ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΙΤΛΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Διδασκαλία των εννοιών της Ανάλυσης με ιστορική προοπτική σε μαθητές Γ' Λυκείου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΔΟΥ ΜΑΓΔΑΛΗΝΗΣ (Α.Ε.Μ 738)

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

Στο «Επιστήμες της Αγωγής και Νέες Τεχνολογίες»

Με κατεύθυνση «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

Επιβλέπων : Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2020

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας «Επιστήμες της Αγωγής : Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για την αμέριστη στήριξή του και την τιμή που μου έκανε να επιβλέπει την εργασία μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη και κ. Τσακιρίδου Ελένη που δέχτηκαν να είναι εξεταστές στην εργασία μου και κατά την διάρκεια των σπουδών μου με βοήθησαν να εμπλουτίσω τις γνώσεις μου.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου που καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών και της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, μου συμπαραστάθηκαν και με βοήθησαν να φτάσω στο τέλος.

"Κανείς δεν μπορεί να διδάξει σε κάποιον κάτι. Το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να τον βοηθήσει να το μάθει μόνος του."

Galileo Galilei (1564 – 1642)

Περιεχόμενα

Λίστα Εικόνων

Περίληψη

Η Ανάλυση αποτελεί έναν τομέα στα Μαθηματικά με τον οποίο οι μαθητές στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα έρχονται αντιμέτωποι στην τελευταία τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και καλούνται να δώσουν πανελλήνιες εξετάσεις με σκοπό την εισαγωγή τους σε Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα διαπραγματευόμενοι έννοιες όπως το όριο, η συνέχεια μιας συνάρτησης, η παράγωγος ή το ολοκλήρωμα. Στην παρούσα έρευνα μελετάται αν η Ιστορία των Μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα μια ιστορικοδιδακτική προσέγγιση επιλεγμένων ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου που αφορούν τον Διαφορικό Λογισμό θα βοηθούσε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις εννοιολογικές παρανοήσεις που παρουσιάζουν. Δυσκολίες όπως η παράγωγος ως κλίση της εξίσωσης της εφαπτόμενης ευθείας σε μια συνάρτηση ή η παράγωγος συνάρτηση καθώς και η δυσκολία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων για την εύρεση μεγίστων και ελαχίστων τιμών αποτέλεσαν κίνητρο για την πραγματοποίηση της έρευνας, η οποία διεξήχθη σε επτά μαθητές της Γ' τάξης Γενικού Λυκείου κατά το ακαδημαϊκό έτος 2019-2020.

Λέξεις κλειδιά : Διαφορικός Λογισμός, Παράγωγος, Παρανοήσεις μαθητών, Ιστορία των Μαθηματικών, Πανελλήνιες Εξετάσεις

Abstract

Students in Greece have to pass Panhellenic Exams in the last grade of secondary education so that they can be accepted in Higher Education Institutions. In order to achieve this, they study about Analysis, a section of Mathematics and more specifically they deal with concepts such as the limit, the continuity of a function and derivative or integral. This study examines whether the History of Mathematics and particularly a historical teaching approach is able to help students overcome their misconceptions on Calculus. Students' difficulties acted as an incentive for me to conduct this study. The sample of the study was seven students of the last grade of secondary education in 2019-2020.

Keywords : Calculus, Derivative, Students' misconceptions, History of Mathematics, Panhellenic Exams

Εισαγωγή

Η μάθηση με κατανόηση των εννοιών έχει προσελκύσει ολοένα και περισσότερο την προσοχή από εκπαιδευτικούς και ψυχολόγους και έχει ανυψωθεί προοδευτικά σε έναν από τους πιο σημαντικούς στόχους για όλους τους μαθητές σε όλα τα μαθήματα. Ωστόσο η υλοποίηση αυτού του στόχου όπως υπογραμμίζει ο Στυλιανίδης (2007) είναι προβληματική ειδικά στον τομέα των μαθηματικών. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι αν η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στην ουσιαστική μάθηση.

Στην παρούσα έρευνα το ερώτημα ειδικεύεται στην συμβολή της ιστορικοδιδακτικής προσέγγισης στον τομέα της Ανάλυσης και συγκεκριμένα στον Διαφορικό Λογισμό. Η έννοια της παραγώγου εξελίχθηκε σε μεγάλο χρονικό διάστημα αρχικά οδηγούμενη από προβλήματα φυσικής και γεωμετρίας Ruch (2019). Οι πολυδιάστατες μορφές και χρήσεις που μπορεί να έχει όπως η παράγωγος ως αριθμός δηλαδή η κλίση της εξίσωσης της εφαπτομένης ή η παράγωγος συνάρτηση δυσκολεύουν τους μαθητές και τους οδηγούν σε σφάλματα τα οποία μπορεί να εξαλειφθούν αν προστεθεί στον τρόπο διδασκαλίας και μια ιστορική προοπτική. Αυτό ερευνά και αναμένει η παρούσα διπλωματική εργασία.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται λόγος για την σημασία της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία και διαχωρίζεται η Ιστορία των Μαθηματικών ως εργαλείο και ως σκοπός. Απαριθμούνται οι λόγοι για τους οποίους είναι χρήσιμη η χρησιμοποίηση μιας ιστορικής προσέγγισης στην διδασκαλία των μαθηματικών ενώ στο τέλος του κεφαλαίου διαχωρίζεται η συμβολή της στην παρούσα διδακτική παρέμβαση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξηγούνται τι είναι ο Λογισμός σε ποιον κλάδο των Μαθηματικών ανήκει ενώ ταυτόχρονα γίνεται λόγος για τις έννοιες τις οποίες πραγματεύεται. Ακολουθεί μια Ιστορική Αναδρομή στην Ιστορική Εξέλιξη της έννοιας της Παραγώγου, έννοια που αποτελεί ταυτόχρονα και την βασικότερη ιδέα γύρω από την οποία κατασκευάστηκε η εργασία. Η ιστορική μελέτη χωρίζεται σε τρεις περιόδους της Αρχαίας, της Μεσαιωνικής και της Σύγχρονης ενώ σε καθεμία από αυτές αναφέρονται οι σημαντικότερες προσωπικότητες και η συμβολή τους στην δημιουργία και την εξέλιξη της έννοιας. Πιο συγκεκριμένα δεν θα μπορούσε να παραληφθεί η συμβολή των Ελλήνων στην Αρχαία Περίοδο ξεχωρίζοντας τον Αρχιμήδη, τον Εύδοξο ή τους Πυθαγόρειους. Από την άλλη μεριά κατά την

Μεσαιωνική εποχή οι Ινδοί ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν με προβλήματα που όδευαν στην σύλληψη του Λογισμού καθώς και ο Brahmagupta ή ο Alhazen και οι Robert Grossetest, Walter Burley, Henry Goethals, Petrus Ispanus ενώ ο Kepler οδηγήθηκε στην Αρχή της Συνέχειας που αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αξιωματική θεμελίωση του Λογισμού που έγινε αργότερα. Τέλος γίνεται αναφορά σε όλες τις μεγάλες προσωπικότητες της Σύγχρονης Εποχής που συνέβαλαν στην σύγχρονη αντίληψη του Λογισμού όπως οι Newton, Leibniz, Fermat, Cauchy, Euler, Cavalieri και άλλοι με αναφορά όπως αρμόζει σε κάθε προσπάθεια καταγραφής της έννοιας της παραγώγου στην μεγάλη διαμάχη των δύο πρώτων που πυροδότησε σχόλια και άλλες διενέξεις εκείνη την εποχή.

Στην συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές γνώσεις που, σε θεωρητικό επίπεδο, πρέπει να έχει ένας μαθητής Γ’ Λυκείου ώστε να είναι σε θέση να έρθει αντιμέτωπος με την Ανάλυση στην τελευταία τάξη πριν εισαχθεί στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ ταυτόχρονα γίνεται λόγος για το πώς είναι δομημένο το σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα σχετικά με την μαθηματική Παιδεία. Επιπλέον αναφέρεται η εξεταστέα ύλη στα μαθηματικά για τις πανελλήνιες εξετάσεις σύμφωνα με δημοσιευμένο ΦΕΚ από την κυβέρνηση ενώ υπάρχουν και οι οδηγίες που σχετίζονται με τον τρόπο διδασκαλίας που προτείνει το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στους εκπαιδευτικούς όσον αφορά τις έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα διπλωματική εργασία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για τις παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά σύμφωνα με την υπάρχουσα διεθνή βιβλιογραφία. Παρουσιάζονται παρανοήσεις σε ένα γενικότερο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης και αργότερα αυτές συγκεκριμενοποιούνται στην έννοια της παραγώγου.

Ακολουθεί το πέμπτο κεφάλαιο όπου παρουσιάζονται οι τρεις ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου που επιλέχθηκαν να διδαχθούν κατά την διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης μέσω ιστορικών δραστηριοτήτων των οποίων η πηγή αναφέρεται και επεξηγείται ο λόγος που από ολόκληρο το σχολικό εγχειρίδιο μελετώνται αυτές οι τρεις ασκήσεις

Στο έκτο κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας, η χρησιμότητά της, τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν καθώς και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν. Γίνεται λόγος για το δείγμα των μαθητών και υποδεικνύονται κάποιες φορές και οι απαντήσεις που αυτοί έδιναν κατά την διάρκεια της διδασκαλίας.

Εν συνεχεία τον πρώτο λόγο έχουν τα αποτελέσματα της έρευνας όπου γίνεται μια λεπτομερής παρουσίασή τους αρχικά με τις απαντήσεις που έδωσε ο κάθε μαθητής στο εκάστοτε πρόβλημα του pre και post test αλλά και στο τέλος τους κεφαλαίου με μία περισσότερο ολοκληρωμένη ματιά όπου τα αποτελέσματα παραθέτονται συνολικά μέσω πινάκων.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας και γίνεται μια συζήτηση γύρω από τα προσδοκώμενα και τα πραγματικά τελικά αποτελέσματά της ενώ στο ένατο κεφάλαιο καταγράφονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες που πυροδοτεί η παρούσα.

Τέλος, δεν θα μπορούσαν να παραληφθούν και οι περιορισμοί που υπήρξαν κατά την διάρκεια της υλοποίησης της έρευνας και για αυτόν τον λόγο αυτοί παρουσιάζονται με σκοπό ο αναγνώστης να αποκτήσει, όσο τον δυνατόν, μια ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο διεξαγωγής της.

Κεφάλαιο 1 : Η Ιστορία των Μαθηματικών στην διδασκαλία του μαθήματος

Η ανάγκη χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία

“*Νομίζω ότι όποιος και όποια θέλει να προοδεύσει στα μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τους κλασσικούς των Μαθηματικών*”

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Νορβηγός Μαθηματικός

Είναι αδιαμφισβήτητο ότι τα μαθηματικά είναι ο θεμέλιος λίθος πολλών άλλων επιστημών και έχει καθορίσει σε πολύ μεγάλο βαθμό την εξέλιξη της ανθρωπότητας από αρχαιοτάτων χρόνων. Παρ’ όλα αυτά θεωρείται ένα από τα πλέον δύσκολα και δυσνόητα μαθήματα για τους μαθητές όλων των βαθμίδων καθώς και ως επιστήμη φαντάζει στριφνή στα μάτια πολλών ενηλίκων. Το ποσοστό των μαθητών που ειδικεύονται στα μαθηματικά και την επιστήμη είναι ιδιαίτερα χαμηλό. Οι τρέχουσες έρευνες υποδηλώνουν ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα πρωτότυπα σχετικά με τα μαθηματικά και την επιστήμη είναι σε μεγάλο βαθμό ανόμοια από αυτά που έχουν στο μυαλό τους ή θέλουν να έχουν οι ίδιοι οι μαθητές (Hannover & Kessels, 2004). Οι λόγοι οι οποίοι οδηγούν τους μαθητές στην αποστροφή τους από την επιστήμη των μαθηματικών είναι πολλοί και ποικίλοι, η ανάλυσή τους όμως ξεπερνά τα όρια της παρούσας έρευνας. Αρκεί μόνο να σημειωθεί ότι οι υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά πιστεύεται ότι είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με υψηλά επίπεδα στην γενικότερη ευφυΐα του ανθρώπου (Buckley, 2013).

Από την άλλη μεριά όλο και περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι συναισθήματα όπως το μαθηματικό άγχος είναι ένα μέρος της μαθησιακής διαδικασίας επειδή μπορεί και επηρεάζει την συμπεριφορά του μαθητή (Buckley, 2013). Ως μαθηματικό άγχος προσδιορίζεται η αρνητική αντίδραση στα μαθηματικά και στις μαθηματικές καταστάσεις (Campbell, 2005). Οι αρνητικές αυτές αντιδράσεις και ο «φόβος» που υπάρχει γύρω από το μάθημα των μαθηματικών οδηγεί τους μαθητές σε παρανοήσεις και κατ' επέκταση σε λανθασμένες απαντήσεις άρα και σε εντονότερη αποστροφή από το μάθημα. Οι μαθητές απαντούν λανθασμένα για πολλούς λόγους. Μερικοί από αυτούς είναι ότι δεν είναι συγκεντρωμένοι οι ίδιοι, ή ότι δίνουν βιαστικές επεξηγήσεις (Swan, 2001). Σύμφωνα, λοιπόν με την διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν προβλήματα που επιβάλλεται να ξεπεραστούν ώστε να γίνει το μάθημα των μαθηματικών περισσότερο ελκυστικό για τους μαθητές.

Πολλές οι προτάσεις που προσπαθούν να δώσουν λύση στα παραπάνω προβλήματα και πολλοί τρόποι για να διδάξει κανείς μια μαθηματική έννοια ή μια μαθηματική διαδικασία.

Σύμφωνα με τον Dubinsky (1994). Υπάρχουν τέσσερις πιθανές απαντήσεις για το πώς μπορούν να μαθαίνουν οι άνθρωποι μαθηματικά

- **Αυθόρμητα**. Αν πιστέψει κανείς ότι οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά ατομικά και αυθόρμητα κοιτώντας διαγράμματα ή ακούγοντας έναν ομιλητή τότε η απάντηση στο ερώτημα για το τι μπορούμε να κάνουμε για να βοηθήσουμε τους μαθητές είναι να παρουσιάσουμε υλικό σε λεκτική γραπτή ή εικονογραφημένη μορφή και να περιμένουμε να το μάθουν μόνοι τους
- **Επαγωγικά**. Αν πιστέψει κανείς ότι οι μαθητές μαθαίνουν επαγωγικά δουλεύοντας με πολλά παραδείγματα, εξάγοντας κοινά χαρακτηριστικά και σημαντικές ιδέες από αυτές τις εμπειρίες και οργανώνοντας αυτές τις πληροφορίες στο μυαλό τους, τότε απάντηση μπορεί να είναι ότι οι μαθητές δαπανούν ένα πολύ υψηλό ποσοστό από τον χρόνο τους με παραδείγματα
- **Κατασκευαστικά**. Αν πιστέψει κανείς ότι οι μαθητές μαθαίνουν κάνοντας ψυχικές κατασκευές ώστε να ασχοληθούν με τα μαθηματικά φαινόμενα, τότε

η απάντηση στην ερώτηση μπορεί να περιλαμβάνει μια μελέτη για το τι ακριβώς είναι αυτές οι κατασκευές, πώς μπορούν να γίνουν και τι μπορεί να γίνει για να ωθήσει τους μαθητές να τις κάνουν

- **Πραγματικά**. Αν πιστέψει κανείς ότι οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά ως απάντηση σε προβλήματα σε άλλους τομείς, τότε η απάντηση στην αρχική ερώτηση μπορεί να περιλαμβάνει την εισαγωγή των μαθητών σε πολλές εφαρμογές

Στην έρευνα που εκπονήθηκε το ερώτημα είναι αν η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει έναν τρόπο διδασκαλίας που θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα συμβάλλει στην μείωση της αρνητικής στάσης που δείχνουν οι μαθητές απέναντι στο μάθημα. Κατά τον Fauvel αυτοί που είναι ιδιαίτερα ενθουσιώδεις τονίζουν ότι τα μαθηματικά είναι ενδογενώς ένα ιστορικό μάθημα με την έννοια ότι όλα τα μαθηματικά που διδάσκονται οι μαθητές σήμερα έχουν γίνει αντικείμενο διδασκαλίας από κάποιον, κάπου, κάποια στιγμή τα τελευταία τέσσερις χιλιάδες χρόνια. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί μέσω των ιστορικών σημειωμάτων τα οποία υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια δίχως να υπάρχει σχετική οδηγία για τον τρόπο αξιοποίησής τους.

Τις τελευταίες δεκαετίες, υπάρχει ένα παγκόσμιο ενδιαφέρον σχετικά με την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση (Tzanakis & Thomaidis, 2012). Άλλωστε μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα ένα διαδεδομένο σχήμα συνύπαρξης της ιστορίας των μαθηματικών με το σχολικό μάθημα των μαθηματικών ήταν η ιστορική εισαγωγή στο μάθημα της Γεωμετρίας. Αυτή η μορφή έχει τις ρίζες της στο Πρόκλο ο οποίος στο σχολιασμό του στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη προτάσσει μια ιστορική ανασκόπηση της γεωμετρίας. (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Ωστόσο στα ελληνικά πανεπιστήμια, που προετοιμάζουν τους μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών, καθώς και στις σχολές επιμόρφωσης ουδέποτε διδάχθηκε η ιστορία των μαθηματικών σαν αυτόνομο μάθημα. Κάποιες πολύ πρόσφατες και ελάχιστες εξαιρέσεις, δεν αναιρούν το γεγονός ότι η συντριπτική πλειοψηφία των καθηγητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σήμερα, έχει ανύπαρκτες γνώσεις για την ιστορία των μαθηματικών και το μορφωτικό της ρόλο (Θωμαΐδης, 1990)

Όλα τα παραπάνω κρίνουν αναγκαία την έρευνα για την συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία και την παρότρυνση να υπάρχει η ιστορική προοπτική τόσο στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσο και στα τμήματα μαθηματικών παγκοσμίως.

Ιστορία ως εργαλείο και Ιστορία ως σκοπός

Σύμφωνα με τον Jankvist (2009) η Ιστορία των Μαθηματικών διαχωρίζεται σε δύο κατηγορίες στην Ιστορία ως εργαλείο και στην Ιστορία ως σκοπό.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητός ο διαχωρισμός της Ιστορίας των Μαθηματικών στις κατηγορίες που έχουν την Ιστορία ως εργαλείο και ως σκοπό είναι αναγκαίο να δοθούν επεξηγήσεις σχετικά με την κάθε μία από αυτές.

Ιστορία ως εργαλείο :

Η ιστορία ως εργαλείο σχετίζεται με το πώς οι μαθητές μπορούν να μάθουν μαθηματικά. Ένα τυπικό επιχείρημα εδώ είναι ότι η ιστορία μπορεί να αποτελέσει κινητήριο παράγοντα για την εκμάθηση των μαθητών (Jankvist, 2009). Έχοντας κινητήριες και συναισθηματικές επιπτώσεις η ιστορία θα μπορεί επίσης να παίξει τον ρόλο ενός γνωστικού εργαλείου υποστηρίζοντας την άμεση εκμάθηση των μαθηματικών (Jankvist, 2009). Σύμφωνα με τον Jankvist η χρήση της ιστορίας ως γνωστικό εργαλείο είναι η ταυτοποίηση των επιστημονικών εμποδίων, όπως έχει γίνει γνωστή από τον Bachelard.

Ο τελευταίος αλλά πολύ ιδιαίτερος τύπος της ιστορίας ως εργαλείο αναφέρεται σε εξελικτικά επιχειρήματα σύμφωνα με τα οποία δεν μπορεί να υπάρξει μάθηση στα μαθηματικά χωρίς την ιστορία. Πιο συγκεκριμένα το πιο ξεκάθαρο εξελικτικό επιχείρημα είναι αυτό που υποστηρίζει ότι η οντογένεση είναι αποτέλεσμα της φυλογένεσης. Δηλαδή στα μαθηματικά το παραπάνω επιχείρημα εξηγείται ως εξής : Για να μάθει κανείς μαθηματικά πρέπει το μυαλό του να περάσει από τα ίδια στάδια που πέρασαν τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους. (Jankvist, 2009).

Ιστορία ως σκοπός :

Η ιστορία ως σκοπός δεν εξυπηρετεί τον πρωταρχικό σκοπό της ύπαρξης βοήθειας αλλά μάλλον ότι είναι σκοπός από μόνη της θέτοντας και υποδεικνύοντας απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικά με την εξέλιξη και την ανάπτυξη των μαθηματικών (Tzanakis & Thomaidis, 2012). Δηλαδή, η ιστορία ως σκοπός δεν είναι πρωταρχικό εργαλείο για την εκμάθηση των μαθηματικών καλύτερα και πιο εμπεριστατωμένα, παρόλο που εξακολουθεί να είναι ένα (θετικό) υποπροϊόν. Στην χρήση της ιστορίας ως στόχου, η εκμάθηση αναπτυξιακών και εξελικτικών πτυχών των μαθηματικών είτε εξυπηρετεί έναν στόχο από μόνο του είτε χρησιμεύει για να απεικονίσει άλλες ιστορικές πτυχές (Jankvist, 2009). Υπό αυτήν την έννοια θεωρείται ότι στόχος είναι να δουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στον χώρο και στον χρόνο.

Σύμφωνα με τον Jankvist τα επιχειρήματα της ιστορίας ως σκοπού που ασχολούνται με τα «από έξω» (meta-issues) ζητήματα των μαθηματικών είναι αντίθετα με τα επιχειρήματα της ιστορίας ως στόχου που συνδέονται με τα ζητήματα εκ των έσω, (in-issues) των μαθηματικών. Μέσω αυτών των ζητημάτων υπάρχουν θέματα που σχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες, τις θεωρίες, τις ειδικότητες, τις μεθόδους κλπ.

Λόγοι χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών

Το ερώτημα που δημιουργείται είναι γιατί η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στην διδασκαλία των μαθηματικών; Οι περιστάσεις οι οποίες οδηγούν στην χρήση της ιστορίας είναι ποικίλες. Στο τέλος της δεκαετίας του ‘70 η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών διαμορφώθηκε σύμφωνα με το IREM (Instituts de recherche sur l ‘enseignement des mathématiques) και δημιουργήθηκε μια πανεθνική κοινότητα που ονομάστηκε Commission inter- IREM «Épistémologie et Histoire des Mathématiques». Για την απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή μπορούμε να πούμε ότι η ιστορία των μαθηματικών έχει τρεις λειτουργίες σύμφωνα με την Commission inter- IREM.

- Fonction vicariante – Οι μαθηματικές γνώσεις τις οποίες κατέχει ένας καθηγητής τις έχει αποκτήσει στα θρανία του σχολείου και αργότερα στο πανεπιστήμιο διαβάζοντας κείμενα και εργασίες. Οι γνώσεις αυτές επιτρέπουν την επίλυση ασκήσεων σε εξετάσεις και σε διαγωνισμούς ή προκαλούν ενδιαφέρον σε επιστημονικό επίπεδο. Ωστόσο ο καθηγητής των μαθηματικών έχει σπάνια την ευκαιρία να δει τις γνώσεις του σε εφαρμογή, άρα οι μαθηματικές γνώσεις έχουν σχολική κυρίως σημασία. Η ιστορία των μαθηματικών το αντικαθιστά αυτό καθώς μας επιτρέπει να δούμε τα μαθηματικά ως μία δραστηριότητα και όχι ως ένα σχολικό κόρπους.

- Fonction dépaysant – Η ιστορία των μαθηματικών, και αυτό είναι ίσως το κύριο ενδιαφέρον της, είναι ότι μας επιτρέπει να ξαφνιαζόμαστε με κάτι το οποίο είναι αυτονόητο. Στο μάθημα συχνά διαχειριζόμαστε όλες αυτές τις μαθηματικές έννοιες χωρίς ωστόσο να αναρωτιόμαστε από πού προήλθαν. Η ιστορία μας υπενθυμίζει ότι όλα αυτά τα στοιχεία επινοήθηκαν και δεν προϋπήρχαν
- Fonction culturelle – Η ιστορία μας καλεί να τοποθετήσουμε το μαθηματικό προϊόν στην επιστημονική και τεχνολογική κουλτούρα της εποχής, στην ιστορία των ιδεών και των κοινωνιών, να μελετήσουμε την ιστορία της εκπαίδευσης με ανησυχίες που ξεπερνούν το κατεστημένο. (Barbin, 1997)

Από την άλλη μεριά η άποψη ότι τα σχολικά μαθηματικά δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα σύνολο προκαθορισμένων «κανόνων» και διάφορων «τεχνικών », που θα πρέπει αυτούσια να μεταφερθούν από τον δάσκαλο στους μαθητές του, έχει αντικατασταθεί με την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της βιώσιμη πραγματικότητας των παιδιών και έτσι ακριβώς πρέπει να εκτιμώνται και να διδάσκονται (Κοτοπούλης, 2007).

Ο Fauvel υποστηρίζει πως η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί βασικό στοιχείο στην διδασκαλία των μαθηματικών και απαριθμεί δεκαπέντε λόγους για να αποδείξει την στάση του. Σύμφωνα με τον ίδιο μέσω της ιστορίας των μαθηματικών

1) Διευκολύνεται η διδασκαλία
2) Τα μαθηματικά δεν τρομοκρατούν τους μαθητές
3) Τα κίνητρα για την μάθηση αυξάνονται
4) Διαφοροποιούνται οι αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά
5) Η γνώση της ιστορικής εξέλιξης συμβάλλει στην δομή της παρουσίασης των θεμάτων της διδακτέας ύλης
6) Παρέχεται η ευκαιρία και η δυνατότητα για διαθεματικές εργασίες
7) Η επίδειξη των τρόπων με τους οποίους αναπτύχθηκαν οι έννοιες βοηθά τους μαθητές να τις κατανοήσουν καλύτερα
8) Αποσαφηνίζεται ο ρόλος των μαθηματικών στην κοινωνία
9) Δημιουργούνται ευκαιρίες για έρευνα

10) Αναπτύσσονται περισσότερες δεξιότητες, όπως η χρήση βιβλιοθήκης και η συγγραφή δοκιμίων.
11) Αναδεικνύεται η αξία των νεότερων τεχνικών σε σύγκριση με τις αρχαίες
12) Αναδεικνύεται ο ανθρώπινος χαρακτήρας των μαθηματικών
13) Η διερεύνηση της ιστορίας συμβάλλει στην διατήρηση του ενθουσιασμού και του ενδιαφέροντος για την επιστήμη των μαθηματικών από τους μαθητές
14) Τα εμπόδια που προέκυψαν κατά την εξέλιξη στο παρελθόν βοηθούν στην κατανόηση δυσκολιών που συναντούν οι σημερινοί μαθητές
15) Οι μαθητές ενθαρρύνονται όταν αντιλαμβάνονται ότι και άλλοι αντιμετώπισαν τις ίδιες δυσκολίες

Επίσης η Furringhetti (2004) για να διευκρινίσει τον ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση διαχωρίζει δύο κατηγορίες

A. Η Ιστορία αντανακλώντας την φύση των μαθηματικών ως κοινωνικο-πολιτιστική διαδικασία
B. Η Ιστορία κατασκευάζοντας μαθηματικά αντικείμενα

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει την ιδέα της ιστορίας ως μέσο προώθησης των μαθηματικών στην τάξη προκειμένου να εξανθρωπιστούν τα μαθηματικά. Η δεύτερη αφορά τον πυρήνα των προβλημάτων που σχετίζονται με την διδασκαλία/εκμάθηση των μαθηματικών.

Επιπλέον θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ιστορική ανάλυση επιτρέπει και στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς να καταλάβουν γιατί μια μαθηματική έννοια είναι δυσνόητη στους μαθητές και κατ' επέκταση να προσπαθήσουν μέσω αυτής να την συστήσουν στους μαθητές τους και να την διδάξουν με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει κατανοητή. Για παράδειγμα, όταν δύο αιώνες πριν οι συναρτήσεις ήταν φόρμουλες οι οποίες περιέγραφαν την σχέση μεταξύ δύο αλγεβρικών εκφράσεων (σύμφωνα με τον Euler), ο σύγχρονος προσδιορισμός της έννοιας της συνάρτησης δεν είναι τόσο περιορισμένος (Katz, 2000). Στα σύγχρονα μαθήματα των μαθηματικών και συγκεκριμένα στο τρέχον σχολικό εγχειρίδιο ο ορισμός της συνάρτησης είναι ο παρακάτω

"Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f όπου κάθε στοιχείο x ϵ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x)."

Ένας τέτοιος ορισμός είναι λογικό να απωθεί τους μαθητές και να χρειάζεται από τον διδάσκοντα να χρησιμοποιήσει, τουλάχιστον, παραδείγματα της καθημερινότητας ώστε να αποδώσει όσο καλύτερα μπορεί την έννοια.

Στην μαθηματική εκπαίδευση συχνά ξεχνιέται ότι η έννοια της συνάρτησης ήταν ένα αποτέλεσμα της μαθηματικής σκέψης που αναπτυσσόταν αργά. Στο σχολικό επίπεδο η έννοια εισάγεται πολύ νωρίς σαν βάση για να κατανοηθούν άλλες μαθηματικές έννοιες (Katz, 2000). Επομένως είναι λογικό να υπάρχουν παρανοήσεις από τους μαθητές που σχετίζονται με το «τι είναι συνάρτηση» δηλαδή με την θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης που αποτελεί την εξεταστέα ύλη τους αλλά και απαρχή του Διαφορικού Λογισμού πάνω στον οποίο εκπονήθηκε η παρούσα έρευνα.

Επομένως η ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών φαίνεται να συμβάλλει αποτελεσματικά στην εκμάθηση των μαθητών καθώς και να βοηθά τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς να διεξάγουν την διδασκαλία. Είναι προφανές ότι οι εκπαιδευτικοί φέρνουν στην τάξη τις ιδέες τους, τις ικανότητές τους και την γνώση τους. Πιο συγκεκριμένα, μια καλή γνώση της ιστορίας των μαθηματικών (που βρίσκεται κοντά στις αυθεντικές πηγές) προάγει την παιδαγωγική δημιουργικότητα και τελειοποιεί την χρήση της ιστορίας των μαθηματικών σε μαθηματικές δραστηριότητες (Furinghetti, 1997).

Τρόποι χρησιμοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία

Σύμφωνα με την Καφούση (2002) όπως αναφέρεται στο άρθρο του Κοτοπούλη (2007) οι έρευνες που σχετίζονται με την συμβολή της ιστορικής προοπτικής στην διδασκαλία των μαθηματικών επικεντρώνονται σε δύο κυρίως άξονες

- στα αυθεντικά ιστορικά μαθηματικά κείμενα και την αξιοποίηση τους στην διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών, και
- στη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας με βάση την ιστορική πορεία ανάπτυξής της

Σχετικά με τον πρώτο άξονα, πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα αποκαλύπτουν ότι η κατάλληλη επιλογή και παρουσίαση αυθεντικών ιστορικών μαθηματικών κειμένων μπορεί να συμβάλει στη δημιουργική σύνθεση απόψεων και ιδεών, μέσα από γόνιμες συζητήσεις μεταξύ των μελών της σχολικής τάξης. Τα κείμενα αυτά είναι δυνατό να αναφέρονται στους εξής τομείς:

- Στα θεμελιώδη ερωτήματα καθώς και στους εν γένει προβληματισμούς με τους οποίους ασχολήθηκαν οι επιστήμονες για τη γένεση και εξέλιξη των διάφορων μαθηματικών εννοιών.
- Στους ποικίλους τρόπους προσέγγισης μιας μαθηματικής έννοιας ή κάποιας μαθηματικής διαδικασίας, σε διαφορετικά κοινωνικο-πολιτισμικά περιβάλλοντα.
- Στην ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης των παιδιών. (Κοτοπούλης, 2007)

Σχετικά με τον δεύτερο άξονα των ερευνών για την συμβολή της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών στην οργάνωση του τρόπου διδασκαλίας τους στην τάξη, έχουν εκφραστεί διάφορες και κατά καιρούς αντιμαχόμενες απόψεις από τους ερευνητές. Μία από τις απόψεις που ξεχώρισε σύμφωνα με τον Γαγάτση (1993) όπως αναφέρει ο Κοτοπούλης (2007) και η οποία έχει καταγραφεί στη σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών ως το γενετικό μοντέλο διδασκαλίας θέλει η διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας να παραλληλίζεται πλήρως με τις ιστορικές συνθήκες στις οποίες δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε.

