ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλικιακός Κύκλος

Διπλωματική εργασία

Διερεύνηση στη χρήση νοερών υπολογισμών κατά την επίλυση γραπτών λεκτικών προβλημάτων προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής από μαθητές της Γ Δημοτικού

του

Παρασκευόπουλου Αναστάσιου

Α.Ε.Μ.: 823

Inquiring into the use of mental calculations for solving addition and multiplication word problems by 3rd grade students

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Χαρούλα Σταθοπούλου, Καθηγήτρια Π.Τ.Ε.Α./Π.Θ.

Μέλη τριμελούς επιτροπής: Δέσποινα Δεσλή, Αν. Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε./Α.Π.Θ.

Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2020

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσά μου, Καθηγήτρια Π.Τ.Ε.Α./Π.Θ Χαρούλα Σταθοπούλου για την συνεχή διαθεσιμότητά της και την άμεση ανατροφοδότησή της κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω την καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε./Α.Π.Θ. Δέσποινα Δεσλή και τον καθηγητή Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ. Χαράλαμπο Λεμονίδη για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή και τις εύστοχες παρεμβάσεις τους, καθώς και τους συμμετέχοντες, εκπαιδευτικούς και μαθητές, χωρίς τους οποίους η εργασία αυτή δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, που με στήριξε κατά τη διάρκεια του Π.Μ.Σ.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η εισαγωγή των μαθητών του Δημοτικού στους γραπτούς αλγόριθμους περιορίζει τη χρήση των νοερών υπολογισμών, καθώς οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν τους παραδοσιακούς αλγόριθμους ακόμη και για πολύ απλές πράξεις. Στην επίλυση γραπτών μαθηματικών προβλημάτων, η προτίμηση που δείχνουν οι μαθητές για το αν θα επιλύσουν ένα πρόβλημα νοερά ή γραπτά, δεν έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας. Συνεπώς, στην παρούσα εργασία θεωρήθηκε σημαντικό να διερευνηθεί η προτίμηση για τον τρόπο που ενδέχεται να απαντούν οι μαθητές, νοερό ή γραπτό, όταν αντιμετωπίζουν γραπτά μαθηματικά προβλήματα, και επιπλέον, η συχνότητα αξιοποίησης των νοερών στρατηγικών, όταν πραγματοποιούνται νοεροί υπολογισμοί. Η έρευνα εστίασε σε μαθητές δύο τμημάτων Γ΄ Δημοτικού, ανάμεσα στους οποίους διεξήχθη μια διερευνητική προσέγγιση, με στοιχεία μελέτης περίπτωσης. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με γραπτά δοκίμια και συνεντεύξεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι ενδέχεται οι μαθητές να επιλέγουν να επιλύουν νοερά κατηγορίες προβλημάτων με τις οποίες έχουν μεγαλύτερη οικειότητα. Η επιλογή αυτή φαίνεται να επηρεάζεται παράλληλα και από τη φύση των αριθμών που περιλαμβάνονται στα προβλήματα. Αξιοσημείωτη παρατήρηση συνιστά η επιλογή της νοερής στρατηγικής σε περιπτώσεις που οι μαθητές αποκωδικοποίησαν προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών ως προσθετικά. Η νοερή στρατηγική της συσσώρευσης χρησιμοποιήθηκε στο σύνολο των υπολογισμών αυτών.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματικά, επίλυση προβλήματος, κατηγορίες προβλημάτων, νοεροί υπολογισμοί, νοερές στρατηγικές.

Summary

Elementary school students tend to use traditional algorithms even for the simplest operations. Student's preference for solving word problems, on paper or mentally, has not yet been investigated. Therefore, in this paper it was considered important to investigate whether students produce written or mental answers when faced with written math problems. In addition, the frequency with which each mental strategy was used, while performing mental calculations, was also investigated. The research focused on pupils of two 3rd grade departments of two elementary schools. It includes elements of the exploratory method and a case study. The data were collected through interviews with the students and the teachers. The results of the study showed that students may choose to mentally solve categories of problems with which they are most familiar. This choice seems to be affected by the nature of the numbers involved in the problems. A noteworthy observation was the choice of mental strategy in cases where pupils have identified problems of multiplication structures as addition structures. The "accumulation" mental strategy was used in all of those cases.

Keywords: math, problem solving, problem categories, mental calculations, mental computations, mental maths, mental strategies.

Εισαγωγή

Στην καθημερινότητά τους, οι άνθρωποι έρχονται αντιμέτωποι με διάφορα μαθηματικά προβλήματα. Πολλές φορές, αναγκάζονται να τα επιλύουν νοερά, δηλαδή με το μυαλό, είτε χάριν συντομίας, είτε λόγω μη πρόσβασης σε χαρτί και μολύβι ή κομπιουτεράκι. Οι νοεροί υπολογισμοί μπορούν να εκτελεστούν με εναλλακτικές στρατηγικές, πράγμα που τους καθιστά προτιμότερους στους ενήλικες, οι οποίοι πραγματοποιούν τους περισσότερους καθημερινούς υπολογισμούς τους νοερά (Λεμονίδης, 2015). Οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται και διδάσκονται ήδη από το ηλικιακό στάδιο της Δημοτικής Εκπαίδευσης. Όμως, η πρόωρη εισαγωγή των μαθητών στους τυπικούς αλγόριθμους φαίνεται ότι περιορίζει τη χρήση των νοερών υπολογισμών, καθώς οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν τους παραδοσιακούς αλγόριθμους ακόμη και για πολύ απλές πράξεις (Lucangeli et al., 2003).

Υπάρχουν πολλές έρευνες που έχουν επικεντρωθεί στους νοερούς υπολογισμούς που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Οι περισσότερες από αυτές επικεντρώνονται στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Ο αριθμός των ερευνών που ασχολούνται με τις στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων είναι περιορισμένος. Το μεγαλύτερο ποσοστό των ερευνών στις στρατηγικές νοερών υπολογισμών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση αναφέρονται σε πράξεις με μικρούς αριθμούς, και συνεπώς χαρακτηρίζονται ως είδη καταμέτρησης από ορισμένους ερευνητές (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Ο αριθμός των ερευνών που επικεντρώνεται σε πράξεις με μεγαλύτερους παράγοντες, άρα και σε περισσότερο πολύπλοκες νοητικές διεργασίες, είναι μικρός, και ακόμα μικρότερος είναι ο αριθμός των ερευνών που έχει αναλύσει όλους τους πιθανούς αριθμητικούς συνδυασμούς (Heirdsfield et al., 1999). Με σκοπό την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών, κάποιοι ερευνητές ασχολούνται αποκλειστικά με πράξεις πολλαπλασιασμού, ενώ πολύ λιγότεροι εμβαθύνουν ξεχωριστά στη νοερή διαίρεση.

Παράλληλα, κατά τη διάρκεια της βιβλιογραφικής ανασκόπησης της παρούσας εργασίας, δεν εντοπίστηκαν έρευνες που να εστιάζουν στην προτίμηση μαθητών να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα που τους παρουσιάζονται, γραπτά ή νοερά. Όσον αφορά τους ενήλικες, φαίνεται ότι προτιμούν να επιλύουν τις περισσότερες πράξεις, οι οποίες πηγάζουν από μαθηματικά προβλήματα, με το μυαλό (Λεμονίδης, 2015), συνεπώς σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να συμβάλει στη συζήτηση εντοπίζοντας την προτίμηση που ενδέχεται να δείχνουν οι μαθητές όταν επιλύουν γραπτά προβλήματα· νοερά ή γραπτά;

Το κύριο ερευνητικό ερώτημα που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, αφορά το αν η παραπάνω προτίμηση που μπορεί να δείχνουν οι μαθητές στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων, συνδέεται με την κατηγορία του προβλήματος, όπως αυτή ορίζεται από τη βιβλιογραφία. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα επιχειρεί να διερευνήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στους νοερούς υπολογισμούς των αριθμητικών πράξεων, και το εάν αυτές εξαρτώνται από την κατηγορία των προβλημάτων. Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα αφορά το ρόλο των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των κατ’ εκτίμηση και νοερών υπολογισμών.

Η δομή της παρούσας εργασίας είναι η εξής:

Στο 1ο κεφάλαιο, επιχειρείται να καταγραφεί το βιβλιογραφικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται και στο οποίο προσπαθεί να συμβάλει η παρούσα εργασία. Η έννοια που μελετάται στο πρώτο μέρος είναι το «μαθηματικό πρόβλημα», καθώς «*περιλαμβάνει ικανότητες και νοητικές λειτουργίες που αποτελούν σημαντικό κομμάτι της καθημερινής ζωής*» (NCTM, 2000), και έχει νόημα να εντάσσονται οι υπολογισμοί σε κάποιο πλαίσιο. Η έννοια που μελετάται στο δεύτερο μέρος είναι οι νοεροί υπολογισμοί, τα χαρακτηριστικά τους και οι στρατηγικές τους. Η τρίτη έννοια που μελετάται είναι ο παράγοντας του φύλου, ο οποίος ενδέχεται να παίζει ρόλο στα αποτελέσματα της έρευνας.

Στο 2ο κεφάλαιο, περιγράφεται ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της παρούσας έρευνας. Παρατίθενται τα σημαντικά γνωρίσματά της, πληροφορίες για τους συμμετέχοντες, τα ερευνητικά εργαλεία/τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν. Παρουσιάζονται παράγοντες που αποτέλεσαν περιορισμούς για την ερευνητική διαδικασία και γίνεται λόγος για την εγκυρότητα και την αξιοπιστία της.

Στο 3ο κεφάλαιο, παρατίθενται τα ευρήματα που προέκυψαν από την ερευνητική διαδικασία. Τα ευρήματα είναι κατηγοριοποιημένα ανάλογα με το ερευνητικό ερώτημα στο οποίο επιχειρούν να απαντήσουν.

Στο 4ο κεφάλαιο, περιλαμβάνονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα ευρήματα της παρούσας έρευνας και προτείνεται προοπτικές για περαιτέρω συμβολή στη συζήτηση σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς.

Στο τέλος της παρούσας διπλωματικής εργασίας, παρατίθεται η βιβλιογραφία που αξιοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της, καθώς και το παράρτημα, το οποίο περιλαμβάνει τις συνεντεύξεις και τα γραπτά δοκίμια.

1ο Κεφάλαιο: Θεωρητικό πλαίσιο

Η μέθοδος επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

Τα τελευταία χρόνια, η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών αναδεικνύει ως κεντρικό ζήτημα της μαθηματικής εκπαίδευσης την ικανότητα του μαθητή να προσαρμόζει κεκτημένες μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, θεωρώντας έτσι την επίλυση προβλημάτων μία από τις σημαντικότερες εκδηλώσεις της σκέψης στους διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας (National Council of Teachers of Mathematics «NCTM», 2000).

Στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα του 2003 (ΑΠΣ - ΔΕΠΠΣ) και του 2011 (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών) συνιστά κεντρικό στόχο η ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού, δηλαδή η ικανότητα των εκπαιδευόμενων να αναλύουν, να ερμηνεύουν και να παρεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον και στον κόσμο γύρω τους, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Το ίδιο ισχύει και για πολλά άλλα προγράμματα σπουδών στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Özsoy & Ataman, 2017).

Η σύσταση του NCTM, το 1980, να αποτελέσει η επίλυση προβλήματος «το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών» έγινε ευρέως αποδεκτή στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Bahar & Maker, 2015). Τα μέλη του συμβουλίου ενέκριναν αυτή τη σύσταση δηλώνοντας ότι «η επίλυση προβλημάτων πρέπει να διατρέχει όλες τις πτυχές της διδασκαλίας των μαθηματικών για να αποκτήσουν οι μαθητές εμπειρία για την εξουσία των μαθηματικών στον κόσμο γύρω τους» (NCTM, 1989). Ένας από τους λόγους για τους οποίους τόνισαν την επίλυση προβλημάτων ήταν ότι η επίλυση προβλημάτων «*περιλαμβάνει ικανότητες και νοητικές λειτουργίες που αποτελούν σημαντικό κομμάτι της καθημερινής ζωής και επιπλέον μπορεί να* *βοηθήσει τους ανθρώπους να προσαρμοστούν σε αλλαγές και σε απροσδόκητα προβλήματα στη σταδιοδρομία τους και σε άλλες πτυχές της ζωής τους*» (NCTM, 2000).

Ορισμοί του μαθηματικού προβλήματος

«Πρόβλημα» είναι μια κατάσταση που υφίσταται, όταν υπάρχει ένας στόχος, χωρίς να είναι εκ των προτέρων γνωστός ο τρόπος, με τον οποίο μπορεί να επιτευχθεί αυτός ο στόχος (Mayer & Hegarty, 2012). Επεκτείνοντας τον ορισμό αυτό, «μαθηματικό πρόβλημα» υφίσταται, όταν για να επιτευχθεί ο ζητούμενος στόχος, απαιτείται η εκτέλεση μαθηματικών (αριθμητικών ή αλγοριθμικών) διαδικασιών (Mayer & Hegarty, 2012).

Κατά τον Αγαλιώτη, τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούν έναν ευρύτερο όρο, δηλαδή «*προφορικές, γραπτές, εικονιστικές ή μεικτές παρουσιάσεις καταστάσεων, σχέσεων ή δράσεων με ποσοτικά χαρακτηριστικά, οι οποίες καταλήγουν σε ένα ή περισσότερα ζητούμενα*». Ωστόσο, εκείνα που φαίνεται να συγκεντρώνουν τη μεγαλύτερη προσοχή, σε ερευνητικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο εκπαιδευτικής πολιτικής, είναι τα «γραπτά μαθηματικά προβλήματα», δηλαδή εκείνα στα οποία «*οι σημαντικές πληροφορίες που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δίνονται μέσω γραπτών λέξεων με τη μορφή αφήγησης*» (Αγαλιώτης, 2013).

Ο Schoenfeld (1992) αναφέρει πως ο όρος «επίλυση προβλήματος» έχει χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσει ένα μεγάλο εύρος εννοιών, το οποίο περιλαμβάνει δραστηριότητες, όπως ασκήσεις ρουτίνας («working rote exercises»), μέχρι και επαγγελματική χρήση της μαθηματικής επιστήμης («doing mathematics as a professional»).

Οι Anderson & Pingry (1973) προτείνουν ως ορισμό (όπως αναφέρεται στο: Phonapichat, Wongwanich, & Sujiva, 2014, σελ. 3170): «*ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι μια κατάσταση ή μια ερώτηση που απαιτεί μια λύση με τη μορφή μιας ποσοτικής ή αριθμητικής απάντησης. Για να επιλυθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα, πρέπει να βρεθεί η σωστή μέθοδος, χρησιμοποιώντας γνώση και εμπειρία*».

Οι Adam et al. (1977) αναφέρουν ότι ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να οριστεί ως λεκτικό πρόβλημα («word problem», «verbal problem»), ή πρόβλημα ιστορίας («story problem»). Πρόκειται για την περιγραφή μιας κατάστασης με λέξεις ή/και με αριθμούς που απαιτεί μια ποσοτική ή αριθμητική απάντηση και προκαλεί τον λύτη να βρει έναν τρόπο να το λύσει.

Οι Crulikshank & Sheffield (1992) αναφέρουν ότι ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι μια ερώτηση μαθηματικού περιεχομένου ή μια κατάσταση που μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικούς όρους, αλλά δεν σχετίζεται αποκλειστικά και μόνο με αριθμητικά στοιχεία. Ισχυρίζονται πως ορισμένα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να αφορούν φυσικές ιδιότητες ή λογική σκέψη, χωρίς να σχετίζονται καθόλου με αριθμούς.

Η έρευνα στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών έχει στηριχτεί και επηρεαστεί έντονα από τις ιδέες του Polya. Στο βιβλίο του, «How to Solve It» (1945), ο Polya οριοθέτησε το πλαίσιο της μεθόδου επίλυσης προβλήματος, περιέγραψε οδηγίες για τις απαραίτητες λεπτομέρειες στην εφαρμογή του, και παρέθεσε τα βήματα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Ο Schoenfeld (1992) διακρίνει τα προβλήματα σε «προβλήματα ρουτίνας» ή «ασκήσεις» και σε «καταστάσεις προβληματισμού» ή «πρωτότυπα προβλήματα», ενώ ο Polya (1981,1991) διακρίνει τα προβλήματα σε τρεις κατηγορίες: Ρουτίνας, Εύρεσης και Απόδειξης. Ορίζει ως προβλήματα «ρουτίνας» τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν, είτε ακολουθώντας σταδιακά κάποιο προφανές παράδειγμα, πολύ όμοιο με άλλα προβλήματα που έχει επιλύσει προηγουμένως ο λύτης, είτε με αντικατάσταση δεδομένων σε ένα γενικό πρόβλημα που έχει λυθεί προηγουμένως. Κρίνει πως η λύση προβλημάτων ρουτίνας ίσως είναι αναγκαία στη διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά δεν θα πρέπει οι μαθητές να ασχολούνται αποκλειστικά με τέτοιου είδους προβλήματα. Ο λόγος είναι ότι για αυτά τα προβλήματα, οι μαθητές χρειάζεται να ακολουθήσουν μια διαδικασία που ακολουθεί αυστηρά ορισμένους κανόνες, και δεν τους δίνεται καμία ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν την κρίση τους ή τις δυνατότητες που έχουν για να επινοήσουν μια λύση. Τα προβλήματα εύρεσης μπορούν να είναι θεωρητικά ή πρακτικά, αφηρημένα ή συγκεκριμένα. Στόχος ενός ευρετικού προβλήματος είναι να βρεθεί ένα συγκεκριμένο εξαγόμενο, το ζητούμενο του προβλήματος, που ικανοποιεί την συνθήκη του προβλήματος. Τα βασικά μέρη ενός προβλήματος εύρεσης είναι: το ζητούμενο, τα δεδομένα και η συνθήκη. Για να υφίσταται ένα πρόβλημα εύρεσης, χρειάζεται να έχει προκαθοριστεί ένα ζητούμενο στοιχείο και μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το ζητούμενο. Η συνθήκη είναι αυτή που συνδέει το ζητούμενο με τα δεδομένα του προβλήματος. Συνεπώς, σε ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής, το ζητούμενο μπορεί να είναι ένα γεωμετρικό σχήμα, για παράδειγμα ένα τρίγωνο, ενώ όταν έχουμε να λύσουμε μια αλγεβρική εξίσωση, το ζητούμενο θα είναι η ρίζα της εξίσωσης αυτής, δηλαδή ένας αριθμός. Όσον αφορά τα προβλήματα απόδειξης, στόχος τους είναι να διαπιστώσει ο λύτης την ακρίβεια ή ανακρίβεια ενός σαφώς διατυπωμένου ισχυρισμού.

Αποτελούν συνηθισμένα μαθηματικά προβλήματα, τα βασικά μέρη των οποίων είναι η υπόθεση και το συμπέρασμα του ισχυρισμού, το οποίο πρέπει να αποδειχθεί ή να απορριφθεί. Το πρώτο μέρος του, η υπόθεση, αρχίζει με το «αν» και το δεύτερο μέρος, το συμπέρασμα, αρχίζει με το «τότε». Για να αποδειχτεί ένας τέτοιος ισχυρισμός, θα πρέπει να ανακαλυφθεί, με άλλα λόγια να αποδειχτεί, ένας λογικός σύνδεσμος ανάμεσα στην υπόθεση και στο συμπέρασμα. Ενώ, για να διαψευτεί, θα πρέπει να αποδειχτεί ότι η υπόθεση δεν συνεπάγεται το συμπέρασμα, ιδανικά με την παράθεση ενός αντίστοιχου παραδείγματος.

Στάδια επίλυσης προβλήματος

Οι κυριότεροι ερευνητές που ασχολούνται εκτενώς με τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, σημειώνουν πως η διαδικασία αυτή ολοκληρώνεται σε στάδια. Οι περισσότεροι εξ αυτών, τη διακρίνουν σε τέσσερα μεγάλα στάδια. Ο Polya (1945), ο οποίος χρονολογικά διερεύνησε πρώτος σε εκτενή βαθμό το συγκεκριμένο ζήτημα, αναφέρει πως η επίλυση προβλήματος γίνεται σε τέσσερα στάδια: κατανόηση του προβλήματος, επινόηση του σχεδίου, εκτέλεση του σχεδίου που έχει επινοηθεί, και έλεγχος της λύσης. Στο πρώτο στάδιο, ο λύτης διακρίνει τα δεδομένα στοιχεία, τα ζητούμενα, και τη συνθήκη του προβλήματος. Σε αυτό το αρχικό στάδιο, της κατανόησης, ανήκουν ο σχεδιασμός και η κατασκευή τυχόν σχημάτων και συμβόλων, που ενδέχεται να διευκολύνουν το άτομο να εντοπίσει τα προαπαιτούμενα, και να αξιολογήσει την επάρκεια της συνθήκης του προβλήματος. Κατά την επινόηση του σχεδίου επίλυσης του προβλήματος, ο λύτης προχωρεί στον εντοπισμό της σύνδεσης ανάμεσα στα δεδομένα και τα ζητούμενα, στηριζόμενος προαιρετικά σε προηγούμενες εμπειρίες του με σχετικά προβλήματα. Εναλλακτικά, η σύνδεση των ζητούμενων με τα δεδομένα μπορεί να είναι άμεση και ευδιάκριτη και να μην απαιτεί την ανάκληση άλλων προβλημάτων. Στο τρίτο στάδιο, ο λύτης προχωρεί στην εκτέλεση του σχεδίου που έχει οργανώσει. Ταυτόχρονα, αποδεικνύει ότι το κάθε βήμα που ακολουθεί και η κάθε πράξη που εκτελεί είναι ορθή. Στο τέταρτο στάδιο, το άτομο προβαίνει στον έλεγχο της λύσης στην οποία είχε οδηγηθεί προηγουμένως. Ανατρέχει στα βήματα που ακολούθησε, ελέγχει και επιβεβαιώνει κατά πόσο ορθός είναι ο συλλογισμός που τον οδήγησε στη λύση που έχει καταλήξει (Polya, 1945).

Όσον αφορά τον Schoenfeld, ο οποίος διαφοροποιείται από τους υπόλοιπους στον αριθμό των σταδίων επίλυσης προβλήματος, αυτός αναγνωρίζει τρία στάδια: την ανάλυση, την εξερεύνηση, και τον έλεγχο (Schoenfeld, 1985). Ο λύτης αντιμετωπίζει το πρόβλημα ξεκινώντας από το στάδιο της ανάλυσης, στο οποίο προσαρμόζει τους «πόρους»[1] που κατέχει για να το κατατάξει σε κάποια κατηγορία. Στο δεύτερο στάδιο, εκείνο της εξερεύνησης, το άτομο εξερευνά τις διαθέσιμες επιλογές που κατέχει στις υπάρχουσες γνώσεις του, προκειμένου να καταστρώσει το σχέδιό του. Εντοπίζει τις στρατηγικές που θα χρησιμοποιήσει για να φτάσει στην επίλυση του προβλήματος και αναλογίζεται τον τρόπο που θα τις τροποποιήσει, εφόσον χρειαστεί. Στο τελευταίο στάδιο, ο λύτης πραγματοποιεί έλεγχο, πρώτον της στρατηγικής που επέλεξε προηγουμένως και δεύτερον, του κατά πόσο η λύση στην οποία έχει φτάσει είναι ορθή. Κατά τον Schoenfeld, οι πιθανότητες να επιλύσει το άτομο με επιτυχία το πρόβλημα με το οποίο καταπιάνεται, εξαρτώνται από τους πόρους και τις ευρετικές[2], δηλαδή από τις προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις που κατέχει, και η ευχέρεια με την οποία αυτά αξιοποιούνται. (Schoenfeld, 1985).

Οι Garofalo και Lester (1985) διακρίνουν την διαδικασία επίλυσης προβλήματος σε τέσσερα στάδια: τον προσανατολισμό, την οργάνωση, την εκτέλεση, και την επαλήθευση. Στο πρώτο στάδιο, το στάδιο του προσανατολισμού, το άτομο αξιοποιεί τις στρατηγικές κατανόησης που κατέχει, προκειμένου να καταλάβει το πρόβλημα και να το αναγνωρίσει ως οικείο ως προς την εμπειρία του, ή ως πρωτόγνωρο. Σε αυτό το στάδιο, επιχειρεί να εντοπίσει τις πληροφορίες που του παρέχει το πρόβλημα, καθώς και να αναγνωρίσει τη συνθήκη του. Στη συνέχεια, έπεται το στάδιο της οργάνωσης, κατά το οποίο ο λύτης εντοπίζει τους στόχους του, πρωταρχικούς και δευτερεύοντες, και ακολούθως καταστρώνει το σχέδιο που σκοπεύει να ακολουθήσει. Στο τρίτο στάδιο, ο λύτης πραγματοποιεί εκτέλεση της στρατηγικής που προηγουμένως είχε επιλέξει. Στο τέταρτο και τελευταίο στάδιο, οι Garofalo και Lester αναφέρουν ότι ο λύτης του προβλήματος εξετάζει και αξιολογεί τα προηγούμενα στάδια, δηλαδή τον προσανατολισμό, την οργάνωση και την εκτέλεση του σχεδίου του (Garofalo & Lester, 1985).

Ο Mayer (1985), ο οποίος ερευνά λεκτικά μαθηματικά προβλήματα, διακρίνει δύο μεγάλες φάσεις που εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων: Αναπαράσταση του προβλήματος («problem representation») και επίλυση του προβλήματος («problem solution»). Η πρώτη φάση, η αναπαράσταση του προβλήματος, διαχωρίζεται σε δύο στάδια, τη μετάφραση («problem translation»), η οποία εξαρτάται από τις γλωσσικές δεξιότητες που απαιτούνται για να «αποκρυπτογραφηθεί» και να κατανοηθεί η εκφώνηση του προβλήματος, και την ενσωμάτωση («problem integration»), η οποία εξαρτάται από την ικανότητα μαθηματικής ερμηνείας των

[1] Πόροι ονομάζονται τα μαθηματικά νοήματα, οι αλγόριθμοι και οι πράξεις, τα οποία στη συνέχεια θα δώσουν νόημα στο πρόβλημα.
[2] Ευρετικές καλούνται οι στρατηγικές επίλυσης που διαμορφώνονται από τον λύτη με βάση την εμπειρία του.

στοιχείων του προβλήματος και των σχέσεών τους, με σκοπό να δημιουργηθεί μια ορθά δομημένη αναπαράσταση. Η δεύτερη φάση, η επίλυση του προβλήματος, διακρίνεται στον σχεδιασμό λύσης («solution planning»), ο οποίος περιλαμβάνει την επιλογή των πράξεων και της σειράς με την οποία αυτές πρέπει να εκτελεστούν, και στην εκτέλεση («solution execution») της λύσης, η οποία περιλαμβάνει την εκτέλεση των καθορισμένων πράξεων για την τελική επίλυση του προβλήματος. Το μοντέλο του Mayer δείχνει γιατί τα λεκτικά προβλήματα αποτελούν μια πρόκληση για μαθητές από όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, καθώς κάθε φάση της διαδικασίας επίλυσης είναι περίπλοκη και το σωστό αποτέλεσμα εξαρτάται από την ακρίβεια καθενός από τα αμέσως προηγούμενα βήματα (Jitendra et al., 2007).

Ο Montague και οι συνεργάτες του εντοπίζουν επτά γνωστικές διαδικασίες, σχετικές με την αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων, οι οποίες μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα στάδια του μοντέλου του Mayer (Montague, 1992· Montague, 1997· Montague & Applegate, 1993· Montague & Applegate, 2000· Montague & Bos, 1986). Συγκεκριμένα, η μετάφραση του προβλήματος απαιτεί από τα άτομα που διαβάζουν το πρόβλημα να κατανοήσουν και στη συνέχεια να το παραφράσουν με δικό τους τρόπο. Κατά την ενσωμάτωση του προβλήματος, το άτομο οπτικοποιεί το πρόβλημα σχηματίζοντας μια οπτική αναπαράσταση. Στη συνέχεια, κατά τη φάση σχεδιασμού λύσης, κάνει υποθέσεις και σχέδια για την επίλυση του προβλήματος και εκτιμά μια λογική απάντηση. Στο τελικό στάδιο, την εκτέλεση της λύσης, το άτομο υπολογίζει, κάνει τις αριθμητικές πράξεις, και στη συνέχεια ελέγχει για να βεβαιωθεί ότι όλα όσα προηγήθηκαν είναι σωστά (Krawec, 2014).

Η συντριπτική πλειοψηφία της έρευνας για την επίλυση προβλημάτων έχει επικεντρωθεί στη δεύτερη φάση του μοντέλου του Mayer, την επίλυση προβλήματος (για παράδειγμα, Fuchs & Fuchs, 2002· Hanich et al., 2001· Jitendra & Hoff, 1996· McNear 1990· Montague, Warger & Morgan, 2000). Το μειονέκτημα αυτής της εστίασης είναι ότι ενώ τα αποτελέσματα της διαδικασίας επίλυσης αποτελούν επαρκή δείκτη ακρίβειας, αγνοούν τον τρόπο σκέψης και τις νοητικές διεργασίες των μαθητών, όμως η αναπαράσταση που προηγείται είναι κρίσιμη για την επιτυχή επίλυση (Krawec, 2014). Ο Silver (2000) με την έρευνά του, σχετικά με τις αρχές και τους κανόνες του NCTM, αναδεικνύει την αναπαράσταση ως απαραίτητη προϋπόθεση για βαθιά κατανόηση. Ομοίως, η Krawec (2014), ερευνώντας την απόδοση μαθητών στα δύο πρώτα στάδια της επίλυσης προβλημάτων, παρατηρεί πως η παράφραση και η οπτική αναπαράσταση παρέχουν στοιχεία για τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται αυτά που διαβάζουν. Κατά τη διαδικασία της μετάφρασης, οι μαθητές ενδέχεται να αντιμετωπίσουν στα προβλήματα που τους δίνονται, άσχετες πληροφορίες, και συνεπώς, χρειάζεται να είναι περισσότερο επιλεκτικοί στην επιλογή των τμημάτων προς παράφραση. Έτσι, η συνάφεια των πληροφοριών μέσα στο λεκτικό πρόβλημα γίνεται ένα πρόσθετο χαρακτηριστικό που πρέπει να ληφθεί υπόψη (Krawec, 2014). Όσον αφορά την αναπαράσταση, η έρευνα έχει διαχωρίσει τις οπτικές αναπαραστάσεις σε δύο κατηγορίες: εικονογραφικές αναπαραστάσεις, οι οποίες αποτελούν κατά κύριο λόγο τον σχεδιασμό αντικειμένων, και σχηματικές αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι διαγράμματα που αντιπροσωπεύουν χωρικές σχέσεις ανάμεσα στα μέρη του προβλήματος (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Έρευνες σχετικές με τις οπτικές αναπαραστάσεις μαθητών έχουν καταλήξει ότι λύτες προβλημάτων, που παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση σε επίλυση προβλημάτων, τείνουν να προσεγγίζουν προβλήματα με σχηματικές αναπαραστάσεις, ενώ λύτες με χαμηλότερη επίδοση στον ίδιο τομέα, τείνουν να κατασκευάζουν εικονογραφημένες αναπαραστάσεις, που οδηγούν σε ανακριβή αποτελέσματα (Guoliang, 2003· Hegarty & Kozhevnikov, 1999· van Garderen & Montague, 2003).

Κατηγορίες προβλημάτων

Οι Carpenter & Moser (1984) διακρίνουν τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης (προσθετικές δομές) στις εξής κατηγορίες:

1. Προβλήματα αλλαγής
2. Προβλήματα συνδυασμού
3. Προβλήματα σύγκρισης
4. Προβλήματα εξομοίωσης

Στα προβλήματα «αλλαγής», περιλαμβάνονται προβλήματα που περιέχουν μια μεταβολή, δηλαδή την αύξηση ή μείωση μιας αρχικής ποσότητας. Παράδειγμα: *Ο Α είχε δυο μολύβια. Ο Β του έδωσε ακόμα δυο, πόσα έχει τώρα ο Α;* Ο άγνωστος παράγοντας μπορεί να είναι η αρχική ποσότητα, ή το μέτρο της αλλαγής, ή η τελική ποσότητα. Τα συγκεκριμένα προβλήματα θεωρούνται «δυναμικά», επειδή η αλλαγή πραγματοποιείται σε συνάρτηση με το χρόνο.

Στα προβλήματα «συνδυασμού», γίνεται αναφορά σε δύο υποσύνολα, τα οποία συνθέτουν ένα υπερσύνολο. Παράδειγμα: *Ο Α έχει 2 κόκκινα τριαντάφυλλα και 3 άσπρα. Πόσα έχει συνολικά;*

Ζητούμενο σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να είναι είτε η ποσότητα ενός από τα δύο υποσύνολα, είτε η ποσότητα του υπερσυνόλου. Τα προβλήματα συνδυασμού θεωρούνται «στατικά».

Τα προβλήματα «σύγκρισης» περιλαμβάνουν τη σύγκριση δύο μεγεθών ως προς «περισσότερο» ή «λιγότερο». Παράδειγμα: *Ο Α έχει 5 μολύβια. Ο Β έχει 3 περισσότερα. Πόσα μολύβια έχει ο Β;* Η ζητούμενη ποσότητα μπορεί να είναι το μέτρο του πρώτου μεγέθους, το μέτρο του δεύτερου μεγέθους ή το μέτρο της σύγκρισης. Τα προβλήματα σύγκρισης είναι και αυτά «στατικά».

Τα προβλήματα «εξομοίωσης» συνδυάζουν χαρακτηριστικά προβλημάτων αλλαγής και σύγκρισης. Παράδειγμα: *Ο Α έχει 10 μολύβια. Ο Β έχει 15 μολύβια. Πόσα περισσότερα μολύβια πρέπει να μαζέψει ο Α για να έχει τόσα όσα ο Β;* Ο άγνωστος παράγοντας μπορεί να είναι μια από τις αρχικές ποσότητες, ή το μέτρο της σύγκρισης. Τα προβλήματα εξομοίωσης παρουσιάζουν δυναμικότητα, ως προς το χρόνο (Carpenter & Moser, 1984).

Ο Vergnaud (1982), εξετάζοντας τις κατηγορίες των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, εστιάζει στα είδη σχέσεων που συνδέουν τα μεγέθη που παρουσιάζονται σε μαθηματικά προβλήματα. Υποστηρίζει πως η δυσκολία ενός προβλήματος συνδέεται με αυτές τις σχέσεις των μεγεθών, οι οποίες έχουν τη μορφή καταστάσεων ή μετασχηματισμών.

Διακρίνει έξι κατηγορίες:

1. Σύνθεση δύο καταστάσεων
2. Μετασχηματισμός μιας κατάστασης και μετατροπή της σε μια άλλη
3. Στατική σχέση μεταξύ δύο καταστάσεων
4. Σύνθεση δύο μετασχηματισμών
5. Μετασχηματισμός μεταξύ δύο στατικών σχέσεων
6. Σύνθεση σχέσεων

Τα προβλήματα «σύνθεσης δύο καταστάσεων» περιλαμβάνουν δύο όμοιες καταστάσεις, οι οποίες συντίθενται μεταξύ τους. Παράδειγμα: *Έχω 5 βόλους, κόκκινους και άσπρους. Πόσους βόλους έχω συνολικά;* Ζητούμενη ποσότητα μπορεί να είναι είτε η μία από τις δύο καταστάσεις, είτε η τελική σύνθεση.

Τα προβλήματα «μετασχηματισμού μιας κατάστασης» έχουν ως αφετηρία τους μια κατάσταση και περιγράφουν το μετασχηματισμό της σε μια άλλη. Παράδειγμα: *Είχα 7 βόλους. Έπαιξα και έχασα/κέρδισα 3 βόλους. Πόσους βόλους έχω τώρα;* Ο άγνωστος παράγοντας μπορεί να είναι η ποσότητα της αρχικής κατάστασης, το μέτρο της αλλαγής, ή η ποσότητα της τελικής κατάστασης.

Τα προβλήματα «στατικής σχέσης δύο καταστάσεων» περιγράφουν δύο όμοιες στατικές καταστάσεις, και τη σύγκριση μεταξύ τους. Παράδειγμα: *Ο Πάνος έχει 8 βόλους. Έχει 3 βόλους περισσότερους από το Γιώργο. Πόσους βόλους έχει ο Γιώργος;* Η ζητούμενη ποσότητα μπορεί να είναι η ποσότητα της πρώτης κατάστασης, η ποσότητα της δεύτερης κατάστασης, ή το μέτρο της σύγκρισης.

Τα προβλήματα «σύνθεσης δύο μετασχηματισμών» παρουσιάζουν δύο μετασχηματισμούς μιας αρχικής κατάστασης, η οποία δεν περιλαμβάνεται στην εκφώνηση, και το αποτέλεσμά τους. Παράδειγμα: *Ο Πάνος κέρδισε 6 βόλους το πρωί. Το απόγευμα έχασε 9 βόλους. Τελικά κέρδισε ή έχασε βόλους, και πόσους;* Ο άγνωστος παράγοντας μπορεί να είναι η ποσότητα ενός από τους δύο μετασχηματισμούς, ή το αποτέλεσμα της σύνθεσης.

Τα προβλήματα «μετασχηματισμού μεταξύ δύο στατικών σχέσεων» περιγράφουν δύο όμοιες στατικές σχέσεις και ένα μετασχηματισμό που οδηγεί από τη μια στην άλλη. Παράδειγμα: *Χρωστάω 7 βόλους στον Πάνο. Του επιστρέφω 4 βόλους. Πόσους βόλους του χρωστάω τώρα;* Το ζητούμενο μπορεί να είναι η ποσότητα μιας από τις δύο σχέσεις, ή η ποσότητα του μετασχηματισμού.

Τα προβλήματα «σύνθεσης σχέσεων» περιλαμβάνουν δύο ομάδες προβλημάτων. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν προβλήματα που περιγράφουν δύο σχέσεις από τις οποίες προκύπτει μια τρίτη σχέση. Παράδειγμα: *Ο Πάνος χρωστάει 8 βόλους στο Γιώργο. Αλλά και ο Γιώργος χρωστάει 6 βόλους στον Πάνο. Τελικά ποιος χρωστάει βόλους σε ποιόν, και πόσους;* Στη δεύτερη ομάδα ανήκουν προβλήματα που περιγράφουν δύο στατικές καταστάσεις, από τις οποίες προκύπτει/συντίθεται μια σχέση. Παράδειγμα: *Ο Πάνος έχει 7 βόλους περισσότερους από το Γιώργο. Ο Γιώργος έχει 3 βόλους λιγότερους από τον Άρη. Τελικά ο Άρης έχει περισσότερους ή λιγότερους βόλους από τον Πάνο, και πόσους;*

Ο Greer (1992) εντοπίζει τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (Van de Walle, 2005· Mulligan & Mitchelmore, 1997):

1. Ίσες ομάδες
2. Πολλαπλασιαστική σύγκριση
3. Ορθογώνια διάταξη
4. Καρτεσιανό γινόμενο

Τα προβλήματα «ίσων ομάδων» πραγματεύονται σύνολα ίδιου μεγέθους. Ζητούμενο μπορεί να είναι το συνολικό ποσό, ή το μέγεθος των ομάδων, ή ο αριθμός των ομάδων. Όταν η άγνωστη ποσότητα είναι το συνολικό ποσό, τότε το πρόβλημα είναι περίπτωση πολλαπλασιασμού. Όταν ζητείται το μέγεθος ή ο αριθμός των ομάδων, το πρόβλημα επιλύεται με διαίρεση.

Τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα «σύγκρισης» περιλαμβάνουν τη σύγκριση δύο συνόλων τα οποία χαρακτηρίζονται από μια καθορισμένη σχέση: *Το ένα σύνολο αποτελείται από πολλαπλά αντίγραφα του άλλου* (Van de Walle, 2005, σελ. 162). Άγνωστος παράγοντας μπορεί να είναι το μέγεθος του συνόλου, ο πολλαπλασιαστής που οδηγεί στο μεγαλύτερο σύνολο, ή το μεγαλύτερο σύνολο καθαυτό (Van de Walle, 2005).

Στα προβλήματα «ορθογώνιας διάταξης» περιγράφονται δομές που έχουν τη μορφή ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα μπορεί να περιλαμβάνει μια παράταξη παιδιών σε στίχους και γραμμές. Τα συγκεκριμένα προβλήματα μπορούν να έχουν ως ζητούμενο τη μια πλευρά της εκάστοτε ορθογώνιας διάταξης ή το γινόμενο των δύο πλευρών (Mulligan & Mitchelmore, 1997).

Τα προβλήματα τύπου «καρτεσιανού γινόμενου» αφορούν σε απαρίθμηση όλων των πιθανών συνδυασμών των ζευγαριών που μπορούν να δημιουργηθούν ανάμεσα σε στοιχεία δύο συνόλων. Στα προβλήματα αυτά, ζητούμενες ποσότητες μπορεί να είναι το μέγεθος του ενός συνόλου, ή το καρτεσιανό γινόμενο[3] (Van de Walle, 2005).

Κάθε πολλαπλασιαστική δομή μπορεί να οδηγήσει σε διάφορα προβλήματα διαίρεσης (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Για παράδειγμα, προβλήματα ίσων ομάδων με άγνωστο το μέγεθος των συνόλων αφορούν σε διαίρεση «μερισμού». Ενώ, προβλήματα με γνωστό το μέγεθος και

[3] Μαθηματική πράξη, η οποία έχει ως αποτέλεσμα το γινόμενο διάφορων συνόλων.

άγνωστο τον αριθμό των συνόλων επιλύονται με διαίρεση τύπου «μέτρησης» (Van de Walle, 2005).

Παράλληλα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το μαθηματικό περιεχόμενο για την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων. Συνήθως, τα «αλγεβρικά» λεκτικά προβλήματα απαιτούν τη «μετάφρασή» τους σε μια αλγεβρική παράσταση, ενώ τα «αριθμητικά» προβλήματα μπορούν να λυθούν απλώς με μια πράξη, η οποία μπορεί να γίνει είτε γραπτά, είτε νοερά (Daroczy, Wolska, Meurers, & Nuerk, (2015).

Η επίλυση προβλήματος στη Διδακτική των Μαθηματικών

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα προβλήματα που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ερευνητικό και διδακτικό ενδιαφέρον είναι τα «γραπτά» ή «λεκτικά» μαθηματικά προβλήματα, δηλαδή εκείνα τα προβλήματα που παραθέτουν σε γραπτή αφηγητική μορφή τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειάζονται για την επίλυση του προβλήματος (Αγαλιώτης, 2013) αντί να τα παραθέτουν ευθέως χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα και όρους (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000).

