ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ-ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: «Νοερή διαχείριση συναρτήσεων»

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Παπαφιλίππου Νικόλαος (Α.Μ. 0822)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Λεμονίδης Χαράλαμπος (Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ)

ΕΞΕΤΑΣΤΕΣ: Καλδρυμίδου Μαρία (Καθηγήτρια)

Χρήστου Κωνσταντίνος (Επίκουρος καθηγητής Π.Τ.Ν./Π.Δ.Μ)

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο των υποχρεώσεων μου για το διατμηματικό μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών».

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο, για την πολύτιμη καθοδήγηση του σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας, για τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του και τα εύστοχα σχόλια του.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τους εξεταστές κα. Καλδρυμίδου Μαρία και κ. Κωνσταντίνο Χρήστου για τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις τους, που συνέβαλλαν στη βελτίωση της εργασίας.

Τέλος, ένα ξεχωριστό ευχαριστώ στους μαθητές μου, που συμμετείχαν με προθυμία στην έρευνα, τη διεύθυνση και το προσωπικό του σχολείου μου για τις διευκολύνσεις που μου παρείχαν, αλλά προπάντων στη σύζυγο μου Ελένη και στον γιο μου Παναγιώτη για την υπομονή τους και για τη στήριξη που μου παρείχαν καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση των συμπεριφορών των μαθητών όταν διαχειρίζονται συναρτήσεις νοερά σε γραφικό περιβάλλον. Τα νοερά μαθηματικά δεν συμπεριλαμβάνονται ως διδακτική πρακτική στα ΑΠΣ της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και ειδικότερα στο Λύκειο. Με την παρούσα εργασία επιχειρήθηκε να διερευνηθούν οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν επιλύουν νοερά έργα με συναρτήσεις, καθώς και ο βαθμός ευελιξίας τους στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν σε σχέση με τα έργα αυτά. Θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας ήταν η έρευνα του Proulx (2015), από την οποία προήλθε το εργαλείο συλλογής των δεδομένων, που αποτελούνταν από γραφήματα δύο συναρτήσεων (γραμμικής-σταθερής ή τετραγωνικής-σταθερής ή δύο γραμμικές) και ζητούνταν να βρεθεί νοερά το αποτέλεσμα του αθροίσματος ή της διαφοράς τους.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 42 μαθητές της Γ΄ Λυκείου των Λυκειακών Τάξεων Γαλάτιστας Χαλκιδικής. Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω κλινικής συνέντευξης. Σύμφωνα με τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας, η επιλογή στρατηγικής επηρεάζεται τόσο από τα χαρακτηριστικά του μαθητή όσο και τη φύση του έργου. Σε έργα με γραμμικές συναρτήσεις, οι μαθητές επέλεξαν κατά σημεία προσεγγίσεις, αλγεβρικές-αριθμητικές ή συνδυασμό τους, σε έργα με καμπύλες επέλεξαν ολιστικές προσεγγίσεις, γραφικές-γεωμετρικές, ενώ οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά, έδειξαν μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και είχαν περισσότερες επιτυχίες. Η ολιστική προσέγγιση, γραφική/γεωμετρική, επιλέχθηκε στις περισσότερες απαντήσεις των μαθητών, σε έργα που δε δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων, πλην των γραμμικών, ενώ η αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική επιλέχθηκε περισσότερο στα έργα που δίνονταν. Επίσης οι περισσότεροι μαθητές επέδειξαν μια σχετική ευχέρεια και ευελιξία στη διαχείριση οπτικών απεικονίσεων και στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, εκτός από την περίπτωση σύνδεσης της αλγεβρικής με τη γραφική έκφραση, όπου περίπου το 75% των μαθητών απάντησε λάθος ή δεν έδωσε απάντηση.

Λέξεις-Κλειδιά: Νοερά μαθηματικά, συναρτήσεις, στρατηγικές επίλυσης, ευελιξία

Abstract

The main purpose of the present study was to investigate students' behaviors when managing mental functions in a graphical environment. Mental mathematics is not included as a teaching practice in the ASPs of Secondary Education, especially in Lyceum. This paper attempts to explore the strategies students develop when solving mental tasks with functions, as well as their degree of flexibility in the strategies they use in relation to these tasks. The theoretical background of the work was Proulx's (2015) research, which came from the data collection tool, which consisted of graphs of two functions (linear-constant or square-constant or two linear) that sought to find the result of their sum or difference.

The research participants were 42 students from the 3rd Lyceum of Lyceum Classes Galatistas of Halkidiki. Data were collected through a clinical interview. According to the main results of the work, the choice of strategy is influenced by the characteristics of the student and the nature of the task. In tasks with linear functions students chose point-based approaches, algebraic-arithmetic or combination, in tasks with curves they chose holistic approaches, graph-geometric, while students with better mathematical performance showed greater flexibility in strategies they used and they had more success. The holistic approach, graphical/geometric, was chosen for most students' responses to tasks that did not give the algebraic expressions of the functions other than linear, while the algebraic / parametric strategy was chosen more for the tasks given. Most students also displayed relative ease and flexibility in managing visual representations and in linking different representations of functions, except when connecting algebraic to graphical expression, where approximately 75% of students answered incorrectly or did not respond.

Keywords: Mental Math, Functions, Solution Strategies, Flexibility

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

1.1 Η σημασία της έρευνας

Τα νοερά μαθηματικά αποτελούν μια νέα πτυχή της διδασκαλίας των μαθηματικών. Βέβαια όλα τα μαθηματικά θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως νοερά με την έννοια ότι η συμμετοχή σε μια μαθηματική δραστηριότητα περιλαμβάνει τη σκέψη. Οι περισσότερες όμως μελέτες, αν όχι όλες, για τα νοερά μαθηματικά όπως επισημαίνει ο Proulx (2015), έχουν επικεντρωθεί στους αριθμούς. Αυτό που προκαλεί το ενδιαφέρον είναι να γνωρίζουμε, αν τα νοερά μαθηματικά με μαθηματικά αντικείμενα διαφορετικά από τους αριθμούς, μπορούν να συμβάλουν στη μαθηματική συλλογιστική και κατανόηση των μαθητών, καθώς και στη γνώση της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας που παράγεται (π.χ. συναρτήσεις). Αν δηλαδή οι νοερές στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές με αριθμούς είναι προσαρμόσιμες και σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα.

Από την άλλη η έννοια της συνάρτησης είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες στην εκμάθηση των μαθηματικών (Dubinsky&Harel,1992), έχοντας βασική θέση στα προγράμματα σπουδών. Ωστόσο, θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι είναι μία από τις λιγότερο κατανοητές και δυσκολότερες έννοιες για μάθηση (Eisenberg,1992), όπου πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες και δημιουργούν παρανοήσεις. Πηγή δυσκολίας, αποτελεί η σύνθετη προσέγγιση της έννοιας. Μία από τις σημαντικές δυσκολίες στην προσέγγιση αυτή είναι οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης. Η δυσκολία των μαθητών προκύπτει από την ανάγκη σύνδεσης και μετάφρασης μεταξύ αυτών των πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Η επιλογή του θέματος βασίστηκε κυρίως στον προβληματισμό για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών και ειδικότερα της συνάρτησης, με τη συνεισφορά της νοερής διαχείρισης αυτών. Η σημασία της παρούσας εργασίας έγκειται στο γεγονός, ότι επιχειρείται να διερευνηθούν οι συμπεριφορές των μαθητών όταν διαχειρίζονται νοερά δραστηριότητες με συναρτήσεις και να αποτυπωθούν οι στρατηγικές που αναπτύσσουν κατά τη διαδικασία επίλυσης έργων σε νοερό γραφικό περιβάλλον. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι στο συγκεκριμένο πεδίο, από όσα γνωρίζουμε, δεν υπάρχει σημαντικός αριθμός ερευνών, για την ακρίβεια υπάρχει μία μόνο σχετική έρευνα (Proulx,2015), από την οποία όμως ακολουθήθηκε διαφορετική μεθοδολογική προσέγγιση.

1.2 Η συμβολή των αναμενόμενων αποτελεσμάτων στην κεκτημένη γνώση

Ενώ τα νοερά μαθηματικά, ως νοεροί υπολογισμοί έχουν εισαχθεί στα ΑΠΣ της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με σκοπό την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, απουσιάζουν παντελώς από τα ΑΠΣ της δευτεροβάθμιας. Ακόμη από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, διαπιστώθηκε ότι οι υπάρχουσες έρευνες για νοερά μαθηματικά με αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και ειδικότερα Λυκείου, είναι ελάχιστες και αναφέρονται στη νοερή επίλυση εξισώσεων, ενώ για την έννοια της συνάρτησης υπάρχει όπως προαναφέρθηκε, μία μόνο σχετική έρευνα. Η ανάπτυξη της αίσθησης της έννοιας της συνάρτησης σύμφωνα με τον Eisenberg (1992), θα πρέπει να είναι ο στόχος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σε αυτό το στόχο μπορεί να συμβάλλει θετικά η ανάπτυξη νοερών διαδικασιών που θα υποστηρίζουν το κύριο μέρος του μαθήματος. Η ανάπτυξη ενός νοερού χάρτη μιας μαθηματικής έννοιας, σύμφωνα με το DfES (2005), βοηθά τους μαθητές να διακρίνουν συνδέσεις και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

Θεωρήθηκε λοιπόν σημαντικό να διερευνηθεί η νοερή διαχείριση συναρτήσεων, ενώ τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας προσδοκούμε να αποτελέσουν οδηγό για τον καλύτερο σχεδιασμό της διδασκαλίας της έννοιας, ώστε αυτή να ενισχύει θετικά την ικανότητα των μαθητών να συνδέουν και να μεταφράζουν αυτές τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, με στόχο την καλύτερη εννοιολογική της κατανόηση.

1.3 Δομή της εργασίας

Η εργασία αποτελείται από τρία μέρη, την τοποθέτηση του προβλήματος, το βιβλιογραφικό μέρος που περιλαμβάνει τρία κεφάλαια και το ερευνητικό μέρος που περιλαμβάνει επίσης τρία κεφάλαια, ενώ ολοκληρώνεται με τη βιβλιογραφία και τα παραρτήματα με τον κατάλογο συντομογραφιών, πινάκων, εικόνων, το εργαλείο συλλογής των δεδομένων και τα στατιστικά.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται η τοποθέτηση του προβλήματος, όπου αναφέρονται η σημασία της έρευνας καθώς και η συμβολή των αποτελεσμάτων στην κεκτημένη γνώση.

Ακολουθεί το βιβλιογραφικό μέρος που περιλαμβάνει τα κεφάλαια δύο, τρία και τέσσερα. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το εννοιολογικό πλαίσιο, των νοερών υπολογισμών και γενικότερα των νοερών μαθηματικών, των νοερών μαθηματικών με αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών, καθώς και των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές σε αυτό το πλαίσιο.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και οριοθετούνται η μαθηματική δραστηριότητα και οι νοερές στρατηγικές σε ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης με βάση τη θεωρία γνωστικής ενεργοποίησης, μετατοπίζοντας τη σκέψη από την ερμηνεία του κόσμου στο να αναδείξουμε μια σημασία για τον κόσμο, από τη γνώση επίλυσης προβλήματος στη γνώση θέσπισης προβλήματος και από τη γνώση ως απόκτηση στη γνώση ως δράση και ως τρόπο ύπαρξης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια της συνάρτησης μέσα από μία σύντομη ιστορική της αναδρομή και ως μαθηματικό αντικείμενο στα ΠΣ της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με τις δυσκολίες και παρανοήσεις που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η σημασία των απεικονίσεων και των αναπαραστάσεων στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, ενώ τέλος αναφέρονται σχετικές έρευνες με το αντικείμενο της παρούσας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το ερευνητικό μέρος, όπου αρχικά αναφέρονται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας, ενώ ακολουθούν τα κεφάλαια πέντε, έξι και επτά. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ερευνητική μέθοδος, οι συμμετέχοντες, το ερευνητικό εργαλείο συλλογής των δεδομένων, του οποίου γίνεται λεπτομερής ανάλυση και η περιγραφή της διαδικασίας.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση των δεδομένων και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την πρωτογενή έρευνα και τις σημειώσεις του ερευνητή.

Στο έβδομο κεφάλαιο πραγματοποιείται συζήτηση των αποτελεσμάτων και σύνδεση αυτών με τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, ενώ παρατίθενται τα κύρια συμπεράσματα καθώς και προτάσεις για μελλοντικές έρευνες και πρακτική εφαρμογή.

Τέλος παρουσιάζεται η βιβλιογραφία και τα παραρτήματα με τους καταλόγους συντομογραφιών, εικόνων, πινάκων, το ερευνητικό εργαλείο και τα αποτελέσματα της ανάλυσης με το SPSS.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΚΑΝΩ ΝΟΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το γενικότερο εννοιολογικό πλαίσιο των νοερών υπολογισμών και νοερών μαθηματικών, καθώς και ζητήματα που σχετίζονται πιο εξειδικευμένα με την παρούσα εργασία, όπως νοερά μαθηματικά με αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών, καθώς και στρατηγικές που αναπτύσσονται κάνοντας νοερά μαθηματικά.

2.1 Νοεροί υπολογισμοί –Νοερά μαθηματικά

Οι νοεροί υπολογισμοί αποτελούν μια νέα πτυχή της διδασκαλίας των μαθηματικών. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς. Οι Wandt&Brown (1957), ορίζουν ως νοερό υπολογισμό τη διαδικασία υπολογισμού με ακρίβεια ενός αριθμητικού αποτελέσματος χωρίς τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μέσου υπολογισμού ή γραφής, ενώ ο Trafton (1978), τη χρήση μη τυπικών αλγορίθμων υπολογισμού για την εξαγωγή απαντήσεων χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Ο Reys (1984), δίνει έναν ορισμό για τον νοερό υπολογισμό, αλλά αναφέρεται και στην εκτίμηση, προσδιορίζοντας και τη σχέση των δύο υπολογισμών, λέγοντας ότι υπάρχουν δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του νοερού υπολογισμού. Παράγει μια ακριβή απάντηση και η διαδικασία πραγματοποιείται νοερά, χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων, όπως μολύβι και χαρτί, αλλά είναι και ένα σημαντικό στοιχείο της εκτίμησης, στις διαφορετικές αριθμητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση. Σύμφωνα με τη Sowder (1988), εκτίμηση είναι η διαδικασία μετατροπής αριθμών από ακριβείς σε προσεγγιστικούς και ο νοερός υπολογισμός με αυτούς τους αριθμούς, για να ληφθεί μια απάντηση η οποία είναι αρκετά κοντά στο αποτέλεσμα του ακριβούς υπολογισμού. Επομένως, νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία διεξαγωγής αριθμητικών πράξεων, για να επιτευχθεί είτε μια ακριβής απάντηση είτε μια κατά προσέγγιση απάντηση (Maclellan, 2001).

Για τον προσδιορισμό των νοερών υπολογισμών χρησιμοποιείται η έννοια των στρατηγικών (Thompson, 1999; Threlfall, 2002), καθώς και οι έννοιες ευελιξία και προσαρμοστικότητα των στρατηγικών (Anghileri, 2001), τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω. Η σημασία των νοερών στρατηγικών έγκειται στο διαχωρισμό της νοερής ανάκλησης και του νοερού υπολογισμού. Οι νοερές στρατηγικές μπορεί να χρειάζονται χαρτί και μολύβι για σύντομες σημειώσεις, για να υποστηρίζουν τη βραχύχρονη μνήμη των μαθητών, ως νοερό δηλαδή ερμηνεύεται το 'υπολογίζω με το κεφάλι' και όχι μόνο 'μέσα στο κεφάλι' (Thompson, 1999; Anghileri, 2001). Σύμφωνα με όλα αυτά μπορούμε να διατυπώσουμε τον παρακάτω ορισμό για το νοερό υπολογισμό. Νοερός υπολογισμός είναι ο υπολογισμός που πραγματοποιείται νοερά με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη.

Για να υποστηρίξει τη σημασία και τη σπουδαιότητα της διδασκαλίας των νοερών μαθηματικών με τους αριθμούς, ο Thompson (1999) υπογραμμίζει ότι οι περισσότεροι καθημερινοί υπολογισμοί στην ενήλικη ζωή γίνονται νοερώς, τα νοερά μαθηματικά συνεισφέρουν στην ανάπτυξη κάποιου, τόσο του αριθμητικού συστήματος όσο και της αίσθησης του αριθμού, εμβαθύνουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων ενός ατόμου και βελτιώνουν τους γραπτούς υπολογισμούς του. Επιπλέον ο Reys (1984) αναφέρει ότι προωθούν τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και ενθαρρύνουν τους μαθητές να βρίσκουν έξυπνους τρόπους για να χειρίζονται τους αριθμούς και ότι αποτελούν τη βάση για να αναπτυχθούν οι ικανότητες των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Αυτές οι πτυχές σύμφωνα με τον Threlfall (2002), τονίζουν το μη τοπικό χαρακτήρα των νοερών μαθηματικών με αριθμούς, όπου οι δεξιότητες που αναπτύσσονται επεκτείνονται σε ευρύτερες μαθηματικές ικανότητες και κατανόηση των εννοιών.

Πράγματι, μια σειρά από μελέτες (Butlen & Pézard, 1992,2000; Leutzinger κ.α.,1986; Boule, 2008; Murphy, 2004; Heirdsfielld & Cooper, 2004; Threlfall, 2002, 2009) δείχνουν αξιοσημείωτες επιδράσεις των πρακτικών των νοερών μαθηματικών με τους αριθμούς, στις ικανότητες των μαθητών για επίλυση προβλημάτων, στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, τις δεξιότητές τους σε χαρτί και μολύβι βασικών αλγορίθμων, τις στρατηγικές και τις δεξιότητές τους στον υπολογισμό. Η πρακτική των νοερών μαθηματικών με αριθμούς μπορεί να δώσει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν νέους τρόπους να κάνουν τα μαθηματικά και να επιλύσουν αριθμητικά προβλήματα που σπάνια παρέχει το παραδοσιακό πλαίσιο χαρτιού και μολυβιού, αλγόριθμους που είναι από μόνοι τους αποτελεσματικοί και δε δημιουργούν την ανάγκη να βγαίνουν έξω από αυτούς.

Ο όρος νοερά μαθηματικά (mental maths), είναι ένας γενικός όρος που χρησιμοποιείται συνήθως για να εκφράσει την ενότητα των νοερών υπολογισμών μέσα στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών. Για τον Thompson (2009), οι νοεροί υπολογισμοί αντιπροσωπεύουν ένα υποσύνολο νοερών μαθηματικών. Ωστόσο, δεν προσφέρει τον ορισμό των νοερών μαθηματικών. Οι ορισμοί σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς μπορούν να προσαρμοστούν σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα για να βοηθήσουν τον ορισμό των νοερών μαθηματικών. Με βάση τον Hazekamp (1986), ο οποίος προσφέρει ένα ορισμό που συνοψίζει αυτό που θεωρείται γενικά από τους νοερούς υπολογισμούς, τα νοερά μαθηματικά ορίζονται εδώ ως η επίλυση των μαθηματικών εργασιών μέσω διανοητικών διαδικασιών χωρίς χαρτί και μολύβι ή άλλα υπολογιστικά (υλικά) βοηθήματα.

Αυτό που προκαλεί το ενδιαφέρον είναι να γνωρίζουμε τι κάνουν τα νοερά μαθηματικά με μαθηματικά αντικείμενα διαφορετικά από τους αριθμούς, αν μπορούν δηλαδή να συμβάλουν στη μαθηματική λογική και κατανόηση των μαθητών, καθώς και στη γνώση της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας που παράγεται (π.χ., άλγεβρα, συναρτήσεις, τριγωνομετρία, μαθηματικά αντικείμενα σημαντικά για το σχολικό πρόγραμμα σπουδών). Πως η έννοια της αίσθησης του αριθμού μπορεί να επεκταθεί στην αίσθηση της διαδικασίας, στην αίσθηση των συμβόλων, στην αίσθηση των γραφημάτων ή άλλων μαθηματικών αντικειμένων (Caney & Watson, 2003; Rezat, 2011).

2.2 Νοερά μαθηματικά με αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών

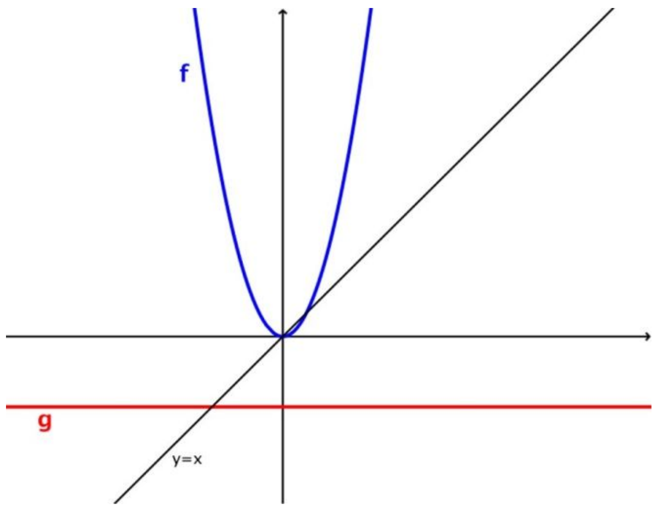
Το ερώτημα που τίθεται, όπως προαναφέραμε, είναι αν τα νοερά μαθηματικά μπορούν να συμβάλλουν στη βελτίωση της συλλογιστικής και κατανόησης των μαθητών σε μαθηματικά αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών, πως δηλαδή οι νοερές στρατηγικές είναι προσαρμόσιμες σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Υπάρχουν πολυάριθμες διαστάσεις στη βιβλιογραφία σχετικά με τις νοερές στρατηγικές με αριθμούς προσαρμόσιμες σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη μιας πιο καλής αίσθησης του τι εννοείται ως νοερά μαθηματικά (Boule, 2008; Butlen & Pézard, 1990, 1992, 2000, 2007; Kahane, 2003, οπ. αναφ. Proulx, 2015).

Μια διάσταση αφορά τους συλλογιστικούς υπολογισμούς που υπονοούν την επεξεργασία προσωπικών στρατηγικών, συχνά μη τυπικές και προσαρμοσμένες στο πρόβλημα, έναντι αυτοματοποιημένων υπολογισμών, οι οποίοι συνεπάγονται πρόσβαση σε άμεσο αποτέλεσμα με τη χρήση γνωστών γεγονότων ή απομνημονευμένων διαδικασιών, π.χ. η χρήση του τύπου $\mathrm{E} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ για τον υπολογισμό του εμβαδού ρόμβου ή ο χωρισμός του σε τρίγωνα.

Μια άλλη διάσταση αφορά τους προσεγγιστικούς υπολογισμούς, που βασίζεται στην εκτίμηση και την προσέγγιση για την απόκτηση μιας τάξης μεγέθους για την απάντηση σε σχέση με τη διανοητική εφαρμογή ενός αλγορίθμου ή ενός γεγονότος για να ληφθεί μια ακριβής απάντηση, π.χ. $\eta\mu 30^o = \frac{1}{2}$, έναντι της καθιέρωσης μιας οπτικής τάξης μεγέθους που εισέρχεται στο ότι η απέναντι πλευρά μιας γωνίας 30^o χωράει περίπου δύο φορές στην υποτείνουσα.

Μια τρίτη διάσταση αφορά τους γρήγορους υπολογισμούς, οι οποίοι απαιτούν γρήγορη εκτέλεση για να βρούμε την απάντηση. Συχνά έχει επικριθεί διότι θεωρείται ως άσκηση ταχύτητας επιζήμια για τη νοητική πράξη, μπορεί όμως να θεωρηθεί ότι συμβάλλει στην ανάπτυξη νέων μεθόδων επίλυσης διότι αναγκάζει το μαθητή, προσπαθώντας να είναι οικονομικός, να εγκαταλείψει μεθόδους που μπορεί να είναι πιο αργές (π.χ. διαδικασίες) ή λιγότερο αποτελεσματικές για την ολοκλήρωση του έργου (π.χ. καταμέτρηση ενός προς ένα). Στην περίπτωση της άλγεβρας, ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η ανάπτυξη μιας συνολικής ανάγνωσης μιας εξίσωσης όπως: $x + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + 6$, δίνοντας x=6, αποφεύγοντας πολυάριθμους αλγεβρικούς χειρισμούς για να απομονώσουμε το x (Bednarz & Janvier, 1992, οπ. αναφ. Proulx, 2015).

Στην περίπτωση των συναρτήσεων, που αποτελούν και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, οι νοεροί υπολογισμοί σχεδιάζονται ως διαδικασίες που χρησιμοποιούν σχέδια σε δισδιάστατο περιβάλλον και αποσκοπούν στην αποφυγή, εξ ολοκλήρου ή εν μέρει, σε αριθμητικούς υπολογισμούς για την επίλυση του προβλήματος, ενώ στην περίπτωση του νοερού μαθηματικού περιβάλλοντος δεν επιτρέπεται καμία προσφυγή σε οποιαδήποτε φυσική συσκευή ή υλική βοήθεια για την επίλυση του έργου. Αυτό σημαίνει ότι το έργο πρέπει να επιλυθεί σε σχέση με το ίδιο το γράφημα με οποιοδήποτε εννοιολογικό μέσο που διατίθεται στο πλαίσιο των νοερών μαθηματικών. Για παράδειγμα, μια τυπική εργασία θα ήταν να υπάρχουν δύο συναρτήσεις που εκπροσωπούνται στο ίδιο καρτεσιανό επίπεδο για τις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να τις προσθέσουν ή να τις αφαιρέσουν (Proulx, 2015).



Εικόνα1: Βρείτε την f(x)+g(x)

Η εστίαση στο νοερό πλαίσιο είναι σημαντική, αν σκεφτεί κανείς ότι τα περισσότερα από τα μαθηματικά που παράγονται (π.χ. στις τάξεις, από τους μαθηματικούς, από τους μηχανικούς στο χώρο εργασίας τους κλπ.) έχουν μια «διανοητική-νοερή» διάσταση. Ως εκ τούτου, η πρόθεση μας σε αυτή την εργασία δεν είναι να διακρίνουμε τι είναι νοερό και τι όχι, αλλά κυρίως να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές καθώς και τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητάς τους, όταν πρέπει να επιλύσουν καθήκοντα χωρίς προσφυγή σε χαρτί και μολύβι ή άλλα υλικά.

Οι προαναφερόμενες διαστάσεις περιγράφουν πιθανές καταχωρίσεις στρατηγικών για την επίλυση καθηκόντων νοερών μαθηματικών και αποτελούν έναν πρώτο προσανατολισμό για να δοθεί σημασία στις στρατηγικές που αναπτύσσονται από τους μαθητές όταν επιλύουν έργα με συναρτήσεις σε γραφικό περιβάλλον.

2.3 Οι στρατηγικές στα νοερά μαθηματικά

Οι νοερές στρατηγικές αποτελούν έναν ειδικό τύπο γνωστικών διαδικασιών. Γενικά θεωρούνται ως νοητικές προσπάθειες και διαδικασίες με κατευθυνόμενο στόχο, που υιοθετούνται για να ενισχύσουν την συμπεριφορά της μνήμης. Ο Threlfall (2002), ως στρατηγικές θεωρεί τις διαδικασίες κατά τις οποίες πραγματοποιείται μια ακολουθία μετασχηματισμών των αριθμών ενός προβλήματος, προκειμένου να βρεθεί μία λύση, ενώ οι Bjorkland & Douglas (1997, οπ. αναφ. Proulx, 2015), αναφέρουν ότι οι στρατηγικές χρησιμοποιούνται για την ανάκληση πληροφοριών από την μακρόχρονη μνήμη, συνυπάρχουν με άλλες γνωστικές λειτουργίες και επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες, αλλά το σίγουρο είναι ότι αναπτύσσονται, ενώ παρουσιάζουν διαφορές τόσο στον αριθμό όσο και στην αποτελεσματικότητά τους σε σχέση με την ηλικία των μαθητών. Ο Thompson (1999), προσδιορίζει τις στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς ως την εφαρμογή γνωστών ή γρήγορα υπολογίσιμων αριθμητικών γεγονότων, σε συνδυασμό με ειδικές ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, για να βρεθεί η λύση ενός υπολογισμού του οποίου η απάντηση δεν είναι γνωστή, ενώ επίσης αναφέρει ότι οι νοερές στρατηγικές ενσωματώνουν την ιδέα ότι οι μαθητές επιλέγουν τη στρατηγική που είναι η πιο κατάλληλη για τους συγκεκριμένους αριθμούς.

Η επιλογή της πιο κατάλληλης στρατηγικής σχετίζεται με τις έννοιες της ευελιξίας (flexibility) και προσαρμοστικότητας (adaptivity) των στρατηγικών, που συναντάμε στη βιβλιογραφία, όπου για κάποιους θεωρούνται συνώνυμοι (π.χ. Heinze κ.α., 2009), ενώ για άλλους διαχωρίζονται (π.χ. Selter, 2009). Για αυτούς που διαχωρίζουν τις δύο έννοιες ως ευελιξία θεωρείται η ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ των διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει, ενώ στον όρο προσαρμοστικότητα αποδίδεται η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί την πιο κατάλληλη στρατηγική που γνωρίζει, με γνώμονα τη γρήγορη και σωστή απάντηση. Όσον αφορά τον γενικό διπλό όρο ευελιξία/προσαρμοστικότητα, στην ευελιξία αποδίδεται η χρήση πολλαπλών στρατηγικών και στην προσαρμοστικότητα η επιλογή κατάλληλων στρατηγικών. Οι Verschaffel κ.α. (2009), ορίζουν ως ευέλικτη/προσαρμοστική επιλογή μιας στρατηγικής τη συνειδητή ή ασυνείδητη επιλογή και χρήση της πλέον κατάλληλης στρατηγικής λύσης σε μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση ή πρόβλημα, για ένα δεδομένο άτομο, σε ένα δεδομένο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Υποστηρίζουν επίσης ότι μια στρατηγική μπορεί να μην επιλέγεται υποχρεωτικά με ορθολογικό τρόπο ή να μην εκτελείται συνειδητά, δηλαδή μπορεί να επιλέγεται και να εκτελείται χωρίς την εμπλοκή οποιασδήποτε επίγνωσης, ενώ χρησιμοποιούν τον όρο ειδίκευση μέσω προσαρμογής (adaptive expertise) ως την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν διαδικασίες με νόημα ευέλικτα και δημιουργικά, σε αντίθεση με την ειδίκευση μέσω επανάληψης όπου απλώς ολοκληρώνουν τα καθήκοντά τους γρήγορα και σωστά χωρίς κατανόηση. Ακόμη επισημαίνουν ότι τρία διαφορετικά είδη μεταβλητών επηρεάζουν και προσδιορίζουν την ευελιξία/προσαρμοστικότητα, μεταβλητές της κατάστασης (task variables) ή των χαρακτηριστικών του προβλήματος, μεταβλητές του υποκειμένου (subject variables) ή της ταχύτητας και αποτελεσματικότητας και μεταβλητές του πλαισίου (context variables), που αφορούν το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο.

Οι πρόσφατες εργασίες έχουν αρχίσει να επικρίνουν την αντίληψη ότι οι μαθητές επιλέγουν από μια προηγουμένως ανεπτυγμένη εργαλειοθήκη προκαθορισμένων στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων στα νοερά μαθηματικά. Ο Threlfall (2002, 2009), για παράδειγμα, επιμένει στην οργανική εμφάνιση και την εμφάνιση στρατηγικών σε σχέση με τα καθήκοντα και τον μαθητή, ενώ ο Murphy (2004), εντοπίζει τις νοερές στρατηγικές ως ευέλικτες αναδυόμενες απαντήσεις, που προσαρμόζονται και συνδέονται με ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και κατάσταση. Οι Maturana & Varela (1992), βασιζόμενοι στη θεωρία της εξέλιξης του Δαρβίνου, προσφέρουν θεωρητικές απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικά με την εμφάνιση και τον χαρακτηρισμό των μαθηματικών στρατηγικών που δημιουργούνται για την επίλυση καθηκόντων, με βάση την ενεργοποίηση των γνωστικών λειτουργιών. Η ενεργοποίηση (enactivism), είναι ένας περιληπτικός όρος που δίνεται σε μια θεωρία της γνώσης την οποία θα αναλύσουμε παρακάτω, που βλέπει την ανθρώπινη γνώση και τη δημιουργία νοήματος ως διαδικασίες κατανοητές και θεωρημένες από μια βιολογική και εξελικτική σκοπιά. Με την υιοθέτηση μιας βιολογικής άποψης σχετικά με τη γνώση, η ενεργοποίηση θεωρεί τον οργανισμό αλληλεπιδρώντας μέσα σε ένα περιβάλλον. Έτσι, ένας μαθητής θεωρείται ως ένας οργανισμός που εξελίσσεται στο περιβάλλον του με ένα προσαρμοσμένο τρόπο. Οι στρατηγικές του ή οι μαθηματικές λύσεις του δεν είναι απαραίτητα βέλτιστες, αλλά είναι λειτουργικές, σε ένα πλαίσιο, σε ένα πρόβλημα, το οποίο εξελίσσεται με την επιρροή του. Με αυτή την έννοια, οι μαθηματικές στρατηγικές δεν θεωρούνται ως εκ των προτέρων (a priori), αλλά της στιγμής που εμφανίζονται: είναι το προϊόν της αλληλεπίδρασης σε πραγματικό χρόνο, της συνάντησης του μαθητή και του περιβάλλοντος του, άμεσα και συνεχώς επηρεασμένες και από τους δύο. Σε αυτή την προοπτική, ο μαθητής δεν επιλέγει από μια ομάδα προκαθορισμένων στρατηγικών για την επίλυση του έργου, αλλά ασχολείται με το πρόβλημα με συγκεκριμένο τρόπο και δημιουργεί μια στρατηγική προσαρμοσμένη στην εργασία. Όπως εξηγεί ο Threlfall (2002):

Ως αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης μεταξύ παρατήρησης και γνώσης, κάθε μέθοδος «λύσης» είναι κατά μία έννοια μοναδική σε αυτή την περίπτωση και εφευρέθηκε στο πλαίσιο του συγκεκριμένου υπολογισμού αν και σαφώς επηρεάζεται από την εμπειρία. Δεν διδάσκεται ως γενική προσέγγιση και στη συνέχεια εφαρμόζεται σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Η πορεία της λύσης μπορεί να ερμηνευθεί αργότερα ως αποτέλεσμα απόφασης ή επιλογής και να αποκαλείται «στρατηγική», αλλά οι ετικέτες είναι παραπλανητικές. Η «στρατηγική» (με την ολιστική έννοια του όλου δρόμου λύσης) δεν αποφασίζεται, προκύπτει.

Για τον Threlfall (2002), η εστίαση στην κατηγοριοποίηση και ταξινόμηση των στρατηγικών δεν προσφέρει επαρκή εικόνα για τις διαδικασίες στρατηγικών σε νοερά μαθηματικά πλαίσια, αντιθέτως μπορεί να είναι επιζήμια στη μάθηση των μαθητών, καθώς οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να επικεντρωθούν σε μια συγκεκριμένη ταξινόμηση στρατηγικών και να αποφύγουν ή επικεντρωθούν σε συγκεκριμένες προσεγγίσεις των προβλημάτων. Οι στρατηγικές ποικίλουν τόσο πολύ όσο και τα προβλήματα. Αποφάσεις σχετικά με τη ‘σωστή επιλογή’ ή ‘καλή μέθοδος’ για να επιλέξετε, δε μπορούν να φτάσουν σε μια εκ των προτέρων επίλυση του προβλήματος. Αυτό τον οδήγησαν σε μια εναλλακτική άποψη για τις στρατηγικές διαδικασίες, στην αλληλεπίδραση του προβλήματος και του λύτη. Οι Heirdsfield & Cooper (2004), αναφέρουν ότι για άλλους ερευνητές η φύση των στρατηγικών που επιλέγουν οι μαθητές επηρεάζεται από το ίδιο το πρόβλημα και τα χαρακτηριστικά του (αριθμοί, διδακτικές μεταβλητές, δομή του προβλήματος), ενώ για άλλους από τα χαρακτηριστικά των μαθητών (γνώσεις, προτιμήσεις, εμπειρία). Για τον Threlfall και οι δύο προσεγγίσεις είναι σημαντικές στις στρατηγικές διαδικασίες κατά την επίλυση νοερών μαθηματικών προβλημάτων, μετατοπίζοντας έτσι το επίκεντρο από τη γνώση των κατηγοριών επίλυσης προς την κατανόηση της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας από τους μαθητές.

