ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διπλωματική Εργασία:

«Συγκριτική μελέτη προγραμμάτων σπουδών Ελλάδας και Αυστραλίας στην Άλγεβρα»

Μεταπτυχιακός Φοιτητής: Χασιώτης Μάρκος

Τριμελής Επιτροπή Καθηγητών:
Λεμονίδης Χαράλαμπος: Επιβλέπων Καθηγητής
Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος
Τζεκάκη Μαριάννα

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2020

«Για να μπορέσουμε να ξεπεράσουμε τις δυσκολίες, δε γίνεται να δράσουμε μόνοι μας, όσο καλή και να είναι η ιδέα που μας ωθεί. Ο αγώνας ενάντια στη σχολική αποτυχία δεν μπορεί παρά να είναι συστηματικός και συλλογικός, οργανωμένος σε μεγάλη κλίμακα και συνεχιζόμενος επί δεκαετίες»

P. Perrenoud

Υπεύθυνη δήλωση

Ο Χασιώτης Μάρκος, γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία, με τίτλο «Συγκριτική μελέτη προγραμμάτων σπουδών Ελλάδας και Αυστραλίας στην Άλγεβρα», αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει έχουν δηλωθεί κατάλληλα στις βιβλιογραφικές παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία, όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Ο Δηλών
Χασιώτης Μάρκος

Ευχαριστίες
Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας και Πρόεδρο του ΔΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών», κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, τόσο για την τιμή που μου έκανε να είναι ο επιβλέπων καθηγητής της διπλωματικής μου, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές, την καθοδήγηση και τη συμπαράσταση, κατά τη διάρκεια της εργασίας.
Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές και διδάσκοντες του ΔΠΜΣ, για τις νέες γνώσεις και εμπειρίες που μου πρόσφεραν, οι οποίες συνετέλεσαν στην εξέλιξή μου ως εκπαιδευτικό.

Στα παιδιά μου, Μάριο, Γιώργο, Κώστα,

που μεγαλώνουν χρόνια τώρα, χωρίς τη φυσική μου παρουσία.

Περιεχόμενα

Περίληψη:

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών είναι η πυξίδα του εκπαιδευτικού που προσανατολίζει το εκπαιδευτικό του έργο. Η διδασκαλία της Άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στις σύγχρονες κοινωνικές απαιτήσεις και να συνδέεται με τον σύγχρονο τρόπο ζωής. Οι σύγχρονες μέθοδοι διδασκαλίας και η εξέλιξη των τεχνολογικών μέσων συνιστάται να ενσωματώνονται στα προγράμματα σπουδών της Άλγεβρας για να ανταποκρίνονται στις εκπαιδευτικές, κοινωνικές, εργασιακές απαιτήσεις του 21ου αιώνα. Το πόσα αντικείμενα πρέπει να διδαχθούν, σε τι βάθος πρέπει να προχωρήσει η διδασκαλία σε αυτά τα αντικείμενα και πόσο μαθηματικά απαιτητική και αυστηρή πρέπει να είναι αυτή, είναι θεμελιώδη ερωτήματα που τίθενται κατά την ανάπτυξη ενός προγράμματος σπουδών γενικά στα μαθηματικά. Συγκρίνοντας προγράμματα σπουδών μεταξύ χωρών, μπορούμε να εντοπίσουμε τα θετικά τους στοιχεία, αλλά και τις παθογένειες τους και να μεταφέρουμε ωφέλιμα χαρακτηριστικά από το ένα πρόγραμμα στο άλλο.
Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με τη σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών στην Άλγεβρα στην τελευταία τάξη την υποχρεωτικής εκπαίδευσης της Αυστραλίας και της Ελλάδας. Τα συστατικά που μελετήσαμε ήταν το εύρος, το βάθος και οι γνωστικές απαιτήσεις, καθώς και η μαθηματική αυστηρότητα – rigour. Τα αποτελέσματα έδειξαν διαφορές στις γνωστικές απαιτήσεις και τη μαθηματική αυστηρότητα. Επιπλέον συγκρίσεις γίνονται ως προς το περιεχόμενο, τη διδακτική θεωρία, τη χρήση της τεχνολογίας στα δύο προγράμματα σπουδών. Τέλος, δίνεται μια εικόνα των αποτελεσμάτων της διεθνούς δοκιμασίας PISA που διενεργείται από τον ΟΟΣΑ κάθε τρία χρόνια.

Λέξεις κλειδιά: Άλγεβρα, Πρόγραμμα σπουδών, Συγκριτική μελέτη.

Abstract:

Curriculum is the compass of the teacher which guides his educational project. Algebra's teaching in secondary education must be adapted to modern social demands and linked to modern lifestyles. Modern teaching methods and the development of technological means should be integrated into Algebra curricula to meet the educational, social and work demands of the 21st century. How many subjects need to be taught, how deeply these subjects should be taught, and how mathematically

demanding and rigorous they must be, are fundamental questions that arise when developing a general mathematics curriculum. By comparing curricula between countries, we can identify their positive characteristics as well as their pathogenicity and transfer beneficial characteristics from one program to another.
In this work we have compared the curricula in Algebra to the last class of compulsory education between Australia and Greece. The components we studied were breadth, depth – cognitive demands and mathematical rigor. The results showed differences in cognitive demands and in mathematical rigor. Further comparisons are made in terms of content, teaching theory, use of technology in the two curricula. Finally, an overview of the results of the OECD international PISA test, which takes place every three years, is given.

Key words: Algebra, Curriculum, Comparative Study.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}: Συστατικά ενός προγράμματος σπουδών και εις βάθος Μάθηση

1.1 Εισαγωγή

Πριν την εξέταση των επιμέρους συστατικών ενός προγράμματος σπουδών (ΠΣ), κρίνεται σκόπιμο να καθοριστεί η έννοιά του.

Στη διεθνή βιβλιογραφία, ο όρος πρόγραμμα σπουδών (curriculum) πολλές φορές εναλλάσσεται με τον όρο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (syllabus), δίνοντάς τους κοινό περιεχόμενο. Ωστόσο, στον όρο “curriculum”, αποδίδεται, συνήθως, μια ευρύτερη έννοια από αυτήν του “syllabus”.

Έτσι, ο Allen (1984) ορίζει το πρόγραμμα σπουδών ως "μία γενική έννοια που περιλαμβάνει μία πληθώρα φιλοσοφικών, κοινωνικών και διοικητικών παραγόντων που συνεισφέρουν στον προγραμματισμό ενός εκπαιδευτικού προγράμματος", ενώ με τον όρο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται στο υποσύνολο του προγράμματος σπουδών που αφορά τον ορισμό της διδακτέας ύλης.

Ο Kelly (1982) ορίζει το πρόγραμμα σπουδών ως «το γενικό σκεπτικό του εκπαιδευτικού προγράμματος ενός ιδρύματος, το οποίο βρίσκει την έκφρασή του μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα κάθε γνωστικού πεδίου». Ο ίδιος θεωρεί ότι ο όρος πρέπει να περιλαμβάνει τη θεώρηση των σκοπών, διαδικασιών και αρχών της εκπαίδευσης.

Σε ό,τι αφορά το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, όπως αυτό ορίζεται για κάθε γνωστικό πεδίο, ο Johnson (1989) θεωρεί πως «αποτελεί τον επιχειρησιακό ορισμό του γενικού προγράμματος».

Στο ίδιο σκεπτικό, οι Dubin και Olshtain (1986) ορίζουν το αναλυτικό πρόγραμμα ως «μια πιο λεπτομερή και επιχειρησιακή δήλωση των διδακτικών και μαθησιακών στοιχείων, η οποία μεταφράζει τη φιλοσοφία του προγράμματος σπουδών σε μια σειρά σχεδιασμένων βημάτων που οδηγούν προς πιο στενά καθορισμένους στόχους».

Η Yalden (1984) συμπληρώνει ότι αυτό το έγγραφο αποτελεί «εργαλείο που αντιπροσωπεύει τις διαπραγματεύσεις όλων των εμπλεκόμενων μερών. Κατά πρώτο λόγο, αφορά τους στόχους της εκπαίδευσης και πρέπει να αποτελεί καθορισμό, κατ' αρχήν, του περιεχόμενου της διδασκαλίας και, σε μετέπειτα στάδιο ανάπτυξης, της μεθοδολογίας και των υλικών». Για τον Brumfit (1984), τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών αποτελούν «έγγραφα διοικητικής διευκόλυνσης που ενσωματώνουν ορισμένες ιδεολογικές, κοινωνικές και πολιτικές προϋποθέσεις, … σχεδιασμένα να προκαλέσουν αλλαγή στη συμπεριφορά εκπαιδευτικών και μαθητών».

1.2 Εύρος και βάθος του προγράμματος σπουδών

1.2.1 Πώς σχετίζεται το εύρος και το βάθος του προγράμματος σπουδών με την εις βάθος και την επιφανειακή μάθηση

Πολλή συζήτηση έχει γίνει για το εύρος και το βάθος του ΠΣ. Ο Biggs (1999) θεωρεί το ΠΣ ως ένα παραλληλόγραμμο, όπου οι οριζόντιες γραμμές αντιπροσωπεύουν το εύρος και οι κάθετες πλευρές αντιπροσωπεύουν το βάθος. Έτσι, η επιφάνεια του παραλληλογράμμου παραμένει σταθερή, άσχετα από το πώς δομείται το παραλληλόγραμμο. Τώρα προκύπτει το ερώτημα αν για ένα συγκεκριμένο μάθημα ή θεματική απαιτείται μεγαλύτερο εύρος ή βάθος; Ό,τι κι αν επιλέξουμε, πάλι θα έχουμε ένα παραλληλόγραμμο. Στα μαθηματικά, η μέγιστη επιφάνεια ενός παραλληλογράμμου με την ελάχιστη περίμετρο είναι ένα τετράγωνο. Ίσως, ένα ΠΣ χρειάζεται να είναι περισσότερο ένα τετράγωνο, παρά ένα στενό, αλλά μακρύ ορθογώνιο, όπως ισχύει σήμερα, που θα επιτρέπει στο εύρος και στο βάθος να είναι εξίσου παρόντα.

Στην εις βάθος μάθηση οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν υψηλής τάξης γνωστικές ιδιότητες, όπως την ικανότητα να αναλύουν, να συνθέτουν και να λύνουν το πρόβλημα, να σκέφτονται μεταγνωστικά και να κατανοούν μακροπρόθεσμα. Οι άγνωστες ιδέες αναλύονται κριτικά και συνδέονται με γνωστές έννοιες, ώστε να παραχθεί νέα γνώση που θα λύσει άγνωστα προβλήματα.

Αντίθετα, η επιφανειακή γνώση είναι η σιωπηρή αποδοχή της πληροφορίας ως απομονωμένα και ασύνδετα δεδομένα, χωρίς ουσιαστική κατανόηση ή μακροπρόθεσμη διατήρηση της πληροφορίας ή της γνώσης.

Ο Alexander (2002) επισημαίνει τη σπουδαιότητα του εύρους στο πρωτοβάθμιο ΠΣ. Οι Percy και Duplass (2011) σημειώνουν ότι θα πρέπει να διδάσκονται εξίσου και οι γνώσεις και η κριτική ικανότητα. Η Brady (2000) κριτικάροντας το εκπαιδευτικό σύστημα υποδεικνύει ότι πρέπει να εστιάσουμε στο βάθος.

Η Irwin (2011) καταθέτει ότι το εύρος αναφέρεται στο πεδίο, στην εμβέλεια και σημαίνει ποικιλία εμπειριών, περιεχομένου, υλικών. Το βάθος σχετίζεται με την ένταση και την κατανόηση. Το εύρος και το βάθος της κατανόησης συνεισφέρουν στην ανεξαρτησία της σκέψης και στην αγάπη της μάθησης και επιτρέπουν στους μαθητές να ερμηνεύουν και να αντιλαμβάνονται διαφορετικά μαθήματα με προοπτική νέων γνώσεων.

1.2.2 Γνώση και κατανόηση

Ο Ergan (2010) πιστεύει ότι η αληθινή μόρφωση αποτελείται και από τις γενικές γνώσεις και τη λεπτομερή κατανόηση και ότι ένα μορφωμένο άτομο πρέπει να διαθέτει και εύρος και βάθος γνώσεων. Ο Bereiter (2002) προτείνει ότι το σχολείο πρέπει να παρέχει το δυνατόν ευρύτερη και βαθύτερη αντίληψη του κόσμου. Ο Wineburg (2008) ορίζει το βάθος της γνώσης ως εξής:

- ικανότητα διάκρισης: αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αντιλαμβάνεται διαφορετικές πτυχές μιας ιδέας / ενός γεγονότος
- επεξεργασία: λεπτομερής γνώση
- πιστοποίηση / δεξιότητα: θέτει τη γνώση σε ένα επιστημολογικό πλαίσιο
- ενσωμάτωση / αφομοίωση: ικανότητα για συσχετισμούς

Οι Moldoveanu και Martin (2009) ορίζουν:

α. το εύρος του νου ως την ποσότητα των δεδομένων που μπορεί κάποιος να λάβει υπόψη όταν σκέφτεται, χωρίς να πανικοβάλλεται ή να χάνει το ενδιαφέρον του και

β. το βάθος του νου ως την ποσότητα της καθαρής σκέψης/ νοητικών λειτουργιών που κάποιος μπορεί ή θέλει να κάνει, χωρίς να πανικοβάλλεται ή να χάνει το ενδιαφέρον του.

Υποστηρίζουν ότι στο πρόγραμμα σπουδών πρέπει να υπάρχει συνδυασμός εύρους και βάθους και συγκεκριμένα ότι το μυαλό πρέπει να προσπαθεί να παρατηρεί όσο το δυνατόν περισσότερα (εύρος) και να προσπαθεί να εξηγεί πολλά με λίγα δεδομένα (βάθος).

Ο Gardener (2007) στο έργο του «Πέντε σκέψεις για το μέλλον» πιστεύει ότι τα σχολικά μαθήματα δεν επαρκούν για να λύσουν τα προβλήματα του αληθινού κόσμου και ότι οι μελλοντικοί πολίτες πρέπει να σκέφτονται συνθετικά, δημιουργικά και κριτικά για να ζήσουν και να εργαστούν με επιτυχία. Η εκπαίδευση πρέπει να καλλιεργεί τη συνθετική – κριτική σκέψη.

1.2.3 Η εις βάθος μάθηση

Η έννοια της μάθησης ποικίλλει. Ο Säljö (1979) ταξινόμησε τις αντιλήψεις για τη μάθηση σε πέντε κατηγορίες:

- ως απόκτηση πληροφοριών και γνώσεων
- ως απομνημόνευση
- ως κτήση δεξιοτήτων
- ως συσχετισμό διαφορετικών θεμάτων
- ως κατανόηση της πραγματικότητας με διαρκείς γνώσεις

Ο Atherton (2011) προσεγγίζει την εις βάθος μάθηση ως εξής:

- εστιασμός σε ό,τι αξίζει
- συσχετισμός παλιάς και νέας γνώσης
- συσχετισμός γνώσεων από διαφορετικές πηγές
- συσχέτιση θεωρίας με πράξη
- διάκριση απόδειξης – επιχειρήματος
- οργάνωση περιεχομένου στο σύνολο
- έμφαση στο εσωτερικό του μαθητή

Ο Atherton (2011) συνοψίζει την επιφανειακή γνώση ως εξής:

- εστιασμός στα άσχετα επιμέρους
- απομνημόνευση πληροφορίας
- μη συσχετισμός γεγονότων και ιδεών
- αδυναμία διάκρισης αρχών – παραδείγματος
- η εργασία θεωρείται ως έξωθεν επιβολή

- εξωτερική έμφαση

1.2.4 Ποιοτικές και ποσοτικές έρευνες στο εύρος και στο βάθος του προγράμματος σπουδών

Ο Mardock (2008) έκανε μία μελέτη αναλύοντας τα δεδομένα της "Τρίτης διεθνούς μελέτης μαθηματικών και θετικών επιστημών 1995 (TIMSS)". Σκοπός της μελέτης ήταν να συγκρίνει το εύρος (αριθμός θεμάτων που καλύφθηκαν σε ένα συγκεκριμένο μάθημα σε περιορισμένο χρόνο – σελ. 11), το βάθος (εμβάθυνση στη γνώση – σελ. 12) και την επανάληψη (έτη που ένα θέμα παρέμεινε στο ΠΣ – σελ. 13) ενός τυπικού αμερικανικού ΠΣ Φυσικής με αντίστοιχα άλλων χωρών.

Τα αποτελέσματα αποκάλυψαν ότι το ΠΣ των ΗΠΑ είχε χαμηλό εύρος και βάθος, αλλά συχνή επανάληψη, που όμως δεν αντανακλούσε σε επιτυχία.

Για το εύρος υποστηρίζει ότι τα θέματα της Φυσικής πρέπει να καλύπτονται νωρίτερα και με μεγαλύτερη συχνότητα.

Για να αυξήσει το βάθος, προτείνει τα θεμελιώδη θέματα να μελετώνται σε νεότερες ηλικίες και για περισσότερα χρόνια και τα δευτερεύοντα θέματα να προστίθενται μετά την εμπέδωση των θεμελιωδών.

Οι Schwartz, Salder και Tai (2005) έκαναν μια μελέτη για την επίδοση των κολλεγιακών φοιτητών στα εισαγωγικά μαθήματα Θετικών Επιστημών, σε σχέση με την ποσότητα της ύλης που κάλυψαν στο Γυμνάσιο. Οι ερευνητές συμπέραναν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μειώσουν κατά την κρίση τους την κάλυψη της ύλης στο Γυμνάσιο και να στοχεύσουν στην άρτια εκμάθηση τουλάχιστον ενός θέματος εις βάθος. Υπήρχε θετική συσχέτιση ανάμεσα στη διδασκαλία θετικών επιστημών που εστιάζει στο βάθος στο Γυμνάσιο και στην καλύτερη επίδοση στα κολλεγιακά μαθήματα.

Ο οργανισμός Alliance for excellent education, All4ed (2011) επισημαίνει ότι η βαθύτερη μάθηση είναι καθήκον για όλους τους μαθητές και απαιτεί την παράδοση πλούσιας ουσιαστικής ύλης στους μαθητές με πρωτοποριακούς τρόπους που τους επιτρέπουν να μάθουν και να εφαρμόσουν ό,τι έχουν μάθει και να αναπτύξουν ικανότητες που ετοιμάζουν τους αποφοίτους δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για κολέγιο και καριέρα (σελ. 1). Η βαθύτερη μόρφωση επιφέρει υψηλότερη ακαδημαϊκή επίδοση (σελ. 2). Η βαθύτερη μόρφωση επιτυγχάνεται μέσω των εργασιών και της έρευνας. Σύμφωνα με τους Trilling και Fadel (2009, σελ. 107 – 108):

- Οι μαθητές μαθαίνουν βαθύτερα όταν μπορούν να εφαρμόσουν τη γνώση της σχολικής τάξης στα προβλήματα της καθημερινότητας και όταν μπορούν να συμμετέχουν σε εργασίες που απαιτούν σταθερή συμμετοχή και συνεργασία.
- Οι ενεργητικές και συμμετοχικές μαθησιακές μέθοδοι επιδρούν περισσότερο στη σχολική απόδοση.
- Οι μαθητές είναι πιο επιτυχημένοι, όταν διδάσκονται πώς και τι να μαθαίνουν.

Ομοίως, οι Wurdinger και Enloe (2011) θεωρούν ότι η μάθηση που βασίζεται σε εργασίες προετοιμάζει τους μαθητές για τον αληθινό κόσμο και τους καθιστά πιο ανεξάρτητους και αυτάρκεις και ότι ακόμη και τα λάθη είναι κίνητρο για βελτίωση.

1.2.5 Το εύρος και το βάθος προγραμμάτων σπουδών σε διάφορες χώρες

Το ΠΣ που εισήχθη στην Αγγλία το 2011 βασίστηκε σε σύνθεση των καλύτερων εθνικών και διεθνών πρακτικών, όπως επίσης και στο γεγονός ότι κάθε παιδί έχει δικαίωμα σε βασικές γνώσεις γραφής, αρίθμησης, πληροφορικής και προσωπικής ανάπτυξης ως μέρος ευρείας, ισορροπημένης και σφαιρικής εκπαίδευσης (Ανεξάρτητη κριτική για το πρωτοβάθμιο πρόγραμμα σπουδών, Rose, 2009). Το βρετανικό ΠΣ 2000 προωθεί ένα εκπαιδευτικό σύστημα και με βάθος και με ευελιξία.

Το εύρος του ΠΣ και η συνέπεια συνεισφέρουν σε υψηλή βαθμολογία στα Μαθηματικά, επειδή οι μαθητές εφαρμόζουν τις γνώσεις και δεξιότητες που έμαθαν από ένα μάθημα στα υπόλοιπα και έτσι ενισχύουν την μόρφωσή τους και αυξάνουν την ικανότητα αντίληψης και την αυτοπεποίθησή τους (Alexander, 2009, σελ. 4).

Ακολουθώντας την αυθεντική εργασία του Υπουργείου Παιδείας της Σκωτίας, το Εκπαιδευτικό Συμβούλιο Aberdeen (2008, σελ. 2) προτείνει τα ακόλουθα για το εύρος και το βάθος του ΠΣ:

Εύρος:

Όλα τα παιδιά και οι νέοι πρέπει να απολαμβάνουν ευκαιρίες για ευρείας κλίμακας δραστηριότητες, ώστε να μαθαίνουν και να αναπτύσσονται ποικιλοτρόπως. Πρέπει να υπάρχει επαρκές εύρος στη συνολική εμπειρία *κάθε νέου, ώστε να τον βοηθήσουν να κάνει επιλογές στη διάρκεια της σχολικής φοίτησης.*

Βάθος

Πλέον της ευρείας κλίμακας εμπειριών, τα παιδιά και οι νέοι πρέπει να έχουν ευκαιρίες να εργάζονται σε βάθος. Όσο προοδεύουν, πρέπει να μπορούν να συνυφάνουν διαφορετικές συνιστώσες της μάθησης και να εξερευνήσουν και να πετύχουν προηγμένα επίπεδα κατανόησης.

Η στρατηγική της Σιγκαπούρης στην αναμόρφωση προγράμματος σπουδών συνοψίζεται στη φράση του κινήματος «Teach less, learn more – TLLM» δηλαδή, Δίδαξε λιγότερα, μάθε περισσότερα (Ministry of Education, 2013)[1]. Σημαίνει δίδαξε καλύτερα για να ετοιμάσεις τους μαθητές για τη ζωή, παρά για τις εξετάσεις. Μετατοπίζει το κέντρο βάρους της εκπαίδευσης από την «ποσότητα» στην «ποιότητα». «Περισσότερη ποιότητα» στην αλληλεπίδραση της σχολικής αίθουσας, ευκαιρίες για έκφραση, δια βίου εκμάθηση δεξιοτήτων και διαμόρφωση χαρακτήρα μέσω πρωτοποριακών και αποτελεσματικών διδακτικών προσεγγίσεων. «Λιγότερη ποσότητα» αναφορικά με επαναληπτική μάθηση και επαναληπτικά τεστ.

Ένα πιλοτικό πρόγραμμα σε τρία πρότυπα σχολεία των ΗΠΑ εξέτασε τον ρόλο του βάθους και του εύρους στο ΠΣ των Μαθηματικών ακολουθώντας την ιδέα ότι «τα λιγότερα είναι περισσότερα». Όχι από την άποψη μείωσης της ύλης, αλλά της επάρκειας και της ικανότητας χρήσης μαθηματικής λογικής ως εργαλεία πλήρους συμμετοχής σε μια δημοκρατική κοινωνία. Το ΠΣ σχεδιάστηκε να εξελίσσεται, ώστε να επιτρέπει στους μαθητές να ξανασυναντούν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες αρκετές φορές με αυξανόμενο βάθος (Roser & Kruse, 2007, σελ. 2) και εστιάζοντας σε μεγαλύτερες ερωτήσεις που οι μαθητές θα εξερευνούσαν σε βάθος. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να διαμορφώσει τεχνικές και διαδικασίες μέσω απευθείας καθοδήγησης, ενώ συνεχώς θα αφήνει χώρο στους μαθητές να εξερευνήσουν τις έννοιες σε βάθος. Το μαθηματικό ΠΣ σε αυτά τα σχολεία σχεδιάστηκε ώστε οι μαθητές να παίζουν, να εξερευνούν, να κάνουν συνειρμούς και να λύνουν προβλήματα με τις γνώσεις και δεξιότητες που έχουν αποκτήσει, ώστε η μαθηματική εκπαίδευση να μην

---

[1] https://eservice.nlb.gov.sg/data2/BookSG/publish/d/dbe9f1f3-efcb-4bce-917b-1040e95ea179/web/html5/index.html?opf=tablet/BOOKSG.xml&launchlogo=tablet/BOOKSG_BrandingLogo_.png&pn=8

αποκτάται από συνηθισμένες ασκήσεις, αλλά ώστε να είναι μια προσπάθεια να γνωρίσουν οι μαθητές σύνθετες καταστάσεις και τη διαδικασία της ανάλυσης ενός φαινομένου και της αλληλεπίδρασης των επιμέρους στοιχείων του (σελ. 2).

Τα τρία σχολεία χρησιμοποίησαν διαφορετικές τεχνικές, αλλά καλλιέργησαν στους μαθητές τους την ικανότητα:

- να μεταφέρουν μαθηματικές δεξιότητες και γνώσεις σε ασυνήθη προβλήματα
- να αναπτύσσουν μεταγνωστική επίγνωση, ώστε να ψάχνουν σχετικές πληροφορίες
- να κατανοούν τη διαδικασία της επιχειρηματολογίας
- να χρησιμοποιούν τη γλώσσα των μαθηματικών, ώστε να επικοινωνούν και να κατανοούν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες, καθώς κερδίζουν περισσότερο από τη μαθηματική εμπειρία

1.2.6 Προτάσεις για τα Προγράμματα Σπουδών

Ένα από τα συνθήματα της αναθεώρησης ΠΣ είναι ότι «Τα λιγότερα είναι περισσότερα». Μέρος της κουλτούρας μας είναι ότι θέλουμε περισσότερα. Καλύπτουμε περισσότερα θέματα σε λιγότερο βάθος και αυτό έχει επιπτώσεις στην επιτυχία των μαθητών. Υπάρχει μια σχέση ανταγωνισμού μεταξύ βαθιάς μάθησης και ευρείας μάθησης (Hammond, 2000, σελ. 8).

Οι χώρες που ακολουθούν έναν κοινό κορμό ΠΣ σε μικρές τάξεις (π.χ. Γαλλία, Ιαπωνία) έχουν πιο επιτυχημένους μαθητές (Hirsch, 2001).

Ο Barnes (2001, σελ. 165) παρατηρεί ότι τα πανεπιστήμια ανησυχούν για την έλλειψη βαθιάς κατανόησης κεντρικών ιδεών των μεμονωμένων μαθημάτων και των συνδέσεων μεταξύ των μαθημάτων ή των θεμάτων.

Ο Woolf (2001) προτείνει την «προσέγγιση της χτένας». Το ΠΣ παρομοιάζεται με μία χτένα και εννοεί ότι πρέπει να αποτελείται από κάποιες ενότητες που διδάσκονται σε βάθος (δόντια της χτένας) και κάποιες ενότητες με γενικές γνώσεις (λαβή της χτένας).

Παρόμοια μεταφορά για το βάθος και το εύρος είναι «το τραπέζι με τα πόδια», όπου η επιφάνεια του τραπεζιού αντιπροσωπεύει το εύρος και καλύπτει πολλά θέματα, ενώ τα πόδια αντιπροσωπεύουν το βάθος σε μερικά επιλεγμένα θέματα. Το σύνηθες είναι η εκπαίδευση να είναι ευρεία, αλλά όχι βαθιά. Το αντίθετο είναι ασύνηθες. Το σημαντικό είναι όλοι οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να κάνουν τακτικά μια έρευνα σε βάθος καθ' όλη την εκπαίδευσή τους. Αυτό επιτυγχάνεται έχοντας ένα ή δύο θέματα σε κάθε μάθημα που θα ερευνηθούν σε βάθος.

Ο Hirsch (2001) πιστεύει ότι τα σχολεία πρέπει να έχουν μία ακολουθία θεμάτων σε διαφορετικό επίπεδο ως προετοιμασία για την επόμενη τάξη. Πιστεύει ότι το εύρος και το βάθος πρέπει να εξισορροπούνται στο ΠΣ. Ο Hirsch (σελ. 22-23) σκιαγραφεί τέσσερις αρχές μάθησης:

- Η μαθησιακή ικανότητα είναι θέμα πειθαρχίας.
- Η μαθησιακή ικανότητα σχετίζεται με τις γενικές γνώσεις.
- Ο καλύτερος τρόπος να μάθεις ένα μάθημα είναι να μάθεις τις γενικές αρχές του και άφθονα παραδείγματα.
- Ευρεία γενική γνώση οδηγεί στην εις βάθος γνώση.

Ο Egan (2010) στο βιβλίο του «Μαθαίνοντας εις βάθος: Μια απλή καινοτομία που μπορεί να μετασχηματίσει το σχολείο» περιγράφει ένα φιλόδοξο, αλλά πρακτικό σχέδιο να ενσωματώσει την εις βάθος γνώση στη βασική εκπαίδευση. Όλοι οι μαθητές θα ακολουθούν το σύνηθες ΠΣ και επιπρόσθετα θα τους ανατίθεται ένα συγκεκριμένο θέμα να μάθουν καθ' όλη τη σχολική τους καριέρα και να δημιουργούν υπό την επιτήρηση του δασκάλου τους προσωπικά χαρτοφυλάκια πάνω στο θέμα που θα εξελίσσονται μαζί με αυτούς. Ο Egan (2007) θεωρεί ότι η γνώση σε βάθος είναι πολύ σημαντική για την ίδια τη γνώση και την ανάπτυξη της φαντασίας.

Σύμφωνα με τον Zimmerman (1990), η βαθιά μόρφωση απαιτεί ο εκπαιδευόμενος να συνθέσει στρατηγικές μάθησης, που περιλαμβάνουν συζητήσεις με συμμαθητές, ανακλαστική γραφή, πρακτική εφαρμογή, μελέτη για να αποκτήσει την πληροφορία, να τη διατηρήσει και να τη μεταφέρει σε ανώτερη κλίμακα (Tagg, 2003).

Η Sims (2006) θεωρεί ότι στη βαθιά μόρφωση κάποιος:

- συσχετίζει ιδέες με προηγούμενη γνώση και εμπειρία
- ψάχνει για μοτίβα και υπογραμμίζει αρχές
- ελέγχει τις αποδείξεις και τις συσχετίζει με συμπεράσματα

- εξετάζει τη λογική και το επιχείρημα επιφυλακτικά και κριτικά
- δείχνει ενεργητικό ενδιαφέρον (σελ. 3)

Αντίθετα, στην επιφανειακή μόρφωση κάποιος:

- μελετά χωρίς σκοπό ή στρατηγική
- θεωρεί το μάθημα ως ασύνδετα κομμάτια γνώσης
- απομνημονεύει
- δυσκολεύεται να κατανοήσει νέες ιδέες
- νιώθει αδικαιολόγητη πίεση

Με βάση τις έρευνες των Entwistle (2010), Lindblom – Ylanne (2010), Millis (2010) και Saroyan (2010), οι Ellis, ,Furino, Kenyon, McCarville, Stubley και Woudsma (2011) μέλη του Πανεπιστήμιο του Βατερλό, θεωρούν ότι οι μαθητές με εις βάθος μόρφωση κάνουν τα παρακάτω:

- διατηρούν τη γνώση και την εφαρμόζουν σε νέα και διαφορετικά πλαίσια
- εστιάζουν σε συναφείς ιδέες και κάνουν συνδέσεις μεταξύ νέας και προηγούμενης γνώσης
- βλέπουν διαφορετικά έννοιες, ιδέες και τον κόσμο
- έχουν ανεξάρτητη κριτική και αναλυτική σκέψη
- ρυθμίζουν τους εαυτούς τους ως εκπαιδευόμενους
- έχουν εγγενές κίνητρο να μάθουν
- μαθαίνουν ενεργητικά αλληλοεπιδρώντας με τους άλλους

Δύο βασικά χαρακτηριστικά της βαθιάς μόρφωσης είναι η μακροπρόθεσμη διατήρηση και η μετάδοση της μάθησης. Οι Halpern & Hakel (2003) αναγνώρισαν στρατηγικές που οι αποτελεσματικοί δάσκαλοι χρησιμοποιούν για να προωθήσουν αυτά τα δύο χαρακτηριστικά:

- εξασκούν τους μαθητές να ανακαλούν παλιά μόρφωση για να απαντήσουν σε νέα ερωτήματα
- χρησιμοποιούν διαφορετικές τεχνικές διδασκαλίας ανάλογα με τους μαθητές

- χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους (ει δυνατόν)
- χρησιμοποιούν την προηγούμενη γνώση και εμπειρία για να επηρεάσουν τη νέα που διδάσκεται
- διαπιστώνουν τις αντιλήψεις των μαθητών που εμποδίζουν τη μάθηση
- είναι σε διαρκή ανταλλαγή πληροφοριών με τους μαθητές
- χρησιμοποιούν δραστηριότητες που απαιτούν οι μαθητές να ασχοληθούν με το υλικό ή ο ένας με τον άλλον
- αναγνωρίζουν και ενισχύουν έννοιες κλειδιά
- κάνουν ορθή χρήση της ποσότητας και ποιότητας μάθησης
- συσχετίζουν δραστηριότητες μάθησης με στόχους και αποτελέσματα
- αποδέχονται ότι αυτό που καθορίζει την ποσότητα και την ποιότητα της μάθησης είναι αυτό που κάνουν οι μαθητές και όχι ο εκπαιδευτικός

Οι προαναφερθείσες ιδέες υποδεικνύουν τη λεπτή ισορροπία μεταξύ επιφανειακής γνώσης (εύρος) και βαθιάς γνώσης (βάθος). Το εύρος και το βάθος πρέπει να συνδυάζονται. Βοηθώντας τους μαθητές να μάθουν πώς και τι να διαβάζουν και υποστηρίζοντάς τους με εκπαιδευτικό υλικό και συνεχή ανάπτυξη δεξιοτήτων, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να είναι πιο πετυχημένοι στη μάθησή τους.

Όπως εύγλωττα ειπώθηκε από τον Ackermann (2003), η πρόκληση για τους σχεδιαστές του ΠΣ είναι να γίνουν κατανοητά η αξία και τα όρια του εύρους και του βάθους και να διατηρηθεί μια ισορροπία μεταξύ σκοπού και έντασης (σελ. 349). Με άλλα λόγια, θα ήταν αληθινό έργο τέχνης να βρεθεί η χρυσή τομή ανάμεσα σε αυτό που είναι σημαντικό να γνωρίζουμε επιφανειακά και σε βαθύτερο επίπεδο σε συνδυασμό με τις σωματικές, συναισθηματικές και γνωστικές δεξιότητες που απαιτούνται για να είμαστε ικανοί να μαθαίνουμε, να ζούμε και να εργαζόμαστε στο μέλλον.

1.3 Γνωστικές απαιτήσεις – στόχοι ενός ΠΣ

1.3.1 Ταξινομία της μάθησης του Bloom

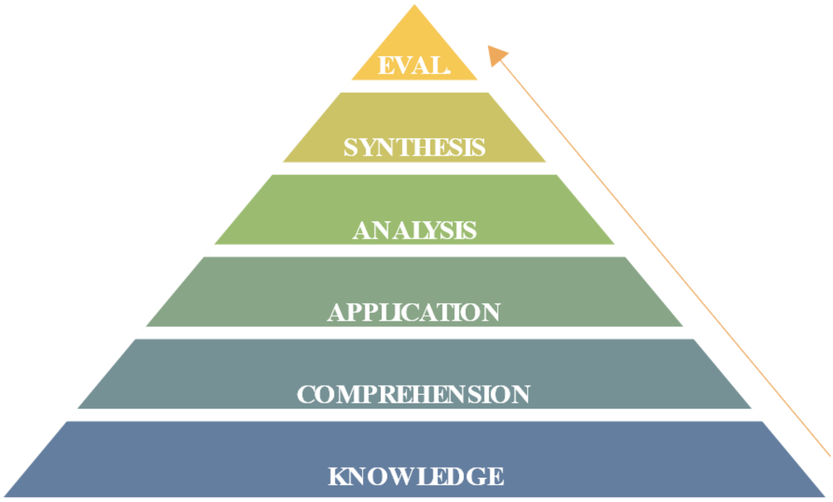
Το 1956 ο Benjamin Bloom, ένας εκπαιδευτικός ψυχολόγος στο πανεπιστήμιο του Σικάγου, πρότεινε μια ταξινόμηση-κατάταξη (ταξινομία) σε ιεραρχική μορφή των εκπαιδευτικών στόχων (educational objectives).

