκελούς τραπεζίου, 2300 π. Χ.

Το εμβαδόν του μεγάλου τραπεζίου είναι: $\frac{17+7}{2}\cdot 12 = 144$ τετραγωνικοί πήχεις = 1sar. Στη συνέχεια βρίσκουν το μήκος x της εγκάρσιας γραμμής διαιρώντας το μεγάλο τραπέζιο σε δύο μικρότερα τραπέζια, καθένα με εμβαδό 72 τετραγωνικούς πήχεις. Έστω y είναι το ύψος του μεγαλύτερου τραπεζίου. Οπότε με αντικατάσταση στον τύπο του εμβαδού, ισχύει και για τα δύο τραπέζια: $\frac{17+x}{2}\cdot y = 72$ and $\frac{x+7}{2}\cdot(12-y) = 72.$ Αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις μαζί και επιλύσουμε ως προς y: $y = \frac{102-6x}{5}.$ Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση τότε δίνει $x = \pm 13.$ Αφού x είναι το μήκος μιας γραμμής, μόνο το x = 13 έχει νόημα.

Οι Μεσοποτάμιοι μίλησαν και για το εμβαδόν ενός τμήματος του κύκλου που ονομάζεται πλοίο. Δίνοντας έναν κύκλο, η "φορτηγίδα" αποτελείται από δύο τμήματα κύκλου, καθένα από τα οποία σχηματίζεται από ένα τόξο του τεταρτημορίου του κύκλου.

Εικόνα 18, Μεσοποτάμιο πρόβλημα εμβαδού τμήματος κύκλου

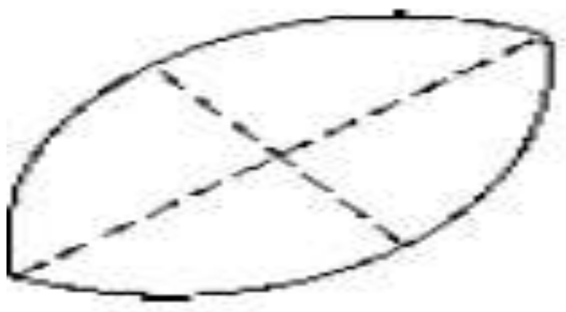
Α .Στη συνέχεια βρήκαν το εμβαδόν της "φορτηγίδας" σε σχέση με την ακτίνα r του κύκλου και π και σε σχέση με το μήκος του τόξου α και π. Δεδομένου ότι το τόξο του κυκλικού τμήματος είναι το ένα τέταρτο της περιφέρειας, τότε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι το ένα τέταρτο του εμβαδού του κύκλου : $\frac{\pi}{4}r^2$. Αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές με πλευρές μήκους r, τότε το εμβαδόν είναι : $\frac{1}{2}r^2$. Συνεπώς το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι: $\frac{\pi}{4}r^2 - \frac{1}{2}r^2$, και το εμβαδόν πλοίου είναι: $2\left(\frac{\pi}{4}r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)r^2$. Δεδομένου ότι $a = \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{\pi}{2}r$, τότε $r = \frac{2a}{\pi}$.

Και το εμβαδόν του πλοίου είναι:

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)r^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}(\pi - 2)a^2.$$

Β. Αν $\pi \approx 3$, τότε το εμβαδόν του πλοίου είναι: $\frac{2}{\pi^2}(\pi-2)a^2 \approx \frac{2}{3^2}(3-2)a^2 = \frac{2}{9}a^2$. Ο Μεσοποτάμιος τύπος για το εμβαδόν του πλοίου ήταν $A = \frac{2}{9}a^2$. Ο τύπος αυτός επαληθεύεται αν χρησιμοποιήσουμε π = 3.

Σε ένα άλλο πρόβλημα οι Μεσοποτάμιοι μίλησαν για το εμβαδόν ενός τμήματος κύκλου που ονόμασαν «μάτι του ταύρου».



Εικόνα 19. Μεσοποτάμιο πρόβλημα εμβαδού τμήματος κύκλου. Το μάτι του ταύρου

Δίνοντας έναν κύκλο, το μάτι του ταύρου αποτελείται από δύο τμήματα κύκλου, καθένα από τα οποία σχηματίζεται από ένα τόξο, τρίτου τεταρτημορίου του κύκλου. Οι Μεσοποτάμιοι βρίσκουν το εμβαδόν του ματιού του ταύρου σε σχέση με την ακτίνα r του κύκλου και π και στη συνέχεια βρίσκουν το εμβαδόν των ματιών του ταύρου σε σχέση με το μήκος του τόξου α και π. Δεδομένου ότι το τόξο του κυκλικού τμήματος είναι το 1/3 της περιφέρειας, τότε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος είναι το 1/3 του κυκλικού εμβαδού, δηλαδή $\frac{\pi}{3}r^2$. Αφού το τρίγωνο αποτελείται από δύο (30-60-90) ορθογώνια τρίγωνα, το καθένα με υποτείνουσα μήκους r, τότε το εμβαδόν του είναι: $2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. Αφού $a = \frac{1}{3}(2\pi r) = \frac{2\pi}{3}r,$ τότε $r = \frac{3a}{2\pi}$, και το εμβαδόν του ματιού του ταύρου είναι:

$$\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2 = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3a}{2\pi}\right)^2 = \frac{3}{8\pi^2}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)a^2.$$

Β. Αν $\pi \approx 3 \text{ and } \sqrt{3} \approx \frac{7}{4}$, τότε το εμβαδόν του ματιού του ταύρου είναι:

$$\frac{3}{8\pi^2}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)a^2 \approx \frac{3}{8 \cdot 3^2}\left(4 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{7}{4}\right)a^2 = \frac{9}{32}a^2.$$

Ο μεσοποτάμιος τύπος για το εμβαδόν του ματιού του κύκλου ήταν $A = \frac{9}{32}a^2$.

Ο τύπος αυτός επαληθεύεται αν χρησιμοποιήσουμε π = 3 και 7/4 για τη $\sqrt{3}$.

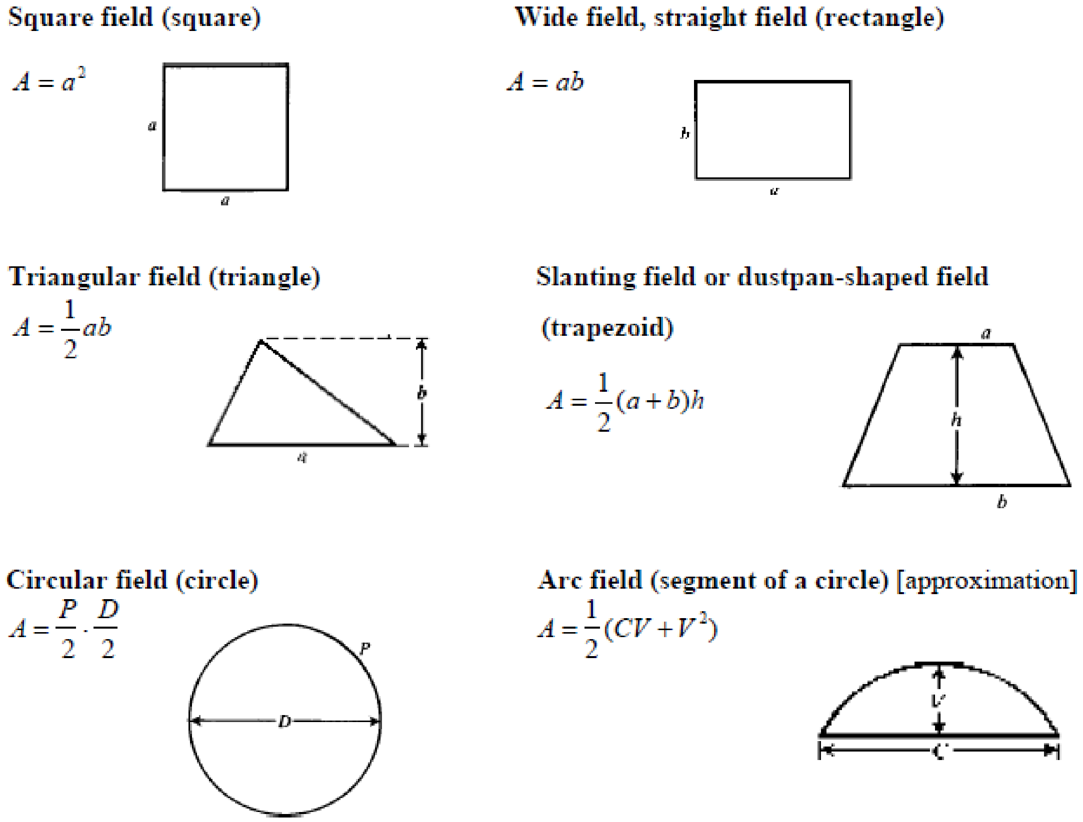
Οι μεσοποτάμιες μονάδες για το εμβαδόν ήταν: 1 εμβαδό-sar = 1 ράβδος x 1 ράβδος περίπου ίσο με 36 m^2 (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

2.3. Κίνα

Εικόνα 20. Χάρτης της αρχαίας Κίνας

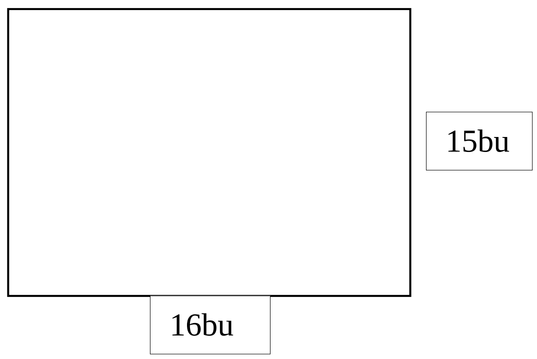
Σύμφωνα με έναν κινεζικό μύθο τα μαθηματικά ξεκίνησαν στην Κίνα κατά την τρίτη χιλιετία π. Χ. Ο πολιτισμός των Κινέζων όμως αναπτύχθηκε ιδιαίτερα γύρω στο $2^{ο}$ αιώνα π. Χ. με αυτοκράτορα τον Fu Xi. Ασχολούνταν ιδιαίτερα με την Αστρονομία και έκαναν προόδους και στα Μαθηματικά (Clawson, 2008). Το παλαιότερο κινεζικό κείμενο που ασχολείται αποκλειστικά με τα μαθηματικά είναι το Jiuzhang Suanshu (*Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης*), το οποίο γράφτηκε από άγνωστους συγγραφείς περίπου το 200 π. Χ. Σύμφωνα με τα αρχεία της Δυναστείας των Chin ο Κινέζος μαθηματικός Liu Hui αναθεώρησε τα «Εννέα Κεφάλαια» και πρόσθεσε το δικό του σχόλιο στο 263 μ. Χ. Από αυτό το κείμενο βλέπουμε πώς υπολογίστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν τα εμβαδά και οι όγκοι. Στα κείμενα αυτά η τιμή του π ήταν 3. Ο Liu Hui, γνωρίζοντας αυτή την ανακρίβεια, κατάφερε να υπολογίσει το π ως 3,1416, ενώ αργότερα οι Zus βελτίωσαν σημαντικά την εκτίμηση του π, δίνοντας επτά δεκαδικά ψηφία, δείχνοντας ότι $3.1415926 < \pi < 3.1415927$.

Οι ακόλουθοι τύποι εμβαδού προέρχονται από το Jiuzhang Suanshu *(Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης), Κεφάλαιο 1, "Μέτρηση Πεδίου":*



Εικόνα 21. Τύποι εμβαδών αρχαίας Κίνας

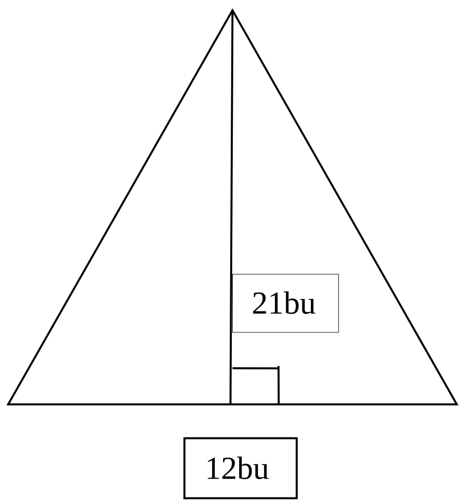
Στο αρχαίο κινεζικό κείμενο *Εννέα Κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική Τέχνη* δίνεται το εξής πρόβλημα. Χωράφι με πλάτος 15 bu και μήκος 16 bu ζητείται το εμβαδόν του. Μετά από πολλά παρόμοια προβλήματα η γενική μέθοδος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, η μέθοδος fang tian, αναφέρει πως «το μήκος και το πλάτος πολλαπλασιάζονται για να δώσουν την απάντηση». Επομένως η λύση του προβλήματος σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή είναι 15*16=240 τετραγωνικά bu = 1*mu*.



Εικόνα 22. Εμβαδόν χωραφιού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, Εννέα κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική τέχνη

Σε ένα άλλο πρόβλημα από το ίδιο κείμενο δίνεται ένα χωράφι με πλάτος 4/5 bu και μήκος 5/9 bu και ζητείται το εμβαδόν του. Για τη λύση του προβλήματος αυτού το μήκος και το πλάτος πολλαπλασιάζονται και δίνουν απάντηση 4/9 τετραγωνικά bu. Η μέθοδος του πολλαπλασιασμού κλασμάτων λέει: «πολλαπλασιάστε τους παρονομαστές για να προκύψουν τα fa. Πολλαπλασιάστε τους αριθμητές για να προκύψουν τα shi. Διαιρέστε τα shi από τα fa».

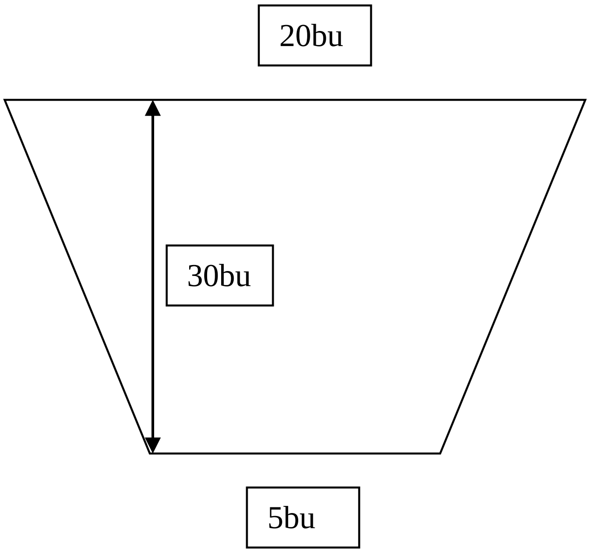
Στο πρόβλημα 25 από το αρχαίο κινεζικό κείμενο *Εννέα Κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική Τέχνη* δίνεται ένα χωράφι με το σχήμα ενός ισοσκελούς τριγώνου (gui tian) με πλάτος 12bu και κάθετο μήκος (zheng cong) 21bu και ζητείται το εμβαδόν του.



Εικόνα 23. Πρόβλημα 25, Εμβαδόν χωραφιού ισοσκελούς τριγώνου, Εννέα κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική τέχνη

Η μέθοδος για τη λύση του προβλήματος αυτού λέει να «μειωθεί στο μισό το πλάτος και να το πολλαπλασιάσουμε με το κάθετο μήκος», δηλαδή το μισό του 12 είναι 6 άρα: Εμβαδόν τριγώνου 6*21 =126 τετραγωνικά bu.

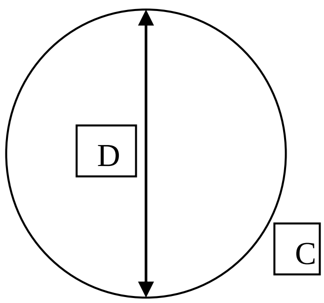
Ενώ όταν δίνεται ένα χωράφι που έχει σχήμα ισοσκελούς τραπεζίου με το μεγαλύτερο πλάτος στην κορυφή 20 bu, χαμηλότερο πλάτος 5 bu και κάθετο μήκος 30 bu και ζητείται το εμβαδόν του.



Εικόνα 24. Εμβαδόν χωραφιού ισοσκελούς τραπεζίου, Εννέα κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική τέχνη

Η μέθοδος για τη λύση του προβλήματος λέει: «προσθέστε τα ανώτερα και τα κατώτερα πλάτη: 20+5 = 25, μειώστε το ποσό αυτό στο μισό: 25/2 = 12,5 και πολλαπλασιάστε με το κάθετο μήκος». Δηλαδή 12,5*30 = 375 τετραγωνικά bu.

Στο πρόβλημα 32 από το αρχαίο κινεζικό κείμενο *Εννέα Κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική Τέχνη* δίνεται ένας κυκλικός τομέας με περίμετρο 181 bu και διάμετρο 60 και 1/3 bu και ζητάει να βρεθεί το εμβαδόν του τομέα.



Εικόνα 25. Εμβαδόν κυκλικού τομέα, Πρόβλημα 32, Εννέα κεφάλαια σχετικά με τη Μαθηματική τέχνη

Η μία μέθοδος για τη λύση του προβλήματος αυτού λέει «αμοιβαία πολλαπλασιάστε το μισό της περιμέτρου και το μισό της διαμέτρου για να προκύψει το εμβαδόν σε τετραγωνικά», και περιγράφεται από τον τύπο : $A = \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2}$ και η άλλη μέθοδος: «αμοιβαίως πολλαπλασιάστε την περίμετρο και τη διάμετρο και διαιρέστε με 4», και περιγράφεται από τον τύπο : $A = \frac{CD}{4}$. Η τρίτη μέθοδος λέει: «Πολλαπλασιάστε τη διάμετρο με τον εαυτό της, στη συνέχεια με 3 και διαιρέστε με 4», και περιγράφεται από τον τύπο: $A = \frac{3D^2}{4}$. Ο τύπος αυτός χρησιμοποιήθηκε σε πολλούς αρχαίους πολιτισμούς και επαληθεύεται για π = 3. Ενώ μια τέταρτη μέθοδος προτείνει: «Πολλαπλασιάστε την περίμετρο με τον εαυτό της και διαιρέστε με 12», και περιγράφεται από τον τύπο : $A = \frac{C^2}{12}$. Στους παραπάνω τύπους όπου C είναι η περίμετρος του κύκλου και D η διάμετρος. Οι τύποι αυτοί είναι σωστοί αν αντικαταστήσουμε το π = 3 (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

2.4. Ινδία

Εικόνα 26. Χάρτης της αρχαίας Ινδίας

Ο πρώτος και ο μεγαλύτερος πολιτισμός στην αρχαία Ινδία αναπτύχθηκε γύρω από τη κοιλάδα του Ινδού ποταμού (σήμερα ανήκει στο Πακιστάν) γύρω στο 3.000 π. Χ. Το 2.500 π. Χ. είχε φτάσει στη μεγαλύτερη ακμή του. Ο πολιτισμός της κοιλάδας του Ινδού ήταν ο μεγαλύτερος από κάθε άλλη αρχαία αυτοκρατορία ακόμη και από την Αιγυπτιακή και αυτή των λαών της Μεσοποταμίας (Clawson, 2008). Ο πρώτος απολογισμός της χρήσης εμβαδών στην Ινδία εμφανίζεται σε μια σειρά θρησκευτικών κειμένων που ονομάζονται *Sulbasutras,* το πρώτο από τα οποία πιθανότατα γράφτηκε πριν από τον έκτο αιώνα π. Χ. Η θρησκεία υπαγορεύει τη χρήση των τύπων του εμβαδού στην κατασκευή των βωμών οι οποίοι κατασκευάζονταν σε διάφορα σχήματα, ανάλογα με το τελετουργικό που έπρεπε να εκτελεστεί. Το πάνω μέρος κάθε βωμού είχε συγκεκριμένο εμβαδό, ανάλογα με τον τύπο της θυσίας και τον βαθμό του προσώπου που την πραγματοποιούσε.

Ένα από τα προβλήματα που διατυπώθηκαν στα *Sulbasutras*, που κυριολεκτικά σημαίνει «τύποι με σχοινί», δίνει οδηγίες για την κατασκευή ενός τετράγωνου βωμού με το ίδιο εμβαδόν με έναν συγκεκριμένο κυκλικό βωμό. Συγκεκριμένα: «χωρίστε τη διάμετρο σε 15 μέρη και πάρτε 13 τμήματα όπως και η πλευρά του τετραγώνου». Η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος $a = \frac{13}{15} d$, όπου d η διάμετρος του κύκλου. Δεδομένου ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $α^2$, τότε το εμβαδόν του κύκλου πρέπει να είναι $a^2 = \left(\frac{13}{15} d\right)^2 = \frac{169}{225} d^2$. Αλλά το εμβαδόν του κύκλου ισούται με $πr^2 = \pi\left(\frac{1}{2} d\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$

(όπου r η ακτίνα του κύκλου). Μια σύγκριση των δύο τύπων για το εμβαδόν δίνουν μια προσέγγιση του π, $\pi \approx \frac{676}{225} = 3.004\overline{4}$.

Τα *Sulbasutras* δίνουν έναν ακριβή τύπο για την κατασκευή τετράγωνου βωμού με εμβαδό ίδιο με ενός κυκλικού βωμού. Συγκεκριμένα: «εάν επιθυμείτε να μετατρέψετε έναν κύκλο σε ένα τετράγωνο, διαιρέστε τη διάμετρο σε 8 μέρη, και πάλι ένα από αυτά τα οκτώ μέρη σε 29 τμήματα. Από αυτά τα 29 τμήματα αφαιρέστε τα 28 και, επιπλέον, το έκτο μέρος (από αριστερά αφενός) μείον το όγδοο τμήμα (από το έκτο μέρος)». Για τετράγωνο πλευράς α και κύκλο με διάμετρο d, στη σύγχρονη σημειογραφία έχουμε: $a = d\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)$.Δεδομένου ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι Α = $α^2$, τότε το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο d πρέπει να είναι επίσης $α^2$. Μια σύγκριση με τον τύπο $πr^2$, (όπου r η ακτίνα του κύκλου) για το εμβαδόν του κύκλου, δίνει μια προσέγγιση του $π \approx 3,0883$.

Ένας τύπος, από τους τύπους των Sulbasutras, δίνει τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με εκείνο ενός τετραγώνου με την πλευρά α, όπως

$$a\sqrt{2} \text{ and } \frac{1}{2}a\sqrt{2}\text{, where } \sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} = 1.414215686$$

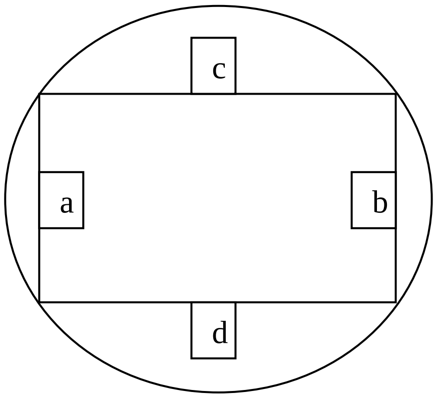
μια τιμή σωστή με 5 δεκαδικά ψηφία.

Οι αρχαίοι Ινδοί γνώριζαν ότι ένα τετράγωνο με ακριβώς το διπλάσιο της επιφάνειας ενός δεδομένου τετραγώνου μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου ως μήκος πλευράς του νέου τετραγώνου. Μπορεί να γίνει τετράγωνο που είναι τριπλό στην περιοχή ενός δεδομένου τετραγώνου χρησιμοποιώντας τη διαγώνιο του τετραγώνου ως το μήκος και την πλευρά του τετραγώνου ως το πλάτος για να σχηματίσει ένα ορθογώνιο, της οποίας η διαγώνιος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την πλευρά του τριπλού τετραγώνου. Ένα τετράγωνο μπορεί να μετατραπεί σε ισοσκελές τρίγωνο του ίδιου εμβαδού τοποθετώντας ένα τετράγωνο του ιδίου μεγέθους δίπλα στο δεδομένο τετράγωνο (δημιουργώντας ένα ορθογώνιο που έχει διπλάσια επιφάνεια από το αρχικό τετράγωνο). Η κοπή διαγωνίων από το ίδιο σημείο σε αντίθετες κατευθύνσεις θα αποφέρει ένα ισοσκελές τρίγωνο με το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό τετράγωνο.

Πολλοί από τους τριγωνικούς και τραπεζοειδείς βωμούς που περιγράφονται στους Sulbasutras χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στις κατασκευές τους. Για παράδειγμα, στην κατασκευή της βάσης ενός ειδικού βωμού που ονομάζεται Mahavedi, του οποίου το θεμέλιο έχει σχήμα ισοσκελούς τραπεζοειδούς με βάσεις 24 και 30 και ύψος 36, χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα πέντε πυθαγόρεια τριπλά: (15,36,39) , (12,16,20), (5,12,13), (8,15,17) και (12,35,37).

Ο μαθηματικός και αστρονόμος Bhaskara στο βιβλίο του *Livalati* χρησιμοποιεί για τον υπολογισμό της επιφάνειας της σφαίρας τον τύπο $S = 4\left(\frac{1}{4}dC\right) = dC$, όπου d η διάμετρος και C η περιφέρεια της σφαίρας.

Ο Brahmagupta ήταν ένας Ινδός αστρονόμος και μαθηματικός, ο οποίος έγραψε το πιο γνωστό του έργο, το Brahmasphutasiddhantan (Correct Astronomical System of Brahma) .



Εικόνα 27. Εμβαδόν τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο, Τύπος του Brahmagupta

Έχει αναπτύξει τον ακόλουθο διάσημο σωστό τύπο για το εμβαδόν ενός τετράπλευρου εγγεγραμμένου σε έναν κύκλο:

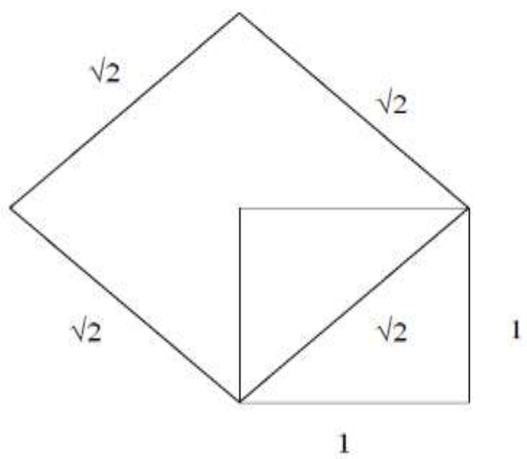
$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \text{ where } s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

όπου a, b, c, και d είναι τα μήκη των πλευρών του.

Οι αρχαίοι Ινδοί γνώριζαν ότι ένα τετράγωνο με ακριβώς το διπλάσιο της επιφάνειας ενός δεδομένου τετραγώνου μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου ως μήκος πλευράς του νέου τετραγώνου αλλά και άλλες παρόμοιες κατασκευές.

Σε ένα από τα προβλήματα που υπάρχουν στα *Sulbasutras* δίνεται τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 και ζητείται να βρεθεί ένα τετράγωνο που έχει δύο φορές το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου. Η υπόδειξη που δίνεται από τον Baudhayanasulbasutra είναι ότι «η διαγώνιος του τετραγώνου παράγει διπλό το εμβαδόν του νέου τετραγώνου».

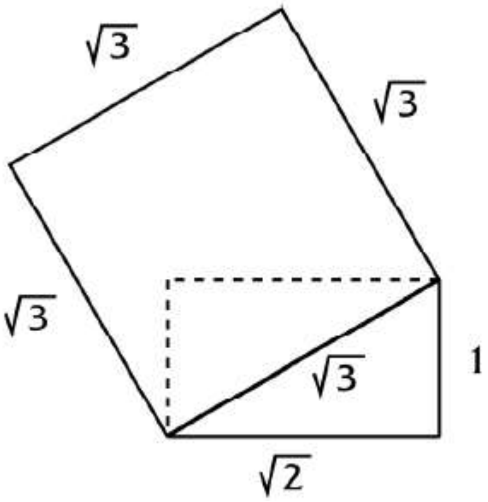
Το νέο τετράγωνο έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και εμβαδόν 2.