Η υπάρχουσα βιβλιογραφία δείχνει ότι διαφορετικές κατηγορίες λεκτικών προβλημάτων ενδέχεται να οδηγούν σε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης και διαφορετικούς τύπους λαθών. Οι στρατηγικές επίλυσης βρίσκονται στο επίκεντρο της έρευνας για την επίλυση προβλήματος και εστιάζουν σε ορισμένες θεματικές ενότητες: στις διαφορές μαθητών και ενηλίκων, στους διαφορετικούς τύπους λαθών και στο στάδιο επίλυσης που αυτά εντοπίζονται, στις σημασιολογικές αναπαραστάσεις που δημιουργούνται κατά την επίλυση, και στις προαπαιτούμενες δεξιότητες του λύτη (Daroczy, Wolska, Meurers, & Nuerk, (2015).

Οι Nesher και Teubal (1975) εντοπίζουν τρεις διακριτές λειτουργίες που απαιτούνται για την επιτυχή επίλυση λεκτικών προβλημάτων:

1. Κατανόηση και κατασκευή της σχέσης ανάμεσα στο κείμενο και των μαθηματικών πράξεων
2. Γλωσσική κατανόηση του λεκτικού προβλήματος
3. Επίλυση των μαθηματικών πράξεων

Τυπικά, μόνο η τελευταία λειτουργία εντάσσεται σε δραστηριότητες μαθηματικού τύπου. Υπάρχουν ορισμένοι μαθητές που μπορούν να χρησιμοποιούν τυπικούς αλγορίθμους και αριθμητικές πράξεις που δεν εντάσσονται σε γλωσσικά πλαίσια, και παρουσιάζουν επαρκείς δεξιότητες κατανόησης κειμένου, όμως αδυνατούν να λύνουν επιτυχώς γραπτά μαθηματικά προβλήματα. Αυτό δείχνει ότι ενδεχομένως να επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την απόδοση στην επίλυση προβλημάτων, άλλοι παράγοντες, όπως οι στρατηγικές επίλυσης και η κατασκευή ενός νοερού μοντέλου για την εκάστοτε μαθηματική δραστηριότητα (Daroczy, Wolska, Meurers, & Nuerk, 2015).

Ένας παράγοντας που έχει διερευνηθεί ευρέως και συνδέεται άμεσα με δυσκολίες στην επίλυση γραπτών προβλημάτων, είναι η παρουσία ή η απουσία διακριτών λεκτικών παραγόντων, οι οποίοι αποτελούν στοιχεία για τις απαιτούμενες πράξεις και, συνεπώς, οδηγούν στη λύση μέσω της σημασιολογίας τους. Ορισμένες λέξεις και φράσεις που συνιστούν τέτοιους λεκτικούς παράγοντες είναι: σύνδεσμοι («και») που παραπέμπουν σε πρόσθεση, επιρρήματα («περισσότερο» ή «λιγότερο») που παραπέμπουν σε αφαίρεση, ή αντωνυμίες («κάθε», «καθένας») που παραπέμπουν σε πολλαπλασιασμό. Λύτες προβλημάτων τείνουν να επικεντρώνουν το βλέμμα τους σε γλωσσικούς λεκτικούς παράγοντες, όπως τους παραπάνω, και στη συνέχεια «μεταφράζουν» τις λέξεις σε μαθηματικές πράξεις (Hegarty, Mayer, & Green, 1992· van der Schoot et al., 2009). Επιπλέον, οι λεκτικοί παράγοντες μπορεί συχνά να οδηγούν σε παρερμηνείες (Nesher, 1976). Ειδικότερα, σε περιπτώσεις παιδιών παρατηρείται σύνδεση ορισμένων λέξεων, όπως: «ενώνω», «προσθέτω», «παίρνω», «βρίσκω», ή «απομακρύνω», με καταστάσεις ένωσης, διαχωρισμού, απομάκρυνσης, ή απώλειας (Lean, Clements, Del Campo, 1990). Συνεπώς, ένα πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί με την προσθήκη λεκτικών ενδείξεων, οι οποίες καθιστούν τις σημασιολογικές σχέσεις περισσότερο διακριτές. Με αυτόν τον τρόπο, η υπονοούμενη μαθηματική σχέση γίνεται πιο σαφής στον λύτη. Για παράδειγμα, το πρόβλημα: «Υπάρχουν πέντε βόλοι. Δύο από αυτούς είναι της Μαρίας. Πόσοι είναι του Γιάννη;» μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως «Υπάρχουν πέντε βόλοι. Δύο από αυτούς είναι της Μαρίας. Οι υπόλοιποι είναι του Γιάννη. Πόσοι είναι του Γιάννη;» Η επαναδιατύπωση αυτού του τύπου έχει αποδειχτεί ότι βελτιώνει την επίδοση των μαθητών σε λεκτικά προβλήματα (Vicente, Orrantia, & Verschaffel, 2007, όπως αναφέρεται στο: Daroczy, Wolska, Meurers, & Nuerk, 2015),καθώς αλλαγές στη διατύπωση ενός προβλήματος μπορεί να επηρεάσει τη νοερή αναπαράστασή του (De Corte, Verschaffel, & De Win, 1985).

Ένας άλλος παράγοντας που σχετίζεται με δυσκολίες στην επίλυση γραπτών μαθηματικών προβλημάτων είναι οι σημασιολογικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων που περιγράφονται εντός του προβλήματος. Προβλήματα διαίρεσης περιλαμβάνουν, συνήθως, αντικείμενα που παρουσιάζουν κάποια λειτουργική συνάφεια μεταξύ τους (για παράδειγμα, τουλίπες – βάζα) και, σπανιότερα, αντικείμενα που ανήκουν στην ίδια κατηγορία (για παράδειγμα, τουλίπες – μαργαρίτες). Αντίθετα, προβλήματα πρόσθεσης περιλαμβάνουν κατά κύριο λόγο αντικείμενα που ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Η συσχέτιση ανάμεσα σε σχέσεις αντικειμένων και μαθηματικές πράξεις ενδέχεται να υποδεικνύει μια δομική αντιστοιχία ανάμεσα σε σημασιολογικές και μαθηματικές σχέσεις (Bassok, Chase, & Martin, 1998). Για αυτό το λόγο, η σημασιολογική δομή ενός προβλήματος θεωρείται ότι επηρεάζει περισσότερο το βαθμό δυσκολίας ενός προβλήματος συγκριτικά με τη συντακτική δομή (Yeap & Kaur, 2001). Ταυτόχρονα, έχει παρατηρηθεί επίδραση στη δυσκολία επίλυσης και από το «φορτίο των πληροφοριών» («*information load*»). Η παρουσία πληροφοριών που είναι άσχετες με τη ζητούμενη λύση, όπως για παράδειγμα αριθμητικοί ή λεκτικοί αντιπερισπασμοί, έχει ως αποτέλεσμα περισσότερα λάθη στην επίλυση των προβλημάτων (Muth, 1992). Οι De Corte και Verschaffel (1987) παρατηρούν ότι η σημασιολογική δομή των λεκτικών προβλημάτων επηρεάζει την επιλογή στρατηγικής των μαθητών. Ο απαιτούμενος τρόπος ανταπόκρισης στο πρόβλημα έχει σημαντική επιρροή, ειδικά για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Για παράδειγμα, το αν ζητείται από τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα αριθμητικά, να υποδείξουν μόνο την απαιτούμενη πράξη, να απαντήσουν ελεύθερα, ή να επιλέξουν από πολλαπλές επιλογές (De Corte, Verschaffel, & Van Coillie, 1988).

Κατά κανόνα, τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα που παρατίθενται στα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να λυθούν εξ ορισμού και κάθε αριθμητική πληροφορία που εμπεριέχεται είναι απαραίτητη και σχετική (Pape, 2003). Υπάρχουν, όμως και τα λεγόμενα «*μη τυπικά*» προβλήματα, τα οποία είτε δεν μπορούν να επιλυθούν, ή έχουν πολλαπλές λύσεις, ή περιέχουν μη σχετικές πληροφορίες (Jimenez & Verschaffel, 2014). Οι μαθητές δίνουν υψηλό αριθμό ανακριβών απαντήσεων σε μη τυπικά προβλήματα, επειδή φαίνεται ότι έρχονται σε αντίθεση με τις μαθηματικές πεποιθήσεις που ήδη κατέχουν από την εμπειρία τους. Ο Reusser (1988), παρουσιάζοντας ένα μη τυπικό πρόβλημα σε μαθητές Α΄ και Β΄ Δημοτικού, παρατηρεί πως οι περισσότεροι (76 από τους 97) επιχειρούν να το επιλύσουν με τα δεδομένα που κατέχουν. Το εν λόγω πρόβλημα είναι: «*Υπάρχουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκες σε ένα πλοίο. Τι ηλικία είναι ο καπετάνιος;*».

Η συσχέτιση των πληροφοριών που δίνονται από το πρόβλημα με το ίδιο το ζητούμενο του προβλήματος είναι ένας παράγοντας που έχει ερευνηθεί εκτενώς. Ο εκάστοτε λύτης, προκειμένου να φτάσει στη σωστή λύση ενός γραπτού προβλήματος, αντλεί στοιχεία, λεκτικά και αριθμητικά από το κείμενο. Πρόσθετες πληροφορίες αποσπούν τον λύτη από την προσπάθειά του να αναγνωρίσει τις εννοούμενες μαθηματικές σχέσεις (Schley & Fujita, 2014). Αυτές οι πρόσθετες πληροφορίες μπορεί να δίνονται ως ένα επιπλέον αριθμητικό στοιχείο, ή ένα επιπλέον βήμα/πράξη στο πρόβλημα. Η πολυπλοκότητα ενός προβλήματος αυξάνεται με τη προσθήκη βημάτων (Terao et al., 2004), καθώς και με προσθήκη άσχετων πληροφοριών (Kingsdorf and Krawec, 2014). Οι μαθητές παρουσιάζουν χαμηλότερη επίδοση σε γραπτά προβλήματα που περιλαμβάνουν πρόσθετες πληροφορίες και επιπλέον βήματα, επειδή έχουν την πεποίθηση ότι όλες οι πληροφορίες που αναγράφονται πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Ταυτόχρονα, προβλήματα που λύνονται σε δύο βήματα επιφέρουν περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις από προβλήματα που μπορούν να λυθούν με μόνο ένα βήμα (Muth, 1992).

Οι παραπάνω παράγοντες, οι οποίοι αφορούν ορισμένα χαρακτηριστικά των γραπτών μαθηματικών προβλημάτων, επιφέρουν διάφορες επιπλοκές στην επίδοση εκείνων που καταπιάνονται με την επίλυση προβλημάτων. Πολλοί μαθητές παρουσιάζουν σοβαρές δυσκολίες στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, οι οποίες ξεκινούν από τη νηπιακή ηλικία και παραμένουν μέχρι και την ενηλικίωση (Nesher & Teubal, 1975· Lewis & Mayer, 1987· Hegarty, Mayer, & Green, 1992· Verschaffel, De Corte, & Pauwels, 1992). Για παράδειγμα, μια γνωστή παρανόηση είναι ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού οδηγεί κατά κανόνα σε μεγαλύτερο αποτέλεσμα από τους παράγοντές της, ότι η διαίρεση οδηγεί σε μικρότερο αποτέλεσμα και πάντα ο διαιρετέος είναι μεγαλύτερος από το διαιρέτη (Vergnaud, 2009).

Ο βαθμός δυσκολίας των γραπτών προβλημάτων επηρεάζεται και από το ρόλο που παίζουν οι αριθμοί μέσα στην μαθηματική πράξη. Η επίδοση των μαθητών στις πολλαπλασιαστικές δομές επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη φύση του πολλαπλασιαστή[4], ο οποίος μπορεί να είναι ακέραιος, ή δεκαδικός, μεγαλύτερος ή μικρότερος από τη μονάδα. Ταυτόχρονα, το μέγεθος του

[4] Ο αριθμός που πολλαπλασιάζει κάποιον άλλο.

πολλαπλασιαστέου[5] έχει από μικρή έως καθόλου επίδραση στη δυσκολία επίλυσης του προβλήματος (De Corte, Verschaffel, & Van Coillie, 1988). Παράλληλα, η θέση του άγνωστου παράγοντα μέσα στο πρόβλημα έχει αντίκτυπο στην αναπαράσταση που δημιουργείται (García, Jiménez, & Hess, (2006).

Παράγοντες που επηρεάζουν τις απαντήσεις παιδιών σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, είναι η αλληλουχία των αριθμών, για παράδειγμα αν το πρόβλημα παραθέτει πρώτα τον μικρότερο ή τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς του (Verschaffel & De Corte, 1990), και η θέση που έχουν ο αριθμός και ορισμένες σημαντικές λέξεις μέσα στην πρόταση (Schumacher & Fuchs, 2012). Για παράδειγμα, σε προβλήματα «αλλαγής», τα παιδιά συνήθως αναζητούν ένα συγκεκριμένο αριθμό, για να τον χρησιμοποιήσουν ως αφετηρία της σκέψης τους, επιλέγοντας με βάση χαρακτηριστικά του προβλήματος, όπως τον πρώτο σε σειρά αναφοράς αριθμό, (Lean, Clements, & Del Campo, 1990· Wilkins, Baroody, & Tiilikainen, 2001), τον τύπο του ζητούμενου παράγοντα (αρχική ποσότητα ή το μέτρο της αλλαγής), και το μέγεθος των αριθμών (Verschaffel & De Corte, 1990). Η στρατηγική της καταμέτρησης από τον μεγαλύτερο αριθμό προς τον μικρότερο ακολουθείται συχνότερα και είναι πιο αποτελεσματική, όταν ο μεγαλύτερος αριθμός παρατίθεται πρώτος στο πρόβλημα (Wilkins, Baroody, & Tiilikainen, 2001). Ακόμα και για τους ενήλικες, οι πράξεις: «4 + 2 = 6» και «2 + 4 = 6», οι οποίες μαθηματικά είναι ισοδύναμες, ενδέχεται να αντικατοπτρίζουν διαφορετικά νοήματα από ψυχολογικής άποψης (Kaput, 1979).

Όσον αφορά δυσκολίες στην εκτέλεση των πράξεων, φαίνεται ότι τα περισσότερα λάθη παρουσιάζονται είτε λόγω δυσκολίας των λυτών να κατανοήσουν λεκτικά το εκάστοτε πρόβλημα (Schumacher & Fuchs, 2012), είτε από λάθη στο μαθηματικό υπολογισμό/πράξη (Kingsdorf & Krawec, 2014). Άλλα σφάλματα ενδέχεται να προκύπτουν από σωστό υπολογισμό, ο οποίος είναι βασισμένος σε λανθασμένη αναπαράσταση του προβλήματος (Lewis & Mayer, 1987).

Οι περισσότερες έρευνες σχετικά με τις δυσκολίες στην εκτέλεση μαθηματικών προβλημάτων εστιάζουν στην πρόσθεση και την αφαίρεση (Carpenter & Mose, 1984· De Corte, Verschaffel, & Van Coillie, (1988)· Schumacher & Fuchs, 2012). Η σωστή ή λανθασμένη επιλογή της πράξης

[5] Ο αριθμός που πολλαπλασιάζεται από κάποιον άλλο.

για την επίλυση του προβλήματος, εξαρτάται από το είδος των δοσμένων από το πρόβλημα αριθμών (De Corte, Verschaffel, & Pauwels, 1990). Πράξεις με κρατούμενο (π.χ. 37+48) καθιστούν την πρόσθεση δύο ή περισσότερων αριθμών δυσκολότερη για μαθητές και ενήλικες (Nuerk, Moeller, & Willmes, 2015). Προβλήματα πρόσθεσης με κρατούμενο φαίνεται πως επιφέρουν μεγαλύτερο φορτίο στη μνήμη εργασίας (Ashcraft, 1995· Fürst & Hitch, (2000). Στις συγκεκριμένες πράξεις, εντοπίζονται τουλάχιστον τρεις γνωστικές διαδικασίες σε ενήλικες: υπολογισμός πρόσθεσης μονάδων, εντοπισμός του κρατούμενου, ενσωμάτωση του κρατούμενου στη διαδικασία (Moeller, Klein, & Nuerk, 2011).

Νοεροί υπολογισμοί

Στην καθημερινή τους ζωή, οι άνθρωποι είναι υποχρεωμένοι να εκτελούν διάφορους υπολογισμούς. Γενικά, αυτοί οι υπολογισμοί μπορούν να εκτελεστούν με τρία μέσα. Πρώτον, με μηχανικά μέσα, όπως για παράδειγμα μια αριθμομηχανή, ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, ή ένα κινητό τηλέφωνο. Δεύτερον, με χαρτί και μολύβι. Τρίτον, εκτελώντας τους υπολογισμούς με το μυαλό, δηλαδή νοερά. Προφανώς, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και συνδυασμοί των παραπάνω μέσων, όπως για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να πραγματοποιήσει με το μυαλό του έναν υπολογισμό, και αργότερα να επαληθεύσει το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε με τη χρήση μιας αριθμομηχανής, ή εναλλακτικά ένας υπολογισμός μπορεί να γίνει με το μυαλό, και ταυτόχρονα να πραγματοποιούνται σημειώσεις σε χαρτί (Λεμονίδης, 2015).

Στη δεκαετία του 1930-40, αναδείχθηκε η νοερή αριθμητική, καθώς δόθηκε έμφαση στον κοινωνικό χαρακτήρα των μαθηματικών. Στα τέλη της δεκαετίας του 1950 με αρχές της δεκαετίας του 1960, οι ερευνητές που ενδιαφέρονταν για τη διδακτική των μαθηματικών, άρχισαν να επικεντρώνονται στις δομικές ιδιότητες των μαθηματικών συστημάτων που διδάσκονται στα σχολεία. Τη δεκαετία του 1980, αναγνωρίστηκε η σημασία των νοερών υπολογισμών στην αποτελεσματική χρήση της τεχνολογίας, η οποία άρχισε να αποκτά αυξημένη διαθεσιμότητα (Reys, 1984). Επειδή οι νοεροί υπολογισμοί ήταν πάντα χρήσιμοι, έχουν γίνει το επίκεντρο μιας σημαντικής αλλαγής στη μαθηματική εκπαίδευση σε πολλά μέρη του κόσμου (Reys, 1985).

Στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία, ο όρος «νοερός υπολογισμός» μπορεί να εντοπιστεί με διάφορους όρους, όπως: *mental calculation, mental computation, mental arithmetic,* καθώς και *mental maths*. Ο τελευταίος όρος χρησιμοποιείται ευρύτερα για να εκφράσει τους νοερούς υπολογισμούς στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών (Λεμονίδης, 2015).

Πολλοί εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν παρανοήσεις, συγχέοντας τη σχέση ανάμεσα στους νοερούς υπολογισμούς και την εκτίμηση. Δηλαδή, θεωρούν ότι οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν υπολογισμούς που δεν εκτελούνται με τον τυπικό, γραπτό τρόπο, και είναι κατά προσέγγιση, συγχέοντας την έννοια του νοερού υπολογισμού με την έννοια της υπολογιστικής εκτίμησης («computational estimation»· Maclellan, 2001). Όταν κάποιος εκτελεί έναν υπολογισμό, επεξεργάζεται τους αριθμούς, τις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, τα αριθμητικά δεδομένα που γνωρίζει κλπ., προκειμένου καταλήξει σε μια απάντηση. Η απάντηση μπορεί να είναι συγκεκριμένη και μοναδική, ή μπορεί να είναι μια κατά προσέγγιση τιμή. Όταν ο στόχος σε ένα νοερό μαθηματικό πρόβλημα είναι να δώσει μια ακριβή απάντηση, απαιτείται κάποιος υπολογισμός. Η δυνατότητα που αποδίδεται σε αυτόν τον υπολογισμό να γίνει νοερά, εξαρτάται από το μέγεθος των αριθμών που εμπλέκονται στη λειτουργία. Αντίθετα, αν ο στόχος είναι μια κατά προσέγγιση απάντηση, ή ακόμα και αν οι αριθμοί είναι μεγάλοι, τότε συνηθίζεται να αρκεί μια εκτίμηση (Sowder, 1988). Σύμφωνα με την Sowder, «*εκτίμηση είναι η διαδικασία της μετατροπής αριθμών από ακριβείς σε κατά προσέγγιση και της διεξαγωγής νοερών υπολογισμών με αυτούς τους αριθμούς, προκειμένου να βρεθεί μια απάντηση, η οποία βρίσκεται λογικά κοντά στο αποτέλεσμα ενός ακριβούς υπολογισμού*». Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εκτίμηση είναι κάτι ευρύτερο, το οποίο εμπεριέχει τους νοερούς υπολογισμούς (Sowder, 1988). Επομένως, ένας νοερός υπολογισμός είναι μια διαδικασία εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων, προκειμένου να επιτευχθεί, είτε μια επακριβής απάντηση, είτε μια απάντηση κατά προσέγγιση, στην οποία περίπτωση, γίνεται λόγος για υπολογιστική εκτίμηση (Maclellan, 2001).

Οι πρώτοι που δίνουν ορισμό για τους «νοερούς υπολογισμούς» είναι οι Wandt & Brown, οι οποίοι αναφέρουν ότι νοερός υπολογισμός είναι «εκείνη τη διαδικασία που θα δώσει με ακρίβεια ένα αριθμητικό αποτέλεσμα δίχως τη χρήση εξωτερικών υπολογιστικών ή γραφιστικών μέσων» (Wandt & Brown, 1957). Ο Trafton αναφέρει πως νοερός υπολογισμός είναι «η επεξεργασία μη τυπικών αλγορίθμων χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού» (Trafton, 1978). Ο Reys ορίζει ως νοερό υπολογισμό αυτόν που εμφανίζει δύο διακριτά χαρακτηριστικά. Πρώτον, να προϋποθέτει μια ακριβή απάντηση, και δεύτερον, η διαδικασία του να εκτελείται με νοερό τρόπο δίχως τη χρήση εξωτερικών συσκευών, όπως είναι το χαρτί και το μολύβι (Reys, 1984). Αργότερα, προκειμένου να καθοριστεί αναλυτικότερα η έννοια των νοερών υπολογισμών, εισαγάγεται και η έννοια των στρατηγικών. Ο Threlfall αξιολογεί διάφορους τρόπους ανταπόκρισης σε ένα μαθηματικό πρόβλημα και αναγνωρίζει τις στρατηγικές ως σημεία ζωτικής σημασίας για τις ευρύτερες ανάγκες των νοερών υπολογισμών. Αντιμετωπίζει τις στρατηγικές ως διαδικασίες, μέσα από τις οποίες βρίσκεται μια λύση στο πρόβλημα, αφού έχει προηγηθεί μια αλληλουχία αριθμητικών τροποποιήσεων (Threlfall, 2002). Ο Thompson (2001) αναφέρει ότι η φράση «νοερός υπολογισμός» χρησιμοποιείται σε προγράμματα σπουδών για να αναδείξει τη σημασία εφαρμογής στρατηγικών στη νοερή εργασία. Στην ίδια κατεύθυνση, η Anghileri (1999) χρησιμοποιεί τις στρατηγικές για να ορίσει τους νοερούς υπολογισμούς, αλλά αναφέρεται ταυτόχρονα σε «σημειώσεις» («jottings») που μπορούν να πραγματοποιηθούν κατά τη διάρκεια των νοερών υπολογισμών. Πιο συγκεκριμένα, τονίζει τη διάκριση ανάμεσα στη νοερή ανάκληση και το νοερό υπολογισμό. Αναφέρει ότι ενδέχεται οι νοερές στρατηγικές να υποβοηθούνται από σημειώσεις με χαρτί και μολύβι, προκειμένου να υποστηρίξουν τη βραχύχρονη μνήμη των μαθητών, καθώς ερμηνεύει τη λέξη «νοερός» ως «με το νου» και όχι αποκλειστικά «στο νου». Ιδιαίτερα, όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, οι μαθητές χρειάζεται να απομνημονεύουν αριθμητικά δεδομένα και ταυτόχρονα να διερευνούν περαιτέρω αυτά τα δεδομένα και να παρατηρούν διασυνδέσεις που ενδέχεται να τους διευκολύνουν να πραγματοποιήσουν τους υπολογισμούς (Anghileri, 1999). Ο Λεμονίδης αναφέρει ότι οι νοεροί υπολογισμοί είναι διανοητικές διαδικασίες που βασίζονται κυρίως στη χρήση στρατηγικών, συμπεριλαμβανομένης και της απλής ανάκτησης αριθμητικών δεδομένων. Είναι ακριβείς υπολογισμοί και αποτελούν μέρος της εκτίμησης. Επίσης, όσον αφορά τους τρόπους υπολογισμού, εκφράσεις όπως «χωρίς τη χρήση οποιουδήποτε εξωτερικού οργάνου» ή «μόνο με το μυαλό» μπορεί να περιορίζουν υπερβολικά τον τρόπο που τους ορίζουμε, καθώς σε κάποιες περιπτώσεις, σε νοερούς υπολογισμούς, μπορεί να γίνει χρήση γραπτών σημειώσεων, προς διευκόλυνση της βραχύχρονης μνήμης (Λεμονίδης, 2015). Ο Λεμονίδης ορίζει τους νοερούς υπολογισμούς ως υπολογισμούς που γίνονται νοερά μέσω της αξιοποίησης στρατηγικών, οι οποίοι συνήθως πραγματοποιούνται χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, όπως το μολύβι και το χαρτί, αν και μπορεί να γίνει χρήση αυτών των μέσων προς διευκόλυνση της βραχύχρονης μνήμης μέσω της καταγραφής σημειώσεων.

Οι νοεροί υπολογισμοί κατέχουν μια σημαντική θέση στη διεθνή βιβλιογραφία αναφορικά με τη διδακτική και μαθησιακή τους αξία. Η έρευνα σχετικά με τον προτιμώμενο τύπο υπολογισμών στην καθημερινότητα των ενηλίκων έχει δείξει ότι οι περισσότεροι υπολογισμοί πραγματοποιούνται νοερά (Λεμονίδης, 2015). Το γεγονός ότι οι νοεροί υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν με εναλλακτικές στρατηγικές, τους καθιστά πιο εύχρηστους από τους γραπτούς υπολογισμούς και, συνεπώς, προτιμώνται συχνότερα. Αυτές οι εναλλακτικές στρατηγικές διαφέρουν από τους γραπτούς αλγόριθμους, για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν πιο εύκολα, και αποτελούν επινόηση του χρήστη ή προέρχονται από τις τυπικές γραπτές τεχνικές (McIntosh, Reys R., Reys B., 1997). Επίσης, είναι πιο γρήγορες, μπορούν να γίνουν νοερά και να συνεισφέρουν στην αίσθηση του αριθμού (Van de Walle, 2005).

Χαρακτηριστικά γραπτών αλγόριθμων

Τα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο διδάσκουν στους μαθητές τους γραπτούς αλγόριθμους ως το κύριο μέσο αντιμετώπισης για την πραγματοποίηση υπολογισμών με φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς ως παράγοντες (Plunkett, 1979). Από διδακτική άποψη, οι γραπτοί αλγόριθμοι έχουν μια τυποποιημένη μορφή με διακριτά βήματα και κανόνες, για να μπορούν να εφαρμοστούν ακόμη και αν δεν έχουν γίνει κατανοητοί, και για να επιδέχονται διορθώσεις. Μπορούν να εφαρμοστούν για οποιουσδήποτε αριθμούς αποτελεσματικά και να γενικευτούν χωρίς να υπάρχει οποιαδήποτε ορατή σύνδεση με τους τρόπους που σκέφτονται οι άνθρωποι για τους αριθμούς (Maclellan, 2001).

Σύμφωνα με τον Plunkett (1979), οι γραπτοί αλγόριθμοι έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- Είναι σταθεροί και σωστοί, επειδή πραγματοποιούνται με χαρτί και μολύβι.
- Είναι συμβατικοί και κοινοί για όλους, καθώς όποιος και να ακολουθήσει έναν γραπτό αλγόριθμο, θα βρει ίδιο αποτέλεσμα με κάποιον άλλο λύτη.
- Μπορούν να εκτελεστούν από κάποιον που δεν γνωρίζει τον σκοπό του αλγόριθμου που πραγματοποιεί, όμως εφόσον τον έχει διδαχτεί, φτάνει μηχανικά σε μια λύση.
- Αφορούν σε και πραγματοποιούνται με σύμβολα. Η εκτέλεσή τους γίνεται αποκλειστικά με σύμβολα τα οποία έχουν επινοηθεί, χωρίς να υπάρχει κάποια παραπομπή στον πραγματικό κόσμο, όπως για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα.
- Μπορούν να γενικευτούν, καθώς μπορούν να λειτουργήσουν για οποιουσδήποτε αριθμούς, μεγάλους ή μικρούς, φυσικούς ή δεκαδικούς, με πολλά ή λίγα ψηφία.
- Είναι αναλυτικοί. Επιβάλλουν στο άτομο να διαχωρίσει τα ψηφία των αριθμών ανάλογα με τις θέσεις αξίας τους και να αντιμετωπίσει αυτά τα ψηφία ξεχωριστά.
- Απέχουν πολύ από τον τρόπο που οι άνθρωποι σκέφτονται για τους αριθμούς και αυτό τους καθιστά δυσνόητους.

- Υποβαθμίζουν τη γνωστική ενεργητικότητα και αναστέλλουν την κατανόηση. Το άτομο που πραγματοποιεί τον εκάστοτε γραπτό αλγόριθμο, δεν σκέφτεται κριτικά για ποιο λόγο ακολουθεί αυτήν την αλληλουχία και τους κανόνες, με αποτέλεσμα να μην πραγματοποιεί οποιαδήποτε παρέμβαση στον ίδιο τον αλγόριθμο (Plunkett, 1979). Οι γραπτοί αλγόριθμοι ωθούν τους μαθητές να εκτελούν προκαθορισμένα βήματα με μηχανικό τρόπο, χωρίς να αντιλαμβάνονται το λόγο, τον τρόπο και τον σκοπό των πράξεών τους (Reys, 1985). Έτσι δρουν σε βάρος της μαθηματικής σκέψης (Reys, 1984· Maclellan, 2001).

Χαρακτηριστικά νοερών αλγόριθμων

Ο Plunkett (1979) αναγνωρίζει τους νοερούς αλγόριθμους ως ξεχωριστές διαδικασίες από τους παραδοσιακούς γραπτούς αλγόριθμους. Οι νοεροί αλγόριθμοι:

- Εκτελούνται γρήγορα και γίνονται δύσκολα αντιληπτοί.
- Παρουσιάζουν ποικιλία στην επιλογή της τεχνικής, ακόμη και όταν ο λύτης πραγματεύεται μία και μοναδική μαθηματική πράξη. Αυτό φαίνεται περισσότερο από υπολογισμούς που απαιτούν πιο σύνθετες νοητικές διεργασίες και υψηλή μαθηματική αίσθηση για να πραγματοποιηθούν. Για παράδειγμα, η αφαίρεση «88 – 69» και ο πολλαπλασιασμός «6 · 26» μπορούν να πραγματοποιηθούν με διαφορετικούς τρόπους, αξιοποιώντας ποικίλες στρατηγικές.
- Παρουσιάζουν ευελιξία και προσαρμοστικότητα.
- Παρέχουν στον χρήστη τον έλεγχο του υπολογισμού που πραγματοποιεί, δίνοντάς του τη δυνατότητα να επιλέγει τη μέθοδο που θα εφαρμόσει.
- Μπορούν να μετατρέπουν δύσκολους υπολογισμούς σε ευκολότερους ως προς τον λύτη, χάρη στον ολιστικό τους χαρακτήρα. Αντίθετα με τους γραπτούς αλγόριθμους, οι νοεροί υπολογισμοί δεν χωρίζουν τους αριθμούς ανάλογα με τις θέσεις αξίας των ψηφίων τους, δίνοντας έτσι περισσότερο νόημα στην εκτέλεση των υπολογισμών. Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός «4 · 129», εάν εκτελεστεί με τον παραδοσιακό αλγόριθμο θα οδηγήσει στους επιμέρους πολλαπλασιασμούς «4 · 1», «4 · 2», και «4 · 9», και μετά σε μια κανονιστική κάθετη πρόσθεση, ενώ εάν εκτελεστεί με νοερή μέθοδο, ο λύτης αντιμετωπίζει τον αριθμό ως μέρος του συνόλου αριθμών, μπορεί να παρατηρήσει ότι

«129 = 130 - 1» και στη συνέχεια να εφαρμόσει την επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιάζοντας με το 4.

- Είναι πολλές φορές εποικοδομητικοί, καθώς ξεκινούν από το ένα μέρος του προβλήματος για να καταλήξουν στην απάντηση. Άλλες φορές, ξεκινούν από το ένα μέρος και καταλήγουν στο άλλο, κατασκευάζοντας την απάντηση στην πορεία. Για παράδειγμα, στην αφαίρεση «324 – 89» μπορεί να γίνει η εκκίνηση από τον χαμηλότερο παράγοντα ως εξής: «89 + 11 = 100. 100 + 200 = 300. 300 + 24 = 324 άρα 324 – 89 = 11 + 200 + 24» (Sowder, 1990).
- Στηρίζονται στη μαθηματική αίσθηση του χρήστη και απαιτούν κατανόηση προκειμένου να χρησιμοποιηθούν. Ένας μαθητής που εκτελεί αποτελεσματικά τους νοερούς αλγόριθμους έχει σχεδόν σίγουρα κατανοήσει τις ιδιότητες των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων (Sowder, 1990).
- Συχνά είναι εικονικοί. Είτε σχετίζονται με μια εικόνα όπως η αριθμογραμμή είτε εξαρτώνται από διαδοχικές εκφράσεις.
- Πολλές φορές προσεγγίζουν την απάντηση πρώιμα, επειδή συνήθως προηγείται ο υπολογισμός των αριστερότερων ψηφίων, κυρίως όσον αφορά τους φυσικούς αριθμούς.
- Παρουσιάζουν περιορισμούς, κυρίως σε πιο δύσκολες πράξεις, όπως το «33 · 334», παρόλο που βρίσκουν εφαρμογή σε ένα μεγάλο εύρος υπολογισμών. Με τις νοερές μεθόδους γίνεται σαφής και η θέση των αριθμομηχανών: είναι το λογικό εργαλείο για τους δύσκολους υπολογισμούς, το ιδανικό συμπλήρωμα για τη νοερή αριθμητική.

Σύμφωνα με τη Reys (1985), οι νοεροί αλγόριθμοι:

- Είναι αποτελεσματικοί. Οι νοερές ικανότητες και οι ικανότητες εκτίμησης χρησιμοποιούνται για την επαλήθευση πιθανώς λανθασμένων απαντήσεων. Πολλές καθημερινές περιπτώσεις προβλημάτων απαιτούν αριθμητική σε νοερή μορφή, επειδή το χαρτί και το μολύβι και οι αριθμομηχανές δεν είναι πάντοτε διαθέσιμες, αντίθετα με τις ικανότητες του μυαλού. Συνεπώς, η μηχανική εφαρμογή των γραπτών αλγορίθμων είναι πολύ κοινή, καθώς πολλά καθημερινά προβλήματα μπορούν να αντιμετωπιστούν σύντομα, αξιοποιώντας έναν νοερό αλγόριθμο.
- Όσον αφορά στη διδακτική των μαθηματικών, αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο, με το οποίο μπορούν να ασχοληθούν μαθητές όλων των γνωστικών επιπέδων, επειδή μπορούν

να κατακτηθούν από μαθητές που δεν έχουν υψηλές ικανότητες αλλά μπορούν να παρακινήσουν ακόμα και τους πιο ευφυείς.

- Συμβάλλουν στη δόμηση της μαθηματικής σκέψης. Αυτό φαίνεται από το ότι ενθαρρύνουν τον έλεγχο ενός προβλήματος πριν από την ενασχόληση με αυτό και την εφαρμογή οποιουδήποτε αλγόριθμου, προωθούν την εφεύρεση και χρήση εναλλακτικών υπολογιστικών αλγόριθμων, και συνεισφέρουν στην κατανόηση των ιδιοτήτων των αριθμών και των διαφορετικών μορφών των αριθμών, όπως για παράδειγμα του δεκαδικού συστήματος.

Συγκρίνοντας τα χαρακτηριστικά των γραπτών και των νοερών αλγορίθμων, διακρίνεται η σημαντικότερη διαφορά ανάμεσά τους, η οποία είναι η συμβολή τους στην κατανόηση των αριθμών από τον χρήστη. Ενώ οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Reys, 1985), οι γραπτοί αλγόριθμοι αποτελούνται από μια προκαθορισμένη αλληλουχία βημάτων, στηρίζοντας την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι αυθαίρετα, καθώς δεν παρουσιάζουν ομοιότητες με άλλες γνώσεις σχετικές με τους αριθμούς (Plunkett, 1979). Παράλληλα, οι γραπτοί αλγόριθμοι αναστέλλουν την κατανόηση, ενώ με τη χρήση νοερών υπολογισμών οι μαθητές σκέφτονται ενεργά διαμορφώνοντας την αίσθηση του αριθμού που κατέχουν, και διευκολύνονται στην αναγνώριση διαφορετικών τρόπων γραφής των ίδιων αριθμών, όπως τα κλάσματα με τους δεκαδικούς (Maclellan, 2001). Επιπλέον, οι νοεροί αλγόριθμοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε δύσκολους υπολογισμούς με μεγάλους αριθμούς, ή με αριθμούς που δεν περιλαμβάνονται σε κάποια από τις προϋποθέσεις των νοερών στρατηγικών, πράγμα που δεν αποτελεί εμπόδιο στους υπολογισμούς με τη χρήση γραπτών αλγόριθμων. Μια άλλη διαφορά είναι ότι οι νοεροί αλγόριθμοι παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία, ενώ οι γραπτοί είναι τυποποιημένοι. Μια πράξη, εάν γίνει με χρήση γραπτού αλγόριθμου, μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο με έναν κάθετο τρόπο, ενώ εάν εκτελεστεί νοερά, οι τρόποι που μπορεί να προσεγγιστεί είναι πολυάριθμοι. Με άλλα λόγια, ο λύτης, όταν εκτελεί έναν υπολογισμό με τη χρήση γραπτών αλγόριθμων χρησιμοποιεί μια μέθοδο με συγκεκριμένους κανόνες που έχει δημιουργηθεί για αυτόν τον σκοπό, ενώ όταν ο υπολογισμός πραγματοποιείται με τη χρήση νοερών υπολογισμών, ο χρήστης χρειάζεται να ελέγξει την απάντηση στην οποία καταλήγει, ανατρέχοντας στα βήματα που ακολούθησε (Reys, 1985). Ο Van de Walle επισημαίνει ότι οι νοερές στρατηγικές συχνά επιχειρούν να επεμβαίνουν στους παράγοντες των υπολογισμών, αλλάζοντας τους αριθμούς με σκοπό να διευκολύνουν την εκτέλεσή τους. Οι στρατηγικές που επινοούνται είναι ευέλικτες και όχι σταθερές, ενώ οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τους ίδιους κανόνες σε όλα τα προβλήματα (Van de Walle, 2005).

Η εκτέλεση υπολογισμών και η επίλυση προβλημάτων με νοερό τρόπο από την πλευρά των μαθητών αποκομίζει οφέλη από πολλές απόψεις. Οι μαθητές παρουσιάζουν λιγότερα λανθασμένα αποτελέσματα στους υπολογισμούς τους, όταν αξιοποιούν τεχνικές τις οποίες κατανοούν πως λειτουργούν, συγκριτικά με τις περιπτώσεις που χρησιμοποιούν μεθόδους που έχουν μάθει χωρίς να τις κατανοούν. Επιπλέον, οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν ευέλικτες μεθόδους, πολλές φορές ταχύτερες από τους γραπτούς αλγόριθμους, βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν αίσθηση του αριθμού (Van de Walle, 2005), και στηρίζονται στις γνώσεις και την κατανόηση του χρήστη για τις αριθμητικές ιδιότητες και τις μαθηματικές σχέσεις (Mcintosh et al., 1992).

O Reys (1984) σημειώνει πως η επιλογή αντιμετώπισης ενός προβλήματος με τη χρήση γραπτού αλγόριθμου, αντί να χρησιμοποιηθεί κάποια νοερή στρατηγική μπορεί να αποδειχτεί επιζήμια. Η εκτέλεση ενός υπολογισμού με χαρτί και μολύβι χρειάζεται περισσότερο χρόνο συγκριτικά με τη νοερή εκτέλεση, που συχνά παρουσιάζει και μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα. Ταυτόχρονα, ο νοερός υπολογισμός διεγείρει μια ποικιλία τρόπων λύσης, ενώ οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι υποβαθμίζουν τη μαθηματική σκέψη και την αναγνώριση και τη χρήση δομικών σχέσεων, καθώς πολλές φορές εκτελούνται μηχανικά ακολουθώντας κανόνες. Τέλος, η χρήση ενός γραπτού αλγορίθμου αγνοεί την πραγματικότητα διότι τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής δεν επιτρέπουν πάντα την εξάρτηση από γραπτές μεθόδους.

Όσον αφορά τη σημασία των νοερών υπολογισμών στη διδακτική των μαθηματικών, ο Reys υπογραμμίζει πως οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν προϋπόθεση για την επιτυχή ανάπτυξη όλων των αριθμητικών αλγορίθμων σε γραπτή μορφή, προωθούν την καλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, και προωθούν τη δημιουργική και την ανεξάρτητη σκέψη ενθαρρύνοντας τους μαθητές να βρουν ευφυείς τρόπους για να χειρίζονται τους αριθμούς. Επιπλέον, συμβάλλουν στις ικανότητές τους σχετικά με την επίλυση προβλημάτων, και αποτελούν ένα σκαλοπάτι, για την ανάπτυξη δεξιοτήτων εκτίμησης (Reys, 1984).

Οι Λεμονίδης & Λυγούρας (2008) σημειώνουν ότι η επίδοση μαθητών Δημοτικής εκπαίδευσης όσον αφορά τις πράξεις, βελτιώνεται, όταν εκείνοι υπολογίζουν νοερά. Συμπεραίνουν πως η παρουσία της δεκάδας στις νοερές προσθέσεις και τις αφαιρέσεις βοηθά τους μαθητές να υπολογίσουν σωστά το αποτέλεσμα, πράγμα που δεν φαίνεται να επηρεάζεται από την παρουσία ή μη κρατούμενου. Από την άλλη, στους νοερούς πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις παρατηρούν πως η επίδοση των μαθητών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη γνώση τους για την προπαίδεια και την ικανότητά τους να την αξιοποιούν.

Ο Thompson, συμφωνώντας με τον Reys, επισημαίνει πως η εξάσκηση με τους νοερούς υπολογισμούς επιφέρει καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των αριθμητικών εννοιών (McIntosh, 1990· Sowder, 1990), και ταυτόχρονα βελτιώνει τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να αντιληφθούν τη λογική και τους αλγόριθμους των γραπτών πράξεων. Επιπλέον, οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται περισσότερο από τους γραπτούς υπολογισμούς στην καθημερινή ζωή (Thompson, 1999).

