ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β' Ηλικιακός κύκλος (13-18 χρονών)

Διπλωματική εργασία

«Η ικανότητα συσχετισμού συνάρτησης και παραγώγου της στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων»

Της
Σιάσου Δήμητρας
Α.Ε.Μ.: 828

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια
Εξεταστές: Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Φλώρινα, Μάρτιος 2020

Πρόλογος

Κατά την διάρκεια των βασικών μου σπουδών, ενδιαφέρον προκάλεσε η περιοχή της Διδακτικής των Μαθηματικών. Με τη βοήθεια των ειδικών καθηγητών αυτό το ενδιαφέρον έλαβε ειδικό ερευνητικό και επιστημονικό χαρακτήρα. Η καθηγήτρια Μ. Καλδρυμίδου είχε την καλοσύνη να αναλάβει να με στηρίξει και να με καθοδηγήσει να διερευνήσω ένα ειδικό θέμα αυτής της περιοχής.

Και από την θέση αυτή έχω χρέος να της εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου:

- για τη συνεχή καθοδήγηση
- την αδιάλειπτη στήριξη
- την ανθρώπινη κατανόηση

που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της Επιτροπής Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Σακονίδη και Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κ. Ξένια Βαμβακούση για τις παρατηρήσεις τους και τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση της διπλωματικής.

Ευχαριστίες οφείλω και στην οικογένειά μου που μου εξασφάλισε ευνοϊκές συνθήκες μελέτης προκειμένου να ασχοληθώ με την εκπόνηση της εργασίας μου.

Τέλος, οφείλω να ομολογήσω ότι επειδή γνωρίζω ότι ο γραπτός μου λόγος δεν είναι του επιπέδου που θα ταίριαζε σε διπλωματική εργασία, γι' αυτό δέχτηκα τη βοήθεια συγγενικού μου προσώπου προκειμένου η τελική γλωσσική μορφή της μελέτης να ανταποκρίνεται στοιχειωδώς στις απαιτήσεις μίας διπλωματικής εργασίας.

Δ.Λ.Σ.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Γραφημάτων

Κατάλογος Εικόνων

Περίληψη

Στην παρούσα μελέτη επιχειρείται η διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών Γ' Λυκείου να συσχετίζουν τη συνάρτηση και την παράγωγό της στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων. Συγκεκριμένα σε δείγμα 33 μαθητών Γ' Λυκείου (Προσανατολισμού θετικών σπουδών, οικονομίας και πληροφορικής) δόθηκαν ερωτηματολόγια οκτώ ερωτήσεων που περιελάμβαναν γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων 1ου έως και 5ου βαθμού. Οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν ολικά την παράγωγο και την παράγουσα της δοθείσας συνάρτησης καθώς και να αναγνωρίσουν τα χαρακτηριστικά τους. Οι απαντήσεις των μαθητών ομαδοποιήθηκαν με κριτήριο τα είδη των καμπυλών και την κατάσταση η οποία τους ζητήθηκε (παράγωγος ή παράγουσα). Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις γραφικές παραστάσεις μίας συνάρτησης και της παραγώγου της. Ειδικότερα, δεν μπορούν να αναγνωρίσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη γραφική παράσταση της παραγώγου f' και τα χαρακτηριστικά της, όταν τους δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, καθώς και το αντίστροφο (αναγνώριση της γραφικής παράστασης της παράγουσας, δοθείσης της παράστασης της παραγώγου). Μέσα από την μελέτη των λανθασμένων απαντήσεων αναδείχθηκαν δύο τάσεις των μαθητών. Η μία τάση είναι να στηρίζονται στην δοθείσα γραφική παράσταση της συνάρτησης. Η άλλη τάση είναι να επιλέγουν την γραφική παράσταση της παραγώγου όταν τους ζητείται η παράσταση της παράγουσας καθώς και το αντίστροφο.

Λέξεις κλειδιά: Συνάρτηση, παράγωγος, γραφική αναπαράσταση, γραφική παράσταση συνάρτησης, γραφική παράσταση παραγώγου, ερμηνεία γραφικής παράστασης, συσχέτιση γραφικών παραστάσεων, μαθητές Γ' Λυκείου.

Abstract

In this study we focused on, and tried to check, the ability of high school students to relate a function with its derivative while plotting their graphs and vice versa. In particular, we worked on a sample of 33 students who were attending 12 grade, and in which we share a short questionnaire. The questionnaire had only 8 main questions, while in each of them the student had to deal with 1st to 5th grade polynomial functions graphs. The students were asked to find the derivative and/or the integration of the given function plus underline their properties. Their answers were grouped based on the curves and also by the function's form (derivative or integration). The research outcomes that most of the students did find it difficult to relate the graphs of the given function with its derivative. Given the graph of a function, the students are not able to easily recognize the derivative's graph and all the properties that come up from it, and vice versa (given the derivative's graph to find the integration's graph and properties). Through their wrong answers, we summarized that there are two basic patterns. The first is that some students use to focus only on the given graph. The second pattern has to do with those students who strongly mess it up and choose

the graph of the derivative f' while asking for the integration and vice versa (they choose the graph of the integration F when they've been asked to find the derivative's graph).

Key-words: Function, derivative, graphic representation, graph of function, graph of derivative, interpretation of graph, correlation of graphs, students of 12^{th} grade.

Εισαγωγή

Το εξεταστικό εκπαιδευτικό σύστημα της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, στην Ελλάδα, δεν χρησιμοποιεί συχνά την γραφική αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών που συναντώνται στα προγράμματα και τους οδηγούς σπουδών τους. Προτιμάται να εξετάζονται θέματα που προσεγγίζονται με ασκήσεις και εφαρμογές των εννοιών κυρίως από την αναλυτική αναπαράσταση τους (τύποι και λεκτική διατύπωση θεωρημάτων). Κατά συνέπεια οι καθηγητές σχολείων και πανεπιστημίων εστιάζουν στις παραδόσεις τους σε όμοιες ασκήσεις με αυτές των εξετάσεων. Η ανάγκη να μελετηθεί και η μορφή της γραφικής αναπαράστασης των εννοιών αυτών προκύπτει από τη χαμηλή βαθμολογία μαθητών και φοιτητών στις διάφορες μορφές εξετάσεων.

1. Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1 Η έννοια της συνάρτησης και της παραγώγου:

Ιστορική εξέλιξη και επιστημολογική προσέγγιση

1.1.1 Περί συνάρτησης

Πολλές μαθηματικές έννοιες είχαν συλληφθεί υπολογιστικά πολύ προτού οριστούν και αναπαρασταθούν με αυστηρό μαθηματικό τρόπο. (Sfard, 1988; 1991 όπως αναφέρεται στην Sfard, 1992). Η έννοια της συνάρτησης, αρχικά προσεγγίστηκε ως σχέση αριθμών. Όπως αναφέρεται στους Boyer & Merzbach (2011) η πρώτη προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης συναντάται στους Βαβυλωνίους (2000 π.Χ) με τη μορφή πινάκων. Αυτοί περιείχαν ζεύγη αριθμών οι οποίοι παρίσταναν τα τετράγωνα των αριθμών ή τις τετραγωνικές τους ρίζες. Έπειτα οι αρχαίοι Έλληνες (165 π.Χ) ασχολούμενοι με την αστρονομία, προκειμένου να προσδιορίσουν τις θέσεις των πλανητών, κατασκεύασαν πίνακες με ζεύγη αριθμών οι οποίοι παρίσταναν τα ημίτονα των γωνιακών θέσεων των πλανητών. Αργότερα η έννοια της συνάρτησης προσεγγίστηκε ως σχέση ποσοτήτων στην περιοχή της γεωμετρίας. Οι αρχαίοι Έλληνες, μελετώντας τη γεωμετρία των σχημάτων, συσχέτισαν ποσά όπως, για παράδειγμα, είναι η ακτίνα ενός κύκλου με το εμβαδόν της.

Κατά τον 17ο αιώνα, οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί προσπάθησαν να ορίσουν την έννοια της μεταβλητής. Με βάση αυτήν επεδίωξαν σταδιακά να ορίσουν και την έννοια της συνάρτησης (Sfard, 1992). Αυτή η σχέση των δύο εννοιών άλλοτε λειτούργησε βοηθητικά και άλλοτε ανασταλτικά στον προσδιορισμό της έννοιας της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ο Frege (σύμφωνα με την παράθεση της Sfard, 1992) υποστηρίζει:

> *Στους διάφορους ορισμούς της συνάρτησης συναντούμε δύο εκφράσεις οι οποίες συχνά συνυπάρχουν είτε συνδυαστικά είτε χωριστά: «μαθηματική έκφραση» και «μεταβλητή». Επισημαίνουμε ότι η χρήση τους παρουσιάζει διακυμάνσεις: ο όρος «συνάρτηση» χρησιμοποιείται κάποιες φορές προκειμένου να καθορίσει τον τρόπο εξάρτησης και άλλοτε την ανεξάρτητη μεταβλητή. Είναι οι μεταβλητές της Ανάλυσης μεταβλητοί αριθμοί;... Τι παραμένει ίδιο όταν ένας αριθμός αλλάζει; Τίποτα!... Για αυτό δεν υπάρχουν μεταβλητοί αριθμοί (Frege, 1970; 107-9).*

Από την Αναγέννηση και ύστερα έγιναν σημαντικά βήματα προς την κατεύθυνση του ακριβέστερου προσδιορισμού της έννοιας της συνάρτησης. Ειδικότερα με τη βοήθεια των συμβόλων η έννοια της συνάρτησης απέκτησε αλγεβρικό τύπο (Selden, 1991). Πιο συγκεκριμένα τον 18ο και 19ο αιώνα οι Bernoulli, Euler, Cauchy, Fourier και Dirichlet επεξεργάστηκαν ακόμη περισσότερο την έννοια της συνάρτησης και οδηγήθηκαν στη διατύπωση ορισμών. Παραθέτουμε δύο από αυτούς: α) «Κάθε αυθαίρετη καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί από μία τριγωνομετρική σειρά»

(Fourier), β) «Το y είναι συνάρτηση x αν υπάρχει ένα κανόνας που για κάθε τιμή του x μας δίνει μία μοναδική τιμή του y» (Dirichlet). Οι περισσότεροι ορισμοί που δόθηκαν σε εκείνη την περίοδο συμπεριέλαβαν την έκφραση «σχέση - εξάρτηση ποσοτήτων». Σημαντική προσθήκη στον ορισμό της συνάρτησης αποτέλεσε η εισαγωγή της μονοσήμαντης αντιστοιχίας ως προς y την οποία έκανε ο Dirichlet τον 19ο αιώνα (Boyer, 2011). Η έννοια της συνάρτησης αποδόθηκε οριστικότερα μέσω του συνολοθεωρητικού ορισμού των Bourbaki (1939). Συγκεκριμένα, οι Bourbaki γενίκευσαν τον ορισμό του Dirichlet, περίπου εκατό χρόνια αργότερα, με τη βοήθεια της αφηρημένης άλγεβρας και όρισαν ως συνάρτηση την αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων (Kleiner, 1989). Ο συνολοθεωρητικός ορισμός των Bourbaki διαφέρει πολύ από τον αρχικό ορισμό της συνάρτησης ως εξάρτησης μεταβλητών. Οι Dirichlet-Bourbaki ορίζουν πλέον τη συνάρτηση ως αυτοτελές μαθηματικό αντικείμενο (Κολεζά & Φακούδης, 2008). Το μεγάλο χρονικό διάστημα που χρειάστηκε να αναλυθεί καθώς και το γεγονός ότι ως μαθηματική έννοια ολοκληρώθηκε πρόσφατα φανερώνουν την ιστορική της εξέλιξη και την επιστημολογική της διάσταση.

1.1.2 Περί παραγώγου

Η έννοια της παραγώγου, όπως αναφέρει ο Grabiner (1983), φαίνεται να προσεγγίστηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και τους Άραβες οι οποίοι ασχολήθηκαν με τις καμπύλες και τις εφαπτομένες τους στο πλαίσιο της γεωμετρίας. Ο Ευρωπαίοι επιστήμονες αξιοποίησαν τις μεθόδους των δύο πολιτισμών –της γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων και της άλγεβρας των Αράβων- τις συνέθεσαν και έβαλαν τα θεμέλια της έννοιας της παραγώγου. Αυτό έγινε μετά την Αναγέννηση και κυρίως κατά τον 17ο αιώνα με τη βοήθεια της συμβολικής άλγεβρας και της αναλυτικής γεωμετρίας.

Η πρώτη ουσιαστική προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου επιχειρήθηκε από τον Fermat to 1630 (Struik, 1969). Αυτός μελέτησε τα μέγιστα και τα ελάχιστα μίας ποσότητας βασιζόμενος σε αντίστοιχες μελέτες των αρχαίων Ελλήνων. Το αρχικό πρόβλημα που τον απασχόλησε ήταν η διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος με τέτοιον τρόπο ώστε ο πολλαπλασιασμός των μηκών των δύο τμημάτων να είναι ο μέγιστος. Στην προσπάθειά του να εντοπίσει το μέγιστο χρησιμοποίησε κατά την επίλυση τύπου τον μηδενισμό αμελητέας ποσότητας. Δεν διευκρίνισε αν χρησιμοποίησε κάποιο όριο προκειμένου να το εξαφανίσει. Στη συνέχεια ο Fermat ασχολήθηκε και με άλλα προβλήματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης και καθιέρωσε τη δική του μέθοδο εύρεσης μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα. Αυτήν εφήρμοσε και για την εύρεση της πιο σύντομης πορείας της ακτίνας φωτός προκειμένου να μεταβεί από ένα μέσο σε άλλο. Παρ’ όλα αυτά ο Fermat δεν συνέδεσε την μελέτη του με την εύρεση κλίσης εφαπτομένης (Boyer, 1959). Στην συνέχεια, οι Descartes, Wallis και Barrow προσδιόρισαν την εφαπτομένη καμπύλης (η οποία καμπύλη δίνεται υπό μορφή εξίσωσης y=f(x)).Υπολόγισαν την κλίση της τέμνουσας με τη βοήθεια του πηλίκου $\frac{f(x+y)-f(x)}{h}$ καθώς το h τείνει να πάρει τη μηδενική τιμή.

Μετά το 1660 έγινε φανερή η σχέση των υπολογιστικών και γεωμετρικών μεθόδων μεταξύ της εύρεσης ακροτάτων (μεγίστων και ελαχίστων μίας ποσότητας) και της εύρεσης της κλίσης εφαπτομένης. Ακολούθησε ο Newton, ο οποίος προσέγγισε την παράγωγο μέσω της επιστήμης της φυσικής. Αυτός εστίασε στην έννοια της «αλλαγής» ορίζοντας το ρυθμό μεταβολής. Αυτή η έννοια μελετήθηκε και από τον Αριστοτέλη. Μαζί με τον Γαλιλαίο κατάφεραν να μελετήσουν και να προσδιορίσουν ορισμένες ιδιότητες της παραγώγου (Boyer, 1959). Παρ' όλο που υπάρχει η πεποίθηση ότι η μελέτη και η προσέγγιση της παραγώγου υποκινήθηκε από την επιστήμη της φυσικής, κάτι τέτοιο δεν ισχύει απόλυτα, καθώς τα προβλήματα της γεωμετρίας ήταν αυτά που έθεσαν τα αρχικά ερωτήματα. Παρ' όλα αυτά οι επιστήμονες της Φυσικής προετοίμασαν την συλλογιστική των ανθρώπων ώστε να δεχτεί κάποιες από τις ιδιότητες της παραγώγου και να εισαγάγουν την έννοια της μεταβολής στα μαθηματικά (Baron, 1969).

Ο Newton (1669) λοιπόν και ο Leibniz (1684) συντέλεσαν σε πολύ μεγάλο βαθμό στη θεμελίωση του Λογισμού και κατά συνέπεια στη θεμελίωση της έννοιας της παραγώγου. Αυτοί έλαβαν όλες τις μεθόδους που είχαν αναπτυχθεί μέχρι τότε και τις συσχέτισαν με δύο βασικές έννοιες: της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης. Πέρα από αυτό, διατύπωσαν στοιχεία επιχειρηματολογίας σχετικά με την απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού, που συνδέει αυτές τις δύο έννοιες, και κατοχυρώνει την αντίστροφη σχέση τους. Μερικοί από τους συμβολισμούς που όρισαν, όπως ο $\frac{dx}{dy}$, χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα (Grabiner, 1983). Ο δεύτερος νόμος του Newton και ο νόμος της ελαστικότητας του Hooke παρακίνησαν τον Euler (1739) να διατυπώσει και να επιλύσει μία εξίσωση που περιελάμβανε παραγώγους: $m\ddot{x}+ kx = 0$. Η εξίσωση αυτή ανήκει στην κατηγορία των ονομαζόμενων διαφορικών εξισώσεων και περιγράφει την κίνηση μίας παλλόμενης χορδής. Ο Euler χρησιμοποίησε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις προκειμένου να την λύσει (Kline, 1972). Ο επόμενος σημαντικός σταθμός για την εννοιολογική προσέγγιση της παραγώγου, είναι η περίοδος στην οποία οι Taylor, Euler και Maclaurin (1715) ασχολήθηκαν με τη λύση των διαφορικών εξισώσεων. Ο Taylor μπόρεσε να προσδιορίσει τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων με χρήση των μερικών παραγώγων και με τη χρήση των σειρών που φέρουν το όνομά του. Τη γεωμετρική διάσταση όλων αυτών προσέγγισε ο Maclaurin με τα αναπτύγματα που φέρουν επίσης το όνομά του.

Ο Euler βεβαίως έδωσε σημαντική ώθηση στην εύρεση μεγίστων και ελαχίστων, ωστόσο δεν συνέβαλε ουσιαστικά στην κατανόηση της φύσης παραγώγου. Αυτό καθώς και ότι οι σειρές Taylor απαιτούσαν τον υπολογισμό όχι μόνο της πρώτης και δεύτερης παραγώγου αλλά και παραγώγους ανώτερης τάξης παρέμεναν δύο ανοιχτά ζητήματα. Ο πρώτος μαθηματικός που ασχολήθηκε ουσιαστικά με αυτά τα ερωτήματα ήταν ο Lagrange (1797). Ο ίδιος επεδίωξε να δώσει αλγεβρική μορφή στην προσέγγιση της παραγώγου. Για αυτό το λόγο χρησιμοποίησε τις απειροσειρές πράγμα που ο Newton προσέγγισε βασιζόμενος σε όρια. Ο Lagrange κατάφερε να ορίσει κάθε συνάρτηση με αναπτύγματα δυναμοσειρών:

$f(x+h)=f(x)+p(x)h+q(x)h^2+r(x)h^3+...$ Αυτό αποτέλεσε το εφαλτήριο για να οριστεί για πρώτη φορά η συνάρτηση της παραγώγου με έναν αναλυτικό τύπο συνάρτησης με τη χρήση δυναμοσειρών. Ο συμβολισμός της παραγώγου: $f'(x)$, που χρησιμοποίησε ο Lagrange, κυριαρχεί μέχρι σήμερα. Με την βοήθεια του τύπου της πρώτης παραγώγου, ορίστηκαν και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης (Lagrange, 1813).

Ως τελευταίος σταθμός της χρονολογικής εξέλιξης της έννοιας της παραγώγου θεωρείται η διατύπωση του ορισμού της, πράγμα που γίνεται για πρώτη φορά. Αυτό επιχειρήθηκε από τον Cauchy (1823) όταν όρισε την παράγωγο ως το όριο του πηλίκου $[f(x+h)-f(x)]/h$, με τη μεταβλητή h να τείνει να πάρει τη μηδενική τιμή, όταν το όριο υπάρχει (Cauchy, 1823). Ο Cauchy έδωσε διαφορετική ερμηνεία στην έννοια του ορίου από αυτήν που έδωσαν οι προηγούμενοι. Αυτό τον κατέστησε πιο «ελεύθερο» συγκριτικά με τον Lagrange, ώστε να μπορεί να γενικεύσει και να εφαρμόσει τον ορισμό αυτό και σε άλλες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, κατάφερε να υπολογίσει εμβαδά χωρίων. Ακόμη, κατέθεσε μία αξιόλογη απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας πρωτύτερα το εξής θεώρημα:

> Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα [x,x+a], τότε ισχύει ότι $\min f'(x) \leq \frac{f(x+a)-f(x)}{a} \leq \max f'(x)$

Επίσης, ο Cauchy απέδειξε την ύπαρξη ρίζας στις διαφορικές εξισώσεις θέμα το οποίο έγινε αντικείμενο μελέτης από τους Stokes και Weierstrass, οι οποίοι ασχολήθηκαν με την ομοιόμορφη ή μη σύγκλιση.

Ο Cauchy αξιοποίησε πολλές από τις μεθόδους και τα ευρήματα των προγενέστερων μαθηματικών. Χρησιμοποίησε την ανισότητα με την οποία ο Lagrange χαρακτήρισε την παράγωγο αλλά την μετέτρεψε σε ορισμό (Grabiner, 1981). Ακόμη δανείστηκε από τον Lagrange το όνομα της παραγώγου και τον συμβολισμό της, $f'(x)$, δίνοντας έμφαση στη συναρτησιακή φύση της παραγώγου.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι η έννοια της παραγώγου αναπτύχθηκε κυρίως σε ένα χρονικό διάστημα διάρκειας διακοσίων χρόνων. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Grabiner (1983) σχετικά με την έννοια της παραγώγου, ο Fermat την χρησιμοποίησε (1630), οι Newton (1669) και Leibniz (1684) την ανακάλυψαν, ο Lagrange (1797) την ονόμασε και τη χαρακτήρισε και οι Cauchy (1823) και Weierstrass (1861) την όρισαν.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα βιβλία μαθηματικών παρουσιάζουν την εξέλιξη της έννοιας της παραγώγου με την ακριβώς αντίθετη σειρά από αυτήν που ακολουθήθηκε στην ιστορική της διαδρομή. Ξεκινούν με τον ορισμό, διερευνούν μερικά αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτήν, και τότε μόνο προτείνουν εφαρμογές της. Όμως ένας καθηγητής μαθηματικών θα πρέπει να γνωρίζει την ιστορική της διαδρομή προκειμένου με βάση αυτήν να διδάξει και να προκαλέσει τη δημιουργικότητα και τη φαντασία των μαθητών του (Grabiner, 1983).

Φωτογραφία. Ημερομηνίες των κυριότερων έργων των μαθηματικών που συνέβαλαν στην εξέλιξη της έννοιας της παραγώγου (Grabiner, 1983).

1.2 Χαρακτηριστικά των συναρτήσεων: γνωστική πολυμορφία, επιστημολογική πολυμορφία και αναπαραστατική πολυμορφία

Προσεγγίζοντας την έννοια της συνάρτησης ειδικότερα μέσω των χαρακτηριστικών της, γίνεται αντιληπτή η πολυμορφία που διακατέχει τη φύση της. Συγκεκριμένα έχει γνωστική, επιστημολογική και αναπαραστατική πολυμορφία. Η γνωστική πολυμορφία της έγκειται στο ότι η συνάρτηση εμπεριέχει ένα σύνολο εννοιών (πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, αντιστροφή, σύνθεση κτλ) και συνδέεται άμεσα με άλλες έννοιες (ποσότητα, μεταβλητή, λόγος κλπ) (Κολεζά & Φακούδης, 2008).. Όσον αφορά την επιστημολογική της πολυμορφία, αυτή αποκαλύπτεται από το γεγονός ότι σε διαφορετικά πλαίσια μπορεί να θεωρηθεί ως σχέση, απεικόνιση, μετασχηματισμός ή αντικείμενο (Eisenberg, 2002). Κατά συνέπεια οι ορισμοί που της αποδίδονται είναι αρκετοί (σχέση εξάρτησης, αντιστοίχιση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών) οι οποίοι είναι μεν μαθηματικά ισοδύναμοι αλλά δεν είναι γνωστικά ισοδύναμοι (Κολεζά & Φακούδης, 2008). Η αναπαραστατική πολυμορφία της συνάρτησης επιτρέπει να αναπαρασταθεί ως τύπος, (αλγεβρικός τρόπος), ως γραφική παράσταση (γραφικός τρόπος) και ως πίνακας τιμών (αριθμητικός τρόπος) (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Sierpinska, 1992). Κάθε μορφή αναπαράστασης απαιτεί διαφορετικό γνωστικό πλαίσιο πληροφορίας και δίνει πληροφορίες για ορισμένες μόνο πλευρές της, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει πλήρως (Καλδρυμίδου, Μορόγλου, 2007).

Όλα αυτά καθιστούν την έννοια της συνάρτησης δυσνόητη, ειδικά από τους μαθητές. Πολλοί ερευνητές διέγνωσαν ότι οι μαθητές συχνά καταλήγουν να έχουν μία πεπερασμένη εικόνα της συνάρτησης, ή με άλλα λόγια, μία αδύναμη εννοιολογική εικόνα της συνάρτησης (Tall &Vinner, 1981; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Kalchman & Case, 1998; Eisenberg, 2002; Rabadi, 2015).

1.3 Λάθη και παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της συνάρτησης

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η έννοια της συνάρτησης είναι δύσκολη ως προς την κατανόηση, όπως παρατηρούν πολλοί ερευνητές (Freudental, 1973; Janvier, 1978, Tall & Vinner, 1982, Dubinsky, Sfard, Sierpinska, 1993; Eisenberg, 2002; Rabadi, 2015). Οι αιτίες της δυσκολίας αυτής έγκειται αφενός στην ιδιαιτερότητα των χαρακτηριστικών της και αφετέρου στη διδακτική της προσέγγιση. Στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων, συναντάται σε διαφορετικές μορφές από το δημοτικό έως και το λύκειο και μετέπειτα στα προγράμματα σπουδών ορισμένων πανεπιστημιακών ιδρυμάτων.

Ειδικότερα αρκετοί ερευνητές στον τομέα της διδακτικής των Μαθηματικών έχουν μελετήσει τη διδακτική μεταφορά της συνάρτησης και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές. (Freudenthal, 1973; Janvier, 1978; Tall & Vinner, 1982; Freudenthal, 1983; Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992; Dubinsky, Sfard, Sierpinska, 1993; Βασάκος, 1995; Ασβεστά & Γαγάτσης 1995; Kalchman & Case, 1998; Gagatsis & Christou, 2000). Η Sierpinska (1992) επισημαίνει ότι οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην έννοια της συνάρτησης είναι παρόμοιες με τις εννοιολογικές δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθηματικοί στο πέρασμα των αιώνων κατά την προσπάθειά τους να προσεγγίσουν την έννοια της συνάρτησης. Οι προαπαιτούμενες και προϋπάρχουσες γνώσεις και αντιλήψεις, τα επιστημολογικά και αναπαραστατικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης καθώς και η οργάνωση και ο περιορισμός του εννοιολογικού πεδίου ευθύνονται για τη δημιουργία παρανοήσεων από τους μαθητές (Καλδρυμίδου, 2017). Αναλυτικότερα, πολλοί ερευνητές μελέτησαν τις αντιλήψεις των μαθητών για τις συναρτήσεις προκειμένου να προσδιορίσουν τις παρανοήσεις που αυτές δημιουργούν (Tall & Vinner, 1982; Vinner & Dreyfus, 1989; Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Linchevski & Herscovics, 1996). Σημειώνουμε μερικές από αυτές.