Εικόνα 28. Πρόβλημα εμβαδού τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν του αρχικού, Sulbasutras

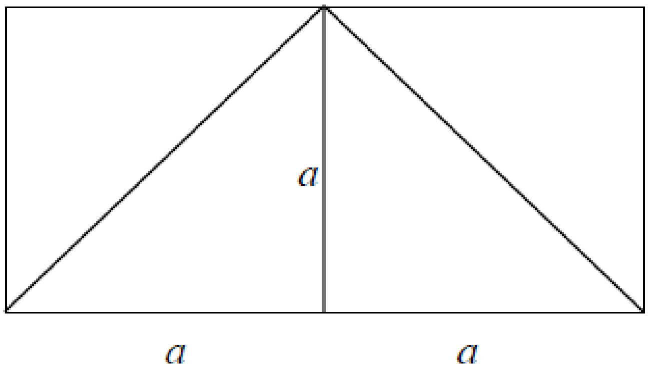
Σε ένα άλλο πρόβλημα στα *Sulbasutras* αναφέρει: «για να κάνετε ένα τετράγωνο που έχει το τριπλάσιο εμβαδόν ενός δοσμένου τετραγώνου, σχηματίστε ένα ορθογώνιο χρησιμοποιώντας τη διαγώνιο του τετραγώνου που δίνεται ως μήκος και την πλευρά του τετραγώνου ως πλάτος του ορθογωνίου». Η υπόδειξη που προτείνεται είναι να χρησιμοποιήσουμε τη διαγώνιο του ορθογωνίου για την πλευρά του τριπλάσιου τετραγώνου.

Στο αρχαίο κείμενο η λύση είναι η εξής: «Αν υποτεθεί ότι το αρχικό τετράγωνο έχει μήκος πλευράς 1, χρησιμοποίησε τα τμήματα της γραμμής μήκους 1 και $\sqrt{2}$ από τη λύση για το Πρόβλημα 2 ώστε να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο με πλευρές 1 και $\sqrt{2}$ και με διαγώνιο μήκους $\sqrt{3}$. (Αντίστοιχα, χρησιμοποίησε αυτά τα τμήματα γραμμής για την κατασκευή ενός ορθογωνίου τριγώνου με μήκη 1 και $\sqrt{2}$ και υποτείνουσα μήκους $\sqrt{3}$.) Το τετράγωνο πλευράς μήκους $\sqrt{3}$ έχει εμβαδό τριπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς 1».



Εικόνα 29. Πρόβλημα εμβαδού τετραγώνου με τριπλάσιο εμβαδόν του αρχικού, Sulbasutras

Σε ένα άλλο πρόβλημα περιγράφεται η εξής διαδικασία: «Αν μπορούμε να μετατρέψουμε ένα τετράγωνο σε ένα ισοσκελές τρίγωνο (που έχουν το ίδιο εμβαδό), διπλασιάζουμε το εμβαδό του τετραγώνου (για να σχηματίσουμε ένα παραλληλόγραμμο), και καθορίζουμε ένα καλάμι στο μεσαίο σημείο της ανατολικής (επάνω) πλευράς. Οι δύο χορδές δεμένες στο καλάμι και επιμηκυμένες στη (μία διαγώνια γωνία και στη συνέχεια στην άλλη διαγώνια γωνία) δίνουν ένα ισοσκελές τρίγωνο ίσο σε εμβαδό με το αρχικό τετράγωνο».



Εικόνα 30. Μετατροπή τετραγώνου σε ισοεμβαδικό ισοσκελές τρίγωνο, Sulbasutras

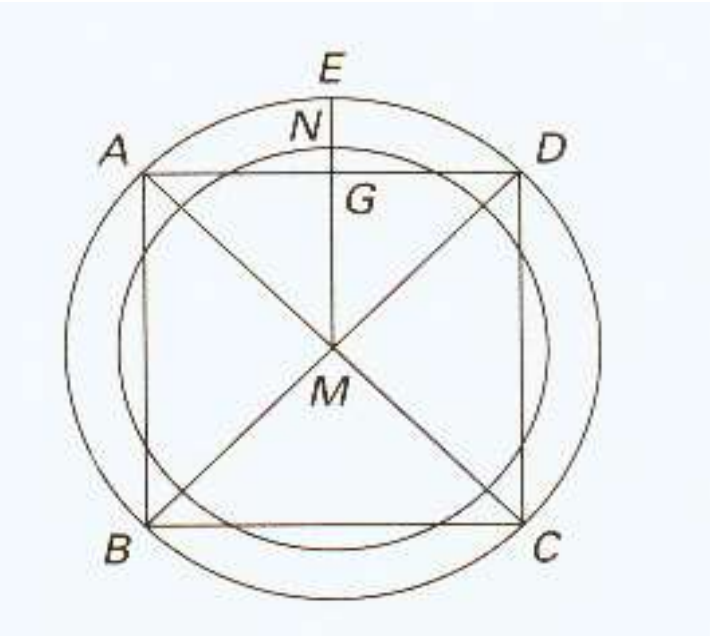
Το Sulbasutra που γράφτηκε από τον Apastamba κάπου μεταξύ του 700 και του 400 π. Χ. περιέχει οδηγίες για την κατασκευή ενός κυκλικού βωμού που έχει την ίδια περιοχή με ένα δεδομένο τετράγωνο βωμό.

α) Στο τετράγωνο ABCD, M είναι η τομή των διαγώνιων του τετραγώνου.

β) Σχεδιάστε τον κύκλο με το M ως κέντρο και το MA ως ακτίνα.

c) ME να είναι η ακτίνα του κύκλου κάθετα προς AD και να τέμνει AD στο G.

δ) Αφήστε GN = 1/3 GE. Στη συνέχεια, MN είναι η ακτίνα ενός κύκλου που έχει περιοχή ίση με την περιοχή του τετραγώνου ABCD.



Εικόνα 31. Κατασκευή κυκλικού βωμού ισοεμβαδικού τετράγωνου βωμού, Sulbasutras

Εάν το τετράγωνο ABCD έχει μήκος πλευρά a, τότε AG και MG έχουν μήκος a/2 και το MA έχει μήκος $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Ως εκ τούτου, το ME έχει επίσης μήκος $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Το GE έχει μήκος $\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}=\frac{(\sqrt{2}-1)a}{2}$ και το GN έχει μήκος $\frac{(\sqrt{2}-1)a}{6}$ και το MN έχει μήκος $\frac{a}{2}+\frac{(\sqrt{2}-1)a}{6}=\frac{(2+\sqrt{2})a}{6}$. Ο κύκλος με ακτίνα MN θα έχει εμβαδόν

$$\pi\left(\frac{(2+\sqrt{2})a}{6}\right)^2 \approx 1.0173a^2$$

τη στιγμή που το εμβαδόν του τετραγώνου ABCD είναι a^2 . Αν αντικαταστήσουμε π = $\left(\frac{6}{2+\sqrt{2}}\right)^2 \approx 3.0883$, τότε ο κύκλος θα έχει εμβαδόν a^2. Ως εκ τούτου, ο Apastamba χρησιμοποίησε π ≈ 3.0883 στην κατασκευή του κυκλικού βωμού. Αργότερα Ινδοί μαθηματικοί χρησιμοποίησαν την εκτίμηση $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3.1623$. (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

2.5. Μεξικό

Εικόνα 32. Αυτοκρατορία των Αζτέκων 1519 μ. Χ.

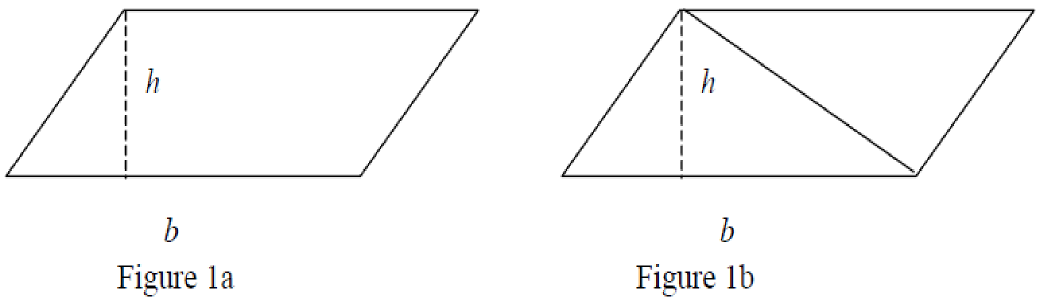
Οι κώδικες Codice de Santa Maria Asuncion και Codex Vergara περιέχουν απογραφές και χάρτες απογραφής από το νοικοκυριό των Αζτέκων Texcocan που ζούσαν σε ένα χωριό κοντά στο Tenochtitlan που ονομάζεται Tepetlaoztoc. Υπολογίζεται ότι αυτοί οι κώδικες ετοιμάστηκαν γύρω στο 1545. Οι κώδικες είναι χωρισμένοι σε τρία τμήματα: α) Το Tlacatlacuiloli, β) το Milcocoli και γ) το Tlahuelmantli. Ωστόσο, η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του εμβαδού των χωραφιών δεν αποκαλύπτεται ούτε στα τμήματα του Milcocoli αλλά ούτε και σε αυτά του Tlahuelmantli. Κατά συνέπεια, δεν είναι γνωστός ο ακριβής τρόπος υπολογισμού των χωραφιών. Η τυπική μονάδα της γραμμικής μέτρησης ήταν η Quahuitl, η οποία ήταν περίπου 2,5 μέτρα. Ενώ το εμβαδόν μετράται σε τετραγωνικά quahuitl. Σύμφωνα με ορισμένες ενδείξεις τα 400 τετραγωνικά quahuitl ή 2.500 τετραγωνικά μέτρα (2,5 στρέμματα) ήταν ένα κανονικό μέγεθος για ένα οικόπεδο (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

2.6. Ελλάδα

Εικόνα 33. Χάρτης της αρχαίας Ελλάδας

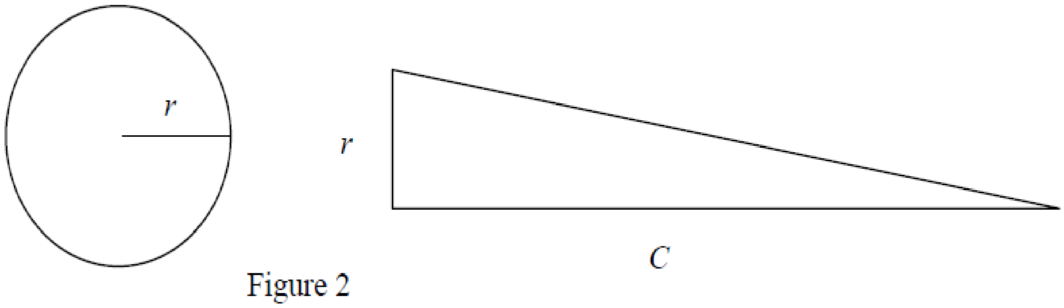
Η Γεωμετρία ήταν ο πιο σεβαστός και καλά ανεπτυγμένος κλάδος των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα και οι Έλληνες μαθηματικοί γνώριζαν ουσιαστικά όλους τους τύπους εμβαδού και όγκου που μελετήθηκαν και μπορούσαν να αποδείξουν τους περισσότερους από αυτούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα εργαλείο που επινοήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες για τον υπολογισμό των αριθμητικών δεδομένων ήταν ο άβακας (άβαξ). Ο άβακας ήταν μία σανίδα και πάνω στην οποία άπλωναν χώμα ή άμμο και για την εκτέλεση των υπολογισμών σκάλιζαν ελαφριά το χώμα (Bunt et.al., 1981). Οι μεγαλύτεροι Έλληνες γεωμέτρες, ο Ευκλείδης (περίπου 300 π. Χ.) και ο Αρχιμήδης (287-212 π. Χ.), ανακάλυψαν πολλούς τύπους για την εύρεση εμβαδών και όγκων. Κατέγραψαν αυτούς τους τύπους με λόγια και όχι με σύμβολα. Στην πραγματικότητα, ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης έδωσαν συνήθως το εμβαδόν ή τον όγκο ενός σχήματος σε σχέση με αυτό ενός άλλου.

Στην *πρόταση 41 του βιβλίου I* των *Στοιχείων* του, ο Ευκλείδης δίνει το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ως προς το εμβαδόν ενός τριγώνου ως εξής: Το τρίγωνο με τη βάση b και το ύψος h έχει εμβαδόν At = (1/2) bh. Το εμβαδόν Ap του παραλληλογράμμου είναι Ap = 2At = 2 [(1/2) bh] = bh.



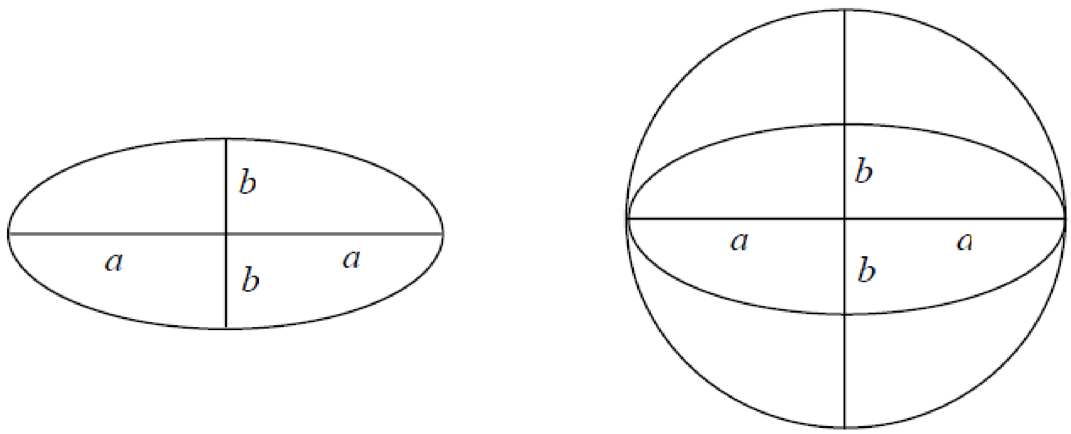
Εικόνα 34. Πρόταση 41, Βιβλίο 1 Στοιχείων, Ευκλείδης

Σύμφωνα με τον Αρχιμήδη, *Για τη μέτρηση του κύκλου Πρόταση 1*, το εμβαδόν οποιουδήποτε κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθού τριγώνου στο οποίο μια από τις κάθετες πλευρές είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η άλλη ίση με την περιφέρεια του κύκλου.



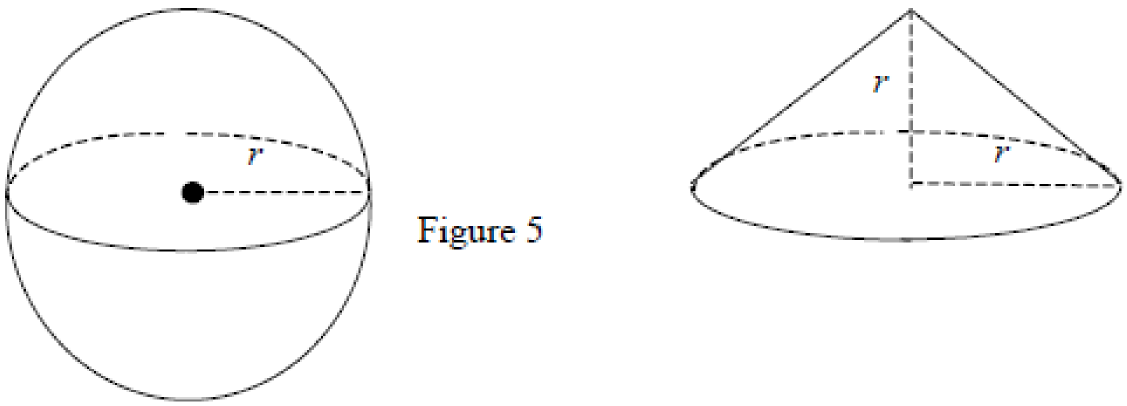
Εικόνα 35. Για τη μέτρηση του κύκλου, Πρόταση 1, Αρχιμήδης

Ενώ *Επί των Κωνοειδών και των Σφαιροειδών, Πρόταση 4,* Το εμβαδόν οποιασδήποτε έλλειψης είναι στο εμβαδόν του βοηθητικού κύκλου καθώς ο δευτερεύων άξονας είναι στον κύριο άξονα. Ο βοηθητικός κύκλος είναι ο κύκλος με ακτίνα ίση με τον κύριο ημι-άξονα.



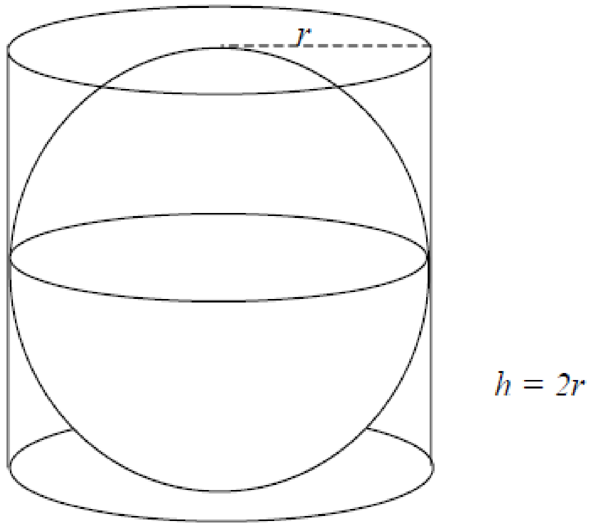
Εικόνα 36. Επί των κωνοειδών και των σφαιροειδών, Πρόταση 4, Αρχιμήδης

Σύμφωνα πάντα με τον Αρχιμήδη, *Στη Σφαίρα και τον Κύλινδρο, Πρόταση 33*: Η επιφάνεια οποιασδήποτε σφαίρας είναι ίση με το τετραπλάσιο του μεγαλύτερου κύκλου της.



Εικόνα 37. Στη σφαίρα και τον κύλινδρο, Πρόταση 33, Αρχιμήδης

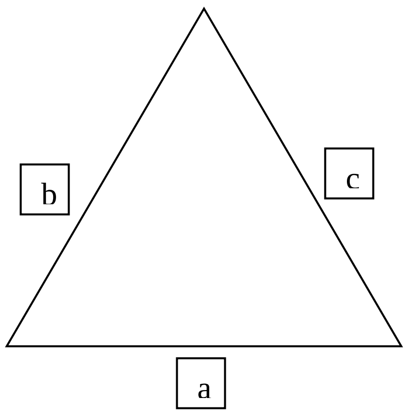
Σύμφωνα πάντα με τον Αρχιμήδη, *Στη Σφαίρα και τον Κύλινδρο, Πρόταση 34* :Ένας κύλινδρος περιγεγραμμένος γύρω από μια σφαίρα είναι ο μισός από τη σφαίρα τόσο στην επιφάνεια όσο και στον όγκο.



Εικόνα 38. Στη σφαίρα και τον κύλινδρο. Πρόταση 34, Αρχιμήδης

Από όλα τα μαθηματικά αποτελέσματα του Αρχιμήδη, αυτό ήταν το αγαπημένο του, τόσο πολύ ώστε ζήτησε να χαραχθεί ένα διάγραμμα ενός κυλίνδρου περιγεγραμμένου γύρω από μια σφαίρα πάνω στην ταφόπλακα του.

Ο Ήρων της Αλεξάνδρειας, Έλληνας μαθηματικός που έζησε κατά τον πρώτο αιώνα, έγραψε ένα πολύ σημαντικό πρακτικό βιβλίο γεωμετρίας που ονομάζεται Metrica. Ο τύπος του Ήρωνα για το εμβαδόν του κύκλου στην Metrica ήταν $A = (11/14)D^2$. Αυτός ο τύπος για το εμβαδόν του κύκλου συνέχισε να εμφανίζεται στα μαθηματικά έργα για εκατοντάδες χρόνια, συμπεριλαμβανομένου του έργου ενός από τους πρώτους μεγάλους Άραβες μαθηματικούς, τον Μωάμεθ ibn Musa al-Khwarizmi, στις αρχές του 9ου αιώνα. Το πιο διάσημο όμως αποτέλεσμα του από την Metrica, ήταν ο τύπος του για το εμβαδόν τριγώνου με βάση τις διαστάσεις των πλευρών του. Σε αυτό το βιβλίο ο Ήρων βρίσκει το εμβαδόν τριγώνου με τη βοήθεια μόνο το μήκος των πλευρών του χωρίς να χρειάζεται να τραβήξει κάθετο ύψος.



Εικόνα 39. Εμβαδόν τριγώνου, Τύπος του Ήρωνα

Ο Ήρων λοιπόν αποδεικνύει ότι το εμβαδόν Α ενός τριγώνου με πλευρές μήκους a, b και c δίνεται από τον τύπο : $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

όπου s είναι η ημι - περίμετρος του τριγώνου.

'Έτσι μπορούσαν με βάση αυτόν τον τύπο να βρουν το εμβαδόν ενός τριγωνικού πεδίου χωρίς να χρειαζόταν να κατασκευάσουν μια κάθετη από μια κορυφή του τριγώνου στην αντίθετη πλευρά του.

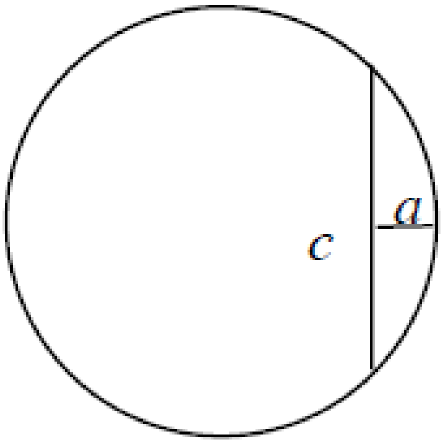
Ο Ήρων της Αλεξάνδρειας έδωσε επίσης τύπους για τις περιοχές των κανονικών πολύγωνων. Ας υποδηλώσουμε την περιοχή ενός κανονικού n-gon που έχει μήκος πλευράς s. Τότε :

$$A_3 = \frac{13}{30}s^2 \qquad A_5 = \frac{5}{3}s^2 \qquad A_7 = \frac{43}{12}s^2 \qquad A_9 = \frac{51}{8}s^2$$

Αυτοί οι τύποι αποτελούν καλές προσεγγίσεις, αλλά δεν είναι ακριβείς.

Επίσης αναφέρει τον παλαιότερο Έλληνα μαθηματικό Αρχιμήδη (287-212 π. Χ.), δηλώνοντας ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι 3 + 1/7 φορές το τετράγωνο της ακτίνας και η περιφέρεια είναι 3 + 1/7 φορές η διάμετρος. Και αυτοί οι τύποι αποτελούν καλές προσεγγίσεις, αλλά δεν είναι ακριβείς.

Για ένα τμήμα κύκλου μικρότερο από ένα ημικύκλιο ο Ήρων αναφέρει ότι "οι αρχαίοι" υπολογίζουν το εμβαδόν του τμήματος ως: $A = \frac{1}{2}(c+a)a$

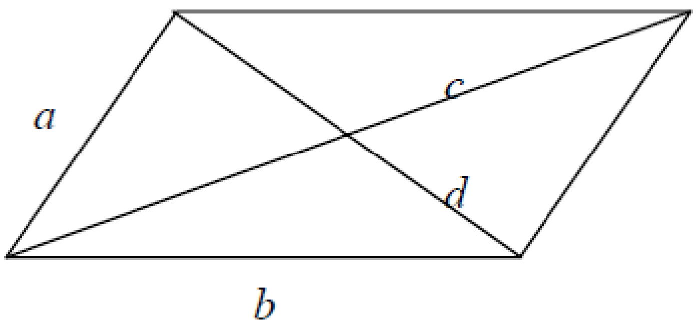


Εικόνα 40. Εμβαδόν τμήματος κύκλου, Τύπος του Ήρωνα

Ο τύπος όμως αποδεικνύεται ότι υποτιμά το εμβαδόν του τμήματος.

Ακολουθεί ένας τύπος για την περιοχή ενός παραλληλογράμμου από άποψη δύο γειτονικών πλευρών, a και b, και των διαγωνίων, c και d.

$$\text{Area} = \sqrt{a^2 b^2 - \frac{(c^2 - d^2)^2}{16}}$$



Εικόνα 41. Εμβαδόν παραλληλογράμμου σε σχέση με πλευρές και διαγώνιους, Τύπος του Ήρωνα

Ο τύπος είναι σωστός για ορθογώνια και παραλληλόγραμμα.

Αυτοί οι τύποι εξυπηρετούσαν τους σκοπούς τους στους αρχαίους πολιτισμούς, παρόλο που δεν ήταν πάντα ακριβείς.

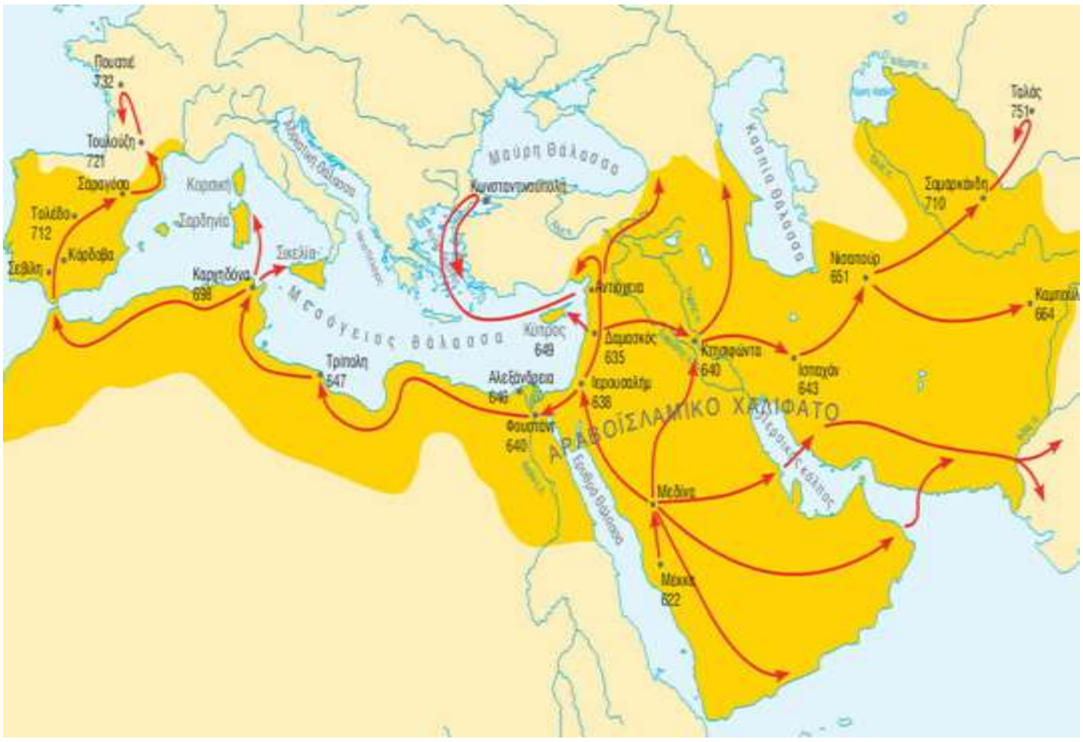
Ο Έλληνας μαθηματικός Πάππος της Αλεξάνδρειας (περίπου το 320 μ. Χ.) μελέτησε τη σχέση μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού. Δημοσίευσε τα αποτελέσματά του στο πέμπτο βιβλίο της συλλογής των οκτώ μαθηματικών έργων που καλούνται, *Η Μαθηματική Συλλογή*. Στο *Βιβλίο Πέντε* της Συλλογής, συζητά τη γεωμετρία των κυψελών και για τα ισοπεριμετρικά σχήματα.

