ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία:

Αλγεβρικός συλλογισμός και Μαθηματική γενίκευση σε προβλήματα με κανονικότητες

της

Δήμητρας Μίχου

ΑΕΜ 817

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια

Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια

Καλδρυμίδου Μαρία, καθηγήτρια

Βαμβακούση Ξένια, καθηγήτρια

Φλώρινα, 2020

Στη μνήμη του πατέρα μου

Ευχαριστίες

Στο τέλος αυτής της προσπάθειας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Την επιβλέπουσά μου, καθηγήτρια κα. Μαριάννα Τζεκάκη, για τη βοήθεια, την καθοδήγηση, τη συνεργασία και τις πολύτιμες συμβουλές της κατά την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, καθώς και την πολύτιμη γνώση που αποκόμισα σε μεθοδολογικά ζητήματα έρευνας κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών της μαθημάτων.

Την καθηγήτρια κα. Μαρία Καλδρυμίδου για την τιμή που μου έκανε να συμμετέχει στην τριμερή μου επιτροπή, αλλά πιο πολύ γιατί με τις συζητήσεις στο μάθημα της, μας άνοιξε τους ορίζοντες που βλέπαμε την Διδακτική των Μαθηματικών.

Την καθηγήτρια κα. Ξένια Βαμβακούση για την τιμή που μου έκανε να συμμετέχει στην τριμερή μου επιτροπή, αλλά κυρίως γιατί η ερευνητική της δουλειά αποτέλεσε έμπνευση για μένα.

Την εκπαιδευτικό που βοήθησε στην διεξαγωγή της έρευνας και τους μαθητές της που συμμετείχαν στην έρευνα.

Επιπλέον ευχαριστώ:

Την οικογένειά μου και τον Νίκο που μου συμπαραστάθηκαν σε όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού αυτού.

Τις συνοδοιπόρους μου κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, Άνθια, Ελένη και Κατερίνα.

Την αδελφή μου και συνάδελφο Βασιλική για την αμέριστη συμπαράστασή της καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας.

Περίληψη

Η αναγνώριση και η γενίκευση μοτίβων αποτελεί βασικό συστατικό για την προσέγγιση της Άλγεβρας και την ανάδειξη και προώθηση του αλγεβρικού συλλογισμού. Η παρούσα εργασία μελετά τη σύνδεση της Μαθηματικής γενίκευσης και του αλγεβρικού συλλογισμού μέσα από προβλήματα κανονικοτήτων σε μαθητές Γυμνασίου. Σε 61 μαθητές από τις τρείς σχολικές βαθμίδες του Γυμνασίου χορηγήθηκε ένα δοκίμιο με δύο προβλήματα αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων. Διερευνήθηκαν οι στρατηγικές που επινόησαν οι μαθητές για να απαντήσουν έργα κοντινής και μακρινής γενίκευσης, καθώς και πως διαφοροποιείται η χρήση των στρατηγικών αυτών ανά τύπο γενίκευσης. Επίσης διερευνήθηκε ο τρόπος (λεκτικός ή συμβολικός) με τον οποίο οι μαθητές αποδίδουν τους κανόνες γενίκευσης που κατασκεύασαν. Παράλληλα διερευνήθηκε και σε πιο βαθμό επιδρά στις απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές, η σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν. Τέλος, συνθέτοντας τα ευρήματα της μελέτης έγινε μια προσπάθεια να τονιστεί ο ρόλος των κανονικοτήτων ως μέσο ανάδειξης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό ότι κάποιοι μαθητές, κυρίως από την Γ΄ Γυμνασίου, μπορούν να γενικεύσουν αλγεβρικά και να εκφράσουν τις γενικεύσεις τους συμβολικά. Οι περισσότεροι μαθητές όμως οδηγήθηκαν σε λεκτική περιγραφή αναδρομικών σχέσεων και δεν διατύπωσαν το pattern σε μια γενικευμένη μορφή μέσω της χρήσης συμβόλων.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματική γενίκευση, αλγεβρικός συλλογισμός, προβλήματα γραμμικών κανονικοτήτων, μοτίβο, στρατηγικές γενίκευσης, κανόνες γενίκευσης, μαθητές Γυμνασίου.

Abstract

The recognition and generalization of patterns is a key component of the approach to Algebra and the emergence and promotion of algebraic reasoning. The present study explores the relationship between Mathematical Generalization and Algebraic reasoning through problems with patterns in high school students. 61 students from the three grades of a Greek Gymnasium were given a test with two problems of growing linear patterns. We explored the strategies devised by students to respond to items of near and far generalization, and how the use of these strategies varied by type of generalization. The study, also, examined the ways (verbal or symbolic) students use to express the generalization rules they constructed and to which extent the grade they belong to, influenced the responses given by students. Finally, by compiling this study's findings, an attempt was made to emphasize on the role of patterns as a means of highlighting students' algebraic thinking. From the results of the research it became clear that some students, mainly from the 3rd grade of the Gymnasium, could generalize algebraically and express their generalizations symbolically. Most students, however, were led to a verbal description of retrospective relationships and did not formulate the pattern in a generalized form through the use of symbols.

Key-words: generalization, algebraic reasoning, problems with linear patterns, pattern, generalization strategies, generalization rules.

Περιεχόμενα

BE WISE. GENERALIZE!

W. Dörfler, (1991).

1. Εισαγωγή

Η Άλγεβρα, αν και ιστορικά συνδέθηκε, κυρίως με τη μελέτη των μεθόδων λύσης των εξισώσεων, σήμερα χρησιμοποιείται παντού (Kieran, 2004). Στα δίκτυα επικοινωνίας, στους νόμους της φυσικής, στα μοντέλα επιχειρήσεων από τα καθημερινά λογιστικά φύλλα μέχρι τα προηγμένα συστήματα προγραμματισμού και τις στρατηγικές οικονομικού σχεδιασμού, στα μοντέλα μελέτης των πληθυσμών και στα στατιστικά αποτελέσματα που μπορούν να αναπαρασταθούν με τη συμβολική γλώσσα της Άλγεβρας. Η Άλγεβρα μελετά τις αφηρημένες δομές και τον τρόπο που αυτές συμβάλλουν στην επίλυση των προβλημάτων.

Η Άλγεβρα συνιστά μία από τις σπουδαιότερες, αλλά και δυσκολότερες ενότητες των Μαθηματικών από άποψη μάθησης αλλά και διδασκαλίας. Η αξία της βρίσκεται κυρίως σε δύο δυνατότητες που προσφέρει:

- τη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και
- την ευκολότερη και αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων, μαθηματικών και μη, κυρίως μέσω της μοντελοποίησης (Kieran, 2007; Δράμαλης & Σακονίδης, 2006).

Η Άλγεβρα εμφανίζεται ως μια νέα «γλώσσα» με τη δική της δομή, τις δικές της αρχές και τους δικούς της κανόνες που πολλές φορές έρχονται σε αντίθεση τόσο με τους κανόνες της καθημερινής γλώσσας όσο και με τους κανόνες της Αριθμητικής. Η εξοικείωση των μαθητών με τη δομή γίνεται αντιληπτή ως συνέπεια της εμπειρίας των μαθητών με την Αριθμητική μέσα από μια διαδικασία επαγωγικών γενικεύσεων (Λεμονίδης, 1996).

Σημαντική έμφαση, κοινή σε όλο τον κόσμο, αποτελεί η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών που χρειάζονται για την επιτυχία στο Λύκειο και πέρα από αυτό. Ο Kaput (2008) προσδιορίζει δύο βασικές πτυχές του αλγεβρικού συλλογισμού. Η πρώτη πτυχή που περιγράφει, αφορά στη γενίκευση και διατύπωση γενικεύσεων με όλο και πιο συμβατικά/τυπικά συμβολικά συστήματα ενώ η δεύτερη πτυχή αναφέρεται στη δράση και χειρισμό συμβόλων με βάση συντακτικούς κανόνες εντός οργανωμένων συμβολικών συστημάτων. Η δεύτερη πτυχή θεωρείται τυπικά ότι αναπτύσσεται μετά την πρώτη πτυχή διότι οι χειρισμοί συμβόλων βάση κανόνων εξαρτώνται από τη γνώση του ποιοι είναι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί συμβόλων και τη γνώση του πώς σχετίζονται μεταξύ τους (Kaput, 2008). Στα πολύ αρχικά στάδια της διδασκαλίας της Άλγεβρας, οι μαθητές, προκειμένου να ασκηθούν να διακρίνουν δομές και να τις αποδίδουν με κάποιο κανόνα, ενθαρρύνονται να παρατηρήσουν μοτίβα και να κάνουν γενικεύσεις, χρησιμοποιώντας τα δικά τους μέσα. Σύντομα, όμως, ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν πιο τυπικές μορφές αναπαράστασης.

Η εύρεση και χρήση μοτίβων είναι μια σημαντική στρατηγική για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αφού για την επίλυση τους απαιτείται η εξέταση ειδικών περιπτώσεων, η συστηματική οργάνωση των αποτελεσμάτων, η εύρεση ενός μοτίβου και η χρήση του στην προσπάθεια να δοθεί μια απάντηση (Stacey, 1989). Η αναγνώριση και η γενίκευση μοτίβων θεωρείται κεντρική Μαθηματική πρακτική και αποτελεί βασικό συστατικό της σύγχρονης Διδακτικής προσέγγισης της Άλγεβρας. Μέσω της γενίκευσης μοτίβων οι μαθητές οικοδομούν σταδιακά έννοιες όπως η μεταβλητή, οι σχέσεις και οι συναρτήσεις (Steele, 2008). Τα τελευταία χρόνια τονίζεται ιδιαίτερα η αξία των κανονικοτήτων για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Πράγματι, η επαγωγική γενίκευση, ο εντοπισμός σχέσεων μεταξύ διαδοχικών όρων μιας κανονικότητας, η συσχέτιση του όρου με τη θέση του και το πέρασμα από την λεκτική περιγραφή του κανόνα στην τυποποίησή του είναι σημαντικά στοιχεία της αλγεβρικής σκέψης (Mason, 1996).

Η αναδίφηση της βιβλιογραφίας έδειξε ότι υπάρχει εκτεταμένη έρευνα πάνω στις στρατηγικές γενίκευσης κανονικοτήτων από τους μαθητές καθώς και τις δυσκολίες που δημιουργεί η μαθηματική γενίκευση και η αλγεβρική έκφραση της. Οι έρευνες με προβλήματα κανονικοτήτων έχουν αποδειχθεί πολύ αποτελεσματικές στην αποκάλυψη της ικανότητας γενίκευσης και συμβολισμού και προπαντός στην ανάδειξη και την προώθηση της ανάπτυξης του αλγεβρικού συλλογισμού. Τα πειράματα αυτά ποικίλλουν στους τύπους των patterns που χρησιμοποίησαν - αριθμητικά, εικονιστικά, αναπτυσσόμενα ή επαναλαμβανόμενα patterns - καθώς και στους διαφορετικούς πληθυσμούς, από τα παιδιά έως τους εκπαιδευτικούς (Amit & Neria, 2008; Rivera & Becker 2007; Ellis, 2007; Radford, 2006; Becker & Rivera, 2005; Lannin, 2005; Zazkis & Lijendak, 2002; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Garcia, Cruz & Martinon, 1998; Stacey, 1989), τους οποίους μελέτησαν.

Η διερεύνηση μοτίβων σε διαφορετικά πλαίσια, η χρήση συμβόλων και μεταβλητών που παριστάνουν κανονικότητες και η μαθηματική γενίκευση είναι σημαντικές συνιστώσες του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΠΣΜ) σε πολλές χώρες. Το ΠΣΜ του Ελληνικού Δημοτικού Σχολείου εισηγείται την ανάπτυξη του προ-αλγεβρικού συλλογισμού των μαθητών μέσω της ενίσχυσης μιας προδιάθεσης των μαθητών για την εξερεύνηση αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων από τις μικρές τάξεις. Τα μοτίβα όπως αναφέρεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Στ΄ τάξης, (σελ 124), «*είναι περισσότερο* ***μια διαδικασία ανακάλυψης*** *παρά μια μαθηματική έννοια που θα διδαχθεί το παιδί.* ***Είναι ο δρόμος που θα οδηγήσει τη σκέψη του στην Άλγεβρα***».

Στο ΠΣΜ του Γυμνασίου δεν προβλέπεται κανενός είδους διδακτική αξιοποίηση των κανονικοτήτων αν και οι μαθητές εισάγονται επίσημα στην Άλγεβρα στο Γυμνάσιο. Έτσι, δεν προκαλεί έκπληξη ότι, η αναδίφηση της ελληνικής βιβλιογραφίας για τη Μαθηματική Γενίκευση ανέδειξε το γεγονός ότι αποτελείται σχεδόν αποκλειστικά από έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές του Δημοτικού με αποτέλεσμα να είναι περιορισμένα τα ερευνητικά δεδομένα που προσφέρουν πληροφορίες για μαθητές της Ελληνικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να εξετάσει, αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων (Α΄, Β΄, Γ΄) του Γυμνασίου μπορούν να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης κανονικοτήτων. Ειδικότερα, διερευνήθηκαν οι στρατηγικές γενίκευσης που επινόησαν οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με δύο προβλήματα αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων – ένα εικονιστικό και ένα αριθμητικό. Παράλληλα, διερευνήθηκε και η διαφοροποίηση της χρήσης των στρατηγικών από τους μαθητές όταν η απαιτήσεις της γενίκευσης αυξανόταν από τα ερωτήματα κοντινής γενίκευσης στα ερωτήματα μακρινής γενίκευσης και εύρεσης του νιοστού όρου. Εξετάστηκε, επίσης, το πώς (λεκτικά ή συμβολικά) απέδωσαν οι μαθητές τους κανόνες γενίκευσης που κατασκεύασαν, καθώς και σε ποιο βαθμό η σχολική βαθμίδα στην οποία βρίσκονται οι μαθητές επηρέασε όλα τα παραπάνω. Τέλος, συνθέτοντας τα ευρήματα των παραπάνω ερωτημάτων, έγινε μια προσπάθεια να σκιαγραφηθεί η αλγεβρική σκέψη των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα.

Η εργασία δομείται σε εφτά ενότητες, με την πρώτη να είναι η παρούσα εισαγωγή. Στη δεύτερη ενότητα, αρχικά περιγράφεται με την βοήθεια της βιβλιογραφίας τι είναι Άλγεβρα και τι αλγεβρικός συλλογισμός. Ακολουθούν αναφορές σχετικά με τους ορισμούς που δίνουν οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για την Μαθηματική Γενίκευση και της διαφορετικές μορφές που μπορεί αυτή να έχει. Στη συνέχεια, επισημαίνεται ο ρόλος και η σημασία της Γενίκευσης κανονικοτήτων για τα Μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα για την Άλγεβρα και την ανάδειξη και προώθηση του αλγεβρικού συλλογισμού. Παρατίθενται παλαιότερες έρευνες όπου καταγράφονται ο συλλογισμός των μαθητών στην επινόηση διαφορετικών στρατηγικών κατά τη γενίκευση μιας κανονικότητας, οι τρόποι έκφρασης της γενίκευσης, καθώς και οι δυσκολίες-εμπόδια που αντιμετώπισαν. Τέλος καταγράφονται οι παράγοντες που οι έρευνες αναδεικνύουν ως αυτούς που επηρεάζουν την Γενίκευση κανονικοτήτων.

Στη τρίτη ενότητα διατυπώνονται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα και αποσαφηνίζεται το εννοιολογικό πλαίσιο της έρευνας. Η περιγραφή της μεθόδου, τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων, η ερευνητική διαδικασία και το εργαλείο της έρευνας περιγράφονται επίσης στην τρίτη ενότητα. Έπονται τα αποτελέσματα της έρευνας και η συζήτηση που παρουσιάζονται στη τέταρτη και πέμπτη ενότητα αντίστοιχα. Στην έκτη ενότητα περιγράφεται η ανάδυση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα μέσα από την σύνθεση των ευρημάτων της παρούσας έρευνας. Τα συμπεράσματα, στα οποία οδηγούν όλα τα προηγούμενα, ακολουθούν στην έβδομη ενότητα. Η εργασία κλείνει με την παράθεση της βιβλιογραφίας και των παραρτημάτων.

2. Ανασκόπηση Βιβλιογραφίας – Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1. Άλγεβρα και αλγεβρικός συλλογισμός

Η έννοια της Άλγεβρας συνδέεται παραδοσιακά με τα μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Όπως έχει τονιστεί από τον Kaput (1999), οι ορισμοί της Άλγεβρας που βασίζονται σε αυτό που διδάσκεται στα σχολεία κατά την διάρκεια του τελευταίου αιώνα την περιγράφουν ως «*μια απλοποίηση των αλγεβρικών εκφράσεων, η επίλυση των εξισώσεων, η εκμάθηση των κανόνων χειρισμού συμβόλων, η άλγεβρα που σχεδόν όλοι, φαίνεται, αγαπούν να μισούν*» (σελ.134). Σύμφωνα με τον Mason (1996), οι ρίζες της Άλγεβρας απαντώνται: στην έκφραση της γενικότητας με τη χρήση και το χειρισμό πολλαπλών εκφράσεων για την ίδια γενικότητα, χρησιμοποιώντας σύμβολα για να δηλωθούν άγνωστες ή απροσδιόριστες ποσότητες και εκφράζοντας τη δομή ως αποτέλεσμα της έκφρασης των γενικών κανόνων της

Αριθμητικής. Όμοια, οι Drijvers et al. (2011) περιγράφουν ως τα τρία βασικά στοιχεία της Άλγεβρας τις γενικεύσεις μέσω της εξερεύνησης μοτίβων και τύπων, την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με αναφορά σε συγκεκριμένους περιορισμούς και τη διερεύνηση συναρτησιακών σχέσεων.

Η έρευνα στη Μαθηματική Εκπαίδευση αποδίδει μεγάλη σημασία στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ως ενός τρόπου προσέγγισης της Άλγεβρας. Ο Mason (1996) υποστηρίζει ότι ο δρόμος προς την αλγεβρική σκέψη περνά από την ανίχνευση της ομοιότητας και της διαφοράς, τη δημιουργία διακρίσεων, την ταξινόμηση και την επισήμανση, ή απλά την αναζήτηση ενός αλγόριθμου. Η ίδια η δημιουργία αυτού του αλγόριθμου στο μυαλό του μαθητή σε οποιαδήποτε μορφή κι αν συλλαμβάνεται είναι αλγεβρική σκέψη. Από την άλλη, η Kieran (2004) στον ορισμό της για την αλγεβρική σκέψη τονίζει ότι αυτή περιλαμβάνει την ανάπτυξη τρόπων σκέψης μέσα σε δραστηριότητες για τις οποίες η συμβολική άλγεβρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο αλλά δεν είναι αποκλειστικές για την Άλγεβρα. Τέτοιες δραστηριότητες, στις οποίες η αλγεβρική σκέψη μπορεί να συμμετέχει χωρίς την χρήση της συμβολικής άλγεβρας, είναι η ανάλυση των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, η παρατήρηση της δομής, η μελέτη αλλαγών, η γενίκευση, η επίλυση προβλημάτων, η μοντελοποίηση, η δικαιολόγηση, η απόδειξη και η πρόβλεψη.

Ο Radford (2006), υποστηρίζει ότι η αλγεβρική σκέψη είναι μια ιδιαίτερη μορφή μαθηματικού αναστοχασμού. Ο λειτουργικός ορισμός που χρησιμοποιεί δομείται από τρία αλληλοσυνδεόμενα στοιχεία. Το πρώτο, ασχολείται με μια αίσθηση *απροσδιοριστίας* (indeterminacy) που είναι κατάλληλη για βασικά αλγεβρικά αντικείμενα όπως οι άγνωστοι, οι μεταβλητές και οι παράμετροι. Είναι αυτή η απροσδιοριστία (σε αντίθεση με τον αριθμητικό προσδιορισμό) που καθιστά δυνατή π.χ. την αντικατάσταση ενός μεταβλητού ή άγνωστου αντικειμένου από ένα άλλο. Δεύτερον, τα απροσδιόριστα αντικείμενα αντιμετωπίζονται αναλυτικά. Τρίτον, αυτό που κάνει την σκέψη αλγεβρική είναι επίσης ο ιδιότυπος συμβολικός τρόπος που έχει για να *ορίσει* τα αντικείμενα της. Ο Radford (2006, 2008) καταλήγει με τον ισχυρισμό ότι η αλγεβρική σκέψη δεν είναι κάτι «φυσικό» που προκύπτει με την ωρίμανση. Η αλγεβρική σκέψη είναι ένας πολύ επεξεργασμένος πολιτισμικός τύπος αναστοχασμού και δράσης, ένας τρόπος που έχει εκλεπτυνθεί ξανά και ξανά στο πέρασμα του χρόνου, προτού καταλήξει στην παρούσα μορφή. Αυτός και είναι ο λόγος που η απόκτησή του παρουσιάζει τόσες δυσκολίες.

Με ίδια συλλογιστική, ο Kaput (2017), στην περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης αναφέρεται σε δύο βασικές πτυχές της και η περιγραφή αυτή συγχωνεύει τις δύο ταυτότητες της Άλγεβρας ως *ένα αυτόνομο πεδίο γνώσης* και ως *ανθρώπινη δραστηριότητα*. Η πρώτη πτυχή που περιγράφει, αφορά στη γενίκευση και τη διατύπωση γενικεύσεων με όλο και πιο συμβατικά/τυπικά συμβολικά συστήματα ενώ η δεύτερη πτυχή αναφέρεται στη δράση και τον χειρισμό συμβόλων με βάση συντακτικούς κανόνες εντός οργανωμένων συμβολικών συστημάτων.

Υπάρχει έλλειψη συμφωνίας μεταξύ των ερευνητών όσον αφορά στη σχέση μεταξύ της αλγεβρικής σκέψης και του αλγεβρικού συμβολισμού. Κάποιοι θεωρούν τα αλγεβρικά σύμβολα ως απαραίτητο στοιχείο της αλγεβρικής σκέψης, ενώ άλλοι τα θεωρούν ως έκβαση ή ως εργαλεία επικοινωνίας (Zazkis και Liljedahl, 2002). Οι Zazkis και Liljedahl (2002) αναφέρουν ότι η πιο πρόσφατη ερευνητική τάση είναι ο διαχωρισμός του αλγεβρικού συμβολισμού από την αλγεβρική σκέψη. Αυτή η ξεχωριστή θεώρηση προάγεται από δύο παράγοντες: (1) το επιβεβαιωμένα από τη μεριά των μαθητών απρόσεκτο χειρισμό των συμβόλων και (2) από την μετακίνηση προς τον πρώιμο αλγεβρικό συλλογισμό, την έμφαση δηλαδή, στη δομή της Αριθμητικής παρά στη χρήση της ως υπολογιστικό εργαλείο στο Δημοτικό σχολείο. Τονίζουν ότι, ούτε η παρουσία του αλγεβρικού συμβολισμού θα πρέπει να ληφθεί ως ένδειξη της αλγεβρικής σκέψης, ούτε η έλλειψη αλγεβρικού συμβολισμού θα πρέπει να ληφθεί ως αδυναμία να σκεφτούν οι μαθητές αλγεβρικά. Η συμβολική γλώσσα διευκολύνει την αλγεβρική σκέψη, αλλά δεν την εξασφαλίζει ούτε την εγγυάται (Radford, 2008).

Η αλγεβρική συλλογιστική περιλαμβάνει την αναπαράσταση, τη γενίκευση, την τυποποίηση καταστάσεων και τη κανονικότητα σε όλες τις πλευρές των μαθηματικών. Όπως σημειώνει ο Kaput (1999) είναι δύσκολο να βρούμε μια περιοχή των μαθηματικών η οποία να μη συνεπάγεται τη γενίκευση και την τυποποίηση με κάποιο ουσιώδη τρόπο. Αυτός όμως ο τύπος της συλλογιστικής βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών ως επιστήμης των προτύπων και της τάξης.

2.2. Μαθηματική Γενίκευση

Δεδομένου ότι οι έννοιες δεν απορρέουν ούτε από τους λογικούς κανόνες - όπως υποδηλώνει ο ορθολογισμός - ούτε από τις εξωτερικές εντυπώσεις - όπως υποδηλώνει ο εμπειρισμός - η προέλευση όλων των εννοιών, όπως υποστήριξε ο Vygotsky, βρίσκεται στις γενικεύσεις (Vygotsky, 1986, στο Radford, 2008). Αν δεν μπορούσαμε να κάνουμε γενικεύσεις, η ζωή μας θα περιοριζόταν σε έναν κόσμο απλών στοιχείων α, β, γ, ... Όλα θα ήταν διαφορετικά από οτιδήποτε άλλο και η γνώση θα είχε περιοριστεί σε ένα αέναο α ≠ β ≠ γ. Αυτή η γνωστική πράξη συνεπάγεται τη διαμόρφωση μιας έννοιας - μιας γενικευμένης οντότητας - η οποία δεν συμπίπτει πλήρως με οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις της. Η ικανότητά μας να παρατηρούμε διαφορές στα πράγματα είναι πράγματι μία από τις βασικές συνιστώσες της γνώσης. Χωρίς αυτή, θα ήμασταν ανίκανοι να ταξινομήσουμε την εκπληκτική ποσότητα αισθητήριων ερεθισμάτων που λαμβάνουμε από το εξωτερικό μας περιβάλλον και ο κόσμος μπροστά μας θα μειωνόταν σε μια άμορφη οπτική, χειροπιαστή και ακουστική μάζα (Radford, 2008). Από την άλλη, ο Polya (1957) αναφέρεται στην γενίκευση σαν ένα σταδιακό πέρασμα από την θεώρηση ενός αντικειμένου στην θεώρηση ενός συνόλου που περιέχει το αντικείμενο αυτό ή το πέρασμα από την εξέταση ενός περιορισμένου συνόλου σε ένα πιο ολοκληρωμένο σύνολο που περιέχει το περιορισμένο σύνολο (όπως αναφ. στο, Rivera, 2013). Οι μαθηματικές γενικεύσεις είναι ίσως το πιο σαφές παράδειγμα όλων όσων αναφέρθηκαν παραπάνω.

Είναι γενικά αποδεκτό από μεγάλο μέρος της ερευνητικής κοινότητας πως η γενίκευση είναι μια από της πιο αυθεντικές πρακτικές της τάξης των μαθηματικών, καθώς η διαδικασία γενίκευσης ενός συνόλου ιδιαίτερων περιπτώσεων και η δικαιολόγηση και επισημοποίηση γενικευμένων ισχυρισμών είναι θεμελιώδους σημασίας για τα μαθηματικά. Είναι η καρδιά των Μαθηματικών και η μαθηματική σκέψη λαμβάνει χώρα μόνο όταν οι μαθητές εκφράζουν τις δικές τους γενικεύσεις (Mason, 1996). Μια ανασκόπηση της ερευνητικής βιβλιογραφίας αναδεικνύει διαφορετικές ερμηνείες του όρου γενίκευση. Με πιο προσεκτική εξέταση, αυτές οι ερμηνείες αποκαλύπτουν τη διπλή έννοια του όρου, δηλώνοντας αφενός μια διαδικασία και, αφετέρου, ένα προϊόν αυτής της διαδικασίας (Καλδρυμίδου, 2000).

2.2.1. Η Μαθηματική Γενίκευση ως διαδικασία

Αρκετοί ερευνητές θεωρούν τη γενίκευση ως μια διαδικασία επέκτασης του υφιστάμενου επιχειρήματος ή του σχήματος πέρα από την περίπτωση ή τις περιπτώσεις που εξετάζονται. Για παράδειγμα, οι Harel & Tall (1991) χρησιμοποιούν τον όρο γενίκευση με την έννοια της «*εφαρμογής ενός δεδομένου επιχειρήματος σε ένα ευρύτερο πλαίσιο*» (σελ. 38) και ο Dorfler (1991), ως «*ένα αντικείμενο και ένας τρόπος σκέψης και επικοινωνίας*». Θεωρεί, δηλαδή, ότι η γενίκευση είναι ένας συνδυασμός γνωστικών διεργασιών σε διπλό επίπεδο: το υποκειμενικό-ψυχολογικό, που σχετίζεται με την ατομική-ανακλαστική διάσταση και το αντικειμενικό-επιστημολογικό, που σχετίζεται με την κοινωνική διάσταση (κοινή χρήση, επικοινωνία και χρήση της γλώσσας). Ο Kaput (1999), επεκτείνει τους παραπάνω ορισμούς περιγράφοντας τη διαδικασία γενίκευσης ως «*την σκόπιμη επέκταση του φάσματος της συλλογιστικής ή της επικοινωνίας πέραν της υπόθεσης ή των υπό εξέταση περιπτώσεων, ώστε να προσδιορίζει ρητά και να εκθέτει την ομοιομορφία σε διάφορες περιπτώσεις ή να ανυψώνει τη λογική ή την επικοινωνία σε ένα επίπεδο δεν επικεντρώνεται πλέον στα ίδια τα περιστατικά ή στην κατάσταση, αλλά στα πρότυπα, τις διαδικασίες, τις δομές και τις σχέσεις μεταξύ τους*» (σελ. 136).

Σύμφωνα με την Ellis (2007), η γενίκευση είναι μια δυναμική μάλλον παρά στατική διαδικασία. Φαίνεται να προσπαθεί να παντρέψει την γνωστική με την κοινωνική χροιά του όρου, καθώς η ίδια γράφει τα εξής: *«ορίζω την γενίκευση ως μια δραστηριότητα στην οποία τα άτομα ενώ βρίσκονται μέσα σε κοινωνικό-μαθηματικά πλαίσια προβαίνουν σε μια από τις εξής (νοητικές) πράξεις: (α) αναγνωρίζουν ομοιότητες και κοινά χαρακτηριστικά σε διαφορετικές περιπτώσεις, (β) επεκτείνουν τον συλλογισμό τους πέρα από τα πλαίσια και τα όρια της αρχικής προέλευσης αυτού και (γ) εξάγουν ευρύτερα συμπεράσματα, τα οποία απορρέουν από συγκεκριμένες περιπτώσεις»* (Ellis, 2011, σελ. 311). Η άποψή της έρχεται σε συμφωνία με τη συχνά αναφερόμενη φράση του Mason (1996) «*να βλέπουν το ειδικό μέσα στο γενικό*» (σελ. 65), καθώς και με αυτό που ο Radford (2006) θεωρεί ως ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό της γενίκευσης -την «*ικανότητα να παρατηρήσουν το γενικό μέσω του ειδικού*» (σελ. 5).

Τέλος, οι Rivera και Becker (2011) περιέγραψαν τη γενίκευση ως μια διαδικασία όπου μελετάμε συγκεκριμένα παραδείγματα αναζητώντας μια κανονικότητα σε αυτά. Αυτό οδηγεί στην διατύπωση μιας εικασίας που αποτελεί τη γενική περίπτωση και η όλη διαδικασία ολοκληρώνεται μόνο όταν λαμβάνει χώρα η διαδικασία της απόδειξης.

2.2.2. Η Μαθηματική Γενίκευση ως προϊόν

Όταν ο κανόνας που προκύπτει από μια διαδικασία γενίκευσης αναφέρεται ως γενίκευση, τότε ο όρος γενίκευση θεωρείται ως προϊόν. Οι Becker και Rivera (2005; 2006) είναι δύο ερευνητές που έχουν υιοθετήσει αυτή την ερμηνεία, όπως αποδεικνύεται από τον ορισμό της γενίκευσης που παρέχεται παραπάνω. Την ίδια άποψη μοιράζονται οι Kaput, Blanton και Moreno (2017) οι οποίοι αναφέρουν πως «*ο μόνος τρόπος με τον οποίο ένα άτομο μπορεί να κάνει μια μόνο δήλωση που ισχύει για πολλαπλές περιπτώσεις (δηλ. Γενίκευση), χωρίς να κάνει μια επαναλαμβανόμενη δήλωση για κάθε περίπτωση, είναι να αναφέρεται σε πολλαπλές περιπτώσεις μέσω κάποιου είδους ενοποιημένης έκφρασης που αναφέρεται σε όλες με ένα ενιαίο τρόπο, σε μια ενιαία δήλωση*» (σελ. 20).

Υπάρχουν, επίσης, ερευνητές (Lannin, 2005; Ellis, 2007; Radford, 2008) που προσεγγίζουν την γενίκευση ως προϊόν των συλλογικών αναπαραστάσεων, οι οποίες έχουν τις ρίζες τους στο κοινωνικό περιβάλλον και πηγάζουν από τις εμπειρίες μας. Μέσω των ανθρώπινων συναναστροφών, της γλώσσας και των εργαλείων πραγματοποιείται η μεταβίβαση των αναπαραστάσεων αυτών από άτομο σε άτομο.

Ο Lannin (2005) και η Ellis (2007; 2011) προσπαθούν να προσεγγίσουν την έννοια με κύριο κριτήριο τις εσωτερικές νοητικές διαδικασίες των μαθητών. Οι δύο αυτοί ερευνητές αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα ενός νέου κύματος ερευνητών οι οποίοι ναι μεν ενστερνίζονται την γνωστική χροιά της έννοιας, προσπαθούν δε να την προσεγγίσουν και υπό το πρίσμα κοινωνικών θεωριών (sociocultural theories), δηλαδή ως ένα φαινόμενο πλαισιοθετημένο στο κοινωνικό πλαίσιο (situated) στο οποίο εξελίσσεται. Στο ίδιο μήκος κύματος βρίσκεται και ο Radford (2006), ο οποίος υποδηλώνει ότι στη διαδικασία της γενίκευσης, οι μαθητές περνούν μια εμπειρία λήψης αποφάσεων, καθώς αποφασίζουν τι μένει το ίδιο και τι αλλάζει, τι πρέπει να τονιστεί και να υπογραμμιστεί και τι πρέπει να αγνοηθεί. Η παρατήρηση των διαφορών και των ομοιοτήτων που οδηγούν σε οποιαδήποτε έννοια είναι κάτι που συμβαίνει στις κοινωνικές δραστηριότητες που υπάγονται στις πολιτιστικές παραδόσεις, μεταφέροντας ιδέες για το τι είναι ίδιο και τι διαφορετικό.

Η γενίκευση είναι ταυτόχρονα κάτι που είναι πανταχού παρόν (Mason, 1996) και κάτι που πρέπει κάποιος να μάθει. Για να συλλογιστεί μαθηματικά κάποιος σύμφωνα με τον Radford (2008) απαιτείται να δει τις λεπτομέρειες ως κάτι γενικό υπό μία πολιτιστική έννοια. Η Ellis (2011), ωστόσο, θέλοντας να τονίσει την σχέση που έχει η διαδικασία της γενίκευσης με το περιβάλλον στο οποίο επιθυμούμε να επιτευχτεί, υποστηρίζει πως η γενίκευση που κατέγραψε στις έρευνες της πέρασε μέσα από πολλά στάδια μέχρι την τελική της μορφή (την οποία χαρακτηρίζει ως *συλλογική γενίκευση* (collective generalizing)), στην οποία οι μαθητές δεν θα είχαν φτάσει αν εργάζονταν απομονωμένοι από το περιβάλλον της ομάδας μελέτης.

Τέλος, η γενίκευση για τον Kaput (1999) γίνεται αντιληπτή ως το μέσο για μια μακροπρόθεσμη αλλαγή στον τρόπο που βλέπει ο μαθητής την άλγεβρα έτσι ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν την αλγεβρική σκέψη σε βάθος μέσα από την κατανόηση, παρά να μάθουν μόνο μηχανιστικές διαδικασίες με σύμβολα, όπως άλλωστε παραδοσιακά συμβαίνει, και που ως αποτέλεσμα έχει τη δυσαρέσκεια των μαθητών προς το αντικείμενο αυτό. Η μαθηματική γενίκευση έχει άμεση σχέση με την Άλγεβρα καθώς αποτελεί τη γλώσσα μέσω της οποίας μπορούμε να εκφράσουμε τις γενικεύσεις των ποσοτήτων που κάνουμε (Mason, 1996).

2.2.3. Μορφές Μαθηματικής Γενίκευσης

Μεγάλο μέρος της έρευνας που εξετάζει τις γενικεύσεις των μαθητών έχει συσσωρεύσει πλούσιες και πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τους διάφορους τρόπους που χρησιμοποιούν για να γενικεύσουν, προσφέροντας έτσι στους ερευνητές πολλές ευκαιρίες να εξετάσουν τις διαφορετικές μορφές γενίκευσης που παράγονται.

Η Stacey (1989) αναφέρεται στη γενίκευση με τους όρους *κοντινή γενίκευση* (near generalization) και *μακρινή γενίκευση* (far generalization). Σε αυτό το πλαίσιο ο όρος κοντινή γενίκευση χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια ερώτηση που μπορεί να απαντηθεί με το βήμα προς βήμα σχεδιασμό ή τον υπολογισμό και η μακρινή γενίκευση για να δηλώσει μια ερώτηση που υπερβαίνει τα λογικά πρακτικά όρια μιας τέτοιας βήμα προς βήμα προσέγγισης. Είναι σαφές ότι για την κοντινή γενίκευση είναι αρκετή η εύρεση αναδρομικών σχέσεων ενώ η μακρινή γενίκευση προϋποθέτει την εύρεση συναρτησιακών σχέσεων συμμεταβολής ή αντιστοίχισης.

Ο Dorfler (1991), αντλώντας στοιχεία από τον Davidov, ορίζει δύο τύπους γενικεύσεων: την *εμπειρική γενίκευση* (empirical generalization), η οποία αναφέρεται στην αναγνώριση κοινών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων ή ποιοτήτων σε αντικείμενα και τη *θεωρητική γενίκευση* (theoretical generalization), η οποία έχει να κάνει με ένα «*σύστημα δράσης*» στο οποίο σταθερές αναγνωρίζονται, αφαιρούνται και υποκαθιστούν τα πρωτότυπα, συμπεριλαμβάνοντας σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.

Οι Harel & Tall (1991) διακρίνουν μεταξύ τριών διαφορετικών μορφών γενίκευσης που εξαρτώνται από την νοητική δομή του ατόμου: (1) *επεκτατική* (expansive generalization), όπου το πεδίο εφαρμοσιμότητας ενός υπάρχοντος σχήματος επεκτείνεται, χωρίς ανακατασκευή του σχήματος (2) *ανακατασκευαστική* (reconstructive generalization), όπου το υπάρχον σχήμα ανακατασκευάζεται προκειμένου να διευρυνθεί το πεδίο εφαρμογής και (3) *διαχωριστική* (disjunctive generalization), όπου ένα νέο σχήμα κατασκευάζεται όταν μετακινείται σ' ένα νέο πλαίσιο. Υπογραμμίζεται ότι η επεκτατική γενίκευση είναι μια πραγματική γενίκευση υπό την έννοια ότι τα προηγούμενα σχήματα περιλαμβάνονται απευθείας ως ειδικές περιπτώσεις στο τελικό σχήμα. Η ανακατασκευαστική γενίκευση διαφέρει στο ότι το παλιό σχήμα αλλάζει και εμπλουτίζεται πριν συμπεριληφθεί στο γενικότερο σχήμα, αλλά στη συνέχεια δίνει μια πραγματική γενίκευση του εμπλουτισμένου σχήματος. Η διαχωριστική γενίκευση μπορεί να εμφανιστεί ως επιτυχής γενίκευση για έναν παρατηρητή, αποτυγχάνει όμως, να είναι μια γνωστική γενίκευση δεδομένου ότι δεν θεωρεί τα προηγούμενα παραδείγματα ως ειδικές περιπτώσεις της γενικής διαδικασίας. Σίγουρα επιτρέπει στο άτομο να αντιμετωπίσει ένα ευρύτερο φάσμα μαθηματικών παραδειγμάτων αλλά, στην πραγματικότητα, η διαχωριστική γενίκευση μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα σε έναν πιο αδύνατο μαθητή, καθώς αυτός κατασκευάζει χωριστές διαδικασίες για ποικίλες περιπτώσεις, αντί της δημιουργίας μιας γενικής περίπτωσης. Επιπλέον, η επεκτατική γενίκευση είναι γνωστικά ευκολότερη από την ανακατασκευαστική, αλλά μπορεί να είναι ανεπαρκής μακροπρόθεσμα.

Η Ellis (2007) κατασκευάζει μια ταξινομία γενίκευσης στην οποία υπάρχουν δύο βασικά επίπεδα γενίκευσης: δράσεις (generalizing actions) και αναστοχασμός (reflection generalizations). Το επίπεδο της γενίκευσης δράσης περιλαμβάνει τη διαμόρφωση μιας συσχέτισης μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μαθηματικών αντικειμένων, την αναζήτηση ομοιοτήτων και σχέσεων και την επέκταση ενός μοτίβου, σχέσης ή κανόνα σε μια γενικότερη δομή. Το επίπεδο του αναστοχασμού αναφέρεται στην ικανότητα αναγνώρισης ή χρήσης μιας υπάρχουσας γενίκευσης. Πιο συγκεκριμένα, κατά την Ellis (2007), οι γενικευτικές πράξεις χωρίζονται σε τρείς κατηγορίες:

- *Πράξεις συσχέτισης* (relating), κατά τις οποίες οι μαθητές σχηματίζουν μια σύνδεση μεταξύ δύο ή περισσότερων προβλημάτων ή αντικειμένων,
- *Πράξεις αναζήτησης* (searching), κατά τις οποίες οι μαθητές επαναλαμβάνουν μια δραστηριότητα με σκοπό να εντοπίσουν κάποιο στοιχείο ομοιότητας, και
- *Πράξεις επέκτασης* (extending) κατά τις οποίες οι μαθητές επεκτείνουν ένα μοντέλο, ή μια σχέση σε μια πιο γενική δομή.