Σύμφωνα με το Varela (1996, οπ. αναφ. Proulx, 2013), η επίλυση προβλημάτων υποδηλώνει ότι τα προβλήματα είναι ήδη στον κόσμο, που βρίσκονται "εκεί έξω" που περιμένουν να λυθούν, ανεξάρτητα από εμάς ως γνώστες, ενώ εξηγεί ότι προσδιορίζουμε τα προβλήματα που συναντάμε μέσα από το νόημα που δίνουμε για τον κόσμο στον οποίο ζούμε, που μας οδηγεί να αναγνωρίζουμε τα πράγματα με συγκεκριμένους τρόπους. Όπως αναφέρει, η πιο σημαντική ικανότητα όλων των ζωντανών γνωστικών είναι σε μεγάλο βαθμό, να θέτουμε τα σχετικά ερωτήματα που προκύπτουν σε κάθε στιγμή της ζωής μας. Δεν είναι προκαθορισμένα, αλλά θεσπίζονται, τα φέρνουμε μπροστά και τα κριτήρια συνάφειας προσανατολίζονται από την κοινή λογική μας, πάντοτε με βάση τα συμφραζόμενα. Τα προβλήματα που συναντάμε και οι ερωτήσεις που θέτουμε είναι μέρος του εαυτού μας, καθώς αποτελούν μέρος του περιβάλλοντος μας προέρχονται από την αλληλεπίδρασή μας με αυτό. Δεν ενεργούμε σε προϋπάρχουσες καταστάσεις, αλλά η διαρκής μας αλληλεπίδραση με το περιβάλλον δημιουργεί τις πιθανές καταστάσεις για τις οποίες μπορούμε να δράσουμε. Τα προβλήματα που λύνουμε, λοιπόν, είναι σιωπηρά συναφή για εμάς, γιατί επιτρέπουμε αυτά να είναι προβλήματα για εμάς, ενώ το περιβάλλον τα προκαλεί σε εμάς. Μερικά ζητήματα του περιβάλλοντος που θα προκαλούσαν κάποια στοιχεία σε ορισμένα άτομα δεν προκαλούν τα ίδια στοιχεία σε άλλα.

Όπως υποστηρίζει ο Proulx (2013), οι αντιδράσεις σε μια εργασία δεν ανήκουν ούτε στο μαθητή ούτε στο έργο αλλά αναδύονται από την αλληλεπίδραση του μαθητή με την εργασία, δημιουργώντας το έργο αυτό. Με βάση αυτή την προοπτική για τη διδασκαλία και τη μάθηση των νοερών μαθηματικών, δε μπορεί κανείς να υποθέσει ότι υπάρχουν εκπαιδευτικές ιδιότητες στα προσφερόμενα νοερά μαθηματικά καθήκοντα και ότι αυτά θα καθορίσουν τις αντιδράσεις των μαθητών. Οι στρατηγικές αναδύονται από την αλληλεπίδραση του μαθητή και του έργου, επηρεασμένες από την εργασία, αλλά καθορίζονται και από τις εμπειρίες του μαθητή σε νοερά μαθηματικά στην επίλυση παρόμοιων ή διαφορετικών προβλημάτων, στις συνήθειες επίλυσης του για παρόμοια ή διαφορετικά καθήκοντα, στις επιτυχίες του στα μαθηματικά με συγκεκριμένες προσεγγίσεις, στην κατανόηση των καθηκόντων και ούτω καθεξής. Σε αυτή την προοπτική, ο μαθητής δεν επιλέγει από μια ομάδα προκαθορισμένων στρατηγικών για την επίλυση του έργου, αλλά ασχολείται με το πρόβλημα με συγκεκριμένο τρόπο και δημιουργεί μια στρατηγική προσαρμοσμένη στην εργασία. Έτσι, οι μαθητές μετατρέπουν τα μαθηματικά καθήκοντα για τον εαυτό τους, καθιστώντας τα δικά τους, δημιουργώντας μια στρατηγική προσαρμοσμένη στο πρόβλημα που τους θέτουν, ενώ οι αντιδράσεις τους συχνά διαφέρουν από τις προθέσεις του σχεδιαστή.

Η θεωρία της ενεργοποίησης γνωστικών λειτουργιών που προαναφέραμε, μέσω της διάκρισης ανάμεσα στην επίλυση και την θέσπιση προβλημάτων, προσφέρει μια δυναμική προοπτική σε ζητήματα εμφάνισης και προσαρμοστικότητας των στρατηγικών σε περιβάλλοντα νοερών μαθηματικών, αποφεύγοντας τις ιδέες της κατοχής, απόκτησης, επιλογής, ύπαρξης, χρησιμοποιώντας ιδέες σχετικά με την εμφάνιση, τη ροή, την κίνηση, τις αλληλεπιδράσεις, τις δράσεις και ούτω καθεξής. Με βάση αυτή την προοπτική προσφέρονται τρόποι κατανόησης για το τι συμβαίνει στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων σε νοερά μαθηματικά πλαίσια.

Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι έννοιες των νοερών υπολογισμών και γενικότερα των νοερών μαθηματικών, ως μια νέα πτυχή της διδασκαλίας των μαθηματικών. Όπως διαπιστώθηκε από τη βιβλιογραφία ο νοερός υπολογισμός είναι ένας υπολογισμός που πραγματοποιείται νοερά με τη χρήση στρατηγικών, παράγει μια ακριβή απάντηση, ενώ πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη. Οι θετικές επιδράσεις των νοερών υπολογισμών στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και στη γενικότερη βελτίωση των δεξιοτήτων των μαθητών στη διαχείριση μαθηματικών προβλημάτων, οδήγησε στον προβληματισμό αν οι νοερές στρατηγικές είναι προσαρμόσιμες και σε μαθηματικά αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών. Διαπιστώθηκαν διάφορες διαστάσεις που μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη των νοερών μαθηματικών με άλλα αντικείμενα, όπως για παράδειγμα στην άλγεβρα (γρήγορη επίλυση εξίσωσης μέσω μιας συνολικής ανάγνωσης της χωρίς αλγεβρικούς χειρισμούς), στη γεωμετρία (μέσω συλλογιστικών έναντι αυτοματοποιημένων υπολογισμών για τον υπολογισμό εμβαδών), στην τριγωνομετρία (μέσω των προσεγγιστικών υπολογισμών έναντι της εφαρμογής ενός τύπου) και στην ανάλυση (μέσω πράξεων συναρτήσεων δοσμένων σε γραφικό περιβάλλον). Επίσης διαπιστώθηκε ότι οι νοερές στρατηγικές είναι γνωστικές λειτουργίες που αναπτύσσονται, ενώ η αποτελεσματικότητα και ο αριθμός τους διαφέρει σε σχέση με την ηλικία των μαθητών, όπως διαφέρει και η ευελιξία (χρήση διαφορετικών) και η προσαρμοστικότητα (χρήση των πιο κατάλληλων) τους. Η ευελιξία-προσαρμοστικότητα των στρατηγικών επηρεάζεται τόσο από τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, όσο και από τα χαρακτηριστικά των μαθητών και το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο. Με βάση τις σύγχρονες αντιλήψεις ο μαθητής δεν επιλέγει από μια ομάδα προκαθορισμένων στρατηγικών για την επίλυση του έργου, αλλά ασχολείται με το πρόβλημα με συγκεκριμένο τρόπο και δημιουργεί μια στρατηγική προσαρμοσμένη στην εργασία, ενώ οι αντιδράσεις του σε μια εργασία συχνά διαφέρουν από τις προθέσεις του σχεδιαστή. Τέλος, η προοπτική μιας θεωρητικής βάσης σε ζητήματα εμφάνισης και προσαρμοστικότητας των στρατηγικών στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων σε νοερά μαθηματικά πλαίσια με βάση αυτές τις αντιλήψεις, προσφέρεται από τη θεωρία της ενεργοποίησης γνωστικών λειτουργιών, που θα αναλύσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο:Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία της γνωστικής ενεργοποίησης, ως μια βιολογική επέκταση του κονστρουκτιβισμού, ενώ οριοθετούνται η μαθηματική δραστηριότητα και οι νοερές στρατηγικές σε ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης με βάση τη θεωρία ενεργοποίησης, μετατοπίζοντας τη σκέψη από την ερμηνεία του κόσμου στο να αναδείξουμε μια σημασία για τον κόσμο, από τη γνώση επίλυσης προβλήματος στη γνώση θέσπισης προβλήματος και από τη γνώση ως απόκτηση στη γνώση ως δράση και ως τρόπο ύπαρξης.

3.1 Η βιολογική προοπτική του εποικοδομισμού (constructivism) ως μια γνωστική θεωρία (enactivism)

Ο εποικοδομητισμός ή κονστρουκτιβισμός (constructivism) επηρέασε και εξακολουθεί να επηρεάζει την έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης. Στην προσπάθεια όμως κατανόησης της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών έχει αναφερθεί σε ένα μέρος εργασιών ο όρος ‘ενεργοποίηση’ ή ενεργοποιητής (enactivism-enactivist), (Maturana & Varela, 1992; Varela, 1996; Thompson,1991; Davis 1995; Reid ,1996; Kieren κ.α., 2009; Proulx κ.α., 2009; Proulx ,2013). Ο όρος αναφέρεται στη γνώση και τη δημιουργία νοήματος από μία βιολογική και εξελικτική σκοπιά. Με την υιοθέτηση μιας βιολογικής άποψης για τη γνώση, η ‘ενεργοποίηση’ θεωρεί ότι ο οργανισμός αλληλεπιδρά σε ένα περιβάλλον. Μια βιολογική προοπτική έχει συχνά υιοθετηθεί ως μια μεταφορά για τη σκέψη για τη γνώση και τη μάθηση, για παράδειγμα με ιδέες προσαρμογής και εξέλιξης. Με βάση αυτή την οπτική, ένας μαθητής θεωρείται ως ένας οργανισμός που εξελίσσεται μαζί και μέσα στο περιβάλλον του με έναν προσαρμοσμένο τρόπο. Οι στρατηγικές ή οι μαθηματικές λύσεις του δεν είναι απαραίτητα οι βέλτιστες, αλλά είναι λειτουργικές σε ένα πλαίσιο ή ένα πρόβλημα, εξελίσσονται υπό την επιρροή του, είναι σε πραγματικό χρόνο το προϊόν της αλληλεπίδρασης, της συνάντησης του με το περιβάλλον, ενώ επηρεάζονται άμεσα και συνεχώς και από τους δύο.

Μολονότι δεν διαχωρίζεται απολύτως από τον κονστρουκτιβισμό, προσφέρει σημαντικές ιδέες σχετικά με τη μάθηση, τη γνώση και την εκπαίδευση (Proulx κ.α., 2009). Στην προσπάθεια να διακρίνουμε διαφορές ανάμεσα στις δύο θεωρίες συναντάμε σύμφωνα με τον Proulx (2013), αρκετές δυσκολίες. Και οι δύο θεωρίες έχουν παρόμοια προέλευση, την μη αντικειμενική σκέψη, έτσι είναι δύσκολο να ισχυριστούμε ποιος ερευνητής αναγνωρίζεται με τη μία ή την άλλη θεωρία. Επίσης καμία θεωρία δεν έχει οριστεί απόλυτα. Για παράδειγμα ο κονστρουκτιβισμός έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία με διάφορες εκδοχές (κοινωνικός, ριζοσπαστικός, πραγματικός κ.α.), ενώ η 'ενεργοποίηση' δεν έχει καθιερωθεί ποτέ ως μια ειδική άποψη στην εκπαιδευτική έρευνα. Ακόμη και οι δύο θεωρητικοί Maturana και Varela που επηρέασαν με το έργο τους τη θεωρία της ενεργοποίησης, δε χρησιμοποίησαν ρητά τον όρο. Ο όρος χρησιμοποιείται ρητά από τους, Davis (1995) και Reid (1996). Ακόμη, υπάρχουν σημεία στις δύο θεωρίες, στα οποία διασταυρώνονται και επικαλύπτονται, όπως για παράδειγμα οι έννοιες βιωσιμότητα, εμπειρία, αλήθεια.

Σύμφωνα με τους Proulx κ.α. (2013), η θεωρία της 'ενεργοποίησης' προσφέρει έναν τρόπο συνεχούς ανάπτυξης μιας μη αντικειμενικής άποψης για τον κόσμο και μιας άποψης των ζητημάτων της γνώσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν παραγωγικά, ειδικότερα στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Μελετώντας τη μάθηση, τη γνώση, τη διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών μέσα από τη θεωρία της ενεργοποίησης, διέκριναν τρία βασικά θέματα που διευκρινίζουν την απόσταση ανάμεσα στις δύο θεωρίες, τις ερμηνείες και την εμφάνιση της σημασίας του κόσμου, την επίλυση και τη θέσπιση του προβλήματος και τη γνώση ως απόκτηση και τη γνώση ως ύπαρξη.

3.2 Η μαθηματική δραστηριότητα και οι αναδυόμενες νοερές στρατηγικές στο πλαίσιο της θεωρίας γνωστικής ενεργοποίησης

Μια βασική έννοια στην ερμηνεία της πραγματικότητας είναι η βιωσιμότητα. Στην περίπτωση της θεωρίας 'ενεργοποίησης' η γνώση μιας κατάστασης δεν αφορά τόσο τις αμετάβλητες μέσα στο περιβάλλον, αλλά όσο το συντονισμό του γνώστη με το περιβάλλον, όπου συνεξελίσσονται σε μια συνεχή διαδικασία δημιουργίας. Με βάση αυτή την προοπτική η βιωσιμότητα των ερμηνειών δίνει τον τρόπο με τον οποίο κάποιος φέρνει μπροστά κάθε στιγμή τη δική του σημασία για τον κόσμο (Proulx κ.α.,2013). Έτσι, το περιβάλλον δεν είναι στατικό ούτε ερμηνεύεται από τις κανονικότητές του, αλλά ορίζεται μέσα από τη συνεχή αλληλεπίδραση και μετασχηματίζεται καθώς οι μαθητές εργάζονται με αντικείμενα που αφορούν τη δραστηριότητά τους. Οι μαθητές λοιπόν δεν ερμηνεύουν τον κόσμο με πολλαπλούς τρόπους, αλλά φέρνουν μπροστά διαφορετικές και διακριτές σημασίες για τον κόσμο με βάση τις γνώσεις τους. Οι Maturana & Varela (1992), δίνουν μια εξήγηση παίρνοντας ως παράδειγμα τα μέλη μιας οικογένειας. Οι διαφορετικές απόψεις που παρουσιάζονται από κάθε μέλος υπονοούν ότι υπάρχουν διαφορετικές απόψεις του ίδιου συστήματος. Επομένως δεν υπάρχει μια απόλυτα αντικειμενική οικογένεια, αλλά για κάθε μέλος υπάρχει μια διαφορετική οικογένεια που είναι απολύτως έγκυρη. Σε αυτή τη βάση δεν τίθεται ζήτημα ένας μαθητής να ερμηνεύσει κάτι ή να δώσει νόημα σε μια κατάσταση, επειδή συνδέεται με αυτή την κατάσταση, όπου και οι δύο συνορίζονται μέσα από αυτή τη σχέση. Ο μαθητής θέτει αυτό που είναι σχετικό με τον τομέα του και δημιουργεί αυτό που ο παρατηρητής διακρίνει ως απάντηση στην προτροπή. Έτσι οι μαθητές δρουν με πολλαπλές εκδοχές φέρνοντας μπροστά τους τον κόσμο στον οποίο δίνουν τη δική τους σημασία, παρά ερμηνεύουν τον κόσμο με πολλαπλούς τρόπους.

Σύμφωνα με το Varela (1996), αντιμετωπίζουμε το περιβάλλον και ασχολούμαστε με αυτό με τρόπους που μπορούμε. Δεν αντιμετωπίζουμε τα προβλήματα σε ένα αντικειμενικό περιβάλλον ανεξάρτητα από τις ενέργειες μας, αλλά τα εξειδικεύουμε, τα φέρνουμε μπροστά θέτοντάς τα μέσα από το νόημα που δίνουμε στον κόσμο που ζούμε. Όπως προαναφέραμε δε δρούμε σε προϋπάρχουσες καταστάσεις, αλλά η συνύπαρξη μας και η συνεχής αλληλεπίδραση μας με το περιβάλλον, δημιουργεί, επιτρέπει και εξειδικεύει τις πιθανές καταστάσεις για τις οποίες πρέπει να ενεργήσουμε. Τα προβλήματα που λύνουμε είναι σχετικά με εμάς, επειδή εμείς επιτρέπουμε να είναι προβλήματα για εμάς καθώς το περιβάλλον μας τα 'πυροδοτεί'. Μερικά θέματα του περιβάλλοντος που θα ενεργοποιήσουν κάποια στοιχεία για κάποια άτομα δε θα ενεργοποιήσουν τα ίδια στοιχεία σε άλλα άτομα. Εξετάζοντας αυτή την προοπτική μέσα από τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, δε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι εκπαιδευτικές ιδιότητες που παρουσιάζονται σε ένα προσφερόμενο μαθηματικό πρόβλημα, είναι αυτές που θα καθορίσουν τις αντιδράσεις των μαθητών (Rene de Cotret, 1999, οπ. αναφ. Proulx,2013).

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων, εμφανίζονται και ενεργοποιούνται από την αλληλεπίδραση τους με το πρόβλημα, επηρεάζονται από αυτό αλλά καθορίζονται από τις εμπειρίες, τις συνήθειες και τις επιτυχίες τους σε παρόμοια ή διαφορετικά προβλήματα. Έτσι οι μαθητές μετασχηματίζουν τις προτροπές σε μαθηματικά για αυτούς προβλήματα, ενεργοποιώντας τις γνώσεις τους για τη δημιουργία στρατηγικών προσαρμοσμένων στο πρόβλημα που τους θέτουν. Υπό αυτή την έννοια, η θέσπιση καθώς και η επίλυση ενός προβλήματος εμφανίζονται, δεν είναι προκαθορισμένα αλλά παράγονται μέσα από την αλληλεπίδραση με τα προβλήματα.

Σύμφωνα με τους Maturana & Varela (1992), η γνώση δεν είναι κάτι που κατέχει κάποιος, η γνώση είναι η κατάλληλη δράση σε έναν τομέα ύπαρξης, η γνώση είναι ένας τρόπος ύπαρξης, η γνώση δεν έχει περιεχόμενο, επειδή η γνώση υπάρχει. Για παράδειγμα αν πω ότι είμαι μουσικός, εννοώ ότι ξέρω για τη μουσική, ότι μπορώ να πω κάτι για ένα πράγμα που είναι εκεί, ανεξάρτητο από μένα, που είναι η μουσική, γιατί αντιλαμβάνομαι τη γνώση σαν να γνωρίζω κάτι. Σε αυτή την προοπτική το να γνωρίζω μαθηματικά είναι αδιαχώριστο από το να κάνω μαθηματικά. Οι πράξεις είναι γνώση και η γνώση είναι πράξεις. Έτσι, οι στρατηγικές που τίθενται από τους μαθητές, οι προσαρμοσμένες απαντήσεις τους, δεν πρέπει να θεωρηθούν ως απεικόνιση της γνώσης τους, αλλά είναι η γνώση τους, δηλαδή η διαδικασία της γνώσης και το αποτέλεσμά της είναι ένα και το αυτό (Kieren κ.α., 2009). Η εμπλοκή των μαθητών με προβλήματα, καθώς τα θέτουν για επίλυση, δεν είναι μια απεικόνιση του πώς γνωρίζουν, αλλά είναι τι γνωρίζουν, πώς είναι, και ποιοι είναι.

Στη βάση της θεωρίας ενεργοποίησης η κατάλληλη δράση αναφέρεται στην αλληλεπίδραση και όχι σε κάτι αντικειμενικά σταθερό. Είναι η ενέργεια της παρατήρησης, όπου ο παρατηρητής κρίνει με βάση τα δικά του κριτήρια. Η δράση και η αλληλεπίδραση δεν λαμβάνονται όπως είναι, αλλά ως πράξη διάκρισης που καθορίζει αυτό το αντικείμενο παρατήρησης. Στην προσπάθεια μας να εκτιμήσουμε τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών, η δραστηριότητα αποδεικνύεται ως παρατήρηση, οι έννοιες γίνονται από εμάς τους παρατηρητές και είναι αυτό που εκχωρούμε ή επιβάλλουμε στα παρατηρούμενα. Όταν λοιπόν, παρατηρώντας τους μαθητές να εμπλέκονται με μαθηματικά αντικείμενα, πούμε ότι ο μαθητής γνωρίζει μαθηματικά, αυτό που βλέπουμε είναι ‘μαθηματικούς’ (Proulx κ.α., 2013). Αν θεωρήσουμε τη μαθηματική γνώση ως κατοχή, ως κάτι που μπορεί να έχει κάποιος, τότε τα μαθηματικά μπορούν να αποκτηθούν, να αποθηκευτούν, να προσπελαθούν και να χρησιμοποιηθούν. Αν όμως δούμε τη γνώση ως κάτι που κάνει κάποιος, ως κάτι που ενεργοποιεί τότε θα δούμε τους μαθητές ως ‘μαθηματικούς’. Αν λοιπόν το να γνωρίζω μαθηματικά είναι το να είμαι μαθηματικός, τότε εμείς ως παρατηρητές διακρίνουμε τους μαθητές, ως αυτούς που φέρνουν μπροστά έναν κόσμο μαθηματικής σημασίας και ως ‘μαθηματικούς’.

Ο κόσμος δεν είναι κάτι που μας δίνεται, αλλά κάτι που ασχολούμαστε μέσω της κίνησης, της επαφής, της αναπνοής, της τροφής. Αυτό είναι η γνώση μέσω της ενεργοποίησης, αφού αυτή δηλώνει αυτό που αναδύεται με συγκεκριμένο χειρισμό.

Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας γνωστικής ενεργοποίησης στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Όπως προέκυψε από τη βιβλιογραφική επισκόπηση, διέπεται από τις ίδιες αρχές με τον κονστρουκτιβισμό, εντούτοις μπορεί να θεωρηθεί μία βιολογική και εξελικτική άποψη του, μεταφέροντας τη σκέψη για τη γνώση και τη μάθηση στις ιδέες της προσαρμογής και εξέλιξης. Εστιάζοντας στις έννοιες της εμφάνισης, της προσαρμογής, στο αδιαχώριστο και στο συνπροσδιορισμό μεταξύ μαθητών και περιβάλλοντος διαπιστώθηκε ότι η μαθηματική γνώση είναι περισσότερο μια δυναμική διαδικασία που αναδύεται μέσα από τη δράση και αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, παρά μια νοερή αναπαράσταση που τα άτομα κατασκευάζουν στο μυαλό τους για εξωτερικά φαινόμενα που βρίσκονται σε αυτό.

Στην προοπτική της θεωρίας γνωστικής ενεργοποίησης η βιωσιμότητα των ερμηνειών δείχνει τον τρόπο με τον οποίο κάποιος αναδεικνύει κάθε στιγμή τη δική του σημασία για τον κόσμο σε συντονισμό με το περιβάλλον. Έτσι οι μαθητές δεν ερμηνεύουν τον κόσμο με πολλαπλούς τρόπους, αλλά δρουν πολλαπλά φέρνοντας μπροστά τους τον κόσμο με τη δική τους σημασία. Επίσης η γνώση της επίλυσης ενός προβλήματος σημαίνει γνώση στο να θέσω το πρόβλημα για μένα, ώστε ενεργοποιώντας τις γνώσεις, τις εμπειρίες, τις συνήθεις μου να δημιουργήσω στρατηγικές προσαρμοσμένες σε αυτό. Τέλος η γνώση δεν είναι κάτι που έχει κάποιος, που μπορεί δηλαδή να αποκτήσει, αλλά η κατάλληλη δράση σε έναν τομέα ύπαρξης που μπορεί να παρατηρηθεί από κάποιον, μέσω της αλληλεπίδρασης του με το περιβάλλον. Η εμπλοκή δηλαδή των μαθητών με προβλήματα, καθώς τα θέτουν για επίλυση, δεν είναι μια απεικόνιση του πώς γνωρίζουν, αλλά είναι τι γνωρίζουν και η γνώση αυτή ενεργοποιείται με τη συνάντηση τους με το περιβάλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται έννοιες σχετικά με τη συνάρτηση, η νοερή διαχείριση της οποίας αποτελεί αντικείμενο της παρούσας έρευνας. Αρχικά γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή της συνάρτησης, στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια ως μαθηματικό αντικείμενο στα προγράμματα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθώς και οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας. Έπειτα παρουσιάζουμε τη σημασία των απεικονίσεων και των αναπαραστάσεων στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, ενώ τέλος γίνεται αναφορά σε άλλες έρευνες σχετικές με τη νοερή διαχείριση των συναρτήσεων.

4.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια από τις πιο σημαντικές στα προγράμματα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τον Eisenberg (1992), όπως η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι ο στόχος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η ανάπτυξη της αίσθησης της συνάρτησης θα πρέπει να είναι ο στόχος της δευτεροβάθμιας. Η έννοια της συνάρτησης είναι απαραίτητη στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών καθώς σύμφωνα με τους Dubinsky & Harel (1992) είναι το κλειδί της διαφοροποίησης ανάμεσα στα κλασσικά και τα μοντέρνα μαθηματικά, ενώ η κατανόηση της έννοιας είναι προϋπόθεση για την κατανόηση πολλών άλλων μαθηματικών εννοιών.

Οι συναρτήσεις είναι στενά συνδεδεμένες με την καθημερινή ζωή του ανθρώπου. Μεταβολές που εμφανίζονται στην κοινωνία, στην οικονομία, στη φύση εκφράζονται συναρτησιακά αφού συνδέουν με κάποιο τρόπο δύο ή περισσότερα μεγέθη, που η μεταβολή του ενός έχει σαν άμεση συνέπεια τη μεταβολή του άλλου (Γαγάτσης κ.α. 2001). Για παράδειγμα, η υγρασία είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας, η αρτηριακή πίεση ενός ατόμου είναι συνάρτηση της ηλικίας, η απόσταση που διανύει ένα κινητό είναι συνάρτηση του χρόνου και της ταχύτητας, το κέρδος μιας επιχείρησης είναι συνάρτηση της ποσότητας του παραγόμενου προϊόντος. Σαν έκφραση μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες, υπήρχε με τη μορφή αστρονομικών πινάκων από την εποχή των Βαβυλώνιων (2000 π.Χ.) οι οποίοι χρησιμοποιούσαν πίνακες με συναρτήσεις δύο διαφορετικών τύπων, κλιμακωτές συναρτήσεις (stepfunction) *και* γραμμικές -ζίγκ-ζάγκ-συναρτήσεις (linear-zigzag-function) για τη σύνταξη αστρονομικών εφημερίδων σχετικά με τον ήλιο, τη σελήνη και τους πλανήτες (Katz, 2013). Η έννοια της συνάρτηση στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς είναι στενά συνδεμένη με την ανάγκη για μέτρηση, του λόγου και της αναλογίας, σχέσεις που σήμερα θεωρούμε συναρησιακές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα συναρτήσεων αποτελούν οι πίνακες χορδών της «Αλμαγέστης», του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου (128-168 μ.Χ.). Η μαθηματική σκέψη των Ελλήνων δε δημιούργησε τη γενική έννοια της συνάρτησης ή της μεταβλητής. Η έννοια υπονοείται ως σχέση μεταξύ δύο συνόλων σταθερών ποσοτήτων.

Κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της έννοιας, έπαιξε το $14^{ο}$ αιώνα η μελέτη της κίνησης, και ιδιαίτερα η επιταχυνόμενη κίνηση μέσα από τα μαθηματικά και την ποσοτική διατύπωση των νόμων της κίνησης. Ο Oresme αναπαράστησε την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μία γραφική παράσταση, η οποία ήταν η πρώτη γραφική αναπαράσταση ενός νόμου της φυσικής, ουσιαστικά ανέπτυξε την ιδέα της αναπαράστασης της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ ταχύτητας και χρόνου από μία καμπύλη και έδωσε την ιδέα για την ανακάλυψη της αναλυτικής γεωμετρίας (Katz, 2013, σ.365-370). Μέχρι το $17^{ο}$ αιώνα η έννοια της συνάρτησης αναπτύχθηκε κυρίως μέσα από την μελέτη των τριγωνομετρικών και των λογαριθμικών συναρτήσεων καθώς επίσης από την ανάπτυξη της συμβολικής άλγεβρας από τον Viette (Katz, 2013, σ.424-432). Η μελέτη της κίνησης από τους Kepler και Galilei, με τη χρήση μεταβλητών μεγεθών για την περιγραφή διαφορετικών κινήσεων και η χρήση από τον Descartes αλγεβρικού συμβολισμού σε γεωμετρικά προβλήματα, οδήγησε στην αναλυτική έκφραση της έννοιας.

Ο όρος "συνάρτηση" εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673, σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο "Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων" (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus), στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μιας καμπύλης όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτόμενων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης (Kleiner, 1989). Έκτοτε δόθηκαν διάφοροι ορισμοί για την έννοια της συνάρτησης, όπου ο καθένας πρόσθετε διάφορά στοιχεία στην εξέλιξη της. Ο Bernoulli ήταν ο πρώτος που όρισε τη συνάρτηση ως αναλυτική έκφραση μιας ποσότητας που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από μια μεταβλητή και κάποιες σταθερές, ενώ ο Euler στο δεύτερο ορισμό του περιλαμβάνει και συναρτήσεις που δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν αναλυτικά και χρησιμοποιεί για πρώτη φορά το συμβολισμό y=f(x). Ο Dirichlet το 1829 με τον ορισμό του απαλλάσσει τη συνάρτηση από αναφορές στον χρόνο ο οποίος υπεισέρχονταν στην έννοια μέσω της αναφοράς στη μεταβλητή, εντάσσει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ως οργανικό της κομμάτι, ενώ για πρώτη φορά εμφανίζεται το μονοσήμαντο της τιμής του y κάνοντας έτσι σαφή το διαχωρισμό μεταξύ της εξίσωσης μίας καμπύλης και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (Katz, 2013, σ.823-824).

Εξετάζοντας το έργο των μαθηματικών του δεύτερου μισού του 19ου αιώνα, βλέπουμε ότι το νόημα, ο ιδιαίτερος χαρακτήρας ή η «φυσιογνωμία» της έννοιας της συνάρτησης προέκυψε από τη γεωμετρία και τη νεότερη (ή συμβολική) άλγεβρα και ήταν ουσιαστικά μια γενίκευση της έννοιας του μετασχηματισμού. Ο Dedekind δε χρησιμοποιεί ρητά τη λέξη «συνάρτηση», αλλά στη θέση της βάζει τη λέξη "μετασχηματισμός" ή καλύτερα τον όρο «μετασχηματισμός ενός συστήματος S», που βασικά σημαίνει την πιο γενική έννοια συνάρτησης (Katz, 2013 σ.822). Η ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων τον 20^{ο} αιώνα έθεσε τις προϋποθέσεις για το σύγχρονο ορισμό της έννοιας. Το 1917 ο Καραθεωδορή όρισε τη συνάρτηση ως κανόνα αντιστοίχισης από ένα σύνολο Α σε σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ το 1939 οι Bourbaki μετά τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους το 1921 από τον Kuratowski ως σύνολο «απαλλαγμένο από τη χρονική διάταξη του πρώτου στοιχείου από το δεύτερο στοιχείο [(a,b)={a,{a,b}], όρισαν τη συνάρτηση ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

Η έννοια της συνάρτησης αρχικά ήταν σε αντιστοιχία με τις ανάγκες της καθημερινής ζωής ή των προβλημάτων της φυσικής. Έντονος ήταν ο διαδικαστικός χαρακτήρας της συνάρτησης συνδεδεμένος με την αλλαγή σε σχέση με τον χρόνο. Οι αρχικοί ορισμοί της έννοιας ήταν περισσότερο προσανατολισμένοι προς την σχέση εξάρτησης ενώ αργότερα εμφανίστηκε η απαίτηση για το μονοσήμαντο της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής.

4.2 Η συνάρτηση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Η ιστορική συμπύκνωση της έννοιας της συνάρτησης στο πλαίσιο των προγραμμάτων σπουδών παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες κατά τη διδακτική της μεταφορά. Στα διδακτικά εγχειρίδια παραθέτονται κατά συγκεχυμένο τρόπο οι διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις που οδήγησαν στο νόημα της συνάρτησης, μέσα από τη μακρόχρονη ιστορική της εξέλιξη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να θεωρείται από πολλούς ερευνητές ότι είναι μία από τις λιγότερο κατανοητές και δυσκολότερες έννοιες για μάθηση, όπου πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες και δημιουργούν παρανοήσεις. Οι μαθητές παγιδεύονται σε μια σειρά εμποδίων που αποτελούν γενικεύσεις των αποσπασματικών σχολικών εμπειριών, που συγκροτούν ένα αόριστο συνονθύλευμα αποσπασματικών πληροφοριών, απομνημονεύσεων, διάσπαρτων συνιστωσών, όπως τύποι, γραφήματα, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων, ένα αόριστο δηλαδή σχήμα συνειρμών (Sierpinska, 1992).

Οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης έχουν απασχολήσει την ερευνητική κοινότητα τις τελευταίες δεκαετίες. Το ενδιαφέρον προκλήθηκε από το γεγονός ότι παρόλο που οι μαθητές/τριες διδάσκονται την έννοια της συνάρτησης από την αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, διατηρούν παρανοήσεις και συχνά οδηγούνται σε λάθη στις μεγαλύτερες τάξεις του λυκείου, αλλά ακόμη και ως φοιτητές μαθηματικών τμημάτων. Οι έρευνες στράφηκαν λοιπόν στην ανάλυση και την αξιολόγηση των παρανοήσεων και δυσκολιών, καθώς όπως φάνηκε η διαδικασία αυτή είναι ένας ισχυρός μηχανισμός για την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Όπως προκύπτει από τα συμπεράσματα των ερευνών οι παρανοήσεις και δυσκολίες στην έννοια της συνάρτησης αναφέρονται:

- στη βασική έννοια και τα στοιχεία της
- σε άλλες εμπλεκόμενες έννοιες που εμπεριέχονται
- στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης

Πηγή δυσκολίας, αποτελεί η σύνθετη προσέγγιση της έννοιας. Μία από τις σημαντικές δυσκολίες στην προσέγγιση αυτή είναι οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης. Μορφές αναπαράστασης της είναι: λεκτικά, πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση. Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για συγκεκριμένες πτυχές της έννοιας αλλά δεν την περιγράφει πλήρως (Kaldrimidou & Ikonomou, 1992). Η δυσκολία των μαθητών προκύπτει από την ανάγκη σύνδεσης και μετάφρασης μεταξύ αυτών των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η κατάκτηση της έννοιας απαιτεί οι διαφορετικές αναπαραστάσεις να αντιμετωπίζονται ως διαφορετικές όψεις του ίδιου αντικειμένου. Η συνάρτηση όμως πέρα από τις διαφορετικές όψεις εμπεριέχει υπό έννοιες όπως πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, τιμή της συνάρτησης, μεταβλητές (ανεξάρτητη και εξαρτημένη) οι οποίες έχουν τις δικές τους δυσκολίες να κατανοηθούν. Άλλες έννοιες πού εμπλέκονται στην έννοια της συνάρτησης είναι ο αριθμός ως μέγεθος και η σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεγεθών, η συμμεταβολή, η ποσότητα, η αναλογία.

Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών με διαφορετική θεωρητική προσέγγιση, ασχολήθηκε με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης κατά τη διδακτική της μεταφορά. Οι έρευνες μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες, αυτές που εστιάζουν στον ορισμό και τη διδακτική προσέγγιση της έννοιας, ερευνώντας τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης (Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989; Tall & Akko, 2002; Eisenberg,1992;Carlson 1998; κ.α.) και σε αυτές που εξετάζουν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο (Duval, 2006; Hitt, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Thomas κ.α. 2010; Even, 1998; Knuth, 2000; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; κ.α.).

