ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

«Η εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση και οι επιπτώσεις του στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών»

της **Γκογκάκη Ελένης**

Α.Ε.Μ.: 694

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Εξεταστές: Ζαχαριάδης Θεοδόσης, Καθηγητής

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Φλώρινα, Μάρτιος 2020

*Όπως μετονομάστηκε η Παιδαγωγική Σχολή με τον Ν.4610/2019, ΦΕΚ70/τ.Α΄/07-5-2019

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Θωμαΐδη Γιάννη για την πολύτιμη καθοδήγησή του και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον κ. Νικολαντωνάκη για την τιμή που μου έκανε ως επιβλέπων καθηγητής μου και τους κ. Ζαχαριάδη Θεοδόση και κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή μου επιτροπή.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκείνους τους ανθρώπους που έδειξαν κατανόηση και συμπαράσταση κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Τέλος, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου που είναι πάντα δίπλα μου και με υποστηρίζει σε κάθε μου βήμα.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η γένεση και η εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση και οι επιπτώσεις που αυτό έχει στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Αρχικά, γίνεται λόγος για τα μαθηματικά έργα, τα εργαλεία δηλαδή μάθησης και αξιολόγησης που χρησιμοποιεί παραδοσιακά η διδασκαλία των μαθηματικών. Ταξινομούνται σε ασκήσεις και προβλήματα, αναφορικά με το είδος τους και με βασικό άξονα το επίπεδο των γνωστικών τους απαιτήσεων. Επιπλέον, τονίζεται η επίδρασή τους στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς και στις ίδιες τις εξετάσεις. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στα ρεαλιστικά προβλήματα, τα οποία απουσιάζουν απ΄την καθημερινή σχολική πραγματικότητα, παρά τη μεγάλη αξία τους για την καλλιέργεια μαθηματικών δεξιοτήτων. Έπειτα, στην προσπάθεια να διερευνηθεί η γένεση του φαινομένου, μελετώνται ιστορικά ντοκουμέντα, ενώ για την εξέλιξή του απαραίτητη κρίνεται η παρουσίαση των αλλαγών που έφεραν οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, και κυρίως αυτή των Νέων Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά και η ανάλυση παραδειγμάτων θεμάτων εξετάσεων και συνδυαστικών ασκήσεων. Μέσα από αυτή την ανάλυση είναι πλέον σαφής ο πρωταγωνιστικός ρόλος των εξετάσεων στην εδραίωση της ασκησιολογίας, της κατηγοριοποίησης δηλαδή των μαθηματικών έργων με στόχο την ευκολότερη και ταχύτερη ανάκληση από μνήμης μεθόδων επίλυσης. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των δεδομένων των ερευνών της διδακτικής των Μαθηματικών και εμπειρικών ερευνών, προσεγγίζεται η ασκησιολογία στη σύγχρονη όψη της. Σε αυτό βοηθούν οι κριτικές πανεπιστημιακών δασκάλων, καθώς και τα αποτελέσματα του μαθηματικού διαγωνισμού PISA. Οι αρνητικές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στον PISA αποτελούν ένα ακόμα αποδεικτικό στοιχείο των προβλημάτων που αντιμετωπίζει η μαθηματική εκπαίδευση στη χώρα μας. Μια εκπαίδευση που εστιάζει στην απομνημόνευση τεχνικών επίλυσης ασκήσεων με σκοπό την επιτυχία στις εξετάσεις και περιθωριοποιεί την επίλυση προβλήματος, η οποία έχει πολύ μεγάλη σημασία για τη μάθηση και τη διδασκαλία της μαθηματικής επιστήμης. Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με την παράθεση συμπερασμάτων και προτάσεων για τη βελτίωση της ισχύουσας κατάστασης ή/και μελλοντική έρευνα.

Λέξεις κλειδιά: ασκησιολογία, μαθηματικό έργο, επίλυση προβλήματος, PISA, εξετάσεις

Abstract

In the present diploma thesis, the genesis and evolution of the phenomenon of askeseology in Greek mathematical education are being studied as well as the impact it has on teaching and learning mathematics. Initially, it refers to the mathematical tasks, the learning and evaluation tools that are traditionally used in the teaching of mathematics. They are classified into exercises and problems, in terms of their type and with a basic axis the level of their cognitive requirements. In addition, their impact on learning and teaching of mathematics, as well as on the examinations, is highlighted. Special reference is made to the realistic problems, which are absent from the daily school reality, despite their great value for cultivating mathematical skills. Then, in an effort to investigate the genesis of the phenomenon, historical documents are studied, while for its development it is necessary to present the changes brought about by educational reforms, in particular that of the New Mathematics in mathematical education, as well as the analysis of examples of exam subjects and combination exercises. Through this analysis, the leading role of examinations in the consolidation of askeseology, that is the classification of mathematical tasks aiming in the easier and faster memory recall of resolution methods, is now clear. Furthermore, with the help of research data from teaching Mathematics and empirical research, askeseology is approached in its modern face. This is helped by the reviews of university teachers as well as the results of the mathematical competition PISA. The negative performance of Greek students in PISA is another evidence of the problems faced by mathematical educational in our country. An education that focuses on memorizing exercise resolution techniques aiming in exam success and marginalizes problem solving, which is of great importance in learning and teaching mathematical science. Finally, the task is completed by quoting conclusions and proposals to improve the current situation or/and future research.

Keywords: askeseology, mathematical task, problem solving, PISA, exams

Εισαγωγή

Η μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα πέρασε από διάφορες φάσεις, τις οποίες σκοπεύουμε να αναλύσουμε σε επόμενη ενότητα. Όπως είναι αναμενόμενο, η πορεία αυτή των αλλαγών επηρέασε άμεσα και αναπόφευκτα τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Το ερευνητικό μας ενδιαφέρον εστιάζεται στη γένεση και εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση και προκειμένου να γίνει αυτό, θα μελετήσουμε αρχικά ντοκουμέντα από την ιστορία της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Παρά τις όποιες αλλαγές παρατηρήθηκαν στο πέρασμα του χρόνου, αυτό που εξακολουθεί και παραμένει σταθερό είναι ο στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών που δεν είναι άλλος από την προαγωγή της μαθηματικής σκέψης των διδασκομένων. Πολλά άλλωστε από τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης, όπως είναι η ακριβολογία, η λογική συνέπεια, η αιτιολόγηση συλλογισμού, η τάση της για διερεύνηση κ.ο.κ., θα εφοδιάσουν τον διδασκόμενο με πολύ χρήσιμες δεξιότητες για την εξέλιξή του σε σύγχρονο πολίτη. Με μία πολύ σύντομη αναδρομή στο παρελθόν, διαπιστώνουμε ότι το κύμα των "Νέων Μαθηματικών" που συνδεόταν με το φορμαλιστικό πρότυπο του Hilbert και μέσα στο οποίο πλαισιωνόταν η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, έδωσε σιγά σιγά τη θέση του στο κονστρουκτιβιστικό, σύμφωνα με το οποίο η μάθηση είναι μια δραστηριότητα κατασκευής γνώσης (Φερεντίνος, 2001). Αυτό το κατασκευαστικό πρότυπο φαίνεται τουλάχιστον να προωθούν τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα. Η παλαιότερη αντίληψη ότι η αυθεντία του καθηγητή εγγυάται μια προκατασκευασμένη γνώση την οποία πρέπει να αποστηθίσει ο μαθητής, μάλλον έχασε έδαφος. Το τελευταίο όμως μοιάζει να αμφισβητείται από πολλούς ερευνητές, όπως είναι και οι Engelbrecht et al. (2009), οι οποίοι σημειώνουν πως η σημερινή διδασκαλία εστιάζει σε διαδικαστικές δεξιότητες και εκμάθηση χειρισμού συμβόλων. Είναι δηλαδή προσανατολισμένη σε φορμαλιστική και πάλι οπτική.

Πολλές σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις συνδέονται με την έννοια της δραστηριότητας. Η δραστηριότητα είναι μια κατάσταση προβληματισμού η οποία επιτρέπει τη διερεύνηση, ανακάλυψη, αιτιολόγηση και κριτική από τη μεριά των μαθητών και όχι απλά την αποδοχή της γνώσης από τον πομπό – καθηγητή (Κολέζα, 1997). Με την εισαγωγή δραστηριοτήτων στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών επιδιώκεται η ενεργοποίηση και εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και ταυτόχρονα η οικοδόμηση νέας γνώσης πάνω στην πρότερη (Τσικοπούλου, 2008). Η θεωρία δραστηριότητας μοιάζει να είναι αυτή που μας δίνει το πλαίσιο για να ερμηνεύσουμε και να αξιολογήσουμε τις μαθηματικές δραστηριότητες μέσα στη σχολική αίθουσα (Καραβασίλης & Κόσυβας, 2016).

Πρωταγωνιστικό ρόλο στη μαθηματική δραστηριότητα έχουν τα μαθηματικά έργα, τα εργαλεία δηλαδή του εκπαιδευτικού έτσι ώστε οι μαθητές να ασκηθούν στη μαθηματική δραστηριότητα και να ενθαρρυνθούν για μαθηματικές δράσεις. Αυτά όχι μόνο αποτελούν καθοριστικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς, αλλά επηρεάζουν και τη μάθηση των μαθητών. Πολλά ερωτήματα δημιουργούνται σχετικά με το ποια είναι εκείνα τα έργα που αναπτύσσουν τη μαθηματική δραστηριότητα και που επηρεάζουν την αντίληψη των παιδιών για τη μαθηματική επιστήμη, καθώς επίσης έχουν επιχειρηθεί και διάφοροι τρόποι ταξινόμησης αυτών. Έτσι, σύμφωνα με τους Hennigsen & Stein (1997), μπορούμε να τα διαχωρίσουμε ανάλογα με τις γνωστικές τους απαιτήσεις σε χαμηλότερου ή υψηλότερου επιπέδου. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν όσα ενισχύουν τη διαδικαστική γνώση, αφού στοχεύουν στη μηχανιστική εφαρμογή αλγορίθμων, στην αποστήθιση και τελικά στην εκμάθηση τύπων μετά από εξάσκηση. Αυτά ουσιαστικά αποτελούν τις ασκήσεις, το αντικείμενο διδασκαλίας που χρησιμοποιεί στην καθημερινή σχολική πρακτική ο καθηγητής, ο οποίος κατευθύνει την εξέλιξη της διδακτικής πρακτικής. Προσωπική δραστηριοποίηση των μαθητών φαίνεται πως δεν υπάρχει και η γνώση μεταδίδεται παθητικά. Από την άλλη μεριά, στη δεύτερη ομάδα, βρίσκονται αυτά που περιλαμβάνουν διατύπωση εικασιών και συλλογισμών, αιτιολόγηση, διερεύνηση και εξελίσσουν τη γνωστική ανάπτυξη και την εννοιολογική γνώση. Σε αυτά ανήκουν τα έργα μοντελοποίησης, τα προβλήματα κ.λπ. που προάγουν την ενεργητική μάθηση. Μία άλλη ταξινόμηση, που συναντάται συχνά, είναι αυτή του Polya ο οποίος έκανε τον διαχωρισμό ανάμεσα σε έργα ρουτίνας που περιλαμβάνουν ασκήσεις γνωστών διαδικασιών και εφαρμογών και σε έργα μη ρουτίνας που περιλαμβάνουν προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες ο λύτης πρέπει να πειραματιστεί. Για τη δεύτερη περίπτωση, η οποία δομεί ένα πιο ενεργητικό πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης, η Κολέζα (1997) μάλιστα χρησιμοποιεί τον όρο «ρεαλιστικό μοντέλο διδασκαλίας» το οποίο συνδέεται άμεσα με την καθημερινότητα. Η καθημερινή, πραγματική ζωή προσφέρει πληθώρα παραδειγμάτων - καταστάσεων που έχουν αληθινό νόημα για τα παιδιά και για τα οποία οι μαθηματικές δομές είναι βασικό στοιχείο (Τζεκάκη, 2011). Μία από τις διδακτικές εκείνες προσεγγίσεις που τονίζουν το μεγάλο αντίκτυπο των έργων και της παρουσίασης αυτών μέσα στη σχολική τάξη είναι αυτή της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME). Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, με βασική της αρχή τη μαθηματικοποίηση και πυλώνα τη μοντελοποίηση, μπορεί να «γεννήσει» μαθηματικές δραστηριότητες με κατάλληλα χαρακτηριστικά για τη σχολική πρακτική, αλλά αντιμετωπίζει, όπως θα δούμε, και διάφορα εμπόδια. Σύμφωνα με τον Freundenthal (1983), ο οποίος ήταν και θεμελιωτής της, οι μαθητές δεν πρέπει να γίνονται δέκτες – αναγνώστες έτοιμων ασκήσεων αλλά να αντιμετωπίζουν τα διδακτικά ζητήματα ως προβλήματα και μέσα από αυτά να ανακαλύπτουν.

Βλέποντας τη σημερινή κατάσταση στο ελληνικό σχολείο, θα παρατηρήσουμε έντονα το φαινόμενο της «ασκησιολογίας», την κατάταξη δηλαδή σε κατηγορίες μαθηματικών έργων έτσι ώστε να διευκολυνθεί ο επίδοξος λύτης. Ταυτόχρονα η θεωρητική εμβάθυνση και η κριτική σκέψη θεωρούνται ίσως ελλιπείς, ενώ η απόδειξη υποβαθμίζεται σε απομνημόνευση διαδικασιών χωρίς την απαραίτητη σύνδεση και λογική συνέχεια (Θωμαΐδης, 2009). Η μεθοδολογία αυτή ξεκίνησε στην Γαλλία εξαιτίας των εξετάσεων baccalaureat και έβαλε τις ρίζες της στην Ελλάδα λόγω των πανελληνίων εξετάσεων. Η μαθηματική δραστηριότητα συγχέεται με αυτή τη στείρα μεθοδολογία και εκλαμβάνεται ως η απορρόφηση μιας συλλογής γνώσεων και δεξιοτήτων με στόχο την επιτυχία στις εξετάσεις. Ερωτήματα εγείρονται για το κατά πόσο περιθωριοποιούνται καίριες πτυχές της μαθηματικής δραστηριότητας και αν ενθαρρύνουν τον μαθητή στον σχηματισμό νέας γνώσης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη αυτού του φαινομένου της ασκησιολογίας στη χώρα μας κατά τον τελευταίο αιώνα, να εντοπίσουμε τις αιτίες του και να καταγράψουμε τις συνέπειες του. Για να μπορέσουμε να το πετύχουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε ως εργαλεία για τη μελέτη μας τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, θέματα εξετάσεων καθώς και τα αποτελέσματα του διαγωνισμού PISA.

Στόχος μας είναι να απαντήσουμε στα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποια είναι τα βασικά συστατικά που χαρακτηρίζουν την ασκησιολογία;
- Πώς και γιατί εξελίχθηκε το φαινόμενο μέχρι και σήμερα;
- Ποιες είναι οι επιπτώσεις που έχει η ασκησιολογία στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών;

Οι αρνητικές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στον διαγωνισμό PISA, όπου κύριος στόχος είναι η αξιολόγηση των μαθηματικών δεξιοτήτων που θα χρειαστούν μετέπειτα οι μαθητές ως ενεργοί πολίτες, είναι αποθαρρυντικές για τη μάθηση και διδασκαλία στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό που θα προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε είναι τα πραγματικά αίτια αυτών των αποτελεσμάτων και πώς η εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης μας οδήγησε εδώ. Φυσικά σε αυτό συνετέλεσε και η μορφή αξιολόγησης για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Μπορούν άραγε να παρθούν διαφορετικά μέτρα και να γίνουν διορθωτικές κινήσεις για τη βελτίωση του φαινομένου; Και αν ναι, τότε πώς;

Κεφάλαιο 1 Θεωρητικό πλαίσιο - Μεθοδολογία

Η σημασία των μαθηματικών έργων στη διδακτική πρακτική

1.1 Τι είναι τα μαθηματικά

Από την αρχαιότητα ακόμα ο μαθηματικός κόσμος προβληματίζεται για το «τι είναι τα μαθηματικά». Μία μερίδα τα εκλαμβάνει ως ένα σύστημα από μοντέλα που μελετά τους κανόνες της πραγματικότητας της φύσης, ενώ κάποιοι άλλοι ως διαδικασίες που σχετίζονται με ποσότητες και μεγέθη (Schoenfeld, 1992). Όπως σημειώνει και η Κολέζα (2006), οι διχογνωμίες μεταξύ όσων επιχειρούν να προσδιορίσουν τη φύση των μαθηματικών οφείλονται στο διαφορετικό τους υπόβαθρο, εμπειρίες και ερεθίσματα.

Κατά γενική ομολογία τα μαθηματικά αποτελούν μία ανθρώπινη δραστηριότητα εξαιρετικής σημασίας, ένα σύνολο από κανόνες και διαδικασίες που διαφωτίζουν τον κόσμο και αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι του πολιτισμού. Η αξία τους έχει αναγνωριστεί εκατοντάδες χρόνια τώρα, όμως σήμερα ειδικά είναι σαφές, όπως τονίζει και ο Μαντάς (1999), πως είναι ένα από τα πιο σημαντικά εφόδια που πρέπει να έχει ένα σκεπτόμενο μέλος της κοινωνίας. Ήδη από την εποχή που ξεκίνησε η βιομηχανική επανάσταση στα τέλη του 17^{ου} αιώνα, έγινε απαραίτητη η στοιχειώδης εκπαίδευση για να επιτευχθεί η παραγωγή των προϊόντων. Από τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο όμως και μετά, η παραγωγή έκανε αναγκαία την αυτοματοποίηση σε όλα της τα στάδια, με επακόλουθο η επιστήμη να γίνει κυρίαρχο τμήμα αυτής (Καζαντζής, 1984).

Η πρώτη επιστημολογική αντίληψη για τα μαθηματικά εμφανίζεται από τα χρόνια του Πλάτωνα ο οποίος τα θεωρούσε «ουράνια». Μέσω αυτών, «το πνεύμα εξυψώνεται από τον υλικό κόσμο σε αυτόν του είναι» (Μπερκέτης, 2009:1). Όπως γνωρίζουμε για τον πλατωνισμό, ο μαθηματικός δεν είναι σε θέση να εφεύρει τίποτε καθώς τα μαθηματικά είναι αυθύπαρκτα ως ανάμνηση και έμφυτα. Οφείλει να τα ανακαλύψει ή υπενθυμίσει και στη συνέχεια να τα παρουσιάσει στους μαθητές του ώστε να εξελίξουν την αφηρημένη σκέψη (Κολέζα, 2006). Αυτή η αντίληψη θα λέγαμε ότι είναι το θεμέλιο της παραδοσιακής διδασκαλίας που έχει ως επακόλουθο την επίλυση ασκήσεων (Stech, 2006). Κάποιοι ερευνητές θεωρούν πως τα μαθηματικά χρειάζονται για την ανακάλυψη μίας αλήθειας, ενώ κάποιοι άλλοι ισχυρίζονται πως αυτά αποτελούν την ίδια την αλήθεια που ανακαλύπτεται. Ένα κοινό πάντως χαρακτηριστικό στις φιλοσοφικές θεωρίες που αναπτύχθηκαν και που στηρίζεται στη θεωρία του πλατωνισμού, σύμφωνα με τον Ernest (1996), είναι πως αποτελούν ένα αντικειμενικό και καλά ορισμένο σύστημα γνώσης, βασισμένο στη λογική.

Με τον ορισμό της μαθηματικής επιστήμης ασχολήθηκαν επίσης και τα τρία φιλοσοφικά μαθηματικά ρεύματα τα οποία βασίζονται εν μέρει στον πλατωνισμό και στην ιδέα της ανακάλυψης (Κολέζα, 2006). Ο λογικισμός του Frege εστίασε στη λογική και τις αρχές που διέπουν τα μαθηματικά. Κατηγορήθηκε όμως από αρκετούς γιατί τα περιθώρια για εικασία και διαισθητική αντίληψη ήταν περιορισμένα. Ο φορμαλισμός του Hilbert από την άλλη, ναι μεν αναγνώριζε την αξία της λογικής, τόνιζε δε το θέμα των συμβόλων, την κατανόηση και την εργασία με αυτά. Το φιλοσοφικό αυτό ρεύμα του φορμαλισμού έκανε γνωστή την παρουσία του στην Ευρώπη τα μέσα του 20ου αιώνα, γνωστό και ως «Νέα Μαθηματικά» (Βρυώνης & Γούπος, 2009). Τέλος, ο κονστρουκτιβισμός του Piaget υποστήριξε ότι τα μαθηματικά αποτελούν νοητικές κατασκευές του μαθηματικού και ότι δεν εξαρτώνται από τη λογική αλλά η λογική είναι μέρος αυτών (Κολέζα, 2009). Οι μελετητές όμως συνέχισαν τις απόπειρες καθότι οι ορισμοί δεν κρίθηκαν επαρκείς. Χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε την ομάδα Bourbaki η οποία ισχυρίστηκε πως τα μαθηματικά αποτελούν την επιστήμη των δομών. Επίσης, προηγούνται της λογικής και είναι μέρος αυτής. Για αυτούς ακριβώς τους λόγους, τις δεκαετίες του 50 και 60, όπως θα δούμε, η διδασκαλία των μαθηματικών εστίασε στην κατανόηση των δομών σε θεωρητικό επίπεδο, και όχι τόσο σε πρακτικό. Ο Polya αντιθέτως επέμεινε στην πειραματική φύση των μαθηματικών και στο γεγονός ότι η ανάπτυξή τους είναι αποτέλεσμα συνεχών προσπαθειών και υποθέσεων προς απόδειξη. Οι ιδέες του Polya προωθήθηκαν από τον Lakatos ο οποίος προσέγγισε τη μαθηματική επιστήμη ως μια ανθρώπινη διανοητική δραστηριότητα, τα αποτελέσματα της οποίας μπορούν να διαψευστούν και αναθεωρηθούν και έτσι, με την αρωγή τους σήμερα, αυτή συνδέεται άρρηκτα με τη δραστηριότητα και κατασκευή.

Όπως θα μελετήσουμε και μετέπειτα, ο τρόπος παρουσίασης της σημαντικής αυτής επιστήμης των μαθηματικών στους διδασκομένους επηρεάζει άμεσα τη μάθηση (Boaler & Staples, 2008). Ο Hersh, χαρακτηριστικά, στο βιβλίο του «What is Mathematics Really?» τονίζει πως όσοι απορρίπτουν τα μαθηματικά, είναι γιατί τα διδάχθηκαν λανθασμένα στη σχολική αίθουσα. Η ομοιότητα που έχουν με αυτά της καθημερινής ζωής και εργασίας είναι ελάχιστη (Boaler, 2010). Οι μαθητές τα αντιμετωπίζουν ως ένα στατικό, οριοθετημένο σύστημα γεγονότων, εννοιών και διαδικασιών και όχι, όπως θα έπρεπε, ως μια δυναμική διαδικασία ανακάλυψης και δημιουργίας γνώσης μέσω δραστηριότητας.

1.1.1 Τα μαθηματικά ως δραστηριότητα

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, τα μαθηματικά αποτελούν δραστηριότητα του ανθρώπινου νου. Τι είναι όμως η δραστηριότητα και πιο συγκεκριμένα η μαθηματική δραστηριότητα; Σύμφωνα με τον Leont'ev (1972), η δραστηριότητα είναι μια διαδικασία που ξεκινά και ερμηνεύεται πάντα με ένα κίνητρο. Όπως σημειώνει η Τζεκάκη (2011), είναι ένα σώμα από δράσεις όπου το υποκείμενο έχοντας κάποια κίνητρα δουλεύει σ'ένα αντικείμενο έτσι ώστε να επιτευχθεί ο επιθυμητός στόχος. Τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση των στόχων μπορεί να είναι φυσικά υλικά, η γλώσσα ή τα μαθηματικά εργαλεία του ανθρώπου (Daniels, 2001).

Σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι να καλλιεργηθεί η μαθηματική σκέψη και σε αυτό μεγάλη βοήθεια προσφέρουν οι μαθηματικές δραστηριότητες. Ο

Freudenthal (1983) τις έχει συνδέσει με τη δράση για τον σχηματισμό μοντέλων για τη διαχείριση πραγματικών καταστάσεων. Ως μαθηματική δραστηριότητα μπορούμε να θεωρήσουμε μία κατάσταση – πρόβλημα ή τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος (Κολέζα, 1997). Τα απαραίτητα δομικά συστατικά της είναι μια περιεκτική, καλά διατυπωμένη εκφώνηση και να επιδέχεται διαφορετικές προσεγγίσεις. Ο λύτης πρέπει να αγνοεί τη διαδικασία επίλυσης στην πρώτη ανάγνωση και μόνο με τις ευκαιρίες για διερεύνηση που του δίνονται να πετυχαίνει τον τελικό στόχο. Οι δραστηριότητες τώρα που υπάρχουν μέσα στα σχολικά βιβλία αποτελούν ένα εργαλείο που διευκολύνει τους καθηγητές. Η ανάπτυξη όμως των μαθητών, υποστηρίζουν οι Christiansen & Walther (1986), δε μπορεί να επιτευχθεί μόνο με την ενεργοποίησή τους με τις εργασίες των σχολικών βιβλίων ή με επιμέρους εισαγωγή στοιχείων δραστηριοτήτων συσχετιζόμενων με συγκεκριμένες ενότητες.

Αυτό που είναι σημαντικό να τονισθεί είναι ότι ο τρόπος θεώρησης της μαθηματικής επιστήμης επηρεάζει άμεσα και τη στάση για τη διδασκαλία και τη μαθηματική δραστηριότητα (Τζεκάκη, 2011). Μια εργαλειακή αντίληψη έχει ως επακόλουθο αυτή να καταλήξει σε μια ρουτίνα αλγορίθμων που απομνημονεύθηκαν. Από την άλλη, μια κατασκευαστική τη μετασχηματίζει σε διαδικασία για δημιουργία γνώσης, ενώ μια ανακαλυπτική σε διαδικασία ανακάλυψης κανόνων (Stech, 2006). Η αντίληψη όμως και η γνώση διαμορφώνονται μέσα από την αλληλεπίδραση με τον κόσμο με τέτοιο τρόπο που το άτομο όχι μόνο ενημερώνεται, αλλά μετασχηματίζεται.

Πολλές διδακτικές προσεγγίσεις έχουν ως πρωταγωνιστή τις δραστηριότητες. Κατά την ενεργητική μάθηση που συνδέεται με αυτές, οι μαθητές είναι σε θέση να ερευνήσουν, αιτιολογήσουν, πειραματιστούν, επιχειρηματολογήσουν και να αυτονομηθούν. Το παιδί κατασκευάζει γνώση εικάζοντας, κρίνοντας, διατυπώνοντας ιδέες και ερωτήματα σχετικά με τα όσα μαθαίνει από τον διδάσκοντα, ο οποίος έχει δημιουργήσει δραστηριότητες βασισμένος στις συνθήκες και ανάγκες που προκύπτουν. Στόχος δεν είναι η άμεση απόκτηση μιας τελικής και ολοκληρωμένης γνώσης δηλαδή, αλλά η σταδιακή και συμπληρωματική δόμηση αυτής μέσω των προκαθορισμένων σταδίων από τον ενορχηστρωτή της δραστηριότητας και των διαδοχικών επιπέδων αφαίρεσης. Αντίθετα, η παθητική αφορά τη μεταφορά στοιχείων γνώσης προς τον διδασκόμενο και δεν αφήνει περιθώρια ελευθερίας για το χτίσιμο των γνωστικών επιπέδων (Μπαρκάτσας, 1999). Ο μαθητής γίνεται δέκτης μη αμφισβητούμενης γνώσης από τον πομπό δάσκαλο, το χρέος του οποίου φαίνεται ότι εξαντλείται στη μεταφορά πληροφοριών (Θωμαΐδης, 1999). Τα όρια φυσικά μεταξύ αυτών των δύο αντιλήψεων είναι κάποιες φορές δυσδιάκριτα, ενώ δεν είναι απίθανο να πάρουν διαφορετικό ρόλο από αυτόν για τον οποίο είχαν αρχικά σχεδιαστεί.

Έχει διαπιστωθεί πως η μάθηση σήμερα συνδέεται με τις αρχές της δραστηριότητας και κατασκευής. Η εκπαιδευτική κοινότητα οφείλει, εκτός των άλλων, να μεριμνήσει για δημιουργία και ανάθεση δραστηριοτήτων, προσαρμοσμένων ιδανικά στις ανάγκες του κάθε ατόμου. Όπως τονίζουν οι Davydov και Markova (1981), η δραστηριότητα πρέπει να αποκτήσει προσωπικό νόημα για τον διδασκόμενο καθώς μόνο έτσι μπορεί ο δεύτερος να αναπτυχθεί και να εξελιχθεί. Ακόμα και αν είναι σωστά σχεδιασμένες, η ένταξη και η χρήση αυτών μέσα στη σχολική καθημερινότητα δεν είναι κάτι που θα φέρει με σιγουριά τα επιθυμητά αποτελέσματα. Οι πεποιθήσεις των διδασκόντων, οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για αυτές, δυσχεραίνουν ακόμα περισσότερο το φαινόμενο. Συχνά διαπιστώνεται πως βαφτίζονται ως δραστηριότητες καταστάσεις κατευθυνόμενες από τον διδάσκοντα, μαθηματικά παιχνίδια χωρίς σαφή διδακτικό στόχο και ανοικτά προβλήματα που αφορούν την επανάληψη εφαρμογών ρουτίνας (Κολέζα, 1997). Ο τρόπος μάλιστα που επιλέγει ο εκπαιδευτικός να τις χειρίζεται, επιδρά άμεσα και στη συμπεριφορά των μαθητών (Doerr, 2006). Είναι λοιπόν απολύτως κατανοητό ότι ο ρόλος του δασκάλου είναι πρωταγωνιστικός και γι'αυτό πρέπει να ληφθούν όλα τα απαραίτητα μέτρα ώστε να ενισχυθεί ο ίδιος για τη διδασκαλία του. Σε αυτό θα βοηθήσουν η μείωση της ύλης, η επιμόρφωση των διδασκόντων, νέα σχολικά εγχειρίδια και μεταρρυθμιστικά μέτρα για την αξιολόγηση.

1.2 Μαθηματικά έργα

Στην εισαγωγή της παραγράφου αυτής, θα θέλαμε να επισημάνουμε πως ο όρος «μαθηματικό έργο», που εμφανίζεται σε όλη την έκταση της εργασίας, αποτελεί έναν ενιαίο τρόπο έκφρασης για όλα τα διαφορετικά εργαλεία μάθησης και αξιολόγησης που χρησιμοποιεί παραδοσιακά η διδασκαλία των μαθηματικών, όπως είναι οι ασκήσεις, οι ερωτήσεις, τα προβλήματα, οι δραστηριότητες κ.λπ. Όπως ορίζουν οι Polly & Casto (2019), τα μαθηματικά έργα είναι οποιεσδήποτε μαθηματικές δραστηριότητες ή προβληματικές καταστάσεις με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές μέσα στη σχολική αίθουσα. Έχουν εξαιρετική σημασία για τη μαθηματική δραστηριότητα και την κατασκευή γνώσης από τους μαθητές και απαιτούν έναν υψηλό βαθμό πειραματισμού, διερεύνησης και επικοινωνίας, τόσο μεταξύ των μαθητών αλλά και μεταξύ των μαθητών με τον εκπαιδευτικό. Ο λόγος που έχουν τόσο σημαντική θέση στη μάθηση είναι γιατί σηματοδοτούν τα ίδια τα μαθηματικά. Αποτελούν ένα εκπαιδευτικό εργαλείο που εξυπηρετεί σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη της μάθησης και διαμορφώνονται από τέσσερα συστατικά στοιχεία:

- έναν στόχο προς επίτευξη,
- κατάλληλες συνθήκες για να επιλυθεί το έργο,
- διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την επίτευξη του στόχου,
- τη σημασία που έχει αυτό για ολόκληρο το σύστημα της εργασίας μέσα στην τάξη (Doyle, 1988).

Η ενσωμάτωση κατάλληλων μαθηματικών έργων στην καθημερινή σχολική πρακτική είναι ένα σημαντικό εκπαιδευτικό μέσο υποστήριξης για τη γενική διαδικασία κοινωνικοποίησης, που είναι και βασικός ρόλος του σχολείου (Christiansen & Walther, 1986). Ο πυρήνας της εργασίας των μαθητών με τα μαθηματικά δομείται από αυτά. Επίσης επηρεάζουν τους διδασκόμενους καθώς στρέφουν την προσοχή τους σε συγκεκριμένες πτυχές του περιεχομένου και καθορίζουν τους τρόπους που επεξεργάζονται οι πληροφορίες (Doyle, 1983). Προκειμένου βέβαια να γίνει μια σωστή μελέτη της σχέσης μεταξύ των έργων και της μαθηματικής δραστηριότητας των διδασκομένων, θα πρέπει να μελετήσουμε και τη σχέση που έχουν αυτά με άλλους σημαντικούς παράγοντες της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως είναι οι εκπαιδευτικοί, οι μαθητές και τα αναλυτικά προγράμματα. Δεν πρέπει να μας απασχολούν τόσο ως προς τις πτυχές τους αλλά ως προς το δυναμικό που έχουν για τη δραστηριότητα των μαθητών.

Το είδος των έργων που οδηγούν σε δραστηριότητα και η συσχέτισή τους με τη γνώση που κατασκευάζεται είναι θέματα που απασχολούν τη μαθηματική εκπαίδευση (Kaldrimidou et al., 2008). Για να μπορέσουμε όμως να μελετήσουμε τη δυναμική τους, το πρωτεύον είναι να γίνει μια προσπάθεια ταξινόμησης αυτών. Ο διαχωρισμός τους σε ομάδες γίνεται βάσει διάφορων κριτηρίων, όμως αυτό που θα απασχολήσει εμάς είναι το ποιο κομμάτι της σκέψης ενεργοποιείται με την ενασχόληση με αυτά. Όπως σημειώνουν οι Hennigsen & Stein (1997), οι γνωστικές απαιτήσεις που έχουν διαχωρίζονται σε χαμηλότερου και υψηλότερου επιπέδου και εκτείνονται από απλή αποστήθιση και εφαρμογή κανόνων και διαδικασιών έως και αναλυτική και κριτική ικανότητα. Κάθε μία κατηγορία συνδέεται με διαφορετικές μεθόδους επίλυσης. Οι δύο πρώτες είναι χαμηλών απαιτήσεων, αφού το μόνο που ζητούν είναι η μηχανική εφαρμογή τύπων και η αποστήθιση, δηλαδή διαδικαστική γνώση. Σε πρώτο επίπεδο αποτελούν ένα μέσο για την εκμάθηση τύπων. Αυτά τα έργα απευθύνονται κατά πάσα πιθανότητα στις απαιτήσεις και στις ιδέες που έχουν οι σημερινοί διδάσκοντες για τον τύπο των ασκήσεων. Ο λύτης ανακαλεί από τη μνήμη του τεχνικές δοσμένες από άλλους, εφαρμόζει μηχανιστικά αλγορίθμους και δεν είναι σε θέση να ερευνήσει στρατηγικές εκτός πλαισίου. Ουσιαστικά ο μαθητής γνωρίζει εκ των προτέρων την απάντηση και ο καθηγητής προκαταλαμβάνει με έναν προφανή τρόπο την εξέλιξη της διδακτικής προσέγγισης. Η δραστηριότητα σε αυτά τα έργα βοηθά σε μια γνωστική ενοποίηση και παγίωση όλων όσων έχει ήδη αποκτήσει ο διδασκόμενος. Ωστόσο, δεν συμβάλλει στην πραγματική ανάπτυξη της γνώσης. Οι υπόλοιπες, που θεωρούνται υψηλών απαιτήσεων, ζητούν από τον μαθητή να έχει εννοιολογική γνώση του περιεχομένου για να κάνει συνδέσεις, αιτιολόγηση, απόδειξη και αναστοχασμό (Hsu, 2013). Ο λύτης συζητά και αλληλεπιδρά συνεργατικά μέσα στην τάξη με καθηγητές και συμμαθητές, επικοινωνεί, αναπτύσσει τη μαθηματική του σκέψη και λογική. Παρέχουν άριστες συνθήκες για γνωστική ανάπτυξη έτσι ώστε να χτιστεί νέα υποκειμενική γνώση αλλά και να αναδιοργανωθεί η προηγούμενη σε ένα διευρυμένο και ενοποιημένο σώμα γνώσης. Δεν αντιστοιχούν όμως στο μεγαλύτερο ποσοστό των σημερινών διδακτικών θεωρήσεων. Υπό αυτό το πρίσμα γίνεται δυνατή μια πιθανή ταξινόμηση αυτών σε ασκήσεις, έργα μοντελοποίησης, καταστάσεις βγαλμένες από την καθημερινότητα, προβλήματα κ.λπ. Μια άλλη ταξινόμηση των έργων που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιεί ο Polya μεταξύ των έργων ρουτίνας και μη ρουτίνας (Christiansen & Walther, 1986). Έτσι, στα έργα ρουτίνας συμπεριλαμβάνονται οι ασκήσεις αναγνώρισης, οι αλγοριθμικές και οι εφαρμογής. Στα έργα μη ρουτίνας από την άλλη ανήκουν τα διαδικαστικά προβλήματα, τα ανοικτού τύπου και οι προβληματικές καταστάσεις. Και οι δύο κατηγορίες μπορεί να θεωρηθεί ότι καλύπτουν τις συνήθεις εργασίες. Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει και για την ταξινόμηση των έργων σε κατηγορίες ανάλογα με τους σκοπούς που έχουν. Φυσικά, ακόμα και αν αρχικά το έργο κατασκευαστεί με υψηλές προδιαγραφές, είναι πιθανό να παρουσιασθεί με διαφορετικό τρόπο λόγω έλλειψης διδακτικού χρόνου, γνώσεων ή εμπειρίας από εκπαιδευτικούς ή/και μαθητές. Ο μαθητής για να πετύχει την ουσιαστική κατανόηση πρέπει να είναι σε θέση να ταξινομεί ένα έργο στην αντίστοιχη κατηγορία. Όπως ο Johanssen (2003) αναφέρει, είναι συνηθέστερο για έναν μαθητή να κάνει λάθος όταν δεν έχει κάνει σωστά την κατηγοριοποίηση του προβλήματος που έχει να αντιμετωπίσει.

Κάθε ένα έργο έχει διαφορετικές γνωστικές απαιτήσεις από τους μαθητές. Επηρεάζει τον τρόπο σκέψης, γι’αυτό και χρειάζεται προσοχή στην κατασκευή και χρήση αυτού. Οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι οι ασκήσεις δίνουν τη δυνατότητα, κυρίως σε μαθητές χαμηλότερων μαθηματικών ικανοτήτων, για εξάσκηση, εκτίμηση κατανόησης και μεγαλύτερη έτσι αίσθηση ικανοποίησης κατά την επίλυση αυτών (Anderson, 2003). Επίσης, μιας και τα εγχειρίδια είναι πλαισιωμένα με πληθώρα από ασκήσεις, διευκολύνονται κερδίζοντας πολύτιμο χρόνο. Η εξάσκηση σε διαδικαστικές ασκήσεις συνεισφέρει σε μικρό σχετικά βαθμό στη μάθηση των μαθηματικών και δεν αναπτύσσει νέα γνώση (Frobisher, 1994). Δεν πρέπει όμως να τις υποβιβάζουμε, ούτε να τις θεωρούμε υποδεέστερες. Απλά χρειάζεται να γίνει κατανοητό ότι στόχος τους είναι οι μαθητές να γίνουν ικανοί σε βασικές εφαρμογές. Χωρίς αυτές σαφέστατα δε μπορούν να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη, αλλά δεν εξυπηρετούν από την άλλη σε μη οικείες καταστάσεις (Schoenfeld, 1988). Τα ανοικτού τύπου τώρα προβλήματα απαιτούν πολύ χρόνο, μεγάλη αυτοπεποίθηση και υψηλού επιπέδου ικανότητες από τον εκπαιδευτικό. Τα ανοικτά προβλήματα είναι εκείνα που έχουν πολλές πιθανές λύσεις, πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης και εξήγησης (Stein & Lane, 1996). Θεωρείται ότι απευθύνονται σε ικανότερους μαθητές που έχουν τα εφόδια να φτάσουν τη μαθηματική τους σκέψη σε ανώτερα γνωστικά επίπεδα και να αναπτύξουν νέες στρατηγικές επίλυσης. Αυξανόμενη τάση σημειώνεται διαρκώς και για τα διερευνητικά έργα που αναπτύσσουν νέες στρατηγικές και κάνουν πιο εύκολη την αντιμετώπιση νέων καταστάσεων (Arcavi, 2002). Τα έργα με πολλές πιθανές λύσεις συνεισφέρουν στη μάθηση και προτρέπουν τους μαθητές να ερευνήσουν, επικοινωνήσουν, αναζητήσουν συνδέσεις και να γενικεύσουν. Δυσκολεύουν όμως αρκετά τους μαθητές οι οποίοι έχουν σχηματίσει τη λανθασμένη εικόνα ότι σωστή απάντηση είναι μόνο μία και πως πρέπει να την βρουν αμέσως. Δικαιολογημένη βέβαια αυτή τους η πεποίθηση, αφού σε αυτό το πλαίσιο γαλουχήθηκαν. Η έλλειψη, επιπρόσθετα, μαθηματικής γνώσης και εμπειρίας αποτελούν επιπλέον εμπόδια. Και αυτή η κατηγορία έργων δε φαίνεται πως χαίρει της προτίμησης της εκπαιδευτικής κοινότητας. Αναμενόμενο μιας και δε συνηθίζονται στα σχολικά εγχειρίδια, η εξέτασή τους και η συζήτηση στην τάξη κρίνονται απαιτητικές διαδικασίες και για ακόμα μία φορά κρίνεται αναγκαίο να υπάρχει υψηλό γνωστικό επίπεδο.

