ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός κύκλος

Διπλωματική εργασία

Η ιστορική εξέλιξη της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών και η αξιοποίησή της στη διδασκαλία των Μαθηματικών

της

Σγούρου Σταματίας, 715

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Εξεταστές: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής
Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Φλώρινα, Οκτώβριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …/…/2019 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1. ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	Αναπληρωτής Καθηγητής	………………
2. ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ	Καθηγητής	………………
3. ΧΡΗΣΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	Επίκουρος Καθηγητής	………………

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους με στήριξαν καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας και βοήθησαν με τον δικό τους τρόπο στην πραγματοποίησής της.

Ευχαριστώ θερμά:

Τον κ. Γιάννη Θωμαΐδη για τη συμβολή του στη σύλληψη της κεντρικής ιδέας της διπλωματικής, καθώς για την πολύτιμη επιστημονική καθοδήγησή του, την αδιάλειπτη συμπαράστασή και βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια της εργασίας**.**

Τον κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για την άμεση συνεργασία του και για τις εύστοχες μεθοδολογικές του παρατηρήσεις.

Τους φίλους μαθηματικούς, Σταύρο Δημαρχόπουλο, Βασιλική Καντζούρα, Βαρβάρα Τούρα και Νίκο Παπαπλιούρα για τη βοήθεια που μου προσέφεραν τις στιγμές που πραγματικά τη χρειαζόμουν.

Τις φίλες και συναδέλφους, Λίλα Γκρανοπούλου, Σοφία Αβραμίδου και Αγγελική Γεωργίου για τη συνεισφορά τους αναφορικά με τη φιλολογική επιμέλεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας

Τους γονείς μου, Θωμαή και Γιάννη για την υπομονή, την αγάπη και την αμέριστη συμπαράσταση τους.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία επιδιώκουμε να σκιαγραφήσουμε το ιστορικό της επινόησης της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών. Έχοντας ως βασικό αντικείμενο και εργαλείο της έρευνας την ιστορία, αναζητήσαμε πηγές που αναδεικνύουν τη χρησιμότητα της έννοιας. Διερευνήσαμε τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η διδασκαλία και η μάθηση της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών μέσω μιας διδακτικής ανάλυσης, καθώς και τους πιθανούς λόγους δημιουργίας ή ενίσχυσής αυτών των προβλημάτων. Εν δυνάμει παράγοντες θεωρούνται τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια. Για αυτό λοιπόν μελετήσαμε τα προγράμματα σπουδών καθένα ξεχωριστά αλλά και στη σύγκριση τους. Εν συνεχεία, αναλύσαμε το ρόλο και την αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η ιστορική και διδακτική ανάλυση της δεκαδικής αναπαράστασης σε συνδυασμό με την αξιοποίηση της ιστορίας βοήθησαν στον μετασχηματισμό του ιστορικού υλικού σε διδακτικές δραστηριότητες που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στις σύγχρονες σχολικές τάξεις.

Abstract

In the present project we are trying to outline the chronicles of invention of decimal representation of real numbers. Having as basic object and tool for the research history, we sought sources that show the usefulness of acceptation. We analyzed the problem faced by teaching and learning decimal representation of real numbers through a teaching analysis as well as the possible reasons to create to intensify these problems. Potential factors are considered school curriculums and school textbooks. For that reason we studied curriculums separately as well as compared with each other. Moreover we analyze the part and exploitation of history in teaching maths. Historic and teaching analysis of decimal representation in combination to exploitation of history have helped in transforming historical material into teaching activities that could be applied in modern school classes.

Λέξεις κλειδιά: Δεκαδική αναπαράσταση, ρητοί αριθμοί, άρρητοι αριθμοί, πραγματικοί αριθμοί, κλάσμα.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετούμε τα προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης των πραγματικών αριθμών με ιδιαίτερη έμφαση στις δεκαδικές αναπαραστάσεις τους. Η μελέτη στηρίζεται σε μια ιστορική και διδακτική ανάλυση, η οποία αποδεικνύει ότι:

α) Οι δεκαδικές αναπαραστάσεις επινοήθηκαν πολλούς αιώνες αργότερα από τα κλάσματα για να απλοποιηθούν οι πράξεις με αυτά.

β) Οι λόγοι ήταν κοινωνικοί και επιστημονικοί και συνδέονταν με τα προβλήματα που δημιουργούσε η ανάγκη πολύπλοκων υπολογισμών σε κλάδους όπως η Οικονομία και η Αστρονομία.

Στις σύγχρονες σχολικές τάξεις η δυσκολία των αριθμητικών υπολογισμών δημιουργεί προβλήματα μάθησης από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση θέτοντας έτσι από νωρίς στο περιθώριο την έννοια του κλάσματος. Τα ευρήματα της έρευνας αναδεικνύουν ως βασικές αιτίες δυσκολιών, την ελλιπή κατανόηση των πραγματικών αριθμών και της δεκαδικής αναπαράστασής τους ως ρητών και άρρητων. Τα επιστημολογικά εμπόδια και η ελλιπής κατανόηση των ρητών πριν τη διδασκαλία των άρρητων θεωρούνται πιθανές δυσκολίες για την εννοιολογική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών. Οι αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις – δηλαδή αναπαραστάσεις στις οποίες δεν μπορούμε να προβλέψουμε τα δεκαδικά ψηφία – που παρουσιάζουν ρητοί και άρρητοι[1] καθώς και η λανθασμένη ταύτιση των άρρητων με συγκεκριμένες ρητές προσεγγίσεις τους αποτελούν πηγή πολλών παρανοήσεων για τους μαθητές. Έτσι, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών και οι ευέλικτες μετακινήσεις μεταξύ αυτών θεωρούνται μαθησιακά ωφέλιμες. Τα προβλήματα αυτά έχουν τις ρίζες τους στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών και στις οδηγίες διδασκαλίας, στην κατάρτιση των εκπαιδευτικών και στις παρανοήσεις των μαθητών.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν είναι τα παρακάτω :

I. Μπορεί η γνώση της ιστορικής εξέλιξης να συμβάλλει στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών;
II. Μπορούν να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν διδακτικές παρεμβάσεις που αξιοποιούν την ιστορική εξέλιξη και συμβάλλουν στην εννοιολογική κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης;

[1] Βλέπε το ευρετήριο ειδικής ορολογίας στο παράρτημα της διπλωματικής.

Κεφάλαιο Ι: Μια ιστορική ανάλυση της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών.

1.1 Η ανακάλυψη της δεκαδικής αναπαράστασης των κλασμάτων ως απόρροια της αδυναμίας χειρισμού πολυψήφιων κλασματικών αριθμών και πράξεων μεταξύ αυτών.

Η έννοια του ρητού αριθμού αναπτύχθηκε, όταν οι άνθρωποι ήρθαν αντιμέτωποι με το πρόβλημα της μοιρασιάς και οι φυσικοί δεν ικανοποιούσαν πλέον αυτή την ανάγκη. Η εξέλιξη των ρητών ήταν προϊόν αναγκαιότητας για πράξεις με δύσκολα κλάσματα. Οι πρώτες αναπαραστάσεις κλασμάτων εμφανίζονται στους Σουμέριους, στην κοιλάδα της Μεσοποταμίας γύρω στα 3000π.Χ.

Επιπλέον, οι κλασματικές μορφές χρησιμοποιούνταν και από τους Αιγύπτιους, οι οποίοι ήταν ιδιαίτερα ακριβείς στην αρίθμηση και στην μέτρηση. Ευρήματα με ειδικά σύμβολα για κλασματικές μονάδες προέρχονται από ιερογλυφικές επιγραφές. Συγκεκριμένα, οι αρχαίες αιγυπτιακές μετρήσεις γινόταν με την αναπαράσταση ενός κλάσματος ως άθροισμα κλασματικών μονάδων. Οι Αιγύπτιοι δεν είχαν διαμορφώσει μια γενική εικόνα για την έννοια του κλάσματος, ενώ χρησιμοποιούσαν μόνο τα κλάσματα που λαμβάνονταν από τη μονάδα και από τα $\frac{2}{3}$ της μονάδας μειώνοντάς τα κατά το ήμισυ.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\ldots\ldots, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{24}$

Σημαντική πηγή αποτελούν και οι Αιγυπτιακοί πάπυροι. Ο πιο εκτενής είναι ο πάπυρος του Rhind ή πάπυρος του Αχμή γύρω στα 1650π.Χ., ο οποίος περιέχει έναν πίνακα που εκφράζει το $\frac{2}{n}$ ως άθροισμα κλασματικών μονάδων για όλες τις περιττές τιμές του n. Στον πάπυρο του Rhind (1650π.Χ.) εμφανίζεται το παρακάτω πρόβλημα: «Μία άγνωστη ποσότητα, συν τα $\frac{2}{3}$ της, συν το $\frac{1}{2}$ της, συν το $\frac{1}{7}$ της, ισούται με 33. Ποιά είναι η ποσότητα αυτή;» Η σύγχρονη ερμηνεία του προβλήματος αποδίδεται με την εξίσωση $\mathrm{x} + \frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{7}\mathrm{x} = 33 \Rightarrow \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)\mathrm{x} = 33.$

Η λύση που περιέχεται στον πάπυρο βασίζεται στη χρήση μοναδιαίων κλασμάτων. Η μέθοδος ονομάζεται Doubling Division και βασίζεται σε συνεχόμενους διπλασιασμούς και έπειτα στην αντιστροφή της διαδικασίας του πολλαπλασιασμού.

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου θα δημιουργήσουμε έναν πίνακα με δύο στήλες. Στην αριστερή στήλη τοποθετούμε τις δυνάμεις του δύο και στη δεξιά τους συντελεστές του αγνώστου πολλαπλασιασμένους με τις δυνάμεις του δυο.

Δυνάμεις του 2	Συντελεστής · Δύναμη του 2
2^0	$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} = 2+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$
2^1	$(2+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})\cdot 2 = 4+\frac{2}{6}+\frac{2}{7} = 4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
2^2	$\left(4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\cdot 2 = 8+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{28} =$ $8+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14} = 9+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$
2^3	$\left(9+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}\right)\cdot 2 = 18+\frac{2}{6}+\frac{2}{28} = 18+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}$
2^4	$\left(18+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}\right)\cdot 2 = 36+\frac{2}{3}+\frac{2}{14}$

Επειδή $36+\frac{2}{3}+\frac{2}{14} > 33$ επιστρέφουμε στην προηγούμενη πράξη και αναζητούμε την ποσότητα που πρέπει να προστεθεί στην ποσότητα $18+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}$
για να συμπληρωθεί ο αριθμός 33.

$$33-\left(18+\frac{1}{3}+\frac{1}{14}\right) = 13+\frac{2}{3}+\frac{13}{14}$$

Η ζητούμενη ποσότητα είναι $13+\frac{2}{3}+\frac{13}{14} = 14+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{84}$

Το επόμενο βήμα είναι να βρεθεί η ποσότητα που πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον αρχικό συντελεστή $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)$ ούτως ώστε να έχουμε το αποτέλεσμα

$$14+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{84}$$

Η απάντηση είναι $6+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$. Άρα η αρχική ζητούμενη ποσότητα είναι $2^3+6+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}=$ $14+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Η αλγεβρική προσέγγιση της παραπάνω μεθόδου είναι η εξής: $A\cdot x=B=>$ $A(2^{\kappa}+y)=>y=\frac{B-A\cdot 2^{\kappa}}{A}$. Αντικαθιστώντας την τιμή του y στη σχέση $x=2^{\kappa}+y$ βρίσκουμε τη ζητούμενη ποσότητα.

Το 1202μ.Χ. διατυπώθηκε από τον Leonardo von Pisa στο «Liber abaci», ένας ταχύτερος υπολογισμός από εκείνο που ήταν γραμμένος στον πάπυρο.

$$\mathrm{x}+\frac{2}{3}\mathrm{x}+\frac{1}{2}\mathrm{x}+\frac{1}{7}\mathrm{x}=33 \quad =>$$

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\mathrm{x}=33 \quad =>$$

$$\frac{97}{42}\,\mathrm{x}=33 \quad =>$$

$$\mathrm{x}=\frac{33\cdot 42}{97} \quad =>$$

$$\mathrm{x}=\frac{1386}{97} \quad =>$$

$$\mathrm{x}=\frac{97\cdot 14+28}{97} \quad =>$$

$$\mathrm{x}=14\frac{28}{97}$$

Για να προσεγγίσει το κλάσμα $\frac{28}{97}$ ακολούθησε την παρακάτω διαδικασία:

$$\frac{28}{97}=\frac{1}{97:28}=\frac{1}{(28\cdot 3+13):28}=\frac{1}{3\,\frac{13}{28}}=\frac{1}{3{,}4\ldots\ldots}$$

Παρατηρούμε ότι η απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση του $\frac{97}{28}=3{,}4642856143\ldots.$ δεν απασχόλησε τον Leonardo και χάριν του υπολογισμού προσεγγίστηκε από τον αριθμό 4. Η επεξήγηση του για τη προσέγγιση του κλάσματος βασίστηκε στο γεγονός ότι το $\frac{1}{4}$ είναι η μεγαλύτερη κλασματική μονάδα που δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{3{,}4\ldots.}$. Για να είναι πιο ακριβής ο υπολογισμός του, προσπάθησε να υπολογίσει τη διαφορά $\frac{1}{4}-\frac{1}{3{,}4\ldots.}$ ή αλλιώς $\frac{1}{4}-\frac{28}{97}=\frac{15}{388}$ και σκέφτηκε ότι

$$\frac{28}{97}=\frac{1}{4}+\frac{15}{388}$$

Έπειτα προσέγγισε το $\frac{15}{388}$ με τον ίδιο τρόπο.

$$\frac{15}{388} = \frac{1}{388{:}\,15} = \frac{1}{25{,}8\,\ldots.}$$

$$\frac{15}{388} - \frac{1}{26} = \frac{2}{10088} = \frac{1}{5044}$$

Μέσω διαδοχικών υπολογισμών προσέγγισε την αρχική ποσότητα ως εξής:

$$x = \frac{33 \cdot 42}{97}$$

$$x = 14\frac{28}{97}$$

$$x = 14\frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{5044}$$

$$x = 14\frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

Πολύ αργότερα και συγκεκριμένα το 1980 είχε πλέον αποδειχθεί ότι κάθε κλάσμα μπορεί να κατασκευαστεί από ένα πεπερασμένο αριθμό κλασματικών μονάδων, ενώ, άλυτο πρόβλημα της εποχής αποτελούσε η δυνατότητα ενός κλάσματος να γραφτεί υπό μορφή αθροίσματος πεπερασμένων, άνισων κλασματικών μονάδων με περιττούς παρονομαστές (Stowasser, 1980: 41).

Στην Αρχαία Κίνα, την μεσαιωνική Αραβία και την Ευρώπη της Αναγέννησης η χρήση των δεκαδικών κλασμάτων κρίνεται εκτεταμένη. Το 1457 ο άραβας, Al Kashi, δίνει έναν ορισμό των δεκαδικών κλασμάτων, εκθέτει την θεωρία τους και δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αποσυντίθεται κάθε κλάσμα σε άθροισμα δεκαδικών κλασμάτων. Είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε τα εξηκονταδικά κλάσματα για να δείξει ότι οι δεκαδικοί είναι εξίσου αποτελεσματικοί στα προβλήματα που απαιτούν μεγάλη ακρίβεια (Boyer, 1997: 272).

Στο βιβλίο «Εφεύρεση του Δεκαδικού Κλάσματος», του Smith (1959) αναφέρεται ότι ο Pellos (1492) χρησιμοποίησε ένα δεκαδικό σημείο για να ξεκινήσει ένα, δύο ή τρία μέρη στο μέρισμα, όταν ο διαιρέτης ήταν ένα πολλαπλάσιο των 10, 100 ή 1000. Παράλληλα, αξίζει να αναφερθεί πως ο Reise (1552) συνέταξε έναν πίνακα από άρρητες τετραγωνικές ρίζες, στις οποίες υπολόγισε τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία τους. Τέλος το σημαντικότερο σημείο αναφοράς αποτελεί η χρήση, από τον Rudolff (1530), του συμβόλου (|) ως δεκαδικό σημείο στη θέση της σημερινής υποδιαστολής.

1.2 Η συμβολή της αστρονομίας στην εξέλιξη των κλασματικών αριθμών.

O Christian Huygens (1629-1695), Ολλανδός μαθηματικός και φυσικός επιστήμονας, ασχολήθηκε με την αστρονομία και εργάστηκε πάνω στην κατασκευή ρολογιών ακριβείας για τις ανάγκες της αστρονομίας και της ναυσιπλοΐας. Το 1680 στην προσπάθειά του να εκτελέσει υπολογισμούς, ώστε να κατασκευάσει ένα μοντέλο του ηλιακού συστήματος και, ενώ γνώριζε τις τροχιές των πλανητών γύρω από τον Ήλιο και είχε υπολογίσει με ακρίβεια το τόξο που διαγράφει η κίνηση της Γης και του Κρόνου γύρω από τον Ήλιο στη διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους, βρέθηκε αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα.

Πρόβλημα αποτελούσε ο λόγος του αριθμού των δοντιών των γραναζιών που θα χρησιμοποιούνταν για να μοντελοποιήσει την τροχιά του Κρόνου και της Γης. Ο λόγος αυτός ήταν:

$$\frac{359+\frac{45}{60}+\frac{40}{60^2}+\frac{31}{60^3}}{12+\frac{13}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{18}{60^3}}=\frac{77.708.431}{2.640.858}$$

όπου ο αριθμητής και ο παρονομαστής δηλώναν το πλήθος των δοντιών των γραναζιών.

Ο Huygens σκέφτηκε πως κανένας μηχανολόγος δεν θα κατασκεύαζε 77.708.431 ή 2.640.858 δόντια γραναζιών. Έτσι γεννήθηκε η ανάγκη προσέγγισης του παραπάνω κλάσματος από ένα διαφορετικό κλάσμα με μικρότερο αριθμητή και παρονομαστή.

Στην προσπάθειά του να λύσει αυτό το πρόβλημα σκέφτηκε να το απλουστεύσει στρογγυλοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή. Η μέθοδος αυτή τον οδήγησε στο κλάσμα $\frac{77.700.000}{2.600.000}=\frac{777}{26}$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης του προβλήματος ήταν η παρακάτω διαδικασία που ονομάζεται ανάπτυγμα ρητού σε συνεχές κλάσμα. Το κλάσμα στο οποίο κατέληξε ο Huygens ήταν της μορφής $x=\alpha_0+\frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\frac{b_3}{a_3+\cdots}}}$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{2,}\ \alpha_3$ ονομάζονται μερικά πηλίκα και επειδή το κλάσμα έχει άπειρους όρους ονομάζεται άπειρο συνεχές κλάσμα. Στο κλάσμα του Huygens ισχύει $b_1 =$

$b_2 = \cdots = b_n$=1 και συνεπώς σύμφωνα με τη σύγχρονη ορολογία είναι ένα απλό συνεχές κλάσμα.

$$\frac{77.708.431}{2.640.858} = 29\,\frac{1.123.549}{2.640.858} =$$

$$= 29\,\frac{1}{\frac{2.640.858}{1.123.549}} =$$

$$= 29\,\frac{1}{2+\frac{393.760}{1.123.549}} =$$

$$= 29\,\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1.123.549}{393.760}}} =$$

$$= 29\,\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{336.029}{393.760}}} =$$

$$= 29\,\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{393.760}{336.029}}}} =$$

$$= 29\,\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

Τους άπειρους όρους του κλάσματος τους διαχειρίστηκε προσεγγίζοντας την ποσότητα $2+\frac{1}{1+\cdots}$ με τον αριθμό 3 και καταλήγοντας έτσι στο παρακάτω κλάσμα

$$29\,\frac{1}{2+\frac{1}{3}} = 29\ \frac{3}{7} = \frac{206}{7}$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς προέκυπτε πως τα δόντια από τα γρανάζια που θα επρέπε να φτιάξει ένας μηχανικός ήταν πλεόν 206 και 7.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο λύσεις που διατυπώνει ο Huygens υπάρχει κάτι κοινό. Οι υπολογισμοί γίνονται με στρογγυλοποιήσεις ή προσεγγίσεις καθιστώντας το αποτέλεσμα ανακριβές. Η χρησιμότητα των πολύπλοκων και μεγάλης ακρίβειας υπολογισμών για την εξέλιξη των επιστημών και των επαγγελμάτων ήταν πλέον φανερή. Η εξέλιξη των κλασμάτων έγινε σταδιακά στους αιώνες, καθώς οι επιστημονικές και κοινωνικές ανάγκες απαιτούσαν όλο και δυσκολότερες πράξεις με αυτά.

1.3 Η γέννεση των δεκαδικών ως αναγκαιότητα για εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης των κλασματικών αριθμών.

Γύρω στο 1575μ.Χ., η Δυτική Ευρώπη είχε ανακαλύψει τα περισσότερα από τα κύρια μαθηματικά έργα της αρχαιότητας που διασώζονται μέχρι και σήμερα. Η χρήση δεκαδικών κλασμάτων και το πέρασμα από αυτά στους δεκαδικούς αριθμούς [1] πραγματοποιήθηκε από τον Φλαμανδό Simon Stevin.

Ο ίδιος παρατήρησε ότι για έναν αστρονόμο, οι ακριβείς υπολογισμοί αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να συνάγει συμπεράσματα για τις κινήσεις των πλανητών (Smith, 1959: 21). Πρόβλημα δημιουργούσαν οι πολύπλοκοι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις που προέκυπταν από τη χρήση εξηκονταδικών κλασμάτων. Τα κλάσματά που διαχειρίζονταν είχαν παρονομαστές τους αριθμούς 60, 360, 3600 με αποτέλεσμα να καθιστούν δυσκολότερες τις πράξεις σε σύγκριση με τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών κλασμάτων. Για έναν τοπογράφο, τα σφάλματα των υπολογισμών και των μετατροπών ποδιών σε ίντσες επηρέαζαν τη φήμη του ως επαγγελματία. Μάλιστα, δημιουργούσαν δυσκολίες και διενέξεις μεταξύ ανθρώπων, αφού δεν γνώριζαν με ακρίβεια τα όρια των εδαφών που τους αντιστοιχούσαν. Για έναν νομισματοποιό ή για έναν έμπορο οι συναλλαγές ήταν δύσκολες, καθώς είχαν να διαχειριστούν πολύπλοκες πράξεις με κλάσματα και η έλλειψη ακρίβειας εμπόδιζε τις ισότιμες συναλλαγές μεταξύ αυτών (Smith, 1959: 22).

Ο Stevin αναγνώριζε τα προβλήματα που δημιουργούσαν στους επιστήμονες οι πράξεις με εξηκονταδικά κλάσματα καθώς και τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι απλοί άνθρωποι για πράξεις με αυτά.

Η αναγκαιότητα χρήσης μαθηματικών πράξεων σε καθημερινές συνθήκες αποτέλεσε εφαλτήριο για τη δημιουργία του έργου του ‘’La Disme΄’’. Το έργο του διδάσκει πως οι υπολογισμοί που συναντά κανείς στις επιχειρήσεις μπορούν να εκτελεστούν μόνο από ακεραίους χωρίς τη βοήθεια κλασμάτων. Αναφέρεται σε αστρολόγους, τοπογράφους, καταμετρητές της ταπητουργίας, μηχανικούς, ογκομέτρες, οικονομολόγους και σε όλους τους επιχειρηματίες, τονίζοντας τη χρησιμότητα της αριθμητικής με δεκαδικούς για όλους τους υπολογισμούς που συναντώνται στους παραπάνω κλάδους.

Σημαντική υπήρξε η συμβολή του François Viète, του Jost Bürgi, του Simon Stevin και του John Napier στην ανάπτυξη των δεκαδικών κλασμάτων. Ο Viète, συνέβαλλε στην ανάπτυξη της αριθμητικής καθώς το 1579 υποστήριξε τη χρήση των δεκαδικών κλασμάτων έναντι των εξηκονταδικών και ζήτησε τη γενίκευση της χρήσης τους.

1.4 Ο συμβολισμός του Stevin ως σημείο ορόσημο στην ιστορία των δεκαδικών.

Με τη γνώση των δεκαδικών κλασμάτων, τα οποία είχαν διαδοθεί ήδη στη Δύση, ο Φλαμανδός Simon Stevin εισήγαγε - με απλούς κανόνες και ιδιαίτερη γραφή - τους δεκαδικούς αριθμούς.

Το 1585, ο Stevin τόνισε την ανάγκη της χρήσης της κλίμακας του δέκα στα κλάσματα όσο και στους ακέραιους. Αξιοσημείωτη είναι η επιρροή του βιβλίου του ΄΄De Thiende΄΄ ή ΄΄La Disme΄΄ ή «Η Δεκάτη», στην οικονομία, τη μηχανική και στον μαθηματικό συμβολισμό, που κυκλοφόρησε το 1585. Ο συμβολισμός του Stevin γεννήθηκε στην προσπάθειά του να βρει έναν απλό και κατανοητό τρόπο εισαγωγής των δεκαδικών αριθμών.

Ο Stevin εξήγησε πλήρως το δεκαδικό σύστημα σε στοιχειώδες επίπεδο, ώστε να γίνει κατανοητό και από ανθρώπους που δεν ήταν μαθηματικοί αλλά οι υπολογισμοί ήταν αναγκαίοι στην καθημερινή τους ζωή. Έτσι, επινόησε το συμβολισμό των δεκαδικών κλασμάτων μέσω της χρήσης αποκλειστικά ακεραίων. Παρότι τα δεκαδικά κλάσματα χρησιμοποιούνταν από τους μαθηματικούς της εποχής, ο συμβολισμός του Stevin βοήθησε στην κατανόησή τους και από κοινούς ανθρώπους. Η συμβολή του δεν ήταν μόνο κοινωνική αλλά και επιστημονική. Η απαρχή της δεκαδικής αναπαράστασης βρίσκεται στο συμβολισμό που επινόησε ο Stevin, ο οποίος έθεσε τα θεμέλια για την μετατροπή ενός κλασματικού αριθμού σε δεκαδική μορφή.

Αντί για τους όρους δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά χρησιμοποιούσε τους όρους πρώτος, δεύτερος, τρίτος κ.ο.κ. Τα δέκατα, τα εκατοστά και τα χιλιοστά αναφερόταν στο βιβλίο του ως ακέραιοι αριθμητές. Αντίθετα, ο Viète, έγραφε τους δεκαδικούς με παρονομαστές. Ο Stevin, με τη βοήθεια ενός κύκλου επάνω ή δίπλα από κάθε ψηφίο, έγραφε τη δύναμη του δέκα που ήταν ο παρονομαστής. Ο συμβολισμός αυτός του Stevin ταίριαζε περισσότερο στην Άλγεβρα παρά στην Αριθμητική και έτσι το 1616 εμφανίστηκε ο σύγχρονος συμβολισμός των δεκαδικών κλασμάτων στο βιβλίο, ΄΄Descriptio΄΄ του Napier. Ο Stevin μετέφερε στην άλγεβρα, το συμβολισμό θέσης για τα δεκαδικά κλάσματα, αντί για τις δυνάμεις. Πιθανότατα εμπνευσμένος από την Άλγεβρα του Bombelli ή τον τρόπο γραφής των δυνάμεων σύμφωνα με τον Bürgi, πρότεινε να χρησιμοποιούνται τα παραπάνω σύμβολα και στις κλασματικές δυνάμεις παρότι δεν είχε καμία ευκαιρία να τα χρησιμοποιήσει (Boyer, 1997: 356). Όσον αναφορά την ιστορία της υποδιαστολής, ο Viète χρησιμοποιούσε, μερικές φορές, μια κατακόρυφη γραμμή για τη διάκριση του ακέραιου από το κλασματικό μέρος. Η μορφή που έχει σήμερα, αποδίδεται στον G. A. Magini (1537-1612) στο έργο του ΄΄De planis trianglulis΄΄ του 1592 ή στον Christoph Clavius (1537-1612) που τη χρησιμοποίησε σε έναν πίνακα ημιτόνων το 1593. Παρά την εφεύρεσή της εκείνη την εποχή, η διάδοση της, έγινε είκοσι χρόνια αργότερα με τη χρήση της από τον Napier στο βιβλίο ΄΄Descriptio΄΄.

1.5 Μια ανάλυση των περιεχομένων της «Δεκάτης».

Το πλεονέκτημα αυτής της γραφής είναι η αποφυγή δύσκολων πράξεων με κλάσματα και η χρήση κανόνων της αριθμητικής που χρησιμοποιούνται στους ακεραίους.
Η ιδέα του ήταν να επεκταθεί η αρχή της θέσης βάσης - 10 σε αριθμούς με κλασματικά τμήματα, με αντίστοιχη επέκταση σημειογραφίας για την κάλυψη αυτών των περιπτώσεων.

Το έργο του αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος διατυπώνονται οι ορισμοί και στο δεύτερο μέρος οι διαδικασίες (πράξεις).