Οι εκπαιδευτικοί στόχοι μπορούν να διακριθούν σε τρεις τομείς:

α) τον γνωστικό (cognitive), που αφορά τις διεργασίες της γνώσης

β) τον συναισθηματικό (affective), που αφορά τις στάσεις (attitudes) και

γ) τον ψυχοκινητικό (psychomotor), που αφορά τις δεξιότητες (skills).



Εικ. 1 . Η ταξινομία του Bloom. K. Miller, 2018[2]

Αναλυτικότερα, στον «γνωστικό τομέα» υπάρχουν τα παρακάτω επίπεδα:

- γνώση (knowledge): ανάκληση δεδομένων ή πληροφορίας. Το χαμηλότερο επίπεδο. Οι μαθητές ονομάζουν μέρη, αναγνωρίζουν, δίνουν ορισμό.

Η συνηθέστερη μορφή μάθησης (ανάκληση γνώσης), όπου ζητείται από τους εκπαιδευόμενους να ανακαλέσουν στη μνήμη τους και να διατυπώσουν ή να κάνουν χρήση πληροφοριών που συγκράτησαν από τη διδασκαλία ή μελέτησαν από διάφορες πηγές. Ουσιαστικά ελέγχεται η απομνημόνευση και η δυνατότητα άρτιας παρουσίασης.

[2] https://www.synergiseducation.com/blooms-taxonomy-and-webbs-depth-of-knowledge/

Ρήματα που χρησιμοποιούνται: ορίζω, περιγράφω, απαριθμώ, αναγνωρίζω, κατονομάζω, κατηγοριοποιώ, ταιριάζω, ονομάζω, διαβάζω, καταγράφω, αναπαράγω, επιλέγω, δηλώνω, βλέπω, γράφω.

- κατανόηση (comprehension): κατανόηση της σημασίας, ερμηνεία προβλημάτων και οδηγιών, δήλωση ενός προβλήματος με διαφορετικές λέξεις. Ο μαθητής ερμηνεύει, εξηγεί γιατί συμβαίνει ένα φαινόμενο, κατατάσσει σε κατηγορίες.

Ελέγχουμε κατά πόσον ο εκπαιδευόμενος κατάλαβε τις έννοιες που διδάχθηκε, προχωρώντας πέρα από την απλή συγκράτηση γνώσεων, αν είναι δηλ. σε θέση να διακρίνει ανάμεσα σε παρόμοια "αντικείμενα" το ζητούμενο και να οδηγηθεί σε περαιτέρω συμπεράσματα. Αξιολογείται έμμεσα από τα αποτελέσματά της, όπως είναι προφανές αφού το ρήμα "καταλαβαίνω", ως μη ενεργητικό, δεν μπορεί να εισαγάγει στόχους.

Ρήματα που χρησιμοποιούνται: κατηγοριοποιώ, αναφέρω, αλλάζω, περιγράφω, συζητώ, εκτιμώ, εξηγώ, γενικεύω, δίνω παραδείγματα, διασαφηνίζω, βγάζω νόημα, παραφράζω, επαναδηλώνω, ανακεφαλαιώνω, συνοψίζω, κατανοώ.

- εφαρμογή (application): χρήση μιας έννοιας ή γενίκευσης σε νέες καταστάσεις και πλαίσια, εφαρμογή της γνώσης από το σχολείο σε άλλους χώρους. Ο μαθητής επιλύει, χρησιμοποιεί αρχές σε πραγματικές καταστάσεις, προβλέπει αποτέλεσμα.

Το τρίτο επίπεδο στην ταξινομία στόχων του Bloom προϋποθέτει και γνώση και κατανόηση από μέρους του εκπαιδευομένου. Εδώ εξετάζεται η ικανότητα της χρησιμοποίησης της γνώσης που δεν απομνημονεύθηκε απλώς, αλλά και κατανοήθηκε και είναι πλέον εργαλείο του μαθητή για επίλυση ζητούμενων καταστάσεων. Αν η επίλυση δεν απαιτεί σχετική γνώση που προέκυψε από τη διδασκαλία, αλλά δίνεται και από άτομα μη σχετικά με το αντικείμενο, τότε δεν πρόκειται για εφαρμογή, αλλά οφείλεται στη νοητική ανάπτυξη και κριτική ικανότητα του εξεταζομένου.

Ρήματα που χρησιμοποιούνται: ενεργώ, εφαρμόζω, διαχειρίζομαι, εκφράζω, ελέγχω, δηλώνω, καθορίζω, αναπτύσσω, ανακαλύπτω, συνεισφέρω, καθιερώνω, επεκτείνω, υλοποιώ, περικλείω, ενημερώνω, διδάσκω, συμμετέχω, προβλέπω, ετοιμάζω, διατηρώ, προβάλλω, παρέχω, συσχετίζω, αναφέρω, δείχνω, λύνω, διδάσκω, μεταφέρω, χρησιμοποιώ, εκμεταλλεύομαι.

- ανάλυση (analysis): διάκριση σε συστατικά μέρη και κατανόηση της οργανωτικής δομής τους. Ο μαθητής συγκρίνει, αντιπαραβάλλει, αναλύει πρόβλημα στα επιμέρους συστατικά.

Ελέγχεται η ικανότητα του ατόμου, το οποίο αφού έχει κατανοήσει το γνωστικό περιεχόμενο, μπορεί να διακρίνει καταστάσεις, προθέσεις και επιπτώσεις που δεν αναγράφονται, και συχνά τροποποιεί την αρχική αντίληψη. Είναι η ικανότητα διάκρισης που συχνά διατυπώνουμε ως μήνυμα του συγγραφέα ή του καλλιτέχνη.

Ρήματα που χρησιμοποιούνται: αναλύω, αποσυνθέτω, κατηγοριοποιώ, συγκρίνω, αντιπαραβάλλω, συσχετίζω, κάνω διάγραμμα, διαφοροποιώ, διακρίνω, διαχωρίζω, εστιάζω, διασαφηνίζω, συμπεραίνω, περιορίζω, περιγράφω, καταδεικνύω, προβάλλω, αναγνωρίζω, χωρίζω, υποδιαιρώ.

- σύνθεση (synthesis): κατασκευή νέας δομής από διαφορετικά στοιχεία, δημιουργία νέου νοήματος ή δομής. Ο μαθητής σχεδιάζει, αναπτύσσει, οργανώνει επιμέρους στοιχεία για τη λύση προβλήματος.

Η αντίστροφη πορεία της διαδικασίας της ανάλυσης. Ελέγχεται η δημιουργική ικανότητα του εξεταζομένου να δομεί ενιαίο σύνολο, που δεν προϋπήρχε, συνδυάζοντας διάσπαρτα στοιχεία. Πρόκειται για παραγωγική διαδικασία.

Ρήματα που χρησιμοποιούνται: προσαρμόζω, προβλέπω, συνεργάζομαι, συνδυάζω, επικοινωνώ, συσσωρεύω, συνθέτω, δημιουργώ, σχεδιάζω, αναπτύσσω, μηχανεύομαι, εκφράζω, διευκολύνω, σχηματίζω, γενικεύω, υποθέτω, ενσωματώνω, εξατομικεύω, αρχικοποιώ, εντάσσω, παρεμβάλλω, εφευρίσκω, μοντελοποιώ, τροποποιώ, ενισχύω, σχεδιάζω, αναδιατάσσω, ανακατασκευάζω, δομώ, συνίσταμαι, καθιστώ έγκυρο.

- αξιολόγηση (evaluation): διατύπωση αξιολογικών κρίσεων. Ο μαθητής εκτιμά, ασκεί κριτική σε μία άποψη, επιχειρηματολογεί ενάντια σε μία πρόταση.

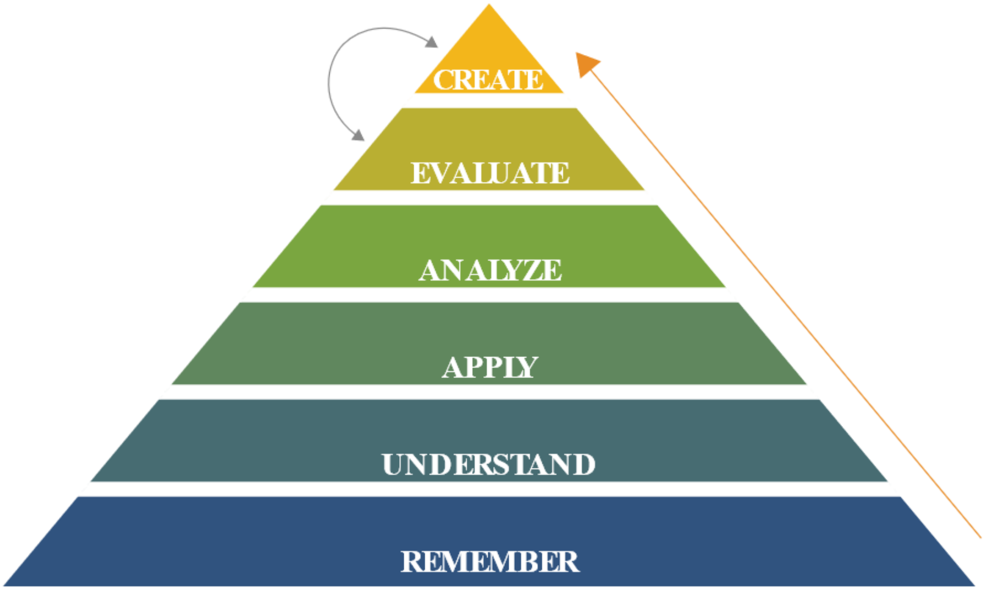
Το ανώτερο επίπεδο στην ταξινομία. Προσπαθούμε να ελέγξουμε την ικανότητα του μαθητή να κρίνει την αξία ή την ποιότητα ενεργειών, τεκμηριώνοντας την άποψή του με συγκεκριμένα κριτήρια που του δίνονται ή θέτει μόνος του. Σε αυτό αποσκοπούν οι ερωτήσεις κρίσης. Πρέπει, βέβαια, να στηρίζονται όσο είναι δυνατόν σε αντικειμενικά κριτήρια και όχι σε εκτιμήσεις (γνώμες) που αποσκοπούν σε προσωπικά συμφέροντα. Η αξιολόγηση αποτελεί "πρελούδιο" για τις νέες γνώσεις.

Ρήματα που χρησιμοποιούνται: επιβραβεύω, συγκρίνω και αντιπαραβάλλω, συμπεραίνω, κριτικάρω, κρίνω, αποφασίζω, υποστηρίζω, ερμηνεύω, δικαιολογώ, αναπλαισιώνω, υπερασπίζομαι.

Το 2001, η ταξινομία του Bloom εκσυγχρονίστηκε από τους Lorin Anderson και David Krathwohl. Οι όροι άλλαξαν από ουσιαστικά σε ρήματα, όπως γνώση που πρέπει να ανακαλούμε (knowledge to remember) και ικανότητα να κατανοούμε (comprehension to understand). Οι θεμελιώδεις έννοιες όμως δεν άλλαξαν. Μία από τις μεγαλύτερες αλλαγές ήταν η αλλαγή της σειράς της αξιολόγησης (evaluation) που έρχεται ένα επίπεδο πριν από την σύνθεση (synthesis), (Armstrong, 2017). Όπως και πριν, οι έξι κατηγορίες ξεκινούν από την απλούστερη, ανακαλούμε (remember) έως την πιο πολύπλοκη, δημιουργούμε (create).

Καθώς περνάμε από τις κατηγορίες, έχουμε μια καλύτερη εικόνα για το επίπεδο της γνωστικής αυστηρότητας που εμπλέκεται στη μάθηση. Η κατανομή κάθε κατηγορίας παρουσιάζεται παρακάτω:

- Ανακαλούμε (remember), να είμαστε σε θέση να ανακαλέσουμε, να ορίσουμε ή να επισημάνουμε.
- Κατανοούμε (understand), δηλαδή μπορούμε να συνοψίσουμε και να ταξινομήσουμε.
- Εφαρμόζουμε (apply), το οποίο απαιτεί κάποιο επίπεδο εφαρμογής ή να ακολουθήσουμε μια διαδικασία.
- Αναλύουμε (analyze), σπάμε σε τμήματα μια έννοια για βαθύτερη ανάλυση
- Αξιολογούμε (evaluate), δικαιολογούμε, επιχειρηματολογούμε, βάση έρευνας.
- Δημιουργούμε (create), δηλαδή αναπτύσσουμε κάτι νέο με βάση το σύνολο της μάθησης.

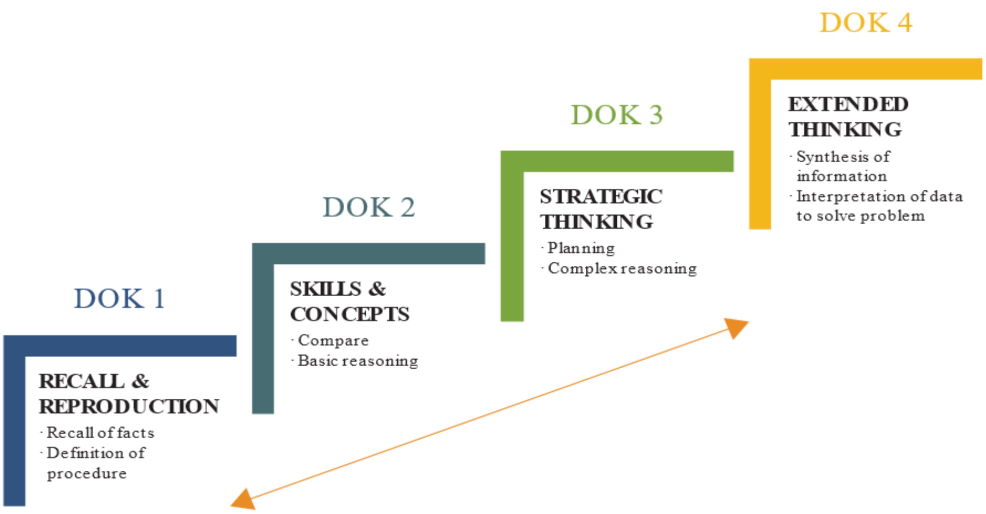


Εικ. 2. Η εκσυγχρονισμένη ταξινομία του Bloom. Updated Framework, K. Miller, 2018

1.3.2 Το πλαίσιο DoK (Webb's Depth of Knowledge)

Το DoK είναι άλλο ένα είδος πλαισίου που χρησιμοποιείται για να αναγνωριστεί το επίπεδο της αυστηρότητας των δραστηριοτήτων. Το 1997, ο Dr. Norman Webb ανέπτυξε το DoK για να κατηγοριοποιήσει δραστηριότητες ανάλογα με το επίπεδο πολυπλοκότητας στη σκέψη. Ουσιαστικά, ο στόχος του DoK είναι να καθορίσει το πλαίσιο - το σενάριο, το περιβάλλον ή την κατάσταση - στην οποία οι μαθητές εκφράζουν το βάθος και την έκταση της μάθησης (Francis, 2017).

Αυτό το πλαίσιο αποτελείται από 4 επίπεδα, με το 1^{ο} να είναι το απλούστερο και το 4^{ο} το πιο σύνθετο.



Εικ.3. Webb's Depth of Knowledge, K. Miller, 2018

- Επίπεδο 1: Η αποκτηθείσα γνώση (Acquired Knowledge). Περιλαμβάνει την ανάκληση και την αναπαραγωγή. Ανάκληση γεγονότων και καθορισμός μιας διαδικασίας.
- Επίπεδο 2: Εφαρμογή γνώσης (Knowledge Application). Δεξιότητες και έννοιες. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις έννοιες που έχουν μάθει για να απαντήσουν σε ερωτήματα.
- Επίπεδο 3: Ανάλυση (Analysis). Περιλαμβάνει τη στρατηγική σκέψη. Η πολυπλοκότητα αυξάνεται εδώ και περιλαμβάνει σχεδιασμό, δικαιολόγηση και περίπλοκο συλλογισμό. Εξηγεί πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι έννοιες και οι διαδικασίες για την παροχή αποτελεσμάτων.
- Επίπεδο 4: Εκτεταμένη σκέψη (Augmentation). Αυτό απαιτεί να προχωρήσουμε πέρα από την τυπική μάθηση και να αναρωτηθούμε πώς αλλιώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μάθηση σε ένα πραγματικό περιβάλλον.

Η κύρια διαφορά μεταξύ της ταξινομίας του Bloom και του πλαισίου DoK είναι τι ακριβώς μετράται. Η ταξινομία του Bloom μετρά το γνωστικό επίπεδο που αναμένεται να αποκτήσουν οι μαθητές, ώστε να αποδείξουν την μαθησιακή τους εμπειρία. Από την άλλη πλευρά, το DoK επικεντρώνεται περισσότερο στο πλαίσιο - το σενάριο, το περιβάλλον ή η κατάσταση - στην οποία οι μαθητές αναμένεται να εκφράσουν τη μάθηση.

1.4 Μαθηματική Αυστηρότητα – Rigour

1.4.1 Ορίζοντας τη μαθηματική αυστηρότητα – rigour στη Μαθηματική Τάξη

Ενώ οι εκπαιδευτικοί επηρεάζουν το κλίμα και τις συνθήκες μέσα στην τάξη, η μαθηματική αυστηρότητα είναι ό,τι κάνουν οι μαθητές για να βελτιώσουν την μόρφωσή τους. Η αυστηρότητα είναι το αποτέλεσμα της ενεργητικής συμμετοχής στη βαθιά μαθηματική σκέψη και στην εντατική αιτιολόγηση. Ο βαθμός της μαθηματικής αυστηρότητας καθορίζεται από τη γνώση και την κατανόηση που έχει αποκτήσει κάθε μαθητής.

Η μαθηματική αυστηρότητα έχει διττή σημασία. Διακρίνουμε την μαθηματική αυστηρότητα:

α. ως προς το περιεχόμενο: είναι το βάθος των αλληλένδετων εννοιών και το εύρος των δεξιοτήτων που αναμένεται να κατανοήσουν οι μαθητές β. ως προς τη διδασκαλία: είναι η αποτελεσματική διαρκής αλληλεπίδραση μεταξύ της διδασκαλίας και της μαθητικής σκέψης για τις έννοιες, τις δεξιότητες και τις εργασίες, που επιφέρει συνειδητή και αξιόλογη γνώση για κάθε μαθητή (Hull, Miles & Balka , 2013).

1.4.2 Mathematical Rigour: η αξιωματική μέθοδος του Hilbert

Το 1900 στο λόγο του στο Παρίσι ο Hilbert γράφει: «Αυτή η απαίτηση για λογικό συμπέρασμα μέσω περιορισμένου αριθμού διαδικασιών είναι η απαίτηση για αυστηρότητα στην εκτέλεση των αποδείξεων», (Hilbert, 1900a). Ο Hilbert θεωρεί ότι η αυστηρότητα είναι μια γενική απαίτηση για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, είναι σημαντική για τη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών προτάσεων και για μια αποτελεσματική διαδικασία. Κάθε ερώτημα που ανακύπτει πρέπει να απαντάται με καθορισμένο τρόπο με περιορισμένα μέσα. Η απαίτηση του Hilbert για αυστηρότητα συντίθεται από δύο μέρη:

α. οι κανόνες που απαιτούνται για την απόδειξη του συμπεράσματος πρέπει να είναι προκαθορισμένοι

β. η αποδεικτική διαδικασία πρέπει να είναι "περιορισμένη", με την έννοια ότι η λύση αποκτάται από έναν περιορισμένο αριθμό δεδομένων με έναν περιορισμένο αριθμό επαγωγικών βημάτων.

Η εκπλήρωση των υπό α΄ και β΄ συνθηκών εγγυάται την αντικειμενικότητα της απόδειξης, με την έννοια ότι τελειώνει με το ίδιο αποτέλεσμα, ανεξαρτήτως ποιος τη διεξάγει. Αν η απόδειξη δομήθηκε με απόλυτο σεβασμό της απαίτησης για αυστηρότητα, το αποτέλεσμα θα είναι "οριστικό" και "αδιαμφισβήτητο",(Ogawa, 2009).

Για τον Hilbert η μαθηματική αυστηρότητα στην απόδειξη (ή μη) ενός προβλήματος επιπλέον οδηγεί "στο ταξίδι στη γνώση".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Η «νέα» διδασκαλία της Άλγεβρας στο Γυμνάσιο

2.1 Σκοπός της διδασκαλίας της Άλγεβρας και ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης

2.1.1 Εισαγωγή

Η Άλγεβρα αποτελεί σημαντικό κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών. Βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος της μαθηματικής εκπαίδευσης, γιατί μπορεί και συνδέει διαφόρων ειδών προβλήματα της καθημερινής και όχι μόνο ζωής, με τον εικονικό κόσμο των μαθηματικών. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην Άλγεβρα μπορεί εύκολα να αποδώσει, αλλά και να μετατρέψει - μετασχηματίσει μαθηματικές σκέψεις και προβληματισμούς. Ουσιαστικά, η Άλγεβρα που πρωτοδιδάσκεται στη Στ΄ Δημοτικού και σε μαθητές του Γυμνασίου στην Ελλάδα έχει να κάνει με την κατανόηση των μεταβλητών και της γενικότερης χρήσης τους.

2.1.2 Σκοπός της διδασκαλίας της Άλγεβρας

Σύμφωνα με τον Usiskin (1988) η Άλγεβρα είναι γενίκευση της αριθμητικής. Είναι τρόπος επίλυσης προβλημάτων, μελέτης των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, μελέτη δομών. Θεωρεί ότι «ο σκοπός της διδασκαλίας της Άλγεβρας καθορίζεται από - ή συσχετίζεται με - τις διαφορετικές αντιλήψεις της Άλγεβρας, οι οποίες σχετίζονται με τη διαφορετική σχετική σημασία που δίνεται στις διάφορες χρήσεις των μεταβλητών». Καθορίζει δε ο Usiskin (1988, σελ. 9-12) τέσσερις κατηγορίες αντιλήψεων:

α) Η Άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική. Για παράδειγμα $3 + 2 = 2 + 3$ μπορεί να γενικευθεί από το $α + β = β + α$. Οι βασικές οδηγίες για τους μαθητές εδώ είναι «μεταφράστε και γενικεύστε».

β) Η Άλγεβρα ως μελέτη των διαδικασιών επίλυσης διαφόρων τύπων προβλημάτων. Για παράδειγμα «ο αριθμός 5 προστίθεται στο τετραπλάσιο ενός αριθμού και το άθροισμα είναι 45. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;» Το οποίο μπορεί να μεταφραστεί ως $4x + 5 = 45$. Εδώ, υπό την αντίληψη της γενίκευσης, οι μαθητές δεν έχουν την αίσθηση του αγνώστου, αλλά δημιουργούν πρότυπα ή αλλιώς νόρμες. Δηλαδή, μοντελοποιούν. Σύμφωνα όμως με τη δεύτερη αντίληψη των διαδικασιών, μόλις αρχίσανε και πρέπει να λύσουν αυτή την εξίσωση. Σε αυτή την περίπτωση φυσικά έχουμε αγνώστους ή ακόμη και σταθερές. Εδώ οι βασικές οδηγίες είναι «απλοποιείστε και λύστε».

γ) Η Άλγεβρα ως μελέτη σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Γράφοντας S=u*t περιγράφουμε τη σχέση μεταξύ τριών ποσοτήτων, του διαστήματος, της ταχύτητας και του χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Εδώ θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε γενίκευση, αν και οι τύποι όπως ο παραπάνω δείχνουν ότι οι μεταβλητές διαφέρουν. Υπό αυτή την αντίληψη, οι μεταβλητές που εμφανίζονται θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ορίσματα ή παράμετροι. Εδώ εμφανίζεται η έννοια της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, καθώς και η έννοια της συνάρτησης.

δ) Η Άλγεβρα ως μελέτη δομών. Αν και αυτές εμφανίζονται σε μεγαλύτερες τάξεις, όπως στο Λύκειο, η εισαγωγή τους ξεκινά από το Γυμνάσιο, για παράδειγμα παραγοντοποίηση και ταυτότητες. Σε αυτή την περίπτωση δεν έχω γενίκευση, ούτε όρισμα, ούτε εξίσωση προς λύση.

Μια δεύτερη προσέγγιση για την Άλγεβρα και τους σκοπούς της διδασκαλίας της δίνουν οι Stacey, Chick and Kendal (2004). Την περιγράφουν ως τρόπο γενίκευσης, μελέτη χειρισμού συμβόλων και επίλυση εξισώσεων, μελέτη συναρτήσεων, επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, ένα τυπικό σύστημα λογικής και πράξεων. Οι δύο προσεγγίσεις διαφέρουν στον τρόπο εστίασης κάθε τομέα της Άλγεβρας, αλλά δεν είναι ασύμβατες μεταξύ τους.

Οι Arcavi, Drijvers και Stace (2017) θεωρούν ότι οι σκοποί της διδασκαλίας της Άλγεβρας στα σχολεία πρέπει να περιλαμβάνουν την «έκφραση γενικεύσεων, τη δημιουργία σχέσεων, την επίλυση προβλημάτων, τη διερεύνηση ιδιοτήτων, την απόδειξη θεωρημάτων και υπολογισμούς».

Οι Leung, Clarke, Holton και Park (2014) σελ. 10, μελετώντας το πώς διδάσκεται η Άλγεβρα ανά τον κόσμο, σημείωσαν την έλλειψη καθολικότητας της διδασκαλίας της σχολικής Άλγεβρας.

2.1.3 Ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης κατά την διδασκαλία

Την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης κατά τη διδασκαλία της Άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση επισήμανε ο Freudenthal (1977), θεωρώντας ότι η σχολική άλγεβρα δεν περιλαμβάνει μόνο την επίλυση εξισώσεων, αλλά και την ικανότητα να των μαθητών να περιγράφουν τις σχέσεις και τις διαδικασίες επίλυσης γενικότερα (σ.

193-194), παρουσιάζοντας έτσι μια εννοιολογική πτυχή της σχολικής Άλγεβρας (Kieran, 2018).

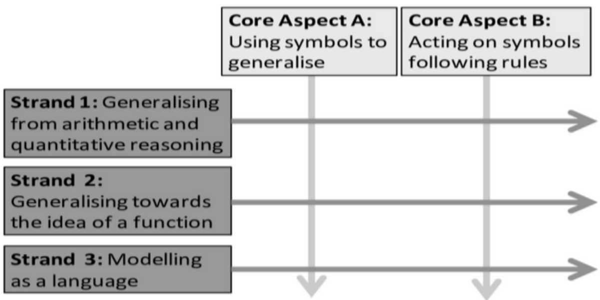
Ο Kaput (2008, σελ. 5 - 17) θεωρεί δύο τις βασικές πτυχές της αλγεβρικής σκέψης: α) ως γενίκευση και έκφραση της γενίκευσης σε όλο και πιο συστηματικά τυπικά συστήματα συμβόλων και β) ως συντακτικά καθοδηγούμενη δράση σε σύμβολα μέσα σε οργανωμένα συστήματα συμβόλων, που ενσωματώνονται στις τρεις τροχιές της Άλγεβρας. Ο Kaput ορίζει τις προαναφερθείσες τρεις τροχιές της Άλγεβρας ως εξής:

1) Η Άλγεβρα ως μελέτη των δομών και των συστημάτων που αντλούνται από τους υπολογισμούς και τις σχέσεις, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που προκύπτουν στην αριθμητική (άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική) και στην ποσοτική συλλογιστική,

2) Η άλγεβρα ως μελέτη πράξεων, σχέσεων και κοινών μεταβολών (joint variation),

3) Η Άλγεβρα ως η εφαρμογή ενός συμπλέγματος γλωσσών μοντελοποίησης τόσο εντός όσο και εκτός των μαθηματικών.

Σημειώνει δε, ότι η τροχιά 1 σε προηγμένα επίπεδα οδηγεί στην αφηρημένη Άλγεβρα, η τροχιά 2 ορίζεται από αλγεβρικής απόψεως ως μαθηματική πειθαρχεία, όμως δεν είναι αυστηρά Άλγεβρα, αλλά Ανάλυση (για παράδειγμα, ο Schwartz (1990) θεωρεί ότι η σχολική Άλγεβρα μπορεί να συγκροτηθεί πάνω στις συναρτήσεις). Τέλος η 3η τροχιά συχνά περιλαμβάνει και τη δεύτερη τροχιά, ανάλογα με το πώς αντιμετωπίζονται οι μεταβλητές (ως άγνωστοι, ως παράμετροι ή ως μεταβλητές).



Εικ. 4. Kaput's core aspects of Algebra[3]

[3] Patterns, functions and algebra in the South African primary mathematics curriculum: Towards more detail for South African teachers - Scientific Figure on ResearchGate. Available from:

Νωρίτερα ο Kaput (1998) παρουσίασε τέσσερις τροχιές περιεχομένου της Άλγεβρας που ανταποκρίνονται σε τέσσερις τροχιές αλγεβρικής σκέψης: α) Γενικευμένη Αριθμητική, β) Λειτουργική Σκέψη, γ) Γλώσσες Μοντελοποίησης, και δ) Αλγεβρική Απόδειξη.

Σε πρόσφατη έρευνά τους οι Pitta-Pantazi, Chimoni & Christou (2019), διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πρώτα λύνουν εργασίες που απαιτούν λειτουργική σκέψη και μόνο όταν το πετύχουν αυτό, προχωρούν στην επίλυση εργασιών γενικευμένης αριθμητικής, μετά μοντελοποιούν και στο τέλος αποδεικνύουν.

2.2 Νεότερες θεωρητικές προσεγγίσεις διδασκαλίας των μαθηματικών

Οι θεωρίες μάθησης και οι θεωρητικές διδακτικές προσεγγίσεις αποτελούν κύριο άξονα διαμόρφωσης ενός αναλυτικού προγράμματος σπουδών (από εδώ και στο εξής ΑΠΣ). Η αμφισβήτηση του μπιχεβιορισμού και η ευρεία αποδοχή του κονστρουκτιβισμού, με κύριους εκφραστές τον Piaget, Ausubel και Bruner, του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού του Vygotsky, καθώς και της ανθρωπιστικής προσέγγισης του Maslow, παρουσίασε νέους παράγοντες, που έπρεπε να ληφθούν υπόψιν κατά τη διδασκαλία, δημιουργώντας μία μαθητοκεντρική προσέγγιση διδασκαλίας στα ΑΠΣ των μαθηματικών. Το κίνημα των λεγόμενων «μοντέρνων» μαθηματικών στη δεκαετία του 1960 και 1970 (στην Ελλάδα εισήλθε με καθυστέρηση στη δεκαετία του 1980), στηρίχθηκε στις απόψεις των Piaget και του μαθητή του Bruner. Σύμφωνα με τον τελευταίο, αποστολή του σχολείου είναι να βοηθήσει το μαθητή να αναπτύξει στρατηγικές μάθησης και λύσης προβλημάτων. Για να επιτύχει τον σκοπό αυτό, το σχολείο πρέπει να οργανώσει κατάλληλα το αναλυτικό πρόγραμμα, έτσι ώστε να στηρίζεται στη θεμελιακή κατανόηση, η οποία μπορεί να προκύψει από τη μελέτη των αρχών και των διαδικασιών, οι οποίες στηρίζουν και συναποτελούν τη δομή ενός συγκεκριμένου επιστημονικού κλάδου (Καψάλης & Λεμονίδης,1999). Τα «μοντέρνα μαθηματικά» επικρίθηκαν σε πολλές χώρες, όπως για παράδειγμα οι ΗΠΑ, ως υπεύθυνα των χαμηλών επιδόσεων των μαθητών σε διεθνείς συγκριτικές έρευνες (Καψάλης & Λεμονίδης,1999).

---

https://www.researchgate.net/figure/Kaputs-Core-Aspects-and-Strands-of-Algebra_fig1_263279624 [accessed 30 Dec, 2019]

Ξεκινώντας από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα, ο Brownell (1935) παρουσίασε τρεις θεωρίες για τη διδασκαλία της αριθμητικής, τη θεωρία της Εξάσκησης (Drill Theory), τη θεωρία του Νοήματος (Meaning Theory) και τη θεωρία της Συμπτωματικής Μάθησης (Incidental-Learning Theory).

Η διδασκαλία μέσω της θεωρίας της εξάσκησης, Brownell (1935) στα μαθηματικά στηρίζεται στην απομνημόνευση. Είναι μια μηχανιστική θεωρία με βάση τον μηχανισμό μάθησης του μπιχεβιορισμού, δηλαδή της κλασικής και λειτουργικής εξάρτησης. Απεναντίας, ο κονστρουκτιβισμός (ή εποικοδομισμός) αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στη διαδικασία μάθησης, διαδικασία κατά την οποία το άτομο δομεί ενεργά νέες ιδέες ή έννοιες, βασιζόμενο σε νέες ή παλαιότερες πληροφορίες. Η διαδικασία αποτελεί προσωπικό εγχείρημα και περνά από διάφορα στάδια εξέλιξης.

Πολλοί υποστηρικτές του κονστρουκτιβισμού στη Μαθηματική Εκπαίδευση αντιπαραβάλουν την ανακαλυπτική μάθηση που βασίζεται σε προβλήματα, με τη μετωπική διδασκαλία των γεγονότων και την εξάσκηση διαδικαστικών δεξιοτήτων. Η πρώτη βασίζεται στον εποικοδομισμό, αλλά η δεύτερη έχει τα μπιχεβιοριστικά χαρακτηριστικά (Wheatley, 1991).

Η διδασκαλία με τη θεωρία του Νοήματος στηρίζεται στο να παρατηρήσουν τα παιδιά τι βγάζει νόημα σε αυτό που μαθαίνουν Brownell (1935). Επιπλέον στη θεωρία του Νοήματος δεν υπάρχει απολύτως καμία θέση για την άποψη της αριθμητικής ως ετερογενούς μάζας μη σχετιζόμενων μεταξύ τους στοιχείων που πρέπει να διδάσκονται μέσω της επανάληψης (Weaver και Suydam, 1972, σελ. 11). Επιπλέον, αυτή η θεωρία επιτρέπει την πλήρη αναγνώριση της αξίας των εμπειριών των παιδιών ως τρόπου εμπλουτισμού των αριθμητικών ιδεών τους και δίνοντάς τους κίνητρα για τη μάθηση νέων αριθμητικών δεξιοτήτων(Weaver et all, 1972, σελ. 11). Αυτή η θεωρία είναι όμοια με την κοινωνική θεωρία μάθησης του Vygotsky (1962).

Μία ακόμη θεωρία που ήταν αντίδραση στη θεωρία της εξάσκησης ήταν η Συμπτωματική μάθηση. Στηρίζεται στις αρχές του εποικοδομισμού του Piaget και θεωρεί ότι τα παιδιά από μόνα τους, μέσα από «φυσική» συμπεριφορά σε καταστάσεις που είναι μόνο εν μέρει αριθμητικές, θα αναπτύξουν επαρκείς αριθμητικές έννοιες, θα επιτύχουν αξιοπρεπή ικανότητα στις θεμελιώδεις πράξεις, θα ανακαλύψουν ζωτικές χρήσεις για την αριθμητική που μαθαίνουν και θα αποκτήσουν πραγματική επάρκεια στην προσαρμογή σε ποσοτικές καταστάσεις. Η μάθηση γίνεται μέσω της συμπτωματικής εμπειρίας. Ο Brownell (1935) άσκησε κριτική σε αυτή τη θεωρία λέγοντας ότι δεν είναι πρακτική για τρεις λόγους:

- η μάθηση αυτή, που συντελείται είτε μέσω μονάδων είτε μέσω απεριόριστων εμπειριών, είναι αργή και χρονοβόρα.
- Η αριθμητική ικανότητα αναπτύσσεται σε αυτές τις αόριστες συνθήκες θα είναι αποσπασματική, επιφανειακή και μηχανική.
- Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν γενικά την εμπειρία να εφαρμόσουν αποτελεσματικά μια τέτοια προσέγγιση.

