ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία

Σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας με αξιοποίηση ιστορικών κειμένων

του

Πάσσου Δημήτριου

Α.Ε.Μ. 824

Επιβλέπων Καθηγητής: Κων/νος Νικολαντωνάκης, Καθηγητής

Εξεταστές: Σταθοπούλου Χαρούλα, Καθηγήτρια

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2020

Πίνακας περιεχομένων

'Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρία'

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στην εργασία αυτή θέλω να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη, που με ενθάρρυνε, με στήριξε, και μου έδωσε την ευκαιρία να ολοκληρώσω την Διπλωματική μου εργασία ανεμπόδιστα, με υπομονή και αγάπη.

Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Σταθοπούλου Χαρούλα και κ. Παπαδόπουλο Ιωάννη οι οποίοι μου έκαναν την τιμή να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής και βοήθησαν με τις ουσιαστικές παρατηρήσεις τους στην ολοκλήρωση της Διπλωματικής μου εργασίας.

Δεν θα μπορούσα επίσης να μην ευχαριστήσω τον κ. Θωμαΐδη Ιωάννη ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία γνωρίσω το συγκεκριμένο ΜΠΣ και με ενθάρρυνε να το πραγματοποιήσω.

Όλους ανεξαιρέτως τους διδάσκοντες στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα, τους διακεκριμένους επιστήμονες που μας μετέδωσαν τις γνώσεις τους.

Τους μαθητές του Α2 τμήματος του ΓΕΛ Πολυκάστρου που συμμετείχαν ενεργά και με ενθουσιασμό στην έρευνά μου.

Την συνάδελφο-φιλόλογο κ. Σιβένα Ελένη, που επιμελήθηκε με ευχαρίστηση την ορθή σύνταξη του κειμένου.

Τα παιδιά μου Ιωάννη και Αγαθοκλή που πάντα πιστεύουν σε εμένα και με υποστήριξαν τεχνικά όπου χρειάστηκε.

Και φυσικά την σύζυγό μου Ιωάννα που χωρίς την βοήθεια και συμπαράστασή της δεν θα είχε γίνει αυτό το πόνημα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει τα αποτελέσματα που επέφερε στη μάθηση, στις στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών / τριων της Α΄ Λυκείου η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία της θεωρητικής γεωμετρίας και συγκεκριμένα στη διδασκαλία διαφορετικών αποδείξεων ενός θεωρήματος του σχολικού εγχειριδίου, που προτάθηκαν διαχρονικά από διάφορους μαθηματικούς. Η επιλογή του ερευνητικού θέματος υπαγορεύτηκε από το αίτημα για αναβάθμιση της διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας και για την προσέλκυση του μαθησιακού ενδιαφέροντος των μαθητών / τριών για το μάθημα αυτό. Συγκεκριμένα, στην παρούσα μελέτη ύστερα από τη θεωρητική τεκμηρίωση του τρόπου και της αναγκαιότητας ενσωμάτωσης της ιστορίας στη σχολική διδασκαλία των μαθηματικών παρουσιάζονται αναλυτικά τα στάδια υλοποίησης του διδακτικού σχεδιασμού ως εξής: 1) παρουσίαση και κριτική επεξεργασία των ιστορικών πηγών από τους μαθητές /τριες, 2) συγκριτική αντιπαραβολή της απόδειξης του Ευκλείδη με τις αποδείξεις που προτάθηκαν για το ίδιο θεώρημα, από άλλους διακεκριμένους Γάλλους μαθηματικούς του Διαφωτισμού, 3) κριτική μελέτη και σχολιασμός του σημειωτικού συστήματος της μαθηματικής γλώσσας από τον Ευκλείδη έως σήμερα, 4) παρουσίαση πρωτότυπων, προσωπικών αποδείξεων του θεωρήματος από τους μαθητές. Όπως προέκυψε από τις προσωπικές αφηγήσεις των μαθητών/τριών, η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη της μαθηματικής ευχέρειας και στην αύξηση του μαθησιακού ενδιαφέροντός τους. Επίσης, ενθάρρυνε την κριτική αναθεώρηση των παραδοχών των μαθητών/τριών για τη διδακτική αξία του μαθήματος της γεωμετρίας.