Οι αναστοχαστικές γενικεύσεις παίρνουν τη μορφή ταυτοποιήσεων, προτάσεων, ορισμών κλπ. Στα πλαίσια της έρευνας οι αναστοχαστικές γενικεύσεις εμφανίζονται ως ανακοινώσεις των γενικευτικών πράξεων, είτε εκφράζονται στο επόμενο βήμα τους ως φορμαλισμοί των γενικεύσεων σε αρχές ή αλγεβρικούς κανόνες.

Ο Radford (2006), διακρίνει στις ενέργειες των μαθητών δύο είδη προ-συμβολικής γενίκευσης. Το πρώτο ονομάζεται *πραγματολογικό* (factual) και αποτελείται από γενικεύσεις αριθμητικών ενεργειών στην μορφή ενός αριθμητικού λειτουργικού σχήματος. Αυτό το λειτουργικό σχήμα, παραμένει οριοθετημένο στο χειροπιαστό επίπεδο και κάνει τους μαθητές ικανούς να αντιμετωπίζουν επιτυχώς κάθε συγκεκριμένη περίπτωση. Το δεύτερο είδος γενίκευσης, είναι αυτό του *πλαισίου* (contextual) ή αλλιώς γενίκευση από τα συμφραζόμενα. Λέγεται έτσι, επειδή αναφέρεται σε αφηρημένα αντικείμενα, όπως, για παράδειγμα, το «επόμενο σχήμα». Σε αντίθεση με τον πραγματολογικό, δεν γενικεύει μόνο αριθμητικές ενέργειες, αλλά και αντικείμενα ενεργειών. Ασχολείται με γενικά αντικείμενα, τα οποία δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις και αντικειμενικοποιούνται (objectification) μέσα από τον λόγο. Τέλος το τρίτο είδος γενίκευσης είναι το *συμβολικό* (symbolic). Το πέρασμα από την προ-συμβολική στην συμβολική γενίκευση, απαιτεί ένα συγκεκριμένο είδος ρήξης με τις φαινομενικές χειρονομίες και τους γλωσσικούς όρους κλειδιά, που είναι βασισμένοι στα συμφραζόμενα, υποστηρίζοντας τις προ-συμβολικές γενικεύσεις. Κύριο χαρακτηριστικό που ξεχωρίζει την συμβολική γενίκευση είναι ότι τα γενικά αντικείμενα και οι λειτουργιές τους, εκφράζονται στο αλφαριθμητικό σημειωτικό σύστημα της Άλγεβρας. Όσον αφορά αυτές τις μορφές γενίκευσης, ο Lannin (2005) διακρίνει μεταξύ της γενίκευσης από εικονικές / οπτικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις, υποστηρίζοντας ότι η εικονική είναι μια καλύτερη αναπαράσταση που οδηγεί στη διαδικασία της γενίκευσης.

Οι Rivera και Becker (2011) ταξινόμησαν τις μορφές γενίκευσης σύμφωνα με τις γενικές στρατηγικές των μαθητών. Ο Rivera (2013) κάνει λόγο για τρείς τύπους συλλογιστικής οι οποίοι μπορούν να ενεργοποιηθούν όταν εκφράζεται μια γενίκευση. Αυτοί είναι η *απαγωγή* (abduction), η *επαγωγή* (induction) και η *αναγωγή* (deduction).

Η απαγωγή βρίσκεται στον πυρήνα της γενικευτικής διαδικασίας καθώς οι μαθητές αρχίζουν να διερευνούν έναν πιθανό κανόνα που μπορεί να εξηγήσει τα γνωστά στάδια και να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσει τα άγνωστα στάδια σε οποιοδήποτε δεδομένο μοτίβο με ελλιπείς περιπτώσεις. Η απαγωγική φάση υπάρχει όταν οι μαθητές αρχίζουν να παρέχουν μια επεξηγηματική υπόθεση για ένα δεδομένο μοτίβο με βάση τις διαθέσιμες περιπτώσεις, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την επέκταση του μοτίβου (σε έργα κοντινής γενίκευσης) και στη συνέχεια υφίστανται επαλήθευση με επαγωγή.

Η επαγωγική φάση, δηλαδή, οδηγεί είτε στην επιβεβαίωση ενός κανόνα (κατά προτίμηση σε έναν άμεσο τύπο), είτε στην περαιτέρω ανάπτυξη μιας άλλης απαγωγής. Όταν ο κανόνας επιβεβαιωθεί, προκύπτει μια γενίκευση που επιτρέπει στους μαθητές να αντιμετωπίσουν έργα μακρινής γενίκευσης, χωρίς την επίπονη κατασκευή όλων των προηγούμενα σταδίων. Η περαιτέρω απαγωγή δικαιολογείται όταν ο κανόνας καθιστά σχεδόν δύσκολο να αντιμετωπιστεί με επιτυχία ένα έργο μακρινής γενίκευσης.

Η απαγωγή αφορά σε δημιουργία αυθεντικών ιδεών και επηρεάζεται από τη φαντασία και τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες. Αντίθετα, η επαγωγή αποδεικνύει (ή απορρίπτει) έναν απαγωγικό συλλογισμό δοκιμάζοντάς τον συστηματικά σε όλες τις ειδικές περιπτώσεις. Η αναγωγή, τέλος, προσδιορίζει τη λογική αναγκαιότητα ενός έγκυρου συμπεράσματος εφαρμόζοντας, μηχανιστικά, γενικούς κανόνες σε ειδικές περιπτώσεις.

2.3. Αλγεβρικός συλλογισμός και Γενίκευση κανονικοτήτων

Οι δραστηριότητες με κανονικότητες (pattern - tasks) έχουν θεωρηθεί ως ένας από τους κύριους τρόπους εισαγωγής των μαθητών στην Άλγεβρα (Mason, 1996). Από αυτή την οπτική, η Άλγεβρα σχετίζεται άμεσα με την γενίκευση (generalization) (Radford, 2006). Η μελέτη γύρω από την διδασκαλία των μοτίβων (patterns) στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει δείξει ερευνητικά ότι ενισχύει την αλγεβρική σκέψη των μαθητών, αφού οδηγεί σε γενικεύσεις που είναι βαθμιαίες (graded) και για αυτό διακριτές και παρατηρήσιμες (Rivera, 2013).

2.3.1. Κανονικότητες - Προβλήματα κανονικοτήτων

Η λέξη *«κανονικότητα»* αποδίδει το περιεχόμενο του αγγλικού όρου pattern και αναφέρεται στον κανόνα που διέπει μια κατάσταση ή ένα φαινόμενο[1]. Ανάλογο είναι και το νόημα της λέξης *«μοτίβο»* που χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου. Όταν ψάχνουμε για κανονικότητες ή μοτίβα, εστιάζουμε την προσοχή μας σε μερικά χαρακτηριστικά, ενώ αγνοούμε άλλα.

Οι κανονικότητες με βάση τη μορφή αναπαράστασης τους ταξινομούνται ευρέως ως αριθμητικές (numerical) όταν το μοτίβο παρατίθεται ως ακολουθία αριθμών ή ως εικονιστικές (figural) όταν το μοτίβο έχει οριστεί σε ένα εικονογραφικό πλαίσιο που δείχνει έναν ή περισσότερους σχηματισμούς. Τα αριθμητικά έργα τείνουν να απαριθμούν τους πρώτους τέσσερις ή πέντε όρους ενός μοτίβου σε μια διαδοχική σειρά (Stacey, 1989). Τα εικονιστικά έργα τείνουν να παρουσιάζουν περισσότερες παραλλαγές. Υπάρχουν δύο ευρέως χρησιμοποιούμενες προσεγγίσεις: (α) παρέχονται τρεις ή περισσότεροι διαδοχικοί σχηματισμοί (Radford, 2008; Rivera, 2010), και (β), δίνεται ένας μόνο σχηματισμός που αντιπροσωπεύει μια γενική περίπτωση του εικονιστικού μοτίβου (Lannin, Barker & Townsend, 2006; Steele, 2008). Με άλλα λόγια στα προβλήματα με κανονικότητες συνήθως δίνεται ένα επαρκές πλήθος όρων, από τους οποίους οι μαθητές μπορούν να βρίσκουν τον κανόνα σχηματισμού όλων των όρων και να προβλέπουν το πλήθος των στοιχείων για οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας (Rivera, 2013; Radford, 2008). Τα μοτίβα ανάλογα με τον τύπο που τα περιγράφει μπορεί να είναι γραμμικά ή τετραγωνικά, όταν οι γενικοί όροι έχουν τη μορφή $αx + β$ ή $αx^2 + βx + γ$ αντίστοιχα.

Τα μοτίβα κατατάσσονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες αναφορικά με την εξέλιξή τους: τα επαναλαμβανόμενα (repeating patterns) και τα αναπτυσσόμενα (growing patterns) μοτίβα (Van de Walle, 2007).

---

[1] Σύμφωνα με το λεξικό Oxford Greek-English Learner's Dictionary, **pattern** σημαίνει κανονικότητα, πρότυπο, υπόδειγμα, τύπος, μοντέλο, σχέδιο, αχνάρι, ξεν πατρόν, δείγμα (υφάσματος κλπ)(νομισμ.)δείγμα που έχει κοπεί προκειμένου να υποβληθεί προς έγκριση, (διακοσμητικό) σχέδιο, παράσταση, μοτίβο, σχήμα, διάταξη, (δια)σχηματισμός.

Τα επαναλαμβανόμενα είναι μοτίβα με ένα αναγνωρίσιμο, επαναλαμβανόμενο κύκλο στοιχείων αναφερόμενο ως «μονάδα επανάληψης». Για παράδειγμα το ΑΒΓΑΒΓΑΒΓ… μπορεί να ειδωθεί ως ένα επαναλαμβανόμενο γραμμικό pattern με τρία στοιχεία και ένα κύκλο μήκους 3, ενώ το ΑΒΓαβ ΑΒΓαβ ΑΒΓαβ… μπορεί να ειδωθεί ως ένα περισσότερο σύνθετο γραμμικά επαναλαμβανόμενο pattern με 3 στοιχεία και ένα κύκλο μήκους 5 στο οποίο όχι μόνο τα γράμματα, αλλά επίσης και το μέγεθός τους ποικίλει. Διαφοροποιώντας μερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των στοιχείων όπως μέγεθος, χρώμα, προσανατολισμό κλπ, ενώ κρατάμε σταθερά κάποια άλλα γνωρίσματα προσθέτουμε συνθετότητα σε ένα γραμμικά επαναλαμβανόμενο pattern (Threlfall, 1999 όπως αναφ. στο Zazkis & Liljedahl, 2002). Ο Threlfall (1999) αναγνωρίζει τη χρησιμότητά των επαναλαμβανόμενων patterns ως εργαλεία για την ανάπτυξη των εννοιών της κανονικότητας και της αλληλουχίας. Τονίζει ότι αυτό που είναι μείζονος σημασίας στην ενασχόληση των μαθητών με τα επαναλαμβανόμενα patterns είναι να αντιληφθούν πως η επαναλαμβανόμενη φύση τους είναι αυτή που τα διακρίνει από ένα οποιοδήποτε τυχαίο μοτίβο. Υποστηρίζει τη χρήση επαναλαμβανόμενων μοτίβων ως ένα εννοιολογικό σκαλοπάτι για την Άλγεβρα και ένα πλαίσιο για γενίκευση. Αυτό απαιτεί την αναγνώριση της δομής του pattern, δηλαδή τη θεώρηση του pattern ως αποτελούμενο από διακριτές επαναλήψεις. Γίνεται, λοιπόν, σαφές ότι είναι πιο σημαντικό οι μαθητές να αναγνωρίζουν τη μονάδα επανάληψης από το να είναι σε θέση να δημιουργήσουν πολύπλοκα επαναλαμβανόμενα patterns (όπως αναφ. στο Zazkis & Liljedahl, 2002).

Τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (ή ακολουθίες) αποτελούνται από μία σειρά ξεχωριστών στοιχείων ή πλαισίων, με το κάθε νέο πλαίσιο να συνδέεται με το προηγούμενο σύμφωνα με έναν κανόνα. Τα προβλήματα με αναπτυσσόμενα patterns μπορούν να αναπτυχθούν σε διάφορα πλαίσια- αριθμητικό ή εικονιστικό πλαίσιο- και με την εφαρμογή διαφόρων προσεγγίσεων (Van de Walle, 2007). Συνήθως, σε δραστηριότητες με αναπτυσσόμενα patterns, οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες. Οι δραστηριότητες των μαθητών επικεντρώνονται στην αναζήτηση για τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των διακριτών συναφών μονάδων του μοτίβου (pattern), συνήθως αποκαλούμενες όροι, και οι όροι καθορίζονται από τη θέση τους στο μοτίβο (Van de Walle, 2007). Στόχος δεν είναι μόνο η επέκτασή τους αλλά η αναζήτηση γενικεύσεων ή αλγεβρικών σχέσεων που θα δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίζουν ποια τροπή θα παίρνει το αναπτυσσόμενο μοτίβο (αριθμητικό ή εικονιστικό) σε ένα οποιοδήποτε σημείο στην πορεία. Για την κατανόηση των αναπτυσσόμενων μοτίβων, είναι απαραίτητη η κατανόηση μίας συναρτησιακής σχέσης ανάμεσα στους όρους του μοτίβου και τη θέση αυτών των όρων, και όχι απλά η αναγνώριση των διαδοχικών όρων μέσα σε ένα μοτίβο (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Θεμελιώδες είναι η αναζήτηση μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών. Σε αυτήν την αναζήτηση, ο Rivera (2013) προτείνει ότι οι μαθητές πρέπει να συντονίσουν δύο βασικές ικανότητες, της αντιληπτικής ικανότητας και της συμβολικής τους ικανότητας. Αυτός ο συνδυασμός παράγεται καταγράφοντας πρώτα το τι είναι κοινό με ορισμένους όρους και, αφετέρου, σχηματίζοντας μια γενική ιδέα, παρατηρώντας το κοινό σε όλους τους όρους (Radford, 2006; Rivera, 2013). Τέλος, οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν την υπογεγραμμένη αλγεβρική δομή που εξηγεί μια επαναληπτική κανονικότητα που θα μπορούσε να μεταφερθεί ως τύπος (Rivera, 2013). Σε αυτό το στάδιο, η εστίαση δεν είναι πλέον στους ίδιους τους όρους αλλά μάλλον στις σχέσεις μεταξύ τους (Kaput, 1995).

2.3.2. Τύποι κανόνων που παράγονται κατά τη γενίκευση κανονικοτήτων

Οι μαθητές καλούνται συχνά να κατασκευάσουν έναν κανόνα για να περιγράψουν τη δομή του μοτίβου που βλέπουν σε ένα πρόβλημα κανονικοτήτων. Όπως έχει δείξει η ανασκόπηση αρκετών ερευνών, οι κανόνες που κατασκευάζουν οι μαθητές προσλαμβάνουν κυρίως δύο μορφές: *αναδρομική* (recursive) και *συναρτησιακή* (functional) (Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Rivera & Becker, 2007). Στη βιβλιογραφία, η φράση *αναδρομικός κανόνας* (recursive rule) γενικά νοείται ότι χρησιμοποιείται για να αναφερθεί στον κανόνα που επιτρέπει τον υπολογισμό του επόμενου όρου μιας ακολουθίας χρησιμοποιώντας τον άμεσο όρο που προηγείται. Από την άλλη πλευρά, ο *συναρτησιακός κανόνας* νοείται ως ο κανόνας που εκφράζεται ως τη συνάρτηση που υπολογίζει τον όρο άμεσα χρησιμοποιώντας τη θέση του στην ακολουθία. Οι διάφοροι ερευνητές χρησιμοποιούν για τον συναρτησιακό κανόνα διαφορετική ορολογία. Μερικές φορές είναι γνωστός ως ρητός κανόνας ή τύπος (explicit rule or formula) (Becker & Rivera, 2005, Lannin et al., 2006), ένας γενικός κανόνας ή τύπος (general rule or formula)

(Rivera & Becker, 2008;) ή ένας κλειστός τύπος (closed- form formula) (Küchemann, 2010).

Σύμφωνα με τους Lannin et al. (2006), ένας αναδρομικός κανόνας περιλαμβάνει την αναγνώριση και τη χρήση της μεταβολής από όρο σε όρο στην εξαρτημένη μεταβλητή, ενώ ένας συναρτησιακός κανόνας χρησιμοποιεί μια συλλογιστική που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή με την εξαρτημένη μεταβλητή. Δυστυχώς, ο αναδρομικός κανόνας, ενώ είναι χρήσιμος για την εξεύρεση επόμενων όρων γνωρίζοντας πρώτα τους προηγούμενους όρους, δεν είναι αποτελεσματικός για τον άμεσο υπολογισμό οποιουδήποτε όρου του οποίου ο αριθμός θέσης είναι μεγάλος αριθμός ή όταν το μοτίβο παρουσιάζεται με μη διαδοχικό τρόπο. Επιπρόσθετα, δεν προάγει την ικανότητα εξέτασης της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ των όρων και των θέσεών τους, άποψη που πολλοί ερευνητές έχουν υποστηρίξει ότι είναι καθοριστικής σημασίας για την αλγεβρική σκέψη (Kaput, 2008; Radford, 2008).

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής ιδέας αποδίδονται με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, η σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων μπορεί να αναπαρασταθεί σχεδιάζοντας ένα γράφημα, γράφοντας λέξεις και χρησιμοποιώντας σύμβολα. Ένας από τους σημαντικούς ρόλους της γενίκευσης κανονικοτήτων, είναι να προωθήσει την αλγεβρική σκέψη χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές για να εκφράσει τους κανόνες που υποστηρίζουν τα μοτίβα (Kaput, 2008). Σε ένα πρόβλημα κανονικοτήτων, οι μαθητές χρησιμοποιούν συχνά τρεις τρόπους για να αποδώσουν τον κανόνα που παράγουν κατά την γενίκευση: καθαρά συμβολικά, καθαρά με λόγια και σε αλφαριθμητική μορφή (δηλαδή, συνδυασμός λέξεων και συμβόλων). Οι διαφορετικοί τύποι άρθρωσης ενός κανόνα μπορεί να προκύψουν από τρεις καταστάσεις: (1) την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών, (2) το γνωστικό τους επίπεδο, και (3) το πλαίσιο στο οποίο καλούνται να παράγουν τον κανόνα (Lannin et al., 2006). Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις καταστάσεις, φαίνεται αναγκαίο να επιτρέπεται η χρήση του κανόνα σε οποιαδήποτε από τις τρεις μορφές: γραμμένη με σύμβολα, γραμμένη με λέξεις ή γραμμένη με αλφαριθμητική μορφή (Radford, 2008).

2.3.3. Αλγεβρική Γενίκευση κανονικοτήτων

Η γενίκευση αποτελεί μια σημαντική συνιστώσα του αλγεβρικού συλλογισμού. Η γενίκευση αναφέρεται στη σκόπιμη επέκταση του εύρους της συλλογιστικής ή της επικοινωνίας πέρα από την περίπτωση ή τις περιπτώσεις που εξετάζονται, τον σαφή προσδιορισμό και την έκθεση των κοινών στοιχείων μεταξύ των περιπτώσεων ή την ανύψωση του συλλογισμού ή της επικοινωνίας σε τέτοιο επίπεδο όπου η εστίαση δεν βρίσκεται πλέον στις περιπτώσεις ή στις καταστάσεις αυτές καθαυτές αλλά στις κανονικότητες, τις διαδικασίες, τις δομές και τις σχέσεις (που με τη σειρά τους αποτελούν νέα, υψηλότερου επιπέδου αντικείμενα συλλογισμού ή επικοινωνίας). Η έκφρασή της γενίκευσης, όμως, σημαίνει την απόδοσή της σε κάποια γλώσσα, τυπική ή άλλη (π.χ. για τα μικρότερα παιδιά, χειρονομίες) (Kaput, 1999).

Οι κανονικότητες συμβάλλουν στην αναζήτηση μαθηματικών δομών ή σχέσεων (Küchemann, 2010). Το κύριο καθήκον των μαθητών είναι να συμμετέχουν σε μια ουσιαστική και μαθηματικά βιώσιμη γενίκευση κανονικοτήτων, η οποία περιλαμβάνει τον συντονισμό των αντιλήψεων τους και τις συμβολικές συσχετιστικές ικανότητες τους έτσι ώστε να είναι σε θέση να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν μια εύλογη και αλγεβρικά χρήσιμη δομή που θα μπορούσε να μεταφερθεί με τη μορφή ενός άμεσου τύπου (π.χ. μια συναρτησιακή εξίσωση σε ρητή μορφή) (Rivera, 2013). Η ουσιαστική γενίκευση μοτίβων περιλαμβάνει τον συντονισμό δύο αλληλεξαρτώμενων ενεργειών: (1) της απαγωγικής-επαγωγικής δράσης επί των αντικειμένων, η οποία περιλαμβάνει τη χρήση διαφορετικών τρόπων μέτρησης και δόμησης διακεκριμένων αντικειμένων ή τμημάτων σε μία κανονικότητα με αλγεβρικά χρήσιμο τρόπο, και (2) της συμβολικής δράσης, η οποία περιλαμβάνει τη μετάφραση των επεξηγητικών υποθέσεων (απαγωγή) και του επαγωγικού συλλογισμού (induction) με τη μορφή μιας αλγεβρικής γενίκευσης (Rivera & Becker, 2007).

Επιπλέον, κατά την αλγεβρική γενίκευση οι μαθητές θα πρέπει «*να βλέπουν το ειδικό μέσα στο γενικό και το γενικό μέσω του ειδικού»* (Mason, 1996). Ωστόσο, η Kieran υποστήριξε ότι αυτό το χαρακτηριστικό από μόνο του μπορεί να μην επαρκεί για να χαρακτηρίσει την αλγεβρική γενίκευση των μοτίβων. Υποστήριξε ότι εκτός από το να βλέπουμε το γενικό στο ειδικό, «*πρέπει επίσης να μπορούμε να το εκφράσουμε αλγεβρικά*» (Kieran, 1989, p. 165, όπως αναφ στο Radford, 2006). Η Kieran προέβαλε επιχειρήματα κατά του φερόμενου ως φυσικού χαρακτήρα της αντιστοιχίας μεταξύ της αλγεβρικής σκέψης και της γενίκευσης. Υποστήριξε ότι το να σκέφτεται κάποιος αλγεβρικά είναι κάτι περισσότερο από το να σκέφτεται το γενικό. Όπως έθεσε το θέμα, «*ένα απαραίτητο στοιχείο* [της αλγεβρικής γενίκευσης] *είναι η χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού στη εξήγηση και την έκφραση αυτής της γενίκευσης*» (Kieran, 1989, σελ. 165, στο Radford, 2006)

Από την άλλη πλευρά, ο Dorfler (2008), ισχυρίζεται ότι η γνώση και η ικανότητα των αλγεβρικών συμβολισμών δεν αναπτύσσονται απλώς γενικεύοντας κανονικότητες διαφόρων ειδών. Συγκεκριμένα, παρατηρεί ότι δεν αρκεί να μπορούν οι μαθητές να μεταφράζουν εκφράσεις από το λεκτικό στο αλγεβρικό ιδίωμα, αν θέλουν να αντιληφθούν την έννοια των τυπικών εκφράσεων. Πιστεύει ότι η συμβολική περιγραφή δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη τη χρήση γραμμάτων. Αυτό είναι σύμφωνο με τη Sfard (1995) που χρησιμοποιεί τον όρο Άλγεβρα «σε σχέση με οποιοδήποτε είδος μαθηματικής προσπάθειας που αφορά γενικευμένες υπολογιστικές διαδικασίες ανεξάρτητα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να αποδώσουν αυτή τη γενικότητα» (Zazkis και Liljedahl, 2002).

Οι γενικεύσεις των μαθητών διακρίνονται σε αριθμητικές και αλγεβρικές καθώς και σε ορισμένες μορφές απλοϊκού εμπειρισμού στις οποίες προσφεύγουν συχνά οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα κανονικότητας (Radford, 2008). Ο Radford (2006; 2008) τονίζει πως μια δραστηριότητα patterning θεωρείται αλγεβρική όταν οι μαθητές δε βασίζονται στην εικασία και δοκιμή στρατηγικών, αλλά αναζητούν ομοιότητες και ο σχηματισμός των γενικών εννοιών προκύπτει από τον σχηματισμό γενικών εκφράσεων.

Οι αλγεβρικές γενικεύσεις προκύπτουν (1) από την ικανότητα αντίληψης των κοινών χαρακτηριστικών (grasping a commonality) που παρατηρούνται σε ορισμένα στοιχεία (ας πούμε p_1, p_2, p_3,….,p_k), (2) την επέκταση ή γενίκευση αυτών των κοινών χαρακτηριστικών σε όλους τους επόμενους όρους (p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, …), και (3) στην χρήση των κοινών στοιχείων για να παρέχουν μια άμεση έκφραση οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας. Στο τελευταίο μέρος της διαδικασίας της γενίκευσης τα κοινά χαρακτηριστικά αποτελούν τη βάση για να γραφούν εκφράσεις των στοιχείων της ακολουθίας που παραμένουν πέραν του αντιληπτού πεδίου (Radford, 2006). Η άμεση έκφραση των όρων της ακολουθίας απαιτεί την επεξεργασία ενός κανόνα - συγκεκριμένα ενός σχήματος κατά την άποψη του Kant - βασισμένου στις απροσδιόριστες ποσότητες (Radford, 2006). Συνήθως οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν τη σκοπιμότητα μιας παράστασης με μεταβλητές και τη σημασία της χρήσης κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου για να εκφράσουν γενικεύσεις. Σύμφωνα με τον Radford (2008), οι αλγεβρικές γενικεύσεις κανονικοτήτων δεν χαρακτηρίζονται από τη χρήση συμβόλων αλλά μάλλον από έναν ξεχωριστό τρόπο αντιμετώπισης του γενικού. Έτσι, οι μαθητές που δεν έχουν εμπειρίες στο συμβολικό σύστημα της Άλγεβρας, αναμένεται να εκφράσουν τις γενικεύσεις τους με λέξεις (Rivera & Becker, 2008).

2.4. Διεργασίες της σκέψης των μαθητών κατά τη γενίκευση κανονικοτήτων

Οι έρευνες με προβλήματα κανονικοτήτων έχουν αποδειχθεί πολύ αποτελεσματικές στην αποκάλυψη της ικανότητας γενίκευσης και συμβολισμού και προπαντός στην προώθηση της ανάπτυξης του αλγεβρικού συλλογισμού. Τα πειράματα αυτά ποικίλλουν στους τύπους των patterns που χρησιμοποίησαν - αριθμητικά, εικονιστικά, υπολογιστικών διαδικασιών ή επαναλαμβανόμενα patterns - καθώς και στους διαφορετικούς πληθυσμούς, από τα παιδιά έως τους εκπαιδευτικούς (Amit & Neria, 2008; Becker & Rivera, 2005; Ellis, 2007; Garcia, Cruz & Martinon, 1998; Lannin, 2005; Radford, 2006; Rivera & Becker 2007; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Stacey 1989; Zazkis & Lijendahl, 2002), τους οποίους μελέτησαν.

Το σημαντικότερο μέρος των ερευνών για τη γενίκευση κανονικοτήτων κινείται σε δύο κατευθύνσεις. Στο πλαίσιο της πρώτης μελετήθηκε ο συλλογισμός των μαθητών στην επινόηση διαφορετικών στρατηγικών κατά τη γενίκευση μιας κανονικότητας καθώς και οι δυσκολίες-εμπόδια που αντιμετώπισαν (Rivera, 2013). Στη δεύτερη διερευνήθηκαν τα διαφορετικά στάδια συλλογισμού των μαθητών (συγκεκριμένο, λεκτικό, συμβολικό) (Rivera, 2013). Ένας αριθμός ερευνητών εξέτασε, επίσης, τους παράγοντες που επηρεάζουν την γενίκευση κανονικοτήτων, όπως είναι η μαθηματική δομή της κανονικότητας, οι τιμές των βημάτων που δίνονται στην εκφώνηση, οι προϋπάρχουσες γνώσεις κ.λπ. και την επίδρασή τους στις επιδόσεις των μαθητών (Lannin et al., 2006; Lannin, 2005; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999).

2.4.1. Τύποι Στρατηγικών Γενίκευσης

Η Stacey (1989) ήταν μια από τους πρώτους που εξέτασε τις στρατηγικές γενίκευσης που χρησιμοποιούν οι μαθητές (ηλικίας μεταξύ 9 και 13 ετών) για τον υπολογισμό των τιμών συγκεκριμένων όρων σε γραμμικά έργα γενίκευσης.

Προσδιόρισε τέσσερις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται συνήθως από τους μαθητές: (α) *Καταμέτρηση* (Counting): Οι μαθητές ζωγραφίζουν μια εικόνα που αντιπροσωπεύει την κατάσταση και στη συνέχεια μετράνε το επιθυμητό χαρακτηριστικό.

(β) *Διαφορά* (Difference): Οι μαθητές κατασκευάζουν μια μεγαλύτερη μονάδα πολλαπλασιάζοντας τη θέση της μονάδας με τη σταθερή διαφορά των διαδοχικών όρων.

(γ) *Ολόκληρου αντικειμένου* (Whole object): Οι μαθητές χρησιμοποιούν μια γνωστή τιμή ως μονάδα για να κατασκευάσουν μια μεγαλύτερη μονάδα χρησιμοποιώντας πολλαπλάσια της μονάδας αυτής.

(δ) *Γραμμική* (Linear): Οι μαθητές χρησιμοποιούν μια σχέση που περιλαμβάνει και τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση, δηλαδή χρησιμοποιούν ένα γραμμικό μοντέλο $M(n) = an + b$ με το $b \neq 0$.

Η μελέτη έδειξε πως ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ευθείας αναλογίας σε έργα που δεν περιείχαν ευθεία αναλογία δηλαδή καθόρισαν το νιοστό στοιχείο σαν ένα νιοστό πολλαπλάσιο της διαφοράς μεταξύ των όρων της ακολουθίας. Παρατηρήθηκε, ακόμα, ασυνέπεια στις στρατηγικές γενίκευσης που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές σε ερωτήσεις «κοντινής γενίκευσης» (near generalization - ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με τη χρήση ενός σχεδίου ή μιας αναδρομικής σχέσης, για παράδειγμα, η εύρεση του 5ου όρου της ακολουθίας) και «μακρινής γενίκευσης» (far generalization - οι στρατηγικές που αναφέρθηκαν δεν είναι πλέον λειτουργικές και για να απαντηθούν οι ερωτήσεις όπως για παράδειγμα η εύρεση του 100ού όρου απαιτεί τον καθορισμό ενός ρητού κανόνα).

Η έρευνα των Garcia, Cruz και Martinon (1998) αποσκοπούσε στην ανάλυση των διαδικασιών γενίκευσης που αναπτύσσουν μαθητές Λυκείου. Οι ερευνητές βασίστηκαν στην εργασία της Stacey (1989) για την ανάλυση των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι τρεις βασικές μέθοδοι γενίκευσης είναι: η μέθοδος *υπολογισμού* (counting) (οι μαθητές απαριθμούν τα στοιχεία μιας μορφής ή επεκτείνουν την ακολουθία μετά την εύρεση της αναδρομικής σχέσης), η μέθοδος της *ευθείας αναλογίας* και η *γραμμική* μέθοδος. Επίσης, ταξινόμησαν τις στρατηγικές ανάλογα με τη φύση τους σε οπτικές (visual), αριθμητικές (numeric) και μικτές (mixed). Εάν το σχέδιο έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εύρεση του μοτίβου, η στρατηγική θεωρήθηκε οπτική. Από την άλλη, αν η βάση για την εύρεση του μοτίβου ήταν η αριθμητική ακολουθία τότε η στρατηγική θεωρήθηκε αριθμητική. Στις μεικτές στρατηγικές οι μαθητές έδρασαν κυρίως πάνω στην αριθμητική ακολουθία και χρησιμοποίησαν το σχέδιο ως μέσο επαλήθευσης της εγκυρότητας της λύσης. Αντίθετα, οι Sasman, Olivier και Linchevski (1999) - που εργάστηκαν με μαθητές ηλικίας 13 - 14 ετών σε δραστηριότητες γενίκευσης, στις οποίες εμπλέκονταν διαφορετικές αναπαραστάσεις - βρήκαν πως οι μαθητές χρησιμοποιούσαν σχεδόν αποκλειστικά αριθμητικά πλαίσια, αγνοώντας τις μορφές. Είχαν, δε, την τάση να αναζητούν αναδρομικές σχέσεις και να δίνουν αρκετές λανθασμένες απαντήσεις που συνδέονταν με την ακατάλληλη χρήση της ευθείας αναλογίας.

Παρόμοια αποτελέσματα είχαν βρει και οι Orton και Orton (1999) (όπως αναφ. στο Zazkis και Liljedahl, 2002) οι οποίοι μελέτησαν τον τρόπο με τον οποίο μαθητές ηλικίας 10 ως 13 ετών προσέγγισαν γραμμικά και τετραγωνικά patterns. Οι ερευνητές ανέφεραν μια τάση για χρήση της διαφοράς μεταξύ διαδοχικών όρων ως μια μέθοδο γενίκευσης και επέκτασης της σε τετραγωνικά patterns λαμβάνοντας τις δεύτερες διαφορές, χωρίς, όμως, επιτυχία σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στην περίπτωση της ακολουθίας Fibonacci (1,1,2,3,5…).

Σε μια πιο πρόσφατη μελέτη, ο Lannin (2005), ο οποίος διερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο μαθητές της 6ης τάξης δικαιολογούν και προχωρούν σε γενικεύσεις ενός κανόνα σε patterns με εικονική ή λεκτική αναπαράσταση, επεκτείνοντας την κατηγοριοποίηση της Stacey (1989) εισήγαγε μια άλλη στρατηγική γενίκευσης την αναδρομική προσέγγιση όπου οι επόμενοι όροι κατασκευάζονται από τους προηγούμενους όρους στο μοτίβο. Σε μεταγενέστερη έρευνα, ο Lannin και οι συνεργάτες του (Lannin et al., 2006), επέκτειναν περαιτέρω την κατηγοριοποίηση αυτή προσθέτοντας μια ακόμη στρατηγική που ονομάζεται chunking, η οποία απαιτεί από τους μαθητές να εφαρμόσουν τον αναδρομικό κανόνα και να προσθέσουν μια μονάδα σε μια γνωστή τιμή.

Στη δικιά τους μελέτη, οι Becker και Rivera (2005) περιέγραψαν την εργασία μαθητών της 9ης τάξης (14-15 ετών) σε γραμμικά έργα γενίκευσης. Προσπάθησαν να αναλύσουν τις επιτυχείς στρατηγικές που οι μαθητές χρησιμοποίησαν για να αναπτύξουν μια ρητή γενίκευση και να κατανοήσουν τη χρήση εικονιστικών και αριθμητικών ακολουθιών. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι στρατηγικές των μαθητών εμφανίζονταν να είναι κυρίως αριθμητικές και αναγνώρισαν τρεις ευρείες κατηγορίες: τις *αριθμητικές*, τις *εικονιστικές* και τις *ρεαλιστικές*. Παρατήρησαν ότι οι μαθητές οι οποίοι αποτύγχαναν να γενικεύσουν, ξεκινούσαν παρακολουθώντας αριθμητικά μοτίβα, αλλά χωρίς να αναγνωρίζουν την σύνδεση τους με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Οι μαθητές που εργάστηκαν αριθμητικά οδηγήθηκαν σε έναν ρητό κανόνα με τη μέθοδο «δοκιμή-και-λάθος» έχοντας μικρή αίσθηση του τι ο συντελεστής και η σταθερά αντιπροσώπευαν στα γραμμικά patterns. Οι μαθητές που εργάστηκαν εικονιστικά εστίασαν στον προσδιορισμό σταθερών σχέσεων ανάμεσα στις δοσμένες μορφές (relation- oriented methods) και ήταν ικανοί να ερμηνεύουν τις μεταβλητές μέσα στο πλαίσιο μιας συναρτησιακής σχέσης. Δηλαδή, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά σχήματα, για να συνδέσουν τον κανόνα με την εικονική αναπαράσταση, ήταν περισσότερο επιτυχείς στην γενίκευση από άλλους των οποίων τα σχήματα ήταν κυρίως αριθμητικά ή εκείνων που χρησιμοποιούσαν στρατηγικές βασισμένες στο μάντεμα. Τέλος, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη ρεαλιστική γενίκευση χρησιμοποίησαν τόσο αριθμητικές όσο και εικονιστικές στρατηγικές, βλέποντας τις ακολουθίες των αριθμών ως αποτελούμενες τόσο από ιδιότητες όσο και από σχέσεις.

Επιπρόσθετα, σε μεταγενέστερη έρευνά τους (Rivera & Becker, 2011) οι συγγραφείς διακρίνουν τις εικονιστικές στρατηγικές σε *εποικοδομητικές* (constructive) και *αποδομητικές* (deconstructive). Η πρώτη συμβαίνει όταν η διαμόρφωση (configuration) που δίνεται σε ένα έργο γενίκευσης θεωρείται ως σύνθετη διαμόρφωση που αποτελείται από μη αλληλεπικαλυπτόμενα στοιχεία και ο κανόνας εκφράζεται άμεσα ως άθροισμα των διαφόρων υποσυστημάτων. Η τελευταία συμβαίνει όταν η διάταξη απεικονίζεται ως αποτελούμενη από συστατικά που αλληλεπικαλύπτονται και ο κανόνας εκφράζεται με ξεχωριστή μέτρηση κάθε συστατικού της διαμόρφωσης και κατόπιν αφαίρεση τυχόν επικαλυπτόμενων τμημάτων.

Ο Radford (2008) υποστήριξε ότι ο τρόπος που οι μαθητές χρησιμοποιούν και αναπαριστούν σχέσεις και αντικείμενα, με σκοπό τη διαμόρφωση γενικεύσεων, είναι δυνατόν να παρουσιάσει διαφοροποιήσεις, υποδεικνύοντας διαφορετικά επίπεδα της ικανότητας για γενίκευση. Στην έρευνα του με μαθητές ηλικίας 13 – 15 χρόνων εντόπισε ότι υπάρχουν μαθητές που χρησιμοποιούν αριθμητικές πράξεις για την αναπαράσταση μιας γενίκευσης, ενώ άλλοι περιγράφουν τη σχέση μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων. Παρατηρώντας τη συμπεριφορά των μαθητών ο Radford (2008) διακρίνει τρία επίπεδα προσέγγισης της γενικότητας.

Στο πρώτο επίπεδο, το οποίο ορίζει ως *αφελή επαγωγή* (naïve induction), δεν υπάρχει πραγματική, συνειδητή γενίκευση. Χαρακτηρίζεται από διαδικασίες δοκιμής και λάθους (trial- and- error) των μαθητών, από την πιθανά τυχαία ανακάλυψη των γενικεύσεων, από σπέρματα απαγωγής τα οποία αποδεικνύονται πλαστά στο στάδιο ελέγχου. Σε αυτό το επίπεδο, παρόλο που ένας κανόνας μπορεί να εκφραστεί στο αλφαριθμητικό σύστημα, η γενίκευση δεν είναι αλγεβρική.