Αξίζει να αναφερθεί ότι από τις αρχές της δεκαετίας του 80, στο 6^{ο} Παγκόσμιο Συνέδριο για την Μαθηματική εκπαίδευση (I.C.M.E. 6), που διεξήχθη στην Βουδαπέστη έγινε μια συζήτηση στρογγυλής τραπέζης με θέμα «Η Ιστορία των Μαθηματικών στην διδασκαλία των Μαθηματικών». Η Evelyn Barbin ως συντονίστρια της Επιτροπής για την Ιστορία- Επιστημολογία των Μαθηματικών των Γαλλικών Ινστιτούτων Έρευνας στην Διδακτική των Μαθηματικών (I.R.E.M.) περιέγραψε ένα πολύ ενδιαφέρον πείραμα που διεξάγεται στα Γαλλικά σχολεία της μέσης εκπαίδευσης. Το πείραμα αυτό έχει σκοπό να διερευνήσει τους τρόπους και τα μέσα με τα οποία θα γίνει δυνατή η εισαγωγή μιας ιστορικής προοπτικής στο μάθημα των Μαθηματικών. Το επίσημο πρόγραμμα διδασκαλίας των Μαθηματικών που ισχύει στη Γαλλία από το 1986, δέχεται ότι η Εισαγωγή μια ιστορικής προοπτικής στο μάθημα θα επιτρέψει στους μαθητές να αντιληφθούν καλύτερα το νόημα των διδασκόμενων εννοιών και προβλημάτων και να κατανοήσουν τη διαδικασία της επιστημονικής προόδου. Το πείραμα γίνεται από καθηγητές Μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης με την καθοδήγηση των I.R.E.M. Περιλαμβάνει διδασκαλίες με βάση την ιστορική προσέγγιση στα Μαθηματικά, ανάγνωση αυθεντικών ιστορικών κειμένων από τους μαθητές και επεξεργασία γνωστών ιστορικών προβλημάτων. (Θωμαΐδης & al., 1989)

Στην ίδια συζήτηση στρογγυλής τραπέζης πήρε μέρος και ο Hans Wussing ο οποίος τόνισε ιδιαίτερα τη μεγάλη σημασία της Ιστορίας των Μαθηματικών για την εκπαίδευση και επιμόρφωση των καθηγητών που διδάσκουν Μαθηματικά στη Μέση Εκπαίδευση. Στην χώρα του η Ιστορία των Μαθηματικών είναι υποχρεωτικό μάθημα για τους μελλοντικούς καθηγητές. Το μάθημα αυτό, από τη μια μεριά, συμβάλλει αποφασιστικά στη γενική μόρφωση των φοιτητών και φανερώνει την κοινωνική λειτουργία των μαθηματικών και την διαλεκτική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κοινωνική και επιστημονική πρόοδο. Από την άλλη μεριά αποτελεί, ένα διδακτικό-μεθοδολογικό εργαλείο, ιδιαίτερα χρήσιμο στη μελλοντική εκπαιδευτική τους σταδιοδρομία. (Θωμαΐδης & al., 1989)

Ιστορία των Μαθηματικών στην παρούσα Διδακτική Παρέμβαση

Η εργασία εστιάζει στην διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου και πιο συγκεκριμένα στην παράγωγο συνάρτηση ή στην παράγωγο ως αριθμό, για παράδειγμα στην κλίση της εξίσωσης της εφαπτόμενης ευθείας σε μια συνάρτηση καθώς και στην εύρεση μεγίστων και ελαχίστων μέσω μιας ιστορικοδιδακτικής προσέγγισης.

Η σημασία της ιστορίας των μαθηματικών είναι αδιαμφισβήτητη και αποδεκτή όχι μόνο από την επιστημονική κοινότητα αλλά και από εκπαιδευτικούς που δεν σταματούν στις γραμμές και στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος σπουδών αλλά διαμορφώνουν και υλοποιούν μια καινοτόμα μορφή διδασκαλίας. Εδώ αξίζει να γίνει ένας προσωπικός σχολιασμός σχετικά με το γεγονός ότι έπειτα από τόσα χρόνια μαθηματικής εκπαίδευσης γίνεται λόγος για την ιστορικοδιδακτική προσέγγιση της μαθηματικής διδασκαλίας ως μια καινοτόμα και πρωτοποριακή διδασκαλία ενώ δεν θα έπρεπε και για αυτόν τον λόγο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να δείξει ότι η Ιστορία των Μαθηματικών αγγίζει τους μαθητές και τους καθιστά περισσότερο δεκτικούς στην ενασχόλησή τους με τα Μαθηματικά.

Πιο συγκεκριμένα στην έρευνα που εκπονήθηκε χρησιμοποιήθηκαν τρεις Ιστορικές Δραστηριότητες. Η πρώτη διαπραγματεύεται την κατασκευή των εφαπτόμενων καμπυλών (Gabriela R. Sanchis) και είναι προτεινόμενη από την MAA

(Mathematical Association of America). Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την μέθοδο του Απολλώνιου για την κατασκευή εφαπτόμενων ενώ κατά την διάρκεια της παρέμβασης μαθαίνουν για την ζωή του. Η δεύτερη δραστηριότητα η οποία είναι, ομοίως, προτεινόμενη δραστηριότητα της ΜΑΑ αφορά τον νόμο του Snell και την αρχή του Ελαχίστου Χρόνου (Gabriela R. Sanchis) ενώ η τρίτη ιστορική δραστηριότητα γνωρίζει στους μαθητές την μέθοδο εύρεσης Μεγίστων και Ελαχίστων του Fermat (Willy, 1999).

Κεφάλαιο 2ο : Ιστορική Αναδρομή στην έννοια της παραγώγου

Ο Βολταίρος έπειτα από μια σειρά προσπαθειών και επεξηγήσεων κάποιων εννοιών οι οποίες εντάχθηκαν στον τομέα του Διαφορικού Λογισμού διατύπωσε την εξής φράση "Διαφορικός Λογισμός είναι η τέχνη του να αριθμείς και να μετράς με ακρίβεια ένα πράγμα του οποίου την ύπαρξη δεν μπορείς να συλλάβεις". Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι το εξής. Τι είναι Διαφορικός Λογισμός ποιες οι ρίζες του και ποιοι οι προπάτορες του. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια ιστορικής αναδρομής σε αυτόν τον τομέα, στην Ανάλυση των Μαθηματικών.

Ο Διαφορικός Λογισμός είναι μια υποκατηγορία του Λογισμού ενός τομέα των Μαθηματικών ενώ η άλλη υποκατηγορία είναι ο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Μεταξύ τους συνδέονται με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού το οποίο αποτελείται από δύο μέρη και αποδεικνύει ότι η Διαφόριση είναι η αντίστροφη διαδικασία της Ολοκλήρωσης.

Από την άλλη μεριά τα μαθηματικά γενικότερα είναι η επιστήμη η οποία εξελίσσεται και εξαπλώνεται συνεχώς σε όλο και περισσότερους τομείς. Ανέκαθεν βρισκόταν σε συνεχή διάλογο με τις άλλες επιστήμες, την φιλοσοφία, τις τέχνες και την τεχνολογία (Τζανάκης, 2014). Είναι αδιαμφισβήτητο το γεγονός πως τα μαθηματικά θεμελιώνουν κάθε επιστημονική και όχι μόνο εξέλιξη σχετικά με τα αποτελέσματα που προσφέρουν. Έτσι λοιπόν γίνεται κοινώς αποδεκτό πως όπως όλοι οι τομείς των μαθηματικών συμβάλλουν σε κάθε είδους εξέλιξη, επιστημονική και τεχνολογική, έτσι και ο

Διαφορικός Λογισμός βρίσκει εφαρμογές στις περισσότερες επιστήμες. Είτε αναφέρεται κανείς στην Φυσική όπου οι παράγωγοι των μεγεθών προσδιορίζουν την μεταβολή της μιας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη είτε στην Επιχειρησιακή Έρευνα όπου η παράγωγος βελτιστοποιεί το κέρδος μιας επιχείρησης, η συμβολή του Διαφορικού Λογισμού καθίσταται βαρυσήμαντη.

Αδιαμφισβήτητα ο Διαφορικός Λογισμός ο οποίος θεμελιώνεται αξιωματικά έπειτα από πολλές προσπάθειες όπως αναφέρεται παρακάτω γύρω στα 1700 δεν είναι το αποκορύφωμα των λεγόμενων Ανώτερων Μαθηματικών αλλά η αρχή τους.

Η Ιστορία του Διαφορικού Λογισμού με μια ματιά

Αν προσπαθήσει κανείς να βρει τις ρίζες του εννοιολογικού δένδρου του Διαφορικού Λογισμού θα διαπιστώσει ότι η έννοια του πρωτογενούς αντικειμένου του Διαφορικού Λογισμού, η παράγωγος, είναι αυτή που υπάρχει από την Αρχαιότητα ακόμα. Στον Ευκλείδη (350 π.Χ. – 270 π.Χ.), στον Αρχιμήδη (περ. 287 π.Χ. – περ. 212 π.Χ.) και στον Απολλώνιο τον Περγαίο (260 π.Χ. – 190 π.Χ.) η έννοια ήταν γνωστή ως κλίση της εφαπτομένης. Πυθαγόρειοι, ο Εύδοξος και κυρίως ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που εισήγαγε την χρήση των απειροελάχιστων ποσοτήτων αν και αυτά χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για ην μελέτη επιφανειών και όγκων παρά για παραγώγους και εφαπτόμενες.

Από την άλλη μεριά στα Ινδικά Μαθηματικά, ίσως από το 500 μ. Χ., συναντάται η μελέτη των ρυθμών μεταβολής των απειροστών μέσω του αστρονόμου και μαθηματικού Aryabhata (476 μ.Χ. – 550 μ. Χ.) ο οποίος τα χρησιμοποίησε στην προσπάθειά του να μελετήσει την τροχιά της Σελήνης. Θα ήταν μεγάλη παράλειψη αν δεν γινόταν αναφορά στον Bhāskara (1114 μ.Χ-1185 μ.Χ.) στα έργα του οποίου βρίσκονται πολλές έννοιες του Διαφορικού Λογισμού.

Πατέρες της σύγχρονης Θεώρησης του Διαφορικού Λογισμού θεωρούνται αδιαμφισβήτητα ο Isaac Newton (1643-1727) και Gottfried Wihelm Leibniz (1646-1716). Ίσως η πρώτη ανάπτυξη της παραγώγου να αποδίδεται στον Isaac Barrow (1630-1677) αλλά οι σημαντικότερες προσωπικότητες στην ιστορία της παραγώγισης παραμένουν οι Newton και Leibniz καθώς ο πρώτος εφάρμοσε την παραγώγιση στην θεωρητική φυσική και ο δεύτερος ανέπτυξε συστηματικά πολλούς συμβολισμούς.

Αρχαία Περίοδος

Οι Αιγύπτιοι ενώ προσπάθησαν να υπολογίσουν τον όγκο μιας πυραμίδας κάτι για το οποίο θα χρειαζόντουσαν τις έννοιες του απειροελάχιστου και του ορίου μέσω της συνέχειας των σημείων φαίνεται να μην είχαν αποτελέσματα επομένως είναι αδιαμφισβήτητο το γεγονός ότι οι έννοιες που σχετίζονται με την παράγωγο και το ολοκλήρωμα δεν είχαν εμφανιστεί πριν την Ελληνική Περίοδο (Boyer, 1959).

Ο Θαλής ήταν ο πρώτος που αναφέρθηκε σε μια πνευματική επανάσταση και παρήγαγε τα στοιχειώδη μαθηματικά τα οποία έπειτα από 2000 χρόνια θα συνέθεταν αυτό που ονομάζουμε σήμερα Λογισμό, ενώ ήταν ο πρώτος που έθεσε μια διαδικαστική πειθαρχία κατά την ενασχόλησή του με τα μαθηματικά. Παρ' όλα αυτά δεν εφάρμοσε τις μεθόδους της ανάλυσης που είχε αναπτύξει όσον αφορά την συνέχεια, πράγμα που έκανε ο Πυθαγόρας. Δεν είναι γνωστό αν οι Πυθαγόρειοι είχαν κατανοήσει την έννοια του απείρως μικρού, είναι σίγουρο όμως ότι το «απειροελάχιστο» εισήχθη στο μαθηματικό τραπέζι γύρω στα 500-400 π.Χ. ως αποτέλεσμα της ενασχόλησης των τότε επιστημόνων με την «φύση» του φυσικού κόσμου (Boyer, 1959).

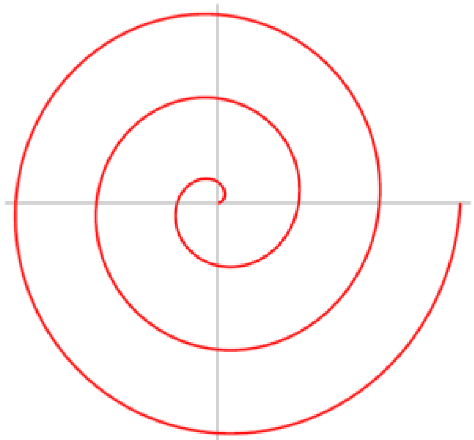
Οι Ίωνες στοχαστές, προκειμένου να εξηγήσουν το φαινόμενο της μεταβολής και τη πολλαπλότητα του κόσμου θεώρησαν τον κόσμο ως μια «Αρχή» η οποία διασπάστηκε σε πολλά μέρη. Τέθηκε λοιπόν το ζήτημα της επ' άπειρον διαιρετότητας.

Απαρχή, όμως, της έννοιας του απειροελάχιστου αποτελεί προφανώς η συνέχεια και το όριο έννοιες με τις οποίες ασχολήθηκαν τόσο ο Αριστοτέλης όσο και ο Δημόκριτος. Οι απαντήσεις στα παράδοξα του Ζήνωνα και συγκεκριμένα η διχοτόμηση ήταν αυτά που εισήγαγαν τις προαναφερθείσες έννοιες τις οποίες οι Έλληνες προσπαθούσαν να κατανοήσουν. Το παράδοξο του Ζήνωνα για την διχοτόμηση πραγματεύεται την έννοια του μέσου ενός μήκους. Δηλαδή αν ένα κινητό σώμα μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β πρέπει να καλύψει την μισή απόσταση και στη συνέχεια την μισή απόσταση από αυτή που έμεινε και ξανά το μισό της μισής απόστασης κ.ο.κ. Άρα ένα κινητό δεν θα φτάσει ποτέ στο σημείο Β.

Σύμφωνα με τον Πλάτωνα η συνέχεια θα μπορούσε να θεωρηθεί η συσσώρευση πολλών ατόμων – σωματιδίων. Το απειροελάχιστο φαίνεται να είναι η συνεχής υποδιαίρεση του συνεχούς. Παρ' όλα αυτά οι μαθηματικοί της εποχής απορρίπτουν αυτές τις ιδέες οι οποίες έρχονται στο φως αιώνες αργότερα με τον Newton και τον Leibniz. Αργότερα, ο Εύδοξος προσπαθεί να δώσει λύση σε τέτοιου είδους προβλήματα μέσω της στερεομετρίας, κάτι που αποδείχθηκε στην πορεία και ως δρόμος για την ανακάλυψη και ανάπτυξη του Λογισμού (Boyer, 1959). Η μέθοδος της εξάντλησης είναι μια μέθοδος εύρεσης της περιοχής (εμβαδού) ενός σχήματος στο οποίο είναι εγγεγραμμένα πολλά πολύγωνα. Αν η ακολουθία είναι σωστά κατασκευασμένη η διαφορά μεταξύ της περιοχής το n-ου πολυγώνου και του σχήματος που περιέχει τείνει να γίνει άπειρα μικρή.

Από την άλλη μεριά η έννοια της παραγώγου ως εφαπτομένη εμφανίζεται πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη, τον μεγάλο αυτό Συρακούσιο μαθηματικό, μηχανικό φυσικό εφευρέτη αστρονόμο κατά την μελέτη της εφαπτομένης των σπειροειδών, στο βιβλίο BOOK IV of Pappos' Mathematical Collection Berggren, J. L. (1984). Στο έργο του "*περί ελίκων*" ο Αρχιμήδης προσδιορίζει την έννοια της εφαπτομένης μια καμπύλης σε ένα ορισμένο σημείο της και καθορίζει τον τρόπο χάραξης εφαπτόμενων σε σημεία της έλικας (Εξαρχάκος, 1995). Ο T.L. Heath στον δεύτερο τόμο του βιβλίου "History of Greek Mathematics" αναλύει τον προαναφερθέντα τρόπο χάραξης της εφαπτομένης λέγοντας ότι : Η διαδικασία που ακολουθούσε ο Αρχιμήδης για την χάραξη της εφαπτομένης σε σημεία γραμμών του επιπέδου είναι μια διαδικασία υπολογισμού της παραγώγου της αντίστοιχης συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο" (Εξαρχάκος, 1995).

Πιο συγκεκριμένα ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τον Διαφορικό Λογισμό για την κατασκευή εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο της σπείρας του. Η σπειροειδής του είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο κινούμενο με ομοιόμορφη ταχύτητα κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, που η ίδια ταυτόχρονα περιστρέφεται με ομοιόμορφη γωνιακή ταχύτητα γύρω από ένα σταθερό σημείο της (Bell, 1992).



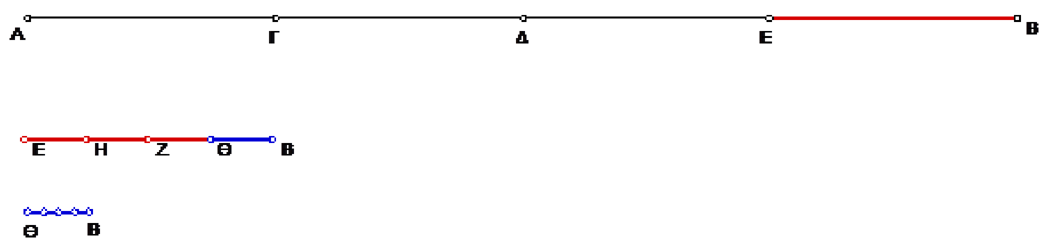
Εικόνα 1. Σπείρα του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης μοντελοποίησε την μέθοδο της εξάντλησης όχι με την βοήθεια των εγγεγραμμένων σχημάτων αλλά των περιγεγραμμένων και συνδύασε τις θεωρήσεις σχετικά με το απειροελάχιστο του Πλάτωνα και του Δημόκριτου.

Συγκεκριμένα έδωσε απάντηση στο παρακάτω ερώτημα :

Είναι δυνατόν να έχουμε άθροισμα με άπειρους προσθετέους και να πάρουμε αποτέλεσμα έναν πεπερασμένο πραγματικό αριθμό ;

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μοιράσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους μιας μονάδας, σε τρία άτομα. Κόβουμε το τμήμα ΑΒ σε τέσσερα κομμάτια και δίνουμε σε καθέναν από ένα κομμάτι. Έτσι ο καθένας θα πάρει το ¼ και θα περισσέψει και ένα κομμάτι από τα τέσσερα έστω το ΑΒ. Το κομμάτι αυτό ΕΒ που περίσσεψε το κόβουμε πάλι σε τέσσερα κομμάτι, δίνουμε σε κάθε έναν από ένα δηλαδή το ¼ του 1/16 άρα το 1/64 και περισσεύει το ένα κομμάτι. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία μέχρι να «εξαντληθεί» το ευθύγραμμο τμήμα. Όμως το κάθε άτομο θα πάρει σαν μερίδιο το 1/3 του ευθυγράμμου τμήματος δηλαδή το ζητούμενο άθροισμα ισούται με 1/3.

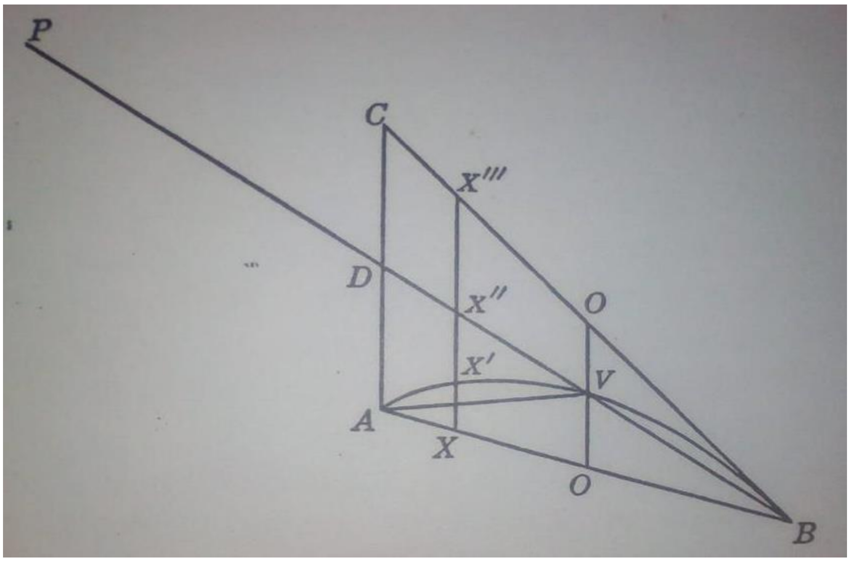


Η παραπάνω μέθοδος εξάντλησης διατυπώνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη ως εξής

«Δύο μεγεθών άνισων εκκειμένων, εάν από του μείζονος αφαφεθή μείζον ή το ήμισυ, και του καταλειπόμενου μείζον ή το ήμισυ, και τούτο αεί γίγνηται, λειφθήσεται τι μέγεθος, ό έσται έλασσον του εκκειμένου ελάσσονος μεγέθους»

Ο ίδιος χαρακτήριζε τις έννοιες του απείρου ως τεχνάσματα χωρίς κρίση και χρησιμοποίησε την μέθοδο της εξάντλησης ως απόδειξη αποφεύγοντας να χρησιμοποιήσει την έννοια του απειροστού ή του απείρως μεγάλου. Επιπλέον ο Αρχιμήδης έδειξε ότι στο παραβολικό τμήμα το BC είναι η εφαπτομένη στο B,με BD = DP οπότε αν X είναι οποιαδήποτε σημείο του τμήματος AB, γνωρίζουμε ότι οι ιδιότητες της παραβολής για τυχαία θέση του X, είναι $\frac{XX'''}{XX'} = \frac{AB}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$

Αλλά το X'' είναι το κέντρο βάρους της XX''', οπότε από το νόμο της ισορροπίας της δοκού, βλέπουμε ότι το XX' εξισορροπεί με το XX''', αν στην προκειμένη περίπτωση το *P* είναι σημείο της ευθείας που περνάει από το μέσον του *XX'''*. Αυτό ισχύει για όλες τις θέσεις του *X* πάνω στην *AB*. Και αφού το τρίγωνο *ABC* αποτελείται από τις ευθείες γραμμές *XX'''* και όμοια το παραβολικό χωρίο *A VB* από τις γραμμές *XX'*, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το τρίγωνο *ABC* στην παρούσα φάση εξισορροπεί στο *D* με το παραβολικό χωρίο, όταν το *D* μεταφέρεται στο *P* που θεωρείται κέντρο βάρους του σχήματος. Αλλά το κέντρο βάρους του τριγώνου *ABC* βρίσκεται πάνω στην *BD* και είναι το 1/3 της απόστασης του *D* από το *B,* τότε το χωρίο *AVB* είναι 1/3 του τριγώνου *ABC* ή 4/3 του τριγώνου *A VB* (Boyer, 1959).



Εικόνα 2- Boyer, 1959 – σελ.49

Αυτό που αξίζει να σημειώσει κανείς στην παραπάνω πρόταση είναι η εισαγωγή της έννοιας των αδιαιρέτων ποσοτήτων καθώς ο ίδιος θεωρεί ότι μια επιφάνεια αποτελείται από γραμμές.

Μεσαιωνική Περίοδος

Κατά τον Μεσαίωνα οι προαναφερθείσες έννοιες μελετήθηκαν στα πλαίσια της Θεολογίας και της Σχολαστικής Φιλοσοφίας. Εκείνη την εποχή ήταν όλοι επηρεασμένοι από τις θρησκευτικές του πεποιθήσεις και οι πιο τολμηροί προσπαθούσαν να συνδυάσουν την επιστήμη με το κοινωνικό πνεύμα της εποχής.

Πιο συγκεκριμένα σχετικά με το πρόβλημα των συνεχών μεγεθών και κατ' επέκταση των απειροελάχιστων ποσοτήτων είναι σημαντικό να αναφερθεί πώς οι

Ινδοί δεν ασχολήθηκαν με καμπυλόγραμμα και ευθύγραμμα συνεχή μεγέθη ενώ το πυθαγόρειο πρόβλημα του μη μετρήσιμου είχε ελάχιστη σημασία για του ίδιους. Οι διακριτοί αριθμοί και η συνέχεια των γεωμετρικών μεγεθών δεν αναγνωρίστηκαν από αυτούς. Ο Brahmagupta (598-670) το 628 σε μια θεωρητική μελέτη εισήγαγε τους πρώτους κανόνες για υπολογισμούς με το μηδέν, θεώρησε το 0 ως μια απειροελάχιστη ποσότητα αλλά το πρόβλημα του ορίου αν και εφαρμόστηκε σε κάποιες εργασίες δεν δηλώθηκε ρητά ως πρόβλημα προς επίλυση.

Γενικά οι σκέψεις που είχαν οι Ινδοί ήταν βασισμένες πάνω στις θεωρίες των Ελλήνων καθώς οι δεύτεροι ξεκίνησαν να αναρωτιούνται για την έννοια της απείρως μικρής ποσότητας και του πώς θα μπορούσε κανείς να την προσεγγίσει.

Ομοίως και οι Άραβες έψαχναν την εξήγηση των προαναφερθέντων εννοιών με εξέχουσα προσωπικότητα για το θέμα τον Alhazen (ή Ibn al-Hitham) (965-1040) ο οποίος χρησιμοποίησε την έννοια του απειροελάχιστου για να μετρήσει το παραβολικό χωρίο και ήταν ένας από εκείνους τους επιστήμονες οι οποίοι προσπάθησαν να οργανώσουν τις θεωρίες των Ελλήνων. (Boyer, 1959)

Από την άλλη μεριά κατά τον $12^{ο}$ με $13^{ο}$ αιώνα άρχισαν να μεταφράζονται τα κείμενα των Ελλήνων στα λατινικά τα οποία όμως κατακρίθηκαν καθώς οι θεολογικές και μεταφυσικές ιδέες και θεωρήσεις δέσποζαν στις αντιλήψεις των ανθρώπων εκείνης της εποχής. Δεν υπήρχε έλλειψη μαθηματικής δραστηριότητας απλά η γνώση που εμφανιζόταν εκείνη τη στιγμή έδειχνε να βασίζεται πάνω στην Γεωμετρία των Ελλήνων. (Boyer, 1959)

Προς το τέλος της Μεσαιωνικής Εποχής η ιδέα του αδιαιρέτου είχε λάβει πλέον αρκετές μορφές και τύπους από τους Robert Grossetest (1175-1253), Walter Burley (1275-1344/5), Henry Goethals. Από την άλλη μεριά ο Roger Bacon (1219/20-1292) στο έργο του *Opus majus* (δηλαδή το Μεγαλύτερο έργο) αναφέρει ότι η θεώρηση του αδιαίρετου έρχεται σε αντίθεση με την έννοια της ασυμμετρίας ένα επιχείρημα που αναπτύχθηκε περισσότερο από τον Γουλιέλμο του Όκκαμ (1287-1347), του Αλβέρτου της Σαξονίας (1320-1390) και άλλους.

Εν συνεχεία έχοντας όλες αυτές τις θεωρήσεις για την έννοια του απείρως μικρού μεγέθους ο Bradwardine (1300-1349) θεώρησε ότι ένα συνεχές μέγεθος συντίθεται από απειροελάχιστες ποσότητες οι οποίες είναι του ιδίου τύπου. Στο έργο του *Tractatus de proportionibus* (1328) μεταξύ άλλων ασχολήθηκε με την μέση ταχύτητα και κατά την μελέτη του πάνω σε αυτό αναγκάστηκε να χρησιμοποιήσει έννοιες της εποχής του αλλά στην ουσία ήταν απαραίτητη η έννοια του ορίου έτσι όπως είναι γνωστή πλέον στην σύγχρονη μαθηματική αντίληψη.

Ταυτόχρονα άρχισε μια συζήτηση σχετικά με τα δύο είδη απείρου, που όπως αναφέρονται στην βιβλιογραφία είναι το categorematic infinity και syncategorematic infinity, έννοιες που εισήγαγε ο Petrus Ispanus.(Boyer, 1959)

Στην πραγματικότητα οι φιλόσοφοι της Μεσαιωνικής Εποχής ασχολούνται με την έννοια του αδιαίρετου περισσότερο υπό το πρίσμα της απεριόριστης διαιρετότητας παρά υπό το πρίσμα των απείρως μεγάλων μεγεθών.

Αξιοσημείωτη στην θεμελίωση του Λογισμού κρίνεται η συνεισφορά του Johann Kepler (1571-1630) ο οποίος αφού οδηγήθηκε στην αρχή της συνέχειας που αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αξιωματική θεμελίωση που έγινε μεταγενέστερα στην πρώτη του εργασία για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου χρησιμοποίησε τις έννοιες των απείρως μικρών ή μεγάλων ποσοτήτων.

Ο ίδιος αναφέρει :

«Θα έλεγα ότι είναι πολύ αληθές και αναγκαίο ότι μια γραμμή αποτελείται από σημεία και στη συνέχεια από αδιαίρετα(...) Αναγνωρίζουμε ξεκάθαρα ότι το συνεχές διαιρείται πάντα σε μέρη που είναι επίσης διαιρετά, μόνον και μόνον επειδή αποτελείται από αδιαίρετα. Και εφόσον η διαίρεση και η υποδιαίρεση αυτή είναι δυνατόν να συνεχιστεί για πάντα, πρέπει κατ' ανάγκην να υπάρχει τόσο μεγάλος αριθμός τμημάτων ώστε να μην μπορεί να βρεθεί άλλο τμήμα πέραν αυτών, έτσι ώστε τα τμήματα αυτά να είναι άπειρα (σε πλήθος), διαφορετικά η υποδιαίρεση θα τελειώσει κάποια στιγμή και αν αυτά είναι άπειρα δεν θα πρέπει να έχουν καθόλου μέγεθος, γιατί ένας άπειρος αριθμός τμημάτων που έχουν μέγεθος συνθέτουν ένα άπειρο μέγεθος» (Katz, 2013).

Ο Kepler στην προσπάθειά του να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, τον θεώρησε ως ένα κανονικό πολύγωνο με άπειρο αριθμό πλευρών. Τα τρίγωνα των οποίων οι βάσεις ήταν πλευρές του πολυγώνου και τα ύψη τους τα αποστήματα από το κέντρο του κύκλου είχαν εμβαδόν απειροστού μεγέθους ενώ το άθροισμά τους δινόταν ως το μισό της περιμέτρου και του αποστήματος ή της ακτίνας σύμφωνα με τον Heiberg όπως αναφέρει η Στεργίου (2009).