Λέξεις – Κλειδιά: Ιστορία των μαθηματικών-δημιουργικές εργασίες-γεωμετρία-θεώρημα-απόδειξη

ABSTRACT

The purpose of the present study is to investigate the effects of the introduction of history of mathematics on the teaching of theoretical geometry, by studying the different proofs of a particular theorem, proposed over time by various mathematicians, from the students book on the attitudes and perceptions of 10th Grade students. The choice of research topic was dictated by the request for its upgrade the teaching of theoretical geometry and to attract students' learning interest in this particular lesson. More specifically, in the present study, after the theoretical documentation on the way and the necessity of integrating history into mathematics school teaching, the stages of the implementation of didactic planning are presented in detail as follows: 1) presentation and exploration of historical sources by students, 2) comparative parable of Euclid’s proof with those of other distinguished French Enlightenment mathematicians, 3) critical study and analysis on the semantic system of mathematical language from the Euclid’s era to date, 4) presentation of original, personal proofs of the theorem by students. As emerged from the students' personal narratives, the introduction of the history of mathematics in the course of geometry contributed greatly to the development of mathematical ability and to the increasing interest of the students. A critical revision of student’s assumptions concerning the teaching value of the geometry lesson was also encouraged.

Key words: History of mathematics-creative work-geometry-theorem-proof

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ελληνική σχολική πραγματικότητα, όταν αναφερόμαστε στην σχολική γεωμετρία, εννοούμε κυρίως την Θεωρητική Ευκλείδεια γεωμετρία που διδάσκεται στην Α΄ και Β΄ Λυκείου (Θωμαΐδης, 1991). Ωστόσο στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές διδάσκονται επίσης τη διανυσματική γεωμετρία που μελετά τον διανυσματικό λογισμό και τη μελέτη των διανυσμάτων με τη βοήθεια των συντεταγμένων, καθώς και την αναλυτική γεωμετρία που με τη σειρά της μελετά μέσω των αλγεβρικών εξισώσεων τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Τα μαθήματα της διανυσματικής και της αναλυτικής γεωμετρίας απευθύνονται σε μαθητές που έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των θετικών σπουδών. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του 2007 στις δύο πρώτες τάξεις του γυμνασίου διδάσκεται μέχρι και σήμερα η πρακτική γεωμετρία. Η διδασκαλία της πρακτικής γεωμετρίας χρησιμεύει ως προετοιμασία για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην τρίτη τάξη γυμνασίου και στο λύκειο (Θωμαΐδης, 1991).

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η θεωρητική Γεωμετρία συνδυάζοντας την εποπτεία των γεωμετρικών σχημάτων και την κατασκευή αυστηρά δομημένων συλλογισμών συμβάλλει στην καλλιέργεια της πειθαρχημένης και κριτικής σκέψης. Για τον λόγο αυτό η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήδη από τις αρχές του 19ου αιώνα μαζί με τα «Στοιχεία του Legendre» υπήρξε για πάρα πολλά χρόνια βασικό διδακτικό και γνωστικό αντικείμενο της σχολικής γεωμετρίας (Θωμαΐδης, 1991). Όμως τα τελευταία 25 τουλάχιστον χρόνια παρατηρείται μια μεγάλη υποβάθμιση του ενδιαφέροντος των μαθητών του Λυκείου για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Αν και πολλοί λόγοι συντρέχουν για την εκδήλωση αυτού του φαινομένου, η απώλεια του μαθησιακού ενδιαφέροντος για τη γεωμετρία και κατά συνέπεια η υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο μπορεί να αποδοθεί κυρίως στην παγιωμένη χρησιμοθηρική αντίληψη της μάθησης στο Λύκειο και στην αντιμετώπιση του Λυκείου από τους μαθητές ως προθάλαμου για τη βαθμίδα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι μαθητές και μαθήτριες του Λυκείου κατά παράδοση εστιάζουν την προσοχή τους κυρίως στα πανελλαδικώς εξεταζόμενα μαθήματα. Η εξαίρεση του μαθήματος της γεωμετρίας από την εξεταστέα και διδακτέα ύλη της Γ΄ Λυκείου είναι επόμενο να διατηρεί το μαθησιακό ενδιαφέρον των μαθητών για το μάθημα της θεωρητικής γεωμετρίας σε χαμηλό επίπεδο. Επίσης στη Β΄ Λυκείου αν και προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών η διδασκαλία της θεωρητικής γεωμετρίας, οι μαθητές που ήδη έχουν επιλέξει την κατεύθυνση των σπουδών τους επικεντρώνονται στη μελέτη των μαθημάτων ενδιαφέροντος για τις πανελλαδικές εξετάσεις. Στα πλαίσια αυτά η Ευκλείδεια Γεωμετρία διδάσκεται ουσιαστικά μόνο στην Α΄ Λυκείου. Βέβαια υπάρχουν πάντοτε οι μαθητές και μαθήτριες που ανεξαρτήτως προσανατολισμού σπουδών εκδηλώνουν ενδιαφέρον για τη γεωμετρία αλλά ασχολούνται ελάχιστα με τη μελέτη του μαθήματος αυτού.