Πίνακας 1: Στρατηγικές Γενίκευσης

Στρατηγικές	**Περιγραφή**
Μέτρησης (Counting) (εικονιστική)	Ζωγραφίζοντας μια εικόνα ή κατασκευάζοντας ένα μοντέλο για να αναπαραστήσουν μια κατάσταση, για να μετρούν το επιθυμητό χαρακτηριστικό.
Αναδρομής (Recursive) (αριθμητική)	Επέκταση της ακολουθίας χρησιμοποιώντας την κοινή διαφορά, βασιζόμενη σε προηγούμενους όρους (αριθμητικές σχέσεις).
Αναδρομής (Recursive) (εικονιστική)	Επέκταση της ακολουθίας χρησιμοποιώντας την κοινή διαφορά, βασιζόμενη σε προηγούμενους όρους (χαρακτηριστικά των μορφών).
Chunking	Ο μαθητής βασίζεται σε ένα αναδρομικό μοτίβο κατασκευάζοντας μια μονάδα πάνω σε γνωστές τιμές του επιθυμητού χαρακτηριστικού.
Σαφής (Explicit) (αριθμητική)	Κατασκευάζεται ένας αριθμητικός κανόνας που επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό οποιασδήποτε τιμής εξόδου λαμβάνοντας υπόψη την αντίστοιχη τιμή εισόδου.
Σαφής (Explicit) (εικονιστική)	Κατασκευάζοντας έναν κανόνα, με βάση το πλαίσιο του προβλήματος, που επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό οποιασδήποτε τιμής εξόδου λαμβάνοντας υπόψη την αντίστοιχη τιμή εισόδου.
Διαφορά (χωρίς προσαρμογή) (αριθμητική)	Χρησιμοποιώντας την κοινή διαφορά ως συντελεστή πολλαπλασιασμού χωρίς να προχωρήσουμε σε τελική προσαρμογή.
Διαφορά (με προσαρμογή) (εικονιστική)	Χρησιμοποιώντας την κοινή διαφορά ως συντελεστή πολλαπλασιασμού προβαίνοντας σε προσαρμογή του αποτελέσματος.
Ολόκληρου αντικειμένου (Whole-object) (χωρίς προσαρμογή)	Χρησιμοποιώντας ένα τμήμα ως μονάδα για την κατασκευή μιας μεγαλύτερης μονάδας μέσω πολλαπλασιασμού.
Ολόκληρου αντικειμένου (Whole-object) (με αριθμητική προσαρμογή)	Χρησιμοποιώντας ένα τμήμα ως μονάδα για την κατασκευή μιας μεγαλύτερης μονάδας μέσω πολλαπλασιασμού. Γίνεται μια τελική προσαρμογή με βάση τις αριθμητικές ιδιότητες.
Ολόκληρου αντικειμένου (Whole-object) (με οπτική προσαρμογή)	Χρησιμοποιώντας ένα τμήμα ως μονάδα για την κατασκευή μιας μεγαλύτερης μονάδας μέσω πολλαπλασιασμού. Γίνεται μια τελική προσαρμογή με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.
Εικασίας και δοκιμής (Guess-and-check) (αριθμητική)	Μαντεύοντας ένα κανόνα χωρίς τη συνειδητοποίηση του γιατί αυτός ο κανόνας ισχύει.
Βάση των συμφραζόμενων – περιστασιακή (Contextual)	Κατασκευάζοντας έναν κανόνα βασισμένο στις παρεχόμενες πληροφορίες από την δεδομένη κατάσταση. Συσχέτιση του κανόνα με μια τεχνική μέτρησης

Στο δεύτερο επίπεδο που ονομάζει αριθμητική γενίκευση, η γενίκευση γίνεται τοπικά, με αναδρομικό τρόπο και εκφράζεται στις διάφορες περιπτώσεις μέσω της πρόσθεσης ενός σταθερού όρου. Το τρίτο επίπεδο, το οποίο ορίζει ως αλγεβρική γενίκευση, είναι πολύπλοκο, και χαρακτηρίζεται από βαθμιαία όλο και πιο προηγμένες φάσεις. Το επίπεδο της αλγεβρικής γενίκευσης επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές αποσυνδέονται από το φαινομενικό πλαίσιο και μετακινούνται προς τις σχέσεις μεταξύ σταθερών και μεταβλητών στοιχείων (αριθμοί και γράμματα). Σημαντικά στοιχεία που παρεμβαίνουν σε αυτή την τελευταία διαδικασία είναι η εικονικότητα (iconicity). Ο τρόπος, δηλαδή, να παρατηρηθούν παρόμοια χαρακτηριστικά σε προηγούμενες διαδικασίες, η μετατόπιση από έναν συγκεκριμένο απροσδιόριστο αριθμό στο επίπεδο των μεταβλητών που συνοψίζουν όλες τις τοπικές μαθηματικές εμπειρίες και τη συναίρεση των εκφράσεων που μαρτυρούν ένα βαθύτερο επίπεδο επίγνωσης.

Η ανάλυση των στρατηγικών που προτείνουν ορισμένοι ερευνητές (π.χ. Lannin et al., 2006, Orton & Orton, 1999, Rivera & Becker, 2008, Stacey, 1989) στην παραπάνω ανασκόπηση της βιβλιογραφίας οδήγησε στην κατασκευή της κατηγοριοποίησης που παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

2.4.2. Δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την γενίκευση

Το να φτάσουν οι μαθητές σε σωστές γενικεύσεις δεν είναι μια απλή διαδικασία, όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από το πλήθος των ερευνών που ανέδειξαν αρκετές από τις δυσκολίες όσον αφορά στην επίτευξη γενίκευσης. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι σύμφωνα με τους Sasman, Linchevski, & Olivier, (1999), Lannin (2005) οι μαθητές δυσκολεύονται στο να διατυπώσουν σωστές γενικές μαθηματικές προτάσεις, ενώ όσον αφορά στον αλγεβρικό συλλογισμό, σύμφωνα με τους Lannin, Barker & Townsend (2006) και Stacey (1989) οι δυσκολίες συχνά εντοπίζονται στην προσπάθεια των μαθητών να δημιουργήσουν χρήσιμες αλγεβρικές προτάσεις ή λήμματα αναγνωρίζοντας τα αντίστοιχα μοτίβα. Τέλος, σύμφωνα με την Ellis (2011) οι έρευνες των Pegg & Redden (1990), Schliemann, Carraher, & Brizuela (2001), Szombathely & Szarvas (1998) κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι μαθητές συνηθίζουν να επικεντρώνονται σε μοτίβα που συμμεταβάλλονται και όχι σε σχέσεις αλληλεξάρτησης που θα τους οδηγήσουν στην γενίκευση, στο να καταφέρουν δηλαδή να διατυπώσουν έναν γενικό τύπο ή να διατυπώσουν ένα γενικευμένο συλλογισμό.

Αναλύοντας τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών (Stacey, 1989; Lannin et al., 2006; Sasman et al., 1999; Orton & Orton; 1999, όπως αναφ. στο Zazkis και

Liljedahl, 2002), θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε πως παρόλο που αναπτύχθηκαν σε διαφορετικά πλαίσια παρουσιάζουν μια σειρά κοινών στοιχείων, όπως η επιφανειακή κατανόηση των πράξεων, η προσκόλληση σε αναδρομικές προσεγγίσεις ή σε ανακριβείς αναλογικούς συλλογισμούς, που αποτρέπει τους μαθητές από τον προσδιορισμό της γενικής δομής των patterns.

Οι αναδυόμενες δυσκολίες που προκύπτουν από τα ευρήματα της τρέχουσας έρευνας, είναι ότι, ενώ οι νέοι μαθητές είναι ικανοί να παρατηρήσουν τη δομή του μοτίβου και τη συμμετοχή του στη γενίκευση, παρουσιάζουν δυσκολίες στην έκφραση της δομής. Οι Zazkis και Liljedahl (2002) παρατήρησαν ότι υπάρχει ένα κενό μεταξύ του αναγνωρίζω και του μπορώ να εκφράσω αλγεβρικά ένα μοτίβο. Δηλαδή, ενώ οι μαθητές δεν δυσκολεύονταν να το περιγράψουν προφορικά δεν ήταν ικανοί να προσφέρουν μία αλγεβρική περιγραφή για αυτό. Για το ίδιο κενό μιλάει και ο Mason (1996) ο οποίος συμπληρώνει ότι μαζί με την βιασύνη των μαθητών να χρησιμοποιούν «*μεμονωμένα σύμβολα τα οποία αποτελούν την εισαγωγή της σχολικής άλγεβρας για εκατοντάδες χρόνια*» (Mason, 1996, σελ.75), δημιουργείται στους μαθητές το συναίσθημα της ανεπάρκειας στο να ανταποκριθούν στις προσδοκίες τους. Για παράδειγμα, τα αριθμητικά μοτίβα φαίνονται συχνά δύσκολα στους μαθητές, όχι λόγω της δυσκολίας στην σύλληψη της ομοιότητας, αλλά επειδή οι μαθητές τείνουν να αποτυγχάνουν να την χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν έναν κανόνα που μπορούν να κατανοήσουν.

Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι μόνο τα τρία τέταρτα μαθητών Γυμνασίου είχαν την ικανότητα να αντιμετωπίσουν επιτυχώς συγκεκριμένες περιπτώσεις γραμμικών μοτίβων σε εικονική μορφή και μορφή πίνακα, και λιγότερο από το ένα πέμπτο να χρησιμοποιήσουν Άλγεβρα για να εκφράσουν τις γενικεύσεις με ένα ρητό τύπο (Becker & Rivera 2005). Αντίθετα, στην έρευνα των Amit & Neria (2008) οι συμμετέχοντες (ικανοί στα μαθηματικά) μαθητές επέδειξαν αλγεβρική σκέψη και αξιοποιώντας την προηγούμενη μαθηματική τους γνώση βρήκαν αλγεβρικά σύμβολα με τα οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους (παρόλο που δεν τα είχαν διδαχτεί). Αν και το μεγαλύτερο μέρος του συμβολισμού δεν ήταν σωστό με την αυστηρή μαθηματική έννοια, ωστόσο, ήταν αρκετό για να μεταφέρει με σαφήνεια τις ιδέες των μαθητών. Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με τις ιδέες του Radford (2006) ο οποίος τονίζει ότι, οντογενετικά μιλώντας, ο σχηματισμός των αντίστοιχων εννοιών και των κανόνων χρήσης συμβόλων από τους μαθητές έχει τις ρίζες του σε άλλα σημειωτικά συστήματα που έχουν ήδη κατακτηθεί από αυτούς.

2.4.3. Παράγοντες που επηρεάζουν την Γενίκευση κανονικοτήτων

Υπάρχουν ορισμένοι παράγοντες που μπορεί να έχουν αντίκτυπο στην επιλογή των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται για τη γενίκευση των προτύπων, ανεξάρτητα από την καταλληλότητα τους.

Οι Lannin et al. (2006) εντόπισαν κάποιους παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τη χρήση των στρατηγικών γενίκευσης, οργανώνοντας τους σε τρεις κατηγορίες: (1) κοινωνικοί παράγοντες, που προκύπτουν από τις αλληλεπιδράσεις των μαθητών με τους συνομηλίκους τους και με τον δάσκαλο, αφού μπορούν να έχουν επιπτώσεις στη σκέψη των μαθητών, (2) γνωστικοί παράγοντες, που σχετίζονται με διανοητικές δομές που έχει αναπτύξει ο μαθητής, και (3) παράγοντες που σχετίζονται με τη δομή του έργου, όπως το είδος του μοτίβου, οι τιμές που αποδίδονται στην ανεξάρτητη μεταβλητή ή ακόμα και η οπτική εικόνα που έχει ο μαθητής για μια αλγεβρική κατάσταση. Για παράδειγμα, τα έργα στα οποία το προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσε να παρατηρηθεί σαφώς στο επόμενο παράδειγμα επέτρεψαν στους μαθητές να παρατηρήσουν ευκολότερα την αλλαγή μεταξύ των όρων και συνεπώς να χρησιμοποιήσουν μια αναδρομική στρατηγική. Η παρατήρηση του αναδρομικού μοτίβου είναι πιθανότερο να προέρχεται από τις ίδιες τις τιμές ή από έναν πίνακα, παρά από την εικονική αναπαράσταση.

Γενικά, οι Lannin et al (2006) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι όταν οι αρχικές τιμές είναι κοντινές, οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν αναδρομικές στρατηγικές, ανεξάρτητα από τον τύπο του μοτίβου και την οπτική συνιστώσα του έργου. Αναφέρουν ότι για να μπορέσει ένας μαθητής να αξιοποιήσει μια εικονιστική ακολουθία κατά την ανάπτυξη μιας στρατηγικής, ο μαθητής πρέπει να αναγνωρίσει την οπτική σχέση με έναν γενικό τρόπο. Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές που βασίζουν τη συλλογιστική τους μόνο σε αριθμητικές τιμές συνήθως δεν έχουν ιδέα για τη σχέση μεταξύ του κανόνα που βρέθηκε και του πλαισίου του προβλήματος.

Η κακή εφαρμογή της ευθείας αναλογίας, ιδιαίτερα στην εξερεύνηση γραμμικών μοτίβων, έχει αναφερθεί σε αρκετές μελέτες (π.χ. Lannin et al., 2006;

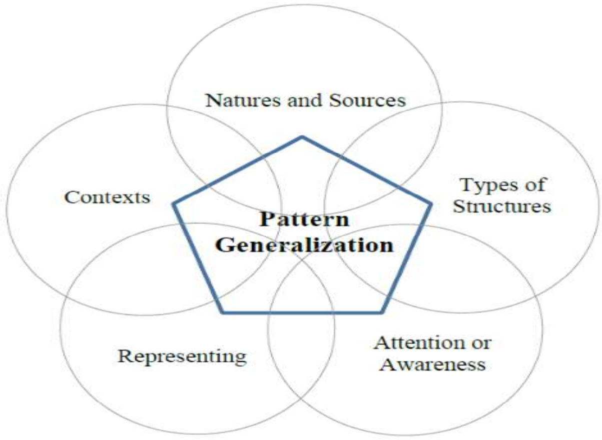
Becker & Rivera, 2005; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999; Stacey, 1989). Μια διεξοδική ανάλυση του φαινομένου αυτού δείχνει ότι υπάρχουν δύο καταστάσεις που μπορούν να αποτελέσουν τη βάση μιας τέτοιας συλλογιστικής. Από τη μία πλευρά είναι η χρήση ενός αυστηρά αριθμητικού συλλογισμού, που υποδηλώνει τον χωρίς νόημα χειρισμό των μεταβλητών. Ο άλλος παράγοντας σχετίζεται με την χρήση «*ελκυστικών αριθμών*» (Sasman et al., 1999, σελ. 5), από μια πολλαπλασιαστική άποψη, δηλαδή όταν οι αρχικές τιμές είναι πολλαπλάσια των γνωστών όρων της ακολουθίας. Με αυτή την έννοια, οι Sasman et al. (1999) υπογράμμισαν τη σημασία των έργων που περιέχουν μη ελκυστικούς αριθμούς, ως έναν τρόπο να παρακάμψουμε την τάση για χρήση της ευθείας αναλογίας. Ωστόσο, τόνισαν ότι και οι «μη ελκυστικοί αριθμοί» μπορούν επίσης να οδηγήσουν στην χρήση ακατάλληλων στρατηγικών ακόμα και όταν οι μαθητές δεν μπορούν να βρουν μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμών αυτών.

Κατά την τελευταία εικοσαετία η έρευνα για τις κανονικότητες και τη γενίκευση έδειξε ότι οι μαθητές έχουν την τάση να «βλέπουν» την ίδια κανονικότητα με διαφορετικό τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι είναι ενδεχόμενο για την ίδια κανονικότητα να καταλήγουν σε διαφορετικές γενικεύσεις. Για παράδειγμα, διαφορετικοί τρόποι επέκτασης μιας ακολουθίας μπορεί να επηρεάσουν το περιεχόμενο των αντίστοιχων αλγεβρικών γενικεύσεων (Rivera & Becker, 2008).

Ο Rivera (2015) αναφέρει τους εξής παράγοντες που διαμορφώνουν τη διαδικασία γενίκευσης των μοτίβων: *φύση* και *πηγές*, *τύποι των δομών*, *προσοχή ή επίγνωση των δομών*, *αναπαραστάσεις* και τα *πλαίσια*. Αναλυτικότερα:

α) Φύση και Πηγές:

Το βασικό μέλημα πολλών ερευνών περιλαμβάνει την κατανόηση των διαφορετικών ειδών και πηγών γενίκευσης (Rivera, 2015). Αρχικά, τα ευρήματα εντοπίζουν δύο πιθανές πηγές γενίκευσης των μαθητών όταν αυτοί εμπλέκονται σε έργα γενίκευσης. Μερικοί από αυτούς, σε ορισμένες περιπτώσεις, τείνουν να γενικεύουν αμετάβλητες σχέσεις δίνοντας προσοχή στις δοθείσες περιπτώσεις ή στάδια (πχ. αντικείμενα) σε ένα μοτίβο, ενώ σε άλλες περιπτώσεις τείνουν να ασχολούνται περισσότερο με τη γενικότητα των υπονοούμενων ιδεών, μεθόδων ή διαδικασιών παρά με τα ίδια τα αντικείμενα (Rivera, 2015). Δηλαδή, οι μαθητές αποδεικνύουν τις κανονικότητες μέσω μιας αναδυόμενης διαδικασίας ή στέκονται στις αντιληπτές κανονικότητες που συνάγουν τα διαθέσιμα αποτελέσματα (Harel & Tall, 1991). Μία από τις συνέπειες αυτών των ευρημάτων φαίνεται να υποδηλώνει την ανάγκη να δοθεί στους μαθητές κάθε ευκαιρία να προβληματιστούν για τη γενικευτική τους δραστηριότητα – δηλαδή, εάν εργάζονται με συγκεκριμένα αντικείμενα ή εργάζονται με γενικές ιδέες και μεθόδους αλλά με σαφή και σταθερή εστίαση στην την ανάγκη δικαιολόγησης (Rivera, 2015).



Εικόνα 1. Παράγοντες που διαμορφώνουν την διαδικασία γενίκευσης των κανονικοτήτων (Rivera, 2015)

β) Τύποι των δομών:

Πρόσφατες μελέτες - που έχουν τεκμηριώσει τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές εμπλέκονται με την γενίκευση εικονιστικών μοτίβων - υπογραμμίζουν τα ακόλουθα δύο βασικά χαρακτηριστικά των δομών στα οποία εμπλέκονται τα δοθέντα στάδια σε ένα εικονιστικό μοτίβο: υπάρχει μια σαφής μονάδα επανάληψης που είναι η βάση για την πολλαπλασιαστική σκέψη, η οποία περιλαμβάνει την επανάληψη αυτής της μονάδας, οδηγώντας στην κατασκευή μιας συναρτησιακά δομημένης γενίκευσης (Rivera, 2015). Οι πιθανές επιπλοκές εμφανίζονται λόγω του ερμηνευτικού χαρακτήρα της δομικής διάκρισης, του σχηματισμού και της κατασκευής με ακριβείς όρους που οι μαθητές τείνουν να εκφράζουν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους.

Η εστίαση στις αριθμητικές πτυχές του μοτίβου, ακόμα και όταν αυτό παρουσιάζεται σε ένα εικονιστικό πλαίσιο, αποτελεί συχνά εμπόδιο στη γενίκευση (Becker & Rivera, 2007). Ο Mason (1996) επισημαίνει ότι υπάρχει μια τάση να κατασκευάζονται πίνακες τιμών από τους οποίους προέρχεται ένας κανόνας, όχι πάντα σωστός, με βάση την ανάλυση μιας ή δύο συγκεκριμένων περιπτώσεων.

Προτείνει να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να διερευνήσουν διαφορετικά είδη μοτίβων, στα οποία μπορούν με την βοήθεια της οπτικοποίησης να χειριστούν τα στοιχεία, ώστε να διευκολυνθούν στη γενίκευση. Στο πλαίσιο των εικονιστικών μοτίβων, ακόμη και όταν οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν τα διαδοχικά στοιχεία, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη η πολυπλοκότητά τους, ένας παράγοντας που μπορεί να θέσει υπό αίρεση την δημιουργία της γενίκευσης. Οι Sasman et al. (1999) διακρίνουν μεταξύ διαφανών και αδιαφανών μορφών των μοτίβων. Στην πρώτη περίπτωση, ο κανόνας που βασίζεται στο μοτίβο εμφανίζεται στη δομή των μορφών, κατάσταση που δεν συμβαίνει στις μη διαφανείς μορφές στις οποίες ο κανόνας δεν ανακαλύπτεται εύκολα με την απλή παρατήρηση των μοτίβων της ακολουθίας.

γ) Προσοχή ή επίγνωση των δομών:

Ο Küchemann (2010) καταγράφει αυτό το θεμελιώδες ζήτημα της φύσης των δομών που κατασκευάζονται από τους μαθητές στα πλαίσια των προβλημάτων με κανονικότητες από την άποψη της διαδοχικής έναντι της γενικής προσέγγισης της δραστηριότητας της γενίκευσης κανονικοτήτων. Υπογραμμίζει την άποψη ότι κάθε είδους επίγνωση της δομής θα χρειαστεί πρώτα να συμβεί σε καταστάσεις ή περιβάλλοντα όπου ο μόνος τρόπος να χειριστεί και να ανακατασκευάσει κάποιος τα σχετικά αντικείμενα είναι να εκφράσει ρητά τις σχέσεις μεταξύ τους. Έτσι, συνιστά τη χρήση προβλημάτων με κανονικότητες που δεν παρουσιάζονται πάντοτε με τη μορφή διαδοχικών στοιχείων επειδή οι μαθητές τείνουν να δημιουργούν εμπειρικές γενικεύσεις που «διαχωρίζονται» από δομές που τις παράγουν αρχικά.

Αυτό που φαίνεται να έχει μεγαλύτερη σημασία είναι, το πώς οι μεμονωμένοι μαθητές παρακολουθούν μια αναδυόμενη δομή. Ο Mason (2005) υπογραμμίζει τουλάχιστον πέντε διαφορετικά επίπεδα ευαισθητοποίησης ή καταστάσεις προσοχής σε σχέση με τη διάκριση, την εκτίμηση και τον σχηματισμό δομικών γενικεύσεων:

♦ Κρατούν ολόκληρα (βλέπουν με ένα συγκεκριμένο τρόπο την κανονικότητα, δημιουργώντας προσωπικά κατασκευασμένες εικόνες).

♦ Παρατηρούν λεπτομέρειες (κάνουν διακρίσεις).

♦ Αναγνωρίζουν σχέσεις (μεταξύ συγκεκριμένων διακριτών στοιχείων).

♦ Αντιλαμβάνονται ιδιότητες (ως γενικότητες που ενδεχομένως δημιουργήθηκαν σε συγκεκριμένες καταστάσεις).

♦ Αιτιολογούν βάσει προσδιορισμένων ιδιοτήτων.

Πρώτα, οι μαθητές διακρίνοντας συγγένειες «βλέπουν» την κανονικότητα και την περιγράφουν λεκτικά με περιφραστικές εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας. Στη συνέχεια προχωρούν στο στάδιο της καταγραφής, η οποία μπορεί να περιλαμβάνει μια σειρά από διαφορετικές μορφές, όπως εικόνες, λέξεις, σύμβολα και συνδυασμούς αυτών. Τέλος, ακολουθεί η διενέργεια ελέγχου. Ο δρόμος προς τη γενίκευση απαιτεί λεπτή παρατήρηση και σύγκριση των όρων σε ένα μικρό «δείγμα» της ακολουθίας, επισήμανση του «συνδετικού ιστού» και διάκριση των όψεων που αλλάζουν από αυτές που παραμένουν σταθερές.

*δ)*Αναπαραστάσεις

Η αναπαράσταση - δηλαδή η ρητή επικοινωνία, η έκφραση και η απόδοση - της γενίκευσης μιας κανονικότητας σε κάποιο αναγνωρίσιμο μέσο (ή μέσα) ποικίλει σε μορφή και περιεχόμενο, από προσεγγιστικές, ιδιοσυγκρατικές και αδόμητες εκφράσεις ως ακριβή, εκλεπτυσμένα και δομημένα συστήματα που δίνουν νόημα στις κατασκευασμένες εκφράσεις (Rivera, 2015). Για παράδειγμα, οι μαθητές τείνουν να παράγουν έναν αναδρομικό κανόνα όταν ασχολούνται με έργα γενίκευσης που «δίνουν μια σαφή σύνδεση με την αυξητική αλλαγή» (Lannin et al., 2006, σελ.12), κάτι που συμβαίνει όταν «οι τιμές εισόδου στα έργα ήταν σχετικά κοντινές» (Lannin et al ., 2006, σελ. 12).

Σε μια σειρά εργασιών του, ο Radford (2000, 2001, 2003, 2006, 2008) καταδεικνύει εμπειρικά τη σημειωτική εμφάνιση άμεσων ή κλειστών εκφράσεων βασισμένων στη μεταβλητή, στο πλαίσιο μιας πολιτισμικά διαμεσολαβούμενης δραστηριότητας. Η σημειωτική εμφάνιση αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους οι εκφράσεις των γενικεύσεων εμφανίζονται σε διαδικασίες χρήσης των σημάτων αρχικά με άλλους (καθηγητές, μαθητές) σε κοινή δραστηριότητα χρησιμοποιώντας άμεσα διαθέσιμα εργαλεία και διαδικασίες (π.χ. γλώσσα, σημειώσεις και πρακτικές) (Radford, 2008).

Με βάση τα ευρήματά τους με μαθητές ηλικίας 12-15 ετών, στην Αυστραλία, οι Stacey & MacGregor (2001) διατυπώνουν επίσης τη σημασία και την αναγκαιότητα της «*φάσης της λεκτικής περιγραφής*» στη «*διαδικασία αναγνώρισης μιας συνάρτησης και της έκφρασής της αλγεβρικά*» (σελ. 150). Υπογραμμίζουν τον τρόπο με τον οποίο ορισμένοι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην «*μετάβαση από μια λεκτική έκφραση σε έναν αλγεβρικό κανόνα*», ειδικά σε εκείνους τους «*μαθητές με φτωχές δεξιότητες στην αγγλική γλώσσα*» που, είτε δεν ήταν σε θέση να «*κατασκευάσουν μια συνεκτική λεκτική περιγραφή*», είτε παρήγαγαν μια «*λεκτική περιγραφή που δεν μπορεί να μεταφραστεί βολικά και λογικά απευθείας σε άλγεβρα*» (MacGregor & Stacey, 1992, σελ. 369-370).

ε) Πλαίσιο:

Η Ellis (2007) ασχολήθηκε με τα ζητήματα του πλαισίου κατά την γενίκευση. Στην έρευνα της οι μαθητές αρχικά διερεύνησαν τις γραμμικές σχέσεις σε δύο καθημερινές καταστάσεις που αφορούσαν σχέσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης. Οι γενικεύσεις τους υποβλήθηκαν σε μια εννοιολογική εξέλιξη από το να τα σκέφτονται ως αριθμητικά μοτίβα (με διακριτές ενδείξεις) στην τοποθέτησή τους στο πλαίσιο των ποσοτικών σχέσεων (σε συνεχή βάση) κάτι που τελικά υποστήριξε και «*ενθάρρυνε την ανάπτυξη ισχυρότερων γενικών αρχών σχετικών με τη γραμμικότητα*» (Ellis, 2007, σελ. 223). Επιπλέον, η Ellis υπογραμμίζει τη σημασία των καταστάσεων επίλυσης προβλήματος που επικεντρώνονται στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων αντί για αριθμητικά μοτίβα ή διαδικασίες μόνο, δεδομένου ότι οι ποσοτικές σχέσεις είναι πιο πιθανό να υποστηρίξουν ισχυρές και παραγωγικές γενικεύσεις από ότι τα αριθμητικά μοτίβα.

3. Η νέα έρευνα

3.1. Η σημασία της έρευνας

Η Άλγεβρα συνιστά μία από τις σπουδαιότερες, αλλά και δυσκολότερες ενότητες των Μαθηματικών από άποψη μάθησης αλλά και διδασκαλίας. Η αξία της βρίσκεται κυρίως σε δύο δυνατότητες που προσφέρει: (α) τη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και (β) την ευκολότερη και αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων, μαθηματικών και μη, κυρίως μέσω της μοντελοποίησης (Kieran, 2004).

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας έδειξε ότι ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών υπογραμμίζει ότι η γενίκευση αποτελεί μια σημαντική συνιστώσα του αλγεβρικού συλλογισμού. Η εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη περιλαμβάνει δράσεις όπως η αναγνώριση, η συμπλήρωση, η περιγραφή, η γενίκευση κανονικοτήτων (γεωμετρικών και αριθμητικών), η αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διάφορων αναπαραστάσεων (λεκτικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Η αναγνώριση σχέσεων στα patterns σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και ο συνδυασμός διαφορετικών μορφών αναπαράστασης ενός pattern μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της γενίκευσης από τους μαθητές και στην ανάπτυξη αλγεβρικού συλλογισμού.

Τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, ακολουθώντας τα ερευνητικά αποτελέσματα, στρέφουν την προσοχή τους όχι μόνο στην ενθάρρυνση δράσεων που σχετίζονται με τον εντοπισμό και την περιγραφή κανονικοτήτων, αλλά και στην ανάδειξη των σχέσεων, των δομών και των κανόνων τους. Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) που δημοσιεύθηκε το 2003 και με βάση το οποίο διαμορφώθηκε το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) των Μαθηματικών του Δημοτικού εισάγεται για πρώτη φορά, ως διδακτέα ενότητα σε όλες τις τάξεις, το **μοτίβο**. Αν και στο Ελληνικό σύστημα εκπαίδευσης οι μαθητές εισάγονται επίσημα στην Άλγεβρα στο Γυμνάσιο, ούτε στο Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του Γυμνασίου ούτε στα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν σαφής αναφορές στη γενίκευση ή δραστηριότητες γενίκευσης κανονικοτήτων. Είναι λογικό λοιπόν, η σχετική με την γενίκευση ελληνική βιβλιογραφία να αποτελείται σχεδόν αποκλειστικά από έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές του Δημοτικού ή του Νηπιαγωγείου με αποτέλεσμα να είναι περιορισμένα τα ερευνητικά δεδομένα που προσφέρουν πληροφορίες για μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου.

3.2. Στόχος – Ερευνητικά Ερωτήματα

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω καθώς και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αλγεβρική γενίκευση κανονικοτήτων στόχος της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων (Α΄, Β΄,Γ΄) του Γυμνασίου μπορούν να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης κανονικοτήτων. Ειδικότερα επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

I. Μπορούν οι μαθητές Γυμνασίου να επινοήσουν μεθόδους για να γενικεύσουν κατά την επίλυση προβλημάτων με κανονικότητες; Ποιες μεθόδους επινοούν;

II. Σε ποιο βαθμό οι μέθοδοι που επινοούνται διαφοροποιούνται σε έργα κοντινής (near) και μακρινής (far) γενίκευσης;

III. Με ποιόν τρόπο αποδίδουν (λεκτικά ή συμβολικά) οι μαθητές τις κανονικότητες που βρίσκουν και τους γενικευμένους κανόνες που κατασκευάζουν;

IV. Πώς σχετίζονται οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές με την σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν;

3.3. Αποσαφηνίσεις όρων

Αυτή η ενότητα επιχειρεί να ορίσει τους βασικούς όρους που χρησιμοποιούνται στην παρούσα μελέτη.

Ο όρος **γενίκευση** έχει συζητηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία από διάφορους ερευνητές (Dorfler, 1991; Ellis, 2007; Mason, 1996; Harel & Tall, 1991; Radford, 2008). Η γενίκευση αναγνωρίστηκε ευρέως ως μια διαδικασία που περιλαμβάνει τουλάχιστον μία από τις ακόλουθες δραστηριότητες:

(i) να εξετάσει μερικές συγκεκριμένες περιπτώσεις για να αναγνωρίσει κάποια κοινά χαρακτηριστικά (Dorfler, 1991; Ellis, 2007; Mason, 1996; Radford, 2008),

(ii) να επεκτείνει τον συλλογισμό κάποιων πέρα από τις συγκεκριμένες περιπτώσεις (Ellis,2007; Harel & Tall, 1991; Radford, 2008), και

(iii) να καθιερώσει ένα ευρύτερο αποτέλεσμα το οποίο απορρέει από συγκεκριμένες περιπτώσεις (Dorfler,1991; Ellis, 2007).

Η γενίκευση είναι μια σημαντική πτυχή της Άλγεβρας. Με βάση συγκεκριμένες περιπτώσεις, γίνεται ένα εννοιολογικό άλμα στη γενική περίπτωση ή κατά προτίμηση στην κλάση όλων των περιπτώσεων. Η ικανότητα γενίκευσης μοτίβων περιλαμβάνει την ικανότητα να κατασκευάζουμε και να δικαιολογούμε μια καλά ορισμένη δομή από ένα περιορισμένο σύνολο αρχικών σημείων (Rivera, 2013). Μια τέτοια δομή είναι μαθηματική. Ως εκ τούτου, η γενίκευση των κανονικοτήτων και η μαθηματική δομή είναι στενά και εννοιολογικά αλληλένδετες. Η ικανότητα γενίκευσης κανονικοτήτων, δηλαδή, είναι ερμηνευτική και βασισμένη σε κανόνες από τη φύση της και επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιούν προγνωστική και επαγωγική σκέψη, παρά τον αρχικό περιορισμό της ελλιπούς γνώσης των αντικειμένων για γενίκευση.

Ειδικότερα, ο Radford (2006) τονίζει πως μια γενίκευση θεωρείται αλγεβρική όταν οι μαθητές δε βασίζονται στην εικασία και δοκιμή στρατηγικών, αλλά αναζητούν ομοιότητες τις οποίες επεκτείνουν πέρα από τις συγκεκριμένες περιπτώσεις και ο σχηματισμός των γενικών εννοιών προκύπτει από τον σχηματισμό γενικών εκφράσεων. Η ανίχνευση μοτίβων, η ταυτοποίηση ομοιοτήτων, η σύνδεση παρόμοιων γεγονότων είναι όλα στη βάση των διαδικασιών γενίκευσης. Το βασικό στοιχείο αυτών των διαδικασιών δεν είναι αυτός καθ' αυτός ο εντοπισμός των ομοιοτήτων μεταξύ των περιπτώσεων, αλλά η στροφή της προσοχής από μεμονωμένες περιπτώσεις σε όλες τις πιθανές, καθώς και η επέκταση και προσαρμογή του μοντέλου σε οποιοδήποτε από αυτά.

Παράλληλα, ο Radford (2006) ισχυρίζεται ότι: α) η εμφάνιση της αλγεβρικής σκέψης συμβαίνει όταν οι μαθητές καταφέρουν να στρέψουν την προσοχή τους από τον υπολογισμό ορισμένων συγκεκριμένων στοιχείων στον «τρόπο υπολογισμού» αυτών των στοιχείων, β) ότι η έκφραση της γενικότητας αλγεβρικά δεν συνεπάγεται αναγκαστικά τη χρήση των γραμμάτων (μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς γενικό νόημα), αντί του τρόπου συλλογισμού που καθίσταται σαφής στην κατανόηση και την έκφραση της αοριστίας με κάποιο τρόπο. Σύμφωνα με τα παραπάνω, στην παρούσα εργασία, και με βάση τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης όπως αυτές αναδύονται από τη βιβλιογραφία η ***αλγεβρική σκέψη*** των μαθητών ανιχνεύεται μέσα από την δυνατότητά τους να γενικεύουν μοτίβα με τη ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών μέσα από τον εντοπισμό του κανόνα που περιγράφει τη σχέση, να εκφράζουν αυτές τις γενικεύσεις με οποιοδήποτε μέσο (π.χ. φυσική γλώσσα, συμβολικά) και να αιτιολογούν τις γενικεύσεις τους.

Ένα **πρόβλημα γενίκευσης κανονικοτήτων** είναι ένα είδος μαθηματικού προβλήματος το οποίο μπορεί να λυθεί με την «εξέταση συγκεκριμένων περιπτώσεων, τη συστηματική οργάνωση των αποτελεσμάτων, την εξεύρεση ενός μοτίβου και τη χρήση του για να πάρουμε την απάντηση» (Stacey, 1989, σελ. 147).

Ο όρος **στρατηγική ή μέθοδος γενίκευσης** αναφέρεται στην προσέγγιση που περιλαμβάνει μια σειρά από βήματα που λαμβάνονται για την ερμηνεία και περιγραφή της δομής ενός μοτίβου σε ένα πρόβλημα κανονικοτήτων. Δεδομένου ότι οι περισσότερες από τις στρατηγικές που συζητήθηκαν σε αυτή την εργασία βασίστηκαν στην εργασία της Stacey (1989), η οποία παρουσιάζει μια σειρά από καλά καθορισμένες και εκλεπτυσμένες στρατηγικές γενίκευσης, στην έρευνα αυτή θα χρησιμοποιηθεί αυτό το πλαίσιο κατά την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών (Πίνακας 2).

Πίνακας 2 Στρατηγικές Γενίκευσης (Stacey, 1989)

Στρατηγικές	Περιγραφή
Μέτρησης (Counting)	Ζωγραφίζοντας μια εικόνα ή κατασκευάζοντας ένα μοντέλο για να αναπαραστήσουν μια κατάσταση, για να μετρούν το επιθυμητό χαρακτηριστικό.
Διαφορά (Difference)	Χρησιμοποιώντας ένα πολλαπλάσιο της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων της ακολουθίας.
Ολόκληρου αντικειμένου (Whole- object) (επίσης αναφέρεται ως Ενοποίηση (Unitising))	Χρησιμοποιώντας ένα πολλαπλάσιο μιας προηγούμενης τιμής, υποθέτοντας ότι το πρόβλημα συνεπάγεται άμεση αναλογία
Γραμμική μέθοδος (Linear)	Οι μαθητές χρησιμοποιούν μια σχέση που περιλαμβάνει και τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση.

Ο όρος **έργο κοντινής γενίκευσης** (near generalisation task) χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια «ερώτηση που μπορεί να λυθεί με βήμα προς βήμα σχεδίαση ή καταμέτρηση» (Stacey, 1989, σελ. 150), όπως, πχ., η εύρεση του $6^{ου}$ όρου μιας ακολουθίας μοτίβων όταν δίνονται οι τρείς πρώτοι όροι της. Ο όρος **έργο μακρινής γενίκευσης** (far generalization task) χρησιμοποιείται για να δηλώσει ένα «ερώτημα που ξεπερνά τα λογικά πρακτικά όρια μιας τέτοιας βήμα προς βήμα προσέγγισης» (Stacey, 1989, σελ. 150), πχ. η εύρεση του $100^{ου}$ ή του ν-οστού όρου μιας ακολουθίας κανονικοτήτων.

Τέλος, ο όρος **κανόνας γενίκευσης**, ο οποίος έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές, όπως ο Küchemann (2010), οι Lannin et al. (2006), Rivera & Becker (2011) κ.ά. στη βιβλιογραφία, αναφέρεται στη σχέση θέσης - όρου, εκφραζόμενης ως συνάρτηση, που ορίζει την κανονικότητα που περιγράφεται σε ένα έργο γενίκευσης. Ο κανόνας είναι χρήσιμος για τον άμεσο υπολογισμό οποιουδήποτε όρου του μοτίβου όταν είναι γνωστή η θέση του. Οι κανόνες είναι ισχυρά μέσα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τις κανονικότητες και να εκφράσουν τις γενικεύσεις. Ως εκ τούτου, αντικατοπτρίζουν τόσο το νόημα όσο και τη δύναμη της Άλγεβρας. Λόγω του αφηρημένου και γενικού χαρακτήρα τους, ωστόσο, αυτό το σκέλος είναι δύσκολο για πολλούς μαθητές να το κατανοήσουν (Drijvers, Dekker, & Wijers, 2011). Όπως έχει δείξει η ανασκόπηση αρκετών ερευνών, οι κανόνες που κατασκευάζουν οι μαθητές προσλαμβάνουν κυρίως δύο μορφές: *αναδρομική* και *συναρτησιακή* (Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Rivera & Becker, 2007). Ένας αναδρομικός κανόνας περιλαμβάνει την αναγνώριση και τη χρήση της μεταβολής από όρο σε όρο στην εξαρτημένη μεταβλητή, ενώ ένας συναρτησιακός κανόνας χρησιμοποιεί συλλογιστική που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή με την εξαρτημένη μεταβλητή (Lannin et al., 2006). Οι κανόνες μπορούν, σύμφωνα με την βιβλιογραφία, να εκφραστούν:

- χρησιμοποιώντας λέξεις (π.χ., πρόσθεσε τρία στο διπλάσιο του αριθμού),
- χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα (π.χ., 2ν + 3)
- χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό λέξεων και μαθηματικών συμβόλων (π.χ., 2 x τον αριθμό + 3) (Drijvers, Dekker, & Wijers, 2011).

Στην παρούσα έρευνα για την επιλογή των δραστηριοτήτων του δοκιμίου λήφθηκαν υπόψη οι παράγοντες που επηρεάζουν τη γενίκευση όπως το είδος του μοτίβου, οι τιμές που αποδίδονται στην ανεξάρτητη μεταβλητή ή ακόμα και η οπτική εικόνα που έχει ο μαθητής για μια αλγεβρική κατάσταση (Rivera & Becker, 2008; Lannin et al., 2006; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999). Για την καταγραφή των στρατηγικών που επινοούν οι μαθητές υιοθετήθηκαν οι στρατηγικές και οι ορισμοί τους όπως καταγράφηκαν στην εργασία της Stacey (1989). Τέλος, για την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών για τους κανόνες γενίκευσης που κατασκευάζουν, στη παρούσα έρευνα αξιοποιήθηκαν οι κατηγορίες και οι ορισμοί τους όπως καταγράφονται στις εργασίες των Drijvers, Dekker, & Wijers (2011) καθώς και των Lannin, Barker, & Townsend (2006).

3.4. Μεθοδολογικό Σχέδιο

Παρακάτω παρουσιάζεται το μεθοδολογικό σχέδιο (Μέθοδος, Συμμετέχοντες, Διαδικασία συλλογής δεδομένων, Εργαλείο συλλογής δεδομένων) με βάση το οποίο οργανώθηκε και πραγματοποιήθηκε το εμπειρικό μέρος της παρούσας εργασίας.