Οι δυσκολίες και παρανοήσεις που αναφέρονται στη βασική έννοια και τα στοιχεία της συνάρτησης έχουν σχέση με την διατύπωση, την εφαρμογή του ορισμού της και την ύπαρξη του τύπου της. Μεγάλος αριθμός μαθητών παρόλο που γνωρίζουν τον ορισμό της έννοιας συγχέουν την προϋπόθεση για να είναι μια διαδικασία συνάρτηση με τον ορισμό της ΄΄1-1΄΄ συνάρτησης. Η εύκολη εντύπωση της συνάρτησης ως 1-1 διαδικασίας αντιστοίχισης, τους δυσκολεύει να κατανοήσουν επίσης, τη διαδικασία πολλά-ένα που ισχύει στη σταθερή συνάρτηση (Sierpinska, 1992; Tall & Akko, 2002; Vinner, 1983). Άλλοι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι μαθητές είχαν μια στενή αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης στηριζόμενοι στον ορισμό της, θεωρώντας τη ως ένα κανόνα ή μια διαδικασία ή μια αντιστοιχία ή μια σχέση εξάρτησης (Markovits κ.α., 1986; Βασάκος, 1994; Zachariades κ.α., 2002).

Οι Vinner & Dreyfus (1989) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν τύπο, δηλαδή μια συνάρτηση υπάρχει αν υπάρχει ένας τύπος (κανόνας) που την περιγράφει, αν δίνονται πολλαπλοί τύποι συναρτήσεων, τότε έχουμε πολλές συναρτήσεις, ενώ η Sierpinska (1992) διαπίστωσε επιπλέον τη σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης καθώς το f(x) αντιπροσωπεύει και το όνομα μιας συνάρτησης, αλλά και την τιμή της συνάρτησης f στο x. Σύγχυση επίσης προκαλεί στους μαθητές ο προσδιορισμός ανεξάρτητης–εξαρτημένης μεταβλητής, ενώ συχνά παραμελούν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, που αποτελούν όμως βασικά στοιχεία της (Sfard, 1992; Vinner&Dreyfus, 1989; Βασάκος 1994; Markovits κ.α., 1986). Οι Dubinsky & Harel (1992) αναφέρουν ακόμη παρανοήσεις και δυσκολίες σχετικά με την ποσότητα (οι μεταβλητές πρέπει να είναι αριθμοί), ενώ η Carlson (1998), σημείωσε ότι οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ότι ένα μέγεθος είναι συνάρτηση του άλλου, δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν το ρυθμό μεταβολής ή την επίπτωση που έχει η αλλαγή της τιμής μιας μεταβλητής στην άλλη (συμμεταβολή).

Ακόμη, ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να έχει «καλή συμπεριφορά» (συμμετρικότητα, ομαλότητα, συνεχώς να αυξάνεται) ή θεωρούν ότι μια γραφική παράσταση η οποία αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής (Dubinsky & Harel, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989). Έτσι συναρτήσεις ασυνεχείς, κλαδωτές, ορισμένες σε διακριτό σύνολο σημείων, που ορίζονται με περιορισμούς, σταθερές, διαπιστώθηκε ότι προκαλούν δυσκολίες στους μαθητές (Markovits κ.α., 1993; Βασάκος, 1994; Vinner 1983; Tall & Akko, 2002).

Πηγή δυσκολίας όμως και παρανοήσεων όπως προαναφέραμε, αποτελούν οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης της έννοιας συνάρτησης καθώς και η μεταξύ τους σύνδεση. Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης περιλαμβάνει την ικανότητα να μπορεί κάποιος να την αναπαριστά με διάφορους τρόπους (αλγεβρικά, γραφικά, πίνακα τιμών, λεκτικά), καθώς επίσης και την ικανότητα να ερμηνεύει τις πληροφορίες που περιέχονται σε όλες αυτές τις αναπαραστάσεις και να μετακινείται ευέλικτα μεταξύ τους όταν μια αναπαράσταση ταιριάζει καλύτερα για να ορίσει ή να μεταδώσει κάποια πληροφορία. Οι μαθητές συχνά αναγνωρίζουν (επικεντρώνονται) τη συνάρτηση σε μια μόνο αναπαράστασή της είτε τη συμβολική είτε τη γραφική Vinner, 1983; Sfard, 1992; Zachariades κ.α., 2002; Markovits κ.α., 1993). Οι Markovits κ.α. (1993), διαπίστωσαν τη δυσκολία των μαθητών κατά τη μεταφορά από τη γραφική μορφή στην αλγεβρική παρά το αντίστροφο. Άλλοι ερευνητές διαπίστωσαν τη δυσκολία στην μετατροπή από το αλγεβρικό στο λεκτικό περιεχόμενο μιας σχέσης (Elia κ.α., 2008; Tall & Akko, 2002), ενώ δυσκολίες διαπιστώθηκαν στη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας κατά την αλλαγή πεδίου αναπαράστασης (Zachariades κ.α., 2002; Gagatsis & Christou, 2002; Elia κ.α., 2008; Hitt, 1998; Even, 1998; Knuth, 2000; Sfard, 1992).

Όπως προαναφέραμε, οι ερευνητές χρησιμοποίησαν διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις για να μελετήσουν την έννοια της συνάρτησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στην προσπάθεια τους να ερμηνεύσουν τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις τους. Η Sierpinska (1992), αναζητά τα διάφορα επιστημολογικά εμπόδια στις αντιλήψεις των μαθητών, σχετίζοντας τα με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, όπως αυτά εμφανίστηκαν κάποια φορά σε κάποιο πολιτισμό και θεωρεί ότι η κατανόηση της έννοιας απαιτεί να υπερβούμε αυτά τα εμπόδια ενώ προτείνει σε πρώτο στάδιο οι συναρτήσεις να παρουσιάζονται ως μοντέλα σχέσεων αφού έτσι πρωτοεμφανίστηκαν στην ιστορία. Ως παραδείγματα εμποδίων αναφέρει τις σκέψεις σε όρους εξισώσεων και αγνώστων που εξάγονται από αυτές, τη σειρά των μεταβλητών, την πεποίθηση ότι μόνο σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους είναι συναρτήσεις.

Οι Vinner κ.α. (1989), χρησιμοποίησαν τις έννοιες «εικόνα» (image) και «ορισμός» (definition), σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τη συνάρτηση. Η εικόνα της έννοιας αναφέρεται στο σύνολο όλων των διανοητικών εικόνων που συνδέονται στο μυαλό του μαθητή με το όνομα της έννοιας, μαζί με όλες τις ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Δημιουργείται με τα χρόνια μέσα από κάθε είδους εμπειρίες και αλλαγές, καθώς το άτομο συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει. Η εικόνα που συνδέεται με την έννοια μπορεί να μην είναι συνολικά συναφής και μπορεί να έχει πτυχές που είναι αρκετά διαφορετικές από τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Παρόλο που οι τυπικοί ορισμοί μιας έννοιας εισάγονται στους μαθητές, δεν τους χρησιμοποιούν όταν τους ζητείται να προσδιορίσουν ή να κατασκευάσουν ένα μαθηματικό αντικείμενο σχετικά με αυτή την έννοια, αλλά συχνά βασίζονται στην εικόνα που έχουν για αυτήν την έννοια.

Η Sfard (1992), υποστηρίζει ότι κάποιος μπορεί να συλλάβει αφηρημένες μαθηματικές έννοιες όπως η συνάρτηση, με δύο θεμελιωδώς διαφορετικούς τρόπους: δομικά, ως αντικειμενικές οντότητες και λειτουργικά ως υπολογιστικές διεργασίες. Παρατήρησε ότι η έννοια της συνάρτησης ήταν το αποτέλεσμα μιας μακράς αναζήτησης μαθηματικών μοντέλων για φυσικά φαινόμενα που άνθισε μετά την ανάπτυξη του αλγεβρικού συμβολισμού, για αυτό και αρχικά συνδέθηκε με την αλγεβρική διαδικασία. Διαπίστωσε ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση με τη λειτουργική προσέγγιση και μάλιστα διαισθητικά, ενώ συχνά αναπτύσσουν ψευδό δομικές αντιλήψεις, όπως για παράδειγμα η αναγνώριση μιας συνάρτησης από την αναπαράστασή της, ενώ ακόμη διαπίστωσε ότι δεν είναι ικανοί να γεφυρώσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων. Υποστηρίζει επίσης ότι η αλγεβρική αναπαράσταση μπορεί να αντιμετωπιστεί είτε λειτουργικά ως μια περιληπτική περιγραφή κάποιων σχέσεων είτε δομικά ως μια στατική σχέση δύο μεγεθών, ενώ για τη γραφική αναπαράσταση, που συνδυάζει σε μια λεπτή γραμμή τα συνθετικά στοιχεία μιας συνάρτησης, προτείνει μια δομική προσέγγιση της έννοιας.

Στο ίδιο μήκος κύματος οι Schwartz & Yerushalmy (1992), ισχυρίζονται ότι η αλγεβρική αναπαράσταση είναι σχετικά πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως μιας διαδικασίας, ενώ η γραφική αναπαράσταση είναι πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως αντικείμενο, καθώς επίσης ότι για την κατανόηση της έννοιας οι μαθητές είναι απαραίτητο να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ταυτόχρονα, τόσο ως διαδικασία όσο και ως αντικείμενο. Τις διαστάσεις της διαδικασίας και του αντικειμένου για την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα διάφορα είδη αναπαράστασης των συναρτήσεων, υιοθέτησαν επίσης και οι Moschkovich κ.α. (1993), όπου σύμφωνα με την πρώτη, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων και τεταγμένων x και y, αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x και προσπαθούν να βρουν λύση σε μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη, αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως μια οντότητα, αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης από τη μελέτη της συμβολικής της μορφής, αντιμετωπίζοντας την ολιστικά.

Οι Dubinsky & Harel (1992) επεσήμαναν ότι η έννοια του αντικειμένου είναι δομημένη ώστε να ενσωματώνει τη διαδικασία και ότι κάθε μαθηματική έννοια μπορούμε να τη δούμε με δύο διαφορετικούς συμπληρωματικούς τρόπους, ως δομικό και λειτουργικό ή ως διαδικασία και αντικείμενο, ενώ θεωρούν ότι οι μαθητές για να φθάσουν στο «σχήμα» της έννοιας, περνούν από τέσσερα διαφορετικά επίπεδα αφαίρεσης, που ονόμασαν προσυνάρτηση, ενέργεια, διαδικασία, αντικείμενο (APOS theory). Η αντίληψη της έννοιας ως ενέργεια αναφέρεται σε μεμονωμένους υπολογισμούς, έτσι η συνάρτηση φαίνεται ως στατική έννοια, ενώ η αντίληψη ως διαδικασία συνεπάγεται έναν δυναμικό χειρισμό των ποσοτήτων. Η αντίληψη ως αντικείμενο αναφέρεται σε ολιστικές ενέργειες των μαθητών, που δεν ασχολούνται με τις λεπτομέρειες των υπολογισμών, αλλά περισσότερο στη βάση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων.

Τις δυσκολίες σύνδεσης των διάφορων αναπαραστάσεων της συνάρτησης μελέτησε και ο Hitt (1998), ο οποίος ανέδειξε πέντε επίπεδα κατανόησης της έννοιας. Στο πρώτο επίπεδο τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συναφές μίγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας), στο δεύτερο είναι σε θέση να εντοπίζουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας, στο τρίτο είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, στο τέταρτο είναι σε θέση να συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης και στο πέμπτο είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος. Με βάση αυτά τα επίπεδα, η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Η Even (1998), μελετώντας τους παράγοντες που εμπλέκονται στη σύνδεση των διάφορων αναπαραστάσεων της συνάρτησης, αναφέρει ότι η ικανότητα να αναγνωρίζουμε και να παρουσιάζουμε το ίδιο πράγμα με διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία να κινούμαστε από τη μία αναπαράσταση στην άλλη επιτρέπει κάποιον να δει πλούσιες σχέσεις, να αναπτύξει καλύτερη εννοιολογική κατανόηση, να διευρύνει και να εμβαθύνει την κατανόησή του και να ενισχύσει την ικανότητά του να λύσει προβλήματα. Διαπίστωσε επίσης ότι η γνώση για τις διάφορες αναπαραστάσεις δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά συνδέεται με τη γνώση για τους διάφορους τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, τη γνώση για το πλαίσιο της παρουσίασης και τέλος, τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες.

Οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης ως παράγοντας σύνδεσης των αναπαραστάσεων αναφέρονται στην ολιστική προσέγγιση του τρόπου συμπεριφοράς μιας συνάρτησης και στην προσέγγιση κατά σημεία. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ολιστικά και να μελετηθεί η συμπεριφορά της (π.χ. όταν πρόκειται να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, που δίνεται σε αλγεβρική μορφή) και περιπτώσεις που πρέπει να εστιάσουμε σε συγκεκριμένα σημεία (π.χ. εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση). Το πλαίσιο της παρουσίασης αναφέρεται στο είδος των συναρτήσεων που εξετάζονται, το οποίο καθορίζει τον τρόπο που χειρίζεται κάποιος τις αναπαραστάσεις για την επίλυση του προβλήματος. Τέλος οι υποκείμενες ιδέες ως παράγοντας σύνδεσης, αναφέρονται σε κάποιες ειδικές συναρτήσεις με κάποια χαρακτηριστικά (π.χ. συνέχεια) που μπορεί να δημιουργήσουν εμπόδια στην ανάπτυξη μιας σωστής λύσης.

Ο Knuth (2000), μελέτησε τη σύνδεση μεταξύ της αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης μιας συνάρτησης μέσα από την κατανόηση της καρτεσιανής σύνδεσης. Διαπίστωσε ότι η κατανόηση ήταν επιφανειακή και ότι οι μαθητές συντριπτικά δείχνουν εμπιστοσύνη στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις ακόμη και σε εργασίες που η γραφική παράσταση φαινόταν πιο κατάλληλη, ενώ δεν αναπτύσσουν την ευελιξία να χρησιμοποιούν, να επιλέγουν και να κινούνται μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση ως μέσο υποστήριξης της αλγεβρικής τους λύσης παρά ως τρόπο λύσης. Σε αυτό μπορεί να επηρεάζει η φύση των προβλημάτων, όταν για παράδειγμα οι μαθητές καλούνται να βρουν μια λύση σε μια εξίσωση, δεν αντιλαμβάνονται ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου σε μια γραφική παράσταση είναι μια λύση, αλλά στηρίζονται σε μια αλγεβρική μέθοδο επίλυσης. Αυτό επίσης μπορεί να οφείλεται στην έμφαση που δίνουν τα προγράμματα σπουδών στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις και το χειρισμό τους, καθώς οι μαθητές ασχολούνται κυρίως με προβλήματα που απαιτούν τη μετάφραση από μια εξίσωση σε γραφική παράσταση, κατά την οποία, κατασκευάζουν αρχικά τον πίνακα τιμών που ικανοποιούν την εξίσωση και στη συνέχεια, σχεδιάζουν τα σημεία στο σύστημα συντεταγμένων. Γενικά οι μαθητές έχουν ισχυρή τάση να σκέφτονται αλγεβρικά παρά οπτικά (Eisenberg & Dreyfus 1994).

Επίσης άλλοι ερευνητές διαπίστωσαν ότι η ικανότητα μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη σχετίζεται θετικά με την επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων με συναρτήσεις (Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Elia κ.α., 2008;). Αυτή η ικανότητα όμως μειώνεται σε έργα που περιλαμβάνουν εικονικές αναπαραστάσεις, λόγω του ολιστικού χαρακτήρα τους αλλά και του τρόπου που η έννοια της συνάρτησης διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι Thomas κ.α.(2010), εξέτασαν τις δραστηριότητες του εγκεφάλου των μαθητών σε εργασίες με διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων, εστιάζοντας στη διαφορά μεταξύ των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι αρχάριοι και οι ειδικοί. Διαπίστωσαν ότι οι ειδικοί επικεντρώθηκαν περισσότερο στα βασικά χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης που τους βοήθησαν να εκτελέσουν μια μετάφραση, ενώ οι αρχάριοι προσπάθησαν να συλλάβουν την αναπαράσταση στο σύνολό της χωρίς να προσδιορίσουν τις βασικές ιδιότητες που σχετίζονται με τη μετάφραση.

Μια σχετικά νέα ερευνητική προοπτική είναι η ανάλυση της εξέλιξης της μάθησης, η οποία επικεντρώνεται στην ανάπτυξη διαφορετικών επιπέδων ικανοτήτων (Wilson, 2008; Wilmot κ.α., 2011; Biggs & Tang, 2007). Αναφέρεται στη SOLO ταξινομία (Biggs & Collis,2014), η οποία είναι ένα γενικό πλαίσιο αξιολόγησης προβλέποντας πέντε επίπεδα κατανόησης (προ-δομικό, μόνο-δομικό, πολύ-δομικό, σχεσιακό και εκτεταμένο αφαιρετικό), σχετικά με τις ικανότητες των μαθητών να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις. Τα επίπεδα αυτά αναδεικνύονται μέσα από τις ρηματικές διατυπώσεις αναγνωρίζω-συνδέω, περιγράφω-αναλύω, εφαρμόζω, επιχειρηματολογώ, συγκρίνω ή αντίθετα ασκώ κριτική, εξηγώ αίτια, σχετίζω, δικαιολογώ-δημιουργώ, τυποποιώ, γενικεύω, υποθέτω.

Οι Nitsch κ.α. (2015) στηριζόμενοι στη SOLO ταξινομία, εστίασαν σε έργα που απαιτούσαν γνωστική δράση κατασκευής παρά ερμηνείας και κατασκεύασαν ένα μοντέλο τεσσάρων διαστάσεων επιπέδων κατανόησης. Οι μαθητές όταν εργάζονται με συναρτήσεις και τις μορφές αναπαράστασης και μετάφρασης τους, αρχικά πρέπει να αναγνωρίζουν τις πιο σημαντικές πτυχές της απεικονιζόμενης αναπαράστασης. Μια δεύτερη γνωστική δράση είναι η κατασκευή όπου ο μαθητής καλείται να μεταφράσει μια δεδομένη μορφή εκπροσώπησης της συνάρτησης σε μια άλλη που θα δημιουργήσει. Στη συνέχεια ο μαθητής καλείται να περιγράψει τι διαδικασία επίλυσης του έργου ή τι θα κάνει για να το επιλύσει. Το τέταρτο στοιχείο της γνωστικής δράσης αναφέρεται σε εργασίες όπου ο μαθητής καλείται να εξηγήσει τη λύση του προφορικά ή για να καταδείξει γιατί μια συγκεκριμένη (δεδομένη) λύση είναι σωστή ή λάθος. Διαπίστωσαν ότι οι μεταφράσεις μεταξύ γραφικών-αλγεβρικών, γραφικών-αριθμητικών, γραφικών-περιγραφή κατάστασης, αριθμητικών-αλγεβρικών και περιγραφή κατάστασης-αλγεβρικών, είναι απαραίτητες όταν περιγράφουμε ικανότητες μαθητών στις συναρτησιακές σχέσεις, ενώ πρέπει να παρουσιάζονται όλες οι μορφές αναπαραστάσεων και οι μεταφράσεις στα προγράμματα σπουδών, για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε διαπιστώνουμε ότι μεγάλος αριθμός ερευνών εστίασε στη σημασία των αναπαραστάσεων και των απεικονίσεων στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ιδιαίτερα των συναρτήσεων, όπου μία μορφή αναπαράστασης τους είναι γραφική-εικονική. Παρακάτω αναλύουμε τη σημασία αυτή μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση.

4.3 Η σημασία των αναπαραστάσεων και των απεικονίσεων στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Τα ζητήματα της αναπαράστασης και της οπτικοποίησης των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως θεμελιώδη, με όλο και περισσότερο τους ερευνητές να συμφωνούν για τις θετικές επιπτώσεις τους στην ανάπτυξη της κατανόησης, της επικοινωνίας, της μαθηματικής αιτιολόγησης και της επίλυσης προβλήματος (Presmeg, 1998; Janvier, 1987; Kaput, 1987, 1991, 1999, 2001; Pape & Tchoshanov, 2001; Vergnaud, 1987, 1998; Duval, 1995, 2006; Arcavi, 2003; κ.α.). Το αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τις αναπαραστάσεις προκύπτει ως απόρροια της ανάγκης να αντιμετωπιστούν προβλήματα πρακτικής και θεωρητικής υφής, που αφορούν στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές όταν 'μεταφράζουν' από τη μια αναπαράσταση σε άλλη (π.χ. η μετατροπή του αλγεβρικού τύπου μιας συνάρτησης σε γραφική παράσταση) και προβλήματα που προκύπτουν στην πορεία οικοδόμησης ενός θεωρητικού μοντέλου για τον τρόπο αξιοποίησης και χρήσης των αναπαραστάσεων.

Στο πεδίο των μαθηματικών οι αναπαραστάσεις μπορούν να θεωρηθούν από τη μια μεριά ως μια εσωτερική αφαίρεση μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που αναπτύχθηκαν από έναν μαθητή μέσω της εμπειρίας ή από την άλλη μεριά αναπαραστάσεις όπως αριθμοί, εξισώσεις, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα μπορούν να θεωρηθούν ως εξωτερικές εκδηλώσεις μαθηματικών εννοιών που δρουν ως ερεθίσματα για τις αισθήσεις και μας βοηθούν να καταλάβουμε αυτές τις έννοιες (Pape & Tchoshanov, 2001). Η αναπαράσταση επίσης αναφέρεται ως δράση εξωτερίκευσης μιας εσωτερικής, νοερής αφαίρεσης. Οι ιδέες γύρω από τις αναπαραστάσεις στην έρευνα, τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια. Το 2000 το NCTM πρόσθεσε την αναπαράσταση στα «Principles and Standards of School Mathematics», απαιτώντας από όλους τους μαθητές να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να οργανώνουν, να καταγράφουν και να επικοινωνούν μαθηματικές ιδέες, να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν ανάμεσα σε μαθηματικές αναπαραστάσεις για να επιλύουν προβλήματα, να μοντελοποιούν και να ερμηνεύουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα.

Οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σημαντικά εργαλεία επικοινωνίας (Kaput, 1991) και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, όπου μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναδιοργανώσουν και να μεταφράσουν τις ιδέες με σύμβολα, ενώ παράλληλα αποτελούν ένα κοινωνικό περιβάλλον για την ανάπτυξη μαθηματικών συζητήσεων. Η Presmeg (1998), επισημαίνει τη σπουδαιότητα της απεικονιστικής διαδικασίας στη μαθηματική σκέψη και τη σημασία της κατασκευής αναπαραστάσεων από τους μαθητές, ισχυριζόμενη ότι οι μαθητές υποβοηθούνται στην επίλυση ασαφειών εγγενών στις γνωστικές αναπαραστάσεις. Θεωρεί την οπτικοποίηση ως την ικανότητα, τη διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας και του στοχασμού πάνω σε εικόνες και διαγράμματα στο μυαλό μας, σε χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και την επικοινωνία πληροφοριών, τη σκέψη και την ανάπτυξη προηγουμένως άγνωστων ιδεών και προχωρημένων αντιλήψεων.

Ο Vergnaud (1998) εξετάζει το ρόλο της δράσης στην αναπαράσταση, καθώς θεωρεί την αναπαράσταση ως δυναμική οντότητα παρά ως στατική διαδικασία και αναφέρει τρία επίπεδα οντοτήτων σε ένα αναπαραστατικό σύστημα: το *αναφορικό*, που αφορά τον κόσμο της εμπειρίας του υποκειμένου, το *σημαινόμενο*, που αφορά την εσωτερική αναπαράσταση του υποκειμένου για τον κόσμο και το *σημαίνον*, που αφορά τα διαφορετικά συμβολικά συστήματα. Θεωρεί ότι οι πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι ένα σημαντικό στοιχείο στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, όχι μόνο γιατί η χρήση συμβολικών συστημάτων είναι σημαντική στα μαθηματικά, αλλά κυρίως για δύο επιστημολογικούς λόγους, ότι τα μαθηματικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση του πραγματικού κόσμου και ότι τα μαθηματικά χρησιμοποιούν ομοιομορφισμούς στους οποίους ο μετασχηματισμός των δομών είναι σημαντικός. Αυτό το μετασχηματισμό ο Janvier (1987), ονομάζει 'μετάφραση' της έννοιας μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων και τη θεωρεί αναγκαία λειτουργία για την εννοιολογική κατανόηση στα μαθηματικά, περιγράφοντας τον όρο κατανόηση ως τη σωρευτική διαδικασία που βασίζεται στην ικανότητα μετάφρασης μεταξύ ενός όλο και περισσότερο εμπλουτισμένου συνόλου αναπαραστάσεων.

Όπως αναφέρει ο Duval (2006), κανένα είδος μαθηματικής διαδικασίας δε μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς τη χρήση ενός σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης, γιατί κάθε μαθηματική διαδικασία περιλαμβάνει πάντοτε την αντικατάσταση κάποιας σημειωτικής αναπαράστασης από μία άλλη. Αυτό που έχει σημασία δεν είναι οι αναπαραστάσεις αλλά οι μετασχηματισμοί τους. Το παράδοξο όμως με τα μαθηματικά αντικείμενα, είναι ότι πολλές φορές για να τα κατανοήσουμε έχουμε ως μόνη πρόσβαση την σημειωτική τους αναπαράσταση, αλλά δε πρέπει να συγχέονται με αυτή. Το κρίσιμο σημείο για την πρόοδο της μάθησης είναι η ικανότητα να αλλάζουμε από το ένα σύστημα στο άλλο. Επίσης αναφέρει πως μια άλλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση εννοιών, είναι η ποικιλία αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά για την παρουσίαση του ίδιου αντικειμένου, για παράδειγμα, προφορική, αριθμητική, εικονική ή συμβολική έκφραση. Κάποιες διαδικασίες είναι ευκολότερες σε ένα σύστημα από ότι σε ένα άλλο, ενώ το περιεχόμενο της αναπαράστασης διαφοροποιείται από το αντικείμενο που αντιπροσωπεύει και η μόνη σχέση τους είναι η σημασία της έννοιας, για αυτό και με το πέρασμα από το ένα μητρώο στο άλλο δεν αλλάζει μόνο το νόημα της διαχείρισης αλλά και οι ιδιότητες που γίνονται σαφείς.

Ο Duval (2006) ακόμη αναφέρει δύο τύπους μετασχηματισμού αναπαραστάσεων, τη *διαχείριση*, που αφορά διαδικασίες μέσα στο ίδιο σύστημα, όπως για παράδειγμα, επίλυση εξισώσεων ή συστημάτων, συμπλήρωση μιας γραφικής παράστασης χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συμμετρίας ή της περιοδικότητας και τη *μετατροπή*, που αφορά αλλαγή συστήματος αναπαράστασης χωρίς να αλλάζει το μαθηματικό αντικείμενο, όπως για παράδειγμα το πέρασμα από την αλγεβρική έκφραση μιας εξίσωσης στη γραφική ή από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική. Ακόμη αναφέρει, ότι όταν εστιάζουμε στις απεικονίσεις, υπάρχει έντονη διαφορά ανάμεσα στον κοινό τρόπο που βλέπουμε τα στοιχεία, γενικά με εικονικό τρόπο και του μαθηματικού τρόπου που αναμένεται να εξεταστούν.

Οι δυσκολίες των μαθητών όταν αντιμετωπίζουν οπτικά ερεθίσματα συνίστανται στη μη κατανόηση των μαθηματικών που αυτά εκπροσωπούν, των μαθηματικών ιδιοτήτων δηλαδή που θα οδηγούσαν στην ανάγνωση και εξερεύνηση της επίλυσης ενός προβλήματος, ενώ αυτό που ‘βλέπουμε’ σε ένα σχήμα είναι ανεξάρτητο από τις μαθηματικές ιδιότητες και εξαρτάται από παράγοντες οπτικής οργάνωσης. Ακόμη σύμφωνα με τον Duval (2006),οι δυσκολίες συνίστανται στη γνωστική απόσταση ανάμεσα στην αναπαράσταση πηγή και στην αναπαράσταση στόχο, καθώς επίσης και στην κατεύθυνση της μετατροπής. Ο διαχωρισμός μεταξύ του περιεχομένου και του αντικειμένου που εκπροσωπείται σε μια αναπαράσταση, περιλαμβάνει το συντονισμό διαφορετικών μητρώων αναπαράστασης, μέσω του οποίου ξεκινά η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας με την αναγνώριση του ίδιου αντικειμένου στα διαφορετικά πεδία αναπαράστασης.

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης σύμφωνα με τους Goldin & Kaput (1996), δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων κι εμπειριών. Η παραγωγή μιας νοητικής αναπαράστασης στηρίζεται στα συστήματα αντιπροσώπευσης. Στην περίπτωση των συναρτήσεων τέτοια είναι γραφικές παραστάσεις, αλγεβρικοί τύποι, διαγράμματα. Οι νοητικές αναπαραστάσεις δημιουργούνται στο μυαλό βάση αυτών των συγκεκριμένων συστημάτων αντιπροσώπευσης. Η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας στηρίζεται στις πλούσιες νοητικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με αυτή. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων μετάφρασης υποστηρίζουν, ότι θα πρέπει να δοθεί προσοχή στους τρόπους χρήσης των συμβόλων και των συνδυασμών τους μέσα στα μαθηματικά συστήματα αναπαράστασης, καθώς επίσης στον τρόπο με τον οποίο τα συστήματα αυτά σχετίζονται μεταξύ τους.

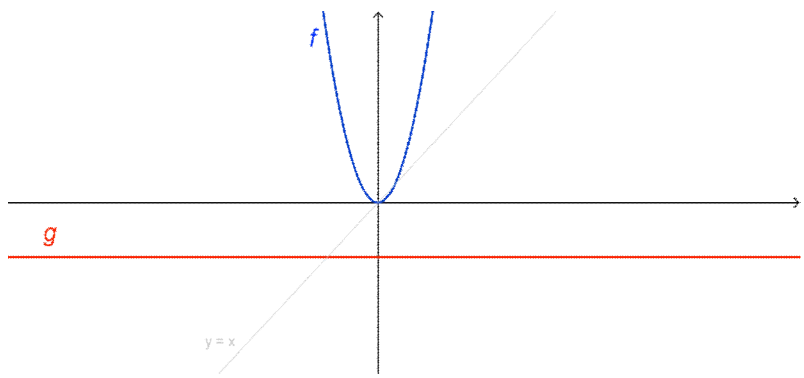
Ο Arcavi (2003), υποστηρίζει πως οι γραφικές απεικονίσεις αποκαλύπτουν δεδομένα που μπορεί να είναι πιο ακριβή από τους συμβατικούς υπολογισμούς. Μια απεικόνιση μπορεί να συνοδεύσει μια συμβολική εξέλιξη, καθώς μια οπτική εικόνα δημιουργεί ένα αίσθημα αυτοδιάθεσης και αμεσότητας. Η οπτική λύση μπορεί να μας επιτρέψει να ασχοληθούμε με έννοιες και νοήματα που παρακάμπτονται από τη συμβολική, να υποστηρίξει τα συμβολικά αποτελέσματα, να επιλύσει συγκρούσεις μεταξύ συμβολικής λύσης και διαίσθησης, να λειτουργήσει ως εργαλείο για καταστάσεις που κάποιος είναι αβέβαιος για το πώς θα προχωρήσει. Η οπτικοποίηση όχι μόνο οργανώνει τα δεδομένα σε δομές με νόημα, αλλά καθοδηγεί την αναλυτική εξέλιξη μιας λύσης. Όπως αναφέρει, όλοι διδάσκουμε να εξετάζουμε τις αποδείξεις με διαγράμματα, με γραφικές παραστάσεις ή γενικά με μη γλωσσολογικές αναπαραστάσεις. Η οπτικοποίηση δεν αποσκοπεί στην εξαίρεση της λεκτικής ή συμβολικής αναπαράστασης αλλά στη συμπλήρωση τους. Στόχος είναι η ανάπτυξη στη μαθηματική κοινότητα της οπτικής συλλογιστικής με αποδεκτό τρόπο σε συνδυασμό με την αλγεβρική.

Αυτό που βλέπουμε σε μια απεικόνιση καθορίζεται τόσο από την προηγούμενη γνώση, όσο και από το πλαίσιο στο οποίο γίνεται η παρατήρηση. Σε διαφορετικά πλαίσια τα ίδια οπτικά αντικείμενα μπορεί να έχουν διαφορετικές σημασίες ακόμη και για τους ειδικούς. Πολλές φορές όμως μια εικόνα ή ένα διάγραμμα δένει τη σκέψη μας με άσχετες λεπτομέρειες, καθώς τα γραφήματα κρίνονται με εμφανή οπτικά στοιχεία, ανεξάρτητα από τις υποκείμενες έννοιες. Η χρήση όμως της οπτικής συλλογιστικής σύμφωνα με τον Arcavi (2003), δεν είναι πανάκεια στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά συναντά αρκετές δυσκολίες. Δυσκολίες πολιτισμικές, που αναφέρονται στις πεποιθήσεις και στις αξίες για το τι είναι αποδεκτό και τι όχι στα μαθηματικά, γνωστικές, που αφορούν το γεγονός ότι δεν υπάρχουν πάντοτε ασφαλείς διαδικαστικές ρουτίνες για να βασιστεί κάποιος, ενώ η ανάγκη ευελιξίας μετάφρασης μεταξύ οπτικής και αναλυτικής αναπαράστασης, απαιτεί την εκμάθηση της ικανότητας χειρισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων, μια διαδικασία που μπορεί να είναι μακροχρόνια, εξαρτώμενη από το περιβάλλον, μη γραμμική και αρκετά βασανιστική για τους μαθητές. Επίσης υπάρχουν κοινωνικές δυσκολίες που προκύπτουν κατά τη διδακτική μεταφορά των μαθηματικών αντικειμένων στα προγράμματα σπουδών, όπου όπως υποστηρίζεται, από τη φύση της είναι μια διαδικασία γραμμική χωρίς πλούσιες διασυνδέσεις.

Στην παρούσα εργασία, αντικείμενο της οποίας είναι η νοερή διαχείριση συναρτήσεων, το εργαλείο συλλογής των δεδομένων αποτελούνταν από οπτικά ερεθίσματα, συγκεκριμένα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, με σκοπό τη διερεύνηση των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές και την ευελιξία τους ανάμεσα σε αυτές, όταν λειτουργούν σε αυτά τα πλαίσια. Παρακάτω αναλύουμε τις έννοιες νοερή διαχείριση συναρτήσεων και στρατηγικές που αναπτύσσονται, όπως προέκυψαν μέσα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση.

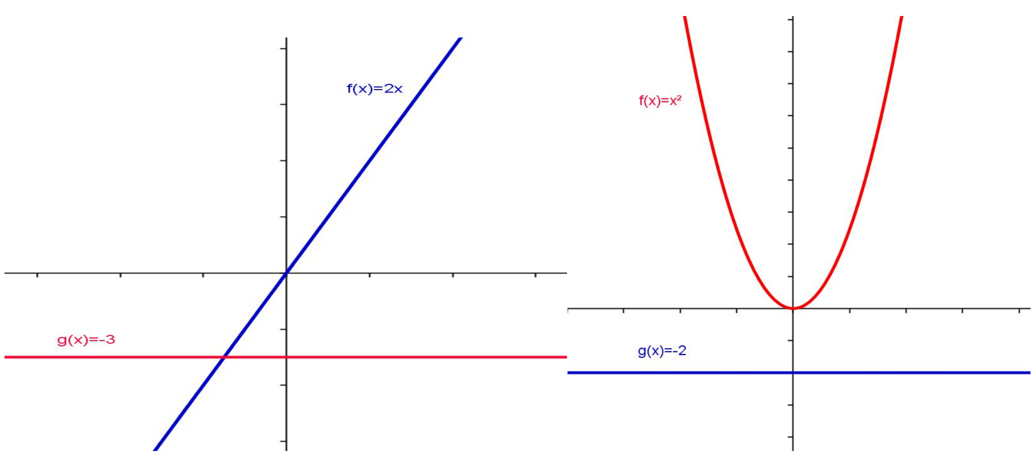
4.4 Άλλες έρευνες στη νοερή διαχείριση συναρτήσεων

Η επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας έδειξε πως δεν υπάρχουν έρευνες πάνω στο συγκεκριμένο πεδίο εκτός από δύο έρευνες του Proulx (2014,2015). Πρόκειται για μελέτες πολλαπλών περιπτώσεων σε μαθητές Grade 11. Οι μαθητές έπρεπε να λειτουργούν νοερά με συναρτήσεις σε ένα γραφικό περιβάλλον, δηλαδή έπρεπε να επιλύσουν έργα χωρίς χαρτί και μολύβι ή οποιοδήποτε άλλα υπολογιστικό/υλικό βοήθημα. Για παράδειγμα, ένα τυπικό έργο συνίστατο στην εμφάνιση δύο συναρτήσεων στο ίδιο γράφημα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου ζητούνταν από τους μαθητές να βρουν γραφικά το άθροισμα ή τη διαφορά τους. Σε κάποια από αυτά τα γραφήματα δίνονταν ως αναφορά η ευθεία y=x.