Δεδομένων αυτών των διαπιστώσεων δημιουργήθηκε στη μαθηματική κοινότητα ο προβληματισμός για την επιλογή και την εφαρμογή των κατάλληλων μεθόδων διδασκαλίας που μπορούν να συμβάλουν στην προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών για το μάθημα της γεωμετρίας και παράλληλα να ενθαρρύνουν την ενεργητική συμμετοχή τους στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία. Στα πλαίσια αυτά προτάθηκε μεταξύ άλλων η υιοθέτηση της διαθεματικής προσέγγισης της διδασκαλίας της γεωμετρίας με την εισαγωγή και ενσωμάτωση στη διδακτική πράξη της ιστορίας των μαθηματικών. Το ζήτημα της χρησιμότητας και της αναγκαιότητας της διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών, αν και τέθηκε προς συζήτηση από διακεκριμένους μαθηματικούς πριν από αρκετούς αιώνες, συνεχίζει ακόμη και σήμερα να αποτελεί αντικείμενο ζωηρού ενδιαφέροντος της μαθηματικής κοινότητας. Επίσης, σύγχρονες μελέτες και έρευνες επισημαίνουν τα σημαντικά διδακτικά και μαθησιακά αποτελέσματα που αποφέρει δυνητικά η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας στη σχολική διδασκαλία των μαθηματικών.

