ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ- ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΣΗ: Α΄ Ηλικιακός Κύκλος (5-12 χρονών)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΤΙΤΛΟ:

«ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ»

Της

Ουζουνίδου Αικατερίνης (Α.Ε.Μ. 707)

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος (Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.)

Εξεταστές: Βαμβακούση Ξένια (Επίκουρος Καθηγήτρια ΠΤΝ/Π.Ι.)

Χρήστου Κωνσταντίνος (Επίκουρος Καθηγητής Π.Τ.Ν./Π.Δ.Μ.)

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: Λεμονίδης Χαράλαμπος

Βαθμίδα: Καθηγητής Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

Βαθμός: ______________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Βαμβακούση Ξένια

Βαθμίδα: Επίκουρος Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Βαθμός: ______________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Χρήστου Κωνσταντίνος

Βαθμίδα: Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

Βαθμός: ______________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός: __________________

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσει διάφορες πτυχές της Γνώσης Περιεχομένου των υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων. Ειδικότερα, η μελέτη επιδίωκε να εξετάσει τις επιδόσεις και τις ικανότητες των υποκειμένων ως προς πέντε διαστάσεις: α) την εκτέλεση των πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, β) την επίλυση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, γ) την αναπαράσταση των εν λόγω πράξεων όταν παρουσιάζονται αποπλαισιωμένες δ) την αναπαράσταση αυτών όταν παρουσιάζονται μέσα σε ένα πρόβλημα και ε) την κατασκευή λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 73 φοιτητές- μελλοντικοί δάσκαλοι που σπούδαζαν σε Παιδαγωγικό Τμήμα της Ελλάδας για την απόκτηση αντίστοιχου πτυχίου. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν από εργασίες των συμμετεχόντων και από απαντήσεις στις εξετάσεις εξαμήνου σε ακαδημαϊκό μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών και ύστερα από ειδική διδασκαλία.. Η ανάλυση των δεδομένων αποκάλυψε ότι ενώ η πλειοψηφία των εν δυνάμει εκπαιδευτικών είναι σε θέση να εκτελεί τις δύο πράξεις κλασμάτων και να λύνει με σχετική ευκολία προβλήματα, δεν δύναται να αναπαραστήσει αυτές τις πράξεις και να δημιουργήσει νέα προβλήματα που να αντιστοιχούν σε συγκεκριμένους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις κλασμάτων. Ως εκ τούτου, είναι εμφανές ότι δεν διαθέτουν, ως προς ένα βαθμό, την εννοιολογική κατανόηση των εν λόγω πράξεων αλλά περιορίζονται στην διαδικαστική γνώση αυτών.

Λέξεις κλειδιά: πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων, υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, αναπαραστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, επίλυση και κατασκευή προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων

ABSTRACT

The purpose of the present research paper was to investigate various aspects of the Content Knowledge of the primary education candidates on multiplication and division of fractions. Specifically, the aim of the research was to analyze the candidates' performance and abilities with regard to five dimensions: a) the calculation of multiplication and division of fractions b) word problem solving that involves multiplying and dividing fractions c) the representation of the aforementioned operations when they appear individually d) the representation of the aforementioned operations when they appear within a word problem and e) the creation of word problems that include multiplication and division of fractions. The survey was based on a sample of 73 students-aspiring teachers who were studying at a Department of Primary Education in Greece for the acquisition of an equivalent degree. Data have been collected from the candidates' projects as well as from their exam answers in the academic course of Didactics of Mathematics. The data analysis revealed that the majority of the prospective teachers are able to perform the aforementioned fraction operations and can easily solve problems. However, it was shown that they cannot represent these fractions and create new word problems that would correspond to specific multiplication and division with fractions. Consequently, it is evident that up to a point they cannot comprehend the relational understanding of these operations, but they restrict themselves to the procedural knowledge of the latter.

Keywords: multiplication and division of fractions, teacher candidates, representation of fraction multiplication and division, setting up and solving a word problem that involves multiplication and division with fractions

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης είναι αναμφίβολα κομβικός σε κάθε εκπαιδευτικό σύστημα. Η γνώση, οι ικανότητες και οι δεξιότητες των εκπαιδευτικών για την διδασκαλία ποικίλων αντικειμένων έχει αναδειχθεί ως υψίστης σημασίας στην μαθηματική εκπαίδευση. Το αντίκτυπο που έχουν αυτά τα στοιχεία ενός δάσκαλου στην μάθηση είναι πολύ σημαντικό. Στην ιστορία της εκπαίδευσης καθώς και της εκπαιδευτικής έρευνας, πραγματοποιήθηκαν πολλαπλές προσπάθειες ώστε αυτή η έννοια- κλειδί να οριστεί εννοιολογικά και να μελετηθεί εις βάθος με στόχο, πάντα, την βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας και της μάθησης. Δύο έννοιες που έχουν επικρατήσει για την περιγραφή αυτής της γνώσης των εκπαιδευτικών είναι η «Γνώση Περιεχομένου» και η «Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου».

Εστιάζοντας στην διδασκαλία των ρητών αριθμών και συγκεκριμένα των κλασμάτων, έρευνες τόσο στη γνωστική ψυχολογία όσο και στη διδακτική των Μαθηματικών, υπογραμμίζουν την δυσκολία υποψηφίων και εν ενεργεία εκπαιδευτικών στην διαχείριση αυτής την μαθηματική έννοιας. Τα συνήθη λάθη, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές και δάσκαλοι στην κατανόηση και διδασκαλία κλασμάτων, καθώς και οι παράγοντες αυτών, έχουν γίνει αντικείμενο μιας πληθώρας ερευνών σε διεθνή (π.χ. Aksu, 1997˙ Kerslake, 1986˙ Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015˙Mack, 1995) και εθνικό επίπεδο (π.χ. Lemonidis & Kaiafa, 2014 ˙ Vamakoussi, & Vosniadou, 2010 ˙ Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014). Κοινός τόπος είναι η διαπίστωση της «προκατάληψης των φυσικών αριθμών» καθώς και η ύπαρξη «διαισθητικών-πρωτόγονων μοντέλων» που υφίστανται πριν την διδασκαλία των ρητών αριθμών.

Όσον αφορά τις πράξεις στους ρητούς αριθμούς, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση κλασμάτων έχουν αναδειχθεί ως οι πιο απαιτητικές και δύσκολες στην κατανόηση τους πράξεις. Μελέτες δείχνουν ότι μαθητές και εκπαιδευτικοί είναι σε θέση συνήθως να εκτελούν τους αντίστοιχους αλγορίθμους χωρίς όμως να κατανοούν την εννοιολογική τους ερμηνεία και χωρίς να δύνανται να τις εφαρμόσουν σε πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας (π.χ. Ball, 1990˙ Borko et al., 1992˙ Tirosh, 2000 ˙ Ma,1990˙ Caglayan and Olive, 2011). Έχουν κατακτήσει, δηλαδή, την διαδικαστική γνώση των πράξεων και στερούνται την εννοιολογική αντίστοιχη γνώση. Ειδικότερα, περισσότεροι υποψήφιοι και λιγότεροι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί, φαίνεται να συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση των δύο πράξεων. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, μελλοντικοί δάσκαλοι, αδυνατούν να εξηγήσουν πως λειτουργούν οι δύο αλγόριθμοι, ποια είναι η εφαρμογή τους, τι προβλήματα μπορούν να κατασκευαστούν και πως αυτές οι πράξεις κλασμάτων μπορούν να αναπαρασταθούν εικονικά.

Η παρούσα ερευνητική εργασία στοχεύει στην μελέτη των παραπάνω θεμάτων και στην εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν την κατανόηση και την γνώση που έχουν μελλοντικοί εκπαιδευτικοί- φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος πάνω στο θέμα του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Η εργασία αποτελείται από 5 κεφάλαια:

Κεφάλαιο 1- Θεωρητικό πλαίσιο: Πραγματοποιείται η βιβλιογραφική ανασκόπηση για όλες τις πτυχές του θέματος που πραγματεύεται η έρευνα. Η ανασκόπηση κινείται γύρω από τους εξής άξονες: α) γενική γνώση των εκπαιδευτικών και γνώση των εκπαιδευτικών στο μάθημα των Μαθηματικών καθώς και αντίστοιχα θεωρητικά μοντέλα κατηγοριοποίησης, β) ρητοί αριθμοί και κλάσματα, οι ορισμοί τους, τα διάφορα σχήματα – ερμηνείες, οι συνήθεις δυσκολίες-λάθη όπως και τα αίτια – παράγοντες αυτών, γ) αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά και ειδικά στους ρητούς αριθμούς, οι τύποι και τα μοντέλα αναπαραστάσεων που υπάρχουν δ) μαθηματικά προβλήματα, η επίλυση και κατασκευή προβλημάτων ε) πράξεις στα κλάσματα και συγκεκριμένα ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση, προβλήματα και αναπαραστάσεις των εν λόγω πράξεων, οι συχνές δυσκολίες- λάθη και οι παράγοντες αυτών, δεδομένα και αποτελέσματα από διεξαχθείσες έρευνες που αφορούν τις επιδώσεις -ικανότητες εκπαιδευτικών στις δύο πράξεις, στα προβλήματα και στις αναπαραστάσεις στ) κριτική ανασκόπηση και η θέση της παρούσας νέας έρευνας.

Κεφάλαιο 2- Μεθοδολογίας έρευνας: Περιγράφεται η μεθοδολογία και το ερευνητικό σχέδιο που ακολουθήθηκε για την διεξαγωγή της έρευνας. Αναλυτικότερα, σε αυτήν την ενότητα παρατίθενται τα ακόλουθα: α) ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας β) η μέθοδος που εφαρμόστηκε γ) το δείγμα της έρευνας και η περιγραφή των υποκειμένων δ) το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε σε δύο φάσεις και τα έργα που τέθηκαν υπό εξέταση σε κάθε μία από αυτές ε) η ερευνητική διαδικασία αφενός κατά την συλλογή των δεδομένων και αφετέρου κατά την ανάλυση αυτών.

Κεφάλαιο 3- Αποτελέσματα: Παρατίθενται τα ευρήματα της έρευνας που προκύπτουν ύστερα από την ανάλυσή τους. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται α) τα ποσοστά επιτυχίας και αποτυχίας σε κάθε έργο ανά άξονα β) οι κατηγορίες σωστών απαντήσεων και οι κατηγορίες λαθών γ) οι συγκρίσεις των επιδόσεων μεταξύ των έργων σε κάθε άξονα αλλά και μεταξύ των συνολικών επιδόσεων σε κάθε άξονα δ) τα αποτελέσματα στατιστικών ελέγχων σύγκρισης μέσων όρων συνολικών επιδόσεων κάθε άξονα.

Κεφάλαιο 4- Συμπεράσματα: Παρουσιάζονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει η έρευνα ύστερα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων. Δηλαδή, παρατίθενται οι απαντήσεις των ερευνητικών ερωτημάτων, γενικά συμπεράσματα και πραγματοποιείται η συζήτηση. Επιπροσθέτως, αναφέρονται κάποιοι περιορισμοί της παρούσας μελέτης καθώς και μερικές προτάσεις για μελλοντική έρευνα σε αυτό το πεδίο.

1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Γνώση Εκπαιδευτικών

Η σημασία του ρόλου του εκπαιδευτικού στη μαθηματική εκπαίδευση όλων των βαθμίδων είναι αδιαμφισβήτητη. Η μελέτη των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας είναι από τα πιο δημοφιλή ερευνητικά θέματα στο χώρο της εκπαίδευσης και της ψυχολογίας. Το ενδιαφέρον για την γνώση των εκπαιδευτικών υπάρχει στην ιστορία της εκπαίδευσης από την αρχαιότητα. Πράγματι, πριν από χιλιάδες έτη, ο Αριστοτέλης ήταν αυτός που υποστήριξε ότι «η διδασκαλία είναι η υψηλότερη μορφή κατανόησης ενός θέματος». Σε όλη την διάρκεια της εκπαιδευτικής έρευνας, έχουν γίνει προσπάθειες για την περιγραφή και την ανάλυση της γνώσης που χρειάζεται ένας εκπαιδευτικός προκειμένου να διδάξει αποτελεσματικά (Shulman,1986 1987˙ Ball, 1990˙ Fenema &Franke, 1992 Olanoff, 2011)

Τις τελευταίες δεκαετίες, δύο είναι οι επικρατέστερες έννοιες, όταν κάποιος αναφέρεται στην γνώση του εκπαιδευτικού: αυτή της Γνώσης Περιεχομένου και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου. Οι έννοιες αυτές εισήχθησαν αρχικά από τον Shulman (1986, 1987) στα μέσα της δεκαετίας του 80. Μέσα από μία σειρά ερευνών, αυτός και οι συνεργάτες του, παρατήρησαν ότι στις προηγούμενες έρευνες υπήρξε έλλειψη προσανατολισμού στο περιεχόμενο της διδασκαλίας και χαρακτήρισε αυτήν την έλλειψη ως το πρόβλημα του «απολεσθέντος παραδείγματος» (missing paradigm). Έτσι, δίνοντας έμφαση στο περιεχόμενο της διδασκαλίας, οι έρευνες τους είχαν ως σκοπό να αναδείξουν και να προσδιορίσουν ποια είναι τα στοιχεία ενός ικανού δασκάλου καθώς και ποιες είναι οι πτυχές μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας.

1.1.1 Το μοντέλο του Shulman για την γνώση των εκπαιδευτικών

Ύστερα από μακροχρόνιες έρευνες του Shulman (1986, 1987) αναδείχθηκε η ανάγκη δημιουργίας ενός θεωρητικού μοντέλου κατηγοριοποίησης της γνώσης των εκπαιδευτικών. Έτσι, σε μια προσπάθεια ανάλυσης της γνωστικής βάσης των εκπαιδευτικών, στο μοντέλο του Shulman, προτείνονται οι παρακάτω επτά κατηγορίες:

- Η γνώση περιεχομένου (Content knowledge- CK)
- Η γενική παιδαγωγική γνώση (general pedagogical knowledge) που αφορά στις γενικές αρχές και στρατηγικές της οργάνωσης και διαχείρισης τάξης.

- Η γνώση του προγράμματος (curriculum knowledge) που αφορά το υλικό και τα προγράμματα που λειτουργούν ως εργαλεία δουλειάς για τους εκπαιδευτικούς.

- Η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (pedagogical content knowledge – PCK), αυτό το ειδικό κράμα του περιεχομένου ενός γνωστικού αντικειμένου και της παιδαγωγικής, που αποτελεί ιδιαίτερο τύπο επαγγελματικής κατανόησης και αφορά αποκλειστικά τους εκπαιδευτικούς.

- Η γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους

- Η γνώση των εκπαιδευτικών πλαισίων, που εκτείνονται από τις εργασίες με τις ομάδες στην τάξη, στη διαχείριση και την χρηματοδότηση των σχολικών περιφερειών, τον χαρακτήρα της κοινωνίας και του πολιτισμού.

- Η γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών και αξιών, το φιλοσοφικό και ιστορικό υπόβαθρο τους.

Σύμφωνα με τον Shulman (1987) τρεις από αυτές τις κατηγορίες είναι πιο σημαντικές: η γνώση περιεχομένου, η γνώση του προγράμματος και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

Η γνώση περιεχομένου, περιλαμβάνει τη γνώση για το εκάστοτε αντικείμενο, όπως τα Μαθηματικά, την οργανωτική δομή του καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι έννοιες μεταξύ τους. Η γνώση της δομής αναφέρεται τόσο στην κατανόηση βασικών εννοιών και αρχών του συγκεκριμένου αντικειμένου, όσο και στην κατανόηση του τρόπου με το οποίο ελέγχεται η αλήθεια ή η εγκυρότητα μιας πρότασης (Shulman, 1986, 1987˙ Wilson, Shulman, & Richert, 1987). Επιπλέον, η ΓΠ αναπαριστά την βαθιά κατανόηση του αντικειμένου που διδάσκεται από τον δάσκαλο. Επομένως, ο εκπαιδευτικός οφείλει όχι μόνο να καταλαβαίνει αυτό που διδάσκει, αλλά και να γνωρίζει τον λόγο για τον οποίο ισχύει καθετί που διδάσκει. Οφείλει επίσης, να διακρίνει ποια θέματα κατέχουν κεντρικό ρόλο και ποια περιθωριακό.

Η γνώση του αναλυτικού προγράμματος, περιλαμβάνει όλα τα προγράμματα που έχουν σχεδιαστεί για την διδασκαλία κάθε αντικειμένου και θέματος, τα εκπαιδευτικά εργαλεία, τις ενδείξεις και τις αντενδείξεις για την εφαρμογή του συγκεκριμένου προγράμματος. Σημαντικό είναι επίσης ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει τι προηγείται και τι έπεται της έννοιας που διδάσκεται κάθε φορά.

Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αφορά τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούν να διδαχθούν τα διάφορα θέματα , τους πιο χρήσιμους τρόπους αναπαράστασης και διατύπωσης του γνωστικού αντικειμένου οι οποίοι το καθιστούν κατανοητό στους μαθητές. Περιλαμβάνει, πιο αναλυτικά, τις μορφές αναπαραστάσεων, τις επεξηγήσεις , τα παραδείγματα και τα διαγράμματα που είναι κατάλληλα για την κατανόηση κάθε έννοιας. Ακόμη, την κατανόηση των αιτίων που καθιστούν ένα θέμα εύκολο ή δύσκολο, τις διαισθητικές ιδέες και τις τυχόν παρανοήσεις των διδασκόμενων. Χαρακτηριστικά, ο Shulman (1986, σελ. 9) ορίζει την ΠΓΠ ως:

> «…οι πιο χρήσιμες αναπαραστάσεις αυτών των ιδεών, οι πιο ισχυρές αναλογίες (analogies), εικόνες, παραδείγματα, επεξηγήσεις και παρουσιάσεις – με μία λέξη, οι πιο χρήσιμοι τρόποι αναπαράστασης και διατύπωσης του μαθήματος οι οποίοι το καθιστούν κατανοητό στους άλλους…. Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, επίσης, περιλαμβάνει την κατανόηση του τι κάνει εύκολη ή δύσκολη τη μάθηση συγκεκριμένων θεμάτων. Τις αντιλήψεις και τις προκαταλήψεις που φέρνουν οι μαθητές διαφορετικών ηλικιών και υποβάθρων στη μάθηση θεμάτων και μαθημάτων που διδάσκονται συχνότερα.»

Την τελευταία εικοσαετία καταγράφονται νέα θεωρητικά μοντέλα για την γνώση του εκπαιδευτικού, τα οποία βασίζονται στο μοντέλο του Shulman και εστιάζουν στην ΠΓΠ. Οι έρευνες έχουν επικεντρωθεί στην ΠΓΠ ενός μαθήματος καθώς εμφανίζεται ως μια αθροιστική γνώση με σταθερή δομή, η οποία εκδηλώνεται με τη διδακτική πρακτική και φαίνεται σε όλες τις φάσεις μιας διδασκαλίας (σχεδιασμός, υλοποίηση και αναστοχασμός). Έτσι, έχουν γίνει πολλές νέες προσπάθειες για καλύτερη ερμηνεία και κατανόηση των πιθανών τύπων γνώσης της ΠΓΠ και την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ τους.

Μια ενδεικτική θεωρητική προσέγγιση είναι αυτή των Fennema και Franke (1992), στην οποία γίνεται μια προσπάθεια εννοιολογικού καθορισμού την Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου. Η ΠΓΠ ενός γνωστικού αντικειμένου αποτελείται από τρεις συνιστώσες: την Γνώση Περιεχομένου (Content Knowledge), την Παιδαγωγική Γνώση (Pedagogical Knowledge) και την γνώση του τι κατανοούν οι μαθητές και πως μαθαίνουν (Knowledge of Learners Cognitions) . Οι σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ αυτών των τύπων γνώσεων με την ΠΓΠ είναι αμφίδρομες και δυναμικές. Σε αυτές τις συνιστώσες, προστίθεται ένας νέος εξωτερικός παράγοντας που σχετίζεται με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, ο οποίος έχει επιρροές συνολικά στη γνώση των εκπαιδευτικών.

1.1.2 Γνώση εκπαιδευτικών στα Μαθηματικά

Έχουν διατυπωθεί σημαντικά ερωτήματα κατά καιρούς από ερευνητές σχετικά με τη γνώση του εκπαιδευτικού και την διδασκαλία των μαθηματικών. Ενδεικτικά ένα σημαντικό ερώτημα είναι «Ποια μαθηματική γνώση είναι απαραίτητη στη διδασκαλία» (Wood, 2005). Ο προσδιορισμός της γνώσης, που απαιτείται από τους δάσκαλους για την διδασκαλία, αποτελεί ένα δημοφιλές ερευνητικό αντικείμενο στην βιβλιογραφία και παρουσιάζει πολλές μεθοδολογικές δυσκολίες στη διερεύνηση του. Για την υλοποίηση της διδασκαλίας των μαθηματικών πρέπει μαθητές και εκπαιδευτικοί να συνυπάρξουν σε ένα οργανωμένο μαθησιακό περιβάλλον όπου ευδοκιμεί η ενεργός δράση και από τις δύο πλευρές (McCray, 2008). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτήν τη σχέση καθορίζει τη δημιουργία ή μη ευνοϊκού μαθησιακού περιβάλλοντος για την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων, η οργάνωση και η υλοποίηση τους, η αξιολόγηση των έργων των μαθητών και η αυτοαξιολόγηση είναι καθοριστικής σημασίας για τον ρόλο του εκπαιδευτικού (Ponte, & Chapman, 2006).

1.1.2.1 Το μοντέλο της Ball για την γνώση εκπαιδευτικών στα Μαθηματικά

Οι πρωτοποριακές ιδέες του Shulman για την γνώση του εκπαιδευτικού βρήκαν μεγάλη απήχηση στον επιστημονικό κόσμο και αξιοποιήθηκαν σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους (π.χ. φυσικές επιστήμες, μαθηματικά). Η Ball με τους συνεργάτες της, σε μια πληθώρα άρθρων τους (π.χ. Ball & Bass, 2000˙ Ball, Lubienski & Mewborn, 2001˙ Hill, Rowan, & Ball, 2005˙ Ball, Thames & Phelps, 2008) προσπάθησαν να προσαρμόσουν στα μαθηματικά τις κατηγορίες του Shulman, να διερευνήσουν την ύπαρξη νέων κατηγοριών εντός αυτών καθώς και την φύση της μαθηματικής γνώσης που είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία. Έτσι, την μαθηματική γνώση που απαιτείται για την διεξαγωγή της διδασκαλίας των μαθηματικών την όρισαν ως Μαθηματική Γνώση για την Διδασκαλία (Mathematical Knowledge for Teaching-MKT) και την διερεύνησαν περαιτέρω.

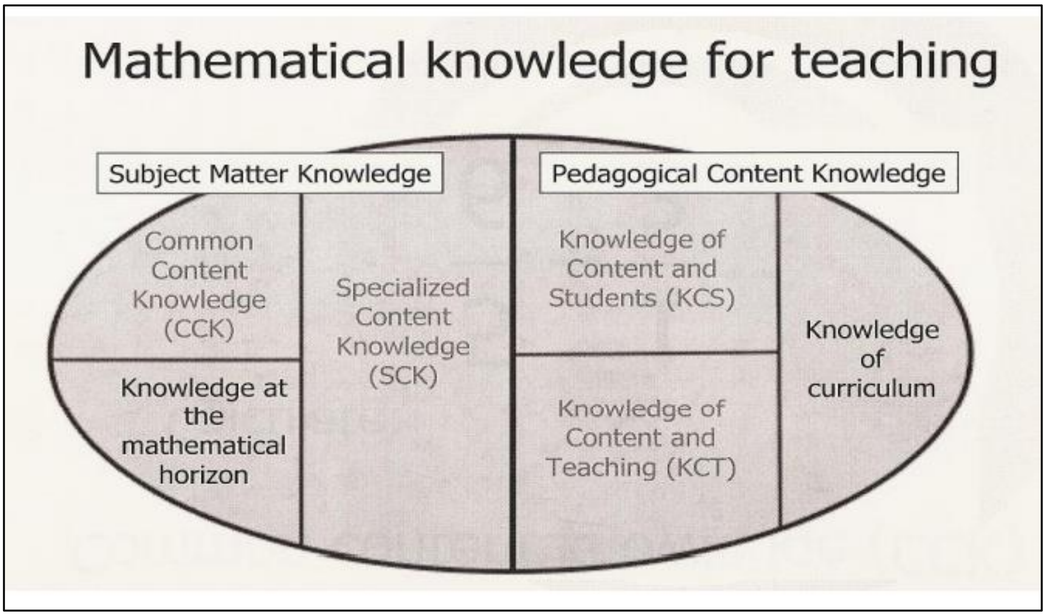
Η MKT, της Ball, αποτελείται από δύο μεγάλες περιοχές, την *γνώση του γνωστικού αντικειμένου* και την *παιδαγωγική γνώση του γνωστικού αντικειμένου* οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο πρώτες κατηγορίες του Shulman. Όπως φαίνεται και στο σχήμα (εικόνα 1), καθεμία από τις δύο παραπάνω περιοχές διαιρείται σε υποκατηγορίες.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο που προτείνουν, η γνώση περιεχομένου αποτελείται από την *κοινή γνώση περιεχομένου* (common content knowledge-CCK), την εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου (specialized content knowledge- SCK) και την *γνώση του μαθηματικού ορίζοντα (knowledge at the mathematical horizon).*

Η *κοινή γνώση περιεχομένου* αναφέρεται στην γνώση των μαθηματικών ως επιστήμη, η οποία είναι κοινή για όλα τα επαγγέλματα και η οποία δεν εμφανίζεται αποκλειστικά στην διδασκαλία. Αυτού του τύπου γνώσης, για τους δασκάλους σημαίνει ότι πρέπει να γνωρίζουν το υλικό που διδάσκουν (π.χ. να εκτελούν αλγόριθμους), να χρησιμοποιούν σωστή ορολογία και συμβολισμό και να αναγνωρίζουν λανθασμένες απαντήσεις μαθητών. Η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου ορίζεται ως η γνώση και η δεξιότητα που απαιτείται αποκλειστικά για τη διδασκαλία. Μερικά παραδείγματα αποτελούν η επιλογή κατάλληλων αναπαραστάσεων, παραδειγμάτων, η παροχή ή η αξιολόγηση ερμηνειών για κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό στόχο. Η γνώση του μαθηματικού ορίζοντα είναι η ευρύτερη γνώση των ιδεών που συνδέονται με το διδασκόμενο αντικείμενο και η επίγνωση του μελλοντικού περιεχομένου στις επόμενες τάξεις. Αποτελεί ένα είδος αντίληψης του εκπαιδευτικού για το που βρίσκεται τώρα και προς ποιο σημείο κατευθύνονται οι μαθητές και για τις συνέπειες που έχει ο τρόπος αναπαράστασης των μαθηματικών ιδεών στις μελλοντικές τάξεις.

Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, σύμφωνα με την Ball και τους συνεργάτες της (2008), συγκροτείται από *την γνώση του περιεχομένου και των μαθητών* (knowledge of content and student- KCS), την γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας (knowledge of content and teaching- KCT) και την γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος (knowledge of content and curriculum).

Η γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (KCT) αφορά την γνώση που απαιτείται ώστε ο εκπαιδευτικός να είναι εξοικειωμένος με τη σκέψη των μαθητών, τις προϋπάρχουσες γνώσεις, τις ιδέες, τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες που αναμένεται να συναντήσουν οι μαθητές σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα. Ο όρος γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας (KCT) χρησιμοποιείται για να συλληφθεί η γνώση που απαιτείται προκειμένου να ληφθούν οι κατάλληλες εκπαιδευτικές αποφάσεις για την επιλογή και τη χρήση των κατάλληλων αναπαραστατικών μέσω και παραδειγμάτων στην διδασκαλία και τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του καθενός. Τέλος, η *γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος* είναι η γνώση του αναλυτικού προγράμματος, των συγκεκριμένων στόχων και δραστηριοτήτων που υποδεικνύονται. Στην ουσία, αυτού τύπου η γνώση είναι η γνώση του προγράμματος σπουδών στην κατηγοριοποίηση του Shulman.



Εικόνα 1. Το μοντέλο της Ball -σύνδεση με το μοντέλο του Shulman

1.2 Ρητοί Αριθμοί Και Κλάσματα

Τα κλάσματα και οι ρητοί αριθμοί γενικότερα είναι μία από τις μαθηματικές έννοιες που συγκεντρώνουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον εδώ και πολλά χρόνια στο διεθνή και ελληνικό επιστημονικό χώρο. Αποτελούν δύο σύνθετες και σημαντικές έννοιες που συναντούν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας αλλά και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Behr et al., 1983). Καθώς η αξιοποίηση των κλασμάτων είναι ευρεία στην καθημερινή ζωή, καθιστά απαραίτητη τη διδασκαλία και τη χρήση από τα πρώτα κιόλας χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Εντούτοις, η βιβλιογραφία και οι πολυάριθμες έρευνες έχουν εντοπίσει ότι εκπαιδευτικοί και μαθητές θεωρούν ότι αποτελούν ένα από τα πιο δύσκολα διδακτικά αντικείμενα των μαθητών και αντιμετωπίζουν πολλαπλές δυσκολίες (π.χ. Kloosterman, 2010˙ Tirosh, 2000˙ Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

1.2.1 Ορισμοί

Διάφοροι ερευνητές χρησιμοποιούν με διαφορετικό τρόπο τους όρους «κλάσμα» και «ρητός αριθμός». Σύμφωνα με τον Smith (1995), οι έννοιες «κλάσμα» και «ρητός αριθμός» έχουν τόσο στενή σχέση που πολλές φορές εναλλάσσονται με αποτέλεσμα να δημιουργείται σύγχυση. Οι Ni και Zhou (2005) ισχυρίζονται ότι ενώ οι όροι «κλάσμα» και «ρητός αριθμός» είναι στενά συνδεδεμένοι δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ταυτόσημοι. Παρεμφερώς, η Lamon (2007) σημειώνει ότι οι δύο όροι δεν είναι συνώνυμοι και τονίζει, μάλιστα, ότι τα κλάσματα αποτελούν υποσύνολο των ρητών αριθμών.

Κατά τους μαθηματικούς ορισμούς των ρητών αριθμών και των κλασμάτων, ο ρητός αριθμός ορίζεται ως ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ τους διατεταγμένων ζευγών (α,β) ή α/β. Ένα σύνολο δηλαδή κλασμάτων, όπου α και β είναι ακέραιοι αριθμοί και β διάφορο του μηδενός και δύο ζεύγη κλασμάτων είναι ίσα α/β=γ/δ, αν και μόνο αν αδ=βγ (Λεμονίδης, 2013). Κάθε ρητός αριθμός δηλαδή είναι ένα σύνολο κλασμάτων με το ίδιο μέτρο, ενώ κάθε κλάσμα είναι μια από τις διαφορετικές αλλά και ισοδύναμες μεταξύ τους παραστάσεις ενός ρητού αριθμού (Λεμονίδης, 2013).

Η Lamon (2007), ασχολείται με τα δομικά χαρακτηριστικά των δύο εννοιών και συμπεραίνει ότι τα κλάσματα διαφοροποιούνται από τους ρητούς αριθμούς επισημαίνοντας τις παρακάτω διαφορές:

I. Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν σε κλασματική μορφή αλλά και σε άλλες μορφές, όπως την δεκαδική μορφή.

II. Οι αριθμοί που είναι γραμμένοι σε κλασματική μορφή δεν είναι όλοι ρητοί.

III. Κάθε κλάσμα δεν αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό ρητό αριθμό.

Από την οπτική των σχολικών μαθηματικών, ο ρητός είναι ένας αριθμός ο οποίος είναι ή μπορεί να μετατραπεί στη συμβολική μορφή α/β, όπου α και β είναι ακέραιοι αριθμοί και β διαφορετικό του μηδενός. Οι αριθμοί που βρίσκονται σε αυτή τη συμβολική μορφή αναφέρονται ως κλάσματα, ενώ οι αριθμοί που μπορούν να μετατραπούν σε αυτή τη μορφή είναι οι ακέραιοι, οι δεκαδικοί με συγκεκριμένο αριθμό ψηφιών (πεπερασμένο) και οι περιοδικοί αριθμοί.

1.2.2 Ερμηνείες- σχήματα κλασμάτων

Στους ρητούς αριθμού μπορούν να αποδοθούν διαφορετικές ερμηνείες και νοήματα. Για την κατάταξη αυτών των διαφορετικών ερμηνειών των ρητών αριθμών οι επιστήμονες έχουν δημιουργήσει ποικίλες κατηγορίες. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με τους Behr, Wachsmuth, Post & Lesh (1984), ο ρητός αριθμός και συνακόλουθα το κλάσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως τρία πράγματα: ως μέρος όλου, ως πηλίκο και ως τελεστής. Ο Kieren (1976) αναφέρει τουλάχιστον επτά κατηγορίες του ρητού: κλάσμα, δεκαδικός, ταξινομημένα ζεύγη, μέτρο, τελεστής, πηλίκο και αναλογία. Ο ίδιος ερευνητής αργότερα (1993) καταλήγει στις ακόλουθες τέσσερις κατηγορίες: πηλίκο, μέτρηση, τελεστής και λόγος. Μάλιστα θεωρεί ότι η διάσταση μέρος-όλο στην ουσία διαχέεται στις περισσότερες από τις άλλες κατηγορίες και επομένως δεν την χρησιμοποιεί ξεχωριστά.

Μια κυρίαρχη και πιο αναλυτική κατηγοριοποίηση είναι αυτή της Marshall (1993) η οποία διακρίνει πέντε διαφορετικές όψεις-σχήματα των ρητών αριθμών και κατά συνέπεια του κλάσματος:

1. Μέρος-όλου: Αυτή η ερμηνεία είναι η πρώτη με την οποία έρχονται σε επαφή μαθητές κατά την διδασκαλία των κλασμάτων καθώς θεωρείται η πιο εύληπτη (Kieren 1976 ˙ Behr, Lesh, Post and Silver 1983 ˙ Sinicrope & Mick 1992). Σε αυτην την ερμηνεία, το όλο χωρίζεται σε β κομμάτια και κάθε κομμάτι συμβολίζεται ως 1/β ή στην περίπτωση α κομματιών, τότε σε α/β (Marshall, 1993). Έτσι, η διδασκαλία συνήθως ξεκινά με συνεχείς επιφάνειες (όπως κύκλους ή ορθογώνια), τις οποίες οι μαθητές πρέπει να χωρίσουν σε ίσα τμήματα και να επιλέξουν τόσα τμήματα, όσος είναι ο αριθμητής του κλάσματος. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται και διακριτές αναπαραστάσεις με τον ίδιο σκοπό (σύνολα διακριτών αντικειμένων) (Γαγάτσης κ.α., 2006)
2. Διαίρεση ή πηλίκο: Σύμφωνα με αυτήν την όψη, κάθε κλάσμα της μορφής α/β δείχνει το πηλίκο που προκύπτει, όταν διαιρέσουμε το α δια του β, όπου α και β ακέραιοι αριθμοί. (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Εδώ ο αριθμητής ταυτίζεται με το διαιρετέο και αναφέρεται στην ποσότητα που θα μοιραστεί, ενώ ο παρονομαστής ταυτίζεται με το διαιρέτη και αναφέρεται στο πλήθος των ίσων μερών στα οποία θα μοιραστεί η ποσότητα. Αν λοιπόν έχουμε την αναπαράσταση κ/λ, το κ αναπαριστά την ποσότητα που θα κατανεμηθεί ισομερώς, ενώ το λ αναπαριστά τον αριθμό των μερών της διαμέρισης, με δεδομένο ότι τα κ και λ είναι δυνατό να

παριστάνουν διαφορετικά είδη αντικειμένων και επιπλέον δεν υπάρχει ο περιορισμός κ<λ (Κολέζα, 2000).

3. Λόγος: Το κλάσμα ως λόγος εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, όπου το μέγεθος της μιας ποσότητας συγκρίνεται με το μέγεθος μια άλλης ποσότητας (Hart, 1989). Από μαθηματικής άποψης αναφερόμαστε σε δύο χώρους μέτρησης που μπορούν να συνδεθούν είτε με μία «μεταξύ» των χώρων στρατηγική οπότε και μιλάμε για λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής είτε με μια «εντός» του ίδιου χώρου στρατηγική και μιλάμε για «εσωτερικό» λόγο (Κολεζά, 2000). Για παράδειγμα η σύγκριση των τμημάτων που προκύπτουν από διαμοιρασμό 3 πιτσών σε 7 κορίτσια και μίας πίτσας σε 3 αγόρια μπορεί να διενεργηθεί είτε με σύγκριση των λόγων 3/7 και 1/3 (μεταξύ στρατηγική) είτε των λόγων 3/1 (πίτσες) και 7/3 (παιδιά) οπότε και μιλούμε για σύγκριση εσωτερικών λόγων (καθαρών αριθμών) .

4. Μέτρο ή μέτρηση: «Ο ρητός αριθμός α/β ως μέτρηση προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος 1/β για τον καθορισμό μιας απόστασης» (Κολέζα, 2000). Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, το κλάσμα α/β μπορεί να αναπαρασταθεί συμβολικά ως ένα σημείο πάνω σε μια αριθμογραμμή στην οποία θέτουμε αυθαίρετα ένα σημείο ως 0 και η οποία είναι χωρισμένη σε μοναδιαία τμήματα, καθένα από το οποία είναι χωρισμένο σε β κομμάτια (Κολέζα, 2000).

5. Τελεστής-πολλαπλασιαστής: Σε αυτή την περίπτωση, το κλάσμα νοείται ως μία συνάρτηση που χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί ή να κατασκευαστεί μια άλλη ποσότητα. Η Κολέζα (2000) αναφέρει ότι εδώ το κλάσμα «*λειτουργεί ως μια "μηχανή" που μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη*». Οι Charalambous & Pitta- Pantazi (2007) εξηγούν ότι μπορούμε να το σκεφτόμαστε ως μια διαδικασία δύο βημάτων: αρχικά γίνεται ένας πολλαπλασιασμός μιας ποσότητας με τον αριθμητή και στην συνέχεια το αποτέλεσμα που προκύπτει διαιρείται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Για παράδειγμα, όταν ζητούνται τα 2/3 του 56, το κλάσμα λειτουργεί ως τελεστής.

1.2.3 Οι δυσκολίες και τα λάθη μαθητών και ενηλίκων στους ρητούς αριθμούς και τα κλάσματα

Η έννοια των ρητών αριθμών είναι μία από τις πιο σημαντικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά στο Δημοτικό σχολείο. Αυτή η έννοια σχετίζεται τόσο με την ανάπτυξη δεξιοτήτων χειρισμού καθημερινών προβλημάτων όσο και με τα θεμέλια της άλγεβρας (Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου, 2004). Ωστόσο, έρευνες στην γνωστική ψυχολογία και τη διδακτική των μαθηματικών έδειξαν επανειλημμένα ότι όσο οι μαθητές τόσο και οι ενήλικες δυσκολεύονται να κατανοήσουν διάφορες πτυχές των ρητών αριθμών (Aksu, 1997˙ Kerslake, 1986˙ Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015˙ Lemonidis, Kaiafa, 2014˙ Mack, 1995˙ Stafylidou, & Vosniadou, 2004˙ Vamvakoussi, & Vosniadou, 2010).

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα ερευνών που αναδεικνύουν ότι Αμερικάνοι μαθητές και ενήλικοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. Σύμφωνα με το National Assessment of Educational Progress (NAEP,2004) το 50% των μαθητών της Γ' γυμνασίου (8th grade) δεν μπορούν να διατάξουν σωστά, σύμφωνα με το μέγεθος τους, τα κλάσματα 2/7, 1/12 και 5/9 (Martin et al., 2007). Παρομοίως, στο NAEP (2004) , λιγότεροι από 30% των 17-χρονων μετέφραζαν σωστά το 0,029 στο αντίστοιχο κλάσμα (Kloosterman, 2010).

Σε εθνικό επίπεδο, οι Lemonidis & Kaiafa (2014) πραγματοποίησαν μια έρευνα σε 122 μαθητές της Ε΄ και 144 της ΣΤ΄ τάξης που προέρχονταν από Δημοτικά σχολεία του νομών Φλώρινας και Σερρών. Κάποια αποτελέσματα από την έρευνα αυτή ήταν τα εξής: Τα τρία τέταρτα περίπου των μαθητών της Ε' τάξης (73,5%) μπόρεσαν να εκτελέσουν σωστά την αφαίρεση 3/4 – 1/2. Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν την πράξη με διάφορους τρόπους, το 32% μπόρεσαν να υπολογίσουν την πράξη μόνο με τον γραπτό αλγόριθμο, το 37,7% μπόρεσαν να υπολογίσουν με δύο τρόπους και μόνο το 3,3% των μαθητών υπολόγισε με τρεις τρόπους.

1.2.3.1 Αιτία και παράγοντες των δυσκολιών

Οι ρητοί αριθμοί είναι μια ανώτερη και πιο σύνθετη μορφή αριθμών από τους φυσικούς και τους ακέραιους αριθμούς πάνω στους οποίους βασίζονται και ορίζονται. Ενώ οι ακέραιοι αριθμοί εκφράζουν τον πληθάριθμο μιας ποσότητας με έναν αριθμό που συγκροτείται από μονάδες, οι ρητοί αριθμοί εκφράζονται με μια σχέση δύο ακέραιων αριθμών σε μορφή πηλίκου. Έτσι, αυτή η διαφορετική φύση των ρητών αριθμών σε σχέση με τους φυσικούς είναι αυτή που διαφαίνεται στις βασικές δυσκολίες. (Λεμονίδης, 2016)

Παρά το γεγονός ότι τα κλάσματα εκφράζονται ως μια σχέση δύο ποσοτήτων, στην ουσία τους παριστάνουν και πρέπει να αντιλαμβάνονται ως μία ξέχωρη οντότητα, έναν αριθμό. Ωστόσο, παρατηρείται δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού, μιας αυτόνομης οντότητας, γεγονός που φαίνεται να οφείλεται στην κυρίαρχη αναπαράσταση του κλάσματος μόνο σε μία μορφή του, αυτής του μέρους ενός όλου (Lamon, 2001). Συνεπώς, δημιουργείται μία σύγχυση εφόσον το κλάσμα θεωρείται κάτι ξεχωριστό από αριθμό μιας και οι αριθμοί που αναγράφονται στο σύμβολό του, οι παρονομαστές και οι αριθμητές, αναπαριστούν ξεχωριστές οντότητες (Pitkethly & Hunting, 1996)

Κυρίαρχη ερμηνεία, ανάμεσα σε πολλές που δίνονται για τα λάθη και τις δυσκολίες μαθητών και ενηλίκων είναι αυτή της «προκατάληψης των φυσικών αριθμών» που υπογραμμίζεται από πολλούς ερευνητές (Ni and Zhou, 2005˙ Vamvakoussi, Christou, Mertens & Van Doore, 2011, Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012˙ Vamvakoussi, & Vosniadou, 2004˙ Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015˙ Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015). Σύμφωνα με τις Vamvakoussi & Vosniadou (2004) η προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς – η οποία προέρχεται τόσο από την εμπειρία όσο και από τη διδασκαλία – στέκεται εμπόδιο για την κατανόηση των νέων εννοιών και τους οδηγεί σε συστηματικά λάθη και παρανοήσεις. Παρατηρείται δηλαδή, το φαινόμενο της ακατάλληλης (πολλές φορές) μεταφοράς των χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς όπως οι ρητοί αριθμοί και τα κλάσματα (Vamvakoussi et al., 2012). Παρ' όλο λοιπόν που η καλή αίσθηση των φυσικών αριθμών είναι σημαντική για την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών, αυτή πολλές φορές δεν είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση των ρητών αριθμών και οι μαθητές συνεχίζουν να εφαρμόζουν έμμεσα ή άμεσα τις ιδιότητες με αποτέλεσμα να εμφανίζονται συστηματικά λάθη (Λεμονίδης, 2016).

Παίρνοντας υπόψιν προηγούμενες έρευνες και την υπάρχουσα βιβλιογραφία, ο Λεμονίδης (2016) προτείνει την κατηγοριοποίηση των παραγόντων για τις δυσκολίες και τα λάθη στις τρεις εξής ομάδες:

1.Παράγοντες σχετικοί με τη διαφορετική μαθηματική φύση των φυσικών και ρητών αριθμών:

Αυτοί έχουν να κάνουν με τον διαφορετικό προορισμό του μεγέθους στους ρητούς αριθμού, ο οποίος βασίζεται στη σχέση δύο ποσοτήτων και όχι σε μία ποσότητα όπως στους φυσικούς αριθμούς (Lamon, 1999˙ Moss, 2005˙ Stafylidou & Vosniadou, 2004) (π.χ. ένα λάθος που προκύπτει είναι ο χειρισμός των όρων του κλάσματος ως ανεξάρτητους αριθμούς). Επίσης, ένας άλλος τέτοιος παράγοντας είναι το πυκνό των ρητών αριθμών καθώς αυτοί εμπεριέχουν την έννοια της συνέχειας και της απειρίας καθώς μεταξύ δύο αριθμών υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί (Brousseau, Brousseau, and Warfield, 2007˙ Vamakoussi, & Vosniadou, 2010). (π.χ. ένα αντίστοιχο λάθος είναι η θεώρηση ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος αμέσως επόμενος ρητός αριθμός). Παράλληλα, ο πολλαπλός συμβολισμός των ρητών αριθμών και η παρουσίαση του με διαφορετικά σύμβολα αριθμών (κλάσμα, δεκαδικό, ποσοστό) είναι ένας ακόμη παράγοντας δημιουργίας δυσκολιών (π.χ. ο χειρισμός των κλασμάτων και των δεκαδικών ως διαφορετικό είδος αριθμού). Τέλος, η προϋπόθεση ότι οι ρητοί αριθμοί που συγκρίνεται αναφέρονται στο ίδιο όλο αποτελεί βασική συνθήκη που ξεχνιέται και δημιουργούνται λάθη (Λεμονίδης, 2016).

2. Παράγοντες σχετικοί με το αφηρημένο των διαδικασιών των πράξεων των ρητών αριθμών.

Ένας τέτοιο παράγοντας είναι ότι οι κανόνες των πράξεων των ρητών αριθμών είναι πυκνοί με αφηρημένες έννοιες μη διαφανείς που είναι δύσκολο να κατανοηθούν (π.χ. Γιατί αντιστρέφουμε και πολλαπλασιάζουμε τον δεύτερο όρο στην διαίρεση). Έτσι πολλές φορές το αποτέλεσμα μιας πράξης δεν είναι κατανοητό. Επίσης, αυτοί οι κανόνες στους ρητούς αριθμούς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, αφού για παράδειγμα σε κάποιες πράξεις απαιτείται τα κλάσματα να γίνουν ομώνυμα και σε άλλες όχι (π.χ. ένα λάθος που προκύπτει είναι ότι μπερδεύουν τις πράξεις και κάνουν λάθος εφαρμογή κανόνων)

3.Πολιτισμικοί παράγοντες. Παράγοντες σχετικοί με την εκπαίδευση.

Οι παράγοντες αυτοί έχουν να κάνουν με την εκπαίδευση, την διδασκαλία και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών. Όπως έχει φανεί από έρευνες σε εθνικό και διεθνή επίπεδο όσο οι υποψήφιοι τόσο και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την Γνώση του Περιεχομένου (ΓΠ) αλλά και την Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου

(ΠΓΠ). Κάποιες δυσκολίες που έχουν εντοπιστεί είναι το λάθος στην κατεύθυνση της επίδρασης της πράξης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ρητών αριθμών με αριθμούς <1. Όπως επίσης, ενήλικες και εκπαιδευτικοί αδυνατούν πολλές φορές να ερμηνεύσουν τις παραπάνω πράξεις . Μία ακόμη σημαντική ένδειξη δυσκολιών που προκύπτει από έρευνες είναι ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν και δεν χρησιμοποιούν στρατηγικές νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων ούτε είναι ευέλικτοι στη χρήση κανόνων των πράξεων και της σύγκρισης κλασμάτων (Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2014).

1.3 Αναπαραστάσεις Στα Μαθηματικά

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα κλάσματα είναι ένα από τα πιο δύσκολα αντικείμενα των μαθηματικών και στη διδασκαλία και στη μάθηση (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) και η δυσκολία αυτή οφείλεται στην πολυπλοκότητα των κλασμάτων όσον αφορά τις παραπάνω όψεις αλλά και τις αναπαραστάσεις με τις οποίες μπορούν να διδαχθούν. Ωστόσο, σύνθετα διδακτικά αντικείμενα πρέπει να υποστηρίζονται από ανάλογα μοντέλα οπτικοποίησης. Το ζήτημα της οπτικοποίησης και της αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως θεμελιώδη, με πολλούς ερευνητές να συμφωνούν για τις θετικές επιπτώσεις τους στην ανάπτυξη της κατανόησης και της επίλυσης προβλήματος (π.χ. Vergnuad, 1987˙ Lesh και Landau, 1983˙ Kaput, 2001)

Για την οικοδόμηση των διαφορετικών σχημάτων και την επίτευξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιούνται ποικίλες εξωτερικές αναπαραστάσεις. Κατά τους Lesh, Post & Behr (1987) οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι εξωτερικές δηλώσεις ή καλύτερα «οι παρατηρίσημες των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών», δηλαδή οι εκδηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει τις έννοιες οι άνθρωποι. Οι αναπαραστάσεις έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές να σκιαγραφήσουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος (Rau, Aleven & Rummel, 2013 ˙ Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) και έτσι να δημιουργήσουν ακριβέστερα νοητικά μοντέλα (Rau et al., 2013).

Έτσι, παρατηρείται ότι ερευνητές και σύγχρονα προγράμματα σπουδών με πρωτοπόρο το αμερικάνικο πρόγραμμα Common Core Standards (2010), δίνουν έμφαση στη χρήση αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Υπογραμμίζουν, μάλιστα, τη σημασία χρήσης διαφορετικών και ποικίλων αναπαραστάσεων κατά την διάρκεια της διδασκαλίας για την βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών και την εννοιολογικής τους ανάπτυξη (De Corte, Verschaffel & De Win, 2005). Ο Van de Walle (2007) καταλήγει ότι τα μοντέλα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεκαθαρίσουν τις έννοιες που μπερδεύουν, όταν χρησιμοποιούν έναν καθαρά συμβολικό τύπο. Η οπτικοποίηση, λοιπόν, των διδασκομένων εννοιών είναι σημαντική ώστε η έννοια να «μεταφραστεί» και να αποκτήσει νόημα στο ανθρώπινο μυαλό.

Σύμφωνα με τον Arcavi (2003) οπτικοποίηση (visualization) είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας, της χρήσης και της σκέψης πάνω στις φωτογραφίες, τις εικόνες και τα διαγράμματα, στο μυαλό μας, σε χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και την επικοινωνία πληροφοριών, τη σκέψη και την ανάπτυξη προηγουμένως άγνωστων ιδεών και την προώθηση της κατανόησης.

1.3.1 Αναπαραστάσεις κλασμάτων

Αν σκεφτεί κανείς τη μεγάλη δυσκολία των μαθητών στα κλάσματα σε σχέση με τους άλλους αριθμούς η χρήση πληθώρας αναπαραστάσεων φαίνεται να είναι απαραίτητη και ουσιαστική για την κατανόηση αυτών των πολύπλοκων εννοιών. Πράγματι, κατά τον Arcavi (2003) μία ερμηνεία των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα κλάσματα είναι η έλλειψη δεξιοτήτων οπτικοποίησης και η αδυναμία χρήσης αυτών των δεξιοτήτων, για να δημιουργήσουν και να διαχειριστούν τις διάφορες αναπαραστάσεις των κλασμάτων.

Όσον αφορά επίσης τα κλάσματα, οι Lesh και Landau (1983), τόνισαν το σημαντικό ρόλο των αναπαραστάσεων στη διευκόλυνση της κατανόησης και χρήσης των νοητικών σχημάτων των κλασμάτων καθώς η σκέψη και η κατανόηση του παιδιού περνά από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Η διευκόλυνση έγκειται στο ότι οι τρόποι αναπαράστασης της έννοιας δίνουν τη δυνατότητα ¨μεταφράσεων¨ οι οποίες κάνουν τις ιδέες στο μυαλό των μαθητών να έχουν νόημα.

Παρομοίως, οι Petit, Laird & Marsden (2010) αναφέρουν ότι η μάθηση των κλασμάτων γίνεται μια ευκολότερη υπόθεση, όταν οι μαθητές αλληλεπιδρούν με πολλαπλά μοντέλα, τα οποία διαφέρουν στα αντιληπτικά (perceptual) τους χαρακτηριστικά. Αυτό τους αναγκάζει να ξανασκέφτονται συνεχώς την έννοια του κλάσματος και τελικά να τη γενικεύουν. Μετά από εκτεταμένη χρήση και εμπειρία με διαφορετικές αναπαραστάσεις, οι μαθητές θα μπορέσουν τελικά να κατασκευάσουν τα δικά τους εσωτερικά νοερά μοντέλα.

Όντως, σε έρευνες στις οποίες τα κλάσματα διδάχθηκαν με την χρήση οπτικών αναπαραστάσεων, υπήρξαν θετικές επιδράσεις στις υπολογιστικές ικανότητες των μαθητών. (Cramer, Post, & delMas, 2002 · Nishida, 2008· Lemonidis, Iliadou, 2016). Καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να αναπτύσσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις και μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις ως εργαλεία επίλυσης προβλήματος, αποκτούν μια βαθύτερη κατανόηση των κλασμάτων (Siegler et al., 2010).

1.3.1.1 Τύποι αναπαραστάσεων κλασμάτων

Σύμφωνα με τους Lesh et al. (1987), οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών μπορούν να καταταχθούν σε πέντε διακριτούς τύπους συστημάτων οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν στην διδασκαλία και στη μάθηση των κλασμάτων αλλά και γενικά στη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος. Οι πέντε τύποι είναι οι εξής:

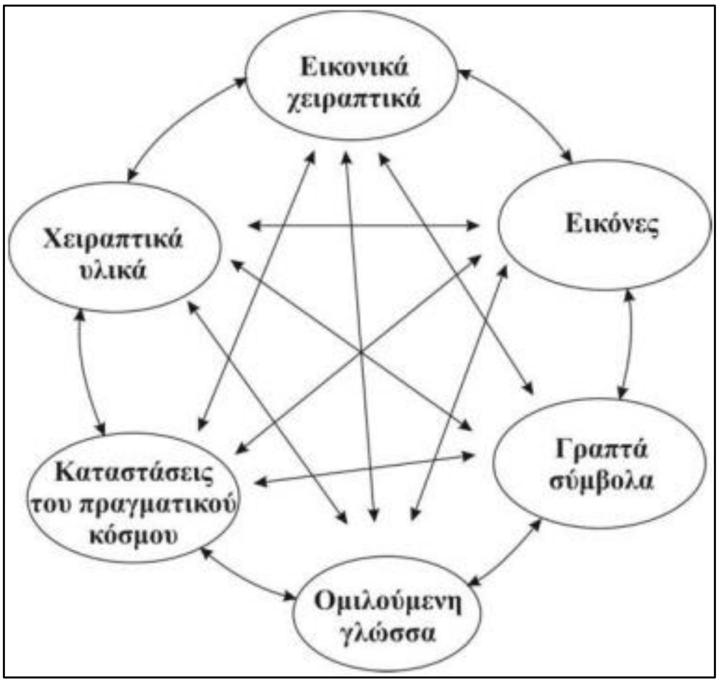
1. Οι καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Βασίζονται στην εμπειρία και την καθημερινότητα, καθώς η γνώση παρουσιάζεται μέσα από καταστάσεις και αντικείμενα του πραγματικού κόσμου και της καθημερινής ζωής του παιδιού.
2. Τα χειραπτικά υλικά/χειριστικά αντικείμενα: Όπως είναι οι κλασματικοί κύκλοι, οι κλασματικές λωρίδες, οι αριθμογραμμές, οι κύβοι Dienes κ.ά. Τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος έχουν μικρή σημασία από μόνα τους, αλλά διαθέτουν ενσωματωμένες σχέσεις και λειτουργίες που ταιριάζουν με τις ιδιότητες, τις πράξεις και τις πραγματικές καταστάσεις, στις οποίες εμφανίζονται οι ρητοί αριθμοί.
3. Οι εικόνες ή διαγράμματα. Όπως και τα χειραπτικά υλικά, είναι δυνατόν να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.
4. Η ομιλούμενη γλώσσα. Χρησιμοποιείται στη διατύπωση λεκτικών προβλημάτων, αλλά και στα άλλα είδη αναπαραστάσεων, π.χ. μαζί με εικόνες ή γραπτά σύμβολα, όπου χρησιμοποιείται με προφορική ή γραπτή μορφή, για να δίνονται

πληροφορίες και εξηγήσεις. Χρησιμοποιείται επίσης στην αφήγηση ιστοριών ως εισαγωγικών δραστηριοτήτων για την καινούργια έννοια.