Ο πρώτος ορισμός δηλώνει ότι η Δέκατή είναι ένα είδος αριθμητικής, που εφευρέθηκε από τη δέκατή πρόοδο, που συνίσταται σε χαρακτήρες ψηφίων. Αναφέρεται ότι όλοι οι υπολογισμοί που συμβαίνουν στις υποθέσεις των ανθρώπων, μπορούν να επεξεργαστούν κα να λυθούν χωρίς κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς (Struik, 1969: 7), υπονοώντας το λόγο δημιουργίας της.

Ο δεύτερος ορισμός ονομάζει Αρχή και συμβολίζει με (0) το ακέραιο μέρος του αριθμού.

Ο τρίτος ορισμός ονομάζει ως πρώτο, δεύτερο κ.ο.κ και συμβολίζει με (1), (2) αντίστοιχα τις μονάδες, τις δεκάδες κ.ο.κ. Η σχέση μεταξύ της αρχής, του πρώτου και δεύτερου είναι ότι το καθένα είναι το δέκατο μέρος της μονάδας του άλλου. Π.χ. πρώτο είναι το δέκατο μέρος της μονάδας της αρχής, δεύτερο είναι το δέκατο μέρος της μονάδας του πρώτου. Επισημαίνεται ότι στο έργο αυτό δεν χρησιμοποιούμε κλάσματα και ότι η πολλαπλότητα των συμβόλων, εκτός της αρχής (0), δεν υπερβαίνει το 9.

Ο τέταρτος ορισμό ονομάζει τους αριθμούς που ορίστηκαν παραπάνω ως αριθμούς της Δεκάτης.

1.6 Οι κανόνες των πράξεων όπως ακριβώς περιγράφονται στη «Δεκάτη».

Το δεύτερο μέρος του έργου, οι διαδικασίες ή πράξεις αποτελείται από τέσσερις προτάσεις. Την πρόταση της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Θα μεταφράσουμε την πρόταση της πρόσθεσης, από το πρωτότυπο έργο του Stevin,´´La Disme´´ (η «Δεκάτη»).

Πρώτη πρόταση της πρόσθεσης:

Δοθέντων αριθμών της Δεκάτης πως προστίθενται και βρίσκεται το άθροισμά τους.

Προτεινόμενη εξήγηση:

Υπάρχουν τρείς τάξεις δοθέντων αριθμών της Δεκάτης εκ των οποίων,

η πρώτη είναι 27 (0), 8 (1), 4 (2), 7 (3)

η δεύτερη είναι 37 (0), 8 (1), 7 (2), 5 (3) και

η τρίτη είναι 875 (0), 7 (1), 8 (2), 2 (3).

Ζητούμενη εξήγηση : Πρέπει να βρούμε το συνολικό άθροισμά τους.

	(0)	(1)	(2)	(3)
2	7	8	4	7

	3	7	8	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	5	0	4

Κατασκευή:
Οι δοθέντες αριθμοί, πρέπει να τοποθετούνται σε τάξη όπως φαίνεται, προσθέτοντας τους με τον κοινό τρόπο της πρόσθεσης των ακέραιων αριθμών. Το άθροισμά (από το πρώτο αριθμητικό πρόβλημα) είναι 941504, το οποίο είναι (αυτό που τα ανωτέρω σύμβολα των αριθμών δείχνουν) 941 (0) 5 (1) 0 (2) 4 (3). Λέω, ότι είναι το ζητούμενο άθροισμα.

Απόδειξη:
Το δοθέν 27 (0) 8 (1) 4 (2) 7 (3), κάνει από τον προηγούμενο τρίτο ορισμό 27, 8/10, 4/100, 7/1000, όλα μαζί 27 847/1000, και για τον ίδιο λόγο , το 37 (0) 8 (1) 7 (2) 5 (3) πρέπει να κάνει 37 875/1000, και το 875 (0) 7 (1) 8 (2) 2 (3) θα κάνει πρόσθεση της κοινής αριθμητικής 941 504/1000. Αλλά τόσο είναι και το άθροισμα 942 (0) 5 (1) 0 (2) 4(3). Συνεπώς, είναι το αληθές άθροισμα προς απόδειξη.

	(0)	(1)	(2)
	8	5	6
	5	0	7
1	3	6	3

Συμπέρασμα:
Δοθέντων αριθμών της Δεκάτης για να προστεθούν, έχουμε υπολογίσει το άθροισμά τους, που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση:
Αν στον δοθέντα αριθμό χρειάζονται κάποια σύμβολα της φυσικής σειράς τους, ο ελλειμματικός χώρος τους πρέπει να συμπληρωθεί. Για παράδειγμα, έστω οι δοθέντες αριθμοί (8) 5 (1) 6 (2) και 5 (0) 7 (2). Κατά την οποία ο τελευταίος θέλει το σύμβολο του (1), στη θέση του (0) μπαίνει (1), στη συνέχεια για τον τελευταίο αριθμό που δίνεται 5 (0) 0 (1) 7 (2) τους προσθέτουμε με αυτόν τον τρόπο.

1.7 Το πρόβλημα της απειροψήφιας δεκαδικής αναπαράστασης.

Οι Βαβυλώνιοι δεν παρατήρησαν ή δεν θεώρησαν σημαντικά τα άπειρα περιοδικά αναπτύγματα, ενώ έχουμε ευρήματα από πίνακες τους στους οποίους υπάρχουν προσεγγίσεις εξηκονταδικών αριθμών. Μια πλάκα με εξηκονταδικά κλάσματα που βρίσκεται σήμερα στη συλλογή του Πανεπιστημίου Yale (No. 7289) περιέχει τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας του δυο με ακρίβεια τριών εξηκονταδικών ψηφίων. Όσο οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν τους αριθμούς κυρίως για πρακτικά ζητήματα δεν υπήρχε η ανάγκη διερεύνησης των απειροψήφιων δεκαδικών αναπτυγμάτων. Ακόμη και στην εποχή του Simon Stevin οι ανάγκες της καθημερινής ζωής μπορούσαν να λυθούν με χρήση πεπερασμένων προσεγγίσεων.
Σε μελέτες μηχανικής ή επιστημονικής έρευνας, τα δεκαδικά ψηφία μπορούν να αυξηθούν για πιο ευαίσθητες μετρήσεις και υπολογισμούς. Ωστόσο, οι καταστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι πρώτες χιλιάδες ψηφίων οποιουδήποτε αριθμού είναι σπάνιες. Ο Stevin επισημαίνει στο έργο του ότι αρκούν τα εννέα σύμβολα των μονοψήφιων αριθμών για να εκφράσουμε οποιοδήποτε ρητό αριθμό με όση ακρίβεια θέλουμε. Η ιδέα που πρότεινε για τη σημειογραφία των δεκαδικών υπονοεί σιωπηρά τη γνώση και αγνοεί φανερά, τη χρηστικότητα των άπειρων δεκαδικών ψηφίων. Καθιστά έτσι έναν πεπερασμένο αριθμό ψηφίων ικανό για αρκετά ακριβείς υπολογισμούς, που όμως δεν μπορεί να λειτουργήσει στην περίπτωση των άπειρων δεκαδικών ψηφίων. Είναι φανερή η λειτουργικότητά της ιδέας του σε πεπερασμένο αλλά όχι σε άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα.
Ο Stevin εστίασε την προσοχή του στην πρακτική χρησιμότητά της δεκαδικής αναπαράστασης ενός κλασματικού αριθμού και αγνόησε την επιστημονική έννοια και τις διαφορές της απειροψήφιας και της πεπερασμένης δεκαδικής αναπαράστασης. Η ανάγκη διερεύνησης των απειροψήφιων δεκαδικών αναπαραστάσεων εμφανίστηκε μετά τον 16^{o} αιώνα καθώς οι επιστήμονες χρησιμοποιούσαν συστηματικά αριθμούς στην μορφή αυτή.

Κεφάλαιο ΙΙ: Μια διδακτική ανάλυση της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η διδασκαλία και η μάθηση όσον αφορά τη δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων. Παρουσιάζονται οι πιθανοί λόγοι που δημιούργησαν ή ενίσχυσαν την ύπαρξη αυτών των προβλημάτων. Εν δυνάμει παράγοντας θεωρείται μεταξύ άλλων και το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και για αυτό το λόγο συντάξαμε μια συγκριτική μελέτη του ισχύοντος και του νέου προγράμματος σπουδών Δημοτικού και Γυμνασίου.

2.1 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών.

Διερευνώντας τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η διδασκαλία και η μάθηση των δεκαδικών[2] στην πρωτοβάθμια και εν συνεχεία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η έρευνα έχει αναδείξει προβλήματα που αφορούν στην ποικιλότητα της ερμηνείας[3] των δεκαδικών, στην κλασματική τους αναπαράσταση, στο ρόλο της υποδιαστολής, στην ισοδυναμία τους με το δεκαδικό μετρικό σύστημα καθώς και στις πράξεις με δεκαδικούς. Κοινό πρόβλημα στις δύο βαθμίδες δείχνει να αποτελεί η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και η σύνδεσή της με την αντίστοιχη κλασματική. Η αδυναμία κατανόησης της διττής αναπαράστασης των ρητών αντανακλάται στην τριτοβάθμια εκπαίδευση όπου οι έρευνες επικεντρώνονται κυρίως στις αντιλήψεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών για το συγκεκριμένο ζήτημα.

Έρευνες που αφορούν στο ρόλο της υποδιαστολής έδειξαν πως συχνά οι μαθητές την ερμηνεύουν ως σημείο διαχωρισμού ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς ή την αγνοούν. Η Martinie (2014) σε έρευνα για στρατηγικές σύγκρισης δεκαδικών, παρατήρησε πως πολλοί μαθητές νομίζουν ότι υπάρχει συμμετρία ως προς την υποδιαστολή. Επισημαίνει πως η έλλειψη κατανόησης θέσης ψηφίου οδηγεί στην μη

[2] Κάθε φορά που θα χρησιμοποιούμε την έκφραση «Δεκαδικός Αριθμός» θα εννοούμε «Δεκαδική Αναπαράσταση ενός πραγματικού Αριθμού».

[3] Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο, αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως σημείο στην αριθμογραμμή

αναγνώριση των υποδιαιρέσεων. Οι μαθητές πιστεύουν για τις δεκαδικές υποδιαιρέσεις, ότι όσο περισσότερα ψηφία βρίσκονται μετά την υποδιαστολή τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός. Υπάρχει και μια μερίδα μαθητών, όπως αναφέρει και η Κολέζα (2009), που έχει τη λανθασμένη εντύπωση πως ο δεκαδικός με το μεγαλύτερο μήκος, δηλαδή με τα περισσότερα ψηφία είναι και ο μεγαλύτερος.
Οι Πατρώνης & Σπανός (1996) προτείνουν ο αριθμός 0,4 εκτός από την «στεγνή» γλωσσική έκφραση «μηδέν κόμμα τέσσερα» να εκφράζεται και ως «τέσσερα δέκατα». Εκφράζοντας με διαφορετικούς τρόπους τον ίδιο αριθμό προάγεται η αντιστοιχία δεκαδικής και κλασματική αναπαράστασης του ίδιου αριθμού. Αυτές οι διαφορετικές εκφράσεις είναι σημαντικές γιατί, οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν τα «δεκαδικά ψηφία» και τα «κλάσματα» ως εναλλακτικές μορφές αναπαράστασης, αλλά ως διαφορετικούς τύπους αριθμών (O’ Connor, 2001: 146). Τα λάθη των μαθητών σε ότι αφορά την έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης των αριθμών οφείλονται σε δύο κυρίως λόγους: οι δεκαδικοί δεν συνδέονται όσο θα έπρεπε με τα κλάσματα και δεν δίνεται μια καθαρή και ακριβής περιγραφή του τι είναι δεκαδικός. (Κολέζα, 2009: 47). Η δεκαδική αναπαράσταση απαρτίζεται από πολυπλοκότητα της ένωσης όλης της αριθμητικής γνώσης και των γνωστών υποδιαιρέσεων με πολύ συγκεκριμένα είδη μονάδων (Martinie, 2014: 421).

Στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στους δεκαδικούς - και φαίνεται να επιμένουν και μετά το πέρας της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης - έρχεται να προστεθεί στο γυμνάσιο ένα βασικό πρόβλημα των δεκαδικών, η δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων αριθμών. Το πρόβλημα μεγεθύνεται καθώς οι μαθητές αρχίζουν να εμπλέκονται με αριθμούς που έχουν απειροψήφια περιοδική δεκαδική αναπαράσταση. Η O’ Connor θέτει το ερώτημα «Μπορεί οποιοσδήποτε αριθμός που μπορεί να εκπροσωπείται ως ένα απλό κλάσμα να αντιπροσωπεύεται σε δεκαδικό συμβολισμό, και μπορεί οποιοσδήποτε αριθμός που μπορεί να εκπροσωπείται με δεκαδικό συμβολισμό να αντιπροσωπεύεται ως ένα απλό κλάσμα;». Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{1}{3}$ δεν προσφέρεται για την οικοδόμηση ισοδύναμου κλάσματος με παρονομαστή μια οποιαδήποτε δύναμη του δέκα. Συνεπώς, δεν είναι εύκολη πάντα η μετατροπή των κοινών κλασμάτων σε δεκαδικά και το αντίστροφο ή σε άθροισμα πεπερασμένου πλήθους δεκαδικών κλασμάτων. Οι Edwards & Ward (2004), σημειώνουν την αντίληψη της περιοδικότητας ως αλληλουχία ψηφίων χωρίς τέλος που προκύπτει από την αλγοριθμική διαίρεση ορισμένων τύπων κλασμάτων.

Ένα επιπλέον πρόβλημα που έγκειται στη δεκαδική αναπαράσταση, ορισμένων κλασμάτων, είναι αυτό που προκύπτει από την εύρεση του αντίστροφου κλάσματος. Ενώ γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δύο αντίστροφων κλασμάτων είναι το 1, υπάρχουν κλάσματα, που αν βρούμε το γινόμενο των δεκαδικών τους απειροψήφιων αναπτυγμάτων με περιοδικότητα ή ακόμα δυσκολότερα χωρίς, δεν θα είναι 1. Το πρόβλημα κρύβεται στο γεγονός ότι είναι άπειρα τα ψηφία που πολλαπλασιάζονται, συνεπώς η λύση δεν θα είναι ακριβής και δεν θα έχουμε αποτέλεσμα τον αριθμό 1.
Ακόμη, πρόβλημα αποτελεί το γεγονός ότι οι όλοι οι ακέραιοι, μπορούν να αναπαρασταθούν χωρίς δεκαδικό μέρος ή με απειροψήφιο μηδενικό δεκαδικό μέρος αλλά και όλοι οι πεπερασμένοι δεκαδικοί με μια απειροψήφια περιοδική μη μηδενική δεκαδική αναπαράσταση. Για παράδειγμα, ο αριθμός 0,4 έχει και την αναπαράσταση 0,39999….και έρευνες έχουν δείξει πως μαθητές και φοιτητές θεωρούν πως οι αριθμοί αυτοί είναι διαφορετικοί. Ένα από τα πιο συχνά παραδείγματα που συναντάται στη βιβλιογραφία είναι η σύγκριση του 0,9999…. με το 1.

Η έννοια του ρητού εισάγεται στην Α΄ γυμνασίου και ενισχύει παρανοήσεις που εμμένουν από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση καθώς συνδέεται με τη κλασματική και τη δεκαδική αναπαράσταση του ίδιου αριθμού και ακόλουθα αποτελεί πηγή πολλών παρανοήσεων για όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
Επιπρόσθετα, σχετική έρευνα του Δαφέρμου (2000) που διεξήχθη σε μαθητές Α΄ γυμνασίου, έδειξε ότι υπήρχε έντονη τάση των μαθητών, να μην αφήνουν σε κλασματική μορφή το αποτέλεσμα της λύσης και να «δυσφορούν» όταν το αποτέλεσμα δεν είναι ακέραιος αλλά δεκαδικός και κυρίως περιοδικός δεκαδικός. Η απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση δημιουργούσε την υποψία λάθους. Παρόμοια ήταν και τα αποτελέσματα της έρευνας της Βαμβακούση (2004) σε μαθητές Γ΄ γυμνασίου και Β΄ λυκείου καθώς και των Voskoglou & Kosyvas (2011), που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της Β΄ γυμνασίου και σε πρωτοετείς φοιτητές των τμημάτων Μηχανικών, Διοίκησης και Οικονομίας.
Ένας από τους στόχους της έρευνας των Voskoglou & Kosyvas (2011**)** ήταν η επιβεβαίωση της ελλιπούς κατανόησης των ρητών. Η έρευνα επικυρώνει πως μόνο το 52,5 % των μαθητών και το 68,8% των φοιτητών κατάφεραν να μετατρέψουν το κλάσμα $\frac{7}{3}$ σε δεκαδική μορφή και να αναγνωρίσουν την περίοδο του αριθμού. Η τάση μαθητών και φοιτητών να χρησιμοποιούν τους ρητούς στη δεκαδική τους μορφή παρά στην κλασματική διαπιστώθηκε ακόμα και από ερωτήσεις που

αφορούσαν την πυκνότητα. Στην ερώτηση «Υπάρχουν ρητοί αριθμοί μεταξύ των $\frac{1}{11}$ και $\frac{1}{10}$; Πόσοι ρητοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο κλάσματα;», η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατάφερε να ανταπεξέλθει ενώ πολλοί φοιτητές πραγματοποιούσαν την μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδική μορφή προκειμένου να φτάσουν στη σωστή απάντηση. Πράγματι η κατανόηση του συνόλου των ρητών αριθμών αποδείχτηκε ελλιπής από μαθητές και φοιτητές ενώ φάνηκε η προτίμησή τους στη χρήση δεκαδικών έναντι κλασματικών αριθμών. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι η ατελής κατανόηση των ρητών αριθμών αποτελεί στην πραγματικότητα ένα μεγάλο εμπόδιο για την κατανόηση των άρρητων αριθμών.
Η Βαμβακούση (2004) υποστηρίζει ότι ακόμα και όταν οι μαθητές κατείχαν τη διαδικαστική γνώση για να μετατρέψουν ένα κλάσμα στη δεκαδική του μορφή και το αντίστροφο, θεωρούσαν ότι οι δύο αναπαραστάσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς, αποδεικνύοντας πως υπάρχει διάσταση μεταξύ διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης.

Η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών δεν αποτελεί μόνο μαθησιακό πρόβλημα αλλά συναντάται και ως διδακτικό πρόβλημα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ένα θέμα ειδικής διδακτικής του Διαγωνισμού Α.Σ.Ε.Π. Μαθηματικών του 2007 που αφορά έναν διάλογο μεταξύ μαθητών για τη σύγκριση των αριθμών 1,23999.....και 1,24. Με αφορμή αυτό το θέμα οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εξηγήσουν τα γνωστικά προβλήματα των μαθητών και να προτείνουν τρόπους για να τα ξεπεράσουν. Εκείνοι που δεν ανταποκρίθηκαν ενώ κατείχαν γνωστικά το θέμα, στην πλειοψηφία τους δεν μπορούσαν να εξηγήσουν το γνωστικό πρόβλημα των μαθητών αλλά ούτε και να διατυπώσουν μια διδακτική πρόταση για αυτό. Ένα ζήτημα που προκύπτει από το θέμα του Α.Σ.Ε.Π., και αφορά στην εννοιολογική κατανόηση των δεκαδικών αναπαραστάσεων, είναι εκείνο της εφαρμογής της επιμεριστικής ιδιότητας σε ένα άπειρο άθροισμα, το οποίο δεν έχει οριστεί, δεδομένου ότι ο αυστηρός ορισμός απαιτεί την έννοια του ορίου. Αυτό όμως το ζήτημα, φυσικά, δεν αφορά μαθητές γυμνασίου αλλά αδιαμφισβήτητα αφορά καθηγητές.

Στην εννοιολογική κατανόηση του συνόλου των ρητών πρόσκομμα αποτελεί και ο ορισμός που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία. Οι μαθητές διδάσκονται τους ρητούς αριθμούς που συμβολίζονται στην κλασματική τους μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, ως το πηλίκο της

διαίρεσης α:β όπου α, β $\in Z$ και β≠0. Έτσι ο ρητός αριθμός ορίζεται ως το αποτέλεσμα μιας διαιρετικής διαδικασίας, που αν δεν γίνει, οδηγεί αναπόφευκτα στη λανθασμένη εντύπωση πως δεκαδικοί και κλάσματα είναι δύο διαφορετικά σύνολα μέσα στο ίδιο σώμα, το σώμα των ρητών. Ακόμα όμως κι όταν εκτελεστεί η διαίρεση, δεν οδηγεί στην κατανόηση ότι ένα κλάσμα και ο αντίστοιχος δεκαδικός είναι δύο εκφράσεις του ίδιου αριθμού. Η σύλληψη αυτής της ιδέας - της διττής αναπαράστασης ενός ρητού – αποτελεί πρόβλημα για την αναγνώρισή του.
Οι Fischbein, Jehiam & Cohen, (1995) σε έρευνά τους με μαθητές και φοιτητές Παιδαγωγικών Τμημάτων, διαπίστωσαν ότι εκείνοι που έδιναν λάθος ορισμό του ρητού, θεωρούσαν πως ρητός είναι ο δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Επακόλουθα, ο αριθμός 0,0555…θεωρείται μόνο από το μισό δείγμα των μαθητών ρητός χωρίς να μπορεί να αποφανθεί αν είναι και πραγματικός.

Τα προβλήματα της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών προοιωνίζουν εκείνα της δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων. Οι Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) διαπίστωσαν πως ο όρος «άρρητος» θεωρείται ισοδύναμος με αριθμούς που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, είτε είναι περιοδικός είτε όχι, και μερικές φορές με αρνητικούς αριθμούς. Σε έρευνά τους σε μαθητές γυμνασίου και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς διερεύνησαν τις διαισθητικές δυσκολίες που αποκαλύφθηκαν στην ιστορία των μαθηματικών σχετικά με τους άρρητους και το ρόλο που αυτές παίζουν σήμερα στην αυθεντική κατανόηση αυτής της κατηγορίας αριθμών. Μεταξύ των αποτελεσμάτων, αναφέρουν ότι το ένα τέταρτο του δείγματος των μαθητών χαρακτηρίζει τον αριθμό 0.0555…ως άρρητο και δεν μπορεί να κατατάξει τον 0.12112... στους ρητούς ή στους άρρητους. Υποστηρίζουν ότι τέτοιου είδους συγχύσεις δημιουργούνται από την ερμηνεία του όρου «άρρητου» ως «παράλογου» υπό το φως της καθημερινής του σημασίας. Για τους περισσότερους μαθητές, ο αριθμός 34,2727…ήταν και ρητός και άρρητος.
Οι Zazkis & Sirotic (2004) θεωρούν πιθανό εμπόδιο, στην κατανόηση των άρρητων αριθμών από τους μαθητές, την μη αναγνώριση της ισοδυναμίας των ορισμών για τους άρρητους που διατυπώνονται στα σχολικά εγχειρίδια. Άρρητοι αριθμοί είναι εκείνοι που δεν μπορούν να εκφραστούν ως λόγος δύο ακεραίων και η δεκαδική τους αναπαράσταση έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς περιοδικότητα (O’ Connor, 2001: 146).

Έρευνα των Voskoglou & Kosyvas (2011), που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της Β΄ γυμνασίου μετά το πέρας της διδασκαλίας των άρρητων και έπειτα σε φοιτητές ΤΕΙ μηχανικών και οικονομικών, έδειξαν ότι εκτός από την τάση τους να χρησιμοποιούν τους ρητούς στη δεκαδική τους μορφή - οι μαθητές που δεν απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις που αφορούσαν ρητούς αριθμούς - απάντησαν λάθος και σε εκείνες που αφορούσαν άρρητους. Η έρευνα επικεντρώνεται στις σημειωτικές αναπαραστάσεις των άρρητων οι οποίες θεωρούνται ως η κύρια πηγή δυσκολιών για την κατανόησή τους. Η ελλιπής κατανόηση των ρητών αριθμών και των διαισθητικών δυσκολιών συνδέονται με την αντίληψη των ασύμμετρων μεγεθών και την ιδιότητα της συνέχειας του συνόλου των πραγματικών. Αναδείχθηκαν δυσκολίες στις σημειωτικές αναπαραστάσεις των άρρητων ενισχύοντας παράλληλα την υπόθεση ότι η κατανόηση των ρητών αποτελεί εμπόδιο στην κατανόηση των άρρητων. Συγκεκριμένα, όταν ζητήθηκε να αναγνωριστεί και να καταγραφεί αν υπάρχει η περίοδος μεταξύ ενός ρητού με διαφανή δεκαδική αναπαράσταση και ενός άρρητου με κανονικότητα, απάντησε σωστά το 20% των μαθητών και το 58% του δείγματος των φοιτητών. Συνηθισμένο λάθος αποτελούσε η ταύτιση οποιουδήποτε κλάσματος με ρητό αριθμό - χωρίς να γίνεται έλεγχος για ακέραιο αριθμητή και παρονομαστή - και της οποιασδήποτε ρίζας με άρρητο. Μεγάλο ποσοστό των φοιτητών δεν κατάφεραν να προσεγγίσουν τον αριθμό ρίζα δύο με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων ενώ πολλοί μαθητές και φοιτητές ταύτιζαν τον αριθμό με μια από τις ρητές προσεγγίσεις του. Η πλειοψηφία δεν αναγνώριζε τους ρητούς και τους άρρητους ως πραγματικούς.
Τα αποτελέσματα της μελέτης που πραγματοποίησαν οι Peled και Hershkovitz (1999) σε εβδομήντα εκπαιδευτικούς στο δεύτερο και τρίτο έτος της πανεπιστημιακής τους εκπαίδευσης δείχνουν ότι γνωρίζουν τους ορισμούς και τα χαρακτηριστικά των άρρητων. Ωστόσο, διαπιστώθηκε ότι οι καθηγητές δεν μπορούσαν να κάνουν ευέλικτες μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των άρρητων αριθμών. Παρατηρήθηκε η αδυναμία εύρεσης ρητών προσεγγίσεων των άρρητων και η σωστή τοποθέτησή των αριθμών αυτών στην αριθμογραμμή.

Οι Βόσκογλου & Κόσυβας (2012) επισημαίνουν ως πιθανή δυσκολία στην κατανόηση των πραγματικών τις αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις που εμφανίζουν με μεγάλη συχνότητα τόσο οι ρητοί όσο και οι άρρητοι και θεωρούν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών και τις ευέλικτες μετακινήσεις ανάμεσά τους μαθησιακά ωφέλιμες. Προτείνουν, η διδασκαλία των πραγματικών να έχει ως στόχο την κατανόηση της ισοδυναμίας του ορισμού του ρητού ως περιοδικού δεκαδικού και του άρρητου ως μη - ρητού αλλά και ως μη - περιοδικού δεκαδικού.

Η σειρά και η πυκνότητα των πραγματικών αριθμών προκαλούν επίσης γνωστικά προβλήματα (Merenluoto & Lehtinen 2006, Vamvakoussi & Vosniadou 2006). Πολλοί ερευνητές θεωρούν πιθανή δυσκολία κατανόησης του συνόλου των πραγματικών, την πυκνότητα του συνόλου των ρητών σε αντιδιαστολή με τη συνέχεια του συνόλου των πραγματικών, κατατάσσοντάς την ως επιστημολογικό εμπόδιο που εντοπίζεται και στην ιστορία των μαθηματικών.