Η εμφάνιση των ρεαλιστικών μαθηματικών (Realistic Mathematics Education - RME) ή μαθηματικών της πραγματικής ζωής, στις αρχές της δεκαετίας του 70 με θεμελιωτή τον H. Freudenthal (1973) έδωσε νέες επιλογές για την διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της επίλυσης πραγματικών προβλημάτων. Είναι μία θεωρία διδασκαλίας και μάθησης που υιοθετήθηκε στα ΑΠΣ πολλών χωρών, όπως η Βρετανία, η Βραζιλία, η Δανία, οι ΗΠΑ, η Γερμανία, η Ιαπωνία, η Ισπανία, η Πορτογαλία και η Μαλαισία (De Lange, 1996). Δύο από τις σημαντικές απόψεις της ΡΜΕ είναι ότι τα μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, όπως επίσης και ως ανθρώπινη δραστηριότητα.

Πρώτον, τα μαθηματικά πρέπει να είναι κοντά στα παιδιά και να είναι συναφή με τις καθημερινές καταστάσεις της ζωής. Ωστόσο, η λέξη «ρεαλιστική» δεν αναφέρεται μόνο στη σχέση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά αναφέρεται επίσης σε προβληματικές καταστάσεις που είναι πραγματικές στο μυαλό των μαθητών. Όσον αφορά τη διδασκαλία, τα προβλήματα που πρέπει να παρουσιαστούν στους μαθητές μπορούν να είναι μέσα από ένα πλαίσιο της πραγματικής ζωής, αλλά αυτό δεν είναι πάντοτε απαραίτητο. Ο De Lange (1996) δήλωσε ότι οι προβληματικές καταστάσεις μπορούν επίσης να θεωρηθούν εφαρμογές της μοντελοποίησης.

Δεύτερον, τονίζεται η ιδέα των μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας. Οι μαθητές δεν θα πρέπει να θεωρούνται ως παθητικοί παραλήπτες μαθηματικών εννοιών, αλλά να επαναεφευρίσκουν τις έννοιες. Η διδασκαλία μιας έννοιας γίνεται μέσω δύο σταδίων, της οριζόντιας και της κάθετης μαθηματικοποίησης (Treffers, 1987). Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, οι μαθητές καταλήγουν σε μαθηματικά εργαλεία, που μπορούν να βοηθήσουν στην οργάνωση και επίλυση ενός προβλήματος που βρίσκεται σε μια πραγματική κατάσταση. Οι ακόλουθες δραστηριότητες είναι παραδείγματα οριζόντιας μαθηματικοποίησης: προσδιορισμός ή περιγραφή των συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών σε ένα γενικό πλαίσιο, σχηματοποίηση, διατύπωση και οπτικοποίηση ενός προβλήματος με διάφορους τρόπους, ανακάλυψη σχέσεων, ανακάλυψη κανονικοτήτων, αναγνώριση κοινών χαρακτηριστικών σε διάφορα προβλήματα, μεταφορά ενός πραγματικού προβλήματος σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Από την άλλη πλευρά, η κάθετη μαθηματικοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία το αρχικό πρόβλημα έχει μεταφραστεί μαθηματικά και επεξεργάζεται με μαθηματικά εργαλεία. Οι ακόλουθες δραστηριότητες είναι παραδείγματα κάθετης μαθηματικοποίησης: αναπαράσταση μιας σχέσης με έναν τύπο, απόδειξη κανονικοτήτων, βελτίωση και προσαρμογή μοντέλων.

Ο Treffers (1987) περιγράφει τα πέντε χαρακτηριστικά της PME.

- Η χρήση πλαισίων.
- Η χρήση μοντέλων.
- Χρήση κατασκευών που έχουν παράγει οι ίδιοι οι μαθητές.
- Ο αλληλεπιδραστικός χαρακτήρας της διδακτικής διαδικασίας.
- Η αλληλοεπικάλυψη διαφόρων τροχιών μάθησης.

Στα μαθηματικά, γενικότερα, γίνεται παραδοσιακά διάκριση μεταξύ των εννοιολογικών γνώσεων και των διαδικαστικών δεξιοτήτων (Brownell, 1944). Η εννοιολογική γνώση ορίζεται ως αφηρημένη μαθηματική γνώση που είναι πλούσια σε σχέσεις (Hiebert & LeFevre, 1986). Η εννοιολογική γνώση κατασκευάζεται συνειδητά και χαρακτηρίζεται ως μάθηση εις βάθος. Η διαδικαστική γνώση αποτελείται από σειρά βημάτων ή ενεργειών ή σταδίων που απαιτούνται για την επίτευξη ενός στόχου. Θεωρείται χαμηλού επιπέδου γνώση, η οποία μπορεί να αποκτηθεί με εξάσκηση και επαναλήψεις ρουτίνας μέχρι να απομνημονευθεί (Baroody, 2003; Hiebert & LeFevre, 1986).

Στη νεότερη εποχή, οι Baroody και Dowker (2003) ξεχωρίζουν τέσσερις θεωρητικές προσεγγίσεις για την διδασκαλία των μαθηματικών: την προσέγγιση δεξιοτήτων, την εννοιολογική, της επίλυσης προβλήματος και την ερευνητική.

Η Προσέγγιση Δεξιοτήτων (Skills Approach) είναι ανάλογη με τη θεωρία εξάσκησης του Brownell (1935) και βασίζεται στην απομνημόνευση των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, η μαθηματική γνώση θεωρείται απλά μια συλλογή χρήσιμων πληροφοριών όπως τύπων, κανόνων, αριθμητικών γεγονότων και διαδικασιών. Οι μαθητές θεωρείται ότι δεν γνωρίζουν τίποτε και ο σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να τους πληροφορήσει πώς να κάνουν μαθηματικά. Σε αυτήν την προσέγγιση, ο εκπαιδευτικός απλά μεταφέρει τις βασικές δεξιότητες μέσω μιας άμεσης διδασκαλίας, χωρίς να εξηγεί για την κατανόηση και σκοπιμότητα των διαδικασιών.

Η Εννοιολογική Προσέγγιση (Conceptual Approach) είναι ανάλογη με τη θεωρία του νοήματος του Brownell (1935) και εστιάζει στην ουσιαστική μάθηση των δεξιοτήτων. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην παραδοχή ότι τα μαθηματικά είναι ένα δίκτυο δεξιοτήτων και εννοιών. Μελετήθηκε πολύ στο χώρο της εκπαίδευσης των μαθηματικών η σχέση μεταξύ κατανόησης και δεξιοτήτων (Hiebert & Carpenter, 1992). Ο τρόπος που αλληλοεπιδρούν η εννοιολογική κατανόηση και η διαδικαστική δεξιότητα είναι πολύ σημαντικό θέμα στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Kilpatrick, 1988). Ο στόχος με την προσέγγιση αυτή είναι οι μαθητές να μάθουν με κατανόηση τα αριθμητικά γεγονότα, τους κανόνες και τις διαδικασίες. Η διδασκαλία βασίζεται στην ετοιμότητα των μαθητών να κατανοήσουν κατασκευάζοντας τη γνώση.

Η Προσέγγιση Επίλυσης Προβλήματος (Problem Solving Approach) είναι ανάλογη με τη θεωρία της Συμπτωματικής Μάθησης του Brownell (1935) και δίνει έμφαση στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης δηλαδή το συλλογισμό και την επίλυση προβλήματος. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στη θεώρηση ότι τα μαθηματικά χρησιμοποιούν κυρίως την έρευνα και ψάχνουν για κανονικότητες κατά την επίλυση προβλημάτων, έτσι θεμελιώνουν έναν ειδικό τρόπο σκέψης. Η περιέργεια των μαθητών δημιουργεί κίνητρο για να ερευνήσουν ένα πρόβλημα και να αναπτύξουν τις δεξιότητες που απαιτούνται για την επίλυσή του. Το κίνητρο αυτό είναι μεγαλύτερο από ό,τι σε μια διδασκαλία δεξιοτήτων χωρίς πλαίσιο και δίνει ιδιαίτερη αξία στην επίλυση προβλημάτων ως μέσο για την εκμάθηση νέων εννοιών και δεξιοτήτων ή για την ενίσχυση των δεξιοτήτων που έχουν ήδη αποκτηθεί (Stanic and Kilpatrick, 1989; NCTM, 1989). Τα προβλήματα γίνονται τελικά ένα μέσο για μάθηση, την οποία ο Wheeler (1988) αποκαλεί ‘μαθηματικοποίηση’ δηλαδή, είναι η διαδικασία με την οποία δημιουργούνται τα μαθηματικά. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα της επιλογής τους, ανεξάρτητα από το αν έχουν λάβει επίσημη διδασκαλία με το σχετικό περιεχόμενο.

Η Διερευνητική Προσέγγιση (Investigative Approach) μπορεί να θεωρηθεί σύνθεση ή ένωση της Εννοιολογικής Προσέγγισης και της Προσέγγισης Επίλυσης Προβλήματος, επειδή εστιάζει αφενός στην ουσιαστική μάθηση των δεξιοτήτων και αφετέρου στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Όπως επισημαίνουν οι Baroody & Dowker (2003, σελ. 22), στη Διερευνητική προσέγγιση, όπως στην εννοιολογική προσέγγιση, τα μαθηματικά θεωρούνται ως ένα δίκτυο δεξιοτήτων και εννοιών και όπως στην προσέγγιση επίλυσης προβλήματος, θεωρούνται ως διαδικασία διερεύνησης. Σύμφωνα με την προσέγγιση επίλυσης προβλήματος και σε αντίθεση με την εννοιολογική προσέγγιση, οι μαθητές θεωρούνται ικανοί να κατασκευάσουν ενεργά την κατανόηση. Σε αντίθεση με την προσέγγιση επίλυσης προβλήματος, στη διερευνητική προσέγγιση η ενεργή κατανόηση των μαθητών πραγματοποιείται μέσω της παρέμβασης και καθοδήγησης του εκπαιδευτικού. Ο εκπαιδευτικός για το σκοπό αυτό χρησιμοποιεί προγραμματισμένες δραστηριότητες, αλλά και απρογραμμάτιστες 'μαθησιακές στιγμές'. Τελικά, κατά τη διερευνητική προσέγγιση, χρησιμοποιούνται διδακτικές οδηγίες στοχοθετημένες, γεμάτες νόημα και βασισμένες στην έρευνα.

2.3 Στόχοι ενός σύγχρονου ΑΠΣ στην Άλγεβρα της υποχρεωτικής εκπαίδευσης

2.3.1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με το πόσο σημαντική είναι η Άλγεβρα για την υποχρεωτική εκπαίδευση, γιατί τα παιδιά πρέπει να μαθαίνουν Άλγεβρα, τι πρέπει να μαθαίνουν οι μαθητές στην Άλγεβρα και τι πρέπει να περιέχεται – ποιοι πρέπει να είναι οι στόχοι στα σύγχρονα ΑΠΣ της Άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

2.3.2 Από το παραδοσιακό στο σύγχρονο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στην Άλγεβρα

Η διδασκαλία της Άλγεβρας έως πριν λίγο καιρό, στις περισσότερες χώρες έδειχνε έμφαση στην εξάσκηση ικανοτήτων, όπως την παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων, την απλοποίηση κλασμάτων με παρενθέσεις, την επίλυση εξισώσεων, το χειρισμό γενικότερα των μεταβλητών και στο τέλος την επίλυση κάποιων λεκτικών προβλημάτων. Ένα τέτοιο πρόγραμμα σπουδών δεν ανταποκρίνεται στις ανάγκες των μαθητών στη σύγχρονη κοινωνία. Η αύξηση των μαθητών της γενικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η ανάπτυξη της τεχνολογίας και η ανάγκη για τη βελτίωση της διδασκαλίας λόγω των φτωχών αποδόσεων των μαθητών, έθεσαν ζητήματα για την αλλαγή σε ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών για την Άλγεβρα (MacGregor, 2004). Στις αρχές του 20^ου^ αιώνα στην εκπαίδευση είχαν πρόσβαση άτομα που σκόπευαν να έχουν τεχνική και επαγγελματική καριέρα. Η γενική εκπαίδευση θεσμοθετήθηκε αργότερα με σκοπό υπεύθυνα να φροντίσει για τις ικανότητες και τα ενδιαφέροντα ενός ευρέος φάσματος μαθητών.

Η μάθηση που βασίζεται στην ανάγνωση και τη γραφή, όπως η παραδοσιακή σχολική άλγεβρα του χειρισμού των συμβόλων και των λεκτικών προβλημάτων, δεν είναι κατάλληλη για τους μαθητές με αδύναμες δεξιότητες αλφαβητισμού και αριθμητικής. Αυτοί οι μαθητές προτιμούν να μαθαίνουν μέσω λεκτικής αλληλεπίδρασης και συγκεκριμένων δραστηριοτήτων (Marks & Ainley, 1997). Επιπλέον το κοινωνικό υπόβαθρο κάποιων μαθητών δεν τους ενθαρρύνει στο να δείχνουν ενδιαφέρον στην αφηρημένη και συμβολική πληροφορία (Boaler, 2000; Mellin-Olsen, 1987). Γενικά, υπάρχουν διαφορετικές απόψεις για τον στόχο «Άλγεβρα για όλους» και κατά πόσο μπορεί να επιτευχθεί.

Η σχολική άλγεβρα έχει πιο ευρύ σκοπό σε σχέση με το να την βλέπει κανείς ως ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ αριθμών. Το αμερικανικό *The Principles and Standards of the NCTM* (2000)[4] προτείνει ότι κάθε μαθητής στην Άλγεβρα θα πρέπει «Να κατανοεί τα πρότυπα, τις σχέσεις και τις συναρτήσεις. Να αναπαριστά και να αναλύει μαθηματικές καταστάσεις και δομές χρησιμοποιώντας Αλγεβρικά σύμβολα. Να χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα για να αναπαραστήσει και να κατανοήσει τις ποσοτικές σχέσεις. και να αναλύσει την αλλαγή σε διάφορα πλαίσια». Υπάρχουν αποδείξεις ότι σχεδόν κάθε παιδί μπορεί να πετύχει τα παραπάνω στάνταρντ (Burkhardt 2001, σελ. 141). Παρόλα αυτά το να διδάσκεται ένας μαθητής Άλγεβρα δεν σημαίνει ότι κατακτά και τις αλγεβρικές έννοιες. Και συνήθως οι μαθητές που αποτυγχάνουν συνεχώς, απέχουν από τη μάθηση Silver (1997). Άρα, αν όντως κάθε παιδί μπορεί να μάθει άλγεβρα, πρέπει να βρεθούν τρόποι ώστε να προσεγγιστούν όλες οι κατηγορίες των μαθητών.

Σημαντικό στοιχείο που πρέπει να ληφθεί υπόψιν σε ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών είναι πότε πρέπει να ξεκινά η διδασκαλία της Άλγεβρας. Μάλιστα έχει προταθεί η Άλγεβρα να διδάσκεται σε μικρότερες ηλικίες στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση NTCM (2000, σελ.36). Παρόλου που έχει διαπιστωθεί ότι η Άλγεβρα

[4] https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Algebra/

συνδέεται με την Αριθμητική, έρευνες έχουν αναγνωρίσει ένα χάσμα στη μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα (Herscovics και Linchevski, 1994).

Στα πρακτικά του 18ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ (2001) οι Φιλίππου και Αλεξάνδρου επισημαίνουν ότι: «Προ-αλγεβρική μπορεί να θεωρηθεί εκείνη η περιοχή της μαθηματικής γνώσης όπου οι μαθητές οικοδομούν την Άλγεβρα από την Αριθμητική, δηλαδή κτίζουν έννοιες για τα σύμβολα και τις πράξεις στην Άλγεβρα μέσα από την γνώση της Αριθμητικής. Τα κρίσιμα θέματα που βρίσκονται στο επίκεντρο της προοπτικής της προ-άλγεβρας είναι: α) η εισαγωγή στη χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση των αριθμών και β) η σαφής γνώση της μαθηματικής μεθόδου που συμβολίζεται με αριθμούς και γράμματα». Η προ-άλγεβρα δεν είναι ξεχωριστό αντικείμενο, αλλά ένα μεταβατικό στάδιο, όπου αποκτούνται γνώσεις και ικανότητες για την κατανόηση των Αλγεβρικών εννοιών. Υψηλή σημασία έχει η επίλυση προ-αλγεβρικών λεκτικών προβλημάτων. Οι Day και Jones (1997) αναφέρουν ότι «όταν οι μαθητές είναι ικανοί να οικοδομήσουν μια συμβολική σχέση, τότε έχει αρχίσει η ανάπτυξη της αλγεβρικής τους σκέψης» (σελ. 210). Οι Lins , Kaput (2004) διαπίστωσαν ότι σε παιδιά 7-8 ετών μπορεί να ενισχυθεί η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μέσω απλών αριθμητικών προβλημάτων που τα παρακινούν στο να βρουν συνδέσμους, να αιτιολογήσουν, να συζητήσουν, να επιλύσουν και να επαληθεύσουν. Διάφορες έρευνες δείχνουν επίσης ότι νεαρά παιδιά έχουν την ικανότητα να γενικεύουν και να δικαιολογούν τις γενικεύσεις τους, όταν χειρίζονται αριθμούς (Carpenter & Franke, 2001, Fujii & Stephens, 2001).

Κατά τη διδασκαλία της προ-άλγεβρας μπορούν να αναπτυχθούν επίσης θέματα που κατά κύριο λόγο εμφανίζουν παρανοήσεις οι μαθητές στην Άλγεβρα, όπως το σύμβολο του «ίσον» και το σύμβολο του «μείον».

Η Αλγεβρική επάρκεια είναι απαραίτητη για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά και για κάποια επιστημονικά επαγγέλματα. Μαθητές που θέλουν να ακολουθήσουν τέτοιου είδους καριέρα, έχουν κίνητρο στο να μάθουν την Άλγεβρα. Άλλοι όμως χωρίς τέτοιες προοπτικές, απορρίπτουν την Άλγεβρα ως κάτι που δεν θα τους χρειαστεί στη ζωή τους και άρα δεν είναι σημαντική (MacGregor, 2004) .

Ένας άλλος λόγος για την επανεξέταση ενός ΑΠΣ Άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι, όπως έχουμε αναφέρει, η ανάπτυξη της τεχνολογίας. Η τεχνολογία έχει διεισδύσει παντού στην κοινωνία μας. Οι δυνατότητές της επεκτείνονται και στον τομέα της διδασκαλίας και της μάθησης (Clark - Wilson, 2010; Sacristán et al., 2010).

Στην Άλγεβρα τα Computer Algebra Systems (CAS) δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να διερευνήσουν μαθηματικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας διαφορετικές μαθηματικές αναπαραστάσεις και επίσης να λύσουν μαθηματικά προβλήματα (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007). Στο πλαίσιο των μαθηματικών του Γυμνασίου, οι σύγχρονες ψηφιακές τεχνολογίες, όπως τα CAS στην Άλγεβρα, γεννούν ερωτήματα ως προς τους στόχους των υπαρχόντων προγραμμάτων σπουδών, τη διδασκαλία και τις πρακτικές αξιολόγησης (Drijvers et al., 2016).

Επιπλέον, στη μηχανική, όπως και γενικότερα στις φυσικές επιστήμες, υπάρχει μια τάση να αντικαθίστανται οι συμβολικές μέθοδοι με αριθμητικές και οπτικές τεχνικές. Σε επαγγέλματα που βασίζονται σε δυνατά μαθηματικά, η Άλγεβρα ως ικανότητα χειρισμών δεν είναι σημαντική (Bulmer, 2001). Η Αλγεβρική γνώση μπορεί να είναι σημαντική για τον ορισμό μιας συνάρτησης αλλά όχι για την εύρεση τιμών. Νέες κατευθύνσεις στα προγράμματα σπουδών στην Άλγεβρα πρέπει να λαμβάνουν υπόψιν τα παραπάνω. Όμως, δε σημαίνει απαραίτητα ότι όλα αντικείμενα της Άλγεβρας γίνονται μέσω της τεχνολογίας πιο εύκολα. Η μοντελοποίηση, για παράδειγμα, απαιτεί υψηλού επιπέδου σκέψη και εξάσκηση με ή χωρίς τη χρήση τεχνολογίας.

Ένας τελευταίος, αλλά εξίσου σημαντικός, παράγοντας για την αναδιάρθρωση των προγραμμάτων σπουδών στην Άλγεβρα είναι οι μη ικανοποιητικές επιδόσεις των μαθητών στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Πέραν του ότι οι μαθητές πια στις σύγχρονες κοινωνίες συμπληρώνουν, όπως έχουμε αναφέρει, την υποχρεωτική τους εκπαίδευση σε μεγαλύτερη ηλικία σε σχέση με προγενέστερες εποχές, οπότε η παραδοσιακή διδασκαλία δεν καλύπτει τα ενδιαφέροντα των μαθητών, έρευνες έχουν δείξει ότι προγράμματα σπουδών στην Άλγεβρα δεν δίνουν την δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να αναπτύξουν Αλγεβρική συλλογιστική, δηλαδή να αναλύουν θέματα πραγματικών καταστάσεων, να διαμορφώνουν τις σχέσεις που προκύπτουν από τα δεδομένα ως εξισώσεις, τις οποίες αναπτύσσοντας κατάλληλες τεχνικές να τις λύνουν καθώς και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα (Sowder, 1998; Stacey & MacGregor, 1999; Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2001). Αυτό που μαθαίνουν στην Άλγεβρα οι περισσότεροι μαθητές είναι κανόνες, διαδικασίες και τεχνάσματα για να διεκπεραιώνουν αλγεβρικές εργασίες (Brekke, 2001), χωρίς λογική και χωρίς σύνδεση με τις προηγούμενες γνώσεις στην αριθμητική, όπως και με την πραγματική ζωή.

Η αποτελεσματικότητα των προγραμμάτων σπουδών στην Άλγεβρα εξετάζεται διεθνώς. Ο Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη (ΟΟΣΑ) διεξάγει την εκπαιδευτική έρευνα PISA για την αξιολόγηση του εύρους των γνώσεων και των δεξιοτήτων των μαθητών που βρίσκονται στο τέλος της Υποχρεωτικής τους Εκπαίδευσης. Μια άλλη διεθνής εκπαιδευτική έρευνα, η TIMSS, συλλέγει λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με το πρόγραμμα σπουδών και την εφαρμογή του προγράμματος σπουδών, τις εκπαιδευτικές πρακτικές και τους πόρους του σχολείου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της τελευταίας έρευνας είναι οι διαφορές που εντοπίστηκαν ως προς την επιτυχία των προγραμμάτων σπουδών στην Άλγεβρα μεταξύ της Αυστραλίας και της Ρωσίας, ανάλογα με το που δίνει έμφαση το καθένα (Routitsky and Zammit, 2001). Οι Αυστραλοί μαθητές που το πρόγραμμα σπουδών τους στην Άλγεβρα επιμένει στη γενίκευση και στα μοτίβα τα πήγαν πολύ καλύτερα από τους Ρώσους μαθητές που στηρίζονται στον φορμαλισμό. Επίσης, στο αμερικανικό πρόγραμμα σπουδών, ο Crawford (2001) επισημαίνει ότι καλύπτει πάρα πολλά αντικείμενα, χωρίς να επικεντρώνεται στη βαθιά εννοιολογική κατανόηση αυτών των αντικειμένων.

Συμπερασματικά η MacGregor (2004, σελ. 325) κατά την 12η Μελέτη της ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) αναφέρει ότι σε ένα σύγχρονο βασικό πρόγραμμα σπουδών στην Άλγεβρα, οι μαθητές θα συνεχίσουν να μαθαίνουν τη χρήση των συμβόλων, τους πίνακες, τις εξισώσεις, τις ανισώσεις, τους τύπους τις συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις. Αυτό που αλλάζει είναι η σειρά, ο τρόπος παρουσίασης και η σύνδεση των αλγεβρικών εννοιών, καθώς και η έμφαση σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων. Η βασική Αλγεβρική γνώση επιτρέπει τους μαθητές να:

- Να είναι βέβαιοι για την ικανότητα τους να ερμηνεύουν αλγεβρικές εκφράσεις.
- Αναγνωρίζουν μαθηματικές δομές και μοτίβα και καταλαβαίνουν ότι η άλγεβρα χρησιμοποιείται για να εκφράσει τέτοιες γενικότητες.
- Να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν μαθηματικούς τύπους.
- Να καταλαβαίνουν πώς συνδέονται οι μαθηματικοί τύποι, από πού προέρχονται.
- Να κατανοούν τη σχέση μεταξύ συναρτήσεων και γραφικών παραστάσεων.
- Να γνωρίζουν τουλάχιστον ποιοτικά ορισμένες σημαντικές ιδιότητες των γραμμικών και εκθετικών συναρτήσεων και την εμπλοκή αυτών, στη διαχείριση των οικονομικών τους θεμάτων, στην κατανόηση περιβαλλοντικών θεμάτων και τη λήψη αποφάσεων σε πολλά κοινωνικά πεδία.

- Να καταλάβουν πως οι αναπαραστάσεις και τα γραφήματα (π.χ. πίνακες, εξισώσεις, λογιστικά φύλλα, γραφικές παραστάσεις) μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
- Να καταλάβουν τις αριθμητικές πράξεις βαθύτερα.
- Να χρησιμοποιούν τεχνολογικά εργαλεία.
- Και να νιώθουν την ευχαρίστηση, όταν πειραματίζονται στα μαθηματικά, κάνοντας συνδέσεις και συλλογισμούς, εξετάζοντας την ορθότητά τους πείθοντας τους άλλους για αυτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Διεθνές πρόγραμμα αξιολόγησης των προγραμμάτων σπουδών και της μαθηματικής επιτυχίας, OECD PISA

3.1 Εισαγωγή – Γενικά περί συγκρίσεων προγραμμάτων σπουδών

Μια εμφανής τάση στην εκπαιδευτική έρευνα είναι η εστίαση στον επανασχεδιασμό των σχολικών προγραμμάτων σπουδών, έτσι ώστε να επιτρέπουν στους μαθητές να προετοιμάζονται για τον χώρο εργασίας που θα επιλέξουν, αλλά και για τη σύγχρονη ζωή του 21ου αιώνα. Η βασική ερώτηση που τίθεται σε κάθε συγκριτική έρευνα είναι καθολική, του τύπου «*τι πρέπει οι μαθητές να μαθαίνουν;*». Και στις δύο χώρες (Ελλάδα – Αυστραλία) συζητήσεις σχετικά με τα προγράμματα σπουδών είναι συχνές και πλαισιώνονται πάνω στις αντιλήψεις που υποδεικνύουν μια πτώση στα παραδοσιακά ακαδημαϊκά στάνταρντ, συμπεριλαμβανομένης της επίδοσης των μαθητών σε εθνικούς και διεθνείς τρόπους αξιολόγησης. Η «πρωτοφανής έρευνα και πολιτική συζήτηση σε πολλές χώρες σχετικά με τους παράγοντες που οδηγούν επιτυχημένες εκπαιδευτικές επιδόσεις» έχει σημειωθεί από τον διεθνή διευθυντή του ΟΟΣΑ (Schleicher, 2009, σελ. 17), με τους ερευνητές να γνωρίζουν αυτό το συγκεκριμένο φαινόμενο.

Την περασμένη δεκαετία παρατηρείται αυξανόμενο ενδιαφέρον για διεθνείς συγκρίσεις των εκπαιδευτικών συστημάτων. Οι αιτίες είναι πολλές και περιλαμβάνουν τις διάφορες όψεις της παγκοσμιοποίησης, της ανταγωνιστικότητας και των συναφών συγκρίσεων που παράγει. Μια κινητήρια δύναμη υπήρξε η αυξανόμενη σημασία των διεθνών δοκιμών αναφοράς, όπως οι PISA, TIMSS και PIRLS, που προκαλούν τις προσπάθειες των χωρών να αυξήσουν την απόδοσή τους (Donnelly & Wiltshire, 2014, σελ. 32).

Στη σημερινή εποχή θεωρείται ότι και άλλες πτυχές των συστημάτων εκπαίδευσης πρέπει να ληφθούν υπόψιν στις συγκριτικές μελέτες, που περιλαμβάνουν πολιτιστικούς και πολιτικούς παράγοντες, καθώς και άλλους συνυφασμένους παράγοντες, όπως η επαγγελματική επάρκεια των εκπαιδευτικών, η ενεργής συμμετοχή των γονέων στην εκπαίδευση των παιδιών στο σπίτι, η κοινοτική υποστήριξη των σχολείων, η νομοθεσία για τη δημόσια παιδεία, η διάρκεια της σχολικής ημέρας και η άμεση επιπλέον προσωπική φροντίδα για μαθητές με χαμηλά επιτεύγματα (Donnelly & Wiltshire, 2014, σελ. 40-41).

Οι πρόσφατες συγκριτικές μελέτες για το πρόγραμμα σπουδών, όπως το πρόγραμμα «Education 2030» του ΟΟΣΑ, συγκεντρώνουν πληροφορίες από τις συμμετέχουσες χώρες σχετικά με τα «οραματικά έγγραφα» που καθοδηγούν την ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών.

Γενικά ένα πρόγραμμα σπουδών βασίζεται σε μια σειρά συμβιβασμών που επιβάλλονται από την κοινωνία και μέσω των οποίων εξυπηρετείται το εκπαιδευτικό της σύστημα (Jonnaert & Therriault, 2013, σελ. 413).

Η υιοθέτηση μιας πιο ολιστικής προοπτικής δημιουργεί μια άποψη για το πρόγραμμα σπουδών που βασίζεται στην κοινωνική πραγματικότητα και απομακρύνονται από ένα «τεχνοκρατικό όραμα, ενσωματωμένο σε ένα ορθολογικό σύστημα σπουδών και εστιασμένη αποκλειστικά στην παροχή γνώσεων» (Jonnaert & Therriault, 2013, σελ. 413, Keitel & Kilpatrick, 1999). Ουσιαστικά, μια ολιστική προοπτική του προγράμματος σπουδών επιδιώκει να βελτιστοποιήσει το επίπεδο των μαθητών, ενσωμάτωση στο περιβάλλον τους και στον σύγχρονο κόσμο.

Μερικά ευρεία ερωτήματα που εμφανίζονται καθώς χώρες και συστήματα εξετάζουν πώς να πραγματοποιηθεί μια συγκριτική εκπαιδευτική έρευνα είναι:

- Πώς μετράται η εκπαιδευτική επιτυχία;
- Ποιος είναι ο σκοπός της σύγκρισης της εκπαιδευτικής πρακτικής μεταξύ των χωρών και των συστημάτων;
- Πώς μπορούν οι συγκριτικές μελέτες εκπαίδευσης να είναι πιο αποτελεσματικές;
- Υπάρχουν επιπτώσεις για την επιλογή χωρών και συστημάτων που είναι κοινωνικο-πολιτιστικά παρόμοια ή πολύ διαφορετικά;
- Ποιες είναι οι δυνατότητες μεταφοράς των πρακτικών μεταξύ των χωρών και των συστημάτων;
- Πώς εντάσσεται η μελέτη των συγκριτικών προγραμμάτων σπουδών στο ευρύτερο πλαίσιο της εκπαίδευσης;

3.2 Μαθηματικός Εγγραμματισμός

Μία πρώτη περιγραφή του όρου «μαθηματικός αλφαβητισμός» ήταν το 1944 στις ΗΠΑ, όταν μια Επιτροπή του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) για τα Μεταπολεμικά Σχέδια (NCTM, 1970/2002, σ. 244) προέβλεπε ότι το σχολείο θα πρέπει να εξασφαλίζει μαθηματικό εγγραμματισμό (αλφαβητισμό) για όσους μπορούν ενδεχομένως να το επιτύχουν. Λίγο μετά (το 1950), ο όρος χρησιμοποιήθηκε και πάλι στην έκθεση Canadian Hope (NCTM 1970/2002, σελ. 401). Το 1959 ο όρος αριθμητισμός χρησιμοποιήθηκε στην έκθεση Crowther, (Crowther Report, 1959) ως «η ελάχιστη γνώση από τα μαθηματικά και επιστημονικά αντικείμενα, τα οποία διαθέτει κάποιο άτομο με σκοπό να θεωρηθεί μορφωμένο». Σε πιο πρόσφατες περιόδους, τα πρότυπα NCTM 1989 (NCTM 1989, σελ. 5) μιλούσαν για μαθηματικό εγγραμματισμό (αλφαβητισμό) και μαθηματικά εγγράμματους (εναλφάβητους) μαθητές. Προφανώς, δεν υπάρχει ορισμός του όρου που να προτάθηκε σε οποιοδήποτε από αυτά τα κείμενα. Ωστόσο, τα στάνταρτ του 1989 προέβαλαν πέντε γενικούς στόχους που εξυπηρετούν την αναζήτηση μαθηματικού εγγραμματισμού για όλους τους μαθητές: "(1) να μαθαίνουν να εκτιμούν την αξία των μαθηματικών, (2) να είναι σίγουροι για την ικανότητά τους να κάνουν μαθηματικά, (3) να γίνονται λύτες μαθηματικών προβλημάτων, (4) να μαθαίνουν να επικοινωνούν μαθηματικά και (5) ότι μαθαίνουν να δικαιολογούν μαθηματικά" (σελ. 5).

Οι Baker και Street (1993), όπως και οι Brown, Askew, Baker, Denvir & Millet, (1998) θεωρούν ότι ο όρος αριθμητισμός δίνει έμφαση στα συστατικά των μαθηματικών στα πλαίσια της καθημερινής ζωής, με μια ευρεία ερμηνεία σχετικά με τις κοινωνικές πρακτικές (σελ.217). Αργότερα, ο Baker, Street και Tomlin (2003) ορίζουν ως «συμβάν αριθμητισμού» περιπτώσεις όπου «μια δραστηριότητα αριθμητισμού είναι αναπόσπαστο στοιχείο της φύσης των αλληλεπιδράσεων των συμμετεχόντων και των ερμηνευτικών τους διαδικασιών» (Baker et all., 2003, σελ. 12)

Οι Barton και Hamilton (1998) αντικαθιστούν τον όρο «γραμματισμός- literacy» με τον όρο «αριθμητισμός – numeracy» και επισημαίνουν ότι: «Ο αριθμητισμός είναι κυρίως κάτι που κάνουν οι άνθρωποι. Είναι μια δραστηριότητα, που βρίσκεται στο διάστημα ανάμεσα στη σκέψη και το κείμενο. Ο αριθμητισμός δεν υπάρχει στο μυαλό των ανθρώπων ως ένα σύνολο δεξιοτήτων που πρέπει να μάθουν και δεν περιορίζεται απλώς στο χαρτί, που συλλαμβάνεται ως κείμενο προς ανάλυση. Όπως όλες οι ανθρώπινες δραστηριότητας, ο αριθμητισμός είναι ουσιαστικά κοινωνική δραστηριότητα και βρίσκεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ ανθρώπων» (σελ. 3).