Ο Πάππος ισχυρίζεται ότι εάν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο έχουν την ίδια περίμετρο, το εξάγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Επαλήθευσε τον ισχυρισμό του υπολογίζοντας το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός κανονικού εξάγωνου περιμέτρου 12". Το ισόπλευρο τρίγωνο περιμέτρου 12" έχει μήκος πλευράς 4" και, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ένα ύψος $2\sqrt{3}$ ίντσες. Τότε το εμβαδόν του θα είναι $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6.9282$ τετραγωνικές ίντσες. Το τετράγωνο περιμέτρου 12΄΄ έχει εμβαδόν 3*3=9 τετραγωνικές ίντσες. Το κανονικό εξάγωνο περιμέτρου 12΄΄ έχει μήκος πλευράς 2΄΄ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ένα απόθεμα μήκους $\sqrt{3}$ ιντσών. (απόθεμα είναι το κάθετο τμήμα από το κέντρο ενός κανονικού πολύγωνου στο μέσο της μιας από τις πλευρές του). Δεδομένου ότι το εμβαδόν Α ενός κανονικού πολυγώνου με απόθεμα a και περίμετρο P δίνεται από τον τύπο $A = \frac{1}{2}aP$ τότε το εμβαδόν του συγκεκριμένου κανονικού εξαγώνου θα είναι : $A = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 12 = 6\sqrt{3} \approx 10.3923$ square inches. Άρα το κανονικό εξάγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από τα άλλα δύο σχήματα με την ίδια περίμετρο.

Ο Πάππος ισχυρίστηκε ότι, μεταξύ όλων των επίπεδων μορφών που έχουν την ίδια περίμετρο, ο κύκλος έχει τη μεγαλύτερη έκταση. Υπολόγισε το εμβαδόν ενός κύκλου περιφέρειας 12" και το σύγκρινε με το κανονικό εξάγωνο του προηγούμενου προβλήματος αφού ο κύκλος με περιφέρεια C = 12 έχει ακτίνα $r = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi}$ και εμβαδόν $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{36}{\pi} \approx 11.4592$ τετραγωνικές ίντσες.

(Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

3.7 Αραβική αυτοκρατορία



Εικόνα 42. Χάρτης της αραβικής αυτοκρατορίας

Κατά τον 7ο αιώνα μ. Χ. ο προφήτης των μουσουλμάνων Μωάμεθ κατάφερε να ενώσει τους αραβικούς λαούς και να δημιουργήσει μία αραβική αυτοκρατορία που έφτανε από την Ινδία ως την Νότια Αφρική και την Ισπανία. Από τον 9ο αιώνα μ. Χ. άρχισαν οι Άραβες μαθηματικοί να μεταφράζουν κλασικά έργα Ελλήνων συγγραφέων όπως του Ευκλείδη, του Πτολεμαίου, του Απολλώνιου, του Αρχιμήδη, του Πάππου και του Διόφαντου (Clawson, 2008).

Παρόλο που οι Ρωμαίοι χρησιμοποίησαν σίγουρα τα Μαθηματικά, ειδικά για τη μέτρηση του μήκους, του εμβαδού και του όγκου, στην τεχνολογία και την αρχιτεκτονική, δεν φαινόταν να εκτιμούν και να επιζητούν ιδιαίτερα την μαθηματική ανακάλυψη. Ο μεγάλος Άραβας μαθηματικός Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 μ. Χ.) αν και είναι περισσότερο γνωστός για το βιβλίο του για τα θέματα της *al-Jabr* (άλγεβρα) και *al-muqabala*, έγραψε επίσης εργασίες για πρακτική γεωμετρία που περιέχουν πολλούς τύπους για εμβαδά και όγκους. Αντί να χρησιμοποιεί τον τύπο του Ήρωνα για να βρει το εμβαδόν ενός τριγώνου στο οποίο το μήκος των πλευρών ήταν γνωστό αλλά το ύψος άγνωστο, ο al-Khwarizmi χρησιμοποίησε το Πυθαγόρειο Θεώρημα δύο φορές για να βρει το ύψος του τριγώνου (Beery J., Dolezal C., Sauk A., Shuey L., 2004).

Κεφάλαιο 3ο - Δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια του εμβαδού

Μελετώντας επί χρόνια τις δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με το μάθημα της Γεωμετρίας καταλήγουμε πια ότι, κύρια αιτία των δυσκολιών αυτών είναι ότι συχνά το μάθημα αυτό τυποποιείται και θεωρητικοποιείται αντί να γίνεται αντικείμενο πειραματισμού κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Ειδικότερα οι περισσότερες παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το εμβαδόν και τη μέτρηση του, οφείλονται στην περιορισμένη εννοιολογική του κατανόηση από μέρους των μαθητών (Baturo & Nason, 1996). Έρευνες έχουν δείξει ότι η διαισθητική γνώση η οποία χρησιμοποιείται για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού είναι μια μορφή γνώσης που παρατηρείται στα παιδιά πριν από τη διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας. Η γνώση αυτή, που μπορεί να είναι και εσφαλμένη, δεν προέρχεται πάντα από τον χώρο της διδασκαλίας, χαρακτηρίζεται δε ως άτυπη, εφαρμόσιμη και διαφοροποιείται ανάλογα με τις εμπειρίες του υποκειμένου (Φιλίππου, 1999).

Μια σειρά ερευνών που πραγματοποιήθηκαν στον ελλαδικό χώρο δείχνουν πως μόνο περίπου το 30% των αποφοίτων του Δημοτικού σχολείου ανταποκρίνονται με επιτυχία σε ερωτήσεις που απαιτούν βασικές μαθηματικές έννοιες (Τζεκάκη, 2002). Όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων, καταντά συχνά να είναι μια κατανόηση συντελεστική και όχι συσχετιστική. Μια κατανόηση κατά τη διάρκεια της οποίας η νέα ιδέα είναι απομονωμένη και όχι ενσωματωμένη με άλλες ιδέες, μια κατανόηση όπου η νέα ιδέα δε συνδέεται με άλλες προϋπάρχουσες ιδέες μέσα σε ένα λογικό πλαίσιο διαδικασιών και εννοιών με αποτέλεσμα σύντομα να απορρίπτεται από τα παιδιά (Van de Walle, 2005).

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν συχνά μεγάλα προβλήματα με τα γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών όπως και του εμβαδού. Τα παιδιά συχνά μπερδεύονται από τα σχήματα που χρησιμοποιούνται ως παραδείγματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και θεωρούν ότι αυτά υπερισχύουν πάντα. Τα γεωμετρικά σχήματα χαρακτηρίζονται από γενικότητα κάτι που δύσκολα οι μαθητές μας αντιλαμβάνονται. Για παράδειγμα όταν εξετάζουμε την ιδιότητα ενός παραλληλογράμμου, δεν αναφερόμαστε μόνο στο συγκεκριμένο σχήμα αλλά σε μια κλάση από σχήματα που διέπονται από τις ιδιότητες που προσδιορίζει ο ορισμός του σχήματος αυτού (Van de Walle, 2005). Επίσης τα παιδιά εμφανίζονται απρόθυμα να χαράξουν εξωτερικά ύψη σε αμβλυγώνια τρίγωνα ή πλάγια παραλληλόγραμμα. Η μέτρηση του εμβαδού περιορίζεται κυρίως στη μηχανική αποστήθιση και εφαρμογή αλγεβρικών τύπων υπολογισμού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μη ουσιαστική εμπέδωση της διδασκόμενης γεωμετρικής έννοιας (Κορδάκη, 1999, Σδρόλιας, 2007). Συχνά ο μαθητής εστιάζει στα οπτικά χαρακτηριστικά του σχήματος και δε βλέπει στο σχήμα την κατάλληλη έξοδο που θα τον οδηγήσει στη λύση του προβλήματος.

Τα παιδιά συχνά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι οι μικρότερες μονάδες δίνουν αριθμητικά μεγαλύτερες μετρήσεις και δυσκολεύονται να καταγράψουν τις τετραγωνικές μονάδες. Για παράδειγμα 4 μέτρα * 5 μέτρα = 20 μέτρα και όχι 20 τετραγωνικά μέτρα. Το παιδί ενώ γνωρίζει πώς να προσθέτει μετρήσεις του μήκους και το αποτέλεσμα είναι πάλι μέτρηση του μήκους, τώρα έχει να πολλαπλασιάσει δύο μετρήσεις του ίδιου τύπου για να βρει μια άλλη μέτρηση ενός άλλου διαφορετικού τύπου (Jaquet, 2000). Έρευνες υποστηρίζουν πως τα παιδιά χρησιμοποιούν το μέτρο ή άλλες συμβατικές μονάδες, επηρεασμένα από τις καθημερινές εμπειρίες, προτού ακόμα κατανοήσουν ουσιαστικά τι είναι μέτρηση και τι μετρούν προτιμώντας τις συμβατικές από τις αυθαίρετες μονάδες στην προσπάθεια κατάκτησης της έννοιας της επιφάνειας (Maranhaa & Campos, 2000).

Οι μαθητές μας επίσης συχνά δυσκολεύονται να συγκρίνουν ισοεμβαδικά, και όχι μόνο, σχήματα. Η άμεση σύγκριση δύο εμβαδών φαντάζει πολύ δύσκολη, εκτός από την περίπτωση όπου τα υπό σύγκριση σχήματα έχουν κάποια κοινή διάσταση ή χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με το ίδιο πλάτος μπορούν να συγκριθούν άμεσα, ενώ δεν καταλαβαίνουν ότι η αναπροσαρμογή των εμβαδών σε διαφορετικά σχήματα δεν επηρεάζει την ποσότητα του εμβαδού (Van de Walle, 2007). Το εμβαδόν συνεχίζει να είναι μια σταθερή συνιστώσα που μπορεί να διατηρηθεί ακόμα κι αν η μορφή του αντίστοιχου σχήματος αλλάξει, γεγονός που γίνεται δύσκολα κατανοητό από πολλούς μαθητές (Piaget, et al, 1981).

Συχνό φαινόμενο επίσης είναι και ότι συγχέεται το εμβαδόν με την περίμετρο. Έτσι διατηρούνται τα εμβαδά διατηρώντας τις περιμέτρους και το αντίστροφο (Hart & Sinkinson 1988, Kidman & Cooper, 1997)). Εικάζεται ότι αυτό συμβαίνει επειδή περίμετρος και εμβαδόν διδάσκονται πολύ κοντά χρονικά το ένα από το άλλο και αφορούν αντικείμενα που πρέπει να μετρηθούν (Rectanus, 1997, Van de Walle, 2007). Σύμφωνα με έρευνα του Rickard (2005), που εξερευνούσε τη μαθηματική σχέση ανάμεσα στη σταθερή περίμετρο και το μεταβαλλόμενο εμβαδόν, ένα από τα σημαντικά συμπεράσματα της έρευνας ήταν ότι όλοι οι μαθητές απλώς είχαν διδαχθεί να υπολογίζουν το εμβαδόν, ας πούμε, ενός ορθογωνίου, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Εμβαδού (Ε= β * υ) χωρίς να έχουν καταλάβει γιατί το κάνουν αυτό και χωρίς να έχουν ξεκαθαρίσει συχνά μέσα τους τη σχέση μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού. Τα παιδιά μαθαίνουν, συχνά έναν κανόνα, όπως ο πολλαπλασιασμός δύο αποστάσεων, χωρίς καμιά σημασία για αυτά.

Η επιλογή επίσης να διδαχτεί πρώτα ο σύντομος αλγοριθμικός υπολογισμός του εμβαδού πεδίων πριν την δομική εισαγωγή των σειρών και γραμμών, είναι μια επιλογή που οδηγεί συχνά σε μαθησιακή αποτυχία (Reynolds & Wheatley, 1996). Επιπλέον, η τάση να προκρίνονται πολύ γρήγορα οι διαδικασίες πολλαπλασιασμού μέσω της χρήσης των τύπων, στερεί τους μαθητές από την ευκαιρία να μελετηθεί το σχέδιο και η δομή της σειράς (Clements & Stephan, 2004). Η μηχανική αυτή μέτρηση των μεγεθών με τη χρήση τύπων οδηγεί πολλές φορές σε λανθασμένους υπολογισμούς και άστοχες προσεγγίσεις, αναδεικνύοντας προβλήματα πρόωρης αριθμητικοποίησης (Ζάχαρος & Χασάπης, 2000).

Μια άλλη κοινή διαπίστωση είναι ότι πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι «ασυνήθιστα» σχήματα δεν έχουν εμβαδόν, ή ότι αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί γιατί δεν υπάρχει στάνταρ τύπος υπολογισμού του. Να κατανοήσουν δηλαδή το εμβαδόν ενός σχήματος ως το άθροισμα των επιμέρους μερών του (Van de Walle, 2005). Αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ανάπτυξη της έννοιας του εμβαδού και στην κατανόηση και υιοθέτηση μιας αποτελεσματικής στρατηγικής υπολογισμού του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων (Wilson & Rowland, 1993). Οδηγούνται έτσι σε λάθος επιλογές όπως το να προτιμούν να προσθέτουν τα μήκη των πλευρών των σχημάτων για να βρουν το εμβαδόν, αντί να τα πολλαπλασιάσουν ή να κάνουν οποιαδήποτε άλλη πράξη (Cavanagh, 2008).

Η δυσκολία για τον μαθητή έγκειται κυρίως στο να αποφασίσει ποιες οπτικές μονάδες θα συνδυάσει για να πετύχει τη μέτρηση του εμβαδού. Το σχήμα αντιμετωπίζεται ως μια αναπαράσταση, δηλαδή προϋποθέτει την κατασκευή μιας εικόνας διαφορετικής από το προϊόν της άμεσης αντίληψης. Τίποτα δεν αποδεικνύει, ότι οι χωρικές σχέσεις σε αυτήν την εικόνα θα είναι του ίδιου επιπέδου όπως εκείνες τις αντίστοιχες της αντιληπτικής εικόνας. Κατά συνέπεια δεν εξασφαλίζεται ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης του μαθητή ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα (Piaget, 1972).

Μέσα από τα αποτελέσματα των ερευνών και των απόψεων που παρατέθηκαν πιο πάνω, οδηγούμαστε αναμφίβολα στο συμπέρασμα ότι αρκετοί μαθητές παρουσιάζουν ουσιαστικές ελλείψεις και δυσκολίες τόσο στην κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας και του εμβαδού όσο και των μονάδων μέτρησής του. Ασκούνται περισσότερο στην εφαρμογή διαδικασιών και αλγορίθμων παρά στην κατάκτηση ουσιαστικών γεωμετρικών σχέσεων και εννοιών, μη έχοντας σαφή εικόνα του τι ακριβώς μελετούν και του τι ακριβώς μετρούν. Ελλείψεις και δυσκολίες που πολλές φορές ενισχύονται και από τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών για τη Γεωμετρία. Συγκεκριμένα, το υπάρχον ελληνικό πρόγραμμα γεωμετρίας σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2015) «οδηγεί τον εκπαιδευτικό να χειριστεί τα διάφορα περιεχόμενα της Γεωμετρίας αποσπασματικά και κατακερματισμένα» μη μπορώντας έτσι να αντιμετωπίσει ουσιαστικά τις δυσκολίες που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της.

Κεφάλαιο 4ο. Εμβαδόν και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα σε όλο τον κόσμο, με τις όποιες ελλείψεις κι αν παρουσιάζουν, τονίζουν πια τη μεγάλη σημασία της Γεωμετρίας τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη κι άλλων μαθηματικών εννοιών (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Η Γεωμετρία είναι τα μαθηματικά του χώρου και του σχήματος παρέχοντας τη δυνατότητα ανάπτυξης τριών ειδών γνωστικών διαδικασιών: της οπτικοποίησης της κατασκευής και του συλλογισμού (Κολέζα, 2000). Αναφορικά με το εμβαδόν, το γεγονός ότι διδάσκεται είτε άμεσα είτε έμμεσα, σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου αποδεικνύει τη μεγάλη σημασία του για την ανάπτυξη της γεωμετρικής, συλλογιστικής και της χωρικής σκέψης των μαθητών. Οι μαθητές στο Δημοτικό εισάγονται εξελικτικά σε έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων και του χώρου από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες τάξεις (Λεμονίδης, 2015).

Οι διδακτικοί στόχοι σε σχέση με το εμβαδόν έτσι όπως αναφέρονται στο Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών ποικίλουν στο Δημοτικό ανάλογα την τάξη. Συγκεκριμένα :

Α΄ τάξη: Να δουλεύουν κυρίως με πάζλ, πλακόστρωτα και μωσαϊκά.

Β΄ τάξη: Να είναι ικανοί να μετρούν επιφάνειες με αυθαίρετες μονάδες μέτρησης.

Γ΄ τάξη: Να γνωρίσουν τις συνήθεις μονάδες επιφάνειας.

Δ΄ τάξη: Να χρησιμοποιούν αυθαίρετες και συνήθεις μονάδες μέτρησης επιφανειών, να εκτελούν μετατροπές μονάδων και να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού.

Ε΄ τάξη: Να εκτελούν τις μετρήσεις επιφανειών, να κάνουν μετατροπές μονάδων επιφάνειας, να συγκρίνουν εμβαδά, να κατανοήσουν τη διαφορετικότητα των εννοιών εμβαδού και περιμέτρου και να υπολογίζουν το εμβαδόν του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου τριγώνου.

ΣΤ΄ τάξη: Να εκτελούν μετατροπές ανάμεσα σε συνήθεις μονάδες μέτρησης επιφανειών. Να χρησιμοποιούν τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού παραλληλογράμμων, τριγώνων, τραπεζίων και κύκλων και να επιλύουν σχετικά προβλήματα. Να υπολογίζουν τους όγκους και τα εμβαδά παράπλευρων αλλά και ολικών επιφανειών γεωμετρικών στερεών όπως του κύβου, του παραλληλεπιπέδου και του κυλίνδρου.

Ενώ στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών *του Γυμνασίου* για τα Μαθηματικά μεταξύ των άλλων διδακτικών στόχων αναφέρεται επίσης η ανάπτυξη ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία, η διδασκαλία των μονάδων επιφάνειας και οι μετρήσεις επιφάνειας καθώς και η διδασκαλία βασικών γεωμετρικών εννοιών όπως ο τρόπος εύρεσης του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων και στερεών.

Κεφάλαιο 5ο. Εμβαδόν και σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού.

5.1. Α΄ Δημοτικού

Στην Α΄ Δημοτικού οι γεωμετρικές έννοιες παρουσιάζονται κυρίως εμπειρικά. Οι μαθητές μέσα από τις προτεινόμενες δραστηριότητες, καθοδηγούνται στο να αναγνωρίζουν, να ονομάζουν και να χαράζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Με τη σύνθεση εικόνων που αποτελούνται από γεωμετρικά σχήματα και αντικείμενα της καθημερινής ζωής οι μαθητές εισάγονται στις έννοιες των βασικών γεωμετρικών σχημάτων αλλά και των γεωμετρικών στερεών. Τα παιδιά χρησιμοποιούν κυρίως κύκλους, τρίγωνα και τετράγωνα για να συνθέσουν εικόνες μέσα από δραστηριότητες όπως είναι τα παζλ, τα πλακόστρωτα και τα μωσαϊκά.

Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 2 με τίτλο «Γεωμετρικά σχήματα» επιδιώκεται οι μικροί μαθητές να διακρίνουν και να ονομάσουν σωστά βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα όπως το τρίγωνο, το τετράγωνο, το ορθογώνιο και τον κύκλο αλλά και να διακρίνουν και να ονομάζουν γεωμετρικά στερεά σώματα όπως την τριγωνική πυραμίδα, τον κύβο, το στερεό ορθογώνιο (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο), τον κύλινδρο και τη σφαίρα. Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή αλλά και του τετραδίου εργασιών οι μαθητές παρατηρούν τα διάφορα αντικείμενα που αποτελούνται από γεωμετρικά σχήματα, αναγνωρίζουν και ονομάζουν τα σχήματα αυτά και μετά καλούνται και οι ίδιοι να ζωγραφίσουν αντικείμενα με βάση τα γεωμετρικά σχήματα και να τα βάψουν. Στη συνέχεια καλούνται να αναγνωρίσουν και να αντιστοιχίσουν τις φόρμες των γεωμετρικών στερεών που αναφέρονται πιο πάνω.

Στο κεφάλαιο 40 με τίτλο «Γεωμετρικά σχήματα» επιδιώκεται η περαιτέρω εμπέδωση των επιδιώξεων του Κεφαλαίου 2 με δραστηριότητες και στο βιβλίο μαθητή αλλά και του τετραδίου εργασιών, πάλι αντιστοίχισης, χειροτεχνίας, ζωγραφικής, σχεδιασμού και φαντασίας.

Στο κεφάλαιο 61 με τίτλο «Χαράξεις σχημάτων-παζλ-πλακόστρωτο» οι μαθητές συνεχίζουν τις χαράξεις σχημάτων, μέσα από τη σύνθεση παζλ και την κατασκευή πλακόστρωτων. Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών τα παιδιά μέσα από πλακόστρωτα και παζλ ασκούνται στον σχεδιασμό και χρωματισμό των γεωμετρικών σχημάτων, έρχονται σε επαφή με το τετραγωνισμένο χαρτί, θυμούνται τα γεωμετρικά στερεά και σχήματα και τα ονόματά τους ενώ παράλληλα αρχίζουν μέσα από τις δραστηριότητες να παρατηρούν βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων όπως για παράδειγμα του τετραγώνου που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

5.2. Β΄ Δημοτικού

Στις τάξεις Α΄ αλλά και Β΄ Δημοτικού συνεχίζεται η διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του εμβαδού αλλά με πιο στοχευόμενα βήματα. Συγκεκριμένα:

Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών *του κεφαλαίου 14 με τίτλο «Φτιάχνω γεωμετρικά σχήματα»* οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν, να ολοκληρώσουν, να ζωγραφίσουν γεωμετρικά σχήματα και να σχεδιάσουν ορθογώνιο τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και μη κανονικό πολύγωνο πάνω σε πλέγμα χρησιμοποιώντας κομμάτια του τάγκραμ και γεωμετρικά όργανα όπως χάρακα και γνώμονα. Πέρα από τα ευθύγραμμα τμήματα που χαράζουν, σχεδιάζουν και 12γωνο.

Στο κεφάλαιο 31 με τίτλο «Καλύπτω επιφάνειες» οι μικροί μαθητές καλούνται να μετρήσουν επιφάνειες χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης άλλες μικρότερες επιφάνειες. Σε αυτό το κεφάλαιο μπαίνει για πρώτη φορά, πιο ξεκάθαρα, η έννοια της επιφάνειας. Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών οι μαθητές οδηγούνται στο συμπέρασμα πως μια επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Αξιοσημείωτο είναι ότι τα παιδιά καλούνται να ελέγξουν τα ίδια, ζωγραφίζοντας και μετρώντας, τις αρχικές εκτιμήσεις τους.

5.3. Γ΄ Δημοτικού

Στη Γ΄ Δημοτικού τα γεωμετρικά σχήματα παρουσιάζονται στα παιδιά, εκτός από παζλ, πλακόστρωτα και μωσαϊκά, και μέσα από μνημεία, όπως οι Πυραμίδες της Αιγύπτου, αντικείμενα της καθημερινής ζωής όπως κονσέρβες αλλά και πίνακες ζωγραφικής διάσημων ζωγράφων όπως του Πάμπλο Πικάσο. Είναι ένα κλασικό παράδειγμα του πώς μπορεί να συνδυαστούν τα μαθηματικά με την ιστορία, την τέχνη, την παράδοση, τον πολιτισμό αλλά και την καθημερινότητα. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 3 με τίτλο «Γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα» οι μαθητές της τρίτης τάξης ξαναθυμούνται, μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών και με τη βοήθεια του τάγκραμ, της τέχνης και καθημερινών αντικειμένων, τα γεωμετρικά σχήματα και τα γεωμετρικά στερεά. Το καινούριο στοιχείο όμως είναι ότι οι μικροί μαθητές γνωρίζουν τον ρόμβο και το πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Στο κεφάλαιο 42 με τίτλο «Παζλ, πλακόστρωτα και μωσαϊκά» οι μαθητές εμβαθύνουν περισσότερο στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και συμπεραίνουν πως κάποια σχήματα καλύπτουν πλήρως μια επιφάνεια, αν τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο, ενώ κάποια άλλα όχι. Έμμεσα παρουσιάζεται στα παιδιά η έννοια του εμβαδού, αφού γίνεται λόγος για κάλυψη επιφάνειας. Οι δραστηριότητες του κεφαλαίου στοχεύουν να ασκηθούν οι μαθητές τόσο στην ανάλυση ενός σύνθετου σχήματος στα επιμέρους σχήματα όσο και στη σύνθεση ενός σχήματος και στην κάλυψη μιας επιφάνειας με επιμέρους σχήματα. Σε αυτό και πάλι εκτός από τα γεωμετρικά σχήματα, τα μωσαϊκά, τα πλακόστρωτα και τα τάγκραμ, τους βοηθούν η τέχνη και η παράδοση μέσα από υφαντά και γιρλάντες.

Αξιοσημείωτο πιστεύω είναι *το κεφάλαιο 50 με τίτλο «Μέτρηση της επιφάνειας»*. Για πρώτη φορά γίνεται ευθεία αναφορά για τη μέτρηση μιας επιφάνειας. Μέσα από τις σχολικές δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών, οι μαθητές ασκούνται στη μέτρηση και σύγκριση επιφανειών με αυθαίρετες μονάδες και γνωρίζουν τη βασική μονάδα μέτρησης, το τετραγωνικό μέτρο. Σε αυτό βοηθούν και πάλι οι δραστηριότητες με βάση μωσαϊκά, πλέγματα, εικόνες από την καθημερινή ζωή. Ιδιαίτερη αναφορά χρήζει η δραστηριότητα 5 του τετραδίου εργασιών όπου για πρώτη φορά δίνεται το μήκος και το πλάτος και ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν (τετραγωνικά μέτρα) συγκεκριμένης επιφάνειας.

5.4. Δ΄ Δημοτικού

Στη Δ΄ τάξη συνεχίζεται η διαισθητική διερεύνηση της έννοιας του εμβαδού. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 30 με τίτλο «Διακρίνω το περίγραμμα από την επιφάνεια» οι μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών καλούνται να ασκηθούν πάνω στην έννοια της επιφάνειας. Διακρίνουν την έννοια του εμβαδού από την έννοια της περιμέτρου και συγκρίνουν και μετρούν την επιφάνεια με μη τυπικές μονάδες μέτρησης όπως είναι οι εικόνες και τα σχήματα.

Στο κεφάλαιο 31 με τίτλο «Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν» οι μαθητές εισάγονται πια ξεκάθαρα στην έννοια του εμβαδού ως μέτρηση επιφάνειας. Οι δραστηριότητες του κεφαλαίου οδηγούν τα παιδιά να μπορούν να μετρούν μια επιφάνεια με τη βασική τυπική μονάδα μέτρησης επιφάνειας (τετραγωνικό μέτρο) και να γνωρίσουν τις υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου. Οι μαθητές μέσα από τη σύγκριση επιφανειών καταλήγουν σε ένα πολύ βασικό συμπέρασμα πως αν και δύο σχήματα είναι ισοεμβαδικά, μπορεί να μην έχουν τις ίδιες περιμέτρους. Συμπέρασμα που αφορά μία από τις βασικές παρανοήσεις των μαθητών μας. Επίσης τα παιδιά καλούνται να βρουν και να κατανοήσουν, σχεδιάζοντας και ζωγραφίζοντας, την ισοδυναμία ανάμεσα στις υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου.