Εικόνα 2: Τυπικό έργο νοερής διαχείρισης συναρτήσεων

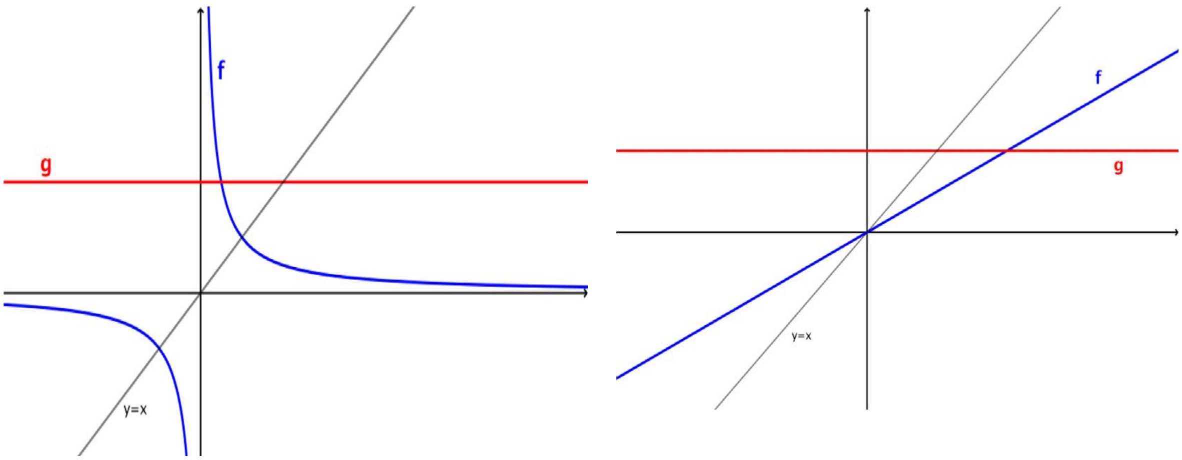
Οι δραστηριότητες που διεξήχθησαν είχαν την ακόλουθη δομή: δίνονταν στον πίνακα ένα γράφημα όπως το παραπάνω και ζητούνταν από τους μαθητές αφού σκεφτούν για μισό περίπου λεπτό να δείξουν με το χέρι ή το μολύβι και να εξηγήσουν λεκτικά τις απαντήσεις τους. Οι δραστηριότητες αποτελούνταν από έξι ομάδες έργων από 3 έως 4 έργα η καθεμία. Στην πρώτη ομάδα δόθηκαν τόσο τα γραφήματα όσο και οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Τα έργα αποτελούνταν από ένα συνδυασμό γραμμικών και σταθερών ή τετραγωνικών και σταθερών συναρτήσεων, όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 3: Παραδείγματα έργων της πρώτης ομάδας

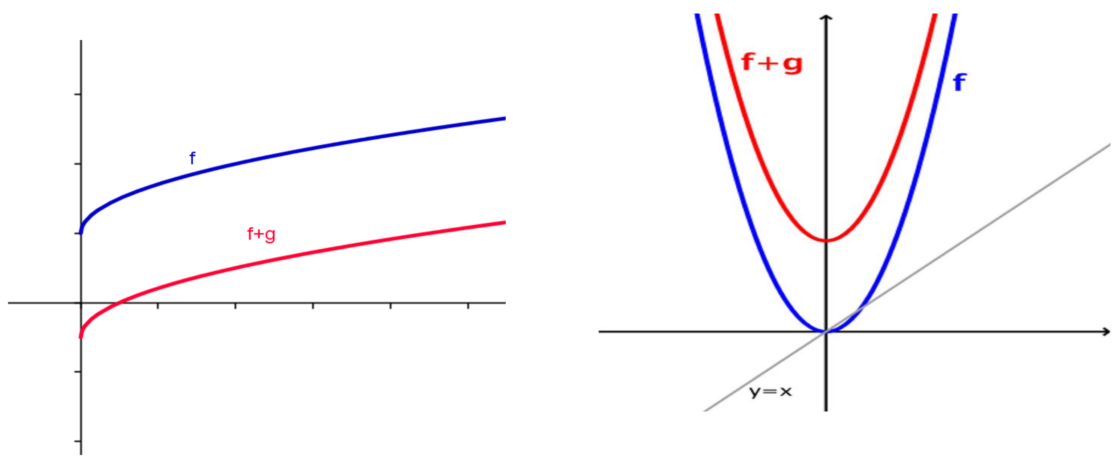
και οι μαθητές έπρεπε να τις προσθέσουν και να τις αφαιρέσουν νοερά.

Στην δεύτερη ομάδα δόθηκαν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων (μερικές φορές τρία) χωρίς την αλγεβρική τους αναπαράσταση και οι μαθητές έπρεπε να τις προσθέσουν νοερά. Οι συναρτήσεις ποίκιλαν από ένα συνδυασμό σταθερών με γραμμικές και τετραγωνικές, τετραγωνικές ρίζες, ρητές όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 4: Παραδείγματα έργων της δεύτερης ομάδας

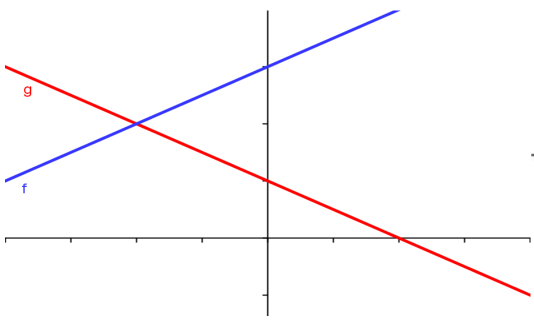
Στην τρίτη ομάδα έργων δόθηκαν στο ίδιο γράφημα η αναπαράσταση μιας συνάρτησης f και το αποτέλεσμα του αθροίσματος δύο συναρτήσεων f+g. Οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν νοερά τη συνάρτηση g που είχε προστεθεί ή αφαιρεθεί από την πρώτη, για να ληφθεί η προκύπτουσα συνάρτηση, όπως φαίνεται παρακάτω:

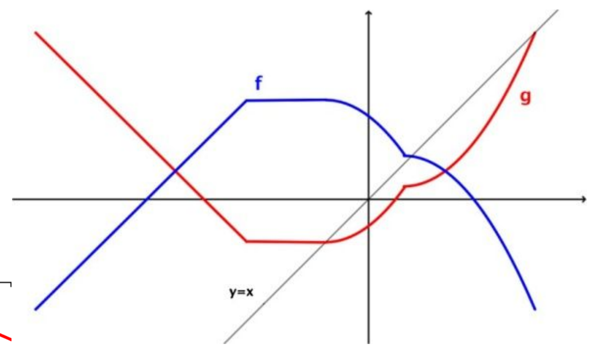


Εικόνα 5: Παραδείγματα έργων της τρίτης ομάδας

Η τέταρτη ομάδα έργων ήταν παρόμοια με τη δεύτερη με τη διαφορά ότι οι μαθητές έπρεπε να τις αφαιρέσουν νοερά. Η πέμπτη ομάδα έργων ήταν διαφορετική από τις υπόλοιπες, καθώς δε δόθηκαν οι γραφικές, αλλά μόνο οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Για αυτές, οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν πράξεις όπως f + g, f - g, g - f, f + f και να αντλήσουν τη συνάρτηση που προκύπτει. Οι συναρτήσεις που δόθηκαν ήταν ένας συνδυασμός των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ ή $f(x) = [x]$ ή $f(x) = x^2$ με $g(x) = x$.

Στην έκτη ομάδα έργων δόθηκαν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων που φαίνονται συμμετρικές, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να προσθέσουν νοερά. Αυτές οι συναρτήσεις ήταν στο καρτεσιανό επίπεδο και ήταν ένας συνδυασμός γραμμικών ή κλαδωτών, όπως φαίνεται παρακάτω:





Εικόνα 6: Παραδείγματα έργων της έκτης ομάδας

Ευρήματα της έρευνας του Proulx (2015)

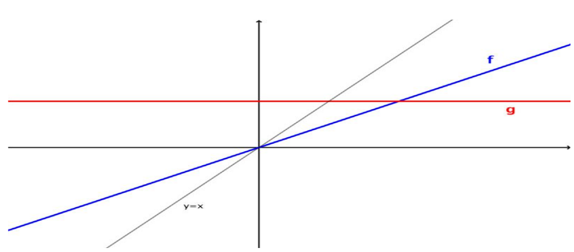
Η ανάλυση των δεδομένων του Proulx (2015), έδειξε ότι οι μαθητές σε αυτό το νοερό πλαίσιο, χρησιμοποίησαν κατά την επίλυση των έργων τους τρεις συγκεκριμένες προσεγγίσεις (στρατηγικές), τις οποίες χαρακτήρισε ως *αλγεβρική-παραμετρική*, *γραφική-γεωμετρική* και *γραφική-αριθμητική*. Οι στρατηγικές αυτές σύμφωνα με τον Proulx, απεικονίζουν τον αναδυόμενο και προσαρμοσμένο τρόπο, που οι μαθητές αντιλαμβάνονται και αντιμετωπίζουν τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας, όταν επιλύουν έργα νοερών μαθηματικών. Κατά την ανάγνωση και την κατανόηση αυτών των προσεγγίσεων στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές, όπως αναφέρει, είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι αυτές εμφανίστηκαν σε ένα νοερό μαθηματικό πλαίσιο. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές είχαν περιορισμένο χρόνο στα καθήκοντά τους, να θέσουν και να αναπτύξουν μια στρατηγική για την επίλυσή τους.

Επίσης οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία σε εργασίες με συναρτήσεις σε αυτό το πλαίσιο.

Στρατηγική 1: αλγεβρική/παραμετρική

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές άντλησαν πληροφορίες μόνο από τις αλγεβρικές πτυχές των συναρτήσεων (εκφράσεις, παραμέτρους κ.α.), ακόμη και αν τα έργα προσφέρθηκαν σε γραφικό περιβάλλον. Τη στρατηγική αυτή τη χρησιμοποίησαν όταν αντιμετώπισαν κυρίως έργα με γραμμικές συναρτήσεις. Έτσι για παράδειγμα, στην πρώτη ομάδα έργων, όπου δόθηκαν τόσο οι γραφικές όσο και οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, οι μαθητές, όπως παρατήρησε ο Proulx, αρχικά πρόσθεσαν αυτές τις εκφράσεις νοερά για να πάρουν την προκύπτουσα αλγεβρική έκφραση και στη συνέχεια έδωσαν τη γραφική απάντηση που τους είχε ζητηθεί. Για παράδειγμα, όταν δόθηκαν οι αλγεβρικές εκφράσεις 4x-7 και -2x + 2, πρόσθεσαν αυτές τις εκφράσεις νοερά (4x με -2x και -7 με +2), για να πάρουν την προκύπτουσα αλγεβρική έκφραση (π.χ. 2x -5) και στη συνέχεια να σχεδιάσουν τη συνάρτηση στο καρτεσιανό επίπεδο όπως τους είχε ζητηθεί, εναλλασσόμενοι μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών παραστάσεων στην επίλυση ή εξήγησή τους.

Ακόμη και στην περίπτωση έργων που δεν ήταν διαθέσιμες οι αλγεβρικές εκφράσεις, οι μαθητές όταν αντιμετώπισαν γραμμικές συναρτήσεις εστίασαν στις παραμέτρους της αλγεβρικής έκφρασης, τα α και β της γραμμικής συνάρτησης f(x)=αx+β, γρήγορα για να κατανοήσουν τα γραφήματα και να τα προσθέσουν. Ωστόσο, και πάλι, επειδή η προκύπτουσα συνάρτηση έπρεπε μετά να εκφραστεί γραφικά, η απάντηση και η στρατηγική εξηγούνταν αλγεβρικά με την ανάμειξη πτυχών των γραφικών πληροφοριών. Για παράδειγμα στη δεύτερη ομάδα έργων, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Εικόνα 7: Παράδειγμα πρόσθεσης συναρτήσεων χωρίς αλγεβρικές εκφράσεις

οι μαθητές θα εξηγήσουν ότι η παράμετρος α της συνάρτησης f δεν αλλάζει όταν προστίθεται με μια σταθερή συνάρτηση, έτσι η κλίση της παραμένει η ίδια και μόνο το β αλλάζει δίνοντας μια συνάρτηση παράλληλη στην f που τέμνει τον άξονα y στο β βάζοντας όπου x=0.

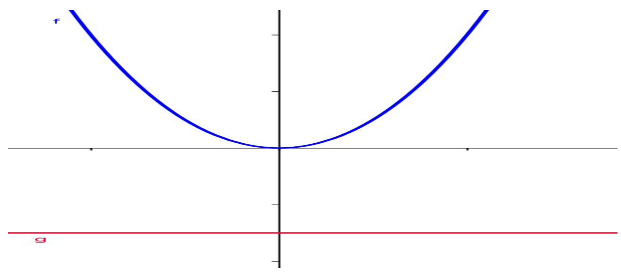
Οι μαθητές, σύμφωνα με τον Proulx (2015), έχουν μια ισχυρή τάση να σκέφτονται αλγεβρικά και όχι οπτικά, ακόμη και αν έχουν ωθηθεί ρητά και δυναμικά προς την οπτική επεξεργασία. Οι ενέργειες των μαθητών μέσω της αλγεβρικής προβολής-προτίμησης κατά την εργασία τους με τις συναρτήσεις έχουν τεκμηριωθεί και από την έρευνα του Vinner (1989), ο οποίος μίλησε για μια "αλγεβρική προκατάληψη" των μαθητών σε έργα με συναρτήσεις. Επίσης ο Knuth (2000), σε έρευνα του, όπου τα έργα είχαν σχεδιαστεί για να «αναγκάσουν» τους μαθητές στη χρήση μιας μεθόδου γραφικών λύσεων, διαπίστωσε ότι η εξάρτηση από τις μεθόδους αλγεβρικών λύσεων ήταν υπερβολική, παρόλο που η γραφική λύση φαινόταν ευκολότερη και πιο αποτελεσματική. Το γεγονός αυτό το θεώρησε ως αποτέλεσμα των επιδράσεων των προγραμμάτων σπουδών, όπου η έμφαση στην διδασκαλία κυριαρχεί με την εστίαση στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις και τους χειρισμούς τους.

Το ίδιο συνέβη και με τη μελέτη των Habre&Abboud (2006), οι οποίοι παρόλο που σχεδίασαν μαθήματα επικεντρωμένα σε γραφικές-οπτικές αναπαραστάσεις, οι μαθητές για να τα επιλύσουν σκέφτηκαν αλγεβρικά. Οι μαθητές φαίνεται ότι μεταμορφώνουν τα καθήκοντα τους με ένα προσαρμοσμένο τρόπο για να τα λύσουν, αναπτύσσοντας αλγεβρική στρατηγική. Οι Schmidt & Bednarz (1997) επίσης, τόνισαν τον υψηλότερο κοινωνικό ρόλο που αποδίδεται στην άλγεβρα από τους εκπαιδευτικούς για την επίλυση προβλημάτων, όπου θεωρείται περισσότερο «μαθηματική» ή «καλύτερη» επιλογή από τις αριθμητικές ή άλλες προσεγγίσεις. Η αυτοματοποιημένη αλγεβρική συμπεριφορά των μαθητών στα έργα με τις συναρτήσεις, επηρεάζεται από τις μαθηματικές εμπειρίες τους, που φαίνεται να είναι περισσότερο αλγεβρικές.

Σύμφωνα με τον Proulx (2015), οι μαθητές μεταμόρφωσαν τα έργα που είχαν σχεδιαστεί γραφικά, θέτοντας τα και κάνοντας τα δικά τους, αλγεβρικά. Οι αντιδράσεις τους ενεργοποιήθηκαν και εμφανίστηκαν κατά την αλληλεπίδρασή τους με αυτά. Τα έργα φαίνεται ότι ‘πυροδότησαν’ κατά κάποιο τρόπο την άλγεβρα στους μαθητές, γεγονός που τους οδήγησε να ασχοληθούν με ένα προσαρμοσμένο τρόπο για να τα λύσουν, αναπτύσσοντας μια αλγεβρική στρατηγική.

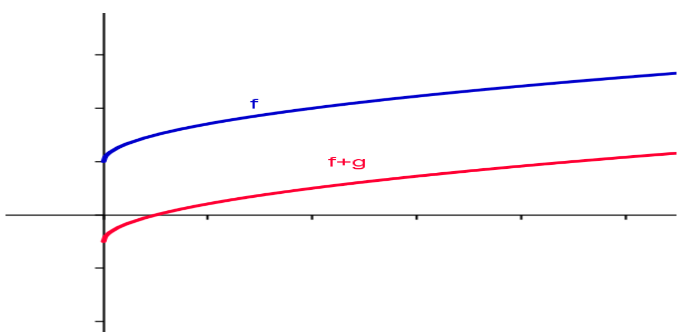
Στρατηγική 2: γεωμετρική/γραφική

Σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές αντιμετώπισαν μη γραμμικές συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα την πρόσθεση μιας τετραγωνικής και μιας σταθερής συνάρτησης, εξήγησαν ότι οι συναρτήσεις αυτές είχαν διαρκώς διαφορετική κλίση, η οποία δεν επηρεάστηκε από την πρόσθεση μιας σταθερής συνάρτησης, επειδή μια σταθερή συνάρτηση δεν έχει μεταβλητότητα και έτσι η προκύπτουσα συνάρτηση θα έχει την ίδια μορφή με την τετραγωνική, αλλά θα είναι 'μετατοπισμένη' προς τα πάνω ή προς τα κάτω ανάλογα με τη προστιθέμενη σταθερά.



Εικόνα 8: Παράδειγμα πρόσθεσης τετραγωνικής με σταθερή συνάρτηση

Σε άλλες περιπτώσεις με μη γραμμικές συναρτήσεις, οι μαθητές χρησιμοποίησαν την έννοια του 'παραλληλισμού'. . Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές έπρεπε να επιλύσουν ένα έργο όπως αυτό που παρουσιάζεται παρακάτω:



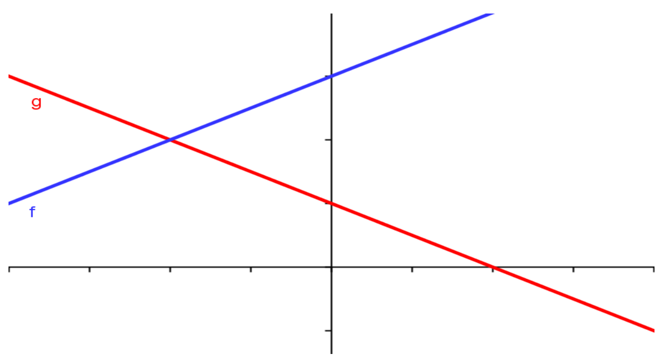
Εικόνα 9: Παράδειγμα χρήσης της έννοιας του παραλληλισμού

ανέφεραν ότι η f+g είναι παράλληλη της f, άρα η g έπρεπε να είναι μια αρνητική σταθερά, καθώς το άθροισμα προκύπτει από μία 'παράλληλη' μεταφορά της f προς τα κάτω. Ωστόσο, δεν εξήγησαν ρητώς τι σημαίνει παραλληλισμός. Για παράδειγμα, οι καμπύλες πρέπει να διατηρούν κάποια απόσταση μεταξύ τους; Εάν ναι, μια απόσταση σε σχέση με τι: οριζόντια, κάθετη ή άλλη;

Σύμφωνα με τον Proulx (2015), οι μαθητές έδωσαν μια γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης ως ιδιότητα όχι της συνάρτησης, αλλά της καμπύλης που υπάρχει στο γράφημα. Επίσης, είδαν τις συναρτήσεις ως γεωμετρικές οντότητες, ως ολότητες, που ήταν 'παράλληλες' ή 'μετατοπίζονταν' παράλληλα. Μέσα από το πρίσμα αυτής της διαρκώς μεταβαλλόμενης γεωμετρικής κλίσης και του παραλληλισμού, οι μαθητές μπορεί να θεωρηθεί ότι δημιούργησαν έναν καλά προσαρμοσμένο τρόπο για την επίλυση έργων με μη γραμμικές συναρτήσεις, κάνοντας μια ολιστική ανάγνωση των γραφημάτων με γεωμετρικούς όρους, αναπτύσσοντας δηλαδή μία γεωμετρική-γραφική στρατηγική επίλυσης.

Στρατηγική 3: γραφική/αριθμητική

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία στα γραφήματα των συναρτήσεων (Even, 1998). Μέσα από αυτά τα σημεία, δημιούργησαν ακριβείς και κατά προσέγγιση απαντήσεις (Kahane,2003), οι οποίες συνδυάστηκαν για να βρουν την προκύπτουσα συνάρτηση. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές έπρεπε να προσθέσουν δύο γραμμικές συναρτήσεις όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 10: Παράδειγμα πρόσθεσης γραμμικών συναρτήσεων

εστίασαν στο σημείο τομής τους και στα σημεία τομής των συναρτήσεων με τον άξονα y΄y. Υπολόγισαν προσεγγιστικά την τεταγμένη στο σημείο τομής τους αναφέροντας ότι θα έχει διπλάσια τιμή, καθώς και την τεταγμένη για x=0, αναφέροντας ότι θα είναι το άθροισμα των δύο τεταγμένων, με σκοπό να σχηματίσουν μία εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση, η οποία όπως ανέφεραν θα ήταν επίσης γραμμική και θα περνούσε από τα σημεία των οποίων οι τεταγμένες υπολογίστηκαν.

Σε άλλες περιπτώσεις, οι μαθητές αξιολόγησαν την εικόνα κάθε συνάρτησης σε ένα συγκεκριμένο σημείο χρησιμοποιώντας την αλγεβρική της έκφραση και στη συνέχεια έκαναν ακριβείς υπολογισμούς για να αποκτήσουν μια ένδειξη για την προκύπτουσα συνάρτηση στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, στο έργο που τους ζητήθηκε να προσθέσουν τις αλγεβρικές εκφράσεις των f(x)=|x| και g(x)=x, οι μαθητές εξήγησαν τη διάσπαση της συνάρτησης για κάθε πλευρά του άξονα y (αριστερά και δεξιά) και αποτίμησαν συγκεκριμένα σημεία σε κάθε πλευρά, τα οποία τους έδωσαν μια ένδειξη για το που θα βρισκόταν (σε ποιο τεταρτημόριο) και πως θα έμοιαζε η προκύπτουσα συνάρτηση. Έτσι για x = 2, υπολόγισαν f(2)=|2|=2 και g(2)=2, άρα (f + g)(2) = 2 + 2 = 4, και τοποθέτησαν την προκύπτουσα συνάρτηση στο πρώτο τεταρτημόριο με κλίση διπλάσια της y = x, ενώ για x = -5, υπολόγισαν f(-5) = | -5 | = 5 και g (-5) = -5, άρα η (f + g)(-5) = -5 + 5=0 και τοποθέτησαν την προκύπτουσα συνάρτηση πάνω στον άξονα x΄x στα αριστερά του άξονα y. Οι τιμές που υπολόγισαν δε μπορεί να θεωρηθούν ως συγκεκριμένα παραδείγματα, αλλά αντιπροσωπεύουν την ομάδα των σημείων αριστερά και δεξιά του άξονα y. Με βάση αυτή την άποψη, κάθε αριθμητικό σημείο φαίνεται να προσφέρει μια εικόνα για την εμφάνιση της συνάρτησης σε κάθε πλευρά του καρτεσιανού επιπέδου.

Οι μαθητές σύμφωνα με τον Proulx (2015), δημιούργησαν ακριβή και κατά προσέγγιση σημεία για να προσδιορίσουν την προκύπτουσα συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό, δεν ήταν πλέον σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο, αλλά σε ένα συνδυασμό αριθμητικών και γραφικών πλαισίων, δημιουργώντας αριθμούς και συντεταγμένες που είχαν νόημα γι ’αυτούς στο γράφημα. Όταν για παράδειγμα αναφέρθηκαν στις τιμές του x, δεν προσπάθησαν να βρουν το νόημά τους στην αλγεβρική έκφραση, αλλά εργάστηκαν στο γραφικό πλαίσιο για να αποκτήσουν πληροφορίες για τον υπολογισμό της προκύπτουσας συνάρτησης. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο τομής με τον άξονα y, το οποίο δεν αντιμετωπίζεται ως παράμετρος β της γραμμικής συνάρτησης, αλλά ως σημείο στο γράφημα. Όπως αναφέρει ο Kahane (2003) η σχέση μεταξύ ακριβών και προσεγγιστικών υπολογισμών πρέπει να εξεταστεί, όχι σε αντίθεση αλλά ως συμπληρωματική, σε σχέση με τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν και τονίζει ότι και οι δύο υπολογισμοί είναι εξίσου σημαντικοί για την επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά και ιδιαίτερα στα νοερά μαθηματικά όπου τα ζητήματα του χρόνου είναι ένας παράγοντας.

Αξιοσημείωτο, σύμφωνα με τον Proulx (2015), είναι επίσης το γεγονός της σχετικής ευκολίας που παρουσίασαν οι μαθητές στη σύνδεση των διάφορων αναπαραστάσεων της συνάρτησης σε αντίθεση με τα ευρήματα πολλών ερευνών. Αξιοσημείωτο ακόμη είναι το επίπεδο της άνεσης που έδειξαν οι μαθητές στη διαχείριση των οπτικών αναπαραστάσεων στις δραστηριότητες με συναρτήσεις. Αυτό αναδεικνύει το ενδιαφέρον για τη διερεύνηση των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας των μαθηματικών σχετικά με την ανάπτυξη αυτής της ευχέρειας μεταξύ των σημειακών και των ολιστικών προσεγγίσεων στις συναρτήσεις και για τις επιδράσεις αυτών των νοερών μαθηματικών δραστηριοτήτων στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Λειτουργικοί ορισμοί των εννοιών

Όπως προαναφέραμε σύμφωνα με τον Duval (2006), κανένα είδος μαθηματικής διαδικασίας δε μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς τη χρήση ενός σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης. Για τις συναρτήσεις ως τέτοια συστήματα αναφέρονται το λεκτικό, πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση (Kaldrimidou & Ikonomou, 1992). Ο όρος νοερή διαχείριση των συναρτήσεων αναφέρεται στις διαδικασίες μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης, στην παρούσα έρευνα στο γραφικό, όπως για παράδειγμα η συμπλήρωση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συμμετρίας ή της περιοδικότητας Duval (2006), μέσω διανοητικών διαδικασιών χωρίς χαρτί και μολύβι ή άλλα υπολογιστικά (υλικά) βοηθήματα (Hazekamp,1986; Threlfall, 2002).

Οι νοερές στρατηγικές αποτελούν έναν ειδικό τύπο γνωστικών διαδικασιών και αναφέρονται στις διαδικασίες κατά τις οποίες πραγματοποιείται μια ακολουθία μετασχηματισμών των δεδομένων ενός προβλήματος, προκειμένου να βρεθεί μία λύση (Threlfall,2002) ή στις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την ανάκληση πληροφοριών από την μακρόχρονη μνήμη (Bjorkland & Douglas, 1997, οπ. αναφ. Proulx, 2015). Ο όρος ευελιξία αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ των διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει, με γνώμονα τη γρήγορη και σωστή απάντηση (Heinze κ.α., 2009; Verschaffel κ.α., 2009).

Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά παρουσιάστηκε η έννοια της συνάρτησης μέσα από την ιστορική εννοιολογική της εξέλιξη, όπου διαπιστώθηκε η πολλαπλότητα των επιμέρους εννοιών που αυτή περιλαμβάνει και συμπυκνώνει στη διάρκεια αυτής της εξέλιξης. Στη συνέχεια, μέσα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση, παρουσιάστηκαν οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας και διαπιστώθηκε πως κύρια πηγή αυτών είναι οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασής της. Παράλληλα παρουσιάστηκαν ερευνητικές προσεγγίσεις με διαφορετικό θεωρητικό υπόβαθρο, που στόχο είχαν την ανάλυση και αξιολόγηση αυτών των δυσκολιών και παρανοήσεων. Διαπιστώθηκε ότι κάποιες έρευνες εστίασαν σε επιστημολογικά εμπόδια, άλλες στις έννοιες εικόνα και ορισμός της συνάρτησης, άλλες στη διάκριση ανάμεσα στην αντίληψη της έννοιας ως διαδικασία και ως αντικείμενο, άλλες στον τρόπο προσέγγισης της έννοιας (ολιστικά ή κατά σημεία), άλλες διέκριναν επίπεδα κατανόησης, ενώ μεγάλος αριθμός εστίασε στο ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων και των μεταξύ τους συνδέσεων και μεταφράσεων, καθώς και στο ρόλο των απεικονίσεων στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας. Διαπιστώθηκε επίσης, ότι οι αναπαραστάσεις είναι αναπόσπαστο κομμάτι κάθε μαθηματικής διαδικασίας και ότι η ικανότητα μετάφρασης και η ευελιξία ανάμεσα στα διάφορα αναπαραστατικά συστήματα είναι σημαντική στην κατανόηση μιας έννοιας. Ακόμη διαπιστώθηκε ότι η ανάπτυξη μιας οπτικής συλλογιστικής μπορεί να υποστηρίξει συμπληρωματικά τη συμβατική διδασκαλία. Τέλος παρουσιάστηκαν άλλες έρευνες σχετικές με τη νοερή διαχείριση των συναρτήσεων, που αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας έρευνας και παρουσιάστηκαν τα ευρήματα αυτών, όπου διαπιστώθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις (στρατηγικές) των μαθητών σε αυτή τη διαχείριση: αλγεβρικές-παραμετρικές, γραφικές-γεωμετρικές και γραφικές- αριθμητικές.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

Βασικός στόχος της παρούσας έρευνας, είναι η διερεύνηση των συμπεριφορών των μαθητών κατά τη νοερή διαχείριση συναρτήσεων και ειδικότερα τις στρατηγικές που αναπτύσσουν όταν επιλύουν έργα με συναρτήσεις νοερά σε γραφικό περιβάλλον, χωρίς δηλαδή χαρτί και μολύβι ή οποιοδήποτε άλλο υπολογιστικό υλικό, καθώς και ο βαθμός ευελιξίας μεταξύ των στρατηγικών σε σχέση με τα έργα αυτά.

Με βάση το στόχο που θέσαμε παραπάνω προέκυψαν τρία βασικά ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη νοερή επίλυση έργων με συναρτήσεις σε γραφικό περιβάλλον;

2. Ποιος είναι ο βαθμός ευελιξίας των μαθητών στις στρατηγικές που αναπτύσσουν όταν διαχειρίζονται νοερά έργα με συναρτήσεις σε σχέση με αυτά;

3. Ποια η σχέση της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά με την επιτυχία σε έργα νοερής διαχείρισης συναρτήσεων;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Προκειμένου να διερευνηθούν και να απαντηθούν τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα σχεδιάστηκε η παρούσα έρευνα. Αρχικά έγινε βιβλιογραφική επισκόπηση του πεδίου των νοερών μαθηματικών, μέσω της οποίας διαπιστώθηκε το κενό των ερευνών που αφορούν τα νοερά μαθηματικά με αντικείμενα διαφορετικά των αριθμών και ειδικότερα των συναρτήσεων, τόσο σε διεθνή όσο και σε εθνικό επίπεδο και καταγράφηκε το θεωρητικό υπόβαθρο των εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα. Στη συνέχεια έγινε η επιλογή της μεθόδου της εκπαιδευτικής έρευνας, καθώς και του δείγματος συλλογής των δεδομένων. Ακολούθησε ο σχεδιασμός της συλλογής των δεδομένων και η επιλογή του ερευνητικού εργαλείου. Τέλος, έγινε ανάλυση των δεδομένων της έρευνας με τη χρήση τόσο ποιοτικών όσο και ποσοτικών μεθόδων, από όπου προέκυψαν τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας.

5.1 Ερευνητική μέθοδος

Η έρευνα είναι ποιοτική, εστιάζει σε ομάδα μαθητών Γ΄ λυκείου προσανατολισμού που διδάσκεται μαθηματικά και βασίστηκε στη δειγματοληψία σκοπιμότητας (βολική), που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες ανάγκες της έρευνας, ενώ η συλλογή των δεδομένων έγινε με κλινική συνέντευξη (Cohen κ.α., 2008:σελ. 170).

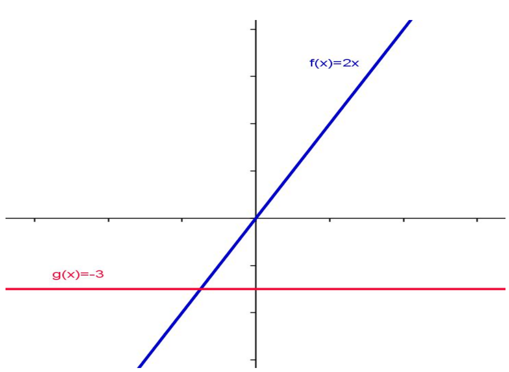
5.2 Συμμετέχοντες

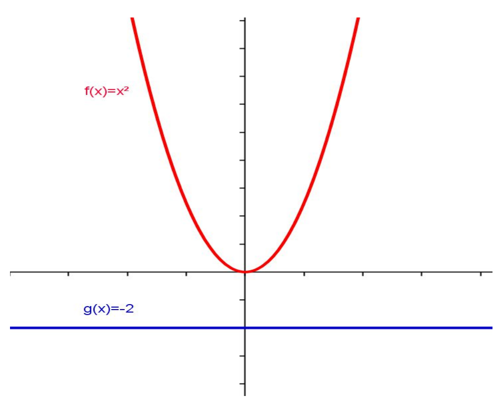
Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν οι 42 μαθητές/τριες της Γ΄ λυκείου των Λ.Τ. Γαλάτιστας Χαλκιδικής. Συγκεκριμένα ήταν μαθητές του θετικού προσανατολισμού και του προσανατολισμού οικονομίας και πληροφορικής. Το δείγμα ικανοποιούσε την ποικιλότητα ως προς τα χαρακτηριστικά της γνώσης του μαθηματικού αντικειμένου και των δεξιοτήτων των μαθητών. Η επιλογή του δείγματος όπως προαναφέραμε, έγινε με τη μορφή της βολικής δειγματοληψίας (Creswell, 2011), καθώς ο ερευνητής είναι και διδάσκων των εν λόγω μαθητών. Δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού, όμως αναμένεται να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερώτημα.