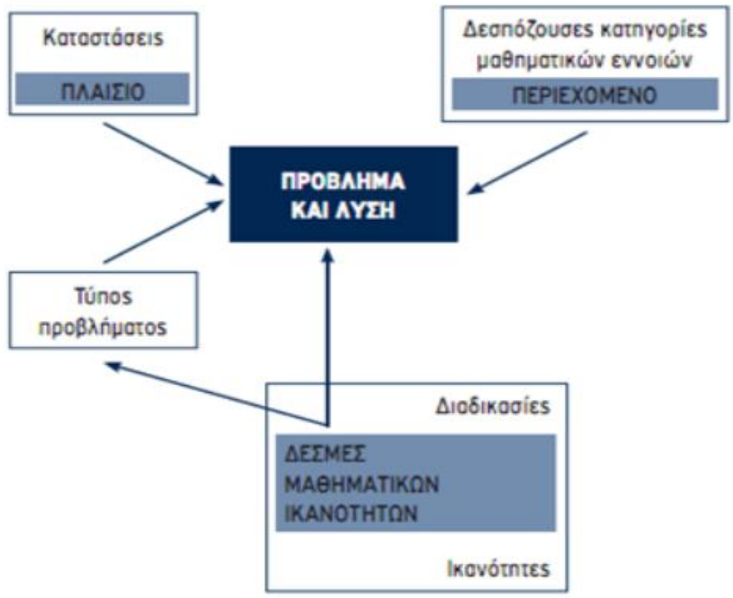
Η έρευνα Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) του Διεθνούς Οργανισμού για την Αξιολόγηση των Εκπαιδευτικών Επιτευγμάτων (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement), που διεξήχθη για πρώτη φορά το 1995, διαχειρίζεται ένα τεκμηριωμένο τεστ μαθηματικού εγγραμματισμού σε μαθητές 15 ετών στο τελευταίο έτος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Γ΄ Γυμνασίου στην Ελλάδα) σε 21 χώρες που στοχεύουν «*να παρέχουν* *πληροφορίες για το πόσο προετοιμασμένος είναι ο συνολικός πληθυσμός των ατόμων που τελειώνουν το σχολείο σε κάθε χώρα να εφαρμόσει τη γνώση στα μαθηματικά και την επιστήμη για να ανταποκριθεί στις προκλήσεις της ζωής πέρα από το σχολείο*».

Ο Λεμονίδης (2002, σελ.2) αναφέρει ότι: «Σήμερα, το να έχεις αποκτήσει το επίπεδο του αριθμητισμού σημαίνει να έχεις αναπτύξει κάποιες βασικές μαθηματικές ικανότητες, οι οποίες εφαρμόζονται σε διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής» όπως και ότι: «Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ένα άτομο ως μαθηματικά εγγράμματο, όταν αφενός κατέχει κάποιες μαθηματικές ικανότητες, οι οποίες του επιτρέπουν να ανταποκρίνεται στις πρακτικές μαθηματικές απαιτήσεις της καθημερινής του ζωής και αφετέρου έχει την ικανότητα να καταλαβαίνει και να εκτιμά τις πληροφορίες που παρουσιάζονται με μαθηματικούς όρους, όπως πίνακες, γραφικές αναπαραστάσεις, ποσοστά κτλ.».

Μια ακόμη προσπάθεια για σαφή ορισμό φαίνεται να βρίσκεται στο αρχικό πλαίσιο του ΟΟΣΑ για το PISA (Πρόγραμμα Διεθνούς Αξιολόγησης Μαθητών) το 1999 (ΟΟΣΑ 1999). Στο πλαίσιο του Προγράμματος PISA, ο Εγγραμματισμός στα Μαθηματικά ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να κατανοεί και να εντάσσει την επιστήμη των Μαθηματικών στην καθημερινότητα, να αναπτύσσει τεκμηριωμένες κρίσεις πάνω σε προβλήματα που τίθενται εμπρός του και να χρησιμοποιεί τη μαθηματική γνώση (και τις δεξιότητες που σχετίζονται με αυτή), για να αντιμετωπίζει με επιτυχία τις ανάγκες της καθημερινής ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός και ενεργός πολίτης.

Εκκινώντας από τον ορισμό αυτό, ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά δεν περιορίζεται στη γνώση απλώς μαθηματικών όρων, διαδικασιών και μεθόδων που διδάσκονται στο σχολείο. Διότι, παρά το ότι θεωρεί προαπαιτούμενα όλα τα παραπάνω, ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά αναφέρεται κυρίως στη δυνατότητα δημιουργικής σύνθεσης και εφαρμογής τους, ούτως ώστε, με αφετηρία την ίδια τη μαθηματική γνώση, να είναι εν συνεχεία κανείς σε θέση να αντιμετωπίζει πρακτικά τα πιθανά καθημερινά προβλήματα που ανακύπτουν.

Υπό το πρίσμα αυτό, η έννοια του εγγραμματισμού στα Μαθηματικά συντίθεται από τρία συστατικά στοιχεία, τα οποία αναπαρίστανται στο παρακάτω σχήμα:



Σημείωση: Από Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006 (σελ. 79), by OECD, 2006. Paris: OECD.

Εικ. 5. Τα συστατικά στοιχεία του εγγραμματισμού στα Μαθηματικά

- Το πλαίσιο, στο οποίο εντάσσονται τα προβλήματα, περικλείει προσωπικές, εκπαιδευτικές, επαγγελματικές, κοινωνικές και επιστημονικές καταστάσεις - απλούστερες ή περισσότερο σύνθετες.
- Το μαθηματικό περιεχόμενο προσδιορίζει οτιδήποτε απαιτείται για τη λύση ενός προβλήματος και καθορίζεται από τέσσερις δεσπόζουσες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών:

\- Χώρος και Σχήμα,

\- Μεταβολή και Σχέσεις,

\- Ποσότητα,

\- Αβεβαιότητα.

- Οι νοητικές διαδικασίες συνδέονται με τις κεκτημένες μαθηματικές ικανότητες και ομαδοποιούνται σε τρεις δέσμες:

\- τη δέσμη αναπαραγωγής,

\- τη δέσμη συνδέσεων και

\- τη δέσμη αναστοχασμού.

3.3 ΟΟΣΑ PISA - Διεθνές Πρόγραμμα Αξιολόγησης Μαθητών

Το Διεθνές Πρόγραμμα PISA για την Αξιολόγηση των Μαθητών (Programme for International Student Assessment) είναι μία Εκπαιδευτική Έρευνα που διεξάγεται κάθε τρία χρόνια (από το 2000 έως σήμερα) και που υλοποιείται από διεθνή ερευνητικά ιδρύματα (PISA Consortium) υπό την οργάνωση της Διεύθυνσης Εκπαίδευσης του ΟΟΣΑ (Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη) και τη συνεργασία των συμμετεχουσών στην Έρευνα χωρών.

Κύριος στόχος του Προγράμματος PISA είναι η αξιολόγηση του εύρους των γνώσεων και των δεξιοτήτων των μαθητών που βρίσκονται στο τέλος της Υποχρεωτικής τους Εκπαίδευσης, βάσει των οποίων διαμορφώνεται, σε σημαντικό βαθμό, η ουσιαστική και ισότιμη συμμετοχή τους στις σύγχρονα δομημένες κοινωνίες. Εκκινώντας, επομένως, από ένα κοινά καθορισμένο και διεθνώς αποδεκτό πλαίσιο εργασίας, το Πρόγραμμα PISA συλλέγει πληροφορίες για τις επιδόσεις των 15χρονων και 16χρονων (Γ΄ Γυμνασίου) συμμετεχόντων μαθητών και, την ίδια στιγμή, ανιχνεύει όψεις και δυνατότητες της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών συστημάτων των χωρών που λαμβάνουν μέρος στην αξιολόγηση. Κάθε συμμετέχουσα χώρα έχει, λοιπόν, τη δυνατότητα να αντλεί μέσω του Προγράμματος αυτού χρήσιμα στοιχεία για το εκπαιδευτικό της σύστημα, κατορθώνει να κατανοεί τα θετικά στοιχεία και τις αδυναμίες του εκπαιδευτικού της σχεδιασμού και, εντέλει, ανατροφοδοτείται σχετικά με το βαθμό αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού της έργου ανακαλύπτοντας ταυτόχρονα τις πρακτικές Εκπαίδευσης και Αγωγής των άλλων συμμετεχουσών χωρών.

3.4 Μεθοδολογία PISA

Για την επιλογή του δείγματος υιοθετήθηκε μια περίπλοκη στρατηγική τυχαίας δειγματοληψίας[5]. Για τον λόγο αυτό, σε όλες τις αναλύσεις έχουν υπολογιστεί τα βάρη των μεταβλητών που διαθέτει η βάση δεδομένων της έρευνας PISA. Τα βάρη αποτελούν ξεχωριστές μεταβλητές στη βάση δεδομένων και συντελούν στον κατάλληλο υπολογισμό του τυπικού σφάλματος (SE) για την πραγματοποίηση ελέγχων στατιστικής σημαντικότητας. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές που έχουν επιλεγεί σε κάθε χώρα αντιπροσωπεύουν τους μαθητές στον ευρύτερο πληθυσμό, ενώ παρομοίως, τα επιλεγμένα σχολεία αντιπροσωπεύουν τα σχολεία της χώρας.

[5] OECD (2017). PISA 2015 Technical Report. Paris, France: OECD Publishing.

Ειδικότερα για την Ελλάδα, η δειγματοληψία έγινε διαστρωματωμένη σε τρία επίπεδα, με βάση την αστικότητα και σύμφωνα με τα στοιχεία που αντλήθηκαν από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ). Το δείγμα των σχολείων αντλήθηκε από αστικές, ημιαστικές και αγροτικές περιοχές.

Οι διαφορές μεταξύ των χωρών στη φύση και την έκταση της προσχολικής εκπαίδευσης, στην ηλικία κατά την είσοδο στην τυπική σχολική εκπαίδευση, στη δομή του εκπαιδευτικού συστήματος και στο ενδεχόμενο επανάληψης τάξης σημαίνουν ότι τα επίπεδα σχολικής βαθμολογίας συχνά δεν είναι καλοί δείκτες για το πού βρίσκονται οι μαθητές στη γνωστική τους ανάπτυξη. Για να συγκρίνει καλύτερα τις επιδόσεις των μαθητών διεθνώς, το PISA στοχεύει στους μαθητές μιας συγκεκριμένης ηλικίας. Οι μαθητές PISA είναι ηλικίας μεταξύ 15 ετών 3 μηνών και 16 ετών 2 μηνών κατά τη στιγμή της αξιολόγησης, και πρέπει να έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 6 έτη τυπικής/υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Μπορούν να είναι εγγεγραμμένοι σε οποιοδήποτε είδος ιδρύματος, να συμμετέχουν σε εκπαίδευση πλήρους ή μερικής φοίτησης, σε ακαδημαϊκά ή επαγγελματικά προγράμματα και να παρακολουθούν δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία ή ξενόγλωσσα σχολεία στο εσωτερικό της χώρας. Η χρήση αυτής της ηλικίας σε διάφορες χώρες και σε βάθος χρόνου επιτρέπει στο PISA να συγκρίνει με συνέπεια τις γνώσεις και τις δεξιότητες ατόμων που γεννήθηκαν το ίδιο έτος και εξακολουθούν να φοιτούν στο σχολείο στην ηλικία των 15 ετών, παρά τη διαφορά του εκπαιδευτικού παρελθόντος τους, εντός και εκτός του σχολείου.

Ο πληθυσμός των μαθητών που συμμετέχουν στο PISA ορίζεται από αυστηρούς τεχνικούς κανόνες, όπως και οι μαθητές που εξαιρούνται από τη συμμετοχή. Το συνολικό ποσοστό εξαίρεσης σε μια χώρα πρέπει να είναι μικρότερο από το 5%, προκειμένου να διασφαλιστεί ότι, βάσει εύλογων παραδοχών, οι τυχόν στρεβλώσεις στους εθνικούς μέσους όρους επίδοσης θα παραμείνουν εντός συν ή πλην 5 μονάδων. Η εξαίρεση θα μπορούσε να προκύψει είτε λόγω των σχολείων που εξαιρέθηκαν είτε μέσω των μαθητών που εξαιρέθηκαν. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για τους οποίους ένα σχολείο ή ένας μαθητής θα μπορούσε να εξαιρεθεί από το PISA. Τα σχολεία ενδέχεται να εξαιρεθούν επειδή βρίσκονται σε απομακρυσμένες περιοχές και είναι απροσπέλαστα ή επειδή είναι πολύ μικρά ή λόγω άλλων οργανωτικών ή λειτουργικών παραγόντων που αποκλείουν τη συμμετοχή. Οι μαθητές ενδέχεται να εξαιρεθούν λόγω περιορισμένης ικανότητας στη γλώσσα της αξιολόγησης ή άλλων κυρίως λειτουργικών λόγων (Σοφιανοπούλου, Εμβαλιώτης, Καρακολίδης και Πίτσια, 2019).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Σκοπός και ερωτήματα της έρευνας

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να συγκριθούν τα δύο προγράμματα σπουδών σε σχέση με **α) το εύρος, β) το βάθος και τις γνωστικές απαιτήσεις και γ) τη μαθηματική αυστηρότητα – rigour,** αφού μετρηθούν τα συγκεκριμένα συστατικά βάση της μεθοδολογίας που αναπτύσσεται παρακάτω σε κάθε πρόγραμμα ξεχωριστά. Ο προσδιορισμός του εύρους και του βάθους των ΠΣ είναι αναπόσπαστο στοιχείο του σχεδιασμού τους (Hirsch, 2001a,b).

Μετά την περιγραφή κάθε προγράμματος και τη σύγκριση τους ως προς το εύρος, το βάθος με τις γνωστικές απαιτήσεις του και τη μαθηματική αυστηρότητα, θα απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα που έχουν σχέση με τις τέσσερις παραπάνω κατηγορίες:

1. Ποιες έννοιες ή βασικοί στόχοι υπάρχουν στο ένα πρόγραμμα και δεν υπάρχουν στο άλλο;
2. Σε τι διαφέρουν τα προγράμματα ως προς τη σειρά παρουσίασης των εννοιών και των στόχων;
3. Χρήση της τεχνολογίας και σε ποια σημεία των προγραμμάτων.
4. Διαφορές που παρουσιάζουν τα προγράμματα ως προς τη διδακτική τους θεωρία.

Στο τέλος θα συγκριθούν και θα αναλυθούν τα αποτελέσματα PISA 2009 – 2012 –2015 – 2018 μεταξύ Ελλάδας και Αυστραλίας στα μαθηματικά σε μαθητές 15 ετών ως προς την επίδοση τους.

4.2 Μεθοδολογία

Η **μεθοδολογία** και η ορολογία που θα χρησιμοποιηθεί για να περιγραφεί το εύρος και το βάθος είναι σύμφωνη με αυτή που χρησιμοποιεί στις συγκριτικές έρευνες που διεξάγει ο οργανισμός Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA), ACARA[6] 2017 -2020 και συγκεκριμένα:

4.2.1 Υπολογισμός του εύρους του προγράμματος σπουδών

Το εύρος αναφέρεται στον αριθμό ή το εύρος των θεμάτων ή το περιεχόμενο που καλύπτει το πρόγραμμα σπουδών, (κυρίως πρακτικές και διαδικαστικές γνώσεις).

[6] Έρευνες που χρησιμοποιήθηκε η συγκεκριμένη μεθοδολογία: https://www.australiancurriculum.edu.au/resources-and-publications/publications/program-of-research-2017-2020/

Συχνά αυτό σημαίνει «τι καλύπτει» το πρόγραμμα σπουδών. Εδώ θα μετρήσουμε τον αριθμό των στόχων και τον αριθμό των εκπονήσεων δραστηριοτήτων σε κάθε στόχο που θέτει το πρόγραμμα σπουδών. Η ορολογία που χρησιμοποιείται για να περιγράψει το εύρος είναι περιορισμένο, θεμελιώδες και περιεκτικό.

Εύρος	
Όροι	**Περιγραφή**
Περιορισμένο	Στοιχειώδες, μέτριο, ανεπιτήδευτο. Αριθμός στόχων που καλύπτουν στοιχειωδώς ενότητες της Άλγεβρας, χωρίς ή με ελάχιστες αναφορές εκπονήσεων δραστηριοτήτων.
Θεμελιώδες	Οικοδομείται το βασικό εύρος προκειμένου να επεκταθεί η γνώση. Βασικοί στόχοι σε ενότητες της Άλγεβρας που θέλει να καλύψει το ΠΣ με ανάλογο αριθμό εκπονήσεων δραστηριοτήτων.
Περιεκτικό	Συμπεριλαμβάνει πολλαπλά στοιχεία. Ευρύ πεδίο εφαρμογής. Πλήρης εμβέλεια. Συγκεκριμένοι – πολλαπλοί και ποικίλοι στόχοι σε κάθε ενότητα της Άλγεβρας ή αντικείμενο που μελετάται. Γενικές, αλλά και συγκεκριμένες δραστηριότητες σε κάθε στόχο του προγράμματος σπουδών στην Άλγεβρα.

Πίνακας 1. Κατηγορίες εύρους ΠΣ.

4.2.2 Υπολογισμός του βάθους του προγράμματος σπουδών και των γνωστικών απαιτήσεων

Α) Υπολογισμός του βάθους

Το βάθος αναφέρεται στο ποσό ή το επίπεδο των λεπτομερειών σχετικά με ένα θέμα ή ένα πλήρες σύνολο εννοιών, όρων και δραστηριοτήτων που οδηγεί στην ανάπτυξη βαθιάς κατανόησης των βασικών εννοιών, αρχών και γνώσεων και στην ικανότητα εφαρμογής αυτών της κατανόησης σε περιεχόμενο της πραγματικής ζωής. Οι όροι που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το βάθος είναι περιορισμένο, θεμελιώδες και ανταγωνιστικό. Οι τρεις όροι είναι σύμφωνοι και με τις αντιλήψεις που ανέπτυξε η Sims (2006) για την επιφανειακή και βαθιά γνώση και μόρφωση, όπως έχουμε αναφέρει στο 1ο κεφάλαιο.

Βάθος	
Όροι	**Περιγραφή**
Περιορισμένο	Στοιχειώδες, βασικό. Επιφανειακή γνώση του αντικειμένου. Απομονωμένα και ασύνδετα δεδομένα, χωρίς ουσιαστική κατανόηση.
Θεμελιώδες	Βασικό μέρος. Μια βασική ή πρωταρχική καθοδηγητική αρχή η οποία είναι θεμελιώδης για την παραγωγή και ανάπτυξη της γνώσης.
Ανταγωνιστικό	Ενσωματώνει και διασυνδέει. Μία σύνθεση της γνώσης. Απαιτεί υψηλότερη σκέψη. Οι άγνωστες έννοιες αναλύονται κριτικά και συνδέονται με γνωστές έννοιες, ώστε να παραχθεί νέα γνώση που θα λύσει άγνωστα προβλήματα.

Πίνακας 2. Κατηγορίες βάθους ΠΣ.

Β. Υπολογισμός των γνωστικών απαιτήσεων του προγράμματος σπουδών

Οι γνωστικές απαιτήσεις (cognitive demand) που απαιτεί κάθε πρόγραμμα σπουδών υπολογίστηκαν από τον οργανισμό Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) στις συγκριτικές του έρευνες στηριζόμενο στο πλαίσιο αξιολόγησης της μαθηματικής πολυπλοκότητας των αντικειμένων βάση των απαιτήσεων στη σκέψη, του Webb’s Depth of Knowledge (1997) το οποίο κατηγοριοποιεί τις εργασίες ανάλογα με την περιπλοκότητα της σκέψης που χρειάζεται για να ολοκληρωθούν.

- Επίπεδο 1: Ανάκληση και αναπαραγωγή

Σε αυτό το επίπεδο, ένας μαθητής ασκεί μικρή γνωστική προσπάθεια, πέρα από την ανάκληση ή την απομνημόνευση. Τυπικοί στόχοι και εργασίες είναι: η αντιγραφή, ο υπολογισμός, ο ορισμός και η αναγνώριση. Ρήματα που χρησιμοποιούνται: Κανονίστε – υπολογίστε – αναφέρατε – παραθέστε – ορίστε – περιγράψτε – σχεδιάστε – εξηγήστε – δώστε ένα παράδειγμα – αναγνωρίστε – διευκρινίστε – επεξηγήστε – χαρακτηρίστε – περιγράψτε – επισημάνετε – απαριθμήστε – εντοπίστε – αντιστοιχίστε – μετρήστε – απομνημονεύστε – ονομάστε – παρουσιάστε – εκτελέστε – παραθέστε – θυμηθείτε – αναγνωρίστε – καταγράψτε – επαναλάβετε – αναφέρατε – επιλέξτε – δηλώστε – συνοψίστε – κάντε πίνακα – πείτε – χρησιμοποιήστε – παραφράστε – περιγράψτε συνοπτικά.

- Επίπεδο 2: Δεξιότητες και έννοιες

Σε αυτό το επίπεδο, ένας μαθητής παίρνει κάποιες αποφάσεις σχετικά με τη μάθηση. Τυπικοί στόχοι και εργασίες είναι: η σύγκριση, η οργάνωση, η σύνοψη, η πρόβλεψη και η εκτίμηση. Ρήματα που χρησιμοποιούνται: Εφαρμόστε – υπολογίστε – αιτία/αποτέλεσμα – ταξινομήστε – συγκεντρώστε και απεικονίστε – συγκρίνετε – υπολογίστε – κατασκευάστε – μετατρέψτε – περιγράψτε – καθορίστε – διακρίνετε – υπολογίστε – εξηγήστε – επεκτείνετε – βρείτε – διατυπώστε – γενικεύστε - κάντε γραφική παράσταση – προσδιορίστε τα πρότυπα – συμπεράνετε – ερμηνεύστε – προβάλετε – διαμορφώστε – τροποποιήστε – παρατηρήστε – οργανώστε – προβλέψτε – συσχετίστε – απεικονίστε – ξεχωρίστε – απλοποιήστε – λύστε – συνοψίστε – χρησιμοποιήστε στοιχεία από τα συμφραζόμενα.

- Επίπεδο 3: Στρατηγική σκέψη

Σε αυτό το επίπεδο πολυπλοκότητας, ο μαθητής χρησιμοποιεί τον προγραμματισμό και τα αποδεικτικά στοιχεία, δικαιολογεί τις επιλογές και η σκέψη είναι πιο αφηρημένη. Τυπικοί στόχοι περιλαμβάνουν την επίλυση μη-ρουτίνας[7] προβλημάτων ή το σχεδιασμό ενός πειράματος. Ρήματα που χρησιμοποιούνται: αξιολογείστε – υποστηρίξτε – εκτιμήστε – ελέγξτε – παραθέστε αποδείξεις – συγκρίνετε –

[7] Τα προβλήματα ρουτίνας αφορούν την χρήση μιας τουλάχιστον εκ των τεσσάρων πράξεων σε πρακτικά θέματα. Τα προβλήματα μη – ρουτίνας είναι σύνθετα προβλήματα που απαιτούν δημιουργικότητα και πρωτοτυπία. Δεν φαίνεται άμεσα η στρατηγική επίλυσης και μπορούν να λυθούν με πολλούς τρόπους.

συμπληρώστε – φτιάξτε – κρίνετε – αποφασίστε – υπερασπίστε – περιγράψτε - αναπτύξτε – ξεχωρίστε – συζητείστε – διακρίνετε – βγάλτε συμπέρασμα – εξετάστε – εξηγείστε – διατυπώστε – υποθέστε – συμπεράνετε – ερευνήστε – δικαιολογήστε - ξαναοργανώστε – κάντε επανάληψη – λύστε - σχεδιάστε – υποστηρίξτε.

- Επίπεδο 4: Εκτεταμένη σκέψη

Αυτό το επίπεδο απαιτεί την πιο πολύπλοκη γνωστική προσπάθεια. Ένας μαθητής συνθέτει πληροφορίες από πολλές πηγές, συχνά σε μια εκτεταμένη περίοδο, ή μεταφέρει γνώσεις από έναν τομέα για να λύσει προβλήματα σε άλλον. Ρήματα που χρησιμοποιούνται: Αναλύστε – εφαρμόστε ιδέες – εκτιμήστε – συνθέστε – συνδέστε – δημιουργήστε – κρίνετε – υπερασπιστείτε – σχεδιάστε – επεκτείνετε – διατυπώστε – δικαιολογήστε – τροποποιήστε – δείξτε – προτείνετε – αποδείξτε – στοχαστείτε/εκφράστε – αναφέρατε – υποστηρίξτε – συνδυάστε.

Πρέπει να σημειωθεί ότι:

- Τα επίπεδα δεν θεωρούνται μέτρο προόδου.
- Τα επίπεδα δεν είναι διαδοχικά.
- Τα επίπεδα δεν είναι αναπτυξιακά.

4.2.3 Υπολογισμός του επιπέδου μαθηματικής αυστηρότητας (rigour) του ΠΣ

Η κυριολεκτική σημασία της λέξης rigour είναι αυστηρότητα, ακαμψία και ορισμένες φορές δυσκολία. Σημαίνει επίσης και ταυτόχρονα προσεκτικός και διεξοδικός. Στην εκπαίδευση ο όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει εργασίες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να σκέφτονται κριτικά, δημιουργικά και πιο ευέλικτα. Ο Αυστραλιανός οργανισμός ACARA στη μεθοδολογία που χρησιμοποιεί για την σύγκριση προγραμμάτων σπουδών ορίζει το rigour ως τις εκπαιδευτικές - γνωστικές απαιτήσεις που απαιτούνται ώστε οι μαθητές να μπορούν να συμμετέχουν σε υψηλού επιπέδου μάθηση. Οι όροι που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το επίπεδο των εκπαιδευτικών απαιτήσεων του προγράμματος σπουδών είναι περιορισμένο, μέτριο και ανταγωνιστικό και ο διαχωρισμός στις τρεις κατηγορίες έγινε βάση του Webb's Depth of Knowledge (DoK) και δύο αντικατοπτρισμών ενός ΠΣ:

- τις γνώσεις και τις δεξιότητες βάση του περιεχομένου που ένας μαθητής αναμένεται να επιδεικνύει ανάλογα με τα στάνταρντ του ΠΣ

- τις γνωστικές απαιτήσεις δηλαδή την κριτική και δημιουργική σκέψη που θέτει το ΠΣ.

Μαθηματική αυστηρότητα - rigour				
Όροι	**Περιγραφή**	**Δράσεις του εκπαιδευτικού**	**Δράσεις του μαθητή**	**Παραδείγματα μαθητικού προϊόντος - αποτελέσματος**
Περιορισμένο	Το ΠΣ βασίζεται στην απομνημόνευση και στην ανάκληση. Για παράδειγμα αναγνώριση εννοιών και αρχών που έμαθαν προηγουμένως	Ερωτήσεις για να κατευθύνει ή να εστιάσει την προσοχή. Δείχνει / λέει / επιδεικνύει. Παρέχει παραδείγματα. Εξετάζει, οδηγεί, αποικοδομεί, καθορίζει.	Ανταποκρίνεται, θυμάται, απομνημονεύει, επαναλαμβάνει, απορροφά, περιγράφει, αποδεικνύει, ακολουθεί οδηγίες, εφαρμόζει μεθόδους ρουτίνας, ορισμούς, διαδικασίες	Δείχνει, λέει εντοπίζει. Αναπαριστά μαθηματικές σχέσεις με λέξεις, εικόνες ή σύμβολα. Αναφέρει μαθηματικά γεγονότα.
Μέτριο	Το ΠΣ περιλαμβάνει ευελιξία σκέψης και επιλογές στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και εννοιών (π.χ. σύγκριση,	Ερωτήσεις για τη διαφοροποίηση, την εξαγωγή ή τον έλεγχο της εννοιολογική κατανόησης. μοντελοποιεί · οργανώνει/	Επιλύει προβλήματα ρουτίνας με πολλαπλά σημεία λήψης αποφάσεων και εννοιών. Κατασκευάζει μοντέλα για να	Χρησιμοποιεί για παράδειγμα διαγράμματα του Venn, λογαρίθμους.

	εφαρμογή, ταξινόμηση, περιγραφή, εξήγηση)	αναδιοργανώνει /διερευνά πιθανές επιλογές ή συνδέσεις. Παρέχει παραδείγματα.	δείξει σχέσεις. Αποδεικνύει τη χρήση της εννοιολογικής γνώσης. Μεταγλωττίζει και οργανώνει. Απεικονίζει εξηγεί με παραδείγματα – μοντέλα.	
Ανταγωνιστικό	Το ΠΣ θέτει μεγάλες απαιτήσεις στην ικανότητα των μαθητών να συμμετάσχουν με αφηρημένη σκέψη και λογική (έρευνα, σχεδιασμός, ανάλυση, έρευνα, λήψη αποφάσεων, εφαρμογή της κρίσης, δημιουργικές και συνεργατικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων	Ερωτήσεις για την εξέταση του συλλογισμού και της σκέψης. Ζητάει ερωτήσεις που απαιτούν σύνθετες απαντήσεις. Δρα ως καθοδηγητής. Παρέχει κριτήρια και παραδείγματα για την κατασκευή υποθέσεων και την υποστήριξη αξιώσεων.	Ανακαλύπτει και επιλέγει σχετικές και αξιόπιστες αποδείξεις. Αναλύει, αποκτά κρίση, σχεδιάζει. Αμφισβητεί, υποστηρίζει, δοκιμάζει ιδέες - λύσεις. Ερευνά βαθύτερα προβλήματα	Κατασκευή σύνθετης γραφικής παράστασης Πολύτροπη αναφορά πληροφοριών. Συζήτηση – αμφισβήτηση.

	και εφαρμογή των λύσεων σε θέματα της πραγματικής ζωής	Ενθαρρύνει τις πολλαπλές προσεγγίσεις και λύσεις.		

Πίνακας 3. Κατηγορίες μαθηματικής αυστηρότητας, βάση του DoK. Πηγή: Hess, K. (2013). A Guide for Using Webb's Depth of Knowledge with Common Core State Standards. Common Core Institute.

4.3 Εργαλεία της έρευνας

Ως εργαλεία της έρευνας, επειδή πρόκειται για σύγκριση προγραμμάτων σπουδών, θα χρησιμοποιηθούν τα επίσημα έντυπα (ηλεκτρονικά και μη) των προγραμμάτων σπουδών των χωρών, επιπλέον συνοδευτικά έγγραφα οδηγιών, οδηγοί εκπαιδευτικών κτλ. Θα χρησιμοποιηθούν επίσης στη σύγκριση τα αποτελέσματα των διαγωνισμών PISA 2009 – 2012 – 2015 -2018.

4.4 Περιορισμοί της έρευνας

Περιορίζουμε την έρευνα αποκλειστικά στο κομμάτι της Άλγεβρας της τελευταίας τάξης της υποχρεωτικής εκπαίδευσης των δύο χωρών, Γ΄ Γυμνασίου Ελλάδας και 10η τάξη Αυστραλίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : Περιγραφή των ΠΣ στην Άλγεβρα των δύο χωρών και σύγκριση τους ως προς το εύρος, το βάθος και τις γνωστικές απαιτήσεις, καθώς και τη μαθηματική αυστηρότητα

5.1 Παρουσίαση του Αυστραλιανού ΠΣ στην Άλγεβρα

Στο ισχύον Αυστραλιανό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά αναφέρεται ότι σχεδιάστηκε (ACARA, 2018, σελ. 4):

- Για να παρέχει βασικές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες στους μαθητές στην Αριθμητική και την Άλγεβρα, όπως και επίσης και στη Γεωμετρία, την Στατιστική και τις Πιθανότητες.
- Για να μπορούν οι μαθητές να αναπτύξουν τις μαθηματικές ικανότητες που χρειάζονται στην προσωπική τους ζωή, όπως και στο εργασιακό τους περιβάλλον.
- Για να παρέχει τις βασικές αρχές στις οποίες στηρίζονται οι επιστημονικές εφαρμογές των μαθηματικών,

Τα μαθηματικά μέσα από το συγκεκριμένο πρόγραμμα σπουδών σκοπεύουν στο να μάθουν οι μαθητές να εκτιμούν τη χάρη και την ισχύ της μαθηματικής λογικής. Επισημαίνεται στο πρόγραμμα σπουδών ότι οι ψηφιακές τεχνολογίες, που έχουν αναπτυχθεί σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες, διευκολύνουν αυτή την επέκταση ιδεών και παρέχουν πρόσβαση σε νέα εργαλεία για την εξερεύνηση των μαθηματικών. Το πρόγραμμα σπουδών επικεντρώνεται στην ανάπτυξη εξελιγμένης και εκλεπτυσμένης μαθηματικής κατανόησης, ευχέρειας στα μαθηματικά, στη συλλογιστική και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων. Αυτές οι ικανότητες επιτρέπουν τους μαθητές να ανταποκριθούν σε οικείες και άγνωστες καταστάσεις χρησιμοποιώντας μαθηματικές στρατηγικές, ώστε να λάβουν αποφάσεις για την αποτελεσματική επίλυση των προβλημάτων.

Το συγκεκριμένο ΠΣ υποστηρίζει την αλληλοσύνδεση των τροχιών, από τις οποίες αποτελείται, καθώς και τη διαθεματικότητα, επειδή θεωρεί ότι είναι ζωτικής σημασίας η χρήση των μαθηματικών μοντέλων από άλλες επιστήμες, όπως για παράδειγμα η Φυσική, η Γεωγραφία, η Ανθρωπολογία κτλ.

Οι σκοποί του Αυστραλιανού προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά προσβλέπουν στο ότι οι μαθητές (ACARA, 2019, σελ. 4 - 5):

- είναι σίγουροι, δημιουργικοί χρήστες των μαθηματικών, μπορούν να «επικοινωνήσουν» μαθηματικά και είναι ικανοί να ερευνήσουν, να αναπαραστήσουν και ερμηνεύουν τις καταστάσεις στην προσωπική και επαγγελματική τους ζωή και ως ενεργοί πολίτες
- αναπτύσσουν μια ολοένα και πιο εξελιγμένη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ευχέρειας με τις διαδικασίες και είναι σε θέση να θέσουν και να λύσουν προβλήματα λογικής, αριθμητικής, άλγεβρας, γεωμετρίας και στοχαστικών μαθηματικών.
- αναγνωρίζουν τις συνδέσεις μεταξύ των τομέων των μαθηματικών και άλλων κλάδων και εκτιμούν τα μαθηματικά ως μια προσιτή δραστηριότητα, που είναι ψυχικά και διανοητικά ευχάριστη για τη μελέτη.

Η δομή του Αυστραλιανού Π.Σ. ACARA είναι ξεκάθαρη και οργανώνεται με την αλληλεπίδραση τριών τροχιών (strands) περιεχομένου, Αριθμοί και Άλγεβρα – Μετρήσεις και Γεωμετρία – Στατιστική και Πιθανότητες, που περιγράφουν τι πρέπει να διδαχθεί και τι πρέπει να μάθουν οι μαθητές, όπως επίσης και τεσσάρων τροχιών ικανοτήτων, Κατανόηση – Ευχέρεια – Επίλυση προβλήματος και Συλλογιστική. Οι τροχιές ικανοτήτων περιγράφουν πώς διερευνάται ή αναπτύσσεται το περιεχόμενο. Δηλαδή, οι μαθητές να σκέπτονται και να ενεργούν Μαθηματικά. Το ACARA αναφέρει για το ΠΣ των μαθηματικών ότι οι τροχιές ικανοτήτων παρέχουν μία ουσιαστική βάση για την ανάπτυξη των εννοιών στην εκμάθηση των μαθηματικών και έχουν ενσωματωθεί στις περιγραφές περιεχομένου των τριών τμημάτων περιεχομένου. Αυτή η προσέγγιση υιοθετήθηκε για να εξασφαλιστεί ότι οι μαθηματικές δεξιότητες θα αναπτύσσονται σε όλο το πρόγραμμα σπουδών και θα γίνονται όλο και πιο εξελιγμένες τα τελευταία χρόνια της σχολικής φοίτησης. Μια ανάλυση ξεχωριστά για την κάθε τροχιά ικανοτήτων δίνεται παρακάτω (ACARA, 2019, σελ. 5):

Α) Κατανόηση (Understanding): Οι μαθητές δημιουργούν μια ισχυρή γνώση των αποκτώμενων και προσαρμόσιμων μαθηματικών εννοιών. Κάνουν συνδέσεις μεταξύ σχετικών εννοιών και προοδευτική εφαρμογή του γνωστού για την ανάπτυξη νέων ιδεών. Αναπτύσσουν μια κατανόηση της σχέσης μεταξύ του «γιατί» και του «πώς» των μαθηματικών. Οι μαθητές οικοδομούν κατανόηση, όταν συνδέουν σχετικές ιδέες, όταν αναπαριστούν έννοιες με διαφορετικούς τρόπους, όταν εντοπίζουν τα κοινά και τις διαφορές μεταξύ των πτυχών του περιεχομένου, όταν περιγράφουν το συλλογισμό τους μαθηματικά και όταν ερμηνεύουν τις μαθηματικές πληροφορίες,

Β) Ευχέρεια (Fluency): Οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες στην επιλογή κατάλληλων διαδικασιών, διεξάγουν διαδικασίες με ευελιξία, ακρίβεια, αποτελεσματικότητα και καταλληλόλητα, ανακαλούν τις πραγματικές γνώσεις και έννοιες. Οι μαθητές αποκτούν ευχέρεια όταν υπολογίζουν αποτελεσματικά τις απαντήσεις, όταν αναγνωρίζουν ισχυρούς τρόπους απάντησης σε ερωτήσεις, όταν επιλέγουν κατάλληλες μεθόδους και προσεγγίσεις, όταν θυμούνται ορισμούς και χρησιμοποιούν τακτικά τα γεγονότα και όταν μπορούν να χειριστούν εκφράσεις και εξισώσεις για να βρουν λύσεις.