Το είδος του έργου επηρεάζει και το πού εστιάζει η μάθηση αλλά και το πώς εφαρμόζεται εκπαιδευτικά (Hsu, 2013). Αυτό που συνηθίζεται είναι ο δάσκαλος να παρουσιάζει ένα παράδειγμα έργου στον πίνακα ως μοντέλο με όλες τις απαραίτητες εξηγήσεις. Στη συνέχεια ακολουθεί η μετάδοση γνώσης με την ανάθεση δραστηριοτήτων ως εργασία για τους μαθητές. Μέσω αυτής της εργασίας οι μαθητές είναι σε θέση να μάθουν. Οι διδάσκοντες που έχουν περισσότερη αυτοπεποίθηση και υψηλότερη γνώση περιεχομένου χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό προβλήματα στην καθημερινή διδακτική τους πρακτική και δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές για συζήτηση και διατύπωση ερωτημάτων (Christiansen & Walther, 1986). Η επιλογή των έργων που κάνουν οι εκπαιδευτικοί αποτελεί πιθανότατα ένδειξη και των στάσεων που οι ίδιοι έχουν για τη διδασκαλία και τη μάθηση αλλά και των βιωμάτων που είχαν ως μαθητές. Είναι ευθύνη των εκπαιδευτικών να επιλέγουν μαθηματικά έργα τα οποία θα είναι αρκετά αποτελεσματικά, ώστε να ενισχύσουν τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών. Επίσης, είναι απαραίτητο να αφιερώνεται ο κατάλληλος χρόνος για την επίλυση αυτού μέσα στη σχολική αίθουσα. Βασική προϋπόθεση είναι ο διδάσκοντας να γνωρίζει της κατηγορίες των έργων. Διαφορετικά, όπως είναι προφανές, δε θα μπορέσει να πετύχει τον διδακτικό στόχο που κάθε διαφορετική κατηγορία μπορεί να πλαισιώσει. Εάν μείνει μόνο στις βασικές ομάδες που προσφέρουν τα σχολικά βιβλία, τότε δεν αναγνωρίζει τις διαφορετικές πτυχές αυτών και εμφανίζει έτσι και ο ίδιος σημαντικές επιστημολογικές και παιδαγωγικές ελλείψεις. Εάν πάλι θεωρεί ότι οι παραδοσιακοί αυτοί τύποι έργων συνδέονται με την καθημερινότητα, τότε μάλλον δεν έχει εντρυφήσει στην αναζήτηση – κατασκευή ρεαλιστικού μαθηματικού περιεχομένου. Οι διδάσκοντες τείνουν τις περισσότερες φορές να επιμένουν σε διαδικαστικά έργα λόγω της έλλειψης χρόνου και να επιλύουν οι ίδιοι τα πιο απαιτητικά, μη οικεία για τους ίδιους τους μαθητές (Stein & Lane, 1996). Τα μαθηματικά όμως που διδάσκονται στην τάξη, θα πρέπει επιτέλους να ξεφύγουν από τα στεγανά των στερεότυπων ασκήσεων, που στηρίζονται κυρίως στην απομνημόνευση. Πρέπει να είναι αρκετά αλλά όχι υπερβολικά σύνθετα και να δίνουν τη δυνατότητα για αυτενέργεια με τελικό στόχο τη δόμηση νέας γνώσης (Κολέζα, 1997). Στενόμυαλες και απομονωμένες πεποιθήσεις για αυτά δημιουργούν πολλές δυσκολίες. Ένα πολύ χαρακτηριστικό ζήτημα είναι ότι οι διδασκόμενοι αντιλαμβάνονται την επιστήμη των μαθηματικών ως μία συλλογή από έργα που με αρκετή εξάσκηση στη λύση αυτών, θα καταφέρουν να έχουν τα αναμενόμενα καλά αποτελέσματα στις εξετάσεις. Γιατί συμβαίνει αυτό; Όπως έχει ήδη επισημάνει ο Lenne (1969), κάθε υποενότητα συνοδεύεται από συγκεκριμένα έργα που κλιμακώνονται από πιο εύκολα σε πιο σύνθετα. Πώς λοιπόν οι μαθητές να μην τα βλέπουν ως μία δοσμένη λίστα από έργα; Κατευθύνονται από τους εκπαιδευτικούς να διαχειρίζονται όσο πιο γρήγορα γίνεται κάθε τέτοια υποενότητα λόγω της εξάσκησης και συνήθειας στην εφαρμογή, και χωρίς προσωπική δραστηριότητα. Η επιβράβευση έρχεται ως επακόλουθο στη βαθμολόγηση των τεστ αξιολόγησης και εξεταστικών θεμάτων. Ακριβώς λοιπόν για αυτόν τον λόγο είναι που θα πρέπει να δίνεται βαρύτητα σε διερευνητικές και κατασκευαστικές δραστηριότητες, καθώς και επίλυσης προβλημάτων.

Όπως έχει γίνει κατανοητό από τις προηγούμενες παραγράφους, ο τρόπος που τα έργα παρουσιάζονται στη σχολική αίθουσα και οι διδακτικοί άξονες βάσει των οποίων δομήθηκαν έχουν μεγάλο αντίκτυπο στην προαγωγή της μαθηματικής σκέψης των διδασκομένων. Αυτό τουλάχιστον υποδηλώνεται από τις πιο γνωστές διδακτικές προσεγγίσεις. Μία από αυτές είναι και η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME), που υπερτονίζει την αξία της ενασχόλησης των μαθητών με προβλήματα από την καθημερινή ζωή. Ο Schoenfeld (1992) υποστήριζε ότι η εργασία των μαθητών με την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων περιλαμβάνει προβλήματα που είναι μη οικεία και όχι απαραιτήτως συνδεδεμένα με μαθηματικά θέματα που έχουν ήδη μελετηθεί. Βασική της αρχή είναι αυτή της μαθηματικοποίησης, οριζόντιας και κάθετης. Οι δύο αυτές πτυχές δομούν μία δραστηριότητα όπου η ήδη αποκτηθείσα γνώση λειτουργεί ως σκαλοπάτι για τη δόμηση νέας. Είναι εξαιρετικά δύσκολο για τους εκπαιδευτικούς να κατασκευάζουν ρεαλιστικά προβλήματα για κάθε μία κατηγορία μαθητών ξεχωριστά, που να είναι αρκετά ενδιαφέροντα ώστε να προαχθεί η μαθηματική σκέψη, αλλά όχι και τόσο απαιτητικά που να απογοητεύσουν ίσως τους μαθητές. Σε αυτό φυσικά δε βοηθούν ούτε τα εγχειρίδια, ούτε ο χρονικός προγραμματισμός στα αναλυτικά προγράμματα, ούτε το βαθμοθηρικό σύστημα διδασκαλίας και εξετάσεων. Η σύγχυση όσον αφορά τη μαθηματική ικανότητα κάνει τα πράγματα ακόμη χειρότερα. Στη σχολική πρακτική, συνδέεται κακώς με την ταχύτητα και ακρίβεια στις πράξεις, κάτι που πλέον μπορεί να γίνει με τη βοήθεια αριθμομηχανών. Μαθηματικά μορφωμένος όμως δεν είναι αυτός που έχει πολλές γνώσεις στο αντικείμενο, αλλά αυτός που μπορεί να τις εφαρμόσει στις καταστάσεις που προκύπτουν (Paulos, 1996). Αποτέλεσμα όλων είναι να δίνονται πρόχειρα κατασκευασμένα ρεαλιστικά προβλήματα που μοιάζουν ψεύτικα για τα παιδιά, προκαλώντας έτσι επιπλέον διδακτικά εμπόδια. Τα ρεαλιστικά προβλήματα είναι μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα περίπτωση, γι’αυτό και θα τη μελετήσουμε εκτενέστερα παρακάτω.

1.2.1 Ρεαλιστικά προβλήματα

Ένας εξαιρετικά σημαντικός τύπος έργου που αφορά την έρευνά μας είναι το πρόβλημα. Η διερεύνηση της έννοιας του προβλήματος έχει μακρά φιλοσοφική παράδοση (Christiansen & Walther, 1986). Θα μπορούσαμε να πούμε πως το σύνολο των μαθηματικών έργων είναι σαν ένα δίπολο. Από τη μία πλευρά εντοπίζουμε εκείνα για τα οποία τα στάδια χειρισμού είναι διαθέσιμα και τυποποιημένα, δηλαδή τις ασκήσεις. Από την άλλη είναι τα μη οικεία, γνωστά και ως προβλήματα. Αυτοί οι δύο τύποι έργων αλληλοσυμπληρώνονται μέσα στη διδακτική πρακτική σαν το yin και το yang και παίζουν διαφορετικούς παιδαγωγικούς ρόλους.

Πρόβλημα, σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), ορίζεται εκείνο το μαθηματικό έργο που χρησιμοποιείται ως μέσο για διδασκαλία, εξάσκηση και αξιολόγηση της καλλιέργειας των μαθηματικών δεξιοτήτων. Ο Hiebert (όπως αναφέρεται στο Σταφυλίδου, 2007) το παρουσιάζει ως μια δραστηριότητα για την οποία οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί κάποιο συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης, ούτε έχουν απομνημονεύσει μια γνωστή, ορθή και ίδια μεθοδολογία. Ο υποψήφιος λύτης είναι σε θέση να χαρακτηρίσει ένα έργο ως πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψη τη δυσκολία που προκαλεί στον ίδιο. Παρά ταύτα, υπάρχει σύγκρουση μεταξύ των ερευνητών για το αν αυτό αντιπροσωπεύει πραγματικά το πρόβλημα. Ας μην ξεχνάμε ότι και μια αλγοριθμική ρουτίνα μπορεί να μετατραπεί σε Γολγοθά υπολογιστικά ή να είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. Είναι όμως αυτή πρόβλημα; Για να είναι λοιπόν μία κατάσταση προβληματική, πρέπει ο λύτης να έχει έναν καθορισμένο στόχο, να ενημερώνεται συνεχώς για αυτόν και να ενδιαφέρεται να τον επιτύχει. Ο λύτης με συνεχή προσπάθεια, διερεύνηση και δημιουργική σκέψη, κάνει δοκιμές για την επίτευξη του στόχου. Είναι απαραίτητο να προκαλείται διανοητικά για να απαντήσει στις ανοικτές ερωτήσεις που του τίθενται και για τις οποίες δεν έχει άμεσα διαθέσιμες μεθόδους επίλυσης (Blum & Niss, 1991). Αυτό που είναι σημαντικό επίσης να τονίσουμε είναι ότι το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από υποκειμενικότητα. Εάν δηλαδή μία κατάσταση θεωρείται προβληματική για έναν μαθητή, αυτό δεν αναιρεί το γεγονός ότι μια άλλη μερίδα συμμαθητών του την διαχειρίζεται με άνεση. Επίσης, ένα πρόβλημα είναι πιθανό να έχει και διαδικαστική πτυχή. Στην περίπτωση όμως που χαρακτηρίζεται μόνο από αυτή, τότε σαφέστατα αποτελεί μια απλή διαδικασία εφαρμογής – άσκηση και δεν είναι ικανό να προάγει υψηλότερου επιπέδου μαθηματική σκέψη.

Τα προβλήματα μπορούν να διαχωριστούν σε δύο τύπους, κλειστού και ανοικτού. Τα πρώτα επιλύονται με συγκεκριμένα βήματα ή χρήση ευρετικής στρατηγικής. Τα ανοικτά τώρα δεν έχουν έναν μοναδικό τρόπο λύσης. Ο λύτης έχει την ευχέρεια να εφαρμόσει διαφορετικές στρατηγικές και δε δεσμεύεται να χρησιμοποιήσει αποκλειστικά τη μέθοδο που έδειξε ο καθηγητής (Ρίζος, 2005). Μπορεί να σχηματίζονται μέσα σε πραγματικό πλαίσιο ή σε ανοικτό για εννοιολογική κατανόηση. Η επιλογή ανοικτών προβλημάτων στη διδασκαλία βελτιώνει τη στάση των παιδιών για τη μαθηματική επιστήμη, αφού τα προβλήματα που έχουν να αντιμετωπίσουν σχετίζονται άμεσα με τους ίδιους (Σκοπέτος, 2004). Η μαθηματική γνώση δεν αποκτάται με την εκμάθηση τεχνικών αλλά με τη διερεύνηση σε μη οικείες καταστάσεις. Έτσι, ο μαθητής αντιλαμβάνεται την αναγκαιότητα των μαθηματικών και αποκτά αυτοπεποίθηση για την αντιμετώπιση προβλημάτων στην καθημερινή του ζωή ως μέλος της κοινωνίας. Δε θα πρέπει όμως να συγχέουμε τα ανοικτά προβλήματα με τα έργα με ανοικτές, δηλαδή ασαφείς, εκφωνήσεις. Σε αυτά, τα δεδομένα είναι ελλιπή και ο φιλόδοξος λύτης πρέπει να κάνει χρήση της λογικής του. Αρκετά συχνά έχουν τη μορφή των πολλαπλών επιλογών, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στον μαθητή να απορρίψει κάποιες από τις προτάσεις. Τέτοια «ασαφή», όπως τα χαρακτηρίζει ο Ρίζος (2005), προβλήματα συναντάμε τα τελευταία χρόνια στις εξετάσεις για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Πόση ασάφεια όμως μπορεί να χωρέσει σε ένα αντικείμενο που δομείται από ακρίβεια, όπως είναι τα μαθηματικά;

Τα αναλυτικά προγράμματα προτείνουν τη χρήση έργων που απαιτούν υψηλές γνωστικές διαδικασίες, δηλαδή λήψη αποφάσεων για τη χρήση της γνώσης και των δεξιοτήτων όσον αφορά την επίλυση και την αιτιολόγηση. Μια χαρακτηριστική περίπτωση τέτοιων έργων είναι τα λεκτικά προβλήματα, τα οποία ενδιαφέρουν τη μαθηματική κοινότητα (Boonen et al., 2013) και εντοπίζονται στα σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Πολλές φορές μάλιστα κάνουν σύνδεση με άλλες επιστήμες και περιέχουν πολύπλοκα γλωσσολογικά στοιχεία. Τα μαθηματικά λεκτικά προβλήματα είναι ασκήσεις που παρουσιάζουν τις πληροφορίες ως κείμενο. Για να μπορέσει να μετασχηματιστεί ένα λεκτικό πρόβλημα σε μαθηματικό, ακολουθεί μια σύνθετη διαδικασία, κατά την οποία το πρόβλημα αποπλαισιώνεται, δηλαδή βγαίνει έξω από το συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς και αναπλαισιώνεται, εντάσσεται στο επικοινωνιακό πλαίσιο της σχολικής τάξης, μέσα στο οποίο κατανοείται και ερμηνεύεται ως μαθηματικό πρόβλημα (Dowling, 1998). Η σύνδεση των δραστηριοτήτων των μαθηματικών στην τάξη με την καθημερινή εμπειρία γίνεται με την αρωγή τέτοιων προβλημάτων τα οποία ενθαρρύνουν τους μαθητές σε δραστηριότητες μοντελοποίησης. Η επίλυσή τους εξαρτάται όχι μόνο από τις μαθηματικές ικανότητες του λύτη αλλά και από την ικανότητα κατανόησης του κειμένου. Για να θεωρούνται πετυχημένα, το κείμενο της εκφώνησής τους πρέπει να αποτελεί πρόκληση για τον μαθητή και αφετηρία για προβληματισμό. Οι μαθητές πρώτα χτίζουν ένα μαθηματικό μοντέλο ή αλλιώς μια αναπαράσταση ενός προβλήματος στη μαθηματική γλώσσα (Αρβανιτογέωργος & Βαλαριστός, 1997). Τα μοντέλα βοηθούν στο να αποκτήσουν τα μαθηματικά κάποια πραγματική υπόσταση για τους μαθητές (Kaur & Dindyal, 2010). Στη συνέχεια κάνουν τη λεγόμενη μοντελοποίηση, μεταμορφώνουν τη διατύπωση του προβλήματος σε ένα διάγραμμα που εμπεριέχει όλα τα βασικά στοιχεία αλλά και τις συνδέσεις μεταξύ αυτών. Έπειτα, με τη βοήθειά του, επιλέγουν τη διαδικασία επίλυσης που θεωρούν ότι αρμόζει. Όπως ορίζει και ο Lingefjärd (2006) τη μαθηματική μοντελοποίηση, είναι μια διαδικασία που περιλαμβάνει την παρατήρηση ενός φαινομένου, τη σύναψη σχέσεων, την εφαρμογή μαθηματικών αναλύσεων, την απόκτηση μαθηματικών αποτελεσμάτων και την επανεξέταση του μοντέλου. Οι αναγνωστικές ικανότητες κατανόησης πρέπει να είναι αναπτυγμένες για να είναι εφικτή η σύνδεση των πληροφοριών του προβλήματος. Συχνά δε, παρατηρείται να προσπερνάται η πρώτη φάση και να ασχολούνται κατευθείαν με πράξεις. Αυτό οφείλεται στην έλλειψη εμπειρίας και άγνοια. Αρκετές είναι και οι περιπτώσεις όπου οι μαθητές επιλέγουν βιαστικά να χρησιμοποιήσουν τα αριθμητικά δεδομένα της εκφώνησης, χωρίς πρώτα να κάνουν έναν διανοητικό μετασχηματισμό αναπαράστασης (Hegarty et al., 1995). Οι μαθηματικοί από την πλευρά τους δε συζητούν μέσα στην τάξη το θέμα των στρατηγικών ή του διαγράμματος, επομένως δυσχεραίνουν τον σχηματισμό σημασιολογικών και εννοιολογικών μοντέλων από τα παιδιά. Φαίνεται πως εστιάζουν στην ταχύτητα των απαντήσεων και στην ακρίβεια αυτών, δημιουργώντας περισσότερα εμπόδια.

Σύμφωνα με τον Wheatly (1991), τα καλώς ορισμένα μαθηματικά προβλήματα:

- Έχουν νόημα για τους μαθητές
- Διεγείρουν την περιέργεια, και όχι μόνο για την εύρεση μιας απάντησης
- Παρακινούν τους μαθητές να βρουν λύσεις
- Ενθαρρύνουν τους μαθητές για τη λήψη αποφάσεων
- Δεσμεύουν τη γνώση που ήδη έχουν οι μαθητές και ταυτόχρονα τους προκαλούν να σκεφτούν περισσότερο και διαφορετικά
- Τους οδηγούν σε μαθηματικές αλήθειες
- Δίνουν τη δυνατότητα για πολλαπλές λύσεις
- Υπόκεινται σε συνεχή έρευνα και παραγωγή νέων ερωτημάτων

Η σημασία της πρόκλησης του ενδιαφέροντος των μαθητών τονίστηκε και από τον Μαντά (1999), που επισημαίνει ότι τα καλώς σχεδιασμένα προβλήματα πρέπει να είναι πρωτότυπα και να αφορούν καθημερινές καταστάσεις, γνωστά και ως ρεαλιστικά προβλήματα. Εάν είναι εκτός πραγματικότητας, θα απωθήσουν τον μαθητή ως αδιάφορα και προφανώς θα δημιουργήσουν ακόμα περισσότερες δυσκολίες. Φυσικά ο χαρακτηρισμός ενός προβλήματος ως ρεαλιστικό είναι, και αυτός, υποκειμενικός. Επηρεάζεται από πολλά πράγματα, όπως είναι οι εμπειρίες, τα ερεθίσματα, ακόμα και η ηλικία του λύτη. Όπως υποστηρίζει η Van den Heuvel-Panhuizen (2002), ρεαλιστικό πρόβλημα δε σημαίνει ότι αυτό απλά πηγάζει από την καθημερινότητα, αλλά ότι συνδέεται ουσιαστικά με την καθημερινότητα του λύτη. Η άτυπη καθημερινή γνώση και τα ίδια τα ενδιαφέροντα των μαθητών αποτελούν το σημείο εκκίνησης των ρεαλιστικών προβλημάτων. Επιπλέον, πρέπει είναι μη τετριμμένα, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους μαθητές να εφαρμόσουν δικά τους μοντέλα λύσης και να αποκτήσουν σημαντικές μαθηματικές αρχές (Doorman et al., 2007). Με αυτό τον τρόπο καλλιεργείται η διερευνητική και κριτική σκέψη, στοιχεία αναγκαία για έναν μαθηματικά ικανό και ενεργό πολίτη. Επίσης, πρέπει να συνδυάζουν έννοιες και τεχνικές από διαφορετικές ενότητες της σχολικής ύλης.

Ο εκπαιδευτικός μέσα από τη διδασκαλία του θέλει να οδηγήσει τον διδασκόμενο στη δόμηση γνώσης μέσα από οικεία για εκείνον πλαίσια, ενώ ο μαθητής από τη μεριά του θέλει μέσα από οικείες για αυτόν καταστάσεις να προσθέσει νέα γνώση στην ήδη υπάρχουσα με αφαίρεση, διερεύνηση και γενίκευση (Αρβανιτογεώργος & Βαλαριστός, 1997). Για να γίνει αυτό, είναι απαραίτητη η χρήση προβλημάτων. Τα εγχειρίδια είναι εφοδιασμένα με πολλά στερεότυπα έργα, τα οποία οι μαθητές είναι ικανοί να λύσουν με αρκετή εξάσκηση. Αυτό που πετυχαίνουν όμως είναι η εκμάθηση κάποιων διαδικαστικών, αλγοριθμικών και τετριμμένων διαδικασιών, καθώς επίσης και η εφαρμογή των κατάλληλων τύπων. Κάποιοι ερευνητές, όπως οι Orton και Frobisher (1996), θεωρούν ότι τα παραπάνω αποτελούν προβλήματα ρουτίνας, όμως αυτό ισχύει σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Στην προσπάθεια λοιπόν να τραβήξουν το ενδιαφέρον των μαθητών, κάποιοι εκπαιδευτικοί εισάγουν στη διδασκαλία τους προβλήματα με δόση ρεαλισμού από την καθημερινή ζωή. Αυτή την απόπειρα ο Skovsmose (2002) την χαρακτήρισε ως ημιπραγματικότητα (semi-reality) καθώς δεν είναι σαφής αντιστοίχιση της καθημερινότητας αλλά μια προσέγγιση φτιαγμένη από τον καθηγητή για τις ανάγκες του εγχειριδίου και της διδασκαλίας. Επίσης, είναι ουσιώδες να αποσαφηνίσουμε τον χαρακτηρισμό της ρουτίνας. Είναι διαφορετικό ένα έργο να αποτελεί ρουτίνα γιατί ο μαθητής έχει κορεστεί να λύνει αντίστοιχα θέματα και διαφορετικό γιατί τον προτρέπει να εξασκηθεί σε αντίστοιχες διαδικασίες εφαρμογής. Κάτι που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι πρώτα γίνεται η διδασκαλία των νέων εννοιών και μετά η επίλυση προβλημάτων για την εφαρμογή τους. Ιδανικά όμως θα έπρεπε πιθανότατα μέσα από την επίλυση προβλημάτων να διδάσκονται οι έννοιες.

Ο Newman (1983) κατηγοριοποίησε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων σε πέντε ομάδες λαθών. Τα λάθη αυτά είναι: ανάγνωσης, κατανόησης, μετασχηματισμού, διαδικαστικών δεξιοτήτων και κωδικοποίησης. Οι περισσότερες αβλεψίες των μαθητών εντοπίζονται στα πρώτα στάδια της επίλυσης που αφορούν την κατανόηση, ενώ σε αυτό δυσχεραίνει την κατάσταση η λεκτική διατύπωση (Bernando, 1999). Η ανάπτυξη των ικανοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων είναι κάτι που πρέπει να απασχολήσει τους ιθύνοντες της μαθηματικής εκπαίδευσης σήμερα δεδομένης της μαθηματικής αξίας τους.

1.2.2 Μοντελοποίηση

Υπάρχει μια γενικότερη στάση για τα μαθηματικά που εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της σχολικής ζωής και αυτή είναι πως τα σχολικά μαθηματικά δε συνδέονται με την πραγματική ζωή. Τα μαθηματικά επομένως προβλήματα που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία κατά τη διδασκαλία δεν ενσαρκώνουν πραγματικές καταστάσεις, παρά μόνο επινοήσεις του εκπαιδευτικού ή των σχολικών βιβλίων, ώστε να εξυπηρετούν τις ανάγκες του μαθήματος.

Η επίλυση μαθηματικών έργων που σχετίζονται με καθημερινές καταστάσεις απαιτεί αλληλεπίδραση μεταξύ της μαθηματικής επιστήμης και της ρεαλιστικής πραγματικότητας (Schwarzkopf, 2007). Αυτή είναι και μια περιγραφή που χαρακτηρίζει συχνά τη μοντελοποίηση (Maass, 2010). Η διαδικασία μετατροπής ενός προβλήματος σε μαθηματική γλώσσα, γνωστή και ως μοντελοποίηση, συμβαίνει αιώνες τώρα, ακόμα και ασυνείδητα. Χωρίς αυτή δε μπορεί να επιτευχθεί η μαθηματικοποίηση της πραγματικότητας, δηλαδή το πέρασμα από τον πραγματικό κόσμο στο συμβολικό κόσμο των μαθηματικών. Είναι πολύ σημαντικό για τον μαθητή να μπορεί να μεταφέρει τις γνώσεις του σε ένα νέο πλαίσιο και νέες καταστάσεις, πράγμα που αποτελεί και βασικό στόχο της διδασκαλίας. Η μοντελοποίηση μαζί με τη μαθηματικοποίηση, η οποία αναφέρθηκε και παραπάνω, είναι έννοιες που συνδέονται με τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση.

Για να εντοπίσουμε όμως την ένταξή της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θα πρέπει να μελετήσουμε την εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης στην πορεία του χρόνου. Έτσι, διαπιστώνουμε πως μετά το ανεπιτυχές κύμα των Νέων Μαθηματικών, τη σκυτάλη στα τέλη του ’70 πήρε μια θεωρία που εστίαζε, μεταξύ άλλων, στην επίλυση προβλήματος, άρα και στη μοντελοποίηση. Η τελευταία είναι μία δύσκολη διαδικασία καθώς πρέπει να χρησιμοποιηθούν μαθηματικοί όροι αλλά να διατηρηθούν τα αρχικά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Απαραίτητη είναι η κριτική και διερευνητική μαθηματική σκέψη, γι’αυτό και με τον τρόπο αυτό καλλιεργείται. Οι μαθητές εξασκούνται ταυτόχρονα στη γλώσσα και στα μαθηματικά σύμβολα, ενώ η προσέγγιση αυτή φαίνεται πως ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση και όχι απλά την αποστήθιση (Βοσνιάδου, 1998).

Η καθημερινή πρακτική στη σχολική αίθουσα είναι αυτή που δημιουργεί το κλίμα μέσα στο οποίο οι μαθητές θα κατανοήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο. Ο εκπαιδευτικός, ως συνηθίζεται, παρουσιάζει σε κάθε διδασκαλία του ένα συγκεκριμένο τμήμα μιας ευρύτερης θεωρίας ενός κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου, που θα μελετηθεί και θα εξεταστεί στη συνέχεια με βήματα προδιαγεγραμμένα από τον ίδιο. Τα μαθηματικά όμως που εντοπίζονται στα πραγματικά προβλήματα ως αξιόλογη διαδικασία νοητικής άσκησης διαφέρουν σ’ένα πολύ σημαντικό σημείο, αυτό της «ασάφειας» στην εκφώνηση. Χρειάζεται δηλαδή μεγάλη προσοχή στη διατύπωση υποθέσεων για την αποσαφήνιση του σκοπού και την επαναδιατύπωση του προβλήματος. Έπειτα, ακολουθεί ο σχηματισμός του μοντέλου του προβλήματος με τη βοήθεια μεταβλητών και των μεταξύ τους σχέσεων. Τέλος, η επίλυση θα πρέπει να δώσει αποτελέσματα στηριζόμενα στη λογική και το πλαίσιο του πραγματικού, ειδάλλως η όλη διαδικασία θα πρέπει να επαναληφθεί. Αυτό που θα πρέπει να επισημάνουμε σχετικά με τη μοντελοποίηση είναι πως αφορά κυρίως την ανακύκλωση μεταξύ πραγματικού και μαθηματικού κόσμου και επομένως τις δραστηριότητες που μεσολαβούν, και όχι τόσο το ίδιο το μαθηματικό περιεχόμενο. Τα παραπάνω είναι ζητήματα που θα μελετήσουμε και σε επόμενη ενότητα, όπου θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα του μαθηματικού διαγωνισμού PISA, ο οποίος στηρίζεται στη μοντελοποίηση.

1.2.3 Παράδειγμα και αντιπαράδειγμα

Τα τελευταία χρόνια η μαθηματική εκπαίδευση δείχνει μεγάλο ενδιαφέρον για μελέτες που αφορούν το παράδειγμα και την εξήγηση μέσω αυτού (Bills et al., 2006). Παράδειγμα είναι μία ειδική περίπτωση ενός γενικότερου πλαισίου απ’ όπου έχουμε τη δυνατότητα να αιτιολογήσουμε και να εξάγουμε γενικά συμπεράσματα (Zodik & Zaslavsky, 2008). Αν και η χρήση παραδειγμάτων και η μοντελοποίηση μοιάζουν να είναι πιο σύγχρονες προσεγγίσεις, εντούτοις η ύπαρξη αρχαίων μαθηματικών κειμένων καταδεικνύει ότι χρησιμοποιούνταν λυμένα παραδείγματα ως πρότυπα για εκμάθηση κανόνων. Υπάρχουν μάλιστα περιπτώσεις σε βαβυλωνιακές πινακίδες, όπου υποσημειώνονται σχόλια ή μετέπειτα σε άλλα μαθηματικά αρχεία, όπου γίνονται υποδείξεις πώς αντίστοιχα μπορούν να λυθούν και άλλες παρόμοιες περιπτώσεις.

Ήδη από τον 16ο αιώνα οι μαθηματικοί άρχισαν να σημειώνουν την ανάγκη για χρήση παραδειγμάτων στη μάθηση (Witmer, 1968). Μία τέτοια περίπτωση ήταν ο Cardano που δεν πίστευε στην παρουσίαση μίας γενικής μεθόδου, παρά στην παρουσίαση παραδειγμάτων με εξηγήσεις και σχολιασμό. Αργότερα, τον 18$^{\text{ο}}$ αιώνα, αναπτύχθηκαν δύο διαφορετικές θεωρήσεις σχετικά με το αν πρέπει οι κανόνες να προηγούνται ή να έπονται των επιλυμένων παραδειγμάτων. Στις αρχές του 19$^{\text{ου}}$ αιώνα ο De Morgan επεσήμανε τη σημασία της κατασκευής των παραδειγμάτων από τον μαθητή τονίζοντας ότι μόνο τότε έχει πραγματικά εμπεδώσει ένα μαθηματικό αντικείμενο. Τα επόμενα χρόνια το γεγονός αυτό εντάθηκε και ο σχεδιασμός τους αποτέλεσε κεντρικό θέμα στη διδακτική τους χρήση. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτέλεσε ο Polya, μέσα από τα έργα του οποίου διαφαινόταν το μεγάλο βάρος που ο ίδιος έριχνε στον σχηματισμό προβλημάτων αντίστοιχων με δοσμένα παραδείγματα. Ο Polya αρκετές φορές έδινε μακρές ακολουθίες από ασκήσεις με αφορμή μία ιδέα και έπειτα δημιουργούσε γενικεύσεις. Έτσι, προκαλούσε κίνητρο στους αναγνώστες για διερεύνηση και αιτιολόγηση. Μέσα από το ειδικό άλλωστε μπορεί το άτομο επαγωγικά να γενικεύσει και να κατανοήσει στην ολότητα την ενότητα που μελετά.

Τα παραδείγματα παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση καθώς βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών μέσα από τη χρήση τους σε περίπλοκα μαθηματικά έργα όπου παρουσιάζονται μέθοδοι, τεχνικές, ακόμα και αιτιολόγηση και αποδείξεις. Μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές. Υπάρχουν παραδείγματα, όπου παρουσιάζονται έννοιες και άλλα, όπου εφαρμόζονται συγκεκριμένες διαδικασίες. Ίσως έχουν τη μορφή δοσμένων λυμένων ασκήσεων ή ίσως παρέχονται ως εξάσκηση για τους μαθητές στο σπίτι. Γι' αυτό και πρέπει να αποσαφηνισθεί εάν η αναφορά μας σε παραδείγματα αντιστοιχεί σε διαδικασίες που έχουν εφαρμοσθεί και παρουσιάζονται από κάποιον ή σε έργα που δίνονται ως μελέτη για τα παιδιά. Και στις δύο περιπτώσεις πάντως επιτρέπουν την επικοινωνία μεταξύ καθηγητή και μαθητή (Peled & Zaslavsky, 1997). Όταν λοιπόν συναντάται μία πρωτόγνωρη κατάσταση ή μία δυσκολία, τότε ο εκπαιδευτικός συνηθίζεται να κατασκευάζει ένα παράδειγμα για να γίνεται αυτή πιο οικεία. Τότε όλες οι πτυχές του επηρεάζουν τη γνώση και μετάγνωσή μας (Sun, 2011), δηλαδή την επίγνωση του τι ξέρουμε και τι όχι. Με κάθε νέο παράδειγμα, νέα γνώση έρχεται να συμπληρώσει την προηγούμενη και να την ολοκληρώσει (Tall & Vinner, 1981). Οι μαθητές μέσα από όλη αυτή τη διαδικασία μετατρέπουν τη δοθείσα προβληματική κατάσταση σε περισσότερο γνώριμη. Επομένως, τους δίνεται η αίσθηση ότι γίνονται και οι ίδιοι ερευνητές και βλέπουν το πρόβλημα με μια ματιά πιο κριτική. Μέσω παραδειγματικών περιπτώσεων είναι πλέον αρκετά ικανοί ώστε να συμπεράνουν γενικούς κανόνες και μαθηματικές αλήθειες.

Πολλοί είναι εκείνοι οι εκπαιδευτικοί που τονίζουν τη σημασία των παραδειγμάτων στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και γενικά στην κατανόηση των μαθηματικών. Η σειρά με την οποία παρουσιάζονται κατά τη διδακτική πρακτική τα παραδείγματα, οι έννοιες, τα θεωρήματα, οι αποδείξεις κ.ο.κ. επηρεάζουν τη διδασκαλία και μάθηση. Στην πάροδο του χρόνου έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες για την εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης, χωρίς όμως τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι τα παραδείγματα από μόνα τους δεν είναι τόσο σημαντικά, όσο ο τρόπος που αυτά μελετώνται και γίνονται αντιληπτά. Είναι πολύ ουσιώδη για την επικοινωνία και τη σε βάθος κατανόηση (Ball, 1988), γι'αυτό και η κατασκευή τους είναι μια εξαιρετικά απαιτητική εργασία. Η παροχή από τον εκπαιδευτικό έτοιμων και επιλυμένων παραδειγμάτων διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στη μάθηση. Συνεπώς, η επιλογή τους πρέπει να είναι εξαιρετικά προσεκτική. Οι διδάσκοντες ή οι συγγραφείς οφείλουν να ερευνήσουν πριν κατασκευάσουν τα παραδείγματα, έτσι ώστε να επιτρέψουν στους μαθητές να απαλείψουν τα όποια εμπόδια έχουν και να δομήσουν νέα γνώση. Κάθε κατηγορία μαθητών, κάθε διαφορετική ενότητα, διαφορετικός διδακτικός στόχος και χρονική στιγμή απαιτούν διαφοροποιημένη εφαρμογή. Οι διδασκόμενοι είθισται να λαμβάνουν τα λυμένα παραδείγματα και να τα χρησιμοποιούν ως πρότυπο-μοντέλο για μελλοντικές καταστάσεις. Μαθαίνουν δηλαδή με επανάληψη και απομνημόνευση (Rowland & Zaslavsky, 2005). Οι Liz et al. (2006, σ.128) παραπέμπουν στον Wallis που υποστηρίζει ότι η κατηγοριοποίηση αυτή σαφέστατα διευκολύνει και δίνει κατευθύνσεις, δυστυχώς όμως, ταυτόχρονα, δεν επιτρέπει τη διερευνητική προσέγγιση και την ανακατασκευή τελικά της γνώσης. Οι μαθητές δεν πρέπει να λαμβάνουν ως παθητικοί δέκτες τα δοθέντα από τον καθηγητή παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, γιατί μόνο όταν είναι σε θέση να σχηματίζουν τα δικά τους, έχουν πραγματικά κατανοήσει. Δυστυχώς όμως σπάνια ζητείται από τους μαθητές η προσωπική κατασκευή.

Το αντιπαράδειγμα τώρα από την άλλη είναι μία έννοια που χρησιμοποιείται εδώ και πολλά χρόνια, με απαρχές τη θεωρία της λογικής, αλλά σαν μαθηματικός όρος εφευρέθηκε πιο πρόσφατα. Από την αρχαιότητα ακόμα γνωρίζουμε από τον Πρόκλο ότι ο Ευκλείδης έγραψε τα «Ψευδάρια» μέσα από τα οποία προσπάθησε να εξασκήσει τους μαθητές του στην εύρεση λαθών. Σπουδαίοι μαθηματικοί διατύπωσαν τους επόμενους αιώνες εικασίες οι οποίες όμως καταρρίφθηκαν με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων. Το 1976 δημοσιεύτηκε το βιβλίο του Lakatos, με τίτλο «Αποδείξεις και ανασκευές», μέσα από το οποίο ο συγγραφέας εκφράζει τη διαφωνία του με τη φορμαλιστική τυπική απόδειξη. Το έργο αφορά έναν φανταστικό διάλογο που εξελίσσεται μέσα στην αίθουσα και αποσκοπεί στην αναπαράσταση των προσπαθειών που κατέβαλε η μαθηματική κοινότητα στην πορεία του χρόνου για την απόδειξη μιας εικασίας που αναφέρεται αρχικά σε μια απλή ιδιότητα των κυρτών πολυέδρων, αλλά εξελίσσεται σε πρόβλημα της αλγεβρικής τοπολογίας και οι οποίες προσπάθειες συνεχώς καταρρίπτονταν με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων. Σύμφωνα με τον Lakatos (1996), είναι λάθος να νομίζουμε πως ένα θεώρημα αληθεύει πάντα. Το ορθό είναι να πιστεύουμε πως δεν έχει βρεθεί ακόμα εκείνο το αντιπαράδειγμα που θα το καταρρίψει. Έτσι, ο αρχικός ορισμός αποτελεί μια εικασία ορισμού που μπορεί με τη συνεισφορά ενός αντιπαραδείγματος, είτε να αναθεωρηθεί είτε να διαψευσθεί. Μέσα λοιπόν από τις αποδείξεις και τις ανασκευές, η επιστήμη των μαθηματικών αναπτύσσεται. Η ανάπτυξη αυτή δε γίνεται μηχανιστικά, επιβάλλοντας αλήθειες και αδιαμφισβήτητα θεωρήματα, αλλά με δοκιμή και κριτική. Πώς ορίζεται όμως το αντιπαράδειγμα; Όπως σημειώνει ο Πλατάρος (2007, σ.1), ο μαθηματικός ορισμός του αντιπαραδείγματος είναι: «Εάν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\forall x{:}P(x)$» είναι ψευδής, πρέπει κι αρκεί να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\exists x{:}\neg P(x)$» είναι αληθής. Δηλαδή, πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο x_0 του σχετικού συνόλου αναφοράς έτσι ώστε η $\neg P(x_0)$ να είναι αληθής. Το x_0 θα λέγεται τότε αντιπαράδειγμα στην πρόταση «$\forall x{:}P(x)$».». Για τους Zodik και Zaslavsky (2008) το αντιπαράδειγμα εμπίπτει στην έννοια του παραδείγματος. Είναι ένα παράδειγμα που έρχεται σε αντίθεση με την καθολική ισχύ της πρότασής του (Πούλος, 2009). Στα Μαθηματικά, η χρήση του αντιπαραδείγματος αποτελεί μια αποδεικτική διαδικασία κατά την οποία απορρίπτεται μια αρχική εικασία. Ενισχύει την εμβάθυνση στην εννοιολογική κατανόηση ενός μαθηματικού αντικειμένου και γι’αυτό η χρήση του κρίνεται απαραίτητη στα σχολικά βιβλία. Μόνο έτσι, με τη μελέτη όλων των πιθανών περιπτώσεων, οι διδάσκοντες θα αποκτήσουν συνολική εννοιολογική εικόνα. Για να κατασκευαστεί ένα αντιπαράδειγμα, πρέπει να ληφθεί ένα παράδειγμα και να τροποποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρει αυτή τη μορφή. Η κατασκευή φυσικά αυτή είναι επίπονη, χρονοβόρα και απαιτεί διερεύνηση και πειραματισμό. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να εντρυφήσει στα αντιπαραδείγματα και να προτρέψει τους μαθητές του για τη χρήση τους. Με αυτό τον τρόπο μπορούν να προκληθούν γνωστικές συγκρούσεις στον μαθητή σε σχέση με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις, να επιβεβαιωθούν ή να καταρριφθούν οι όποιες υποθέσεις γίνονται κατά τη διδασκαλία και να δομηθεί η νέα γνώση, όπως ακριβώς προτείνει το κονστρουκτιβιστικό πρότυπο.

Οι μαθητές στην Ελλάδα φαίνεται πως δεν είναι εξοικειωμένοι με τέτοιες τεχνικές. Αν και οι οδηγίες διδασκαλίας αναφέρουν ρητά τη διδασκαλία της έννοιας του αντιπαραδείγματος στην Α΄ Λυκείου και μάλιστα υπάρχει σχετική εφαρμογή στο σχολικό βιβλίο (σελ. 49), ίσως έχει υποτιμηθεί η αξία της. Οι εκπαιδευτικοί προτιμούν, αντί αυτών, τη θεωρία, προκειμένου να καταρρίψουν τους λανθασμένους ισχυρισμούς των μαθητών τους (Μοσχονάς, 2017). Η κατάσταση αυτή όμως μάλλον άρχισε να διαφοροποιείται από το 2017, καθώς τα αποτελέσματα των πανελληνίων εξετάσεων του 2017 για το Α2 ερώτημα αποτέλεσαν αποδεικτικό στοιχείο του προβλήματος. Το ερώτημα που δόθηκε στους μαθητές ήταν:

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

"Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό".

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (1μ)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (3μ)"

Σε έρευνα των Θωμαΐδης et al. (όπως αναφέρεται στο Καλέσης & Χατζηγεωργίου, 2018), στο 59% του συνόλου των γραπτών απαντήθηκε σωστά ότι ο ισχυρισμός ήταν Ψευδής, αλλά μόνο στο 15% δόθηκε ορθή αιτιολόγηση έτσι ώστε να λάβουν οι εξεταζόμενοι όλες τις μονάδες (δηλαδή από όσους γνώριζαν ότι η πρόταση είναι ψευδής, μόνο ένας στους πέντε μπορούσε να το αιτιολογήσει). Σημαντικό στοιχείο μάλιστα είναι ότι το 21% του συνόλου των γραπτών βαθμολογήθηκε με 0 σε αυτό το ερώτημα. Τα αποτελέσματα αυτά, δεδομένης της εκπαιδευτικής πολιτικής και της στάσης ίσως των εκπαιδευτικών, δε θα έπρεπε να μας ξενίσουν. Το σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου εμπεριέχει αυτούσια την αιτιολόγηση που ζητήθηκε με τη χρήση αντιπαραδείγματος. Το μεγάλο λοιπόν ποσοστό αποτυχίας στον εν λόγω ερώτημα καταδεικνύει με σαφήνεια την υποτίμηση του σχολικού εγχειριδίου από εκπαιδευτικούς και μαθητές. Η πρωτότυπη αυτή κίνηση των θεματοδοτών αποδείχθηκε πως σε καμία περίπτωση δεν ήταν τυχαία ή απερίσκεπτη, αλλά ίσα-ίσα αποτέλεσε προσπάθεια εναρμόνισης με τους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων. Τις επόμενες δύο χρονιές που ακολούθησαν, το 2018 και 2019, το πρώτο θέμα των πανελληνίων εξετάσεων ζητούσε και πάλι από τους μαθητές την αιτιολόγηση με χρήση αντιπαραδείγματος, κίνηση που προφανώς είχε και αντίκτυπο στη διδασκαλία. Οι εκπαιδευτικοί, στην προσπάθειά τους να προλάβουν τις εξελίξεις και να προετοιμάσουν όσο το δυνατόν καλύτερα τους υποψηφίους, άρχισαν να δίνουν μεγαλύτερη βαρύτητα στο αντιπαράδειγμα, γεγονός που αποδεικνύεται και από τις βελτιωμένες επιδόσεις του 2018 και 2019 στο αντίστοιχο ζήτημα. Τα νέα βοηθήματα που κυκλοφόρησαν έκτοτε ενισχύθηκαν με την αντίστοιχη μεθοδολογία, ενώ πολύ εύκολα μπορεί ο αναγνώστης σήμερα να εντοπίσει προτεινόμενες συλλογές θεωρητικών θεμάτων με αντιπαραδείγματα στο διαδίκτυο από συναδέλφους εκπαιδευτικούς που θέλουν να διευκολύνουν καθηγητές και μαθητές. Και εδώ τίθεται το εύλογο ερώτημα. Έπρεπε να προηγηθεί η απαίτηση από τους θεματοδότες για τη χρήση αντιπαραδειγμάτων για να δώσουμε έμφαση σε αυτά; Και ακόμα και έτσι, θα πρέπει να αναρωτηθούμε αν μιλάμε για ουσιαστική εννοιολογική κατανόηση ή αναφερόμαστε και πάλι σε συλλογές υποψήφιων για τις εξετάσεις θεμάτων με έτοιμες, δοσμένες αιτιολογήσεις με τη βοήθεια αντιπαραδειγμάτων. Ο σκοπός ίσως αγιάζει τα μέσα, ίσως και όχι, πάντως είναι σαφές ότι μόνο μετά τα αρνητικά αποτελέσματα των εξετάσεων, δόθηκε η ανάλογη προσοχή στην έννοια του αντιπαραδείγματος.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, η αποδεικτική διαδικασία, όπως είναι και το αντιπαράδειγμα, έχει πολύ περιορισμένο ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η βαρύτητα στη διδασκαλία της τυπικής απόδειξης πέφτει στις τάξεις του Λυκείου. Ταυτόχρονα όμως, στις ίδιες αυτές τάξεις η διδασκαλία της υποβαθμίζεται, καθώς αφαιρούνται πολλές αποδείξεις από τη μεγάλη σε έκταση ύλη και αρχίζει να κυριαρχεί η ασκησιολογία για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, η κατασκευή αντιπαραδειγμάτων ανήκει στα μαθηματικά έργα υψηλότερων γνωστικών απαιτήσεων που είναι μη οικεία στους μαθητές. Το Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα υποβαθμίζει τη διδασκαλία της απόδειξης και κατ'επέκταση την εννοιολογική κατανόηση και δίνει βαρύτητα στην εκμάθηση των τεχνικών, δηλαδή στο φαινόμενο της ασκησιολογίας. Αν όμως οι μαθητές διδάσκονται μόνο εφαρμογές και μεθόδους επίλυσης χωρίς τεκμηρίωση και απόδειξη, τότε η διδασκαλία καταλήγει μάλλον δογματική (Ρίζος, 2005).