Στο κεφάλαιο 33 με τίτλο «Υπολογίζω περιμέτρους και εμβαδά» οι μαθητές μαθαίνουν συγκεκριμένα πια να υπολογίζουν το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Οι δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών καλούν τα παιδιά, πέρα από τον υπολογισμό της περιμέτρου, να υπολογίσουν το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με συγκεκριμένο τρόπο (πολλαπλασιάζοντας τα μήκη δύο διαδοχικών πλευρών) τονίζοντας παράλληλα τη διαφορετικότητα εμβαδού και περιμέτρου. Σημαντικό εργαλείο των μαθητών αποτελεί ο χάρακας για να κάνουν τις μετρήσεις τους.

5.5. Ε΄ Δημοτικού

Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της συγκεκριμένης τάξης διδάχτηκαν για πρώτη φορά στις σχολικές αίθουσες την περασμένη σχολική περίοδο (2018-19) και για πρώτη φορά το βιβλίο του μαθητή είναι χωρισμένο σε δύο τεύχη. Αυτό δεν αλλάζει την κεντρική φιλοσοφία του μαθήματος σε σχέση με το εμβαδόν που είναι ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να υπολογίζουν το εμβαδόν του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλογράμμου και του ορθογώνιου τριγώνου. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 42 με τίτλο «Καθετότητα - Ύψη τριγώνου» τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τα κάθετα τμήματα και τα ύψη ενός τριγώνου. Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών οι μαθητές εξασκούνται με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα στην κατασκευή κάθετων τμημάτων και υψών όλων των ειδών τριγώνων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το αμβλυγώνιο τρίγωνο όπου εμφανίζονται ύψη και εκτός τριγώνου. Αυτό το κεφάλαιο θα βοηθήσει τους μαθητές σε μελλοντικές τάξεις όπου θα είναι υποχρεωμένοι για να βρουν το εμβαδόν τριγώνου να κατασκευάσουν ύψος.

Στο κεφάλαιο 47 με τίτλο «Μονάδες μέτρησης της επιφάνειας» τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τη βασική μονάδα της επιφάνειας (τετραγωνικό μέτρο) και ποια είναι η σχέση της με τις υποδιαιρέσεις αλλά και τα πολλαπλάσιά της, ενώ για πρώτη φορά δίνεται ένας ξεκάθαρος ορισμός του τι είναι εμβαδόν. Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν και να μετρήσουν επιφάνειες, να κάνουν μετατροπές σε υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσια διαφόρων μονάδων μέτρησης επιφάνειας και να επιλύσουν προβλήματα σχετικά με το εμβαδόν.

Στο κεφάλαιο 48 με τίτλο «Εμβαδό τετραγώνου, ορθογωνίου και ορθογωνίου τριγώνου» οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του εμβαδού αλλά και της περιμέτρου του τετραγώνου, του ορθογωνίου και του ορθογωνίου τριγώνου και ο κύριος στόχος του κεφαλαίου είναι να μπορούν οι μαθητές να υπολογίζουν τα εμβαδά των σχημάτων αυτών με τη χρήση τύπων. Αφού δίνονται οι τύποι υπολογισμού των εμβαδών των προαναφερθέντων σχημάτων, τα παιδιά μέσα από τις σχολικές δραστηριότητες και την επίλυση προβλημάτων, εξασκούνται στην εύρεση του εμβαδού αλλά και της περιμέτρου των πιο πάνω σχημάτων κατανοώντας έτσι, για μία ακόμη φορά, έμμεσα τη διαφορετικότητα των δύο εννοιών.

5.6. ΣΤ΄ Δημοτικού

Στην τάξη αυτή οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τους τύπους που επιτρέπουν τον υπολογισμό των εμβαδών του τριγώνου, του παραλληλογράμμου, του τραπεζίου και του κύκλου και να επιλύουν ανάλογα προβλήματα. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 61 με τίτλο «Μετρώ επιφάνειες» οι μαθητές εισάγονται για μία ακόμη φορά στην έννοια του εμβαδού. Μέσα από τις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών τα παιδιά αφού ξαναθυμηθούν τη βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού (τετραγωνικό μέτρο), τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά της, ασκούνται στη μέτρηση της επιφάνειας και στον υπολογισμό του εμβαδού ορθογώνιου χρησιμοποιώντας τον τύπο. Για τις μετρήσεις του εμβαδού χρησιμοποιούν ακέραιους, δεκαδικούς, συμμιγείς και κλασματικούς αριθμούς. Για να πετύχουν το στόχο αυτό ασκούνται και στην επίλυση πολλών σχετικών προβλημάτων που στην τάξη αυτή είναι πολύ περισσότερα από προηγούμενες τάξεις.

Το κεφάλαιο 62 με τίτλο «Πλαγιάζω, αλλά δεν αλλάζω» αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου. Στο κεφάλαιο αυτό τα παιδιά πέρα από τον υπολογισμό του εμβαδού οποιουδήποτε παραλληλογράμμου με τη βοήθεια τύπου, καλούνται να αντιμετωπίσουν μια ακόμα δυσκολία των μαθητών που είναι να διαπιστώσουν ότι διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδό. Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει και στην εμπειρία των παιδιών να κατασκευάσουν με τη βοήθεια γνώμονα ύψος εκτός σχήματος. Οι δραστηριότητες του κεφαλαίου βοηθούν τα παιδιά να συνειδητοποιήσουν ότι ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με βάση β και ύψος υ έχει την ίδια επιφάνεια με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με β και υ. Τέλος ασκούνται σε ανάλογα προβλήματα με επίκεντρο το εμβαδόν πλάγιου παραλληλογράμμου.

Το κεφάλαιο 63 με τίτλο «Αδυνάτισα! Μισός έμεινα!» αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου με τη βοήθεια τύπου. Οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων βοηθούν τους μαθητές να καταλήξουν στη διαπίστωση ότι ένα τρίγωνο με βάση β και ύψος υ έχει τη μισή επιφάνεια από ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με β και υ. Ιδιαίτερη αναφορά κι εδώ πρέπει να γίνει και στην εμπειρία των παιδιών να κατασκευάσουν με τη βοήθεια γνώμονα ύψος και μάλιστα, όταν χρειαστεί, και εκτός σχήματος όπως στο αμβλυγώνιο τρίγωνο. Όπως σε κάθε κεφάλαιο έτσι κι εδώ ακολουθούν ανάλογα προβλήματα.

Το κεφάλαιο 64 με τίτλο «Το εμβαδόν του τραπεζίου;» αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού του τραπεζίου με τη βοήθεια τύπου αλλά αναφέρεται και σε προβλήματα εμβαδών και άλλων πολυγώνων. Μέσα από τιε δραστηριότητες και με τη βοήθεια του μιλιμετρέ χαρτιού αντιλαμβάνονται τη σχέση που έχει η βάση του παραλληλογράμμου με τις βάσεις του τραπεζίου και στη συνέχεια καταλήγουν στον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου. Το βιβλίο του μαθητή αλλά και το τετράδιο εργασιών πέρα από την εξάσκηση που προσφέρουν στα παιδιά σχετικά με το εμβαδόν του τραπεζίου, τα βοηθάνε με τις δραστηριότητες και τα προβλήματά τους, να αντιμετωπίσουν κι άλλη μια βασική τους δυσκολία. Να βρίσκουν το εμβαδόν πολυγώνων χωρίζοντας τα σε επιμέρους σχήματα.

Το κεφάλαιο 65 με τίτλο «Κόβω κύκλους» στοχεύει στην υπενθύμιση από την πέμπτη τάξη των χαρακτηριστικών στοιχείων του κύκλου (ακτίνα, διάμετρος), του αριθμού π, αλλά και στον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου με τη βοήθεια τύπου. Σε αυτό το κεφάλαιο χρήζει αναφοράς η χρήση, ενός δύσκολου για τα παιδιά γεωμετρικού οργάνου, του διαβήτη. Μέσα από τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου καταλήγουν στον τύπο του εμβαδού του κυκλικού δίσκου και στο τετράδιο εργασιών λύνουν ανάλογα προβλήματα. Από την πείρα μου οφείλω να καταθέσω ότι το πρόβλημα 1 του τετραδίου εργασιών δυσκολεύει ιδιαίτερα τα παιδιά λόγω της μεγάλης ακτίνας που δίνεται (1100 χιλιόμετρα). Το ίδιο συμβαίνει και με το πρόβλημα 2 όπου οι μαθητές καλούνται να βρουν μια σειρά εμβαδών μέσα σε ένα πολύπλοκο γεωμετρικό σχέδιο που περιλαμβάνει ένα τετράγωνο, μέσα στο τετράγωνο έναν κύκλο με διάμετρο ίση με την πλευρά του τετραγώνου και μέσα στον μεγάλο κύκλο ένα μικρότερο κύκλο με διάμετρο 8 μέτρα.

Στο κεφάλαιο 66 με τίτλο «Να το κάνω πακέτο;» οι μαθητές ξαναθυμούνται τον κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αλλά συναντούν και τους όρους παράπλευρη και ολική επιφάνεια. Μέσα από τις δραστηριότητες και τα προβλήματα του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών, πέρα των άλλων, ασκούνται και στην εύρεση των εμβαδών της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας των προαναφερθέντων γεωμετρικών στερεών βάση των όσων έμαθαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο 68 με τίτλο «Να το τυλίξω;» στους μαθητές υπενθυμίζεται ο κύλινδρος. Μέσα από τις σχολικές δραστηριότητες και τα προβλήματα τα παιδιά, αφού συνειδητοποιήσουν ότι η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου είναι η επιφάνεια ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου του οποίου η μία διάσταση είναι ίση με το ύψος του κυλίνδρου και η άλλη είναι ίση με το μήκος του κύκλου της βάσης, ασκούνται στην εύρεση του εμβαδών παράπλευρης και ολικής επιφάνειας κυλίνδρου βάση των όσων έμαθαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 6ο. Εμβαδόν και σχολικά εγχειρίδια των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου.

Η διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού συνεχίζεται και στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου. Πιο συγκεκριμένα:

6.1. Α΄ Γυμνασίου

Στο κεφάλαιο Α.3.5. με τίτλο «Μονάδες μέτρησης» οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ξαναθυμούνται μεταξύ άλλων και όλες τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού. Υπενθυμίζεται στα παιδιά για μια ακόμη φορά η βασική μονάδα μέτρησης της επιφάνειας που είναι το τετραγωνικό μέτρο, οι υποδιαιρέσεις του και τα πολλαπλάσιά του. Μέσα από τις ασκήσεις και τα προβλήματα του ίδιου κεφαλαίου οι μαθητές εξασκούνται στις μετατροπές μεταξύ των μονάδων μέτρησης του εμβαδού και στην εύρεση εμβαδών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου χωρίς όμως να αναφέρονται οι τύποι υπολογισμοί του εμβαδού των συγκεκριμένων σχημάτων γιατί προφανώς θεωρούνται γνωστοί.

6.2. Β’ Γυμνασίου

Στην τάξη αυτή αφιερώνεται μεγάλο μέρος του βιβλίου στη διδασκαλία της έννοιας του εμβαδού και στον τρόπο υπολογισμού του. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο Β.1.1. με τίτλο «Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας» οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου ασχολούνται με την έννοια του εμβαδού χωρίς όμως αναφορά σε τύπους. Βασικός στόχος του κεφαλαίου και των ασκήσεων του είναι να εμπεδώσουν οι μαθητές ότι το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Στο κεφάλαιο Β.1.2. με τίτλο «Μονάδες μέτρησης επιφανειών» οι μαθητές ξαναθυμούνται τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού. Το τετραγωνικό μέτρο, τις υποδιαιρέσεις του και τα πολλαπλάσιά του. Μέσα από τις εφαρμογές και ασκήσεις του ίδιου κεφαλαίου οι μαθητές εξασκούνται στις μετατροπές μεταξύ των μονάδων μέτρησης του εμβαδού.

Στο κεφάλαιο Β.1.3. με τίτλο «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων» τα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου ξανασυναντιούνται με τους τύπους βασικών γεωμετρικών σχημάτων. Μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις του εξασκούνται στην εύρεση του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του πλάγιου παραλληλογράμμου, του τυχαίου τριγώνου, του ορθογωνίου τριγώνου και του τραπεζίου.

Στο κεφάλαιο Β.3.5. με τίτλο «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου» τα παιδιά της τάξης μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις του έρχονται πάλι σε επαφή με τον τύπο του εμβαδού του κυκλικού δίσκου και εξασκούνται με ανάλογα προβλήματα.

Στο κεφάλαιο Β.3.6. με τίτλο «Εμβαδόν κυκλικού τομέα» τα παιδιά μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις του έρχονται ξανά σε επαφή με τον τύπο του εμβαδού του κυκλικού δίσκου αλλά για πρώτη φορά γνωρίζουν τον τρόπο εύρεσης του εμβαδού κυκλικού τομέα και εξασκούνται με ανάλογα προβλήματα.

Στο κεφάλαιο Β.4.2. με τίτλο «Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου» γίνεται εκτενής αναφορά μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις, στον τρόπο εύρεσης του εμβαδού της παράπλευρης αλλά και της ολικής επιφάνειας πρίσματος και του κυλίνδρου.

Στο κεφάλαιο Β.4.4. με τίτλο «Η πυραμίδα και τα στοιχεία της» ο μαθητές γνωρίζουν μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις, τον τρόπο εύρεσης εμβαδού παράπλευρης και ολικής επιφάνειας πυραμίδας και κανονικής πυραμίδας.

Στο κεφάλαιο Β.4.5. με τίτλο «Ο κώνος και τα στοιχεία του» τα παιδιά γνωρίζουν μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις, τον τρόπο εύρεσης εμβαδού παράπλευρης και ολικής επιφάνειας του κώνου.

Στο κεφάλαιο Β.4.6. με τίτλο «Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας» » τα παιδιά γνωρίζουν μέσα από το κεφάλαιο, τις εφαρμογές και τις ασκήσεις, τον τρόπο εύρεσης εμβαδού της σφαίρας.

Από όλες αυτές τις γνώσεις που παίρνουν οι μαθητές μας σχετικά με το εμβαδόν διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων και επιφανειών από το Δημοτικό και μέχρι τη Β΄ Γυμνασίου, εμείς μέσα από τα ιστορικά προβλήματα που δώσαμε στα παιδιά ελέγξαμε πρωτίστως την ικανότητά τους στην εύρεση του εμβαδού βασικών γεωμετρικών σχημάτων όπως του κυκλικού δίσκου, όλων των ειδών των τριγώνων (ορθογώνιο, ισόπλευρο, ισοσκελές και σκαληνό), τραπεζίου, τετραγώνου, κανονικού εξαγώνου. Ταυτόχρονα ελέγχθηκαν και οι γνώσεις των παιδιών σε σχέση με την εύρεση περιμέτρου γεωμετρικών σχημάτων, την εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος και τις τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών.

Κεφάλαιο 7ο . Μεθοδολογία

7.1. Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας συγκροτήθηκε από τους μαθητές και τις μαθήτριες, τριών τμημάτων της Γ'΄ Γυμνασίου, τριών δημόσιων σχολείων της Καστοριάς (Οινόης, Μανιάκων, Μεσσοποταμίας). Το τεστ έλαβε χώρα την πρώτη εβδομάδα του Οκτώβρη του 2019. Στο δείγμα συμπεριλάβαμε τα 29 από τα 35 παιδιά που είχαν συνολικά και τα τρία τμήματα γιατί αυτά ασχολήθηκαν ουσιαστικά με το τεστ. Τα παιδιά είχαν ήδη διδαχτεί στο Δημοτικό σχολείο αλλά και στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού βασικών γεωμετρικών σχημάτων όπως τετραγώνου, παραλληλογράμμων, τριγώνων, τραπεζίου, κύκλου καθώς και της μέτρησής τους, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα. Η επιλογή των μαθητών της Γ΄ τάξης Γυμνασίου έγινε γιατί στην τάξη αυτή οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί τις προαναφερθείσες έννοιες αλλά και το πυθαγόρειο θεώρημα και τις τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών που χρειάζονται για την επίλυση των προβλημάτων αλλά και γιατί στην ηλικία αυτή λογικά πρέπει να έχουν αποκτηθεί και κατανοηθεί σε σημαντικό βαθμό οι γεωμετρικές έννοιες, οι μετρήσεις μεγεθών καθώς και η ικανότητα λύσης προβλημάτων.

7.2. Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της έρευνας ήταν ο σχεδιασμός, η εφαρμογή και η αξιολόγηση ενός τεστ, μέσα στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών, αποτελούμενο από έξι ιστορικά προβλήματα της αρχαιότητας, η επίλυση των οποίων βασίζεται στην έννοια του εμβαδού. Η επιλογή των προβλημάτων έγινε μέσα από ένα σύνολο περίπου τριάντα ανάλογων προβλημάτων με γνώμονα την όσο πιο κατανοητή εκφώνηση, το εύρος των γεωμετρικών σχημάτων και τη μεγαλύτερη δυνατότητα επίλυσης από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου με βάση την ύλη που έχουν διδαχθεί στο Δημοτικό αλλά και στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου. Σημαντικό κομμάτι της έρευνας αποτελεί και η εύρεση και επισήμανση τυχόν παρανοήσεων – δυσκολιών που θα εμφανίσουν οι μαθητές μέσα από την ανάλυση του δείγματος και κατά πόσο αυτές συμφωνούν ή όχι με τη βιβλιογραφία.

7.3. Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας

Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε, με εξέταση του μαθηματικού τεστ είναι τα εξής:

1. Έχουν κατανοήσει αρκετά σύγχρονοι απόφοιτοι της Β΄ Γυμνασίου την έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του, ώστε να μπορούν να λύσουν ιστορικά γεωμετρικά προβλήματα που έχουν σχέση με το εμβαδόν;

2. Είναι ικανοί οι μαθητές αυτοί να εφαρμόζουν βασικά γεωμετρικά θεωρήματα και υπολογιστικούς αλγορίθμους εμβαδών;

3. Ποιες είναι οι σημαντικότερες δυσκολίες - παρανοήσεις που εμφανίζουν μαθητές, απόφοιτοι της Β΄ Γυμνασίου, στην επίλυση προβλημάτων σχετικά με το εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων;

7.4. Προ-έλεγχος

Πριν τη διανομή του τεστ στο σύνολο του δείγματος, κρίθηκε αναγκαίο αυτό να δοθεί σε δύο άλλους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου εκτός δείγματος. Οι μαθητές αυτοί με βάση τον βαθμό τους χαρακτηρίζονται ως μέτριοι στα μαθηματικά. Αυτό έγινε συνειδητά και βοήθησε να χαρτογραφηθούν καλύτερα οι τυχόν δυσκολίες που θα αντιμετώπιζαν οι μαθητές του δείγματος κατά την επίλυση των προβλημάτων. Οι δυσκολίες αυτές αντιμετωπίστηκαν και αποτέλεσαν το τελικό και πιο σημαντικό κριτήριο για την τελική διαμόρφωση του τεστ, όπως ήταν η κατανοητή και σαφής εκφώνηση και η δημιουργία σχημάτων σε όλα τα προβλήματα.

7.5. Παρουσίαση του τεστ

Το τεστ αυτό αποτελείται, όπως προείπαμε, από έξι ιστορικά προβλήματα αρχαίων πολιτισμών μέσα από ένα σύνολο περίπου τριάντα ανάλογων προβλημάτων. Στα προβλήματα που επιλέχθηκαν επιμελώς φροντίσαμε να παρουσιάζεται μέσα από προβληματικές καταστάσεις η έννοια του εμβαδού και η μέτρησή της, με εφαρμογή των τύπων βασικών γεωμετρικών σχημάτων όπως του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του τριγώνου, του τραπεζίου του κανονικού εξαγώνου και του κύκλου. Παράλληλα τα προβλήματα απαιτούν και τη γνώση και εφαρμογή και άλλων μαθηματικών εννοιών όπως του πυθαγόρειου θεωρήματος και τις πράξεις με τετραγωνικές ρίζες θετκών αριθμών και πράξεις δεκαδικών αριθμών. Κρίθηκε σκόπιμο οι γεωμετρικοί τύποι, που είναι αναγκαίοι για την επίλυση των προβλημάτων, να παρατίθενται στην αρχή του τεστ. Αυτό έγινε για να αποφευχθεί το φαινόμενο κάποιος μαθητής να μην μπορεί να λύσει κάποιο πρόβλημα επειδή δε θυμόταν πιθανώς κάποιον τύπο. Ο σκοπός της έρευνάς μας, όπως ειπώθηκε και πιο πάνω, ήταν η δυνατότητα επίλυσης ιστορικών προβλημάτων και όχι η θύμηση ή όχι των γεωμετρικών τύπων.

ΤΕΣΤ

Τάξη: *Ημερομηνία:*

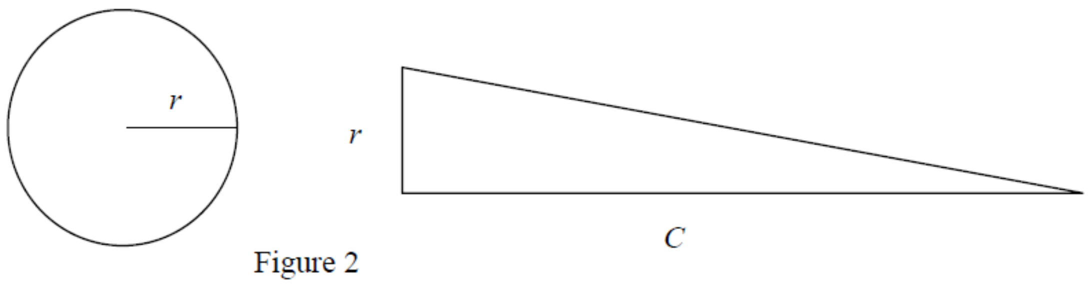
Χρήσιμες πληροφορίες

- Το εμβαδόν ενός **τετραγώνου** πλευράς α ισούται με $\mathbf{E = \alpha^2}$ **.**
- Το εμβαδόν ενός **ορθογωνίου** με πλευρές α, β ισούται με $\mathbf{E= \alpha * \beta}$.
- Το εμβαδόν ενός **τριγώνου** είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος $\mathbf{E = (\beta * \upsilon)/2}$**.**
- Το εμβαδόν ενός **τραπεζίου** είναι ίσο με το γινόμενο του ημι - αθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του. $\mathbf{E = (B + \beta)*\upsilon /2}$**.**
- Το εμβαδόν **κύκλου** ακτίνας ρ, ισούται με $\mathbf{E = \pi\rho^2}$**.**
- Το μήκος ενός **κύκλου** διαμέτρου δ υπολογίζεται από τη σχέση $\mathbf{C= \pi * \delta}$ (όπου π η προσεγγιστική τιμή 3, 14).

Προβλήματα

1ο Πρόβλημα

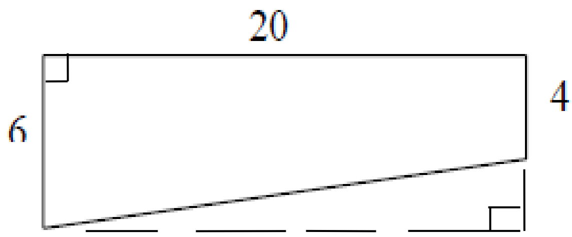
Σύμφωνα με τον μεγάλο Έλληνα γεωμέτρη Αρχιμήδη (287-212 π. Χ.), *Για τη μέτρηση του κύκλου Πρόταση 1*, το εμβαδόν οποιουδήποτε κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο μια από τις κάθετες πλευρές είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η άλλη ίση με το μήκος του κύκλου. Αν r = 10 εκατοστά και C το μήκος του κύκλου αποδείξτε με βάση το παρακάτω σχήμα αν ισχύει ο ισχυρισμός του Αρχιμήδη.



Εικόνα 43. 1ο Πρόβλημα

2ο Πρόβλημα

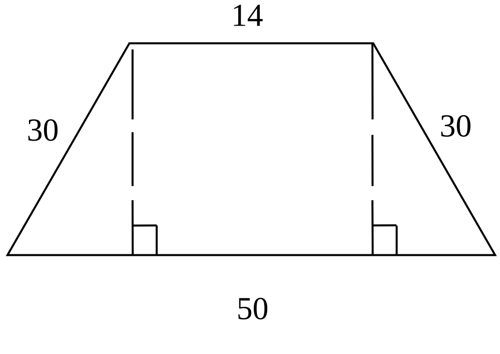
Στο Πρόβλημα 52 του αρχαίου αιγυπτιακού πάπυρου Rhind (1650 π. Χ.) ζητείται το εμβαδόν της αποκομμένης τριγωνικής γης με μήκος κάθε πλευράς 20, μήκος βάσης 6 και μήκος γραμμής αποκοπής 4. Προσπαθήστε να το λύσετε κι εσείς. Όλα τα μήκη είναι σε μέτρα.



Εικόνα 44. 2ο Πρόβλημα

3ο Πρόβλημα

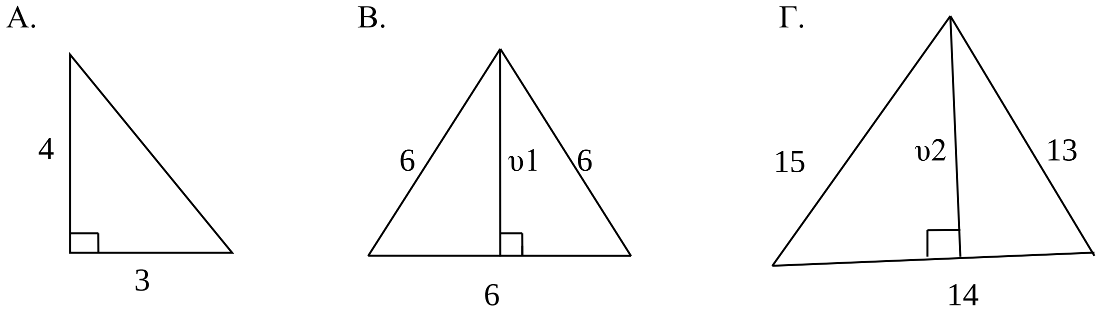
Στο παρακάτω πρόβλημα που έρχεται από την αρχαία Μεσοποταμία (περίπου το 2300 π. Χ.) ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τραπεζίου του οποίου οι πλάγιες πλευρές έχουν μήκος 30 και οι βάσεις του τραπεζίου έχουν μήκος 14 και 50. Προσπαθήστε να το λύσετε κι εσείς. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά.



Εικόνα 45. 3ο Πρόβλημα

4ο Πρόβλημα

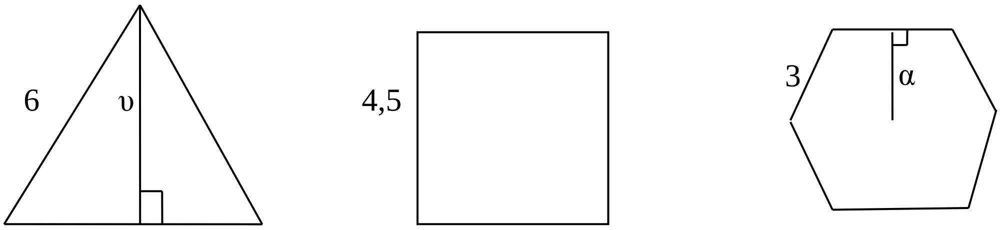
Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ήρων (1ος αιώνας μ. Χ.) αποδεικνύει ότι το εμβαδόν Α ενός οποιουδήποτε τριγώνου με πλευρές μήκους a, b και c δίνεται από τον τύπο $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, όπου s είναι η ημι – περίμετρος (μισή περίμετρος) του τριγώνου. Να ελέγξετε αν ισχύει ο παραπάνω τύπος στα παρακάτω τρίγωνα. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά και όπου υ1= $3\sqrt{3}$ και υ2 = 12.



