ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΔΠΜΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

της φοιτήτριας Λιόλιου Αναστασίας (ΑΕΜ: 809)

Τίτλος

«Η σχέση της υπολογιστικής εκτίμησης με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος»

«The relationship between computational estimation and mathematical problem solving»

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: **Δεσλή Δέσποινα,**

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε.,

Α.Π.Θ

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2020

ΦΥΛΛΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

1. Επόπτρια: Δέσποινα Δεσλή, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Βαθμός: ________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής

Βαθμός: ________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Χαρά Σταθοπούλου, Καθηγήτρια

Βαθμός: ________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία

Γενικός Βαθμός: __________________________

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την καθηγήτριά μου, κα. Δέσποινα Δεσλή, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την πολύτιμη βοήθεια που μου πρόσφερε με τις συμβουλές και τις γνώσεις της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες του μεταπτυχιακού προγράμματος ¨Διδακτική των Μαθηματικών¨ για όλες τις γνώσεις και τις εμπειρίες που πρόσφεραν στα μαθήματά τους.

Τέλος, ένα ειλικρινές ευχαριστώ στην οικογένειά μου για τη στήριξή της, κάνοντας πάντα τη μέγιστη προσπάθεια για τη μόρφωσή μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός να εξετάσει την ικανότητα παιδιών και ενηλίκων στην υπολογιστική εκτίμηση και την επίλυση προβλήματος και αφετέρου να ελέγξει την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στις δύο ικανότητες. Για τον σκοπό, αυτό πραγματοποιήθηκε έρευνα σε 37 μαθητές/-τριες της Στ΄ τάξης και σε 35 ενήλικες. Σχεδιάστηκαν δύο έργα, ένα Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης κι ένα Έργο Επίλυσης Προβλήματος. Το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης απαιτούσε από τους συμμετέχοντες να προσεγγίσουν το αποτέλεσμα οχτώ πράξεων, ενώ στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος ζητούνταν η επίλυση οχτώ αριθμητικών προβλημάτων, προερχόμενων από τέσσερις διαφορετικές μαθηματικές περιοχές. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων βρέθηκε ότι οι ενήλικες εμφάνισαν περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις από τα παιδιά με μεγάλη στήριξη στις στρατηγικές της στρογγυλοποίησης και του αλγόριθμου. Ηλικιακές διαφορές βρέθηκαν και στο Έργο της Επίλυσης Προβλήματος με τα προβλήματα Γεωμετρίας και αριθμητικών πράξεων να είναι τα πιο δύσκολα για τα παιδιά και τους ενήλικες, αντίστοιχα. Τέλος, υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος: οι συμμετέχοντες που παρουσίασαν μεγάλο ποσοστό επιτυχών εκτιμήσεων έτειναν να έχουν υψηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων στην επίλυση προβλήματος. Τα αποτελέσματα αυτά συζητώνται ως προς τις εκπαιδευτικές τους προεκτάσεις και τη θέση της υπολογιστικής εκτίμησης και της επίλυσης προβλήματος στη μάθηση των μαθηματικών.

ABSTRACT

The purpose of the present study is twofold: to examine computational estimation and problem solving abilities in children adults as well as to detect the relationship between these two. For this purpose, a study was conducted in which 37 Year 6 children and 35 adults were presented with two tasks, one for computational estimation and the other for problem solving. More specifically, in the Computational Estimation Task, participants were asked to estimate the computational result in eight arithmetic operations. In the Problem Solving Task, participants were given eight problems to solve, all coming from four different areas of mathematics. The analysis of the results showed that adult participants accomplished more successful ratings compared to the children, mostly with the use of rounding and algorithm strategies in both age groups. Age differences were also found in Problem Solving Task with geometry and arithmetic problems being the most difficult for children and adults, respectively. Last, a high positive correlation was revealed between estimation computational ability and problem solving ability: participants who had great success in computational estimation tented to indicate high success rates in problem solving. Educational implications are further discussed in terms of the role of computational estimation and problem solving mathematics learning.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι νοεροί και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί αποτελούν τα τελευταία χρόνια πεδίο έντονου ερευνητικού ενδιαφέροντος τόσο σε διεθνές επίπεδο όσο και στην Ελλάδα. Το ενδιαφέρον αυτό εξηγείται αφενός από το γεγονός ότι οι νοεροί υπολογισμοί συχνά χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση καθημερινών προβλημάτων και αφετέρου από τον σπουδαίο ρόλο που διαδραματίζουν στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Οι Wandt και Brown (1957) διατυπώνουν έναν ορισμό για τους νοερούς υπολογισμούς σύμφωνα με τον οποίο οι νοεροί υπολογισμοί αναφέρονται στη διαδικασία υπολογισμού ενός αριθμητικού αποτελέσματος με ακρίβεια, χωρίς τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μέσου υπολογισμού ή γραφής. Διάφοροι ερευνητές (Wandt & Brow, 1957. Λυγούρας, 2012. Λεμονίδης, 2013) τονίζουν πως οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη συχνότητα από τα άλλα δύο εργαλεία (αριθμομηχανή και χαρτί-μολύβι) για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων.

Η σημαντικότητα των νοερών υπολογισμών γίνεται φανερή και από τη θέση που κατέχουν στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών καθώς, όπως υποστηρίζεται από τον Rey (1984, στο Varol & Farran, 2007), οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν προϋπόθεση για την ανάπτυξη των γραπτών αλγορίθμων. Παράλληλα, ο ίδιος υποστηρίζει πως οι νοεροί υπολογισμοί παίζουν καταλυτικό ρόλο στην καλύτερη κατανόηση της δομής και των ιδιοτήτων των αριθμών, ωθούν το άτομο να σκέφτεται δημιουργικά για την εύρεση στρατηγικών υπολογισμού, βοηθούν σημαντικά στην ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος και, τέλος, θεωρούνται σημαντικοί για την ανάπτυξη των ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης.

Συχνά παρατηρείται σύγχυση των νοερών υπολογισμών με τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Τη διαφορά αυτών των δύο διαφορετικών ειδών υπολογισμού τονίζουν οι Lemaire και Lecacheur (2002, στο Δεσλή & Ανεστάκης, 2014): ότι οι νοεροί υπολογισμοί καταλήγουν σε ακριβές αποτέλεσμα, ενώ οι κατ΄ εκτίμηση υπολογισμοί προσεγγίζουν το αποτέλεσμα του υπολογισμού. Κατά την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων, απαιτείται ένας νοερός υπολογισμός όταν ο στόχος σε ένα νοερό αριθμητικό πρόβλημα είναι να δοθεί μια ακριβής απάντηση. Αντιθέτως, οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί χρησιμοποιούνται όταν στόχος είναι να δοθεί μια προσεγγιστική απάντηση ή αν οι αριθμοί έχουν μεγάλο μέγεθος και δεν είναι εύκολα διαχειρίσιμοι. Όσον αφορά στους κατ'εκτίμηση υπολογισμούς, ένα άτομο για να είναι ικανό να εκτιμήσει αποτελεσματικά και γρήγορα, πρέπει να κατανοήσει πρώτα τις βασικές μαθηματικές έννοιες και να μάθει τους βασικούς συνδυασμούς των τεσσάρων πράξεων (Suydam, 1984, στο Φιλίππου & Χρίστου, 2004). Ο Benton (1986) συμφωνεί με την άποψη αυτή και συμπληρώνει ότι η ικανότητα για εκτίμηση της απάντησης είναι μια μακρά διαδικασία που απαιτεί αρκετό χρόνο και η διδασκαλία της πρέπει να αρχίζει από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

Κάποιοι ερευνητές έχουν επιχειρήσει να εξηγήσουν αν υπάρχει σχέση μεταξύ των νοερών υπολογισμών και της μαθηματικής σκέψης και να προσδιορίσουν τη σχέση αυτή. Για παράδειγμα, οι Gurbuz και Erdem (2016) υποστηρίζουν πως οι νοεροί υπολογισμοί και η μαθηματική σκέψη θεωρούνται αλληλένδετες και υψηλού επιπέδου νοερές διαδικασίες. Σε έρευνά τους (Gurbuz & Erdem, 2016) σε μαθητές και μαθήτριες έντεκα έως δώδεκα ετών βρήκαν πως υπάρχει σχέση μεταξύ των νοερών υπολογισμών και της μαθηματικής σκέψης. Χρησιμοποιώντας δύο τεστ, ένα 'μαθηματικής σκέψης' κι ένα 'νοερών υπολογιμών', έλεγξαν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της επιτυχίας σε καθένα από αυτά. Τα ευρήματα έδειξαν πως όσοι συμμετέχοντες κατάφεραν να επιλύσουν τις δοκιμασίες των νοερών υπολογισμών, παρουσίασαν και υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες της μαθηματικής σκέψης.

Οι Nimbrat και Osana (2018) επιχειρούν να αναδείξουν τη σχέση των νοερών Μαθηματικών με τη σχεσιακή σκέψη (relational thinking), την κατανόηση δηλαδή των ισοδυναμιών και της σχέσης των αριθμών μεταξύ τους. Στην έρευνά τους, οι Nimbrat και Osana (2018) πραγματοποίησαν διδακτική παρέμβαση σε παιδιά ηλικίας δώδεκα και δεκατριών ετών σχετικά με τα νοερά Μαθηματικά και βρήκαν ότι μετά το πέρας της παρέμβασης βελτιώθηκαν οι επιδώσεις τους. Τα ευρήματα οδήγησαν τους ερευνητές να συμπεράνουν πως υπάρχει σχέση μεταξύ των νοερών υπολογισμών και της σχεσιακής σκέψης (relational thinking). Δηλαδή, όσο τα παιδιά ασκούνταν στις ισοδυναμίες, τόσο οι επιδόσεις τους στην εκτέλεση νοερών υπολογισμών αυξάνονταν.

Παρατηρείται κενό στη βιβλιογραφία σχετικά με την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα εκτίμησης ενός αποτελέσματος και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος που κατέχει επίσης σημαντική θέση στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά και αποτελεί ένα πεδίο όπου είναι απαραίτητη η μαθηματική σκέψη. Όπως αναφέρει ο Polya (1971, στο Κολέζα, 2009), η επίλυση προβλήματος είναι μια περίπλοκη δραστηριότητα κατά την οποία ο λύτης χρησιμοποιεί την προηγούμενη εμπεειρία του. Αναφερόμενοι στην επίλυση προβλήματος οι Καραντζής και Τσαγγάρης (2003) υποστηρίζουν πως είναι μια πολυδιάστατη διαδικασία, στην οποία σημαντικό ρόλο παίζει τόσο η γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων, των πράξεων και των αλγορίθμων όσο και η κατανόηση της γλώσσας με την οποία εκφράζονται οι ποσοτικές σχέσεις σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Με δεδομένο ότι η μέχρι τώρα έρευνα επικεντρώνεται στην αναζήτηση της σχέσης ανάμεσα στους νοερούς υπολογισμούς και τη μαθηματική σκέψη, θα έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί και η σχέση ανάμεσα στους προσεγγιστικούς υπολογισμούς και την επίλυση προβλήματος. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της ικανότητας υπολογιστικής εκτίμησης και της ικανότητας για επίλυση προβλήματος. Το κύριο ερευνητικό ερώτημα αφορά στη σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο ικανότητες. Για να απαντηθεί αυτό το ερευνητικό ερώτημα πραγματοποιήθηκε έρευνα σε παιδιά Στ΄ τάξης του Δημοτικού και σε ενήλικες.

Επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα εργασία, εκτός από το κύριο ερευνητικό ερώτημα, θα επιχειρήσει να εξετάσει τα παρακάτω επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα.

- Ποιά είναι η επίδοση και οι στρατηγικές των παιδιών της Στ΄ τάξης και των ενηλίκων στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης; Αναμένεται ότι τα ευρήματα θα είναι παρόμοια με αυτά που προέκυψαν από την έρευνα των LeFevre, Greenham και Waheed (1993). Δηλαδή, οι ενήλικες θα έχουν καλύτερη επίδοση από τα παιδιά και πιο συχνά θα γίνεται χρήση της στρατηγικής της στρογγυλοποίησης.

- Ποιά είναι η επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης και των ενηλίκων στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος; Όπως στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης, αναμένεται να βρεθεί διαφοροποίηση και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος, με τους ενήλικες να παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις.
- Επηρεάζει την επίδοση στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης το είδος των αριθμών (φυσικοί, ρητοί); Με βάση την έρευνα του Dolma (2002), προσμένεται να βρεθεί πως οι ρητοί αριθμοί θα επηρεάσουν αρνητικά την επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης.
- Επηρεάζει την επίδοση στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης το είδος της πράξης (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση); Όπως είχε αναδειχθεί από την έρευνα της Elisha (2013), μεγάλοι μαθητές παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία στην εκτέλεση υπολογιστικών εκτιμήσεων όταν αυτές αφορούν πρόσθεση και αφαίρεση. Παρόμοια ευρήματα αναμένεται να βρεθούν και στην παρούσαν μελέτη.
- Το μαθηματικό πεδίο, από το οποίο προέρχονται τα προβλήματα, επηρεάζει την επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος; Διερευνητικά προσμένεται να βρεθεί πως η επίδοση των συμμετεχόντων θα επηρεαστεί από το μαθηματικό πεδίο από όπου προέρχονται τα προβλήματα.

Όσον αφορά το κύριο ερευνητικό ερώτημα, με βάση την έρευνα των Gurbuz και Erdem (2016) όπου βρέθηκε ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στους νοερούς υπολογισμούς και στη μαθηματική σκέψη, αναμένεται να βρεθεί παρόμοια ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης και της επίλυσης προβλήματος.

Για τον σκοπό αυτό θα πραγματοποιηθεί έρευνα σε μαθητές και μαθήτριες Στ΄ τάξης του Δημοτικού και σε ενήλικες.

Δομή της παρούσας εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο, το κεφάλαιο της βιβλιογραφικής επισκόπισης, αποσαφηνίζονται οι βασικές έννοιες και παρουσιάζονται αποτελέσματα άλλων ερευνών σχετικά με τους νοερούς και τους κατ’ εκτίμηση υπολογισμούς και την επίλυση προβλήματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται όλα τα στοιχεία που αφορούν τους συμμετέχοντες και περιγράφονται το εργαλείο της έρευνας καθώς και η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται τα αποτελέσματα της έρευνας από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε.

Τα συμπεράσματα της έρευνας παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο όπου γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Το πρώτο κεφάλαιο επιχειρεί να παρουσιάσει τη βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς, τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Το παρόν κεφάλαιο απαρτίζεται από δύο (2) μέρη. Στο πρώτο μέρος περιγράφεται η αίσθηση του αριθμού, δίνονται οι ορισμοί των νοερών και των κατ΄εκτίμηση υπολογισμών και περιγράφονται τα είδη των εκτιμήσεων. Στο δεύτερο μέρος γίνεται προσπάθεια περιγραφής της έννοιας του προβλήματος και της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και αναφέρονται κάποιες από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι λύτες κατά τη διαδικασία της επίλυσης.

Α. Νοεροί υπολογισμοί και κατ' εκτίμηση υπολογισμοί

Α.1. Αίσθηση του αριθμού

Ποικίλοι είναι οι ορισμοί που δίνουν οι ερευνητές διεθνώς στην έννοια της αίσθησης αριθμού. Σύμφωνα με τους Reys, Reys, Emanuelsson, Johansson, McIntosh και Yang (1999), όταν ένα άτομο έχει αίσθηση αριθμού είναι ικανό να κατανοεί τους αριθμούς και τη λειτουργία των πράξεων. Οι ίδιοι συμπληρώνουν πως, όταν κάποιος έχει αίσθηση του αριθμού, είναι ικανός να χρησιμοποιεί την κατανόηση αυτή με ευέλικτους τρόπους για να αναπτύξει χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές για τη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων. Με τον ορισμό αυτό συμφωνούν οι Yang, Reys και Reys (2009), οι οποίοι τονίζουν την αξία της αίσθησης αριθμού σε καθημερινές καταστάσεις, αφού όταν ένα άτομο έχει αίσθηση αριθμού, χρησιμοποιεί την ικανότητα ανάπτυξης ευέλικτων στρατηγικών.

Η Maclellan (2001) αναφέρει ότι η αίσθηση αριθμού είναι ένα δίκτυο συνδεδεμένων αριθμητικών γνώσεων, τις οποίες κατέχει ένα άτομο. Επίσης, η ερευνήτρια τονίζει πως η αίσθηση αριθμού διευκολύνει τη χρήση στρατηγικών για ακριβή και προσεγγιστικό υπολογισμό. Ο Sowder (1992) παρομοιάζει την αίσθηση αριθμού με ένα καλά οργανωμένο εννοιολογικό δίκτυο που επιτρέπει σε κάποιον να κατανοεί τους αριθμούς, τις ιδιότητες των πράξεων και να επιλύει αριθμητικά προβλήματα με ευέλικτους και δημιουργικούς τρόπους.

Με πιο απλό τρόπο περιγράφεται η αίσθηση του αριθμού από το NCTM (1989, στο Sowder, 1992) όπου αναφέρεται ως μια διαίσθηση για τους αριθμούς η οποία προέρχεται από τις ποικίλες έννοιες του αριθμού. Επίσης, η Dowker (1992) περιγράφει την αίσθηση αριθμού ως την κατανόηση του νοήματος των αριθμών και των σχέσεων που αυτοί περιέχουν. Οι Reys και Yang (1998) προκειμένου να ορίσουν την αίσθηση αριθμού αναφέρονται στην τάση και την ικανότητα να χρησιμοποιούνται οι αριθμοί ως μέσο επικοινωνίας και ερμηνείας πληροφοριών. Επίσης, αναφέρθηκαν στα χαρακτηριστικά που είναι συνδεδεμένα με αυτή, τα οποία περιλαμβάνουν τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων των αριθμών, την αναγνώριση των σχετικών και των απόλυτων μεγεθών των αριθμών, την επιλογή και χρήση σημείων αναφοράς, την ανασύνθεση αριθμών, την κατανόηση των σχετικών αποτελεσμάτων των πράξεων και την ευέλικτη και κατάλληλη στρατηγική για την εκτέλεση νοερού και κατ' εκτίμηση υπολογισμού.

Α.1.1. Η αίσθηση αριθμού και οι αριθμητικές πράξεις

Η κατανόηση των τεσσάρων βασικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση) και ο τρόπος εφαρμογής τους είναι ένας από τους πιο σημαντικούς στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών (McIntosh et al., 1992). Όταν οι μαθητές και οι μαθήτριες έρχονται αντιμέτωποι με μια από τις πράξεις προσπαθούν να εφαρμόσουν τους αλγόριθμους που διδάσκονται στο σχολείο. Με τη μηχανική εφαρμογή των γραπτών αλγόριθμων δεν επιτυγχάνεται η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Reys, 1985. Reys & Yang, 1998) με αποτέλεσμα τα παιδιά που παρουσιάζουν μεγάλα ποσοστά επιτυχίας στην εκτέλεση γραπτών αλγορίθμων, πιθανόν, να μην αναπτύσσουν στο μέλλον αίσθηση του αριθμού (Mcintosh et al., 1992).

Επίσης, η ύπαρξη λαθών κατά την εκτέλεση γραπτών υπολογισμών, είτε αυτοί εκτελούνται κάθετα είτε οριζόντια, μπορεί να είναι αποτέλεσμα έλειψης της αίσθησης του αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, αν και στο δημοτικό σχολείο οι τέσσερις πράξεις εισάγονται με βάση κάποιες συγκεκριμένες και απαραίτητες δεξιότητες για την εκτέλεση των αλγορίθμων, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να λύσουν σωστά τις πράξεις (McIntosh et al., 1992). Για παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί παρατηρούν λάθη, όπως το 40-36=16 ή 26+38=514, τα οποία αναδεικνύουν τη μειωμένη αίσθηση του αριθμού. Οι Beishuizen και Anghileri (1998) τόνισαν πως, αν λαμβάνεται υπόψη μια πιο ολιστική άποψη των αριθμών, μπορούν να αποφευχθούν κοινά λάθη που εμφανίζονται, όταν εκτελούνται κάθετα οι πράξεις.

Α.2. Νοεροί υπολογισμοί

Στη διεθνή βιβλιογραφία συναντάμε την απόδοση του όρου 'νοερός υπολογισμός' με διάφορους τρόπους όπως: α) 'mental computation', κυρίως στις χώρες της Ωκεανίας και την Ιαπωνία β)'mental calculation' και γ) 'mental arithmetic' κυρίως σε Ευρωπαϊκές χώρες. Οι τρεις όροι απευθύνονται στον γενικό όρο 'νοερά μαθηματικά΄ (mental maths), που χρησιμοποείται για να εκφράσει την ενότητα των νοερών υπολογισμών στα Αναλυτικά Προγράμματα πολλών χωρών του κόσμου, τα οποία έχουν απώτερο σκοπό τη βελτίωση των αριθμητικών ικανοτήτων των μαθητών (Λυγούρας, 2012. Λεμονίδης, 2013).

Οι νοεροί υπολογισμοί έχουν απασχολήσει πολλούς ερευνητές και αρκετοί από αυτούς (π.χ. Wandt & Brown, 1957. Trafton, 1978. Reys, 1984. Sowder, 1988. Λεμονίδης, 2013, Kindrat & Osana, 2018) επιχείρησαν να δώσουν έναν σαφή ορισμό. Από τις πρώτες ερμηνείες που διατυπώθηκαν για τον υπό εξέταση όρο είναι αυτή των Wandt και Brown (1957, στο Λεμονίδης, 2013), οι οποίοι επισήμαναν πως ο νοερός υπολογισμός αναφέρεται στη διαδικασία υπολογισμού ενός αριθμητικού αποτελέσματος με ακρίβεια χωρίς τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μέσου υπολογισμού ή γραφής (Trafton, 1978, στο Λεμονίδης, 2013. Λυγούρας, 2012. Λεμονίδης, 2013). Σε μια παρόμοια προσπάθεια ορισμού των νοερών υπολογισμών, οι Kindrat και Osana (2018) χρησιμοποιούν τον όρο νοερά μαθηματικά. Οι ερευνητές υποστηρίζουν πως κάποιες φορές τα νοερά μαθηματικά αναφέρονται ως νοεροί υπολογισμοί και είναι η εκτέλεση υπολογισμών χωρίς τη χρήση επιπλέον εργαλείων αλλά μέσω μιας σειράς μετασχηματισμών, που ξεπερνά το στάδιο της καταμέτρησης ή της νοερής εκτέλεσης των βημάτων του τυπικού αλγορίθμου. Σύμφωνα με τους Λυγούρα (2012) και Λεμονίδη (2013), οι νοεροί υπολογισμοί, μάλιστα, χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη συχνότητα από τα άλλα δύο εργαλεία (αριθμομηχανή και χαρτί-μολύβι) για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Ακόμη, οι Reys, Reys, Nohda και Emori (1995) υπογράμμισαν πως οι νοεροί υπολογισμοί θεωρούνται χρήσιμοι και σημαντικοί στην καθημερινότητα και είναι, παράλληλα, ένα πολύτιμο εργαλείο για την παρακολούθηση αλλά και την ανάπτυξη υψηλότερων επιπέδων μαθηματικής σκέψης.

Η Anghileri (1999) και ο Threfall (2002, στο Λεμονίδης, 2013) στην προσπάθειά τους να προσδιορίσουν την έννοια των νοερών υπολογισμών αναφέρθηκαν στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για τη διεξαγωγή αποτελέσματος. Σύμφωνα με τους Carvalho και da Ponte (2013), η συστηματική ενασχόληση με τους νοερούς υπολογισμούς συμβάλλει στην ανάπτυξη στρατηγικών και κριτικής σκέψης. Οι Heirdsfield και Lamb (2005) τονίζουν ότι ο νοερός υπολογισμός βοηθά τα παιδιά να κατανοήσουν πώς «δουλεύουν» οι αριθμοί και να επινοήσουν στρατηγικές. Στο ίδιο πνεύμα κινούνται και οι Καραντζής και Τόλλου (2009), οι οποίοι υποστηρίζουν πως ο νοερός υπολογισμός πραγματοποιείται με συνειδητό τρόπο με τη χρήση, κάθε φορά, μιας στρατηγικής, με σκοπό τη γρήγορη επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Παρόμοια, οι Maclellan (2001), Sowder (1992) και Thompson (2010) υποστηρίζουν πως το υπόβαθρο των νοερών υπολογισμών βασίζεται σε δύο βασικά σημεία: 1) στην εύρεση μιας στρατηγικής που θα κάνει τον υπολογισμό πιο διαχειρίσιμο και 2) στην εκτέλεση του υπολογισμού με τη χρήση της εκάστοτε στρατηγικής που επιλέχθηκε. Η άποψη αυτή βρίσκει σύμφωνο και τον Λεμονίδη (2013), ο οποίος υποστηρίζει πως οι νοεροί υπολογισμοί αφορούν κυρίως τη χρήση στρατηγικών και όχι μόνο την ανάκληση αριθμητικών γεγονότων.

Ωστόσο, ο Λεμονίδης (2013) και η Anghileri (1999) δέχονται τη χρήση χαρτιού και μολυβιού σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ., καταγραφή κρατούμενων) για ‘σύντομες σημειώσεις’ οι οποίες, σύμφωνα με την Anghileri, υποστηρίζουν τη βραχύχρονη μνήμη. Ο Λεμονίδης (2013) αναφέρει πως οι φράσεις «χωρίς τη χρήση κανενός εξωτερικού μέσου» και «μόνο με το μυαλό» είναι πολύ περιοριστικές. Οι Harries και Spooner (2000, στο Maclellan, 2001) υποστηρίζουν πως, αν και οι νοεροί υπολογισμοί υλοποιούνται νοερά, χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, δε θα πρέπει να παραγνωρίζεται η σημασία της καταγραφής των μαθηματικών συμβόλων για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού.

Οι Heirdsfield και Lamb (2005) τόνισαν πως οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, ενώ συγχρόνως αποτελούν το μέσο που προάγει τη σκέψη και αναπτύσσει ικανότητες για υποθέσεις και γενικεύσεις. Ακόμη, οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη ικανοτήτων στην επίλυση προβλήματος (Δεσποτοπούλου, 2013) και αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη των ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης.