Μια έρευνα παρέμβασης των Vamvakoussi, Katsigiannis & Vosniadou (2009) με στόχο τη έννοια της πυκνότητας που έγινε σε μαθητές Β΄ γυμνασίου και Α΄ λυκείου έδειξε την τάση των παιδιών να αποδίδουν στους ρητούς ιδιότητες των φυσικών αριθμών, ακόμα και στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Η πλειοψηφία δεν αποδέχεται την ύπαρξη δεκαδικών μεταξύ κλασμάτων και το αντίστροφο ενώ συχνή παρανόηση αποτελεί η αντίληψη ότι: «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών μεταξύ δύο κλασμάτων, αλλά άπειρο πλήθος μεταξύ δύο δεκαδικών, ή αντίστροφα». Οι ερευνητές εντοπίζουν τη δυσκολία των παιδιών να διακρίνουν τους ρητούς μέσω των διάφορων συμβολικών τους αναπαραστάσεων και την αδυναμία τους να αντιληφθούν το σύνολο των ρητών ως ένα ομοιογενές σύστημα αριθμών.
Οι Voskoglou & Kosyvas (2011) παρατήρησαν ότι πολλοί φοιτητές και κυρίως μαθητές του γυμνάσιου, αναγνώριζαν την ύπαρξη ρητού μεταξύ των δεκαδικών 10,20 και 10,21 αλλά θεωρούσαν ότι μεταξύ των κλασμάτων $\frac{1}{11}$ και $\frac{1}{10}$ δεν υπάρχει ρητός αριθμός.
Επιπλέον, σε έρευνα των Giannakoulias, Souyoul & Zachariades (2007) που έγινε σε πρωτοετείς φοιτητές του μαθηματικού τμήματος εξετάστηκε η προτεραιότητα με την οποία θέτουν τα κριτήριά τους για την αναγνώριση ενός πραγματικού αριθμού. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πρώτο εξάμηνο φοίτησής τους, πριν ακόμα διδαχτούν τη δομή των πραγματικών αριθμών σε πανεπιστημιακό επίπεδο.
Όσον αφορά το σύνολο των ρητών οι ερευνητές συμπέραναν ότι η πυκνότητα σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την κατανόηση της δομής της δεκαδικής αναπαράστασης (Giannakoulias, Souyoul & Zachariades, 2007: 424). Πιο συγκεκριμένα, το 45% του δείγματος θεωρεί ότι ο αριθμός 2.999.. είναι μικρότερος του 3 και ταυτόχρονα ότι μεταξύ των προαναφερθέντων αριθμών υπάρχει ρητός

αλλά δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός. Φαίνεται οι φοιτητές να αντιμετωπίζουν πρόβλημα ως προς τη διάταξη και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών ενώ παράλληλα δείχνουν να κατανοούν την έννοια της πυκνότητας των ρητών. Παρόλα αυτά, παρουσιάζουν προβλήματα όσον αφορά τη δομή και τις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Όσον αφορά το σύνολο των πραγματικών, οι ερευνητές ήθελαν να εξετάσουν τις γνώσεις των πρωτοετών φοιτητών και διαπίστωσαν ότι οι δυσκολίες εντοπισμού ρητών και άρρητων φαίνεται να επιμένουν και μετά το πέρας της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Από τους φοιτητές που απάντησαν σωστά σε ερωτήσεις που αφορούσαν την πυκνότητα καθώς και τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών καθώς και από εκείνους που θεωρούν ότι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν μόνο πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση, το 40% πιστεύει ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν έχουν δεκαδική αναπαράσταση. Υπάρχει μια μεγάλη κατηγορία φοιτητών που ενώ αναγνωρίζει τους πραγματικούς αριθμούς, παρουσιάζει πρόβλημα στην εξακρίβωση της ρητής ταυτότητας τους. Οι φοιτητές ενώ γνωρίζουν τον αξιωματικό ορισμό των ρητών επιλέγουν - για να εξακριβώσουν αν ένας αριθμός είναι ρητός - να χρησιμοποιούν ένα λανθασμένο κριτήριο που βασίζεται στη δεκαδική αναπαράσταση. Κάποιοι θεωρούν ρητούς τους δεκαδικούς με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία και άρρητους εκείνους με απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση. Η γνωστική σύγκρουση εμφανίζεται όταν καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα : «Ο αριθμός $\frac{2}{3}$ έχει πεπερασμένη ή απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση;». Χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό ορθών και λανθασμένων κριτηρίων για να αποφανθούν. Μερικοί χρησιμοποιούν τον ορισμού του ρητού ως «οποιοσδήποτε» αριθμός που μπορεί να γραφτεί σαν «κλάσμα», δεν εκτελούν τη διαίρεση του $\frac{2}{3}$ και βασισμένοι στην λανθασμένη άποψή τους ότι «ρητός είναι ο πεπερασμένος δεκαδικός», συμπεραίνουν ότι το $\frac{2}{3}$ έχει πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση. Υπάρχουν και εκείνοι που χρησιμοποιούν τον ορισμό του ρητού, εκτελούν τη διαίρεση $\frac{2}{3}$ και αναγνωρίζουν την απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση του κλάσματος. Μεταξύ αυτών που εκτελούν τη διαίρεση, υπάρχει ένα ποσοστό συμμετεχόντων για τους οποίους το κριτήριο του ορισμού είναι ισχυρότερο από το κριτήριο των άπειρων ψηφίων. Υπάρχουν και εκείνοι στους οποίους υπερισχύει το λανθασμένο κριτήριο της δεκαδικής αναπαράστασης και θεωρούν ότι τελικά είναι άρρητος.

Οι Fischbein, Jehiam & Cohen (1995) διαπιστώνουν πως η έννοια των πραγματικών αριθμών είναι άγνωστη στους περισσότερους μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του λυκείου και σε περισσότερο από το 20% των υποψήφιων καθηγητών. Μάλιστα το 24% των καθηγητών δεν αναγνώριζε το $-\frac{22}{7}$ ως πραγματικό αριθμό. Σε έρευνα των Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi (1987) σε μελλοντικούς και εν ενεργεία δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης διαπιστώθηκε ότι το επικρατέστερο λάθος ήταν η αντίληψη που έχουν για τον αριθμό $\frac{22}{7}$. Παρόμοια ήταν και τα αποτελέσματα της έρευνας των Zazkis & Sirotic (2010), σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi (1987) θεωρούν ότι μια από τις πηγές σύγχυσης μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών είναι η χρήση του ορισμού των ρητών σε μια μη διαφανή δεκαδική αναπαράσταση ενός άρρητου. Παρατηρήθηκε ότι ήταν αρκετοί εκείνοι που συγχέουν το π με μια από τις ρητές προσεγγίσεις του $\frac{22}{7}$. Γεννιέται λοιπόν η απορία αν το λάθος αυτό γίνεται μόνο στη συγκεκριμένη περίπτωση με τον αριθμό π και το $\frac{22}{7}$ ή είναι ένδειξη γενικής σύγχυσης μεταξύ ενός άρρητου και μιας ρητής προσέγγισής του. Σύμφωνα με τους Fischbein, Jehiam & Cohen (1995), μία από τις πηγές σύγχυσης μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών είναι οι συνήθεις ρητές προσεγγίσεις των άρρητων αριθμών.

Οι Zazkis & Sirotic (2010), διεξάγοντας έρευνα σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μελέτησαν το πώς οι διαφορετικές δεκαδικές αναπαραστάσεις επηρεάζουν τις απαντήσεις των συμμετεχόντων όσον αφορά στους άρρητους. Παρατηρήθηκε σύγχυση μεταξύ αρρητότητας και άπειρης δεκαδικής αναπαράστασης, ανεξάρτητα από τη δομή αυτής της αναπαράστασης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί η συλλογιστική πορεία μιας εκπαιδευτικού που συμμετείχε στην έρευνα. Η εκπαιδευτικός παρατήρησε ότι εκτελώντας τη διαίρεση του $\frac{22}{7}$ εμφανίζονται τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία του αριθμού π. Λανθασμένα συμπέρανε ότι το $\frac{22}{7}$ ισοδυναμεί με τον αριθμό π και εφόσον γνώριζε ότι ο π είναι άρρητος κατέληξε ότι και ο $\frac{22}{7}$ είναι άρρητος. Στην ανάγκη της για γενίκευση, η ειδική αυτή περίπτωση, την οδήγησε στο εξής συμπέρασμα «Εφόσον ο π είναι άρρητος και έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία άρα κάθε αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία είναι άρρητος». Ένας άρρητος, όπως ο αριθμός π, μπορεί να έχει απειροψήφια αδιαφανή δεκαδική αναπαράσταση. Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε διαφανή απειροψήφια δεκαδική αναπαράσταση, με περίοδο ή κανονικότητα;

Οι Zazkis & Sirotic (2004) σε έρευνα που διεξήγαγαν σε υποψήφιους μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διαπίστωσαν ότι για ένα μεγάλο ποσοστό των συμμετεχόντων υπάρχουν δύο αλληλένδετες πηγές σύγκρουσης που ευθύνονται για τις λανθασμένες πεποιθήσεις τους. Συγκεκριμένα αναφέρονται στην εφαρμογή εσφαλμένου ή ελλιπούς ορισμού και στην έλλειψη κατανόησης της σχέση μεταξύ κλασμάτων και δεκαδικών τους αναπαραστάσεων. Η σύνδεση μεταξύ κλασμάτων και επαναλαμβανόμενων δεκαδικών δεν αναγνωρίζεται ενώ το επαναλαμβανόμενο μοτίβο των δεκαδικών ψηφίων πολλές φορές οδηγεί σε σύγχυση μεταξύ κανονικότητας ενός άρρητου και περιοδικότητας ενός ρητού. Παρόλα αυτά επικρατεί η τάση στη χρήση αριθμομηχανής με σκοπό την αναγνώριση ενός αριθμού μέσω της δεκαδικής του αναπαράστασης. Ένα μικρό μέρος του δείγματος παρουσιάζει σύγχυση μεταξύ της αρρητότητας και της απειροψήφιας δεκαδικής αναπαράστασης ενός πραγματικού αριθμού ανεξάρτητα από την μορφή (διαφανής[4] ή αδιαφανής[5]) αυτής της αναπαράστασης.

Τα συμπεράσματα της έρευνας αυτής δείχνουν πως τα λάθη που αφορούν τη δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων δεν πηγάζουν μόνο από παρανοήσεις μαθητών αλλά συχνά και από εσφαλμένες αντιλήψεις των καθηγητών. Συνεπώς αποτελούν ένα ζήτημα για τη διδακτική των μαθηματικών τόσο για τη κατάρτιση των εκπαιδευτικών όσο και για τη γνώση που θα μεταφέρουν εκείνοι στους μαθητές.

2.2 Συγκριτική μελέτη των προγραμμάτων σπουδών και των διδακτικών βιβλίων για τη διδασκαλία της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών.

Το κείμενο που ακολουθεί αφορά στα δύο προγράμματα σπουδών που ακολουθούνται στην μαθηματική εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζει το

[4] Βλέπε το ευρετήριο ειδικής ορολογίας στο παράρτημα της διπλωματικής
[5] Βλέπε το ευρετήριο ειδικής ορολογίας στο παράρτημα της διπλωματικής

ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα Δ.Ε.Π.Π.Σ.(2003) και το πιλοτικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (Ν.Π.Σ.) (2011) για τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στις τάξεις Δημοτικού και Γυμνασίου καταγράφοντας τη δομή και τη λογική τους. Τέλος, παρατίθεται μια σύντομη ανάλυση των δύο προγραμμάτων σε σχέση με τους στόχους και τους τρόπους που υιοθετούν για την εισαγωγή και τη διδασκαλία των δεκαδικών, ακολουθούμενη από, συγκριτική ανάλυσή στην οποία επισημαίνονται κυρίως οι μεταξύ τους διαφοροποιήσεις.

2.2.1. Το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ.).

Σύμφωνα με το ισχύον Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) - που εφαρμόζεται στη χώρα μας από το 2006 στο δημοτικό και από το 2007 στο γυμνάσιο - και βάση του οποίου έχουν γραφτεί τα εν χρήσει σχολικά βιβλία, η διδασκαλία των δεκαδικών ξεκινάει από τη Γ΄ τάξη του δημοτικού. Η έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης αναπτύσσεται στις επόμενες τάξεις δημοτικού και γυμνασίου και ολοκληρώνεται στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου στο κεφάλαιο με τίτλο «Οι Πραγματικοί Αριθμοί».

Ακολουθεί μια περιγραφή των διδακτικών στόχων, των διδακτικών ωρών που προτείνονται και των τρόπων με τους οποίους γίνεται η εισαγωγή και η διδασκαλία τους σε κάθε τάξη.

Στη Γ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου οι στόχοι που έχουν τεθεί για τη διδασκαλία αφορούν τη διαισθητική προσέγγιση των δεκαδικών αριθμών. Οι μαθητές γνωρίζουν τα κέρματα και εξοικειώνονται με καταστάσεις ανταλλαγών ενώ επιλύουν πραγματικά προβλήματα με τη χρήση νομισμάτων. Μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τους κανόνες γραφής των δεκαδικών και να διακρίνουν τη θεσιακή αξία των ψηφίων τους. Η χρήση της αριθμογραμμής ως οπτικής αναπαράστασης προτείνεται ως ενδεικτική δραστηριότητα του κεφαλαίου. Τέλος μαθαίνουν την αλγοριθμική διαδικασία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δεκαδικών, που έχουν έως και δυο δεκαδικά ψηφία.

Ο προβλεπόμενος χρόνος διδασκαλίας είναι εννέα διδακτικές ώρες, τρείς για την εξοικείωση των μαθητών με τα νομίσματα και έξι για την εισαγωγή τους στους δεκαδικούς αριθμούς.

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ τάξης, η διδασκαλία των δεκαδικών εκτείνεται σε τρία κεφάλαια που τιτλοφορούνται «Δεκαδικά κλάσματα», «Δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί», «Δεκαδικοί αριθμοί». Το γεγονός αυτό, φυσικά, προσφέρει στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να μιλήσει στους μαθητές για τη σχέση μεταξύ αυτών. Στο βιβλίο του μαθητή και στο τετράδιο εργασιών υπάρχουν ασκήσεις που προάγουν την μετατροπή δεκαδικών κλασμάτων στην αντίστοιχη δεκαδική τους αναπαράσταση και αντίστροφα. Οι μαθητές, εξοικειώνονται ακόμα περισσότερο με τη χρήση αριθμογραμμών, τοποθετώντας σε κάποιες από αυτές δεκαδικά κλάσματα, ενώ σε κάποιες άλλες δεκαδικούς αριθμούς. Να σημειώσουμε ότι στη Β΄ δημοτικού είχαν συναντήσει αριθμογραμμές, μόνο με φυσικούς αριθμούς.

Για την Δ΄ τάξη το ισχύον πρόγραμμα για πρώτη φορά ορίζει τη διδασκαλία δεκαδικών και κλασμάτων ταυτόχρονα. Οι στόχοι αφορούν τη θεσιακή αξία, την μετατροπή ενός κλάσματος στη δεκαδική του αναπαράσταση και αντίστροφα και τη γραφή του δεκαδικού αναπτύγματος ενός δεκαδικού αριθμού. Ένας ακόμα μαθησιακός στόχος του προγράμματος είναι η σύγκριση και η διάταξη δεκαδικών, ενώ περιλαμβάνει και την την παρεμβολή δεκαδικών ανάμεσα σε δεκαδικούς και φυσικούς καθώς και την τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή. Ο χρόνος που προβλέπεται για τη διδασκαλία των παραπάνω είναι δεκαέξι διδακτικές ώρες.

Η διδασκαλία των δεκαδικών στο βιβλίο και στο τετράδιο εργασιών εκτείνεται σε έντεκα κεφάλαια, τα οποία πραγματεύονται τους δεκαδικούς αριθμούς, τη σύνδεσή τους με τα νομίσματα και τις μετρήσεις μήκους και βάρους. Στα κεφάλαια περιλαμβάνονται και οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μεταξύ δεκαδικών καθώς και η μετατροπή δεκαδικών κλασμάτων στις αντίστοιχες δεκαδικές τους αναπαραστάσεις. Στο κεφάλαιο που φέρει τον τίτλο «Διαίρεση με το 10, 100, 1000» καταγράφεται το εξής συμπέρασμα: Κάθε δεκαδικός μπορεί να γραφτεί ως δεκαδικό κλάσμα και αντίστροφα καθώς και ως αποτέλεσμα διαίρεσης. Στο κεφάλαιο «Διαχειρίζομαι δεκαδικούς αριθμούς» παρουσιάζεται το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού. Η ανάλυση ενός δεκαδικού γίνεται με τους εξής τρόπους: Με τη βοήθεια χρήσης δεκαδικών π.χ. $2{,}134 = 2\cdot 1 + 1\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}01 + 4\cdot 0{,}001$ ή με τη βοήθεια χρήσης κλασμάτων π.χ. $2{,}134 = 2\cdot 1 + 1\cdot \frac{1}{10} + 3\cdot \frac{1}{100} + 4\cdot \frac{1}{1000}$. Τα παραπάνω παραδείγματα προβάλλουν τη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των κλασμάτων και των δεκαδικών τους αναπαραστάσεων.

Επιπρόσθετα, η θεσιακή αξία κατέχει καίρια θέση στο σχολικό βιβλίο της Δ΄ τάξης καθώς επισημαίνει συνεχώς ότι κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του, είναι μέρος ενός άλλου ψηφίου, του ίδιου αριθμού. Υπάρχει πληθώρα ασκήσεων σε όλα τα κεφάλαια των δεκαδικών που επικεντρώνεται στη θεσιακή αξία και προβάλλει ισοδυναμίες όπως τα δεκατέσσερα δέκατα αντιστοιχούν σε μία μονάδα και τέσσερα δέκατα.

Οι ασκήσεις στο τετράδιο εργασιών, εν αντιθέσει με αυτές της Γ΄ τάξης, καλούν τους μαθητές να τοποθετήσουν στην ίδια αριθμογραμμή, δεκαδικούς και δεκαδικά κλάσματα, προάγοντας έτσι την κατανόηση της διττής αναπαράστασής τους.

Να σημειώσουμε εδώ ότι το πρόγραμμα ορίζει τη διδασκαλία μόνο των τεχνικών εκτέλεσης των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, οι οποίες αποτελούν και επανάληψη της Γ΄ τάξης, προβλέποντας πέντε διδακτικές ώρες. Το σχολικό βιβλίο ακολουθεί όμως άλλη λογική. Εστιάζει, για την ακρίβεια, στους νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς και δεκαδικούς και στην επαλήθευσή τους μέσω της αλγοριθμικής διαδικασίας. Η εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης με δεκαδικούς αριθμούς, γίνεται με την αντικατάσταση κάθε δεκαδικού αριθμού με έναν ακέραιο που έχει περίπου την ίδια αξία. Η πρόσθεση και η αφαίρεση δεκαδικών διδάσκεται με διάφορους τρόπους.

Για την Ε΄ τάξη, προβλέπεται η υπενθύμιση της χρήσης των κανόνων γραφής των δεκαδικών καθώς και η επανάληψη της σύγκρισης και της διάταξής τους. Υπογραμμίζεται ως διδακτικός στόχος της τάξης και όχι ως ενδεικτική δραστηριότητα η διαπίστωση ότι ο αριθμός που έχει περισσότερα ψηφία δεν είναι και ο μεγαλύτερος. Συμπεριλαμβάνεται στους στόχους του προγράμματος ο εντοπισμός δεκαδικών στην αριθμογραμμή και η παρεμβολή δεκαδικών ανάμεσα σε δεκαδικούς και φυσικούς.

Η διδασκαλία των δεκαδικών ολοκληρώνεται με την επανάληψη των τεχνικών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με δεκαδικούς. Ακολουθεί ο πολλαπλασιασμός φυσικού ή δεκαδικού με δυνάμεις του δέκα. Οι μαθητές διδάσκονται τον πολλαπλασιασμό δεκαδικού με φυσικό και δεκαδικού με δεκαδικό και τη διαίρεση δεκαδικού με φυσικό. Εμπλέκονται με σύνθετα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών. Τέλος προβλέπεται η σύνδεση δεκαδικών με το δεκαδικό μετρικό σύστημα. Όλα τα παραπάνω, σύμφωνα με τις ενδεικτικές δραστηριότητες που προτείνει το ισχύον πρόγραμμα, εστιασμένα στους νοερούς υπολογισμούς, στις προσεγγιστικές εκτιμήσεις και στη χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων.

Ο χρόνος που θα αφιερωθεί για τη γραφή, την ονομασία και τη διάταξη είναι πέντε ώρες ενώ δεκατέσσερις ώρες προβλέπονται για τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών.

Η διδασκαλία των κλασμάτων είναι ανεξάρτητη από των δεκαδικών καθώς οι μαθητές μαθαίνουν απλοποίηση κλασμάτων, τον ορισμό των ομώνυμων και ετερώνυμων, τη σύγκριση και τη διάταξη τους. Μαθαίνουν και τις τέσσερις πράξεις μεταξύ κλασμάτων και την επίλυση προβλημάτων με τις πράξεις αυτές. Μαθαίνουν τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα.

Παρατηρείται μια σύγχυση στη σειρά διδασκαλίας που ακολουθείται από το σχολικό εγχειρίδιο. Η αξία θέσης ψηφίου σαν κεφάλαιο, διδάσκεται μετά τα κεφάλαιο των δεκαδικών αριθμών και των δεκαδικών κλασμάτων, παρόλο που μέρος αυτής περιλαμβάνεται και στα αντίστοιχα αυτά κεφάλαια. Το ομώνυμο κεφάλαιο εστιάζει στη σύγκριση αριθμών μέσω της αξίας θέσης ενώ δίνει και το πρώτα έναυσμα για την εισαγωγή στην πυκνότητα των ρητών.

Στο σχολικό εγχειρίδιο, στην ενότητα δύο, τα δύο πρώτα κεφάλαια τιτλοφορούνται «Δεκαδικοί αριθμοί - Δεκαδικά κλάσματα», «Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί». Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι ασκήσεις που περιλαμβάνει το εγχειρίδιο δεν προάγουν τη σχέση μεταξύ δεκαδικών κλασμάτων και των αντίστοιχων δεκαδικών αναπαραστάσεων. Συμπέρασμα των κεφαλαίων αποτελεί η δημιουργία της ακέραιας μονάδας από δέκατα και από εκατοστά καθώς και η χρήση δεκαδικών κλασμάτων και αριθμών για την ακριβή μέτρηση.

Στη συνέχεις, στην ενότητα τρία, στο κεφάλαιο δεκαοκτώ που τιτλοφορείται «Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό» γίνεται η διδασκαλία του κλάσματος ως πηλίκο διαίρεσης. Στο κεφάλαιο καταγράφεται το εξής συμπέρασμα: «Αν σε ένα κλάσμα, διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή έχουμε έναν δεκαδικό αριθμό και αυτή η διαδικασία μας βοηθάει και στη σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων». Το πρόβλημα που πηγάζει από τη χρήση αυτής της μεθόδου συναντάται σε επόμενες τάξεις, οπού η δεκαδική αναπαράσταση ενός κλάσματος παύει να είναι μόνο πεπερασμένη αλλά μπορεί να είναι και απειροψήφια.

Στην ΣΤ΄ τάξη η διδασκαλία των δεκαδικών γίνεται με γνώμονα τις προϋπάρχουσες γνωσιακές δομές για τους φυσικούς. Στην τάξη αυτή, πρόγραμμα και σχολικό εγχειρίδιο αλληλοσυμπληρώνονται.

Στο βιβλίο του μαθητή καθώς και στο πρόγραμμα σπουδών καταγράφονται οι ίδιοι εκπαιδευτικοί στόχοι: Η εκμάθηση των κανόνων γραφής φυσικών και δεκαδικών, η διάκριση της διαφορετικής αξίας καθενός από τα ψηφία που σχηματίζουν ένα φυσικό ή ένα δεκαδικό αριθμό και η μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα, και αντίστροφα. Στο σχολικό εγχειρίδιο, στο κεφάλαιο δύο που τιτλοφορείται «Δεκαδικοί αριθμοί» δηλώνεται πως «Τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη προς τα δεξιά» διδάσκοντας πως κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του, είναι μέρος ενός άλλου ψηφίου. Το βιβλίο περιλαμβάνει ασκήσεις που στοχεύουν στην κατανόηση της διακριτότητας που διέπει το σύνολο των φυσικών. Παράλληλα το πρόγραμμα προσεγγίζει την έννοια της πυκνότητας μέσω των στόχων που ορίζει για τη σύγκριση και τη διάταξη των αριθμών. Ενδεικτική είναι η δραστηριότητα που περιλαμβάνει την παρεμβολή αριθμών μεταξύ άλλων αριθμών στην αριθμογραμμή.

Η μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα και αντίστροφα είναι ένας ακόμα μαθησιακός στόχος του προγράμματος ενώ το βιβλίο υπογραμμίζει την κατανόηση της ανάγκης μετατροπής των αριθμών από τη μία μορφή στην άλλη. Το κεφάλαιο στο οποίο εμπεριέχετε η μετατροπή αυτή τιτλοφορείται «Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα» και στο τετράδιο εργασιών συναντούμε όχι μόνο δεκαδικά αλλά και κοινά κλάσματα. Παρόλα αυτά ούτε το πρόγραμμα αλλά ούτε το βιβλίο δεν προάγουν την μετατροπή μη - δεκαδικού κλάσματος σε δεκαδική μορφή αλλά κυρίως την μετατροπή δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδική μορφή και αντίστροφα.

Για όλα τα παραπάνω ο προβλεπόμενος χρόνος είναι επτά διδακτικές ώρες ενώ για τα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν και αφορούν τις μεθόδους ακριβούς υπολογισμού προβλέπονται έξι διδακτικές ώρες.

Στα επόμενα κεφάλαια, επιδιώκεται η ευχέρεια μεταξύ των τεσσάρων βασικών πράξεων με δεκαδικούς και φυσικούς μαζί και οι ασκήσεις που προσφέρονται υπηρετούν το σκοπό αυτό. Το πρόγραμμα περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ακεραίου ή δεκαδικού με το 10, 100, 1000 και με 0,1, 0,01, 0,001. Ακολουθεί ο υπολογισμός μεικτών αριθμητικών παραστάσεων με την προτεραιότητα πράξεων με φυσικούς και δεκαδικούς και η επίλυση σύνθετων προβλημάτων με τη βοήθεια αυτών. Τέλος η στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών με την εκμάθηση του κανόνα της στρογγυλοποίησης (διαδικαστική στρατηγική) και ο έλεγχος της ορθότητας του αποτελέσματος μέσω νοερών υπολογισμών (εννοιολογική στρατηγική) αποτελούν μαθησιακούς στόχους του ισχύοντος προγράμματος. Εδώ παρατηρούμε, πως κοινός στόχος των ενοτήτων που αφορούν τους δεκαδικούς και τα κλάσματα είναι η μετατροπή κλάσματος στη δεκαδική του αναπαράσταση και αντίστροφα. Παράλληλα, και στο κεφάλαιο των κλασμάτων παρουσιάζονται δεκαδικοί και αριθμητικές παραστάσεις με κλάσματα και δεκαδικούς.

Αναφορικά, στη συνέχεια, με τη μελέτη του Προγράμματος σπουδών για τις τάξεις του γυμνασίου παρατηρούμε πως η πορεία εκμάθησης των κλασμάτων και των δεκαδικών τους αναπαραστάσεων διαφοροποιείται από εκείνη του δημοτικού.

Στην Α΄ γυμνασίου προηγείται η διδασκαλία των κλασμάτων και έπεται η διδασκαλία των δεκαδικών τους αναπαραστάσεων.

Οι στόχοι του προγράμματος, όσον αφορά την έννοια του κλάσματος είναι εστιασμένοι στη μορφή του ως μέρος όλου. Το πρόγραμμα ορίζει τη διδασκαλία ισοδύναμων κλασμάτων, τη σύγκριση και την τοποθέτησή τους στην ευθεία των αριθμών. Οι πράξεις μεταξύ κλασμάτων, η εύρεση αντίστροφου κλάσματος και η μετατροπή σύνθετου σε απλό κλάσμα συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη.

Οι στόχοι του προγράμματος, σχετικά με την έννοια του δεκαδικού κλάσματος είναι εστιασμένοι στη μορφή του ως πηλίκο και ως ποσοστό. Προβλέπεται η εμπέδωση των δεκαδικών ως αποτέλεσμα μετρήσεων.

Στην τάξη αυτή, η επανάληψη με την μορφή της υπενθύμισης αφορά στόχους όπως, την αξία θέσης ψηφίων (έξι πρώτα δεκαδικά ψηφία), τη σύγκριση, τη στρογγυλοποίηση και την τοποθέτηση δεκαδικών στην ευθεία των αριθμών.

Οι μαθητές γνωρίζουν τη σχέση ισοδυναμίας του δεκαδικού κλάσματος του πηλίκου και του ποσοστού. Εκτελούν πράξεις με δεκαδικούς χρησιμοποιώντας και την προτεραιότητα των πράξεων. Γράφουν δεκαδικούς αριθμούς στην τυποποιημένη τους μορφή ενώ για πρώτη φορά υπολογίζουν δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό.

Για όλα τα παραπάνω προτείνεται να διατεθούν δεκατέσσερις διδακτικές ώρες εκ των οποίων μία ώρα προορίζεται για τη διδασκαλία της τυποποιημένης μορφής μεγάλων αριθμών και τέσσερις ώρες για τις πράξεις και τις δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό. Οι υπόλοιπες εννέα ώρες αφιερώνονται στην επανάληψη με την μορφή της υπενθύμισης της ύλης του δημοτικού, δίχως να υφίσταται εμβάθυνση στην έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης του κλάσματος.

Στο σχολικό εγχειρίδιο, τα τρία πρώτα κεφάλαια είναι οι φυσικοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί. Στο κεφάλαιο που ονομάζεται «Δεκαδικοί αριθμοί», επιχειρείται η σύνδεση μόνο των δεκαδικών κλασμάτων με την αντίστοιχη δεκαδική τους αναπαράσταση καθώς και η αντίστροφη διαδικασία. Τα επόμενα κεφάλαια με την εξής σειρά είναι οι εξισώσεις, τα ποσοστά, τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά και οι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί. Ακολουθώντας αυτή την πορεία διδασκαλίας διακόπτεται η σύνδεση των κλασμάτων και των δεκαδικών με το κεφάλαιο των θετικών και αρνητικών που εμπεριέχει τη δεκαδική μορφή των ρητών.