Εικόνα 46. 4ο Πρόβλημα

5ο Πρόβλημα

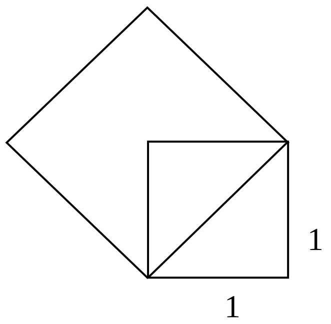
Ο Έλληνας μαθηματικός Πάππος (4ος αιώνας μ. Χ.) ισχυρίζεται ότι εάν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο έχουν την ίδια περίμετρο, το εξάγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Αποδείξτε στο παρακάτω σχήμα αν ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά ενώ για ύψος τριγώνου χρησιμοποιήστε υ=5,2 (προσεγγιστική τιμή) και το μήκος του αποστήματος του κανονικού εξαγώνου είναι α=2,6.



Εικόνα 47. 5ο Πρόβλημα

6^{o} Πρόβλημα

Σε ένα από τα προβλήματα που υπάρχουν στα ινδικά αρχαία κείμενα Sulbasutras (6^{ος} αιώνας π. Χ.) δίνεται η υπόδειξη «η διαγώνιος του τετραγώνου παράγει τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού». Αποδείξτε στο παρακάτω σχήμα αν ισχύει η παραπάνω υπόδειξη. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά.



Εικόνα 48. 6ο Πρόβλημα

8. Ανάλυση του δείγματος

Αφού συγκεντρώθηκαν τα τεστ των παιδιών ξεκίνησα την ανάλυσή τους. Με ενδιέφερε αρχικά να εντοπίσω τα σωστά και ολοκληρωμένα προβλήματα και τη συχνότητά τους. Πόσοι μαθητές δηλαδή ολοκλήρωσαν σωστά και τα έξι προβλήματα, πόσοι τα πέντε και ποια ήταν αυτά, πόσοι τα τέσσερα και ποια ήταν αυτά, πόσοι τα τρία και ποια ήταν αυτά και ούτω καθεξής. Στη συνέχεια διερευνήθηκε το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά. Δηλαδή :

- ✓ Εντοπίστηκε αρχικά το ποσοστό συμμετοχής για το κάθε πρόβλημα.
- ✓ Μετά εξετάστηκε πόσοι μαθητές που ασχολήθηκαν με το κάθε πρόβλημα το ολοκλήρωσαν σωστά και με ποιον τρόπο.
- ✓ Έπειτα πόσοι το άφησαν ημιτελές και τι έκαναν σωστά και τι λάθος.
- ✓ Στη συνέχεια πόσοι έκαναν λάθος το κάθε πρόβλημα και τι λάθη έκαναν.
- ✓ Τέλος πόσοι το εγκατέλειψαν εντελώς.

8.1. Τα προβλήματα συνολικά

Αναλύοντας το τεστ που έδωσα στους μαθητές κατέληξα στα εξής αποτελέσματα. Τα προβλήματα έτυχαν ποικίλης αντιμετώπισης από ότι φάνηκε και από τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα :

- Οι 3 στους 29 μαθητές έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα και τα 6 προβλήματα (ποσοστό 10,34 %).
- Οι 6 στους 29 μαθητές έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα τα 5 από τα 6 προβλήματα (ποσοστό 20,68 %). Από αυτούς τους 6 μαθητές οι 3 ολοκλήρωσαν σωστά όλα τα προβλήματα εκτός από το 4^{ο}, οι δύο ολοκλήρωσαν σωστά όλα τα προβλήματα εκτός από το 6^{ο} και ο ένας ολοκλήρωσε σωστά όλα τα προβλήματα εκτός από το 5^{ο} πρόβλημα.
- Οι 4 στους 29 μαθητές έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα τα 4 από τα 6 προβλήματα (ποσοστό 13,79 %). Από αυτούς τους 4 μαθητές οι 2 ολοκλήρωσαν σωστά όλα τα προβλήματα εκτός από 4^{ο} και το 5^{ο}, ο ένας ολοκλήρωσε σωστά όλα τα προβλήματα εκτός από το 4^{ο} και το 6^{ο} και ο ένας ολοκλήρωσε σωστά όλα τα προβλήματα εκτός από το 1^{ο} και το 5^{ο} πρόβλημα.
- Οι 6 από τους 29 μαθητές έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα τα 3 από τα 6 προβλήματα (ποσοστό 20,68 %). Από αυτούς τους 6 μαθητές οι 2

ολοκλήρωσαν σωστά το $1^{ο}$, το $2^{ο}$ και το $4^{ο}$ πρόβλημα, οι 2 μαθητές το $1^{ο}$, το $2^{ο}$ και το $5^{ο}$ πρόβλημα, ο ένας ολοκλήρωσε σωστά το $2^{ο}$, το $4^{ο}$ και το $5^{ο}$ και ένας ολοκλήρωσε σωστά το $2^{ο}$, το $3^{ο}$ και το $4^{ο}$ πρόβλημα.

- Οι 2 στους 29 μαθητές έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα τα 2 από τα 6 προβλήματα (ποσοστό 6,89 %). Αυτοί οι 2 μαθητές ολοκλήρωσαν σωστά το $1^{ο}$ και το $2^{ο}$ πρόβλημα.
- Οι 4 στους 29 μαθητές έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα το 1 από τα 6 προβλήματα (ποσοστό 13,79 %). Από αυτούς τους 4 μαθητές ο ένας ολοκλήρωσε σωστά το $1^{ο}$ πρόβλημα, ο ένας ολοκλήρωσε σωστά το $2^{ο}$ πρόβλημα, ενώ οι άλλοι 2 ολοκλήρωσαν σωστά το $3^{ο}$ πρόβλημα.
- Οι 4 στους 29 μαθητές δεν έλυσαν σωστά και ολοκληρωμένα κανένα από τα 6 προβλήματα του τεστ (ποσοστό 13,79 %).

8.2. Το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά

$1^{ο}$ Πρόβλημα

Σύμφωνα με τον μεγάλο Έλληνα γεωμέτρη Αρχιμήδη (287-212 π. Χ.), *Για τη μέτρηση του κύκλου Πρόταση 1*, το εμβαδόν οποιουδήποτε κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο μια από τις κάθετες πλευρές είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η άλλη ίση με το μήκος του κύκλου. Αν r = 10 εκατοστά και C το μήκος του κύκλου αποδείξτε με βάση το παρακάτω σχήμα αν ισχύει ο ισχυρισμός του Αρχιμήδη.

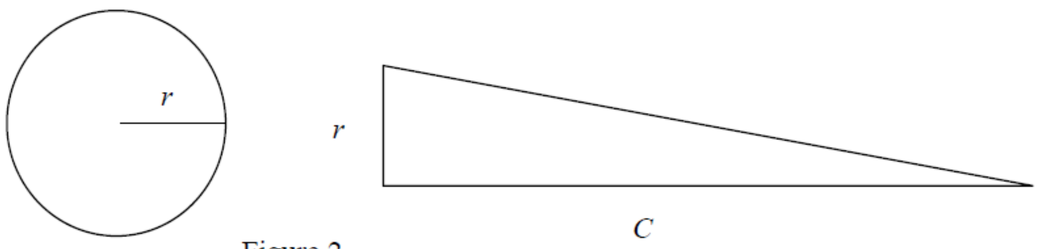
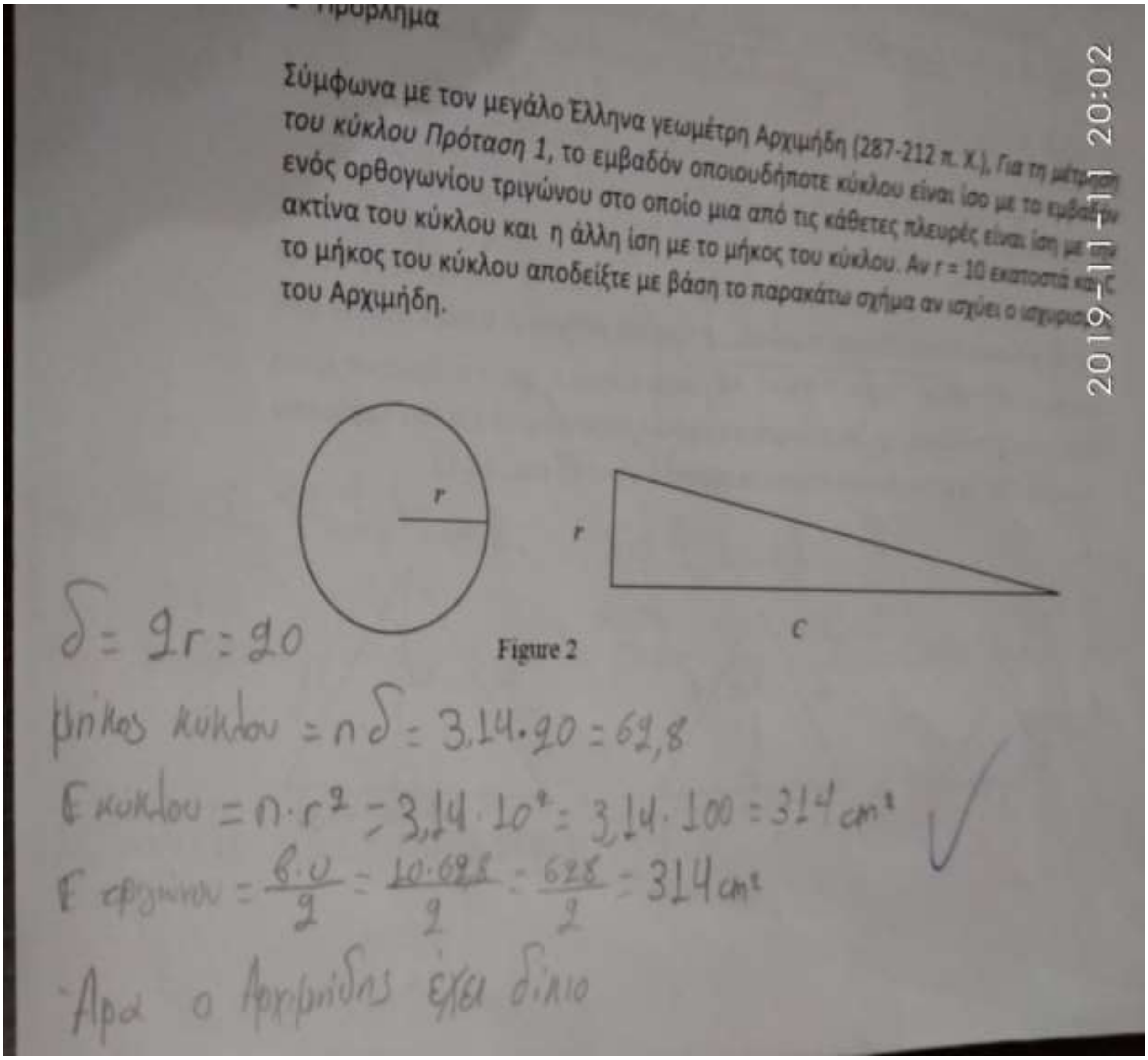


Figure 2

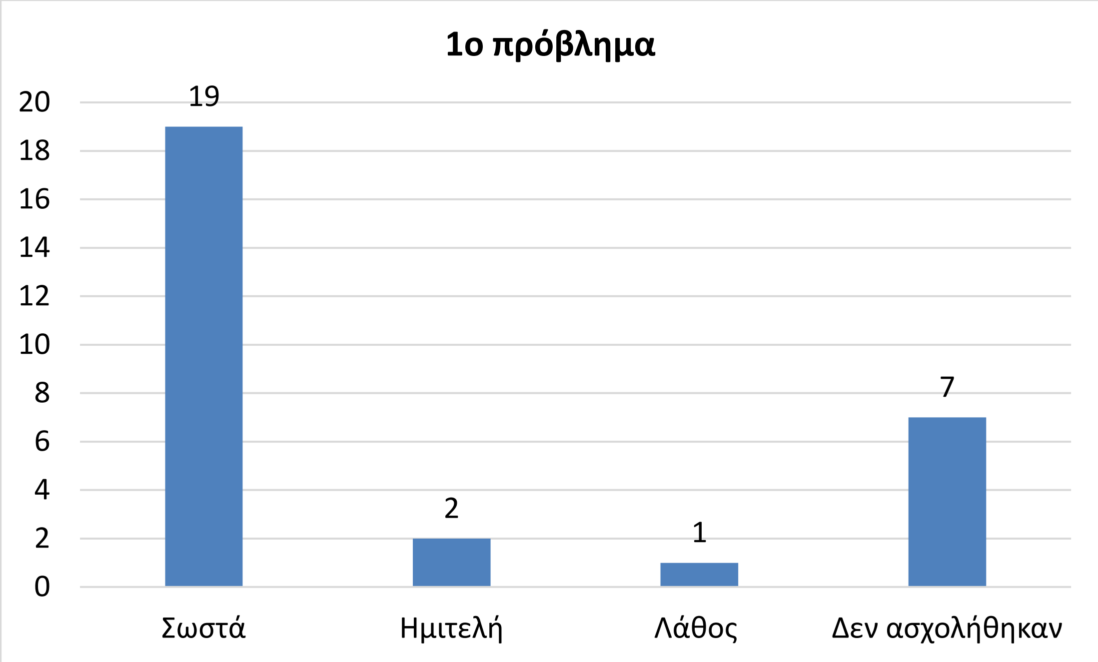
Με το πρώτο πρόβλημα της έρευνας ασχολήθηκαν οι 22 από τους 29 μαθητές (ποσοστό 75,86 %) ενώ οι υπόλοιποι 7 δεν ασχολήθηκαν καθόλου με αυτό το πρόβλημα (ποσοστό 24,13%). Από αυτούς που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν επιτυχώς και ολοκληρωμένα 19 στους 22 μαθητές (ποσοστό 86,36 %). Όλοι οι μαθητές που το έλυσαν σωστά, έκαναν επιτυχημένη εφαρμογή των τύπων του μήκους κύκλου, του εμβαδού κύκλου και του εμβαδού ορθογωνίου τρίγωνου.

Οι 2 στους 22 που ασχολήθηκαν μαζί του το άφησαν ημιτελές (ποσοστό 9.09 %). Οι μαθητές που το άφησαν ημιτελές ενώ βρήκαν σωστά το εμβαδόν του κύκλου μπερδεύτηκαν στο εμβαδόν τριγώνου εφαρμόζοντας, χωρίς να χρειάζεται, πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκοντας έτσι λάθος αποτέλεσμα.

Ενώ ένας μαθητής στους 22 το έλυσε λάθος (ποσοστό 4,54%) κάνοντας λανθασμένη εφαρμογή των τύπων.



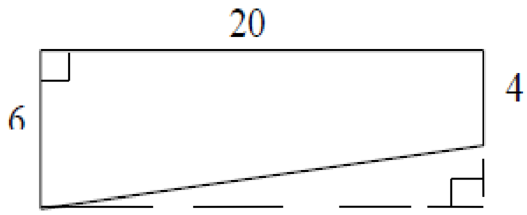
Εικόνα 49. Λύση 1ου Προβλήματος



Εικόνα 50. Αποτελέσματα 1ου Προβλήματος

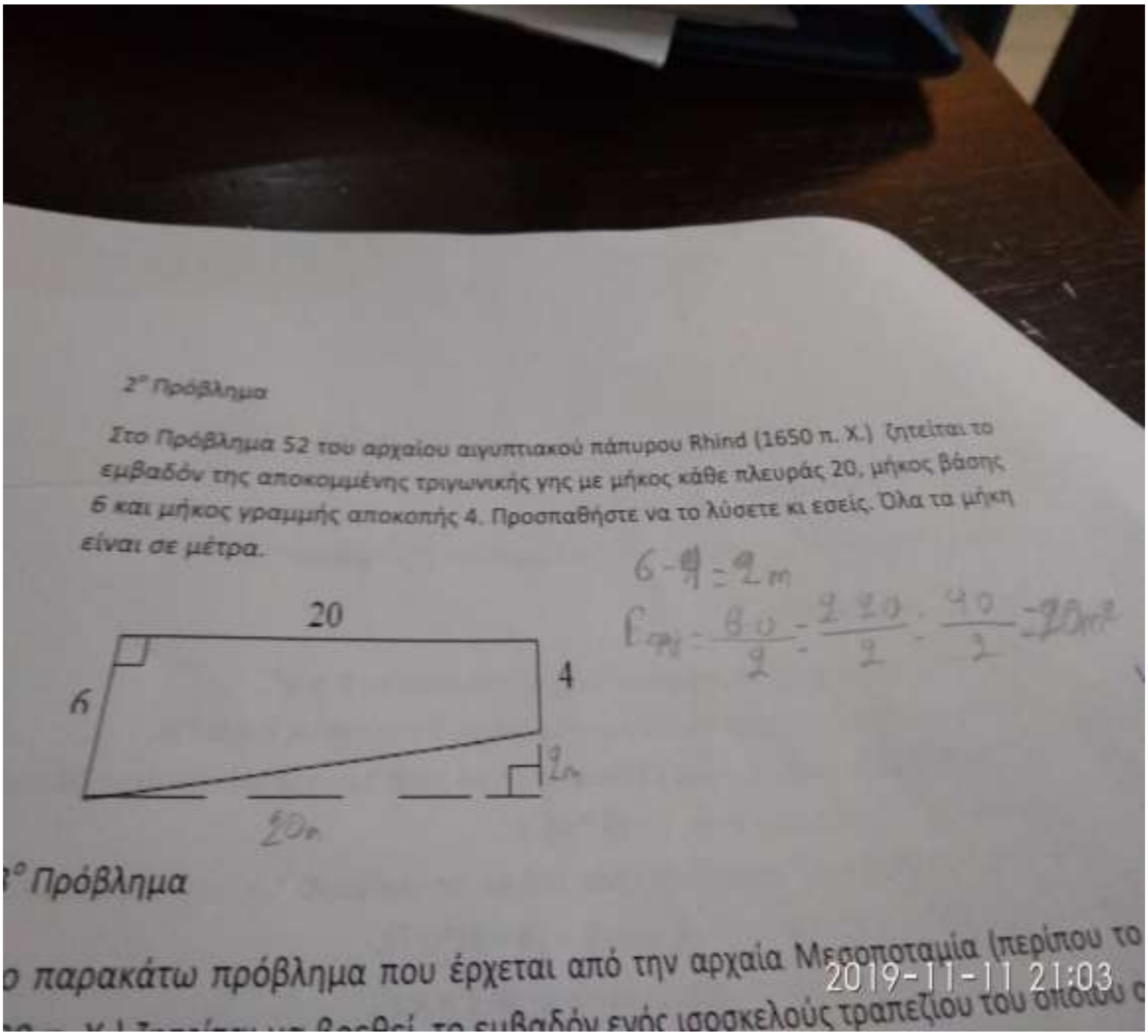
2ο Πρόβλημα

Στο Πρόβλημα 52 του αρχαίου αιγυπτιακού πάπυρου Rhind (1650 π. Χ.) ζητείται το εμβαδόν της αποκομμένης τριγωνικής γης με μήκος κάθε πλευράς 20, μήκος βάσης 6 και μήκος γραμμής αποκοπής 4. Προσπαθήστε να το λύσετε κι εσείς. Όλα τα μήκη είναι σε μέτρα.

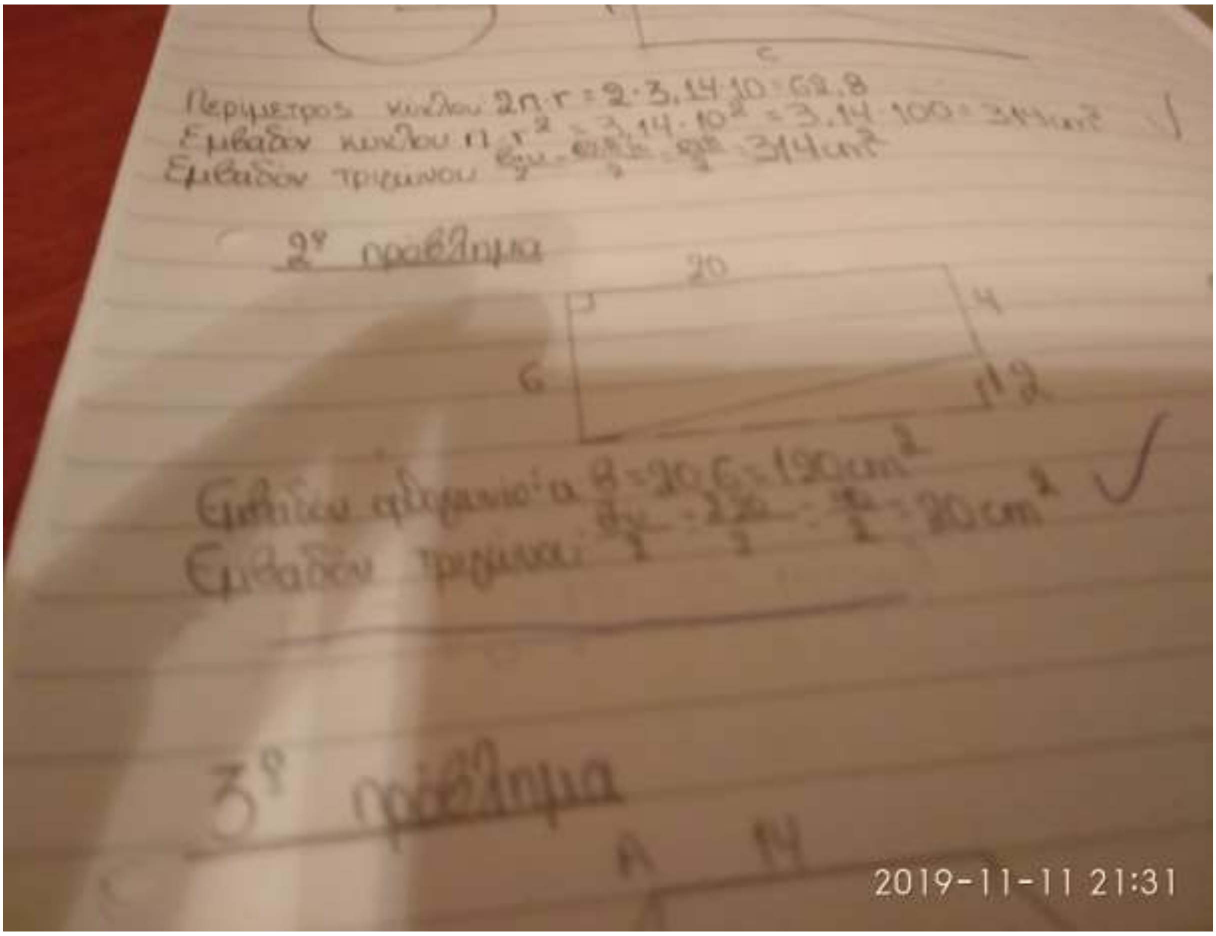


Με το δεύτερο πρόβλημα της έρευνας ασχολήθηκαν οι 25 από τους 29 μαθητές (ποσοστό 86,20 %) ενώ οι υπόλοιποι 4 δεν ασχολήθηκαν καθόλου με αυτό το πρόβλημα (ποσοστό 13,79 %). Από αυτούς που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν επιτυχώς και ολοκληρωμένα 22 στους 25 μαθητές (ποσοστό 88 %). Από τους 22 μαθητές που το έλυσαν σωστά, οι 21 εφάρμοσαν σωστά τον τύπο για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου στο αποκομμένο τρίγωνο αφού κατάλαβαν ότι το μήκος της μεγάλης κάθετης πλευράς είναι ίσο με την απέναντι πλευρά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ενώ το μήκος της μικρής κάθετης πλευράς βρίσκεται εύκολα με τη βοήθεια του σχήματος. Όσον αφορά τον άλλο μαθητή που το έλυσε σωστά, χωρίς να χρειάζεται βρήκε και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

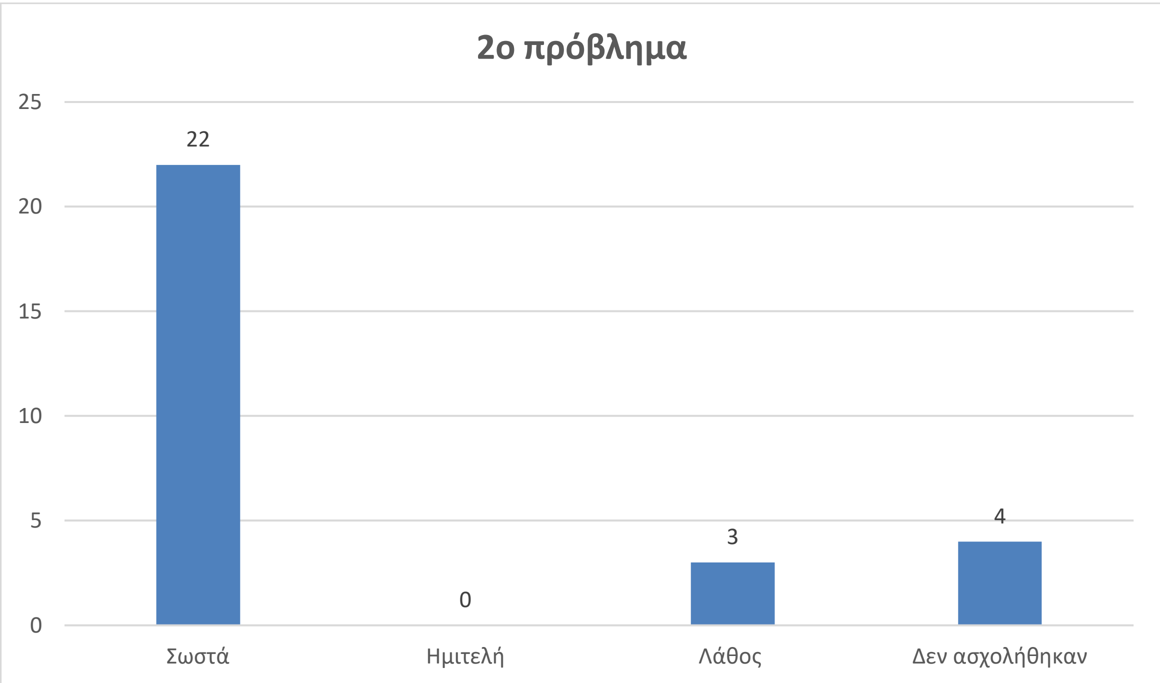
Οι υπόλοιποι 3 στους 25 που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν λάθος (ποσοστό 12 %). Οι 2 από τους 3 μαθητές που το έλυσαν λάθος εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα βρήκαν λάθος αποτέλεσμα ενώ ο τρίτος έκανε από την αρχή λάθος συλλογισμούς.