1.3 Μαθηματικά έργα στη διδασκαλία και τις εξετάσεις

Η διδασκαλία των μαθηματικών δεν αφορά μόνο την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των νέων αλλά έχει επηρεάσει σε αρκετές περιπτώσεις και την ίδια την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. Χαρακτηριστικά μπορούμε να αναφέρουμε διάφορα παραδείγματα που συνδέονται με την εξέλιξη των μαθηματικών. Το 250 μ.Χ. ο Διόφαντος ο Αλεξανδρινός, γνωστός και ως «πατέρας της άλγεβρας» λόγω του έργου του με τίτλο «Αριθμητικά», ανέπτυξε τις αρχές της άλγεβρας που ήταν βασισμένες στο συμβολισμό και την έννοια του αγνώστου. Ο Dedekind τον 19^{ο} αιώνα στο έργο του "Essays on the theory of numbers" εισήγαγε τις τομές στους ρητούς προκειμένου να κατασκευάσει τους πραγματικούς αριθμούς, έμπνευση που πήρε από τον Εύδοξο, μαθητή του Πλάτωνα. Και τα παραδείγματα αυτά είναι μόνο μερικά από τη βιβλιογραφία.

Ένας εκπαιδευτικός οφείλει να είναι ερευνητής μα πάνω απ'όλα διδάσκαλος (Δουγαλής, 2000). Η διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική αίθουσα είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες για την κατανόηση της μάθησής τους από τους διδασκόμενους, γεγονός που καταδεικνύεται από τα αποτελέσματα στην εξέλιξη των μαθητών. Η διδασκαλία αποτελεί μία αλληλεπιδραστική διαδικασία μεταξύ καθηγητών και μαθητών μέσα στην τάξη με στόχο την επίτευξη των μαθησιακών στόχων. Όπως μάλιστα σημειώνει ο Wittrock (1986), δεν επηρεάζει απευθείας τη μάθηση, αλλά επηρεάζει τη σκέψη που με τη σειρά της έχει επίδραση στην επίδοση και τη μάθηση.

Σήμερα, η διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται δυστυχώς πως εστιάζει σε διαδικαστικές δεξιότητες και εκμάθηση χειρισμού συμβόλων (Engelbrecht et al., 2009). Είναι δηλαδή προσανατολισμένη σ'ένα πιο φορμαλιστικό πρότυπο. Οι φορμαλιστές, όπως γνωρίζουμε, θεωρούν τα μαθηματικά ένα σύστημα αξιωμάτων και θεωρημάτων που οι μαθητές μετά την εκμάθηση του, μπαίνουν στη διαδικασία να το εφαρμόσουν. Αυτή η θεώρηση σχετίζεται και με το κύμα των Νέων Μαθηματικών και έρχεται σε αντίθεση με τη ρεαλιστική θεώρηση του Freudenthal. Όταν διαπιστώθηκε ότι τα αποτελέσματα αυτής της διδασκαλίας δεν ικανοποιούσαν τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, περίπου το 1980, εμφανίστηκε η θεωρία του κονστρουκτιβισμού. Τα φτωχά μαθησιακά αποτελέσματα που οφείλονταν στη δογματική, δασκαλοκεντρική διδασκαλία από την οποία απουσίαζαν τα παραδείγματα και οι προβληματισμοί ρεαλιστικού περιεχομένου αποτέλεσαν εφαλτήριο για το κονστρουκτιβιστικό ρεύμα που ενθαρρύνει την ανάπτυξη κινήτρων για την κατασκευή των μαθηματικών ιδεών από τον ίδιο τον μαθητή (Σαπλαμίδου & Σάλτα, 2016).

Ο διδακτικός σχεδιασμός στη σύγχρονη εποχή φαίνεται δυστυχώς πως δεν καταναλώνει πολύ από τον χρόνο των καθηγητών, αν και θα έπρεπε δεδομένου του μεγάλου αντικτύπου που έχει. Η διδασκαλία πολλές φορές γίνεται μηχανιστικά, «αυτοματοποιημένα» ίσως, και αυτό οφείλεται στις σύγχρονες πεποιθήσεις για τη σχολική καθημερινότητα. Παραδοσιακά ο καθηγητής παίρνει λοιπόν ασκήσεις από τα εγχειρίδια και όταν χρειάζονται εξηγήσεις, τις συνδέει με παρόμοια παραδείγματα που έχει το βιβλίο ή ζητά επιπλέον εξάσκηση με μια σειρά από ευκολότερες ασκήσεις. Έχει τη δυνατότητα πρόσθεσης ή αφαίρεσης έργων, όμως τα εγχειρίδια τα οποία εμπεριέχουν και το απαραίτητο υλικό για τη διδακτική διαδικασία, τον δεσμεύουν σε μεγάλο βαθμό. Αμφίβολο είναι δε, το κατά πόσο μπορούν τα βιβλία να ανταπεξέλθουν στις σύγχρονες ανάγκες. Σημαντικό είναι επίσης ο δάσκαλος όχι απλά να εμπνέει τους μαθητές του να ασχοληθούν με μια δραστηριότητα αλλά να επιλέγει έργα που τους δίνουν κίνητρο για δραστηριότητα. Μπορεί η διδασκαλία να είναι ελεγχόμενη από τον καθηγητή, ωστόσο ο μαθητής δεν πρέπει να λαμβάνει τα μηνύματα παθητικά, αλλά να συμμετέχει ενεργά στη διαδικασία (Σκοπέτος, 2004).

Όπως τονίζει ο Θωμαΐδης (2009), το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η διδασκαλία των μαθηματικών είναι η διάσταση που υπάρχει μεταξύ των πραγματικών σκοπών της μαθηματικής εκπαίδευσης και του είδους των γνώσεων που αποκτούν τελικά οι μαθητές. Η κατάταξη των ασκήσεων σε κατηγορίες, η γνωστή ασκησιολογία, η αποστήθιση αυτής της κατηγοριοποίησης και η ανάκληση από μνήμης ανάλογα με τις ανάγκες, έχει αποδειχθεί πως δεν έχουν τα απαιτούμενα αποτελέσματα. Και τα αποτελέσματα αυτά είναι εμφανή στις πανελλήνιες εξετάσεις. Η απόδειξη, που είναι μια τόσο σημαντική μαθηματική δραστηριότητα, καταλήγει να διδάσκεται ως αποστήθιση κάποιων λογικά ασυνεχών βημάτων. Παραδοσιακά αποδεκτοί σκοποί της διδασκαλίας, όπως η ανάπτυξη κριτικής σκέψης που εκδηλώνεται με εναλλακτικές προσεγγίσεις από τη μεριά των μαθητών κατά την επίλυση προβληματικών καταστάσεων, δίνουν τη θέση τους σε «στερεότυπη αναπαραγωγή αυστηρά οριοθετημένων τμημάτων της σχολικής γνώσης» (Θωμαΐδης, 2009, σ. 40). Στόχος όμως της εκπαίδευσης είναι η μαθηματική παιδεία και όχι η στείρα απομνημόνευση με την ελπίδα ότι όσες περισσότερες ασκήσεις λύσουμε, τόσες περισσότερες είναι και οι πιθανότητες να πετύχουμε τα θέματα των εξετάσεων. Από τη μεριά των μαθητών βέβαια, αφού οι εξετάσεις έχουν διαδικαστικό χαρακτήρα, είναι αναμενόμενο να μη δίνουν την ίδια βαρύτητα στην κατανόηση εννοιών, αλλά στην αποστήθιση τεχνικών που θα τους δώσει και υψηλή βαθμολογία (Engelbrecht et al., 2009). Αν μάλιστα ο εξεταζόμενος αναγνωρίσει τη σωστή κατηγορία ασκήσεων ή τεχνικών, θα επιτύχει στις εξετάσεις του και θα συνεχίσει στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Απόρροια όλων αυτών είναι πολλοί φοιτητές, ακόμα και αριστούχοι, να βρίσκουν δυσκολίες κατά την πρώτη περίοδο προσαρμογής τους στα νέα δεδομένα της πανεπιστημιακής ζωής. Σε αυτό ακριβώς το σημείο είναι που διαπιστώνουν και οι ίδιοι αλλά και οι καθηγητές τους τις ελλείψεις από τη δευτεροβάθμια ακόμα εκπαίδευση, γεγονός οξύμωρο δεδομένης της επιτυχίας τους.

1.4 Μαθηματικά έργα και μάθηση

Η μάθηση των μαθητών θεωρείται η διαδικασία της απόκτησης μαθηματικών εργαλείων για να εργαστεί κανείς με αυτά και να δομήσει τη μαθηματική του σκέψη (Schoenfeld, 1992). Αποτελεί μια κατασκευαστική δραστηριότητα όπου ο μαθητής έχει δυναμικό ρόλο στην απόκτηση της γνώσης του και δεν τη δέχεται απλά παθητικά από τον εκπαιδευτικό (Τύπας & Ντάφου, 2006). Επιπλέον, επηρεάζεται άμεσα από το είδος των έργων με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές, επομένως και πρέπει να δίνεται μεγάλη βαρύτητα στην επιλογή και χρήση αυτών. Η σχολική αίθουσα πρέπει να αποτελεί έναν χώρο όπου πλούσια μαθηματικά έργα παρακινούν τους μαθητές για δυναμική δραστηριότητα. Προκειμένου να γίνουν μαθηματικά ικανοί όμως δεν αρκεί η συμμετοχή τους σε δραστηριότητες. Αυτό που πραγματικά χρειάζεται είναι να εξελιχθούν μέσα από αυτή τη διαδικασία, να αλλάξουν αντίληψη για τις μαθηματικές έννοιες όπως ήδη τις γνωρίζουν (Tall & Vinner, 1981) και να αναδομήσουν τον τρόπο σκέψης τους.

Ο δρόμος προς τη μάθηση περιλαμβάνει ερευνητικές δραστηριότητες με στόχο την κατανόηση των μαθηματικών δομών, χρήση όλων των πληροφοριών για την κατανόηση του έργου, αιτιολόγηση, γενίκευση και αναστοχασμό των αποτελεσμάτων (Schoenfeld, 1992). Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις έχουν φιλόδοξα σχέδια για τη μάθηση των μαθηματικών. Οι μαθητές κρίνεται απαραίτητο να εμβαθύνουν σε μαθηματικές έννοιες και αρχές, και όχι απλά να αποστηθίζουν τύπους και κανόνες. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει η πεποίθηση ότι η ολοκληρωμένη κατανόηση των μαθητών δεν περιλαμβάνει μόνο τη γνώση μαθηματικών εννοιών και αρχών, αλλά και τη συμμετοχή σε διαδικασίες μαθηματικής σκέψης. Οι εκπαιδευτικοί όμως δεν αφήνουν συνήθως περιθώρια στους διδασκόμενους για να νιώσουν πιο ανεξάρτητοι (Corno, 1988). Πολλές φορές, λόγω έλλειψης χρόνου και στην προσπάθειά τους να διευκολύνουν την κατάσταση, καταλήγουν να δείχνουν οι ίδιοι τεχνικές επίλυσης σαν μοντέλο που πρέπει να αποστηθίσουν οι διδασκόμενοι για μελλοντική χρήση. Μικρό μάλλον περιθώριο για συζήτηση, αλληλεπίδραση με τους υπόλοιπους και αναστοχασμό. Από την άλλη μεριά και οι μαθητές στον λιγοστό διαθέσιμο χρόνο και με τα περιορισμένα ενδεχομένως γνωστικά τους εφόδια, αδυνατούν να κάνουν κριτική και διερεύνηση για νέες στρατηγικές. Οι μαθητές έτσι σχηματίζουν τη λανθασμένη εντύπωση ότι κάνω μαθηματικά σημαίνει ακολουθώ τους κανόνες του καθηγητή, ξέρω μαθηματικά αντιστοιχεί στο εφαρμόζω σωστό κανόνα, σύμφωνα πάλι με τον καθηγητή, και τέλος, γνωρίζω τη μαθηματική αλήθεια είναι ότι επικυρώνει ο διδάσκοντας με την αυθεντία του τη λύση που δόθηκε (Lampert, 1990).

Ένας από τους βασικούς λόγους αποτυχίας στα μαθηματικά και δυσκολίας στη μάθηση είναι ότι οι μαθητές βασίζονται στη μηχανική μάθηση και στη μαθηματική επιφανειακή αιτιολόγηση (Hiebert, 2003). Η σύγχρονη διδακτική πρακτική τούς κατευθύνει σε μία κατάσταση όπου οφείλουν να αντιστοιχίζουν όσο πιο γρήγορα μπορούν την όποια προβληματική κατάσταση τους δίνεται σε μία αλγοριθμική διαδικασία που έχουν απομνημονεύσει. Η λύση υπάρχει πάντα, είναι μοναδική και η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος πρέπει να δίνεται από τον καθηγητή. Επίσης δεν κρίνεται απαραίτητο να ξέρουμε πότε, πώς και γιατί εφαρμόζεται η συγκεκριμένη στρατηγική. Μια απάντηση βασισμένη σε επιφανειακή κατανόηση είναι αρκετή. Οι προηγούμενες προτάσεις όμως καμία σχέση δεν έχουν με την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας που θα θέλαμε να πετύχουμε για τους μαθητές μας. Ο μαθητής πρέπει να έχει την ικανότητα να κινηθεί όπως ο ίδιος ο εκπαιδευτικός, δηλαδή να κάνει εικασίες, λύνει προβληματικές καταστάσεις, ψάχνει συνδέσεις και μοτίβα, τεκμηριώνει, ανακαλύπτει, αιτιολογεί κ.ο.κ. (Stein et al., 1996). Δυναμικά και πολύπλοκα έργα μπορούν να προωθήσουν τέτοια ικανότητα σκέψης και αιτιολόγησης. Μάλιστα, έρευνες δείχνουν ότι υπάρχει μεγαλύτερη δραστηριοποίηση εκ μέρους των μαθητών όταν τα έργα αφορούν την καθημερινή ζωή (Τύπας & Ντάφου, 2006). Όταν οι μαθητές ασκούνται με ασκήσεις ρουτίνας, το μόνο που πετυχαίνουν είναι η εκμάθηση συγκεκριμένων διαδικασιών. Ακόμα όμως και αν αρχικά κατασκευάζεται ένα έργο ως πρόβλημα μη ρουτίνας, παρατηρείται ότι πολλές φορές ο τρόπος αντιμετώπισης και από τις δύο μεριές παραπέμπει ουσιαστικά σε έργο ρουτίνας, δηλαδή άσκηση. Οι αποφάσεις και οι ενέργειες των εκπαιδευτικών επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό το ενδιαφέρον και τη συμμετοχή των μαθητών σε μαθηματικά έργα και μετέπειτα στη μάθηση. Οι γνώσεις των καθηγητών άλλωστε παίζουν καθοριστικό ρόλο στη δραστηριότητα μέσω των έργων. Σύμφωνα με τους Henningsen και Stein (1997), η φύση των μαθηματικών έργων μπορεί να επηρεάσει τον τρόπο σκέψης των μαθητών και την αίσθηση που έχουν για το «κάνω μαθηματικά». Για όλη όμως αυτή την κατάσταση, υπεύθυνοι είναι, σύμφωνα με τον Bergqvist (2007), όχι αποκλειστικά και μόνο οι διδάσκοντες, αλλά και τα εγχειρίδια, τα τεστ αξιολόγησης και φυσικά οι ιθύνοντες της εκπαιδευτικής πολιτικής που επικεντρώνουν την προσοχή και το ενδιαφέρον σε απομνημόνευση στερεότυπων διαδικασιών.

1.5 Μαθηματικά έργα στα σχολικά εγχειρίδια

Τα σχολικά εγχειρίδια είναι, σύμφωνα με τους Ball και Cohen (1996), το υλικό των μαθημάτων που προσδιορίζει τις ενέργειες μαθητών και καθηγητών. Η μάθηση είναι στενά συνδεδεμένη με τα εγχειρίδια από τα οποία αντλούνται συνεχώς μαθηματικά έργα με σκοπό τη μεταβίβαση γνώσης από τους καθηγητές στους μαθητές. Οι διδάσκοντες αντλούν ως επί το πλείστον μαθηματικά έργα από αυτά για την καθημερινή σχολική πρακτική, κάτι που τα κάνει απαραίτητα. Είναι λοιπόν σαφές πως η επίδρασή τους είναι πολύ μεγάλη καθώς αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα βοηθήματα για τον εκπαιδευτικό. Αυτός με τη σειρά του λειτουργεί ως μεσολαβητής μεταξύ μαθητών και κειμένου ερμηνεύοντας τη γλώσσα της εκφώνησης (Love & Pimm, 1996), η οποία πολλές φορές επηρεάζει τους μαθητές.

Αρκετές είναι οι έρευνες που έχουν γίνει για τη χρήση των μαθηματικών εγχειριδίων από καθηγητές (Johansson, 2006) αλλά και μαθητές (Rezat, 2009). Η διδασκαλία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τα εγχειρίδια, με τέτοιο τρόπο που και η αποτελεσματικότητά της επηρεάζεται από αυτά. Οι καθηγητές προτιμούν τα βιβλία να περιλαμβάνουν στερεότυπα έργα καθώς κρίνουν ότι είναι καταλληλότερα για τη διδασκαλία (Pehkonen, 2004). Με αυτό τον τρόπο κρίνουν ότι ο μαθητής αποκτά γερά θεμέλια και στην περίπτωση που είναι μαθηματικά «προικισμένος» θα καλλιεργήσει μελλοντικά τη μαθηματική του σκέψη. Από την άλλη βέβαια θα λέγαμε ότι αυτό εξυπηρετεί και τους ίδιους καθώς τα έργα ρουτίνας δεν απαιτούν ούτε τον ίδιο χρόνο ούτε υψηλό γνωστικό επίπεδο από τη μεριά τους. Αμφίβολο δε είναι, κατά πόσο αντικείμενα που δεν συμπεριλαμβάνονται στα εγχειρίδια, διδάσκονται στους μαθητές.

Αν και οι μαθητές μελετούν μαθηματικά πολλά χρόνια, συχνά δεν καταφέρνουν να τα εφαρμόσουν σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Το γεγονός αυτό οφείλεται πιθανότατα στο ότι δεν τα κατανόησαν ουσιαστικά ή δε μπορούν να τα συνδέσουν με τις προβληματικές καταστάσεις της καθημερινότητας. Εύλογα δημιουργείται το ερώτημα γιατί αυτό να συμβαίνει. Τα σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνουν και ασκήσεις και προβλήματα, η μάθηση όμως φαίνεται πως εστιάζει περισσότερο στα πρώτα. Αυτό με τη σειρά του δημιουργεί εμπόδια μιας και υψηλού επιπέδου μαθηματικά δε μπορούν να επιτευχθούν εάν τα εγχειρίδια χρησιμοποιούνται ως «κατάλογοι» αδιαμφισβήτητων μαθηματικών αληθειών και επιλυμένων έργων (Atkinson, 1992). Στο περιεχόμενο των εγχειριδίων υπάρχουν βέβαια και λεκτικά προβλήματα τα οποία όμως πολλές φορές δε δημιουργούν κάποια προβληματική κατάσταση για τους μαθητές και έτσι καταλήγουν σε απλές και μονότονες ασκήσεις εφαρμογής. Ερευνητές έχουν εντοπίσει ότι σε περιπτώσεις που δε γνωρίζουν εκ των προτέρων τις διαδικασίες που πρέπει να ακολουθήσουν για την επίλυση, πολλοί μαθητές αναπτύσσουν δικές τους μεθόδους επίλυσης, παρά τα όσα διδάχθηκαν στη σχολική αίθουσα (Lave, 1988). Από την άλλη, οι Desli & Loukidou (2014) παρατήρησαν ότι συνήθως έχουν καλύτερα αποτελέσματα σε κατηγορίες που έχουν ήδη μελετήσει και βρίσκονται μέσα στα βιβλία.

Είναι πλέον γνωστό, όπως σημειώνει και ο Schoenfeld (1988), ότι τα έργα ρουτίνας που συνήθως αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας στην τάξη, πετυχαίνουν την ανάπτυξη της διαδικαστικής γνώσης η οποία όμως δε χρησιμοποιείται τόσο στην καθημερινότητα. Επομένως, προκειμένου οι διδασκόμενοι να γίνουν μαθηματικά ικανοί, θα πρέπει να συμμετέχουν σε ρεαλιστικά μαθηματικά έργα (Marcus & Fey, 2003). Έτσι, η ευελιξία και η κριτική διάθεση αναπτύσσονται και στη συνέχεια ενισχύεται η αυτοπεποίθησή τους για την αντιμετώπιση καθημερινών προβληματικών καταστάσεων. Από όλα τα παραπάνω είναι κατανοητό ότι πρέπει να δίνεται μεγάλη βαρύτητα στο περιεχόμενο των βιβλίων καθώς και στον τρόπο προσέγγισης από τους εκπαιδευτικούς. Με κατάλληλα μεταρρυθμιστικά βήματα και αναδιαμόρφωση του περιεχομένου τους, ο καθηγητής θα έχει ένα πολύ δυνατό όπλο στα χέρια του για να πετύχει τους διδακτικούς του στόχους.

1.6 Μεθοδολογία της έρευνας

Για τη διερεύνηση των ερωτημάτων που διατυπώθηκαν νωρίτερα στην εισαγωγή, θα χρησιμοποιηθούν τα εξής ερευνητικά εργαλεία:

1. Μελέτη ιστορικών πηγών για την εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελλάδα

Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε πώς ξεκίνησε αλλά και πώς εξελίχθηκε το φαινόμενο της ασκησιολογίας στην Ελλάδα με χρονολογική σειρά. Ως εφαλτήριο θα χρησιμοποιήσουμε ένα κείμενο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή (1924) το οποίο αναφέρεται στη διδασκαλία των μαθηματικών και στον διδακτικό ρόλο που έχουν οι ασκήσεις ως αντίδοτο στη θεωρητικολογία. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προωθήθηκαν αυτές οι ιδέες του Καραθεοδωρή από τον Γεώργιο Ρεμούνδο, καθώς και τα ζητήματα που τέθηκαν από άλλους αξιόλογους μαθηματικούς επιστήμονες – ερευνητές. Θα μιλήσουμε για την επινόηση του όρου «ασκησιολογία» από τον Δημήτριο Κάππο (1967) σε σύγκριση με τη μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών, όπως συντελέστηκε στην Ευρώπη εκείνη την περίοδο.

2. Θεματογραφία εξετάσεων και συγκεκριμένων παραδειγμάτων

Για να μπορέσουμε να δούμε εν τοις πράγμασι την προώθηση της ασκησιολογίας, θα πρέπει να αναλύσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα, όπως νεότερα θέματα εξετάσεων και συνδυαστικές ασκήσεις από τον Ευκλείδη Β΄. Με αυτόν τον τρόπο θα γίνει κατανοητό πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος των εξετάσεων και των διαγωνισμών στην εξέλιξη και εδραίωση του φαινομένου.

3. Εμπειρικές έρευνες και συγκρίσεις δεδομένων

Σε αυτό το σημείο θα γίνει σύγκριση με τα δεδομένα των ερευνών της διδακτικής των Μαθηματικών καθώς και με εμπειρικές έρευνες, όπως αυτή του Οικονόμου (1997) που στοχεύει σε μια πρώτη καταγραφή της σχολικής πραγματικότητας στην επίλυση προβλήματος και σε αυτές των Θωμαΐδη και Διαμαντίδου (2016), αλλά και των Κλαουδάτου και Παπασταυρίδη (1995), όπου εξετάζεται η μεγάλη δυσκολία των μαθητών να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις που έχουν διδαχθεί στην επίλυση προβλήματος. Επίσης, φως στις σύγχρονες όψεις του φαινομένου θα δώσουν κριτικές πανεπιστημιακών δασκάλων, όπως του Δουγαλή (2000), ο οποίος εξετάζει το ζήτημα της διδασκαλίας των μαθηματικών αλλά και τα αρνητικά αποτελέσματα των Ελλήνων μαθητών στον μαθηματικό διαγωνισμό PISA.

Κεφάλαιο 2

Η εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελλάδα

2.1 Η γένεση και εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελλάδα

Η ιστορική εξέλιξη της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης επιβεβαιώνει πως τα μαθηματικά έργα έχουν κυρίαρχη θέση στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Αν και έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές η σημασία της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος για την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας, που είναι και άμεσος στόχος της διδασκαλίας, εντούτοις διαφαίνεται μέσα στην πάροδο των ετών μία διαρκώς αυξανόμενη προσήλωση στην άσκηση. Παρά τις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, τις αλλαγές σε αναλυτικά προγράμματα και σχολικά εγχειρίδια, η άσκηση ως έργο ρουτίνας κατακλύζει τη μαθηματική διδασκαλία και μάθηση. Είναι λοιπόν αναμενόμενο να δημιουργούνται διάφορα ερωτήματα σχετικά με το πώς φτάσαμε σε αυτό το σημείο. Γιατί υπάρχει αυτή η εμμονή σχεδόν θα λέγαμε με την ασκησιολογία και πού αποσκοπεί;

Στην προσπάθειά μας να εντοπίσουμε χρονολογικά τη γένεση του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελλάδα, ανακαλύπτουμε τη διαφωτιστική ομιλία του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή (1873-1950) στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στις 19 Μαΐου του 1924, όπου γίνεται λόγος για τη διδασκαλία των μαθηματικών στις αρχές του 20ού αιώνα. Στην αρχή της ομιλίας του, ο διακεκριμένος μαθηματικός θέτει το ερώτημα: «Γιατί να διδάσκονται τα μαθηματικά στα σχολεία;», και διευκρινίζει ότι λέγοντας μαθηματικά δεν εννοεί εκείνα τα στοιχεία της Αριθμητικής που είναι απαραίτητα για όλους τους ανθρώπους, αλλά τη Γεωμετρία και την Ανάλυση. Όπως ο ίδιος σημειώνει, μελετώντας την ιστορική εξέλιξη των πολιτισμών, παρατηρούμε την ανάπτυξη λαών, όπως οι Αζτέκοι, που στερούνταν μαθηματικών γνώσεων. Αν επομένως υπάρχουν τέτοια παραδείγματα, τι είναι αυτό που βάζει τα μαθηματικά μαζί με τη γλώσσα στον πυρήνα της διδασκαλίας στη μέση εκπαίδευση; Κατά τον Καραθεοδωρή, αυτό οφείλεται στο ίδιο το σχολείο και το «συντηρητικό» πνεύμα που το διακρίνει. Η Γαλλική Επανάσταση έπαιξε καθοριστικό ρόλο στον σχηματισμό νέου τύπου σχολείων που μάλλον διαμορφώθηκαν έτσι ώστε να προετοιμάζουν ανθρώπους για τις εφαρμοσμένες επιστήμες και που μέχρι τη στιγμή της ομιλίας τα προγράμματα σπουδών τόσο των ίδιων αλλά και όλων των αντίστοιχων σχολείων παρέμειναν στην ίδια λογική. Επιπλέον, η κυρίαρχη θέση των μαθηματικών στα σχολεία της Ευρώπης δικαιολογείται λόγω της επιρροής τους από τα σχολεία του Βυζαντίου ακόμα, στα οποία η Γεωμετρία θεωρούνταν η τέλεια επιστήμη. Η συντηρητικότητα αυτή όμως των σχολείων αποδεικνύεται και από το γεγονός ότι τα προγράμματα της διδακτέας ύλης μένουν αναλλοίωτα παντού, με χαρακτηριστικό μάλιστα το παράδειγμα της Αγγλίας όπου η Γεωμετρία διδάσκεται απευθείας από το κείμενο του Ευκλείδη.

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, αναφέρει ο Καραθεοδωρή, παρατηρούνται νέες τάσεις σε Γερμανία και Γαλλία, τάσεις που αποσκοπούν στην εισαγωγή νέων εννοιών, όπως είναι και αυτή της συνάρτησης. Η συστηματική όμως εισαγωγή του Απειροστικού Λογισμού, που αποτελεί νέα τάση, κρίνεται επικίνδυνη από τον ίδιο καθώς απουσιάζει ο απαραίτητος χρόνος για να αναλυθεί επαρκώς στους μαθητές, οι οποίοι με τη σειρά τους δεν είναι ώριμοι ακόμα ηλικιακά για να την αποδεχτούν. Ο σκοπός του σχολείου είναι η μόρφωση, η προετοιμασία των μαθητών για την καθημερινή τους ζωή, και όχι η προετοιμασία τους για να γίνουν μαθηματικοί. Επίσης, η εφαρμογή της διδασκαλίας, τονίζει, επηρεάζεται από το περιβάλλον και συνεπώς από τις τοπικές διαφορές, επομένως τα προγράμματα ύλης και η μορφή της διδασκαλίας πρέπει να διαφοροποιούνται από περιοχή σε περιοχή. Υπάρχει η ανάγκη, επισημαίνει, η διδασκαλία να συνδέεται με εφαρμογές που σχετίζονται με την καθημερινότητα του διδασκόμενου. Με αυτό τον τρόπο ο μαθητής δε θα αποκτά μόνο στείρες θεωρητικές γνώσεις, όπως συνηθίζεται ως τώρα, αλλά θα αποκτήσει την ικανότητα της σύνδεσης των μαθηματικών του γνώσεων με όσα φαινόμενα συμβαίνουν στον εξωτερικό κόσμο. Εξάλλου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει νωρίτερα, η μαθηματική επιστήμη είναι για πολλούς εκείνο το σύστημα από μοντέλα που μελετά τα προβλήματα που θέτει ο πραγματικός κόσμος (Schoenfeld, 1992).

Η απομνημόνευση από τον μαθητή των τύπων και της θεωρίας δεν παρακινεί το ενδιαφέρον του για μάθηση και γι’αυτό υποστηρίζει ο Καραθεοδωρή ότι είναι αναγκαία η άσκηση του μαθητή κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας. Προτείνει οι διδάσκοντες να παρουσιάζουν την ενότητα ή το κεφάλαιο που επιθυμούν με τη χρήση παραδειγμάτων και στη συνέχεια να ακολουθεί επίλυση προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές με ή χωρίς τη βοήθεια από τον διδάσκοντα. Λόγο κάνει και για τη θεωρητική Αριθμητική που φαίνεται πως επιβάρυνε σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές του γυμνασίου εκείνη την εποχή. Η πεποίθησή του ήταν ότι η θεωρητική Αριθμητική, για την οποία δεν ήταν ίσως αρκετά ώριμοι οι μαθητές, θα έπρεπε να περιοριστεί. Τέλος, εάν ο χρόνος διδασκαλίας δεν κρίνεται επαρκής, είναι προτιμότερο να μειωθεί η ύλη και η διδακτέα θεωρία, αρκεί να δοθεί έμφαση στην εξάσκηση των διδασκομένων σε μαθηματικές ασκήσεις που συνδέονται με την πραγματική ζωή.

Υποστηρικτής των προτάσεων του Καραθεοδωρή για τον διδακτικό ρόλο των ασκήσεων ως αντίδοτο της θεωρητικολογίας ήταν και ο Γεώργιος Ρεμούνδος (1878-1928), ένας από τους θεμελιωτές της μαθηματικής επιστήμης στην Ελλάδα τον 20^{ο} αιώνα που μαζί με τον Παναγιώτη Ζερβό (1878-1952) και τον Νικόλαο Χατζηδάκη (1872-1942) συναποτέλεσαν τη «Δεύτερη Μαθηματική Σχολή των Αθηνών». Όπως ο ίδιος έλεγε στους φοιτητές του, ήταν «προϊόν των ασκήσεων» και αυτό γιατί, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, έδινε μεγάλη βαρύτητα σε αυτές. Εκτός από σπουδαίος ερευνητής ήταν και σπουδαίος δάσκαλος. Οι μαθηματικοί επιστήμονες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, αυτή των ερευνητών και αυτή των διδασκάλων. Οι ερευνητές έχουν αναλάβει το εξαιρετικά σημαντικό έργο της ανακάλυψης νέων μαθηματικών αποτελεσμάτων και προώθησης της επιστήμης. Οι διδάσκαλοι όμως είναι εκείνοι που κάνουν ευρέως γνωστές αυτές τις θεωρίες έξω από τα στενά όρια των μαθηματικών (Σακελλαρίου, 1929). Την ίδια άποψη είχε και ο Δουγαλής (2000) ο οποίος επισημαίνει πως οι μαθηματικοί υποχρεούνται να διαβάζουν και να έχουν πολύ περισσότερες γνώσεις από αυτές που θα χρειαστούν κατά τη διεξαγωγή της διδασκαλίας τους.

Ο Ρεμούνδος, ως «λειτουργικός» τύπος μαθηματικού, είχε τη γνώμη πως η στείρα θεωρία, που διδάσκονταν μέχρι τότε, δεν ήταν επαρκής και παράλληλα έκρινε αναγκαία την εισαγωγή κατάλληλων ασκήσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο, πρότεινε την εισαγωγή ασκήσεων κατά τη διδασκαλία τόσο στα σχολεία μέσης εκπαίδευσης, όσο και στα ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα. Επιπλέον, πίστευε, όπως και ο Καραθεοδωρή, ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών χρειάζονταν απλοποίηση και επομένως έπρεπε να τροποποιηθούν. Τους προβληματισμούς του για τον τρόπο που διδάσκονταν η μαθηματική επιστήμη και τον ρόλο του εκπαιδευτικού σε σχέση με την κατανόηση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές, έθεσε προς συζήτηση σε γενική συνέλευση των μελών της Ε.Μ.Ε. κατά τη διάρκεια της προεδρίας του στο Δ. Συμβούλιο αυτής. Μέχρι τη στιγμή εκείνη οι ασκήσεις και οι εφαρμογές απουσίαζαν, ενώ κυρίαρχο ρόλο στη διδασκαλία κατείχε η μετάδοση θεωρητικών γνώσεων. Σύμφωνα με τον ίδιο, η βέλτιστη κατανόηση θα επιτυγχάνονταν εάν δίνονταν πρώτα ως παράδειγμα μία δύσκολη πρόταση και στη συνέχεια πλήθος διαφορετικών ασκήσεων βασισμένες σε αυτήν και βγαλμένες από την καθημερινή ζωή (Σακελλαρίου, 1929).

Η επίλυση ασκήσεων και το αντίκτυπο που έχει στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει και απασχολεί ακόμη τη μαθηματική κοινότητα. Χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε τα όσα επισημάνθηκαν σε υπόμνημα προς την Ε.Μ.Ε. το 1929 μετά από συνεδρίαση μαθηματικών των σχολείων μέσης εκπαίδευσης της Κέρκυρας. Καίρια ζητήματα τέθηκαν προς συζήτηση, όπως ποια είναι η αναγκαιότητα των ασκήσεων και εφαρμογών για τη διδασκαλία, αλλά και ποια πρέπει να είναι η έκταση αυτών. Επίσης, υπήρξε προβληματισμός όσον αφορά την επιλογή της καταλληλότερης χρονικής στιγμής για την επίλυση αυτών και πιο συγκεκριμένα εάν πρέπει να τίθενται προς επίλυση μετά το τέλος κάθε μαθήματος ή μετά τη λήξη κάθε κεφαλαίου. Τέλος, λόγος έγινε για τη βαρύτητα που απαιτείται να δίνεται σε κάθε κλάδο ξεχωριστά και για το αν επηρεάζει ο τρόπος που επιλύονται οι ασκήσεις αυτές (Βουτσινάς et al., 1929). Κατά τη συνεδρίαση, τονίστηκε η σπουδαιότητα των ασκήσεων για την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων. Επιπλέον, όπως επισημάνθηκε, δεν θα πρέπει να γίνεται κατάχρηση αυτών στα σχολεία της μέσης εκπαίδευσης, παρά μόνο η χρήση των αναγκαίων. Η έκτασή τους οφείλει να είναι περιορισμένη, ειδάλλως οδηγεί σε μηχανιστική ενασχόληση με αυτές από μέρους των μαθητών και δεν ενισχύει την περαιτέρω διερεύνηση, ούτε την προαγωγή της μαθηματικής σκέψης. Όσον αφορά δε την επίλυσή τους, οι καθηγητές συνιστούν να γίνεται μετά το πέρας κάθε μαθήματος, όπως επίσης να δίνονται κάποιες για εξάσκηση στο σπίτι. Περισσότερες ασκήσεις όμως χρειάζονται και μετά τη λήξη του εκάστοτε κεφαλαίου για πληρέστερη κατανόηση και επανάληψη. Καθοριστικό σημείο είναι να υπάρχει μεθοδολογία ασκήσεων που ακολουθείται από τον καθηγητή και σχέδιο διδασκαλίας. Έτσι λοιπόν, οι μαθηματικοί οφείλουν να μελετήσουν ποιες ασκήσεις πρέπει να λύνονται στην τάξη και ποιες στο σπίτι. Επίσης, συζήτηση χρειάζεται σχετικά με το εάν πρέπει ο καθηγητής να κάνει πρώτα μια εισαγωγή για τις προτεινόμενες ασκήσεις, κατά πόσο και πώς θα γίνει η διόρθωση αυτών, ποιος είναι ο τρόπος επίλυσής τους κ.λπ. (Σακελλαρίου, 1929). Όπως συμπεραίνουμε, η μέθοδος που θα ακολουθήσουν οι εκπαιδευτικοί είναι κάτι που απασχολεί εδώ και πολλά χρόνια τη μαθηματική κοινότητα, μιας και αποκλειστικά και μόνο η κατάλληλη μεθοδολογία μπορεί να έχει επιτυχημένα αποτελέσματα.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που δείχνει το πώς εξελίχθηκε μετέπειτα το φαινόμενο της ασκησιολογίας στην Ελλάδα, είναι ένα θέμα Τριγωνομετρίας που τέθηκε στις εισαγωγικές εξετάσεις της Μαθηματικής Σχολής Αθηνών του 1947. Η συστηματική εφαρμογή του θεσμού των εισαγωγικών εξετάσεων ξεκίνησε το 1926 και η μετατροπή του σε διαγωνισμό για την επιλογή συγκεκριμένου αριθμού σπουδαστών γενικεύτηκε μετά το 1930. Σε μια διάλεξή του το 1936, ο Τόγκας (όπως αναφέρεται στο Θωμαΐδης, 2009, σ. 10), τονίζει πως στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών δεν είναι πλέον η μόρφωση και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των διδασκομένων, αλλά η απομνημόνευση και η μηχανιστική μάθηση που απαιτούν οι εισαγωγικές εξετάσεις. Ο θεσμός μπορεί να έχει περάσει από πολλές μεταρρυθμίσεις, αυτό που όμως μένει σταθερό είναι η ανάγκη για «πρωτοτυπία» στα θέματα που δίνονται στους εξεταζόμενους, μια πρωτοτυπία που έχει έρθει αρκετές φορές σε αντίφαση με βασικές μαθηματικές αρχές (Θωμαΐδης, 2009). Ας δούμε λοιπόν την εκφώνηση του «πρωτότυπου» θέματος που δόθηκε στους εξεταζόμενους το 1947:

«Εάν εις εν τρίγωνον ΑΒΓ είναι συνΑ + συνΒ + συνΓ = 2 και ημΑ + ημΒ + ημΓ = 1, τότε να δειχθή ότι η ακτίς της περιγεγραμμένης περί το τρίγωνον περιφερείας ισούται προς $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$, *ένθα α, β, γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.»*

Ακολουθεί η λύση όπως δίνεται από τον Πάλλα (1947, σ. 51):

«Η πρώτη ισότης γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma - 1 = 1 \text{ ή}$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} - 2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right] = 1 \text{ ή}$$

$$4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 1 \text{ ή } \frac{4(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha\beta\gamma} = 1 \text{ ή}$$

$$4E^2 = \tau\alpha\beta\gamma \ (1).$$

Η δευτέρα σχέσις γίνεται:

$$2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = 1 \text{ ή}$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right] = 1 \text{ ή}$$

$$4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = 1 \text{ ή } \frac{4\tau E}{\alpha\beta\gamma} = 1 \text{ ή}$$

$$\alpha\beta\gamma = 4\tau E \ (2).$$

Πολλαπλασιαζόμεναι αι (1) και (2) δίδουν:

$$E = \tau^2 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4} \text{ ή}$$

$$4E = (\alpha+\beta+\gamma)^2 \ (3).$$

Επειδή ως γνωστόν είναι:

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E},$$

λαμβάνομεν, λόγω της (3),

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.»$$

Το περίεργο και οξύμωρο της, εκ πρώτης όψεως, έγκυρης απόδειξης της ζητούμενης ισότητας είναι ότι πολύ απλά έχει ψευδή υπόθεση, καθώς είναι γνωστό ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η διπλή ανισότητα: $1 < συνA + συνB + συνΓ \leq \frac{3}{2}$. Το ζήτημα λοιπόν αυτό, όπως ήταν αναμενόμενο, προκάλεσε κάποιες αντιδράσεις εκ μέρους της μαθηματικής κοινότητας. Το 1948, ο Θεόδωρος Βαρόπουλος, καθηγητής της Μαθηματικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, άσκησε κριτική για την επιλογή του εν λόγω θέματος σε άρθρο του στο περιοδικό «Αιών του Ατόμου» (όπως αναφέρεται στο Θωμαΐδης, 2009, σ. 15). Σε απάντηση στην κριτική αυτή, ο Αριστείδης Πάλλας, ιδιοκτήτης φροντιστηρίου της Αθήνας και μέλος του διοικητικού συμβουλίου της Ε.Μ.Ε., δημοσίευσε κείμενο στο «Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.» όπου αναφέρει τα εξής:

«Νομίζομεν ότι ο κ. Βαρόπουλος δεν έχει δίκαιον, διότι εις το πρόβλημα υπάρχει ένα εάν και συνεπώς ουδεμίαν σημασίαν έχουν τα μετέπειτα δεδομένα. Εάν το εάν τούτο δεν ευσταθή δια το τυχόν τρίγωνον τότε δεν θα ευσταθή και το εξαγόμενον, εκτός εάν η μη ευσταθούσα σχέσις ουδαμού εμφανίζεται εις την συνέχειαν των συλλογισμών, ότε ουδεμίαν έχει επίδρασιν επί του εξαγόμενου.»