Αργότερα ο ιταλός μαθηματικός Bonaventura Cavalieri (1598-1647), μαθητής του Γαλιλαίου ο οποίος είχε αναφέρει για τον πρώτο ότι «μόνο λίγοι, αν υπάρχει κανείς, από τον καιρό του Αρχιμήδη έχουν προχωρήσει τόσο βαθιά στην επιστήμη της Γεωμετρίας» συνέχισε τις σκέψεις του Kepler αναπτύσσοντας μια γεωμετρική προσέγγιση την οποία ονόμασε μέθοδο των αδιαιρέτων. Στο έργο αυτό ένα χωρίο αποτελείται από άπειρο αριθμό παράλληλων τμημάτων, και ο όγκος αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό παράλληλων επιπέδων. Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται αδιαίρετα και αποτελούν τα συστατικά στοιχεία της μεθόδου του Cavalieri.

Πιο συγκεκριμένα ο Cavalieri στην προσπάθειά του να πραγματοποιήσει την έρευνα σχετικά με τον όγκο που είχε ξεκινήσει ο Kepler, σκεπτόμενος συγκεκριμένα επί της παραβολικής ατράκτου αναγνώρισε ότι ο κυβισμός του στερεού ανάγεται στον υπολογισμό αυτού που χρησιμοποιούμε σήμερα $\int_0^a x^4 dx$ με αντίστοιχο αποτέλεσμα το $a^5/5$ αποτελέσματα που συνέκρινε με τα άλλα ήδη γνωστά $\int_0^a x\, dx$, $\int_0^a x^2\, dx$ $\int_0^a x^3 dx$.(Loria,1992) Τότε θεώρησε ότι μπορεί να γράψει το γενικό αποτέλεσμα και αυτό το οποίο ανακάλυψε το ονόμασε «θησαυρό» (Loria, 1992).

Οδεύοντας στην σύγχρονη αντίληψη

Μετά το πέρας και της Μεσαιωνικής Περιόδου η επιστημονική κοινότητα εισέρχεται στην σύγχρονη πλέον αντίληψη της έννοιας του απείρου. Το 1655 ο John Wallis (1616-1703) δημοσίευσε το Arithmetica Infinitorum (Αριθμητική των απείρων), στο οποίο είναι προφανής η επιρροή που ο ίδιος υπέστη από τον Cavalieri.

Μέχρι εκείνη την στιγμή οι Cavalieri Torricelli (1608-1647) και άλλοι είχαν επιτύχει με ακριβείς μεθόδους τον τετραγωνισμό των καμπυλών της μορφής $y=px^n$, $n>0$ όμως η γενική απόδειξη οφείλεται στον Wallis ο οποίος μελετώντας την καμπύλη $a^{n-1} = x^n$ απέδειξε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που έχει πλευρά ένα τόξο αυτής της καμπύλης, εφαπτόμενο στην αρχή, την ακραία τεταγμένη και τον άξονα των x εκφράζεται από την παράσταση

$$E = \frac{1}{a^{n-1}} * \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Τα αποτελέσματα του Wallis επαληθεύτηκαν αργότερα αλλά στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι όσο αξιόλογες και να είναι οι σελίδες αυτές του Arithmetica Infinitorum καθώς αυτές μαρτυρούν την ιδέα του συγγραφέα για την έννοια του «ορίου», δεν ξεπερνούν την ωραιότητα και την λαμπρότητα του διαμαντιού που ανακάλυψε ο Wallis σχετικά με τον τύπο ευθειοποιήσεως της περιφέρειας ο οποίος είναι ο παρακάτω

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7\ \ldots.}{2.4.4.6.6\ \ldots.}\ (Loria, 1992)$$

Ένας ακόμα πρόδρομος του απειροστικού λογισμού ήταν ο Γάλλος René de Sluse (1622-1685) ο οποίος προσπάθησε να κατασκευάσει τι εφαπτόμενες μιας καμπύλης, μια προσπάθεια που δημοσιεύθηκε το 1672 στο Philosophical Transactions. Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα από αυτή του την εργασία ήταν μέθοδος προσδιορισμού της εφαπτομένης, η οποία αποτελεί συμπλήρωμα της μεθόδου του Isaac Barrow, το έργο του οποίου αναλύεται παρακάτω. Σύμφωνα με τον de Sluse αν η εξεταζόμενη καμπύλη έχει την μορφή $f(x,y) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x^i y^k = 0$

Η εφαπτομένη δίνεται από τον τύπο $y \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial x}$ ή $y\, f'_y : f'_x$

Και άρα όλη η δυσκολία εντοπίζεται στον υπολογισμό των μερικών παραγώγων. Για αυτό τον σκοπό ο de Sluse εισάγει ως λήμμα την παρακάτω σχέση

$$\frac{x1^m - x^m}{x1 - x} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2}\, x + \ldots\ldots + x_1\, x^{m-2} + x^{m-1}$$

Της οποίας το δεύτερο μέλος περιλαμβάνει m όρους και τείνει στο $m\, x^{m-1}$ όταν το x_1 πλησιάζει απεριόριστα το x ενώ παρατηρεί ότι η διαφορά $f(x_1,y_1) - f(x,y)$ μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα όρων αναλυόμενων σε γινόμενα παραγόντων της μορφής $x_1^i - x^i$, $y_1^k - y^k$. Από τον συνδυασμό αυτών των παρατηρήσεων απορρέει η μέθοδος του De Sluse για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων f'_x, f'_y (Loria, 1992).

Επιστρέφοντας στην Αγγλία του 17ου αιώνα εξέχουσα προσωπικότητα του Απειροστικού και άρα του Διαφορικού Λογισμού είναι ο Isaac Barrow (1630-1677), ο πρώτος Λουκάσιος Καθηγητής Μαθηματικών. Ο τίτλος αυτός έχει περιγραφεί ως μία από τις πιο αναγνωρισμένες ακαδημαϊκές θέσεις στον κόσμο και ιδρύθηκε από τον Henry Lucas (1610-1633) το 1639-1640 και καθιερώθηκε επίσημα από τον Βασιλιά Κάρολο Β στις 18 Ιανουαρίου 1664. Άλλοι κάτοχοι του τίτλου ήταν ο μαθητής του Barrow, Isaac Newton, ο John Colson (1680-1760), ο Sir George Biddell Airy(1801-1864), ο Stephen Hawking (1942-2018) κ.ά.

Ο Isaac Barrow ο οποίος έλαβε τον τίτλο Master of Arts καθ' όλη την διάρκεια της ζωής του κυμάνθηκε μεταξύ των φυσικο - μαθηματικών επιστημών και της θεολογίας καθώς πίστευε ότι για να γίνει κανείς καλός θεολόγος πρέπει να γνωρίζει καλά τον χρονολογία αλλά αυτό προϋποθέτει την γνώση της αστρονομίας η οποία με τη σειρά της στηρίζεται στα μαθηματικά.

Βαρυσήμαντη για την εξέλιξη του Λογισμού θεωρήθηκε η μέθοδος που χρησιμοποίησε για την κατασκευή εφαπτόμενων ευθειών σε επίπεδες καμπύλες. Η μέθοδός του είχε ως βάση το «χαρακτηριστικό τρίγωνο», που αποτελείται από ένα απείρως μικρό τόξο καμπύλης και τις παράλληλες προς τους άξονες από τα άκρα του τόξου καθώς και την εφαπτομένη δηλαδή το μέγεθος εκείνο που χωρίς το πρόσημο εκφράζεται από τον τύπο y dx/dy.

Για τον υπολογισμό στην περίπτωση που η καμπύλη δίνεται υπό μορφής πεπλεγμένης συνάρτησης, σύμφωνα με το βιβλίο του Loria (1992), ο Barrow ανέπτυξε κατά των δυνάμεων h και k την διαφορά f(x + h , y + k) - f(x,y) και διέγραψε όλους τους όρους τους περιέχοντας τα γινόμενα και τις δυνάμεις των h και k. Την μέθοδο αυτή εφάρμοσε αρχικά στην καμπύλη $x^4 + x^2y^2 = r^2y^2$ η ονομαζόμενη καμπύλη “Kappa” και στη συνέχεια στις ακόλουθες

$x^3 + y^3 = r^3$

$x^3 + y^3 = rxy$

$y=r^* \text{εφ}\frac{\pi x}{2r}$

Επιπλέον πριν γίνει αναφορά στους σύγχρονους πατέρες του Λογισμού δεν πρέπει να παραληφθεί η συνεισφορά του James Gregory (1638-1675) ο οποίος μέσα σε μια επιστολή από τον Huygens (1629-1695) προς τον de L’Hôpital (1661-1704), φαίνεται να ασχολήθηκε με μια μέθοδο ολοκλήρωσης όλων των συναρτήσεων της μορφής $y = b\, x^r\, (x^n + a)^m$. O Gregory έδωσε την πρώτη δημοσιευμένη δήλωση και απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού κάτι που αναγνωρίστηκε και από τον ίδιο τον Barrow.

Οι Σύγχρονοι Θεμελιωτές

Τρία από τα μεγαλύτερα πνεύματα του δεκάτου εβδόμου αιώνα Fermat, Isaac Newton, και Leibniz ο καθένας δουλεύοντας ξεχωριστά αφοσιώθηκαν κυριολεκτικά στα προβλήματα του διαφορικού λογισμού. Ο Fermat εργάστηκε στην Γαλλία ο Newton στην Αγγλία και ο Leibniz στη Γερμανία. Την εποχή εκείνη που ο διαφορικός λογισμός αποτελούσε φλέγον ζήτημα παρά τις διενέξεις των δύο εκ των τριών, Newton και Leibniz ο τελευταίος παρατήρησε πως αν χώριζε κανείς τα μαθηματικά σε αυτά που υπήρχαν από την αρχή του κόσμου μέχρι τον Νεύτωνα και σε αυτά που έκανε ο Εγγλέζος, τότε τα τελευταία θα βάραιναν περισσότερο από όλα τα άλλα μαζεμένα (Kline, 1981).

Το πρόβλημα του οποίου αναζητούσαν την λύση ήταν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής των μεταβλητών. Για παράδειγμα η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης σε σχέση με τον χρόνο. Εδώ θα πρέπει να γίνει ένας διαχωρισμός ανάμεσα στην μέση ταχύτητα που έχει ένα κινητό σώμα και στην στιγμιαία ταχύτητα αυτού. Σύμφωνα με την φυσική μας διαίσθηση η στιγμιαία ταχύτητα που έχει ένα σώμα είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης σε σχέση με τον χρόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν αναζητήσει κανείς την μέση ταχύτητα ενός κινητού θα χρειαστεί να διαιρέσει την απόσταση που διήνυσε το σώμα με την χρονική διάρκεια στην οποία έκανε την απόσταση αυτή. Όταν όμως γίνεται λόγος για την στιγμιαία ταχύτητα η απόσταση τείνει στο 0 όπως και η χρονική διάρκεια καθώς η στο διάστημα μιας στιγμής περνά χρόνος μηδέν. Η διαίρεση όμως μηδέν δια μηδέν είναι μια απροσδιόριστη μορφή. Αν μπορούσαν να άρουν αυτή την απροσδιοριστία τότε θα έλυναν το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας. Αυτό το ερώτημα προσπάθησαν να απαντήσουν οι πατέρες του διαφορικού λογισμού.

Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια θα ήταν αναγκαίο να σημειωθεί ότι μέσα από απλά παραδείγματα φτάνει κανείς στο συμπέρασμα πως η στιγμιαία ταχύτητα είναι ο αριθμός προς τον οποίο τείνουν κάποιες μέσες ταχύτητες, όταν τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία τις υπολογίζουμε τείνουν προς το μηδέν.

Είναι χρήσιμο να ειπωθεί πως τα γραπτά του Νεύτωνα και του Leibniz είναι δύσκολο να μελετηθούν καθώς αν κανείς τα παρατηρήσει συνειδητοποιεί ότι προσπαθούν να επεξηγήσουν την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας και φτάνουν απείρως κοντά στην σωστή αντίληψή της αλλά κανείς από τους δύο δεν την αγγίζει.

Ο ίδιος ο Νεύτων σε έναν από τους τρόπους επεξήγησης δίνει την σωστή διατύπωση της έννοιας δίχως όμως ο ίδιος να το καταλαβαίνει. Από την άλλη μεριά ο Leibniz προσπαθούσε να δώσει εξήγηση στο κλάσμα κ/x όταν το x τείνει στο 0 και για να περιγράψει τις τιμές του κ και του x που απαρτίζουν τον αριθμό προς τον οποίο τείνει το κ/x όταν το x τείνει προς το 0 αναφέρεται στο x σαν να ήταν η διαφορά ανάμεσα σε δύο τιμές του χρόνου t άπειρα κοντινές μεταξύ τους. Παρόμοια το κ είναι η διαφορά ανάμεσα σε δύο τέτοιες τιμές της απόστασης s (Kline, 1981).

Επιπλέον πατέρες του Διαφορικού Λογισμού θεωρούνται σαφώς οι δύο προηγούμενοι εξ Αγγλίας και Γερμανίας έκαστος αλλά κανείς δεν αμφισβητεί την ύπαρξη και άλλων επιστημόνων σύγχρονων των παραπάνω οι και μετέπειτα αυτών. Προσωπικότητες όπως ο Michell Rolle (1652-1719), Colin Mauclaurin (1698-1746), Joseph- Louis Lagrange (1736-1813), Jean le Rond D'alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783) συνέβαλαν στην ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού βάζοντας ο καθένας ένα λιθαράκι στο δρόμο που έστρωσαν οι αιώνιοι «ανταγωνιστές».

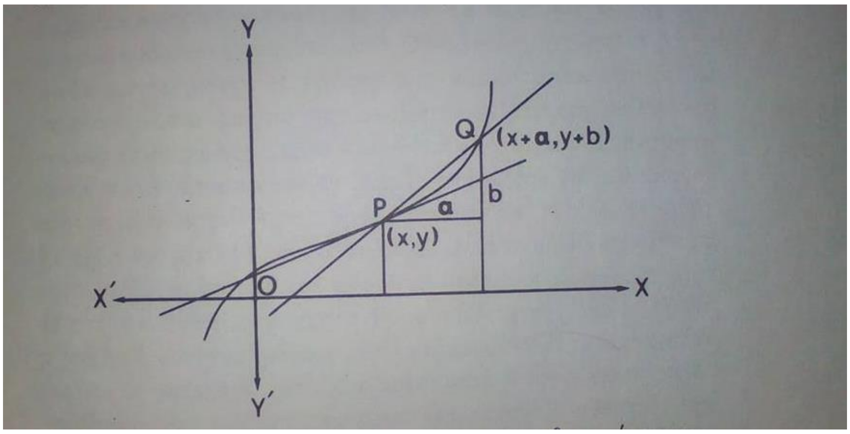
Ο Rolle για παράδειγμα δίδασκε ότι ο διαφορικός λογισμός είναι ένα σύνολο από λαθεμένα αλλά έξυπνα τεχνάσματα ενώ ο Mauclarin είχε βάλει στόχο ζωής να θεμελιώσει τον Διαφορικό Λογισμό προσπάθεια που δημοσιεύθηκε στο βιβλίο του το 1742, ένα βιβλίο κάπως ακατανόητο (Kline, 1981)

Fermat

Ο Pierre Fermat γεννήθηκε στο Beaumont de Lomange της Γαλλίας τον Αύγουστο του 1601 και έκανε τα πρώτα του μαθήματα στο σπίτι ενώ προετοιμαζόταν να ακολουθήσει τον δικαστικό κλάδο συνεχίζοντας τις σπουδές του στην Τουλούζη.

Εικόνα 3. Pierre de Fermat

Δεκατρία χρόνια πριν την γέννηση του Newton και δεκαεπτά πριν την γέννηση του Leibniz, λοιπόν, ο Fermat εφάρμοσε την βασική ιδέα του Διαφορικού Λογισμού

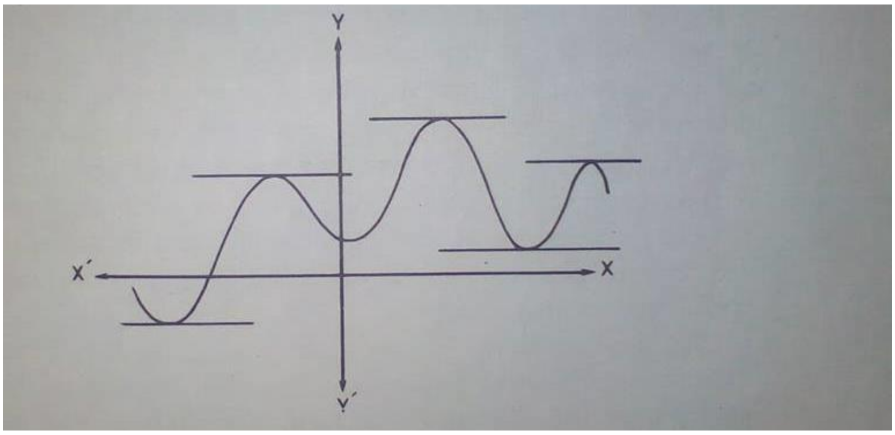


Εικόνα 4 – Bell, 1992 – σελ.93

Στο βιβλίο του E.T. Bell αναφέρεται ότι ο Fermat και οι διάδοχοί του έκαναν μία παρόμοια διαδικασία με την παρακάτω ώστε να ορίσουν την εφαπτομένη μιας καμπύλης. Πάνω σε μια καμπύλη τοποθέτησαν δύο σημεία το Q και το P τα οποία τα ένωσαν και σχηματίστηκε η ευθεία PQ. Έπειτα νοερά άφησαν το Q να γλιστρήσει κατά μήκος του τόξου της καμπύλης μέχρι που να συμπέσει με το P, επομένως η χορδή PQ στην παραπάνω οριακή θέση έγινε εφαπτομένη PP στο σημείο P, δηλαδή ό, τι ζητούσαν.

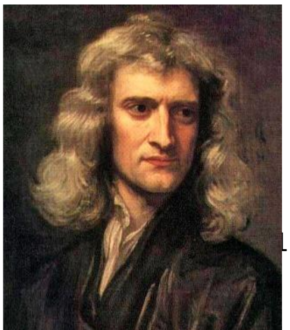
Όλη αυτήν την διαδικασία προσπάθησαν να την ερμηνεύσουν αλγεβρικά βάζοντας συντεταγμένες στα σημεία P και Q και βρίσκοντας την κλίση της ευθείας η οποία ήταν ίση με έναν λόγο του οποίου ο αριθμητής και ο παρανομαστής έτειναν στο 0, αφού το Q τείνει να συμπέσει με το P. Η οριακή αυτή τιμή ήταν η απαιτούμενη κλίση (Boyer, 1959).

Από την άλλη μεριά δεν πρέπει να παραληφθεί ότι ο Fermat ήταν αυτός που επινόησε την Μέθοδο των Μεγίστων και Ελαχίστων (1628-1629), μία μέθοδο στην οποία στα σημεία που εμφανίζεται τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης η εφαπτομένη εκεί έχει κλίση μηδέν δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα x’x (Bell, 1992).



Εικόνα 6 – Bell, 1992 – σελ 97

Newton



Εικόνα 7. Isaac Newton

Ο Isaac Newton, γεννημένος τα Χριστούγεννα του 1642, σπουδαστής του Trinity College και του Cambridge, πέραν των πολλών ανακαλύψεων που έκανε, υπήρξε και θεμελιωτής τους Διαφορικού Λογισμού. Όντας μαθητής του Issac Barrow(1630-1677) εμπνεύστηκε από τις μεθόδους που είχε βρει ο δάσκαλός του για την χάραξη της εφαπτομένης σε καμπύλες και τον υπολογισμό εμβαδού και έτσι ασχολήθηκε εκτενώς με θέματα που αφορούσαν τόσο τον Διαφορικό Λογισμό αλλά και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Εκτός από αυτό βέβαια μελέτησε την Γεωμετρία του Descartes αλλά και του Ευκλείδη.

Χρησιμοποιώντας πολλές συναρτήσεις κατάφερε να δημιουργήσει τύπους σχετικά με τα μήκη και τις εφαπτόμενες καμπυλών αλλά και να ασχοληθεί με προβλήματα τετραγωνισμού, δηλαδή να υπολογίσει εμβαδόν επιφανειών που οριοθετούνται από καμπύλες. Όταν το 1736 και 1742 δημοσίευσε την πρώτη του προσέγγιση σχετικά με τον Διαφορικό Λογισμό, τον οποίο αποκαλούσε ροές διατήρησε τον τίτλο Methodus fluxionum et sererium infinitorum.

Οι διάδοχοί του έχοντας και την έννοια της συνάρτησης την οποία διατύπωσε ο Leibniz, έστω $y = f(x)$ όρισαν τον ρυθμό μεταβολής του x ως προς y ως $\Delta y = f(x+\Delta x)/f(x)$, μια αρκετά χονδρική προσέγγιση η οποία εξελίχθηκε στον λόγο $\Delta y/\Delta x$ στον οποίο το Δy και Δx μειώνονται απεριόριστα αλλά δεν γίνονται 0/0 αλλά η οριακή τιμή αυτού ενώ ο αντίστοιχος συμβολισμός του Newton ήταν $\dot{y}$.

Την πρώτη του εργασία την ονόμασε De analysi per aequationes numero terminorum infinitas και την έγραψε το 1669 ενώ την δημοσίευσε το 1712.

Αρχή της εργασίας είναι η πρόταση, της οποίας η απόδειξη δίνεται στο τέλος του έργου, ότι το εμβαδόν μιας καμπύλης που έχει την εξίσωση

$y = ax^{m/n}$

εκφράζεται από τον τύπο $E = \frac{n}{m+n} ax^{(m+n)/n}$

Ο Newton θεώρησε αυτό το αποτέλεσμα σωστό ακόμα και στην περίπτωση που $m+n = 0$, κάτι που οδήγησε και στην εσφαλμένη γραφή $\int \frac{dx}{x} = \infty$

Αν το δεύτερο μέλος της εξίσωσης περιέχει κλάσματα ή δυνάμεις με όρους πολυωνύμων, ο Newton για να επιτύχει τον τετραγωνισμό κατέφυγε στην μέθοδο ανάπτυξης της σειράς. Η επέκταση αυτή του επέτρεψε να τετραγωνίσει την υπερβολή ενώ ταυτόχρονα ασχολήθηκε και με τη ευθειοποίηση της περιφέρειας.

Αν η εξίσωση από την οποία παριστάνεται είναι η

$x^2 - x + y^2 = 0$

μπορούμε να εκφράσουμε το σημερινό τόξο του ολοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x-x^2}dx$$

Τα συμπεράσματα αυτά γράφτηκαν στο βιβλίο Μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών (Methodus fluxionum et sererium infinitorum), το οποίο αναφέρθηκε και παραπάνω. (Loria, 1992)

Από την άλλη μεριά όμως το πιο ονομαστό του έργο Philosopiae Naturalis Principia Mathematics το οποίο αποτέλεσε ίσως την πιο σημαντική δημοσίευση στην ιστορία της επιστήμες εκδόθηκε το 1687.

Ο Newton ασχολήθηκε επίσης με την επίλυση του προβλήματος σχετικά με τον προσδιορισμό των ακροτάτων τιμών των συναρτήσεων μιας μεταβλητής καθώς και με το μέτρο της καμπυλότητας ενώ δεν παρέλειψε να επισημάνει την σχέση με την «γεωμετρία των αδιαιρέτων» και της «μεθόδου των πρώτων και εσχάτων λόγων». Η βάση του περιεχομένου του Tractatus de quadratura curvarum (Πραγματεία περί τετραγωνισμού των καμπυλών), έργο που γράφτηκε κατά το 1655-1666 είναι προσδιοριμός της ροής x^n δια x ακέραιος και θετικός. Η αντίστοιχη έκφραση υπολογίζεται μέσω του τύπου

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Απαλείφοντας στο αποτέλεσμα όλες τις δυνάμεις του h. Οι συμβολισμοί που εισήγαγε ο ίδιος για να δηλώσει τις διαδοχικές ροές ήταν $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

Μέσω τεχνασμάτων, συνοδευόμενων από κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής ο Newton κατάφερε να υπολογίσει έναν μεγάλο αριθμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων τα οποία σήμερα ανάγονται στην τάξη των διωνύμων διαφορικών.

Ο τετραγωνισμός των καμπυλών, ωστόσο, συνέχισε να απασχολεί τον άγγλο επιστήμονα και στο έργο του Methodus differentialis (Διαφορική Μέθοδος) υπολογίζει το εμβαδόν μέσω ενός τεχνάσματος στο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ σύμφωνα με το οποίο γίνεται αντικατάσταση της καμπύλης y = f(x) με την παραβολική καμπύλη που διέρχεται από σημεία της y= f(x). Έτσι δημιουργείται το ζήτημα του προσδιορισμού των σταθερών συντελεστών a_0, a_1, a_2,…..a_n της εξίσωσης

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$.

Με αυτό το πρόβλημα ασχολήθηκε και στο έργο του Regula differentium (Κανών των διαφορών)

Τέλος αξίζει να αναφερθεί και ο κύριος σκοπός του Opus Magnum του Newton στο οποίο αναλύεται η μέθοδος των πρώτων και εσχάτων λόγων. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο ακόλουθο λήμμα

« Δύο ποσότητες, των οποίων η διαφορά, σε πεπερασμένο χρόνο, γίνεται μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη ποσότητα οσοδήποτε μικρή, καταντούν στο τέλος να γίνονται ίσες μεταξύ τους».

Έτσι, έλυσε ένα πρόβλημα το οποίο σήμερα ανήκει στον Λογισμό των Μεταβολών. (Loria, 1992)

Leibniz

Εικόνα 8. Gottfried Wilhelm Leibniz

Ο κατά τέσσερα χρόνια νεότερος σε ηλικία από τον Newton Gottfried Wilhelm Leibniz γεννήθηκε στην Λειψία και αναφέρεται ότι είχε διαβάσει το έργο του Newton De analysi δίχως όμως να το κατανοεί. Το 1676 έστειλε δύο επιστολές στον Newton σχετικά με τις άπειρες σειρές και τα προβλήματα τετραγωνισμού , επιστολές στις οποίες ο Newton αποκρύπτοντας βασικές έννοιες απάντησε ευγενικά.

Όπως λέει ο ίδιος «όταν τα δεδομένα προσεγγίζουν το ένα το άλλο απεριόριστα και καταλήγουν να συμπίπτουν τότε κατ' ανάγκην και τα αποτελέσματα πράττουν το ίδιο». Κατά τον Leibniz αυτό εξαρτάται από μια γενικότερη αρχή την οποία διατυπώνει ως εξής "τα εύτακτα δεδομένα αντιστοιχούν σε εύτακτα ζητούμενα". Πλησιάζοντας στην συμβολή του Γερμανού επιστήμονα στον απειροστικό λογισμό παρατηρεί κανείς ότι, εν αντιθέσει με τον Cauchy (1789-1857) προσδιόρισε την εφαπτομένη ως μια γραμμή που ενώνει δύο απείρως κοντά μεταξύ τους σημεία και έτσι δημιουργούνται πολύ μικρές αποστάσεις μεταξύ τους δηλαδή διαφορές μεταξύ δύο συνεχών τιμών μιας μεταβλητής. Ο Leibniz εμβάθυνε στις μεθόδους υπολογισμού του εμβαδού των επίπεδων καμπυλών καθώς και στον τετραγωνισμό των επίπεδων καμπυλών και τότε έγραψε την σχέση $N\cdot dx=y\cdot ds$ όπου

N είναι το μήκος της καθέτου στο σημείο, όπου έχει έδρα το απειροστό τόξο ds. Έτσι εισήγαγε το νέο σύμβολο του ολοκληρώματος $\int y$, την ίδια ποσότητα που ο δάσκαλός του Cavalieri παρίστανε με το σύμβολο Omn y δηλαδή όλα τα y.

O Leibniz εξήγαγε αμέσως ότι είναι

$\int x = \frac{x^2}{2}$, $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$, $\int \frac{a}{b} y = \frac{a}{b} \int y$ (a,b σταθερές)

Οι προσπάθειές του για να συμβολίσει τον συλλογισμό του ήταν κάποιες φορές επιτυχείς και κάποιες όχι. Αντικατέστησε το αρχικό σύμβολο x/d που είναι διαφορά μεταξύ δύο γειτονικών x με το σύμβολο dx. Αντιμετώπισε το ζήτημα αν το d(xy) είναι ίσο με το dx·dy και το d(x/y) είναι ίσο με το dx/dy και έτσι οδηγήθηκε στην σχέση ydx=d(xy)-xdy.

Είπε ότι το ddx ή d^2x είναι το dx προς dx χωρίς καμία διάκριση μεταξύ των διαφορών των εξαρτημένων ή ανεξάρτητων μεταβλητών. Ωστόσο μάλλον συνειδητοποίησε ότι αυτή η προσέγγιση δεν θα μπορούσε να εφαρμοστεί και γι αυτό προσπάθησε να το δει γεωμετρικά. Σε μια καμπύλη εισήγαγε σε κάθε σημείο τον λόγο dy/dx, ενώ το δεύτερο διαφορικό d^2y θα ήταν η δεύτερη παράγωγος της αρχικής καμπύλης. Παρ' όλα αυτά ο ίδιος δεν θεωρούσε τις παραγώγους θεμελιώδη αρχή ενώ η μέθοδός του ήταν ικανή να οδηγήσει στην λύση του προβλήματος των εφαπτόμενων.

Σε ένα κείμενο με τίτλο Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangetibus, quae nec fracta, nec irrationals quantitates moratur et singular pro illis calculi genus υπάρχει ένα κείμενο του οποίου η σπουδαιότητα φαίνεται από τον πίνακα περιεχομένων των αποτελεσμάτων:
Με α σταθερό και x, y μεταβλητές ισχύουν οι σχέσεις

1) da = 0, dax = adx

2) d(z- y + w + x) = dz – dy + dw + dx

3) dxw = xdw + wdx

4) $d\frac{v}{y} = \frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2}$, όπου η απροσδιοριστία των σημείων οφείλεται στο γεγονός ότι ο Leibniz δεν είχε καθορίσει συμβατικά τα σημεία των συντεταγμένων

5) $dx^a = ax^{a-1}dx$

6) $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,dx$

7) $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{a dx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$

Στην συνέχεια αποδεικνύει ότι ένα maximum ή minimum χαρακτηρίζεται πάντοτε από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου ενώ εισάγει και το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου της οποίας ο μηδενισμός συνδυάζεται με τα σημεία καμπής της καμπύλης $y = f(x)$.

Υποστηρίζει δε ότι οι κανόνες διαφόρισης εφαρμόζονται ακόμα και σε συναρτήσεις που περιέχουν κλάσματα και ριζικά και για να το αποδείξει διαφορίζει την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + \frac{ax\sqrt{g^2+y^2} + y^2}{\sqrt{h^2+lx+mx^2}} = 0$$

(Loria,1992)

Επιπλέον ο Leibniz ασχολήθηκε με τον υπολογισμό παραγώγων ανώτερης τάξης.

Το 1695 στην επιστολή που αντάλλαξε με τον John Bernoulli ο οποίος έγραψε κάποιες εκφράσεις, σε ένα γράμμα του προς τον πρώτο όπως $\sqrt[3]{d^6\,dx} = d^2y$ και $d^3y/ d^2x = d^3y\ d^{-2}x$ συναντάται και ο τύπος της n-οστής παραγώγου ενός γινομένου δύο παραγόντων

$$(uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \ldots \binom{n}{n+1} u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n} uv^{(n)}$$

Τέλος, με σκοπό να αποφύγει να δουλέψει με ποσότητες οι οποίες ήταν αναμφίβολο αν υπήρχαν ή όχι χρησιμοποίησε κάποια «κόλπα» και εδώ παρουσίασε για πρώτη φορά τα σύμβολα d(x) και d(y).