Το πρόγραμμα προτείνει την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών με τη βοήθεια μεγεθών τα οποία επιδέχονται αντίθεση (π.χ. θερμοκρασία) με σκοπό να διαφανεί η ανάγκη εισαγωγής τους, πριν δοθεί ο ορισμός των ρητών αριθμών. Ακολουθεί η παράσταση ρητών στην ευθεία των πραγματικών και μέσω αυτής διδάσκεται και η έννοια της απόλυτης τιμής. Η σύγκριση και η διάταξη ρητών γίνεται μέσω της τοποθέτησής τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Οι ασκήσεις που συναντούμε στο σχολικό εγχειρίδιο ανταποκρίνονται στους στόχους που θέτει το πρόγραμμα σπουδών. Το πρόβλημα εντοπίζεται στο γεγονός ότι δεν προβλέπεται η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών σε σχέση με την αναπαράστασή τους στην ευθεία.

Για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ρητών προτείνονται δραστηριότητες με μεγέθη τα οποία παίρνουν θετικές και αρνητικές τιμές ενώ για τον πολλαπλασιασμό προτείνεται ο κανόνας των προσήμων. Μαθησιακοί στόχοι για τις πράξεις των ρητών αποτελούν, η αναγνώριση των ιδιοτήτων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και η σημασία τους στον υπολογισμό αθροίσματος και γινομένου πολλών προσθετέων ή παραγόντων αντίστοιχα. Ο υπολογισμός της διαφοράς και του πηλίκου δυο ρητών. Η διαδικασία της απαλοιφής παρενθέσεων και η εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας προβλέπονται για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων. Η κατανόηση του πηλίκου και ως λόγου προτείνεται σε αυτό το σημείο του προγράμματος.

Προβλέπονται τρείς διδακτικές ώρες για την πρόσθεση και την αφαίρεση ενώ δύο ώρες για τον πολλαπλασιασμό και δύο για τη διαίρεση.

Στις ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου, στα κεφάλαια της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ρητών, οι αριθμοί που εμπλέκονται στις πράξεις έχουν την ίδια μορφή (κλασματική ή δεκαδική), ενώ στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση συναντώνται πράξεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των ρητών.

Η δεκαδική μορφή των ρητών καθώς και οι δυνάμεις ρητών με εκθέτη φυσικό και ακέραιο έχουν μετατεθεί στην ύλη της Β΄ γυμνασίου παρότι βρίσκονται στο βιβλίο της Α΄ γυμνασίου. Το γεγονός αυτό δυσκολεύει το σχηματισμό εικόνας-έννοιας από τους μαθητές για το σύνολο των ρητών διακόπτοντας τον για την επόμενη τάξη.

Στόχοι του κεφαλαίου για τη δεκαδική μορφή των ρητών είναι η διάκριση των ρητών σε εκείνους που δεν γράφονται ως δεκαδικοί ή περιοδικοί δεκαδικοί και η μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό με περίοδο ή χωρίς και αντίστροφα.

Σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής για το έτος 2017-2018 στο Γυμνάσιο, εφόσον οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικές τους αναπαραστάσεις έχουν διδαχτεί στο δημοτικό - οι έννοιες και οι διαδικασίες τους - στόχοι διδασκαλίας της Α΄ γυμνασίου είναι η επανάληψη με την μορφή της υπενθύμισης διαδικασιών και η εμβάθυνση σε σημαντικές πτυχές για την ανάπτυξη των μαθηματικών αυτών εννοιών. Με βάση τα παραπάνω, προτείνεται να αφιερωθούν οκτώ, εννέα και τέσσερις διδακτικές ώρες αντίστοιχα για τα για τα τρία πρώτα κεφάλαια. Εξάλλου, οι μαθητές θα έχουν και στο έβδομο κεφάλαιο την ευκαιρία να ασχοληθούν με τις πράξεις και να βελτιώσουν την ευχέρειά τους σε αυτές. Επισημαίνεται ότι η ενασχόληση με τα τρία πρώτα κεφάλαια για μεγάλο διάστημα δεν εξασφαλίζει την αντιμετώπιση των δυσκολιών.

Εμπόδια και δυσκολίες που αναφέρονται χαρακτηριστικά είναι ότι οι δεκαδικοί αριθμοί είναι άλλο είδος αριθμών από τα κλάσματα. Επιθυμητός στόχος είναι η αντιμετώπιση αυτών των εμποδίων καθώς και η ανάπτυξη ικανοτήτων για τη χρήση αναπαραστάσεων και τη μετάβαση από το ένα είδος στο άλλο. Πιο συγκεκριμένα, η αντίληψη δεκαδικών, δεκαδικών κλασμάτων και ποσοστών ως διαφορετικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών. Έμφαση δίνεται στα ποσοστά ως διαφορετική αναπαράσταση των δεκαδικών και των κλασμάτων, αλλά επισημαίνεται το γεγονός ότι δεν γράφονται όλα τα κλάσματα με ακρίβεια στη μορφή ποσοστού.

Όσον αφορά το κεφαλαίο των ποσοστών, προτείνεται να διδαχθεί αμέσως μετά τη διδασκαλία κλασμάτων και δεκαδικών με σκοπό την ανάδειξη των πολλαπλών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών. Οι προτεινόμενες ασκήσεις αφορούν μετατροπή ποσοστών σε κλάσματα και δεκαδικούς και αντίστροφα, μετατροπή κοινού κλάσματος σε δεκαδικό με αναφορά στην περιοδικότητα, μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα και αντίστροφα, μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και τοποθέτηση δεκαδικών στην ευθεία. Σε συνδυασμό με την μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό (που εντοπίζεται στην §3.1του σχολικού βιβλίου) η αντίστροφη διαδικασία είναι σημαντική για τη συγκρότηση της έννοιας του ρητού αριθμού.

Ένα μεγάλο μέρος της διδασκαλίας των ρητών γίνεται στην Α΄ γυμνασίου, παρόλα αυτά η εικόνα και η αντίληψή των μαθητών για το σύνολό τους ολοκληρώνεται στην επόμενη τάξη. Στη Β΄ γυμνασίου, σύμφωνα με τις Οδηγίες διδασκαλίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής για το έτος 2017-2018 στο Γυμνάσιο, διδάσκεται από το κεφάλαιο των «Θετικών και Αρνητικών αριθμών» της Α΄

γυμνασίου, η δεκαδική μορφή των ρητών και οι δυνάμεις ρητών με εκθέτη φυσικό και ακέραιο. Έμφαση προτείνεται να δοθεί στη διάταξη ρητών και στην αναπαράσταση τους στην ευθεία των αριθμών.

Η σύνδεση των ρητών με τους πραγματικούς αριθμούς διακόπτεται και πάλι καθώς μετά τη δεκαδική μορφή των ρητών, οι οδηγίες προβλέπουν τη διδασκαλία εξισώσεων και ανισώσεων.

Ακολουθεί η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών όπου πρόγραμμα σπουδών και οδηγίες διδασκαλίας φαίνεται εκ πρώτης όψεως να συμφωνούν όσον αφορά την απαιτούμενη χρονική διάρκεια διδασκαλίας, η οποία καθορίζεται σε επτά διδακτικές ώρες.

Βάσει του προγράμματος διατίθενται δύο ώρες για τη δραστηριότητα που συνδέει το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων, που έχουν πλευρές τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, με το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα. Τρείς ώρες για τη διδασκαλία της τετραγωνικής ρίζας και δύο ώρες για τους άρρητους και την επίλυση προβλημάτων με αυτούς.

Οι οδηγίες προβλέπουν ίδιο αριθμό ωρών με το πρόγραμμα για την εισαγωγή στην τετραγωνική ρίζα και τις διπλάσιες ώρες για τη διδασκαλία των άρρητων και την επίλυση προβλημάτων με πραγματικούς.

Σύμφωνα με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών, η εισαγωγή στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας γίνεται με τη βοήθεια δραστηριοτήτων όπου διαφαίνεται η ανάγκη χρήσης της και διαπιστώνεται ότι η εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας είναι η αντίστροφη διαδικασία της ύψωσης στο τετράγωνο. Οι υπολογισμοί των τετραγωνικών ριζών προτείνεται να γίνουν με τρείς τρόπους, με δοκιμές, με τη βοήθεια πινάκων και με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης.

Στόχο αποτελεί το να γνωρίζουν οι μαθητές μετά το πέρας του κεφαλαίου, ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\beta \neq 0$. Ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών και ότι οι άρρητοι δεν είναι μόνο οι θετικές ή οι αρνητικές ρίζες των ρητών. Στο σημείο αυτό το πρόγραμμα περιλαμβάνει και ένα παράδειγμα άρρητου σε δεκαδική μορφή. Για την ακρίβεια, επιλέγει έναν άρρητο με διαφανή δεκαδική αναπαράσταση, τον αριθμό 2,101001000100001….. και όχι έναν άρρητο με αδιαφανή δεκαδική αναπαράσταση. Για πρώτη φορά το πρόγραμμα αξιοποιεί τα ιστορικά σημειώματα που υπάρχουν στο βιβλίο ως ενδεικτικές δραστηριότητες για την εισαγωγή ενός κεφαλαίου.

Σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας για το έτος 2017 - 2018, η αφόρμηση για την εισαγωγή της έννοιας της τετραγωνική ρίζας θα γίνει από το πυθαγόρειο θεώρημα. Τα προβλήματα που περιλαμβάνονται στην ενότητα «Προβλήματα» του κεφαλαίου «Πραγματικοί Αριθμοί» δεν θα διδαχτούν αυτόνομα αλλά ως δραστηριότητες στη διδασκαλία των άρρητων και του πυθαγορείου θεωρήματος. Σημαντικά ερωτήματα που αφορούν την ύπαρξη ή όχι επόμενου στους πραγματικούς αριθμούς και την ύπαρξη ρητών ή άρρητων ανάμεσα σε δύο άλλους προτείνεται να συζητηθούν.
Ιδιαίτερη σημασία δίνεται από το σχολικό εγχειρίδιο, στην τετραγωνική ρίζα δυο και στη γεωμετρική της αναπαράσταση, στις ρητές προσεγγίσεις άρρητων αριθμών και στη συμπλήρωση της ευθείας των πραγματικών αριθμών από ρητούς και άρρητους.
Στους στόχους που τίθενται για τη Γ΄ γυμνασίου συμπεριλαμβάνονται με τη μορφή επανάληψης - συμπλήρωσης οι πράξεις μεταξύ πραγματικών και ως νέα γνώση, η χρήση ιδιοτήτων των ριζών και η απόδειξή τους. Ο προτεινόμενος διδακτικός χρόνος είναι πέντε ώρες. Οι οδηγίες του εκπαιδευτικού για το 2017-2018 προτείνουν την αποφυγή ασκήσεων που απαιτούν ευχέρεια στο λογισμό με ρίζες υποδεικνύοντας σε ποιες ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου πρέπει να δοθεί σημασία. Η ενδεικτική δραστηριότητα που προτείνεται είναι η ίδια που συναντάται στο πιλοτικό πρόγραμμα σπουδών και αναδεικνύει την αξία των ιδιοτήτων των ριζών έναντι της χρήσης της αριθμομηχανής. Ο προτεινόμενος διδακτικός χρόνος είναι τρείς ώρες.

2.2.2 Το πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Ν.Π.Σ.) του 2011.

Τα Νέα Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης σχεδιάστηκαν το 2011, εφαρμόστηκαν στην πράξη επί τρία χρόνια, μόνο σε πιλοτικά σχολεία. Θεωρούνται συμπληρωματικά του ισχύοντος με την έννοια ότι οι καθηγητές μπορούν να αντλούν ιδέες για τη διδασκαλία καθώς και εκπαιδευτικό υλικό από τα τεύχη του εκπαιδευτικού. Σχεδιάστηκαν στη βάση των τροχιών μάθησης. Οι τροχιές μάθησης ορίζουν τους βασικούς σταθμούς μάθησης από τους οποίους θα περάσουν οι μαθητές στη διαδρομή ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών.
Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού κατέχει καίρια θέση στο Νέο Πρόγραμμα και οι τροχιές ανάπτυξής της απαρτίζονται από πέντε υπό-τροχιές. Δίνεται προτεραιότητα στην ανάπτυξη των τροχιών εννοιολογικού χαρακτήρα και, στη συνέχεια, στις τροχιές που αφορούν στις εκτιμήσεις και στους υπολογισμούς. Οι τροχιές εννοιολογικού χαρακτήρα αφορούν στην εσωτερική δομή του κάθε αριθμητικού συνόλου η οποία είναι συνυφασμένη με την αντίληψη του κάθε αριθμού ως

αυθύπαρκτης οντότητας, ανεξάρτητης από το πλαίσιο στο οποίο συναντάται. Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού κατέχει καίρια θέση στο Νέο Πρόγραμμα και οι τροχιές ανάπτυξής της απαρτίζονται από πέντε υπό - τροχιές. Μία από αυτές είναι «Η αναγνώριση και έκφραση του αριθμού, μέσω διαφόρων αναπαραστάσεών του», η οποία στη συνέχεια θα εξεταστεί ενδελεχώς.

Για κάθε τάξη περιγράφονται οι επιμέρους στόχοι, ο ενδεικτικός χρόνος οι ενδεικτικές δραστηριότητες καθώς και προτεινόμενη διαθεματική προσέγγιση για τη διδασκαλία των δεκαδικών. Σε όλες τις τάξεις του δημοτικού και γυμνασίου, η διδασκαλία των δεκαδικών προαναγγέλλεται μέσω της διδασκαλίας των κλασματικών αριθμών.

Στόχος της Γ΄ τάξης του δημοτικού είναι η κατανόηση της θεσιακής αξίας των δεκαδικών και η εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση των συμβολισμών δέκατο, εκατοστό, χιλιοστό. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού που έχει μέχρι και δυο δεκαδικά ψηφία, στον πλησιέστερο ακέραιο ή στο πλησιέστερο δέκατο.

Συνίσταται η ανάπτυξη της σκέψης σε σχέση με τον τρόπο λειτουργίας του αλγόριθμου στρογγυλοποίησης πριν την εφαρμογή του μηχανιστικού κανόνα που προβλέπεται για την επόμενη τάξη. Ο λόγος έγκειται στην κατανόηση της στρογγυλοποίησης ως την αντικατάσταση ενός «δυσκίνητου» αρχικού αριθμού με έναν «καλό» αριθμό που να συνιστά μια κατά προσέγγιση απόδοσή του. Παράλληλα επιτυγχάνεται η αποφυγή της διαδικαστικής μάθησης μιας αλγοριθμικής διαδικασίας.

Δεν προβλέπεται από το πρόγραμμα η διδασκαλία της αλγοριθμικής πρόσθεσης και της αφαίρεσής τους, παρότι συναντάται στο τελευταίο κεφάλαιο της ενότητας του σχολικού εγχειριδίου. Η έμφαση που δίνεται στη διδασκαλία των πράξεων είναι ελάχιστη καθώς το ίδιο το σχολικό εγχειρίδιο δεν τις συμπεριλαμβάνει στο επαναληπτικό μάθημα του τετραδίου εργασιών. Ο χρόνος που προβλέπεται στη Γ΄ τάξη για την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των δεκαδικών είναι οκτώ διδακτικές ώρες.

Για τη Δ΄ τάξη, το πιλοτικό πρόγραμμα, εν αντιθέσει με το ισχύον θέτει ξεχωριστά τους μαθησιακούς στόχους για τη διδασκαλία των κλασμάτων και τη διδασκαλία των δεκαδικών τους αναπαραστάσεων. Τονίζει τη σημαντικότητα της σύνδεσης των δύο αριθμητικών συστημάτων, των κλασμάτων και των δεκαδικών, με στόχο τη δόμηση της έννοιας « ότι και τα δυο συστήματα εκφράζουν τις ίδιες ιδέες » (πιλοτικό πρόγραμμα: 98-99). Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, ως αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης ως ποσοστό και ως σημείο στην αριθμογραμμή. Η ποικιλότητα της ερμηνείας των δεκαδικών και των κλασμάτων δυσκολεύουν τη δόμηση αυτής της αντίληψης. Ο διάλογος στην τάξη για τη σχετικότητα του μεγέθους των δεκαδικών αριθμών μπορεί να συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της δομής των δεκαδικών αριθμών.

Η εισαγωγή των μαθητών στη γραφή και την ορολογία των δεκαδικών γίνεται μέσω της χρήσης τους σε πραγματικά προβλήματα. Ευδιάκριτο στόχο αποτελεί η αναγνώριση της ειδικής περίπτωσης των δεκαδικών κλασμάτων και η μετατροπή τους σε δεκαδική μορφή. Το πρόγραμμα υπογραμμίζει τη σύνδεση δεκαδικών και κλασμάτων με σκοπό την αποτελεσματική διδασκαλία της σύγκρισης και ταξινόμησης των δεκαδικών. Υποστηρίζει πως η εξοικείωσή των μαθητών με τα δύο συστήματα αρίθμησης (δεκαδικό, κλασματικό) συμβάλλει και στην προσέγγιση δεκαδικών αριθμών μέσω γνωστών σε αυτούς, φυσικών αριθμών. Μια δραστηριότητα που εξυπηρετεί την παραπάνω ιδέα είναι η εύρεση δεκαδικών σε χιλιοστομετρικό χαρτί.

Η αριθμογραμμή συνιστάται ως μέσον διδασκαλίας των δεκαδικών αριθμών. Η εννοιολογική κατανόηση της δομής των δεκαδικών συμπεριλαμβάνεται γραπτώς στους μαθησιακούς στόχους του πιλοτικού προγράμματος και έπεται η διδασκαλία των πράξεων με δεκαδικούς. Οι μαθητές εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μεταξύ δεκαδικών και μεταξύ δεκαδικών και φυσικών αριθμών. Προβλέπεται και η διδασκαλία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δεκαδικών με μονοψήφιους φυσικούς.

Σύμφωνα με τις οδηγίες του προγράμματος οι υπολογισμοί με δεκαδικούς πρέπει να αναπτυχθούν ως επέκταση της κατανόησης των πράξεων με φυσικούς. Η διδασκαλία των πράξεων δεν είναι εστιασμένη μόνο στην αλγοριθμική διαδικασία αλλά και στην ανάπτυξη εκτιμήσεων. Οι εκτιμήσεις αποτελούν μια καλή αφετηρία για τους υπολογισμούς και τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων τους. Επιπλέον διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των αλγορίθμων για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Τέλος προς αποφυγή της ταύτισης των εκτιμήσεων με τον ακριβές αποτέλεσμα, τονίζεται στους μαθητές πότε υπάρχει ανάγκη για ένα ακριβές αποτέλεσμα, δείχνοντας έτσι την αναγκαιότητα των δεκαδικών. Ο συνολικός χρόνος που διατίθεται για τη διδασκαλία των παραπάνω είναι δεκατρείς διδακτικές ώρες.

Για την Ε΄ τάξη, προβλέπεται με την ακόλουθη σειρά η διδασκαλία των κλασμάτων έπειτα των δεκαδικών κλασμάτων και τέλος των δεκαδικών αριθμών.

Στους στόχους που αφορούν τα δεκαδικά κλάσματα περιλαμβάνεται και η μετατροπή τους στη δεκαδική τους αναπαράσταση. Ταξινομούν δεκαδικούς με περισσότερα από δύο δεκαδικά ψηφία και κάνουν εκτιμήσεις σε αποτελέσματα προβλημάτων με δεκαδικούς αριθμούς.

Μαθησιακός στόχος του πιλοτικού προγράμματος είναι και η αναγνώριση ότι κάθε δεκαδικός με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία είναι ένα κλάσμα. Επισημαίνεται πως είναι σημαντικό να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα μέρη μιας ποσότητας θα μπορούσαν να εκφραστούν σε διαφορετικές μορφές όπως ως ποσοστό, ως κλασματικό μέρος, ως δεκαδικό μέρος ή ως φυσικός αριθμός. Με την παρακάτω προτεινόμενη δραστηριότητα (πιλοτικό πρόγραμμα: 127, ΑρΔ4), προβάλλονται αυτές οι διαφορετικές μορφές : «Η Ελένη έφτιαξε μερικά μπισκότα και κάλεσε τα ξαδέλφια της για να τα δοκιμάσουν. Ο Γιώργος έφαγε το 15% του συνολικού αριθμού των μπισκότων. Ο Νικόλας έφαγε το $\frac{1}{10}$ του συνολικού αριθμού των μπισκότων. Η Λεμονιά έφαγε το 0,20 του συνολικού αριθμού των μπισκότων. Όταν τα ξαδέρφια της έφυγαν είχαν απομείνει 33 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξε συνολικά η Ελένη; Αιτιολόγησε την άποψή σου».

Στο σχολικό εγχειρίδιο δεν υπάρχουν ενδεικτικές ασκήσεις ή δραστηριότητες που να προάγουν την έκφραση μιας ποσότητας ως δεκαδικό μέρος ή ως φυσικό αριθμό. Ο προτεινόμενος χρόνος είναι δώδεκα διδακτικές ώρες.

Στην ΣΤ΄ τάξη, η διδασκαλία του κλάσματος λειτουργεί ως εφαλτήριο για την εισαγωγή των μαθητών στη μορφή του ως ποσοστό. Ενδείκνυται η χρήση της αριθμογραμμής ως μέσο για την αναπαράσταση και σύγκριση κλασματικών, δεκαδικών αριθμών και ποσοστών.

Στο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου που τιτλοφορείται «Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης» εμφανίζεται, για πρώτη φορά, πηλίκο με απειροψήφια περιοδική δεκαδική αναπαράσταση. Ζητείται η τοποθέτηση του αριθμού στην αριθμογραμμή και τίθεται η ερώτηση: «Μπορούμε να τοποθετήσουμε το κλάσμα στην αριθμογραμμή χωρίς να εκτελέσουμε τη διαίρεση;». Παρακάτω το κεφάλαιο πραγματεύεται την μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα. Σημειώνεται πως αν η διαίρεση δεν δίνει ακριβές πηλίκο, σταματάμε εκεί που θέλουμε με προσέγγιση στα δέκατα, στα εκατοστά ή στα χιλιοστά.

Για την ενότητα των δεκαδικών, το πρόγραμμα προβλέπει και θεωρεί σημαντική την ανάπτυξη στρατηγικών νοερού υπολογισμού πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα, η νοερή πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών που έχουν μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία αποτελεί μαθησιακό στόχο. Να σημειώσουμε πως το σχολικό βιβλίο δεν προσφέρει υλικό τέτοιου είδους. Τους νοερούς υπολογισμούς ακολουθεί η χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών όλων των πράξεων με δεκαδικούς. Στόχο αποτελεί και η εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης στρογγυλοποιώντας στην πλησιέστερη δύναμη του δέκα με αρνητικό εκθέτη. Τέλος επιδιώκεται η χρήση της αριθμομηχανής για υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς και για επιβεβαίωση των εκτιμήσεών τους. Η διδασκαλία προβλέπεται ότι θα ολοκληρωθεί σε δεκαοχτώ διδακτικές ώρες. Η θεσιακή αξία, η σύγκριση και η διάταξη δεκαδικών δεν προβλέπεται από το νέο πρόγραμμα σπουδών, ενώ συμπεριλαμβάνεται στο σχολικό εγχειρίδιο, πιθανώς γιατί θεωρείται γνώση που έχει κατακτηθεί σε προηγούμενες τάξεις.

Για την Α΄ γυμνασίου το πιλοτικό πρόγραμμα ορίζει στόχους για φυσικούς, ακέραιους, ρητούς μεμονωμένα. Η διδασκαλία των ρητών γίνεται ως επέκταση των ακεραίων στους ρητούς και με έμφαση στην έννοια της πυκνότητας. Ο χρόνος διδασκαλίας των ρητών καθορίζεται στις δεκαέξι διδακτικές ώρες.

Στους στόχους που θέτει για τους ρητούς ανήκουν, η αναγνώριση του κλάσματος ως θετικό ρητό και παράλληλα ως μια αναπαράσταση της διαίρεσης δύο φυσικών καθώς και η αναγνώριση των ισοδύναμων κλασμάτων ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αποτελέσματος.

Η αριθμογραμμή χρησιμοποιείται ως μέσο για την αναπαράσταση των θετικών ρητών και προσφέρει τη δυνατότητα για την αισθητοποίηση των αρνητικών ρητών. Αφού ολοκληρωθεί η εικόνα τους για τους ρητούς ως σύνολο, συγκρίνουν και διατάσσουν ρητούς στην αριθμογραμμή και γίνεται λόγος για την αρχή της πυκνότητας, η οποία χαρακτηρίζει το σύνολο των ρητών.

Η έννοια της απόλυτης τιμής που συμπεριλήφθηκε στους στόχους των ακεραίων, επεκτείνεται και στους ρητούς. Το ίδιο γίνεται και με την επέκταση των πράξεων από το σύνολο των ακεραίων στο σύνολο των ρητών, εκφράζοντας συμβολικά τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των ρητών.

Στόχο αποτελεί και η αναγνώριση των αντίστροφων αριθμών ως των αριθμών με γινόμενο ένα και των αντίθετων ως των αριθμών με άθροισμα μηδέν. Η διαίρεση ως πολλαπλασιασμός του αντιστρόφου του διαιρέτη και η αφαίρεση ως η πρόσθεση του αντιθέτου.

Η διατύπωση και η χρήση του ορισμού της δύναμης με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό και ο προσδιορισμός του πρόσημού της δύναμης σύμφωνα με τον ορισμό. Τέλος ο υπολογισμός σύνθετων αριθμητικών παραστάσεων με ρητούς που εμπεριέχουν και δυνάμεις χρησιμοποιώντας την προτεραιότητα των πράξεων και η μοντελοποίηση προβλημάτων με τη χρήση πράξεων και των ιδιοτήτων των ρητών.

Στη Β΄ γυμνασίου, οι στόχοι του νέου προγράμματος αφορούν τους άρρητους αριθμούς, την επέκταση από τους ρητούς στους πραγματικούς και την έννοια της πυκνότητας. Ο προτεινόμενος χρόνος διδασκαλίας είναι οκτώ διδακτικές ώρες.

Οι μαθησιακοί στόχοι του πιλοτικού προγράμματος προβάλλονται μέσω δραστηριοτήτων που αφορούν στη διαφορά της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και των άρρητων. Αρχικά οι μαθητές διερευνούν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και κάνουν μετατροπές από τη μια μορφή στην άλλη ενώ μέσα από δραστηριότητες αναδεικνύονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των άρρητων και τα κοινά τους χαρακτηριστικά με τους ρητούς, που αποτελούν χαρακτηριστικά του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Η αναγκαιότητα και η χρήση τετραγωνικών ριζών και άρρητων αριθμών προβλέπεται μέσω προβλημάτων και ο υπολογισμός αυτών γίνεται με τρείς τρόπους. Με δοκιμές, με διαδοχικές προσεγγίσεις και με χρήση υπολογιστή τσέπης.

Μέσω της διερεύνησης αριθμών που δεν είναι ρητοί αναγνωρίζουν τους άρρητους. Η τοποθέτηση και η γεωμετρική αναπαράσταση στην ευθεία αριθμών με μορφή ριζικού είναι ακόμα ένας στόχος του προγράμματος. Αναγνωρίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών μέσω της διερεύνησης των σχέσεων που έχουν οι φυσικοί, οι ρητοί και οι άρρητοι με τους πραγματικούς.

Η επέκταση των πράξεων των ρητών και των ιδιοτήτων τους, στους πραγματικούς, αποπνέει την ίδια φιλοσοφία που αναπτύχθηκε για την επέκταση των πράξεων των ακεραίων στους ρητούς και αποτελούσε μέρος των μαθησιακών αποτελεσμάτων της Α΄ γυμνασίου**.** Σύμφωνα με το πρόγραμμα προβλέπετε η διερεύνηση της ιδιότητας της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών (όπως αναφ. στο πιλοτικό: 52, Αρ8). Τέλος οι πραγματικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων.

Για τη Γ΄ γυμνασίου το πιλοτικό πρόγραμμα ορίζει στόχους που αφορούν τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών και τους μετασχηματισμούς με τη βοήθεια αυτών. Επιδιωκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι η απόδειξη των ιδιοτήτων των ριζών και η χρήση τους στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων. Ο χρόνος που διατίθεται είναι τρείς διδακτικές ώρες.

2.2.3 Σύγκριση του ισχύοντος Προγράμματος Σπουδών με το πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών.

Από την περιγραφή και σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών για τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών, προκύπτουν κάποιες γενικές διαπιστώσεις. Φαίνεται οι διαφορές που παρουσιάζουν να είναι περισσότερες από τις ομοιότητές τους. Η συγκριτική ανάλυση που ακολουθεί επικεντρώνεται στις διαφοροποιήσεις τους, όσον αφορά, τους στόχους που θέτουν και τους τρόπους που προτείνουν για την εισαγωγή των δεκαδικών στις σχολικές τάξεις.