Ο Reys (1984, στο Varol & Farran, 2007) παραθέτει τους λόγους για τους οποίους θεωρεί ότι η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Ειδικότερα, αναφέρει πως οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν προϋπόθεση για την ανάπτυξη των γραπτών αλγορίθμων και πως οι πρώτοι συντελούν στην καλύτερη κατανόηση της δομής και των ιδιοτήτων των αριθμών, προωθούν την ανεξάρτητη και δημιουργική σκέψη και ενθαρρύνουν τα παιδιά να παράγουν πρωτότυπους τρόπους χειρισμού των αριθμών. Η συμπερίληψη των νοερών υπολογισμών στα Αναλυτικά Προγράμματα των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης συνιστάται από τους ερευνητές (Heirdsfield & Lamb, 2005), τόσο των Η.Π.Α. όσο και της Αυστραλίας και της Μεγάλης Βρετανίας. Κατά γενική ομολογία, οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν μια σημαντική μορφή υπολογισμού, την οποία πρέπει οι μαθητές και οι μαθήτριες να μάθουν (McIntosh, 2004).

Α.3. Νοεροί και κατ' εκτίμηση υπολογισμοί

Ο Reys (1984, στο Mclntoch, 2004) επισημαίνει πως υπάρχει σχέση μεταξύ των νοερών και των κατ' εκτίμηση υπολογισμών και αυτό συμβαίνει επειδή οι νοεροί υπολογισμοί διακρίνονται από δύο χαρακτηριστικά: 1) παράγουν ακριβείς απαντήσεις και 2) η διαδικασία παραγωγής αποτελέσματος γίνεται νοερά, χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως μολύβι και χαρτί. Καταρχάς, όπως αναφέρουν οι McIntosh et al. (1995), ο νοερός υπολογισμός είναι μια ικανότητα καθολικής αξίας, χρησιμοποιείται συχνά σε προβλήματα της καθημερινής ζωής και αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τον κατ' εκτίμηση υπολογισμό. Η Maclellan αναδεικνύει την ύπαρξη σύγχυσης της έννοιας των νοερών υπολογισμών με αυτή των κατ' εκτίμηση υπολογισμών υποστηρίζοντας πως στους νοερούς υπολογισμούς εκτιμάται το αριθμητικό αποτέλεσμα με ακρίβεια. Προκειμένου να διασαφηνίσει και να διαχωρίσει τα δύο είδη υπολογισμών, ο Sowder (1988, στο Λεμονίδης, 2013) υποστηρίζει ότι, όταν ο στόχος σε ένα νοερό αριθμητικό πρόβλημα είναι να δοθεί μια ακριβής απάντηση, τότε απαιτείται ένας νοερός υπολογισμός. Εάν, αντιθέτως, στόχος είναι να δοθεί μια προσεγγιστική απάντηση ή αν οι αριθμοί έχουν μεγάλο μέγεθος, τότε απαιτείται μια εκτίμηση (κατ' εκτίμηση υπολογισμός). Μια παρόμοια εκδοχή για το τι είναι η εκτίμηση είναι αυτή των Δαφέρμου, Κουλούρη και Μπασανιάννη (2007), οι οποίες υποστήριξαν πως εκτίμηση είναι η ευφυής πρόβλεψη για το μέγεθος μιας ποσότητας ή για το πλήθος των στοιχείων μιας συλλογής ή ενός συνόλου. Ακόμη, υποστήριξαν πως, όταν ενθαρρύνουμε τα παιδιά να κάνουν εκτιμήσεις τα ωθούμε να συνειδητοποιήσουν την αξία των εκτιμήσεων και δεν είναι πρωταρχικός στόχος να πάρουμε τη σωστή απάντηση.

Αρκετά είναι τα οφέλη της εκτίμησης, αφού στη καθημερινότητα είναι απαραίτητο κάποιος, τόσο στη μικρή ηλικία όσο και στην ενήλικη ζωή, να είναι ικανός να εκτελεί εκτιμήσεις, σχετικά με τον χρόνο, τη χωρητικότητα, την ποσότητα, το μήκος, χωρίς τη χρήση εξωτερικών εργαλείων (Desli & Giakoumi, 2017. Lemonidis & Kaimakani, 2013. Phares & O'Daffer, 2014). Στην πραγματικότητα, όπως έχουν υποστηρίξει οι Phares και O'Daffer (2014), μπορεί αυτή η ικανότητα να αναπτύσσεται και να εξελίσσεται στη καθημερινή ζωή, μέσα από διάφορες καταστάσεις που απαιτούν εκτιμήσεις αφού η εκτίμηση διάφορων ποσοτήτων ή μεγεθών, αθροισμάτων, διαφορών, γινομένων και πηλίκων χρησιμοποιείται συχνότερα από ότι χρησιμοποιούνται οι ακριβείς υπολογισμοί. Επίσης, η εκτίμηση, παρέχει άμεσο ή έμμεσο έλεγχο ώστε να διασφαλιστεί ότι ένας υπολογισμός κινείται στη σωστή κατεύθυνση και προσφέρει την ευκαιρία να ανακληθεί η απάντηση, αφού ολοκληρωθεί ο υπολογισμός (Σοφοκλέους & Λεμονίδης, 2007). Οι Beishuizen, van Putten και van Mulken (1997) και Mclntosh (2004) αναφέρουν πως η εκτίμηση είναι σημαντική για αρκετούς λόγους. Πιο συγκεκριμένα, η εκτίμηση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια καλύτερη κατανόηση της θεσιακής αξίας, των πράξεων και της γενικής αίσθησης του αριθμού. Επιπρόσθετα, πολλοί ερευνητές (Bestgen, Reys, Rybolt, & Wyatt, 1980. Carpenter, Coburn, Reys, & Wislon, 1976. Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, & Tsivkin, 1999. Lemaire, Lecacheur, & Farioli, 2000. Sowder, 1988, 1992 Sowder & Wheeler, 1989, στο Φιλίππου & Χρίστου, 2004) έχουν τονίσει πως κατά την εκτέλεση εκτιμήσεων χρησιμοποιούνται κάποιες διαδικασίες, οι οποίες παρέχουν πληροφορίες για τη γενική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των στρατηγικών των παιδιών.

Α.3.1. Η σύνδεση των νοερών και κατ΄ εκτίμηση υπολογισμών με την αίσθηση αριθμού

Πολλοί είναι οι ερευνητές που υποστηρίζουν ότι οι νοεροί και οι κατ΄εκτίμηση υπολογισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αίσθησης αριθμού. Μια τέτοια άποψη παρουσιάζουν οι Sowder (1992) και McIntosh et al., (1997), οι οποίοι υποστηρίζουν πως αυτά τα δύο είδη υπολογισμού σχετίζονται με την αίσθηση αριθμού, η οποία είναι πολύ σημαντική στη μαθηματική εκπαίδευση (Tsao, 2004). Παράλληλα, οι Blote, Klein και Beishuizen (2000) αναφέρουν πως οι νοεροί και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί είναι σημαντικοί καθώς βοηθούν τους ενήλικες και τους μαθητές να αποκτήσουν καλύτερη αίσθηση των αριθμών. Με την άποψη αυτοί συμφωνούν και οι Markovits και Sowder (1994, στο Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou, 2015), αφού οι νοεροί υπολογισμοί θεωρούνται βασικό στοιχείο της αίσθησης αριθμού και οδηγούν σε καλύτερη κατανόηση ακόμα και των ρητών αριθμών. Τη σχέση μεταξύ των νοερών υπολογισμών και της αίσθησης του αριθμού αναδεικνύουν κι άλλοι ερευνητές όπως ο Λεμονίδης (2013) και οι Ambrose, Baek και Carpenter (2003), οι οποίοι υποστήριξαν πως όταν ένα παιδί έρχεται αντιμέτωπο με έναν νοερό υπολογισμό, πραγματοποιεί διάφορους μετασχηματισμούς οι οποίοι σχετίζονται με τις γνώσεις και τις ιδιότητες των αριθμών. Επίσης, οι Maclellan (2001) και Sowder (1992) συμφωνούν με την ύπαρξη σχέσης μεταξύ των νοερών υπολογισμών και της αίσθησης του αριθμού, αφού εκτελώντας νοερούς υπολογισμούς τα παιδιά αναπτύσσουν κάποιες βασικές γνώσεις για τις αριθμητικές πράξεις, μπορούν να συγκρίνουν αριθμούς και κατανοούν την αξία θέσης των ψηφίων. Παρ΄ όλα αυτά, σύμφωνα με τους Mclntosh και Dole (2002), οι υψηλές επιδόσεις στους νοερούς υπολογισμούς δεν συνδέονται απαραίτητα με την καλή αίσθηση του αριθμού κι αυτό, πιθανόν, να είναι απόρροια της μηχανικής χρήσης των νοερών στρατηγικών, οι οποίες διδάσκονται, ακόμη και αν αυτές χρησιμοποιούνται σωστά. Για τους παραπάνω λόγους, οι Heirdsfield και Cooper (2004) τονίζουν πως είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να δώσουν έμφαση στην διδασκαλία των νοερών υπολογισμών παρά να διδάσκουν τους γραπτούς αλγόριθμους, οι οποίοι δεν υποστηρίζουν και δεν προωθούν την ανάπτυξη της αίσθησης αριθμού.

Αναφερόμενη στις εκτιμήσεις, η Dowker (1992) υπογραμμίζει πως η ικανότητα εκτίμησης είναι ο μόνος τρόπος που είναι και άμεσος και ολιστικός για να αποκτήσει κάποιος αίσθηση αριθμού. Την αξία της εκτίμησης ως εργαλείου για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού τονίζει και ο O'Daffer (2014), ο οποίος πρότεινε, πως εάν τα παιδιά ενθαρρύνονται να ελέγξουν τη λογικότητα μιας απάντησης σε ένα λεκτικό πρόβλημα εκτιμώντας το αποτέλεσμα, τότε κερδίζουν μια σημαντική τεχνική ελέγχου των απαντήσεων.

Οι Clarke, Clarke και Horne (2006) και Rogers (2009) προτείνουν πως η πρώιμη εκμάθηση και εκτέλεση υπολογισμών με τη χρήση χαρτιού και μολυβιού μπορεί να συμβάλλει αρνητικά στην κατανόηση των αριθμών και στην ανάπτυξη νοερών στρατηγικών και παράλληλα επιβραδύνει την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Σε ένα πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον, όπου ενθαρρύνονται οι εξερευνήσεις των αριθμητικών συνδυασμών, τα παιδιά παράγουν τις δικές τους στρατηγικές (Fuson, 1992) και αναπτύσσουν την αίσθηση του αριθμού (Wright, 1996, στο Heirdsfield, Dole & Beswick, 2006).

Α.4. Είδη εκτιμήσεων

Οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί χρησιμοποιούνται σε διάφορες καταστάσεις που καλούνται οι άνθρωποι να αντιμετωπίσουν στην καθημερινότητά τους, γι' αυτό και έχουν προσδιοριστεί διαφορετικά είδη εκτίμησης (Hogan και Brezinski, 2003) με βάση την υπάρχουσα, κάθε φορά, κατάσταση (π.χ., για να βρούμε γρήγορα και κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού, για να ελέγξουμε το αποτέλεσμα που μας δίνει η αριθμομηχανή, να ελέγξουμε αν μας φτάνουν τα χρήματά μας κτλ.) (Λεμονίδης, 2013). Οι Hogan και Brezinski (2003), σε μια προσπάθεια να απαριθμήσουν και να αναλύσουν τα είδη των εκτιμήσεων, αναφέρουν πως τα είδη εκτίμησης είναι τρία. Αναλυτικότερα, τα είδη αυτά είναι η εκτίμηση αριθμητικών ποσοτήτων, η υπολογιστική εκτίμηση και η εκτίμηση μέτρησης. Αργότερα, οι Siegler και Booth (2004) πρόσθεσαν στην εκτίμηση ποσοτήτων την εκτίμηση της αριθμογραμμής.

Α.4.1. Εκτίμηση ποσότητας

Η εκτίμηση της ποσότητας, σύμφωνα με τους Hogan και Brezinski (2003) αναφέρεται στην ικανότητα εκτίμησης του αριθμού των αντικειμένων, τα οποία συνήθως είναι τοποθετημένα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αδύνατη η ακριβής καταμέτρησή τους. Με παρόμοιο τρόπο ορίζει και ο Λεμονίδης (2013) την εκτίμηση ποσότητας καθώς υπογραμμίζει πως πρόκειται για τη διαδικασία εκτίμησης των στοιχείων που απαρτίζουν ένα σύνολο. Οι Mix, Huttenlocher και Levine (2002) και η Wynn (1995, στο Hogan & Brezinski, 2003) έχουν παρατηρήσει ότι τα παιδιά είναι ικανά να αναγνωρίσουν χωρίς καταμέτρηση περίπου τρία ή τέσσερα αντικείμενα. Όσον αφορά τους ενήλικες, φαίνεται πως είναι ικανοί να αναγνωρίσουν περίπου έξι στοιχεία. Παρόλ' αυτά σε έρευνά τους οι Simon και Vashnavi (1996) βρήκαν ότι ο αριθμός των αντικειμένων που μπορούν να αναγνωριστούν παραμένει σταθερός και το όριο μπορεί να είναι μόνο τέσσερα στοιχεία.

Α.4.2. Υπολογιστική εκτίμηση

Οι Lemaire και Lecacheur (2002) έδωσαν έναν ορισμό που αποδίδει την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης. Όρισαν ως υπολογιστική εκτίμηση την εξεύρεση ενός κατά προσέγγιση αποτελέσματος σε έναν υπολογισμό, διεξάγοντας τον υπολογισμό νοερά. Ο Greeno (1991) ορίζει την υπολογιστική εκτίμηση ως την εύρεση μιας κατά προσέγγιση απάντησης σε αριθμητικά προβλήματα χωρίς να υπολογίζεται η ακριβής απάντηση πιο νωρίς. Η εκτίμηση αυτή πραγματοποιείται με τον νου και βοηθά να χτιστεί μια γενική αίσθηση σχετικά με την αναμενόμενη αριθμητική απάντηση, αποτελώντας έτσι μία από τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Σύμφωνα με τους Hogan και Brezinski (2003), η υπολογιστική εκτίμηση αναφέρεται στην εκτίμηση του αποτελέσματος διάφορων υπολογισμών (328+719, 4269÷22, 19×1,87). Η υπολογιστική εκτίμηση αναφέρεται επίσης σε αριθμητικές πράξεις και σε κρίσεις οι οποίες μπορούν να γίνουν για τα αποτελέσματα (Segovia & Castro, 2009).

Σύμφωνα με τους Φιλίππου και Χρίστου (2004), όταν εκτιμάται μια απάντηση επιτυγχάνεται η ανάπτυξη της αίσθησης της αξίας θέσης του ψηφίου, και η κατανόηση των τεσσάρων πράξεων. Επιπρόσθετα, η Dowker (1997) τονίζει τη σημαντικότητα της υπολογιστικής εκτίμησης συνδέοντάς τη με την αίσθηση του αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, η ερευνήτρια αναφέρει πως η ικανότητα υπολογισμού και η αίσθηση του αριθμού συνδέονται με την ανάπτυξη της υπολογιστικής εκτίμησης καθώς όσο αυξάνεται το επίπεδο της μαθηματικής επίδοσης των παιδιών τόσο αυτά αναπτύσσουν περισσότερο κατάλληλες και σύνθετες στρατηγικές εκτίμησης.

Οι Sowder και Wheeler (1989, στο Siegler & Booth, 2005) υπογράμμισαν πως, για να εκτελέσει κάποιος μια αποτελεσματική υπολογιστική εκτίμηση συμβάλλουν πολλοί παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, απαιτείται η ύπαρξη διάφορων τύπων εννοιολογικής κατανόησης όπως, η ικανότητα παραγωγής μιας λογικής απάντησης κοντά στην ακριβή, η χρήση προσεγγιστικών αριθμών, η χρήση πολλών έγκυρων μεθόδων εκτίμησης και η παροχή πολλαπλών λογικών απαντήσεων.

Ωστόσο, φαίνεται πως τα άτομα που είναι προσκολλημένα στη χρήση των τυπικών αλγορίθμων παρουσιάζουν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στις εκτιμήσεις. Όπως αναφέρουν οι Alsawaie (2011) και Yang (2005), οι οποίοι πραγματοποίησαν έρευνα σε παιδιά ηλικίας δώδεκα ετών, όσοι μαθητές είχαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στην εκτέλεση γραπτών αλγορίθμων φάνηκε να μην έχουν τα ίδια υψηλά ποσοστά, όταν κλήθηκαν να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα των ίδιων υπολογισμών.

Η Bobis (1991, στο Δεσλή και Γιακουμή, 2015) αναφέρει πως υπάρχει σχέση μεταξύ υπολογιστικών εκτιμήσεων και αριθμητικής. Πιο συγκεκριμένα, δηλώνει πως οι μαθητές και οι μαθήτριες που διαθέτουν καλή γνώση των βασικών στοιχείων της αριθμητικής και είναι ικανοί/-ες να χρησιμοποιούν ποικιλία στρατηγικών για την εκτίμηση ενός αποτελέσματος φαίνεται να είναι αποτελεσματικοί στις αριθμητικές εκτιμήσεις.

Όπως σημειώνεται από τον Sowder (1992), η υπολογιστική εκτίμηση υπήρξε η κατηγορία των εκτιμήσεων, η οποία μελετήθηκε σε μεγαλύτερο βαθμό από τα άλλα είδη με αρκετές από τις μελέτες να επικεντρώνονται στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται (Dowker, 1992; Dowker, Flood, Griffiths, Harriss & Hook, 1996. Hanson & Hogan, 2000. LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993; Levine, 1982, στο Hogan & Brezinski, 2003).

Α.4.3. Στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης

Το γεγονός πως τα προβλήματα εκτίμησης συνήθως δεν έχουν μια σωστή απάντηση καθιστά την εκτίμηση ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για τη διερεύνηση της ευελιξίας χρήσης στρατηγικών (Dowker, Flood, Griffiths, Harriss & Hook, 1996). Τα παιδιά χρησιμοποιούν διάφορες στρατηγικές, οι οποίες ποικίλουν σε συχνότητα και αποτελεσματικότητα. Επίσης, η χρήση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης αλλάζει με την ηλικία (Lemaire & Lecacheur, 2002. Λεμονίδης, 2013). Οι Lemaire και Lecacheur (2002) πραγματοποίησαν μια έρευνα σε ενήλικες και παιδιά 9 και 11 ετών με σκοπό να εξετάσουν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης σε προβλήματα πρόσθεσης. Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό πως η χρήση και η αποτελεσματικότητα μιας στρατηγικής επηρεάζεται από την ηλικία, τα χαρακτηριστικά του προβλήματος και την καταλληλότητα της στρατηγικής. Παράλληλα, την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών σε προβλήματα πρόσθεσης μελέτησε και η Dowker (2003, στο Δεσλή & Ανεστάκης, 2014). Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό πως αυτή η ικανότητα αυξάνεται με την ηλικία, το επίπεδο επίδοσης των μαθητών/-τριών σε αυτά τα προβλήματα και τη γενική επίδοσή τους στους υπολογισμούς. Ακόμη, αναδείχθηκε πως τα ποσοστά της επιτυχίας στις εκτιμήσεις αυξάνονται, καθώς τα παιδιά αναπτύσσουν περισσότερο κατάλληλες και σύνθετες στρατηγικές εκτίμησης.

Αρκετοί ερευνητές (Dowker, 2003, 1992. McIntosh et al., 1997. LeFevre, Greenham & Waheed, 1993. Reys, Reys & Penafiel, 1991. Sowder & Wheeler, 1989. Reys, 1984. Levine, 1982. Reys, Reys & Penafiel, 1982) έχουν καταγράψει διαφορετικές στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης, τις οποίες χρησιμοποιούν τα παιδιά στην εκτίμηση αριθμητικών προβλημάτων, χρησιμοποιώντας ποικιλία όρων (Segovia, 2009).

Οι Reys, Reys και Penafiel (1991) συμπέραναν πως υπάρχουν τρεις ομάδες στρατηγικών τις οποίες χρησιμοποιούν οι καλοί εκτιμητές: (α) η αναδιατύπωση/ αναδόμηση (reformulation), (β) η μετάφραση (translation) και (γ) η αντιστάθμιση (compensation). Πιο συγκεκριμένα, η αναδιατύπωση/αναδόμηση αφορά στη μετατροπή των αριθμητικών δεδομένων σε πιο διαχειρίσιμη μορφή. Η μετάφραση αναφέρεται στην αλλαγή της μαθηματικής δομής του προβλήματος σε μια νέα και πιο διαχειρίσιμη από το άτομο δομή, ενώ κατά την αντιστάθμιση πραγματοποιείται ρύθμιση της εκτίμησης ανάλογα με την αναδιατύπωση ή τη μετάφραση. Οι Castro και Castro (2002), βασιζόμενοι στη μελέτη των Segovia et al. (1989), κατέταξαν τις στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης σε 3 κατηγορίες. Αναλυτικότερα, στην ομάδα των στρατηγικών αναδόμησης εντάσσουν τις στρατηγικές της στρογγυλοποίησης (rounding), της περικοπής (truncation), της αλλαγής της μορφής ενός αριθμού σε συμβατές ισοδύναμες δομές και τη στρατηγική της ανασύνθεσης (decomposition). Στην ομάδα των στρατηγικών της μετάφρασης εντάσσουν τις στρατηγικές του μέσου όρου (averaging) και των σημείων αναφοράς (benchmarks). Στην ομάδα των στρατηγικών της αντιστάθμισης διαχωρίζουν την τελική (final) και την ενδιάμεση (intermediate) αντιστάθμιση. Ωστόσο, η Dowker (2003, σελ. 256) υποστήριξε ότι «αυτές οι τρεις κατηγορίες δεν επαρκούν για να ορίσουν και να περιγράψουν τα βασικά συστατικά της εκτίμησης». Παράλληλα, χαρακτήρισε τις κατηγορίες των στρατηγικών «γενικές», γεγονός το οποίο τις καθιστά μη διαχειρίσιμες από δασκάλους και μαθητές.

Στην επόμενη υποενότητα η ομαδοποίηση των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης θα γίνει όχι με βάση την κατηγοριοποίηση των Castro και Castro (2002), ούτε το είδος των αριθμητικών πράξεων δεδομένου πως αρκετές από τις στρατηγικές, όπως αυτή της στρογυλοποίησης, χρησιμοποιούνται σε όλες τις πράξεις. Για τον λόγο αυτό οι στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης κατατάχθηκαν, με βάση τα χαρακτηριστικά τους, σε τέσσερις κατηγορίες: α) στρατηγικές όπου η εκτίμηση γίνεται με βάση τα πρώτα ψηφία των αριθμών, β) στρατηγικές μετατροπής των αριθμών (π.χ., δεκαδικοί σε κλάσματα, κλάσματα σε δεκαδικούς ή φυσικούς), γ) στρατηγικές ανάλυσης των αριθμών και δ) στρατηγικές όπου το αποτέλεσμα εκτιμάται με βάση τις δεκάδες. Παράλληλα με την περιγραφή των στρατηγικών θα αναφέρεται και η συχνότητα χρήσης τους.

Α.4.3.1. Στρατηγικές όπου η εκτίμηση γίνεται με βάση τα πρώτα ψηφία των αριθμών

Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης (rounding) είναι μία διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει δύο βασικά βήματα. Αρχικά οι αριθμοί στρογγυλοποιούνται σε κάποια προεπιλεγμένη θεσιακή αξία και στη συνέχεια οι στρογγυλοποιημένοι αριθμοί χρησιμοποιούνται ώστε να υπολογιστεί η εκτίμηση νοερά. Ο βασικός σκοπός της στρογγυλοποίησης είναι να παραχθούν εύκολοι αριθμοί, οι οποίοι θα διευκολύνουν τον νοερό υπολογισμό (Castro & Castro, 2002. Segovia et al., 1989). Η στρατηγική αυτή συχνά είναι η μοναδική στρατηγική η οποία διδάσκεται στην τάξη (Levine, 1982). Στην περίπτωση που είναι επιθυμητή μεγαλύτερη ακρίβεια στο πρόβλημα, μπορεί να ακολουθήσει και τρίτο βήμα το οποίο είναι η διόρθωση της εκτίμησης (μεταγενέστερη αντιστάθμιση) (Reys, 1984). Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης μπορεί να θεωρηθεί μια κατάλληλη διαδικασία για την εκτίμηση δύο παραγόντων με πολλά ψηφία. Επιπρόσθετα, η στρατηγική αυτή χαρακτηρίζεται από δύο βασικά στοιχεία: α) ότι μέσω της στρογγυλοποίησης αλλάζει το πρόβλημα ώστε να εκτιμάται πιο εύκολα το αποτέλεσμα και β) ότι υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι στρογγυλοποίησης σε κάθε μεμονωμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 95+43 υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι για να στρογγυλοποιηθούν τα ποσά ώστε να μετατραπεί το πρόβλημα σε ευκολότερο για νοερό υπολογισμό, 90+40, 40+100 ή 100+43. Η στρογγυλοποίηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πιο δημοφιλής στρατηγική και απαιτεί ένα υψηλό επίπεδο αφαιρετικής σκέψης, σύμφωνα με τη Reys (1984).

Μια ακόμη στρατηγική που χρησιμοποιείται στην υπολογιστική εκτίμηση είναι η στρατηγική της περικοπής (truncating). Στη συγκεκριμένη στρατηγική παραμένει σταθερό το αριστερό ψηφίο, δηλαδή, το ψηφίο με τη μεγαλύτερη θεσιακή αξία ή και περισσότερα από τα μπροστινά ψηφία και οι υπόλοιποι αριθμοί μετατρέπονται σε μηδενικά. Η επιλογή των ψηφίων που μένουν σταθερά και αυτών που μετατρέπονται σε μηδενικά εξαρτάται από το πρόβλημα που τίθεται κάθε φορά. Για παράδειγμα, στο άθροισμα 496+498 μπορούν να μετατραπούν και οι δύο αριθμοί σε 490 (Segovia & Castro, 2009).