Εικόνα 51. α Λύση 2ου Προβλήματος



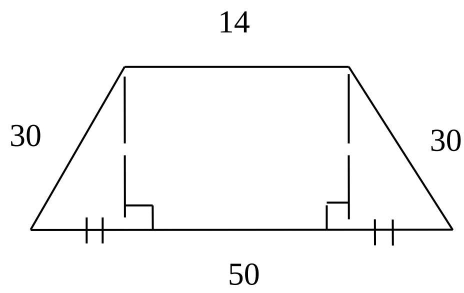
Εικόνα 52. β. Λύση 2ου προβλήματος



Εικόνα 53. Αποτελέσματα 2ου Προβλήματος

3^{o} Πρόβλημα

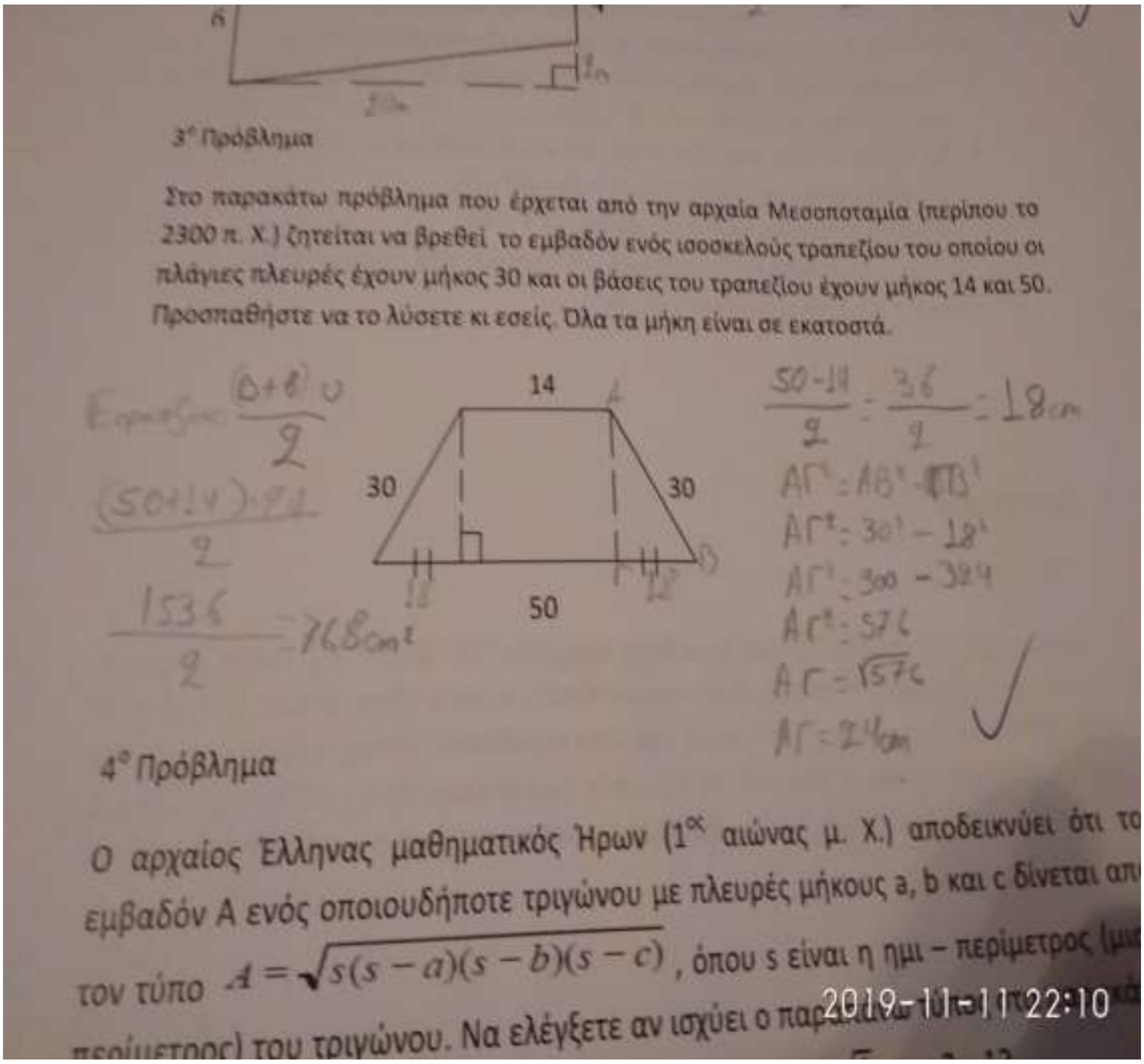
Στο παρακάτω πρόβλημα που έρχεται από την αρχαία Μεσοποταμία (περίπου το 2300 π. Χ.) ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τραπεζίου του οποίου οι πλάγιες πλευρές έχουν μήκος 30 και οι βάσεις του τραπεζίου έχουν μήκος 14 και 50. Προσπαθήστε να το λύσετε κι εσείς. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά.



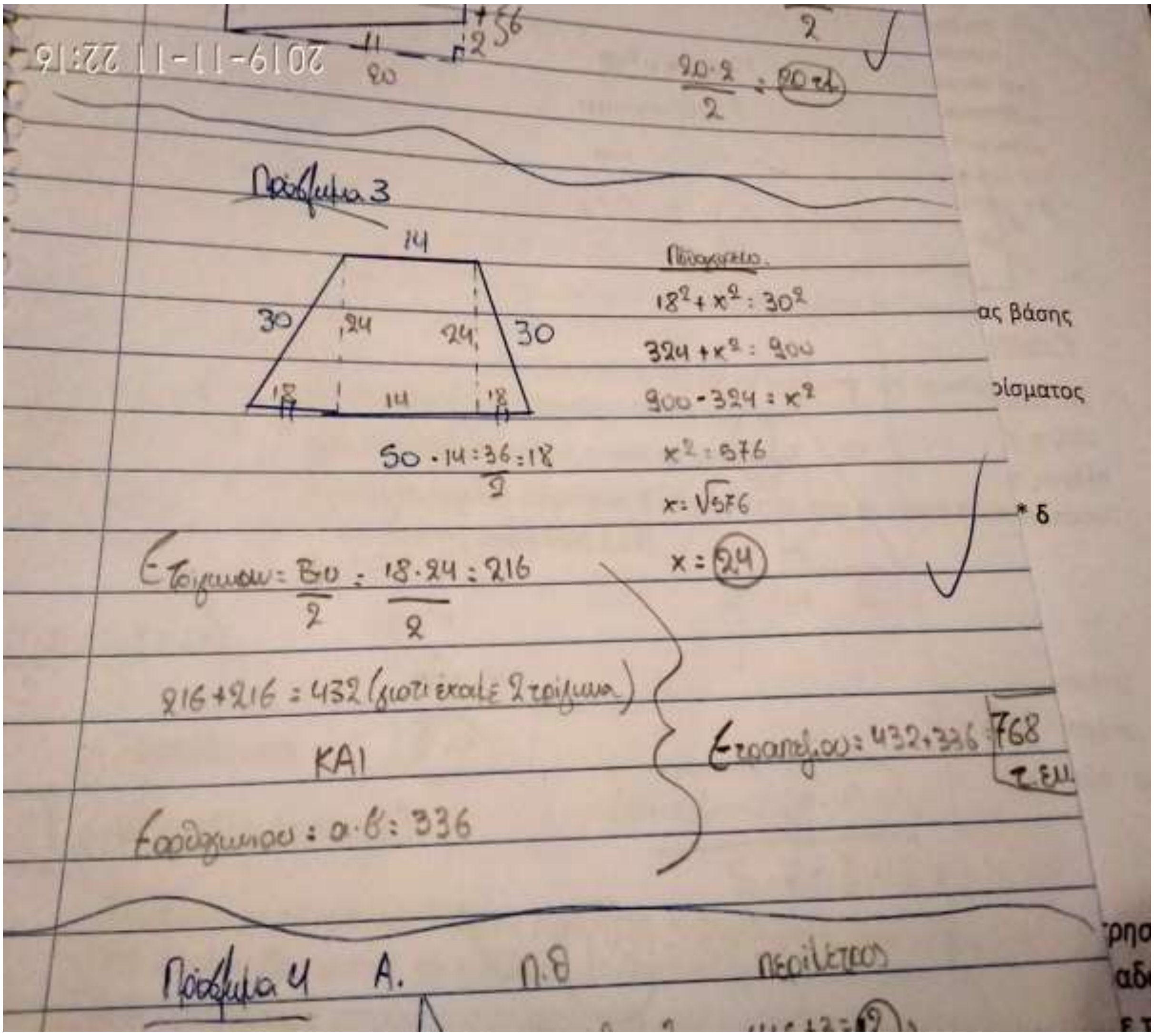
Με το τρίτο πρόβλημα της έρευνας ασχολήθηκαν οι 25 από τους 29 μαθητές (ποσοστό 86,20 %) ενώ οι υπόλοιποι 4 δεν ασχολήθηκαν καθόλου με αυτό το πρόβλημα (ποσοστό 13,79 %). Από αυτούς που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν επιτυχώς και ολοκληρωμένα 16 στους 25 μαθητές (ποσοστό 64 %). Από τους 16 μαθητές που το έλυσαν σωστά οι 15 με τη βοήθεια του σχήματος βρήκαν τη μικρή κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου και μετά εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα βρήκαν και την άλλη κάθετη πλευρά που αποτελεί ταυτόχρονα και ύψος του τραπεζίου. Στη συνέχεια εφάρμοσαν επιτυχώς τον τύπο για το εμβαδόν τραπεζίου. Ενώ ένας μαθητής στους 16 που το έλυσε σωστά αφού βρήκε με τον ίδιο τρόπο όπως και οι υπόλοιποι τα μήκη των κάθετων πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων μετά «έσπασε» το αρχικό σχήμα σε τρία κομμάτια, δύο ισοεμβαδικά ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Έπειτα βρήκε τα εμβαδά των τριών κομματιών εφαρμόζοντας επιτυχώς τον τύπο για το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου και τον τύπο για το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου και πρόσθεσε τα τρία εμβαδά.

Οι 2 από τους 25 που ασχολήθηκαν μαζί του το άφησαν ημιτελές (ποσοστό 8 %). Οι μαθητές αυτοί ενώ βρήκαν σωστά με το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο, το ύψος του τραπεζίου δεν συνέχισαν να ολοκληρώσουν το πρόβλημα.

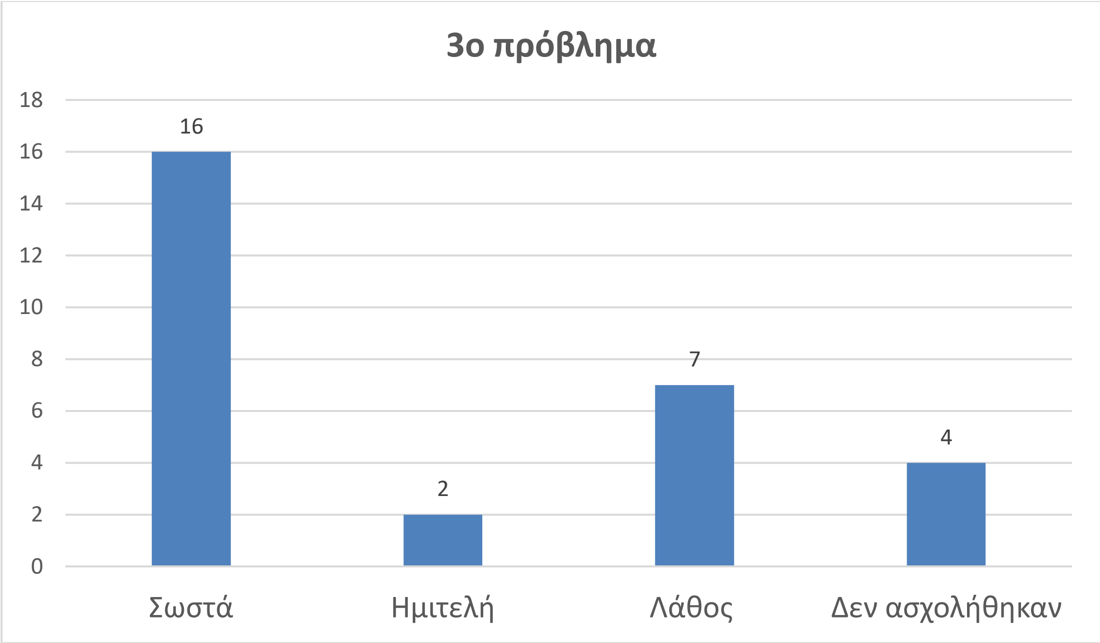
Από τους υπόλοιπους οι 7 στους 25 που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν λάθος (ποσοστό 28 %), Οι 4 από τους μαθητές που το έλυσαν λάθος δεν εφάρμοσαν πυθαγόρειο θεώρημα για να βρουν το ύψος του τραπεζίου αλλά θεωρώντας το εσωτερικό σχήμα ως τετράγωνο θεώρησαν το ύψος τραπεζίου όσο και τη μικρή βάση του τραπεζίου και έτσι οδηγήθηκαν σε λάθος αποτέλεσμα. Οι υπόλοιποι 3 έκαναν από την αρχή λάθος συλλογισμούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ένας από αυτούς τους τρεις χρησιμοποίησε για ύψος τραπεζίου την πλάγια πλευρά του. Αυτό δείχνει ότι μάλλον το μπέρδεψε με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Εικόνα 54. α. Λύση 3ου Προβλήματος



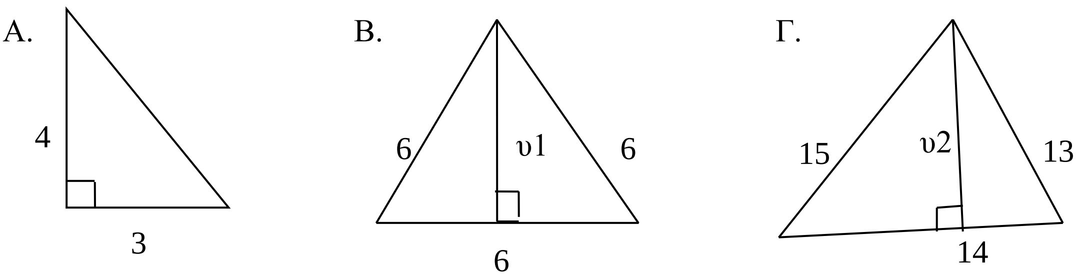
Εικόνα 55. β. Λύση 3ου Προβλήματος



Εικόνα 56. Αποτελέσματα 3ου Προβλήματος

4ο Πρόβλημα

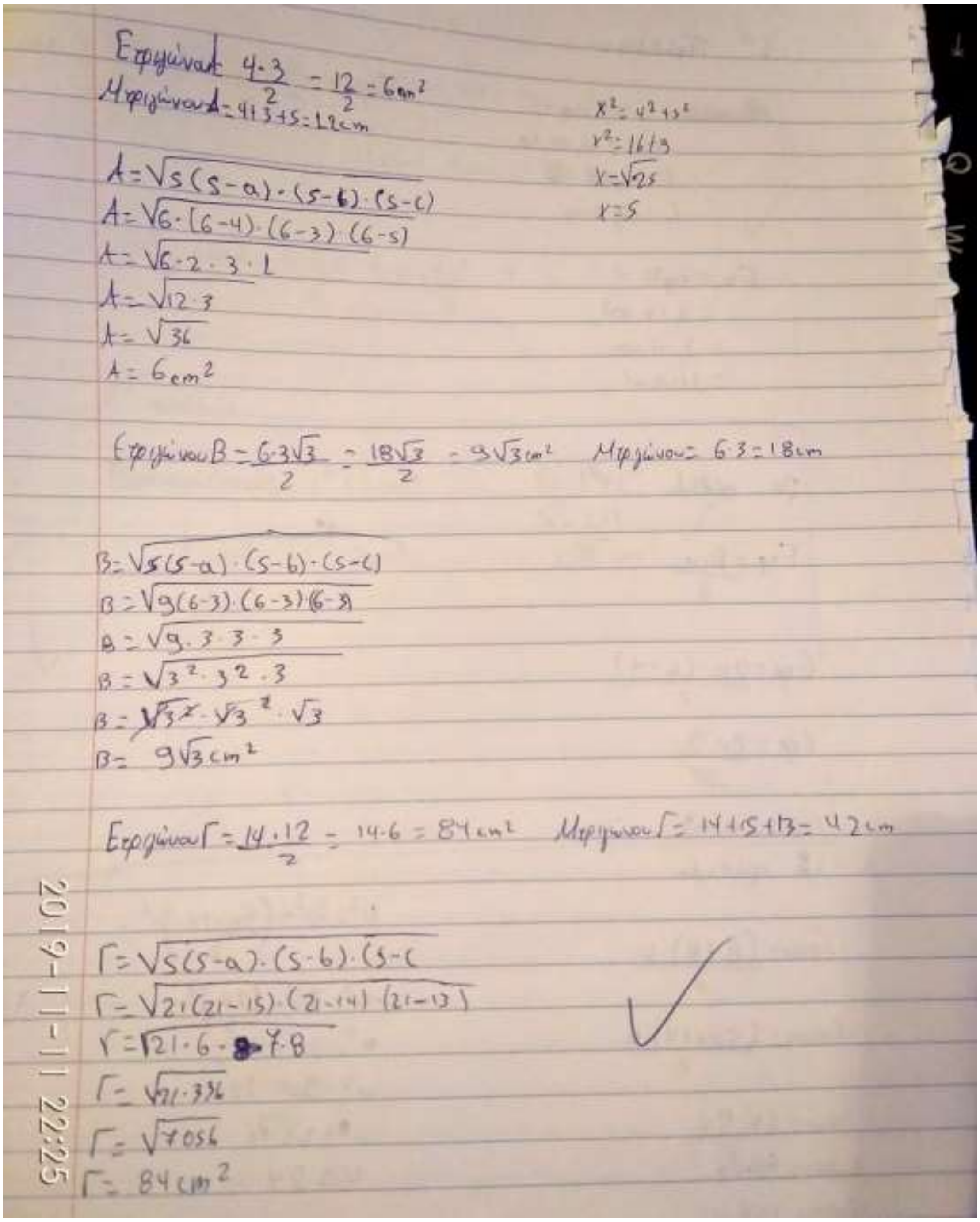
Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ήρων (1ος αιώνας μ. Χ.) αποδεικνύει ότι το εμβαδόν Α ενός οποιουδήποτε τριγώνου με πλευρές μήκους a, b και c δίνεται από τον τύπο $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, όπου s είναι η ημι – περίμετρος (μισή περίμετρος) του τριγώνου. Να ελέγξετε αν ισχύει ο παραπάνω τύπος στα παρακάτω τρίγωνα. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά και όπου υ1= $3\sqrt{3}$ και υ2 = 12.



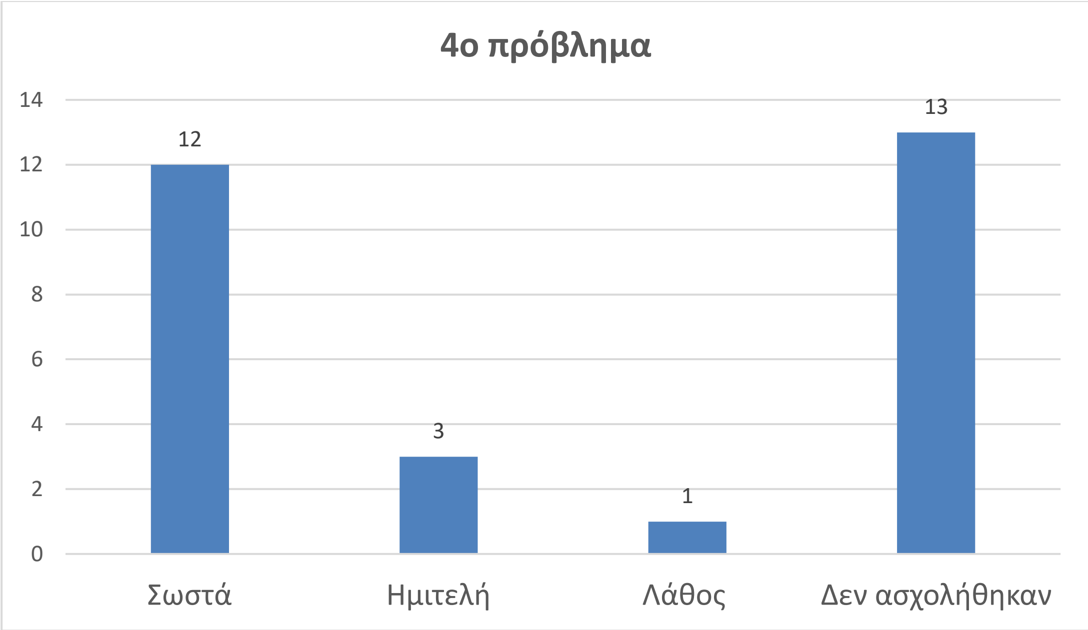
Με το τέταρτο πρόβλημα της έρευνας ασχολήθηκαν οι 16 από τους 29 μαθητές (ποσοστό 55,17 %) ενώ 13 από τους 29 μαθητές δεν ασχολήθηκαν καθόλου με αυτό το πρόβλημα (ποσοστό 44,82 %). Από αυτούς που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν επιτυχώς και ολοκληρωμένα 12 στους 16 μαθητές (ποσοστό 75 %). Όλοι οι μαθητές που το έλυσαν σωστά ακολούθησαν την ίδια μέθοδο. Στην πρώτη περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα βρήκαν το μήκος της τρίτης πλευρά και μετά την περίμετρο και την ημι-περίμετρο. Στα άλλα δύο τρίγωνα η περίμετρος και η ημι-περίμετρος βρέθηκε εύκολα με τη βοήθεια των σχημάτων. Αφού λοιπόν βρήκαν τις ημι-περιμέτρους, εφάρμοσαν επιτυχώς τον τύπο εμβαδού τριγώνου που έχουν διδαχτεί αλλά και τον τύπο εμβαδού τριγώνου του Ήρωνα που δίνεται στο πρόβλημα και οδηγήθηκαν σε σωστά συμπεράσματα.

Οι 3 από τους 16 που ασχολήθηκαν μαζί του το άφησαν ημιτελές (ποσοστό 18,75 %). Οι μαθητές που το άφησαν ημιτελές ενώ επαλήθευσαν σωστά την πρώτη και τρίτη περίπτωση έκαναν λάθος στους υπολογισμούς στη δεύτερη περίπτωση. Αυτό ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι το ύψος του τριγώνου δόθηκε με μορφή τετραγωνικής ρίζας.

Ένας μαθητής στους 16 που ασχολήθηκε μαζί του το έλυσε λάθος (ποσοστό 6,25 %). Ο μαθητής που το έλυσε λάθος εφάρμοσε, χωρίς λόγο, πυθαγόρειο θεώρημα κάνοντας λάθος συλλογισμούς.



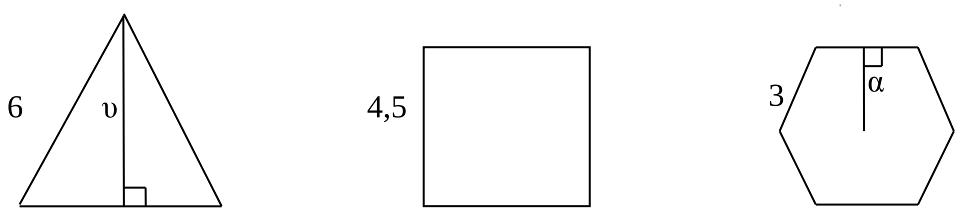
Εικόνα 57. Λύση 4ου Προβλήματος



Εικόνα 58. Αποτελέσματα 4ου Προβλήματος

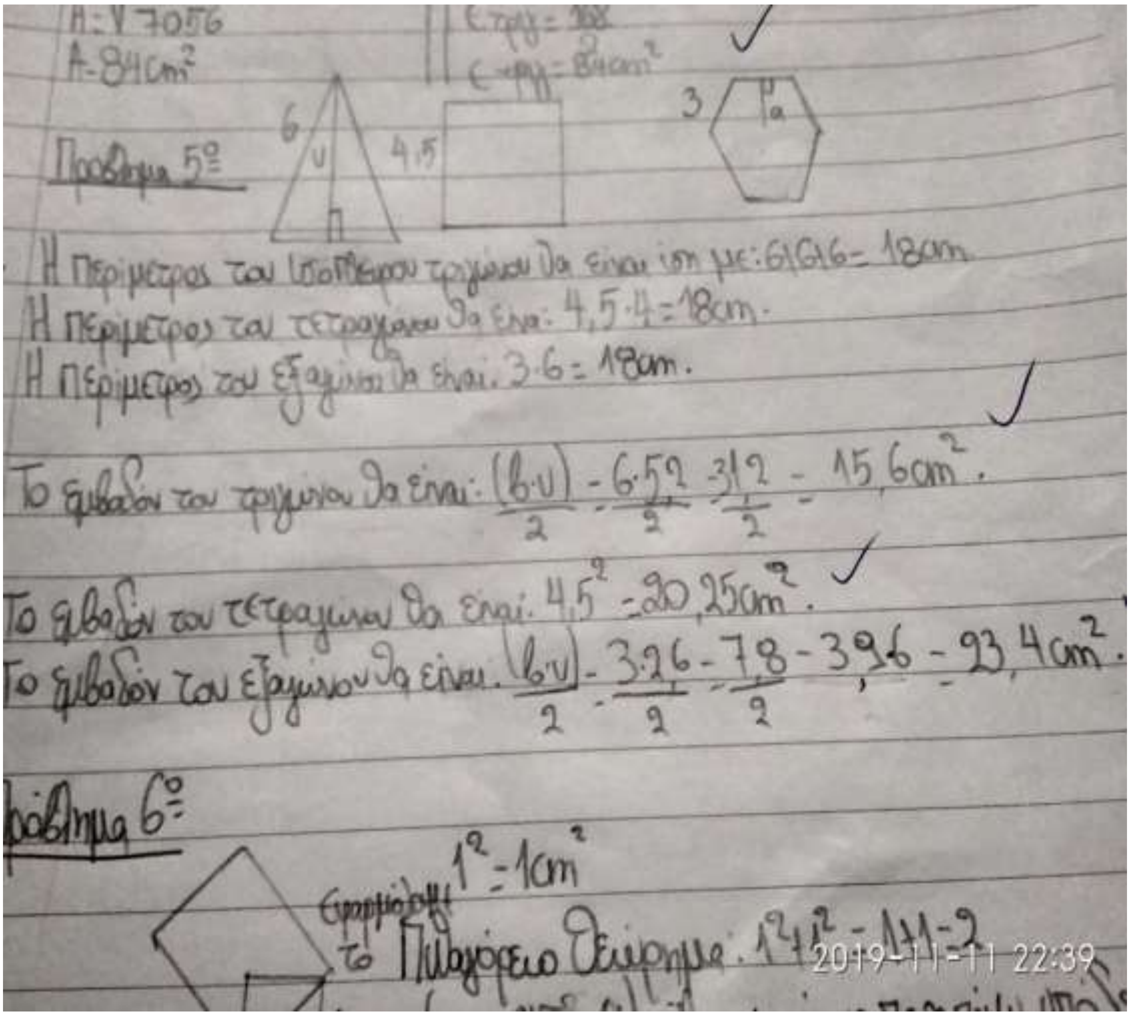
5º Πρόβλημα

Ο Έλληνας μαθηματικός Πάππος (4ος αιώνας μ. Χ.) ισχυρίζεται ότι εάν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο έχουν την ίδια περίμετρο, το εξάγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Αποδείξτε στο παρακάτω σχήμα αν ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά ενώ για ύψος τριγώνου χρησιμοποιήστε υ=5,2 (προσεγγιστική τιμή) και το μήκος του αποστήματος του κανονικού εξαγώνου είναι α=2,6.