Τα αριθμητικά υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο από τα δύο προγράμματα σπουδών,. Στους στόχους που ορίζει το ισχύον πρόγραμμα για τις Δ΄ και ΣΤ΄ τάξεις του δημοτικού συμπεριλαμβάνονται στόχοι για φυσικούς και δεκαδικούς μαζί ενώ στο γυμνάσιο η κατηγοριοποίηση των αριθμητικών συνόλων παραμένει ίδια, καθώς οι στόχοι ορίζονται για φυσικούς, κλάσματα, δεκαδικούς, θετικούς και αρνητικούς. Σύμφωνα με το πιλοτικό πρόγραμμα, οι στόχοι για το δημοτικό επιμερίζονται σε στόχους για φυσικούς, κλασματικούς, δεκαδικούς και ακέραιους ενώ στο γυμνάσιο για φυσικούς, ακέραιους και ρητούς και προβλέπεται η διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των παραπάνω συνόλων. Η εννοιολογική κατανόηση της δομής των δεκαδικών συμπεριλαμβάνεται γραπτώς στους μαθησιακούς στόχους του πιλοτικού, από τη Δ΄ τάξη δημοτικού, ενώ στο ισχύον υπονοείται μέσω δραστηριοτήτων που προάγουν την έννοια της πυκνότητας.

Ο τρόπος εισαγωγής των δεκαδικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση βρίσκει σύμφωνα τα δύο προγράμματα, καθώς και στα δύο οι στόχοι αφορούν την αναγνώριση, τη γραφή και την ορολογία τους μέσα σε μια ποικιλία από καθημερινά πλαίσια. Όμως, τα δύο προγράμματα σπουδών «συγκρούονται» ως προς τη σειρά διδασκαλίας των κλασμάτων και των δεκαδικών τους αναπαραστάσεων.

Σύμφωνα με το πιλοτικό πρόγραμμα, η εισαγωγή στα κλάσματα γίνεται στην Α΄ δημοτικού και η πρώτη διαισθητική επαφή με τους δεκαδικούς ακολουθεί τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών στη Β΄ δημοτικού. Το ισχύον πρόγραμμα προβλέπει, για τη Γ΄ τάξη του δημοτικού, την εισαγωγή δεκαδικών και έπειτα κλασματικών αριθμών.

Σύμφωνα με το ισχύον πρόγραμμα, σε κάθε τάξη, διδάσκονται πρώτα οι δεκαδικοί και έπειτα τα κλάσματα ενώ στο πιλοτικό αντίθετα, ακολουθείται η ιστορική πορεία εξέλιξης των αριθμών καθώς η κατανόηση των κλασμάτων τίθεται ως προϋπόθεση για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών.

Η διδασκαλία των υπολογισμών με δεκαδικούς, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση διαφέρει ανάμεσα στα δύο προγράμματα. Το πιλοτικό, δίνει έμφαση στη χρήση στρατηγικών νοερού υπολογισμού και στις εκτιμήσεις, έναντι του ισχύοντος που προσδίδει βαρύτητα κυρίως στην εκμάθηση μηχανιστικών κανόνων και αλγορίθμων για την εκτέλεση των πράξεων.

Οι στόχοι που ορίζει το πιλοτικό πρόγραμμα, για τη διδασκαλία των πράξεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δεν περιλαμβάνουν μόνο την εκμάθηση αυτών, όπως συμβαίνει με το ισχύον πρόγραμμα αλλά συνδέονται ως εξής: Η διδασκαλία των πράξεων και των ιδιοτήτων των πραγματικών, στη Β΄ γυμνασίου, προκύπτει ως επέκταση των πράξεων και των ιδιοτήτων των ρητών. Οι πράξεις μεταξύ ρητών, στην Α΄ γυμνασίου, διδάσκονται ως επέκταση της κατανόησης των πράξεων με ακεραίους που με τη σειρά τους προκύπτει ως επέκταση της κατανόησης των πράξεων με φυσικούς.

Το ισχύον πρόγραμμα εστιάζει στην επανάληψη και όχι στην εμβάθυνση στο σύνολο των ρητών. Το πιλοτικό πρόγραμμα προτείνει περισσότερες ώρες για τη σύνδεση της προϋπάρχουσας γνώσης με το νέο πεδίο διερεύνησης, που αφορά τις ιδιότητες του σύνολο των ρητών, τη σχέση του με τις κλασματικές και δεκαδικές αναπαραστάσεις αυτών. Αντίθετα το ισχύον πρόγραμμα αφιερώνει ισάξιο αριθμό διδακτικών ωρών για την επανάληψη κλασμάτων, δεκαδικών και έπειτα ρητών. Η δεκαδική μορφή των ρητών, που εμπεριέχεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ γυμνασίου, σύμφωνα με τον οδηγό διδασκαλίας για το έτος 2017-2018 μετατίθεται στην ύλη της επόμενης τάξης. Το πρόγραμμα σπουδών προβλέπει μία διδακτική ώρα για τη διδασκαλία της δεκαδικής μορφής των ρητών ενώ οι οδηγίες διδασκαλίας επτά διδακτικές ώρες για τις παραγράφους 7.7 Δεκαδική μορφή των ρητών,7.8 Δυνάμεις ρητών με εκθέτη φυσικό και 7.9 Δυνάμεις φυσικών με εκθέτη ακέραιο.

Όσον αφορά την έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης, το νέο πρόγραμμα ορίζει στόχους που την εμπεριέχουν, οι οποίοι πηγάζουν από τις παρανοήσεις που έχει αναδείξει η έρευνα. Η αναγνώριση ενός δεκαδικού με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία, ως κλάσμα εμφανίζεται από την Ε΄ τάξη και εμπλουτίζεται στις επόμενες.

Στο πιλοτικό πρόγραμμα, τονίζεται η σημαντικότητα της σύνδεσης των δύο αριθμητικών συστημάτων (κλασμάτων, δεκαδικών) και η διαφορά της δεκαδικής αναπαράστασης ρητών και άρρητων, όπως και οι μετατροπές στις ποικίλες αναπαραστάσεις των ρητών. Οι δραστηριότητες που προτείνει αναδεικνύουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ρητών και άρρητων καθώς και τα κοινά χαρακτηριστικά τους με τους πραγματικούς εστιάζοντας στη δεκαδική τους αναπαράσταση.

Στο ισχύον πρόγραμμα, το οποίο παρουσιάζεται κατακερματισμένο για κάθε τάξη ξεχωριστά, η δεκαδική αναπαράσταση δεν κατέχει πρωτεύοντα ρόλο στη διδασκαλία των πραγματικών και προβάλλεται ως διαφορετική αναπαράσταση μόνο των δεκαδικών κλασμάτων και όχι ισοδύναμη με την κλασματική αναπαράσταση των ρητών. Στους στόχους που αφορούν την ύλη του γυμνασίου, η δεκαδική μορφή των ρητών διδάσκεται ως αυτόνομη διδακτική ενότητα χωρίς να συνδέεται με τη δεκαδική μορφή των άρρητων. Στη διδασκαλία των άρρητων, δεν περιλαμβάνεται η αναγνώρισή τους μέσω της δεκαδικής τους αναπαράστασης, αλλά δίνεται έμφαση στον ορισμό τους καθώς και σε μια ποικιλία παραδειγμάτων με άρρητους. Τα παραδείγματα αυτά σκοπό έχουν την αποφυγή της παρανόησης πως οι άρρητοι είναι μόνο θετικές ή αρνητικές ρίζες των ρητών. Η πληθώρα των παραδειγμάτων αυτών οδηγεί στην έλλειψη κατανόησης της δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων. Συγκεκριμένα στο σχολικό βιβλίο και στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών παρουσιάζονται οι εξής άρρητοι: $1+\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{5}{\sqrt{2}}$, 2,101001000100001…. Στον τελευταίο άρρητο, τα ψηφία του αριθμού επαναλαμβάνονται με έναν προφανή κανόνα και ανήκει στην κατηγορία της διαφανούς δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων. Οι οδηγίες διδασκαλίας για το έτος 2017 - 2018 προτείνουν την κατασκευή τέτοιων αριθμών στην τάξη. Με το παράδειγμα αυτό επιχειρείται η ταύτιση των άρρητων με τους ασσύμετρους δεκαδικούς. Ενδεχομένως τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις των άρρητων να πηγάζουν από την επικέντρωσή κυρίως στις διαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις τους.

Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ γυμνασίου καταγράφεται το εξής συμπέρασμα: «ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ρητός ή δεκαδικός με γνωστά ψηφία. Υπάρχουν και άλλοι άρρητοι αριθμοί εκτός από τις ρίζες ρητών αριθμών, όπως π.χ. ο π». Στο ίδιο βιβλίο στην ενότητα «Μήκος κύκλου» αναφέρεται ότι: «ο π είναι άρρητος δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα ψηφία του δεν προκύπτουν από μια συγκεκριμένη διαδικασία» (σελ. 187). Η παραπάνω έκφραση λανθασμένα μπορεί να οδηγήσει τον αναγνώστη στο συμπέρασμα ότι αν τα ψηφία ενός απειροψήφιου προκύπτουν από μια συγκεκριμένη διαδικασία, όπως είναι η περίπτωση των ασύμμετρων δεκαδικών[6] τότε ο αριθμός είναι ρητός.

Κοινοί στόχοι των προγραμμάτων είναι η έμφαση στη διάταξη και στην αναπαράστασή των πραγματικών αριθμών στην ευθεία καθώς και η χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Αμφότερα τα δύο προγράμματα επισημαίνουν τη διάκριση μεταξύ αρρήτου και της ρητής προσέγγισής του.

Τέλος, η αίσθηση του αριθμού εμπλουτίζεται σημαντικά στο νέο πρόγραμμα στο οποίο προστίθενται νέοι στόχοι για τη διδασκαλία των δεκαδικών όπως, για παράδειγμα, γίνεται διεύρυνση της ισοδυναμίας κλασματικών και δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών, και δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στη χρήση της δεκαδικής αναπαράστασης ως χαρακτηριστικό γνώρισμα διαχωρισμού ρητών και άρρητων. Το νέο πρόγραμμα ακολουθεί τις εξελίξεις της έρευνας για τη διδασκαλία της δεκαδικής αναπαράστασης στην εκπαίδευση καθώς λαμβάνει υπόψη τα ευρήματα που αφορούν προβλήματα και παρανοήσεις των μαθητών στη διδασκαλία των πραγματικών και στις ποικίλες αναπαραστάσεις τους. Οι οδηγίες διδασκαλίας για το έτος 2017-2018 σημειώνουν αρκετές τροποποιήσεις στο ισχύον πρόγραμμα εστιάζοντας σε ευρήματα της επιστημονικής έρευνας χωρίς όμως να περιλαμβάνουν αλλαγές στη διδασκαλία των πραγματικών που αφορούν στην έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης.

Οι Fauvel & van Maanen (1997) επισημαίνουν την πρόταση πολλών ερευνητών για τη συγκρότηση μιας ομάδας εργασίας αποτελούμενη από ιστορικούς των μαθηματικών, σχεδιαστές αναλυτικών προγραμμάτων και εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, με στόχο την επεξεργασία ενός πλαισίου για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και μελέτη της αποτελεσματικότητάς της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών απαιτεί συστηματική προσέγγιση, οποία θα βασίζεται στη μεθοδική συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών και ιστορικών (Furinghetti, 1997: 55)**.** Η παιδαγωγική χρήση της ιστορίας προκύπτει από τη σύνδεση της ιστορικής γνώσης

[6] Βλέπε το ευρετήριο ειδικής ορολογίας στο παράρτημα της διπλωματικής.

που κατέχουμε με την ιδέα της δημιουργικής σχεδίασης και ανάπτυξης δραστηριοτήτων για την αίθουσα διδασκαλίας με απώτερο σκοπό τη βελτίωση της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης (Furinghetti & Radford, 2002: 24).

2.3 Συμπεράσματα.

Σύμφωνα με τα προβλήματα που αναδεικνύει η έρευνα και με το νέο πρόγραμμα σπουδών του γυμνασίου, προκύπτει η ανάγκη όχι μόνο για επανάληψη αλλά και για εμβάθυνση στις πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών. Η τάση των μαθητών να μετατρέπουν όλα τα κλάσματα σε δεκαδική μορφή αποτελεί χαρακτηριστικό της διδασκαλίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Όταν όμως εισάγεται η έννοια του ρητού αριθμού, η τάση αυτή μπορεί να προκαλέσει πληθώρα παρανοήσεων. Οι μαθητές θεωρούν πως άλλοι αριθμοί είναι οι ρητοί, άλλοι τα κλάσματα και άλλοι οι δεκαδικοί. Η παρανόηση αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί με αφορμή την εισαγωγή των άρρητων και των πραγματικών - στη Β΄ γυμνασίου – ώστε να αποκτήσουν μια καλύτερη εικόνα για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις τους. Παρόλα αυτά οι παρανοήσεις παρατηρούνται και στις επόμενες τάξεις με αποτέλεσμα να δημιουργείται η ανάγκη εμβάθυνσης στην Α΄ λυκείου. Το πρόγραμμα σπουδών αναγνωρίζει τα προβλήματα αυτά και προτείνει να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων.

Από τη σκοπιά της ιστορίας, η πορεία εκμάθησης των κλασμάτων και της δεκαδικής τους αναπαράστασης στην εκπαίδευση ακολουθεί την αντίθετη ακριβώς πορεία από εκείνη που μας αποκαλύπτει η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του αριθμού. Πώς η ιστορική εξέλιξη της έννοιας της δεκαδικής αναπαράστασης μπορεί να φωτίσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές και καθηγητές σε αυτό το θέμα; Μπορεί να χαρτογραφήσει την πορεία διδασκαλίας για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας;

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου & Οδηγίες Εκπαιδευτικού 2018-2019.

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου και τις οδηγίες διδασκαλίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής για το έτος 2018-2019 η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών επικεντρώνεται στην επανάληψη αλλά και στην εμβάθυνση των ιδιοτήτων του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο την κατανόηση της δομής του.

Το δεύτερο κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου της Άλγεβρας που τιτλοφορείται «Οι πραγματικοί Αριθμοί» αποτελείται από τις ενότητες §2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους, §2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών, §2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών, §2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών.

Το Πρόγραμμα σπουδών ορίζει δεκατέσσερις διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου «Οι πραγματικοί Αριθμοί» . Συγκεκριμένα, πέντε ώρες για τις πράξεις και τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, τέσσερις ώρες για τη διάταξη, τρείς ώρες για την απόλυτη τιμή και δύο ώρες για τις ρίζες πραγματικών αριθμών. Στις οδηγίες διδασκαλίας 2018-2019 προτείνεται να διατεθούν δεκαεννέα διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία του ίδιου κεφαλαίου. Από το σύνολο των παραπάνω ωρών, πέντε ώρες αφιερώνονται για τις πράξεις και τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, πέντε ώρες για τη διάταξη, έξι ώρες για την απόλυτη τιμή και τρείς ώρες για τις ρίζες πραγματικών αριθμών. Στην παρούσα μελέτη θα εστιάσουμε στους στόχους που αφορούν τις ενότητες §2.1, §2.2.

Για την ενότητα §2.1, το Πρόγραμμα Σπουδών για την Α΄ Λυκείου περιλαμβάνει τη διάκριση ρητών και άρρητων μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους καθώς και την ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Παρατηρούμε ότι το σχολικό βιβλίο – στην ίδια ενότητα - δεν περιέχει άσκηση που να προάγει την επίτευξη του παραπάνω στόχου. Ενδεικτική δραστηριότητα θεωρείται η απόδειξη ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο (εις άτοπον απαγωγή), η οποία περιλαμβάνεται και στις εφαρμογές του σχολικού βιβλίου (σελ.51). Οι οδηγίες διδασκαλίας συμπληρώνουν και τη χρήση του αντιπαραδείγματος για την απόρριψη του ισχυρισμού: $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$.

Σημειώνουμε ότι στο εισαγωγικό κεφάλαιο της Άλγεβρας, στην ενότητα §Ε2 Σύνολα, υπάρχει δραστηριότητα που αφορά στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών και συγκεκριμένα των αριθμών που βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα.

-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	2,**3**	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5

Όμοια δραστηριότητα προτείνει και το πρόγραμμα σπουδών. Η διάκριση των πραγματικών αριθμών δεν γίνεται σύμφωνα με τη δεκαδική τους αναπαράσταση αλλά κυρίως με βάση των ορισμό των ρητών και των άρρητων αριθμών. Η ποικιλία των παραδειγμάτων είναι εστιασμένη στην περιοδικότητα και δεν υπάρχει παράδειγμα που να αναδεικνύει την ασυμμετρία των άρρητων αριθμών.

Συνεχίζοντας με τους στόχους που αφορούν στην ενότητα §2.1, το πρόγραμμα ορίζει τη διερεύνηση των ιδιοτήτων των πράξεων των πραγματικών αριθμών, την κατανόηση της ισοδυναμίας και της συνεπαγωγής και την εφαρμογή αποδεικτικών μεθόδων. Τόσο το σχολικό εγχειρίδιο όσο και το Πρόγραμμα Σπουδών εστιάζουν στον αλγεβρικό λογισμό ενώ οι οδηγίες διδασκαλίας επισημαίνουν ότι δεν είναι αυτός ο κύριος στόχος του κεφαλαίου.

Σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας πρέπει να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί $\frac{4}{3}$, $1.333\ldots$, $1.010101\ldots$, $1.1010010001\ldots$, καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως $\frac{4}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\frac{\pi}{6}$, 1.333 κ.ά.). Τα παραπάνω παραδείγματα, θεωρούνται κατάλληλα για χρήση στο ερώτημα: «το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος;». Η πρόταση αυτή συναντάται και στις ερωτήσεις κατανόησης του σχολικού εγχειριδίου (σελ76).

Στις οδηγίες διδασκαλίας, υπογραμμίζετε ότι οι δυσκολίες διάκρισης ρητών και άρρητων καθώς και η ταξινόμηση των πραγματικών στα βασικά τους υποσύνολα επηρεάζονται από τις ποικίλες διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών. Όσον αφορά τον αλγεβρικό λογισμό, ο οδηγίες προτείνουν, η κατανόηση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων των πράξεων να γίνει με τη βοήθεια της λεκτικής διατύπωσης των ιδιοτήτων ενώ η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και» να γίνει με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες: $\alpha\cdot\beta=0 \leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$, $\alpha\cdot\beta\neq0 \leftrightarrow \alpha\neq0$ και $\beta\neq0$.

Στο σχολικό εγχειρίδιο δίνεται ο ορισμός ρητών και άρρητων και ορίζεται η δεκαδική αναπαράσταση των ρητών. Συγκεκριμένα καταγράφεται το συμπέρασμα: «Μπορούμε να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς». Όσον αφορά τους άρρητους, παρουσιάζεται η ισοδυναμία του ορισμού τους ως μη ρητών χωρίς όμως να διατυπώνεται με σαφήνεια η δεκαδική τους αναπαράσταση. Η έκφραση «Υπάρχουν όμως και αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν την μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$ (ή με άλλα λόγια δεν μπορούν να γραφτούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται άρρητοι αριθμοί.» Η παραπάνω έκφραση εμποδίζει την κατανόηση της διαφανούς ή αδιαφανούς δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων.

Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι το πρόγραμμα σπουδών δεν αναφέρει τη δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων με στόχο τη διάκριση των δύο βασικών συνόλων που δομούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Οι οδηγίες για τη διδασκαλία προτείνουν μια ποικιλία παραδειγμάτων ρητών και άρρητων αριθμών, τα οποία ενδείκνυνται για την κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης. Μεταξύ αυτών περιέχονται και άρρητοι με διαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις.

Για την ενότητα §2.2, οι στόχοι που θέτει το πρόγραμμα σπουδών είναι η διερεύνηση της έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών. Η αναπαράσταση συνόλων στον άξονα των πραγματικών αριθμών και η διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας.

Οι οδηγίες διδασκαλίας για το έτος 2018-2019 επισημαίνουν την δυσκολία κατανόησης της πυκνότητας των ρητών λόγω της προϋπάρχουσας γνώσης για τη διαδοχικότητα των ακεραίων. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες: $α^2+β^2=0 \leftrightarrow α=0$ και $β=0$, ενώ $α^2+β^2>0 \leftrightarrow α\neq0$ ή $β\neq0$.

Πρόγραμμα Σπουδών και οδηγίες διδασκαλίας προτείνουν την παρακάτω δραστηριότητα για την εμπέδωση της ενότητας §2.2 (δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ):

«Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

α) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$;

β) Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στον 1,2 και στον 1,3; Αν ναι, γράψτε έναν.

γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα: «ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός»;

δ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

ε) Υπάρχει ο επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον 0,99… και στον 1;. Ανάμεσα στον 0,899… και στον 0,9; Τι παρατηρείτε; ».

Το ζήτημα της διδακτικής πραγμάτευσης των πραγματικών αριθμών και της δεκαδικής τους αναπαράστασης απασχολεί μεγάλο εύρος της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Συναντάται στα προγράμματα Σπουδών από τη Δ’ τάξη του δημοτικού έως και την Α΄ τάξη του Λυκείου. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών και κυρίως οι αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις τους αποτελούν πρόβλημα για τους περισσότερους μαθητές. Οι οδηγίες διδασκαλίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής επισημαίνουν τα προβλήματα αυτά και προτείνουν τρόπους αντιμετώπισής τους. Παρόλα αυτά τα Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά βιβλία δεν παρέχουν ικανοποιητικό εκπαιδευτικό υλικό που αφορά στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών και δεν διατυπώνουν με σαφήνεια τις βασικές διαφορές που παρουσιάζουν ρητοί και άρρητοι στην δεκαδική τους μορφή. Εστιάζουν στον ορισμό των άρρητων ως μη ρητών και παραγκωνίζουν τη χρήση της δεκαδικής αναπαράστασης ως μέσο για την αναγνώριση ενός πραγματικού αριθμού. Αναπόφευκτα παραμένουν κενά και παρανοήσεις που αφορούν τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών καθώς στην Α΄ Λυκείου δεν γίνεται ουσιαστική εμβάθυνση αλλά μόνο επανάληψη της υπάρχουσας γνώσης του γυμνασίου. Δεν προβλέπεται ο σαφής ορισμός (που δεν επιδέχεται παρερμηνείες) για την δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων αλλά προκύπτει ως συμπέρασμα από τον ορισμό της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών και η αντίληψή των μαθητών για αυτή την αναπαράσταση βασίζεται σε επιλεγμένα παραδείγματα άρρητων.

Κεφάλαιο ΙΙΙ : Μια ανάλυση για τη σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τα ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι λόγοι για τους οποίους - σύμφωνα με τη βιβλιογραφία - υποστηρίζεται η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και παρατίθενται οι τρόποι με τους οποίους η ιστορία μπορεί στην πράξη να ενσωματωθεί ως διδακτικό εργαλείο.

3.1 Ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών - Επιχειρήματα για τη χρήση της στην μαθηματική εκπαίδευση.

Τα προβλήματα που αναδεικνύουν οι έρευνες μπορεί να οφείλονται στις αντιλήψεις των μαθητών, στην κατάρτιση των εκπαιδευτικών και να πηγάζουν από τις επιλογές των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών, τις οδηγίες διδασκαλίας καθώς και τον τρόπο διδασκαλίας. Τα λάθη των μαθητών μπορεί να οφείλονται σε έλλειψη γνώσης αλλά δεν είναι λίγες οι φορές που η ύπαρξη γνώσης, προκαλεί παρανοήσεις για μια έννοια που είναι πολυδιάστατη και η σύλληψή της επιβάλλει συνδυαστική σκέψη και αναθεώρηση του μέχρι τότε γνωστού πλαισίου. Η παρατήρηση δυσκολιών και εμποδίων που εμφανίζονται στην ιστορία επανεμφανίζονται και στην τάξη (Thomaidis, et al., 2007: 179; Farmaki, et al., 2007; Vasco, 1995). Το ερώτημα είναι «Μπορεί η ιστορία να συμβάλλει θετικά στην ελαχιστοποίηση αυτών των προβλημάτων και ποια είναι τα εκπαιδευτικά οφέλη που επιτυγχάνονται μέσω της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών;»

Πολλοί ερευνητές, ασχολήθηκαν με το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών και ορισμένοι επικεντρώθηκαν και στην ενσωμάτωσή της στην μαθηματική εκπαίδευση, παραθέτοντας επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της (Tzanakis και Arcavi, 2000: 202). Υπάρχουν βέβαια και εκείνοι που στέκονται κριτικά απέναντι σε αυτή την αντίληψη, εκφράζοντας τα αντεπιχειρήματά τους (Tzanakis & Arcavi, 2000: 203).

Σύμφωνα με τους Tzanakis και Arcavi (2000: 203-207) υπάρχουν 17 θέματα που αναδύονται από την βιβλιογραφική ανασκόπηση και επιχειρηματολογούν υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση. Τα θέματα αυτά τα ταξινομούν στους ακόλουθους "κύριους τομείς":

α) Η μάθηση των μαθηματικών.

β) Η φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας.

γ) Το διδακτικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών.

δ) Η συναισθηματική προδιάθεση απέναντι στα μαθηματικά.

ε) Η πολιτισμική διάσταση των μαθηματικών.

Θα αναφέρουμε ενδεικτικά, κάποια από τα επιχειρήματα του κάθε τομέα:

(α) Η εκμάθηση των μαθηματικών.

Οι έννοιες, οι δομές και οι ιδέες συνδέονται με τους λόγους, τα αίτια και τα φαινόμενα που τις δημιούργησαν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πηγές για πιθανούς τρόπους παρουσίασης ενός μαθηματικού αντικειμένου. Η ιστορία σχετίζεται με τον τρόπο εξέλιξης μιας έννοιας, τις διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθηματικών στο παρελθόν, τις δυσκολίες τους, τη μαθηματική δημιουργικότητά τους, μέχρι το στάδιο της τυποποίησης (Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi, 1987: 18). Σύμφωνα με τον Fauvel (1991: 4), η ιστορική παρουσίαση του τρόπου ανάπτυξης των εννοιών, βοηθά την κατανόησή τους. Σε αυτό το πλαίσιο, οι ιστορικά εμπνευσμένες ασκήσεις μπορούν να διεγείρουν το ενδιαφέρον του μαθητή καθώς και να λειτουργήσουν ως γέφυρα ανάμεσα στα μαθηματικά και σε άλλα επιστημονικά πεδία.

(β) Η φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας.

Σε θέματα που αφορούν τη φύση των μαθηματικών, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται ως προς την μορφή και το περιεχόμενό τους. Ένα παράδειγμα της εξέλιξης της μορφής των μαθηματικών είναι η σημειογραφία τους. Η ιστορία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τόσο τα ιστορικά προβλήματα, όσο και τη μαθηματική συμβολική γλώσσα μιας δεδομένης περιόδου, να την συγκρίνουν με τη σύγχρονη και να διεξάγουν συμπεράσματα για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των διαφόρων σημειογραφιών που χρησιμοποιήθηκαν κατά καιρούς. Όπως σημειώνει ο Fauvel, J. (1991: 4), η σύγκριση του αρχαίου και του σύγχρονου είναι εκείνη που καθιερώνει την αξία των σύγχρονων τεχνικών.

Επιπλέον, ο Liu (2003: 416) και ο Fauvel (1991: 4) υποστηρίζουν, πως τα εμπόδια και οι δυσκολίες που εμφανίστηκαν στο παρελθόν, μπορούν να εξηγήσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν σήμερα οι μαθητές και να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

(γ) Το διδακτικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών και το παιδαγωγικό τους ρεπερτόριο.

Όσον αφορά τη διαδικασία της διδακτικής πράξης, η ιστορική εξέλιξη μιας έννοιας μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να προσδιορίσουν τα κίνητρα εισαγωγής της έννοιας και το αποτέλεσμα της σταδιακής εξέλιξης, τις δυσκολίες που εμφανίστηκαν στην ιστορία και μπορούν να επανεμφανιστούν στην τάξη, να εμπνεύσει τους διδάσκοντες, να τους βοηθήσει να εμπλουτίσουν τα παραδείγματα και τις εναλλακτικές προσεγγίσεις για το εκάστοτε διδακτικό ζήτημα, να αντλήσουν υλικό από πρωτότυπες ιστορικές πηγές. Ο Fauvel, J. (1991: 6) επισημαίνει την προσοχή που πρέπει να δοθεί όσον αφορά την ηλικία και το εύρος των ικανοτήτων των μαθητών που εμπλέκονται στις δραστηριότητες. Με αυτή την έννοια, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τον καθηγητή να συνειδητοποιήσει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της παρουσίασης ενός θέματος σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο εκπαίδευσης (Tzanakis & Arcavi 2000: 206, Arcavi in Ransom 1991: 11, Tzanakis 1996: 97, Hong 1998: 1, Rodriguez 1998: 4-5).