Ο Λεμονίδης (2015) καταλήγει σχετικά με τη διδακτική αξία των νοερών υπολογισμών, ότι η εξάσκηση και η ενασχόληση με τους νοερούς υπολογισμούς, επιφέρει καλύτερη και βαθύτερη αριθμητική αίσθηση, ενισχύοντας την κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών αλγόριθμων των μαθηματικών πράξεων. Ταυτόχρονα, συνιστούν βασικό σκαλοπάτι για την κατάκτηση της εκτίμησης και αποτελούν διανοητική λειτουργία που συνεισφέρει στη βελτίωση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων. Παράλληλα, συμβάλλουν σε άλλες διανοητικές λειτουργίες, όπως σε δεξιότητες παρουσίασης και στην αξιοποίηση αφηρημένων εννοιών στη βραχύχρονη μνήμη, και σε μεταγνωστικές λειτουργίες, κατά τη διάρκεια παρουσίασης των μεθόδων που οι μαθητές πραγματοποιούν τους υπολογισμούς. Επιπλέον, όσον αφορά την πρακτική τους χρήση, οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινότητα, πιο συχνά, μάλιστα, από τους γραπτούς υπολογισμούς.

Υπάρχουν διάφορες προϋποθέσεις, που χρειάζεται να εκπληρωθούν, προκειμένου να επιτευχθεί με ακρίβεια ένας νοερός υπολογισμός. Αν και ο νοερός υπολογισμός μπορεί να περιλαμβάνει την απομνημόνευση αριθμητικών ιδιοτήτων, υποχρεώνει τα άτομα να βρίσκονται σε θέση να ανακαλούν και να ανακτούν αυτά τα δεδομένα όταν είναι απαραίτητο. Επίσης είναι προαπαιτούμενο οι μαθητές να έχουν κατανοήσει την αριθμητική δομή και τις αριθμητικές ιδιότητες (Reys, 1984· Varol & Farran, 2007). Σημαντική είναι και η γνώση σχετικά με τις αριθμητικές ιδιότητες και η ευελιξία στη μετατροπή, την αντιστάθμιση και την αναδιάταξη των αριθμών (Heirdsfeld & Cooper, 2002· Proulx, 2013· Thompson, 2010· Threlfall, 2002· Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009). Αυτές οι διαδικασίες περιλαμβάνουν κατανόηση της *ομοιότητας* (δηλαδή, το ότι δύο αριθμοί ή εκφράσεις είναι ισοδύναμοι όταν αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα), καθώς και της έννοιας της *αντικατάστασης* (δηλαδή ότι ένας αριθμός ή μια έκφραση μπορεί να αντικατασταθεί από έναν άλλο επειδή τα δύο είναι ισοδύναμα· Heirdsfield, 2011· Jones et al., 2012). Αν καταφέρουν να είναι ευέλικτοι, να αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των αριθμών και να κατανοήσουν την ισοδυναμία μέσα από τις έννοιες της ομοιότητας και της αντικατάστασης, οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν σε διαχειρίσιμες και ουσιαστικές νοερές αντικαταστάσεις (Kindrat, 2018).

Οι νοεροί υπολογισμοί στα Ελληνικά Προγράμματα Σπουδών

Στο ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2003 (ΑΠΣ – ΔΕΠΠΣ), η έννοια των νοερών υπολογισμών αναφέρεται μόνο στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Εισάγεται για πρώτη φορά στα μαθηματικά της Β΄τάξης του δημοτικού σχολείου στις ενότητες «αριθμοί και πράξεις» και «Υπολογισμοί: πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών στους αριθμούς 0-100», όπου ως στόχος ορίζεται για τους μαθητές «Να μπορούν να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών με βάση τα διπλά, την πεντάδα και τη δεκάδα, νοερά ή με τη βοήθεια της γραφής.». Στην ίδια σχολική βαθμίδα, γίνεται αναφορά στην εκμάθηση της προπαίδειας με τον όρο: «νοερός πολλαπλασιασμός».

Στην επόμενη βαθμίδα, τη Γ΄ τάξη, ορίζεται και πάλι ως διδακτικός στόχος, οι μαθητές «να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις νοερά ή με τη βοήθεια της γραφής», αυτή τη φορά, όμως, οι νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις επεκτείνονται πέρα από το όριο του 100 των φυσικών αριθμών που είχε τεθεί στο προηγούμενο ηλικιακό επίπεδο. Στις προτεινόμενες δραστηριότητες, το Πρόγραμμα Σπουδών κατευθύνει τον εκπαιδευτικό να ενθαρρύνει τους μαθητές να κατασκευάσουν δικές τους υπολογιστικές διαδικασίες για να πραγματοποιήσουν υπολογισμούς αφαίρεσης, στοιχείο που παραπέμπει στις αυθόρμητες νοερές στρατηγικές. Παράλληλα, προτείνει την υποστήριξη της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών «από τη χρήση κατάλληλου διδακτικού υλικού». Όσον αφορά το νοερό πολλαπλασιασμό (προπαίδεια), θέτει ως στόχο τη σταθεροποίηση και ολοκλήρωση της πρακτικής του.

Στη Δ΄ τάξη, το ΑΠΣ – ΔΕΠΠΣ ορίζει ως στόχο την «ανάπτυξη στρατηγικών νοερού υπολογισμού γινομένων με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού». Στο συγκεκριμένο ηλικιακό επίπεδο, γίνεται για πρώτη φορά αναφορά σε «στρατηγικές» που αφορούν τους νοερούς υπολογισμούς. Επιπλέον, προτείνει την «απλούστερη εκτέλεση των πράξεων» με την αξιοποίηση κατάλληλων ιδιοτήτων των αριθμών, και πιο συγκεκριμένα, την υποβοήθηση από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού. Με άλλα λόγια, να αναλύουν οι μαθητές φυσικούς αριθμούς σε διαφορετικά γινόμενα παραπάνω από δύο παραγόντων, καθώς και να τα ανασυνθέτουν.

Στην Ε΄ τάξη της δημοτικής εκπαίδευσης, το σημερινό Πρόγραμμα Σπουδών θέτει ως στόχο την ικανότητα να μπορούν οι μαθητές να αναπαραστούν έναν αριθμό ως άθροισμα ή γινόμενο δύο διαφορετικών αριθμών. Επίσης, προσθέτει μια καινούρια θεματική ενότητα, την οποία ονομάζει «Μέθοδοι προσεγγιστικού υπολογισμού και στρογγυλοποίησης», στην οποία αναφέρει τον προσεγγιστικό έλεγχο του αποτελέσματος μιας πράξης.

Για την τελευταία τάξη του δημοτικού, το Πρόγραμμα Σπουδών περιορίζει τους νοερούς υπολογισμούς καθαρά στην εκτίμηση, αξιοποιώντας τις νοερές διαδικασίες για τον έλεγχο του αποτελέσματος μιας πράξης.

Στο Πρόγραμμα Σπουδών του 2011, η σχολική ύλη που αφορά στο αντικείμενο των μαθηματικών διακρίνεται στις εξής τρεις θεματικές περιοχές: Αριθμοί και Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία, και Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Με σκοπό να απαντήσει στα διδακτικά ερωτήματα «Ποιοι είναι οι εκάστοτε στόχοι μάθησης;», «Ποια είναι η αφετηρία εκκίνησης;», «Πώς και πού μετακινείσαι κάθε φορά και πώς επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί;», το πρόγραμμα εισάγει την έννοια των «Τροχιών Μάθησης και Διδασκαλίας» (ΤΜΔ). Μια ΤΜΔ εξετάζει την εμπειρία των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική ενότητα του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών. Κάθε ΤΜΔ θέτει ένα μαθηματικό στόχο, μια διαδρομή ανάπτυξης, και ένα σύνολο διδακτικών δραστηριοτήτων. Με άλλα λόγια, ορίζει τις δεξιότητες που κατακτούν οι μαθητές. Οι νοεροί υπολογισμοί εντοπίζονται στην ΤΜΔ «φυσικός αριθμός» που εντάσσεται στην ευρύτερη θεματική περιοχή «Αριθμοί και Άλγεβρα», και στην ΤΜΔ «δεκαδικός αριθμός». Στην «υποτροχιά» που ονομάζεται «πράξεις στους φυσικούς αριθμούς», περιγράφεται η αναγνώριση και εκτέλεση και των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικές μεθόδους, ανάμεσά τους και οι νοερές στρατηγικές. Προτείνει την καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό, προκειμένου οι μαθητές να νιώσουν ικανοί να «αναπτύσσουν και να αξιοποιούν στρατηγικές νοερών υπολογισμών άτυπες και τυπικές διαδικασίες εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων». Η ίδια οδηγία δίνεται και στην υποτροχιά «πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς.

Στην Α΄ τάξη του Δημοτικού τίθεται ως «προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα», οι μαθητές να μπορούν να «κάνουν νοερές και γραπτές προσθέσεις και αφαιρέσεις χρησιμοποιώντας τα σύμβολα με μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς» μέχρι το 100.

Στη Β΄ τάξη, ορίζεται ως στόχος οι μαθητές να «διερευνούν κι εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών προσθέσεων κι αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών.» Γίνεται αναφορά στη σημασία της ανάπτυξης νοερών στρατηγικών για τη δόμηση του συστήματος των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα, και της ικανότητας προφορικής περιγραφής αυτών των στρατηγικών.

Στη Γ΄ τάξη της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, διευρύνεται ο στόχος που είχε τεθεί στο προηγούμενο ηλικιακό επίπεδο, από τους διψήφιους στους τριψήφιους αριθμούς παραμένοντας στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Προτείνονται δραστηριότητες που αποσκοπούν στη βελτίωση της «αίσθησης του αριθμού» και την «οικοδόμηση αριθμητικών σχέσεων ενισχύοντας τον ευέλικτο τρόπο σκέψης και τις διαισθητικές ιδέες σχετικά με τον αριθμό». Όπως αναφέρει το πρόγραμμα, «ένα μέρος της αίσθησης του αριθμού αφορά την ικανότητα διάσπασης των αριθμών και τον ευέλικτο συνδυασμό τους».

Στη Δ΄ τάξη, η νοερή πρόσθεση και αφαίρεση που τίθεται ως στόχος στα προηγούμενα ηλικιακά στάδια, επεκτείνεται στους τετραψήφιους αριθμούς. Όσον αφορά τις ικανότητες πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς, το πρόγραμμα προτείνει τη χρήση προσεγγιστικών και άλλων στρατηγικών για να ελέγχουν οι μαθητές αν τα αποτελέσματα στα οποία έχουν οδηγηθεί κρίνονται ως «λογικά». Οι συγκεκριμένες στρατηγικές που προτείνονται, αφορούν σε προσθέσεις και αφαιρέσεις δεκαδικών, αλλά και σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις δεκαδικών με μονοψήφιο ακέραιο. Το Πρόγραμμα Σπουδών του 2011 κατευθύνει τους εκπαιδευτικούς να αξιοποιήσουν τις ικανότητες εκτίμησης που κατέχουν οι μαθητές προκειμένου να «επεκτείνουν τις ήδη ανεπτυγμένες νοερές στρατηγικές και την ικανότητά τους να ασχολούνται με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, οι οποίες δεν απαιτούν ακριβείς λύσεις». Συγκεκριμένα, στη διδασκαλία των πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς, προτείνει την υπολογιστική εκτίμηση ως αφετηρία και την αποφυγή των μηχανικών κανόνων του τύπου «*στοιχίζουμε τις υποδιαστολές τη μία κάτω από την άλλη*», «*μετράμε τις θέσεις των δεκαδικών ψηφίων*» κλπ. Μέσω της εκτίμησης, οι μαθητές διευκολύνονται να αντιμετωπίζουν σφαιρικά τα μαθηματικά προβλήματα που τους παρουσιάζονται, μπορούν να επαληθεύουν τα αποτελέσματα των γραπτών αλγόριθμων και παρέχεται η δυνατότητα συζήτησης για την τοποθέτηση της υποδιαστολής στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση. Στη συνέχεια, αναφέρει «αυτοσχέδιες στρατηγικές για τους φυσικούς αριθμούς», δηλαδή μεθόδους και ικανότητες διάσπασης και αναδιαμόρφωσης των αριθμών, που διευκολύνουν σημαντικά τις πράξεις με πολυψήφιους παράγοντες. Κάνει λόγο για «αναγκαία ανάπτυξη στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης με ποικίλες μεθόδους». Επικρίνει την ανάλωση του «πολύτιμου» διδακτικού χρόνου για τη διδασκαλία των παραδοσιακών αλγόριθμων, θεωρώντας ότι ο συγκεκριμένος χρόνος μπορεί να αξιοποιηθεί για να αναπτύξουν οι μαθητές τις έννοιες των θεμελιωδών μαθηματικών ιδεών και ιδιοτήτων. Συστήνει στους εκπαιδευτικούς να ενθαρρύνουν στην αρχή έναν «άτυπο πειραματισμό», και στη συνέχεια να καθοδηγούν τους μαθητές τους στους γραπτούς αλγόριθμους δια μέσου των ανεπίσημων πειραματισμών που έχουν πραγματοποιήσει.

Στην Ε΄ και την Στ΄ τάξη, το Πρόγραμμα Σπουδών του 2011 θέτει ως μαθησιακό στόχο, οι μαθητές να μπορούν να «αναγνωρίζουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών» για όλες τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς «χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις». Συστήνει την παρότρυνση των μαθητών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις για αποτελέσματα προβλημάτων που περιλαμβάνουν δεκαδικούς αριθμούς, και να επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματά τους με τη χρήση αριθμομηχανής.

Υπολογισμοί κατ' εκτίμηση

Όπως προαναφέρθηκε, η εκτίμηση είναι κάτι ευρύτερο, το οποίο εμπεριέχει τους νοερούς υπολογισμούς (Sowder, 1988). Κατά τον Reys, υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διακριτικά χαρακτηριστικά των κατ' εκτίμηση υπολογισμών: Πρώτον, γίνονται νοερά, κατά κύριο λόγο χωρίς χαρτί και μολύβι. Δεύτερον, πραγματοποιούνται συντομότερα από τους γραπτούς υπολογισμούς. Τρίτον, παράγουν απαντήσεις που δεν είναι ακριβείς, αλλά επαρκούν τον σκοπό για τον οποίο πραγματοποιούνται. Τέταρτον, συχνά φανερώνουν ατομικές προσεγγίσεις και παράγουν ποικίλες εκτιμήσεις ως απαντήσεις (Reys, 1984). Οι McIntosh et al. (1997) ορίζουν την εκτίμηση ως αποτέλεσμα μιας απάντησης κατά προσέγγιση, που προκύπτει από έναν υπολογισμό, η οποία να βρίσκεται αρκετά κοντά ώστε να επιτρέπει να γίνει μια απόφαση. Οι Reys R. & Bestgen (1981) ορίζουν τον κατ' εκτίμηση υπολογισμό ως μια σύνδεση ανάμεσα στον νοερό υπολογισμό, τις αριθμητικές έννοιες και τις τεχνικές αριθμητικές ικανότητες.

Οι Δεσλή & Ανεστάκης (2014) αναφέρουν ότι οι υπολογιστικές εκτιμήσεις για τους εκπαιδευτικούς αποκτούν νόημα όταν εντάσσονται σε ορισμένα πλαίσια και παραπέμπουν σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Με άλλα λόγια, είναι πιο συχνά επιτυχείς, όταν αναφέρονται σε κάποιο πρόβλημα το οποίο εντάσσεται σε ένα ορισμένο πλαίσιο. Η αξία των κατ' εκτίμηση υπολογισμών αναδεικνύεται από το ότι εκπαιδευτικοί τους προσδίδουν σημασία τόσο στην καθημερινότητα, όσο και στη Διδακτική των Μαθηματικών μέσα στη σχολική αίθουσα (Δεσλή & Ανεστάκης, 2014).

Ο Reys (1984) αναφέρει ότι ο νοερός υπολογισμός και η εκτίμηση αποτελούν σημαντικές και ουσιαστικές δεξιότητες, και παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες. Πολλοί ερευνητές αντιμετωπίζουν τις δύο αυτές έννοιες ως ταυτόσημες. Όμως, εντοπίζονται διαφορές ανάμεσα σε αυτά τα δύο είδη υπολογισμού. Οι υπολογισμοί κατ' εκτίμηση παράγουν ποικίλες απαντήσεις στην ίδια ερώτηση ή στο ίδιο πρόβλημα, οι οποίες, εφόσον είναι λογικές, γίνονται αποδεκτές, ενώ οι νοεροί υπολογισμοί καταλήγουν σε συγκεκριμένες και ακριβείς απαντήσεις, οι οποίες μπορούν να αξιολογηθούν. Επιπλέον, ο νοερός υπολογισμός συνιστά απαραίτητη προϋπόθεση για την υπολογιστική εκτίμηση (Reys, 1984). Με άλλα λόγια, η εκτίμηση περιλαμβάνει τον νοερό υπολογισμό αλλά είναι κάτι περισσότερο από αυτό (Maclellan, 2001), ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο, καθώς ο νοερός υπολογισμός δεν περιλαμβάνει την εκτίμηση. Δηλαδή, ένας που πραγματοποιεί μια εκτίμηση πραγματοποιεί νοερό υπολογισμό ως ένα αρχικό βήμα στην ολοκλήρωσή της. Ο νοερός υπολογισμός είναι ένα βασικό συστατικό στοιχείο της εκτίμησης, καθώς αποτελεί θεμελιώδη διαδικασία για τις διαφορετικές αριθμητικές διεργασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση (Reys, 1984). Ταυτόχρονα, συνιστά σημαντική δεξιότητα από μόνος του (Sowder, 1992).

Στρατηγικές νοερών υπολογισμών

Για την εκτέλεση των νοερών υπολογισμών, τα άτομα αξιοποιούν εναλλακτικές στρατηγικές (McIntosh, Reys R., Reys B., 1997), οι οποίες κατέχουν χαρακτηριστικά που τις ξεχωρίζουν από τις παραδοσιακές γραπτές διαδικασίες (Heirdsfield & Cooper, 2002). Ο Threlfall (2000) ορίζει ως στρατηγικές, αποφάσεις για να γίνει κάτι με έναν ιδιαίτερο, ξεχωριστό, τρόπο, οι οποίες υλοποιούνται μέσω μιας σειράς δράσεων, με σκοπό να εκτελεστεί μια προηγούμενη απόφαση. Κατ' επέκταση, ονομάζει στρατηγικές νοερών υπολογισμών τους διαφορετικούς τρόπους που χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν νοερά απλά αριθμητικά προβλήματα (Threlfall, 2000·

2009). Μια πράξη μπορεί να αντιμετωπιστεί επιτυχώς με παραπάνω από μια στρατηγικές χωρίς ωστόσο να είναι όλες το ίδιο αποτελεσματικές (Maclellan, 2001). Το ίδιο ισχύει και για τους εκτιμητικούς υπολογισμούς, στους οποίους μπορεί να γίνει χρήση πολλών στρατηγικών, ή μιας μοναδικής, παραπάνω από μία φορές (Levine, 1982). Η σημασία των στρατηγικών για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών αναδεικνύεται από τη μετατροπή ενός υπολογισμού που δεν μπορεί να ολοκληρωθεί, σε έναν υπολογισμό που μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της εφαρμογής σχέσεων αριθμών και πράξεων (McIntosh et al., 1997). Μέσω της χρήσης στρατηγικών, πολλές αριθμητικές ιδιότητες μετουσιώνονται, με σκοπό να απλουστευθούν τα προβλήματα (Reys et al., 1993). Ο Thompson ορίζει τις στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς ως εφαρμογή γνωστών ή γρήγορων υπολογισμών αριθμητικών γεγονότων, τα οποία είναι γνωστά στο άτομο, σε συνδυασμό με κοινώς αποδεκτά αξιώματα του αριθμητικού συστήματος για να βρεθεί η λύση ενός υπολογισμού του οποίου η απάντηση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή (Thompson, 1999). Σχετικά με αυτά τα κοινώς αποδεκτά αριθμητικά αξιώματα, ο Threlfall αναφέρει πως μια τέτοια στρατηγική μπορεί να είναι η χρήση γνωστών αριθμητικών σχέσεων, προκειμένου να απαντηθεί ένα πρόβλημα που χρειάζεται να λυθεί με τη χρήση νοερών υπολογισμών (Threlfall, 2009).

Η Craig (2010) παρατηρεί πως δεν είναι σαφής η διαφορά ανάμεσα στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών και τις γραπτές διαδικασίες υπολογισμού. Όμως, οι περισσότεροι ερευνητές θέτουν διακριτά όρια ανάμεσα στις στρατηγικές από τις γραπτές διαδικασίες. Οι στρατηγικές νοερών υπολογισμών μπορούν να πραγματοποιηθούν χάρη σε μια ευέλικτη χρήση της αριθμητικής γνώσης (Threlfall, 2000) και διαφέρουν από τους γραπτούς αλγόριθμους, επειδή απαιτούν κάτι παραπάνω από ανάκληση και εφαρμογή μίας ή περισσότερων αριθμητικών διεργασιών Hartnett, 2007). Η Garner, όμως, παρατηρεί ότι, άτομα όλων των ηλικιών, παρουσιάζουν συχνά αδυναμία στην εφαρμογή των στρατηγικών αυτών είτε είναι μαθητές, είτε είναι ενήλικες. Βέβαια, θεωρεί πως η διδασκαλία των στρατηγικών βελτιώνει την πορεία της μάθησης, καθώς οι μαθητές πειραματίζονται στρατηγικές οι οποίες βρίσκονται ακόμα σε πρωτόγονο στάδιο, και συχνά δεν ολοκληρώνονται με αποτελεσματικό τρόπο, ενώ οι ενήλικες αξιοποιούν στρατηγικές, οι οποίες πλέον είναι αναπτυγμένες, ώριμες και αποτελεσματικές (Garner, 1990). Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν νοερά προσπαθούν να επινοήσουν στρατηγικές, οι οποίες αποκαλούνται διαισθητικές. Οι στρατηγικές οι οποίες διδάσκονται οι μαθητές είναι συγκεκριμένες και στη συνέχεια χρειάζεται να επιλέξουν την πιο κατάλληλη για να επιλύσουν κάποιο πρόβλημα (Ουσταμπασίδου, 2018).

Η διδασκαλία των στρατηγικών για τους νοερούς υπολογισμούς ενδέχεται να συντομεύσει το χρόνο διδασκαλίας (Rubenstein, 2011), καθώς η χρήση αυτής της μαθηματικής σκέψης μπορεί να βελτιώσει την αριθμητική αίσθηση των μαθητών (McIntosh et al., 1997). Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού προωθείται, εάν οι μαθητές ενθαρρύνονται να διατυπώνουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά τη διάρκεια των νοερών υπολογισμών. Ο McIntosh με τους συνεργάτες του θεωρούν ότι πρέπει να δίνεται έμφαση στις νοερές στρατηγικές και μετά το πέρας της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (McIntosh et al., 1997). Η διδασκαλία των στρατηγικών βελτιώνει τις ικανότητες των παιδιών στον τομέα των νοερών υπολογισμών (Threlfall, 2000). Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αντλήσουν πληροφορίες για το επίπεδο μαθηματικής κατανόησης που κατέχουν οι μαθητές μέσα από την παρατήρηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από εκείνους (Thompson, 1994).

Το μέτρημα στα δάχτυλα

Στις δυτικές κοινωνίες, το μέτρημα στα δάχτυλα είναι μια από τις πρώτες στρατηγικές που διδάσκονται τα παιδιά, με σκοπό να συνδέσουν τη λεκτική αναπαράσταση ενός αριθμού με την αριθμητική σημασία του (Gelman & Gallistel, 1978· Gallistel & Gelman, 1992· Butterworth, 1999· Sato & Lalain, 2008). Η χρήση των δαχτύλων, στο γνωστικό στάδιο που η καταμέτρηση και οι υπολογιστικές δεξιότητες δεν έχουν αυτοματοποιηθεί, αποτελεί σημαντικό οπτικό βοήθημα και ενεργοποιεί τη μνήμη εργασίας (Barrouillet and Lépine, 2005· Barrouillet, Mignon, & Thevenot, (2008). Παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στηρίζονται περισσότερο στην καταμέτρηση με τα δάχτυλα συγκριτικά με τους συνομηλίκους τους, είτε για να βοηθηθούν στην αναπαράσταση αριθμητικών ποσοτήτων, είτε για να οπτικοποιήσουν τη διαδικασία πράξεων (Alibali & DiRusso, 1999· Geary, 2005). Τέτοιοι νοητικοί σχηματισμοί, που αποκτούνται σε νεαρή ηλικία, εσωτερικοποιούνται κατά τη διάρκεια της Δημοτικής εκπαίδευσης σε τέτοιο βαθμό, έτσι ώστε να επηρεάζουν αριθμητικές διεργασίες, αργότερα, ακόμη και μετά από την ενηλικίωση (Di Luca et al., 2006· Di Luca & Pesenti, 2008· Klein et al., 2011). Παράλληλα, υπολογιστικές στρατηγικές που στηρίζονται στο μέτρημα με τα δάχτυλα, επηρεάζουν και τους νοερούς υπολογισμούς (Badets, Pesenti, & Olivier, 2010· Klein et al., 2011).

Η εκπαίδευση παιδιών 6 χρονών στη διάκριση των ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν τα δάχτυλα βελτιώνει τις δεξιότητες σε αριθμητικές και ποσοτικές διαδικασίες (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008), και οι αναπαραστάσεις αυτού του τύπου που παρουσιάζουν οι μαθητές αυτής της ηλικίας, αντικατοπτρίζουν καλύτερα τις μαθηματικές δεξιότητες συγκριτικά με τυπικά αναπτυξιακά τεστ (Fayol, Barrouillet, & Marinthe, 1998· Noël, 2005· Reeve and Humberstone, 2011).

Στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε πρόσθεση και αφαίρεση

Όσον αφορά την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών στους νοερούς υπολογισμούς, δεν υπάρχει μια επικρατούσα προσέγγιση. Χρησιμοποιούνται διαφορετικά σχήματα κατηγοριοποίησης των στρατηγικών (Whitacre, 2015), καθώς υπάρχουν πολλές απόπειρες να περιγραφούν οι λίστες στρατηγικών για τους νοερούς υπολογισμούς. Οι μαθητές χρησιμοποιούν άτυπες (νοερές) στρατηγικές για οριζόντιους υπολογισμούς διαφορετικές από τους τυπικούς (γραπτούς) αλγόριθμους για κάθετους υπολογισμούς που διδάσκονται στα σχολεία (Beishuizen et al., 1997).

Οι περισσότερες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στις νοερές στρατηγικές για αριθμούς κάτω από τον αριθμό 20 (Beishuizen, 1993). Κατά τον Beishuizen (1993) δύο είναι οι κύριες στρατηγικές για νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις, η στρατηγική του διαχωρισμού και η στρατηγική της συσσώρευσης (Hartnett, 2007).

Ακολουθώντας την στρατηγική του διαχωρισμού, ο λύτης διακρίνει τους όρους της πράξης σε δεκάδες και μονάδες και τις προσθέτει ή τις αφαιρεί μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, οι αριθμοί που προστίθενται ή αφαιρούνται διαχωρίζονται και οι δύο σε πολλαπλάσια του 10 και του 1 (Thompson & Smith, 1999). Κάποιοι ερευνητές αποκαλούν τη συγκεκριμένη στρατηγική «μέθοδο του διαμερισμού» («partitioning method»· Λεμονίδης, 2013), ενώ άλλοι, όπως για παράδειγμα στην Ολλανδία, την αποκαλούν «μέθοδο του διαχωρισμού» («split method»· Beishuizen, 1993). Επίσης, η στρατηγική του διαχωρισμού είναι γνωστή στη βιβλιογραφία και ως διαδικασία δέκα-δέκα (Thompson & Smith, 1999). Ερευνητές από διάφορες χώρες την διακρίνουν ως την πιο δημοφιλή νοερή στρατηγική στις αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών (Thompson, 1998). Στην Ελλάδα, όπως και σε άλλες χώρες, αποτελεί την πιο κοινή στρατηγική πρόσθεσης (Λεμονίδης, 2013). Μακροπρόθεσμα, η στρατηγική του διαχωρισμού γίνεται περισσότερο πολύπλοκη και δύσκολη διαδικασία υπολογισμού (Beishuizen et al., 1997) ειδικά όταν τα παιδιά συναντούν αφαιρέσεις με κρατούμενο όπως 88-49, δημιουργώντας δυσκολίες και επιφέροντας λάθη σε νοερούς υπολογισμούς (Beishuizen & Anghileri, 1998; Beishuizen, 1993; Klein et al., 1998). Ο Threlfall συστήνει να χρησιμοποιείται η συγκεκριμένη στρατηγική μόνο σε προβλήματα πρόσθεσης (Threlfall, 2002).

Ο Beishuizen διακρίνει μέσα στην στρατηγική διαχωρισμού μια μέθοδο υπολογισμού, που αποτελεί υποκατηγορία της. Η ιδιαίτερη αυτή στρατηγική περιλαμβάνει την εκκίνηση από δεξιά προς τα αριστερά, δηλαδή, ξεκινάει πρώτα με την επεξεργασία των μονάδων και μετά με την προσαύξηση των δεκάδων (Beishuizen 1993). Σύμφωνα με τους Heirdsfield & Cooper, η συγκεκριμένη υποκατηγορία είναι παρόμοια στρατηγική με τη νοερή εικόνα του γραπτού αλγόριθμου και κάποιες φορές φαίνεται να είναι ίδια, αλλά δεν είναι (Heirdsfield & Cooper, 2004).

Στην στρατηγική της συσσώρευσης, ο λύτης κρατάει σταθερό τον ένα από τους δύο όρους και προσθέτει ή αφαιρεί σε αυτόν διαδοχικά τις μονάδες και τις δεκάδες του άλλου όρου με δύο διακριτά βήματα (Hartnett, 2007). Η στρατηγική αυτή αναγνωρίζεται ως μια αλγοριθμική διαδικασία υπολογισμού (Beishuizen, 1993). Άλλες ονομασίες που έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν αυτήν την στρατηγική είναι: «διαδοχικές μέθοδοι» («sequencing methods»· Λεμονίδης, 2013) «αθροιστική μέθοδος» (Thompson & Smith, 1999) ή «μέθοδος άλματος» («jump method») το οποίο είναι και το πιο δημοφιλές όνομα (Beishuizen, 1993). Η ονομασία αυτή παραπέμπει σε άλματα πάνω σε μια αριθμογραμμή, η οποία χρησιμοποιείται για την πρακτική ή νοερή αναπαράσταση του προβλήματος προς επίλυση. Η συγκεκριμένη διαδικασία ξεκινάει από τον έναν από τους δύο όρους της πράξης και συνεχίζει κάνοντας άλματα κατά μήκος της αριθμογραμμής, επιλέγοντας κατάλληλα τμήματα του δεύτερου αριθμού (Thompson & Smith, 1999). Η αριθμογραμμή συνιστά ένα πολύ δυναμικό μοντέλο για την πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών μέχρι το 100 (Klein et al., 1988).

Η στρατηγική συσσώρευσης αποτελεί την πιο αποτελεσματική νοερή μέθοδο, επειδή αποτελείται από δύο και όχι τρία βήματα. Όμως, η πλειοψηφία των μαθητών δεν την εφαρμόζει, καθώς είναι μια δυσνόητη και περίπλοκη μέθοδος (Beishuizen, 1993), συνεπώς χρειάζεται ιδιαίτερη προσέγγιση στη διδασκαλία της (Thompson & Smith, 1999). Παράλληλα, δυσκολίες αντιμετωπίζουν και οι ενήλικες στη χρήση της (Thompson, 1998). Πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι η στρατηγική συσσώρευσης είναι η πιο ευέλικτη και αποτελεσματική διαδικασία υπολογισμού (Klein et al., 1998). Ταυτόχρονα, επιφέρει τα λιγότερα λανθασμένα αποτελέσματα σε προβλήματα αφαίρεσης με κρατούμενο, συνιστώντας την πιο ασφαλή στρατηγική για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις προβλημάτων (Beishuizen, 1993; Macintyre & Forrester, 2003). Αυτό ισχύει, επειδή, όταν οι μαθητές αξιοποιούν αυτή τη διαδικασία, διευκολύνονται στο πιο δύσκολο μέρος του υπολογισμού (Thompson, 2000).

Ο Beishuizen, όπως στην στρατηγική του διαχωρισμού, έτσι και στην στρατηγική της συσσώρευσης, διακρίνει μια μέθοδο υπολογισμού, ως υποκατηγορία της συγκεκριμένης στρατηγικής, η οποία πρώτα περιλαμβάνει την επεξεργασία των μονάδων και ύστερα των δεκάδων (Beishuizen, 1993).

Το κοινό χαρακτηριστικό των δύο παραπάνω στρατηγικών, του διαχωρισμού και της συσσώρευσης, είναι ότι ο λύτης επεξεργάζεται αρχικά τις δεκάδες και αργότερα τις μονάδες ξεκινώντας από το αριστερό μέρος της πράξης και καταλήγοντας στο δεξί (Beishuizen, 1993). Η πιο διακριτή διαφορά ανάμεσα στις δύο διαδικασίες είναι ότι στην στρατηγική της συσσώρευσης, ο ένας αριθμός διατηρείται ως έχει και πραγματοποιείται πρόσθεση ή αφαίρεση του άλλου αριθμού στον πρώτο, επιλεκτικά και τμηματικά (Thompson & Smith, 1999). Μια άλλη διαφορά είναι ότι η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με τη χρήση της στρατηγικής του διαχωρισμού παραπέμπει και μοιάζει έντονα με τις εννοιολογικές γνώσεις που ήδη κατέχει από την προηγούμενη εμπειρία του ο μαθητής (το «20+30=50» θυμίζει το «2+3=5»). Το στοιχείο αυτό κατευθύνει το λύτη περισσότερο στην στρατηγική διαχωρισμού, παρά στην στρατηγική συσσώρευσης. Όμως, η στρατηγική της συσσώρευσης στους νοερούς υπολογισμούς είναι ασφαλέστερη όσον αφορά τα αποτελέσματα που προκύπτουν και εξελίσσεται σε μια πολύ ομαλότερη διαδικασία (Beishuizen et al., 1997).

Πολλοί ερευνητές διακρίνουν μια μικτή στρατηγική, η οποία συνδυάζει τα πρώτα στάδια εκείνης του διαχωρισμού με τα τελευταία στάδια της στρατηγικής της συσσώρευσης (Thompson & Smith, 1999). Η μικτή αυτή μέθοδος, η «μέθοδος διαχωρισμού-άλματος» («split-jump method») εκτελείται σε τρία βήματα, όπως και η στρατηγική της διάσπασης (Thompson & Smith, 1999), και περιλαμβάνει τη διάσπαση των δύο παραγόντων σε μέρη, τα οποία προστίθενται ακολουθώντας διακριτά στάδια (Threlfall, 2000). Σύμφωνα με τον Beishuizen, ο οποίος την ονομάζει «διαδοχική μέθοδο διαχωρισμού», η τροποποίηση αυτή ξεκινάει με το διαχωρισμό των δεκάδων, όπως και στη στρατηγική του διαχωρισμού, αλλά συνεχίζει με τις μονάδες σταδιακά με ένα διαδοχικό τρόπο βήμα προς βήμα. Την προσδιορίζει ως ενδιάμεση, μικτή, στρατηγική των δύο ευρύτερων μεθόδων, η οποία μπορεί να λειτουργήσει ως μετάβαση από την στρατηγική του διαχωρισμού, στην στρατηγική της συσσώρευσης (Beishuizen, 1993). Ο λόγος που σχεδιάστηκε είναι για να ξεπεραστούν τα προβλήματα που προκύπτουν από τη χρήση της 1010 σε αφαιρέσεις με κρατούμενο, όπως 87 – 39 (Beishuizen et al., 1997· Klein et al., 1998).

Ο Beishuizen και οι συνεργάτες του (1997) σημειώνουν ακόμα μία μέθοδο, το «πέρασμα από το 10». Η στρατηγική αυτή μπορεί να θεωρηθεί υποκατηγορία της στρατηγικής της συσσώρευσης, ή και ανεξάρτητη στρατηγική, η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πράξη, κατά τη διεξαγωγή νοερών υπολογισμών (Λεμονίδης, 2013), ιδιαίτερα ως εναλλακτική στρατηγική για νοερούς υπολογισμούς αφαίρεσης (Beishuizen & Anghileri, 1998). Στο «πέρασμα από το 10», ο δεύτερος αριθμός χωρίζεται σε δύο μέρη, με τέτοιο τρόπο ώστε η πρόσθεση ή η αφαίρεση του πρώτου αριθμού με το ένα από αυτά να έχει ως αποτέλεσμα πολλαπλάσιο του 10 (Hartnett, 2007). Στην Αγγλία, αυτή η μέθοδος ήταν γνωστή ως «αριθμητική του καταστηματάρχη», ενώ σήμερα ονομάζεται «εξισορρόπηση πρόσθεσης» (Thompson, 1998). Αποτελεί τη δημοφιλέστερη στρατηγική για νοερή αφαίρεση μονοψήφιου από διψήφιο αριθμό (για παράδειγμα, η πράξη «24 – 7 = 17» μπορεί να πραγματοποιηθεί ως: «24 – 4 = 20» και «20 – 3 = 17· Thompson, 1998). Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιείται ανεπίσημα για πολλά χρόνια (Thompson, 1998), και είναι αποτελεσματική όταν περιλαμβάνει κοντινούς μεταξύ τους αριθμούς (Thompson & Smith, 1999). Ταυτόχρονα, επειδή δίνει στον χρήστη τη δυνατότητα να επεξεργάζεται τους αριθμούς ως ολόκληρες οντότητες, του παρέχει ένα σημαντικό βαθμό ευελιξίας (Thompson, 1998), ειδικά αν ληφθεί υπόψη ότι μπορεί να ενισχυθεί από τη χρήση άδειας αριθμογραμμής (Thompson & Smith, 1999). Η χρήση της είναι περισσότερο διαδεδομένη σε ενήλικες και λιγότερο σε μαθητές (Thompson & Smith, 1999).

Μια ακόμα στρατηγική εισάγεται από τον Klein και τους συνεργάτες του (1998), που ονομάζεται «αντιστάθμιση». Μπορεί να θεωρηθεί στρατηγική συσσώρευσης που κινείται στην πλησιέστερη δεκάδα (Λεμονίδης, 2013) και περιγράφει πρόσθεση ή αφαίρεση ενός αριθμού μεγαλύτερου ή μικρότερου από το δοσμένο και έπειτα τροποποίηση της απάντησης με αντιστάθμιση για το επιπλέον ψηφίο που προστέθηκε ή αφαιρέθηκε (Thompson & Smith, 1999). Με άλλα λόγια, ο ένας όρος της πράξης στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο του δέκα και το αποτέλεσμα επιδιορθώνεται ή αντισταθμίζεται από την στρογγυλοποίηση (Hartnett, 2007), καθώς η μέθοδος εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι ο ένας αριθμός βρίσκεται κοντά στο πολλαπλάσιο του 10 (για παράδειγμα, το «53 – 19» μπορεί να εκφραστεί ως «53 – 20 + 1»· Van de Walle, 2005). Σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να διευκολύνει τον χρήστη να επεξεργαστεί και τους δύο παράγοντες της πράξης (Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquiere, & Verschaffel, 2014). Η αντιστάθμιση συστήνεται για προσθέσεις και αφαιρέσεις με αριθμούς που τελειώνουν σε 9 ή 8 (Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel, 2009· Torbeyns, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009) ή ακόμη και σε 7 (Thompson & Smith, 1999), καθώς οι συγκεκριμένοι αριθμοί βρίσκονται κοντά στα πολλαπλάσια του 10 και οδηγούν τον λύτη να αντισταθμίσει τη διαφορά που προκύπτει με πρόσθεση ή αφαίρεση μικρών αριθμών, του 1 ή του 2 (Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel, 2009· Torbeyns, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009). Η συγκεκριμένη στρατηγική εφαρμόζεται και σε πράξεις με διαφορετικούς παράγοντες, όμως είναι λιγότερο αποτελεσματική, καθώς αυξάνει τον αριθμό της αντιστάθμισης (Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel, 2009· Torbeyns, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009). Όπως και οι παραπάνω μέθοδοι, έτσι και η αντιστάθμιση, χρησιμοποιείται περισσότερο από ενήλικες παρά από μαθητές (Thompson & Smith, 1999).

Ο Cooper και οι συνεργάτες του, στηριζόμενοι στη δουλειά του Beishuizen (1993), διακρίνουν τέσσερις κατηγορίες στρατηγικών: α) την καταμέτρηση, β) τη διάσπαση (στρατηγική του διαχωρισμού) από δεξιά προς αριστερά και αριστερά προς τα δεξιά, γ)τη συσσώρευση από δεξιά προς τα αριστερά και από αριστερά προς τα δεξιά, και δ) ολιστικές στρατηγικές που περιλαμβάνουν τη διόρθωση ενός αριθμού με αντιστάθμιση ή εξισορρόπηση και των δύο αριθμών, με σκοπό να γίνει μια διόρθωση και των δύο παραγόντων δημιουργώντας μια ισοδύναμη ισότητα (Cooper, 1996).

Ο Torbeyns και οι συνεργάτες του διακρίνουν τις στρατηγικές για τους νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης μέχρι το 100 σε τρεις κατηγορίες: στις στρατηγικές αποσύνθεσης/διάσπασης, στις διαδοχικές στρατηγικές και στις μεταβαλλόμενες στρατηγικές (Torbeyns et al., 2006· Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel, 2009). Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, οι στρατηγικές αποσύνθεσης/διάσπασης περιλαμβάνουν διάσπαση και των δύο παραγόντων σε δεκάδες και μονάδες, και στη συνέχεια έπεται η τελική πράξη καθαυτή, πρόσθεση ή αφαίρεσή τους, ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα. Οι διαδοχικές στρατηγικές ξεκινούν, επίσης, με χωρισμό και των δύο παραγόντων σε δεκάδες και μονάδες, όμως, πραγματοποιούν τη διαδικασία του υπολογισμού με έναν αριθμό, ο οποίος δεν υπόκειται σε διάσπαση, και στη συνέχεια εμπλέκονται διαδοχικά οι δεκάδες και οι μονάδες του άλλου αριθμού. Οι μεταβαλλόμενες στρατηγικές αξιοποιούν τις αριθμητικές δεξιότητες και την ευρύτερη μαθηματική γνώση των σχέσεων των αριθμών, με σκοπό να γίνει μια επιλεκτική αποδοχή των αριθμών που περιλαμβάνει η πράξη (Torbeyns et al., 2006· Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel, 2009). Ο Klein και οι συνεργάτες του (1998) περιορίζουν τις κατηγορίες στρατηγικών για τους νοερούς υπολογισμούς σε δύο: διαδοχικές και αποσύνθεσης. Εντάσσουν στις διαδοχικές στρατηγικές τη στρατηγική της συσσώρευσης και το «πέρασμα από το 10», ενώ στις στρατηγικές αποσύνθεσης περιλαμβάνουν τη μέθοδο διαχωρισμού και τη μέθοδο «διαχωρισμού – άλματος» (Klein et al., 1998). Η διαφορά στην κατηγοριοποίηση που έκαναν οι παραπάνω ερευνητές είναι ότι ο Klein και οι συνεργάτες του (1998) εντάσσουν την αντιστάθμιση στην κατηγορία των διαδοχικών στρατηγικών, ενώ οι Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel (2009) και οι Torbeyns et al. (2006) την εντάσσουν στις μεταβαλλόμενες στρατηγικές.