5. Τα γραπτά σύμβολα. Όπως και η γλώσσα, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις, καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις και φράσεις στην ομιλούμενη γλώσσα (Lesh et al., 1987).

Σε αυτούς τους τύπους μπορεί να προστεθεί και ένα έκτο σύστημα αναπαράστασης, τα εικονικά χειραπτικά υλικά (virtual manipulatives) (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002). Τα εικονικά χειραπτικά υλικά ορίζονται ως «ερμηνείες των κοινών μαθηματικών χειραπτικών υλικών και εργαλείων που βασίζονται στον υπολογιστή» (Dorward, 2002, p. 329) και «μια διαδραστική, web-based οπτική αναπαράσταση ενός δυναμικού αντικειμένου που παρουσιάζει ευκαιρίες για την κατασκευή μαθηματικής γνώσης» (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002, p.373). Είναι δυναμικά και μπορούν να συνδιάσουν ταυτόχρονα εικόνες, σύμβολα και γλώσσα.

Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζονται σχηματικά οι έξι τύποι συστημάτων των αναπαταστάσεων και οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις (Λεμονίδης, 2016).



Εικόνα 2 Τύποι αναπαραστάσεων των κλασμάτων (Λεμονίδης, 2016)

1.3.1.2 Μοντέλα αναπαραστάσεων κλασμάτων

Για την αναπαράσταση κλασμάτων υπάρχουν κάποια πιο συνιθισμένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται κατά την διδασκαλιά αυτών ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να οπτικοποιήσουν την έννοια του κλάσματος, Κατά τον Van de Walle (2007) υπάρχουν τρεις κατηγορίες μοντέλων:

1. Μοντέλα εμβαδού ή περιοχής (επιφάνειες). Η χρήση τους παραπέμπει στη σχέση μέρους όλου (Petit et al., 2010). Τα μεγέθη στις επιφάνειες είναι συνεχή. Τα ίσα μέρη είναι ίσες επιφάνειες και το κλάσμα δείχνει το χώρο που καλύπτουν τα μέρη σε σχέση με τη μονάδα του όλου στο εμβαδόν. Ο κύκλος και τα κυκλικά μέρη είναι τα πιο κοινά και χρησιμοποιούμενα μοντέλα εμβαδού. Στα προγράμματα και τη διδασκαλία εμφανίζονται επίσης ως μοντέλα εμβαδού διάφορα γεωμετρικά σχήματα, τετραγωνισμένο χαρτί, η δίπλωση χαρτιού, ο γεωπίνακας, τα μπλοκ μοτίβου και οι κλασματικοί κύκλοι.
2. Μοντέλα συνόλου (σύνολα αντικειμένων). Τα μεγέθη στα σύνολα αντικειμένων είναι διακριτά, μπορούν δηλαδή να καταμετρηθούν. Το όλο προσδιορίζεται από όλα τα στοιχεία του συνόλου. Τα ίσα μέρη ορίζονται από ίσο αριθμό αντικειμένων και το κλάσμα δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων σ' ένα υποσύνολο προς τον αριθμό των αντικειμένων του όλου (π.χ. τα 2 χελιδόνια είναι τα 2/3 των 3 χελιδονιών).
3. Μοντέλα μήκους ή αριθμογραμμής. Με τα μοντέλα αυτά δίνεται έμφαση στις αποστάσεις επάνω στην αριθμογραμμή ή την κλασματική λωρίδα ή τη θέση ενός κλάσματος στην αριθμογραμμή. Το μέγεθος (μήκος) είναι συνεχές. Το όλο είναι η μονάδα του μήκους. Τα ίσα μέρη ορίζονται από ίσες αποστάσεις και το κλάσμα δείχνει την θέση ενός σημείου (π.χ. το 3/4, σε σχέση με την απόσταση από το μηδέν με βάση την ορισμένη μονάδα, το 1/4) (Petit et al., 2010· Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2012).

1.4 Μαθηματικά Προβλήματα

Τα μαθηματικά προβλήματα είναι αυτά που καθορίζουν την επιστήμη των Μαθηματικών καθώς όλα τα Μαθηματικά δημιουργούνται μέσα από τη διαδικασία δημιουργίας και επίλυσης προβλημάτων. Ως εκ τούτου, τα μαθηματικά προβλήματα έχουν αναδειχθεί ως ζωτικής σημασίας για τη μαθηματική εκπαίδευση με αποτέλεσμα πολλοί μελετητές να έχουν αναπτύξει ερευνητικό ενδιαφέρον γύρω από αυτά. Γενικά, για τον όρο πρόβλημα οι Newell and Simon (1972, σελ 72) σημειώνουν ότι «Κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν θέλει κάτι και δεν ξέρει άμεσα την σειρά των ενεργειών που πρέπει να πραγματοποιήσει ώστε να το επιτύχει». Παρομοίως, ο Polya (1998) αναφέρει πως το πρόβλημα είναι μια κατάσταση η οποία χρήζει διερεύνηση και στην οποία οι εμπλεκόμενοι δεν παρατηρούν κάποιο προφανή τρόπο επίλυσης. Συγκεκριμένα, μαθηματικό είναι ένα πρόβλημα όταν για την αναζήτηση της απάντησης εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες και αρχές.

Πολλοί ερευνητές έχουν προχωρήσει στην κατηγοριοποίηση των μαθηματικών προβλημάτων (Schoenfeld, 1992˙ Polya, 1945˙ Yee, 2002) ανάλογα με την φύση τους, ως προς την δομής και τα συστατικά τους. Ο Schoenfled (1992) διαχωρίζει τα προβλήματα σε «προβλήματα ρουτίνας» ή «ασκήσεις» και σε «προβληματικές καταστάσεις» ή «πρωτότυπα προβλήματα». Ρουτίνας είναι αυτά που λύνονται είτε αντικαθιστώντας δεδομένα σε έναν γενικό τύπο είτε ακολουθώντας βήμα προς βήμα. Αντίθετα, τα πρωτότυπα είναι προβλήματα με ένα βαθμό πολυπλοκότητας που οι μαθητές πρέπει να συνδυάσουν τις γνώσεις και τις ικανότητες τους.

Ο Polya (1945) διακρίνει τα προβλήματα σε «εύρεσης» και «απόδειξης». Σε ένα πρόβλημα εύρεσης, ο λύτης καλείται να βρει κάποιο συγκεκριμένο στοιχείο, το οποίο αποτελεί το ζητούμενο, τον άγνωστο του προβλήματος. Σε ένα πρόβλημα εύρεσης , ζητείται από τον λύτη να αποφασίσει αν κάποια ορισμένη πρόταση είναι ψευδής ή αληθής, να την αποδείξει ή να την ανασκευάσει (Polya, 1962). Σύμφωνα με τον Yee (2002) τα προβλήματα μπορούν να κατανεμηθούν σε κλειστά, ανοιχτά, μαθηματικές διερευνήσεις και projects. Τα κλειστά είναι προβλήματα που λύνονται με συγκεκριμένους τρόπους είναι απόλυτα εξαρτώμενα από τα δεδομένα. Τα ανοιχτού τύπου προβλήματα δεν έχουν ξεκάθαρη δομή, απουσιάζουν δεδομένα και δεν υπάρχει κάποια προκαθορισμένη πορεία για την επίλυση τους. Η διερευνητική μέθοδος και τα projects αναφέρονται σε ένα πλαίσιο που παρέχεται υλικό για διερεύνηση χωρίς απαραίτητα να είναι απόλυτα μαθηματικά.

1.4.1 Επίλυση μαθηματικών προβλημάτων

Για την επίλυση προβλημάτων έχουν δοθεί πολλοί ορισμοί κατά καιρούς (Mamona-Downs & Downs, 2005˙ Harel & Lesh, 2003), ενώ θεωρείται αδύνατο να δοθεί ένας κοινός και μοναδικός ορισμός (Grugnetti and Jaquuet, 2005). Κάποιοι θεωρούν ότι ορισμός είναι δυσδιάκριτος και ότι για να οριστεί η σημασία της θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν πολλοί παράγοντες κάθε φορά όπως η προσέγγιση που υιοθετείται, τα κίνητρα επίλυσης κ.α. (Mamona-Downs & Downs, 2005). Εντούτοις , μπορούμε να πούμε ότι η επίλυση προβλήματος είναι η αναζήτηση του τρόπου επίτευξης μιας κατανοητής λύσης. Ο λύτης έχει μια δεδομένη κατάσταση και έναν στόχο και προσπαθεί να συνδέσει αυτά τα δύο. Επομένως, αναφερόμαστε σε μια σειρά νοητικών εργασιών οι οποίες οδηγούν σε κάποιο σκοπό. Είναι μια μέθοδος ή διαδικασία επεξεργασίας της υπάρχουσας γνώσης ώστε να λυθεί ένα πρόβλημα (Polya, 1957˙ Stevela & Nicol, 1992). Πρόκειται, ακόμη, για μια περίπλοκη δραστηριότητα που συνδυάζει προηγούμενες γνώσεις, πεποιθήσεις και πολλές ικανότητες του λύτη (Κολεζά, 2009).

Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ορίζεται ως «η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες, για να αντιμετωπίσουν και να επιλύσουν πραγματικές διεπιστημονικές καταστάσεις, όπου η πορεία της λύσης δεν είναι άμεσα ορατή και όπου οι εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές που απαιτούνται για την επιστήμης δεν κατατάσσονται σε μια μοναδική περιοχή των μαθηματικών, της επιστήμης ή της μητρικής γλώσσας» (PISA, 2003). Η ικανότητα αυτή δεν είναι απλά σημαντική αλλά τα τελευταία χρόνια αποτελεί μια θεμελιώδη διδακτική πρακτική που στοχεύει την οικοδόμηση γνώσεων (NCTM, 2000). Αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών όλων των χωρών (Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2013).

Για την διαδικασία επίλυσης προβλήματος ο Polya (1967) ανέπτυξε ένα μοντέλο τεσσάρων σταδίων. Το πρώτο στάδιο είναι αυτό της κατανόησης του προβλήματος, το οποίο αν και προφανές δεν εφαρμόζεται πάντα από μαθητές και δασκάλους καθώς συχνά δεν αντιλαμβάνονται πλήρως τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Το δεύτερο στάδιο είναι αυτό της επινόησης σχεδίου, όπου ο λύτης καταστρώνει ένα σχέδιο επίλυσης σκεπτόμενος πιθανές στρατηγικές και τρόπους λύσης, κάνοντας δοκιμές και τελικά επιλέγοντας τον κατάλληλο. Το τρίτο στάδιο είναι η υλοποίηση του σχεδίου όπου γίνεται η εφαρμογή του παραπάνω σχεδίου. Το τελευταίο και πολύ σημαντικό στάδιο είναι αυτό του ελέγχου, όπου ο λύτης «κοιτάζει πίσω» και επανεξετάζει ό,τι έχει κάνει και αναστοχάζεται ώστε να βελτιώσει τελικά την ικανότητα του στην επίλυση προβλήματος.

Άλλη μια προσέγγιση είναι αυτή του Schoenfeld (1985). Σε αυτήν την προσέγγιση η επίλυση προβλήματος αναπτύσσεται σε τρία στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι αυτό της ανάλυσης όπου ο λύτης αξιοποιεί τους πόρους του, κατατάσσει το πρόβλημα σε κάποια κατηγορία περιπτώσεων και δημιουργεί ένα διάγραμμα που να αντιπροσωπεύει το πρόβλημα. Δεύτερο έρχεται το στάδιο της εξερεύνησης, όπου ο λύτης αξιοποιεί τα δεδομένα, αναζητά την στρατηγική που θα χρησιμοποιήσει και σχεδιάζει την λύση. Ως τρίτο και τελευταίο στάδιο ορίζεται η επαλήθευση, στην οποία γίνεται έλεγχος των επιλεγμένων στρατηγικών και της ορθότητας της λύσης.

Ο Polya (1973) πέρα από τα στάδια αναφέρθηκε στις ατομικές στρατηγικές (ευρετικές στρατηγικές) που μπορούν να διδαχθούν και να χρησιμοποιούν από τον λύτη την κατάλληλη στιγμή καθώς βρίσκεται στα στάδια επίλυσης. Με τον όρο ευρετική στρατηγική νοείται μια γενική πρόταση, υπόδειξη ή τεχνική η οποία βοηθά τον λύτη να καταλάβει ή να λύσει ένα δοσμένο πρόβλημα. Ο Schoenfeld (1985) έκανε μια ταξινόμηση των ευρετικών στρατηγικών που χρησιμοποιούνται συχνά. Τόνισε, ακόμη, ότι η επιτυχία ενός προβλήματος εξαρτάται από τις ευρετικές, δηλαδή από τις στρατηγικές επίλυσης που διαμορφώνονται από τον λύτη.

1.4.2. Κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων

Η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος σήμερα αναγνωρίζεται ως ένα βασικό στοιχείο των αναλυτικών προγραμμάτων που βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής σκέψης και δραστηριότητας (Silver,1994· Stoyanova, 1997). Για την σημασία της κατασκευής προβλήματος υφίστανται ποικίλες περιγραφές και ορισμοί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία (Osana & Pelczer, 2015) και οι συγγραφείς χρησιμοποιούν διαφορετικό κάθε φορά πλαίσιο ανάλογα με τους εκάστοτε ερευνητικούς στόχους (Stoyanova, 1997). Σύμφωνα με τον Silver (1994) η κατασκευή ενός προβλήματος αφορά τόσο την παραγωγή προβλημάτων όσο και την τροποποίηση υπαρχόντων προβλημάτων. Οι Osana και Pelczer (2015) σημειώνουν ότι η κατασκευή προβλημάτων είναι μια διαδικασία διαμόρφωσης μιας νέας κατάστασης ή τροποποίησης ενός υπάρχοντος προβλήματος, έχοντας ένα συγκεκριμένο μαθηματικό και παιδαγωγικό στόχο. Η Stayonanova (1997) περιγράφει την κατασκευή προβλημάτων ως τη διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικές αναπαραστάσεις δεδομένων από πραγματικές καταστάσεις και τις διαμορφώνουν σε μαθηματικά προβλήματα που έχουν νόημα.

Οι μαθηματικές καταστάσεις που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή προβλήματος μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τα χαρακτηριστικά της και τα δομικά της στοιχεία σε δομημένες, ημι-δομημένες και μη δομημένες ή ελεύθερες (Stoyanova, 1997). Οι δομημένες αναφέρονται σε καταστάσεις που οι δραστηριότητες της κατασκευής βασίζονται σε συγκεκριμένο πρόβλημα ή δοσμένη λύση. Για παράδειγμα, μπορεί να παρατεθεί μια σειρά πράξεων την οποία τα άτομα καλούνται να χρησιμοποιήσουν επακριβώς στο πρόβλημα που θα διατυπώσουν. Ως ημι-δομημένες καταστάσεις αφορούν περιπτώσεις όπου τα άτομα έχουν μια κατάσταση και καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα έχοντας ως βάση αυτήν. Σε αυτές τις καταστάσεις οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι έννοιες από προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες είναι καθοριστικής σημασίας για την ολοκλήρωση της κατασκευής. Τέλος, στις ελεύθερες καταστάσεις τα άτομα κατασκευάζουν προβλήματα χωρίς περιορισμούς που προκύπτουν από μία φυσική κατάσταση.

1.5 Πράξεις Στα Κλάσματα

Σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς, οι πράξεις των ρητών αριθμών και δη των κλασμάτων ακολουθούν διαδικασίες αφηρημένες και αδιαφανής. Οι κανόνες των πράξεων των κλασμάτων είναι πυκνοί και μη κατανοητοί όταν απλά έχουν διδαχθεί ως μια διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί μηχανιστικά βήμα-βήμα (π.χ. για να προσθέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και στην συνέχεια προσθέτουμε τους αριθμητές τους χωρίς να ξέρουμε γιατί). Εστιάζοντας στον πολλαπλασιασμό και στην διαίρεση κλασμάτων, η δυσκολία αυξάνεται, η κατανόηση περιορίζεται ακόμη περισσότερο και συχνά μεταφράζεται σε λάθη που εμφανίζονται τόσο σε μαθητές όσο και σε ενήλικους και εκπαιδευτικούς (Λεμονίδης, 2016)

Μαθητές και δάσκαλοι εφαρμόζουν καλύτερα υπολογιστικές διαδικασία όταν κατανοούν το νόημα αυτών των διαδικασιών. Η εννοιολογική κατανόηση είναι σημαντική για τη σωστή χρήση των διαδικασιών. Πάραυτα, οι μαθητές συχνά διδάσκονται υπολογιστικές διαδικασίες χωρίς επαρκή εξήγηση και χωρίς να αντιλαμβάνονται σε ποιες καταστάσεις της πραγματικής ζωής οι πράξεις αυτές λειτουργούν (Λεμονίδης, 2016). Για παράδειγμα, μαθητές και εκπαιδευτικοί αγνοούν τον λόγο που ενώ στην πρόσθεση και στην αφαίρεση μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα στον πολλαπλασιασμό πολλαπλασιάζουμε τους υφιστάμενους παρονομαστές χωρίς κάποια αλλαγή.

Έρευνες δείχνουν ότι ενώ η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών έχουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν σωστά τους αλγόριθμους για να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν κλάσματα, δείχνουν αδυναμία να εξηγήσουν πως λειτουργούν αυτοί οι αλγόριθμοι (Ball, 1990,1991˙ Ma, 1990˙ Tirosh, 2000) Φαίνεται λοιπόν να υπάρχει προσκόλληση στον αλγόριθμο (διαδικαστική γνώση) και κενό στην κατανόηση της έννοιας των πράξεων (εννοιολογική γνώση). Οι περισσότεροι εν δυνάμει δάσκαλοι σε έρευνες ήταν πολύ εξαρτημένοι με την διαδικασία που λύνεται ένα πρόβλημα και όταν τους ζητούνταν να εξηγήσουν την στρατηγική τους απλά ανέφεραν αυτή τη διαδικασία (π.χ. Caglauan & Olive, 2011˙ Kajander and Holm, 2011). Αυτή η έλλειψη εννοιολογικής γνώσης διαφαίνεται και σε έρευνες που εξετάζουν την δυνατότητα εκπαιδευτικών να διατυπώνουν μαθηματικά προβλήματα διαίρεσης ή πολλαπλασιασμού κλασμάτων αλλά και να αναπαριστούν εικονικά αυτές τις πράξεις (Borko et al.,1992˙ Lo & Luo, 2012)

1.5.1 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2016), ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων ερμηνεύεται ως το μέρος ενός μέρους ή ένα κλάσμα ενός κλάσματος. Για παράδειγμα, όταν έχουμε προβλήματα όπως το εξής: «Στο ταψί είχαν μείνει τα $\frac{2}{3}$ της πίτας και ο Δήμος πήρε από αυτά τα $\frac{4}{5}$. Πόσο μέρος της αρχικής πίτας πήρε ο Δήμος» η απάντηση τους προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα. Εδώ χρειάζεται αλλαγή μονάδας για να βρεθεί το τελικό αποτέλεσμα αφού η μονάδα θα πρέπει να είναι δέκατα πέμπτα.

Ο Azim (1992) ταξινομεί τα μοντέλα πολλαπλασιασμού σε τέσσερις κατηγορίες: *επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, πολλαπλασιαστική σύγκριση, έννοια εμβαδού και καρτεσιανό γινόμενο*. Το πιο σύνηθες μοντέλο είναι αυτό της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης όπου το 3 x 4 μπορεί να ερμηνευθεί ως τρία- τεσσάρια: 4+4+4+4. Στην πολλαπλασιαστική σύγκριση η μαθηματική έκφραση 3 x 4 μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία απόσταση που είναι 3 φορές το μήκος μιας απόστασης 4 μέτρων. Το μοντέλο του εμβαδού αναφέρεται στην περίπτωση όπου το εμβαδό μιας ορθογώνιας περιοχής μπορεί να ερμηνευτεί ως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των δύο διαστάσεων (μήκος και πλάτος). Στο Καρτεσιανό γινόμενο, η αντιστοίχιση στοιχείων από δύο σύνολα (π.χ. 3

παντελόνια και 4 μπλούζες) δίνει συνολικά έναν αριθμό από πιθανά ζευγάρια στοιχείων (π.χ. 12 πιθανά ζευγάρια παντελόνι- μπλούζα).

Από τα παραπάνω μοντέλα, ο πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αποτελεί το πρωτόγονο μοντέλο του πολλαπλασιασμού (Fischbein et al., 1985) καθώς είναι αυτός που πρώτο συναντούν οι μαθητές στην σχολική τους εμπειρία. Ωστόσο, όταν οι πράξεις στους ακέραιους αριθμούς επεκτείνονται, ώστε να περιλαμβάνουν και τους ρητούς αριθμούς, η έννοια του πολλαπλασιασμού πρέπει επίσης να επεκταθεί (Son, 2012) και συχνά να ανακατασκευαστεί ώστε να προσαρμοστεί στις κλασματικές ποσότητες (Azim, 1995). Για παράδειγμα, η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση μπορεί να εφαρμοστεί σε κάποια προβλήματα όπως στην εξής: «Στο μανάβικο οι πατάτες είναι συσκευασμένες σε σακούλες των $\frac{1}{4}$ του κιλού. Η μαμά πήρε 3 σακούλες. Πόσα κιλά πατάτες πήρε η μαμά;». Τέτοιες καταστάσεις μπορούν να ερμηνευθούν με το μοντέλο την επαναλαμβανόμενης πρόσθεση.

Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν με πολλαπλασιασμό αλλά δεν ερμηνεύονται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Για παράδειγμα: «Η Σοφία αγόρασε $\frac{4}{5}$ μέτρα χαρτί για μια κατασκευή του σχολείου. Αργότερα όμως κατάλαβε ότι χρειαζόταν μόνο τα $\frac{3}{4}$ από αυτό που αγόρασε. Πόσο χαρτί χρησιμοποίησε τελικά η Σοφία;» Ο λύτης του προβλήματος πρέπει να γνωρίζει ότι τα $\frac{4}{5}$ του μέτρου χαρτί αποτελούν το ολόκληρο σε αυτό το πρόβλημα. Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{5}$ αναφέρονται σε δύο διαφορετικές μονάδες αναφορών. Όταν εντοπιστούν οι μονάδες αναφοράς, ο προσδιορισμός του μέρους του κλασματικού τμήματος της μονάδας αναφοράς που θα εξεταστεί γίνεται σαφέστερος. Επομένως, πρέπει να συντονιστούν όχι μόνο δύο (μέρη ενός όλου) αλλά τρία επίπεδα μονάδων αναφοράς (μέρη των μερών ενός όλου) προκειμένου να κατανοηθεί πλήρως το νόημα και οι διαδικασίες που σχετίζονται με τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (Son & Lee, 2016).

Ο Taber (1999, 2002) παρουσιάζει τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα μέσα από τέσσερις διαφορετικές ερμηνείες, με κριτήριο αν ο πολλαπλασιαστής είναι ακέραιος ή κλασματικός αριθμός. Ο Taber (1999) χρησιμοποιεί τους αριθμούς 12 και $\frac{1}{4}$ ως παραδείγματα για να παρουσιάσει το θεωρητικό του μοντέλο: Η πρώτη ερμηνεία είναι τα *προβλήματα σύγκρισης*. Τα προβλήματα σύγκρισης υφίστανται όταν ο πολλαπλασιαστής είναι είτε ακέραιος είτε κλάσμα. Αν το 12 είναι ο πολλαπλασιαστής, συγκρίνουμε δύο ποσότητες, μία από τις οποίες είναι 12 φορές μεγαλύτερη από την άλλη. Αν το $\frac{1}{4}$ είναι ο πολλαπλασιαστής, συγκρίνουμε δύο ποσότητες, μία από τις οποίες είναι το $\frac{1}{4}$ του μεγέθους του άλλου. Η Olanoff (2011) προσθέτει στο μοντέλο το παράδειγμα των μεικτών αριθμών $3\frac{1}{5} \times 4\frac{1}{7}$, όπου συγκρίνονται δύο ποσότητές, μία από τις οποίες είναι $3\frac{1}{5}$ φορές το μέγεθος του άλλου.

Ο δεύτερος τύπος είναι τα προβλήματα *πολλαπλασιαστικής αλλαγής,* που επίσης είναι για ακέραιους και κλασματικούς πολλαπλασιαστές. Σε ένα τέτοιου είδους πρόβλημα με πολλαπλασιαστή το 12, επεκτείνουμε μια ποσότητα μέχρις ότου να μετατραπεί σε 12 φορές μεγαλύτερη της αρχικής. Αντίθετα, όταν έχουμε τον όρο $\frac{1}{4}$, θα μειώσουμε την ποσότητα μέχρις ότου να γίνει $\frac{1}{4}$ του αρχικού μεγέθους. Όπως και στην προηγούμενη ερμηνεία έτσι και σε αυτή μπορούμε να σκεφτούμε την επέκταση μιας ποσότητας έως ότου να ισούται με τις $3\frac{1}{2}$ φορές του αρχικού μεγέθους.

Ο τρίτος τύπος αφορά *προβλήματα συνδυασμού*, τα οποία υφίστανται όταν ο πολλαπλασιαστής είναι ακέραιος αριθμός. Για παράδειγμα 12 x $\frac{1}{4}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο συνδυασμός 12 ισομεγεθών τμημάτων. Αυτό λειτουργεί όταν ο αριθμητής είναι ακέραιος, αλλά δεν έχει νόημα ο συνδυασμός 1/4 ίσων τμημάτων. Έτσι, αντί προβλημάτων συνδυασμού με πολλαπλασιαστές κλάσματα, έχουμε καταστάσεις *μέρος/όλου.* Παράδειγμα αποτελεί η πρόταση «παίρνω το $\frac{1}{4}$ από μια ποσότητα των 12». Επομένως, σε αυτό το σενάριο παίρνουμε ένα κλασματικό τμήμα από μια ποσότητα.

1.5.1.1 Προβλήματα και αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού κλασμάτων

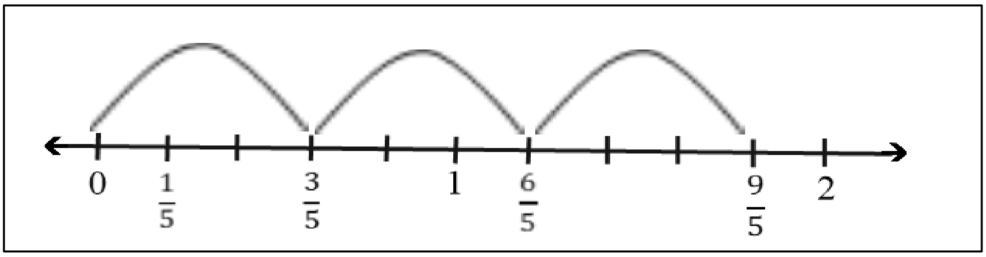
Τα προβλήματα κλασμάτων μπορούν να είναι ποικίλα και διαφορετικής δυσκολίας. Για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός ενός ακεραίου με ένα κλάσμα (π.χ. 3 x $\frac{1}{3}$) μπορεί εύκολα να ερμηνευτεί και να λυθεί σε προβλήματα. Μία άλλη περίπτωση είναι όταν πολλαπλασιάζονται δύο κλάσματα σε καταστάσεις που δεν χρειάζονται περαιτέρω υποδιαιρέσεις. Για παράδειγμα, προβλήματα που λύνονται με τον πολλαπλασιασμό $\frac{4}{6}\ x\ \frac{1}{4}$ δεν χρειάζεται να χωρίσουμε περαιτέρω τα $\frac{4}{6}$, παίρνουμε ένα από τα $\frac{4}{6}$ που είναι $\frac{1}{6}$.

Τέλος, μια Τρίτη περίπτωση είναι αυτή του πολλαπλασιασμού με υποδιαιρέσεις όπου , για παράδειγμα, για να γίνει ο πολλαπλασιασμός $\frac{2}{3}$ x $\frac{4}{5}$ τα $\frac{2}{3}$ θα πρέπει να χωριστούν περαιτέρω σε 5 κομμάτια και τελικά να δημιουργηθούν 15.

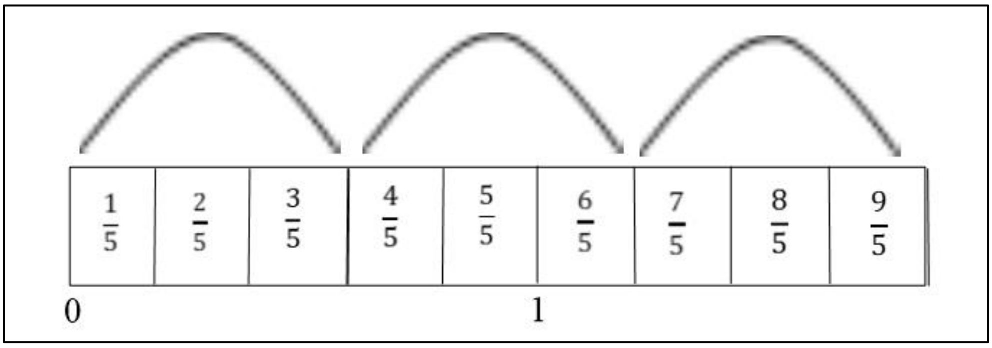
Στον πολλαπλασιασμό ακέραιου με κλάσματος μπορούμε να σκεφτούμε καταστάσεις όπου ένα μέρος κάποιου μεγέθους πολλαπλασιάζεται με ένα πλήθος φορών. Παράδειγμα ένα πρόβλημα θα μπορούσε να είναι:

«Για την κατασκευή ενός ραφιού χρειάζονται $\frac{3}{5}$ του μέτρου ξύλο. Πόσα μέτρα ξύλο θα χρειαστώ για να κατασκευάσω 3 ράφια;»

Για την αναπαράσταση τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε κλασματική λωρίδα είτε αριθμογραμμή.



Εικόνα 3 Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού 3 x $\frac{3}{5}$ με αριθμογραμμή



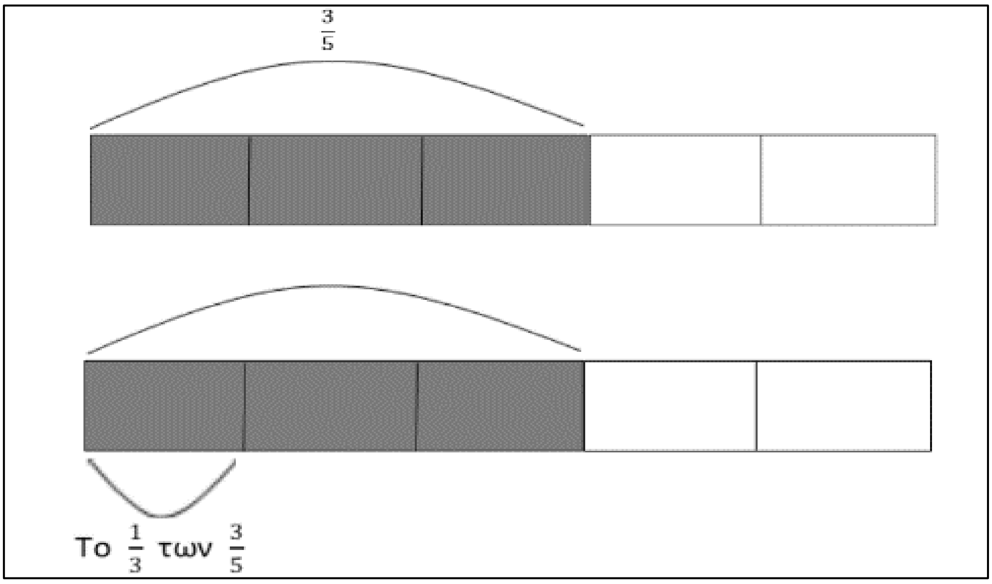
Εικόνα 4 Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού 3 x $\frac{3}{5}$ με κλ. λωρίδα

Στον πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα χωρίς υποδιαιρέσεις μπορούμε να σκεφτούμε καταστάσεις όπου ψάχνουμε το μέρος ενός μέρους χωρίς όμως να χρειάζεται να χωρίσουμε το πρώτο μέρος περαιτέρω καθώς είναι καταλλήλως χωρισμένο ώστε να βρούμε την απάντηση.

Παράδειγμα τέτοιου προβλήματος θα μπορούσε να είναι το ακόλουθο:

«Έμειναν τα $\frac{3}{5}$ της πίτας. Ο Γιώργος πήρε το $\frac{1}{3}$ της πίτας που έμεινε. Πόσο μέρος της αρχικής πίτας πήρε ο Γιώργος;»

Για την οπτικοποίηση του πολλαπλασιασμού προτείνεται η χρήση μοντέλων κλασματικών λωρίδων.



Εικόνα 5 Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού $\frac{3}{5}$ x $\frac{1}{3}$ με κλ. λωρίδες

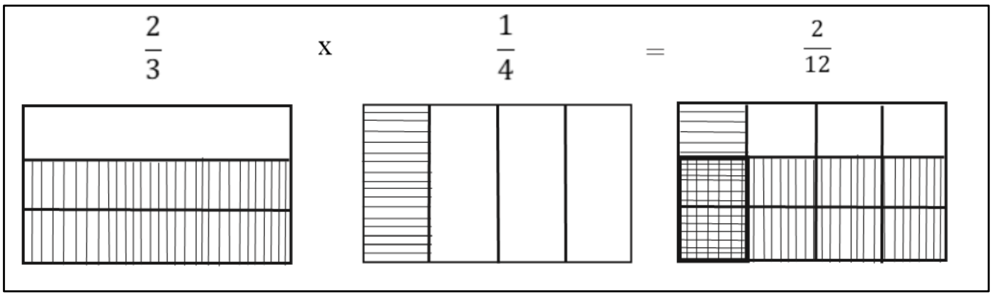
Τον πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα με υποδιαιρέσεις μπορούμε να τον ερμηνεύσουμε ως το μέρος ενός μέρους όπου το πρώτο μέρος πρέπει να διαιρεθεί σε περισσότερα τμήματα για να υπολογιστεί το δεύτερο. Δύο παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα είναι:

«Τα $\frac{2}{3}$ ενός ορθογώνιου κήπου είναι φυτεμένα με λουλούδια. Από τα λουλούδια το $\frac{1}{4}$ είναι τουλίπες. Ποιο μέρος του κήπου είναι φυτεμένο με τουλίπες;»

«Από μια κορδέλα που ήταν τα $\frac{2}{3}$ του μέτρου η Μαρία έκοψε κομμάτι που ήταν το $\frac{1}{4}$. Ποιο μέρος του μέτρου ήταν το κομμάτι της Μαρίας;»

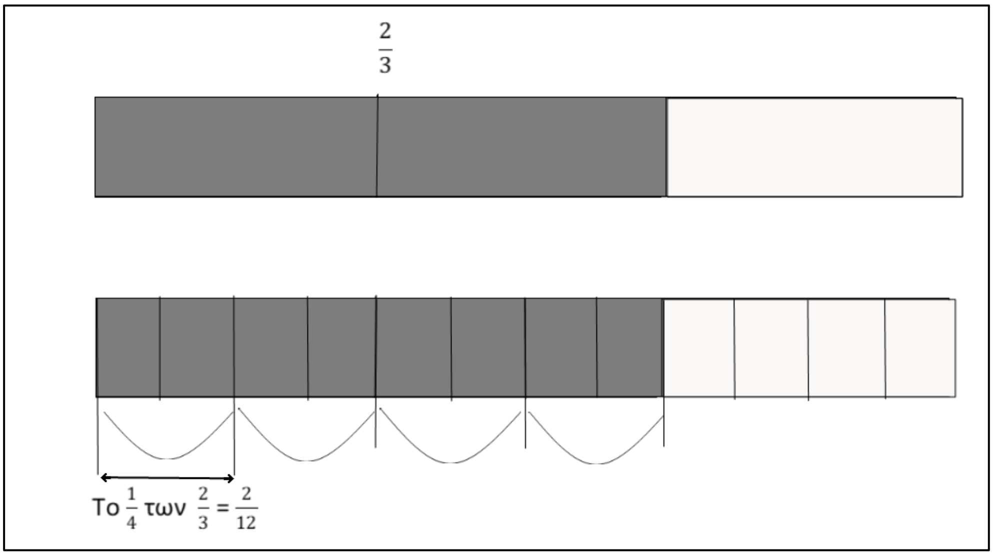
Για την οπτικοποίηση αυτού του πολλαπλασιασμού προτείνεται η χρήση δύο μοντέλων: του μοντέλου του εμβαδού ορθογωνίου και του μοντέλου των λωρίδων.

Το μοντέλο του εμβαδού ορθογωνίου: Για να βρούμε το εμβαδόν του ορθογωνίου, πολλαπλασιάζουμε τα μήκη των πλευρών που είναι κλάσματα και αναπαριστούμε το γινόμενο κλασμάτων ως εμβαδόν ορθογωνίου.



Εικόνα 6 Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού $\frac{2}{3}$ x $\frac{1}{4}$ με μοντέλο εμβαδού

Το μοντέλο των λωρίδων: Για τον ίδιο πολλαπλασιασμό σχεδιάζουμε τα $\frac{2}{3}$ και από αυτά θέλουμε να πάρουμε το $\frac{1}{4}$, για να το πετύχουμε αυτό χωρίζουμε κάθε τρίτο σε τέσσερα ίσα μέρη. Έτσι το διάστημα χωρίστηκε σε δωδέκατα ($\frac{1}{12}$) δηλαδή η μονάδα μεταβλήθηκε σε δωδέκατα. Τα $\frac{2}{3}$ έγιναν $\frac{8}{12}$. Τα 8 μέρη θέλουμε να τα χωρίσουμε σε τέταρτα και από αυτά να πάρουμε το ένα. Έτσι τα χωρίζουμε σε 4 μέρη και από αυτά παίρνουμε το ένα για να σχηματίσουμε το $\frac{1}{4}$ των $\frac{8}{12}$ που είναι τα $\frac{2}{12}$.



Εικόνα 7 Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού $\frac{2}{3}$ x $\frac{1}{4}$ με μοντέλο κλ. υρίδων

1.5.2 Διαίρεση Κλασμάτων

Η διαίρεση κλασμάτων έχει αποτελέσει μία από τις πιο δύσκολες ιδέες στα μαθηματικά αφενός για τους μαθητές και αφετέρου για τους υποψήφιους και ενεργεία δασκάλους (Ball, 1990˙ Bulgar, 2003˙ Flores, 2002˙ Tirosh, 2000). Ένας παράγοντας αυτής της δυσκολίας είναι ότι σε αυτή την πράξη διασταυρώνονται δύο δύσκολες έννοιες: αυτή της διαίρεσης και αυτή των κλασμάτων, καμία από τις οποίες τα άτομα δεν κατανοούν και δεν ερμηνεύουν συνήθως εννοιολογικά (Sowder et al., 1998)

Η διαίρεση συνήθως διδάσκεται μέσα από δύο ερμηνείες: Την διαίρεση μερισμού (partitive or sharing model) και την διαίρεση μέτρησης (quotitive, measurement, or repeated subtraction division). Το μοντέλο του μερισμού αφορά την διαίρεση του όλου σε ένα δεδομένο πλήθος υποσυνόλων για να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων κάθε υποσυνόλου (Greer,1992). Σε αυτό το μοντέλο, μπορούμε να σκεφτούμε την πράξη 20:5 ως ένα πρόβλημα διαμέρισης 20 πραγμάτων σε 5 άτομα και προσδιορισμού του αριθμού των πραγμάτων που κάθε άτομο θα πάρει. Ένα τυχαίο παράδειγμα της καθημερινής ζωής θα μπορούσε να ήταν το ακόλουθο: Θέλουμε να μοιράσουμε 18 καραμέλες σε 3 παιδιά. Πόσες καραμέλες θα πάρει κάθε παιδί; (Λεμονίδης, 2000).

Το μοντέλο της μέτρησης αφορά την διαίρεση του συνολικού αριθμού στοιχείων με τον αριθμό στοιχείων κάθε υποσυνόλου για να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων που σχηματίζονται (Greer, 1992). Σε αυτό το μοντέλο μπορούμε να σκεφτούμε την πράξη 20:5 ως πρόβλημα μοιρασιάς 5 αντικειμένων όσες φορές μπορούμε μέχρι να μην μείνει κανένα, για να βρούμε πόσα άτομα πήραν 5 αντικείμενα ή να απαντήσουμε ερώτηση «Πόσα 5 υπάρχουν στα 20˙». Παρόμοια, στην καθημερινή ζωή ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το εξής: Μια μαστίχα κοστίζει 15 λεπτά. Πόσες μαστίχες θα αγοράσουμε με 90 λεπτά; (Λεμονίδης, 2000)

Το μοντέλο του μερισμού είναι συνήθως το πρώτο διδασκόμενο μοντέλο στα παιδιά και για αυτό ονομάζεται και ως το «πρωτογενές/πρωταρχικό» μοντέλο διαίρεσης από τους ερευνητές (Fischbein, Deri, Nello &Marino, 1985 ˙ Tirosh & Graeber, 1989). Θα μπορούσε να ερμηνευτεί στους μαθητές ως «δίκαιη μοιρασιά» . Αυτό είναι και το μοντέλο που συνήθως μαθητές και δάσκαλοι προτιμούν διαισθητικά να χρησιμοποιούν. Ωστόσο, όσον αφορά τα κλάσματα, η διαίρεση μέτρησης είναι αυτή που μπορεί να μεταφραστεί ευκολότερα σε καταστάσεις που εμπλέκονται τα κλάσματα. Μπορούμε, για παράδειγμα, να σκεφτούμε ότι έχουμε $5\frac{1}{2}$ κιλά κεράσια και δίνουμε $\frac{1}{2}$ κιλά σε κάθε άτομο και να καταλήξουμε στην ερώτηση πόσα άτομα πήραν κεράσια. Αυτή η κατάσταση μπορεί εύκολα να μοντελοποιηθεί αφαιρώντας $\frac{1}{2}$ από το $5\frac{1}{2}$ μέχρι να μην παραμείνει κάτι και να δούμε ότι υπάρχουν 11 υποσύνολα. Επομένως, $5\frac{1}{2}:\frac{1}{2}= 11$ (Olanoff,2011).

Παρόλα αυτά, είναι πιο πολύπλοκο όταν προσπαθούμε να μεταφράσουμε το μοντέλο μερισμού της διαίρεσης σε καταστάσεις με κλάσματα. Όπως αναφέρουν οι Rizvi & Lawson (2007) «η δίκαιη μοιρασιά, ή το μοντέλο μερισμού είναι ένα παραδοσιακό διδασκόμενο μοντέλο διαίρεσης ακέραιων αριθμών, όμως μπορεί να αποδειχθεί ως εμπόδιο στην αναπαράσταση της διαίρεσης κλασμάτων». Όταν αναφερόμαστε στην διαίρεση κλασμάτων χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, η αρχική κατάσταση που χρησιμοποιούμε με τους ακέραιους αριθμούς δεν έχει νόημα. Δεν μπορούμε, λόγου χάριν, να μιλάμε για το μισό ή το ένα τρίτο ενός ατόμου (Lo & Luo 2012, Van de Walle 2007).

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2016) για να γίνει κατανοητή και να αποδοθεί σημασία στην πράξη της διαίρεσης κλάσματος με κλάσμα ($\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$) μπορεί αυτή να θεωρείται ως η μέτρηση του διαιρετέου $\frac{\alpha}{\beta}$ με μέτρο το διαιρέτη $\frac{\gamma}{\delta}$. Δηλαδή πόσες φορές μετράει το μέτρο $\frac{\gamma}{\delta}$ στο μετρούμενο μέγεθος $\frac{\alpha}{\beta}$ ή πόσες φορές χωράει το $\frac{\gamma}{\delta}$ στο $\frac{\alpha}{\beta}$.

1.5.2.1. Προβλήματα και αναπαραστάσεις διαίρεσης κλασμάτων

Στις διαιρέσεις κλασμάτων μπορούμε να έχουμε μεγάλη ποικιλία προβλημάτων διαφορετικής δυσκολία η οποία καθορίζεται από τους αριθμούς του διαιρετέου και του διαιρέτη της πράξης . Αν για παράδειγμα ο διαιρετέος είναι ακέραιος αριθμός (π.χ. $3{:}\ \frac{1}{2}$) η διαίρεση που αντιστοιχεί σε πρόβλημα μπορεί να ερμηνευτεί εννοιολογικά ως «πόσα μισά χωράνε στο 3 ή πόσα μισά έχει το 3;». Επίσης κάποια κλάσματα όπως το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{4}$ είναι εύκολα να ερμηνευτούν στις διαιρέσεις $\frac{1}{2}{:}\ \frac{1}{4}$ ή $\frac{3}{4}{:}\ \frac{1}{4}$ ως «πόσα $\frac{1}{4}$ χωράνε στο $\frac{1}{2}$ ή στο $\frac{3}{4}$.;» Όμως όταν ο διαιρετέος και ο διαιρέτης είναι κλάσματα μη ομώνυμα και ο διαιρέτης είναι μεγαλύτερο από τον διαιρετέο είναι πιο δύσκολές οι περιπτώσεις.

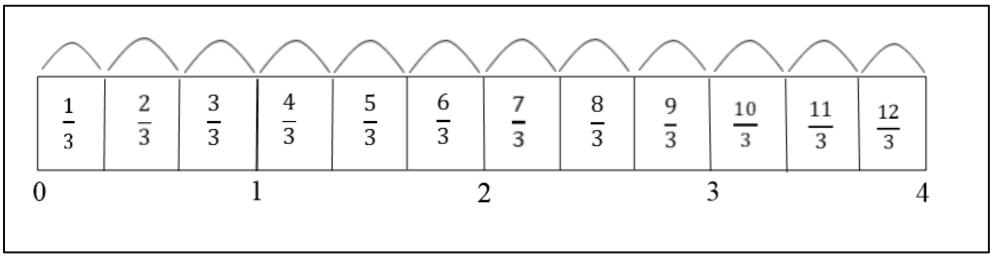
Όσον αφορά την αναπαράσταση της διαίρεσης κλασμάτων σε διάφορες καταστάσεις προτείνονται η χρήση μοντέλων μήκους και συγκεκριμένα η χρήση κλασματικών λωρίδων και αριθμογραμμών.

Για την παρουσίαση ενδεικτικών προβλημάτων και αναπαραστάσεων πραγματοποιείται μια κατηγοριοποίηση των περιπτώσεων της διαίρεσης που συνήθως συναντιούνται.

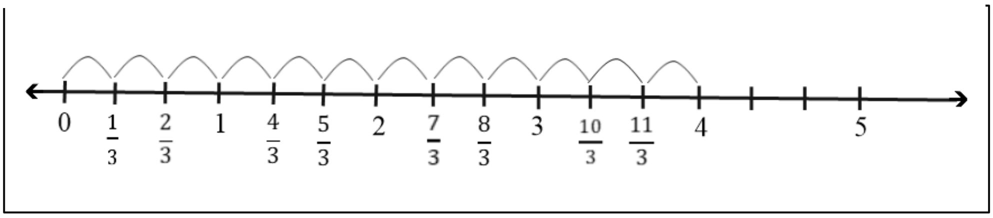
Στην διαίρεση ακεραίου με κλάσμα υπάγονται προβλήματα όπου το κλάσμα χωράει κάποιες φορές σε έναν ακέραιο αριθμό, για παράδειγμα στην διαίρεση $3{:}\ \frac{1}{4}$, το $\frac{1}{4}$ χωράει 12 φορές στο 3, επειδή στην μονάδα χωράει 4 (3x4= 12). Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα θα μπορούσε να είναι:

«Μια κορδέλα των 4 μέτρων την χωρίζουμε σε κομμάτια του $\frac{1}{3}$ του μέτρου. Πόσα κομμάτια θα πάρουμε;»

Η αντίστοιχη αναπαράσταση θα μπορούσε να γίνει είτε με κλασματική λωρίδα είτε με αριθμογραμμή.



Εικόνα 8 Αναπαράσταση διαίρεσης 4 $\frac{1}{3}$: με κλ. λωρίδα

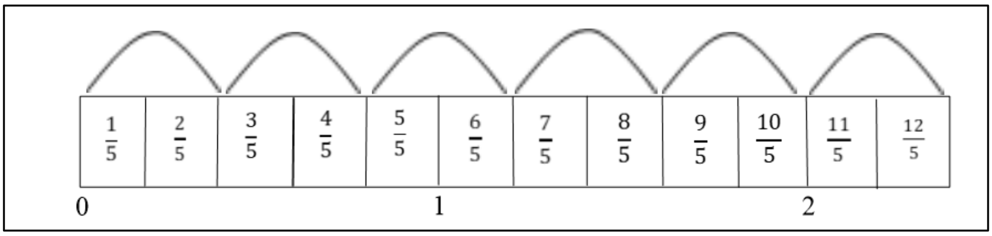


Εικόνα 9 Αναπαράσταση διαίρεσης 4 $\frac{1}{3}$: με αριθμογραμμή

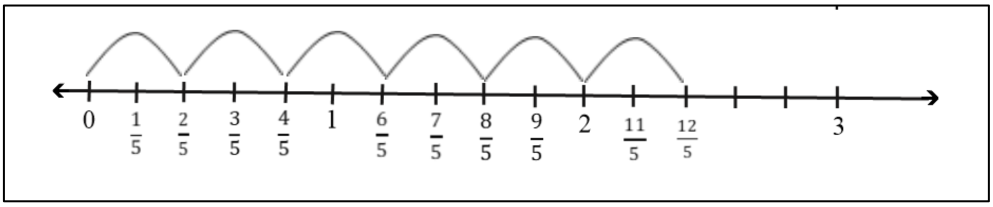
Στην διαίρεση κλάσματος με κλάσμα, όπου τα κλάσματα είναι ομώνυμα μπορούμε να σκεφτούμε πόσες φορές χωράει το ένα κλάσμα σε ένα άλλο σκεπτόμενοι τους αριθμητές . Για παράδειγμα στην διαίρεση $\frac{18}{6}$: $\frac{3}{6}$, το $\frac{3}{6}$ χωράει στο $\frac{18}{6}$, 6 φορές, επειδή το 3 χωράει στο 18, 6 φορές. Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα θα μπορούσε να είναι:

«Μια κορδέλα των $\frac{12}{5}$ μέτρων την κόβουμε σε κομμάτια των $\frac{2}{5}$ του μέτρου. Πόσα κομμάτια θα δημιουργηθούν;»

Η αναπαράσταση αυτού του του προβλήματος θα μπορούσε επίσης να είναι είτε με κλασματική λωρίδα είτε με αριθμογραμμή



Εικόνα 10 Αναπαράσταση της διαίρεσης $\frac{12}{5}$: $\frac{2}{5}$ με κλ. λωρίδα



Εικόνα 11 Αναπαράσταση της διαίρεσης $\frac{12}{5}$: $\frac{2}{5}$ με κλ. λωρίδα

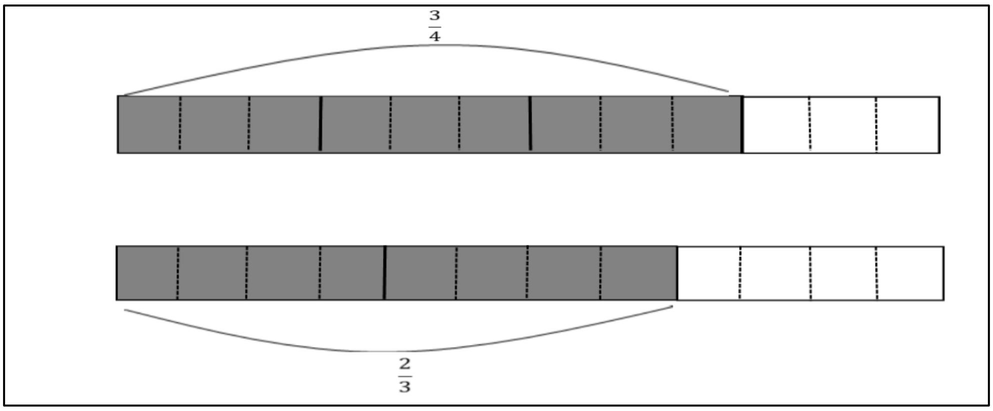
Στην διαίρεση μη ομώνυμων κλασμάτων έχουμε περιπτώσεις όπου με ένα πήχη δύο μέτρων μετράω μια απόσταση ενός μέτρου και στην συνέχεια σκεφτόμαστε πόσες φορές χωράει ο ένας πήχη στον άλλον. Για παράδειγμα στην διαίρεση $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ συλλογιζόμαστε πόσα μισά έχει μέσα το $\frac{3}{4}$ και καταλήγουμε ότι έχει σίγουρα ένα και περισσεύει $\frac{1}{4}$. Στο $\frac{1}{4}$ το μισό χωράει μισή φορά. Άρα το $\frac{1}{2}$ χωράει 1,5= $\frac{3}{2}$ φορές στο $\frac{3}{4}$. Ένα ενδεικτικό πρόβλημα θα μπορούσε να είναι:

Το πρόβλημα που δίνεις παρακάτω δεν είναι ενδεικτικό της παραπάνω περίπτωσης. Να δοθεί ένα άλλο.

Να συμπληρωθεί η περίπτωση διαίρεσης που περιγράφεις παρακάτω (διαίρεση ετερωνύμων κλασμάτων με υποδιαιρέσεις)

«Μια κορδέλα των $\frac{3}{4}$ μέτρων τη συγκρίνουμε με μια κορδέλα των $\frac{2}{3}$ μέτρων. Πόσες φορές χωράει η κορδέλα των $\frac{2}{3}$ μέτρων σε κορδέλα των $=$ μέτρων;»

Η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με δύο κλασματικές λωρίδες:



Εικόνα 12 Αναπαράσταση της διαίρεσης $\frac{3}{4}$: $\frac{2}{3}$ με κλ. λωρίδα

Βρίσκουμε κοινή μονάδα για να συγκρίνουμε το $\frac{3}{4}$ με το $\frac{2}{3}$, δηλαδή το κοινό παρονομαστή που είναι το 12. Έτσι το $\frac{3}{4}$ χωρίστηκε σε 9 ίσα μέρη και το $\frac{2}{3}$ σε 8 ίσα μέρη, δηλαδή το $\frac{3}{4}$ χωράει $\frac{9}{8}$ φορές στο $\frac{2}{3}$. Επομένως $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$.

1.5.3 Λάθη και δυσκολίες στην διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων- Ευρήματα προηγούμενων ερευνών

1.5.3.1 Διαίρεση κλασμάτων

Μια κοινή παραδοχή και παρατήρηση αρκετών ερευνών είναι η εξής: πολλοί είναι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί που μπορούν να εκτελέσουν την διαδικασία του να αντιστρέφουν και να πολλαπλασιάζουν για να διαιρούν κλάσματα. Ωστόσο, δεν δύνανται να δώσουν την εννοιολογική ερμηνεία της διαδικασίας (Ball, 1990˙ Borko et al., 1992). Οι Li και Kulm (2008) κατέληξαν στην έρευνα τους ότι κανένας από τους 46 εκπαιδευτικούς των ΗΠΑ δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει γιατί αυτός ο μαθηματικός κανόνας ισχύει και πώς αυτός ο αλγόριθμος δουλεύει. Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα έρευνας που πραγματοποιήθηκε στο Ισραήλ σε φοιτητές παιδαγωγούς, καθώς η πλειοψηφία των συμμετεχόντων έλυνε με ευκολία διαιρέσεις χωρίς όμως να μπορεί να εξηγεί την διαδικασία που ακολουθεί. Επίσης, οι περισσότεροι συμμετέχοντες δεν γνώριζαν πιθανές παρανοήσεις και πηγές λανθασμένων απαντήσεων μαθητών για αυτήν την πράξη (Tirosh, 2000)

Σε πολλές έρευνες τονίστηκε το γεγονός ότι όταν εκπαιδευτικοί ερωτώνται από μαθητές γιατί μία διαίρεση είχε ως αποτέλεσμα (πηλίκο) έναν μεγαλύτερο σε αξία αριθμό, οι περισσότεροι από αυτούς αγνοούσαν την ερώτηση ή απλά απαντούσαν να αντιστρέψουν και να πολλαπλασιάσουν (Ball, 1990˙ Tirosh, 2000). Επιπλέον, τα κλάσματα στο σχολείο διδάσκονται συχνά χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες διαδικασίες (κανόνες και αλγόριθμους) αντί οι δάσκαλοι να επιτρέπουν στους μαθητές να βιώσουν ποικίλους τρόπους χειρισμού των πράξεων. Η Ball (1991) δήλωσε ότι υποψήφιοι δάσκαλοι δεν συνδέουν την έννοια της διαίρεσης μεταξύ διαφορετικών πλαισίων, όπως η διαίρεση κλασμάτων, η διαίρεση με το μηδέν και η διαίρεση στην άλγεβρα. Αντιμετωπίζουν κάθε διαίρεση ως ξεχωριστό θέμα χωρίς να έχει καμία σχέση με τα άλλα πλαίσια και παραθέτουν κάθε φορά μια συγκεκριμένη διαδικασία ή κανόνα για κάθε μία περίπτωση.