5.3 Ερευνητικό εργαλείο

Το εργαλείο της έρευνας είναι ερωτήσεις παρόμοιες με αυτές που δόθηκαν στην εργασία του Proulx (2015). Αποτελείται από έξι ομάδες έργων με δύο ή ένα έργο η καθεμία. Λόγο του περιορισμένου χρόνου και του νοερού πλαισίου, τα γραφήματα των συναρτήσεων που επιλέχθηκαν ήταν απλά και γνωστά στους μαθητές, υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, ώστε να μπορούμε να πάρουμε μία απάντηση είτε προφορική, είτε με κάποια χειρονομία σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Στην πρώτη ομάδα έργων δόθηκαν τα γραφήματα που φαίνονται παρακάτω:



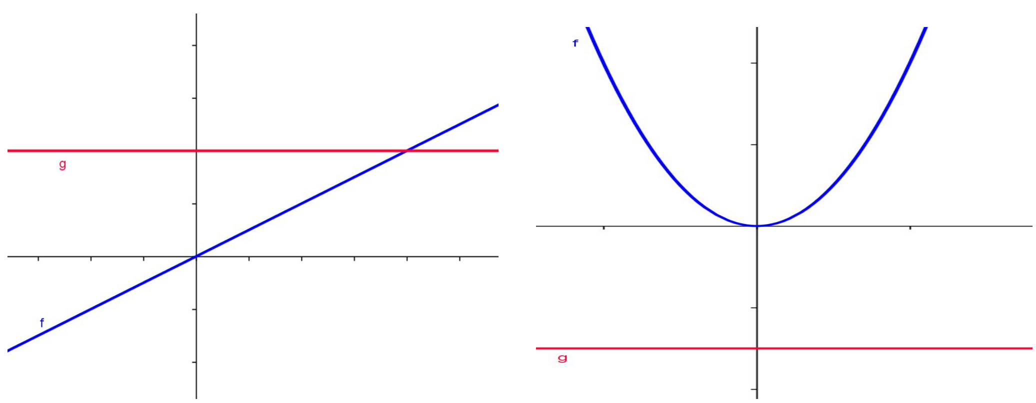


Εικόνα 11: Γραφήματα του πρώτου έργου (Proulx,2015, σελ. 6)

Στο ένα έργο όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, δόθηκε στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τόσο η γραφική όσο και η αλγεβρική έκφραση μιας γραμμικής και μιας σταθερής συνάρτησης και στο άλλο η γραφική και η αλγεβρική έκφραση μιας τετραγωνικής και μιας σταθερής συνάρτησης και ζητούνταν να βρεθεί νοερά σε γραφικό περιβάλλον το άθροισμα και η διαφορά τους. Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με αυτές τις συναρτήσεις από τα πρώτα ακαδημαϊκά τους χρόνια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Με τη συγκεκριμένη ερώτηση αναμένεται να διαπιστωθεί αν η ύπαρξη των αλγεβρικών εκφράσεων των συναρτήσεων οδηγήσει τους μαθητές σε μια αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015), προσθέσουν δηλαδή αρχικά τους τύπους των συναρτήσεων και στη συνέχεια δώσουν μια γραφική απάντηση ή αν θα προβούν σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, επιλέγοντας μια γεωμετρική/γραφική στρατηγική (Proulx,2015), λέγοντας δηλαδή ότι η πρόσθεση μιας σταθεράς μετατοπίζει τη συνάρτηση κατακόρυφα προς τα πάνω ή προς τα κάτω ανάλογα αν η σταθερά είναι θετική ή αρνητική (1^{ο} ερευνητικό ερώτημα). Επίσης αναμένεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές αντιμετωπίσουν με διαφορετική στρατηγική επίλυσης τη γραμμική από την τετραγωνική συνάρτηση (2^{ο} ερευνητικό ερώτημα).

Στη δεύτερη ομάδα έργων δόθηκαν τα ακόλουθα γραφήματα:

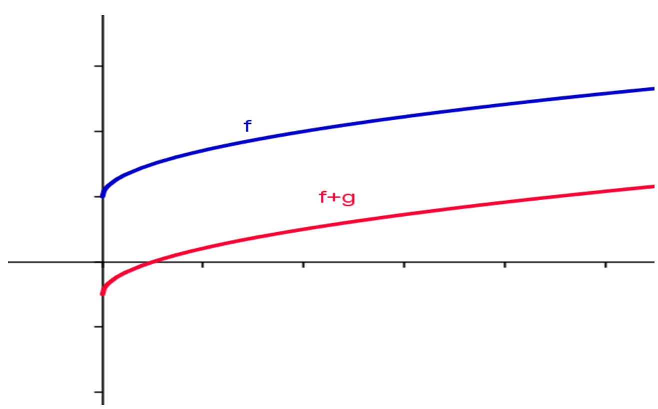


Εικόνα 12: Γραφήματα του δεύτερου έργου (Proulx,2015, σελ. 9)

Στο ένα έργο όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, δόθηκε στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα μια γραμμικής και μιας σταθερής συνάρτησης και στο άλλο τα γραφήματα μιας τετραγωνικής και μιας σταθερής συνάρτησης, χωρίς όμως την αλγεβρική τους έκφραση.

Ζητούμενο στο συγκεκριμένο έργο ήταν να βρεθεί γραφικά σε νοερό πλαίσιο το άθροισμα των δύο συναρτήσεων. Με αυτή την ερώτηση αναμένεται να διαπιστωθεί, εάν οι μαθητές λόγο της απουσίας των αλγεβρικών εκφράσεων οδηγηθούν σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, λέγοντας ότι η πρόσθεση μιας σταθεράς μετατοπίζει το γράφημα της συνάρτησης προς τα πάνω ή προς τα κάτω ανάλογα με το πρόσημο της, επιλέξουν δηλαδή μία γραφική/γεωμετρική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015) ή αν καταφύγουν πάλι στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων οι οποίες τους είναι γνωστές, θεωρήσουν για παράδειγμα ότι η $f(x)=αx$ ή $αx^2$ αντίστοιχα, η $g(x)=c$, επομένως η $(f+g)(x)=αx+c$ ή $αx^2+c$, άρα η γραφική παράσταση του αθροίσματος θα είναι μία ευθεία παράλληλη της f που περνάει από το σημείο (0,c) ή μια τετραγωνική συνάρτηση με κορυφή το σημείο (0,c) αντίστοιχα, επιλέξουν δηλαδή μία αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015), (1ο ερευνητικό ερώτημα). Επιπλέον δίνοντας δύο έργα με διαφορετική μορφή συναρτήσεων αναμένεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν διαφορετική στρατηγική για την επίλυση του έργου της γραμμικής από την τετραγωνική συνάρτηση (2ο ερευνητικό ερώτημα).

Στην τρίτη ομάδα έργων δόθηκε το παρακάτω έργο:

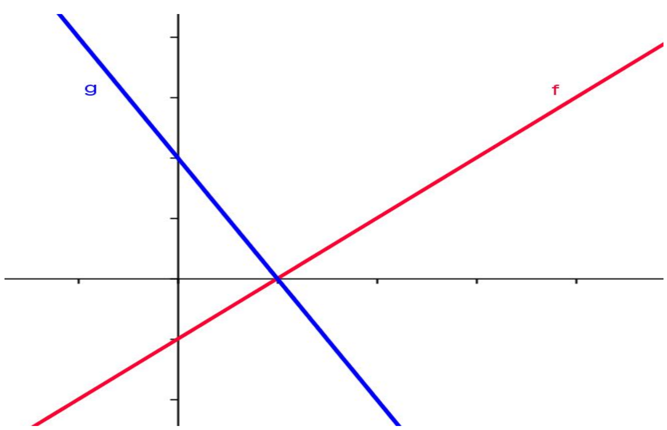


Εικόνα 13: Γράφημα του τρίτου έργου (Proulx,2015, σελ. 6)

Στο έργο αυτό όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, δόθηκε στο ίδιο καρτεσιανό επίπεδο η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και το αποτέλεσμα μιας πράξης f+g. Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές έπρεπε να βρουν νοερά τη συνάρτηση g που είχε προστεθεί ή αφαιρεθεί για να δώσει την προκύπτουσα συνάρτηση.

Εδώ τόσο η αρχική συνάρτηση f όσο και το αποτέλεσμα της πράξης f+g είναι τετραγωνική ρίζα συν κάποια σταθερά. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στον εάν οι μαθητές για να λύσουν το συγκεκριμένο έργο, στο οποίο η συνάρτηση είναι καμπύλη γνωστή μεν αλλά όχι τόσο οικεία, χρησιμοποιήσουν μια ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, παρατηρώντας ότι το αποτέλεσμα είναι μια κατακόρυφη μετατόπιση της αρχικής συνάρτησης προς τα κάτω, επομένως η λύση θα είναι μια αρνητική σταθερά, επιλέξουν δηλαδή μία γραφική/γεωμετρική στρατηγική (Proulx,2015) ή θα σκεφτούν αλγεβρικά ότι η g=(f+g)-f και θα εστιάσουν σε κάποια σημεία βρίσκοντας προσεγγιστικά την κατακόρυφη απόσταση τους, επιλέξουν δηλαδή έναν συνδυασμό από αλγεβρική και αριθμητική/γραφική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015), (1ο ερευνητικό ερώτημα).

Στην τέταρτη ομάδα έργων δόθηκε το γράφημα:



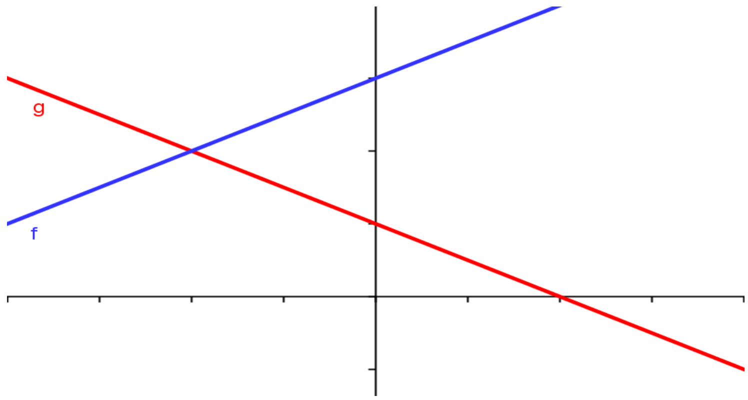
Εικόνα 14: Γράφημα του τέταρτου έργου (Proulx,2015, σελ. 9)

όπου όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, δίνονταν στο ίδιο καρτεσιανό επίπεδο η γραφική παράσταση δύο γραμμικών συναρτήσεων οι οποίες τέμνονταν σε σημείο του άξονα x΄x διαφορετικό του O(0,0).

Ζητούμενο στο έργο αυτό ήταν να βρεθεί η διαφορά f-g ή g-f των δύο συναρτήσεων. Με τη συγκεκριμένη ερώτηση αναμένεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές καταφύγουν στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων, θεωρήσουν για παράδειγμα ότι η $f(x)=αx+β$ με $α>0$ και $β<0$ και η $g(x)=γx+δ$ με $γ<0$ και $δ>0$, επομένως η $(f-g)(x)=(α-γ)x+(β-δ)$, όπου $α-γ>0$ και $β-δ<0$, άρα η προκύπτουσα συνάρτηση θα είναι μία ευθεία με θετική κλίση που τέμνει τον άξονα y΄y στα αρνητικά, επιλέξουν δηλαδή μία αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015) ή αν εστιάσουν σε συγκεκριμένα σημεία του γραφήματος, σημεία τομής με τον άξονα y΄y και σημείο τομής τους και υπολογίσουν τις τιμές της διαφοράς σε αυτά, προκειμένου να σχηματίσουν μια εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση, επιλέξουν δηλαδή μία γραφική/αριθμητική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015), ($1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα). Επίσης αναμένεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν συνδυαστικά αυτές τις στρατηγικές προκειμένου να δώσουν μια πληρέστερη απάντηση ($2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα).

Στο πέμπτο έργο δόθηκαν αρχικά οι συναρτήσεις $f(x)=|x|$ και $g(x)=x$ ενώ στη συνέχεια δόθηκαν οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$, (Proulx,2015, σελ. 7). Δόθηκαν δηλαδή μόνο οι αλγεβρικές και όχι οι γραφικές εκφράσεις συναρτήσεων, που δε μπορούσε να βρεθεί άμεσα το άθροισμά τους και ζητούνταν να βρεθεί νοερά η γραφική παράσταση του αθροίσματος f+g. Με το παρόν έργο αναμένεται να διαπιστωθεί γενικότερα η ικανότητα των μαθητών να μετατρέπουν ένα αμιγώς αλγεβρικό πρόβλημα σε γραφικό, καθώς η διαχείριση των συναρτήσεων γίνεται σε γραφικό περιβάλλον. Επίσης το ενδιαφέρον εστιάζεται στο αν οι μαθητές πάρουν για παράδειγμα τις περιπτώσεις $f(x)=-x$ για $x<0$ και $f(x)=x$ για $x>0$ και στη συνέχεια προσθέσουν τις αλγεβρικές τους εκφράσεις, βρίσκοντας ότι η $(f+g)(x)=0$ για $x<0$ και ότι η $(f+g)(x)=x$ για $x>0$, επιλέξουν δηλαδή μία αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015) ή καταφύγουν σε ακριβείς υπολογισμούς με συγκεκριμένες τιμές του x, θετικές και αρνητικές, προκειμένου να αποκτήσουν μια εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση, επιλέξουν δηλαδή μία γραφική/αριθμητική στρατηγική επίλυσης (Proulx,2015), ($1^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα). Ακόμη αναμένεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν συνδυαστικά αυτές τις στρατηγικές ή αν αντιμετωπίσουν με διαφορετικό τρόπο την τετραγωνική από τη γραμμική συνάρτηση ($2^{ο}$ ερευνητικό ερώτημα).

Στην έκτη ομάδα έργων δόθηκε το γράφημα:



Εικόνα 15: Γράφημα του έκτου έργου (Proulx,2015, σελ. 13)

όπου όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, δίνονταν στο ίδιο καρτεσιανό επίπεδο η γραφική παράσταση δύο γραμμικών συναρτήσεων που έμοιαζαν συμμετρικές και ζητούνταν να βρεθεί νοερά το άθροισμα τους f+g.

Το ενδιαφέρον εδώ εστιάζεται στο εάν οι μαθητές για να λύσουν το έργο χρησιμοποιήσουν μια ολιστική προσέγγιση επίλυσης παρατηρώντας τη συμμετρία του σχήματος και διαπιστώνοντας ότι το άθροισμα τους θα είναι μια σταθερή συνάρτηση με τιμή ίση με το διπλάσιο της τεταγμένης του σημείου τομής τους, επιλέξουν δηλαδή μία γραφική/γεωμετρική στρατηγική (Proulx,2015) ή θα εστιάσουν στις παραμέτρους α και β των γραμμικών συναρτήσεων διαπιστώνοντας ότι οι συντελεστές διεύθυνσης είναι αντίθετοι, άρα το άθροισμα τους θα ισούται με το άθροισμα των παραμέτρων β, επιλέξουν δηλαδή μία αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική (Proulx,2015) ή ακόμη αν εστιάσουν σε συγκεκριμένα σημεία, όπως το σημείο τομής τους και το σημείο τομής καθεμιάς με τον άξονα y΄y και υπολογίσουν προσεγγιστικά το άθροισμα σε αυτά τα σημεία προκειμένου να αποκτήσουν μια εικόνα για την προκύπτουσα συνάρτηση, επιλέξουν δηλαδή μία γραφική/αριθμητική στρατηγική (Proulx,2015), (1^{ο} ερευνητικό ερώτημα). Επίσης αναμένεται να διαπιστωθεί αν οι μαθητές οδηγηθούν σε ένα συνδυασμό των παραπάνω στρατηγικών προκειμένου να δώσουν μια ολοκληρωμένη απάντηση (2^{ο} ερευνητικό ερώτημα).

Από την ανάλυση των δεδομένων αναμένεται να διαπιστωθεί η φύση της μαθηματικής δραστηριότητας που παράγεται σε αυτό το νοερό μαθηματικό πλαίσιο με συναρτήσεις σε γραφικό περιβάλλον. Να γίνει δηλαδή κατανοητό και να χαρακτηριστούν, όταν οι μαθητές λύνουν νοερά μαθηματικά καθήκοντα, οι τρόποι εμπλοκής τους σε έργα, οι στρατηγικές που αναπτύσσουν, η ικανότητά τους να βρίσκουν απλούς και ευέλικτους τρόπους επίλυσης, πως δηλαδή ενεργοποιείται η σκέψη τους σε αυτό το πλαίσιο πίεσης χρόνου και έλλειψης υλικών (χαρί-μολύβι).

5.5 Διαδικασία

Η έρευνα υλοποιήθηκε το σχολικό έτος 2018-19. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν τον Μάρτιο-Απρίλιο του 2019 από σχολείο στο οποίο διδάσκει ο ερευνητής. Επειδή οι συμμετέχοντες μαθητές ήταν της Γ΄ λυκείου υποψήφιοι πανελλαδικών, επιλέχθηκε αυτή η περίοδος που η ύλη των εξετάσεων είχε καλυφθεί, ώστε τόσο ο διδάσκων ερευνητής όσο και οι συμμετέχοντες μαθητές να είναι απαλλαγμένοι από το άγχος κάλυψης της. Επιπλέον κάθε μαθητής συμμετείχε χωριστά σε βολικό χρόνο για τον ίδιο και τον ερευνητή.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω μεμονωμένων κλινικών συνεντεύξεων, όπου η διάρκεια τους ήταν περίπου μια διδακτική ώρα. Σε κάθε μαθητή παρουσιαζόταν σε φύλο ένα έργο και στη συνέχεια μετά από περίπου ένα λεπτό του ζητούνταν να δώσει μια προφορική απάντηση ή να δείξει με το χέρι την απάντηση πάνω στο φύλο, καθώς επίσης και να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε την απάντηση. Οι απαντήσεις καταγράφονταν σε κινητό τηλέφωνο ενώ ταυτόχρονα ο ερευνητής κρατούσε σημειώσεις. Το ζήτημα κυρίως δεν ήταν να δούμε αν η απάντηση ήταν σωστή ή όχι, αλλά ποια στρατηγική χρησιμοποίησε για να φτάσει σε αυτή. Για τους μαθητές ήταν η πρώτη εμπειρία με δραστηριότητες στη νοερή διαχείριση συναρτήσεων, καθώς δεν είχαν μελετήσει ρητά τέτοιες πράξεις. Εντούτοις, είχαν ασχοληθεί με συναρτήσεις σε μεγάλο βαθμό καθόλη τη διάρκεια του σχολικού έτους. Οι απαντήσεις των μαθητών με τη μορφή λεκτικών εξηγήσεων και χειρονομιών, καθώς και οι σημειώσεις και παρατηρήσεις του ερευνητή δημιούργησαν τα δεδομένα της παρούσας μελέτης.

Για την εξασφάλιση των κανόνων του κώδικα δεοντολογίας ζητήθηκε η άδεια από τη διεύθυνση των Λ.Τ. και από το σύλλογο γονέων και κηδεμόνων, ενώ στους μαθητές δόθηκε και συμπληρώθηκε έντυπο συναίνεσης και υπογραφής από τον κηδεμόνα. Τα δεδομένα που προέκυψαν από την έρευνα θα παραμείνουν εμπιστευτικά και καμία αναφορά δε θα γίνει σε ονόματα συμμετεχόντων, προστατεύοντας έτσι τα προσωπικά δεδομένα των μαθητών, ενώ στο τέλος της έρευνας όλα τα στοιχεία θα καταστραφούν. Ταυτόχρονα ενημερώθηκαν η σχολική σύμβουλος του κλάδου και η προϊσταμένη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης Χαλκιδικής.

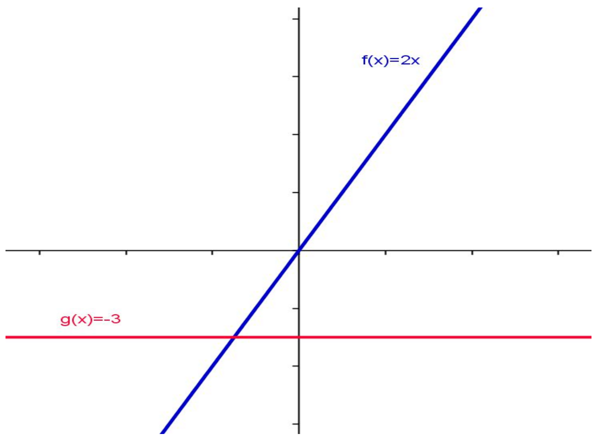
Κωδικοποίηση

Για την ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων αξιοποιήθηκαν τεχνικές της θεμελιωμένης θεωρίας (Cresswell, 2011:σελ. 423-447). Στο πρώτο επίπεδο ανάλυσης πραγματοποιήθηκε ανάγνωση των απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων, στη διάρκεια των οποίων εντοπίστηκαν αποσπάσματα (διατυπώσεις), που αντιστοιχούσαν σε καθεμία από τις κατηγορίες των στρατηγικών. Στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης έγινε η κωδικοποίηση των δεδομένων σε κάθε κατηγορία, ενώ στο τρίτο επίπεδο έγινε η ομαδοποίηση αυτών των κωδικών με βάση τις ομοιότητες που παρουσίαζαν και τα κοινά τους χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε τους κωδικούς ΑΠ (αλγεβρική/παραμετρική), ΓΓ (γραφική/γεωμετρική), ΓΑ (γραφική/αριθμητική), ΑΠ-ΓΓ (συνδυασμός αλγεβρικής/παραμετρικής και γραφικής/γεωμετρικής), ΑΠ-ΓΑ (συνδυασμός αλγεβρικής/παραμετρικής και γραφικής αριθμητικής) και ΓΓ-ΓΑ (συνδυασμός γραφικής/γεωμετρικής και γραφικής/αριθμητικής), για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, Σ (σωστό), Λ (λάθος), ΔΑ (δεν απαντήθηκε) για τις απαντήσεις τους και M_i για κάθε μαθητή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 Αποτελέσματα της έρευνας στη νοερή διαχείριση συναρτήσεων

- **Έργο 1.1: Βρείτε τις f+g και f-g**



Πίνακας 1: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο έργο 1.1***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάντ.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΑΠ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	40/**42** 95,2%	2/**42** 4,8%	-	5/**42** 11,9%	9/**42** 21,4%	**-**	18/**42** 42,8%	10/**42** 23,9%
Επιτυχία ανά στρατηγική			**-**	5/5 **100%**	9/9 **100%**	**-**	16/18 **88,9%**	10/10 **100%**

Επιτυχίες

Στο **Έργο 1.1** απάντησαν σωστά οι σαράντα στους σαράντα δύο (40/42) μαθητές, ποσοστό 95,2%.

Στρατηγικές

Στο **Έργο 1.1** πέντε στους σαράντα δύο (5/42) μαθητές, ποσοστό 11,9%, χρησιμοποίησαν τη στρατηγική ΑΠ, εννιά στους σαράντα δύο (9/42) μαθητές, ποσοστό 21,4%, χρησιμοποίησαν τη στρατηγική ΓΓ, δεκαοκτώ στους σαράντα δύο (18/42), ποσοστό 42,8%, χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό των στρατηγικών ΑΠ-ΓΓ, ενώ δέκα στους σαράντα δύο (10/42), ποσοστό 23,9%, χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό των στρατηγικών ΑΠ-ΓΑ.

Η διαφορετική προσέγγιση επίλυσης φαίνεται από τις αντίστοιχες σωστές απαντήσεις κάποιων μαθητών:

Μαθητής 5: «Προσθέτω ή αφαιρώ μια σταθερά c και μετατοπίζω ανάλογα τις γραφικές παραστάσεις προς τα πάνω ή προς τα κάτω» (ΓΓ στρατηγική)
Μαθητής 14: «Η f(x)+g(x)=2x-3 είναι μια ευθεία παράλληλη της f και διέρχεται από σημείο με τεταγμένη -3. Προέκυψε από την κατακόρυφη μετατόπιση της f(x) προς τα κάτω κατά 3 μονάδες (από το 0 στο -3). Ομοίως με τη διαφορά.» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική)

Μαθητής 2: «Πρόσθεσα και αφαίρεσα τους τύπους. Επειδή έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (2x, 2x-3, 2x+3) μετακινείται παράλληλα κατά 3 και -3 αντίστοιχα.» (ΑΠ στρατηγική)

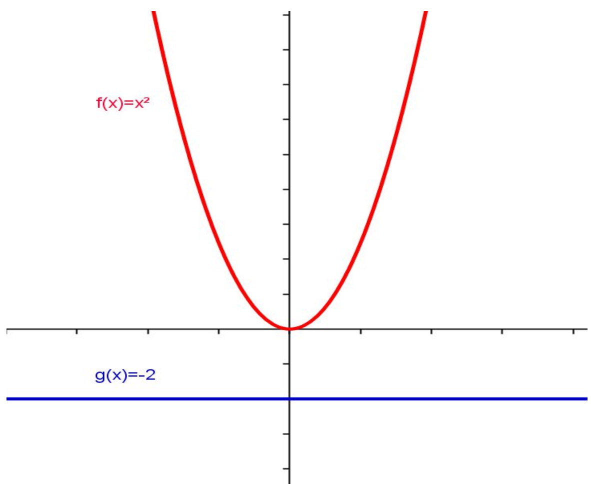
Μαθητής 23: «Η f(x)+g(x)=2x-3 και η f(x)-g(x)=2x+3, άρα η f μετατοπίζεται τρεις μονάδες προς τα κάτω και τρεις μονάδες προς τα πάνω αντίστοιχα» (ΑΠ-ΓΓ στρατηγική)

Η ομάδα μαθητών όπως του μαθητή 5, διαπίστωσε ότι αυτό που προστίθεται ή αφαιρείται είναι μια σταθερά και έτσι το αποτέλεσμα προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της μη σταθερής συνάρτησης, ενώ η ομάδα μαθητών όπως του μαθητή 2, εστίασαν στους αλγεβρικούς τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς, καθώς και στις παραμέτρους α και β των εξισώσεων $f(x)=\alpha x \pm \beta$. Οι άλλες δύο ομάδες μαθητών εστίασαν αρχικά στις αλγεβρικές εκφράσεις με τις οποίες έκαναν πράξεις και στη συνέχεια για να δώσουν απάντηση στο γραφικό περιβάλλον, είτε εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία είτε χρησιμοποίησαν την 'παράλληλη' μετατόπιση, δηλαδή δε χρησιμοποίησαν αμιγώς μια συγκεκριμένη στρατηγική. Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι τριάντα τρείς στους σαράντα δύο (33/42) μαθητές, ποσοστό 78,6%, χρησιμοποίησαν στις απαντήσεις τους είτε αμιγώς είτε συνδυαστικά τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων.

Λάθη

Οι μαθητές που έδωσαν λάθος απάντηση χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό των στρατηγικών ΑΠ-ΓΓ, τις θεώρησαν ότι το αποτέλεσμα προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση τις μη σταθερής συνάρτησης. Συγκεκριμένα και οι δύο ανέφεραν: «Πρόσθεσα και αφαίρεσα τους τύπους, επομένως οι 2x-3, 2x+3 θα είναι η 2x μετατοπισμένη τρεις θέσεις αριστερά και τρεις δεξιά αντίστοιχα». Φαίνεται να υπάρχει παρανόηση μεταξύ της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης του γραφήματος μιας συνάρτησης με την προσθήκη μιας σταθεράς.

- **Έργο 1.2: Βρείτε τις f+g και f-g**



Πίνακας 2: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 1.2***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΑΠ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	41/**42** 97,6%	1/**42** 2,4%	-	-	13/**42** 31%	**-**	23/**42** 54,8%	6/**42** 14,2%
Επιτυχία ανά στρατηγική			**-**	**-**	13/13 **100%**	**-**	22/23 **95,7%**	6/6 **100%**

Επιτυχίες

Το **Έργο 1.2** απάντησαν σωστά σαράντα ένας στους σαράντα δύο (41/42) μαθητές, ποσοστό 97,6%.

Στρατηγικές

Στο **Έργο 1.2** δεκατρείς στους σαράντα δύο μαθητές (13/42), ποσοστό 31%, για την επίλυση αυτού του έργου χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική, παρόλο που της δίνονταν η αλγεβρική έκφραση. Η ολιστική ανάγνωση του γραφήματος της βοήθησε να δώσουν μια γρήγορη απάντηση. Οι υπόλοιποι μαθητές εστίασαν αρχικά της αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων κάνοντας πράξεις και στη συνέχεια χρησιμοποίησαν είτε την ΓΓ (23/42), είτε την ΓΑ (6/42) στρατηγική, για να δώσουν τη γραφική απάντηση. Και σε αυτό το έργο είκοσι εννέα στους σαράντα δύο (29/42) μαθητές, ποσοστό 69%, χρησιμοποίησε της αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Οι μαθητές αυτοί όπως αναφέρει ο Proulx (2015), έχουν μια αυτοματοποιημένη συμπεριφορά εν όψει των συναρτήσεων, εδώ με αλγεβρικό τρόπο, κάτι που τους οδηγεί να ασχοληθούν αλγεβρικά με τα καθήκοντα της.

Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις των μαθητών, όπου φαίνεται η διαφοροποίηση της στρατηγικής επίλυσης παραθέτουμε παρακάτω:

Μαθητής 20:« Οι f+g, f-g θα είναι παραβολές μετατοπισμένες κατά δύο θέσεις προς τα κάτω και προς τα πάνω αντίστοιχα» (ΓΓ στρατηγική).

Μαθητής 16:« Η (f+g)(x)=x^2-2, άρα το γράφημα της f θα μετατοπιστεί κατά 2 μονάδες προς τα κάτω. Ομοίως για την f-g» (ΑΠ-ΓΓ στρατηγική)

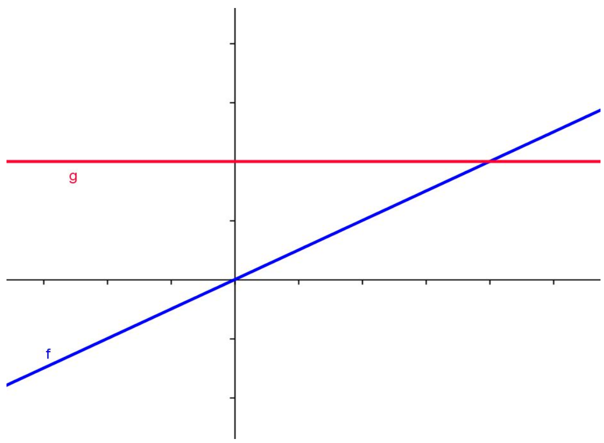
Μαθητής 35: «Η (f+g)(x)=x^2-2, f(0)=-2, f(-1)=f(1)=-1, άρα η f+g είναι μία παραβολή με κορυφή το σημείο (0,-2) και τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (-1,0) και (1,0)» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

Αξιοσημείωτο είναι της το γεγονός ότι έξι στους σαράντα δύο (6/42) μαθητές ποσοστό 14,3%, χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές για τα δύο έργα. Συγκεκριμένα στο έργο της τετραγωνικής συνάρτησης χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική, ενώ στο έργο με τη γραμμική χρησιμοποίησαν ΑΠ και ΓΑ στρατηγική.

Λάθη

Ο μαθητής που απάντησε λάθος, είναι ένας από τους δύο που απάντησαν λάθος και στο προηγούμενο έργο. Χρησιμοποίησε πάλι ΑΠ-ΓΓ στρατηγική, προσθέτοντας αρχικά τους τύπους των συναρτήσεων, στη συνέχεια ισχυρίστηκε ότι η ίδια καμπύλη μετατοπίζεται αριστερά και δεξιά κατά δύο μονάδες αντίστοιχα. Φαίνεται να υπάρχει παρανόηση μεταξύ της κατακόρυφης και της οριζόντιας μετατόπισης του γραφήματος μιας συνάρτησης, των μορφών δηλαδή $f(x) \pm c$ και $f(x \pm c)$.

- **Έργο 2.1: Βρείτε την f+g**



Πίνακας 3: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 2.1***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΑΠ-ΓΑ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	41/**42** 97,6%	1/**42** 2,4%	-	5/**42** 11,9%	27/**42** 64,3%	**-**	4/**42** 9,5%	5/**42** 11,9%	1/**42** 2,3%
Επιτυχία ανά στρατηγική			**-**	5/5 **100%**	27/27 **100%**	**-**	3/4 **75%**	5/5 **100%**	1/1 **100%**

Επιτυχίες

Στο **Έργο 2.1** απάντησαν σωστά οι σαράντα ένας στους σαράντα δύο (41/42) μαθητές, ποσοστό 97,6%.

Στρατηγικές

Η έλλειψη της αλγεβρικής έκφρασης οδήγησε τους περισσότερους μαθητές (27/42), ποσοστό 64,3%, να διαβάσουν το γράφημα ολιστικά ως γεωμετρική οντότητα, χρησιμοποιώντας ΓΓ στρατηγική για την επίλυση του έργου. Δεκατέσσερις στους σαράντα δύο μαθητές (14/42), ποσοστό 33,3%, κατέφυγαν πάλι στην αλγεβρική έκφραση των συναρτήσεων παρόλο που δε δινόταν, είτε αμιγώς είτε συνδυαστικά. Συγκεκριμένα πέντε μαθητές (5/42) χρησιμοποίησαν αμιγώς την ΑΠ στρατηγική, πέντε (5/42) την ΑΠ σε συνδυασμό με τη ΓΑ στρατηγική (ΑΠ-ΓΑ) και τέσσερις (4/42) την ΑΠ σε συνδυασμό με τη ΓΓ στρατηγική (ΑΠ-ΓΓ). Τέλος ένας μαθητής (1/42) χρησιμοποίησε αρχικά ΓΓ στρατηγική και στη συνέχεια για να δώσει πληρέστερη απάντηση εστίασε σε συγκεκριμένο σημείο του άξονα y΄y (ΓΓ-ΓΑ στρατηγική). Η διαφορετική προσέγγιση φαίνεται από τις παρακάτω σωστές απαντήσεις κάποιων μαθητών:

Μαθητής 2: « επειδή η g είναι θετική σταθερά η f θα μετακινηθεί παράλληλα προς τα πάνω» (ΓΓ στρατηγική).

Μαθητής 4: «καθώς g=c, η f μετατοπίζεται κατακόρυφα και μάλιστα το σημείο τομής με τον y΄y γίνεται το (c,0) αντί για το (0,0)» (ΓΓ-ΓΑ στρατηγική)

Μαθητής 14: « Η f είναι της μορφής f(x)=αx με α>0 και η g(x)=c με c>0, άρα η (f+g)(x)=αx+c θα προκύψει από την κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά c προς τα πάνω, θα περνάει δηλαδή από το σημείο (0, c)» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

Μαθητής 25: «Η f είναι της μορφής f(x)=αx με α>0, η g(x)=c με c>0, άρα η (f+g)(x)=αx+c, οπότε η γραφική της παράσταση θα προκύψει με κατακόρυφη μετατόπιση της f(x) κατά c μονάδες προς τα πάνω» (ΑΠ-ΓΓ στρατηγική).

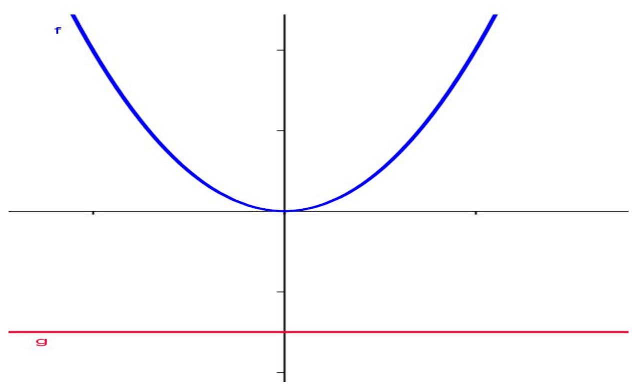
Μαθητής 17: « Η f είναι της μορφής f(x)=αx με α>0, η g(x)=β με β>0, άρα η (f+g)(x)=αx+β, δηλαδή είναι μία ευθεία παράλληλη με την f σε απόσταση β» (ΑΠ στρατηγική).

Επίσης είκοσι τέσσερις στους σαράντα δύο μαθητές (24/42), ποσοστό 57,1%, διαφοροποίησαν τη στρατηγική προσέγγιση επίλυσης, από το παρόμοιο έργο όπου δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις. Από αυτούς οι είκοσι (20/24), ποσοστό 83,3%, ενώ στο έργο 1.1 χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό στρατηγικών ΑΠ-ΓΓ και ΑΠ-ΓΑ, στο έργο 2.1 χρησιμοποίησαν μόνο τη ΓΓ στρατηγική. Αντίθετα δύο μαθητές, ενώ στο έργο 1.1 χρησιμοποίησαν μόνο τη ΓΓ στρατηγική, στο έργο 2.1 χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό στρατηγικών ΓΓ-ΓΑ και ΑΠ-ΓΓ. Ακόμη οκτώ στους σαράντα δύο (8/42) μαθητές, ποσοστό περίπου 19% χρησιμοποίησαν και στις δύο περιπτώσεις μόνο τη ΓΓ στρατηγική, που τους εξασφάλιζε μια γρήγορη απάντηση.