Οι Reys (1984), Reys (1986) και Λεμονίδης (2013) περιγράφουν τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου (Front-end strategy), η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις πράξεις αλλά η κύρια χρησιμότητά της είναι στην πρόσθεση και ακολουθούν η αφαίρεση και η διαίρεση. Η στρατηγική αυτή μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και σε άλλους αριθμούς όπως κλάσματα και δεκαδικούς. Στη στρατηγική αυτή πρώτα εντοπίζονται τα ψηφία με τη μεγαλύτερη αξία, εκτελείται νοερά η κατάλληλη πράξη και, τέλος, λαμβάνεται υπόψη η αξία θέσης των ψηφίων που χρησιμοποιήθηκαν. Για παράδειγμα, αν πρέπει να εκτιμηθεί το αποτέλεσμα της πράξης 4.219+7.512+2.446, γίνεται πρόσθεση των τριών πρώτων ψηφίων 4+7+2=13 και, στη συνέχεια, λαμβάνεται υπόψη η θέση των ψηφίων αυτών (στη συγκεκριμένη περίπτωση οι χιλιάδες). Οπότε το αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκτίμηση είναι 13.000. Η στρατηγική αυτή θεωρείται χρήσιμη καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν μπροστά τους τούς αριθμούς που χρησιμοποιούν στην εκτίμηση (Reys, 1984). Μετά την αρχική εκτίμηση μπορεί να εφαρμοστεί μία μεταγενέστερη αντιστάθμιση με σκοπό να ελαττωθεί το σφάλμα της αρχικής εκτίμησης. Τόσο μικροί μαθητές όσο και μεγαλύτεροι μαθητές και ενήλικες μπορούν να φτάσουν σε εκτίμηση ενός αποτελέσματος εύκολα και γρήγορα μέσω της στρατηγικής τους εμπρόσθιου άκρου (van de Walle, 2007).

Α.4.3.2. Στρατηγικές μετατροπής των αριθμών

Στη κατηγορία της μετατροπής των αριθμών βρίσκονται οι στρατηγικές της αλλαγής της μορφής (Substitution or Reformulation) και των ειδικών αριθμών (Special numbers strategy), καθώς σε αυτές τις στρατηγικές οι λύτες μετατρέπουν τους αριθμούς σε μια άλλη μορφή, πιο κατανοητή και πιο διαχειρίσιμη.

Η στρατηγική της αλλαγής της μορφής (Substitution or Reformulation) ενός ή περισσότερων αριθμών είναι μια στρατηγική που πραγματοποιείται με σκοπό ο λύτης να διευκολυνθεί στην εκτίμηση ενός αποτελέσματος (Reys, 1984. Castro & Castro, 2002). Για παράδειγμα, η μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα μπορεί να διευκολύνει πολύ τη διαδικασία της εκτίμησης (π.χ., 0,52x0,35, μέσω της αλλαγής του δεκαδικού αριθμού 0,52 σε 1/2 και του 0,35 σε 1/3, μετατρέπεται σε αρκετά ευκολότερη πράξη) (Λεμονίδης, 2013).

Με τη στρατηγική των ειδικών αριθμών (Special numbers strategy) οι μαθητές και οι μαθήτριες προβαίνουν στην αναζήτηση και τον διαχωρισμό των αριθμών που είναι κοντά σε ειδικές τιμές και μπορούν να υπολογιστούν εύκολα νοερά (Reys,1984). Ειδικές τιμές είναι οι αριθμοί οι οποίοι περιλαμβάνουν δυνάμεις του 10, απλά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, στα κλάσματα ειδικές τιμές θεωρούνται το 0, το 1/2 και το 1. Πιο συγκεκριμένα, εάν σκοπός είναι να εκτιμηθεί το άθροισμα 3/4 +1/25 + 7/13, το 3/4 μπορεί να θεωρηθεί περίπου 1, το 1/25 περίπου 0 και το 7/13 περίπου 1/2 , επομένως το άθροισμα είναι περίπου 1,5.

Α.4.3.3. Στρατηγικές ανάλυσης των αριθμών

Σε αυτή την ομάδα των στρατηγικών κατατάχθηκαν οι στρατηγικές στις οποίες ο λύτης προβαίνει σε μια ανάλυση ή διάσπαση των αριθμών, χρησιμοποιώντας είτε κάποια ιδιότητα (π.χ., επιμεριστική) είτε κάνοντας διαιρέσεις ώστε να απλοποιήσει τους προς εκτίμηση αριθμούς. Σε αυτή την ομάδα κατατάχθηκαν οι στρατηγικές της παραγοντοποίησης (Factorization) και της επιμεριστικότητας (Distributivity).

Μέσω της στρατηγικής της παραγοντοποίησης (Factorization) ο λύτης μπορεί να αναλύσει τους αριθμούς σε απλούστερους ή να διαιρέσει τους όρους της πράξης με έναν κοινό παράγοντα με σκοπό να διευκολυνθεί ο υπολογισμός (Reys, 1986). Για παράδειγμα, αν σκοπός είναι να εκτιμηθεί τα γινόμενο 128x152, μπορεί να πραγματοποιηθεί μια ανάλυση των όρων σε 130x10x15.

Στη στρατηγική της επιμεριστικότητας (Distributivity), όπως αναφέρουν οι Dowker (1992) και Λεμονίδης (2013), αξιοποιείται η επιμεριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα, το γινόμενο 38x91 μπορεί να υπολογιστεί μέσω της μετατροπής της πράξης σε (38x100)-(38x10)=3.800-380= περίπου 3.400. Στη στρατηγική αυτή πρώτα γίνεται η χρήση κάποιου αλγόριθμου με σκοπό να υπολογισθεί η απάντηση κατά προσέγγιση και, στη συνέχεια, ακολουθεί μία εκτίμηση για να δοθεί η τελική απάντηση. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό του γινομένου 8,3x11,2 μπορεί πρώτα να υπολογιστεί το 8x11 νοερά μέσω του αλγόριθμου και τη συνέχεια να προστεθούν τα γινόμενα 0,2x8=1,6 και 0,3x11=3,3 δίνοντας ως τελική απάντηση περίπου 88+5=93.

Α.4.3.4. Στρατηγικές όπου το αποτέλεσμα εκτιμάται με πάτημα στη δεκάδα

Τέλος, σε αυτή τη κατηγορία επιλέχθηκαν οι στρατηγικές στις οποίες ο λύτης για να φτάσει σε μια εκτίμηση είτε στρογγυλοποιεί τους αριθμούς είτε χρησιμοποιεί το πλήθος των αριθμών σε ζεύγη με σκοπό οι αριθμοί να φτάσουν κάποια δεκάδα ή εκατοντάδα ή χιλιάδα. Στη κατηγορία αυτή ανήκουν οι στρατηγικές του μέσου όρου (clustering or averaging), των συμβατών αριθμών (Compatible numbers strategy), της προγενέστερης αντιστάθμισης (Prior compensation), και αυτή της μεταγενέστερης αντιστάθμισης (Post compensation).

Η στρατηγική της συσσώρευσης ή του Μέσου Όρου (clustering or averaging) χρησιμοποιείται κυρίως στα προβλήματα που απαιτούν πρόσθεση, τα οποία περιλαμβάνουν αριθμούς που «συσσωρεύονται» γύρω από τη μέση τιμή ή μέσο όρο

(Reys, 1984). Κατά την εφαρμογή της στρατηγικής της συσσώρευσης ακολουθούνται συνήθως τρία βήματα. Αρχικά, ελέγχονται όλοι οι αριθμοί, έπειτα επιλέγεται μία λογική μέση τιμή και, τέλος, πολλαπλασιάζεται η τιμή αυτή με το πλήθος των αριθμών του προβλήματος. Για παράδειγμα, για την εκτίμηση της πρόσθεσης 23+18+19+22, όλοι οι αριθμοί συσσωρεύονται γύρω από το 20, άρα το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί μέσω του πολλαπλασιασμού 4x20=80. Η στρατηγική της συσσώρευσης θεωρείται χρήσιμη στρατηγική, αφού διευκολύνει τον λύτη μέσω της ελαχιστοποίησης του πλήθους των αριθμών που πρέπει να συγκρατηθούν στην εργαζόμενη μνήμη (Λεμονίδης, 2013).

Σύμφωνα με τους Reys (1986), Levine (1982) και Dowker (1992), μια ακόμη στρατηγική που χρησιμοποιείται στην υπολογιστική εκτίμηση είναι η στρατηγική των συμβατών αριθμών (Compatible numbers strategy) ή αλλιώς στρατηγική «γνωστών αριθμών» (known numbers). Κατά την εφαρμογή αυτής της στρατηγικής επιλέγονται οι συμβατοί αριθμοί, οι οποίοι καθιστούν πιο εύκολη την πράξη του προβλήματος. Όσον αφορά στους συμβατούς αριθμούς, σύμφωνα με τους Reys (1984, στο van de Walle, 2007), οι αριθμοί αυτοί αποτελούν δυάδες ή τριάδες αριθμών που δίνουν άθροισμα που προσεγγίζει το 10, το 100, το 1.000 κλπ. ή πολλαπλάσιά τους τα οποία είναι εύκολα να υπολογιστούν. Για παράδειγμα, στη πρόσθεση 35+46+65+71+60+38, τα αθροίσματα ανά δύο των αριθμών 35+71, 46+60, 65+38 είναι περίπου 100 και, κατ’ επέκταση, το άθροισμα είναι περίπου 300. Η περιγραφόμενη στρατηγική χρησιμοποιείται περισσότερο σε προβλήματα πρόσθεσης και διαίρεσης και η προσαρμογή των αριθμών μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, αρκεί να διευκολύνεται η υπολογιστική εκτίμηση (Reys, 1984. Reys, 1986). Για παράδειγμα, στη διαίρεση 2.265:6, αν το 2.265 μετατραπεί σε 2.400, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 6, η πράξη μπορεί να γίνει εύκολα και γρήγορα 2.400:6=400. Η Reys (1986) τόνισε πως η στρατηγική των συμβατών αριθμών μαζί με τη στρατηγική των ειδικών αριθμών είναι οι καταλληλότερες στρατηγικές για να περιγράψουν τι είναι πραγματικά η εκτίμηση. Πιο συγκεκριμένα, υποστήριξε πως μέσα από αυτές τις δυο στρατηγικές φαίνεται η ουσία της εκτίμησης, δηλαδή, η διαδικασία της μετατροπής ενός δοσμένου προβλήματος σε μια νέα μορφή, η οποία έχει προσεγγιστικά ισοδύναμη απάντηση και είναι εύκολος ο υπολογισμός νοερά.

Κατά την εφαρμογή της στρατηγικής της προγενέστερης αντιστάθμισης (Prior compensation), ο ένας όρος στρογγυλοποιείται σε αντίθετη κατεύθυνση από τον άλλο. Για παράδειγμα, στο γινόμενο 57x56, το 57 στρογγυλοποιείται προς τα πάνω και γίνεται 60, ενώ το 56 στρογγυλοποιείται προς τα κάτω και γίνεται 50. Τέλος, υπολογίζεται το γινόμενο 50x60=3.000, το οποίο είναι κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα (3.192) (Λεμονίδης, 2013).

Η στρατηγική της μεταγενέστερης αντιστάθμισης (Post compensation), σε αντίθεση με τη στρατηγική της προγενέστερης αντιστάθμισης, εφαρμόζεται μετά τη χρήση κάποιας άλλης στρατηγικής, με σκοπό να διορθώσει την αρχική εκτίμηση και να πλησιάσει περισσότερο το ακριβές αποτέλεσμα. Σύμφωνα με τη Reys (1984), η στρατηγική αυτή συναντάται και ως στρατηγική προσαρμογής (adjusting strategy). Οι μαθητές και μαθήτριες που τη χρησιμοποιούν αντιλαμβάνονται την ανάγκη για αντιστάθμιση αλλά φαίνεται να δυσκολεύονται στο να κατανοήσουν τη διαδικασία που πρέπει να εφαρμόσουν ώστε να υπολογίσουν το ποσό της αντιστάθμισης σε κάθε πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, στη περίπτωση που πρέπει να εκτιμηθεί το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 57x56, αν η στρογγυλοποίηση γίνει και στα δύο ποσά προς τα πάνω, 60x60=3.600, τότε είναι απαραίτητη η μεταγενέστερη αντιστάθμιση του γινομένου (3x60=180 και το 4x60=240, 180+240=420, άρα 3.600-420=3.180).

Α.4.4. Συχνότητα χρήσης στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης

Αρκετοί ερευνητές (LeFevre, Greenham και Waheed, 1993. Lamaire & Lecacheur, 2002. Tsao & Pan, 2013. Cochran & Dugger, 2013. Alajmi, 2009) με σκοπό να μελετήσουν την ικανότητα των συμμετεχόντων στην εκτέλεση υπολογιστικών εκτιμήσεων, αναλύοντας τις στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν, ανέδειξαν και τη συχνότητα χρήσης των στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης. Χρησιμοποιούνται διάφορες στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης αλλά κάποιες από αυτές χρησιμοποιούνται με μεγαλύτερη συχνότητα. Για παράδειγμα, οι Lemaire και Lecacheur (2002), οι οποίοι εξέτασαν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης σε ενήλικες και παιδιά, βρήκαν πως η πιο κοινή στρατηγική που επιλέχθηκε και από τους ενήλικες και από τα παιδιά ήταν αυτή της στρογγυλοποίησης. Επίσης, από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε πως τα παιδιά ηλικίας δέκα ετών προσέγγιζαν πιο εύκολα το αποτέλεσμα 459+356, όταν πραγματοποιούσαν τη στρογγυλοποίηση κάνοντας ανάλυση του αριθμού (400+300+60+60=820). Παρόμοια, στην έρευνα των

LeFevre, Greenham και Waheed (1993), όπου σκοπός ήταν να εξεταστεί η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης ενηλίκων και παιδιών σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα, φάνηκε πως η στρογγυλοποίηση ήταν η πιο δημοφιλής στρατηγική. Ακόμη, οι ερευνητές τόνισαν πως τα παιδιά στρογγυλοποιούσαν είτε και τους δύο αριθμούς είτε μόνο τον ένα. Από την έρευνα αναδείχτηκε ακόμη πως τα παιδιά χρησιμοποίησαν και τη στρατηγική της προγενέστερης αντιστάθμισης, ενώ οι ενήλικες έκαναν συχνή χρήση της στρατηγικής της μεταγενέστερης αντιστάθμισης. Επίσης, οι Cochran και Dugger (2013), με σκοπό να μελετήσουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν παιδιά 12, 13 και 14 χρόνων κατά την εκτέλεση υπολογιστικών εκτιμήσεων πραγματοποίησαν έρευνα σε 26 μαθητές/-τριες. Από την ανάλυση των δεδομένων έγινε φανερό ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά ήταν η στρογγυλοποίηση (rounding) και τα σημεία αναφοράς (benchmarks).

Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης φαίνεται να χρησιμοποιείται εντατικά και από τους εκπαιδευτικούς, σύμφωνα με τον Alajmi (2009). Πιο συγκεκριμένα, ο ερευνητής πραγματοποίησε έρευνα σε 59 εκπαιδευτικούς των μαθηματικών στο Κουβέιτ, όπου η εκτίμηση δεν συμπεριλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Σκοπός της έρευνας ήταν να εξετάσει τη κατανόηση της σημασίας των κατ΄ εκτίμηση υπολογισμών από τους εκπαιδευτικούς. Το ερευνητικό εργαλείο περιείχε τόσο ερωτήσεις σχετικά με τη σημαντικότητα της εκτίμησης, όσο και δοκομασίες εκτίμησης. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε πως το περισσότερο από το 60% των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης για να προσεγγίσει το αποτέλεσμα των προβλημάτων

Οι Tsao και Pan (2013) μελέτησαν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης έξι εκπαιδευτικών και τις διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούν στην τάξη για τη διδασκαλία των εκτιμήσεων. Το ερευνητικό εργαλείο ήταν η συνέντευξη και οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να απαντήσουν σε 6 ερωτήσεις, που αφορούσαν την προσωπική τους άποψη για την υπολογιστική εκτίμηση καθώς και την απάντηση που θα έδιναν οι ίδιοι σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Τα ευρήματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να εξηγήσουν τη σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης, αλλά και να χρησιμοποιήσουν τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς για να λύσουν σχετικά προβλήματα. Οι στρατηγικές εκτίμησης που χρησιμοποίησαν, ήταν η στρατηγική εμπρόσθιου άκρου, η στρογγυλοποίηση, η χρήση συμβατών αριθμών, η χρήση ειδικών αριθμών και η στρατηγική της επιμεριστικότητας.

Οι Lemonidis και Kaimakami (2013), με σκοπό να διερευνήσουν τις επιδόσεις, τα λάθη και τις στρατηγικές υπολογιστικής που χρησιμοποιούν οι μελλοντικοί δάσκαλοι, πραγματοποίησαν έρευνα σε 50 συμμετέχοντες/-ουσες. Τα έργα είχαν σχεδιαστεί με κατάλληλο τρόπο ώστε να γίνει χρήση πέντε στρατηγικών υπολογιστικής εκτίμησης, της στρατηγικής των ειδικών αριθμών, της στρογγυλοποίησης, της στρατηγικής των συμβατών αριθμών, της στρατηγική της συσσώρευσης ή του Μέσου Όρου και της στρατηγικής του εμπρόσθιου άκρου. Από τα αποτελέσματα προέκυψε πως οι μελλοντικοί δάσκαλοι ήταν μέτριοι και κακοί εκτιμητές και παρουσιάστηκε δυσχέρεια στη χρήση των στρατηγικών της συσσώρευσης ή Μέσου όρου και των συμβατών αριθμών.

Α.4.5. Εκτίμηση μέτρησης

Η εκτίμηση της μέτρησης αναφέρεται στις εκτιμήσεις που εκτελεί ένα άτομο σχετικά με το μήκος, το ύψος, το βάρος, τη χωρητικότητα υγρών και άλλα. Στην καθημερινότητα, τέτοιου είδους εκτιμήσεις μπορεί να θεωρούνται η εκτίμηση του βάρους ενός αυτοκινήτου ή ενός μολυβιού, το ύψος ενός κτιρίου, το μήκος ενός σχοινιού και η περίμετρος μιας περιοχής (Hogan & Brezinski, 2003). Ως εκτίμηση μέτρησης, σύμφωνα με τον Bright (1976, στο Sowder, 1992), ορίζεται η διαδικασία που ακολουθεί το άτομο με σκοπό να φτάσει σε μια μέτρηση, χωρίς τη βοήθεια εργαλείων. Ακόμη, ο van de Walle (2007) ορίζει με παρόμοιο τρόπο την εκτίμηση μέτρησης τονίζοντας πως είναι η προσέγγιση μιας μέτρησης, χωρίς να γίνει η ακριβής μέτρηση. Οι Segovia και Castro (2009) με σκοπό να ορίσουν την εκτίμηση μέτρησης μιλούν για τις υποθέσεις που κάνει ένα άτομο για την τιμή ενός αποτελέσματος που θα βρισκόταν από μία μέτρηση.

Α.4.5.1. Δυνατότητες στην εκτίμηση μέτρησης

Αρχικά, πρέπει να τονιστεί πως η έρευνα σχετικά με την εκτίμηση μέτρησης είναι περιορισμένη. Οι περισσότερες από τις έρευνες επικεντρώνονται στην εκτίμηση μήκους και κάποιες από αυτές θα περιγραφούν στη συνέχεια. Αναλυτικότερα, κάποιοι ερευνητές (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman & Subrahmanyam, 2005. Jones, Taylor & Broadwell, 2009. Gooya Khosroshahi & Teppo, 2011. Jones, Gardner, Taylor, Forrester & Andre, 2012. Δεσλή & Γιακουμή, 2015) επιχείρησαν να ερευνήσουν την ακρίβεια των εκτιμήσεων, τις στρατηγικές και τα σημεία αναφοράς που χρησιμοποιούνται κατά την εκτίμηση μέτρησης.

Οι Joram et al. (2005) με σκοπό να διερευνήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής των σημείων αναφοράς, την ακρίβεια των αναπαραστάσεων που έχουν τα παιδιά για τις τυπικές μονάδες μέτρησης και την ακρίβεια των εκτιμήσεων μέτρησης που εκτελούν, πραγματοποίησαν έρευνα σε μαθητές και μαθήτριες Γ΄τάξης δημοτικού. Επίσης, πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση, αφού κρίθηκε αναγκαίο να διδαχθεί στα παιδιά η στρατηγική των σημείων αναφοράς, καθώς οι μαθητές, συνήθως, δεν την χρησιμοποιούν αυθόρμητα. Στα παιδιά δόθηκαν pre-test, ακολούθησε η διδακτική παρέμβαση και, τέλος, μοιράστηκαν τα post-test, όπου ζητήθηκε η εκτίμηση του μήκους, του ύψους και του πλάτους έξι αντικειμένων της καθημερινότητας και υπολογίστηκε το σφάλμα των εκτιμήσεων. Από την ανάλυση των δεδομένων φάνηκε σημαντική συσχέτιση της χρήσης της στρατηγικής των σημείων αναφοράς με την επιτυχία στις εκτιμήσεις. Ακόμη, φάνηκε πως η στρατηγική αυτή συσχετίζεται με τις αναπαραστάσεις των μαθητών για τις τυπικές μονάδες μέτρησης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική των σημείων αναφοράς είχαν καλύτερες αναπαραστάσεις των τυπικών μονάδων γραμμικής μέτρησης (linear units), σε σχέση με αυτούς που δε χρησιμοποίησαν τη στρατηγική αυτή οδηγώντας τους πρώτους σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις μέτρησης. Διδάσκοντας με παρόμοιο τρόπο, σε παιδιά 11-13 χρονών, μια στρατηγική, τη χρήση του σώματος ως εργαλείου μέτρησης (body ruler), οι Jones, Taylor και Broadwell (2009) θέλησαν να μελετήσουν την επίδραση της διδασκαλίας της στρατηγικής αυτής στην επιτυχία των εκτιμήσεων γραμμικής μέτρησης (linear measurment). Επίσης, οι ερευνητές, θέλοντας να εξετάσουν την ικανότητα των μαθητών για αναλογικό συλλογισμό και να ελέγξουν εάν υπάρχει κάποια συσχέτιση με τη στρατηγική της χρήσης του σώματος, σχεδίασαν ένα τεστ με 10 προβλήματα. Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι σε γενικές γραμμές η στρατηγικής της χρήσης του σώματος ως εργαλείου μέτρησης είχε σημαντική επίδραση στην ακρίβεια των εκτιμήσεων που πραγματοποιήθηκαν. Ακόμη, αναδείχθηκε πως υπήρχε σημαντικά θετική συσχέτιση ανάμεσα στον αναλογικό συλλογισμό και την ακρίβεια των εκτιμήσεων.

Οι Gooya, Khosroshahi και Teppo (2011), σε έρευνα με 10 μαθήτριες Λυκείου (15-16 χρόνων) στο Ιράν, μελέτησαν τα ποσωπικά σημεία αναφοράς που χρησιμοποιούν οι συμμετέχουσες, προκειμένου να πραγματοποιούν εκτιμήσεις μέτρησης τόσο γραμμικής μέτρησης όσο και μέτρησης εμβαδού. Για τον σκοπό της έρευνας δώθηκαν στις μαθήτριες διάφορες δοκιμασίες που απαιτούσαν εκτίμηση μέτρησης μάζας, εμβαδού (εμβαδόν σχολικής αυλής) και εκτίμηση γραμμικής μέτρησης (μήκος και πλάτος πίνακα, ύψος του σχολικού κτηρίου και ενός δέντρου). Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων αναδείχθηκαν τρεις τύποι του προσωπικού πλαισίου αναφοράς που χρησιμοποιούσαν οι μαθήτριες: α) νοερές εικόνες, β) φυσικά υπαρκτά αντικείμενα και γ) προηγούμενη γνώση.

Οι Jones, Gardner, Taylor, Forrester και Andre (2012) επιχείρησαν να εξετάσουν την ακρίβεια εκτίμησης μέτρησης γραμμικών αποστάσεων (linear distances) καθώς και να αναδείξουν την επίδραση των μονάδων μέτρησης και του πλαισίου στην ακρίβεια αυτή. Ακόμη, προσπάθησαν να μελετήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στην ακρίβεια της εκτίμησης και τη λογική σκέψη. Για την διεξαγωγή των αποτελεσμάτων πραγματοποίησαν έρευνα σε 39 μαθητές γυμνασίου στους οποίους δόθηκε μια σειρά έργων εκτίμησης, προκειμένου να εξεταστεί η επίδραση του πλαισίου στην ακρίβεια της εκτίμησης, καθώς και ένα τεστ που μετρούσε την ικανότητα λογικής σκέψης. Τα έργα εξέταζαν τέσσερις μεταβλητές: α) τον προσανατολισμό του αντικειμένου, β) την επίδραση της αφής, γ) την οπτική παρεμβολή και γ) την επίδραση της χωρικής διάστασης. Τα παιδιά έπρεπε να εκτελέσουν τις εκτιμήσεις σε τρεις διαφορετικές μονάδες μέτρησης, οι οποίες ήταν τα εκατοστά, οι ίντσες και οι άτυπες μονάδες. Για την εξέταση της ικανότητας λογικής σκέψης σχεδιάστηκε ένα τέστ που εξέταζε πέντε μορφές συλλογισμού: α) τον έλεγχο μεταβλητών, β) τον αναλογικό συλλογισμό, γ) τον συνδυαστικό συλλογισμό δ) τον συλλογισμό πιθανοτήτων και ε) τον συλλογισμό συσχέτισης. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε ότι οι μαθητές δεν εκτιμούν με επιτυχία το μήκος οικείων αντικειμένων και ότι δυσκολεύονται στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε μονάδες μέτρου, σε σύγκριση με τις ίντσες ή τις άτυπες μονάδες. Τέλος, λίγα από τα έργα (εκτίμηση του μήκους γραμμής σε φόντο με σχεδιασμένο μοτίβο και εκτίμηση μήκους γραμμής σε δύο και τρεις διαστάσεις) συσχετίστηκαν με το τεστ της ικανότητας λογικής σκέψης.