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να διαδραματίσει έναν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών, αλλά και των εκπαιδευτικών που παρακολουθούν προγράμματα ενδοϋπηρεσιακής επιμόρφωσης (Fauvel & van Maanen 1997: 256). Σύμφωνα με τον Liu (2003: 416), η ιστορία μπορεί να αποτελέσει για τους εκπαιδευτικούς έναν οδηγό για τη διδασκαλία τους και μπορεί να προσφέρει (Fauvel, J.,1991: 4) θέματα διεπιστημονικής και διαθεματικής συνεργασίας.

Σύμφωνα με ένα επίσημο έγγραφο του Βρετανικού Υπουργείου Παιδείας που αναφέρει ο Fauvel, J. (1991: 3):

> Ο δάσκαλος που γνωρίζει ελάχιστα την Ιστορία των Μαθηματικών είναι ικανός να διδάσκει μεμονωμένα τεχνικές, ανεξάρτητες είτε από τα προβλήματα και τις ιδέες που τις δημιούργησαν είτε από τις περαιτέρω εξελίξεις που γεννήθηκαν από αυτές. Η γνώση των επιχειρημάτων και των διαφωνιών ανάμεσα σε σπουδαίους μαθηματικούς μπορεί να προκαλέσει υγιή σκεπτικισμό και συζήτηση στην τάξη και να οδηγήσει σε πιο σταθερή πρόσληψη των βασικών εννοιών. Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα που παρέχει η ιστορική γνώση στον δάσκαλο, είναι ότι του δίνει τη δυνατότητα να αξιολογεί σύγχρονες καταστάσεις στη βάση παλαιότερων. Είναι σημαντικό να μεταφέρουμε στους μαθητές τη γνώση ότι πολλά από αυτά που διδάσκονται σήμερα ως τελικό προϊόν ήταν αποτέλεσμα αιώνων αναζήτησης ή έντονης αντιπαράθεσης. Τα μαθηματικά μπορούν να

διδαχθούν σωστά μόνο σε ένα ιστορικό πλαίσιο (Ministry of Education, 1958).

(δ) Η συναισθηματική προδιάθεση προς τα μαθηματικά.

Η ιστορία μπορεί να ενισχύσει τη συναισθηματική προδιάθεση των μαθητών για τα Μαθηματικά. Μπορεί να κάνει τα μαθηματικά να φαντάζουν λιγότερο απωθητικά ακόμα και να αλλάξει τις αντιλήψεις των μαθητών για αυτά, να διατηρήσει το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό καθώς βοηθά στην αύξηση του κινήτρου για μάθηση (Fauvel,1991: 4). Η ιστορία φαίνεται να είναι φυσικό μέσο για την ενθάρρυνση αυτού του συναισθήματος, αφού "η ιστορία των μαθηματικών είναι μια πλούσια πηγή παραδειγμάτων που δείχνει τρόπους με τους οποίους οι προηγούμενες γενιές έχουν πειραματιστεί και ανακάλυψαν την ανάγκη για επισήμως αναγνωρισμένες μαθηματικές δομές". (Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi, 1987: 18). Έτσι οι μαθητές θα συνειδητοποιούν ότι δεν είναι οι μόνοι που αντιμετωπίζουν τέτοιου είδους προβλήματα, και δεν θα αποθαρρύνονται από τα λάθη τους (Fauvel, 1991: 4).

(ε) Η εκτίμηση των μαθηματικών ως πολιτισμικής προσφοράς.

Τα μαθηματικά δεν είναι ένα άκαμπτο δομημένο σύστημα αποτελεσμάτων, αλλά μια συνεχώς εξελισσόμενη ανθρώπινη πνευματική διαδικασία, στενά συνδεδεμένη με άλλες επιστήμες, τον πολιτισμό και την κοινωνία (Rickey 1996: 252, Ernest 1996: 238, Maanen 1991: 47).

Οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν τις γνώσεις τους και να κατανοήσουν τους τρόπους με τους οποίους οι επιστημονικές ιδέες αλλάζουν διαχρονικά και πώς η φύση αυτών των ιδεών και των χρήσεων τους επηρεάζονται από τα κοινωνικά, ηθικά, πνευματικά και πολιτισμικά πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύσσονται (Science in the National Curriculum, 1989, Fauvel, 1991:4).

Μια ιστορική διάσταση στην εκμάθηση των μαθηματικών βοηθά να αναδείξουμε δύο αντίθετες αντιλήψεις με διαλεκτικό τρόπο. Το ένα είναι ότι οι μαθηματικές εξελίξεις λαμβάνουν χώρα μέσα σε πολιτιστικά πλαίσια. Η αντίθεση σε αυτό είναι η συνειδητοποίηση ότι όλες οι ανθρώπινες κουλτούρες έχουν δημιουργήσει μαθηματικές εξελίξεις οι οποίες είναι τώρα η κληρονομιά όλων. αυτό συνεπώς δρα ενάντια σε μια στενή εθνοκεντρική άποψη μέσα στο εκπαιδευτικό σύστημα. (Fauvel & van Maanen, 1997: 256)

Οι Liu (2003) και Fauvel (1991) σημειώνουν πως η ιστορία αποκαλύπτει τις ανθρωπιστικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης και σύμφωνα με τον δεύτερο, η ιστορία βοηθά στην ερμηνεία του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία καθώς και στην ανάπτυξη μιας πολυπολιτισμικής προσέγγισης. Όπως τα λάθη εξεχόντων προσωπικοτήτων στη διάρκεια της Ιστορίας, αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι στην εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, έτσι και τα λάθη των μαθητών αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι στην εξέλιξη της έρευνας που επικεντρώνεται στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών. Από αυτή τη σκοπιά η ιστορία παρέχει ευκαιρίες για έρευνες (Fauvel, 1991: 4). Ολοκληρώνοντας την ανασκόπηση για το ρόλο της ιστορίας στην μαθηματική εκπαίδευση, θα παραθέσουμε την ιδέα, του Γερμανού βιολόγου Ernst Haeckel's (1834–1919): «Η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση», την οποία χρησιμοποίησε ο Felix Klein (1939) για τη διδακτική χρήση της ιστορίας των μαθηματικών ως εξής : Η «γενετική αρχή» η οποία εκφράζει το θεμελιώδη βιογενετικό νόμο λέει ότι «η οντογενετική εξέλιξη είναι μια συντόμευμένη επανάληψη της φυλογενετικής εξέλιξης». Σύμφωνα με την άποψη αυτή, ένας μαθητής για να μάθει, πρέπει να αντιμετωπίσει τους ίδιους προβληματισμούς που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος και να βαδίσει στις ίδιες διαδρομές που ακολούθησαν τα ίδια τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους (Furinghetti & Radford, 2002: 634*)*. Ωστόσο, δεν σημαίνει ούτε ότι υπάρχει μια μοναδική συγκεκριμένη παρουσίαση ενός θέματος που ακολουθεί ακριβώς την συνήθως περίπλοκη ιστορική εξέλιξη, ούτε ότι η μάθηση των μαθηματικών θα πρέπει να καθοδηγείται από την έκφραση: «Η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη «φυλογένεση» (Fauvel 1991: 3-4, Sierpinska 1994: 122, Rogers 1998:52).

Φυσικά στη διδασκαλία δεν είναι δυνατό να διατρέξει κανείς όλα τα στάδια της εξέλιξης, γιατί ο αντικειμενικός σκοπός δεν είναι να διδάξουμε την Ιστορία των Μαθηματικών, αλλά τη σύγχρονη επιστημονική αντίληψη για τα Μαθηματικά. Η γνώση όμως της ιστορικής εξέλιξης είναι απαραίτητη για να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία ανακάλυψης μιας έννοιας ή μεθόδων, με μέσα προσαρμοσμένα στις γνώσεις των μαθητών και να οδηγηθούμε έτσι, βαθμιαία και φυσιολογικά, στο σημερινό επίπεδο αφαίρεσης και γενίκευσης (Θωμαΐδης, 1985: 19-20).

Μέσα στα πλαίσια της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης, εδώ και αρκετά χρόνια έχει αρχίσει να καλλιεργείται ο προβληματισμός για την αξιοποίηση της Ιστορία των μαθηματικών και τη χρησιμοποίησή της σαν ένα ισχυρό μεθοδολογικό εργαλείο, τόσο στην οργάνωση της διδασκαλίας όσο και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών

(Θωμαΐδης και Καστάνης, 1987: 82). Αναγνωρίζεται ο θετικός ρόλος της χωρίς να υπάρχει κάποια μεθοδική και συνολική πρόταση για συστηματική αξιοποίηση της στη διδασκαλία (Θωμαΐδης και Καστάνης, 1987: 78). Αντίθετα υπάρχουν χώρες, όπως π.χ. η Δανία, στις οποίες η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί μέρος του επίσημου προγράμματος σπουδών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Σύμφωνα με τον Fauvel (1991: 4), η ιστορική εξέλιξη βοηθά στον εμπλουτισμό των θεμάτων στα προγράμματα σπουδών. Η προσπάθεια που έγινε προς την κατεύθυνση αυτή, μέσω των ιστορικών σημειωμάτων που προστέθηκαν στα σχολικά βιβλία, δείχνει αναποτελεσματική, καθώς τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών δεν προβλέπουν τρόπους σύνδεσης των σημειωμάτων με την αντίστοιχη μαθηματική γνώση και έτσι τα σημειώματα μοιάζουν αποκομμένα από τη δομή της ύλης και δεν κατέχουν ενισχυτικό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης.

Είναι σημαντικό να προχωρήσουμε πέρα από αυτό το στάδιο, να το πάρουμε ως δεδομένο, προς το παρόν, ότι η χρήση της ιστορίας είναι αποτελεσματική - για πολλούς λόγους - και να δείξουμε πώς μπορεί να ενσωματωθεί σε ορισμένες δραστηριότητες στην τάξη, πώς μπορεί να καταστήσει ευκολότερη τη διδασκαλία διαφόρων εννοιών και μεθόδων, πώς η επιπλέον εργασία που μπορεί να χρειαστεί αρχικά έχει μια μακροπρόθεσμη απόδοση για τη βελτίωση της επίτευξης των στόχων στο πλαίσιο της διδακτέας ύλης των μαθηματικών (Fauvel, 1991: 4).

3.2 Οι τρόποι αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση.

Αφού εξετάσαμε το ρόλο της ιστορίας στα θεωρητικά ζητήματα που αφορούν τη μάθηση των Μαθηματικών, θα αναζητήσουμε τους τρόπους αξιοποίησής της στη διδακτική πράξη. Έτσι το ερώτημα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την ενότητα είναι το εξής : «Ποια η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση;».

Από την αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών προκύπτουν εκπαιδευτικά οφέλη που αφορούν την μάθηση και τη διδασκαλία καθώς και άλλους τομείς (Tzanakis & Arcavi, 2000: 203-207). Η μάθηση των μαθηματικών αποκτά άλλη διάσταση καθώς ο τρόπος προσέγγισης ενός θέματος μπορεί να βασιστεί όχι μόνο στις έννοιες και τις δομές αλλά και στους λόγους και στα αίτια που τις

δημιούργησαν. Έτσι η μαθηματική γνώση δεν προκύπτει ξαφνικά εφόσον η ιστορία είναι μέρος της (Liu, 2003: 416). Εδράζοντας την άποψη μας στην παραπάνω παραδοχή, προτείνουμε η διδασκαλία της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών να γίνει με βάση την ιστορική τους εξέλιξη.
Στους μαθητές του δημοτικού, μαθησιακά ωφέλιμο θα είναι, το «πέρασμα» από τα κλάσματα στους δεκαδικούς να προκύψει ως αναγκαιότητα διαχείρισης πολύπλοκων υπολογισμών. Η εισαγωγή των δεκαδικών να γίνεται όταν οι μαθητές πλέον εκτελούν πράξεις με κλάσματα και οι δυσκολίες που προκύπτουν πηγάζουν από την διαχείριση πολυψήφιων αριθμών.

Αν η γνώση των δεκαδικών συνδεθεί με την αιτία δημιουργίας τους, οι σύγχρονοί μαθητές, θα πάψουν να αντιμετωπίζουν, κλάσματα και δεκαδικούς, ως δύο ξένα υποσύνολα. Αξιοποιώντας την ιστορία των δεκαδικών και αντλώντας υλικό από το έργο του Simon Stevin, την «Δεκάτη», δίνουμε στους μαθητές την ευκαιρία να μάθουν ότι οι δεκαδικοί και κλάσματα είναι οι ίδιοι αριθμοί που εμφανίζονται με διαφορετική σημειογραφία. Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο, αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως σημείο στην αριθμογραμμή. Φυσικό επακόλουθο θα είναι να μην σκέφτονται διαφορετικά για τη δομή των δεκαδικών και τη δομή των κλασμάτων και να συνειδητοποιήσουν ότι τα δύο σύνολα ταυτίζονται.

Τα προβλήματα και η επίλυση των προβλημάτων βρίσκονται στον πυρήνα της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών και αποτελούν μέρος του υλικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδακτική πράξη (Swetz, 2000: 65). Πρόβλημα για τους Πυθαγόρειούς αποτελούσε ο υπολογισμός της υποτείνουσας ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με μήκος καθέτων πλευρών ίσων με την μονάδα. Οι Πυθαγόρειοι παρατήρησαν ότι ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να γραφτεί με την μορφή κλάσματος. Αυτό αποτέλεσε και την αφορμή για την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών.

Η εισαγωγή των άρρητων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μπορεί να επιτευχτεί με την αξιοποίηση του παραπάνω ιστορικού προβλήματος. Μία από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις της αρχαιότητας, θα κεντρίσει το ενδιαφέρον και θα λειτουργήσει ως κίνητρο για ανάπτυξη εποικοδομητικής σκέψης. Η πρότερη γνώση των μαθητών για τους ρητούς δεν θα αρκεί για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος. Στην προσπάθεια τους να υπολογίσουν τον ζητούμενο αριθμό, θα πραγματοποιήσουν ρητές προσεγγίσεις που θα είναι μαθησιακά ωφέλιμες. Όμως η προσέγγιση ενός αριθμού δεν θα αρκεί για να ανταπεξέλθουν στο πρόβλημα και αναπόφευκτα, τα δεκαδικά ψηφία των αριθμών που προσεγγίζουν τον ζητούμενο, θα υπονοούν την ιδέα της αδιαφάνειας. Η υπόνοια της απροσδιόριστης δεκαδικής αναπαράστασης σε συνδυασμό με τη γνώση της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών θα δημιουργήσει την ανάγκη ύπαρξης ενός νέου για τους μαθητές συνόλου αριθμών. Για την εννοιολογική κατανόηση των άρρητων δεν αρκεί ο ορισμός τους ως μη ρητός αλλά και η σύνδεση με τη δεκαδική του αναπαράσταση.

Η μετάβαση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών προσκρούει σε εγγενείς δυσκολίες που συνδέονται με τη φύση των άρρητων αριθμών.

Ο Brousseau θεωρεί ότι τα επιστημολογικά εμπόδια δεν γίνεται αλλά και δεν θα έπρεπε να αγνοούνται επειδή αποτελούν ουσιαστικό μέρος της νέας γνώσης, η οποία διδάσκεται, αλλά ο ίδιος επιχειρηματολογεί ενάντια στην αναπαραγωγή μέσα στην τάξη των ιστορικών καταστάσεων που οδήγησαν τους μαθηματικούς στο να ξεπεράσουν αυτά τα εμπόδια (Brousseau, 1983: 178). Η πιθανή άρση των δυσκολιών αυτών στην αίθουσα διδασκαλίας μπορεί να υποστηριχτεί με τη διδακτική αξιοποίηση κατάλληλων ιστορικών προβλημάτων (Κόσυβας, 2018).

Το πόρισμα της εθνικής επιτροπής των Η.ΠΑ.(1923) για τις απαιτήσεις των Μαθηματικών που είχε αντικείμενο την αναδιοργάνωση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε τμήμα του κειμένου του αναφέρει:

> «Συμβουλεύουμε τους δασκάλους να μάθουν τα καθοριστικά γεγονότα της Ιστορίας των Μαθηματικών και να μάθουν ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως απάντηση στις ανθρώπινες ανάγκες, τόσο τις νοητικές όσο και τις τεχνικές. Θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν αυτό το υλικό περιστασιακά στα μαθήματα τους για να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με άτυπες συζητήσεις για την ανάπτυξη των Μαθηματικών και για τη ζωή των μεγάλων δημιουργών της επιστήμης.» (βλ. Θωμαΐδης και Καστάνης, 1987: 69).

Στην ενότητα 3.1 αναφέραμε ορισμένους από τους λόγους ενσωμάτωσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Η επίτευξη αυτής της ενσωμάτωσης, σύμφωνα με τους Tzanakis & Arcavi (2000: 208) γίνεται με τρείς τρόπους :

1. Εκμάθηση ιστορίας, με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών.

2. Μάθηση μαθηματικών εννοιών, ακολουθώντας μια προσέγγιση διδασκαλίας και μάθησης, εμπνευσμένη από την ιστορία.
3. Ανάπτυξη βαθύτερης συνειδητοποίησης, τόσο των μαθηματικών όσο και των κοινωνικών και πολιτιστικών πλαισίων στα οποία έχουν αναπτυχθεί τα μαθηματικά.

Πιο συγκεκριμένα, ο Fauvel (1991: 5) διατυπώνει τρόπους για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών θέτοντας τους εξής περιορισμούς:
1. Πρέπει να είναι αυστηρά βοηθητική και υποδεέστερη της διδασκαλίας των μαθηματικών.
2. Πρέπει να αναδεικνύει μόνο εκείνα τα τμήματα τα οποία είναι πραγματικά χρήσιμα για τον εκπαιδευόμενο.
3. Δεν πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο εξέτασης.
Επισημαίνει ότι, αν δεν τηρηθούν αυτές οι συνθήκες, η εισαγωγής νέας ύλης για διδασκαλία κινδυνεύει να είναι περισσότερο ζημιογόνος παρά επωφελής.

Μεταξύ των ερευνητών που διερευνούν τη χρήση της ιστορίας υπάρχει μια σταθερή συμφωνία για την παιδαγωγική αποτελεσματικότητα της χρήσης των αυθεντικών ιστορικών πηγών στη διδασκαλία των μαθηματικών (Demattè & Furinghetti, 2014: 117).

3.3 Παραδείγματα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η καινοτόμος στροφή τα τελευταία χρόνια είναι η αναζήτηση μιας θεωρητικής βάσης και μιας μεθοδολογίας για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Gulikers & Blom, 2001: 224). Για το ζήτημα αυτό έχουν διατυπωθεί διάφορες προτάσεις κάποιες εκ των οποίων παρουσιάζονται παρακάτω:

Οι Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi (1982: 18) περιέγραψαν τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών για μελλοντικούς και ενεργούς δασκάλους, ως εξής :
α) Συνάφεια.
Τα θέματα των οποίων η ιστορία μελετάται είναι εκείνα που συνδέονται άμεσα με το πρόγραμμα σπουδών που ο δάσκαλος πρέπει να διδάξει. Επιπλέον, η επεξεργασία των θεμάτων σχεδιάζεται με βάση τις συγκεκριμένες ανάγκες των εκπαιδευτικών.

β) Πρωτογενείς πηγές.

Τα υλικά που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν είναι κυρίως πρωτογενείς πηγές και ιστορικά έγγραφα.

γ) Ενεργητική μάθηση.

Το υλικό να έχει την μορφή φύλλου εργασίας. Οι συμμετέχοντες να διαβάζουν τις πηγές και δουλεύουν ατομικά (ή σε μικρές ομάδες) με κάποια καθοδήγηση, μέσω ερωτήσεων, ασκήσεων και προβλημάτων ειδικά προετοιμασμένων για κάθε ιστορική πηγή.

δ) Εννοιολογική προσέγγιση της ιστορίας.

Η ιστορία σχετίζεται με τον τρόπο εξέλιξης μιας έννοιας, τις διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθηματικών στο παρελθόν, τις δυσκολίες τους, τη μαθηματική δημιουργικότητά τους, μέχρι το στάδιο της τυποποίησης. Συμπληρωματικά, για να κεντρίσουν το ενδιαφέρον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ημερομηνίες, βιογραφικά στοιχεία και χιουμοριστικές ιστορίες.

Ο Fauvel (1991: 5) εστιάζοντας στη χρήση της ιστορίας στην τάξη των μαθηματικών προτείνει στους καθηγητές τα παρακάτω:

- Αναφορά σε εξέχοντες μαθηματικούς με χιουμοριστικό τρόπο.
- Παρουσίαση ιστορικής εξέλιξης εννοιών που είναι νέες για τους μαθητές.
- Προτροπή των μαθητών να κατανοήσουν πως οι διδασκόμενες έννοιες αποτελούν απαντήσεις σε ιστορικά προβλήματα.
- Διδασκαλία του μαθήματος "Ιστορία των μαθηματικών" .
- Δημιουργία μαθημάτων ή ασκήσεων για το σπίτι με χρήση μαθηματικών κείμενων του παρελθόντος.
- Ενθάρρυνση για τη δημιουργία αφισών ή άλλων δραστηριοτήτων με χειραπτικά υλικά με ιστορικό θέμα.
- Δημιουργία δραστηριοτήτων για μαθηματικούς της χώρας.
- Χρήση χαρακτηριστικών παραδειγμάτων από το παρελθόν για την επίδειξη τεχνικών ή μεθόδων.
- Εξερεύνηση παρανοήσεων/ λαθών/ εναλλακτικών απόψεων που προβλημάτισαν μαθηματικούς του παρελθόντος με σκοπό να βοηθήσουν στην κατανόηση και την επίλυση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι σημερινοί μαθητές.
- Ανάπτυξη της παιδαγωγικής προσέγγισης σε ένα θέμα που συνάδει με την ιστορική του εξέλιξη.

Ο Rickey (1996: 253-254), χρησιμοποίησε τους παρακάτω τρόπους για να εντάξει τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη σχολική τάξη:

- Για την εισαγωγή ενός νέου θέματος.
- Για την ιστορία συγκεκριμένων εννοιών.
- Για τη ιστορία της μαθηματικής σημειογραφίας.
- Για την ετυμολογία των όρων.
- Μέσω παρουσίασης φωτογραφιών μεγάλων μαθηματικών του παρελθόντος.
- Μέσω βιογραφικών δραστηριοτήτων: Προσδιορίστε κάθε άτομο που αναφέρεται.
- Μέσω παράθεσης διάσημων φράσεων που έχουν ειπωθεί από επιφανείς μαθηματικούς.
- Με τη χρήση χιουμοριστικών ιστοριών.
- Με τη βοήθεια τίτλων δημοφιλών βιβλίων.
- Μέσω προβλημάτων από παλιά εγχειρίδια.
- Ως έναν τρόπο για να συζητηθούν προηγμένα και σύγχρονα θέματα.
- Για διάλογο όσον αφορά λάθη που εμφανίστηκαν στην Ιστορία των Μαθηματικών.

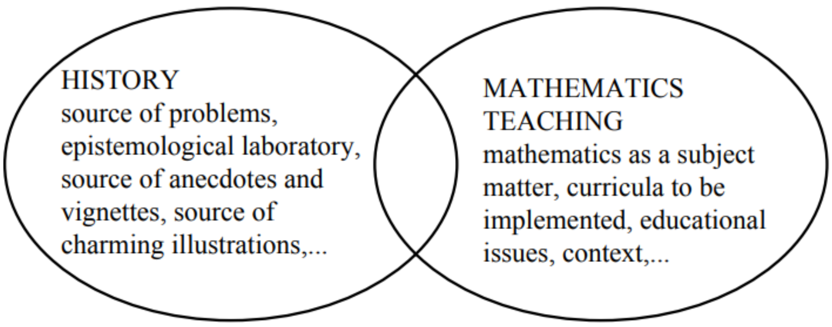
Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που προτείνουν οι Tzanakis & Arcavi (2000: 212) το υλικό μπορεί να είναι:

• Πρωτογενές υλικό, (αυθεντικά μαθηματικά κείμενα)

• Δευτερογενές υλικό (αφηγήσεις, ερμηνείες, ανακατασκευές)

• Διδακτικό υλικό.

Οι Furinghetti & Paola (2002) παρουσιάζουν τους τομείς που εμπλέκονται στο σχεδιασμό μιας εκπαιδευτικής διαδικασίας που περιλαμβάνει την ιστορία των μαθηματικών με το παρακάτω σχεδιάγραμμα.



Έρευνες έχουν αναδείξει το ενδιαφέρον μεταξύ των εκπαιδευτικών για τη χρήση της ιστορία των μαθηματικών. Οι Fraser και Koop (1978) διεξήγαγαν έρευνα σε καθηγητές των μαθηματικών, σχετικά με το υλικό για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών μέσα στην τάξη και τις απόψεις τους για την ποιότητα και τη χρησιμότητα αυτού του υλικού. Όσον αφορά αυτό το υλικό, οι πέντε επικρατέστερες προτάσεις με θέμα κάποιον διάσημο μαθηματικό ήταν οι εξής: (α) Μονόπρακτο θεατρικό, (β) προβολή βίντεο, (γ) προβολή διαφανειών, (δ) βιογραφίες και (ε) άρθρα. Για την έρευνα επιλέχτηκαν ένα θεατρικό με θέμα τη ζωή και τη συμβολή του Θαλή στην εξέλιξη των μαθηματικών (υλικό (α)) και ένα άρθρο σχετικό με την ιστορία του κώνου (υλικό(ε)).

Οι εκπαιδευτικοί στόχοι ήταν, η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών, η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, οι εφαρμογές των μαθηματικών, η κοινωνική αξία και η ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών. Για τους περισσότερους από τους εκπαιδευτικούς στόχους, οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν το υλικό(α) χρησιμότερο από το υλικό(ε). Ο στόχος που θεωρείται λιγότερο πιθανό να ικανοποιηθεί - και για τα δυο υλικά - ήταν η συνειδητοποίηση της αξία των μαθηματικών στην κοινωνία, ενώ ο στόχος που θεωρείται περισσότερο πιθανό να ικανοποιηθεί ήταν η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών.

Η πλειοψηφία των καθηγητών δήλωσε ότι υλικό για τη χρήση της ιστορίας με την μορφή παιχνιδιού ή άρθρου δεν είναι άμεσα διαθέσιμο και δεν είναι εύκολο να γραφτεί από τον μέσο καθηγητή μαθηματικών. Το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος δήλωσε ότι δεν θα μπορούσε να προετοιμαστεί κατάλληλα για διδακτική χρήση.

Οι ερευνητές συμπέραναν ότι υπάρχει έλλειψη ιστορικού υλικού στα μαθηματικά, κατάλληλο για άμεση χρήση στην τάξη και ότι θα χρειαστεί αποτελεσματική εκπαίδευση των εκπαιδευτικών πριν το χρησιμοποιήσουν μέσα στην τάξη. Ένα απογοητευτικό συμπέρασμα της έρευνας ήταν ότι, παρά τη θετική στάση για τη χρήση του ιστορικού υλικού, ένα μεγάλο ποσοστό των εκπαιδευτικών απάντησε ότι δεν θα επέλεγε να το χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV : Προτάσεις για τη διδασκαλία της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών με οδηγό την ιστορική εξέλιξη.

Η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μας επιτρέπει να κατανοήσουμε την ιδιαίτερη φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη Δεκαδική Αναπαράσταση. Μια τέτοια δυσκολία προκύπτει από την καθιερωμένη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών στο δημοτικό. Οι μαθητές αποσυνδέουν τη δεκαδική αναπαράσταση από τα κλάσματα και θεωρούν τους δεκαδικούς ένα ιδιαίτερο είδος αριθμών. Η ιστορική ανάλυση μας αποδεικνύει ότι η δεκαδική αναπαράσταση είναι απλά ένας άλλος τρόπος γραφής των κλασμάτων που διευκολύνει τις πράξεις μεταξύ αυτών. Στη παραπάνω πρόταση βασίζεται και η διδακτική πρόταση που προτείνουμε για την Β΄ τάξη του γυμνασίου. Η αξιοποίηση της ιστορικής εξέλιξης μπορεί να αποσαφηνίσει στους μαθητές τον λόγο για τον οποίο επινοήθηκε η δεκαδική αναπαράσταση και με αυτό τον τρόπο να συμβάλλει ενεργά στην ουσιαστική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Με αφορμή κάποια ιστορικά προβλήματα που απασχόλησαν τους επιστήμονες στο παρελθόν κατασκευάστηκε η διδακτική παρέμβαση που απευθύνεται σε μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου.

Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφονται αναλυτικά οι δυο διδακτικές προτάσεις για το Γυμνάσιο και το Λύκειο καθώς και το σκεπτικό της δημιουργίας τους σύμφωνα με την ιστορική έρευνα που πραγματοποιήθηκε και με τα επιχειρήματα για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών. Τα φύλλα εργασίας κατασκευάστηκαν με προτεινόμενο εκπαιδευτικό υλικό που προέκυψε από την παρούσα έρευνα ενώ τα ερωτήματα που περιέχουν είναι συμβατά με τους στόχους διδασκαλίας που προτείνουν τα προγράμματα σπουδών για τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών.