Η διαμάχη αυτή συνεχίστηκε με επιστολή του Βαρόπουλου προς τον Πάλλα η οποία δημοσιεύτηκε στο «Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.» και στην οποία καυστικά σημειώνει:

«Ο σχηματισμός προβλημάτων, οίον το αναφερόμενον, γίνεται αν ο κατασκευάζων ταύτα έχει δύο προσόντα:

Α) θέλει να παραπείση

Β) έχει το προσόν της αγνοίας.

Πολλάκις δε, δια να καλύψη το δεύτερον, ισχυρίζεται ότι χρησιμοποιεί το πρώτον.»

Δε θα μπορούσαμε σε καμία περίπτωση να αποκλείσουμε με απόλυτη σιγουριά το ζήτημα της άγνοιας. Παρ'όλα αυτά η σημασία και η βαρύτητα των εισαγωγικών εξετάσεων σε συνδυασμό με το υψηλό μαθηματικό επίπεδο των θεματοδοτών[1], σχεδόν εξαλείφει θα λέγαμε αυτό το ενδεχόμενο. Σύμφωνα και με τον Θωμαΐδη (2009), η πιθανότερη εκδοχή για την ψευδή υπόθεση ήταν η ανάγκη να δοθούν πρωτότυπα θέματα στους εξεταζόμενους που είναι εκτός σχολικών εγχειριδίων και οι διδάσκοντες των φροντιστηρίων δε θα μπορούσαν να έχουν προβλέψει. Αντίστοιχες περιπτώσεις θεμάτων όπου παραβιάζονται βασικές μαθηματικές και διδακτικές αρχές, είτε λόγω ασάφειας, είτε λόγω έλλειψης εγκυρότητας, εντοπίζονται σχετικά συχνά στη βιβλιογραφία. Οι εξετάσεις φαίνεται πως χρησιμοποιούνται για τη βαθμολογική κατάταξη των μαθητών, ενώ θα μπορούσαν να δίνουν ανατροφοδότηση για τη διδακτική πράξη και την εξέλιξη του περιεχομένου διδασκαλίας, καθώς και του ίδιου του εκπαιδευτικού (Βισκαδουράκης, 2004). Ο «λοξοδρομημένος» αυτός τρόπος χρήσης των εξετάσεων και των διαγωνισμών, εδραίωσε το φαινόμενο της ασκησιολογίας και για τον λόγο αυτό, θα μελετήσουμε ορισμένες ακόμη ενδιαφέρουσες και πιο σύγχρονες εκδηλώσεις του φαινομένου στη συνέχεια.

2.2 Μεταρρύθμιση και Νέα Μαθηματικά

Ένα σημαντικό ζήτημα για την έρευνά μας είναι να εξεταστεί η πορεία της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης στο πέρασμα του χρόνου σε σύγκριση με όσα συμβαίνουν διεθνώς. Έτσι, θα επιχειρήσουμε να επισημάνουμε κάποια βασικά σημεία προκειμένου να γίνουν κατανοητές οι συνθήκες μέσα στις οποίες εξελίσσεται το φαινόμενο της ασκησιολογίας. Το πρώτο μισό λοιπόν, του 20ού αιώνα η διδασκαλία των μαθηματικών χαρακτηρίζεται με τον όρο «παραδοσιακά μαθηματικά». Αν και η μαθηματική επιστήμη είχε σημειώσει πολύ μεγάλη ανάπτυξη τα προηγούμενα έτη, η σχολική μαθηματική ύλη παρέμενε καθηλωμένη σε γνώσεις του 18ου αιώνα και πρωθύστερες. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται, σύμφωνα με τον Κάππο (1967), και στην Ελλάδα, με χαρακτηριστικό μάλιστα το ζήτημα της γεωμετρίας, καθώς οι μαθητές σχηματίζουν την εσφαλμένη εικόνα ότι αυτή αποτελείται από όσα ανακάλυψαν οι αρχαίοι Έλληνες, αλλά περισσότερο με έναν τρόπο ερμηνείας από σύγχρονους επιστήμονες. Η διδασκαλία γίνεται με έναν τρόπο θεωρητικό. Ο εκπαιδευτικός παραδίδει, οι μαθητές κάνουν στη συνέχεια κάποιες εφαρμογές και η γνώση μεταδίδεται χωρίς να γίνεται καμία σύνδεση με την καθημερινότητα. Η μάθηση βασίζεται στον συμπεριφορισμό και ο διδασκόμενος λαμβάνει παθητικά τη γνώση, χωρίς να είναι απαραίτητη η ενεργός συμμετοχή του. Επιπλέον, παρατηρείται μεγάλη απόκλιση μεταξύ των όσων διδάσκονται στη σχολική αίθουσα και στο πανεπιστήμιο, όπου οι απαιτήσεις είναι πολύ περισσότερες (Καραγεώργος, 1985).

Δημιουργήθηκε λοιπόν η ανάγκη για αλλαγή, για μια μεταρρύθμιση. Οι πρώτες ουσιαστικές μεταρρυθμιστικές κινήσεις επιχειρήθηκαν μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, δηλαδή μετά το 1950, όπου δημιουργήθηκαν νέα πεδία έρευνας σε ακαδημαϊκό και βιομηχανικό επίπεδο (Ιγγλέζου, 2014). Έτσι, στις αρχές της δεκαετίας

[1] Την περίοδο εκείνη, τα θέματα των εισαγωγικών εξετάσεων στις πανεπιστημιακές σχολές τα έθεταν οι αντίστοιχοι καθηγητές των τμημάτων.

του 50 στις Η.Π.Α., έγινε η εισαγωγή νέων μαθηματικών ιδεών στα σχολικά μαθηματικά, σύμφωνα με τις προτάσεις των πανεπιστημιακών της εποχής. Δυστυχώς, οι αλλαγές αυτές εξυπηρετούσαν μόνο εκείνη τη μερίδα μαθητών που θα ακολουθούσαν ακαδημαϊκή μαθηματική πορεία, θεωρήθηκαν ελιτίστικες και δεν είχαν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Απορρίφθηκαν γρήγορα, το σημαντικό όμως ήταν ότι είχε ήδη γίνει η αρχή και υπήρχε η πρόθεση να διαφοροποιηθούν οι ισχύουσες καταστάσεις.

Τον Νοέμβριο του 1957 οι Σοβιετικοί εκτόξευσαν τον δορυφόρο Σπούτνικ, ο οποίος έκανε μία πλήρη περιφορά γύρω από τη γη, κάνοντας έτσι με επιτυχία το πρώτο μεγάλο βήμα του ανθρώπου στο διάστημα. Το γεγονός αυτό προκάλεσε έντονη ανησυχία στους Αμερικανούς και Δυτικοευρωπαίους, οι οποίοι θεωρούσαν ότι υπερείχαν μέχρι τότε τεχνολογικά. Η εκτόξευση αυτή λοιπόν αποτέλεσε την αφορμή για σημαντικά μεταρρυθμιστικά βήματα που θα προετοίμαζαν τους επόμενους ειδήμονες της τεχνολογίας και προκάλεσε το λεγόμενο «Σπούτνικ σοκ». Επιπλέον, η τεχνολογική ανάπτυξη που είχε σημειωθεί μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, η χρήση των υπολογιστών και η αλλαγή της θεώρησης της διαρκώς εξελισσόμενης μαθηματικής επιστήμης από τους μαθηματικούς με μια πιο αξιωματική προσέγγιση αποτέλεσαν τα αίτια για αναθεώρηση. Σπουδαίο ρόλο στη μεταρρύθμιση που έγινε, έπαιξαν και οι Bourbaki που εμφανίστηκαν περίπου το 1930. Bourbaki είναι το συγγραφικό ψευδώνυμο που είχε μια ομάδα Γάλλων, κυρίως μαθηματικών, και οι οποίοι είχαν ως σκοπό την παρουσίαση των μαθηματικών μ'ένα ενοποιημένο αξιωματικό τρόπο. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα σημειώθηκε σημαντική πρόοδος στη θεωρία συνόλων, η οποία ενίσχυε την αυστηρότητα στη διατύπωση των μαθηματικών θεωριών. Σκοπός των Bourbaki ήταν η μελέτη των θεμελιωδών δομών των μαθηματικών και η ενοποίησή τους με τη βοήθεια αυτών των δομών. Έτσι, τις δεκαετίες του 60 και 70 γίνεται η μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» ή αλλιώς «Μοντέρνων Μαθηματικών». Τότε, σύμφωνα με τους Καψάλη και Λεμονίδη (1999), ήταν που παρατηρήθηκαν οι περισσότερες και βαθύτερες αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση σε πολλές χώρες του κόσμου. Οι αλλαγές αυτές βέβαια δεν παρατηρήθηκαν ταυτόχρονα στις χώρες που εφαρμόστηκαν, αλλά με χρονική διαφορά, ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούσαν στην κάθε μία. Οι λέξεις «μοντέρνα» και «νέα» χρησιμοποιήθηκαν για να κάνουν ξεκάθαρο τον διαχωρισμό από τα παραδοσιακά, ως τότε, μαθηματικά και δεν είχαν να κάνουν μόνο με τις διαφοροποιήσεις στη σχολική ύλη. Βασικός άξονας είναι η διαφορά στη θεωρία μάθησης. Πλέον απορρίπτεται το δασκαλοκεντρικό πρότυπο και στη θέση του έρχεται το μαθητοκεντρικό υπό το πρίσμα του κονστρουκτιβισμού του Piaget. Φιλοσοφικό πυρήνα της νέας μεταρρύθμισης αποτέλεσε η άποψη του Bruner ότι όλα μπορούν να διδαχθούν στους μαθητές αρκεί να βρεθεί ο σωστός τρόπος (Πλατάρος, 2004).

Κάποιες ηγέτιδες χώρες ξεκίνησαν τα πρώτα μεταρρυθμιστικά βήματα με αποτέλεσμα να προκαλέσουν ανησυχία στις υπόλοιπες. Λειτούργησε επομένως το «σύνδρομο του τρένου», όπως αναφέρουν οι Van der Bliz et al. (1981), δηλαδή φοβούμενες μήπως μείνουν πίσω, ακολούθησαν τις κατευθυντήριες γραμμές των Η.Π.Α. και των Δυτικοευρωπαίων. Έτσι, έγινε ένα συνέδριο στο Παρίσι, και πιο συγκεκριμένα στο Royaumont, το 1959 όπου και αποφασίστηκαν οι μεταρρυθμιστικές κινήσεις και οι αλλαγές στα περιεχόμενα που θα πραγματοποιούνταν. Ένα από τα ενεργά μέλη του διεθνούς αυτού συνεδρίου που χάραξε τις κατευθύνσεις των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων του 1960 στις χώρες μέλη του τότε Οργανισμού Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας (Ο.Ε.Ο.Σ.) και σημερινού Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (Ο.Ο.Σ.Α.), στις οποίες ανήκε και η Ελλάδα, ήταν ο Dieudonne. O Dieudonne ήταν ένας από τους ιδρυτές της ομάδας Bourbaki και ήταν ένθερμος υποστηρικτής του νέου κύματος. Πίστευε ότι η αξιωματική θεωρία είναι ένας ορθολογικός τρόπος παρουσίασης των ορισμών και των θεωρημάτων. Μέχρι τότε κυρίαρχο ρόλο στα σχολικά μαθηματικά είχε η απομνημόνευση και η ανάπτυξη δεξιοτήτων ρουτίνας. Η ύλη είχε διαμορφωθεί έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να εκτελούν ακριβείς υπολογισμούς για να ανταπεξέλθουν στις ανάγκες της βιομηχανίας της εποχής (Βόσκογλου, 2004). Τώρα όμως η βαρύτητα δόθηκε στην κατανόηση των μαθηματικών δομών από τους μαθητές. Η μηχανική μάθηση έδωσε τη θέση της στην ενεργητική, εποικοδομητική, όπου ο μαθητής συμμετέχει ουσιαστικά στη διαδικασία μάθησης, ερευνά, προβληματίζεται και ανακαλύπτει. Γι’ αυτούς τους λόγους, αποφασίστηκε να δοθεί έμφαση στις αλγεβρικές δομές, τη μαθηματική λογική και η ύλη να προσεγγιστεί με τη βοήθεια της θεωρίας συνόλων. Η τριγωνομετρία περιορίστηκε και ενσωματώθηκε στην άλγεβρα, ενώ και η ευκλείδεια γεωμετρία που μειώθηκε αισθητά, αντικαταστάθηκε από αναλυτική γεωμετρία, διανυσματική γεωμετρία και μαθηματική ανάλυση. Η ύλη διαφοροποιήθηκε σημαντικά, ιδιαίτερα στην ευκλείδεια γεωμετρία για την οποία διατυπώθηκαν και οι περισσότερες διαφωνίες (Θωμαΐδης, 1991). O Dieudonne κατηγόρησε τον τρόπο που διδάσκεται, καθώς στερούνταν αυστηρότητας στην έκφραση και στις αποδείξεις. Χαρακτηριστικό μάλιστα ήταν το σύνθημά του «Να φύγει ο Ευκλείδης». Σύμφωνα με τον ίδιο, η ομάδα Bourbaki δεν είχε σκοπό την εξάλειψη της ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως κατηγορήθηκε από πολλούς, αλλά τον απαρχαιωμένο τρόπο διδασκαλίας αυτής (Dieudonne, 1981). Επίσης, τονίστηκε και η σημασία της απόδειξης στη διδασκαλία από τον πρόεδρο του συνεδρίου, Stone, όπως αναφέρεται στον Τουμάση (1989, σ.46), λέγοντας πως «τα μαθηματικά θα πρέπει να αποτελούν για τον μαθητή μάλλον μια γενική αποδεικτική επιστήμη, παρά μια συλλογή χρήσιμων κανόνων και τύπων».

Δυστυχώς, η ενεργητική μάθηση και η επανακάλυψη την οποία προωθούσε το νέο μεταρρυθμιστικό κύμα, δεν εφαρμόστηκε στην πράξη. Δριμεία κριτική ασκήθηκε και από τον Kline, στο βιβλίο του με τίτλο «Γιατί ο Γιαννάκης δε μπορεί να κάνει πρόσθεση: Η αποτυχία των Νέων Μαθηματικών» που εκδόθηκε το 1973 και που είναι αντιπροσωπευτικό των αντιδράσεων της εποχής. Οι μαθητές έγιναν ικανοί να αποστηθίζουν, να χρησιμοποιούν συγκεκριμένη μαθηματική ορολογία, αλλά δε μπόρεσαν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, ούτε να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα (Hirstein et al., 1980). Τα νέα μαθηματικά θεωρήθηκαν υπεύθυνα για τις αρνητικές επιδόσεις των μαθητών. Και ας μην ξεχνάμε ότι οι επιδόσεις αυτές είναι ένας σημαντικός δείκτης οικονομικής και κοινωνικής προόδου μέσα σε μια διεθνή ανταγωνιστική οικονομία (Valero, 2017). Κατηγορήθηκαν για τον φορμαλισμό τους, την αυστηρή αξιωματική προσέγγιση και τον θεωρητικό συνολοθεωρητικό χαρακτήρα που πρότασσε η ομάδα Bourbaki. Σκοπός ήταν η προετοιμασία ικανών πανεπιστημιακών σπουδαστών που θα είχαν τέτοιο μαθηματικό υπόβαθρο ώστε να αποτελέσουν τους επόμενους τεχνικούς και επιστήμονες οι οποίοι θα ενίσχυαν την ανάπτυξη της χώρας τους. Αν και αρχικά είχαν θέσει ως στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης για το σύνολο των διδασκομένων, στην πραγματικότητα μεγάλωσαν τη ψαλίδα μεταξύ των μαθηματικά ταλαντούχων και των αδυνάμων. Επίσης, οι ασκήσεις που εμπεριέχονταν στα καινούρια βιβλία ήταν κατασκευάσματα του ανθρώπινου νου που εξυπηρετούσαν τις ανάγκες της ύλης και δεν είχαν καμία σύνδεση με την καθημερινότητα και τα ερεθίσματα των διδασκομένων. Σε πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές αδυνατούσαν ακόμα και να κάνουν πράξεις.

Στην Ελλάδα, όπως αναφέρει ο Καραγεώργος (1985), η νεοελληνική μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιόδους: α) πριν τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, β) μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο και γ) μετά τη δικτατορία. Όσον αφορά την πρώτη φάση, η μαθηματική επιστήμη αλλά και γενικότερα οι θετικές ήταν παραμελημένες, όπως δείχνει και η μελέτη του ωρολογίου προγράμματος της εποχής, ενώ αντίθετα φαίνεται πως δίνονταν μεγαλύτερη έμφαση στα κλασικά μαθήματα, δηλαδή στα αρχαία και στα λατινικά. Παρά τις ανησυχίες όμως που παρατηρούνταν στο εξωτερικό και την ανάγκη για εκσυγχρονισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης, στη χώρα μας παρατηρήθηκε αδράνεια. Χωρίς να έχουν γίνει σοβαρές συζητήσεις ή κατάλληλη προετοιμασία, αποφασίστηκε η Ελλάδα να συμμετάσχει στο διεθνές συνέδριο του 1959 στο Royaumont, περνώντας με αυτόν τον τρόπο στη δεύτερη φάση. Υιοθετήθηκαν οι προτάσεις του μεταρρυθμιστικού κύματος των νέων μαθηματικών άκριτα, θα λέγαμε, δίχως να ληφθούν υπόψιν οι ανάγκες και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης και των Ελλήνων μαθητών. Έτσι, το 1961 συγκροτήθηκε η «Επιτροπή πειραματικής μελέτης και διδασκαλίας των Μαθηματικών εις την Μ. Εκπαίδευσιν» προκειμένου να διαμορφώσει το πρόγραμμα για τον εκσυγχρονισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Η εξαμελής επιτροπή, η οποία λειτουργούσε υπό την καθοδήγηση του Ο.Ε.Ο.Σ., αποτελούνταν από τους: Παπαϊωάννου, Κάππο, Κρητικό, Μιχαλόπουλο, Σωτηράκη και Μπάρκα.

Σε αυτό το σημείο είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ορισμένες επισημάνσεις του Κάππου από ομιλία του το 1966, με σκοπό να τονίσει τη σημασία της μαθηματικής λογικής και της θεωρίας συνόλων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολεία της μέσης εκπαίδευσης. Όπως ο ίδιος αναφέρει, επισημαίνοντας τα παιδαγωγικά και μορφωτικά προβλήματα που ήταν κυρίαρχα την εποχή εκείνη, οι μαθητές έρχονταν συχνά αντιμέτωποι με το φαινόμενο της ασκησιολογίας. Χαρακτηριστικό είναι ότι στην ομιλία του αυτή εμφανίζεται για πρώτη φορά ο όρος ασκησιολογία, περιγράφοντας την εξαιρετικά αυστηρή μεθοδολογία επίλυσης των ασκήσεων. Η επίδραση των Γαλλικών εξετάσεων αλλά και της σχετικής βιβλιογραφίας της εποχής στην ανάπτυξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελλάδα, ήταν εμφανής. Οι εξετάσεις baccalaureat των Γάλλων λειτούργησαν ως ένα σύστημα επιλογής μαθηματικά ικανών φοιτητών, πράγμα που οδήγησε σε συνεχώς αυξανόμενης δυσκολίας θέματα με τα οποία έρχονταν αντιμέτωποι οι υποψήφιοι. Η θεματογραφία άρχισε να πληθαίνει και ο πήχης να ανεβαίνει. Οι διδασκόμενοι καλούνταν να αποστηθίσουν διαδικασίες και μαθηματικές ρουτίνες, με αποτέλεσμα να συγχέουν τη μαθηματική επιστήμη με αυτή τη στείρα απομνημόνευση τεχνικών. Η μαθηματική όμως ικανότητα δεν καλλιεργείται με αυτό τον τρόπο, πράγμα που γίνεται έκδηλο και μετά την εισαγωγή στο πανεπιστήμιο, όπου οι δυσκολίες είναι πολλές και τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών αποκαλύπτονται. Η μεταχείριση των μαθηματικών από τους Γάλλους ως ένας τρόπος επιλογής των ικανών για ακαδημαϊκές σπουδές, αποτελούσε ένα προβληματικό ζήτημα (Revuz, 1981). Η προβληματική αυτή κατάσταση δεν άργησε να μεταφερθεί και στην Ελλάδα, μιας και η επιρροή που ασκούσε η Γαλλία την εποχή εκείνη στην ελληνική μαθηματική κοινότητα, ήταν μεγάλη. Έτσι, τα θέματα των εξετάσεων για την εισαγωγή στις ελληνικές πανεπιστημιακές σχολές άρχισαν να παίρνουν άλλη μορφή. Οι απαιτήσεις των θεματοδοτών από τους υποψηφίους, έγιναν περισσότερες, αλλά και οι ίδιοι οι θεματοδότες, στην προσπάθεια να ανεβάσουν τον δείκτη δυσκολίας και να δώσουν μια μορφή πρωτοτυπίας, όπως αναφέραμε, κατέληξαν σε θέματα σαν και αυτό του 1947, που παραθέσαμε νωρίτερα. Το θέμα του 1947 μπορεί να είναι ενδεικτικό, δεν παύει όμως να είναι και χαρακτηριστικό για τα όσα συνέβαιναν εκείνη την εποχή. Οι εισαγωγικές εξετάσεις είχαν αρχίσει να παίρνουν τη μορφή διαγωνισμού. Οι φροντιστές από την άλλη, προκειμένου να προλάβουν τις εξελίξεις και στην προσπάθεια να προβλέψουν τα θέματα των εξετάσεων, αναζητούσαν πιθανές ασκήσεις στην ξένη βιβλιογραφία και κυρίως στη Γαλλική, ή αναγκάζονταν να κατασκευάσουν οι ίδιοι σύνθετες, απαιτητικές ασκήσεις.

Στην Ελλάδα, λοιπόν, της ευκλείδειας μεθοδολογίας που οδήγησε σ’ένα πολύ θεωρητικό και αυστηρό τρόπο παρουσίασης μαθηματικών ιδεών, ήταν εμφανής η ανάγκη για εκσυγχρονισμό και αναμόρφωση του περιεχομένου των σχολικών μαθηματικών. Στα νέα προγράμματα παρατηρήθηκε μια τάση εξισορρόπησης μεταξύ των κλασικών και θετικών σπουδών. Η εκπαιδευτική αντίληψη της εποχής ήταν ότι η παιδεία έπρεπε να στηρίζεται και στον ελληνικό ανθρωπισμό αλλά και στην πρόοδο των επιστημών (Τουμάσης, 1989). Η κατανόηση σε βάθος των μαθηματικών αντικειμένων έχει καλύτερα αποτελέσματα μάθησης και όχι η απομνημόνευση και η ενασχόληση με τυποποιημένα μαθηματικά έργα. Γι’αυτόν ακριβώς τον λόγο, τα νέα προγράμματα στόχευαν στη μάθηση με κατανόηση (Καλαβάσης & Σκουμπουρδή, 2005). Αξιοσημείωτο είναι πως, αν και στο εξωτερικό η ευκλείδεια γεωμετρία άρχισε να χάνει έδαφος, στη χώρα μας έγινε ακόμα πιο αυστηρή απ’ότι ήταν στο παρελθόν (Καρκούλιας, 2014). Το 1964 – 1966 δημοσιεύτηκαν νέα αναλυτικά προγράμματα βασισμένα στα μοντέρνα μαθηματικά, στα οποία επικράτησε η συνολοθεωρητική γλώσσα, όμως η μέθοδος διδασκαλίας παρέμεινε ίδια. Το 1966 μάλιστα, ο Σωτηράκης, όπως αναφέρεται στο Καρκούλιας (2014, σ.232), ο οποίος ήταν και ένας από τους κύριους συντελεστές της μεταρρύθμισης, λέει ότι: «Νέα Μαθηματικά χωρίς νέα διδακτική είναι αδιανόητα», δείχνοντας έτσι την αμφισβήτησή του στις νέες καταστάσεις. Ακολούθησε η τρίτη περίοδος, αυτή της δικτατορίας που αρχικά φάνηκε να επιβραδύνει τις όποιες αλλαγές, να επιχειρεί μια σύντμηση μοντέρνων και παραδοσιακών μαθηματικών, χωρίς όμως κάτι το αξιοσημείωτο (Λεωνίδης, 2016).

Όπως σημειώσαμε και νωρίτερα, οι αλλαγές που πρότεινε ο Ο.Ε.Ο.Σ. υπό το πνεύμα των νέων μαθηματικών, δεν εφαρμόσθηκαν σε όλες τις περιοχές την ίδια χρονική στιγμή και ούτε με τα ίδια χαρακτηριστικά. Το νέο κύμα άρχισε να κάνει τα πρώτα βήματά του μετά το 1960 στη χώρα μας, ενώ εφαρμόστηκε ουσιαστικά στις αρχές του 1980, όταν είχε ήδη διεθνώς όχι μόνο αμφισβητηθεί, αλλά και απορριφθεί από τα μέσα του 70. Η μεγάλη αυτή καθυστέρηση οφείλεται σε οικονομικούς, κοινωνικούς και πολιτικούς λόγους, η μελέτη των οποίων δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης της εργασίας μας. Πάντως αποτέλεσε τη μεγαλύτερη μεταρρυθμιστική κίνηση που σημειώθηκε ποτέ στην Ελλάδα (Τουμάσης, 1989). Ο δυναμισμός με τον οποίο ξεκίνησε η μεταρρύθμιση, σύντομα μετατράπηκε σε αμφισβήτηση και απογοήτευση. Η πολυπόθητη σύνδεση των μαθηματικών έργων με την πραγματικότητα δεν έγινε ποτέ, με αποτέλεσμα να μη γίνει σαφής η χρησιμότητα των μαθηματικών, ούτε η σχέση τους με τις άλλες επιστήμες. Οι εκπαιδευτικοί δεν ήταν εξοικειωμένοι με τις νέες ιδέες που πρέσβευαν οι μεταρρυθμιστικές κινήσεις και γι'αυτό θα έπρεπε να δοθεί βάρος στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, κάτι που δεν έγινε πέρα από κάποια ανεπιτυχή σεμινάρια. Οι αλλαγές εστίασαν στο περιεχόμενο και όχι στις διδακτικές μεθοδολογίες που χρειάζονταν αναθεώρηση. Οι διδασκόμενοι από την άλλη, δεν ήταν ώριμοι να ανταπεξέλθουν στις δυσκολίες που έχει ο συμβολισμός της μαθηματικής λογικής και γενικότερα η λογικομαθηματική σκέψη. Τα βιβλία ναι μεν ήταν δομημένα πάνω στη μαθηματική λογική, και αυτό για να μπορούν οι μαθητές να την εφαρμόζουν και στην καθημερινή τους ζωή, αλλά σημειώθηκε αδυναμία στην επαλήθευση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων. Ήταν δύσκολο να αναγνωριστεί αν η απάντηση σε μια άσκηση ήταν ορθή ή όχι, και αυτό γιατί η διδασκαλία της λογικής ήταν ελλιπής (Κεφάλας, 1971). Η μαθηματική εκπαίδευση στη χώρα μας φάνηκε να προετοιμάζει μόνο τους μαθηματικά προικισμένους μαθητές για τη μετέπειτα ακαδημαϊκή τους πορεία. Αυτοί εξάλλου ήταν και οι μόνοι οι οποίοι είχαν την ικανότητα να ανταπεξέλθουν στις ανώτερες μαθηματικές ιδέες που εισήγαγαν οι πανεπιστημιακοί στα σχολικά μαθηματικά. Η αναποτελεσματικότητα των νέων καταστάσεων ήταν σαφής. Οι επιδόσεις των μαθητών δεν έδειχναν σημάδια βελτίωσης και ενίσχυαν τη λεγόμενη «μαθηματικοφοβία», δηλαδή το πολύπλοκο εκείνο φαινόμενο που οφείλεται σε πολλούς παράγοντες και αφορά την ανησυχία, το άγχος και τον φόβο των μαθητών όταν ασχολούνται με το μαθηματικό αντικείμενο (Τουμάσης, 1999). Η αναντιστοιχία μεταξύ της θεωρίας και της πράξης οφείλονταν, σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (1991), στον λανθασμένο τρόπο με τον οποίο εξέλαβε η ελληνική μαθηματική κοινότητα τις νέες προτάσεις. Η πρόοδος και η ανάπτυξη που με τόση σιγουριά υπόσχονταν οι υποστηρικτές του νέου κύματος, δεν ήρθε ποτέ.

Στα μέσα του 70 στο εξωτερικό δόθηκε το σύνθημα για επιστροφή στα παραδοσιακά μαθηματικά, το οποίο όμως δεν ολοκληρώθηκε, παρά μόνο μία προσπάθεια εξισορρόπησης μεταξύ των παραδοσιακών και των νέων. Ενώ είχε καλές προθέσεις και στηριζόταν σε λογικά επιχειρήματα, κατέληξε κυρίως σε μια μεγάλη αντιπαράθεση, δημιουργώντας ένα δίπολο μοντέρνων και παραδοσιακών μαθηματικών. Λίγο αργότερα, στα τέλη του 70, εμφανίζεται μια νέα τάση η οποία προέτρεπε για αφαίρεση μεγάλου όγκου της συνολοθεωρίας και της αυστηρής απόδειξης, έμφαση σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και σύνδεση με τις άλλες επιστήμες (Πλατάρος, 2004). Επίσης, πρότεινε στροφή στις μεγάλες μάζες των μαθητών, επιστροφή σε συμπεριφορικούς (μπιχεβιοριστικούς) στόχους διδασκαλίας, χρήση υπολογιστών και έμφαση σε υπολογιστικές δεξιότητες και τεχνικές, που είχαν αγνοηθεί κατά τη διάρκεια των νέων μαθηματικών (Νικολακάκη, 1996). Το μεταρρυθμιστικό αυτό, λοιπόν, κύμα του 80, είχε δύο γενικές τάσεις: το «problem solving» και το «modelling and applications», για τα οποία σκοπεύουμε να μιλήσουμε αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Μετά το τέλος της μεταρρύθμισης των νέων μαθηματικών, η επίλυση προβλήματος άρχισε να αποτελεί κεντρικό άξονα των σχολικών μαθηματικών σε διεθνές επίπεδο. Στην Ελλάδα, που εισήγαγε με καθυστέρηση όσα τελούνταν στο εξωτερικό, τα νέα μαθηματικά εξακολούθησαν να είναι στο προσκήνιο μέχρι και τα μέσα του 90, όταν το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο έβαλε ως στόχο την αναμόρφωση των προγραμμάτων (Θωμαΐδης & Καστάνης, 2003). Εξάλλου κάθε μεταρρύθμιση στην εκπαίδευση συνδέεται με αναθεώρηση των προγραμμάτων σπουδών (Σκουμπουρδή, 2009). Έτσι, ακολουθώντας τις διεθνείς τάσεις, το πρόγραμμα σπουδών που σχηματίστηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1990, είχε ως πυλώνα του την αξιοποίηση της τεχνολογίας και την ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος που πιστεύεται ότι προάγουν ανώτερες πνευματικές ικανότητες (Λεωνίδης, 2016). Η μάθηση προτάθηκε να είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα κατά την οποία ο μαθητής ερευνά, υποθέτει, τεκμηριώνει, αποδεικνύει και αναστοχάζεται. Προωθείται η σύνδεση των προβληματικών καταστάσεων με την καθημερινότητα και απορρίπτονται οι διαδικασίες επίλυσης τετριμμένων ασκήσεων που μετέτρεπαν τον διδασκόμενο σ’έναν άξιο «παπαγάλο». Τα νέα προγράμματα αφήνουν στην άκρη τη μηχανιστική προσέγγιση της γνώσης και ενισχύουν τη βιωματική, δίνουν έμφαση στο μαθηματικό φορμαλισμό αλλά ταυτόχρονα προσπαθούν να μειώσουν το χάσμα μεταξύ των καθημερινών και των σχολικών μαθηματικών (Μαστορογιάννη & Τσόλκα, 2015). Αμφισβητήσιμο είναι όμως κατά πόσο οι αναθεωρήσεις αυτές εφαρμόστηκαν στην πράξη και κατά πόσο οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί είναι έτοιμοι να προσαρμοστούν σε αυτές. Η μεταρρύθμιση, που συνεπάγεται και αλλαγές στο πρόγραμμα, δεν έχει να κάνει τόσο με την αλλαγή του ωρολογίου προγράμματος ή το περιεχόμενο της ύλης, αλλά με την διαφοροποίηση στην διδακτική προσέγγιση, έναν καινούριο προσανατολισμό. Χωρίς αυτόν, η επίλυση προβλήματος, όπως αναπτύχθηκε από τον Polya, δε μπορεί να βρει αντίκρισμα στη σχολική πρακτική. Το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας έχει πολύ γερές βάσεις στις εμπειρίες όλων, καθώς και στο σύστημα αξιολόγησης, ενώ ακόμα και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί δεν είναι εξοικειωμένοι με τις κονστρουκτιβιστικές εμπειρίες μάθησης (Μαστορογιάννη & Τσόλκα, 2015). Ο ακαδημαϊκός προσανατολισμός, από την άλλη, που έχει το εκπαιδευτικό μας σύστημα σήμερα, φαίνεται να βρίσκει σύνδεση με τον φορμαλιστική οπτική των νέων μαθηματικών (Νικολακάκη, 1996). Η μαθηματική ανάλυση έχει κυριαρχήσει σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά μαθηματικά του λυκείου, χωρίς να γίνεται ουσιαστικά κατανοητή από μαθητές που είναι ακόμα μαθηματικά ανώριμοι να διαχειριστούν ανώτερα μαθηματικά αντικείμενα. Για ορισμένους, όπως είναι και ο Τουμάσης (1989), κάποια σημερινά προβλήματα που αντιμετωπίζει το εκπαιδευτικό μας σύστημα, έχουν τις ρίζες του στο μεταρρυθμιστικό αυτό κύμα και αυτό είναι κάτι που θα πρέπει να μελετηθεί εκτενέστερα.

2.3 Το φαινόμενο της ασκησιολογίας μέσα από συνδυαστικές ασκήσεις και θέματα εξετάσεων

Το θέμα του 1947, που παραθέσαμε στην προηγούμενη ενότητα, δεν ήταν το μοναδικό «πρωτότυπο» θέμα που εντοπίσαμε στην έρευνά μας. Στις Γενικές Εξετάσεις του 1997 δόθηκε στους μαθητές το εξής:

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g, παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει $g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha$ *για κάθε* $x, y \in R$*. Να αποδείξετε ότι ισχύει:*

i) $g(0) = -\alpha$

ii) $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ *για κάθε* $x \in R$.

Εάν κάποιος επιχειρήσει να μελετήσει περισσότερο τη δοθείσα σχέση, θα έρθει αντιμέτωπος με την οξύμωρη διαπίστωση ότι ο νεπέρειος αριθμός e ισούται με το 1. Πιο συγκεκριμένα, αν για παράδειγμα θέσουμε όπου $x = y = 2$, τότε θα έχουμε:

$$g(4) = 4e^3 g(1) + 2e^2 + 4.$$

Αν πάλι θέσουμε όπου $x = 1$ και $y = 3$, τότε θα έχουμε:

$$g(4) = 4e^3 g(1) + e^2 + 2e + 3.$$

Με μία απλή αφαίρεση κατά μέλη, είναι προφανές ότι: $e^2 - 2e + 1 = 0$, άρα $e = 1$.[2] Επομένως, δεν υπάρχει συνάρτηση g με τις συγκεκριμένες ιδιότητες και για ακόμα μία φορά η υπόθεση είναι ψευδής, δημιουργώντας ακριβώς τα ίδια ερωτηματικά για την σκοπιμότητα ή αστοχία της επιλογής της άσκησης.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση που εντοπίσαμε κατά τη μελέτη της θεματογραφίας των εξετάσεων, είναι το πρόβλημα που τέθηκε στους μαθητές της Β΄ Λυκείου για τις προαγωγικές τους εξετάσεις στο μάθημα της Άλγεβρας τον Ιούνιο του 2001.[3]

Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$ *όπου* $\alpha, \beta \in R$*, τότε:*

α) να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$,

[2] Υπενθυμίζουμε ότι: e = 2,71828…

[3] Οι προαγωγικές εξετάσεις της Β΄ Λυκείου διεξάγονταν τότε πανελλαδικά.

β) να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση 1/16 με της αρχικής του τιμής,

γ) να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.

Οι θεματοδότες, στην προσπάθειά τους για διαφοροποίηση, έδωσαν στην εκθετική συνάρτηση $Q(t) = Q_o \cdot e^{ct}$ μια λογαριθμική μορφή και μάλιστα μέσα σ'ένα πλαίσιο πραγματικού προβλήματος. Αν θεωρήσουμε ότι έγινε για να αναδειχθούν οι μαθηματικά ικανοί και όχι όσοι αρκούνται στην απλή απομνημόνευση, τότε δεν υπάρχει λόγος στο α ερώτημα να αποκαλύπτεται ο νόμος της εκθετικής μεταβολής. Η επίσημη λύση που έδωσε η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων (Κ.Ε.Ε.) αναλώνεται σε πράξεις και αλγοριθμικές διαδικασίες και σε καμία περίπτωση δε θυμίζει τρόπο επίλυσης προβλήματος. Ακόμα και αν θεωρήσουμε ότι η εκφώνηση όντως καλύπτει τις απαιτήσεις ενός πραγματικού προβλήματος για να το χαρακτηρίσουμε έτσι, η προτεινόμενη και μοναδική λύση της Κ.Ε.Ε., σαφέστατα δεν το κάνει. Δε φαίνεται να αφήνονται ανοιχτά περιθώρια για κριτική και δημιουργική σκέψη, που αποτελεί και βασικό πυλώνα για την επίλυση προβλήματος. Εάν μάλιστα κάποιος κάνει μια έρευνα και μελέτη στα γραπτά και τις βαθμολογήσεις αυτών, θα παρατηρήσει τη μεγάλη αναστάτωση που προξένησε στους βαθμολογητές οποιαδήποτε διαφορετική προσέγγιση επίλυσης από τους υποψηφίους (Θωμαΐδης, 2009, σ. 32-38).

Χαρακτηριστικό επίσης της μεγάλης απόκλισης των στόχων των αναλυτικών προγραμμάτων και των ουσιαστικών σκοπών της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι και το επόμενο παράδειγμα του τέταρτου θέματος για τις απολυτήριες εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου τον Μάιο του 2003 στο μάθημα των Μαθηματικών Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ ∈ (α,β), δ ∈ (α,β), έτσι ώστε f(γ)f(δ) < 0, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο διάστημα (α,β).

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ *τέτοια ώστε* $f''(\xi_1) < 0$ *και* $f''(\xi_2) > 0$.

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Στις οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008 (σ. 129-132), τονίζεται ότι οι μαθητές επιδιώκεται να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε απλές, όπως συχνά επαναλαμβάνεται, ασκήσεις, οι οποίες πρέπει να είναι στην ίδια λογική με αυτές του σχολικού βιβλίου. Παρά λοιπόν τις οδηγίες, στο συγκεκριμένο θέμα ζητείται από τους μαθητές να εφαρμόσουν 6 φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής, κάτι που προφανώς δε χαρακτηρίζεται ως απλή εφαρμογή στο σημαντικό αυτό θεώρημα της Ανάλυσης και δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο μέσα στο σχολικό βιβλίο (Θωμαΐδης, 2009). Γιατί συμβαίνει αυτό; Όπως επισημαίνουν οι Θωμαΐδης & Μπαρούτης (2013), η Κ.Ε.Ε. έχει ως βασικό της στόχο το πλήθος των αριστούχων μαθητών να μην φτάνει σε υψηλό ποσοστό. Για να το πετύχει αυτό, ανεβάζει τον πήχη δυσκολίας, δημιουργώντας συνδυαστικά θέματα, θέματα που εμπεριέχουν παρανοήσεις μαθητών και, κάποιες φορές, θέματα που οριακά ανήκουν στην εξεταστέα ύλη.

Πέρα από τα θέματα όμως που έχουν δοθεί κατά καιρούς στις γενικές εξετάσεις, ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το ζήτημα της ασκησιολογίας παρουσιάζουν και ορισμένα είδη ασκήσεων που δημοσιεύονται στο μαθητικό περιοδικό Ευκλείδης Β΄ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.). Ενδεικτικά παραθέτουμε:

Ευκλείδης Β΄ 1990. Τεύχος 01. (σ. 32-34)

1) *Δίνονται οι πίνακες:*

$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + 16 & 5\alpha + 40 + 15\beta \\ 5\alpha + 40 + 15\beta & 350 \end{bmatrix}$ *και* $B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$ *με* $\alpha, \beta \in R$.

Αν $D(A \cdot B)=0$, *να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης* $f : f(x) = \left|\beta - \alpha|x|\right|$.

2) *Δίνονται οι πίνακες:*

$A = \begin{bmatrix} (\lambda-1)x & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 1 \\ 3\lambda - 5 & x \end{bmatrix}$ *και οι συναρτήσεις:*

$f : f(x) = x^2 - (\lambda+1) \,/\, x \in [-2, \lambda - 1]$ *και* $g : g(x) = \lambda x - 2 \,/\, (-2, 0]$ *με* $x, \lambda \in R$.

Αν η εξίσωση $[D(A) + D(B)]^2 = 2D(A) \cdot D(B)$ *ως προς x, έχει μοναδική λύση στο R, να βρείτε τη σύνθεση* gof *των δύο συναρτήσεων.*

3) *Δίνονται οι πίνακες:*

$A = \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda & 0 \\ 2 & 2\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$ *με* $\lambda \in R$, *και η συνάρτηση*

$f : f(x) = x^2 - 2\lambda x + \lambda \,/\, R$.

i) Να προσδιορίσετε το λ ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης f να είναι το μεγαλύτερο δυνατό.

ii) Να βρείτε αφού εξασφαλίσετε την ύπαρξή του, τον πίνακα $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

iii) Αν για τον A ισχύει: $A^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_\nu & \beta_\nu \\ 0 & 1 & \alpha_\nu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\forall\ \nu \in N^*$ *(όπου* (α_ν), (β_ν) *ακολουθίες του ν)*

δείξτε ότι: $(A \cdot B)^{-1} \cdot A^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & \frac{\nu(\nu-1)}{2} - 1 \\ -1 & -\nu + 1 & \frac{-\nu(\nu-1)}{2} + \nu - 1 \\ -1 & -\nu & \frac{-\nu(\nu-1)}{2} + 2 \end{bmatrix}$.

Ευκλείδης Β΄ 2004. Τεύχος 54. (σ. 49)

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - (\kappa+4)x^3 + 5x^2 - 3x + \kappa$, $\kappa \in R$. *Η διαίρεση* $P(x) : (2x^2 + 1)$ *δίνει υπόλοιπο* $\upsilon(x) = [\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta]x + \eta\mu(\alpha+2\beta)$. *Δείξτε ότι* $\alpha = \rho\pi$, $\rho \in Z$.