Οι μαθητές τείνουν να θεωρούν αποδεκτή μόνο την κανονικότητα των μορφών των συναρτήσεων. Συγκεκριμένα η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης είναι αποδεκτή αν έχει «φυσιολογική συμπεριφορά» (αν είναι ομαλή, συμμετρική) (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Ακόμη οι μαθητές δέχονται τον ορισμό ως μοναδικό τρόπο να περιγραφεί ένα μαθηματικό αντικείμενο. Αγνοούν τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασής της που βοηθούν σημαντικά στην εννοιολογική της προσέγγιση από διαφορετικές γνωστικές διεργασίες (Tall & Vinner, 1982). Οι μαθητές, τείνουν να αποδέχονται ως συναρτήσεις μόνο αυτές που έχουν αναλυτικό τύπο και μάλιστα απλό. Όσες έχουν πολλαπλό τύπο -πολύκλαδες συναρτήσεις- θεωρούνται ότι είναι πολλές συναρτήσεις μαζί. Όπως επισημαίνουν οι Markovitz, Eylon & Bruckheimer (1986), όταν οι συναρτήσεις δεν δίνονται με τη μορφή των αναλυτικών τους τύπων αλλά ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, τότε οι μαθητές δεν τις αναγνωρίζουν ως συναρτήσεις. Όμως, ακόμη και στην περίπτωση που η συνάρτηση δοθεί ως αναλυτικός τύπος, οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής και του αριθμού που εμπλέκονται. Σύμφωνα με τους Linchevski & Herscovics (1996), μία από τις παρανοήσεις που οι μαθητές παρουσιάζουν σχετικά με την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι ότι πιστεύουν ότι η μεταβλητή είναι πάντα ο άγνωστος και ο αριθμός είναι μία ποσότητα. Οι μαθητές θεωρούν ακόμη ότι οι συναρτησιακές σχέσεις είναι απαραιτήτως αιτιώδεις σχέσεις. Θεωρούν δηλαδή ότι θα πρέπει απαραιτήτως να υπάρχει κάποια πράξη στο x ώστε να επηρεάσει το y. Κατά συνέπεια δεν αποδέχονται τις σταθερές συναρτήσεις επειδή αυτοί θεωρούν καθότι αναγκαίο στοιχείο στον τύπο μιας συνάρτησης να υπάρχει το x (Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986). Ενώ θεωρούν απαραίτητη την εξάρτηση προκειμένου να προσεγγίσουν υπολογιστικά τη συνάρτηση, παρατηρείται ότι σε ασκήσεις που απαιτούν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση εστιάζουν συνήθως μόνο στη μία από τις δύο μεταβλητές (εξαρτημένη, ανεξάρτητη) (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Ακόμη, οι ίδιοι ερευνητές τονίζουν ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο τις συνεχείς και τις διακριτές μεταβλητές στις συναρτήσεις.

Δύο άλλα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων που φαίνονται να δημιουργούν δυσκολίες στους μαθητές είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση είναι αμφιμονότιμη και ασυνεχής (Vinner & Dreyfus, 1989). Όσον αφορά τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης, συχνά οι μαθητές ταυτίζουν την αναπαράσταση με την συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι συνήθως δέχονται ως συνάρτηση μόνο την συμβολική αναπαράσταση. Θεωρούν τη γραφική αναπαράστασή της καθαρά γεωμετρική κατασκευή. Όσον αφορά λοιπόν τα αναπαραστατικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις συνθέτουν την έννοια της συνάρτησης και είναι απαραίτητο να συνυπάρχουν (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990).

1.4 Δυσκολίες που προέρχονται από τα χαρακτηριστικά και τη φύση της εικόνας

Οι Pintó & Ametller (2002) εντόπισαν και συνέλεξαν ορισμένους τρόπους που επιλέγουν οι μαθητές προκειμένου να ερμηνεύσουν μία εικόνα. Μερικές από αυτές είναι οι εξής: α) η υπεροχή της διηγηματικής ανάγνωσης ‘Pre-eminence of narrative readings’. Οι μαθητές τείνουν να διαβάζουν μία εικόνα ερμηνεύοντάς την ως ιστορία που εμπεριέχει το χρόνο. Ακόμη τη μελετούν με συγκεκριμένες δομές όπως είναι η ανάγνωση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό μπορεί είτε να βοηθά είτε να κωλύει τη εξαγωγή συμπερασμάτων. β) Διαβάζουν λανθασμένα την εικόνα όταν «λείπουν» πληροφορίες ‘Misreading when information is missing’. Όταν οι μαθητές αντικρίζουν μία εικόνα στην οποία υπάρχει κάποιο κενό (για παράδειγμα η συνάρτηση είναι ασυνεχής) ή κάποια ένδειξη από άλλες μαθηματικές έννοιες που δεν γνωρίζουν (για παράδειγμα μη παραγωγίσιμη συνάρτηση), τότε είτε προσπερνούν αυτό το κενό ή την ένδειξη είτε επιχειρούν να κατασκευάσουν μηχανισμούς προκειμένου να τα ξεπεράσουν. Αυτοί οι μηχανισμοί βασίζονται κυρίως σε πρότερη δική τους γνώση. Η αντιμετώπιση των εικόνων από τους μαθητές όπως παρουσιάστηκε σχηματικά παραπάνω, δημιουργεί συχνά δυσκολίες καθώς οι μαθητές καλούνται να εξαγάγουν πολλαπλά συμπεράσματα από μία εικόνα.

Όσον αφορά τη γραφική αναπαράσταση των εννοιών του Λογισμού είναι γεγονός ότι πολλοί μαθητές συναντούν δυσκολίες όταν απαιτείται να επιλέξουν και να χρησιμοποιήσουν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τους Robert & Boschet (1984), οι μαθητές που επιτυγχάνουν συστηματικά είναι αυτοί οι οποίοι μπορούν με μεγάλη ευελιξία να χρησιμοποιήσουν πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις της έννοιας που μελετούν: συμβολική, αριθμητική και οπτική. Δυστυχώς όμως οι περισσότεροι μαθητές διστάζουν να οπτικοποιήσουν τις έννοιες του Λογισμού. Οι Dreyfus & Eisenberg (1991) αναφέρουν παραδείγματα στα οποία οι μαθητές καλούνται να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα όπου αν και η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων (συμπεριλαμβανομένων και των γραφικών αναπαραστάσεων) θα τους εξασφάλιζε μία πολύ γρήγορη και εύκολη λύση, αυτοί επιλέγουν να μην τις αξιοποιούν καθόλου. Οι ερευνητές αποδίδουν την αιτία στο γεγονός ότι για πολλά χρόνια η αριθμητική και συμβολική αναπαράσταση ως τρόπος προσέγγισης οποιουδήποτε προβλήματος ήταν κυρίαρχη. Πολλές έρευνες δείχνουν ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις “visual images”, όπως οι γραφικές παραστάσεις, μπορούν να συντελέσουν σε πολύ μεγάλο βαθμό στη βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Vinner & Dreyfus, 1989; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Hitt, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Γενικότερα η χρήση περισσότερων του ενός τρόπων αναπαράστασης βοηθά να συλλάβουν καλύτερα μία μαθηματική έννοια (Kaput, 1992). Πιο συγκεκριμένα, ο Kaput (1989) ερεύνησε και βεβαίωσε ότι η χρήση πολλών αναπαραστάσεων καλύπτει τις διαφορετικές ερμηνείες μίας μαθηματικής έννοιας. Επίσης αναδεικνύει τις διαστάσεις των περίπλοκων εννοιών αλλά και τη γνωστική σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων.

1.5 Λάθη και παρανοήσεις σχετικά με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

Οι μαθητές φοιτητές αποφεύγουν να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένους τρόπους αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης, όπως τη γραφική αναπαράσταση, ενώ προτιμούν άλλες, όπως η αλγεβρική αναπαράσταση (Hitt, 1998). Οι Leinhardt, Zaslavsky & Stein (1990) συνόψισαν τις παρανοήσεις των μαθητών, όπως αναφέρονται στην βιβλιογραφία, σε τέσσερις κατηγορίες: α) Οι μαθητές συγχέουν τη μελέτη σε διάστημα/σημείο. Οι μαθητές συχνά προσκολλώνται σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης και όχι στην συμπεριφορά της γραφικής παράστασης σε διάστημα. β) Ταυτίζουν την κλίση μίας γραφικής παράστασης με το ύψος της (την τεταγμένη). Όταν δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων θέσεως δύο κινητών, οι μαθητές, προκειμένου να βρουν ποιο από τα δύο κινητά έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, επιλέγουν το κινητό με γραφική παράσταση που περιέχει τη μεγαλύτερη τεταγμένη. γ) Προσκόλληση σε πραγματικές καταστάσεις. Συχνά διευκολύνει τους μαθητές να μεταφράζουν τις γραφικές παραστάσεις σε καταστάσεις ρεαλιστικές, όπως είναι η διαδρομή ενός ταξιδιού, ακόμη και σε περιπτώσεις που η παράσταση είναι ασυνεχής. Ακόμη δεν μπορούν να κατανοήσουν τη σχέση της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής όπως αυτή περιγράφεται από τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης (Janvier, 1978; Eisenberg, 2002).

Όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι Tall & Vinner (1982) εντόπισαν τη δυσκολία των μαθητών να σχεδιάσουν γραφική παράσταση ασυνεχούς και πολύκλαδης συνάρτησης καθώς και συνάρτησης με πεδίο ορισμού που περιέχει άρρητους αριθμούς.

Πολλοί ερευνητές έχουν εξετάσει τον ρόλο που διαδραματίζουν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις στην κατανόηση και την ερμηνεία των συναρτήσεων (Evangelidou, Spyrou, Elia, & Gagatsis, 2004; Hitt, 1998). Η έννοια της συνάρτησης δέχεται μία ποικιλία αναπαραστάσεων και συνεπώς μπορεί να διδαχθεί μέσω αυτών. Η κάθε μία από της οποίες δίνει πληροφορίες για ορισμένες πλευρές της έννοιας χωρίς καμία να μπορέσει να την περιγράψει ολοκληρωτικά (Kaput, 1992). Οι μεταβάσεις από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, έχουν συνδεθεί με την περίπλοκη διαδικασία μάθησης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα συντελούν στην βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση εννοιών του Λογισμού όπως η έννοια της συνάρτησης (Duval, 2002; Romberg, Fennema, & Carpenter, 1993, όπως αναφέρεται στους Gagatsis, Elia, Panaoura, Gravvani & Spyrou, 2006). Μία μετάβαση περιλαμβάνει δύο μορφές αναπαράστασης: την «πηγή» (αρχική αναπαράσταση) και το «στόχο» (τελική αναπαράσταση) (Janvier, 1987, όπως αναφέρεται στου Γαγάτση, 2000). Στο παράδειγμα μίας εξίσωσης και των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων σε κοινό σύστημα συντεταγμένων η πηγή και στόχος συχνά εναλλάσσονται στις ασκήσεις των σχολικών εγχειριδίων. Οι στρατηγικές μετάφρασης συχνά δεν αναπτύσσονται στο πλαίσιο μίας σχολικής τάξης (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Janvier, 1987; Lesh et al, 1987). Κάποιοι ερευνητές ερμηνεύουν το λάθη των μαθητών ως αποτέλεσμα της αδυναμίας χειρισμού των αναπαραστάσεων και της έλλειψης συντονισμού μεταξύ τους (Duval, 2002; Greeno & Hall, 1997). .

Αναλυτικότερα η δυσκολία αυτή εξηγείται ίσως από τις διαφορετικές διαδικασίες που καλείται ο μαθητής να πραγματοποιήσει, προκειμένου να μελετήσει τις γραφικές παραστάσεις. Οι διαδικασίες αυτές επηρεάζονται από τις διαφορετικές αντιλήψεις που υπάρχουν για την εννοιολογική αντίληψη της συνάρτησης. Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992), αυτές είναι: η γεωμετρική αντίληψη (η γραφική παράσταση θεωρείται ως καμπύλη ανεξάρτητα από τους άξονες), η αλγεβρική αντίληψη (η γραφική παράσταση θεωρείται ως καμπύλη σε σχέση μόνο με τον άξονα Ox) και η συναρτησιακή αντίληψη (η γραφική παράσταση θεωρείται ως καμπύλη σε σχέση με τους δύο άξονες Ox και Oy). Όσον αφορά τους τρόπους επεξεργασίας μίας γραφικής παράστασης έχουν εντοπιστεί οι ακόλουθοι τρεις τρόποι: η σημειακή επεξεργασία (υπολογισμός σημείων για την γραφική παράσταση), η βηματική επεξεργασία (επεξεργασία μέσω τύπου «μελέτης» συνάρτησης) και η ολιστική επεξεργασία (κατηγορία συνάρτησης και μεταφορά αξόνων) (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Από τη σχετική έρευνα προέκυψε ότι η κατηγορία αντιλήψεων συσχετίζεται με τον τρόπο επεξεργασίας των δεδομένων κυρίως στο γραφικό αναπαραστατικό πλαίσιο (Καλδρυμίδου, Μορόγλου, 2007).

1.6 Παράγωγος

1.6.1 Διδασκαλία της παραγώγου

Η παράγωγος ως βασική έννοια του λογισμού διδάσκεται σε λύκεια και πανεπιστήμια σε όλο τον κόσμο λόγω της σπουδαίας εφαρμογής της σε αρκετούς κλάδους της επιστήμης. Σε κάποιες χώρες η παράγωγος, όπως και άλλες βασικές έννοιες του Λογισμού, διδάσκονται για πρώτη φορά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και έπειτα αναλύονται περισσότερο σε πανεπιστημιακά ιδρύματα των οποίων οι οδηγοί σπουδών περιλαμβάνουν μαθήματα μαθηματικών. Σε άλλες χώρες παρεμβάλλεται μία υποχρεωτική σειρά μαθημάτων μετά τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και πριν την τριτοβάθμια προκειμένου οι σπουδαστές να κατανοήσουν σε μεγαλύτερο βάθος τις μαθηματικές έννοιες.

Σε αρκετές ευρωπαϊκές χώρες, στην Αμερική και στην Νότια Αφρική οι μαθητές συναντούν πρώτη φορά την έννοια της παραγώγου στην τελευταία τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής τους (grade 12, εκπαιδευτικό σύστημα με 12 βαθμίδες K-12) (Maharaj, 2013). Ο βαθμός αυστηρότητας της κάθε προσέγγισης και οι τρόποι αναπαράστασής της (αριθμητική, συμβολική, χρήση συναρτήσεων ή εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών) διαφέρουν ανά εκπαιδευτικό σύστημα (Tall, 1993). Οι βασικοί κανόνες παραγώγισης καθώς και τα είδη συναρτήσεων που διδάσκονται διαφέρουν επίσης κατά περίπτωση. Για παράδειγμα, στη Νότια Αφρική οι μαθητές στο σχολείο διδάσκονται την παραγώγιση πολυωνυμικών συναρτήσεων και στο πανεπιστήμιο των υπόλοιπων συναρτήσεων (Maharaj, 2013).

Ειδικότερα στην Ελλάδα και όσον αφορά την διδασκαλία της «παραγώγου», οι μαθητές διδάσκονται για πρώτη φορά την έννοια στη Γ΄ Λυκείου στα μαθηματικά προσανατολισμού θετικών σπουδών, οικονομίας και πληροφορικής. Οι μαθητές πριν να διδαχθούν την έννοια της παραγώγου έχουν μελετήσει την έννοια του ορίου, και εν συνεχεία εισάγονται στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος (και αόριστου). Συγκεκριμένα, διδάσκονται την έννοια της παραγώγου με τις εξής ερμηνείες: α) ως κλίση της εφαπτομένης σε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και β) ως ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται παγκοσμίως για την συνάρτηση είναι το γράμμα f και για την παράγωγο : $f'(x)$.

1.6.2 Δυσκολίες και παρανοήσεις στην έννοια της παραγώγου

Το ζήτημα της κατανόησης της παραγώγου μιας συνάρτησης απασχολεί ακόμη την ερευνητική κοινότητα. Στη σχετική βιβλιογραφία συναντούμε μελέτες στις οποίες ερευνώνται θέματα όπως:

- η πολυμορφική σύσταση της έννοιας,
- οι τρόποι αναπαράστασής της,
- η σύνδεση με άλλες μαθηματικές έννοιες,
- οι αντιλήψεις των μαθητών, φοιτητών και καθηγητών για την έννοια της παραγώγου,
- οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών και φοιτητών σχετικά με αυτήν,
- οι διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας από τους εκπαιδευτικούς,
- τα διδακτικά σενάρια που προτείνονται στους εκπαιδευτικούς και
- η παρουσίαση της ιστορικής διαμόρφωσης της έννοιας ως βάση διδασκαλίας

(Orton, 1983; Grabiner, 1983; Tall, 1993; Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf 1997; Ubuz, 2007; Pino-Fan, Godino, Font & Castro, 2012; Fuantealba et al, 2016).

Ερευνητές υποστηρίζουν ότι η παράγωγος είναι μία έννοια την οποία οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν (Orton, 1983; Uygur & Özdaş, 2005, όπως αναφέρεται στο Maharaj, 2013; Fuantealba et al, 2016). Ένα μεγάλο πλήθος ερευνών στον τομέα της διδακτικής των μαθηματικών αναφέρεται στον εντοπισμό των παρανοήσεων των μαθητών και των φοιτητών σχετικά με την έννοια της παραγώγου (Tall, 1993; Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Fuentealba, 2017;Borji, et al, 2018; Ryberg, 2018).

Σχετικά με την αναλυτική μορφή της παραγώγου έχει βρεθεί ότι οι παρανοήσεις των μαθητών/φοιτητών σχετίζονται με:

- το συμβολισμό της παραγώγου,
- τον ορισμό της παραγώγου,
- τον κανόνα της αλυσίδας (κανόνας παραγώγισης της σύνθετης συνάρτησης),
- την κατανόηση και την ερμηνεία της γραφικής αναπαράστασης της παραγώγου,
- την παράγωγο ως συνάρτηση χρόνου (σε προβλήματα κίνησης),
- το ρυθμό μεταβολής και
- τα θεωρήματα που εμπεριέχουν την παράγωγο

(Tall, 1993; Rabadi, 2015; Fuentealba, et al, 2017).

Ειδικότερα ο Tall (1993) αναφέρει ότι ο συμβολισμός της παραγώγου κατά τον Leinbiz: $\frac{dx}{dy}$ ενώ είναι καθοριστικός για τον Λογισμό προκαλεί σοβαρά προβλήματα στους μαθητές. Ενδεικτικά ένα από αυτά είναι το αν ο συμβολισμός αυτός παριστάνει κλάσμα ή ένα ανεξάρτητο σύμβολο. Επίσης οι διάφοροι ορισμοί της παραγώγου ως όριο, κλίση εφαπτομένης συνάρτησης και ως ρυθμός μεταβολής δημιουργούν δυσκολίες στην κατανόησή της (Park, 2015). Συγκεκριμένα ο ορισμός της παραγώγου ως όριο, όπως δίνεται από τη συμβολική μορφή του: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, δημιουργεί σύγχυση. Οι μαθητές αδυνατούν να διακρίνουν ποια είναι η μεταβλητή και ποια η σταθερά. Όταν ο τύπος περιλαμβάνει το x_0 αντί του x, οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την f'(x) ως συνάρτηση και την βλέπουν ως μία τιμή (Tall, 1997). Κάποιες παρανοήσεις, όπως ο κανόνας αλυσίδας (chain rule), έχουν μελετηθεί περισσότερο σε έρευνες. Κατά την παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν αυτόν τον κανόνα (Tall, 1993, όπως αναφέρεται στο Maharaj, 2013). Όμως ο κανόνας αυτός έχει χαρακτηριστεί από τους ερευνητές εξαιρετικά δύσκολος να διδαχθεί και να κατανοηθεί από τους μαθητές (Gordon, 2005; Uygur & Özdaş, 2007, όπως αναφέρεται στο Maharaj, 2013). Οι τελευταίοι συναντούν δυσκολίες όταν καλούνται να χειριστούν την παράγωγο ως συνάρτηση χρόνου σε λεκτικά προβλήματα ρυθμού μεταβολής (Tall, 1992; Rabadi, 2015). Ακόμη οι ερευνητές επισημαίνουν το γεγονός ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν τα θεωρήματα για να λύσουν μόνο ένας είδος ασκήσεων. Αυτό, σύμφωνα με τους Fuentealba et al (2017) φανερώνει ότι οι μαθητές δεν έχουν κατακτήσει τη θεματοποίηση 'thematization' της παραγώγου.

Οι λόγοι για τους οποίους οι μαθητές συναντούν αυτές τις δυσκολίες είναι: η πολυδιάστατη σύστασή της, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της και η σχέση της με πολλές ιδιότητες άλλων μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται σχετικά με την έννοια της παραγώγου λόγω των περιορισμένων νοητικών εικόνων που έχουν ευρύτερα για τις συναρτήσεις. Ακόμη οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλέξουν την κατάλληλη αναπαράσταση κάθε φορά. Συχνά προτιμούν τις διαδικαστικές μεθόδους έναντι της εννοιολογικής κατανόησης. (Tall, 1993; Eisenburg & Dreyfus, 1991 όπως αναφέρεται στο Stringer III, 2011).

Εν συνόψει θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι τα χαρακτηριστικά μιας τυπικής συμπεριφοράς μαθητή απέναντι στην έννοια της παραγώγου είναι η καλή διαδικαστική απόδοση, η χαμηλή εννοιολογική κατανόηση και η ελλιπής σύνδεση αναπαραστάσεων και φυσικών εφαρμογών. (Borji et al, 2018)

1.7 Γραφική παράσταση παραγώγου:

Ερευνητική δραστηριότητα σχετικά με την ερμηνεία γραφικής παράστασης παραγώγου

Ενώ έχουν προηγηθεί άλλες μία ακόμη παρανόηση που παρουσιάζει εξαιρετικό ερευνητικό ενδιαφέρον και αρκετοί ερευνητές έχουν ήδη ασχοληθεί με αυτήν, είναι η δυσκολία ερμηνείας της γραφικής αναπαράστασης της παραγώγου.Aspinwall, et al, 1997; Ubuz, 2007; Stringer III, 2011; Maharaj, 2013; Borji, et al, 2018; Ryberg, 2018). Σχετικά με τις γραφικές αναπαραστάσεις της παραγώγου, η χαμηλή απόδοση των μαθητών σε ασκήσεις που την εμπεριέχουν φανερώνει τη συνολική αδυναμία των μαθητών να συνδέσουν τη γραφική παράστασης της συνάρτησης f με αυτήν της παραγώγου της (Asiala et al, 1997). Όπως παρουσιάζεται στη σχετική βιβλιογραφία, οι ερευνητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν στα ερευνητικά τους εργαλεία ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων προκειμένου να ανιχνεύσουν τις παρανοήσεις των μαθητών στη μελέτη γραφικής παράστασης της παραγώγου και της παράγουσας. Τα είδη αυτά είναι τα εξής:

1) Πολυωνυμικές μηδενικού, πρώτου, δευτέρου, τρίτου, τέταρτου βαθμού (Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011; Maharaj, 2013; Borji, et al, 2018; Ryberg, 2018)

2) Ρητές (Stringer III, 2011)

3) Τριγωνομετρικές (ημx, συνx) (Borji, et al, 2018; Rabadi, 2015; Stringer III, 2011)

4) Εκθετικές (Rabadi, 2015; Stringer III, 2011)

Επιπροσθέτως μελετήθηκαν συναρτήσεις που **δεν είναι παραγωγίσιμες** σε σημεία (Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Fuentealba, et al, 2017; Borji, et al, 2018), συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις **που δεν προέρχονταν από αναλυτικό τύπο**, δίκλαδες συναρτήσεις, καθώς επίσης και συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις που **σχεδιάζονταν εκ νέου** για να διευρευνηθούν τα ερωτήματα του ερευνητή (Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Fuentealba, et al, 2017; Borji, et al, 2018).

Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τέσσερις τύπους ασκήσεων – ερωτήσεων, προκειμένου να μελετήσουν τη συμπεριφορά των μαθητών και το βαθμό στον οποίο έχουν κατανοήσει εννοιολογικά την παράγωγο στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων. Στις ασκήσεις αυτές δόθηκαν γραφικές παραστάσεις και οι ίδιοι κλήθηκαν να αντλήσουν πληροφορίες από αυτές προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτήματα σχετικά με την συνάρτηση f και την παράγωγό της, f΄. Ακολουθούν οι κατηγορίες των ασκήσεων.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει όλες τις ασκήσεις στις οποίες η δοθείσα γραφική παράσταση ήταν της συνάρτησης f, και η ζητούμενη της παραγώγου της, f’ (Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Fuentealba, et al, 2017; Borji, et al, 2018; Ryberg, 2018).

Η δεύτερη κατηγορία περιέχει την αντίστροφη δομή δεδομένων και ζητούμενων των ασκήσεων της προηγούμενης κατηγορίας: η δοθείσα γραφική παράσταση είναι της παραγώγου, f’ και η ζητούμενη της αρχικής συνάρτησης f. (Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Fuentealba, et al, 2017; Ryberg, 2018).

Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν όλες οι ασκήσεις στις οποίες οι δοθείσες γραφικές παραστάσεις είναι δύο και ζητείται από τους μαθητές να ελέγξουν αν υπάρχει η σχέση γραφικών παραστάσεων συνάρτησης και παραγώγου (f και f') (Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Ryberg, 2018).

Στην τέταρτη κατηγορία εντάσσονται οι ασκήσεις στις οποίες ζητείται η αναγνώριση χαρακτηριστικών (πρόσημο παραγώγου, μονοτονία παράγουσας, ακρότατα) της παραγώγου ή της παράγουσας της δοθείσης γραφικής παράστασης (Stringer III, 2011; Orhun, 2012; Maharaj, 2013).

Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα αυτών των μελετών στη συνέχεια. Έχουν εντοπιστεί δύο βασικές αδυναμίες των μαθητών σχετικά με τον χειρισμό της γραφικής παράστασης της παραγώγου:

α) <u>Αδυναμία σύνδεσης γραφικής παράστασης παραγώγου με κλίση εφαπτομένης</u>

Οι διεθνείς έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές-φοιτητές προκειμένου να ανταποκριθούν σε μία άσκηση που ως ζητούμενο έχει την εύρεση ή σχεδίαση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης δοθείσας της συνάρτησης f η και αντίστροφα, τείνουν να χρησιμοποιούν την αναλυτική-συμβολική μορφή των συναρτήσεων καθώς και την εφαρμογή των κανόνων παραγώγισης προκειμένου μέσω των τύπων των συναρτήσεων και των γνωστών τους γραφικών παραστάσεων να τις σχεδιάσουν και να τις βρουν. Αποφεύγουν να αξιοποιήσουν την μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης. Για παράδειγμα δεν εστιάζουν στη μονοτονία ή την κυρτότητα μιας συνάρτησης προκειμένου να εξαγάγουν συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση της παραγώγου της, f'. Συγκεκριμένα τα θεωρήματα τα οποία οι μαθητές διδάσκονται και θα μπορούσαν να αξιοποιήσουν σχετικά με τη μελέτη και τη συσχέτιση των γραφικών παραστάσεων του ζεύγους f και f΄ είναι τα εξής: αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) τότε η παράγωγος της είναι θετική (ή αρνητική) ή μηδέν. Αν είναι κυρτή (ή κοίλη) τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα).Τα ακρότατα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της παραγώγου της f με τον άξονα x'x και τα ακρότατά της, αντίστοιχα. Πολλοί μαθητές, παρ' όλα αυτά, δεν έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν αυτές τις διασυνδέσεις. Το φαινόμενο αυτό αναλύεται σε αρκετές έρευνες. Γίνεται μάλιστα πιο έντονο σε αυτές στις οποίες χρησιμοποιούνται ως ερευνητικό εργαλείο ερωτήσεις με γραφικές παραστάσεις που δεν έχουν προέλθει από γνωστό τύπο συνάρτησης (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997).

Μία ενδιαφέρουσα έρευνα από την οποία λάβαμε γόνιμες ερευνητικές αφορμές είναι η έρευνα του Stringer III (2011). Σε αυτήν μελετήθηκε η εννοιολογική κατανόηση της παραγώγου από φοιτητές, όπως προσεγγίζεται με την ερμηνεία γραφικών παραστάσεων συνάρτησης και παραγώγου. Ο στόχος της έρευνας ήταν να μελετηθεί ο ρόλος που διαδραματίζουν οι γραφικές παραστάσεις στη διαδικασία κατάκτησης της έννοιας της παραγώγου στην ανδρική αφρικανική κοινότητα φοιτητών. Πιο συγκεκριμένα στη μελέτη ερευνήθηκε ο τρόπος με τον οποίο οι φοιτητές συνθέτουν και συνδυάζουν τον αναλυτικό τρόπο έκφρασης της παραγώγου με τον γραφικό. Ο ερευνητής έδωσε σε μαθητές που είχαν διακριθεί για τις μαθηματικές τους επιδόσεις ερωτηματολόγια στα οποία ζητούνταν να υπολογιστεί η παράγωγος ή η παράγουσα από δύο αφετηρίες. Στην πρώτη περίπτωση δόθηκε τύπος (αναλυτικός τρόπος αναπαράστασης) και στην άλλη περίπτωση γραφική παράσταση. Τα είδη των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πολυωνυμικές έως τετάρτου βαθμού, ρητές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, συναρτήσεις που δεν είναι παραγωγίσιμες σε ορισμένα σημεία, καθώς και πολύκλαδες. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν για ακόμη μία φορά ότι οι μαθητές προτίμησαν τον αναλυτικό τρόπο έναντι του γραφικού. Ο ερευνητής σημειώνει ότι η συνεχής χρήση αναλυτικών παραδειγμάτων στην τάξη που διδάσκεται ο λογισμός μπορεί να μειώσει την ικανότητα των μαθητών για βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση των εννοιών του Λογισμού. Είναι σημαντικό να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους βάσει της πρότερης γνώσης τους. Δίνοντας γραφικές αναπαραστάσεις συναρτήσεων και ζητώντας να σχεδιάσουν ή να περιγράψουν την παράγωγό τους (ή και αντίστροφα) διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές ή οι σπουδαστές βοηθιούνται να κατακτήσουν εννοιολογικά την παράγωγο ακόμα και αυτοί που είναι από την φύση τους αναλυτικοί (one – sided thinking) (Stringer III, 2011).

Σε μία ακόμη μελέτη ερευνήθηκε η ικανότητα των μαθητών να συνδέσουν τις γραφικές παραστάσεις μίας συνάρτησης και της παραγώγου της. Αυτή είναι του Orhun (2012) στην οποία εξέτασε 102 μαθητές λυκείου (grade 11) μοιράζοντάς τους πέντε διαγνωστικά ερωτηματολόγια με γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων. Οι μαθητές κλήθηκαν να ερμηνεύσουν την μεταβολή της κλίσης των εφαπτομένων των σημείων $(x, f'(x))$, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, να βρουν τα τοπικά μέγιστα τα τοπικά ελάχιστα και τα σημεία καμπής της. Τα είδη των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού. Από τη διεξαγωγή της έρευνας προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να βρουν τις συνδέσεις μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων καθώς συχνά αντιμετώπιζαν και ερμήνευαν τη γραφική παράσταση της παραγώγου ως την παράσταση της αρχικής συνάρτησης. Στις αιτιολογήσεις των απαντήσεών τους εντοπίστηκαν εννοιολογικά και διαδικαστικά λάθη. Έγινε αντιληπτή η αδυναμία τους να μελετούν και να ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση. Αιτία αυτού είναι το γεγονός ότι οι μαθητές συχνά αγνοούν την διαφορά της τιμής της παραγώγου σε ένα σημείο και της παραγώγου ως συνάρτησης (σε διάστημα) (Fuentealba, et al, 2017).

Με βάση αυτά θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν μία σημαντική δυσκολία όσον αφορά την ερμηνεία της γραφικής παράστασης της παραγώγου ως συνόλου σημείων των οποίων η τεταγμένη δηλώνει την κλίση της εφαπτομένης στο εκάστοτε σημείο.

β) <u>Αδυναμία χειρισμού γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων, οι οποίες είναι ασυνεχείς ή μη παραγωγίσιμες.</u>

Αρκετές ασκήσεις που καλούνται οι μαθητές να λύσουν στο πλαίσια ερευνών περιλαμβάνουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων οι οποίες δεν είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού τους ή δεν είναι παραγωγίσιμες σε κάποια σημεία τους. Η δυσκολία αυτών των περιπτώσεων ανάγεται για ακόμη μία φορά στη μονόπλευρη προσέγγιση αυτών των συναρτήσεων καθαρά με αλγεβρικό τρόπο. Οι μαθητές μπορεί να δυσκολεύονται ακόμα και με την αναλυτική προσέγγιση παρόμοιων καταστάσεων, όμως έχουν ως εργαλεία θεωρήματα μεταφρασμένα σε αλγορίθμους και κανόνες τους οποίους μπορούν να ανακαλέσουν στη μνήμη τους και να λύσουν προσωρινά μία άσκηση χαμηλής εννοιολογικής σημασίας. Μία από τις έρευνες που αναφέρει τη σύγχυση των μαθητών σχετικά με την αναπαράσταση αυτών των σημείων της συνάρτησης f στη γραφική παράσταση της παραγώγου της, f΄ είναι και του Stringer III (2011). Οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλέξουν αν αυτά τα σημεία της συνάρτησης f θα εμφανιστούν στην γραφική παράσταση της παραγώγου ως «σημεία απουσίας» (ανοιχτοί κύκλοι), σημεία ασυνέχειας ή ως ασύμπτωτες. Η ίδια δυσκολία εμφανίζεται και στην αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή δοθείσης της γραφικής παράστασης της παραγώγου να συμπεράνουν στοιχεία για την γραφική παράσταση της αρχικής συνάρτησης (παράγουσας). Οι περισσότεροι μαθητές σε αυτές τις περιπτώσεις συμπεριφέρονται κυρίως με δύο τρόπους: είτε αποφεύγουν να λύσουν τις ασκήσεις στις οποίες οι συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους, είτε προσπαθούν να τις λύσουν αλλά δεν επιχειρηματολογούν για την επιλογή τους ή τη σχεδίασή τους (Stringer III, 2011; Borji, et al, 2018).

Αυτήν την συμπεριφορά των μαθητών επηρεάζει και το μαθησιακό προφίλ των μαθητών. Οι ερευνητές μελετώντας δείγματα μαθητών, όρισαν τρεις κατηγορίες μαθητών όσον αφορά τον «τύπο» τους (type). Οι μαθητές που προτιμούν την αναλυτική, συμβολική αναπαράσταση ως τρόπο αντιμετώπισης ασκήσεων ανήκουν στην κατηγορία «Αναλυτικοί» τύποι (Analytic Type). Όσοι προτιμούν να σκέπτονται, να προσεγγίζουν και να μελετούν τις ασκήσεις και τα ερωτήματα «μεταφράζοντας» και κατασκευάζοντας σχήματα και γραφικές παραστάσεις διαθέτουν χαρακτηριστικά του «Γεωμετρικού» τύπου (Geometric Type). Τέλος, όσοι συνδυάζουν και τις δύο στρατηγικές και είναι σε θέση να επιλέγουν πότε τους εξυπηρετεί να εφαρμόσουν την καθεμία από αυτές για να φτάσουν πιο σύντομα και με μεγαλύτερη ασφάλεια στη λύση ανήκουν στην κατηγορία του «αρμονικού» τύπου (Harmonic Type) (Asiala et al, 1997; Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011).

Μία από τις κυρίαρχες αιτίες των αδυναμιών αυτών είναι η πεποίθηση μαθητών και καθηγητών ότι η ενασχόληση με τον Λογισμό σχετίζεται με τον ικανό χειρισμό συμβόλων και αριθμών (Aspinwall, 1997). Στο σχολικό και πανεπιστημιακό περιβάλλον μιας τάξης και ενός αμφιθέατρου αντίστοιχα, κατά την διδασκαλία της παραγώγου, επιλέγονται παραδείγματα που περιέχουν αποκλειστικά συναρτήσεις αναλυτικής μορφής, γεγονός που δεν βοηθά την εννοιολογική κατανόησή της. (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997). Το εξεταστικό σύστημα, τα θέματα προσομοίωσης, τα διαγωνίσματα και η προσέγγιση της ύλης γίνονται σχεδόν αποκλειστικά με λύσεις ασκήσεων που ανάγονται σε αλγοριθμικές και αλγεβρικές μεθόδους. Απουσιάζουν τα λεκτικά προβλήματα, τα θέματα μελέτης γραφικών παραστάσεων και τίθενται λιγότερες ερωτήσεις θεωρίας σε σχέση με τις πρακτικές ασκήσεις. Τα τελευταία χρόνια έχουν συμπεριληφθεί οι σχεδιάσεις γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων αλλά σπανίζουν αυτές των παραγώγων τους. Όπως αναφέρεται και στους Leinhardt, Zaslavsky και Stein (1990) οι διδάσκοντες, όταν επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν τις γραφικές παραστάσεις προκειμένου να διδάξουν μαθηματικές έννοιες του Λογισμού, έχουν επιλέξει να αναφέρουν πρώτα την συμβολική τους μορφή (τύποι), ενώ σπανίως επιλέγουν την αντίστροφη πορεία (Asiala et al, 1997). Οι αλγοριθμικές πρακτικές με έντονο διαδικαστικό χαρακτήρα είναι συνήθως το μοναδικό εργαλείο στα χέρια του διδασκόμενου προκειμένου να ανταποκριθεί σε ζητήματα που εμπεριέχουν την παράγωγο. Σύμφωνα με τον Zimmerman (1991), έχει δοθεί τόση έμφαση στη χρήση συμβόλων με αποτέλεσμα να έχει χαθεί η ουσία του Λογισμού. Στον αντίποδα, η επιλογή της οπτικοποίησης είναι μία σπουδαία λύση διδακτικής προσέγγισης της παραγώγου, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των εννοιών (Presmeg, 1986). Σε αυτό συμφώνησαν και οι Hughes-Hallet et al. (1994) οι οποίοι ισχυρίζονται ότι η διδασκαλία των εννοιών του Λογισμού θα μπορούσε να βελτιωθεί με τη βοήθεια του «Κανόνα των Τριών»: οποιαδήποτε θέματα του λογισμού πρέπει να διδάσκονται και με τους τρεις τρόπους: γραφικά, αριθμητικά και αναλυτικά. Συνεπώς οι μαθητές λειτουργούν με λίγες νοερές εικόνες και δεν μαθαίνουν πραγματικά τα μαθηματικά. Προσεγγίζουν τον Λογισμό με μία ευρεία σειρά αλγορίθμων και με ένα σύνθετο σύστημα κανόνων και καταλόγων που τους καθοδηγούν να βρουν την διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν κάθε φορά (Hallet, 1991, όπως αναφέρεται στο Tall, 1992).

> *«Υπάρχουν πολλοί μαθητές που έχουν την ικανότητα να υπολογίσουν τις παραγώγους εξαιρετικά περίπλοκων συναρτήσεων και όμως να μην μπορούν, κοιτάζοντας μία γραφική παράσταση, να εντοπίσουν σε ποια διαστήματα η παράγωγος είναι θετική και σε ποια αρνητική. Ακόμη λιγότεροι μαθητές είναι σε θέση να ερμηνεύσουν σε ποια διαστήματα η αρχική (παράγουσα) αυξάνεται και σε ποια μειώνεται» (p.121).*

Συνοψίζοντας τα παραπάνω θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται άψογα τα προβλήματα που περιέχουν τη συμβολική αναπαράσταση της παραγώγου, όμως δυσκολεύονται να χειριστούν προβλήματα με γραφικές παραστάσεις οι οποίες απαιτούν χειρισμούς που προϋποθέτουν την εννοιολογική κατανόηση. Με το πέρασμα του χρόνου ταυτίζουν την παράγωγο με την εφαρμογή αποκλειστικά αλγεβρικών κανόνων και αυτό επηρεάζει άμεσα την επίδοση των μαθητών στις ασκήσεις και στα προβλήματα που είναι πιο απαιτητικά (cognitive) (Fuantealba et al, 2016).

1.8 Έρευνες που προτείνουν διδακτικό μοντέλο για την έννοια της παραγώγου στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ενώ τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει πολλές έρευνες που εστιάζουν στη μελέτη της κατανόησης της παραγώγου από τους μαθητές σχετικά με την έννοια της παραγώγου (Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997; Orton, 1983; Park, 2013; Zandieh, 2000), λίγες είναι οι βιβλιογραφικές πηγές που προτείνουν μία κατάλληλη μέθοδο διδασκαλίας (Ryberg, 2018). Συγκεκριμένα στην έρευνα του Ryberg (2018) μελετήθηκαν οι τρόποι διδασκαλίας που βοηθούν τους μαθητές να συνδέσουν αποδοτικότερα τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και αυτή της παραγώγου της. Η έρευνα ήταν ουσιαστικά δύο διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες είχαν πολύ καλά αποτελέσματα και φανέρωσαν την ανάγκη να εστιάζει η διδασκαλία αυτού του αντικειμένου σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και μάλιστα να περιλαμβάνει ένα μεγάλο εύρος γραφημάτων.

Στη σχετική βιβλιογραφία υπάρχουν έρευνες οι οποίες είτε με τη μορφή διδακτικών σεναρίων είτε με τη μορφή διαγνωστικών ερευνητικών διαδικασιών αναδεικνύουν το ρόλο της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και ειδικότερα της έννοιας της παραγώγου. Παρατηρήθηκε ότι η χρήση υπολογιστών και η προσωπική εμπλοκή των μαθητών σε προγράμματα που προσφέρουν γραφικές αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών βοηθά σημαντικά στην κατάκτηση των εννοιών του Λογισμού. Συγκεκριμένα για την προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου και άλλων εννοιών του Λογισμού μέσω της τεχνολογίας ασχολήθηκαν αρκετές έρευνες (Dick et al, 1996; Hillel, 1993; Tall, 1996, όπως αναφέρεται στο Lavicza, 2006; Kendal & Stacey, 2001; Hohenwarter, Preiner & Yi, 2007; Borji, Alamolhodaei & Radmehr, 2018). Λόγω της ταχύτατης εξέλιξης της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια, προτιμήθηκε η συνοπτική περιγραφή μίας πρόσφατης έρευνας στην οποία εφαρμόστηκε η θεωρία APOS και διερευνήθηκε η διδασκαλία και η μάθηση της παραγώγου με έμφαση στην γραφική κατανόησή της (Borji, Alamolhodaei & Radmehr, 2018). Δύο ομάδες φοιτητών (ηλεκτρολόγοι μηχανικοί) διδάχτηκαν την παράγωγο. Η μία ομάδα διδάχθηκε την έννοια της παραγώγου με τη θεωρία APOS-ACE που συμπεριλάμβανε ώρες διδασκαλίας με υπολογιστή καθώς επίσης ενεργή και προγραμματισμένη συμμετοχή των φοιτητών. Η άλλη ομάδα χρησιμοποιήθηκε ως ομάδα ελέγχου και διδάχτηκε την έννοια της παραγώγου με τον παραδοσιακό τρόπο. Τα ευρήματα της έρευνας ήταν εντυπωσιακά καθώς οι μαθητές της ομάδας που διδάχτηκαν την παράγωγο με την καινούρια μέθοδο είχαν καλύτερα αποτελέσματα στις τελικές δοκιμασίες. Ακόμη, ο συγκεκριμένος τρόπος διεξαγωγής της έρευνας συνέβαλε στο να εντοπιστούν διάφορες παρανοήσεις που είχαν δημιουργήσει οι μαθητές σχετικά με την έννοια της παραγώγου.

Υπάρχουν έρευνες που υποστηρίζουν μεν τη χρήση των γραφικών παραστάσεων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου βοηθά στην κατάκτηση βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης, αλλά τονίζουν τη σημασία της προσεκτικής επιλογής των γραφικών παραστάσεων και τον τρόπο διαχείρισής τους κατά την διδασκαλία. Οι ερευνητές υπενθυμίζουν τον κίνδυνο οι μαθητές να παρερμηνεύουν λογικά σχήματα και να δημιουργούν παρανοήσεις. Συνεπώς αυτό ανάγεται στη λανθασμένη χρήση γραφικών παραστάσεων της παραγώγου στην διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Μία από αυτές τις έρευνες που στηρίζουν αυτή την τοποθέτηση είναι και η έρευνα των Aspinwall, Sha & Presmeg (1997). Οι ερευνητές θέλησαν να προσδιορίσουν το ρόλο που διαδραματίζει το σύνολο των εικόνων που έχει ήδη σχηματίσει ένας μαθητής στη μάθηση του. Επίσης επιχείρησαν να διατυπώσουν θεωρητικές προτάσεις σχετικά με τη διαδικασία μάθησης. Στην ίδια προσπάθεια συμπεριέλαβαν και το ερώτημα αν αυτές οι εικόνες στέκονται εμπόδιο στην κατανόηση εννοιών. Τα ευρήματα της έρευνας ήταν αρκετά ενδιαφέροντα καθώς έγειραν την αμφιβολία για την επικρατούσα άποψη ότι η χρήση εικόνων έχει αποκλειστικά ωφέλιμο χαρακτήρα. Πιο ειδικά σε ορισμένες ερωτήσεις οι μαθητές, καθώς «διάβαζαν» μία γραφική παράσταση, δεν λάμβαναν τις σωστές πληροφορίες. Αυτή η κατάσταση ονομάζεται «ανεξέλεγκτη εικόνα» “uncontrollable image”. Ερμήνευαν λανθασμένα την γραφική παράσταση και δυσκολεύονταν αρκετά να καταλάβουν για ποιο λόγο η απάντησή τους ήταν λανθασμένη απασχολώντας τους για αρκετές μέρες. Η έρευνα καταλήγει ότι η γραφική αναπαράσταση παίζει μεν ουσιαστικό ρόλο στη διδασκαλία του Λογισμού και πολλά σχολεία πρέπει να την συμπεριλάβουν, ωστόσο ενέχει κινδύνους όπως η παρερμηνεία των αναπαραστάσεων και η λανθασμένη αποθήκευση εικόνων στη μνήμη των παιδιών. Γι’ αυτό οι διδάσκοντες πρέπει να επιμένουν στη σωστή ανάγνωση των εικόνων- παραστάσεων (Aspinwall, 1994)

1.9 Σύνοψη

Συνοψίζοντας τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες σχετικά με την γραφική παράσταση της παραγώγου όπως αυτές ήδη παρουσιάστηκαν, μπορούμε να υποστηρίξουμε την άποψη ότι οι μαθητές και οι φοιτητές αδυνατούν να ερμηνεύσουν σωστά την γραφική παράσταση της παραγώγου. Οι αιτίες εντοπίζονται σε παρανοήσεις που έχουν δημιουργηθεί στους μαθητές σχετικά με την έννοια της συνάρτησης και της παραγώγου. Επίσης εντοπίζονται στην αδυναμία των μαθητών να χρησιμοποιούν σωστά τον γραφικό αναπαραστατικό τρόπο. Αρχικά οι γραφικές παραστάσεις ως τρόπος αναπαράστασης δεν τους βοηθά να μελετήσουν την έννοια, καθώς έχουν εξοικειωθεί περισσότερο με το συμβολικό αναπαραστατικό τρόπο. Έπειτα η έννοια της παραγώγου είναι πολυδιάστατη δημιουργώντας αρκετές παρανοήσεις και δυσκολίες. Ειδικά όταν αυτή παρουσιάζεται γραφικά, οι μαθητές αδυνατούν ακόμα περισσότερο να την προσεγγίσουν. Τέλος, η παράγωγος ως συνάρτηση εμπεριέχει και δυσκολίες κατανόησης, όμοιες με αυτές που εμφανίζονται στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης γενικά. Όμως, όπως τονίζουν οι Tall (1993) και Aspinwall et al (1997) οι γραφικές παραστάσεις συνεισφέρουν στη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση της παραγώγου καθώς προσφέρονται για την μετάδοση πολλαπλής και συνδυαστικής πληροφορίας .

1.10 Θέμα διερεύνησης της παρούσας εργασίας

Με βάση τις παραπάνω βιβλιογραφικές αναφορές αναγνωρίζεται η ανάγκη να διερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών Γ΄ Λυκείου να συσχετίζουν τη συνάρτηση και την παράγωγό της στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων. Η έρευνα λοιπόν που ακολουθεί, έχει στόχο να προσεγγίσει το παραπάνω ζήτημα μέσω της ολικής αναγνώρισης γραφικών παραστάσεων παραγώγων και παραγουσών πολυωνυμικών συναρτήσεων από τους μαθητές και μέσω της αναγνώρισης χαρακτηριστικών τους.

2. Στόχος της έρευνας - Ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος αυτής της έρευνας είναι να διερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να συσχετίζουν τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με την παράσταση της παραγώγου της, f΄.

Για την επίτευξη του στόχου θα πρέπει να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

1) Σε τι βαθμό αναγνωρίζουν ή όχι οι μαθητές την γραφική παράσταση της f δοθείσης της f΄ και αντίστροφα (ολική αναγνώριση).

2) Σε τι βαθμό αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου της συνάρτησης f δοθείσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (πρόσημο και ρίζες της παραγώγου) και σε τι βαθμό τα χαρακτηριστικά της παράγουσας (μονοτονία και ακρότατα της παράγουσας).

3) Σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών από το είδος της δοθείσης καμπύλης.

4) Σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών από το αν τους ζητείται η παράγωγος μίας συνάρτησης ή η παράγουσά της.

3. Μεθοδολογία

3.1 Περιγραφή της μεθόδου, του δείγματος και της ερευνητικής διαδικασίας

Πληθυσμός (ή Δείγμα) - Διαδικασία

Η μέθοδος επιλογής του δείγματος είναι η βολική δειγματοληψία.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2018-2019 σε δημόσιο σχολείο της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Συμμετείχαν 33 μαθητές τριών τμημάτων προσανατολισμού Γ’ Λυκείου, ένα θετικών σπουδών και δύο οικονομίας και πληροφορικής. Τα ερωτηματολόγια διανεμήθηκαν στους μαθητές μετά από συνεννόηση με τους διδάσκοντες καθηγητές. Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων πραγματοποιήθηκε σε διάρκεια μίας διδακτικής ώρας. Κατά την διάρκεια αυτής, δεν δόθηκαν εξηγήσεις και διευκρινίστηκε ότι τα ερωτηματολόγια είναι ανώνυμα. Η χρονική περίοδος που επιλέχθηκε να δοθούν τα ερωτηματολόγια ήταν τέλη Απριλίου προκειμένου οι μαθητές να έχουν διδαχθεί στην ύλη τους τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Η αντιστοίχιση με το σχολικό βιβλίο περιλαμβάνει την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 2: Διαφορικός λογισμός του μέρους Β: ανάλυση του σχολικού βιβλίου της Γ’ λυκείου. Για την στατιστική ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS.

3.2 Ανάλυση του ερευνητικού εργαλείου

Για τη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το ερωτηματολόγιο το οποίο παρουσιάζεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από 8 ερωτήσεις οι οποίες αφορούν τη συσχέτιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και αυτής της παραγώγου της. Οι ερωτήσεις αυτές βασίζονται στα ερευνητικά ερωτήματα ως εξής:

Ερευνητικό ερώτημα 1:

1) Εύρεση γραφικής παράστασης παραγώγου της f', αν δίνεται της f και αντίστροφα (ερωτήσεις 1,4,5)

Ερευνητικό ερώτημα 2:

2) Αναγνώριση χαρακτηριστικών της παραγώγου f' ή της παράγουσας F της δοθείσης συνάρτησης f:

α) Πρόσημο και ρίζες παραγώγου (Ερωτήσεις 2,6,8)

β) Μονοτονία και ακρότατα παράγουσας (Ερωτήσεις 3,7)

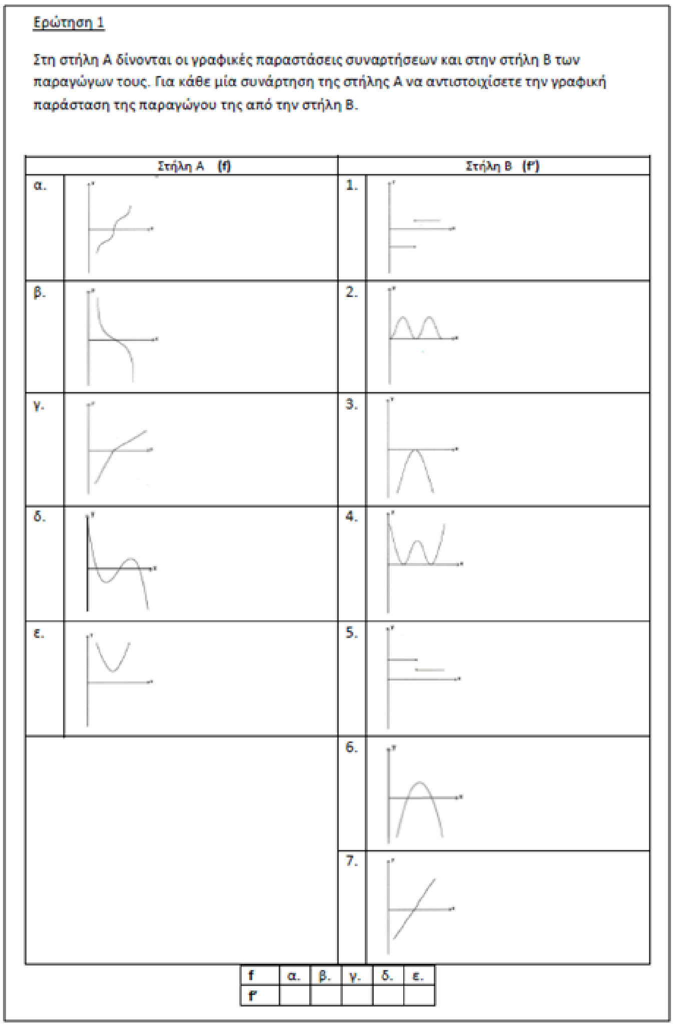
Τα ερευνητικά ερωτήματα 3 και 4 θα προσεγγιστούν από την σύγκριση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1-8.