Γ) Επίλυση Προβλήματος (Problem-solving): Οι μαθητές διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα, όταν χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ώστε να αναπαριστούν άγνωστες ή σημαντικές καταστάσεις, όταν σχεδιάζουν πώς θα ερευνήσουν και θα προσεγγίσουν αυτές τις καταστάσεις, όταν εφαρμόζουν τις υπάρχουσες στρατηγικές για να αναζητήσουν λύσεις και όταν επιβεβαιώνουν τις λύσεις τους με απαντήσεις που είναι λογικές.

Δ) Συλλογιστική (Reasoning): Οι μαθητές αναπτύσσουν μια ολοένα και πιο εξελιγμένη ικανότητα λογικής σκέψης και ενεργειών, αναλύοντας, αποδεικνύοντας, εκτιμώντας, εξηγώντας, υπονοώντας, δικαιολογώντας και γενικεύοντας. Οι μαθητές αιτιολογούν μαθηματικά, όταν εξηγούν τη σκέψη τους, όταν συνάγουν και δικαιολογούν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για τα συμπεράσματα που επιτεύχθηκαν, όταν προσαρμόζουν το γνωστό στο άγνωστο, όταν μεταφέρουν τη μάθηση από το ένα στο άλλο, όταν αποδεικνύουν ότι κάτι είναι αληθινό ή ψευδές και όταν συγκρίνουν και αντιπαραβάλλουν σχετικές ιδέες και εξηγούν τις επιλογές τους.

Όσον αφορά τις τροχιές περιεχομένου, θα εστιάσουμε στην Αριθμητική και Άλγεβρα, όπου όπως επισημαίνεται στο ΠΣ αναπτύσσονται μαζί, καθώς το ένα εμπλουτίζει τη μελέτη του άλλου. Οι μαθητές αποκτούν την αίσθηση του αριθμού, όπως επίσης και στρατηγικές για τη μέτρηση και την αναπαράσταση αριθμών. Διερευνούν τις ιδιότητες των αριθμών, κάνουν υπολογισμούς και εφαρμόζουν μια σειρά από στρατηγικές για την κατανόηση των πράξεων. Βασιζόμενοι σε αυτή την κατανόηση των αριθμών, κατανοούν την έννοια της μεταβλητής και της λειτουργίας της, μπορούν να περιγράψουν σχέσεις και να διατυπώσουν γενικεύσεις.

Αναγνωρίζουν την ισοδυναμία και λύνουν εξισώσεις και ανισώσεις. Τέλος, εφαρμόζουν τις αλγεβρικές δεξιότητες που έχουν αποκτήσει στην επίλυση προβλημάτων.

Συγκεκριμένα, η τροχιά Αριθμοί και Άλγεβρα έχει τις εξής υποτροχιές (δίπλα αναφέρεται και η τάξη της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στην οποία διδάσκονται[8]):

- Αριθμοί και ψηφία (F - 8)
- Κλάσματα και δεκαδικοί (1-6)
- Πραγματικοί αριθμοί (7 - 10)
- Χρήματα και Οικονομικά Μαθηματικά (1 -10)
- Μοτίβα και άλγεβρα (F - 10)
- Γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις (7 - 10)

Οι στόχοι του προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά θα πρέπει επίσης να ικανοποιούν τις «Γενικές Ικανότητες» που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές, οι οποίες είναι: α) ο εγγραμματισμός ή αλφαβητισμός (literacy), β) ο αριθμητισμός (numeracy), γ) η ικανότητα χρήσης και επικοινωνίας με τεχνολογικά μέσα, δ) η κριτική και δημιουργική σκέψη, ε) οι ατομικές και κοινωνικές δεξιότητες, στ) η δεοντολογική κατανόηση (ethical understanding) και ζ) η διαπολιτισμική κατανόηση (intercultural understanding)[9].

Αναλύοντας μερικές από αυτές τις ικανότητες στα μαθηματικά, για τον αλφαβητισμό επισημαίνεται ότι οι μαθητές μαθαίνουν το λεξιλόγιο που σχετίζεται με τον αριθμό, το διάστημα, τις μετρήσεις και τις μαθηματικές έννοιες και διεργασίες. Αυτό το λεξιλόγιο περιλαμβάνει συνώνυμα, τεχνική ορολογία, παθητική φωνή και κοινές λέξεις με συγκεκριμένες σημασίες σε ένα μαθηματικό περιβάλλον. Οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα να δημιουργούν και να ερμηνεύουν μια σειρά κειμένων που χαρακτηρίζουν τα μαθηματικά, τα οποία κυμαίνονται από ημερολόγια και χάρτες έως σύνθετες οθόνες δεδομένων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τον αλφαβητισμό για να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν προβλήματα λέξεων και οδηγίες που περιέχουν τα συγκεκριμένα γλωσσικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Χρησιμοποιούν τον

[8] Να σημειώσουμε ανάλογα την πολιτεία και την περιοχή στην Αυστραλία διαφέρουν τα έτη φοίτησης σε κάθε βαθμίδα της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Primary school) διαρκεί 6 ή 7 έτη μετρώντας από το νηπιαγωγείο, το Γυμνάσιο (Secondary school) 3 ή 4 έτη από 7 έως και 10 ή 8 έως και 10 και το Λύκειο (Senior secondary school) στα έτη 11 και 12.

[9] https://www.australiancurriculum.edu.au/

αλφαβητισμό για να θέτουν και να απαντούν σε ερωτήσεις, να ασχολούνται με τη μαθηματική επίλυση προβλημάτων και να συζητούν, να παράγουν και να εξηγούν λύσεις. Ο αριθμητισμός περιλαμβάνει τις γνώσεις, τις δεξιότητες, τις συμπεριφορές και τις διαθέσεις που οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν στα μαθηματικά σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων. Περιλαμβάνει τους μαθητές που αναγνωρίζουν και κατανοούν τον ρόλο των μαθηματικών στον κόσμο και έχουν τις ικανότητες να χρησιμοποιούν μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες με συγκεκριμένο σκοπό. Άλλωστε, όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (2002), «Σήμερα, το να έχεις αποκτήσει το επίπεδο του αριθμητισμού σημαίνει να έχεις αναπτύξει κάποιες βασικές μαθηματικές ικανότητες, οι οποίες εφαρμόζονται σε διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής». Η κριτική και δημιουργική σκέψη αναπτύσσεται καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να δημιουργούν και να αξιολογούν τις γνώσεις, τις ιδέες και τις δυνατότητες και να τις χρησιμοποιούν κατά την αναζήτηση λύσεων. Η συλλογιστική και η σκέψη για λύσεις σε προβλήματα και οι στρατηγικές που απαιτούνται για την εξεύρεση αυτών των λύσεων αποτελούν βασικά τμήματα του προγράμματος σπουδών της Αυστραλίας στα μαθηματικά.

Τέλος, οι μαθητές αναπτύσσουν και χρησιμοποιούν ατομικές και κοινωνικές δυνατότητες, καθώς εφαρμόζουν μαθηματικές δεξιότητες σε μια σειρά ατομικών και κοινωνικών πλαισίων.

Στη συγκεκριμένη εργασία θα παρουσιάσουμε το ΠΣ στη 10η – τελευταία τάξη του Γυμνασίου – στη τροχιά (Strand) Αριθμοί και Άλγεβρα. Σε αυτήν την τάξη έχουμε τις υπο-τροχιές (Sub-strands): Μοτίβα και Άλγεβρα – Γραμμικές και μη Γραμμικές σχέσεις. Με την υποτροχιά Χρήματα και Οικονομικά μαθηματικά δεν θα ασχοληθούμε. Το πρόγραμμα σπουδών αυτής της τάξης περιλαμβάνει επιπλέον προαιρετικό περιεχόμενο (10A) για μαθητές υψηλών επιδόσεων που θέλουν να εμπλουτίσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και να προετοιμαστούν για θέματα ανάλυσης, που θα γνωρίσουν στο Λύκειο. Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι στόχοι του περιεχομένου της 10ης τάξης με τις αντίστοιχες περιγραφές εκπονήσεων δραστηριοτήτων. Στο παράρτημα Α υπάρχουν οι στόχοι του προγράμματος F-10A.

Τάξη 10η	**Τροχιά: Αριθμοί και Άλγεβρα**
Υπο-τροχιά: Μοτίβα και Άλγεβρα	
Στόχοι	Εκπονήσεις
Παραγοντοποιήστε αλγεβρικές παραστάσεις βγάζοντας ένα κοινό παράγοντα.	α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και τις ιδιότητες δυνάμεων. β) Κατανοώντας την σχέση μεταξύ παραγοντοποίησης και ανάπτυξης της αλγεβρικής παράστασης.
Απλοποιήστε αλγεβρικά γινόμενα και πηλίκα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων	Εφαρμόστε τη γνώση των ιδιοτήτων των δυνάμεων σε αλγεβρικούς όρους και απλοποιήστε αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς ακέραιους εκθέτες.
Εφαρμόστε τις 4 πράξεις σε απλά αλγεβρικά κλάσματα με αριθμητικούς παρονομαστές	α) Εκφράζοντας το άθροισμα και το γινόμενο ενός αλγεβρικού κλάσματος με έναν κοινό παράγοντα β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες δυνάμεων για την απλοποίηση γινομένων και πηλίκων
Αναπτύξτε διωνυμικά γινόμενα και παραγοντοποιήστε με διάφορους τρόπους δευτέρου βαθμού πολυωνύμων της μορφής x^2+bx+c.	α) Εξερευνώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων για την παραγοντοποίηση δευτέρου βαθμού πολυωνύμων, επιλύστε δευτέρου βαθμού εξισώσεις β) Βγάζοντας κοινό παράγοντα κατά ομάδες γ) Χρησιμοποιώντας ταυτότητες δημιουργήστε τέλεια τετράγωνα.
Εναλλάξτε τιμές σε τύπους για να προσδιορίσετε έναν άγνωστο	Επιλύοντας απλές εξισώσεις που προκύπτουν από τύπους

Υπο-τροχιά: Γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις	
Στόχοι	Εκπονήσεις
Επιλύστε προβλήματα που αφορούν γραμμικές εξισώσεις συμπεριλαμβανομένων και αυτών που προκύπτουν από τύπους.	Αναπαριστώντας προβλήματα με απλές γραμμικές εξισώσεις και επιλύοντάς τες για να απαντηθούν οι ερωτήσεις.
Επιλύστε γραμμικές ανισότητες και σχεδιάστε τις λύσεις τους στην αριθμογραμμή.	Αναπαριστώντας προβλήματα με απλές γραμμικές ανισότητες και επιλύοντάς τες για να απαντηθούν οι ερωτήσεις.
Επιλύστε γραμμικά συστήματα εξισώσεων χρησιμοποιώντας αλγεβρικές και γραφικές τεχνικές συμπεριλαμβανομένης και τεχνολογίας.	Συσχετίζοντας τη λύση του συστήματος με τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους στις γραφικές παραστάσεις.
Επιλύστε προβλήματα που αφορούν παράλληλες και κάθετες ευθείες	α) Λύνοντας προβλήματα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση και αντιστρόφως ευθείες με την ίδια κλίση είναι παράλληλες. β) Ομοίως στις κάθετες ευθείες ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι -1 και αντιστρόφως.
Εξερευνήστε τη σύνδεση μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των σχέσεων, όπως απλά τριώνυμα, κύκλοι, εκθετικές συναρτήσεις.	α) Σχεδιάζοντας γραφικές παραστάσεις παραβολών, κύκλων και εφαρμόζοντας μεταφράσεις, αντανακλάσεις και εκτάσεις σε παραβολές και κύκλους β) Σχεδιάζοντας εκθετικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς
Επιλύστε απλές γραμμικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν και ένα ή δυο αλγεβρικά κλάσματα.	α) Λύνοντας ένα ευρύ φάσμα γραμμικών εξισώσεων συμπεριλαμβανομένου και ενός ή δύο κλασμάτων και ελέγχοντας τις λύσεις με αντικατάσταση στην εξίσωση.

	β)Αναπαριστώντας λεκτικά προβλήματα που αφορούν κλάσματα με εξισώσεις και επιλύοντάς τες για να απαντηθούν οι ερωτήσεις.
Λύστε απλές δευτέρου βαθμού εξισώσεις χρησιμοποιώντας μια ποικιλία στρατηγικών.	Χρησιμοποιώντας μια ποικιλία τεχνικών για την επίλυση δευτέρου βαθμού εξισώσεων που περιλαμβάνουν ομαδοποίηση, τέλειο τετράγωνο, τον τύπο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως και επιλέγοντας δύο ακέραιους με το απαραίτητο γινόμενο και άθροισμα.

Πίνακας 4. Το Αυστραλιανό πρόγραμμα σπουδών στην Άλγεβρα 10ης τάξης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης»

5.1.1 Μέτρηση του εύρους, του βάθους και των γνωστικών απαιτήσεων, καθώς και της μαθηματικής αυστηρότητας του αυστραλιανού προγράμματος σπουδών στη 10η τάξη

Στο τέλος της 10ης τάξης το πρόγραμμα σπουδών προσδοκά, στην αριθμητική και την Άλγεβρα, οι μαθητές να λύνουν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων. Επίσης, να μπορούν να αναπτύσσουν και να παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και να κάνουν πράξεις με αλγεβρικά κλάσματα. Να λύνουν απλές εξισώσεις δευτέρου βαθμού όπως και 2x2 γραμμικά συστήματα.

Εύρος: Περιεκτικό Επίπεδο

Το εύρος αναφέρεται στον αριθμό ή το εύρος των θεμάτων ή του περιεχομένου που καλύπτει το πρόγραμμα σπουδών. Με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία μετράμε τον αριθμό των στόχων και εκπονήσεων δραστηριοτήτων που θέτει το πρόγραμμα σπουδών στην Άλγεβρα της 10ης τάξης, όπως για παράδειγμα: «Παραγοντοποιήστε αλγεβρικές παραστάσεις βγάζοντας ένα κοινό παράγοντα» (1ος στόχος) και «Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και τις ιδιότητες δυνάμεων», μία δραστηριότητα μέσα από τον παραπάνω πίνακα του ΠΣ.

Το εύρος τους του ΠΣ στην Άλγεβρα της 10ης τάξης κατατάσσεται σύμφωνα με την μεθοδολογία στο περιεκτικό επίπεδο: Συγκεκριμένοι – πολλαπλοί και ποικίλοι στόχοι σε κάθε ενότητα της Άλγεβρας ή αντικείμενο που μελετάται. Γενικές, αλλά και συγκεκριμένες δραστηριότητες σε κάθε στόχο του προγράμματος σπουδών στην Άλγεβρα. Το ΠΣ ενσωματώνει 12 περιγραφές στόχων στην τροχιά Αριθμητική και Άλγεβρα και κάθε περιγραφή υποστηρίζεται από τουλάχιστον μία εκπόνηση δραστηριότητας που παρέχει διδακτικές ιδέες προς βοήθεια των εκπαιδευτικών. Επιπλέον μέτρηση γίνεται και για το προαιρετικό πρόγραμμα της 10Α τάξης.

Τάξη 10η	**Άλγεβρα**
Περιγραφές στόχων ενοτήτων (αθροιστικά σε όλες τις υποτροχιές)	12
Εκπονήσεις δραστηριοτήτων	19

Πίνακας 5. Αριθμός στόχων στο ΠΣ 10ης τάξης στην Άλγεβρα.

Τάξη 10η Α (προαιρετικό ΠΣ)	**Άλγεβρα**
Περιγραφές στόχων ενοτήτων (αθροιστικά σε όλες τις υποτροχιές)	7
Εκπονήσεις δραστηριοτήτων	10

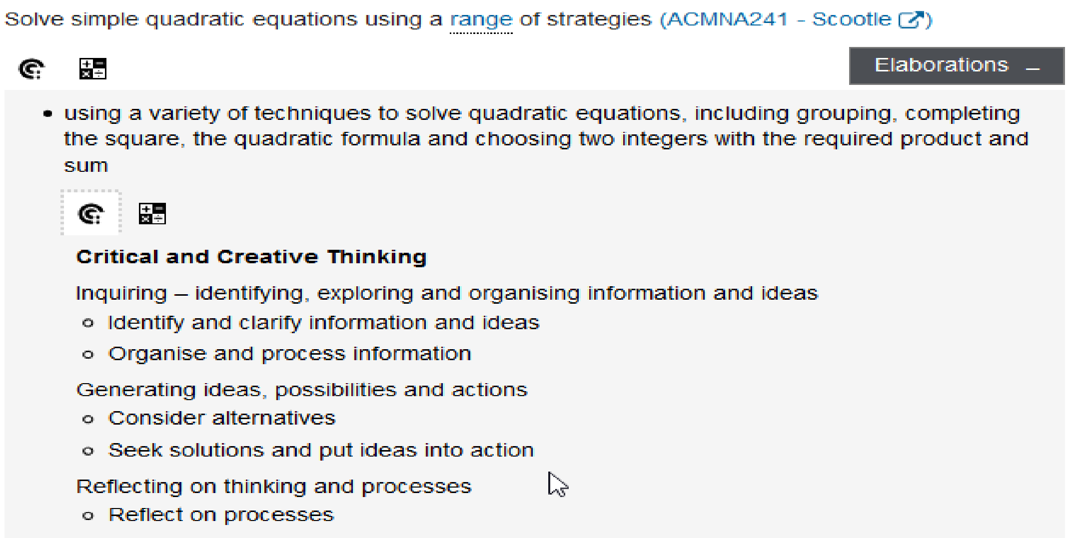
Πίνακας 6. Αριθμός στόχων στο ΠΣ 10Α της Άλγεβρας.

Βάθος: Ανταγωνιστικό Επίπεδο

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στη μεθοδολογία της παρούσης έρευνας, το βάθος αναφέρεται στο ποσό ή το επίπεδο των λεπτομερειών σχετικά με ένα θέμα ή ένα πλήρες σύνολο εννοιών, όρων και δραστηριοτήτων που οδηγεί στην ανάπτυξη βαθιάς κατανόησης των βασικών εννοιών, αρχών και γνώσεων και στην ικανότητα εφαρμογής αυτών των κατανοήσεων σε περιεχόμενο της πραγματικής ζωής.

Οι εκδοχές κατανόηση και ευχέρεια, όπως περιγράφονται στην τροχιά ικανοτήτων, είναι ενσωματωμένες στο πρόγραμμα σπουδών της Αριθμητικής και Άλγεβρας και απαιτούν υψηλού επιπέδου ενασχόληση με τις αριθμητικές και αλγεβρικές έννοιες. Όσον αφορά την κατανόηση, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την άνεση και να είναι εξοικειωμένοι με την ανάπτυξη νέων ιδεών. Συγκεκριμένα, στη 10η τάξη να μπορούν να εφαρμόσουν τις 4 βασικές πράξεις σε αλγεβρικά κλάσματα, να βρίσκουν αγνώστους σε τύπους με την βοήθεια της αντικατάστασης, και να συσχετίζουν τις εξισώσεις με τα γραφήματά τους. Η ευχέρεια συνεπάγεται την ολοκλήρωση διαδικασιών με ακρίβεια και ευελιξία, όπως και ανάκληση γνώσεων και εννοιών με ευκολία. Στη $10^{η}$ τάξη αυτό μεταφράζεται στο να μπορούν να παραγοντοποιήσουν και να αναπτύσσουν αλγεβρικές εκφράσεις και να χρησιμοποιούν διάφορες στρατηγικές για να επιλύσουν εξισώσεις[10].

Στην ηλεκτρονική μορφή του Αυστραλιανού προγράμματος σπουδών σε κάθε στόχο έχουμε πλήρη αιτιολόγηση του πώς επιτυγχάνεται ο αριθμητισμός μέσα από τις δραστηριότητες, ενώ στους στόχους «Εφαρμόστε τις 4 πράξεις σε απλά αλγεβρικά κλάσματα με αριθμητικούς παρονομαστές» και «Λύστε απλές δευτέρου βαθμού εξισώσεις χρησιμοποιώντας μια ποικιλία στρατηγικών», αναφέρεται ρητά η ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής σκέψης μέσω διερεύνησης και οργάνωσης πληροφοριών και ιδεών, δηλαδή: α) με αντανάκλαση στη σκέψη και τις διαδικασίες β) με διερεύνηση, οργάνωση και επεξεργασίας πληροφοριών και ιδεών και γ) με δημιουργία ιδεών, δυνατοτήτων και ενεργειών (εικ. 6).


Solve simple quadratic equations using a range of strategies (ACMNA241 - Scootle)

Elaborations –

- using a variety of techniques to solve quadratic equations, including grouping, completing the square, the quadratic formula and choosing two integers with the required product and sum

Critical and Creative Thinking

Inquiring – identifying, exploring and organising information and ideas
- Identify and clarify information and ideas
- Organise and process information

Generating ideas, possibilities and actions
- Consider alternatives
- Seek solutions and put ideas into action

Reflecting on thinking and processes
- Reflect on processes

Εικ. 6. Παραδείγματα ανάπτυξης του Αριθμητισμού και της κριτικής και δημιουργικής σκέψης στη $10^{η}$ τάξη. Από ACARA[11] F-10

---

[10] Πηγή **Year 10 Level Description, The Australian Curriculum.** https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

[11] https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/?year=11761&strand=Number+and+Algebra&strand=Measurement+and+G

Επίσης, στους στόχους «Επιλύστε προβλήματα που αφορούν παράλληλες και κάθετες ευθείες» και «Εξερευνήστε την σύνδεση μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των σχέσεων, όπως απλά τριώνυμα, κύκλοι, εκθετικές συναρτήσεις» αναφέρεται ακριβώς πώς αναπτύσσεται ο αλφαβητισμός. Αυτό γίνεται μέσω της κατανόησης του πώς τα οπτικά στοιχεία δημιουργούν νόημα, μέσω της κατανόησης του λεξιλογίου που χρησιμοποιείται στον ένα στόχο και -επιπλέον αυτών- μέσω της κατανόησης, ανάλυσης και ερμηνείας του μαθηματικού κειμένου στον άλλο στόχο. Οι γενικές αυτές ικανότητες, επισημαίνεται ότι οδηγούν σε βαθιά γνώση του αντικειμένου. Βάση των κριτήριων που αναπτύχθηκαν στη μεθοδολογία της παρούσης έρευνας, το βάθος του αυστραλιανού προγράμματος κατατάσσεται στο ανταγωνιστικό επίπεδο: Ενσωματώνει και διασυνδέει. Μία σύνθεση της γνώσης. Απαιτεί υψηλότερη σκέψη. Οι άγνωστες έννοιες αναλύονται κριτικά και συνδέονται με γνωστές έννοιες, ώστε να παραχθεί νέα γνώση που θα λύσει άγνωστα προβλήματα.

Γνωστικές απαιτήσεις του προγράμματος: Όλων των επιπέδων του DoK

Για να μετρήσουμε τις γνωστικές απαιτήσεις χρησιμοποιούμε το πλαίσιο Depth of Knowledge – DoK (1997) το οποίο κατηγοριοποιεί τις εργασίες ανάλογα με την περιπλοκότητα της σκέψης που χρειάζεται για να ολοκληρωθούν. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

Επίπεδο 1: Σε αυτό το επίπεδο, ένας μαθητής ασκεί μικρή γνωστική προσπάθεια πέρα από την ανάκληση ή την απομνημόνευση. Παράδειγμα στόχου του ΠΣ που εμφανίζεται αυτό το επίπεδο:

- Εφαρμόστε τις 4 πράξεις σε απλά αλγεβρικά κλάσματα με αριθμητικούς παρονομαστές.
- Επιλύστε απλές γραμμικές εξισώσεις.

Επίπεδο 2: Δεξιότητες και έννοιες. Σε αυτό το επίπεδο, ένας μαθητής παίρνει κάποιες αποφάσεις σχετικά με τη μάθηση. Παραδείγματα στόχων που εμφανίζονται στο ΠΣ:

---

eometry&strand=Statistics+and+Probability&capability=ignore&capability=Literacy&capability=Numeracy&capability=Information+and+Communication+Technology+%28ICT%29+Capability&capability=Critical+and+Creative+Thinking&capability=Personal+and+Social+Capability&capability=Ethical+Understanding&capability=Intercultural+Understanding&priority=ignore&priority=Aboriginal+and+Torres+Strait+Islander+Histories+and+Cultures&priority=Asia+and+Australia%E2%80%99s+Engagement+with+Asia&priority=Sustainability&elaborations=true&elaborations=false&scotterms=false&isFirstPageLoad=false

- Απλοποιήστε αλγεβρικά γινόμενα και πηλίκα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.
- Λύστε απλές δευτέρου βαθμού εξισώσεις χρησιμοποιώντας μια ποικιλία στρατηγικών.
- Αναπαριστώντας προβλήματα με απλές γραμμικές εξισώσεις και επιλύοντας τες για να απαντηθούν οι ερωτήσεις.
- Συσχετίζοντας τη λύση του συστήματος με τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους στις γραφικές παραστάσεις.
- Σχεδιάζοντας γραφικές παραστάσεις παραβολών, κύκλων.
- Εναλλάξτε τιμές σε τύπους για να προσδιορίσετε έναν άγνωστο.

Επίπεδο 3: Στρατηγική σκέψη. Εστίαση στη συλλογιστική και αιτιολόγηση. Σε αυτό το επίπεδο πολυπλοκότητας, ο μαθητής χρησιμοποιεί τον προγραμματισμό και τα αποδεικτικά στοιχεία, δικαιολογεί τις επιλογές και η σκέψη είναι πιο αφηρημένη. Παραδείγματα στόχων και δραστηριοτήτων του ΠΣ που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο:

- Εξερευνήστε τη σύνδεση μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των σχέσεων, όπως απλά τριώνυμα, κύκλοι, εκθετικές συναρτήσεις.
- Εξερευνώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων για την παραγοντοποίηση δευτέρου βαθμού πολυωνύμων, επιλύστε δευτέρου βαθμού εξισώσεις.

Επίπεδο 4: Εκτεταμένη σκέψη και συλλογιστική. Αυτό το επίπεδο απαιτεί την πιο πολύπλοκη γνωστική προσπάθεια. Ένας μαθητής συνθέτει πληροφορίες από πολλές πηγές, συχνά σε μια εκτεταμένη περίοδο ή μεταφέρει γνώσεις από έναν τομέα σε άλλον για να λύσει προβλήματα. Παραδείγματα στόχων και δραστηριοτήτων του ΠΣ που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο:

- Χρησιμοποιώντας αλγεβρικές και γραφικές τεχνικές, επιλύστε γραμμικά συστήματα εξισώσεων/ επιλύστε προβλήματα
- Επιλύστε προβλήματα που αφορούν παράλληλες και κάθετες ευθείες όπου το ΠΣ αναφέρει ότι θα πρέπει οι μαθητές να σκεφτούν και εναλλακτικές λύσεις, να διερευνήσουν και να οργανώσουν τις πληροφορίες και τις ιδέες και να υπάρχει αντανάκλαση στη σκέψη και τις διαδικασίες.

Βλέπουμε παραπάνω ότι τα ρήματα που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση των στόχων είναι «συνδέστε, εφαρμόστε, αναπαραστήστε, συσχετίστε, συνδέστε, χρησιμοποιείστε, απλοποιήστε, παραγοντοποιήστε, επιλύστε, εξερευνήστε, εφαρμόστε, αναπτύξτε, εναλλάξτε, σχεδιάστε», όπως στις δραστηριότητες εκφράσεις που περιέχουν «κατανοώντας, σχεδιάζοντας, αναπαριστώντας, επιλύοντας» που δείχνουν ότι εμφανίζονται όλα τα γνωστικά επίπεδα του DoK.

Μαθηματική αυστηρότητα: Ανταγωνιστικό επίπεδο

Όπως αναφέραμε στη μεθοδολογία, η μαθηματική αυστηρότητα ορίστηκε ως οι εκπαιδευτικές - γνωστικές απαιτήσεις που απαιτούνται, ώστε οι μαθητές να μπορούν να συμμετέχουν σε υψηλού επιπέδου μάθηση. Θα μετρηθεί βάση: α) των δύο αντικατοπτρισμών του ΠΣ:

- τις γνώσεις και τις δεξιότητες βάση του περιεχομένου που ένας μαθητής αναμένεται να επιδεικνύει ανάλογα με τα στάνταρντ του ΠΣ
- τις γνωστικές απαιτήσεις, δηλαδή την κριτική και δημιουργική σκέψη που θέτει το ΠΣ.

Και β) του πλαισίου DoK.

Όσον αφορά τις γνώσεις, το ΠΣ έχει ικανό, όπως έχουμε δει, αριθμό στόχων και δραστηριοτήτων, που καλύπτει πλήρως τις ενότητες της Άλγεβρας που πραγματεύεται. Επίσης, το βάθος της κατανόησης των εννοιών βρίσκεται στο υψηλότερο επίπεδο. Το ΠΣ θέτει υψηλούς στόχους στην κριτική και δημιουργική σκέψη. Το πού και με ποιον τρόπο εμφανίζεται αυτή, τονίζεται ιδιαίτερα, όπως έχουμε ήδη δει, σε κάθε στόχο του ΠΣ.

Το Αυστραλιανό ΠΣ στην Άλγεβρα επιμένει και απαιτεί από τους μαθητές του την επίλυση προβλημάτων, πρακτικών, καθημερινής ζωής και εν τέλει προβλημάτων στα οποία δεν είναι εξοικειωμένοι. Δίνεται μεγάλη βαρύτητα στη συλλογιστική. Στα «achievement standards[12]» του προγράμματος δίνονται παραδείγματα στην Άλγεβρα της 10ης τάξης που φαίνεται ξεκάθαρα ότι το ΠΣ θεωρεί επαρκή τον μαθητή που εκφράζει σωστά συλλογισμούς, που αιτιολογεί και που λύνει διαφόρων ειδών

[12] Ικανοποιητικό: https://docs.acara.edu.au/curriculum/worksamples/Year_10_Mathematics_Portfolio_Satisfactory.pdf
Υψηλότερο του ικανοποιητικού: https://docs.acara.edu.au/curriculum/worksamples/Year_10_Mathematics_Portfolio_Above.pdf
Χαμηλότερο του ικανοποιητικού: https://docs.acara.edu.au/curriculum/worksamples/Year_10_Mathematics_Portfolio_Below.pdf

προβλήματα. Τα δύο παραπάνω, συλλογιστική και επίλυση προβλήματος, αποτελούν άλλωστε και δύο από τις τροχιές ικανοτήτων.

5.2 Παρουσίαση του Ελληνικού ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ στην Άλγεβρα

Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) που εφαρμόζεται από το 2003, διατηρούνται τα διακριτά μαθήματα, αλλά ταυτόχρονα προωθούνται τρόποι συσχέτισης της γνώσης σε δύο άξονες διαθεματικότητας, τον κατακόρυφο (Ενιαίο) και τον οριζόντιο (Διαθεματικό). Για το Γυμνάσιο επισημαίνεται ότι επειδή ο μαθητής βρίσκεται σε ηλικία κατά την οποία αναπτύσσεται η αφαιρετική σκέψη, θεωρείται αναγκαία η μελέτη αυτοτελών γνωστικών αντικειμένων με οριζόντια διασύνδεση. Οριζόντια διασύνδεση στο επίπεδο των Α.Π.Σ. (Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών) σημαίνει κατάλληλη οργάνωση της διδακτέας ύλης κάθε γνωστικού αντικειμένου, ώστε να εξασφαλίζεται η ανάλυση των θεμάτων από πολλές οπτικές γωνίες. Η Διαθεματική Προσέγγιση είναι όρος γενικότερος της διεπιστημονικότητας. Παρέχει στον μαθητή τη δυνατότητα να συγκροτήσει ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων, ώστε να διαμορφώνει προσωπική άποψη για θέματα επιστημών, αλλά και καθημερινότητας. Η διαθεματική προσέγγιση υποστηρίζεται από μεθόδους ενεργητικής απόκτησης της γνώσης και εξειδικεύεται στις διαθεματικές δραστηριότητες. Οι "διαθεματικές έννοιες" α) είναι κοινές σε πολλά γνωστικά αντικείμενα της ίδιας τάξης, β) εμφανίζονται συχνά σε γνωστικά αντικείμενα διαφόρων τάξεων και γ) συμβάλλουν στην προώθηση αξιών που συνδέονται με τους βασικούς σκοπούς της σχολικής εκπαίδευσης (ΦΕΚ 303/ τ. Β΄/ 13.03.2003).

Δομή των ΔΕΠΠΣ και των ΑΠΣ των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων:

Ως προς τη δομή του, το Δ.Ε.Π.Π.Σ. κάθε επιμέρους διδακτικού αντικειμένου περιλαμβάνει:

α. τους γενικούς σκοπούς της διδασκαλίας του γνωστικού αντικειμένου,

β. τους άξονες του γνωστικού περιεχομένου,

γ. τους γενικούς γνωστικούς στόχους καθώς και τις αξίες, στάσεις και δεξιότητες που καλλιεργούνται με τη διδασκαλία του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου και

δ. ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης

Τα Α.Π.Σ έχουν την ακόλουθη δομή:

α. Ειδικοί σκοποί, που εκφράζουν τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα και αναφέρονται σε γνώσεις, στάσεις και αξίες που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές. Λαμβάνεται υπόψιν η ηλικία και η αντιληπτική ικανότητα των μαθητών.

β. Στόχοι, οι οποίοι αποτελούν τις κατευθυντήριες γραμμές για τον σχεδιασμό και τη διαμόρφωση των περιεχομένων των διδακτικών αντικειμένων.

Στο ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ 2003 οι στόχοι για λόγους μεθοδολογικούς χωρίζονται σε τρεις ομάδες:

α) στους γνωστικούς στόχους, δηλαδή αυτούς που συμβάλλουν στην απόκτηση των βασικών γνώσεων και την καλλιέργεια νοητικών ικανοτήτων και επισημαίνεται ότι: « *η ακριβής οριοθέτηση των γνωστικών στόχων για κάθε διδακτικό αντικείμενο μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τι ακριβώς πρέπει να διδαχθεί και πώς θα γίνει στη συνέχεια η αξιολόγηση του βαθμού επίτευξης των στόχων αυτών*»,

β) στους συναισθηματικούς στόχους, οι οποίοι αναπτύσσουν το ενδιαφέρον του μαθητή για την επιστημονική γνώση και την εκδίπλωση του συναισθηματικού του κόσμου,

γ) στους ψυχοκινητικούς στόχους, οι οποίοι αναπτύσσουν τις δεξιότητες του μαθητή. Η κατηγοριοποίηση θα μπορούσε να γίνει και σε τρεις άξονες ανεξαρτήτως σχολικής εκπαιδευτικής βαθμίδας:

- Γνώση και μεθοδολογία
- Συνεργασία και επικοινωνία
- Σχέση της επιστήμης με την καθημερινή ζωή

Σε ό,τι αφορά τις θεματικές ενότητες αναφέρεται ότι:

α. Το περιεχόμενο πρέπει να προσαρμόζεται στην εκπαιδευτική διαδικασία και δεν μπορεί να είναι αυτούσιο με το περιεχόμενο της επιστήμης που ανήκει.