Ευκλείδης Β΄ 2007. Τεύχος 63. (σ. 29)

Δίνονται οι εξισώσεις:

$x^2 - 10D_x \cdot x + 25 \cdot D_x^2 = 0$ *(1) και* $y^2 - 8\alpha \cdot D_y \cdot y + 16\alpha^2 \cdot D_y^2 = 0$ *(2) με* $\alpha \in R^*$. *Έστω ότι το ζεύγος (x,y) με x, y> 0 είναι η μοναδική λύση ενός συστήματος ευθείων, τότε:*

α) Να υπολογίσετε την ορίζουσα D του συστήματος και να βρείτε τον $\alpha \in R^*$.

β) Αν η λύση του συστήματος έχει μορφή (x,y) = (β,β) όπου $\beta \in R_+^*$, *να βρείτε τις ορίζουσες Dx, Dy συναρτήσει του* $\beta \in R_+^*$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $(D^2 - 1)x^4 - 2D^2x^2 + \frac{1}{25} = 0$ *και να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β.*

Ευκλείδης Β΄ 2007. Τεύχος 63. (σ. 28)

Δίνεται το σύστημα $\Sigma : \begin{Bmatrix} (\lambda-1)x + 2\lambda y = -2 \\ 2\lambda x + (\lambda-1)y = \lambda - 1 \end{Bmatrix}$ *και D η ορίζουσα των συντελεστών. Αν η εξίσωση* $x^2 + 5(D-1)x - 6(D-1)^2 = 0$ *έχει μία διπλή ρίζα,*

α) να βρείτε τον συντελεστή λ.

β) να λυθεί το σύστημα.

Ευκλείδης Β΄ 2008. Τεύχος 68. (σ. 51)

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$ *με* $\nu \in N^*$ *ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και P(0), P(1), P(2), … , P(ν) οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω. Έστω η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\nu x} & x \in [-1,0) \cup (0,+\infty) \\ P(3) - \frac{2}{7}P(2) & x = 0 \end{cases}$. *Για την συνάρτηση f ισχύει ότι η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο με τετμημένη* $x_0 = 3$ *είναι κάθετη στην ευθεία* $y = 108x + 6$. *Να δειχθεί ότι* $\Omega = \{1, 2, 3\}$. *Εάν επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 = 0$ *και η* C_f *διέρχεται από το σημείο M(8, P(1)), να υπολογισθούν οι πιθανότητες P(1), P(2) και P(3).*

Αυτό που έχει ενδιαφέρον στις συγκεκριμένες ασκήσεις που δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό Ευκλείδης Β΄ είναι η συνύπαρξη διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων ή ενοτήτων που εκ πρώτης όψεως δε συνδέονται μεταξύ τους. Έτσι, στις ασκήσεις του 1990 βλέπουμε έναν συνδυασμό πινάκων και συναρτήσεων, ενότητες οι οποίες παρουσιάζονται ανεξάρτητα μέσα στα σχολικά εγχειρίδια. Στον Ευκλείδη Β΄ του 2004 η τριγωνομετρία συναντά τα πολυώνυμα, το 2007 οι ορίζουσες τις ταυτότητες και τα συστήματα, ενώ το 2008 προτείνεται ένας συνδυασμός πιθανοτήτων και συναρτήσεων. Το κάθε ένα κομμάτι ξεχωριστά αποτελεί ένα λογικό εργαλείο που σε συνεργασία με τα υπόλοιπα μπορεί να ενισχύσει την ευελιξία μας στη λήψη πληροφοριών και γνώσεων (Λιουδάκης, 1990). Εάν γίνει σωστή αξιοποίηση αυτών των συνθέσεων, ενθαρρύνουν και προτρέπουν σε έρευνα και ανακάλυψη τον αναγνώστη. Εάν όμως η χρήση τους γίνεται χωρίς την κατάλληλη μελέτη και με σκοπό ίσως την αύξηση δυσκολίας ή την εξέταση πολλών ενοτήτων της διδακτέας ύλης μέσα από ένα μικρό αριθμό θεμάτων και ερωτήσεων, τότε είναι πολύ πιθανό να οδηγήσουν σε αντίθετα αποτελέσματα και να ενισχύσουν το φαινόμενο της ασκησιολογίας που μελετάμε.

Η αγωνιώδης προσπάθεια των εκπαιδευτικών να δημιουργήσουν ενδιαφέροντα και ευφάνταστα θέματα εντοπίζεται ενίοτε ακόμα και στα σχολικά βιβλία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί άσκηση της πρώτης έκδοσης του βιβλίου των Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου (1999), με την εξής εκφώνηση:

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(ημx) = e^x συνx$, για κάθε $x \in R$ (1).

i) Να βρείτε την $f'(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Η εκφώνηση της συγκεκριμένης άσκησης, μετά από την κριτική που δέχθηκε για λάθη και αστοχίες, πέρασε όχι από σαράντα αλλά από τρία κύματα, καθώς χρειάστηκε δύο νέες τροποποιήσεις σε διάστημα τεσσάρων ετών, προκειμένου να έρθει στην τελική της μορφή. Επειδή η $g(x) = ημx$ είναι περιοδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R, αυτό συνεπάγεται ότι μπορεί να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_1 \neq x_2$ έτσι ώστε $f(ημx_1) \neq f(ημx_2)$. Για $x = 0$ και $x = π$ στην ισότητα (1), έχουμε:

$$f(ημ0) = e^0 \cdot συν0 = 1 \text{ και } f(ημπ) = e^π \cdot συνπ = -e^π,$$

$$\text{δηλαδή } f(0) = 1 \text{ και } f(0) = -e^π \text{ αντίστοιχα.}$$

Το αποτέλεσμα αυτό όμως είναι άτοπο, γι’αυτό και η (1) δεν είναι δυνατό να ισχύει $\forall x \in R$.

Στη δεύτερη λοιπόν έκδοση του βιβλίου, το 2000, η ισότητα (1) άλλαξε σε:

$$f(ημx) = e^x συνx, \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι 1-1, λύνοντας έτσι το προηγούμενο πρόβλημα. Παρ’όλα αυτά εξακολουθεί να πλανάται το εξής ερώτημα: Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει η (1), θα είναι σίγουρα παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου τιμών [-1,1] της g(x) = ημx, έτσι ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων, εφόσον δεν γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της (1); Σύμφωνα λοιπόν με τη λύση που υπήρχε (και υπάρχει) στο σχολικό βιβλίο, μετά την εφαρμογή του θεωρήματος της παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων, καταλήγουμε στην ισότητα:

$$f'(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = e^x (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x).$$

Εάν θέσουμε σε αυτή όπου $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$, τότε παίρνουμε αντίστοιχα ότι:

$$f'(-1) \cdot 0 = e^{-\frac{\pi}{2}} (0 - (-1)) \Rightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \;\; \text{και} \;\; f'(1) \cdot 0 = e^{\frac{\pi}{2}} (0 - 1) \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Συνεπώς καταλήγουμε και πάλι σε άτοπο.

Έτσι, στην πέμπτη τώρα έκδοση του βιβλίου, το 2003, η εκφώνηση της άσκησης άλλαξε, για τελευταία φορά, ως εξής:

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (-1,1) για την οποία ισχύει:

f(ημx) = e^xσυνx, για κάθε $x \in R\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αυτή τη φορά το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης έγινε το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και η συνάρτηση f έγινε παραγωγίσιμη στο σύνολο τιμών της g(x) = ημx, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Θωμαΐδης & Κυριαζής, 2017).

Η πληθώρα των συνδυαστικών, πρωτότυπων ασκήσεων – δημιουργημάτων που παραθέσαμε νωρίτερα, βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα την τροπή που πήρε η μεθοδολογία των ασκήσεων κατά τη διδασκαλία στην πορεία του χρόνου. Πολλοί είναι αυτοί που πιστεύουν ότι οι μαθητές γίνονται μαθηματικά ικανοί μέσα από την εξάσκησή τους σε μεθοδολογίες για την επίλυση ασκήσεων. Το μόνο που έχει ως αποτέλεσμα όμως είναι «η τέχνη του επιτυγχάνειν» στις εξετάσεις (Πάλλας, 1959). Και με αυτό τον τρόπο βλέπουμε την άρρηκτη σχέση που συνδέει πλέον την ασκησιολογία με τις εξετάσεις καθώς και την αντίφασή της με τις οδηγίες των αναλυτικών προγραμμάτων. Η διδασκαλία των μαθηματικών στη Γ΄ Λυκείου αποσκοπεί στην επιτυχία των μαθητών στις πανελλαδικές εξετάσεις. Ως εκ τούτου, έχει εδραιωθεί μια φροντιστηριακού τύπου διδακτική προσέγγιση, όπου ο μαθητής αποστηθίζει τεχνικές μεθοδολογίας για την επίλυση ασκήσεων – πιθανών θεμάτων, δεν εμβαθύνει στις διδακτικές μαθηματικές έννοιες και, όπως είναι αναμενόμενο, εμφανίζει βασικές παρανοήσεις (Θωμαΐδης & Μπαρούτης, 2013). Οι εκπαιδευτικοί ολοκληρώνουν τη διδασκαλία της ύλης των μαθηματικών όσο γίνεται νωρίτερα προκειμένου να ασχοληθούν το υπόλοιπο χρονικό διάστημα που τους απομένει μέχρι τις εξετάσεις με δύσκολα, συνδυαστικά θέματα. Είναι σημαντικό όμως να τονιστεί ότι μια άσκηση μπορεί να χαρακτηρίζεται ως πολύ δύσκολη ενώ είναι χαμηλού επιπέδου ως προς το επίπεδο μαθηματικής σκέψης που απαιτεί (Ρίζος, 2005). Έτσι, για παράδειγμα, αν δοθεί στους μαθητές μια παράσταση της μορφής:

$$\frac{\eta\mu^2 30^o + \frac{1}{2}^3 - (1{,}25)^{-1}}{\sigma\upsilon\nu^2 60^o + \sqrt{0{,}16}\cdot\left(\frac{1}{\eta\mu 45^o} + \varepsilon\varphi 30^o\right)},$$

τότε γίνεται σαφές πως η δυσκολία έγκειται μόνο στις απαιτητικές συνδυαστικές πράξεις και όχι σε κάποια έννοια, όχι σε κάτι ουσιαστικότερο. Η παραπάνω διαπίστωση είναι κάτι που πρέπει να προβληματίζει όσους εμπλέκονται στη διαδικασία. Οι εκπαιδευτικοί στο σχολείο και στο φροντιστήριο δημιουργούν έναν φαύλο κύκλο ασκησιολογίας στην προσπάθειά τους «να κάνουν σωστά τη δουλειά τους». Έτσι παραγκωνίζουν συχνά θεωρία, σχολικό βιβλίο και χρήσιμες αποδεικτικές διαδικασίες και αρχίζουν έναν αγώνα εξεύρεσης ή δημιουργίας δύσκολων «πρωτότυπων» θεμάτων προκειμένου να καλύψουν τις ανάγκες των εξετάσεων και κατ΄επέκταση των μαθητών τους (Θωμαΐδης, 2009).

Σύμφωνα με την Επιτροπή Εμπειρογνωμόνων για την εκπόνηση Π.Σ. Μαθηματικών το 2014, όπως αναφέρεται στον Θωμαΐδη (2014), η διδασκαλία της ανάλυσης στο Λύκειο εστιάζει στην εφαρμογή αλγεβρικών διαδικασιών και μένει στην επιφάνεια, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αποκτούν πολλές παρανοήσεις. Οι παρανοήσεις αυτές μάλιστα συνεχίζονται και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, προκαλώντας απορία και ανησυχία στους πανεπιστημιακούς. Η διδασκαλία της θεωρίας έχει υποβαθμισμένο ρόλο στην ελληνική σχολική πραγματικότητα (Θωμαΐδης, 2014). Αν δεν γίνει όμως σε βάθος μελέτη της θεωρίας, δε μπορούμε να μιλήσουμε για μαθηματική ικανότητα. Οι διδασκόμενοι ρίχνουν το βάρος στην απομνημόνευση όσων περισσότερων ασκήσεων μπορούν, υποβαθμίζουν τη σημασία των θεωρητικών τμημάτων της ύλης μέχρι και λίγο πριν τις εξετάσεις, όμως ο χρόνος δεν είναι αρκετός και αν η εκφώνηση δε δοθεί ακριβώς όπως σημειώνεται στο βιβλίο, γίνεται δύσκολα διαχειρίσιμη. Σε έρευνες, όπως των Πάσσου και Γαζέπη (2015) και του Απλακίδη (2016), φαίνεται ότι αρκετοί μαθητές παίρνουν ελάχιστες μονάδες από το θέμα Α της θεωρίας, ενώ λύνουν αξιόλογο αριθμό ασκήσεων, κυρίως εκείνες που αντιμετωπίζονται με συγκεκριμένες διαδικασίες. Η διόρθωση των γραπτών στα βαθμολογικά κέντρα δίνει πολύ ενδιαφέροντα στοιχεία. Υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ενώ οι μαθητές παρουσιάζουν απαντήσεις με πολύ καλή χρήση κανόνων και τεχνικών, ταυτόχρονα φαίνεται να αγνοούν πότε πραγματικά χρειάζονται αυτές οι τεχνικές και πώς συνδέονται με τη θεωρία. Αυτό δεν είναι τυχαίο καθώς οι διδασκόμενοι δείχνουν σημάδια εξάρτησης από τους μεθοδολογικούς κανόνες που διδάχθηκαν στην τάξη και οι οποίοι υποβαθμίζουν ή ακόμα και παραγκωνίζουν την εννοιολογική κατανόηση (Θωμαΐδης et al., 2016). Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών φαίνεται πως ακολουθούν τις ανάγκες και απαιτήσεις των εξετάσεων, που όσο αντιμετωπίζεται από τους υπεύθυνους ως ένας διαγωνισμός για την ανάδειξη των πιο ικανών για σπουδές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, τόσο μάλλον εδραιώνεται το φαινόμενο της ασκησιολογίας.

2.4 Σύγχρονες όψεις του φαινομένου της ασκησιολογίας

Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της ασκησιολογίας καθώς και η έκταση που αυτή έχει πάρει, αναδεικνύονται όχι μόνο μέσα από τα παραδείγματα που παραθέσαμε νωρίτερα, αλλά και από εμπειρικές έρευνες των τελευταίων δεκαετιών. Χαρακτηριστική είναι η έρευνα του Οικονόμου (1997) που αφορά την «επίλυση προβλήματος» μέσα στη σχολική αίθουσα και αποτελεί κομμάτι μιας ευρύτερης έρευνας πάνω στη διδασκαλία των μαθηματικών στην ελληνική μέση εκπαίδευση. Μελετάται το ζήτημα μέσα από το πρίσμα της επίλυσης προβλημάτων, η οποία αναδεικνύει τη χρησιμότητα της επιστήμης των μαθηματικών και προετοιμάζει τον μαθητή για τις όποιες προβληματικές καταστάσεις θα αντιμετωπίσει στην ενήλικη ζωή του ως ενεργός πολίτης.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, για την οποία χρησιμοποιήθηκαν οι απαντήσεις 187 μαθηματικών του Γυμνασίου και 181 του Λυκείου, οι μαθητές ασχολούνται μόνο με ασκήσεις και όχι με προβλήματα, καθώς πρώτα τους παρουσιάζεται ένα παράδειγμα και στη συνέχεια, γνωρίζοντας ήδη τη μεθοδολογία επίλυσής του, δραστηριοποιούνται με παρόμοια μαθηματικά έργα. Εξάλλου, όπως έχουμε αναλύσει προηγουμένως, ένα μαθηματικό έργο που δεν προκαλεί τον μαθητή για διερεύνηση και απαιτεί μόνο την αντιγραφή μιας τεχνικής επίλυσης που έχει ήδη διδαχθεί από τον εκπαιδευτικό, σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί ως προβληματική κατάσταση. Η άσκηση, η οποία θα έπρεπε να χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της κατανόησης και εμπέδωσης από τους μαθητές, μονοπωλεί θα λέγαμε στη διδασκαλία, ενώ το πρόβλημα μέσα από το οποίο προκύπτει η αναγκαιότητα και χρησιμότητα των μαθηματικών, απουσιάζει. Αν και η επίλυση ασκήσεων ξεκίνησε με βοηθητικό ρόλο στη διδασκαλία, φαίνεται να την κατακλύζει, σε βάρος μάλιστα και της θεωρίας. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται στην τάξη, γίνονται συνεχώς δυσκολότερες και άλλες σημαντικές πτυχές της διδασκαλίας παραγκωνίζονται. Όπως υποστηρίζει και η Adda (1986), οι εκπαιδευτικοί εστιάζουν στις απαιτήσεις των εξετάσεων σε τέτοιο βαθμό, με αποτέλεσμα να μην διδάσκουν πραγματικά μαθηματικά. Από τις απαντήσεις που δόθηκαν, γίνεται σαφής η μεγάλη απόκλιση μεταξύ των κονστρουκτιβιστικών σκοπών της διδασκαλίας των μαθηματικών και της καθημερινής σχολικής πρακτικής όπου ο μαθητής επιδίδεται στην εκμάθηση τεχνικών επίλυσης ασκήσεων και στην κατηγοριοποίηση αυτών για μελλοντική χρήση σε κάθε μορφή εξέτασης. Η ανάγκη μάλιστα για την κατηγοριοποίηση των ασκήσεων εντοπίζεται σ’ένα ποσοστό της τάξης του 70% περίπου στους εκπαιδευτικούς της έρευνας. Το υψηλό αυτό ποσοστό αποτελεί ακόμα μία ένδειξη της κυριαρχίας του ρόλου των εξετάσεων στη διδασκαλία, παρά τους όποιους στόχους για την οικοδόμηση γνώσης προτείνει το αναλυτικό πρόγραμμα.

Επόμενη έρευνα που θα μας απασχολήσει είναι αυτή των Κλαουδάτου & Παπασταυρίδη (1995), στην οποία μελετάται η αποτελεσματικότητα της ύπαρξης των εφαρμογών στα βιβλία και η δυνατότητα που αποκτούν οι μαθητές για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων με τη βοήθεια των μαθηματικών τους γνώσεων. Τα βιβλία που διδάχθηκαν μετά το 1987 στην Ελλάδα στόχευαν στην απομάκρυνση του συνολοθεωρητικού χαρακτήρα της μεταρρύθμισης των Νέων Μαθηματικών και στη σύνδεση των μαθηματικών με τη σύγχρονη πραγματικότητα. Για να καταστεί αυτό δυνατό, τα βιβλία εμπλουτίστηκαν με σύνολο εφαρμογών και πραγματικών προβλημάτων. Ο σχεδιασμός τους είναι τέτοιος ώστε να γίνεται η παρουσίαση της θεωρίας και στη συνέχεια να δίνονται διάφορες εφαρμογές. Αυτά τα δύο όμως είναι τόσο κοντά μεταξύ τους, που σύμφωνα με τους Blum και Niss (1989), ακόμα και αν αρχικά ο σχεδιασμός αφορούσε τη δραστηριοποίηση με πραγματικά προβλήματα, τελικά να πρόκειται για απλές παραδοσιακές ασκήσεις.

Η έρευνα έγινε σε 124 μαθητές της Β΄ Λυκείου και αποτελούνταν από τρία μέρη: ασκήσεις αντίστοιχες των σχολικών βιβλίων, ερωτήματα είτε που παρόμοια βρίσκονταν στα βιβλία είτε που στόχευαν στη διερεύνηση των δεξιοτήτων μοντελοποίησης και τέλος, σε πραγματικά προβλήματα. Ένα μάλιστα από αυτά τα προβλήματα συνδέονταν με την εφαρμογή του νόμου της εκθετικής μεταβολής και ήταν ανάλογο με εκείνο που τέθηκε στις πανελλαδικές εξετάσεις το 2001 και για το οποίο έγινε λόγος στην ενότητα 2.3. Από τα χαμηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ενότητα των προβλημάτων, γίνεται σαφές πως οι μαθητές δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Ο ρόλος του δασκάλου φαίνεται πως είναι σημαντικός στην περίπτωση της πρώτης κατηγορίας, αυτής των πιο στερεότυπων έργων. Όσον αφορά όμως τα προβλήματα, αποδεικνύεται πως οι παράγοντες της διδακτικής πρακτικής και του μοντέλου των σχολικών βιβλίων είναι δυνατότεροι από αυτόν του δασκάλου, ο οποίος δεν επηρέασε προς το θετικότερο τα μέτρια ή αρνητικά αποτελέσματα. Στην δεύτερη κατηγορία παρατηρήθηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι αποδόσεις των μαθητών να συνδέσουν μαθηματικές έννοιες με πραγματικές καταστάσεις ήταν ικανοποιητικές ενώ σε κάποιες άλλες όχι. Η παραπάνω διαφοροποίηση ερμηνεύεται, σύμφωνα με τους Κλαουδάτο & Παπασταυρίδη (1995), στο ότι η πρώτη ομάδα απαιτούσε μικρότερα επίπεδα αφαίρεσης και διδάσκεται συνήθως μέσα σε πραγματικό πλαίσιο, ενώ η δεύτερη προσεγγίζεται μ'έναν πιο τυπικό-θεωρητικό τρόπο και δε συνδέεται με πραγματικές καταστάσεις. Επιπλέον, ενδιαφέρον έχει πως αν και σε έρευνες, όπως και των Blum et al. (1992), έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθηματικά ικανοί μαθητές είναι και ικανοί λύτες πραγματικών προβλημάτων, στην προκείμενη έρευνα δόθηκαν σωστές απαντήσεις και από μαθητές που δεν έχουν τόσο καλές σχολικές επιδόσεις. Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι οι δεξιότητες που απαιτεί η επίλυση προβλημάτων είναι κάτι που δεν διδάσκεται με τον παραδοσιακό θεωρητικό τρόπο που συνηθίζεται στην ελληνική πραγματικότητα.

Όπως υπογραμμίζουν οι Κλαουδάτος & Παπασταυρίδης (1995), η εισαγωγή των πραγματικών προβλημάτων και των εφαρμογών δε μπορεί να είναι αποδοτική όταν γίνεται με τον τρόπο που παρουσιάζεται στα σχολικά βιβλία. Επίσης, οι δεξιότητες που απαιτούνται δε μπορούν να διδαχθούν με την παραδοσιακή θεωρητική προσέγγιση. Η χρήση βέβαια των εφαρμογών στα σχολικά βιβλία είναι ενθαρρυντική και δείχνει διάθεση για εξέλιξη και αλλαγή, όμως η ουσιαστική σύνδεσή τους με την πραγματικότητα φαίνεται πως απουσιάζει. Τα συμπεράσματα της έρευνας θα λέγαμε πως προωθούν μια πιο ενεργητική διδακτική προσέγγιση διδασκαλίας και μάθησης και αποτελούν ένα καλό ερέθισμα για περαιτέρω συζήτηση ως προς τον τρόπο ενσωμάτωσης των προβλημάτων στη σχολική καθημερινότητα.

Με αφορμή τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας, οι Θωμαΐδης & Διαμαντίδου (2016), επιχείρησαν να εξετάσουν τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις στην επίλυση προβλημάτων, κάτι που διαπιστώνεται και από τα αρνητικά αποτελέσματα στον μαθηματικό διαγωνισμό PISA, αλλά και από τη διόρθωση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων.

Η περίπτωση επίλυσης προβλήματος που μελετήθηκε ήταν κατά την κλήρωση της Τράπεζας Θεμάτων στις προαγωγικές εξετάσεις της Α΄ Λυκείου σε σχολείο του Κιλκίς, το 2014, όπου κληρώθηκαν θέματα που και τα δύο ανήκαν στο κεφάλαιο των προόδων. Οι εκφωνήσεις των δύο θεμάτων που κληρώθηκαν ήταν οι εξής:

Θέμα 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) για την οποία ισχύει: $α_4 – α_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 5.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Θέμα 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

Στο δεύτερο θέμα οι 44 εξεταζόμενοι έπρεπε να εφαρμόσουν τις θεωρητικές τους γνώσεις σε μια υπολογιστική άσκηση στο κεφάλαιο των προόδων, ενώ στο τέταρτο σε μια προβληματική κατάσταση. Μόνο μία απόλυτα σωστή απάντηση δόθηκε με χρήση της διδαχθείσας θεωρίας. Όλες οι υπόλοιπες απαντήσεις εμπεριείχαν, εξολοκλήρου ή μερικώς, πιο πρακτικούς τρόπους και απόπειρες καταμέτρησης. Από τους μαθητές που ασχολήθηκαν με το θέμα 4, οι μισοί περίπου χρησιμοποίησαν την καταμέτρηση, ενώ οι υπόλοιποι είτε έκαναν χρήση προόδων είτε ένα συνδυασμό των προηγούμενων μεθόδων. Μάλιστα είναι χαρακτηριστικό ότι από τους μαθητές που απάντησαν σωστά κάνοντας καταμέτρηση, σχεδόν οι μισοί (3 στους 8) είχαν συνολικά στις εξετάσεις χαμηλή βαθμολογία. Υπήρξε και μαθητής που δεν ασχολήθηκε καν με το δεύτερο θέμα και όμως κατάφερε να απαντήσει σε απαιτητικά, όπως προορίζονταν τουλάχιστον να είναι, ερωτήματα του τέταρτου θέματος. Από τα γραπτά που διορθώθηκαν, προέκυψε το συμπέρασμα ότι μαθητές προετοιμασμένοι, που γνώριζαν τη θεωρία και τις τεχνικές και έλυσαν το δεύτερο θέμα, απέτυχαν να πάρουν πολλές μονάδες από το τέταρτο. Αντίθετα, κάποιοι που στερούνταν θεωρητικών γνώσεων, αντιμετώπισαν με μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση το τέταρτο θέμα και χρησιμοποιώντας πρακτικές απλής καταμέτρησης, κατόρθωσαν να πάρουν τις αντίστοιχες μονάδες.

Η δυσκολία που εμφανίζουν οι μαθητές στη δημιουργία συνδέσεων είναι εμφανής και πιθανόν ανεξάρτητη των σχολικών τους επιδόσεων. Η εκμάθηση των τεχνικών επίλυσης μπορεί να πριμοδοτήσει τον μαθητή μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο, όμως δε συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων. Το τελευταίο, σύμφωνα με τους Θωμαΐδη & Διαμαντίδου (2016), είναι κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μέσα από τη μοντελοποίηση και την επίλυση προβλήματος, γι’αυτό και πρέπει να δοθεί σε αυτά η ανάλογη βαρύτητα. Την ίδια άποψη συμμερίζεται και η Βοσνιάδου (1998), η οποία υποστηρίζει ότι μόνο με αυτόν τον τρόπο ο μαθητής θα ξεφύγει από τα στενά περιθώρια της απομνημόνευσης.

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη μας για τη σύγχρονη όψη του φαινομένου της ασκησιολογίας, θεωρούμε σημαντικό να παραθέσουμε την κριτική ορισμένων επιφανών εκπροσώπων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπως π.χ. ο Β. Δουγαλής στον οποίο απονεμήθηκε το βραβείο εξαίρετης διδασκαλίας Ξανθόπουλου-Πνευματικού το έτος 2000. Στην ομιλία του κατά την παραλαβή του βραβείου, υπογραμμίζει τη μεγάλη επιρροή που έχει η παράδοσή μας με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά στον τρόπο διδασκαλίας και στα αναλυτικά προγράμματα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η ύλη είναι μεγάλη, ενώ η διδασκαλία στηρίζεται σε μια θεωρητική και πιο αυστηρή προσέγγιση. Επισημαίνει έναν από τους σημαντικότερους ρόλους που έχει αναλάβει ο εκπαιδευτικός, και αυτός δεν είναι άλλος από το να δείξει τη σπουδαιότητα των μαθηματικών στα παιδιά, την ανάγκη ύπαρξής τους όχι μόνο για την ανάπτυξη της τεχνολογίας και άλλων επιστημών, αλλά και την κατανόηση του ίδιου του κόσμου. Γι’ αυτούς ακριβώς τους λόγους τονίζει τη σπουδαιότητα της απόκτησης βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων από τους διδασκομένους. Η αποστήθιση δεν πρόκειται να συνεισφέρει στην αντιμετώπιση αναγκών στον πραγματικό κόσμο ούτε στην ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και στη δημιουργία συνδέσεων. Η επίλυση προβλήματος είναι αυτή που ενισχύει τη διερεύνηση και τη δημιουργία υποθέσεων. Οι μαθητές έχουν μάθει να κατατάσσουν τις ασκήσεις σε κατηγορίες προκειμένου να διευκολυνθεί η ομαδοποιημένη αποστήθισή τους κατά την περίοδο των εξετάσεων (Δουγαλής, 2000).

Αυτή είναι η λεγόμενη ασκησιολογία που αποτελεί μεγάλο πρόβλημα της σύγχρονης ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης και οφείλεται στις εξετάσεις. Προκειμένου να αντιμετωπισθεί αυτό το ζήτημα πρέπει να ελαττωθεί η βαρύτητα των εξετάσεων και να αντικατασταθούν κάποιες ασκήσεις από πιο σύνθετα προβλήματα. Δυστυχώς όμως, όπως ο ίδιος σημειώνει, αυτό είναι κάτι που πιθανόν να μην έχει αντίκρισμα στο σημερινό εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας.

Κεφάλαιο 3

Ο μαθηματικός διαγωνισμός PISA και η επίλυση προβλήματος

Προκειμένου να γίνει δυνατή η μελέτη του φαινομένου της ασκησιολογίας στη χώρα μας τον τελευταίο αιώνα, χρειαζόμαστε αξιόπιστα εργαλεία. Ένα τέτοιο εργαλείο αποτελεί ο μαθηματικός διαγωνισμός PISA. Ο επηρεασμένος από τη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση διαγωνισμός δεν ελέγχει τις γνώσεις των μαθητών, όπως αυτές μεταφέρονται στην τάξη σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα, αλλά δίνει έμφαση στη χρήση των μαθηματικών για την επίλυση προβλήματος. Οι αρνητικές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στον PISA αποτελούν απόδειξη για τις ελλιπείς μαθηματικές τους δεξιότητες που είναι απαραίτητες για τη μετέπειτα ζωή τους στη σύγχρονη κοινωνία, καθώς και για τις αδυναμίες που εντοπίζονται στο εκπαιδευτικό μας σύστημα. Τα αποθαρρυντικά αυτά αποτελέσματα φανερώνουν τον δευτερεύοντα ή σχεδόν μηδαμινό ρόλο που έχει η επίλυση προβλήματος στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, σε αντιδιαστολή με την απομνημόνευση, μια διαδικασία που προτείνεται ως το κλειδί της επιτυχίας για τις εξετάσεις.

3.1 Το πρόγραμμα PISA

Η επιστήμη των μαθηματικών ανέκυψε μέσα από τις πρακτικές και καθημερινές ανάγκες που προέκυψαν στην πορεία του χρόνου, γεγονός που επηρέασε φυσικά και τη διδασκαλία της (Ρίζος, 2009). Πολλοί είναι εκείνοι οι εκπαιδευτικοί που θεωρούν ότι η διδασκαλία των μαθηματικών για να νοείται κατάλληλη και εύστοχη, πρέπει να συνδέεται με προβλήματα επηρεασμένα από την καθημερινή ζωή.

Την ίδια άποψη συμμερίζεται και ένας πολύ σημαντικός διεθνής φορέας, ο Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη (ΟΟΣΑ) με το πρόγραμμά του, που φέρει τον τίτλο: Program for International Student Assessment, γνωστό και ως PISA. Ο οργανισμός αυτός ιδρύθηκε το 1961 και έχει αναλάβει σημαντικό ρόλο ως παράγοντας εκπαιδευτικής πολιτικής σε εθνικό αλλά και σε παγκόσμιο επίπεδο (Lingard and Grek, 2007). Ο PISA χρηματοδοτείται άμεσα από τα συμμετέχοντα κράτη και δαπανάται γι' αυτόν το 30% του προϋπολογισμού της Διεύθυνσης Εκπαίδευσης στο εσωτερικό του ΟΟΣΑ. Έργο της Διεύθυνσης Εκπαίδευσης είναι μεταξύ των υπολοίπων και η συλλογή δεδομένων αλλά και η παροχή συγκριτικών στοιχείων για τα εκπαιδευτικά συστήματα των συμμετεχουσών χωρών. Αν και η αρχή έγινε ως μια κοινή μελέτη για τις χώρες μέλη του ΟΟΣΑ, η μελέτη αυτή πλέον συμπεριλαμβάνει και πολλές άλλες χώρες, παρέχοντας έτσι πληροφορίες για τους λόγους που μπορεί να εξηγούν τις διαφορές στις επιδόσεις εντός και μεταξύ χωρών/οικονομιών. Όσες από αυτές ενδιαφέρονται να λάβουν μέρος στο πρόγραμμα, απευθύνονται στον ΟΟΣΑ και αν ικανοποιούν τα κριτήρια συμμετοχής που αφορούν την τεχνογνωσία και το οικονομικό κόστος, η συμμετοχή τους γίνεται αποδεκτή. Το ενδιαφέρον που φαίνεται να παρουσιάζουν οι χώρες μη μέλη είναι αυτό που αναδεικνύει και τη σημασία και επίδραση του προγράμματος (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010).

Το πρόγραμμα PISA είναι ένας μαθητικός διαγωνισμός που εφαρμόστηκε για πρώτη φορά σε διεθνές επίπεδο το 2000 και από τότε διεξάγεται κάθε τριετία με συμμετέχοντες 15χρονους μαθητές, οι οποίοι βρίσκονται στο στάδιο της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Η διαδικασία υλοποίησης του PISA διαμορφώνεται από διεθνή ερευνητικά ιδρύματα (PISA Consortium) και είναι κοινή για όλες τις χώρες. Φορέας υλοποίησής του στην Ελλάδα ορίστηκε το ΚΕΕ (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας).

Το επιστημονικό υπόβαθρο της έρευνας οργανώνεται ύστερα από την συνεργατική προσπάθεια επιστημόνων της κάθε χώρας, η οποία έχει φυσικά καθοδηγηθεί από την εκάστοτε κυβέρνηση στα πλαίσια της αμοιβαίας συνεργασίας. Η γλώσσα του τεστ είναι η εθνική ή οι εθνικές κάθε συμμετέχουσας, ενώ ακολουθούνται πολύ αυστηρές διαδικασίες προκειμένου να διασφαλιστεί η εγκυρότητα και η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Προτού μάλιστα διεξαχθεί η κύρια έρευνα του διαγωνισμού, προηγείται η πιλοτική της εφαρμογή. Από την κάθε συμμετέχουσα σχολική μονάδα, το δείγμα υπολογίζεται περίπου στους 35 μαθητές. Τα θέματα του τεστ χάριν ασφαλείας δε δίνονται στη δημοσιότητα, παρά μόνο κάποια παραδείγματα με τις κατευθυντήριες οδηγίες για την αξιολόγηση αυτών και κάποια παλαιότερα θέματα. Τα τεστ που μοιράζονται στα σχολεία φανερώνουν τη σύνδεση εκπαιδευτικών, κοινωνικών, οικονομικών και πολιτιστικών συντελεστών με την πρόοδο των παιδιών. Τα βασικά στάδια υλοποίησης του PISA είναι τα ακόλουθα:

- Ανάπτυξη του πλαισίου αξιολόγησης του PISA
- Υποβολή θεμάτων από τις συμμετέχουσες χώρες
- Επεξεργασία και επιλογή θεμάτων
- Μετάφραση του υλικού στις εθνικές γλώσσες
- Διεξαγωγή πιλοτικής έρευνας
- Σεμινάριο για την κωδικοποίηση των απαντήσεων στην πιλοτική έρευνα
- Κωδικοποίηση, καταχώρηση και ανάλυση δεδομένων
- Επιλογή θεμάτων και οριστικοποίηση των ερωτηματολογίων για την κύρια έρευνα
- Προετοιμασία για την τελική μορφή του υλικού της κύριας έρευνας
- Δειγματοληψία σχολείων και μαθητών
- Διεξαγωγή κύριας έρευνας
- Σεμινάριο για την κωδικοποίηση των απαντήσεων στην κύρια έρευνα

- Κωδικοποίηση, καταχώριση και ανάλυση δεδομένων
- Δημοσιοποίηση αποτελεσμάτων (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010)

Ο PISA στοχεύει να αξιολογήσει τις δεξιότητες που κατέχουν οι 15χρονοι μαθητές και οι οποίες θεωρούνται σημαντικές για την επιτυχία τους στη μετέπειτα ζωή τους ως πολίτες της κοινωνίας και όχι τις γνώσεις τους σε σχέση με τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Βασίζεται σ'ένα καθόλου στατικό πρότυπο, αυτό της διά βίου μάθησης, σύμφωνα με το οποίο οι γνώσεις και οι δεξιότητες αποκτώνται σε όλη τη διάρκεια της ζωής.

Η αξιολόγηση του προγράμματος επικεντρώνεται από το 2000 στις ικανότητες των παιδιών να διαχειριστούν πληροφορίες στα γνωστικά αντικείμενα της επεξεργασίας κειμένου, των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών. Επίσης, εξετάζεται και αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να θέτουν σε εφαρμογή τις γνώσεις και εμπειρίες τους σε ρεαλιστικές καταστάσεις, γι'αυτό από το 2003 προστέθηκε και το γνωστικό αντικείμενο της επίλυσης προβλήματος. Το 2000 δόθηκε έμφαση στην κατανόηση και επεξεργασία κειμένου, το 2003 στα μαθηματικά, το 2006 στις φυσικές επιστήμες, το 2009 στην κατανόηση κειμένου, το 2012 στα μαθηματικά, το 2015 στις φυσικές επιστήμες, ενώ το 2018 και πάλι στην κατανόηση κειμένου.

Στον PISA 2000 συμμετείχαν 32 χώρες (28 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ – το 2002 συμμετείχαν επιπλέον 13 χώρες στην ίδια έρευνα) και σε αυτόν του 2003, 41 (30 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ). Στον PISA 2006 συμμετείχαν 57 χώρες (30 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ) και στον επόμενο, το 2009, ο αριθμός αυξήθηκε στις 65 χώρες (34 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ – το 2010 συμμετείχαν επιπλέον 10 χώρες στην ίδια έρευνα). Το πλήθος των συμμετεχουσών χωρών παρέμεινε σταθερό το 2012. Το 2015 συμμετείχαν 72 χώρες (35 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ), ενώ στον τελευταίο του 2018 πήραν μέρος 79 χώρες, εκ των οποίων οι 37 είναι χώρες μέλη του ΟΟΣΑ.

3.1.1 Ο μαθηματικός αλφαβητισμός του PISA

Ο μαθηματικός αλφαβητισμός αποτελεί για τον PISA, όπως αναφέρεται και στο «The PISA 2003, Assessment Framework», την ικανότητα που έχει το άτομο να προσδιορίζει και να κατανοεί τον ρόλο που έχουν τα μαθηματικά στον κόσμο, να διατυπώνει τεκμηριωμένες κρίσεις, να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά μ'έναν τρόπο ώστε να αντιμετωπίζει τις καθημερινές του ανάγκες ως σκεπτόμενος, δημιουργικός και ενεργός πολίτης της κοινωνίας. Απαιτεί από τον λύτη να έχει την συνδυαστική ικανότητα προκειμένου να επιλύει καθημερινά προβλήματα και όχι απλά να κατέχει γνώση μέσα στο πλαίσιο που ορίζει το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας. Ελέγχεται και αξιολογείται με δείκτες συνέχειας και αποτελεί μία διά βίου διαδικασία (PISA, 2003). Προϋποθέτει επίσης, εκ μέρους του ατόμου, γνώση μαθηματικών όρων και διαδικασιών, καθώς και ικανότητα εκτέλεσης πράξεων και εφαρμογής συγκεκριμένων μεθόδων (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2005). Αξιοσημείωτο μάλιστα είναι πως η αξιολόγηση του μαθηματικού αλφαβητισμού στον PISA γίνεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε όχι μόνο να εξετάζονται οι γνώσεις και οι μαθηματικές δεξιότητες, αλλά και άλλοι συντελεστές του οικογενειακού και κοινωνικού περιβάλλοντος που επηρεάζουν την πρόοδο των παιδιών (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010).

Ο μαθηματικός αλφαβητισμός προσδιορίζεται από τρεις βασικούς παράγοντες:

- Το πλαίσιο μέσα στο οποίο είναι ενταγμένα τα προβλήματα, δηλαδή τις καταστάσεις που είναι μέρος της σχολικής, και όχι μόνο, ζωής των μαθητών. Οι καταστάσεις αυτές διαχωρίζονται σε προσωπικές, εκπαιδευτικές ή επαγγελματικές, κοινωνικές και επιστημονικές.
- Το μαθηματικό περιεχόμενο που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων και το οποίο προσδιορίζεται από τέσσερις δεσπόζουσες έννοιες, αυτές του χώρου και σχήματος, της μεταβολής και σχέσεων, της ποσότητας και τέλος, της αβεβαιότητας. Οι έννοιες αυτές ουσιαστικά αντιστοιχίζουν μια σειρά από πιθανά θέματα που προκύπτουν στην καθημερινότητα. Η πρώτη έννοια αφορά τη μελέτη σχημάτων η οποία με τη σειρά της απαιτεί την κατανόηση των ιδιοτήτων των αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Η δεύτερη ασχολείται με τον συναρτησιακό τρόπο σκέψης, αυτόν δηλαδή που εμπεριέχει όρους σχέσεων και συναρτήσεων στην έκφραση των διαδικασιών μεταβολής και ο οποίος αποτελεί βασικότατο στόχο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η έννοια της ποσότητας είναι καθοριστική καθώς χωρίς την ποσοτικοποίηση δε θα μπορούσαμε να συντονίσουμε ό,τι υπάρχει στον χώρο γύρω μας. Τέλος, η δεσπόζουσα έννοια της αρχής της αβεβαιότητας κάνει την εισαγωγή για τα πεδία των δεδομένων και της τύχης, τα οποία αποτελούν τον πυρήνα της μελέτης για τον τομέα της στατιστικής και των πιθανοτήτων.
- Τις μαθηματικές διαδικασίες που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων και οι οποίες αφορούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές ικανότητες που χρειάζονται. Οι ικανότητες που πρέπει να επιστρατεύσουν οι μαθητές λέγονται μαθηματικές διεργασίες, ενώ η θεμελιώδης εκείνη διαδικασία της επίλυσης προβλημάτων ονομάζεται μαθηματικοποίηση και ακολουθεί πέντε στάδια. Αρχικά γίνεται η εκκίνηση από ένα πρόβλημα βγαλμένο από την καθημερινότητα. Στη συνέχεια ακολουθεί η οργάνωση αυτού βάσει μαθηματικών εννοιών και η αναγνώριση του τομέα των μαθηματικών που έχει να κάνει με το πρόβλημα. Ο μαθητής σταδιακά απομακρύνεται από την ρεαλιστική αυτή κατάσταση επιχειρώντας υποθέσεις, γενικεύσεις και μορφοποιήσεις, προκειμένου να πετύχει τη μετάβαση από το αντικειμενικό στο μαθηματικό πρόβλημα. Έπειτα επιλύεται το μαθηματικό πλέον πρόβλημα και στο τελικό στάδιο διερευνώνται οι λύσεις αυτού σε πραγματικές συνθήκες. Για την επιτυχία της μαθηματικοποίησης είναι απαραίτητες, σύμφωνα με τον PISA, πολλές επιμέρους ικανότητες, όπως αυτές της: μαθηματικής σκέψης και διατύπωσης συλλογισμών, ανάπτυξης επιχειρημάτων, λήψης και μετάδοσης μηνυμάτων μαθηματικού περιεχομένου, μορφοποίησης, θέσης και επίλυσης προβλήματος, περιγραφής και

παρουσίασης του μαθηματικού προβλήματος, χρήσης συμβόλων, τύπων, μαθηματικών όρων και εκτέλεσης πράξεων και τέλος, χρήσης βοηθητικών μεθόδων και εργαλείων (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010).