Οι Δεσλή και Γιακουμή (2015), με σκοπό να εξετάσουν την επίδοση και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές/-τριες δημοτικού κατά την εκτίμηση μέτρησης μήκους, πραγματοποίησαν έρευνα σε παιδιά Γ’ τάξης και Ε’ τάξης. Για τη συλλογή των δεδομένων, παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες οχτώ έργα εκτίμησης μήκους, τα οποία αφορούσαν τέσσερις κατηγορίες ερωτήσεων. Αναλυτικότερα, οι κατηγορίες αυτές αφορούσαν τον προσανατολισμό, την οπτική παρεμβολή, τη χωρική διάσταση και τις αναπαραστάσεις. Τα παιδιά κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν τις διάφορες εκτιμήσεις τόσο με τη χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης όσο και άτυπων μονάδων (συνδετήρες, μολύβια, κ.λ.π.). Από τη στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε φανερό πως η επίδοση των μαθητών/-τριών σε γενικές γραμμές ήταν χαμηλή και επηρεάστηκε από την ηλικία, αφού τα παιδιά της Έ τάξης είχαν σημαντικά πιο καλή επίδοση από τα μικρότερα παιδιά. Επίσης, το είδος των μονάδων μέτρησης (τυπικές και άτυπες) φάνηκε να επηρέασε την αποτελεσματικότητα των μαθητών/-τριών, καθώς τα ποσοστά επιτυχίας των εκτιμήσεων ήταν πιο υψηλά όταν γινόταν χρήση των άτυπων μονάδων μέτρησης. Ακόμη, αναδείχθηκε πως στις ερωτήσεις του προσανατολισμού και της χωρικής διάστασης, όλα τα παιδιά παρουσίασαν καλύτερες εκτιμήσεις, όταν χρησιμοποιούσαν άτυπες μονάδες. Παράλληλα, φαίνεται πως το μήκος των αντικειμένων έπαιξε σημαντικό ρόλο. Πιο αναλυτικά, τα ποσοστά επιτυχίας στην εκτίμηση αντικειμένων μικρού μήκους με τη χρήση άτυπων μονάδων ήταν πιο υψηλά συγκριτικά με τα ποσοστά επιτυχίας στην εκτίμηση μήκους μεγάλων αντικειμένων. Όσον αφορά στις κατηγορίες των ερωτήσεων, βρέθηκε πως επηρέασαν τους συμμετέχοντες, αφού οι επιδόσεις των παιδιών ήταν καλύτερες στα έργα προσανατολισμού ενώ λιγότερο καλές επιδόσεις σημειώθηκαν στα έργα οπτικής παρεμβολής. Τέλος, βρέθηκε ένα μεγάλο εύρος στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν από τα παιδιά κατά τη χρήση και των τυπικών και άτυπων μονάδων. Οι στρατηγικές αυτές ήταν παρόμοιες τόσο για τις εκτιμήσεις με εκατοστά όσο και για τις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες. Αναλυτικότερα, τόσο στις εκτιμήσεις με εκατοστά όσο και στις εκτιμήσεις με τη χρήση άτυπων μονάδων, η πιο συχνή στρατηγική ήταν η στρατηγική των επαναλήψεων των μονάδων μέτρησης.

Α.5. Η εκτίμηση στα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια

Η εκτίμηση αποτελεί ένα σημαντικό θέμα στην προς διδασκαλία ύλη των μαθηματικών και για τον λόγο αυτό τονίζεται η αξία της στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών πολλών χωρών όπως της Αγγλίας, των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, της Ιαπωνίας και άλλων χωρών. Παράλληλα, η σημασία της εκτίμησης αναγνωρίζεται και από το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών (NCTM 2000) στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής. Στην Ελλάδα, φαίνεται να αναγνωρίστηκε η σπουδαιότητα της εκτίμησης το 2003, όταν εμφανίστηκαν οι πρώτες μελέτες στο πρόγραμμα σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ. και σε δεύτερη φάση, η εκτίμηση εισήχθη στα σχολικά εγχειρίδια το 2006 (Lemonidis & Kaimakani, 2013). Ακόμη, στην Ελλάδα, φαίνεται να είναι σημαντική η ένταξη της εκτίμησης από τις πρώτες κιόλας τάξεις. Αναλυτικότερα, στον Οδηγό Νηπιαγωγού (2006, στο Δεσλή & Γιακουμή, 2015), οι εκτιμήσεις παρουσιάζονται ως βασική μαθησιακή επιδίωξη των μαθηματικών. Μια τέτοια βασική μαθησιακή επιδίωξη των προγραμμάτων σπουδών είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να πραγματοποιούν κατ΄ εκτίμηση υπολογισμούς και μάλιστα είναι πολύ σημαντική η ένταξή τους στη διδασκαλία των μαθηματικών από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου αφού έρευνες (Case & Sowder, 1990. Reys, 1980) έχουν δείξει ότι ακόμη και ενήλικες δυσκολεύονται να εκτιμήσουν την απάντηση σε ένα πρόβλημα. Όπως υποστηρίζει ο Λεμονίδης (1998), η εκτίμηση είναι σημαντικό να διδάσκεται γιατί η ανάπτυξη αυτής της ικανότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά στους υπολογισμούς με αντικείμενα χωρίς να είναι απαραίτητη η διαδικασία απαρίθμησης ένα προς ένα των αντικειμένων μικρών συλλογών.

Οι Δεσλή και Γιακουμή (2015) αναφέρουν πως από τη δομή των σχολικών εργειριδίων η υπολογιστική εκτίμηση φαίνεται να διδάσκεται πιο συστηματικά συγκριτικά με τις εκτιμήσεις ποσότητας και μέτρησης. Συχνά στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρούνται προβλήματα όπου ζητείται από τα παιδιά να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα μιας πράξης, ενώ σπάνια καλούνται να εκτιμήσουν το πλήθος ορισμένων στοιχείων ή το αποτέλεσμα μιας μέτρησης.

B. Πρόβλημα

Σύμφωνα με τον Jonassen (2000), ένα πρόβλημα μπορεί να αφορά τα Μαθηματικά αλλά και γενικότερα μια άγνωστη κατάσταση ή κάποιο σύνθετο κοινωνικό πρόβλημα. Οι Polya (1998) και Schoenfeld (1992) τονίζουν πως το πρόβλημα είναι μια προς διερεύνηση κατάσταση, την οποία οι εμπλεκόμενοι επιδιώκουν να επιλύσουν. Οι Blum και Niss (1989) και η Yee (2002) συμφωνούν με αυτόν τον ορισμό, καθώς θεωρούν πρόβλημα μία κατάσταση που δημιουργεί ανοιχτές ερωτήσεις και συμπληρώνουν πως ένα πρόβλημα μπορεί να προκαλέσει νοητικά κάποιον και να τον ωθήσει να εμπλακεί σε μια διαδικασία σκέψης. Οι Blum και Niss (1988) υπογραμμίζουν ακόμη πως δεν υπάρχει κάποιος γνωστός τρόπος για να λυθεί ένα πρόβλημα.

Ο Schoenfeld (1992) ορίζει ως μαθηματικά προβλήματα τα μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας, τόσο για την εξάσκηση των μαθηματικών δεξιοτήτων όσο και για την αξιολόγηση του επιπέδου ανάπτυξης. Ένα μαθηματικό πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τέσσερα στοιχεία: α) μια κατάσταση που περιλαμβάνει δεδομένα και έναν επιθυμητό στόχο, β) μια κατάσταση που περιλαμβάνει μαθηματικά, γ) ένα πρόσωπο που επιθυμεί την επίλυση και δ) κάποια παρεμπόδιση μεταξύ των δεδομένων και των επιθυμητών στόχων (Ohio Department of Education, 1980).

Τα μαθηματικά προβλήματα ανάλογα με τη φύση τους, τη δομή και τον τρόπο λύσης τους διαχωρίζονται σε κατηγορίες. Έτσι, τα προβλήματα μπορεί να είναι προφορικά, γραπτά, λεκτικά, εικονιστικά και περιλαμβάνουν ποσοτικές πληροφορίες (Schoenfeld, 1992). Τα λεκτικά προβλήματα είναι αυτά που συνήθως βρίσκονται στα σχολικά βιβλία και περιέχουν μέσα σε λίγες προτάσεις χρήσιμες πληροφορίες, οι οποίες οδηγούν σε συμπεράσματα (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Τα προβλήματα αυτά, συνήθως, είναι σύντομα κείμενα με πληροφορίες, οι οποίες πρέπει να αποκωδικοποιηθούν (Cummins, 1991).

Ο Polya (1981,1991) διακρίνει τρεις τύπους προβλημάτων: α) τυποποιημένα προβλήματα, β) προβλήματα εύρεσης και γ) προβλήματα απόδειξης. Τον όρο των τυποποιημένων προβλημάτων χρησιμοποιούν και οι Mayer και Wittrock (1996, στο Jonassen, 2000), οι οποίοι κατηγοριοποιούν τα προβλήματα σε τυποποιημένα, δηλαδή προβλήματα με τα οποία οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι και σε προβλήματα μη τυποποιημένα, δηλαδή προβλήματα που δεν είναι οικεία στους λύτες. Όσον αφορά τα προβλήματα εύρεσης, μπορεί να είναι αφηρημένα ή συγκεκριμένα. Στόχος ενός τέτοιου προβλήματος είναι η εύρεση του ζητουμένου, που ικανοποιεί την συνθήκη του προβλήματος. Στα προβλήματα απόδειδης στόχος είναι να αποδειχθεί ότι ένας διατυπωμένος ισχυρισμός αληθεύει ή ότι δεν αληθεύει. Τα προβλήματα αυτά αποτελούνται από δύο βασικά μέρη, την υπόθεση και το συμπέρασμα που αποδεικνύεται ή απορρίπτεται.

Η Κολέζα (2009) υποστηρίζει πως ένα ακόμη είδος μαθηματικών προβλημάτων είναι τα προβλήματα πλαισίου. Πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα αυτά μπορούν να είναι λεκτικά ή να έχουν μορφή παιχνιδιού, παραμυθιού ή σχήματος – γραφήματος, θέτουν ένα τελικό ερώτημα και μοιάζουν με τα προβλήματα που μπορεί να συναντήσει κάποιος στην καθημερινή ζωή. Τα προβλήματα πλαισίου «λειτουργούν ως πεδίο εφαρμογής μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων» (Κολέζα, 2009, σελ. 109).

Ένας ακόμη διαχωρισμός των προβλημάτων πραγματοποιείται από τον Jonassen (2000), ο οποίος κατηγοροποιεί τα προβλήματα σε καλώς δομημένα και αυτά με ελλιπή δομή. Αναλυτικότερα, τα καλώς δομημένα προβλήματα περιέχουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες και για την επίλυσή τους χρειάζεται η επιλογή και η εφαρμογή των κατάλληλων αλγορίθμων. Αυτού του είδους τα προβλήματα επιδέχονται, συνήθως, έναν τρόπο λύσης και μία απάντηση (Κολέζα, 2009). Αντίθετα, στα προβλήματα ελλιπούς δομής, σημαντικά στοιχεία παραλλείπονται, ενώ υπάρχουν διάφοροι τρόποι που οδηγούν στη λύση (Jonassen, 2000). Η Κολέζα (2009) συμπληρώνει πως σε αυτά τα προβλήματα είναι πιθανό να υπάρχει κάποια λανθασμένη πληροφορία στην εκφώνηση ή να ζητείται σύγκριση, αντιπαράθεση και γενίκευση λύσεων.

Η Sierpinska (1994) κατηγοριοποίησε τα προβλήματα χωρίζοντάς τα σε ανοιχτά και κλειστά. Τα ανοιχτά προβλήματα επιδέχονται περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, ενώ τα κλειστά δέχονται μία μόνο απάντηση. Με τον διαχωρισμό αυτό συμφωνεί και η Yee (2002), η οποία προσθέτει δύο ακόμη κατηγορίες, τις μαθηματικές διερευνήσεις και τα projects.

Β.1. Επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Η επίλυση προβλήματος είναι μια περίπλοκη δραστηριότητα κατά την οποία ο λύτης χρησιμοποιεί τις προηγούμενες γνώσεις του και εμπειρίες, τη διαίσθησή του και τις πεποιθήσεις του (Polya, 1971, στο Κολέζα, 2009). Σύμφωνα με το NCTM (2000, σελ. 51), «επίλυση προβλήματος σημαίνει εμπλοκή σε μια δραστηριότητα για την οποία η μέθοδος λύσης δεν είναι γνωστή από πριν. Με σκοπό να βρεθεί μια λύση, οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν πληροφορίες και στρατηγικές που ήδη γνωρίζουν και στη συνέχεια, μέσα από αυτή τη διαδικασία, θα αναπτύξουν τη νέα μαθηματική γνώση. Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος δεν είναι μόνο ένας στόχος για να μάθουμε μαθηματικά, αλλά επίσης και ένα κύριο μέσο για να το πετύχουμε».

Οι Καραντζής και Τσαγγάρης (2003) υποστηρίζουν πως η επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά είναι πολυδιάστατη διαδικασία. Στη διαδικασία αυτή παίζει σημαντικό ρόλο τόσο η γνώση βασικών αριθμητικών δεδομένων, των πράξεων και των αλγορίθμων, όσο και η κατανόηση της γλώσσας με την οποία εκφράζονται οι ποσοτικές σχέσεις σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Σύμφωνα με τον van de Walle (2005), οι μαθητές για να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, χρειάζεται να έχουν συλλογιστική σκέψη, να κάνουν συσχετισμούς και να αναπαριστούν το πρόβλημα.

Ο Polya (1957) υποδεικνύει ένα μοντέλο που αποτελείται από τέσσερις φάσεις σχετικά με την επίλυση προβλήματος: α) κατανόηση του προβλήματος, β) επινόηση ενός σχεδίου με επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών, γ) εκτέλεση του σχεδίου με περιγραφή των βημάτων επίλυσης και δ) επανέλεγχος της λύσης με επανεξέταση. Στην πρώτη φάση, η αναδιατύπωση του προβλήματος με διαφορετικό τρόπο είναι απαραίτητη, ώστε να θεωρηθεί πως έχει κατανοηθεί το πρόβλημα. Στη δεύτερη φάση, η «κατάστρωση σχεδίου» μπορεί να πάρει πολλές διαφορετικές μορφές (εύρεση κάποιου μοτίβου ή λύσεων σε παρόμοια προβλήματα, διαχωρισμός του προβλήματος σε μικρότερα κομμάτια, κατασκευή διαγράμματος, κατασκευή εξίσωσης, δοκιμή και απόρριψη) και εξαρτάται από τον τρόπο που ο λύτης αντιλαμβάνεται την προβληματική κατάσταση. Όσον αφορά την τρίτη φάση, η εφαρμογή του σχεδίου μπορεί να αποτύχει οδηγώντας τον λύτη σε επινόηση ενός άλλου σχεδίου. Τέλος, στην τέταρτη φάση, ο λύτης επανεξετάζει ολόκληρη τη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος.

Η επίλυση προβλήματος μπορεί να επηρεαστεί από διάφορους παράγοντες, εξωτερικούς και εσωτερικούς (Funke & Frensch, 1995). Οι εξωτερικοί αφορούν όλους εκείνους τους παράγοντες που σχετίζονται με την αναπαράσταση του προβλήματος και το μαθησιακό περιβάλλον, ενώ οι εσωτερικοί αφορούν διάφορα χαρακτηριστικά του λύτη. Στους εξωτερικούς παράγοντες ανήκουν η δομή, τα γλωσσολογικά χαρακτηριστικά και το μαθησιακό περιβάλλον (Lepik, 1990. Funke & Frensch, 1995. Jonassen, 2000). Πιο συγκεκριμένα, στη δομή συμπεριλαμβάνονται στοιχεία σχετικά με την πολυπλοκότητα καθώς και άλλα δομικά χαρακτηριστικά του προβλήματος, τα οποία αποτελούν τη σημασιολογική δομή του (Jonassen, 2003. Lepik, 1990. Funke, 1995). Επιπρόσθετα, την επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος επηρεάζουν τα γλωσσολογικά χαρακτηριστικά (Jonassen, 2003. Lepik, 1990. Huber, 1995). Στα γλωσσολογικά χαρακτηριστικά συγκαταλέγονται τόσο η διατύπωση με κατανοητό τρόπο όσο και άλλα χαρακτηριστικά, όπως ο αριθμός των λέξεων που χρησιμοποιούνται. Για την επιτυχημένη επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, βασική προϋπόθεση είναι η κατανόηση του κειμένου και στη συνέχεια η ερμηνεία και η αναπαράστασή του (Mayer, 1985). Η σημασία της γλωσσικής κατανόησης ως βασικής προϋπόθεσης για την ορθή επίλυση μαθηματικού προβλήματος φαίνεται από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι λύτες με προτάσεις που εκφράζουν σχέσεις. Τέλος, η επιτυχία επίλυσης του προβλήματος φαίνεται να επηρεάζεται από το περιβάλλον στο οποίο λειτουργεί ο λύτης, το οποίο αποτελείται από τα υποστηρικτικά εργαλεία (Jonassen et al., 2003) αλλά και το κοινωνικό περιβάλλον (Jonassen & Land, 2000).

Μια ακόμη προϋπόθεση για την ορθή επίλυση προβλήματος είναι η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Ο Siegler (2003) παρομοιάζει τη σκέψη των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων με μια «σκάλα». Οι λύτες αρχικά χρησιμοποιούν μια απλή στρατηγική και με την πάροδο του χρόνου υιοθετούν άλλες πιο εξελιγμένες στρατηγικές.

Για την επίλυσης προβλήματος σημαντική είναι η σύνδεση της απάντησης με το πλαίσιο του προβλήματος. Ο Greer (1997) αναφέρεται στην αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σωστά σε λεκτικά προβλήματα, που συνδέονται με κάποιες ρεαλιστικές καταστάσεις, καθώς αδιαφορούν για το αν αυτή η απάντηση συμφωνεί με την κοινή λογική. Η επιφανειακή ανάγνωση του προβλήματος οδηγεί στην επιλογή μιας πράξης που υποδεικνύεται από κάποιες λέξεις ή φράσεις κλειδιά, και μετά τον υπολογισμό δίνεται η απάντηση χωρίς να ελεγχθεί ξανά το πρόβλημα. Ο Reusser (1988, στο Κολέζα, 2009) πραγματοποίησε μια έρευνα σε μαθητές/-τριες της Α΄ και Β΄ δημοτικού δίνοντάς τους το εξής πρόβλημα: «Υπάρχουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκια σε ένα σκάφος. Πόσων ετών είναι ο καπετάνιος;». Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό πως τρεις στους τέσσερις μαθητές επέλεξαν την πράξη της πρόσθεσης και απάντησαν πως ο καπετάνιος ήταν 36 ετών, κάνοντας εμφανή την αδυναμία επεξεργασίας των δεδομένων και του ζητούμενου του προβλήματος.

Όπως αναφέρουν οι Lucangeli και Tressoldi και Cendron (1998, στο Jonassen, 2003), η επίλυση λεκτικών προβλημάτων απαιτεί την κατανόηση των σχετικών πληροφοριών του προβλήματος, την ικανότητα αναπαράστασης των δεδομένων, την αναγνώριση της δομής του προβλήματος και τον έλεγχο της διαδικασίας που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος.

Β.2. Δυσκολίες κατά την επίλυση προβλήματος

Οι περισσότερες δυσκολίες που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος εντοπίζονται κυρίως στο στάδιο της μετάφρασης των στοιχείων του προβλήματος σε νοερή αναπαράσταση. Σύμφωνα με τους Αγαλιώτη (2000) και Καραντζή και Τσαγγάρη (2003), η έλλειψη των νοερών αναπαραστάσεων συνήθως σχετίζεται με την ασαφή γλωσσική διατύπωση του προβλήματος και με τη δυσκολία εύρεσης των κατάλληλων λέξεων-κλειδιών για την επιλογή των αντίστοιχων μαθηματικών πράξεων. Για παράδειγμα, οι Sepeng και Madzorera (2014) με σκοπό να διερευνήσουν την ικανότητα χρήσης της μαθηματικής γλώσσας και τη γνώση λεξιλογίου σε σχέση με επίλυση προβλήματος, πραγματοποίησαν έρευνα σε μαθητές 16-17 ετών. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως το σύνολο των μαθητών παρουσίασε δυσκολίες κατανόησης του μαθηματικού λεξιλογίου και αυτό επηρέασε την επιτυχία τους στην επίλυση των λεκτικών προβλημάτων. Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα της Βοσνιάδου (1995) σχετικά με την κατανόηση των προβλημάτων από Α΄ τάξης του Δημοτικού. Συγκεκριμένα, αρκετοί ήταν οι μαθητές που αντιμετώπισαν δυσκολίες στη κατανόηση των λεκτικών προβλημάτων και στην επιλογή της κατάλληλης πράξης, ώστε να φτάσουν στη λύση του, γεγονός που ενδεχομένως οφείλεται στη σημασιολογική δομή των προβλημάτων. Ωστόσο, η δυσκολία κατανόησης του προβλήματος φαίνεται να επηρεάζει και τους ενήλικες. Αναλυτικότερα, οι Zacharos και Koustourakis (2011) πραγματοποίησαν έρευνα σε μεταπτυχιακούς φοιτητές, εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, στους οποίους παρουσίασαν τρία μαθηματικά προβλήματα χρηματικών συναλλαγών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι λύσεις που πρότειναν οι μεταπτυχιακοί φοιτητές δεν ήταν πάντα ορθές και παρουσιάζονταν με δισταγμό. Επίσης, οι συμμετέχοντες δεν κατάφεραν να ερμηνεύσουν το περιεχόμενο αυτών των προβλημάτων.

Ακόμη, η γλώσσα στην οποία παρουσιάζονται τα προβλήματα φαίνεται να επηρεάζει την επιτυχή επίλυσή τους μαθηματικών. Για παράδειγμα, όταν ο Adetula (1990) στη Νιγηρία έδωσε σε μαθητές τετάρτης τάξης δημόσιων και ιδιωτικών σχολείων 10 αριθμητικά προβλήματα παρουσιασμένα στα αγγλικά και στην τοπική τους γλώσσα βρήκε ότι όλοι οι μαθητές τόσο κατά την επίλυση όσο και αναφορικά με τις στρατηγικές που ακολούθησαν είχαν καλύτερες επιδόσεις όταν τους δόθηκαν τα προβλήματα στην τοπική τους γλώσσα. Αντίθετα, η πλειοψηφία των μαθητών αδυνατούσε να κατανοήσει τα προβλήματα όταν αυτά τους παρουσιάζονταν στα αγγλικά. Ακόμη, οι Cummins, Kintsch, Reusser και Weimer (1988), υποθέτοντας πως τα λεκτικά προβλήματα λύνονται δύσκολα λόγω της δυσκολίας κατανόησης της αφηρημένης ή διφορούμενης γλώσσας, πραγματοποίησαν έρευνα σε μαθητές 6-9 χρονών. Για τον σκοπό της έρευνας παρουσίασαν στους μαθητές προβλήματα είτε σε αριθμητική μορφή είτε λεκτικά και τους ζητήθηκε να αναδιατυπώσουν το κάθε πρόβλημα πριν ή μετά την επίλυσή του, να γράψουν το ζητούμενο σε ατελή προβλήματα λέξεων και να μοντελοποιήσουν τα προβλήματα χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα προσομοίωσης στον υπολογιστή. Βρέθηκε πως όλα τα παιδιά των έξι ετών έλυσαν τα προβλήματα όταν αυτα τους παρουσιάστηκαν με αριθμητική μορφή, ενώ μόνο το 29% αυτών των μαθητών έλυσαν αυτό το πρόβλημα όταν τους παρουσιάστηκε λεκτικά. Επίσης, οι μεγαλύτεροι μαθητές έλυναν με μεγαλύτερη δυσκολία τα λεκτικά προβλήματα σε σχέση με αυτά που παρουσιάστηκαν σε αριθμητική μορφή.

Δυσκολίες, επίσης, εντοπίζονται και στη σύνδεση των επιμέρους νοητικών αναπαραστάσεων με μια νέα νοητική αναπαράσταση μέσω της οποίας ο λύτης θα επινοήσει ένα σχέδιο επίλυσης. Το στάδιο της εκτέλεσης του σχεδίου επίλυσης μέσω συγκεκριμένων αριθμητικών πράξεων πιθανόν να παρεμποδίζει την επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος καθώς απαιτείται η γνώση των αλγορίθμων (Αγαλιώτης, 2000).

Για παράδειγμα, Οι Fischbein, Deri, Nello και Marino (1985) υποθέτοντας πως οι έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης παραμένουν συνδεδεμένες με κάποια πρωταρχικά μοντέλα (π.χ., ο πολλαπλασιασμός είναι επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, η διαίρεση μικραίνει έναν αριθμό γιατί τον μοιράζει), πραγματοποίησαν έρευνα σε 623 μαθητές 10-15 ετών. Τα παιδιά κλήθηκαν να επιλέξουν την κατάλληλη πράξη για την επίλυση 26 λεκτικών προβλημάτων. Τα λάθη που προέκυπταν από τις αρχικές πεποιθήσεις των συμμετεχόντων για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αποτελούσαν ιδιαίτερες πηγές δυσκολίας στους μαθητές όλων των ηλικιακών ομάδων, καθώς το 22% των μαθητών έδωσε λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα του πολλαπλασιασμού και το 32% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα διαίρεσης. Τα ευρήματα επιβεβαίωσαν την επίδραση του μοντέλου της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης στον πολλαπλασιασμό και του μοντέλου μερισμού στη διαίρεση. Παρόμοια, οι Bell, Swan και Taylor (1981) επιχείρησαν να ερευνήσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Για τον σκοπό της μελέτης πραγματοποίησαν έρευνα σε μαθητές 12-15 ετών, ρωτώντας τους πόσο κοστίζουν τα 0,22 γαλόνια βενζίνης εάν το ένα γαλόνι κοστίζει 1,20 δολάρια. Οι περισσότεροι μαθητές πραγματοποίησαν διαίρεση και τότε το πρόβλημα επαναλήφθηκε με πιο διαχειρίσιμους αριθμούς οδηγώντας τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν την πράξη του πολλαπλασιασμού. Οι Bell et al. (1981) επισημαίνουν πως οι μαθητές υπέθεσαν ότι τα 0,22 γαλόνια θα κοστίζουν λιγότερο από το ένα γαλόνι, οπότε οδηγήθηκαν στη πράξη της διαίρεσης πιστεύοντας πως η διαίρεση «μικραίνει» τους αριθμούς.

Τέλος, ο έλεγχος της λύσης συχνά παραλείπεται (Polya, 1945), καθώς σχεδόν ποτέ δεν επαληθεύονται τα αποτελέσματα (De Corte et al.,1982) ενώ συχνά παρατηρείται δυσκολία στην εξήγηση των ευρημάτων (Diezmann, Watters, & English, 2001). Σύμφωνα με τον Polya (1945), η μη κατανόηση του προβλήματος οφείλεται κυρίως στην έλλειψη συγκέντρωσης και είναι, ίσως, η πιο διαδεδομένη δυσκολία στην επίλυση προβλήματος. Οι λύτες εστιάζουν κυρίως στα επιφανειακά χαρακτηριστικά του προβλήματος παρά στη δομή του και συχνά παρερμηνεύουν βασικούς όρους του προβλήματος (Diezmann et al., 2001).