3.4.1. Μέθοδος

Στην παρούσα μελέτη - στόχος της οποίας είναι να εξετάσει αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων (Α΄, Β΄,Γ΄) του Γυμνασίου μπορούν να καταφέρνουν να φτάσουν σε μια αλγεβρική γενίκευση κατά την επίλυση προβλημάτων με κανονικότητες - επιλέχθηκε η μέθοδος της Περιγραφικής ποσοτικής εμπειρικής έρευνας με τη χρήση ενός δοκιμίου στο οποίο περιλαμβάνονται ερωτήσεις ανοιχτού τύπου. Η συγκεκριμένη μέθοδος ενδείκνυται στις περιπτώσεις που επιδιώκεται η ενδελεχής μελέτη: α) σχολικής επίδοσης, κατανόησης εννοιών, γνώσεων, και β) εννοιολογικής ανάπτυξης και αλλαγής σκέψης (Cohen, Manion, & Morrison, 2002).

Η αξία της περιγραφικής μεθόδου έγκειται στο ότι μπορούμε να συλλέξουμε στοιχεία που θα διαμορφώσουν συγκεκριμένες υποθέσεις (π.χ. σχετικά με τη σπουδαιότητα διαφορετικών μεταβλητών και τις μεταξύ τους σχέσεις) και θα περιγράψουν τις βασικές συνιστώσες του προβλήματος. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στα αρχικά στάδια της διερεύνησης ενός φαινομένου. Επιπλέον, η ποσοτική έρευνα αναφέρεται στη συστηματική διερεύνηση φαινομένων με στατιστικές μεθόδους, μαθηματικά μοντέλα και αριθμητικά δεδομένα. Χρησιμοποιείται συνήθως αντιπροσωπευτικό δείγμα παρατηρήσεων και επιδιώκεται γενίκευση σε ένα ευρύτερο πληθυσμό. Το πλεονέκτημα της ποσοτικής έρευνας σε σχέση με την ποιοτική είναι ότι χαρακτηρίζεται από σχετικά μεγαλύτερη αντικειμενικότητα, αφού δεν επηρεάζεται τόσο από ερμηνείες (Creswell, 2002). Τα παραπάνω γνωρίσματα της Περιγραφικής μεθόδου ανταποκρίνονται στις ανάγκες της παρούσας έρευνας.

3.4.2. Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2018-2019 σε 61 μαθητές (20 μαθητές της Α΄, 19 μαθητές της Β΄, και 22 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου) ενός δημόσιου Γυμνασίου της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Η επιλογή του δείγματος έγινε με βάση τη δυνατότητα πρόσβασης στη σχολική μονάδα και δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία. Το δείγμα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αντιπροσωπευτικό και ως εκ τούτου τα αποτελέσματα δεν είναι δυνατόν να γενικευτούν στον γενικό πληθυσμό των μαθητών Γυμνασίου.

Παρόλα αυτά, επειδή πρόκειται για ένα δείγμα, όπου όλα τα υποκείμενα της έρευνας φοιτούν σε ένα τυπικό σχολείο της Ελληνικής Υποχρεωτικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και ζητήθηκε από αυτούς η διερεύνηση προβλημάτων με κανονικότητες, η περιγραφή των οποίων απαιτεί απλό και στοιχειώδη συμβολισμό, η έρευνα παρέχει μια εικόνα για την ικανότητα των μαθητών να εκφράζουν κανόνες που περιγράφουν καταστάσεις-προβλήματα, των διακριτών μοντέλων (μεθόδων) που αναπτύσσουν, καθώς και των τρόπων που χρησιμοποιούν για να εκφράσουν και να αιτιολογήσουν τον κανόνα γενίκευσης που παράγουν.

3.4.3. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο περιβάλλον του σχολείου, κατά τη διάρκεια των σχολικών ωρών και για την απάντηση του δοκιμίου δόθηκε στους μαθητές μία περίπου σχολική ώρα (45 λεπτά της ώρας). Πριν από την έρευνα, οι μαθητές-τριες δεν συμμετείχαν συστηματικά σε παρόμοιες δραστηριότητες με κανονικότητες. Αφού χορηγήθηκε το δοκίμιο, δόθηκαν οδηγίες στους μαθητές, οι οποίες υπάρχουν καταγεγραμμένες και στην πρώτη σελίδα των δοκιμίων τους, προκειμένου να γίνει σωστά η απάντησή του. Οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν τα πάντα πάνω στα δοκίμια τους. Έγινε σαφές στους συμμετέχοντες πως η έρευνα δεν αφορά σε τεστ αξιολόγησης, δεν βαθμολογείται και άρα μπορούν να απαντήσουν στα έργα χωρίς να προβληματίζονται για την τελική τους επίδοση. Οι μαθητές-συμμετέχοντες είχαν την ελευθερία να εκφράσουν όποια απορία προκύπτει κατά την επίλυση των έργων.

3.4.4. Εργαλείο συλλογής δεδομένων

Το δοκίμιο αναπτύχθηκε για να εξακριβώσει αν οι μαθητές μπορούν να γενικεύσουν καθώς και τις στρατηγικές που επινοούν κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα κανονικοτήτων, αλλά και να διερευνήσει αν εντοπίζονται στις απαντήσεις των μαθητών ενδείξεις αλγεβρικής σκέψης. Σχεδιάστηκε σύμφωνα με την δομή του δοκιμίου που χρησιμοποίησαν οι Amit & Neria (2008) στην αντίστοιχη έρευνά τους. Κάθε πρόβλημα δίνεται σε διαφορετική σελίδα. Κάθε σελίδα έχει τρία μέρη. Τα προβλήματα εμφανίζονται στο πάνω μέρος της σελίδας και η υπόλοιπη σελίδα χωρίζεται σε δύο στήλες: η αριστερή είναι για τη λύση και η δεξιά για τις εξηγήσεις και την επεξεργασία της λύσης. Για να βοηθηθούν οι μαθητές να δώσουν πλήρης εξηγήσεις, στην αριστερή πλευρά υπάρχουν τα ερωτήματα:

- Τί έκανα;
- Γιατί το έκανα;
- Αν δεν απάντησα, γιατί;

Η μορφή του δοκιμίου σχεδιάστηκε προσεκτικά για να διευκολύνει την εργασία τόσο των μαθητών όσο και της ερευνήτριας, βοηθώντας τους μαθητές να εξηγήσουν με σαφήνεια και πλήρως τις λύσεις τους, οι οποίες αργότερα θα επιτρέψουν να φανούν με σαφή τρόπο οι διαδρομές των λύσεων και οι διαδικασίες σκέψης των μαθητών. Η χρησιμοποίηση ανοικτού τύπου ερωτήσεων, καθώς, επίσης, και η ενθάρρυνση των μαθητών να σκεφτούν πάνω στην εργασία τους, παρέχει μια ευκαιρία να αποκαλυφθούν οι διαδικασίες σκέψης, οι δυσκολίες και τα γνωστικά εμπόδια που αυτοί αντιμετωπίζουν (Amit & Neria, 2008).

Το δοκίμιο οργανώθηκε σε δύο άξονες ερωτημάτων σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα:

- Ο πρώτος άξονας αφορά στις διαδικασίες σκέψης των μαθητών που τους οδηγούν σε μια αλγεβρική γενίκευση της παρατηρούμενης κανονικότητας (αναζήτηση ομοιοτήτων: στρατηγικές για την κοντινή γενίκευση, επέκταση στις γενικές περιπτώσεις: στρατηγικές για την μακρινή γενίκευση, και πως αυτές διαφοροποιούνται).
- Ο δεύτερος άξονας αφορά στη δυνατότητα των μαθητών να εκφράσουν αυτήν την γενίκευση αλγεβρικά (τύπος του κανόνα γενίκευσης, εξηγήσεις μαθητών).

Για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, οι ερευνητές υιοθετούν έργα γενίκευσης αναπτυσσόμενων μοτίβων τα οποία, θεωρούν ότι αποτελούν τη γέφυρα μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας. Όλοι οι τύποι μοτίβων είναι απαραίτητοι για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, αλλά τα αναπτυσσόμενα μοτίβα οδηγούν, με φυσικό τρόπο, στην ανακάλυψη μιας σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων, διευκολύνοντας έτσι την αλγεβρική συλλογιστική (Rivera & Becker, 2008). Τα έργα αυτά ενδέχεται να εμπλέκουν είτε πίνακες με δύο σύνολα αριθμητικών τιμών (εισαγωγή - αποτέλεσμα, input-output) είτε εικονιστικά αναπτυσσόμενα μοτίβα. Η βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι οι πίνακες τιμών είναι αποτελεσματικοί στο να εστιάζουν την προσοχή των μαθητών στη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων τιμών, να διευκολύνουν τους μαθητές να γενικεύουν κανόνες και προωθούν την αλγεβρική σκέψη (Smith, 2008). Υπάρχει, ωστόσο, και η άποψη ότι τα αριθμητικά αναπτυσσόμενα μοτίβα είναι πιο δύσκολα, όχι λόγω των δυσκολιών που πιθανόν να αντιμετωπίζουν οι μαθητές ώστε να εντοπίσουν την ομοιότητα, αλλά λόγω του ότι οι μαθητές τείνουν να αποτυγχάνουν να διαμορφώσουν έναν άμεσο κανόνα με νόημα (Radford, 2008; Becker & Rivera, 2007). Με αυτή την έννοια, τα εικονιστικά μοτίβα μπορεί να είναι ένα πλαίσιο που διευκολύνει την κατανόηση και ενθαρρύνει περισσότερο τη διαδικασία της γενίκευσης και οδηγεί στη διαμόρφωση ενός γενικού κανόνα με νόημα (Becker & Rivera, 2007).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, κύριες πηγές δεδομένων της παρούσας έρευνας είναι οι απαντήσεις των μαθητών σε δύο προβλήματα αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων, ένα εικονιστικό και ένα αριθμητικό. Έγινε προσπάθεια να είναι προβλήματα που προκαλούν γενίκευση παρουσιάζοντας διαφορετικά επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων και πολυπλοκότητας. Επίσης, όπως προτείνουν οι Sasman et al. (1999), τα αριθμητικά δεδομένα είναι «μη ελκυστικοί» αριθμοί (από πολλαπλασιαστική άποψη), ως ένας τρόπος για να παρακαμφθεί η τάση για χρήση της άμεσης αναλογίας. Προτιμήθηκαν οι γραμμικές κανονικότητες μια που, σύμφωνα με το Α.Π.Σ. της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή μόνο με γραμμικές σχέσεις.

Τα δύο προβλήματα κανονικοτήτων έχουν παρόμοια δομή. Τα «δοθέντα» αποτελούν ένα μικρό πεπερασμένο σύνολο παραδειγματικών μοτίβων. Ακολουθούν τρία ερωτήματα, τα οποία προχωρούν την απαιτούμενη διαδικασία γενίκευσης, που βασίζονται σε προηγούμενες έρευνες για την γενίκευση κανονικοτήτων (Rivera & Becker, 2008; Radford, 2006; Stacey, 1989). Οι μαθητές καλούνται να λύσουν τα προβλήματα και να επεξεργαστούν και να εξηγήσουν τις λύσεις τους. Τα δύο επιλεγμένα προβλήματα απαιτούν από τους μαθητές να επινοήσουν μια στρατηγική δεδομένου ότι στερούνται μιας ήδη προκατασκευασμένης στρατηγικής επίλυσης.

Τα δύο πρώτα ερωτήματα αντιστοιχούν στον $1^{ο}$ άξονα και το τρίτο στον $1^{ο}$ και $2^{ο}$ άξονα ερωτημάτων:

<u>Ερώτηση $1^{η}$</u>: Ζητείται από τους μαθητές να συνεχίσουν το μοτίβο, συμπληρώνοντας τον επόμενο όρο και ακολούθως να βρουν όρους σε αμέσως επόμενες μεγαλύτερες θέσεις (π.χ. τον $6^{ο}$ όρο) της ακολουθίας. Πρόκειται για ερώτηση κοντινής γενίκευσης που μπορεί να απαντηθεί με το βήμα προς βήμα σχεδιασμό ή υπολογισμό και χρησιμεύει ως ερώτηση «προθέρμανσης» που επιτρέπει στους λύτες να εξετάσουν και να διερευνήσουν το μοτίβο (Stacey, 1989).

<u>Ερώτηση $2^{η}$</u>: Ζητείται από τους μαθητές να βρουν όρους σε απομακρυσμένες από τους δοθέντες όρους μεγαλύτερες θέσεις (π.χ. τον $50^{ο}$) της ακολουθίας. Πρόκειται για ερώτηση μακρινής γενίκευσης που υπερβαίνει τα λογικά πρακτικά όρια μιας βήμα προς βήμα προσέγγισης. Έτσι παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να

χρησιμοποιήσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους για να αναπτύξουν μια στρατηγική που θα τους οδηγήσει στην εύρεση του ζητούμενου όρου (Amit & Neria, 2008).

Ερώτηση 3η: Ζητείται από τους μαθητές να προτείνουν μία μέθοδο με την οποία θα μπορεί να υπολογιστεί οποιοσδήποτε όρος της ακολουθίας και να γράψουν έναν αλγεβρικό τύπο για την εύρεση του στο ν-οστού όρου της ακολουθίας.

Η ερώτηση αυτή επιτρέπει στους μαθητές να εκφράσουν τη γενίκευση σε οποιαδήποτε μορφή (λεκτική, συμβολική ή συνδυασμό λέξεων και συμβόλων) αισθάνονται άνετα. Βασίστηκε σε προηγούμενες έρευνες, οι οποίες έδειξαν ότι οι μαθητές βρήκαν ευκολότερο να εκφράζουν τις γενικεύσεις τους με λόγια παρά με συμβολική γραφή (Radford, 2006; 2008) και στο γεγονός ότι στην έρευνα θα συμμετέχουν μαθητές της Α΄ Γυμνασίου που δεν είναι εξοικειωμένοι ακόμη με την συμβολική γραφή. Η Ερώτηση 3 θα βοηθήσει να γίνει η διάκριση μεταξύ εκείνων των μαθητών που μπορούν να «σκέφτονται αλγεβρικά» και εκείνων που μπορούν επίσης να «γράψουν αλγεβρικά» (Zazkis, & Liljedahl, 2002). Τέλος, σε όλα τα ερωτήματα ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν πλήρως τη διαδικασία επίλυσης που ακολούθησαν.

3.4.5. Αξιοπιστία - Εγκυρότητα

Η αναζήτηση της αξιοπιστίας και της εγκυρότητας των ερευνητικών εργαλείων είναι δύο βασικά κριτήρια για την εξασφάλιση έγκυρων αποτελεσμάτων, στις έρευνες που πραγματοποιούνται στο χώρο της εκπαίδευσης. Η αξιοπιστία είναι το πρώτο χαρακτηριστικό που θα πρέπει να διαθέτει ένα εργαλείο και αναφέρεται στη σταθερότητα που εμφανίζει σε διαδοχικές μετρήσεις. Ένα εργαλείο θεωρείται αξιόπιστο όταν σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις σε παρόμοιες συνθήκες και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, εμφανίζει σταθερά τα ίδια αποτελέσματα (Bell, 1999). Η εγκυρότητα ενός ερευνητικού εργαλείου ορίζεται με βάση το βαθμό κάλυψης της θεωρητικής έννοιας για την οποία κατασκευάστηκε. Με άλλα λόγια, ένα εργαλείο μέτρησης θεωρείται έγκυρο, εφόσον αποδίδει κάθε πτυχή της θεωρητικής έννοιας, την οποία αντιπροσωπεύει (Bell, 1999).

Η οργάνωση του εργαλείου στους δύο άξονες σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα που παρουσιάστηκε πιο πάνω, καθώς και η σύνδεση του περιεχομένου των ερωτήσεων που περιλαμβάνει ο κάθε άξονας με όλες τις διαστάσεις των ορισμών των εννοιών, όπως αυτοί προσδιορίστηκαν στην αποσαφήνιση των όρων, διασφαλίζει την εγκυρότητα του περιεχομένου του εργαλείου όπως και την εγκυρότητα της εννοιολογικής κατασκευής.

Για να ενισχυθεί η σταθερότητα της μέτρησης του εργαλείου, το δοκίμιο της έρευνας δόθηκε πιλοτικά σε 9 μαθητές από τις τρείς σχολικές βαθμίδες του ίδιου σχολείου ώστε να εξεταστεί ως προς την καταλληλότητα του, δηλαδή αν: α) οι όροι που χρησιμοποιεί γίνονται εύκολα κατανοητοί, β) η σειρά ερωτήσεων προκαλεί σύγχυση ή παρανοήσεις, γ) οι συγκεκριμένες ερωτήσεις επιτρέπουν τη συλλογή των επιθυμητών πληροφοριών, δ) το δοκίμιο είναι υπερβολικά μεγάλο και κουραστικό και ε) οι οδηγίες συμπλήρωσης είναι σαφείς. Η ομοιόμορφη χορήγηση του δοκιμίου όπως και το περιεχόμενο και η ομοιόμορφη γραφή των ερωτήσεων ενισχύουν την αξιοπιστία του ερευνητικού εργαλείου.

Το δείγμα της έρευνας, παρόλο που δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό, είναι μη συγκεκριμένου κοινωνικού και μαθησιακού επιπέδου και επιπλέον η διαδικασία χορήγησης του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε στο χώρο του σχολείου κάτω από φυσιολογικές, μη ειδικές συνθήκες, χωρίς παρεμβολές από εξωτερικούς παράγοντες στο έργο των παιδιών. Επιπλέον, το σχολείο φοίτησης είναι ένα τυπικό Ελληνικό Γυμνάσιο στο οποίο για την διδασκαλία των Μαθηματικών και στις τρεις βαθμίδες ακολουθείται το ίδιο Αναλυτικό Πρόγραμμα και χρησιμοποιείται το ίδιο σχολικό εγχειρίδιο όπως σε όλα τα Γυμνάσια της χώρας. Μπορεί να θεωρηθεί λοιπόν ότι οι συμμετέχοντες-μαθητές έχουν τις ίδιες προϋπάρχουσες γνώσεις με όλους τους αντίστοιχους Έλληνες μαθητές. Επομένως σε περίπτωση που το δοκίμιο χορηγηθεί ξανά αναμένονται τα ίδια αποτελέσματα.

Έτσι, εφόσον (1) το δείγμα της παρούσας έρευνας περιλαμβάνει μαθητές διαφορετικού κοινωνικού και μαθησιακού επιπέδου, (2) τα ερωτήματα του ερευνητικού εργαλείου είναι σε αντιστοιχία με τους άξονες των ερευνητικών ερωτημάτων και τους ορισμούς, είναι απλά και σαφή και (3) η διαδικασία χορήγησης πραγματοποιήθηκε κάτω από μη ειδικές συνθήκες, η έρευνα θεωρείται ότι θα είναι αξιόπιστη.

4. Αποτελέσματα

Η παρούσα μελέτη, εξέτασε αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων του Γυμνασίου μπορούν να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης γραμμικών κανονικοτήτων. Η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν θα καταδείξει τις διαδρομές των λύσεων και τις διαδικασίες σκέψης των μαθητών (χρήση στρατηγικών, εξηγήσεις, κανόνας γενίκευσης) κατά την προσπάθειά τους να γενικεύσουν.

4.1. Ανάλυση δεδομένων – Κωδικοποίηση

Παρακάτω συνοψίζονται οι τρόποι με τους οποίους έγινε η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά την διεξαγωγή της έρευνας. Επίσης, καταγράφεται η κωδικοποίηση των δεδομένων αυτών για την ανάλυση των δοκιμίων και την στατιστική τους επεξεργασία.

4.1.1. Ανάλυση δεδομένων

Όλες οι απαντήσεις των μαθητών αναλύθηκαν ποιοτικά σύμφωνα με τα ακόλουθα κριτήρια: ορθότητα, στρατηγική γενίκευσης (περιλαμβανομένων ερμηνειών και αιτιολογήσεων), συνέπεια στη χρήση της στρατηγικής και έκφραση της γενίκευσης. Η ορθότητα των απαντήσεων αναφέρεται μόνο για τις τελικές απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 και 2. Η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων της 3^{ης} ερώτησης (εύρεση του νιοστού όρου) σε σωστές ή λανθασμένες με αυστηρά μαθηματικούς κανόνες μπορεί να είναι παραπλανητική δεδομένου ότι, στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές της Α΄ Γυμνασίου που δεν είναι εξοικειωμένοι με την χρήση μεταβλητών. Επίσης, λόγω του ότι οι νιοστοί όροι εκφράστηκαν κατά κύριο λόγο με «εφευρεθέντα» συμβολιστικά συστήματα ή με λόγια, συγκεντρώνοντας αποκλειστικά τα σωστά τελικά αποτελέσματα, σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη αλγεβρική σκέψη μπορεί να αγνοηθούν (Amit & Neria, 2007).

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν αναλύθηκαν με κατάλληλες στατιστικές τεχνικές, όπως συχνότητες εμφάνισης, ποσοστά και έλεγχοι συνάφειας. Πρώτον, προσδιορίστηκαν οι συχνότητες και τα ποσοστά για την ορθότητα των απαντήσεων καθώς και για κάθε μία από τις στρατηγικές και τους τρόπους έκφρασης του νιοστού όρου που χρησιμοποιήθηκαν ανά πρόβλημα και σχολική βαθμίδα. Δεύτερον, έγινε πίνακας συνάφειας για τη χρήση της στρατηγικής και την σχολική βαθμίδα για να διερευνηθούν οι διαφορές στην αλλαγή της χρήσης της στρατηγικής σε επίπεδο σχολικής βαθμίδας. Για το σκοπό αυτό εξετάστηκαν οι σημαντικές τιμές του χ^2 και οι διορθωμένες υπολειμματικές τιμές για την πιθανότητα σημαντικών διαφορών στη χρήση των στρατηγικών ανά σχολική βαθμίδα. Τρίτον, ελέγχθηκε η συνέπεια στη χρήση των στρατηγικών στην κοντινή και στη μακρινή γενίκευση. Δημιουργήθηκε πίνακας συνάφειας για την χρήση στρατηγικής των μαθητών και τον τύπο γενίκευσης του ερωτήματος, για να διερευνηθεί η πιθανότητα σημαντικών διαφορών στην αλλαγή της χρήσης της στρατηγικής ανά τύπο γενίκευσης. Τέλος, διερευνήθηκε η πιθανότητα σημαντικών αλλαγών στον τρόπο έκφρασης του τύπου της γενίκευσης ανά σχολική βαθμίδα με την βοήθεια ενός πίνακα συνάφειας και ενός χ^2-test.

4.1.2. Κωδικοποίηση δεδομένων

Τα δύο προβλήματα γενίκευσης που χρησιμοποιήθηκαν περιλαμβάνουν γραμμικές κανονικότητες που παρουσιάζονται σε διαφορετικά πλαίσια, ένα εικονιστικό και ένα αριθμητικό. Στο 1^{ο} πρόβλημα ζητούνται να υπολογιστούν πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 4^{ο} σχήμα, το 6^{ο} σχήμα, το 50^{ο} σχήμα και το νιοστό σχήμα. Οι απαντήσεις των μαθητών στα ερωτήματα αυτά κωδικοποιήθηκαν ως Σ(4), Σ(6) (κοντινή γενίκευση), Σ(50) και Σ(ν) (μακρινή γενίκευση) αντίστοιχα. Στο 2^{ο} πρόβλημα ζητούνται να υπολογιστούν πόσα ευρώ θα έχει ο Γιάννης στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της 4^{ης}, της 7^{ης}, της 50^{ης} και της νιοστής εβδομάδας. Οι απαντήσεις αντίστοιχα κωδικοποιήθηκαν ως Ε(4), Ε(7) (κοντινή γενίκευση), Ε(50) και Ε(ν) (μακρινή γενίκευση).

Ως αποτέλεσμα της ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών στην πιλοτική έρευνα και την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, υιοθετήθηκαν οι στρατηγικές και οι ορισμοί τους όπως καταγράφηκαν στην εργασία της Stacey (1989) και χρησιμοποιήθηκαν ως βάση για την κωδικοποίηση για τη χρήση των στρατηγικών:

1. Μέτρηση
2. Διαφορά
3. Ολόκληρου Αντικειμένου
4. Γραμμική

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ
Μέτρηση	
Σ(4)=13, Σ(6)=19	Ζωγράφισα τετραγωνάκια για να βρω πόσα σπίρτα χρειάζονται
Ε(4)=11, Ε(7)=17	Σε κάθε βδομάδα έβαζα 2 ευρώ
Σ(50)=148	Ανέβηκα ανά 3 μέχρι το $50^{ο}$ σχήμα
Σ(50)=151	Η απόσταση μεταξύ του $10^{ου}$ και του $20^{ου}$ είναι 30 σπίρτα άρα $10^{ο}$=31, $20^{ο}$=61, $30^{ο}$=91, $40^{ο}$=121, $50^{ο}$=151
Ε(50)=103	Βρήκα πόσα λεφτά μάζεψε στις 10 εβδομάδες→20€, έτσι πρόσθετα 20 κάθε 10 εβδομάδες
Διαφορά	
Σ(50)=150	Κάθε φορά +3 άρα θα χρειαστούμε 3·50=150 σπίρτα
Ε(50)=100	Πολ/σίασα τα ευρώ που παίρνει κάθε βδομάδα με τη $50^{η}$ εβδομάδα
Ολόκληρου Αντικειμένου	
Σ(4)=14, Σ(6)=20	Για 2 σχήματα 7 σπίρτα άρα για 4, 7·2=14, για 3σχήματα 10 άρα για 6 θα χρειαστούμε τα διπλάσια 10·2=20
Σ(50)=155	Από το $6^{ο}$ σχήμα μέτρησα ως το $10^{ο}$ προσθέτοντας 3 και βρήκα 31 και το πολλαπλασίασα με το 5
Ε(50)=130	Αφού την $5^{η}$ εβδομάδα θα έχει 13€, $5^{η}$ · 10=$50^{η}$ εβδομάδα άρα 13·10=130€
Γραμμική	
Σ(4)=13, Σ(6)=19	Το1ο κουτάκι θέλει 4 σπίρτα ενώ όλα τα άλλα από 3 άρα για το $4^{ο}$ σχήμα: 4(το πρώτο)+3·3=13. Για το $6^{ο}$: 5·3=15, 15+4=19
Ε(4)=11, Ε(7)=17	1·2+3=5, 2·2+3=7, 3·2+3=9, 4·2+3=11, 5·2+3=13, 6·2+3=15, 7·2+3=17
Σ(50)=151	Το $1^{ο}$ σχήμα θέλει 4 τα επόμενα θέλουν 3 άρα 3·(50-1)+4=151
Σ(50)=151	Για να σχηματιστεί το $1^{ο}$ τετράγωνο θέλουμε 4 σπίρτα. Κάθε φορά που σχηματίζονταν ένα τετράγωνο βάζαμε άλλα 3 σπίρτα γιατί το $4^{ο}$ υπήρχε ήδη άρα πολλαπλασίασα τον αριθμό του σχήματος επί 3 και πρόσθεσα 1 σπίρτο από το $1^{ο}$ τετράγωνο που έχει 4 σπίρτα
Σ(50)=154	Πολλαπλασίασα το 50 με το 3 και πρόσθεσα 4 που είναι το αρχικό τετράγωνο.
Ε(50)=103	Για να βρω τη $50^{η}$ σκέφτομαι την $1^{η}$ 5€ και τις υπόλοιπες 49 2€ 1·5=5, 49·2=98, 98+5=103€
Ε(50)=103	Για 50 εβδομάδες αν άρχιζε από τα 0€ θα κάναμε 50·2=100€. Όμως αφού στην αρχή είχε 5€ και όχι 2€ που του έδωσαν θα προσθέσουμε 3€ (5-2=3). Άρα 100+3=103€
Ε(50)=103	Αφού την $7^{η}$ εβδομάδα πήρε 17€ και 50-7=43 τότε 43·2=86 άρα $7^{η}$ βδ.+86 δηλ. 17+86=103€
Αταξινόμητη	
Σ(4)=28, Σ(6)=280	Πολλαπλασίασα το 4 με το 7 για να βρω το $4^{ο}$ σχήμα. Έκανα 28 επί 10 για να βρω το $6^{ο}$ (*σημ. Σ(1)=4, Σ(2)=7 και Σ(3)=10*)
Ε(50)=105	Έκανα τον τρόπο του Μ.Κ.Δ.
Σ(50)=;	Για το $25^{ο}$ σχήμα ισχύει: 25-4(τα βασικά σπίρτα)=21, 21:3(τα συμπληρωματικά σπίρτα)=7, άρα 4+3·7=25. Άρα το $50^{ο}$ σχήμα= με $2·25^{α}$ σχήματα πλην 1 σπίρτο που εμφανίζεται 2 φορές στη σύνδεση των σχημάτων δηλ. 4-1+3·7

Εικόνα 2: Δείγματα των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις των προβλημάτων του δοκιμίου

Όταν οι μαθητές ξεκινούσαν έναν υπολογισμό με μία μέθοδο και τον ολοκλήρωναν με μια άλλη μέθοδο, η δεύτερη μέθοδος ήταν αυτή που χρησιμοποιήθηκε για την ταξινόμηση. Χρησιμοποιήθηκε, επίσης, και η κατηγορία «Αταξινόμητη» για τις μη απαντήσεις, για υπολογισμούς που προφανώς έγιναν με αριθμούς χωρίς να ληφθούν υπόψη οι σχέσεις τους όπως «πολλαπλασίασα 3 x 7 x 10» (οι τρεις αριθμοί που δόθηκαν στο κείμενο του εικονιστικού προβλήματος) και για μεθόδους που δεν ήταν σαφείς είτε από τους υπολογισμούς είτε από την εξήγηση. Δείγματα των απαντήσεων για κάθε κατηγορία μπορούν να βρεθούν στην Εικόνα 2

Τέλος, από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στην πιλοτική έρευνα και τους λειτουργικούς ορισμούς της παρούσας έρευνας (Lannin, Barker, & Townsend, 2006) οι απαντήσεις των μαθητών για τους κανόνες γενίκευσης που κατασκευάζουν κωδικοποιήθηκαν ως εξής:

1. Αναδρομικός-λόγια
2. Αναδρομικός-αλφαριθμητικός
3. Αναδρομικός-σύμβολα
4. Ρητός-λόγια
5. Ρητός-αλφαριθμητικός
6. Ρητός-σύμβολα

Επίσης, χρησιμοποιήθηκε και η κατηγορία «Αταξινόμητος» για τις μη απαντήσεις και τις απαντήσεις που δεν ήταν σαφείς.

Χρησιμοποιώντας την κωδικοποίηση που αναπτύχθηκε παραπάνω, κατά την αποδελτίωση των δοκιμίων στην απάντηση κάθε μαθητή, σε κάθε ερώτηση για κάθε πρόβλημα, αποδόθηκε μια στρατηγική και ένας τύπος του κανόνα γενίκευσης. Ένας ανεξάρτητος ερευνητής, χρησιμοποιώντας την ίδια κωδικοποίηση, αποδελτίωσε εκ νέου τα δοκίμια. Η συμφωνία στην απόδοση των στρατηγικών ήταν 98% και στην απόδοση των κανόνων γενίκευσης ήταν 100%.

4.2. Αποτελέσματα της έρευνας

Παρακάτω καταγράφονται τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας που είχε ως στόχο να εξετάσει αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων (Α΄, Β΄,Γ΄) του Γυμνασίου μπορούν να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης κανονικοτήτων. Ειδικότερα επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

I. Μπορούν οι μαθητές Γυμνασίου να επινοήσουν μεθόδους για να γενικεύσουν κατά την επίλυση προβλημάτων με κανονικότητες; Ποιες μεθόδους επινοούν;
II. Σε ποιο βαθμό οι μέθοδοι που επινοούνται διαφοροποιούνται σε έργα κοντινής (near) και μακρινής (far) γενίκευσης;
III. Με ποιόν τρόπο αποδίδουν (λεκτικά ή συμβολικά) οι μαθητές τις κανονικότητες που βρίσκουν και τους γενικευμένους κανόνες που χρησιμοποιούν;
IV. Πώς σχετίζονται οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές με την σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν;

Αυτή η ενότητα αναφέρει τα ευρήματα σχετικά με τις στρατηγικές γενίκευσης που χρησιμοποιούνται και τη συνέπεια στη χρήση τους στην κοντινή και στη μακρινή γενίκευση, καθώς και τους τύπους των κανόνων γενίκευσης που κατασκευάζουν οι μαθητές. Γίνεται μια προσπάθεια, μέσω των εξηγήσεων που δίνουν, να καταγραφούν και να αναλυθούν οι ιδέες και ο τρόπος σκέψης των μαθητών. Επίσης, διερευνάται αν οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές αλλάζουν ανάλογα με τη σχολική βαθμίδα στην οποία βρίσκονται. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται ανά ερευνητικό ερώτημα.

4.2.1. Ποιες μεθόδους επινοούν οι μαθητές Γυμνασίου για να γενικεύσουν κατά την επίλυση προβλημάτων με κανονικότητες;

Αρχικά, για να διαπιστωθεί κατά πόσο οι μαθητές δυσκολεύτηκαν κατά την επίλυση των προβλημάτων γενίκευσης, οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις 1 και 2 και των δύο προβλημάτων του δοκιμίου της έρευνας ελέγχθηκαν ως προς την ορθότητά τους. Όλοι οι μαθητές έδωσαν μια απάντηση για την $1^{η}$ ερώτηση και των δύο προβλημάτων, ενώ υπάρχει ένα μικρό πλήθος μαθητών (κυρίως της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου) που δεν απάντησαν στη $2^{η}$ ερώτηση και των δύο προβλημάτων. Το ποσοστό των μαθητών κάθε σχολικής βαθμίδας που απαντά σωστά σε κάθε μια από τις ερωτήσεις γενίκευσης παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.

Η πλειοψηφία των μαθητών και των τριών βαθμίδων απάντησε με ευκολία στο 1ο ερώτημα και των δύο προβλημάτων. Αντίθετα, η εύρεση του Σ(50) και του Ε(50) φαίνεται ότι δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου. Ειδικά για τους μαθητές της Β΄, που απαντούν στα ερωτήματα, παρατηρείται μια αρκετά μεγάλη πτώση στα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ανάμεσα στη 1η και τη 2η ερώτηση και στα δύο προβλήματα.

Πίνακας 3: Ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά ερώτημα και σχολική βαθμίδα

Σχολική Βαθμίδα	Σ(4) - Σ(6)	Ε(4) - Ε(7)	Σ(50)	Ε(50)
Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (Ν=20)	80	80	50	55
Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (Ν=19)	100	84,2	21,1	26,3
Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (Ν=22)	95,5	86,4	95,5	86,4

Από τις στρατηγικές που αναγνωρίστηκαν στις απαντήσεις των μαθητών στα δύο προβλήματα γενίκευσης, σύμφωνα με τις στρατηγικές και τους ορισμούς τους που υιοθετήθηκαν στην παρούσα εργασία, έγινε φανερό ότι αυτοί μπορούν να επινοήσουν μεθόδους (στρατηγικές) που θα τους βοηθήσουν να γενικεύσουν σε προβλήματα με κανονικότητες. Η ανάλυση της χρήσης των στρατηγικών από τους μαθητές στα δύο προβλήματα γενίκευσης έδειξε ότι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στρατηγική ήταν αυτή της Μέτρησης (39%), ακολουθούμενη από την Γραμμική στρατηγική (27%). Οι στρατηγικές του Ολόκληρου Αντικειμένου (7%) και της Διαφοράς (5%) ήταν οι λιγότερο συχνά χρησιμοποιούμενες στρατηγικές στη γενίκευση των γραμμικών κανονικοτήτων και στα δυο προβλήματα.

Πίνακας 4: Συνοπτικός πίνακας χρήσης στρατηγικών ανά σχολική βαθμίδα

	Στρατηγική				
Σχολική Βαθμίδα	Αταξινόμητη	Μέτρηση	Διαφορά	Ολόκληρου Αντικειμένου	Γραμμική
Α΄ ΓΥΜΝ.	38	47	10	7	18
	10%	13%	3%	2%	5%
Β΄ ΓΥΜΝ.	29	47	2	11	25
	8%	13%	1%	3%	7%
Γ΄ ΓΥΜΝ.	21	47	3	6	55
	6%	13%	1%	2%	15%

Ν=366 απαντήσεις

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, για να απαντήσουν στα ερωτήματα και των δύο προβλημάτων γενίκευσης, χρησιμοποίησαν πιο συχνά την στρατηγική της Μέτρησης (13%) και λιγότερο συχνά την στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου (2%). Αντίστοιχα, και οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησαν πιο συχνά την στρατηγική της Μέτρησης (13%) και λιγότερο συχνά τη στρατηγική της Διαφοράς (2%). Αντίθετα, οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησαν πιο συχνά την Γραμμική στρατηγική (15%) και λιγότερο συχνά τη στρατηγική της Διαφοράς (1%). Η συχνότητα και τα ποσοστά της χρήσης κάθε στρατηγικής ανά ερώτημα και σχολική βαθμίδα φαίνονται στον Πίνακα Ι (Παράρτημα ΙΙ).

Παρακάτω γίνεται μια προσπάθεια να αναλυθούν οι απαντήσεις των μαθητών ανά ερώτημα των προβλημάτων του δοκιμίου. Επειδή, το σύνολο σχεδόν των μαθητών αντιμετώπισε τις ερωτήσεις και των δύο προβλημάτων γενίκευσης χρησιμοποιώντας τις ίδιες περίπου στρατηγικές, οι αντίστοιχες ερωτήσεις των δύο προβλημάτων εξετάζονται ταυτόχρονα.

Α) Στρατηγικές των μαθητών στη 1η ερώτηση των προβλημάτων γενίκευσης.

Η 1η ερώτηση και στα δύο προβλήματα γενίκευσης είναι ερώτηση κοντινής γενίκευσης στην οποία ζητείται από τους μαθητές να συνεχίσουν το μοτίβο, συμπληρώνοντας τον επόμενο όρο και ακολούθως να βρουν όρους σε αμέσως επόμενες μεγαλύτερες θέσεις. Πιο συγκεκριμένα:

- στη 1η ερώτηση του εικονιστικού προβλήματος, ζητείται από τους μαθητές να βρουν πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευαστεί το 4ο και το 6ο σχήμα (δηλαδή τα Σ(4) και Σ(6)), και
- στη 1η ερώτηση του αριθμητικού προβλήματος, ζητείται από τους μαθητές να βρουν πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του ο Γιάννης μέχρι το τέλος της 4ης και της 7ης εβδομάδας (δηλαδή τα Ε(4) και Ε(7)).

Οι περισσότεροι μαθητές και των τριών σχολικών βαθμίδων κατέφυγαν στη στρατηγική της Μέτρησης στην προσπάθειά τους να απαντήσουν στην 1η ερώτηση και των δύο προβλημάτων γενίκευσης (Πίνακας 5). Οι υπόλοιποι (κυρίως μαθητές από την Γ΄ Γυμνασίου) χρησιμοποίησαν είτε τη Γραμμική στρατηγική (11%) είτε τη στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου (2%). Η στρατηγική της Διαφοράς δεν εμφανίστηκε σε καμία απάντηση.

Α1) Εύρεση των Σ(4) & Σ(6)

Για την εύρεση του Σ(4) και του Σ(6) η πλειοψηφία των μαθητών και των τριών βαθμίδων χρησιμοποίησε την στρατηγική της Μέτρησης (Πίνακας 5). Παρατήρησαν, δηλαδή, ότι το pattern με τα σπίρτα αυξάνεται κατά την ίδια πάντα ποσότητα σπίρτων («προσθέτεις κάθε φορά 3»), και επομένως η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερή. Υπολόγισαν τους ζητούμενους όρους με διαδοχικές προσθέσεις της διαφοράς αυτής στον προηγούμενο, κάθε φορά, όρο. Για παράδειγμα, έγραψαν: « το 2ο σχήμα έχει 7 σπίρτα, το 3ο σχήμα έχει 10 σπίρτα άρα αυξήθηκε κατά 3. Επομένως το 4ο σχήμα θα έχει 10+3=13 σπίρτα και το 6ο σχήμα 13+3+3=19 σπίρτα».

Υπήρξαν δύο μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, που για να υπολογίσουν τα Σ(4) και Σ(6) ζωγράφισαν τα αντίστοιχα σχήματα και μέτρησαν τα σπίρτα που χρειάζονται. Επίσης, δύο μαθητές της Α΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της ευθείας αναλογίας (στρατηγική Ολόκληρου Αντικειμένου), δηλαδή υπολόγισαν τα Σ(4) & Σ(6) ως εξής: «Για τα 2 τετράγωνα χρειάζονται 7 σπίρτα άρα για τα 4 χρειάζονται 7·2=14 σπίρτα (*σημ. το 4 είναι το διπλάσιο του 2*). Για τα 3 τετράγωνα χρειάζονται 10 σπίρτα άρα για τα 6 χρειάζονται 10·2=20 σπίρτα (*σημ. το 6 είναι το διπλάσιο του 3*)».