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να σημειώσουμε πως βασικό ρόλο στο σχηματισμό του μαθηματικού περιεχομένου του PISA διαδραμάτισε το Ινστιτούτο Freudenthal, καθώς ο διαγωνισμός έχει βαθιά επιρροή από τη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME). Είναι χαρακτηριστικό μάλιστα ότι πολλά θέματά του εμφανίζονται στο υλικό του Ινστιτούτου, καθώς και το γεγονός ότι σημαντικά στελέχη του συνέβαλαν στη διαμόρφωση του προγράμματος. Τα θέματα εστιάζουν συνήθως στον έλεγχο πολλών ικανοτήτων ταυτόχρονα. Για τον λειτουργικό τρόπο αξιολόγησης αυτών, έγινε η ομαδοποίησή τους σε τρεις κατηγορίες, στην ικανότητα αναπαραγωγής, συσχετισμών και στοχασμού (Ρίζος, 2009). Οι ικανότητες της πρώτης δέσμης αφορούν τη γνώση μαθηματικών θεωριών και ιδιοτήτων, την εκτέλεση πράξεων και διαδικασιών καθώς και τον χειρισμό τύπων. Η δεύτερη ξεπερνά την απλή εφαρμογή τύπων της πρώτης και εξετάζει επιπλέον την ικανότητα σύνδεσης μεταξύ της διδαχθείσας ύλης. Η τρίτη και τελευταία κατηγορία ζητά από τον μαθητή τον στοχασμό όσον αφορά την επίλυση του προβλήματος και εξετάζει την τεκμηρίωση και αιτιολόγηση. Τα προβλήματα εδώ χαρακτηρίζονται ως πιο αυθεντικά και απρόσιτα. Η αυθεντικότητα άλλωστε είναι και ένα καθοριστικό σημείο στον σχεδιασμό και στην ανάλυση του περιεχομένου του PISA. Ο διαγωνισμός με τον όρο αυθεντικότητα τονίζει πως η χρήση των μαθηματικών γίνεται με στόχο την επίλυση των προβλημάτων (PISA, 2003) και δεν επιτυγχάνεται αντίστροφα η εξάσκηση στην επιστήμη των μαθηματικών με την κατασκευή προβλημάτων.

3.1.2 Τα αποτελέσματα του PISA για την Ελλάδα

Οι χώρες κατατάσσονται στον PISA, ανάλογα με τις επιδόσεις τους, σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν εκείνες οι χώρες που η μέση βαθμολογία τους είναι στατιστικά σημαντικά υψηλότερη από τη μέση των χωρών του ΟΟΣΑ, στη δεύτερη εκείνες που δε διαφέρει σημαντικά και στην τρίτη όσες έχουν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερη μέση βαθμολογία από τη μέση βαθμολογία των χωρών του ΟΟΣΑ (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2012). Η χώρα μας σε όσες έρευνες έχουν διεξαχθεί μέχρι στιγμής, ανήκει στην τρίτη κατηγορία και στα τρία γνωστικά αντικείμενα. Στη συνέχεια παραθέτουμε τα αποτελέσματα του προγράμματος στα μαθηματικά για την Ελλάδα από την αρχή της εφαρμογής του, όπως σημειώνονται στη σελίδα του ΟΟΣΑ, στη διεύθυνση: https://www.oecd.org/pisa/data/.

Πίνακας κατάταξης Ελλάδας στα μαθηματικά στον PISA

2000	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	447
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	27-30*
2003	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	445
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	32-33*
2006	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	459
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	38-39*
2009	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	466
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	38-40*
2012	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	453
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	42-45*
2015	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	454
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	41-42*
2018	Μέση βαθμολογία Ελλάδας	451
	Κατάταξη στο σύνολο των χωρών	45

(* Οι χώρες, στις οποίες δεν δίνεται μία συγκεκριμένη θέση κατάταξης αλλά μία ομάδα πιθανών θέσεων, δεν παρουσιάζουν μεταξύ τους στατιστικά σημαντική διαφορά στη μέση βαθμολογία.)

Οι παραπάνω βαθμολογίες αποτελούν αν μη τι άλλο έναν αξιόπιστο συντελεστή, όμως μια εκτενής ανάλυση των ικανοτήτων των παιδιών διαφαίνεται πολύ καλύτερα μέσα από τη μελέτη ανά κατηγορία εγγραμματισμού. Τα επίπεδα εγγραμματισμού αποτελούν δείκτες της ικανότητας των μαθητών να απαντούν στα θέματα του διαγωνισμού τα οποία είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας και διαμορφώνονται βάσει των δεσποζουσών εννοιών και των μαθηματικών ικανοτήτων που έχουν ήδη προαναφερθεί (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010). Προκειμένου λοιπόν να γίνει ο έλεγχος της επίδοσης των παιδιών στα μαθηματικά, το μόνο που αρκεί είναι η μελέτη της κατανομής της επίδοσης στα έξι επίπεδα εγγραμματισμού. Σημαντικό είναι να αναφέρουμε πως, σύμφωνα και με τον PISA, η βάση του εγγραμματισμού είναι το επίπεδο 2, καθώς σε αυτό οι μαθητές μπορούν να δείξουν τις όποιες μαθηματικές τους ικανότητες στο πλαίσιο διάφορων απλών καθημερινών καταστάσεων.

- Επίπεδο 6: Οι μαθητές επιδεικνύουν ανώτερη μαθηματική σκέψη. Μπορούν να συνδυάζουν πληροφορίες, να αναπτύσσουν στρατηγικές και να μοντελοποιούν σύνθετα προβλήματα.
- Επίπεδο 5: Οι μαθητές έχουν δομημένη και συλλογιστική σκέψη, επιχειρούν εικασίες και υποθέσεις, όπως επίσης εργάζονται με τη βοήθεια μοντέλων σύνθετων καταστάσεων.
- Επίπεδο 4: Οι μαθητές είναι σε θέση να αναπτύσσουν επιχειρήματα και επεξηγήσεις, να κάνουν ορθή επιλογή και χρήση αναπαραστάσεων έτσι ώστε να επιτύχουν σύνδεση με καθημερινές καταστάσεις.
- Επίπεδο 3: Οι μαθητές έχουν διαδικαστική γνώση. Επιλέγουν και εφαρμόζουν απλές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος.
- Επίπεδο 2: Οι μαθητές είναι σε θέση να δώσουν επιφανειακές ερμηνείες και να εξάγουν απλά συμπεράσματα. Χρησιμοποιούν βασικούς αλγόριθμους, τύπους και διαδικασίες.

- Επίπεδο 1: Οι μαθητές απαντούν σε απλές και μόνο σαφείς ερωτήσεις και ακολουθούν συγκεκριμένες και μηχανιστικές οδηγίες (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010).

Όπως σημειώνει το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (2010), το μαθηματικό περιεχόμενο που απαιτείται για την επίλυση προβλήματος μέσα στον PISA καθορίζεται από τέσσερις δεσπόζουσες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών, οι οποίες συχνά μπορούν να επικαλύψουν η μία την άλλη. Οι έννοιες αυτές είναι οι εξής:

- Ποσότητα
- Χώρος και Σχήμα
- Μεταβολή και Σχέσεις
- Αρχή της Αβεβαιότητας

Πάνω σε καθεμία από αυτές σχεδιάζονται θέματα κατάλληλα για τον διαγωνισμό. Στο πρόγραμμα PISA 2000 απουσίαζαν μαθηματικά θέματα από τις δεσπόζουσες έννοιες της ποσότητας και αβεβαιότητας, επομένως τα πρώτα αποτελέσματα τα οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ως μέτρο σύγκρισης είναι αυτά του 2003 και στα οποία δόθηκε έμφαση μάλιστα στα μαθηματικά.

Παρατηρώντας λοιπόν τα αποτελέσματα της Ελλάδας τα προηγούμενα χρόνια, διαπιστώνουμε ότι το 2006 και 2009 κατάφερε να βελτιώσει τις επιδόσεις της στα μαθηματικά. Αυτό είναι κάτι που υπογραμμίζεται και από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2012), σύμφωνα με το οποίο η αύξηση το 2006 κατά 14 μονάδες στη μέση επίδοση σε σχέση με το 2003 φανερώνει μια σταδιακή βελτίωση των Ελλήνων μαθητών. Επιπλέον, όπως η ίδια σημειώνει, η αύξηση κατά 21 ολόκληρες μονάδες στη μέση επίδοση από το 2003 μέχρι το 2009, είναι μια διαφορά που χαρακτηρίζεται στατιστικά σημαντική. Η γενικότερη βελτίωση των επιδόσεων αποτυπώνεται όχι μόνο στη μείωση των μαθητών που κατατάσσονται στα χαμηλότερα επίπεδα, αλλά και στην αύξηση όσων επιδεικνύουν υψηλότερες μαθηματικές ικανότητες και κατατάσσονται στα επίπεδα 5 και 6. Δυστυχώς όμως, τα αποτελέσματα από το 2012 και έπειτα για τη χώρα μας σημειώνουν πτωτική τάση. Από την αρχή της διοργάνωσης του διαγωνισμού, η Ελλάδα ανήκει σταθερά στην τρίτη και τελευταία κατηγορία.

Πιο συγκεκριμένα να αναφέρουμε ότι η Ελλάδα ήταν μία από τις ελάχιστες χώρες που σημείωσαν σημαντική αύξηση στην επίδοση στα μαθηματικά το 2006 σε σχέση με την αντίστοιχη του 2003. Το γεγονός αυτό οφείλεται σε αλλαγές κυρίως στις επιδόσεις στα κατώτερα και μέσα επίπεδα εγγραμματισμού (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, 2010). Το 2006 οι Έλληνες μαθητές που κατατάσσονται στο επίπεδο 6 είναι μόλις το 0,9%, ενώ το αντίστοιχο των χωρών του ΟΟΣΑ είναι 3,3%. Η Ελλάδα ανήκει στην ομάδα εκείνων των χωρών των οποίων λιγότερο από το 1/4 κατατάσσεται στο επίπεδο 4, ενώ οι επιδόσεις μας είναι πολύ κοντά με τον μέσο όρο στο επίπεδο 3. Αξίζει να τονίσουμε πως στο επίπεδο 2 που είναι και η βάση του εγγραμματισμού ανήκει το 26,8 % των Ελλήνων, με μέσο όρο για τις χώρες του ΟΟΣΑ το 21,9%. Αντίστοιχα κυμάνθηκαν και τα αποτελέσματα του 2009, με τους Έλληνες να σημειώνουν ναι μεν καλύτερες επιδόσεις στα επίπεδα 5 και 6 σε σχέση με το 2006, αλλά και πάλι χαμηλότερες έναντι των Ευρωπαίων. Στο επίπεδο 2, η χώρα μας σημείωσε ποσοστό της τάξεως του 69,6%, τοποθετώντας μας πολύ κοντά στο μέσο όρο των υπολοίπων χωρών του 78%. Δυστυχώς υπάρχει και ένα ποσοστό περίπου 30% μαθητών που έχει επιδόσεις επιπέδου 1 ή και κάτω αυτού, κάτι που μαρτυρά πιθανά εμπόδια στη μετέπειτα μάθηση, ίσως και ζωή. Το 2012 μόλις το 3,9% των Ελλήνων ανήκει στα επίπεδα 5 και 6, ενώ το 35,7% κατατάσσεται στο επίπεδο 2 και κάτω. Στον διαγωνισμό του 2015, περίπου το 4% ανήκει και πάλι στα επίπεδα των υψηλών επιδόσεων, ενώ χαμηλότερο ποσοστό Ελλήνων μαθητών παρατηρείται και στο επίπεδο 4 (12,3%), σε σχέση με τους μαθητές από τις χώρες του ΟΟΣΑ (18,6%). Το 22% και το 25% των μαθητών στην Ελλάδα και τις χώρες του ΟΟΣΑ αντίστοιχα, σημειώνουν επιδόσεις αντίστοιχες του επιπέδου 3 και λιγότερο από το 30% ανήκουν στο δεύτερο και πρώτο επίπεδο. Σύμφωνα, τέλος, και με τα αποτελέσματα του τελευταίου διαγωνισμού του προγράμματος, που έγινε το 2018, μόνο το 4% των Ελλήνων έχει πολύ υψηλές επιδόσεις επιπέδου 5 ή 6, ενώ μάλιστα είναι χαρακτηριστικό πως τοποθετούμαστε στις τελευταίες θέσεις μεταξύ των χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης που συμμετείχαν στο πρόγραμμα.

3.1.3 Συζήτηση για τα αποτελέσματα της Ελλάδας και αντιδράσεις

Τα θέματα του διαγωνισμού είναι αρκετά πιο απλά αλλά ταυτόχρονα διαφέρουν από αυτά που συνήθως διδάσκουμε στην Ελλάδα και τα οποία έχουν περισσότερο θεωρητικό χαρακτήρα. Είναι σαφές άλλωστε πως στην Ελλάδα δίνεται έμφαση στην απομνημόνευση εννοιών και διαδικασιών και φυσικά στην επιτυχία στις εξετάσεις. Τα θέματα όμως του PISA χρήζουν ικανότητες εφαρμογής των γνώσεων στις καθημερινές καταστάσεις που προκύπτουν. Οι χαμηλές επιδόσεις των Ελλήνων αποδίδονται επίσης στο γεγονός, σύμφωνα και με ανακοίνωση του ΥΠΕΠΘ, ότι τα θέματα είναι περισσότερο προσαρμοσμένα στα αναλυτικά προγράμματα των Αγγλοσαξονικών κυρίως χωρών, παρά σε χώρες που δείχνουν προτίμηση σε διδασκαλία με αρχές μαθηματικής μοντελοποίησης, όπως είναι και η δική μας. Επίσης, πολλά θέματα που εξετάζονται στον διαγωνισμό δυσκολεύουν τους Έλληνες μαθητές, καθώς θα τα χαρακτηρίζαμε υποδεέστερα σε σύγκριση με τα προτεινόμενα του αναλυτικού μας προγράμματος όσον αφορά το μαθηματικό τους περιεχόμενο. Τα προγράμματα σπουδών των χωρών αυτών στηρίζονται κυρίως στο αμερικάνικο πρότυπο με αποτέλεσμα να διδάσκουν στα παιδιά πληθώρα εννοιών, χωρίς όμως τις αποδείξεις που σε εμάς θεωρούνται απαραίτητες. Οι Έλληνες μαθαίνουν στη σχολική αίθουσα πως για να θεωρείται έγκυρη μια λύση θα πρέπει να αποδεικνύεται με μαθηματικό τρόπο, κάτι που δεν κρίνεται απαραίτητο από τους φορείς του διαγωνισμού. Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι απόδειξη είναι εκείνη η συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσω μίας σειράς διαδοχικών συμπερασμάτων καταλήγει σ'ένα τελικό συμπέρασμα, με τέτοιο τρόπο ώστε οποιαδήποτε αμφιβολία γύρω απ'το τελικό συμπέρασμα θα πρέπει ν΄αναζητηθεί πίσω στις υποθέσεις μάλλον, παρά στη λογική αναγκαιότητα των διαδοχικών συμπερασμάτων (Τουμάσης, 1999). Σύμφωνα με τον Ρίζο (2005), εάν κάποιος μελετήσει θέματα από διεθνείς διαγωνισμούς ή και σχολικά βιβλία σε Ευρώπη ή Αμερική, θα βρει πως η απόδειξη έχει πολύ μικρή θέση σε αυτά, κάτι που διευκολύνει τους μαθητές. Από την άλλη όμως, η απουσία αυτής και ταυτόχρονα δηλαδή της ακριβολογίας και της τεκμηρίωσης, σε συνδυασμό με τη στείρα εκμάθηση μεθοδολογίας και ασκησιολογίας μπορεί να προσάψουν στα μαθηματικά τον χαρακτήρα του δογματικού.

Ο PISA και τα αποτελέσματά του μπορούν να θεωρηθούν χρήσιμο εργαλείο για το έργο της οικοδόμησης του ευρωπαϊκού εκπαιδευτικού χώρου της ανταγωνιστικότητας και της καινοτομίας (Council of the European Union, 2000). Σύμφωνα λοιπόν και με τα Κέντρα Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ), από τη στιγμή που θα ανακοινωθούν τα αποτελέσματα, πρέπει η κάθε συμμετέχουσα χώρα να οργανώσει εκπαιδευτικά συνέδρια και σεμινάρια, αλλά και πολιτικές και δημοσιογραφικές συζητήσεις. Επιπλέον, απαιτείται η πραγμάτωση ερευνητικών προγραμμάτων για την ανάλυση των αποτελεσμάτων και των θεμάτων εκπαίδευσης και φυσικά η ανακοίνωση των αποτελεσμάτων έτσι ώστε να ξεκινήσουν οι συζητήσεις και να ληφθούν μέτρα για την αντιμετώπιση των όποιων τυχών αδυναμιών του εκάστοτε εκπαιδευτικού συστήματος.

Περιορισμένες είναι οι συζητήσεις που έχουν γίνει στη χώρα μας όσον αφορά τα εκπαιδευτικά ζητήματα ποιότητας και αποτελεσματικότητας εξετάζοντας τις συγκριτικές έρευνες επίδοσης του διαγωνισμού. Οι εθνικές αξιολογήσεις γίνονται σε ευρεία κλίμακα σε όλες σχεδόν τις χώρες, πλην της Ελλάδας και ελαχίστων ακόμα περιπτώσεων. Οι φορείς της εκπαίδευσης οφείλουν να μελετούν τα συμπεράσματα των συγκριτικών βαθμολογιών και να εξετάζουν τους λόγους εκείνους που χαρακτηρίζουν ένα σύστημα εκπαίδευσης ως επιτυχημένο. Στην Ελλάδα φαίνεται πως οι ιθύνοντες δεν επηρεάστηκαν στον ζητούμενο βαθμό από τα χαμηλά αποτελέσματα. Μετά τα αποτελέσματα για την κακή κατάταξη των Ελλήνων μαθητών, δεν έγινε ουσιαστικός διάλογος, ούτε διατυπώθηκαν προτάσεις για να βελτιωθεί η κατάσταση, αλλά δυστυχώς έμειναν απλά στην επιφάνεια. Σε αυτό συμφωνεί και ο Ξωχέλλης (2007) ο οποίος σημειώνει πως ενώ οι χαμηλές θέσεις της Ελλάδας αποτελούν μείζον θέμα, το ζήτημα αυτό δεν απασχόλησε ιδιαίτερα την εκπαιδευτική πολιτική. Μάλιστα χαρακτηριστικά αναφέρει ότι «Οι αιτίες για την όχι ικανοποιητική εικόνα των Ελλήνων μαθητών πρέπει να αναζητηθούν κυρίως στη σκοποθεσία της εκπαίδευσης, στο καθεστώς μεθόδευσης της διδασκαλίας, καθώς και τους τρόπους αξιολόγησης της σχολικής επίδοσης που εφαρμόζονται και επικρατούν στο ελληνικό σχολείο». Οι επαναλαμβανόμενες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις που επιχειρούνται, στην ουσία κάνουν πολύ μικρά θετικά βήματα (Ανδριανουπολίτης, 2011).

Η κατάταξη της Ελλάδας στις χαμηλές αυτές θέσεις χρησιμοποιείται ως αποδεικτικό στοιχείο για την άσκηση κριτικής στην εκπαιδευτική πολιτική της εκάστοτε κυβέρνησης. Τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν ως βάση για την ανίχνευση των συστημικών αδυναμιών του υφιστάμενου εκπαιδευτικού μας συστήματος αλλά και για την ενημέρωση της αναθεώρησης των προγραμμάτων σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Το ΚΕΕ δε διαφωνεί με τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αρνητικά αποτελέσματα καθώς η ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα εμφανίζει κάποιες αδυναμίες (Ανδριανουπολίτης, 2011). Οι μαθηματικές ικανότητες του PISA και οι στόχοι του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος φαίνεται πως δεν είναι και πολύ ευθυγραμμισμένοι.

Φυσικά, όπως είναι αναμενόμενο, δε λείπουν και οι επικριτές. Η κατανόηση των μαθηματικών δομών, στην οποία και επιμένουμε στην Ελλάδα, είναι κάτι που δεν ελέγχεται από τον μαθηματικό διαγωνισμό PISA. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα προγράμματα σπουδών μας δε συμπορεύονται με όσα εξετάζονται στον διαγωνισμό. Οι βαθμολογίες από μόνες τους δε μπορούν να δώσουν σαφή συμπεράσματα, αλλά μια πιο αναλυτική παρουσίαση των απαντήσεων, των λαθών που έγιναν, των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν, κρίνεται απαραίτητη. Επίσης, η επιρροή του ΟΟΣΑ σε παγκόσμιο επίπεδο, έχει αμφισβητηθεί από κάποιους που βλέπουν στο πρόσωπό του την προσπάθεια για μια παγκοσμιοποιημένη σύγχρονη κοινωνία και αμφιβάλουν για τα κίνητρά του. Το ζητούμενο φαίνεται πως είναι η σύγκλιση των προγραμμάτων σπουδών της κάθε χώρας με τα ευρωπαϊκά πρότυπα, χωρίς να λαμβάνονται όμως υπόψιν οι μεταξύ τους διαφοροποιήσεις (Ρίζος, 2005). Τα διεθνή και τα εθνικά προγράμματα αξιολόγησης οφείλουν σε κάποιο βαθμό να είναι συγχρονισμένα. Το μόνο σίγουρο είναι πως τα δεδομένα που εξάγονται από τον μαθηματικό αυτό διαγωνισμό, είναι μια πολύ καλή ευκαιρία για τις εθνικές κυβερνήσεις προκειμένου να νομιμοποιήσουν οποιαδήποτε εκπαιδευτική μεταρρύθμιση προγραμματίζουν.

3.2 Επίλυση μαθηματικού προβλήματος και Problem Based Learning

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος (εμπ) είναι μία διαδικασία κατά την οποία ο λύτης προσπαθεί να κατανοήσει μια προβληματική κατάσταση χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές γνώσεις που ήδη έχει και επιχειρεί να αποκτήσει νέες πληροφορίες σχετικές με αυτή την κατάσταση έως ότου αποσαφηνίσει την όποια αβεβαιότητα (Lester & Kehle, 2003). Σύμφωνα τώρα και με τον PISA (2003), η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος είναι η ικανότητα που έχουν τα άτομα να χρησιμοποιήσουν γνωστικές διαδικασίες και να αντιμετωπίσουν πραγματικές καταστάσεις, όπου ο δρόμος για τη λύση δεν είναι ήδη γνωστός και όπου οι γνωστικοί τομείς που απαιτούνται δεν ανήκουν σε ένα και μόνο κλάδο της επιστήμης των μαθηματικών. Η σημασία της έχει τονιστεί από πολλούς που την θεωρούν την καρδιά των μαθηματικών, ενώ αρκετοί είναι και αυτοί που πιστεύουν πως η εμπ πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ένας από τους κυριότερους στόχους διδασκαλίας. Γι'αυτό και οι μαθηματικοί οφείλουν να ξεκινούν τη διδασκαλία τους με την επίλυση του προβλήματος και μέσω αυτής να μελετούν μαθηματικές έννοιες.

Η επίλυση προβλήματος άρχισε να απασχολεί από τις αρχές ακόμα του $20^{ού}$ αιώνα και έγινε αντικείμενο προβληματισμού μεταξύ μεγάλων μαθηματικών και ψυχολόγων της εποχής. Η δεκαετία του 30 μάλιστα ήταν καθοριστική καθώς τότε καθιερώθηκαν μεγάλοι μαθηματικοί διαγωνισμοί. Έτσι, το 1933 έγινε η αρχή για τη

«Μαθηματική Ολυμπιάδα» στη Σοβιετική Ένωση και το 1934 ο διαγωνισμός «W. L. Putnam» στην Αμερική (Καρκούλιας, 2014). Ο πιο ευρέως γνωστός ίσως μαθηματικός που άφησε σημαντικό έργο πίσω του για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος ήταν ο George Polya, ο οποίος θεωρούσε ότι κάθε νέα γνώση μπορεί να προκύψει μέσα από την επίλυση ενός κατάλληλου προβλήματος. Ο Polya ήταν διοργανωτής των μαθηματικών διαγωνισμών που διεξάγονταν κάθε χρόνο στο Πανεπιστήμιο Stanford μεταξύ των φοιτητών του παιδαγωγικού τμήματος του πανεπιστημίου. Στο βιβλίο του "How to solve it", που έγραψε το 1945, αναλύει τη θεμελιώδη αυτή ικανότητα της επίλυσης και διαχωρίζει τα τέσσερα βασικά στάδια που πρέπει να ακολουθήσουν οι εν δυνάμει λύτες. Η πρότασή του αυτή για τον διαχωρισμό έκανε την αρχή για πολύ σημαντικές προτάσεις που αφορούν την αντιμετώπιση των δυσκολιών στην εμπ. Αρχικά οι μαθητές πρέπει να εμπεδώσουν την εκφώνηση του προβλήματος. Έπειτα πρέπει να καταστρώσουν μία κατάλληλη στρατηγική επίλυσης και στο τρίτο φυσικά βήμα να την εφαρμόσουν. Τέλος, οι λύτες χρειάζεται, σύμφωνα πάντα με τον Polya, να κάνουν ανασκόπηση της λύσης. Το βιβλίο αυτό θεωρείται τόσο σημαντικό για τη λύση προβλήματος ώστε η χρονιά έκδοσής του (1945) αποτελεί το κομβικό σημείο για δύο εποχές, πριν και μετά τον Polya.

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι προσέγγισης της εμπ.

- Ο πρώτος τύπος υπογραμμίζει την εφαρμογή των γνώσεων που ήδη έχουν οι μαθητές. Αυτό που αναμένουν οι εκπαιδευτικοί σε αυτή την περίπτωση είναι η ενίσχυση των παιδιών για την αναγνώριση δράσης και η απόκτηση εμπειρίας για τον τρόπο εφαρμογής των μαθηματικών τους γνώσεων (Hershkowitz et al., 2001).
- Ο δεύτερος τύπος εστιάζει στην εμβάθυνση της κατανόησης της προβληματικής κατάστασης από τους μαθητές με τη χρήση των μαθηματικών τους γνώσεων.
- Η τρίτη προσέγγιση αφορά την αναδιοργάνωση των μαθηματικών γνώσεων για την κατασκευή νέων μεθόδων, στρατηγικών ή εννοιών (Herskowitz et al., 2001). Είναι συνήθης στην αρχή μιας νέας ενότητας όπου εισάγονται νέες μαθηματικές ιδέες. Αυτό που αναμένεται από τα παιδιά είναι η απόκτηση του μαθηματικού περιεχομένου και η σύνδεσή του με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις.
- Στον τέταρτο και τελευταίο τύπο, η έμφαση δίνεται στη διαχείριση των διαδικασιών επίλυσης. Σύμφωνα με τους Schroeder και Lester (1989), σε αυτό το είδος εμπ οι μαθητές ενθαρρύνονται να ανακαλύψουν τη δική τους εξέλιξη μέσα από τα τέσσερα προαναφερθέντα στάδια του Polya. Οι προβληματικές καταστάσεις που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία πρέπει να είναι προσεκτικά σχεδιασμένες έτσι ώστε τα παιδιά να βιώσουν αυθεντικές διαδικασίες εμπ (Brown et al., 1989).

Για να αναγνωρίζονται οι λύτες ως επιτυχημένοι, πρέπει να κατέχουν κάποιες ικανότητες που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος. Η πρώτη και πολύ ουσιαστική είναι η κατανόηση του προβλήματος για την οποία όμως δε δίνεται η βαρύτητα που πραγματικά της αναλογεί καθώς το βάρος ρίχνεται στον κύριο στόχο της επίλυσης. Οι μαθητές φαίνεται πως εντοπίζουν αρκετές δυσκολίες, συντακτικές, γλωσσικές που δεν τους επιτρέπουν τη μετέπειτα ερμηνεία του προβλήματος. Πέρα όμως από καλοί χρήστες των εργαλείων της γλώσσας και των συμβόλων, θα πρέπει να είναι και ικανοί χρήστες των ψηφιακών εργαλείων. Αρκετοί μάλιστα είναι αυτοί που κατηγοριοποιούν τα προβλήματα ανάλογα με τα κοινά χαρακτηριστικά που εντοπίζουν και επιλέγουν να χειριστούν και τα επόμενα που θα τους δοθούν σύμφωνα με αυτή την κατηγοριοποίηση (Mayer, 1985). Επόμενο βασικό χαρακτηριστικό είναι η ευκολία στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης η οποία αποκτάται και με την εξάσκηση των μαθητών σε προβληματικές καταστάσεις. Στην περίπτωση που τα προβλήματα αναγνωρίζονται ως οικεία από τους λύτες, τότε είναι δυνατό να επιλέξουν τη στρατηγική που αρμόζει, διαφορετικά στηρίζονται σε προσωπικές εμπειρίες και καταστάσεις (Lerch, 2004). Η ικανότητα ανάλυσης και ερμηνείας των δεδομένων που έχουν δοθεί είναι πραγματικά απαραίτητη. Να μπορούν να εικάζουν, να πειραματίζονται, να διερευνούν, να διατυπώνουν και να ελέγχουν τις υποθέσεις που έχουν ήδη κάνει. Να μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, αλλά και να διαχειρίζονται το σύνθετο χαρακτήρα που έχει η προβληματική κατάσταση με την οποία έρχονται αντιμέτωποι. Επίσης είναι σημαντικό να μπορούν να διακρίνουν ποια είναι εκείνα τα στοιχεία που πραγματικά χρειάζονται και ποια είναι δευτερεύοντα για την επίτευξη του στόχου τους. Χρειάζονται ευέλικτο συλλογισμό, ευστροφία, πρωτοτυπία σκέψης και παρατηρητικότητα. Η προσοχή τους δεν αποσπάται εύκολα, βλέπουν τις καταστάσεις ως προκλήσεις και τις αντιμετωπίζουν με ενδιαφέρον χρησιμοποιώντας όλα τα διαθέσιμα όπλα τους. Επιπλέον, πολύ σημαντικό είναι να λειτουργούν αυτόνομα και υπεύθυνα, αλλά ταυτόχρονα να έχουν τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης και συνεργασίας με άλλα άτομα ή ομάδες. Τέλος, μια ακόμα απαραίτητη ικανότητα είναι αυτή που αφορά την ανασκόπηση της λύσης και στην οποία επίσης δε δίνεται η δέουσα προσοχή κατά τη διδασκαλία. Η ανάγνωση θα λέγαμε πως γίνεται επιφανειακά και γρήγορα, αφού έχει εδραιωθεί η λανθασμένη αντίληψη πως η επιτυχία ενός λύτη συνδέεται με την ταχύτητα της απάντησης και δε γίνεται επανέλεγχος. Τα χαρακτηριστικά λοιπόν που οφείλουν να διαθέτουν όσοι ασχολούνται με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι πολλά, γεγονός που καταδεικνύει το σύνθετο του χαρακτήρα της, αλλά και τη σημασία που έχει για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος είναι κάτι που απασχολεί τη μαθηματική κοινότητα εδώ και πάρα πολλά χρόνια, φαίνεται όμως πως οι διδάσκοντες δεν ήταν προετοιμασμένοι για να την αποδεχθούν ως συνισταμένη του μαθηματικού προγράμματος. Από την αρχαιότητα ακόμα υπήρχαν δύο βασικές φιλοσοφίες, ο φορμαλισμός και ο ενορατισμός (Βόσκογλου, 2008). Η πρώτη, όπως έχουμε σημειώσει και νωρίτερα, δίνει έμφαση στην αξιωματική θεμελίωση και θεωρεί τη μάθηση μια στατική και παθητική διαδικασία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα φορμαλισμού αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Η δεύτερη από την άλλη, στηρίχθηκε στον κονστρουκτιβισμό και βασικός στόχος της ήταν η καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και του μαθηματικού εγγραμματισμού. Αντίστοιχη περίπτωση για τον ενορατισμό αποτελεί το αρχαίο κινέζικο βιβλίο «Jiu Zhang Suan Shu» ή αλλιώς «Nine Chapters» ή «Μαθηματικά σε εννέα βιβλία».

Όπως έχουμε ήδη μελετήσει, η μαθηματική εκπαίδευση πέρασε από διάφορα στάδια, με αξιοσημείωτο αυτό των Νέων Μαθηματικών, κατά το οποίο όμως παρουσιάστηκαν δυσκολίες. Ως εκ τούτου έπρεπε να επιχειρηθεί μια αλλαγή, η οποία και έγινε με τη στροφή στα παραδοσιακά μαθηματικά (back to basics). Οι μαθητές όμως, παρά τη μεταρρύθμιση, συνέχισαν να έχουν χαμηλές επιδόσεις. Κατά τη διάρκεια των Νέων Μαθηματικών, οι εργοδότες αντιμετώπιζαν το πρόβλημα ότι οι εργαζόμενοι δεν γνώριζαν καν να εκτελέσουν πράξεις. Ουσιαστικά όμως, αυτό που τους ενδιέφερε ήταν οι εργαζόμενοί τους να είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν καθημερινά προβλήματα της δουλειάς. Για να καταστεί αυτό δυνατό θα έπρεπε να έχουν ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών δομών και ταυτόχρονα ευκολία στην εκτέλεση πράξεων. Τα Νέα Μαθηματικά εστίαζαν στον πρώτο άξονα, ενώ τα παραδοσιακά στον δεύτερο, αυτόν των αυτοματοποιημένων δεξιοτήτων. Προκειμένου να επιτευχθεί το βέλτιστο αποτέλεσμα, άρχισε να γίνεται σαφές ότι και οι δύο άξονες είναι απαραίτητοι. Ως εκ τούτου, μετά από πολλά στάδια και διακυμάνσεις, επιχειρήθηκε μια συμβιβαστική λύση, μια σύνθεση παραδοσιακών και μοντέρνων μαθηματικών που χωρίς να παραγκωνίζεται η αποδεικτική διαδικασία, δόθηκε έμφαση στην ανάπτυξη της υπολογιστικής ικανότητας, στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και στη σύνδεση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες και την ίδια τη ζωή (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999). Από το 1980 λοιπόν και έπειτα, άρχισε να διερευνάται η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών και να εντείνεται η μελέτη της εμπ, ενώ πολλοί ήταν αυτοί που επιχείρησαν να δώσουν ορισμούς. Το γεγονός αυτό σηματοδοτήθηκε από δύο σημαντικά κείμενα, το «An Agenda for Action: Recommendations for school Mathematics of the 1980s» του 1980 από την NCTM[4] και το «Cockcroft Report» του 1982 από τον Άγγλο μαθηματικό Wilfred H. Cockcroft, τα οποία και τόνισαν την αναγκαιότητα των αλλαγών στη μαθηματική εκπαίδευση.

Οι εκπαιδευτικές προτάσεις που στηρίζονται στη μάθηση που χρησιμοποιεί ως κύριο εργαλείο τα προβλήματα έχουν παρελθόν, όπως έχει ήδη επισημανθεί, και υποστηρίζουν τη σημασία που κατέχει η πρακτική εμπειρία (Hmelo-Silver, 2004). Τα προβλήματα διαχωρίζονται σε αυτά της ρουτίνας, γνωστά και ως ασκήσεις, και στα πρωτότυπα. Πολλοί είναι μάλιστα εκείνοι οι ερευνητές που προτείνουν τη διδασκαλία με τη συνδρομή των ρεαλιστικών προβλημάτων (Problem Based Learning, PBL), καθώς με αυτήν οι μαθητές μαθαίνουν αναλογιζόμενοι των προσωπικών εμπειριών τους (Barrows & Tamblyn, 1980). Μέσω αυτής, οι διδασκόμενοι αξιολογούν τα ίδια τι γνωρίζουν αλλά και τι πρέπει να γνωρίζουν, συγκεντρώνουν πληροφορίες και συνεργάζονται για την αξιολόγηση, τη διαχείριση των δεδομένων και την εφαρμογή της στρατηγικής που θα ακολουθήσουν. Οι εκπαιδευτικοί σε όλη αυτή τη διαδικασία λειτουργούν ως προπονητές και διευκολυντές, παρακολουθώντας και ενισχύοντας τη μεταγνωστική ανάπτυξη των διδασκομένων. Αρχικά λειτουργούν ως μοντέλα για τους μαθητές και στη συνέχεια τους εξοικειώνουν με μεταγνωστικές ερωτήσεις. Έπειτα τους

[4] National Council of Teachers of Mathematics

ενθαρρύνουν να χρησιμοποιήσουν αυτές τις ερωτήσεις, να γίνουν αυτοδίδακτοι ουσιαστικά μαθητευόμενοι και τελικά ανεξάρτητοι. Οι διδασκόμενοι μαθαίνουν να προσαρμόζονται πιο εύκολα και να αποδίδουν καλύτερα σε νέες απρόβλεπτες καταστάσεις. Βρίσκουν εναλλακτικούς τρόπους αντιμετώπισης των καταστάσεων, προσπερνούν με μεγαλύτερη άνεση τα εμπόδια και δεν πτοούνται από τις δυσκολίες που βρίσκουν μπροστά τους. Η PBL καθιστά τα ίδια τα παιδιά υπεύθυνα για τη μάθησή τους δίνοντας έμφαση στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης και στην κατασκευή γνώσεων (Collins et al., 1989).

Η PBL σχεδιάστηκε με πολλούς και σημαντικούς στόχους (Barrows & Kelson, 1995), όπως να βοηθήσει τους μαθητές στην ανάπτυξη δεξιοτήτων διά βίου μάθησης και επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, στη δημιουργία μιας εκτεταμένης και ευέλικτης βάσης γνώσεων, στην εξέλιξή τους σε αποτελεσματικούς συνεργάτες και ανθρώπους με έμφυτο ενθουσιασμό για μάθηση. Μέσω της διαδικασίας αυτής οι μαθητές διασχίζουν πολλούς κλάδους, έως ότου τελικά επιτύχουν την κατασκευή εκτεταμένης και ευέλικτης γνώσης. Δημιουργούν μια ολοκληρωμένη εικόνα για τα μαθηματικά, όχι μόνο ως επιστήμη αλλά και ως κομμάτι της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ενισχύεται η ικανότητά τους να κατανοούν και να επιλύουν προβληματικές καταστάσεις της καθημερινότητάς τους. Επίσης, αποκτούν θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για όσα νέα και προκλητικά πρέπει να αντιμετωπίσουν. Γίνονται αυτόνομοι και υπεύθυνοι για τη δική τους μάθηση και μπορούν να ελέγξουν την πρόοδο που έχουν σημειώσει. Με αυτό τον τρόπο τούς ανοίγονται νέοι ορίζοντες και τους δίνονται ευκαιρίες που διαφορετικά δε θα είχαν.

Η επιλογή τώρα του προβλήματος που εξυπηρετεί καλύτερα στον κάθε στόχο είναι καθοριστικής σημασίας για την εμπ. Τόσο η έρευνα όσο και η εμπειρία στην πράξη με την PBL έχουν σημειώσει ουσιαστική πρόοδο σχετικά με τα γνωρίσματα ενός καλού, όπως θα το χαρακτηρίζαμε, προβλήματος (Barrows & Kelson, 1995). Οι προβληματικές λοιπόν καταστάσεις που δίνονται στους λύτες, θα πρέπει να είναι σύνθετες, ανοικτές, οικείες αλλά και ρεαλιστικές, έτσι ώστε να ενισχύουν την ευελιξία και το φυσικό κίνητρό τους αντίστοιχα. Η δυσκολία του προβλήματος δε θα πρέπει προφανώς να είναι υπερβολική, γιατί σε αυτή την περίπτωση θα έχει τα αντίστροφα αποτελέσματα. Επίσης, είναι καθοριστικής σημασίας να αφορούν κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο και να έχουν μια σκοπιμότητα. Η αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, καθώς και η εύρεση κανόνων είναι απαραίτητα βήματα που κάνει ο επίδοξος λύτης κατά την εμπλοκή του σε μια πλούσια δραστηριότητα. Επιπλέον, απαραίτητη είναι η ανατροφοδότηση που επιτρέπει στους μαθητές να αξιολογήσουν οι ίδιοι την αποτελεσματικότητα της γνώσης τους, της συλλογιστικής τους και των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν. Οι εικασίες και η επιχειρηματολογία είναι στοιχεία που χρειάζεται να προωθούνται μέσω της εμπ, ενώ η δίψα των μαθητών για μάθηση πρέπει να παρακινείται μέσα από σύνθετες λύσεις (Hmelo-Silver, 2004). Σύμφωνα με την Lerch (2004), τα προβλήματα που δίνονται στους μαθητές πρέπει να τους είναι οικεία γιατί σε αυτή την περίπτωση παρακινούνται από μεγαλύτερο κίνητρο και είναι πιθανότερο να χρησιμοποιήσουν κατάλληλη στρατηγική για μία προβληματική κατάσταση που θα συναντήσουν στην καθημερινότητά τους. Τέτοιου είδους προβλήματα συναντάμε και στον διαγωνισμό PISA. Αυτά δεν εντάσσονται σε καθορισμένο κομμάτι της ύλης αλλά προϋποθέτουν ευρύτερες γνώσεις (Ρίζος, 2009). Αφορούν περισσότερο τη συλλογιστική ικανότητα του λύτη, μιας και αυτή είναι που χρειάζεται στην καθημερινότητα. Γι' αυτό άλλωστε και οι πράξεις που απαιτούνται χαρακτηρίζονται ως εύκολες.

Η θεώρηση της μαθηματικής επιστήμης επιδέχεται διαφοροποιήσεις με την πάροδο των ετών και το ίδιο φυσικά συμβαίνει και με την εξέλιξη της διδασκαλίας και μάθησης αυτής. Παλαιότερα οι διδακτικές θεωρίες των μαθηματικών αφορούσαν κυρίως τη μεταβίβαση γνώσης από τον δάσκαλο στον διδασκόμενο μ'έναν προγραμματισμένο τρόπο που δεν άφηνε τα περιθώρια για κριτική σκέψη. Αντίθετα σήμερα θα λέγαμε πως η θεώρηση είναι περισσότερο μια κοινωνικο-πολιτισμική δραστηριότητα κατασκευής γνώσης που επιτυγχάνεται μέσω γνωστικής σύγκρουσης, στοχασμού και αλληλεπίδρασης των εμπλεκομένων (Σκοπέτος, 2001). Οι μαθητές δε μαθαίνουν με το να εσωτερικεύουν έτοιμες γνώσεις αλλά με την κατασκευή και ανακατασκευή από τους ίδιους των δραστηριοτήτων και των εμπειριών τους. Το εποικοδομητικό αυτό πλαίσιο εργασίας επιτρέπει στους μαθητές να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους, να καλλιεργήσουν όλες εκείνες τις δεξιότητες που χρειάζονται για να συνδέσουν τα μαθηματικά με ρεαλιστικές καταστάσεις και να αναπτύξουν θετικές στάσεις προς αυτά. Η κατάκτηση εξάλλου της ικανότητας της εμπ είναι και η ουσία της ενασχόλησης με τη μαθηματική επιστήμη (NCTM, 2000). Η ενεργητική μάθηση, η οποία εξελίσσεται με δραστηριότητες όπως είναι και η εμπ, αναπτύσσει την αυτενέργεια, την αυτονομία των παιδιών και φυσικά τον διερευνητικό τρόπο σκέψης, ενώ η παθητική με τη συνεχή ενασχόληση με τυποποιημένες ασκήσεις και τυπικές αποδείξεις, σε καμία περίπτωση δεν αναδεικνύει τον δυναμισμό και την ερευνητική διάσταση των μαθηματικών (Σκοπέτος, 2001).