Πιο συγκεκριμένα, όπως έχει επισημανθεί, η προσέγγιση και αντίληψη των μαθηματικών από τους μαθητές ως συνόλου διακριτών θεμάτων χωρίς ιστορικό υπόβαθρο δεν επιτρέπει τη σύνδεση και την ανακάλυψη της συνάφειας των μαθηματικών θεμάτων με άλλες σχετικές επιστήμες (Panasuk & Horton, 2013). Αντίθετα, η δημιουργική ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη διευκολύνει την ανάπτυξη της μαθηματικής ευχέρειας των μαθητών, καθώς συμβάλλει στην καλλιέργεια των δεξιοτήτων της μαθηματικής επικοινωνίας των μαθητών και στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και της μαθηματικής σκέψης (Πάσχος, 2007). Όταν οι μαθητές ανακαλύπτουν τις πολιτισμικές και ιστορικές πτυχές της εξέλιξης των μαθηματικών, είναι πιθανόν να αντιληφθούν και να εκτιμήσουν τον ρόλο της μαθηματικής επιστήμης στην ανάπτυξη της κοινωνίας (Krathwohl et al., 1973, στο Panasuk & Horton, 2013). Επίσης, ο επαγωγικός τρόπος παρουσίασης της σταδιακής οργάνωσης και ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και των μαθηματικών εννοιών με την κριτική επεξεργασία των σχετικών ιστορικών πηγών συμβάλλει στην άρση της μονοτονίας της διδασκαλίας των μαθηματικών και στη διέγερση του μαθησιακού ενδιαφέροντος των διδασκομένων (Μιόγλου, 2017). Βέβαια η προσέγγιση της ιστορίας από τους μαθηματικούς διαφοροποιείται από τον τρόπο που την εξετάζει η ιστορική επιστήμη. Τα μαθηματικά δείχνουν πολύ μεγαλύτερη ανθεκτικότητα σε έννοιες και θεωρίες από ό,τι οι άλλες επιστήμες. Κάποιος μπορεί να αναμένει ότι αυτή η κατάσταση θα κάνει τους μαθηματικούς να συμπαθήσουν την ιστορία, αλλά συμβαίνει το αντίθετο. Το ενδιαφέρον τους για την ιστορία επικεντρώνεται στην «κληρονομιά» των μαθηματικών και στην παρακολούθηση της σταδιακής εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης. Το ιστορικό πλαίσιο διαμόρφωσης της μαθηματικής σκέψης αγνοείται. Η ιστορική μελέτη της «κληρονομιάς» των μαθηματικών θέτει για τη μαθηματική επιστήμη το ερώτημα «πώς έφτασε εδώ;» και εστιάζει στη διαχρονική εξέταση των μαθηματικών εννοιών με έμφαση στη σύγκριση των παλαιότερων και σύγχρονων μορφών αντίληψής τους και στην ανακάλυψη των μεταξύ τους ομοιοτήτων (Grattan-Guinness, 2004). Αντίθετα, η επιστήμη της Ιστορίας επικεντρώνεται στο «τι συνέβη» και στο «πώς συνέβη;». Μελετά την προϊστορία και την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών στο μέτρο που μπορεί να προσδιορίσει το πολιτισμικό πλαίσιο διαμόρφωσής τους και να συμβάλει στην ανεύρεση και στην κριτική ερμηνεία των αστοχιών και των λανθασμένων εκκινήσεων στη σύλληψή τους (Grattan-Guinness, 2004).

Εκκινώντας από την προβληματική αυτή και αναγνωρίζοντας τη δυναμική που ενέχει η διασύνδεση της οπτικής της μαθηματικής και της ιστορικής επιστήμης για την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης, θέσαμε ως στόχο της παρούσας έρευνας να διερευνήσουμε τα διδακτικά και τα μαθησιακά αποτελέσματα της εισαγωγής και της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παράλληλα να αποτιμήσουμε την επίδρασή της στην κριτική αναθεώρηση των στάσεων και αντιλήψεων των μαθητών για το μάθημα της γεωμετρίας και στην ενίσχυση του μαθησιακού ενδιαφέροντός τους γι΄αυτό. Επίσης, στόχος μας ήταν η παρούσα μελέτη να εμπλουτίσει την έρευνα που διενεργείται στο σχετικό πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών με νέα ερευνητικά δεδομένα.

Αναλυτικότερα η δομή της παρούσας εργασίας διαρθρώνεται ως εξής:

Στο **πρώτο** κεφάλαιο της ιστορίας κρίθηκε αναγκαίο να γίνει μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση περιπτώσεων αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Πρόκειται για αναφορές σε συντονισμένες εκπαιδευτικές πρωτοβουλίες θεσμών ή και μεμονωμένων επιστημόνων επίσημου χαρακτήρα όπως εσωτερικοί κανονισμοί πανεπιστημίων, σχετικές δημοσιεύσεις Υπουργείων Παιδείας, διαλέξεις επιφανών μαθηματικών σε φοιτητές ή σε επιμορφούμενους καθηγητές των μαθηματικών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται βασικά επιχειρήματα για την αναγκαιότητα εισαγωγής και ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη εκπαιδευτική πράξη είτε ως εκπαιδευτικού εργαλείου που στοχεύει στην πρόκληση ή ενίσχυση του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα μαθηματικά είτε ως βασικού εκπαιδευτικού στόχου που εστιάζει στη διαχρονική μελέτη των μαθηματικών ως προϊόντος μιας σταδιακής ωρίμανσης της επιστημονικής σκέψης και παράλληλα αποβλέπει στην ανάδειξη της άμεσης συνάρτησης τους με τον ιδιαίτερο πολιτισμό της εποχής και των κοινωνιών στις οποίες συστηματοποιήθηκαν. Δεδομένου ότι η συζήτηση αφορά κυρίως στην κριτική αποτίμηση της παιδευτικής αξίας της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών παρατίθενται προς αντιπαραβολή επιχειρήματα που αμφισβητούν τη δυνατότητα και την αποτελεσματικότητα της διδακτικής χρήσης της ως συμπληρωματικού διδακτικού αντικειμένου στην παραδοσιακή σχολική διδασκαλία των μαθηματικών. Τέλος τονίζεται η ανάγκη εύρεσης του καταλληλότερου τρόπου εφαρμογής αυτής της διδακτικής προσέγγισης του μαθήματος της γεωμετρίας.