Εκτός από τις παραπάνω στρατηγικές, οι οποίες βρίσκουν εφαρμογές και στις δύο πράξεις, την πρόσθεση και την αφαίρεση, διακρίνονται και δύο μέθοδοι που μπορούν να εφαρμοστούν μόνο στην αφαίρεση. Σύμφωνα με την στρατηγική της άμεσης αφαίρεσης, ο αφαιρετέος αφαιρείται άμεσα από τον μειωτέο. Η άλλη στρατηγική νοερής αφαίρεσης, εκείνη της έμμεσης πρόσθεσης, πραγματοποιείται με πρόσθεση στον μικρότερο αριθμό ενός αριθμού που θα οδηγήσει με το άθροισμά του στον μεγαλύτερο αριθμό της αρχικής αφαίρεσης. Για παράδειγμα, στην αφαίρεση «75 – 43» έχουμε: 43 + 30 = 73, 73 + 2 = 75, άρα η διαφορά που προκύπτει στην αρχική αφαίρεση είναι 30 + 2 = 32 (Torbeyns, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009· Peters et al., 2014). Η στρατηγική της έμμεσης πρόσθεσης βρίσκει καλύτερη εφαρμογή σε πράξεις αφαίρεσης, στις οποίες η διαφορά ανάμεσα στον αφαιρετέο και τον μειωτέο είναι μικρή (Torbeyns, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009). Μια ακόμη παρόμοια στρατηγική, η οποία δεν χρησιμοποιείται συχνά, έως και καθόλου, είναι η έμμεση αφαίρεση. Ακολουθώντας τη μέθοδο της έμμεσης αφαίρεσης, ο λύτης αποφασίζει εμπειρικά και διαισθητικά το ποσό που πρέπει να αφαιρεθεί από το μεγαλύτερο αριθμό. Για παράδειγμα, η πράξη «48 – 25» θα γίνει: «48 – 20 = 28, 28 – 3 = 25», άρα η απάντηση είναι: «20 + 3 = 23».

Ο Thompson (1999) ομαδοποιεί τις στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε εκείνες που αφορούν την καταμέτρηση και σε αυτές που αφορούν την άμεση ανάκληση. Όσον αφορά τις στρατηγικές καταμέτρησης, αυτές ομαδοποιούνται σε εκείνες που κάνουν χρήση α) μέτρησης από τον πρώτο αριθμό, β) μέτρησης από τον μεγαλύτερο αριθμό, γ) μέτρησης από πίσω προς τα εμπρός, δ) μέτρησης από εμπρός προς τα πίσω (αντίστροφη μέτρηση), και ε) μέτρησης προς τα επάνω (συμπληρωματική πρόσθεση). Οι στρατηγικές άμεσης ανάκλησης, σύμφωνα με τον Thompson περιλαμβάνουν α) τον διπλάσιο παράγοντα (στην αφαίρεση), β) τις κοντινές δυάδες για την πρόσθεση, γ) τις κοντινές δυάδες για την αφαίρεση, δ) την αφαίρεση ως αντιστροφή της διαδικασίας της πρόσθεσης, ε) τη χρήση πεντάδων, στ) το πάτημα στη δεκάδα για την πρόσθεση, ζ) το πάτημα στη δεκάδα για την αφαίρεση, η) η αντιστάθμιση, και θ) η ισορροπία (Thompson, 1999). Κατά τον Thompson, οι πιο συνήθεις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από μαθητές όσον αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών μέχρι το 20 και μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τους μεγαλύτερους διψήφιους αριθμούς είναι α) το πέρασμα προς τα πάνω και προς τα κάτω μέσα από το δέκα με τη χρήση συμπληρωμάτων του 10, β) ο διαχωρισμός μονοψήφιων αριθμών (το «6» μπορεί να γραφτεί ως «4+2» ή «3+3» κ.ό.κ.), και γ) η αντιστάθμιση (η πρόσθεση οποιουδήποτε αριθμού με το 9 μπορεί να βρεθεί πιο εύκολα αντικαθιστώντας το «9» με το «10-1»· Thompson (2000).

Στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση

Στη διεθνή βιβλιογραφία, οι έρευνες σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για τους νοερούς πολλαπλασιασμούς και τις νοερές διαιρέσεις παρουσιάζουν λιγότερο όγκο συγκριτικά με έρευνες που εστιάζουν σε στρατηγικές της νοερής πρόσθεσης και αφαίρεσης (Lemaire & Siegler, 1995· Whitacre, 2012).

Το μεγαλύτερο ποσοστό των ερευνών στις στρατηγικές νοερών υπολογισμών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση αναφέρονται σε πράξεις με μικρούς αριθμούς, και συνεπώς χαρακτηρίζονται ως είδη καταμέτρησης από ορισμένους ερευνητές (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Ο αριθμός των ερευνών που επικεντρώνεται σε πράξεις με μεγαλύτερους παράγοντες, άρα και σε περισσότερο πολύπλοκες νοητικές διεργασίες, είναι μικρός, και ακόμα μικρότερος είναι ο αριθμός των ερευνών που έχει αναλύσει όλους τους πιθανούς αριθμητικούς συνδυασμούς (Heirdsfield et al., 1999). Με σκοπό την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών, κάποιοι ερευνητές ασχολούνται αποκλειστικά με πράξεις πολλαπλασιασμού, ενώ πολύ λιγότεροι εμβαθύνουν ξεχωριστά στη νοερή διαίρεση.

Μια στρατηγική, η οποία χρησιμοποιείται εξίσου σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση είναι η «άμεση ανάκληση». Σε αυτήν την στρατηγική αξιοποιείται ένα γνωστό αριθμητικό γεγονός, το οποίο ο λύτης ανακαλεί από τη μνήμη του. Το αριθμητικό αυτό γεγονός μπορεί να αφορά σε πολλαπλασιασμό, διαίρεση, ή την εκ νέου παραγωγή ενός αριθμητικού στοιχείου. Για παράδειγμα, το «5 · 8» μπορεί να υπολογιστεί ως το μισό του «10 · 8», ή το «24 ÷ 4» μπορεί να υπολογιστεί με πέρασμα από την προπαίδεια του 5, δηλαδή «5 · 4 = 20, άρα 6 · 4 = 24» (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008).

Μια δεύτερη μέθοδος που χρησιμοποιείται για τους νοερούς υπολογισμούς σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση, είναι η «διάσπαση του ενός αριθμού». Οι στρατηγικές διάσπασης αριθμού κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την κατεύθυνση που ακολουθεί ο λύτης, σε διάσπαση από δεξιά προς τα αριστερά και σε διάσπαση από αριστερά προς τα δεξιά. Για παράδειγμα, το «5 · 34» αντιμετωπίζεται από δεξιά προς τα αριστερά ως «5 · 4 = 20, και 5 · 30 = 150, άρα 5 ·34 = 20 + 150 = 170» και από αριστερά προς τα δεξιά ως «5 · 30 = 150, και 5 · 4 = 20, άρα 5 · 34 = 150 + 20 = 170». Αντίστοιχα, υπολογίζονται και οι πράξεις διαίρεσης, δηλαδή το «100 ÷ 5» διασπάται από δεξιά προς τα αριστερά ως «0 ÷ 5 = 0, και 10 ÷ 5 = 2, άρα 100 ÷ 5 = 20» και από αριστερά προς τα δεξιά: «10 ÷ 5 = 2 και 0 ÷ 5 = 0, άρα 100 ÷ 5 = 20» (Whiteacre, 2012).

Μια τρίτη μέθοδος «είναι η διάσπαση και των δύο αριθμών», η οποία είναι όμοια με την προηγούμενη «διάσπαση του ενός αριθμού», με τη διαφορά ότι ο λύτης πραγματοποιεί διάσπαση και των δύο αριθμών προκειμένου να πολλαπλασιαστούν (Whitacre, 2012). Για παράδειγμα, το «26 · 39» μπορεί να γίνει ως: «20 · 30 + 20 · 9 + 6 · 30 + 6 · 9».

Μια τέταρτη στρατηγική για το νοερό πολλαπλασιασμό και τη νοερή διαίρεση είναι η «γενική παραγοντοποίηση». Ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο, το άτομο χρησιμοποιεί αριθμητικές ιδιότητες και σχέσεις, έτσι ώστε να κάνει απλούστερη την πράξη του πολλαπλασιασμού (Reys et al., 1986), και να παραγοντοποιήσει τον έναν ή και τους δύο αριθμούς, προκειμένου να εφαρμόσει την προσεταιριστική ιδιότητα (Hope & Sherrill, 1987). Η συγκεκριμένη στρατηγική περιλαμβάνει μια πολλαπλασιαστική διάσπαση η οποία είναι εντελώς διαφορετική από την προσθετική διάσπαση (Whitacre, 2012). Για παράδειγμα, το «24 · 25» μπορεί να γίνει: «6 · 4 · 25

= 6 · 100 = 600». Η παραγοντοποίηση αποτελεί πολύ χρήσιμη μέθοδο για το νοερό υπολογισμό και προωθεί τη βαθύτερη γνώση για τη δομή του αριθμητικού συστήματος (Reys et al., 1986).

Μια άλλη, πέμπτη, στρατηγική είναι η «αντιστάθμιση». Κατά την στρατηγική της αντιστάθμισης, ο ένας ή και οι δύο παράγοντες τροποποιούνται από τον λύτη εκ των προτέρων, έτσι ώστε να πραγματοποιήσει τον υπολογισμό πιο εύκολα (Whitacre, 2012). Οι στρατηγικές αντιστάθμισης εξαρτώνται από τους αριθμούς που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα, και συνεπώς, δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε όλες τις πράξεις. Τις περισσότερες φορές βρίσκουν εφαρμογή, όταν στους αριθμούς της πράξης περιλαμβάνεται το 5 ή το 50 (Van de Walle, 2005). Η μέθοδος της αντιστάθμισης αξιοποιεί λιγότερη μνήμη εργασίας, με αποτέλεσμα να είναι λιγότερο σύνθετη (Heirdsfield et al., 1999). Για παράδειγμα, το «25 · 19» μπορεί να υπολογιστεί ως «25 · (4 · 4 + 3) = 4 · 4 · 25 + 3 · 25 = 4 · 100 + 75 = 400 + 75 = 475». Στις στρατηγικές αντιστάθμισης, εντάσσονται ο «διπλασιασμός» και ο «υποδιπλασιασμός» (Whitacre, 2012), οι οποίοι διευκολύνουν τον λύτη να μετατρέψει τους παράγοντες του προβλήματος σε πιο οικείους ως προς τον ίδιο (Beishuizen & Anghileri, 1998). Η τεχνική του υποδιπλασιασμού εφαρμόζεται, όταν ο ένας ή και οι δύο παράγοντες του γινομένου είναι πολλαπλάσια του 2 (Hope & Sherrill, 1987). Για παράδειγμα, το «12 · 8» μπορεί να γίνει «2 · 6 · 8 = 2 · 48». Επιπλέον, η συγκεκριμένη στρατηγική βρίσκει πολλές εφαρμογές και ως προς την αφαίρεση, μέσω της επιμεριστικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, το «2 · 48» μπορεί να γίνει «2 · 50 – 2 · 2», όπως και το «29 · 4» μπορεί να υπολογιστεί ως «30 · 4 – 1 · 4». Η «αντιστάθμιση» θεωρείται ολιστική στρατηγική (Λεμονίδης, 2013).

Μια έκτη στρατηγική είναι η εκθετική παραγοντοποίηση, η οποία αφορά σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις με παράγοντες που μπορούν να εκφραστούν με μορφή δύναμης. Στη συνέχεια, οι δυνάμεις απλοποιούνται στην κοινή βάση (Hope & Sherrill, 1987). Για παράδειγμα, το «32 · 32» μπορεί να εκφραστεί σε δύναμη του 2 ως εξής: «$2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$».

Μια έβδομη στρατηγική είναι το «τέταρτο». Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις , όταν ο ένας παράγοντας είναι το 25. Αυτό γιατί ο αριθμός 25 μπορεί να γραφτεί ως $\frac{100}{4}$. Με τη χρήση του συγκεκριμένου κλάσματος, ο χρήστης αξιοποιεί τους αριθμούς 100 και 4, οι οποίοι είναι περισσότερο διαχειρίσιμοι από το 25 στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, για να διευκολύνει τον υπολογισμό (Whitacre 2012). Για παράδειγμα, το «25 · 48» μπορεί να γραφτεί ως το ένα τέταρτο του 100 ως εξής: $\frac{100}{4} \cdot 48$ = 100 · $\frac{48}{4}$ = 100 · 12 = 1200».

Μια όγδοη στρατηγική είναι η τετραγωνιστική επιμεριστικότητα. Ένα παράδειγμα της τετραγωνιστικής επιμεριστικότητας είναι η αλγεβρική ταυτότητα «$(x - y) \cdot (x + y) = x^2 - y^2$» που μπορεί να αξιοποιηθεί ως: 49 · 51 = (50 – 1) · (50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 – 1 = 2499 (Hope & Sherrill, 1987).

Οι Λεμονίδης και Λυγούρας (2008) εντοπίζουν ορισμένες στρατηγικές νοερών υπολογισμών διαίρεσης σε μαθητές της Γ΄ Δημοτικού, που δεν έχουν διδαχτεί τον αντίστοιχο γραπτό αλγόριθμο:

1. «Άμεση ανάκληση» αριθμητικού γεγονότος ήδη γνωστού στον χρήστη (για παράδειγμα: 12 ÷ 3 = 4).

2. «Παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού» μέσω α) ανάκλησης αντίστροφου πολλαπλασιασμού (π.χ. το «18 ÷ 6» μπορεί να βρεθεί από τον πολλαπλασιασμό «3 · 6 = 18»), β) ανάκλησης άλλων γινομένων, κοντινών στο ζητούμενο και μετέπειτα προσθαφαιρέσεων (π.χ. το «18 ÷ 6» μπορεί να βρεθεί από το κοντινό γινόμενο «4 · 6 = 24», και «24 – 6 = 18», άρα «18 ÷ 6 = 3»), γ) ανάκλησης της προπαίδειας (π.χ. το «18 ÷ 6» μπορεί να βρεθεί ως «1 · 6 = 6», «2 · 6 = 12», «3 · 6 =18») και δ) ανάκλησης προσθαφαιρέσεων (π.χ. το «18 ÷ 6» μπορεί να βρεθεί ως «6 + 6 = 12», «12 + 6 = 18»).

3. «Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση» (π.χ. το «18 ÷ 6» μπορεί να βρεθεί ως «18 – 6 = 12», «12 – 6 = 6», «6 – 6 = 0»).

4. «Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση με μέτρημα στα δάχτυλα ή σε αντικείμενα».

Οι Mulligan και Mitchelmore (1997) εντοπίζουν ορισμένα «διαισθητικά μοντέλα» («intuitive models»), τα οποία αναπτύσσουν οι μαθητές από πολύ πρώιμο στάδιο, και αφορούν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Αυτά τα διαισθητικά μοντέλα περιγράφονται ως «εσωτερικές νοητικές δομές που αντιστοιχούν σε μια κατηγορία υπολογιστικών στρατηγικών». Στον πολλαπλασιασμό εντοπίζονται τα εξής:

1. «Άμεση καταμέτρηση», η οποία περιλαμβάνει την καταμέτρηση των στοιχείων ένα προς ένα μέσω της μοντελοποίησης του προβλήματος.

2. «Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση», κατά την οποία ο χρήστης προσθέτει τον έναν παράγοντα στον εαυτό του, όσες φορές δείχνει ο άλλος παράγοντας του προβλήματος (π.χ. $3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 = 18$).

3. «Πολλαπλασιαστική πράξη», η οποία περιλαμβάνει την αξιοποίηση ενός γνωστού πολλαπλασιαστικού ή μη γεγονότος, για την παραγωγή ενός νέου συμπεράσματος/γεγονότος (π.χ. $5 \cdot 4 = 20$ άρα $6 \cdot 4 = 24$).

Όσον αφορά την πράξη της διαίρεσης, οι Mulligan & Mitchelmore εντοπίζουν τέσσερα διαισθητικά μοντέλα:

1. «Άμεση καταμέτρηση», η οποία περιλαμβάνει την καταμέτρηση των στοιχείων ένα προς ένα μέσω της μοντελοποίησης του προβλήματος.

2. «Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση», στην οποία οι μαθητές «χτίζουν» το διαιρετέο, μετρώντας πόσες φορές πρέπει να προσθέσουν το διαιρέτη στον εαυτό του, για να καταλήξουν στο διαιρετέο (για παράδειγμα, το «$14 \div 2$» μπορεί να υπολογιστεί προσθέτοντας τον διαιρέτη στον εαυτό του, μέχρι να βρεθεί ο διαιρετέος: «2, 4, 6, 8, 10, 12, 14: 7 φορές, άρα το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι 7).

3. «Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση», κατά την οποία οι μαθητές ξεκινούν από το διαιρετέο και αφαιρούν τον διαιρέτη επανειλημμένα, μέχρι να καταλήξουν στο 0. Στη συνέχεια, μετρούν πόσες φορές αφαίρεσαν (για παράδειγμα, το «$14 \div 2$» μπορεί να υπολογιστεί ως: 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0 άρα 7 φορές).

4. «Πολλαπλασιαστική πράξη», η οποία περιλαμβάνει την αξιοποίηση ενός γνωστού πολλαπλασιαστικού ή μη γεγονότος, για την παραγωγή ενός νέου συμπεράσματος/γεγονότος (π.χ. $5 \cdot 4 = 20$ άρα $20 \div 4 = 5$)

Ο Λεμονίδης (2013) προτείνει πέντε κατηγορίες στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στους νοερούς πολυψήφιους πολλαπλασιασμούς:

1. Άμεση μοντελοποίηση: Οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα και στη συνέχεια κάνουν καταμέτρηση του συνολικού αριθμού των αντικειμένων, του αριθμού των ομάδων ή του αριθμού των αντικειμένων κάθε ομάδας.

2. Στρατηγικές αρίθμησης: Στην ομάδα αυτή των στρατηγικών περιλαμβάνεται κάθε μορφή αρίθμησης, επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, αρίθμηση με υπερπήδηση μπρος ή πίσω, στρατηγικές διπλασιασμού και υποδιπλασιασμού.

3. Άμεση ανάκληση: Οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα γνωστό αριθμητικό γεγονός πολλαπλασιασμού ή το αξιοποιούν τροποποιώντας το για να παράγουν μια πράξη πολλαπλασιασμού.

4. Στρατηγικές διάσπασης του αριθμού: Στις στρατηγικές αυτές οι μαθητές διασπούν τον έναν ή και τους δύο παράγοντες του γινομένου σε μικρότερους αριθμούς για να γίνει πιο εύκολος ο υπολογισμός. Οι στρατηγικές αυτές μπορούν να χωριστούν σε υποκατηγορίες: α) τη διάσπαση ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία του συστήματος αρίθμησης (δεκάδες και μονάδες), β) τη διάσπαση και των δύο αριθμών με βάση τη θεσιακή αξία του συστήματος αρίθμησης και γ) τη διάσπαση σε αριθμούς μη δεκάδων.

5. Ολιστικές στρατηγικές ή Αντιστάθμισης: Στις στρατηγικές αυτές οι μαθητές ρυθμίζουν τον έναν ή και τους δύο παράγοντες του γινομένου για να γίνει ο υπολογισμός ευκολότερος.

Παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία και τη μάθηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης

Το στερεότυπο του φύλου

Σε πολλές κουλτούρες στο Δυτικό και στον Ανατολικό κόσμο, υπάρχει ένα επικρατές στερεότυπο που συνδέει τα μαθηματικά με το αρσενικό φύλο (Guiso, Monte, Sapienza & Zingales, 2008· Nosek et al., 2009). Αυτό το στερεότυπο που αφορά τα δύο φύλα, μπορεί να ευθύνεται εν μέρει για τη χαμηλή συμμετοχή κοριτσιών σε σχολές των θετικών επιστημών (science, technology, engineering and mathematics, STEM) και να επηρεάζει τις εκπαιδευτικές επιλογές και τα ενδιαφέροντα των μαθητών (Ceci, Williams, & Barnett, 2009· Cheryan, Master, & Meltzoff, 2015). Από τους σπουδαστές που ακολουθούν ακαδημαϊκές κατευθύνσεις τύπου STEM, οι γυναίκες παρουσιάζουν μεγαλύτερη πιθανότητα να εγκαταλείψουν τις σπουδές τους από τους άντρες Chow & Salmela-Aro, 2011· Nagy et al., 2008· Watt et al., 2012). Τα μαθηματικά θεωρούνται κρίσιμος παράγοντας αυτής της τάσης, καθώς η μαθηματική επίδοση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση επηρεάζει τις μετέπειτα ακαδημαϊκές επιλογές του μαθητή/σπουδαστή (Watt & Eccles, 2008). Τα στερεότυπα που επικρατούν, ενδέχεται να επιδρούν στην απόδοση των μαθητών στα αντικείμενα του τομέα STEM, επηρεάζοντας τα επίπεδα άγχους, ενδιαφέροντος και προσπάθειας που αφιερώνουν κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής τους στα συγκεκριμένα αντικείμενα σπουδών (Beilock, Gunderson, Ramirez, & Levine, 2010· Steffens, Jelenec, & Noack, 2010). Ωστόσο, μελέτες σε σχολεία των Ηνωμένων Πολιτειών, έχουν δείξει πως τα αγόρια δεν παρουσιάζουν σταθερά καλύτερη απόδοση από εκείνη των κοριτσιών. Παρόλο που παλιότερες έρευνες έχουν παρατηρήσει ότι κορίτσια που φοιτούν στις τρεις τελευταίες βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, έχουν χαμηλότερη επίδοση σε μαθηματικές δοκιμασίες (Dwyer & Johnson, 1997· Pomerantz, Altermatt, & Saxon, 2002), νεότερη βιβλιογραφία συμπεραίνει πως η διαφορά στην απόδοση ανάμεσα στα δύο φύλα είναι είτε ελάχιστη, είτε ανύπαρκτη, τουλάχιστον όσον αφορά τις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Hyde, Lindberg, Linn, Ellis, & Williams, 2008· Hyde & Mertz, 2009). Όμως, άλλες έρευνες σε μαθητές των ίδιων ηλικιών καταλήγουν ότι εμφανίζονται διαφορές στην επίδοση με τα αγόρια να παρουσιάζουν καλύτερα αποτελέσματα. Οι διαφορές αυτές παραμένουν μέχρι και την τριτοβάθμια εκπαίδευση (Lindberg, Hyde, Petersen, & Linn, 2010). Μαθητές των τελευταίων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις Ηνωμένες Πολιτείες παρουσιάζουν καλύτερη επίδοση σε εθνικές δοκιμασίες αξιολόγησης συμπεριλαμβανομένου του «Scholastic Assessment Test» (SAT) και του μαθηματικού «Advanced Placement» (AP), τα οποία επηρεάζουν το ακαδημαϊκό μέλλον των μαθητών (Ganley & Vasilyeva, 2014).

Οι επιπτώσεις των στερεότυπων στη μαθηματική εκπαίδευση

Η απειλή που νιώθει ένα άτομο από ένα ή περισσότερα επικρατούντα στερεότυπα μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την επίδοσή του σε πολλούς τομείς. Η «απειλή του στερεότυπου» αναφέρεται στην ανησυχία που αισθάνεται κάποιος, όταν νιώθει ότι διατρέχει τον κίνδυνο να επιβεβαιώσει, ως χαρακτηριστικό του εαυτού του, ένα αρνητικό στερεότυπο για την ομάδα του» (Steele & Aronson, 1995). Για παράδειγμα, παλαιότερες μελέτες έχουν εξετάσει τα στερεότυπα που σχετίζονται με την κακή απόδοση των Αφροαμερικανών σε τυποποιημένες δοκιμές

(Aronson, Fried, & Good, 2002· Blascovich, Spencer, Steele, & Quinn, 2001· Steele & Aronson, 1995), την αθλητική κατωτερότητα των λευκών ανδρών (Beilock, Jellison, Rydell, McConnell, & Carr, 2006· Stone, 2002· Stone, Lynch, Sjomeling, & Darley, 1999), και τις χαμηλές ικανότητες των γυναικών στους τομείς των μαθηματικών και των θετικών επιστημών (Beilock, Rydell, & McConnell, 2007· Ben-Zeev, Fein, & Inzlicht, 2005· Brown & Josephs, 1999· Brown & Pinel, 2003· Davies, Spencer, Quinn, & Gerhardstein, 2002· Jamieson & Harkins, 2007· Johns, Schmader, & Martens, 2005· Keller & Dauenheimer, 2003· O'Brien & Crandall, 2003· Pronin, Steele, & Ross, 2004· Schmader & Johns, 2003· Sekaquaptewa & Thompson, 2003· Spencer, Steele, & Quinn, 1999). Σε κάθε περίπτωση, τα ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η ανησυχία για την επιβεβαίωση του αντίστοιχου στερεότυπου επηρεάζει αρνητικά την επίδοση των στιγματισμένων ατόμων στα συγκεκριμένα αντικείμενα.

Παρόλο που το γεγονός ότι η απειλή του στερεότυπου έχει αρνητικές συνέπειες στην επίδοση των ατόμων που επηρεάζονται από αυτό, είναι γενικά αποδεκτό, τα αίτια που οφείλονται για αυτήν την επίπτωση, δεν είναι κοινώς αποδεκτά από την ερευνητική κοινότητα. Έχουν προταθεί διάφορες εξηγήσεις, ανάμεσα στις οποίες περιλαμβάνονται το άγχος, (Bosson, Haymovitz, & Pinel, 2004· Spencer et al., 1999· Steele & Aronson, 1995) οι προσδοκίες (Cadinu, Maass, Frigerio, Impagliazzo, & Latinotti, 2003), η διέγερση (Ben-Zeev et al., 2005· Blascovich et al., 2001· O'Brien & Crandall, 2003), και το γνωστικό φορτίο (Croizet, Després, Gauzins, Huguet, Leyens, & Méot, 2004).

Μια άλλη εξήγηση, που συγκεντρώνει αρκετό επιστημονικό ενδιαφέρον, αφορά στη μνήμη εργασίας. Το συγκεκριμένο πλαίσιο αντιμετωπίζει την απειλή του στερεότυπου ως ένα στρεσογόνο παράγοντα που αποτελεί απειλή για την κοινωνική ταυτότητα ενός ατόμου (Schmader, 2002). Γνωστικοί πόροι, οι οποίοι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση της επίδοσης σε δραστηριότητες, αναλώνονται στην επεξεργασία πληροφοριών που προκύπτουν από την αναγνώριση και την ενεργοποίηση του αρνητικού στερεότυπου και της απειλής που αυτό προβάλλει. Η βιβλιογραφία κάνει λόγο σε αυτήν την παρεμπόδιση των δυνατοτήτων και της χωρητικότητας της μνήμης εργασίας που επιφέρει την εξασθένιση της αποδοτικότητας. Γυναίκες, οι οποίες επηρεάζονται από την απειλή του στερεότυπου θυμούνται λιγότερες λέξεις από αντίστοιχες που δεν επηρεάζονται σε δοκιμασίες ελέγχου μνήμης εργασίας.

Ανάλογα αποτελέσματα παρουσιάζονται και σε μαθηματικές δοκιμασίες Schmader and Johns (2003).

Από την άλλη πλευρά, η προσέγγιση της απλής προσπάθειας («mere effort account») του Harkins (2006), υποθέτει πως τα στιγματισμένα άτομα έχουν το κίνητρο να καταρρίψουν το στερεότυπο, και αυτή τους η προσπάθεια από μόνη της βελτιώνει την επίδοσή τους. Η συγκεκριμένη προσέγγιση υποθέτει ότι μια επερχόμενη αξιολόγηση των ικανοτήτων του ατόμου διεγείρει την ανησυχία του σχετικά με την ικανότητά του να αποδώσει επαρκώς στην προκείμενη αξιολόγηση, πράγμα που συμβαίνει και με την απειλή του στερεότυπου. Συνεπώς, όταν τα άτομα νιώθουν στιγματισμένα από κάποιο στερεότυπο, προσπαθούν να το καταρρίψουν, αυξάνοντας έτσι το κίνητρό τους να έχουν καλύτερη επίδοση σε δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο φάσμα του εκάστοτε στερεότυπου.

Γενικά, υπάρχει ένα μεγάλο εύρος ερευνών σχετικά με τις διαφορές των δύο φύλων στη μαθηματική επίδοση, και έχουν διατυπωθεί ποικίλες εξηγήσεις για αυτές τις διαφορές. Κάποιοι μελετητές έχουν επικεντρωθεί στο ρόλο των συναισθηματικών διεργασιών, όπως το άγχος, ενώ άλλοι έχουν επικεντρωθεί στις γνωστικές διαφορές που μπορεί να σχετίζονται με πλεονέκτημα του ενός από τα δύο φύλα στα μαθηματικά. Διαφορετικές μαθηματικές δραστηριότητες επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο και ανάλογα με το φύλο την επίδοση, η οποία επηρεάζεται ανάλογα με την ηλικία (Ganley & Vasilyeva, 2014). Τα αγόρια τείνουν να παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις σε ορισμένους τομείς της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενώ τα κορίτσια τείνουν να αποδίδουν καλύτερα σε άλλου είδους μαθηματικές δραστηριότητες. Τα κορίτσια φαίνεται να αποδίδουν καλύτερα σε δοκιμασίες υπολογισμού, καθώς και σε άλλες δραστηριότητες που εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από ικανότητες ανάκλησης και συλλογής πληροφοριών (Gibbs, 2010· Hyde, Fennema, & Lamon, 1990· Vasilyeva et. al., 2009). Ωστόσο, σε μελέτες που εξετάζουν την επίλυση προβλημάτων και ειδικότερα δραστηριότητες που περιλαμβάνουν χωρική σκέψη, τα αγόρια τείνουν να αποδίδουν καλύτερα όσο αυξάνεται η βαθμίδα εκπαίδευσης, ενώ δεν παρατηρείται διαφορά στις τάξεις του Δημοτικού (Lindberg et al., 2010).

Στο πλαίσιο αυτών των ευρημάτων, ο Gibbs (2010) παρατήρησε πως η διαφορά στην επίδοση των δύο φύλων υπέρ των αγοριών, που αναδεικνύεται με την ανάπτυξη, οφείλεται στην πραγματικότητα στη φύση των δεξιοτήτων που εξετάζονται σε μαθηματικές δοκιμασίες για διαφορετικές ηλικίες. Συγκεκριμένα, καθώς οι μαθητές προχωρούν στις εκπαιδευτικές βαθμίδες, παρατηρείται ένα έντονο αντρικό πλεονέκτημα που συνδέεται με την αυξημένη δυσκολία και πολυπλοκότητα των δραστηριοτήτων. Η έρευνα του Gibbs εμβαθύνει στην άμβλυνση των διαφορετικών επιδόσεων των δύο φύλων, που οφείλεται στη συγκεντρωτική αξιολόγηση ικανοτήτων που αφορούν σε ένα ευρύ φάσμα. Πολλοί τύποι αξιολόγησης που προτείνονται από τα Προγράμματα Σπουδών δεν περιλαμβάνουν πολύπλοκες μαθηματικά δοκιμασίες, γεγονός που ενδέχεται να εξηγεί για ποιο λόγο στις συγκεκριμένες δραστηριότητες δεν παρατηρούνται μεγάλες διαφορές στην επίδοση ανάμεσα στα δύο φύλα (Hyde, Lindberg, Linn, Ellis, & Williams, 2008). Επομένως, παρά το γεγονός ότι ορισμένοι μελετητές παρατηρούν ότι οι διαφορές στη μαθηματική επίδοση μεταξύ των φύλων είναι μικρές, ακόμη και αμελητέες, φαίνεται ότι αν συμπεριληφθούν πιο πολύπλοκα στοιχεία στις μαθηματικές αξιολογήσεις, η διαφορά μπορεί να είναι πιο σημαντική σε όλες τις ηλικίες (Ganley & Vasilyeva, 2014).

Ο ρόλος των πεποιθήσεων και των προσδοκιών στη μαθηματική επίδοση

Ορισμένες θεωρίες κοινωνικού-γνωστικού τύπου επικεντρώνονται στις πεποιθήσεις που παρακινούν τους μαθητές να λάβουν νέα γνώση. Σύμφωνα με τους Pintrich, Marx και Boyle (1993), αυτές οι πεποιθήσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο ευρείες κατηγορίες: τις πεποιθήσεις του ατόμου σχετικά με την ικανότητά του να εκτελέσει ένα έργο και τους λόγους που έχει το άτομο για την ανάληψη ενός έργου. Θεωρίες που πραγματεύονται τα κίνητρα («expectancy-value theories») προσεγγίζουν αντιλήψεις των μαθητών που σχετίζονται με δύο ερωτήματα που παραπέμπουν σε προσδοκίες και κίνητρα: «Μπορώ να πραγματοποιήσω αυτό το έργο;» (expectancy) και «Γιατί να ασχοληθώ με αυτό το έργο;» (value· Eccles et al., 1983). Αυτές οι αντιλήψεις συνήθως ποικίλλουν συστηματικά μεταξύ αγοριών και κοριτσιών στο πλαίσιο διαφορετικών επαγγελματικών ενδιαφερόντων (Eccles & Wang, 2016) που υποκινούνται από πολιτισμικά στερεότυπα (Charles & Bradley, 2009). Τόσο οι προσδοκίες, όσο και τα κίνητρα εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον επιστημονικό τομέα στον οποίο υπάγεται το εκάστοτε έργο, καθώς πεποιθήσεις για διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα παρουσιάζουν σχετικά χαμηλή συσχέτιση (Bong, 2001· Eccles, Wigfield, Harold, & Blumenfeld, 1993). Η τάση των γυναικών να παρατούν τις σπουδές τους πιο συχνά από τους άντρες, όταν φοιτούν σε πλαίσια τύπου STEM (Chow & Salmela-Aro, 2011· Nagy et al., 2008· Watt et al., 2012) μπορεί να εξηγηθεί από τη θεωρία κινήτρων της Eccles και των συνεργατών της (1983). Οι επικρατέστεροι παράγοντες που ενδέχεται να εξηγούν τις διαφορές μεταξύ των δύο φύλων στις επιλογές σπουδών είναι οι προσδοκίες και οι πεποιθήσεις για το πόσο αξίζει η ενασχόληση με συναφή θέματα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις πεποιθήσεις αυτές ως κινητήρια δύναμη των ακαδημαϊκών επιλογών (Eccles, 2005, 2009, 2011). Με τη σειρά τους, οι πεποιθήσεις για την αξία που κατέχει η ολοκλήρωση ενός έργου, επηρεάζονται από διαδικασίες κοινωνικοποιητικού χαρακτήρα. Οι άντρες και οι γυναίκες πραγματοποιούν διαφορετικές επιλογές και βιώνουν διαφορετικές εμπειρίες ανάλογα με το ρόλο που μετουσιώνει το κάθε φύλο στην εκάστοτε χρονική στιγμή. Εφόσον αυτός ο διαφορετικός ρόλος των φύλων αποτελεί κεντρικό στοιχείο της ταυτότητάς τους, οι εμπειρίες τους θα οδηγήσουν σε άντρες και γυναίκες που έχουν διαφορετικές προσδοκίες και αξίες. Για παράδειγμα, η κουλτούρα που ενσαρκώνουν οι ρόλων των φύλων μπορεί να επηρεάσει τις προτεραιότητες στους μακροπρόθεσμους στόχους που επιδιώκουν οι άντρες και οι γυναίκες. Επιπλέον, οι προσδοκίες και οι αξίες των ανδρών και των γυναικών διαμορφώνονται από τις εμπειρίες τους με τους γονείς, τους δασκάλους και τους συνομηλίκους, οι οποίοι θα ενδέχεται να τους παρέχουν διαφορετική ανατροφοδότηση σχετικά με τις επιλογές και τις ευκαιρίες τους (Gaspard, 2015).

Όσον αφορά τις πεποιθήσεις των φύλων για το κατά πόσο αξίζει να ασχοληθούν με τα μαθηματικά, τα ερευνητικά αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν ξεκάθαρη εικόνα. Ενώ ορισμένες έρευνες δείχνουν ότι τα αγόρια δίνουν μεγαλύτερη αξία στα μαθηματικά από ότι τα κορίτσια Marsh et al., 2005· Steinmayr & Spinath, 2008), άλλες δεν βρίσκουν στατιστικώς σημαντική διαφορά στην πεποίθηση αυτή ανάμεσα στα δύο φύλα (Jacobs et al., 2002· Meece et al., 1990· Wigfield et al., 1997). Οι διαφορές αυτές μπορούν εν μέρει να εξηγηθούν από την οργάνωση των ερευνών, όσον αφορά το επίπεδο που μετρούνται οι πεποιθήσεις για την αξία που δίνεται στο συγκεκριμένο αντικείμενο και τις κλίμακες αξίας που χρησιμοποιούνται (μια γενική κλίμακα αξίας, ή περισσότερα χαρακτηριστικά που εμπίπτουν στην πεποίθηση των υποκειμένων). Μελέτες που έλαβαν υπόψη ξεχωριστές διαστάσεις των πεποιθήσεων, έδειξαν ότι αγόρια στην εφηβεία τους παρουσίασαν υψηλότερες τιμές σε κλίμακες μαθηματικού ενδιαφέροντος και εσωτερικής αξίας (Frenzel et al., 2010· Frenzel, Pekrun, & Goetz, 2007· Marsh et al., 2005· Watt, 2004), ενώ οι διαφορές που παρουσιάζουν τα φύλα στους τομείς του επιτεύγματος και της χρηστικής αξίας παρουσιάζουν περισσότερο ασαφή αποτελέσματα και φαίνεται να εξαρτώνται από τον ειδικό χειρισμό των ερευνητικών εργαλείων (Frenzel et al., 2007· Meece et al., 1990· Steinmayr & Spinath, 2010· Watt, 2004· Watt et al., 2012). Άλλοι παράγοντες, όπως η ηλικιακή ομάδα ή το πολιτιστικό υπόβαθρο του δείγματος, ενδέχεται επίσης να επηρεάζουν τα αποτελέσματα. Επίσης, μικρός αριθμός ερευνών από τη βιβλιογραφία περιλαμβάνει κλίμακες όλων των διαστάσεων των στοιχείων αξίας, καθιστώντας δύσκολη την άμεση σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων τους. Από την άλλη πλευρά, όσον αφορά τις ανθρωπιστικές σπουδές, τα κορίτσια φαίνεται να κατέχουν σταθερά υψηλότερες προσδοκίες για την αξία των λογοτεχνικών μαθημάτων και των ξένων γλωσσών (Durik et al., 2006· Jacobs et al., 2002· Nagy et al., 2008· Watt, 2004).

Όμοια ερευνητικά αποτελέσματα με τα μαθηματικά υπάρχουν γενικά για τα αντικείμενα του τύπου STEM με πολλές έρευνες να μη βρίσκουν μεγάλη απόκλιση στις προσδοκίες των αγοριών και των κοριτσιών για την αξία των μαθημάτων αυτών (Eccles, 2009). Γενικά, οι μαθητές που αποδίδουν υψηλή αξία στις σπουδές τους επιμένουν περισσότερο, και παρουσιάζουν καλύτερη επίδοση από άλλους που δεν δίνουν αξία στις ακαδημαϊκές τους επιλογές (Vansteenkiste, Simons, Lens, Sheldon, & Deci, 2004). Ωστόσο, παρουσιάζεται διαφορά στον αριθμό των αντικειμένων στα οποία δίνεται ιδιαίτερη αξία, με τις γυναίκες να αποδίδουν κύρος σε περισσότερους τομείς (συμπεριλαμβάνοντας και τομείς εκτός του STEM) συγκριτικά με τους άντρες, πράγμα που μπορεί να μειώνει τη σημασία του να δίνεται αξία από τις γυναίκες στο συγκεκριμένο τομέα (Eccles, 2007b· Eccles, Barber, & Jozefowicz, 1999· Thoman, Arizaga, Smith, Story, & Soncuya, 2013). Επιπλέον, οι γυναίκες, σε σύγκριση με τους άνδρες, τείνουν να πιστεύουν ότι είναι πιο σημαντικό να κάνουν θυσίες στην επαγγελματική τους ζωή για χάρη της οικογένειάς τους και να έχουν μια δουλειά που βοηθάει τους ανθρώπους, γεγονός που είναι ένας από τους προβλέπει σε σημαντικό βαθμό τα αίτια που οι γυναίκες που δεν ακολουθούν καριέρες που σχετίζονται με τα αντικείμενα του STEM (Eccles, 2007). Ωστόσο, οι άνδρες τείνουν να αποδίδουν μεγαλύτερη αξία στην παραγωγή χρημάτων και στην επιτυχία της καριέρας που ακολουθούν. Αυτή η διαφορά μπορεί να είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για τα κορίτσια με καλή ακαδημαϊκή επίδοση, διότι αφενός ορισμένες φορές βρίσκονται σε δίλημμα ανάμεσα στις πεποιθήσεις τους για τα στερεότυπα σχετικά με τα φύλα, και αφετέρου οι επιτυχίες τους στα μαθήματα των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών (Eccles, 2007). Συνεπώς, κορίτσια με υψηλή επίδοση ενδέχεται να αποφύγουν να ακολουθήσουν υψηλού επιπέδου σπουδές τύπου STEM, λόγω της πίστης τους σε στερεότυπα φύλου. Οι παράγοντες που συμβάλλουν στη κοινωνικοποίηση των παιδιών, συμπεριλαμβανομένων και των γονιών, των οποίων οι αξίες επηρεάζονται από στερεότυπα, ενδέχεται να μεταδώσουν αυτές τις στερεοτυπικές ιδέες στα παιδιά (Rozek et al., 2015).