β. Πρέπει να αποφεύγονται οι περιττές επικαλύψεις, οπότε λαμβάνονται υπόψιν και τα Α.Π.Σ άλλων αντικειμένων.

γ. Δε δίνεται έμφαση σε εξειδικευμένες και λεπτομερειακές γνώσεις, αλλά προβάλλεται το ουσιώδες, το σημαντικό και το παιδαγωγικά γόνιμο, ώστε να αποφεύγεται η μεγάλη ποσότητα ύλης. Η ύλη είναι τόση, όση μπορεί να αφομοιώσει ο μαθητής στο διατιθέμενο διδακτικό χρόνο.

δ. Υπάρχει προσαρμογή στις τεχνολογικές εξελίξεις.

ε. Εξασφαλίζεται συνέχεια και σύνδεση με όσα έχουν προηγηθεί, αλλά και με όσα ακολουθούν.

στ. Συσχετίζονται και συνδέονται τα θέματα που αναπτύσσονται με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

ζ. Πρέπει να μπορούν οι μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη, συλλογική προσπάθεια και να αποκτήσουν γενική παιδεία.

η. Η κάλυψη της ύλης πρέπει να είναι σπειροειδής. Πρέπει να αποφεύγονται οι επαναλήψεις.

Τέλος, όσον αφορά τις δραστηριότητες, μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες:

- Αυτές που ευκολύνουν την επίτευξη των στόχων του συγκεκριμένου αντικειμένου.
- Αυτές που εξετάζουν διαθεματικές έννοιες και συσχετίζονται οι γνώσεις μεταξύ αντικειμένων.

Να προσθέσουμε ότι διατίθενται ενδεικτικά σχέδια εργασίας διαθεματικού χαρακτήρα τα οποία αφορούν ευρύτερες θεματικές ενότητες.

Γενικοί, ειδικοί σκοποί και στόχοι του Α.Π.Σ για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο και την Άλγεβρα Γ΄ Γυμνασίου

Το ελληνικό ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ (2003) αναφέρει ότι ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών συμβάλλει στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας και της κοινωνικής ένταξης του μαθητή, αφού τα μαθηματικά:

- Αναπτύσσουν μεθοδική σκέψη και την εξάσκηση στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τις σκέψεις του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια.

- Αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.
- Είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και ιδιαίτερα στο χώρο εργασίας, αλλά και για την ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και ιδιαίτερα της Τεχνολογίας, της Οικονομίας και των Κοινωνικών Επιστημών.

Για το Γυμνάσιο επιδιώκονται οι παρακάτω ειδικότεροι σκοποί:

1. Η απόκτηση βασικών μαθηματικών ικανοτήτων
2. Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας, αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.
3. Η σταδιακή κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της δομής των μαθηματικών.
4. Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
5. Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.
6. Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας, τόσο στις θετικές, όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες.
7. Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.
8. Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής.

Το ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ αναπτύσσεται σε δύο άξονες, Άλγεβρα με Στατιστική – Γεωμετρία με επιμέρους θεματικές ενότητες, ενώ για κάθε στόχο της θεματικής ενότητας προτείνεται και διατιθέμενος χρόνος, καθώς και ενδεικτικές δραστηριότητες με σκοπό να βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό στη διδασκαλία του αντικειμένου.

Οι γενικοί στόχοι του ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ για την Άλγεβρα στις Γ΄ Γυμνασίου (τελευταία τάξη του Γυμνασίου) είναι:

	Άξονες γνωστικού περιεχομένου.	**Γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες).**
	Άλγεβρα	
1	Αλγεβρικός Λογισμός	Να γνωρίσουν την έννοια στις αλγεβρικής παράστασης και ειδικότερα στις έννοιες του μονωνύμου, του πολυωνύμου και της ρητής αλγεβρικής παράστασης, να μπορούν να εκτελούν πράξεις με αυτές, να γνωρίσουν τις ιδιότητες των πράξεων, τις βασικές ταυτότητες και να μπορούν να παραγοντοποιούν και να απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις.
2	Εξισώσεις – Ανισώσεις – Συστήματα	Να μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά εξισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, ανισώσεις α΄ βαθμού και γραμμικά συστήματα.
3	Συναρτήσεις	Να γνωρίσουν τα διάφορα είδη των αναπαραστάσεων στις συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και να μπορούν να τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.

Πίνακας 7. Γενικοί στόχοι την Άλγεβρα Γ΄ Γυμνασίου

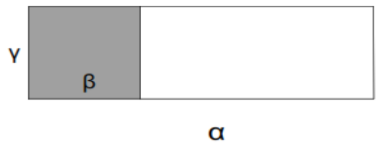
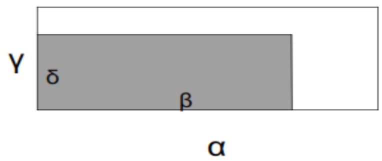
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι στόχοι, οι θεματικές ενότητες, και ενδεικτικές δραστηριότητες του Ελληνικού ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ για την Γ΄ Γυμνασίου στην Άλγεβρα.

ΑΛΓΕΒΡΑ – ΤΑΞΗ Γ΄		
Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)	**Στόχοι**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
Αλγεβρικές παραστάσεις		
Πράξεις με αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις) *(5 ώρες)*	Οι μαθητές πρέπει: Να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες. Να εμπεδώσουν στις ιδιότητες των δυνάμεων. Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν στις ιδιότητες των ριζών: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	Με κατάλληλες δραστηριότητες να γίνει επανάληψη των τεσσάρων πράξεων και των δυνάμεων και των ιδιοτήτων τους. Στη συνέχεια, με κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα θα διαπιστώσουν οι μαθητές ότι ισχύουν οι ιδιότητες των ριζών, τις οποίες και θα αποδείξουν. *«Η έννοια στις Απόδειξης» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γλώσσα, Λογοτεχνία).*
Μονώνυμα και πολυώνυμα Πράξεις με μονώνυμα Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων *(4 ώρες)*	Να βρίσκουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης. Να διακρίνουν αν μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο ή πολυώνυμο και να προσδιορίζουν το βαθμό του. Να διακρίνουν αν δύο πολυώνυμα είναι ίσα.	Οι έννοιες του μονωνύμου και του πολυωνύμου εισάγονται με τη βοήθεια γνωστών τύπων, στις π.χ. ο τύπος του εμβαδού κύκλου, ο τύπος υπολογισμού του τόκου κτλ.

	Να προσθέτουν, να αφαιρούν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μονώνυμα. Να προσθέτουν και να αφαιρούν πολυώνυμα. Να χρησιμοποιούν την αναγωγή των όμοιων όρων για την απλούστευση της γραφής των πολυωνύμων.	
Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων *(2 ώρες)*	Να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο, καθώς και πολυώνυμο με πολυώνυμο.	
Αξιοσημείωτες ταυτότητες *(5 ώρες)*	Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες: $(\alpha\pm\beta)^2= \alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)= \alpha^2 - \beta^2$ $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3^{\alpha2}\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$ $\alpha^3+\beta^3= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ $\alpha3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 +\alpha\beta+\beta^2)$ και να μπορούν να τις αποδεικνύουν. Να αποδεικνύουν μια απλή ταυτότητα.	Να γίνει γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ και να δοθεί ως δραστηριότητα η γεωμετρική ερμηνεία μερικών άλλων ταυτοτήτων. Η ενασχόληση αυτή των μαθητών με τις ταυτότητες θα τους βοηθήσει να τις κατανοήσουν καλύτερα και να διαπιστώσουν τη μαθηματική συνάφεια.
Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων	Να μετατρέπουν πολυώνυμα σε γινόμενο	Με κατάλληλες δραστηριότητες να αναδειχθεί η σημασία της

Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων *(8 ώρες)*	παραγόντων στις περιπτώσεις που: -Οι όροι έχουν κοινό παράγοντα ή εμφανίζεται κοινός παράγοντας με χωρισμό των όρων σε ομάδες. -Είναι διαφορά τετραγώνων. -Είναι ανάπτυγμα τετραγώνου -Είναι τριώνυμο της μορφής $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ -Είναι άθροισμα ή διαφορά κύβων. Να βρίσκουν το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων.	παραγοντοποίησης για την απλοποίηση ρητών παραστάσεων και την επίλυση εξισώσεων.
Διαίρεση πολυωνύμων *(3 ώρες)*	Να βρίσκουν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με ένα άλλο πολυώνυμο Q(x) και να γράφουν την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το Q(x).	
Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις *(5 ώρες)*	Να γνωρίζουν την έννοια της ρητής αλγεβρικής παράστασης.	

	Να απλοποιούν ρητές παραστάσεις. Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν ρητές παραστάσεις. Να προσθέτουν και να αφαιρούν ρητές παραστάσεις.	
Εξισώσεις		
Η εξίσωση αχ + β = 0 (1 ώρα)	Να λύνουν εξισώσεις πρώτου βαθμού. Να αναγνωρίζουν αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.	
Εξισώσεις δεύτερου βαθμού Προβλήματα εξισώσεων δεύτερου βαθμού (7 ώρες)	Να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Να βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και να υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια του τύπου. Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.	Η εισαγωγή στις εξίσωσης δευτέρου βαθμού θα γίνει με κατάλληλες δραστηριότητες από την καθημερινή ζωή, τη Φυσική (ελεύθερη πτώση, βολή προς τα άνω, κτλ.), την Οικονομία (ανατοκισμός για δυο έτη, κτλ.).

	Να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.	
Κλασματικές εξισώσεις (3 ώρες)	Να λύνουν κλασματικές εξισώσεις που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού.	Η εισαγωγή της κλασματικής εξίσωσης να γίνει με δραστηριότητες από άλλα γνωστικά αντικείμενα, π.χ. Φυσική (συνδεσμολογία αντιστάσεων), Χημεία κτλ.
Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο (4 ώρες)	Να γνωρίζουν να αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες στις διάταξης. Να υπολογίζουν προσεγγιστικές τιμές απλών παραστάσεων, αν είναι οι προσεγγιστικές τιμές των μεταβλητών τους. Να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.	Με κατάλληλα γεωμετρικά μοντέλα να διαπιστώσουν οι μαθητές τις ιδιότητες των ανισοτήτων και στη συνέχεια να τις αποδείξουν αλγεβρικά, π.χ.   Αν $\begin{cases} α>β>0 \\ \text{και} \\ γ>δ>0 \end{cases}$, τότε $αγ > βδ$
Συστήματα γραμμικών εξισώσεων		
Η έννοια στις γραμμικής εξίσωσης. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και	Να παριστάνουν γραφικά μια γραμμική εξίσωση. Να λύνουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα. Να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο:	Η γραφική επίλυση θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της λύσης του συστήματος ως ζεύγους αριθμών και να κατανοήσουν ότι ένα σύστημα μπορεί να είναι

γραφική επίλυσή του. Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος. (7 ώρες)	-της αντικατάστασης -των αντίθετων συντελεστών. Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.	αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις.
Συναρτήσεις		
Η συνάρτηση $y=αx^2$ (5 ώρες)	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=αx^2$ γνωρίζοντας ότι αυτή έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα των y. Να βρίσκουν, προσεγγιστικά, την εξίσωση της παραβολής από τη γραφική της παράσταση. Να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=αx^2+βx+γ$ είναι η παραβολή $y=αx^2$ μετατοπισμένη παράλληλα στους άξονες και έχει κορυφή το σημείο $K(\frac{-\beta}{2\alpha},\frac{\Delta}{4\alpha})$ και	Η εισαγωγή της τετραγωνικής συνάρτησης θα γίνει με κατάλληλα παραδείγματα: − το εμβαδόν y τετραγώνου πλευράς x είναι $y=x^2$, − το εμβαδόν ορθογωνίου με βάση διπλάσια από το ύψος είναι $y=2x^2$, − το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας x είναι $y=πx^2$. Με κατάλληλες δραστηριότητες να κατανοήσουν οι μαθητές τη σχέση του συντελεστή α με το σχήμα και τη θέση της παραβολής $y=αx^2$ ως προς τον άξονα του x.

	να μπορεί να την σχεδιάζει.	

Πίνακας 8. Ελληνικό ΑΠΣ στην Άλγεβρα Γ΄Γυμνασίου

5.2.1 Μέτρηση του εύρους, του βάθους και των γνωστικών απαιτήσεων, καθώς και της μαθηματικής αυστηρότητας του Ελληνικού προγράμματος σπουδών στη Γ΄ Γυμνασίου

Εύρος: Περιεκτικό Επίπεδο

Το ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ καλύπτει όλο το εύρος των ενοτήτων στο οποίο αναφέρεται μετρώντας συνολικά 36 περιγραφές στόχων στις επιμέρους θεματικές ενότητες στην Άλγεβρα. Σε 6 από αυτές τις περιγραφές δίνονται συγκεκριμένες δραστηριότητες που βοηθούν τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία, όπως για παράδειγμα: «Να γίνει γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας» $(α+β)^2= α^2+2αβ+β^2$ και να δοθεί ως δραστηριότητα η γεωμετρική ερμηνεία μερικών άλλων ταυτοτήτων, στο στόχο «Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες». Στις 5 δίνονται γενικές οδηγίες για την επιλογή δραστηριοτήτων, όπως για παράδειγμα: «Με κατάλληλες δραστηριότητες να αναδειχθεί η σημασία στις παραγοντοποίησης για την απλοποίηση ρητών παραστάσεων και την επίλυση εξισώσεων», στόχο «Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων».

Υπάρχουν και υποενότητες, στις οποίες δε δίνονται δραστηριότητες, το τι όμως πρέπει να γίνει ενσωματώνεται μέσα στους στόχους, για παράδειγμα στις ρητές αλγεβρικές παραστάσεις και στις εξισώσεις 1ου βαθμού. Βάση των κριτηρίων της μεθοδολογίας (Κεφ. 4), το επίπεδο στο οποίο κατατάσσεται όσον αφορά το εύρος το ελληνικό ΠΣ στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου είναι περιεκτικό: Συγκεκριμένοι – πολλαπλοί και ποικίλοι στόχοι σε κάθε ενότητα της Άλγεβρας ή αντικείμενο που μελετάται. Γενικές, αλλά και συγκεκριμένες δραστηριότητες σε κάθε στόχο του προγράμματος σπουδών στην Άλγεβρα.

Γ΄ Γυμνασίου	Άξονας: Άλγεβρα
Περιγραφές (στόχων) ενοτήτων – αθροιστικά	**36**
Αριθμός περιγραφών εκπονήσεων συγκεκριμένων δραστηριοτήτων	6
Αριθμός περιγραφών γενικών οδηγιών δραστηριοτήτων	5
Αριθμός περιγραφών συνολικών εκπονήσεων δραστηριοτήτων.	**11**
Βασικοί γενικοί στόχοι στην Άλγεβρα Γ γυμνασίου.	3
Θεματικές ενότητες	4

Πίνακας 9. Αριθμός στόχων του Ελληνικού ΑΠΣ της Άλγεβρας.

Βάθος: Ανταγωνιστικό επίπεδο

Υπάρχει ρητή αναφορά στο ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ της Άλγεβρας για το πόσο θα εμπλακούν οι μαθητές με το περιεχόμενο του διδασκόμενου αντικειμένου. Το ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ γενικά για τις θεματικές ενότητες ξεκαθαρίζει ότι «δε δίνεται έμφαση σε εξειδικευμένες και λεπτομερειακές γνώσεις, αλλά προβάλλεται το ουσιώδες, το σημαντικό και το παιδαγωγικά γόνιμο, ώστε να αποφεύγεται η μεγάλη ποσότητα ύλης. Η ύλη είναι τόση, όση μπορεί να αφομοιώσει ο μαθητής στο διατιθέμενο διδακτικό χρόνο». Δηλαδή, το βάθος ενασχόλησης του μαθητή με έννοιες σε κάθε ενότητα, ήτοι το πόσο λεπτομερειακά θα ασχοληθεί ο μαθητής με ένα αντικείμενο, συνδέεται με το συγκεκριμένο προτεινόμενο χρόνο διδασκαλίας κάθε ενότητας. Αυτό βέβαια μπορεί να αναγκάσει τη διδασκαλία να καλύψει απλά την ύλη του αντικειμένου, χωρίς οι μαθητές να αποκτήσουν βαθιά κατανόηση των εννοιών.

Στο Δ.Ε.Π.Π.Σ – Α.Π.Σ αναφέρεται επίσης ότι: «*η ακριβής οριοθέτηση των γνωστικών στόχων για κάθε διδακτικό αντικείμενο μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τι ακριβώς πρέπει να διδαχθεί*». Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μια βασική θεμελιώδης αρχή, όσον αφορά το βάθος του αναλυτικού προγράμματος γενικά στα μαθηματικά του Γυμνασίου. Τι συμβαίνει όμως στο ΑΠΣ της Άλγεβρας Γ΄ Γυμνασίου; Το βάθος κινείται στο παραπάνω βασικό επίπεδο και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «θεμελιώδες» σύμφωνα με την μεθοδολογία μας (Κεφ. 4) ή είναι αυξημένο;

Συγκεκριμένα, στο ΑΠΣ της Άλγεβρας της Γ΄ Γυμνασίου αναφέρονται (3) γενικοί στόχοι, από τους οποίους οι δύο πρώτοι:

- Να γνωρίσουν την έννοια της αλγεβρικής παράστασης και ειδικότερα τις έννοιες του μονωνύμου, του πολυωνύμου και της ρητής αλγεβρικής παράστασης, να μπορούν να εκτελούν πράξεις με αυτές, να γνωρίσουν τις ιδιότητες των πράξεων, τις βασικές ταυτότητες και να μπορούν να παραγοντοποιούν και να απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις.
- Να μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά εξισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, ανισώσεις α΄ βαθμού και γραμμικά συστήματα.

είναι ενσωματωμένοι σε μεγάλο βαθμό στους στόχους του ΑΠΣ στο κομμάτι της Άλγεβρας. Οι δύο πρώτοι γενικοί στόχοι είναι περισσότερο φορμαλιστικοί, αφού έχουν διαδικαστικό χαρακτήρα. Οι μαθητές θα πρέπει να εκτελούν πράξεις και να γνωρίζουν τις ιδιότητες τους, να αναγνωρίζουν ταυτότητες, να παραγοντοποιούν και να απλοποιούν και να επιλύουν εξισώσεις, ανισώσεις και γραμμικά συστήματα. Η εις βάθος κατανόηση προκύπτει για παράδειγμα στις ταυτότητες μέσω δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη γεωμετρική ερμηνεία τους. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι: «Η ενασχόληση αυτή (γεωμετρική ερμηνεία) των μαθητών με τις ταυτότητες θα τους βοηθήσει να τις κατανοήσουν καλύτερα και να διαπιστώσουν τη μαθηματική συνάφεια».

Στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού προτείνονται και εισαγωγικά προβλήματα από τον χώρο της Γεωμετρίας, της Φυσικής και της Οικονομίας. Στα συστήματα δε, υπάρχει και η γραφική επίλυση. Αναφέρεται για παράδειγμα στα συστήματα ότι «Η γραφική επίλυση θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της λύσης του συστήματος ως ζεύγους αριθμών και να κατανοήσουν ότι ένα σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις».

Στις ανισότητες – ανισώσεις προτείνεται δε, «με κατάλληλα γεωμετρικά μοντέλα να διαπιστώσουν οι μαθητές τις ιδιότητες των ανισοτήτων και στη συνέχεια να τις αποδείξουν αλγεβρικά», όπου και δίνεται συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Η επίλυση προβλήματος δεν υπάρχει στους δύο πρώτους γενικούς στόχους της Άλγεβρας. Αποτελεί παρόλα αυτά τελικό (τελευταίο) στόχο στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού και στα συστήματα. Δηλαδή, προωθείται και η σύνδεση των γνώσεων με πραγματικές καταστάσεις, ως τελικό στάδιο εφαρμογής αυτών των γνώσεων.

Στον τρίτο γενικό σκοπό αναφέρεται ότι:

- οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις διάφορες αναπαραστάσεις συνάρτησης του τριωνύμου $y=αx^2+βx+γ$ σε προβλήματα.

Ωστόσο, το πρόγραμμα σπουδών στις συναρτήσεις περιορίζεται μελετώντας σε βάθος μόνο μία περίπτωση του τριωνύμου, την $y=αx^2$, οι δραστηριότητες είναι περισσότερο γεωμετρικές και οι γενικές προτάσεις για δραστηριότητες είναι μόνο ως προς την $y=αx^2$ και συγκεκριμένα «Με κατάλληλες δραστηριότητες να κατανοήσουν οι μαθητές τη σχέση του συντελεστή α με το σχήμα και τη θέση της παραβολής $y=αx^2$ ως προς τον άξονα των x. Η ενασχόληση με προβλήματα που αναφέρει ο γενικός σκοπός δεν εμφανίζεται στους στόχους του ΑΠΣ, δηλαδή δεν ζητά προβλήματα στις συναρτήσεις.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω και σύμφωνα με τις κατηγορίες που έχει χωριστεί το βάθος στη μεθοδολογία, το βάθος μπορεί να θεωρηθεί ότι κυμαίνεται σε «ανταγωνιστικό επίπεδο». Ενσωματώνει και διασυνδέει. Μία σύνθεση της γνώσης. Απαιτεί υψηλότερη σκέψη.

Γνωστικές απαιτήσεις: επίπεδα 1, 2, 3 του DoK

Για να μετρήσουμε τις γνωστικές απαιτήσεις χρησιμοποιούμε το πλαίσιο Depth of Knowledge - DoK. (Κεφ. 4). Παρατηρούμε λοιπόν ποια ρήματα εμφανίζονται στους στόχους του ΑΠΣ, ώστε να κατατάξουμε τις γνωστικές απαιτήσεις στο ανάλογο επίπεδο του DoK.

Επίπεδο 1^{ο}: Ανάκληση και αναπαραγωγή. Παραδείγματα στόχων του ΠΣ που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο:

- Να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες.
- Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες.
- Να γνωρίζουν την έννοια της ρητής αλγεβρικής παράστασης.

Επίπεδο 2: Δεξιότητες και έννοιες. Παραδείγματα στόχων του ΠΣ που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο:

- Να λύνουν εξισώσεις πρώτου βαθμού.
- Να απλοποιούν ρητές παραστάσεις.
- Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

- Να βρίσκουν, προσεγγιστικά, την εξίσωση της παραβολής από τη γραφική της παράσταση.

Επίπεδο 3: Στρατηγική σκέψη και Συλλογιστική. Παραδείγματα στόχων του ΠΣ που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο: Εδώ έχουμε δύο μόνο στόχους.

- Να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.

Επίπεδο 4: Εκτεταμένη σκέψη. Παραδείγματα στόχων του ΠΣ που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο: Δεν υπάρχουν στόχοι του ΑΠΣ σε αυτό το επίπεδο. Μια προτεινόμενη δραστηριότητες περιέχει στοιχεία του τέταρτου επιπέδου.

- Με κατάλληλα γεωμετρικά μοντέλα να διαπιστώσουν οι μαθητές τις ιδιότητες των ανισοτήτων και στη συνέχεια να τις αποδείξουν αλγεβρικά.

Τα ρήματα που χρησιμοποιούνται στους στόχους του Ελληνικού ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ είναι: εμπεδώστε, γνωρίστε, βρείτε, διακρίνετε, προσθέστε, πολλαπλασιάστε, χρησιμοποιείστε, μετατρέψτε, λύστε, υπολογίστε. . Στις εξισώσεις 2ου βαθμού, όπως επίσης στα συστήματα, ζητείται στο τέλος η επίλυση προβλημάτων, όπου εκεί απαιτείται στρατηγική σκέψη. Σύμφωνα με το πλαίσιο DoK της μεθοδολογίας οι γνωστικές απαιτήσεις ακολουθούν τα επίπεδα 1,2,3.

Μαθηματική αυστηρότητα: Περιορισμένο επίπεδο

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία της παρούσης έρευνας το rigour ορίζεται ως οι εκπαιδευτικές - γνωστικές απαιτήσεις που απαιτούνται, ώστε οι μαθητές να μπορούν να συμμετέχουν σε υψηλού επιπέδου μάθηση. Οι όροι που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν το επίπεδο των εκπαιδευτικών απαιτήσεων του προγράμματος σπουδών είναι περιορισμένο, μέτριο και ανταγωνιστικό και ο διαχωρισμός στις τρεις κατηγορίες έγινε βάση του Webb’s Depth of Knowledge (DoK) και δύο αντικατοπτρισμών ενός ΠΣ (Κεφ. 4):

- τις γνώσεις και τις δεξιότητες βάση του περιεχομένου που ένας μαθητής αναμένεται να επιδεικνύει ανάλογα με τα στάνταρντ του ΠΣ
- τις γνωστικές απαιτήσεις δηλαδή την κριτική και δημιουργική σκέψη που θέτει το ΠΣ.

Το εύρος των γνώσεων και δεξιοτήτων που παρέχει το ΑΠΣ στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου είναι υψηλό. Είδαμε ότι περιέχει 36 περιγραφές στόχων στις 4 θεματικές ενότητες που πραγματεύεται.

Ο 4ος ειδικός σκοπός για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο αναφέρει ότι «*επιδιώκεται η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία*».

Στις θεματικές ενότητες του Ελληνικού ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ στην Άλγεβρα Γ΄ Γυμνασίου δίνεται έμφαση στη διαδικασία παραγωγής του αποτελέσματος. Ο μαθητής μαθαίνει να λύνει χρησιμοποιώντας κανόνες, αλλά δεν παράγει κριτική, αφαιρετική και δημιουργική σκέψη (τέταρτο επίπεδο DoK). Η διαθεματικότητα, όπως αναφέρεται στο ΔΕΠΠΣ - ΑΠΣ στο κομμάτι της Άλγεβρας, προτείνεται με δραστηριότητες από τη Φυσική και την Οικονομία, αλλά μόνο ως εισαγωγή. Προτείνεται επίσης και ένα εναλλακτικό διαθεματικό σχέδιο εργασίας πάνω στην αισθητοποίηση των φαινομένων και την κατασκευή αναπαραστάσεων (γραφικές παραστάσεις). Η αιτιολόγηση συλλογισμών (συλλογιστική) περιλαμβάνεται σε 2 στόχους από τους 36, «επίλυση προβλημάτων που οδηγούν σε εξισώσεις 2ου βαθμού» και « να λύνουν προβλήματα με συστήματα». Η αποδεικτική διαδικασία περιέχεται μόνο σε μία προτεινόμενη δραστηριότητα (μη υποχρεωτική). Άρα, η μαθηματική αυστηρότητα κατατάσσεται στο περιορισμένο επίπεδο.

5.3 Σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών ως προς το εύρος, βάθος και γνωστικές απαιτήσεις, μαθηματική αυστηρότητα - rigour

Α. Εύρος:

Και τα δύο προγράμματα σπουδών στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου (Year 10) ανήκουν στο περιεκτικό επίπεδο.

Το Αυστραλιανό πρόγραμμα σπουδών στην τροχιά της Άλγεβρας περιέχει τις εξής υποτροχιές :

- Μοτίβα και Άλγεβρα (5 περιγραφές περιεχομένου)
- Γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις (7 περιγραφές περιεχομένου)

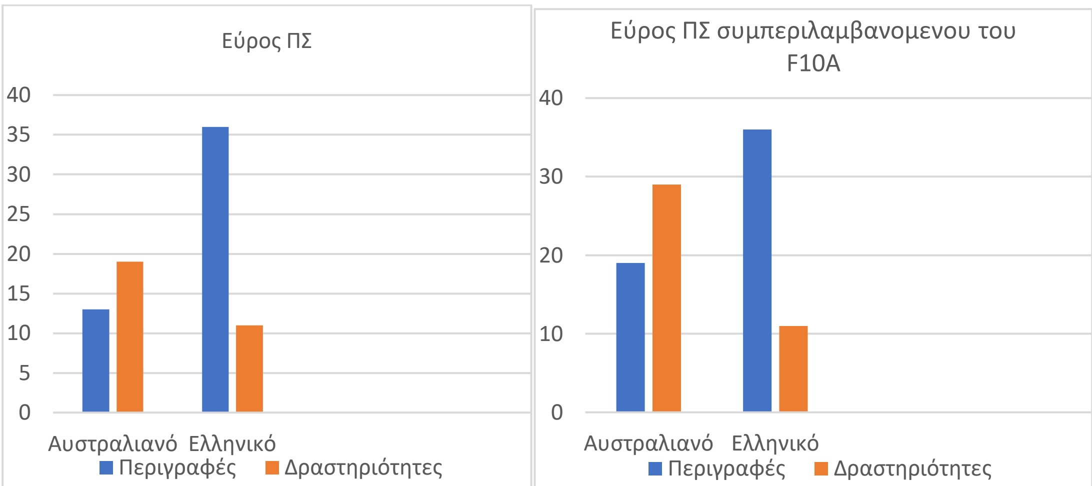
Το Αυστραλιανό ΠΣ παρέχει επίσης ένα προαιρετικό πρόγραμμα για τα παιδιά που θα ασχοληθούν με τη μαθηματική ανάλυση στο Λύκειο, το οποίο για την Άλγεβρα περιέχει τις εξής υποτροχιές:

- Πραγματικοί Αριθμοί (2 περιγραφές περιεχομένου)
- Μοτίβα και Άλγεβρα (1 περιγραφή περιεχομένου)
- Γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις (4 περιγραφές περιεχομένου)

Το Ελληνικό πρόγραμμα σπουδών είναι πιο περιγραφικό σε σχέση με το αυστραλιανό όσον αφορά το τι πρέπει να διδαχθούν οι μαθητές. Στον άξονα της Άλγεβρας περιέχει 4 θεματικές ενότητες:

- Αλγεβρικές παραστάσεις (8 ενότητες - 18 περιγραφές περιεχομένου)
- Εξισώσεις (4 ενότητες - 10 περιγραφές περιεχομένου)
- Συστήματα γραμμικών εξισώσεων (3 ενότητες - 4 περιγραφές περιεχομένου)
- Συναρτήσεις (1 ενότητα - 4 περιγραφές περιεχομένου)

Συγκεκριμένα το Ελληνικό έχει 36 περιγραφές, ενώ το Αυστραλιανό 12. Όμως, το δεύτερο έχει περισσότερες δραστηριότητες σε σχέση με το πρώτο, 19 έναντι 11. Αν προσθέσουμε και τις περιγραφές στόχων και τις δραστηριότητες του προαιρετικού προγράμματος σπουδών F-10A, τότε οι περιγραφές του Αυστραλιανού γίνονται 19 και οι δραστηριότητές του εκτοξεύονται στις 29.



Γράφημα 1. Σύγκριση αριθμού στόχων και δραστηριοτήτων των δύο ΠΣ.

Το Ελληνικό, λοιπόν, ΑΠΣ στην Άλγεβρα υπερτερεί σε περιγραφές στόχων, αλλά υστερεί σε δραστηριότητες σε σχέση με το Αυστραλιανό. Όπως αναφέρει ο

Hirsch (2001) στις 4 αρχές του για τη μάθηση, «Ο καλύτερος τρόπος να μάθεις ένα μάθημα είναι να μάθεις τις γενικές αρχές του και άφθονα παραδείγματα». Άρα, όσον αφορά το εύρος είναι καλύτερα «δομημένο» στο Αυστραλιανό Πρόγραμμα Σπουδών.

Β. Βάθος και γνωστικές απαιτήσεις

Τα δύο προγράμματα σπουδών δεν διαφέρουν ως προς το επίπεδο του βάθος της μάθησης με το ελληνικό και το αυστραλιανό να χαρακτηρίζονται ως ανταγωνιστικά.

Διαφορές έχουμε στις γνωστικές απαιτήσεις. Στο Αυστραλιανό περιλαμβάνονται όλα τα επίπεδα του Webb's Depth of Knowledge (1997). Στις μετρήσεις που κάναμε με το συγκεκριμένο πλαίσιο DoK στα δύο προγράμματα ξεχωριστά παραπάνω διαπιστώσαμε ότι στο ελληνικό δεν εμφανίζεται το 4$^{\text{ο}}$ επίπεδο, της εκτεταμένης σκέψης.

Σύμφωνα με τον Gardener (2007), όπως αναφέρουμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι μαθητές πρέπει να σκέφτονται συνθετικά, δημιουργικά και κριτικά για να ζήσουν και να εργαστούν με επιτυχία. Η εκπαίδευση πρέπει να καλλιεργεί τη συνθετική – κριτική σκέψη. Επίσης, πρέπει να υπάρχει εξισορρόπηση του εύρους και του βάθους στο πρόγραμμα σπουδών (Cambridge, 2011; Percy και Duplass, 2011; Irwin, 2011; Ergan, 2010; Bereiter, 2002). Αυτό φαίνεται από τα παραπάνω να επιτυγχάνεται καλύτερα στο Αυστραλιανό Πρόγραμμα σπουδών.

	Γνωστικές απαιτήσεις							
	Αυστραλιανό				Ελληνικό			
Επίπεδο	1	2	3	4	1	2	3	4

Πίνακας 10: Επίπεδα γνωστικών απαιτήσεων των δύο ΠΣ.

Γ. Μαθηματική Αυστηρότητα

Τα δύο προγράμματα σπουδών εμφανίζουν διαφορές και ως προς αυτόν τον παράγοντα.

Το αυστραλιανό πρόγραμμα σπουδών επισημαίνει για την 10$^{\text{η}}$ τάξη τα εξής όσον αφορά τις τροχιές, όπου δίνει ιδιαίτερη έμφαση, της επίλυσης προβλημάτων και συλλογιστικής:

- Η επίλυση προβλημάτων πραγματοποιείται ποικιλότροπα κάτω από διαφορετικά πρίσματα και αναφέρει επίλυση συστημάτων και ανισοτήτων με αλγεβρικές και γραφικές τεχνικές.
- Η συλλογιστική περιλαμβάνει τη διατύπωση γεωμετρικών αποδείξεων, καθώς και τη μετάφραση και αιτιολόγηση – ερμηνεία μαθηματικών εννοιών.

Επίσης, παρέχει ένα συμπληρωματικό πρόγραμμα σπουδών για μαθητές που θα ασχοληθούν με μαθηματικά στο λύκειο, υψηλότερων απαιτήσεων σε δημιουργική σκέψη.

Το ελληνικό ΠΣ, παρόλο που θέτει ως ειδικό σκοπό τη σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων, στο ΑΠΣ της Άλγεβρας Γ΄ Γυμνασίου υποστηρίζεται μόνο στο τέλος δύο ενοτήτων χωρίς σαφή αναφορά σε προβλήματα πραγματικών καταστάσεων. Στους δύο πρώτους γενικούς σκοπούς της Άλγεβρας Γ΄ Γυμνασίου:

- να γνωρίσουν την έννοια της αλγεβρικής παράστασης και ειδικότερα τις έννοιες του μονωνύμου, του πολυωνύμου και στις ρητής αλγεβρικής παράστασης, να μπορούν να εκτελούν πράξεις με αυτές, να γνωρίσουν τις ιδιότητες των πράξεων, τις βασικές ταυτότητες και να μπορούν να παραγοντοποιούν και να απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις.
- να μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά εξισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, ανισώσεις α΄ βαθμού και γραμμικά συστήματα.

βλέπουμε ότι είναι διαδικαστικοί, αφού ζητείται η εκτέλεση πράξεων, η επίλυση εξισώσεων κτλ. Η συλλογιστική περιλαμβάνει τη γεωμετρική ερμηνεία, αλλά όχι την αιτιολόγηση – ερμηνεία αποτελεσμάτων και διαδικασιών και δεν αποτελεί στόχο του ΑΠΣ της Άλγεβρας της Γ΄ Γυμνασίου.