Η Μεγάλη Διαμάχη

Θα ήταν μεγάλη παράλειψη αν δεν γινόταν αναφορά στο «θέαμα του αιώνα» όπως ονομάστηκε από τον Daniel Boorstin η μεγάλη διαμάχη των Newton και Leibniz σχετικά με τον Διαφορικό Λογισμό(Hellman, 2010). Μια διαμάχη που αν δεν είχαν εμπλακεί και οι σύγχρονοι των δύο επιστημόνων ίσως να είχε καλύτερα αποτελέσματα στην εξέλιξή της. Από αυτήν άρχισε η διαμόρφωση της επιστημονικής δημοσίευσης όπως την γνωρίζουμε και σήμερα ενώ αποτέλεσε την θεμελιώδη αρχή για το λαμπρό μέλλον του τομέα των Μαθηματικών τον οποίο μελετούμε(Hellman, 2010). Η πρώτη αναταραχή επήλθε όταν ο Newton διάβασε μια δημοσίευση σχετική με τον απειροστικό λογισμό από τον Leibniz στην οποία όμως το όνομα του δεν υπήρχε όπως θα ήταν αναμενόμενο καθώς ο πρώτος είχε στείλει όπως αναφέρθηκε παραπάνω κάποιες σημειώσεις σχετικές με το θέμα στον Leibniz. Η δημοσίευση έγινε βέβαια μετά από οκτώ χρόνια από την πρώτη τους αλληλογραφία αλλά και ο ίδιος ο Newton παραξενεύτηκε με την σβελτάδα του Leibniz ο οποίος τελικά αποκωδικοποίησε όσα του είχε κρύψει ο Άγγλος επιστήμονας.

Πιο συγκεκριμένα ο Leibniz τον Οκτώβριο του 1684 δημοσίευσε το θεμελιώδες υπόμνημα που αναφέρθηκε παραπάνω στο οποίο ο Γερμανός επιστήμονας δεν έκανε κάποια αναφορά σε άλλους που είχαν ασχοληθεί με το θέμα.

Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί και λογικό καθώς ήθελε να δώσει σύντομες πληροφορίες για πρωτότυπες μεθόδους. Αυτή του η στάση όμως θεωρείται ότι αποτέλεσε και την αφετηρία της μεγάλης έριδας που εξελίχθηκε τα επόμενα έτη. Ο Newton με την σειρά του υπό μορφή σχολίου ανέφερε ότι πράγματι είχαν αλληλογραφήσει με τον Leibniz και έπειτα από ανακοίνωση του πρώτου ότι γνώριζε μέθοδο για τον προσδιορισμό μεγίστων και ελαχίστων, κατασκευής εφαπτόμενων και ανάλογων πράξεων σε ρητές και άρρητες εκφράσεις, ο Leibniz απάντησε πως και εκείνος είχε αναπτύξει μία μέθοδο που δεν διέφερε από αυτήν του Newton παρά μόνο σε λέξεις και συμβολισμούς.

Από αυτήν την δήλωση αρχικά θεωρήθηκε πως ο Newton αναγνώρισε το έργο του Leibniz αλλά έπειτα ερμηνεύθηκε υπό την οπτική γωνία πως ο Newton μέσα από αυτό το σχόλιο υποστηρίζει πως πρώτος εκείνος ασχολήθηκε με το θέμα.

Ο Leibniz υποστήριξε πως δεν γνώριζε τίποτα σχετικά με την μέθοδο του Newton και τον Ιανουάριο του 1689 δημοσίευσε ένα έργο του στο οποίο δεν ανέφερε τον Newton ενώ πραγματευόταν αποτελέσματα στα οποία είχε φθάσει ο άγγλος αντίζηλός του.

Μέσα σε αυτό το κλίμα ο John Wallis πίστευε ότι οι ιδέες του Newton είχαν διαρρεύσει με το όνομα Διαφορικός Λογισμός του Leibniz κάτι που πυροδότησε την μεταξύ τους διαμάχη αλλά και άλλοι σύγχρονοι της εποχής επιστήμονες επηρέαζαν την συμπεριφορά των κεντρικών προσώπων. Οι Bernoulli και άλλοι μετά την πρώτη δημοσίευση του Leibniz, την μέθοδο της οποίας κατανόησαν και έβαλαν σε εφαρμογή, στράφηκαν με το μέρος του Leibniz. Ο Bernoulli δήλωσε πως ο Newton οφείλει την λύση ενός προβλήματος που είχε τεθεί στην επιστημονική κοινότητα στον ίδιο και τον Leibniz ενώ ο Nicolas Faccio de Duillier (1664-1753) απαντώντας στην δήλωση του Bernoulli ανέφερε πως πρωτοπόρος ήταν ο Newton και ο Leibniz δανείστηκε στοιχεία από αυτόν.

Το 1713 υποβλήθηκε στην Βασιλική Εταιρεία του Λονδίνου ένα έργο με τίτλο Commercium Epistolicum(Επιστολική επικοινωνία) στο οποίο υπήρχε ένας τόμος που περιείχε αντίγραφα των επιστολών των δύο επιστημόνων σχετικά με το φλέγον ζήτημα. Αυτό το έργο δημοσιεύθηκε έπειτα από την σύμφωνη γνώμη του Newton, ενώ ο Leibniz έμαθε για αυτό το έργο από το φιλόσοφο Wolf.

Όπως είναι εμφανές, η διένεξη μεταξύ των δύο προσώπων είχε αρχίσει να λαμβάνει τρομακτικές διαστάσεις και για αυτόν τον λόγο προσπάθησαν κάποιοι να μεσολαβήσουν για να διευθετήσουν το θέμα. Πρώτος ο Chamberlayne προσπάθησε να προσεγγίσει τον Leibniz χωρίς όμως να έχει τα επιθυμητά αποτελέσματα η προσπάθειά του την οποία συνέχισε ο αββάς Conti.

Μόνον όταν άρχισαν να δημοσιεύονται προσωπικές σκέψεις του καθενός, η διένεξη άρχισε να χάνει την οξύτητά της, μία έριδα που σε κάθε περίπτωση συμπλήρωσε από διαφορετική οπτική γωνία το οικοδόμημα που είχε ξεκινήσει ο Αρχιμήδης και ο Εύδοξος είκοσι αιώνες πριν.
(Loria, 1992)

Η αξιωματική θεμελίωση

Η αξιωματική θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού ήρθε τον 18ο και 19ο αιώνα από αρκετούς επιστήμονες της εποχής οι οποίοι στην προσπάθειά τους να συνεχίσουν το έργο των προηγούμενων και έχοντας ήδη ως παρακαταθήκη τις ήδη υπάρχουσες θεωρίες προχώρησαν στον ορισμό πλέον του εργαλείου του Διαφορικού Λογισμού, την παράγωγο. Ο Bernard Bolzano (1781-1848) ένας μαθηματικός από το Βασίλειο της Βοημίας, ήταν πρωτοπόρος στην προσπάθεια αυτή καθώς έδωσε μια προσέγγιση για την συνέχεια μιας συνάρτησης στην οποία για πρώτη φορά έδειξε ότι η βασική ιδέα της συνέχειας είναι η ύπαρξη του ορίου. Προσδιόρισε την συνάρτηση f(x) ως μια συνεχή συνάρτηση σε ένα διάστημα, για κάθε x που ανήκει στο διάστημα η διαφορά f(x+Δx) – f(x) γίνεται και παραμένει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα για την οποία το Δx γίνεται αρκούντως μικρό είτε θετικό είτε αρνητικό. Αυτός ο προσδιορισμός δεν διαφέρει σημαντικά από τον ορισμό που εδραιώθηκε από τον Augustin Louis Cauchy (1789-1857), ο οποίος κυριαρχεί και σήμερα. Ο Bolzano συνειδητοποίησε ότι έπρεπε να εξηγήσει με όρους του ορίου την διαφορά των ποσοτήτων. Προσδιόρισε την παράγωγο της F(x) για μια τιμή μιας ποσότητας F'(x) ως τον λόγο $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ που πλησιάζει το άπειρο όσο το Δx πλησιάζει το 0. Έδωσε έμφαση στο γεγονός ότι ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως η διαίρεση του 0 δια 0 αλλά είναι ένα σύμβολο για μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Θεώρησε ότι η συνάρτηση στο σημείο που ο λόγος που αναφέρθηκε παραπάνω γίνεται 0/0 δεν μπορεί να πάρει καθορισμένη τιμή αλλά μια προσεγγιστική τιμή κάτι που στην ουσία δείχνει ότι η συνάρτηση σε εκείνο το σημείο είναι συνεχής (Boyer, 1959). Ο Cauchy μαζί με τον «αντίπαλό» του τον Euler και τον Lagrange εδραίωσαν τον Λογισμό μέσω τύπων και κανόνων καθώς και μέσω της ανάλυσης διότι μέχρι τότε από τον Αρχιμήδη μέχρι και τους Newton και Leibniz η έννοια του ορίου και άρα η βάση του Λογισμού αναπτύχθηκε με μεθόδους όπως η μέθοδος της εξάντλησης αλλά και με μεθόδους που στηριζόντουσαν κυρίως στην γεωμετρία. Ο Cauchy καθόρισε το απειροελάχιστο και εισήγαγε στον Λογισμό επιχειρήματα της μορφής δ-ε με δ, ε απείρως μικροί θετικοί αριθμοί. Έδωσε, όπου χρειαζόταν πολύ ακριβείς ορισμούς όπως «ένα απειροστό y = f(x) τάξης n» εάν $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}) = 0$ και $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\frac{y}{x^{n+\varepsilon}}) = \pm\infty$, όπου ε μια θετική σταθερά πάρα πολύ μικρή (Boyer, 1959)

Ωστόσο, έδωσε στην παράγωγο και στα διαφορικά έναν ακριβή ορισμό, κάτι που δεν είχαν κάνει οι προκάτοχοί του όπου του διαφορικό $dy = f'(x)dx$ είναι μια συνάρτηση του x ως προς dx και αφού καθόρισε αυτό εισήγαγε και το $d^2y = f''(x)^2$.

Ο Cauchy έδωσε έναν σαφή ορισμό για τα απειροστικά χρησιμοποιώντας ακολουθίες που τείνουν στο 0. Πολλές πηγές διαφωνούν ότι ο Cauchy όρισε τελικά την έννοια του απειροστικού με όρια αλλά άλλες υποστηρίζουν ότι ίδιος περίμενε τις αυστηρές μεθόδους του Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) ο οποίος ενδιαφερόταν για την λογική πληρότητα του απειροστικού λογισμού και τελικά προσπάθησε να θεμελιώσει αξιωματικά τον Απειροστικό Λογισμό ώστε να εδραιωθεί η Ανάλυση μέσω της έννοιας του πραγματικού αριθμού.

Στο έργο του Cours d' Analyse όπως αναφέρει η Στεργίου (2009) υπογραμμίζεται ότι «εάν διαδοχικές τιμές που παίρνει η ίδια η μεταβλητή προσεγγίζουν απεριόριστα μια συγκεκριμένη τιμή έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτή λιγότερο από όσο επιθυμεί κανείς, η τελευταία αυτή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί πως σύμφωνα με τον ιστορικό Boyer το σύμβολο ∞ χρησιμοποιήθηκε από τους μαθηματικούς από την εποχή του Wallis για να αναπαραστήσει το άπειρο αλλά δεν είχε προσδιοριστεί εξ' ορισμού μέχρι που ο Weierstrass έγραψε $f(a) = \infty$ για να εξηγήσει ότι $\frac{1}{f(a)} = 0$ και επίσης χρησιμοποίησε την έκφραση $f(\infty) = b$ υπό την έννοια ότι το όριο της f(x) για x απεριόριστα μεγάλο ήταν το b. Οι Wallis και Bernard le Bovier de Fontenelle θεώρησαν ότι το ∞ είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος ή το άθροισμα όλων των θετικών ακεραίων.

Κεφάλαιο 3ο - Η Πορεία του Έλληνα μαθητή στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση

Στην Ελλάδα οι μαθητές αφού τελειώσουν την υποχρεωτική τους εκπαίδευση ακολουθούν στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση που είναι το Γυμνάσιο και Λύκειο και στην συνέχεια μέσω των Πανελλαδικών Εξετάσεων εισάγονται σε Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (Α.Ε.Ι) που μέχρι πρότινος εκτός από αυτά υπήρχαν και Τεχνολογικά Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (Τ.Ε.Ι.). Η εισαγωγή τους σε κάποιο εκπαιδευτικό ίδρυμα καθορίζεται από την επίδοση τους στις προαναφερθείσες εξετάσεις η οποία ανάλογα με το εκπαιδευτικό σύστημα της εποχής προσμετράται με τον αριθμό των μορίων που συγκεντρώνουν οι υποψήφιοι στα εξεταζόμενα μαθήματα.

Οι μαθητές ανάλογα με τις προτιμήσεις τους σε σχολές ακολουθούν έναν συγκεκριμένο προσανατολισμό ο οποίος τους δίνει πρόσβαση σε επιστημονικά πεδία που περιέχουν τις σχολές προτίμησης. Σύμφωνα με την νέα εγκύκλιο του Υπουργείου Παιδείας και τα άρθρα 100 του ν.4610/2019(ΦΕΚ 70 Α΄) και 165 του ν.4635/2019 (ΦΕΚ 167 Α΄).Οι ομάδες προσανατολισμού είναι οι εξής :

a) Ομάδα προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών
b) Ομάδα προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
c) Ομάδα προσανατολισμού Σπουδών Υγείας
d) Ομάδα προσανατολισμού Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

Τα μαθηματικά είναι εξεταζόμενο μάθημα σε δύο από τους προαναφερθέντες προσανατολισμούς, στην ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και στην Ομάδα Προσανατολισμού Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής. Η διδακτέα – εξεταστέα ύλη καθώς και οι οδηγίες διδασκαλίας αναφέρονται παρακάτω αφού πρώτα γίνει μια αναφορά για την πορεία ενός μαθητή από την Α’ γυμνασίου έως και την Γ’ Λυκείου στην μαθηματική του εκπαίδευση.

Από τις πρώτες κιόλας τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης γίνεται μια προσπάθεια εισαγωγής των μαθητών στην φιλοσοφία των μαθηματικών ως μια επιστήμη αυστηρή στην οποία η κατανόηση των ορισμών της εκάστοτε έννοιας κρίνεται αναγκαία, παρόλο που πολλοί μαθητές υποστηριζόμενοι και από εκπαιδευτικούς θεωρούν ότι «δεν χρειάζεται να μάθει κάποιος την θεωρία από έξω αρκεί να λύνει ασκήσεις». Είναι μια πεποίθηση που κατά την προσωπική μου γνώμη στερεί από πολλούς μαθητές μια καλύτερη επίδοση.

Πιο συγκεκριμένα τα βιβλία στο Γυμνάσιο είναι χωρισμένα σε δυο τομείς στην Άλγεβρα και στην Γεωμετρία ενώ στην Β’ και Γ’ Γυμνασίου υπάρχει ξεχωριστή ενότητα για την Τριγωνομετρία. Σχετικά με την Άλγεβρα στόχος είναι

- να μπορούν οι μαθητές να κάνουν πράξεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών
- να επιλύουν πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις,
- να είναι σε θέση να επιλύουν ένα γραμμικό σύστημα
- να γνωρίζουν πράξεις με πολυώνυμα και παραγοντοποίηση πολυωνύμων

- να έχουν έρθει σε μια επαφή με την έννοια της συνάρτησης

Στο Λύκειο, όπου η Άλγεβρα και η Γεωμετρία θεωρούνται διαφορετικά μαθήματα και είναι σε διαφορετικά βιβλία, και συγκεκριμένα στην Α' Λυκείου οι μαθητές κάνουν ουσιαστικά μια επανάληψη των γνώσεών τους από το Γυμνάσιο παρατηρώντας πια όλες τις έννοιες υπό ένα πιο αυστηρά μαθηματικό και αποδεικτικό πρίσμα. Εισάγεται η έννοια της απόδειξης των θεωρημάτων και οι μαθητές αρχίζουν να έχουν μια πιο ολοκληρωμένη και με μαθηματική λογική σκέψη.

Στην Β' λυκείου εμπλουτίζοντας τις προηγούμενες γνώσεις εμβαθύνουν περισσότερο στην έννοια της συνάρτησης κάτι που ξεκινά από το τέλος της Α' Λυκείου και μελετούν την λογαριθμική και την τριγωνομετρική συνάρτηση αφού έχουν διδαχθεί πρώτα Τριγωνομετρία επεκτείνοντας τις γνώσεις του Γυμνασίου. Ταυτόχρονα για τους μαθητές που ακολουθούν Προσανατολισμό στον οποίο τα Μαθηματικά είναι πανελλαδικώς εξεταζόμενο μάθημα διδάσκεται και το Μάθημα «Μαθηματικά Κατεύθυνσης» το οποίο περιλαμβάνει τα Διανύσματα, την Ευθεία και τις Κωνικές Τομές δηλαδή μια εισαγωγή στην Αναλυτική Γεωμετρία.

Κατά αυτόν τον τρόπο οι μαθητές φτάνουν στην Γ' Λυκείου έχοντας βασικές γνώσεις Άλγεβρας, σίγουρα όμως και Γεωμετρίας όπου και εκεί αντίστοιχα γίνεται μια εισαγωγή στις έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έχουν μάθει πλέον να ακολουθούν έναν αλγεβρικό τρόπο σκέψης και η πρώτη τους επαφή με έννοιες της Ανάλυσης τους δημιουργεί άγχος και αποστροφή από το μάθημα όπως αναφέρεται και σε επόμενο κεφάλαιο.

Η παρούσα ερευνητική εργασία αποτελεί μια προσπάθεια κατανόησης εις βάθος και επεξήγησης κάποιων τμημάτων του σχολικού εγχειριδίου της Γ Λυκείου σχετικά με την έννοια της παραγώγου. Σύμφωνα με το ΦΕΚ που δημοσιεύθηκε 5 Ιουλίου 2019 (Τεύχος Β΄ 2875/05.07.2019) εξεταστέα ύλη για τα μαθηματικά προσανατολισμού το έτος 2019-2020 αποτελούν τα παρακάτω. Από το βιβλίο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Β' ΜΕΡΟΣ» Γ' τάξης Γενικού Λυκείου των ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗ Σ., ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗ Β., ΜΕΤΗ ΣΤ., ΜΠΡΟΥΧΟΥΤΑ Κ., ΠΟΛΥΖΟΥ Γ.

Από το βιβλίο: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - Β' ΜΕΡΟΣ»
Κεφάλαιο 1: Όριο -Συνέχεια συνάρτησης Παρ. 1.1 Πραγματικοί αριθμοί. Παρ. 1.2 Συναρτήσεις. Παρ. 1.3 Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση. Παρ. 1.4 Όριο συνάρτησης στο X_0 Παρ. 1.5 Ιδιότητες των ορίων, χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου "Τριγωνομετρικά όρια" Παρ. 1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο Xo. Παρ. 1.7 Όρια συνάρτησης στο άπειρο. Παρ. 1.8 Συνέχεια συνάρτησης.
Κεφάλαιο 2: Διαφορικός Λογισμός Παρ. 2.1 Η έννοια της παραγώγου, χωρίς την υποπαράγραφο "Κατακόρυφη εφαπτομένη"

Παρ. 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις- Παράγωγος συνάρτηση (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων (ημχ)΄=συνχ και (συνχ)΄= -ημχ) Παρ. 2.3 Κανόνες παραγώγισης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων. Παρ. 2.4 Ρυθμός μεταβολής. Παρ. 2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού. Παρ. 2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Παρ. 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης, χωρίς το τελευταίο θεώρημα (κριτήριο της 2ης παραγώγου). Παρ. 2.8 Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης. (Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους). Παρ. 2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De l' Hospital. Παρ. 2.10 Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
Κεφάλαιο 3: Ολοκληρωτικός Λογισμός Παρ. 3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα. (Μόνο η υποπαράγραφος "Αρχική συνάρτηση" που θα συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος θα περιλαμβάνεται στις διδακτικές οδηγίες) Παρ. 3.4 Ορισμένο ολοκλήρωμα Παρ. 3.5. Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ <u>**Υπόδειξη - οδηγία:**</u> Η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό <u>δεν θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται στη συνάρτηση</u> $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ και <u>γενικότερα στη συνάρτηση</u> $F(x)=\int_a^{g(x)} f(x)dx$ Παρ. 3.7 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου, χωρίς την εφαρμογή 3.

Εικόνα 9. Εξεταστέα ύλη Γ Λυκείου το σχολικό έτος 2019-2020

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω εξεταστέα ύλη είναι ίδια με κάποιες μικρές αλλαγές από το σχολικό έτος 2016-2017 ενώ τα προηγούμενα έτη με το τρέχον εκπαιδευτικό σύστημα υπήρχε ένα επιπλέον κεφάλαιο που αφορούσε την Μιγαδική Ανάλυση.

Σύμφωνα με τις οδηγίες που έχουν δοθεί από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) σχετικά με την διαχείριση της διδακτέας – εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και Γ' και Δ' τάξεων Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το έτος 2019-2020

Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίες, που είναι 6 ώρες την εβδομάδα συν μία ώρα προς την επίλυση αποριών των μαθητών, *επιτρέπουν την ευχερέστερη υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα :*

a) *Την σύνδεση της ανάλυσης με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα.*
b) *Την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά ανεξάρτητα από την μέχρι τώρα μαθησιακή του πορεία.*

Επιπλέον στο ίδιο δημοσίευμα το ΙΕΠ συμβουλεύει τους εκπαιδευτικούς στην παράγραφο 2.1-Η έννοια της παραγώγου

*Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας (*της παραγώγου) *μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης συνάρτησης να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτόμενη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στου μαθητές γραφικά :*

i. *Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x) = x^3$ *στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη*
ii. *Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης*

$g(x)=\begin{cases} x^2, \text{ αν } x\leq 0 \\ 0, x > 0 \end{cases}$ *στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.*

Και στην παράγραφο 2.2 - Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση f'(x) = $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης*

Ενώ ταυτόχρονα στην παράγραφο 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης το ΙΕΠ δίνει τις εξής οδηγίες :

Τα προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων αποτελούν μία από τις σημαντικές εφαρμογές του διαφορικού λογισμού που δικαιολογούν και αποδίδουν αξία στη διδασκαλία του. Συγχρόνως συγκεντρώνουν στοιχεία από τη διδασκαλία προηγούμενων ενοτήτων και έτσι αποτελούν μια καλή ευκαιρία επαναλήψεων και συμπληρώσεων. Κρίνεται σκόπιμο να συζητηθούν κατά το δυνατόν περισσότερα προβλήματα ….

Επιλέχθηκαν αυτά τα τρία αποσπάσματα από τις οδηγίες του ΙΕΠ εξαιτίας των δραστηριοτήτων που έχουν επιλεχθεί στην έρευνα μέσα από το σχολικό εγχειρίδιο να χρησιμοποιηθούν ως εναλλακτικός τρόπος διδασκαλίας με την βοήθεια της Ιστορίας των Μαθηματικών. Είναι βέβαιο πια πως η διδασκαλία των μαθηματικών της Γ' Λυκείου δεν προσεγγίζεται στο ελάχιστο με ιστορική προοπτική κάτι που αποτελεί εμφανώς αντικείμενο συζήτησης και διαπραγμάτευσης.

Κεφάλαιο 4ο Παρανοήσεις στα μαθηματικά

Μέσω μιας βιβλιογραφικής ανασκόπησης αναδύεται η πληθώρα ερευνών που αποδεικνύει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην διδακτική διαδικασία. Σύμφωνα με τον Brousseau τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών σχετίζονται συχνά με εμπόδια που διακρίνονται σε τρεις διαφορετικούς τύπους. Στα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία σχετίζονται με την εξέλιξη της ίδια της επιστήμης, τα γενετικά – ψυχολογικά εμπόδια που έχουν να κάνουν με τον ίδιο τον μαθητή και τέλος τα διδακτικά εμπόδια τα οποία δημιουργούνται από τον τρόπο διδασκαλίας.

Από την άλλη μεριά εμπόδιο μπορεί να χαρακτηριστεί και η έλλειψη απεικονίσεων που έχουν οι μαθητές. Σύμφωνα με τον Tall και Vinner όπως αναφέρεται στο άρθρο των Areaya και Sidelil (2012) υπάρχει ο όρος η «έννοια της εικόνας» η οποία περιγράφει την κατασκευαστική γνώση που έχει ένα συγκεκριμένο άτομο και σχετίζεται με κάποιες μαθηματικές έννοιες. Η έννοια της εικόνας περιλαμβάνει όλες τις διανοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες ενώ μπορεί να κατασκευαστεί με την πάροδο του χρόνου μέσω των εμπειριών και των ερεθισμάτων. Έτσι, το κάθε άτομο έχει δημιουργήσει μια εικόνα στο μυαλό του για τον κάθε ορισμό την οποία κατανοεί και το καθιστά ικανό να την χρησιμοποιήσει είτε για να διατυπώσει τον ορισμό είτε για να τον χρησιμοποιήσει κατά την διάρκεια επίλυσης μια άσκησης. Όταν, λοιπόν, η εύρεση μιας εικόνας που αντικατοπτρίζει την έννοια που μελετά το άτομο αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία, τότε το άτομο δεν μπορεί να ακολουθήσει μια άλλη φιλοσοφία ώστε να αφομοιώσει τον ορισμό και έτσι δημιουργούνται παρανοήσεις. Μία τέτοια έννοια είναι και αυτή του ορίου και κατ' επέκταση της συνέχειας, της διαφορισιμότητας και όχι μόνο.

Άλλωστε ένα μεγάλο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όλων των τάξεων στα μαθηματικά, και όχι μόνο αυτοί που το διδάσκονται ως πανελλαδικώς εξεταζόμενο μάθημα, είναι η αντιστοιχία της αλγεβρικής επίλυσης με την γραφική επίλυση μιας άσκησης. Κάποιες φορές χρησιμοποιούν τον έναν και άλλες τον άλλον τρόπο και όταν τους ζητηθεί να λύσουν την άσκηση με αλγεβρική και γραφική προσέγγιση παρουσιάζουν δυσκολίες καθώς δεν κατανοούν την άμεσο συσχετισμό που υπάρχει. Σε αυτό, σαφώς, δεν είναι υπαίτιοι μόνο οι μαθητές διότι τα σχολικά εγχειρίδια αλλά και οι εκπαιδευτικοί προσαρμόζουν την διδασκαλία τους κάθε φορά με τον καταλληλότερο τρόπο δίχως να δίνουν στον μαθητή την ευκαιρία να μεταπηδήσει από τον έναν στον άλλον.

Επιπλέον, η επιστήμη των μαθηματικών συσχετίζεται άρρηκτα με την ύπαρξη των μαθηματικών προβλημάτων. Οι άνθρωποι στο άκουσμα της λέξης πρόβλημα αισθάνονται κάτι αρνητικό καθώς πρόβλημα σημαίνει μία κατάσταση που χρήζει αντιμετώπισης και επιδέχεται ή όχι λύση. Πόσο μάλλον όταν συνοδεύεται και από την λέξη μαθηματικά η οποία για πολλούς ανθρώπους σημαίνει δύσκολες νοητικές αλληλουχίες και πράξεις.

Το μαθηματικό πρόβλημα, λοιπόν, αποτελεί έναν ακόμα παράγοντα που καθιστά την επιστήμη αυτή εκ πρώτης όψεως δυσκολονόητη. Ο Ούγγρος μαθηματικός Pólya ήταν εκείνος που διατύπωσε τις πρώτες στρατηγικές επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, τις ονομαζόμενες Ευρετικές, στις οποίες περιλαμβάνονται οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι πρόσθετες παραδοχές, οι συλλογισμοί απλούστευσης κ.ά.

Οι μαθητές, ακόμα και όταν αναφερόμαστε σε μαθητές υψηλότερου γνωστικού και νοητικού επιπέδου, κρίνουν την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, ειδικά όταν αυτό απαιτεί αλγοριθμική προσέγγιση, ανιαρή. Γι’ αυτόν τον λόγο στην παρούσα έρευνα προσεγγίζονται κάποια προβλήματα του Διαφορικού Λογισμού του σχολικού εγχειριδίου ιστορικά ώστε να γίνουν περισσότερο ξεκάθαρα στους μαθητές. Θα πρέπει οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τι αναζητούν, γιατί το αναζητούν, με ποιόν τρόπο το αναζητούν ενώ ταυτόχρονα θα αποτελούσε μεγάλη ικανοποίηση για κάθε εκπαιδευτικό να κατανοήσουν έως έναν βαθμό και τον λόγο ύπαρξης του προβλήματος καθώς και τι προσπαθεί το κάθε πρόβλημα να τους δώσει.

Παρανοήσεις στον Διαφορικό Λογισμό – στις παραγώγους

Οι μαθητές ακολουθούν συγκεκριμένους τρόπους επίλυσης κάποιων ασκήσεων, τις γνωστές στην κοινωνία των σχολείων και των φροντιστηρίων «μεθοδολογίες» και μαθαίνουν να λύνουν ασκήσεις χρησιμοποιώντας μια φόρμουλα για την εκάστοτε περίπτωση που θα έχουν στις εξετάσεις

Προσπαθούν να συνδυάσουν την έννοια της παραγώγου μέσω της γεωμετρίας καθώς σε κάτι τέτοιο τους ωθεί και το ίδιο το σχολικό εγχειρίδιο έχοντας κάτω από αρκετά θεωρήματα, που δεν αφορούν μόνο την παράγωγο, την γεωμετρική ερμηνεία αυτών.

Ο Siyepu (2013) αναφέρει ότι η μελέτη του λογισμού με τις θεμελιώδεις έννοιες του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος απαιτούν μια ικανότητα από τον μαθητή να κατανοήσει τις αλγεβρικές μεταβλητές ως συναρτήσεις που λειτουργούν ως ποικίλες ποσότητες. Στο ίδιο άρθρο του Siyepu αναφέρεται πως σύμφωνα με τον Tarmizi οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και του ορίου που είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της συνέχειας, της διαφόρισης της ολοκλήρωσης καθώς και της σύγκλισης ακολουθιών και σειρών. Ωστόσο αποδεικνύεται πως τα περισσότερα λάθη και οι πιο πολλές παρανοήσεις στην ανάλυση γίνονται εξαιτίας των κενών στην βασική άλγεβρα. Σημειώνεται δε, ότι οι αδυναμίες των μαθητών και η χρήση της διαδικαστικής γνώσης οφείλεται στην έλλειψη των εννοιολογικών βάσεων (Luneta & Makonye, 2010). Άλλωστε, η διαδικαστική γνώση θεωρείται η ικανότητα διεξαγωγής μιας μαθηματικής εργασίας για το πώς γίνεται και όχι γιατί γίνεται. Αυτού του είδους η γνώση συχνά διδάσκεται μέσω άσκησης και πρακτικής και έτσι αυτοματοποιείται ώστε να λύνονται οι ασκήσεις γρήγορα και αποτελεσματικά. Αυτή η ταχύτητα και η αποτελεσματικότητα μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις σχετικές με τις εννοιολογική γνώση (Luneta & Makonye, 2010).

Μελετώντας όμως πιο συγκεκριμένα την παράγωγο και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ήδη υπάρχουσες έρευνες για τις παρανοήσεις των μαθητών στην έννοια της παραγώγου αλλά και τις εμπειρίες των μαθηματικών που ασχολούνται με την εκπαίδευση είναι προφανές ότι η λανθάνουσα εννοιολογική βάση προέρχεται κατά κύριο λόγο από τις παρανοήσεις που έχουν οι πρώτοι στην έννοια του ορίου. Οι περισσότεροι μαθηματικοί συμφωνούν ότι ο όρος 'όριο' είναι η θεμελιώδης έννοια του Λογισμού (Areaya & Sidelil, 2012) η οποία και είναι δυσνόητη στους μαθητές λόγω της μη αλγεβρικής της υπόστασης.