Άλλες έρευνες επικεντρώνονται στον τρόπο που αναπτύσσονται διαφορές φύλου όσον αφορά την προσδοκία και τις πεποιθήσεις αξίας κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών (Frenzel et al., 2010· Jacobs et al., 2002· Nagy et al., 2010· Watt, 2004). Οι στερεοτυπικές διαφορές μεταξύ των φύλων ξεκινούν να υφίστανται στην αρχή του δημοτικού σχολείου και παραμένουν σχετικά σταθερές σε όλη τη διάρκεια της σχολικής εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, φαίνεται ότι οι διαδικασίες κοινωνικοποίησης που λαμβάνουν χώρα στο σχολείο και στο σπίτι, συμβάλλουν στις διαφορές που παρατηρούνται στις διαφορετικές πεποιθήσεις των παιδιών ανάλογα με το φύλο (Eccles, 2007· Jacobs, Davis-Kean, Bleeker, Eccles, & Malanchuk, 2005· Wang & Degol, 2013). Αυτό συμβαίνει, επειδή οι γονείς και οι εκπαιδευτικοί υιοθετούν στάσεις και συμπεριφορές, που εξαρτώνται από το φύλο του ατόμου που έχουν απέναντί τους. Γνωστοποιούν διαφορετικές προσδοκίες από αγόρια και κορίτσια και τους παρέχουν αντιστοίχως διαφορετικές εμπειρίες, πράγμα που ενδέχεται να διαμορφώσει ανάλογα τις πεποιθήσεις και τις αξίες των παιδιών. Από τη βιβλιογραφία προκύπτει πως οι γονείς συχνά έχουν υπερβολικές προσδοκίες για την επιτυχία των παιδιών τους στα μαθηματικά και τη φυσική, όταν αυτά είναι αγόρια, και μειωμένες προσδοκίες για τα κορίτσια (Eccles et al., 1993· Yee & Eccles, 1988).

Σύνοψη

Όσον αφορά τα μαθηματικά προβλήματα, ο ορισμός που επιλέχθηκε για την παρούσα έρευνα, είναι εκείνος του Adam και των συνεργατών του (1977), οι οποίοι αναφέρουν ότι ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να οριστεί ως λεκτικό πρόβλημα («word problem», «verbal problem»), ή πρόβλημα ιστορίας («story problem»). Πρόκειται για την περιγραφή μιας κατάστασης με λέξεις ή/και με αριθμούς που απαιτεί μια ποσοτική ή αριθμητική απάντηση και προκαλεί τον λύτη να βρει έναν τρόπο να το λύσει. Για τους νοερούς υπολογισμούς, επιλέχθηκε ο ορισμός του Λεμονίδη (2015), ο οποίος ορίζει τους νοερούς υπολογισμούς ως υπολογισμούς που γίνονται νοερά μέσω της αξιοποίησης στρατηγικών, οι οποίοι συνήθως πραγματοποιούνται χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, όπως το μολύβι και το χαρτί, αν και μπορεί να γίνει χρήση αυτών των μέσων προς διευκόλυνση της βραχύχρονης μνήμης μέσω της καταγραφής σημειώσεων. Όσον αφορά τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών για τα προβλήματα προσθετικών δομών, ομαδοποιήθηκαν επιλέγοντας την στρατηγική του διαχωρισμού, την στρατηγική της συσσώρευσης, τη «μέθοδο διαχωρισμού-άλματος» (Beishuizen, 1993), το «πέρασμα από το 10» (Beishuizen et al., 1997), την «αντιστάθμιση» (Klein et al., 1998), και την άμεση ανάκληση (Thompson, 1999). Οι στρατηγικές που επιλέχθηκαν για τον εντοπισμό των απαντήσεων στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, ήταν η διάσπαση του ενός αριθμού (Whiteacre, 2012), η «άμεση ανάκληση», η «παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού», η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Λεμονίδης & Λύγουρας, 2008).

Αναφορικά με τους νοερούς υπολογισμούς στη διδακτική των μαθηματικών, η βιβλιογραφία εστιάζει στην κατηγοριοποίηση στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από διάφορες ηλικιακές ομάδες, σε σύγκριση στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από μαθητές τυπικής ανάπτυξης και μαθητές με δυσκολίες μάθησης, στη σύνδεση των νοερών υπολογισμών με την «αίσθηση του αριθμού», και στη σύγκριση Προγραμμάτων Σπουδών και των τρόπων που αυτά προσεγγίζουν τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των στρατηγικών τους. Υπάρχει εκτεταμένος όγκος ερευνών που εξετάζει τις παραπάνω θεματικές περιοχές.

Το ίδιο ισχύει και όσον αφορά το φύλο και τη σύνδεσή του με τη μαθηματική εκπαίδευση. Οι ερευνητές εστιάζουν στις διαφορές της μαθηματικής επίδοσης των δύο φύλων, και κατά πόσο αυτές οι διαφορές επηρεάζονται από τα επικρατούντα στερεότυπα, το άγχος, τις πεποιθήσεις και τις προσδοκίες των αντρών και των γυναικών.

Όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων, το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας εστιάζει καθαρά στα ίδια τα προβλήματα και τους παράγοντες που επηρεάζουν την επίλυσή τους. Η παλαιότερη βιβλιογραφία ασχολείται με τα ίδια τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στη διδακτική των μαθηματικών προσπαθώντας να τα κατηγοριοποιήσουν (π.χ. Carpenter & Moser, 1984· Greer, 1992), να τα αναλύσουν σε βήματα (π.χ. Polya, 1945· Schoenfeld, 1992), και να εντοπίσουν στρατηγικές επίλυσης (π.χ. Flower & Hayes, 1977· Kuhn & Phelps, 1982). Η πιο πρόσφατη βιβλιογραφία αναλύει παράγοντες που επηρεάζουν την επίλυση προβλημάτων, όπως το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών (π.χ. Özsoy, & Ataman, 2017· Karatas, & Baki, 2017), την υποβοήθηση μέσω των ΤΠΕ[6] (π.χ. Landau, Páez, & Bordeianu, 2015· Shute et al., 2016),

[6] Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας

νευρολογικούς παράγοντες (Warren, Kurczek, & Duff, 2016· Monaghan et al., 2015), την ειδική αγωγή (π.χ. Root, Browder, Saunders, & Lo, 2017), κλπ.

Δεν παρατηρείται πλήθος πρόσφατων ερευνών που να διερευνά αν υπάρχει κάποια συσχέτιση ανάμεσα στα μαθηματικά προβλήματα και στους νοερούς υπολογισμούς, όταν εκείνοι αξιοποιούνται για την επίλυσή τους. Στην καθημερινότητά τους, οι περισσότεροι ενήλικες προτιμούν να εκτελούν υπολογισμούς νοερά (Λεμονίδης, 2015). Άλλωστε, οι περισσότεροι από αυτούς τους υπολογισμούς δεν είναι αυθόρμητοι ή αυτοτελείς, αλλά πηγάζουν από κάποιο πρόβλημα που έχει τεθεί στον λύτη. Αποτελούν καταστάσεις, οι οποίες παρουσιάζουν ποσοτικά χαρακτηριστικά που οδηγούν σε ζητούμενα (Αγαλιώτης, 2013). Η προτίμηση μαθητών να επιλύσουν προβλήματα γραπτά ή νοερά, στο πλαίσιο της Δημοτικής εκπαίδευσης, δεν εξετάζεται. Συνεπώς, σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να συμβάλει στη συζήτηση σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς που χρησιμοποιούνται από μαθητές Δημοτικού, διερευνώντας την ενδεχόμενη προτίμηση των μαθητών να επιλύουν γραπτά μαθηματικά προβλήματα νοερά ή γραπτά, και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο επίλυσης γραπτών προβλημάτων. Παράλληλα, ο συγκεκριμένος σκοπός απορρέει και από προσωπικό ενδιαφέρον του ερευνητή να εμβαθύνει στις ποικίλες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση νοερών υπολογισμών.

2ο Κεφάλαιο: Σχεδιασμός και υλοποίηση της έρευνας

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας είναι:

1. Ποιες κατηγορίες γραπτών προβλημάτων τείνουν να επιλέγουν μαθητές Γ΄ Δημοτικού να επιλύουν νοερά.
2. Ποιες στρατηγικές τείνουν να χρησιμοποιούν μαθητές Γ΄ Δημοτικού για να επιλύουν γραπτά προβλήματα με νοερό τρόπο, ανάλογα με την κατηγορία των προβλημάτων.
3. Ποιος είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών σχετικά με την παρακίνηση των μαθητών για την ενασχόληση με τους κατ’ εκτίμηση και νοερούς υπολογισμούς;

Σημαντικά γνωρίσματα της παρούσας έρευνας

Η παρούσα έρευνα αποτελεί διερευνητική μέθοδο, με χαρακτηριστικά μελέτης περίπτωσης. Αξιοποιεί ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα. Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια θα παρουσιαστούν βασικά στοιχεία των παραπάνω ερευνητικών μεθόδων και δεδομένων.

Οι ποιοτικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις πηγάζουν από το ενδιαφέρον ερευνητών για την πολυπλοκότητα, το βάθος, και τις πτυχές της ανθρώπινης εμπειρίας (Ισάρη & Πουρκός, 2015). Η ποιοτική έρευνα θέτει ως στόχο τη διερεύνηση των ιδιαιτεροτήτων και των συνθηκών του θέματος που βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος του ερευνητή, και πραγματοποιείται στο καθημερινό ή εργασιακό περιβάλλον εκείνων που αφορά το εκάστοτε θέμα (Ζαφειρόπουλος, 2005). Τα ερευνητικά προβλήματα τείνουν να αναλύονται σε ερωτήσεις ανοικτού τύπου που οδηγούν στην ανακάλυψη νέων πληροφοριών. Η επιλογή του θέματος προς διερεύνηση μπορεί να γίνει υπό δύο προϋποθέσεις: Πρώτον, προκειμένου να κατανοηθεί περισσότερο ένα φαινόμενο, το οποίο δεν έχει εξεταστεί εκτενώς. Δεύτερον, προκειμένου να εξεταστούν νέες προοπτικές και δεδομένα φαινομένων που έχουν διερευνηθεί εκτενώς, ή για να αποκτηθούν πληροφορίες που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με ποσοτικό τρόπο. Συνεπώς, οι ποιοτικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις είναι κατάλληλες για περιπτώσεις που χρειάζεται πρωτίστως να διερευνηθούν οι μεταβλητές/παράγοντες ποιοτικά, και στη συνέχεια ποσοτικά, ή για περιπτώσεις που ο ερευνητής κρίνει πως μια ποσοτική προσέγγιση δεν μπορεί να ερμηνεύσει επαρκώς μια κατάσταση (Strauss & Corbin, 1990).

Ο ρόλος του ερευνητή κατά τη διεξαγωγή μιας ποιοτικής μελέτης περιλαμβάνει ορισμένες δεξιότητες που έχουν σχέση με τη λεγόμενη «θεωρητική ευαισθησία» του. Η θεωρητική ευαισθησία αναφέρεται στην προσωπική ποιότητα του ερευνητή. Πιο συγκεκριμένα, αφορά σε χαρακτηριστικά διορατικότητας, τη δυνατότητα απόδοσης νοήματος σε ερευνητικά δεδομένα, τη χωρητικότητα κατανόησης, τη δυνατότητα διάκρισης του τι είναι σχετικό και τι δεν είναι. Με άλλα λόγια, περιγράφει την ετοιμότητα του ερευνητή να διακρίνει τη λεπτότητα των ποιοτικών δεδομένων και να επιδιώξει μια ανάλογη προσέγγιση (Strauss & Corbin, 1990). Ο ερευνητής εμπλέκεται άμεσα στην ερευνητική διαδικασία και παίζει κεντρικό ρόλο. Έχει τις δικές του προσδοκίες και μεροληψίες, συμβάλλει στη διαδικασία με τις προσωπικές του εμπειρίες και απόψεις, και αντίθετα με ποσοτικές προσεγγίσεις, συμβάλλει με την υποκειμενικότητά του στο στόχο της έρευνας. Δεν αποστασιοποιείται ως αμερόληπτος και αντικειμενικός παρατηρητής, αλλά εμπλέκεται προσωπικά και άμεσα, πράγμα που δεν εμποδίζει την έρευνα, αλλά την προωθεί. Αυτό γίνεται μέσω του αναστοχασμού που ο πραγματοποιεί ο ερευνητής στις δικές του αντιλήψεις, αλλά και των συμμετεχόντων, και στον τρόπο που η υποκειμενικότητα μπορεί να επηρεάζει την ερευνητική διαδικασία, τη συλλογή των δεδομένων, και τα συμπεράσματα που προκύπτουν (Willig, 2008, όπως αναφέρεται στο Ισάρη & Πουρκός, 2015: 124). Η υποκειμενικότητα των συμμετεχόντων στην έρευνα, όπως και η θεωρητική ευαισθησία, εξαρτώνται από διάφορους παράγοντες, όπως το γνωστικό υπόβαθρο και οι επαγγελματικές και προσωπικές εμπειρίες (Strauss & Corbin, 1990).

Οι ποσοτικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις διαφέρουν από τις ποιοτικές ως προς την ερευνητική διαδικασία και φιλοσοφία, καθώς δίνουν έμφαση στον ποσοτικό προσδιορισμό της συλλογής και ανάλυσης δεδομένων. Επιχειρούν να «*εξηγήσουν φαινόμενα συλλέγοντας αριθμητικά δεδομένα, τα οποία αναλύονται αξιοποιώντας συγκεκριμένες στατιστικές μεθόδους που βασίζονται στα μαθηματικά*» (Aliaga & Gunderson, 2002, όπως αναφέρεται στο Muijs, 2010: 1). Στόχος των ποσοτικών ερευνών είναι η γενίκευση των ευρημάτων και συμπερασμάτων που προκύπτουν από το δείγμα της εκάστοτε έρευνας, στον ευρύτερο πληθυσμό. Αντίθετα με τις ποιοτικές προσεγγίσεις, οι ποσοτικοί ερευνητές ακολουθούν μια διαδικασία πιο αποστασιοποιημένη και αντικειμενική. Οι μέθοδοί τους διασφαλίζουν ότι οι προσωπικές τους απόψεις και αξίες δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματά τους. Κάποια ερευνητικά προβλήματα, εξαρτώνται από μεταβλητές, και τον τρόπο που η μία επηρεάζει την άλλη. Οι μεταβλητές αυτές περιγράφουν κάποιο χαρακτηριστικό ή ιδιότητα το οποίο μελετάται στην εκάστοτε έρευνα. Τα αποτελέσματα που συλλέγονται, έχουν τέτοια μορφή ώστε να τους επιτρέπουν να εντοπίζουν την πιθανότητα αναπαραγωγής των συμπερασμάτων σε πληθυσμούς πέρα από το δείγμα της έρευνας, και συγκριτικά με ποιοτικές προσεγγίσεις προέρχονται από μεγαλύτερο πλήθος δείγματος. Τα συμπεράσματα αντλούνται από τα ερευνητικά δεδομένα και στατιστικές αναλύσεις. Η βιβλιογραφία στις ποσοτικές προσεγγίσεις χρησιμεύει σε δύο σημεία: Πρώτον, μπορεί να δικαιολογήσει την ανάγκη επίλυσης του ερευνητικού προβλήματος, και δεύτερον, παρέχει εν δυνάμει ερευνητικά ερωτήματα και στόχους για την έρευνα. Η ανάγκη επίλυσης του ερευνητικού προβλήματος προκύπτει από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Τα ερευνητικά ερωτήματα πηγάζουν από σχέσεις, τάσεις και μεταβλητές της βιβλιογραφίας, και παρέχουν στον ερευνητή κατευθύνσεις για το στόχο της έρευνάς του (Creswell, 2002).

Ο ποσοτικός ερευνητής περιγράφει ένα ερευνητικό πρόβλημα, στηριζόμενος σε τάσεις του επιστημονικού πεδίου στο οποίο ανήκει, ή στην ανάγκη να εξηγηθεί ο λόγος που παρουσιάζεται κάποιο φαινόμενο. Στην προσπάθειά του να περιγράψει μια τάση, ο ερευνητής αναζητά προς τα πού κλίνουν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων και τον τρόπο που η κλίση που παρατηρείται, διαφέρει από άτομο σε άτομο. Οι συγκεκριμένες παράμετροι συνδέονται με τις μεταβλητές της έρευνας, και βοηθούν στον εντοπισμό της αλληλεξάρτησής τους. Ο ερευνητής αξιοποιεί ερευνητικά εργαλεία που, σε προηγούμενες μελέτες, έχουν αποδειχτεί έγκυρα και αξιόπιστα, και τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί για να σχεδιάσουν έρευνες που ελέγχουν απόλυτα το ενδεχόμενο προσωπικής παρέμβασης στα αποτελέσματα. Δεν γίνεται καμία αναφορά στον ερευνητή και την αλληλεπίδρασή του με το δείγμα (Creswell, 2002).

Η μέθοδος της μελέτης περίπτωσης («case study») αποτελεί μια ερευνητική προσέγγιση που ασχολείται με σύγχρονα φαινόμενα, αξιοποιώντας πολλαπλά ερευνητικά εργαλεία, για να συγκεντρώσει δεδομένα. Η συλλογή των ερευνητικών δεδομένων πραγματοποιείται από τον ερευνητή με εμπειρικό τρόπο μέσα στο φυσικό περιβάλλον του εκάστοτε αντικειμένου που βρίσκεται υπό μελέτη (Yin, 2003, όπως αναφέρεται στο: Hancock & Algozzine, 2017). Η μελέτη περίπτωσης εστιάζει σε θεματικές περιοχές που αποτελούν πρόσφορο έδαφος για ποιοτικές προσεγγίσεις που αναλύουν σε βάθος αντικείμενο που βρίσκεται υπό διερεύνηση μέσα στο φυσικό του πλαίσιο. Αφού οριοθετηθεί βιβλιογραφικά το πλαίσιο του θέματος, εντοπίζονται οι γνωστές και άγνωστες πτυχές του και τίθενται ερευνητικά ερωτήματα (Hancock & Algozzine, 2017).

Η διερευνητική μέθοδος («explorative research») αποτελεί μια προσέγγιση που αντλεί γνώση από δεδομένα που στοχεύουν στην κατανόηση της λειτουργίας του κόσμου και στην προώθηση της των επιστημονικών διαδικασιών (Tukey & Wilk, 1987). Κεντρική φιλοσοφία της διερευνητικής μεθόδου είναι η ανάπτυξη ενός ακριβούς και λεπτομερούς πνευματικού μοντέλου που εκμεταλλεύεται τις αποκλίσεις που παρατηρούνται ανάμεσα στα δεδομένα. Περιλαμβάνει μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία δημιουργίας υποθέσεων και εύρεσης κάποιας σύνδεσης ανάμεσα στα δεδομένα και τις υποθέσεις. Ο ερευνητής, καθώς επιχειρεί να εξηγήσει κάποιο φαινόμενο, θέτει ορισμένους συμπληρωματικούς στόχους: να εντοπίσει οτιδήποτε απρόσμενο, να ερμηνεύσει σωστά, και να πραγματοποιήσει πλήρη συμπεράσματα. Η συγκεκριμένη διαδικασία βοηθάει στη διατύπωση επιστημονικών υποθέσεων και την κατασκευή μαθηματικών αναπαραστάσεων που στη συνέχεια επιτρέπουν τη χρήση περισσότερο κλειστών-κομφορμιστικών ερευνητικών μεθόδων (Behrens, DiCerbo, Yel, & Levy, 2012).

Τα δεδομένα που προκύπτουν από τη διερευνητική μέθοδο χρησιμοποιούνται για να πραγματοποιηθεί ανάλυση που δίνει έμφαση σε εναλλακτικές πιθανότητες και υποθέσεις. Ο ρόλος του ερευνητή είναι να διερευνά τα δεδομένα με όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους μέχρι να προκύψει ένα πειστικό συμπέρασμα. Επειδή η διερευνητική μέθοδος στηρίζεται στη διασταύρωση πληροφοριών και την αξιοποίηση πολλαπλών υποθέσεων, χρησιμοποιείται μαζί με άλλες ερευνητικές μεθόδους (Yu, 1977).

Η μελέτη περίπτωσης αντλεί τη θεματολογία της από ένα μεγάλο εύρος αντικειμένων. Για παράδειγμα, στη βιβλιογραφία εντοπίζονται μελέτες περιπτώσεων προγραμμάτων, συμβάντων, ατόμων, διαδικασιών, ιδρυμάτων, κοινωνικών ομάδων, και άλλων σύγχρονων φαινομένων. Σε αντίθεση με τη διερευνητική μέθοδο, η μελέτη περίπτωσης δεν επιδιώκει τόσο να επιβεβαιώνει ορισμένες θέσεις που έχουν διατυπωθεί, να αποδεικνύει σχέσεις και να ελέγχει υποθέσεις, αλλά να εντοπίζει μοτίβα συμπεριφορών ή συμβάντων. Επειδή αξιοποιεί τη συλλογή και ανάλυση πληροφοριών από πολλαπλές πηγές, όπως συνεντεύξεις, παρατηρήσεις και την υπάρχουσα βιβλιογραφία, η έρευνα περιπτώσεων απαιτεί ορισμένες φορές από τον ερευνητή να αφιερώνει ακόμα περισσότερο χρόνο στο υπό μελέτη περιβάλλον σε σχέση με άλλα είδη έρευνας. Κοινό σημείο με άλλα είδη έρευνας είναι η πρόταση επιπρόσθετων ερωτημάτων με στόχο να διερευνηθεί ένα θέμα από κάποια διαφορετική άποψη, ή με επιπλέον λεπτομέρειες. Ορισμένες φορές, πραγματοποιείται «μελέτη περίπτωσης» σε κάποιο αντιπροσωπευτικό άτομο μιας ομάδας. Πιο συχνά, όμως, πραγματεύεται κάποιο φαινόμενο το οποίο μπορεί να είναι μια κατάσταση, ένα συμβάν, μια δραστηριότητα, και το εκάστοτε φαινόμενο, ενδέχεται να αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης πολλών μελετών περίπτωσης. Η μελέτη του εκάστοτε φαινομένου γίνεται μέσα στο πλαίσιο/περιβάλλον του και περιορίζεται στο χώρο και το χρόνο που αυτό πραγματοποιείται. Επειδή αξιοποιεί πολλαπλές πηγές για να αντλήσει τα ερευνητικά δεδομένα, η μελέτη περίπτωσης είναι σε μεγάλο βαθμό περιγραφική. Παραθέτει λεγόμενα από διαδεδομένες θεωρίες και χρησιμοποιεί λογοτεχνικές τεχνικές για να δημιουργήσει νοερές εικόνες, οι οποίες φανερώνουν την πολυπλοκότητα των μεταβλητών που αφορούν στο υπό διερεύνηση φαινόμενο. Με άλλα λόγια, η μελέτη περίπτωσης βοηθά τον ερευνητή να ανιχνεύει και να αντλεί τις πληροφορίες που τον ενδιαφέρουν μέσα από το πλαίσιο του φαινομένου για μια πιο εμπεριστατωμένη εξέταση (Hancock & Algozzine, 2017).

Οι παραπάνω ερευνητικές μέθοδοι καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί, όσον αφορά τη μεθοδολογία. Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να διερευνήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών και το αν η επιλογή αυτή εξαρτάται από τον τύπο του προβλήματος. Για λόγους ευκολίας πρόσβασης, η έρευνα χρειαζόταν να πραγματοποιηθεί στο περιβάλλον του σχολείου. Συνεπώς, χαρακτηρίζεται από στοιχεία μελέτης περίπτωσης. Αφορά έναν τομέα, στον οποίο δεν υπάρχει εκτεταμένη πρόσφατη βιβλιογραφία και επιδιώκει να προτείνει περαιτέρω διερεύνηση στο ζήτημα που εξετάζει με τη χρήση περισσότερο κλειστών-κομφορμιστικών ερευνητικών μεθόδων. Επομένως, εμπεριέχει στοιχεία διερευνητικής μεθόδου.

Εργαλεία/τεχνικές συλλογής δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιήθηκαν, αρχικά, γραπτά δοκίμια, τα οποία περιλάμβαναν μαθηματικά προβλήματα. Στη συνέχεια, προκειμένου να διαπιστωθούν οι νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για να επιλύσουν τα εν λόγω προβλήματα, κλήθηκαν να απαντήσουν σε ημιδομημένες συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις αυτές ήταν βασισμένες στις απαντήσεις των προβλημάτων που είχαν καταγράψει προηγουμένως οι μαθητές. Πάνω στις απαντήσεις, ερωτήθηκαν για τον τρόπο που επιχείρησαν να επιλύσουν τα προβλήματα, με στόχο να διαπιστωθεί και να κατηγοριοποιηθεί οι νοερές στρατηγικές που ακολούθησαν. Έπειτα, λήφθηκαν συνεντεύξεις και από τους εκπαιδευτικούς των μαθητών, για να διερευνηθεί το πλαίσιο της διδακτικής διαδικασίας, όσον αφορά την ελευθερία που δίνεται στους μαθητές να επιλύουν τα προβλήματα νοερά.

Η συνέντευξη, ως τεχνική της ποιοτικής έρευνας, υπάγεται σε ορισμένα πλαίσια μέσα στα οποία ο ερωτών και ο ερωτώμενος οικοδομούν ένα διάλογο. Το νόημα που αποκτά ο διάλογος αυτός, προκύπτει από τους ίδιους τους συμμετέχοντες και τις αντιλήψεις τους, οι οποίες μέσω της τεχνικής της συνέντευξης ενεργοποιούνται. Η συνέντευξη αποτελεί έναν τρόπο να προσεγγιστούν οι αντιλήψεις των ανθρώπων στα πλαίσια που ορίζει κάθε φορά και με την καθοδήγησή του ο ερευνητής. Από την άλλη πλευρά, ο ερωτώμενος εκφράζει τις υποκειμενικές απόψεις του και περιγράφει τις αντιλήψεις και τις εμπειρίες του ελεύθερα, μέσα στα παραπάνω πλαίσια (Mishler, 1996, όπως αναφέρεται στο: Μάγος, 2005). Οι συνεντεύξεις της ποιοτικής μεθοδολογίας περιλαμβάνουν ερωτήσεις ανοικτού τύπου, έτσι ώστε οι συμμετέχοντες να μπορούν να εκφραστούν χωρίς να περιορίζονται από τις απόψεις του ερευνητή ή από προηγούμενα ευρήματα. Με ερωτήσεις τέτοιου τύπου, οι ερωτώμενοι είναι ελεύθεροι να δημιουργήσουν τις δικές τους απαντήσεις. Οι συνεντεύξεις, ως τεχνικές, παρουσιάζουν προτερήματα και μειονεκτήματα. Ένα σημαντικό προτέρημα είναι ότι παρακινούν τους συμμετέχοντες να περιγράψουν λεπτομερώς δικές τους προσωπικές πληροφορίες, οι οποίες είναι χρήσιμες για τους στόχους της έρευνας και ενδέχεται να μην μπορούν να εντοπιστούν μέσω της τεχνικής της παρατήρησης. Επιπλέον, ένα άλλο προτέρημα έναντι της παρατήρησης είναι η δυνατότητα του ερευνητή να ελέγχει τι είδους πληροφορίες λαμβάνει από τους συμμετέχοντες, επειδή με τις ερωτήσεις μπορεί να λάβει ανταποκρίσεις από ένα περιορισμένο εύρος απαντήσεων. Ένα ελάττωμα της συνέντευξης είναι το φιλτράρισμα, από μέρους του ερευνητή, των απαντήσεων που έχουν ληφθεί, καθώς στην τελική εργασία αποτυπώνεται μια σύνοψη των πληροφοριών και των ευρημάτων που αφορούν τους στόχους της έρευνας. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι η παρουσία του ίδιου του ερευνητή, η οποία ενδέχεται να επηρεάσει τις απαντήσεις των συμμετεχόντων. Οι ερωτώμενοι, ανάλογα με το ύφος και τη στάση που κρατάει ο ερωτών απέναντί τους και τις ερωτήσεις που τους απευθύνει, μπορεί να μην δίνουν ακριβείς και ξεκάθαρες απαντήσεις (Creswell, 2002).

Στις συνεντεύξεις, ο ερευνητής μπορεί να απευθύνεται σε ένα συμμετέχοντα («*one on one interview*») ή σε μια ομάδα συμμετεχόντων («focus group interview»). Όταν οι συμμετέχοντες είναι πρόθυμοι να επικοινωνήσουν και να μοιραστούν με άνεση τις απόψεις και τις ιδέες τους, η ατομική συνέντευξη είναι ιδανική για μια ποιοτική προσέγγιση. Όσον αφορά την έρευνα στην εκπαίδευση, η ατομική συνέντευξη των συμμετεχόντων είναι μια ευρέως χρησιμοποιημένη ερευνητική τεχνική, η οποία περιλαμβάνει την συλλογή δεδομένων μέσω της εκφώνησης ερωτήσεων και της καταγραφής απαντήσεων από ένα συμμετέχοντα κάθε φορά. Για το λόγο αυτό, η ατομική συνέντευξη αποτελεί μια χρονοβόρα πρακτική, ειδικά αν στο δείγμα περιλαμβάνεται μεγάλος αριθμός συμμετεχόντων. Επιπλέον, στις συνεντεύξεις μιας μελέτης, ο ερευνητής μπορεί να απευθύνεται σε μια ομάδα ατόμων, για να συλλέξει κοινά δεδομένα, καθώς και εξατομικευμένα.

Το πλαίσιο της έρευνας: χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα, το ενδιαφέρον του ερευνητή στρέφεται στη διερεύνηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για την εκτέλεση των νοερών υπολογισμών, στους τύπους γραπτών προβλημάτων που οι μαθητές προτιμούν να επιλύουν νοερά, και στο κοινωνικό υπόβαθρο των μαθητών σε σχέση με τις παραπάνω επιλογές τους.

Η έρευνα χωρίστηκε σε δύο στάδια. Πραγματοποιήθηκε σε δύο ελληνικά Δημοτικά Σχολεία, και αφορούσε το ηλικιακό επίπεδο της Γ΄ τάξης. Το πρώτο στάδιο της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε ένα Δημοτικό Σχολείο της Νοτίου Ελλάδος (στο εξής: Σχολείο Α΄) στο διάστημα από 16 Μαΐου μέχρι και 23 Μαΐου 2019. Στο συγκεκριμένο σχολείο λειτουργούσαν, κατά τη σχολική χρονιά 2018-2019, δέκα τάξεις και δύο τμήματα ένταξης. Έντεκα μόνιμοι εκπαιδευτικοί πλαισίωναν τις τάξεις και το ένα από τα δύο τμήματα ένταξης. Εκτός από τους παραπάνω μόνιμους εκπαιδευτικούς, στη σχολική μονάδα απασχολούνταν δύο αναπληρώτριες, η μία ειδική παιδαγωγός, που ήταν υπεύθυνη για το δεύτερο τμήμα ένταξης, κωφών-βαρήκοων, και η άλλη ψυχολόγος. Όσον αφορά το κοινωνικο-οικονομικό υπόβαθρο των μαθητών, κατά κύριο λόγο προέρχονταν από οικογένειες χαμηλού και μεσαίου οικονομικού επιπέδου, και αρκετοί από αυτούς ήταν στην καταγωγή τους Ρομά. Το τμήμα αποτελείτο από 12 αγόρια και 11 κορίτσια.

Οι εκπαιδευτικοί των τμημάτων ένταξης ήταν αναπληρωτές, απόφοιτοι παιδαγωγικών σχολών ειδικής αγωγής, και με λίγα χρόνια εμπειρίας, ενώ οι υπόλοιποι δάσκαλοι ήταν μόνιμοι με περισσότερα χρόνια εμπειρίας στην εκπαίδευση.

Το δεύτερο στάδιο της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε ένα Δημοτικό Σχολείο της Βορείου Ελλάδος (στο εξής: Σχολείο Β΄). Η ερευνητική διαδικασία ξεκίνησε στις 27 Μαΐου και ολοκληρώθηκε στις 7 Ιουνίου 2019. Τα συγκεκριμένα σχολεία επιλέχθηκαν, επειδή ο ερευνητής είχε τη δυνατότητα πρόσβασης σε αυτά. Στο εν λόγω σχολείο, για την τρέχουσα σχολική χρονιά, απασχολούνταν δύο αναπληρώτριες δασκάλες ειδικής αγωγής, η μία υπεύθυνη για το τμήμα ένταξης της σχολικής μονάδας και η άλλη για την παράλληλη στήριξη ενός μαθητή, μια νοσηλεύτρια, και επτά μόνιμοι εκπαιδευτικοί, οι οποίοι πλαισίωναν τις έξι τάξεις και το ολοήμερο τμήμα. Οι μαθητές προέρχονταν κατά κύριο λόγο από το μεσαίο κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο. Το τμήμα αποτελείτο από 12 αγόρια και 9 κορίτσια.

Και στις δύο τάξεις δόθηκαν αρχικά γραπτά δοκίμια που περιλάμβαναν γραπτά μαθηματικά προβλήματα, τα οποία μπορούσαν να λυθούν με μόνο μία πράξη. Οι συμμετέχοντες είχαν την οδηγία να λύσουν ατομικά τα προβλήματα μέσα στα χρονικά περιθώρια δύο διδακτικών ωρών – μία για τα προβλήματα προσθετικών δομών και μία για τα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών. Η επιλογή των προβλημάτων ήταν τέτοια, ώστε να περιλαμβάνουν όλους τους τύπους προβλημάτων, όπως αυτοί περιγράφονται από τους Carpenter και Moser (1984), και τον Vergnaud (1982), όσον αφορά τις προσθετικές δομές. Οι παραπάνω ερευνητές διακρίνουν τα μαθηματικά προβλήματα σε τέσσερις και έξι τύπους αντίστοιχα. Μπορούμε να πούμε πως τρία από τα είδη που εντοπίζουν οι Carpenter και Moser ταυτίζονται με τέσσερα από τα έξι είδη που παρατηρεί ο Vergnaud, καθώς τα προβλήματα «αλλαγής» παρουσιάζουν αντίστοιχες εκφωνήσεις με τα προβλήματα «μετασχηματισμού μιας κατάστασης και μετατροπή της σε μια άλλη» και με τα προβλήματα «σύνθεσης δύο μετασχηματισμών», τα προβλήματα «συνδυασμού» με τα προβλήματα «σύνθεσης δύο καταστάσεων», και τα προβλήματα «σύγκρισης» με τα προβλήματα «στατικής σχέσης δύο καταστάσεων». Τα προβλήματα «εξομοίωσης» των Carpenter και Moser δεν αντιστοιχούν με κάποια από τις κατηγορίες του Vergnaud, όμως αποτελούν συνδυασμό προβλημάτων «αλλαγής» και προβλημάτων «σύγκρισης». Επομένως, οι κατηγορίες που εξετάστηκαν από τον ερευνητή ήταν προβλήματα αλλαγής, συνδυασμού, σύγκρισης, και εξομοίωσης, όπως αυτά ορίζονται από τους Carpenter και Moser και προβλήματα «μετασχηματισμού μεταξύ δύο σχέσεων» και «σύνθεσης σχέσεων» του Vergnaud. Με αυτόν τον τρόπο καλύφθηκαν όλες οι κατηγορίες προβλημάτων, όπως περιγράφονται στη βιβλιογραφία.

Για να εξεταστούν όλα τα ενδεχόμενα, δόθηκαν πολλαπλά προβλήματα. Για κάθε κατηγορία, εξετάστηκε αν οι μαθητές επηρεάζονται από τον τύπο της άγνωστης ποσότητας και αν οι πράξεις με κρατούμενο οδηγούν σε περαιτέρω λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, δόθηκαν έξι προβλήματα αλλαγής, τα οποία διέφεραν μεταξύ τους, ως προς τη ζητούμενη ποσότητα, από τις τρεις που παρουσιάζονται στην εκφώνηση, και ως προς την ύπαρξη κρατούμενου στις πράξεις καθαυτές. Το ίδιο σκεπτικό εφαρμόστηκε και στις υπόλοιπες κατηγορίες των Carpenter και Moser, με την κατασκευή τεσσάρων προβλημάτων συνδυασμού, τεσσάρων προβλημάτων σύγκρισης, και τεσσάρων προβλημάτων εξομοίωσης. Όσον αφορά τις κατηγορίες του Vergnaud, δόθηκαν λιγότερα προβλήματα για κάθε τύπο, καθώς ο ερευνητής έκρινε πως οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με προβλήματα μετασχηματισμών και σύνθεσης δύο σχέσεων, επειδή τα σχολικά εγχειρίδια δεν περιλαμβάνουν τέτοιου είδους προβλήματα. Συνολικά, τα προβλήματα που κλήθηκαν να λύσουν οι μαθητές και αφορούν σε προσθετικές δομές, ήταν 24.

Αφού οι μαθητές έλυσαν τα δοκίμια με τα προβλήματα προσθετικών δομών, τους δόθηκαν περαιτέρω γραπτά προβλήματα, πολλαπλασιαστικών δομών, τα οποία μπορούσαν να λυθούν με μία μόνο πράξη. Η επιλογή των προβλημάτων ήταν τέτοια ώστε να περιλαμβάνει τρεις από τις τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων που διακρίνει ο Greer (1992). Δηλαδή, δόθηκαν στους μαθητές έξι προβλήματα ίσων ομάδων, τέσσερα προβλήματα σύγκρισης, και τέσσερα προβλήματα ορθογώνιας διάταξης. Η κατηγορία προβλημάτων καρτεσιανού γινομένου εξαιρέθηκαν από τον ερευνητή, επειδή τα σχολικά εγχειρίδια δεν περιλαμβάνουν τέτοιου είδους προβλήματα, και συνεπώς οι μαθητές κρίθηκε πως δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτά. Συνολικά τα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών ήταν 14.

Μετά την συμπλήρωση των δοκιμίων, ο ερευνητής κάλεσε τους μαθητές σε δομημένες συνεντεύξεις ένας προς έναν («one on one interviews»), με στόχο να διακρίνει τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησε ο κάθε συμμετέχων για να επιλύσει τα προβλήματα.

Συνεντεύξεις λήφθηκαν και από τους εκπαιδευτικούς των τάξεων, πάνω σε συγκεκριμένους άξονες, με ημιδομημένες ερωτήσεις. Ο πρώτος άξονας αφορούσε την τάση των εκπαιδευτικών να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να πραγματοποιούν εκτιμήσεις. Ο δεύτερος άξονας αφορούσε την ελευθερία που παρέχουν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές τους να ακολουθούν εναλλακτικές τεχνικές για να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα.

Περιορισμοί της μεθοδολογικής διαδικασίας

Για την παρούσα έρευνα αξιοποιήθηκαν ποιοτικές ερευνητικές τεχνικές, δομημένες και ημιδομημένες συνεντεύξεις, και γραπτά δοκίμια, με αποτέλεσμα να δίνεται και ένας ποσοτικός χαρακτήρας. Τα δεδομένα που αξιοποιήθηκαν ήταν μικτά, ποιοτικά και ποσοτικά. Ο αριθμός των συμμετεχόντων ήταν περιορισμένος και η δειγματοληψία βολική. Επομένως, λόγω του περιορισμένου αριθμού μαθητών, δεν τεκμηριώνεται η πλήρης αξιοπιστία του δείγματος. Στην ποσοτική έρευνα, η αξιοπιστία αναφέρεται στην ακριβή δυνατότητα μιας έρευνας με τα ίδια ερευνητικά εργαλεία να αναπαράγει τα ίδια αποτελέσματα. Στην ποιοτική έρευνα, η οποία εμβαθύνει περισσότερο στους λόγους που παρουσιάζονται ορισμένα φαινόμενα, ένας αντίστοιχος ορισμός της αξιοπιστίας είναι δύσκολο να οριστεί, συνεπώς, η αξιοπιστία συνδέεται με τη σταθερότητα (Carcary, 2009· Grossoehme, 2014). Ένα περιθώριο διακύμανσης των αποτελεσμάτων γίνεται δεκτό στην ποιοτική έρευνα, με την προϋπόθεση ότι η μεθοδολογία και η επιμέλεια της επιστημολογίας αποδίδουν σταθερά δεδομένα τα οποία είναι οντολογικά παρόμοια αλλά μπορούν να διαφέρουν σε πλούτο και σημασία, όταν ενταχτούν σε παρόμοια πλαίσια (Leung, 2015). Οι ποιοτικές μεθοδολογίες στηρίζονται στη συμμετοχή του μελετητή, ο οποίος συμμετέχει και επηρεάζει τη διαδικασία, και το γεγονός αυτό δεν υποβαθμίζει την έρευνα, αλλά την ενισχύει (Grossoehme, 2014).

Η εγκυρότητα των ερευνητικών εργαλείων διασφαλίζεται στην παρούσα έρευνα, μέσω της χρήσης δομημένων συνεντεύξεων για τον εντοπισμό των νοερών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές. Η εγκυρότητα στην ποιοτική έρευνα αναφέρεται στην καταλληλότητα των ερευνητικών τεχνικών, διαδικασιών και δεδομένων. Με άλλα λόγια, έγκειται στο αν τα αποτελέσματα της έρευνας πηγάζουν από τα ερευνητικά ερωτήματα, αν η μεθοδολογία είναι κατάλληλη για να απαντά τα ερωτήματα, αν το σχέδιο του ερευνητή, η δειγματοληψία και η ανάλυση των δεδομένων είναι κατάλληλα για τη μεθοδολογία, και αν είναι τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα έγκυρα με βάση το δείγμα και τη βιβλιογραφία (Leung, 2015). Η ίδια τεχνική, δηλαδή δομημένες συνεντεύξεις, χρησιμοποιείται και από άλλους ερευνητές για τον εντοπισμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές κατά τη διάρκεια νοερών υπολογισμών (για παράδειγμα: Lucangeli et al., 2003· Macintyre, & Forrester, 2003· Rechtsteiner-Merz, & Rathgeb-Schnierer, 2015).

Ένας περιορισμός των συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν στους μαθητές ήταν ότι λόγω της φύσης των απαντήσεών τους, ενδέχεται τα δεδομένα να μην αντιστοιχούν πλήρως με τον τρόπο και το σκεπτικό που ακολούθησαν για την επίλυση των προβλημάτων. Οι ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν είχαν στόχο να αποτυπώσουν τη διαδικασία που ακολούθησαν οι μαθητές, καθοδηγώντας εκείνους που δεν μπορούσαν να εκφραστούν σε πλαίσια μεταγνώσης. Με αυτόν τον τρόπο, ίσως να τις αξιοποίησαν οι μαθητές για να δικαιολογήσουν απαντήσεις που δεν ήταν δικές τους, οι οποίες ενδέχεται να επηρεάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας, παρά τις προσπάθειες του ερευνητή και των εκπαιδευτικών να αποτρέψουν τέτοιες συμπεριφορές.