Στο **δεύτερο** κεφάλαιο ως συνέχεια του βασικού συμπεράσματος του προηγούμενου κεφαλαίου σχετικά με την ανάγκη εξεύρεσης του καταλληλότερου τρόπου εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη προτείνονται συγκεκριμένα παραδείγματα μεθόδων και τρόπων διδακτικής εφαρμογής της στη σχολική τάξη.

Στο **τρίτο** κεφάλαιο παρουσιάζονται τα σχολικά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με εισαγωγικά κεφάλαια ή σημειώματα που αφορούν στην ιστορία θεμελίωσής της από το 1946 έως και σήμερα. Επίσης σχολιάζεται η τάση αμφισβήτησης που εκδηλώθηκε σε διεθνές επίπεδο σχετικά με τη διδακτική αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην εκπαίδευση. Η συζήτηση ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των αναλυτικών προγραμμάτων και οδηγιών του Παιδαγωγικού

Ινστιτούτου για τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση από το 1969 έως και σήμερα.

Στο **τέταρτο** κεφάλαιο παρουσιάζεται το μεθοδολογικό πλαίσιο, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας. Όπως ειπώθηκε παραπάνω, η παρούσα έρευνα εστιάζει στην αποτίμηση των μαθησιακών και διδακτικών αποτελεσμάτων και των αλλαγών στις στάσεις των μαθητών της Α΄Λυκείου για τη θεωρητική γεωμετρία, που επέφερε η προτεινόμενη διδακτική εφαρμογή της ιστορίας της γεωμετρίας στη διδασκαλία του υπό μελέτη θεωρήματος του Ευκλείδη και άλλων μεταγενέστερων μαθηματικών στα πλαίσια του μαθήματος των δημιουργικών εργασιών.

Στο **πέμπτο** κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η διδακτική πρόταση. Παρουσιάζονται οι ιστορικές πηγές που αφορούν στη βιογραφία των μεγάλων μαθηματικών, στο κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον της εποχής τους και στην απόδειξη του γνωστού θεωρήματος του ισοσκελούς τριγώνου («Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες») όπως αυτή διατυπώθηκε από τον Ευκλείδη και όπως σχολιάστηκε διαχρονικά από άλλους διακεκριμένους μαθηματικούς. Αναλύονται και σχολιάζονται κριτικά οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ των προτεινόμενων αποδείξεων, που αφορούν τον τρόπο δομής, οργάνωσης, παρουσίασης του αποδεικτικού συλλογισμού και τη διαφορετική χρήση του σημειωτικού συστήματος της μαθηματικής γλώσσας από τους μαθηματικούς. Παράλληλα παρουσιάζεται το αξιωματικό σύστημα της κάθε εποχής εμπλουτισμένο με ιστορικές πληροφορίες για το κοινωνικοπολιτικό και πολιτισμικό συγκείμενο της εποχής στην οποία παρήχθησαν οι συγκεκριμένες αποδείξεις.