Τέλος, ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών (κυρίως από την Γ΄ Γυμνασίου) χρησιμοποίησε τη Γραμμική στρατηγική για να απαντήσει στην 1η ερώτηση του εικονιστικού προβλήματος. Οι μαθητές αυτοί, με την βοήθεια των δοθέντων παραδειγμάτων, αρχικά προσδιόρισαν τον τρόπο κατασκευής του pattern, αναζήτησαν τι μένει σταθερό και τι μεταβάλλεται ή αναζήτησαν μια σχέση που να συνδέει την τιμή των όρων με τον αριθμό της θέσης των όρων και στη συνέχεια υπολόγισαν τους ζητούμενους όρους. Για παράδειγμα, έγραψαν: «4 σπίρτα για το 1ο σχήμα ενώ τα υπόλοιπα χρειάζονται +3 αφού τη μία πλευρά την καλύπτει το αμέσως προηγούμενο σχήμα: σχήμα 1ο=4 → 3·1+1

σχήμα 2ο=7 → 3·2+1

σχήμα 3ο=10 →3·3+1

σχήμα 4ο=13 → 3·4+1

σχήμα 5ο=16 → 3·5+1

σχήμα 6ο=19 → 3·6+1»

Α2) <u>Εύρεση των Ε(4) & Ε(7)</u>

Στο αριθμητικό πρόβλημα, επίσης, οι περισσότεροι μαθητές και των τριών βαθμίδων χρησιμοποίησε την στρατηγική της Μέτρησης για να υπολογίσουν τα Ε(4) και Ε(7). Αναγνώρισαν τη σταθερή διαφορά μεταξύ των διαδοχικών όρων («κάθε βδομάδα το ποσό αυξάνεται κατά 2€») και προσθέτοντας την κάθε φορά στον προηγούμενο όρο υπολόγισαν τους ζητούμενους όρους. Χαρακτηριστικά, έγραψαν:

«αφού οι γονείς του δίνουν 2€ κάθε βδομάδα πρόσθετα 2 μέχρι να φτάσω στην 7η βδομάδα». Κάποιοι μαθητές, από αυτούς που χρησιμοποίησαν την στρατηγική της Μέτρησης, ενώ αναγνώρισαν σωστά τη διαφορά μεταξύ δυο διαδοχικών όρων καταλήγουν σε «κοντινές λανθασμένες» απαντήσεις όπως, για παράδειγμα, 18€ αντί του σωστού 17€ για το Ε(7). Επίσης, παρόλο που τα δεδομένα του αριθμητικού προβλήματος δίνονται με την μορφή πίνακα, μόνο ένας μαθητής της Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησε πίνακα για τον υπολογισμό των Ε(4) και Ε(7).

Τέλος, όπως συνέβη και στον υπολογισμό των Σ(4) και Σ(6), ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών (κυρίως από την Γ΄ Γυμνασίου) χρησιμοποίησε τη Γραμμική στρατηγική. Οι μαθητές αυτοί, αναγνώρισαν την δομή του αριθμητικού pattern, κατασκεύασαν τον κανόνα της γενίκευσης και στη συνέχεια υπολόγισαν τους ζητούμενους όρους. Ενδεικτικά γράφουν,

4η εβδομάδα: 2·3+5=11€
5η εβδομάδα: 2·4+5=13€
6η εβδομάδα: 2·5+5=15€
7η εβδομάδα: 2·6+5=17€,

και εξηγούν: «πολλαπλασίασα τον αριθμό της προηγούμενης εβδομάδας (γιατί η 1η βδομάδα δεν μετριέται)) με το 2 και προσθέτω κάθε φορά τα 5 από την 1η βδομάδα».

Β) Στρατηγικές των μαθητών στη 2η ερώτηση των προβλημάτων γενίκευσης.

Η 2η ερώτηση και στα δύο προβλήματα γενίκευσης είναι ερώτηση μακρινής γενίκευσης στην οποία ζητείται από τους μαθητές να βρουν όρους σε απομακρυσμένες, από τους δοθέντες όρους, μεγαλύτερες θέσεις. Έτσι, στο εικονιστικό πρόβλημα, ζητείται να βρεθούν πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 50ο σχήμα και στο αριθμητικό, πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του ο Γιάννης μέχρι το τέλος της 50ής εβδομάδας.

Οι στρατηγικές που επινόησαν οι μαθητές για να απαντήσουν στη 2η ερώτηση των προβλημάτων γενίκευσης ανά σχολική βαθμίδα καταγράφονται στον Πίνακα 5. Στη 2η ερώτηση, παρατηρείται μια αύξηση στις απαντήσεις, κυρίως των μαθητών της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου, που κωδικοποιήθηκαν ως «Αταξινόμητες». Οι μαθητές αυτοί, δεν έδωσαν καμία απάντηση ή η απάντηση που έδωσαν δεν ήταν σαφής. Η στρατηγική που εμφανίστηκε σχετικά περισσότερο στις απαντήσεις των μαθητών ήταν η Γραμμική, ενώ η στρατηγική της Διαφοράς ήταν αυτή που χρησιμοποιήθηκε λιγότερο.

Β1) Εύρεση του Σ(50)

Στο 16% των απαντήσεων τους οι μαθητές και των τριών βαθμίδων συνεχίζουν να χρησιμοποιούν την στρατηγική της Μέτρησης (Πίνακας 5), δηλαδή προσπαθούν να υπολογίσουν το Σ(50) με διαδοχικές προσθέσεις της σταθερής διαφοράς στον προηγούμενο, κάθε φορά, όρο. Χαρακτηριστικά αναφέρουν «πρόσθετα 3 μέχρι να φτάσω στο $50^{ο}$ σχήμα». Μάλιστα, κάποιοι από αυτούς, χρησιμοποίησαν μια «παραλλαγή» της στρατηγικής της Μέτρησης. Αφού επέκτειναν το pattern με τα σπίρτα ως τον 20ό όρο παρατήρησαν ότι, η διαφορά μεταξύ δέκα όρων του pattern είναι 30 σπίρτα. Έγραψαν, λοιπόν, ότι αφού ο 20ός όρος θα αποτελείται από 61 σπίρτα, ο 30ός όρος θα αποτελείται από 61+30=91 σπίρτα, ο 40ός από 91+30=121 σπίρτα και τέλος, ο 50ός από 121+30=151 σπίρτα. Η χρήση αυτής της μορφής της Μέτρησης, που προφανώς επινόησαν οι μαθητές για να «γλυτώσουν» πράξεις οδήγησε σε σωστές απαντήσεις. Αντίθετα, οι διαδοχικές προσθέσεις της διαφοράς οδήγησαν και πάλι κάποιους μαθητές σε «κοντινές λανθασμένες» απαντήσεις.

Ένα ποσοστό μαθητών (28%) εγκαταλείπει την στρατηγική της Μέτρησης και προσπαθεί να υπολογίσει τον 50ό όρο επινοώντας κάποια μέθοδο που θα ήταν πιο σύντομη. Έτσι, αρκετοί μαθητές από αυτούς, κυρίως από την Β΄ Γυμνασίου και λιγότεροι από την Α΄ και την Γ΄ Γυμνασίου, προσπάθησαν να υπολογίσουν το Σ(50) υποθέτοντας ότι ο αριθμός του σχήματος και το πλήθος των σπίρτων που απαιτούνται για την κατασκευή του είναι ποσά ανάλογα (στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου). Υπέθεσαν, δηλαδή, πως ο αριθμός των σπίρτων στο 50ό σχήμα θα είναι πενταπλάσιος του αριθμού των σπίρτων του 10ου σχήματος, Σ(50)=5·Σ(10). Αφού υπολόγισαν σωστά (με τη χρήση της Μέτρησης) πως ο 10ος όρος θα αποτελείται από 31 σπίρτα, απάντησαν πως ο 50ος θα αποτελείται από 5·31=155 σπίρτα. Μάλιστα, δύο μαθητές από τη Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησαν πίνακα, όπως τον παρακάτω, για να εφαρμόσουν την μέθοδο της ευθείας αναλογίας.

Αριθμός σχήματος	3ο	6ο	9ο	12ο	…	45ο	48ο
σπίρτα	10	20	30	40	…	150	160

Για τον υπολογισμό του $50^{ου}$ σχήματος στα 160 σπίρτα του $48^{ου}$ σχήματος, πρόσθεσαν τα 7 σπίρτα του $2^{ου}$ σχήματος, δηλαδή, υπέθεσαν ότι Σ(50)=Σ(48)+Σ(2).

Πίνακας 5: Χρήση στρατηγικών στη 1η και στη 2η ερώτηση των προβλημάτων γενίκευσης

Στρατηγική	Σχολική Βαθμίδα	1η Ερώτηση				2η Ερώτηση			
		Σ(4) & Σ(6)	Ε(4) & Ε(7)	Σύνολα ανά Σχ. Βαθμίδα	Σύνολο ανά στρατηγική	Σ(50)	Ε(50)	Σύνολα ανά Σχ. Βαθμίδα	Σύνολο ανά στρατηγική
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	2	1	3		4	3	7	
		3%	2%	2%		7%	5%	6%	
Αταξινόμητη	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	1	1		6	5	11	
		0%	2%	1%		10%	8%	9%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	1	2	6	2	2	4	22
		2%	2%	2%	5%	3%	3%	3%	18%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	16	19	35		4	6	10	
		26%	31%	29%		7%	10%	8%	
Μέτρηση	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	16	17	33		2	4	6	
		26%	28%	27%		3%	7%	5%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	16	16	32	100	4	2	6	22
		26%	26%	26%	82%	7%	3%	5%	18%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0		4	4	8	
		0%	0%	0%		7%	7%	7%	
Διαφορά	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0		0	1	1	
		0%	0%	0%		0%	2%	1%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0	0	2	1	3	12
		0%	0%	0%	0%	3%	2%	2%	10%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	2	0	2		3	1	4	
		3%	0%	2%		5%	2%	3%	
Ολόκληρου Αντικειμένου	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0		6	5	11	
		0%	0%	0%		10%	8%	9%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0	2	2	4	6	21
		0%	0%	0%	2%	3%	7%	5%	17%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0		5	6	11	
		0%	0%	0%		8%	10%	9%	
Γραμμική	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	3	1	4		5	4	9	
		5%	2%	3%		8%	7%	7%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	5	5	10	14	12	13	25	45
		8%	8%	8%	11%	20%	21%	20%	37%
Σύνολο		61	61	122	122	61	61	122	122

Εδώ, οι μαθητές, χρησιμοποίησαν μια παραλλαγή της στρατηγικής του Ολόκληρου Αντικειμένου στην οποία χρησιμοποιείται και η πρόσθεση εκτός από τον πολλαπλασιασμό (Stacey, 1989).

Ελάχιστοι μαθητές χρησιμοποίησαν την στρατηγική της Διαφοράς για την εύρεση των σπίρτων που χρειάζονται για την κατασκευή του $50^{ού}$ σχήματος. Υπολόγισαν, δηλαδή, το Σ(50) ως πολλαπλάσιο της σταθερής διαφοράς μεταξύ των διαδοχικών όρων. Στις εξηγήσεις τους αναφέρουν ότι, για να κατασκευάσουν το $50^{ο}$ σχήμα πρέπει να προσθέσουν πενήντα τριάρια, άρα θα χρειαστούν 3·50=150 σπίρτα.

Οι περισσότεροι μαθητές (κυρίως από την Γ΄ και την Α΄ Γυμνασίου και λιγότερο από την Β΄) εστίασαν την προσοχή τους στη συμμεταβολή και των δύο μεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Οι μαθητές αυτοί κατέληξαν σε γραμμικά μοντέλα που περιλαμβάνουν και τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση (Γραμμική στρατηγική). Ανάμεσα σε αυτούς ήταν και οι μαθητές που, όπως ήδη αναφέρθηκε, προτίμησαν πρώτα να κατασκευάσουν τον κανόνα της γενίκευσης και στη συνέχεια υπολόγισαν τους ζητούμενους όρους.

Οι μαθητές ακολούθησαν δυο διαφορετικές διαδρομές λύσεων για να καταλήξουν στη γραμμική σχέση για τον υπολογισμό του Σ(50), οι οποίες εξαρτώνται από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους προσέγγισαν το pattern με τα σπίρτα. Έτσι, κάποιοι από αυτούς «είδαν» ότι σε κάθε σχήμα αυτό που μένει σταθερό είναι το πρώτο τετράγωνο που χρειάζεται 4 σπίρτα για να κατασκευαστεί, ενώ κάθε επόμενο τετράγωνο απαιτεί 3 σπίρτα. Παρατήρησαν, επίσης, ότι κάθε επόμενο τετράγωνο έχει μια κοινή πλευρά με το προηγούμενο (Εικόνα 3). Καταλήγουν, λοιπόν, στη σχέση Ε(50)=3·49+4=151 σπίρτα και εξηγούν: «για το $50^{ο}$ σχήμα χρειάζονται 4 σπίρτα για το $1^{ο}$ τετράγωνο, μένουν άλλα 49 τα οποία αποτελούνται από 3 σπίρτα».

Οι υπόλοιποι, «είδαν» ότι το $50^{ο}$ σχήμα αποτελείται από 50 τετράγωνα, κάθε ένα από τα οποία χρειάζεται 3 σπίρτα για να κατασκευαστεί λόγω της επικάλυψης των πλευρών, εκτός από το $1^{ο}$ που χρειάζεται ένα επιπλέον (Εικόνα 4). Χαρακτηριστικά γράφουν «Για το $1^{ο}$ τετράγωνο χρειαστήκαμε 4 σπίρτα. Κάθε φορά που σχηματιζόταν ένα τετράγωνο βάζαμε 3 σπίρτα γιατί το τέταρτο υπήρχε ήδη.» Έτσι, υπολογίζουν το Σ(50) με τη βοήθεια της σχέσης 3·50+1=151 σπίρτα.

Τέλος, δύο μαθητές παρότι παρατήρησαν ότι, για το $1^{ο}$ τετράγωνο χρειάζονται 4 σπίρτα ενώ για τα υπόλοιπα τετράγωνα χρειάζονται 3 σπίρτα, καταλήγουν στη σχέση 3·50+4=154 σπίρτα.

Β2) <u>Εύρεση του Ε(50)</u>

Οι περισσότεροι (38%) από τους μαθητές και των τριών βαθμίδων (Πίνακας 5), για να υπολογίσουν το Ε(50), προσπάθησαν να βρουν μια σχέση που να επιτρέπει τον προσδιορισμό των στοιχείων ενός όρου από τη θέση του όρου αυτού, δηλαδή μια συναρτησιακή σχέση. Η αναγνώριση του τι μένει σταθερό και του τι αλλάζει/μεταβάλλεται και πώς αλλάζει οδήγησε τους μαθητές σε διαφορετικές γραμμικές σχέσεις.

Κάποιοι από αυτούς παρατήρησαν ότι αυτό που μένει σταθερό είναι τα 5€ που υπήρχαν την $1^{η}$ εβδομάδα στον κουμπαρά στα οποία προσθέτονται 2€ στο τέλος κάθε επόμενης εβδομάδας. Έτσι, για τον υπολογισμό των χρημάτων στο τέλος της $50^{ης}$ εβδομάδας έγραψαν τη σχέση Ε(50)=2·49+5=103€. Άλλοι πάλι, «είδαν» ότι αυτό που μένει σταθερό είναι τα 2€ που μπαίνουν στον κουμπαρά στο τέλος κάθε εβδομάδας. Καταλήγουν, λοιπόν, στη σχέση Ε(50)=2·50+3=103€ και εξηγούν ότι το +3 που εμφανίζεται στη γραμμική σχέση είναι τα ευρώ που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της αφαίρεσης 5€-2€, αφού την 1η εβδομάδα στον κουμπαρά υπήρχαν 5€ και όχι 2€ όπως υπέθεσαν αρχικά. Υπήρξαν λιγοστοί μαθητές που για τον υπολογισμό του Ε(50) χρησιμοποίησαν τη σχέση Ε(50)= 2·43+17. Η εξήγηση που έδωσαν ήταν, «Από την $7^{η}$ εβδομάδα μέχρι την $50^{η}$ εβδομάδα μεσολαβούν 43 εβδομάδες. Άρα θα πολλαπλασιάσω το 43 με το 2 για να βρω το ποσό που θα μαζέψει στις 43 βδομάδες. Στη συνέχεια θα προσθέσω τα 17€ των πρώτων εφτά εβδομάδων». Δηλαδή, για τον υπολογισμό του Ε(50) χρησιμοποίησαν το Ε(7) που ήδη είχαν υπολογίσει.

Στην προσπάθειά τους να φτάσουν σε μια απάντηση για τη $2^{η}$ ερώτηση του αριθμητικού προβλήματος πιο «σύντομα» λιγοστοί μαθητές χρησιμοποιούν, όπως και στο εικονιστικό πρόβλημα, τη στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου ή τη στρατηγική της Διαφοράς (16% και 10% αντίστοιχα).

Έτσι, υποθέτοντας ότι ο αριθμός των εβδομάδων και τα ευρώ στον κουμπαρά είναι ποσά ανάλογα υπολόγισαν το Ε(50) κάνοντας χρήση της στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου. Αρχικά, με τη Μέτρηση υπολογίζουν το Ε(10)=23€ και στη συνέχεια υπολογίζουν τα ευρώ της $50^{ης}$ εβδομάδας ως το γινόμενο 5·Ε(10), δηλαδή Ε(50)=5·23=115€. Επίσης, και στο αριθμητικό πρόβλημα, οι ίδιοι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησαν την παραλλαγή της στρατηγικής του Ολόκληρου Αντικειμένου όπου χρησιμοποιείται και η πρόσθεση εκτός από τον πολλαπλασιασμό. Κατασκεύασαν τον δικό τους πίνακα τιμών χρησιμοποιώντας «βολικές» γι' αυτούς τιμές αγνοώντας τις τιμές που υπήρχαν στην εκφώνηση του προβλήματος. Στη συνέχεια υπολόγισαν το Ε(50) με τη σχέση Ε(50)=Ε(48)+Ε(2) δηλαδή, Ε(50)= 144+7=151€:

αριθμός εβδομάδων	3η	6η	9η	12η	…	45η	48η
ποσό στον κουμπαρά	9	18	27	36	…	135	144

Ελάχιστοι μαθητές για συντομία υπολόγισαν το Σ(50) ως πολλαπλάσιο της σταθερής διαφοράς μεταξύ των διαδοχικών όρων. Στις εξηγήσεις τους αναφέρουν ότι, για να βρουν τα χρήματα που θα υπάρχουν στον κουμπαρά στο τέλος της $50^{ης}$ εβδομάδας πρέπει να προσθέσουν πενήντα δυάρια, άρα θα χρειαστούν 2·50=100€.

Τέλος, και στο αριθμητικό πρόβλημα για την εύρεση του Ε(50), κάποιοι λίγοι μαθητές κυρίως από την Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποιούν την στρατηγική της Μέτρησης ή κάποια παραλλαγή της. Δηλαδή, όπως χαρακτηριστικά εξηγούν, έκαναν διαδοχικές προσθέσεις των 2€ μέχρι να φτάσουν στην $50^η$ εβδομάδα. Εναλλακτικά, κάποιοι από αυτούς υπολόγισαν το Ε(10) με τη στρατηγική της Μέτρησης και παρατήρησαν ότι, η διαφορά μεταξύ δέκα όρων του pattern είναι 20 ευρώ. Έγραψαν, λοιπόν, ότι αφού τη 10η εβδομάδα στον κουμπαρά θα υπάρχουν 23€, την 20η θα υπάρχουν 23+20=43€, τη 30η θα υπάρχουν 43+20=63€, τη 40η θα υπάρχουν 63+20=83€, και τέλος, τη 50η θα υπάρχουν 83+20=103€.

Γ) Στρατηγικές των μαθητών στην $3^η$ ερώτηση των προβλημάτων γενίκευσης.

Η $3^η$ ερώτηση και των δύο προβλημάτων αντιστοιχεί στον $1^ο$ και στον $2^ο$ άξονα ερωτημάτων. Ζητείται από τους μαθητές να βρουν έναν τύπο (λεκτικά ή συμβολικά) που δίνει, στο μεν εικονιστικό πρόβλημα, πόσα σπίρτα χρειάζονται για να κατασκευαστεί το ν-οστό σχήμα, στο δε αριθμητικό, πόσα χρήματα θα έχει ο Γιάννης στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της ν-ιοστής εβδομάδας.

Παρακάτω αναφέρονται τα αποτελέσματα για τη στρατηγική που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την εύρεση των Σ(ν) και Ε(ν) αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα για το είδος του τύπου της γενίκευσης που κατασκεύασαν οι μαθητές καταγράφονται στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που αφορούν στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα.

Στην $3^η$ ερώτηση και των δύο προβλημάτων, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών δεν απαντά ή δίνει μη σαφή απάντηση (Πίνακας 6). Παρατηρείται, δηλαδή, μια αύξηση στις απαντήσεις, κυρίως των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου, που κωδικοποιήθηκαν ως «Αταξινόμητες». Πιο δημοφιλής στρατηγική ανάμεσα στους μαθητές και των τριών σχολικών βαθμίδων φαίνεται να είναι η Γραμμική στρατηγική.

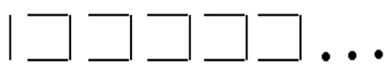
Γ1) <u>Εύρεση του Σ(ν).</u>

Η πλειοψηφία των μαθητών (κυρίως από την Α΄ Γυμνασίου) δυσκολεύτηκε στην εύρεση του νιοστού όρου στο εικονιστικό πρόβλημα. Έτσι, όπως φαίνεται στον Πίνακα 6, σχεδόν οι μισοί μαθητές δεν απάντησαν ή έδωσαν μια απάντηση που δεν ήταν σαφής. Αξιοσημείωτες είναι οι εξηγήσεις κάποιων μαθητών από την Α΄ Γυμνασίου: «Για το τρίγωνο θα χρειαστούμε 3 σπίρτα, για το τετράγωνο 4 σπίρτα και για το ορθογώνιο 6 σπίρτα».

Οι περισσότεροι μαθητές (στην πλειοψηφία τους από την Γ΄ Γυμνασίου), για να βρουν το Σ(ν), χρησιμοποίησαν τη Γραμμική στρατηγική. Κάποιοι από αυτούς ήταν και οι μαθητές που πρώτα βρήκαν το Σ(ν) και στη συνέχεια υπολόγισαν τα Σ(4), Σ(6) και Σ(50).

Όπως και στην εύρεση του Σ(50) και εδώ οι μαθητές ακολούθησαν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις για το pattern με τα σπίρτα και κατέληξαν σε δύο διαφορετικές (αλλά ισοδύναμες) γραμμικές σχέσεις που συνδέουν τον αριθμό του σχήματος με το πλήθος των σπίρτων που απαιτούνται για την κατασκευή του νιοστού σχήματος. Κάποιοι από αυτούς «είδαν» ότι σε κάθε σχήμα αυτό που μένει σταθερό είναι τα 4 σπίρτα που χρειάζεται το πρώτο τετράγωνο για να κατασκευαστεί, ενώ κάθε επόμενο τετράγωνο απαιτεί 3 σπίρτα, εφόσον κάθε επόμενο τετράγωνο έχει μια κοινή πλευρά με το προηγούμενο (Εικόνα 3). Χαρακτηριστικά ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου έγραψε: «πολλαπλασιάζω επί 3 τον αριθμό του σχήματος αφαιρώντας το αρχικό και σε αυτό που θα βρω προσθέτω τα 4 σπίρτα του αρχικού σχήματος».

Εικόνα 3



Εικόνα 4

Οι υπόλοιποι, «είδαν» ότι το νιοστό σχήμα αποτελείται από ν τετράγωνα, κάθε ένα από τα οποία χρειάζεται 3 σπίρτα για να κατασκευαστεί λόγω της επικάλυψης των πλευρών, εκτός από το $1^{ο}$ που χρειάζεται ένα επιπλέον (Εικόνα 4). Μαθητής από τη Γ΄ Γυμνασίου γράφει στην εξήγηση που δίνει: «κάθε φορά που θα ήθελα να βρω πόσα σπίρτα θα χρειαστώ θα πολλαπλασίαζα τον αριθμό του σχήματος ο οποίος μας λέει πόσα τετράγωνα θα σχηματιστούν και θα πρόσθετα το 1 επιπλέον σπίρτο που προκύπτει από το πρώτο τετράγωνο που σχηματίζεται με 4 σπίρτα».

Ένας πολύ μικρός αριθμός μαθητών χρησιμοποίησε για την εύρεση του Σ(ν) τις στρατηγικές της Μέτρησης και της Διαφοράς. Έτσι, οι πρώτοι εξηγούν ότι για να βρουν το πλήθος τον σπίρτων που χρειάζονται για την κατασκευή του νιοστού σχήματος αρκεί να προσθέσουν 3 στο πλήθος των σπίρτων του προηγούμενου σχήματος. Οι δεύτεροι αναφέρουν ότι, εφόσον χρειάζονται 3 σπίρτα για κάθε επόμενο σχήμα, για να υπολογιστεί το Σ(ν) αρκεί να πολλαπλασιάσουν τον αριθμό του σχήματος με το 3.

Γ2) Εύρεση του Ε(ν).

Η εύρεση του νιοστού όρου στο αριθμητικό πρόβλημα, επίσης, δυσκόλεψε τους μαθητές αλλά σε μικρότερο βαθμό από το εικονιστικό, όπως δείχνει το 38% των απαντήσεων που ταξινομήθηκαν ως «Αταξινόμητες» (Πίνακας 6). Οι περισσότεροι μαθητές, από τους υπόλοιπους, για υπολογίσουν το Ε(ν) κατέφυγαν στη Γραμμική στρατηγική. Όπως και στην εύρεση του Σ(ν) και εδώ οι μαθητές ακολούθησαν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις για το αριθμητικό pattern και κατέληξαν σε δύο ισοδύναμες γραμμικές σχέσεις που συνδέουν τον αριθμό των εβδομάδων με τα χρήματα που έχει μαζέψει ο Γιάννης στον κουμπαρά του στο τέλος κάθε εβδομάδας.

Έτσι, υπήρξαν μαθητές που θεώρησαν ότι αυτό που μένει σταθερό είναι τα 5€ που υπήρχαν την 1η εβδομάδα στον κουμπαρά στα οποία προσθέτονται 2€ στο τέλος κάθε επόμενης εβδομάδας. Για παράδειγμα, έγραψαν «Από το σύνολο των εβδομάδων αφαιρούμε την πρώτη και πολλαπλασιάζουμε όλες τις άλλες με το δύο. Τέλος προσθέτουμε τα 5€ της αρχικής εβδομάδας και βρίσκουμε το σύνολο των χρημάτων που θα έχει στο τέλος της νιοστής εβδομάδας». Άλλοι μαθητές, που χρησιμοποίησαν τη Γραμμική στρατηγική, έκαναν την υπόθεση ότι αυτό που μένει σταθερό είναι τα 2€ που μπαίνουν στον κουμπαρά στο τέλος κάθε εβδομάδας. Θεώρησαν λοιπόν, ότι τα 5€ της πρώτης εβδομάδας μπορούν να προκύψουν ως 3€+2€: «πολλαπλασίασα τον αριθμό της εβδομάδας επί δύο και έκανα 5-2=3 για να βρω τα χρήματα που περισσεύουν από την πρώτη εβδομάδα για να τα προσθέσω σε κάθε εβδομάδα».

Κάποιοι λίγοι μαθητές, κάνοντας χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης, δήλωσαν ότι για να βρουν το Ε(ν) πρόσθεταν 2€ στο ποσό που είχε μαζέψει ο

Γιάννης την προηγούμενη εβδομάδα. Τέλος, υπήρξαν δύο μαθητές της Α΄ Γυμνασίου που υπολόγισαν το Ε(ν) χρησιμοποιώντας τη στρατηγική της Διαφοράς: «επειδή του δίνουν 2€ κάθε εβδομάδα απλώς διπλασιάζεις τις εβδομάδες».

Πίνακας 6: Χρήση στρατηγικών στη 3η ερώτηση των προβλημάτων γενίκευσης

Στρατηγική	Σχολική Βαθμίδα	3η ερώτηση Σ(ν)	Σύνολα ανά στρατηγική	Ε(ν)	Σύνολα ανά στρατηγική
Αταξινόμητη	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	15		13	
		25%		21%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	9		8	
		15%		13%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	8	32	7	28
		13%	52%	11%	46%
Μέτρηση	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0		2	
		0%		3%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	3		5	
		5%		8%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	4	7	5	12
		7%	11%	8%	20%
Διαφορά	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0		2	
		0%		3%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1		0	
		2%		0%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	1	0	2
		0%	2%	0%	3%
Ολόκληρου Αντικειμένου	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1		0	
		2%		0%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0		0	
		0%		0%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	1	0	0
		0%	2%	0%	0%
Γραμμική	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	4		3	
		7%		5%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	6		6	
		10%		10%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	10	20	10	19
		16%	33%	16%	31%
Σύνολο		**61**	**61**	**61**	**61**

4.2.2. Σε ποιο βαθμό οι μέθοδοι που επινοούνται διαφοροποιούνται σε έργα κοντινής (near) και μακρινής (far) γενίκευσης;

Δύο πτυχές της συνέπειας της επιλογής της μεθόδου παρουσιάζουν ενδιαφέρον: συνέπεια εντός και μεταξύ των έργων. Η συνέπεια χρήσης μέσα σε ένα έργο ερευνήθηκε συγκρίνοντας τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για τις κοντινές (εύρεση των Σ(4), Σ(6), Ε(4), Ε(7)) και μακρινές (εύρεση των Σ(50), Ε(50)) γενικεύσεις. Η ανάλυση των δοκιμίων έδειξε ότι ορισμένοι μαθητές άλλαξαν μέθοδο κατά την εύρεση του νιοστού όρου. Για τον λόγο αυτό, ο νιοστός όρος (εύρεση Σ(ν), Ε(ν)) δεν εντάχθηκε στην κατηγορία Μακρινή Γενίκευση αλλά εξετάστηκε ως ξεχωριστή περίπτωση τύπου γενίκευσης.

Έγινε πίνακας συνάφειας των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά από τους μαθητές στα δύο προβλήματα γενίκευσης ανά τύπο γενίκευσης (Πίνακας 7). Ο Πίνακας 7 δείχνει ότι ορισμένες στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν συχνά (πάνω από το 2% της συνολικής συχνότητας) και στους τρείς τύπους γενικεύσεων (κοντινή, μακριά και νιοστός όρος) ενώ άλλες στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν συχνά σε έναν ή δύο από τους τύπους γενικεύσεων.

Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι, οι στρατηγικές της Μέτρηση και η Γραμμική χρησιμοποιήθηκαν συχνά σε καθένα από τους τρείς τύπους γενίκευσης, ενώ οι στρατηγικές της Διαφοράς και του Ολόκληρου Αντικειμένου χρησιμοποιήθηκαν συχνά μόνο σε έναν ή δύο τύπους γενικεύσεων. Έτσι, η στρατηγική της Διαφοράς χρησιμοποιήθηκε συχνά στις ερωτήσεις μακρινής γενίκευσης και στην εύρεση του νιοστού όρου, ενώ η στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου χρησιμοποιήθηκε πιο συχνά μόνο στις μακρινές γενικεύσεις.

Καθώς οι απαιτήσεις γενίκευσης ανά τύπο γενίκευσης αυξάνονται, η χρήση της στρατηγικής εντός του κάθε τύπου γενίκευσης έγινε πιο κατανεμημένη μεταξύ των διαφόρων στρατηγικών. Για τη κοντινή γενίκευση, η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στρατηγική ήταν η στρατηγική Μέτρησης (86,2%). Από την άλλη, για τη μακρινή γενίκευση ($50^{ος}$ όρος) το ποσοστό χρήσης μιας στρατηγικής κατανέμεται ομοιόμορφα ανάμεσα διάφορες στρατηγικές: Μέτρηση (22%), Διαφορά (12%), Ολόκληρου Αντικειμένου (21%) και Γραμμική στρατηγική (45%). Ωστόσο, για το νιοστό όρο, η Γραμμική στρατηγική χρησιμοποιήθηκε συχνότερα (58%) από άλλες στρατηγικές ακολουθούμενη, απροσδόκητα, από τη στρατηγική της Μέτρησης (30,4%). Η στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου μειώθηκε από 21% (μακρινή) σε 2,9% (νιοστός) και η στρατηγική της Διαφοράς μειώθηκε από 12% (μακρινή) σε 8,7% (νιοστός).

Γενικότερα, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 7, ενώ η στρατηγική της Μέτρησης μειώθηκε κατά μήκος των τύπων γενίκευσης με την αύξηση των απαιτήσεων γενίκευσης (από 69,9% στην κοντινή σε 15,4% στη μακρινή και σε 14,7% στο νιοστό), η Γραμμική στρατηγική αυξήθηκε κατά μήκος των τύπων γενίκευσης (από 14,1% στην κοντινή σε 45,5% στη μακρινή και σε 40,4% στο νιοστό). Όμοια, η στρατηγική της Διαφοράς αυξήθηκε από 0% στην κοντινή σε 66,7% στη μακρινή γενίκευση, αλλά μειώθηκε σε 33,3% στο νιοστό όρο. Την ίδια πορεία κατά μήκος των τύπων γενίκευσης ακολουθεί και η στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου η οποία αυξήθηκε από 8% στην κοντινή σε 84% στη μακρινή γενίκευση, αλλά μειώθηκε σε 8% στο νιοστό όρο.

Για να διερευνηθεί η πιθανότητα σημαντικών διαφορών στην αλλαγή της χρήσης της στρατηγικής ανά τύπο γενίκευσης έγινε έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2 αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Η σχέση ανάμεσα στη χρήση στρατηγικής και τον τύπο γενίκευσης βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(6) = 121{,}498$, $p < 0{,}001$, $V = 0{,}462$).

Πίνακας 7: Χρήση στρατηγικών ανά τύπο γενίκευσης

Τύπος Γενίκευσης		Στρατηγική				
		Μέτρηση	Διαφορά	Ολόκληρου Αντικειμένου	Γραμμική	Σύνολο
Κοντινή Γενίκευση	Συχνότητα	100*	0*	2*	14*	116
	% εντός Τύπος Γενίκευσης	86,2%	0,0%	1,7%	12,1%	100,0%
	% εντός Στρατηγική	69,9%	0,0%	8,0%	14,1%	40,7%
	% του Συνόλου	35,1%	0,0%	0,7%	4,9%	40,7%
Μακρινή Γενίκευση	Συχνότητα	22*	12*	21*	45*	100
	% εντός Τύπος Γενίκευσης	22,0%	12,0%	21,0%	45,0%	100,0%
	% εντός Στρατηγική	15,4%	66,7%	84,0%	45,5%	35,1%
	% του Συνόλου	7,7%	4,2%	7,4%	15,8%	35,1%
Νιοστός Όρος	Συχνότητα	21*	6	2*	40*	69
	% εντός Τύπος Γενίκευσης	30,4%	8,7%	2,9%	58,0%	100,0%
	% εντός Στρατηγική	14,7%	33,3%	8,0%	40,4%	24,2%
	% του Συνόλου	7,4%	2,1%	0,7%	14,0%	24,2%
Σύνολο	Συχνότητα	143	18	25	99	285
	% within Τύπος Γενίκευσης	50,2%	6,3%	8,8%	34,7%	100,0%
	% within Στρατηγική	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	% του Συνόλου	50,2%	6,3%	8,8%	34,7%	100,0%

Σημείωση: Οι 81 απαντήσεις που ταξινομήθηκαν στην κατηγορία «Αταξινόμητη» παραλήφθηκαν από την ανάλυση.
* Συνεισφέρει στη σημαντικότητα του χ^2.

Τα διορθωμένα τυποποιημένα υπόλοιπα (adjusted standardized residuals) ήταν μεγαλύτερα από |2| για σχεδόν όλα τα κελιά της κοντινής, της μακρινής γενίκευσης και του νιοστού όρου (εκτός από τη στρατηγική Διαφοράς) υποδεικνύοντας ότι αυτά τα κελιά συνέβαλαν σημαντικά στο χ^2. Αυτό υποδηλώνει πιθανά σημαντικές διαφορές στη χρήση της στρατηγικής ανά τύπο γενίκευσης.

Οι 61 μαθητές του δείγματος απάντησαν σε δύο ζεύγη ερωτήσεων που αφορούσαν σε κοντινές και μακρινές γενικεύσεις, δηλαδή τις Σ(4), Σ(6) και Σ(50) στο 1^{ο} πρόβλημα και τις Ε(4), Ε(6) και Ε(50) στο 2^{ο} πρόβλημα. Από αυτά τα 122 ζεύγη απαντήσεων σε 24 περιπτώσεις, τουλάχιστον μία απάντηση του ζεύγους ήταν «Αταξινόμητη» και αυτές παραλήφθηκαν από την ανάλυση. Οι συχνότητες χρήσης ανά ζεύγη των μεθόδων των μαθητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 8 ως ποσοστό των 97 εναπομεινάντων ζευγών απαντήσεων.

Πίνακας 8: Διαφοροποίηση χρήσης στρατηγικών ανά τύπο γενίκευσης

		Μακρινή Γενίκευση			
		Μέτρηση	Ολόκληρου Αντικειμένου	Διαφορά	Γραμμική
Κοντινή Γενίκευση	Μέτρηση	23%	20%	12%	29%
	Ολόκληρου Αντικειμένου	-	2%	-	-
	Διαφορά	-	-	-	-
	Γραμμική	-	-	-	14%

N = 97 απαντήσεις . Όπου η καταχώρηση δίνεται – οι συνδυασμοί δεν συνέβησαν ποτέ.

Η χρήση μιας μεθόδου γενίκευσης (Μέτρησης, Ολόκληρου Αντικειμένου, ή Γραμμικής) από ορισμένους μαθητές για την κοντινή γενίκευση ακολουθήθηκε γενικά από τη χρήση της ίδιας μεθόδου για τη μακρινή γενίκευση. Ωστόσο, σχεδόν ένας στους πέντε και ένας στους τέσσερις μαθητές από αυτούς που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της Μέτρησης για τη κοντινή γενίκευση, άλλαξαν σε στρατηγική Ολόκληρου Αντικειμένου ή στη Γραμμική στρατηγική αντίστοιχα, για την μακρινή γενίκευση. Επίσης, σχεδόν ένας στους εννιά μαθητές από αυτούς που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της Μέτρησης για τη κοντινή γενίκευση, άλλαξαν σε στρατηγική της Διαφοράς για την μακρινή γενίκευση.

Αυτή η τάση να αναμειγνύονται οι στρατηγικές γενίκευσης εξετάστηκε, επίσης, χρησιμοποιώντας το μαθητή και όχι το ερώτημα ως μονάδα ανάλυσης. Έτσι από τους 61 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα υπήρξαν περίπου 30 μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν τουλάχιστον δύο μεθόδους γενίκευσης (Μέτρησης, Ολόκληρου Αντικείμενου, Διαφορά ή Γραμμική) στις έξι ερωτήσεις γενίκευσης (Σ(4), Σ(6) και Σ(50) στο 1^{ο} πρόβλημα και τις Ε(4), Ε(6) και Ε(50) στο 2^{ο} πρόβλημα). Ενώ, η μίξη κάποιων μεθόδων στα δύο μέρη μιας κατάστασης δεν συνέβη ποτέ (Πίνακας 8), ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών τις χρησιμοποίησε σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας γενίκευσης. Μια άλλη άποψη της ασυνέπειας στην επιλογή των μεθόδων γενίκευσης προέρχεται από την παρατήρηση ότι από τους 61 μαθητές του δείγματος περίπου 20 μαθητές χρησιμοποίησαν μόνο μία στρατηγική για να απαντήσουν στις έξι ερωτήσεις γενίκευσης.

Τέλος, η συνέπεια στη χρήση μιας στρατηγικής μέσα σε ένα έργο διερευνήθηκε συγκρίνοντας τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για τις κοντινές (εύρεση των Σ(4), Σ(6), Ε(4), Ε(7)) και μακρινές (εύρεση των Σ(50), Ε(50)) γενικεύσεις από τους μαθητές ανά Σχολική Βαθμίδα. Οι μαθητές της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου (όπως φαίνεται στον Πίνακα 5) χρησιμοποίησαν πιο συχνά τη στρατηγική της Μέτρησης για τα έργα της κοντινής γενίκευσης, ενώ στα έργα μακρινής γενίκευσης τα ποσοστά της χρήσης στρατηγικής κατανέμονται ομοιόμορφα μεταξύ όλων των στρατηγικών (Μέτρησης, Διαφοράς, Ολόκληρου Αντικειμένου, Γραμμική). Αντίθετα, οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, ενώ και αυτοί χρησιμοποίησαν πιο συχνά τη στρατηγική της Μέτρησης για τα έργα της κοντινής γενίκευσης, στα έργα της μακρινής γενίκευσης τείνουν να χρησιμοποιούν πιο συχνά τη Γραμμική στρατηγική.