Η Ma (1990) δήλωσε ότι όταν οι δάσκαλοι καθοδηγούν τους μαθητές προς την κατανόηση των κλασμάτων, πρέπει να είναι έτοιμοι να ακολουθήσουν πολλαπλούς τρόπους ώστε οι διδασκόμενοι να κατανοήσουν την διαίρεση. Θα πρέπει να έχουν υπόψιν πόσο δύσκολο είναι αυτό το αντικείμενο και να παρέχουν ποικίλες ιδέες και παραδείγματα σε αυτούς που πιστεύουν ότι «η διαίρεση πάντα μικραίνει. Παρόλα αυτά, στις έρευνες της βρήκε ότι οι ίδιοι οι δάσκαλοι συχνά συγχέουν την διαίρεση με μία κλασματική μονάδα με την διαίρεση με τον ακέραιο παρονομαστή. Επίσης, ήταν σύνηθες να μπερδεύουν την διαίρεση με τον πολλαπλασιασμό όπως για παράδειγμα η διαίρεση με το μισό να συγχέεται με τον πολλαπλασιασμό με το μισό. Σε κάποιες περιπτώσεις, η διαίρεση με το μισό συγχεόταν με τον πολλαπλασιασμό με το μισό και την διαίρεση με το δύο.

1.5.3.2 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Όπως στην διαίρεση, έτσι και στον πολλαπλασιασμό οι μελέτες σημειώνουν ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών ακολουθούν σωστά τον αλγόριθμο χωρίς όμως να έχουν την δυνατότητα να εξηγήσουν την λειτουργία αυτού (Ball, 1990˙ Λεμονίδης, 2016˙ Tirosh, 2000). Όταν, για παράδειγμα σε έρευνα, κλήθηκαν να αναφέρουν την στρατηγική που ακολούθησαν για την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλασιασμό κλασμάτων και να ερμηνεύσουν την διαδικασία, αυτοί απλά παραθέταν την ίδια την διαδικασία, δηλαδή την πράξη του πολλαπλασιασμού (Caglayan and Olive, 2011)., το να γνωρίζει κάποιος το αποτέλεσμα μιας πράξης πολλαπλασιασμού των κλασμάτων με τον κανόνα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι ξέρει και τη σημασία της πράξης αυτής (Λεμονίδης, 2016).

Έτσι, ενήλικοι και μαθητές δυσκολεύονται και κάνουν λάθη στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Ένας τύπος λαθών είναι τα αλγοριθμικά λάθη. Όταν αντιλαμβάνονται τον αλγόριθμο ως μια ανούσια σειρά βημάτων, μαθητές και εκπαιδευτικοί μπορεί να παραλείψουν κάποια βήματα ή να τα αλλάξουν και να οδηγηθούν σε λάθη. Κάποια λάθη που επισημαίνει ο Ashlock (1990) είναι: $4\frac{2}{3}$ x$\frac{1}{4}$= $4\frac{2}{12}$, $5\frac{1}{3}$ x$6\frac{3}{4}$= $30\frac{3}{12}$.Επίσης, η επιρροή των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων είναι εμφανής σε συνήθη λάθη όπως $\frac{7}{8}$ x $\frac{3}{4}$ = $\frac{7}{8}$ x $\frac{6}{8}$= 45/8 και 2 1/2 x 1 3/10 = 2 5/1 x 1 13/10 = 2 65/10 όπου τα κλάσματα γίνονται ομώνυμα και πολλαπλασιάζονται μόνο οι αριθμητές (Raber ,1999).

Επιπλέον, οι Fazio & Siegler (2011) αναφέρουν ότι στα προβλήματα πολλαπλασιασμού, όταν τα κλάσματα έχουν ίδιο παρονομαστή, οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τον παρονομαστή στην πράξη. Έτσι, για παράδειγμα, γράφουν , 5/4 x 5/1= 4/5. Το Mathematics Navigator (2015) σημειώνει ότι κατά τον πολλαπλασιασμό παρατηρείται καμιά φορά και η περίπτωση κάποιοι μαθητές να διαιρούν τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή του ενός κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου. Για παράδειγμα, 1/2 x 4/6= 2/3 . Επιπλέον, μπορεί τα παιδιά να πολλαπλασιάζουν τον αριθμητή του πρώτου κλάσματος με τον παρονομαστή του δεύτερου και αντίστροφα και να προσθέτουν τα αποτελέσματα μεταξύ τους. Για παράδειγμα,

¾ x 5/7 = (3x7)+(4x5)= 41

Από την άλλη πλευρά, οι Young & Zientek, (2011) σημειώνουν ότι ακόμη και οι εκπαιδευτικοί δεν είναι ευέλικτοι στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Συχνά, παρατηρούμε ότι προκειμένου να εκτελέσουν μία πράξη πολλαπλασιασμού, μετέτρεπαν σε κοινούς, τους παρονομαστές των κλασμάτων, πράγμα που δεν υπόκειται στη μεθοδολογία εκτέλεσης της πράξης. Ομοιότητα παρουσιάζει μία έρευνα (Newton, 2008) στην οποία φάνηκε οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιούν την τακτική του πολλαπλασιασμού χιαστί «cross- multiply» για πράξη πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Ωστόσο, πέρα από τα αλγοριθμικά λάθη εμφανίζεται κι ένας άλλος, πιο ουσιαστικός, τύπος λαθών τόσο στον πολλαπλασιασμό όσο και στην διαίρεση. Αυτός των διαισθητικών λαθών. Τα λάθη και οι δυσκολίες αυτές οφείλονται σε διαισθήσεις των ατόμων για τις ίδιες τις πράξεις που βασίζονται σε προηγούμενες εμπειρίες με αυτές (Barash & Klein, 1996). Έτσι συναντάμε το σύνηθες διαισθητικό κανόνα ότι «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει» (Behr et al., 1992) και την διαισθητική αντίληψη του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (Siegler & Lortie – Forgues , 2015˙ Λεμονίδης, 2016) . Ένας κανόνας ο οποίο δεν βρίσκει εφαρμογή στα κλάσματα πάντα.

1.5.3.3 Αίτια και παράγοντες δυσκολιών στον πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων

Ο Fischbein (1987) που ήταν πιθανότατα ο πρώτος που παρατήρησε το συγκεκριμένο φαινόμενο, υποστηρίζει ότι μαθητές και ενήλικοι καλλιεργούν από νωρίς διαισθητικά – πρωτόγονα μοντέλα για τις τέσσερεις πράξεις, σύμφωνα με τα οποία συνδέουν την πρόσθεση με το «βάζω μαζί», την αφαίρεση με το «βγάζω κάτι», το πολλαπλασιασμό με την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και την διαίρεση με την ίση μοιρασιά. Αυτά τα διαισθητικά μοντέλα διαμορφώνουν σιωπηρά τις προσδοκίες για την επίδραση που έχουν αυτές οι πράξεις στους αριθμούς και τις συνδέουν με συγκεκριμένα αποτελέσματα. Άλλοι ερευνητές επεσήμαναν ότι αυτά τα διαισθητικά μοντέλα είναι συμβατά και υποστηρίζονται από την αρχική γνώση των ατόμων για τους φυσικούς αριθμούς και την εμπειρία με πράξεις αποκλειστικά με τέτοιους αριθμούς (Christou, 2015˙ Vamvakoussi et al., 2012).

Σύμφωνα με τους Sigler & Lortie- Forgues (2015) και τον Λεμονίδη (2016), οι παραπάνω προσδοκίες και τα διαισθητικά μοντέλα αποτελούν έναν τύπο παρανοήσεων, αυτού του «λάθος στην κατεύθυνσή της επίδρασης» (direction of effects errors) στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Ένα άτομο που κατανοεί μια αριθμητική πράξη κατανοεί την κατεύθυνση του αποτελέσματος που προκύπτει από αυτήν την πράξη. Για παράδειγμα, για την πρόσθεση και την αφαίρεση η κατεύθυνση είναι η ίδια για όλους τους θετικούς αριθμούς: το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι μεγαλύτερο και από τους δύο προσθετέους και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι μικρότερο από το μειωτέο. Ωστόσο, για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση η κατεύθυνση της επίδρασης εξαρτάται από τους αριθμούς που εμπλέκονται (Sigler & Lortie- Forgues, 2015).

Παράγοντες πολλαπλασιασμού μεταξύ του 0 και του 1 παράγουν γινόμενο μικρότερο αυτών. Αντίστοιχα, η διαίρεση με διαιρέτη μεταξύ του 0 και του 1 έχει ως πηλίκο έναν αριθμό μεγαλύτερο από το διαιρετέο.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει η αντίθετη κατεύθυνση απ' ότι στις πράξεις αυτές με ακεραίους. Δηλαδή, στους ρητούς αριθμούς όταν πολλαπλασιάζουμε με κλάσμα ή δεκαδικό μικρότερο της μονάδας (π.χ. ¾ x ½ = 3/8 ή 20x 0,5= 10) η πράξη μικραίνει δηλαδή έχει επίδραση με αντίθετη κατεύθυνση από ότι ο πολλαπλασιασμός με ακέραιους αριθμούς, δεκαδικούς ή κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας. Παρόμοια, όταν διαιρούμε με κλάσμα ή δεκαδικό μικρότερο της μονάδας (π.χ. ¾:1/2 = 6/4=3/2 ή 20: 0,5= 40) η πράξη μικραίνει δηλαδή έχει επίδραση με αντίθετη κατεύθυνση από ότι η διαίρεση με ακεραίους, δεκαδικούς αριθμούς ή κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας όπου η διαίρεση μικραίνει. (Λεμονίδης, 2016).

Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή είναι εμφανές ότι το φαινόμενο της παρανόησης στην κατεύθυνση της επίδρασης των πράξεων αποτελεί μία έκφανση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού που επηρεάζει τις πράξεις. Μέσα από αυτήν την προσέγγιση επανεξετάστηκαν πρόσφατα οι πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς ή και σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς και πιο συγκεκριμένα η τάση να θεωρείται ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνουν τους αριθμούς ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση τους μικραίνουν. Πολλοί ερευνητές είχαν επισημάνει αυτές τις παρανοήσεις στον τρόπο με τον οποίο λύνουν οι μαθητές τα προβλήματα (π.χ. Bell, Swan, & Taylor, 1981).

Έτσι, πραγματοποιήθηκαν μελέτες που εξέτασαν αυτό το φαινόμενο δίνοντας σε μαθητές γυμνασίου αλλά και σε ενήλικες συμμετέχοντες (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2013) ερωτήσεις όπως «το 5+2x είναι πάντα μεγαλύτερο από 5;» Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι πράγματι οι συμμετέχοντες είχαν ισχυρές διαισθητικές πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων, που έπαιρναν τη μορφή γενικών κανόνων όπως ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνουν τους αριθμούς, ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση πάντα τους μικραίνουν.

Παρομοίως, τα αποτελέσματα μελέτης (Christou, 2015) σε 189 μαθητές Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης έδειξαν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι σε πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν (π.χ., γίνεται 8:_=5;) οι αριθμοί που λείπουν είναι φυσικοί και οι πράξεις δίνουν πάντα συγκεκριμένα αποτελέσματα (ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει κι η διαίρεση μικραίνει). Η τάση αυτή συσχετίζεται θετικά με την κατανόηση των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών.

Επιπροσθέτως, ο Greer (1992) σημείωσε ότι μία άλλη διάσταση των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων κλασμάτων που τα κάνει πιο δύσκολα απ’ ότι η αφαίρεση και πρόσθεση είναι «διαστατική πολυπλοκότητα» τους : «Μία σχέση εντατικών ποσοτήτων (intensive quantity) όπως τα χιλιόμετρα ανά ώρα ίσως μετατραπούν από μία ποσότητα με αναφορά τις «ώρες» σε μία ποσότητα με αναφορά τα «χιλιόμετρα». Συνεπώς, όταν μαθητές και δάσκαλοι εργάζονται πάνω σε προβλήματα πολλαπλασιασμού, ιδιαίτερα όταν αυτά εμπεριέχουν κλάσματα, είναι σημαντικό να κατανοήσουν την μονάδα που αντιστοιχεί, καθώς επίσης και το που αναφέρεται η ποσότητα. Για παράδειγμα, η διαίρεση του ¾ με το ½ ρωτάει πόσα ½ υπάρχουν μέσα στο ¾. Η απάντηση είναι 1 με ¼ να περισσεύει, οπότε το πηλίκο θα μπορούσε να είναι 1 ¼. Εντούτοις, το σωστό πηλίκο είναι 1 ½ καθώς το ¼ που παραμένει αναφέρεται στο ¼ της 1 μονάδας, ενώ το ½ της σωστής απάντησης αναπαριστά το ½ του ½, στη νέα δηλαδή μονάδα αναφοράς (εφόσον ρωτάμε πόσα ½ περιέχονται στο ¾, δεν αναφερόμαστε πια στο ολόκληρο) (Olanoff, 2011).

1.5.3.4 Επιδόσεις εκπαιδευτικών στα προβλήματα και τις αναπαραστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων

Όπως προαναφέρθηκε, η αδυναμία της εννοιολογικής κατανόησης των εκπαιδευτικών στο πολλαπλασιασμό και στην διαίρεση κλασμάτων εκφράζεται και μέσα από την επίλυση και την διατύπωση προβλημάτων. Για παράδειγμα, ο Simon (1993), στα πλαίσια της μελέτης του, βρήκε ότι 70% των υποψηφίων δασκάλων δεν είχε την ευχέρεια να κατασκευάσει ένα λεκτικό πρόβλημα διαίρεσης. Οι Unlu και Ertekin (2012) διεξήγαγαν έρευνα σε Τούρκους φοιτητές εκπαιδευτικούς από τους οποίους, ζητήθηκε η διατύπωση προβλήματος για πράξεις διαίρεσης κλασμάτων. Τα αποτελέσματα, εκτός από την αποκλειστική τύπου γνώση, έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες είχαν δυσκολία στη διατύπωση προβλημάτων διαίρεσης κλασμάτων, αδυναμία που οφείλεται στην έλλειψη της εννοιολογικής τους κατανόησης για το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο. Για το λόγο αυτό, αρκετοί συμμετέχοντες διατύπωσαν πολλαπλασιαστικού τύπου προβλήματα κλασμάτων.

Με την διαίρεση κλασμάτων και την κατασκευή προβλημάτων ασχολήθηκαν και οι Lo και Luo (2012) πραγματοποιώντας έρευνα σε πανεπιστήμιο της Ταιβάν. Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί της μελέτης εμφάνισαν ελλείψεις σε εξειδικευμένες γνώσεις για τη διαίρεση κλασμάτων: για παράδειγμα, παρουσίασαν αδυναμία στη διατύπωση κατάλληλων προβλημάτων μερισμού και έδειξαν σταθερή προτίμηση στη διατύπωση προβλημάτων μέτρησης ή αδυναμία στη χρήση κατάλληλων εικονικών διαγραμμάτων. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και οι Leung και Carbone (2013) που εξέτασαν μελλοντικούς δάσκαλους του Χονγκ Κονγκ. Οι 19 συμμετέχοντες δεν είχαν κατακτήσει εννοιολογικά αυτήν την πράξη καθώς δυσκολεύονταν να θέσουν ρεαλιστικά προβλήματα και προτιμούσαν κυρίως προβλήματα μέτρησης.

Αρκετές έρευνες, επίσης, αναφέρουν ότι οι δάσκαλοι συχνά συγχέουν καταστάσεις που απαιτούν διαίρεση με ένα κλάσμα με αυτές που απαιτούν διαίρεση με ένα ακέραιο ή πολλαπλασιασμό με ένα κλάσμα (Ma, 1999˙ Ball, 1990). Η Ball (1990) ρώτησε 10 υποψήφιους δασκάλους και 9 υποψήφιους καθηγητές να δημιουργήσουν καταστάσεις που θα μπορούσαν να πλαισιώσουν την πράξη 1 ¾: ½. Οι 17 μπορούσαν να υπολογίσουν το σωστό αποτέλεσμα αλλά μόνο οι 5 ήταν ικανοί να κατασκευάσουν ένα κατάλληλο μαθηματικό πρόβλημα ή κάποια κατάσταση. 5 άλλοι διατύπωσαν προβλήματα που λύνονται με την πράξη 1 ¾: 2, ένας με την πράξη 1 ¾ x2 και 8 δεν ήταν σε θέση να βρουν κάποιο σενάριο, σωστό ή λάθος. Όταν ερωτήθηκαν για ποιο λόγο η διαίρεση ήταν δύσκολη απάντησαν ότι «είναι δύσκολο (ή απίθανο) να συνδέσεις την πράξη 1 ¾: ½ με καταστάσεις της πραγματικής ζωής, καθώς, όπως ένας ανέφερε, «δεν σκέφτεσαι με κλάσματα, περισσότερο σκέφτεσαι με ακέραιους αριθμούς»

Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξε η Ma (1999) έχοντας τα ίδια ερωτήματα για το δείγμα που αποτελούταν από 23 Αμερικάνους και 72 Κινέζους εκπαιδευτικούς. Στη έρευνα φάνηκε ότι 20 από τους 23 Αμερικάνους εκπαιδευτικούς δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν ένα κατάλληλο πρόβλημα για να περιγράψουν την δοσμένη πράξη διαίρεσης 1 ¾ ÷ ½, ενώ πολλοί από αυτούς δεν ήταν σε θέση καν να εκτελέσουν τον ίδιο τον αλγόριθμο αφού δεν θυμόντουσαν τον τρόπο. Αυτό προκάλεσε μεγάλη αναταραχή στην μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα και κάποιοι εκπαιδευτές μαθηματικών (Askey, 1999˙ Howe, 1999), προσπάθησαν να λάβουν δράση και να βρουν τρόπους ώστε να ενθαρρύνουν την κατανόηση και τη γνώση των εκπαιδευτικών γύρω από τη διαίρεση των κλασμάτων.

Οι Borko et al. (1992) αναφέρουν μία περίπτωση στην οποία μία υποψήφια δασκάλα ρωτήθηκε από μαθητή να εξηγήσει τον κανόνα της «αντιστροφής και πολλαπλασιασμού» για την διαίρεση κλασμάτων. Η τάξη είχε μόλις απαντήσει στην πράξη 3/4: 1/2. Η υποψήφια δασκάλα δημιούργησε ένα σενάριο και ένα μοντέλο εμβαδού που αντιστοιχούσε στην πράξη 3/4x ½ και στην συνέχεια συνειδητοποίησε ότι το παράδειγμα της αναλογούσε σε πολλαπλασιασμό και όχι διαίρεση κλασμάτων. Καθώς κατάλαβε ότι δεν ήταν σε θέση να ανταπεξέλθει στις προσδοκίες των μαθητών τελείωσε την συζήτηση λέγοντας στους μαθητές «χρησιμοποιείστε προς το παρόν τον κανόνα» και ότι θα σκεπτόταν μία καλύτερη εξήγηση αργότερα. Ωστόσο, στην συνέντευξη της αργότερα παραδέχτηκε ότι δεν προσπάθησε τελικά να δώσει μία καλύτερη εξήγηση και ούτε φάνηκε να έχει σκοπό, ακόμη και αν οι ερευνητές επισήμαναν ότι θα μπορούσε στο μέλλον να ξαναβρεθεί αντιμέτωπη με την ίδια απάντηση και δεν θα είναι σε θέση να παρέχει μία εννοιολογική εξήγηση.

Κάποια περαιτέρω παραδείγματα στην βιβλιογραφία υποδηλώνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν διαγράμματα για να εξηγήσουν το εξαγόμενο μιας πράξης δύο ρητών αριθμών. Σε μία έρευνα (Eisenhart et al.,1993) οι ερευνητές κατέληξαν ότι πολλοί μελλοντικοί δάσκαλοί δεν κατάφεραν να εξηγήσουν την πράξη 0,7 x 2,35 με την χρήση μιας ορθογώνιας περιοχής. Οι Amstrong και Bezuk (1995) έδωσαν σε εν ενεργεία καθηγητές ένα πρόβλημα στο οποίο ο υπολογισμός του 1/3 των 3/4 θα ήταν κατάλληλος για να λυθεί. Οι δάσκαλοι αναγνώρισαν ότι το πρόβλημα απαιτούσε πολλαπλασιασμό κλασμάτων αλλά δυσκολεύτηκαν να περιγράψουν την σκέψη τους, σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα για να αντιστοιχεί στην αλγοριθμική λύση. Τέλος οι Ball et al. (2001) παρουσίασαν ένα σκηνικό σε τάξη κατά το οποίο ένας δάσκαλος απέτυχε να εξηγήσει το αποτέλεσμα δεκαδικών αριθμών χρησιμοποιώντας τις διαστάσεις και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου σχήματος.

1.6 Κριτική ανασκόπηση- η θέση της νέας έρευνας

Ανακεφαλαιώνοντας τις μελέτες με θέμα τη γνώση και τις ικανότητες μαθητών και εκπαιδευτικών στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων αντιλαμβανόμαστε ότι στην πλειοψηφία τους υπογραμμίζουν την έλλειψη κατανόησης των δύο αυτών εννοιών. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτή η έλλειψη χαρακτηρίζεται ως εννοιολογικής φύσεως καθώς, όπως φαίνεται σε έρευνες, οι εκπαιδευτικοί είναι συνήθως σε θέση να εκτελούν με επιτυχία τις δύο πράξεις χωρίς όμως να δύνανται να τις ερμηνεύσουν και να τις ορίσουν εννοιολογικά. Αυτό, ωστόσο, είναι ένα κρίσιμο στοιχείο που απαιτείται από έναν εκπαιδευτικό στην διδασκαλία κάθε διδακτικού αντικειμένου.

Πιο συγκεκριμένα, στην βιβλιογραφία παρατηρούμε ότι έχουν διεξαχθεί έρευνες που πραγματεύονται τις γνώσεις και ικανότητες εκπαιδευτικών σε διαφορετικές όψεις μιας μαθηματικής έννοιας. Έτσι, για παράδειγμα μερικές μελέτες επικεντρώνονται στην διαίρεση κλασμάτων και την εννοιολογική ερμηνεία- εξήγηση της από υποψήφιους ή εν ενεργεία εκπαιδευτικούς (Li & Kulman, 2008; Tirosh,2000) και άλλοτε στην κατασκευή προβλημάτων και ρεαλιστικών καταστάσεων (Lu & Luo, 2012; Ball, 1990; Borko et al., 1992). Μικρότερο είναι το ερευνητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζεται για το πολλαπλασιασμό κλασμάτων και τους εκπαιδευτικούς, με έρευνες να μελετούν είτε την ευελιξία στην εκτέλεση του αλγορίθμου (Young & Zientek, 2011) είτε πιθανά λάθη (Nexton, 2008). Εντούτοις, πραγματοποιήθηκαν μελέτες που εστίασαν στην ικανότητα εν ενεργεία δασκάλων να αποτυπώνουν εικονικά πολλαπλασιασμούς ρητών αριθμών (Amstrong & Bezuk, 1995; Ball, 2010).

Όπως είναι εμφανές στην ανασκόπηση , η ερευνητική δραστηριότητα γύρω από το εν λόγω θέμα είναι ανεπτυγμένη κυρίως σε διεθνές επίπεδο. Εστιάζοντας στο εθνικό χώρο, αν και το ερευνητικό ενδιαφέρον για την γνώση των εκπαιδευτικών και το αντίκτυπο της είναι αυξημένο, οι μελέτες που εστιάζουν στην συγκεκριμένη μαθηματική θεματική διδασκαλίας (πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων) είναι περιορισμένες. Επίσης, η πλειοψηφία των ερευνών που πραγματεύονται τις πράξεις των κλασμάτων επικεντρώνονται κυρίως στην διαίρεση αυτών, με τον πολλαπλασιασμό να λαμβάνει μια δευτερεύουσα θέση με μικρότερο ενδιαφέρον.

Το, εν λόγω, διπλό κενό καλείται να καλύψει η παρούσα έρευνα, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στους εν δυνάμει δασκάλους και στις γνώσεις και ικανότητες τους στον πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Επιπροσθέτως, στην παρούσα ερευνητική εργασία, γίνεται μια προσπάθεια σύνθεσης των διαφορετικών προαναφερθέντων όψεων που έχουν εξεταστεί σε προηγούμενες έρευνες. Έτσι, η νέα έρευνα, αξιοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα, θέτει προς εξέταση τις εξής πτυχές ικανότητας μελλοντικών δασκάλων: α. Εκτέλεση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων β. Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων με συγκεκριμένο πλαίσιο γ.

Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων χωρίς πλαίσιο δ. Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων ε.. Κατασκευή προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Στόχος και Ερευνητικά Ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν η διερεύνηση του επιπέδου της γνώση και της κατανόησης του πολλαπλασιασμό και της διαίρεσης κλασμάτων από υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ειδικότερα, στόχος της έρευνας ήταν να εξεταστεί η γνώση περιεχομένου (διαδικαστική και εννοιολογική) στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, των αναπαραστάσεων των εν λόγω πράξεων και της επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων, ύστερα από μία σειρά ακαδημαϊκών διαλέξεων με αντίστοιχο περιεχόμενο.

Πιο συγκεκριμένα τα ερευνητικά ερωτήματα που πλαισιώνουν τον στόχο και τέθηκαν προς εξέταση είναι η ικανότητα των μελλοντικών δασκάλων να:

1. εκτελούν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων;
2. δημιουργούν αναπαραστάσεις για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων, όταν οι πράξεις δεν έχουν πλαίσιο. Ποιες αναπαραστάσεις επιλέγουν για να αναπαραστήσουν τις εν λόγω πράξεις και ποια είναι τα συχνά λάθη στην διαδικασία της αναπαράστασης;
3. δημιουργούν αναπαραστάσεις για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων όταν οι πράξεις παρουσιάζονται με μορφή προβλήματος; Ποιες αναπαραστάσεις επιλέγουν για να αναπαραστήσουν τις εν λόγω πράξεις και ποια είναι τα συχνά λάθη στην διαδικασία της αναπαράστασης;
4. επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Ποιους τρόπους επίλυσης προτιμούν;
5. να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα τις με βάση δεδομένες πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων; Τι είδους μαθηματικά προβλήματα κατασκευάζουν και σε ποια συχνά λάθη καταλήγουν στην διαδικασία κατασκευής προβλήματος;

2.2 Μέθοδος της Έρευνας

Για την διεξαγωγή της έρευνας συλλέχθηκαν ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Τα ποιοτικά δεδομένα στην συνέχεια μετατράπηκαν σε ποσοτικά και επεξεργάστηκαν με το λογισμικό στατιστικής ανάλυσης SPSS 23.

2.3 Δείγμα της Έρευνας

Η διαδικασία της επιλογή του δείγματος της έρευνας είχε τα χαρακτηριστικά βολικής δειγματοληψία και το δείγμα θεωρείται ευκολίας. Το δείγμα των συμμετεχόντων επιλέχθηκε με κριτήριο την προσβασιμότητα στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας όπου φοιτούσαν οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί.

Το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτελούταν από 73 υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Από τους εν λόγω συμμετέχοντες, οι 58 (79,5%) είναι γυναίκες και οι 15 (20,5%) άντρες. Το ποσοστό των κοριτσιών είναι σαφώς μεγαλύτερο όπως είναι εμφανές. Εντούτοις, θα λέγαμε ότι τα ποσοστά αυτά είναι αντιπροσωπευτικά του συνόλου των εκπαιδευτικών στα δημοτικά σχολεία του ελληνικού χώρου.

Όλοι οι συμμετέχοντες βρίσκονταν στο 2^{ο} έτος σπουδών τους και συγκεκριμένα στο Δ΄ εξάμηνο της φοίτησης τους. Το μεγαλύτερο μέρος αυτών ήταν νέοι που εισήχθησαν μέσω πανελλαδικών εξετάσεων και σπούδαζαν για την απόκτηση του πρώτου τους πτυχίου. Εντούτοις, στους συμμετέχοντες φοιτητές συμπεριλαμβάνονταν 7 άτομα (9,8%) που σπούδαζαν για την απόκτηση δεύτερου (ή παραπάνω) πτυχίου. Οι εν λόγω φοιτητές εισήχθησαν στο ΠΤΔΕ μέσω της διαδικασίας των κατατακτήριων εξετάσεων.

2.4 Ερευνητικό Εργαλείο

Το εργαλείο της έρευνας χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις που δόθηκε στους συμμετέχοντες μέσω μιας γραπτής, ατομικής εργασίας. Η εργασία αυτή δόθηκε στους φοιτητές από τον διδάσκοντα κατά την διάρκεια του μαθήματος Υ301 Διδακτική των Μαθηματικών.

Το δεύτερο μέρος αφορά ερωτήσεις που δόθηκαν στους συμμετέχοντες στις γραπτές εξετάσεις του μαθήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών του Δ’ εξαμήνου. Η συμμετοχή στις εξετάσεις ήταν υποχρεωτική για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς-φοιτητές. Ωστόσο, συλλέξαμε δεδομένα από φοιτητές που ανταποκρίθηκαν αφενός στην εργασία του μαθήματος, στέλνοντας τις απαντήσεις τους ηλεκτρονικά, και αφετέρου στις εξετάσεις εξαμήνου για το μάθημα.

2.4.1 Τα έργα στην εργασία του μαθήματος

Η γραπτή εργασία δόθηκε στους φοιτητές ύστερα από την παράδοση αντίστοιχων ακαδημαϊκών μαθημάτων. Πραγματοποιήθηκαν, δηλαδή, δύο διαλέξεις από τον διδάσκοντα του μαθήματος με θέμα τους ρητούς αριθμούς με ειδική διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Αναλυτικότερα, τα θέματα που διδάχθηκαν ήταν η κατανόηση και οι αναπαράσταση των πράξεων, η επίλυση και η κατασκευή προβλημάτων και κάποιες διδακτικές παρατηρήσεις. Παράλληλα, έγινε αναφορά σε σχετικές έρευνες.

Τα έργα που δόθηκαν στην γραπτή εργασία των φοιτητών αφορούσαν τους παρακάτω άξονες:

1.Εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων

2.Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων χωρίς πλαίσιο

3. Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων με πλαίσιο

4. Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων

5. Κατασκευή- δημιουργία προβλημάτων με βάση την πράξη του πολλαπλασιασμό και της διαίρεσης κλασμάτων

Πιο συγκεκριμένα, στου φοιτητές δόθηκαν οι παρακάτω τρεις αποπλαισιωμένες πράξεις κλασμάτων:

Να αφήσεις κενό στην παρακάτω αρίθμηση, έτσι οι αριθμοί μοιάζουν με μικτούς αριθμούς

1. $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ (Π: Πολλαπλασιασμός)

2. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (Δ: Διαίρεση)

3. $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΔΜ: Διαίρεση Μεικτού)

Επιπλέον, δόθηκαν τα τρία παρακάτω λεκτικά προβλήματα (Π) πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων:

1: Ο Κώστας αγόρασε $\frac{3}{4}$ του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το $\frac{1}{3}$ του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε; (ΠΠ: Πρόβλημα Πολλαπλασιασμού)

2: Από ένα δοχείο που περιέχει 3 του κιλού γιαουρτιού γεμίζουμε κεσεδάκια χωρητικότητας του $\frac{3}{4}$ κιλού γιαουρτιού. Πόσα κεσεδάκια θα γεμίσουμε; (ΠΔ1: Πρόβλημα Διαίρεσης 1)

3: Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους $\frac{3}{4}$ του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το καθένα έχει μήκος $\frac{1}{8}$ του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε; (ΠΔ2: Πρόβλημα Διαίρεσης 2)

Τα έργα στα οποία έπρεπε να ανταποκριθούν οι φοιτητές και τα οποία στηρίχτηκαν στις παραπάνω πράξεις κλασμάτων και προβλήματα είναι:

Άξονας 1: Εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 1: Να υπολογίσετε την πράξη $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ (ΕΠ: Εκτέλεση Πολλαπλασιασμού)

Έργο 2: Να υπολογίσετε την πράξη $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΕΔ: Εκτέλεση Διαίρεσης)

Έργο 3: Να υπολογίσετε την πράξη $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΕΔΜ: Εκτέλεση Διαίρεσης Μεικτού)

Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)

Έργο 4: Να δώσετε μια αναπαράσταση της πράξης Π: $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ (ΑΠ: Αναπαράσταση Πολλαπλασιασμού)

Έργο 5: Να δώσετε μία αναπαράσταση της πράξης Δ: $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΑΔ: Αναπαράσταση Διαίρεσης)

Έργο 6: Να δώσετε μία αναπαράσταση της πράξης ΔΜ: $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΑΔΜ: Αναπαράσταση Διαίρεσης Μεικτού)

Άξονας 3: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (με πλαίσιο)

Έργο 7: Να δώσετε μια αναπαράσταση της λύσης του παραπάνω προβλήματος ΠΔ1 (ΑΠΔ1: Αναπαράσταση Προβλήματος Διαίρεσης 1)

Έργο 8: Να δώσετε μια αναπαράσταση της λύσης του παραπάνω προβλήματος ΠΠ (ΑΠΠ: Αναπαράσταση Προβλήματος Πολλαπλασιασμού).

Έργο 9: Να δώσετε μια αναπαράσταση της λύσης του παραπάνω προβλήματος ΠΔ2 (ΑΠΔ2: Αναπαράσταση Προβλήματος Διαίρεσης 2).

Άξονας 4: Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 10: Επίλυση ΠΔ1 (ΕΠΔ1: Επίλυση Προβλήματος Διαίρεσης 1

Έργο 11: Επίλυση ΠΠ (ΕΠΠ: Επίλυση Προβλήματος Πολλαπλασιασμού)

Έργο 12: Επίλυση ΠΔ2 (ΕΠΔ2: Επίλυση Προβλήματος Διαίρεσης 2)

Άξονας 5: Κατασκευή- δημιουργία προβλημάτων με βάση την πράξη του πολλαπλασιασμό και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 13: Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα όπου η πράξη Π: $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ είναι η λύση του (ΚΠΠ: Κατασκευή Προβλήματος Πολλαπλασιασμού)

Έργο 14: Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα όπου η πράξη Δ: $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ να είναι η λύση του (ΚΠΔ: Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης)

Έργο 15: Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα όπου η πράξη ΔΜ: $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ να είναι η λύση του (ΚΠΔΜ: Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης Μεικτού)

Στον άξονα 1 παρατηρούμε ότι με το έργα 1, 2 και 3 (ΕΠ, ΕΔ, ΕΔΜ) ελέγχεται η ικανότητα των συμμετεχόντων να επιλύουν σωστά απλές αποπλαισιωμένες πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Βλέπουμε, λοιπόν, κατά πόσο μπορούν να εκτελέσουν επιτυχώς τις τρεις πράξεις και να καταλήξουν στο ορθό γινόμενο ή πηλίκο, ακολουθώντας όποιο τρόπο επιθυμούν. Εξετάζεται, δηλαδή, κυρίως η διαδικαστική γνώση για αυτές τις πράξεις.

Αντιθέτως, τα έργα των αξόνων 2 και 3 θα λέγαμε ότι αφορούν την εννοιολογική γνώση και βαθιά κατανόηση των πράξεων. Στον δεύτερο άξονα (άξονα 2) και στα έργα 4, 5 και 6 (ΑΠ, ΑΔ, ΑΔΜ) ελέγχεται αν οι φοιτητές είναι σε θέση να οπτικοποιήσουν αποπλαισιωμένες πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης , και τις σχέσεις που διέπουν τα εμπλεκόμενα κλάσματα, με ένα κατάλληλο σχέδιο (π.χ. μοντέλο εμβαδού ή μήκους). Στον άξονα 3 και στα έργα 7, 8 και 9 (ΑΠΠ2, ΑΠΔ1, ΑΠΔ2) εξετάζεται η ίδια ικανότητα αλλά σε πλαισιωμένες καταστάσεις, όταν δηλαδή δίνεται ένα λεκτικό πρόβλημα που λύνεται με μία από τις δύο πράξεις. Έτσι πέρα από την ικανότητα, διερευνάται ποιες αναπαραστάσεις προτιμούν και επιλέγουν οι συμμετέχοντες για την αποτύπωση των εν λόγω πράξεων καθώς και σε ποια λάθη μπορούν να καταλήξουν.

Στον άξονα 4 και στα έργα 10, 11 και 12 (ΚΠΠ,ΚΠΔ,ΚΠΔΜ) εξετάζεται η δεξιότητα της κατασκευής μαθηματικού προβλήματος με βάση μια δοσμένη, σε κάθε περίπτωση, πράξη κλασμάτων. Η δυνατότητα, δηλαδή, να διατυπώσουν μια ρεαλιστική προβληματική κατάσταση που επιλύεται με τις παραπάνω μαθηματικές πράξεις. Πέρα από την δυνατότητα, διερευνάται ποια είναι τα συχνότερα σενάρια που χρησιμοποιούν οι συμμετέχοντες για να πλαισιώσουν κάθε πράξη.

Στον επόμενο άξονα (άξονα 5), τα έργα 13, 14 και 15 (ΕΠΔ1,ΕΠΠ2,ΕΠΔ2) αφορούν την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Δηλαδή, παρατηρούμε την δυνατότητα των φοιτητών να επιλύουν προβλήματα με συγκεκριμένο πλαίσιο και σενάριο αξιοποιώντας τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Υπήρχε η περίπτωση οι συμμετέχοντες να λύσουν τα πρόβλημα με εναλλακτικούς τρόπους, οι οποίοι θα μπορούσαν να είναι εξίσου σωστοί.

2.4.2. Τα έργα στις εξετάσεις του μαθήματος

Τα θέματα των εξετάσεων που αφορούν την έρευνα ήταν 6 έργα εκτέλεσης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, αναπαράστασης των εν λόγω πράξεων και κατασκευής προβλημάτων με βάση δεδομένες πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Στα θέματα των εξετάσεων δεν υπήρχαν έργα επίλυσης προβλημάτων.

Πιο συγκεκριμένα , στα θέματα των εξετάσεων δόθηκαν τρεις αποπλαισιομένες πράξεις κλασμάτων:

1. $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ (Π: Πολλαπλασιασμός)

2. $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$ (Δ: Διαίρεση)

Με βάση τις παραπάνω πράξεις, οι εξεταζόμενοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε 6 έργα τα οποία ήταν:

Άξονας 1: Εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 16: Να υπολογίσετε την πράξη $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ (ΕΕΠ: Εξετάσεις Εκτέλεση Πολλαπλασιασμού).

Έργο 17: Να υπολογίσετε την πράξη $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$ (ΕΕΔ: Εξετάσεις Εκτέλεση Διαίρεσης)

Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 18: Να δώσετε μια αναπαράσταση της πράξης $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ (ΕΑΠ: Εξετάσεις Αναπαράσταση Πολλαπλασιασμού) Έργο 19: Να δώσετε μια αναπαράσταση της πράξης $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$ (ΕΑΔ: Εξετάσεις Αναπαράσταση Διαίρεσης)

Άξονας 4: Κατασκευή- δημιουργία προβλημάτων με βάση την πράξη του πολλαπλασιασμό και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 20: Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα όπου η πράξη $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ να είναι η λύση του (ΕΚΠΠ: Εξετάσεις Κατασκευή Προβλήματος Πολλαπλασιασμού)

Έργο 21: Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα όπου η πράξη $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$ να είναι η λύση του (ΕΚΠΔ: Εξετάσεις Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης)

2.5.Ερευνητική Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά την διάρκεια του εαρινού εξαμήνου του ακαδημαϊκού έτους 2017-2018 (Φεβρουάριος- Ιούνιος 2018). Αναλυτικότερα, διεξήχθη στα πλαίσια της παράδοσης και εξέτασης του μαθήματος Υ301 Διδακτική των Μαθηματικών που αποτελεί ένα από τα υποχρεωτικά μαθήματα θετικών επιστημών του τμήματος, σύμφωνα με το ισχύον οδηγό σπουδών. Ειδικότερα, η διαδικασία συλλογής δεδομένο εξελίχθηκε κατά το χρονικό διάστημα του Μαΐου-Ιουνίου 2018.

2.5.1. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Όπως προαναφέρθηκε η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, πραγματοποιήθηκαν αρχικά δύο ακαδημαϊκά μαθήματα 8 συνολικά ωρών με θέμα τους ρητούς αριθμούς. Ειδικότερα στη δεύτερη τετράωρη διάλεξη έγινε ειδική διδασκαλία για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Πιο αναλυτικά, το πρώτο μάθημα πραγματοποιήθηκε στις 8 Μαΐου 2018 και ως περιεχόμενο είχε τα εξής: Βασικό μαθηματικό υπόβαθρο για ρητούς αριθμούς και ασκήσεις, δυσκολίες και λάθη στους ρητούς αριθμούς, πολλαπλές ερμηνείες των κλασμάτων, χειραπτικά υλικά, αναπαραστάσεις και οπτικοποίηση. Το δεύτερο μάθημα πραγματοποιήθηκε στις 15 Μαΐου 2018 και ως περιεχόμενο είχε τα ακόλουθα: Πρόταση διδασκαλίας ρητών, πράξεις με ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων.

Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση σε αυτά τα αντικείμενα. Συγκεκριμένα, ο διδάσκοντας εστίασε στην κατανόηση και την αναπαράσταση αυτών, όπως επίσης στην επίλυση και στην δημιουργία προβλημάτων. Επιπροσθέτως, στο μάθημα αναφέρθηκαν ορισμένες διδακτικές παρατηρήσεις για τις εν λόγω πράξεις κλασμάτων καθώς και έρευνες που υπογραμμίζουν τις δυσκολίες των υποψήφιων και εν ενεργεία εκπαιδευτικών σε αυτό το διδακτικό θέμα.

Εφόσον πραγματοποιήθηκαν και ολοκληρώθηκαν οι διαλέξεις με το συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο δόθηκε στους φοιτητές μία εργασία που αποτελούταν από μια σειρά αντίστοιχων των μαθημάτων ερωτήσεων-ασκήσεων. Η εργασία αυτή ήταν υποχρεωτική για τους φοιτητές και αντιστοιχούσε σε ένα μέρος της τελικής βαθμολογίας του μαθήματος.

Για την εκτέλεση των εργασιών και την απάντηση των έργων που αφορούν την παρούσα έρευνα δόθηκε στους φοιτητές το χρονικό διάστημα 6 ημερών (24-30/5/2018) για να σκεφτούν, να απαντήσουν, να γράψουν και να στείλουν τις απαντήσεις τους. Για να πραγματοποιήσουν την εργασία κάποιοι φοιτητές χρησιμοποίησαν ηλεκτρονικά προγράμματα επεξεργασίας κειμένου (Microsoft Word, OpenDocumet) ώστε να παραθέσουν τις απαντήσεις τους. Μερικοί, ωστόσο, σημείωσαν τις απαντήσεις σε κάποιο φύλλο ή τετράδιο, τις φωτογράφισαν και τις συνέθεσαν σε ένα ηλεκτρονικό έγγραφο. Βέβαια, αρκετοί ήταν αυτοί που προέβησαν στον συνδυασμό των δύο τρόπων καθώς κυρίως οι αναπαραστάσεις σχεδιάστηκαν, συχνά με μολύβι ή στυλό σε κάποιο χαρτί. Ύστερα, η συλλογή των απαντήσεων έγινε μέσω ηλεκτρονικής αποστολής στην διαδικτυακή πλατφόρμα του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας στον διδάσκοντα καθηγητή.

Η δεύτερη φάση της συλλογής δεδομένος πραγματοποιήθηκε μέσω των εξετάσεων του μαθήματος στο τέλος του εαρινού εξαμήνου τον Ιούνιο (16/6/2018). Συγκεκριμένα, στις εξετάσεις και στα θέματα προς απάντηση που δόθηκαν στους συμμετέχοντες, υπήρξαν πέρα από άλλα θέματα που διδάχθηκαν κατά την διάρκεια του εξαμήνου, ερωτήσεις που αφορούσαν τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων. Το συνολικό πλήθος των ερωτήματα προς απάντηση στις εξετάσεις ήταν 12. Από αυτά, τα 6 αφορούσαν τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων, την αναπαράσταση του και την κατασκευή προβλημάτων Οι απαντήσεις από αυτά τα 6 έργα πάρθηκαν για την παρούσα έρευνα. Οι εξεταζόμενοι είχαν το χρονικό διάστημα των 3 ωρών για να απαντήσουν σε όλα τα ερωτήματα των θεμάτων, συμπεριλαμβανομένων των ερωτημάτων στις οποίες εστίαζε η έρευνα.

2.5.2 Τρόποι ανάλυσης των δεδομένων

Εφόσον συλλέχθηκαν, αφενός οι ηλεκτρονικές εργασίες των φοιτητών, και αφετέρου οι κόλλες αναφοράς με τις απαντήσεις των εξετάσεων, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των δεδομένων. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν ποιοτικά. Για την επεξεργασία και την μετατροπή των ποιοτικών δεδομένων σε ποσοτικών έγινε χρήση του προγράμματος στατιστικής ανάλυσης δεδομένων SPSS (Superior Performance Software System).

Σε αρχικό στάδιο, όλες οι απαντήσεις μελετήθηκαν και αξιολογήθηκαν ως προς την ορθότητα τους. Κάθε απάντηση χαρακτηρίστηκε ως «σωστή» ή «λάθος», καθώς επίσης όσα ερωτήματα δεν είχαν απάντηση χαρακτηρίστηκαν ως «μη απάντηση». Σε κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες απαντήσεων αντιστοιχίστηκε κάποιος κωδικός ώστε να γίνει η κωδικοποίηση και η επεξεργασία τους από το SPSS. Συγκεκριμένα η «μη απάντηση» κωδικοποιήθηκε ως 0, η «σωστή απάντηση» ως 1 και η «λάθος απάντηση» ως 2.

Πέρα από την αξιολόγηση της ορθότητας, μεγάλο μέρος των απαντήσεων ταξινομήθηκε σε κατηγορίες κοινών στοιχείων και επεξεργάστηκε αναλόγως. Δηλαδή, δόθηκε έμφαση και κατηγοριοποιήθηκαν τα είδη αναπαραστάσεων που αποτύπωναν οι μαθητές στα έργα με ή χωρίς πλαίσιο καθώς επίσης οι τρόποι επίλυσης και οι τύποι μαθηματικών προβλημάτων που κατασκεύαζαν σε κάθε έργο. Βέβαια, σημαντική κρίθηκε και η κατηγοριοποίηση των λαθών που σημειώθηκαν στα περισσότερα έργα.

Στην συνέχεια, πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις σε δύο επίπεδα. Αρχικά, συγκρίθηκαν οι επιδώσεις μεταξύ των έργων σε κάθε άξονα, ώστε να αναδειχθεί ποιο από τα τρία έργα (στην εργασία) ή ποιο από τα δύο έργα (στις εξετάσεις) συγκέντρωσε τις περισσότερες επιτυχίες. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, έγινε σύγκριση των συνολικών ποσοστών επιτυχιών που σημειώθηκαν σε κάθε άξονα με τις αντίστοιχες άλλων. Έτσι, έγινε εμφανές ποιος άξονας είχε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις. Σχετικά με την δυσκολία κάθε άξονα έργων, διενεργήθηκαν στατιστικοί έλεγχοι μέσων όρων (μη παραμετρικός έλεγχος Wilcoxon test) προκειμένου να προβληθεί το επίπεδο δυσκολίας κάθε ομάδας- άξονα ερωτήσεων.

Παράλληλα εξετάστηκε η μεταβλητή των κατατακτήριων ή όχι φοιτητών σε σχέση με τις επιδόσεις τους. Συγκρίθηκαν, δηλαδή, οι μέσοι όροι επιδόσεων των δύο ομάδων πληθυσμού αφενός στα έργα της εργασίας και αφετέρου στις εξετάσεις. Για την σύγκριση των εν λόγω μέσων όρων διενεργήθηκε στατικός έλεγχος μη παραμετρικού τεστ (Mann- Whitney U test).

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1.Αποτελέσματα Εργασίας-Επιδόσεις σε κάθε έργο (1ος μέρος)

3.1.1.Άξονας 1: Εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 1: Εκτέλεση Πολλαπλασιασμού

Στο πρώτο έργο (ΕΠ) , στον πολλαπλασιασμό $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ όλοι οι συμμετέχοντες (100%) φάνηκαν να γνωρίζουν το γινόμενο του πολλαπλασιασμού. Όλοι εκτέλεσαν ορθώς τον αλγόριθμο και απάντησαν είτε $\frac{3}{8}$, είτε μετέτρεψαν το γινόμενο σε δεκαδικό αριθμό (=0,375). Μόνο μία φοιτήτρια απάντησε χωρίς να χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο, αλλά υπολογίζοντας νοερά, σκεπτόμενη ότι *«πρέπει να βρει το μισό του $\frac{3}{4}$ και άρα πρέπει να το χωρίσει σε 8 ίσα μέρη και από αυτά να πάρει τα 3 ($\frac{3}{8}$)».*

Έργο 2: Εκτέλεση Διαίρεσης

Παρόμοια με το παραπάνω έργο, στην διαίρεση $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{2}$ (ΕΔ), σχεδόν όλοι οι υποψήφιοι δάσκαλοι (95,9%) ανταποκρίθηκαν με επιτυχία. Για να βρουν το πηλίκο, 9 φοιτητές (12,3%) θεώρησαν την διαίρεση ως σύνθετο κλάσμα και ακολουθώντας τον αλγόριθμο «πολλαπλασιάζω τους άκρους και τους μέσους όρους» μετέτρεψαν τον σύνθετο κλάσμα σε απλό. Ενώ οι περισσότεροι (78,1%) ακολούθησαν τον γνωστό αλγόριθμο, δηλαδή πολλαπλασίασαν με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Στην συνέχεια, πολλοί (46,8%) απλοποίησαν το αποτέλεσμα $\frac{6}{4}$ σε $\frac{3}{2}$, 20 άτομα (26%) το μετέτρεψαν στον δεκαδικό αριθμό 1,5 ενώ άλλοι φοιτητές (6,8%) το μετέτρεψαν σε μικτό αριθμό.

		Συχνότητα & Σχ. Συχνότητα
Επιτυχία 95,9% (70)	Εκτέλεση αλγορίθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»	83,6% (61)
	Σύνθετο κλάσμα	12.3% (9)
Λάθη 4,1% (3)	Διάφορα λάθη	4,1% (3)

Πίνακας 1 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΔ)

Έργο 3: Εκτέλεση Διαίρεσης Μεικτού

Στην εκτέλεση της διαίρεσης $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΕΔΜ), όπου ο διαιρετέος είναι μικτός αριθμός, αρκετοί συνάντησαν δυσκολίες. Αν και η πλειοψηφία των φοιτητών (64,4%) απάντησε σωστά, πολλοί (28,8%) ήταν αυτοί που δεν αντιλήφθηκαν τον διαιρετέο ως μικτό αριθμό αλλά ως γινόμενο του 1 με το $\frac{3}{4}$. Ως εκ τούτου, πολλοί (20,5%) πολλαπλασίασαν το 1 με το $\frac{3}{4}$,στη συνέχεια διαίρεσαν με το $\frac{1}{2}$ και τέλος κατέληξαν στο αποτέλεσμα είτε $\frac{6}{4}$ είτε απλοποιώντας στο $\frac{3}{2}$. Άλλοι συμμετέχοντες (5,5%), εκτέλεσαν πρώτα την διαίρεση $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, κατόπιν πολλαπλασίασαν το πηλίκο με το 1 και βρήκαν ως αποτέλεσμα $\frac{3}{2}$. Ένα ακόμη λάθος που παρατηρήθηκε ήταν ότι ενώ ο μικτός αριθμός μετατράπηκε σε κλάσμα σωστά, ο αλγόριθμος της διαίρεσης δεν ακολουθήθηκε ορθά. Δηλαδή, κάποιοι (2,8%) διαίρεσαν τον αριθμητή του ενός κλάσματος με τον αριθμητή του άλλου και αντίστοιχα τον παρονομαστή του ενός με τον παρονομαστή του άλλου με συνέπεια να προκύψει λάθος πηλίκο. 5 φοιτητές (6,8%) δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Για να βρεθεί το πηλίκο της πράξης $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ ήταν αναγκαίο να μετατραπεί ο μικτός αριθμός $1\frac{3}{4}$ στο καταχρηστικό κλάσμα $\frac{7}{4}$. Για την μετατροπή αυτή, οι περισσότεροι (46,6%) πολλαπλασίασαν τον ακέραιο αριθμό με τον παρονομαστή του κλάσματος και στην συνέχεια το αθροίσανε με τον αριθμητή για να υπολογίσουν τον αριθμητή του νέου κλάσματος. Οι υπόλοιποι (17,8%) μετέτρεψαν τον ακέραιο αριθμό σε κλάσμα ομώνυμο με το κλάσμα $\frac{3}{4}$ (δηλαδή $\frac{4}{4}$) , τα πρόσθεσαν και ύστερα διαίρεσαν με το $\frac{1}{2}$. Όσον αφορά την τελική απάντηση, η πλειονότητα αυτών που εκτέλεσαν σωστά την πράξη (32,9%) απλοποίησαν το πηλίκο $\frac{14}{4}$ σε $\frac{7}{2}$. Άλλοι (13,7%) μετέτρεψαν το κλάσμα $\frac{14}{4}$ στον δεκαδικό αριθμό 3,5. Μερικοί (6,8%) μετέτρεψαν το αποτέλεσμα στον μικτό αριθμό $3\frac{1}{2}$ και οι υπόλοιποι (11%) άφησαν το αποτέλεσμα ως είχε.

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 64,4% (47)	Μετατροπή μεικτού σε κλάσμα: πολλαπλασιασμός ακέραιου με παρονομαστή και άθροιση με αριθμητή	46,6% (34)
	Μετατροπή μεικτού σε κλάσμα: μετατροπή ακέραιου σε κλάσμα ομώνυμο και άθροισμα κλασμάτων	17,8%(13)

Λάθη 28,8% (21)	Παρερμήνευση του μεικτού αριθμού ως γινόμενο ακεραίου-κλάσματος	26% (19)
	Διαίρεση αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή	2,8% (2)

Πίνακας 2 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΔΜ)

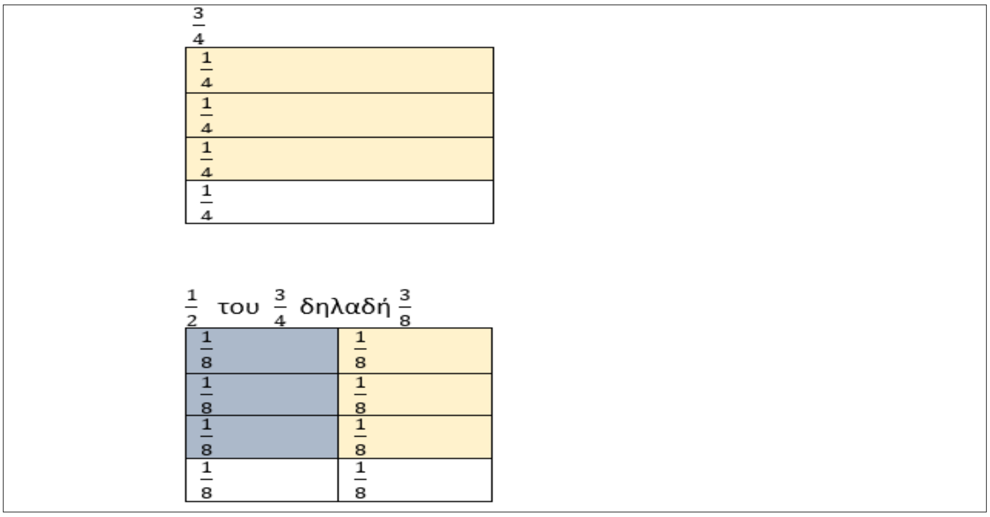
3.1.2 Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)

Έργο 4: Αναπαράσταση Πολλαπλασιασμού

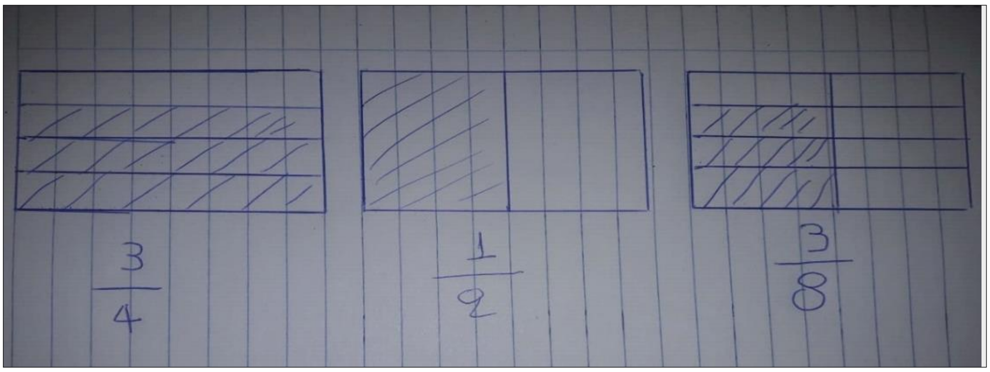
Στην αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού ($\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$) (ΑΠ), οι σωστές απαντήσεις ήταν αισθητά περιορισμένες (12,3%). Το μεγαλύτερο ποσοστό των συμμετεχόντων (80,8%) δεν έδωσαν μια κατάλληλη αναπαράσταση για να αποδώσει νόημα στην πράξη του πολλαπλασιασμού ενώ 5 από αυτούς (6,8%) δεν απάντησαν καν σε αυτό το έργο.