Επιλέχθηκαν να εξεταστούν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις μηδενικού έως πέμπτου βαθμού και πολύκλαδες αυτών, οι οποίες είναι όλες συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους αλλά όχι πάντοτε παραγωγίσιμες (Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011; Borji, et al, 2018; Ryberg, 2018). Η επιλογή των γραφικών παραστάσεων έγινε με κριτήριο το να αποφευχθεί η χρήση της συμβολικής μορφής της συνάρτησης από τους μαθητές και συνεπώς το να αποφευχθεί η διαδικασία της παραγώγισης ή ολοκλήρωσης με αλγεβρικούς κανόνες. Συνεπώς σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου δίνονται και ζητούνται μόνο οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων) και όχι οι τύποι τους (αναλυτική μορφή συναρτήσεων). Πιο ειδικά:

Ερώτηση 1:

Στην πρώτη ερώτηση, ζητείται από τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη γραφική παράσταση της παραγώγου της δοθείσης συνάρτησης σε κάθε υποερώτημα. Ειδικότερα, η ερώτηση αυτή περιλαμβάνει 5 συναρτήσεις για τις οποίες δίνεται η γραφική παράσταση τους στο διάστημα (0,+∞). Οι συναρτήσεις αυτές όπως παρουσιάζονται στο ερωτηματολόγιο είναι: 5^ου^ βαθμού, 3^ου^ βαθμού (μη πλήρης), 1^ου^ βαθμού (δίκλαδη), 3^ου^ βαθμού (πλήρης) και 2^ου^ βαθμού (παραβολή).

Αυτό το είδος άσκησης επιλέχθηκε ως η πρώτη άσκηση του ερωτηματολογίου γιατί σε αρκετές έρευνες στη βιβλιογραφία το ερευνητικό εργαλείο περιελάμβανε μία τέτοιου είδους άσκηση ως πρώτη (Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Ryberg, 2018)


Ερώτηση 1

Στη στήλη Α δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στην στήλη Β των παραγώγων τους. Για κάθε μία συνάρτηση της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την γραφική παράσταση της παραγώγου της από την στήλη Β.

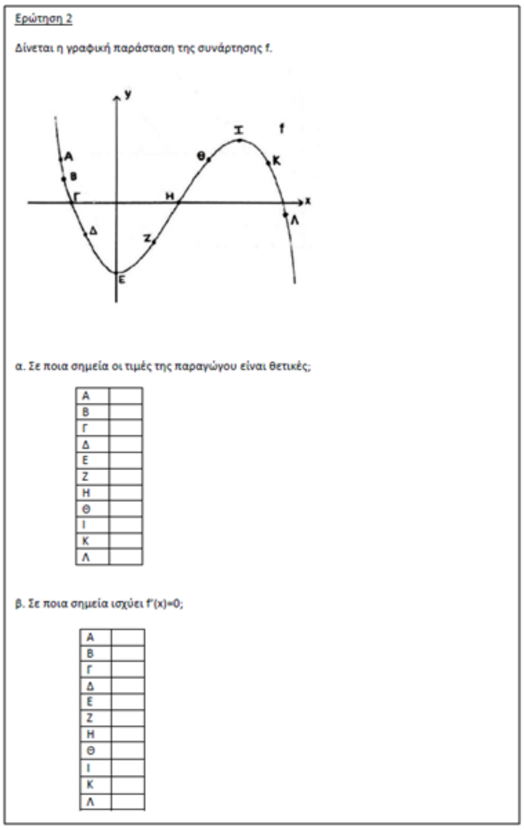
Στήλη Α (f)		Στήλη Β (f')	
α.		1.	
β.		2.	
γ.		3.	
δ.		4.	
ε.		5.	
		6.	
		7.	

f	α.	β.	γ.	δ.	ε.
f'					

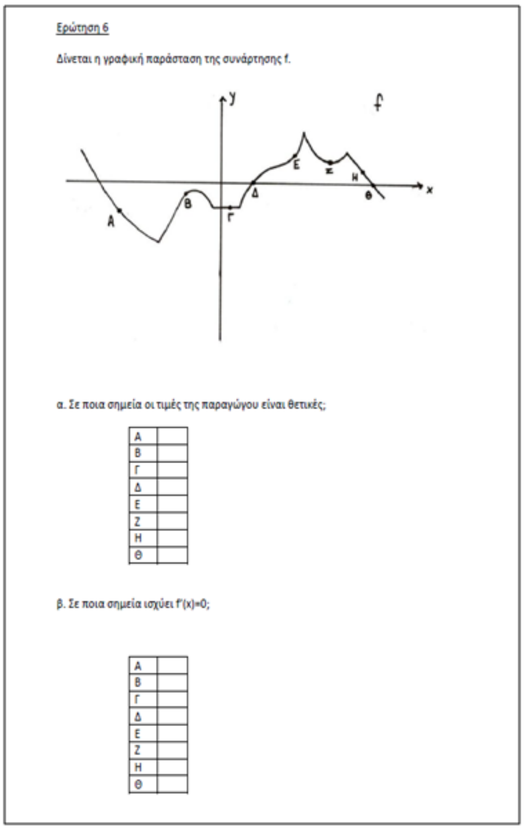
Εικόνα 1. Ερώτηση 1

Ερωτήσεις 2 και 6:

Στις ερωτήσεις 2 και 6 δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και ζητείται από τους μαθητές να εντοπίσουν τα σημεία στα οποία η παράγωγός της είναι θετική και μηδενική. Ειδικότερα στην ερώτηση 2 δίνεται ένα τμήμα γραφικής παράστασης πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού, ενώ στην ερώτηση 6 η δοθείσα γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πολύκλαδη αποτελούμενη από πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μηδενικού έως τρίτου και σε ορισμένα σημεία μη παραγωγίσιμη (Stringer III, 2011 ; Rabadi, 2015; Fuentealba, et al, 2017; Borji, et al, 2018). Η επιλογή των δύο ερωτήσεων έγινε με σκοπό να συγκριθούν οι επιδόσεις των μαθητών στις οικείες (πολυωνυμικές συναρτήσεις έως 3ου βαθμού) και στις μη οικείες συναρτήσεις (πολύκλαδες πολυωνυμικές συναρτήσεις έως 3ου βαθμού). Μέσω της σύγκρισης αυτής θα επιχειρηθεί να απαντηθεί το τρίτο ερευνητικό ερώτημα.



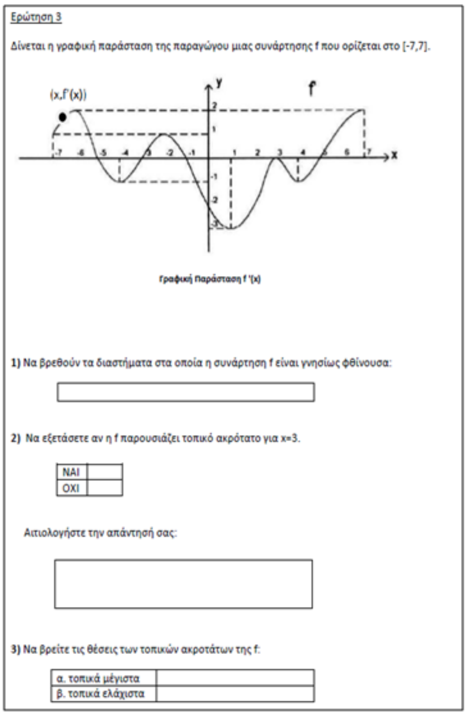
Εικόνα 2. Ερώτηση 2



Εικόνα 3. Ερώτηση 6

Ερωτήσεις 3 και 7

Στις ερωτήσεις 3 και 7 δίνεται η γραφική παράσταση μίας παραγώγου, f’ και ζητείται από τους μαθητές να εντοπίσουν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα καθώς και τα ακρότατα αυτής. Οι δοθείσες γραφικές παραστάσεις είναι πολύκλαδες πολυωνυμικές συναρτήσεις και η διαφορά τους είναι ότι η δεύτερη γραφική παράσταση περιέχει σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη. Η επιλογή των δύο ερωτήσεων έγινε προκειμένου να εξεταστεί το αν η μορφή της δοθείσης γραφικής παράστασης επηρεάζει τους μαθητές, όταν αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποια σημεία και συνεπώς να εξεταστεί το τρίτο ερευνητικό ερώτημα.



Ερώτηση 3

Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο [-7,7].

1) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα:

2) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για x=3.

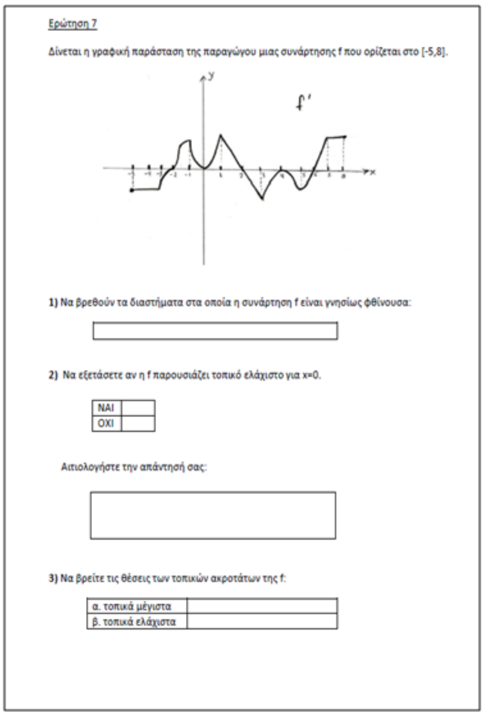
ΝΑΙ	
ΟΧΙ	

Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

3) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f:

α. τοπικά μέγιστα	
β. τοπικά ελάχιστα	

Εικόνα 4. Ερώτηση 3



Ερώτηση 7

Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο [-5,8].

1) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα:

2) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=0.

ΝΑΙ	
ΟΧΙ	

Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

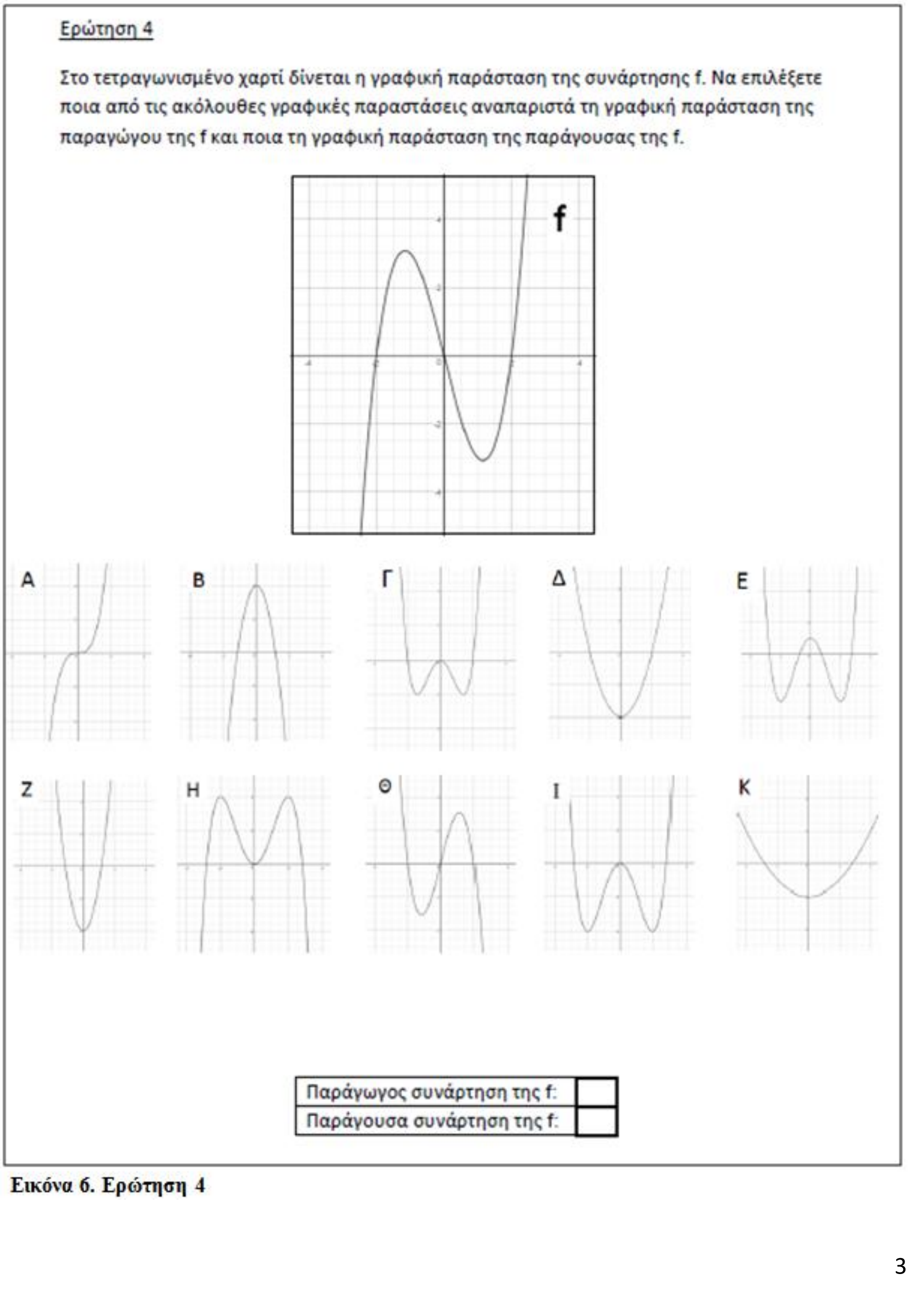
3) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f:

α. τοπικά μέγιστα	
β. τοπικά ελάχιστα	

Εικόνα 5. Ερώτηση 7

Ερώτηση 4:

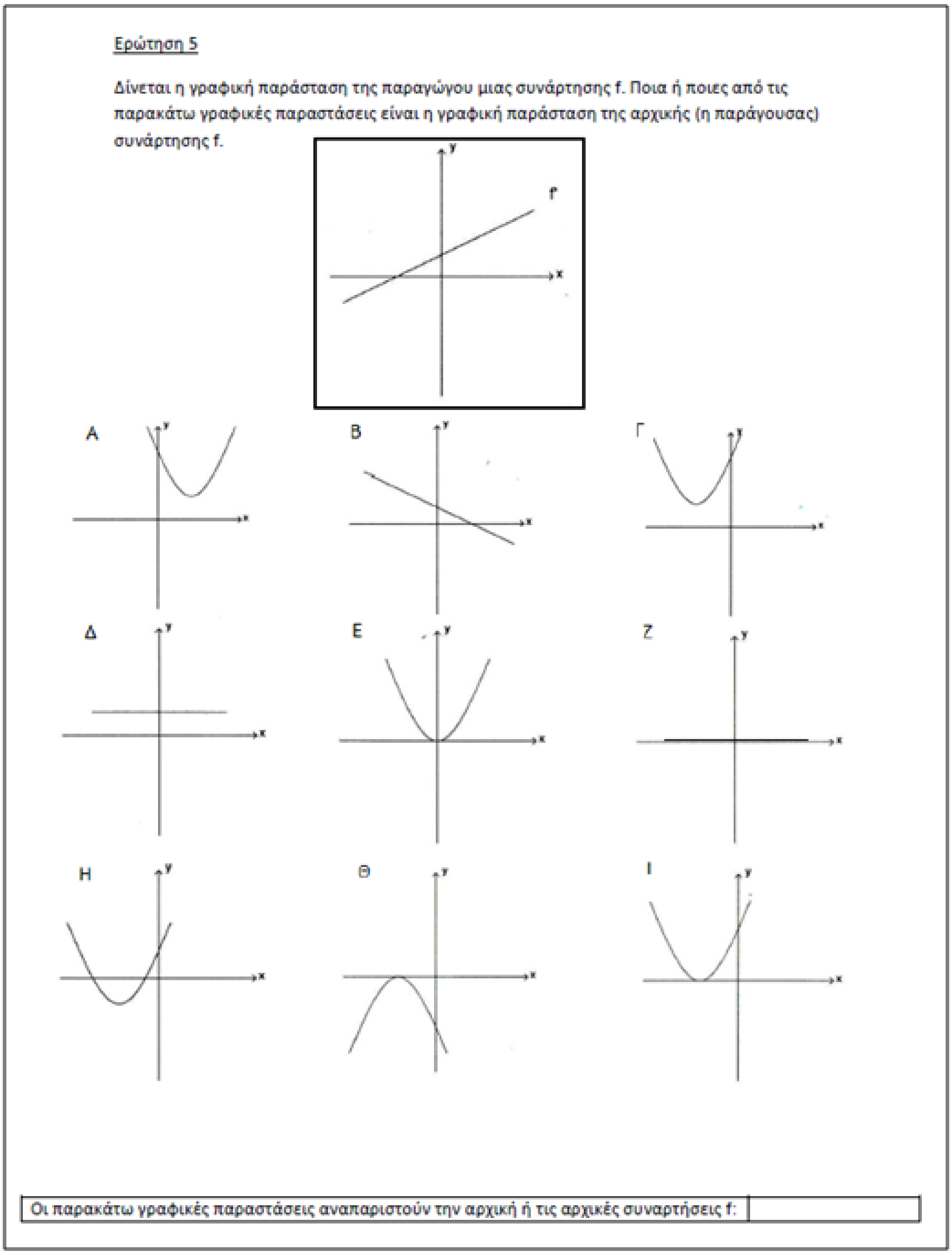
Στην ερώτηση αυτή δίνεται η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού και ζητείται να αναγνωριστούν η παράγωγος και η παράγουσά της, από τις παραστάσεις που τους δίνονται. Συνεπώς οι μαθητές καλούνται την πρώτη φορά να την αντιμετωπίσουν ως συνάρτηση f αναζητώντας την παράγωγό της, f΄ και την δεύτερη φορά να την αξιοποιήσουν ως παράγωγο f΄ επιλέγοντας κατάλληλα την συνάρτηση f. Από τη σύγκριση των δύο υποερωτημάτων της, θα επιχειρηθεί να απαντηθεί το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα.



Εικόνα 6. Ερώτηση 4

Ερώτηση 5:

Στην ερώτηση αυτή δίνεται η γραφική παράσταση μίας πολυωνυμικής συνάρτησης 1ου βαθμού η οποία εκφράζει την παράγωγο μιας συνάρτησης f. Ζητείται από τους μαθητές να επιλέξουν τις παράγουσές της, από τις παραστάσεις που τους δίνονται.



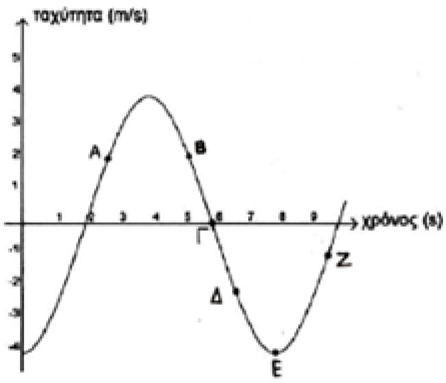
Εικόνα 7. Ερώτηση 5

Ερώτηση 8:.

Στην ερώτηση 8 δίνεται ένα διάγραμμα ταχύτητας χρόνου. Η γραφική παράσταση αποτελεί τμήμα πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού. Ζητείται από τους μαθητές να εντοπίσουν τα σημεία στα οποία η φορά του κινητού είναι θετική και αρνητική, τα σημεία στα οποία το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο καθώς και τα σημεία στα οποία αυτό επιταχύνει και επιβραδύνει. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία μία τέτοιου είδους ερώτηση κατατάσσεται στην ευρύτερη κατηγορία των «ρεαλιστικών προβλημάτων» (Gainsburg, 2008).

Ερώτηση 8

Ένα κινητό διαγράφει μία τροχιά. Το ακόλουθο διάγραμμα αναπαριστά την ταχύτητα του κινητού συναρτήσει του χρόνου.



Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Σε ποια σημεία

α) κινείται κατά την θετική φορά:	
β) κινείται κατά την αρνητική φορά:	
γ) είναι στιγμιαία ακίνητο:	
δ) επιταχύνει	
ε) επιβραδύνει	

Εικόνα 8. Ερώτηση 8

Κωδικοποίηση απαντήσεων ερωτηματολογίου

Για όλες τις ερωτήσεις εφαρμόστηκε το ακόλουθο σύστημα κωδικοποίησης.

Οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά καταχωρήθηκαν με την τιμή 4 στην κατηγορία με όνομα: «Σωστό».

Όσοι απάντησαν λανθασμένα επιλέγοντας μία από τις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις κωδικοποιήθηκαν με την τιμή 1 και τίτλο: «Λάθος».

Όσοι απάντησαν λανθασμένα επιλέγοντας τη γραφική παράσταση της παράγουσας αντί της παραγώγου της δοθείσης συνάρτησης και όσοι της παραγώγου αντί της παραγούσης κωδικοποιήθηκαν με την τιμή 3 και ως κατηγορία τιτλοφορήθηκε με το όνομα «Παράγουσα/Παράγωγος».

Αυτοί που απάντησαν λανθασμένα βασιζόμενοι στη γραφική παράσταση της δοθείσης συνάρτησης κωδικοποιήθηκαν με την τιμή 2 και ως κατηγορία τιτλοφορήθηκε με το όνομα «Με βάση την δοθείσα».

Οι μαθητές που επέλεξαν να μην απαντήσουν καταχωρήθηκαν με την τιμή 0 στην κατηγορία με τίτλο: «Μη απάντηση».

3.3 Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Σχετικά με το ερωτηματολόγιο, αφότου σχεδιάστηκε, έπειτα ελέγχθηκε από την ερευνήτρια και την επιβλέπουσα καθηγήτρια, μοιράστηκε δοκιμαστικά σε μαθητές και έπειτα από την συμπλήρωση του, βελτιώθηκε έως ότου πήρε την τελική μορφή. Ειδικότερα, ο αριθμός των ερωτήσεων αποφασίστηκε έπειτα από την χρονομέτρηση συμπλήρωσης κατά την δοκιμαστική χρήση του και η δυσκολία των ερωτήσεων προσαρμόστηκε στο επίπεδο των σχολικών γνώσεων. Οι υποψήφιοι ενημερώθηκαν για το θέμα και τους στόχους της έρευνας, αλλά δεν δόθηκαν περαιτέρω εξηγήσεις σχετικά με την συμπλήρωση. Οι εκφωνήσεις και τα δεδομένα της κάθε ερώτησης ήταν σαφή και οι ζητούμενες πληροφορίες ήταν διατυπωμένες με ακρίβεια, προκειμένου να μην υπάρξουν ανακρίβειες. Οι μαθητές συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο ανώνυμα και σε διάρκεια μίας διδακτικής ώρας, έτσι ώστε να έχουν την δυνατότητα σε αυτό το χρονικό διάστημα να ελέξχουν τις απαντήσεις τους.

Η επεξεργασία και η ανάλυση των δεδομένων έγινε με χρήση κατάλληλου στατιστικου λογισμικού (SPSS) και κατά την παρουσίασή τους, έγινε προσπάθεια να αποφευχθούν συμπεράσματα τα οποία δεν στηρίζονταν ικανοποιητικά στα δεδομένα. Ακόμη, αποφεύχθηκε η χρήση των δεδομένων κατά επιλεκτικό και μη αντιπροσωπευτικό τρόπο. Η εξαγωγή συμπερασμάτων οδήγησε στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

Ένα μέτρο ελέγχου της αξιοπιστίας, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά στις έρευνες, είναι ο συντελεστής εσωτερικής συνέπειας Cronbach's Alpha. Μέσω του προγράμματος SPSS υπολογίστηκε ο συγκεκριμένος συντελεστής για τις 8 ερωτήσεις (συνολικά 27 υποερωτημάτων) του ερωτηματολογίου και παρουσιάζεται στον πίνακα 1.

Cronbach's Alpha	N
,918	27

Πίνακας 1: Ανάλυση Αξιοπιστίας (Ερωτήσεις 1-8)

Ο συντελεστής α εσωτερικής συνέπειας των 8 ερωτήσεων είναι 0,918. Η εσωτερική συνέπεια είναι αρκετά ικανοποιητική καθώς ο συγκεκριμένος συντελεστής παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1]. Όσο περισσότερο η τιμή του προσεγγίζει το 1 τόσο περισσότερο εξασφαλίζεται η εσωτερική συνέπεια.

4. Αποτελέσματα

4.1. Ολιστική αναγνώριση

4.1.1 Από τη συνάρτηση στην παράγωγο

Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις ερωτήσεις όπου ζητείται η αναγνώριση της γραφικής παράστασης της παραγώγου με βάση τη γραφική παράσταση της αρχικής συνάρτησης.

α. σε οικείες

Σχετικά με την περίπτωση οικείων συναρτήσεων όπως οι πολυωνυμικές συναρτήσεις 1^{ου}, 2^{ου} και 3^{ου} βαθμού (ερωτήσεις 1.β,1.γ,1.δ,1.ε,4α) τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 2.

	1^{ου} βαθμού (δίκλαδη)	2^{ου} βαθμού	3^{ου} βαθμού μη πλήρης	3^{ου} βαθμού πλήρης	3^{ου} βαθμού πλήρης[1]
Μη απάντηση	2	2	2	2	8
Λάθος[2]	3	11	8	12	4
Με βάση τη δοθείσα	9	6	0	0	0
Παράγουσα[3]	10	0	5	6	14
Σωστό	9	14	18	13	7

[1] Σε αυτήν την ερώτηση ζητήθηκε η παράγωγος της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης και στην συνέχεια η παράγουσά της.