Με το πέμπτο πρόβλημα της έρευνας ασχολήθηκαν οι 20 από τους 29 μαθητές (ποσοστό 68,96 %), ενώ 9 από τους 29 μαθητές δεν ασχολήθηκαν καθόλου με αυτό το πρόβλημα (ποσοστό 31,03 %). Από αυτούς που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν επιτυχώς και ολοκληρωμένα 12 στους 20 μαθητές (ποσοστό 60 %). Όλοι οι μαθητές που το έλυσαν σωστά αφού βρήκαν την περίμετρο των σχημάτων προχώρησαν στον υπολογισμό των εμβαδών. Στα πρώτα δύο σχήματα όλοι εφάρμοσαν σωστά τον τύπο εμβαδού τριγώνου και τον τύπο εμβαδού τετραγώνου. Η διαφοροποίηση εντοπίστηκε στον υπολογισμό του εμβαδού του κανονικού εξαγώνου. Συγκεκριμένα οι 8 στους 12 χώρισαν το κανονικό εξάγωνο σε έξι ίσα τρίγωνα και αφού υπολόγισαν το εμβαδόν του ενός τριγώνου, υπολόγισαν έπειτα και το συνολικό εμβαδόν. Οι 3 μαθητές εφάρμοσαν έναν από τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού κανονικού εξαγώνου ($E= \alpha * \Pi/2$, όπου α το απόστημα και Π η περίμετρος). Τον συγκεκριμένο τύπο, που αναφέρει και ο Έλληνας μαθηματικός Πάππος της Αλεξάνδρειας, προφανώς τον διδάχτηκαν, αν και δεν αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης της Β΄ Γυμνασίου. Ενώ ένας μαθητής χώρισε το κανονικό εξάγωνο σε δύο ίσα τραπέζια και αφού υπολόγισε το εμβαδόν του ενός τραπεζίου, εφαρμόζοντας τον ανάλογο τύπο εμβαδού, υπολόγισε έπειτα και το συνολικό εμβαδόν.

Οι υπόλοιποι 8 από τους 20 μαθητές που ασχολήθηκαν μαζί του το άφησαν ημιτελές (ποσοστό 40%). Από τους 8 μαθητές που το άφησαν ημιτελές οι 6 ενώ βρήκαν την περίμετρο και των τριών σχημάτων και το εμβαδόν του τριγώνου και του τετραγώνου δε βρήκαν το εμβαδόν του εξαγώνου, ενώ ο ένας ολοκλήρωσε μόνο την περίπτωση του τετραγώνου. Αξίζει να αναφερθεί ιδιαίτερα η περίπτωση του τελευταίου γραπτού που δεν ολοκλήρωσε επιτυχημένα το πρόβλημα. Ο συγκεκριμένος μαθητής στην περίπτωση του κανονικού εξαγώνου, ενώ χώρισε το κανονικό εξάγωνο σε δύο ίσα τραπέζια, στην προσπάθειά του να βρει τη μεγάλη βάση του τραπεζίου εφάρμοσε, χωρίς να χρειάζεται, πυθαγόρειο θεώρημα και βρήκε λάθος μήκος με αποτέλεσμα να βρει λάθος εμβαδόν τραπεζίου άρα και λάθος συνολικό εμβαδόν. Σωστή σκέψη αλλά λάθος εφαρμογή.


Πρόβλημα 5ο

Η περίμετρος του ισόπλευρου τριγώνου θα είναι ίση με: 6+6+6= 18cm.
Η περίμετρος του τετραγώνου θα είναι: 4,5·4 = 18cm.
Η περίμετρος του εξαγώνου θα είναι: 3·6 = 18cm.

Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι: $\frac{(b \cdot u)}{2} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} = \frac{31,2}{2} = 15,6cm^2$.
Το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι: $4,5^2 = 20,25cm^2$.
Το εμβαδόν του εξαγώνου θα είναι: $\frac{(b \cdot u)}{2} = \frac{3 \cdot 2,6}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9 \cdot 6 = 23,4cm^2$.

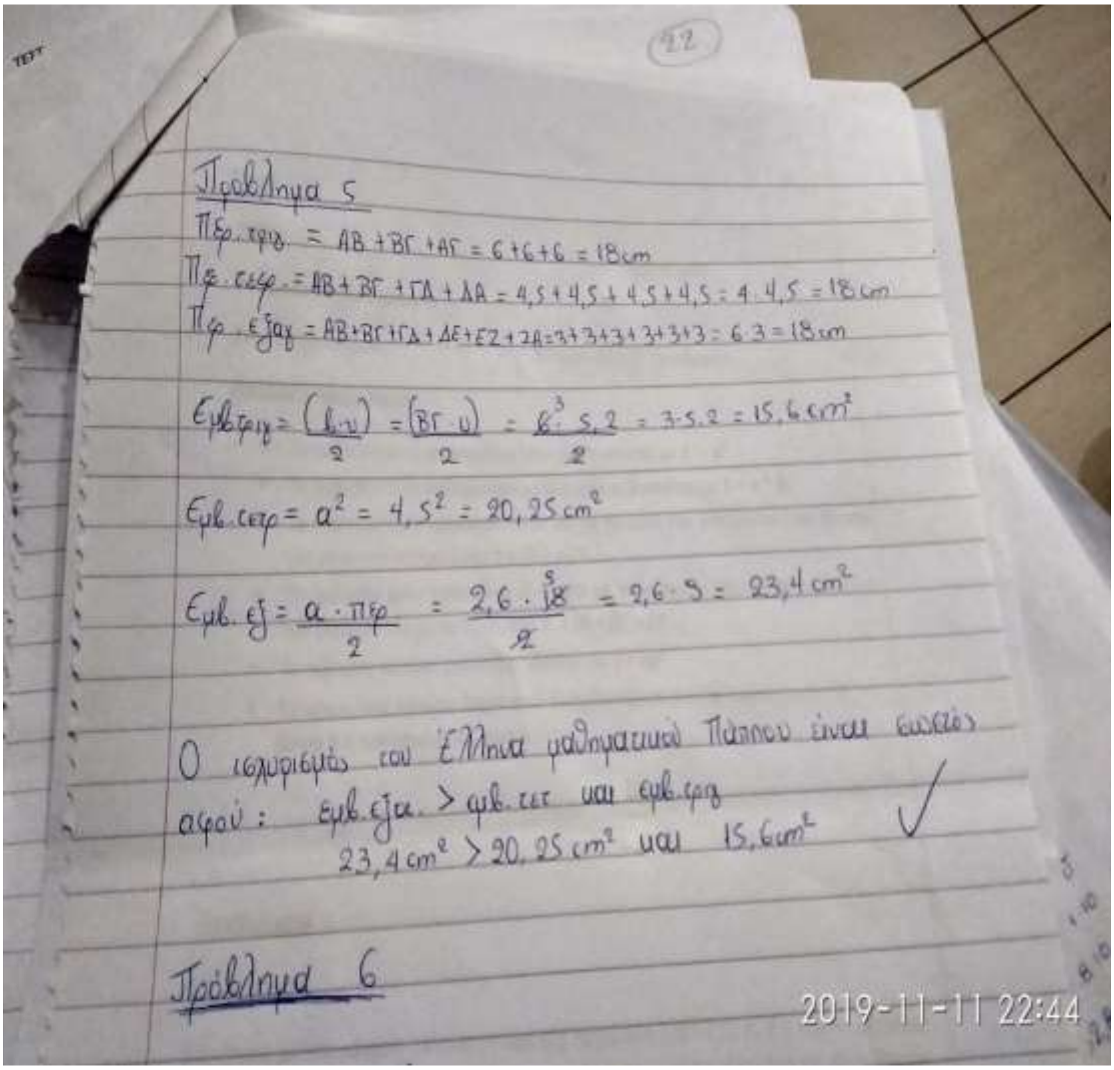
Πρόβλημα 6ο

$1^2 = 1cm^2$

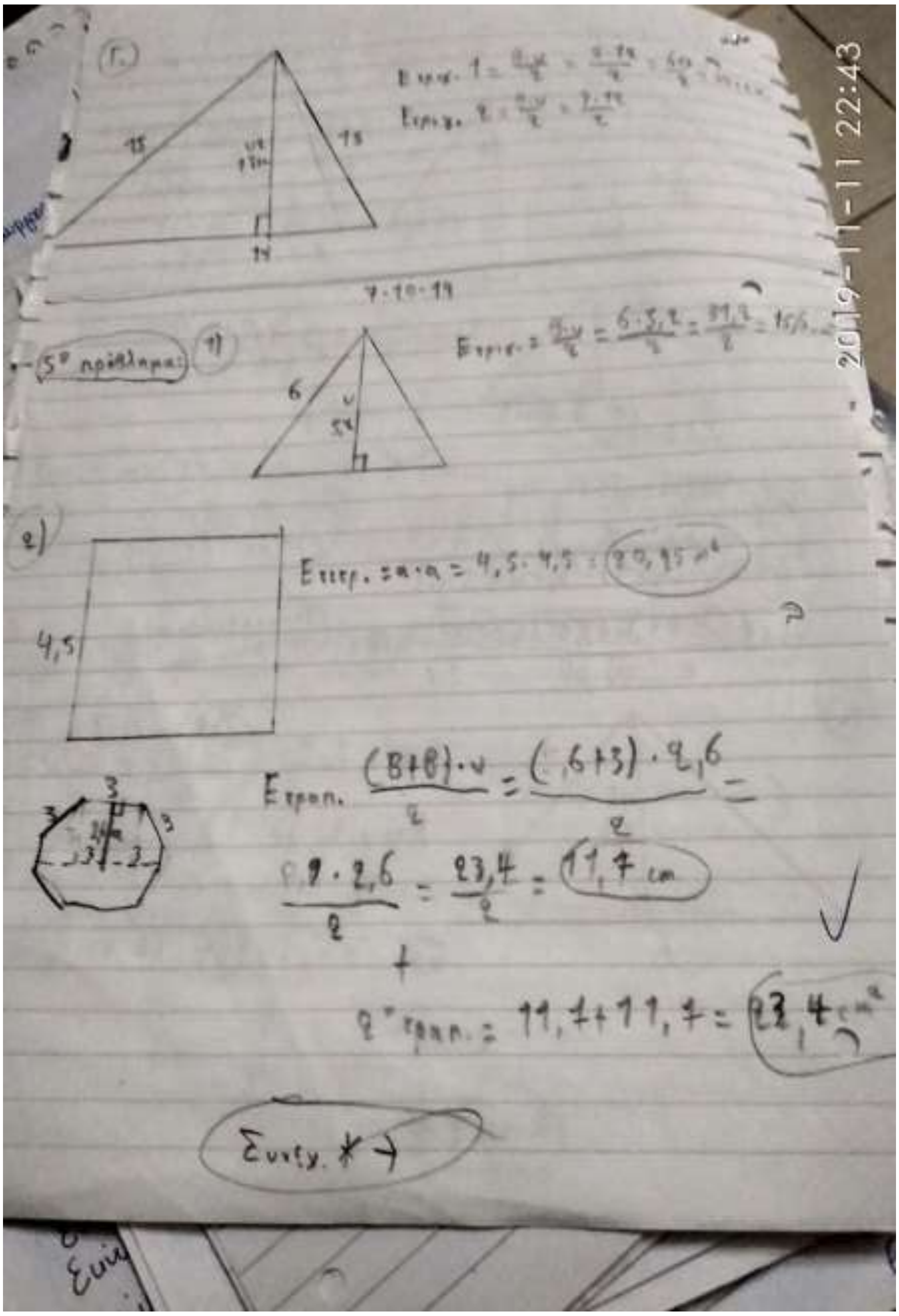
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

2019-11-11 22:39

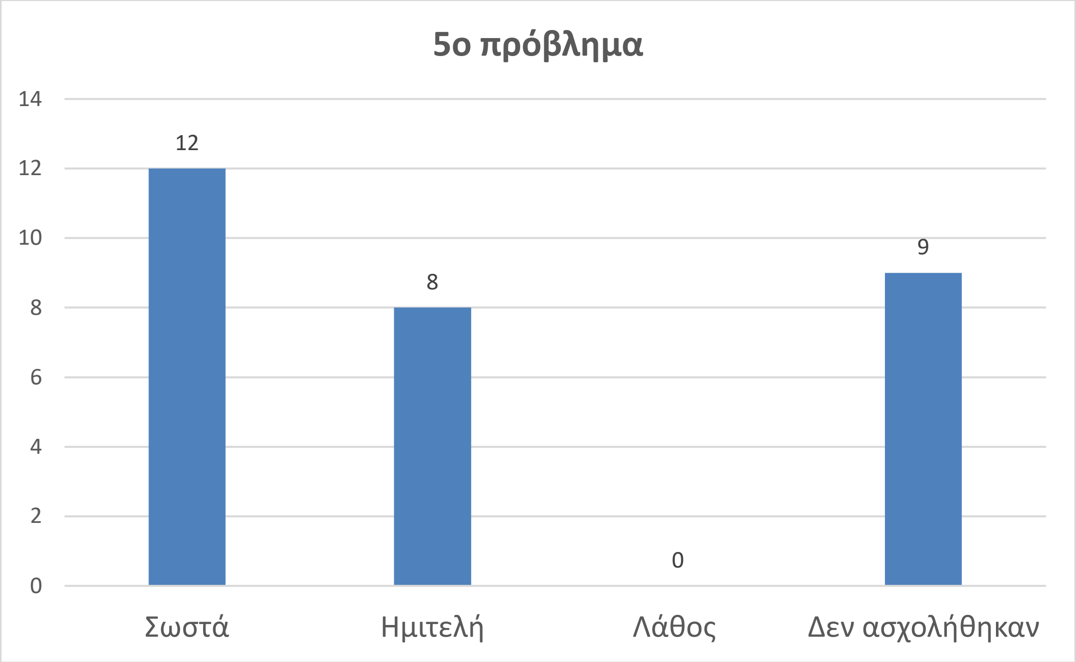
Εικόνα 59.α. Λύση 5ου Προβλήματος



Εικόνα 60. β. Λύση 5ου Προβλήματος



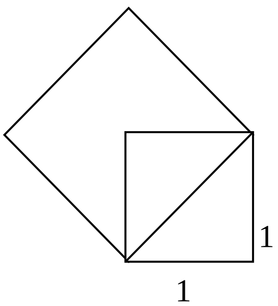
Εικόνα 61.γ. Λύση 5ου Προβλήματος



Εικόνα 62. Αποτελέσματα 5ου Προβλήματος

6ο Πρόβλημα

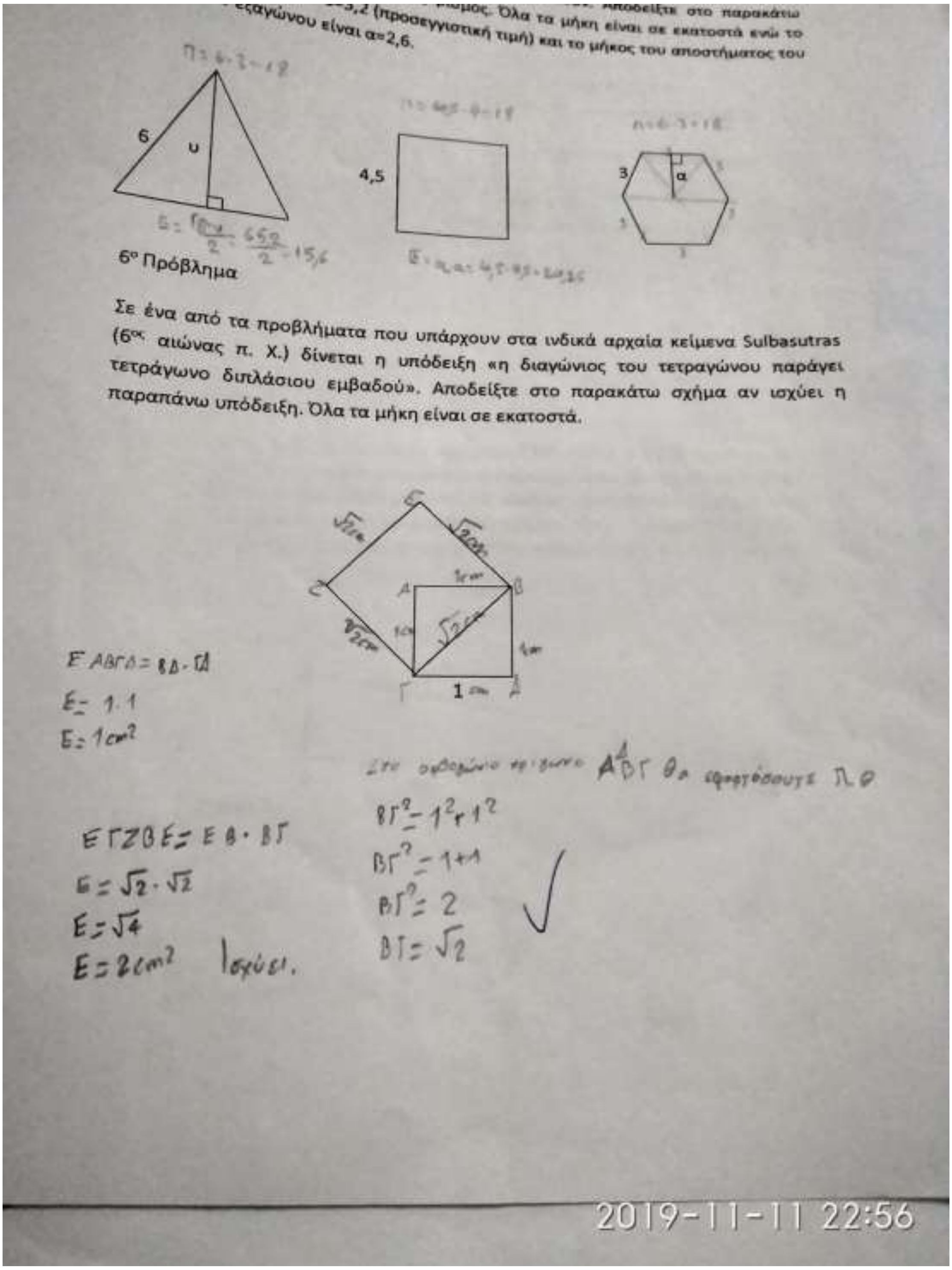
Σε ένα από τα προβλήματα που υπάρχουν στα ινδικά αρχαία κείμενα Sulbasutras (6ος αιώνας π. Χ.) δίνεται η υπόδειξη «η διαγώνιος του τετραγώνου παράγει τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού». Αποδείξτε στο παρακάτω σχήμα αν ισχύει η παραπάνω υπόδειξη. Όλα τα μήκη είναι σε εκατοστά.



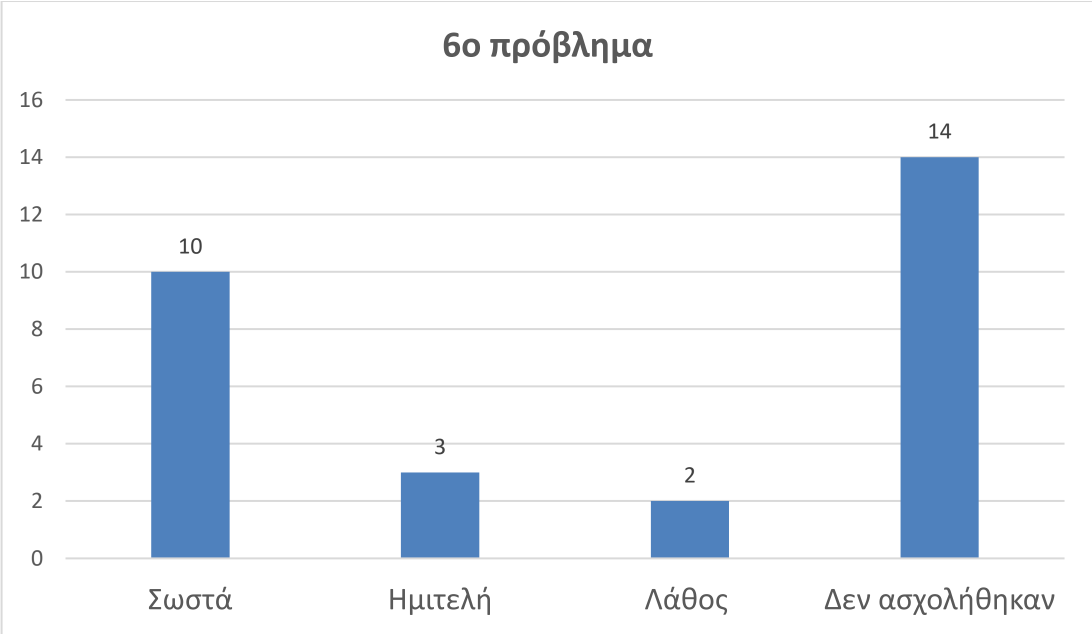
Με το έκτο πρόβλημα της έρευνας ασχολήθηκαν οι 15 από τους 29 μαθητές (ποσοστό 51,72 %). ενώ 14 από τους 29 μαθητές δεν ασχολήθηκαν καθόλου με αυτό το πρόβλημα (ποσοστό 48,27 %). Από αυτούς που ασχολήθηκαν μαζί του το έλυσαν επιτυχώς και ολοκληρωμένα οι 10 στους 15 μαθητές (ποσοστό 66,66 %). Όλοι οι μαθητές που το έλυσαν σωστά αφού πρώτα, εφαρμόζοντας τον κατάλληλο τύπο, βρήκαν το εμβαδόν του μικρού τετραγώνου, έπειτα εφάρμοσαν πυθαγόρειο θεώρημα για να βρουν την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που είναι ταυτόχρονα διαγώνιος του μικρού τετραγώνου και πλευρά του μεγάλου τετραγώνου. Τέλος με τη βοήθεια του τύπου εμβαδού τετραγώνου υπολόγισαν και το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου και κατέληξαν στο σωστό συμπέρασμα.

Οι 3 από τους 15 μαθητές που ασχολήθηκαν μαζί του το άφησαν ημιτελές (ποσοστό 20 %). Από τους μαθητές που το άφησαν ημιτελές, ο ένας ενώ εφάρμοσε σωστά το πυθαγόρειο θεώρημα και βρήκε την πλευρά τετραγώνου και σταμάτησε εκεί, ενώ οι άλλοι 2 ενώ εφάρμοσαν σωστά το πυθαγόρειο θεώρημα και βρήκαν σωστά την υποτείνουσα, έκαναν λάθος στη συνέχεια στις πράξεις και οδηγήθηκαν σε λάθος αποτέλεσμα.

Οι 2 στους 15 που ασχολήθηκαν μαζί του και το έλυσαν λάθος (ποσοστό 13,33 %) ενώ ξεκίνησαν σωστά να εφαρμόσουν πυθαγόρειο θεώρημα μετά έκαναν λάθος συλλογισμούς.



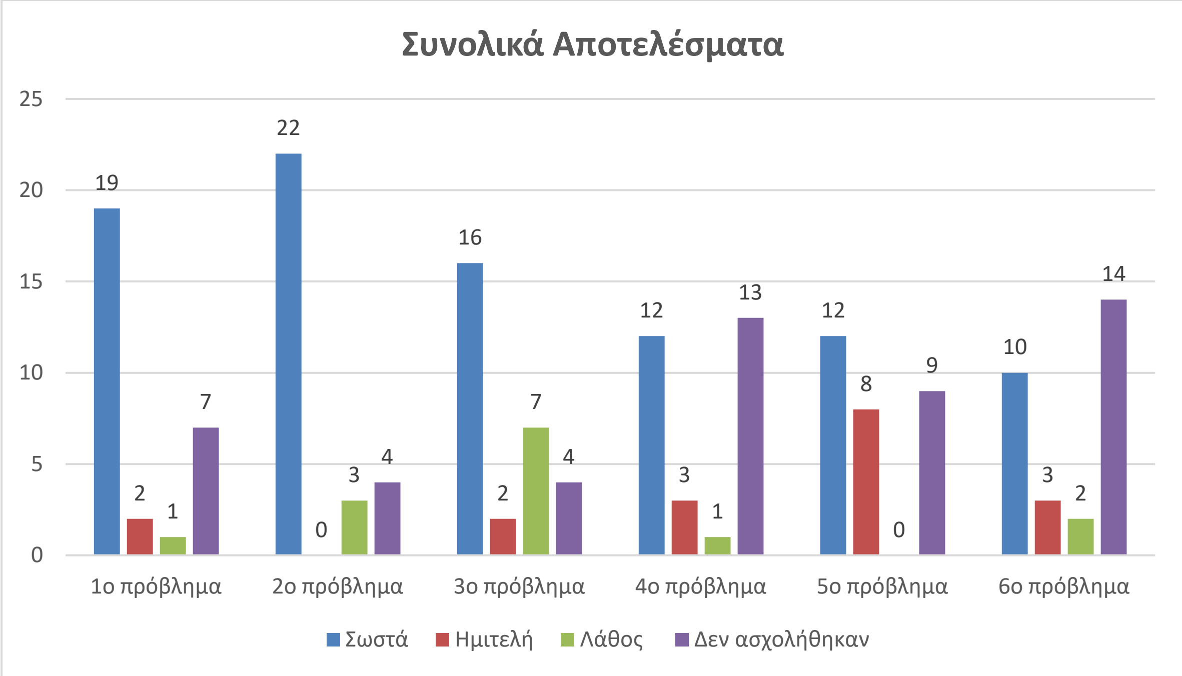
Εικόνα 63. Λύση 6ου Προβλήματος



Εικόνα 64. Αποτελέσματα 6ου Προβλήματος

Τα συνολικά αποτελέσματα για το κάθε πρόβλημα έχουν ως εξής:

	Σωστά	Ημιτελή	Λάθος	Δεν ασχολήθηκαν
1ο πρόβλημα	19	2	1	7
2ο πρόβλημα	22	0	3	4
3ο πρόβλημα	16	2	7	4
4ο πρόβλημα	12	3	1	13
5ο πρόβλημα	12	8	0	9
6ο πρόβλημα	10	3	2	14



Εικόνα 65. Συνολικά αποτελέσματα

Κεφάλαιο 9ο. Συζήτηση – Συμπεράσματα

Μελετώντας προσεχτικά το δείγμα της ερευνάς μου οδηγούμαστε, πιστεύω, σε χρήσιμα συμπεράσματα. Τα τρία πρώτα προβλήματα ήταν τα πιο δημοφιλή στους μαθητές μας. Τα δύο πρώτα ειδικά είχαν και τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας (86,36% και 88% αντίστοιχα). Αυτό πιστεύω συνέβη γιατί τα προβλήματα αυτά απαιτούσαν πιο πολύ εφαρμογή αλγορίθμων χωρίς να χρειάζεται οι μαθητές μας να εμβαθύνουν περισσότερο. Διαπίστωση που ενισχύει τον ισχυρισμό του Rickard ότι οι μαθητές ασκούνται περισσότερο στην εφαρμογή διαδικασιών παρά στην κατάκτηση ουσιαστικών γεωμετρικών σχέσεων (Rickard, 2005). Επίσης έχω την πεποίθηση ότι και το τρίτο πρόβλημα θα είχε τα ίδια μεγάλα ποσοστά επιτυχίας αν οι τέσσερις μαθητές, που θεώρησαν το εσωτερικό σχήμα ως τετράγωνο και πήραν το ύψος τραπεζίου όσο και τη μικρή βάση του, ήταν λίγο πιο προσεκτικοί. Το σχήμα έχει σημαντικό ρόλο μέσα στο πρόβλημα. Άλλωστε το πρώτο πράγμα που ζήτησαν οι μαθητές του προ-ελέγχου ήταν η δημιουργία κατανοητών σχημάτων σε όλα τα προβλήματα. Ενισχύεται λοιπόν η διαπίστωση ότι οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν προβλήματα με τα γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών όπως και του εμβαδού (Van de Walle, 2005). Ίσως και το σχήμα να μην ήταν τόσο ξεκάθαρο στο τρίτο πρόβλημα και να τους μπέρδεψε. Έχω αυτή την εντύπωση βλέποντας το υπόλοιπο γραπτό τους που δείχνει μαθητές που μάλλον είχαν την ικανότητα να το ολοκληρώσουν σωστά το πρόβλημα.