Η λέξη όριο δημιουργεί πληθώρα γνωστικών δυσκολιών στις οποίες περιλαμβάνονται τα παρακάτω :

- Η καθομιλουμένη γλώσσα που χρησιμοποιείται όπως οι λέξεις "όριο", "πλησιάζει", "κοντεύει", συγκρούεται με την θεμελιώδη έννοια
- Τα όρια δεν εμφανίζονται ως μια απλή αριθμητική διαδικασία αλλά δημιουργούν ένα μυστήριο για το τί ακριβώς συμβαίνει
- Η φράση "μια μεταβλητή γίνεται αυθαίρετα μικρή" παρερμηνεύεται και θεωρείται ως μια αυθαίρετα μικρή μεταβαλλόμενη ποσότητα κάτι που δείχνει έμμεσα ότι η έννοια του απειροελάχιστου δεν διδάσκεται σωστά. Το ίδιο συμβαίνει και με την φράση "το ℕ γίνεται πολύ μεγάλο" από την οποία διαφαίνεται οι παρανόηση σχετικά με τους άπειρους αριθμούς
- Οι μαθητές, επιπλέον, έχουν δυσκολίες για το αν τελικά μπορεί κανείς να φτάσει το όριο
- Μια σύγχυση επικρατεί και από την μετάβαση από το πεπερασμένο στο άπειρο, στην κατανόηση του τι συμβαίνει εκεί (Tall, 1993)

Στο ίδιο άρθρο γίνεται αναφορά σχετικά με τις παρερμηνείες των μαθητών στο Λογισμό γενικότερα, καθώς η έννοια του ορίου είναι αφενός θεμελιώδης αρχή του Λογισμού, αφετέρου δε παρουσιάζονται και άλλα εμπόδια πέραν των ορίων. Σημειώνεται, λοιπόν, πως οι μαθητές δυσκολεύονται στα κάτωθι :

- Έχουν περιορισμένες εικόνες στο μυαλό τους σχετικά με τις συναρτήσεις
- Δεν κατανοούν τον συμβολισμό του Leibniz
- Έχουν δυσκολίες σχετικά με την μεταφορά των πραγματικών προβλημάτων της καθημερινότητας που αναγάγουν την επίλυση τους στον Λογισμό(πχ Επιχειρησιακή έρευνα)
- Παρουσιάζουν δυσκολίες στην συλλογή και την χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων
- Έχουν λίγο χρόνο να αφομοιώσουν τις έννοιες του Λογισμού
- Δεν μπορούν να διαχειριστούν ποσοδείκτες (Tall, 1993)

Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι μαθητές δεν κατανοούν

- την παράγωγο σε σημείο ως έναν αριθμό και την παράγωγο συνάρτηση ως συνάρτηση
- δυσκολεύονται να ξεχωρίσουν την παράγωγο σε ένα σημείο ως την κλίση της εφαπτομένης μια καμπύλης και
- την παράγωγο ως συνάρτηση (Park, 2013).
- Θεωρούν ότι η τιμή της παραγώγου ή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η συνάρτηση της παραγώγου ή από την άλλη μεριά
- η παράγωγος σε ένα σημείο είναι η εξίσωση της εφαπτομένης
  (Ubuz, 2001)

Κεφάλαιο 5ο - Ιστορικές Δραστηριότητες

Παρακάτω δίνονται τρεις ασκήσεις από το σχολικό εγχειρίδιο οι οποίες δυσκολεύουν τους μαθητές τόσο ως προς την επίλυσή τους όσο και ως προς την ίδια την κατανόηση της εκφώνησης. Η πρώτη ανήκει στη παράγραφο 2.2 – ‘Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις – Παράγωγος Συνάρτηση’ ενώ η δεύτερη και η τρίτη στη παράγραφο 2.7 ‘Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης’. Με βάση την διεθνή βιβλιογραφία, που αναφέρθηκε παραπάνω οι μαθητές παρουσιάζουν παρανοήσεις σε αρκετά σημεία που αφορούν τις παραγώγους όπως η παράγωγος συνάρτηση, η παράγωγος σε σημείο, τα προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, η εφαπτομένη σε σημείο. Τα κάτωθι προβλήματα συνδυάζουν αρκετές παρανοήσεις και για αυτό επιλέχθηκαν για την παρούσα έρευνα.

Δραστηριότητα 1η

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$;

Εικόνα 10. Άσκηση σχολικού Βιβλίου σελ. 110

Η παραπάνω άσκηση βρίσκεται στην Α Ομάδα ασκήσεων του σχολικού βιβλίου, δηλαδή θεωρείται άσκηση βατή προς τους περισσότερους μαθητές. Παρ' όλα αυτά παρατηρούνται δυσκολίες οι οποίες βασίζονται κυρίως στην απεικόνιση που θα έχουν οι μαθητές στο μυαλό τους για την γραφική παράσταση με τις δύο εφαπτόμενες μαζί που πρέπει να είναι παράλληλες. Ένας ακόμα λόγος που η άσκηση δυσκολεύει τους μαθητές είναι η χρήση της απαγωγής σε άτοπο που είναι ο σύνηθες τρόπος επίλυσής της. Σύμφωνα με το βιβλίο λύσεων που έχει δοθεί από το Υπουργείο Παιδείας θα πρέπει ο μαθητής να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα για να λύσει την άσκηση

3. Έστω ότι υπάρχουν δύο σημεία, τα $M_1(x_1, x_1^2)$ και $M_2(x_2, x_2^2)$ με $x_1 \neq x_2$, στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες. Τότε, επειδή η f παραγωγίζεται στο πεδίο ορισμού της, θα πρέπει $f'(x_1) = f'(x_2)$, οπότε $2x_1 = 2x_2$ και άρα $x_1 = x_2$, που είναι άτοπο, αφού $x_1 \neq x_2$.
Άρα, δεν υπάρχουν διαφορετικές εφαπτομένες της C_f που να είναι παράλληλες.
Για τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ δεν συμβαίνει το ίδιο. Πράγματι, για να υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία αυτής, τα $M_1(x_1, x_1^3)$, $M_2(x_2, x_2^3)$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες, αρκεί να ισχύει:

$$\begin{cases} f'(x_1) = f'(x_2) \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2 = 3x_2^2 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2 \neq 0.$$

Επομένως, στα σημεία $M_1(x_1, x_1^3)$, $M_2(-x_1, -x_1^3)$ με $x_1 \neq 0$ οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

Εικόνα 11. Επίλυση άσκησης σύμφωνα με το βιβλίο λύσεων του σχολικού εγχειριδίου

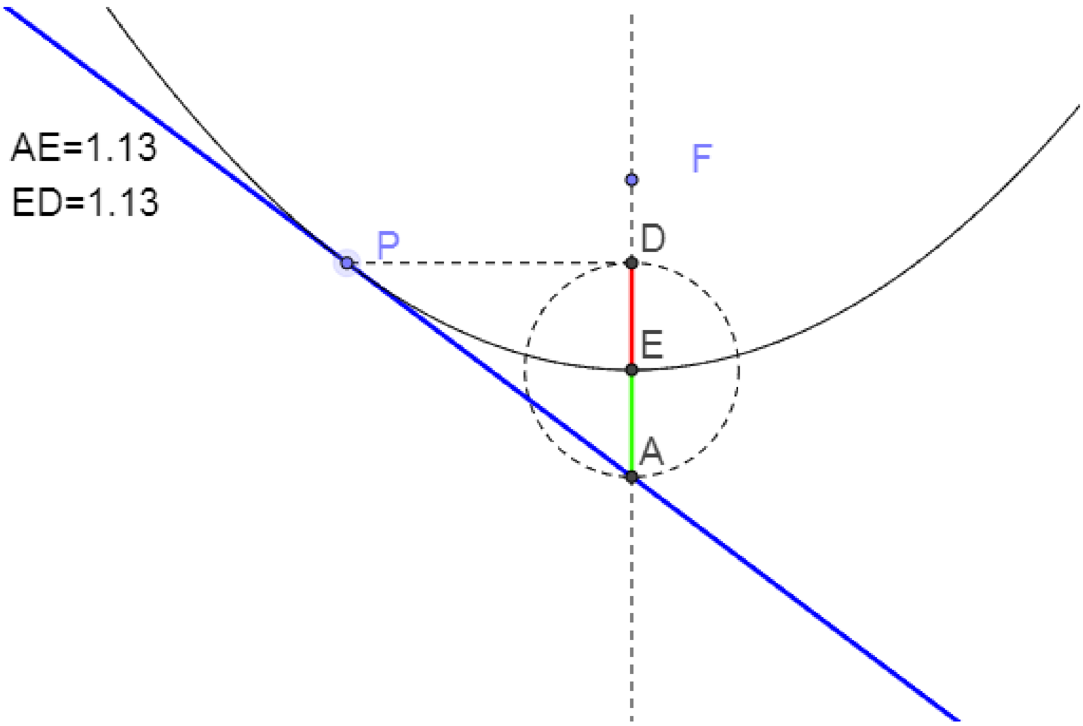
Η μέθοδος όμως της εις άτοπον απαγωγής είναι για τους μαθητές η έσχατη λύση. Δύσκολα θα χρησιμοποιήσουν αυτόν τον τρόπο επίλυσης μιας άσκησης καθώς συνήθως ακολουθούν ευθείες αποδείξεις.

Μία πρόταση λοιπόν, η οποία συνδυάζει την Ιστορία των Μαθηματικών με την σύγχρονη διδασκαλία είναι η κατασκευή εφαπτόμενων με βάση τον Απολλώνιο.

Ο Απολλώνιος ο οποίος έζησε πριν 2000 χρόνια μελέτησε τις καμπύλες βαθύτατα και βρήκε γεωμετρικές μεθόδους για την κατασκευή εφαπτόμενων στην παραβολή την έλλειψη και την υπερβολή. Θα εστιάσουμε στον τρόπο με τον οποίο κατασκεύασε εφαπτομένη στην παραβολή και δεν θα γίνει περεταίρω ανάλυση στην κατασκευή εφαπτόμενων σε κωνικές τομές ώστε να μην υπάρξει σύγχυση στο μυαλό των μαθητών οι οποίοι στην Γ Λυκείου μελετούν συναρτήσεις.

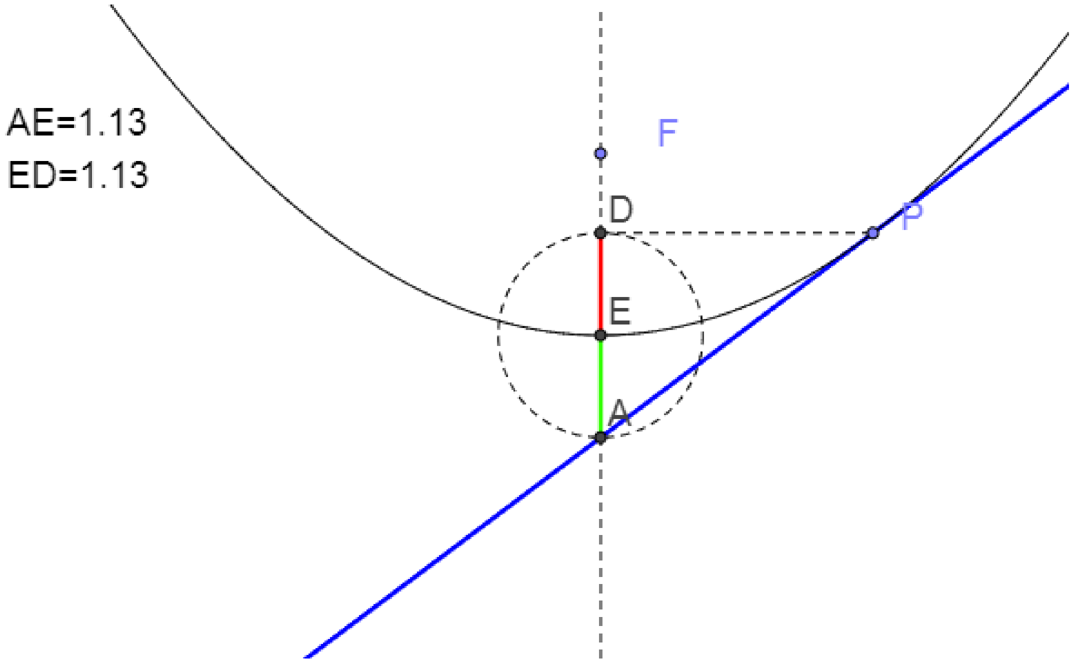
Πράγματι, στις Προτάσεις 33 και 34 του Βιβλίου Ι του Απολλώνιου, Κωνικά δίνονται μεθοδολογίες για την κατασκευή εφαπτόμενων σε αυτές τις καμπύλες.

Πρόταση Ι-33 : Ας υποθέσουμε ότι ένα σημείο P είναι σημείο της παραβολής με κορυφή E, με PD να είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της παραβολής. Αν το A είναι σημείο που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας έτσι ώστε AE = ED, τότε η ευθεία AP θα είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο P.



Εικόνα 12. Κατασκευή εφαπτομένης σύμφωνα με τον Απολλώνιο, (Mathematical Association of America, Gabriela R.Sanchis)

Αν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μία δεύτερη εφαπτομένη με τα ίδια δεδομένα ότι AE = ED τότε η εφαπτομένη θα είναι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



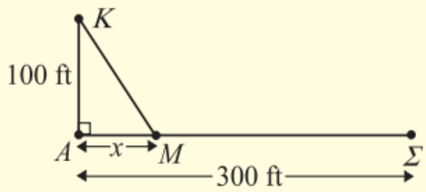
Εικόνα 13. Κατασκευή εφαπτομένης σύμφωνα με τον Απολλώνιο, (Mathematical Association of America, Gabriela R.Sanchis)

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι όποια εφαπτομένη και να φέρει ο μαθητής κατασκευάζοντας την γεωμετρικά δεν μπορούν να υπάρξουν δύο εφαπτόμενες σε δύο διαφορετικά σημεία της παραβολής έτσι ώστε αυτές να είναι παράλληλες μεταξύ τους. (Mathematical Association of America, Gabriela R.Sanchis).

Έτσι έπειτα από μια γεωμετρική προσέγγιση της άσκησης που συνδυάζεται παράλληλα και με μία ιστορική πηγή ο μαθητής είναι σε θέση να αποδείξει ότι κάτι δεν μπορεί να συμβεί έχοντας μπροστά του και την πραγματική απεικόνιση. Αυτό μπορεί πιο εύκολα να τον οδηγήσει στην μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής και τελικά να την λύσει και αλγεβρικά.

Δραστηριότητα 2η

13. Ένας κολυμβητής K βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft[(1)] μακριά από το πλησιέστερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακρυά από το σημείο A. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.



i) Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή $KM\Sigma$ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}.$$

ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Εικόνα 14. Άσκηση σχολικού βιβλίου, σελ 153

Η παραπάνω άσκηση βρίσκεται στην §2.7 του σχολικού εγχειριδίου και συγκεκριμένα είναι η άσκηση 13 της σελίδας 153. Οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην επίλυσή της καθώς

- είναι πρόβλημα, κάτι που τρομοκρατεί τους μαθητές πριν καν διαβάσουν την άσκηση
- δεν μπορούν να καταλάβουν ότι υπάρχει εναλλαγή των μέσων στα οποία κινείται ο κολυμβητής και άρα αλλάζει η ταχύτητά του
- Αδυνατούν να αποδείξουν τον τύπο της συνάρτησης διότι χρειάζεται η χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος και δυστυχώς έχοντας στο μυαλό τους μόνο τους τύπους της Ανάλυσης δεν μπορούν να σκεφτούν το θεμελιώδες αυτό θεώρημα της γεωμετρίας παρόλο που υπάρχει στο σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο.

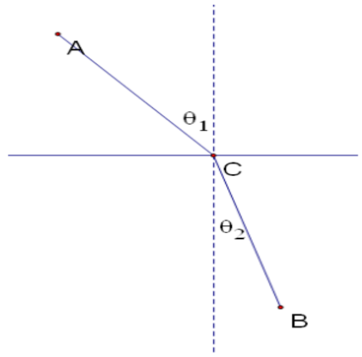
Η πρόταση διδασκαλίας είναι να διδαχθεί η δραστηριότητα με τον νόμο του Snell που αναλύεται παρακάτω :

Γύρω στα 300 π. Χ ο νόμος του Ευκλείδη για την Αντανάκλαση, μελετά τι συμβαίνει όταν μια ακτίνα φωτός αντανακλάται σε έναν καθρέφτη. Ο Δανός φυσικός

Willebrord Snellius, γνωστός στον αγγλόφωνο κόσμο ως Snell, ενδιαφερόταν για το φαινόμενο της διάθλασης, όπου παρατηρείται αλλαγή της κατεύθυνσης της φωτεινής ακτίνας η οποία διέρχεται σε ένα μέσο, όπως ο αέρας, και προσπίπτει σε ένα άλλο, όπως το νερό. Παρατήρησε ότι η φωτεινή ακτίνα εισέρχεται σε πυκνότερο μέσο μέσω ενός σημείου C στην γραμμή διαχωρισμού του μέσου, η ταχύτητά του μειώνεται και η διαδρομή του στρέφεται προς το κανονικό σημείο C.

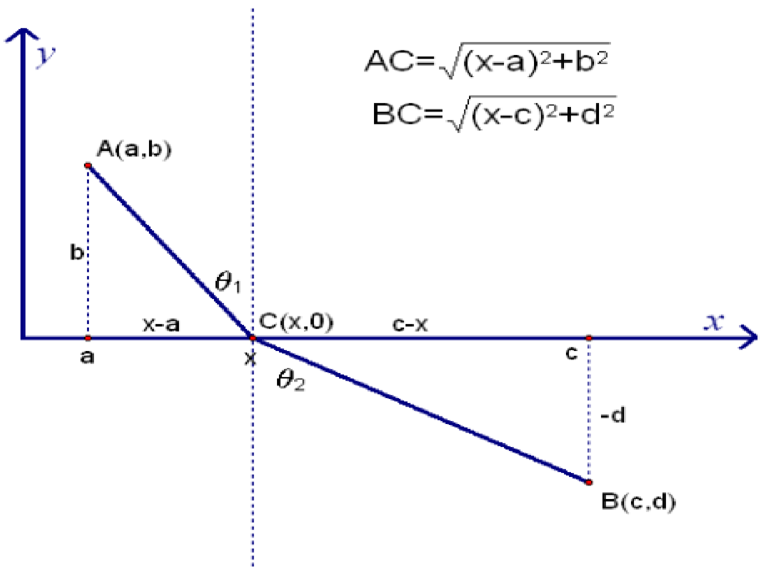
Η παρατήρηση του οδήγησε στην ανακάλυψη της παρακάτω σχέσης

$$\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$



Το 1637, ο Pierre de Fermat προσπάθησε να βρει ένα θεωρητικό υπόβαθρο στον Νόμο του Snell όπως ονομάστηκε η παραπάνω σχέση. Χρησιμοποίησε ότι ο Ήρων είχε δείξει ότι μια ακτίνα φωτός ταξιδεύει από το σημείο A στο B αντανακλώντας πρώτα μια γραμμή L, η διαδρομή που παίρνει είναι αυτή που χρειάζεται για τον λιγότερο χρόνο. Ο Fermat υποστήριξε ότι η ίδια αρχή «ελαχίστου χρόνου» θα διέπει αυτή τη διαδρομή από το A στο B κατά μήκος του ορίου L.

Ο Fermat χρησιμοποίησε τον διαφορικό λογισμό για να καταλήξει στην πιο γρήγορη διαδρομή. Υπέθεσε ότι το σημείο A(a,b) βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x και το σημείο B (c,d) βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x.



Εικόνα 15. Επίλυση άσκησης του Snell (Mathematical Association of America, Gabriela R.Sanchis)

Ψάχνουμε να βρούμε ένα σημείο C (x,0) στον άξονα των x το οποίο θα ελαχιστοποιεί τον χρόνο του ταξιδιού της ακτίνας φωτός δια μέσου της διαδρομής ACB, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα πάνω από τον άξονα των x είναι υ_1 και η ταχύτητα κάτω από τον άξονα των x είναι υ_2. Αφού $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma = \frac{\alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\alpha\sigma\eta}{\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha}$

Ο χρόνος του ταξιδιού θα είναι

$$T(x) = \frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}{\upsilon_2}$$

Αν παραγωγιστεί η παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$\frac{\frac{1}{2}[(x-a)^2+b^2]^{-1/2}.2(x-a)}{\upsilon_1} + \frac{\frac{1}{2}[(x-c)^2+d^2]^{-1/2}.2(x-c)}{\upsilon_2} = 0$$

Η οποία μπορεί να γραφεί ως έξης

$$\frac{x-a}{\upsilon_1\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \frac{x-c}{\upsilon_2\sqrt{(x-c)^2+d^2}} = 0$$

Αλλά $\quad \eta\mu\theta_1 = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \eta\mu\theta_1 = \frac{c-x}{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}$

Η οποία σχέση γράφεται $\frac{\eta\mu\theta_1}{\upsilon_1} - \frac{\eta\mu\theta_2}{\upsilon_2} = 0$ <=> $\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$

Και είναι ο Νόμος του Snell. Ενώ ο Snell έκανε μια εικασία, λοιπόν, μέσω μιας παρατήρησης ο Fermat έδωσε μια μαθηματική απόδειξη για την σχέση. (Mathematical Association of America, Gabriela R.Sanchis).

Η παραπάνω δραστηριότητα μπορεί να συσχετιστεί άμεσα με την προαναφερθείσα άσκηση του σχολικού βιβλίου καθώς γίνεται φανερό πως όταν αλλάζει το μέσο αλλάζει και η ταχύτητα του σώματος ενώ βοηθάει ταυτόχρονα τον μαθητή να κατανοήσει τον λόγο που του ζητείται να βρει την συγκεκριμένη συνάρτηση T(x).

Παρακάτω δίνεται ο τρόπος με τον οποίο τελικά οι μαθητές θα ελέγξουν αν ήταν σωστό αυτό που έλυσαν

Οι ερωτήσεις θα μπορούσαν να διαχωριστούν στα παρακάτω υποερωτήματα άρα θα έχουμε

i. Να βρεθεί ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται ο κολυμβητής για να διανύσει την διαδρομή ΚΣ δίχως να βγει στην ακτή και να τρέξει
ii. Να βρεθεί ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται ο κολυμβητής για να διανύσει την διαδρομή ΚΑΣ κολυμπώντας την μικρότερη δυνατή απόσταση στο νερό και τρέχοντας στην ακτή ακολουθώντας την διαδρομή ΑΣ
iii. Να βρεθεί ο χρόνος, σε συνάρτηση με την απόσταση x που έχει ο κολυμβητής από το σημείο Α μόλις βγει από το νερό, που χρειάζεται για να ακολουθήσει την διαδρομή ΚΜΣ.

Επίλυση της διαμορφωμένης άσκησης

Μία πρόταση διδασκαλίας η οποία εστιάζει στην εναλλαγή των μέσων και στην διαφορετική ταχύτητα που θα αναπτύσσουν τα σώματα μέσα σε αυτά είναι η κατασκευή τριών διαφορετικών σεναρίων.

Στο $1^{\text{ο}}$ υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής πηγαίνει στο σημείο Σ μέσω μόνο του ενός μέσου, της θάλασσας. Στο $2^{\text{ο}}$ ο κολυμβητής πηγαίνει στο σημείο Σ μέσω του άλλου μέσου, της στεριάς ακολουθώντας την ελάχιστη διαδρομή μέσα στην θάλασσα και στο 3ο σενάριο ο κολυμβητής χρησιμοποιεί και τα δύο μέσα. Πιο συγκεκριμένα :

Σενάριο 1ο :

Ο κολυμβητής κολυμπώντας ακολουθεί την διαδρομή ΚΣ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα ΚΣ ≈ 316 ft ,διότι

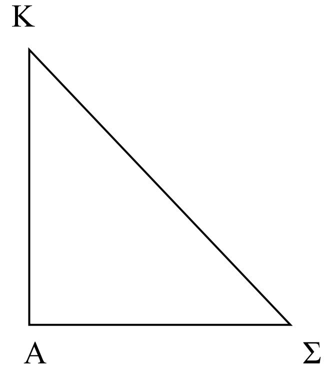
$ΚΣ^2 = ΑΣ^2 + ΑΚ^2$

$ΚΣ^2 = 300^2 + 100^2$

$ΚΣ^2 = 100000$

$ΚΣ = \sqrt{100000}$

ΚΣ ≈ 316,22 ft



Αν t είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση ΚΣ τότε $t = \frac{ΚΣ}{3}$ $\frac{316,22}{3} \approx 105.41\ sec$

Σενάριο 2ο :

Ο κολυμβητής ακολουθεί την διαδρομή ΚΑΣ όπου ΚΑ η ελάχιστη διαδρομή που μπορεί να διανύσει μέσα στο νερό (διότι $ΚΑ \perp ΑΣ$, άρα $ΚΑ \leq ΚΜ$ –η ισότητα ισχύει μόνο για $Κ \equiv Μ$)

Για την εύρεση του ΚΑ : Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να διανύσει την απόσταση ΚΑ και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση ΑΣ. Τότε θα έχουμε :

$t_1 = \frac{ΚΑ}{3} = \frac{100}{3} \approx 33,3$sec

$t_2 = \frac{ΑΣ}{5} = \frac{300}{5} = 60$ sec

άρα αν $t_{ολ}$ ο ολικός χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να φτάσει στο σημείο Σ ακολουθώντας την διαδρομή ΚΑΣ θα έχουμε $t_{ολ} = t_1 + t_2 = 33,3 + 60 \approx 93,3$ sec

<u>Σενάριο 3ο :</u>

Έστω Μ τυχαίο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΣ. Θα βρούμε την συνάρτηση που μας δίνει τον χρόνο που θα χρειαστεί ο κολυμβητής για να διανύσει την διαδρομή ΚΜΣ, όπου ΚΜ η απόσταση στην οποία ο κολυμβητής κολυμπάει και ΜΣ απόσταση στην οποία περπατάει. Αν t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να διανύσει την απόσταση ΚΜ και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση ΜΣ τότε αν T(x) η συνάρτηση που δίνει τον απαιτούμενο χρόνο θα έχουμε

$$T(x) = t_1(x) + t_2(x)$$

$$T(x) = \frac{KM}{3} + \frac{M\Sigma}{5} = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

Για να βρεθεί ο ελάχιστος χρόνος θα πρέπει να βρεθεί η συνάρτηση T′(x) της οποίας η ρίζα θα δώσει τον λιγότερο χρόνο που θα χρειαστεί ο κολυμβητής ώστε να διανύσει την απόσταση ΚΜΣ.

Σύμφωνα με τους κανόνες παραγώγισης

$$T'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{1}{5}$$

Οι ρίζες της T′(x) = 0 είναι το 75.

Σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

x	0		75		300
$T'(x)$		−	0	+	
$T(x)$	↘		$T(75)$ min	↗	

Η συνάρτηση T′(x) = παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = 75 ft το T(75) ≈ 86,7 sec

Που πράγματι είναι λιγότερος ο χρόνος που έκανε ο κολυμβητής είτε ακολουθούσε την διαδρομή ΚΣ είτε την διαδρομή ΚΑΣ.

Με αυτόν τον τρόπο ο μαθητής είναι σε θέση να καταλάβει την σημασία του διαφορικού λογισμού και πώς μέσα από την παραγώγιση της κατάλληλης συνάρτησης μπορούμε να βρούμε το μέγιστο ή το ελάχιστο που παρουσιάζει η συνάρτηση, εδώ τον ελάχιστο χρόνο ώστε να φτάσει από το σημείο Κ στο σημείο Μ.

Δραστηριότητα 3η

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ ii) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

iii) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

Εικόνα 16. Άσκηση του σχολικού βιβλίου, σελ149

Επίλυση της άσκησης σύμφωνα με το βιβλίο λύσεων του υπουργείου παιδείας

2. α) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$. Η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = 1$. Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα όριά της στο $-\infty$ και $+\infty$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 3x^2 - 3$.

Οι ρίζες της $g'(x) = 0$ είναι -1 και 1. Το πρόσημο της g', η μονοτονία της g, τα ακρότατα και τα όριά της στο $-\infty$, $+\infty$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4 Τ.Μ.	$\searrow$	0 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Δηλαδή η g παρουσιάζει:

- στο $x = -1$ τοπικό μέγιστο το $g(-1) = 4$ και
- στο $x = 1$ τοπικό ελάχιστο το $g(1) = 0$.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.
Οι ρίζες της είναι 0 και 1. Το πρόσημο της h', η μονοτονία και τα ακρότατα της h καθώς και τα όριά της στο $-\infty$ και $+\infty$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-1 Τ.Μ.	↘	-2 Τ.Ε.	↗	$+\infty$

Δηλαδή η h παρουσιάζει:
- στο $x = 0$ τοπικό μέγιστο, το $h(0) = -1$ και
- στο $x = 1$ τοπικό ελάχιστο, στο $h(1) = -2$.

Εικόνα 17. Επίλυσης άσκησης σύμφωνα με το βιβλίο λύσεων του σχολικού βιβλίου

Σχετικά με την μέθοδο εύρεσης των τοπικών ακροτάτων αξίζει να σημειωθεί και η μέθοδος του Fermat την οποία γνώριζε ο ίδιος πριν το 1637. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην παρατήρηση ότι οποιαδήποτε μικρή αλλαγή στην τιμή του x καταλήγει σε μία πολύ μικρότερη και κατά συνέπεια αμελητέα αλλαγή στην τιμή της f(x). Αυτό φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα όπου απεικονίζονται τα τρίγωνα που έχουν βάσεις το ίδιο μήκος.

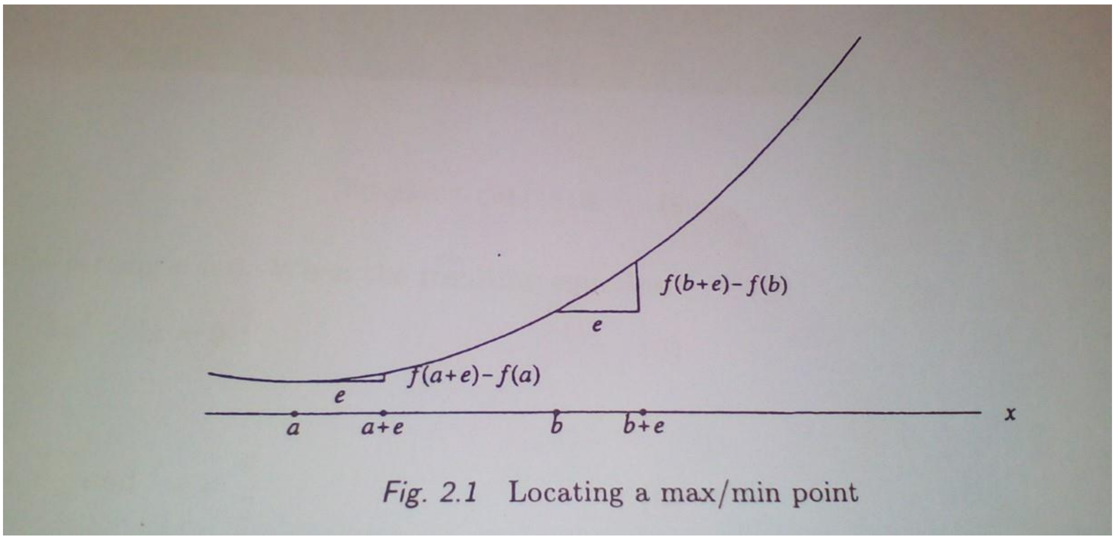


Fig. 2.1 Locating a max/min point

Εικόνα 18. Μέθοδος ακροτάτων του Fermat (Willy, 1999)

$e = (a+e) - a = (b+e) - b.$

Ωστόσο, οι κάθετες πλευρές που δίνουν τις αλλαγές στην τιμή της f(x) είναι αρκετά διαφορετικές. Η ποσότητα f(a+e) – f(a) στο τρίγωνο στα αριστερά είναι μικρότερη από την διαφορά f(b+e) – f(b) στο τρίγωνο στην δεξιά μεριά της απεικόνισης. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι στα κρίσιμα σημεία οι εφαπτόμενες στην καμπύλη είναι οριζόντιες. Η διαφορά μεταξύ των κάθετων πλευρών είναι ποιοτική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τοποθέτηση των κρίσιμων σημείων. (Willy, 1999)

Η μέθοδος αυτή θα μπορούσε να εφαρμοστεί στην άσκηση 2 σελίδας 149 της παραγράφου 2.7 του σχολικού εγχειριδίου που φαίνεται και παραπάνω.