3.2.1 Πεποιθήσεις για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος

Η σημασία της εμπ στη διδασκαλία για τη μάθηση των μαθηματικών επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τις πεποιθήσεις που έχουν οι εμπλεκόμενοι, δηλαδή οι μαθητές, εκπαιδευτικοί και φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής γι' αυτήν.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), κάποιες χαρακτηριστικές πεποιθήσεις που έχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά είναι οι εξής:

- Τα μαθηματικά προβλήματα πρέπει να έχουν μία και μόνο σωστή απάντηση.
- Υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος επίλυσης, συνήθως μάλιστα αυτός που παρουσίασε ο καθηγητής μέσα στην τάξη.
- Τα μαθηματικά είναι μία μοναχική δραστηριότητα και γίνεται από άτομα που δουλεύουν σε απομόνωση.
- Τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο έχουν ελάχιστη σύνδεση με την πραγματική ζωή.
- Η τυπική απόδειξη δεν έχει καμία σχέση με τις διαδικασίες της ανακάλυψης.

- Οι μαθητές που έχουν κατανοήσει τα μαθηματικά που έχουν διαβάσει, είναι σε θέση να λύσουν οποιοδήποτε πρόβλημα σε λιγότερο από πέντε λεπτά.
- Οι συνηθισμένοι μαθητές δεν πιστεύουν πως θα κατανοήσουν τα μαθηματικά, έχουν όμως την πεποίθηση ότι θα καταφέρουν να τα απομνημονεύσουν και θα τα ανασύρουν για να τα χρησιμοποιήσουν όποτε χρειαστεί μηχανιστικά.

Όπως σημειώνει ο Lester (1989), οι πεποιθήσεις αποτελούν τις υποκειμενικές γνώσεις του ατόμου για τον εαυτό του, τα μαθηματικά, το περιβάλλον και όσα σχετίζονται με συγκεκριμένα μαθηματικά καθήκοντα. Αυτές μπορούν να επιδράσουν αρνητικά στην ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά προβλήματα και γενικότερα όλες τις δραστηριότητες που εμπλέκονται στην επίλυση, αλλά και στην αυτοαξιολόγηση όσον αφορά την επιτυχία ή αποτυχία (Schoenfeld, 1988). Οι πεποιθήσεις των διδασκομένων επηρεάζονται από το κοινωνικό τους περιβάλλον, το μορφωτικό επίπεδο της οικογένειάς τους, το εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας στην οποία διαμένουν και φυσικά, τον τρόπο διδασκαλίας που οι διδάσκοντές τους ακολουθούν. Οι εσφαλμένες λοιπόν αντιλήψεις των παιδιών δημιουργούνται μέσα στη σχολική αίθουσα και προκύπτουν από τις εκπαιδευτικές προτάσεις των ίδιων των εκπαιδευτικών. Πολλοί, για παράδειγμα, είναι εκείνοι οι μαθητές που θεωρούν ότι τα προβλήματα λύνονται με μία ή περισσότερες αριθμητικές πράξεις με τους αριθμούς που δόθηκαν στην εκφώνηση. Το γεγονός αυτό όμως οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας, καθώς αρκετοί εκπαιδευτικοί προτρέπουν τους μαθητές να εντοπίσουν τους αριθμούς της εκφώνησης και να επιλέξουν την κατάλληλη πράξη προκειμένου να δοθεί η ζητούμενη λύση. Σε αυτό το σημείο, θα ήταν χρήσιμο να επισημάνουμε τη σημασία του διδακτικού συμβολαίου. Διδακτικό συμβόλαιο είναι οι συμπεριφορές που αναμένει ο μαθητής από τον εκπαιδευτικό αλλά και το αντίστροφο. Είναι ένα σύνολο κανόνων δηλαδή που προσδιορίζουν αυτή τη σχέση (Brousseau, 2006). Σύμφωνα λοιπόν με το διδακτικό συμβόλαιο, κάθε μαθηματικό πρόβλημα έχει μία λύση που προκύπτει μετά την εκτέλεση μίας ή περισσότερων πράξεων με τους δοσμένους αριθμούς της εκφώνησης. Από αυτό φαίνεται να δεσμεύονται και οι εκπαιδευτικοί, κάτι που εξηγεί και όσα σημειώθηκαν προηγουμένως. Σε όλα αυτά συνεισφέρουν φυσικά και η συχνή επαφή των μαθητών με τυπικά προβλήματα που λύνονται με μία ή περισσότερες πράξεις καθώς και η απουσία της μοντελοποίησης, η οποία αποτελεί βασικό πυλώνα της εμπ. Απόρροια όσων αναφέρθηκαν και όχι μόνο, είναι η θεώρηση από τους μαθητές ότι τα μαθηματικά προβλήματα δεν έχουν χρησιμότητα και εφαρμογή στην καθημερινότητά τους και έτσι αποκτούν μια αποστροφή, η οποία συνοδεύεται από χαμηλές επιδόσεις και οδηγεί στη λεγόμενη μαθηματικοφοβία. Η απουσία κινήτρων ασκεί ισχυρή αρνητική επίδραση στην προθυμία των διδασκομένων να ασχοληθούν με τα μαθηματικά προβλήματα και με το είδος των δραστηριοτήτων που εκτελούν όταν έρχονται αντιμέτωποι μ'ένα τέτοιο πρόβλημα.

Οι μαθησιακές εμπειρίες των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια των μαθητικών τους χρόνων είναι αυτές που καθορίζουν τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών που εφαρμόζουν (Feiman-Nemser et al., 1989). Ως εκ τούτου, οποιεσδήποτε πιθανότατα λανθασμένες αντιλήψεις για την εμπ δημιουργούν έναν φαύλο παιδαγωγικό και επιστημολογικό κύκλο. Οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν εμπιστεύονται τις ενεργητικές μεθόδους μάθησης. Ενώ θα έπρεπε να δίνουν στους μαθητές ένα σύνολο δραστηριοτήτων για να εργαστούν και μέσα από αυτή τη διαδικασία να οργανώσουν και να επανακατασκευάσουν τις γνώσεις τους, αντίθετα δίνουν έτοιμα παραδείγματα διαδικασιών επίλυσης προς αναπαραγωγή. Αναλώνονται στην παρουσίαση των δικών τους μεθόδων επίλυσης, λειτουργώντας ως πομποί μεταφοράς των γνώσεών τους, έτσι ώστε να κερδίσουν πολύτιμο διδακτικό χρόνο, κάτι που τους προκαλεί άλλωστε μεγάλο άγχος. Δεν απευθύνονται στη διαίσθηση και τις εμπειρίες των μαθητών, μιας και ούτε οι ίδιοι ως μαθητές ήταν συνηθισμένοι σε αυτό το πρότυπο. Εκδηλώνουν δυσπιστία και επιφυλακτικότητα όσον αφορά τις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, τις οποίες είτε θεωρούν πολύπλοκες είτε αμφισβητήσιμες ως προς την επιτυχία της εφαρμογής τους. Έτσι, παρά τις όποιες αλλαγές επιβάλλουν οι νέες παιδαγωγικές τάσεις στη μάθηση, διδασκαλία και στα προγράμματα σπουδών, φαίνεται να στηρίζονται περισσότερο στις δικές τους πεποιθήσεις. Τα αρνητικά λοιπόν αποτελέσματα της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με τον τρόπο διδασκαλίας και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των διδασκόντων. Επίσης, ας μην ξεχνάμε και την ανησυχία που έχουν για τις δικές τους γνώσεις και την αποτελεσματικότητα αυτών στο μαθητικό κοινό. Τέλος, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από ένα μάθημα βασισμένο σε δραστηριότητα μέσα σε πλαίσιο επίλυσης προβλήματος μπορεί να είναι περισσότερο ενθαρρυντικά ή αποθαρρυντικά απ’ότι ένας καθηγητής μπορεί πραγματικά να εξετάσει (Ball, 1996).

3.2.2 Δυσκολίες στη διδασκαλία επίλυσης προβλήματος και ο ρόλος του δασκάλου

Η διδασκαλία επίλυσης προβλήματος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αποτελεί μια κατασκευαστική δραστηριότητα που απαιτεί ενεργητική προσεγγιστική μέθοδο και δεν είναι μια εύκολη υπόθεση. Οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με πραγματικά ρεαλιστικά προβλήματα. Οι προβληματικές καταστάσεις που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στην καθημερινότητά μας έχουν λιγότερα ή περισσότερα δεδομένα από όσα χρειαζόμαστε για την επίλυσή τους, όπως επίσης και μια κάποια ασάφεια. Στη σχολική όμως αίθουσα τα δεδομένα είναι προσεκτικά τοποθετημένα και δοσμένα έτσι ώστε η συνδυαστική χρήση τους να οδηγήσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι μαθητές, λοιπόν, φαίνεται να εστιάζουν σε επιμέρους κομμάτια και όχι στη γενική εικόνα, αφού επιμένουν να βρουν τους κατάλληλους συνδυασμούς και τις σωστές πράξεις, για προβλήματα μάλιστα που τις περισσότερες φορές τούς βρίσκουν αδιάφορους. Έτσι, μένουν στα επιφανειακά στοιχεία και δε συγκεντρώνονται. Η επιλογή πράξεων και διαδικασιών πρέπει να γίνεται σε δεύτερο βαθμό, αφού έχει προηγηθεί η ανάλυση και η ουσιαστική κατανόηση σε βάθος. Η κατανόηση αυτή όμως μοιάζει πως είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Τα προβλήματα δε γίνονται εύκολα κατανοητά από τους υποψήφιους λύτες μιας και απαιτείται πλήθος ικανοτήτων, όπως είναι η διαχείριση της πολυπλοκότητας, η διάκριση και η επιλογή. Το δυσκολότερο ίσως στοίχημα για τους ίδιους τους μαθητές αλλά και τους διδάσκοντές τους, είναι οι πρώτοι να μάθουν να σκέφτονται και όχι απλά να αποστηθίζουν.

Σύμφωνα με τον Polya (1973), ο μαθηματικός που στον χρόνο διδασκαλίας του ασχολείται με την εξάσκηση των μαθητών του σε στερεότυπες εφαρμογές, δεν πετυχαίνει να παρακινήσει το ενδιαφέρον τους, ούτε την ερευνητική τους διάθεση, παρά μόνο να αναπτύξει τη διαδικαστική τους γνώση. Εάν όμως αναπτύξει την περιέργεια αυτών με τα κατάλληλα προβλήματα και τη διατύπωση διερευνητικών και βοηθητικών ερωτήσεων, τότε προάγει την ανεξάρτητη σκέψη τους. Ένα ρεαλιστικό πρόβλημα το οποίο πραγματικά σχετίζεται με τις εμπειρίες των παιδιών, τους δίνει όλα εκείνα τα εσωτερικά κίνητρα για να το αντιμετωπίσουν με επιμονή (Hmelo-Silver, 2004). Το ζητούμενο λοιπόν είναι να εξελιχθεί η διδασκαλία των μαθηματικών από τη φορμαλιστική διαδικασία επίλυσης ασκήσεων, προβλημάτων ρουτίνας και αποδείξεων στη δυναμική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που προκαλούν ενδιαφέρον. Οι παραδοσιακοί μέθοδοι διδασκαλίας έρχονται σε αντίθεση με τις απαιτούμενες ενεργητικές. Παρά το πλαίσιο όμως που ο ίδιος ο Polya είχε εκθέσει, οι ιδέες του δεν έχουν έρθει σε πλήρη εφαρμογή, γεγονός που καταδεικνύει και τη δυσκολία του θέματος.

Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος προκαλεί δυσκολίες στον διδάσκοντα όσον αφορά το μαθηματικό αλλά και το παιδαγωγικό πλαίσιο αυτής. Απαιτείται εμπειρία και ευελιξία από μέρους του στις διάφορες στρατηγικές επίλυσης, καθώς και μία πιθανή εξειδίκευση, έτσι ώστε πολλές φορές να καθίσταται απαραίτητη η επιπλέον κατάρτιση (Schoenfeld, 1992). Είναι απαραίτητο ο εκπαιδευτικός να είναι πραγματικός γνώστης της εμπ, με ουσιαστικές γνώσεις, και τεχνίτης προβλημάτων. Ο ρόλος του είναι αυτός του διευκολυντή, δηλαδή θέτει καταστάσεις για προβληματισμό και στη συνέχεια προτείνει και στρατηγικές αντιμετώπισης. Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από τον μαθητή και δε μεταβιβάζεται παθητικά από τον εκπαιδευτικό, επομένως η βοήθεια δίνεται στα σημεία που κρίνεται απαραίτητο και με μέτρο. Και αυτό τονίζεται γιατί ο εκπαιδευτικός ως αυθεντία πολλές φορές δίνει ο ίδιος τις απαντήσεις, μη αφήνοντας περιθώρια για διερεύνηση και κριτική δημιουργική σκέψη. Παρουσιάζει προβλήματα, έπειτα μεθόδους επίλυσης αυτών και οι μαθητές επαναλαμβάνουν αυτές τις διαδικασίες στο επόμενο πρόβλημα που θα τους ζητηθεί. Συνηθίζεται να δίνεται βαρύτητα σε δεξιότητες που δεν είναι απαραίτητες, ενώ η προσοχή δε στρέφεται στην ανάπτυξη της ευελιξίας, επιμονής και αναλυτικής συνθετικής σκέψης από μέρους του μαθητή. Τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, πηγάζουν από τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, την έλλειψη ίσως παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου ή από την έλλειψη διδακτικού χρόνου. Ο εκτεταμένος χρόνος που απαιτείται για τη διδασκαλία της εμπ αποτελεί τροχοπέδη, ενώ η απουσία κατάλληλων προβλημάτων από τα σχολικά βιβλία, δεν αφήνει πολλά περιθώρια στους εκπαιδευτικούς. Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση αναγκάζονται οι ίδιοι να δραστηριοποιηθούν για την κατασκευή δραστηριοτήτων με χρήση προβλήματος που θα επιτρέψουν στους μαθητές την προσέγγιση των μαθηματικών αληθειών μέσα από εμπειρίες του πραγματικού κόσμου (Σκοπέτος, 2001). Η βασικότερη δυσκολία και ο βασικότερος στόχος του διδάσκοντα είναι η μελέτη της κατασκευής των μαθηματικών αληθειών μέσω των οποίων ο διδασκόμενος θα επιτύχει να οργανώσει τον κόσμο των εμπειριών του. Η δημιουργία όμως πραγματικών καταστάσεων προβληματισμού που να ταιριάζουν σε κάθε ενότητα των προγραμμάτων σπουδών δεν είναι μια καθόλου εύκολη διαδικασία.

3.2.3 Επίλυση μαθηματικού προβλήματος και αναλυτικά προγράμματα

Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος αποτελεί βασικό κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης πολλών κρατών, γι' αυτό και έχει καθιερωθεί στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών τους (NCTM, 2000). Τα αναλυτικά προγράμματα πρέπει να εστιάζουν:

- στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και στην ικανότητα εφαρμογής αυτών σε καινούριες καταστάσεις,
- στη συλλογή, ανάλυση και οργάνωση πληροφοριών,
- στη διατύπωση ερωτημάτων, ανάλυση και μελέτη προβλημάτων, αναζήτηση δεδομένων, μεταφορά ικανοτήτων και στρατηγικών σε καινούριες καταστάσεις,
- στην ανάπτυξη της περιέργειας, της διερεύνησης και της ανοιχτής σκέψης (NCTM, 1980).

Το σημαντικότερο όμως, στο οποίο θα πρέπει να δοθεί και έμφαση, είναι η εκπαιδευτική προσέγγιση που θα ακολουθηθεί. Το πλαίσιο του προβλήματος είναι εξαιρετικά καθοριστικό και για τη μάθηση των μαθηματικών αλλά και για την εμπέδωση των μαθηματικών νοημάτων (Chapman, 2006). Η μάθηση μέσω αποστήθισης και η συνεχής εξάσκηση συγκεκριμένων διαδικασιών δεν εμβαθύνουν στην εμπ, με αποτέλεσμα να μην ενεργοποιούνται σύνθετες νοητικές λειτουργίες. Πολλές φορές η αποτυχία των μαθητών εστιάζεται στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας της εμπ και όχι στα γνωστικά τους κενά. Το πρόβλημα που εξάπτει την περιέργεια των μαθητών, προάγει τη σκέψη τους, ενώ είναι πολύ πιθανό να βάλει τις βάσεις για τη μετέπειτα πορεία τους ως λύτες προβλημάτων και ερευνητές. Οι απαιτούμενες δεξιότητες για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος χρειάζονται και σε άλλους τομείς της καθημερινής τους ζωής.

Από τις αρχές του 20^ού^ αιώνα τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών άρχισαν σταδιακά να επηρεάζονται και να διαμορφώνονται από τις ανησυχίες για την προετοιμασία των μαθητών για την εξωσχολική και μετέπειτα επαγγελματική τους ζωή (Stanic & Kilpatrick, 1988). Το ζήτημα, όπως είναι και αναμενόμενο, εστίαζε στο κατά πόσο η αποκτηθείσα σχολική γνώση μπορεί στη συνέχεια να μεταφερθεί στο εξωσχολικό πλαίσιο. Προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος αυτός, η μάθηση άρχισε να ενσωματώνει δραστηριότητες βασισμένες σε προβλήματα ή υποθέσεις (Shulman, 1992). Καθώς οι μαθητές συζητούν και αλληλεπιδρούν, ενεργοποιούν την προηγούμενη γνώση που τους βοηθά να προετοιμαστούν για τη μάθηση. Οι προβληματικές καταστάσεις με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές τούς επιτρέπουν να προσαρμόσουν, αλλά και να κατασκευάσουν νέες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Οι διδασκόμενοι πετυχαίνουν να ενσωματώσουν έτσι την εννοιολογική με τη διαδικαστική τους γνώση και ικανότητα, οι οποίες είναι άρρηκτα συνδεδεμένες. Άλλωστε έχει συχνά παρατηρηθεί πως οι μαθητές διαχωρίζουν τα δύο είδη γνώσεων (Hiebert, 1986), ενώ ιδανικά θα έπρεπε η εννοιολογική τους γνώση να αποτελεί το θεμέλιο για την εξέλιξη και της διαδικαστικής.

Σύμφωνα με τον Καραγεώργο (1985), η εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα χωρίζεται σε τρεις φάσεις: 1900-1950, 1950-1975 και 1975-μέχρι σήμερα. Κατά την πρώτη φάση δεν άλλαξε κάτι ουσιαστικό στα Π.Σ., οπότε τα μαθηματικά δεν ακολούθησαν τις ταχύτατες εξελίξεις της μαθηματικής επιστήμης γι’αυτό και δημιουργήθηκε μεγάλο χάσμα μεταξύ σχολικών και πανεπιστημιακών μαθηματικών. Τα σχολικά μαθηματικά είχαν έντονο θεωρητικό χαρακτήρα και έδιναν την εικόνα ενός άχρηστου αντικειμένου, αποκομμένου από οποιαδήποτε αξιοποιήσιμη εφαρμογή στην καθημερινότητα. Αργότερα όμως, το 1995, αποφασίστηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο η ριζική αναδιαμόρφωση των Προγραμμάτων Σπουδών. Με το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Γυμνάσιο και Λύκειο, που δημοσιεύτηκε το 1999, επιχειρήθηκε για πρώτη φορά να παρουσιαστούν η διδακτέα ύλη, η μέθοδος και τα μέσα όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών ανά τάξη, έχοντας ως γνώμονα τις αρχές μάθησης και διδασκαλίας της μαθηματικής επιστήμης. Τα μαθηματικά αποτελούν μια κατασκευαστική δραστηριότητα και το να γνωρίζει κάποιος μαθηματικά, σημαίνει πως κάνει μαθηματικά. Γι’ αυτόν ακριβώς τον λόγο, κεντρικός στόχος της διδασκαλίας έγινε η σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο και ξεκίνησε η προσπάθεια για την εισαγωγή στη διδασκαλία των μαθηματικών δραστηριοτήτων επίλυσης προβλήματος. Παρά τη σημασία όμως που δόθηκε στις δραστηριότητες, δεν υπήρχαν παραδείγματα εφαρμογών προς εκμετάλλευση από τους εκπαιδευτικούς. Ο ρόλος και η στοχοθεσία της επίλυσης προβλήματος ήταν ασαφής. Δεν είναι ξεκάθαρο εάν αναφερόμαστε στη διδασκαλία για την εμπ, στη διδασκαλία με την εμπ ή στη διδασκαλία μέσω της εμπ. Η βαρύτητα λοιπόν που θεωρητικά δίνεται στην εμπ, δεν αποτυπώνεται με τον απαιτούμενο τρόπο στα αναλυτικά προγράμματα. Οι πιο πρόσφατες προσπάθειες, όπως αυτή του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών και των Α.Π. του Γυμνασίου το 2002, φαίνεται πως βρίσκονται στον σωστό δρόμο. Έτσι λοιπόν, ενσωματώθηκαν οι «Ενδεικτικές Δραστηριότητες» για να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς, ενώ, επίσης, οι συγγραφείς των νέων διδακτικών βιβλίων Μαθηματικών και των τριών τάξεων του Γυμνασίου πρόσθεσαν δραστηριότητες σε κάθε ενότητα της διδακτέας ύλης.

Στόχος των νέων Προγραμμάτων Σπουδών στην Ελλάδα είναι η αντιμετώπιση της μάθησης ως μια βιωματική διαδικασία με τη βοήθεια δραστηριοτήτων και όχι ως αποτέλεσμα μιας μετωπικής διδασκαλίας που οδηγεί στην απλή συσσώρευση γνώσεων. Αν και η επίλυση προβλήματος δεν αποτελεί ξεχωριστή ενότητα του αναλυτικού προγράμματος, παρά ταύτα εμπεριέχεται στους στόχους του. Απ’ότι φαίνεται όμως οι απόψεις αυτές δεν έχουν καταφέρει να ενσωματωθούν στην καθημερινή σχολική πράξη. Ο δάσκαλος δεν έχει πεισθεί για τη σημασία της εμπ, ενώ εξακολουθεί να έχει κεντρικό ρόλο και να αποτελεί πηγή αδιαμφισβήτητης γνώσης έτοιμης προς κατανάλωση από τους μαθητές. Αυτοί με τη σειρά τους αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες, γεγονός που οφείλεται σε πολλούς παράγοντες. Οι δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος συχνά απορρίπτονται από τους διδάσκοντες και προτιμώνται ασκήσεις εφαρμογών που εστιάζουν στη μηχανιστική μάθηση. Ακόμα και αν επιλεγούν όμως, είναι πολύ πιθανό να μη γίνονται πλήρως κατανοητές και να μη δίνουν το αναγκαίο ερέθισμα για ενασχόληση, μιας και συχνά απευθύνονται περισσότερο σε ενηλίκους παρά στην καθημερινή ζωή των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύοντας με ένα δικό τους τρόπο τις οδηγίες των προγραμμάτων και έχοντας ως βασικό στόχο την επιτυχία στις εξετάσεις, δίνουν έμφαση στην εκτέλεση δραστηριοτήτων από τους μαθητές με στερεότυπο και συχνά αλγοριθμικό τρόπο. Η ικανοποίηση όμως που επέρχεται από μία τέτοια είδους επιτυχία είναι παραπλανητική, δεδομένου ότι η εστίαση γίνεται στις μηχανιστικές τεχνικές επίλυσης και όχι στις δεξιότητες μαθηματικής σκέψης που είναι και το πραγματικό ζητούμενο (Schoenfeld, 1988). Η διδασκαλία της εμπ θα λέγαμε πως έρχεται σε αντιδιαστολή ακόμα και με τα ίδια τα κριτήρια της εξέτασής της. Επιπλέον, ας μην ξεχνάμε τον καθοριστικό ρόλο που διαδραματίζουν οι εξετάσεις για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, οι οποίες δε φαίνεται πως μπορούν να συμβιβαστούν με τις διδακτικές αρχές που προωθούνται από τα προγράμματα σπουδών. Το τελευταίο αποτελεί ένα πρόβλημα διαχρονικό και δύσκολα επιλύσιμο.

Συμπεράσματα - Προτάσεις

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να αναλυθεί η εξέλιξη του φαινομένου της ασκησιολογίας στην Ελλάδα, πού οφείλεται και ποιες είναι οι συνέπειές του στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Για να γίνει αυτό εφικτό, μελετήσαμε άρθρα, ιστορικές πηγές, βιβλία – περιοδικά και τη θεματογραφία των εξετάσεων για τον εντοπισμό και την ανάλυση συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Επίσης, έγιναν συγκρίσεις με τα δεδομένα των ερευνών της διδακτικής, μελέτη εμπειρικών ερευνών που αναδεικνύουν την έκταση και τις αρνητικές συνέπειες του φαινομένου, κριτικών πανεπιστημιακών δασκάλων, σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών, καθώς και των αποτελεσμάτων του διαγωνισμού PISA για τους Έλληνες μαθητές στα μαθηματικά.

Η έρευνά μας εστίασε αρχικά στα μαθηματικά έργα, τα εργαλεία δηλαδή που χρησιμοποιεί η διδασκαλία των μαθηματικών για τη μάθηση και αξιολόγηση. Επιχειρήσαμε να κάνουμε ταξινόμηση αυτών σε κατηγορίες, να δείξουμε τη σύνδεσή τους με άλλους παράγοντες, όπως οι εκπαιδευτικοί, οι μαθητές και τα αναλυτικά προγράμματα και να τονίσουμε τη σημασία τους για τη μαθηματική εκπαίδευση. Δώσαμε έμφαση στην αξία των ρεαλιστικών προβλημάτων, ενώ επίσης μιλήσαμε για τη μοντελοποίηση και τη χρήση παραδείγματος στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος (εμπ). Φυσικά, δεν παραλείψαμε να σημειώσουμε το αντίκτυπο που έχουν οι εξετάσεις, όχι μόνο στη χρήση των μαθηματικών έργων, αλλά και στην ίδια τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Στη συνέχεια, εξηγήσαμε πώς γεννήθηκε το φαινόμενο, όπως σημειώνεται σε ομιλία του Καραθεοδωρή για τη διδασκαλία των μαθηματικών και τον διδακτικό ρόλο των ασκήσεων ως αντίδοτο στη θεωρητικολογία, πότε εμφανίστηκε πρώτη φορά ο όρος «ασκησιολογία», αλλά και πώς εξελίχθηκε μέσα από το πρίσμα των μεταρρυθμίσεων και κυρίως των Νέων Μαθηματικών. Επιπλέον, προσεγγίσαμε το φαινόμενο με τη βοήθεια παραδειγμάτων και είδαμε την απόκλιση μεταξύ των αναλυτικών προγραμμάτων και των στόχων διδασκαλίας.

Κλείνοντας, συζητήσαμε για το πρόγραμμα PISA, τους σκοπούς του και τι εξετάζει. Αναλύσαμε τις αρνητικές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών και την αξία που έχει η επίλυση προβλήματος. Σημειώσαμε τις ικανότητες που απαιτούν προϋπόθεση για τους επίδοξους λύτες μαθηματικού προβλήματος, τις πεποιθήσεις και δυσκολίες των μαθητών και εκπαιδευτικών και βέβαια τον ρόλο της εμπ στα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα.

Μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε στην αρχή, τα οποία ήταν τα εξής:

- Ποια είναι τα βασικά συστατικά που χαρακτηρίζουν την ασκησιολογία;
- Πώς και γιατί εξελίχθηκε το φαινόμενο μέχρι και σήμερα;
- Ποιες είναι οι επιπτώσεις που έχει η ασκησιολογία στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών;

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, είναι σαφής η άρρηκτη σχέση που συνδέει την ασκησιολογία με την άσκηση. Η άσκηση αποτελεί ένα μαθηματικό έργο χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων ή, διαφορετικά, έργο ρουτίνας. Η κατάταξη τώρα των ασκήσεων σε ομάδες από διδάσκοντες και συγγραφείς με σκοπό να διευκολύνουν τους μαθητές στην απομνημόνευσή τους και να επιτύχουν στις εξετάσεις, είναι και το φαινόμενο που μελετάμε. Τα τυποποιημένα και στερεότυπα έργα που αποτελούν τον πυρήνα της ασκησιολογίας, πολύ λίγο συνεισφέρουν στη μάθηση των μαθηματικών. Προσφέρουν στους μαθητές δυνατότητες εξάσκησης, ενισχύουν τη διαδικαστική τους γνώση, ίσως να αυξάνουν και την αυτοπεποίθησή τους μέχρι ένα βαθμό, μα τα οφέλη περιορίζονται σε αυτό το σημείο. Τα μαθηματικά μετατρέπονται σε μια λίστα από ασκήσεις, μια συλλογή κλιμακούμενης δυσκολίας έργων που δεν προκαλούν το παραμικρό ενδιαφέρον των επίδοξων λυτών, πέρα από εκείνο που σχετίζεται με την επιτυχία σε εξετάσεις. Στερούνται πρωτοτυπίας, δεν αφορούν καθημερινές καταστάσεις και σε καμία περίπτωση δεν προάγουν κριτική και διερευνητική σκέψη. Η αποστήθιση και η εφαρμογή κανόνων, βασικά συστατικά της ασκησιολογίας, δε βοηθούν στην απόκτηση εννοιολογικής κατανόησης. Η μοντελοποίηση, η οποία έχει πολύ μεγάλη αξία, όχι μόνο για τη μαθηματική σκέψη αλλά και για την εφαρμογή της σε πραγματικές καταστάσεις, παραγκωνίζεται. Οι ασκήσεις είναι αποκομμένες από την πραγματικότητα, μη ρεαλιστικές, γι'αυτό και οι μαθητές δε μπορούν να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις.

Η ασκησιολογία φαίνεται να έχει κατακλύσει τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Η παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία έχει ως επακόλουθο την επίλυση ασκήσεων, δημιουργεί την εσφαλμένη πεποίθηση ότι με την εκτεταμένη μεθοδολογία και την εκμάθηση τεχνικών, θα καλλιεργηθεί η μαθηματική ικανότητα. Η μαθηματική ικανότητα όμως δεν έχει να κάνει με την ταχύτητα που ο αναγνώστης αναγνωρίζει την κατάλληλη κατηγορία άσκησης για να ξεκινήσει το όποιο μοτίβο επίλυσης, αλλά με την ευελιξία της σκέψης του, την ευελιξία σε νέες καταστάσεις. Οι εκπαιδευτικοί από την άλλη, οι οποίοι παίζουν και πρωταγωνιστικό ρόλο στη διδασκαλία, συνηθίζουν να παρουσιάζουν αρχικά ένα μικρό κομμάτι ύλης και μετά να δίνουν πληθώρα παραδειγμάτων. Οι διδασκόμενοι λειτουργούν ως παθητικοί δέκτες, προσπαθούν να απομνημονεύσουν τα παραδείγματα αυτά και τα ανακαλούν κάθε φορά που απαιτείται η αντίστοιχη τεχνική επίλυσης.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα και τη γένεση του φαινομένου, αυτό που εντοπίσαμε στη βιβλιογραφία και με πολύ μεγάλο ενδιαφέρον μελετήσαμε, ήταν η ομιλία του Καραθεοδωρή στην Ε.Μ.Ε. το 1924. Στην ομιλία αυτή, στην οποία γίνεται σαφές στον αναγνώστη ότι την εποχή εκείνη κυριαρχούσε η μετάδοση θεωρητικών και μόνο γνώσεων, τονίζεται το συντηρητικό πνεύμα του σχολείου και η επιρροή του από τη Γαλλία. Η θεωρητικολογία, που αποτελούσε βασικό άξονα της τότε διδασκαλίας, έπρεπε, σύμφωνα με τον Καραθεοδωρή, να καταπολεμηθεί με τη διδακτική χρήση ασκήσεων. Οι μαθητές συνήθιζαν να απομνημονεύουν τύπους και θεωρίες, γεγονός που δεν εξυπηρετούσε στην καθημερινότητά τους. Αυτός πρώτος, λοιπόν, πρότεινε, αφού οι εκπαιδευτικοί παρουσιάσουν την ενότητα που επιθυμούν, να ενσωματώσουν στη διδασκαλία τους προβλήματα προς επίλυση από τους μαθητές. Η ύλη έπρεπε να μειωθεί και να εξασκηθούν οι διδασκόμενοι σε πραγματικές ασκήσεις, που θα τους χρειαστούν και στη ζωή. Υποστηρικτής όλων αυτών ήταν και ο Ρεμούνδος, ο οποίος επίσης μίλησε για εισαγωγή ασκήσεων στη διδασκαλία, αναθεώρηση και απλοποίηση των αναλυτικών προγραμμάτων και φυσικά σύνδεση των μαθηματικών έργων με την πραγματικότητα. Η μαθηματική κοινότητα φαίνεται πως ήταν προβληματισμένη για τον ίδιο λόγο, κάτι που γίνεται αντιληπτό από το υπόμνημα προς την Ε.Μ.Ε. το 1929. Σε αυτό, τονίζεται η αναγκαιότητα για τη χρήση ασκήσεων στη διδασκαλία, η έκταση που αυτές πρέπει να έχουν, η κατάλληλη χρονική στιγμή για την εισαγωγή τους και γενικότερα οι μέθοδοι που πρέπει να ακολουθήσουν οι διδάσκοντες. Ήδη από την εποχή εκείνη, είχε επισημανθεί ο κίνδυνος της κατάχρησής τους, της μηχανιστικής ενασχόλησης των εμπλεκομένων με αυτές, σα να είχε προβλεφθεί η προβληματική κατάσταση που βιώνουμε σήμερα. Το 1936 μάλιστα, σε διάλεξή του ο Τόγκας, εξηγούσε πως η διδασκαλία είχε μετατραπεί σε μια διαδικασία απομνημόνευσης και δεν είχε καμία πλέον σχέση με την ουσιαστική μάθηση και μόρφωση.

Το πρώτο μισό του 20^{ού} αιώνα, μια περίοδος κατά την οποία επικρατούσε το ρεύμα των παραδοσιακών μαθηματικών, με μια παθητική διδασκαλία, προσηλωμένη στο παρελθόν, είχαν γίνει αντιληπτά τα σημάδια του φαινομένου. Γι'αυτό τον λόγο, πολύ χαρακτηριστικά παραθέσαμε το θέμα Τριγωνομετρίας που τέθηκε στις εισαγωγικές εξετάσεις της Μαθηματικής Σχολής Αθηνών του 1947 και έφερε σε σύγκρουση τους Βαρόπουλο και Πάλλα. Οι εξετάσεις εφαρμόστηκαν συστηματικά ως θεσμός από το 1926, ενώ πολύ γρήγορα, λίγο μετά το 1930, πήραν τη μορφή διαγωνισμού για την εισαγωγή στις πανεπιστημιακές σχολές. Όπως αναλύσαμε στην ενότητα 2.1, η ανάγκη για πρωτοτυπία στα θέματα είχε ως αποτέλεσμα να παρατηρούνται αστοχίες, αβλεψίες των θεματοδοτών, και αυτό όχι λόγω έλλειψης γνώσεων, αλλά επειδή ακριβώς η ανάγκη αυτή ήταν σε υπέρμετρο βαθμό. Ο καθοριστικός ρόλος των εξετάσεων για το φαινόμενο και την εδραίωσή του έχει γίνει αντιληπτός καθ'όλη τη διάρκεια της εργασίας μας. Η ανάγκη για τον έλεγχο των αριστούχων υποψηφίων σε συγκρατημένα χαμηλά επίπεδα, συνδέεται στενά με κοινωνικούς, οικονομικούς και εκπαιδευτικούς παράγοντες. Όπως φάνηκε από την έρευνά μας, η Γαλλία, με τις εξετάσεις της (baccalaureat), επηρέασε σε πολύ μεγάλο βαθμό την ελληνική μαθηματική κοινότητα και εκπαίδευση. Οι γρήγορες εξελίξεις και το χαμηλό ποσοστό αριστούχων, που ήταν απαραίτητο στοιχείο έτσι ώστε να μη δημιουργηθούν προβλήματα κατά την είσοδο στις πανεπιστημιακές σχολές, οδήγησαν τους Έλληνες θεματοδότες στην αναζήτηση απαιτητικών, συνδυαστικών και πρωτότυπων θεμάτων. Τα θέματα αυτά ήταν εμπνευσμένα από τη γαλλική βιβλιογραφία ή κατασκευασμένα από τους ίδιους. Η αναγκαιότητα για να βρεθούν νέα θέματα συνεχώς αυξανόταν, με αποτέλεσμα αυτόματα να σημειώνεται και αύξηση της δυσκολίας τους. Φυσικό, λοιπόν, επακόλουθο ήταν να υπάρχουν και οι προαναφερθείσες αστοχίες. Το ίδιο πρόβλημα αντιμετώπιζαν και οι φροντιστές, οι οποίοι στην προσπάθειά τους να προβλέψουν τα θέματα των εξετάσεων, κατέφευγαν επίσης στην κατασκευή ευφάνταστων ασκήσεων. Για όσους έχουν ασχοληθεί με την προετοιμασία μαθητών για τις πανελλήνιες εξετάσεις, η κατάσταση που μόλις περιγράψαμε είναι μάλλον γνώριμη.

Το 1957, το «Σπούτνικ σοκ», αποτέλεσε την αφορμή για μια πολύ σημαντική μεταρρύθμιση στη μαθηματική εκπαίδευση, τα Νέα Μαθηματικά. Η απομνημόνευση, η ανάπτυξη δεξιοτήτων ρουτίνας και το δασκαλοκεντρικό πρότυπο διδασκαλίας, που μέχρι τότε κυριαρχούσαν, θα έδιναν τη θέση τους στη μαθητοκεντρική διδασκαλία και στην εποικοδομητική μάθηση. Τουλάχιστον έτσι παρουσιάσθηκε. Στην πράξη όμως, τα όσα πρότεινε η ομάδα Bourbaki δεν είχαν τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Την ίδια αναντιστοιχία μεταξύ των όσων διαφημίστηκαν και όσων εφαρμόστηκαν, εντοπίσαμε και στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Η Ελλάδα, μετά τη συμμετοχή της στο συνέδριο του Royaumont το 1959, προσπάθησε να ενσωματώσει άκριτα, θα λέγαμε, τα όσα προτάθηκαν, χωρίς να ληφθούν υπόψιν οι πραγματικές ανάγκες και τα χαρακτηριστικά της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα νέα προγράμματα στόχευαν στη μάθηση με κατανόηση, όμως δεν άργησαν να γίνονται ορατά τα αρνητικά αποτελέσματα και στο εξωτερικό και στην Ελλάδα, που εισήγαγε όλες τις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις με κάποια καθυστέρηση. Έτσι, αν και είχε ήδη γίνει γνωστό διεθνώς ότι παρά τον εποικοδομητικό χαρακτήρα που διατυμπάνιζαν οι Bourbaki η διδασκαλία κράτησε τον φορμαλιστικό της χαρακτήρα, έστω και αργοπορημένα, ήρθε η απογοήτευση και στην Ελλάδα. Η σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινότητα δεν έγινε δυνατή, αφού παρέμειναν κατασκευάσματα με έντονο θεωρητικό χαρακτήρα, αποκομμένα από τη ζωή. Οι νέες και ξενόφερτες προτάσεις διαστρεβλώθηκαν κατά τη μεταφορά και ενσωμάτωσή τους στα ελληνικά δεδομένα. Την περίοδο εκείνη και πιο συγκεκριμένα το 1966, δίνεται μια πολύ σημαντική για τη μελέτη μας ομιλία από τον Κάππο. Ο Κάππος σε αυτή την ομιλία επισημαίνει τα προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης, την αξία που είχαν οι εξετάσεις των Γάλλων και η επιρροή τους σε εμάς, ενώ για πρώτη φορά γίνεται αναφορά στην ασκησιολογία, με την οποία έρχονταν αντιμέτωποι οι Έλληνες μαθητές.

Τα Νέα Μαθηματικά έφυγαν από το προσκήνιο, τη σκυτάλη πήρε τη δεκαετία του 80 η επίλυση προβλήματος, η οποία ήρθε στην Ελλάδα με καθυστέρηση μίας δεκαετίας περίπου, μα η κατάσταση δεν άλλαξε. Έτσι, στην ενότητα 2.3, παραθέσαμε συνδυαστικές ασκήσεις και θέματα που μαρτυρούν πως το φαινόμενο συνεχίζει και εξελίσσεται. Το θέμα που δόθηκε στις Γενικές Εξετάσεις του 1997 αποτελεί ένα ακόμα παράδειγμα, αντίστοιχο με αυτό του 1947, που αποδεικνύει την εξέλιξη της ασκησιολογίας. Η άσκηση με την εκθετική μεταβολή που δόθηκε σε μαθητές της Β΄ Λυκείου στις προαγωγικές τους εξετάσεις το 2001, είναι ένα επιπλέον αποδεικτικό στοιχείο της κατάστασης. Με αυτό το θέμα γίνεται έκδηλη η επίδραση της ασκησιολογίας μέσω των εξετάσεων στην αλλοίωση προβλημάτων που υποτίθεται ότι μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις (μεταβολή της τιμής ενός προϊόντος στην αγορά). Το αξιοσημείωτο εδώ μάλιστα είναι πως ακόμα και οι ίδιες οι λύσεις που δίνει η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων, δεν αφήνουν περιθώρια για δημιουργική μαθηματική σκέψη. Απ’ότι φάνηκε, μάλλον αναστάτωση μόνο έφεραν στους βαθμολογητές οι όποιες εναλλακτικές απαντήσεις δόθηκαν από μαθητές. Όταν λοιπόν οι ίδιοι οι βαθμολογητές δεν επιτρέπουν διαφορετικές απαντήσεις πέρα από αυτές τις προσαρμοσμένες και αυστηρά τοποθετημένες που έδωσαν, πώς είναι δυνατόν να ξεφύγουμε από το φαινόμενο; Εκτός αν δεν είναι και αυτοί σε θέση να αναγνωρίσουν την ενδεχόμενη ορθότητα στον εναλλακτικό τρόπο προσέγγισης των υποψηφίων. Σε αυτή την περίπτωση είναι πολύ λογικό να υποθέσουμε πως η αδυναμία τους αυτή οφείλεται στο γνωστό και πάλι φαινόμενο που βίωσαν ως μαθητές τα προηγούμενα χρόνια. Στην ίδια ενότητα αναφερόμαστε όμως και σε θέματα του περιοδικού Ευκλείδη Β΄, που δυστυχώς μας οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα. Η αύξηση της δυσκολίας, που εντοπίζουμε λόγω της συνύπαρξης διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων στα θέματα, το μόνο που πετυχαίνει είναι η ενίσχυση της ασκησιολογίας. Τέλος, στην ενότητα 2.4, αξιοποιήσαμε πιο πρόσφατες εμπειρικές έρευνες προκειμένου να μελετήσουμε τις σύγχρονες όψεις του φαινομένου. Η έκταση που αυτό έχει πάρει είναι ξεκάθαρη για τον αναγνώστη που θα διαβάσει τα αποτελέσματα των ερευνών. Οι μαθητές δεν έχουν την ικανότητα να ανταπεξέλθουν σε προβληματικές καταστάσεις και το μόνο στο οποίο σημειώνουν επιτυχία είναι η αντιγραφή των τεχνικών επίλυσης που έχουν αποστηθίσει.