Είδη αναπαραστάσεων πολλαπλασιασμού (ΑΠ)

Όσον αφορά τις σωστές απαντήσεις, 6 άτομα (8,2%) χρησιμοποίησαν το μοντέλο εμβαδού μιας ορθογώνιας παραλληλόγραμμης περιοχής για να δείξουν πως προκύπτει το γινόμενο. Κάποιοι χρησιμοποίησαν μόνο ένα σχήμα το οποίο χώρισαν αρχικά οριζόντια και στην συνέχεια κατακόρυφα σύμφωνα με τα αναφερόμενα κλάσματα , ενώ κάποιοι άλλοι χρησιμοποίησαν τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα για να δείξουν σταδιακά πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός. Ενδεικτικές απαντήσεις φαίνονται στις εικόνες που ακολουθούν (εικόνες 13 & 14). Ακόμη, λίγοι φοιτητές (4,1%), προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν μία ή περισσότερες κλασματικές λωρίδες για να δείξουν την λόγω πράξη. Ενδεικτικές αναπαραστάσεις λωρίδων υπάρχουν επίσης παρακάτω (εικόνες 15 & 16)



Εικόνα 13 Μοντέλο εμβαδού σε δύο ορθογώνια (3/4 x 1/2= 3/8)



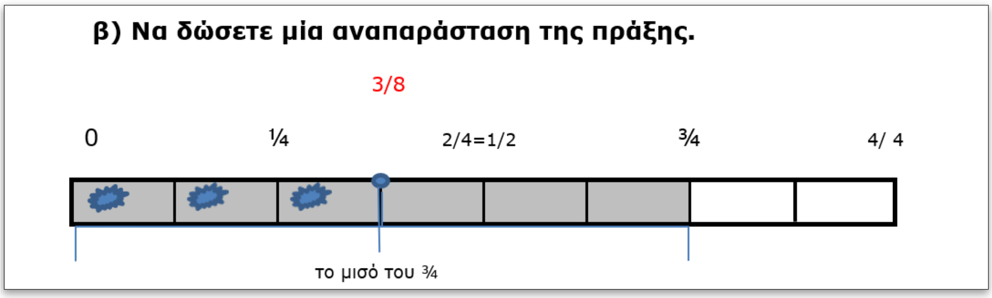
Εικόνα 14 Μοντέλο εμβαδού σε τρία ορθογώνια (3/4 x 1/2= 3/8)

β) Για να αναπαραστήσω την πράξη θα φτιάξω δύο κλασματικές λωρίδες. Στη μία θα αναπαραστήσω τα ¾.

Στη δεύτερη θα χωρίσω τα τέταρτα στη μέση καθώς το ½ αφορά στο μισό. Από κάθε ¼ θα πάρω ένα ½ και στο τέλος θα τα αθροίσω για να βρω το αποτέλεσμα.

Επομένως έχω 3/8.

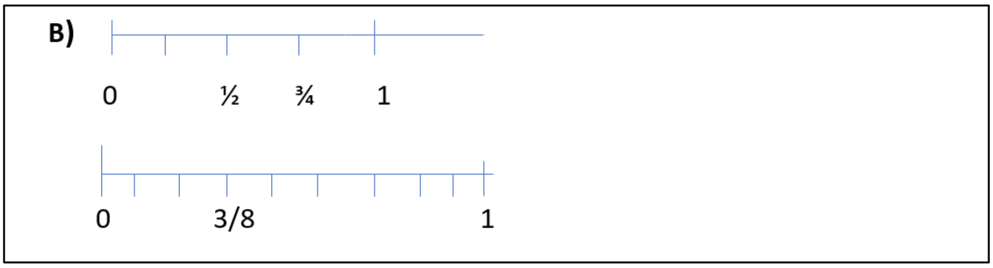
Εικόνα 15 Κλασματικές λωρίδες (3/4 x1/2= 3/8)



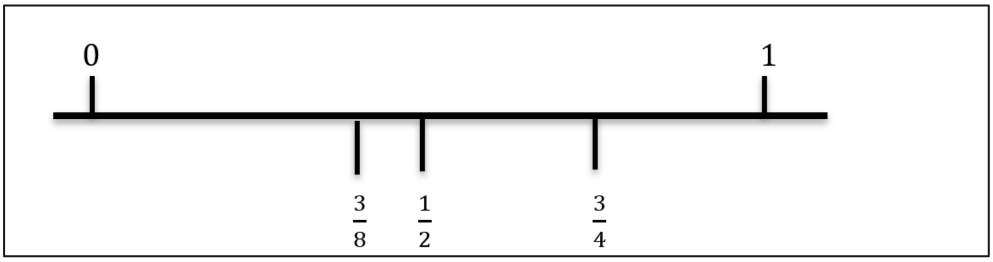
Εικόνα 16 Κλασματική λωρίδα (3/4 x1/2= 3/8)

<u>Λάθη στην αναπαράσταση πολλαπλασιασμού (ΑΠ)</u>

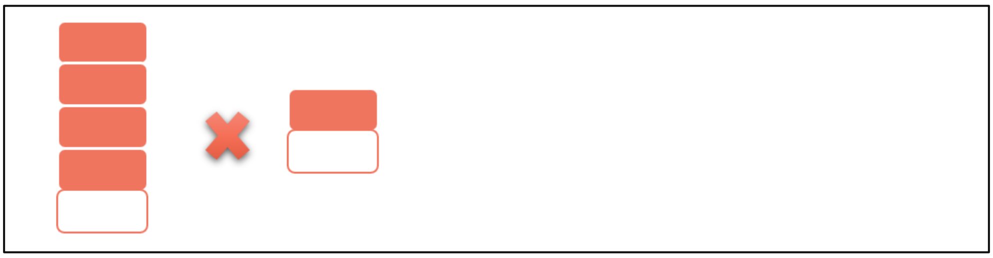
Σημαντικό ποσοστό των μελλοντικών δασκάλων δεν κατάφερε να αναπαραστήσει ορθά την πράξη, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις, οι φοιτητές, δεν έδωσαν νόημα στην σχέση που διέπει τους δύο όρους και το γινόμενο μέσω ενός οπτικού μοντέλου. Έτσι, σχημάτισαν από μία αναπαράσταση για τον κάθε όρο της πράξης ή και για το γινόμενο, χωρίς όμως να φαίνεται ούτε να εξηγείται η πράξη του πολλαπλασιασμού. Δεν είναι εμφανής, δηλαδή, η συσχέτιση των τριών αριθμών που εμπλέκονται στην πράξη. Χρησιμοποίησαν είτε αριθμογραμμές και κλασματικές λωρίδες είτε μοντέλα εμβαδού είτε διακριτά σύνολα για να αποτυπώσουν τα τρία κλάσματα. Μερικοί μάλιστα, (17,8%), απεικόνιζαν μόνο το αποτέλεσμα της πράξης, δηλαδή το γινόμενο 3/8 με κάποιο από τα προαναφερθέντα μοντέλα. Στις παρακάτω εικόνες βλέπουμε κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των παραπάνω περιπτώσεων (εικόνες 17,18,19,20 & 21)



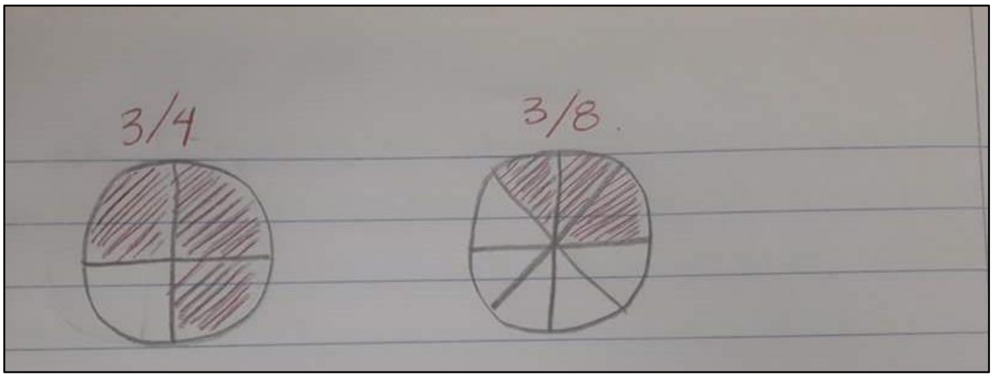
Εικόνα 17 Μεμονωμένες αναπαραστάσεις όρων και γινομένου σε αριθμογραμμές (3/4 x 1/2= 3/8)



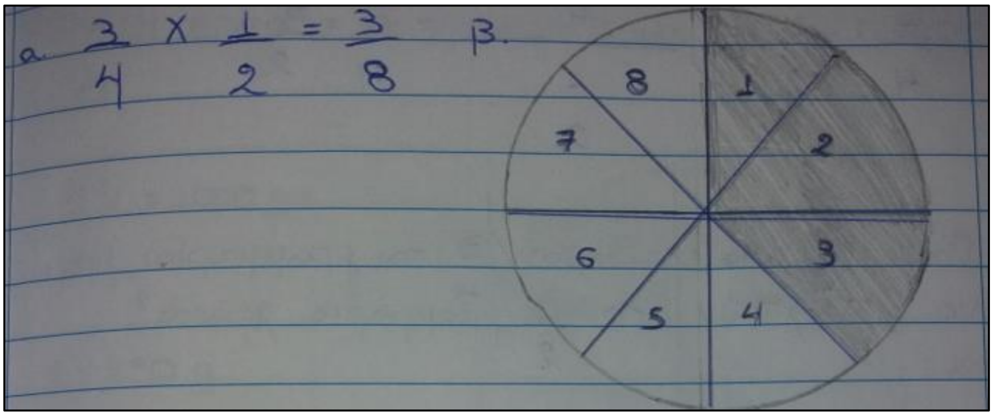
Εικόνα 18 Αναπαράσταση όρων και γινομένου σε αριθμογραμμή (3/4x 1/2= 3/8)



Εικόνα 19 Αναπαραστάσεις των όρων σε διακριτά σύνολα (3/4 x 1/2= 3/8)

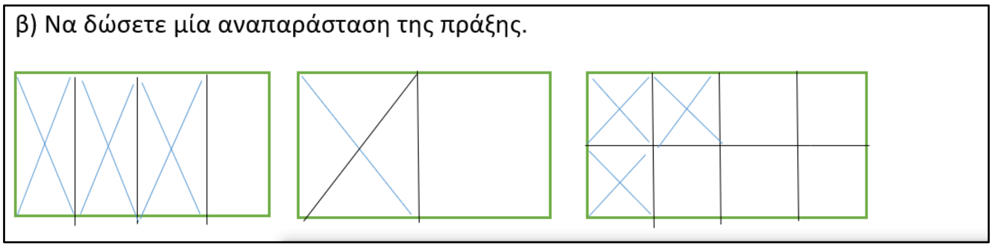


Εικόνα 20 Μεμονωμένες αναπαραστάσεις του όρου και του γινομένου σε πίτες (3/4 x 1/2= 3/8)

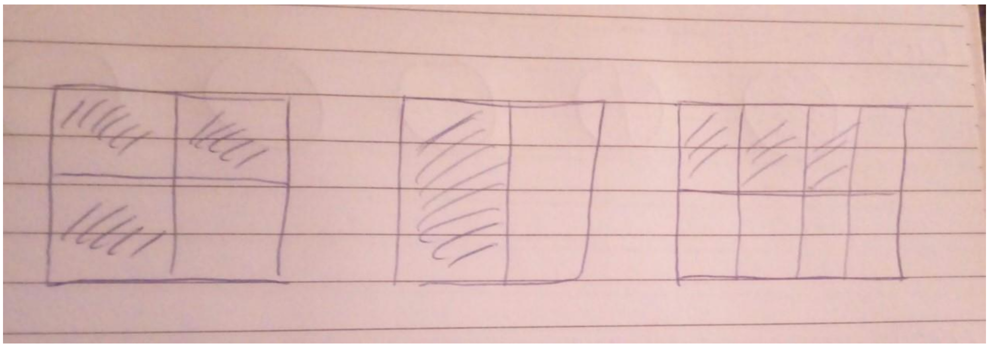


Εικόνα 21 Αναπαράσταση του γινομένου σε πίτα (3/4 x 1/2= 3/8)

Ωστόσο, 4 από τους φοιτητές (5,5 %) προσπάθησαν να εφαρμόσουν το μοντέλου εμβαδού για να δείξουν τον πολλαπλασιασμό, χωρίς όμως τελικά αύτη τους η προσπάθεια να είναι επιτυχής. Ο χωρισμός των περιοχών δεν ήταν κατάλληλος ώστε να γίνει κατανοητή η πράξη και να είναι αποδεκτή η απάντηση(εικόνες 22 & 23). Ένα μικρό ποσοστό των σπουδαστών (4,1%) αντί να δώσουν μία αναπαράσταση, όπως ζητήθηκε, ανέλυσε την διαδικασία του αλγόριθμου της πράξη (εικόνα 24). Άλλα λάθη (11%) ήταν για παράδειγμα η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς ή ποσοστά χωρίς να δίνεται κάποια εικόνα.



Εικόνα 22 Λανθασμένο μοντέλο εμβαδού (3/4 x ½= 3/8)



Εικόνα 23 Λανθασμένο μοντέλο εμβαδού (3/4 x ½= 3/8)

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = 3/8$$

Εικόνα 24 Ανάλυση του αλγόριθμου (3/4 x ½= 3/8)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 12,3% (9)	Μοντέλο εμβαδού επιφάνειας	8,2% (6)
	Κλασματική-ες λωρίδα-ες	4,1% (3)
Λάθη 20,2% (59)	Αναπαράσταση όρων και γινομένου (χωρίς την σχέση)	38,4% (28)
	Αναπαράσταση γινομένου	17,8% (13)
	Αποτυχημένο μοντέλο εμβαδού	5,5% (4)
	Λεκτική περιγραφή του αλγορίθμου	4,1% (3)
	Λοιπά λάθη	15,1% (11)

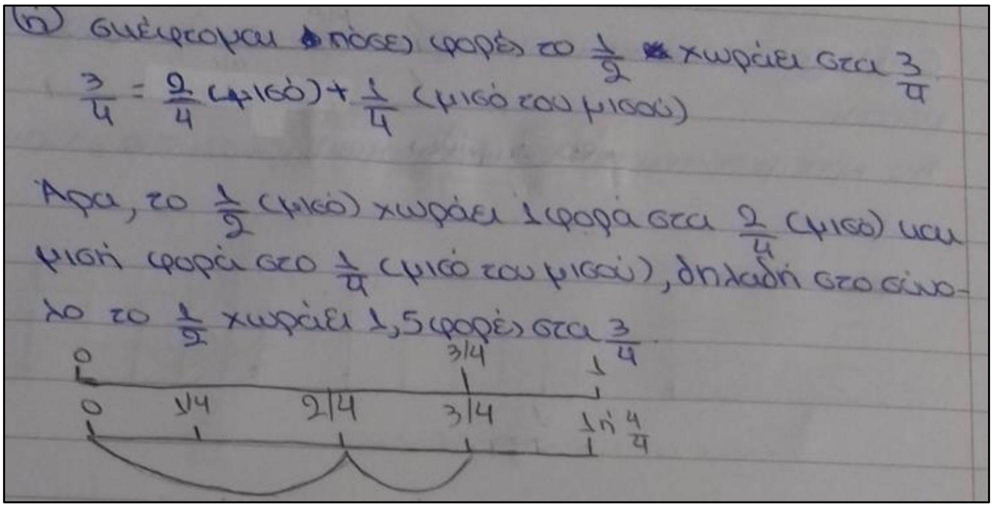
Πίνακας 3 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΑΠ)

Έργο 5: Αναπαράσταση Διαίρεσης

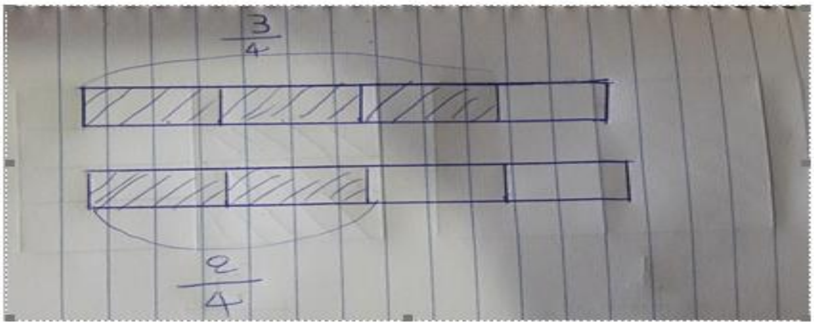
Στο έργο αναπαράστασης της πράξης $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ (ΑΔ) μόλις 8 φοιτητές (11%) ήταν σε θέση να αποτυπώσουν εικονικά ορθά την διαίρεση. Η πλειοψηφία των φοιτητών (79,5%) έδωσε λανθασμένες, μη κατάλληλες και ακατανόητές αναπαραστάσεις, ενώ το 9,6% αυτών δεν απάντησε καθόλου.

Είδη αναπαραστάσεων διαίρεσης (ΑΔ)

Για να αναπαραστήσουν την εν λόγω πράξη κλασμάτων, 4 μελλοντικοί δάσκαλοι (5,5%) χρησιμοποίησαν μία ή παραπάνω κλασματικές λωρίδες ή αριθμογραμμές, (εικόνες 25 & 26). Άλλοι (4,1%) απάντησαν αξιοποιώντας κυκλικούς δίσκους (π.χ. ρολόι) (εικόνες 27 & 28)



Εικόνα 25 Διπλή αριθμογραμμή (3/4: 1/2= 1,5)



Βρήκα το κοινό πολλαπλάσιο των δύο κλασμάτων που είναι το 4 για να μπορέσω να τα συγκρίνω. Έτσι το 3/4 χωρίστηκε 3 και το 1/2 σε 2 ίσα μέρη, δηλαδή το 1/2 χωράει 3/2 φορές στο 3/4.

Εικόνα 26 Κλασματικές λωρίδες (3/4: 1/2= 3/2)

Ένα πολύ απλό παράδειγμα από τη καθημερινότητα είναι με το ρολόι πόσα ½ της ώρας είναι τα ¾ 1 και άλλο ½ του ½ δηλ. 1/4

Το μισό, 1/2 χωράει όπως βλέπουμε στο ¾, 1 φορά και μισή.

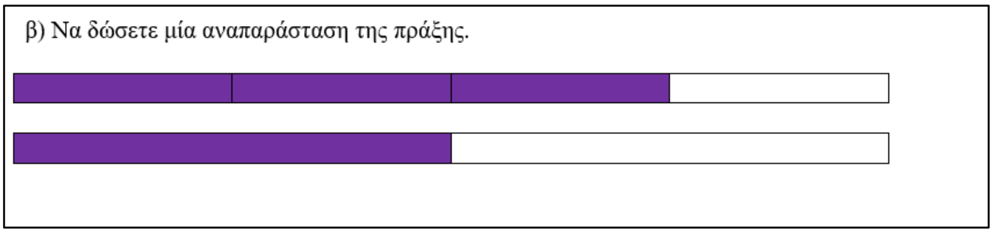
Εικόνα 27 Αναπαράσταση με ρολόι (κυκλικό δίσκο)(3/4: 1/2= 1,5)

Χωρίζω το ρολόι σε 4 ίσα μέρη και παίρνω τα 3/4. Στη συνέχεια ελέγχω πόσες φορές χωράει το 1/2 στο 3/4. Βρίσκω ότι χωράει 1,5 φορά, γιατί το 3/4 ισούται 1/2 και 1/4. Άρα χωράει 1 φορά και ακόμα μισή.

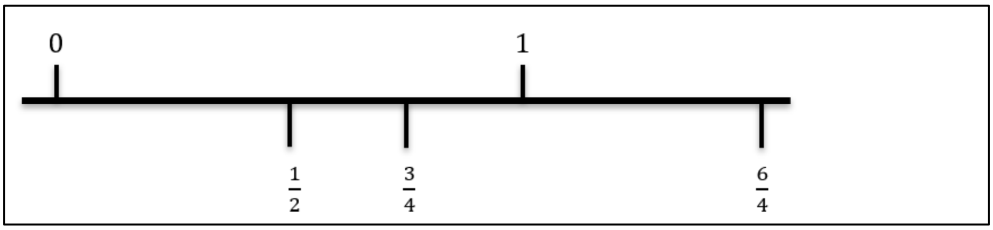
Εικόνα 28 Αναπαράσταση με ρολόι (3/4: 1/2= 1,5)

<u>Λάθη στην αναπαράσταση της διαίρεσης (ΑΔ)</u>

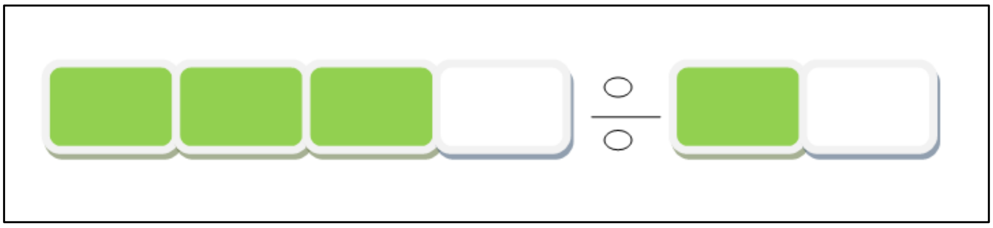
Όσον αφορά τις άστοχες αναπαραστάσεις, αρκετοί (30,1%) απεικόνισαν τον διαιρετέο, τον διαιρέτη ή και το πηλίκο της πράξης πάνω σε ένα ή περισσότερα μοντέλα οπτικοποίησης, (π.χ. αριθμογραμμή). Η απεικόνιση αυτή έγινε όμως χωρίς να φαίνεται η σχέση που υφίσταται μεταξύ των τριών κλασμάτων (εικόνες 29 & 30) Με παραπλήσιο τρόπο λειτούργησαν κι άλλοι φοιτητές (8,2%) που σημείωσαν το σύμβολο της διαίρεσης και της ισότητας μεταξύ σχημάτων, χωρίς όμως να φαίνεται η ουσία της διαίρεσης (εικόνα 31). Ορισμένοι (13,7%) ,μάλιστα, αποτύπωσαν μόνο το πηλίκο της πράξης πάνω σε μία αριθμογραμμή ή με κυκλικό διάγραμμα κτλ. (εικόνες 32 & 33).



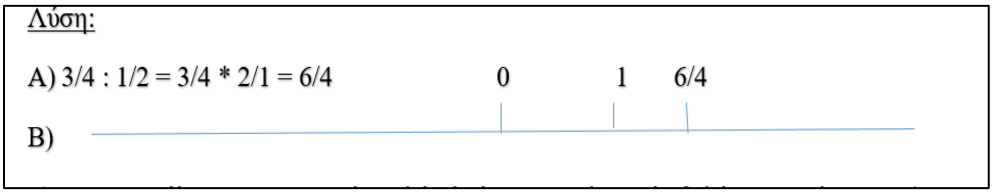
Εικόνα 29 Μεμονωμένες αναπαραστάσεις διαιρετέου και διαιρέτη σε κλασματικές λωρίδες (3/4: 1/2= 3/2)



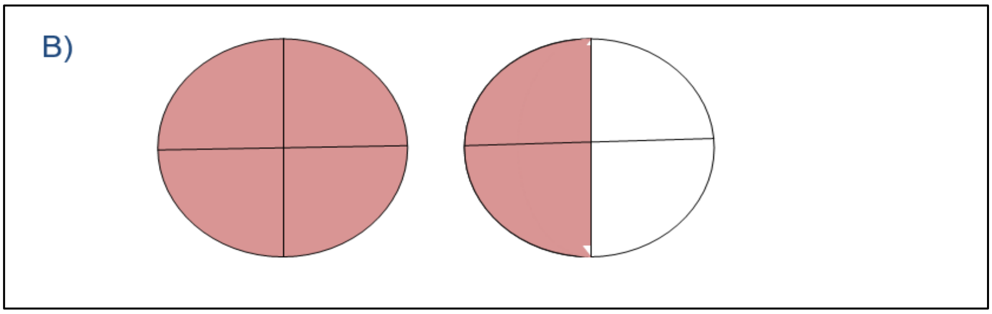
Εικόνα 30 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε αριθμογραμμή (3/4: 1/2= 6/4)



Εικόνα 31 Αναπαράσταση διαιρετέου και διαιρέτη σε διακριτά σύνολα (3/4: 1/2 = 3/2)

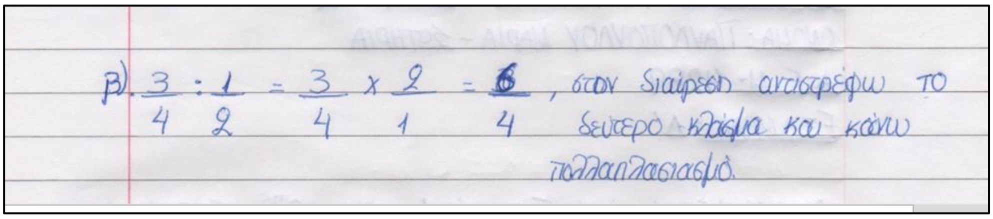


Εικόνα 32 Αναπαράσταση του πηλίκου σε αριθμογραμμή (3/4: 1/2= 6/4)

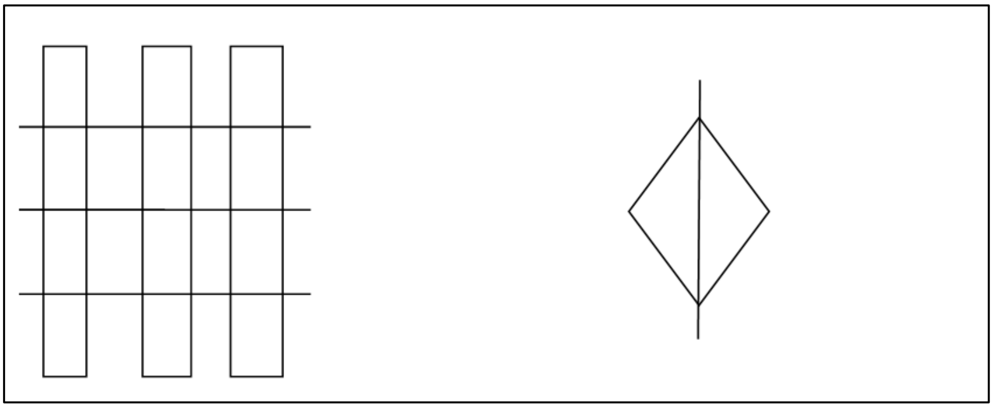


Εικόνα 33 Αναπαράσταση του πηλίκου σε δύο κυκλικούς δίσκους (3/4: 1/2= 6/4)

Οι υπόλοιπες (27,4%) εσφαλμένες αναπαραστάσεις ήταν ποικίλες. Για παράδειγμα, κάποιοι ως αναπαράσταση θεώρησαν την ανάλυση του αλγόριθμου που ακολούθησαν (εικόνα 34) Άλλοι αποτύπωσαν σχήματα χωρίς να γίνεται κατανοητό ο συνειρμός τους και χωρίς να υπάρχει κάποια αντιστοιχία με την συγκεκριμένη πράξη (εικόνα 35)



Εικόνα 34 Ανάλυση του αλγορίθμου (3/4: 1/2=6/4)



Εικόνα 35 Μη κατανοητή αναπαράσταση (3/4: 1/2= 6/4)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 11% (8)	Κλασματική-ες λωρίδα-ες ή αριθμογραμμή-ες	5,5% (4)
	Κυκλικοί δίσκοι (πχ ρολόι)	4,1% (3)
	Λοιπές σωστές αναπαραστάσεις	1,4% (1)

Λάθη 19,9% (58)	Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου (χωρίς την σχέση)	30,1% (22)
	Αναπαράσταση του πηλίκου	13,7% (10)
	Αναπαράσταση των αριθμών και σύμβολα (χωρίς ουσία)	8,2% (6)
	Λοιπά λάθη	27,4% (20)

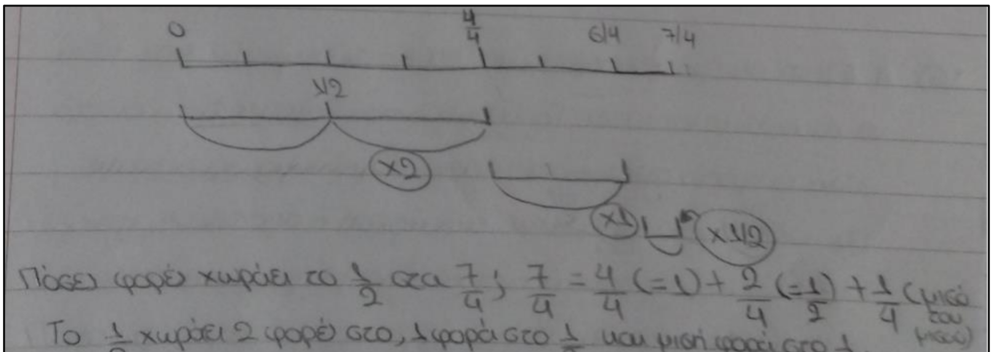
Πίνακας 4 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΑΔ)

Έργο 6: Αναπαράσταση Διαίρεσης Μεικτού

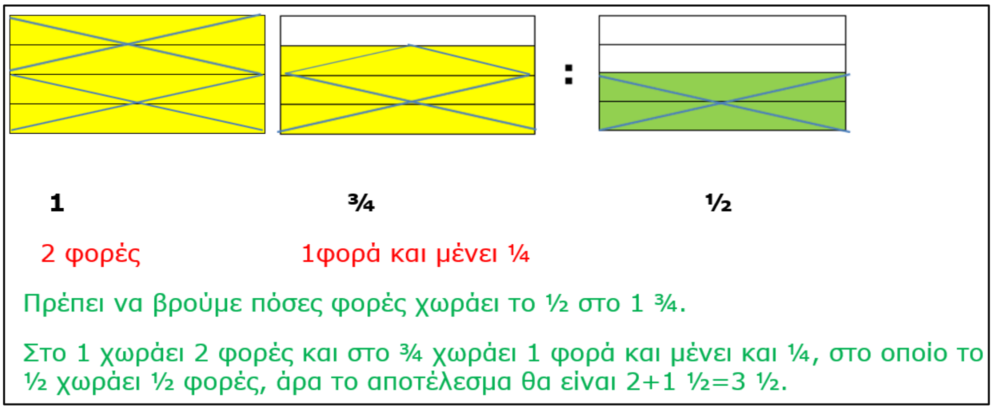
Προχωρώντας στο επόμενο έργο (ΑΔΜ) και στην αναπαράσταση της διαίρεσης $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, ήταν εμφανής η δυσκολία που συνάντησαν οι συμμετέχοντες. Μόνο 5 άτομα (6,8%) έδωσαν μια επιτυχή αναπαράσταση. Περίπου οι μισοί (46,6%) δεν κατάφεραν να δώσουν μια αντιπροσωπευτική απεικόνιση της πράξης. Το ίδιο ποσοστό φοιτητών (46,6%) δεν έδωσε απάντηση σε αυτή την ερώτηση.

<u>Είδη αναπαραστάσεων διαίρεσης μεικτού (ΑΔΜ)</u>

Για την οπτική αναπαράσταση της πράξης $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, μερικοί (4,1%) χρησιμοποίησαν μοντέλα μήκους όπως αριθμογραμμή και κλασματική λωρίδα. Οι υπόλοιποι απεικόνισαν την διαίρεση μέσω μοντέλων εμβαδού (2,7%). Ενδεικτικές απαντήσεις φαίνονται στις παρακάτω εικόνες (εικόνες 36 & 37).



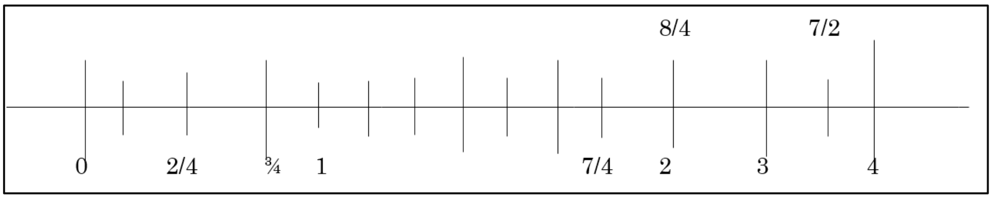
Εικόνα 36 Αριθμογραμμή (1 3/4: 1/2= 3,5)



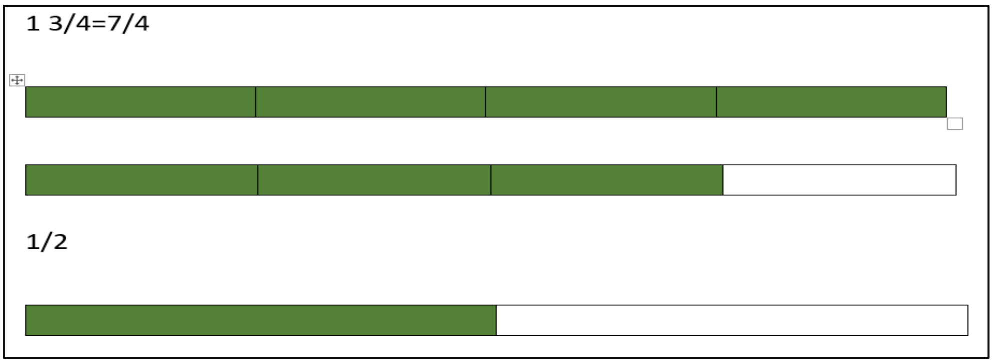
Εικόνα 37 Μοντέλο εμβαδού σε τρία ορθογώνια (1 3/4: 1/2= 3 1/2)

Λάθη στην αναπαράσταση διαίρεσης μεικτού (ΑΔΜ)

Πολλοί ήταν αυτοί που ενώ εκτέλεσαν σωστά την πράξη, δεν μπόρεσαν να αποτυπώσουν σε μια εικόνα την σχέση που διέπει τους αριθμούς που εμπλέκονται στην διαίρεση. Για παράδειγμα, 7 άτομα (9,6%) διέταξαν σε μία αριθμογραμμή τον διαιρετέο $1\frac{3}{4}$ (ή $\frac{7}{4}$), τον διαιρέτη $\frac{1}{2}$ (ή $\frac{2}{4}$) και το πηλίκο $\frac{7}{2}$ (εικόνα 38) ή με κλασματικές λωρίδες (εικόνα 39) . Άλλοι μελλοντικοί δάσκαλοι (8,2%), έδωσαν μια αναπαράσταση αποκλειστικά για τον διαιρετέου ($1\frac{3}{4}$) (εικόνα 40), ή για το πηλίκου σε αριθμογραμμή ή σε κυκλικούς δίσκους (=3,5 δίσκοι) (εικόνες 41 & 42). Επιπροσθέτως, όσοι δεν αντιλήφθηκαν τον αριθμό $1\frac{3}{4}$ ως μικτό (19,2%), δημιούργησαν και λάθος αναπαράσταση της διαίρεσης. Συγκεκριμένα, προσπάθησαν να αποτυπώσουν την πράξη $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{2}$ και όχι την ζητούμενη, δίνοντας και πάλι μια ελλιπής ή ανακριβής εικόνα.

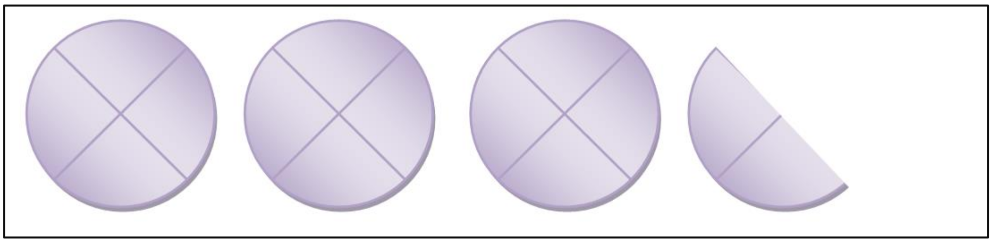


Εικόνα 38 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε αριθμογραμμή (1 3/4: 1/2= 7/2)

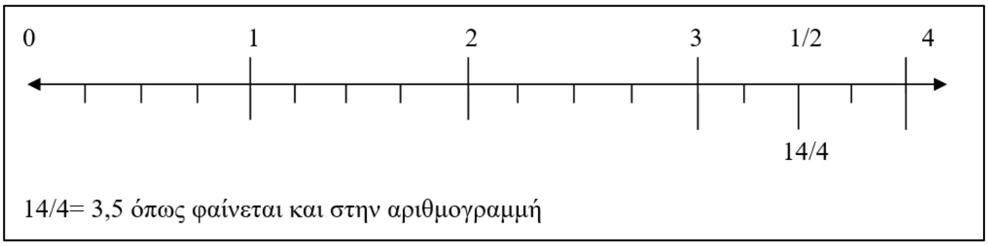


Εικόνα 39 Αναπαράσταση διαιρετέου και διαιρέτη σε κλασματικές λωρίδες (1 3/4: 1/2= 7/2)

Εικόνα 40Αναπαράσταση διαιρετέου σε κυκλικοί δίσκοι (1 3/4: 1/2= 7/2)



Εικόνα 41 Αναπαράσταση πηλίκου σε κλασματικές πίτες (1 3/4: 1/2= 3 1/2)



Εικόνα 42 Αναπαράσταση του πηλίκου σε αριθμογραμμή (1 3/4: 1/2= 3,5)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 6,8% (5)	Κλασματική λωρίδα ή αριθμογραμμή	4,1% (3)
	Μοντέλο εμβαδού επιφάνειας	2,7% (2)
Λάθη 46,6% (34)	Λάθος διαιρετέος- λάθος αναπαράσταση	19,2% (14)
	Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου πάνω σε αριθμογραμμή	9,6% (7)
	Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου	8,2% (6)
	Λοιπά λάθη	9,6% (7)

Πίνακας 5 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΑΔΜ)

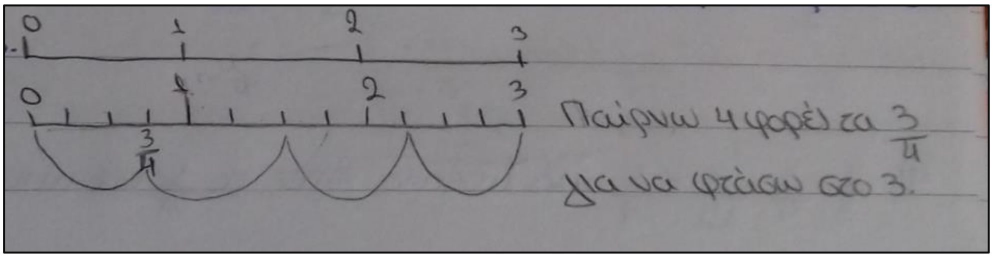
3.1.3 Άξονας 3: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (με πλαίσιο)

Έργο 7: Αναπαράσταση λύσης Προβλήματος Διαίρεσης 1

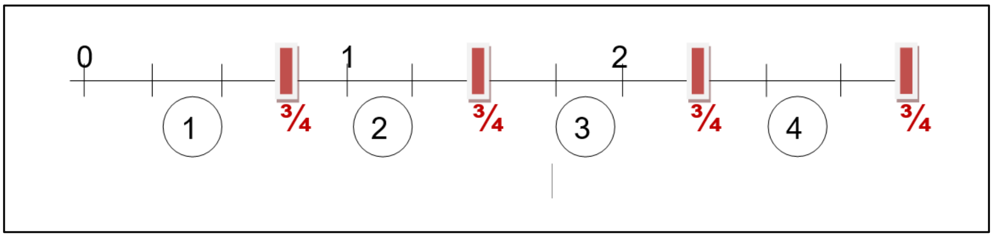
Στο έργο αναπαράστασης της λύσης του προβλήματος διαίρεσης (ΑΠΔ1) (3 : $\frac{3}{4}$), 18 άτομα (24,7%) κατάφεραν να απεικονίσουν καταλλήλως με κάποιο διάγραμμα την πράξη της λύση. Οι υπόλοιποι , είτε απάντησαν με ένα ανεπαρκές ή λανθασμένο σχήμα(45,2%) είτε δεν απάντησαν καθόλου (30,1%).

<u>*Είδη αναπαραστάσεων λύσης προβλήματος διαίρεσης (ΑΠΔ1)*</u>

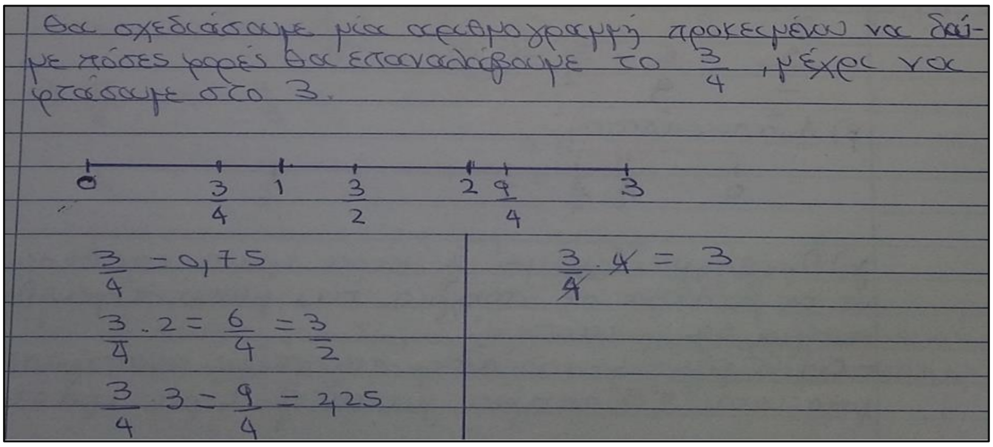
Από τις σωστές απαντήσεις, οι 8 (11%) έδιναν κάποια αναπαράσταση της πράξης 3 : $\frac{3}{4}$ με το μοντέλο μήκους της αριθμογραμμής. Συγκεκριμένα, οι αναπαραστάσεις εστίαζαν στο πόσες φορές χωράνε τα $\frac{3}{4}$ γραμμάρια στα 3 κιλά, αντιστοιχίζοντας τα σε τμήματα μιας αριθμογραμμής. Μερικές τέτοιους είδους αναπαραστάσεις φαίνονται παρακάτω (εικόνες 43,44 & 45)



Εικόνα 43 Διπλή αριθμογραμμή (λύση 3: 3/4=4)



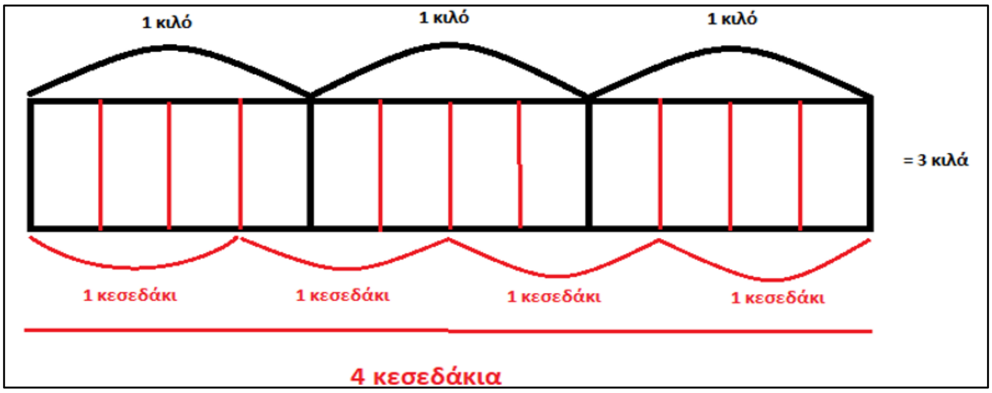
Εικόνα 44 Αριθμογραμμή (λύση 3: 3/4= 4)



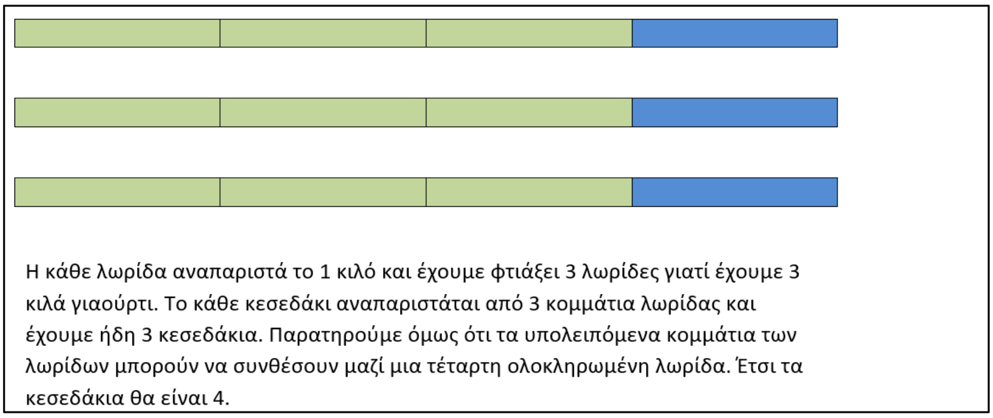
Εικόνα 45 Αριθμογραμμή (λύση 3: 3/4= 4)

Ορισμένες αναπαραστάσεις της λύσης (6,8%) έγιναν με την χρήση μίας ή περισσότερων κλασματικών λωρίδων. Με τις λωρίδες φαίνεται πως τα 3 λίτρα, όταν χωριστούν το κάθε ένα σε τέταρτα, συμπληρώνουν 4 κεσεδάκια (δηλαδή 4 των $\frac{3}{4}$). Αντίστοιχες απαντήσεις παρατίθενται στις παρακάτω εικόνες. (εικόνες 46, 47 & 48)

Εικόνα 46 Κλασματική λωρίδα (λύση 3: 3/4= 4)

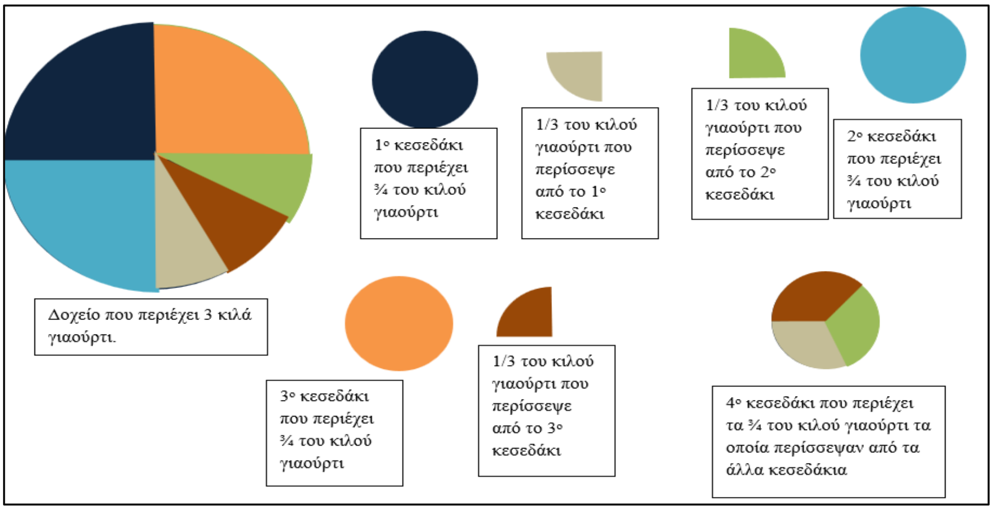


Εικόνα 47 Κλασματική λωρίδα (λύση 3: 3/4= 4)

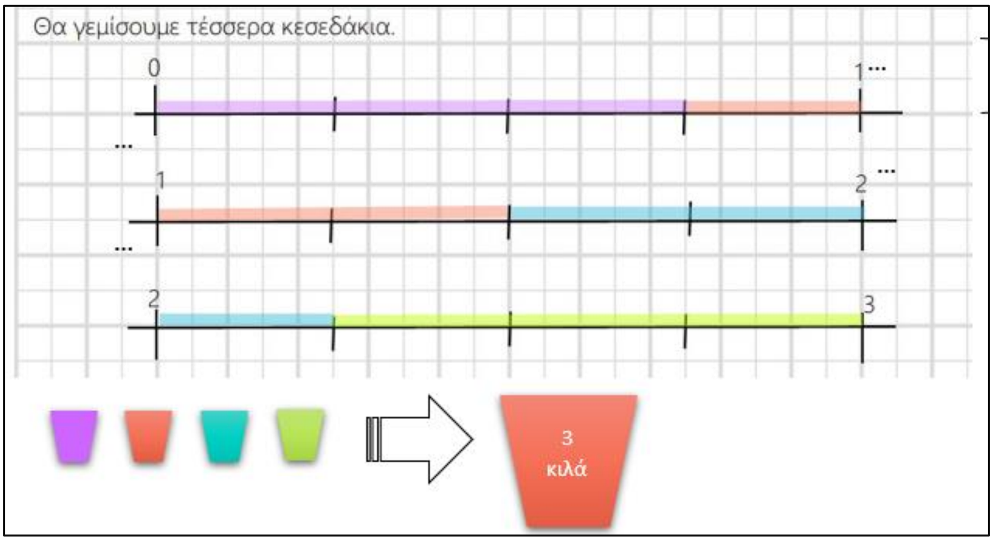


Εικόνα 48 Τρεις κλασματικές λωρίδες (λύση 3: 3/4= 4)

Υπήρχαν κι άλλες αναπαραστάσεις (6,8%) που δεν κατανέμονται στις δύο παραπάνω κατηγορίες αλλά είναι εξίσου αντιπροσωπευτικές της λύσης. Ενδεικτικά, ένας κυκλικός δίσκος με τους τομείς του (εικόνα 49) , ή τρεις αριθμογραμμές (μία για κάθε κιλό) με διαφορετικά χρώματα για το κάθε κεσεδάκι (εικόνα 50) ήταν κατάλληλες για να γίνει κατανοητή η σχέση της διαίρεσης.



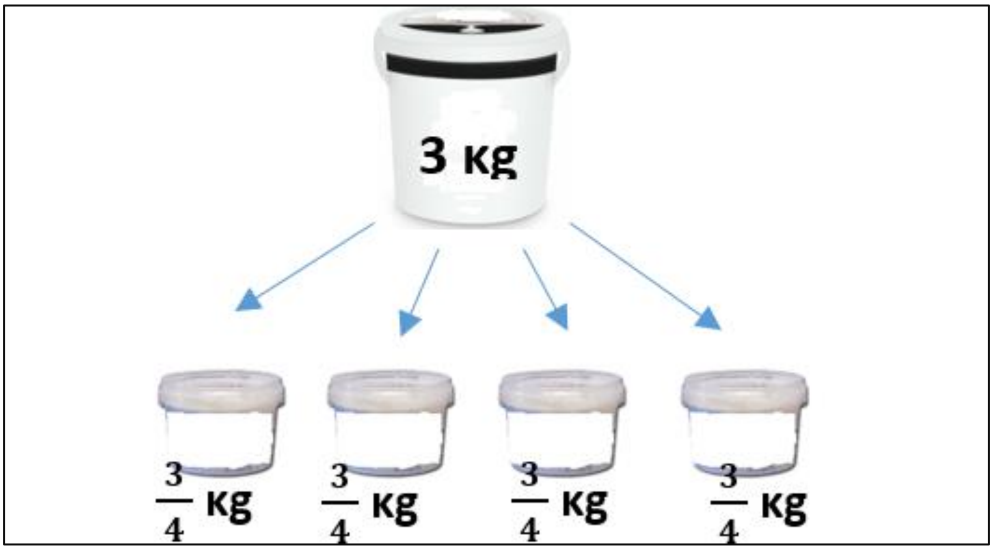
Εικόνα 49 Κυκλικός δίσκος (λύση 3: 3/4= 4)



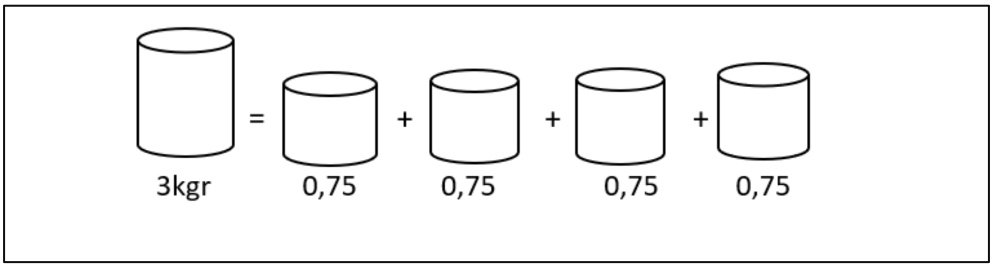
Εικόνα 50 Τρεις αριθμογραμμές (λύση 3: 3/4= 4)

<u>Λάθη αναπαράστασης λύσης προβλήματος διαίρεση (ΑΠΔ1)</u>

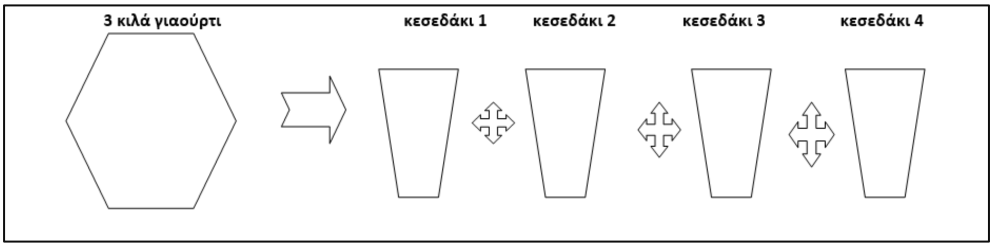
Σχεδόν οι μισοί φοιτητές αναπαριστήσαν με λάθος ή ελλιπή τρόπο την λύση του προβλήματος. Από αυτούς, οι 10 (13,7%) αποτύπωσαν την λύση δημιουργώντας 4 σχήματα που απεικόνιζαν τα $\frac{3}{4}$ και ένα μεγαλύτερο, συνήθως, για τα 3 λίτρα. Βέβαια, δεν είναι εμφανές πως προκύπτουν από την διαίρεση, ούτε η αναλογία και η σχέση που υφίσταται. Αντίθετα, είναι σχήματα αυθαίρετα (διακοσμητικά) χωρίς μαθηματική ουσία. Ορισμένες απαντήσεις παρουσιάζονται στις εικόνες 51,52 και 53.



Εικόνα 51 Αναπαράσταση του διαιρετέου, του διαιρέτη και του πηλίκου σε εικόνες (λύση 3: 3/4= 4)

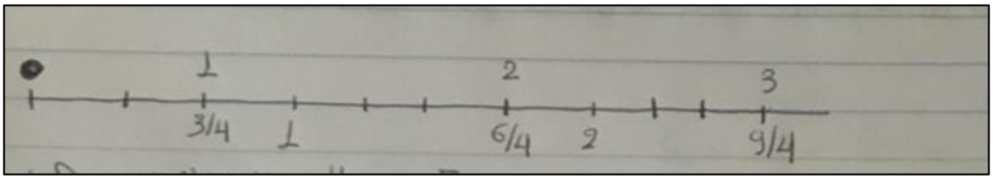


Εικόνα 52 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε εικόνες (λύση 3: 3/4= 4)



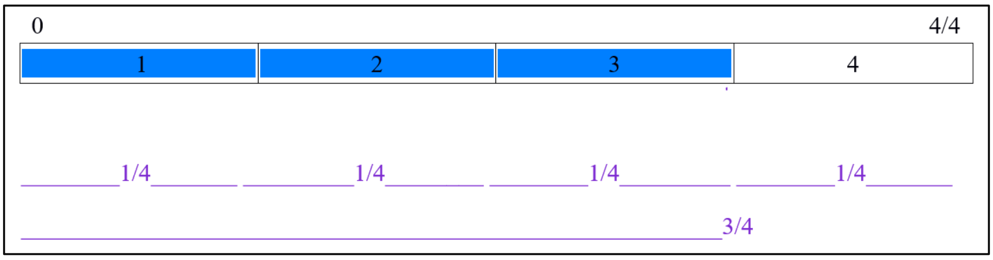
Εικόνα 53 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε εικόνες (λύση 3: 3/4= 4)

Με παρεμφερή τρόπο σκέφτηκαν 4 άτομα (6,6%) τα οποία προσπάθησαν να παρουσιάσουν τα 3 κιλά χωρισμένα σε 4 κομμάτια ($\frac{3}{4}$).Όμως στο σχήμα τους δεν είναι εμφανής η αναλογία που υπάρχει και η σχέση που διέπει τους αριθμούς μέσω της πράξης της διαίρεσης. Περίπου ίδιο πλήθος ατόμων (8,2%) προσπάθησε ανεπιτυχώς να δείξει πόσες φορές επαναλαμβάνονται, και τελικά χωράνε, τα $\frac{3}{4}$ (γραμμάρια) στο 3 (κιλά). Σε μερικές περιπτώσεις, τα τμήματα στα οποία χωρίστηκε η αριθμογραμμή δεν ήταν ορθά ή και ανάλογα μεταξύ τους (εικόνα 54) και σε άλλες, οι φοιτητές τελικά σημείωναν 3 αντί για 4 κεσεδάκια ($\frac{3}{4}$).