Ωστόσο, φαίνεται πως η διδασκαλία στην επίλυση προβλήματος βοηθάει. Ένα σχετικό παράδειγμα είναι η έρευνα των Carpenter, Hiebert και Moser (1983), οι οποίοι είχαν σκοπό να ελέγξουν την επίδραση μιας διδασκαλίας διάρκειας 2 μηνών στις διαδικασίες που χρησιμοποιούν μαθητές Α΄ τάξης του δημοτικού για να λύσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Τα παιδιά εξετάστηκαν σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης πριν και μετά από τη διδασκαλία. Μετά από τη διδασκαλία φάνηκε πως τα παιδιά χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική του διαχωρισμού για όλα τα προβλήματα αφαίρεσης. Ακόμη, βρέθηκε πως, αν και μπορούσαν να λύσουν τα προβλήματα, λίγα παιδιά κατάφεραν να συντονίσουν τις λύσεις τους με την αριθμητική πρόταση που αποτύπωναν στο χαρτί για να αντιπροσωπεύσουν το πρόβλημα. Η διδασκαλία μέσω διδακτικής παρέμβασης φαίνεται να επηρεάζει θετικά και την επίδοση ενηλίκων. Η Ersoy (2016) πραγματοποίησε έρευνα σε 26 εν δυνάμει εκπαιδευτικούς της Τουρκίας, με σκοπό να ελέγξει αν αυξήθηκαν οι γνώσεις τους και οι στρατηγικές τους στην επίλυση προβλήματος μετά από την διδασκαλία που δέχθηκαν. Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά ενθαρρυντικά αφού η απόδοση των συμμετεχόντων φάνηκε να βελτιώνεται και το 91%-96% χρησιμοποίησαν επιτυχείς στρατηγικές. Ωστόσο, οι συμμετέχοντες κατανοούσαν τα δεδομένα του προβλήματος αλλά έβρισκαν περισσότερες δυσκολίες στην ανεύρεση του ζητούμενου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2- ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 72 άτομα από τα οποία τα 37 (51,4%) ήταν μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου (ηλικίας από 11 χρονών και 4 μηνών έως 12 χρονών και 2 μηνών) με μέσο όρο ηλικίας τα 11 χρόνια και 8 μήνες. Οι υπόλοιποι 35 (48,6%) συμμετέχοντες ήταν ενήλικες (ηλικίας από 19 χρονών έως 58 χρονών και 4 μηνών) με μέσο όρο ηλικίας τα 32 χρόνια και 7 μήνες. Από το σύνολο των συμμετεχόντων οι 40 ήταν γυναίκες (21 Στ΄ τάξης και 19 ενήλικες), ενώ οι υπόλοιποι 32 ήταν άνδρες (16 Στ΄ τάξης και 16 ενήλικες).

Όλοι οι μαθητές της Στ΄ τάξης φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της ευρύτερης περιοχής της Καρδίτσας και προέρχονταν από διάφορα κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Επίσης, οι ενήλικες κάλυπταν μια ποικιλία επιπέδων εκπαίδευσης. Πιο αναλυτικά, οι 12 (34,3%) από αυτούς ήταν απόφοιτοι Λυκείου, οι 6 (17,1%) ήταν απόφοιτοι Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος (ΤΕΙ), οι 12 (34,3%) είχαν αποφοιτήσει από Ανάτωτα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (ΑΕΙ), ενώ οι υπόλοιποι 5 (14,3%) ήταν κάτοχοι Μεταπτυχιακών σπουδών. Η επιλογή του συνόλου των συμμετεχόντων έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας.

2.2 Σχεδιασμός της έρευνας- εργαλείο έρευνας

Για τον σκοπό της παρούσας έρευνας σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες δύο Έργα, ένα Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) κι ένα Έργο Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2).

Το **Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης** ζητούσε από τους συμμετέχοντες να εκτελέσουν υπολογιστικές εκτιμήσεις χωρίς τη χρήση μέσων και χωρίς την πραγματοποίηση ακριβών υπολογισμών. Το Έργο αυτό αποτελούνταν από συνολικά 8 δοκιμασίες, οι οποίες διαμορφώθηκαν στη βάση δύο διαφορετικών συνθηκών: το είδος της πράξης (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση) και το είδος των αριθμών (φυσικοί αριθμοί, ρητοί αριθμοί). Πιο αναλυτικά, υπήρχαν δύο δοκιμασίες για κάθε αριθμητική πράξη (δύο προσθέσεις, δύο αφαιρέσεις, δύο πολλαπλασιασμοί και δύο διαιρέσεις), ώστε να ελεγχθεί εάν η επιτυχία στην υπολογιστική εκτίμηση επηρεάζεται από το είδος της αριθμητικής πράξης.

Επίσης, με σκοπό να ελεγχθεί εάν το είδος των αριθμών (φυσικοί, ρητοί) επηρεάζει την ικανότητα της υπολογιστικής εκτίμησης, σε κάθε αριθμητική πράξη, μια δοκιμασία αφορούσε φυσικούς αριθμούς (π.χ., 476+338= ? , 48x76= ?) και μια ρητούς αριθμούς. Οι φυσικοί αριθμοί που επιλέχθηκαν ήταν διψήφιοι και τριψήφιοι και το αποτέλεσμα των πράξεων με αυτούς δεν ξεπερνούσε το 3.500. Όσον αφορά τους ρητούς αριθμούς έγινε χρήση τόσο των δεκαδικών αριθμών όσο και των κλασμάτων (π.χ., 0,8+0,02=? , 13/16 – 2/6= ?).

Σε κάθε δοκιμασία ως επιτυχής απάντηση θεωρήθηκε κάθε απάντηση που δεν είχε μεγαλύτερη απόκλιση από το 20% του ακριβούς αποτελέσματος (+/- 20%). Για παράδειγμα, στην πρόσθεση 0,8+0,02, όπου το ακριβές αποτέλεσμα είναι 0,82, σωστές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις, οι οποίες κυμαίνονταν μεταξύ του 0,65 και του 1. Στον Πίνακα 2.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι δοκιμασίες του Έργου της Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς το είδος της αριθμητικής πράξης και το είδος των αριθμών.

Το **Έργο της Επίλυσης Προβλήματος** αποτελούνταν από συνολικά οχτώ δοκιμασίες και ζητούσε από τους συμμετέχοντες να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα, τα οποία αναφέρονταν σε τέσσερις συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές: αριθμητικές πράξεις, γεωμετρία, πιθανότητες και μοτίβα. Συγκεκριμένα, υπήρχαν δύο προβλήματα για κάθε μια περιοχή που αναφέρονταν σε καταστάσεις καθημερινής ζωής.

Το Έργο της Επίλυσης Προβλήματος βασίστηκε και επέκτεινε το εργαλείο των Gurbuz και Erdem (2016). Συγκεκριμένα, στις δοκιμασίες Α, Β και Γ πραγματοποιήθηκαν είτε λεκτικές είτε αριθμητικές τροποποιήσεις με σκοπό την καλύτερη διατύπωση και κατανόηση του περιεχομένου των προβλημάτων. Ακόμη, η δοκιμασία Δ παρέμεινε αυτούσια, ενώ οι δοκιμασίες Ε και Στ σχεδιάστηκαν εκ νέου. Στον Πίνακα 2.2 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος και η μαθηματική περιοχή στην οποία αναφέρονται.

<u>Πίνακας 2.1:</u> Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης ως προς το είδος της αριθμητικής πράξης και το είδος των αριθμών

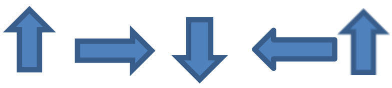
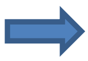
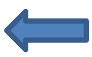
Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, εκτιμήστε περίπου το αποτέλεσμα κάθε πράξης. Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας.

Δοκιμασίες	Πράξη	Είδος των αριθμών
Α) 476 + 338= α) Περίπου 700 β) Περίπου 800 γ) Περίπου 1000	Πρόσθεση	Φυσικοί
Β) 0,8 + 0,02= α) περίπου 0,5 β) περίπου 0 γ) περίπου 1	Πρόσθεση	Ρητοί
Γ) 836 – 628= α) Περίπου 100 β) Περίπου 200 γ) Περίπου 300	Αφαίρεση	Φυσικοί
Δ) $\frac{13}{16} - \frac{2}{6} =$ α) Περίπου 0 β) Περίπου $\frac{1}{2}$ γ) Περίπου 1	Αφαίρεση	Ρητοί
Ε) 48x76= α) Περίπου 2.500 β) Περίπου 3.000 γ) Περίπου 3.500	Πολλαπλασιασμός	Φυσικοί
ΣΤ) $\frac{9}{11} \times \frac{2}{9} =$ α) Περίπου 0 β) Περίπου $\frac{1}{2}$ γ) Περίπου 1	Πολλαπλασιασμός	Ρητοί
Ζ) 848 : 74= α) Περίπου 10 β) Περίπου 20 γ) Περίπου 100	Διαίρεση	Φυσικοί
Η) 19,08 : 0,6= α) Περίπου 10 β) Περίπου 20 γ) Περίπου 30	Διαίρεση	Ρητοί

Πίνακας 2.2: Έργο Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή.

Μπορείτε να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας.

Δοκιμασίες	**Μαθηματική περιοχή**
Α) Σε μια πόλη υπάρχουν 5 σχολεία με 12 τμήματα σε κάθε σχολείο. Σε κάθε τμήμα υπάρχουν 20 μαθητές. Αν χωρίζαμε ισάριθμα αυτούς τους μαθητές σε 10 σχολεία, πόσοι μαθητές θα υπήρχαν σε κάθε σχολείο; α) 120 β) 100 γ) 150	Αριθμητικές πράξεις
Β) Ένα δελφίνι πήδηξε 8 μέτρα ψηλά από μια πισίνα που έχει βάθος 3 μέτρα. Πόσα μέτρα ψηλά πήδηξε το δελφίνι από την επιφάνεια του νερού; α) 12μ. β) 5μ. γ) 11μ.	Αριθμητικές πράξεις
Γ) Οι νέοι γενικά οδηγούν γρήγορα. Οι μεγαλύτεροι, αν και οδηγούν πιο αργά, έχουν συχνά έλλειψη προσοχής. Παρατηρήθηκε ότι στα 25 από τα 50 ατυχήματα που έγιναν τον προηγούμενο μήνα σε μια πόλη, οι οδηγοί ήταν νέοι. Πιστεύετε ότι ο οδηγός σε ένα πιθανό 51^{o} ατύχημα θα είναι νέος ή άτομο μεγαλύτερης ηλικίας; α) Ο οδηγός θα είναι νέος. β) Ο οδηγός θα είναι άτομο μεγαλύτερης ηλικίας. γ) Οι πιθανότητες να είναι ο οδηγός είτε νέος είτε άτομο μεγαλύτερης ηλικίας είναι ίσες.	Πιθανότητες
Δ) Η περιοχή που καλύπτεται από νερό στη γη είναι μεγαλύτερη από αυτή που καλύπτεται από στεριά. Από στιγμή σε στιγμή μερικοί μετεωρίτες πρόκειται να πέσουν σε κάποιο σημείο της γης. Νομίζετε πως η πιθανότητα να πέσουν οι μετεωρίτες στη στεριά είναι μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να πέσουν στο νερό; α) Η πιθανότητα να πέσουν στη στεριά είναι μεγαλύτερη. β) Η πιθανότητα να πέσουν στο νερό είναι μεγαλύτερη. γ) Οι πιθανότητες να πέσουν είτε στη στεριά είτε στο νερό είναι ίσες.	Πιθανότητες
Ε) Ένας αγρότης έχει δύο κήπους σε σχήμα τετραγώνου και θέλει να σπείρει ντομάτες στον μεγαλύτερο κήπο. Για τον έναν κήπο ξέρει πως το εμβαδόν του είναι 36 τετραγωνικά μέτρα και για τον άλλο κήπο ξέρει πως η περίμετρός του είναι 28 μέτρα. Σε ποιον κήπο τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες; α) Τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες στον κήπο που έχει εμβαδόν 36 τ.μ. β) Τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες στον κήπο που έχει περίμετρο 28μ. γ) Σε όποιον από τους δύο κήπους και να σπείρει ντομάτες είναι το ίδιο.	Γεωμετρία

ΣΤ) Δύο άνθρωποι κοιτούν προς την ίδια κατεύθυνση. Ο ένας κάνει μια στροφή 180 μοιρών και ο άλλος μια στροφή 360 μοιρών. Πού κοιτάζει ο καθένας τώρα; α) Και οι δύο κοιτούν προς την αρχική κατεύθυνση. β) Ο ένας κοιτάζει την αρχική κατεύθυνση και ο άλλος την αντίθετη της αρχικής. γ) Και οι δύο κοιτούν διαφορετικές κατευθύνσεις από την αρχική.	Γεωμετρία
Ζ) Ποιος αριθμός μπορεί να ολοκληρώσει το μοτίβο των αριθμών που δίνονται: $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ?, 1, 2 α) $\frac{1}{3}$ β) $\frac{1}{5}$ γ) $\frac{1}{2}$	Αριθμητικό μοτίβο
Η) Ποιο σχήμα ακολουθεί στο μοτίβο που δίνεται:  ? α)  β)  γ) 	Γεωμετρικό μοτίβο

Στην παρούσα έρευνα τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες κατανεμήθηκαν τυχαία και ισάριθμα σε δύο ομάδες (ομάδα Α και ομάδα Β) ανάλογα με τον τρόπο που τους παρουσιάστηκαν τα Έργα. Στους συμμετέχοντες της ομάδας Α, το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης παρουσιάστηκε ως Έργο ανοιχτού τύπου απαντήσεων, ενώ το Έργο της Επίλυσης Προβλήματος παρουσιάστηκε ως Έργο κλειστού τύπου απαντήσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες της ομάδας Α στο Έργο 1, κλήθηκαν να δώσουν ελεύθερα μια απάντηση, η οποία προέκυπτε από την εκτίμηση που οι ίδιοι εκτελούσαν, ενώ στο Έργο 2, της Επίλυσης Προβλήματος, κλήθηκαν να επιλέξουν ανάμεσα σε τρεις απαντήσεις που τους δίνονταν. Οι επιλογές απαντήσεως στο Έργο 2 σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε, ανάλογα με τη μαθηματική περιοχή που ανήκε το κάθε πρόβλημα, μόνο η μία απάντηση μπορούσε να ληφθεί ως ακριβής και κατ΄επέκταση σωστή. Στους συμμετέχοντες της Ομάδας Β, παρουσιάζονταν τρεις επιλογές απαντήσεων στο Έργο 1 και κλήθηκαν να επιλέξουν μια από αυτές. Οι απαντήσεις σχεδιάστηκαν με βάση το ακριβές αποτέλεσμα των πράξεων και με τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλιστεί πως μόνο η μία θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επιτυχής εκτίμηση καθώς οι άλλες δύο απείχαν αρκετά από το ακριβές αποτέλεσμα της κάθε πράξης. Το Έργο 2, παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες της Ομάδας Β χωρίς επιλογές απάντησεων. Στον Πίνακα 2.3 που ακολουθεί παρουσιάζεται ο τρόπος που δόθηκαν τα Έργα στην ομάδα Α και στην ομάδα Β.

Πίνακας 2.3: Τρόπος παρουσίασης των Έργων ως προς την Ομάδα

	Έργο 1	**Έργο 2**
Ομάδα Α	Χωρίς επιλογή απαντήσεων	Με επιλογή απαντήσεων
Ομάδα Β	Με επιλογή απαντήσεων	Χωρίς επιλογή απαντήσεων

Συνοψίζοντας, σε όλους τους συμμετέχοντες δόθηκαν συνολικά 16 δοκιμασίες, ισάριθμα προερχόμενες από τα δύο Έργα, τα οποία τους παρουσιάστηκαν με την ίδια σειρά.

2.3 Διαδικασία

Όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά σε έναν χώρο όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, ώστε να μειωθεί η πιθανότητα διάσπασης της προσοχής τους αλλά και να εκφράσουν ελεύθερα τη σκέψη τους. Πιο συγκεκριμένα, κάθε παιδί της Στ΄ τάξης μεταφερόταν από την αίθουσα διδασκαλίας στη βιβλιοθήκη του σχολείου, ενώ οι ενήλικες εξετάστηκαν σε κάποιο κενό δωμάτιο της οικίας τους. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και εθελοντική. Πριν ξεκινήσει η έρευνα, έγινε γνωστό στα παιδιά της Στ΄ τάξης ότι η διαδικασία στην οποία θα λάβουν μέρος δεν συνδέεται με την αξιολόγησή τους στα σχολικά μαθήματα. Έπειτα από μια τυπική γνωριμία με την ερευνήτρια παρουσιαζόταν το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) στους συμμετέχοντες. Από την αρχή της διαδικασίας, οι συμμετέχοντες γνώριζαν πως οι δοκιμασίες που ακολουθούσαν απαιτούσαν εκτίμηση και όχι ακριβείς υπολογισμούς και τους δόθηκε ένα παράδειγμα υπολογιστικής εκτίμησης. Όταν οι συμμετέχοντες ολοκλήρωναν τις δοκιμασίες του Έργου 1, παρουσιαζόταν το Έργο της Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2). Στο Έργο 2 η χρήση χαρτιού και μολυβιού επιτρεπόταν μόνο για σύντομες σημειώσεις.

Κάθε δοκιμασία παρουσιαζόταν σε ξεχωριστή καρτέλα η οποία παρέμενε μπροστά στους συμμετέχοντες μέχρι να δοθεί η απάντησή τους. Μετά την ανακοίνωση της απάντησης οι συμμετέχοντες καλούνταν να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης που τους οδήγησε στη συγκεκριμένη απάντηση. Τόσο οι απαντήσεις όσο και ο τρόπος σκέψης του κάθε συμμετέχοντα σημειώνονταν σε πρωτόκολλο που σχεδιάστηκε ειδικά για τις δοκιμασίες της παρούσας έρευνας και παρατίθεται στο Παράρτημα. Όλη η διαδικασία διήρκεσε περίπου 15΄-20΄ για κάθε συμμετέχοντα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας και αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα στατιστικά στοιχεία της γενικής επίδοσης των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα (Στ΄ τάξη και ενήλικες), φύλο και τρόπο παρουσίασης των Έργων (Α΄ και Β΄ ομάδα). Στο δεύτερο μέρος εξετάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στα δύο Έργα, και τέλος, στο τρίτο μέρος ελέγχονται οι συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και την επίδοση των συμμετεχόντων τόσο στο σύνολο των Έργων όσο και σε κάθε Έργο ξεχωριστά.

3.1. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων

Η συνολική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών ξεπέρασε το 68%.

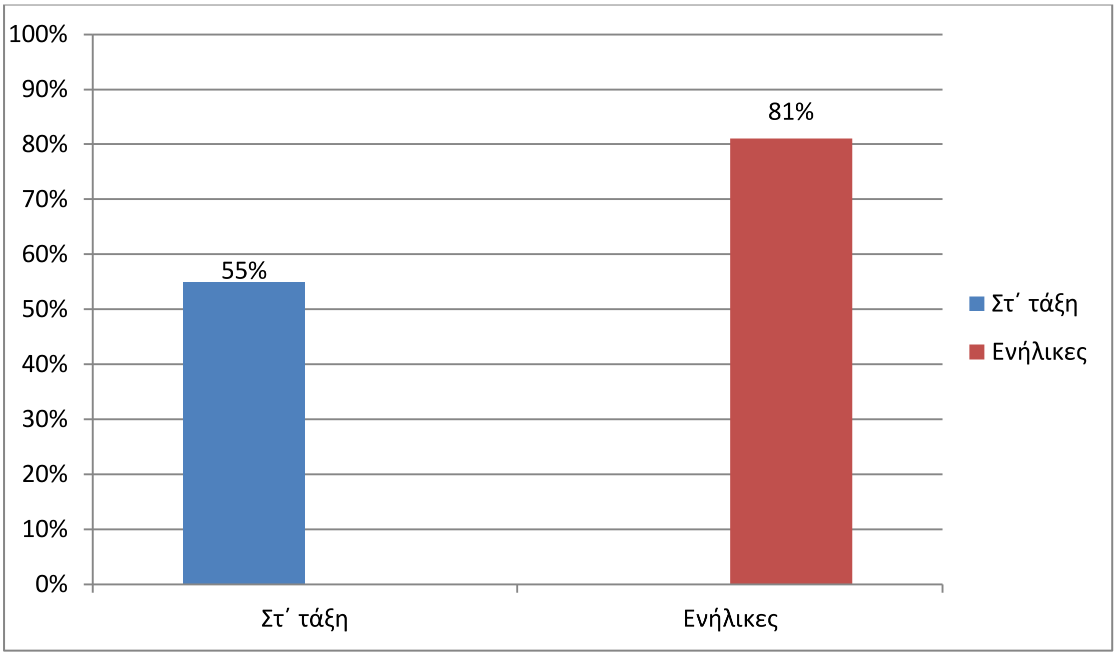
3.1.1. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ανά ηλικιακή ομάδα

Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών επηρεάστηκε από την ηλικιακή ομάδα στην οποία ανήκαν, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα.[1] Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη συνολική επίδοση (Σχήμα 1) των συμμετεχόντων ως προς την ηλικιακή ομάδα ($t= -5{,}726$, $df=70$, $p<.001$). Συγκεκριμένα, οι ενήλικες εμφάνισαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση (81%) από τα παιδιά της Στ΄ τάξης (55%).

[1] Το t-Test χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των μέσων όρων δύο συνόλων τιμών που διαφέρουν ως προς ένα χαρακτηριστικό. Η μηδενική υπόθεση στο συγκεκριμένο τεστ ελέγχου είναι ότι οι μέσοι όροι των δύο ομάδων δε διαφέρουν μεταξύ τους και η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι οι μέσοι όροι διαφέρουν μεταξύ τους (Field, 2009).

Σχήμα 1

Επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς την ηλικιακή ομάδα

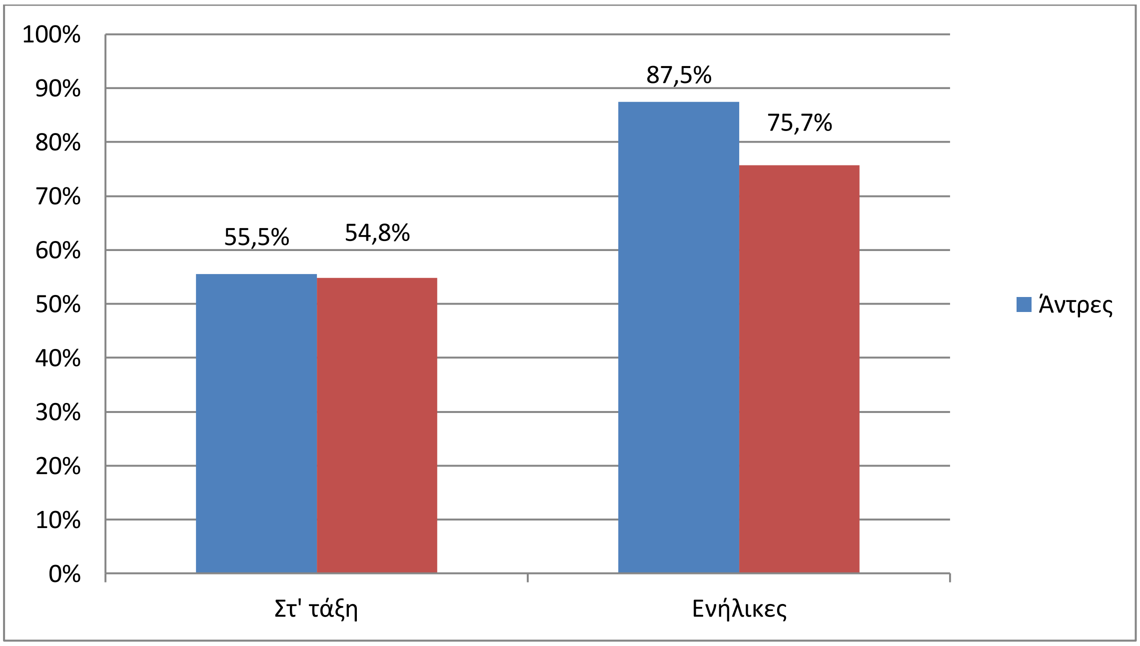


3.1.2. Γενική επίδοση των συμμετεχόντων ανά φύλο

Η ανάλυση t-test για ανεξάρτητα δείγματα που πραγματοποιήθηκε με σκοπό να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων σε όλες τις δοκιμασίες διαφοροποιείται ως προς το φύλο, δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές (t= 1,241, df=70, p=.219): οι άντρες εμφάνισαν παρόμοια επίδοση με τις γυναίκες (71,5% και 64,7%, αντίστοιχα). Όταν η ίδια ανάλυση επαναλήφθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα αρχικά αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Αναλυτικότερα, τα αγόρια και τα κορίτσια της Στ΄ τάξης είχαν παρόμοιες επιδόσεις (t=,118, df=35, p=.907). Παρόμοιες μεταξύ τους ήταν και οι επιδόσεις των ενηλίκων αντρών και γυναικών (t=1,740, df=33, p=.091). Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ανά φύλο.

Σχήμα 2

Επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς ηλικιακή ομάδα και φύλο



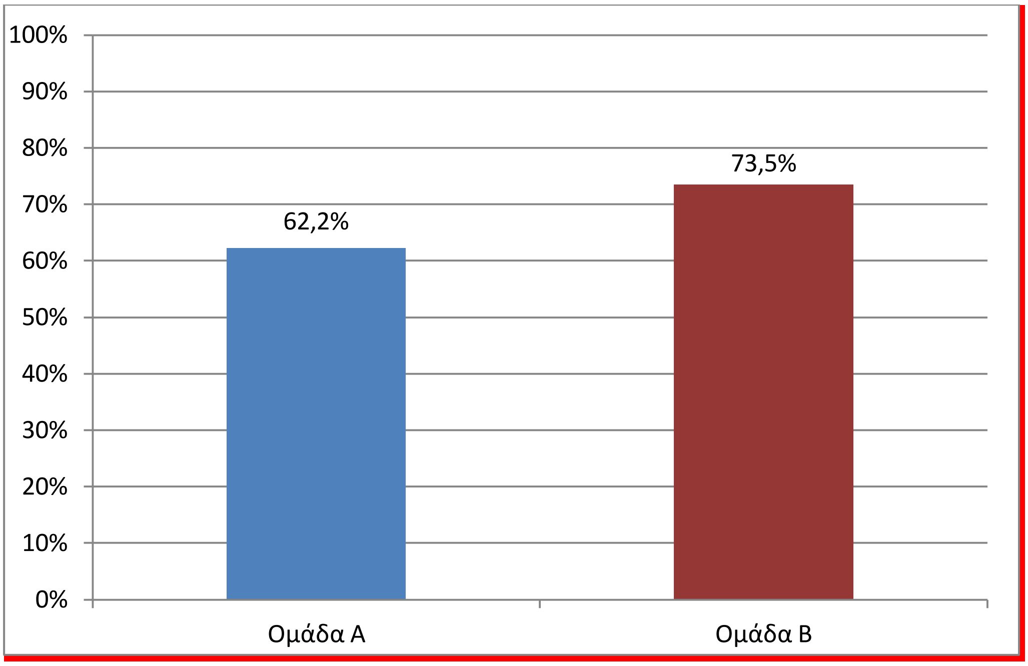
<u>3.1.3. Γενική επίδοση των μαθητών/-τριών ως προς τον τρόπο παρουσίασης των Έργων</u>

Προκειμένου να ερευνηθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών επηρεάστηκε από τον τρόπο παρουσίασης[2] των δύο Έργων, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε πως υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη γενική επίδοση των συμμετεχόντων ανά ομάδα ($t= -2,140$, $df=70$, $p< .05$), με τους συμμετέχοντες της Ομάδας Β, να παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση (73,5%) από τους συμμετέχοντες της Α Ομάδας (62,2%). Το Σχήμα 3 παρουσιάζει το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ανά Ομάδα.