3ο Κεφάλαιο: Αποτελέσματα

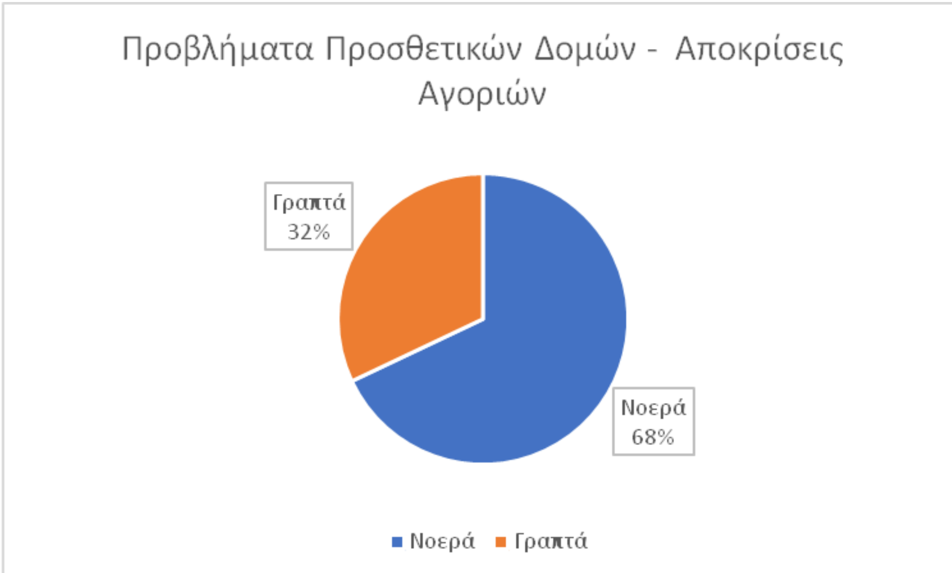
Πρώτο ερευνητικό ερώτημα: Κατηγορίες γραπτών προβλημάτων, τις οποίες τείνουν να επιλέγουν μαθητές Γ΄ Δημοτικού να επιλύουν νοερά.

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με τις κατηγορίες προβλημάτων που προτιμούν μαθητές Γ΄ τάξης Δημοτικού να επιλύουν νοερά, πραγματοποιήθηκε κωδικοποίηση και ομαδοποίηση των ευρημάτων. Τα 38 γραπτά προβλήματα δόθηκαν στους 23 μαθητές της Γ΄ τάξης του Σχολείου Α προς επίλυση. Συνολικά συγκεντρώθηκαν 851 αποκρίσεις. Στις 181 από αυτές, οι μαθητές δεν μπόρεσαν να αποκωδικοποιήσουν το πρόβλημα και δεν παρήγαγαν καμία απάντηση (21%). Οι γραπτές απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν, ήταν 321 (38%). Συνολικά, τα προβλήματα που οι μαθητές επέλεξαν να λύσουν νοερά ήταν 349 (41%). Το ποσοστό των νοερών απαντήσεων ως προς τις συνολικές απαντήσεις ήταν 52%. Το αποτέλεσμα αυτό απέχει από εκείνο των Δεσλή & Λιόλιου (2017), οι οποίες παρατήρησαν χρήση νοερών υπολογισμών στο 38% των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Γράφημα 1

Σχετικά με το φύλο στα προβλήματα προσθετικών δομών, τα αγόρια από τα 279 προβλήματα που τους δόθηκαν, δεν έδωσαν καμία απάντηση σε 76 από αυτά (27%). Από τις 203 απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν, οι 138 ήταν υπολογισμένες νοερά (68%) και οι 65 υπολογίστηκαν γραπτά (32%). Τα κορίτσια από τα 264 προβλήματα που τους δόθηκαν, δεν έδωσαν καμία απάντηση σε

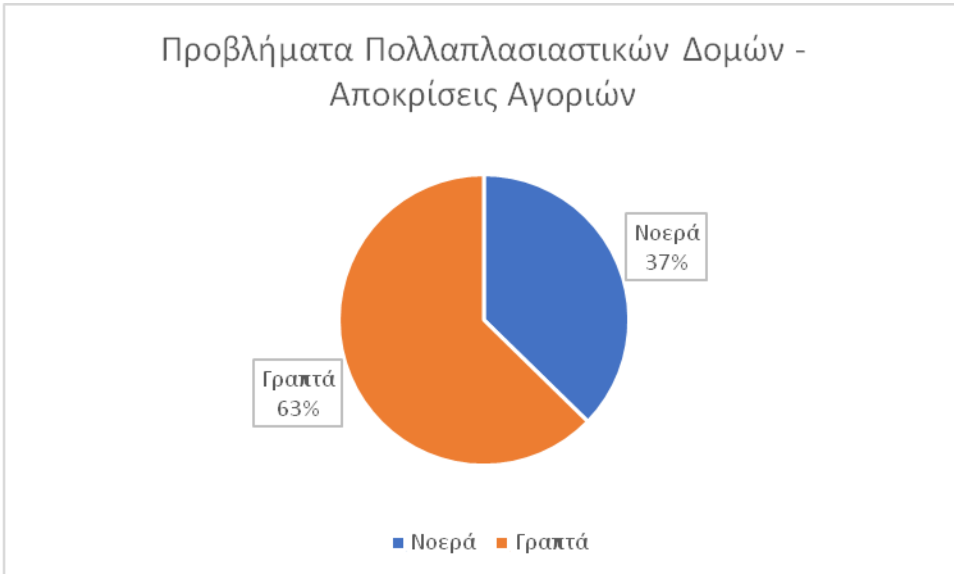
48 από αυτά (18%). Από τις 216 απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν, οι 114 ήταν υπολογισμένες νοερά (53%), ενώ οι 102 ήταν γραπτές (47%).



Γράφημα 2

Γράφημα 3

Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, τα αγόρια δεν κατάφεραν να παράγουν απάντηση σε 28 από τα 154 προβλήματα (18%). Από τα 126 προβλήματα που απαντήθηκαν, τα 47 ήταν υπολογισμένα νοερά (37%) και τα 79 ήταν γραπτά (63%). Τα κορίτσια δεν απάντησαν σε 29 από τα 154 προβλήματα που τους δόθηκαν (19%). Από τις 125 απαντήσεις, οι 52 ήταν υπολογισμένες νοερά (42%) και οι 73 ήταν γραπτές (58%).



Γράφημα 4

Γράφημα 5

Προβλήματα προσθετικών δομών

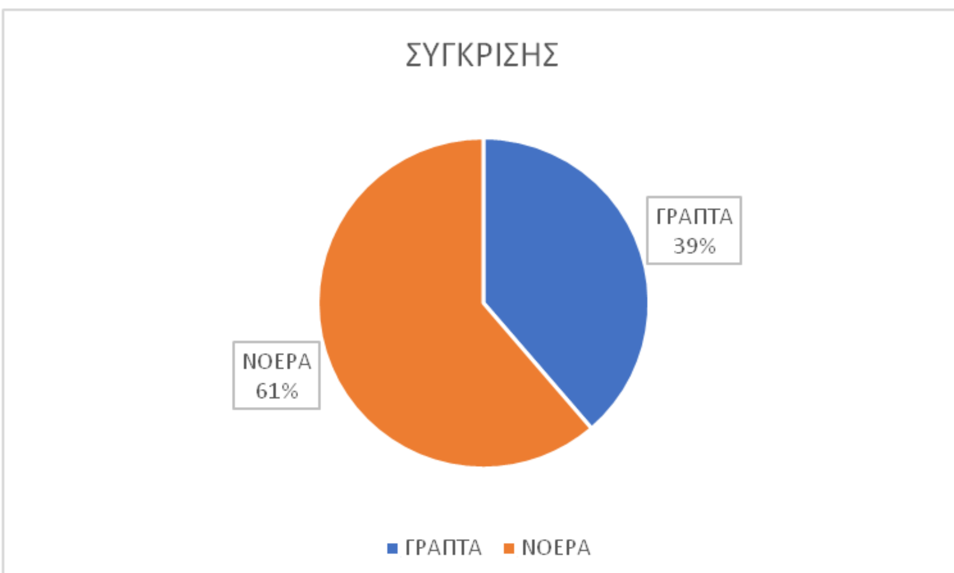
Όσον αφορά τα προβλήματα αλλαγής, το 62% των απαντήσεων που δόθηκαν ήταν υπολογισμένες νοερά. Οι μισοί περίπου μαθητές προσπάθησαν να επιλύσουν τα περισσότερα από τα προβλήματα αλλαγής (τουλάχιστον 4 από τα συνολικά 6) νοερά αντί για γραπτά, ενώ λιγότεροι (7 από τους 23) δεν έδωσαν νοερή απάντηση.

Γράφημα 6

Ομοίως, σχετικά με τα προβλήματα συνδυασμού, οι μαθητές απάντησαν νοερά στο 62% των προβλημάτων που μπόρεσαν να αποκωδικοποιήσουν. 9 από τους 23 μαθητές δεν έδωσαν καμία νοερή απάντηση, ενώ 12 μαθητές απάντησαν σκεπτόμενοι νοερά σε τουλάχιστον 3 από τα 4 προβλήματα.

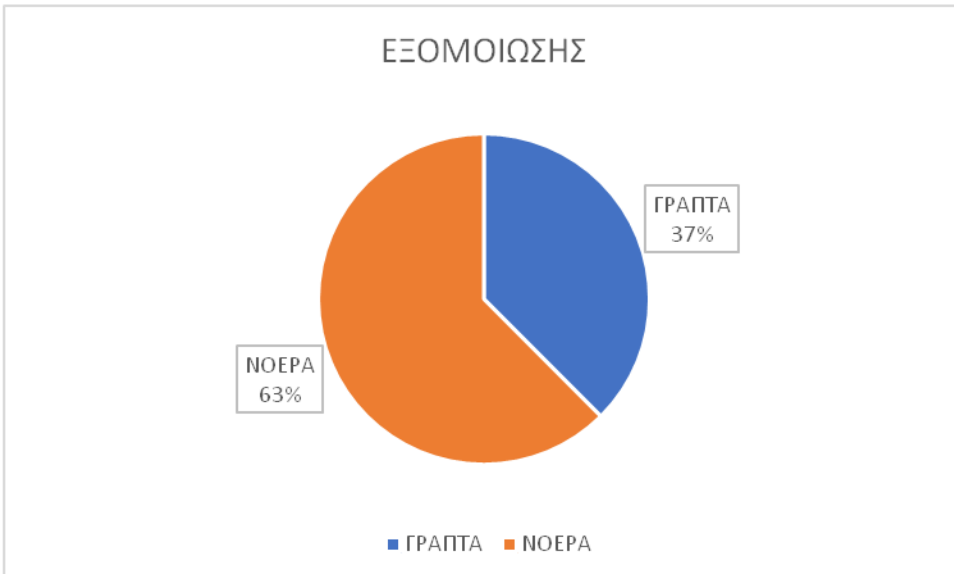
Γράφημα 7

Στα προβλήματα σύγκρισης, το 61% από τις απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν, είχαν υπολογιστεί νοερά. 10 από τους 23 μαθητές απάντησαν σε τουλάχιστον 3 από τα 4 προβλήματα, ενώ 8 μαθητές δεν έδωσαν νοερή απάντηση.



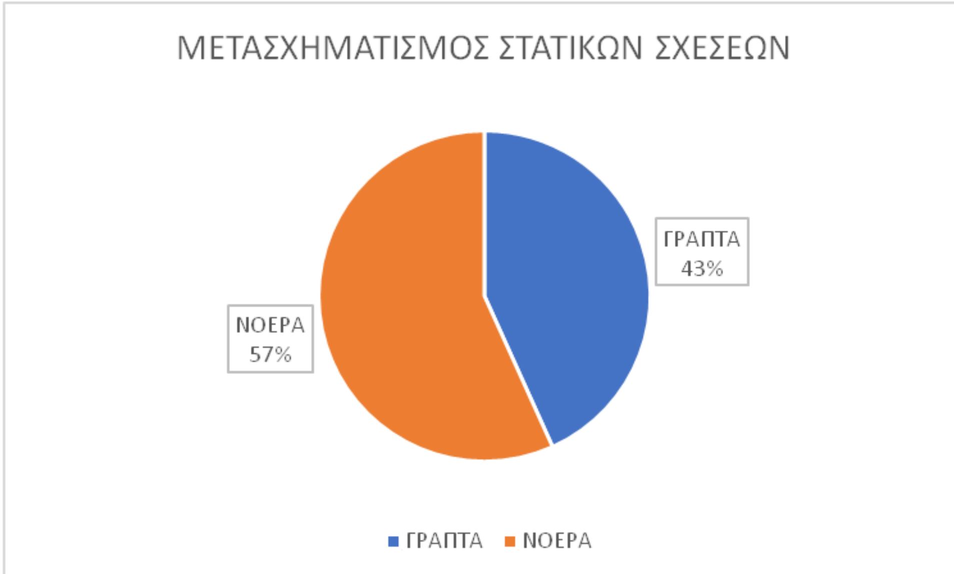
Γράφημα 8

Παρόμοια ήταν τα δεδομένα και στα προβλήματα εξομοίωσης, καθώς το 62% των απαντήσεων που συγκεντρώθηκαν, ήταν υπολογισμένες νοερά. 11 από τους μαθητές έλυσαν τα 3 από τα 4 προβλήματα νοερά, ενώ 8 από αυτούς δεν έδωσαν καμία νοερή απάντηση.



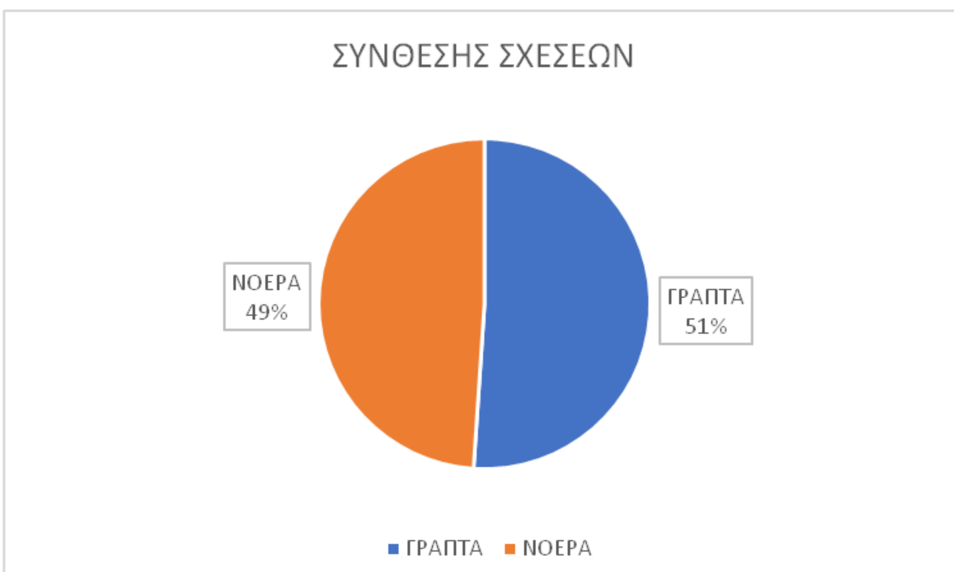
Γράφημα 9

Οι κατηγορίες που προτείνει ο Vergnaud (1982), δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές. Στα προβλήματα μετασχηματισμού δύο στατικών σχέσεων, οι νοερές απαντήσεις μειώθηκαν, αποτελώντας το 57% των συνολικών απαντήσεων. Μόλις 7 μαθητές έδωσαν δύο νοερές απαντήσεις στα 2 προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν.



Γράφημα 10

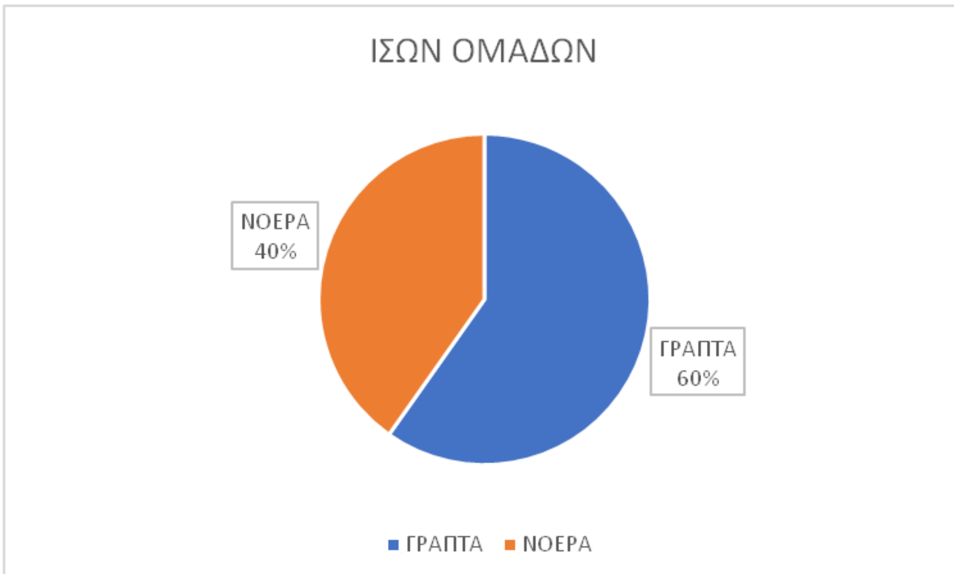
Στα προβλήματα σύνθεσης σχέσεων, οι γραπτές απαντήσεις ήταν περισσότερες από τις νοερές (51% έναντι 49%), και δεν εντοπίστηκε κανένας μαθητής με νοερή απάντηση για όλα τα προβλήματα που τους δόθηκαν. Μόλις 4 μαθητές έδωσαν νοερές απαντήσεις για 3 από τα 4 προβλήματα σύνθεσης σχέσεων και 11 μαθητές δεν απέδωσαν καμία απάντηση με νοερό υπολογισμό.



Γράφημα 11

Προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών

Στα προβλήματα ίσων ομάδων, οι περισσότεροι μαθητές προτίμησαν να επιλύσουν γραπτά τα προβλήματα που μπόρεσαν να αποκωδικοποιήσουν. Οι νοερές απαντήσεις αποτέλεσαν το 40% των συνολικών απαντήσεων που παρήγαγαν οι μαθητές. 6 μαθητές απάντησαν νοερά στα περισσότερα προβλήματα (τουλάχιστον 5 από τα 6), και 11 μαθητές δεν παρήγαγαν καμία νοερή απάντηση.



Γράφημα 12

Όσον αφορά τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, οι μαθητές απάντησαν νοερά στο 40% των προβλημάτων που μπόρεσαν να αποκωδικοποιήσουν, όπως και στα παραπάνω προβλήματα ίσων ομάδων. Από τα συνολικά 4 προβλήματα, μόλις 7 μαθητές έδωσαν από 3 έως 4 νοερές απαντήσεις, και 3 μαθητές από 1 έως 2. Οι υπόλοιποι 12 μαθητές δεν έδωσαν καμία νοερή απάντηση.

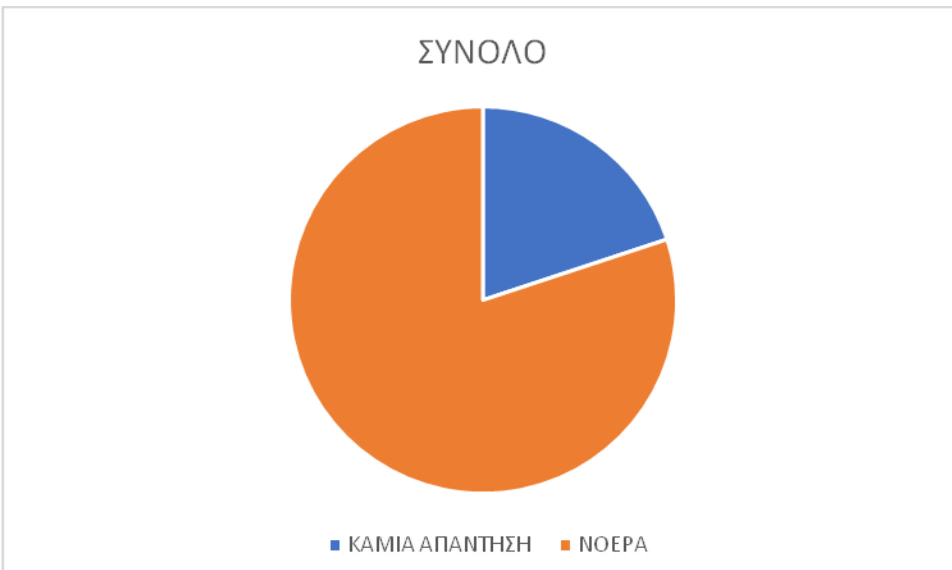
Γράφημα 13

Τα προβλήματα ορθογώνιας διάταξης προτιμήθηκαν ακόμα λιγότερο από τους μαθητές για την επίλυση με νοερό υπολογισμό. Μόλις το 36% των συνολικών απαντήσεων ήταν νοερές. 6 μαθητές απάντησαν νοερά στα περισσότερα προβλήματα (τουλάχιστον 3 από τα συνολικά 4), ενώ 13 μαθητές δεν παρήγαγαν καμία νοερή απάντηση.

Γράφημα 14

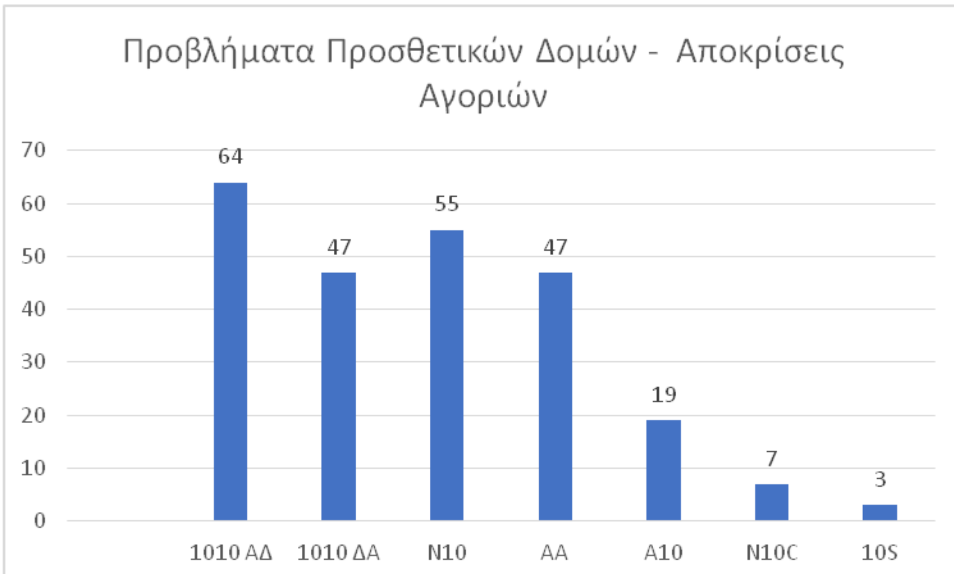
Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: Στρατηγικές τις οποίες τείνουν να χρησιμοποιούν μαθητές Γ΄ Δημοτικού για να επιλύουν γραπτά προβλήματα με νοερό τρόπο, ανάλογα με την κατηγορία των προβλημάτων.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές Γ΄ τάξης Δημοτικού για να επιλύουν γραπτά προβλήματα ανάλογα με τους τύπους των προβλημάτων, πραγματοποιήθηκε κωδικοποίηση και συγκέντρωση των ευρημάτων, ομοίως με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Τα ίδια 38 γραπτά προβλήματα δόθηκαν στους 21 μαθητές της Γ΄ τάξης του Σχολείου Β, με την οδηγία να τα επιλύσουν μόνο με νοερούς υπολογισμούς. Συνολικά οι αποκρίσεις που συγκεντρώθηκαν απαριθμούν σε 798. Στις 159 από αυτές, οι μαθητές δεν μπόρεσαν να αποκωδικοποιήσουν το πρόβλημα και δεν παρήγαγαν καμία απάντηση (20%). Οι υπόλοιπες 639 αποκρίσεις ήταν στο σύνολό τους υπολογισμένες νοερά (80%).



Γράφημα 15

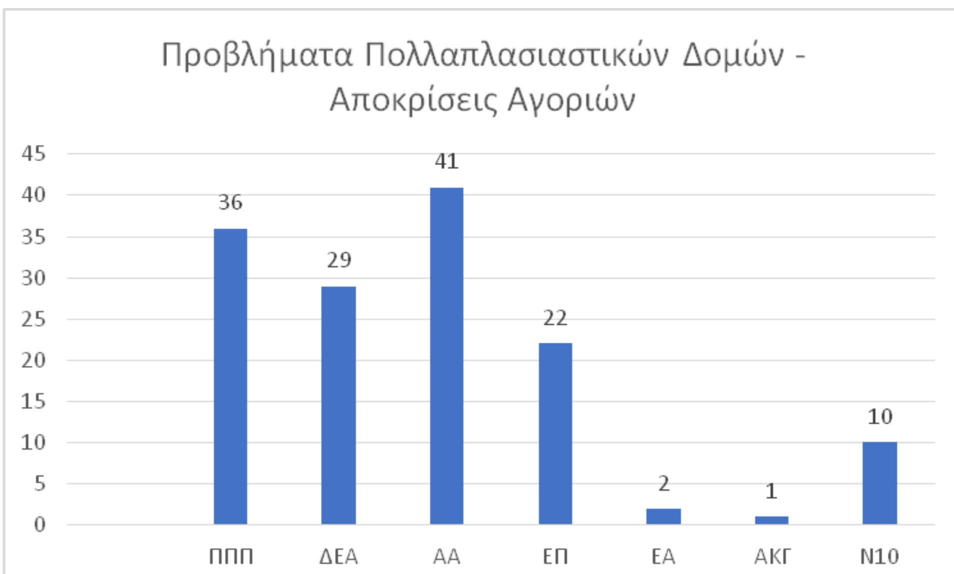
Σχετικά με το φύλο στα προβλήματα προσθετικών δομών, τα αγόρια δεν έδωσαν απάντηση σε 46 από τα 288 προβλήματα (16%). Από τα 242 προβλήματα που απαντήθηκαν, στα 64 χρησιμοποιήθηκε η στρατηγική του διαχωρισμού από αριστερά προς τα δεξιά (26,5%), στα 47 διαχωρισμός από δεξιά προς τα αριστερά (19,5%), στα 55 η στρατηγική της συσσώρευσης (23%), στα 47 η άμεση ανάκληση (19%), σε 19 το «πέρασμα από το δέκα» (8%), σε 7 η αντιστάθμιση (3%), και σε 3 η μέθοδος διαχωρισμού-άλματος (1%). Τα κορίτσια δεν έδωσαν απάντηση σε 59 από τα 216 προβλήματα (27%). Από τα 157 προβλήματα που απαντήθηκαν, στα 32 χρησιμοποίησαν την στρατηγική του διαχωρισμού από αριστερά προς τα δεξιά (20%), στα 20 διαχωρισμό από δεξιά προς τα αριστερά (13%), στα 78 την στρατηγική της συσσώρευσης (50%), στα 22 άμεση ανάκληση (14%), σε 3 την αντιστάθμιση (2%), και από 1 φορά το «πέρασμα από το δέκα» (0,5%) και η στρατηγική του διαχωρισμού-άλματος (0,5%).



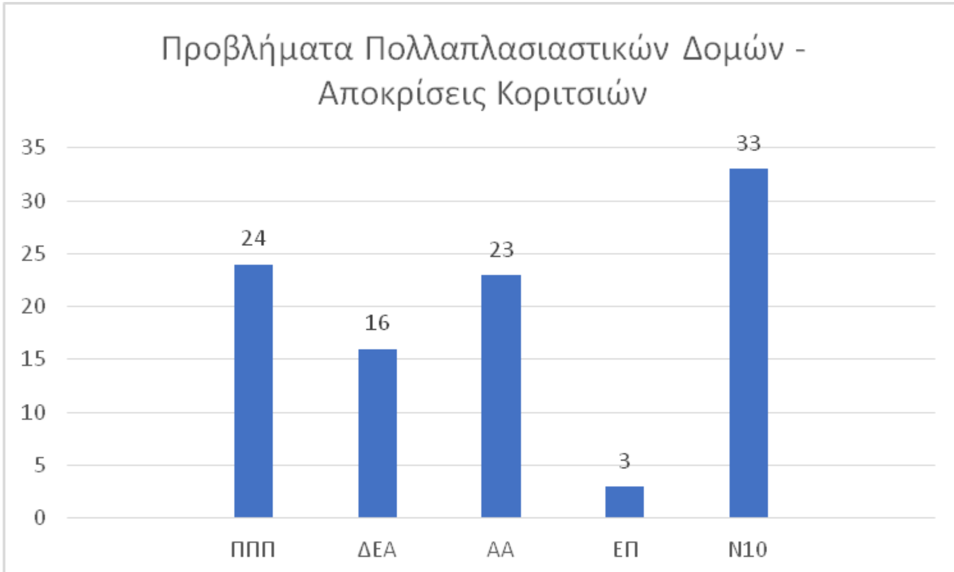
Γράφημα 16

Γράφημα 17

Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, τα αγόρια δεν έδωσαν απάντηση σε 27 από τα 168 προβλήματα (16%). Από τα 141 προβλήματα που απαντήθηκαν, στα 36 χρησιμοποίησαν την στρατηγική παραγωγής πολλαπλασιασμού από άλλη πράξη (25,5%), στα 29 τη διάσπαση του ενός αριθμού (20,5%), σε 41 την άμεση ανάκληση (29%), σε 22 την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (15,5%), σε 2 την επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (1,5%), και σε 1 περίπτωση την στρατηγική της ανάκλησης κοντινού γινομένου (1%). Σε 10 περιπτώσεις, τα αγόρια αναγνώρισαν τα προβλήματα ως προσθετικών δομών, και χρησιμοποίησαν την στρατηγική της συσσώρευσης (7%). Τα κορίτσια δεν παρήγαγαν απάντηση σε 27 από τα 126 προβλήματα (21,5%). Από τις 99 απαντήσεις που έδωσαν, στις 24 χρησιμοποίησαν παραγωγή πολλαπλασιασμού από άλλη πράξη, στις 16 τη διάσπαση του ενός αριθμού, σε 23 την άμεση ανάκληση, και σε 3 την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Σε 33 προβλήματα, τα κορίτσια αναγνώρισαν τα προβλήματα ως προσθετικών δομών και χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της συσσώρευσης.



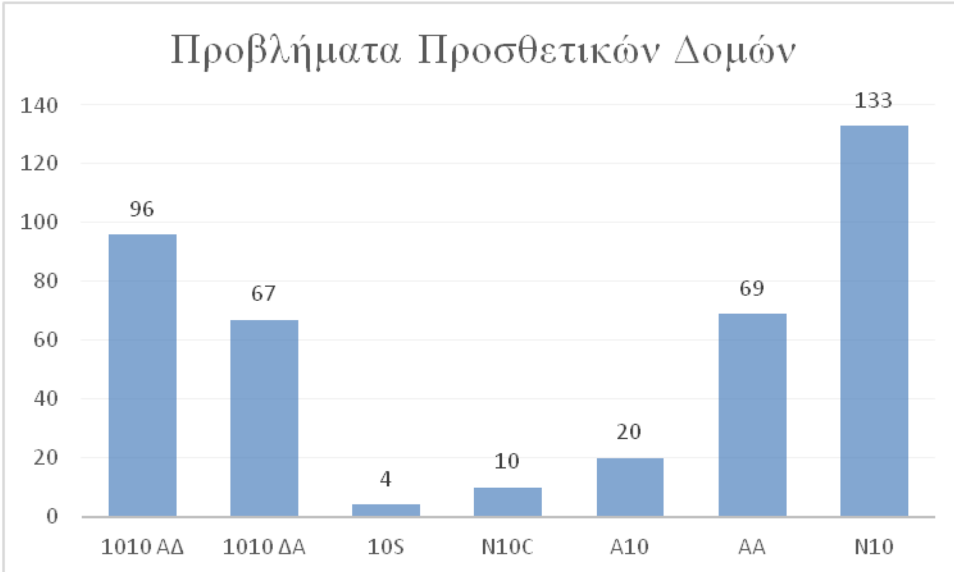
Γράφημα 18



Γράφημα 19

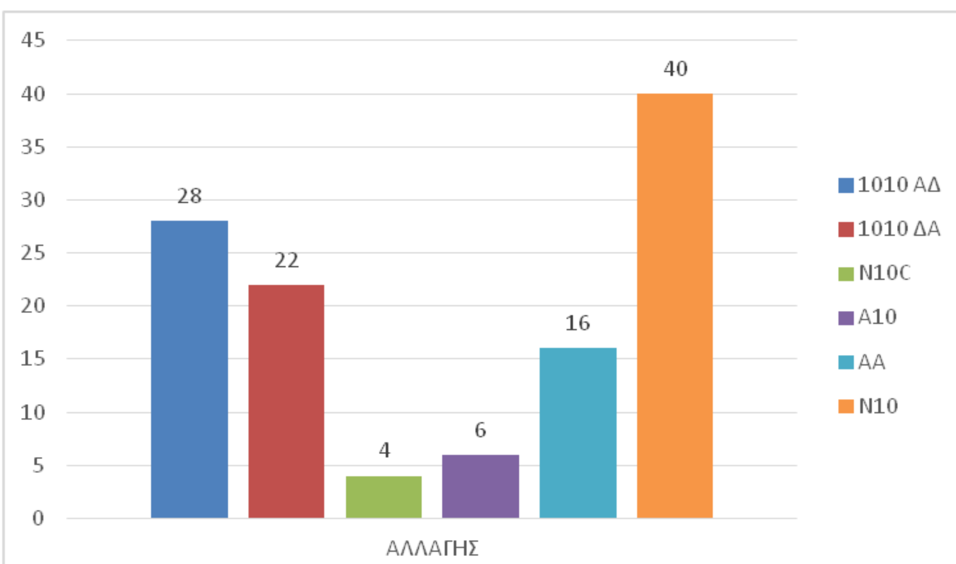
Προβλήματα προσθετικών δομών

Στα προβλήματα προσθετικών δομών, όπως φαίνεται στο γράφημα 20, χρησιμοποιήθηκε περισσότερο η μέθοδος διαχωρισμού. Από τις συνολικά 399 απαντήσεις, οι 96 ήταν υπολογισμένες με διαχωρισμό των δύο παραγόντων από αριστερά προς τα δεξιά (24%), και οι 67 από δεξιά προς τα αριστερά (17%). Μεγάλη συχνότητα χρήσης παρουσίασε και η μέθοδος συσσώρευσης, η οποία χρησιμοποιήθηκε στο 33% των προβλημάτων. Με λιγότερη συχνότητα χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές άμεσης ανάκλησης γνωστού αριθμητικού γεγονότος (17%), περάσματος από το δέκα (5%), αντιστάθμισης (3%), και διαχωρισμού-άλματος (1%). Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με την έρευνα της Lucangeli και των συνεργατών της (2003), οι οποίοι δεν εντόπισαν από κανένα μαθητή τη χρήση της στρατηγικής της άμεσης ανάκλησης, και παρατήρησαν, συνεπώς, περισσότερο συχνή χρήση της στρατηγικής του διαχωρισμού (52%) και της στρατηγικής της συσσώρευσης (45%). Η συχνότητα παρουσίασης της στρατηγικής της αντιστάθμισης, συμφωνεί με την παρούσα εργασία (3%).



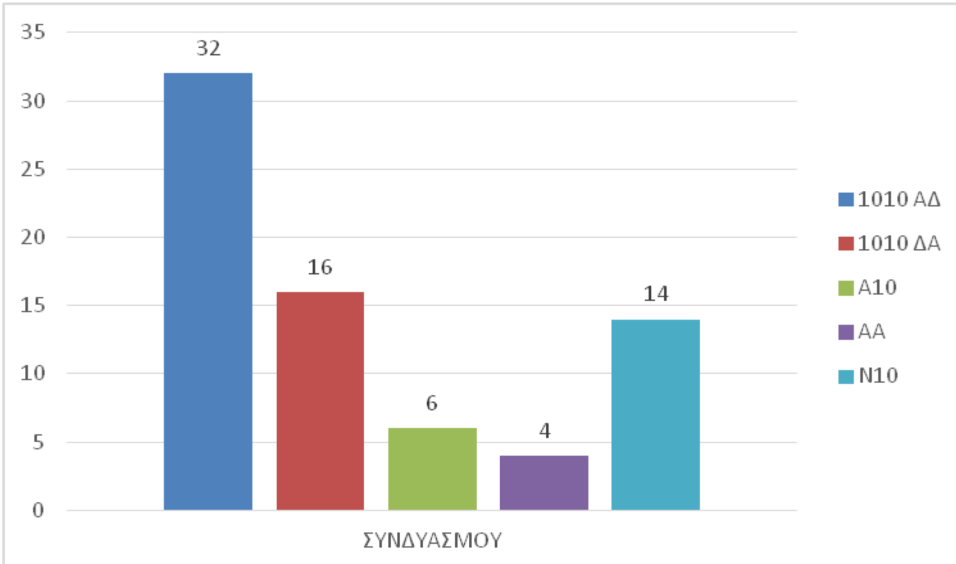
Γράφημα 20

Όσον αφορά τα προβλήματα αλλαγής, το 43% των υπολογισμών έγιναν με τη μέθοδο του διαχωρισμού, το 34% με τη μέθοδο συσσώρευσης, το 14% με τη μέθοδο της άμεσης ανάκλησης, το 5% με το πέρασμα από το δέκα, και το 3% με την στρατηγική της αντιστάθμισης.



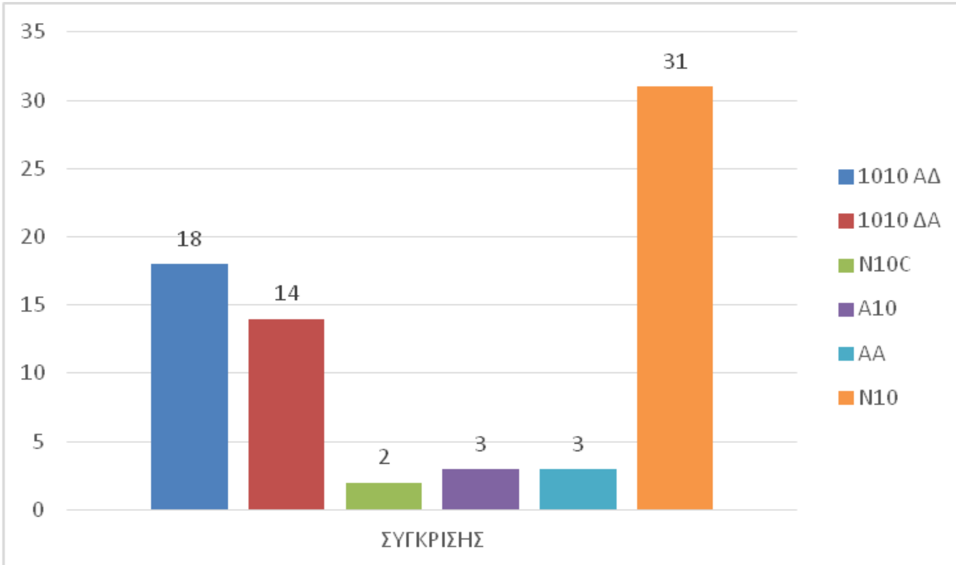
Γράφημα 21

Στα προβλήματα συνδυασμού, το 67% των υπολογισμών έγιναν με τη μέθοδο του διαχωρισμού, το 19% με τη μέθοδο της συσσώρευσης, το 8% με το πέρασμα από το δέκα, και το 6% με άμεση ανάκληση.



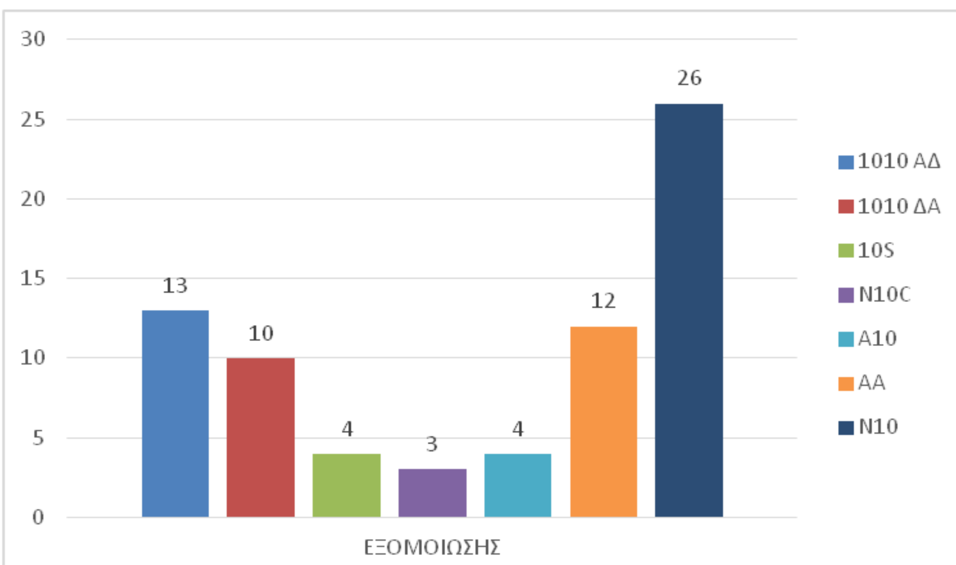
Γράφημα 22

Στα προβλήματα σύγκρισης, η μέθοδος διαχωρισμού παρατηρήθηκε στο 45% των απαντήσεων, η μέθοδος συσσώρευσης στο 44%, η άμεση ανάκληση και το πέρασμα από το δέκα στο 4%, και η μέθοδος της αντιστάθμισης στο 3%.



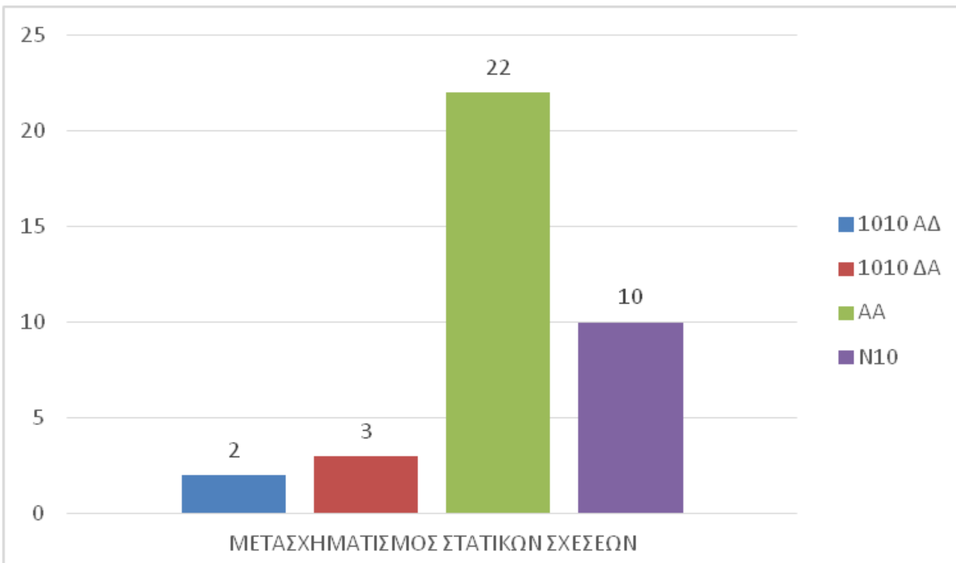
Γράφημα 23

Στα προβλήματα εξομοίωσης, χρησιμοποιήθηκε περισσότερο η στρατηγική της συσσώρευσης, η οποία εμφανίστηκε στο 36% των απαντήσεων, και ακολούθησαν η στρατηγική του διαχωρισμού με 32%, η άμεση ανάκληση με 17%, το πέρασμα από το δέκα με 5,5% και η στρατηγική της αντιστάθμισης με 4%. Στη συγκεκριμένη κατηγορία, εμφανίζεται η μέθοδος διαχωρισμού-άλματος με συχνότητα 5,5%.