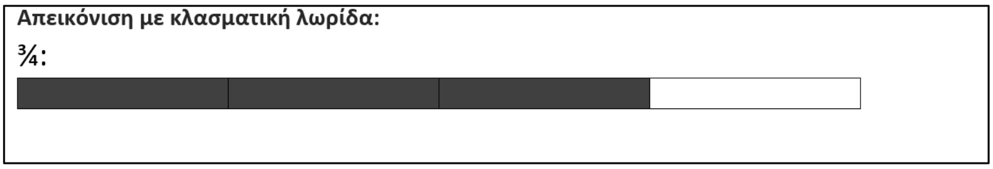


Εικόνα 54 Αναπαράσταση σε αριθμογραμμή (3: 3/4= 4)

Λίγοι επίσης (5,5%), αντί να απεικονίσουν την λύση έδωσαν μία αναπαράσταση αποκλειστικά για το κλάσμα $\frac{3}{4}$ με μια κλασματική λωρίδα, αγνοώντας τα υπόλοιπα δεδομένα του προβλήματος (εικόνες 55& 56).

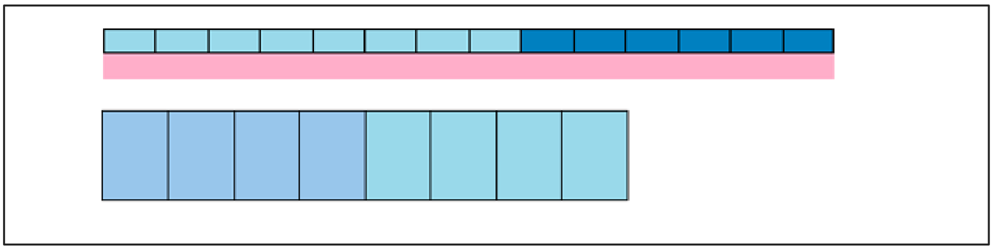


Εικόνα 55 Αναπαράσταση του διαιρέτη σε κλασματική λωρίδα (λύση 3: 3/4= 4)



Εικόνα 56 Αναπαράσταση του διαιρέτη σε κλασματική λωρίδα (λύση 3: 3/4= 4)

Οι υπόλοιπες λάθος απαντήσεις (12,3%) ήταν ποικίλα, συνήθως μη κατανοητά διαγράμματα. Ένα από αυτά παρατίθεται στην παρακάτω εικόνα (εικόνα 60).



Εικόνα 57 Μη κατανοητή αναπαράσταση (λύση 3: 3/4= 4)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 24,7% (18)	Αριθμογραμμή-ές	11% (8)
	Κλασματική-ές λωρίδα-ες	6,8% (5)
	Λοιπές σωστές αναπαραστάσεις	6,8% (5)
Λάθη 45,2% (33)	4 σχήματα που αναπαριστούν τον διαιρέτη	13,7% (10)
	Αποτυχημένη αναπαράσταση αριθμογραμμής	8,2% (6)
	Ο διαιρετέος χωρισμένο σε 3/4	5,5% (4)
	Αναπαράσταση του διαιρέτη	5,5% (4)
	Λοιπά λάθη	12,3% (9)

Πίνακας 6 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΑΠΔ1)

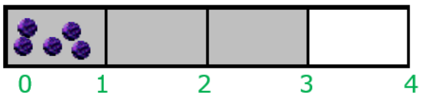
Έργο 8:Αναπαράσταση λύσης προβλήματος πολλαπλασιασμού

Στο επόμενο έργο αναπαράστασης (ΑΠΠ- πρόβλημα πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$), η δυσκολία που συνάντησαν οι μελλοντικοί δάσκαλοι ήταν μεγάλη και οι επιτυχείς απαντήσεις ήταν σχετικά λίγες (30,1%). Περίπου οι μισοί συμμετέχοντες (47,9%), αναπαριστήσαν εσφαλμένα την λύση του προηγούμενου προβλήματος, ενώ ένα σημαντικό μέρος αυτών (21,9%) δεν απάντησε σε αυτό το έργο.

<u>Είδη αναπαραστάσεων λύσης προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΑΠΠ)</u>

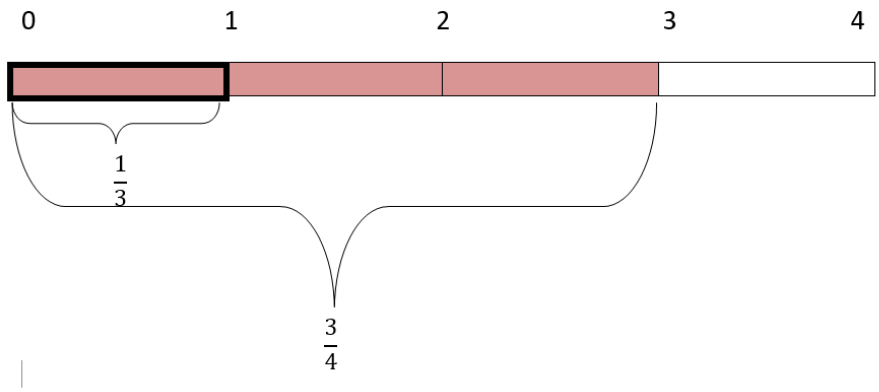
Για την οπτική απεικόνιση της λύσης δόθηκαν είτε μοντέλα μήκους είτε μοντέλα εμβαδού είτε κάποιο άλλο είδος. Για παράδειγμα, 9 φοιτητές (12,3%) σχεδίασαν μία ή περισσότερες κλασματικές λωρίδες, σημείωσαν αρχικά τα $\frac{3}{4}$ και στην συνέχεια το $\frac{1}{3}$ αυτών με κάποια πρόσθετη σκίαση ή επισήμανση (π.χ. εικόνες 58 & 59)

Έστω ότι το 1 κιλό κρέας είναι αυτό το κομμάτι παρακάτω:



Χωρίζω το κομμάτι του κρέατος σε 4 ίσα μέρη και σκιαγραφώ τα 3 τα οποία είναι τα ¾ που αγόρασε ο Κώστας. Άρα το κρέας που αγόρασε ο Κώστας αποτελείται από 3 ίσα μέρη. Αφού χρησιμοποίησε το 1/3, θα πάρουμε το 1 από τα τρία κομμάτια του σκιαγραφημένου μέρους που αντιστοιχεί στο κρέας που αγόρασε ο Κώστας. Το οποίο όμως αν το δω συνολικά ως μέρος του κιλού του κρέατος αντιστοιχεί στο 1/4 του κιλού του κρέατος.

Εικόνα 58 Κλασματική λωρίδα (λύση 3/4x 1/3= 1/4)



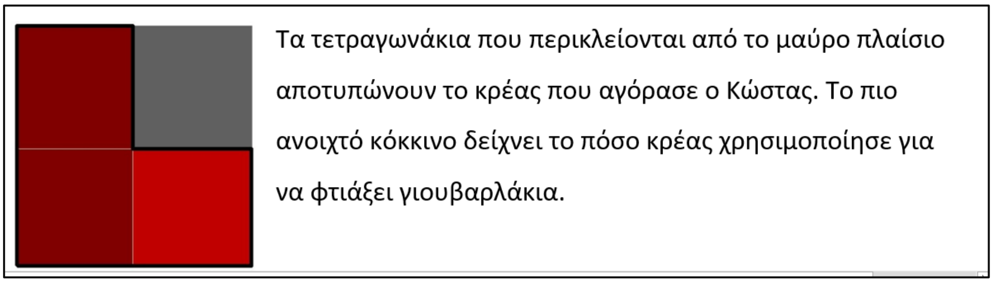
Εικόνα 59 Κλασματική λωρίδα (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

Επιπλέον, το 8,2% των συμμετεχόντων της έρευνας αξιοποίησαν ορθογώνιες ή τετράγωνες επιφάνειες και το εμβαδόν αυτών για να δείξουν « το $\frac{1}{3}$ των $\frac{3}{4}$». Μερικοί εργάστηκαν παρόμοια με τον τρόπο της κλασματικής λωρίδας (παραπάνω), ενώ άλλοι χώρισαν την επιφάνεια κάθετα και οριζόντια αντίστοιχα με τα κλάσματα που πολλαπλασιάστηκαν για την λύση (εικόνες 60, 61 & 62)

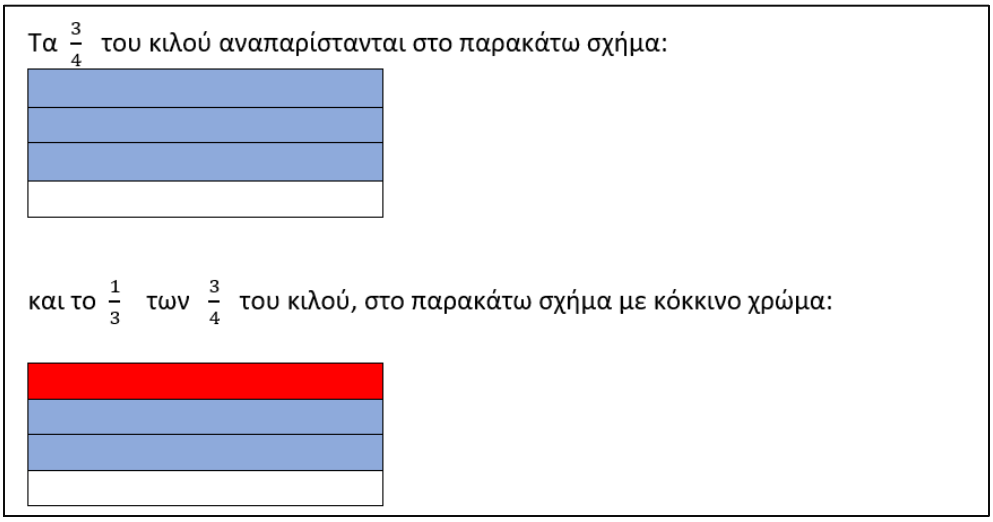
Χωρίζω κάθε τέταρτο σε τρίτα και έχω

Παίρνοντας το 1/3 του κάθε τετάρτου έχω 3/12 ή αλλιώς 1/4.

Εικόνα 60 Μοντέλο εμβαδού σε δύο ορθογώνια (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

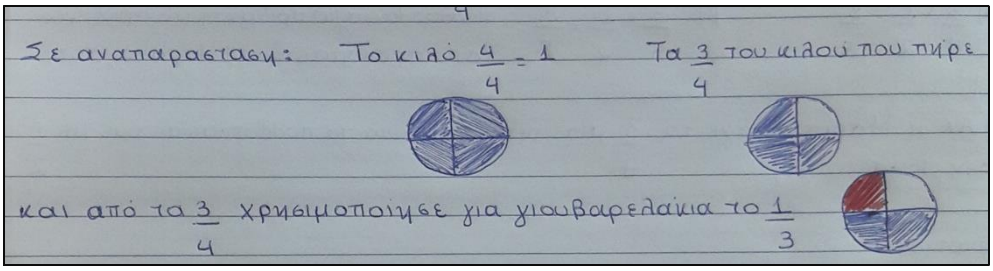


Εικόνα 61 Μοντέλο εμβαδού σε τετράγωνο (λύση 3/4x 1/3= 1/4)



Εικόνα 62 Μοντέλο εμβαδού σε δύο ορθογώνια (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

Λιγότεροι συμμετέχοντες (6,8%) χρησιμοποίησαν αντί για ορθογώνια σχήματα, κυκλικούς δίσκους τους οποίους χώρισαν σε 4 τμήματα και σκίασαν τα 3 από αυτά ($\frac{3}{4}$) και στην συνέχεια σημείωσαν το 1 από τα σκιασμένα ($\frac{1}{3}$). Αναπαραστάσεις όπως αυτές που περιγράφονται βλέπουμε στις εικόνες 63 & 64.

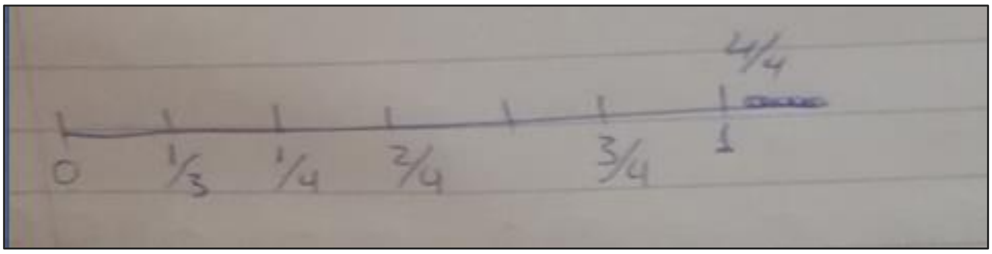


Εικόνα 63 Κυκλικοί δίσκοι (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

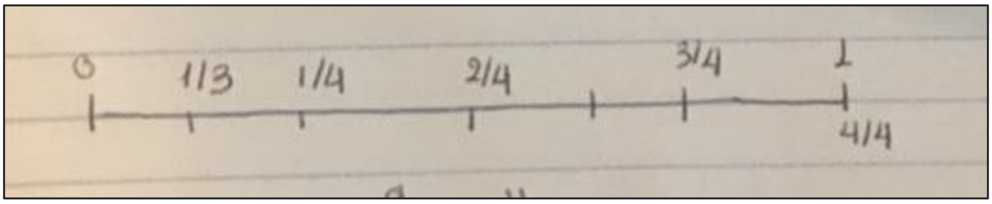
Εικόνα 64 Κυκλικός δίσκος (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

<u>Λάθη στην αναπαράσταση λύσης προβλήματος πολλαπλασιασμού 2 (ΑΠΠ2)</u>

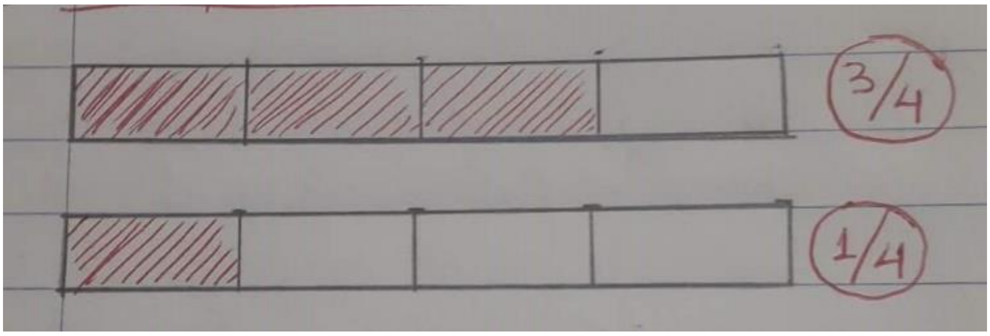
Από το σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων, οι 9 (12,3%) αφορούσαν την αντιστοίχιση (λανθασμένη κάποιες φορές) των κλασμάτων (όρων και του γινομένου) με σημεία μιας αριθμογραμμής (εικόνες 65 & 64). Επίσης, περίπου ίδιο πλήθος απαντήσεων (11%) παρουσίαζαν τους δύο όρους (ή έναν όρο) και το γινόμενο σε ξέχωρα σχήματα χωρίς να σημειώνεται με κάποιο τρόπο η μεταξύ τους αλληλεπίδραση (εικόνα 67). Σε κάποιες περιπτώσεις υπήρχαν τα σύμβολα του πολλαπλασιασμού και της ισότητας, όχι όμως για να προσδώσουν νόημα στην σχέση που υφίσταται(εικόνα 68). Σε ένα μέρος των απαντήσεων (9,6%) αποτυπωνόταν μόνο το γινόμενο ($\frac{3}{12}$ ή $\frac{1}{4}$) είτε σε μια αριθμογραμμή είτε σε κύκλο είτε σε λωρίδα (εικόνα 69).



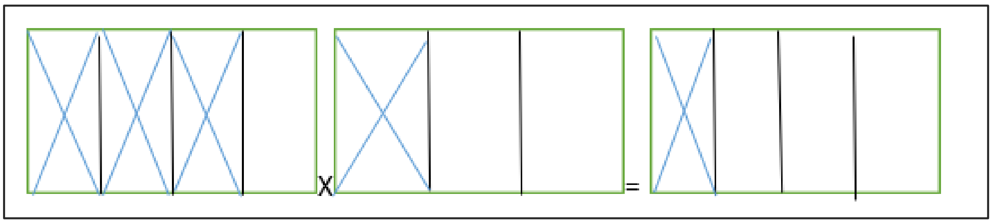
Εικόνα 65 Αναπαράσταση όρων και γινόμενου σε αριθμογραμμή (λύση 3/4x 1/3= 1/4)



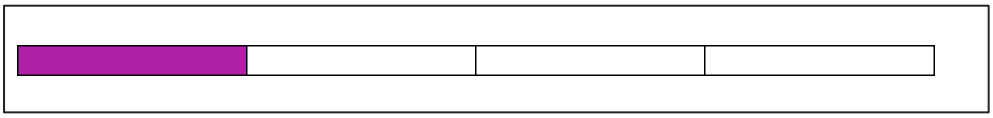
Εικόνα 66 Αναπαράσταση όρων και γινόμενου σε αριθμογραμμή (λύση 3/4x 1/3= 1/4)



Εικόνα 67 Μεμονωμένες αναπαραστάσεις όρου και γινομένου σε κλασματικές λωρίδες (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

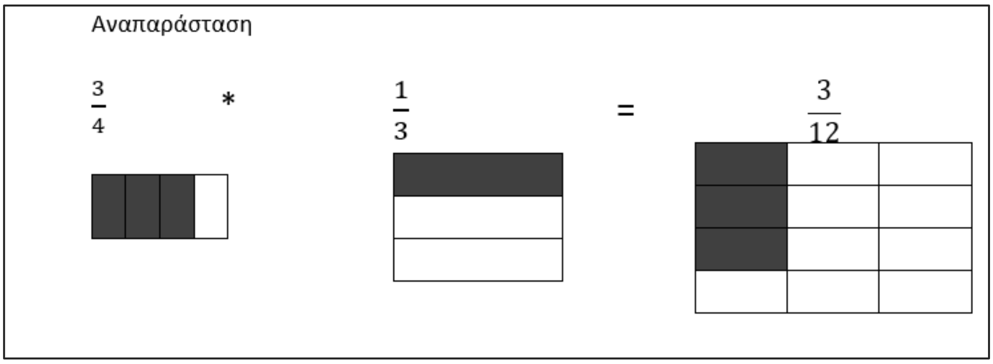


Εικόνα 68 Μεμονωμένες αναπαραστάσεις όρου και γινομένου σε ορθογώνια (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

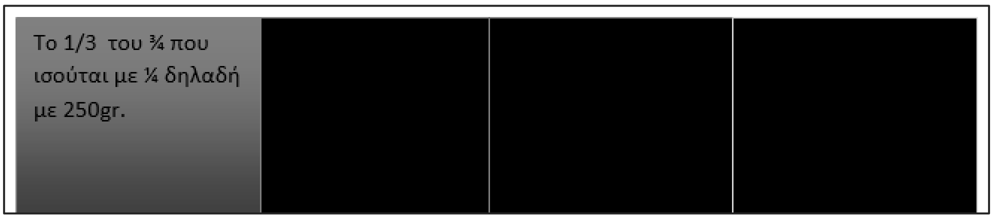


Εικόνα 69 Αναπαράσταση του αποτελέσματος σε κλασματική λωρίδα (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

Ένα μικρό ποσοστό φοιτητών (5,5%) προσπάθησε να αποδώσει σχηματικά την πράξη ακολουθώντας το μοντέλο εμβαδού για το πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Ωστόσο, αυτή η προσπάθεια τους ήταν αποτυχημένη με αποτέλεσμα να έχουμε άστοχες απαντήσεις όπως την παρακάτω (εικόνα 70). Οι υπόλοιπες απαντήσεις (9,6%) ήταν ανακριβείς ή μη κατανοητές (εικόνα 71).



Εικόνα 70 Λανθασμένο μοντέλο εμβαδού (λύση 3/4x 1/3= 1/4)



Εικόνα 71 Ανακριβής αναπαράσταση (λύση 3/4x 1/3= 1/4)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 30,1% (22)	Κλασματική-ές λωρίδες ή αριθμογραμμή-ες	12,3% (9)
	Μοντέλο εμβαδού επιφάνειας	8,2% (6)
	Κυκλικός δίσκος	6,8% (5)
	Λοιπές σωστές αναπαραστάσεις	2,7% (2)
Λάθη 47,9% (35)	Αναπαράσταση όρων και γινομένου πάνω σε αριθμογραμμή	12,3% (9)
	Αναπαράσταση όρων και γινομένου (χωρίς την σχέση)	11% (8)
	Αναπαράσταση γινομένου	9,6% (7)
	Αποτυχημένη αναπαράσταση με μοντέλο εμβαδού	5,5% (4)
	Λοιπά λάθη	9,6% (7)

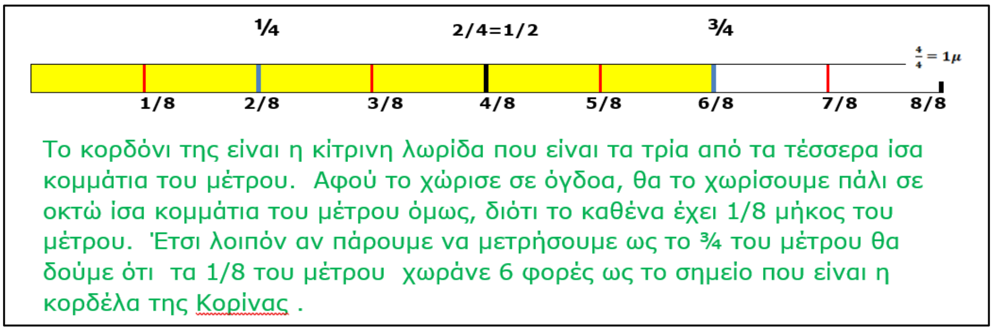
Πίνακας 7 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΑΠΠ)

Έργο 9: Αναπαράσταση Προβλήματος Διαίρεσης 2

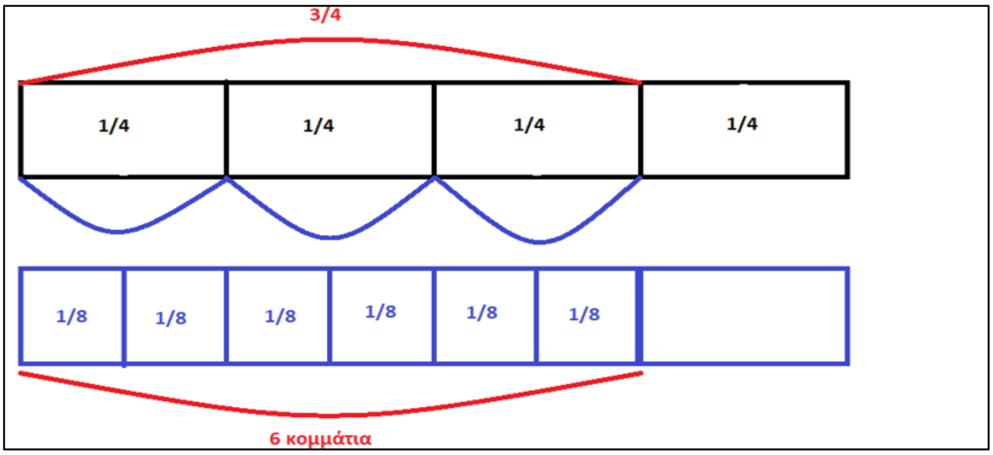
Στο έργο οπτικοποίησης του τελευταίου προβλήματος διαίρεσης (ΑΠΔ2) ($\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$), οι επιτυχείς προσπάθειες ήταν περιορισμένες (15,1%). Η πλειονότητα των απαντήσεων ήταν λανθασμένες(72,6%), αφού όπως φάνηκε πολλοί ερωτηθέντες δεν ήταν σε θέση να απεικονίσουν καταλλήλως την λύση. Επιπλέον, 9 συμμετέχοντες (12,3%) δεν ανταποκρίθηκαν σε αυτό το ερώτημα.

<u>Είδη αναπαράστασης λύσης προβλήματος διαίρεσης 2 (ΑΠΔ2)</u>

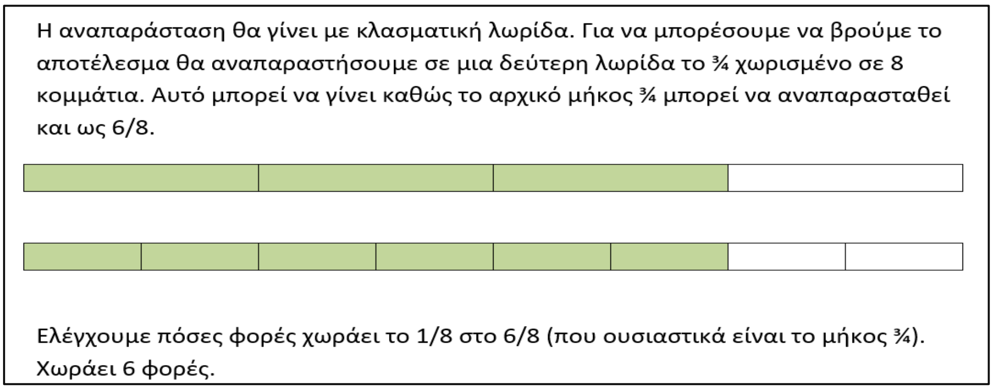
Οι αναπαραστάσεις που παρατέθηκαν για την πράξη $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ αποτελούνταν κυρίως από μοντέλα μήκους. Ειδικότερα, 8 άτομα (11%) έδωσαν μια αναπαράσταση με μία ή περισσότερες κλασματικές λωρίδες. Σε αυτές φαινόταν τα ότι το μήκος των $\frac{3}{4}$,που ισούται με τα $\frac{6}{8}$, αποτελείται από 6 τμήματα των $\frac{1}{8}$ (εικόνες 72, 73 & 74). Παρομοίως, υπήρξαν αναπαραστάσεις (4,1%) με μία ή δύο αριθμογραμμές πάνω στις οποίες φαινόταν η σχέση που προκύπτει από την πράξη και η αναλογία των δύο κλασμάτων (εικόνα 75)



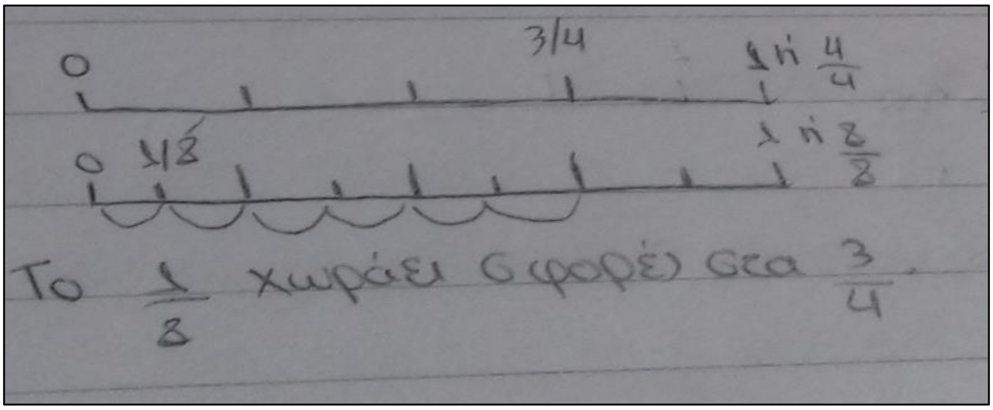
Εικόνα 72 Κλασματική λωρίδα (λύση 3/4: 1/8=6)



Εικόνα 73 Δύο κλασματικές λωρίδες (λύση 3/4: 1/8=6)



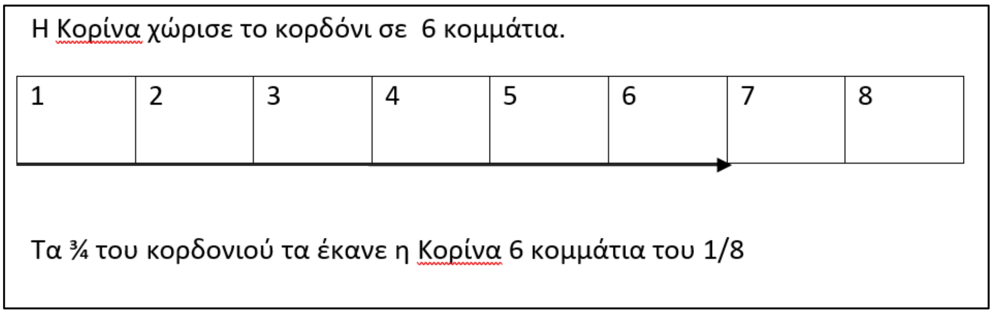
Εικόνα 74 Δύο κλασματικές λωρίδες (λύση 3/4: 1/8=6)



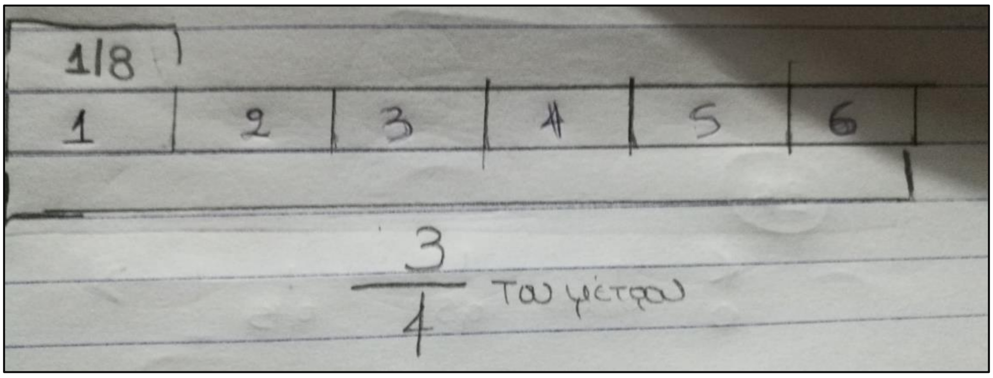
Εικόνα 75 Διπλή αριθμογραμμή (λύση 3/4: 1/8=6)

<u>Λάθη στην αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος διαίρεσης (ΑΛΠΔ2)</u>

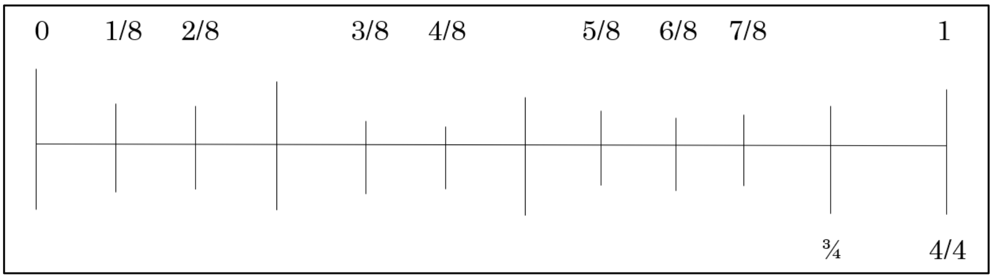
Αρκετοί υποψήφιοι (27,4%) δάσκαλοι προσπάθησαν ανεπιτυχώς να απεικονίσουν την λύση του προβλήματος με κλασματικές λωρίδες ή αριθμογραμμές , καταλήγοντας τελικά σε ανακριβείς ή ελλιπείς αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα σε κάποιες περιπτώσεις σημειώνεται το $\frac{3}{4}$ που χωρίζεται σε 6 κομμάτια χωρίς όμως να φαίνεται το όλο ($\frac{4}{4}$ =1) , ενώ σε άλλες λείπει κάποιο άλλο σημαντικό στοιχείο-πληροφορία στο σχέδιο (π.χ. $\frac{1}{8}$) με αποτέλεσμα να είναι ανεπαρκείς (εικόνες 76 & 77). Επιπροσθέτως, το 20,5% των συμμετεχόντων δημιούργησε λανθασμένες αριθμογραμμές, όπου οι κλασματικοί αριθμοί δεν ήταν καταλλήλως τοποθετημένοι σε σημεία του άξονα (εικόνες 78 & 79). Επίσης, κάποιοι χώρισαν σε 6 κομμάτια το τμήμα από το $\frac{2}{4}$ ως το $\frac{3}{4}$ και όχι το τμήμα από το 0 έως το σημείο του $\frac{3}{4}$.



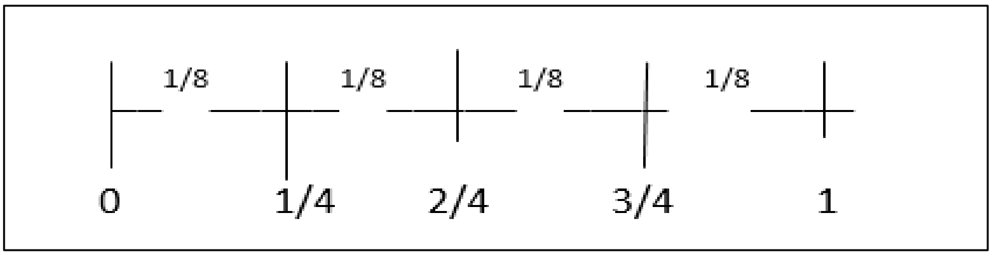
Εικόνα 76 Κλασματική λωρίδα με ελλιπείς στοιχεία (λύση 3/4: 1/8=6)



Εικόνα 77 Κλασματική λωρίδα με ελλιπείς στοιχεία (λύση 3/4: 1/8=6)

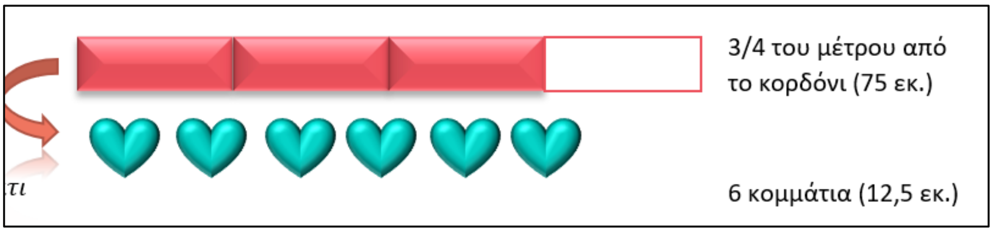


Εικόνα 78 Λανθασμένη αριθμογραμμή (λύση 3/4: 1/8=6)

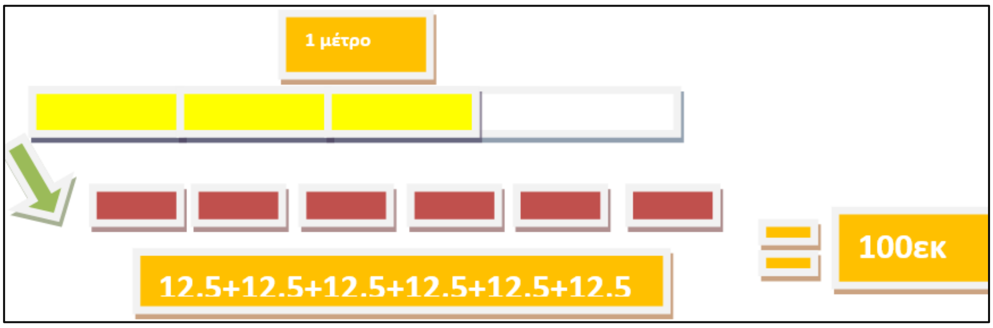


Εικόνα 79 Λανθασμένη αριθμογραμμή (λύση 3/4: 1/8=6)

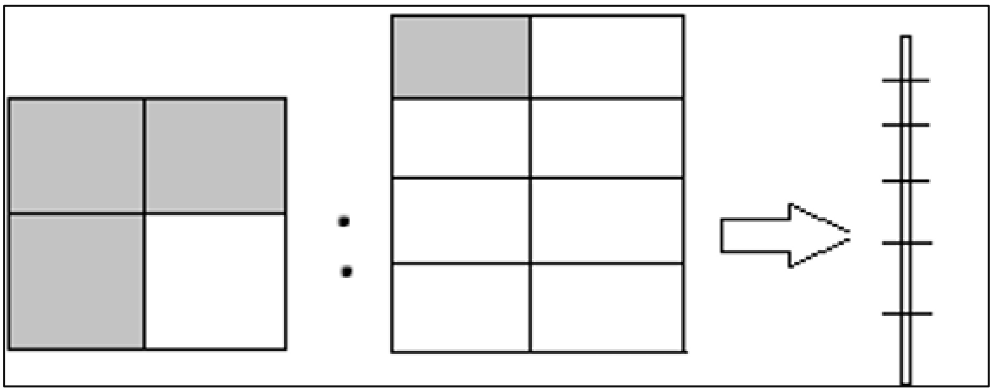
Λίγοι από τους συμμετέχοντες (5,5%) αποτύπωσαν την πράξη δημιουργώντας μια αναπαράσταση (π.χ. λωρίδα) για το $\frac{3}{4}$ και για το γινόμενο (6) σχεδίασαν διακριτά αντικείμενα (π.χ. εικόνες 80 & 81). Οι υπόλοιποι (19,2%) αποτύπωσαν ποικίλες αναπαραστάσεις που αποδείχθηκαν λανθασμένες. Για παράδειγμα, 3 άτομα έδειχναν τον διαιρέτη, τον διαιρετέο και το πηλίκο σε τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις τοποθετώντας ενδιάμεσα τους τα σύμβολα της πράξης και της ισότητας (εικόνα 82).



Εικόνα 80 Αναπαράσταση του διαιρετέου σε κλασματική λωρίδα και του πηλίκου ως σύνολο (λύση 3/4: 1/8=6)



Εικόνα 81 Αναπαράσταση του διαιρετέου σε κλασματική λωρίδα και του πηλίκου ως σύνολο (λύση 3/4: 1/8=6)



Εικόνα 82 Μεμονωμένες αναπαραστάσεις διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου (λύση 3/4: 1/8=6)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία	Κλασματική-ες λωρίδα-ες	11% (8)
15,1% (11)	Αριθμογραμμή-ες	4,1% (3)
Λάθη	Ανακριβείς ή ελλιπείς αριθμογραμμές	27,4% (20)
72,6% (53)	Λανθασμένες αριθμογραμμές	20,5% (15)
	Αναπαράσταση διαιρετέου και πηλίκου	5,5% (4)
	Λοιπά λάθη	19,2% (14)

Πίνακας 8 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΑΠΔ2)

3.1.4 Άξονας 4: Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 10: Επίλυση Προβλήματος Διαίρεσης 1

Στο πρώτο έργο επίλυσης προβλήματος (ΕΠΔ1), περίπου τα τρία τέταρτα των ερωτηθέντων (78,1%) έλυσαν το πρόβλημα με επιτυχία. Ένα μέρος αυτών έλυσε διαιρώντας τον ακέραιο αριθμό με το κλάσμα, ενώ άλλοι προτίμησαν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης. Εντούτοις, 7 άτομα (9,6%) παρουσίασαν κάποια λανθασμένη λύση και 9 (12,3%) δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Τρόποι επίλυσης προβλήματος διαίρεσης 1 (ΕΠΔ1)

Η πλειονότητα από τις σωστές απαντήσεις (46,6%) παρουσίαζαν ως λύση την διαίρεση 3: $\frac{3}{4}$, όπου 3 είναι τα κιλά γιαούρτι που πρέπει να τοποθετηθούν σε κυπελάκια $\frac{3}{4}$ γραμμαρίων. Ορισμένοι (16,4%), όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, έτσι και σε αυτό, εξήγησαν τον λόγο που επέλεξαν αυτήν την πράξη. Για παράδειγμα:

*«Για να βρω πόσα κεσεδάκια θα γεμίσουμε θα διαιρέσω τα συνολικά κιλά γιαουρτιού με την ποσότητα που θα έχει το κάθε κεσεδάκι. Άρα: 3:3/4= 3*4/3= 12/3= 4. Επομένως θα γεμίσουμε 4 κεσεδάκια.»*

«Θέλουμε να μοιράσουμε το γιαούρτι σε κεσεδάκια ίσης χωρητικότητας άρα για να βρούμε πόσα τέτοια κεσεδάκια θα γεμίσουμε, θα κάνουμε διαίρεση:

$$3 : \frac{3}{4} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

Θα γεμίσουμε 4 κεσεδάκια.»

Άλλοι (28,8%), παρέθεσαν απλά την πράξη που πραγματοποίησαν χωρίς να αναλύουν περαιτέρω. Π.χ.:

«$3 \div \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{3} = 4\ \kappa\varepsilon\sigma\varepsilon\delta\acute{\alpha}\kappa\iota\alpha$ θα γεμίσουμε.»

Βέβαια, όπως ειπώθηκε, οι σωστές απαντήσεις δεν ήταν πάντα η διαίρεση$3 \div \frac{3}{4}$. Υπήρχαν απαντήσεις, οι οποίες για να καταλήξουν στο αποτέλεσμα παρουσίαζαν κάποιο διαφορετικό τρόπο. Έτσι, σε κάποιες περιπτώσεις (11%) είτε έβρισκαν τα γραμμάρια που αντιστοιχούσαν στα 3 κιλά και στο κλάσμα $\frac{3}{4}$ και στην συνέχεια εκτελούσαν την διαίρεση 3000:750= 4, είτε τα μετέτρεπαν όλα σε κιλά και υπολόγιζαν (3:0,75=4). Επίσης, κάποιοι αντί για διαίρεση πραγματοποιούσαν πολλαπλασιασμό για να αιτιολογήσουν την απάντηση τους. Για παράδειγμα:

«*Τα ¾ του κιλού γιαούρτι είναι 750gr. Άρα τα 3kg γιαούρτι ή 3000gr θα χωρέσουν σε 3000/750 κεσεδάκια= 300/75=4. 4 κεσεδάκια των 750gr»*

«3kg συνολικά γιαούρτι θα το τοποθετήσουμε σε κεσεδάκια των 3/4 κιλού, άρα των 0,75kg. Άρα, 3:0,75 = 4 κεσεδάκια.»

«3 κιλά γιαούρτι=3000gr

1 κεσεδάκι 3/4 κιλού γιαουρτιού

1/4=250gr 4/4=1000gr άρα 3/4= 750gr

Άρα θα χρειαστούμε 4 κεσεδάκια καθώς 4×750=3000gr»

4 συμμετέχοντες (5,5%) έδωσαν περιγραφικές απαντήσεις, αναλύοντας πως γεμίζονται τα πρώτα τρία κεσεδάκια και πως το τελευταίο για να καταλήξουν ότι χρειάζονται 4 κεσεδάκια. Χαρακτηριστική απάντηση είναι η εξής:

«Αρχικά πρέπει να βρούμε πόσα γραμμάρια είναι τα 3 κιλά γιαούρτι. 1 κιλό ισούται με 1000 γραμμάρια, οπότε πολλαπλασιάζουμε 3×1000=3000 γραμμάρια. Οπότε το δοχείο περιέχει 3000 γραμμάρια γιαούρτι.

Έπειτα πρέπει να βρούμε πόσα γραμμάρια είναι τα 3/4 του κιλού γιαούρτι που χωράει κάθε κεσεδάκι το οποίο θα γεμίσουμε. Επειδή 1 κιλό ισούται με 1000 γραμμάρια, διαιρούμε το 1000/4=250 γραμμάρια. Οπότε τα 3/4 του κιλού γιαούρτι είναι 3×250=750 γραμμάρια γιαούρτι. Άρα κάθε κεσεδάκι χωράει 750 γραμμάρια γιαούρτι. Επομένως από κάθε κιλό γιαούρτι περισσεύουν 1000-750=250 γραμμάρια τα οποία δεν χωράει το κεσεδάκι.

Από 3 κιλά γιαούρτι(3000 γραμμάρια) θα γεμίσουμε 3 κεσεδάκια που το κάθε ένα χωράει 3/4 του κιλού γιαούρτι(750 γραμμάρια). Οπότε από κάθε κεσεδάκι περισσεύουν 250 γραμμάρια γιαούρτι.. Συνολικά περισσεύουν 250×3=750 γραμμάρια (3/4 του κιλού). Επομένως μπορούμε να γεμίσουμε ακόμη 1 επιπλέον κεσεδάκι με το γιαούρτι που περίσσεψε.

Άρα με τα 3 κιλά γιαούρτι που περιέχει το δοχείο θα γεμίσουμε συνολικά 4 κεσεδάκια.»

Ένας άλλος εναλλακτικός τρόπος στον οποίο προέβησαν λίγοι φοιτητές (4,1%) ήταν η δημιουργία μιας εξίσωσης ($\frac{3}{4}$ xχ=3) όπου ο άγνωστος ήταν το πλήθος από κεσεδάκια. Ενδεικτικές απαντήσεις είναι οι εξής:

«3/4 χ Ψ= 3 Άρα 3Ψ/4=3 Άρα 3Ψ=12 Άρα Ψ=12/3=4»

«3=$\chi \times \frac{3}{4} \to 12 = 3\chi \to \chi = 4$ *θα χρησιμοποιήσουμε 4 κεσεδάκια»*

Ακόμη, 2 άτομα (2,7%) έλυσαν αυτό το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών. Μια αντίστοιχη απάντηση είναι:

«Αν 1 κεσεδάκι γεμίζει με ¾ του κιλού του γιαουρτιού

Τότε z κεσεδάκια γεμίζουν με 3 κιλά του γιαουρτιού

Με απλή μέθοδο των τριών καταλήγουμε στην πράξη:

3= z x ¾ ⇔ z= 3/1 x 4/3 ⇔ z= 12/3 ⇔ z=4

Ή

3= z x ¾ ⇔ 1= z x ¼ ⇔ z=4

Άρα θα γεμίσουμε 4 κεσεδάκια»

Υπήρχαν, ωστόσο, και απαντήσεις (8,2%) που παρουσίαζαν δύο τρόπους από τους παραπάνω. Αυτό δείχνει κάποιου είδους ευελιξία και βαθύτερη κατανόηση. Ο ένας τρόπος ήταν πάντα η άμεση διαίρεση 3: $\frac{3}{4}$ και ο άλλος ένας από τους εναλλακτικούς. Δύο τέτοιες απαντήσεις είναι:

«α' τρόπος

Το κάθε κεσεδάκι χωράει $\frac{3}{4}$*του κιλού, δηλαδή* $\frac{3}{4}$*x 1000γραμμ. = 750γραμμάρια*

Άρα θα γεμίσουμε 3000 : 750 = 4 κεσεδάκια γιαούρτι.

Β' τρόπος (προτιμότερος)

3 $/\frac{3}{4} = \frac{3}{1} / \frac{3}{4} = \frac{3}{1} x \frac{4}{3} = \frac{12}{3} =$ *4 κεσεδάκια γιαούρτι»*

«3 : $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{4}{3} =$ *4 κεσεδάκια*

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και έναν ακόμα εναλλακτικό τρόπο την αναγωγή στην κλασματική μονάδα δηλαδή:

Το 1 kg είναι 1000 gr

Το 3 kg είναι 3000 gr

Το $\frac{1}{4}$ *kg είναι* $\frac{1000}{4}$*= 250 gr*

Τα $\frac{3}{4}$*kg είναι 3× 250 = 750 gr*

Άρα θα κάνουμε $\frac{3000}{750}$*= 4 κεσεδάκια*

Απάντηση: *Άρα θα γεμίσουμε 4 κεσεδάκια χωρητικότητας 750gr.»*

<u>Λάθη στην επίλυση προβλήματος διαίρεσης 1 (ΕΠΔ1)</u>

Οι λάθος απαντήσεις αν και ήταν λίγες, δεν παρουσίαζαν κάποιο κοινό στοιχείο. Έτσι, δύο συμμετέχοντες εκτέλεσαν πολλαπλασιασμό αντί για διαίρεση, κάποιος άλλος υπολόγιζε μόνο το $\frac{3}{4}$ σε γραμμάρια (750 gr) ενώ άλλοι έδωσαν λύσεις των οποίων ο ειρμός δεν ήταν κατανοητός. Κάποιες από αυτές τις απαντήσεις ήταν:

«Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο για να βρούμε το αποτέλεσμα.

3/1*3/4= 12/4

X= 4 Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε 4 κεσεδάκια γιαούρτια.»

«$\frac{3}{4}\ 1\ \kappa\iota\lambda\acute{o} = \frac{3}{4}\ \chi\ 1000 = 750\ \gamma\rho$»

«¾ x 1000= 3000/4 =750x4=3000 κεσεδάκια (3 κιλά)»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 78,1% (57)	Διαίρεση ακέραιου με κλάσμα	46,6% (34)
	Μετατροπή κλάσματος σε γραμμάρια και διαίρεση ή πολλαπλασιασμός	11% (8)
	Επίλυση με δύο τρόπους	8,2% (6)
	Περιγραφική λύση	5,5% (4)
	Δημιουργία Εξίσωσης	4,1% (3)
	Απλή μέθοδος των τριών	2,7% (2)
Λάθη 9,6% (7)	Διάφορα λάθη	9,6% (7)

Πίνακας 9 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΠΔ1)

Έργο 11: Επίλυση Προβλήματος Πολλαπλασιασμού

Στο επόμενο πρόβλημα (ΕΠΠ) και στην επίλυση αυτού, 53 συμμετέχοντες (72,6%) απάντησαν σωστά. Όπως σε προηγούμενα έργα, υπήρξαν και σε αυτό το πρόβλημα λύσεις με την πράξη του πολλαπλασιασμού αλλά και με εναλλακτικούς τρόπους. 15 άτομα (20,5%) έλυσαν με λάθος τρόπο και οι υπόλοιποι (6,9%) δεν απάντησαν.

Τρόποι επίλυσης προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΕΠΠ)

Το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών (58,9%) επέλεξε να λύσει εκτελώντας την πράξη $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ και βρίσκοντας το γινόμενο $\frac{3}{12}$. Εφόσον υπολόγισαν το γινόμενο, ορισμένοι (26%), απλοποίησαν το κλάσμα σε $\frac{1}{4}$. Άλλοι φοιτητές (17,8%) υπολόγισαν τα γραμμάρια (250 γρ.) ή τα κιλά (0,25 κ.) που αντιστοιχούν στο κλάσμα που προέκυψε, είτε πολλαπλασιάζοντας το με το 1000 (1κιλό=1000γρ) είτε εκτελώντας την διαίρεση 1:4. Παραδείγματα των παραπάνω περιπτώσεων είναι:

«$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$,

Άρα ο Κώστας χρησιμοποίησε μέρος του μέρους, δηλαδή, το $\frac{1}{4}$ *του κιλού κρέας»*

«Λύση:

$\frac{3}{4} * \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ *κιλά κρέατος.»*

«$\frac{3}{4}$ *x* $\frac{1}{3} = \frac{3}{12}$ *κιλά*

$\frac{3}{12}$ *x 1000 =* $\frac{3000}{12}$ *= 250 γραμμάρια*

Άρα, ο Κώστας χρησιμοποίησε 250 γραμμάρια κιμά.»

«Το 1/3 του 3/4 είναι 1/3 × 3/4 = 1/4 Το 1/4 του κιλού είναι (1kg= 1000gr) 1/4 × 1000 = 1000/4 = 250 gr ***Απάντηση :*** *Ο Κώστας χρησιμοποίησε 250 gr κρέας για να φτιάξει γιουβαρλάκια.»*

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης που επέλεξαν 11 φοιτητές (15,1%), ήταν η αρχική μετατροπή των $\frac{3}{4}$ σε γραμμάρια (750 γρ) και έπειτα ο υπολογισμός του $\frac{1}{3}$ των 750 γρ. Για τον υπολογισμό του $\frac{1}{3}$ κάποιοι εκτέλεσαν τον πολλαπλασιασμό $\frac{1}{3}$ x 750=250 γρ.

ενώ άλλοι την διαίρεση 750:3=250γρ.Παρακάτω παρατίθενται κάποιες ανάλογες λύσεις:

«$\frac{3}{4}$ κιλού $= \frac{3}{4}\ \chi\ 1000 = 750\ \gamma\rho.$

Η άσκηση μας λέει ότι ο Κώστας χρησιμοποίησε το $\frac{1}{3}$ του κρέατος που αγόρασε , οπότε χρησιμοποίησε $\frac{1}{3}\ \chi\ 750 = 250\ \gamma\rho.$»

«*Τα 4/4 που είναι 1 κιλό , είναι 1.000 γραμμάρια. Το ¼ είναι 1000÷ 4=250 γραμμάρια . Άρα τα 3/4 του κιλού κρέας είναι 750 γραμμάρια. Από αυτά Ο Κώστας χρησιμοποίησε το 1/3 για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Άρα, χρησιμοποίησε 750÷3=250 γραμμάρια»*

Λίγοι (5,5%) έδωσαν μια περιγραφική λύση για το πρόβλημα, όπου επισήμαναν ότι ζητείται στην ουσία «το μισό του μισού» άρα 250 γρ. Για παράδειγμα:

«1 κιλό= $\frac{4}{4}$ και πήρε τα $\frac{3}{4}$ δηλαδή περισσότερο από το μισό, περισσότερο από το $\frac{2}{4}$ (το μισό). Αυτός χρησιμοποίησε το μισό του μισού 1:2= 0,50 και 0,50:2=0,25. Άρα 250 γραμμάρια»

<u>Λάθη στην επίλυση προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΕΠΠ)</u>

Το ένα πέμπτο των ερωτηθέντων (20,5%) φάνηκε να μην είναι σε θέση να λύσει σωστά το πρόβλημα που τους τέθηκε. Η πλειοψηφία αυτών (13,7%) , μάλιστα, εκτέλεσε την πράξη της αφαίρεσης αντί του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων. Μερικοί (4,1%) ,επίσης, προέβησαν στην πράξη της διαίρεσης και κατέληξαν σε λάθος αποτελέσματα. Τα υπόλοιπα λάθη (2,7%) ήταν διάφορα. Παραδείγματα των ανώτερων περιπτώσεων είναι τα εξής:

«$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$

$\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{35-20}{48} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$

Χρησιμοποίησε 1/3 του κιλού δηλαδή 250 γρ.»

«$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

Απάντηση: Χρησιμοποίησε 5/12 του κιλού κρέατος.»

*«3/4 : 1/3 = 3/4 * 3/1 = 9/ 4*

Άρα ο Κώστας χρησιμοποίησε 225 γραμμάρια κιμά.»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 72,6% (53)	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων και απλοποίηση	26% (19)
	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων και μετατροπή σε γρ.	17,8% (13)
	Μετατροπή κλασμάτων σε γρ. και υπολογισμός	15,1% (11)
	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	8,2% (6)
	Περιγραφική λύση	5,5% (4)
Λάθη 21,9% (16)	Αφαίρεση κλασμάτων	13,7% (10)
	Διαίρεση κλασμάτων	4,1% (3)
	Λοιπά λάθη	2,7%(2)

Πίνακας 10 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΠΠ)

Έργο 12: Επίλυση Προβλήματος Διαίρεσης 2

Στο τελευταίο πρόβλημα (ΕΠΔ2), μεγάλο μέρος των φοιτητών (90,4%) ανταποκρίθηκε επιτυχώς και έλυσε ορθά, είτε διαιρώντας τα δύο κλάσματα είτε με έναν διαφορετικό τρόπο. Λάθος λύσεις έδωσαν 5 άτομα (6,8%) και ελάχιστοι (2,7%) δεν έδωσαν κάποια λύση για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

<u>Τρόποι επίλυσης προβλήματος διαίρεσης 2</u>

Το μεγαλύτερο ποσοστό (75,3%) έλυσε εκτελώντας την διαίρεση $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$ και κατέληξε στο πηλίκο $\frac{24}{4}$ και τελικά στα 6 κομμάτια. Ορισμένοι εκτέλεσαν τον αλγόριθμο της διαίρεσης, πολλαπλασιάζοντας το $\frac{3}{4}$ με τον αντίστροφο του $\frac{1}{8}$. Εντούτοις, υπήρχαν και φοιτητές που μετέτρεψαν την διαίρεση σε σύνθετο κλάσμα και έλυσαν αναλόγως. Τέτοιου είδους απαντήσεις ήταν οι εξής:

«$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$

Άρα η Κορίνα το χώρισε σε 6 κομμάτια»

«3/ 4 : 1/ 8 = 3/ 4 Χ 8 = 24/ 4 = 6 κομμάτια»

«$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{3*8}{4*1} = \frac{24}{4} = 6$ *κομμάτια.»*

Περίπου το ένα πέμπτο των απαντήσεων ήταν ορθές λύσεις που διατυπώθηκαν με διαφορετικό από τον παραπάνω τρόπο. Έτσι, 8 άτομα (11%) προτίμησαν να υπολογίσουν τα εκατοστά που αντιστοιχούν στο αρχικό μήκος $\frac{3}{4}$ και στο μήκος $\frac{1}{8}$ και στη συνέχεια να διαιρέσουν τα εκατοστά που αντιστοιχούν σε κάθε κλάσμα. Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις (4,1%) είχαν να κάνουν είτε με εξίσωση, είτε με την απλή μέθοδο των τριών ή κάποιο άλλο τρόπο. Αντίστοιχες λύσεις αυτών των περιπτώσεων είναι :

«1 μέτρο=100 εκατοστά

3/4x100=75εκ

1/8x 100= 12,5 εκ

75/12,5= 6 κομμάτια»

«1 μέτρο=100 εκατοστά

3/4 του μέτρου 75 εκατοστά

1/8 του μέτρου= κάθε κομμάτι

100÷8= 12,5 εκατοστά

75÷12,5=6 κομμάτια»

«3/4 χ 2/2 = 6/8 Άρα 1/8 χ Ψ = 6/8 Άρα Ψ/8 = 6/8 Άρα Ψ= 6

Επομένως η Κορίνα χώρισε το κορδόνι σε 6 κομμάτια.»