[2] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

[3] Στην κατηγορία «Παράγουσα» συμπεριλήφθηκαν οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα επιλέγοντας την παράγουσα της δοθείσας συνάρτησης έναντι της παραγώγου

Πίνακας 1: Ολική αναγνώριση των παραγώγων οικείων συναρτήσεων

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές αναγνώρισαν με μεγαλύτερη ευκολία την παράγωγο της δοθείσης συνάρτησης όταν αυτή ήταν 2ου βαθμού (παραβολή) και 3ου βαθμού μη πλήρους μορφής. Παρ' όλα αυτά, στην ερώτηση η οποία περιλάμβανε την συνάρτηση 2ου βαθμού, 11 άτομα επέλεξαν λανθασμένα για παράγωγό της, τις συναρτήσεις μηδενικού και 4ου βαθμού. Η ερώτηση, η οποία περιείχε γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης 1ου βαθμού, με τμήματα ευθειών και σημείο στο οποίο δεν ήταν παραγωγίσιμη (δίκλαδη), συγκέντρωσε ένα μικρό αριθμό σωστών απαντήσεων. Σε αυτήν την ερώτηση ένας μεγάλος αριθμός μαθητών απάντησε με κριτήριο τη μορφολογία της δοθείσας (δηλαδή επέλεξε μία γραφική παράσταση ίδιου τύπου με την δοθείσα) και ένας άλλος μεγάλος αριθμός επέλεξε να απαντήσει επιλέγοντας την παραβολή (δηλαδή εντόπισε γραφική παράσταση ίδιου τύπου με την παράγουσα και όχι της παραγώγου). Όσον αφορά τις δύο ερωτήσεις που αντιστοιχούν σε δοθείσες γραφικές παραστάσεις τρίτου βαθμού (πλήρεις) οι μαθητές δεν απάντησαν με τον ίδιο τρόπο. Συγκεκριμένα στην πρώτη ερώτηση (ερώτηση 1.δ) υπήρξαν περισσότερες σωστές απαντήσεις. Από τους 12 μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα κάποιοι από αυτούς επέλεξαν την παραβολή η οποία είχε μέγιστο (αντί για ελάχιστο), κάποιοι επέλεξαν την 1ου βαθμού και κάποιοι τη μηδενικού βαθμού. Ένας μικρός αριθμός μαθητών απάντησε λανθασμένα επιλέγοντας την παράγουσα. Όσον αφορά τη δεύτερη ερώτηση (ερώτηση 4α) παρατηρήθηκε μεγαλύτερη αποχή. Ο διπλάσιος αριθμός μαθητών επέλεξε την παράγουσα αντί της παραγώγου σε αυτήν την ερώτηση από ό, τι στην ερώτηση 1.δ.

β. σε μη οικείες

Σχετικά με τη γραφική παράσταση που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί μη οικεία, όπως η γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης 5^{ου} βαθμού (ερώτηση 1α) τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 3.

	5^{ου} βαθμού
Μη απάντηση	3
Λάθος[2]	20
Σωστό	10

Πίνακας 3: Ολική αναγνώριση της παραγώγου μη οικείας συνάρτησης

Ένα μεγάλο πλήθος των μαθητών απάντησε λανθασμένα στην ερώτηση κατά την οποία ζητήθηκε η παράγωγος μη οικείας συνάρτησης, δηλαδή της πολυωνυμικής συνάρτησης 5^{ου} βαθμού. Χαρακτηριστική είναι η ανομοιογένεια των λανθασμένων απαντήσεων. Ορισμένοι μαθητές απάντησαν επιλέγοντας συναρτήσεις μηδενικού βαθμού (δίκλαδες) καθώς και συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού.

[2] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

4.1.2 Από την παράγωγο στην συνάρτηση (παράγουσα)

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις ερωτήσεις όπου ζητείται η αναγνώριση της γραφικής παράστασης της παράγουσας με βάση τη γραφική παράσταση της δοθείσης συνάρτησης.

-σε οικείες

Σχετικά με την περίπτωση οικείων συναρτήσεων όπως οι πολυωνυμικές συναρτήσεις 1^{ου} και 3^{ου} βαθμού (ερωτήσεις 4.β, 5) τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 4.

	1^{ου} βαθμού	3^{ου} βαθμού πλήρης
Μη απάντηση	8	8
Λάθος[1]	10	4
Με βάση τη δοθείσα	0	10
Παράγωγος[2]	7	5
Σωστό	8	6

Πίνακας 4: Ολική αναγνώριση των παραγουσών οικείων συναρτήσεων

Οι μαθητές, κατά την εύρεση της παράγουσας της δοθείσας συνάρτησης και στις δύο συναρτήσεις (1^{ου} βαθμού και 3^{ου} βαθμού) σημείωσαν λίγες σωστές απαντήσεις. Από τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα αρκετοί ήταν αυτοί οι οποίοι επέλεξαν τις παραβολές που δεν είχαν σχέση κατακόρυφης μετατόπισης με τη σωστή, ενώ οι υπόλοιποι απάντησαν επιλέγοντας την παράγωγο αντί της παράγουσας. Είναι αξιοσημείωτο ότι στην δεύτερη περίπτωση (3^{ου} βαθμού) αρκετοί μαθητές (10) απάντησαν με βάση την μορφολογία της δοθείσας. Τέλος, και στις δύο συναρτήσεις σχεδόν το ίδιο πλήθος μαθητών (7 και 5 αντίστοιχα) απάντησαν βρίσκοντας την παράγωγο (παραβολή) αντί για την παράγουσα καθώς και το ίδιο πλήθος μαθητών (8) επέλεξαν να μην απαντήσουν καθόλου και στις δύο ερωτήσεις.

4.2. Αναγνώριση χαρακτηριστικών (σε σημεία)

4.2.1 Από τη συνάρτηση στην παράγωγο

Ακολουθούν τα αποτελέσματα για την ερώτηση όπου ζητείται η αναγνώριση χαρακτηριστικών (σημείων) της γραφικής παράστασης της παραγώγου με βάση τη γραφική παράσταση της αρχικής συνάρτησης.

[1] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

[2] Στην κατηγορία «Παράγωγος» συμπεριλήφθηκαν οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα επιλέγοντας την παράγωγο της δοθείσας συνάρτησης έναντι της παράγουσας.

α. σε οικείες

Σχετικά με την περίπτωση της οικείας συνάρτησης και συγκεκριμένα της πολυωνυμικής συνάρτησης $3^{ου}$ βαθμού (ερώτηση 2) τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 5.

$3^{ου}$ βαθμού πλήρης	Παράγωγος Θετική	Παράγωγος Μηδενική
Λάθος[1]	11	7
Με βάση τη δοθείσα	15	17
Σωστό	7	9

Πίνακας 5: Αναγνώριση προσήμου και ριζών παραγώγου οικείας συνάρτησης

Παρατηρείται όμοια συμπεριφορά των μαθητών και στα δύο υποερωτήματα. Χαρακτηριστική είναι η πλήρης συμμετοχή των μαθητών. Παρ' όλα αυτά λίγοι μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ αρκετοί απάντησαν για την δοθείσα συνάρτηση και όχι για αυτήν που τους ζητήθηκε. Οι υπόλοιποι από αυτούς που απάντησαν λανθασμένα επέλεξαν ένα συνδυασμό σημείων εκ των οποίων ορισμένα ήταν οι σωστές απαντήσεις, μερικά ήταν οι απαντήσεις με βάση τη δοθείσα και κάποια ήταν τα υπόλοιπα σημεία της δοθείσας γραφικής παράστασης.

β. σε μη οικείες

Στην συνέχεια, στον πίνακα 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την ερώτηση όπου ζητείται η αναγνώριση χαρακτηριστικών (σημείων) της γραφικής παράστασης της παραγώγου με βάση τη γραφική παράσταση της αρχικής συνάρτησης στην περίπτωση της μη οικείας συνάρτησης και συγκεκριμένα μίας πολύκλαδης πολυωνυμικής συνάρτησης η οποία αποτελείται από τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμών $1^{ου}$ έως $5^{ου}$ (ερώτηση 6). Η παράσταση αυτή περιλαμβάνει σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.

Πολύκλαδη	Παράγωγος Θετική	Παράγωγος Μηδενική
Μη απάντηση	5	4
Λάθος[2]	2	1
Με βάση τη δοθείσα	18	20
Σωστό	8	8

[1] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

[2] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

Πίνακας 6: Αναγνώριση προσήμου και ριζών παραγώγου μη οικείας συνάρτησης

Κάποιοι μαθητές επέλεξαν να μην απαντήσουν καθόλου σε αυτήν την ερώτηση. Από τους μαθητές που απάντησαν ένας πολύ μεγάλος αριθμός απάντησε με βάση τη γραφική παράσταση που τους δόθηκε και όχι με αυτήν που τους ζητήθηκε και ένας μικρός αριθμός απάντησε σωστά. Γενικότερα, δεν παρατηρήθηκε διαφορετική αντιμετώπιση των δύο υποερωτημάτων.

Παρατηρώντας τους δύο τελευταίους πίνακες, ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι η μορφή της δοθείσας συνάρτησης (οικεία – μη οικεία) φαίνεται να μην επηρεάζει την απόδοση των μαθητών.

4.2.2 Από την παράγωγο στην συνάρτηση (παράγουσα)

Ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τις ερωτήσεις όπου ζητείται η αναγνώριση χαρακτηριστικών (σημείων) της γραφικής παράστασης της παράγουσας με βάση τη γραφική παράσταση της δοθείσας συνάρτησης στην περίπτωση των μη οικείων συναρτήσεων και συγκεκριμένα δύο πολύκλαδων πολυωνυμικών συναρτήσεων οι οποίες αποτελούνται από τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμών $1^{ου}$ έως $5^{ου}$ (ερωτήσεις 3.2, 3.3, 7.2, 7.3). Ειδικά η παράσταση της δεύτερης ερώτησης περιλαμβάνει σημεία στα οποία η συνάρτηση f΄ δεν είναι παραγωγίσιμη. Τα αποτελέσματα δίνονται στους πίνακες 7 και 8.

Πολύκλαδες	<u>Παραγωγίσιμη</u> Τοπικό ακρότατο για x=3	Αιτιολόγηση	<u>Μη παραγωγίσιμη</u> Τοπικό ακρότατο για x=0	Αιτιολόγηση
Μη απάντηση	3	11	12	17
Λάθος[1]	1	0	3	0
Με βάση τη δοθείσα	15	15	11	11
Σωστό	14	7	7	5

Πίνακας 7: Ακρότατα παράγουσας μη οικείων συναρτήσεων (με αιτιολόγηση)

Παρατηρήθηκε διαφορετική αντιμετώπιση των δύο ερωτήσεων από τους μαθητές. Στην ερώτηση στην οποία η δοθείσα γραφική παράσταση της παραγώγου έχει σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη οι μαθητές δίστασαν πολύ περισσότερο να απαντήσουν. Επιπλέον, υπήρξαν λίγοι μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά. Συγκριτικά με την απόδοση τους στην παραγωγίσιμη συνάρτηση, στη μη παραγωγίσιμη, απάντησαν σωστά μόνο οι μισοί. Παρατηρήθηκε ότι και στις δύο

[1] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

ερωτήσεις, η αιτιολόγηση δόθηκε λανθασμένα βάσει της δοθείσας συνάρτησης, από ένα μεγάλο αριθμό μαθητών.

Πολύκλαδες	Παραγωγίσιμη Τοπικά μέγιστα	Τοπικά ελάχιστα	Μη παραγωγίσιμη Τοπικά μέγιστα	Τοπικά ελάχιστα
Μη απάντηση	10	11	15	15
Λάθος[1]	9	4	2	2
Με βάση τη δοθείσα	8	12	11	11
Σωστό	6	6	5	5

Πίνακας 8: Ακρότατα παράγουσας μη οικείων συναρτήσεων

Και στις δύο ερωτήσεις ένας πολύ μικρός αριθμός μαθητών απάντησε σωστά. Πιο ειδικά, στην ερώτηση με δοθείσα γραφική παράσταση μη παραγωγίσιμης συνάρτησης οι μισοί μαθητές δεν απάντησαν, ενώ στην ερώτηση με την παραγωγίσιμη συνάρτηση απάντησαν οι περισσότεροι. Ένας μεγάλος αριθμός μαθητών και στις δύο περιπτώσεις απάντησαν με βάση την μορφολογία της δοθείσας γραφικής παράστασης. Οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα στην εύρεση των τοπικών μεγίστων επέλεξαν μία σειρά σημείων η οποία ήταν συνδυασμός από σημεία τα οποία ήταν οι σωστές απαντήσεις, απαντήσεις με βάση την δοθείσα, καθώς και από τα υπόλοιπα σημεία της γραφικής παράστασης.

4.3. Αναγνώριση χαρακτηριστικών (σε διαστήματα)

- Από την παράγωγο στην συνάρτηση (παράγουσα)

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις ερωτήσεις όπου ζητείται η αναγνώριση χαρακτηριστικών (διαστημάτων) της γραφικής παράστασης της παράγουσας με βάση τη γραφική παράσταση της δοθείσας συνάρτησης στην περίπτωση των μη οικείων συναρτήσεων και συγκεκριμένα δύο πολύκλαδων πολυωνυμικών συναρτήσεων οι οποίες αποτελούνται από τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμών 1^{ου} έως 5^{ου} (ερωτήσεις 3.1, 7.1). Ειδικά στην δεύτερη παράσταση (ερώτηση 7) περιλαμβάνονται σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 9.

Πολύκλαδες	Παραγωγίσιμη f γνησίως φθίνουσα	Μη παραγωγίσιμη f γνησίως φθίνουσα
Μη απάντηση	4	10
Λάθος[1]	3	1
Με βάση τη δοθείσα	18	14
Σωστό	8	8

Πίνακας 9: Μονοτονία παράγουσας μη οικείων συναρτήσεων

Στις ερωτήσεις αυτές, λίγοι μαθητές απάντησαν σωστά καθώς επίσης κάποιοι επέλεξαν να μην απαντήσουν καθόλου. Ειδικά στην γραφική παράσταση της συνάρτησης η οποία είχε σημεία μη παραγωγισιμότητας ένας αρκετά μεγάλος αριθμός δεν σημείωσε κάποια απάντηση. Και στις δύο περιπτώσεις ένας πολύ μεγάλος αριθμός μαθητών απάντησαν με βάση τη δοθείσα γραφική παράσταση χωρίς να μετασχηματίσουν τις πληροφορίες για αυτήν που τους ζητήθηκε.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα της ερώτησης 8 στην οποία δινόταν ένα διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου, αυτά παρουσιάζονται στον πίνακα 10.

	Κατά θετική φορά	Κατά αρνητική φορά	Στιγμιαία ακίνητο	Επιταχύνει	Επιβραδύνει
Μη απάντηση	6	8	9	8	8
Λάθος[2]	12	12	6	13	13
Σωστό	15	13	18	12	12

Πίνακας 10: Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου

Ένας μεγάλος αριθμός μαθητών (περίπου οι μισοί) απάντησε σωστά στην συγκεκριμένη ερώτηση σχεδόν σε όλα τα υποερωτήματα. Από τους υπόλοιπους ένας μικρός αριθμός επέλεξε να μην απαντήσει καθόλου και οι υπόλοιποι απάντησαν λανθασμένα με τρόπο που δεν φανέρωνε κάποια ιδιαίτερη τάση ή κάποια παρανόηση.

[1] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

[2] Η κατηγορία «Λάθος» δημιουργήθηκε προκειμένου να συμπεριλάβει τους μαθητές οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα και με τρόπο που δεν υποδεικνύει κάποια ειδική παρανόηση.

4.4 Συγκρίσεις

Στην συνέχεια επιχειρείται να εξεταστεί η σχέση των αποτελεσμάτων ορισμένων ερωτήσεων. Η επιλογή τους, ανά δύο, έγινε με κριτήριο την αναμενόμενη εξάρτηση σε ορισμένες από αυτές και την μη αναμενόμενη εξάρτηση σε άλλες. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων, όπως αυτή προηγήθηκε, κατά ομάδες, συντέλεσε στο να αναδειχθούν ενδιαφέρουσες σχέσεις ή μη, μεταξύ τους.

Για κάθε ζεύγος ερωτήσεων, παρατίθεται ο πίνακας διπλής εισόδου και η γραφική αναπαράστασή του. Στην συνέχεια, οι διαφορετικές κατηγορίες λαθών συγχωνεύονται σε μία και εξετάζεται εκ νέου η εξάρτησή των δύο ερωτήσεων με τη χρήση του στατιστικού ελέγχου x^2 προκειμένου να είναι έγκυρος με το συγκεκριμένο μέγεθος του δείγματος.

4.4.1 Ολιστική αναγνώριση σε οικείες

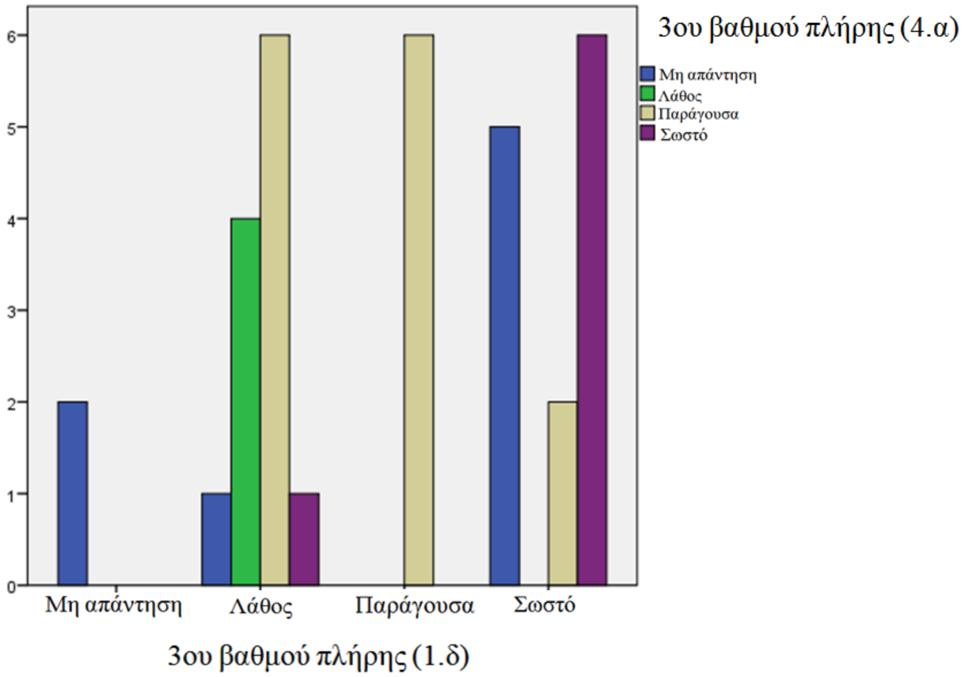
α. από την συνάρτηση στην παράγωγο

<u>-Εύρεση παραγώγων δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων 3ου βαθμού (πλήρων)</u> (Ερωτήσεις 1.δ-4.α)

		3ου βαθμού πλήρης (4.α)				
		Μη απάντηση	Λάθος	Παράγουσα	Σωστό	Σύνολο
3ου βαθμού πλήρης (1.δ)	Μη απάντηση	2	0	0	0	2
	Λάθος	1	4	6	1	12
	Παράγουσα	0	0	6	0	6
	Σωστό	5	0	2	6	13
	Σύνολο	8	4	14	7	33

Πίνακας 11. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης των παραγώγων οικείων συναρτήσεων

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα διπλής εισόδου (πίνακας 11), οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο να βρουν την παράγωγο της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης στην δεύτερη ερώτηση (4.α) από ό, τι στην πρώτη ερώτηση (1.δ). Συγκεκριμένα, η δεύτερη ερώτηση ζητούσε στην συνέχεια να βρεθεί η παράγουσα της δοθείσας συνάρτησης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της διαφορετικής τους συμπεριφοράς είναι ότι στην δεύτερη ερώτηση περισσότεροι μαθητές εντόπισαν την παράγουσα αντί για την παράγωγο. Αυτά αποτυπώνονται και στο γράφημα 1.



Γράφημα 1. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης των παραγώγων οικείων συναρτήσεων

Αν συγκεντρώσουμε μόνο τις σωστές και τις λανθασμένες απαντήσεις προκύπτει ο πίνακας 12.

		3ου βαθμού πλήρης (4.α)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
3ου βαθμού πλήρης (1.δ)	Λάθος	19	1	20
	Σωστό	7	6	13
	Σύνολο	26	7	33

Πίνακας 12. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης των παραγώγων οικείων συναρτήσεων (Σωστό- Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Όμως η τιμή p=0.05 δεν μας επέτρεψε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα εξάρτησης ($\chi^2(1)$= 7,984, p=0,05, V=0,492). Γεγονός που είναι αξιοσημείωτο γιατί θα ήταν αναμενόμενη μία σχέση εξάρτησης καθώς ζητείται ακριβώς το ίδιο πράγμα και στις δύο ερωτήσεις δοθέντων των ίδιων ακριβώς παραστάσεων.

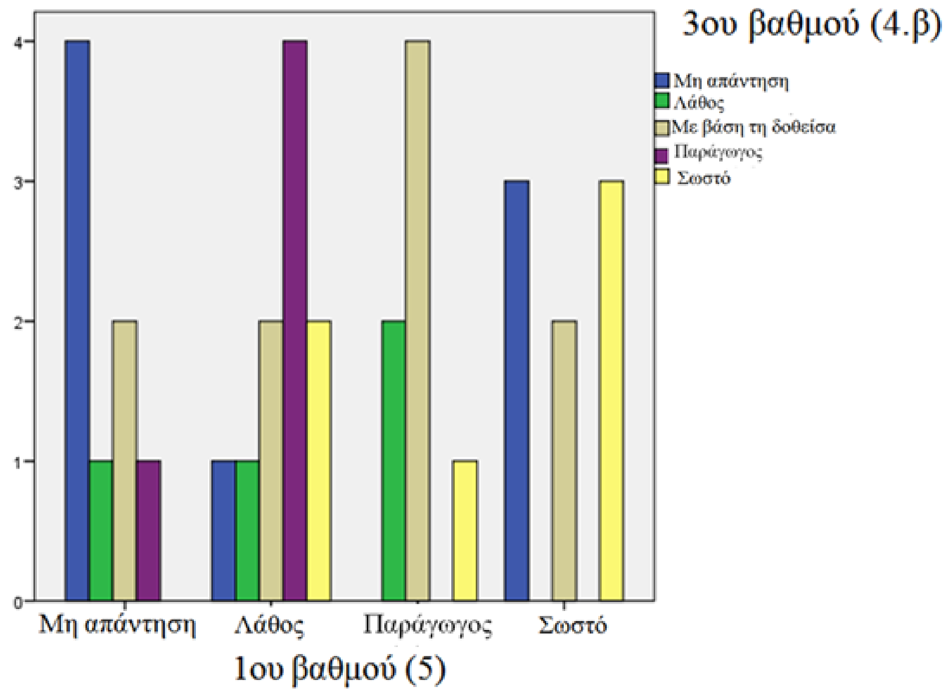
β. από την παράγωγο στην συνάρτηση (παράγουσα)

- Εύρεση παραγουσών δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων 1ου και 3ου βαθμού (πλήρους) (Ερωτήσεις 5 και 4β)

		3ου βαθμού (4.β)					
		Μη απάντηση	Λάθος	Με βάση τη δοθείσα	Παράγωγος	Σωστό	Σύνολο
1ου βαθμού (5)	Μη απάντηση	4	1	2	1	0	8
	Λάθος	1	1	2	4	2	10
	Παράγωγος	0	2	4	0	1	7
	Σωστό	3	0	2	0	3	8
	Σύνολο	8	4	10	5	6	33

Πίνακας 13. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης των παραγουσών οικείων συναρτήσεων

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα διπλής εισόδου (πίνακας 13), οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο να βρουν την παράγουσα της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης από ό, τι της πρωτοβάθμιας. Πιο ειδικά, στην τρίτου βαθμού, πολλοί από τους μαθητές απάντησαν λανθασμένα γιατί απάντησαν με βάση την δοθείσα συνάρτηση, δηλαδή εντόπισαν κάποια η οποία είχε τα χαρακτηριστικά της δοθείσας. Αυτά αποτυπώνονται και στο γράφημα 2.



Γράφημα 2. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης των παραγουσών οικείων συναρτήσεων

Στην συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας διπλής εισόδου (πίνακας 14) όπου οι απαντήσεις των δύο ερωτήσεων εκφράζονται με σωστό - λάθος.

		3ου βαθμού (4.β)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
1ου βαθμού (5)	Λάθος	22	3	25
	Σωστό	5	3	8
	Σύνολο	27	6	33

Πίνακας 14. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης των παραγουσών οικείων συναρτήσεων (Σωστό –Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Όμως η τιμή p=0.10 δεν μας επέτρεψε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα εξάρτησης ($\chi^2(1)$= 2,649, p>0,05, V=0,283). Αυτό είναι ένα γεγονός το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον γιατί πιθανόν να δείχνει ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να εντοπίζουν την γραφική παράσταση της παράγουσας μια συνάρτησης και συνεπώς ο διαφορετικός βαθμός των πολυωνυμικών συναρτήσεων που εξετάστηκαν δεν φαίνεται αν επηρεάζει την απόδοση των μαθητών.

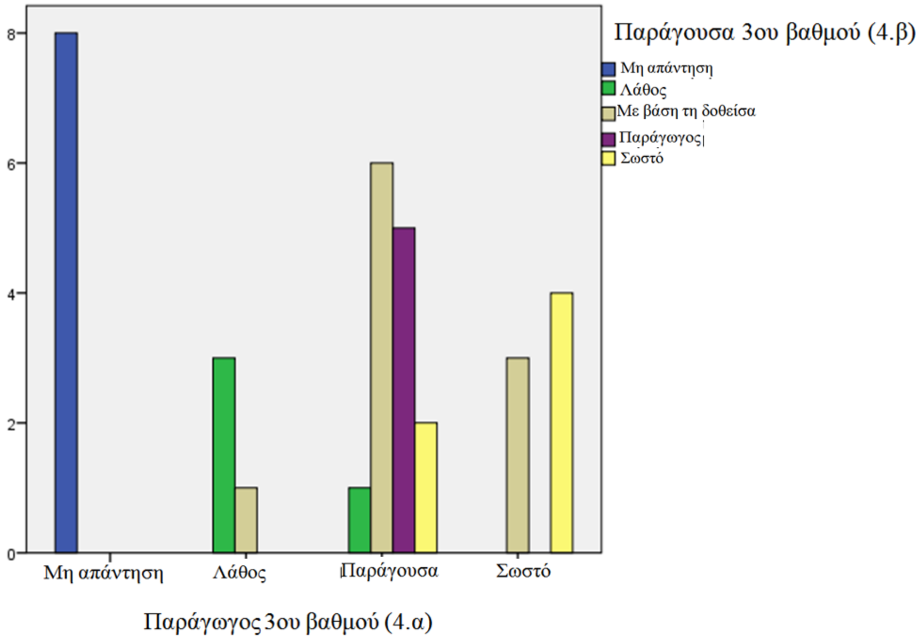
γ. σύγκριση των δύο περιπτώσεων (παράγωγος και παράγουσα)

<u>-Εύρεση παραγώγου και παράγουσας δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων 3ου βαθμού (πλήρων)</u> (Ερωτήσεις 4.α και 4.β)

		Παράγουσα 3ου βαθμού (4.β)					
		Μη απάντηση	Λάθος	Με βάση τη δοθείσα	Παράγωγος	Σωστό	Σύν/λο
Παράγωγος 3ου βαθμού (4.α)	Μη απάντηση	8	0	0	0	0	8
	Λάθος	0	3	1	0	0	4
	Παράγουσα	0	1	6	5	2	14
	Σωστό	0	0	3	0	4	7
	Σύνολο	8	4	10	5	6	33

Πίνακας 15. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης της παραγώγου και της παράγουσας οικείων συναρτήσεων

Όπως φαίνεται και στην γραφική αναπαράσταση (γράφημα 3) του πίνακα διπλής εισόδου (πίνακας 15), οι ίδιοι μαθητές τείνουν να απαντούν και στα δύο ερωτήματα με όμοιο τρόπο όταν απαντούν σωστά, λάθος ή όταν επιλέγουν να μην απαντήσουν. Στην περίπτωση όμως, που ζητήθηκε η παράγουσα, φαίνεται να προβληματίστηκαν περισσότερο γιατί πολλοί από αυτούς που απάντησαν λανθασμένα στηρίχθηκαν στην μορφή της δοθείσας συνάρτησης απαντώντας με μία όμοια αυτής.