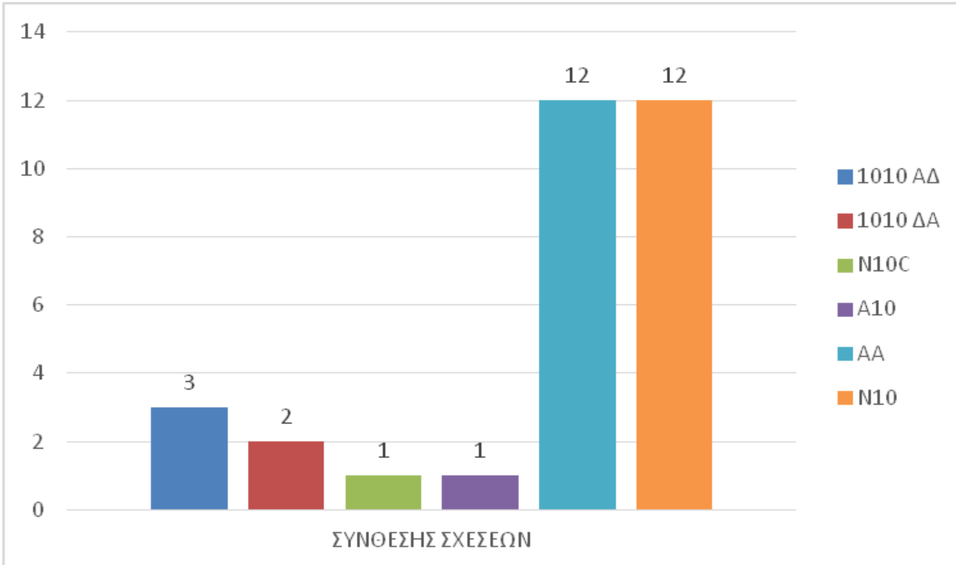
Γράφημα 24

Στα προβλήματα μετασχηματισμού στατικών σχέσεων, χρησιμοποιήθηκε περισσότερο η στρατηγική της άμεσης ανάκλησης (59%), η οποία εκτόπισε άλλες στρατηγικές που δεν παρουσιάζονταν συχνά σε άλλους τύπους προβλημάτων. Στα 2 προβλήματα μετασχηματισμού στατικών σχέσεων, χρησιμοποιήθηκαν και η στρατηγική του διαχωρισμού (14%), και η στρατηγική της συσσώρευσης (27%).



Γράφημα 25

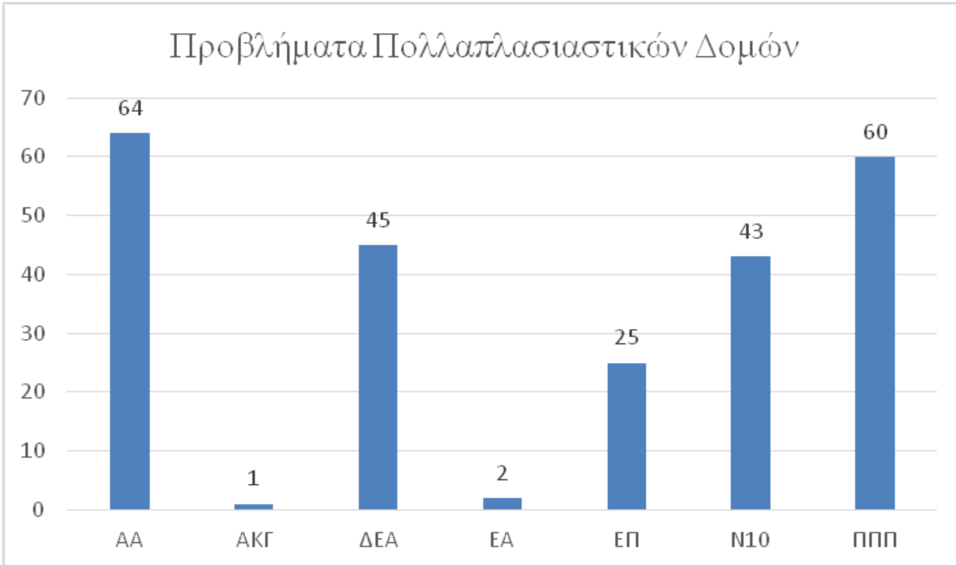
Στα προβλήματα σύνθεσης σχέσεων, οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν με την περισσότερη συχνότητα ήταν η μέθοδος της συσσώρευσης και η άμεση ανάκληση, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές στο 39% των υπολογισμών τους. Οι υπόλοιπες μέθοδοι δεν προτιμήθηκαν τόσο συχνά, με τη μέθοδο του διαχωρισμού να χρησιμοποιείται στο 16% των απαντήσεων και το πέρασμα από το δέκα και την αντιστάθμιση να απαντώνται στο 3%.



Γράφημα 26

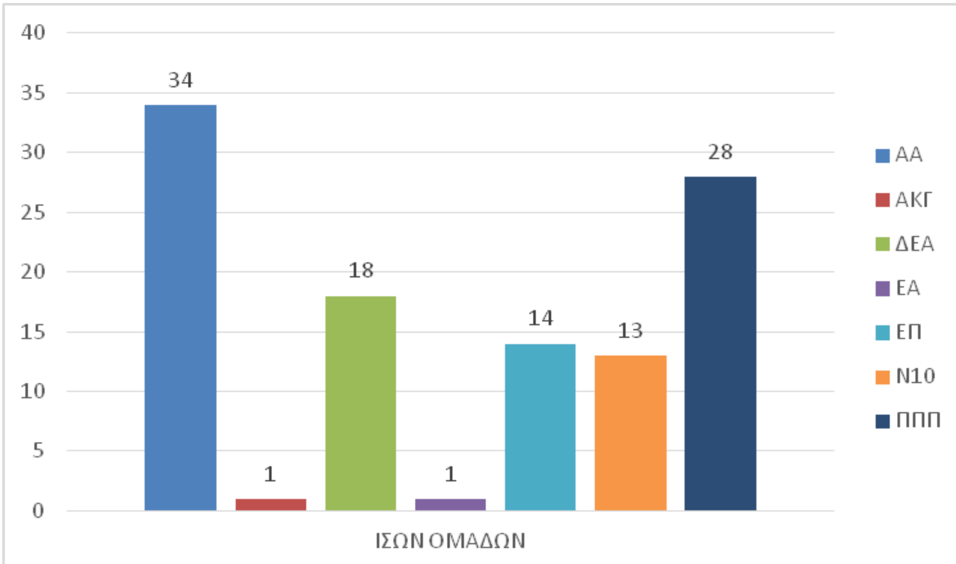
Προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών

Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, αξιοποιήθηκαν περισσότερο οι μέθοδοι της άμεσης ανάκλησης γνωστού αριθμητικού γεγονότος και η παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού από άλλη πράξη (27% και 25% αντίστοιχα). Ακολούθησαν η διάσπαση του ενός αριθμού με ποσοστό 19% και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση με ποσοστό 10%. Η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση και η ανάκληση κοντινού γινόμενου αξιοποιήθηκαν μόλις 2 φορές και 1 φορά αντίστοιχα. Αξιοσημείωτο είναι πως οι μαθητές, για να επιλύσουν προβλήματα, τα οποία ερμήνευσαν ως προσθετικές δομές, χρησιμοποίησαν αποκλειστικά την στρατηγική της συσσώρευσης (18% των συνολικών απαντήσεων). Τα αποτελέσματα αυτά απέχουν πολύ από εκείνα που περιγράφουν η Lucangeli και οι συνεργάτες της στη δική τους έρευνα (2003), οι οποίοι παρατηρούν ότι οι επικρατέστερες στρατηγικές είναι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (47%) και η διάσπαση του ενός αριθμού (45%), και με πολύ μικρότερη συχνότητα παρατηρούν την άμεση ανάκληση (3%) και την παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού από διαφορετική πράξη (5%).



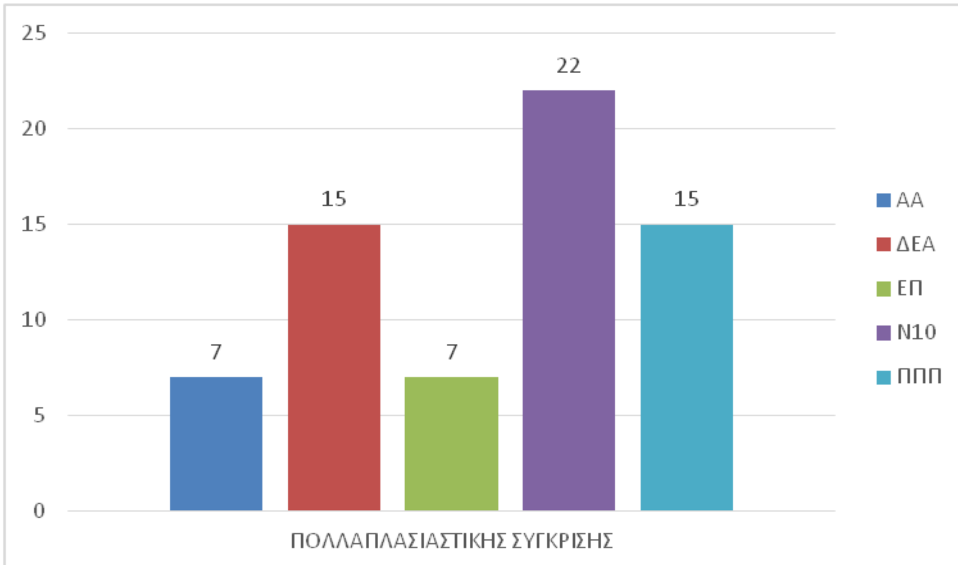
Γράφημα 27

Όσον αφορά τα προβλήματα ίσων ομάδων, περισσότερο χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές της άμεσης ανάκλησης (31%) και της παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού (26%). Με λιγότερη συχνότητα εμφανίστηκαν οι μέθοδοι της διάσπασης του ενός αριθμού (17%) και της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (13%), ενώ η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση και η ανάκληση κοντινού γινόμενου εφαρμόστηκαν από μία φορά. Η στρατηγική της συσσώρευσης εμφανίστηκε στο 12% των νοερών υπολογισμών.



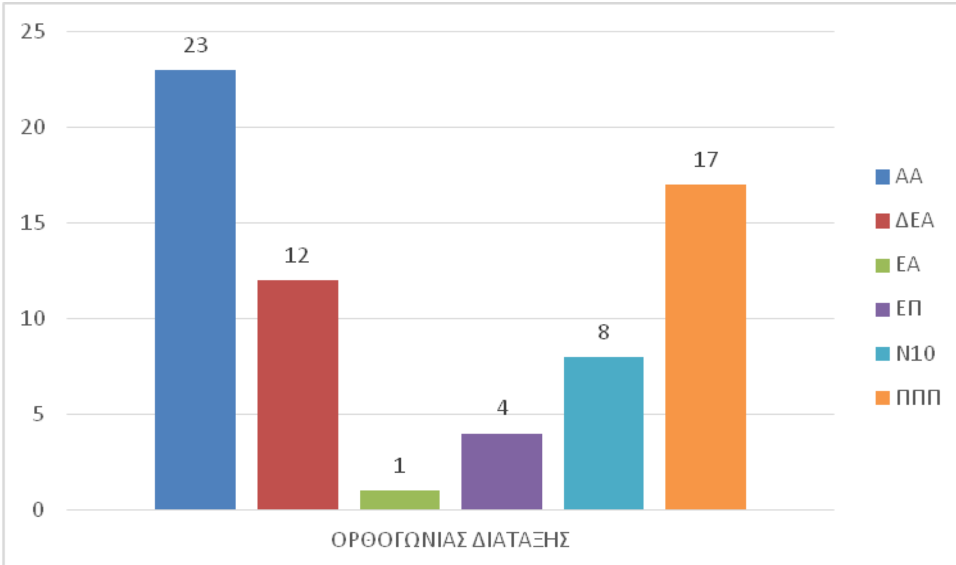
Γράφημα 28

Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο η διάσπαση του ενός αριθμού (23%) και η παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού (23%) και ακολούθησαν η άμεση ανάκληση (11%) και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (11%). Αρκετοί μαθητές και στα προβλήματα αυτά, αξιοποίησαν μεθόδους προσθετικών δομών και ακολούθησαν την στρατηγική της συσσώρευσης (33%).



Γράφημα 29

Στα προβλήματα ορθογώνιας διάταξης, αξιοποιήθηκε περισσότερο η στρατηγική της άμεσης ανάκλησης (35%) και η μέθοδος της παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού (26%). Η διάσπαση του ενός αριθμού (18%), η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (6%) και η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (2%) χρησιμοποιήθηκαν λιγότερο. Η στρατηγική της συσσώρευσης παρατηρήθηκε στο 12% των αποτελεσμάτων.



Γράφημα 30

Τρίτο ερευνητικό ερώτημα: Ο ρόλος των εκπαιδευτικών σχετικά με την παρακίνηση των μαθητών για την ενασχόληση με τους κατ' εκτίμηση και νοερούς υπολογισμούς.

Η εκπαιδευτικός της Σχολείου Α, όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων, φάνηκε να εστιάζει τη διδασκαλία της στην ανάλυση των γραπτών μαθηματικών προβλημάτων, και συγκεκριμένα στον εντοπισμό και διαχωρισμό των δεδομένων στοιχείων και των ζητούμενων αγνώστων. Ενθαρρύνει την εκτίμηση σε περιπτώσεις που οι μαθητές της δυσκολεύονται να παράγουν αποτελέσματα σε πράξεις που τους έχουν δοθεί, και δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικασία, με στόχο να βελτιώνεται η ακρίβεια των μαθητών της σε εργασίες μαθηματικού περιεχομένου. Εμβαθύνει στις νοερές απαντήσεις των μαθητών της, είτε αυτές είναι γραπτές, είτε είναι προφορικές και παρατηρεί τον τρόπο που έχουν φτάσει στην απάντηση που έχουν δώσει. Ζητάει από τους μαθητές της να λύνουν υπολογισμούς με το μυαλό, τους οποίους περιορίζει στις προσθετικές δομές διψήφιων αριθμών.

Κατά το πρώτο στάδιο της έρευνας, ορισμένα παιδιά επέλεξαν να προσπαθήσουν να λύσουν όλα τα γραπτά προβλήματα που τους δόθηκαν, στηριζόμενοι σε γραπτές διαδικασίες. Η εκπαιδευτικός χαρακτηρίζει τους συγκεκριμένους μαθητές ως «επιμελείς» και αποδίδει αυτή τη συμπεριφορά σε ένα αίσθημα ασφάλειας που τους εξασφαλίζει η γραπτή επίλυση προβλημάτων. Το φαινόμενο αυτό δικαιολογείται από το «διδακτικό συμβόλαιο» που περιγράφει ο Brousseau

(1984), καθώς οι γραπτές απαντήσεις θεωρούνται πιο «επίσημες» και αυτό μεταφέρεται στην επιλογή των μαθητών να επιλύουν τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα με γραπτό τρόπο.

Η εκπαιδευτικός της Γ΄ τάξης Σχολείου Β, φάνηκε να προωθεί τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της για την εξαγωγή συμπερασμάτων και την παραγωγή αποτελεσμάτων σε γραπτά μαθηματικά προβλήματα. Ταυτόχρονα, η μέθοδός της στη διδακτική των μαθηματικών ενθαρρύνει την ανακάλυψη και αξιοποίηση ποικίλων εναλλακτικών τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων, δίνοντας έμφαση στην ακρίβεια της λύσης που παράγουν οι μαθητές. Στις περιπτώσεις που οι μαθητές της δυσκολεύονται να παράγουν αποτελέσματα σε πράξεις που τους έχουν δοθεί, καταφεύγει στην εκτίμηση μέσω στρογγυλοποίησης των αριθμών.

Ορισμένες φορές, οι μαθητές για να οδηγηθούν στις απαντήσεις που παρατηρήθηκαν στο πλαίσιο της έρευνας, αξιοποίησαν την τεχνική της εκτίμησης. Με άλλα λόγια, πραγματοποίησαν υπολογισμούς νοερά, όμως με μεγαλύτερη ταχύτητα και λιγότερη ακρίβεια (Reys, 1984). Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, φάνηκε ότι κάποιοι από τους μαθητές (33%) υπολόγισαν κατ' εκτίμηση το αποτέλεσμα που είχαν καταγράψει, σε τουλάχιστον ένα από τα προβλήματα. Αυτό έγινε, ενδεχομένως επειδή βιάζονταν να ολοκληρώσουν τη διαδικασία συμπλήρωσης των δοκιμίων.

Η εκπαιδευτικός της Γ΄ τάξης του Σχολείου Β, αναζητά τον τρόπο σκέψης των μαθητών της, όταν εκείνοι παράγουν νοερές απαντήσεις σε γραπτές ασκήσεις μαθηματικού περιεχομένου. Όσον αφορά προφορικές απαντήσεις, αρκείται στο αποτέλεσμα που δίνουν οι μαθητές της. Συνεπώς, αφήνει ελεύθερους τους μαθητές της να απαντούν νοερά σε μαθηματικές ασκήσεις, όμως στις γραπτές δραστηριότητες ελέγχει αν οι μαθητές της έχουν όντως φτάσεις με τις δικές τους ικανότητες στα αποτελέσματα που καταγράφουν. Για την ανάθεση νοερών υπολογισμών σε εκείνους τους μαθητές που προτιμούν να καταγράφουν από την αρχή μέχρι και το τέλος την ακολουθία των σκέψεών τους, αρκείται στο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο προτείνει δραστηριότητες τέτοιου είδους.

Συνολική επίδοση των μαθητών

Όσον αφορά την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά προβλήματα που τους δόθηκαν, από τα συνολικά 38 προβλήματα, το δείγμα στο σύνολό του είχε μέσο όρο σωστών απαντήσεων 24,86 (65%). Τα αγόρια παρουσίασαν ελαφρώς καλύτερη επίδοση από τα κορίτσια, καθώς κατά μέσο όρο έλυσαν επιτυχώς 25,5 προβλήματα (67,1%), ενώ τα κορίτσια 24,1 προβλήματα (63,4%), αν και η διαφορά είναι πολύ μικρή για να πούμε ότι παρατηρείται σημαντική απόκλιση. Το ίδιο παρατηρούν και η Lindberg με τους συνεργάτες της (2010), καθώς και η Hyde με τους συνεργάτες της (2008), δηλαδή ότι παιδιά στη βαθμίδα της δημοτικής εκπαίδευσης δεν παρουσιάζουν διαφορές στην επίδοση της επίλυσης προβλημάτων που να συνδέεται με το φύλο.

Στο πρώτο στάδιο της ερευνητικής διαδικασίας, το οποίο πραγματοποιήθηκε στο Σχολείο Α, οι γραπτές και νοερές απαντήσεις που παρήγαγαν οι μαθητές ήταν ισορροπημένες στον αριθμό τους. Όσον αφορά τα προβλήματα προσθετικών δομών, οι μαθητές προτίμησαν να απαντήσουν σκεπτόμενοι νοερά στις περισσότερες κατηγορίες προβλημάτων, εκτός από την κατηγορία προβλημάτων «σύνθεσης σχέσεων», στην οποία οι μισές απαντήσεις ήταν γραπτές. Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, οι συμμετέχοντες παρήγαγαν περισσότερες γραπτές απαντήσεις από νοερές. Ενδέχεται τα συγκεκριμένα αποτελέσματα να υποδεικνύουν μια αναλογική σχέση ανάμεσα στην οικειότητα των μαθητών με μια ορισμένη κατηγορία προβλημάτων και στην επιλογή τους να επιλύουν νοερά τα εν λόγω προβλήματα (Ruiz & Balbi, 2019· Carr et al, 2011). Παράλληλα, ενδέχεται να επηρεάζεται αυτή η επιλογή, πέρα από τη δυνατότητα των μαθητών να αποκωδικοποιούν γραπτά προβλήματα που ανήκουν σε μια κατηγορία, και από τη φύση των αριθμών που περιλαμβάνονται στα προβλήματα αυτά. Τέλος, το γεγονός ότι μερικοί μαθητές επέλεξαν να επιλύσουν γραπτά όλα τα προβλήματα, πιθανώς να καταδεικνύει μια τάση προσκόλλησης στις γραπτές διαδικασίες, η οποία εμπνέει ένα αίσθημα ασφάλειας απέναντι σε ενδεχόμενες λανθασμένες απαντήσεις (McIntosh, Bana, & Farrell, 1995).

Σχετικά με το φύλο, στα προβλήματα προσθετικών δομών τα αγόρια προτίμησαν με ελαφρώς μεγαλύτερη συχνότητα να επιλύουν τα προβλήματα συγκριτικά με τα κορίτσια (68% έναντι 53%). Το αντίθετο παρατηρήθηκε στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, στα οποία τα κορίτσια προτίμησαν να επιλύουν πιο συχνά νοερά τα προβλήματα (42% έναντι 37% των αγοριών).Τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν με εκείνα των McIntosh, Bana, & Farrell, (1995), οι οποίοι παρατήρησαν πως τα αγόρια στις προσθαφαιρέσεις προτιμούν να επιλύουν νοερά περισσότερο συχνά από τα κορίτσια, και στους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις συμβαίνει το αντίστροφο.

Στο δεύτερο στάδιο της έρευνας, το οποίο πραγματοποιήθηκε στο Σχολείο Β, οι μαθητές αξιοποίησαν ποικίλες νοερές στρατηγικές για να καταλήξουν στις απαντήσεις των προβλημάτων. Οι συμμετέχοντες αξιοποίησαν στις περισσότερες περιπτώσεις τις στρατηγικές του διαχωρισμού και της συσσώρευσης, εκτός από την κατηγορία προβλημάτων «μετασχηματισμού στατικών σχέσεων», στην οποία χρησιμοποιήθηκε ως επί το πλείστον η «άμεση ανάκληση». Αυτή η συμπεριφορά ενδέχεται να υποδεικνύει πως η επιλογή των νοερών στρατηγικών δεν εξαρτάται από τον τύπο των προβλημάτων, αλλά καθαρά από τη φύση των αριθμών που εμπλέκονται σε αυτά. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι τα δύο προβλήματα περιλάμβαναν τις πράξεις 22 - 11, την οποία οι περισσότεροι μαθητές ανακάλεσαν ως «το διπλό του 11, επειδή 11 + 11 = 22», και 13+7, στην οποία το 3+7 είναι «ζευγαράκι του 10» και οι μαθητές μεταφέρουν αυτή τη γνώση και στο 20, ιδιότητες που επιβεβαιώνονται και από τον Van de Walle (2005).

Η ίδια τάση συνεχίστηκε και στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών, στα οποία δεν αναδείχτηκε προτίμηση σε κάποια κατηγορία έναντι των υπόλοιπων. Αξιοσημείωτη παρατήρηση συνιστά η επιλογή της στρατηγικής σε περιπτώσεις που οι συμμετέχοντες αποκωδικοποίησαν λανθασμένα τα προβλήματα και τα ενέταξαν στις προσθετικές δομές. Στο σύνολο των συγκεκριμένων περιπτώσεων, οι μαθητές αξιοποίησαν τη στρατηγική της συσσώρευσης. Αυτή η συμπεριφορά ενδέχεται να παραπέμπει σε μια αναλογική σχέση ανάμεσα στην τάση των μαθητών που παρουσιάζουν αδυναμία στην αποκωδικοποίηση προβλημάτων πολλαπλασιαστικών δομών, και τη συχνότητα αξιοποίησης της μεθόδου της συσσώρευσης.

Σχετικά με το φύλο, στα προβλήματα προσθετικών δομών, τα αγόρια προτίμησαν περισσότερο την στρατηγική του διαχωρισμού (46%) και λιγότερο συχνά τις άλλες στρατηγικές από τις οποίες χρησιμοποίησαν περισσότερο την στρατηγική της συσσώρευσης (23%) και την άμεση ανάκληση (19%). Παρατηρήθηκε μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις στρατηγικές που επέλεξαν τα κορίτσια, τα οποία έδειξαν μεγαλύτερη προτίμηση για την στρατηγική της συσσώρευσης (50%) και μικρότερη για τις υπόλοιπες (στρατηγική διαχωρισμού: 33%, άμεση ανάκληση: 14%). Στα προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών δεν παρατηρήθηκε σημαντική διαφορά στην επιλογή στρατηγικών ανάμεσα σε αγόρια και κορίτσια. Όμως, παρατηρήθηκε πως τα κορίτσια αναγνώρισαν συχνότερα τη συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων ως προσθετικών δομών και εφάρμοσαν την στρατηγική της συσσώρευσης (33% έναντι 7% των αγοριών).

Κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα

Τέλος, αναφορικά με μελλοντικές προοπτικές επέκτασης της παρούσας εργασίας, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε μια καθαρά ποσοτική έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα πληθυσμού, για το αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στις στρατηγικές που αξιοποιούνται για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών, ανάλογα με τις κατηγορίες γραπτών προβλημάτων, στα οποία εντάσσονται, ή αν αυτά εξαρτώνται αποκλειστικά από τη φύση των παραγόντων. Μια άλλη προοπτική θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση της προσκόλλησης μαθητών σε γραπτούς υπολογισμούς και αν παρουσιάζει κάποια σχέση με τη σχολική επίδοση. Μια τρίτη προοπτική που θα είχε ενδιαφέρον, είναι η διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη συχνότητα αξιοποίησης της μεθόδου της συσσώρευσης και στην αδυναμία αποκωδικοποίησης προβλημάτων πολλαπλασιαστικών δομών.

Θεωρώντας σημαντικό το ρόλο των νοερών υπολογισμών στη βελτίωση των μαθηματικών ικανοτήτων, θα παρουσίαζε ενδιαφέρον μιας μεγαλύτερης έκτασης έρευνα, καθώς όπως φάνηκε από την παρούσα έρευνα και αποτυπώνεται στη διεθνή βιβλιογραφία, η χρήση των νοερών υπολογισμών συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας όπως είναι η υπολογιστική ευχέρεια σε προβλήματα πράξεων (Ruiz & Balbi, 2019· Carr et al, 2011) θα είναι σημαντικό να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στα προγράμματα σπουδών του δημοτικού σχολείου στην αξιοποίηση των νοερών υπολογισμών, δίνοντας περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές να αξιοποιήσουν και την εκτός σχολείου γνώση τους, και να ενθαρρυνθούν σε διαδικασίες εξερεύνησης.

4ο Κεφάλαιο: Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή εστίασε στη διερεύνηση της χρήση νοερών υπολογισμών κατά την επίλυση γραπτών λεκτικών προβλημάτων και το είδος των στρατηγικών που επιλέγονται από τους μαθητές ανάλογα με τη φύση των προβλημάτων προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής από μαθητές της Γ΄ Δημοτικού.

Η χρήση των νοερών υπολογισμών συνδέεται με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, που αποτελεί στόχο της εκπαίδευσης σήμερα. Ένας μαθητής που εκτελεί αποτελεσματικά τους νοερούς αλγόριθμους, έχει σχεδόν σίγουρα κατανοήσει τις ιδιότητες των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων (Sowder, 1990). Όπως παρατηρεί ο Λεμονίδης (2015), στη σύγχρονη εκπαίδευση, είναι πιο σημαντικό για τους μαθητές να κάνουν χρήσιμα μαθηματικά, μαθηματικά που να τα κατανοούν, παρά τα μαθηματικά που δεν καταλαβαίνουν και τα αντιμετωπίζουν μηχανιστικά. Οι μαθητές, κατά τη διάρκεια της έρευνας, έλυσαν τα προβλήματα που τους δόθηκαν, επιλέγοντας διαφορετικές μεθόδους, καθώς είχαν τον έλεγχο του υπολογισμού (Plunkett, 1979). Ταυτόχρονα, οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο, με το οποίο φάνηκε ότι μπορούν να ασχοληθούν μαθητές όλων των γνωστικών επιπέδων, επειδή μπορούν να κατακτηθούν από μαθητές που δεν έχουν υψηλές ικανότητες αλλά μπορούν να παρακινήσουν ακόμα και τους πιο ευφυείς (Reys, 1985).

Βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2013). *Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). *Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών* (No. IKEECONF-2017-384). Aristotle University of Thessaloniki.

Δεσλή, Δ., & Λιόλιου, Α. (2017). *Νοεροί και γραπτοί υπολογισμοί κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης* (No. IKEECONF-2018-363). Aristotle University of Thessaloniki.

Δ.Ε.Π.Π.Σ-ΑΠΣ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Ζαφειρόπουλος, Κ. (2005). *Πώς γίνεται μια επιστημονική εργασία; Επιστημονική έρευνα και συγγραφή εργασιών*. Αθήνα: Κριτική-.

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας: Εφαρμογές στην Ψυχολογία και στην Εκπαίδευση.* Athens: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

Καϊμάκη, Σ. (2017). *Μαθητές με διακρίσεις και επίλυση προβλήματος* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ., Λυγούρας, Γ., (2008). Η επίδοση και η ευελιξία των μαθητών της τρίτης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. *Ευκλείδης Γ΄, (68)*: 20-44.

Λυγούρας, Γ. (2012). *Η επίδραση κοινωνικών και ψυχολογικών παραγόντων στην ευελιξία μαθητών ΣΤ'τάξης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Σχολή Παιδαγωγική Φλώρινας. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Λύρη, Α. (2014). *Μαθηματική απόδειξη και επίλυση προβλήματος στο λύκειο* (Doctoral dissertation).

Μάγος, Κ. (2005). «Συνέντευξη ή παρατήρηση;»: Η έρευνα στη σχολική τάξη. *Επιθεώρηση εκπαιδευτικών θεμάτων, 10*: 5-19.

Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. (2011). *Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. Ανακτήθηκε 8 Απριλίου, 2019, από http://bit.ly/2nXXT5h

Mishler, E.G. (1996). *Συνέντευξη Έρευνας.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Ουσταμπασίδου, Σ. (2018). *Διερεύνηση στρατηγικών σε νοερούς υπολογισμούς από μαθηματικούς* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Adam, S., Ellis, L. C. & Beeson, B. F. (1997). *Teaching mathematics with emphasis on the diagnostic approach*. New York: Harper & Row.

Aliaga, M., & Gunderson, B. (2002). *Interactive statistics. Virginia*. America: Pearson Education.

Alibali, M. W., & DiRusso, A. A. (1999). The function of gesture in learning to count: More than keeping track. *Cognitive development, 14*(1): 37-56.

Alsawaie, O. N. (2012). Number sense-based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(5): 1071-1097.

Anderson, K. B. & Pingry, R. E. (1973). *Problem-solving in mathematics. The learning of mathematics: Its theory and practices.* Washington D. C.: The National Council of Teacher of mathematics.

Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. *Issues in teaching numeracy in primary schools*: 184-194.

Aronson, J., Fried, C. B., & Good, C. (2002). Reducing the effects of stereotype threat on African American college students by shaping theories of intelligence. *Journal of Experimental Social Psychology*, *38*(2): 113-125.

Ashcraft, M. H. (1995). Cognitive psychology and simple arithmetic: A review and summary of new directions. *Mathematical cognition*, *1*(1): 3-34.

Badets, A., Pesenti, M., & Olivier, E. (2010). Response–effect compatibility of finger–numeral configurations in arithmetical context. *Quarterly journal of experimental psychology*, *63*(1): 16-22.

Bahar, A., & Maker, C. (2015). Cognitive Backgrounds of Problem Solving: A Comparison of Open-ended vs. Closed Mathematics Problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6).

Barrouillet, P., & Lépine, R. (2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, *91*(3): 183-204.

Barrouillet, P., Mignon, M., & Thevenot, C. (2008). Strategies in subtraction problem solving in children. *Journal of Experimental Child Psychology, 99*(4): 233-251.

Bassok, M., Chase, V. M., & Martin, S. A. (1998). Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology*, *35*(2): 99-134.

Behrens, J. T., DiCerbo, K. E., Yel, N., & Levy, R. (2012). Exploratory data analysis. *Handbook of Psychology, Second Edition*: *2*.

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5): 1860-1863.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24(4)*: 294-323.

Beilock, S. L., Jellison, W. A., Rydell, R. J., McConnell, A. R., & Carr, T. H. (2006). On the causal mechanisms of stereotype threat: Can skills that don't rely heavily on working memory still be threatened?. *Personality and Social Psychology Bulletin*, *32*(8): 1059-1071.

Beilock, S. L., Rydell, R. J., & McConnell, A. R. (2007). Stereotype threat and working memory: mechanisms, alleviation, and spillover. *Journal of Experimental Psychology: General*, *136*(2): 256.

Beishuizen, M., Van Putten, C., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7(1)*: 87-106.

Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal, 24(5)*: 519-538.

Ben-Zeev, T., Fein, S., & Inzlicht, M. (2005). Arousal and stereotype threat. *Journal of Experimental Social Psychology*, *41*(2): 174-181.

Blascovich, J., Spencer, S. J., Quinn, D., & Steele, C. (2001). African Americans and high blood pressure: The role of stereotype threat. *Psychological science*, *12*(3): 225-229.

Bong, M. (2001). Between-and within-domain relations of academic motivation among middle and high school students: Self-efficacy, task value, and achievement goals. *Journal of educational psychology*, *93*(1): 23.

Bosson, J. K., Haymovitz, E. L., & Pinel, E. C. (2004). When saying and doing diverge: The effects of stereotype threat on self-reported versus non-verbal anxiety. *Journal of Experimental Social Psychology*, *40*(2): 247-255.

Brown, R. P., & Josephs, R. A. (1999). A burden of proof: Stereotype relevance and gender differences in math performance. *Journal of personality and social psychology*, *76*(2): 246.

Brown, R. P., & Pinel, E. C. (2003). Stigma on my mind: Individual differences in the experience of stereotype threat. *Journal of experimental social psychology*, *39*(6): 626-633.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. *Theory of mathematics education*, 54: 110-119.

Bulté, B., & Housen, A. (2012). *Defining and operationalising L2 complexity*. Amsterdam/Philadelphia, PA: John Benjamins.

Butterworth, B. (1999). *What Counts: How the Brain is Hardwired for Math*. New York, NY: TheFreePress.

Cadinu, M., Maass, A., Frigerio, S., Impagliazzo, L., & Latinotti, S. (2003). Stereotype threat: The effect of expectancy on performance. *European Journal of Social Psychology*, *33*(2): 267-285.

Carcary, M. (2009). The Research Audit Trial--Enhancing Trustworthiness in Qualitative Inquiry. *Electronic Journal of Business Research Methods, 7*(1).

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for research in Mathematics Education*: 179-202.

Carr, M., Taasoobshirazi, G., Stroud, R., & Royer, J. M. (2011). Combined fluency and cognitive strategies instruction improves mathematics achievement in early elementary school. *Contemporary Educational Psychology*, 36(4): 323-333.

Chow, A., & Salmela-Aro, K. (2011). Task-values across subject domains: A gender comparison using a person-centered approach. *International Journal of Behavioral Development*, *35*(3): 202-209.

Craig, A. (2010). Comparing research into mental calculation strategies in mathematics education and psychology. *Research in Mathematics Education, 12:1*: 73-74.

Creswell, J. W. (2002). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative* (pp. 146-166). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Croizet, J. C., Després, G., Gauzins, M. E., Huguet, P., Leyens, J. P., & Méot, A. (2004). Stereotype threat undermines intellectual performance by triggering a disruptive mental load. *Personality and social psychology bulletin*, *30*(6): 721-731.

Ceci, S. J., Williams, W. M., & Barnett, S. M. (2009). Women's underrepresentation in science: sociocultural and biological considerations. *Psychological bulletin*, *135*(2): 218.

Charles, M., & Bradley, K. (2009). Indulging our gendered selves? Sex segregation by field of study in 44 countries. *American journal of sociology*, *114*(4): 924-976.

Cheryan, S., Master, A., & Meltzoff, A. N. (2015). Cultural stereotypes as gatekeepers: Increasing girls' interest in computer science and engineering by diversifying stereotypes. *Frontiers in psychology*, *6*, 49.

Cooper, T., Heirdsfield, A., & Irons, C. (1996). Childrens mental strategies for addition and subtraction word problems. In J. Mulligan, & M. Mitchelmore (Eds.), *Childrens number learning* (pp. 147–162). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers, Inc.

Crulikshank, D. E. & Sheffeild, L. J. (1992). *Teaching and learning elementary school*. New York: Macmillan Publishing Company.

Cvencek, D., Kapur, M., & Meltzoff, A. N. (2015). Math achievement, stereotypes, and math self-concepts among elementary-school students in Singapore. *Learning and Instruction*, *39*: 1-10.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H. C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in psychology*, 6, 348.

Davies, P. G., Spencer, S. J., Quinn, D. M., & Gerhardstein, R. (2002). Consuming images: How television commercials that elicit stereotype threat can restrain women academically and professionally. *Personality and Social Psychology Bulletin*, *28*(12): 1615-1628.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for research in mathematics education*: 363-381.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of educational psychology*, *77*(4): 460.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology*, *82*(2): 359.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *7*(3): 197-216.

Di Luca, S., & Pesenti, M. (2008). Masked priming effect with canonical finger numeral configurations. *Experimental Brain Research*, *185*(1): 27-39.

Di Luca, S., Granà, A., Semenza, C., Seron, X., & Pesenti, M. (2006). Finger–digit compatibility in Arabic numeral processing. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *59*(9): 1648-1663.

Durik, A. M., Vida, M., & Eccles, J. S. (2006). Task values and ability beliefs as predictors of high school literacy choices: A developmental analysis. *Journal of educational psychology*, *98*(2): 382.

Dwyer, C. A., & Johnson, L. M. (1997). Grades, accomplishments and correlates. In W. A. Willingham & N. S. Cole (Eds.), Gender and fair assessment (pp. 127–156). Mahwah, NJ: ErlbaumEccles, J. (2009). Who am I and what am I going to do with my life? Personal and collective identities as motivators of action. *Educational Psychologist*, *44*(2): 78-89.

Eccles, J. (2011). Gendered educational and occupational choices: Applying the Eccles et al. model of achievement-related choices. *International Journal of Behavioral Development*, *35*(3): 195-201.

Eccles, J., Wigfield, A., Harold, R. D., & Blumenfeld, P. (1993). Age and gender differences in children's self-and task perceptions during elementary school. *Child development*, 64(3): 830-847.

Eccles, J. S. (2005). Subjective task value and the Eccles et al. model of achievement-related choices. *Handbook of competence and motivation*: 105-121.

Eccles, J. S. (2007). Families, schools, and achievement-related motivations and engagement. In J. E. Grusec & P. D. Hastings (Eds.), Handbook of socialization: Theory and research. New York: Guilford.Eccles, J. S., & Wang, M. T. (2016). What motivates females and males to pursue careers in mathematics and science?. *International Journal of Behavioral Development*, *40*(2): 100-106.

Eccles, J. S., Barber, B., & Jozefowicz, D. (1999). Linking gender to educational, occupational, and recreational choices. In W. B. Swann, Jr., J. H. Langlois, & L. A. Gilbert (Eds.), Sexism and stereotypes in modern society (pp. 153–192). Washington, DC: American Psychological AssociationFayol, M., Barrouillet, P., & Marinthe, C. (1998). Predicting arithmetical achievement from neuro-psychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, *68*(2): B63-B70.

Flower, L. S., & Hayes, J. R. (1977). Problem-solving strategies and the writing process. *College English*, *39*(4): 449-461.

Frenzel, A. C., Goetz, T., Pekrun, R., & Watt, H. M. (2010). Development of mathematics interest in adolescence: Influences of gender, family, and school context. *Journal of Research on Adolescence*, *20*(2): 507-537.

Frenzel, A. C., Pekrun, R., & Goetz, T. (2007). Girls and mathematics—A “hopeless” issue? A control-value approach to gender differences in emotions towards mathematics. *European Journal of Psychology of Education*, *22*(4): 497.

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 35: 563-573.

Fürst, A. J., & Hitch, G. J. (2000). Separate roles for executive and phonological components of working memory in mental arithmetic. *Memory & cognition*, *28*(5): 774-782.

Gallagher, A. M. (1990). SEX DIFFERENCES IN THE PERFORMANCE OF HIGH-SCORING EXAMINEES ON THE SAT®-M. *ETS Research Report Series*, *1990*(2): i-16

Gallagher, A. M. (1992). Sex differences in problem-solving strategies used by high-scoring examinees on the SAT-M. *ETS Research Report Series*, 1992(1): i-35.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1-2): 43-74

Ganley, C. M., & Vasilyeva, M. (2011). Sex differences in the relation between math performance, spatial skills, and attitudes. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *32*(4): 235-242.

Ganley, C. M., & Vasilyeva, M. (2014). The role of anxiety and working memory in gender differences in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, *106*(1): 105.

García, A. I., Jiménez, J. E., & Hess, S. (2006). Solving arithmetic word problems: An analysis of classification as a function of difficulty in children with and without arithmetic LD. *Journal of Learning Disabilities*, *39*(3): 270-281.

Garner, R. (1990). When children and adults do not use learning strategies: Toward a theory of settings . *Review of Educational Research, 60(4)*: 517-529.

Garofalo, J., & Lester Jr, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for research in mathematics education*: 163-176.

Gaspard, D. P. H. (2015). Promoting Value Beliefs in Mathematics: A Multidimensional Perspective and the Role of Gender. *Universität Tübingen*.

Geary, D. C. (2005). *The Origin of Mind: Evolution of Brain, Cognition, and General Intelligence.* Washington, DC: American Psychological Association.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Gibbs, B. G. (2010). Reversing fortunes or content change? Gender gaps in math-related skill throughout childhood. *Social Science Research*, *39*(4): 540-569.

Gracia-Bafalluy, M., & Noel, M. P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance?. *Cortex*, *44*(4): 368-375.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Grossoehme, D. H. (2014). Overview of qualitative research. *Journal of health care chaplaincy*, *20*(3): 109-122.

Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P., & Zingales, L. (2008). Culture, gender, and math. *Science*, *320*(5880): 1164-1165.

Guoliang, Y. (2003). Visual-spatial representations and mathematical problem solving among mathematical learning disabilities. *Acta Psychologica Sinica*, 35(5): 643- 648.

Hancock, D. R., & Algozzine, B. (2017). *Doing case study research: A practical guide for beginning researchers*. Teachers College Press.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning disabilities. *Journal of Educational Psychology*, 93: 615-626.