Λάθη στην επίλυση προβλήματος διαίρεσης 2

Οι λάθος απαντήσεις ήταν ελάχιστες (6,8%). Κάποιες αντί για διαίρεση των δύο κλασμάτων είχαν ως πράξη τον πολλαπλασιασμό αυτών και άλλες ήταν είτε ανακριβής είτε μη κατανοητές. Για παράδειγμα: «*Ξέρουμε πόσο είναι το κάθε κομμάτι και ψάχνουμε να βρούμε σε πόσα κομμάτια θα χωριστεί το όλον. 3/4 * 1/8 = 3/4 *8 = 24/4 = 6 κομμάτια*

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 90,4 (22,6%)	Διαίρεση κλασμάτων	75,3% (55)
	Μετατροπή κλασμάτων σε εκ. και διαίρεση	11% (8)
	Λοιπά σωστά	4,1%(3)
Λάθη	Διάφορα λάθη	6,8% (5)

6,8% (5)

Άρα το χώρισε σε 6 κομμάτια.»

Πίνακας 11 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΠΔ2)

3.1.5 Άξονας 5: Κατασκευή- δημιουργία προβλημάτων με βάση την πράξη του πολλαπλασιασμό και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 13: Κατασκευή Προβλήματος Πολλαπλασιασμού

Στην κατασκευή προβλήματος που έχει ως λύση τον προαναφερόμενο πολλαπλασιασμό $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ (ΚΠΠ), οι σωστές απαντήσεις ήταν 45 (61,6%). Η πλειοψηφία των μελλοντικών εκπαιδευτικών ήταν σε θέση να διατυπώσει ένα εύστοχο πρόβλημα στο οποίο αντίστοιχη λύση να είναι η πράξη $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$= $\frac{3}{8}$. Αντίθετα, 26 από τους φοιτητές (35,6%) δεν κατάφερε το ζητούμενο. 2 άτομα (2,7%) δεν απάντησαν σε αυτό το έργο.

<u>Είδη προβλημάτων πολλαπλασιασμού (ΚΠΠ)</u>

Τα μαθηματικά προβλήματα που κατασκευάστηκαν ήταν ποικίλα. Πάραυτα κάποιοι φοιτητές δημιούργησαν προβλήματα με κοινά στοιχεία. Για παράδειγμα, 24,7 % των δασκάλων ανέφεραν προβλήματα με μέρη και κομμάτια μιας συνεχούς, συνήθως βρώσιμης ποσότητας, όπως μιας πίτσας, πίτας, τούρτας και σοκολάτας. Ενδεικτικά προβλήματα ήταν:

«Σε μία πίτσα μένουν τα $\frac{3}{4}$. Ο Γιάννης τρώει το μισό αυτής της πίτσας. Τι μέρος της αρχικής πίτσας έφαγε;»

«Η μαμά της Μαρίας της έδωσε τα 3/4 μιας σοκολάτας .Το 1/2 αυτής της σοκολάτας το έδωσε στον αδερφό της. Τι μέρος της αρχικής σοκολάτας του έδωσε;»

«Ο Γιάννης στο πάρτι έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτας και ο Γιώργος ήρθε και έφαγε το $\frac{1}{2}$ από αυτό που άφησε ο Γιάννης. Δηλαδή, έφαγε το μισό του $\frac{3}{4}$. Πόση πίτα έφαγε ο Γιώργος.»

Παρόμοια, ορισμένοι συμμετέχοντες (5,5%) διατύπωσαν προβλήματα με υγρές ποσότητες σε μπουκάλια όπως γάλα, κρασί κλπ. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα ήταν το εξής:

«Ένα μπουκάλι περιέχει $\mathbf{\frac{3}{4}}$ λίτρα φυσικό χυμό πορτοκάλι. Η Πηνελόπη ήπιε το $\mathbf{\frac{1}{2}}$ από το περιεχόμενο του μπουκαλιού. Πόσα λίτρα χυμού ήπιε η Πηνελόπη;»

Ένα μέρος συμμετεχόντων (12,3%) προτίμησαν καταστάσεις με συνταγές και δόσεις, όπου τα κλάσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μέτρηση υλικών, ενώ ο πολλαπλασιασμός για τον υπολογισμό ενός μέρους μιας δόσης. Ενδεικτικά προβλήματα ήταν:

«Σε μια συνταγή παγωτού γράφει ότι χρειάζονται $\frac{3}{4}$ του κιλού σαντιγί .
Η Μαρία θέλει να κάνει $\frac{1}{2}$ της δόσης του παγωτού .Πόση σαντιγί θα χρειαστεί;»
«Η Μαρία χρειάζεται ¾ της σοκολάτας για την συνταγή για το κέικ σοκολάτας, από το οποίο το ½ το χρειάζεται για τον στολισμό. Πόση σοκολάτα χρειάζεται για να την χρησιμοποιήσει στον στολισμό;»

Κάποιες άλλες απαντήσεις σε αυτό το έργο ήταν προβλήματα με διακριτές ποσότητες (9,6%), όπως μήλα, κεράσια και άνθρωποι. :

«Στην Δ' δημοτικού τα 3/4 της τάξης είναι κορίτσια. Από τα κορίτσια της Δ΄ δημοτικού το 1/2 μόνο πάει φροντιστήριο στα αγγλικά. Τι μέρος της τάξης αποτελούν τα κορίτσια που πηγαίνουν αγγλικά;»

«Η κυρία Βάσω πήγε στον μανάβη και αγόρασε $\frac{3}{4}$ του κιλού κεράσια. Όμως ο μανάβης της έδωσε δώρο τα μισά κιλά από αυτά που αγόρασε. Πόσα κιλά της έκανε δώρο;»

Λιγότερα από τα προβλήματα (6,8%) που κατασκευάστηκαν αφορούσαν το εμβαδόν μιας περιοχής ή κάποιου γεωμετρικού σχήματος (λ.χ. παραλληλογράμμου). Τέτοιου τύπου προβλήματα ήταν τα εξής:
«Η Μαρία θέλει να καλύψει με μοκέτα όλο το δάπεδο του χολ του σπιτιού της. Το χολ έχει μήκος ¾ του μέτρου και πλάτος $\frac{1}{2}$ του μέτρου. Πόσα τετραγωνικά μέτρα μοκέτα θα χρειαστεί;»
«Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου του οποίου η μικρή πλευρά είναι ½ μ. και η μεγάλη ¾ μ.;»

<u>Λάθη στη κατασκευή προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΚΠΠ)</u>

Παρόλα αυτά, πολλά από τα προβλήματα που δόθηκαν ως απαντήσεις στο ερώτημα ΚΠΠ ήταν μη κατάλληλα και δεν αντιστοίχιζαν στην πράξη. Ως εσφαλμένες απαντήσεις θεωρήθηκαν, παραδείγματος χάριν, προβλήματα που για την επίλυση τους απαιτούσαν πέρα από τον πολλαπλασιασμό , μία ακόμη πράξη (π.χ. αφαίρεση) (6,8%). Χαρακτηριστικά προβλήματα τέτοιου τύπου είναι τα εξής:

«Ο Κώστας έχει γενέθλια και μαζί με την οικογένειά του έκοψαν μια τούρτα. Το βράδυ είχαν περισσέψει τα ¾ της τούρτας. Την επόμενη ημέρα ο Κώστας έφαγε το ½ της τούρτας που περίσσεψε. Πόση τούρτα έμεινε για την οικογένεια την Τρίτη ημέρα;»

«Από μια σπανακόπιτα έμειναν τα 3/4 .Στην συνέχεια ήρθε η Μαρία και πείρε το 1/2 από αυτό που έμεινε. Πόση πίτα έμεινε από την αρχική;»

Ένα άλλο κοινό λάθος ορισμένων φοιτητών (8,2%) ήταν αντί μαθηματικού προβλήματος να περιγράψουν την πράξη που πρέπει να γίνει για να υπολογίσει ο ερωτηθείς το γινόμενο. Παράδειγμα αποτελούν οι εξής δύο απαντήσεις:

«Αν η Μαρία έφαγε τα 3/4 μιας πίτας και αυτό το πολλαπλασιάσουμε με το 1/2 πόση πίτσα έφαγε;»

«Αν πιείς τα 3/4 ενός χυμού και αυτό το πολλαπλασιάσεις με το 1/2 . Πόσο χυμό ήπιες;»

Τα υπόλοιπα σφάλματα που συναντήθηκαν (20,5%), , είναι προβλήματα τα οποία δεν λύνονται με πράξεις πολλαπλασιασμού κλασμάτων, ή έχουν λάθος αριθμούς ως δεδομένα, ή δεν έχουν κάποιο ερώτημα κλπ. Τέτοια προβλήματα είναι:

«Η Μαρία έχει 80 καραμέλες με γεύση φράουλα και κεράσι. Οι 60 από αυτές έχουν γεύση φράουλα. Τα 3/4 έχουν γεύση φράουλα και το 1/2 έχουν γεύση κεράσι .α) Πόσες καραμέλες έχουν γεύση φράουλα; Β) Πόσες καραμέλες έχουν γεύση κεράσι;»

«Η ηλικία της κ. Τασούλας είναι τα ¾ τρία τέταρτα του μισού ½ του 120 έτη

¾ επί ½ = 3/8 3/8 επί 120 =360/8= 360:8=45 έτη.»

«Σε ένα κέικ έχει τοποθετηθεί στο ½ πορτοκάλι και στα ¾ σοκολάτα. Τι μέρος του του κέικ έχει πορτοκάλι;»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 61,6% (45)	Προβλήματα για μέρος μιας συνεχούς στερεής ποσότητας (σε κομμάτια)	24,7% (18)
	Προβλήματα για συνταγές- δόσεις υλικών	12,3% (9)
	Προβλήματα για διακριτές ποσότητες (πχ μήλα)	9,6% (7)
	Προβλήματα για το εμβαδόν μια περιοχής ή σχήματος	6,8% (5)
	Προβλήματα για μέρος μιας υγρής ποσότητας (σε λίτρα)	5,5% (4)
	Λοιπά σωστά προβλήματα	2,7% (2)
Λάθη 35,6% (26)	Περιγραφή της πράξης	8,2% (6)
	Προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμός και μια ακόμη πράξη (πχ αφαίρεση)	6,8% (5)
	Λοιπά λάθη	20,5% (15)

Πίνακας 12 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΚΠΠ)

Έργο 14: Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης

Στο επόμενο έργο (ΚΠΔ) σχεδόν οι μισοί συμμετέχοντες (42,5%) κατάφεραν να σκεφτούν εύστοχα ένα πρόβλημα όπου η προαναφερθείσα πράξη ($\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$) να είναι η λύση του. Οι υπόλοιποι είτε διατύπωσαν ένα μη αποδεκτό πρόβλημα (50,7%) είτε δεν απάντησαν σε αυτήν την ερώτηση (6,8%).

<u>Είδη προβλημάτων διαίρεσης (ΚΠΔ)</u>

Όλα τα προβλήματα που διατυπώθηκαν αφορούσαν την διαίρεση μέτρησης. Η πλειοψηφία (23,3%) των ορθών προβλημάτων περιέγραφαν μια κατάσταση όπου μια υγρή ποσότητα (π.χ. κρασί, χυμός, νερό κλπ.), μετρημένη σε λίτρα, έπρεπε να χωριστεί και να μπει σε μικρότερα δοχεία (π.χ. $\frac{1}{2}$ λίτρου). Ενδεικτικά, κάποια διατυπωμένα προβλήματα ήταν τα εξής:

«Έχω ¾ του λίτρου νερό , και θέλω να το εμφιαλώσω σε μπουκάλια χωρητικότητας ½ λίτρου. Πόσα μπουκάλια θα χρειαστώ;»

«Έχω ¾ του λίτρου γάλα σε μια κανάτα και θέλω να το βάλω στα ποτήρια μου. Τα ποτήρια που θα γεμίσω χωράνε ½ λίτρο γάλα το καθένα. Πόσα ποτήρια με γάλα θα γεμίσω;»

«Έχω ένα μπουκάλι που περιέχει $\frac{3}{4}$ *του λίτρου πορτοκαλάδα. Θέλω να το μοιράσω σε ποτήρια χωρητικότητας μισού λίτρου. Πόσα ποτήρια θα χρειαστώ;»*

Παρομοίως, ορισμένοι φοιτητές (11%) δημιούργησαν προβλήματα που αφορούσαν μια ποσότητα, μετρημένη σε κιλά αυτήν την φορά (π.χ. μαρμελάδα, μέλι, κιμάς κλπ.) που διαιρείται σε μικρότερες ποσότητες. Τέτοιες περιπτώσεις προβλημάτων είναι:

«Η κυρία Κατερίνα έφτιαξε $\frac{3}{4}$ *του κιλού μαρμελάδα φράουλα και θέλει να τη μαζέψει σε βαζάκια που το καθένα χωράει* $\frac{1}{2}$ *του κιλού. Πόσα τέτοια βαζάκια θα χρειαστεί;»*

«Η Μαρίνα για να μαγειρέψει μπιφτέκια χρησιμοποίησε $\frac{3}{4}$ *του κιλού κρέας. Πόσα μπιφτέκια μπόρεσε να φτιάξει, αν για κάθε ένα χρησιμοποίησε* $\frac{1}{2}$ *του κιλού κρέας;»*

Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις (8,2%) ήταν διάφορα προβλήματα. Κάποια αναφέρονταν σε μέτρα υφάσματος ή σύρματος καθώς άλλα σε εμβαδόν χώρου. Χαρακτηριστικά προβλήματα ήταν τα εξής:

«Ο κύριος Παντελής αγόρασε 3/4 του μέτρου σύρμα. Για να κάνει τη δουλειά του, το χώρισε σε κομμάτια που το καθένα έχει μήκος 1/2 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;»

«Έχω ένα κουκλόσπιτο έκτασης 3/4 του τ.μ. και θέλω να καλύψω όλο το πάτωμα με μοκέτα. Η έκταση της κάθε μοκέτας είναι ½ του τ.μ. (ανεξαιρέτως του σχήματός της). Πόσες μοκέτες θα χρειαστώ?»

<u>Λάθη στην κατασκευή προβλήματος διαίρεσης (ΚΠΔ)</u>

Σχετικά με τις λάθος απαντήσεις, αρκετοί ήταν οι συμμετέχοντες της έρευνας (15,1%) που αντί προβλήματα διαίρεσης κατασκεύασαν προβλήματα που επιλύονταν με άλλες πράξεις. Για παράδειγμα πολλοί έγραψαν προβλήματα που η λύση τους ήταν ο πολλαπλασιασμός $\frac{3}{4}$ x 2 ή ο πολλαπλασιασμός $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$. Ενώ υπήρξαν και προβλήματα που λύνονταν με αφαίρεση. Τέτοια προβλήματα ήταν:

«Ο κ. Βαγγέλης χρησιμοποιεί 2 κιλά αλεύρι για 1 πίτα. Εάν θελήσει να κάνει τα 3/4 της δόσης, πόσο αλεύρι θα χρησιμοποιήσει;»

«Η Μαρία αγόρασε ¾ του κιλού φασόλια. Χρησιμοποίησε το ½ για να φτιάξει φασολάδα. Πόσα κιλά φασόλια χρησιμοποίησε;»

«Έφτιαξα δύο ταψιά πίτσα και το μισό το έφαγαν τα παιδιά. Τι έμεινε σε μορφή κλάσματος;»

Λιγότερα προβλήματα (11%), παρόλο που η διαίρεση ήταν ο τρόπος επίλυσης τους, δεν αντιστοιχούσαν στην συγκεκριμένη διαίρεση κλασμάτων που δόθηκε. Έτσι, κάποια προβλήματα λυνόντουσαν με τις διαιρέσεις $\frac{3}{4}$: 2 , $\frac{1}{2}$: $\frac{3}{4}$ αλλά όχι με την ζητούμενη. Επομένως, κάποιες προβλήματα ήταν:

«Η Άση έχει $\frac{3}{4}$ του κιλού κιμά και θέλει να το χωρίσει στη μέση, ώστε να χρησιμοποιήσει τη μία δόση και την άλλη να τη βάλει στο ψυγείο. Πόσο θα είναι το κάθε μέρος»

«Πόσα δαχτυλίδια σε βάρος $\frac{3}{4}$ του γραμμαρίου μπορούν να φτιαχτούν από $\frac{1}{2}$ γραμμάρια χρυσού;»

Ένα σχετικά μικρό ποσοστό ερωτηθέντων (8,2%), διατύπωσε προβλήματα με ελλιπείς δεδομένα. Υπήρξαν δηλαδή ορισμένα προβλήματα όπου παραλήφθηκε ο διαιρέτης $\frac{1}{2}$ και δεν θα μπορούσαν να λυθούν. Έτσι, χαρακτηριστικές περιπτώσεις αυτών ήταν η εξής:

«Έχω ένα μπουκάλι με 3/4 κρασί. Πόσα ποτήρια θα γεμίσω;»

«Η Ελένη που θέλει να παίξει με τις φίλες της σχοινάκι πήγε και αγόρασε ¾ του μέτρου σχοινί για να φτιάξει ατομικά σχοινάκια γι' αυτήν και τις φίλες της»

Ένα, επίσης μικρό ποσοστό φοιτητών (5,5%), αντί να διατυπώσει μια προβληματική κατάσταση με πλαίσιο, περιέγραψε απλά την πράξη που έπρεπε να πραγματοποιηθεί. Μια ενδεικτική απάντηση ήταν η εξής:

«Σ' ένα εργοστάσιο συσκευάζονται 400 σοκολάτες. Οι άσπρες αποτελούν το 1/3 και οι μαύρες το 3/4.
Να υπολογίσεις;

Α) Πόσες είναι οι μαύρες σοκολάτες;

Β) Πόσες είναι οι άσπρες σοκολάτες;

Γ) Αν υποθέσουμε ότι οι άσπρες σοκολάτες αποτελούν το 1/2 και οι μαύρες τα 3/4 να υπολογιστεί το κλάσμα που θα προκύψει από την διαίρεση μεταξύ των μαύρων και των άσπρων σοκολάτων;»

Τα υπόλοιπα λάθη αφορούσαν διάφορα μη μαθηματικά συχνά προβλήματα όπου ο ειρμός του φοιτητής δεν ήταν εύληπτος. Για παράδειγμα:

«Τα $\frac{3}{4}$ της παραγωγής ενός χωραφιού είναι πατάτες και πρέπει να τοποθετηθούν σε τελάρα χωρητικότητας μισού κιλού. Πόσα τελάρα θα χρειαστούν;»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 42,5% (31)	Προβλήματα για μια συνεχή υγρή ποσότητα (σε λίτρα)	23,3% (17)
	Προβλήματα για μια ποσότητα (σε κιλά)	11% (8)
	Λοιπά σωστά προβλήματα	8,2% (6)
Λάθη 50,7% (37)	Προβλήματα που λύνονται με διαφορετική πράξη (πχ πολλαπλασιασμός)	15,1% (11)
	Προβλήματα που λύνονται με διαφορετική διαίρεση	11% (8)
	Προβλήματα με ελλιπείς δεδομένα	8,2% (6)
	Περιγραφή της πράξης	5,5% (4)
	Λοιπά λάθη	11% (7)

Πίνακας 13 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΚΠΔ)

Έργο 15: Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης Μεικτού

Στο ακόλουθο έργο κατασκευής λεκτικού προβλήματος (ΚΠΔΜ) , οι σωστές απαντήσεις ήταν λιγότερες, καθώς σχεδόν το ένα τρίτο των ερωτηθέντων (30,1%) ανέπτυξε με επιτυχία ένα μαθηματικό πρόβλημα που να αντιστοιχεί στην εν λόγω πράξη ($1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$). Παράλληλα, 27 εν δυνάμει δάσκαλοι (37,0%) κατασκεύασαν προβλήματα που δεν ανταποκρίνονταν στο ζητούμενο ερώτημα. Οι υπόλοιποι (32,9%) αγνόησαν και δεν απάντησαν.

Είδη προβλημάτων διαίρεσης μεικτού (ΚΠΔΜ)

Κάποια (12,3%) από τα προβλήματα που διατυπώθηκαν αφορούσαν υγρές ποσότητες (π.χ. νερό, χυμό, λάδι και κρασί) $1\frac{3}{4}$ λίτρου που χωρίστηκαν και ύστερα τοποθετήθηκαν σε ποτήρια ή μπουκάλια $\frac{1}{2}$ λίτρου. Δύο προβλήματα ήταν:

«Η μητέρα μου έφτιαξε 1 ¾ του λίτρου λικέρ και θέλει να το αποθηκεύσει σε μπουκαλάκια του ½ λίτρου. Πόσα μπουκάλια θα γεμίσει;»

«Έχουμε δύο φιάλες κρασιού του ενός λίτρου. Η μία είναι γεμάτη και η δεύτερη είναι γεμάτη κατά ¾. Το κρασί αυτό θέλουμε να το προσφέρουμε σε ποτήρια του μισού λίτρου. Πόσα ποτήρια θα χρειαστούμε;»

Παρόμοια, 7 φοιτητές (9,6%) περιέγραψαν μια κατάσταση όπου μια ποσότητα $1\frac{3}{4}$ κιλού, συνεχής (π.χ. μαρμελάδα) ή διακριτή (π.χ. πορτοκάλια, καραμέλες) διαιρείται σε μικρότερες ποσότητες του $\frac{1}{2}$ κιλού. Για παράδειγμα, χαρακτηριστικά προβλήματα είναι:

«Η κυρία Γεωργία έφτιαξε 1 3/4 του κιλού μαρμελάδα ροδάκινο και θέλει να την τοποθετήσει σε βαζάκια. Αν το κάθε βαζάκι χωράει 1/2 του κιλού μαρμελάδα, πόσα βαζάκια θα χρειαστεί;»

«Ένας μανάβης έχει $1\frac{3}{4}$ *του κιλού πορτοκάλια και τα τοποθέτησε σε κλούβες του μισού κιλού* $\frac{1}{2}$*.Σε πόσες δηλαδή κλούβες έβαλε τα πορτοκάλια;»*

Λίγες από τις σωστές απαντήσεις (5,5%) ήταν προβλήματα που αναφέρονταν στο μήκος ενός αντικειμένου $1\frac{3}{4}$ μέτρου (π.χ. σκοινί, ύφασμα, σανίδα) που χωρίστηκε σε μικρότερα τμήματα του μισού ($\frac{1}{2}$) μέτρου. Τέτοιο πρόβλημα ήταν:

«Ο Χρήστος έχει ένα σκοινί μήκους $1\frac{3}{4}$ *μέτρα και θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το καθένα να έχει μήκος* $\frac{1}{2}$ *μέτρα. Σε πόσα κομμάτια μπορεί να χωρίσει το σκοινί;»*

Οι υπόλοιπες απαντήσεις (2,7%) αφορούσαν διάφορες καταστάσεις (π.χ. ώρα). Για παράδειγμα:

«Πόσα μισάωρα έχει η 1 ώρα και τα ¾ της ώρας;»

<u>Λάθη στην κατασκευή διαίρεσης μεικτού (ΚΠΔΜ)</u>

Αναφορικά με τις λάθος απαντήσεις, κάποια από τα προβλήματα (6,8%) δεν λύνονταν με την ζητούμενη πράξη ($1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$), αλλά με διαφορετικές πράξεις διαίρεσης ή πολλαπλασιασμού. Κάποια λύνονταν με την διαίρεση $1\frac{3}{4} : 2$,καθώς περιέγραφαν μια ποσότητα που χωριζόταν στα δύο, και κάποια με τον πολλαπλασιασμό $1\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$. Ενδεικτικά τέτοια προβλήματα είναι:

«Ο Γιάννης έχει δύο μπουκάλια με χυμό. Το ένα μπουκάλι είναι γεμάτο και το άλλο περιέχει ¾ του μπουκαλιού χυμό. Αν θέλει να το βάλει σε μικρότερα μπουκαλάκια που το καθένα χωράει το ½ της ποσότητας του χυμού, πόσα μπουκαλάκια με χυμό θα έχει;»

«Η Αγγελική θέλει να φτιάξει γιουβέτσι και αγόρασε 1 3/4 του κιλού κρέας. Όμως τελευταία στιγμή αποφάσισε να χρησιμοποιήσει το 1/2 του κρέατος για να φτιάξει γιουβέτσι. Πόσα κιλά όμως κρέας χρησιμοποίησε;»

Ορισμένες λανθασμένες απαντήσεις (11%), δεν είχαν ως δεδομένα τους σωστούς αριθμούς για να προκύψει η ζητούμενη διαίρεση ως λύση. Συνήθως, ο μεικτός αριθμός$1\frac{3}{4}$ αντιλαμβανόταν ως $\frac{3}{4}$ με αποτέλεσμα να μην διατυπώνονται κατάλληλα προβλήματα . Πάραυτα, σε πολλές περιπτώσεις πέρα από τους λάθος αριθμούς και τα προτεινόμενα προβλήματα δεν αντιστοιχούσαν στην πράξη $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$. Επιπλέον, κάποιοι φοιτητές αντί του μικτού αριθμούς, χρησιμοποίησαν το κλάσμα $\frac{7}{4}$. Τέτοια προβλήματα ήταν τα εξής:

«Ο Κώστας, έχει ένα κουπάκι γιαούρτι το οποίο ζυγίζει ¾ του κιλού, σε πόσες μερίδες που ζυγίζουν ½ του κιλού, μπορεί ο Κώστας να χωρίσει το γιαούρτι που περιέχει το κουπάκι;»

«Δύο παιδιά πήγαν στο ψιλικατζίδικο να αγοράσουν $\frac{3}{4}$ *του κιλού ζαχαρωτά. Τα μοίρασαν ισάξια μεταξύ τους άρα πόσα έφαγε το κάθε παιδί;»*

Λοιπά προβλήματα (19,2%) που πάρθηκαν ως άστοχες απαντήσεις ήταν ποικίλα. Κάποια δεν παρέθεταν κάποια ερώτηση, ενώ ορισμένα ήταν μη κατανοητά. Δυο χαρακτηριστικά αναφερόμενα προβλήματα που συναντήθηκαν πάνω από δύο φορές ήταν τα εξής:

«Η Ελένη παρήγγειλε μια πίτσα για να φάει και επειδή δεν χόρτασε πήρε ακόμα μια πίτσα με 4 κομμάτια από την οποία θα φάει τα 3. Όμως πίστευε ότι δεν θα χόρταινε με αυτά τα κομμάτια και παρήγγειλε την διπλάσια ποσότητα από αυτά που έφαγε»

«Μια ομάδα 300 παιδιών θα ταξιδέψει στην κατασκήνωση με λεωφορεία. Τα 3/4 των παιδιών θα μετακινηθούν με κόκκινο λεωφορείο και τα 1/2 με κίτρινο λεωφορείο. Τα υπόλοιπα παιδιά θα μετακινηθούν μέχρι τα μισά της διαδρομής με κόκκινο λεωφορείο και μετά με κίτρινο λεωφορείο.

Να υπολογίσεις;

Α) Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;

Β) Πόσα παιδιά θα βρίσκονται σε κάθε λεωφορείο;

Γ) Ποιο είναι το ποσοστό των παιδιών που θα μετακινηθούν μέχρι τα μισά της διαδρομής με κόκκινο λεωφορείο και μετά με κίτρινο λεωφορείο.»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 30,1% (22)	Προβλήματα με υγρή ποσότητα (σε λίτρα)	12,3% (9)
	Προβλήματα με ποσότητα (σε κιλά)	8,2% (6)
	Προβλήματα με μήκος ενός αντικειμένου	5,5% (4)
	Λοιπά σωστά προβλήματα	2,7% (2)
Λάθη 37% (27)	Προβλήματα με λάθους αριθμούς (ως δεδομένα)	11 % (8)
	Προβλήματα που λύνονται με διαφορετική πράξη	6,8% (5)
	Λοιπά λάθη	20,6% (15)

Πίνακας 14 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΚΠΔΜ)

3.2 Αποτελέσματα Εξετάσεων-Επιδόσεις σε κάθε έργο (2ο μέρος)

3.2.1 Άξονας 1: Εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 16: Εκτέλεση Πολλαπλασιασμού

Στο πρώτο έργο της εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$x$\frac{1}{3}$ (ΕΕΠ), σχεδόν όλοι οι εξεταζόμενοι (90,4%) έλυσαν επιτυχώς την πράξη και υπολόγισαν σωστά το γινόμενο $\frac{3}{12}$. Μάλιστα, μεγάλο μέρος αυτών(43,8%) απλοποίησαν το αποτέλεσμα και κατέληξαν στο κλάσμα $\frac{1}{4}$. Από τους εξεταζόμενους φοιτητές, οι 6 (8,2%) απάντησαν εσφαλμένα καθώς είτε πολλαπλασίαζαν χιαστί (π.χ. $\frac{3}{4}\text{x}\frac{1}{3} = \frac{3x3}{4\text{x}4} = \frac{9}{4}$) είτε μετέτρεπαν σε ομώνυμα κλάσματα και πολλαπλασίαζαν μόνο τους αριθμητές τους(π.χ. $\frac{3}{4}\text{x}\frac{1}{3} = \frac{9}{12}\text{x}\frac{4}{12} = \frac{36}{12}$) είτε απλοποίησαν λανθασμένα (π.χ. $\frac{3}{12}$=4)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 90,4% (66)	Απλός πολλαπλασιασμός κλασμάτων	46,6% (34)
	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων και απλοποίηση	43,8% (32)
Λάθη 8,2% (6)	Διάφορα λάθη	8,2% (6)

Πίνακας 15 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΕΠ)

Έργο 17: Εκτέλεση Διαίρεσης

Στο επόμενο έργο της διαίρεση $\frac{3}{5}$: $\frac{1}{5}$ (ΕΕΔ) σχεδόν όλοι οι φοιτητές (98,6%) έλυσαν ορθά και υπολόγισαν το πηλίκο 3 (ή $\frac{15}{5}$). Ένα μικρό μέρος των φοιτητών (16,4%) για την εκτέλεση της πράξης μετέτρεψε την διαίρεση σε σύνθετο κλάσμα και πολλαπλασίασε «τους άκρους και τους μέσους όρους». Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις εκτελέστηκαν με τον αλγόριθμο «πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο του διαιρετέου». Μόνο ένα άτομο (1,4%) έλυσε λάθος , καθώς απλοποίησε με λάθος τρόπο και έδωσε ως απάντηση το αποτέλεσμα $\frac{3}{5}$.

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 98,6% (72)	Εκτέλεση αλγορίθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»	82,2% (60)
	Σύνθετο κλάσμα	16,4% (12)
Λάθη 1,4% (1)	Λάθος απλοποίηση	1,4% (1)

Πίνακας 16 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΕΔ)

3.2.2 Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)

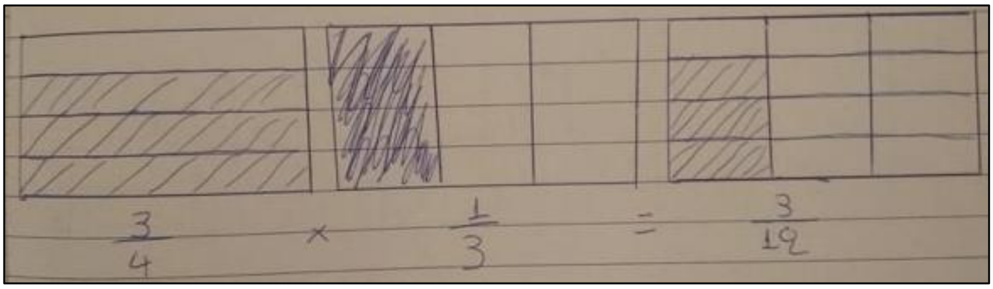
Έργο 18: Αναπαράσταση Πολλαπλασιασμού

Παρά τις καλές επιδόσεις στα παραπάνω θέματα των εξετάσεων, στο ερώτημα της οπτικοποίησης του πολλαπλασιασμού οι σωστές απαντήσεις ήταν ελάχιστες (12,3%). Μόλις 9 από τους 73 μελλοντικούς δασκάλους ήταν σε θέση να αποτυπώσουν κατάλληλα τον πολλαπλασιασμό ($\frac{3}{4}$x$\frac{1}{3}$) μέσα από μια σχηματική αναπαράσταση, δίνοντας ουσία στην πράξη ώστε να γίνει αντιληπτή και οπτικά. Μεγάλο ποσοστό εξεταζόμενων (80,2%) σχεδίασαν ελλιπείς ή άστοχες αναπαραστάσεις που δεν ήταν επαρκείς και αντίστοιχες της δοσμένης πράξης του πολλαπλασιασμού. Επιπλέον, 5 άτομα (6,8%) είτε δεν κατάφεραν είτε αγνόησαν να απαντήσουν σε αυτό το ερώτημα.

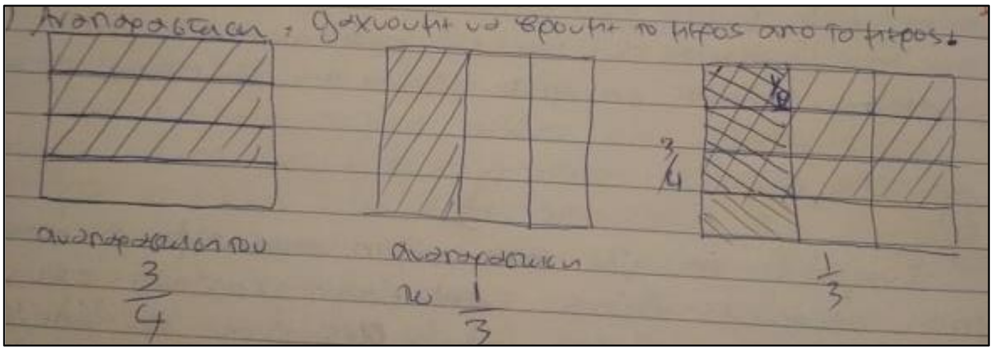
Είδη αναπαραστάσεων πολλαπλασιασμού (ΕΑΠ)

Αναλύοντας τις σωστές απαντήσεις, παρατηρούμε ότι οι περισσότερες αναπαραστάσεις (9,6%) δημιουργήθηκαν με το μοντέλο του εμβαδού. Σύμφωνα με αυτό, σε ίσες επιφάνειες φαίνονται το κλάσμα $\frac{3}{4}$ (οριζόντιος χωρισμός) και το κλάσμα

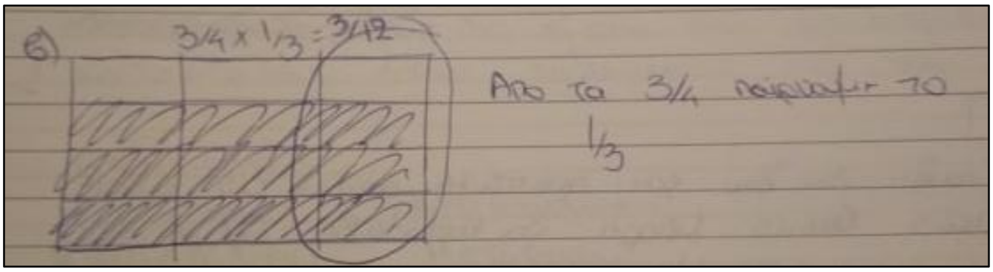
$\frac{1}{3}$ (κατακόρυφος χωρισμός) και σε μία Τρίτη το γινόμενο που προκύπτει από τα κοινά σημεία που σκιάζονται (εικόνες 83 & 84). Με παρόμοιο τρόπο η ίδια διαδικασία έγινε , σε κάποιες περιπτώσεις, σε μία μόνο ορθογώνια επιφάνεια (εικόνες 85) Ακόμη, 2 φοιτητές (2,7%) χρησιμοποίησαν μοντέλα μήκους (κλασματική λωρίδα και αριθμογραμμή) για την αναπαράσταση αυτής της πράξης. Χώρισαν αρχικά την λωρίδα σε 4 κομμάτια και το κάθε ένα από αυτά σε 3. Παρατηρούμε, με αυτόν τον τρόπο, ότι τα τμήματα που σκιάζονται αποτελούν τα 3 από τα 12 συνολικά. (εικόνες 86 & 87)



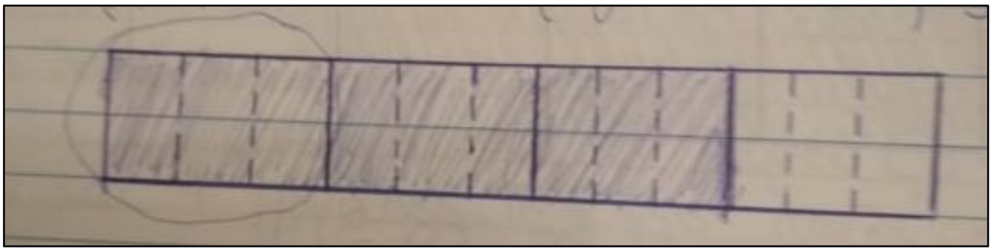
Εικόνα 83 Μοντέλο εμβαδού (3/4x 1/3= 3/12)



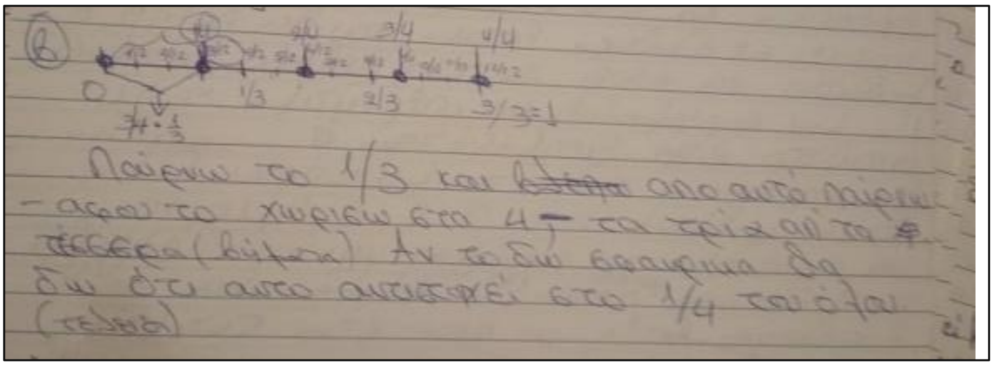
Εικόνα 84 Μοντέλο εμβαδού (3/4x 1/3= 3/12)



Εικόνα 85 Μοντέλο εμβαδού σε ένα ορθογώνιο (3/4x 1/3= 3/12)



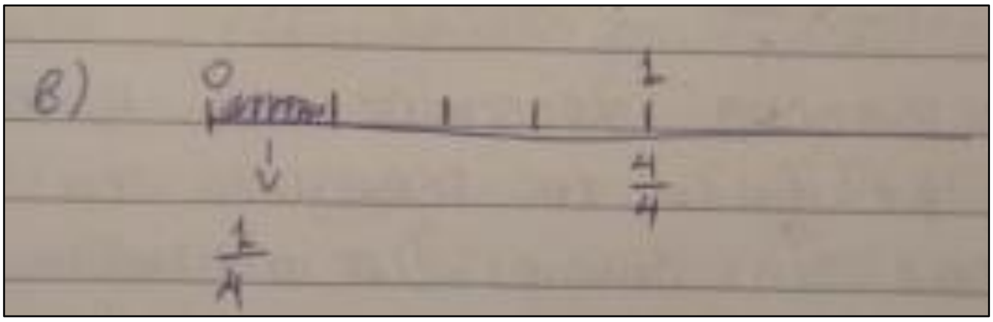
Εικόνα 86 Κλασματική λωρίδα (3/4x 1/3= 3/12)



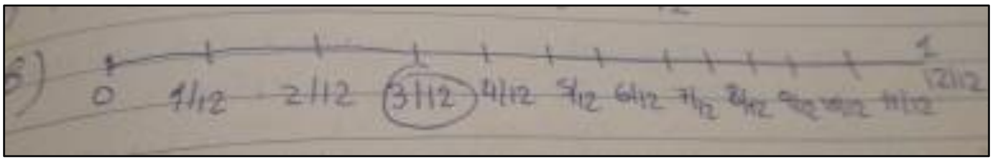
Εικόνα 87 Αριθμογραμμή (3/4x 1/3= 3/12)

Λάθη στην αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού (ΕΑΠ)

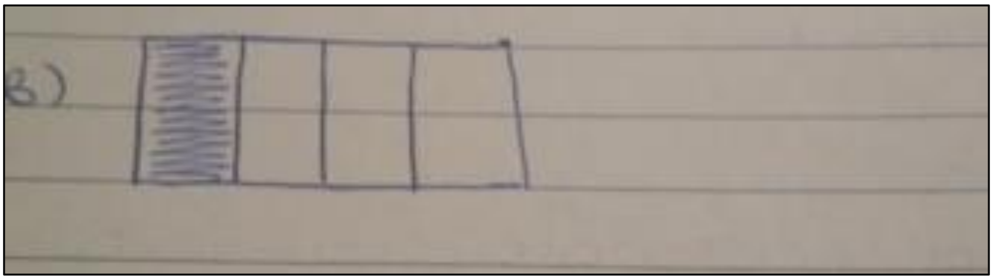
Αναφορικά με τις λάθος απαντήσεις, σημαντικό μέρος των εξεταζόμενων (30,1%) αναπαρίστησε μόνο το γινόμενο $\frac{3}{12}$ (ή απλοποιημένο $\frac{1}{4}$), αγνοώντας την πράξη και τους όρους. Έτσι, χρησιμοποίησαν είτε αριθμογραμμές (εικόνες 88 & 89), είτε κλασματικές λωρίδες (εικόνες 90 & 91) , είτε κάποιο κυκλικό δίσκο (εικόνα 92) , είτε διακριτά σύνολα κ.λπ. για να αποτυπώσουν το αποτέλεσμα που προέκυψε.



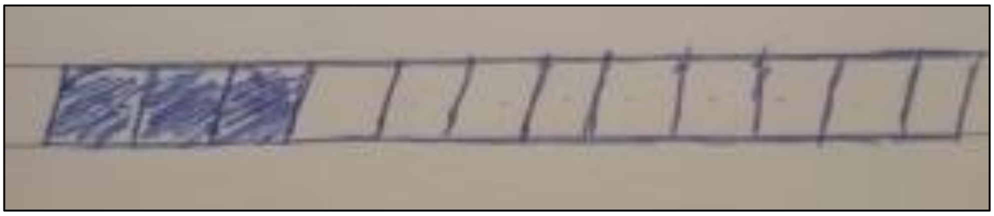
Εικόνα 88 Αναπαράσταση του γινομένου σε αριθμογραμμή (3/4x 1/3= 1/4)



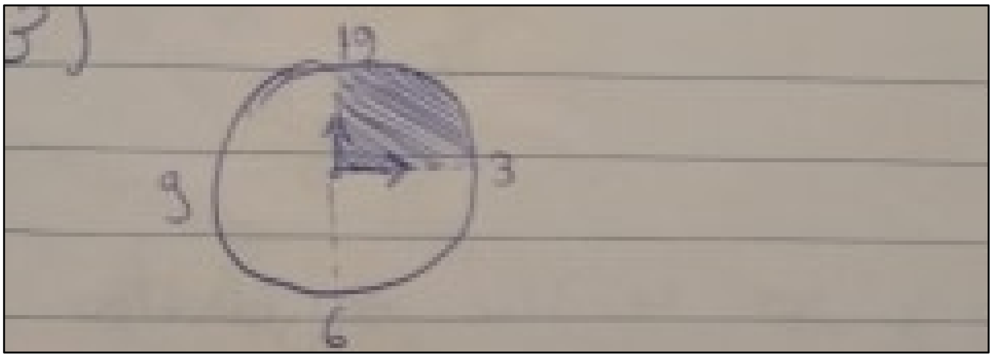
Εικόνα 89 Αναπαράσταση του γινομένου σε αριθμογραμμή (3/4x 1/3= 3/12)



Εικόνα 90 Αναπαράσταση του γινομένου σε ορθογώνιο (3/4x 1/3= 1/4)

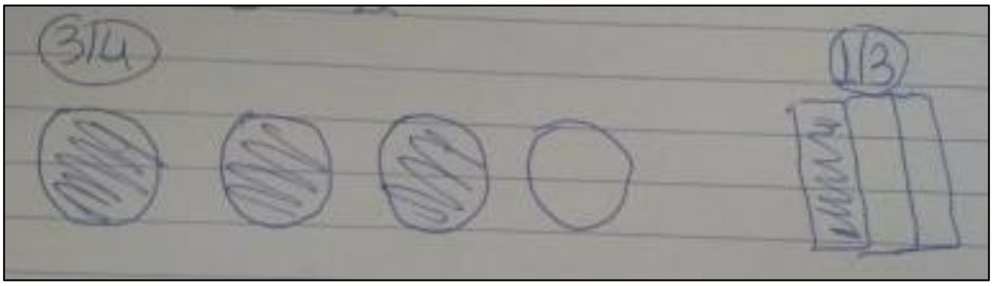


Εικόνα 91 Αναπαράσταση του γινομένου σε κλασματική λωρίδα (3/4x 1/3= 3/12)

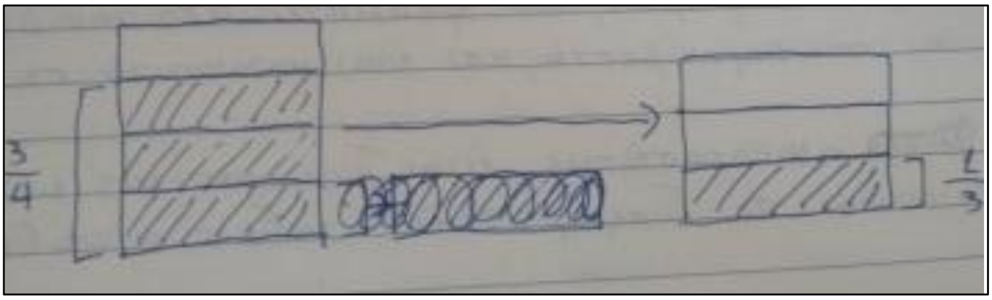


Εικόνα 92 Αναπαράσταση του γινομένου σε ρολόι (3/4x 1/3= 1/4)

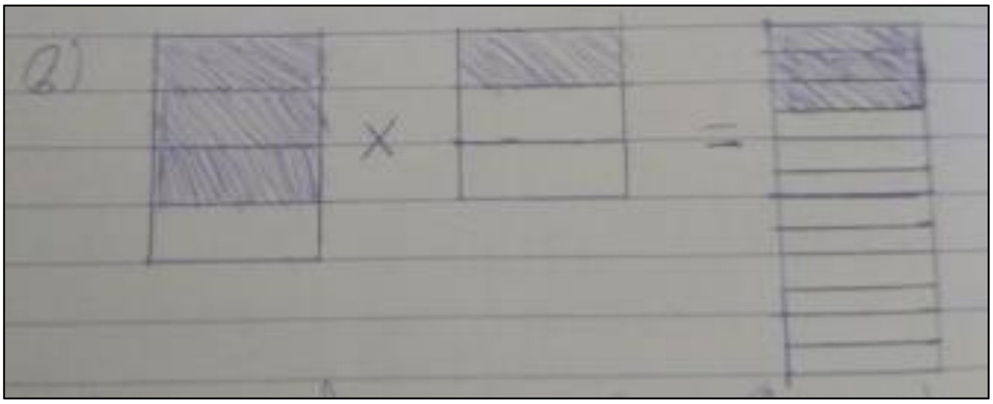
Ακόμη, το ένα πέμπτο των ατόμων (20,5%) έδωσαν μία αναπαράσταση για κάθε όρο, και για το γινόμενο σε κάποιες περιπτώσεις, χωρίς όμως να αποδίδουν την ουσία της πράξης που πραγματοποιείται και της σχέσης που συνδέει τα τρία κλάσματα (όροι και γινόμενο). Σε μερικές απαντήσεις μάλιστα, μεταξύ των σχημάτων υπήρχε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού και της ισότητας. Αυτό, ωστόσο, δεν δίνει κάποια χρήσιμη και ουσιώδης πληροφορία για την εννοιολογική κατανόηση της πράξης του πολλαπλασιασμού αυτών των κλασμάτων. Παραδείγματα των περιπτώσεων που περιγράφονται φαίνονται στις εικόνες 93, 94, 95 και 96.



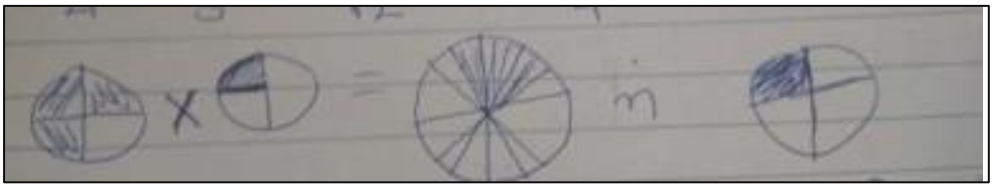
Εικόνα 93 Αναπαράσταση των όρων (3/4x 1/3= 3/12)



Εικόνα 94 Αναπαραστάσεις των όρων σε ορθογώνια (3/4x 1/3= 3/12)

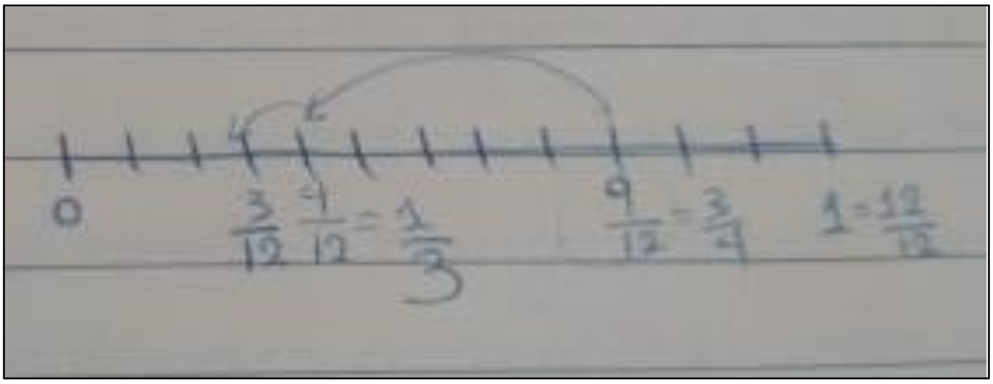


Εικόνα 95 Αναπαραστάσεις των όρων και το γινομένου σε ορθογώνια (3/4x 1/3= 3/12)

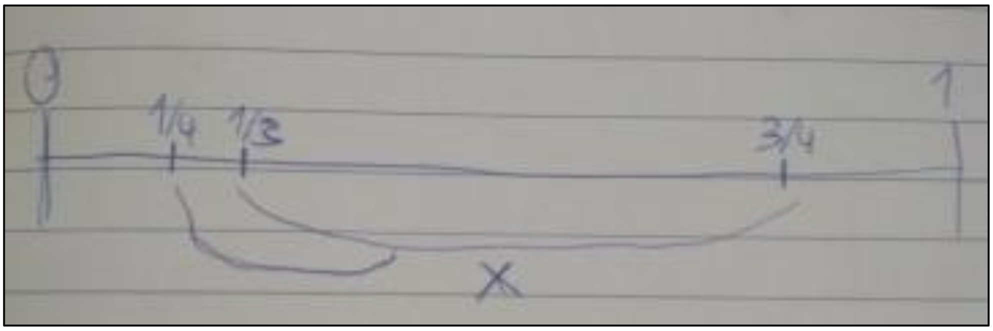


Εικόνα 96 Αναπαραστάσεις των όρων και το γινομένου σε κυκλικούς δίσκους (3/4x 1/3= 3/12)

Παρομοίως, 10 συμμετέχοντες (13,7%) αποτύπωσαν τους όρους ή όλα τα κλάσματα (όροι και γινόμενο) πάνω σε μία αριθμογραμμή. Βέβαια, η διάταξη των τριών κλασμάτων πάνω σε μία αριθμογραμμή δεν βοηθά στο να γίνει κατανοητή η πράξη μέσα από μία εικόνα. Για παράδειγμα στις εικόνες 97 και 98 βλέπουμε τέτοιου είδους λανθασμένες αναπαραστάσεις.



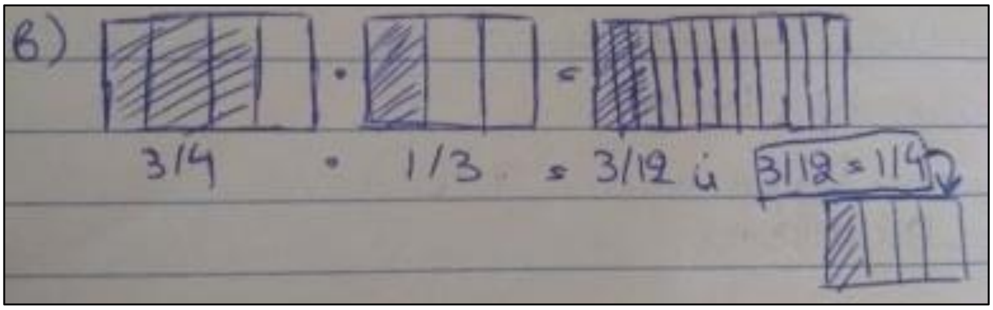
Εικόνα 97 Αναπαράσταση όρων και γινομένου σε αριθμογραμμή (3/4x 1/3= 3/12)



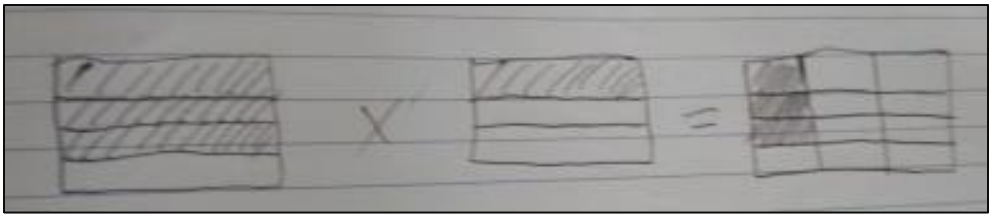
Εικόνα 98 Αναπαράσταση όρων και γινομένου σε αριθμογραμμή (3/4x 1/3= 3/12)

Λίγοι (6,8%), αντί να δώσουν ένα σχέδιο ή μια εικόνα για την αναπαράσταση , περιέγραψαν ή εξήγησαν τον αλγόριθμο που ακολούθησαν για να καταλήξουν στο γινόμενο. Χαρακτηριστικά, ένας φοιτητής στο ερώτημα αυτό έγραψε τα εξής: *«πολλαπλασιάζω αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή»* . Κάποιοι άλλοι, σε αυτό το ερώτημα, ανέλυσαν την πράξη ως εξής: $\frac{3}{4}\mathrm{x}\frac{1}{3} = \frac{3\mathrm{x}1}{4\mathrm{x}3} = \frac{3}{12}$.

Μερικοί (5,5%), επίσης, προσπάθησαν να ακολουθήσουν το μοντέλο του εμβαδού χωρίς επιτυχία. Χώρισαν, λόγου χάριν, και τα δύο ορθογώνια οριζόντια ή κάθετα, με αποτέλεσμα να μην είναι εμφανές πως το ένα κλάσμα επιδρά με το άλλο και πως τελικά προκύπτει το συγκεκριμένο γινόμενο (εικόνες 99 & 100).