	Μαθηματική Αυστηρότητα					
	Αυστραλιανό			Ελληνικό		
Επίπεδο	Περιορισμένο	Μέτριο	Ανταγωνιστικό	Περιορισμένο	Μέτριο	Ανταγωνιστικό

Πίνακας 11 : Επίπεδο μαθηματικής αυστηρότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: Επιπλέον Συγκριτική μελέτη των δύο ΠΣ στην Άλγεβρα

6.1 Ποιες έννοιες ή βασικοί στόχοι υπάρχουν στο ένα πρόγραμμα και δεν υπάρχουν στο άλλο;

Η δομή των δύο προγραμμάτων σπουδών είναι εντελώς διαφορετική. Το Αυστραλιανό είναι οργανωμένο σε τροχιές μάθησης και, όπως έχουμε δει, αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις τροχιές περιεχομένου και τις τροχιές ικανοτήτων. Απαρτίζεται επίσης από τρεις γενικούς στόχους στα μαθηματικά όσον αφορά το τι θα παρέχει και άλλους τρεις σκοπούς. Το ελληνικό δομείται σε δύο άξονες Άλγεβρα – Στατιστική και Γεωμετρία. Θέτει γενικούς σκοπούς στα μαθηματικά, αλλά και σε κάθε άξονα – όπως και στην Άλγεβρα – καθώς και ειδικούς σκοπούς στο Γυμνάσιο γενικά.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι τα δύο προγράμματα σπουδών, εξετάζουνε τις ίδιες σε γενικές γραμμές έννοιες στην Γ΄ Γυμνασίου (Year 10 αντίστοιχα), με διαφορετική περιγραφή. Σε αρκετές περιπτώσεις διαφέρουν και οι στόχοι, όπως βλέπουμε παρακάτω.

Ομοιότητες

Και τα δύο προγράμματα εστιάζουν:

- Στην παραγοντοποίηση και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.
- Στην επίλυση εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού, συμπεριλαμβανομένου κλασματικών εξισώσεων.
- Στην επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού.
- Στη παραγοντοποίηση τριωνύμου με διάφορες τεχνικές.
- Επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στα συστήματα και τα δύο προγράμματα ζητούν τη σύνδεση των γραφικών παραστάσεων με τις αλγεβρικές παραστάσεις.

Διαφορές

- Το Ελληνικό ΔΕΠΠΣ - ΑΠΣ ξεκινά με επανάληψη των βασικών ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων στους πραγματικούς αριθμούς, των ιδιοτήτων των δυνάμεων και των ριζών, στόχος που δεν υπάρχει στο βασικό Αυστραλιανό, αλλά μόνο στο προαιρετικό.

- Υπάρχουν ξεχωριστοί στόχοι στο Ελληνικό ΔΕΠΠΣ - ΑΠΣ για την κατανόηση των εννοιών του μονωνύμου, του πολυωνύμου και των πράξεων με αυτά.
- Ξεχωριστή ενότητα για τις αλγεβρικές ταυτότητες υπάρχει μόνο στο Ελληνικό ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ, ενώ στο Αυστραλιανό αυτές ενσωματώνονται σε εκπονήσεις δραστηριοτήτων στην παραγοντοποίηση και στις εξισώσεις.
- Στο Αυστραλιανό ΠΣ υπάρχει στόχος που αφορά την επίλυση προβλημάτων σχετικά με τις ιδιότητες παραλλήλων και καθέτων ευθειών και τους συντελεστές διεύθυνσης τους. Στο ελληνικό, οι ευθείες αναφέρονται στις γραμμικές εξισώσεις των συστημάτων.
- Σημαντική διαφορά του Αυστραλιανού με το Ελληνικό είναι ότι ζητά να εξερευνηθεί η σύνδεση των αλγεβρικών και των γραφικών αναπαραστάσεων τριωνύμων, κύκλων, παραβολών και εκθετικών συναρτήσεων.
- Η έννοια της πολυωνυμικής συνάρτησης $2^{ου}$ βαθμού αναπτύσσεται ξεχωριστά ως στόχος στο ελληνικό ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ μέσω της έννοιας του εμβαδού τετραγώνου, ορθογωνίου και κυκλικού δίσκου. Δίνεται έμφαση στη γραφική παράσταση της παραβολής $y=αx^2$.
- Επίλυση τύπων παρουσιάζεται μόνο στο Αυστραλιανό.

Να σημειώσουμε ότι το Αυστραλιανό ΠΣ παρέχει και το προαιρετικό πρόγραμμα σπουδών, το οποίο επεκτείνει το περιεχόμενο στην Άλγεβρα, όσον αφορά τις έννοιες και τους επιπλέον στόχους. Σε αυτό οι μαθητές ασχολούνται με τους πραγματικούς αριθμούς – στόχος που υπάρχει και στο ελληνικό, μαθαίνουν να χρησιμοποιούν λογαρίθμους και τις ιδιότητες τους, να λύνουν εκθετικές εξισώσεις και να σχεδιάζουν κωνικές τομές, κάτι που δεν υπάρχει στο ελληνικό ΑΠΣ σε όλο το Γυμνάσιο.

Τέλος, μια επίσης σημαντική διαφορά των δύο προγραμμάτων σπουδών είναι ότι το Ελληνικό προτείνει και συγκεκριμένο αριθμό διδακτικών ωρών ανά θεματική ενότητα. Οι προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με τις οδηγίες που στέλνει στους εκπαιδευτικούς στην έναρξη κάθε σχολικού έτους το Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων.

6.2 Σε τι διαφέρουν τα προγράμματα ως προς τη σειρά παρουσίασης των εννοιών και των στόχων;

Και τα δύο προγράμματα στην Άλγεβρα ασχολούνται αρχικά με τις Αλγεβρικές παραστάσεις. Υπάρχει όμως διαφορά προσέγγισης. Το Ελληνικό πρόγραμμα αναλύει τι είναι αλγεβρική παράσταση, μονώνυμο, πολυώνυμο, πώς γίνονται οι πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων. Έχει ξεχωριστή ενότητα – στόχους ως προς τις αλγεβρικές ταυτότητες και μετά προχωρά στην παραγοντοποίηση και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Το Αυστραλιανό ξεκινά αμέσως με την παραγοντοποίηση και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Στις εκπονήσεις δραστηριοτήτων που ζητά χρησιμοποιούνται τα περισσότερα από αυτά που παρουσιάζει ξεχωριστά το Ελληνικό πρόγραμμα, για παράδειγμα ιδιότητες δυνάμεων, ταυτότητες κτλ.

Συνεχίζοντας τα δύο προγράμματα ακολουθούν διαφορετική διαδρομή στην παρουσίαση των εννοιών. Το Αυστραλιανό ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων εξισώσεων και ανισώσεων 1^{ου} βαθμού, μετά των γραμμικών συστημάτων, με προβλήματα ευθειών και γραφικές αναπαραστάσεις αλγεβρικών παραστάσεων και τέλος με τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Το ελληνικό ακολουθεί αντίστροφη πορεία πρώτα από τις εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού και στο τέλος τα συστήματα.

Διαφορά έχουμε και ως προς τους στόχους εκεί με το Αυστραλιανό να ζητά την επίλυση προβλημάτων τα οποία καταλήγουν σε τέτοιου είδους εξισώσεων, ενώ το ελληνικό να επιμένει στην διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων. Ως τελικός στόχος στην ενότητα υπάρχει και η επίλυση προβλημάτων 2^{ου} βαθμού.

Γενικά η επίλυση προβλήματος είναι τροχιά ικανοτήτων για το Αυστραλιανό ΠΣ, αλλά στους γενικούς στόχους της Άλγεβρας της Γ΄ Γυμνασίου υπάρχει μόνο στις συναρτήσεις. Στα συστήματα και τα δύο προγράμματα ζητούν τη σύνδεση των γραφικών παραστάσεων με τις αλγεβρικές παραστάσεις. Μέσα από αυτές τις γραφικές αναπαραστάσεις παρουσιάζονται οι συναρτήσεις στο Αυστραλιανό (τριώνυμο, εκθετικές), αλλά στο Ελληνικό οι συναρτήσεις αποτελούν ξεχωριστή ενότητα.

6.3 Χρήση της τεχνολογίας και σε ποια σημεία των προγραμμάτων

Στο Αυστραλιανό ΠΣ στην Άλγεβρα της 10^{ης} τάξης σε κάθε στόχο παρέχεται συγκεκριμένο ψηφιακό υλικό από ένα γενικό εθνικό ψηφιακό αποθετήριο το scootle[13].

---

[13] http://www.scootle.edu.au/ec/p/home

Η περιγραφή του είναι ακριβής, ώστε να γίνεται εύκολα η επιλογή και η χρήση του υλικού.

Σε συγκεκριμένες έννοιες, όπως η επίλυση γραμμικών συστημάτων, καθώς και η σύνδεση αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, το Αυστραλιανό πρόγραμμα σπουδών απαιτεί (θέτει ως στόχο) τη χρήση πληροφοριακών συστημάτων και τεχνολογίας (Information and Communication Technology – ICT). Παράδειγμα εκπαιδευτικού λογισμικού που γίνεται χρήση από τις δραστηριότητες του Scootle είναι το Geogebra. Δυστυχώς, η πρόσβαση στον ιστότοπο του παρέχεται μόνο σε εγγεγραμμένους εκπαιδευτικούς της χώρας, πράγμα που καθιστά αδύνατη την επιπλέον συλλογή πληροφοριών για τις δραστηριότητες του ιστότοπου από την Ελλάδα. Παρόλα αυτά, ένας κλώνος του scootle, το Fuse[14] είναι προσβάσιμος από τα σχολεία της Πολιτείας της Βικτόρια (Μελβούρνη). Στο συγκεκριμένο αποθετήριο υπάρχουν δραστηριότητες για όλες τις έννοιες των μαθηματικών της 10ης τάξης και εφαρμογές του Wolfram Mathematica, καθώς το λογισμικό αυτό παρέχεται σε όλα τα σχολεία, αλλά και εκπαιδευτικούς και μαθητές της Πολιτείας της Βικτόρια.

Στους στόχους του Ελληνικού ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ του άξονα της Άλγεβρας της Γ΄ Γυμνασίου δεν αναφέρεται η χρήση τεχνολογικών μέσων. Υπάρχει το κριτήριο της ευελιξίας γενικά στις θεματικές ενότητες όλων των μαθημάτων, ώστε να διευκολύνεται η προσαρμογή στις ραγδαίες επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις. Γίνεται μια γενική περιγραφή του «εποπτικού υλικού» στο απαιτούμενο διδακτικό υλικό των μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτήν την περιγραφή, απαιτείται η χρήση διαφανειών, εκπαιδευτικού λογισμικού, βίντεο κτλ. Αναφέρεται ότι «*η χρήση ενός κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού μπορεί να διευρύνει τα όρια μιας αναπαράστασης και αφετέρου να δώσει τη δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασης μιας έννοιας με την ταυτόχρονη εξέλιξη ενός φαινομένου ή γεγονότος. Κατά αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται τόσο η δημιουργία όσο και η διατήρηση του ερευνητικού κλίματος*».

Στα πλαίσια του απαιτούμενου ψηφιακού υλικού, το Ελληνικό Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων έχει δημιουργήσει έναν ψηφιακό χώρο – αποθετήριο υλικού για την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, το Φωτόδεντρο[15]. Στις οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς που αποστέλλονται στα σχολεία

[14] http://fuse.education.vic.gov.au/VC/Teacher?mathematics
[15] http://photodentro.edu.gr/aggregator/

στην έναρξη κάθε σχολικού έτους περιλαμβάνονται προαιρετικές δραστηριότητες μέσα από αυτό το αποθετήριο. Συγκεκριμένα, στις οδηγίες του σχολικού έτους 2019 - 2020 στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου, ψηφιακές δραστηριότητες προτείνονται στις ενότητες (ή μέρους αυτών) των: αξιοσημείωτων ταυτοτήτων, γραφική επίλυση της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού ελλιπούς μορφής $αx^2+βx=0$, χρήση του λογισμικού GeoGebra για εύρεση κοινών σημείων γραφικών παραστάσεων $2^{ου}$ βαθμού συναρτήσεων, γεωμετρική επίλυση ανίσωσης $1^{ου}$ βαθμού, γραφική επίλυση συστήματος. Να σημειώσουμε ότι στον συγκεκριμένο ιστότοπο υπάρχουν και εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία για χρήση σε διαδραστικό πίνακα, καθώς και εκπαιδευτικά βίντεο, διαφάνειες, όπως και εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι δόθηκε σε λειτουργία από το 2015, από το Ελληνικό Υπουργείο Παιδείας, η ψηφιακή εκπαιδευτική πλατφόρμα «e-me[16]» για μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η Ψηφιακή Εκπαιδευτική Πλατφόρμα e-me είναι μια σύγχρονη, κοινωνική και επεκτάσιμη ψηφιακή πλατφόρμα, που αναπτύχθηκε για να αποτελέσει το προσωπικό περιβάλλον εργασίας κάθε μαθητή και εκπαιδευτικού. Αποτελεί ένα ολοκληρωμένο ψηφιακό περιβάλλον που υποστηρίζει τη μάθηση, την επικοινωνία, τη συνεργασία και τη δικτύωση των μελών της σχολικής κοινότητας. Απευθύνεται σε όλους τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς και παρέχει έναν ασφαλή, αλλά ταυτόχρονα ανοιχτό χώρο συνεργασίας, επικοινωνίας, ανταλλαγής αρχείων και περιεχομένου.

6.4 Διαφορές που παρουσιάζουν τα προγράμματα ως προς τη διδακτική τους θεωρία

Στις γενικές παραδοχές της διδακτικής μεθοδολογίας του Ελληνικού ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ (ΦΕΚ 303/2003 σελ. 3742) αναφέρεται ότι τα αποτελέσματα της μάθησης παρουσιάζονται μέσα από τις γνώσεις και δεξιότητες που αποκτά ο μαθητής, όπως και τις στάσεις, αξίες και συμπεριφορές που υιοθετεί. Οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών συμβάλλουν στην ολοκλήρωση της γνώσης. Οι μαθητές θα πρέπει μέσω της αμφισβήτησης των προηγούμενων γνώσεων και με κατάλληλα ερεθίσματα να μεταβαίνουν σε υψηλότερο γνωστικό επίπεδο. Η μάθηση συντελείται μέσα σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο με μια διαδικασία διαρκούς αλληλεπίδρασης. Η διδασκαλία θα πρέπει να οδηγεί στη διερεύνηση των γνωστικών

[16] https://auth.e-me.edu.gr

δομών μέσω της συσχέτισης της νέας γνώσης με την προηγούμενη και μέσω της ενσωμάτωσης της νέας γνώσης, αφού τροποποιηθεί η προηγούμενη. Η μάθηση μέσω της ανακάλυψης είναι μια συντονισμένη επεξεργασία πληροφοριών που βοηθά το άτομο να ανακαλύπτει ιδιότητες και να λύνει προβλήματα. Ο μαθητής δεν πρέπει να γίνεται απλός αποδέκτης γνώσεων, αλλά θα πρέπει αυτές οι γνώσεις να συνοδεύονται με δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Το ενδεχόμενο λάθος του μαθητή κατά τη διδασκαλία δεν πρέπει να τον αποθαρρύνει. Τέλος, η μάθηση εξαρτάται από κοινωνικές παραμέτρους και πραγματοποιείται καλύτερα μέσω της ομαδοσυνεργατικότητας.

Προτείνονται ως μεθοδολογικές προσεγγίσεις: η μάθηση με διερεύνηση και ανακάλυψη, η χρήση εποπτικών μέσων, ο διάλογος – συζήτηση, η άμεση μορφή διδασκαλίας – αφήγηση, όπου μπορεί να εφαρμοστεί και οι ομαδοσυνεργατικές εργασίες. Οι παραπάνω διδακτικές στρατηγικές μπορούν να εφαρμόζονται σε συνδυασμό ή μεμονωμένα ανάλογα με τη θεματική ενότητα. Όσον αφορά τη διάταξη της ύλης από τάξη σε τάξη, αυτή προτείνεται να είναι σπειροειδής. Φαίνεται ξεκάθαρα ο εποικοδομισμός και είναι ορατή η εξάρτηση από τη θεωρία μάθησης του Bruner (ανακαλυπτικό – διερευνητικό μοντέλο), η οποία έχει ως βασικές θέσεις: α) η γνώση προκύπτει από την πράξη του μαθητή (Piaget), β) είναι όμως στη βάση της κοινωνική (Vygotsky) και γ) είναι πάντοτε σε στενή εξάρτηση με τα κίνητρα του (Maslow).

Στον συγκεκριμένο άξονα της Άλγεβρας του ΑΠΣ της Γ΄ Γυμνασίου οι δύο πρώτοι γενικοί στόχοι του αλγεβρικού λογισμού και των εξισώσεων – ανισώσεων – συστημάτων έχουν σύμφωνα με την περιγραφή τους φορμαλιστικό χαρακτήρα. Οι συμβολικές παραστάσεις αντιμετωπίζονται χωρίς καμία αναφορά στη σημασία τους, στο νόημά τους. Μέσω δραστηριοτήτων των επιμέρους θεματικών ενοτήτων γίνεται μια προσπάθεια ανακαλυπτικής – διερευνητικής μάθησης και μοντελοποίησης – σύνδεσης με προβλήματα, τα οποία επιλύονται για παράδειγμα με εξισώσεις 2^{ου} βαθμού και συστημάτων.

Στην απέναντι όχθη, στο Αυστραλιανό ΠΣ αναπτύσσονται οι τέσσερις τροχιές ικανοτήτων, δηλαδή: κατανόηση, επάρκεια, επίλυση προβλήματος και συλλογιστική. Φαίνεται η επίδραση των τεσσάρων από τα πέντε νημάτων της «μαθηματικής επάρκειας» των Kilpatrick, Swafford & Findell, (2001). Το περιεχόμενο αυτών των νημάτων είναι:

- Εννοιολογική κατανόηση (conceptual understanding) – κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, των πράξεων και των σχέσεων.
- Διαδικαστική ευχέρεια (procedural fluency) – δεξιότητα στη διεξαγωγή διαδικασιών με ευελιξία, ακρίβεια, αποτελεσματικά και κατάλληλα.
- Επάρκεια στρατηγικής (strategic competence) – ικανότητα διατύπωσης, αναπαράστασης και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.
- Προσαρμοστική συλλογιστική (adaptive reasoning) – ικανότητα λογικής σκέψης, λογισμού, εξήγησης και αιτιολόγησης.
- Παραγωγική τάση (productive disposition) – συνήθης ροπή στο να βλέπεις τα μαθηματικά ως κάτι που βγάζει νόημα, ότι είναι χρήσιμα και αξίζει να ασχοληθείς, σε συνδυασμό με την πεποίθηση στην επιμέλεια, αλλά και στην αποτελεσματικότητα που μπορεί να έχει ο καθένας (Δεν περιέχεται στο Αυστραλιανό).

Όσον αφορά την τροχιά περιεχομένου της Άλγεβρας της 10ης τάξης υπάρχει σύνδεση σε όλες τις υποτροχιές της με προβλήματα καθημερινής ζωής και άρα με τα Ρεαλιστικά μαθηματικά, καθώς και με τη διερευνητική, ανακαλυπτική μάθηση. Δεν υπάρχει εξάρτηση από τον φορμαλισμό, κάτι που φαίνεται στο «achievement standard», δηλαδή τι πετυχαίνουν και τι μπορούν να κάνουν οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας. Μάλιστα, στο site του ACARA, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, δίνονται δείγματα εργασιών (δραστηριοτήτων) μαθητών, οι οποίοι ήταν πάνω στο όριο ή κάτω του ορίου αυτού του standard. Παρόλο που δίνεται η δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να εφαρμόσουν διάφορες στρατηγικές στη διδασκαλία τους, θεωρείται «σφιχτό» ΠΣ ως προς την ικανοποίηση των στόχων.

6.5 Συγκριτικά αποτελέσματα PISA 2003 έως 2018 στη μαθηματική επίδοση μεταξύ Ελλάδας και Αυστραλίας

6.5.1 Γενικά αποτελέσματα στα μαθηματικά

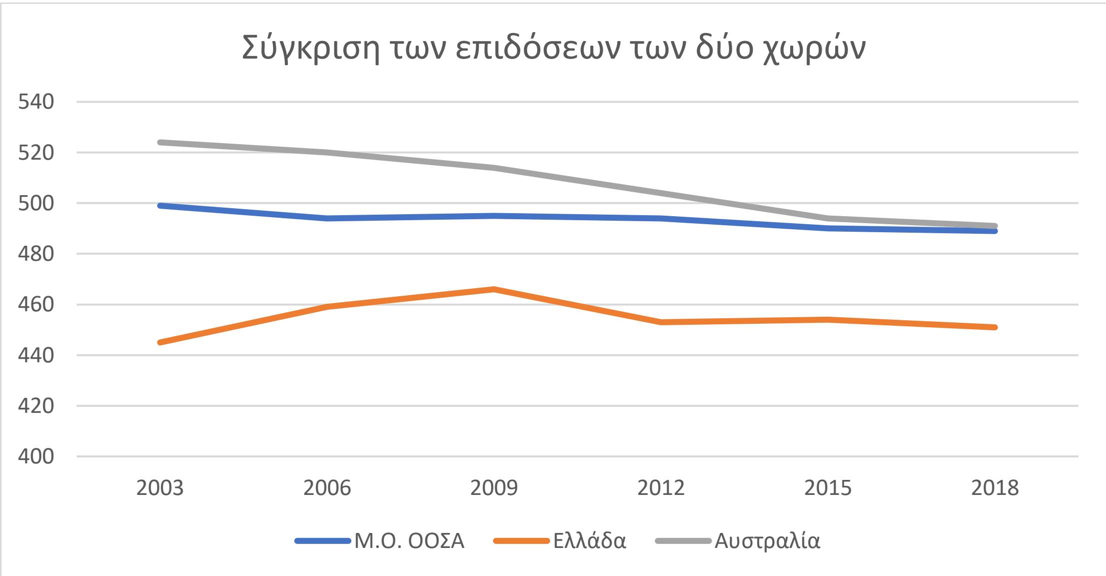
Από τα αποτελέσματα θα συγκρίνουμε γενικά το σκορ των δύο χωρών στα μαθηματικά κάθε χρονιάς, καθώς και το σκορ των μαθητών στην επίλυση προβλήματος κάθε χρονιάς. Θα παρατηρήσουμε την αύξηση ή την μείωση των επιδόσεων των μαθητών από το 2003 έως το 2018 και θα αναζητήσουμε τυχόν αιτίες της πτώσης, αν υπάρχει.

Ο PISA 2012 ήταν ο πιο πρόσφατος που είχε ως κύριο αντικείμενο αξιολόγησης τα Μαθηματικά. Συμμετείχαν 65 χώρες (34 χώρες του ΟΟΣΑ και 31 συνεργαζόμενες χώρες/οικονομίες) που αντιπροσωπεύουν πάνω από το 80% της παγκόσμιας οικονομίας. Αξιολογήθηκαν περίπου 510.000 15χρονοι μαθητές (αντιπροσωπευτικό δείγμα περίπου 28 εκατομμυρίων 15χρονων μαθητών των 65 χωρών που συμμετείχαν). Από την Ελλάδα συμμετείχαν 5.000 15χρονοι μαθητές από 192 δημόσια και ιδιωτικά σχολεία Δ/θμιας Εκπαίδευσης.

Στις 65 χώρες που συμμετείχαν ο μέσος όρος επίδοσης ήταν 494 μονάδες. Η Αυστραλία κατέλαβε την 19η θέση με 504 μονάδες, η Ελλάδα τη 42η θέση με 453 μονάδες. Η ετήσια αλλαγή υπολογίστηκε -2,2% για την Αυστραλία, η οποία σημείωσε πτώση και +1,1% για την Ελλάδα, η οποία βελτιώθηκε γενικά μετά από το 2003 που έλαβε 445 μονάδες. Υπήρξε βέβαια πτώση σε σχέση με το 2009 κατά 13 μονάδες, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα. Το 2015 και 2018 οι επιδόσεις παρουσιάζουν μικρές αυξομειώσεις.

Επιδόσεις των δύο χωρών κατά τα έτη 2003 έως 2018						
	2003	**2006**	**2009**	**2012**	**2015**	**2018**
Μ.Ο. ΟΟΣΑ	499	494	495	494	490	489
Ελλάδα	445	459	466	453	454	451
Αυστραλία	524	520	514	504	494	491

Πίνακας 11. Επιδόσεις των δύο χωρών. Πηγή https://www.oecd.org/pisa



Γράφημα 2. Οι επιδόσεις των δύο χωρών στην έρευνα PISA από το 2003 μέχρι το 2018

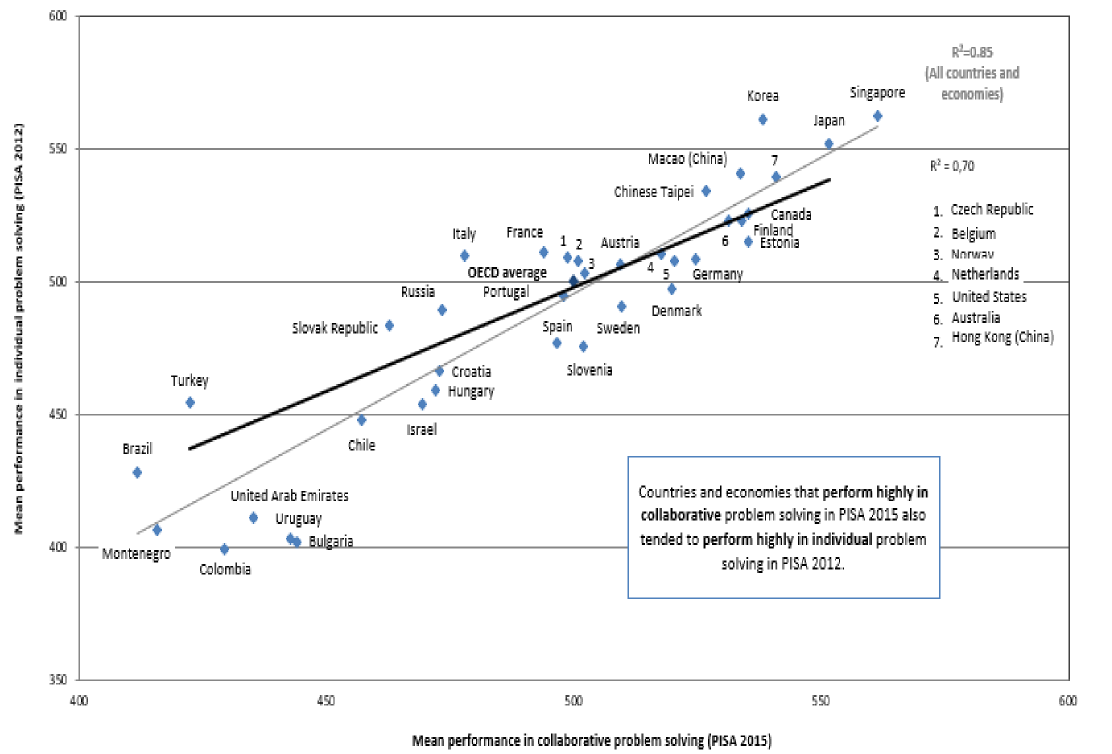
Οι ετήσιες αλλαγές φαίνεται να επιβεβαιώθηκαν εν μέρει το 2015 και το 2018 (τα μαθηματικά δεν ήταν όμως το βασικό κομμάτι της εξέτασης), όπου η Αυστραλία έπεσε στις 494 μονάδες το 2015 και στις 491 το 2018, όπου πλησίασε για πρώτη φορά στον μέσο όρο του ΟΟΣΑ στα μαθηματικά, ενώ η Ελλάδα ήταν ελάχιστα καλύτερη στις 454 μονάδες το 2015, με πτώση όμως 3 μονάδων το 2018 και σταθερά κάτω από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ .

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι: α) Η Αυστραλία έχει τις καλύτερες επιδόσεις από τις δύο χώρες, στατιστικά σημαντικά υψηλότερη από το μέσο όρο των χωρών του ΟΟΣΑ μέχρι το 2015, με σταθερή πτώση όμως με την πάροδο των ετών, όπως προκύπτει και από τους παραπάνω πίνακες. Μεταξύ των ετών 2012 και 2018 η Αυστραλία έπεσε κατά 13 μονάδες. β) Η Ελλάδα βελτίωσε τις επιδόσεις της από το 2003, είχε την καλύτερη της επίδοση 466 μονάδες το 2009, αλλά μετά παρουσίασε σημαντική πτώση κατά 13 μονάδες το 2012 με μια μικρή αύξηση το 2015, περιορίζοντας την επίδοση της 2018 στις 451 μονάδες. Η επίδοσή της είναι στατιστικά σημαντικά χαμηλότερη από το μέσο όρο του ΟΟΣΑ.

6.5.2 Ικανότητα επίλυσης προβλήματος

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για την Ελλάδα στον ΟΟΣΑ (είτε είναι μη έγκυρα). Άρα, δεν μπορεί να γίνει σύγκριση και θα παρουσιαστούν μόνο τα αποτελέσματα της Αυστραλίας το 2012, όπου οι μαθητές εξετάστηκαν ατομικά στην επίλυση προβλήματος και το 2015, όπου οι μαθητές εξετάστηκαν στη συνεργατική επίλυση προβλήματος. Τα αποτελέσματα που φαίνονται στους παρακάτω πίνακες δείχνουν ότι η Αυστραλία είναι top performer στην επίλυση προβλήματος, με επιδόσεις πολύ παραπάνω από τον μέσο όρο.

Performance in individual problem solving (PISA 2012) and in collaborative problem solving (PISA 2015)



Note: Only those countries and economies with available data or valid results for the PISA 2012 assessment of creative problem solving and the PISA 2015 assessment of collaborative problem solving are shown.
Source: OECD, PISA 2015 Database, Table V.3.2, and PISA 2012 Database, Table V.3.2, from *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving (Volume V)*.

Γράφημα 3. Ατομική και συνεργατική επίδοση στην επίλυση προβλήματος

	Collaborative problem solving (PISA 2015)	Problem solving (PISA 2012)
	Mean score	Mean score
OECD average	500	500
Australia	531	523

Πίνακας 12. Επιδόσεις της Αυστραλίας στην επίλυση προβλήματος 2012-15

6.5.3 Αιτίες πτώσης των δύο χωρών στις επιδόσεις τους στους διαγωνισμούς PISA

Για την Ελλάδα:

Ενώ σημειώθηκε αύξηση στις επιδόσεις μέχρι το 2009, μετά έχουμε κατακόρυφη πτώση, χρονολογικά συνδέεται με την οικονομική κρίση στην Ελλάδα. Στην

Ελλάδα, το 36% των μαθητών δεν αποκτούν τις βασικές δεξιότητες στα μαθηματικά, ενώ το ποσοστό αυτό είναι για παράδειγμα πολύ μικρότερο στην Ευρωπαϊκή Ένωση, κατά μέσο όρο (24,2%) (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2014). Βελτίωση των αποτελεσμάτων στην εκπαίδευση είναι μεγάλης σημασίας για την αύξηση τόσο της παραγωγικότητας όσο και του βιοτικού επιπέδου (Hanushek & Woessmann, 2010). Επιπλέον, θα μπορούσε να επιτρέψει στην Ελλάδα να υλοποιήσει τις δυνατότητές της κατά τη διάρκεια αυτής της σκληρής περιόδου της οικονομικής κρίσης, να διαχειριστεί θέματα ανεργίας και ανισοτήτων στην ελληνική εκπαίδευση (Hanushek & Woessmann, 2010, ΟΟΣΑ, 2013b, 2015β). Αναμφισβήτητα, οι βελτιώσεις στις ακαδημαϊκές δεξιότητες δεν μπορούν να επιτευχθούν με την απλή αύξηση των δαπανών για εκπαιδευτικούς σκοπούς, αλλά απαιτείται μια εις βάθος εξέταση αυτού του κλάδου και προσεκτικός σχεδιασμός πολιτικής. Ωστόσο, μελέτες που εξετάζουν τα μαθηματικά επιτεύγματα στο ελληνικό πλαίσιο είναι λιγοστά και, ως εκ τούτου, υπάρχει έλλειψη ισχυρών στοιχείων για παράγοντες που μπορεί να συσχετιστούν με τα μαθηματικά επιτεύγματα των μαθητών (Karakolidis, Pitsia & Emvalotis, 2016).

Η υποχρηματοδότηση πάντως των σχολείου και ο μεγάλος αριθμός των αναπληρωτών εκπαιδευτικών επισημαίνεται στην ενδιάμεση έκθεση του ΟΟΣΑ (2017, σελ. 85)

Ο τρόπος επίσης διεξαγωγής του διαγωνισμού PISA δεν συνάδει με το ισχύον ελληνικό πρόγραμμα σπουδών και τον τρόπο διδασκαλίας που δεν δίνει βάση στην επίλυση προβλήματος.

Για την Αυστραλία:

Οι Morsy, Khavenson & Carnoy (2018) αναφέρουν ότι οι Αυστραλοί ειδικοί πιστεύουν ότι υπάρχουν τέσσερις βασικοί λόγοι για την πτώση των Αυστραλών μαθητών στους διαγωνισμούς PISA:

- Η στροφή των καλών μαθητών σε ιδιωτικά σχολεία. Οι καλοί μαθητές έχουν συνήθως υψηλότερο κοινωνικό – οικονομικό υπόβαθρο και έρευνες έχουν δείξει ότι τα παιδιά που παραμένουν στα δημόσια σχολεία με χαμηλότερο κοινωνικό – οικονομικό υπόβαθρο έχουν και χαμηλότερες επιδόσεις (Perry και McConney, 2010).

- Τα μαθηματικά δεν διδάσκονται από μαθηματικούς. Σύμφωνα με μια έκθεση της ομοσπονδιακής κυβέρνησης, το σαράντα τοις εκατό των μαθηματικών τάξεων στις βαθμίδες 7-10 διδάσκονται από καθηγητές που δεν είναι μαθηματικοί (Office of the Chief Scientist, 2014).
- Η εκπαιδευτική ικανότητα των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά. Η έρευνα επιβεβαιώνει ότι: όταν οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικά από καθηγητές που έχουν μικρό μαθηματικό και παιδαγωγικό υπόβαθρο, τότε η μάθηση υποφέρει (Baumert et al., 2010 · Hill et al., 2005)
- Τέλος, επισημαίνουν ότι τα μαθηματικά διδάσκονται όλο και λιγότερες ώρες. Ο ρόλος της εκπαιδευτικής πολιτικής για τα μαθηματικά είναι υπό αμφισβήτηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ:

7.1 Δομή των δύο προγραμμάτων σπουδών

Συγκρίνοντας τα δύο προγράμματα σπουδών, Αυστραλίας και Ελλάδας, στην Άλγεβρα διαπιστώσαμε πρώτα τις διαφορές στη δομή τους. Το αυστραλιανό αναπτύσσεται σε τροχιές μάθησης και ικανοτήτων. Σύμφωνα με την έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, υπάρχει μία προβλεπόμενη πορεία ανάπτυξης της κατανόησης και της μάθησης του παιδιού σε συγκεκριμένους μαθηματικούς στόχους. Προκειμένου να επέλθει επιτυχία σε αυτή την πορεία ανάπτυξης, προτείνονται συγκεκριμένα διδακτικά έργα, τα οποία θα προκαλέσουν την ανάπτυξη και θα οδηγήσουν τα παιδιά προοδευτικά σε ανώτερα επίπεδα σκέψης (Clements & Sarama, 2013; Clements & Sarama, 2004; Sztajn, Confrey, Wilson & Edgington, 2012). Η τροχιά της Άλγεβρας της 10ης τάξης είναι οργανωμένη σε τρεις υπο-τροχιές. Μέσα από τους στόχους της κάθε υπο-τροχιάς είναι πιο σαφής η εξέλιξη της κριτικής σκέψης των μαθητών, όπως και οι συλλογιστικές διαδικασίες που αφορούν τις Αλγεβρικές έννοιες. Οι τροχιές ικανοτήτων έρχονται να συμπληρώσουν με ανάλογο τρόπο το λεγόμενο «achievement standard» του ΠΣ. Το ελληνικό ΑΠΣ των μαθηματικών αναπτύσσεται στο Γυμνάσιο κατά άξονες αντικειμένων. Δίνονται οι ειδικοί σκοποί που πρέπει να επιτευχθούν σε κάθε τάξη και οι γενικοί στόχοι κάθε άξονα. Στον Άξονα της Άλγεβρας της Γ΄ Γυμνασίου έχουμε τρεις γενικούς στόχους, οι οποίοι αναπτύσσονται σε τέσσερις θεματικές ενότητες. Σε αυτές παρουσιάζονται και ενδεικτικές δραστηριότητες. Ο εκπαιδευτικός δεν μπορεί να διαπιστώσει εύκολα την ανάγκη συγκεκριμένης σειράς παρουσίασης των Αλγεβρικών εννοιών, όπως και το επίπεδο της Αλγεβρικής και κριτικής σκέψης των μαθητών. Το αυστραλιανό ΠΣ στην Άλγεβρα της 10ης τάξης ξεκαθαρίζει στους στόχους του τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αποκτούν μαθηματικό εγγραμματισμό, κάτι που δεν παρέχεται από το Ελληνικό ΑΠΣ.