Οι μεγαλύτερες δυσκολίες εμφανίζονται στα υπόλοιπα τρία προβλήματα (4^{ο}, 5^{ο}, 6^{ο}). Τα λιγότερο δημοφιλή ήταν το τέταρτο και το έκτο πρόβλημα (ποσοστό συμμετοχής 55,17% και 55,72% αντίστοιχα). Ενώ για το τέταρτο πρόβλημα μπορούμε, ίσως, να επικαλεστούμε τις αρκετές πράξεις που απαιτούσε και το ύψος του ενός τριγώνου με τη μορφή ρίζας, αυτό δεν ισχύει για το έκτο πρόβλημα, που όμως, ίσως να «πλήρωσε», την κούραση των μαθητών λόγω της τελευταίας σειράς του στο τεστ ή του «σπάνιου» για τους μαθητές σχήματος όπου η διαγώνιος του μικρού τετραγώνου αποτελούσε ταυτόχρονα και πλευρά του μεγάλου τετραγώνου. Βλέποντας όμως τα γραπτά των μαθητών βλέπω ότι ένας ακόμα κοινός παράγοντας δυσκολίας ήταν σίγουρα η χρήση της τετραγωνικής ρίζας, ενώ αντίθετα έδειξαν να μη δυσκολεύονται στη χρήση και την εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος. Όπως αναφέρει και ο Γεωργίου (1988) οι μαθητές Γυμνασίου δυσκολεύονται συχνά στον υπολογισμό και στις πράξεις τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης. Μαθητές που δυσκολεύτηκαν ή εγκατέλειψαν τη δεύτερη περίπτωση του τέταρτου προβλήματος που απαιτούσε πράξεις με τετραγωνικές ρίζες δυσκολεύτηκαν ή και εγκατέλειψαν και το έκτο πρόβλημα.

Μια άλλη διαπίστωση η οποία αναδεικνύεται μέσα από το 5^{ο} κυρίως πρόβλημα αλλά και το 6^{ο}, είναι ότι οι μαθητές μας στο σχολείο περισσότερο εκπαιδεύονται να μαθαίνουν και να εφαρμόζουν τύπους παρά να έχουν «μαθηματικό» τρόπο σκέψης. Η δυσκολία να βρουν το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου του 5^{ου} προβλήματος και το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου του 6^{ου} προβλήματος είναι περισσότερο από εμφανής. Αυτό προκύπτει κι από τα χαμηλά ποσοστά συμμετοχής (68,96 % και 51,72 % αντίστοιχα) αλλά και από τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας (60% και 66,66% αντίστοιχα). Αυτό πιστεύω συμβαίνει γιατί γενικά ένας τύπος εμβαδού κανονικού εξαγώνου δε διδάσκεται ούτε στο Δημοτικό ούτε στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου και τα παιδιά δυσκολεύτηκαν να σκεφτούν τρόπο να «χωρίσουν» το εξάγωνο σε πιο οικεία για αυτούς σχήματα. Αν και δε δείχνουν να δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σχέση ανάμεσα στη σταθερή περίμετρο και το μεταβαλλόμενο εμβαδόν των τριών διαφορετικών σχημάτων είναι σαφές ότι μπροστά σε ένα σχήμα, όχι και τόσο «παράξενο», όπως είναι το κανονικό εξάγωνο ή κάτι πιο «παράξενο», όπως τα δύο τετράγωνα του $6^{ου}$ προβλήματος, δυσκολεύονται να βρουν τρόπο να τα αποκωδικοποιήσουν και να βρουν τρόπο εύρεσης του εμβαδού τους. Συμπέρασμα που συμφωνεί με έρευνες που ισχυρίζονται ότι η μέτρηση του εμβαδού περιορίζεται κυρίως στη μηχανική αποστήθιση και εφαρμογή αλγεβρικών τύπων υπολογισμού από μέρους των μαθητών και ότι πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι «ασυνήθιστα» σχήματα δεν έχουν εμβαδόν και ότι αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί γιατί δεν υπάρχει στάνταρ τύπος υπολογισμού του, (Κορδάκη, 1999, Rickard, 2005, Σδρόλιας, 2007). Δυσκολεύονται να κατανοήσουν δηλαδή το εμβαδόν ενός σχήματος ως το άθροισμα των επιμέρους μερών του (Van de Walle, 2005). Γίνεται σαφές λοιπόν ότι οι μαθητές μας αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ανάπτυξη της έννοιας του εμβαδού και στη υιοθέτηση μιας αποτελεσματικής στρατηγικής υπολογισμού του εμβαδού μη οικείων γεωμετρικών σχημάτων (Wilson & Rowland, 1993).

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση στην οποία μας οδηγεί η ανάλυση του δείγματος είναι η μεγάλη έλλειψη συμβόλων των μονάδων μέτρησης επιφάνειας σε όλα ανεξαιρέτως τα προβλήματα του τεστ (τ. μ., τ.εκ.) . Οι μαθητές χρησιμοποίησαν συνήθως ή τα σύμβολα του μήκους (μ., εκ.), ή και καθόλου. Είναι φανερό ότι προτιμούν να μη βάζουν καθόλου τετραγωνικές μονάδες μέτρησης σαν να μη νιώθουν σίγουροι για το τι να γράψουν. Γεγονός που συμφωνεί και με έρευνες που έχουν γίνει κατά καιρούς και υποστηρίζουν ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να καταγράψουν τις τετραγωνικές μονάδες. Για παράδειγμα 4 μέτρα * 5 μέτρα = 20 μέτρα και όχι 20 τετραγωνικά μέτρα. Το παιδί ενώ γνωρίζει πώς να προσθέτει μετρήσεις του μήκους και το αποτέλεσμα είναι πάλι μέτρηση του μήκους, τώρα έχει να πολλαπλασιάσει δύο μετρήσεις του ίδιου τύπου για να βρει μια άλλη μέτρηση ενός άλλου διαφορετικού τύπου (Jaquet, 2000). Οι μαθητές προτιμούν τις γνωστές, τις συμβατικές μονάδες μέτρησης και όχι κάτι άλλο στην προσπάθεια κατάκτησης της έννοιας της επιφάνειας (Maranhaa & Campos, 2000).

Από την άλλη πλευρά δεν μπορώ να καταθέσω με σιγουριά ότι οι 7 μαθητές που δεν ασχολήθηκαν με το $1^{ο}$ και το $5^{ο}$ πρόβλημα το έκαναν επειδή είχαν δυσκολία να συγκρίνουν ισοεμβαδικά σχήματα. Αντίθετα, σίγουρα δεν έδειξε κάτι τέτοιο το μεγάλο ποσοστό επιτυχίας των μαθητών που ασχολήθηκαν με το $1^{ο}$ πρόβλημα. Άρα δεν μπορώ να ισχυριστώ ότι μέσα από το συγκεκριμένο δείγμα επιβεβαιώνονται οι έρευνες που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές μας συχνά δυσκολεύονται να συγκρίνουν ισοεμβαδικά, και όχι μόνο, σχήματα και ότι η άμεση σύγκριση δύο εμβαδών φαντάζει πολύ δύσκολη, εκτός από την περίπτωση όπου τα υπό σύγκριση σχήματα έχουν κάποια κοινή διάσταση ή χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με το ίδιο πλάτος μπορούν να συγκριθούν άμεσα ενώ δεν καταλαβαίνουν ότι η αναπροσαρμογή των εμβαδών σε διαφορετικά σχήματα δεν επηρεάζει την ποσότητα του εμβαδού (Van de Walle, 2007, Piaget, et al, 1981). Από την ανάλυση του συγκεκριμένου δείγματος δεν προέκυψε κάτι τέτοιο.

Συμπερασματικά, απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν πιο πάνω έχουμε να καταθέσουμε ότι:

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή για το εάν σύγχρονοι απόφοιτοι της Β΄ Γυμνασίου έχουν κατανοήσει αρκετά την έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του, ώστε να μπορούν να λύσουν ιστορικά γεωμετρικά προβλήματα που έχουν σχέση με το εμβαδόν τα συμπέρασμα δεν είναι και πολύ ενθαρρυντικό. Μόνο 3 από τους 29 μαθητές του δείγματος ολοκλήρωσαν σωστά και τα 6 προβλήματα (ποσοστό 10,34%). Αν αναλογιστούμε ότι ο συνολικός αριθμός των μαθητών ήταν 35 αλλά κάποιοι εξαρχής δε συμμετείχαν στη διαδικασία, αντιλαμβανόμαστε ότι τα πράγματα είναι ακόμα χειρότερα. Από την ανάλυση του δείγματος είναι διάχυτη η εντύπωση ότι οι μαθητές ασκούνται περισσότερο από την εκπαιδευτική διαδικασία στην εφαρμογή τυποποιημένων διαδικασιών παρά στην κατάκτηση και εμπέδωση ουσιαστικών γεωμετρικών εννοιών όπως του εμβαδού.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή για το εάν είναι ικανοί οι μαθητές να εφαρμόζουν βασικά γεωμετρικά θεωρήματα και υπολογιστικούς αλγορίθμους εμβαδών εδώ νομίζω ότι τα συμπεράσματα από την ανάλυση του δείγματος είναι πιο ενθαρρυντικά. Τα προβλήματα που απαιτούσαν απλή εφαρμογή τύπων (1^o και 2^o) ήταν και τα πιο δημοφιλή (ποσοστό συμμετοχής 75,86% και 86,20% αντίστοιχα) ενώ και στα υπόλοιπα προβλήματα οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν δεν ήταν στην πλειοψηφία τους στην εφαρμογή αλγεβρικών τύπων υπολογισμού του εμβαδού. Σε αυτό βέβαια βοήθησε και το γεγονός ότι στην αρχή του τεστ τους παρείχαμε τους αναγκαίους τύπους υπολογισμού, αφού στόχος μας δεν ήταν να δούμε αν θυμούνται τους τύπους αλλά αν μπορούν να τους εφαρμόσουν. Πολύ καλή ήταν και η ανταπόκριση των μαθητών γενικά στην εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στα προβλήματα που αυτό χρειαζόταν. Τουλάχιστον αυτό έδειξαν οι μαθητές που ασχολήθηκαν με αυτά. Αντίθετα λιγότερο καλή είναι η εντύπωση που μας μένει σχετικά με τις πράξεις με τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών.

Όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή για το ποιες είναι οι σημαντικότερες δυσκολίες που εμφανίζουν μαθητές, απόφοιτοι της Β΄ Γυμνασίου, στην επίλυση προβλημάτων σχετικά με το εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων, μετά την ανάλυση του δείγματος και ιδιαίτερα του 4^{ου}, 5^{ου} και 6^{ου} προβλήματος, στην πρώτη θέση θα τοποθετούσαμε αναμφίβολα την αδυναμία των μαθητών μας να «ξεκλειδώσουν» σχήματα και να τα χωρίσουν σε επιμέρους πιο γνωστά γεωμετρικά σχήματα. Δηλαδή να αντιληφθούν το εμβαδόν ενός σχήματος ως το άθροισμα των επιμέρους μερών του. Ένα άλλο αξιόλογο συμπέρασμα είναι και η εμφανής έλλειψη αυτοπεποίθησης και στη χρήση των τετραγωνικών μονάδων μέτρησης του εμβαδού. Σε όλα τα προβλήματα ακόμα και οι μαθητές που τα ολοκλήρωσαν σωστά οι περισσότεροι αποφεύγουν να γράψουν μονάδες μέτρησης και όπου το κάνουν προτιμούν συχνά τις μονάδες μέτρησης του μήκους. Τέλος η ανάλυση του δείγματος ανέδειξε και τη σημασία του σχήματος για το γεωμετρικό πρόβλημα. Οι μαθητές μας προτίμησαν να ασχοληθούν με τα προβλήματα που είχαν τα πιο απλά σχήματα ενώ εμφανώς απέφυγαν τα πιο σύνθετα προβλήματα με τα περισσότερα σχήματα.

Επίλογος

Ακολουθώντας τη Γεωμετρία σε όλη της την ιστορική πορεία από τα πρώτα χρόνια και τους πρώτους πολιτισμούς, μου δόθηκε το έναυσμα να επιχειρήσω μια αποτίμηση της χρησιμότητας της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία του ίδιου του μαθήματος αλλά και ειδικότερα της έννοιας του εμβαδού, όπως αυτή παρουσιάζεται μέσα από τις δυσκολίες που σύμφωνα με έρευνες παρουσιάζουν οι μαθητές στην προσπάθεια κατανόησης του και όπως αυτή προτείνεται προς διδασκαλία μέσα στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού και των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου. Επιχειρήθηκε επίσης, μέσω του δείγματος, να κάνω μια προσπάθεια σύνδεσης μεταξύ των παιδιών του μακρινού παρελθόντος και του παρόντος. Πραγματικά ήταν ένα εντυπωσιακό ταξίδι με πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Οι σύγχρονες εκπαιδευτικές ανάγκες απαιτούν πια οι δάσκαλοι όταν διδάσκουν τα Μαθηματικά να έχουν ως κύριο μέλημα τη μαθηματική σκέψη των παιδιών και όχι την κάλυψη της σχολικής ύλης αποβάλλοντας νοοτροπίες του παρελθόντος που εξοβελίζουν το μάθημα από την καθημερινή πραγματικότητα. Αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε, όπως αναφέρει και η Κολέζα (2000), ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών χωρίς να παίρνουμε υπόψη το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης των μικρών μαθητών μας. Τα παιδιά στα σχολεία μας, συχνά, δυσκολεύονται να καταλάβουν, να εμπεδώσουν αυτές τις γεωμετρικές έννοιες και να εκτελέσουν γεωμετρικούς υπολογισμούς. Ο κάθε εκπαιδευτικός ας προσπαθήσει να δημιουργεί τις κατάλληλες συνθήκες ώστε ο μαθητής να κατασκευάζει τη γνώση μέσα από τις δικές του σύγχρονες βιωματικές γνωστικές λειτουργίες.

Αυτό ήταν και το μεγάλο μου στοίχημα κάνοντας αυτήν την έρευνα. Προσπάθησα να προσαρμόσω μεγάλα ιστορικά προβλήματα του μακρινού παρελθόντος στη σημερινή σχολική καθημερινότητα ώστε να βοηθήσω τα παιδιά να τα κατανοήσουν, να τα κατακτήσουν και να τα λύσουν. Ξεκίνησα ένα μακρινό ταξίδι από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Η πορεία που ακολουθήθηκε στην παραπάνω έρευνα πιστεύω καταδεικνύει, για μία ακόμη φορά, το βαθμό σημαντικότητας της κατανόησης της έννοιας του εμβαδού για τους μαθητές μας. Μελετώντας το αρχειακό υλικό πολλές φορές εντυπωσιάστηκα από την εφευρετικότητα και τα αξιοθαύμαστα ευρήματα των αρχαίων γεωμετρών. Στόχευα, και θέλω να πιστεύω ότι το κατάφερα, να δείξω στους σύγχρονους μαθητές ένα μικρό μέρος αυτών των απίστευτων ευρημάτων που έχουν θεμελιώσει τη σύγχρονη Γεωμετρία ή τουλάχιστον βοήθησαν πολύ σε αυτό. Ήθελα να μοιραστώ μαζί τους αυτόν τον θαυμασμό, που η αλήθεια είναι άθελα μου, ένιωσα αρκετές φορές στη διάρκεια της έρευνας μου. Βασικός στόχος μου όμως ήταν επίσης και η εύρεση και επισήμανση τυχόν παρανοήσεων – δυσκολιών που θα εμφανίσουν οι μαθητές μέσα από την ανάλυση του δείγματος. Η επιλογή των προβλημάτων έγινε, όπως προείπα, με γνώμονα την όσο πιο απλή και κατανοητή εκφώνηση, το εύρος των γεωμετρικών σχημάτων και τη μεγαλύτερη δυνατότητα επίλυσης από μαθητές της Β΄ Γυμνασίου με βάση την ύλη που έχουν διδαχθεί. Αρχίζοντας με πιο απλά προβλήματα και σχήματα συνέχισα με προβλήματα και σχήματα που είναι περισσότερο σύνθετα. Με την όλη διαδικασία πιστεύω ανέδειξα για μία ακόμη φορά τη δυσκολία ή και απροθυμία των μαθητών να ασχοληθούν με τέτοιου είδους σύνθετα προβλήματα και σχήματα, την εμφανή προτίμησή τους στην εφαρμογή τυποποιημένων διαδικασιών παρά σε προβληματικές καταστάσεις που απαιτούν την ανάγκη συνδυασμού γεωμετρικής αλλά και αριθμητικής υπολογιστικής ικανότητας και τέλος επιβεβαιώθηκε μέσα από την εργασία αυτή, εντύπωση που είχα και από την προσωπική μου εμπειρία ως δάσκαλος, η δυσκολία των παιδιών στη χρήση των σωστών συμβόλων για τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού.

Περιορισμοί της έρευνας

Τελειώνοντας θα ήθελα να επισημάνω ότι αυτή η έρευνα δεν ήταν κάτι εύκολο να πραγματοποιηθεί. Όπως σε κάθε προσπάθεια εμφανίζονται προσχώματα έτσι και στη δική μου έρευνα εμφανίστηκαν κάποιες αξιοσημείωτες δυσκολίες που δεν περίμενα ότι θα συναντήσω. Μεγάλο εμπόδιο υπήρξε η δυσπιστία των εκπαιδευτικών να δώσουν στην τάξη κάτι το οποίο δε γνωρίζουν ή δεν το έχουν διδάξει οι ίδιοι. Δυστυχώς αυτή η προσκόλληση που πολλές φορές εμφανίζεται στα ελληνικά σχολεία στη διδακτέα ύλη και στο καθημερινό πρόγραμμα καταντάει ως και αποκαρδιωτική. Άλλο μεγάλο εμπόδιο υπήρξε η έλλειψη ευελιξίας. Οποιοσδήποτε ερευνητής συχνά αντιμετωπίζεται με δυσπιστία και ως ένα «πρόβλημα» που ίσως καλύτερα θα ήταν να αποφευχθεί για να μη διαταραχθεί η «εύρυθμη» λειτουργία του σχολείου. Τέλος μεγάλη μου αγωνία ήταν αν οι μαθητές, που εγώ δε γνώριζα προσωπικά, θα κάνουν τελικά το τεστ ή θα αδιαφορήσουν. Ευτυχώς για μένα και για την έρευνα μου τελικά βρέθηκαν εκπαιδευτικοί και μαθητές που θέλησαν να συνεργαστούν και να βοηθήσουν.

Πρόταση για μελλοντική έρευνα

Παρόλο τη μεγάλη μου προσπάθεια, ίσως το δείγμα της έρευνας να μην ήταν αρκετά μεγάλο. Αυτό θα ήταν μια ωραία ιδέα για μια μελλοντική έρευνα. Μια έρευνα με μεγαλύτερο δείγμα από περισσότερα Γυμνάσια. Περισσότερα Γυμνάσια, όχι μόνο σε επίπεδο νομού αλλά και σε επίπεδο περιφέρειας Δυτικής Μακεδονίας. Σχολεία δηλαδή διαφορετικών Περιφερειακών Ενοτήτων με το ίδιο τεστ, ή και με ένα τεστ με μια διαφορετική επιλογή ιστορικών προβλημάτων ανάλογα τα ερευνητικά ερωτήματα του μελλοντικού ερευνητή. Έτσι και περισσότεροι μαθητές διαφορετικών περιοχών θα μοιραζόταν αυτό το υπέροχο ταξίδι στην αρχαιότητα με όλα τα θετικά που επισημάναμε πιο πάνω, αλλά και τα συμπεράσματα ίσως θα ήταν πιο πλούσια με περισσότερες προτεινόμενες λύσεις και περισσότερες δυσκολίες και λάθη να αναδεικνύονται.

.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.-Δ., Σαΐτης, Α. (2015). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.-Δ., Σαΐτης, Α. (2015). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού. Τετράδιο Εργασιών.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ., (2013). *Μαθηματικά Α Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. (2013). *Μαθηματικά Β Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. Τετράδιο Εργασιών.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Γεωργίου, Β., (1988). Υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού. Ευκλείδης Γ., Τεύχος 19, 78 – 83. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ) Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης: http://www.pi-schools.gr/programs/depps/ (ανακτήθηκε στις 3/7/2019).

Ζάχαρος, Κ. και Χασάπης, Δ. (2000). Η συνεισφορά της ιστορικής προοπτικής στη διδασκαλία της μέτρησης επιφανειών σε μαθητές/μαθήτριες της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στο Α. Γαγάτσης και Γρ. Μακρίδης (Επ.), *Πρακτικά Β Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Τόμος Β, 449-459, Λευκωσία, Κύπρος.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., Σοφού, Β. (2015). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., Σοφού, Β. (2015). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού. Τετράδιο Εργασιών.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2015). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2015). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. Τετράδιο Εργασιών.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Εκδ.Leader Books, Αθήνα

Κορδάκη, Μ. (1999). Δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον ενός μικρόκοσμου και ο ρόλος τους στους μετασχηματισμούς που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές. *Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή "Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση"* (σ. 221-228). Ρέθυμνο.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου*, Αθήνα: Πατάκης.

Λεμονίδης, Χ. (2015). Παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση του ισχύοντος και δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας. Προσκεκλημένη ομιλία στο 13ο *Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Χώρος και Γεωμετρία στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση*. 8- 9 Μαΐου στη Θεσ/νίκη.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., Πνευματικός, Δ. (2015). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., Πνευματικός, Δ. (2015). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Τετράδιο Εργασιών.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α. (2015). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., Σπανακά, Α. (2015). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Τετράδιο Εργασιών.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Σδρόλιας, Κ. (2007). Εν τη παλάμη. Διερευνώντας το εμβαδόν και την περίμετρο στο Δημοτικό Σχολείο. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επ), *Πρακτικά του 2ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών των Μαθηματικών* (σελ.390-400). Αλεξανδρούπολη : Τυπωθήτω. Δαρδανός.

Τζεκάκη, Μ. (2002). Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση, ένα πρόβλημα αναζητά λύση. *Themes in Education*, 3 (1): 22-34.

Van De Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο : Μια Εξελικτική Διδασκαλία* (Επιστ. Επιμ. Τ. Τριανταφυλλίδης). Αθήνα : Τυπωθήτω - Δαρδανός.

Van De Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο : Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία*. Θεσσαλονίκη : Επίκεντρο.

Φιλίππου, Γ. (1999). *Διαισθητικά μοντέλα στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού.* Πρακτικά του 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Χίος 369-382.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ., (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα. Δαρδανός.

Ξενόγλωσση

Baturo, A. and Nason, R. (1996). Student teachers subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.

Bunt, N.H., Jones P.S. & Bedient, D.J. (1981). *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, (μτφρ. Φερεντίνου- Νικολακοπούλου Α.). Αθήνα: Πνευματικός.

Cavanagh, M. (2008). Area measurement in Year 7. *Reflections*, 33(1), 55-58.

Clawson, C.C. (2008). *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών. Η εξερεύνηση της εντυπωσιακής ιστορίας των αριθμών*. Αθήνα: Κέδρος.

Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-k to grade 2 mathematics, in engaging young children in mathematics: standards for pre-school and kindergarten mathematics education. In H. Clements & J. Sarama & A.-M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fasanelli, F. (2000). Chapter 1, The political context. [eds.] John Fauvel and Jan van Maanen. History in Mathematics Education: The ICMI Study. Dordrecht : Kluwer, pp. 1-38.

Hart, K., & Sinkinson, A. (1988). Forging the link between practical and formal Mathematics. In A.Borbas (Ed), *Proceedings of the 12th international conference for the Psychology of Mathematics Education (2,* 380-384). Veszprem, Hungary: OOK.

Jaquet, F. (2000). "Le Conflit area-perimetre", Part 2, *L 'Educazione Matematica*, 3, 126-143.

Kidman, G., and Cooper, T.J., (1997). Area integration rules for grades 4, 6, and 8 students. In Pehkonen, E., (ed). *Proceeding in the 21st international Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3 pp. 136-143). Lahti Finland : PME.

Maranhaa, C. & Campos, T. (2000). Length measurement: Conventional units articulated with arbitrary ones. In Nakarahara, T. & Koyama, M. (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, Hiroshima-Japan, 255-262.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A., (1981). *The child's conception of geometry*. New York. Norton and Company.

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*, Routledge & Kegan Paul, London.

Reynolds, A., & Wheatley, G. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 564-581.

Rectanus, C. (1997). *Math by all means: Area and perimeter, grades 5-6*, CA: Math Solutions Publication, Sausalito.

Rickard, A. (2005). Evolution of a Teacher's Problem Solving Instruction: A Case Study of Aligning Teaching Practice with Reform in Middle School Mathematics. Vol. 29,1.

Russ, S., et al. (1991). The experience of history in mathematics education. [ed.] Special Issue on History in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics. Vol. 11, 2, pp. 7-16.

Tzanakis, C. and Arcavi, A. (2000). Chapter 7, Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. [eds.] John Fauvel and Jan van Maanen. History in mathematics education: the ICMI study. Dordrecht : Kluwer, pp. 201-240.

Wilson, P. S. & Rowland, R. (1993). Teaching Measurement. In R. J. Jensen (ed.),*Research Ideas for the Classroom: Early Childhood Mathematics*, 171-194.

Παράρτημα

Το λάθος του μαθητή στο 1ο πρόβλημα είναι ότι δεν υπολόγισε σωστά τη δύναμη r^2. Θεώρησε $10^2=10$ και δεν ολοκλήρωσε τη διαίρεση στον τύπο εμβαδού του τριγώνου.

Στο 2ο πρόβλημα, οι 2 μαθητές από τους 3 που το έκαναν λάθος εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα προσπάθησαν να βρουν την υποτείνουσα του ορθογωνίου (αποκομμένη γη) και όχι το εμβαδόν του. Ο άλλος μαθητής για να βρει το εμβαδόν πήρε όλες τις διαστάσεις του σχήματος και έκανε αριθμητική παράσταση Ε= 20 **:** 4*6.

Οι 4 από τους 7 μαθητές που έλυσαν λάθος το 3ο πρόβλημα θεώρησαν το σχήμα που σχηματίζεται στο εσωτερικό του τραπεζίου ως τετράγωνο και όχι ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που είναι, έτσι υπολόγισαν το ύψος του ισοσκελούς τραπεζίου όσο και τη μικρή βάση του τραπεζίου και έτσι οδηγήθηκαν σε λάθος αποτέλεσμα. Από του υπόλοιπους 3, οι 2 έκαναν λάθος υπολογισμούς στην εφαρμογή των τύπων ενώ ο ένας από αυτούς τους τρεις χρησιμοποίησε για ύψος του τραπεζίου την πλάγια πλευρά του.

Ο μαθητής που έκανε λάθος το 4ο πρόβλημα μάλλον μπερδεύτηκε από την εκφώνηση και δεν κατάλαβε το ζητούμενο του προβλήματος γιατί εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα, στο ορθογώνιο τρίγωνο βρήκε την υποτείνουσα ενώ στα άλλα δύο πάλι με τη χρήση πυθαγόρειου θεωρήματος βρήκε το μισό της βάσης του αρχικού τριγώνου.

Οι 2 μαθητές που έκαναν λάθος το 6ο πρόβλημα είχαν το ίδιο λάθος. Δεν εφάρμοσαν σωστά το πυθαγόρειο θεώρημα και βρήκαν λάθος το μήκος της διαγωνίου του μικρού τετραγώνου και κατά συνέπεια υπολόγισαν λάθος το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου. $1^2 + 1^2 = α^2$, άρα $α = \sqrt{2}$. Θεώρησαν όμως μήκος διαγωνίου ως 2 και όχι $\sqrt{2}$.