Αν το x + e δηλώνει την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής που είνει στο x ο Fermat υποδεικνύει ότι η διαφορά μεταξύ των f (x+e) – f(x) είναι απειροελάχιστη κάτι που μεταφράζεται από την παρακάτω ισότητα

$f(x+e) - f(x) = 0$

ή

$(x+e)^3 - 3(x + e) + 2 - (x^3 - 3x + 2) = 0$

Ή απλούστερα

$\cancel{X^3} + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 \cancel{-3x} - 3e \cancel{+2} \cancel{-x^3} + \cancel{3x} \cancel{-2} = 0$

$3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 3e = 0$

Διαιρώντας με το e έχουμε

$3x^2 + 3xe + e^2 - 3 = 0$

Και όταν $e = 0$

Προκύπτει $3x^2 - 3 = 0 \iff x = 1$ ή $x = -1$ που είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων. (Willy, 1999)

Κεφάλαιο 6ο - Μεθοδολογία της έρευνας

Χρησιμότητα της έρευνας

Η έννοια της παραγώγου αποτελεί βασικό άξονα των μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου εδώ και πολλά χρόνια στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η δυσκολία στην κατανόησή της δημιουργεί πολλά προβλήματα στην επίλυση των ασκήσεων του Διαφορικού Λογισμού και γι αυτό καθίσταται αναγκαία η δημιουργία διαφορετικών τρόπων διδασκαλίας. Η ανάγκη ανάπτυξης της κριτικής σκέψης των μαθητών έχει διατυπωθεί κατά καιρούς στα αναλυτικά προγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Θωμαΐδης, 1992) κάτι που εικάζουμε ότι μπορεί να επιτευχθεί μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών. Από την άλλη μεριά η άμεση συσχέτιση της αφηρημένης θεωρίας με παραδείγματα που προέρχονται από πραγματικές καταστάσεις και από την διανόησή μας είναι ένα φλέγον ζήτημα που απασχολεί πολλούς συγγραφείς μαθηματικών βιβλίων (Θωμαΐδης, 1986).

Οι μαθητές παρουσιάζουν μια αρνητική στάση απέναντι στην επιστήμη των Μαθηματικών και τόσο η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης όσο και ο συνδυασμός των μαθηματικών με την καθημερινότητά τους έχουν την δυνατότητα να συμβάλλουν στην αποτροπή αυτού του προβλήματος.

Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας ιστορικές δραστηριότητες κάθε φορά με σκοπό τα Μαθηματικά να γίνουν πιο ευχάριστα. Διότι και η κριτική σκέψη ακονίζεται όταν ο μαθητής δημιουργεί μια απεικόνιση για τα προβλήματα που πρέπει να λύσει, που είναι κατά κάποιο τρόπο ίδια με αυτά που ασχολήθηκε ο άνθρωπος χρόνια πριν, αλλά και η θεωρία που πρέπει να κατανοήσει γίνεται πιο κατανοητή όταν την μελετάει σύμφωνα με την ιστορική της εξέλιξη.

Η ιστορία των Μαθηματικών λοιπόν, στην παρούσα διδακτική παρέμβαση έχει ως στόχο να προκαλέσει τον μαθητή να σταματήσει να φοβάται και να συνειδητοποιήσει ότι όπως προσπάθησε ο Απολλώνιος, ο Snell, ο Fermat να λύσει προβλήματα του Διαφορικού Λογισμού έτσι και ο ίδιος ακολουθώντας τα βήματά τους εισέρχεται στην επιστήμη των μαθηματικών και ξεκινά να την ερευνά. Άλλωστε ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας με αυστηρούς ορισμούς και αποδεικτικές διαδικασίες οδηγεί τους μαθητές στην αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι φορμαλιστικά και αυταρχικά χωρίς την δυνατότητα της δημιουργικής σκέψης. Αυτήν την πεποίθηση έρχεται να αντικρούσει η παρούσα έρευνα μέσω της ιστορικοδιδακτικής προσέγγισης της μαθηματικής εκπαίδευσης και όχι μέσω του τυποποιημένου και τυπολατρικού τρόπου διδασκαλίας.

Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει αν η Ιστορία των Μαθηματικών δύναται να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόησή τους από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο η έννοια της παραγώγου και γενικότερα ο τομέας της Ανάλυσης, στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό

Σύστημα διδάσκεται για πρώτη φορά στην Γ΄ Λυκείου ως ύλη για τις πανελλαδικές εξετάσεις με μοναδικό προτεινόμενο εγχειρίδιο το σχολικό βιβλίο, το οποίο όμως χρησιμοποιείται ως βάση για την προετοιμασία των μαθητών. Υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφιών η οποία στοχεύει στην ολοκληρωμένη προετοιμασία των υποψηφίων των πανελλαδικών εξετάσεων. Σε κάθε περίπτωση, εξαιτίας της συστηματοποιημένης γνώσης και της τυποποιημένης κατά κάποιο τρόπο θεματολογίας των ασκήσεων που πρέπει να λύσουν οι μαθητές ώστε να γράψουν στο μάθημα των Μαθηματικών έναν ικανοποιητικό βαθμό, δημιουργείται μια σύγχυση στο μυαλό των τελευταίων σχετικά με την κατανόηση των εννοιών. Είναι σε θέση να λύσουν μια άσκηση θεωρώντας συναρτήσεις, παραγωγίζοντάς τες, χρησιμοποιώντας τεχνάσματα για την εύρεση ριζών μιας εξίσωσης, για την εύρεση τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης ή και για την εύρεση της εφαπτομένης μιας συνάρτησης δίχως να έχουν καταλάβει τι είναι αυτό που πραγματικά κάνουν και βρίσκουν και σίγουρα δίχως να έχουν καταλάβει σε τι είναι χρήσιμα τέτοιου είδους αποτελέσματα.

Με σκοπό να εξαλειφθεί όλη αυτή η ασάφεια που επικρατεί σχετικά με τις ομολογουμένως πολύπλοκες και σύνθετες αυτές έννοιες καθώς και να εισαχθεί ως άξονας διδασκαλίας η Ιστορία των Μαθηματικών τίθενται τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα :

- Είναι η Ιστορία των Μαθηματικών ένα εργαλείο που θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν έννοιες που δεν είναι οικείες σε αυτούς ;
- Μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί ένας μαθητής να διαχωρίσει την κλίση της εφαπτομένης και την παράγωγο συνάρτηση ;
- Θα μπορούσε η Ιστορία των Μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα η δημιουργία δραστηριοτήτων ιστορικής προέλευσης να αντικαταστήσει την τυποποιημένη μεθοδολογία των ασκήσεων με στόχο οι μαθητές να καταλαβαίνουν τι κάνουν, χωρίς να ακολουθούν μεθοδολογίες δηλαδή μια διαδικαστική προσέγγιση;

Συμμετέχοντες στην έρευνα

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση διεξήχθη κατά το σχολικό έτος 2019-2020 τον μήνα Φεβρουάριο σε 7 μαθητές της τάξεως της Γ’ Λυκείου οι οποίοι είχαν διδαχθεί ήδη μέσα από το σχολικό εγχειρίδιο μέχρι και την παράγραφο 2.7, δηλαδή εκτός από τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας ήρθαν σε επαφή με την έννοια της παραγώγου, τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις, την παράγωγο συνάρτηση και τους κανόνες παραγώγισης καθώς και με τον ρυθμό μεταβολής, τα θεωρήματα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και τις συνέπειές τους ενώ στην τελευταία παράγραφο διδάχθηκαν για τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. Χρειάστηκαν 10 διδακτικές ώρες για να ολοκληρωθεί η διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω, οι οποίες διαχωρίστηκαν σε τρία διδακτικά τρίωρα μαθήματα και μία διδακτική ώρα στο τέλος που τους δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο. Μέσω της αλληλεπίδρασης του ερευνητή και των μαθητών παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές ανήκαν σε ένα επίπεδο κατά μέσο όρο μέτριας επίδοσης και χαρακτηριστικό τους αποτέλεσε η έλλειψη γνώσεων της βασικής άλγεβρας, κάτι που ήταν αναμενόμενο σύμφωνα με την ήδη σύγχρονη, υπάρχουσα βιβλιογραφία που σχετίζεται με τις παρανοήσεις των μαθητών αλλά και της εμπειρίας των εκπαιδευτικών γενικότερα.

Η επίδοσή τους χαρακτηρίστηκε μέτρια σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας τα οποία αναλύονται σε επόμενο κεφάλαιο καθώς και από την συμμετοχή των μαθητών κατά την διάρκεια της διδασκαλίας. Ίσως ο χαρακτηρισμός να είναι σε ένα ποσοστό υποκειμενικός, το γεγονός όμως ότι μόνο ένας στους επτά απάντησε σωστά σε όλες τις ασκήσεις και των pre αλλά και των post test ενώ οι τέσσερις στους επτά παρουσίασαν δυσκολίες και στις τρεις φάσεις, κυρίως λόγω έλλειψης βασικών στοιχείων άλγεβρας, ενώ ταυτόχρονα γνώριζαν τους τύπους της εξίσωσης της εφαπτομένης και τους κανόνες παραγώγισης τους κατατάσσει σε ένα λιγότερο υψηλό γνωστικό επίπεδο.

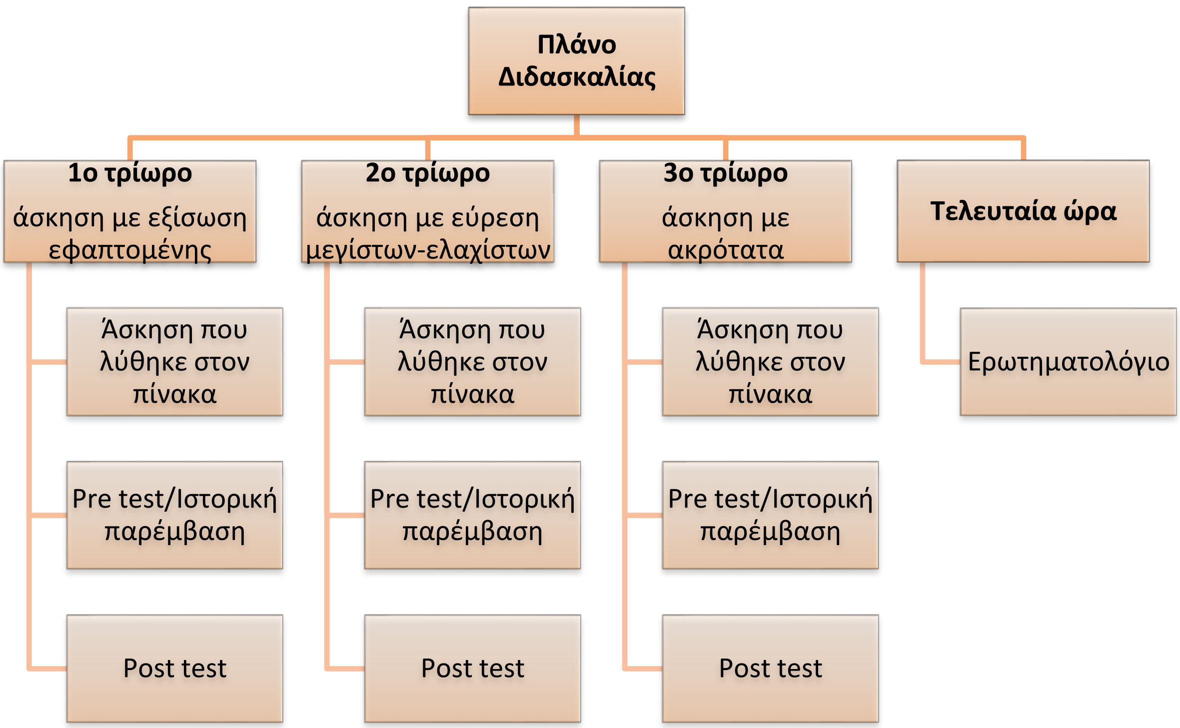
Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

Για την απάντηση των παραπάνω ερευνητικών ερωτημάτων πραγματοποιήθηκε η έρευνα που περιγράφεται παρακάτω. Οι 7 μαθητές του δείγματος, το οποίο αναλύεται στην παράγραφο Συμμετέχοντες στην Έρευνα, κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα pre και ένα post test καθώς και σε ένα ερωτηματολόγιο.

Δηλαδή, η διδασκαλία χωρίστηκε σε τέσσερις φάσεις. Οι τρεις πρώτες διήρκησαν ένα διδακτικό τρίωρο η καθεμία και η τελευταία μία διδακτική ώρα. Στην κάθε μία από τις τρεις πρώτες φάσεις συνέβησαν τα παρακάτω

- την πρώτη ώρα δόθηκε στους μαθητές μια άσκηση με το υπό μελέτη πρόβλημα που λύθηκε ομαδοσυνεργατικά
- την δεύτερη ώρα δόθηκε η επιλεγμένη άσκηση του σχολικού εγχειριδίου που σχετιζόταν εννοιολογικά με την άσκηση της πρώτης ώρας και στην συνέχεια μέσω του βιντεοπροβολέα έγινε η αντίστοιχη ιστορική προσέγγιση μέσω διαφανειών στο Power Point και τέλος
- στην τρίτη ώρα οι μαθητές ως post test έλυσαν μια παρόμοια άσκηση έχοντας πλέον και ιστορικό υπόβαθρο.

Με το πέρας αυτής της διαδικασίας στην τελευταία ώρα της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο που είχε ως στόχο να απαντήσει πιο ξεκάθαρα στα ερευνητικά μας ερωτήματα.



Εικόνα 19. Πλάνο διδασκαλίας

1η Παρέμβαση :

Άσκηση με εξίσωση εφαπτομένης

Με αλληλεπίδραση και με την συμμετοχή των μαθητών λύθηκε στον πίνακα η άσκηση

1η *διδακτική ώρα: Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία α) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5*

β) είναι παράλληλη στην ευθεία ζ : $y = x + 5$

γ) είναι κάθετη στην ευθεία η : $x - 3y + 12 = 0$

(Παπαδάκης, 2015)

2η *διδακτική ώρα*: Έπειτα τους δόθηκε η άσκηση του σχολικού εγχειριδίου

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$;

(Ανδρεαδάκης & al., 2019)

Έγινε η διδασκαλία με την βοήθεια της αντίστοιχης Ιστορικής Δραστηριότητας, δηλαδή με την κατασκευή εφαπτόμενων σε καμπύλη σύμφωνα με τον Απολλώνιο, η οποία παρουσιάστηκε με το πρόγραμμα του Power Point

3η *διδακτική ώρα* : Τους δόθηκε η άσκηση

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης να είναι παράλληλες.

Με την ίδια ακριβώς λογική προχώρησαν και τα επόμενα δύο τρίωρα

2η Παρέμβαση :

Άσκηση με εύρεση μεγίστων-ελαχίστων

Σε αυτήν την άσκηση, εν αντιθέσει με την προηγούμενη, δεν θέλησε κανένας από τους μαθητές να σηκωθεί στον πίνακα και λύθηκε από τον διδάσκοντα με την συμμετοχή των παιδιών που ήταν ομολογουμένως μικρή.

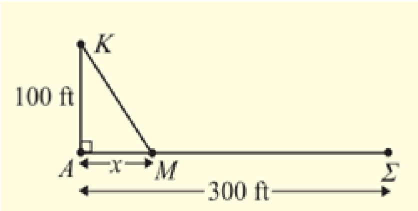
1η *διδακτική ώρα :* Η άσκηση με την οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές είναι η παρακάτω

Μια πλατφόρμα (Π) αντλήσεως πετρελαίου βρίσκεται στη θάλασσα και απέχει από το σημείο Α της ακτής απόσταση ΠΑ = 12km. Η πλατφόρμα πρόκειται να συνδεθεί με ένα διυλιστήριο (Δ) που βρίσκεται στην ακτή και απέχει 20 km από το σημείο Α. Η σύνδεση θα γίνει με έναν υποθαλάσσιο αγωγό (ΠΚ) και έναν επίγειο αγωγό (ΚΔ). Το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 25000 € ανά km και του επίγειου αγωγού είναι 15000€ ανά km . Να βρείτε πόσο πρέπει να είναι το μήκος κάθε τύπου αγωγού, ώστε το κόστος της σύνδεσης να είναι ελάχιστο.

(Παπαδάκης, 2015)

<u>2η διδακτική ώρα</u>: Έγινε παρουσίαση της ιστορικής δραστηριότητας μέσω του προγράμματος του Powerpoint σχετικά με τον νόμο του Snell στην οποία είναι εμφανής η εναλλαγή των μέσων στην πορεία της φωτεινής ακτίνας και μέσω του τύπου της ταχύτητας υπολογίστηκε ο χρόνος ταξιδιού της ακτίνας ως T(x) = $\frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-c)^2+d^2}}{v_2}$. Ενώ πριν από αυτήν την παρουσίαση τους ζητήθηκε να λύσουν την άσκηση 13 του σχολικού βιβλίου από την παράγραφο 2.7, που φαίνεται παρακάτω

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.



i. *Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο* $T(x) = \frac{\sqrt{100^2+x}}{3} + \frac{300-x}{5}$

Εικόνα 20

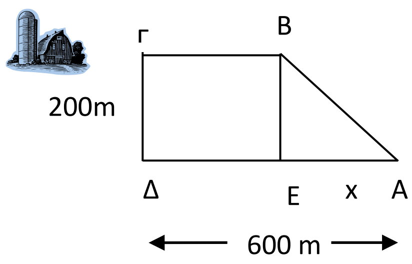
ii. *Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;*

(Ανδρεαδάκης & al., 2019)

<u>3η διδακτική ώρα</u> : Οι μαθητές έχοντας πλέον κατανοήσει ότι για τον ελάχιστο χρόνο απαιτείται ένα σενάριο στο οποίο σε κάθε περίπτωση το κινητό θα διέρχεται και από τα δύο μέσα κλήθηκαν να λύσουν την παρακάτω άσκηση

Ένας ορειβάτης βρίσκεται στο έδαφος στο σημείο Α έχοντας υψομετρική διαφορά από ένα καταφύγιο 200m και απόσταση από το σημείο Δ που είναι η προβολή του *καταφυγίου στο έδαφος 600m. Για να φτάσει στο καταφύγιο πρέπει να σκαρφαλώσει στην πλαγιά με ταχύτητα 6m/s φτάνοντας στο σημείο Β και από εκεί τρέχοντας με ταχύτητα 10m/s να μπει στο καταφύγιο Γ.*

i. *Να βρεθεί η τιμή του x ώστε ο ορειβάτης να κάνει τον λιγότερο δυνατό χρόνο για να φτάσει στο καταφύγιο*



Εικόνα 21

`

3η Παρέμβαση:

<u>Άσκηση με τοπικά ακρότατα</u>

<u>1η *διδακτική ώρα* :</u> Κατά την πρώτη ώρα σε αυτό το τελευταίο 3ωρο διδασκαλίας οι μαθητές ασχολήθηκαν με την μονοτονία μιας συνάρτησης, που σύμφωνα και με τους ίδιους είναι και η πιο εύκολη διαδικασία που συναντούν στην Ανάλυση. Χωρίς προβλήματα και με την συμμετοχή όλων έπρεπε να μελετήσουν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

(Ανδρεαδάκης & al., 2019)

<u>2η *διδακτική ώρα*</u> : Μέσω μιας παρουσίασης οι μαθητές γνώρισαν την μέθοδο εύρεσης τοπικών ακροτάτων του Fermat όπως αναλύεται σε προηγούμενο κεφάλαιο και βρήκαν την μονοτονία και τα ακρότατα με καθοδήγηση του διδάσκοντα της συνάρτησης

$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$

(Ανδρεαδάκης & al., 2019)

αφού είχαν λύσει πρώτα την άσκηση με τον γνωστό για αυτούς τρόπο, δημιουργώντας πίνακα προσήμων της παραγώγου

<u>3η *διδακτική ώρα*</u> : Δόθηκε ως post test η παρακάτω άσκηση

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

(Ανδρεαδάκης & al., 2019)

Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την διάρκεια της παρουσίασης των ιστορικών δραστηριοτήτων όταν γινόταν αναφορά σε κεντρικά πρόσωπα όπως ο Απολλώνιος, υπήρξε και μια συζήτηση γύρω από τις εξέχουσες αυτές προσωπικότητες και το έργο τους στην επιστήμη.

Εργαλεία Διδακτικής Παρέμβασης

Για την επίτευξη της Διδακτικής Παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν

- ✓ Τρία φύλλα εργασίας με τις ασκήσεις που το καθένα περιείχε τα εξής
  - 1ο φύλλο: ασκήσεις που λύθηκαν κατά την διάρκεια της πρώτης ώρας κάθε τριώρου ομαδοσυνεργατικά και με την καθοδήγηση του διδάσκοντα
  - 2ο φύλλο: ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου ως pre test
  - 3ο φύλλο : ασκήσεις που δόθηκαν ως post test παρόμοιες με αυτές των προηγούμενων φύλλων εργασίας
- ✓ Ένας προτζέκτορας όπου έγινε η παρουσίαση των Ιστορικών Δραστηριοτήτων μέσω του προγράμματος του PowerPoint στην δεύτερη φάση της Διδασκαλίας (την 2η ώρα των τριών 3ωρων)
- ✓ Ένα κινητό για την μαγνητοφώνηση της διδασκαλίας και των απαντήσεων των μαθητών στην πρώτη Φάση
- ✓ Ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές με το πέρας της διδακτικής παρέμβασης και είχε ως στόχο να ελέγξει κατά κύριο λόγο πώς οι μαθητές εξέλαβαν την επαφή τους με τις ιστορικές δραστηριότητες και γενικότερα με την Ιστορία των Μαθηματικών

Τα φύλλα εργασίας δημιουργήθηκαν με βασικό άξονα το 2ο φύλλο. Επιλέχθηκαν αρχικά οι έννοιες και οι παρανοήσεις τις οποίες μελετά η έρευνα (παράγωγος σε σημείο – εξίσωση εφαπτομένη, παράγωγος συνάρτησης, εύρεση μεγίστων ελαχίστων μιας συνάρτησης). Έγινε αναζήτηση κατάλληλων προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου που πραγματεύονται αυτές τις έννοιες και με αυτόν τον τρόπο συμπεριελήφθησαν οι 3 ασκήσεις.

Στην συνέχεια δημιουργήθηκαν παρόμοιες δραστηριότητες που είχαν ως στόχο στο 1ο φύλλο εργασίας να εξοικειώσουν τους μαθητές με την διαδικασία της έρευνας και στο 3ο φύλλο εργασίας ως post test να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο μέτρησης της αποδοχής των μαθητών στην συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση.

Τέλος, το ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε αυστηρά από τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί.

Ανάλυση της διαδικασίας της διδακτικής παρέμβασης

Την πρώτη διδακτική ώρα έγινε μια διδασκαλία κυρίως για την υπενθύμιση κάποιων εννοιών και την χρησιμότητά τους. Οι μαθητές ρωτήθηκαν τι είναι όριο, τί είναι παράγωγος και τί εφαπτομένη σε σημείο και στην συνέχεια λύθηκε στον πίνακα μία άσκηση σχετική με την εύρεση της εφαπτομένης με την βοήθεια τους. Πιο συγκεκριμένα τους ζητήθηκε να βρουν την εξίσωση της εφαπτομένης της οποίας κάθε φορά δινόταν μια πληροφορία σχετική με τον συντελεστή διεύθυνσης αυτής.

Η άσκηση ήταν η παρακάτω και κατά την διάρκεια της επίλυσης υπήρξε αλληλεπίδραση των μαθητών και του διδάσκοντα.

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$*. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της* C_f *η οποία α) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5*

β) είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : y = x + 5$

γ) είναι κάθετη στην ευθεία $\eta : x - 3y + 12 = 0$

Πριν ξεκινήσει το μάθημα έγινε μία συζήτηση με τους μαθητές οι οποίοι κατέθεσαν την γνώμη τους σχετικά με την αναγκαιότητα που υπάρχει ώστε να διαβάσουν και να κατανοήσουν μαθηματικά. Στην ερώτηση "όταν ακούτε την λέξη μαθηματικά τι σας έρχεται στο μυαλό ;" οι απαντήσεις ήταν κατά βάση αρνητικές εκτός από μία όπου μαθητής απάντησε πως τα μαθηματικά *«υπερβαίνουν τα όρια»* και συνέχισε εξηγώντας ότι ενώ του αρέσουν ως επιστήμη κάποιες φορές όσο και να εξηγούνται οι έννοιες ή κάποια σημεία σε ασκήσεις δεν μπορεί να κατανοήσει όχι μόνο πώς λύνονται αλλά και ποιά η χρησιμότητά τους.

Επιπλέον έγιναν και άλλες ερωτήσεις στους μαθητές σε αυτήν την πρώτη φάση της έρευνας, όπως

- *Τι είναι όριο ;*
- *Τί είναι η εφαπτομένη;*
- *Τι είναι παράγωγος;*
- *Τι είναι ταχύτητα ;*
- *Τι είναι στιγμή;*

Ενώ στο τέλος της συζήτησης για την διαφοροποίηση της παραγώγου συνάρτησης και της παράγωγου σε σημείο τους ζητήθηκε να βρουν το f'(2) μιας πολυωνυμικής συνάρτησης και η πλειοψηφία των μαθητών πρώτα παραγώγισε την συνάρτηση και μετά στην παράγωγο συνάρτηση έβαλαν την τιμή 2. Στην ερώτηση γιατί αντιμετώπισαν την εύρεση του f'(2) με αυτόν τον τρόπο απάντησαν γιατί αλλιώς θα έβγαινε 0.

Από την άλλη μεριά στην ερώτηση σχετικά με την έννοια του ορίου η απάντηση τους ενός μαθητή ήταν η εξής *: Μία τιμή που παίρνει ένας αριθμός όταν κοντεύει κάπου* ενώ για την εφαπτομένη απάντησαν ότι *είναι η κλίση*, (μόνο η κλίση δίχως να πουν η κλίση της ευθείας ή να το προσδιορίσουν με κάποιον τρόπο). Οι απαντήσεις αυτές συμφωνούν ότι για το όριο η καθομιλουμένη γλώσσα συγκρούεται με την θεμελιώδη έννοια (Tall, 1993) ενώ η απάντηση στην ερώτηση τι είναι εφαπτομένη, ότι είναι "*η κλίση*" επιβεβαιώνει τα λεγόμενα του Park (2013).

Στην συνέχεια για την παράγωγο απάντησαν τον ορισμό που δίνεται στο σχολικό εγχειρίδιο δηλαδή ότι

«Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to xo}\frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o και συμβολίζεται με $f'(x_o)$ Δηλαδή : $\lim\limits_{x\to xo}\frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$»

Με αυτή τους την απάντηση επιβεβαιώνεται η λογική της «αποστήθισης» στην οποία βρίσκονται οι μαθητές καθ' όλη την διάρκεια της τελευταίας τάξης του Γενικού Λυκείου, διότι όπως συνηθίζεται να λέγεται ένα μέρος του πρώτου θέματος των Πανελλαδικών εξετάσεων είναι ερωτήσεις θεωρίας στις οποίες ο μαθητής πρέπει να απαντάει αυστηρά με τον ορισμό του βιβλίου. Από την άλλη μεριά μια τέτοια απάντηση συμφωνεί με τον Klyve (2017) ο οποίος υποστηρίζει ότι όλοι μαθητές μαθαίνουν τον ορισμό της παραγώγου μέσω της χρήσης του ορίου.

Για την ταχύτητα που είναι και η εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου και στο σχολικό εγχειρίδιο η απάντηση ήταν πως *ταχύτητα είναι η παράγωγος της μετατόπισης* ή *η κίνηση* ενώ στην ερώτηση πώς προσδιορίζουμε την στιγμή ώστε μέσα από αυτό να φτάσουμε στην στιγμιαία ταχύτητα και άρα στο προαναφερθέν όριο οι μαθητές απάντησαν σχεδόν ομόφωνα "*Κυρία φιλοσοφία κάνουμε ;"*.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφερθεί ξανά η οδηγία του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής σύμφωνα με το οποίο πρέπει '*Να δοθεί έμφαση στην* *εισαγωγή της έννοιας (*της παραγώγου) *μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης".*

Είναι, λοιπόν, εμφανές ότι οι παρανοήσεις που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Κεφάλαιο 4 Παρανοήσεις στα Μαθηματικά) ισχύουν σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που εξετάζουμε,

Αφού έγινε αυτή η διαδικασία οι μαθητές στην δεύτερη διδακτική ώρα απάντησαν στην άσκηση

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ *στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = x^3$

με όχι ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα όπως θα γίνει φανερό σε επόμενο κεφάλαιο και στην συνέχεια ξεκίνησε η διδασκαλία της ιστορικής δραστηριότητας σύμφωνα με το πώς ο Απολλώνιος κατασκεύασε εφαπτόμενες σε καμπύλες (βλ. Ιστορικές Δραστηριότητες).

Οι μαθητές στο τέλος της τρίτης ώρας έλυσαν την παρακάτω άσκηση έχοντας αυτήν την φορά και την ιστορική προσέγγιση του θέματος στο μυαλό τους.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$ *στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης να είναι παράλληλες.*

Στην συνέχεια στο επόμενο τρίωρο που οι μαθητές ασχολήθηκαν με το πρόβλημα

Μια πλατφόρμα (Π) αντλήσεως πετρελαίου βρίσκεται στη θάλασσα και απέχει από το σημειο Α της ακτής απόσταση ΠΑ = 12km. Η πλατφόρμα πρόκειται να συνδεθεί με ένα διυλιστήριο (Δ) που βρίσκεται στην ακτή και απέχει 20 km από το σημείο Α. Η σύνδεση θα γίνει με έναν υποθαλάσσιο αγωγό (ΠΚ) και έναν επίγειο αγωγό (ΚΔ). Το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 25000 € ανά km και του επίγειου αγωγού είναι 15000€ ανά km. Να βρείτε πόσο πρέπει να είναι το μήκος κάθε τύπου αγωγού, ώστε το κόστος της σύνδεσης να είναι ελάχιστο.