Εικόνα 99 Λανθασμένο μοντέλο εμβαδού (3/4x 1/3= 3/12)



Εικόνα 100 Λανθασμένο μοντέλο εμβαδού (3/4x 1/3= 3/12)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 12,3% (9)	Μοντέλο εμβαδού επιφάνειας	9,6% (7)
	Κλασματική-ές λωρίδες-ες ή αριθμογραμμή-ές	2,7%(2)
Λάθη 76,7% (56)	Αναπαράσταση γινομένου	30,1% (22)
	Αναπαράσταση των όρων (ή) και του γινομένου (χωρίς τη σχέση)	20,5% (15)
	Αναπαράσταση των κλασμάτων σε μια αριθμογραμμή	13,7% (10)
	Περιγραφή αλγορίθμου	6,8% (5)
	Αποτυχημένο μοντέλο εμβαδού	5,5% (4)
	Λοιπά λάθη	4,1% (3)

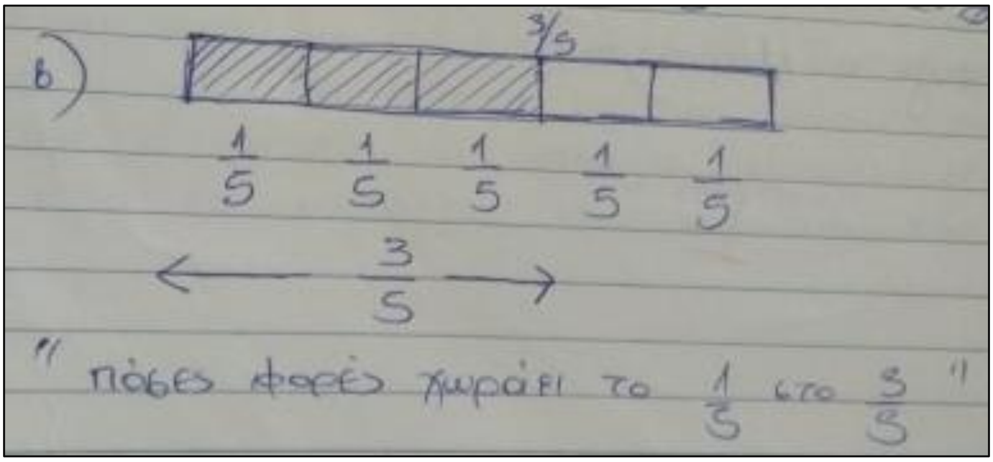
Πίνακας 17 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΑΠ)

Έργο 19: Αναπαράσταση Διαίρεσης

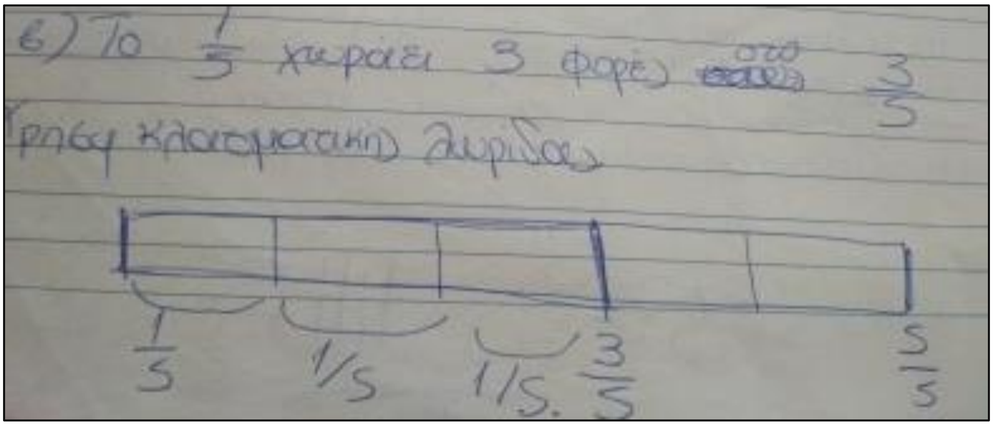
Στην ερώτηση της οπτικοποίησης της διαίρεσης $\frac{3}{5}$: $\frac{1}{5}$ (ΕΑΔ) οι εξεταζόμενοι τα πήγαν λιγότερο καλά. Οι επιτυχίες ήταν περιορισμένες, αφού μόνο 11 μελλοντικοί δάσκαλοι (15,1%) ήταν σε θέση να δημιουργήσουν μια αντίστοιχη πλήρης αναπαράσταση. Αρκετά μεγάλο ποσοστό (76,7%) σχεδίασε αναπαραστάσεις που είτε δεν ήταν επαρκείς είτε εσφαλμένες και μη κατάλληλες. Ενώ, 6 συμμετέχοντες (8,2%) δεν απάντησαν σε αυτό το ερώτημα.

Είδη αναπαραστάσεων διαίρεσης (ΕΑΔ)

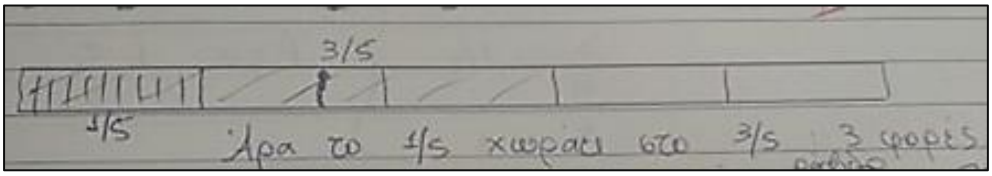
Οι αναπαραστάσεις που θεωρήθηκαν αποδεκτές πραγματοποιήθηκαν με χρήση μοντέλων μήκους. Οι φοιτητές χρησιμοποίησαν αριθμογραμμές και κλασματικές λωρίδες για να αποδείξουν σχηματικά ότι το $\frac{1}{5}$ επαναλαμβάνεται 3 φορές ώστε να προκύψει το $\frac{3}{5}$ ή αλλιώς ότι το $\frac{3}{5}$ αποτελείται από 3 τμήματα των $\frac{1}{5}$. Συγκεκριμένα, 6 φοιτητές (8,2%) επέλεξαν να σχεδιάσουν μία ή περισσότερες κλασματικές λωρίδες (ράβδους) και να δείξουν ποια η σχέση μεταξύ του $\frac{3}{5}$, του $\frac{1}{5}$ και του πηλίκου 3. Κάποιες ενδεικτικές εικόνες φαίνονται παρακάτω (εικόνες 101, 102 & 103). Παρόμοια λειτούργησαν 5 άτομα (6,8%) που χρησιμοποίησαν αριθμογραμμή για να αποτυπώσουν εικονικά την πράξη της παραπάνω διαίρεσης (εικόνες 104 & 105).



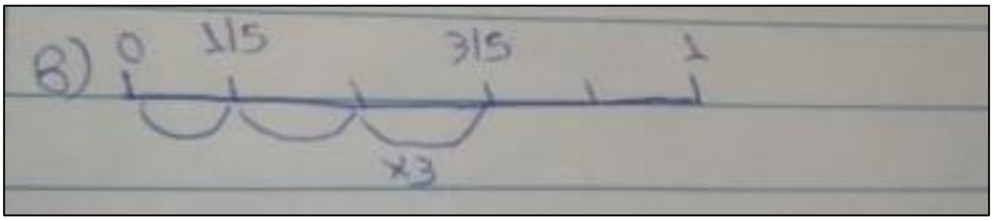
Εικόνα 101 Κλασματική λωρίδα (3/5: 1/5= 3)



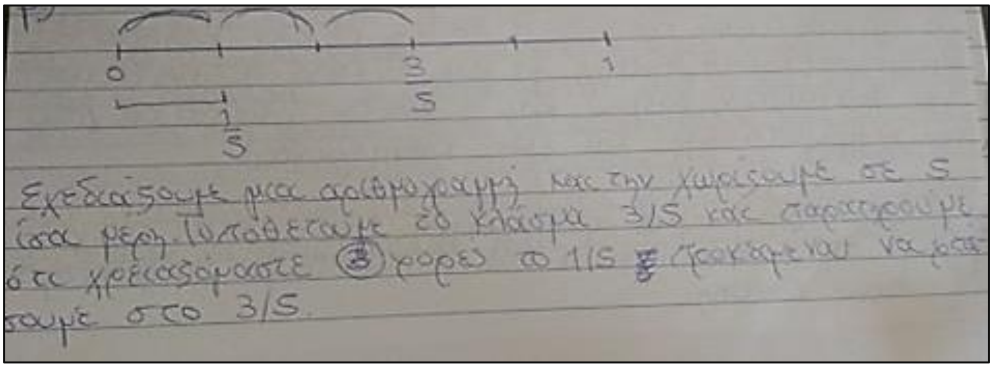
Εικόνα 102 Κλασματική λωρίδα (3/5: 1/5= 3)



Εικόνα 103 Κλασματική λωρίδα (3/5: 1/5= 3)



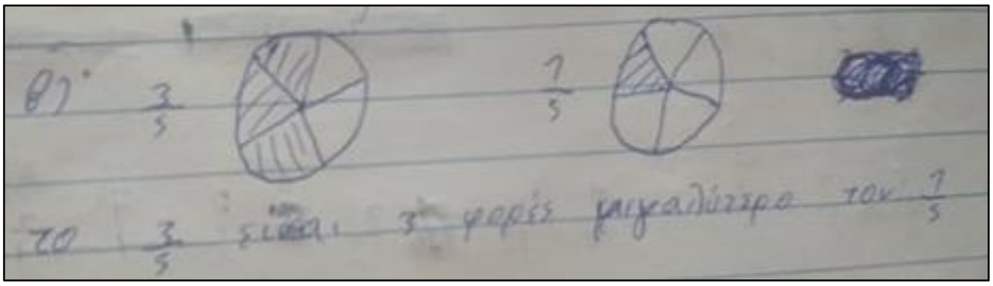
Εικόνα 104 Αριθμογραμμή (3/5: 1/5= 3)



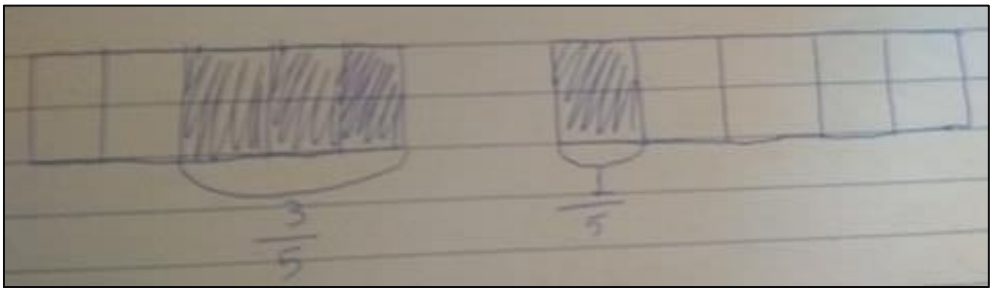
Εικόνα 105 Αριθμογραμμή (3/5: 1/5= 3)

<u>Λάθη στην αναπαράσταση της διαίρεσης (ΕΑΔ)</u>

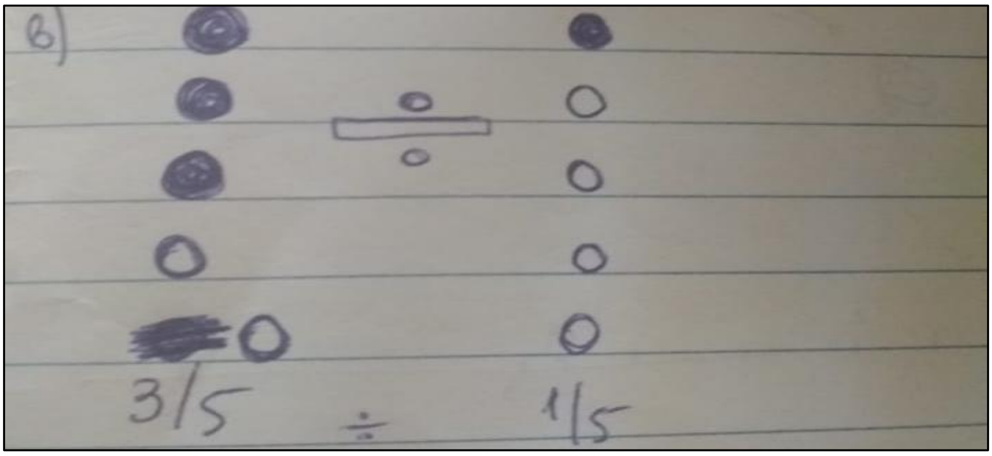
Αρκετοί εξεταζόμενοι (17,8%), αντί να απεικονίσουν την πράξη των δύο κλασμάτων, απεικόνισαν μόνο τον διαιρετέο και τον διαιρέτη χωρίς να φαίνεται η μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Δηλαδή, χρησιμοποίησαν διάφορα αναπαραστατικά μοντέλα, όπως λωρίδες, αριθμογραμμές, κυκλικούς δίσκους, ή διακριτά σύνολα για να αποτυπώσουν το $\frac{3}{5}$ και το $\frac{1}{5}$ αγνοώντας και το πηλίκο που προκύπτει αλλά και το νόημα της πράξης που εκτελείται. Μερικά παραδείγματα παρατίθενται στις εικόνες 106,107 και 108.



Εικόνα 106 Αναπαράσταση διαιρετέου και διαιρέτη σε κυκλικούς δίσκους (3/5: 1/5= 3)

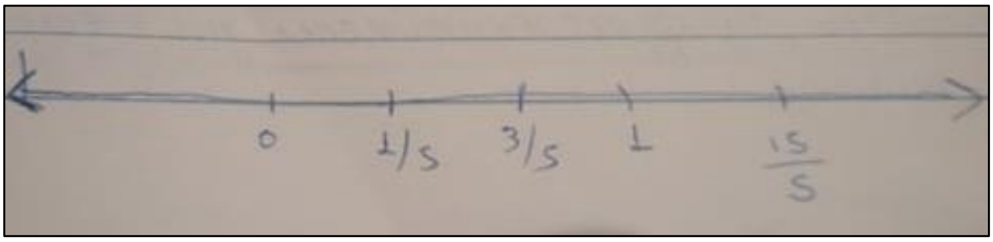


Εικόνα 107 Αναπαράσταση διαιρετέου και διαιρέτη σε κλασματικές λωρίδες (3/5: 1/5= 3)

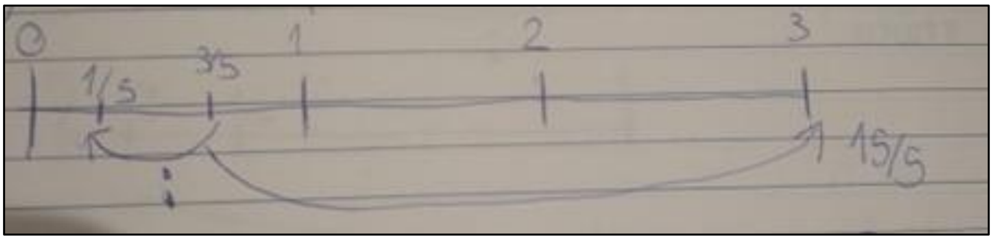


Εικόνα 108 Αναπαράσταση διαιρετέου και διαιρέτη με διακριτά σύνολα (3/5: 1/5= 3)

Επίσης, το 12,3% των ατόμων τοποθέτησε όλα τα εμπλεκόμενα στην πράξη κλάσματα (διαιρετέο, διαιρέτη, πηλίκο) πάνω σε μια αριθμογραμμή χωρίς, και πάλι, να φαίνεται ουσιαστικά η πράξη που πραγματοποιείται (εικόνες 109 & 110).

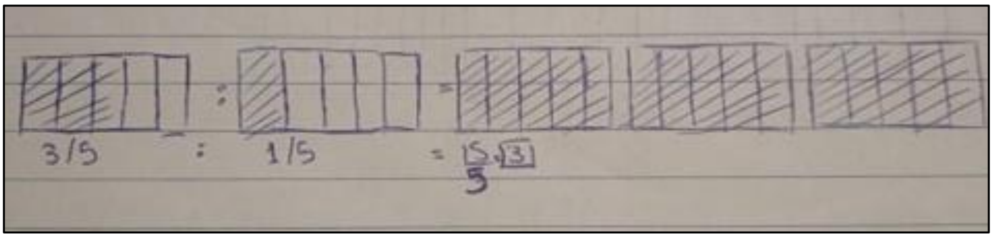


Εικόνα 109 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε αριθμογραμμή (3/5: 1/5= 3)

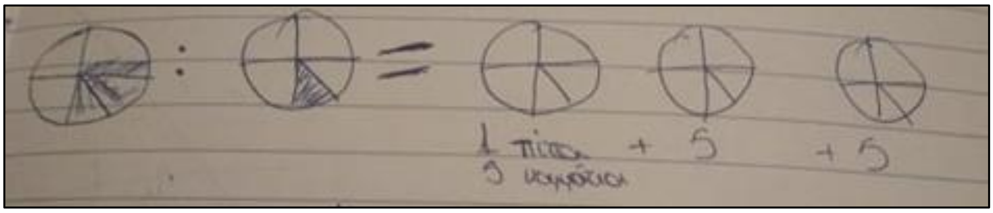


Εικόνα 110Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε αριθμογραμμή (3/5: 1/5= 3)

Παρόμοια σκέφτηκαν 6 φοιτητές (8,2%) που σχεδίασαν μία αναπαράσταση (λ.χ. τετράγωνα, κυκλικούς δίσκους) για κάθε ένα κλάσμα (διαιρετέο, διαιρέτη και πηλίκο) και μεταξύ τους τοποθέτησαν τα σύμβολα της διαίρεσης και της ισότητας (εικόνες 111 & 112)



Εικόνα 111 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε ορθογώνια (3/5: 1/5= 3)



Εικόνα 112 Αναπαράσταση διαιρετέου, διαιρέτη και πηλίκου σε κυκλικούς δίσκους (3/5: 1/5= 3)

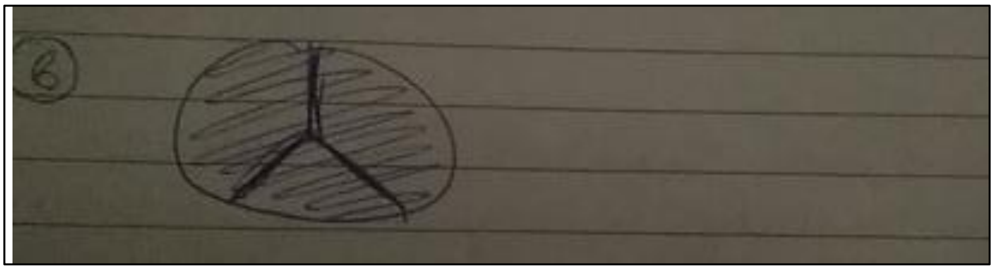
Περίπου ο ίδιος αριθμών φοιτητών (6,8%) αντί να δώσει μια εικόνα ή ένα σχέδιο για να αποτυπώσει την πράξη, εξήγησε ή περιέγραψε τον αλγόριθμο που ακολούθησε για να υπολογίσει, στο προηγούμενο ερώτημα,

«3/5: 1/5= $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{3x5}{1x5} = \frac{3}{1} = 3$*»*

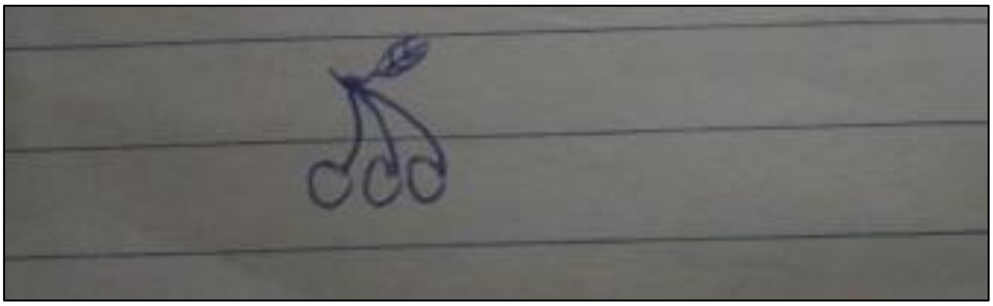
«Αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και κάνω πολλαπλασιασμό»

‘‘$\frac{3}{5}: \frac{1}{5} = \frac{3}{5}x\ \frac{5}{1} = \frac{15}{5} = \frac{3}{5}: \frac{3}{5}$ *στην αρχή αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή σε παρονομαστή.»*

Τα λοιπά λάθη (20,5%) ήταν ποικίλες ανακριβείς, μη κατανοητά ή άστοχες αναπαραστάσεις της προκείμενης πράξης. Για παράδειγμα, ένα λάθος ήταν η αναπαράσταση του $\frac{3}{3}$, όπου ένα σχήμα χωρίστηκε σε τρία ίσα τμήματα και σκιάστηκαν και τα τρία (εικόνες 113 & 114). Ένα άλλο ήταν η αναπαράσταση ενός συνόλου με 3 διακριτά αντικείμενα. Ακόμη, ένα λάθος ήταν η αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού αυτών των κλασμάτων αντί της διαίρεσης που ζητείται.



Εικόνα 113 Αναπαράσταση του 3/3 σε κυκλικό δίσκο (3/5: 1/5= 3)



Εικόνα 114 Αναπαράσταση του 3 με διακριτά σύνολα (3/5: 1/5= 3)

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 15,1% (11)	Κλασματική-ές λωρίδα-ες	8,2% (6)
	Αριθμογραμμή-ές	6,8% (5)
Λάθη 76,7% (56)	Αναπαράσταση διαιρέτη (ή) και διαιρετέου	17,8% (13)
	Αναπαράσταση του πηλίκου	11 %(8)
	Αναπαράσταση όλων των κλασμάτων πάνω σε αριθμογραμμή	12,3% (9)
	Αναπαράσταση του διαιρέτη, διαιρετέου και πηλίκου (χωρίς την σχέση)	8,2% (6)
	Περιγραφή του αλγόριθμου	6,8% (5)
	Λοιπά λάθη	20,5% (15)

Πίνακας 18 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΑΔ)

3.2.3 Άξονας 3: Κατασκευή- δημιουργία προβλημάτων με βάση την πράξη του πολλαπλασιασμό και της διαίρεσης κλασμάτων

Έργο 20: Κατασκευή προβλήματος πολλαπλασιασμού

Στο επόμενο ερώτημα (ΕΚΠΠ) των εξετάσεων, στο οποίο ζητήθηκε από τους εξεταζόμενους να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη $\frac{3}{4}$x$\frac{1}{3}$, οι επιδόσεις ήταν καλύτερες. Περίπου το ένα τρίτο των υποψήφιων δασκάλων (38,3%), ήταν σε θέση να σκεφτεί και να διατυπώσει ένα μαθηματικό πρόβλημα που θα λυνόταν με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Εντούτοις, τα άστοχα προβλήματα ήταν παραπάνω, καθώς πάνω από τους μισούς φοιτητές (56,2%) ανέφεραν προβλήματα που είτε δεν αντιστοιχούσαν στο συγκεκριμένο πολλαπλασιασμό είτε ήταν ανακριβείς ή ακατανόητα. Οι υπόλοιποι (5,5%) δεν διατύπωσαν κάποιο πρόβλημα.

<u>Είδη προβλημάτων πολλαπλασιασμού (ΕΚΠΠ)</u>

Ένα μέρος των φοιτητών (19,2%) διατύπωσε ως προβλήματα καταστάσεις που αναφέρονται σε συνταγές φαγητών, σε δόσεις και στο μαγείρεμα αυτών. Ενδεικτικά κάποια προβλήματα που είχαν τέτοιες αναφορές ήταν:

«Ο Δημήτρης έκανε μια τούρτα για τα γενέθλια της αδερφής του και έβαλε $\frac{3}{4}$ της κούπας γάλα για την γαλακτοκρέμα. Αν ο Δημήτρης την επόμενη φορά κάνει το $\frac{1}{3}$ της συνταγής, πόσο γάλα θα βάλει στην γαλακτοκρέμα;»

«Η Ελένη θέλει να φτιάξει κέικ, από τα $\frac{3}{4}$ κιλού αλεύρι χρησιμοποίησε το $\frac{1}{3}$. Πόσο αλεύρι χρησιμοποίησε τελικά;»

«Ο κύριος Αντώνης είναι φούρναρης και η για να κάνει τα καρβέλια του χρειάζεται για μέρα $\frac{3}{4}$ του κιλού αλεύρι. Την Δευτέρα επειδή δεν είχε πολλές παραγγελίες αποφάσισε να κάνει το $\frac{1}{3}$ από τη συνηθισμένη ποσότητα καρβελιών, και για αυτό το λόγο άλλαξε τη συνταγή του. Με τη νέα συνταγή πόσα κιλά αλεύρι χρειάζεται ο κύριος Αντώνης για να κάνει τα καρβέλια του;»

Ένα μικρό ποσοστό (6,8%) των σωστών προβλημάτων αναφέρονταν σε κομμάτια μιας βρώσιμης ποσότητας, όπως πίτσα ή πίτα, που μοιράστηκαν σε ένα ή περισσότερα άτομα. Για παράδειγμα:

«Από τα 4 κομμάτια μιας πίτας περίσσεψαν τα 3. Ο Γιάννης έφαγε το 1/3 της πίτας που περίσσεψε. Πόσο έφαγε ο Γιάννης;»

«Στο χθεσινό πάρτι ο Γιώργος έφαγε το $\frac{1}{4}$ της πίτσας. Η Μαρίνα έφαγε το $\frac{1}{3}$ της πίτσας που άφησε ο Γιώργος. Δηλαδή το $\frac{1}{3}$ από τα $\frac{3}{4}$ που άφησε ο Γιώργος. Πόση πίτσα έφαγε τελικά η Μαρίνα;»

Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις (12,3%) αφορούσαν ποικίλες καταστάσεις με δεδομένα τα παραπάνω κλάσματα και ζητούμενο το γινόμενό τους. Ορισμένες αφορούσαν διακριτές ποσότητες όπως βιβλία, μαθητές κ.λπ., άλλες μέτρα υφάσματος, άλλες λίτρα μιας υγρής ποσότητας και άλλες το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Έτσι, είχαμε τα εξής προβλήματα:

«Η Γεωργία έχει $\frac{1}{3}$ του μέτρου ύφασμα. Με το ύφασμα αυτό θέλει να ράψει ένα πορτοφολάκι, το οποίο χρειάζεται για να ολοκληρωθεί τα $\frac{3}{4}$ του υφάσματος που έχει. Πόσο μέρος του μέτρου χρειάστηκε τελικά για να ράψει το πορτοφολάκι;»

«Έχουμε ένα ορθογώνιο, όπου η μία πλευρά είναι $\frac{3}{4}$ και η άλλη $\frac{1}{3}$. Πόσο θα είναι το εμβαδόν του;»

«Τα $\frac{3}{4}$ των παιδιών μιας τάξης είναι κορίτσια. Από τα κορίτσια το $\frac{1}{3}$ μαθαίνει αγγλικά. Ποιο μέρος των παιδιών της τάξης είναι κορίτσια και μαθαίνει αγγλικά;»

Λάθη στην κατασκευή προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΕΚΠΠ)

Αρκετές ήταν οι απαντήσεις που θεωρήθηκαν λανθασμένες καθώς δεν αντιστοιχούσαν στην ζητούμενη πράξη. Το λάθος που έκαναν 14 φοιτητές (19,2%) ήταν να διατυπώσουν προβλήματα που λυνόντουσαν με διάφορη από τον πολλαπλασιασμό πράξη κλασμάτων ($\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{3}$) . Μερικοί, δηλαδή, σκέφτηκαν καταστάσεις στις οποίες για απαντηθεί το ζητούμενο έπρεπε να βρεθεί το άθροισμα των κλασμάτων. Ομοίως, σε άλλα προβλήματα χρειαζόταν να γίνει αφαίρεση του $\frac{1}{3}$ από το $\frac{3}{4}$ ώστε να βρεθεί η λύση. Υπήρχαν, επίσης, προβλήματα που λυνόντουσαν με την πράξη της διαίρεσης. Έτσι, είχαμε προβλήματα όπως τα εξής:

«Ο κ. Τάκης ξόδεψε $\frac{3}{4}$ κρέας μοσχάρι. Μετά ξόδεψε και το $\frac{1}{3}$. Πόσο έμεινε συνολικά;»

«Ένα ταψί με πίτα έχει 12 κομμάτια και η Μαρία έφαγε τα $\frac{3}{4}$ της πίτας και η Γεωργία έφαγε το $\frac{1}{3}$ της πίτας. Πόσα κομμάτια πίτας έφαγαν τα δύο κορίτσια;»

«Η Μαρία ήθελε να φτιάξει κέικ και η συνταγή έγραφε πως θα της χρειαστούν $\frac{3}{4}$ από το σακουλάκι αλεύρι. Όμως η Μαρία είχε $\frac{1}{3}$. Πόσο ακόμα της χρειάζεται;»

Επιπλέον, κάποια από τα ακατάλληλα προβλήματα που παρατέθηκαν σε αυτό το ερώτημα (11%), λυνόντουσαν με παραπάνω από μία πράξη. Δηλαδή, πέρα από την πράξη του πολλαπλασιασμού, αναγκαία ήταν και μία επιπρόσθετη πράξη, συνήθως αφαίρεση, ώστε να απαντηθεί το ζητούμενο. Κάποια προβλήματα όπως αυτά που αναλύονται ήταν:

«Ο Γιάννης αγόρασε $\frac{3}{4}$ του κιλού κακάο αλλά πρέπει να δώσει το $\frac{1}{3}$ αυτού στον φίλο του Γιώργο. Πόσο κακάο θα μείνει στον Γιάννη;»

«Η Ελένη έφαγε από την πίτσα το βράδυ τα $\frac{3}{4}$. Από αυτή που έμεινε ήρθε ο Γιώργος και έφαγε το $\frac{1}{3}$. Τι μέρος όλης της πίτσας έφαγε ο Γιώργος;»

Ένα μικρό μέρος των φοιτητών (11%) κατασκεύασε ελλιπείς προβλήματα των οποίων η απάντηση δεν μπορεί να απαντηθεί με βάση τα δεδομένα που δίνουν. Δηλαδή, τα στοιχεία που έδιναν δεν ήταν αρκετά για να μπορέσει κάποιος να καταλήξει στο ζητούμενο που θέτουν. Για παράδειγμα:

«Τα $\frac{3}{4}$ μιας πίτσα έχουν καταναλωθεί από το $\frac{1}{3}$ των μαθητών μιας τάξης. Πόσοι είναι οι μαθητές που δεν έχουν φάει καθόλου πίτσα;»

«Η Μαρία από τα $\frac{3}{4}$ κεράσια χρησιμοποίησε το $\frac{1}{3}$. Πόσα κεράσια ήταν συνολικά;»

Οι υπόλοιπες απαντήσει (17,8%) αφορούσαν προβλήματα με διάφορα λάθη. Μία εξεταζόμενη, λόγου χάριν, αντί για μια κατάσταση που να απαιτεί τον πολλαπλασιασμό αναφέρει τον ίδιο τον πολλαπλασιασμό που πρέπει να γίνει . Ένας άλλος, δημιούργησε πρόβλημα που η λύση του αν και ήταν πολλαπλασιασμός, δεν ήταν ο ζητούμενος. Κάποια άλλα προβλήματα ήταν μη κατανοητά.

«Η ηλικία της αδερφής μου ισούται με $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$, πόσο χρονών είναι η αδερφή μου; »

«Ο Κώστας θέλει να βάψει $\frac{1}{3}$ ενός τοίχου. Αν το $\frac{1}{3}$ του δοχείου με το χρώμα φτάνει για να βάψει το $\frac{1}{4}$ του τοίχου. Πόσα δοχεία με χρώμα θα χρειαστεί;»

«Η Τάνια έχει 4 καραμέλες. Κρατάει την μία και τις υπόλοιπες θέλει να τις δώσει σε ένα φτωχό παιδάκι. Επισκέφθηκε το παιδάκι $\frac{1}{3}$ φορές από αυτές που υπολόγιζε ότι θα πάει. Να υπολογίσετε πόσες καραμέλες έχει το παιδάκι;»

«Τα παιδιά της τρίτης τάξης ενός δημοτικού την παγκόσμια μέρα τούρτας αποφάσισαν να φτιάξουν τούρτες στο σχολείο. Για τις τούρτες αγόρασαν 8 συσκευασίες αλεύρι. Τους περίσσεψαν 2 και από τις 9 συσκευασίες ζάχαρη τους 6/ Πόση ποσότητα χρησιμοποιήθηκε από την συνολική ποσότητα αλευριού και ζάχαρης;»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 38,4% (28)	Προβλήματα για συνταγές ή δόσεις υλικών	19,2% (14)
	Προβλήματα μιας συνεχούς ποσότητας (κομμάτια πίτσας-πίτας)	6,8% (5)
	Λοιπά σωστά προβλήματα	12,3% (9)
Λάθη 56,2% (41)	Προβλήματα που λύνονται με διαφορετικές πράξεις (πχ πρόσθεση)	19,2% (14)
	Προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό και μία ακόμη πράξη (πχ αφαίρεση)	11% (8)
	Προβλήματα που δεν μπορούν να απαντηθούν	8,2% (6)
	Λοιπά λάθη	17,8% (13)

Πίνακας 19 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΚΠΠ)

Έργο 21: Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης

Στο επόμενο ερώτημα (ΕΚΠΔ), λιγότεροι από τους μισούς (42,4%) εξεταζόμενους κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που να αντιστοιχίζει στην διαίρεση $\frac{3}{5}$: $\frac{1}{5}$ ως λύση. Περισσότερες από τις σωστές απαντήσεις ήταν οι εσφαλμένες, καθώς 36 άτομα (49,3%) φάνηκε να μην είναι σε θέση να κατασκευάσουν ένα αντίστοιχο στην πράξη μαθηματικό πρόβλημα. Πάραυτα, υπήρξαν και 5 υποψήφιοι δάσκαλοι (6,8%) που προτίμησαν να μην δώσουν κάποια απάντηση σε αυτό το έργο.

Είδη προβλημάτων διαίρεσης (ΕΚΠΔ)

Πιο συγκεκριμένα, 10 φοιτητές (13,7%) διατύπωσαν προβλήματα όπου μία βρώσιμη ποσότητα, όπως γιαούρτι, μαρμελάδα , γλυκό, ζύμη κ.λπ. (μετρημένη σε κιλά) διαιρείται σε μερίδες ή τοποθετείται σε μικρότερα σκεύη (λ.χ. βάζα, μικρές φόρμες, δοχεία, κεσεδάκια) συγκεκριμένης ποσότητας ($\frac{1}{5}$) και ζητείται να βρεθεί το πλήθος αυτών. Έτσι, τέτοια προβλήματα ήταν τα εξής:

«Έχουμε φτιάξει ζύμη ίση με $\frac{3}{5}$ του κιλού και θέλουμε να τη χωρίσουμε σε μικρά φορμάκια για muffins χωρητικότητας $\frac{1}{5}$ του κιλού. Πόσα φορμάκια θα γεμίσουμε;»

«Έχουμε $\frac{3}{5}$ του κιλού κιμά που θέλουμε να το χωρίσουμε σε μερίδες του $\frac{1}{5}$ του κιλού. Πόσες μερίδες θα έχουμε αν τα χωρίσουμε;»

«Η κυρία Δέσποινα έχει ένα δοχείο $\frac{3}{5}$ του κιλού γιαούρτι και θέλει να το μοιράσει σε δοχεία χωρητικότητας $\frac{1}{5}$ του κιλού. Πόσα δοχεία θα χρειαστεί»

Με παρόμοιο τρόπο λειτούργησαν 6 φοιτητές (8,2%) που επινόησαν προβλήματα στα οποία μια πόσιμη ποσότητα, όπως νερό, λικέρ, χυμό και κρασί, (μετρημένη σε λίτρα) χωρίζεται και τοποθετείται σε μικρότερα σκεύη (ποτήρια, μπουκάλια ..) συγκεκριμένης ποσότητας ($\frac{1}{5}$). Παράδειγμα τέτοιων προβλημάτων είναι:

«Σε μια κανάτα έχω $\frac{3}{5}$ του λίτρου χυμό και θέλω να μοιράσω το χυμό σε ποτήρια που χωράνε $\frac{1}{5}$ του λίτρου χυμό. Πόσα ποτήρια θα γεμίσω;»

«Διαθέτουμε $\frac{3}{5}$ του λίτρου νερό και θέλουμε να τα μοιράσουμε σε ποτήρια χωρητικότητας $\frac{1}{5}$ του λίτρου νερό. Πόσα ποτήρια θα χρειαστούμε;»

Ένα μέρος φοιτητών (13,7%), επίσης, σκέφτηκε καταστάσεις στις οποίες το μήκος ενός υλικού ($\frac{3}{5}$ μέτρου) , όπως κορδέλα, κορδόνι και ξύλο, χωρίστηκε σε μικρότερα τμήματα του $\frac{1}{5}$. Ενδεικτικά προβλήματα ήταν τα εξής:

«Μια μοδίστρα έχει $\frac{3}{5}$ μέτρου κορδέλας και την κόβει σε κομμάτια $\frac{1}{5}$. Σε πόσα κομμάτια θα κοπεί;»

«Η Μαρία έχει ένα κορδόνι που έχει μήκος $\frac{3}{5}$ του μέτρου και θέλει να τα χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος $\frac{1}{5}$. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει η Μαρία;»

«Ο Γιώργος θέλει να φτιάξει ράφια για το δωμάτιό του. Πήγε στο μαγαζί και αγόρασε $\frac{3}{5}$ του μέτρου ξύλο. Στην συνέχει χώρισε το ξύλο σε $\frac{1}{5}$ του μέτρου. Πόσα ράφια θα φτιάξει;»

Εντούτοις, υπήρξαν σωστές απαντήσεις (6,8%) που δεν υπάγονται σε μία από τις παραπάνω κατηγορίες. Για παράδειγμα, δύο προβλήματα αναφέρονταν σε μία επιφάνεια $\frac{3}{5}$ τ.μ που καλύπτεται με πλακάκια ή πατάκια. Έτσι, μερικά προβλήματα που συναντήθηκαν ήταν:

«Μια ακρίδα έχει να διανύσει την απόσταση $\frac{3}{5}$. Κάθε της άμα έχει μήκος $\frac{1}{5}$. Με πόσα άλματα θα διανύσει όλη την απόσταση.»

«Έχω ένα διάδρομο μήκους $\frac{3}{5}$ του μέτρου και θέλω να τον καλύψω με πατάκια. Το κάθε πατάκι έχει μήκος $\frac{1}{5}$ του μέτρου. Πόσα πατάκια θα χρειαστώ;»

«Έχω $\frac{3}{5}$ λίτρα χυμού. Την ημέρα πίνω $\frac{1}{5}$ του λίτρου χυμό. Για πόσες μέρες θα μου φτάσει ο χυμός;»

<u>Λάθη στην κατασκευή προβλήματος διαίρεσης (ΕΚΠΔ)</u>

Ὁσον αφορά τα άστοχα προβλήματα που διατυπώθηκαν, τα περισσότερα (24,7%) είχαν ως λύση άλλες πράξεις μεταξύ των κλασμάτων ($\frac{1}{5}$ και $\frac{3}{5}$) και όχι την διαίρεση που ήταν το ζητούμενο. Πιο αναλυτικά, 11 εξεταζόμενοι (15,1%) κατασκεύασαν προβλήματα που για να λυθούν έπρεπε να γίνει πολλαπλασιασμός, αφού το ζητούμενο ήταν το μέρος του μέρους, δηλαδή το $\frac{1}{5}$ του $\frac{3}{5}$. Τρία τέτοια προβλήματα ήταν τα εξής:

«Ο Τάσος θέλει να φτιάξει πίτσα. Η συνταγή λέει ότι χρειάζεται $\frac{3}{5}$ του φλιτζανιού αλεύρι. Αυτός όμως χρησιμοποίησε το $\frac{1}{5}$ του $\frac{3}{5}$. Πόσο αλεύρι χρησιμοποίησε;»

«Η Δέσποινα θέλει να κάνει μουσακά και η συνταγή για την μπεσαμέλ έλεγε $\frac{3}{5}$ γάλα. Όμως αυτή θέλει να κάνει το $\frac{1}{5}$ της συνταγής. Πόσα ml γάλα θα χρειαστεί;»

«Ο Ηλίας έχει τα $\frac{3}{5}$ κομμάτια μιας πίτσας και δίνει στην αδερφή του το $\frac{1}{5}$. Πόσα κομμάτια πίτσας έχει η αδερφή του;»

Πέρα από την πράξη του πολλαπλασιασμού, 7 συμμετέχοντες (9,6%) δημιούργησαν προβλήματα με αυτά τα δύο κλάσματα που λύνονται με άλλες πράξεις, όπως πρόσθεση, αφαίρεση ή και συνδυασμό δύο πράξεων, αλλά όχι με διαίρεση. Για παράδειγμα κάποιες απαντήσεις ήταν:

«Ο Γιάννης και η Γεωργία έχουν μπροστά τους τα $\frac{3}{5}$ της πίτσας και ο Γιάννης έφαγε το $\frac{1}{5}$. Πόσο τρώει η Γεωργία;»

«Η κυρία Ελένη μοίρασε πίτα στην Μαρία και στον Γιώργο. Στην Μαρία έδωσε $\frac{3}{5}$ και στον Γιώργο $\frac{1}{5}$. Πόσο ήταν το συνολικό;»

«Έχουμε $\frac{3}{5}$ σχοινί και θέλουμε να το μεγεθύνουμε κατά $\frac{1}{5}$. Πόσο μήκος θα έχει το σχοινί στο τέλος;»

Επιπλέον, ορισμένοι διατύπωσαν προβλήματα που τα δεδομένα δεν ήταν αρκετά για λυθεί το πρόβλημα. Δηλαδή, ήταν προβλήματα που τα στοιχεία δεν ήταν επαρκή για να δοθεί απάντηση. Ενδεικτικές τέτοιες απαντήσεις ήταν:

«Ο Πέτρος για να φτιάξει κρέμα έβαλε τα $\frac{3}{5}$ της συνταγής γάλα από το $\frac{1}{5}$ της δοσολογίας. Πόσα μπολ με κρέμα θα γεμίσει;»

«Αν η δασκάλα μιας τάξης έχει φέρει μαζί της τα $\frac{3}{5}$ καραμέλες από ένα σακουλάκι με καραμέλες και θέλει να μοιράσει τις καραμέλες στο $\frac{1}{5}$ της τάξης, το οποίο αποτελούν τα κορίτσια. Πόσες καραμέλες θα πάρει το κάθε κορίτσι;»

Οι υπόλοιποι φοιτητές έκανα ποικίλα λάθη στα προβλήματα που παρέθεσαν . Δύο άτομα, για παράδειγμα, αναφέρουν την ίδια την διαίρεση που πρέπει να γίνει μέσα στο πρόβλημα. Παρομοίως, δύο άτομα κατασκεύασαν προβλήματα που λύνονταν με διαφορετική από την ζητούμενη διαίρεση (π.χ. $\frac{3}{5}$:5 ή $\frac{1}{5}$: $\frac{3}{5}$). Σε άλλα προβλήματα, ο συνειρμός των φοιτητών που τα κατασκεύασαν δεν ήταν κατανοητός.

«Τα χρόνια που δουλεύει ο αδελφός μου ισούνται με $\frac{3}{5}$ δια του καιρό που δουλεύω εγώ, που είναι $\frac{1}{5}$ (του μήνα). Πόσο καιρό δουλεύει ο αδερφός μου;»

«Πήγα εχθές και αγόρασα ένα κομμάτι σχοινί που ήταν ίσο με το $\frac{1}{5}$ του μέτρου. Το κομμάτι αυτό που αγόρασα στην συνέχεια το έκοψα σε κομμάτια που ήταν ίσα με $\frac{3}{5}$ το καθένα του συνολικού μήκους του σχοινιού. Πόσα κομμάτια έκοψα;»

«Αποφάσισα να φτιάξω κέικ. Η κανονική δόση έλεγε ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει 1,5 πακέτο αλεύρι. Εγώ όμως θα έφτιαχνα διπλή δόση. Πόσο αλεύρι χρησιμοποίησα;»

«Ο κύριος Γιάννης είναι ζαχαροπλάστης και θα κάνει για ένα πάρτι κεκάκια, όπου τα $\frac{3}{5}$ θα είναι με σοκολάτα και τα υπόλοιπα με φρούτα. Όμως οι πελάτες του ζήτησαν να μην κάνει το $\frac{1}{5}$ από τα κεκάκια. Πόσα κεκάκια δεν θα κάνει;»

		Σχ. Συχνότητα & Συχνότητα
Επιτυχία 42,5% (31)	Προβλήματα με ποσότητα (σε κιλά) που διαιρείται	13,7% (10)
	Προβλήματα με μήκος ενός αντικειμένου	13,7%(10)
	Προβλήματα με υγρή ποσότητα (σε λίτρα)	8,2% (6)
	Λοιπά σωστά προβλήματα	6,8% (5)
Λάθη 50,7% (37)	Προβλήματα που λύνονται με πολλαπλασιασμό	15,1% (11)
	Προβλήματα που λύνονται με διαφορετικές πράξεις (πχ αφαίρεση)	9,6% (7)
	Προβλήματα που δεν μπορούν να απαντηθούν	6,8% (5)
	Προβλήματα που λύνονται με διαφορετική διαίρεση	2,7% (2)
	Περιγραφή της πράξης	2,7% (2)
	Λοιπά λάθη	13,7% (10)

Πίνακας 20 Κατηγορίες σωστών και λάθος απαντήσεων (ΕΚΠΔ)

3.3 Συγκρίσεις επιδόσεων

3.3.1 Σύγκριση των επιδόσεων στα έργα κάθε άξονα

3.3.1.1 Άξονες και έργα στην εργασία του μαθήματος

Στον **πρώτο άξονα**, βλέπουμε ότι οι επιτυχίες κινούνται σε υψηλό επίπεδο. Όπως φαίνεται στον πίνακα 21, στην εκτέλεση πολλαπλασιασμού (ΕΠ) και διαίρεσης γνησίων κλασμάτων (ΕΔ) σχεδόν όλοι οι φοιτητές απάντησαν σωστά (100% και 95,9% αντίστοιχα). Ωστόσο, παρατηρούμε ότι όταν στην ίδια πράξη (διαίρεση) εμπλέκεται κάποιος μεικτός αριθμός ($1\ \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$) (ΕΔΜ) το πλήθος των σωστών απαντήσεων περιορίζονται αισθητά (64,5%). Σε αυτόν τον άξονα ερωτήσεων, φαίνεται λοιπόν ότι οι φοιτητές συνάντησαν δυσκολία στη διαίρεση κλασμάτων με διαιρετέο μεικτό αριθμό.

	Εκτέλεση Πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$	**Εκτέλεση Διαίρεσης $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$**	**Εκτέλεση Διαίρεσης Μεικτού $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$**
Επιτυχία	100% (73)	95,9% (70)	64,5% (47)
Μη απάντηση	0% (0)	0% (0)	6,8% (5)

Πίνακας 21 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνοτήτων) στα έργα του άξονα 1

Στον **δεύτερο άξονα**, της αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων , οι επιδώσεις κυμαίνονται σε ένα αρκετά χαμηλό επίπεδο (πίνακας 22). Τα ποσοστά επιτυχιών θα λέγαμε ότι είναι περιορισμένα καθώς το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι μονοψήφιος αριθμός και στις τρεις περιπτώσεις (9 (12,3%), 7 (11%), 5 (6,8%)). Ειδικότερα, συγκρίνοντας τα ποσοστά επιτυχίας στις αναπαραστάσεις πράξεων (πίνακας 22), παρατηρούμε ότι η αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$ (ΑΠ) την πετυχαίνουν μόνο 9 φοιτητές (12,3%). 7 φοιτητές μόνο (11%) έδωσαν εύστοχες απεικονίσεις για την διαίρεση $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΑΔ) ενώ ακόμη λιγότεροι ήταν οι φοιτητές (6,8%) που απεικόνισαν ορθά την διαίρεση $1\ \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ (ΑΔΜ) καθώς αποδείχθηκε η πιο απαιτητική.

	Αναπαράσταση Πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$	**Αναπαράσταση Διαίρεσης $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$**	**Αναπαράσταση Διαίρεσης Μεικτού $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$**
Επιτυχία	12,3% (9)	11% (7)	6,8% (5)
Μη απάντηση	6,8% (5)	9,6% (7)	46,6 %(34)

Πίνακας 22Ποσοστά επιτυχιών (και συχνοτήτων) στα έργα του άξονα 2

Στον **τρίτο άξονα** στην αναπαράσταση πλαισιωμένων πράξεων, οι επιδώσεις κυμαίνονται από ένα χαμηλό έως μέτριο αλλά υψηλότερο από τα προηγούμενα έργα (άξονας 2) επίπεδο. Παρατηρούμε λοιπόν ότι στην αναπαράσταση πράξεων με πλαίσιο (πίνακας 23) , η οπτικοποίηση του πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ (ΑΠΠ) ήταν αυτή με το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας (30,1%). Τα δύο προβλήματα διαίρεσης και η αναπαράσταση τους (ΑΠΔ1, ΑΠΔ2) αποδείχθηκαν πιο δύσκολα για τους συμμετέχοντες. Πιο συγκεκριμένα, η αναπαράσταση του προβλήματος με λύση τη διαίρεση 3: $\mathbf{\frac{3}{4}}$ (24,7 %) στάθηκε πιο απαιτητική από αυτή του προβλήματος πολλαπλασιασμού αλλά πιο εύκολη από το πρόβλημα με διαίρεση $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$ (15,1%).

	Αναπαράσταση Προβλήματος Διαίρεσης 1 $\mathbf{3: \frac{3}{4}}$	**Αναπαράσταση Προβλήματος Πολλαπλασιασμού** $\mathbf{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}$	**Αναπαράσταση Προβλήματος Διαίρεσης 2** $\mathbf{\frac{3}{4} : \frac{1}{8}}$
Επιτυχία	24,7% (18)	30,1% (22)	15,1% (11)
Μη απάντηση	30,1% (22)	21,9% (16)	12,3% (9)

Πίνακας 23 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνότητες) στα έργα του άξονα 3

Στον **τέταρτο άξονα**, όπου εξετάστηκε η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων οι επιδόσεις κινούνταν σε καλό επίπεδο. Όπως φαίνεται στον πίνακα 4, οι περισσότερες σωστές απαντήσεις σημειώθηκαν στην επίλυση του προβλήματος διαίρεσης $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$ (ΕΠΔ2) (90,4%). Καλές ήταν οι επιδόσεις και στην επίλυση του δεύτερου προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΕΠΔ1) όπου οι σωστές απαντήσεις ήταν 58 (79,5%) . Λιγότερο κατανοητό στους φοιτητές, φάνηκε να είναι το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού καθώς περισσότεροι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν να το επιλύσουν. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα με λύση τον πολλαπλασιασμό $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ (ΕΠΠ), το έλυσαν σωστά 53 (72,6%) άτομα. .

	Επίλυση Προβλήματος Διαίρεσης 1 $\mathbf{3: \frac{3}{4}}$	**Επίλυση Προβλήματος Πολλαπλασιασμού** $\mathbf{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}$	**Επίλυση Προβλήματος Διαίρεσης 2** $\mathbf{\frac{3}{4} : \frac{1}{8}}$
Επιτυχία	79,5% (58)	72,6% (53)	90,4% (66)
Μη απάντηση	12,3% (9)	5,5% (4)	2,7% (2)

Πίνακας 24 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνότητες) στα έργα του άξονα 3

Στον **πέμπτο άξονα**, όπου υπήρχαν έργα κατασκευής προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων οι επιτυχίες κυμαίνονταν από 30,1% έως 61,6%. . Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι καλύτερες επιδόσεις καταγράφηκαν στην κατασκευή προβλήματος με λύση τον πολλαπλασιασμό $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$= $\frac{3}{8}$ (ΚΠΠ) όπου περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες (61,6%) κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα ανάλογο της πράξης πρόβλημα. Λιγότερο καλά τα πήγαν οι φοιτητές στην κατασκευή προβλήματος με λύση την διαίρεση $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ αφού, όπως φαίνεται στον πίνακα 5, κάτω από τους μισούς φοιτητές (42,5%) ήταν σε θέση να δημιουργήσουν αντίστοιχο πρόβλημα. Ακόμη μεγαλύτερη δυσκολία συνάντησαν οι φοιτητές όταν κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για την διαίρεση $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ καθώς μόνο το 30,1% κατασκεύασαν κατάλληλα προβλήματα.

	Κατασκευή Προβλήματος Πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ **x** $\frac{1}{2}$	**Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης** $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$	**Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης Μεικτού** $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$
Επιτυχία	61,6 % (45)	42,5 % (31)	30,1% (22)
Μη απάντηση	2,7% (2)	6,8 % (5)	32,9 % (24)

Πίνακας 225 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνότητες) στα έργα του άξονα 4

3.3.1.2 Άξονες και έργα στις εξετάσεις του μαθήματος

Όπως στον **πρώτο άξονα** έργων της εργασίας, έτσι και στα αντίστοιχα έργα των εξετάσεων, οι επιδόσεις ήταν αρκετά υψηλές (πίνακας 26). Συγκεκριμένα, σχεδόν όλοι οι εξεταζόμενοι (98,6%) εκτέλεσαν σωστά την διαίρεση $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}$ (ΕΕΔ). Ωστόσο, η εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ (ΕΕΠ) δεν ήταν εξίσου εύκολη για όλους τους φοιτητές καθώς αυτοί που εκτέλεσαν σωστά τον αλγόριθμο ήταν το 90,4%.

	Εξετάσεις: Εκτέλεση Πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ **x** $\frac{1}{3}$	**Εξετάσεις: Εκτέλεση Διαίρεσης** $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}$
Επιτυχία	90,4 % (66)	98,6% (72)
Μη απάντηση	1,4 % (1)	0% (0)

Πίνακας 26 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνότητες) στα έργα του άξονα 1

Στον **δεύτερο άξονα** και στα έργα αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης το επίπεδο των επιδόσεων ήταν το χαμηλότερο (πίνακας 27). Το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών δεν ήταν σε θέση αναπαραστήσει επαρκώς καμία από τις δύο πράξεις. Πάραυτα, μικρή διαφορά σημειώνεται στο έργο αναπαράστασης της διαίρεσης $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}$ (ΕΑΔ) όπου οι επιτυχίες φτάνουν στο ποσοστό των 15,1 % έναντι των έργου αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού (ΕΑΔΑ) τα ποσοστά των οποίων έφταναν στο 12,3%. Δηλαδή, ελάχιστοι εξεταζόμενοι (9 φοιτητές στους 73) ανταποκρίθηκαν στο ζητούμενο απεικονίζοντας καταλλήλως την πράξη.

	Εξετάσεις: Αναπαράσταση Πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$	Εξετάσεις: Αναπαράσταση Διαίρεσης $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$
Επιτυχία	12,3% (9)	15,1% (11)
Μη απάντηση	6,8% (5)	8,2% (6)

Πίνακας 27 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνότητες) στα έργα του άξονα 2

Στον **τρίτο άξονα**, και στην κατασκευή προβλημάτων οι επιδόσεις των εξεταζόμενων κινούνται γύρω στο 1/3 των φοιτητών. Στον πίνακα 8, παρατηρούμε ότι λιγότεροι από τους μισούς αλλά περισσότεροι από το ένα τρίτο των φοιτητών δημιούργησαν εύστοχα σενάρια για να πλαισιώσουν τις πράξεις $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$ και $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$. Ειδικότερα, στο έργο κατασκευής προβλήματος διαίρεσης (ΕΚΠΔ) σημειώθηκαν καλύτερες επιδόσεις (42,5%) έναντι αυτών στην κατασκευή προβλήματος πολλαπλασιασμού (ΕΚΠΠ) (38,4%). Ωστόσο, αυτή η διαφορά στα ποσοστά της επιτυχίας δεν φαίνεται να είναι σημαντική εφόσον αντιστοιχεί σε 3 συμμετέχοντες.

	Εξετάσεις: Κατασκευή Προβλήματος Πολλαπλασιασμού $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$	Εξετάσεις: Κατασκευή Προβλήματος Διαίρεσης $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$
Επιτυχία	38,4% (28)	42,5% (31)
Μη απάντηση	5,5% (4)	6,8% (5)

Πίνακας 28 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνότητες) στα έργα του άξονα 4

3.3.2 Σύγκριση επιδόσεων στους άξονες των έργων στην εργασία και στις εξετάσεις του μαθήματος

Στον πίνακα 29 παρουσιάζονται οι συνολικές επιδόσεις και τα γενικά ποσοστά επιτυχίας που προκύπτουν σε κάθε άξονα της εργασίας και των εξετάσεων. Φαίνονται, δηλαδή, το πλήθος των σωστών απαντήσεων στο σύνολο των έργων κάθε άξονα καθώς επίσης το ποσοστό των επιτυχιών που αντιστοιχεί σε κάθε άξονα. Έτσι, μπορούμε να δούμε πως διαμορφώθηκαν οι επιδόσεις και να συγκρίνουμε κάθε ομάδα έργων με τις υπόλοιπες,.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η απλή εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στα κλάσματα ήταν ο άξονας με το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας (άξονας 1) (86,8%) καθώς οι 190 απαντήσεις από τις 219 που δόθηκαν στα αντίστοιχα έργα ήταν ορθές (πίνακας 29). Αμέσως επόμενος έρχεται ο άξονας της επίλυσης προβλήματος (άξονας 4) όπου το ποσοστό επιτυχίας ανήλθε στο 80,4%. Δηλαδή, οι 176 από τις 219 απαντήσεις που διατυπώθηκαν συνολικά στα αντίστοιχα έργα ήταν σωστές λύσεις προβλημάτων. Αρκετά χαμηλότερες ήταν οι επιδόσεις στον άξονα κατασκευής προβλημάτων (άξονας 5), αφού λιγότερα από τα μισά προβλήματα που δημιουργήθηκαν (44,7%) ήταν σωστά . Οι άξονας με τα μικρότερο ποσοστά επιτυχίας ήταν αυτοί των αναπαραστάσεων (άξονες 2 και 3). Ειδικότερα, στον τρίτο άξονα, στα έργα αναπαράστασης όπου οι πράξεις εμφανίζονται με μορφή προβλήματος το ποσοστό επιτυχίας ήταν 23,3% (51 σωστές απαντήσεις στις 219). Τέλος, στον δεύτερο άξονα και στα έργα αναπαράστασης πράξεων χωρίς πλαίσιο το ποσοστό επιτυχίας που σημειώθηκε ήταν μόλις 10% (22 σωστές αναπαραστάσεις στις 219).