7.2 Εύρος, βάθος και γνωστικές απαιτήσεις, μαθηματική αυστηρότητα των δύο ΠΣ

Μετρώντας το εύρος, το βάθος και τις γνωστικές απαιτήσεις, καθώς και την μαθηματική αυστηρότητα των δύο ΠΣ και διαπιστώσαμε ότι:

- Και τα δύο προγράμματα παρέχουν το υψηλότερο επίπεδο της κλίμακας του εύρους, αλλά πιο ισορροπημένο ως προς τον αριθμό των στόχων και εκπονήσεων δραστηριοτήτων είναι το Αυστραλιανό.

- Ίδιο ανώτερο επίπεδο έχουμε και στο βάθος, με το Ελληνικό όμως να μην εμφανίζει όλα τα επίπεδα των γνωστικών απαιτήσεων του Debb's Depth of Knowledge (2007). Η κριτική και δημιουργική σκέψη αναφέρεται ρητά στους στόχους του αυστραλιανού προγράμματος, ενώ γενικά η συλλογιστική παρουσιάζεται στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών μόνο σε δύο υπο-ενότητες, επίλυσης προβλημάτων. Γενικά, το Αυστραλιανό ΠΣ επιδιώκει να υπάρχει ισορροπία μεταξύ εύρους και βάθους, κάτι που προτείνεται από ερευνητές (κεφ. 1). Στο ελληνικό ΑΠΣ δεν διακρίνεται εύκολα μια τέτοια επιζήτηση.
- Η μαθηματική αυστηρότητα του Ελληνικού προγράμματος σπουδών στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου βρέθηκε περιορισμένη. Αυτό σαφώς έχει να κάνει και με τις γνωστικές απαιτήσεις του Ελληνικού ΑΠΣ στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου, που παρουσιάζονται όπως έχουμε δει σε μικρότερα επίπεδα.

7.3 Παρουσίαση του περιεχομένου των δύο ΠΣ στην Άλγεβρα

Παρόλο που δεν συμπίπτουν ακριβώς ηλικιακά οι δύο τάξεις – Γ΄ Γυμνασίου στην Ελλάδα με 10η τάξη στην Αυστραλία – είναι οι τελευταίες τάξεις στην υποχρεωτική εκπαίδευση των δύο χωρών και ειδικότερα στην Άλγεβρα πραγματεύονται παρόμοιες έννοιες. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι άξιο προσοχής, το πώς παρουσιάζονται ίδιες έννοιες σε διαφορετικά προγράμματα.

- Υπήρξαν ομοιότητες και διαφορές στη σειρά παρουσίασης των εννοιών. Κύρια ομοιότητα είναι ότι και τα δύο προγράμματα ασχολούνται με τις Αλγεβρικές παραστάσεις, καθώς και εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Λόγω της διαφορετικής δομής τους όμως (τροχιές μάθησης στο Αυστραλιανό – άξονες με θεματικές ενότητες το Ελληνικό), το ίδιο περιεχόμενο παρουσιάζεται διαφορετικά στα δύο ΠΣ. Έννοιες που αποτελούν ειδικούς στόχους στο Ελληνικό ΑΠΣ, είναι ενσωματωμένες σε στόχους και εκπονήσεις δραστηριοτήτων του Αυστραλιανού, για παράδειγμα οι ταυτότητες.
- Κύριες διαφορές είναι: α) η σύνδεση των Αλγεβρικών και των γραφικών αναπαραστάσεων που υπάρχει μόνο στο Αυστραλιανό ΠΣ, β) η παρουσίαση των εξισώσεων μέσω προβλημάτων στο αυστραλιανό, ενώ το Ελληνικό επιμένει στη διαδικασία επίλυσης, όπως και η διαφορετική διαδρομή που ακολουθείται από τα δύο προγράμματα, από τις εξισώσεις – ανισώσεις μέχρι τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων και γ) λογάριθμοι και εκθετικές

συναρτήσεις που περιλαμβάνονται στο Αυστραλιανό, έννοιες που δεν απασχολούν το Ελληνικό ΑΠΣ σε όλο το Γυμνάσιο.

7.4 Χρήση τεχνολογίας

Η χρήση τεχνολογικών μέσων είναι ενσωματωμένη στο αυστραλιανό ΠΣ. Πλήρως ενημερωμένα αποθετήρια και με σαφείς περιγραφές σε κάθε στόχο για την χρήση της. Το εν λόγω πρόγραμμα επικεντρώνεται στις πολλαπλές αλγεβρικές αναπαραστάσεις που μπορούν να δοθούν στους μαθητές, αλλά και να δημιουργήσουν οι ίδιοι οι μαθητές. Στο Ελληνικό ΑΠΣ προτείνεται γενικά. Τα αποθετήρια είναι υπό εξέλιξη, ενώ ψηφιακές δραστηριότητες προτείνονται από τις οδηγίες που στέλνονται στην αρχή κάθε χρονιάς και είναι ελάχιστες σε αριθμό.

7.5 Διδακτική θεωρία

Όσον αφορά τη διδακτική θεωρία, και τα δύο προγράμματα στηρίζονται στον επικοδομισμό, ανακαλυπτικό – διερευνητικό μοντέλο του Bruner με το αυστραλιανό στις τροχιές ικανοτήτων να είναι επηρεασμένο από πιο σύγχρονες θεωρίες, (Kilpatrick et all., 2001). Ο φορμαλισμός μπορεί να παρατηρηθεί σε στόχους του Ελληνικού ΑΠΣ, για παράδειγμα στις εξισώσεις, ενώ απορρίπτεται από το Αυστραλιανό ΠΣ στην Άλγεβρα, αλλά και γενικά.

7.6 Αποτελέσματα βάση διεθνών δοκιμασιών

Παρατηρώντας στο τέλος τις επιδόσεις των μαθητών 15 – 16 ετών στους διαγωνισμούς PISA, διαπιστώσαμε ότι οι Αυστραλοί μαθητές με επιδόσεις πάνω από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ τα πάνε καλύτερα από τους Έλληνες μαθητές, που έχουν επιδόσεις κάτω του μέσου όρου. Πρέπει να σημειώσουμε όμως την σταθερά πτωτική τάση που έχουν οι μαθητές από την Αυστραλία, καθώς και την αδυναμία των Ελλήνων μαθητών να πλησιάσουν προς τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ. Αυτό δείχνει ότι και στις δύο χώρες πρέπει να μελετηθούν οι παράγοντες που επηρεάζουν αυτές τις επιδόσεις και να δοθούν λύσεις που πιθανώς να απαιτούν και αλλαγές στα ισχύοντα ΠΣ.

7.7 Επίλογος

Το Αυστραλιανό ΠΣ στην Άλγεβρα της $10^{ης}$ τάξης αλλά και γενικά είναι ένα σύγχρονο ΠΣ. Στηρίζεται σε νεότερες θεωρίες και όσον αφορά τη δομή του και όσον αφορά τη διδακτική του θεωρία. Η Αυστραλία αυτή τη στιγμή συγκρίνει το ΠΣ της σε όλα τα μαθήματα στο πλαίσιο ενός προγράμματος ACARA 2017 – 2020, με ΠΣ άλλων χωρών που πετυχαίνουν υψηλές βαθμολογίες στους διαγωνισμούς PISA, με σκοπό την αναμόρφωσή του, όπου χρειάζεται. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιεί είναι αυτή που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα εργασία. Κινητικότητα για την αναθεώρηση των προγραμμάτων σπουδών στο Γυμνάσιο υπάρχει και στην Ελλάδα. Το ΙΕΠ (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής) με το πρόγραμμα «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης», που ξεκίνησε στα μέσα του 2019 φιλοδοξεί να αναμορφώσει όπου χρειάζεται τα ΑΠΣ του Γυμνασίου, στις σύγχρονές απαιτήσεις. Νωρίτερα, το 2011, υπήρξε το πιλοτικό πρόγραμμα «Νέο Σχολείο – Σχολείο του 21^{ου} αιώνα», το όποιο όμως τελικά δεν εφαρμόστηκε. Ο χώρος της συγκριτικής εκπαιδευτικής έρευνας παρέχει προσεγγίσεις, εργαλεία και μεθοδολογίες για τη σύγκριση και την ανάλυση προγραμμάτων σπουδών. Μέσα από τη σύγκριση μπορούν να υιοθετηθούν θετικά χαρακτηριστικά καθώς και να απαλειφθούν τα όποια μειονεκτήματα, από μεταγενέστερες αναθεωρήσεις των προγραμμάτων σπουδών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στόχοι του προαιρετικού προγράμματος F-10A[17]

Τάξη 10Α^{η}	**Τροχιά: Αριθμοί και Άλγεβρα**
Υποτροχιά: Πραγματικοί Αριθμοί	
Στόχοι	Εκπονήσεις
Ορίστε τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και κάντε πράξεις με άρρητους και κλασματικούς εκθέτες	Κατανοώντας ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών περιέχει τους άρρητους. Επεκτείνοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων με άρρητους εκθέτες. Εκτελώντας και τις 4 πράξεις με άρρητους αριθμούς.
Χρησιμοποιείστε τον ορισμό του λογαρίθμου για να αποδείξετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων.	Διερευνώντας τη σχέση μεταξύ εκθετικών και λογαριθμικών εκφράσεων. Απλοποιώντας εκφράσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.
Υποτροχιά: Μοτίβα και Άλγεβρα.	
Στόχοι	Εκπονήσεις
Διερευνήστε την έννοια του πολυωνύμου και εφαρμόστε τα θεωρήματα παραγόντων και υπολοίπου της διαίρεσης πολυωνύμων στην επίλυση προβλημάτων.	Διερευνώντας τη σχέση μεταξύ της αλγεβρικής διαίρεσης και των δύο θεωρημάτων.
Υποτροχιά: Γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις.	
Στόχοι	Εκπονήσεις
Επιλύστε απλές εκθετικές εξισώσεις	Διερευνώντας εκθετικές εξισώσεις που προκύπτουν από αυθεντικά μαθηματικά μοντέλα βασισμένα στην πληθυσμιακή αύξηση.
Περιγράψτε, μεταφέρετε και σχεδιάστε παραβολές, υπερβολές, κύκλους και εκθετικές συναρτήσεις με τους μετασχηματισμούς τους	Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς συμπεριλαμβανομένου και μεταφορών, ανακλάσεις και επεκτάσεις στους άξονες ως βοήθεια σχεδίασης των

[17] https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics

	παραβολών, υπερβολών, κύκλων και εκθετικών συναρτήσεων.
Εφαρμόστε την κατανόηση των πολυωνύμων για την σχεδίαση μιας σειράς από καμπύλες και περιγράψτε τα χαρακτηριστικά αυτών των καμπυλών βάση των εξισώσεών τους.	Διερευνώντας τα χαρακτηριστικά των γραφημάτων των πολυωνύμων, συμπεριλαμβανομένου των σημείων τομής με τους άξονες και του αποτελέσματος των επαναλαμβανόμενων παραγόντων.
Παραγοντοποιήστε δευτέρου βαθμού πολυώνυμα και λύστε μια σειρά από εξισώσεις που προέχονται από μια ποικιλία πλαισίων.	Γράφοντας δευτέρου βαθμού εξισώσεις που αναπαριστούν πρακτικά προβλήματα.

Βιβλιογραφικές αναφορές:

Αλεξάνδρου, Β., Φιλίππου, Γ. (2001). Προ-Άλγεβρα και επίλυση μαθηματικού προβλήματος. *Πρακτικά 18ου Συνεδρίου ΕΜΕ*. Εισήγηση 22.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Καψάλης, Α., Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών. *ΜΑΚΕΔΝΟΝ*, Περιοδική επιστημονική έκδοση της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας του Α.Π.Θ. Τεύχος 6, σσ. 95-115.

Λεμονίδης, Χ. (2002). Αριθμητισμός ή Μαθηματικός Γραμματισμός. Κείμενο Προδιαγραφών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας. *Έκδοση του Ινστιτούτου Διαρκούς Εκπαίδευσης Ενηλίκων (Ι.Δ.Ε.Κ.Ε.)*.

Σοφιανοπούλου, Χ., Εμβαλιώτης, Α., Καρακολίδης Α., & Πίτσια, Β. (2019). Μια ανάλυση των αποτελεσμάτων του PISA 2015. Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών και οι παράγοντες που τους επηρεάζουν. *Διανόεσις, Οργανισμός Έρευνας και Ανάλυσης*, 11.2019.

Ackerman, D. (2003). Taproots for a new century: Tapping the best of traditional and progressive education. *Phi Delta Kappan*, 84(5), 344–349.

Alexander, P. A., White, C. S., & Daugherty, M. (1997). Analogical reasoning and early mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning*: *Analogies, metaphors, and images* (pp. 117–147). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Alexander, R. (2002). The curriculum in successful primary schools: A response. A keynote address given to the HMI Invitation Conference on the 2002 Ofsted report, The Curriculum in Successful Primary Schools, Watermen's Hall, London, October 14,2002.

Alexander, R. (2005). Primary schools. The Guardian, April 19, 2005. Retrieved from http://www.guardian.co.uk/education/2005/apr/19/schools.politics1

Alexander, R. (2009). *The primary curriculum: An alternative way forward.* A paper presented at the Westminster Education Forum Keynote Seminar: The Future of the Primary Curriculum, June 22, 2009.

Allen, J.P.B., (1984). "General-Purpose Language Teaching: a Variable Focus Approach".In Brumfit (ed), 1984.

Alliance for Excellent Education. (2011). A time for deeper learning: Preparing students for a changing world. Policy Brief, May 26, 2011. Retrieved from https://all4ed.org/wp-content/uploads/2013/06/DeeperLearning.pdf

Arcavi A, Drijvers P, Stacey K (2017) *The learning and teaching of algebra: ideas, insights, and activities.* Routledge, London

Armstrong, P. (2017). *Blooms taxonomy.* Nashville, TN: Vanderbilt University, The Center for Teaching.

Atherton, J. S. (2011). Learning and teaching; Deep and surface learning [Online: UK]. Retrieved from https://vle.bruford.ac.uk/mod/url/view.php?id=18611

Australian Council for Educational Research (2016), PISA 2015: A first look at Australia's results.

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, (ACARA). www.australiancurriculum.edu.au. Mathematics Curriculum, F-10. Retrieved 18th March 2019.

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, (ACARA). www.australiancurriculum.edu.au. Mathematics Teacher resources, F-10.

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority,ACARA (2010), The shape of Australian Curriculum, version 2. Retrieved from https://docs.acara.edu.au/resources/Shape_of_the_Australian_Curriculum.pdf

Baker, D., Street, B. and Tomlin, A. (2003). “Mathematics as social: understanding relationships between home and school numeracy practices” *For the Learning of Mathematics 23*(3), 11 – 15.

Barnes, J. (2007). *Cross-curricular learning 3–14: Developing primary school practice*. London, England: Sage Publications Ltd.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1–33). London: Erlbaum.

Barton, D and Hamilton, M (1998). *Local literacies: reading and writing in one community*, London, Rouledge.

Barwell, R. (2004). What Is Numeracy? *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 20-22.

Bereiter, C. (2002). *Education and mind in the knowledge age.* London, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Biggs, J. (1999). *Teaching for quality learning at university, What the student does.* Buckingham: Society for Research into Higher Education and Open University Press.

Bloom B. S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: The Cognitive Domain*. New York: David McKay Co Inc.

Boaler, J. (2000). Mathematics from another world: Traditional communities and the alienation of learners. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 379-397.

Brady, M. (2000). The standards juggernaut. *Phi Delta Kappan*, 81(9), 649–651.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, DC: National Academy Press.

Breadth and Depth. (n.d.). Retrieved October 17, 2011, from http://www.av8n.com/physics/breadth-depth.htm

Brekke, G. (2001). School algebra: Primarily manipulations of empty symbols on a piece of paper? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 96-102). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. In W. D. Reeve (Ed.), *The teaching of arithmetic* (Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1–31). New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications.

Brownell, W. A. (1944/1945). When is arithmetic meaningful? *Journal of Educational Research*, 38(7), 481-498.

Brownell, W. A. (1987). AT classic: Meaning and skill—maintaining the balance. *Arithmetic Teacher*, 34(8), 18–25. (Original work published 1956).

Bruner, J. (1962), *Η διαδικασία της παιδείας*. Μτφρ. Χρ. Κληρίδη. Αθήνα, Καραβιάς.

Bulmer, M. (2001). Algebra in an age of numerical mathematics. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 136-139). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Burkhardt, H. (2001). Algebra for all: what does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 140-146). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 29,* 3–20.

Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19–32). Mahway, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (1999, April). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Paper presented at the annual meeting of the American

Educational Research Association, Montreal.

Chin, C., & Brown, D. E. (2000). Learning in science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of Research in Science Teaching, 37*(2), 109–138.

Clark-Wilson, A. (2010). *How does a multi-representational mathematical ICT tool mediate teachers' mathematical and pedagogical knowledge concerning variance and invariance* (Dissertation). London: Institute of Education, University of London.

Clements, D.H., & Sarama, J. (2013). Rethinking early mathematics: What is research-based curriculum for young children?. In L.D. English, & J.T.Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning, Advances in mathematics education* (pp. 121-147). Dordrecht: Springer.

Clements, D.H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 81-89.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI), (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers

Common Core Standards Writing Team. (2013, July 4). Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics (draft).

Crawford, A. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 192-193). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Day, R., & Jones, G. (1997). Building Bridges to Algebraic Thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2 (4),* 208-212.

Donham, J. (2010). Deep learning through concept-based Inquiry. *School Library Monthly*, 27(1), 8–11.

Donnelly, K., & Wiltshire, K. (2014). Review of the Australian Curriculum - Final Report. Canberra: Australian Government Department of Education.

Drijvers P., Ball L., Barzel B., Heid M.K., Cao Y., Maschietto M. (2016) Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education. In: *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education.* ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham.

Dubin, F. & Olshtain, E. (1986). *Course Design.* Developing programs and materials for language learning. C.U.P., Cambridge.

Egan, K. (2007). Learning in depth: *Knowledge and the imagination.* Retrieved October 31, 2011, from http://www.educ.sfu.ca/kegan/Learningdepth.html

Egan, K. (2010). Learning in depth: *A simple innovation that can transform schools*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Emvaliotis, A., Pitsia, V. & Karakolides, A. (2016) Examining students’ achievement in mathematics: A multilevel analysis of the Programme for International Student Assessment (PISA) 2012 data for Greece.

English, L. D. (1997a). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 3–18). Mahwah, NJ: Erlbaum.

English, L. D. (Ed.). (1997b). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images.*Mahwah, NJ: Erlbaum.

Entwistle, N. J. (1995). Frameworks for understanding as experienced in essay writing and in preparing for examinations. *Educational Psychologist*, 30, 47–54.

Entwistle, N. J., & Entwistle, A. C. (1997). Revision and the experience of understanding. In F. Marton,D. J. Hounsell & N. J. Entwistle (Eds.), *The experience of learning (2nd edition)* (pp. 145–158). Edinburgh, Scotland: Scottish Academic Press.

Entwistle, N. J. (1998). Approaches to learning and forms of understanding. In B. Dart & G. Boulton-Lewis (Eds.), *Teaching and learning in higher education* (pp. 72–101). Melbourne, Australia: Australian Council for Educational Research.

Entwistle, N. J. (2000). Promoting deep learning through teaching and assessment: Conceptual frameworks and educational contexts. A paper presented at TLRP Conference, Leicester.

Entwistle, N. J. (2010). Taking stock: An overview of key research findings. In J. Christensen Hughes &J. Mighty (Eds.), *Taking stock: Research on teaching and learning in higher education* (pp. 15–51). Montreal, QC & Kingston, ON: McGill-Queen's University Press.

Francis, E. (2016). *What exactly is depth of knowledge.* Retrieved from http://edge.ascd.org/blogpost/what-exactly-is-depth-of-knowledge-hint-its-not-a-wheel

Freudenthal H (1977) *What is algebra and what has it been in history?* Arch Hist Exact Sci 16(3):189–200 https://doi.org/10.1007/BF00328154

Gardner, H. (2007). *Five minds for the future.* Boston, MA: Harvard Business School Press.

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition. *American Psychologist*, 50(1), 24–37.

Halpern, D. F., & Hakel, M. D. (2003). Applying the science of learning to the university and beyond. *Change, 35*(4), 36–41.

Hammond, P. (2000). A keynote address delivered at the Educating Urban Indians: A Summit for the Future on March 10, 2000 in Milwaukee, Wisconsin.

Hanushek, A. E., & Woessmann, L. (2010). The cost of low educational achievement in the European Union (Report No. 7). Brussels, Belgium: European Union. http://www.eenee.de/dms/EENEE/Policy_Briefs/PolicyBrief1-2011.pdf.

Herrington, J., & Oliver, R. (2000). An instructional design framework for authentic learning environments. Educational Technology Research and Development, 48(3), 23–48. Retrieved from http://ro.uow.edu.au/edupapers/31/

Herscovics, N. & Linchevsci, L. (1994). *A cognitive gap between Arithmetic and Algebra. Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale: Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65–97).* New York: Macmillan.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hilbert, D (1900a), Uber den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung 8, pp 180 – 84. English translation in Ewalt 1996 pp. 1089-1095

Hirsch Jr., E. (2001a). Breadth versus depth: a premature polarity. *Common Knowledge,14*(4), 3-4.

Hirsch Jr., E. D. (2001b). Seeking breadth and depth in the curriculum. *Educational Leadership, 59*(2), 22–25

Hull, T., Miles, R., & Balka, D. (2013). Realizing Rigor in the Mathematics Classroom. Corwin 1st Edition, 2014.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Irwin, R. (2011). Designing engagement: *Breadth and depth through artistic inquiry.* Speaking notes from a presentation at the Alberta Education Research Roundtable 2, May 7, 2011, Calgary, Alberta.

Johnson, R. K., (ed) 1989. The Second Language Curriculum. C.U.P., Cambridge.

Johnson, R.K., 1989. "A decision-making framework for the coherent language curriculum". In Johnson (ed), 1989.

Jonnaert, P., & Therriault, G. (2013, December). Curricula and curricular analysis: Some pointers for a debate. Prospects, 43, 397–417. doi:DOI 10.1007/s11125-013-9285-7

Jossey-Bass.2012University of the Sciences. (2011). Course planning: Depth versus breadth. Retrieved October 6, 2011, from http://www.usciences.edu/teaching/tips/planning.shtml#department

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, & National Research Council (Ed.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium* (pp. 25–26). Washington, DC: National Academies Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds). *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Routledge.

Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1999). The Rationality and Irrationality of International Comparative Studies. In I. Huntly, G. Kaiser, & E. Luna, *International Comparisons in Mathematics Education* (pp. 241-262). London: Falmer Press.

Kelly, A. V. (1982). *The Curriculum: Theory and Practice.* Harper & Row, London

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *ICMI study series. Mathematics and cognition: A* *research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). New York, NY, US: Cambridge University Press. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

Kieran C. (2018) Algebra Teaching and Learning. In: Lerman S. (eds*) Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge, England: University of Cambridge Press. Learning in Depth Project. (n.d). Learning in depth project. Retrieved from http://www.ierg.net/LID/

Lee, S., & Olszewski-Kubilius, P. (2006). A study of instructional methods used in fast-paced classes. Gifted Child Quarterly, 50(3), 216–237.

Lehtinen, Erno & Hannula-Sormunen, Minna & McMullen, Jake & Gruber, Hans. (2017). Cultivating mathematical skills: from drill-and-practice to deliberate practice. ZDM. 49. 10.1007/s11858-017-0856-6.

Leung FKS, Clarke D, Holton D, Park K (2014) *How is algebra taught around the world?* In: Leung FKS, Park K, Holton D, Clarke D (eds) Algebra teaching around the world. Sense Publishers, Rotterdam, pp. 10

Lindblom-Ylanne, S. (2010). Chapter 3: Students' approaches to learning. In J. Christensen Hughes & J. Mighty (Eds.), Taking stock: *Research on teaching and learning in higher education* (pp. 63–80).

Lins R., Kaput J. (2004) The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. In: Stacey K., Chick H., Kendal M. (eds) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study*. New ICMI Study Series, vol 8. Springer, Dordrecht

MacGregor, M. (2004) Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. In: Stacey K., Chick H., Kendal M. (eds) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study*. New ICMI Study Series, vol 8. Springer, Dordrecht

Marks, G., & Ainley, J. (1997). *Reading comprehension and numeracy among junior secondary students in Australia.* Camberwell, Vic: Australian Council for Educational Research.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zee (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series, pp. 29–53). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (1996). Problem-solving transfer. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 47–62). New York: Macmillan.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: D.Reidel

Miller, J. P., & Seller, W. (1990). Curriculum: Perspectives and practice. Toronto, ON: Copp Clark Pitman.

Millis, B. (2010). Promoting deep learning. (IDEA paper #47). Manhattan, KS: The IDEA Center.

Ministry of Education. (2013). *Engaging our learners: Teach less, learn more*. Singapore: Ministry of Education, pp. 3–5. Retrieved from BookSG.

Moldoveanu, M., & Martin, R. (2009). Diaminds: Decoding the mental habits of successful thinkers. Toronto, ON: University of Toronto Press.

Moldoveanu, M., & Martin, R. (2010). Stretching the mind: Developing an adaptive lens to deal with complexity. *Rotman Magazine*, Fall, 4–9. Retrieved from https://www.scribd.com/document/143423663/Rotman-Fall-2010-Stretching-the-Mind

Morsy, Λ. , Khavenson, T & Carnoy, M. (2018), How international tests fail to inform policy: The unsolved mystery of Australia’s steady decline in PISA scores. *International Journal of Educational Development 60* (2018) 60–7

Murdock, J. (2008). Comparison of curricular breadth, depth, and recurrence and physics achievement of TIMSS population 3 countries. *International Journal of Science Education, 30*(9), 1135–1157.

National Curriculum. (2010). Introducing the new primary curriculum: Guidance for primary schools.

Nunes, T. (1992a). Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts. *International Journal of Behavioral Development*, *15*, 433–453.

Nunes, T. (1992b). Ethnomathematics and everyday cognition. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557–574). New York: Macmillan.

OECD (2014), PISA 2012 Results in Focus, PISA, OECD Publishing.

OECD (2014), PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V), PISA, OECD Publishing.

OECD (2015), Students, Computers and Learning: Making the Connection, PISA, OECD Publishing.

OECD PISA 2015 key findings for Greece, compared with Australia. Retrieved from http://www.oecd.org/greece/pisa-2015-greece.htm

OECD (2016), Equations and Inequalities: Making Mathematics Accessible to All,

PISA, OECD Publishing, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/9789264258495-en.

OECD (2016), Low-Performing Students: Why They Fall Behind and How to Help Them Succeed, PISA,OECD Publishing, Paris, http://dx.doi.org/10.1787/9789264250246-en.

OECD (2016), PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, PISA, OECD Publishing, Paris. *Mathematics performance among 15-year-olds p.177* http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

OECD (2017), Education policy in Greece. A preliminary assessment. http://www.oecd.org/edu/educationpolicyingreeceapreliminaryassessment.htm

OECD (2018), PISA 2015 Results in Focus, PISA, OECD Publishing.

Ogawa, Y. (2009). The Pursuit of Rigor: Hilbert's axiomatic method and the objectivity of mathematics, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science, 2003-2004, Volume 12, Issue 2, Pages 89-108, Released March 26, 2009, Online ISSN 1884-1228, Print ISSN 0453-0691, https://doi.org/10.4288/jafpos1956.12.8.

Pearcy, M., & Duplass, J. A. (2011). Teaching history: Strategies for dealing with breadth and depth in the standards and accountability age. The Social Studies, 102(3), 110–116.

Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M. & Christou, C. (2019). *Int J of Sci and Math Educ*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10003-6

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Qian, D. D. (1999). Assessing the roles of depth and breadth of vocabulary knowledge in reading comprehension. *The Canadian Modern Language Review/La Revue canadienne des langues vivantes, 56(*2), 282–307.

Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think.* Washington, DC: National Academy Press.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*, 175–189.

Rose, J. (2009). Independent review of the primary curriculum: Final report. Nottingham, England: DCSF Publications. Retrieved from http://www.educationengland.org.uk/documents/pdfs/2009-IRPC-final-report.pdf

Roser, G., & Kruse, D. (2007). What if less is just less? The role of depth over breadth in the secondary mathematics curriculum. *Horace*, *23*(2). Retrieved from http://www.essentialschools.org/resources/383

Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos, M., Friedlander, A., & Meissner, H. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning—and learning trajectories—of mathematical concepts. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange

(Eds.), *Mathematics education and technology—Rethinking the terrain* (pp. 179–226). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Säljö, R. (1979). Learning in the learner's perspective: 1–some commonplace misconceptions. Reports from the Institute of Education, University of Gothenburg, 76.

Saroyan, A. (2010). Chapter 5: Research on student learning. In J. Christensen Hughes & J. Mighty (Eds.), *Taking stock: Research on teaching and learning in higher education (*pp. 95–109). Montreal, QC and Kingston, ON: McGill-Queen's University Press.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking in grades K-6. In L. V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (1999 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 62-81). Reston, VA: NCTM.

Schleicher, A. (2009). Seeing the United States Education System through the Prism of International Comparisons. Middle School Journal, 40(5), 11-17

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338–355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the discipline. In I. Westbury & N. J. Wilks (Eds.),*Science, curriculum, and liberal education* (pp. 229–272). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Schwartz, J., Yerushalmy, M. (1990). The *function* supposer [Software-part of the Visualizing *Algebra* series]. Pleasantville, NY: Sunburst Communications.

Schwartz, M., Sadler, P. M., & Tai, R. H. (2008). Depth versus breadth: How content coverage in high school science courses relates to later success in college science coursework. *Science Education, 93*(5), 798–826. Retrieved from http://www.cfa.harvard.edu/smg/ficss/research/articles/SE_Depth_versus.pdf

Silver, E. (1997). “Algebra for all” - Increasing students’ access to algebraic ideas, not just algebra courses. *Mathematics teaching in the middle school*, 2(4), 204-20.

Sims, E. (2006). Deep learning–1: A new shape for schooling? Retrieved from http://complexneeds.org.uk/modules/Module-3.2-Engaging-in-learning---key-approaches/D/downloads/m10p020d/a_new_shape_for_schooling_1.pdf

Sofianopoulou, Ch., Emvaliotis, A., Pitsia, V. & Karakolides, A. (2017) Report on the Findings from the Programme for International Sudent Assesement (PISA) 2015 for Greece. Athens Institute of Educational Policy (IEP).

Sowder, J. (1998). Editorial. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(5),* 496-502.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Implications for mathematics education policy of research on algebra learning. *Australian Journal of Education, 43(1)*, 58-71.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (eds.) (2004). *The future of the teaching and learning of Algebra, The 12th ICMI Study*, (pp. 16). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Steele, C. M. (1997). A threat in the air: How stereotypes shape intellectual identity and performance. *American Psychologist*, 52, 613–629.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., & Lins, R. (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht,The Netherlands: Kluwer Academic.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P.H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*, (5), 147-156.

Tagg, J. (2003). *The learning paradigm college*. Boston, MA: Anker.

Tait, H., Entwistle, N. J., & McCune, V. (1998). ASSIST: A re-conceptualisation of the approaches to studying inventory. In C. Rust (Ed.), Improving students as learners (pp. 262–271). Oxford, England: Oxford Brookes University, Centre for Staff and Learning Development.

Tait, T., Frankland, G., Moore, S., & Smith, D. (2002). Curriculum 2000: Innovations, opportunity and change. Retrieved October 17, 2011, from http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED465900.pdf

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Treffers, A. (1987). Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trilling, B., & Fadel, C. (2009). *21st century skills: Learning for life in our times*. San Francisco, CA: Jossey – Bass.

University of Waterloo. (2011). The task force on innovative teaching practices to promote deep learning at the University of Waterloo: Final report. Retrieved from https://uwaterloo.ca/centre-for-teaching-excellence/sites/ca.centre-for-teaching-excellence/files/uploads/files/Task%20Force%20Report%20on%20Deep%20Learning_0.pdf

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F.

Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra*, K-12 (pp. 7–13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Victorian Curriculum and Assessment Authority (2019), Mathematics Curriculum F-10 Companion. Retrieved from https://www.vcaa.vic.edu.au/curriculum/foundation-10/Pages/default.aspx

Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 371–384.

Weaver, J. Fred; Suydam, Marilyn N (1972). Meaningful Instruction in Mathematics Education. *ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education*, Columous, Ohio.

Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives of science and mathematics learning. *Science Education*, 75, 9–21.

Wiest, L. R. (2000). Mathematics that whets the appetite: Student-posed projects problems. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*, 286–291.

Wilde, S., Wright, S., Hayward, G., Johnson, J., & Skerrett, R. (2006). *Nuffield review higher education in focus groups preliminary report.* The Nuffield review of 14–19 Education and Training, Nuffield Foundation. Oxford, England: Oxford University Press.

Wineburg, S. (1997). Beyond "breadth and depth": Subject matter knowledge and assessment. Theory into Practice, 36(4), 255–261. Retrieved from http://pdfserve.informaworld.com/266764_750426827_916642942.pdf

Wineburg, S. (2008). The role of subject-matter knowledge in teacher assessment. In L. Ingvarson & J. Hattie (Eds.), *Assessing teachers for professional certification: The first decade of the National Board for Teaching Standards* (pp. 113–138). Oxford, England: Elsevier Ltd.

Woolf, L. D. (2001). It's a colorful life. A presentation at the April 30, 2001 meeting of the American Physical Society, Washington, DC. Retrieved from

http://www.sci-ed-ga.org/websites/gasef/images/pdf/apsclrpres042501.pdf

Wu, H. (1999, Fall). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy in mathematics education. *American Educator*, 14-19, 50–52.

Wurdinger S., & Enloe, W. (2011). Cultivating life skills at a project-based charter school. *Improving Schools, 14*(1), 84–96.

Yaffee, L. (1999). Highlights of related research. In D. Schifter, V. Bastable, & S. J.

Russell with L. Yaffee, J. B. Lester, & S. Cohen, *Number and operations: Making meaning for operations*. *Casebook* (pp. 127–149). Parsippany, NJ: Dale Seymour.

Yalden, J. (1984). "Syllabus Design in General Education: Options for ELT". In Brumfit (ed), 1984 Aberdeen Education Council. (2008). A curriculum for excellence. Retrieved from www.aberdeen-education.org.uk/.../City%20Information%20Pack%2... Montreal, QC and Kingston, ON: McGill-Queen's University Press.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (2nd ed., pp. 1169–1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Zimmerman, M. A. (1990). Self-regulated learning and academic achievement: An overview. Educational Psychologist, 25(1), 3–17.