4.2.3. Με ποιόν τρόπο αποδίδουν (λεκτικά ή συμβολικά) οι μαθητές τις κανονικότητες που βρίσκουν και τους γενικευμένους κανόνες που χρησιμοποιούν;

Η $3^{η}$ ερώτηση, και στα δύο προβλήματα γενίκευσης του δοκιμίου, ζητούσε από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα να βρουν ένα κανόνα γενίκευσης και να τον εκφράσουν λεκτικά ή συμβολικά. Όπως φάνηκε και κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την εύρεση των Σ(ν) και Ε(ν) (που καταγράφηκαν παραπάνω), η ερώτηση αυτή δυσκόλεψε αρκετούς μαθητές. Έτσι, οι 25 από τις συνολικά 58 απαντήσεις που κατατάχθηκαν στην κατηγορία «Αταξινόμητος» αφορούσαν κυρίως σε μη απαντήσεις ενώ οι υπόλοιπες ήταν ασαφής. Δεν υπήρξαν απαντήσεις μαθητών που κωδικοποιήθηκαν ως Αναδρομικός-αλφαρηθμητικός ή Ρητός-αλφαριθμητικός.

Οι περισσότεροι μαθητές της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου, όπως φαίνεται στον Πίνακα 9, απόδωσαν τον τύπο γενίκευσης συμβολικά (Αναδρομικός-τύπος, Ρητός-τύπος), ενώ οι περισσότεροι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου είτε έδωσαν «Αταξινόμητες» απαντήσεις είτε απόδωσαν τον τύπο γενίκευσης λεκτικά (Αναδρομικός-λόγια, Ρητός-λόγια).

Πίνακας 9: Τύποι Κανόνων Γενίκευσης ανά πρόβλημα και Σχολική Βαθμίδα

Κανόνας Γενίκευσης	Σχολική Βαθμίδα	Σ(ν)	Ε(ν)	Σύνολα ανά σχ. βαθμίδα		Σύνολο ανά κανόνα γενίκευσης
Αταξινόμητος	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	15	13	28	23%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	10	11	21	17%	58
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	4	5	9	7%	48%
Αναδρομικός-λόγια	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	2	2	2%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	1	2	2%	13
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	4	5	9	7%	11%
Αναδρομικός-τύπος	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0	0%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	1	2	2%	4
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	1	2	2%	3%
Ρητός-λόγια	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	5	5	10	8%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	1	1	1%	20
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	5	4	9	7%	16%
Ρητός-τύπος	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	0	0%	
	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	7	5	12	10%	27
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	8	7	15	12%	22%
Σύνολο		**61**	**61**	**122**	**100%**	**122**

Α) <u>Τύποι κανόνων γενίκευσης για το Σ(ν).</u>

Κατά την ανάλυση των δοκιμίων των μαθητών παρατηρήθηκε ότι, οι μαθητές που είχαν χρησιμοποιήσει μια αναδρομική προσέγγιση (στρατηγική της Μέτρησης) για την εύρεση του Σ(ν), κατέληξαν σε αναδρομικούς κανόνες γενίκευσης. Κάποιοι από αυτούς, ως κανόνα γενίκευσης για το pattern με τα σπίρτα, έγραψαν συμβολικά τους τύπους, $\nu + 3$ ή $x + 3$ εξηγώντας ότι, όπου ν ή x, αντίστοιχα, είναι το πλήθος των σπίρτων του προηγούμενου σχήματος. Οι υπόλοιποι απέδωσαν τον αναδρομικό τύπο λεκτικά: «προσθέτω 3 σπίρτα για κάθε επόμενο σχήμα» ή «προσθέτω 3 σπίρτα στον αριθμό των σπίρτων του προηγούμενου σχήματος».

Οι μαθητές, που είχαν χρησιμοποιήσει ανακριβείς αναλογικούς συλλογισμούς (στρατηγική της Διαφοράς ή του Ολόκληρου Αντικειμένου) για την εύρεση του Σ(ν), οδηγήθηκαν σε ρητούς, μεν, κανόνες γενίκευσης που περιείχαν, όμως, μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού. Έτσι, για την εύρεση του πλήθους των σπίρτων που απαιτούνται για την κατασκευή του νιοστού σχήματος δίνουν τον τύπο $\Sigma(\nu) = 3\cdot x$ ή τον αποδίδουν λεκτικά γράφοντας: «πολλαπλασιάζω την ποσότητα των σπίρτων του ενός σχήματος με την ποσότητα των σχημάτων».

Τέλος, οι μαθητές που κατέφυγαν στη Γραμμική στρατηγική καταλήγουν σε ρητούς κανόνες γενίκευσης της μορφής Σ(ν) = α·x + β. Το 16% των μαθητών αποδίδει τον κανόνα αυτό λεκτικά, ενώ το 22% των μαθητών τον αποδίδει συμβολικά. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την εύρεση του Σ(ν) οι μαθητές ακολούθησαν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις για το pattern με τα σπίρτα και κατέληξαν σε δύο διαφορετικές (αλλά ισοδύναμες) γραμμικές σχέσεις που συνδέουν τον αριθμό του σχήματος με το πλήθος των σπίρτων που απαιτούνται για την κατασκευή του νιοστού σχήματος.

Έτσι, οι μαθητές που «είδαν» ότι σε κάθε σχήμα αυτό που μένει σταθερό είναι τα 4 σπίρτα που χρειάζεται το πρώτο τετράγωνο για να κατασκευαστεί, ενώ κάθε επόμενο τετράγωνο απαιτεί 3 σπίρτα, εφόσον κάθε επόμενο τετράγωνο έχει μια κοινή πλευρά με το προηγούμενο (Εικόνα 3) κατέληξαν σε έναν γενικευμένο κανόνα της μορφής Σ(ν)=3·(ν-1)+4. Όσοι μαθητές απέδωσαν τον κανόνα αυτό συμβολικά έγραψαν τους ρητούς τύπους σε διάφορες μορφές:

- το νιοστό σχήμα θα αποτελείται από 3· (ν-1) + 4 σπίρτα, ή
- το νιοστό σχήμα θα αποτελείται από 3· (x-1) + 4 σπίρτα, ή
- το νιοστό σχήμα θα αποτελείται από 3·x + 4 σπίρτα, όπου «x οι φορές που εμφανίζονται τα 3 σπίρτα», ή
- το νιοστό σχήμα θα αποτελείται από 3·x + 4 σπίρτα, όπου «x τα κουτάκια που χρειαζόμαστε» (*σημείωση: ένας μαθητής σε αυτήν την περίπτωση για να εξηγήσει δίνει το παράδειγμα: Σ(30)=3·30+4=94*).

Από την άλλη, όσοι προσπάθησαν να αποδώσουν τον κανόνα αυτό λεκτικά, έγραψαν:

- το πλήθος των σπίρτων του νιοστού σχήματος προκύπτει αν «πολλαπλασιάσω το 3 με τον αριθμό του σχήματος αφαιρώντας το 1^o σχήμα και προσθέσω 4»,
- το πλήθος των σπίρτων του νιοστού σχήματος προκύπτει αν «στο 1^o σχήμα προσθέσω το 3 επί σχήματα».

Αντίθετα, οι μαθητές που «είδαν» ότι το νιοστό σχήμα αποτελείται από ν τετράγωνα κάθε ένα από τα οποία χρειάζεται 3 σπίρτα για να κατασκευαστεί λόγω της επικάλυψης των πλευρών, εκτός από το 1^o που χρειάζεται ένα επιπλέον (Εικόνα 4) κατέληξαν σε ένα γενικευμένο κανόνα της μορφής Σ(ν)=3·ν+1. Οι μαθητές που απέδωσαν τον κανόνα αυτό συμβολικά έγραψαν τους ρητούς τύπους σε διάφορες μορφές:

- το νιοστό σχήμα θα αποτελείται από 3·ν+1 σπίρτα, ή
- το νιοστό σχήμα θα αποτελείται από y=3·x+1 σπίρτα, όπου «y→σπίρτα, x→σχήμα».

Τέλος, όσοι μαθητές απέδωσαν τον συγκεκριμένο κανόνα της γενίκευσης λεκτικά, χαρακτηριστικά έγραψαν:

- το πλήθος των σπίρτων του νιοστού σχήματος προκύπτει αν «πολλαπλασιάσω τον αριθμό του σχήματος με το 3 και προσθέσω 1 που είναι το αρχικό σπίρτο».

Β) <u>Τύποι κανόνων γενίκευσης για το Ε(ν).</u>

Οι μαθητές που αναγνώρισαν στο αριθμητικό pattern έναν αναδρομικό ή επαναληπτικό χαρακτήρα, με τη χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης, κατέληξαν σε αναδρομικούς κανόνες γενίκευσης για την εύρεση του Ε(ν). Οι περισσότεροι από αυτούς απέδωσαν τον αναδρομικό κανόνα λεκτικά:

- «προσθέτω 2€ στα χρήματα που υπάρχουν στον κουμπαρά στο τέλος της προηγούμενης εβδομάδας», ή
- «στο αρχικό ποσό προσθέτω 2€ για κάθε επόμενη εβδομάδα».

Οι υπόλοιποι, δηλαδή αυτοί που προσπάθησαν να αποδώσουν τον αναδρομικό κανόνα συμβολικά, έγραψαν τους τύπους ν+2 ή x+2 δίνοντας την εξήγηση ότι ν ή x, αντίστοιχα, είναι τα χρήματα που υπάρχουν στον κουμπαρά του Γιάννη στο τέλος της προηγούμενης εβδομάδας. Μάλιστα, ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου έδωσε τον τύπο Ε(ν)=5+2+2+2+….. .

Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της Διαφοράς για την εύρεση του Ε(ν), όπως έγινε και στη περίπτωση της εύρεσης του Σ(ν), έδωσαν ρητούς κανόνες γενίκευσης που περιείχαν μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού. Για την εύρεση των χρημάτων που υπάρχουν στον κουμπαρά στο τέλος της νιοστής εβδομάδας δίνουν τον τύπο Ε(ν)=2·x ή τον αποδίδουν λεκτικά γράφοντας: «πολλαπλασιάζω τα 2€ με τον αριθμό των εβδομάδων» ή «διπλασιάζω τον αριθμό των εβδομάδων».

Όπως και στην εύρεση του Σ(ν), και εδώ οι μαθητές που χρησιμοποίησαν την Γραμμική στρατηγική ακολούθησαν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις για το αριθμητικό pattern και κατέληξαν σε δύο ισοδύναμες γραμμικές σχέσεις που συνδέουν τον αριθμό των εβδομάδων με τα χρήματα που έχει μαζέψει ο Γιάννης στον κουμπαρά του στο τέλος κάθε εβδομάδας.

Από την μια, κάποιοι μαθητές θεώρησαν ότι αυτό που μένει σταθερό είναι τα 5€ που υπήρχαν την $1^{η}$ εβδομάδα στον κουμπαρά στα οποία προσθέτονται 2€ στο τέλος κάθε επόμενης εβδομάδας. Κατέληξαν, λοιπόν, σε ένα ρητό κανόνα της μορφής Ε(ν)=2·(ν-1)+5. Όσοι μαθητές απέδωσαν τον κανόνα αυτό συμβολικά έγραψαν τους ρητούς τύπους με διαφορετικές μορφές:

- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν 2·(ν-1)+5 €, ή
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν 2·(x-1)+5 €, ή
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν 2·x+5 €, όπου «x η εβδομάδα».
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν 2·x+5 €, όπου «x η εβδομάδα χωρίς την $1^{η}$».

Όσοι προσπάθησαν να αποδώσουν τον κανόνα αυτό λεκτικά, έγραψαν ότι το ποσό των χρημάτων στο τέλος της νιοστής εβδομάδας προκύπτει αν:

- «πολλαπλασιάσω τον αριθμό των εβδομάδων χωρίς την $1^{η}$ και προσθέσω 5»,ή
- «στα 5€ της $1^{ης}$ εβδομάδας προσθέτω 2 για κάθε εβδομάδα».

Από την άλλη, οι υπόλοιποι μαθητές έκαναν την υπόθεση ότι αυτό που μένει σταθερό είναι τα 2€ που μπαίνουν στον κουμπαρά στο τέλος κάθε εβδομάδας. Θεώρησαν λοιπόν, ότι τα 5€ της πρώτης εβδομάδας μπορούν να προκύψουν ως 3€+2€ και έτσι για τον υπολογισμό των χρημάτων που υπάρχουν στον κουμπαρά στο τέλος της νιοστής εβδομάδας οδηγήθηκαν σε έναν ρητό κανόνα της μορφής Ε(ν)=2·ν+3. Το 22% των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα απέδωσαν αυτόν τον τύπο συμβολικά:

- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν 2·ν+3 €, ή
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν (5-3)·x+3 €, ή
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν 2·x+3 €, ή
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν y=2·x+3 €, όπου «y τα χρήματα και x οι βδομάδες», ή
- στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα υπάρχουν α·2+β €, όπου «α η από-

σταση της νιοστής εβδομάδας από την $1^η$ και β το ποσό που παίρνει κάθε βδομάδα».

Τέλος, αυτοί που προσπάθησαν να αποδώσουν τον ρητό κανόνα με λέξεις, χαρακτηριστικά, έγραψαν «πολλαπλασιάζω την εβδομάδα με το 2 και προσθέτω 3 γιατί 5-2=3», ή «αριθμός εβδομάδας επί το 2 συν το 3».

4.2.4. Πώς σχετίζονται οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές με την σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν;

Στη παρούσα έρευνα, επίσης, διερευνήθηκε αν η εμπειρία και η ηλικία έχουν άμεσο αντίκτυπο στα βήματα που ακολουθούν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων στην προσπάθεια τους να γενικεύσουν κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων. Για το σκοπό αυτό έγιναν πίνακες συνάφειας και έλεγχοι ανεξαρτησίας χ^2 ώστε να διερευνηθούν:

α) οι διαφορές στη χρήση των στρατηγικών ανά σχολική βαθμίδα,

β) οι διαφορές στη χρήση των στρατηγικών ανά τύπο γενίκευσης και ανά σχολική βαθμίδα, και,

γ) οι διαφορές στην απόδοση των τύπων της γενίκευσης ανά σχολική βαθμίδα.

Εξετάστηκαν, επίσης, οι σημαντικές τιμές των χ^2-test και οι τιμές των διορθωμένων τυποποιημένων υπολοίπων (adjusted standardized residuals), για την πιθανότητα σημαντικά διαφορετικών αναπτυξιακών τάσεων σε επίπεδο σχολικής βαθμίδας.

Πίνακας 10: Πίνακας Συνάφειας Σχολική Βαθμίδα - Χρήση Στρατηγικής

Σχολική Βαθμίδα		**Χρήση Στρατηγικής**			
		Μέτρηση	Διαφορά	Ολόκληρου Αντικειμένου	Γραμμική
Α΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	49	13*	8	18*
	% εντός Σχολική Βαθμίδα	55,7%	14,8%	9,1%	20,5%
	% εντός Χρήση Στρατηγικής	34,3%	72,2%	32,0%	18,4%
Β΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	47	2	11	25
	% εντός Σχολική Βαθμίδα	55,3%	2,4%	12,9%	29,4%
	% εντός Χρήση Στρατηγικής	32,9%	11,1%	44,0%	25,5%
Γ΄ ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	47*	3	6	55*
	% εντός Σχολική Βαθμίδα	42,3%	2,7%	5,4%	49,5%
	% εντός Χρήση Στρατηγικής	32,9%	16,7%	24,0%	56,1%
	Σύνολο	143	18	25	98

N = 284 Απαντήσεις

* Συνεισφέρει στη σημαντικότητα του χ^2.

Για τη διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη Σχολική Βαθμίδα και την Χρήση Στρατηγικής εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Εδώ, πρέπει να σημειωθεί ότι, από το σύνολο των 366 απαντήσεων των μαθητών και των τριών σχολικών βαθμίδων, οι 82 «Αταξινόμητες» απαντήσεις παραλήφθηκαν από την διαδικασία του ελέγχου ανεξαρτησίας. Η σχέση ανάμεσα στη Σχολική Βαθμίδα και την Χρήση Στρατηγικής βρέθηκε στατιστικά σημαντική, αλλά μέτριας συνάφειας (χ^2 (6) = 32,717, p < 0,001, V = 0,24).

Τα αποτελέσματα του πίνακα συνάφειας (Πίνακας 10) που έγινε για τις μεταβλητές Σχολική Βαθμίδα και Χρήση στρατηγικής δείχνουν ότι, τα κελιά στα οποία τα διορθωμένα τυποποιημένα υπόλοιπα (adjusted standardized residuals) ήταν μεγαλύτερα από |2| και άρα συνεισέφεραν στατιστικά σημαντικά, ήταν μόνο τέσσερα (τα δύο στη Χρήση Στρατηγικής στην Α΄ Γυμνασίου και τα άλλα δύο στη Χρήση Στρατηγικής στη Γ΄ Γυμνασίου). Σε αυτά τα κελιά οφείλεται, κυρίως, η μέτρια συνάφεια των δύο μεταβλητών.

Οι έλεγχοί ανεξαρτησίας χ^2 που έγιναν για να διερευνηθεί η σχέση ανάμεσα στον Τύπο Γενίκευσης και τη Σχολική Βαθμίδα για κάθε στρατηγική έδειξαν ότι οι τιμές του χ^2 δεν ήταν στατιστικά σημαντικές για καμία στρατηγική (Μέτρηση: $\chi^2(4)$ = 3,494, p = 0,479, Διαφορά: $\chi^2(2)$ = 1,875, p=0,392, Ολόκληρου Αντικειμένου: $\chi^2(4)$ = 8,327, p = 0,044, Γραμμική: $\chi^2(4)$ = 5,24, p=0,268). Οι αντίστοιχοι πίνακες συνάφειας της Χρήσης Στρατηγικής ανά Τύπο Γενίκευσης και ανά Σχολική Βαθμίδα βρίσκονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ.

Επίσης έγιναν έλεγχοι ανεξαρτησίας χ^2 για να διερευνηθεί η σχέση ανάμεσα στη Σχολική Βαθμίδα και τη Χρήση Στρατηγικής ανά Τύπο Γενίκευσης. Τα αποτελέσματα (Πίνακας 11) έδειξαν ότι, μόνο για τη μακρινή γενίκευση η σχέση ανάμεσα στη Σχολική Βαθμίδα και τη Χρήση Στρατηγικής βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική (χ^2 (6) = 19,743, p < 0,001, V = 0,314). Στα τρία κελιά, τα οποία συνεισφέρουν στη σημαντικότητα του χ^2, τα αντίστοιχα διορθωμένα τυποποιημένα υπόλοιπα (adjusted standardized residuals) ήταν σε απόλυτη τιμή μεγαλύτερα του 2 και είχαν θετικό πρόσημο, οπότε, στα συγκεκριμένα κελιά υπάρχουν στατιστικά σημαντικά περισσότερες παρατηρήσεις σε σχέση με το αν οι δύο μεταβλητές ήταν ανεξάρτητες.

Πίνακας 11: Πίνακας Συνάφειας Σχολικής Βαθμίδας - Στρατηγικής ανά Τύπο Γενίκευσης

		Στρατηγική				
Σχολική βαθμίδα		Μέτρηση	Διαφορά	Ολόκληρου Αντικειμένου	Γραμμική	Σύνολο
				Κοντινή Γενίκευση		
Α΄ΓΥΜΝ	Συχνότητα	35	0	2	0	37
	%εντός Στρατηγική	35,0%	0%	100,0%	0,0%	31,9%
Β΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	33	0	0	4	37
	%εντός Στρατηγική	33,0%	0%	0,0%	28,6%	31,9%
Γ΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	32	0	0	10	42
	%εντός Στρατηγική	32,0%	0%	0,0%	71,4%	36,2%
Σύνολο		100	0	2	14	116
				Μακρινή Γενίκευση		
Α΄ΓΥΜΝ	Συχνότητα	10	8*	4	11	33
	%εντός Στρατηγική	45,5%	66,7%	19,0%	24,4%	33,0%
Β΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	6	1	11*	9	27
	%εντός Στρατηγική	27,3%	8,3%	52,4%	20,0%	27,0%
Γ΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	6	3	6	25*	40
	%εντός Στρατηγική	27,3%	25,0%	28,6%	55,6%	40,0%
Σύνολο		22	12	21	45	100
				Νιοστός Όρος		
Α΄ΓΥΜΝ	Συχνότητα	2	2	1	7	12
	%εντός Στρατηγική	12,5%	66,7%	100,0%	17,9%	20,3%
Β΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	5	1	0	12	18
	%εντός Στρατηγική	31,3%	33,3%	0,0%	30,8%	30,5%
Γ΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	9	0	0	20	29
	%εντός Στρατηγική	56,3%	0,0%	0,0%	51,3%	49,2%
Σύνολο		16	3	1	39	59

* Συνεισφέρει στη σημαντικότητα του χ^2.
N = 284 Απαντήσεις. Οι 82 «Αταξινόμητες» απαντήσεις παραλήφθηκαν από τη διαδικασία του ελέγχου ανεξαρτησίας.

Τέλος, εφαρμόστηκε έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2 για να εξεταστεί η συνάφεια μεταξύ των μεταβλητών Σχολική Βαθμίδα και Κανόνας Γενίκευσης. Από τη διαδικασία του ελέγχου ανεξαρτησίας παραλήφθηκαν οι 56 από τις συνολικά 122 απαντήσεις των μαθητών για την εύρεση των Σ(ν) και Ε(ν), που είχαν κωδικοποιηθεί ως «Αταξινόμητος». Η σχέση ανάμεσα στη Σχολική Βαθμίδα και τον Κανόνα Γενίκευσης βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(6) = 25{,}363$, $p < 0{,}001$, $V = 0{,}445$). Από τον πίνακα συνάφειας των δύο μεταβλητών (Πίνακας 12), γίνεται φανερό ότι τα κελιά που συνεισφέρουν στη σημαντικότητα του χ^2 (δηλαδή τα κελιά στα οποία διορθωμένα τυποποιημένα υπόλοιπα (adjusted standardized residuals) ήταν σε απόλυτη τιμή μεγαλύτερα του 2) εντοπίζονται στους Κανόνες Γενίκευσης Ρητός-λόγια και Ρητός-τύπος στην Α΄ και στη Β΄ Γυμνασίου.

Αξιοσημείωτο είναι ότι, στην Α΄ Γυμνασίου στους Κανόνες Γενίκευσης Ρητός-λόγια και Ρητός-τύπος παρατηρήθηκαν, αντίστοιχα, τα μεγαλύτερα θετικά και τα μεγαλύτερα αρνητικά διορθωμένα τυποποιημένα υπόλοιπα (adjusted standardized residuals).

Πίνακας 12: Πίνακας Συνάφειας Σχολική Βαθμίδα – Κανόνας Γενίκευσης

Σχολική Βαθμίδα		**Κανόνας Γενίκευσης**				
		Αναδρ.-λόγια	Αναδρ.-τύπος	Ρητός-λόγια	Ρητός-τύπος	Σύνολο
Α΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	2	0	10*	0*	12
	% εντός Σχολική Βαθμίδα	16,7%	0,0%	83,3%	0,0%	100,0%
	% εντός Τύπος Γενίκευσης	15,4%	0,0%	50,0%	0,0%	18,8%
Β΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	2	2	1*	12*	17
	% εντός Σχολική Βαθμίδα	11,8%	11,8%	5,9%	70,6%	100,0%
	% εντός Τύπος Γενίκευσης	15,4%	50,0%	5,0%	44,4%	26,6%
Γ΄ΓΥΜΝ.	Συχνότητα	9	2	9	15	35
	% εντός Σχολική Βαθμίδα	25,7%	5,7%	25,7%	42,9%	100,0%
	% εντός Τύπος Γενίκευσης	69,2%	50,0%	45,0%	55,6%	54,7%
Σύνολο	Συχνότητα	13	4	20	27	64
	% within Σχολική Βαθμίδα	20,3%	6,3%	31,3%	42,2%	100,0%
	% within Τύπος Γενίκευσης	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Οι 56 απαντήσεις που κωδικοποιήθηκαν ως «Αταξινόμητος» παραλήφθηκαν από την διαδικασία του ελέγχου ανεξαρτησίας.

* Συνεισφέρει στη σημαντικότητα του χ^2.

4.2.5. Οι εξηγήσεις των μαθητών.

Η πλειοψηφία των μαθητών προσπάθησε να ανταποκριθεί στο αίτημα του δοκιμίου για προσεκτικές εξηγήσεις. Μόνο δύο μαθητές έδωσαν από μία απάντηση χωρίς να την εξηγήσουν. Τα δείγματα των εξηγήσεων που δίδονται στην Εικόνα 2, υποδεικνύει το εύρος των απαντήσεων και όχι τη συχνότητά τους, παρόλο που δεν εμφανίζονται οι πολύ μπερδεμένες απαντήσεις.

Αρκετοί μαθητές κατάλαβαν ότι το «Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου» σήμαινε ότι έπρεπε απλά να ξαναγράψουν τους υπολογισμούς που είχαν κάνει αλλά με λέξεις: «Πολλαπλασιάζω το 49 επί 3». Μόνο μερικοί μαθητές προσπάθησαν να περιγράψουν τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ των χαρακτηριστικών της δομής του pattern και των υπολογισμών τους. Για παράδειγμα, «για το πρώτο τετράγωνο χρειαστήκαμε 4 σπίρτα. Κάθε φορά που σχηματίζονταν ένα τετράγωνο βάζαμε άλλα 3 σπίρτα γιατί το 4^{ο} υπήρχε ήδη. Άρα κάθε φορά που ήθελα να βρω πόσα σπίρτα θα χρειαστώ πολλαπλασίαζα τον αριθμό του σχήματος, ο οποίος μας έλεγε πόσα τετράγωνα θα σχηματιστούν, με το 3 και στο αποτέλεσμα πρόσθετα το 1 σπίρτο που προέκυπτε από το αρχικό τετράγωνο».

Ορισμένοι μαθητές από την Α΄ Γυμνασίου, για να εξηγήσουν την σκέψη τους (κυρίως για την εύρεση του νιοστού όρου) έδωσαν παραδείγματα συγκεκριμένων περιπτώσεων. Έτσι, για παράδειγμα, έγραψαν: «Αφού έχουμε το αρχικό ποσό και ξέρουμε την αύξηση των χρημάτων απλώς θα προσθέτουμε για κάθε εβδομάδα 2€, π.χ. 5+2=7€ η δεύτερη εβδομάδα, 7+2=9€ για την τρίτη εβδομάδα κ.τ.λ.». Τέλος, υπήρξαν απαντήσεις που λόγω του τρόπου που ήταν συνταγμένες, προβλημάτισαν τόσο κατά την διαδικασία της ανάλυσης των δοκιμίων, όσο και κατά την διαδικασία της κωδικοποίησης τους.

5. Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα έγινε μια προσπάθεια να εξεταστεί η ικανότητα των μαθητών των τριών σχολικών βαθμίδων ενός τυπικού Δημόσιου Ελληνικού Γυμνασίου να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων. Ειδικότερα επιχειρήθηκε να δοθούν απαντήσεις στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

V. Μπορούν οι μαθητές Γυμνασίου να επινοήσουν μεθόδους για να γενικεύσουν κατά την επίλυση προβλημάτων με κανονικότητες; Ποιες μεθόδους επινοούν;

VI. Σε ποιο βαθμό οι μέθοδοι που επινοούνται διαφοροποιούνται σε έργα κοντινής (near) και μακρινής (far) γενίκευσης;

VII. Με ποιόν τρόπο αποδίδουν (λεκτικά ή συμβολικά) οι μαθητές τις κανονικότητες που βρίσκουν και τους γενικευμένους κανόνες που χρησιμοποιούν;

VIII. Πώς σχετίζονται οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές με την σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν;

Συγκεκριμένα, έγινε μια προσπάθεια να εξεταστεί αν η ικανότητα των μαθητών να εκφράζουν μια γενική σχέση, που περιγράφει αναπτυσσόμενα γραμμικά patterns, συνδέεται με την αλγεβρική έκφραση των ιδιοτήτων τους. Η αναγνώριση και η έκφραση των δομών και των patterns στις διαπραγματεύσεις με τις καταστάσεις-προβλήματα είναι στο επίκεντρο της αλγεβρικής δραστηριότητας. Τα αναπτυσσόμενα patterns, είτε εμφανίζονται σε εικονιστικά πλαίσια, είτε έχουν καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα, προσφέρουν ένα πλαίσιο για ανακάλυψη σχέσεων, κανόνων, δομών (Küchemann, 2010).

Το δοκίμιο της έρευνας αναπτύχθηκε για να εξακριβώσει τις ικανότητες των μαθητών κατά την εκτέλεση έργων αναζήτησης και γενίκευσης σε προβλήματα αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων. Οι δεξιότητες που αναμενόταν να αναπτύξουν οι μαθητές (χρησιμοποιώντας την προϋπάρχουσα γνώση τους) κατά την επίλυση αυτών των έργων γενίκευσης ήταν να: (α) εντοπίζουν ένα μοτίβο, (β) επεκτείνουν το μοτίβο για να κάνουν μια κοντινή και μια μακρινή γενίκευση, και (γ) αποδίδουν τον κανόνα της γενίκευσης που περιγράφει το μοτίβο χρησιμοποιώντας λέξεις ή σύμβολα (Rivera, 2008). Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι τα έργα αυτά είναι ένα ισχυρό και χρήσιμο μέσο, τόσο για την προώθηση και υποστήριξη της αλγεβρικής σκέψης, όσο και για την αναγνώριση της ύπαρξής της (Amit & Neria, 2007; Rivera, 2010; Küchemann, 2010; Rivera, & Becker, 2011). Η ανάλυση περιελάμβανε την ανακάλυψη και τον ορισμό διαφόρων σταδίων γενίκευσης (παρουσίαση, επιχειρηματολογία, χρήση παραστάσεων) και του αλγεβρικού συλλογισμού των μαθητών.

Όσον αφορά στα ερευνητικά ερωτήματα που περιγράφηκαν παραπάνω, μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις:

(α) οι μαθητές επινόησαν και χρησιμοποίησαν ποικίλες στρατηγικές για να γενικεύσουν κατά την επίλυση προβλημάτων με κανονικότητες, αν και μερικές χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά από άλλες, όπως η στρατηγική της Μέτρησης.
(β) οι μαθητές αντιμετώπισαν διάφορες δυσκολίες κατά την επίλυση των προβλημάτων που αφορούσαν στην εξερεύνηση των μοτίβων, ειδικά όταν έπρεπε να γενικεύσουν για απομακρυσμένες θέσεις. Επιτεύχθηκαν καλύτερα αποτελέσματα στα ερωτήματα της κοντινής γενίκευσης παρά σε αυτά της μακρινής γενίκευσης.
(γ) οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να βρουν επαρκείς ρητούς κανόνες γενίκευσης, αποκαλύπτοντας δυσκολίες στην εξεύρεση μιας σχέσης συμεταβολής μεταξύ της θέσης και της τιμής του κάθε όρου του μοτίβου.

Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της έρευνας, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο 3^{ο} Κεφάλαιο, και την εξαγωγή συμπερασμάτων, η παρουσίαση αυτών παρακάτω, οργανώθηκε με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας. Αρχικά, παρουσιάζονται τα ευρήματα που αφορούν στους τύπους των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά την επίλυση των δύο προβλημάτων γενίκευσης του δοκιμίου. Οι ερμηνείες των ευρημάτων αυτών, απαντούν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή στο αν οι μαθητές μπορούν να επινοήσουν κάποιες μεθόδους για να γενικεύσουν προβλήματα γραμμικών κανονικοτήτων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα ευρήματα που αφορούν στη διαφοροποίηση της χρήσης από τους μαθητές των στρατηγικών γενίκευσης ανά τύπο γενίκευσης (κοντινή γενίκευση, μακρινή γενίκευση, νιοστός όρος). Εδώ, οι ερμηνείες των αποτελεσμάτων απαντούν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή στο αν οι μέθοδοι που επινοούνται διαφοροποιούνται σε έργα κοντινής (near) και μακρινής (far) γενίκευσης.

Τρίτον, παρουσιάζονται τα ευρήματα της παρούσας έρευνας σχετικά με τους τύπους των γενικευμένων κανόνων που κατασκευάζουν οι μαθητές. Η ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων δίνει απάντηση στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο εξετάζει με ποιον τρόπο αποδίδουν (λεκτικά ή συμβολικά) οι μαθητές τις κανονικότητες που βρίσκουν και τους γενικευμένους κανόνες που χρησιμοποιούν. Τέλος, παρουσιάζονται και ερμηνεύονται τα ευρήματα που απαντούν στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή το πώς σχετίζονται οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές με την σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν.

5.1. Οι μέθοδοι που επινόησαν οι μαθητές για να γενικεύσουν προβλήματα γραμμικών κανονικοτήτων

Σε αυτή τη μελέτη, οι περισσότεροι μαθητές παρουσίασαν δυνατότητες αλγεβρικής γενίκευσης σε γραμμικά προβλήματα κανονικοτήτων. Ανακάλυψαν ομοιότητες βασισμένοι σε μερικά παραδείγματα από μια σειρά, γενίκευσαν την κατάσταση και κοινοποίησαν τη λύση τους χρησιμοποιώντας διάφορες παραστάσεις και επιχειρηματολογία (Rivera, 2008). Όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας (παρ. 3.2.1), το σύνολο σχεδόν των μαθητών αντιμετώπισε τις ερωτήσεις και των δύο προβλημάτων γενίκευσης χρησιμοποιώντας τις ίδιες περίπου στρατηγικές. Δηλαδή, φαίνεται ότι το διαφορετικό πλαίσιο των προβλημάτων (εικονιστικό, αριθμητικό) δεν επηρέασε την χρήση των στρατηγικών από τους μαθητές. Αυτό ίσως οφείλεται, σύμφωνα με τους Lannin et al. (2006), στο ότι οι περισσότεροι μαθητές, χρησιμοποίησαν αναλυτικές/αριθμητικές προσεγγίσεις, μετέτρεψαν, δηλαδή, τα patterns σε ισοδύναμες αριθμητικές ακολουθίες και η αναζήτηση σχέσης έγινε μέσα σε αριθμητικά πλαίσια.

Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν πως η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε σωστά στις ερωτήσεις κοντινής γενίκευσης (εύρεση των Σ(4), Σ(6), Ε(4) και Ε(7)). Όπως και σε προηγούμενες μελέτες (Lannin, 2005; Garcia, Cruz & Martinon, 1997; Stacey, 1989; Orton και Orton, 1999, όπως αναφ. στο Zazkis & Liljedahl, 2002), η τάση για χρήση της διαφοράς μεταξύ διαδοχικών όρων ως μια μέθοδο γενίκευσης εντοπίστηκε συχνά. Η χρήση αυτή επέτρεψε στους περισσότερους μαθητές να βρουν τους επόμενους κοντινούς όρους του μοτίβου με διαδοχικές προσθέσεις της διαφοράς αυτής στον προηγούμενο όρο (στρατηγική της Μέτρησης). Το γεγονός αυτό, πως όταν οι τιμές εισόδου (input values) είναι κοντινές χρησιμοποιούνται συνήθως προσθετικές στρατηγικές, έχει τονιστεί και σε άλλες έρευνες (π.χ. Lannin et al., 2006).

Για τον υπολογισμό των Σ(50) και Ε(50) (μακρινή γενίκευση) οι μέθοδοι (στρατηγικές) που χρησιμοποίησαν οι φοιτητές ήταν: η Γραμμική στρατηγική, η στρατηγική της Μέτρησης, η στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου και η στρατηγική της Διαφοράς (ένα μικρό ποσοστό). Οι περισσότεροι από τους μαθητές που υπολόγισαν σωστά τον 50^{o} όρο, στην προσπάθεια τους για εύρεση πιο αποτελεσματικών στρατηγικών (Lannin et al., 2006), αναζήτησαν μία σχέση που θα τους επέτρεπε τον προσδιορισμό των στοιχείων ενός όρου από τη θέση αυτού

(Γραμμική στρατηγική). Υπήρξαν, όμως, αρκετοί μαθητές που υπολόγισαν σωστά τον $50^{ο}$ όρο συσχετίζοντας τα στοιχεία του ίδιου συνόλου χρησιμοποιώντας τη στρατηγική της Μέτρησης. Η χρήση διαδοχικών προσθέσεων (στρατηγικής της Μέτρησης) για την εξεύρεση λύσης είναι πιθανότατα αναγνωρισμένη από όλους, αλλά η εκτίμηση της εφικτότητας της διαφέρει ανάλογα με τον μαθητή, τη διαθεσιμότητα άλλων ιδεών για την αντιμετώπιση του προβλήματος, την ικανότητα στις αριθμητικές πράξεις, και την ίδια την προβληματική κατάσταση (Stacey, 1989).

Συχνά όσοι ξεκίνησαν με διαδοχικές προσθέσεις άλλαξαν σε άλλη μέθοδο πριν φθάσουν στο στόχο, πιθανώς όταν παρουσιάστηκε μια εναλλακτική μέθοδος και η ανάγκη για αυτό ήταν έντονα αισθητή. Η επιθυμία των μαθητών για αποδοτικότητα, μαζί με την αντίληψη που έχουν οι μαθητές για την αναποτελεσματικότητα ορισμένων στρατηγικών, συχνά χρησιμεύουν ως καταλύτης για την επιλογή της στρατηγικής τους (Lannin et al., 2006; Stacey, 1989). Έτσι, κάποιοι μαθητές, αφού διαπίστωσαν ότι για τον υπολογισμό του 50ού όρου η χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης δεν ήταν πλέον αποτελεσματική, στράφηκαν στην εξεύρεση πιο «σύντομων» λύσεων. Δύο μαθηματικά μοντέλα (μέθοδοι), και τα δύο απλούστερα από το σωστό, τότε τείνουν να παρουσιάζονται. Από τη μία πλευρά, η ισχυρή συσχέτιση των διαδοχικών προσθέσεων με τον πολλαπλασιασμό οδηγεί στην εσφαλμένη χρήση της στρατηγικής της Διαφοράς. Από την άλλη, η μέθοδος του Ολόκληρου Αντικειμένου χρησιμοποιείται όταν η κατάσταση κατηγοριοποιείται λανθασμένα ως μια απλή αναλογία: είναι σαν ο όρος της ακολουθίας να θεωρείται ως πλήρης μονάδα, με κάποιο μέτρο της «αξίας» της που δίνεται και δεν δίνεται προσοχή στα συστατικά μέρη της (Stacey, 1989).

Το 18% των μαθητών εσφαλμένα υπέθεσε ότι υπάρχει μια σχέση ευθείας αναλογίας ανάμεσα στη θέση και την τιμή του κάθε όρου (στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου), μολονότι οι δοθείσες τιμές δεν ήταν η μια πολλαπλάσιο της άλλης. Η εισαγωγή, δηλαδή, «μη ελκυστικών αριθμών» ώθησε επίσης στην επινόηση ακατάλληλων στρατηγικών (μερικές φορές με «δημιουργικό τρόπο») ακόμη και όταν οι μαθητές δεν μπόρεσαν να βρουν μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμών αυτών (Sasman et al., 1999). Για παράδειγμα, για την εύρεση του Σ(50), χρησιμοποίησαν μια παραλλαγή της στρατηγικής του Ολόκληρου Αντικειμένου στην οποία χρησιμοποιείται και η πρόσθεση εκτός από τον πολλαπλασιασμό. Χρησιμοποίησαν πίνακα με «βολικές» τιμές - για να εφαρμόσουν την μέθοδο της ευθείας αναλογίας - από τον οποίο υπολόγισαν το Σ(48) και στη συνέχεια υπέθεσαν ότι Σ(50)=Σ(48)+Σ(2).

Σύμφωνα με τους ερευνητές (Stacey, 1989; Lannin et al., 2006) οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών παίζουν ρόλο στην επινόηση των στρατηγικών γενίκευσης. Όπως, χαρακτηριστικά, αναφέρει η Stacey «*πολύ πριν από την επίσημη διδασκαλία των σχετικών θεμάτων (λόγος, γραμμικές συναρτήσεις), οι μαθητές έχουν δημιουργήσει μια κατανόηση αναφορικά με τις σχέσεις που ισχύουν στην ευθεία αναλογία, και τις μεταφέρουν στις γραμμικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, υπεργενικεύουν αυτές τις ιδιότητες και τις χρησιμοποιούν ακατάλληλα*» (Stacey, 1989, σελ. 160). Η μερική κατανόηση φαίνεται τόσο στην επιλογή ενός λανθασμένου μαθηματικού μοντέλου όσο και στις τεχνικές δυσκολίες που βιώνουν κάποιοι μαθητές στην εύρεση της σωστής γραμμικής σχέσης. Φαίνεται ότι τα παιδιά που υποψιάζονται ότι μια σχέση μπορεί να είναι αληθινή τη χρησιμοποιούν χωρίς αμφιβολία. Η αλλαγή από τις Γραμμικές μεθόδους για τις κοντινές γενικεύσεις στις μεθόδους Ολόκληρου Αντικειμένου για μακρινές γενικεύσεις μπορούν να είναι μια περαιτέρω περίπτωση αυτού (Stacey, 1989).