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι φοιτητές τα κατάφεραν καλύτερα στην εκτέλεση των πράξεων και στην επίλυση προβλημάτων που λύνονται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση κλασμάτων. Απεναντίας, η διαδικασία αναπαράστασης των δύο πράξεων και η κατασκευή νέων λεκτικών προβλημάτων δυσκόλεψαν τους περισσότερους φοιτητές. Οι μελλοντικοί δάσκαλοι, στην πλειονότητα τους, αδυνατούσαν να διατυπώσουν σωστές αναπαραστάσεις και κατάλληλα προβλήματα στις περισσότερες περιπτώσεις.

Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα στις εξετάσεις, καθώς και στη φάση των εξετάσεων ο άξονας και τα έργα που συγκέντρωσαν τα μεγαλύτερα ποσοστά ήταν αυτά της εκτέλεσης των δύο πράξεων (94,5%) όπου 138 από τις 146 απαντήσεις ήταν ορθές (άξονας 1). Μεγάλη διαφορά στις επιδόσεις με τον πρώτο άξονα έχουν οι άλλοι δύο άξονες καθώς τα ποσοστά επιτυχίας είναι πολύ χαμηλότερα. Είναι εμφανές λοιπόν, ότι στην κατασκευή προβλημάτων με βάση τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων (άξονας 4) λιγότερα από τα μισά προβλήματα ανταποκρίνονταν στο ζητούμενου του εκάστοτε έργου (40,4%). Τέλος, ελάχιστες (13,7%) από τις αναπαραστάσεις που διατυπώθηκαν στα τρία έργα του δεύτερου άξονα (άξονας 2) ήταν ακριβείς, επαρκείς και συμβατές με τις πράξεις που δόθηκαν, αφού μόνο 20 από τις 146 απαντήσεις θεωρήθηκαν αποδεκτές.

Ως εκ τούτου, όπως στην εργασία έτσι και στις εξετάσεις τα έργα που δυσκόλεψαν περισσότερο τους φοιτητές ήταν αυτά του δεύτερου άξονα, δηλαδή αυτά που αφορούν τις αναπαραστάσεις των πράξεων. Μικρότερη δυσκολία συνάντησαν οι εξεταζόμενοι στα έργα κατασκευής προβλημάτων χωρίς όμως τελικά το ποσοστό επιτυχίας (40,4%) να είναι ικανοποιητικό. Πιο εύκολα για τους φοιτητές ήταν τα έργα του πρώτου άξονα καθώς, στην πλειοψηφία τους.

ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ		
	Επιτυχία	**Μη απάντηση**
Άξονας 1: Εκτέλεση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	86,8% (190/219)	2,3% (5/219)
Άξονας 4: Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	80,4% (176/219)	5,9% (13/219)
Άξονας 5: Κατασκευή προβλημάτων με βάση τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων	44,7% (98/219)	14,2% (31/219)
Άξονας 3: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (με πλαίσιο)	23,3% (51/219)	21% (46/219)
Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)	10% (22/219)	15,8% (46/219)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ		
	Επιτυχία	**Μη απάντηση**
Άξονας 1: Εκτέλεση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	94,5% (138/146)	0,7% (1/146)
Άξονας 5: Κατασκευή προβλημάτων με βάση τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων	40,4% (59/146)	6,2% (9/146)
Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)	13,7% (20/146)	7,5% (11/146)

Πίνακας 29 Ποσοστά επιτυχιών (και συχνοτήτων) των αξόνων της εργασίας

3.3.3 Σύγκριση μέσων όρων των επιδόσεων σε κάθε άξονα

Όσον αφορά την δυσκολία που διέπει τον κάθε άξονα, πραγματοποιήθηκε στατιστικός έλεγχος για την σύγκριση μέσων όρων των επιδόσεων των συμμετεχόντων, μέσω στατιστικού τεστ. Συγκεκριμένα, εφόσον οι μεταβλητές που προκύπτουν (επιτυχίες σε άξονες) δεν ακολουθούν κανονική κατανομή (One- Sample Kalmogorov-Smirnov Test, $p<0,05$ σε όλες τις περιπτώσεις), επιλέχθηκε και διενεργήθηκε ο μη παραμετρικός έλεγχος του Wilcoxon test εξαρτημένων ομάδων για την σύγκριση των μέσων όρων των επιτυχιών σε κάθε άξονα.

Αναλύοντας αρχικά τα αποτελέσματα της εργασίας και τους μέσους όρους σε κάθε άξονα έργων, το Wilcoxon test που πραγματοποιήθηκε δείχνει ότι όλες οι διαφορές των μέσων ορών είναι στατιστικά σημαντικές. Αναλυτικότερα, στον πίνακα 30, βλέπουμε ότι όλες οι συγκρίσεις των μέσων όρων ανά δύο καταλήγουν στο ότι το p- value (Asymp. Sig.) είναι μικρότερο από το επίπεδο σημαντικότητας ($p<0,05$). Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι οι άξονες εμφάνισαν στατιστικές διαφορές στους μέσους όρους και τα έργα ενός άξονα ήταν στατιστικά ευκολότερα ή δυσκολότερα από τα αντίστοιχα του διαφορετικού άξονα. Αυτό γίνεται αντιληπτό αν παρατηρηθούν οι μέσοι όροι του κάθε άξονα ερωτήσεων.

Οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των επιτυχιών σε κάθε άξονα φαίνονται παρακάτω, στον πίνακα 31. Πιο συγκεκριμένα, στον πίνακα 31 βλέπουμε ότι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή ήταν 0 και 3 αντίστοιχα. Στατιστικά ευκολότερα φάνηκαν να είναι τα έργα εκτέλεσης των δύο πράξεων καθώς ο μέσος όρος των επιτυχιών του προκείμενου άξονα ήταν M=2,60 (N=73, SD=0,520). Παραπλήσιος, αλλά ελαφρώς χαμηλότερος ήταν ο μέσος όρος στον άξονα της επίλυσης προβλημάτων (άξονας 4). Ειδικότερα, ο μέσος όρος τον επιδόσεων στα έργα του άξονα 4 ήταν M= 2,42(N= 73, SD= 0,686). Στα έργα κατασκευής προβλημάτων και στον αντίστοιχο άξονα (άξονας 5) ο μέσος όρος ήταν αρκετά χαμηλότερος, M= 1,89 (N= 73, SD= 1,070), και ως εκ τούτου, τα έργα αυτά κρίνονται ως στατιστικά δυσκολότερα από αυτά στους δύο προηγούμενους άξονες. Ακόμη πιο δύσκολα, για τους φοιτητές, ήταν τα έργα του τρίτου άξονα και οι αναπαραστάσεις με πλαίσιο (άξονα 3), εφόσον, όπως φαίνεται και στον πίνακα 31, ο μέσος όρος στις επιδώσεις M= 0,70 (N=73, SD=0,938). Τέλος, ο δυσκολότερος όλων άξονας και τα αντίστοιχα έργα ήταν αυτά της αναπαράστασης χωρίς πλαίσιο καθώς ο μέσος όρος ήταν μόλις M=0,30 (N=73,SD= 0,758).

Στατιστικό τεστ ^{a}										
	Άξονας 1- Άξονας 2	Άξονας 1- Άξονας 3	Άξονας 1- Άξονας 4	Άξονας 1- Άξονας 5	Άξονας 2- Άξονας 3	Άξονας 2- Άξονας 4	Άξονας 2- Άξονας 5	Άξονας 3- Άξονας 4	Άξονας 3- Άξονας 5	Άξονας 4- Άξονας 5
Z	-7,446^{b}	-7,165^{b}	-2,058^{b}	-6,482^{b}	-3,701^{c}	-7,318^{b}	-5,876^{b}	-6,961^{b}	-3,790^{b}	-6,160^{c}
Asymp. Sig. (2tailed)	,000	,000	,040	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000

a.Wilcoxon έλεγχος προσημασμένης διάταξης
b. Βασισμένο σε αρνητική διάταξη
c. Βασισμένο σε θετική διάταξη

Πίνακας 30 Αποτελέσματα μη παραμετρικού στατιστικού τεστ (Wilcoxon test)(εργασία)

	N	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέσος όρος (M)	Τυπική απόκλιση (SD)
Άξονας 1: Εκτέλεση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	73	0	3	2,60	,520
Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)	73	0	3	,30	,758
Άξονας 3: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (με πλαίσιο)	73	0	3	,70	,938
Άξονας 4: Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	73	0	3	2,42	,686
Άξονας 5: Κατασκευή προβλημάτων με βάση τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων	73	0	3	1,89	1,070

Πίνακας 31 Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις επιδόσεων σε κάθε άξονα (εργασίες)

Περνώντας στην ανάλυση των αποτελεσμάτων των εξετάσεων και στους μέσους όρους των αξόνων, το Wilcoxon test που διενεργήθηκε, υποδεικνύει ότι η στατιστική διαφορά που προκύπτει στις συγκρίσεις των μέσων όρων κρίνεται σημαντική. Όπως φαίνεται και στον πίνακα 32, όλοι οι δείκτες p- value είναι μικρότεροι από το επίπεδο σημαντικότητας ($p=0,00 <0,05$). Επομένως, οι άξονες εμφανίζουν στατιστικά διαφορετική δυσκολία με τα έργα τους να είναι ευκολότερα ή δυσκολότερα από άλλα αντίστοιχα διαφορετικών αξόνων.

Όσον αφοράν, λοιπόν, τους μέσους όρους και τις τυπικές αποκλίσεις σε κάθε άξονα έργων στις εξετάσεις αυτές φαίνονται στον πίνακα 33, η ελάχιστη τιμή που σημειώθηκε ήταν 1 και η μέγιστη 2. Παρατηρώντας τους μέσους όρους, είναι εμφανές ότι όπως στην εργασία έτσι και στις εξετάσεις ευκολότερα ήταν τα έργα τις εκτέλεσης των δύο πράξεων εφόσον ο μέσος όρος επιτυχιών του άξονα 1 ήταν M=1,89 (N=73, SD= 0,315). Δυσκολότερα ήταν τα έργα της κατασκευής προβλημάτων (άξονας 5) καθώς ο μέσος όρος των επιδόσεων ήταν M=0,81 (N=73, SD= 0,793). Ακόμη πιο δύσκολα ήταν τα έργα αναπαράστασης στις εξετάσεις (άξονας 2) αφού ο μέσος όρος ήταν αρκετά χαμηλός και συγκεκριμένα M= 0,27 (N=73, SD= 0,629).

Στατιστικό τεστ [α]			
	Άξονας 1- Άξονας 2	Άξονας 1- Άξονας 5	Άξονας 2- Άξονας 5
Z	-7,531[b]	-6,667[b]	-4,666[c]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000

a. Wilcoxon έλεγχος προσημασμένης διάταξης
b. Βασισμένο σε αρνητική διάταξη
c. Βασισμένο σε θετική διάταξη

Πίνακας 32 Αποτελέσματα μη παραμετρικού στατιστικού τεστ (Wilcoxon test)(εξετάσεις)

	N	**Ελάχιστη τιμή**	**Μέγιστη τιμή**	**Μέσος όρος (M)**	**Τυπική απόκλιση (SD)**
Άξονας 1: Εκτέλεση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	73	1	2	1,89	,315
Άξονας 2: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (χωρίς πλαίσιο)	73	1	2	,27	,629
Άξονας 5: Κατασκευή προβλημάτων με βάση τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων	73	1	2	,81	,793

Πίνακας 33 Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις επιδόσεων σε κάθε άξονα (εξετάσεις)

3.3.4 Σύγκριση επιδόσεων με βάση την μεταβλητή κατατακτήριοι ή όχι φοιτητές

Το δείγμα της έρευνας αποτελούταν αφενός από άτομα που φοιτούσαν στο Τμήμα για την απόκτηση πρώτου πτυχίου και αφετέρου από κατατακτήριους φοιτητές. Οι τελευταίοι φοιτούσαν για την απόκτηση δεύτερου ή παραπάνω πτυχίου και εισήχθησαν μέσω κατατακτήριων εξετάσεων. Όπως προαναφέρθηκε, οι κατατακτήριοι φοιτητές ήταν 7 στο πλήθος (N=7) ενώ οι υπόλοιποι φοιτητές 63 (N=63). Ενδιαφέρον θα είχε η αντιπαραβολή των δύο αυτών πληθυσμών και των επιδόσεων τους τόσο στην εργασία όσο και στις εξετάσεις.

Για την εν λόγω αντιπαραβολή, αξιοποιήθηκαν και συγκρίθηκαν οι μέσοι όροι των επιδόσεων στα έργα της εργασίας και στα αντίστοιχα των εξετάσεων. Εφόσον οι μεταβλητές που προκύπτουν (σύνολο επιδόσεων σε εργασία και εξετάσεις) δεν ακολουθούν κανονική κατανομή (One- Sample Kalmogorov-Smirnov Test, p<0,05) διεξήχθη στατιστικός έλεγχος μέσου μη παραμετρικού τεστ ανεξάρτητων ομάδων. Ειδικότερα, το στατιστικό τεστ που επιλέχθηκε και εφαρμόστηκε ήταν το Mann-Whitney U. Το εν λόγω τεστ εφαρμόστηκε τόσο στις επιδόσεις των δύο ομάδων στην εργασία τόσο και στα έργα των εξετάσεων. Τα αποτελέσματα του Man- Whitney U φαίνονται στους πίνακες 34 και 35.

Τα αποτελέσματα του Mann- Whitey U τεστ υποδεικνύουν σημαντικές στατιστικές διαφορές. Στο πίνακα 35, παρατηρούμε ότι στις δύο συγκρίσεις μέσων ορών το εξαγόμενο p-value (Asymp. Sig.) ισούται στην μία περίπτωση με p= 0,001 και στην άλλη με p=0,002. Είναι κατανοητό ότι και στις δύο συγκρίσεις ο δείκτης p είναι μικρότερος από το επίπεδο σημαντικότητας (p<0,05) και, ως εκ τούτου, οι διαφορές των μέσων όρων κρίνονται στατιστικά σημαντικές. Επομένως, οι δύο ομάδες των συμμετεχόντων (κατατακτήριοι και μη φοιτητές) παρουσιάζουν διαφορά στις επιδόσεις τους στο σύνολο των έργων. Μάλιστα, στον πίνακα34 που παίρνουμε περιγραφικά στατιστικά για τις δύο ομάδες, βλέπουμε ότι το μέσο κατάταξης των κατατακτήριων φοιτητών είναι μεγαλύτερο εκάστοτε (34,43<61,21, 34,55<60,14). Οι στατιστικές διαφορές γίνονται αντιληπτές όταν εστιάσουμε στους μέσους όρους επίδοσης κάθε ομάδας.

		N	**Μέσο κατάταξης**	**Άθροισμα κατάταξης**
Επιδόσεις στην εργασία	Απλοί φοιτητές (πρώτο πτυχίο)	66	34,43	2272,50
	Κατατακτήριοι φοιτητές	7	61,21	428,50
	Σύνολο	73		
Επιδόσεις στις εξετάσεις	Απλοί φοιτητές (πρώτο πτυχίο)	66	34,55	2280,00
	Κατατακτήριοι φοιτητές	7	60,14	421,00
	Σύνολο	73		

Πίνακας 34 Κατανομή επιδόσεων στην εργασία και στις εξετάσεις

Στατιστικό Τεστ[a]		
	Επιδόσεις στην εργασία	Επιδόσεις στις εξετάσεις
Mann-Whitney U	61,500	69,000
Z	-3,209	-3,1333
Asymp. Sig (2-tailed)	,001	,002

a . Μεταβλητή ομαδοποίησης: Τρόπος εισαγωγής στη σχολή

Πίνακας 35 Αποτελέσματα μη παραμετρικού στατιστικού τεστ (Mann- Whitney)

Όσον αφορά τις επιδόσεις των δύο ομάδων στην εργασία έχουν ως εξής:. Ο μέσος όρος των επιδόσεων στα 15 έργα της εργασίας κυμάνθηκε στο M=6,91 (N=66, SD= 2,132). Οι κατατακτήριοι φοιτητές και φοιτήτριες είχαν αρκετά καλύτερες επιδόσεις. Ο μέσος όρος στις επιδόσεις των εν λόγω φοιτητών στην εργασία ήταν M=11,71 (N=7, SD= 3,546). Δηλαδή, ο μέσος όρος των επιδόσεων της δεύτερης ομάδας (κατατακτήριοι φοιτητές) ήταν μεγαλύτερος κατά περίπου 4 μονάδες. Επομένως, οι κατατακτήριοι φοιτητές δυσκολεύτηκαν λιγότερο και φάνηκαν να είναι περισσότερο ικανοί να απαντήσουν και να ανταποκριθούν κατάλληλα στα έργα της εργασίας.

Στις εξετάσεις ο μέσος όρος των επιδόσεων των απλών φοιτητών ήταν M= 2,79 (N= 66, SD= 1,157). Οι κατατακτήριοι φοιτητές παρουσίασαν υψηλότερες επιδόσεις με μέσο όρο M= 4,71 (N=7, SD= 1,380). Δηλαδή, η δεύτερη ομάδα υποκειμένων σημείωσε υψηλότερο μέσο όρο κατά 2 μονάδες. Ως εκ τούτου, από την αντιπαραβολή των μέσων όρων επιδόσεων κατανοούμε ότι όπως στην εργασία έτσι και στις εξετάσεις οι κατατακτήριοι φοιτητές παρουσίασαν καλύτερη εικόνα επίδοσης. Οι κατατακτήριοι φοιτητές ανταποκρίθηκαν με μεγαλύτερη ευκολία και ευστοχία στα έργα που τέθηκαν στους εξεταζόμενους του μαθήματος κατά την εξέτασή τους.

Ωστόσο, ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση της επίδοσης κάθε φοιτητή (είτε κατατακτήριου είτε όχι) στα έργα της εργασίας καθώς και η εξέταση των προφίλ των ικανοτέρων φοιτητών. Παρακάτω (πίνακας 36), λοιπόν, παρουσιάζονται οι επιδόσεις και οι επιτυχείς απαντήσεις των δέκα πρώτων σε επίδοση φοιτητών σε όλες τις ερωτήσεις που τέθηκαν στην εργασία του μαθήματος. Τα μαυρισμένα κελιά μας δείχνουν την επιτυχία, ενώ τα άσπρα την αποτυχία ή μη απάντηση. Παρατηρούμε ότι 2 φοιτητές ανταποκρίθηκαν καταλλήλως σε όλες τα έργα, ο 3ος σε 14 από τα 15 έργα, ο 4ος σε 13 έργα κ.ο.κ.

	ΕΠ	ΕΔ	ΕΠΔ2	ΕΠΔ1	ΕΠΠ	ΕΔΜ	ΚΠΠ	ΚΠΔ	ΑΠΠ	ΚΠΔΜ	ΑΠΔ1	ΑΠΔ2	ΑΠ	ΑΔ	ΑΔΜ
1ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
2ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
3ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■
4ος	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■		■	■
5ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■		
6ος	■	■	■	■	■	■	■	■			■		■		■
7ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■			■		
8ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■			■		
9ος	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■				
10ος	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■					

Πίνακας 36 Προφίλ επιτυχίας 10 πρώτων σε επίδοση φοιτητών

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 Γενικά συμπεράσματα

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση των διάφορων διαστάσεων των γνώσεων και των ικανοτήτων 73 μελλοντικών δασκάλων- φοιτητών στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων. Η εργασία αυτή εστιάζει σε τέσσερα σημεία. Το πρώτο σημείο αφορά την ικανότητα εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Το δεύτερο αναφέρεται στην αναπαραστατική ικανότητα των υποψήφιων δασκάλων και την χρήση κατάλληλων οπτικών μοντέλων για αυτές τις πράξεις. Η τρίτη αφορά την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Τέλος, η τέταρτη την ικανότητα κατασκευής νέων προβλημάτων που να λύνονται με πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Στην ενότητα αυτή γίνεται σύνδεση των συμπερασμάτων που διεξάγονται με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, απατώντας στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

Πριν απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα ένα προς ένα, θα μπορούσαμε να εξάγουμε ως γενικό συμπέρασμα της έρευνας ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών έχει κατακτήσει τη διαδικαστική γνώση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Οι υποψήφιοι δάσκαλοι είναι σε θέση να επιλύουν τις δύο πράξεις και μερικά αντίστοιχα λεκτικά προβλήματα με σχετική ευκολία, γνωρίζοντας και ακολουθώντας τους αντίστοιχους αλγόριθμους. Ωστόσο, είναι αντιληπτό ότι υφίσταται κενό στην εννοιολογική κατανόηση και γνώση των εν λόγω πράξεων εφόσον η πλειοψηφία των συμμετεχόντων συνάντησε δυσκολία στην αναπαράσταση αυτών και στην κατασκευή νέων λεκτικών προβλημάτων. Αυτό το γενικό συμπέρασμα έρχεται σε συμφωνία με τα ευρήματα πλήθους ερευνών που υπογραμμίζουν τη δυνατότητα των δασκάλων να λύνουν αλγόριθμους και να επιτελούν διαδικασίες των οποίων όμως τη λειτουργία δεν δύνανται να εξηγήσουν. Δεν κατανοούν, δηλαδή, την ουσία, τη λειτουργία, τη καθημερινή χρήση και εφαρμογή των δύο αυτών πράξεων κλασμάτων. Κάποιες τέτοιες έρευνες είναι αυτές των Ball (1990), Borko et al. (1992), Li & Kulm (2008), Tirosh (2000), Ma (1990), Caglaum & Olive (2011) κ.α..

Παράλληλα, οι συγκρίσεις των μέσων όρων βάση διάφορων στατιστικών τεστ επιβεβαιώνουν τα παραπάνω συμπέρασμα και καταλήγουν στο ότι οι πτυχές της γνώσης που αφορούν την εκτέλεση των δύο πράξεων και την επίλυση προβλημάτων είναι περισσότερο ανεπτυγμένες έναντι αυτών στην κατασκευή αναπαραστάσεων και κατασκευή προβλημάτων όπου οι επιδόσεις είναι χαμηλότερες. Σημαντικό στοιχείο, το οποίο μελετήθηκε είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα των κατατακτήριων ή όχι φοιτητών και οι επιδόσεις κάθε ομάδας πληθυσμού. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων αποκαλύφθηκε ότι οι κατατακτήριοι φοιτητές εμφάνισαν καλύτερες επιδόσεις και, επομένως, πιο αναπτυγμένη κατανόηση σε όλες τις εξεταζόμενες πτυχές γνώσης.

4.2. Απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει *την ικανότητα των μελλοντικών δασκάλων να εκτελούν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.*

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων συμπεραίνουμε ότι οι συμμετέχοντες της έρευνας εκτέλεσαν με ευκολία τις πράξεις εφόσον οι επιτυχίες τόσο στην εργασία όσο και στις εξετάσεις κυμάνθηκαν σε υψηλά επίπεδα. Δεν υπήρχε κάποια σημαντική δυσκολία, δηλαδή, κατά την εκτέλεση πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Το πόρισμα αυτό φαίνεται να συμπίπτει με μια σειρά ερευνών όπως Ball (1990), Tirosh (2000),

Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο ότι όταν στους φοιτητές δόθηκε μια πράξη διαίρεσης όπου ο διαιρετέος ήταν ένας μικτός αριθμός, ένα μέρος αυτών (35,62%) κατέληξε σε λάθος αποτέλεσμα. Το γεγονός αυτό πιθανόν οφείλεται στην έλλειψη αναγνώρισης και ικανότητας διαχείρισης μεικτών αριθμών μέσα σε πράξεις όπως η διαίρεση. Το εύρημα αυτό συμπίπτει με τα αντίστοιχα ευρήματα της Ma (1999) που επισημαίνει ότι κάποιοι Αμερικάνοι εκπαιδευτικοί δεν μπορούσαν να εκτελέσουν τον αλγόριθμο $1 \frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, αφού δεν θυμόντουσαν τον τρόπο. Επίσης, όσον αφορά τα λάθη σε αυτό τον άξονα έργων, παρατηρήθηκε ότι στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων σημειώθηκε το λάθος του «χιαστή πολλαπλασιασμού» (5,48%) και της μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα και πολλαπλασιασμού μόνο των αριθμητών (2,74%). Παρατηρούμε εδώ ότι υπάρχει σύγχυση των πράξεων στα κλάσματα και των κανόνων του και συγκεκριμένα επιρροή από την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων. Αυτήν την επιρροή υπογραμμίζουν κι άλλες έρευνες της υπάρχουσας βιβλιογραφία όπως αυτές των Ashlock (1990), Raber (1999) και Young & Zientek (2011).

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα *εξετάζει την ικανότητα των μελλοντικών δασκάλων να δημιουργούν αναπαραστάσεις για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση κλασμάτων όταν οι πράξεις δεν έχουν πλαίσιο και όταν παρουσιάζονται με μορφή προβλήματος. Επιπλέον, διερευνά το είδος των αναπαραστάσεων που επιλέγονται και τα συχνά λάθη στα οποία καταλήγουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί.*

Αναφορικά με τις αναπαραστάσεις πράξεων χωρίς πλαίσιο, η ανάλυση των αποτελεσμάτων υποδεικνύει ότι ελάχιστοι υποψήφιοι δάσκαλοι (10%) είχαν την ικανότητα να οπτικοποιήσουν επαρκώς μια δοσμένη πράξη. Τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα αναπαράστασης στην εργασία και στις εξετάσεις του μαθήματος υπογραμμίζουν την δυσκολία που συνάντησαν οι φοιτητές σε αυτό το ζητούμενο της έρευνας. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες απεικόνιζαν είτε λανθασμένα είτε τυχαία τις πράξεις χωρίς να αποτυπώνεται η ουσία της εκάστοτε πράξης. Επιπλέον, στις περισσότερες περιπτώσεις δημιουργούσαν σχέδια και εικόνες χωρίς, ωστόσο, να τις καθιστούν κατανοητές στον αναγνώστη και δίχως τελικά να φαίνονται οι σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των εμπλεκόμενων αριθμών. Η εν λόγω αδυναμία οφείλεται αφενός στην έλλειψη της κατανόησης της σημασίας και ουσίας του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων και αφετέρου στην γενικότερη ανεπαρκή αναπαραστατική ικανότητα των εν δυνάμει εκπαιδευτικών αναφορικά με τις μαθηματικές έννοιες. Το συγκεκριμένα συμπέρασμα ταυτίζεται με μια σειρά ερευνών που επισημαίνουν την δυσκολία των δασκάλων να δημιουργούν και να διαχειρίζονται αναπαραστάσεις. Τέτοιες έρευνες, όσον αφορά κατασκευή αναπαραστάσεων για τον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών, είναι για παράδειγμα των Eisenhart et al. (1993), Amstron & Bezuk (1995) και Ball et all. (2001). Ενώ σχετικά με τη κατασκευή αναπαραστάσεων σε προβλήματα διαίρεσης , είναι λόγου χάρι οι έρευνες των Borko et al. (1992) και Lu & Luo (2012).

Όσον αφορά τις αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων όταν πλαισιώνονται με λεκτικά προβλήματα, οι επιδόσεις των φοιτητών ήταν καλύτερες (23,3%). Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν στατιστικά υψηλότερα από τα αντίστοιχα στην αναπαράσταση χωρίς πλαίσιο. Εντούτοις, εμφανής ήταν και εδώ η δυσκολία των περισσότερων να αποτυπώσουν οπτικά μοντέλα για τα προβλήματα που δόθηκα καθώς λιγότεροι από το ένα τρίτο των συμμετεχόντων το πραγματοποίησαν επιτυχώς.

Για την αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων οι μελλοντικοί δάσκαλοι κατασκεύασαν ποικίλα μοντέλα αναπαράστασης. Συχνότερα χρησιμοποιούσαν μοντέλα εμβαδού και μοντέλα μήκους, όπου τα μεγέθη είναι συνεχή, για να αποτυπώσουν τις πράξεις. Ειδικότερα, στην αναπαράσταση των πολλαπλασιασμών που τέθηκαν χωρίς κάποιο πλαίσιο, από τις λίγες σωστές αναπαραστάσεις, οι περισσότερες έγιναν με την αξιοποίηση κάποιου μοντέλου εμβαδού μιας ορθογώνιας περιοχής (είτε ενός σχήματος είτε παραπάνω-πχ τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα χωρισμένα κατάλληλα). Σε μικρότερο βαθμό χρησιμοποιήθηκαν μοντέλα μήκους και κυρίως κλασματικές λωρίδες για την εικονική αποτύπωση κάποιας πράξης πολλαπλασιασμού. Αντίθετα, στις αποπλαισιωμένες πράξεις διαίρεσης οι περισσότερες από τις αναπαραστάσεις ήταν κλασματικές λωρίδες ή αριθμογραμμές πάνω στις οποίες φαινόταν πόσες φορές επαναλαμβανόταν ο διαιρέτης πάνω στον διαιρετέο. Επίσης, κάποιες λίγες αναπαραστάσεις αφορούσαν κυκλικούς δίσκους (π.χ. ρολόι για την διαίρεση $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$).

Παρόμοιες, με μικρές διαφοροποιήσεις, ήταν οι αναπαραστάσεις των πράξεων αυτών όταν τέθηκαν πλαισιωμένες από κάποιο λεκτικό πρόβλημα. Συγκεκριμένα, στο πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων αξιοποιήθηκαν κυρίως μοντέλα κλασματικών λωρίδων πάνω στα οποία επισημαινόταν- σκιαζόταν το «μέρος του μέρους». **Σε αντίθεση με τον αποπλαισιωμένο πολλαπλασιασμό, στην αναπαράσταση προβλήματος, λιγότερες ήταν τα μοντέλα εμβαδού ορθογώνιων περιοχών.** Επιπρόσθετα, σε ακόμη λιγότερες αναπαραστάσεις χρησιμοποιήθηκαν κυκλικοί δίσκοι (κλασματικοί κύκλοι) και αντίστοιχοι κυκλικοί τομείς. Σχετικά με τα προβλήματα διαίρεσης, οι σωστές αναπαραστάσεις, στην πλειονότητα τους, δημιουργήθηκαν με κλασματικές λωρίδες- ράβδους ενώ λιγότερες με αριθμογραμμές και κυκλικούς δίσκους (κλασματικοί κύκλοι).

Βέβαια, όπως σημειώθηκε παραπάνω, περισσότερες ήταν οι αναπαραστάσεις αυτές που δεν κρίθηκαν κατάλληλες και αντιπροσωπευτικές τόσο στις απομονωμένες πράξεις όσο και στα προβλήματα. Πιο αναλυτικά, σε πολλές περιπτώσεις πολλαπλασιασμού οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί αποτύπωναν τους όρους και το γινόμενο με διαγράμματα ή σχέδια χωρίς όμως να προσδιορίζουν με κάποιο τρόπο την σχέση που διέπει και συνδέει τους αριθμούς. Δηλαδή, δεν ήταν σε θέση να αποτυπώσουν την ουσία της πράξης. Μάλιστα, κάποιοι τοποθετούσαν και διέτασσαν τους τρεις αυτούς κλασματικούς αριθμούς σε αριθμογραμμή-ες. Επίσης, σημαντικό μέρος των αναπαραστάσεων αφορούσαν αποκλειστικά το αποτέλεσμα της πράξης, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση το γινόμενο του εκάστοτε πολλαπλασιασμού. Μία κοινή λάθος απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα, επίσης, ήταν η περιγραφή του αλγορίθμου ή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε σε κάθε περίπτωση. Αξιοσημείωτη ήταν και η προσπάθεια μερικών να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο εμβαδού που διδάχθηκαν και έμαθαν, χωρίς όμως να καταφέρουν να το κάνουν σωστά ώστε να γίνει κατανοητή στον αναγνώστη η αναπαράσταση τους.

Το ίδιο μοτίβο λανθασμένων απαντήσεων παρατηρήθηκε και στις διαιρέσεις χωρίς πλαίσιο. Όπως στον πολλαπλασιασμό, έτσι και εδώ ένα κοινό λάθος πολλών ήταν η αναπαράσταση του διαιρετέου, του διαιρέτη και του πηλίκου δίχως να είναι εμφανής η μεταξύ τους σύνδεση και εμπλοκή. Ενίοτε, μεταξύ των αναπαραστάσεων σημειώνονταν τα μαθηματικά σύμβολα της διαίρεσης και της ισότητας τα οποία τελικώς δεν προσέδιδαν κάποια ουσιαστική πληροφορία. Μάλιστα, συχνά διατάσσονταν οι αριθμοί πάνω σε μία αριθμητική γραμμή. Βέβαια, υπήρξαν μερικές περιπτώσεις όπου το αποτέλεσμα (πηλίκο) της πράξης ήταν ο μοναδικός αριθμός που απεικονιζόταν με ένα μοντέλο.

Παρεμφερή ήταν τα λάθη στην αναπαράσταση προβλημάτων. Συγκεκριμένα, κάποια κοινή εσφαλμένη αναπαράσταση του προβλήματος πολλαπλασιασμού ήταν η ταξινόμηση σε αριθμογραμμή όλων των αριθμών (όρων και γινομένου). Σε άλλες περιπτώσεις οι φοιτητές αναπαριστούσαν μεμονωμένα τους όρους και το γινόμενο και ενίοτε μόνο το γινόμενο της πράξης. Επιπλέον, μερικοί προσπάθησαν να αναπαριστήσουν με το μοντέλο του εμβαδού χωρίς επιτυχία. Στα προβλήματα διαίρεσης, παρομοίως, χρησιμοποιήθηκαν αριθμογραμμές (ελλιπείς- ανακριβείς ή λανθασμένες σε πολλές περιπτώσεις) πάνω στις οποίες τοποθετούνταν όλοι οι αριθμοί της πράξης, χωρίς να φαίνεται η σύνδεση τους. Υπήρξαν, επίσης, και εδώ αναπαραστάσεις που αφορούσαν αποκλειστικά τον διαιρέτη, τον διαιρετέο ή και το πηλίκο.

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα *εξετάζει την ικανότητα των μελλοντικών εκπαιδευτικών να επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Διερευνά, ακόμη, ποιους τρόπους επίλυσης προτιμούν συνήθως.*

Από την ανάλυση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων συμπεραίνουμε ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί της έρευνας, στην πλειονότητα τους, κατάφεραν να επιλύσουν τα δοθέντα -προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Όπως αποτυπώνεται στα ποσοστά επιτυχίας (ΕΠΠ $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$: 72,6%, ΕΠΔ 3 x $\frac{1}{2}$: 79,5%, ΕΠΔ2 $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{8}$: 90,4%) και στους μέσους όρους οι επιδόσεις των συμμετεχόντων σε αυτή την εξεταζόμενη πτυχή γνώσεων, ήταν σε σχετικά καλό επίπεδο. Περίπου τα τρία τέταρτα των φοιτητών επιλύσαν τα προβλήματα με ποικίλους τρόπους χωρίς να αντιμετωπίζουν κάποια σημαντική δυσκολία.

Οι τρόποι που έλυσαν οι μελλοντικοί δάσκαλοι το πρόβλημα πολλαπλασιασμού ήταν διάφοροι. Οι περισσότερες λύσεις αφορούσαν απλά τον πολλαπλασιασμό των δύο κλασμάτων. Στη συνέχεια κάποιοι απλοποίησαν το γινόμενο, ενώ αρκετοί ήταν αυτοί που υπολόγιζαν το κλάσμα σε αντίστοιχα γραμμάρια ώστε να απαντήσουν στο ζητούμενο του προβλήματος. Όσοι προχώρησαν σε κάποια περαιτέρω ενέργεια, δείχνουν να έχουν μια μεγαλύτερη κατανόηση και ευελιξία στην διαχείριση προβλημάτων. Υπήρξαν, ωστόσο, εναλλακτικές λύσεις όπου ο λύτης μετέτρεπε τα δεδομένα κλάσματα σε γραμμάρια και πραγματοποιούσε πράξεις και υπολογισμούς με αυτά. Παρομοίως, μικρό μέρος φοιτητών περιέγραψε την σκέψη και την λύση του πιο αναλυτικά για να καταλήξει στην απάντηση.

Στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων, οι τρόποι επίλυσης ποικίλουν επίσης. Παρόλο που η πλειοψηφία των απαντήσεων αφορούσαν την επίλυση με την απλή διαίρεση των δεδομένων αριθμών. Παρουσιάστηκαν, παράλληλα, εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης που αξιολογήθηκαν εξίσου ως σωστοί. Συνεπώς, σε μερικές απαντήσεις, μετατράπηκαν αρχικώς τα κλάσματα σε μεγέθη όπως γραμμάρια ή εκατοστά και στην συνέχεια πραγματοποιούνταν υπολογισμοί. Σε άλλες περιπτώσεις, οι λύτες δημιουργούσαν και έλυναν μια εξίσωση με άγνωστο το ζητούμενο αποτέλεσμα. Κατά παρεμφερή τρόπο, έλυσε ένας μικρός αριθμός μελλοντικών δασκάλων ακολουθώντας την «απλή μέθοδο των τριών». Βέβαια, δεν έλειψαν τα άτομα που προτίμησαν να περιγράψουν την σκέψη τους χωρίς να ακολουθήσουν κάποιους από τους παραπάνω τρόπους.

Το τέταρτο και τελευταίο ερευνητικό ερώτημα *εξετάζει την ικανότητα των υποψηφίων δασκάλων να κατασκευάζουν μαθηματικά λεκτικά προβλήματα με βάση δεδομένες πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Παράλληλα,* *διερευνώνται τα είδη των διαφορετικών προβλημάτων που διατυπώνονται καθώς και τα συχνά λάθη στην διαδικασία κατασκευής προβλημάτων στα οποία καταλήγουν.*

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων και των αντίστοιχων έργων, φανερώνουν ότι οι επιδόσεις στην κατασκευή προβλημάτων ήταν σχετικά χαμηλές. Τα ποσοστά επιτυχίας, όπως φαίνονται στην ενότητα των αποτελεσμάτων κυμάνθηκαν από ένα χαμηλό έως μέτριο επίπεδο (ΚΠΔΜ $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$: 30,1%, ΕΚΠΠ $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{3}$: 38,4%, ΚΠΔ $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$: 42,5%, ΕΚΠΔ $\frac{3}{5}$ x $\frac{1}{5}$: 42,5%, ΚΠΠ $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$: 61,6%). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι αρκετοί ήταν αυτοί που συνάντησαν δυσκολία και δεν κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα κατάλληλο δικό τους νέο πρόβλημα που θα μπορούσε να λυθεί με πράξεις πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης κλασμάτων. Εν τούτοις, σε λίγες περιπτώσεις (πχ ΚΠΠ: $\frac{3}{4}$ x $\frac{1}{2}$) το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών (61,6%) ήταν σε θέση να διατυπώσει ένα μαθηματικό πρόβλημα. Η χαμηλή επίδοση στην κατασκευή προβλημάτων σημειώνεται και σε έρευνες της υπάρχουσας βιβλιογραφίας όπως αυτές των Ma (1999), Simon (1993), Ball (1990) και Unlu & Ertekin (2012) που επισημαίνουν την έλλειψη ευχέρειας στη διατύπωση νέων λεκτικών προβλημάτων κυρίως διαίρεσης.

Τα νέα αποδεκτά προβλήματα που κατασκευάστηκαν από μελλοντικούς δασκάλους ήταν ποικίλα. Ωστόσο, υπήρξαν προβλήματα που διακατέχονταν από την ίδια φιλοσοφία και είχαν κοινά στοιχεία τόσο στην διατύπωση όσο και στο περιεχόμενό τους. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι δημιουργήθηκαν κάποιες κατηγορίες προβλημάτων τόσο στον πολλαπλασιασμό όσο και στην διαίρεση κλασματικών αριθμών.

Αναφορικά με τα προβλήματα πολλαπλασιασμού, τα περισσότερα από αυτά αναφέρονταν στο «ένα μέρος του μέρους» μιας βρώσιμης συνεχούς ποσότητας, όπως πίτα, πίτσα, τούρτα, σοκολάτα κλπ., που ήταν χωρισμένη σε κομμάτια. Εδώ παρατηρούμε την ύπαρξη διαισθητικών-πρωτόγονων αναπαραστατικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται κατά κόρων στην διδασκαλία των κλασμάτων από τα πρώτα κιόλα χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μία άλλη κατηγορία προβλημάτων ήταν αυτή που αφορούσε μαγειρικές συνταγές και τις ανάλογες δόσεις υλικών που απαιτούνται. Παράλληλα κάποια αναφέρονται σε ποσότητες μετρημένες σε κιλά (π.χ. μήλα) ή σε υγρές πόσιμες ποσότητες μετρημένες σε λίτρα (π.χ. κρασί, γάλα κ.α.) από της οποίες παιρνόταν το μέρος ενός μέρους. Τέλος, υπήρξαν προβλήματα που αξιοποίησαν τον τύπο του εμβαδού ορθογωνίων και κατασκεύασαν προβλήματα εύρεσης επιφάνειας περιοχών.

Στην διατύπωση προβλημάτων διαίρεσης, η πλειονότητα των προβλημάτων αναφέρονταν είτε σε βρώσιμες ποσότητες μετρημένες σε κιλά (π.χ. μαρμελάδα, γιαούρτι κ.α.) είτε πόσιμες ποσότητες μετρημένες σε λίτρα (π.χ. νερό, χυμός κ.α.) που διαιρούνταν και τοποθετούνταν σε μικρότερα δοχεία (π.χ. βάζα, μπουκάλια, κανάτες κ.α.) συγκεκριμένης χωρητικότητας. Ένα μικρότερο μέρος προβλημάτων διαίρεσης αφορούσε αντικείμενα συγκεκριμένου μήκους (σε εκατοστά ή μέτρα) που χωρίζονταν σε μικρότερα κομμάτια ορισμένου μήκους.

Βέβαια, πέρα από κατηγορίες σωστών απαντήσεων παρατηρήθηκαν λάθος απαντήσεις με κοινά στοιχεία και οι οποίες θα μπορούσαν να ομαδοποιηθούν αναλόγως. Ως εκ τούτου, κάποια εσφαλμένα προβλήματα ήταν αυτά που για την επίλυση τους εκτός από πολλαπλασιασμό κλασμάτων απαιτούσαν κάποια επιπρόσθετη πράξη (π.χ. αφαίρεση). Ακόμη, αρκετά προβλήματα που διατυπώθηκαν στις εξετάσεις, επιλύονταν με άλλες πράξεις, διαφορετικές του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα, κάποια προβλήματα που κατασκευάστηκαν λύνονταν αθροίζοντας τα δύο κλάσμα, άλλα αφαιρώντας τα και άλλα , λιγότερα, διαιρώντας τα. Δεν έλειψαν τα προβλήματα που στην ουσία τους αποτελούσαν την περιγραφή της απαιτούμενης πράξης, υποδεικνύοντας έτσι τη λύση του προβλήματος.

Αντίστοιχα, στην κατασκευή προβλημάτων διαίρεσης σημειώθηκαν απαντήσεις που δεν ήταν επαρκείς και εύστοχες. Πολλά από τα διατυπωμένα προβλήματα, για παράδειγμα, επιλύονταν με πολλαπλασιασμό και όχι με διαίρεση κλασμάτων. Το λάθος αυτά υπογραμμίζεται και σε άλλες έρευνες όπως της Ball (1990) και των Unlu & Ertekin (2012). Σε άλλα διατυπωμένα από τους φοιτητές προβλήματα, η εύρεση της απάντησης απαιτούσες διαφορετική της διαίρεσης πράξη, όπως πρόσθεση και αφαίρεση. Επιπλέον, σε μερικές περιπτώσεις παρόλο που τα διατυπωμένα προβλήματα λυνόντουσαν με διαίρεση, αυτή ήταν διάφορη της δοσμένης. Το συγκεκριμένο λάθος και σύγχυση αυτή της διαίρεσης κλασμάτων με την διαίρεση με έναν ακέραιο επισημαίνουν επίσης οι Ma (1990) και Ball (1990). Ενώ, τα ελλιπείς δεδομένα ήταν αυτό που χαρακτήριζε άλλες προσπάθειες κατασκευής προβλημάτων.

4.3 Περιορισμοί της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα υπήρξαν κάποια στοιχεία που αποτέλεσαν περιορισμούς οι οποίοι χρειάζεται να επισημανθούν και να ληφθούν υπόψιν κατά τη μελέτη της. Αρχικά, η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος αποτελεί ένα τέτοιο σημαντικό στοιχείο. Όλοι οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν φοιτητές του ίδιου Πανεπιστημίου και τμήματος (Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας- Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης) μίας συγκεκριμένης περιοχής (Φλώρινα) και βρίσκονταν στο ίδιο ακαδημαϊκό εξάμηνο της φοίτησής τους (Δ' εξάμηνο).

Κριτήριο για την επιλογή του δείγματος αποτέλεσε η προσβασιμότητα στο πανεπιστημιακό τμήμα. Ως εκ τούτου, δεν μπορεί να υποστηριχτεί ότι εξασφαλίστηκε η αντιπροσωπευτικότητα σε πολύ μεγάλο βαθμού, σε σχέση με το συνολικό πληθυσμό υποψηφίων δασκάλων της Ελλάδας.

Ένας ακόμη περιορισμός της έρευνας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αφορά το πρώτο εργαλείο σε συνδυασμό με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε. Το πρώτο ερευνητικό εργαλείο αποτέλεσε η υποχρεωτική εργασία του διδασκόμενου μαθήματος. Οι φοιτητές συμπλήρωσαν τα έργα και απάντησαν στις ερωτήσεις στο δικό τους χώρο , δίχως χρονικό περιορισμό ωρών και δίχως την παρουσία του ερευνητή ή κάποιου υπεύθυνου. Παράλληλα, η εργασία δόθηκε στους φοιτητές ύστερα από ειδική διδασκαλία που αποτέλεσε ένα είδος παρέμβασης και επηρέασε, υποθέτουμε, τις γνώσεις των διδασκόμενων και άρα τα τελικά τα αποτελέσματα. Επομένως, οι φοιτητές απάντησαν χρησιμοποιώντας ίσως διαθέσιμες σημειώσεις και αρχεία που τους διευκόλυναν σε κάποιες περιπτώσεις. Δεν είναι ξεκάθαρος λοιπόν, ο βαθμός κατά τον οποίο τα αποτελέσματα αντικατοπτρίζουν το πραγματικό επίπεδο γνώσεων και ικανοτήτων των συμμετεχόντων της έρευνας. Έτσι, μπορούμε εύκολα να εικάσουμε ότι οι επιδόσεις των εν δυνάμει δασκάλων της έρευνας θα μπορούσαν να είναι διαφορετικές αν εξετάζονταν με κάποιο άλλο εργαλείο και κυρίως αν η εξέταση αυτή πραγματοποιούταν πριν τη παράδοση του αντίστοιχου μαθήματος.

4.4 Προτάσεις μελλοντικής έρευνας

Η μελέτη που παρουσιάζεται θα μπορούσε να επεκταθεί με ποικίλους τρόπους και να διεξαχθούν στο μέλλον νέες ερευνητικές προσπάθειες. Αρχικά, θα μπορούσε να διεξαχθεί μια παρόμοια έρευνα έχοντας όμως ως υποκείμενα εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που βρίσκονται μέσα σε τάξεις. Θα είχε ερευνητικό ενδιαφέρον η παρατήρηση της πορείας της διδασκαλίας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων και η εξαγωγή αντίστοιχων αποτελεσμάτων. Με την εν λόγω παρατήρηση, θα μπορούσαν να διερευνηθούν οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι δάσκαλοι και με ποιο τρόπο καθώς και τα νέα δικά τους λεκτικά προβλήματα που διατυπώνουν για να κατανοούσουν οι μαθητές τις δύο πράξεις κατά την διάρκεια της διδασκαλίας.

Επιπροσθέτως, στην παρούσα έρευνα εξετάστηκαν διάφορες πτυχές της Γνώση Περιεχομένου στο πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση των κλασμάτων των εν δυνάμει δασκάλων. Η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου σε αυτό το μαθηματικό περιεχόμενο είναι εξίσου σημαντική και χρήζει εξέτασης. Δηλαδή, υποψήφιοι ή εν ενεργεία εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να εξεταστούν ως προς τις γνώσεις τους για την κατανόηση των μαθητών, τις πιθανές δυσκολίες, λάθη και παράγοντες αυτών, τις αναμενόμενες παρανοήσεις και προκαταλήψεις που εμποδίζουν τη μάθηση. Παράλληλα, την γνώση του τρόπου διδασκαλίας και τεχνικών για να ξεπεραστούν και να αντιμετωπιστούν κατάλληλα αυτές οι παρανοήσεις και δυσκολίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research, 90*(6), 375-380.

Armstrong, B. E., & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*, 85-119.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Ashlock, R. B. (1990). *Error patterns in computation: A semi-programmed approach*. Merrill Publishing Company.

Askey, R. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics. *American Educator*, *23*, 6-13.

Azim, D. S. (1995). Preservice elementary teachers' understanding of multiplication involving fractions. In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the seventeenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH* (pp. 226–232).

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, 132-144.

Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: making subject matter-knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.). *Advances in research on teaching*, 2, 87–114. Greenwich, CT: JAI Press Inc.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, *4*, 83-104.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, *4*, 433-456.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 398-407.

Barash, A., & Klein, R. (1996). Seventh grades students' algorithmic, intuitive and formal knowledge of multiplication and division of non-negative rational numbers. In *PME CONFERENCE* (2), 2-35.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, 323-341.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in Mathematics*, *12*(4), 399-420.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?. *Journal for research in mathematics education*, 194-222.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 281-300.

Bulgar, S. (2003). Children’s sense-making of division of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 319-334.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., & Σπύρου, Π. (2004). Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών (Τόμοι 1-2).

Γαγάτσης, Α., Παναούρα, Ρ., Δαμιανού, Π., Εταιρεία, Κ. Μ., και Πολιτισμού, Υ. Π., & Εταιρεία, Κ. Α. (2006). 8ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, 3-5 Φεβρουαρίου 2006, Πάφος: πρακτικά.

Çaglayan, G., & Olive, J. (2011). Referential Commutativity: Preservice K-8 Teachers' Visualization of Fraction Operations Using Pattern Block. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*(3), 293.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 111-144.

Da Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers’ knowledge and practices. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Brill Sense.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, *77*(4), 460.

Dorward, J. (2002). Intuition and research: Are they compatible? Teaching Children Mathematics, 8(6), 329-332.

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8-40.

Fazio, L. K., & Siegler, R. S. (2011). Teaching fractions. In Educational practices series (Vol. 22); (pp. 1-28). Geneva: International Academy of Education International Bureau of Education

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 147-164.) New York: Macmillan.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 3-17.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. *Making sense of fractions, ratios, and proportions*, 237-246.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 276-295). New York: Macmillan

Grugnetti, L., & Jaquuet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 373-384.

Harel, G., & Lesh, R. (2003). Local conceptual development of proof schemes in a cooperative learning setting. *Beyond construcfivism. Models and modeling perspecfives on mathemafics problem solving, learning and teaching*, 359-382.

Hart, K. M. (1989). *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Nfer-Nelson.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, *42*(2), 371-406.

Howe, R. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 579.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd., Darville House, 2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire SL4 1DF, England.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional. In *Number and measurement. Papers from a research workshop* (Vol. 7418491, p. 101).

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. *Rational numbers: An integration of research*, 49-84.

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών. *Αθήνα: Leader Books*.

Kloosterman, P. (2010). Mathematics skills of 17-year-olds in the United States: 1978 to 2004. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20-51.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. *The roles of representation in school mathematics*, 146-165.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής- νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τζιμίδι μ'*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην Τροχιά των Ρητών*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Κυριακίδη.

Λεμονίδης, Χ. (2000). Στοιχεία Αριθμητικής και Θεωρίας Αριθμών για το δάσκαλο. *Αθήνα*, Εκδόσεις Πατάκη.

Lemonidis, C., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *Journal of Educational Research*, *1*, 61-74.

Lemonidis, C., Mouratoglou, A., & Pnevmatikos, D. (2014). Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *Menon: Journal of Educational Research, 1st special issue*, 144-158.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 263-343.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum.

Leung, I. K., & Carbone, R. E. (2013). Pre-service teachers' knowledge about fraction division reflected through problem posing. *The Mathematics Educator*, *14*(1), 80-92.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, *40*(5), 833-843.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, *38*, 201-221.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 422-441.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 385-401.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.) *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 261-288). NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Martin, W.G. et al., eds (2007). The Learning of Mathematics, 69th NCTM Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics

Mathematics Navigator: A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2-8). (2015) America's Choice. Ανάκτηση από τη διεύθυνση https://pearsonnacommunity.force.com/coco/articles/Documentation/MathNavigator-A-Sample-of-Mathematics-Misconceptions-Errors

McCray, J. S. (2008). *Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Relationships to teaching practices and child outcomes*. Loyola University Chicago.

Moss, J. (2005). Pipes, Tubes, and Beakers: New Approaches to Teaching the Rational-Number System. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.) *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom*, 309-350. National Academies Press, Washington, D. C.

Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives?. *Teaching children mathematics*, *8*(6), 372-377.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of.

National Governors Association. (2010). Common core state standards. *Washington, DC*.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving* (Vol. 104, No. 9). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Nishida, T. K. (2008). The use of manipulatives to support children's acquisition of abstract math concepts (Doctoral dissertation, ProQuest Information & Learning)

Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of multiplication and division of fractions*. Syracuse University.

Osana, H. P., & Pelczer, I. (2015). A review on problem posing in teacher education. In *Mathematical Problem Posing* (pp. 469-492). Springer, New York, NY.

Petit, M. M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). informing practice: They" Get" Fractions as Pies; Now What?. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *16*(1), 5-10.

PISA, (2003). Problem Solving for tomorrow's World. Organisation for economic cooperation and development.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in Mathematics*, *30*(1), 5-38.

Pólya, G. (1945/1973). How to solve it. Princeton. *New Jersey: Princeton University*.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*, *1962*. John Wiley & Sons.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2013). Interleaved practice in multi-dimensional learning tasks: Which dimension should we interleave?. *Learning and Instruction*, *23*, 98-114.

Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective Teachers' Knowledge: Concept of Division. *International Education Journal*, *8*(2), 377-392.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *334-370*.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics education*, 233-254.

Sinicrope, R., & Mick, H. W. (1992). Multiplication of Fractions through Paper Folding. *Arithmetic Teacher*, *40*(2), 116-21.

Son, J. W. (2012). Fraction multiplication from a Korean perspective. *Mathematics teaching in the Middle school*, *17*(7), 388-393.

Son, J. W., & Lee, J. E. (2016). Pre-Service Teachers' Understanding of Fraction Multiplication, Representational Knowledge, and Computational Skills. *Mathematics Teacher Education and Development*, *18*(2), 5-28.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(2), 127-155.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students’ understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Stoyanova, E. N. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of Years 8 and 9 students involved in Mathematics Challenge and Enrichment Stages of Euler Enrichment Program for Young Australians*. Edith Cowan University.

Szetela, W., & Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational Leadership*, *49*(8), 42-45.

Taber, S. B. (2002). Go ask Alice about multiplication of fractions. *Making sense of fractions, ratios, and proportions*, 61-71.

Taber, S. B. (1999). Understanding multiplication with fractions: An analysis of problem features and student strategies. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(2), 1-27.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, 5-25.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 79-96.

Unlu, M., & Ertekin, E. (2012). Why do pre-service teachers pose multiplication problems instead of division problems in fractions?. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *46*, 490-494.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*(5), 676-685.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Brief Report. Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 323-330.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, *Translation Ed. Durmu, S., Nobel Akademik Yayoncolok, Ankara.*

Van de Walle, J. A., & Lovin, L. A. H. (2007). Teaching Student-Centered Mathematics: Grades K-3. *Education Review Reseñas Educativas*.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39-56.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics (*pp. 227-232). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 641-645.

Wilson, S. M., Shulman, L. S., Richert, A. E., & Calderhead, J. (1987). Exploring teachers' thinking. *London: Cassell*, *38*.

Wood, T. (2005). Understanding mathematics teaching: Where we began and where we are going. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 193-195.

Yee, F. P. (2002). Using short open-ended mathematics questions to promote thinking and understanding. In *Proceedings of the 4th International Conference on the Humanistic Renaissance in Mathematics Education*. Palermo, Italy, September 20-25

Young, E., & Zientek, L. R. (2011). Fraction operations: An examination of prospective teachers' errors, confidence, and bias. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(1), 1-23.