4.1Μια διδακτική πρόταση για τη Β΄ Γυμνάσιου.

Η διδακτική πρόταση που παρουσιάζεται απευθύνεται σε μαθητές της Β΄ γυμνασίου και δημιουργήθηκε με γνώμονα την αναγνώριση των διαφορετικών δεκαδικών αναπαραστάσεων που παρουσιάζουν ρητοί και άρρητοι. Αποσκοπώντας στην εννοιολογική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, η δραστηριότητα κατασκευάστηκε με στόχο τη σύνδεσης δεκαδικής αναπαράστασης, ρητών και άρρητων αριθμών, με τους αντίστοιχους ορισμούς τους.

Η γνώση των μαθητών για το σύνολο των ρητών θεωρείται κατεκτημένη από την προηγούμενη τάξη, αλλά χάριν της επανάληψης παρέχετε ένα βοηθητικό φύλλο εργασίας, με τη βοήθεια του οποίου, υπενθυμίζετε η μετατροπή περιοδικού δεκαδικού σε κλάσμα.

Η κατασκευή της διδακτικής πρότασης βασίστηκε στους στόχους που έχουν τεθεί από το πιλοτικό πρόγραμμα σπουδών και συγκεκριμένα, στην επέκταση από τους ρητούς στους πραγματικούς και στη διερεύνηση των δεκαδικών αναπαραστάσεων των ρητών. Για τις ανάγκες της δραστηριότητας περιλήφθηκε και η διερεύνηση της δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων, η οποία δεν αποτελεί δηλωμένο στόχο του προγράμματος σπουδών.

Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική πρόταση επιτυγχάνεται μέσω μιας διδασκαλίας εμπνευσμένης από την ιστορία και όχι με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών. Οι άρρητοι αριθμοί που επιλέχτηκαν αποτελούν ορόσημο για την ιστορία των αριθμών και δίνουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να μιλήσει στους μαθητές και για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να προσδιορίσουν τη δεκαδική αναπαράσταση όλων των περιπτώσεων που εμφανίζουν οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί και έπειτα να την συνδυάσουν με τον ορισμό τους. Το φύλλο εργασίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό την εισαγωγή στο σύνολο των άρρητων με τις κατάλληλες κατευθύνσεις από τον εκπαιδευτικό. Εναλλακτικά προτείνετε να χορηγηθεί στους μαθητές αφότου ολοκληρωθεί η διδασκαλία η διδασκαλία της ενότητας των άρρητων και πραγματικών αριθμών με την μορφή της ανακεφαλαίωσης και με σκοπό την άρση πιθανών παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές. Η παρατήρηση των διαφορετικών χαρακτηριστικών που έχει η δεκαδική μορφή ρητών και άρρητων θα συνδεθεί με την εισαγωγή του άρρητου ως μη ρητού με σκοπό την εννοιολογική κατανόηση των δύο συνόλων.

Σύμφωνα με το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών η διδασκαλία των άρρητων και των πραγματικών πραγματοποιείται σε δύο διδακτικές ώρες, οι οδηγίες διδασκαλίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής ορίζουν τέσσερις διδακτικές ώρες ενώ το Πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών προτείνει οκτώ. Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, ο χρόνος διεξαγωγής της δραστηριότητας, ορίζεται σε δυο διδακτικές ώρες. Έτσι, παρέχει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό σε οποιαδήποτε περίπτωση να την εντάσσει στη διδασκαλία του.

Παρουσιάζεται αναλυτικά η οργάνωση της δραστηριότητας και οι παιδαγωγικοί σκοποί της.

Οργάνωση του φύλλου εργασίας:

- Μοιράζουμε το βοηθητικό φύλλο εργασίας με σκοπό να υπενθυμίσουμε την μετατροπή απειροψήφιου περιοδικού σε μορφή κλάσματος.
- Μοιράζουμε το φύλλο εργασίας και αποσαφηνίζουμε τις ορολογίες περιοδικός και απειροψήφιος προς αποφυγή παρανοήσεων.
- Πρώτο μέρος: Στις πρώτες τρείς ασκήσεις συναντούμε μόνο ρητούς αριθμούς. Προσπαθούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές να τους μετατρέψουν στην κλασματική τους μορφή και να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής τους μορφής.
- Ενθαρρύνουμε τους μαθητές να εκφράσουν αυθόρμητα τη σκέψη τους, ώστε να γίνουν εμφανείς οι παρανοήσεις τους και να έρθουν αντιμέτωποι με τις δυσκολίες τους. Ενδεχομένως οι μαθητές να θυμηθούν τον ορισμό του ρητού από την ύλη της Α΄ γυμνασίου και να ταυτίσουν τους αριθμούς με κλασματική μορφή με τις δύο περιπτώσεις της δεκαδικής μορφής. Στην περίπτωση αυτή πιθανό να αναρωτηθούν «αν υπάρχει άλλη δεκαδική μορφή ρητού» και η ερώτηση αυτή να αποτελέσει αφορμή για συζήτηση μέσα στην τάξη. Εναλλακτικά η ταύτιση αυτή θα επιτευχτεί στη συνέχεια της δραστηριότητας και συγκεκριμένα στην άσκηση επτά.
- Οι αριθμοί που επιλέχτηκαν για την άσκηση τρία και τέσσερα θα βοηθήσουν στην ανάπτυξη διαλόγου για τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών με απώτερο σκοπό την εμπέδωση της περιοδικότητας. Όταν οι μαθητές αναγνωρίσουν το χαρακτηριστικό που έχουν τα ψηφία του αριθμού στην άσκηση τέσσερα (μοτίβο), μπορούμε να αναφερθούμε στον όρο της κανονικότητας**.** Εκεί όμως που πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή τους είναι στο γεγονός ότι δεν υπάρχει τρόπος για να μετατρέψουν την δεκαδική μορφή του αριθμού σε κλασματική.

- Οι αριθμοί στις ασκήσεις πέντε και έξι παρέχουν την ευκαιρία στον διδάσκοντα να μιλήσει για την ιστορία και τη χρήση των άρρητων αριθμών π και φ. Με αφορμή αυτούς τους άρρητους, ανοίγεται και το μονοπάτι για να μιλήσουμε στους μαθητές για τους υπερβατικούς αριθμούς. Συνήθως τα νέα είδη αριθμών εξάπτουν τη φαντασία και μαγνητίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών προκαλώντας ατμόσφαιρα μυστηρίου και έκπληξης (Κόσυβας, 2011β, όπως αναφ. στο Βόσκογλου & Κόσυβας 2009: 35).
- Προτείνεται να γίνει έλεγχος μέσα στην τάξη, των απαντήσεων του πρώτου μέρους της δραστηριότητας, προτού προχωρήσουν οι μαθητές στο δεύτερο μέρος. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη συζήτηση εστιάζοντας στα σημεία που χρειάζεται.

Δεύτερο μέρος: Οι δύο ασκήσεις αποσκοπούν στην εννοιολογική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών με γνώμονα τη δεκαδική αναπαράστασή.

- Άσκηση1: Δίνονται οι ορισμοί ρητού και άρρητου και αναμένετε από τους μαθητές η ταξινόμηση των αριθμών στα δύο βασικά σύνολα των πραγματικών αριθμών. Οι αριθμοί που περιλαμβάνει η άσκηση είναι οι ίδιοι με εκείνους που είχαν εμφανίστηκαν στο πρώτο μέρος του φυλλαδίου εργασίας. Σε περίπτωση που παρουσιαστεί δυσκολία θα στρέψουμε την προσοχή των μαθητών στις απαντήσεις που έδωσαν στις Ασκήσεις 1i, 2i, 3i, 4i, 5i, 6i του πρώτου μέρους. Επιδίωξή μας είναι η ενίσχυση της αυτοπεποίθησής τους για την επιτυχή διεκπεραίωση της δραστηριότητας.
- Μέσω του αναστοχασμού και της κριτικής επανεξέτασης των γνώσεων προάγεται η μάθηση των εννοιών εις βάθος, η διόρθωση λαθών και η ενοποίηση της ορολογίας των ορισμών κατανοώντας έτσι τη σημασία που κατέχουν οι ακριβείς και σαφείς ορισμοί στον κόσμο των μαθηματικών.
- Άσκηση 2: Ζητείται η τοποθέτηση των αριθμών σε ένα μόνο από τα δύο σύνολα και προϋποθέτει την κατανόηση των δύο ορισμών και της μορφής της δεκαδικής αναπαράστασής τους.
- Για την εξασφάλιση της εννοιολογικής κατανόησης, προκαλέστε τους να σας δώσουν εκείνοι ψηφία για να δημιουργήσετε έναν απειροψήφιο περιοδικό (σύμμετρο ρητό) και έναν τερματιζόμενο και εξηγήστε τους πως και ο τερματιζόμενος είναι απειροψήφιος με περίοδο το μηδέν. Ζητήστε τους να φτιάξουν έναν άρρητο με κανονικότητα και να εξηγήσουν τον κανόνα που

ακολουθήσανε. Από τα λάθη των μαθητών μπορείτε να αναδείξετε την ειδοποιό διαφορά της περιοδικότητας και της κανονικότητας.

- Κατασκευάστε έναν ανακεφαλαιωτικό πίνακα των ονομάτων των αριθμών και των χαρακτηριστικών τους με στόχο την ευκολότερη απομνημόνευση. Καθοδηγήστε τους μαθητές να συνδέσουν τους ορισμούς ρητών και άρρητων με τη δεκαδική τους αναπαράσταση και να συμπεράνουν πως δεν υπάρχουν απειροψήφιοι περιοδικοί ή πεπερασμένοι (απειροψήφιοι με περίοδο το 0) που να είναι άρρητοι αλλά ούτε και απειροψήφιοι μη-περιοδικοί που να είναι ρητοί.

Το φύλλο εργασίας διαμορφώθηκε με βάση τη θεωρία μάθησης του Οικοδομισμού. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η μάθηση πρέπει να είναι εννοιολογική και να ακολουθεί αναπτυξιακή δομή. Επιπλέον η ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών να είναι σπειροειδής από τάξη σε τάξη και από κεφάλαιο σε κεφάλαιο. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να αποτελούν κίνητρα μάθησης, ώστε η επιτυχής διεκπεραίωσή τους να ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών και να προάγει την ενεργό συμμετοχή τους. Τέλος κατά τη διάρκεια εισαγωγής μιας νέας έννοιας πρέπει να γίνεται σύντομη επανάληψη όλων των προαπαιτούμενων γνώσεων.

Παιδαγωγικοί σκοποί:

1. Η μετατροπή της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών στη μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ όπου $\mu, \nu \in Z$ και $\nu \neq 0$.
2. Η εμπέδωση των χαρακτηριστικών της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών.
3. Η εμπέδωση των χαρακτηριστικών της δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων.
4. Η κατανόηση της έννοιας της περιοδικότητας, της κανονικότητας και της διαφοράς τους.
5. Η σύνδεση των ορισμών των ρητών και των άρρητων με τη δεκαδική τους αναπαράσταση.

Επίπεδο: Β' γυμνασίου.

Διάρκεια: Δυο ώρες.

Οργάνωση: Ατομική έρευνα με καθοδήγηση του διδάσκοντα.

Χρησιμοποιούμενα Υλικά: Βοηθητικό φύλλο εργασίας & δύο φύλλα εργασίας.

Οι δυσκολίες στους υπολογισμούς που προέκυπταν από τη χρήση πολύπλοκων κλασμάτων και πράξεων μεταξύ αυτών οδήγησαν στην επινόηση της δεκαδικής μορφής των αριθμών που εισήγαγε ο Simon Stevin. Παρόμοιο είναι και το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του δημοτικού με τις πράξεις κλασμάτων και προτιμούν τη χρήση της δεκαδικής μορφής έναντι της κλασματικής.

Τα δεκαδικά ψηφία έχουν νόημα για έναν μαθηματικό καθώς η ακρίβεια είναι σημαντική συνιστώσα για την επίλυση ενός προβλήματος. Η δραστηριότητα εστιάζει στον τρόπο που κάθε αριθμός αναπαριστάται χωρίς να προσεγγίζεται, δίνοντας νόημα στα δεκαδικά ψηφία και στην μοναδικότητα που τον διέπει.

Με την πάροδο του χρόνου και ενώ οι δεκαδικοί ικανοποιούσαν τις ανάγκες της καθημερινής ζωής, η ακρίβεια, στο πρόβλημα που είχε να αντιμετωπίσει ο Huygens έκρυβε το μυστικό της επιτυχίας. Η προσέγγιση του κλάσματος δεν τον βοηθούσε στην καλή μοντελοποίηση και το ίδιο πρόβλημα έχουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να αντικαταστήσουν έναν αριθμό με μια προσέγγισή του καθιστώντας το αποτέλεσμα μιας πράξης ανακριβές και τελικά μαθηματικά μη-ορθό.

Παρατηρούμε ομοιότητες στην εξέλιξη της δεκαδικής αναπαράστασης και στα προβλήματα που συναντούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια των σχολικών τους χρόνων. Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι: «Η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μπορεί να συμβάλλει στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών;». Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πως μπορούν να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν διδακτικές παρεμβάσεις που αξιοποιούν την ιστορική εξέλιξη και συμβάλλουν στην εννοιολογική κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης;

4.3 **Μια διδακτική πρόταση για την Α΄ Λυκείου.**

Η διδακτική πρόταση που ακολουθεί έχει ως κεντρικό στόχο την κατανόηση της αναγκαιότητας της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών μέσω της αξιοποίησης της ιστορίας της. Αφορμή για τη δημιουργία της αποτελέσαν τα ιστορικά προβλήματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο Ι και οι Τρόποι Αξιοποίησης της Ιστορίας που σημειώθηκαν στο Κεφάλαιο ΙΙΙ της παρούσας εργασίας.

Απευθύνεται σε μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου και προτείνεται να πραγματοποιηθεί για εισαγωγή στο κεφάλαιο των πραγματικών αριθμών με πρωτεύοντα στόχο την κατανόηση των αναγκαιότητας τους και έπειτα την εμβάθυνση στο σύνολό τους.

Το υλικό έχει την μορφή φύλλου εργασίας ενώ οι συμμετέχοντες εργάζονται ατομικά με κάποια καθοδήγηση, μέσω προβλημάτων, ερωτήσεων και ασκήσεων ειδικά προετοιμασμένων για τις συγκεκριμένες ιστορικές πηγές. Το φύλλο εργασίας απαρτίζεται από δύο δραστηριότητες και από πέντε ασκήσεις. Οι δραστηριότητες βασίζονται σε ιστορικά προβλήματα που δεν περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών και αποσκοπούν στο να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Η πρώτη δραστηριότητα περιλαμβάνει το πρόβλημα 31 που εμφανίζεται στον πάπυρο του Rhind (1650π.Χ.) με μορφή ιστορικού σημειώματος. Ακολουθεί ο ταχύτερος υπολογισμός του ίδιου προβλήματος που διατυπώθηκε από τον Leonardo von Pisa στο «Liber abaci» (1202μ.Χ.). Η δεύτερη δραστηριότητα περιέχει το πρόβλημα που αντιμετώπισε το 1680, ο Christian Huygens, στην προσπάθειά του να προσεγγίσει ένα κλάσμα. Το πρώτο πρόβλημα αναδεικνύει τη σημασία της ακρίβειας στη λύση παρόλη την δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία επίλυσης. Αντιθέτως, το δεύτερο, στοχεύει στην ανάδειξη της σημασίας της προσέγγισης εξυπηρετώντας τις πρακτικές επιταγές της εποχής.

Σκοπός των δραστηριοτήτων είναι η ανάδειξη ερωτημάτων και προβλημάτων που βοήθησαν στην εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης και οδήγησαν στην ανακάλυψη της έννοιας της δεκαδικής αναπαράστασης. Διανύοντας εν συντομία τα μονοπάτια στα οποία βάδισαν και οι πρόγονοι μας επιδίωξή μας είναι η απόκτηση της γνώσης που για τη δεκαδική μορφή των πραγματικών αριθμών.

Για την εξασφάλιση της εμβάθυνσης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών δημιουργήθηκαν οι ασκήσεις που περιέχονται στο φυλλάδιο εργασίας. Το Πρόγραμμα Σπουδών και οι Οδηγίες διδασκαλίας για το έτος 2018-2019 επισημαίνουν τη διάκριση ρητών και άρρητων μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους καθώς και την ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Τα παραδείγματα που προτείνουν οι οδηγίες διδασκαλίας - με σκοπό την έμφαση στη δεκαδική αναπαράσταση - χρησιμοποιήθηκαν στις ασκήσεις που περιλαμβάνονται στο φύλλο εργασίας.

Οι ασκήσεις περιλαμβάνουν και παραδείγματα που είναι εμπνευσμένα από τις συνηθέστερες παρανοήσεις των μαθητών και αποσκοπούν στην αποτελεσματική αντιμετώπισή τους.

Σύμφωνα με τους τρόπους αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών που παραθέσαμε στην ενότητα 3.3, η χρήση της Ιστορίας, εμφανίζεται με την μορφή της ενεργητικής μάθησης (Arcavi, Bruckheimer & Ben-Zvi, 1982: 18). Η παρουσίαση ιστορικών προβλημάτων, η ποικιλία τρόπων προσέγγισης και λύσης τους, αποτελεί έναν λειτουργικό τρόπο ένταξης σε μια πιο ενεργητική διδασκαλία. Οι δραστηριότητες βασίζονται στη διδακτική πρόταση του Fauvel (1991: 5) για την αξιοποίηση της ιστορίας με τη βοήθεια χρήσης χαρακτηριστικών παραδειγμάτων από το παρελθόν για την επίδειξη τεχνικών ή μεθόδων.

Το Πρόγραμμα Σπουδών για την Α΄ τάξη του Λυκείου και οι Οδηγίες διδασκαλίας για το έτος 2018-2019 προβλέπουν δεκατέσσερις και δεκαεννέα διδακτικές ώρες αντίστοιχα για τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών. Αμφότερα ορίζουν πέντε διδακτικές ώρες για τις πράξεις και τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, ο χρόνος διεξαγωγής του φυλλαδίου εργασίας είναι τρείς διδακτικές ώρες.

Παρουσιάζετε αναλυτικά η οργάνωση του φύλλου εργασίας και οι παιδαγωγικοί σκοποί του.

Οργάνωση του φύλλου εργασίας:

- Μοιράζουμε το φύλλο εργασίας, διαβάζουμε το ιστορικό σημείωμα στην τάξη και απαντάμε σε πιθανές ερωτήσεις των μαθητών.
- Δραστηριότητα1, ερώτημα Α: Ζητείται από τους μαθητές να επιλύσουν το πρόβλημα 31 που είναι διατυπωμένο στον πάπυρο του Rhind, με τη βοήθεια χρήσης μιας εξίσωσης. Το αποτέλεσμα είναι ένας ρητός αριθμός σε κλασματική μορφή. Επιδίωξή μας είναι να μην εκτελέσουν οι μαθητές τη διαίρεση και να μην αντικαταστήσουν προσεγγιστικά με κάποιον δεκαδικό αριθμό.
- Δραστηριότητα1, ερώτημα Bi: Δίνεται η διαδικασία απλοποίησης του κλάσματος από τον Leonardo και ζητείται η εξήγηση των πράξεων στις οποίες στηρίζεται.
- Δραστηριότητα1, ερώτημα Bii: Οι μαθητές καλούνται να συνεχίσουν τη διαδικασία απλοποίησης ατομικά, υποθέτοντας ότι βρίσκονται στη θέση του Leonardo και να βρουν το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε. Υπενθυμίστε τους ότι η λύση θα γίνει αποκλειστικά με πράξεις κλασμάτων καθώς εκείνη την εποχή δεν είχαν ακόμα ανακαλυφτεί οι δεκαδικοί αριθμοί.
- Δραστηριότητα1, ερώτημα Biii: Ζητείτε από τους μαθητές να εξηγήσουν για ποιο λόγο ο Leonardo κάνει αυτή την απλοποίηση. Από τη συζήτηση που επρόκειτο να προκληθεί σκοπός είναι η ανάδειξη της σημασίας της δεκαδικής αναπαράστασης

που δεν γνώριζε ο Leonardo. Συζητήστε μέσα στην τάξη τα πλεονεκτήματα των λύσεων που έχουν παρουσιαστεί στα ερωτήματα της δραστηριότητας.

- Άσκηση 1: Προτρέψτε τους μαθητές να επιλύσουν την άσκηση και διευκρινίστε τους πως δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν δεκαδικούς αριθμούς. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα i & ii προκύπτουν από προηγούμενα ερωτήματα της Δραστηριότητας1. Το ερώτημα iii στόχο έχει τη σύνδεση της άσκησης με την δραστηριότητα που θα ακολουθήσει και την ανάδειξη του πλεονεκτήματος της δεκαδικής αναπαράστασης για τη σύγκριση κλασμάτων.
- Στο σημείο αυτό μπορείτε να κάνετε μια ιστορική αναδρομή και να εξηγήσετε για ποιους λόγους και από ποιόν επινοήθηκαν οι δεκαδικοί αριθμοί.
- Δραστηριότητα2, ερώτημα Α: Παρουσιάζεται η διαδικασία απλοποίησης του Huygens και ζητείται η επανάληψη της μεθόδου με στόχο την κατανόηση των πράξεων στις οποίες στηρίζεται. Σε περίπτωση που οι πολύπλοκες πράξεις προκαλέσουν αίσθημα απογοήτευσης, προτείνετε στους μαθητές να σας εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε ο Huygens δηλαδή τις πράξεις στις οποίες στηρίζεται η μέθοδος. Εναλλακτικά επισημάνετε τους τη δυσκολία αυτής της διαδικασίας, η οποία αναδεικνύει το πλεονέκτημα χρήσης δεκαδικών έναντι κλασμάτων.
- Δραστηριότητα2, ερώτημα Bi: Αναμένουμε οι μαθητές να καταλήξουν στο κλάσμα $\frac{206}{7}$ και να το συγκρίνουν με το αρχικό. Αν η απάντησή τους είναι διαφορετική από αυτή που δώσανε στην Άσκηση 1 iii), ζητείστε τους να την αιτιολογήσουν.
- Άσκηση 2: Μπορείτε να βοηθήσετε τους μαθητές δίνοντάς τους την δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών $\sqrt{2}$ και π ή να τους επιτρέψετε τη χρήση αριθμομηχανής. Αναμένουμε να κατανοήσουν ότι τα δεκαδικά ψηφία έχουν νόημα και οι άρρητοι αριθμοί δεν πρέπει να συγχέονται με τις ρητές προσεγγίσεις τους.
- Άσκηση 3: Περιλαμβάνει αποκλειστικά ρητούς αριθμούς με ποικιλία αναπαραστάσεων. Επιδίωξη μας είναι η υπενθύμιση της περιοδικότητας ως χαρακτηριστικό γνώρισμα των ρητών και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις με τις οποίες εμφανίζονται.
- Άσκηση 4: Υπάρχουν άρρητοι που έχουν τάξη, δηλαδή έναν κανόνα με τον οποίο εμφανίζονται τα δεκαδικά ψηφία. Η άσκηση στοχεύει στη διάκριση της έννοιας της περιοδικότητας των ρητών από την κανονικότητα των άρρητων. Οι άρρητοι αριθμοί των ερωτημάτων iii & iv έχουν ως άθροισμα έναν ρητό αριθμό. Το

ερώτημα αυτό ανοίγει το μονοπάτι για να διερωτηθούν οι μαθητές και να κατανοήσουν το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο ρητού με ρητό, άρρητο με άρρητο και ρητού με άρρητο. Παρεμφερής είναι και η άσκηση επτά που εμφανίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο στη σελίδα 53.

- Άσκηση 5: Μπορείτε να εξηγήσετε ορολογίες που πιθανόν να τους δημιουργούν απορίες και να βοηθήσετε τους μαθητές να αποκτήσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για τη δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων καθώς και για τις μεταξύ τους διαφοροποιήσεις.
- Εφόσον οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη σημασία των δεκαδικών ψηφίων, μαθησιακά ωφέλιμη είναι η γνώση των πολλαπλών αναπαραστάσεων που εμφανίζουν οι πραγματικοί αριθμοί.

Παιδαγωγικοί σκοποί:

1. Η χρήση της ιστορίας για την ανάδειξη της αναγκαιότητα της δεκαδικής αναπαράστασης.
2. Το πλεονέκτημα της δεκαδικής αναπαράστασης στη σύγκριση κλασμάτων.
3. Οι ρητοί αριθμοί έχουν περισσότερες από μία δεκαδικές αναπαραστάσεις.
4. Οι συνήθεις ρητές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούμε για τους άρρητους δεν αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς αυτούς.

Επίπεδο: Α΄ λυκείου.

Διάρκεια: Τρείς ώρες.

Οργάνωση: Ατομική έρευνα με την ενθάρρυνση του εκπαιδευτικού.

Χρησιμοποιούμενα Υλικά: Τέσσερα φύλλα εργασίας.

Κεφάλαιο V: Συζήτηση – Συμπεράσματα

Αρχικά, η εν λόγω έρευνα αποτελεί κυρίως ιστορική και διδακτική ανάλυση της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών. Μέσα από τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών προσπαθήσαμε να φέρουμε στο φως και να κατανοήσουμε τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν στην πορεία αυτής της εξέλιξης και επανεμφανίζονται μέσα στην τάξη. Το ιστορικό υλικό που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο Ι, μετασχηματίστηκε σε διδακτικές δραστηριότητες που μπορούν να εφαρμοστούν στις σύγχρονες σχολικές τάξεις. Η διδακτική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στο Κεφάλαιο ΙΙ, βοήθησε στον εντοπισμό συστηματικών λαθών και χρησιμοποιήθηκε ως υλικό βάσης για το σχεδιασμό των ασκήσεων που περιέχονται στις δραστηριότητες.

Τα ερωτήματα που αποπειραθήκαμε να απαντήσουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι τα εξής:

I. Μπορεί η γνώση της ιστορικής εξέλιξης να συμβάλλει στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών;
II. Μπορούν να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν διδακτικές παρεμβάσεις που αξιοποιούν την ιστορική εξέλιξη και συμβάλλουν στην εννοιολογική κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης;

Οι δυσκολίες που δημιούργησε η ανάγκη υπολογισμού πολύπλοκων πράξεων μεταξύ κλασμάτων οδήγησαν στην επινόηση τη δεκαδικής αναπαράστασης. Η διαπίστωση αυτή πηγάζει από τη γνώση της ιστορικής εξέλιξης της δεκαδικής αναπαράστασης και αποτελεί σημείο σταθμό για το σύνολο των ρητών και κατ' επέκταση των πραγματικών αριθμών.
Ο συμβολισμός που επινόησε ο Stevin, έθεσε τα θεμέλια για την μετατροπή ενός κλασματικού αριθμού σε δεκαδική μορφή. Η ιστορική εξέλιξη αποδεικνύει λοιπόν ότι οι κλασματικοί αριθμοί προϋπήρχαν των δεκαδικών, γεγονός που αποτελεί έναν καίριο λόγο για να βασίσουμε και να υποστηρίξουμε την αντίστοιχη σειρά εισαγωγής τους στη διδασκαλία. Η γνώση της ιστορίας δίνει στον εκπαιδευτικό το πλεονέκτημα όχι μόνο να κατανοήσει την αιτία γένεσης των δεκαδικών αλλά και να διακρίνει πως

η εισαγωγή τους στη διδασκαλία προκύπτει ως φυσική εξέλιξη της αδυναμίας διαχείρισης πολύπλοκων πράξεων με κλάσματα.

Η μελέτη των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών αποδεικνύει πως στη διδασκαλία δεν ακολουθείται πάντα η ίδια πορεία με την ιστορική πορεία εξέλιξη της δεκαδικής αναπαράστασης των πραγματικών, παρεμποδίζοντας την ανάδειξη της κεντρικής ιδέας επινόησης της. Πιο συγκεκριμένα, το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών ακολουθεί την αντίστροφη ακριβώς πορεία από αυτή που ακολουθήθηκε ιστορικά, καθώς εισάγει στη Γ΄ τάξη του δημοτικού πρώτα τους δεκαδικούς και έπειτα τα κλάσματα. Η ίδια σειρά διδασκαλίας ακολουθείται και στις επόμενες τάξεις του δημοτικού καθώς και στην Α΄ γυμνασίου. Στον αντίποδα βρίσκεται το πιλοτικό πρόγραμμα σπουδών, σύμφωνα με το οποίο η εισαγωγή των κλασμάτων πραγματοποιείται στην Α΄ δημοτικού ενώ η πρώτη επαφή των μαθητών με τους δεκαδικούς επιχειρείται στη Β΄ δημοτικού και έπεται της διδασκαλίας των κλασμάτων.