Η πλειοψηφία των μαθητών (κυρίως από την Α΄ Γυμνασίου) δυσκολεύτηκε στην εύρεση των Σ(ν) και Ε(ν), όπως προκύπτει από τα ποσοστά των απαντήσεων που κωδικοποιήθηκαν ως «Αταξινόμητες» (49% και 38% αντίστοιχα). Το αποτέλεσμα αυτό υποστηρίζει τα ευρήματα των προγενέστερων μελετών που υποδηλώνουν ότι ενώ τα έργα κοντινής γενίκευσης ήταν προσιτά στους μαθητές, τα έργα μακρινής γενίκευσης ήταν δύσκολα γι' αυτούς (Becker & Rivera, 2005; Stacey, 1989). Κατά την επίλυση των δύο προβλημάτων γενίκευσης, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών ξεκίνησε με μια προσθετική προσέγγιση. Αφού διαπίστωσαν τη σταθερή διαφορά και απάντησαν σωστά στις δύο πρώτες ερωτήσεις, προσπάθησαν να γενικεύσουν (εύρεση νιοστού όρου) συνεχίζοντας να εφαρμόζουν προσθετικές στρατηγικές. Αυτοί οι μαθητές είτε δεν απάντησαν καθόλου είτε γενίκευσαν αναδρομικά με τη χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης.

Μερικοί μαθητές προχώρησαν σε μια πολλαπλασιαστική προσέγγιση και κατάφεραν να επιτύχουν μια συναρτησιακή γενίκευση με την οποία ήταν σε θέση να βρουν τον νιοστό όρο, χωρίς να βασίζονται στο προηγούμενο όρο του μοτίβου. Η Γραμμική στρατηγική ήταν σπάνια η πρώτη στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη Γραμμική στρατηγική όταν αναζήτησαν πιο αποτελεσματικές μεθόδους για τον υπολογισμό των νιοστών όρων (Lannin et al., 2006). Γενικά, σύμφωνα με παλιότερες έρευνες, οι μαθητές είναι πιο πιθανό να χρησιμοποιήσουν τη Γραμμική στρατηγική όταν οι τιμές εισόδου είναι μεγάλες και σχετικά απομακρυσμένες από τις προηγούμενες τιμές εισόδου (Lannin et al., 2006; Sasman et al., 1999).

5.2. Διαφοροποίηση της χρήσης των στρατηγικών γενίκευσης ανά τύπο γενίκευσης

Ένα σημαντικό εύρημα της παρούσας έρευνας είναι ότι, ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2 που διενεργήθηκε για τις μεταβλητές Χρήση Στρατηγικής και Τύπος Γενίκευσης φανέρωσε ότι, υπάρχουν πιθανά σημαντικές διαφορές στη χρήση της στρατηγικής ανά τύπο γενίκευσης ($\chi^2(6) = 121{,}498$, $p < 0{,}001$, $V = 0{,}462$). Παρατηρήθηκε ότι, η στρατηγική της Μέτρησης και η Γραμμική στρατηγική χρησιμοποιήθηκαν συχνά σε καθένα από τους τρείς τύπους γενίκευσης (κοντινή γενίκευση, μακρινή γενίκευση, νιοστός όρος), ενώ οι στρατηγικές της Διαφοράς και του Ολόκληρου Αντικειμένου χρησιμοποιήθηκαν κυρίως στη μακρινή γενίκευση και στην εύρεση του νιοστού όρου.

Επιπρόσθετα, η ανάλυση των αποτελεσμάτων κατέδειξε το γεγονός ότι η χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης μειώθηκε, ενώ η χρήση της Γραμμικής στρατηγικής αυξήθηκε, καθώς οι απαιτήσεις των έργων άλλαξαν από την κατασκευή μιας βήμα προς βήμα λύσης στην εξεύρεση ενός γενικού κανόνα. Όλα τα παραπάνω συμφωνούν με τα ευρήματα παλαιότερων ερευνών (Stasey, 1989; Lannin et al., 2006). Μια εύλογη εξήγηση είναι ότι, η διαφοροποίηση στη χρήση στρατηγικών ανά τύπο γενίκευσης, μπορεί να οφείλεται στα χαρακτηριστικά των στρατηγικών και στη σχέση τους με τη διαδικασία γενίκευσης. Ο δρόμος προς τη γενίκευση απαιτεί λεπτομερή παρατήρηση και σύγκριση των όρων σε ένα μικρό «δείγμα» της ακολουθίας, επισήμανση του «συνδετικού ιστού» και διάκριση των όψεων που αλλάζουν από αυτές που παραμένουν σταθερές (Rivera & Becker, 2007).

Σύμφωνα με τον Radford (2008), οι αλγεβρικές γενικεύσεις κανονικοτήτων προκύπτουν (1) από την εκμαίευση μιας κανονικότητας (grasping a commonality), (2) τη γενίκευση αυτής της κανονικότητας για όλους τους όρους της υπό εξέταση ακολουθίας, και (3) τη διατύπωση ενός κανόνα που επιτρέπει τον άμεσο προσδιορισμό οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας. Η Γραμμική στρατηγική συνεπάγεται τη σύλληψη μιας κανονικότητας με την εύρεση μιας σχέσης μεταξύ της τιμής του όρου (εξαρτώμενη μεταβλητή) και της θέσης (ανεξάρτητη μεταβλητή) του όρου. Αυτό οδηγεί στη γενίκευση της κανονικότητας σε όλους τους όρους του μοτίβου και συνεπώς στην παραγωγή ενός κανόνα της γενίκευσης που επιτρέπει τον προσδιορισμό οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να χρησιμοποιούν τη Γραμμική στρατηγική τόσο στις κοντινές, όσο και στις μακρινές γενικεύσεις (Garcia, Cruz & Martinon, 1997).

Ομοίως, αλλά με πιο «τοπικό» χαρακτήρα, η χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης προϋποθέτει τη σύλληψη μιας κανονικότητας, αναγνωρίζοντας την κοινή διαφορά μεταξύ διαδοχικών όρων της σειράς, ενώ τα άλλα δύο βήματα, γενίκευση της κανονικότητας σε όλους τους όρους και παραγωγή του κανόνα γενίκευσης, γίνονται «τοπικά», επεκτείνοντας το μοτίβο από τον ένα όρο στον επόμενο (Amit & Neria, 2007). Επιπλέον, η στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου απαιτεί την εύρεση μιας σχέσης μεταξύ ενός προηγούμενου όρου (όχι απαραίτητα του επόμενου όρου) και του ζητούμενου όρου. Αυτό μπορεί να εξηγεί γιατί η στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου χρησιμοποιήθηκε συχνά στη μακρινή γενίκευση (εύρεση του 50ου όρου). Από την άλλη πλευρά, η στρατηγική της Μέτρησης χρησιμοποιήθηκε συχνά στις κοντινές γενικεύσεις, καθώς συνεπάγεται μια βήμα προς βήμα προσέγγιση.

5.3. Τύποι των γενικευμένων κανόνων που κατασκεύασαν οι μαθητές

Η 3η ερώτηση και των δύο προβλημάτων του δοκιμίου της έρευνας ζητούσε από τους μαθητές να προτείνουν μία μέθοδο με την οποία θα μπορεί να υπολογιστεί οποιοσδήποτε όρος της ακολουθίας και να γράψουν έναν αλγεβρικό τύπο για την εύρεση του στο ν-οστού όρου της ακολουθίας. Η ερώτηση αυτή επέτρεπε στους μαθητές να εκφράσουν τη γενίκευση σε οποιαδήποτε μορφή (λεκτική, συμβολική ή συνδυασμό λέξεων και συμβόλων) αισθάνονται άνετα. Βασίστηκε σε προηγούμενες έρευνες, οι οποίες έδειξαν ότι οι μαθητές βρήκαν ευκολότερο να εκφράζουν τις γενικεύσεις τους με λόγια παρά με συμβολική γραφή (Radford, 2006; 2008).

Πολλοί ερευνητές (Sasman, Linchevski, & Olivier, 1999; Lannin, 2005; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Stacey, 1989) συμφωνούν ότι οι δυσκολίες συχνά εντοπίζονται στην προσπάθεια των μαθητών να δημιουργήσουν χρήσιμες αλγεβρικές προτάσεις ή λήμματα αναγνωρίζοντας τα αντίστοιχα μοτίβα. Όμοια και στην παρούσα έρευνα, αν και οι ερευνητές παρείχαν προφορικές εξηγήσεις σχετικά με την έννοια του νιοστού όρου, πολλοί μαθητές δυσκολεύτηκαν να γράψουν έναν συμβολικό κανόνα γενίκευσης. Περίπου οι μισοί μαθητές (στην πλειοψηφία τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου) δεν απάντησαν καθόλου στην 3η ερώτηση. Οι δυσκολίες των μαθητών στο να σχηματίζουν γενικεύσεις ήταν εμφανείς στις ακατάλληλες στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για να κατασκευάσουν έναν γενικό κανόνα. Κάποιοι μαθητές χρησιμοποίησαν μια μέθοδο ευθείας αναλογίας ή μια προσθετική στρατηγική, δηλαδή μια αναδρομική προσέγγιση, και δεν χρησιμοποίησαν αλγεβρικό συμβολισμό για να καταγράψουν τις γενικεύσεις τους. Αρκετοί μαθητές προσπάθησαν να αναγνωρίσουν τη συναρτησιακή σχέση και χρησιμοποίησαν τον αλγεβρικό συμβολισμό για να καταγράψουν τις γενικεύσεις τους.

Η προσκόλληση σε αναδρομικές προσεγγίσεις ή σε ανακριβείς αναλογικούς συλλογισμούς απέτρεψε τους μαθητές από τον προσδιορισμό της γενικής δομής του pattern (Lannin et al.,2006; Zazkis, & Liljedahl, 2002). Οι περισσότεροι από τους μαθητές, που παρατήρησαν τη μεταβολή εντός ενός μόνο συνόλου, οδηγήθηκαν σε λεκτική περιγραφή αναδρομικών σχέσεων και δεν διατύπωσαν το pattern σε μια γενικευμένη μορφή μέσω της χρήσης συμβόλων (Becker, & Rivera, 2005). Από την άλλη, αυτοί που απέδωσαν τον αναδρομικό κανόνα για τον υπολογισμό των Σ(ν) και Ε(ν) συμβολικά, υπέθεσαν ότι οι εκφράσεις «ν + 3» και «ν + 2», αντίστοιχα, ήταν επαρκείς για να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο οι αριθμοί σχετίζονταν μεταξύ τους. Περαιτέρω, λόγω της έλλειψης ευχέρειας στη συμβολική γραφή, η μεταβλητή ν στα «ν + 3» και «ν + 5» ορίστηκε να σημαίνει «τον αριθμό των σπίρτων/ευρώ πριν από αυτό». Αυτό που εννοούσαν, ήταν οι αναδρομικές σχέσεις: $α_ν = α_{ν-1} + 3$ και $α_ν = α_{ν-1} + 2$. Αυτή η εκδηλωμένη κυριαρχία της προσθετικής σκέψης και η έλλειψη σύνδεσης μεταξύ προσθετικών και πολλαπλασιαστικών δομών που έγινε φανερή στις απαντήσεις των μαθητών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα είναι συνεπής με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Stacey, 1989; Zazkis, & Liljedahl, 2002).

Σύμφωνα με κάποιους ερευνητές (Rivera & Becker, 2007; Van de Walle, 2007), ο τρόπος με τον οποίο το pattern αλλάζει από ένα δεδομένο όρο προς τον επόμενο είναι το πρώτο που παρατηρούν οι μαθητές. Οι μαθητές, δηλαδή, συσχετίζουν στοιχεία του ίδιου συνόλου (περιγραφή της αναδρομικής σχέσης). Για παράδειγμα, οι μαθητές σε ένα αναπτυσσόμενο pattern, όπως το 5, 7, 9,… αναγνωρίζουν τη σχέση $α_ν=α_{ν-1}+2$ με $α_1=5$. Εφόσον, οι μαθητές, αντιλαμβάνονται ένα pattern με έναν ορισμένο τρόπο είναι δύσκολο για αυτούς να εγκαταλείψουν την αρχική τους αντίληψη (Orton και Orton, 1999, όπως αναφ. στο Zazkis & Liljedahl, 2002).

Εκείνοι που βρήκαν έναν ρητό κανόνα, αλλά δεν ήξεραν πώς να τον αποδώσουν σε μια τυπική αλγεβρική μορφή (κυρίως μαθητές της Α΄ Γυμνασίου), περιέγραψαν λεκτικά της γενικεύσεις τους. Ορισμένοι από αυτούς έγραψαν έναν λανθασμένο γενικό τύπο χωρίς να ελέγξουν την ορθότητά του εξετάζοντας αν αυτός ο γενικός τύπος περιγράφει τους ήδη γνωστούς όρους του pattern. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές έδωσαν τους κανόνες $3 \cdot \nu + 4$ και $2 \cdot \nu + 5$ από την ακολουθία των εξαρτημένων τιμών {4, 7, 10, 13,...} του 1^{ου} και {5, 7, 9, 11,...} του 2^{ου} προβλήματος, αντίστοιχα, χωρίς να εξετάσουν τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονταν οι τιμές με τα τετράγωνα που σχηματίζονται ή με τα χρήματα που υπάρχουν στο κουμπαρά. Θεώρησαν, δηλαδή ότι, η μεταβλητή ν παίρνει τιμές που αρχίζουν από το 1.

Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές βρήκαν πιο εύκολο να εκφράσουν τις γενικεύσεις τους λεκτικά παρά να τις καταγράψουν συμβολικά. Οι Radford (2006) και Küchemann (1981, όπως αναφ. στο Rivera, & Becker, 2008) έχουν επισημάνει τη προβληματική κατάσταση της χρήσης των μεταβλητών στους κανόνες γενίκευσης που κατασκευάζουν οι μαθητές. Ο Küchemann (1981) διαπίστωσε ότι οι μαθητές (ηλικίας 13 έως 15 ετών), όταν έρχονται σε επαφή με δραστηριότητες patterning τείνουν να ερμηνεύουν τις μεταβλητές στενά με όρους συγκεκριμένων αντικειμένων παρά ως άγνωστες ποσότητες. Δυσκολεύονται να κατανοήσουν πώς να χρησιμοποιούν τα γράμματα για να αντιπροσωπεύουν οποιαδήποτε τιμή και συνήθως έχουν περιορισμένο μαθηματικό λεξιλόγιο για να εκφράσουν τη γενικότητα, ειδικά όταν βρίσκονται στην αρχή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Δεν είναι, λοιπόν, εύκολο για τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν σύμβολα και ακόμα και αν το κάνουν, οι συμβολικές τους εκφράσεις μπορεί να διαφέρουν από την αντίστοιχη εξήγησή τους στη φυσική γλώσσα (Radford, 2006). Δεδομένου ότι η διαδικασία παραγωγής ενός γενικού αλγεβρικού κανόνα είναι συνήθως αποσυνδεδεμένη από τις παραμέτρους των μεταβλητών, οι μαθητές σπάνια βλέπουν το σκεπτικό πίσω από την παραγωγή ενός γενικού κανόνα, πόσο μάλλον να επικυρώνουν τις λύσεις τους (Noss, Healy & Hoyles, 1997). Η προτίμηση των μαθητών στη χρήση του x αντί του ν, που ανιχνεύθηκε σε μερικές από τις λύσεις των μαθητών που συμμετείχαν σε αυτή την έρευνα, έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (Becker, & Rivera, 2005). Ενδεχομένως, αντικατοπτρίζει την προϋπάρχουσα αντίληψη που οι μαθητές έχουν σχηματίσει σχετικά με τη μεταβλητή ως κάτι που έχει να κάνει με το x (Amit & Neria, 2007).

5.4. Πώς σχετίζονται οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές με την σχολική βαθμίδα στην οποία ανήκουν

Ένα ακόμη εύρημα αυτής της έρευνας είναι ότι η χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης ήταν συχνή και στις τρείς σχολικές βαθμίδες, ενώ η χρήση της Γραμμικής στρατηγικής ήταν πιο συχνή από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Επίσης, στα έργα κοντινής γενίκευσης υπήρξε μια αύξηση στη χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης και στις τρεις σχολικές βαθμίδες, ενώ η χρήση της μειώνεται στα έργα μακρινής γενίκευσης και στην εύρεση του νιοστού όρου. Παράλληλα παρατηρήθηκε αύξηση στη χρήση της Γραμμικής στρατηγικής στα έργα της μακρινής γενίκευση και στην εύρεση του νιοστού όρου και στις τρεις σχολικές βαθμίδες. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές, σε επίπεδο σχολικής βαθμίδας έδειξαν μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στις πιο προηγμένες στρατηγικές (σε αυτή την περίπτωση τη Γραμμική στρατηγική) που είναι αποτελεσματικές στη γενίκευση των κανονικοτήτων και μικρότερη εμπιστοσύνη στις λιγότερο προηγμένες στρατηγικές (στην προκειμένη περίπτωση την στρατηγική της Μέτρησης).

Μια πιθανή εξήγηση για το εύρημα αυτό είναι η εμπειρία και η ηλικία των μαθητών. Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου στράφηκαν σε αποτελεσματικότερες στρατηγικές γενίκευσης όταν οι απαιτήσεις γενίκευσης των έργων αυξήθηκαν, σε αντίθεση με τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και κάποιους λίγους μαθητές από τη Β΄ Γυμνασίου. Προς στήριξη αυτής της εξήγησης, τα ευρήματα σε προηγούμενες μελέτες, που επικεντρώθηκαν στη διαφοροποίηση της χρήσης της στρατηγικής, δείχνουν ότι η εμπειρία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να τροποποιήσουν τις στρατηγικές τους με τέτοιο τρόπο που δείχνει μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στις πιο εκλεπτυσμένες στρατηγικές που υπάρχουν στο ρεπερτόριό τους, όπως η Γραμμική στρατηγική, και μικρότερη εμπιστοσύνη σε λιγότερο εκλεπτυσμένες στρατηγικές όπως η στρατηγική της Μέτρησης (Rivera, 2010; Stacey, 1989; Lannin et al., 2006). Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου, οι μαθητές που συμμετείχαν στη μελέτη αυτή, έχουν έρθει σε επαφή έμμεσα με τη γενίκευση κανονικοτήτων μέσω της έκθεσής τους σε αλγεβρικές έννοιες όπως οι μεταβλητές και οι εξισώσεις, κατά τη φοίτηση τους στην Α΄ Γυμνασίου και σε αλγεβρικές παραστάσεις, γραμμικές συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους στη Β΄ και στη Γ΄ Γυμνασίου. Συνεπώς, η έκθεση των μαθητών σε αυτά τα θέματα που σχετίζονται με τις κανονικότητες μπορεί να εξηγήσει την αύξηση της σχετικής συχνότητας χρήσης της Γραμμικής στρατηγικής και τη μείωση της στρατηγικής της Μέτρησης σε επίπεδο σχολικής βαθμίδας.

Το φαινόμενο αυτό, όπως φάνηκε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων για την $3^η$ ερώτηση των προβλημάτων του δοκιμίου της παρούσας έρευνας, ήταν εντονότερο όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν και να εκφράσουν τον κανόνα γενίκευσης για το εικονιστικό και το αριθμητικό πρόβλημα αντίστοιχα. Ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2 ανέδειξε το γεγονός ότι η σχέση ανάμεσα στη Σχολική Βαθμίδα και τον Κανόνα Γενίκευσης ήταν ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(6) = 25{,}363$, $p < 0{,}001$, $V = 0{,}445$).

Γενικά, διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές, στην πλειοψηφία τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, δυσκολεύτηκαν να βρουν έναν κανόνα γενίκευσης. Έτσι, περίπου οι μισοί μαθητές είτε δεν απάντησαν, είτε έδωσαν ασαφής απαντήσεις. Κανένας από τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, που κατασκεύασαν έναν κανόνα γενίκευσης, δεν χρησιμοποίησε αλγεβρικό συμβολισμό για να αποδώσει τον κανόνα γενίκευσης που κατασκεύασε. Αντίθετα, οι περισσότεροι μαθητές της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου, απέδωσαν τους κανόνες τους με αλγεβρικά σύμβολα.

Μια εύλογη εξήγηση για το εύρημα αυτό είναι, όπως και στη χρήση της στρατηγικής, η εμπειρία και η ηλικία. Προηγούμενες έρευνες, που είχαν ως στόχο να διερευνήσουν τις αντιλήψεις των μαθητών για τις δύο βασικές αλγεβρικές έννοιες – την ισότητα και τη μεταβλητή- έχουν ερμηνεύσει τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα να προκύπτουν λόγω του τρόπου με τον οποίο διδάχθηκαν αρχικά οι έννοιες αυτές στους μαθητές στα πλαίσια της αριθμητικής (Booth, 1988; Herscovics & Linchevski, 1996; MacGregor & Stacey, 1997). Γενικά, πολλοί ερευνητές συμφωνούν ότι κατά την εισαγωγή τους οι μαθητές στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης διαθέτουν πολλές γνώσεις και μεθόδους από την αριθμητική, η οποία έχει αρκετά κοινά στοιχεία με την άλγεβρα, αλλά και αρκετές διαφορές. Οι σχετικές έρευνες υποδεικνύουν ότι πολλοί μαθητές τείνουν να μεταφέρουν τους κανόνες της αριθμητικής στο αλγεβρικό πεδίο χωρίς καμία προσαρμογή, κυρίως εξαιτίας του γεγονότος ότι οι μοναδικές «εικόνες αριθμών», τις οποίες διαθέτουν οι μαθητές κατά την μετάβαση τους από την αριθμητική στην άλγεβρα, προέρχονται από την αριθμητική τους εμπειρία (Herscovics & Linchevski, 1994; Filloy & Rojano, 1989).

Οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής στη ΣΤ΄ Δημοτικού και μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου την έχουν συναντήσει και επεξεργαστεί μέσα σε πολλές και διαφορετικές αλγεβρικές εκφράσεις (πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ανισώσεις πρώτου βαθμού, ταυτότητες, ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, συναρτήσεις, γραμμικά συστήματα κ.α.). Έτσι, λόγω της μεγαλύτερης εμπειρίας τους με τον αλγεβρικό συμβολισμό, οι περισσότεροι μαθητές της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου ήταν σε θέση να αποδώσουν τις γενικεύσεις που έκαναν με την βοήθεια αλγεβρικών τύπων.

Στο επόμενο κεφάλαιο, συνθέτοντας τις ερμηνείες των αποτελεσμάτων των τριών πρώτων ερωτημάτων με βάση τον λειτουργικό ορισμό της αλγεβρικής σκέψης, όπως αυτός δόθηκε στην Αποσαφήνιση των όρων της παρούσας έρευνας, γίνεται μια προσπάθεια να σχηματιστεί μια εικόνα για τον αλγεβρικό συλλογισμό των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα.

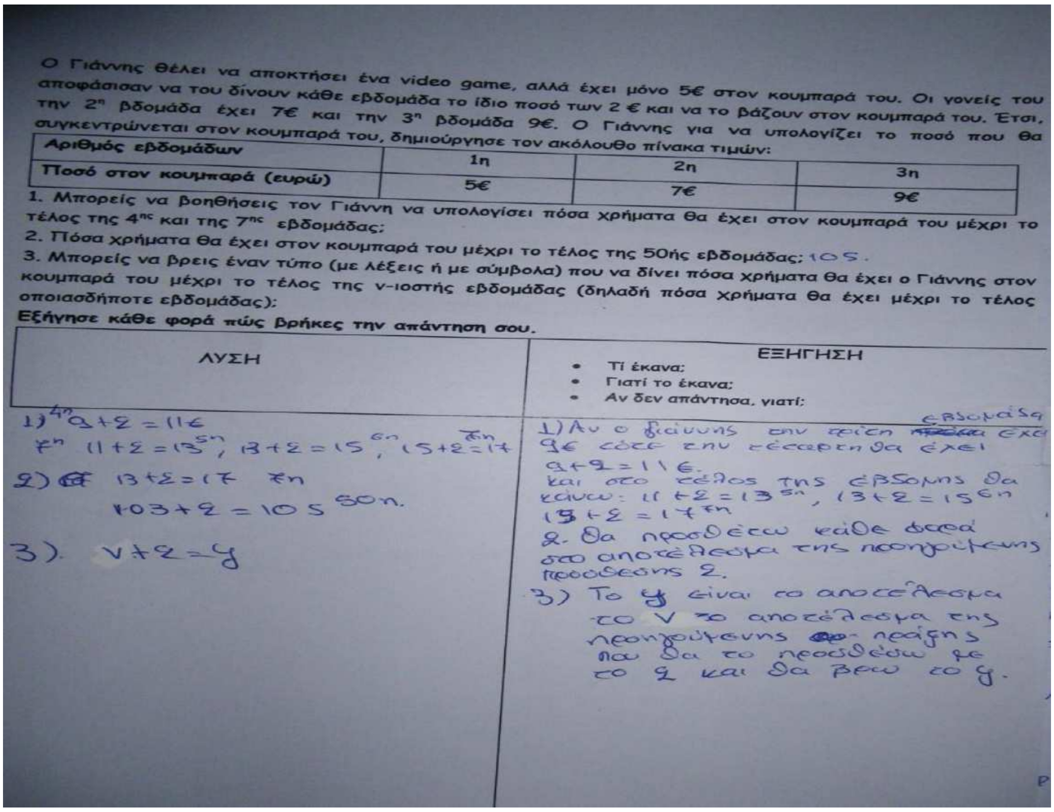
6. Η ανάδυση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μέσα από την προσπάθειά τους να Γενικεύσουν.

Η διαδικασία γενίκευσης που ακολούθησαν οι μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα συμφωνεί με την ερευνητική βιβλιογραφία. Το πρώτο στάδιο είναι πάντα λειτουργικό - οι μαθητές βρήκαν ομοιότητες στα μοτίβα (Radford, 2008) και τα χρησιμοποίησαν για να καθορίσουν ένα βασικό σύνολο κανόνων, το οποίο εφάρμοζαν επεκτείνοντας τη σειρά των μοτίβων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι όλοι οι μαθητές πέρασαν από αυτό το στάδιο, το οποίο είχε διαφορετικά ονόματα σε διαφορετικές πηγές, όπως η «γενίκευση της δράσης» (Ellis, 2007), η «εμπειρική γενίκευση» (Dörfler, 1991; Harel και Tall, 1991), «πραγματολογική γενίκευση» (Radford, 2001), κ.λπ. Το δεύτερο στάδιο γενίκευσης είναι εννοιολογικής φύσης. Σε αυτό το στάδιο, οι μαθητές καθορίζουν την υποκείμενη δομή της ακολουθίας των μοτίβων και τις σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, μεταβλητών και σταθερών. Αυτό το στάδιο ορίζεται στην ερευνητική βιβλιογραφία με διαφορετικά ονόματα, όπως «θεωρητική γενίκευση», «επίπεδο αναστοχασμού», κλπ. (Ellis 2007; Dörfler, 1991).

Αυτή η μελέτη έδειξε ότι το πρώτο στάδιο της γενίκευσης ήταν προσιτό σε μια μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών οι οποίοι και κατάφεραν να επιτύχουν αποτελέσματα σε εκείνα τα τμήματα των προβλημάτων γενίκευσης (συγκεκριμένα στην 1η και 2η ερώτηση) που απαιτούσαν ένα λειτουργικό επίπεδο γενίκευσης. Ωστόσο, το θεωρητικό-εννοιολογικό επίπεδο γενίκευσης επιτεύχθηκε μόνο από μερικούς από τους μαθητές. Εκείνοι που ολοκλήρωσαν με επιτυχία τα δύο προβλήματα γενίκευσης είναι μεταξύ εκείνων που κατέκτησαν το θεωρητικό-εννοιολογικό επίπεδο γενίκευσης.

Στο πρώτο στάδιο, οι μαθητές επέκτειναν την ακολουθία στον επόμενο όρο με βάση τον προηγούμενο. Για παράδειγμα, στο εικονιστικό και στο αριθμητικό πρόβλημα, ο επόμενος όρος της ακολουθίας βρίσκεται με την πρόσθεση 3 σπίρτων ή με την πρόσθεση 2 ευρώ στον προηγούμενο όρο, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την προσθετική στρατηγική της Μέτρησης, οι μαθητές έδειξαν σίγουρα μια ικανότητα να γενικεύουν. Επέδειξαν μια μέθοδο επέκτασης της ακολουθίας με λειτουργικό τρόπο και παρουσίασαν σημάδια της γενίκευσης της μεθόδου (Amit & Neria, 2007). Ωστόσο, η στρατηγική αυτή περιορίζεται σοβαρά λόγω της «τοπικού» χαρακτήρα της. Η ανίχνευση κάθε όρου της ακολουθίας απαιτεί την εύρεση του προηγούμενου από αυτόν όρου (Εικόνα 5).

Για παράδειγμα, αρκετοί μαθητές στο εικονιστικό πρόβλημα διαπίστωσαν, εξετάζοντας τους δοθέντες όρους, ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερή και ίση με 3 σπίρτα. Υπολόγισαν τους ζητούμενους όρους με διαδοχικές προσθέσεις της διαφοράς αυτής στον προηγούμενο, κάθε φορά, όρο. Κατά την εύρεση του Σ(50), λόγω του μεγάλου αριθμού προσθέσεων που έπρεπε να εκτελέσουν κάποιοι από αυτούς κατέληξαν σε «κοντινές» αλλά λανθασμένες απαντήσεις. Όσοι από αυτούς προσπάθησαν να γενικεύσουν επιμένοντας στη στρατηγική της Μέτρησης δυσκολευτήκαν στην εύρεση του νιοστού όρου και στη κατασκευή του κανόνα γενίκευσης. Έτσι κάποιοι δεν έδωσαν καμία απάντηση, ενώ άλλοι δήλωσαν λεκτικά ότι για να βρουν τον νιοστό όρο προσθέτουν 3 σπίρτα στον προηγούμενο όρο ή κατασκεύασαν έναν αναδρομικό κανόνα γενίκευσης της μορφής $Σ(ν) = ν+3$ εξηγώντας ότι, όπου ν είναι το πλήθος των σπίρτων του προηγούμενου σχήματος. Οι μαθητές αυτοί αντιμετώπισαν με τον ίδιο τρόπο και το αριθμητικό πρόβλημα.



Ο Γιάννης θέλει να αποκτήσει ένα video game, αλλά έχει μόνο 5€ στον κουμπαρά του. Οι γονείς του αποφάσισαν να του δίνουν κάθε εβδομάδα το ίδιο ποσό των 2 € και να το βάζουν στον κουμπαρά του. Έτσι, την 2η βδομάδα έχει 7€ και την 3η βδομάδα 9€. Ο Γιάννης για να υπολογίζει το ποσό που θα συγκεντρώνεται στον κουμπαρά του, δημιούργησε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

Αριθμός εβδομάδων	1η	2η	3η
Ποσό στον κουμπαρά (ευρώ)	5€	7€	9€

1. Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη να υπολογίσει πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της 4ης και της 7ης εβδομάδας;
2. Πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της 50ής εβδομάδας; 105.
3. Μπορείς να βρεις έναν τύπο (με λέξεις ή με σύμβολα) που να δίνει πόσα χρήματα θα έχει ο Γιάννης στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της ν-ιοστής εβδομάδας (δηλαδή πόσα χρήματα θα έχει μέχρι το τέλος οποιασδήποτε εβδομάδας);

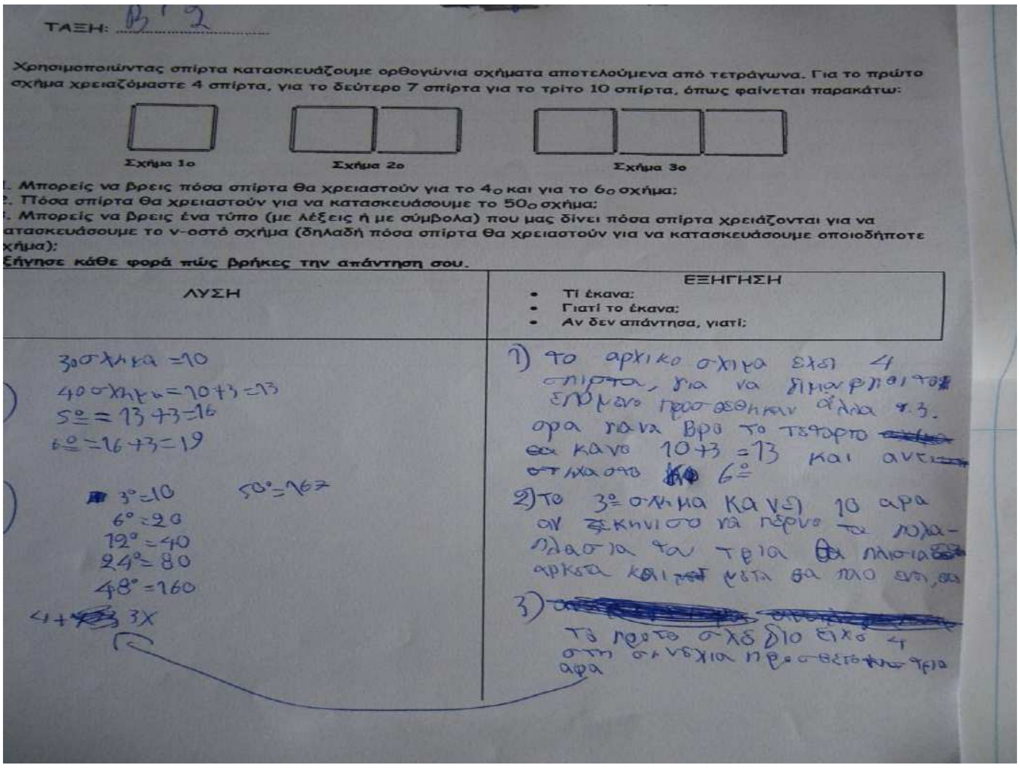
Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου.

ΛΥΣΗ	ΕΞΗΓΗΣΗ • Τί έκανα; • Γιατί το έκανα; • Αν δεν απάντησα, γιατί;
1) 4η 9+2=11€ 7η 11+2=13 5η, 13+2=15 6η, 15+2=17 7η 2) 13+2=17 7η 103+2=105 50η. 3). ν+2=y	1) Αν ο Γιάννης την τρίτη εβδομάδα έχει 9€ τότε την τέταρτη θα έχει 9+2=11€. και στο τέλος της έβδομης θα κάνω: 11+2=13 5η, 13+2=15 6η, 15+2=17 7η 2. Θα προσθέτω κάθε φορά στο αποτέλεσμα της προηγούμενης πρόσθεσης 2. 3) Το y είναι το αποτέλεσμα το ν το αποτέλεσμα της προηγούμενης πράξης που θα το προσθέσω με το 2 και θα βρω το y.

Εικόνα 5: Χρήση της στρατηγικής της Μέτρησης και αναδρομικού κανόνα γενίκευσης στο αριθμητικό πρόβλημα

Επομένως, η χρήση της αναδρομικής στρατηγικής της Μέτρησης βρέθηκε αποτελεσματική σε αυτή τη μελέτη μόνο για την εύρεση των έργων κοντινής γενίκευσης, ή ίσως (για λίγους μόνο μαθητές) και των έργων μακρινής γενίκευσης (πηγαίνοντας ακόμη και ως τον $50^{ο}$ όρο μιας ακολουθίας), αλλά διαπιστώθηκε ότι είναι ανεπαρκής πέρα από αυτό το περιορισμένο πεδίο εφαρμογής. Αν και υπάρχει μια γενίκευση σε αυτή τη διαδικασία, σύμφωνα με τον λειτουργικό ορισμό της παρούσας έρευνας, δεν είναι αλγεβρικής φύσης. Πρόκειται, σύμφωνα με τον Radford (2008), για γενίκευση, που παρόλο που μπορεί να εκφραστεί στο αλφαριθμητικό σύστημα της Άλγεβρας, δεν είναι αλγεβρική, αλλά αριθμητική.

Υπήρξαν και λιγοστοί μαθητές που, ενώ για τη εύρεση των έργων κοντινής γενίκευσης χρησιμοποίησαν την στρατηγική της Μέτρησης, την άλλαξαν με την στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου (Εικόνα 6). Οι μαθητές αυτοί ξεκίνησαν να υπολογίζουν το Σ(50) ή το Ε(50) με διαδοχικές προσθέσεις της κοινής διαφοράς στον προηγούμενο κάθε φορά όρο. Όταν διαπίστωσαν ότι δεν είχαν την υπολογιστική ευχέρεια για να εκτελέσουν τον μεγάλο αριθμό των προσθέσεων που απαιτούνταν έψαξαν να βρουν πιο «σύντομους» τρόπους για να φτάσουν στην λύση. Έτσι, κατέφυγαν στη μέθοδο της ευθείας αναλογίας. Υπέθεσαν ότι η σχέση ανάμεσα στη θέση του όρου και την τιμή του είναι αναλογική χωρίς να λάβουν υπόψη, τους περιορισμούς που η έχει προβληματική κατάσταση. Ορισμένοι, δηλαδή, μαθητές ακολουθούν επιφανειακές στρατηγικές όταν ασχολούνται με προβλήματα κανονικοτήτων ίσως γιατί ψάχνουν να βρουν «απλές και γρήγορες» γενικεύσεις που όμως δεν ισχύουν (Lannin et al., 2006). Όσοι χρησιμοποίησαν τη στρατηγική του Ολόκληρου Αντικειμένου δεν έγραψαν τον γενικό όρο του pattern ή έγραψαν μια λανθασμένη σχέση αφού η προσκόλληση στην ευθεία αναλογία δεν τους επέτρεψε να κατανοήσουν τη δομή των μοτίβων.



ΤΑΞΗ: Β' 2

Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ορθογώνια σχήματα αποτελούμενα από τετράγωνα. Για το πρώτο σχήμα χρειαζόμαστε 4 σπίρτα, για το δεύτερο 7 σπίρτα για το τρίτο 10 σπίρτα, όπως φαίνεται παρακάτω:

Σχήμα 1ο Σχήμα 2ο Σχήμα 3ο

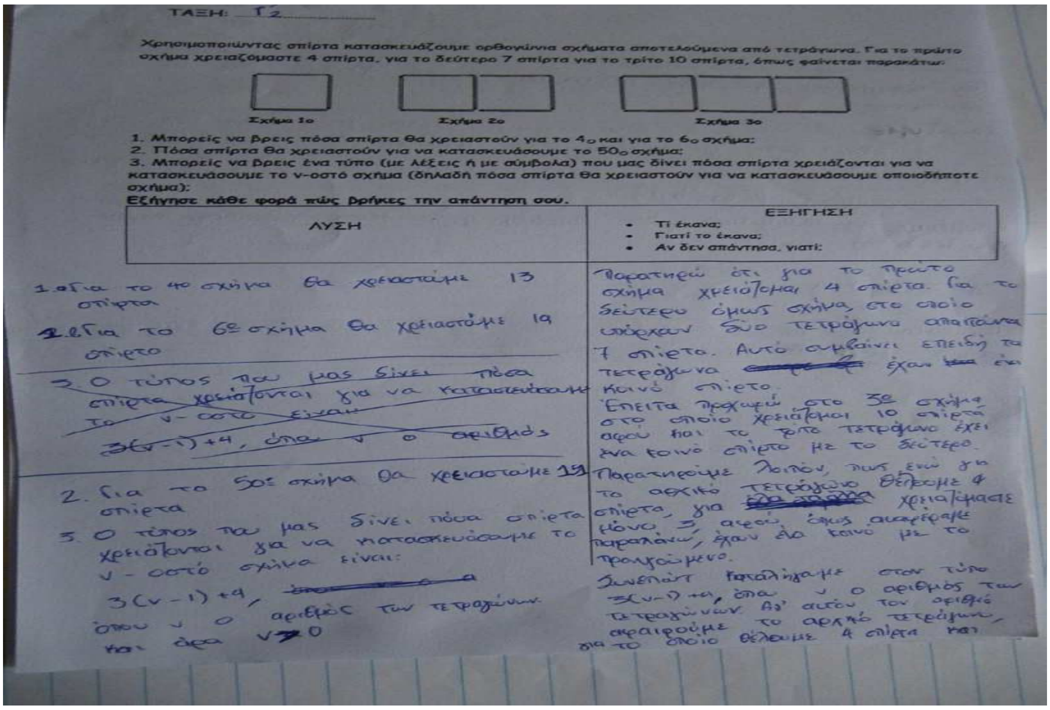
1. Μπορείς να βρεις πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για το 4ο και για το 6ο σχήμα;
2. Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 50ο σχήμα;
3. Μπορείς να βρεις ένα τύπο (με λέξεις ή με σύμβολα) που μας δίνει πόσα σπίρτα χρειάζονται για να κατασκευάσουμε το ν-οστό σχήμα (δηλαδή πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε σχήμα);

Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου.