Έγιναν ερωτήσεις σχετικές με το αν τους «τρομάζει» η όψη ενός προβλήματος και αν έχουν την ίδια αυτοπεποίθηση που θα είχαν αν η άσκηση δεν είχε το σενάριο των αγωγών και της κατασκευής του Διυλιστηρίου και τους ζητούσαν να βρουν το ελάχιστο μιας δοσμένης συνάρτησης δίχως να ξέρουν τι παριστάνει και σε τι είδους πρόβλημα χρησιμοποιείται. Όλοι οι μαθητές απάντησαν ότι μπερδεύονται όταν βλέπουν πρόβλημα και ξέρουν ότι δεν θα το λύσουν εκτός από έναν ο οποίος είπε "*αν μαθαίναμε να λύνουμε προβλήματα από μικρότερες τάξεις θα μας ήταν πιο εύκολο και πιο ευχάριστο να ασχολούμαστε με αυτά τώρα.*"

Στην ερώτηση αν ένα από τα θέματα των Πανελληνίων ήταν πρόβλημα πώς θα το διαχειριζόσασταν οι μαθητές γέλασαν και ομόφωνα είπαν *'δεν θα το λύσουμε'*

Όταν όμως έγινε η παρουσίαση με την βοήθεια του PowerPoint της δραστηριότητας του Snell έδειξαν ενδιαφέρον και προσπάθησαν να κατανοήσουν την προέλευση του προβλήματος. Χαρακτηριστικά ένας μαθητής πήρε τον λόγο και είπε *"Κυρία είναι κρίμα, γιατί τόσα χρονιά πριν αυτοί (εννοούσε τον Snell και τον Fermat) μπήκαν στην διαδικασία να λύσουν κάτι τέτοιο και εμάς μας δίνουν την συνάρτηση και δεν μπορούμε να τη βγάλουμε".*

Τέλος, στην τρίτη φάση της διδασκαλίας έλυσαν το πρόβλημα της μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 3x + 2$ και όταν ξεκίνησε η παρουσίαση του τρόπου επίλυσης μεγίστων και ελαχίστων του Fermat μέσω της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 3x + 2$ υπήρξε συγκρατημένη συμμετοχή καθώς ο τρόπος με την παραγώγιση της συνάρτησης, τον μηδενισμό της παραγώγου και της εύρεσης των ριζών αυτής κατασκευάζοντας πίνακα προσήμων αποτελεί ίσως και την μοναδική μεθοδολογία που ακόμα και ένας μαθητής με αρκετές δυσκολίες μπορεί και χειρίζεται σωστά. Σε αυτή την φάση συνέβησαν τα εξής :

Κατά την διάρκεια της πρώτης ώρας οι μαθητές ρωτήθηκαν πώς θα βρουν την μονοτονία μιας συνάρτησης και σήκωσαν όλοι το χέρι να απαντήσουν εκτός από έναν. Η απάντηση που ακούστηκε στην τάξη ήταν "*θα παραγωγίσω την συνάρτηση και θα κάνω πίνακα προσήμων*" όταν η ερώτηση συνεχίστηκε με το γιατί να το κάνεις αυτό; Ο ίδιος μαθητής είπε "*γιατί έτσι κάνουμε"*. Η απάντηση αυτή προσδιορίζει για μία ακόμη φορά τον τυποποιημένο τρόπο με τον οποίο λειτουργούν οι μαθητές όταν λύνουν μια άσκηση.

Με την παρουσίαση της μεθόδου των τοπικών ακροτάτων του Fermat οι μαθητές παρακολουθούσαν έκπληκτοι διότι δεν πίστεψαν ότι θα βγουν τα ίδια αποτελέσματα. Αλλά θα ήταν παράλειψη αν δεν γινόταν αναφορά στην δυσαρέσκειά τους κατά την διάρκεια της παρουσίασης σχετικά με το πλήθος των πράξεων. Ένας μαθητής ανέφερε *"Κυρία τώρα καταλαβαίνω καλύτερα γιατί η παράγωγος στα ακρότατα κάνει μηδέν αλλά έχει πιο δύσκολες πράξεις αυτό"*. Ρώτησα γιατί το καταλαβαίνεις καλύτερα και η απάντηση ήταν *"γιατί όσο πλησιάζουμε στο ακρότατο η διαφορά εκείνη (εννοούσε την f(x+e) - f(x)) μικραίνει και εκεί που γίνεται 0 η εφαπτομένη είναι παράλληλη στο άξονα των x άρα παράγωγος 0"*

Τέλος για το ερωτηματολόγιο το οποίο δόθηκε την τελευταία ώρα της συνολικής παρέμβασης έχουμε να προσθέσουμε τα εξής :

Το ερωτηματολόγιο όπως αναφέρθηκε και παραπάνω διαμορφώθηκε σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα και οι ερωτήσεις που τέθηκαν ήταν οι παρακάτω

1. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να κατανοήσετε την διαφορά της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας και της παραγώγου συνάρτησης;
2. Είναι χρήσιμη κατά την γνώμη σας η Ιστορία των Μαθηματικών για την Διδασκαλία τους ;
3. Θα ήταν ευχάριστο για εσάς να ακολουθείτε μια ιστορική προσέγγιση κατά την διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης ;

Οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να απαντήσουν κυκλώνοντας μία από τα παρακάτω πιθανές απαντήσεις

Ναι Ίσως Όχι

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου αναλύονται σε επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 7ο - Αποτελέσματα της έρευνας

Ανάλυση αποτελεσμάτων που αφορά το πρόβλημα τα εφαπτομένης

Η ροή της διδασκαλίας σχετικά με την εξίσωση της εφαπτομένης κύλησε με σχετικά μικρές δυσκολίες στο πρόβλημα που λύθηκε ομαδοσυνεργατικά στο 1ο φύλλο εργασίας. Οι μαθητές γνώριζαν τον τύπο της εξίσωσης της εφαπτομένης και ήξεραν ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες αν έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης ενώ ήξεραν ότι για να είναι δύο ευθείες κάθετες πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσής τους να έχουν γινόμενο -1.

Όταν τους ζητήθηκε να λύσουν την άσκηση του σχολικού εγχειριδίου

(*Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής* $y = x^2$ *στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = x^3$*;*)

Παρατηρούμε ότι δυσκολεύτηκαν καθώς μόνο δύο σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν την εις άτοπον απαγωγή θεωρώντας ότι αν η συνάρτηση έχει δύο εφαπτόμενες τότε για να είναι αυτές παράλληλες θα πρέπει να έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης.

Πιο συγκεκριμένα

<u>Ο μαθητής 1 έγραψε</u>

$y – f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

$y - x_o^2 = 2x_o(x - x_o)$

Αν υπήρχε και άλλο τότε

$y – x_1^2 = 2x_1 (x – x_1)$

$- x_o^2 = - x_1^2$

$2x_o= 2x_1$

$- x_o = - x_1$

Άρα $x_o = x_1$ *αδύνατο*

<u>Ο μαθητής 2 έγραψε</u>

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

$y - x_o^2 = 2x_0 (x - x_0)$

$y - x_o^2 = 2x_0 x - 2x_0^2$

$y = 2x_0 x - 2x_0^2 + x_o^2$

$y = 2x_0 x - x_0^2$

$f'(x_o) = 2 x_o \neq 0 \Rightarrow f$: *γνησίως μονότονη*

Αφού η f έχει το πολύ μία ρίζα δηλαδή δεν υπάρχει σημείο στο οποίο να υπάρχουν δύο παράλληλες

<u>Ο μαθητής 3 έγραψε</u>

$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

για να είναι παράλληλες πρέπει $f'(x_o) = f'(x)$

<u>Ο μαθητής 4 έγραψε</u>

$y = x^3$

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

$f(x) = x^3$

$y - x^3 = 3x^2 (x - x^3)$

$y - x^3 = 3x^3 - 3x^6$

$y = 3x^3 - 3x^6 + x^3$

$y = 4x^3 - 3x^6$

<u>Ο μαθητής 5 έγραψε</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

στο $(1,1)$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 1 = 2(x - 1)$

$y = 2x – 2 + 1$

$y = 2x – 1$

Αν υπάρχει άλλη παράλληλη θα πρέπει

$\lambda = 2$

$f'(x) = 2x$

<u>*Ο μαθητής 6 έγραψε*</u>

Έστω ότι υπάρχουν σημεία της παραβολής Α (x_1, x_1^2) και Β (x_2, x_2^2), $x_1 \neq x_2$,

τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης είναι μεταξύ τους παράλληλες

Τότε θα ισχύει

$f'(x_1)=f'(x_2)$

Οπότε $2x_1 = 2x_2$ και άρα $x_1 = x_2$, άτοπο, άρα δεν υπάρχουν

Για την γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$ θα έχουμε

$f'(x_1)=f'(x_2)$

$3x_1^2 = 3x_2^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$

Άρα τα σημεία θα είναι τα $A(x_1,x_1^3)$ και $B(x_2,x_2^3)$ οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες

<u>*Ο μαθητής 7 έγραψε*</u>

$\lambda_f = \lambda_y = 1$

$f(x) = \lambda$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι οι μαθητές 1 και 6 ήταν σε θέση να λύσουν το πρόβλημα και γνώριζαν ότι για να είναι οι εφαπτόμενες της συνάρτησης σε δύο διαφορετικά σημεία παράλληλες θα πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης να είναι ίσοι, πήραν δύο τυχαία σημεία και απέδειξαν ότι είναι αδύνατο διότι προκύπτει $x_1 = x_2$. Στο ίδιο μήκος κύματος κινήθηκε και ο μαθητής 5 ενώ ο μαθητής 2 χρησιμοποίησε την εξίσωση της εφαπτομένης αλλά ταυτόχρονα χρησιμοποίησε και την παράγωγο συνάρτηση. Εδώ είναι οφθαλμοφανής η παρανόηση μεταξύ παραγώγου σε σημείο που αποτελεί την κλίση της εφαπτομένης και παράγωγο συνάρτησης ($f'(x_o) = 2x_o \neq 0$ $\Rightarrow$ *f : γνησίως μονότονη*). Οι υπόλοιποι μαθητές (3 και 4) χρησιμοποίησαν την εξίσωση της εφαπτομένης αλλά ο μαθητής 3 ενώ γνώριζε για τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης φαίνεται να έχει παρανοήσει όπως και ο μαθητής 2 τις έννοιες παράγωγος σε σημείο και παράγωγος συνάρτηση καθώς έγραψε $f'(x_o) = f'(x)$. Το πρώτο μέλος είναι αριθμός και το δεύτερο συνάρτηση. Ο μαθητής 4 εκτός του γεγονότος ότι χρησιμοποίησε την x^3 έγραψε σωστά τον τύπο της εξίσωσης της εφαπτομένης αλλά έχει γνωστικές ελλείψεις στις ιδιότητες των δυνάμεων, δηλαδή στην Άλγεβρα. Τέλος ο μαθητής 7 παρουσίασε την μεγαλύτερη δυσκολία διότι αυτά που έγραψε είναι λάθος εννοιολογικά και σημαίνει ότι ο μαθητής δεν έχει γνώσεις Ανάλυσης.

Στο post test της συγκεκριμένης δραστηριότητας οι μαθητές φαίνεται στην πλειοψηφία τους να χρησιμοποιούν και να ανταποκρίνονται στον καινούριο τρόπο επίλυσης της άσκησης.

Είναι αξιοσημείωτο ότι στο pre test κανένας από τους μαθητές δεν έφτιαξε γραφική παράσταση της συνάρτησης με σκοπό να έχει μια απεικόνιση για την συνάρτηση που μελετά. Έπειτα από την ιστορική παρέμβαση και οι επτά μαθητές χρησιμοποίησαν την απεικόνιση στο σύστημα συντεταγμένων και πέραν αυτής επικαλέστηκαν και το όνομα του Απολλώνιου. Οι μαθητές 1 και 6 έγραψαν πάλι με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής ότι δεν είναι δυνατόν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$ να έχει δύο παράλληλες εφαπτόμενες αλλά και αυτοί έκαναν γραφική παράσταση και ασχολήθηκαν με τις αποστάσεις ΑΕ και ΑΔ οι οποίες για να είναι ίσες, οι εφαπτόμενες πρέπει να ταυτίζονται. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν αλγεβρική επίλυση της άσκησης καθώς όπως ανέφεραν κατά την διάρκεια της παρέμβασης αργότερα τους είναι πιο εύκολο να "*λύνουν ασκήσεις με σχήματα και όχι με τύπους και πράξεις*". Οι μαθητές 2 και 3 κατασκεύασαν την γραφική παράσταση και πιο συγκεκριμένα

<u>Ο μαθητής 2 έγραψε</u>

Οι αποστάσεις είναι διαφορετικές άρα οι ευθείες δεν είναι παράλληλες

<u>Ο μαθητής 3 έγραψε</u>

Σύμφωνα με τον Απολλώνιο θα έπρεπε οι ακτίνες να είναι ίσες

Ο μαθητής 4 προσπάθησε να κατασκευάσει την γραφική παράσταση, προφανώς με στόχο την χρήση των εφαπτόμενων με βάση τον Απολλώνιο αλλά έκανε λάθος γραφική παράσταση και συγκεκριμένα αντί για την $f(x) = \sqrt{|x|}$ κατασκεύασε την $|x|$.

Ανάλυση αποτελεσμάτων που αφορά το πρόβλημα εύρεσης ελάχιστης τιμής

Κατά την διάρκεια του δεύτερου τρίωρου όπου οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα η διαδικασία της παρέμβασης ήταν λιγότερο εύκολη από την πρώτη. Οι μαθητές αντέδρασαν και δεν ήθελαν να συμμετέχουν στην άσκηση διότι όπως ανέφεραν χαρακτηριστικά «*τα προβλήματα είναι δύσκολα κυρία*». Με το πέρας μιας δεκάλεπτης συζήτησης και με κίνητρο ότι στις Πανελλήνιες του 2018 έπεσε πρόβλημα στις Πανελλήνιες Εξετάσεις δέχτηκαν να προσπαθήσουν αφού πρώτα έγινε επίλυση του προβλήματος με το Διυλιστήριο.

Τα αποτελέσματα θα έλεγε κανείς ότι δεν είναι τόσο αισιόδοξα καθώς μόνο ο μαθητής 6 έλυσε την άσκηση ολοκληρωμένα επεξηγώντας το κάθε του βήμα ενώ το ίδιο έκανε και ο μαθητής 1 παρουσιάζοντας κάποια κενά στην επιχειρηματολογία του. Οι μαθητές 2 και 5 χωρίς να αποδείξουν ότι ο τύπος που δίνει τον χρόνο που κάνει ο κολυμβητής είναι $T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$ προσπάθησαν να παραγωγίσουν την σχέση και να κάνουν πίνακα προσήμων. Αξίζει να αναφέρει κανείς ότι, προφανώς λόγω της δυσκολίας στην παραγώγιση της συγκεκριμένης συνάρτησης μέσω των κανόνων παραγώγισης οι μαθητές 2 και 5 δεν έφτασαν στην κατασκευή του πίνακα προσήμων καθώς τα γνωστικά κενά στο αντικείμενο της Άλγεβρας παρεμπόδισαν την διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα

<u>Ο μαθητής 2 έγραψε</u> :

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

$$T'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{100^2 + x^2}} + \frac{-1}{5}$$

$$T'(x) = 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{100 + x^2}} + \frac{-1}{5} = 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{100 + x^2}} = \frac{1}{5}$$

5x = $\sqrt{100^2 + x^2}$

<u>Ενώ ο μαθητής 5 έγραψε</u>

T(x) = ($\frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$)΄

T΄(x) = ($\frac{\sqrt{100^2+ x^2}}{3}$)΄ + ($\frac{300-x}{5}$)΄

T΄(x) = $\frac{2x}{6\sqrt{100^2+ x^2}} - \frac{5}{25}$

T΄(x) = 0 ⇔ $\frac{2x}{6\sqrt{100^2+ x^2}} - \frac{5}{25}$ = 0

⇔ $\frac{2x}{6\sqrt{100^2+ x^2}} = \frac{5}{25}$

⇔ 2x·25 = 5·6·$\sqrt{100^2 + x^2}$

⇔50x = 30$\sqrt{100^2 + x^2}$

⇔ $2500x^2 = 900(100^2 + x^2)$

⇔ $2500x^2 = 900\cdot 100^2 + 900x^2$

⇔ $2500x^2 = 900\cdot 10000 + 900x^2$

⇔ $2500x^2 - 900x^2 = 900\cdot 10000$

⇔$1600x^2 = 9000000$

Ο μαθητής 3 έγραψε μόνο τον τύπο και ο μαθητής 4 δεν έγραψε τίποτα.

Στο αντίστοιχο post test οι μαθητές συνέχισαν να έχουν δυσκολίες. Εδώ επειδή δεν τους είχε δοθεί η συνάρτηση την οποία έπρεπε να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές 2, 3, 4 και 7 δεν μπόρεσαν να βρουν τον τύπο και κατ’ επέκταση δεν έλυσαν την άσκηση. Παρ’ όλα αυτά οι περισσότεροι μαθητές έγραψαν ότι υπάρχει εναλλαγή των μέσων. Πιο συγκεκριμένα

<u>ο μαθητής 2 έγραψε</u>

Επειδή αλλάζουν τα μέσα, δηλαδή ενώ στην αρχή σκαρφαλώνει και έπειτα τρέχει θα αλλάζει και ο τύπος για S

ο μαθητής 3 έγραψε

Αλλάζουν τα μέσα

Ενώ οι μαθητές 4 και 7 δεν έγραψαν τίποτα

ο μαθητής 5 έγραψε

Αφού εναλλάσσονται τα μέσα ο τύπος θα είναι

$T(x) = \frac{\sqrt{200^2 + x^2}}{6} + \frac{600-x}{10}$

Και τέλος ο μαθητής 6 έγραψε

Είναι αναμενόμενο ο χρόνος t_1 να είναι $t_1 = \frac{\sqrt{200^2 + x^2}}{6}$ και ο χρόνος t_2 να είναι $t_2 = \frac{600-x}{10}$ άρα $T(x) = \frac{\sqrt{200^2 + x^2}}{6} + \frac{600-x}{10}$, καθώς και ο Fermat στην προσπάθειά του να απαντήσει στον Snell απέδειξε έναν παρόμοιο τύπο για την φωτεινή ακτίνα που διαπερνά διαφορετικά μέσα.

Ανάλυση αποτελεσμάτων που αφορά το πρόβλημα των τοπικών ακροτάτων

Στο τρίτο και τελευταίο τρίωρο οι μαθητές έπρεπε να έρθουν αντιμέτωποι με το πρόβλημα των τοπικών ακροτάτων. Ήταν όλοι πρόθυμοι να συμμετέχουν καθώς γνωρίζουν την παραγώγιση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης και την κατασκευή του πίνακα προσήμων της παραγώγου. Όλοι οι μαθητές εκτός των μαθητών 3 και 7 μπόρεσαν και κατασκεύασαν τον πίνακα με την παράγωγο της συνάρτησης και την μονοτονία αυτής, και το κατασκεύασαν σωστά εκτός του μαθητή 4 ο οποίος έλυσε λάθος την εξίσωση $x^2 = 1$ βρίσκοντας μόνο μία τιμή ως ρίζα αυτής της εξίσωσης και κατ' επέκταση βρίσκοντας ένα μόνο τοπικό ακρότατο. Πιο συγκεκριμένα

ο μαθητής 4 έγραψε

$g(x) = x^3 -3x + 2$

$g'(x) = 3x^2-3$

$3x^2-3= 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$

και έτσι κατασκεύασε τον παρακάτω πίνακα

$-\infty$ 1 $+\infty$

g΄(x)	$-$	$+$
g(x)	$\searrow$	$\nearrow$

Ενώ οι περισσότεροι μαθητές κατασκεύασαν τον σωστό πίνακα

$-\infty$ -1 1 $+\infty$

g΄(x)	$+$	$-$	$+$
g(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Στο post test του συγκεκριμένου προβλήματος οι μαθητές έπρεπε να μελετήσουν και να βρουν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$h(x) = 2x^3 – 3x^2 – 1$

Σε αυτήν την άσκηση όλοι οι μαθητές εκτός του μαθητή 7 ακολούθησαν τον τρόπο επίλυσης των μεγίστων και ελαχίστων του Fermat. Όπως είπε κατά την διάρκεια της επίλυσης της άσκησης ο μαθητής 6 *«αυτός ο τρόπος είναι πιο δύσκολος γιατί έχει πιο πολλές πράξεις αλλά καταλαβαίνω γιατί το κάνω»* έτσι και οι περισσότεροι μαθητές ακολούθησαν αυτήν την φορά αυτήν την διαδικασία δίχως όμως να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα διότι έκαναν λάθος στις πράξεις. Χαρακτηριστικά είναι τα γραπτά των μαθητών 3 και 4

<u>Ο μαθητής 3 έγραψε</u>

$h(x) = 2x^3 – 3x^2 – 1$

$2(x^3 + e) – 3(x^2+e) – 1 - 2x^3 – 3x^2 – 1 = 0$

$2x^3 +2e – 3x^2-3e – 1 - 2x^3 – 3x^2 – 1 = 0$

<u>Ο μαθητής 4 έγραψε</u>

$h(x) = 2x^3 – 3x^2 – 1$

$2(x + e)^3 – 3(x+e)^2 – 1 - 2x^3 – 3x^2 – 1 = 0$

$2(x^3 + e^3) – 3(x^2+e^2) – 1 - 2x^3 – 3x^2 – 1 = 0$

Οι απαντήσεις των μαθητών δείχνουν ότι τους ενδιαφέρει η διαφορετική προσέγγιση των εννοιών που μελετούν αλλά δυσκολεύονται στην υλοποίησή τους καθώς παρουσιάζουν κενά στην προϋπάρχουσα γνώση.

Επιλέχθηκαν σε κάθε πρόβλημα να παρατεθούν αναλυτικά οι απαντήσεις των μαθητών που επιβεβαιώνουν όλες τις παρανοήσεις που έχουν αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Δεν είναι τυχαίο ότι κρίθηκε αναγκαίο να παρουσιαστούν όλα τα αποτελέσματα από το πρόβλημα 1 καθώς όλοι οι μαθητές εκτός του μαθητή 1 και 6 παρουσιάζουν σύγχυση σχετικά με την παράγωγο σε σημείο και παράγωγο συνάρτηση.

Αυτή ήταν μια αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων ενώ παρακάτω δίνονται πίνακες που αποσαφηνίζουν την συνολική εικόνα των απαντήσεων των μαθητών

PRE TEST	Πρόβλημα με εφαπτομένη	Πρόβλημα με εύρεση ελαχίστου	Πρόβλημα με εύρεση τοπικών ακροτάτων
Μαθητής 1	Σωστά	Ημιτελής λόγω πράξεων	Σωστά
Μαθητής 2	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω πράξεων	Σωστά
Μαθητής 3	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Λάθος	Ημιτελής λόγω πράξεων
Μαθητής 4	Λάθος	Λάθος	Ημιτελής λόγω πράξεων
Μαθητής 5	Σωστά	Ημιτελής λόγω πράξεων	Σωστά
Μαθητής 6	Σωστά	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 7	Λάθος	Λάθος	Λάθος

Εικόνα 22. Πίνακας αποτελεσμάτων pre-test (a)

POST TEST	Πρόβλημα με εφαπτομένη	Πρόβλημα με εύρεση ελαχίστου	Πρόβλημα με εύρεση τοπικών ακροτάτων
Μαθητής 1	Σωστά	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 2	Ιστορική προσέγγιση	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος	Σωστά
Μαθητής 3	Ιστορική προσέγγιση	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 4	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος	Λάθος	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 5	Σωστά	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 6	Σωστά	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 7	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος	Λάθος	Λάθος

Εικόνα 23. Πίνακας αποτελεσμάτων post-test(a)

Τα ίδια αποτελέσματα σε πίνακες της παρακάτω μορφής

PRE TEST	**Πρόβλημα με εφαπτομένη**	**Πρόβλημα με εύρεση ελαχίστου**	**Πρόβλημα με εύρεση τοπικών ακροτάτων**
Σωστά	3	1	4
Λάθος	2	3	1
Ημιτελής λόγω πράξεων	0	3	2
Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	2	0	0

Εικόνα 24 . Πίνακας αποτελεσμάτων pre-test (b)

POST TEST	**Πρόβλημα με εφαπτομένη**	**Πρόβλημα με εύρεση ελαχίστου**	**Πρόβλημα με εύρεση τοπικών ακροτάτων**
Σωστά	3	3	4
Λάθος	0	2	1
Ιστορική προσέγγιση	2	0	0
Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος	2	2	2

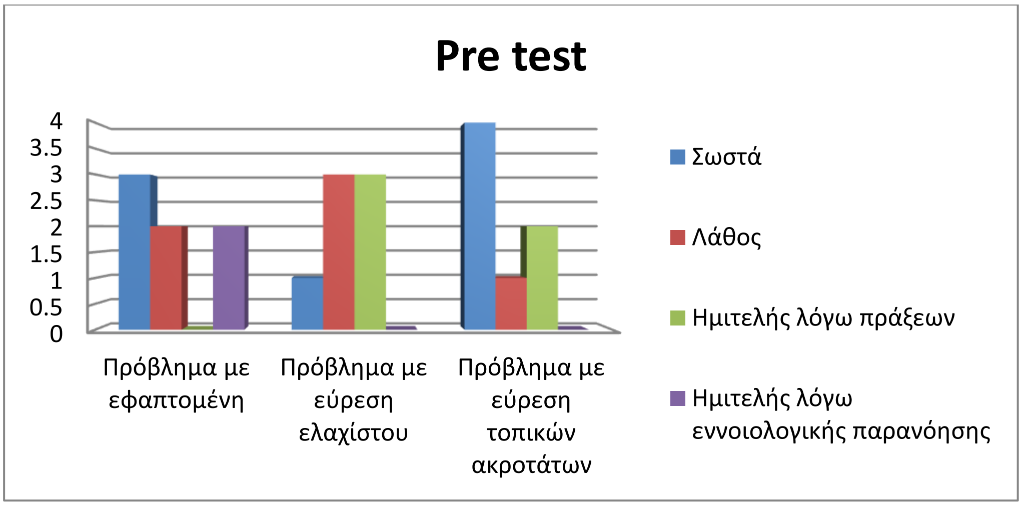
Εικόνα 25 . Πίνακας αποτελεσμάτων post-test (b)

Μαρτυρούν ότι πριν την ιστορικοδιδακτική παρέμβαση το πρόβλημα της εφαπτομένης το έλυσαν 3 στους 7 μαθητές σωστά ενώ οι υπόλοιποι μοιράστηκαν σε δύο κατηγορίες, σε αυτούς που το άφησαν ημιτελές λόγω εννοιολογικής παρανόησης και σε αυτούς που το έλυσαν λάθος. Μετά την παρέμβαση δεν το έλυσε κανένας τελείως λάθος. Οι 3 το έλυσαν σωστά οι 2 το προσέγγισαν ιστορικά με σωστά αποτελέσματα και οι υπόλοιποι δεν κατέληξαν σε σωστό συμπέρασμα αλλά το έλυσαν ακολουθώντας τον καινούριο για τους ίδιους τρόπο επίλυσης.

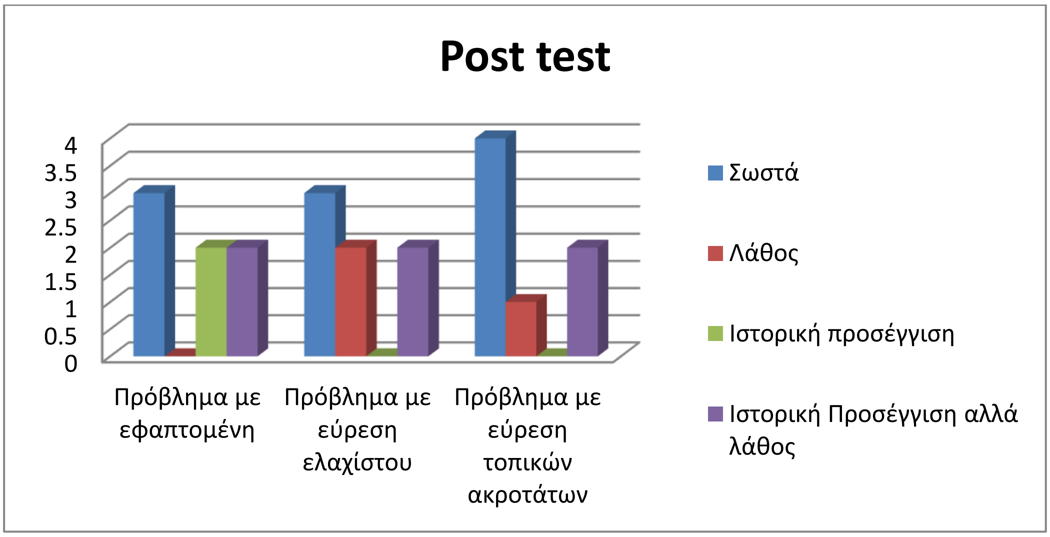
Σχετικά με το πρόβλημα της εύρεσης ελαχίστου στο pre test 1 μαθητής από τους 7 το έλυσε σωστά, 3 το άφησαν ημιτελές λόγω πράξεων και οι άλλοι 3 το έλυσαν λάθος ενώ στο post test 3 μαθητές το έλυσαν σωστά, 2 μαθητές το έλυσαν λάθος αλλά με ιστορική προσέγγιση και 2 το έλυσαν λάθος.

Τέλος, όσον αφορά το πρόβλημα με την εύρεση τοπικών ακροτάτων 4 από τους 7 μαθητές το έλυσαν σωστά ενώ δύο το άφησαν ημιτελές λόγω πράξεων. Μόνον 1 μαθητής το έλυσε λάθος. Στο αντίστοιχο post test 4 μαθητές το έλυσαν σωστά, 2 μαθητές το προσέγγισαν ιστορικά αλλά με λάθος αποτέλεσμα και 1 μαθητής το έλυσε λάθος.