[2] Ομάδα Α: το Έργο 1 παρουσιάστηκε χωρίς επιλογές απαντήσεων και το Έργο 2 με επιλογές απαντήσεων .
Ομάδα Β: το Έργο 1 παρουσιάστηκε με επιλογές απαντήσεων ενώ το Έργο 2 χωρίς επιλογές απαντήσεων.

Σχήμα 3

Επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών ως προς τον τρόπο παρουσίασης



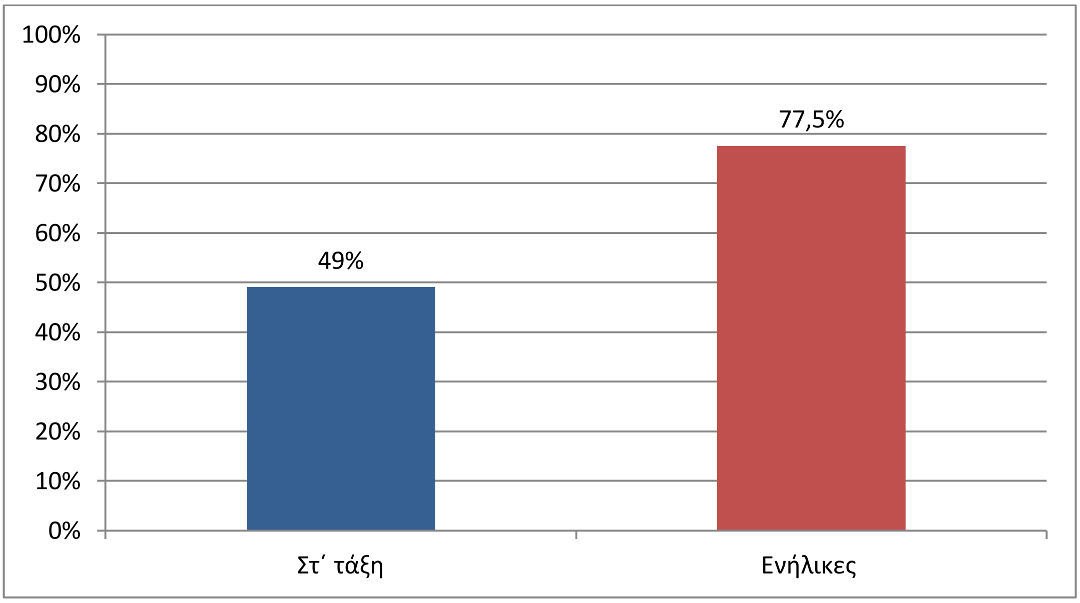
3.2. Επίδοση στα Έργα

3.2.1. Επίδοση στο Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1) ως προς την ηλικιακή ομάδα

Με σκοπό να ερευνηθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 1 επηρεάστηκε από την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως η ηλικιακή ομάδα επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επίδοσή τους ($t= -,5,333$, $df=70$, $p<.001$). Αναλυτικότερα, βρέθηκε πως οι ενήλικες είχαν καλύτερες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 (77,5%) από τα παιδιά της Στ΄τάξης (49%). Στο Σχήμα 4 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 4

Επίδοση στο Έργο 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα



3.2.2. Επίδοση στο Έργο 1 ως προς το φύλο

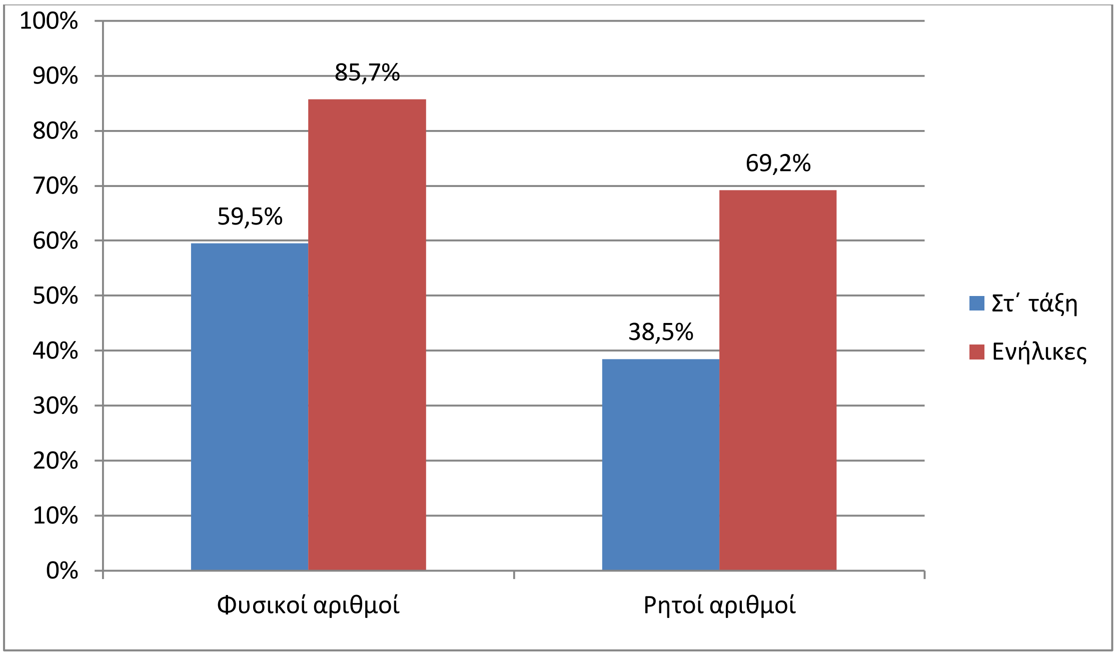
Με σκοπό να ερευνηθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 1 επηρεάστηκε από το φύλο, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως το φύλο των συμμετεχόντων δεν επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επίδοσή τους στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης ($t=1{,}583$, $df=70$, $p=.118$): οι συμμετέχοντες, άντρες και γυναίκες, και των δύο ηλικιακών ομάδων απάντησαν με παρόμοιο τρόπο στις δοκιμασίες του Έργου 1 (68,4% και 58,5%, αντίστοιχα).

3.2.3. Επίδοση στο Έργο 1 ως προς το είδος των αριθμών (φυσικοί, ρητοί)

Προκειμένου να εξεταστεί εάν το είδος των αριθμών (φυσικοί, ρητοί) επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση έδειξε ότι όλοι οι συμμετέχοντες είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες με φυσικούς αριθμούς (72,2%) σε σχέση με τις δοκιμασίες με ρητούς αριθμούς (53,5%) ($t=5{,}606$, $df=71$, $p<.001$). Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε τόσο για τους/τις μαθητές/-τριες της Στ΄ τάξης (t=3,980, df=36, p<.001) όσο και για τους ενήλικες (t=4,015, df=34, p<.001): οι δοκιμασίες που αφορούσαν φυσικούς αριθμούς ήταν πιο εύκολες από τις δοκιμασίες που αφορούσαν ρητούς αριθμούς. Στο Σχήμα 5 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με φυσικούς και ρητούς αριθμούς του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 5

Επίδοση στις δοκιμασίες με φυσικούς και ρητούς αριθμούς του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα

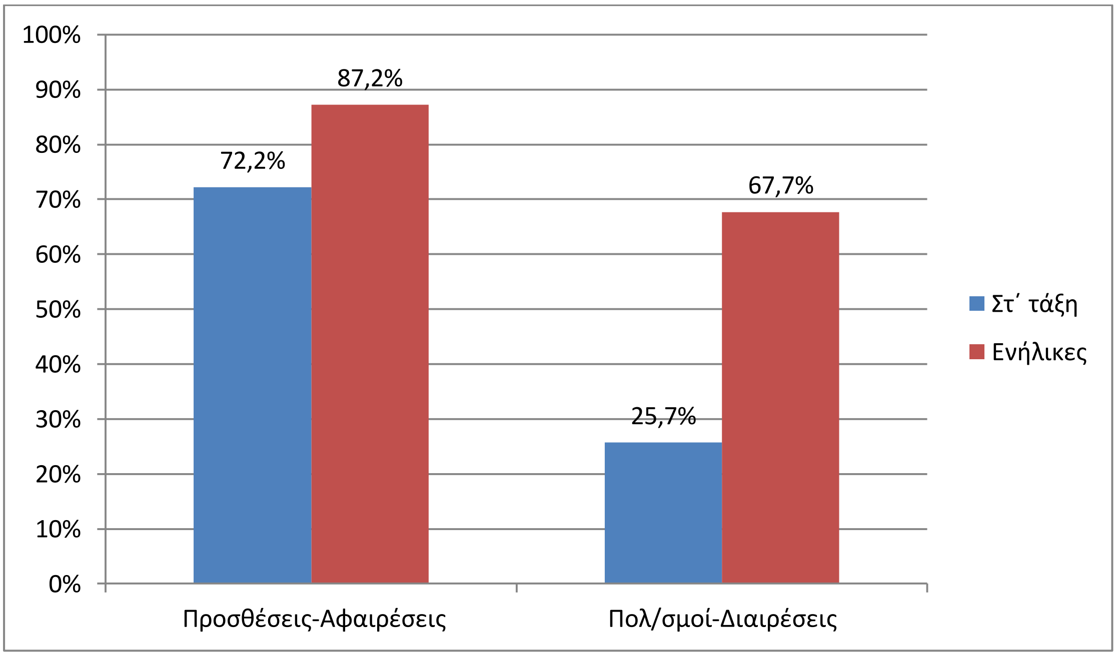


3.2.4. Επίδοση στο Έργο 1 ως προς το είδος της αριθμητικής πράξης (πρόσθεση-αφαίρεση, πολλαπλασιασμός-διαίρεση)

Πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες ώστε να εξεταστεί εάν το είδος της αριθμητικής πράξης επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως το σύνολο των συμμετεχόντων είχε στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες που αφορούσαν πρόσθεση και αφαίρεση (79,5%) σε σχέση με τις δοκιμασίες που αφορούσαν πολλαπλασιασμό και διαίρεση (46,2%) (t=9,173, df=71, p<.001). Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, τόσο τα παιδιά της Στ΄ τάξης (t=10,223, df=36, p<.001) όσο και οι ενήλικες (t=4,098, df=34, p<.001) εμφάνισαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες που αφορούσαν προσθέσεις και αφαιρέσεις συγκριτικά με αυτές που αφορούσαν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. Στο Σχήμα 6 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με προσθέσεις /αφαιρέσεις και στις δοκιμασίες με πολλαπλασιασμούς /διαιρέσεις του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 6

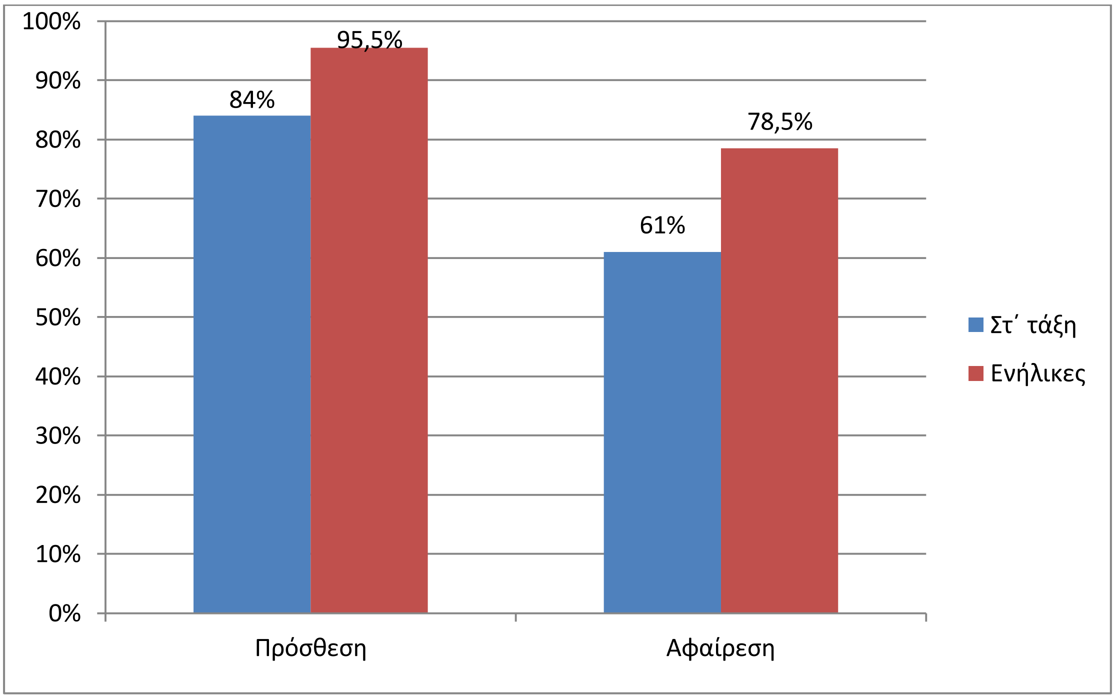
Επίδοση στο Έργο 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα και την αριθμητική πράξη



Περαιτέρω εφαρμόστηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες ώστε να ελεγχθεί η επίδοση των συμμετεχόντων σε κάθε αριθμητική πράξη ξεχωριστά. Το σύνολο των συμμετεχόντων είχε στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις δοκιμασίες πρόσθεσης (89,5%) συγκριτικά με τις δοκιμασίες αφαίρεσης (69,5%) (t=5,964, df=71, p<.001). Αυτή η διαφορά επιβεβαιώθηκε τόσο για τους μαθητές της Στ΄ τάξης (t=4,617, df=36, p<.001) όσο και για τους ενήλικες (t=3,762, df=34, p<.01). Στο Σχήμα 7 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες της πρόσθεσης και στις δοκιμασίες της αφαίρεσης.

Σχήμα 7

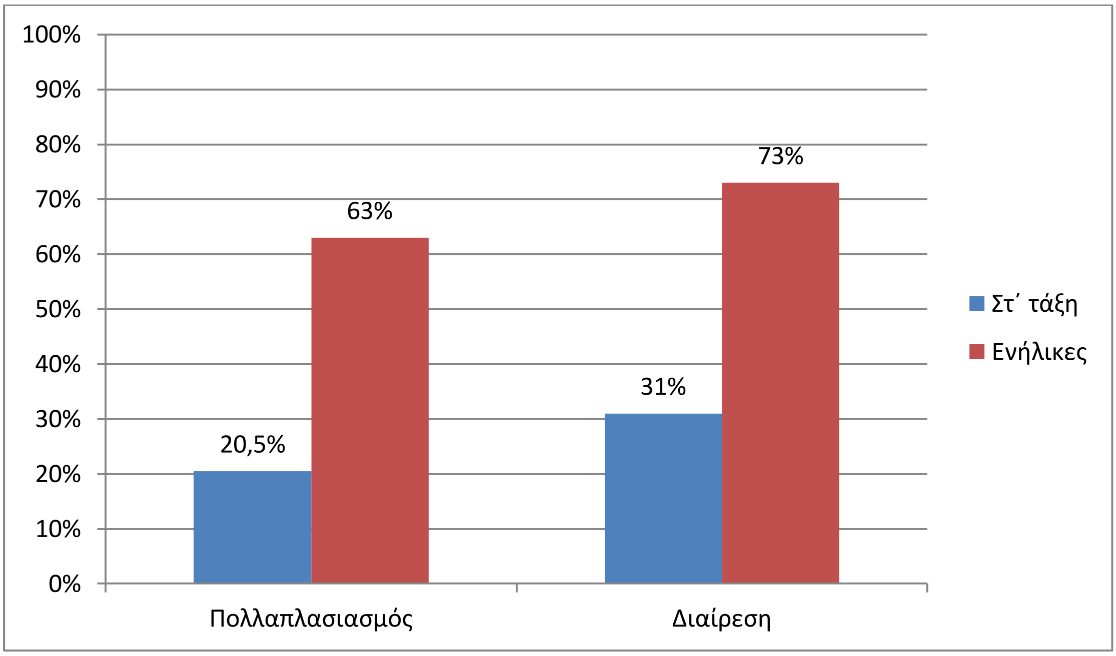
Επίδοση στις δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα



Όσον αφορά στις δοκιμασίες που αφορούσαν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, όλοι οι συμμετέχοντες είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες που αφορούσαν διαίρεση (51,5%) σε σχέση με τις δοκιμασίες που αφορούσαν πολλαπλασιασμό (41%) ($t=-2{,}249$, $df=71$, $p<.05$). Ωστόσο, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, δεν βρέθηκαν ούτε στα παιδιά της Στ΄ τάξης ούτε στους ενήλικες στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις μεταξύ των δοκιμασιών της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού ($t=-1{,}484$, $df=36$, $p=.146$ και $t=-1{,}747$, $df=34$, $p=.090$, αντίστοιχα για Στ΄ τάξη και ενήλικες). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 8 που ακολουθεί.

Σχήμα 8

Επίδοση στις δοκιμασίες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης του Έργου 1 ως προς την ηλικιακή ομάδα



3.2.5. Επίδοση στο Έργο 1 ως προς τον τρόπο παρουσίασης

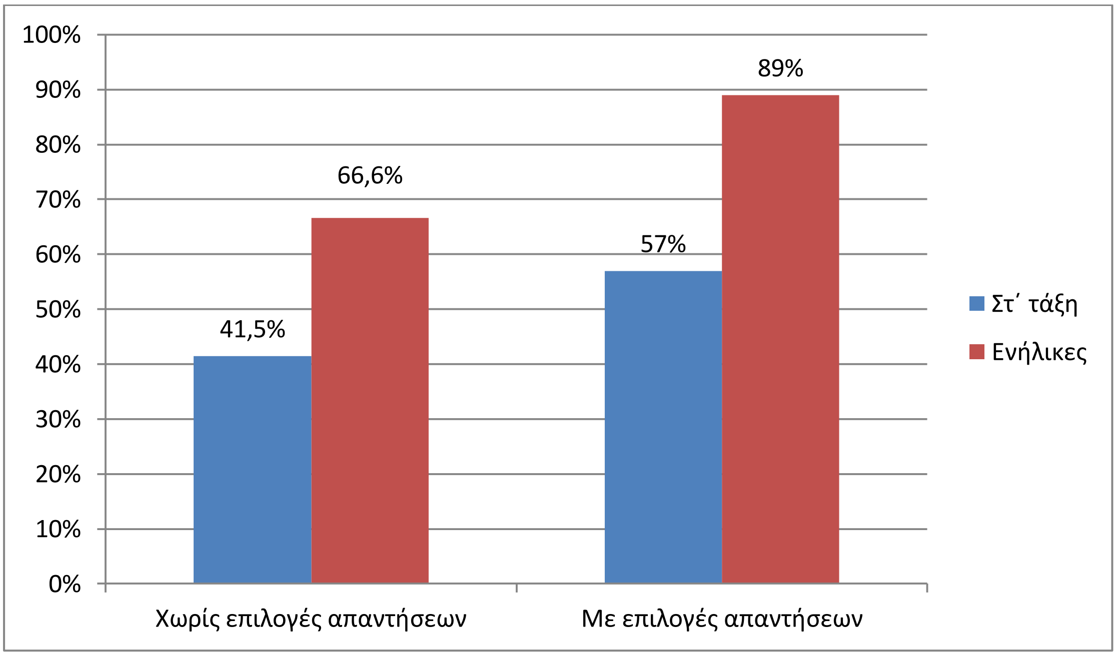
Προκειμένου να ελεγχθεί εάν η ομάδα[3], στην οποία τυχαία κατανεμήθηκαν οι συμμετέχοντες, επηρέασε το σύνολο των σωστών απαντήσεων στις δοκιμασίες του Έργου 1, πραγματοποιήθηκε t- test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε πως η ομάδα επηρέασε τις απαντήσεις των συμμετεχόντων ($t=-3{,}168$, $df=70$, $p<.01$). Αναλυτικότερα, όσοι είδαν τις δοκιμασίες του Έργου 1 με επιλογές απαντησεων είχαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 1 (72,5%) σε σχέση με τους συμμετέχοντες της Ομάδας Α (53,7%). Στις επιμέρους αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά,

[3] Ομάδα Α: Το Έργο 1 παρουσιάστηκε χωρίς επιλογές απαντήσεων.
Ομάδα Β: Το Έργο 1 παρουσιάστηκε με επιλογές απαντήσεων.

αυτές οι διαφορές επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, βρέθηκε πως οι μαθητές της Στ΄ τάξης και οι ενήλικες που είδαν το Έργο 1 με επιλογές απαντήσεων (Ομάδα Β) παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση σε όλες τις δοκιμασίες αυτού του Έργου σε σχέση με τα παιδιά της Στ΄ τάξης και τους ενήλικες που δεν είχαν επιλογές απαντήσεων (Ομάδα Α) ($t=-2{,}733$, $df=35$, $p<.05$ και $t=-2{,}747$, $df=33$, $p<.05$, αντίστοιχα). Το Σχήμα 9 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτά τα στοιχεία.

Σχήμα 9

Επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου 1 ως προς τον τρόπο παρουσίασης



3.2.6. Στρατηγικές των συμμετεχόντων

Από όλους τους συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από το αν οι απαντήσεις τους ήταν σωστές ή λανθασμένες, ζητήθηκε να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης που τους οδηγούσε στην απάντηση κάθε δοκιμασίας του Έργου 1. Οι απαντήσεις τους αυτές έδειχναν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης που ακολούθησαν και ταξινομήθηκαν στις παρακάτω πέντε κατηγορίες:

1: ¨Δεν ξέρω¨. Οι συμμετέχοντες/-ουσες που οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία απάντησαν πώς δεν ξέρουν τον ακριβή τρόπο που τους οδήγησε στο αποτέλεσμα ή πως απλά έτσι το βρήκαν.

2: ¨Στρογγυλοποίηση¨. Οι συμμετέχοντες που χρησιμοποίησαν αυτή τη στρατηγική ακολούθησαν δύο βήματα Αρχικά, στρογγυλοποιούσαν τους αριθμούς σε μια προεπιλεγμένη θεσιακή αξία και στη συνέχεια πραγματοποιούσαν με τους νέους αριθμούς την εκτίμηση νοερά (π.χ., 476+338: *500+300=800*).

3: ¨Περικοπή¨. Στη συγκεκριμένη στρατηγική, οι συμμετέχοντες διατηρούσαν σταθερό το αριστερό ψηφίο, δηλαδή το ψηφίο με τη μεγαλύτερη θεσιακή αξία, ή και περισσότερα ψηφία και μετέτρεπαν τα υπόλοιπα ψηφία σε μηδενικά (π.χ., 476+338: *470+330= 800*).

4: ¨Αλγόριθμος¨. Αυτή τη στρατηγική εμφάνισαν οι συμμετέχοντες που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο του τυπικού αλγόριθμου νοερά. Όταν έπρεπε να αιτιολογήσουν τον τρόπο που έφτασαν στο εκάστοτε αποτέλεσμα, απαντούσαν πως εκτέλεσαν στο μυαλό τους τον αλγόριθμο όπως θα το έκαναν στο χαρτί.

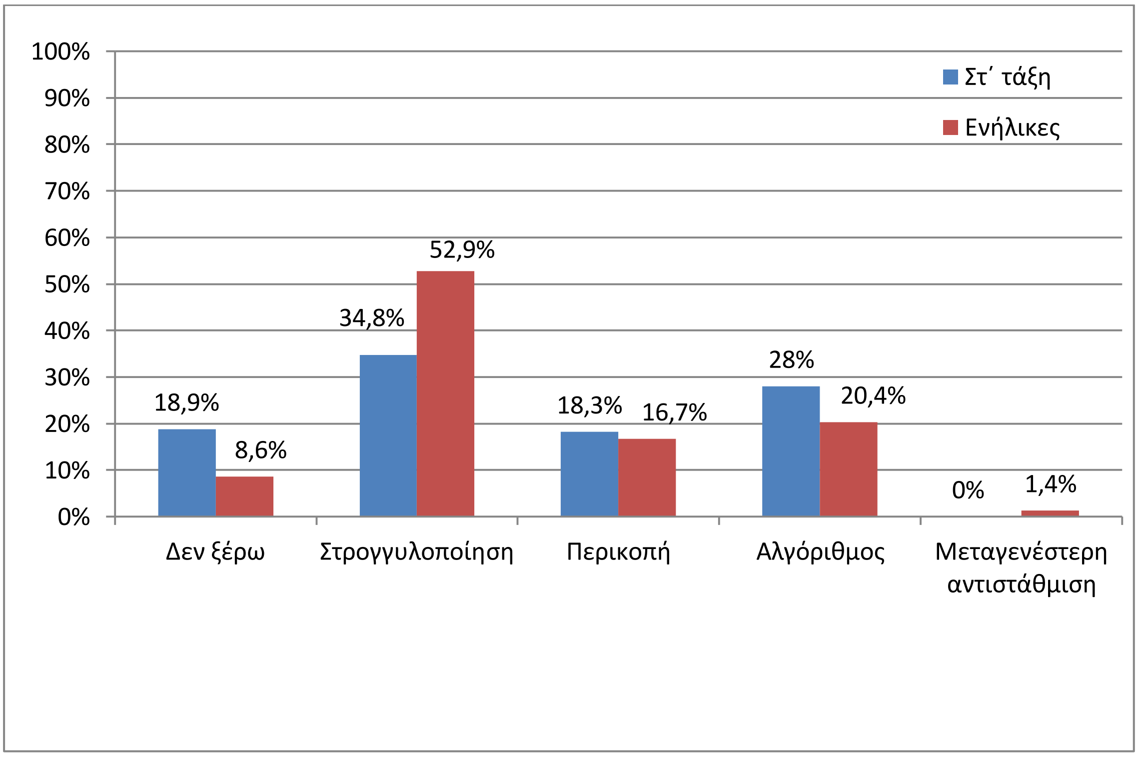
5: ¨Μεταγενέστερη αντιστάθμιση¨. Οι συμμετέχοντες που χρησιμοποίησαν αυτή τη στρατηγική αρχικά πραγματοποίησαν μια εκτίμηση και στη συνέχεια προσάρμοσαν τους αριθμούς, με σκοπό να διορθώσουν την αρχική τους εκτίμηση ώστε η απάντησή τους να είναι πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα (π.χ., *19,08 : 0,6: 20:1=20 αλλά, το 19,08<20 και το 0,6<1, οπότε το αποτέλεσμα είναι περίπου 30*).