Λάθη

Ο μαθητής που απάντησε λάθος, χρησιμοποίησε ένα συνδυασμό στρατηγικών ΑΠ-ΓΓ. Αναφέρει : « Η f+g είναι αx+κάτι θετικό, άρα η f θα πάει δεξιά». Με δεδομένο ότι στο παρόμοιο έργο με την αλγεβρική έκφραση απάντησε σωστά, δε μπορούμε να είμαστε βέβαιοι αν η λάθος απάντηση του οφείλεται σε παρανόηση ή στην ταχύτητα του λόγου. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι ο συγκεκριμένος μαθητής απάντησε σωστά στο επόμενο έργο ως κατακόρυφη μετατόπιση.

- **Έργο 2.2: Βρείτε την f+g**



Πίνακας 4: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 2.2***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΑΠ-ΓΑ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	40/**42** 95,2%	2/**42** 4,8%	-	4/**42** 9,5%	28/**42** 66,6%	1/**42** 2,4%	6/**42** 14,3%	2/**42** 4,8%	1/**42** 2,4%
Επιτυχία ανά στρατηγική			-	2/4 **50%**	28/28 **100%**	1/1 **100%**	6/6 **100%**	2/2 **100%**	1/1 **100%**

Επιτυχίες

Το **Έργο 2.2** απάντησαν σωστά οι σαράντα από τους σαράντα δύο (40/42) μαθητές, ποσοστό 95,2%.

Στρατηγικές

Η έλλειψη της αλγεβρικής έκφρασης και το νοερό πλαίσιο οδήγησε τους περισσότερους μαθητές (28/42), ποσοστό 66,6%, σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, λύνοντας το έργο με τη ΓΓ στρατηγική. Αυτό επιβεβαιώνει την άποψη του Proulx (2015), ότι όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν έργα με μη γραμμικές συναρτήσεις χρησιμοποιούν τις τεχνικές του 'παραλληλισμού' και της 'μετατόπισης', που αναφέρονται στη ΓΓ στρατηγική. Δώδεκα μαθητές κατέφυγαν στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων και από αυτούς στη συνέχεια οι δύο (2/12) εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική) και οι έξι (6/12) χρησιμοποίησαν την τεχνική της κατακόρυφης μετατόπισης (ΑΠ-ΓΓ στρατηγική). Επίσης ένας μαθητής, αρχικά μίλησε για κατακόρυφη μετατόπιση (ΓΓ στρατηγική) και στη συνέχεια εστίασε στο σημείο τομής με τον y΄y (ΓΑ στρατηγική). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι έντεκα μαθητές (11/42), ποσοστό 26,2%, απάντησαν στα έργα των δύο πρώτων ομάδων χρησιμοποιώντας είτε ΑΠ στρατηγική είτε συνδυασμό ΑΠ με ΓΓ και ΓΑ στρατηγική. Δείχνει να εμπιστεύονται περισσότερο τις αλγεβρικές πληροφορίες των συναρτήσεων, καθώς φαίνεται να γνωρίζουν την αλγεβρική τους έκφραση, παρόλο που τα έργα ήταν σε γραφικό περιβάλλον. Αυτό επιβεβαιώνει την άποψη του Knuth (2000), ότι η εξάρτηση των μαθητών από τις μεθόδους αλγεβρικών λύσεων είναι υπερβολική, αποτέλεσμα της έμφασης που δίνεται στα προγράμματα σπουδών στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις και τους χειρισμούς τους.

Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις των μαθητών αναφέρονται παρακάτω:

Μαθητής 16: «Μετατόπιση της f κατά g προς τα κάτω αφού $g(x)=c<0$» (ΓΓ στρατηγική).

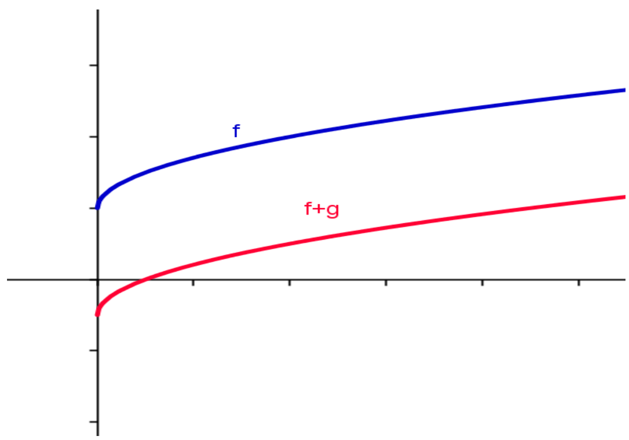
Μαθητής 41: « Η $(f+g)(x)=x^2-c$, οπότε για $x=0$ είναι $(f+g)(0)=-c$, ενώ αν $x^2-c=0$ τότε $x=\pm\sqrt{c}$, άρα η παραβολή έχει κορυφή το (0,-c) και τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(-\sqrt{c},0)$ και $(\sqrt{c},0)$» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

Μαθητής 25: «Η $f(x)=x^2$, η $g(x)=c<0$, $(f+g)(x)= x^2+c$, άρα η f+g προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά c μονάδες προς τα κάτω» (ΑΠ-ΓΓ στρατηγική).

Λάθη

Οι δύο μαθητές που απάντησαν λάθος, χρησιμοποίησαν ΑΠ στρατηγική. Συγκεκριμένα ανέφεραν: « Η $(f+g)(x)=x^2-2$, άρα είναι μία παραβολή και θα πάει 2 θέσεις δεξιά». Φαίνεται να πήραν δεδομένο ότι η $g(x)=-2$, όπως στο παρόμοιο έργο που δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις και επίσης φαίνεται να υπάρχει παρανόηση μεταξύ της κατακόρυφης και της οριζόντιας μετατόπισης μιας συνάρτησης, των μορφών δηλαδή $f(x) \pm c$ και $f(x \pm c)$.

- **Έργο 3: Βρείτε την g**



Πίνακας 5: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 3***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΑΠ-ΓΑ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	25/**42** 59,5%	15/**42** 35,7%	2/**42** 4,8%	7/**42** 16,6%	27/**42** 64,3%	2/**42** 4,8%	-	1/**42** 2,4%	3/**42** 7,1%
Επιτυχία ανά στρατηγική				4/7 **57,1%**	18/27 **66,6%**	0/2 **0%**	-	0/1 **0%**	3/3 **100%**

Επιτυχίες

Το **Έργο 3** έλυσαν σωστά είκοσι πέντε στους σαράντα δύο μαθητές, ποσοστό 59,5%.

Στρατηγικές

Σε αυτό το έργο πάλι οι περισσότεροι μαθητές (30/42), ποσοστό 71,4% χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική, ενώ τρεις (3/42) από αυτούς χρησιμοποίησαν και τη ΓΑ στρατηγική για να δώσουν μια πληρέστερη απάντηση. Φαίνεται ότι μη μπορώντας να αναγνωρίσουν την αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης, καθώς δεν είναι και τόσο οικεία, σε αντίθεση με τις γραμμικές και τετραγωνικές, να οδηγήθηκαν σε αυτή τη στρατηγική. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι και οι τρεις μαθητές που χρησιμοποίησαν το συνδυασμό ΓΓ-ΓΑ στρατηγικών απάντησαν σωστά, ενώ από τους 27 μαθητές που χρησιμοποίησαν αμιγώς τη ΓΓ στρατηγική, οι 18 απάντησαν σωστά. Ακόμη οκτώ μαθητές (8/42), ποσοστό 19%, κατέφυγαν πάλι στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων (ΑΠ στρατηγική), ενώ ένας από αυτούς εστίασε και σε συγκεκριμένα σημεία (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική). Οι μισοί από αυτούς που χρησιμοποίησαν ΑΠ στρατηγική απάντησαν σωστά, ενώ δύο μαθητές δεν έδωσαν καμία απάντηση. Η διαφορετική προσέγγιση σωστών απαντήσεων φαίνεται από τις παρακάτω εκφράσεις των μαθητών:

M_2: « Η g θα είναι μια αρνητική σταθερά επειδή η f+g είναι ίδια με την f κατά g θέσεις προς τα κάτω» (ΓΓ στρατηγική).

M_4: «Η f και η f+g είναι ‘παράλληλες’ με την f+g να βρίσκεται πιο κάτω από την f. Άρα η g είναι σταθερή συνάρτηση και μάλιστα $g<0$. Για τον προσδιορισμό της τιμής της αρκεί να υπολογίσουμε τη διαφορά $(f+g)(0)- f(0)$» (ΓΓ-ΓΑ στρατηγική).

M_5: «Καθώς όταν προσθέτω την g στην f τη μετατοπίζει κατά d, όπου d η απόσταση των σημείων τομής των f και f+g με τον άξονα y, προς τα αρνητικά του άξονα y χωρίς να αλλάξω τη ‘γραμμή’ της συνάρτησης, συμπεραίνω πως η g είναι μια αρνητική σταθερά ίση κατά μέτρο με τη μετατόπιση d» (ΓΓ-ΓΑ στρατηγική).

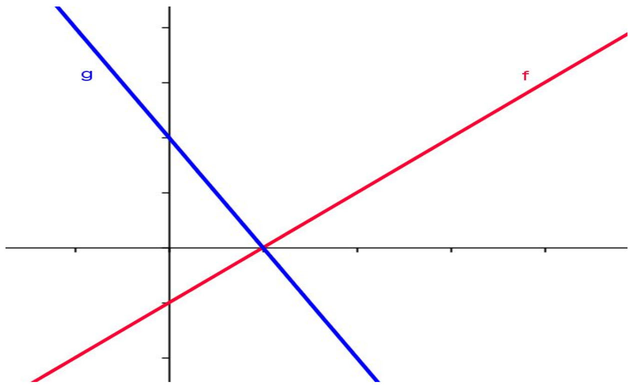
M_{16}: « Η f(x)=$\sqrt{x}+2$ και η (f+g)(x)= $\sqrt{x}-1$, άρα η g(x)=(f+g)(x)-g(x)= $\sqrt{x}-1$-($\sqrt{x}+2$)=-3» (ΑΠ στρατηγική).

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι κανείς μαθητής δεν έδωσε εξηγήσεις για τις έννοιες 'παράλληλη', 'γραμμή', 'μετατόπιση'. Αυτό επιβεβαιώνει την άποψη του Proulx (2015), ότι παρόλο που αυτές οι ιδέες μπορεί να αμφισβητηθούν μαθηματικά ως προς την επάρκειά τους, είναι ένας αναδυόμενος τρόπος για να κατανοήσει κανείς το έργο χωρίς να εξετάσει ή να αναλύσει λεπτομερώς την κατανομή στο μέγεθος της εικόνας για κάθε συνάρτηση, προκειμένου να δώσει μια γρήγορη λύση σε αυτό το νοερό πλαίσιο.

Λάθη

Οι μαθητές που απάντησαν λάθος και χρησιμοποίησαν αμιγώς τη στρατηγική ΓΓ, είχαν παρόμοιες απαντήσεις ως προς το σχήμα της ζητούμενης συνάρτησης, υπήρχε όμως διαφοροποίηση ως προς τη θέση. Αναφέρθηκαν στην 'παράλληλη μετατόπιση' του σχήματος και ισχυρίστηκαν κάποιοι ότι η g θα είναι μια καμπύλη της ίδιας μορφής ανάμεσα στα γραφήματα της f και της f+g, ενώ κάποιοι άλλοι ότι η g θα είναι μια καμπύλη της ίδιας μορφής κάτω από την f+g. Η παρανόηση τους φαίνεται να επηρεάζεται από την γεωμετρική έννοια της μεσοπαράλληλης ευθείας. Ενώ αναγνώρισαν την παράλληλη μετατόπιση του γραφήματος της f με την πρόσθεση της g, δεν διέκριναν τη σταθερή απόσταση των γραφημάτων αλλά ούτε και τη μεταβαλλόμενη κλίση τους. Οι δύο μαθητές που χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική απάντησαν λάθος πως η g θα είναι μια ευθεία με κλίση όμως διάφορη του μηδενός. Κάνοντας τόσο ακριβείς όσο και προσεγγιστικούς υπολογισμούς, οδηγήθηκαν σε λάθος εκτιμήσεις. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση ενός μαθητή: « Θα είναι (f+g)(0)- f(0)=-1-2=-3 και (f+g)(2)- f(2)=1-2.5=-1.5, άρα η g θα είναι μία ευθεία που θα περνάει από τα σημεία (0,-3) και (2,-1.5)». Οι τρεις μαθητές που χρησιμοποίησαν την ΑΠ στρατηγική, απάντησαν λάθος ότι η g(x)= $\sqrt{x}$ ή g(x)= $\sqrt{x}+\frac{1}{2}$. Χαρακτηριστικά ανέφεραν: « (f+g)(x)= $\sqrt{x}-1$, f(x)= $\sqrt{x}$+1, άρα g(x)= $\sqrt{x}$ ή (f+g)(x)= $\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, f(x)= $\sqrt{x}$+1, άρα η g(x)= $\sqrt{x}+\frac{1}{2}$». Ουσιαστικά πρόσθεσαν αντί να αφαιρέσουν τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Ο μαθητής που χρησιμοποίησε ΑΠ-ΓΑ στρατηγική, θεώρησε ότι οι δοθείσες συναρτήσεις είναι ευθείες. Χαρακτηριστικά ανέφερε: «η f(x)=1, (f+g)(x)= $-\frac{1}{2}$, άρα η g(x)= $\frac{1}{2}$ ».

- **Έργο 4:Βρείτε την f-g**



Πίνακας 6: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 4***

Σύνολο μαθητών:15	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΑΠ-ΓΑ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	21/**42** 50%	8/**42** 19%	13/**42** 31%	8/**42** 19%	3/**42** 7,1%	11/**42** 26,2%	-	7/**42** 16,6%	-
Επιτυχία ανά στρατηγική				5/8 **62,5%**	0/3 **0%**	9/11 **81,8%**	-	7/7 **100%**	-

Επιτυχίες

Το **Έργο 4** έλυσαν σωστά είκοσι ένας στους σαράντα δύο μαθητές (21/42), ποσοστό 50%.

Στρατηγικές

Οι περισσότεροι μαθητές σε αυτό το έργο (11/42), ποσοστό 26,2%, χρησιμοποίησαν αμιγώς τη ΓΑ στρατηγική, από τους οποίους απάντησαν σωστά οι εννέα (9/11). Επτά μαθητές (7/42), ποσοστό 16,6%, χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική σε συνδυασμό με την ΑΠ στρατηγική (ΑΠ-ΓΑ), για να δώσουν μια πληρέστερη απάντηση και απάντησαν σωστά και οι επτά. Ανέφεραν συγκεκριμένα σημεία στα γραφήματα των συναρτήσεων, κάτι που σχετίζεται με την προσέγγιση της Even (1998), η οποία αναφέρει ότι κατά την αντιμετώπιση έργων με συναρτήσεις, υπάρχουν περιπτώσεις που πρέπει να εστιάσουμε σε συγκεκριμένα σημεία (π.χ. εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση). Μέσα από αυτά τα σημεία, δημιούργησαν ακριβείς και κατά προσέγγιση απαντήσεις, οι οποίες συνδυάστηκαν για να βρουν την προκύπτουσα συνάρτηση, επιβεβαιώνοντας την άποψη της Kahane (2003), η οποία αναφέρει ότι όταν οι μαθητές λειτουργούν σε νοερό πλαίσιο, πολλές φορές χρησιμοποιούν τόσο ακριβείς όσο και προσεγγιστικούς υπολογισμούς προκειμένου να δώσουν μια απάντηση. Με τον τρόπο αυτό, δεν ήταν πλέον σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο, αλλά σε ένα συνδυασμό αριθμητικών και γραφικών πλαισίων, δημιουργώντας αριθμούς/ συντεταγμένες που είχαν νόημα γι 'αυτούς στο γράφημα. Οκτώ μαθητές (8/42), ποσοστό 19%, εστίασαν μόνο στις αλγεβρικές πληροφορίες του γραφήματος και συγκεκριμένα στις παραμέτρους α, β των γραμμικών συναρτήσεων, δίνοντας μια γενική απάντηση για την προκύπτουσα συνάρτηση, από τους οποίους απάντησαν σωστά οι πέντε (5/8), ενώ τρεις μαθητές (3/42), ποσοστό 7,1%, χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική, απαντώντας και οι τρεις λάθος.. Επίσης δεκατρείς μαθητές (13/42), ποσοστό 31%, σκεφτόμενοι σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα δεν έδωσαν καμία απάντηση λέγοντας: «δε ξέρω, δε μπορώ να σκεφτώ κάτι».

Η διαφοροποίηση των στρατηγικών φαίνεται από τις ενδεικτικές σωστές απαντήσεις των μαθητών:

M_2: «Η g έχει αρνητική κλίση και η f θετική, άρα η f-g θα έχει θετική κλίση, αφού η -g θα έχει θετική. Στο σημείο τομής τους το (f-g)(x)=0, άρα η f-g θα είναι ευθεία με θετική κλίση που θα περνά από το σημείο τομής» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

M_6: « Η g είναι –x + κάτι, η f είναι x-κάτι, άρα η f-g θα είναι 2x-κάτι, μια ευθεία δηλαδή με θετική κλίση» (ΑΠ στρατηγική).

M_4: «Αρχικά στο σημείο τομής τους η διαφορά είναι μηδέν. Στη συνέχεια βρίσκω την κατακόρυφη απόσταση τους d, των σημείων που τέμνουν τον y΄y. Άρα η f-g θα είναι μία ευθεία που περνάει από το σημείο (d,0) και το σημείο τομής τους» (ΓΑ στρατηγική).

Από τις απαντήσεις των μαθητών επιβεβαιώνεται η άποψη του Threlfall (2002), ότι οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι οι αναδυόμενες αντιδράσεις προσαρμοσμένες στα προβλήματά που τους προσφέρουν οι απεικονίσεις της μαθηματικής δραστηριότητας σε αυτό το νοερό μαθηματικό περιβάλλον. Δε μπορούμε να περιορίσουμε τις αντιδράσεις αυτές σε συγκεκριμένα πλαίσια, αλλά πρέπει να εξετάσουμε το δημιουργικό και προσαρμοσμένο χαρακτήρα τους. Έτσι κάποιοι μαθητές εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία, άλλοι στις αλγεβρικές εκφράσεις και άλλοι σε ένα συνδυασμό τους (Proulx, 2015).

Λάθη

Οι τρεις μαθητές που χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική και απάντησαν λάθος, ανέφεραν ότι η f-g προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της f κατά μία μονάδα προς τα αριστερά. Θεώρησαν ουσιαστικά ότι η g είναι μία σταθερά και ότι η προσθήκη της προκαλεί οριζόντια μετατόπιση στο γράφημα της f. Δε μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα αν πρόκειται για παρανόηση ή για άγνοια των συγκεκριμένων μαθητών, αυτό που φαίνεται όμως είναι ότι η συγκεκριμένη στρατηγική δεν ενδείκνυται για την επίλυση αυτού του έργου. Από τους τρεις μαθητές που χρησιμοποίησαν την ΑΠ στρατηγική και απάντησαν λάθος, ο ένας θεώρησε ότι η f-g είναι μία ευθεία με αρνητική κλίση, ενώ οι άλλοι δύο ενώ διαπίστωσαν ότι η f-g έχει θετική κλίση, θεώρησαν ότι είναι ίδια με την κλίση της f. Ο ένας μαθητής που χρησιμοποίησε τη ΓΑ στρατηγική και απάντησε λάθος, ανέφερε ότι το γράφημα της f-g είναι το γράφημα της g μαζί με της f που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. Συγκεκριμένα ανέφερε: « Θα είναι στο σημείο τομής τους f-g=0, ενώ f-g>0 οπουδήποτε αλλού, άρα σβήνουμε τα τμήματα των γραφημάτων που είναι κάτω από τον x΄x και έχουμε το γράφημα της f-g», χωρίς όμως να δικαιολογήσει γιατί f-g>0 σε κάθε άλλο σημείο. Πιθανόν να θεώρησε το γεγονός ότι η f-g έχει θετική κλίση να σημαίνει ότι παίρνει θετικές τιμές. Ο άλλος μαθητής αρχικά διαπίστωσε ότι (f-g)(0)=f(0)-g(0)=-1-2=-3 και στη συνέχεια ανέφερε ότι η f-g θα είναι μία ευθεία που περνάει από τα σημεία (0,-3) και (-3,0), χωρίς να αιτιολογήσει την απάντηση του.

- **Έργο 5.1: Αν** $f(x) = |x|$ **και** g(x)=x, **βρείτε την f+g**

Πίνακας 7: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 5.1***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	14/**42** 33,3%	14/**42** 33,3%	14/**42** 33,3%	22/**42** 52,4%	2/**42** 4,8%	3/**42** 7,1%	1/**42** 2,4%	-	-
Επιτυχία ανά στρατηγική				10/22 **45,5%**	0/2 **0 %**	3/3 **100%**	1/1 **100%**	**-**	**-**

Επιτυχίες

Το **Έργο 5.1** έλυσαν σωστά δεκατέσσερις στους σαράντα δύο μαθητές (14/42), ποσοστό 33,3%.

Στρατηγικές

Οι περισσότεροι μαθητές (22/42), ποσοστό 52,4%, χρησιμοποίησαν ΑΠ στρατηγική, κάτι βέβαια που αναμενόταν καθώς η προτροπή του έργου ήταν σε αλγεβρική μορφή. Παρόλα αυτά οι μισοί περίπου από αυτούς, (10/22) ποσοστό (45,5%), έδωσαν σωστή απάντηση, επιβεβαιώνοντας την άποψη των ερευνητών σχετικά με τη δυσκολία σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς το ζητούμενο ήταν μια απάντηση σε γραφικό περιβάλλον (Zachariades κ.α., 2002; Gagatsis & Christou, 2002; Elia κ.α., 2008; Hitt, 1998; Even, 1998; Knuth, 2000; Sfard, 1992). Τρεις μαθητές (3/42), ποσοστό 7,1%, χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική και απάντησαν όλοι σωστά, ενώ ένας μαθητής χρησιμοποίησε συνδυασμό των στρατηγικών ΑΠ-ΓΑ και απάντησε επίσης σωστά. Δύο μαθητές χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική αλλά απάντησαν λάθος που θα αναλύσουμε παρακάτω, ενώ δεκατέσσερις μαθητές (14/42), ποσοστό 33,3% δεν έδωσε καμία απάντηση. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά χρησιμοποιώντας την ΑΠ στρατηγική, έδωσαν όλοι την ίδια απάντηση: «η f είναι $-x$ για $x<0$ και x για $x>0$, άρα η $f+g$ θα είναι 0 για $x<0$ και $2x$ για $x>0$». Βέβαια η συνάρτηση αυτή συναντάται συχνά στο σχολικό βιβλίο και οι μαθητές είναι αρκετά εξοικειωμένοι τόσο με την αλγεβρική όσο και με τη γραφική της μορφή. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική απάντησαν όπως προαναφέραμε σωστά, εστιάζοντας σε συγκεκριμένα σημεία. Για παράδειγμα ανέφεραν : «Παρατηρώ ότι αν βάλω χ<0 π.χ. χ=-2 βγαίνει f+g=0, ενώ αν βάλω χ>0 π.χ. χ=3 βγαίνει f+g=6, δηλαδή το διπλάσιο». Ο μαθητής που χρησιμοποίησε το συνδυασμό ΑΠ-ΓΑ στρατηγικών, αρχικά ανέφερε ότι: «η f είναι –x για x<0 και x για x>0, άρα η f+g θα είναι 0 για x<0 και 2x για x>0» και στη συνέχεια ανέφερε: «για x=1, y=2, άρα το γράφημα της f+g θα είναι η y=0, δηλαδή ο άξονας x΄x για x<0 και η ευθεία που περνάει από τα σημεία (0,0) και (1,2) για x>0».

Λάθη

Οι δέκα μαθητές (10/22) που χρησιμοποίησαν την ΑΠ στρατηγική και απάντησαν λάθος, έκαναν το ίδιο λάθος, ουσιαστικά αγνόησαν την απόλυτη τιμή και θεώρησαν την f+g ίση με 2x. Αυτό βέβαια δε μπορούμε να γνωρίζουμε αν είναι αποτέλεσμα μιας γρήγορης απάντησης που επιβάλλει το νοερό πλαίσιο ή παρανόησης σχετικά με την έννοια της απόλυτης τιμής. Οι δύο μαθητές που χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική, γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της απολύτου τιμής, τη μετατόπισαν κατά x προς τα πάνω, παραβλέποντας το γεγονός ότι αυτό μεταβάλλεται και δεν είναι σταθερό. Λειτούργησαν δηλαδή σαν να πρόσθεταν μία θετική σταθερά.

- **Έργο 5.2: Αν** $f(x)=x^2$ **και** $g(x)=x$ **βρείτε την f+g**

Πίνακας 8: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 5.2***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ- ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	10/**42** 23,8%	16/**42** 38,1%	16/**42** 38,1%	7/**42** 16,6%	7/**42** 16,6%	2/**42** 4,8%	9/**42** 21,5%	1/**42** 2,4%	-
Επιτυχία ανά στρατηγική				0/7 **0%**	0/7 **0%**	2/2 **100%**	8/9 **88,9%**	0/1 **0%**	-

Επιτυχίες

Το **Έργο 5.2** έλυσαν σωστά δέκα στους σαράντα δύο μαθητές (10/42), ποσοστό 23,8%.

Στρατηγικές

Το έργο αυτό ήταν παρόμοιο με το προηγούμενο, με τη διαφορά ότι η μία συνάρτηση ήταν η τετραγωνική. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα συνολικά δεκαπέντε μαθητές (15/42) να διαφοροποιήσουν τη στρατηγική επίλυσης σε σχέση με το προηγούμενο έργο. Συγκεκριμένα, πέντε μαθητές διαφοροποίησαν τη στρατηγική επίλυσης τους από ΑΠ σε ΓΓ, σε σχέση με το έργο 5.1, κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο καθώς το έργο δίνονταν στην αλγεβρική του μορφή. Επίσης οκτώ μαθητές, διαφοροποίησαν τη στρατηγική επίλυσης σε σχέση με το έργο 5.1, από ΑΠ σε ΑΠ-ΓΑ, ένας μαθητής από ΑΠ σε ΓΑ και ένας από ΓΑ σε ΑΠ-ΓΑ. Και σε αυτό το έργο υπήρξε μια αδυναμία μετάφρασης από την αλγεβρική στη γραφική αναπαράσταση, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα των Markovits κ.α. (1993), Knuth (2000), που διαπίστωσαν τη δυσκολία των μαθητών κατά τη μεταφορά από τη γραφική μορφή στην αλγεβρική παρά το αντίστροφο. Τη δυσκολία αυτή φαίνεται να προκάλεσε το νοερό πλαίσιο επίλυσης του έργου (Proulx, 2015).

Από τους μαθητές που απάντησαν σωστά (10/42), ποσοστό 23,8%, οι οκτώ χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό των στρατηγικών ΑΠ-ΓΑ. Έξι από αυτούς, αρχικά κατέφυγαν στις αλγεβρικές εκφράσεις προσθέτοντας τες και στη συνέχεια βρήκαν τα σημεία τομής με τους άξονες x΄x και y΄y, ενώ χρησιμοποίησαν και το πρόσημο της παραμέτρου α στη μορφή $αx^2$, για να δικαιολογήσουν τη μορφή της προκύπτουσας συνάρτησης. Οι άλλοι δύο αρχικά μετασχημάτισαν με αλγεβρικές διαδικασίες το άθροισμα $x^2 + x$ στη μορφή $(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, ένας με συμπλήρωση τετραγώνου και ο άλλος βρίσκοντας το σημείο που παρουσιάζει ελάχιστο η συνάρτηση, παραγωγίζοντας τη σχέση και στη συνέχεια μετατόπισαν το γράφημα της x^2 οριζόντια και κατακόρυφα. Οι συγκεκριμένοι μαθητές έχουν μεγάλη ευχέρεια στις αλγεβρικές διαδικασίες. Οι άλλοι δύο που απάντησαν σωστά χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική κάνοντας υπολογισμούς σε συγκεκριμένα σημεία, για να εκτιμήσουν τη μορφή της προκύπτουσας συνάρτησης. Επίσης επτά μαθητές (7/42), ποσοστό 16,6%, χρησιμοποίησαν ΑΠ στρατηγική και απάντησαν όλοι λάθος, όπως επίσης και άλλοι επτά (7/42), χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική και απάντησαν όλοι λάθος, ενώ δεκαέξι μαθητές (16/42), ποσοστό 38,1% δεν έδωσε καμία απάντηση. Η διαφοροποίηση των στρατηγικών φαίνεται από τις ενδεικτικές σωστές απαντήσεις των μαθητών:

M_2: « Η f+g=x^2+x θα είναι μια παραβολή που τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (0,0) και (-1,0) και επειδή α>0 θα έχει ελάχιστο άρα θα είναι προς τα πάνω» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

M_4: « Η f+g=x^2+x=$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ άρα η x^2 μετατοπίζεται κατά ½ αριστερά και ¼ προς τα κάτω» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

M_5: «Η f+g=x^2+x, (f+g)΄=2x+1, (f+g)΄=0 για x=-½, (f+g)(- ½)=-¼ άρα ελάχιστο στο (- ½,-¼). Έτσι η f+g=$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ είναι η x^2 μετατοπισμένη κατά ½ αριστερά και ¼ προς τα κάτω» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

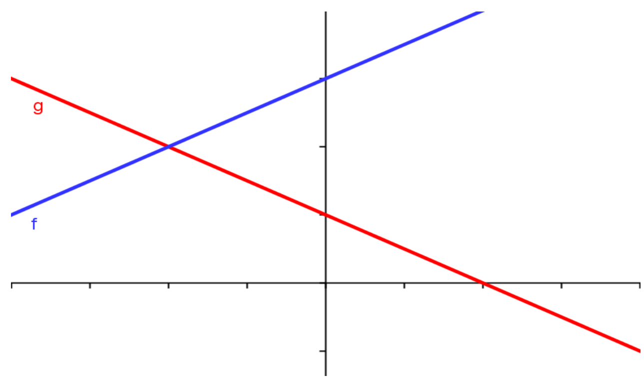
M_{20} :« (f+g)(0)=0, (f+g)(-1)=0, (f+g)(1)=2, (f+g)(-2)=2, (f+g)(2)=6, (f+g)(-3)=6, άρα η f+g θα είναι μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τη x=$\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$» (ΓΑ στρατηγική).

Εδώ επιβεβαιώνεται η άποψη του Threlfall (2002), ότι οι στρατηγικές που θα αναπτύξουν οι μαθητές σχετίζονται με τον ίδιο το μαθητή, δηλαδή τι γνωρίζει, τι προτιμά, τι εμπιστοσύνη έχει στις ικανότητες του, πόση σημασία δίνει στο πλαίσιο επίλυσης.

Λάθη

Οι λάθος απαντήσεις των επτά μαθητών που χρησιμοποίησαν ΓΓ στρατηγική είχαν κοινό παρονομαστή την κατακόρυφη ή οριζόντια μετατόπιση της x^2 κατά x, παραβλέποντας άλλοτε ότι το x μεταβάλλεται ή παίρνοντας περιπτώσεις για x>0 και x<0 μετατοπίσεις της x^2 προς τα πάνω ή προς τα κάτω, αριστερά ή δεξιά. Η γρήγορη απάντηση που επιβάλλει το νοερό πλαίσιο πιθανόν να οδήγησε τους μαθητές σε αυτή την παρανόηση, θεωρώντας τη μεταβλητή x ως κάτι σταθερό. Επίσης γνωρίζοντας ότι το γράφημα είναι καμπύλη, μπορεί να οδήγησε τους μαθητές να επιλέξουν τη ΓΓ στρατηγική, επηρεασμένοι ίσως από τα δύο πρώτα έργα στα οποία έδωσαν παρόμοιες απαντήσεις. Οι λάθος απαντήσεις των μαθητών που χρησιμοποίησαν ΑΠ στρατηγική ποίκιλαν. Τρεις μαθητές (3/7), έδωσαν ως απάντηση ταυτόχρονα τη γραφική παράσταση τόσο της f όσο και της g, αγνοώντας ενδεχομένως την πράξη τους, δύο (2/7), έδωσαν ως απάντηση τη γραφική παράσταση της x^2, αγνοώντας ενδεχομένως την προσθήκη του x, ένας έδωσε απάντηση τη γραφική παράσταση της x^3, αναφέροντας ότι $x^2+x=x^3$ και ένας έδωσε ως απάντηση ότι x^2+x είναι μία ευθεία δεξιά της x, αφού $x^2>0$. Επίσης ευθεία έδωσε ως απάντηση για την προκύπτουσα συνάρτηση και ο μαθητής που χρησιμοποίησε την ΑΠ-ΓΑ στρατηγική, αναφέροντας χαρακτηριστικά: «η $(f+g)(x)=x^2+x$, $f(1)=2$, $f(2)=6$, άρα η f+g είναι ευθεία που περνάει από τα σημεία (1,2) και (2,6)».

- **Έργο 6 : Βρείτε την f+g**



Πίνακας 9: ***Επιτυχίες ανά στρατηγική στο Έργο 6***

Σύνολο μαθητών:42	**Σωστό**	**Λάθος**	**Μη απάν.**	**ΑΠ**	**ΓΓ**	**ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΑ**	**ΑΠ-ΓΓ**	**ΓΓ-ΓΑ**
Μαθητές (ποσοστό)	14/**42** 33,3%	9/**42** 21,4%	19/**42** 45,3%	7/**42** 16,6%	4/**42** 9,5%	4/**42** 9,5%	8/**42** 19,1%	-	-
Επιτυχία ανά στρατηγική				5/7 **71,4%**	0/4 **0%**	2/4 **50%**	7/8 **87,5%**	**-**	**-**

Επιτυχίες

Το **Έργο 6** έλυσαν σωστά δεκατέσσερις στους σαράντα δύο μαθητές (14/42), ποσοστό 33,3%.

Στρατηγικές

Οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν την ΑΠ στρατηγική, είτε αμιγώς (7/42), ποσοστό 16,6%, είτε σε συνδυασμό με την ΓΑ στρατηγική (8/42), ποσοστό 19,1%. Το 36% περίπου των μαθητών διάβασε αρχικά αλγεβρικά το γράφημα καταφεύγοντας στις παραμέτρους α και β των γραμμικών συναρτήσεων, παρόλο που απουσιάζουν οι αλγεβρικές τους εκφράσεις. Φαίνεται ότι οι γραμμικές συναρτήσεις να είναι πιο οικείες στους μαθητές και να τους οδηγούν σε μια αλγεβρική αντιμετώπιση, την οποία εμπιστεύονται περισσότερο προκειμένου να δώσουν μια ολοκληρωμένη απάντηση. Τέσσερις μαθητές (4/42), ποσοστό 9,5% χρησιμοποίησαν τη ΓΓ στρατηγική και απάντησαν όλοι λάθος, ενώ άλλοι τέσσερις (4/42), χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική και οι μισοί από αυτούς απάντησαν λάθος. Αξιοσημείωτο με βάση τις απαντήσεις είναι το γεγονός ότι κανείς δεν αναγνώρισε τη συμμετρία στο γράφημα, διαπίστωσαν όμως με διαφορετικές προσεγγίσεις ότι το άθροισμα f+g είναι σταθερό. Η διαφοροποίηση των προσεγγίσεων φαίνεται από τις παρακάτω σωστές απαντήσεις των μαθητών:

M_5: « Οι συντελεστές είναι περίπου αντίθετοι οπότε η f+g θα είναι σταθερή c, όπου c το άθροισμα των τεταγμένων για κάθε x» (ΑΠ στρατηγική).

M_2: « Οι f, g είναι της μορφής y=αx+β, όπου $\alpha_f = -\alpha_g$ ενώ β_f και β_g θετικά. Άρα η f+g θα είναι μια σταθερή συνάρτηση f+g=c, όπου c= $\beta_f + \beta_g$» (ΑΠ στρατηγική).