Γράφημα 3. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης της παραγώγου και της παράγουσας οικείων συναρτήσεων

Στην συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας διπλής εισόδου (πίνακας 16) όπου οι απαντήσεις των δύο ερωτήσεων εκφράζονται με σωστό - λάθος.

		Παράγουσα 3ου βαθμού (4.β)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
Παράγωγος 3ου βαθμού (4.α)	Λάθος	24	2	26
	Σωστό	3	4	7
	Σύνολο	27	6	33

Πίνακας 16. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης της παραγώγου και της παράγουσας οικείων συναρτήσεων (Σωστό – Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Η σχέση ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(1)=$ 9,066, $p<0,05$, V=0,524). Αυτό θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε και έτσι: οι μαθητές απάντησαν και στα δύο ερωτήματα με τον ίδιο τρόπο όσον αφορά συνολικά τις σωστές και λανθασμένες απαντήσεις τους, δείχνοντας έτσι, ότι έχουν σημαντική δυσκολία στο να αναγνωρίζουν και την παράγωγο μιας συνάρτησης και την παράγουσα, ειδικά όταν η δοθείσα γραφική παράσταση είναι η ίδια και για τις δύο περιπτώσεις.

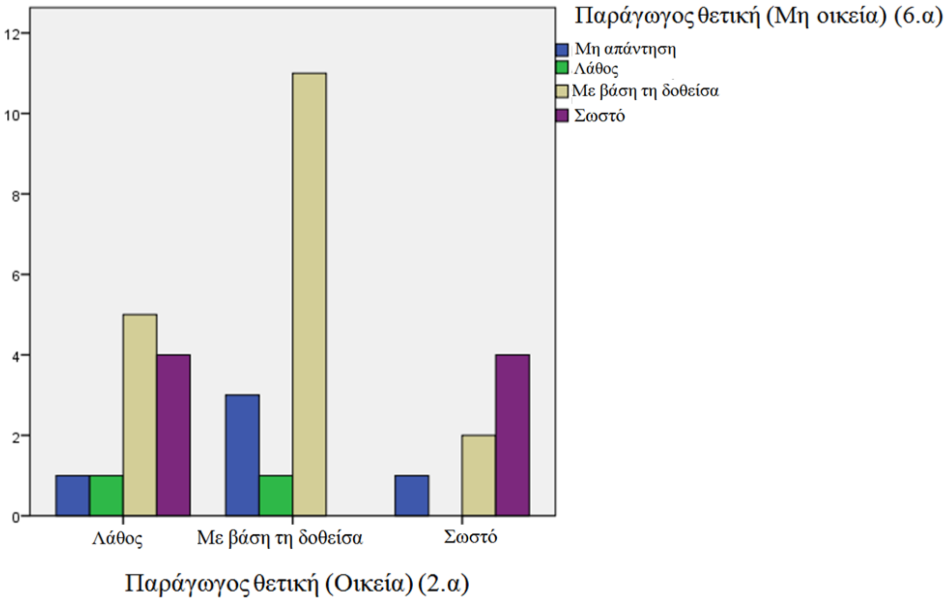
4.4.2 Αναγνώριση χαρακτηριστικών (σε σημεία) σε οικεία και σε μη οικεία

- Εύρεση προσήμου παραγώγου δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων οικείας (3ου βαθμού, πλήρους) και μη οικείας (Ερωτήσεις 2.α και 6.α)

		Παράγωγος θετική (Μη οικεία) (6.α)				
		Μη απάντηση	Λάθος	Με βάση τη δοθείσα	Σωστό	Σύνολο
Παράγωγος θετική (Οικεία) (2.α)	Λάθος	1	1	5	4	11
	Με βάση τη δοθείσα	3	1	11	0	15
	Σωστό	1	0	2	4	7
	Σύνολο	5	2	18	8	33

Πίνακας 17. Σύγκριση της αναγνώρισης του προσήμου της παραγώγου οικείας και μη οικείας συνάρτησης

Οι μαθητές, όπως παρουσιάζεται και στον πίνακα 17, φαίνεται να απάντησαν με όμοιο τρόπο στις δύο ερωτήσεις που αφορούσαν το πρόσημο της παραγώγου f΄ δοθείσης της συνάρτησης f (ερωτήσεις 2.α και 6.α). Οι δύο συναρτήσεις διέφεραν μεταξύ τους, καθώς η πρώτη είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού ενώ η δεύτερη είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση η οποία περιλαμβάνει σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Η διαφορά αυτή, από ό, τι μας πληροφορεί ο πίνακας 17 φαίνεται να μην επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές στις απαντήσεις τους. Οι μαθητές μπορεί να δίστασαν περισσότερο να απαντήσουν στην δεύτερη συνάρτηση, αλλά ένα μικρό πλήθος απάντησε και στις δύο ερωτήσεις σωστά, ενώ πολλοί ήταν αυτοί που και στις δύο περιπτώσεις στηρίχθηκαν εξ ολοκλήρου στην παράσταση της δοθείσας. Συγκεκριμένα όσον αφορά τους τελευταίους, οι 11 μαθητές ήταν οι ίδιοι και στις δύο ερωτήσεις. Αυτά αποτυπώνονται και στο γράφημα 4.



Γράφημα 4. Σύγκριση της αναγνώρισης του προσήμου της παραγώγου οικείας και μη οικείας συνάρτησης

Στην συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας διπλής εισόδου (πίνακας 18) όπου οι απαντήσεις των δύο ερωτήσεων εκφράζονται με σωστό - λάθος.

		Παράγωγος θετική (Μη οικεία) (6.α)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
Παράγωγος θετική (Οικεία) (2.α)	Λάθος	22	4	26
	Σωστό	3	4	7
	Σύνολο	25	8	33

Πίνακας 18. Σύγκριση της αναγνώρισης του προσήμου της παραγώγου οικείας και μη οικείας συνάρτησης (Σωστό – Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Η σχέση ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(1)$= 5,236, $p<0{,}05$, V=0,3). Αυτό θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε διαφορετικά και ως εξής: οι μαθητές απάντησαν και στα δύο ερωτήματα με τον ίδιο τρόπο όσον αφορά συνολικά τις σωστές και λανθασμένες απαντήσεις τους, δείχνοντας έτσι, ότι έχουν σημαντική δυσκολία στο να αναγνωρίζουν το πρόσημο της παραγώγου f΄, δοθείσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

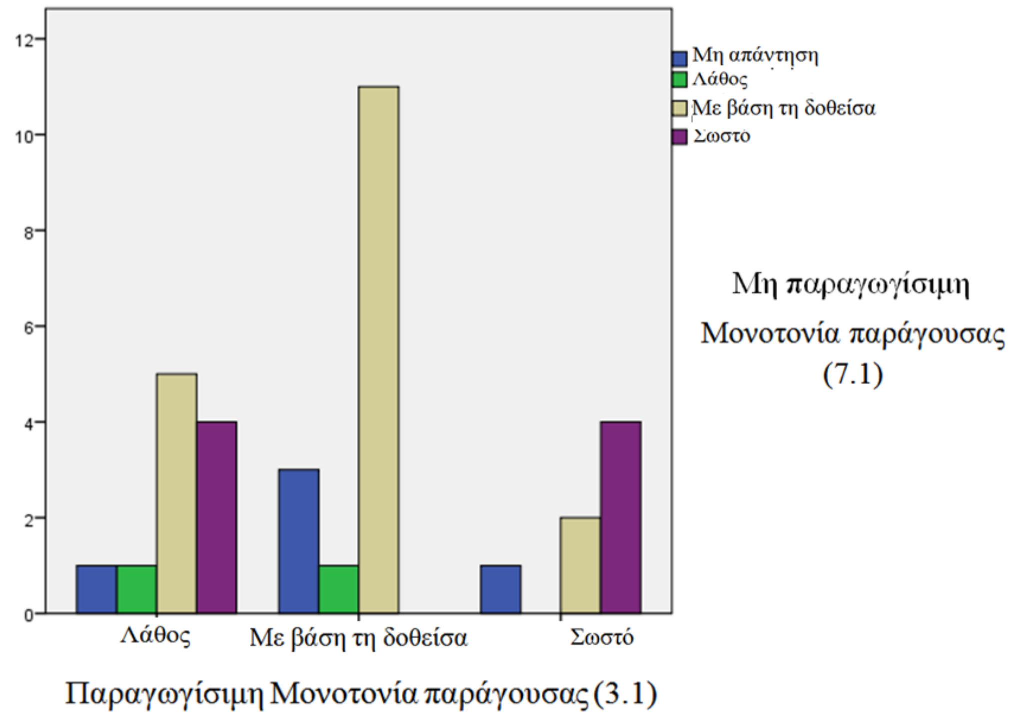
4.4.3 Αναγνώριση χαρακτηριστικών (σε διαστήματα) σε μη οικείες

Εύρεση μονοτονίας παράγουσας δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων μη οικείων (Ερωτήσεις 3.1 και 7.1)

		Μη παραγωγίσιμη Μονοτονία παράγουσας (7.1)				
		Μη απάντηση	Λάθος	Με βάση τη δοθείσα	Σωστό	Σύνολο
Παραγωγίσιμη Μονοτονία παράγουσας (3.1)	Μη απάντηση	3	1	0	0	4
	Λάθος	0	0	2	1	3
	Με βάση τη δοθείσα	6	0	11	1	18
	Σωστό	1	0	1	6	8
	Σύνολο	10	1	14	8	33

Πίνακας 19. Σύγκριση της αναγνώρισης της μονοτονίας της παράγουσας μη οικείων συναρτήσεων

Οι μαθητές φαίνεται να απάντησαν με όμοιο τρόπο στις δύο ερωτήσεις που αφορούσαν τη μονοτονία της παράγουσας της δοθείσας συνάρτησης (ερωτήσεις 3.1 και 7.1). Οι δύο συναρτήσεις ήταν μη οικείες και η διαφορά τους ήταν ότι η γραφική παράσταση της δεύτερης ερώτησης περιείχε τμήματα ευθειών μη οικείων συναρτήσεων. Η διαφορά αυτή, από ό, τι μας πληροφορεί ο πίνακας 19 δεν φαίνεται να επηρέασε τις απαντήσεις τους σε μεγάλο βαθμό, καθώς ένα μικρό πλήθος απάντησε και στις δύο ερωτήσεις σωστά, ενώ πολλοί ήταν αυτοί που και στις δύο περιπτώσεις στηρίχθηκαν εξολοκλήρου στην παράσταση της δοθείσας. Αυτά αποτυπώνονται και στο γράφημα 5.



Γράφημα 5. Σύγκριση της αναγνώρισης της μονοτονίας της παράγουσας μη οικείων συναρτήσεων

Στην συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας διπλής εισόδου (πίνακας 20) όπου οι απαντήσεις των δύο ερωτήσεων εκφράζονται με σωστό - λάθος.

		Μη παραγωγίσιμη Μονοτονία παράγουσας (7.1)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
Παραγωγίσιμη Μονοτονία παράγουσας (3.1)	Λάθος	23	2	25
	Σωστό	2	6	8
	Σύνολο	25	8	33

Πίνακας 20: Σύγκριση της αναγνώρισης της μονοτονίας της παράγουσας μη οικείων συναρτήσεων (Σωστό- Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Η σχέση ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(1)=14{,}814$, $p<0{,}05$, $V=0{,}6$). Συνεπώς οι μαθητές απάντησαν και στις δύο ερωτήσεις με τον ίδιο περίπου τρόπο.

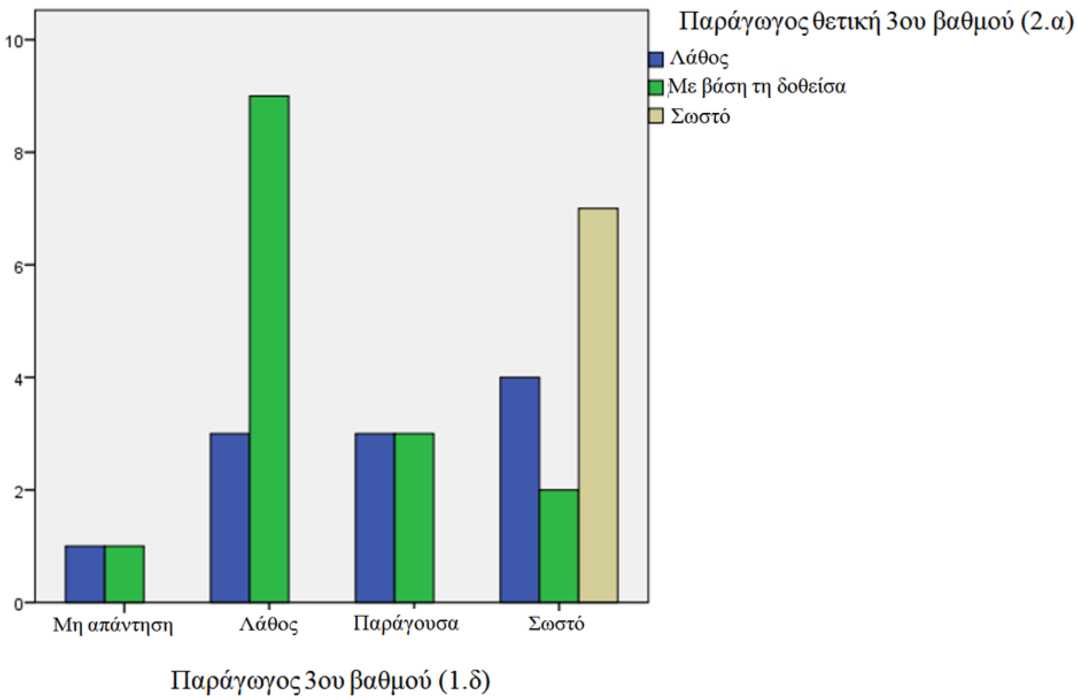
4.4.4 Σύγκριση αναγνώρισης παραγώγου πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού ολικά και κατά σημεία

-Εύρεση παραγώγου και εύρεση προσήμου παραγώγου πολυωνυμικών συναρτήσεων 3ου βαθμού (πλήρων) (Ερωτήσεις 1.δ και 2.α)

		Παράγωγος θετική 3ου βαθμού (2.α)			
		Λάθος	Με βάση τη δοθείσα	Σωστό	Σύνολο
Παράγωγος 3ου βαθμού (1.δ)	Μη απάντηση	1	1	0	2
	Λάθος	3	9	0	12
	Παράγουσα	3	3	0	6
	Σωστό	4	2	7	13
	Σύνολο	11	15	7	33

Πίνακας 21. Σύγκριση της αναγνώρισης της παραγώγου ολικά και κατά σημεία (πρόσημο παραγώγου) οικείων συναρτήσεων

Περισσότεροι (οι διπλάσιοι) αναγνώρισαν την παράγωγο της δοθείσας συνάρτησης ως γραφική παράσταση παρά τα χαρακτηριστικά της. Όπως μας δείχνουν και τα αποτελέσματα στον πίνακα 21, στη δεύτερη περίπτωση οι μαθητές στηρίχθηκαν εξολοκλήρου στην μορφή της δοθείσας συνάρτησης απαντώντας το δικό της πρόσημο και όχι της παραγώγου. Αυτά αποτυπώνονται και στο γράφημα 6.



Γράφημα 6. Σύγκριση της αναγνώρισης της παραγώγου ολικά και κατά σημεία (πρόσημο παραγώγου) οικείων συναρτήσεων

Όσον αφορά το πλήθος των μαθητών που απάντησαν συνολικά σωστά και το πλήθος οι οποίοι απάντησαν λανθασμένα τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 22.

		Παράγωγος θετική 3ου βαθμού (2.α)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
Παράγωγος 3ου βαθμού (1.δ)	Λάθος	20	0	20
	Σωστό	6	7	13
	Σύνολο	26	7	33

Πίνακας 22. Σύγκριση της αναγνώρισης της παραγώγου ολικά και κατά σημεία (πρόσημο παραγώγου) οικείων συναρτήσεων (Σωστό – Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Η σχέση ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(1)$= 13,669, $p<0,05$, V=0,6). Αυτό πιθανόν φανερώνει ότι οι μαθητές που απαντούν σωστά έχουν την ίδια αντιμετώπιση στις πολυωνυμικές συναρτήσεις 3ου βαθμού ακόμη και αν αλλάζει το είδος των πληροφοριών το οποίο τους ζητείται.

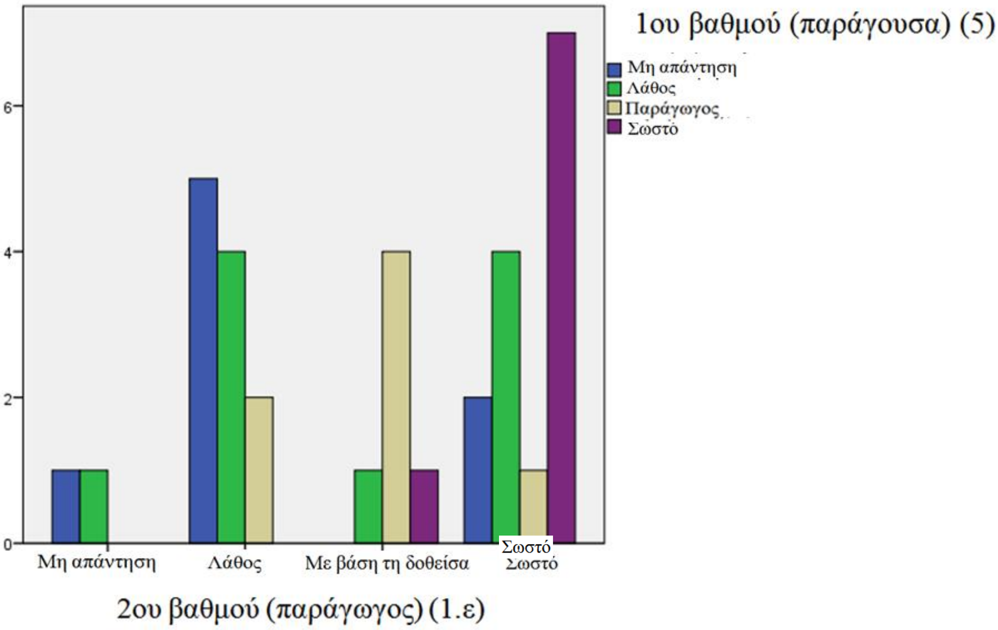
4.4.5 Σύγκριση εύρεση παραγώγου πολυωνυμικής συνάρτησης 2ου βαθμού και εύρεση παράγουσας 1ου βαθμού

<u>-Εύρεση παραγώγου πολυωνυμικής συνάρτησης 2ου βαθμού και παράγουσας 1ου βαθμού</u> (Ερωτήσεις 1.ε και 5)

		1ου βαθμού (παράγουσα) (5)				
		Μη απάντηση	Λάθος	Παράγωγος	Σωστό	Σύνολο
2ου βαθμού (παράγωγος) (1.ε)	Μη απάντηση	1	1	0	0	2
	Λάθος	5	4	2	0	11
	Με βάση τη δοθείσα	0	1	4	1	6
	Σωστό	2	4	1	7	14
	Σύνολο	8	10	7	8	33

Πίνακας 23. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης της παραγώγου και της παράγουσας οικείων συναρτήσεων

Σύμφωνα με τον πίνακα 23, περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση η οποία ζητούσε την παράγωγο της παραβολής (πολυωνυμικής συνάρτησης 2^{ου} βαθμού) από ό, τι στην ερώτηση στην οποία ζητήθηκε η παράγουσα της ευθείας (πολυωνυμικής συνάρτησης 1^{ου} βαθμού). Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε λοιπόν ότι είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την διαδικασία εύρεσης της παραγώγου παρά με την διαδικασία εύρεσης παράγουσας ακόμα και στην περίπτωση οικείων συναρτήσεων. Αυτά αποτυπώνονται και στο γράφημα 7.



Γράφημα 7. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης της παραγώγου και της παράγουσας οικείων συναρτήσεων

Στην συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας διπλής εισόδου (πίνακας 24) όπου οι απαντήσεις των δύο ερωτήσεων εκφράζονται με σωστό - λάθος.

		1ου βαθμού (παράγουσα) (5)		
		Λάθος	Σωστό	Σύνολο
2ου βαθμού (παράγωγος) (1.ε)	Λάθος	18	1	19
	Σωστό	7	7	14
	Σύνολο	25	8	33

Πίνακας 24. Σύγκριση της ολικής αναγνώρισης της παραγώγου και της παράγουσας οικείων συναρτήσεων (Σωστό – Λάθος)

Για τη διερεύνηση της σχέσης των δύο ερωτήσεων εφαρμόστηκε ο έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2, αφού ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του. Η σχέση ανάμεσα στις δύο ερωτήσεις βρέθηκε ισχυρή και στατιστικά σημαντική ($\chi^2(1)= 8{,}784$, $p<0{,}05$, $V=0{,}5$). Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον σχολιασμό των αποτελεσμάτων των δύο ερωτήσεων, όπου παρατηρήθηκε η προτίμηση των μαθητών να αναγνωρίζουν την παράγωγο έναντι της παράγουσας, και δημιουργεί την ανάγκη περαιτέρω διερεύνησης.

5. Συζήτηση - Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε η ικανότητα των μαθητών της Γ΄ λυκείου να συσχετίζουν τη συνάρτηση και την παράγωγό της στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων. Η έρευνα αυτή προσέγγισε το βαθμό στον οποίο, οι μαθητές της Γ' Λυκείου, προσανατολισμού θετικών σπουδών, οικονομίας και πληροφορικής, μπορούν να συνδέσουν τις δύο γραφικές παραστάσεις κατά την διάρκεια της διδασκαλίας του διαφορικού λογισμού μέσω των αντίστοιχων θεωρημάτων που παρουσιάζονται στο σχολικό βιβλίο.

Από τα αποτελέσματα αναδεικνύεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να εκμαιεύσουν πληροφορίες από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκειμένου να εξαγάγουν συμπεράσματα για την παράγωγό της καθώς και το αντίστροφο. Ακόμη συγχέουν αυτές τις πληροφορίες όταν πρέπει να τις μεταφράσουν σε ιδιότητες και χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της παραγώγου και αντιστρόφως. Η δυσκολία αυτή μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι συχνά οι μαθητές ταυτίζουν τις συναρτήσεις γενικά και τις παραγώγους ειδικά με την εφαρμογή αλγεβρικών κανόνων (αλγοριθμικές πρακτικές με διαδικαστικό χαρακτήρα) (Asiala, et al 1997;Aspinwall, et al, 1997; Stringer III, 2011; Rabadi, 2015; Fuentealba, 2017; Borji, et al, 2018; Ryberg, 2018).