Harkins, S. G. (2006). Mere effort as the mediator of the evaluation-performance relationship. *Journal of personality and social psychology*, *91*(3), 436.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia - Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, (pp. 345-352). Hobart, Tasmania.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91: 684-689.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, 84(1): 76.

Heirdsfield, A. M. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children, 66*(2): 96-102.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1): 57-74.

Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J., & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, (pp. 89-96). Haifa, Israel.

Hope, J., & Sherrill, J. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. *Journal for Research in Mathematics Education, 18(2)*: 98-111.

Hyde, J. S., & Mertz, J. E. (2009). Gender, culture, and mathematics performance. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *106*(22): 8801-8807.

Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological bulletin*, *107*(2): 139.

Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B., & Williams, C. C. (2008). Gender similarities characterize math performance. *Science*, *321*(5888): 494-495.

Jacob, E. (1987). Qualitative research traditions: A review. *Review of educational research*, *57*(1): 1-50.

Jacobs, J. E., Davis-Kean, P., Bleeker, M., Eccles, J. S., & Malanchuk, O. (2005). I can, but I don’t want to. *The impact of parents, interests, and activities on gender differences in math. In A. Gallagher & J. Kaufman (Eds.), Gender difference in mathematics*: 246-263.

Jacobs, J. E., Lanza, S., Osgood, D. W., Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2002). Changes in children’s self-competence and values: Gender and domain differences across grades one through twelve. Child development, 73(2): 509-527.

Jamieson, J. P., & Harkins, S. G. (2007). Mere effort and stereotype threat performance effects. *Journal of personality and social psychology*, *93*(4): 544.

Jiménez, L., & Verschaffel, L. (2014). Development of children's solutions of non-standard arithmetic word problem solving. *Revista de Psicodidáctica*, *19*(1): 93-123.

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Deatline-Buchman, A., & Sczesniak, E. (2007). Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research*, *100*(5): 283-302.

Jitendra, A. K., & Hoff, K. (1996). The effects of schema-based instruction on the mathematical word-problem-solving performance of students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 29: 422-431.

Johns, M., Schmader, T., & Martens, A. (2005). Knowing is half the battle: Teaching stereotype threat as a means of improving women's math performance. *Psychological Science*, *16*(3): 175-179.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(1): 166-176.

Kaput, J. (1979). Mathematics and Learning: Roots of epistemological status, Cognitive Process Instruction (J. Lochhead y J. Clement, eds.): 289–303.

Karatas, I., & Baki, A. (2017). The effect of learning environments based on problem solving on students' achievements of problem solving. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *5*(3): 249-268.

Keller, J., & Dauenheimer, D. (2003). Stereotype threat in the classroom: Dejection mediates the disrupting threat effect on women's math performance. *Personality and Social Psychology Bulletin*, *29*(3): 371-381.

Kindrat, A. N. (2018). *Enhancing Seventh-Graders' Relational Thinking Through Mental Mathematics* (Doctoral dissertation, Concordia University).

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *29*(2): 66-74.

Klein, A., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(4)*: 443-464.

Klein, E., Moeller, K., Willmes, K., Nuerk, H. C., & Domahs, F. (2011). The influence of implicit hand-based representations on mental arithmetic. *Frontiers in psychology*, *2*: 197.

Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities*, *47*(2): 103-115.

Kuhn, D., & Phelps, E. (1982). The development of problem-solving strategies. In *Advances in child development and behavior* (Vol. 17, pp. 1-44). JAI.

Landau, R. H., Páez, M. J., & Bordeianu, C. C. (2015). *Computational physics: problem solving with Python*. Weinheim: John Wiley & Sons.

Lean, G. A., Clements, M. A., & Del Campo, G. (1990). Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: A comparative study. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(2): 165-191.

Lemaire, P., & Siegler, R. (1995). Four Aspects of Strategic Change: Contributions to Children's Learning of Multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124(1)*: 83-97.

Lemonidis, C. (2015). *Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research, teaching and learning*. Routledge.

Leung, L. (2015). Validity, reliability, and generalizability in qualitative research. *Journal of family medicine and primary care*, *4*(3): 324.

Levine, D. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13(5)*: 350-359.

Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational psychology*, 79(4): 363.

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Petersen, J. L., & Linn, M. C. (2010). New trends in gender and mathematics performance: a meta-analysis. *Psychological bulletin*, *136*(6): 1123.

Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanomi, M., & Siegel, L. S. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *Educational Psychology*, *23*(5): 507-520.

Macintyre, T., & Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. In J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23(2)*, (pp. 49- 54).

Maclellan, E. (2001). Assessment for learning: The differing perceptions of tutors and students. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *26*(4): 307-318.

Marsh, H. W., Trautwein, U., Lüdtke, O., Köller, O., & Baumert, J. (2005). Academic self-concept, interest, grades, and standardized test scores: Reciprocal effects models of causal ordering. *Child development*, *76*(2): 397-416.

Mayer, R. E. (1985). Mathematical ability. In R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach* (pp. 127-150). San Francisco: Freeman.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (2012). The process of understanding mathematical problems. In *The nature of mathematical thinking* (pp. 45-70). Routledge.

Meece, J. L., Wigfield, A., & Eccles, J. S. (1990). Predictors of math anxiety and its influence on young adolescents' course enrollment intentions and performance in mathematics. *Journal of educational psychology*, *82*(1): 60.

McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: Developing number sense. In S. Willis (Ed.), *Being numerate: What counts?* (pp. 24–43). Melbourne: Australian Council for Educational Research.

McIntosh, A. (1995). Mental Computation in School Mathematics: Preference, Attitude and Performance of Students in Years 3, 5, 7, and 9. Mathematics, Science and Technology Education Centre (MASTEC), Edith Cowan University, Perth, Western Australia, Australia.

McIntosh, A., Bana, J., & Farrell, B. (1995). *Mental computation in school mathematics: Preference, attitude and performance of students in years 3, 5, 7 and 9.* Ανακτήθηκε 19 Ιανουαρίου, 2020, από https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED398063.pdf

McIntosh, A., Reys, R., & Reys, B. (1997). Mental computation in the middle grades: the importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2(5)*: 322- 327.

McNear, A. B. (1990). Syntactic complexity and mathematical problem-solving ability of normal-achieving, low-achieving and learning-disabled students. *Dissertation Abstracts International*, 51: 1196.

Moeller, K., Klein, E., & Nuerk, H. C. (2011). (No) small adults: Children's processing of carry addition problems. *Developmental neuropsychology*, *36*(6): 702-720.

Monaghan, P., Sio, U. N., Lau, S. W., Woo, H. K., Linkenauger, S. A., & Ormerod, T. C. (2015). Sleep promotes analogical transfer in problem solving. *Cognition*, 143: 25-30.

Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on the mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, *25*(4): 230-248.

Montague, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30: 164-177.

Montague, M., & Applegate, B. (1993). Mathematical problem-solving characteristics of middle school students with learning disabilities. *The Journal of Special Education*, *27*(2): 175-201.

Montague, M., & Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly*, 23: 215-227.

Montague, M., & Bos, C. (1986). The effect of cognitive strategy training on verbal math problem solving performance of learning disabled adolescents. *Journal of Learning Disabilities*, 19: 26-33.

Montague, M., Warger, C., & Morgan, T. H. (2000). Solve It! strategy instruction to improve mathematical problem solving. *Learning Disabilities Research & Practice*, 15: 110-116.

Muijs, D. (2010). *Doing quantitative research in education with SPSS*. Sage.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(3)*: 309-330.

Muth, K. D. (1992). Extraneous information and extra steps in arithmetic word problems. *Contemporary educational psychology*, *17*(3): 278-285.

Nagy, G., Garrett, J., Trautwein, U., Cortina, K. S., Baumert, J., & Eccles, J. (2008). Gendered high school course selection as a precursor of gendered occupational careers: The mediating role of self-concept and intrinsic value. *Gendered occupational outcomes: Longitudinal assessments of individual, social, and cultural influences*: 115-143.

Nagy, G., Watt, H. M., Eccles, J. S., Trautwein, U., Lüdtke, O., & Baumert, J. (2010). The development of students' mathematics self-concept in relation to gender: Different countries, different trajectories? *Journal of Research on Adolescence*, *20*(2): 482-506.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Natl Council of Teachers of.

Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 6(1): 41-51.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(4): 369-388.

Nichols, J. (1990). Linguistic diversity and the first settlement of the New World. *Language*: 475-521.

Noël, M. P. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, *11*(5): 413-430.

Nosek, B. A., Smyth, F. L., Sriram, N., Lindner, N. M., Devos, T., Ayala, A., ... & Kesebir, S. (2009). National differences in gender–science stereotypes predict national sex differences in science and math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *106*(26): 10593-10597.

Nuerk, H.-C., Moeller, K., & Willmes, K. (2015). Multi-digit number processing: Overview, conceptual clarifications, and language influences. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford library of psychology. The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 106-139). New York, NY, US: Oxford University Press.

O'Brien, L. T., & Crandall, C. S. (2003). Stereotype threat and arousal: Effects on women's math performance. *Personality and Social Psychology Bulletin*, *29*(6): 782-789.

O'neil, H. F., & Fukumura, T. (1992). Relationship of worry and emotionality to test performance in a Juku environment. *Anxiety, stress, and coping*, *5*(3): 241-251.

Özsoy, G., & Ataman, A. (2017). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *1*(2): 67-82.

Pape, S. J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. Contemporary educational psychology, 28(3): 396-421.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquiere, P., & Verschaffel, L. (2014). Using addition to solve subtraction problems in the number domain up to 20 and 100. *MENON: Journal Of Educational Research 1st Thematic Issue*: 8-27.

Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *116*: 3169-3174.

Pintrich, P. R., Marx, R. W., & Boyle, R. A. (1993). Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptual change. *Review of Educational research*, *63*(2): 167-199.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and All That Rot. *Mathematics in School, 8(3)*: 2-5.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery* (2 Vols). New York: J. Willet & Sons.

Polya, G. (1991) *Πώς να το λύσω*. (Επιμέλεια ελληνική έκδοσης: Πατρώνης Τ., Μετάφραση: Ψυακκή Ξ.). Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα. (Πρωτότυπη έκδοση 1957)

Pomerantz, E. M., Altermatt, E. R., & Saxon, J. L. (2002). Making the grade but feeling distressed: gender differences in academic performance and internal distress. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2): 396.

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2014). Does early algebraic reasoning differ as a function of students' difficulty with calculations versus word problems? *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(3): 106-116.

Pronin, E., Steele, C. M., & Ross, L. (2004). Identity bifurcation in response to stereotype threat: Women and mathematics. *Journal of Experimental Social Psychology*, *40*(2): 152-168.

Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3): 309-328.

Rechtsteiner-Merz, Ch., & Rathgeb-Schnierer, E. (2015). Flexible mental calculation and Zahlenblickschulung". In K. Krainer, & N. Vondrovà (Eds.), CERME9. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 354–360). Prague, Czech Republic: Charles University.

Reeve, R., & Humberstone, J. (2011). Five-to 7-year-olds' finger gnosia and calculation abilities. *Frontiers in Psychology*, *2*: 359-359.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, *17*(4): 309-338.

Reys, B., Reys, R., & Hope, J. (1993). Mental computation: a snapshot of second, fifth and seventh grade student performance. *School Science and Mathematics, 93(6)*: 306-315.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5): 547-557.

Reys, R. (1985). Testing mental-computation skills. *The Arithmetic Teacher, 33(3)*: 14- 16.

Reys, R., & Bestgen, B. (1981). Teaching and assessing computational estimation skills. *The Elementary School Journal, 82(2)*:. 116-127.

Riley, M. S., & Greeno, J. G. & Heller, J. I. (1983). Development of Children's problem solving ability in arithmetic. *The development of mathematical thinking*: 153-196.

Root, J. R., Browder, D. M., Saunders, A. F., & Lo, Y. Y. (2017). Schema-based instruction with concrete and virtual manipulatives to teach problem solving to students with autism. *Remedial and Special Education*, *38*(1): 42-52.

Rozek, C. S., Hyde, J. S., Svoboda, R. C., Hulleman, C. S., & Harackiewicz, J. M. (2015). Gender differences in the effects of a utility-value intervention to help parents motivate adolescents in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology*, *107*(1): 195.

Rubenstein, R. (2001). Mental Mathematics beyond the Middle School: Why? What? How? *The Mathematics Teacher, 94 (6)*: 442-446.

Ruiz, C., & Balbi, A. (2019). The effects of teaching mental calculation in the development of mathematical abilities. *The Journal of Educational Research*, 112(3): 315-326.

Sato, M., & Lalain, M. (2008). On the relationship between handedness and hand-digit mapping in finger counting. *Cortex*, *44*(4): 393-399.

Schley, D. R., & Fujita, K. (2014). Seeing the math in the story: on how abstraction promotes performance on mathematical word problems. *Social Psychological and Personality Science*, *5*(8): 953-961.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 334-370. New York: Longman.

Schmader, T. (2002). Gender identification moderates stereotype threat effects on women's math performance. *Journal of Experimental Social Psychology*, *38*(2): 194-201.

Schmader, T., & Johns, M. (2003). Converging evidence that stereotype threat reduces working memory capacity. *Journal of personality and social psychology*, *85*(3): 440.

Schumacher, R. F., & Fuchs, L. S. (2012). Does understanding relational terminology mediate effects of intervention on compare word problems? *Journal of experimental child psychology*, *111*(4): 607-628.

Sekaquaptewa, D., & Thompson, M. (2003). Solo status, stereotype threat, and performance expectancies: Their effects on women's performance. *Journal of Experimental Social Psychology*, *39*(1): 68-74.

Shute, V. J., Wang, L., Greiff, S., Zhao, W., & Moore, G. (2016). Measuring problem solving skills via stealth assessment in an engaging video game. *Computers in Human Behavior*, *63*: 106-117.

Silver, E. A. (2000). Improving mathematics teaching and learning: How can principles and standards help? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6: 20–23.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. *Number concepts and operations in the middle grades*: 182-197.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). The National Council of Teachers of Mathematics.

Spencer, S. J., Steele, C. M., & Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of experimental social psychology*, *35*(1): 4-28

Steele, C. M., & Aronson, J. (1995). Stereotype threat and the intellectual test performance of African Americans. *Journal of personality and social psychology*, *69*(5): 797.

Steffens, M. C., Jelenec, P., & Noack, P. (2010). On the leaky math pipeline: Comparing implicit math-gender stereotypes and math withdrawal in female and male children and adolescents. *Journal of Educational Psychology, 102*(4): 947.

Steinmayr, R., & Spinath, B. (2008). Sex differences in school achievement: What are the roles of personality and achievement motivation?. *European Journal of Personality: Published for the European Association of Personality Psychology*, *22*(3): 185-209.

Steinmayr, R., & Spinath, B. (2010). Konstruktion und erste Validierung einer Skala zur Erfassung subjektiver schulischer Werte (SESSW). *Diagnostica*.

Stone, J. (2002). Battling doubt by avoiding practice: The effects of stereotype threat on self-handicapping in white athletes. *Personality and Social Psychology Bulletin, 28*(12): 1667-1678.

Stone, J., Lynch, C. I., Sjomeling, M., & Darley, J. M. (1999). Stereotype threat effects on black and white athletic performance. *Journal of personality and social psychology*, *77*(6): 1213.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Sage publications.

Spencer, S. J., Steele, C. M., & Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of experimental social psychology, 35*(1): 4-28.

Terao, A., Koedinger, K. R., Sohn, M. H., Qin, Y., Anderson, J. R., & Carter, C. S. (2004). An fMRI study of the interplay of symbolic and visuo-spatial systems in mathematical reasoning. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 26, No. 26).

Thoman, D. B., Arizaga, J. A., Smith, J. L., Story, T. S., & Soncuya, G. (2014). The grass is greener in non-science, technology, engineering, and math classes: Examining the role of competing belonging to undergraduate women’s vulnerability to being pulled away from science. *Psychology of Women Quarterly*, *38*(2): 246-258.

Thompson, I. (1994). Young children's idiosyncratic written algorithms for addition. *Educational Studies in Mathematics, 26(4)*: 323–345.

Thompson, I. (1998). Written subtraction algorithms: Time for a change? *Education 3-13: International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education, 26:3*: 55-58.

Thompson, I. (1999). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 145–146). Buckingham: Open University Press.

Thompson, I. (2001). British research on mental and written calculation methods for addition and subtraction. *Teaching and learning primary numeracy: Policy, Practice and Effectiveness.(A review of British research for the British Educational Research Association)*: 15-21.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in School*, *29(1)*: 24-26.

Thompson, I. (2010). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 145-156). New York, NY: Open University Press.

Thompson, I., & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for the addition and subtraction of 2-digit numbers (Report for the Nuffield Foundation).* Department of Education, University of Newcastle upon Tyne, Newcastle upon Tyne.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational studies in Mathematics*, *50*(1): 29-47.

Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies . *Research in Mathematics Education, 2:1*: 77-90.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41: 541–555.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM Mathematics Education*, 41: 581–590.

Torbeyns, J., Ghesquiere, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction*, *19*: 1-12.

Trafton, P. R. (1978). Estimation and Mental Arithmetic: Important Components of Computation. *NCTM Yearbook*, *196*(213): 78.

Tukey, J. W., & Wilk, M. B. (1987). Data analysis and statistics: An expository overview. *The Collected Works of John W. Tukey: Philosophy and Principles of Data Analysis 1965-1986*, *4*, 549.

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διαδικασία.* Αθήνα: Τυπωθήτω – ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ

Van der Schoot, M., Arkema, A. H. B., Horsley, T. M., & van Lieshout, E. C. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye movement study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology*, *34*(1): 58-66.

Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18: 246-254.

Vansteenkiste, M., Simons, J., Lens, W., Sheldon, K. M., & Deci, E. L. (2004). Motivating learning, performance, and persistence: the synergistic effects of intrinsic goal contents and autonomy-supportive contexts. *Journal of personality and social psychology*, *87*(2): 246.

Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, *35*(1): 89-94.

Vasilyeva, M., Casey, B. M., Dearing, E., & Ganley, C. M. (2009). Measurement skills in low-income elementary school students: Exploring the nature of gender differences. *Cognition and Instruction*, *27*(4): 401-428.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*: 39-59.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, *52*(2): 83.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 84(1): 85.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems* (pp. XVII-X203). Lisse: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3): 335-359.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1990). Do nonsemantic factors also influence the solution process of addition and subtraction word problems? In *Learning and intruction: European Research in an international context* (pp. 415-430).

Vicente, S., Orrantia, J., and Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology 77(Pt 4)*: 829-48

Wandt, E. & Brown, G. W. (1957). Non-occupational uses of mathematics: Mental and written – approximate and exact. Arithmetic Teacher, 4(4): 151–154.

Wang, M. T., & Degol, J. (2013). Motivational pathways to STEM career choices: Using expectancy–value perspective to understand individual and gender differences in STEM fields. *Developmental Review*, *33*(4): 304-340.

Warren, D. E., Kurczek, J., & Duff, M. C. (2016). What relates newspaper, definite, and clothing? An article describing deficits in convergent problem solving and creativity following hippocampal damage. *Hippocampus, 26*(7): 835-840.

Watt, H. M. (2004). Development of adolescents' self-perceptions, values, and task perceptions according to gender and domain in 7th-through 11th-grade Australian students. *Child development*, *75*(5): 1556-1574.

Watt, H. M., & Eccles, J. S. (2008). *Gender and occupational outcomes: Longitudinal assessments of individual, social, and cultural influences*. American Psychological Association.

Watt, H. M., Shapka, J. D., Morris, Z. A., Durik, A. M., Keating, D. P., & Eccles, J. S. (2012). Gendered motivational processes affecting high school mathematics participation, educational aspirations, and career plans: A comparison of samples from Australia, Canada, and the United States. *Developmental psychology*, *48*(6): 1594.

Whitacre, I. (2015). Strategy ranges: describing change in prospective elementary teachers' approaches to mental computation of sums and differences. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18(4)*: 353-373.

Wigfield, A., Eccles, J. S., Yoon, K. S., Harold, R. D., Arbreton, A. J., Freedman-Doan, C., & Blumenfeld, P. C. (1997). Change in children's competence beliefs and subjective task values across the elementary school years: A 3-year study. *Journal of educational psychology*, *89*(3): 451.

Wilkins, J. L., Baroody, A. J., & Tiilikainen, S. (2001). Kindergartners' understanding of additive commutativity within the context of word problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, *79*(1): 23-36.

Willig, C. (2008). *Introducing qualitative research in psychology* (2nd ed.). Berkshire: Open University Press.

Yang, D. C., & Huang, K. L. (2014). An intervention study on mental computation for second graders in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, *107*(1): 3-15.

Yeap, B. H., & Kaur, B. (2001). Semantic characteristics that make arithmetic word problems difficult. In *Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated (MERGA) on "Numeracy and Beyond*.

Yee, D. K., & Eccles, J. S. (1988). Parent perceptions and attributions for children's math achievement. *Sex Roles*, *19*(5-6): 317-333.

Yin, R. K. (2003). *Applications of case study research* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Yu, C. H. (1977). Exploratory data analysis. *Methods*, *2*: 131-160.

Παράρτημα

Δομημένη Συνέντευξη Μαθητών

Γεια σου! Εδώ έχω τα προβλήματα που έλυσες προηγουμένως. Θέλω να δω με ποιον τρόπο τα έλυσες, γι' αυτό θα σου δείχνω ένα-ένα τα προβλήματα και θα κάνω ερωτήσεις. Εντάξει;

Προβλήματα προσθετικών δομών

(Δείχνοντας το πρόβλημα):

Εδώ βλέπω έδωσες αυτήν την απάντηση. Τι πράξη έκανες;

Ξεκίνησες από τον έναν αριθμό και έφτασες στον άλλο, ή ξέρεις το αποτέλεσμα απ' έξω;

(Αν δεν δώσει απάντηση):

Μήπως έκανες την πράξη πρώτα με τις δεκάδες και μετά με τις μονάδες, ή σκέφτηκες κάτι άλλο;

Προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών

(Δείχνοντας το πρόβλημα):

Εδώ βλέπω έδωσες αυτήν την απάντηση. Τι πράξη έκανες;

Έκανες πολλές φορές πρόσθεση/αφαίρεση τον έναν αριθμό, ή ξέρεις το αποτέλεσμα απ' έξω;

(Αν δεν δώσει απάντηση):

Μήπως σκέφτηκες κάτι διαφορετικό και έφτασες σε αυτό το νούμερο;

Ημιδομημένη Συνέντευξη Εκπαιδευτικών

Συνεντεύξεις Εκπαιδευτικών

Φύλο: Α ☐ Θ ☐

Ηλικία:

Χρόνια Υπηρεσίας:

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας μου, πραγματοποιώ αυτή τη συνέντευξη για να αποτυπώσω την άποψή σας σχετικά με την εκτίμηση και τους νοερούς υπολογισμούς, και να διαπιστώσω εάν ενθαρρύνετε την εκτίμηση και τους νοερούς υπολογισμούς στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η συνέντευξη θα διαρκέσει περίπου 10 λεπτά. Τα δεδομένα που θα συλλεγούν από την παρούσα συνέντευξη θα χρησιμοποιηθούν μόνο για τους στόχους της εργασίας μου, που υπάγεται στο Δ.Δ.Π.Μ.Σ. – Διδακτική των Μαθηματικών της Παιδαγωγικής Σχολής του Π.Δ.Μ. και μετά το πέρας της εκπόνησής της θα καταστραφούν. Συμφωνείτε;

1. Τι πιστεύετε ότι είναι πιο σημαντικό για τη διαδικασία μάθησης των παιδιών: Η διαδικασία που ακολουθεί ένας μαθητής για να βρει μια μαθηματική λύση, ή η ακρίβεια της λύσης στην οποία έχει καταλήξει;».

1^{α}. (Αν απαντήσει ότι η ακρίβεια της λύσης είναι πιο σημαντική) Άρα σε περιπτώσεις που ο μαθητής έχει αντιγράψει τη λύση από το διπλανό του σε ένα πρόβλημα, δεν ενδιαφέρεστε για τη διαδικασία σκέψης που έχει ακολουθήσει;

2. Πιστεύετε πως, όπως διδάσκετε τα μαθηματικά εσείς, θέτετε ως στόχο την ανάπτυξη της κριτικής και λογικής σκέψης των μαθητών σας;
3. Όταν κάποιος μαθητής σας δυσκολεύεται να βρει το σωστό αποτέλεσμα μιας πολύπλοκης πράξης, του ζητάτε να εκτιμήσει στο περίπου ή εστιάζετε στη διαδικασία που οδηγεί στο ένα και σωστό αποτέλεσμα;

3^{α}. (Αν εστιάζει στη διαδικασία) Σε περίπτωση που βρει ένα αποτέλεσμα που βρίσκεται πολύ μακριά από την απάντηση, για παράδειγμα «14 + 14 = 148», θα του ζητήσετε να εκτιμήσει στο περίπου χωρίς τη διαδικασία της πράξης, ή όχι;

4. Υπάρχουν περιστάσεις που ζητήσατε από τους μαθητές σας να υπολογίσουν μόνο με το μυαλό;
5. Αν παρατηρήσετε ότι κάποιος μαθητής, σε κάποια γραπτή μαθηματική άσκηση, γράφει μόνο την απάντηση χωρίς να καταγράψει τη διαδικασία που ακολούθησε, θα ζητήσετε να σας περιγράψει το σκεπτικό του;
6. Το ίδιο ισχύει και για προφορικές απαντήσεις;
7. (Για το Σχολείο Α) Ορισμένοι μαθητές απάντησαν μόνο γραπτά όταν είχαν την επιλογή να απαντήσουν είτε γραπτά, είτε νοερά στα προβλήματα που τους δόθηκαν στα πλαίσια της έρευνας. Μπορείτε να μου πείτε αν οι μαθητές αυτοί παρουσιάζουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά;

Γραπτά Δοκίμια α΄ φάσης

Προσθετικές Δομές

Ονοματεπώνυμο: ....

Λύσε τα παρακάτω προβλήματα. Μπορείς αν θέλεις να τα λύσεις με το μυαλό, και να γράψεις μόνο το αποτέλεσμα!

Έχεις 54 τριαντάφυλλα, κόκκινα και άσπρα. Τα 5 είναι κόκκινα. Πόσα είναι τα άσπρα;

....

....

Ο Κώστας έχει 7 μολύβια λιγότερα από τη Δέσποινα. Η Δέσποινα έχει 10 μολύβια περισσότερα από τον Ορέστη. Πόσα περισσότερα ή λιγότερα μολύβια από τον Ορέστη έχει ο Κώστας;

....

....

Η Θεοδώρα έχει 36 μολύβια. Ο Παύλος έχει 28 μολύβια. Πόσα λιγότερα μολύβια έχει ο Παύλος;

....

....

Η Έλσα έχει 15 βιβλία. Ο Κώστας αν πάρει ακόμα 8 βιβλία, θα φτάσει τα βιβλία της Έλσας. Πόσα βιβλία έχει ο Κώστας τώρα;

....

....

Η Σωτηρία είχε μερικές κορδέλες. Αγόρασε άλλες 9 και τώρα έχει 17 κορδέλες. Πόσες κορδέλες είχε στην αρχή;

....

....

Χρωστάω 22 μπίλιες στον Αντώνη. Του έδωσα 11 μπίλιες. Πόσες μπίλιες του χρωστάω ακόμη;

....

....

Ο Δημήτρης έχει 29 αυτοκινητάκια, κόκκινα και πράσινα. Τα 13 είναι πράσινα. Πόσα είναι τα κόκκινα;

....

....

Η Σταυρούλα είχε 27 μπίλιες. Ο Γιώργος της έδωσε άλλες 48. Πόσες μπίλιες έχει τώρα η Σταυρούλα;

....

....

Ο Αντώνης έχει 52 βόλους. Ο Βασίλης έχει 39 βόλους. Πόσους βόλους πρέπει να μαζέψει ακόμα ο Βασίλης για να φτάσει τον Αντώνη;

....

....

Το σχολείο σας έχει στη βιβλιοθήκη του 16 βιβλία μαθηματικών και 34 βιβλία γλώσσας. Πόσα βιβλία έχει συνολικά;

....

....

Η Γιώτα έχει 6 καραμέλες περισσότερες από τη Χαρούλα. Η Χαρούλα έχει 13 καραμέλες περισσότερες από τον Στάθη. Πόσες περισσότερες ή λιγότερες καραμέλες έχει ο Στάθης από τη Γιώτα;

....

....

Η Αντωνία έχει μαζέψει 18 μήλα. Η Ελένη έχει μαζέψει 11 μήλα. Πόσα μήλα πρέπει να μαζέψει ακόμα η Ελένη για να φτάσει την Αντωνία;

....

....

Η Γεωργία είχε μερικά τουβλάκια. Έχασε 10 και τώρα έμεινε με 37 τουβλάκια. Πόσα τουβλάκια είχε στην αρχή;

....

....

Η Κατερίνα έχει 13 ξυλομπογιές. Ο Περικλής έχει 11 παραπάνω ξυλομπογιές από την Κατερίνα. Πόσες ξυλομπογιές έχει ο Περικλής;

....

....

Η Ελισάβετ χρωστάει 9 αυτοκόλλητα στην Αντιγόνη. Αλλά και η Αντιγόνη χρωστάει 13 αυτοκόλλητα στην Ελισάβετ. Τελικά ποια χρωστάει αυτοκόλλητα στη φίλη της, και πόσα;

....

....

Η Αλεξάνδρα έχει 23 κόκκινα τουβλάκια και 21 πράσινα τουβλάκια. Πόσα τουβλάκια έχει συνολικά;

....

....

Ο Τάσος έχει 25 τουβλάκια. Η Βαγγελιώ έχει 17 τουβλάκια παραπάνω από τον Τάσο. Πόσα τουβλάκια έχει η Βαγγελιώ;

....

....

Ο Βασίλης έπαιξε ένα παιχνίδι και έμεινε με 9 βόλους. Πριν από το παιχνίδι είχε 23 βόλους. Πόσους βόλους έχασε;

....

....

Ο Μάνος έχει 65 βιβλία. Η Ελένη έχει 68 βιβλία. Πόσα βιβλία παραπάνω έχει η Ελένη;

....

....

Η Ελένη έχει 11 καραμέλες. Αν μαζέψει άλλες 17, θα φτάσει τις καραμέλες του Γιώργου. Πόσες καραμέλες έχει ο Γιώργος;

....

....

Ο Ντίνος είχε 40 βιβλία. Αγόρασε μερικά και τώρα έχει 52 βιβλία. Πόσα βιβλία αγόρασε;

....

....

Ο Παντελής χρωστούσε καραμέλες στη Ματίνα. Της έδωσε 13 καραμέλες και τώρα της χρωστάει άλλες 7. Πόσες καραμέλες της χρωστούσε στην αρχή;

....

....

Ο Αλέξανδρος είχε 43 αυτοκινητάκια. Του αγόρασαν άλλα 16. Πόσα αυτοκινητάκια έχει τώρα;

....

....

Ο Πάνος χρωστάει 28 βόλους στον Γιάννη. Αλλά και ο Γιάννης χρωστάει 16 βόλους στον Πάνο. Τελικά ποιος χρωστάει βόλους και πόσους;

....

....

Πολλαπλασιαστικές Δομές

Λύσε τα παρακάτω προβλήματα. Μπορείς αν θέλεις να τα λύσεις με το μυαλό, και να γράψεις μόνο το αποτέλεσμα!

Ο Μάρκος έχει 6 σακούλες μήλα. Σε κάθε σακούλα υπάρχουν 7 μήλα. Πόσα μήλα έχει συνολικά ο Μάρκος;

....

....

Ένας λόχος στρατιωτών έχει 25 στρατιώτες. Πόσους στρατιώτες έχει ένα τάγμα, που αποτελείται από 5 λόχους στρατιωτών;

....

....

25 Παιδιά συγκεντρώθηκαν για να κάνουν παρέλαση. Αν σε κάθε σειρά μπήκαν 5 παιδιά, πόσες σειρές έκαναν;

....

....

Η Ιουλία έχει 12 καραμέλες. Θέλει να τις μοιράσει εξίσου στις 3 φίλες της. Πόσες καραμέλες θα πάρει η καθεμία;

....

....

Τα παιδιά ενός σχολείου ετοιμάστηκαν να κάνουν παρέλαση. Σε κάθε γραμμή χώρεσαν 5 παιδιά. Αν κατάφεραν να φτιάξουν 12 γραμμές, πόσα παιδιά ήταν όλα μαζί;

....

....

Ο Μιχάλης μάζεψε 18 μήλα. Ο Στάθης μάζεψε μόνο 6. Πόσες φορές περισσότερα μήλα μάζεψε ο Μιχάλης από τον Στάθη;

....

....

Κάθε σχολική αίθουσα έχει 14 θρανία. Πόσα θρανία έχουν 4 σχολικές αίθουσες;

....

....

Ο Μανώλης έβαλε 24 καλάθια. Η Δήμητρα έβαλε 6 καλάθια. Πόσες φορές λιγότερα καλάθια έβαλε η Δήμητρα από τον Μανώλη;

....

....

Η Μαρία έχει γενέθλια και έκοψε την τούρτα της σε 20 κομμάτια. Αν ο κάθε καλεσμένος πάρει 2 κομμάτια, πόσοι είναι οι καλεσμένοι;

....

....

Ο Νίκος έβαλε σε σειρά τα αυτοκινητάκια του. Σε κάθε γραμμή χώρεσαν 7 αυτοκινητάκια. Έφτιαξε 8 τέτοιες γραμμές με αυτοκινητάκια. Πόσα αυτοκινητάκια είναι όλα μαζί;

....

....

Η γιαγιά απέκτησε 36 αυγά από τις κότες της. Η κάθε κότα έκανε 4 αυγά. Πόσες κότες έχει η γιαγιά;

....

....

Ένα πακέτο αυγά από το σούπερ μάρκετ έχει 6 αυγά. Πόσα αυγά έχουν 12 τέτοια πακέτα;

....

....

Η αίθουσα εκδηλώσεων του σχολείου σας χωράει 30 παιδιά. Σε κάθε σειρά καθισμάτων μπορούν να καθίσουν μόνο 6 παιδιά. Πόσες σειρές καθισμάτων έχει η αίθουσα εκδηλώσεων;

....

....

Ο παππούς μάζεψε 34 ροδάκινα. Θέλει να τα μοιράσει εξίσου στα 2 εγγονάκια του. Πόσα ροδάκινα θα πάρει το καθένα;

....

....

Γραπτά Δοκίμια β΄ φάσης

Προσθετικές Δομές

Ονοματεπώνυμο: ....

Λύσε τα παρακάτω προβλήματα. <u>Γράψε μόνο το αποτέλεσμα</u> των πράξεων που θα κάνεις!

Έχεις 54 τριαντάφυλλα, κόκκινα και άσπρα. Τα 5 είναι κόκκινα. Πόσα είναι τα άσπρα;

....

....

Ο Κώστας έχει 7 μολύβια λιγότερα από τη Δέσποινα. Η Δέσποινα έχει 10 μολύβια περισσότερα από τον Ορέστη. Πόσα περισσότερα ή λιγότερα μολύβια από τον Ορέστη έχει ο Κώστας;

....

....

Η Θεοδώρα έχει 36 μολύβια. Ο Παύλος έχει 28 μολύβια. Πόσα λιγότερα μολύβια έχει ο Παύλος;

....

....

Η Έλσα έχει 15 βιβλία. Ο Κώστας αν πάρει ακόμα 8 βιβλία, θα φτάσει τα βιβλία της Έλσας. Πόσα βιβλία έχει ο Κώστας τώρα;

....

....

Η Σωτηρία είχε μερικές κορδέλες. Αγόρασε άλλες 9 και τώρα έχει 17 κορδέλες. Πόσες κορδέλες είχε στην αρχή;

....

....

Χρωστάω 22 μπίλιες στον Αντώνη. Του έδωσα 11 μπίλιες. Πόσες μπίλιες του χρωστάω ακόμη;

....

....

Ο Δημήτρης έχει 29 αυτοκινητάκια, κόκκινα και πράσινα. Τα 13 είναι πράσινα. Πόσα είναι τα κόκκινα;

....
....

Η Σταυρούλα είχε 27 μπίλιες. Ο Γιώργος της έδωσε άλλες 48. Πόσες μπίλιες έχει τώρα η Σταυρούλα;

....
....

Ο Αντώνης έχει 52 βόλους. Ο Βασίλης έχει 39 βόλους. Πόσους βόλους πρέπει να μαζέψει ακόμα ο Βασίλης για να φτάσει τον Αντώνη;

....
....

Το σχολείο σας έχει στη βιβλιοθήκη του 16 βιβλία μαθηματικών και 34 βιβλία γλώσσας. Πόσα βιβλία έχει συνολικά;

....
....

Η Γιώτα έχει 6 καραμέλες περισσότερες από τη Χαρούλα. Η Χαρούλα έχει 13 καραμέλες περισσότερες από τον Στάθη. Πόσες περισσότερες ή λιγότερες καραμέλες έχει ο Στάθης από τη Γιώτα;

....
....

Η Αντωνία έχει μαζέψει 18 μήλα. Η Ελένη έχει μαζέψει 11 μήλα. Πόσα μήλα πρέπει να μαζέψει ακόμα η Ελένη για να φτάσει την Αντωνία;

....
....

Η Γεωργία είχε μερικά τουβλάκια. Έχασε 10 και τώρα έμεινε με 37 τουβλάκια. Πόσα τουβλάκια είχε στην αρχή;

....
....

Η Κατερίνα έχει 13 ξυλομπογιές. Ο Περικλής έχει 11 παραπάνω ξυλομπογιές από την Κατερίνα. Πόσες ξυλομπογιές έχει ο Περικλής;

....
....

Η Ελισάβετ χρωστάει 9 αυτοκόλλητα στην Αντιγόνη. Αλλά και η Αντιγόνη χρωστάει 13 αυτοκόλλητα στην Ελισάβετ. Τελικά ποια χρωστάει αυτοκόλλητα στη φίλη της, και πόσα;

....

....

Η Αλεξάνδρα έχει 23 κόκκινα τουβλάκια και 21 πράσινα τουβλάκια. Πόσα τουβλάκια έχει συνολικά;

....

....

Ο Τάσος έχει 25 τουβλάκια. Η Βαγγελιώ έχει 17 τουβλάκια παραπάνω από τον Τάσο. Πόσα τουβλάκια έχει η Βαγγελιώ;

....

....

Ο Βασίλης έπαιξε ένα παιχνίδι και έμεινε με 9 βόλους. Πριν από το παιχνίδι είχε 23 βόλους. Πόσους βόλους έχασε;

....

....

Ο Μάνος έχει 65 βιβλία. Η Ελένη έχει 68 βιβλία. Πόσα βιβλία παραπάνω έχει η Ελένη;

....

....

Η Ελένη έχει 11 καραμέλες. Αν μαζέψει άλλες 17, θα φτάσει τις καραμέλες του Γιώργου. Πόσες καραμέλες έχει ο Γιώργος;

....

....

Ο Ντίνος είχε 40 βιβλία. Αγόρασε μερικά και τώρα έχει 52 βιβλία. Πόσα βιβλία αγόρασε;

....

....

Ο Παντελής χρωστούσε καραμέλες στη Ματίνα. Της έδωσε 13 καραμέλες και τώρα της χρωστάει άλλες 7. Πόσες καραμέλες της χρωστούσε στην αρχή;

....

....

Ο Αλέξανδρος είχε 43 αυτοκινητάκια. Του αγόρασαν άλλα 16. Πόσα αυτοκινητάκια έχει τώρα;

....

....

Ο Πάνος χρωστάει 28 βόλους στον Γιάννη. Αλλά και ο Γιάννης χρωστάει 16 βόλους στον Πάνο. Τελικά ποιος χρωστάει βόλους και πόσους;

....

....

Πολλαπλασιαστικές Δομές

Λύσε τα παρακάτω προβλήματα. <u>Γράψε μόνο το αποτέλεσμα</u> των πράξεων που θα κάνεις!

Ο Μάρκος έχει 6 σακούλες μήλα. Σε κάθε σακούλα υπάρχουν 7 μήλα. Πόσα μήλα έχει συνολικά ο Μάρκος;

....

....

Ένας λόχος στρατιωτών έχει 25 στρατιώτες. Πόσους στρατιώτες έχει ένα τάγμα, που αποτελείται από 5 λόχους στρατιωτών;

....

....

25 Παιδιά συγκεντρώθηκαν για να κάνουν παρέλαση. Αν σε κάθε σειρά μπήκαν 5 παιδιά, πόσες σειρές έκαναν;

....

....

Η Ιουλία έχει 12 καραμέλες. Θέλει να τις μοιράσει εξίσου στις 3 φίλες της. Πόσες καραμέλες θα πάρει η καθεμία;

....

....

Τα παιδιά ενός σχολείου ετοιμάστηκαν να κάνουν παρέλαση. Σε κάθε γραμμή χώρεσαν 5 παιδιά. Αν κατάφεραν να φτιάξουν 12 γραμμές, πόσα παιδιά ήταν όλα μαζί;

....

....

Ο Μιχάλης μάζεψε 18 μήλα. Ο Στάθης μάζεψε μόνο 6. Πόσες φορές περισσότερα μήλα μάζεψε ο Μιχάλης από τον Στάθη;

....

....

Κάθε σχολική αίθουσα έχει 14 θρανία. Πόσα θρανία έχουν 4 σχολικές αίθουσες;

....

....

Ο Μανώλης έβαλε 24 καλάθια. Η Δήμητρα έβαλε 6 καλάθια. Πόσες φορές λιγότερα καλάθια έβαλε η Δήμητρα από τον Μανώλη;

....

....

Η Μαρία έχει γενέθλια και έκοψε την τούρτα της σε 20 κομμάτια. Αν ο κάθε καλεσμένος πάρει 2 κομμάτια, πόσοι είναι οι καλεσμένοι;

....

....

Ο Νίκος έβαλε σε σειρά τα αυτοκινητάκια του. Σε κάθε γραμμή χώρεσαν 7 αυτοκινητάκια. Έφτιαξε 8 τέτοιες γραμμές με αυτοκινητάκια. Πόσα αυτοκινητάκια είναι όλα μαζί;

....

....

Η γιαγιά απέκτησε 36 αυγά από τις κότες της. Η κάθε κότα έκανε 4 αυγά. Πόσες κότες έχει η γιαγιά;

....

....

Ένα πακέτο αυγά από το σούπερ μάρκετ έχει 6 αυγά. Πόσα αυγά έχουν 12 τέτοια πακέτα;

....

....

Η αίθουσα εκδηλώσεων του σχολείου σας χωράει 30 παιδιά. Σε κάθε σειρά καθισμάτων μπορούν να καθίσουν μόνο 6 παιδιά. Πόσες σειρές καθισμάτων έχει η αίθουσα εκδηλώσεων;

....

....

Ο παππούς μάζεψε 34 ροδάκινα. Θέλει να τα μοιράσει εξίσου στα 2 εγγονάκια του. Πόσα ροδάκινα θα πάρει το καθένα;

....

....