M_{17} :« Οι f, g είναι της μορφής y=αx+β, όπου η f περνάει από τα σημεία (0,3) και (-2,2), άρα β=3 και α=1/2, ενώ η g περνάει από τα σημεία (0,1) και (-2,2), άρα β=1 και α=-1/2. Επομένως η (f+g)(x)=4, άρα ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x» (ΑΠ-ΓΑ στρατηγική).

Δύο μαθητές εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία και διαπίστωσαν ότι το άθροισμα των τεταγμένων σε αυτά βγαίνει περίπου το ίδιο, άρα η f+g θα είναι μια σταθερή συνάρτηση. Υπολόγισαν το άθροισμα στο σημείο τομής τους όπου η τεταγμένη θα είναι διπλάσια και στα σημεία τομής τους με τον άξονα y΄y, όπου διαπίστωσαν ότι η τεταγμένη του αθροίσματος είναι περίπου ίδια με την τεταγμένη του σημείου τομής (ΓΑ στρατηγική).

Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός, ότι οι περισσότεροι μαθητές (19/42), ποσοστό 45,3% δεν έδωσαν καμία απάντηση λέγοντας ότι: «δε ξέρω, δε μπορώ να σκεφτώ κάποια λύση». Φαίνεται ότι το σύνθετο γράφημα να τους προκάλεσε σύγχυση, ώστε να μην μπορούν να σκεφτούν κάποια λύση ή ότι τους κούρασε η διαδικασία και δε μπορούσαν να σκεφτούν περαιτέρω.

Λάθη

Οι τέσσερις μαθητές που προσέγγισαν το έργο γεωμετρικά, χωρίς όμως να αναγνωρίσουν τη συμμετρία των γραφημάτων, χρησιμοποίησαν κατά την επίλυση του έργου τη ΓΓ στρατηγική, καθώς ανέφεραν την έννοια της 'μετατόπισης'. Συγκεκριμένα ανέφεραν: «πήρα την f και τη μετατόπισα κατά 2 μονάδες προς πάνω», παρανοώντας όμως ότι η g δεν είναι μια σταθερή συνάρτηση. Δε γνωρίζουμε όμως με βεβαιότητα ότι η απάντηση είναι αποτέλεσμα παρανόησης ή μιας γρήγορης απάντησης, καθώς επρόκειτο για το τελευταίο έργο. Οι δύο μαθητές που χρησιμοποίησαν την ΑΠ στρατηγική και απάντησαν λάθος, θεώρησαν την προκύπτουσα συνάρτηση μία ευθεία με θετική κλίση. Συγκεκριμένα ανέφεραν:« Η $f(x)=\alpha_1x+\beta_1$, με α_1, $\beta_1>0$, η $g(x)=-\alpha_2x+\beta_2$, με α_2, $\beta_2>0$, άρα η $(f+g)(x)=(\alpha_1-\alpha_2)x+\beta_1+\beta_2$, δηλαδή είναι μια ευθεία με κλίση $\alpha_{f+g}<\alpha_f$ και $\beta_1+\beta_2>\beta_1$». Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τη ΓΑ στρατηγική και απάντησαν λάθος, θεώρησαν πάλι τη προκύπτουσα συνάρτηση ως μια ευθεία με θετική κλίση. Συγκεκριμένα ανέφεραν ότι:« Θα είναι στο σημείο τομής τους $(f+g)(-2)=2\beta$ και $(f+g)(0)=\beta_1+\beta_2>2\beta$, άρα η f+g θα είναι μια ευθεία που περνάει από τα σημεία $(-2,2\beta)$ και $(0, \beta_1+\beta_2)$». Ο μαθητής που χρησιμοποίησε τη ΑΠ-ΓΑ στρατηγική και απάντησε λάθος, θεώρησε επίσης την προκύπτουσα συνάρτηση ως μια ευθεία με θετική κλίση. Συγκεκριμένα ανέφερε ότι: « Η $f(x)=3x-5$ και η $g(x)=-x+2$, άρα η $(f+g)(x)=2x-3$, δηλαδή μία ευθεία με θετική κλίση μικρότερη όμως της f». Πιθανόν να έχει παρανοήσει ότι στην εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, το α είναι το σημείο τομής με τον άξονα y΄y και το β το σημείο τομής με τον άξονα x΄x.

6.2 Ποσοτική ανάλυση των δεδομένων

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε για κάθε έργο, προκύπτει συνοπτικά ο παρακάτω πίνακας σωστών απαντήσεων ανά έργο:

Πίνακας 10: ***Συνολικές επιτυχίες ανά έργο***

ΕΡΓΟ	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5.1	5.2	6
ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ	40	41	41	40	25	21	14	10	14
ΠΟΣΟΣΤΟ	95,2%	97,6%	97,6%	95,2%	59,5%	50%	33,3%	23,8%	33,3%

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν με σχεδόν απόλυτη επιτυχία στα δύο πρώτα έργα. Φαίνεται να είναι εξοικειωμένοι με τη σταθερή, γραμμική και τετραγωνική συνάρτηση, τόσο στην αλγεβρική όσο και στη γραφική τους μορφή. Ακόμη φαίνεται να έχουν κατανοήσει ότι η προσθήκη μιας σταθεράς προκαλεί την κατακόρυφη μετατόπιση του γραφήματος μιας συνάρτησης, κάτι βέβαια που έχουν ήδη διδαχθεί από τη Β΄Λυκείου. Παρόλα αυτά στο έργο 2, όπου δε δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων, ένας σημαντικός αριθμός μαθητών, περίπου το 1/3 (Πίνακας 3 και 4), προσέφυγε σε αυτές προκειμένου να λύσει το έργο. Φαίνεται να αισθάνονται περισσότερο ασφαλείς με τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων, σε μορφές βέβαια που τους είναι γνωστές, παρόλο που δεν τους εξασφαλίζει μια γρήγορη απάντηση στο νοερό πλαίσιο. Για τους μαθητές αυτούς επιβεβαιώνονται οι παρατηρήσεις των Vinner (1989), ο οποίος μίλησε για μια "αλγεβρική προκατάληψη" των μαθητών σε έργα με συναρτήσεις και Knuth (2000), ο οποίος διαπίστωσε ότι οι μαθητές δείχνουν εμπιστοσύνη στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις ακόμη και σε εργασίες που δίνονται γραφικά.

Στο έργο 3, όπου παρατίθενται τα γραφήματα τετραγωνικής ρίζας, μορφή που δεν τους είναι τόσο οικεία, καθώς το γράφημα της το συναντούν στη Γ΄ Λυκείου, μικρός αριθμός μαθητών προσέφυγε στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Οι περισσότεροι μαθητές διάβασαν το γράφημα γεωμετρικά (27/42). Όμως ένας σημαντικός αριθμός μαθητών (9/27), φαίνεται να επηρεάστηκε από τη γεωμετρική έννοια της μεσοπαράλληλης ευθείας και έδωσε λανθασμένη απάντηση για τη ζητούμενη συνάρτηση, όπως εξηγήσαμε παραπάνω. Γενικά στο έργο 3 είχαμε ένα από τα μεγαλύτερα ποσοστά 35,7%, λανθασμένων απαντήσεων (Πίνακας 5).

Στο έργο 4, όπου δίνονταν δύο γραμμικές συναρτήσεις, παρόλο που είναι οικείες στους μαθητές, μόνο οι μισοί απάντησαν σωστά (21/42), ενώ ένας σημαντικός αριθμός μαθητών (13/42) δε μπόρεσε να δώσει κάποια απάντηση. Ενώ διαχειρίζονται με ευκολία τις γραμμικές συναρτήσεις, τόσο στην αλγεβρική όσο και στη γραφική τους μορφή, φαίνεται να δυσκολεύονται να τις διαχειριστούν σε αυτό το νοερό πλαίσιο. Ομοίως και στο παρόμοιο έργο 6, όπου είναι το έργο με το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών (19/42) 45,7%, που δεν έδωσαν απάντηση. Όμως για το συγκεκριμένο έργο δεν είμαστε βέβαιοι αν αυτό οφείλεται στην αδυναμία τους να βρουν κάποια απάντηση ή στην εγκατάλειψη της προσπάθειας τους λόγω κόπωσης. Γενικότερα στα τρία τελευταία έργα παρατηρήθηκε ένας αυξανόμενος αριθμός μαθητών που δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Στο έργο 5, παρόλο που δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις συναρτήσεων γνωστών στους μαθητές, καθώς αναφέρονται σε πολλά παραδείγματα στο σχολικό βιβλίο, εντούτοις σημειώθηκε το μεγαλύτερο ποσοστό 38,1% (16/42) λανθασμένων απαντήσεων, ενώ ένα άλλο 38,1% (16/42) δεν έδωσε καμία απάντηση. Τη δυσκολία αυτή φαίνεται να προκάλεσε το νοερό πλαίσιο διαχείρισης των συναρτήσεων, καθώς όπως προαναφέραμε οι μαθητές γενικότερα δε δυσκολεύονται στη μετάβαση από την αλγεβρική στην γραφική μορφή, αλλά το αντίθετο.

Για να μπορέσουμε να εντοπίσουμε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιτυχίες των μαθητών σε σχέση με την επίδοσή τους στα μαθηματικά και την ευελιξία τους στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν, προβήκαμε σε στατιστικούς ελέγχους με την ποσοτικοποίηση των δεδομένων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε τρεις μεταβλητές, την επίδοση στα Μαθηματικά με βάση τη βαθμολογία για κάθε μαθητή, στην εικοσαβάθμια κλίμακα, τη συνολική επιτυχία με βάση τον αριθμό των σωστών απαντήσεων για κάθε μαθητή στα εννιά έργα, με τιμές από 0 έως 9 και την ευελιξία στις στρατηγικές με βάση τη χρήση διαφορετικών στρατηγικών για κάθε μαθητή, με τιμές από 0 έως 6, που αντιστοιχούσαν στον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποίησε ο κάθε μαθητής σωστά.

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν για κάθε μεταβλητή τα περιγραφικά στατιστικά που παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 11: ***Περιγραφικά στατιστικά των μεταβλητών του δείγματος***

	N	Ελάχιστο	Μέγιστο	Μ.Ο.	Τυπική Απόκλιση
ΕΠΙΔΟΣΗ (ΒΑΘΜΟΣ)	42	11,0	20,0	16,0	2,4790
ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ	42	2	9	5,67	1,896
ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	42	1	5	2,64	,983
ΣΥΝΟΛΟ	42				

Ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών του δείγματος στα Μαθηματικά με βάση την βαθμολογία τους ήταν 16, με ελάχιστη τιμή 11 και μέγιστη 20. Ο μέσος όρος της συνολικής επιτυχίας ήταν 5.67, με ελάχιστη τιμή 2 και μέγιστη τιμή 9 επιτυχίες. Ο μέσος όρος σωστής χρήσης διαφορετικών στρατηγικών, δηλαδή της ευελιξίας τους στις στρατηγικές ήταν 2.64, με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 5.

Στη συνέχεια εξετάσαμε αν οι παραπάνω μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή με το test Kolmogorov-Smirnov. Έτσι προέκυψαν τα παρακάτω δεδομένα:

Πίνακας 12: ***Έλεγχος κανονικότητας***

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
ΕΠΙΔΟΣΗ (ΒΑΘΜΟΣ)	,153	42	,014	,944	42	,040
ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ	,191	42	,001	,924	42	,008
ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	,267	42	,000	,874	42	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι καμία μεταβλητή δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%, καθώς οι αντίστοιχες τιμές (p=.014, p=.001 και p=.000)<.05. Έτσι προχωρήσαμε στο μη παραμετρικό test του Wilcoxon, για να ελέγξουμε αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

1. Στο μέσο όρο της επίδοσης τους στα Μαθηματικά και στο μέσο όρο της συνολικής τους επιτυχίας στα διάφορα έργα
2. Στο μέσο όρο της επίδοσης τους στα Μαθηματικά και στο μέσο όρο της ευελιξίας στρατηγικών, της σωστής χρήσης δηλαδή διαφορετικών στρατηγικών και
3. Στο μέσο όρο της συνολικής τους επιτυχίας στα διάφορα έργα και στο μέσο όρο της ευελιξίας στρατηγικών.

Στην πρώτη περίπτωση, ο έλεγχος του κριτηρίου Wilcoxon έδωσε τις τιμές *Z=-5.673, N=42 και p=.000*<.05. Αυτό σημαίνει ότι σε επίπεδο σημαντικότητας α=5% απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, άρα υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στο μέσο όρο της επίδοσης στα μαθηματικά και στο μέσο όρο της συνολικής επιτυχίας στα διάφορα έργα. Επομένως η συνολική επιτυχία ενός μαθητή στα διάφορα έργα, φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά από την επίδοση του στα μαθηματικά. Γενικότερα οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά (βαθμό) είχαν μεγαλύτερο αριθμό συνολικών επιτυχιών στις απαντήσεις τους στα έργα.

Στην δεύτερη περίπτωση ο έλεγχος του κριτηρίου Wilcoxon έδωσε τις τιμές *Z*=-5,656 *, N=42 και p=.000*<.05. Πάλι σε επίπεδο σημαντικότητας α=5% απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, άρα υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στο μέσο όρο της επίδοσης στα μαθηματικά και στο μέσο όρο της ευελιξίας στρατηγικών. Αυτό σημαίνει ότι η ευελιξία των στρατηγικών που χρησιμοποιεί σωστά ένας μαθητής φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά από την επίδοσή του στα μαθηματικά. Γενικότερα οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά (βαθμό) είχαν μεγαλύτερο αριθμό σωστά χρησιμοποιούμενων στρατηγικών.

Όσον αφορά την τρίτη περίπτωση, ο έλεγχος του κριτηρίου Wilcoxon έδωσε τις τιμές *Z=-5,621 , N=42 και p=.000<.05.* Άρα πάλι σε επίπεδο σημαντικότητας α=5% απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, συνεπώς υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στο μέσο όρο της συνολικής επιτυχίας στα διάφορα έργα και στο μέσο όρο της ευελιξίας στρατηγικών. Αυτό σημαίνει ότι η συνολική επιτυχία στα διάφορα έργα φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά από την ευελιξία στη σωστή χρήση στρατηγικών. Γενικότερα οι μαθητές με μεγαλύτερη ευελιξία στη σωστή χρήση στρατηγικών είχαν μεγαλύτερη συνολική επιτυχία στα έργα.

Ακόμη από την ανάλυση συσχέτισης Spearman διαπιστώθηκε υψηλή θετική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών του δείγματος, όπως προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 13: ***Συσχετίσεις της επίδοσης, της συνολικής επιτυχίας και της ευελιξίας στρατηγικών***

		ΕΠΙΔΟΣΗ	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ	ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ
Spearman's rho	**ΕΠΙΔΟΣΗ**	-	.855**	.767**
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ	.855**	-	.761**

ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	.767**	.761**	-

**. Η συσχέτιση είναι σημαντική στο επίπεδο 0,01 (2- ουρές).

Πράγματι ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών και στη συνολική τους επιτυχία στα έργα, ο συντελεστής συσχέτισης είναι υψηλός θετικός και στατιστικά σημαντικός σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01 με $r(42)=.855$, $p<.01$. Επίσης υψηλός θετικός είναι ο συντελεστής συσχέτισης σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01, ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών και στην ευελιξία σωστής χρήσης στρατηγικής επίλυσης με $r(42)=.767$, $p<.01$, αλλά και ανάμεσα στη συνολική επιτυχία στις απαντήσεις των έργων και στην ευελιξία σωστής χρήσης στρατηγικών με $r(42)=.761$, $p<.01$. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητότητα στη συνολική επιτυχία στα έργα εξηγείται κατά 85,5% από την επίδοση στα μαθηματικά, ενώ η μεταβλητότητα στην ευελιξία στρατηγικών εξηγείται κατά 76,7% από την επίδοση στα μαθηματικά. Επίσης η μεταβλητότητα στη συνολική επιτυχία εξηγείται κατά 76,1% από την ευελιξία στη σωστή χρήση στρατηγικών.

6.2 Σύνδεση επιτυχιών και ευελιξίας στρατηγικών με την επίδοση στα μαθηματικά

Σύμφωνα με το προεδρικό διάταγμα υπ' αριθμ. 46/2016/ΦΕΚ 74/Α/22-4-2016 η αξιολόγηση των μαθητών γενικού λυκείου γίνεται με βάση τη βαθμολογική κλίμακα 0-20 και προσδιορίζεται λεκτικώς με τους χαρακτηρισμούς:

Κακώς 0-5, Ανεπαρκώς 5.1-9, Σχεδόν Καλώς 9.1-13, Καλώς 13.1-16, Λίαν Καλώς 16.1-18 και Άριστα 18.1-20.

Από τους σαράντα δύο μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα οι δέκα (10/42) είχαν επίδοση «Άριστα», έντεκα (11/42) είχαν επίδοση «Λίαν Καλώς», έντεκα (11/42) είχαν επίδοση «Καλώς» και δέκα (10/42) είχαν επίδοση «Σχεδόν Καλώς». Για την ανάλυση των δεδομένων κωδικοποιήσαμε τους μαθητές στις αντίστοιχες ομάδες με τους αριθμούς 1 έως 4.

Πίνακας 14: ***Κατανομή μαθητών σε σχέση με τη βαθμολογία τους στα Μαθηματικά***

	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα

ΑΡΙΣΤΑ (18.1-20)	10	23,8	23,8
ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ (16.1-18)	11	26,2	50,0
ΚΑΛΩΣ (13.1-16)	11	26,2	76,2
ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ (9.1-13)	10	23,8	100,0
ΣΥΝΟΛΟ	42	100,0	

Επίσης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, για κάθε έργο και για κάθε ομάδα μαθητών, δώσαμε τον αριθμό σωστών απαντήσεων/ αριθμό μαθητών ομάδας, τον αριθμό μαθητών/ χρησιμοποιούμενη στρατηγική, ενώ ο αριθμός μέσα σε παρένθεση ( ) που εμφανίζεται δίπλα σε κάποια στρατηγική, δείχνει τον αριθμό των λανθασμένων απαντήσεων και ποια στρατηγική χρησιμοποιήθηκε.

Πίνακας 15: ***Επιδόσεις και στρατηγικές ανά ομάδα μαθητών και ανά έργο***

ΟΜΑΔΑ (ΜΑΘΗΤΕΣ) ΕΡΓΟ-ΕΠΙΔΟΣΗ-ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	**ΟΜΑΔΑ 1** (Μαθητές 10)	**ΟΜΑΔΑ 2** (Μαθητές 11)	**ΟΜΑΔΑ 3** (Μαθητές 11)	**ΟΜΑΔΑ 4** (Μαθητές 10)
Έργο 1.1	10/**10** 7/ΓΓ 1/ΑΠ 2/ΑΠ-ΓΓ	11/**11** 1/ΑΠ 5/ΑΠ -ΓΓ 5/ΑΠ-ΓΑ	11/**11** 1/ΑΠ 2/ΓΓ 6/ΑΠ-ΓΓ 2/ΑΠ-ΓΑ	8/**10** 2/ΓΓ 3/ΑΠ 2/ΑΠ-ΓΓ (2) 3/ΑΠ-ΓΑ
Έργο 1.2	10/**10** 7/ΓΓ 1/ΑΠ 2/ΑΠ-ΓΓ	11/**11** 6/ΑΠ-ΓΓ 5/ΑΠ-ΓΑ	11/**11** 4/ΓΓ 7/ΑΠ-ΓΓ	9/**10** 2/ΓΓ 7/ΑΠ-ΓΓ (1) 1/ΑΠ-ΓΑ
Έργο 2.1	10/**10** 8/ΓΓ 1/ΑΠ 1/ΓΓ-ΓΑ	11/**11** 5/ΓΓ 3/ΑΠ 2/ΑΠ-ΓΓ 1/ΑΠ-ΓΑ	10/**11** 7/ΓΓ 1/ΓΑ 2/ΑΠ-ΓΓ(1) 1/ΑΠ-ΓΑ	10/**10** 7/ΓΓ 1ΑΠ 2/ΑΠ-ΓΑ
Έργο 2.2	10/**10**	10/**11**	11/**11**	9/**10**

	8/ΓΓ 1/ΓΓ-ΓΑ 1/ΑΠ-ΓΓ	5/ΓΓ 3/ΑΠ (1) 2/ΑΠ-ΓΓ 1/ΑΠ-ΓΑ	8/ΓΓ 1/ΓΑ 2/ΑΠ-ΓΓ	7/ΓΓ 1/ΑΠ (1) 1/ΑΠ-ΓΓ 1/ΑΠ-ΓΑ
Έργο 3	9/**10** 6/ΓΓ (1) 1/ΑΠ 3/ΓΓ-ΓΑ	8/**10** 6/ΓΓ 4/ΑΠ (2) 1/ΑΠ-ΓΑ (1)	7/**11** 9/ΓΓ(3) 2/ΑΠ (1)	1/**10** 6/ΓΓ (5) 2/ΓΑ (2) 2 /ΔΑ
Έργο 4	9/**10** 2/ΑΠ 1/ΓΑ 1/ΓΓ (1) 6/ΑΠ-ΓΑ	5/**11** 4/ΓΑ (1) 3/ΑΠ (2) 1/ΑΠ-ΓΑ 1/ΓΓ (1) 2/ΔΑ	5/**11** 2/ΑΠ 2/ΓΑ 1/ΓΓ (1) 1/ΑΠ-ΓΑ 5/ΔΑ	2/**10** 1/ΑΠ (1) 3/ΓΑ (1) 6/ΔΑ
Έργο 5.1	9/**10** 8/ΑΠ (1) 2/ΓΑ	3/**11** 6/ΑΠ (5) 1/ΓΓ (1) 1/ΓΑ 1/ΑΠ-ΓΑ 2/ΔΑ	2/**11** 7/ΑΠ (5) 4/ΔΑ	0/**10** 1/ΓΓ (1) 1/ΑΠ (1) 8/ΔΑ
Έργο 5.2	8/**10** 2/ΓΑ 6/ΑΠ-ΓΑ 2/ΔΑ	2/**11** 5/ΑΠ (5) 1/ΓΓ (1) 2/ΑΠ-ΓΑ 1/ΑΠ-ΓΓ (1) 2/ΔΑ	0/**11** 4/ΓΓ (4) 2/ΑΠ (2) 1/ΑΠ-ΓΑ (1) 4/ΔΑ	0/**10** 2/ΓΓ (2) 8/ΔΑ

Έργο 6	8/**10** 5/ΑΠ (1) 1/ΓΑ 1/ΓΓ (1) 3 /ΑΠ-ΓΑ	4/**11** 1/ΑΠ 2/ΓΑ (1) 1/ΓΓ (1) 2/ΑΠ-ΓΑ 5/ΔΑ	2/**11** 1/ΑΠ (1) 1/ΓΓ (1) 3/ΑΠ-ΓΑ (1) 6/ΔΑ	0/**10** 1/ΓΓ (1) 1/ΓΑ (1) 8/ΔΑ

Ο παραπάνω πίνακας επιβεβαιώνει τις απόψεις των Threlfall (2009), Murphy (2004) και Proulx (2013), ότι οι στρατηγικές εμφανίζονται σε σχέση με τα καθήκοντα και το μαθητή, αναδύονται ως ευέλικτες απαντήσεις, που προσαρμόζονται και συνδέονται με ένα συγκεκριμένο πλαίσιο από την αλληλεπίδραση του μαθητή με την εργασία

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι οι «άριστοι» μαθητές (Ομάδα 1), απάντησαν με απόλυτη επιτυχία σε όλα σχεδόν τα έργα, με διαφορετική όμως προσέγγιση στρατηγικών. Αυτό σημαίνει ότι ο καθένας έκανε τα έργα δικά του, άντλησε πληροφορίες από αυτά με τον δικό του τρόπο και τις μεθόδους που εμπιστεύεται περισσότερο. Δεν είχε ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό αλλά αυτός διαμορφώνονταν μέσα από την αλληλεπίδραση του με το έργο (Proulx, 2015). Στα έργα που ήταν απόλυτα σίγουροι για την ορθότητα των απαντήσεων τους, έργο 1 έως 3, προσέφυγαν σε μια ολιστική διαχείριση χρησιμοποιώντας κυρίως τη ΓΓ στρατηγική, κάτι που τους εξασφάλιζε μια γρήγορη απάντηση σε αυτό το νοερό πλαίσιο. Σε πιο σύνθετα έργα, όπως τα έργα 4, 5.2 και 6, χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό στρατηγικών (ΑΠ-ΓΑ), προκειμένου να δώσουν μια επαρκώς τεκμηριωμένη απάντηση. Φαίνεται λοιπόν να υπάρχει σε μεγάλο βαθμό μια ευελιξία και προσαρμοστικότητα μεταξύ των στρατηγικών και της νοερής διαχείρισης των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (Proulx, 2015), καθώς επίσης μια σύνδεση μεταξύ της οπτικής και της αλγεβρικής συλλογιστικής (Arcavi, 2003). Η μεγάλη τους διαδικαστική ευχέρεια με τα μαθηματικά αντικείμενα και οι πλούσιες μαθηματικές τους εμπειρίες, τους οδήγησαν να ανταποκριθούν με σχεδόν απόλυτη επιτυχία σε αυτό το πρωτόγνωρο πλαίσιο.

Παρόμοιες επιδόσεις στα τρία πρώτα έργα, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, είχαν οι μαθητές με επίδοση «Λίαν Καλώς» (Ομάδα 2). Φαίνεται όμως να εμπιστεύονται περισσότερο τις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων (Knuth, 2000), καθώς χρησιμοποίησαν σε μεγαλύτερο βαθμό, εκτός του έργου 3, την ΑΠ στρατηγική είτε αμιγώς είτε συνδυαστικά. Στα επόμενα τρία έργα οι επιτυχίες τους ήταν κάτω του 50%. Οι περισσότερες λάθος απαντήσεις ήταν στο πέμπτο έργο, που απαιτούσε τη μετάφραση της αλγεβρικής μορφής της συνάρτησης στη γραφική, κάτι που πιθανόν να οφείλονταν στο νοερό πλαίσιο, ενώ στο έργο 6 οι μισοί περίπου (5/11), δε μπόρεσαν να δώσουν κάποια απάντηση. Φαίνεται λοιπόν να έχουν μικρότερη ευελιξία και προσαρμοστικότητα στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν, από τους μαθητές της ομάδας 1, όταν αντιμετωπίζουν πιο σύνθετα έργα, όπως τα έργα 4, 5 και 6. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε σε παρανοήσεις τους σχετικά με το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο είτε στις φτωχότερες μαθηματικές εμπειρίες τους σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας 1.

Οι μαθητές με επίδοση «Καλώς» (Ομάδα 3), όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, είχαν παρόμοιες επιδόσεις σε όλα σχεδόν τα έργα με τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Χρησιμοποίησαν όμως σε μεγαλύτερο βαθμό τη ΓΓ στρατηγική στα περισσότερα έργα, από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Και αυτοί οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να συνδέσουν την αλγεβρική με τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης (έργο 5), ενώ δυσκολία τους προκάλεσαν και τα έργα με τις τεμνόμενες ευθείες (έργο 4 και 6). Ακόμη στα τρία τελευταία έργα οι μισοί περίπου από αυτούς δε μπόρεσαν ή δε προσπάθησαν να δώσουν κάποια απάντηση. Φαίνεται πως οι παρανοήσεις τους και οι ελλιπείς γνώσεις και μαθηματικές εμπειρίες τους, να τους οδήγησαν σε λανθασμένες απαντήσεις ή σε πρόωρη εγκατάλειψη της προσπάθειας να δώσουν κάποια απάντηση. Ακόμη φαίνεται να έχουν μικρότερη ευελιξία και προσαρμοστικότητα μεταξύ των στρατηγικών σε αυτό το νοερό πλαίσιο διαχείρισης, από τις άλλες δύο ομάδες.

Οι μαθητές με επίδοση «Σχεδόν Καλώς» (Ομάδα 4), όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, απάντησαν σχεδόν με απόλυτη επιτυχία στα δύο πρώτα έργα. Φαίνεται να γνώριζαν καλά τις συγκεκριμένες μορφές συναρτήσεων, αφού τις διαχειρίστηκαν με μεγάλη επιτυχία ακόμη και σε αυτό το πρωτόγνωρο νοερό πλαίσιο. Στο πρώτο έργο χρησιμοποίησαν οι περισσότεροι την ΑΠ στρατηγική, αμιγώς ή σε συνδυασμό με τη ΓΓ και ΓΑ στρατηγική (8/10), ενώ στο δεύτερο χρησιμοποίησαν οι περισσότεροι τη ΓΓ στρατηγική (7/10). Στα υπόλοιπα όμως έργα, έργο 3 έως 6, έδωσαν συνολικά τρεις σωστές απαντήσεις, μια στο έργο 3 και δύο στο έργο 4, ενώ στα τρία τελευταία έργα οι περισσότεροι (8/10) δεν έδωσαν απάντηση. Φαίνεται πως οι ανεπαρκείς μαθηματικές γνώσεις και μαθηματικές εμπειρίες τους, να τους δίνει μικρότερη ευελιξία στη χρησιμοποίηση στρατηγικών, ώστε να μπορέσουν να ανταποκριθούν σε πιο απαιτητικά έργα, σε αυτό το νοερό πλαίσιο διαχείρισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο: ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1 Συζήτηση

Τόσο τα νοερά μαθηματικά όσο και τα γραφικά περιβάλλοντα μπορούν να θεωρηθούν ως ασυνήθιστα περιβάλλοντα για εργασίες με συναρτήσεις. Ωστόσο, όπως προέκυψε από την ανάλυση των περιγραφικών απαντήσεων των μαθητών, φαίνεται ότι η πλειοψηφία τους αντιμετώπισε και ασχολήθηκε με τα προτεινόμενα έργα, αναπτύσσοντας αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης. Με αυτή την έννοια, ακόμη και αν ήταν η πρώτη εμπειρία τους με δραστηριότητες στη νοερή διαχείριση συναρτήσεων, οι ενέργειες τους μπορούν να κατανοηθούν ως τρόποι επίλυσης μέσω της δημιουργίας στρατηγικών προσαρμοσμένων στις εργασίες. Η έλλειψη του μέσου, χαρτί και μολύβι, φαίνεται να αντισταθμίζεται από την αφήγηση και τη φωναχτή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης, ενώ ακόμη παρατηρήθηκε μια αίσθηση ταχύτητας και άγχους για την ολοκλήρωση της, ευρήματα που συμφωνούν με αυτά του Proulx (2013).

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων διαπιστώθηκε ότι η επιλογή της στρατηγικής επίλυσης εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, όπως την γενικότερη επίδοση του μαθητή στο μάθημα των μαθηματικών, τη φύση του έργου που επιλύει. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με τις διαπιστώσεις του Threlfall (2002), σύμφωνα με τον οποίο η φύση των στρατηγικών που επιλέγουν οι μαθητές επηρεάζεται τόσο από το ίδιο το έργο και τα χαρακτηριστικά του όσο και από τα χαρακτηριστικά των μαθητών (γνώσεις, προτιμήσεις, εμπειρία).

Η ανάλυση των ευρημάτων έδειξε ακόμη, ότι οι μαθητές κατά τη νοερή διαχείριση των συναρτήσεων ανέπτυξαν άλλοτε αλγεβρικές/παραμετρικές στρατηγικές, άλλοτε γραφικές/γεωμετρικές και άλλοτε γραφικές/αριθμητικές ή συνδυασμό αυτών (Proulx 2015). Την αλγεβρική προσέγγιση προτίμησαν κυρίως σε έργα με γραμμικές συναρτήσεις $y=αx+β$, ακόμη και αν δε δίνονταν οι αλγεβρικές τους εκφράσεις, εστιάζοντας στις παραμέτρους α και β. Η εξοικείωση των μαθητών με τις γραμμικές συναρτήσεις από τα πρώτα χρόνια του Γυμνασίου και ο τρόπος παρουσίασης τους στα προγράμματα σπουδών, φαίνεται σύμφωνα με τη Sfard (1992), να τους οδήγησε να δουν τις συναρτήσεις λειτουργικά ως υπολογιστικές διεργασίες ή ακόμη η «εικόνα» τους για τη συνάρτηση σύμφωνα με το Vinner (1989) να διακατέχεται από μία αλγεβρική προκατάληψη. Τα ευρήματα συμφωνούν με αυτά των ερευνών των Eisenberg & Dreyfus (1994), Knuth (2000), Habre & Abboud (2006), οι οποίοι διαπίστωσαν, ότι οι μαθητές έχουν ισχυρή τάση να σκέφτονται αλγεβρικά παρά οπτικά, ακόμη και αν τα ερεθίσματα είναι οπτικά.

Όταν οι μαθητές αντιμετώπισαν μη γραμμικές συναρτήσεις στη μορφή των οποίων δεν ήταν τόσο εξοικειωμένοι, όπως η τετραγωνική ρίζα στο έργο 3, προτίμησαν μια γραφική/γεωμετρική προσέγγιση και οδηγήθηκαν σε μια ολιστική ανάγνωση της συνάρτησης (Even, 1998), αντιμετωπίζοντας τη ως μια γεωμετρική οντότητα ή με άλλα λόγια δομικά ως αντικειμενική οντότητα (Sfard, 1992). Η ολιστική ανάγνωση μπορεί να προσφέρει μια γρήγορη απάντηση, μπορεί όμως και να μας παρασύρει, καθώς αυτό που βλέπουμε σε ένα σχήμα είναι ανεξάρτητο από τις μαθηματικές ιδιότητες και εξαρτάται από παράγοντες οπτικής οργάνωσης (Duval, 2006). Οι μαθητές μπορεί να παράβλεψαν κάποιες μαθηματικές ιδιότητες, όπως μεταβαλλόμενη κλίση ή να χρησιμοποίησαν όρους με αμφισβητούμενη μαθηματική επάρκεια, όπως 'παραλληλισμός' και 'μετατόπιση', προκειμένου να δώσουν μια απάντηση. Βέβαια σύμφωνα με τον Arcavi (2003), κατά την οπτική προσέγγιση επίλυσης ενός έργου, δεν υπάρχουν πάντοτε ασφαλείς διαδικαστικές ρουτίνες για να βασιστεί κάποιος. Άλλωστε οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στο νοερό πλαίσιο επίλυσης, είναι περισσότερο τρόποι για να ξεπεραστεί το εμπόδιο της έλλειψης του μέσου και δεν μπορούν να έχουν καθολική ισχύ, αλλά έχουν έναν ευρετικό χαρακτήρα για να ξεπεραστούν τα εμπόδια των ενεργειών που γίνονται μόνο με το μυαλό (Proulx 2015).

Όταν οι μαθητές αντιμετώπισαν πιο σύνθετα προβλήματα με τεμνόμενες γραμμικές συναρτήσεις, όπως αυτές στα έργα 4 και 6, προτίμησαν περισσότερο μια γραφική/αριθμητική στρατηγική και οδηγήθηκαν σε λύση που βασίζεται στην προσέγγιση κατά σημεία (Even, 1998), χρησιμοποιώντας συμπληρωματικά ακριβείς και προσεγγιστικούς υπολογισμούς (Kahane, 2003), εστιάζοντας στο σημείο τομής των γραφημάτων καθώς και στα σημεία τομής με τους άξονες. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε επίσης, ότι σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές στην προσπάθεια τους να δώσουν όσο το δυνατόν πληρέστερη απάντηση σε αυτό το νοερό πλαίσιο, χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό στρατηγικών βασισμένων τόσο σε ολιστικές όσο και κατά σημεία προσεγγίσεις. Η πλειοψηφία των συνδυαστικών απαντήσεων αφορούσε ένα συνδυασμό αλγεβρικών/παραμετρικών και γραφικών/αριθμητικών στρατηγικών (ΑΠ-ΓΑ), κυρίως στα πιο σύνθετα έργα 4, 5 και 6. Η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο αμιγώς στις απαντήσεις όλων των ομάδων μαθητών ήταν η γραφική/γεωμετρική (ΓΓ), κυρίως στα τρία πρώτα έργα. Η στρατηγική αυτή φαίνεται να οδηγούσε σε μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση των γραφημάτων και κατά συνέπεια σε μια γρήγορη απάντηση στο συγκεκριμένο πλαίσιο, παρόλο που δεν ήταν επιβεβλημένη.