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας: «Σε τι βαθμό αναγνωρίζουν ή όχι οι μαθητές την γραφική παράσταση της f δοθείσης της f΄ και αντίστροφα (ολική αναγνώριση)» η πλειοψηφία των υποκειμένων φαίνεται να μην αναγνωρίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη γραφική παράσταση της παραγώγου και αντίστροφα. Ειδικότερα οι μαθητές φαίνεται ότι δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την γραφική παράσταση της παραγώγου δοθείσης της παράστασης της συνάρτησης f., όπως φαίνεται στον πίνακα 1. Το μεγαλύτερο πλήθος σωστών απαντήσεων ήταν 18, δηλαδή περίπου οι μισοί μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν την παράγωγο μίας πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού μη πλήρους. Στις υπόλοιπες συναρτήσεις, οι οποίες ήταν 1ου βαθμού δίκλαδη, 2ου βαθμού και 3ου βαθμού πλήρης, οι σωστές απαντήσεις ήταν λιγότερες με ελάχιστες σωστές απαντήσεις, 7. Όσον αφορά τις περιπτώσεις όπου ζητείται από τους μαθητές το αντίστροφο, δηλαδή να αναγνωρίσουν την γραφική παράσταση της παράγουσας της δοθείσης συνάρτησης, όπως φαίνεται και στον πίνακα 3 και εδώ ένα μικρό, μόνο, πλήθος μαθητών απάντησε σωστά. Οι περισσότεροι μαθητές δεν βρήκαν την παράγουσα των συναρτήσεων 1ου και 3ου βαθμού, παρά μόνο 8 και 6 μαθητές αντίστοιχα Σε αυτές τις ερωτήσεις, ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι 8 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου. Απαντώντας λοιπόν στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, θα λέγαμε ότι η μειοψηφία των μαθητών αναγνωρίζει ολικά την γραφική παράσταση της παραγώγου με μεγαλύτερη επιτυχία στην περίπτωση της συνάρτησης 3ου και 2ου βαθμού. Επίσης η μειοψηφία των μαθητών αναγνωρίζει την παράγουσα της δοθείσης γραφικής παράστασης όταν αυτή είναι 1ου και 3ου βαθμού. Γενικότερα ως προς την χαμηλή απόδοση των μαθητών σε σχετικές ερωτήσεις έχουμε να παρατηρήσουμε ότι σε παρόμοιο συμπέρασμα έχουν καταλήξει και οι έρευνες των Aspinwall et al (1997), Stringer III (2011) και Rabadi (2015). Συγκεκριμένα, οι Aspinwall et al (1997) αναφέρουν ότι οι περισσότεροι μαθητές ερμηνεύουν λανθασμένα τη γραφική παράσταση της παραγώγου προκειμένου να εξαγάγουν συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ο Stringer III (2011) μελέτησε την τάση των μαθητών να μελετούν αλγεβρικά και όχι γραφικά την παράγωγο και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την χαμηλή απόδοση τους σε ερωτήσεις που περιελάμβαναν την εύρεση ή την σχεδίαση της γραφικής παράστασης της παραγώγου. Τέλος, ο Rabadi (2015) τόνισε την αδυναμία των μαθητών να μεταφράζουν γραφικές παραστάσεις παραγώγων σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: «Σε τι βαθμό αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου της συνάρτησης f δοθείσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (πρόσημο και ρίζες της παραγώγου) και σε τι βαθμό τα χαρακτηριστικά της παράγουσας (μονοτονία και ακρότατα της παράγουσας)», όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα, οι μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τα χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της παραγώγου δοθείσης της παράστασης της συνάρτησης f, καθώς και το αντίστροφο. Ειδικότερα γίνεται φανερή η δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου δοθείσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και συγκεκριμένα το πρόσημο και τις ρίζες της παραγώγου. Αυτό φαίνεται από τους πίνακες 4 και 5 όπου οι περισσότεροι μαθητές δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τα σημεία στα οποία η παράγωγος μίας συνάρτησης 3ου βαθμού πλήρους και μίας πολύκλαδης συνάρτησης ήταν θετική και μηδέν, καθώς οι σωστές απαντήσεις ήταν λίγες και στις δύο περιπτώσεις (κατά μέσο όρο 8). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στην συνάρτηση 3ου βαθμού απάντησαν όλοι οι μαθητές, παρά το γεγονός ότι πολλοί από αυτούς απάντησαν λανθασμένα. Στην περίπτωση της πολύκλαδης συνάρτησης όμως, υπήρξαν κάποιοι μαθητές που δεν απάντησαν. Σχετικά με την εύρεση των χαρακτηριστικών της παράγουσας της δοθείσας συνάρτησης και συγκεκριμένα τη μονοτονία και τα ακρότατα της παράγουσας, όπως φαίνεται στους πίνακες 6, 7 και 8, οι μαθητές σημείωσαν, για ακόμη μία φορά, χαμηλή απόδοση. Υπήρξε μεγάλη αποχή με το μεγαλύτερο πλήθος μη απαντήσεων στην περίπτωση συνάρτησης που δεν είναι παραγωγίσιμη (17 μαθητές). Οι σωστές απαντήσεις ήταν λίγες. Στην περίπτωση παραγωγίσιμης συνάρτησης στην οποία σημειώθηκαν 14 σωστές απαντήσεις. Συνεπώς η παραγωγισιμότητα της δοθείσας συνάρτησης επηρεάζει τους μαθητές και την απόδοση τους, όταν καλούνται να αναγνωρίσουν χαρακτηριστικά της παράγουσας της δοθείσας συνάρτησης. Απαντώντας λοιπόν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, οι περισσότεροι μαθητές δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου δοθείσης της παράστασης της συνάρτησης f, καθώς και το αντίστροφο. Σε αυτό το σημείο η έρευνα έρχεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Asiala et al (1997), Stringer III (2011), Rabadi (2015) και Fuentealba (2017). Σύμφωνα με αυτούς, οι περισσότεροι μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα χαρακτηριστικά των παραγώγων και των παραγουσών δοθεισών γραφικών παραστάσεων.

Όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα: «Σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών από το είδος της δοθείσης καμπύλης» μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές επηρεάζονται αρκετά από τη μορφή της καμπύλης στην περίπτωση που μελετούν οικείες συναρτήσεις.

Σχετικά με τις οικείες συναρτήσεις (πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου έως 3 βαθμού) περισσότεροι ήταν οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν σωστά όταν η δοθείσα γραφική παράσταση ήταν 2ου βαθμού και 3ου βαθμού (μη πλήρης) και λιγότεροι όταν αυτή ήταν 1ου βαθμού (δίκλαδη) και 3ου βαθμού πλήρης. Όπως φαίνεται στον πίνακα 1 οι μαθητές σημείωσαν πλήθος σωστών απαντήσεων, 14 και 18 αντίστοιχα στις συναρτήσεις 2ου και 3ου βαθμού έναντι του πλήθους σωστών απαντήσεων 9 και 13 στις συναρτήσεις 1ου (δίκλαδη) και 3ου βαθμού πλήρους αντίστοιχα. Αξιοσημείωτο είναι ότι ενώ ζητήθηκε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν την παράγωγο της ίδιας δοθείσης συνάρτησης (3ου βαθμού πλήρης) σε δύο διαφορετικές ερωτήσεις, στην πρώτη περίπτωση απάντησαν σωστά 13 μαθητές και δεν απάντησαν οι 2, ενώ στην δεύτερη απάντησαν σωστά 7 μαθητές και δεν απάντησαν οι 8. Το γεγονός αυτό ίσως οφείλεται ότι στην δεύτερη περίπτωση, ζητήθηκε από τους μαθητές στη συνέχεια να επανεξετάσουν τη δοθείσα συνάρτηση θεωρώντας την γραφική παράσταση παραγώγου.

Σχετικά με τις μη οικείες συναρτήσεις (πολύκλαδες συναρτήσεις αποτελούμενες από τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων έως 3ου βαθμού), θα μπορούσαμε να διαχωρίσουμε τις καμπύλες σε δύο είδη: τις παραγωγίσιμες και τις μη παραγωγίσιμες. Δεν παρατηρήθηκε διαφορετική συμπεριφορά των μαθητών, σε αυτά τα δύο είδη, όπως αυτό φαίνεται στους πίνακες 6,7 και 8. Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές απάντησαν με τον ακόλουθο τρόπο. Ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν σωστά ήταν κατά μέσο όρο 7. Αυτοί που απάντησαν λανθασμένα με βάση τη δοθείσα γραφική παράσταση ήταν κατά μέσο όρο 16 και αυτοί που δεν απάντησαν ήταν κατά μέσο όρο 12. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι η έρευνα δεν έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα των Borji et al (2018), στην οποία συμπέραναν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία στην ερμηνεία της παραγώγου, όταν αυτή δίνεται μέσω γραφικής παράστασης και δεν είναι παραγωγίσιμη. Ως γενικό συμπέρασμα όμως, στις μη οικείες συναρτήσεις (παραγωγίσιμες και μη παραγωγίσιμες), οι μαθητές δεν είχαν χειρότερες επιδόσεις από τις οικείες, όπως αυτό φαίνεται από τους πίνακες 4 και 5. Συγκεκριμένα. συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στην οικεία (3ου βαθμού πλήρη) και μη οικεία (πολύκλαδη, μη παραγωγίσιμη) ο αριθμός των μαθητών που απάντησε σωστά είναι 8 και στις δύο περιπτώσεις (κατά μέσο όρο). Θα μπορούσαμε να πούμε, λοιπόν, ότι η έρευνα δεν έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα του Stringer III (2011). Στην έρευνα αυτή και στις ερωτήσεις οι οποίες περιείχαν δοθείσες γραφικές παραστάσεις μη οικείων συναρτήσεων, δηλαδή συναρτήσεις των οποίων ο τύπος δεν γινόταν άμεσα αναγνωρίσιμος, οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν τις ιδιότητες και τις μαθηματικές προτάσεις που θα μπορούσαν να εφαρμόσουν ώστε να συνδέσουν τα χαρακτηριστικά του ζεύγους των συναρτήσεων f και f΄.

Σχετικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα «Σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών από το αν τους ζητείται η παράγωγος μίας συνάρτησης ή η παράγουσά της» οι μαθητές δεν φαίνεται να επηρεάστηκαν σε σημαντικό βαθμό από το είδος της κατάστασης που τους ζητήθηκε. Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν την παράγωγο και την παράγουσα μίας πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού. Όπως φαίνεται και στον πίνακα 14 το πλήθος των σωστών απαντήσεων, των μη απαντήσεων και των λανθασμένων απαντήσεων (οι οποίες δεν πρόδιδαν κάποια τάση), ήταν το ίδιο και στις δύο ερωτήσεις, με τιμές 6, 8 και 4 αντίστοιχα.

Μία μικρή διαφορά απόδοσης των μαθητών στις δύο καταστάσεις γίνεται φανερή στις ερωτήσεις όπου οι δοθείσες συναρτήσεις παραστάθηκαν από διαφορετικά είδη καμπυλών (οικείες και μη οικείες). Όπως φαίνεται στους πίνακες 1 και 6, οι μαθητές φαίνεται να είχαν καλύτερη απόδοση όταν τους ζητήθηκε η παράγωγος (13 σωστές απαντήσεις) από όταν τους ζητήθηκε η παράγουσα (8 σωστές απαντήσεις). Θα μπορούσαμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι στην τελευταία περίπτωση οι μαθητές δυσκολεύτηκαν ένα βαθμό παραπάνω να εκμαιεύσουν πληροφορίες για την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, από όσο δυσκολεύτηκαν στο αντίστροφο. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές επηρεάζονται γενικά από το είδος της κατάστασης (δηλαδή αν ζητείται η παράγωγος ή η παράγουσα) καθώς οι δύο ερωτήσεις εμπλέκουν διαφορετικά είδη καμπυλών (οικεία-μη οικεία) και ζητούνται διαφορετικά πράγματα (ολική αναγνώριση και χαρακτηριστικά). Το συμπέρασμα αυτό δεν έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα του Rabadi (2015), στην οποία επισημαίνεται ότι οι μαθητές τείνουν να αποδίδουν καλύτερα όταν τους ζητούνται πληροφορίες σχετικά με την παράγωγο της δοθείσης συνάρτησης από ότι στην περίπτωση που τους ζητούνται πληροφορίες για την παράγουσά της.

Κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων αναδείχθηκαν και τρία ακόμη σημαντικά ζητήματα. Οι μαθητές όταν απαντούσαν λανθασμένα, επέλεγαν σε αρκετές ερωτήσεις να απαντήσουν με βάση τη γραφική παράσταση που τους δίνεται , σε άλλες επέλεγαν την αντίστροφη κατάσταση από ότι τους ζητήθηκε (παράγωγος αντί για παράγουσα και το αντίστροφο) και σε άλλες δεν απάντησαν καθόλου. Ο αριθμός των μαθητών που απαντούσαν με τον κάθε τρόπο ήταν σε κάποιες ερωτήσεις αρκετά μεγάλος. Αυτές οι διαπιστώσεις καθιστούν αναγκαίο έναν λεπτομερέστερο σχολιασμό τους.

Ειδικότερα για τους μαθητές που απάντησαν λανθασμένα προσκολλώμενοι στη δοθείσα γραφική παράσταση της συνάρτησης παρατηρήθηκε ότι ήταν πολλοί και ότι σχεδόν σε όλα τα υποερωτήματα απάντησαν με αυτόν τον τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, οι περισσότερες απαντήσεις με βάση τη δοθείσα γραφική παράσταση συναντήθηκαν σε δύο ερωτήσεις. Η μία ερώτηση ήταν αυτή στην οποία ζητήθηκαν χαρακτηριστικά της παραγώγου f΄, δοθείσης της συνάρτησης f (μη οικείας). Η άλλη ερώτηση ήταν αυτή στην οποία ζητήθηκαν χαρακτηριστικά της παράγουσας της δοθείσας συνάρτησης, f΄(μη οικεία). Όπως φαίνεται στους πίνακες 4 και 8 οι μαθητές που απάντησαν με βάση τη γραφική παράσταση που τους δόθηκε ήταν 18 και στις δύο ερωτήσεις. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις το πλήθος αυτού του είδους απαντήσεων ήταν και πάλι αρκετά υψηλό (κατά μέσο όρο 12). Οι μόνες ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές δεν απάντησαν με αυτόν τον τρόπο ήταν αυτές στις οποίες ζητήθηκαν οι παράγωγοι των πολυωνυμικών συναρτήσεων 5ου, 3ου και 1ου βαθμού, και οι παράγουσες 1ου βαθμού καθώς και η ερώτηση στην οποία δόθηκε το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ενός κινητού. Συνεπώς στις περισσότερες περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές απάντησαν με αυτόν τον τρόπο, ζητήθηκαν χαρακτηριστικά της παράγουσας. Συνολικά θα μπορούσαμε ενδεχομένως να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές τείνουν να στηρίζονται στη δοθείσα γραφική παράσταση όταν εκμαιεύουν πληροφορίες από την γραφική παράσταση της παραγώγου και όταν τους ζητούνται να αναγνωρίσουν επιμέρους χαρακτηριστικά της παράγουσας. Συχνά λοιπόν, οι μαθητές αντιμετώπισαν την δοθείσα γραφική παράσταση συνάρτησης ως την παράσταση για την οποία ζητούνταν πληροφορίες από την εκφώνηση. Σε αυτό το σημείο η προκείμενη έρευνα έρχεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Asiala et al (1997) και Orhun (2012) που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν και ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση της παραγώγου ως την παράσταση της αρχικής συνάρτησης. Η αντιμετώπιση αυτή, των μαθητών, αποκαλύπτει ενδεχομένως την αδυναμία τους να «μεταφέρουν» τα χαρακτηριστικά της εικονιζόμενης στα χαρακτηριστικά της ζητούμενης. Με άλλα λόγια αυτήν την αδυναμία θα μπορούσαμε να την ερμηνεύσουμε ως δυσκολία χειρισμού και μετασχηματισμού γραφικών αναπαραστάσεων.

Όσον αφορά την συμπεριφορά τους να επιλέγουν την αντίστροφη κατάσταση από αυτήν που τους ζητείται (παράγωγο αντί για παράγουσα ή το αντίστροφο), αυτό έγινε έντονα φανερό στον πίνακα 1. Στις περιπτώσεις στις οποίες τους δόθηκαν συναρτήσεις 3ου και 1ου βαθμού (δίκλαδη) και τους ζητήθηκε η παράγωγός τους, πολλοί μαθητές επέλεξαν την παράγουσα (14 και 10 αντίστοιχα). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σε δύο άλλες ερωτήσεις στις οποίες ζητήθηκε η παράγωγος της ίδιας συνάρτησης (3ου βαθμού πλήρους) οι μαθητές δεν απάντησαν με τον ίδιο τρόπο. Συγκεκριμένα στη μία ερώτηση, οι μαθητές που απάντησαν επιλέγοντας την παράγουσα αντί της παραγώγου ήταν 6 και στην άλλη ερώτηση 14. Όσον αφορά τις ερωτήσεις στις οποίες ζητήθηκε η παράγουσα μίας πολυωνυμικής συνάρτησης 1ου βαθμού και μίας συνάρτησης 3ου βαθμού πλήρους μορφής οι μαθητές που επέλεξαν την παράγωγο αντί τις παράγουσας ήταν 7 και 5 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στον πίνακα 3. Συγκεφαλαιώνοντας τα παραπάνω θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι μαθητές έχουν μία τάση να επιλέγουν την παράγωγο αντί της παράγουσας στην περίπτωση της πολυωνυμικής συνάρτησης 1ου και 3ου βαθμού.

Όσον αφορά την ερώτηση στην οποία δόθηκε ένα διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ενός κινητού, οι μαθητές σημείωσαν ικανοποιητική απόδοση με μέσο πλήθος σωστών απαντήσεων (12) και μέγιστο πλήθος σωστών απαντήσεων 18. Αυτό φανερώνει ότι όταν υπάρχει πλαίσιο αναφοράς, οι εμπλεκόμενες έννοιες αποκτούν ίσως νόημα για τους μαθητές. Άρα σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές επιτυγχάνουν να συνδέσουν τη σχέση θέσης - ταχύτητας ενός κινητού με τη σχέση συνάρτησης – παραγώγου.

Υπήρξαν πολλοί μαθητές που απέφυγαν να απαντήσουν σε αρκετές ερωτήσεις. Όπως φαίνεται στους πίνακες, σχεδόν σε κάθε ερώτηση υπήρξαν μαθητές που απέφυγαν να απαντήσουν. Αυτό έγινε πιο έντονο στις περιπτώσεις όπου ζητήθηκαν χαρακτηριστικά παράγουσας μη οικείας και μη παραγωγίσιμης συνάρτησης. Όπως φαίνεται και στους πίνακες 6 και 7 ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησαν σε αυτές τις περιπτώσεις ήταν κατά μέσο όρο 15. Σε αυτό το σημείο η έρευνα έρχεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Stringer III (2011) και Borji et al (2018), στις οποίες οι ερευνητές σημειώνουν ότι οι μαθητές αποφεύγουν να λύσουν τις ερωτήσεις που περιλαμβάνουν συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

Ανακεφαλαιώνοντας και συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω επιμέρους συμπεράσματα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στα ακόλουθα. Οι μαθητές φαίνεται να μην μπορούν να αναγνωρίσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη γραφική παράσταση της παραγώγου και αντίστροφα, καθώς και τα χαρακτηριστικά της. Η απόδοσή τους φαίνεται να επηρεάζεται από τη μορφή καμπύλης κυρίως στις οικείες συναρτήσεις (αποδίδουν καλύτερα στις συναρτήσεις 2ου και 3ου βαθμού). Επιπλέον φαίνεται να μην επηρεάζονται σε σημαντικό βαθμό από το είδος της κατάστασης που τους ζητείται (παράγωγο ή παράγουσα). Στην περίπτωση που τους ζητείται η παράγουσα αρκετοί μαθητές επιλέγουν να απαντήσουν με βάση τη γραφική παράσταση που τους δίνεται και αρκετοί απαντούν επιλέγοντας την παράγωγο αντί της παράγουσας. Ειδικότερα σε αυτήν την περίπτωση, κατά την εύρεση των χαρακτηριστικών της παράγουσας πολλοί μαθητές επιλέγουν να μην απαντήσουν.

Οδηγούμαστε να διατυπώσουμε την εκτίμηση ότι οι μαθητές (του δείγματος) φαίνεται να μην δείχνουν τον απαιτούμενο βαθμό ικανότητας να συσχετίζουν τη συνάρτηση και την παράγωγό της όταν αυτές δίνονται με μορφή γραφικών παραστάσεων.

Οι μαθητές φαίνεται να μην έχουν στέρεα θεμέλια στις μαθηματικές γνώσεις τους όσον αφορά τα θεωρήματα που συνδέουν την συνάρτηση με την παράγωγό της. Γι' αυτόν, λοιπόν, ενδεχομένως τον λόγο τα γνωστικά τους θεμέλια δεν έδειξαν την απαραίτητη ανοχή όταν τους παρουσιάστηκαν γνωστές μεν γραφικές παραστάσεις αλλά ενταγμένες σε άλλο πλαίσιο (Fuentealba et al, 2017).

Συμπεράσματα

Συνοπτικά, οι απαντήσεις των ερευνητικών ερωτημάτων διαμορφώνονται ως εξής:

1ο ερευνητικό ερώτημα: *«Σε τι βαθμό αναγνωρίζουν ή όχι οι μαθητές την γραφική παράσταση της f δοθείσης της f' και αντίστροφα (ολική αναγνώριση)»*

Η πλειοψηφία των υποκειμένων φαίνεται να μην αναγνωρίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη γραφική παράσταση της παραγώγου και αντίστροφα.

Η έρευνα έρχεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Aspinwall et al (1997), Stringer III (2011) και Rabadi (2015).

2ο ερευνητικό ερώτημα: *«Σε τι βαθμό αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά της παραγώγου της συνάρτησης f δοθείσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (πρόσημο και ρίζες της παραγώγου) και σε τι βαθμό τα χαρακτηριστικά της παράγουσας (μονοτονία και ακρότατα της παράγουσας)»*

Οι μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τα χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της παραγώγου δοθείσης της παράστασης της συνάρτησης f, καθώς και το αντίστροφο.

Η έρευνα έρχεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Asiala et al (1997), Stringer III (2011), Rabadi (2015) και Fuentealba (2017).

3ο ερευνητικό ερώτημα: *«Σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών από το είδος της δοθείσης καμπύλης»*

Οι μαθητές επηρεάζονται αρκετά από τη μορφή της καμπύλης στην περίπτωση που μελετούν οικείες συναρτήσεις.

Η έρευνα δεν έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα των Borji et al (2018) και Stringer III (2011) (στις οποίες οι μαθητές επηρεάζονται από τη μορφή της καμπύλης στις μη οικείες και μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις).

4ο ερευνητικό ερώτημα: *«Σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση των μαθητών από το αν τους ζητείται η παράγωγος μίας συνάρτησης ή η παράγουσά της»*

Οι μαθητές δεν φαίνεται να επηρεάστηκαν σε σημαντικό βαθμό από το είδος της κατάστασης που τους ζητήθηκε.

Η έρευνα δεν έρχεται σε συμφωνία με την έρευνα του Rabadi (2015) (οι ερευνητές κατέληξαν ότι οι μαθητές αποδίδουν καλύτερα στην εύρεση της παραγώγου).

6. Περιορισμοί της έρευνας

Ένας από τους περιορισμούς της έρευνας είναι ότι πραγματοποιήθηκε βολική δειγματοληψία και όχι τυχαία, καθώς επίσης και ότι το μέγεθος του δείγματος ήταν μικρό. Αυτά μπορεί να έχουν σαν αποτέλεσμα ότι το δείγμα δεν είναι κατά ανάγκη αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού.

Όσον αφορά την επιλογή του εργαλείου οι ερωτήσεις που επιλέχθηκαν αφορούν αποκλειστικά πολυωνυμικές συναρτήσεις, γεγονός που επηρεάζει ενδεχομένως την απόδοση των παιδιών. Ακόμη, δεν συμπεριλήφθηκαν ερωτήσεις στις οποίες ζητείται η σχεδίαση γραφικών παραστάσεων όπως επίσης και ερωτήσεις στις οποίες ζητείται η καταγραφή της συλλογιστικής τους πορείας, καταστάσεις οι οποίες θα βοηθούσαν την ακριβέστερη διατύπωση συμπερασμάτων.

7. Προτάσεις για Μελλοντική έρευνα

Τα αποτελέσματα της έρευνας συντελούν στο να αναδείξουν σημεία τα οποία είναι πρόσφορα να χρησιμοποιηθούν ως αφορμές για καινούρια ερευνητικά ερωτήματα σε άλλες έρευνες. Δύο από αυτά τα σημεία είναι τα ακόλουθα: α) η συμπεριφορά των μαθητών να στηρίζονται στη γραφική παράσταση που τους δίνεται προκειμένου να απαντήσουν σε ερωτήματα σχετικά με την παράγωγο ή την παράγουσα της δοθείσας συνάρτησης και β) η τάση ορισμένων μαθητών να αναγνωρίζουν την παράγωγο μίας δοθείσης συνάρτησης (ή την παράγουσα) ενώ τους έχει ζητηθεί η παράγουσα (ή η παράγωγος) στο πλαίσιο των γραφικών παραστάσεων. Η μελέτη των παραπάνω σημείων θα αποκτούσε πρόσθετο ενδιαφέρον αν στα νέα ερευνητικά εργαλεία συμπεριλαμβάνονταν γραφικές παραστάσεις και άλλου είδους συναρτήσεων πέραν των πολυωνυμικών. Ακόμη θα ήταν γόνιμο να κατασκευαστούν και άλλες ερωτήσεις ερευνητικών εργαλείων πέραν της αναγνώρισης (ολικά και κατά σημεία) της παραγώγου και της παράγουσας. Μία από αυτές θα μπορούσε να είναι η σχεδίαση γραφικών παραστάσεων.

Οι ερωτήσεις του παρόντος ερωτηματολογίου θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές και εκπαιδευτικούς, κατά την διάρκεια της προετοιμασίας για τις πανελλήνιες εξετάσεις. Μία εναλλακτική πρόταση θα ήταν να δημιουργηθούν καινούριες γραφικές παραστάσεις που άλλοτε θα προέρχονται από τύπο μη οικείας συνάρτησης και άλλοτε από αυτοσχέδιες γραφικές παραστάσεις. Στην πρώτη περίπτωση το όφελος θα είναι ενισχυμένο καθώς οι μαθητές με την βοήθεια ενός προγράμματος σχεδίασης (πχ desmos graphing calculator) θα έχουν την δυνατότητα να επαληθεύσουν τα συμπεράσματα τους και έπειτα θα έχουν την δυνατότητα να τα αποδείξουν με την αλγεβρική προσέγγιση, εφαρμόζοντας διαδικαστικούς αλγορίθμους παραγωγίσεων και επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων (Dick et al, 1996; Hillel, 1993; Tall, 1996, όπως αναφέρεται στο Lavicza, 2006; Kendal & Stacey, 2001; Hohenwarter, Preiner & Yi, 2007; Borji, Alamolhodaei & Radmehr, 2018).

Στην δεύτερη περίπτωση θα κληθούν να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις γεγονός που θα έχει ως αποτέλεσμα να κατανοήσουν ότι μια απλή σχεδίαση δεν είναι πάντα ο εύκολος τρόπος για να εκφράσουν τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα ακρότατα και σημεία καμπής μιας συνάρτησης, χωρίς πρώτα να έχουν συνεκτιμήσει και άλλους παράγοντες.

Επομένως, αποτελεί ένα κίνητρο, αφενός για τους εκπαιδευτικούς, το να συμπεριλάβουν στην διδασκαλία της παραγώγου παρόμοια παραδείγματα ερωτήσεων που περιέχουν την οπτική αναπαράσταση της συνάρτησης και της παραγώγου της (Stringer III, 2011) και αφετέρου για τους ερευνητές το να μελετήσουν και να αναπτύξουν είτε διδακτικές παρεμβάσεις για να βοηθήσουν τους πρώτους είτε έρευνες προκειμένου να αναδειχθούν περισσότερα σημεία και αιτίες οι οποίες εμποδίζουν τους μαθητές να κατανοήσουν εννοιολογικά την έννοια της παραγώγου. Αυτή η κατεύθυνση των νέων κινήσεων θα συντελέσει ως ένα μικρό σκαλοπάτι για την υιοθέτηση της μαθηματικής σκέψης που βασίζεται στην αφαιρετική σκέψη, στον συνδυασμό πληροφοριών και στην εξαγωγή συμπερασμάτων από το ορατό στο ιδεατό (αόρατο).

8. Βιβλιογραφία

Ξένες βιβλιογραφικές Αναφορές

- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., Schwingendorf, K.(1997). The development of Students’ Graphical Understanding of the Derivative, Journal of Mathemathical Behaviour, 16 (4), 399-431.

- Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. Educational Studies in Mathematics, 33(3), 301-317

- Baron, M. (1969). Origins of the Infinitesimal Calculus, Pergamon, Oxford

- Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE Theory to improve Students’ Graphical Understanding of Derivative. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(7), 2947-2967.

- Boyer, C. (1959). History of the Calculus and Its Conceptual Development, Dover, New York

- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons.

- Cauchy, A.-L. (1823). Resume des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, Paris. In Oeuvres completes d’ Augustin Cauchy, Gauthier- Villars, Paris, 1882-, series 2, vol.4.