Συμπερασματικά, σύμφωνα με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών, σε κάθε τάξη, διδάσκονται πρώτα οι δεκαδικοί και έπειτα τα κλάσματα ενώ στο πιλοτικό αντίθετα, ακολουθείται η ιστορική πορεία εξέλιξης των αριθμών καθώς η κατανόηση των κλασμάτων τίθεται ως προϋπόθεση για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών.

Παρότι οι δεκαδικοί κατέχουν μεγάλο μέρος της διδασκαλίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, παρατηρείται ανεπάρκεια ιστορικών σημειωμάτων, στα σχολικά εγχειρίδια με περιεχόμενο την έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης. Το μοναδικό ιστορικό σημείωμα που εντοπίσαμε για ουσιαστική διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών, με περιεχόμενο τη δεκαδική αναπαράσταση, συναντάται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ τάξης του Δημοτικού, στο κεφάλαιο «Δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί». Για τη παρουσίαση του ιστορικού θέματος στην τάξη, , το εγχειρίδιο του δασκάλου, παρέχει κατάλληλο βοηθητικό διδακτικό υλικό, με την μορφή επιπλέον ιστορικών πληροφοριών για τον τρόπο διδασκαλίας του. Προτείνει την παρουσίαση της σημειογραφία του Stevin σε συνδυασμό με τη σημερινή σημειογραφία και δίνει έμφαση στην ύπαρξη ισοδυναμίας μεταξύ ενός δεκαδικού αριθμού και της ανάλυσης του σε άθροισμα δεκαδικών κλασμάτων.

Είναι φανερή η λειτουργικότητά της ιδέας του Stevin σε πεπερασμένο αλλά όχι σε άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα. Το ζήτημα της διερεύνησης των απειροψήφιων δεκαδικών αναπτυγμάτων εμφανίστηκε μετά τον $16^{ο}$ αιώνα καθώς οι επιστήμονες χρησιμοποιούσαν συστηματικά αριθμούς στην μορφή αυτή και αποτελεί πηγή πολλών παρανοήσεων για τη διδασκαλία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας έδειξε πως λανθασμένες αντιλήψεις για τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών μεταφέρονται από τη μία βαθμίδα εκπαίδευσης στην άλλη διαιωνίζοντας τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν μαθητές και καθηγητές δημιουργώντας έτσι έναν φαύλο κύκλο.

Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται η έννοια της δεκαδικής αναπαράστασης, η εισαγωγή της πριν από τα κλάσματα, οι αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις που εμφανίζουν με μεγάλη συχνότητα ρητοί και άρρητοι και η συχνή ταύτιση πραγματικών αριθμών με συγκεκριμένες ρητές προσεγγίσεις τους, αποτελούν τις βασικότερες αιτίες δημιουργίας παρανοήσεων στη διδασκαλία του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Η τάση των μαθητών να μετατρέπουν τα κλάσματα σε δεκαδική μορφή είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της διδασκαλίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και γνωρίζοντας την ιστορία των δεκαδικών μπορούμε να διακρίνουμε πως η τάση αυτή έχει τη ρίζα της στον λόγο εφεύρεσης της δεκαδικής αναπαράστασης, δηλαδή στην αποφυγή δύσκολων πράξεων μεταξύ κλασμάτων. Έτσι, απαντώντας στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, υποστηρίζουμε ότι η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μπορεί να συμβάλλει στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη δεκαδική αναπαράσταση.

Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός, ότι τα Μαθηματικά είναι κατεξοχήν το μάθημα στο οποίο η προηγούμενη γνώση είναι εξαιρετικά σημαντική, επισημαίνουμε τους κινδύνους που συνεπάγεται η αποκλειστική χρήση των δεκαδικών, καθώς αποτελεί πηγή πολλών παρανοήσεων που συνδέονται με την κατανόηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων των πραγματικών. Το πλεονέκτημα της δεκαδικής αναπαράστασης μπορεί να μετατραπεί σε μειονέκτημα όταν απαιτείται ακρίβεια στους υπολογισμούς. Οι μαθητές θεωρούν πως άλλοι αριθμοί είναι οι ρητοί, άλλοι τα κλάσματα και άλλοι οι δεκαδικοί. Η παρανόηση αυτή ενισχύεται και από τα περισσότερα σχολικά βιβλία που αναφέρουν δεκαδικούς, κλάσματα και ρητούς σε ξεχωριστές και ασύνδετες μεταξύ τους ενότητες ή κεφάλαια.

Θεωρείται λοιπόν σημαντική η γνώση της ιστορίας για έναν εκπαιδευτικό όχι μόνο για να αντιληφθεί τα κίνητρα και του λόγους που οδήγησαν στην εφεύρεση της δεκαδικής αναπαράστασης αλλά και για την ορθή επιλογή των καταστάσεων στις οποίες απαιτείται η χρήση τους. Η ιστορική γνώση αποτελεί εφόδιο για την αναγνώριση και την αντιμετώπιση των λανθασμένων αντιλήψεων που πιθανόν να δημιουργηθούν κατά τη διδασκαλία του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η Even (1998) επισημαίνει ότι ένα σημαντικό ζήτημα για την εννοιολογική κατανόηση στα μαθηματικά είναι οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα να κατανοούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε αναπαράστασης καθώς και να είναι ικανοί να επιλέγουν τους πιο σημαντικούς και κατάλληλους από τους αναπαραστατικούς τρόπους.

Ο συνηθισμένος τρόπος διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών φαίνεται να είναι ανεπαρκής καθώς τα αποτελέσματα ποικίλων ερευνών αποδεικνύουν συνεχώς τις λανθασμένες αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η δραστηριότητα που σχεδιάστηκε για τη Β΄ γυμνασίου αποτελεί μια διδακτική πρόταση, εμπνευσμένη από την ιστορία και βασισμένη στη σύνδεση της δεκαδικής αναπαράστασης ρητών και άρρητων με τους αντίστοιχους ορισμούς των δύο συνόλων, με κύριο στόχο την εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών.

Εστιάζοντας στα λάθη που αναδεικνύει η έρευνα, παρατηρούμε ότι οι ερευνητές της διδακτικής έχουν αποσαφηνίσει τις παρανοήσεις των μαθητών, οι οποίες δείχνουν να μην έχουν ξεπεραστεί έως και την τελευταία τάξη του γυμνασίου, με αποτέλεσμα στην Α΄ λυκείου να δημιουργείται η ανάγκη για επανάληψη αλλά και για εμβάθυνση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έχοντας εξετάσει το θετικό ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών και παρατηρώντας τα κενά που υπάρχουν ως προς την μεθοδική και συστηματική αξιοποίησή της διαπιστώθηκε η έλλειψη διαθέσιμου υλικού και η προσαρμογή για χρήση του.

Με γνώμονα τις συνηθέστερες παρανοήσεις των μαθητών που αφορούν στην κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης και χρησιμοποιώντας την ιστορική της εξέλιξη – πορεία κατασκευάσαμε μια διδακτική παρέμβαση για την Α΄ λυκείου. Το υλικό που επιλέχτηκε από την ιστορική ανάλυση της παρούσας έρευνας, χρησιμοποιήθηκε με την μορφή ιστορικού σημειώματος και δεν περιλαμβάνεται στα σχολικά εγχειρίδια. Η διδασκαλία των πραγματικών μέσω της δεκαδικής αναπαράστασης και της ιστορικής τους εξέλιξης αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση που εμπλουτίζει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Το ζήτημα της αξιολόγησης και της διδασκαλίας των Φύλλων εργασίας αποτελεί πρόταση για μελλοντική έρευνα καθώς η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών ενθαρρύνεται -

τουλάχιστον από τους σχεδιαστές των προγραμμάτων σπουδών - όλο και περισσότερο τα τελευταία χρόνια στην ελληνική σχολική πραγματικότητα.

Συνοψίζοντας τα όσα αναφέρθηκαν μπορούμε να πούμε ότι η κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης είναι δηλωμένος στόχος του πιλοτικού προγράμματος σπουδών και στηριζόμενοι στην άποψη του Fauvel (1991: 4), ότι η ιστορική παρουσίαση του τρόπου ανάπτυξης των εννοιών, βοηθά στην κατανόησή αυτή καθώς οι ιστορικά εμπνευσμένες ασκήσεις μπορούν να διεγείρουν το ενδιαφέρον του μαθητή, συμπεραίνουμε πως υπάρχει ανάγκη ενός ευρύτερου σχεδιασμού για διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες θα στοχεύουν στη βαθιά εννοιολογική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το ζήτημα αυτό αφορά όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης καθώς αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την εισαγωγή των μαθητών στον επιστημονικό τομέα της ανάλυσης.

Τέλος, επισημαίνουμε ότι η διδασκαλία των δραστηριοτήτων που περιέχονται στα Φύλλα εργασίας προτείνεται για μελλοντική έρευνα σε πραγματικές σχολικές τάξεις. Η διδασκαλία αυτή, δεν πραγματοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα, καθώς απαιτήθηκε σημαντική ιστορική έρευνα για να αναδειχθούν τα προβλήματα που συνδέονται με την επινόηση της δεκαδικής αναπαράστασης. Υπάρχει ανάγκη εμπλουτισμού των προγραμμάτων σπουδών, με ιστορικά σημειώματα, τα οποία να αξιοποιούν ουσιαστικά την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική με στόχο τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών.

Βιβλιογραφία

6.1 Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2): 18 – 23.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp.91-125. New York: Academic Press.

Boyer, C. B. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα : Γ. Α. Πνευματικός.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 4(2): 165-198.

Demattè, A. & Furinghetti, F. (2014). History in the mathematics laboratory: an exploratory study. *Επιστήμες Αγωγής*, Θεματικό Τεύχος 2014*:*114-130.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5): 411– 424.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1): 105-121.

Ernest, P. (Eds.).(1996). *Social constructivism and the psychology of mathematics education. Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education.* London: The Falmer Press.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic ‘moments’ in the history of mathematics in classroom activites. *Educational Studies in Mathematics*, 66: 83–106.

Fauvel, J., & Maanen, J. A. van (Eds.). (1997). The role of history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 34: 255–259.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 11(2): 3-6.

Fauvel, J., & Maanen, J. A. van (Eds.). (2002). *History in mathematics education: The ICMI study*. Boston: Kluwer Academic.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29(1): 29-44.

Fraser, B. J., & Koop, A. J. (1978). Teachers' opinions about some teaching material involving history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 9(2): 147–151.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32(1): 37- 41.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual development and teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education,* pp. 631–654. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 416-425. Larnaca, Cyprus: University of Cyprus and ERME.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*. 47: 223–258.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3): 235-261.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Stuttgart: Leipzig.

Lehtinen, E., Merenluoto, K., & Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers. *European Journal of Psychology of Education*, 12(2): 131–145.

Liu, P-H. (2003). Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?. *Mathematics Teacher*, 96(6): 416-421.

Maanen, J.V. (1991). L'Hopital's weight problem. *For the Learning of Mathematics,* 11(2): 44-47.

Martinie, S. L. (2014). Decimal fractions: An important point. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(7): 420-429.

Merenluoto, K. and Lehtinen, E. (2006). Conceptual Change in the number concept: dealing with continuity and limit. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. and Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 163-165. Prague: Charles University in Prague.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA.

O'Connor, M. C. (2001). ''Can any fraction be turned into a decimal?'' A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics,* 46: 143 – 185.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 30(1): 39-46.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 35: 189-206.

Ransom, P., Arcavi, A., Barbin, E., Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 11 (2): 7-16.

Rickey, V.F. (1996). The necessity of History in teaching Mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching*, pp.251-268. Washington: MAA.

Rodriguez, Michel (1998). 'L'histoire des mathématiques, pourquoi je m' y intéresse ... et ce que j' en fais', in LR.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 65: 49-76.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line—where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4): 477-488.

Smith, D. E. (1959). *A source book of mathematics*. New York: Dover Publications.

Stowasser, R. J. K. (1980). Streifzügedurch die Geschichte, Zahlen zum Messen (1. Teil). *Mathematiklehrer*, 1: 39-42.

Struik, D. J. (Ed.). (1969). A Source Book in Mathematics, 1200–1800. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press; London: Oxford University Press.

Swetz, F. (2000). Problem Solving from the history of mathematics. In Victor J. Katz (Ed.), *Using History to teach mathematics-An International Perspective,* 51, pp.59-65. USA: The Mathematical Association of America.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical 'parallelism' revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2): 165-183.

Tzanakis, C. (1996). The history of the relation between mathematics and physics as an essential ingredient of their presentation. In E.Veloso (Ed.), *Proceedings of the 2nd European Summer University of History and Epistemology in Mathematics Education, Braga, Portugal, Universidade do Minho,* Vol ii, pp. 96-104.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the Close Historical Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks. *For the Learning of Mathematics*, 20(1): 44-55.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education, pp. 201–240. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vamvakoussi, X., Katsigiannis, K., & Vosniadou, S. (2009). Bridging the gap between discreteness and density. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, pp. 273-280. Thessaloniki, Greece: in search of theories in mathematics education.

Vamvakousi, X. & Vosniadou, S. (2006). Aspects of students' understanding of rational numbers. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 161-163. Prague: Charles University in Prague.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2): 181-209.

Van De Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά, Για Δημοτικό και Γυμνάσιο, Μια αναπτυξιακή διαδικασία*. Αθήνα: Επίκεντρο.

Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, & M. S. Wiske (Eds.), *Software goes to school- teaching for understanding with new technologies,* pp.56–69. New York: Oxford University Press.

Voskoglou, M. Gr. & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Mathematiche)*, 21: 127-141.

Zazkis, R. & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. In M. Johnsen Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, pp. 497–505. Bergen: Bergen university College.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Primes and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36: 207-218.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16: 1-27.

6.2 Ελληνική Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ. , Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., & Δαμιανού, Χ. (2013). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Αργυράκης, Α., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2014). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Βαμβακούση, Ξ. (2004). Εννοιολογική αλλαγή στα Μαθηματικά: Η κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών. Διδακτορική διατριβή. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας & Θεωρίας της Επιστήμης.

Βόσκογλου, Μ., & Κόσυβας, Γ. (2012). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών. *Ευκλείδης Γ΄,* 76: 11- 47.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2012). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Δαφέρμος, Β. (2000). Μια διδακτική προσέγγιση των ρητών αριθμών με έμφαση στις εννοιολογικές τους όψεις μέσα από τη χρήσης ειδικά σχεδιασμένου υπολογιστικού περιβάλλοντος. Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Σχολή Επιστημών της Αγωγής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Θωμαΐδης, Γ., & Καστάνης, Ν. (1987). Μία διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄,* 16: 61-92.

Θωμαΐδης, Γ. (1985). Η διδασκαλία εννοιών της Ανάλυσης με οδηγό την ιστορική εξέλιξη. *Ευκλείδης Γ΄,* 9: 8-22.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους». *Επιστήμες Αγωγής*, Θεματικό Τεύχος 2014: 16-37.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα:

Τόπος.

Κόσυβας, Γ. (2011). Μπορεί η έκπληξη να ανατρέψει την πλήξη; Δοκιμές μαθηματικών παραδόξων στην τάξη. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, & Π. Δαμιανού (Επιμ.), *Πρακτικά 13ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης,* σ. 49-60. Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Πατρώνης, Τ.,& Σπανός, Δ. (1996). *Σύγχρονες θεωρήσεις και έρευνες στη μαθηματική παιδεία*. Αθήνα: Πνευματικός Γ.Α.

Πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό - Γυμνάσιο). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Φιλίππου, Γ., & Χρήστου, Κ. (2002). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

1. ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΔΙΚΗΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

- **Πραγματικοί:** Οι πραγματικοί αριθμοί, που το σύνολό τους συμβολίζεται με R, αποτελούνται από τους ρητούς και τούς άρρητους και παριστάνονται με τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών.
- **Ρητοί:** Ρητός ονομάζεται ένας αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει την κλασματική μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι (α, β ∈Z) και β ≠ 0.

  Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα Q και έχουμε το εξής: $Q = \{ \frac{\alpha}{\beta}$ τ.ω. $\alpha, \beta \in Z$ με $\beta \neq 0 \}$.

  Ένας ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί μέσω της δεκαδικής του αναπαράστασης με πεπερασμένου πλήθους δεκαδικά ψηφία (τα δεκαδικά αναπτύγματα τερματίζονται) ή με άπειρα δεκαδικά ψηφία και τότε παρουσιάζει περίοδο (τα δεκαδικά αναπτύγματα δεν τερματίζονται άλλα είναι περιοδικά).
- **Άρρητοι:** Άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός που δεν μπορεί να πάρει την κλασματική μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι (α, β ∈ Z) και β ≠ 0.

  Ένας άρρητος, στη δεκαδική του αναπαράσταση, δεν έχει ούτε πεπερασμένο ούτε άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων που εμφανίζουν μια περίοδο. Υπάρχουν άρρητοι που έχουν τάξη, δηλαδή έναν κανόνα με τον οποίο εμφανίζονται τα δεκαδικά ψηφία.
- **Δεκαδική αναπαράσταση ρητού:** Οι ρητοί έχουν διαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις, εφόσον μπορούμε να προβλέψουμε τα δεκαδικά τους ψηφία οποιασδήποτε τάξης. Οι ρητοί έχουν αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις όταν η περίοδος τους είναι άγνωστη. Το μήκος της περιόδου ενός ρητού αριθμού προσδιορίζεται με βάση την ανάλυση του παρονομαστή του αντίστοιχου κλάσματος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- **Δεκαδική αναπαράσταση άρρητου:** Οι άρρητοι μπορεί να έχουν διαφανείς ή αδιαφανείς δεκαδικές αναπαραστάσεις. Αν οι άρρητοι έχουν κανονικότητα, δηλαδή συγκεκριμένο τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται τα ψηφία τους τότε η δεκαδική τους αναπαράσταση είναι διαφανής. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις οι άρρητοι έχουν αδιαφανή δεκαδική αναπαράσταση.

- **Δεκαδικοί αριθμοί:** Είναι ένας τρόπος γραφής, αναπαράστασης των ρητών και των άρρητων.
- **Σύμμετροι δεκαδικοί:** Δεκαδικοί που έχουν περίοδο, τα δεκαδικά τους ψηφία επαναλαμβάνονται με την ίδια συγκεκριμένη σειρά.
- **Ασύμμετροι δεκαδικοί:** Δεκαδικοί που δεν έχουν περίοδο, τα δεκαδικά τους ψηφία προκύπτουν με μία συγκεκριμένη διαδικασία (κανονικότητα).

2. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ.

ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Εύρεση του 0,3333.....σε μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$

Θέτω χ = 0,33333.....

Πολλαπλασιάζω με 10 όλη την εξίσωση και έχω 10χ = 3,33333.....

Αφαιρώ τις δύο παραπάνω ισότητες κατά μέλη και έχω 10χ-χ = 3,33333....- 0,33333...

$$\Leftrightarrow \quad 9\chi = 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \chi = \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \chi = \frac{1}{3}$$

Τελικά 0,3333...= $\frac{1}{3}$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Δίνεται ο αριθμός 0,264.

i. Μπορείς να μετατρέψεις τον παρακάτω αριθμό στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$; Αν ναι, μετέτρεψε τον.

ii. Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής μορφής του, απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι πεπερασμένος;
- Είναι απειροψήφιος και περιοδικός; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος του;
- Είναι απειροψήφιος και μη - περιοδικός;

ΑΣΚΗΣΗ 2: Δίνεται ο αριθμός 0,9999................

i. Μπορείς να μετατρέψεις τον παρακάτω αριθμό στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$; Αν ναι, μετέτρεψε τον.

ii. Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής μορφής του, απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι πεπερασμένος;
- Είναι απειροψήφιος και περιοδικός; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος του;
- Είναι απειροψήφιος και μη - περιοδικός;

ΑΣΚΗΣΗ 3: Δίνεται ο αριθμός 2616,616616616...........

i. Μπορείς να μετατρέψεις τον παρακάτω αριθμό στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$; Αν ναι, μετέτρεψε τον.

ii. Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής μορφής του, απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι πεπερασμένος;
- Είναι απειροψήφιος και περιοδικός; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος του;
- Είναι απειροψήφιος και μη - περιοδικός;

ΑΣΚΗΣΗ 4: Δίνεται ο αριθμός 2,61611611161111611111 6……

i. Μπορείς να μετατρέψεις τον παρακάτω αριθμό στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$; Αν ναι, μετέτρεψε τον.

ii. Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής μορφής του, απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι πεπερασμένος;
- Είναι απειροψήφιος και περιοδικός; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος του;
- Είναι απειροψήφιος και μη - περιοδικός;

ΑΣΚΗΣΗ 5: Δίνεται ο αριθμός π = 3,14159265358979…..

i. Μπορείς να μετατρέψεις τον παρακάτω αριθμό στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$; Αν ναι, μετέτρεψε τον.

ii. Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής μορφής του, απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι πεπερασμένος;

- Είναι απειροψήφιος και περιοδικός; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος του;
- Είναι απειροψήφιος και μη - περιοδικός;

ΑΣΚΗΣΗ 6: Δίνεται ο αριθμός φ = 1,6180339887498948482O…

i. Μπορείς να μετατρέψεις τον παρακάτω αριθμό στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$; Αν ναι, μετέτρεψε τον.

ii. Προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της δεκαδικής μορφής του, απαντώντας στις παρακάτω ερωτήσεις.

- Είναι πεπερασμένος;
- Είναι απειροψήφιος και περιοδικός; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος του;
- Είναι απειροψήφιος και μη - περιοδικός;

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Δίνονται οι παρακάτω ορισμοί:

Ρητός αριθμός: Κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ∈ Z και ν≠0.
Άρρητος αριθμός: Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ∈ Z και ν ≠ 0.

i. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι ;

0,264	2,616116111611116111116……	0,9999999……………
3,14159265358979…..	2616,616616……	1,61803398874989484820…

ii. Τι διαφορές παρατηρείτε στους αριθμούς που βρίσκονται στη μεσαία στήλη;

ΑΣΚΗΣΗ 2:

i. Ανακαλύψτε τον τρόπο με τον οποίο θα αναγνωρίζετε αν ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος από τη δεκαδική του μορφή, τοποθετώντας τους στην κατάλληλη θέση του πίνακα με βάση τις προηγούμενες ασκήσεις.

ii. Συνθέστε τον ορισμό της δεκαδικής μορφής των ρητών και των άρρητων.

	Πεπερασμένοι	Απειροψήφιοι περιοδικοί	Απειροψήφιοι μη-περιοδικοί
Ρητοί			
Άρρητοι			

3. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι πρώτες αναπαραστάσεις κλασμάτων εμφανίζονται στους Σουμέριους, στην κοιλάδα της Μεσοποταμίας γύρω στα 3000π.Χ. Ευρήματα με ειδικά σύμβολα για κλασματικές μονάδες, έχουμε από ιερογλυφικές επιγραφές των αρχαίων Αιγυπτίων, με τη βοήθεια των οποίων επιλύονταν τα προβλήματα της εποχής. Στην χρήση μοναδιαίων κλασμάτων είναι βασισμένη και η λύση του παρακάτω προβλήματος, όπως περιγράφεται στον αιγυπτιακό πάπυρο του Rhind *(1650 π.Χ.):*

«Μία άγνωστη ποσότητα, συν τα $\frac{2}{3}$ της, συν το $\frac{1}{2}$ της, συν το $\frac{1}{7}$ της, ισούται με 33. *Ποια είναι η ποσότητα αυτή;»*

Το 1202 μ.Χ. διατυπώθηκε από τον Leonardo von Pisa στο «Liber abaci», ένας ταχύτερος υπολογισμός από εκείνο που ήταν γραμμένος στον πάπυρο. Ο υπολογισμός αυτός οδηγούσε στον αριθμό $\frac{1386}{97} = 14 + \frac{28}{97}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Α) Να επιλύσετε το πρόβλημα που εμφανίζεται στον αιγυπτιακό πάπυρο του Rhind με τη βοήθεια εξίσωσης.

Β) Δίνεται η διαδικασία απλοποίησης του κλάσματος όπως καταγράφηκε από τον Leonardo.

$$\frac{28}{97} = \frac{1}{\frac{97}{28}} = \frac{1}{\frac{(28\cdot 3+13)}{28}} = \frac{1}{3+\frac{13}{28}} \approx \frac{1}{4}.$$

Υπολογίζοντας τη διαφορά $\frac{28}{97} - \frac{1}{4} = \frac{15}{388}$

αντικατέστησε το κλάσμα $\frac{28}{97}$ με το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{15}{388}$.

i) Να εξηγήσετε τις πράξεις στις οποίες βασίζεται η συγκεκριμένη μέθοδος απλοποίησης.

ii) Να συνεχίσετε τη διαδικασία απλοποίησης για ακόμα μία φορά στο κλάσμα $\frac{15}{388}$ όπως την εκτέλεσε ο Leonardo και να βρείτε το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε.

iii) Για ποιο λόγο ο Leonardo επινόησε αυτή τη διαδικασία απλοποίησης με τα κλάσματα; Τι θα συνέβαινε αν αντικαθιστούσε το κλάσμα $\frac{28}{97}$ με το $\frac{1}{4}$ και δεν υπολόγιζε τη διαφορά τους;

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να συγκρίνετε τους παρακάτω ρητού αριθμούς και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i) $\frac{28}{97} \ldots\ldots \frac{1}{4}$

ii) $\frac{15}{388} \ldots\ldots \frac{1}{26}$

iii) $\frac{77.708.431}{2.640.858} \ldots\ldots\ldots \frac{206}{7}$

Το 1680, ο Christian Huygens (1629-1695), Ολλανδός μαθηματικός και φυσικός επιστήμονας, στην προσπάθειά του να εκτελέσει υπολογισμούς για να κατασκευάσει ένα μοντέλο του ηλιακού συστήματος βρέθηκε αντιμέτωπος με ένα παρόμοιο αριθμητικό ζήτημα. Η ανάγκη απλοποίησης του κλάσματος $\frac{77.708.431}{2.640.858}$ *τον οδήγησε στην επινόηση της παρακάτω μεθόδου.*

$$\frac{77.708.431}{2.640.858} = 29 + \frac{1.123.549}{2.640.858} = 29 + \frac{1}{\frac{2.640.858}{1.123.549}} = 29 + \frac{1}{2+\frac{393.760}{1.123.549}} = \ldots\ldots\ldots$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Α) Να συνεχίσετε τη διαδικασία απλοποίησης του κλάσματος ακόμα δύο φορές, όπως την εκτέλεσε ο Huygens, ξεκινώντας από το κλάσμα $\frac{393.760}{1.123.549}$ και να βρείτε το κλάσμα στο οποίο κατέληξε.

Β) Το κλάσμα στο οποίο κατέληξε ο Huygens ήταν $29 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{57.731}{336.029}}}}$ και αντικατέστησε την ποσότητα $2 + \frac{1}{1+\frac{57.731}{336.029}}$ με τον αριθμό 3.

i) Σύμφωνα με αυτή την αντικατάσταση, να εκτελέσετε τις πράξεις και να βρείτε με ποιο κλάσμα προσέγγισε ο Huygens το αρχικό.

ii) Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος με το αρχικό κλάσμα, τι συμπεραίνετε;

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να συγκρίνετε τους παρακάτω πραγματικούς αριθμούς

i) $\frac{22}{7}$ ….π

ii) $\frac{355}{113}$….π

iii) $\frac{377}{120}$….π

iv) 1,41….$\sqrt{2}$

v) 1,414444…$\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να συγκρίνετε τους παρακάτω πραγματικούς αριθμούς

i) -1 …..-0.9999**9**

ii) $\frac{7}{3}$…... 2,33**3**….

iii) 1,23999**9**……..1,24

iv) $\frac{5}{7}$……0,**714285**

v) $\sqrt{4}$……1,9999**9**……

vi) 0,25…..$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να χαρακτηρίσετε του παρακάτω αριθμούς ως ρητούς ή άρρητους και έπειτα να υπολογίσετε και να χαρακτηρίσετε το άθροισμά των δύο τελευταίων. Τι συμπεραίνετε;

i) 1.010101…

ii) 1.1010010001…

iii)0,101001000100001000001...

iv)1,0101101110111101111101111110..

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λάθος:

Α) Για να χαρακτηρίσουμε έναν αριθμό ρητό ή άρρητο αρκεί να γνωρίζουμε:

i) Αν μπορεί να γραφτεί στην μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ακέραιοι και $\nu \neq 0$.

ii) Αν είναι απειροψήφιος με περίοδο ή απειροψήφιος χωρίς περίοδο.

iii) Αν είναι απειροψήφιος περιοδικός.

iv) Αν είναι απειροψήφιος μη περιοδικός.

v) Αν είναι περιοδικός ή μη περιοδικός.

vi) Αν τα δεκαδικά του ψηφία είναι πεπερασμένα ή απειροψήφια.

Β) Δεν υπάρχει ακριβής τιμή του:

i) $\sqrt{2}$

ii) $\frac{144}{233}$

iii) $\boldsymbol{\frac{4}{2}}$

iv) $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

v) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{5}}$

vi) $\frac{60}{11}$

vii) $\sqrt{289}$