Η επιλογή όμως της στρατηγικής γραφική/γεωμετρική (ΓΓ), δεν ήταν ενδεδειγμένη στα σύνθετα έργα 4, 5 και 6 και ήταν αυτή που οδήγησε τους μαθητές που την επέλεξαν ως απάντηση σε αυτά σε λάθος. Από την ανάλυση των ευρημάτων που προηγήθηκε δε φαίνεται αν τα λάθη ήταν αποτέλεσμα της γρήγορης απάντησης που προκύπτει από την ολιστική ανάγνωση των συναρτήσεων στο συγκεκριμένο πλαίσιο ή της παρανοήσεων, όπως για παράδειγμα στο έργο 5, ότι η πρόσθεση της μεταβλητής x έχει την ίδια συμπεριφορά με την πρόσθεση μιας σταθεράς. Επειδή στο έργο αυτό είχαμε το μεγαλύτερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων, φαίνεται να υπάρχει μια αδυναμία ‘μετάφρασης’ από την αλγεβρική στην γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης, που μπορεί όμως να είναι αποτέλεσμα του νοερού πλαισίου επίλυσης, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα των Markovits κ.α. (1993) και Knuth (2000), όπου διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο κατά τη μεταφορά από τη γραφική στην αλγεβρική αναπαράσταση μιας συνάρτησης.

Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, διαπιστώθηκε ακόμη μια σχετική άνεση και ευχέρεια διαχείρισης των οπτικών αναπαραστάσεων στις οποίες έπρεπε να λειτουργήσουν νοερά. Ακόμη και στην περίπτωση του έργου 5, όπου δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις, οι περισσότεροι μαθητές δημιούργησαν τη νοερή ‘εικόνα’ της $f(x)=|x|$, $f(x)=x^2$ και της $g(x)=x$, προκειμένου να λειτουργήσουν νοερά με αυτές τις συναρτήσεις (Proulx, 2015). Το νοερό πλαίσιο μέσω των οπτικών απεικονίσεων, φαίνεται να τους έδωσε επίσης μία ευελιξία στη σύνδεση αλγεβρικών (συμβολική έκφραση), αριθμητικών (σημεία συντεταγμένων στον άξονα x΄x ή y΄y) και γραφικών (καρτεσιανών επιπέδων) αναπαραστάσεων, όπως επίσης και μια ευελιξία μεταξύ των σημειακών και των ολιστικών προσεγγίσεων ή συνδυασμό αυτών. Τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν με αυτά του Proulx (2015), έρχονται όμως σε αντίθεση με τα ευρήματα των Gagatsi & Shiakalli (2004) και Elia κ.α. (2008), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι η ικανότητα μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη μειώνεται σε έργα που περιλαμβάνουν εικονικές αναπαραστάσεις, λόγω του ολιστικού χαρακτήρα τους αλλά και του τρόπου που η έννοια της συνάρτησης διδάσκεται στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ευελιξία διαπιστώθηκε ακόμη από την ανάλυση των αποτελεσμάτων και μεταξύ των στρατηγικών που επέλεξαν οι μαθητές προκειμένου να επιλύσουν τα έργα με συναρτήσεις σε αυτό το νοερό πλαίσιο. Ο βαθμός ευελιξίας φαίνεται να επηρεάζεται τόσο από το προφίλ του μαθητή (επίδοση, γνώσεις, εμπειρίες), όσο και από τη φύση του προς επίλυση έργου (γραμμική, τετραγωνική συνάρτηση). Οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά, παρουσίασαν μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας στρατηγικών προκειμένου να απαντήσουν σωστά. Ειδικότερα οι άριστοι μαθητές, οι οποίοι είχαν σχεδόν απόλυτη επιτυχία, σε έργα που ήταν απολύτως σίγουροι χρησιμοποίησαν αμιγώς τη γραφική/γεωμετρική στρατηγική δίνοντας μια γρήγορη απάντηση, ενώ σε έργα που δεν ήταν σίγουροι χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό στρατηγικών μεταξύ ολιστικών και κατά σημεία προσεγγίσεων, στην προσπάθεια τους να δώσουν μια όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένη απάντηση.

Αντίθετα οι μαθητές με χαμηλότερη επίδοση παρουσίασαν μικρότερο βαθμό ευελιξίας και κατέφυγαν κυρίως σε ολιστικές προσεγγίσεις των γραφημάτων, που τους εξασφάλιζαν γρήγορες απαντήσεις, αλλά και τους απέτρεπαν από τη χρήση αλγεβρικών και αριθμητικών διεργασιών, στις οποίες δεν είχαν τη σχετική ευχέρεια. Επίσης ο βαθμός ευελιξίας διαπιστώθηκε ότι σχετίζεται με τη φύση του έργου, καθώς υπήρξε διαφορετική προσέγγιση σε έργα με γραμμικές συναρτήσεις και σε έργα με τετραγωνικές ή τετραγωνικές ρίζες, δηλαδή με καμπύλες. Συγκεκριμένα σε έργα με γραμμικές συναρτήσεις οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν κατά σημεία προσεγγίσεις (αλγεβρικές-αριθμητικές ή συνδυασμό τους), ενώ σε έργα με καμπύλες χρησιμοποίησαν ολιστικές προσεγγίσεις (γραφικές-γεωμετρικές). Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνουν τις απόψεις των Threlfall (2002) και Proulx (2015), οι οποίοι διαπίστωσαν μια θετική συσχέτιση μεταξύ της ευελιξίας των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την επίλυση έργων σε νοερό πλαίσιο και των χαρακτηριστικών των μαθητών και των έργων.

Θετική σχέση, όπως προέκυψε από την ανάλυση των δεδομένων, φαίνεται να είχε η επίδοση των μαθητών και με την επιτυχία σε έργα νοερής διαχείρισης συναρτήσεων. Οι μαθητές με 'άριστη' επίδοση απάντησαν με απόλυτη επιτυχία σε όλα σχεδόν τα έργα. Οι μαθητές με επίδοση 'λίαν καλώς' είχαν παρόμοιες επιδόσεις με τους 'άριστους' στα τρία πρώτα έργα, αλλά η επίδοσή τους διαφοροποιήθηκε στα πιο απαιτητικά τελευταία έργα, καθώς οι λιγότεροι από τους μισούς απάντησαν σωστά σε αυτά. Οι μαθητές με επίδοση 'καλώς' είχαν σχεδόν παρόμοιες επιδόσεις με τους μαθητές με επίδοση 'λίαν καλώς' με μια μικρή διαφοροποίηση στα δύο τελευταία έργα, όπου είχαν λιγότερες σωστές απαντήσεις και μεγαλύτερο αριθμό μαθητών που δεν έδωσαν απάντηση. Οι μαθητές με επίδοση 'σχεδόν καλώς', ενώ απάντησαν με σχεδόν απόλυτη επιτυχία στα δύο πρώτα έργα, στα υπόλοιπα τέσσερα έδωσαν μόνο τρεις σωστές απαντήσεις, ενώ στα έργα 4,5 και 6 οι περισσότεροι (8/10) δε μπόρεσαν να δώσουν κάποια απάντηση. Φαίνεται ότι οι μαθητές με μεγαλύτερη επίδοση στα μαθηματικά να έχουν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και να διαχειρίζονται με μεγαλύτερη ευχέρεια έργα συναρτήσεων σε νοερό περιβάλλον. Η διαφοροποίηση των επιτυχιών των μαθητών οφείλεται σύμφωνα με τους Goldin & Kaput (1996), στον τρόπο με τον οποίο κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων κι εμπειριών. Όσο πιο πλούσιες είναι οι νοητικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με μία μαθηματική έννοια τόσο καλύτερη είναι η κατανόηση αυτής. Τα ευρήματα της έρευνας φαίνεται να συμφωνούν με αυτά του Proulx (2014, 2015), ο οποίος διαπίστωσε μια θετική σχέση ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών και στις επιτυχίες τους σε έργα συναρτήσεων σε νοερό περιβάλλον.

7.2 Συμπεράσματα

Ο βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσουμε τις συμπεριφορές των μαθητών κατά τη νοερή διαχείριση συναρτήσεων και ειδικότερα τις στρατηγικές που αναπτύσσουν όταν επιλύουν έργα με συναρτήσεις νοερά σε γραφικό περιβάλλον, το βαθμό ευελιξίας αυτών των στρατηγικών σε σχέση με τα έργα και τη σχέση της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά με την επιτυχία τους στην επίλυση των έργων αυτών.

Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας, μέσω του οποίου έγινε προσπάθεια να διερευνηθούν οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν επιλύουν έργα με συναρτήσεις σε νοερό περιβάλλον, διαπιστώθηκε ότι η επιλογή των στρατηγικών δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά είναι προϊόν της αλληλεπίδρασης του μαθητή με το έργο και επηρεάζεται τόσο από τα χαρακτηριστικά του μαθητή, όσο και από τη φύση του έργου. Σε έργα που δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων (έργο 1 και 5), οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν την αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική. Σε έργα με γραμμικές συναρτήσεις (4 και 6), οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν κατά σημεία προσεγγίσεις, που είτε εστίασαν στις παραμέτρους της γραμμικής συνάρτησης, αλγεβρική/παραμετρική στρατηγική, είτε εστίασαν σε συγκεκριμένα σημεία του γραφήματος, γραφική/αριθμητική στρατηγική. Σε έργα με καμπύλες, τετραγωνική-τετραγωνική ρίζα (2.2 και 3), οι μαθητές επέλεξαν ολιστικές προσεγγίσεις, εστιάζοντας σε όλο το γράφημα ως αντικειμενική οντότητα, γραφική/γεωμετρική στρατηγική. Σημαντικό είναι επίσης το γεγονός, όπως διαπιστώθηκε από την παρούσα έρευνα, ότι οι μαθητές με καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά, χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό των παραπάνω στρατηγικών, προκειμένου να δώσουν πληρέστερη απάντηση σε πιο σύνθετα έργα (4 και 6). Επίσης στα απλά έργα (2 και 3), που δε δίνονταν οι αλγεβρικές εκφράσεις, οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν με ολιστικές αναγνώσεις των γραφημάτων, που τους εξασφάλιζε μια γρήγορη απάντηση, γραφική/γεωμετρική στρατηγική, την οποία ειδικότερα οι μαθητές με χαμηλή επίδοση επέλεξαν κατά κόρον ως απάντηση σε όλα σχεδόν τα έργα.

Απαντώντας στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, ο βαθμός ευελιξίας των μαθητών στις στρατηγικές που αναπτύσσουν, επηρεάζεται επίσης από τα χαρακτηριστικά του μαθητή και του προς επίλυση έργου. Οι μαθητές με καλύτερη επίδοση έδειξαν μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, επιλέγοντας ανάλογα με τη φύση του έργου, άλλοτε κατά σημεία προσεγγίσεις, άλλοτε ολιστικές και άλλοτε συνδυασμό αυτών. Σε έργα απλά, όπως η πρόσθεση ή αφαίρεση σταθεράς, επέλεξαν μια γρήγορη ολιστική ανάγνωση του γραφήματος, ενώ σε σύνθετα έργα, όπως τεμνόμενες ευθείες, επέλεξαν ένα συνδυασμό αλγεβρικών-αριθμητικών προσεγγίσεων σε αντίθεση με τους μαθητές χαμηλής επίδοσης που δεν έδωσαν απάντηση. Σημαντικό είναι επίσης, όπως προέκυψε από τα αποτελέσματα, η αδυναμία που επέδειξε η πλειοψηφία των μαθητών να συνδέσουν την αλγεβρική με τη γραφική έκφραση του αθροίσματος συναρτήσεων..

Τέλος, όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, υπάρχει θετική σχέση ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά και στις επιτυχίες τους στις απαντήσεις των έργων. Οι μαθητές με καλύτερη επίδοση έδειξαν καλύτερη εννοιολογική κατανόηση και μεγαλύτερη ευχέρεια σε αλγεβρικές, γραφικές, αριθμητικές διαδικασίες, απαντώντας σωστά σε όλα σχεδόν τα έργα, ενώ οι μαθητές με χαμηλή επίδοση, έδειξαν να έχουν μικρότερη ευχέρεια αλλά και παρανοήσεις σχετικές με την έννοια της συνάρτησης, δίνοντας αρκετές λανθασμένες ή καθόλου απαντήσεις.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας φαίνεται πως είναι χρήσιμα για την πρακτική εφαρμογή μιας διδακτικής παρέμβασης στην έννοια της συνάρτησης σε ένα νοερό γραφικό πλαίσιο. Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, η πλειοψηφία των μαθητών ασχολήθηκε και αντιμετώπισε με αποτελεσματικό τρόπο τα καθήκοντα και επέδειξε μια σχετική ευχέρεια και ευελιξία στη διαχείριση οπτικών απεικονίσεων και στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, παρόλο που ήταν μια πρωτόγνωρη εμπειρία, γεγονός που δείχνει ότι η νοερή επίλυση έργων με συναρτήσεις έχει μια δυναμική. Σίγουρα όμως η νοερή διαχείριση δεν μπορεί να αποτελέσει από μόνη της διδακτική μέθοδο επίλυσης, ειδικότερα στο λύκειο, μπορεί όμως συμπληρωματικά με τη συμβατική διδασκαλία να συμβάλλει στην καλύτερη εννοιολογική κατανόηση και στην ανάδειξη τυχόν παρανοήσεων. Η έλλειψη του μέσου, χαρτί και μολύβι ή πίνακα, δεν προσφέρει σιγουριά, καθώς οι σκέψεις δεν αποτυπώνονται, προσφέρει όμως την απαιτούμενη προσοχή και προσήλωση για την κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου που διαχειρίζονται, προκειμένου να φτάσουν στη σωστή λύση του έργου. Βέβαια η μικρή σχετικά έρευνα στο πεδίο αυτό, απαιτεί τη συνέχιση της έρευνας για την ενίσχυση των αποτελεσμάτων.

7.3 Περιορισμοί της έρευνας-Μελλοντικές κατευθύνσεις

Μια δυσκολία που συναντήσαμε ήταν η διερεύνηση της βιβλιογραφίας, καθώς η ελληνική βιβλιογραφία στο συγκεκριμένο θέμα ήταν ανύπαρκτη, αλλά και η ξενόγλωσση περιορισμένη σε μία μόνο σχετική έρευνα. Μια άλλη δυσκολία ήταν ο περιορισμένος χρόνος διεξαγωγής της έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του ωρολόγιου προγράμματος της λειτουργίας του σχολείου με αποτέλεσμα τη δυσκολία σύμπτωσης του χρόνου του ερευνητή και των μαθητών, καθώς η συνέντευξη έγινε στα κενά του ερευνητή και ήταν δύσκολο οι μαθητές να απουσιάζουν από άλλα μαθήματα.

Από την άλλη η έρευνα μας ήταν μικρής κλίμακας και αφορούσε το τοπικό επίπεδο ενός σχολείου, με συγκεκριμένα γεωγραφικά, πολιτισμικά και οικονομικά χαρακτηριστικά, ενώ η βολική δειγματοληψία δεν κατοχυρώνει την πλήρη αξιοπιστία, πράγμα που δεν μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας.

Τα αποτελέσματα όμως της εργασίας μπορούν να αποτελέσουν υπόβαθρο για μελλοντικές έρευνες. Προτείνεται λοιπόν να ερευνηθούν:

- οι ίδιες παράμετροι σε μεγαλύτερο πληθυσμό με μια ευρύτερης κλίμακας έρευνα αντιπροσωπευτική των γεωγραφικών περιοχών της χώρας
- η εισαγωγή παρεμβάσεων με νοερή διαχείριση συναρτήσεων παράλληλα με τη συμβατική διδασκαλία
- η ευελιξία των μαθητών στη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης σε νοερό πλαίσιο
- ο ρόλος της νοερής επίλυσης οπτικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της συνάρτησης
- η νοερή διαχείριση μαθηματικών αντικειμένων διαφορετικών των αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Βιβλιογραφία

Akkoç, H., & Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In *PME conference* (Vol. 2, pp. 2-025).

Anghileri, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. *Principles and practices in arithmetic teaching*, 79-94.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Βασάκος, Θ. (1995). Η Έννοια της Συνάρτησης στους Μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες Κατανόησης – Εμπόδια που σχετίζονται με τον Ορισμό της συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα* (σσ.239-257). Θεσσαλονίκη: Art of Text.

Biggs, J. & Tang, C. (2007). Teaching for quality learning at university (3rd ed.). Buckingham: Society for Research into Higher Education and Open University Press.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (2014). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. Academic Press.

Boule, F. (2008). *Le calcul mental au quotidien*. SCEREN-CRDP Bourgogne

Butlen, D., & Pezard, M. (1992). Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée. *Grand N*, *50*, 29-58.

Butlen, D., Pezard, M., de Créteil, I., & Didirem, E. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Revue Repères Inter-IREM*, 5-24.

Γαγάτσης, Α., Μακρίδης, Γ., & Αντωνιάδης, Μ. (2001). Μαθηματικός αλφαβητισμός και η έννοια της συνάρτησης σε μελλοντικούς δασκάλους. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (18), 239-247.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. In *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education. III. CBMS Issues in Mathematics Education*, 114-162.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας. Αθήνα : Μεταίχμιο

Creswell, J. W. (2011). Η έρευνα στην εκπαίδευση: Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση της ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας. *Ν. Κουβαράκος (μτφρ). Αθήνα: Ίων*.

Davis, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the learning of Mathematics*, *15*(2), 2-9.

Department for Education and Skills (DfES). (2005). Leading in learning: Developing thinking skills at Key Stage 3.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G.Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes, 25* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes, 25* (pp. 153-174). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Eisenberg T., Dreyfus T., (1994). *On understanding how students learn to visualize function transformations*, Research on Collegiate Mathematics Education I, 45–68.

Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *8*(1), 49-69.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The Effects of Different Modes of Representation on Mathematical Problem Solving. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Gagatsis*, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational psychology*, *24*(5), 645-657.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, *397*.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. Journal ofMathematical Behavior, 25, 57–72

Hazekamp, D. (1986). Components of mental multiplying. *Estimation and mental computation*, 116-124.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E.Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Katz,V. (2013). Ιστορία των Μαθηματικών. Μια εισαγωγή. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Kieren, T., & Simmt, E. (2009). Brought forth in bringing forth. The inter-actions and products of a collective learning system. *Complicity: An international journal of complexity and education*, *6*(2).

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, *20*(4), 282-300.

Knuth, E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 500–508.

Leutzinger, L. P., Rathmell, E. C., & Urbatsch, T. D. (1986). Developing estimation skills in the primary grades. *Estimation and mental computation*, 82-92.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster studies in education*, *24*(2), 145-154.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 18-28.

Markovits, Z., & Hershkowitz, R. (1993). Visual estimation of discrete quantities. *ZDM*, *93*(4), 137-140.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1992). The Tree of Knowledge. The Biological Roots of Human Understanding. Boston (Shambhala) 1992.

Moschkovich J., Schoenfeld A. H., Arcavi A., (1993) *Aspects of Understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them*, in T.A. Romberg, E. Fennema & T.C. Carptener Eds, Integrating Research on the graphical representation of function (pp. 69-100), Hillsdale, NJ: Erlbaum

Murphy, C. (2004). How do children come to use a taught mental calculation strategy?. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(1), 3-18.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., & Wirtz, M. (2015). STUDENTS'COMPETENCIES IN WORKING WITH FUNCTIONS IN SECONDARY MATHEMATICS EDUCATION—EMPIRICAL EXAMINATION OF A COMPETENCE STRUCTURE

MODEL. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(3), 657-682.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Presmeg, N. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 25-32.

Proulx, J. (2008). Some differences between Maturana and Varela's theory of cognition and constructivism. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*, *5*(1).

Proulx, J., Simmt, E., & Towers, J. (2009). The enactivist theory of cognition and mathematics education research: Issues of the past, current questions and future directions. *Proceedings of the 33rd of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 249-278.

Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 309-328.

Proulx, J., & Simmt, E. (2013). Enactivism in mathematics education: moving toward a re-conceptualization of learning and knowledge. *Education Sciences & Society*, *4*(1).

Proulx, J. (2014). Mental mathematics and operations on functions. In *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 5, pp. 17-24).

Proulx, J. (2015). Mental mathematics with mathematical objects other than numbers: The case of operation on functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 156-176.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547-557.

Reys, R. E. (1984). Developing Computational Estimation Materials for the Middle Grades. Final Report.

Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. In *Proceedings of CERME* (Vol. 7).

Schmidt, S., & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: Difficultés rencontrées parles futurs enseignants. Educational Studies in Mathematics, 32(2), 127–155.

Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 261-289.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 619-625.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 59-84.

Sierpinska, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes*, *25*, 23-58.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. *Number concepts and operations in the middle grades*, 182-197.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thomas, M. O., Wilson, A. J., Corballis, M. C., Lim, V. K., & Yoon, C. (2010). Evidence from cognitive neuroscience for the role of graphical and algebraic representations in understanding function. *ZDM*, *42*(6), 607-619.

Thompson, I. (1999). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools (pp. 145–156).

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational studies in Mathematics*, *50*(1), 29-47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*(5), 541-555.

Trafton, P. R. (1978). Estimation and Mental Arithmetic: Important Components of Computation. *NCTM Yearbook*, *196*(213), 78.

Vergnaud, G. (1998). Comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematics Behavior,* 17(2), 167-181.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 356-366.

Wandt, E., & Brown, G. W. (1957). Non-Occupational Uses of Mathematics Mental and Written-Approximate and Exact. *The Arithmetic Teacher*, *4*(4), 151-154.

Wilmot, D. B., Schönfeld, A., Wilson, M., Champney, D. & Zahner, W. (2011). Validating a learning progression in mathematical functions for college readiness. Mathematical Thinking and Learning, 13(4), 259–291.

Wilson, M. (2008). Cognitive diagnosis using item response models. Journal of Psychology, 216(2), 74–88.

Zachariades, T., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2002, July). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. In *Proceedings in the 10th ICME Conference, Crete, Greece*.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Κατάλογος Συντομογραφιών

ΑΠΣ: Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

ΔΕ: Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Λ.Τ.: Λυκειακές Τάξεις

ΠΣ: Πρόγραμμα Σπουδών

APOS: Action Process Object Schema

DfES: Department for Education and Skills

NCTM: National Council of Teaching Mathematics

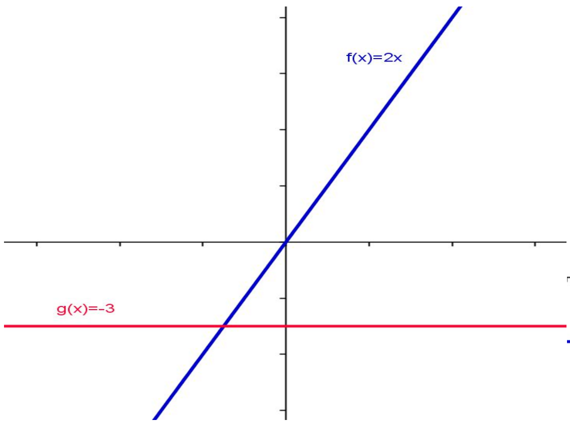
SOLO: Structure of Observed Learning Outcome

Κατάλογος Εικόνων

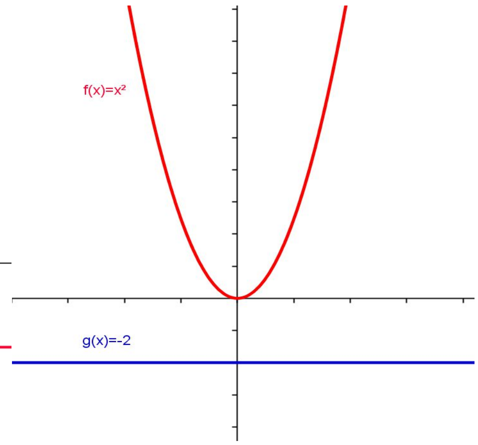
Κατάλογος Πινάκων

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Έργο 1: Βρείτε τις f+g, f-g

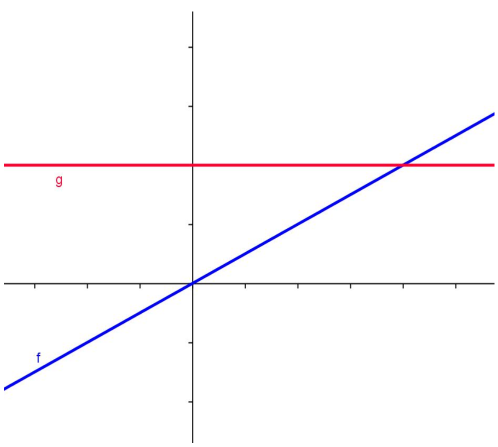


Έργο 1.1

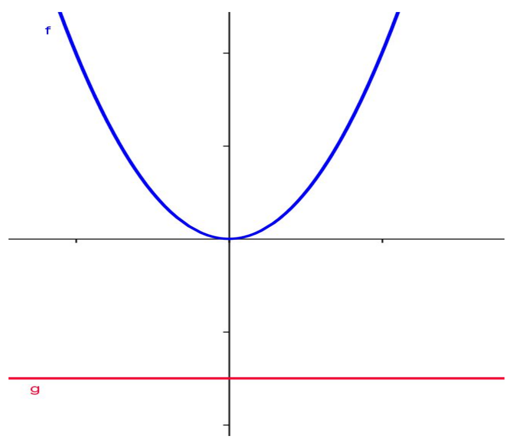


Έργο 1.2

Έργο 2: Βρείτε την f+g

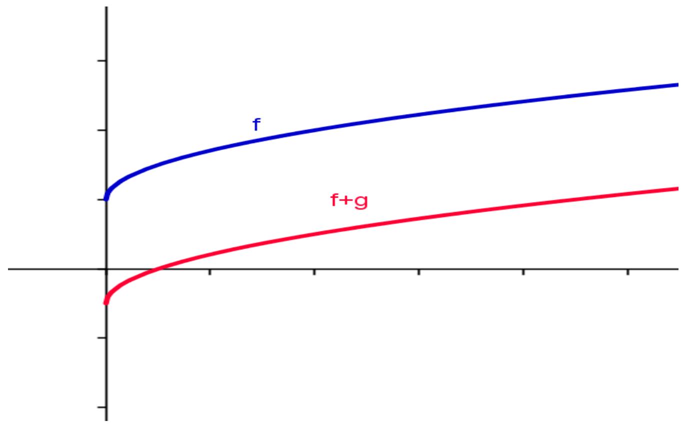


Έργο 2.1

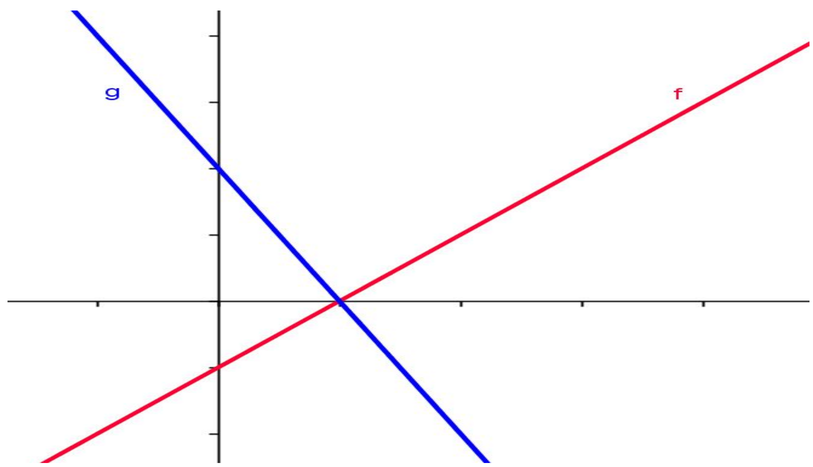


Έργο 2.2

Έργο 3: Βρείτε την g



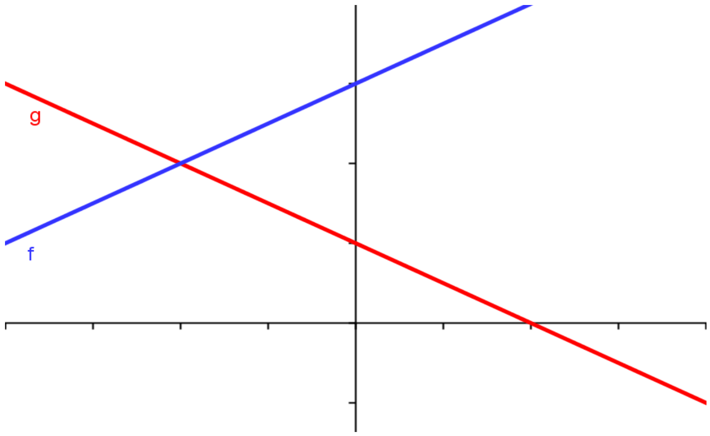
Έργο 4: Βρείτε την f-g



Έργο 5.1: Βρείτε την f+g αν $f(x) = |x|$ **και** $g(x) = x$

Έργο 5.2: Βρείτε την f+g αν $f(x) = x^2$ **και** $g(x) = x$

Έργο 6: Βρείτε την f+g



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΟΜΑΔΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΑΡΙΣΤΑ	10	23,8	23,8	23,8
	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	11	26,2	26,2	50,0
	ΚΑΛΩΣ	11	26,2	26,2	76,2
	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	10	23,8	23,8	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
ΣΥΝ.ΕΠΙΤΥΧΙΑ	,191	42	,001	,924	42	,008

a. Lilliefors Significance Correction

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
ΒΑΘΜΟΣ	,153	42	,014	,944	42	,040

a. Lilliefors Significance Correction

Tests of Normality

Kolmogorov-Smirnov[a]	Shapiro-Wilk

	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
ΣΩΣΤ.ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	,267	42	,000	,874	42	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Correlations

			ΒΑΘΜΟΣ	ΣΥΝ.ΕΠΙΤΥΧΙΑ	ΣΩΣΤ.ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ
Spearman's rho	ΒΑΘΜΟΣ	Correlation Coefficient	1,000	,855**	,767**
		Sig. (2-tailed)	.	,000	,000
		N	42	42	42
	ΣΥΝ.ΕΠΙΤΥΧΙΑ	Correlation Coefficient	,855**	1,000	,761**
		Sig. (2-tailed)	,000	.	,000
		N	42	42	42
	ΣΩΣΤ.ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	Correlation Coefficient	,767**	,761**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	,000	.
		N	42	42	42

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ - ΕΠΙΔΟΣΗ	Negative Ranks	42[a]	21,50	903,00
	Positive Ranks	0[b]	,00	,00
	Ties	0[c]		
	Total	42		

a. ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ < ΕΠΙΔΟΣΗ

b. ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ > ΕΠΙΔΟΣΗ

c. ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ = ΕΠΙΔΟΣΗ

Test Statistics[a]

	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ - ΕΠΙΔΟΣΗ
Z	-5,673[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on positive ranks.

Ranks

	N	Mean Rank	Sum of Ranks

ΕΠΙΔΟΣΗ – ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	Negative Ranks	0[a]	,00	,00
	Positive Ranks	42[b]	21,50	903,00
	Ties	0[c]		
	Total	42		

a. ΕΠΙΔΟΣΗ < ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

b. ΕΠΙΔΟΣΗ > ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

c .ΕΠΙΔΟΣΗ = ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Test Statistics[a]

	ΕΠΙΔΟΣΗ – ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ
Z	-5,656[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ – ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	Negative Ranks	0[a]	,00	,00
	Positive Ranks	41[b]	21,00	861,00
	Ties	1[c]		
	Total	42		

a. ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ < ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

b. ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ > ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

c. ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ = ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ

Test Statistics[a]

	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ – ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ
Z	-5,621[b]
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.

Έργο 1.1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	2	4,8	4,8	4,8

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
	ΣΩΣΤΟ	40	95,2	95,2	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 1.2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	1	2,4	2,4	2,4
	ΣΩΣΤΟ	41	97,6	97,6	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 2.1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	1	2,4	2,4	2,4
	ΣΩΣΤΟ	41	97,6	97,6	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 2.2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	2	4,8	4,8	4,8
	ΣΩΣΤΟ	40	95,2	95,2	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 3

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	10	23,8	23,8	23,8
	ΣΩΣΤΟ	30	71,4	71,4	95,2
	ΧΩΡΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	2	4,8	4,8	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 4

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	8	19,0	19,0	19,0
	ΣΩΣΤΟ	21	50,0	50,0	69,0
	ΧΩΡΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	13	31,0	31,0	100,0

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 5.1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	14	33,3	33,3	33,3
	ΣΩΣΤΟ	14	33,3	33,3	66,7
	ΧΩΡΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	14	33,3	33,3	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 5.2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	16	38,1	38,1	38,1
	ΣΩΣΤΟ	10	23,8	23,8	61,9
	ΧΩΡΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	16	38,1	38,1	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Έργο 6

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	9	21,4	21,4	21,4
	ΣΩΣΤΟ	14	33,3	33,3	54,8
	ΧΩΡΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	19	45,2	45,2	100,0
	Total	42	100,0	100,0	

Στρατηγικές στο Έργο 1.1 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ1.1	ΑΠ	1	1	1	3	6
	ΓΓ	7	0	2	2	11
	ΑΠ-ΓΓ	2	5	6	2	15
	ΑΠ-ΓΑ	0	5	2	3	10
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 1.2 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.1.2	ΑΠ	1	0	0	0	1
	ΓΓ	7	0	4	2	13
	ΑΠ-ΓΓ	2	6	7	7	22
	ΑΠ-ΓΑ	0	5	0	1	6
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 2.1 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ2.1	ΑΠ	1	3	0	1	5
	ΓΓ	8	5	7	7	27
	ΓΑ	0	0	1	0	1
	ΑΠ-ΓΓ	0	2	2	0	4
	ΑΠ-ΓΑ	0	1	1	2	4
	ΓΓ-ΓΑ	1	0	0	0	1
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 2.2 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.2.2	ΑΠ	0	3	0	1	4
	ΓΓ	8	5	8	7	28
	ΓΑ	0	0	1	0	1
	ΑΠ-ΓΓ	1	2	2	1	6
	ΑΠ-ΓΑ	0	1	0	1	2
	ΓΓ-ΓΑ	1	0	0	0	1
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 3 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.3	ΑΠ	1	4	2	0	7
	ΓΓ	6	6	9	6	27
	ΓΑ	0	0	0	2	2
	ΑΠ-ΓΑ	0	1	0	0	1
	ΓΓ-ΓΑ	3	0	0	0	3
	ΔΑ	0	0	0	2	2
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 4 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.4	ΑΠ	2	3	2	1	8
	ΓΓ	1	1	1	0	3
	ΓΑ	1	4	2	3	10
	ΑΠ-ΓΑ	6	1	1	0	8
	ΔΑ	0	2	5	6	13
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 5.1 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.5.1	ΑΠ	8	6	7	1	22
	ΓΓ	0	1	0	1	2
	ΓΑ	2	1	0	0	3
	ΑΠ-ΓΑ	0	1	0	0	1
	ΔΑ	0	2	4	8	14
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 5.2 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.5.2	ΑΠ	0	5	2	0	7
	ΓΓ	0	1	4	2	7
	ΓΑ	2	0	0	0	2
	ΑΠ-ΓΓ	0	1	0	0	1
	ΑΠ-ΓΑ	6	2	1	0	9
	ΔΑ	2	2	4	8	16
Total		10	11	11	10	42

Στρατηγικές στο Έργο 6 * ΟΜΑΔΑ Crosstabulation

Count

		ΟΜΑΔΑ				
		ΑΡΙΣΤΑ	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	ΚΑΛΩΣ	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	Total
Στρατ.6	ΑΠ	5	1	1	1	8
	ΓΓ	1	1	1	0	3
	ΓΑ	1	2	0	1	4
	ΑΠ-ΓΑ	3	2	3	0	8
	ΔΑ	0	5	6	8	19
Total		10	11	11	10	42

ΟΜΑΔΑ * ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ Crosstabulation

Count

		ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ								
		2	3	4	5	6	7	8	9	Total
ΟΜΑΔΑ	ΑΡΙΣΤΑ	0	0	0	0	0	2	4	4	10
	ΛΙΑΝ ΚΑΛΩΣ	0	1	2	4	1	2	1	0	11
	ΚΑΛΩΣ	0	0	3	1	6	1	0	0	11
	ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΛΩΣ	1	1	8	0	0	0	0	0	10
Total		1	2	13	5	7	5	5	4	42