Όλα όσα αναφέρθηκαν στα δύο προηγούμενα ερωτήματα αποτελούν μια εισαγωγή για το τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα, που αφορά τις επιπτώσεις που έχει η ασκησιολογία στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Πολύ σημαντική επίδραση στη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών έχουν τα μαθηματικά έργα. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας μας έγινε η προσπάθεια να αναλυθεί το αντίκτυπο που έχει κάθε κατηγορία μαθηματικού έργου ξεχωριστά. Εξηγήσαμε, λοιπόν, πως τα έργα ρουτίνας, δηλαδή οι ασκήσεις οι οποίες έχουν κυριαρχήσει στη σχολική καθημερινότητα, ελάχιστα έχουν να προσφέρουν στις προαναφερθείσες διαδικασίες. Οι διδασκόμενοι είναι σε θέση να εξασκηθούν, να βελτιώσουν την ταχύτητα επίλυσης στα θέματα που τους δίνονται, ακόμα και να αποκτήσουν ίσως μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση. Αυτό, όμως, δεν εξασφαλίζει ότι θα είναι σε θέση να ανταπεξέλθουν σε μια νέα κατάσταση, που απαιτεί εφαρμογή μαθηματικών γνώσεων. Από τη στιγμή που θα αντιμετωπίσουν μία άσκηση για πρώτη φορά και μετά θα επαναλαμβάνουν κάποια αντίστοιχη, παύουν να βρίσκουν ενδιαφέρον. Άσχετα με το πόσο εύκολες ή δύσκολες είναι οι υπολογιστικές τεχνικές που θα χρειαστούν, παραμένει ένα μοτίβο που λειτουργεί σε επανάληψη. Από την άλλη, τα έργα μη ρουτίνας, γνωστά και ως προβλήματα, φαίνεται πως απουσιάζουν από τη διδασκαλία. Η διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων θεωρείται πολύ απαιτητική και χρονοβόρα, σε αντίθεση με τη διδασκαλία των ασκήσεων, ζήτημα που συνδέεται άμεσα με τη διδακτική κατάρτιση των εκπαιδευτικών στις βασικές τους σπουδές και με την έλλειψη επιμόρφωσης/αξιολόγησης. Ακόμα, όμως, και αν διδάσκονται, είναι πιθανό αυτό να γίνεται σε περιορισμένο βαθμό και με λανθασμένη προσέγγιση. Τα σχολικά εγχειρίδια, με τη σειρά τους, ενισχύουν και αυτά την ασκησιολογία. Είναι σχεδιασμένα με πλούσιο περιεχόμενο ασκήσεων, οι οποίες μάλιστα είναι κλιμακούμενης δυσκολίας από την πιο εύκολη στην πιο δύσκολη. Η λίστα αυτή των ασκήσεων ακολουθεί ακριβώς μετά τη συνοπτική ή άλλοτε πιο αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας και συνηθίζεται να είναι κατηγοριοποιημένη ανάλογα με την τεχνική επίλυσης που θα χρειαστεί. Στο τέλος δε, συνηθίζεται να ενσωματώνονται και συνδυαστικές ασκήσεις ανεβάζοντας με αυτό τον τρόπο τον πήχη δυσκολίας.

Οι αρνητικές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στον μαθηματικό διαγωνισμό PISA αποτελούν μία ακόμα απόδειξη του προβλήματος. Ο PISA έχει σημαντικές επιρροές από τη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, η οποία εστιάζει στην ενεργητική μάθηση και διδασκαλία, καθώς και στην διαχείριση προβληματικών καταστάσεων βγαλμένων από την καθημερινότητα του λύτη. Οι Έλληνες μαθητές, όμως, όπως μαρτυρούν και οι χαμηλές βαθμολογίες τους, αδυνατούν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους σε πραγματικά προβλήματα. Και πώς θα μπορούσαν άλλωστε, μιας και τα προβλήματα αυτά απουσιάζουν από τη διδασκαλία. Η μάθηση συνδέεται με τις αρχές της δραστηριότητας και κατασκευής. Στην πράξη, όμως, τα πράγματα διαφέρουν. Οι μαθητές λαμβάνουν παθητικά μηνύματα και γνώσεις από τον πομπό-δάσκαλο και αποκτούν μια λανθασμένη, εργαλειακή μονάχα αντίληψη για τη μαθηματική επιστήμη. Φυσικό επακόλουθο είναι να εμφανίζουν μαθηματικοφοβία. Η διδασκαλία είναι δογματική. Η εννοιολογική κατανόηση υποβαθμίζεται, η μάθηση γίνεται επιφανειακή, ενώ ο μαθηματικός αλφαβητισμός, όπως τουλάχιστον ορίζεται από τον PISA, μάλλον απουσιάζει.

Οι επιπτώσεις του φαινομένου στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών είναι εμφανείς στα αποτελέσματα των πανελληνίων εξετάσεων. Τα θέματα των εξετάσεων καθοδηγούν την ίδια τη διδασκαλία. Ας μην ξεχνάμε τη βαρύτητα που άρχισε να δίνεται τα τελευταία χρόνια στο αντιπαράδειγμα, γεγονός που ξεκίνησε αφότου ζητήθηκε από τους μαθητές στο πρώτο θέμα των πανελληνίων του 2017. Το προαναφερθέν είναι μόνο μία ενδεικτική περίπτωση. Η θεωρία παραγκωνίζεται, η απόδειξη έχει περιορισμένο ρόλο και όλα αυτά προκειμένου να μείνει περισσότερος χρόνος για την ασκησιολογία. Γι΄αυτό και είναι μεγάλο το ποσοστό των μαθητών που χάνει πολλές μονάδες από το πρώτο θέμα της θεωρίας ή που δυσκολεύεται να αναγνωρίσει ποια είναι η πρόταση που ζητείται ν'αποδειχθεί. Οι εκπαιδευτικοί φροντίζουν σε όσο πιο σύντομο χρονικό διάστημα να παρουσιάσουν την ύλη όπως δίνεται στο σχολικό βιβλίο και αμέσως μετά ξεκινούν τα συνδυαστικά θέματα. Δίνουν βαρύτητα στην ταχύτητα και ακρίβεια των απαντήσεων, δεν αναλύουν στρατηγικές και δε βοηθούν τους μαθητές στον σχηματισμό εννοιολογικών μοντέλων. Οι διδασκόμενοι είναι εξαρτημένοι από τη διδασκαλία του εκπαιδευτικού, δεν είναι σε θέση να αναπτύξουν κριτική σκέψη, ούτε να αναστοχαστούν. Αποστηθίζουν και αναπαράγουν όσα διδάχθηκαν, γιατί έχουν ως βασικό στόχο την επιτυχία στις εξετάσεις. Δεν ενδιαφέρονται επομένως για βαθύτερη κατανόηση, αφού όλα τα παραπάνω τούς προτρέπουν στην εκμάθηση έτοιμων συνταγών η οποία υπόσχεται σίγουρη επιτυχία. Οι εποικοδομητικοί στόχοι διδασκαλίας είναι σίγουρο ότι απέχουν πολύ από την καθημερινή σχολική πρακτική. Σε μεγάλη διάσταση βρίσκονται βέβαια και οι στόχοι των αναλυτικών προγραμμάτων με τα θέματα των εξετάσεων. Η περίπτωση που αναφέραμε στην ενότητα 2.3 με το θέμα των απολυτηρίων εξετάσεων της Γ΄ Λυκείου το 2003 στο μάθημα των Μαθηματικών Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης είναι ένα πολύ καλό παράδειγμα. Ενώ στις οδηγίες τονίζεται ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τις γνώσεις σε απλές ασκήσεις, αντίστοιχης λογικής με αυτές του σχολικού εγχειριδίου, στο συγκεκριμένο ερώτημα τους ζητήθηκε να εφαρμόσουν 6 φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Το προηγούμενο σίγουρα δεν αποτελεί μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος και δεν εντοπίζεται κάτι παρόμοιο μέσα στο βιβλίο. Δεν παύει όμως αυτή η κίνηση των θεματοδοτών, όπως και πολλές άλλες, να πετυχαίνουν τον τελικό στόχο τους, δηλαδή την συγκράτηση του πλήθους των αριστούχων μαθητών σε χαμηλά επίπεδα.

Μελετώντας τα παραπάνω, γίνεται κατανοητό πόσο σημαντικό είναι το μαθηματικό έργο, το σχολικό εγχειρίδιο και πάνω απ'όλα ο εκπαιδευτικός, ο οποίος τα χρησιμοποιεί ως εργαλεία για τη διδασκαλία και κατ'επέκταση τη μάθηση των μαθητών του. Ο τρόπος χρήσης τους καθορίζει την εξέλιξη των διαδικασιών και φυσικά διαμορφώνεται και από τις ίδιες τις στάσεις του γι'αυτές. Παρά τις όποιες μεταρρυθμιστικές κινήσεις σημειώθηκαν ανά τα χρόνια, φαίνεται πως ποτέ οι διδακτικές πρακτικές δεν ξέφυγαν από τον φορμαλισμό των Νέων Μαθηματικών. Ενώ, ακόμα και στις αναλυτικές οδηγίες τονίζεται η δραστηριότητα, η εποικοδομητική μάθηση και η επίλυση προβλήματος, μέσα στην αίθουσα τα πράγματα είναι πολύ διαφορετικά. Το αντίκτυπο, μάλιστα, της κατάστασης συνεχίζει και στο επόμενο στάδιο. Εκεί γίνεται, δυστυχώς, ξεκάθαρο το πρόβλημα που έχει προκληθεί. Η μεγάλη αναντιστοιχία στους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης με την πραγματική γνώση που απέκτησαν οι μαθητές, είναι ορατή στο πανεπιστήμιο. Έτσι, συχνά παρατηρείται, φοιτητές που εισήχθησαν στις πανεπιστημιακές σχολές με υψηλές βαθμολογίες, να αγνοούν σημαντικές έννοιες ή να δυσκολεύονται σε βασικές διαδικασίες. Το γεγονός αυτό απασχολεί έντονα τους πανεπιστημιακούς, οι οποίοι εύλογα απορούν πώς οι φοιτητές τους πέτυχαν ενώ έχουν τόσα γνωστικά εμπόδια και παρανοήσεις. Μετά, όμως, από την ανάλυσή μας, νομίζουμε ότι οι αρνητικές, δυστυχώς, συνέπειες για τις οποίες συζητάμε είναι αναμενόμενες. Τουναντίον, θεωρούμε ότι η περίπτωση ένα, έστω και μικρό, ποσοστό μαθητών να μην αποκτήσει παρανοήσεις και να καταφέρει να σχηματίσει εννοιολογική κατανόηση στο μάθημα των μαθηματικών, αποτελεί μια μεγάλη επιτυχία, παρά τις φιλότιμες προσπάθειες των υπεύθυνων για τη χάραξη εκπαιδευτικής πολιτικής για το αντίστροφο.

Μετά την προσπάθειά μας να απαντήσουμε στα ερευνητικά μας ερωτήματα, αυτό που σκοπεύουμε είναι να παραθέσουμε κάποιες προτάσεις μας. Στον πρώτο άξονα των προτάσεων αυτών, θα αναφερθούμε στον παράγοντα εκπαιδευτικό. Αρχικά, πρέπει να τονίσουμε ότι αντιλαμβανόμαστε τη δυσκολία της αλλαγής πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών, που και οι ίδιοι άλλωστε διδάχθηκαν ως μαθητές τη μαθηματική επιστήμη μέσα στο πλαίσιο της εδραιωμένης στη χώρα μας ασκησιολογίας. Παρ'όλα αυτά, είναι αναγκαίο να γίνουν οι κατάλληλες αλλαγές προκειμένου να σπάσει αυτός ο φαύλος κύκλος. Ως εκ τούτου, κρίνουμε απαραίτητο οι αλλαγές να ξεκινήσουν από την πανεπιστημιακή τους εκπαίδευση. Οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, είναι σημαντικό να έχουν καλές γνώσεις μαθηματικών. Σε αυτό ίσως θα βοηθούσε κάποια εξειδίκευση ή κάποια κατεύθυνση και μέσα στην ίδια τη σχολή. Οι εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από την άλλη, χρειάζονται ενίσχυση και από τις σχολές για την απόκτηση παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Τα μαθήματα παιδαγωγικής φύσεως στις σχολές των Θετικών Επιστημών απουσιάζουν εντελώς από το πρόγραμμα σπουδών ή ελάχιστα προσφέρονται ως επιλογής. Θα ήταν ίσως προτιμότερο σε σύντομο χρονικό διάστημα να γίνεται ενημέρωση στους φοιτητές για τις κατευθύνσεις που μπορούν να ακολουθήσουν μετέπειτα (εκπαίδευση, οικονομικά, πληροφορική, κ.ο.κ.) και να υπάρξει ένας διαχωρισμός αυτών στην πορεία. Το τελευταίο έτος φοίτησης -θα μπορούσε ενδεχομένως να προστεθεί και ένα πέμπτο- οι εν δυνάμει μαθηματικοί να παρακολουθούν διαφοροποιημένα μεταξύ τους μαθήματα και για όσους θα ασχοληθούν με την εκπαίδευση, να είναι προσανατολισμένα αποκλειστικά και μόνο στους στόχους της. Οι εκπαιδευτικοί πολλές φορές δε συνεργάζονται και δεν ακολουθούν τις εξελίξεις γιατί δεν έχουν πειστεί για την αποτελεσματικότητα αυτών. Λειτουργούν αυτόνομα και δεν εφαρμόζουν καινοτομίες. Εάν όμως αφιερωνόταν ένας χρόνος φοίτησης, έχοντας ως στόχο ανάμεσα σε άλλους και αυτόν, τότε τα πράγματα νομίζουμε πως θα ήταν διαφορετικά. Επίσης, θα πρέπει να επιτευχθεί η εξοικείωση με την επίλυση προβλήματος και τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Είναι κατανοητό ότι αν οι ίδιοι λειτουργούν μόνο με στερεότυπες συνταγές και φόρμουλες ασκήσεων, τότε και οι μαθητές θα κάνουν το αντίστοιχο. Πρέπει να μπει στο περιθώριο η αυτοματοποιημένη διδασκαλία και να γίνει ενεργητική, μ’έναν εκπαιδευτικό που θα βοηθήσει στο σχηματισμό εννοιολογικών μοντέλων και στην καλλιέργεια μαθηματικής σκέψης. Επίσης, πρέπει να εξοικειωθεί στη χρήση νέων τεχνολογιών, να μελετήσει την ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης, να κάνει πιθανότατα πρακτική άσκηση και φυσικά να επιμορφώνεται. Ακόμα και μετά το πέρας των σπουδών του, κατά τη διάρκεια λειτουργίας του ως εκπαιδευτικός, οφείλει να παρακολουθεί σεμινάρια, επιμορφώσεις και να μελετά τις νέες εξελίξεις. Αυτό είναι κάτι που πέρα από προσωπικό χρέος, θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψιν από τους ιθύνοντες. Οι ενεργοί εκπαιδευτικοί οφείλουν να είναι ενήμεροι για όλα τα νέα δεδομένα και γι’αυτό πρέπει να ενισχυθούν με καθιερωμένες, ετήσιες ίσως, επιμορφώσεις, μετά το πέρας των εξετάσεων. Τέλος, καλό θα ήταν να γίνονται και αξιολογήσεις από ομάδες εξειδικευμένων, για αυτό τον σκοπό, εκπαιδευτικών, με στόχο πάντα τη βελτίωση της μαθηματικής παιδείας.

Επόμενο σημείο, που θα θέλαμε να τονίσουμε, είναι το περιεχόμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τα σχολικά εγχειρίδια πρέπει να εμπλουτιστούν με ρεαλιστικά προβλήματα και δραστηριότητες, για τις οποίες οι εκπαιδευτικοί θα είναι ικανοί να εφαρμόσουν πολλαπλές μεθόδους επίλυσης. Η επίλυση προβλήματος θα μπορούσε, μάλιστα, να συνδεθεί και με άλλες επιστήμες και διδακτικά αντικείμενα ή ακόμα και να γίνει ένα επιπλέον, ξεχωριστό, μάθημα μέσα στο ωρολόγιο πρόγραμμα. Επόμενο βήμα είναι η ύλη να προσαρμοστεί. Οι μαθητές είναι ηλικιακά ανώριμοι για να κατανοήσουν σε βάθος τον Λογισμό, για παράδειγμα. Οι ανώτερες αυτές έννοιες ίσως θα ήταν προτιμότερο να διδάσκονται στις πανεπιστημιακές σχολές των Θετικών Επιστημών. Όσον αφορά την έκταση της ύλης, έχει συχνά ειπωθεί ότι η περικοπή της είναι αναγκαία μιας και ο χρόνος διδασκαλίας δεν είναι αρκετός για να επιτευχθεί η βαθύτερη κατανόηση. Αν κρίνουμε όμως τη σημερινή κατάσταση, μήπως αυτό λειτούργησε διαφορετικά; Μήπως η περικοπή ακριβώς της ύλης, έδωσε τη δυνατότητα σε πολλούς να επιμείνουν σε όλες αυτές τις μεθοδολογίες και να ενισχυθεί το φαινόμενο; Αν ο επιπλέον χρόνος που υπολείπεται, χρησιμοποιείται για την επίλυση κατάλληλων δραστηριοτήτων, που καλλιεργούν την κριτική σκέψη, τότε πολύ καλώς γίνεται. Διαφορετικά, η αύξηση με μέτρο της ύλης, πιθανόν θα λειτουργήσει ως ένα μέτρο αποφυγής του προβληματικού φαινομένου. Επίσης, είναι σημαντικό να δοθεί στη Γεωμετρία η θέση που της αξίζει. Η Άλγεβρα απαιτεί πιο τυποποιημένους μηχανισμούς, ενώ η Γεωμετρία φαντασία, πολλές και διαφορετικές δεξιότητες. Η ιστορική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μόνο θετικά μπορεί να λειτουργήσει. Οι μαθητές, όταν για παράδειγμα, έρχονται σε επαφή με την Ανάλυση αποσπασματικά, δε μπορούν να δουν τη γενικότερη εικόνα και, φυσικά, ούτε να την κατανοήσουν. Κινήσεις όπως η ενσωμάτωση περισσότερων αντιπαραδειγμάτων, προβλημάτων αντίστοιχων του PISA είναι και αυτές θετικές. Η αποδεικτική διαδικασία δεν πρέπει να παραγκωνίζεται και να γίνεται χρήση της μόνο για τις εξετάσεις, αλλά να λάβει μεγαλύτερο μέρος μέσα στη διδασκαλία. Τα νέα, λοιπόν, σχολικά εγχειρίδια μέσα στα οποία θα έχουν ενσωματωθεί πολλά, ελπίζουμε κάποια στιγμή, από τα παραπάνω, θα μπορούσαν προτού εκδοθούν, να κυκλοφορούν στο διαδίκτυο για σχολιασμό, κριτική και μετά τις παρατηρήσεις και τις διορθώσεις που θεωρηθούν αξιόλογες, να βγουν σε κυκλοφορία. Τα προγράμματα σπουδών με τη σειρά τους να έχουν πλούσιες μεθοδολογικές και διδακτικές οδηγίες.

Τέλος, οι προτάσεις μας αφορούν το κομμάτι της αξιολόγησης και των εξετάσεων, μιας και αυτό αποτελεί το βασικότερο στοιχείο για την εδραίωση του προβληματικού φαινομένου στη χώρα μας. Τα πολύ θετικά αποτελέσματα της Φινλανδίας στον διαγωνισμό PISA έχουν συνδεθεί από πολλούς και με την απουσία των εξετάσεων από το εκπαιδευτικό τους σύστημα. Το να προτείνουμε να αλλάξει ριζικά η κατάσταση στην Ελλάδα και να εκλείψουν οι εξετάσεις, θεωρούμε ότι είναι ίσως κάτι το ανέφικτο και δεν το υποστηρίζουμε. Αυτό όμως που είναι σημαντικό, είναι να αλλάξει μορφή η αξιολόγηση. Τα θέματα των πανελληνίων εξετάσεων, πρέπει να αφορούν και ύλη προηγούμενων ετών, κάνοντας σαφές σε όλους πως η μαθηματική ικανότητα δεν περιορίζεται στην ύλη μιας σχολικής χρονιάς. Οι εξετάσεις, και δεν αναφερόμαστε μόνο στις πανελλήνιες, θα πρέπει να αλλάξουν ύφος, με εισαγωγή γενικών ερωτήσεων, ακόμα και από το δημοτικό. Η Τράπεζα Θεμάτων ίσως λειτουργήσει θετικά, με την κατάλληλη πάντα προσοχή, και μάλιστα αυτό είναι κάτι που θα επανέλθει την επόμενη σχολική χρονιά. Θα προτείναμε βέβαια οι προτεινόμενες λύσεις να είναι πολλαπλές και ανοικτές προς συζήτηση, έτσι ώστε να μη χαρακτηριστεί και πάλι δογματικό ή αυστηρό το μέτρο. Επιπλέον, θα μπορούσε να γίνει κάποιου είδους αξιολόγηση και κατά τη μετάβαση του μαθητή από το δημοτικό στο γυμνάσιο. Τέλος, θεωρούμε ενδιαφέρον να προβληματιστούμε για εναλλακτικές ίσως μορφές αξιολόγησης, όπως είναι το πορτφόλιο μαθητή ή η περιγραφική του αξιολόγηση.

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία, θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι ήταν πάρα πολύ ενδιαφέρουσα και διαφωτιστική η μελέτη του φαινομένου από την αρχή του μέχρι σήμερα. Κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας ήταν αποκαλυπτικό πώς οι ίδιοι γίναμε «θύματα» της ασκησιολογίας, αρχικά ως μαθητές, έπειτα ως φοιτητές στο Μαθηματικό Τμήμα της Σχολής Θετικών Επιστημών, αλλά και ως καθηγητές, ολοκληρώνοντας κάπως έτσι τον φαύλο αυτό κύκλο. Επίσης, όσον αφορά τις προτάσεις μας, θα θέλαμε να επισημάνουμε πως οποιοδήποτε νέο μέτρο και οποιαδήποτε νέα μεταρρύθμιση, δε θα έχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα, αν δεν αλλάξουν ριζικά οι παγιωμένες αντιλήψεις μας. Προκειμένου να γίνει αυτό, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να ξανασκεφτούμε σοβαρά και να επαναδιαπραγματευτούμε πολύ ουσιαστικές έννοιες, όπως είναι το σχολείο, ο δάσκαλος, η αξιολόγηση και η μαθηματική εκπαίδευση γενικότερα.

Βιβλιογραφία

Ανδριανουπολίτης, Κ. (nd). *Ολόκληρο το Φινλανδικό Εκπαιδευτικό Σύστημα.* http://www.sonom.gr/upload/finsys.pdf (14/5/2011)

Αρβανιτογεώργος, Α., & Βαλαριστός, Α. (1997). Προβλήματα Μαθηματικής Μοντελοποίησης. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 136-143. Μυτιλήνη, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Βισκαδουράκης, Β. (2004). Εξετάζοντας τις γενικές εξετάσεις. *Το φ,* τεύχος 1, 227–237.

Βόσκογλου, Μ. (2004). Η μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα του σήμερα: προβληματισμοί και προτάσεις. *Πρακτικά 21ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 533-543. Τρίκαλα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Βόσκογλου, Μ. (2008). Η επίλυση προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων,* Τεύχος 14. Ανακτήθηκε στις 5/11/2018.

http://www.pischools.gr/download/publications/epitheorisi/teyxos14/005-017.pdf

Βοσνιάδου, Σ. (1998). *Γνωστική Ψυχολογία*. Αθήνα: Gutenberg.

Βουτσινάς, Σ., Αντίοχος, Χ., Γκούσης, Ε., Ζερβός, Κ., & Καίσαρης, Θ. (1929). Υπόμνημα προς την Ελληνικήν Μαθηματικήν Εταιρείαν. *Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας,* Τόμος Ι΄-Τεύχος Α΄ & Β΄, 98-100.

Βρυώνης, Κ., & Γούπος, Θ. (2009). Η φιλοσοφία των Μαθηματικών και τα νέα Α.Π.Σ. – Δ.Ε.Π.Π.Σ.. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 15, 5-15, Αθήνα: ΥΠΕΠΘ/ΠΙ.

Δουγαλής, Β. (2000). *Μερικές σκέψεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Ομιλία κατά την τελετή απονομής του βραβείου εξαίρετης πανεπιστημιακής διδασκαλίας Ξανθόπουλου-Πνευματικού.

Θωμαΐδης Γ. (1991). Οι συντεταγμένες της σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 61, 27–38.

Θωμαΐδης, Γ. (1999). Μια επισκόπηση ερευνών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελληνική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 112-132.

Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (2003). Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 130, 78-85 (1ο Μέρος).

Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (2003). Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 130, 78-85 (2ο Μέρος).

Θωμαΐδης, Γ. (2009). *Μαθηματικά και εξετάσεις*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Θωμαΐδης, Γ. & Μπαρούτης, Δ. (2013). *Μπορούν τα θέματα των Εξετάσεων να συμβάλλουν στη διδασκαλία της Ανάλυσης στη Γ΄ Λυκείου; Προβληματισμοί και προτάσεις.* Εισήγηση στην 3η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). *Το φαινόμενο της ασκησιολογίας και η επίδρασή του στη μαθηματική εκπαίδευση.* Εισήγηση στο 2ο Σεμινάριο Διδακτικής της Ο.Ε.Φ.Ε. στα Ιωάννινα.

Θωμαΐδης, Γ. & Διαμαντίδου, Σ. (2016). Η εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων στην επίλυση προβλημάτων: Μια πρόκληση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 8ης Μαθηματικής Εβδομάδας του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας*, Τόμος Α΄, Θεσσαλονίκη.

Θωμαΐδης, Γ., Μπαρούτης Δ., Σαράφης Γ., & Συγκελάκης Α. (2016). Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε θεωρητική εμβάθυνση και «μεθοδολογία»; Μέρος 1ο. Μια ανάλυση του προβλήματος. Μέρος 2ο. Μια διδακτική πρόταση. *Πρακτικά 33ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας,* 261-269 & 270-281. Χανιά, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Θωμαΐδης, Γ., & Κυριαζής, Χ. (2017). *Μια μελέτη για το φαινόμενο της ασκησιολογίας: Η ανεξέλεγκτη δημιουργία ασκήσεων,* Εκθέτης: Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας, (Φύλλο 18). Ανακτήθηκε από:

http://www.nsmavrogiannis.gr/Ekthetis/Ekthetis018.pdf

Ιγγλέζου, Α. (2014). *Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα.* Διπλωματική Εργασία http://www.math.uoa.gr/me/dipl/2013-2014/dipl_Igglezou_Athanasia.pdf

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2012). *PISA 2009 Πλαίσιο αξιολόγησης και αποτελέσματα.* Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Καλαβάσης, Φ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2005). Είναι δυνατόν να παράγουμε μαθηματικά μέσα στην τάξη; *Στο Βρατσάλης (επιμ.) Κείμενα για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών:* 157-170, Ατραπός, Αθήνα.

Καλέσης, Β. & Χατζηγεωργίου, Α. (2018). *Το αντιπαράδειγμα: Ένα εργαλείο στην υπηρεσία των μαθηματικών αλλά και των Πανελλαδικών εξετάσεων*. Πρακτικά 10ης Διεθνούς Μαθηματικής Εβδομάδας. Θεσσαλονίκη, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Κάππος, Δ. (1967). Η Μαθηματική Λογική και η Θεωρία Συνόλων. Ο ρόλος των εις την διδασκαλίαν των σχολείων Μέσης Παιδείας. Στο: *Διαλέξεις οργανωθείσαι υπό της Ε.Μ.Ε. και γενόμεναι κατά τα έτη 1965-1966,* 3-51. Αθήναι: Παπαδημητρόπουλος.

Καραβασίλης, Γ & Κόσυβας, Γ. (2016).Διδακτική ανάλυση ρεαλιστικών καταστάσεων στα μαθηματικά του Γυμνασίου με βάση τη θεωρία δραστηριότητας. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών - Επιστημονικών Θεμάτων,* Τεύχος 11ο, 20-39.

Καραγεώργος, Δ. (1985). Τα μαθηματικά στη γενική εκπαίδευση. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (2), 291-301.

Καραθεοδωρή, Κ. (1924). Περί των Μαθηματικών εν τη Μέση Εκπαιδεύσει. *Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας,* Τόμος Ε΄, 83-88.

Καρκούλιας, Γ. (2014). *Η διδασκαλία της γεωμετρίας*. Διδακτορική διατριβή. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών. Σχολή Επιστημών Αγωγής. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης. Τομέας Μαθηματικών και Πληροφορικής.

Καψάλης, Α., & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών. *ΜΑΚΕΔΝΟΝ, Περιοδική επιστημονική έκδοση της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας του ΑΠΘ,* 95-115.

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας. (2005). *Θέματα αλφαβητισμού προγράμματος PISA.* Αθήνα: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας.

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας. (2010). *PISA 2006 έκθεση αποτελεσμάτων για την Ελλάδα.* Αθήνα: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας.

Κεφάλας, Χ. Μ. (1971). Συμβολή των λεγόμενων μοντέρνων μαθηματικών εις την πραγματοποίησιν του σκοπού της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών εις τα σχολεία Μέσης Παιδείας. *Χρονικά 4ου Πανελλήνιου Μαθηματικού Συνεδρίου,* 354-365. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Κλαουδάτος, Ν. & Παπασταυρίδης, Σ. (1995). Τα Μαθηματικά του Σχολείου και ο Πραγματικός κόσμος: Πώς θα συνδυάσουμε Θεωρία και Πράξη. *Πρακτικά 12ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 7-36. Ηράκλειο, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Κολέζα, Ε. (1997). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 71-81. Μυτιλήνη, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και Σχολικά Μαθηματικά. Επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Λεωνίδης, Θ. (2016). *Η εξέλιξη της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Ευρώπη (περιπτώσεις της Γαλλίας, Γερμανίας και Ιταλίας) και στην Ελλάδα από ιδρύσεως της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΟΚ) ως σήμερα.* Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία. Πανεπιστήμιο Μακεδονίας. Τμήμα Διεθνών και Ευρωπαϊκών Σπουδών.

https://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/19433/6/LeonidisTheodorosMsc2016.pdf

Λιουδάκης, Δ. (1990). Μια ασκησιακή συνύπαρξη πινάκων και συναρτήσεων. *Ευκλείδης Β΄*(1), 32-34.

Μαντάς, Ι. (1999). Η διδασκαλία των Μαθηματικών στα Λύκεια μετά τη μεταρρύθμιση. *Πρακτικά 16ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 221-233. Λάρισα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Μαστορογιάννη, Μ. Ε., & Τσόλκα, Α. (2015). *Διδακτική μαθηματικών με ΤΠΕ.* Πτυχιακή εργασία, Σχολή Επιστημών Αγωγής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης.

Μοσχονάς, Γ. (2017). «Αντιπαράδειγμα. Ένα υποτιμημένο «εργαλείο» διδασκαλίας στα Μαθηματικά του Λυκείου.». *Σεμινάρια Διδακτικής - Σύγχρονες Διδακτικές Προσεγγίσεις,* 17-28. Ηράκλειο, Ομοσπονδία Φροντιστών Ελλάδος. Ανακτήθηκε από: https://www.moschonas.gr/themata/antiparadeigma_eisigisi.pdf

Μπαρκάτσας, Α. (1999). Η θεωρία της Κατασκευής της Γνώσης (Constructivism) και ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία και στη διδακτική των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 136-153.

Μπερκέτης, Ν. (2009). *Η επιρροή των Μαθηματικών στη φιλοσοφική εξέλιξη του Πλάτωνα για παιδεία και Σύμπαν.* Ανακτήθηκε από: http://2lyk-ymitt.att.sch.gr/mfilos2012.pdf

Νικολακάκη, Μ. (1996). Εκσυγχρονισμός του μαθήματος των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση της Ελλάδας (1964-1996). *Πρακτικά 13ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 302-315. Αλεξανδρούπολη, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Ξωχέλλης, Π. (2007). «PISA (Program for International Student Assessment)». Στο: Παναγιώτης Ξωχέλλης (επιμ.). *Λεξικό της Παιδαγωγικής.* Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη, 613-614.

Οικονόμου, Π. (1997). Η «επίλυση προβλήματος» στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Στο: Φ. Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης (επιμ.), *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ: Διδακτική Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες* (σ. 275-289). Αθήνα: Gutenberg.

Πάλλας, Α. (1959). *Θέματα δοθέντα εις τας Εισαγωγικάς Εξετάσεις των Ανώτερων και Ανωτάτων Σχολών του Κράτους κατά το έτος 1959, μετά των λύσεων αυτών.* Αθήναι: Βιβλιοπωλείον Χ. Παπαδημητροπούλου.

Πλατάρος, Ι. (2004). *Η διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω αντιπαραδειγμάτων.* Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών. Σχολή Θετικών Επιστημών. Μαθηματικό Τμήμα. Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών.

Πλατάρος, Ι. (2007). *«Το Αντιπαράδειγμα, ως θεραπεία λαθών στα μαθηματικά».* Πρακτικά συνεδρίου Κέντρο Εκπαιδευτικής έρευνας. Ανακτήθηκε 5/12/17 από: http://www.slideshare.net/plataros/ss-7062621

Πούλος, Α. (2009). *Εικασίες και αντιπαραδείγματα για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στην τάξη και τον διαγωνισμό του Α.Σ.Ε.Π.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαυρίδη.

Ρίζος, Γ. (2005). *Οι περιπέτειες του προβλήματος στα σχολικά μαθηματικά*. Θεσσαλονίκη: Μαθηματική βιβλιοθήκη.

Ρίζος, Γ. (2009). *Στο δρόμο για τον PISA*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαυρίδη.

Σακελλαρίου, Ν. (1929). *Εις μνήμην Γεώργιου Ρεμούνδου.* Στο: Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 73-101. Αθήναι: Παπασπύρου.

Σαπλαμίδου, Σ., & Σάλτα, Μ. (2016). Διδασκαλία των Μαθηματικών υπό το πρίσμα του Κονστρουκτιβισμού. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, *2015*(2), 1207-1215.

Σκοπέτος, Δ. (2001). Η διδασκαλία των Μαθηματικών ως λύση προβλήματος. *Πρακτικά 18ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας,* 123-130. Ρόδος, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Σκοπέτος, Δ. (2004). Σχετικά με τις μορφές διδασκαλίας της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. *Πρακτικά 21ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας,* 373-382. Τρίκαλα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Σκουμπουρδή, Χ. (2009). Οι μεταρρυθμίσεις του εκπαιδευτικού συστήματος στην Ελλάδα και τα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 159, 95-118.

Σταφυλίδου, Σ. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά.* Αθήνα: ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). *Πρακτικά του 4ου Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σ.51-66). Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Τσικοπούλου, Σ. (2008). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στα σχολικά βιβλία μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (σσ. 211-223). Θεσσαλονίκη.

Τύπας, Γ., & Ντάφου, Ε. (2006). *Τα μαθηματικά του Δημοτικού μέσα από τα νέα διδακτικά εγχειρίδια.* Ανακτήθηκε στις 2 Απριλίου 2018 από: http://www.pischools.gr/programs/epimorfosi/epimorfotiko_yliko/dimotiko/mathimatika.pdf

Φερεντίνος, Σ. (2001). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων,* Τεύχος 5, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Adda, J. (1986). Fight against academic failure in mathematics. In P. Damerow et al. (eds.), *Mathematics for All*, UNESCO, Paris, pp. 58–61.

Anderson, J. (2003). Teachers' choice of tasks: A window into beliefs about the role of problem solving in learning mathematics. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity*. (Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, (pp. 72-80). Geelong: MERGA.

Arcavi, A. (2002). The everyday and the academic in mathematics. In E. Yackel (Series Ed.) & M. E. Brenner & J. N. Moschkovich (Monograph Eds.), *Everyday and academic mathematics in the classroom* (pp. 12-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Atkinson, S. (1992). *Mathematics with reason. The emergent approach to primary maths.* London: Hodder and Stoughton.

Ball, D. (1988). *Unlearning to teach mathematics. Issue paper 88-1*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

Ball, D.L. (1996). Teacher learning and the mathematics reforms: What we think we know and what we need to learn. *Phi Delta Kappan, 77*(7), 500-508.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform?. *Educational researcher, 25*(9), 6-14.

Barrows, H. S., & Tamblyn, R. (1980). *Problem-Based Learning: An Approach to Medical Education*, Springer, New York.

Barrows, H., and Kelson, A. C. (1995). *Problem-Based Learning in Secondary Education and the Problem-Based Learning Institute* (Monograph 1), Problem-Based Learning Institute, Springfield, IL.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 348–370.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 126–154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Blum, W. & Niss, M. (1989). Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. In W. Blum, M. Niss & I. Huntley (eds.), *Modelling, Applications and Applied Problem Solving*, Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1–22.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside school, *Teacher College Record*, 110(3), 608-645.

Boaler, J. (2010). *The Elephant in the Classroom: helping children learn and love maths.* London: Souvenir Press.

Boonen, A. J. H., van Der Schoot, M., van Wesel, F., de Vries, M. H., & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Contemporary Educational Psychology*, *38*(3), 271–279.

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Brown, J. S., Collis, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, *18*(1), 32–42.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational studies in mathematics, 62*, 211-230.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and Activity, In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Collins, A., Brown, J.S., & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.) *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Corno, L. (1988). The study of teaching for mathematics learning: Views through two lenses. *Educational Psychologist*, 23, 181-202.

Daniels, H. (2001). *Vygotsky and pedagogy*. London: Routledge Falmer.

Davydov, V. V., & Markova, A. K. (1981). Theory of the learning activity of schoolchildren. *Voprosy Psychologii*, *6*, 13-26.

Desli D., & Loukidou, H. (2014). *Addition and subtraction word problems in Greek Grade A and Grade B mathematics textbooks: distribution and children's understanding.* International Journal for Mathematics Teaching and Learning.

Doerr, H., M., (2006). *Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking*. Educational Studies in Mathematics 62: 3–24 DOI: 10.1007/s10649-006-4437-9 C_ Springer 2006

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education,39*, 405–418. doi: 10.1007/s11858-007-0043-2.

Dowling, P. (1998). *The Sociology of Mathematics Education. Mathematical Myths/Pedagogic Texts*, London: Falmer Press.

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research*, *53*(2), 159–199.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23: 167–180.

Engelbrecht, J. C., Bergsten, C., & Kågesten, O. (2009). Undergraduate students' preference for procedural to conceptual solutions to mathematical problems. *International Journal of Mathematics Education in, Science and Technology, 40*(7), 927–940.

Feiman-Nemser S., Mc Diarmid, G. W., Melnick, S. L., & Parker, M. (1989). *Changing beginning teachers' conceptions: A description of an introductory teacher education course 1.Journal of Education for Teaching.*

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In A. Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). London: Cassell.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *J. Educ. Psychol.* 87, 18–32. doi: 10.1037/0022-0663.87.1.18

Henningsen, M. A., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524–549.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education,32*(2), 195–222.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5–23). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn?, *16*(3), 235–266.

Hsu, W. (2013). Examining the types of mathematical tasks used to explore the mathematics instruction by elementary school teachers. *Creative Education, 4*(6), 396-404.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective.* Luleå: Luleå University of Technology.

Johanssen, D. H. (2003). Designing research based-instructions for story problem. *Educational Psychology Review*, *15*(3), 267-296.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40(2)*, 173-181.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., & Tzekaki, M. (2008). Comparative readings of the nature of the mathematical knowledge under construction in the classroom. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 235–245.

Kaur, B., & Dindyal, J. (Eds.). (2010). *Mathematical applications and modelling: Yearbook 2010*. World Scientific.

Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές. Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης.* Εκδ. Τροχαλία. Αθήνα.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29-63.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lenne, H. 1969. *Analyse der Mathematik didaktik in Deutschland*, Stuttgart: Klett.

Lerch, C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* 21–36.

Leont'ev, A. N. (1972). 'The Problem of Activity in Psychology'. in Wertsch, J.V. (ed.) (1979), *The Concept of Activity in Soviet Psychology* (pp. 37-71). Sharpe Inc., New York.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In *Affect and mathematical problem solving* (pp. 75-88). Springer, New York, NY.

Lester, F. K., Jr., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501–517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lingard, B., & S. Grek. (2007). *The OECD, indicators and PISA: An exploration of events and theoretical perspectives, Fabricating Quality in European Education, Working Paper 2*. http://www.ces.ed.ac.uk/research/FabQ/publications.htm (accessed 29 September 2018).

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *ZDM*, *38*(2), 96-112.

Liz, B., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006, July). Exemplification in mathematics education. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154).

Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. In *International handbook of mathematics education* (pp. 371-409). Springer, Dordrecht.

Maass, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285–311.

Marcus, R. & Fey, J.T. (2003). Selecting quality tasks for problem based teaching. In

H.L. Shoen & R.I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12* (pp. 55-67). Reston, VA: NCTM.

Mayer, R., (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. *In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving* (pp. 123-145). Lawrence Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Virginia: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

Newman, M. A. (1983). *Strategies for diagnosis and remediation*. Sydney: Harcourt Brace Jovanovich.

Orton, A., & Frobisher, L. (1996). *Insights into teaching mathematics*. London: Cassell.

Paulos, J. (1996). *A Mathematician Reads the Newspaper*. New York: Doubleday.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19*(3), 49-61.

Pehkonen, E. 2004. State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. In: *ProMath Jena 2003. Problem Solving in Mathematics Education* (eds. H. Rehlich & B. Zimmermann), 93–111. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

PISA, (2003). Problem Solving for tomorrow's World. *Organization for economic cooperation and development.*

Polly, D., & Casto, A. R. (2019). Blended Learning in Mathematics: Examining Vignettes From Elementary and Middle Schools. In *Handbook of Research on Emerging Practices and Methods for K-12 Online and Blended Learning* (pp. 272-291). IGI Global.

Polya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press. (Originally copyrighted in 1945).

Revuz, A. (1981). Αλλαγή της Μαθηματικής εκπαίδευσης μετά το 1950. Ιδέες και Πραγματοποίηση. Γαλλία. Οι μεταρρυθμίσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών στη Γαλλία. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, (21), 48-64.

Rezat, S. (2009). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME6, Lyon France*. http://www.inrp.fr/editions/cerme6. Ανακτήθηκε στις 15/07/2018.

Rowland, T., & Zaslavsky, O. (2005). *Pedagogical Example-Spaces*. Notes for the mini-conference on Exemplification in Mathematics, Oxford University, June 2005.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementary modelling in mathematics lessons: The interplay between "real-world" knowledge and "mathematical structures". In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 209-216). Springer, Boston, MA.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. *Educational Psychologist, 23*, 145-166.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334- 368). New York, NY: Macmillan.

Shulman, J. H. (Ed.). (1992). *Case methods in teacher education.* New York: Teachers College.

Skovsmose, O. (2002). Landscapes of investigation. In L. Haggarty (Ed.), *Teaching mathematics in secondary schools* (pp. 115-128). London: Routledge Falmer.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stech, S. (2006). School mathematics as a developmental activity. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, v. 1* (pp. 35–48). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80.

Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics,76*(1), 65–85.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). *Realistic Mathematics Education as work in progress*. In F.L. Lin (ed.), Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001. The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, pp. 1–42.

Witmer, T. (Trans.) (1968). *Ars Magna or the Rules of Algebra, Girolamo Cardano.* New York, USA: Dover.

Wittrock, M. C. (1986). Students' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 297-314). New York: MacMillan.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 165–182.