ΛΥΣΗ	ΕΞΗΓΗΣΗ • Τι έκανα; • Γιατί το έκανα; • Αν δεν απάντησα, γιατί;
1) 3ο σχήμα =10 4ο σχήμα =10+3=13 5ο =13+3=16 6ο =16+3=19	1) το αρχικο σχημα εχει 4 σπιρτα, για να δημιουργηθει το επομενο προσθεσαν αλλα 3. αρα για να βρω το τεταρτο θα κανω 10+3=13 και αντιστιχα στο 6ο
2) 3ο=10 50ο=167 6ο=20 12ο=40 24ο=80 48ο=160	2) το 3ο σχημα κανει 10 αρα αν ξεκινισω να περνω τα πολαπλασια του τρια θα πλισιαζω αρκετα και μετα θα πω [illegible]
4+3X	3) το πρωτο σχεδιο εχει 4 στη συνεχια προσθετουν τρια αρα

Εικόνα 6: Χρήση στρατηγικής Ολόκληρου Αντικειμένου στο εικονιστικό πρόβλημα

Η Γραμμική στρατηγική βρέθηκε ότι είναι ανυπολόγιστα πιο αποτελεσματική από την στρατηγική της Μέτρησης. Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική, οι μαθητές αναγνώρισαν και όρισαν δύο κεντρικά στοιχεία στην ακολουθία των μοτίβων - αυτά που αλλάζουν (ή τις μεταβλητές) και αυτά που παραμένουν ίδια (ή τις σταθερές). Στο δεύτερο στάδιο, οι μαθητές βρήκαν μια σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών και των σταθερών, ορίζοντας ουσιαστικά την μεταξύ τους εξάρτηση (Εικόνα 8). Για παράδειγμα, στο αριθμητικό πρόβλημα, οι μαθητές ορίζουν το ποσό των χρημάτων στο κουμπαρά ως μεταβλητή, μαζί με την θέση (αριθμός εβδομάδων) του όρου στην ακολουθία. Η αναγνώριση του τι μένει σταθερό και του τι αλλάζει/μεταβάλλεται και πώς αλλάζει οδήγησε τους μαθητές σε διαφορετικές, αλλά ισοδύναμες, γραμμικές σχέσεις.



ΤΑΞΗ: Γ2

Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ορθογώνια σχήματα αποτελούμενα από τετράγωνα. Για το πρώτο σχήμα χρειαζόμαστε 4 σπίρτα, για το δεύτερο 7 σπίρτα για το τρίτο 10 σπίρτα, όπως φαίνεται παρακάτω:

Σχήμα 1ο Σχήμα 2ο Σχήμα 3ο

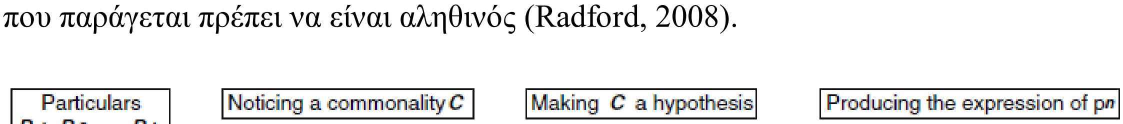
1. Μπορείς να βρεις πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για το 4ο και για το 6ο σχήμα;
2. Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 50ο σχήμα;
3. Μπορείς να βρεις ένα τύπο (με λέξεις ή με σύμβολα) που μας δίνει πόσα σπίρτα χρειάζονται για να κατασκευάσουμε το ν-οστό σχήμα (δηλαδή πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε σχήμα);

Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου.

ΛΥΣΗ	ΕΞΗΓΗΣΗ • Τι έκανα; • Γιατί το έκανα; • Αν δεν απάντησα, γιατί;
1.α Για το 4ο σχήμα θα χρειαστούμε 13 σπίρτα 1.β Για το 6ο σχήμα θα χρειαστούμε 19 σπίρτο ~~3. Ο τύπος που μας δίνει πόσα σπίρτα χρειάζονται για να κατασκευάσουμε το ν-οστό είναι 3(ν-1)+4, όπου ν ο αριθμός~~ 2. Για το 50ο σχήμα θα χρειαστούμε 151 σπίρτα 3. Ο τύπος που μας δίνει πόσα σπίρτα χρειάζονται για να κατασκευάσουμε το ν-οστό σχήμα είναι: 3(ν-1)+4, όπου ν ο αριθμός των τετραγώνων και άρα ν>0	Παρατηρώ ότι για το πρώτο σχήμα χρειάζομαι 4 σπίρτα. Για το δεύτερο όμως σχήμα, στο οποίο υπάρχουν δύο τετράγωνα απαιτούνται 7 σπίρτα. Αυτό συμβαίνει επειδή τα τετράγωνα έχουν ένα κοινό σπίρτο. Έπειτα προχωρώ στο 3ο σχήμα στο οποίο χρειάζομαι 10 σπίρτα αφού και το τρίτο τετράγωνο έχει ένα κοινό σπίρτο με το δεύτερο. Παρατηρούμε λοιπόν, πως ενώ για το αρχικό τετράγωνο θέλουμε 4 σπίρτα, για χρειαζόμαστε μόνο 3, αφού, όπως αναφέραμε παραπάνω, έχουν ένα κοινό με το προηγούμενο. Συνεπώς καταλήγαμε στον τύπο 3(ν-1)+4, όπου ν ο αριθμός των τετραγώνων. Απ' αυτόν τον αριθμό αφαιρούμε το αρχικό τετράγωνο, για το οποίο θέλουμε 4 σπίρτα και

Εικόνα 7: Χρήση Γραμμικής στρατηγικής στο εικονιστικό πρόβλημα.

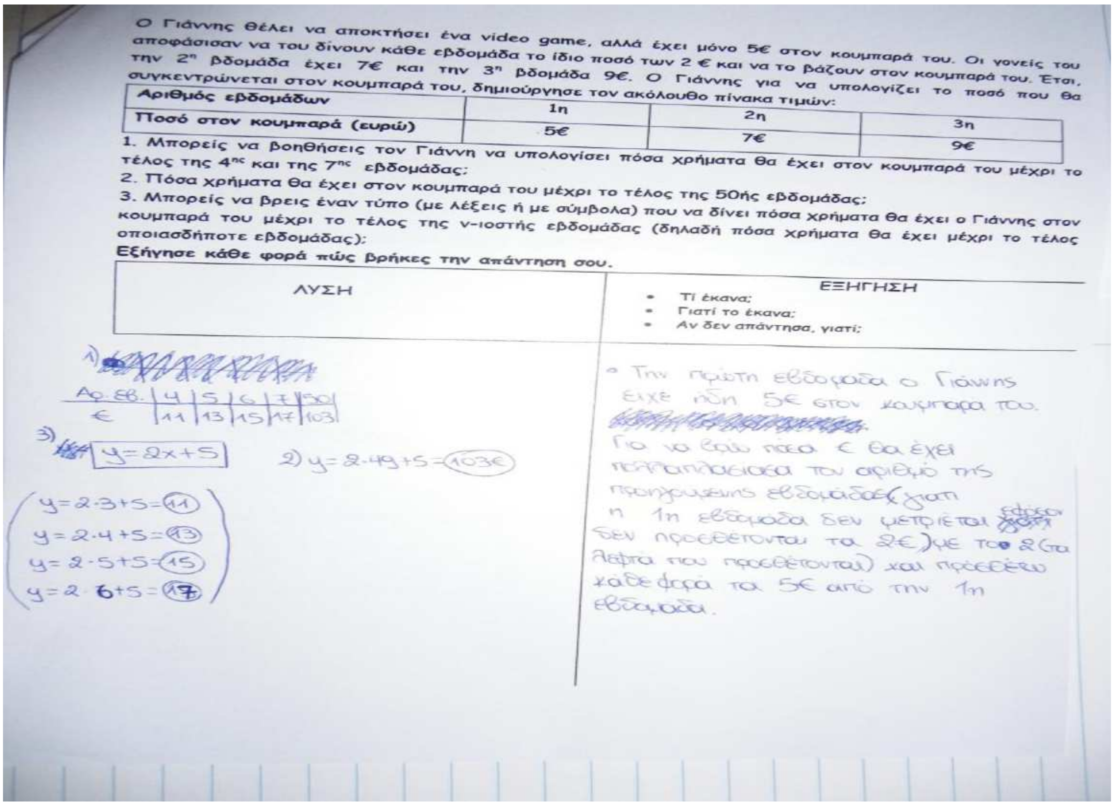
Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη Γραμμική στρατηγική έφτασαν στα σωστά αποτελέσματα στα έργα μακρινής γενίκευσης, ακόμα και όταν αυτό σήμαινε την εύρεση του $50^{ου}$ όρου της ακολουθίας. Επιπλέον, η Γραμμική στρατηγική τους οδήγησε σε μια μέθοδο για την εύρεση του νιοστού όρου της ακολουθίας. Εδώ, οι μαθητές συνήγαγαν μια ομοιότητα C από μερικές συγκεκριμένες περιπτώσεις (Εικόνα 8). Στη συνέχεια, αυτή η ομοιότητα (σιωπηρά) γενικεύτηκε στους υπόλοιπους όρους της ακολουθίας. Η απαγωγή C έγινε μια υπόθεση και στη συνέχεια υπολογίστηκε ο κανόνας. Έτσι, υπό την προϋπόθεση ότι το C είναι αληθές, ο τύπος που παράγεται πρέπει να είναι αληθινός (Radford, 2008).



Εικόνα 8: Η αρχιτεκτονική της αλγεβρικής γενίκευσης μοτίβων (Radford, 2007, σελ.85).

Για παράδειγμα, στο εικονιστικό πρόβλημα του δοκιμίου με τα σπίρτα, ορισμένοι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου μελετώντας τους τρείς πρώτους όρους της ακολουθίας παρατήρησαν ότι ο αριθμός των τετραγώνων στο κάθε σχήμα είναι ίσος με τον αριθμό της θέσης του σχήματος στην ακολουθία. Επίσης, παρατήρησαν ότι για να κατασκευαστεί κάθε ένα από αυτά, χρειάζεται 3 σπίρτα λόγω της επικάλυψης των πλευρών, εκτός από το 1ο που χρειάζεται ένα επιπλέον (ομοιότητα C). Ακολούθως, υπέθεσαν ότι το νιοστό σχήμα αποτελείται από ν τετράγωνα, κάθε ένα από τα οποία χρειάζεται 3 σπίρτα για να κατασκευαστεί λόγω της επικάλυψης των πλευρών, εκτός από το 1ο που χρειάζεται ένα επιπλέον (η απαγωγή C μετατρέπεται σε υπόθεση). Τέλος, εξήγαγαν τον νιοστό όρο με την βοήθεια της υπόθεσης που είχαν κάνει και κατασκεύασαν τον κανόνα γενίκευσης Σ(ν) = 3·ν + 1.

Όμοια, στο αριθμητικό πρόβλημα (Εικόνα 9), υπήρξαν μαθητές που παρατήρησαν από τους δοθέντες τρεις πρώτους όρους ότι, αυτό που μένει σταθερό είναι τα 5€ που υπήρχαν την 1η εβδομάδα στον κουμπαρά στα οποία προσθέτονται 2€ στο τέλος κάθε επόμενης εβδομάδας (ομοιότητα C). Υπέθεσαν, λοιπόν, ότι για να υπολογίσουν το σύνολο των χρημάτων που θα έχει ο Γιάννης στο κουμπαρά του στο τέλος της νιοστής εβδομάδας θα έπρεπε από το σύνολο των ν εβδομάδων να αφαιρέσουν την πρώτη και να πολλαπλασιάσουν τις υπόλοιπες με τα 2€ που μπαίνουν στον κουμπαρά στο τέλος κάθε εβδομάδας και να προσθέσουν τα 5€ της αρχικής εβδομάδας (η απαγωγή C μετατρέπεται σε υπόθεση). Από την υπόθεση αυτή συνήγαγαν τον νιοστό όρο και τον κανόνα γενίκευσης Ε(ν) = 2·(ν-1) + 5.


Ο Γιάννης θέλει να αποκτήσει ένα video game, αλλά έχει μόνο 5€ στον κουμπαρά του. Οι γονείς του αποφάσισαν να του δίνουν κάθε εβδομάδα το ίδιο ποσό των 2 € και να το βάζουν στον κουμπαρά του. Έτσι, την 2η βδομάδα έχει 7€ και την 3η βδομάδα 9€. Ο Γιάννης για να υπολογίζει το ποσό που θα συγκεντρώνεται στον κουμπαρά του, δημιούργησε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

Αριθμός εβδομάδων	1η	2η	3η
Ποσό στον κουμπαρά (ευρώ)	5€	7€	9€

1. Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη να υπολογίσει πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της 4ης και της 7ης εβδομάδας;
2. Πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της 50ής εβδομάδας;
3. Μπορείς να βρεις έναν τύπο (με λέξεις ή με σύμβολα) που να δίνει πόσα χρήματα θα έχει ο Γιάννης στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της ν-ιοστής εβδομάδας (δηλαδή πόσα χρήματα θα έχει μέχρι το τέλος οποιασδήποτε εβδομάδας);

Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου.

ΛΥΣΗ	ΕΞΗΓΗΣΗ
1) ~~[illegible]~~ Αρ. εβ. | 4 | 5 | 6 | 7 | 50 € | 11 | 13 | 15 | 17 | 103 3) $\boxed{y=2x+5}$ 2) $y=2\cdot 49+5=103€$ $y=2\cdot 3+5=11$ $y=2\cdot 4+5=13$ $y=2\cdot 5+5=15$ $y=2\cdot 6+5=17$	• Τι έκανα; • Γιατί το έκανα; • Αν δεν απάντησα, γιατί; • Την πρώτη εβδομάδα ο Γιάννης είχε ήδη 5€ στον κουμπαρά του. ~~[illegible]~~ Για να βρω πόσα € θα έχει πολλαπλασίασα τον αριθμό της προηγούμενης εβδομάδας (γιατί η 1η εβδομάδα δεν μετριέται εφόσον δεν προσθέτονται τα 2€) με το 2 (τα λεφτά που προσθέτονται) και πρόσθεσα κάθε φορά τα 5€ από την 1η εβδομάδα.

Εικόνα 9: Χρήση Γραμμικής στρατηγικής στο αριθμητικό πρόβλημα.

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι περισσότεροι από τους μαθητές που κατάφεραν να γενικεύσουν αλγεβρικά ήταν μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η σχολική βαθμίδα (και συνεπώς η εμπειρία) παίζει μεγάλο ρόλο στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού των μαθητών.

7. Συμπεράσματα

Με την παρούσα έρευνα έγινε μια προσπάθεια να εξεταστεί αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων (Α΄, Β΄, Γ΄) του Γυμνασίου μπορούν να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης κανονικοτήτων. Διερευνήθηκαν οι μέθοδοι που επινοούν οι μαθητές για να γενικεύσουν και πώς αυτές διαφοροποιούνται σε έργα κοντινής και μακρινής γενίκευσης. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών βασίστηκε στις στρατηγικές και τους ορισμοί τους όπως αυτοί παρουσιάζονται στην εργασία της Stacey (1989). Επίσης, διερευνήθηκε αν οι μαθητές είναι σε θέση να βρουν τον νιοστό όρο και να κατασκευάσουν έναν γενικευμένο κανόνα είτε λεκτικά, είτε συμβολικά. Συνθέτοντας τα παραπάνω ευρήματα, έγινε μια προσπάθεια να αναδειχθεί ο ρόλος της γενίκευσης των κανονικοτήτων ως ένα σημαντικό μέσο που αναδεικνύει και προάγει την αλγεβρική σκέψη των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην Ελλάδα.

Οι απαντήσεις των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα έδειξαν ότι τα προβλήματα γενίκευσης αναπτυσσόμενων γραμμικών κανονικοτήτων δυσκόλεψαν και τις τρεις υπό μελέτη σχολικές βαθμίδες. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν συνήθως ήταν οι ίδιες σε όλες τις σχολικές βαθμίδες και στις τρεις ερωτήσεις των δύο προβλημάτων του δοκιμίου, αν και η συχνότητα χρήσης κάθε στρατηγικής από τους μαθητές ποικίλει.

Η διαφοροποίηση στη χρήση κάποιας στρατηγικής ανά τύπο γενίκευσης παρατηρήθηκε σε μεγάλο βαθμό και στα δύο προβλήματα του δοκιμίου από τους μαθητές και των τριών σχολικών βαθμίδων. Η τάση αυτή των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα μπορεί να εξηγηθεί από διάφορους παράγοντες όπως η ίδια η φύση της στρατηγικής, οι απαιτήσεις του έργου, ο τύπος γενίκευσης και/ή η προηγούμενη εμπειρία και γνώση των μαθητών.

Η πλειοψηφία των μαθητών δυσκολεύτηκε να κατασκευάσει έναν κανόνα γενίκευσης. Οι μαθητές ήταν ικανοί να παρατηρήσουν τη δομή του μοτίβου και τη συμμετοχή στη γενίκευση του, αλλά παρουσίασαν δυσκολίες στην έκφραση της δομής. Δηλαδή, ενώ οι μαθητές δεν δυσκολεύονταν να περιγράψουν προφορικά το μοτίβο δεν ήταν σε θέση να προσφέρουν μία αλγεβρική περιγραφή για αυτό.

Επίσης, στην παρούσα έρευνα φάνηκε, όπως και σε προγενέστερες έρευνες, πως η επιφανειακή κατανόηση των πράξεων, η προσκόλληση σε αναδρομικές προσεγγίσεις ή σε ανακριβείς αναλογικούς συλλογισμούς, απέτρεψε τους μαθητές από τον προσδιορισμό της γενικής δομής των κανονικοτήτων.

Τέλος, διαπιστώθηκε ότι μέσω της γενίκευσης κανονικοτήτων είναι δυνατόν να αναδυθεί η αλγεβρική σκέψη των μαθητών. Έτσι, στην παρούσα έρευνα βρέθηκε ότι αρκετοί μαθητές, κυρίως από τη Γ΄ Γυμνασίου, κατάφεραν να φτάσουν σε μια αλγεβρική γενίκευση. Κατάφεραν, δηλαδή, να γενικεύσουν μοτίβα με τη ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών, και μέσα από τον εντοπισμό του κανόνα που περιγράφει τη σχέση, να εκφράσουν αυτές τις γενικεύσεις με οποιοδήποτε μέσο (π.χ. φυσική γλώσσα, αλγεβρικά σύμβολα) και να αιτιολογούν τις γενικεύσεις τους. Όμως, πολλοί μαθητές έμειναν προσκολλημένοι σε αναδρομικές προσεγγίσεις των μοτίβων με αποτέλεσμα οι γενικεύσεις τους να είναι, όχι αλγεβρικές, αλλά αριθμητικές. Εδώ, ο κανόνας γενίκευσης προέκυψε ύστερα από πράξεις με συγκεκριμένους αριθμούς.

Συμπερασματικά, μέσα από την παρούσα εργασία αναδεικνύεται η σημαντικότητα της έννοιας των μοτίβων και υποστηρίζεται η ένταξή τους ως εργαλεία για την ανάδειξη και την ανάπτυξη της επαγωγικής σκέψης των παιδιών και της κατανόησης των αφαιρετικών σχέσεων που εμπεριέχονται στις μαθηματικές δομές. Οι εκπαιδευτικές διαστάσεις της μελέτης των μοτίβων απασχολεί πολλούς ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών επειδή εκτός από κεντρική μαθηματική έννοια αποτελεί και σημαντικό εκπαιδευτικό μέσο.

Η έννοια του μοτίβου και ο τρόπος με τον οποίο αυτό επεκτείνεται ή συνεχίζεται εισάγεται στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση, στο εξωτερικό και στην Ελλάδα, από πολύ νωρίς. Σύμφωνα με το ΑΠΣ του Δημοτικού, η αναγνώριση μοτίβων θεωρείται μαθησιακός άξονας που στηρίζει τόσο την Αριθμητική όσο και την Άλγεβρα. Ωστόσο, όταν σε μεταγενέστερο χρόνο από την χορήγηση του δοκιμίου, η εκπαιδευτικός των τμημάτων που συμμετείχαν στην έρευνα ζήτησε (έπειτα από παράκληση της ερευνήτριας) από τους μαθητές να συζητήσουν την εμπειρία τους, το πρώτο ζήτημα που τέθηκε ήταν ότι αυτοί (οι μαθητές) δεν είχαν ξαναδεί ή διδαχθεί μοτίβα γι’ αυτό και δυσκολεύτηκαν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των προβλημάτων. Επομένως, η απλή ένταξη των κανονικοτήτων στα σχολικά μαθηματικά δεν εξασφαλίζει, ασφαλώς, την ανάπτυξη των επιθυμητών ικανοτήτων από τα παιδιά. Κεντρικό ρόλο έχει η διδακτική διαχείριση των κανονικοτήτων από τον εκπαιδευτικό.

Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην περίπτωση της αξιοποίησης των κανονικοτήτων για την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης, καθώς η σχέση ανάμεσά τους δεν είναι ούτε προφανής, ούτε εύκολα μεταφράσιμη σε διδακτική πράξη. Μάλιστα, αυτό γίνεται εντονότερο όταν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί εμφανίζονται να έχουν περιορισμένη αίσθηση της χρήσης τους και της αποτελεσματικότητάς τους στις μαθηματικές δραστηριότητες που ενισχύουν τον αλγεβρικό συλλογισμό (Zazkis, & Liljedahk, 2002). Επομένως, η μύηση των μελλοντικών εκπαιδευτικών στις κανονικότητες και η προετοιμασία τους για τη διδασκαλία τους είναι ένα ζητούμενο στο χώρο της εκπαίδευσης εκπαιδευτικών.

Ένα ακόμη σημαντικό εύρημα της παρούσας εργασίας είναι ότι, η αυξανόμενη εμπειρία των μαθητών με τις κανονικότητες έχει θετική επίδραση στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού τους. Επιπλέον, η καθυστέρηση στην ενασχόληση με τα μοτίβα και την αναζήτηση και αναγνώριση δομικών στοιχείων μέσα από αυτά αιτιολογεί τις δυσκολίες των μεγαλύτερων παιδιών στην Άλγεβρα (Mulligan, & Mitchelmore, 2009). Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η Άλγεβρα θεωρείται ότι είναι μια διαδρομή για τα ανώτερα μαθηματικά, αλλά συγχρόνως αποτελεί και εμπόδιο για πολλούς μαθητές, που τους αναγκάζει να πάρουν μιαν άλλη εκπαιδευτική κατεύθυνση. Γι’ αυτό και η ανάπτυξη της αλγεβρικής συλλογιστικής είναι ένας από τους βασικούς στόχους των Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών όλων των βαθμίδων. Η θέση και ο ρόλος της Άλγεβρας στα σχολικά Μαθηματικά σήμερα εξετάζεται από πολλές πλευρές και ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλία της, φαίνεται ότι έχει ανάγκη ενός θεμελιακά νέου τρόπου αντιμετώπισης. Ίσως, λοιπόν, θα ήταν σκόπιμο η μελέτη των κανονικοτήτων να ενταχθεί ως μαθησιακός άξονας και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου.

Βέβαια, λόγω των λιγοστών ερευνητικών δεδομένων που υπάρχουν στην Ελλάδα για την γενίκευση κανονικοτήτων από μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης θα πρέπει να υπάρξει εκτεταμένη έρευνα στο συγκεκριμένο μαθητικό πληθυσμό. Στις μελλοντικές μελέτες, οι ερευνητές θα μπορούσαν να σχεδιάσουν ποσοτικές μελέτες παρόμοιες με την παρούσα έρευνα, άλλα σε μεγαλύτερα και πιο αντιπροσωπευτικά δείγματα μαθητών γεγονός που θα επέτρεπε την επίτευξη γενικότερων συμπερασμάτων. Επίσης, σε δεύτερη φάση, θα μπορούσαν να σχεδιαστούν διδακτικά πειράματα που θα είχαν ως στόχο την εισαγωγή των μαθητών της δευτεροβάθμιας σε διάφορες έννοιες της Άλγεβρας που παραδοσιακά δυσκολεύουν τους μαθητές. Τα αποτελέσματα των ερευνών και των πειραμάτων αυτών θα αποτελούσαν την βάση για την σωστή διδακτική αξιοποίηση της μελέτης των κανονικοτήτων στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας.

Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα έρευνα επιχείρησε να εξετάσει αν οι μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων του Γυμνασίου μπορούν να φτάσουν σε αλγεβρική γενίκευση κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα γενίκευσης κανονικοτήτων. Κατά την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας υπήρξαν κάποιοι περιορισμοί, στους οποίους κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά.

Στην έρευνα συμμετείχαν 61 μαθητές τριών τμημάτων (ένα της Α΄, ένα της Β΄, και ένα της Γ΄ Γυμνασίου) ενός Δημόσιου Γυμνασίου της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Ο αριθμός των συμμετεχόντων ήταν μικρός. Επιπρόσθετα, η επιλογή των υποκειμένων δεν πραγματοποιήθηκε με τυχαία δειγματοληψία, αλλά η επιλογή έγινε με βάση τη δυνατότητα πρόσβασης στο συγκεκριμένο σχολείο Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στο οποία υπήρχε η σύμφωνη γνώμη της διευθύντριας και της εκπαιδευτικού των τριών τμημάτων για τη χορήγηση των δοκιμίων. Οπότε, το δείγμα της έρευνας ήταν όχι μόνο μικρό αλλά και βολικό. Για το λόγο αυτό, τα αποτελέσματα δεν είναι δυνατό να γενικευτούν για όλους τους μαθητές της Ελλάδας, αλλά αφορούν μόνο στα υποκείμενα της παρούσας εργασίας.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η ερμηνείες τους προέκυψαν από τη μελέτη των δοκιμίων των μαθητών και τη σχετική με το θέμα βιβλιογραφία. Τα ευρήματα αυτά ίσως θα μπορούσαν να υποστηριχτούν καλύτερα, αν συνοδευόταν από συνεντεύξεις των μαθητών. Η μεγάλη χρονική διάρκεια που θα απαιτούνταν για την διεξαγωγή των ατομικών συνεντεύξεων σε συνδυασμό με τους χρονικούς περιορισμούς που επέβαλλε η εύρυθμη λειτουργία του σχολείου είχε ως συνέπεια η συλλογή των δεδομένων να γίνει μόνο μέσω της χορήγησης του δοκιμίου. Για τον λόγο αυτό η παρούσα έρευνα περιορίστηκε στην ποσοτική μόνο ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Amit, M., & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005, July). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. In *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education, University of Melbourne, Australia* (Vol. 2, pp. 129-136).

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 121-128.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006, July). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 465-472). Prague,, Czech Republic: Charles University.

Bell J. (1999). *Μεθοδολογικός σχεδιασμός παιδαγωγικής και κοινωνικής έρευνας*. Gutenberg.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12*, 20-32.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.

Creswell, J. W. (2002). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61-85). Springer, Dordrecht.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM*, *40*(1), 143-160.

Drijvers, P., Dekker, T., & Wijers, M. (2011). Patterns and formulas. In *Secondary algebra education* (pp. 89-100). Sense Publishers.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 194-229.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308-345.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, *9*(2), 19-25.

Garcia-Cruz, J. A., & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 2-329).

GÜNER, P., ERSOY, E., & TEMİZ, T. (2013). 7TH AND 8TH GRADE STUDENTSGENERALIZATION STRATEGIES OF PATTERNS. *International journal of global education*, *2*(4).

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics*, *11*(1), 38-42.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59-78.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145-168). Routledge.

Kaput, J. J. (2017). What is algebra? What is algebraic reasoning?. In *Algebra in the early grades* (pp. 27-40). Routledge.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2017). 2 Algebra From a Symbolization Point of View. In *Algebra in the early grades* (pp. 19-56). Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: an international journal*, *5*(3), 233-250. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486147

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 299-317.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1992). A comparison of Pattern-Based and Equation-Solving Approaches to Algebra. In B. Southwell, K. Owens, & B. Perry(Eds.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 362-371)*. Brisbane, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer, Dordrecht.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Paul Chapman Educational Publishing.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, *33*(2), 203-233.

Radford, L. (2000). Students' processes of symbolizing in algebra. In *Proceedings of the 24th PME Conference* (pp. 81-88).

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2001, July). On the relevance of semiotics in mathematics education. In *Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 25th PME International Conference* (pp. 12-17).

Radford, L. (2001, July). Factual, Contextual and symbolic generalizations in algebra. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-81).

Radford, L., & Peirce, C. S. (2006, November). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter* (Vol. 1, pp. 2-21).

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 83—96

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 140-155.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, *40*(1), 65-82.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In *Early algebraization* (pp. 323-366). Springer, Berlin, Heidelberg.

Rivera, F. D. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics. *New York, NY*.

Sasman, M. C., Linchevski, L., & Olivier, A. (1999, January). The influence of different representations on children’s generalisation thinking processes. In *Proceedings of the 7th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (pp. 406-415).

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Springer, Dordrecht.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students’ representations for pictorial growth and change problems. *ZDM*, *40*(1), 97-110.

Van de Walle, (2007). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentaly* (7th ed.). New York: Pearson Education, Inc.

Zazkis, R., & Liljedahk, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, *49*(3), 379-402.

Δ.Ε.Π.Π.Σ., (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Δράμαλης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τεύχος 11, σελ. 100-114.

Καλδρυμίδου, Μ. (2000). Γνωστικά και επιστημολογικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας γενίκευσης στα σχολικά μαθηματικά. Στο βιβλίο, *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, 2000. σελ.245-253.

Κασσώτη, Ό., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού: Βιβλίο δασκάλου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

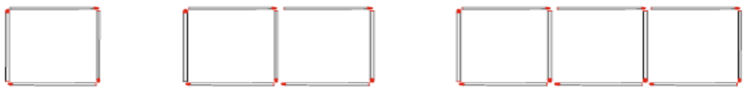
Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ’* Τόμος 13, Τεύχος 45, σσ. 61-70.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: Το Δοκίμιο της έρευνας

1^{Ο} ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΕΙΚΟΝΙΣΤΙΚΟ)

ΤΑΞΗ: ………………………………

Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ορθογώνια σχήματα αποτελούμενα από τετράγωνα. Για το πρώτο σχήμα χρειαζόμαστε 4 σπίρτα, για το δεύτερο 7 σπίρτα για το τρίτο 10 σπίρτα, όπως φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 1ο Σχήμα 2ο Σχήμα 3ο

1. Μπορείς να βρεις πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για το $4_{ο}$ και για το $6_{ο}$ σχήμα;
2. Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το $50_{ο}$ σχήμα;
3. Μπορείς να βρεις ένα τύπο (με λέξεις ή με σύμβολα) που μας δίνει πόσα σπίρτα χρειάζονται για να κατασκευάσουμε το ν-οστό σχήμα (δηλαδή πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε σχήμα);

Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου.

ΛΥΣΗ	ΕΞΗΓΗΣΗ • Τί έκανα; • Γιατί το έκανα; • Αν δεν απάντησα, γιατί;

2^{Ο} ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ)

Ο Γιάννης θέλει να αποκτήσει ένα video game, αλλά έχει μόνο **5€** στον κουμπαρά του. Οι γονείς του αποφάσισαν να του δίνουν κάθε εβδομάδα το ίδιο ποσό των 2 € και να το βάζουν στον κουμπαρά του. Έτσι, την $2^{η}$ βδομάδα έχει **7€** και την $3^{η}$ βδομάδα **9€**. Ο Γιάννης για να υπολογίζει το ποσό που θα συγκεντρώνεται στον κουμπαρά του, δημιούργησε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

Αριθμός εβδομάδων	1η	2η	3η
Ποσό στον κουμπαρά (ευρώ)	**5€**	**7€**	**9€**

1. Μπορείς να βοηθήσεις τον Γιάννη να υπολογίσει πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της $4^{ης}$ και της $7^{ης}$ εβδομάδας;
2. Πόσα χρήματα θα έχει στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της 50ής εβδομάδας;
3. Μπορείς να βρεις έναν τύπο (με λέξεις ή με σύμβολα) που να δίνει πόσα χρήματα θα έχει ο Γιάννης στον κουμπαρά του μέχρι το τέλος της ν-ιοστής εβδομάδας (δηλαδή πόσα χρήματα θα έχει μέχρι το τέλος οποιασδήποτε εβδομάδας);

Εξήγησε κάθε φορά πώς βρήκες την απάντηση σου.

ΛΥΣΗ	ΕΞΗΓΗΣΗ • Τί έκανα; • Γιατί το έκανα; • Αν δεν απάντησα, γιατί;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: **Πίνακας Ι: Πλήθος και ποσοστά χρήσης στρατηγικών ανά ερώτηση και Σχ. Βαθμίδα.**

	Σχολική Βαθμίδα	Εικονιστικό πρόβλημα			Αριθμητικό πρόβλημα				
Στρατηγική		**Σ(4) & Σ(6)**	**Σ(50)**	**Σ(ν)**	**Ε(4) & Ε(7)**	**Ε(50)**	**Ε(ν)**	**Υποσύνολα**	**Σύνολο**
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	2	4	14	1	3	8	32	
		3%	7%	23%	2%	5%	13%	9%	
Αταξινόμητη	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	6	9	1	5	8	29	
		0%	10%	15%	2%	8%	13%	8%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	1	2	7	1	2	7	20	81
		2%	3%	11%	2%	3%	11%	5%	22%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	16	4	0	19	6	4	49	
		26%	7%	0%	31%	10%	7%	13%	
Μέτρηση	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	16	2	3	17	4	5	47	
		26%	3%	5%	28%	7%	8%	13%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	16	4	4	16	2	5	47	143
		26%	7%	7%	26%	3%	8%	13%	39%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	4	1	0	4	4	13	
		0%	7%	2%	0%	7%	7%	4%	
Διαφορά	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	0	1	0	1	0	2	
		0%	0%	2%	0%	2%	0%	1%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	2	0	0	1	0	3	18
		0%	3%	0%	0%	2%	0%	1%	5%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	2	3	1	0	1	1	8	
		3%	5%	2%	0%	2%	2%	2%	
Ολόκληρου Αντικειμένου	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	6	0	0	5	0	11	
		0%	10%	0%	0%	8%	0%	3%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	2	0	0	4	0	6	25
		0%	3%	0%	0%	7%	0%	2%	7%
	Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	0	5	4	0	6	3	18	
		0%	8%	7%	0%	10%	5%	5%	
Γραμμική	Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	3	5	6	1	4	6	25	
		5%	8%	10%	2%	7%	10%	7%	
	Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	5	12	11	5	13	10	56	99
		8%	20%	18%	8%	21%	16%	15%	27%
Σύνολο		**61**	**61**	**61**	**61**	**61**	**61**	**366**	**366**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ: Έλεγχοι ανεξαρτησίας χ^2 Τύπος Γενίκευσης-Σχ. Βαθμίδα ανά στρατηγική.

Τύπος Γενίκευσης * Σχολική Βαθμίδα Crosstabulation

ΜΕΤΡΗΣΗ			Σχολική Βαθμίδα			Total
			Α΄ ΓΥΜΝ.	Β΄ ΓΥΜΝ.	Γ΄ ΓΥΜΝ.	
Τύπος Γενίκευσης	κοντινή	Count	35	33	32	100
		% within Τύπος Γενίκευσης	35,0%	33,0%	32,0%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	71,4%	70,2%	68,1%	69,9%
		Adjusted Residual	,3	,1	-,3	
	μακρινή	Count	10	6	6	22
		% within Τύπος Γενίκευσης	45,5%	27,3%	27,3%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	20,4%	12,8%	12,8%	15,4%
		Adjusted Residual	1,2	-,6	-,6	
	νιοστός	Count	4	8	9	21
		% within Τύπος Γενίκευσης	19,0%	38,1%	42,9%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	8,2%	17,0%	19,1%	14,7%
		Adjusted Residual	-1,6	,6	1,1	
Total		Count	49	47	47	143
		% within Τύπος Γενίκευσης	34,3%	32,9%	32,9%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	34,3%	32,9%	32,9%	100,0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	3,494[a]	4	,479	,491		
Likelihood Ratio	3,654	4	,455	,471		
Fisher's Exact Test	3,529			,474		
Linear-by-Linear Association	,909[b]	1	,340	,370	,189	,035
N of Valid Cases	143					

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6,90.

b. The standardized statistic is ,954.

Symmetric Measures

		Value	Approximate Significance	Exact Significance
Nominal by Nominal	Phi	,156	,479	,491
	Cramer's V	,111	,479	,491
N of Valid Cases		143		

Τύπος Γενίκευσης * Σχολική Βαθμίδα Crosstabulation

ΔΙΑΦΟΡΑ		Σχολική Βαθμίδα			Total
		΄ ΓΥΜΝ.	ΓΥΜΝ.	ΓΥΜΝ.	
ενίκευσης		8	1	3	12
	Τύπος Γενίκευσης	66,7%	8,3%	25,0%	100,0%
	Σχολική Βαθμίδα	80,0%	50,0%	100,0%	80,0%
	Residual	,0	-1,1	1,0	
		2	1	0	3
	Τύπος Γενίκευσης	66,7%	33,3%	0,0%	100,0%
	Σχολική Βαθμίδα	20,0%	50,0%	0,0%	20,0%
	Residual	,0	1,1	-1,0	
		10	2	3	15
	Τύπος Γενίκευσης	66,7%	13,3%	20,0%	100,0%
	Σχολική Βαθμίδα	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	al	66,7%	13,3%	20,0%	100,0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	1,875[a]	2	,392	,703		
Likelihood Ratio	2,231	2	,328	,571		
Fisher's Exact Test	1,844			,440		
Linear-by-Linear Association	,216[b]	1	,642	,681	,462	,198
N of Valid Cases	15					

a. 5 cells (83,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,40.

b. The standardized statistic is -,464.

Symmetric Measures

		Value	Approximate Significance	Exact Significance
Nominal by Nominal	Phi	,354	,392	,703
	Cramer's V	,354	,392	,703
N of Valid Cases		15		

Τύπος Γενίκευσης * Σχολική Βαθμίδα Crosstabulation

ΟΛΟΚΛΗΡΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ			Σχολική Βαθμίδα			Total
			Α΄ ΓΥΜΝ.	Β΄ ΓΥΜΝ.	Γ΄ ΓΥΜΝ.	
Τύπος Γενίκευσης	κοντινή	Count	2	0	0	2
		% within Τύπος Γενίκευσης	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	28,6%	0,0%	0,0%	8,3%
		Adjusted Residual	2,3	-1,4	-,9	
	μακρινή	Count	4	11	6	21
		% within Τύπος Γενίκευσης	19,0%	52,4%	28,6%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	57,1%	100,0%	100,0%	87,5%
		Adjusted Residual	-2,9	1,7	1,1	
	νιοστός	Count	1	0	0	1
		% within Τύπος Γενίκευσης	100,0%	0,0%	0,0%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	14,3%	0,0%	0,0%	4,2%
		Adjusted Residual	1,6	-,9	-,6	
Total		Count	7	11	6	24
		% within Τύπος Γενίκευσης	29,2%	45,8%	25,0%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	29,2%	45,8%	25,0%	100,0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	8,327[a]	4	,080	,044		
Likelihood Ratio	8,524	4	,074	,044		
Fisher's Exact Test	6,441			,044		
Linear-by-Linear Association	,551[b]	1	,458	,712	,368	,233
N of Valid Cases	24					

a. 6 cells (66,7%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,25.

b. The standardized statistic is ,742.

Symmetric Measures

		Value	Approximate Significance	Exact Significance
Nominal by Nominal	Phi	,589	,080	,044
	Cramer's V	,416	,080	,044
N of Valid Cases		24		

Τύπος Γενίκευσης * Σχολική Βαθμίδα Crosstabulation

ΓΡΑΜΜΙΚΗ			Σχολική Βαθμίδα			Total
			Α΄ ΓΥΜΝ.	Β΄ ΓΥΜΝ.	Γ΄ ΓΥΜΝ.	
Τύπος Γενίκευσης	κοντινή	Count	0	4	10	14
		% within Τύπος Γενίκευσης	0,0%	28,6%	71,4%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	0,0%	16,0%	18,2%	14,3%
		Adjusted Residual	-1,9	,3	1,2	
	μακρινή	Count	11	9	25	45
		% within Τύπος Γενίκευσης	24,4%	20,0%	55,6%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	61,1%	36,0%	45,5%	45,9%
		Adjusted Residual	1,4	-1,2	-,1	
	νιοστός	Count	7	12	20	39
		% within Τύπος Γενίκευσης	17,9%	30,8%	51,3%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	38,9%	48,0%	36,4%	39,8%
		Adjusted Residual	-,1	1,0	-,8	
Total		Count	18	25	55	98
		% within Τύπος Γενίκευσης	18,4%	25,5%	56,1%	100,0%
		% within Σχολική Βαθμίδα	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	18,4%	25,5%	56,1%	100,0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	5,240[a]	4	,264	,268		
Likelihood Ratio	7,698	4	,103	,127		
Fisher's Exact Test	5,484			,237		
Linear-by-Linear Association	1,461[b]	1	,227	,261	,133	,037
N of Valid Cases	98					

a. 2 cells (22,2%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,57.

b. The standardized statistic is -1,209.

Symmetric Measures

		Value	Approximate Significance	Exact Significance
Nominal by Nominal	Phi	,231	,264	,268
	Cramer's V	,164	,264	,268
N of Valid Cases		98		