Σε γράφημα τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται ως εξής



Εικόνα 26. Γράφημα αποτελεσμάτων pre-test



Εικόνα 27. Γράφημα αποτελεσμάτων post-test

Επιπλέον για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται τρεις συγκριτικοί πίνακες για το pre και post test που αφορούν το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ	Pre Test	Post Test
Μαθητής 1	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 2	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ιστορική προσέγγιση
Μαθητής 3	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ιστορική προσέγγιση
Μαθητής 4	Λάθος	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 5	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 6	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 7	Λάθος	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος

Εικόνα 28. Συγκριτικός Πίνακας για το Πρόβλημα με την Εφαπτομένη

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΕΥΡΕΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ	Pre Test	Post Test
Μαθητής 1	Ημιτελής λόγω πράξεων	Σωστά
Μαθητής 2	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 3	Λάθος	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 4	Λάθος	Λάθος
Μαθητής 5	Ημιτελής λόγω πράξεων	Σωστά
Μαθητής 6	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 7	Λάθος	Λάθος

Εικόνα 29. Συγκριτικός Πίνακας για το Πρόβλημα με την Εύρεση Ελαχίστου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ	**Pre Test**	**Post Test**
Μαθητής 1	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 2	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 3	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 4	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ιστορική Προσέγγιση αλλά λάθος
Μαθητής 5	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 6	Σωστά	Σωστά
Μαθητής 7	Λάθος	Λάθος

Εικόνα 30. Συγκριτικός Πίνακας για το Πρόβλημα με τα Ακρότατα

Σχετικά με το ερωτηματολόγιο

Όπου οι μαθητές απάντησαν κυκλώνοντας μία από τις επιλογές ναι ίσως και όχι στις ερωτήσεις

1. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να κατανοήσετε την διαφορά της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας και της παραγώγου συνάρτησης;
2. Είναι χρήσιμη κατά την γνώμη σας η Ιστορία των Μαθηματικών για την Διδασκαλία τους :
3. Θα ήταν ευχάριστο για εσάς να ακολουθείτε μια ιστορική προσέγγιση κατά την διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης ;

Τα αποτελέσματά του είναι τα παρακάτω

	ΕΡΩΤΗΣΗ 1	ΕΡΩΤΗΣΗ 2	ΕΡΩΤΗΣΗ 3
ΝΑΙ	4	5	4
ΙΣΩΣ	1	2	2
ΌΧΙ	2	0	1

Εικόνα 31.Πίνακας αποτελεσμάτων για το Ερωτηματολόγιο

Δηλαδή

Στην ερώτηση

Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να κατανοήσετε την διαφορά της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας και της παραγώγου συνάρτησης;

Οι 4 στους 7 μαθητές απάντησαν ναι, 2 στους 7 όχι και 1 απάντησε πως ίσως η Ιστορία των Μαθηματικών τον βοήθησε να κατανοήσει την διαφορά της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας και της παραγώγου συνάρτησης

Ενώ στην ερώτηση

Είναι χρήσιμη κατά την γνώμη σας η Ιστορία των Μαθηματικών για την Διδασκαλία τους ;

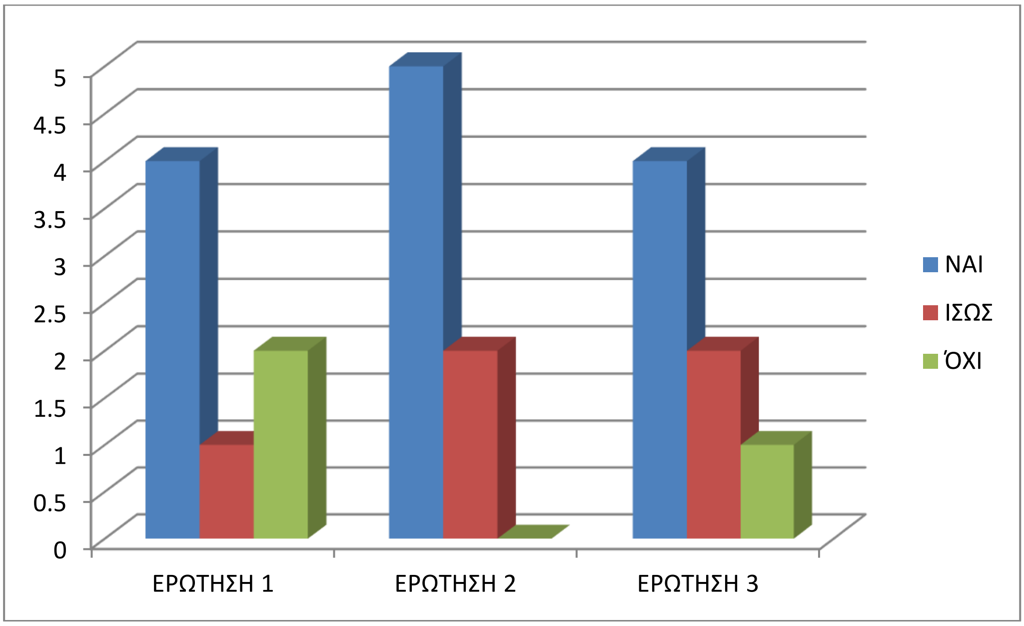
5 στους 7 μαθητές απάντησαν ναι, 2 στους 7 ίσως και κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι η Ιστορία των Μαθηματικών για την Διδασκαλία τους δεν είναι χρήσιμη.

Τέλος στην ερώτηση

Θα ήταν ευχάριστο για εσάς να ακολουθείτε μια ιστορική προσέγγιση κατά την διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης ;

Οι 4 από τους 7 μαθητές απάντησαν ναι, οι 2 ίσως και οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν ότι δεν τους είναι ευχάριστο να ακολουθούν μια ιστορική προσέγγιση κατά την διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης.

Ενώ σε γράφημα έχουμε



Εικόνα 32. Γράφημα αποτελεσμάτων για το ερωτηματολόγιο

Κεφάλαιο 8ο – Συμπεράσματα – Συζήτηση

Έχοντας μια πλήρη εικόνα των αποτελεσμάτων της έρευνας μπορεί κανείς να διαπιστώσει τα συμπεράσματα στα οποία μας οδηγεί. Οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον στην ιστορική προσέγγιση των θεμάτων που μελέτησαν και κάθε ένα από αυτά προσπάθησαν στο post test να το λύσουν σύμφωνα με την καινούρια μέθοδο που τους παρουσιάστηκε στην δεύτερη ώρα της εκάστοτε παρέμβασης. Όπως γίνεται φανερό από τους πίνακες που αναλύθηκαν στα αποτελέσματα μερικοί μαθητές μπορεί να μην κατάφεραν να καταλήξουν σε ένα σωστό αποτέλεσμα κάθε φορά αλλά χρησιμοποίησαν όσα άκουσαν κατά την παρουσίαση των ιστορικών δραστηριοτήτων.

Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται να επιβεβαιώσουν πως η ιστορία ως εργαλείο βοηθά τον εκπαιδευτικό να εξηγήσει με περισσότερο κατανοητό τρόπο την σημασία των εννοιών (Byers, 1982). Οι μαθητές παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν εξαιτίας των εννοιολογικών παρανοήσεων και των γνωστικών ελλείψεων στο post test έκαναν μια προσπάθεια φέρνοντας στο μυαλό τους την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Eisenberg (1991) η απεικόνιση που σκέφτεται ένας μαθητής για την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τον καθιστά περισσότερο ικανό στην κατανόηση ακόμα και της έννοιας της συνάρτησης. Συνεχίζοντας σχετικά με το πρόβλημα για την εύρεση ελαχίστου ενισχύεται η επικρατούσα γνώμη στην επιστημονική κοινότητα ότι ύπαρξη μαθηματικού προβλήματος παρεμποδίζει τους μαθητές να ξεκινήσουν. Οι 3 στους 7 μαθητές την έλυσαν λάθος και οι υπόλοιποι πλην ενός δεν κατάφεραν να την τελειώσουν στο pre test κάτι που άλλαξε στο post test. Στο σημείο αυτό αξίζει να σχολιαστεί η φράση ενός από τους μαθητές *“Κυρία είναι κρίμα, γιατί τόσα χρόνια πριν αυτοί* (εννοούσε τον Snell και τον Fermat) *μπήκαν στην διαδικασία να λύσουν κάτι τέτοιο και εμάς μας δίνουν την συνάρτηση και δεν μπορούμε να τη βγάλουμε”,* η οποία ενισχύει τον ιστορικό παραλληλισμό. Ο ιστορικός παραλληλισμός αφορά την παρατήρηση των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίστηκαν στην ιστορία και επανεμφανίζονται μέσα στην τάξη (Jankvist, 2009). Στο τελευταίο πρόβλημα με την εύρεση τοπικών ακροτάτων είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι δεν υπήρξαν οι ίδιες δυσκολίες που εμφανίστηκαν στα δύο προηγούμενα προβλήματα ακόμα και στο pre test. Εδώ εκτός του μαθητή 7 όλοι οι υπόλοιποι έκαναν μια προσπάθεια τόσο πριν όσο και μετά την ιστορικοδιδακτική παρέμβαση. Κάποιοι από τους μαθητές μπορεί να μην έφτασαν στο σωστό αποτέλεσμα στο post test αλλά ασχολήθηκαν με την χρησιμοποίηση των διαφορών του Fermat. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση επιβάλλεται να σημειωθεί πως τα κενά στην άλγεβρα (το γεγονός ότι δεν μπόρεσαν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν σωστά τις ταυτότητες $(a+b)^3$ και $(a+b)^2$) ήταν αυτά που δεν κατέστησαν ικανή την ορθή επίλυση της άσκησης.

Σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας σημειώνουμε ότι η Ιστορία των Μαθηματικών είναι πράγματι ένα εργαλείο που βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις δύσκολες για τους ίδιους έννοιες ενώ μέσω της ιστορικοδιδακτικής προσέγγισης διαχωρίζονται σε μεγαλύτερο βαθμό οι έννοιες της παραγώγου σε σημείο και παράγωγο συνάρτησης, κάτι που γίνεται σαφές και από το ερωτηματολόγιο. Το γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές ακολούθησαν ό,τι προτείνει ο Απολλώνιος, ο Snell και ο Fermat αντικατοπτρίζει την εν δυνάμει συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην επίλυση ασκήσεων ξεπερνώντας τον φορμαλισμό που το σχολικό εγχειρίδιο επιτάσσει. Όλα τα παραπάνω γίνονται σαφή εξαιτίας και του ερωτηματολογίου που δόθηκε στην τελευταία ώρα της διδακτικής παρέμβασης.

Συνοψίζοντας όσα προέκυψαν από την έρευνα είναι εμφανές ότι αυτά ταυτίζονται με τα λεγόμενα του Liu (2003) ο οποίος υποστηρίζει ότι μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών αυξάνεται το κίνητρο καθώς και μια θετική στάση απέναντι στην μάθηση από τους μαθητές, εξηγούνται καλύτερα κάποιες δυσκολίες των μαθηματικών, αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη, αποκαλύπτονται οι ανθρωπιστικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης αλλά και δίνεται η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να αποκτήσουν έναν καλό οδηγό για την διδασκαλία τους.

Η μάθηση δεν είναι πάντα μια ομοιόμορφη συνεχής διαδικασία. Άλλοτε πραγματοποιείται με μικρά συνεχή βήματα και άλλοτε με άλματα. Αυτά τα άλματα που πρέπει να κάνουν οι μαθητές είναι και αυτά που έγιναν στην εξέλιξη της επιστήμης των μαθηματικών (Παναγιώτου, 2002). Μόλις οι μαθητές κατανοήσουν αυτήν την ταύτιση αναμένεται να αποκτήσουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

Παρ' όλα αυτά η συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών ίσως να μην μπορεί να γενικευθεί από την παρούσα έρευνα. Λόγω του γεγονότος ότι το δείγμα αποτελείται από 7 μαθητές Γ Λυκείου που είναι εκ των πραγμάτων απρόθυμοι, τουλάχιστον στην αρχή, απέναντι σε μία διαφορετική διδασκαλία τα αποτελέσματα απομονωμένα δεν μπορούν να απαιτήσουν την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Ωστόσο, όταν αυτά τα αποτελέσματα συσχετιστούν με αποτελέσματα άλλων παρόμοιων ερευνών της διεθνούς βιβλιογραφίας θα μπορέσουν να αποτελέσουν έναυσμα για την εισαγωγή της Ιστορίας της Επιστήμης στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Κεφάλαιο 9ο - Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Παρά την μεγάλη προσπάθεια που έγινε για να καλυφθούν οι βασικότερες παρανοήσεις που υπάρχουν στον Διαφορικό Λογισμό σε μαθητικό επίπεδο ο χρόνος καθώς και το γεγονός ότι οι μαθητές στην Γ' Λυκείου σε αντίθεση με τους μαθητές μικρότερων τάξεων είναι λιγότερο δεκτικοί στην διαφορετική προσέγγιση μιας άσκησης εξαιτίας του συστηματοποιημένου προγράμματος σπουδών και διδασκαλίας δεν κατέστησαν εφικτό στην παρούσα έρευνα να μελετηθεί μία ακόμα άσκηση του σχολικού εγχειριδίου. Θα ήταν σημαντικό να μελετηθεί η αντίδραση των μαθητών στην άσκηση 10 του σχολικού βιβλίου στις σελίδες 174- 175 η οποία αποτελεί μία άσκηση «τέρας» όπως ονομάζει και την συνάρτηση που έχει, ο ίδιος ο Poincaré, καθώς ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει ότι η ευθεία $y = 0$ είναι εφαπτομένη της καμπύλης παρόλο που την «διαπερνά» και ότι η $y = 0$ έχει άπειρα κοινά σημεία με την C_f παρόλο που εφάπτεται σε αυτή. Είναι μία από τις ελάχιστες ασκήσεις που συναντά ο μαθητής στο σχολικό εγχειρίδιο και δεν μπορεί να συνδυάσει αυτό που βλέπει στην γραφική παράσταση με αυτό που πραγματικά συμβαίνει.

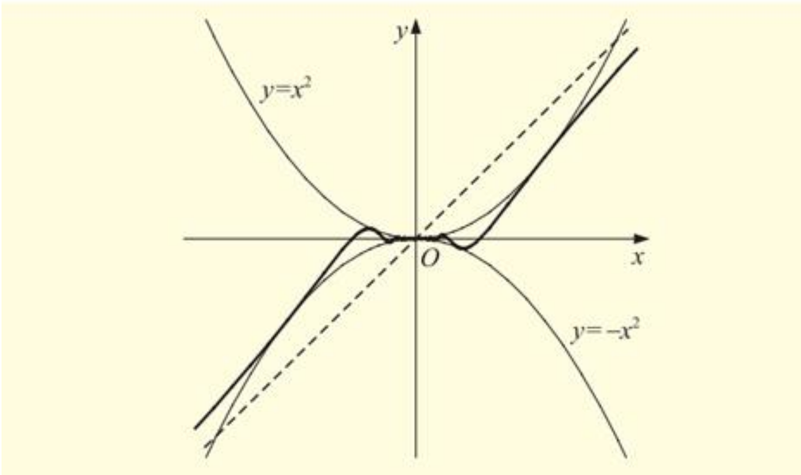
Ο Henri Poincaré (1854-1912) έγραψε κάποτε πως η λογική ορισμένες φορές δημιουργεί τέρατα. Στον τελευταίο μισό αιώνα εμφανίστηκε ένα πλήθος παράξενων συναρτήσεων, οι οποίες φαίνεται να προσπαθούν να διαφέρουν από εκείνες τις «τίμιες» συναρτήσεις οι οποίες εξυπηρετούν έναν σκοπό. Δεν υπάρχει συνέχεια ή συνέχεια χωρίς διαφοροποίηση. Παλαιότερα, όταν επινοούσε κανείς μια καινούργια ιδέα, γινόταν λόγω πρακτικών σκοπών, ενώ στις μέρες μας, αυτές έχουν εφευρεθεί για τον σκοπό να βρουν λάθη στην λογική των πατέρων και τίποτα να μη προκύπτει από αυτό.

Η λεπτότητα της διαφορισιμότητας δεν είναι κατανοητή στις μαθηματικές κοινότητες ανά τον κόσμο. Ένα κατάλληλο παράδειγμα να απαντήσει σε αυτήν την ιδέα είναι η συζήτηση που είχαν ο Gaston Darboux και ο Guillaume Jules Houël κατά την διάρκεια της δεκαετίας του 1870. Ο Houël έγραφε ένα βιβλίο για τον Λογισμό και ζήτησε την γνώμη του Darboux. Ο Darboux που δεν ήταν σύμφωνος με την αυστηρή απόδειξη του Houël εισήγαγε μια συνάρτηση την όποια όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο Poincaré την ονόμασε συνάρτηση τέρας. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$M(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Και η εν λόγω άσκηση δίνεται παρακάτω

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Να αποδείξετε ότι

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στην συνέχεια ότι η ευθεία y = 0 (ο άξονας x′x) είναι η εφαπτομένη της C_f στο O(0,0)

ii) Ο άξονας x′x έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f

iii) Η ευθεία y=x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Οι μαθητές στην άσκηση 10 σελίδα 174 του σχολικού έρχονται αντιμέτωποι με την συνάρτηση τέρας του Darboux. Στην άσκηση όπως φαίνεται παραπάνω ζητείται να αποδείξουν ότι η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=0 και ότι δέχεται εφαπτομένη σε αυτό το σημείο την ευθεία y=0 δηλαδή τον άξονα x΄x ενώ στο δεύτερο ερώτημα ζητείται να αποδειχθεί ότι έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτόν.

Συνήθως, οι υποψήφιοι των πανελλαδικών εξετάσεων, και συγκεκριμένα όσοι δεν έχουν τρομοκρατηθεί από την δοθείσα γραφική παράσταση ή από την ανάγνωση του ερωτήματος ii που ζητά άπειρο πλήθος κοινών σημείων με την y=0 και μπαίνουν τελικά στην διαδικασία να προσπαθήσουν να λύσουν την άσκηση χρησιμοποιούν κριτήριο παρεμβολής. Με αυτό βρίσκουν ότι το $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$ είναι ίσο με 0, το 0 είναι πραγματικός αριθμός άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Δεν μπορούν να κατανοήσουν όμως την συμπεριφορά της f στο σημείο x_0.

Προτείνεται λοιπόν η παρακάτω διδακτική ακολουθία

- **Άσκηση 1.**

Προσδιορίστε την συνάρτηση f(x) = |x|

i. Να αποδείξετε ότι f΄(x) = 1 για x>0 και -1 για x<0
ii. Να αποδείξετε ότι το f΄(0) δεν υπάρχει

- **Άσκηση 2.**

Μέρος 1ο

i. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης M(x) με βάση την δοθείσα γραφική παράσταση
ii. Προσδιορίστε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση M(x) συναντά την συνάρτηση $y = x^2$ και $y=-x^2$
iii. Εξηγείστε την σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y = M(x) ,$y = x^2$ και $y=-x^2$.

Μέρος 2ο

i. Βρείτε την τιμή M(0) για την οποία η συνάρτηση M είναι συνεχής στο 0.
ii. Βρείτε την τιμή για το M΄(0) ώστε η M να είναι διαφορίσιμη στο 0. Αιτιολογείστε την απάντησή σας με χρήση του ορισμού της παραγώγου σε σημείο.

Μέρος 3ο

Θεωρείστε την συνάρτηση του Darboux M

i. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες διαφόρισης βρείτε το M΄(x) για $x \neq 0$

ii. Είναι η M΄ συνεχής στο x=0; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(Ruch, 2019)

Μέσα από αυτήν, την πιο αναλυτική μελέτη της συνάρτησης M(x) του Darboux αναμένεται να κατανοήσουν καλύτερα οι μαθητές τα ζητούμενα της άσκησης. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά ως εισαγωγή οι μαθητές μελετούν την συνάρτηση f(x) = |x| της οποίας την γραφική παράσταση γνωρίζουν από το 1ο κεφάλαιο. Αποδεικνύουν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου σε σημείο, ότι αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού $\lim_{x \to x0-} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo} \neq \lim_{x \to x0+} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$.

Στην συνέχεια ξεκινούν να μελετούν την M(x) της οποίας σχεδιάζουν την γραφική παράσταση και συνειδητοποιούν μέσω του κριτηρίου παρεμβολής ότι η γραφική παράσταση της M(x) βρίσκεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $y = x^2$ και $y=-x^2$. “Παρατηρώντας” την γραφική παράσταση της συνάρτησης «τέρας» είναι σε θέση να προιδεαστούν για την παραγωγισιμότητα της M στο 0, κάτι που επιβεβαιώνουν και με τον ορισμό της συνάρτησης σε σημείο.

Ουσιαστικά οι μαθητές με το πέρας της διδακτικής ακολουθίας έχουν μελετήσει δύο συναρτήσεις που η μία είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η άλλη όχι παρατηρώντας στις γραφικές τους παραστάσεις ότι η παραγωγισιμότητα εξαρτάται από την ύπαρξη εφαπτομένης ευθείας στο σημείο που μελετούν. Δηλαδή, από το αν η συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό πράγμα που συνδέεται με την ύπαρξη ή μη του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας που είναι ίσος με το όριο $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$ δηλαδή την παράγωγο της f στο x_0

Δια μέσου, λοιπόν, μιας ιστορικής προσέγγισης της άσκησης αυτής του σχολικού βιβλίου και θέτοντας κάποια επιπλέον ερωτήματα στον μαθητή ο τελευταίος είναι έτοιμος πια

- να κατανοήσει την σημασία της παραγωγισιμότητας σε σημείο
- να διαπιστώσει από μόνος του ότι η παράγωγος σε σημείο είναι αριθμός και όχι συνάρτηση, ο οποίος προσδιορίζει και την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο που εξετάζεται η παραγωγισιμότητα

- να θυμηθεί το κριτήριο παρεμβολής καθώς και την γεωμετρική του ερμηνεία
- να συνδυάσει και να «δει» ταυτόχρονα τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων οι οποίες παρουσιάζουν διαφορές στην παραγωγισιμότητά τους και με απλά λόγια να συνειδητοποιήσουν ότι όταν μια συνάρτηση είναι «απότομη» όπως αυτή της f(x)= |x| δεν μπορεί να έχει εφαπτομένη, γι αυτό και το όριο $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xo}$ δεν υπάρχει

Μια τέτοια δραστηριότητα απαιτεί χρόνο, καλύτερο επίπεδο μαθητών κι σαφώς δεν πρέπει να συνδυαστεί με τις έννοιες που πραγματεύτηκε η παρούσα εργασία διότι κάτι τέτοιο θα δημιουργούσε πρόβλημα στην διεκπεραίωση της έρευνας καθώς οι μαθητές θα λάμβαναν περισσότερες πληροφορίες σε λίγο χρονικό διάστημα από αυτές που είναι σε θέση να συγκρατήσουν.

Θα ήταν, λοιπόν, βαρυσήμαντο κάποιος μελλοντικός ερευνητής μέσα από αυτήν την ιδέα να δημιουργήσει μια διδακτική παρέμβαση που ενδεχομένως θα αποτελούνταν από κάποια pre ή post test και κάποια ερωτηματολόγια εμβαθύνοντας ακόμα περισσότερο στις έννοιες της Ανάλυσης και στην Ιστορική τους Προσέγγιση.

Κεφάλαιο 10ο - Περιορισμοί της έρευνας

Όπως κάθε επιστημονικό πόνημα έτσι και το παρόν για να αποτελέσει μια εμπεριστατωμένη έρευνα που ακολουθεί τους κανόνες της εκπόνησης μιας μεταπτυχιακής εργασίας αντιμετώπισε αρκετά εμπόδια στην εξέλιξή του. Κυριότερο ήταν η εύρεση δείγματος καθώς η Γ’ Λυκείου είναι η πλέον μη προσβάσιμη σε ερευνητικές απόπειρες εξαιτίας της άρνησης των μαθητών.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τον ίδιο τους τον εαυτό, με το άγχος που τους κατακλύζει στην προσπάθειά τους να πετύχουν την εισαγωγή τους σε ένα Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα. Από προσωπική εμπειρία όμως οι μαθητές αυτοί αποτελούν την μειοψηφία. Λίγοι είναι εκείνοι οι νέοι που στη σύγχρονη εποχή μοχθούν και δεν φοβούνται να ασχοληθούν με τα μαθηματικά. Όταν λοιπόν τους ζητείται να συμμετέχουν σε μια έρευνα στην οποία θα τους παρουσιαστούν διαφορετικοί τρόποι επίλυσης και προσέγγισης γενικότερα των εννοιών που πραγματεύονται, φοβούνται. Φοβούνται πως θα μπερδευτούν και δεν θα κερδίσουν κάτι από αυτήν την διαδικασία ενώ ταυτόχρονα θεωρούν ότι χάνουν πολύτιμο χρόνο κάνοντας δραστηριότητες που δεν είναι εφικτό να χρησιμοποιήσουν στις Πανελλαδικές εξετάσεις

Έχοντας αυτή την ομάδα των μαθητών, που όπως αναφέρθηκε είναι οι λίγοι, και από την άλλη μεριά έχοντας ως δείγμα και τους μαθητές που είναι τελείως αρνητικοί με το μάθημα των Μαθηματικών διότι θεωρούν ότι όσο και να προσπαθήσουν δεν μπορούν να κατανοήσουν την επιστήμη η εύρεση των συμμετεχόντων στην παρούσα έρευνα ήταν μια διαδικασία δύσκολη που αν μη τι άλλο έπρεπε στο τέλος να αποδείξει ότι όχι μόνο οι μαθητές πιο υψηλού επιπέδου δεν έχασαν τον χρόνο τους αλλά και εκείνου χαμηλότερου επιπέδου μπόρεσαν να καταλάβουν έστω ένα απειροελάχιστο ποσοστό των εννοιών της Ανάλυσης.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι επτά μαθητές δεν είναι ένα μεγάλο δείγμα αλλά είναι σίγουρα μια αρχή για μελλοντικές έρευνες με συνδιδασκαλία πολλών καθηγητών σε τμήματα διαφορετικών ταχυτήτων που θα έχει ως σκοπό την προαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Areaya, S., & Sidelil, A. (2012). Students' difficulties and misconceptions in learning concepts of limit, continuity and derivative. *The Ethiopian Journal of Education*, *32*(2), 1-38.

Bachelard. G. (1938). *La formation de Vesprit scientifique*. Paris: Vrin.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20-25.

Bell, E.T. (1992). *Οι μαθηματικοί. Από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*. Τόμ. Ι Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development:(The concepts of the calculus)*. Dover Bublications, ANC.

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Buckley, S. (2013). *Deconstructing maths anxiety: Helping students to develop a positive attitude towards learning maths.* Australian Council for Educational Research. Ανακτήθηκε 10 Ιανουαρίου, 2020, από https://research.acer.edu.au/learning_processes/16/.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *13*(1), 59-66.

Campbell· J. I. (2005). Math Anxiety and Its Cognitive Consequences: A Tutorial Review. In *The Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 333-346). Psychology Press.

Downs, M., Mamona-Downs, J., (2000). "On Grafic Representation of Differentiation of Real Functions". *Themes in Education, 1(2),* 173-198.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 221-243). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(1-2), 1-20.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies linking different domains. *For the learning of mathematics*, *17*, 55-61.

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C.P. (2009). Calculus students' use and interpretation of variables; Algebraic vs. Arithmetic Thinking; *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education***,** 9(2), 59-72.

Hannover, B., & Kessels, U. (2004). Self-to-prototype matching as a strategy for making academic choices. Why high school students do not like math and science. *Learning and instruction, 14(1),* 51-67.

Hellman, H. (2010). *Μεγάλες έριδες στην Ιστορία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Hilton, P. (1980). Math anxiety: Some suggested causes and cures: Part 2. *The Two-Year College Mathematics Journal*, *11*(4), 246-251.

J.L. Heiberg, "Archimedes. *Opera Omnia*, *IV*, 557-58.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71(3)*, 235-261.

Willy, J. & Sons (1999). *Real Anlaysis A historical Approach*. Staul Stahl

Katz , V. (2013). *A History of Mathematics*.

Katz, V. J. (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective* (Vol. 51). Cambridge University Press.

Klyve, D. (2017). *The derivatives of the sine and cosine functions.* Ανακτήθηκε 17 Ιουνίου, 2019, από https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Barnett_TRIUMPHS_MiniPSPs/MiniPSP_Derivatives_of_Sine_and_Cosine_2017.06.07.pdf

Knorr, W. R. (1978). Archimedes and the spirals: The heuristic background. *Historia mathematica*, *5*(1), 43-75.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching. *Mathematics Teacher*, *96*(6), 416-421.

Loria, G. (1992)*. Η Ιστορία των Μαθηματικών.* Τομ. I. Αθήνα: Παπαζήση.

Loria, G. (1992). *Η Ιστορία των Μαθηματικών.* Τομ. II.. Αθήνα: Παπαζήση.

Luneta, K. & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, *3(3)*, 35-46.

Kline, M. (1981). *Τα μαθηματικά στον Δυτικό Πολιτισμό.* Τομ. Β. Αθήνα: Κώδικας.

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 624-640.

Ruch, D. (2019). *An Introduction to a Rigorous Definition of Derivative.* Ανακτήθηκε 20 Αυγούστου, 2019, από https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1005&context=triumphs_analysis

Siyepu, S. W. (2013). Students' interpretations in learning derivatives in a university mathematics classroom. In *Proceedings of the 19th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa, (1),* 183-193.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2007). Learning mathematics with understanding: A critical consideration of the learning principle in the principles and standards for school mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, *4*(1), 103-114.

Swan, M. (2001). 10 Dealing with misconceptions in mathematics. *Issues in mathematics teaching*, 147. London.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *proceedings of working group, (3),* 13-28.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education*, 247-294

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teachnig, 20(1), 113-137*

Ελληνόγλωσση

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης. Σ. & Πολύζος, Γ.(2019). *Μαθηματικά Β μέρος.* Αθήνα: Διόφαντος

Εξαρχάκος, Γ. (1995). *Το έργο του Αρχιμήδη και η συμβολή του στην εξέλιξη των μαθηματικών της μηχανικής και της τεχνολογίας* (Αδημοσίευτη Διδακτορική

Διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο (ΕΚΠΑ) Σχολή Επιστημών Αγωγής. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αθήνα.

Θωμαΐδης, Γ. (1990). Ιστορικές Παρεκβάσεις στο Μάθημα της Γεωμετρίας. *Ευκλείδης Γ,* (25), 27-41.

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν. & Τοκμακίδης, Τ. (1989). Οι σχέσεις Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ, (23),* 11-17.

Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (1987). Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των Μαθηματικών'. *Ευκλείδης Γ, 16*, 61-92.

Κοτοπούλης, Β. Θ. (2007). Η διδακτική των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση: Όψεις και προοπτικές. *Επιστημονικό Βήμα*, 42-156.

Παναγιώτου, Ε. (2002). Ο ρόλος της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μάθηματικών. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (19), 117-130.

Παπαδάκης, Β. (2015). *Μαθηματικά* $Γ_2$. Αθήνα: Σαββάλας.

Στεργίου, Β. (2009). *Ιστορική εξέλιξη, ερμηνείες και διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του απειροστού.* Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας 1

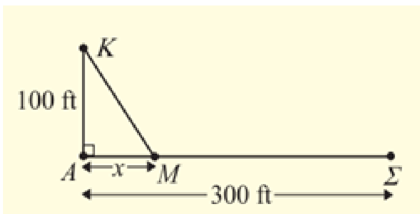
1. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία α) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
   β) είναι παράλληλη στην ευθεία ζ : $y = x + 5$
   γ) είναι κάθετη στην ευθεία η : $x - 3y + 12 = 0$

2. Μια πλατφόρμα (Π) αντλήσεως πετρελαίου βρίσκεται στη θάλασσα και απέχει από το σημειο Α της ακτής απόσταση ΠΑ = 12km . Η πλατφόρμα πρόκειται να συνδεθεί με ένα διυλιστήριο (Δ) που βρίσκεται στην ακτή και απέχει 20 km από το σημείο Α . Η σύνδεση θα γίνει με έναν υποθαλάσσιο αγωγό (ΠΚ) και έναν επίγειο αγωγό (ΚΔ). Το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 25000 € ανά km και του επίγειου αγωγού είναι 15000€ ανά km. Να βρείτε πόσο πρέπει να είναι το μήκος κάθε τύπου αγωγού, ώστε το κόστος της σύνδεσης να είναι ελάχιστο.

3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση
   $f(x) = x^3 – 3x^2 + 3x +1$

Φύλλο εργασίας 2

1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$



2. Ένας κολυμβητής *K* βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο *A* μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του *Σ* βρίσκεται 300 ft μακρυά από το σημείο *Α*. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.

iii. Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή *ΚΜΣ* του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

iv. Για ποια τιμή του *x* ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση

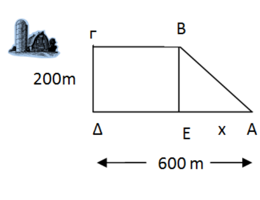
$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$

Φύλλο εργασίας 3

Να λυθούν οι παρακάτω ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης να είναι παράλληλες.

2. Ένας ορειβάτης βρίσκεται στο έδαφος στο σημείο Α έχοντας υψομετρική διαφορά από ένα καταφύγιο 200m και απόσταση από το σημείο Δ που είναι η προβολή του καταφυγίου στο έδαφος 600m. Για να φτάσει στο καταφύγιο πρέπει να σκαρφαλώσει στην πλαγιά με ταχύτητα 6m/s φτάνοντας στο σημείο Β και από εκεί τρέχοντας με ταχύτητα 10m/s να μπει στο καταφύγιο Γ.



ii. Να βρεθεί η τιμή του x ώστε ο ορειβάτης να κάνει τον λιγότερο δυνατό χρόνο για να φτάσει στο καταφύγιο

3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση

$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να κατανοήσετε την διαφορά της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας και της παραγώγου συνάρτησης;

Ναι Ίσως Όχι

2. Είναι χρήσιμη κατά την γνώμη σας η Ιστορία των Μαθηματικών για την Διδασκαλία τους ;

Ναι Ίσως Όχι

3. Θα ήταν ευχάριστο για εσάς να ακολουθείτε μια ιστορική προσέγγιση κατά την διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης ;

Ναι Ίσως Όχι