3.2.6.1. Συχνότητα χρήσης στρατηγικών ανά ηλικιακή ομάδα

Οι συμμετέχοντες στο σύνολό τους έκαναν πιο συχνά χρήση των στρατηγικών 2 (στρογγυλοποίηση) και 4 (αλγόριθμος). Ωστόσο, παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις στη συχνότητα χρήσης των στρατηγικών ανάλογα με την ηλικιακή ομάδα. Συγκεκριμένα, από τις αναλύσεις βρέθηκε πως ένας στους δύο ενήλικες (52,8%) και ένας στους τρεις μαθητές (34,7%) χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, με στατιστικά σημαντικές διαφορές στη χρήση της ως προς την ηλικιακή ομάδα ($t=-3,201$, $df=70$, $p<.01$). Ωστόσο, οι στρατηγικές 3 (περικοπή) και 4 (αλγόριθμος) χρησιμοποιήθηκαν με παρόμοια συχνότητα και από τις δύο ηλικιακές ομάδες (t=.438, df=70, p=.662 και t=1,474, df=70, p=.145, αντίστοιχα για την περικοπή και τον αλγόριθμο). Τέλος, η στρατηγική 1 (δεν ξέρω) χρησιμοποιείται στατιστικά σημαντικά με μεγαλύτερη συχνότητα από τα παιδιά της Στ΄ τάξης παρά από τους ενήλικες (t=2,816, df=70, p<.01). Στο Σχήμα 10 που ακολουθεί παρουσιάζεται η συχνότητα χρήσης κάθε στρατηγικής ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 10

Συχνότητα της χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα

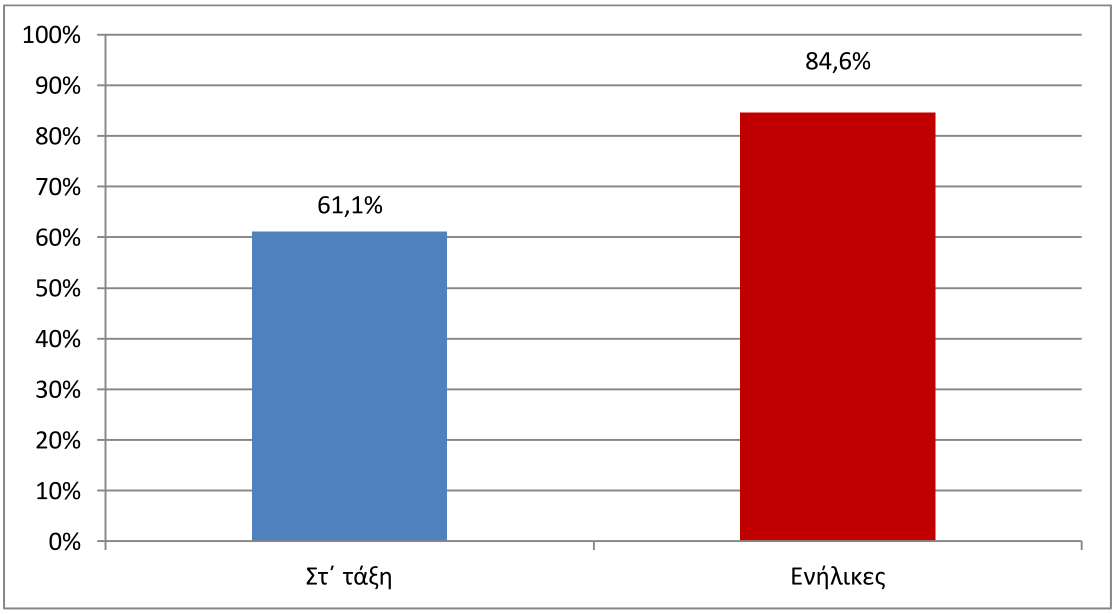


<u>3.2.7. Επίδοση στο Έργο Επίλυσης προβλήματος (Έργο 2) ως προς την ηλικιακή ομάδα</u>

Στο σύνολο των συμμετεχόντων, το ποσοστό επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου 2 ξεπέρασε το 70%. Προκειμένου να εξεταστεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 2 επηρεάστηκε από την ηλικιακή ομάδα, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανάλυση έδειξε πως η ηλικιακή ομάδα επηρέασε στατιστικά σημαντικά τη συνολική επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 2 (t= -4,816, df=70, p<.001), με τους ενήλικες να έχουν καλύτερες επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών του Έργου 2 (84,6%) από τα παιδιά της Στ΄τάξης (61,1%). Στο Σχήμα 11 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 2 ως προς την ηλικιακή ομάδα.

Σχήμα 11

Επίδοση στο Έργο 2 ως προς την ηλικιακή ομάδα



3.2.8. Επίδοση στο Έργο 2 ως προς το φύλο

Με σκοπό να ερευνηθεί αν η επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 2 επηρεάστηκε από το φύλο, πραγματοποιήθηκε t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Βρέθηκε πως οι άντρες και οι γυναίκες και των δύο ηλικιακών ομάδων απάντησαν με παρόμοιο τρόπο (t=,651, df=70, p=.517) στις δοκιμασίες του Έργου 2 (74,6% και 71%, αντίστοιχα). Στο Σχήμα 12 που ακολουθεί παρουσιάζονται αυτά τα στοιχεία.

3.2.9. Επίδοση στο Έργο 2 ως προς τον τρόπο παρουσίασης

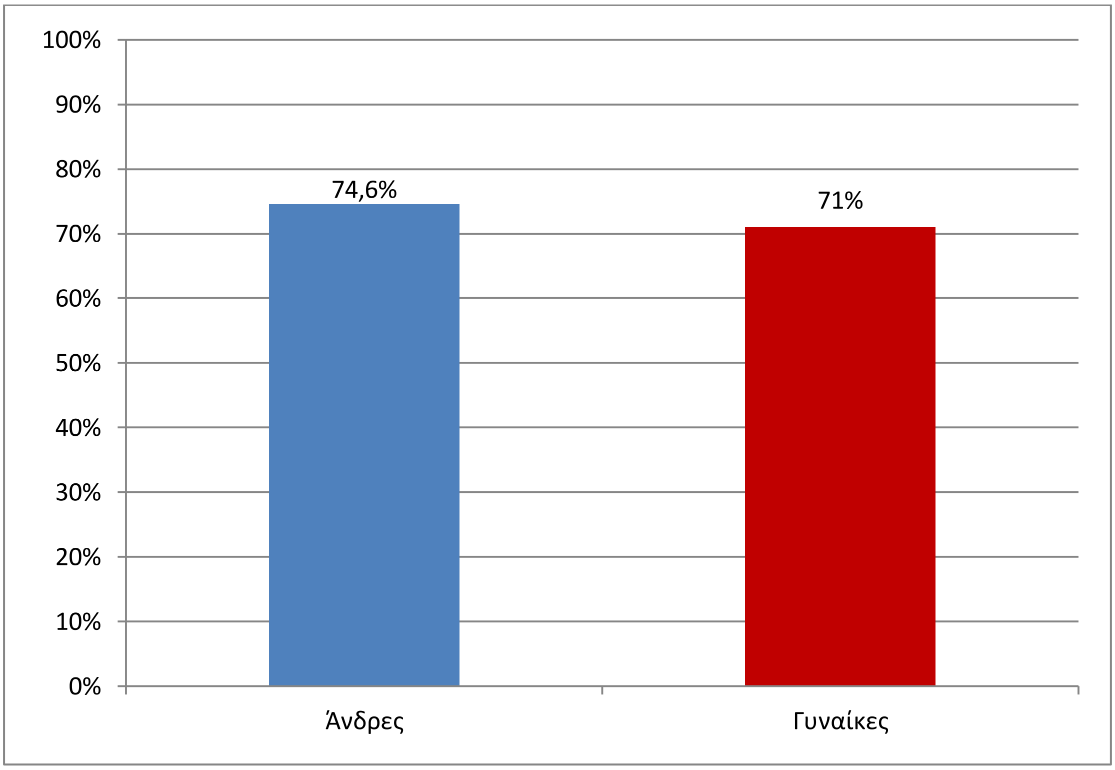
Με σκοπό να εξεταστεί εάν η ομάδα[4], στην οποία ανήκαν οι συμμετέχοντες, επηρέασε την επίδοσή τους στις δοκιμασίες του Έργου 2, πραγματοποιήθηκε t-test

[4] Ομάδα Α: Το Έργο 2 παρουσιάστηκε με επιλογές απαντήσεων.

για ανεξάρτητα δείγματα. Από την ανάλυση βρέθηκε πως ο τρόπος παρουσίασης δεν επηρέασε τις επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων ($t=-,719$, $df=70$, $p=.474$). Στις επιμέρους αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Στ΄ τάξης, τόσο αυτοί που είδαν τις δοκιμασίες του έργου 2 με επιλογές (Ομάδα Α) όσο και αυτοί που είδαν τις δοκιμασίες χωρίς επιλογές (Ομάδα Β), απάντησαν με παρόμοιο τρόπο (61,1% για κάθε ομάδα) στις δοκιμασίες του Έργου 2 ($t=.009$, $df=35$, $p=.993$). Ακόμη, οι ενήλικες που ανήκαν στην ομάδα Α είχαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας στο Έργο 2 με αυτούς που ανήκαν στην ομάδα Β (80,5% και 89%, αντίστοιχα) ($t=-1,474$, $df=33$, $p=.150$). Στο Σχήμα 13 που κολολουθεί παρουσιάζονται τα παραπάνω στοιχεία.

Σχήμα 12

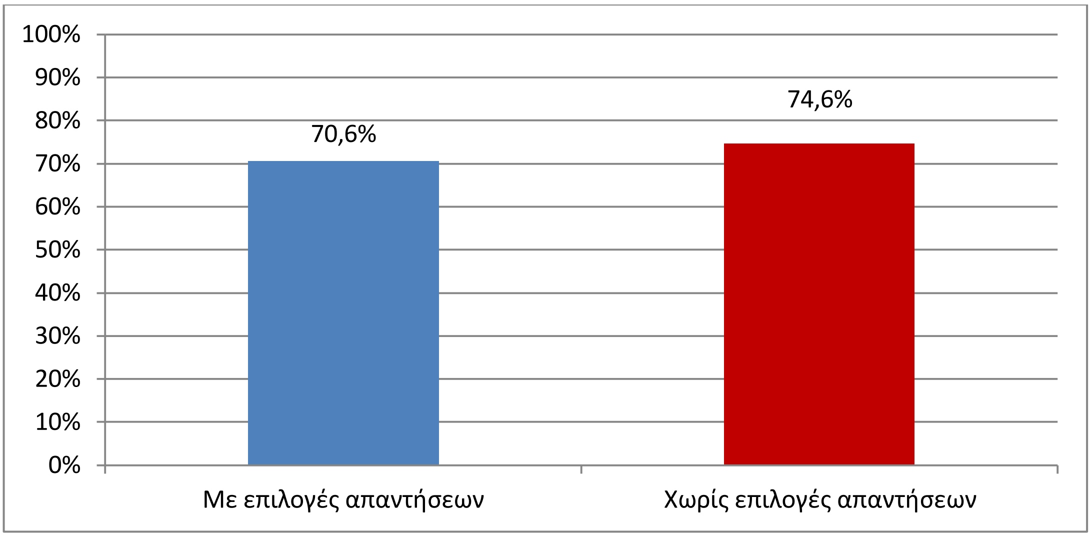
Επίδοση στο Έργο 2 ως προς το φύλο



Ομάδα Β: Το Έργο 2 παρουσιάστηκε χωρίς επιλογές απαντήσεων.

Σχήμα 13

Επίδοση στο Έργο 2 ως προς τον τρόπο παρουσίασης

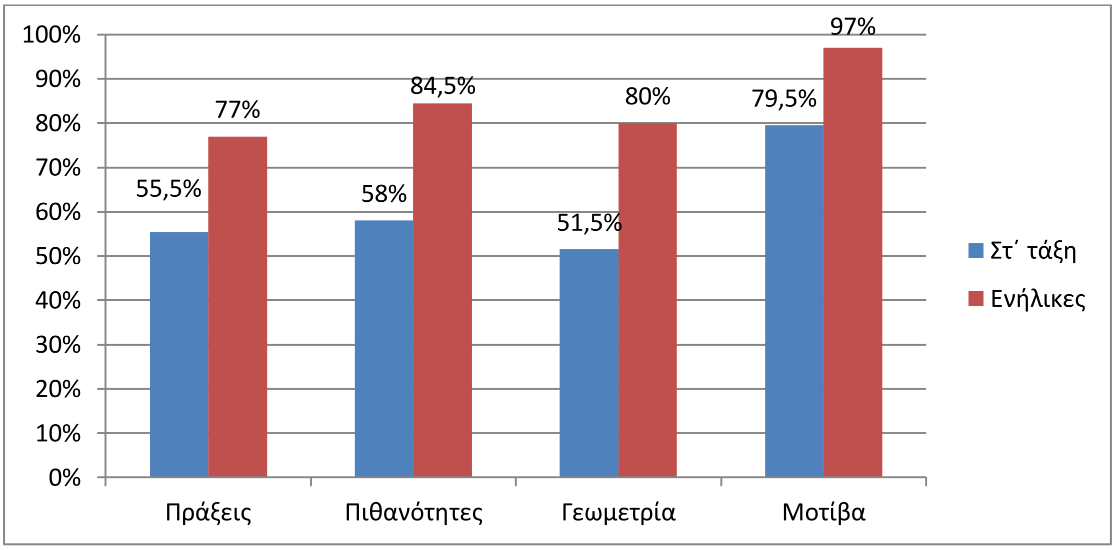


3.2.10. Επίδοση στοΈργο Επίλυσης Προβλήματος ως προς τη μαθηματική περιοχή

Προκειμένου να εξεταστεί εάν η μαθηματική περιοχή στην οποία ανήκαν οι δοκιμασίες του Έργου 2 επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων, πραγματοποιήθηκε t-test για συσχετισμένες ομάδες. Η ανάλυση έδειξε πως το σύνολο των συμμετεχόντων είχε στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες με μοτίβα (88%) σε σχέση με τις δοκιμασίες στις άλλες μαθηματικές περιοχές ($t= -5,313$, $df=71$, $p<.001$, $t= -4,119$, $df=71$, $p<.001$ και $t= -5,471$, $df=71$, $p<.001$, για πράξεις, πιθανότητες και γεωμετρία, αντίστοιχα). Όταν έγιναν επιμέρους αναλύσεις για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, τα αρχικά ευρήματα επιβεβαιώθηκαν. Αναλυτικότερα, τόσο τα παιδιά της Στ΄ τάξης όσο και οι ενήλικες φάνηκε να έχουν μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων στις δοκιμασίες με μοτίβα (79,5% και 97%, αντίστοιχα για κάθε ηλικιακή ομάδα). Αυτές οι επιδόσεις τους ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερες από τις επιδόσεις τους στις δοκιμασίες με πράξεις, πιθανότητες και γεωμετρία ($t=-3,683$, $df=36$, $p<.01$, $t=-3,151$, $df=36$, $p<.01$ και $t=-4,312$, $df=36$, $p<.001$ για Στ΄ τάξη, αντίστοιχα / $t=-3,919$, $df=34$, $p<.001$, $t=-2,704$, $df=34$, $p<.05$ και $t=-3,431$, $df=34$, $p<.01$ για ενήλικες, αντίστοιχα). Στο Σχήμα 14 που ακολουθεί παρουσιάζεται η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου 2 ανά μαθηματική περιοχή.

Σχήμα 14

Επίδοση στις δοκιμασίες του Έργου 2 ανά μαθηματική περιοχή και ηλικιακή ομάδα



3.3. Έλεγχος συσχετίσεων

3.3.1. Συσχέτιση της επίδοσης στα δύο Έργα με τη συνολική επίδοση

Υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 1 και στο Έργο 2 (Pearson's r=,690, p<.01). Δηλαδή, όσοι συμμετέχοντες είχαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου Υπολογιστικής Εκτίμησης έτειναν να παρουσιάζουν καλή επίδοση και στις δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος. Όταν οι ίδιες αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν (Pearson's r=,420, p<.01 και Pearson's r=,802, p<.01, για Στ΄ τάξη και ενήλικες, αντίστοιχα).

Υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε, επίσης, μεταξύ του ποσοστού επιτυχίας στις δοκιμασίες της υπολογιστικής εκτίμησης και του συνολικού ποσοστού επιτυχίας (Pearson's r=,929, p<.01). Δηλαδή, όσοι συμμετέχοντες εμφάνισαν επιτυχία στις δοκιμασίες του Έργου 1 έτειναν να εμφανίζουν επιτυχία στο σύνολο των δοκιμασιών. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται τόσο για τα παιδιά της Στ΄ τάξης (Pearson's r=.802, p<.01) όσο και για τους ενήλικες (Pearson's r=.969, p<.01).

Παρόμοια, στις δοκιμασίες του Έργου Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2), βρέθηκε υψηλή θετική συσχέτιση με την επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r=.909, p<.01). Όσοι συμμετέχοντες απάντησαν σωστά στις δοκιμασίες του Έργου 2 έτειναν να έχουν καλή επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών. Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν (Pearson's r=,880, p<.01 και Pearson's r=,925, p<.01, για Στ΄ τάξη και ενήλικες, αντίστοιχα). Τα ευρήματα αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 που ακολουθεί.

Πίνακας 1: Συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις στο σύνολο των δοκιμασιών και στα Έργα

		Σύνολο δοκιμασιών	**Έργο 1**	**Έργο 2**
Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης (Έργο 1)	Στ΄	,802**	-	,420**
	Ενήλ.	,969**	-	,802**
	Σύνολο	,929**	-	,690**
Έργο Επίλυσης Προβλήματος (Έργο 2)	Στ΄	,880**	-	-
	Ενήλ.	,925**	-	-
	Σύνολο	,909**	-	-

*** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

3.3.2. Χρήση στρατηγικών και επίδοση

Αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν, προκειμένου να εξεταστεί η ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και της επίδοσης των συμμετεχόντων. Υψηλή αρνητική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής 1 (¨Δεν ξέρω¨) τόσο στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson’s r=-,645, p<.01) όσο και στις δοκιμασίες του Έργου 1 (Pearson’s r=-,577, p<.01) και του Έργου 2 (Pearson’s r=-,611, p<.01) ξεχωριστά. Αντίθετα, υψηλή θετική συσχέτιση υπήρξε μεταξύ της χρήσης της στρατηγικής 2 (στρογγυλοποίηση) τόσο με το σύνολο των δοκιμασιών (Pearson’s r=,625, p<.01) όσο και με κάθε Έργο χωριστά (Pearson’s r=,625, p<.01 και Pearson’s r=,518, p<.01, για το Έργο 1 και το Έργο 2, αντίστοιχα). Δηλαδή, όσο περισσότερο οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική 1 (¨Δεν ξέρω¨) στις δοκιμασίες της υπολογιστικής εκτίμησης έτειναν να παρουσιάζουν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, ενώ όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης είχαν καλές επιδόσεις στις δοκιμασίες και των δύο Έργων. Όταν οι αναλύσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν για κάθε ηλικιακή ομάδα και για κάθε Έργο ξεχωριστά τα αρχικά αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν. Συγκεκριμένα, όταν τα παιδιά της Στ΄ τάξης χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική 1 (¨Δεν ξέρω¨) παρουσίαζαν χαμηλή επίδοση στο Έργο 1 (Pearson’s r=-,591, p<.01), στο Έργο 2 (Pearson’s r=-,601, p<.01) και στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson’s r=-,706, p<.01), ενώ όταν γινόταν χρήση της στρατηγικής 2 (στρογυλοποίηση) τα ποσοστά επιτυχίας και στα δύο Έργα ήταν υψηλά (Pearson’s r=,568, p<.01 και Pearson’s r=,443,p<.01, για Έργο 1 και Έργο 2, αντίστοιχα). Παρόμοια, οι ενήλικες, όταν χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική 1 στις δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης, έτειναν να απαντούν λάθος στις δοκιμασίες των δύο Έργων (Pearson’s r=-,514, p<.01 και Pearson’s r=-,433, p<.01, αντίστοιχα για το Έργο 1 και το Έργο 2), ενώ εμφάνιζαν επιτυχία στις δοκιμασίες και των δύο Έργων όταν έκαναν χρήση της στρατηγικής 2 (Pearson’s r=,569, p<.01 και Pearson’s r=,381, p<.05, αντίστοιχα, για το Έργο 1 και το Έργο 2).

Καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε αναφορικά με τη χρήση της στρατηγικής 3 (περικοπή) (Pearson’s r=-,109, p=.362) δεν διασφάλιζε επιτυχία ή αποτυχία στο σύνολο των δοκιμασιών. Το εύρημα αυτο επιβεβαιώθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα και για κάθε Έργο. Τόσο οι μαθητές της Στ΄ τάξης (Pearson’s r=-,223, p=.184 και Pearson’s r=-,111, p=.152, για το Έργο 1 και Έργο 2, αντίστοιχα) όσο και οι ενήλικες (Pearson’s r=,022, p=.901, για το Έργο 1 και Pearson’s r=-,026, p=.881, για το Έργο 2) έτειναν να απαντούν άλλοτε σωστά και άλλοτε λανθασμένα, όταν χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική αυτή.

Η χρήση της στρατηγικής του αλγορίθμου (στρατηγική 4) από το σύνολο των συμμετεχόντων συσχετίζεται αρνητικά μόνο με τις δοκιμασίες του Έργου της

Υπολογιστικής Εκτίμησης (Pearson's r=-,266, p<.05). Δηλαδή, όσο περισσότερο χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος στις δοκιμασίες του Έργου Υπολογιστικής Εκτίμησης τόσο περισσότερο οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις. Ωστόσο, βρέθηκαν διαφοροποιήσεις για κάθε ηλικιακή ομάδα. Συγκεκριμένα, η χρήση της στρατηγικής του αλγορίθμου (στρατηγική 4) δεν συσχετίστηκε ούτε αρνητικά ούτε θετικά με την επίδοση των παιδιών σε κανένα Έργο (Pearson's r=-,003, p=.987 και Pearson's r=,071, p=.678, αντίστοιχα για Έργα 1 και 2), αλλά επηρέασε αρνητικά την επίδοση των ενηλίκων μόνο στο Έργο 1 (Pearson's r=-,395, p<.05).

Τέλος, όσον αφορά τη στρατηγική 5 (μεταγενέστερη αντιστάθμιση) δεν βρέθηκε καμία συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση της και στην επίδοση των συμμετεχόντων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της Στ΄ τάξης δεν έκαναν καθόλου χρήση της στρατηγικής της μεταγενέστερης αντιστάθμισης (στρατηγική 5). Όσον αφορά τους ενήλικες, η χρήση της στρατηγικής αυτής δεν επηρέασε ούτε θετικά ούτε αρνητικά την επίδοσή τους σε κανένα από τα δύο Έργα (Pearson's r=,269 και Pearson's r=,260, αντίστοιχα, για τα Έργα 1 και 2).

<u>Πίνακας 2:</u> Συσχέτιση της χρήσης των στρατηγικών με την επίδοση των μαθητών της Στ΄ τάξης

Στρατηγικές	Σύνολο δοκιμασιών	Έργο 1	Έργο 2
Στρατηγική 1 (Δεν ξέρω)	-,706**	-,591**	-,601**
Στρατηγική 2 (Στρογγυλοποίηση)	,590**	,568**	,443**
Στρατηγική 3 (Περικοπή)	-,109	-,223	-,111
Στρατηγική 4 (Αλγόριθμος)	,045	-,003	,071
Στρατηγική 5 (Μεταγενέστερη αντιστάθμιση)	-	-	-

*** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05*

<u>Πίνακας 3:</u> Συσχέτιση της χρήσης των στρατηγικών με την επίδοση των ενηλίκων

Στρατηγικές	Σύνολο δοκιμασιών	Έργο 1	Έργο 2
Στρατηγική 1 (Δεν ξέρω)	-,507**	-,514**	-,433**
Στρατηγική 2 (Στρογγυλοποίηση)	,520**	,569**	,381**
Στρατηγική 3 (Περικοπή)	,003	,022	-,026
Στρατηγική 4 (Αλγόριθμος)	-,337*	-,395*	-,208
Στρατηγική 5 (Μεταγενέστερη αντιστάθμιση)	,279	,269	,260

** *Στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

* *Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05*

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει την επίδοση παιδιών Στ΄ τάξης και ενηλίκων σε δοκιμασίες υπολογιστικής εκτίμησης και σε δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος καθώς και να διερευνήσει την ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα σε αυτές τις επιδόσεις. Αυτός ο σκοπός εξετάστηκε μέσα από δύο Έργα, ένα Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης κι ένα Έργο Επίλυσης Προβλήματος. Αναλυτικότερα, το Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης απαιτούσε εκτιμήσεις σε προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, τόσο με φυσικούς όσο και με ρητούς αριθμούς. Το Έργο της Επίλυσης Προβλήματος περιλάμβανε οχτώ προβλήματα, προερχόμενα από διάφορες μαθηματικές περιοχές (αριθμητικές πράξεις, πιθανότητες, γεωμετρία και μοτίβα). Τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα μετά από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Πρώτον, στο Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν μέτρια (68%) και επηρεάστηκε από την ηλικία. Συγκεκριμένα, σχεδόν οι μισοί μαθητές της Στ΄ τάξης (49%) και οι περισσότεροι από τα τρία τέταρτα των ενηλίκων (77,5%) πραγματοποίησαν επιτυχείς εκτιμήσεις. Φαίνεται πως τα περισσότερα παιδιά ηλικίας 11 ετών παρουσιάζουν μικρότερη ικανότητα από τους ενήλικες στην εκτέλεση υπολογιστικών εκτιμήσεων. Εκτός από την ηλικία, το είδος των αριθμών (φυσικοί και ρητοί) ήταν ένας ακόμη παράγοντας που επηρέασε την ικανότητά τους για υπολογιστικές εκτιμήσεις. Αναλυτικότερα, όλοι οι συμμετέχοντες παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία στις δοκιμασίες που αφορούσαν φυσικούς αριθμούς (72,2%) συγκριτικά με τις δοκιμασίες που αφορούσαν ρητούς αριθμούς (53,5%). Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα του Dolma (2002) στην έρευνα του οποίου βρέθηκε πως μαθητές πέμπτης, έβδομης και ένατης τάξης είχαν καλύτερες επιδόσεις σε εκτιμήσεις που αφορούσαν φυσικούς αριθμούς συγκριτικά με τις εκτιμήσεις που περιείχαν ρητούς. Τα ευρήματα αυτά πιθανώς να οφείλονται στην εξοικείωση με τους φυσικούς αριθμούς, αφού είναι οι πρώτοι αριθμοί με τους οποίους έρχονται σε επαφή από πολύ μικρή ηλικία και είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται περισσότερο στην καθημερινότητα. Επιπλέον, είναι γνωστό πως πολλά από τα λάθη που προκύπτουν κατά τη διαχείριση των ρητών αριθμών προέρχονται από την αντιμετώπισή τους ως φυσικούς αριθμούς (Ni & Zhou, στο Christou, 2015).