- Davis, P. J., & Anderson, J. A. (1979). Nonanalytic aspects of mathematics and their implication for research and education. SIAM review, 21(1), 112-127.

- Davydoff, V., (1990), Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula, Soviet Studies in Mathematics Education, Vol. 2, National Council of Teachers of Mathematics, Reston Virginia.

- Dreyfus, T. (1991, June). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 33-48).

- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). United States: The Mathematical Association of America.

- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2), 1-16.

- Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. In Advanced mathematical thinking (pp. 140-152). Springer, Dordrecht.

- Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel.

- Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives.

- Gagatsis, A., Elia, I., Panaoura, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2006). An empirical four-dimensional model for the understanding of function. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 137.

- Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. Educational psychology, 24(5), 645-657.

- Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. Journal of Mathematics Teacher Education, 11(3), 199-219.

- Gordon SP 2005. Discovering the chain rule graphically. Mathematics and Computer Education, 39:195-197.

- Grabiner, J. V. (1981). The origins of Cauchy's Rigorous Calculus, M. I. T. Press, Cambridge and London.

- Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. Mathematics magazine, 56(4), 195-206.

- Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. Phi Delta Kappan, 78, 361-367.

- Hallet, D. H. (1991, February). Visualization and calculus reform. In Visualization in teaching and learning mathematics (pp. 121-126). Mathematical Association of America.

- Hallet, H. (1994). Calculos.

- Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate students' difficulties in conceptual understanding of derivation. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 143, 358-366.

- Herscovics, N. (1996). The construction of conceptual schemes in mathematics. Theories of mathematical learning, 351-379.

- Hillel, J. (1993). Computer algebra systems as cognitive technologies: implication for the practice of mathematics education. In Learning from computers: Mathematics education and technology (pp. 18-47). Springer, Berlin, Heidelberg.

- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.

- Hohenwarter, M., Preiner, J, & Yi, Taeil. (2007). Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level. Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematics 2007. Boston, USA: ICTCM

- Hughes Hallett, D. (1991). Visualization and Calculus Reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes No. 19, 121–126.

- International journal of mathematical education in science and technology, 48(3), 374-392.

- Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 79-103.

- Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and middle school: An approach based on neo-Piagetian theory. Scientia paedagogica experimentalis, 35(1), 7-54.

- Kaldrimidou, M. & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and Metacognitive Factors Involved in the Learning of Mathematics: The Case of Graphic Representations of Functions. In H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi & A. Sierpinska (Eds), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 271-288). Reston, Virginia: NCTM.

- Kaput, J. J., Schoenfeld, A. H., Dubinsky, E., & Dick, T. P. (1996). Research in Collegiate Mathematics Education III. American Mathematical Society

- Kendal, M., & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(2), 143-165.

- Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: a Brief Survey. College Math. Jour. 20, 282-300
- Kline, M. (1972). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford, New York.
- Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. South African Journal of Education, 33(1).
- Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. For the learning of mathematics, 6(2), 18-28.
- Lagrange, J.-L. (1813). Theorie des fonctions analytiques, Paris, 2nd edition. In oeuvres de Lagrange, ed. M. Serret, Gauthier- Villars, Paris, 1867-1892, vol. 9.
- Lavicza, Z. (2006). Factors influencing the integration of Computer Algebra Systems into university-level mathematics education. International Journal for Technology in Mathematics Education. 14(3)
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33±40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. Review of educational research, 60(1), 1-64.
- Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. Educational studies in mathematics, 30(1), 39-65.
- Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: Derivative functions and students' difficulties. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 55, 679-684.
- Orton, A (1983). Students‟ Understanding of Differentiation. Educational Studies in Mathematics, 14:235-250.
- Park, J., Park, M. S., Park, M., Cho, J., & Lee, K. H. (2013). Mathematical modelling as a facilitator to conceptualization of the derivative and the integral in a spreadsheet environment. Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 32(3), 123-139.
- Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it?. Educational Studies in Mathematics, 89(2), 233-250.

- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. For the learning of mathematics, 6(3), 42-46.

- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative. In Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei: PME.

- Pintó, R., & Ametller, J. (2002). Students' difficulties in reading images. Comparing results from four national research groups. International Journal of Science Education, 24(3), 333-341.

- Rabadi, N. (2015). Overcoming difficulties and misconceptions in calculus (Doctoral dissertation, Teachers College, Columbia University).

- Robert, A., & Boschet, F. (1984). L'acquisition des débuts de l'analyse sur R dans un section ordinaire de DEUG première année. Cahier de didactique des mathématiques, 7.

- Ryberg, U. (2018). Generating different lesson designs and analyzing their effects: The impact of representations when discerning aspects of the derivative. The Journal of Mathematical Behavior.

- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 59-84). U.S.A: MAA.

- Sfard, A. (1988). *Teaching theory of algorithms in high school*, Unpublished doctoral dissertation, the Hebrew University, Jerusalem

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36

- Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions, operational and structural. In A. Borbas (Ed.), Proceedings of the 11th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 162{169). Montreal: University of Montreal.

- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 25-58). U.S.A: MAA.

- Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students’ errors in derivatives in a university of technology. The Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 577-592.

- Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. The Journal of Mathematical Behavior, 30(2), 131-148.

- Stringer III, E. W. (2011). African American Students' Graphic Understanding of the Derivative: Critical Case Studies. ProQuest LLC. 789 East Eisenhower Parkway, PO Box 1346, Ann Arbor, MI 48106.

- Struik, D. J. (1969) Source Book in Mathematics, 1200-1800, Harvard University Press, Cambridge, MA, 222-225

- Tall, D. (1993). Students’ Difficulties in Calculus. Plenary Address. Proceedings of Working Group 3 on Students‟ Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec, Canada, 13–28. Προσπελάστηκε στις 12 Ιουλίου 2019 http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

- Tall. D. (1997). Functions and Calculus. In A.J. Bishop et al. (eds.) International Handbook of Mathematics Education , 289-325.

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.

- Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students’ conceptions. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(5), 609-637.

- Uygur T & Özdaş A 2005. Misconceptions and difficulties with the chain rule. In The Mathematics Education into the 21st century Project. Malaysia: University of Teknologi. Προσπελάστηκε 12 Ιουλίου 2019 https://www.researchgate.net/publication/265650776_Uygur_T_Ozdas_A_2005_Misconceptions_and_difficulties_with_the_chain_rule_The_Mathematics_Education_into_the_21st_century_Project_209-213

- Uygur T& Özdaş A 2007. The effect of arrow diagrams on achievement in applying the chain rule. Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 17:131-147.

- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for research in mathematics education, 356-366.

- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 103-127.

- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. Visualization in teaching and learning mathematics, 1-7.

Ελληνικές Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Ασβεστά, Α., & Γαγάτση, Α. (1995). Προβλήματα Ερμηνείας και η Έννοια της Συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών (σσ.19-38). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.

- Γαγάτση, Α., Κυριακίδη, Λ., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2000). Ο Ρόλος της Μετάφρασης μεταξύ των Διαφόρων Πεδίων Αναπαράστασης της Έννοιας της Συνάρτησης στη Μάθηση της Έννοιας. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής (σσ.337-347). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου**.**

- Βασάκου, Θ. (1995). Η Έννοια της Συνάρτησης στους Μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες Κατανόησης – Εμπόδια που σχετίζονται με τον Ορισμό της συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα* (σσ.239-257). Θεσσαλονίκη: Art of Text.

- Καλδρυμίδου Μ. (2017). Σημειώσεις του μαθήματος «Ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης», Διδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών», Θεσσαλονίκη.

- Καλδρυμίδου, Μ & Μορόγλου, Ε. (2007). Αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου. Σε Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επιμ.) Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ (σσ.293-303). Αλεξανδρούπολη: Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

- Καλδρυμίδου, Μ & Οικονόμου, Α. (1992). Επιστημολογικές αντιλήψεις, μεταγνωστικές αντιλήψεις και επικοινωνία στην τάξη των μαθητών. Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, (9), 130-139.

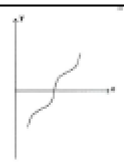
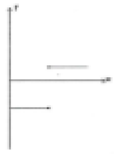
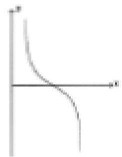
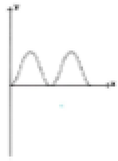
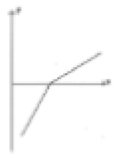
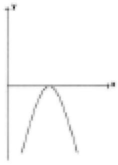
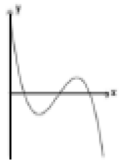
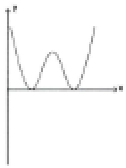
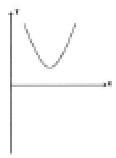
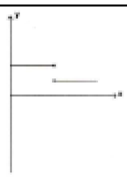
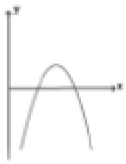
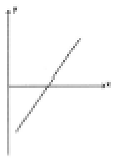
- Κολέζα, Ε & Φακούδης, Ε. (2008). Προλεγόμενα μίας ανάλυσης των εγχειριδίων σχετικά με την έννοια της συνάρτησης. Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Σε Δ. Χασάπη (Επιμ.) Πρακτικά 7ου Διημέρου διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, (ΙΙ), 367

Παράρτημα Α

<u>Ερωτηματολόγιο</u>

<u>Ερώτηση 1</u>

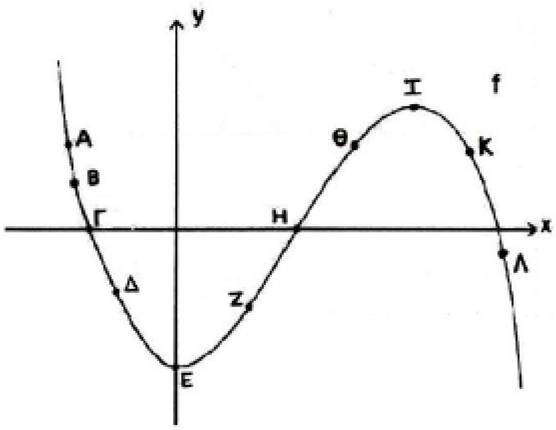
Στη στήλη Α δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στην στήλη Β των παραγώγων τους. Για κάθε μία συνάρτηση της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την γραφική παράσταση της παραγώγου της από την στήλη Β.

Στήλη Α (f)		Στήλη Β (f′)	
α.		1.	
β.		2.	
γ.		3.	
δ.		4.	
ε.		5.	
		6.	
		7.	

f	α.	β.	γ.	δ.	ε.
f′					

Ερώτηση 2

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α. Σε ποια σημεία οι τιμές της παραγώγου είναι θετικές;

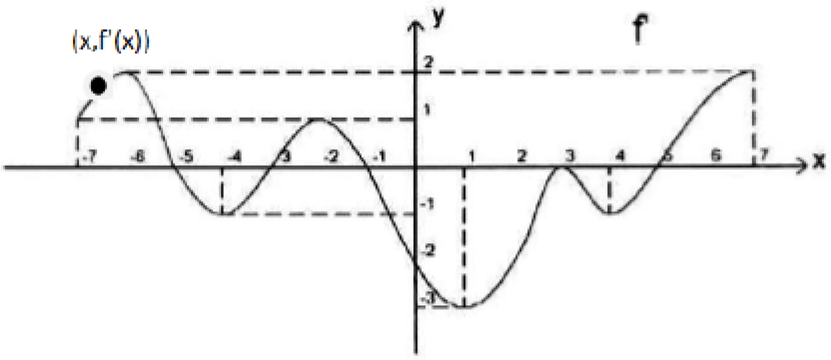
Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	
Ζ	
Η	
Θ	
Ι	
Κ	
Λ	

β. Σε ποια σημεία ισχύει f'(x)=0;

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	
Ζ	
Η	
Θ	
Ι	
Κ	
Λ	

Ερώτηση 3

Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο [-7,7].



Γραφική Παράσταση f '(x)

1) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα:

2) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για x=3.

ΝΑΙ	
ΟΧΙ	

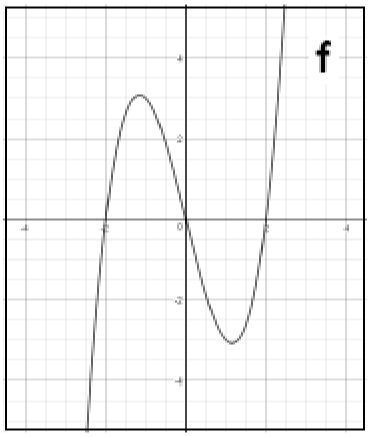
Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

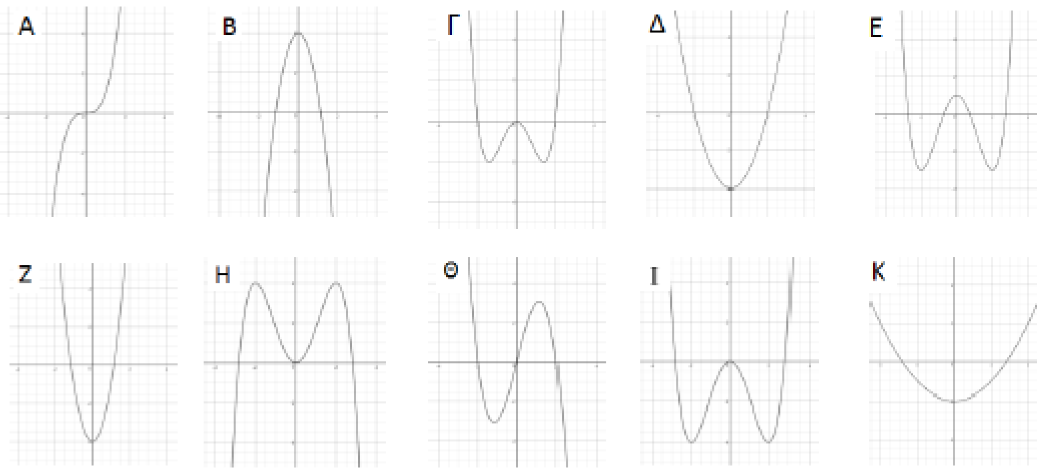
3) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f:

α. τοπικά μέγιστα	
β. τοπικά ελάχιστα	

Ερώτηση 4

Στο τετραγωνισμένο χαρτί δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να επιλέξετε ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις αναπαριστά τη γραφική παράσταση της παραγώγου της f και ποια τη γραφική παράσταση της παράγουσας της f.

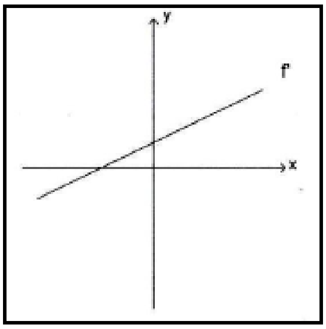




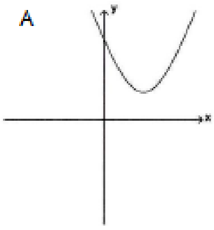
Παράγωγος συνάρτηση της f:	
Παράγουσα συνάρτηση της f:	

Ερώτηση 5

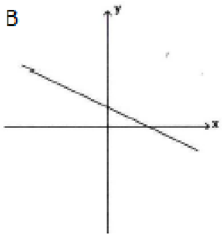
Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι η γραφική παράσταση της αρχικής (η παράγουσας) συνάρτησης f.



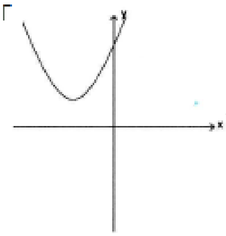
Α



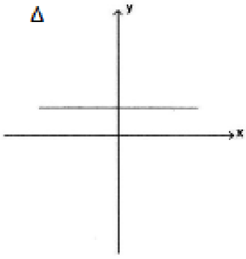
Β



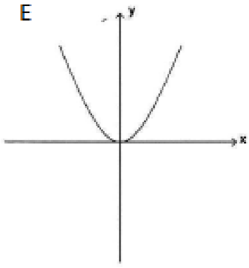
Γ



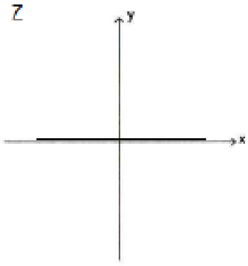
Δ



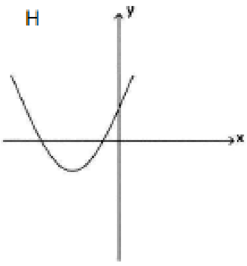
Ε



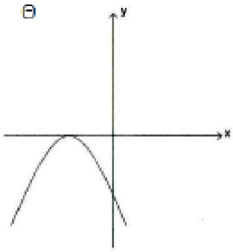
Ζ



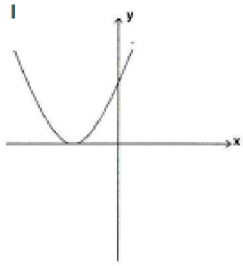
Η



Θ



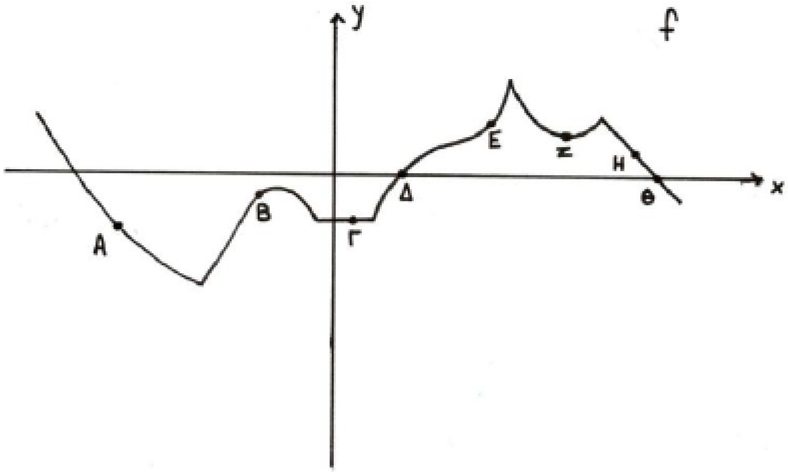
Ι



Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστούν την αρχική ή τις αρχικές συναρτήσεις f:	

Ερώτηση 6

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α. Σε ποια σημεία οι τιμές της παραγώγου είναι θετικές;

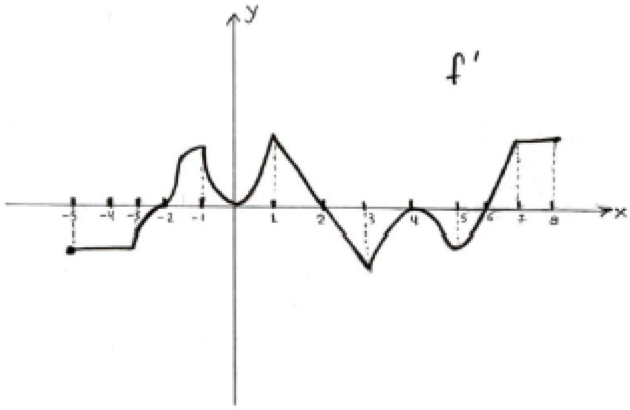
Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	
Ζ	
Η	
Θ	

β. Σε ποια σημεία ισχύει f'(x)=0;

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	
Ζ	
Η	
Θ	

Ερώτηση 7

Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f που ορίζεται στο [-5,8].



1) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα:

2) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=0.

ΝΑΙ	
ΟΧΙ	

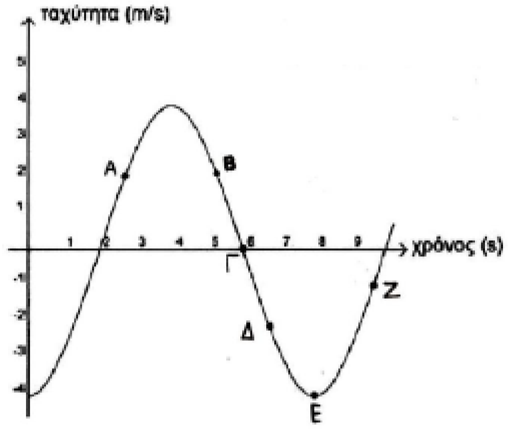
Αιτιολογήστε την απάντησή σας:

3) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f:

α. τοπικά μέγιστα	
β. τοπικά ελάχιστα	

Ερώτηση 8

Ένα κινητό διαγράφει μία τροχιά. Το ακόλουθο διάγραμμα αναπαριστά την ταχύτητα του κινητού συναρτήσει του χρόνου.



Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Σε ποια σημεία

α) κινείται κατά την θετική φορά:	
β) κινείται κατά την αρνητική φορά:	
γ) είναι στιγμιαία ακίνητο:	
δ) επιταχύνει	
ε) επιβραδύνει	

Παράρτημα Β

Ορισμοί

(σχολικό βιβλίο μαθητή :Μαθηματικά (Γ Λυκείου Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής)

Πραγματική συνάρτηση:

Έστω Α ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο x ϵ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x).

Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν

υπάρχει το και $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει y = f(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x, f(x)), x ϵ A, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, y = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η y = f(x) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\mathbf{y - f(x_0) = \lambda\, (x - x_0)\ ,}$$

όπου

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Μονοτονία συνάρτησης

-Γνησίως αύξουσα

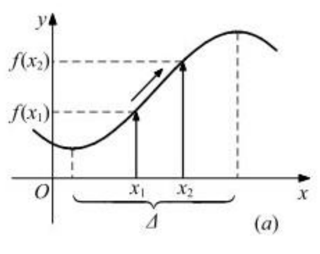
Μια συνάρτηση f λέγεται :

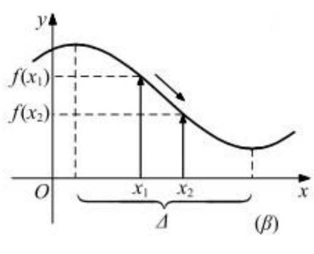
- γνησίως αύξουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε

$x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)

-γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε

$x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)





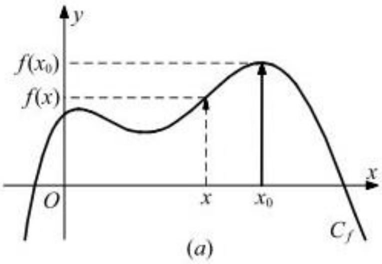
Ακρότατα συνάρτησης

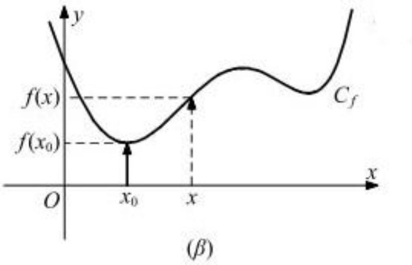
Ολικά

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

-Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. α)

-Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. β)

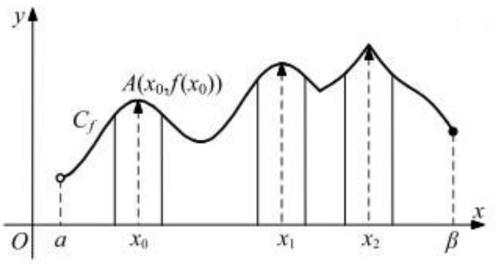




Τοπικά ακρότατα

-Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta , x_0 + \delta)$.

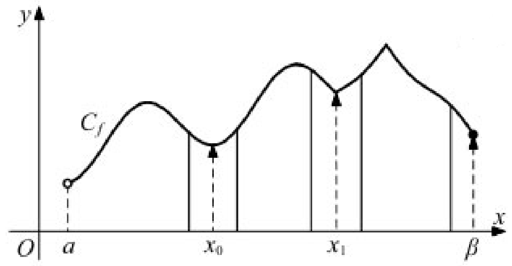
Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.



-Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta , x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

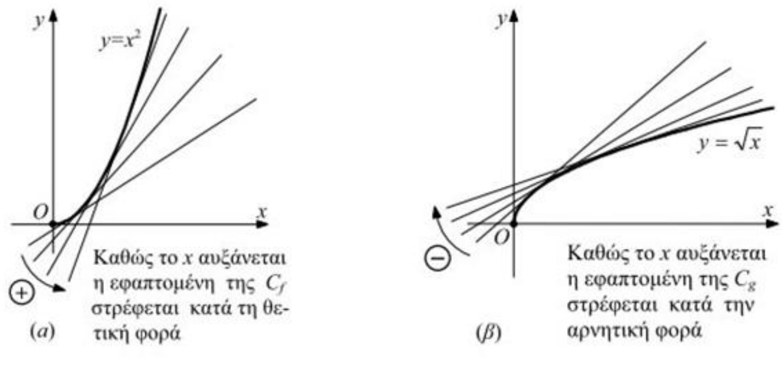


Κυρτότητα συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι :

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

-Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.



Καθώς το x αυξάνεται:

— η κλίση f ′(x) της Cf αυξάνεται, δηλαδή η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞), ενώ

— η κλίση της g′(x) της Cg ελαττώνεται, δηλαδή η g′ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,+∞).

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο [0,+∞), ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο [0,+∞).

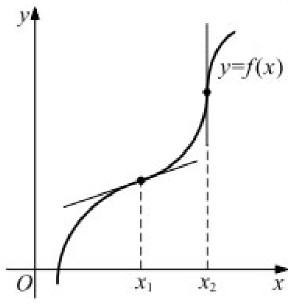
Σημεία καμπής

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β) , ή αντιστρόφως, και

- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.



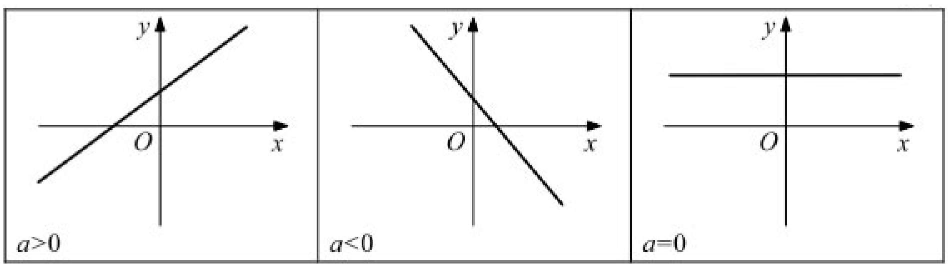
Πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ..., \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbf{R}, \ \nu \in \mathbf{N}.$$

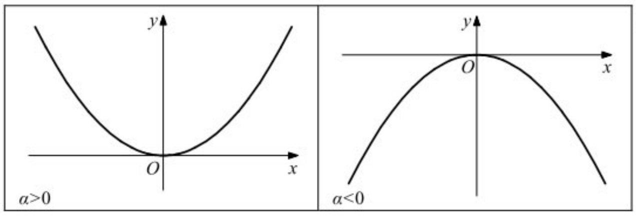
Πολυωνυμικές συναρτήσεις που πρέπει να θεωρούνται γνωστές με την έναρξη της Γ' Λυκείου

(σχολικό βιβλίο μαθητή :Μαθηματικά (Γ Λυκείου Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής)

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$



Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.



Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.