Η επίδοση στο Έργο της Υπολογιστικής Εκτίμησης, τόσο των παιδιών της Στ΄ τάξης όσο και των ενηλίκων, επηρεάστηκε επίσης από το είδος των αριθμητικών πράξεων. Μεγάλη διαφοροποίηση υπήρξε στην επίδοση μεταξύ των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης όπου το 79,5% των συμμετεχόντων εκτίμησαν με επιτυχία το αποτέλεσμα, και των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης όπου ούτε οι μισοί συμμετέχοντες (46,2%) δεν κατάφεραν να δώσουν επιτυχείς απαντήσεις. Το εύρημα αυτό συμπίπτει με τα ευρήματα της Elisha (2013) σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές Λυκείου αντιμετώπιζαν με μεγαλύτερη επιτυχία προβλήματα εκτίμησης που αφορούσαν πρόσθεση και αφαίρεση, ενώ παρουσίαζαν δυσκολίες στα προβλήματα που αφορούσαν πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Ενδεχομένως, τα αποτελέσματα αυτά να προκύπτουν λόγω της μεγαλύτερης εξοικείωσης με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αφού είναι οι πρώτες αριθμητικές πράξεις που διδάσκονται στο σχολείο.

Τέλος, η παρουσία επιλογών στο Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων: όσοι είδαν τις δοκιμασίες χωρίς επιλογές απαντήσεων είχαν χειρότερη επίδοση (53,7%) σε σχέση με αυτούς που είχαν επιλογές απαντήσεων (72,5%). Η διαφοροποίηση αυτή ίσχυε και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά, αφού το 57% των παιδιών και το 89% των ενηλίκων που αντιμετώπισαν τις δοκιμασίες αυτού του Έργου με επιλογές απαντήσεων έδωσαν επιτυχείς απαντήσεις. Αντίθετα, τα λιγότερα από τα μισά παιδιά (41,5%) και περίπου οι μισοί ενήλικες (66,6%) κατάφεραν να δώσουν επιτυχείς απαντήσεις, όταν εκτιμούσαν τα αποτελέσματα χωρίς επιλογή απαντήσεων. Το εύρημα αυτό πιθανώς οφείλεται στο γεγονός ότι οι συμμετέχοντες που είχαν τρείς επιλογές απαντήσεων είχαν περισσότερες πιθανότητες να επιλέξουν τη σωστή απάντηση, ακόμη κι αν αυτή ήταν τυχαία, από τους συμμετέχοντες που έπρεπε να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις, χωρίς κάποια επιπλέον βοήθεια.

Δεύτερον, οι κύριες στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η στρογγυλοποίηση και ο αλγόριθμος. Συγκεκριμένα, ένας στους δύο ενήλικες (52,8%) και ένας στους τρεις μαθητές της Στ΄ τάξης (34,7%) χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης. Το εύρημα αυτό συμπίπτει με τα ευρήματα των Lemaire και Lecacheur (2002), οι οποίοι βρήκαν πως η πιο κοινή στρατηγική που χρησιμοποίησαν τόσο ενήλικες όσο και παιδιά ηλικίας εννιά και έντεκα χρονών σε δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης ήταν αυτή της στρογγυλοποίησης. Συχνή ήταν η χρήση και της στρατηγικής του αλγόριθμου, αφού ένας στους τέσσερις συμμετέχοντες εκτελούσε τον αλγόριθμο νοερά, δηλαδή κατέφευγε σε ακριβείς υπολογισμούς. Ακόμη, η στρατηγική της μεταγενέστερης αντιστάθμισης χρησιμοποιήθηκε μόνο από ενήλικες, ενώ κανένας μαθητής της Στ΄ τάξης δεν έκανε χρήση της στρατηγικής αυτής. Παρόμοιο αποτέλεσμα είχε προκύψει από την έρευνα των LeFevre et al. (1993), οι οποίοι εξέτασαν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης ενηλίκων και παιδιών σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα και βρήκαν πως οι ενήλικες έκαναν συχνή χρήση της στρατηγικής της μεταγενέστερης αντιστάθμισης.

Στη παρούσα εργασία η χρήση της στρατηγικής της στρογγυλοποίησης από τους συμμετέχοντες οδηγούσε σε υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες και των δύο Έργων. Τόσο τα παιδιά της Στ΄ τάξης όσο και οι ενήλικες, πραγματοποιούσαν επιτυχείς εκτιμήσεις και απαντούσαν σωστά στα προβλήματα του Έργου Επίλυσης Προβλήματος, όταν χρησιμοποιούσαν τη στρογγυλοποίηση στις δοκιμασίες του Έργου Υπολογιστικής Εκτίμησης. Αντίθετα, η χρήση της στρατηγικής του αλγόριθμου επηρέασε αρνητικά την επίδοση των παιδιών της Στ΄ τάξης στο σύνολο των δοκιμασιών, ενώ η επίδοση των ενηλίκων δεν επηρεάστηκε ούτε θετικά ούτε αρνητικά από τη χρήση αυτής της στρατηγικής.

Τρίτον, στο Έργο Επίλυσης Προβλήματος, παρόμοια με το Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης, οι συμμετέχοντες παρουσίασαν μέτρια επίδοση (72%). Η ηλικία των συμμετεχόντων επηρέασε την επίδοσή τους, με τους ενήλικες να παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις (84,6%) από τους μαθητές της Στ΄ τάξης (61,1%). Ο τρόπος (με επιλογές απαντήσεων και χωρίς επιλογές απαντήσεων) που παρουσιάστηκαν τα προβλήματα του Έργου Επίλυσης Προβλήματος στους συμμετέχοντες, αντίθετα με το Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης, δεν επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων. Τόσο οι μαθητές (61,1%) όσο και οι ενήλικες (80,5%) που είδαν τις δοκιμασίες με επιλογές απαντήσεων παρουσίασαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας με τα παιδιά (61,1%) και τους ενήλικες (89%), αντίστοιχα, που δεν είχαν επιλογές απαντήσεων. Το εύρημα αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός πως οι περισσότεροι συμμετέχοντες επιχειρούσαν να λύσουν μόνοι τους τα προβλήματα αυτού του Έργου, χωρίς να στηρίζονται στις επιλογές που τους παρουσιάζονταν.

Ωστόσο, η μαθηματική περιοχή στην οποία ανήκαν τα προβλήματα ήταν ένας παράγοντας που επηρέασε τις απαντήσεις τόσο των παιδιών της Στ΄ τάξης όσο και των ενηλίκων. Συγκεκριμένα, στα προβλήματα που αφορούσαν μοτίβα το 80% των παιδιών και το 97% των ενηλίκων απάντησαν σωστά. Αντίθετα, στα προβλήματα των υπόλοιπων μαθηματικών περιοχών (αριθμητικές πράξεις, πιθανότητες και γεωμετρία) η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν πιο χαμηλή, με την χειρότερη επίδοση να εμφανίζεται, για τα παιδιά της Στ΄ τάξης, στα προβλήματα γεωμετρίας (51,5%) και για τους ενήλικες στα προβλήματα που αφορούσαν αριθμητικές πράξεις (77%).

Τέλος, όσοι συμμετέχοντες είχαν υψηλή επίδοση στο Έργο Υπολογιστικής Εκτίμησης είχαν εξίσου υψηλά ποσοστά επιτυχίας στο Έργο Επίλυσης Προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα εκτέλεσης επιτυχών εκτιμήσεων σε κάθε αριθμητική πράξη συσχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης διάφορων ειδών προβλημάτων. Στην παρούσα έρευνα οι συμμετέχοντες που χρησιμοποιούσαν ευέλικτες στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης (π.χ., στρογγυλοποίηση), οι οποίες τους οδηγούσαν σε επιτυχή εκτίμηση, κατάφεραν να διαχειριστούν και τα δεδομένα των προβλημάτων και κατ΄επέκταση να τα επιλύσουν με επιτυχία. Σε μια παρόμοια μελέτη, αν και δεν αφορούσε την εκτίμηση αλλά τους νοερούς υπολογισμούς, οι Gurbuz και Erdem (2016) βρήκαν πως όσοι μαθητές έντεκα έως δώδεκα ετών παρουσίαζαν επιτυχία στις δοκιμασίες που αφορούσαν νοερούς υπολογισμούς είχαν και υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες μαθηματικής σκέψης. Αντίθετα, η χρήση του αλγόριθμου νοερά οδηγούσε σε μη επιτυχείς εκτιμήσεις και σε χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στις δοκιμασίες του Έργου της Επίλυσης Προβλήματος.

Η παρούσα έρευνα διεξήχθη σε περιορισμένο δείγμα ατόμων. Τα ευρήματα της έρευνας θα μπορούσαν να μελετηθούν περαιτέρω σε μεγαλύτερο δείγμα, το οποίο θα μπορούσε να προέρχεται από διάφορα μέρη της χώρας ή ακόμη και από άτομα άλλων χωρών ώστε να καλυφθούν περισσότερες και διαφορετικές κοινωνικο-οικονομικές και πολιτισμικές ομάδες.

Συμπερασματικά, τόσο από την ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία όσο και από την παρούσα έρευνα γίνεται φανερή η σπουδαιότητα της ικανότητας για υπολογιστική εκτίμηση και της ικανότητα για επίλυση προβλήματος. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να αναδείξουν την ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα σε άλλο είδος εκτίμησης (π.χ., εκτίμηση μέτρησης) και την επίλυση προβλήματος καθώς ενδιαφέρουσα θα ήταν και η επέκταση της παρούσας μελέτης με την ένταξη προβλημάτων από άλλες μαθηματικές περιοχές (π.χ., άλγεβρα, στατιστική). Επίσης, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε μια έρευνα που θα μελετούσε, εκτός από τις στρατηγικές εκτίμησης, και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι συμμετέχοντες κατά την επίλυση προβλημάτων ώστε να δημιουργείται μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο σκέψης τους.

Εν κατακλείδι, η παρούσα εργασία επιχείρησε να ερευνήσει και να αναδείξει την ύπαρξη σχέσης μεταξύ της ικανότητας για υπολογιστική εκτίμηση και την ικανότητα για επίλυση προβλήματος. Με δεδομένο ότι βρέθηκε πολύ δυνατή σχέση ανάμεσα στις δύο, αναδεικνύεται αφενός η ανάγκη για περαιτέρω μελέτη και αφετέρου η ενίσχυση των δύο ικανοτήτων από νωρίς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

5.1. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Adetula, L. O. (1990). Strategies and skills used by primary school children to solve simple addition and subtraction word problems. *ABACUS-Journal for the Mathematical Association of Nigeria*, *20*, 65-76.

Alajmi, A. H., (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education 12,* 4, 263-283.

Ambrose, R., Baek, J., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Anghileri, J.: 1999, Issues in teaching multiplication and division, In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 184–194). Open University Press, Buckingham.

Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519-538.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, *7*(1), 87-106.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 399-420.

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, *10*(3), 221-247.

Blum, W., & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, Trends and issues in mathematics instruction In W. Blum, M. Niss & I. Huntley (Eds), *Modelling, applications and applied problem solving* Ellis Horwood, Chichester, U.K.. 1–22.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 55-72.

Clarke, B. A., Clarke, D. M., & Horne, M. (2006). A longitudinal study of children's mental computation strategies. In *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 329-336). Charles University in Prague, Faculty of Education.

Cochran, J. & Dugger, M.H. (2013). Taking the guesswork out of computational estimation. *The Mathematics Educator*, *23*(1), 60-73.

Desli, D., & Giakoumi, M. (2017). Children's length estimation performance and strategies in standard and non-standard units of measurement. *International Journal for Research in Mathematics Education*, *7*, 61-84.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, *3*(2), 140-153.

Ersoy, E. (2016). Problem solving and its teaching in mathematics. *The Online Journal of New Horizons in Education*, *6*(2), 79-87.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Foong, P. Y. (2002). The role of problems to enhance pedagogical practices in the Singapore. *The Mathematics Educator*, *6*(2), 15-31.

Frensch, P. A., & Funke, J. (1995). Definitions, traditions, and a general framework for understanding complex problem solving. In A. Frensch, P. & Funke, J.

(Eds), *Complex problem solving: The European perspective* (pp. 3-25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Gooya, Z., Khosroshahi, L. G., & Teppo, A. R. (2011). Iranian students' measurement estimation performance involving linear and area attributes of real-world objects. *ZDM*, *43*(5), 709-722.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Gürbüz, R., & Erdem, E. (2016). Relationship between mental computation and mathematical reasoning. *Cogent Education*, *3*(1), 1-18.

Heirdsfield, A., & Lamb, J. (2005). Mental computation: The benefits of informed teacher instruction. In P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 419-426). Melbourne: MERGA.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 443-463.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities?. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-280.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development*, *48*(4), 63-85.

Jonassen, D. H., Howland, J., Moore, J., & Marra, R. M. (2003). *Learning to solve problems with technology: A constructivist perspective* (2nd ed.). Columbus, OH: Merrill/ Prentice Hall.

Jones, M. G., Gardner, G. E., Taylor, A. R., Forrester, J. H., & Andre, T. (2012). Students' accuracy of measurement estimation: Context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics*, *112*(3), 171-178.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 4-23.

Kindrat, A. N., & Osana, H. P. (2018). The relationship between mental computation and relational thinking in the seventh grade. *Fields Mathematics Education Journal*, *3*(1), 1-22.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, *11*, 95-132.

Lemaire, P., Lecacheur, M., (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82*, 281–304.

Lemonidis, Ch. & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research, 2b*, 86-98.

Lemonidis, C., Tsakiridou, H., & Meliopoulou, I. (2015). In-service teachers' number sense content knowledge and teaching practice in rational numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1-19.

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 350-359.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh, & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp. 3-14). Perth: MASTEC.

Mclntosh, A., Nohda, N., Reys, B., & Reys, R. (1995). Mental computation performance in Australia, Japan and the United States. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 237-258.

Mclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*(2), 145-154.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1957). *How to solve it?* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237.

Reys, B. J. (1986). Teaching computational estimation: concepts and strategies. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (Eds), *Estimation and Mental Computation* (pp. 16-30). National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in australia, sweden, taiwan, and the united states. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Schoenfeld, A. H (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Sepeng, P., & Madzorera, A. (2014). Sources of difficulty in comprehending and solving mathematical word problems. *International Journal of Educational Sciences, 6*(2), 217-225.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*(2), 428 – 444.

Segovia, I. & Castro, E., (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. 7(1), 499-536.

Simon, T. J., & Vaishnavi, S. (1996). Subitizing and counting depend on different attentional mechanisms: Evidence from visual enumeration in afterimages. *Perception and Psychophysics*, *58*(6), 915-926.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.

Tsao, Y-L. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching and Learning*, *1* (12), 71-90.

Tsao, Y-L. & Pan T-R. (2013). The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies*, *11*, 1-15.

Van De Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics*. *Teaching Developmentally* (6th Edition). Boston: Pearson.

Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, *35*(1), 89-94.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *33*(1), 204-218.

Yang, D.C. (2005) Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Journal of Educational Studies*, *31*(3), 317-333.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383-403.

Zacharos, K., & Koustourakis, G. (2011). A critical approach to school mathematical knowledge: The case of "Realistic" problems in Greek primary school textbooks for seven-year-old pupils. *Acta Didactica Napocensia*, *4*(1), 39-50.

5.2. Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δεσλή, Δ., & Γιακουμή, Μ. (2015). Εκτίμηση μήκους με τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης: Επιδόσεις και στρατηγικές των παιδιών. *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.) «Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις»* (σελ., 429-438). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). *Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Δεσποτοπούλου, Α. (2014). Νοεροί αριθμητικοί υπολογισμοί των μαθητών της Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, στην πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών. Ανακτήθηκε τον Ιανουάριο 2017 από: http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/.

Καραντζής, Ι. & Τόλλου, Μ. (2009). Ο νοερός αριθμητικός υπολογισμός των μαθητών της Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου στις προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, *48,* 107-123.

Καραντζής, Ι., Δεσποτοπούλου, Α. & Σμάνη, Α.(2010). Οι νοεροί και αριθμητικοί υπολογισμοί στην πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών. Ανάλυση των λαθών των μαθητών της Γ΄ και Δ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. *Πρακτικά του 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδος* (σελ. 291-299). Ρέθυμνο.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., & Σοφού, Β. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού (βιβλίο μαθητή).* Αθήνα: Πατάκης.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών* (β΄ έκδοση). Αθήνα: Τόπος.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Λυγούρας, Γ. (2006). Η επίδοση και η ευελιξία μαθητών της Γ΄ Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς και το κοινωνικό τους υπόβαθρο. Ανακτήθηκε τον Ιανουάριο 2017 από: http://mathslife.eled.uowm.gr/sites/default/files/usersfiles/ligou

Λυγούρας, Γ. (2012). Η επίδραση κοινωνικών και ψυχολογικών παραγόντων στην ευελιξία μαθητών Στ' τάξης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. Ανακτήθηκε τον Ιανουάριο 2017 από: *http://www.didaktorika.gr//eadd/handle/10442/26903*

Σοφοκλέους, Π. & Λεμονίδης, Χ., (2007). Νοεροί- κατ' εκτίμηση υπολογισοί: Μαθηματικές διαδικασίες μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των πρώτων τάξεων του Δημοτικού της Ελλάδας και της Κύπρου. *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σελ. 277-290). Πάφος.

Φιλίπου, Γ. & Χρίστου Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Εργαλείο έρευνες για τους συμμετέχοντες της ομάδας Α

1. **Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, εκτιμήστε περίπου το αποτέλεσμα κάθε πράξης. Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας.**

i. 476 + 338=

ii. 0,8 + 0,02=

iii. 836 – 628=

iv. $\frac{13}{16} - \frac{2}{6} =$

v. 48x76=

vi. $\frac{9}{11} x \frac{2}{9} =$

vii. 848 : 74=

viii. 19,08 : 0,6=

2. Μπορείτε να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας.

i. Σε μια πόλη υπάρχουν 5 σχολεία με 12 τμήματα σε κάθε σχολείο. Σε κάθε τμήμα υπάρχουν 20 μαθητές. Αν χωρίζαμε ισάριθμα αυτούς τους μαθητές σε 10 σχολεία, πόσοι μαθητές θα υπήρχαν σε κάθε σχολείο;

α) 120 β) 100 γ) 150

ii. Ένα δελφίνι πήδηξε 8 μέτρα ψηλά από μια πισίνα που έχει βάθος 3 μέτρα. Πόσα μέτρα ψηλά πήδηξε το δελφίνι από την επιφάνεια του νερού;

α) 12μ. β) 5μ. γ) 11μ.

iii. Οι νέοι γενικά οδηγούν γρήγορα. Οι μεγαλύτεροι, αν και οδηγούν πιο αργά, έχουν συχνά έλλειψη προσοχής. Παρατηρήθηκε ότι στα 25 από τα 50 ατυχήματα που έγιναν τον προηγούμενο μήνα σε μια πόλη, οι οδηγοί ήταν νέοι. Πιστεύετε ότι ο οδηγός σε ένα πιθανό 51ο ατύχημα θα είναι νέος ή άτομο μεγαλύτερης ηλικίας;

α) Ο οδηγός θα είναι νέος.

β) Ο οδηγός θα είναι άτομο μεγαλύτερης ηλικίας.

γ) Οι πιθανότητες να είναι ο οδηγός είτε νέος είτε άτομο μεγαλύτερης ηλικίας είναι ίσες.

iv. Η περιοχή που καλύπτεται από νερό στη γη είναι μεγαλύτερη από αυτή που καλύπτεται από στεριά. Από στιγμή σε στιγμή μερικοί μετεωρίτες πρόκειται να πέσουν σε κάποιο σημείο της γης. Νομίζετε πως η πιθανότητα να πέσουν οι μετεωρίτες στη στεριά είναι μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να πέσουν στο νερό;

α) Η πιθανότητα να πέσουν στη στεριά είναι μεγαλύτερη.

β) Η πιθανότητα να πέσουν στο νερό είναι μεγαλύτερη.

γ) Οι πιθανότητες να πέσουν είτε στη στεριά είτε στο νερό είναι ίσες.

v. Ένας αγρότης έχει δύο κήπους σε σχήμα τετραγώνου και θέλει να σπείρει ντομάτες στον μεγαλύτερο κήπο. Για τον έναν κήπο ξέρει πως το εμβαδόν του είναι 36 τετραγωνικά μέτρα και για τον άλλο κήπο ξέρει πως η περίμετρός του είναι 28 μέτρα. Σε ποιον κήπο τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες;

α) Τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες στον κήπο που έχει εμβαδόν 36 τ.μ.

β) Τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες στον κήπο που έχει περίμετρο 28μ.

γ) Σε όποιον από τους δύο κήπους και να σπείρει ντομάτες είναι το ίδιο.

vi. Δύο άνθρωποι κοιτούν προς την ίδια κατεύθυνση. Ο ένας κάνει μια στροφή 180 μοιρών και ο άλλος μια στροφή 360 μοιρών. Πού κοιτάζει ο καθένας τώρα;

α) Και οι δύο κοιτούν προς την αρχική κατεύθυνση.

β) Ο ένας κοιτάζει την αρχική κατεύθυνση και ο άλλος την αντίθετη της αρχικής.

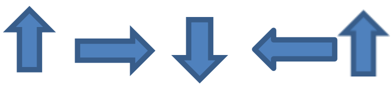
γ) Και οι δύο κοιτούν διαφορετικές κατευθύνσεις από την αρχική.

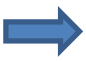
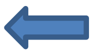
vii. Ποιος αριθμός μπορεί να ολοκληρώσει το μοτίβο των αριθμών που δίνονται:

$\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ?, 1, 2

α) $\frac{1}{3}$ β) $\frac{1}{5}$ γ) $\frac{1}{2}$

viii. Ποιο σχήμα ακολουθεί στο μοτίβο που δίνεται:

 ?

α)  β)  γ) 

<u>Β. Εργαλείο έρευνες για τους συμμετέχοντες της ομάδας Β</u>

1. Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, εκτιμήστε περίπου το αποτέλεσμα κάθε πράξης. Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας.

i. 476 + 338=
α) Περίπου 700
β) Περίπου 800
γ) Περίπου 1000

ii. 0,8 + 0,02=
α) περίπου 0,5
β) περίπου 0
γ) περίπου 1

iii. 836 – 628=
α) Περίπου 100
β) Περίπου 200
γ) Περίπου 300

iv. $\frac{13}{16} - \frac{2}{6} =$

α) Περίπου 0
β) Περίπου $\frac{1}{2}$
γ) Περίπου 1

v. 48x76=
α) Περίπου 2.500
β) Περίπου 3.000
γ) Περίπου 3.500

vi. $\frac{9}{11} \times \frac{2}{9} =$

α) Περίπου 0
β) Περίπου $\frac{1}{2}$
γ) Περίπου 1

vii. 848 : 74=
α) Περίπου 10
β) Περίπου 20
γ) Περίπου 100

viii. 19,08 : 0,6=
α) Περίπου 10
β) Περίπου 20
γ) Περίπου 30

2. Μπορείτε να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα; Εξηγήστε με απλά λόγια την απάντησή σας.

i. Σε μια πόλη υπάρχουν 5 σχολεία με 12 τμήματα σε κάθε σχολείο. Σε κάθε τμήμα υπάρχουν 20 μαθητές. Αν χωρίζαμε ισάριθμα αυτούς τους μαθητές σε 10 σχολεία, πόσοι μαθητές θα υπήρχαν σε κάθε σχολείο;

ii. Ένα δελφίνι πήδηξε 8 μέτρα ψηλά από μια πισίνα που έχει βάθος 3 μέτρα. Πόσα μέτρα ψηλά πήδηξε το δελφίνι από την επιφάνεια του νερού;

iii. Οι νέοι γενικά οδηγούν γρήγορα. Οι μεγαλύτεροι, αν και οδηγούν πιο αργά, έχουν συχνά έλλειψη προσοχής. Παρατηρήθηκε ότι στα 25 από τα 50 ατυχήματα που έγιναν τον προηγούμενο μήνα σε μια πόλη, οι οδηγοί ήταν νέοι. Πιστεύετε ότι ο οδηγός σε ένα πιθανό 51ο ατύχημα θα είναι νέος ή άτομο μεγαλύτερης ηλικίας;

iv. Η περιοχή που καλύπτεται από νερό στη γη είναι μεγαλύτερη από αυτή που καλύπτεται από στεριά. Από στιγμή σε στιγμή μερικοί μετεωρίτες πρόκειται να πέσουν σε κάποιο σημείο της γης. Νομίζετε πως η πιθανότητα να πέσουν οι μετεωρίτες στη στεριά είναι μεγαλύτερη από τη πιθανότητα να πέσουν στο νερό;

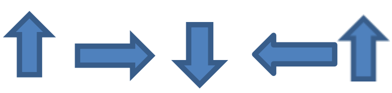
v. Ένας αγρότης έχει δύο κήπους σε σχήμα τετραγώνου και θέλει να σπείρει ντομάτες στον μεγαλύτερο κήπο. Για τον έναν κήπο ξέρει πως το εμβαδόν του είναι 36 τετραγωνικά μέτρα και για τον άλλο κήπο ξέρει πως η περίμετρός του είναι 28 μέτρα. Σε ποιον κήπο τον συμφέρει να σπείρει ντομάτες;

vi. Δύο άνθρωποι κοιτούν προς την ίδια κατεύθυνση. Ο ένας κάνει μια στροφή 180 μοιρών και ο άλλος μια στροφή 360 μοιρών. Πού κοιτάζει ο καθένας τώρα;

vii. Ποιος αριθμός μπορεί να ολοκληρώσει το μοτίβο των αριθμών που δίνονται:

$\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ?, 1, 2

viii. Ποιο σχήμα ακολουθεί στο μοτίβο που δίνεται:

 ?