Στο **έκτο** και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας ακολουθεί η συζήτηση των αποτελεσμάτων της εφαρμογής της προτεινόμενης διαθεματικής διδακτικής προσέγγισης της θεωρητικής γεωμετρίας του Ευκλείδη στο επίπεδο μάθησης, στάσεων και αντιλήψεων των μαθητών απέναντι στο περιεχόμενο, την ωφελιμότητα και τον τρόπο διδασκαλίας της γεωμετρίας στη Α΄ Λυκείου. Επίσης παρουσιάζονται οι περιορισμοί που θέτει η μεθοδολογία και οι στόχοι έρευνας στη δυνατότητα γενίκευσης των διαπιστώσεων και συμπερασμάτων που προέκυψαν από την ερμηνεία των εμπειρικών δεδομένων και των προσωπικών σχολίων των μαθητών. Τέλος, προτείνεται αντίστοιχη εφαρμογή ενός παρόμοιου διδακτικού σεναρίου με τη διαθεματική σύνδεση των γνωστικών αντικειμένων των μαθηματικών και της ιστορίας στη διδασκαλία του Πυθαγόρειου θεωρήματος στη Β΄ Λυκείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η σύνδεση της ιστορίας και της διδασκαλίας των μαθηματικών υπήρξε αντικείμενο ενδιαφέροντος κορυφαίων μαθηματικών για αρκετούς αιώνες πριν. Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι συσχετισμού ανάμεσα στο μάθημα των μαθηματικών και την ιστορία τους. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε σχετικές απόψεις μαθηματικών οι οποίοι υποστήριξαν ένθερμα την εισαγωγή και την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία με διάφορους τρόπους από τον 17^{ο} αιώνα έως και τα μέσα του 20^{ου} αιώνα (Fauvel & Van Maanen, 2000). Κρίθηκε αναγκαίο επίσης να αναφερθούμε στις μεγάλες κοινωνικοοικονομικές και επιστημονικές ανακατατάξεις που επέδρασαν στη δρομολόγηση μεγάλων αλλαγών στο σχεδιασμό και την οργάνωση των εκπαιδευτικών συστημάτων αρχικά στις αναπτυγμένες και στη συνέχεια στις υπό ανάπτυξη χώρες.

Ο προβληματισμός για επικείμενες εκπαιδευτικές αλλαγές εκκίνησε από τη διαπίστωση της αναγκαιότητας της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών και δημιούργησε το κατάλληλο κλίμα για την επεξεργασία ζητημάτων διδακτικής και την επακόλουθη ανάδειξη νέων παιδαγωγικών θεωριών. Ως το τέλος του 19^{ου} αιώνα έγιναν σημαντικά βήματα στον τομέα αυτό σε διεθνές επίπεδο αλλά λόγω αδράνειας και πνευματικής ανωριμότητας δεν σημειώθηκε η αναμενόμενη εξέλιξη (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987). Παρ΄ όλο αυτά διαπιστώνεται ότι η σκέψη για τη διδακτική των μαθηματικών ωρίμασε σταδιακά και σημειώθηκαν οι πρώτες προσπάθειες αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Μέχρι τις αρχές του 19^{ου} αιώνα η ιστορία των μαθηματικών αξιοποιούνταν στη σχολική διδασκαλία ως εισαγωγή στο μάθημα της γεωμετρίας. Αυτή η διδακτική παράδοση έχει τις ρίζες της στον Πρόκλο ο οποίος προέταξε μια ιστορική ανασκόπηση της γεωμετρίας στο σχολιασμό του πρώτου βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Αυτό το παράδειγμα το συναντάμε στο βιβλίο γεωμετρίας του Peter Ramus (1555) και στο αντίστοιχο έργο του ιησουίτη A. Tacquet (1654). Τα βιβλία αυτά άσκησαν μεγάλη επίδραση στη διδασκαλία της γεωμετρίας στα σχολεία.

Η σύνδεση της ιστορίας με τη διδασκαλία του αντίστοιχου μαθήματος των μαθηματικών συμβάλλει εκτός από τη φιλοσοφική και την ιδεολογική προετοιμασία του αναγνώστη-μαθητή στη διαμόρφωση της αιτιολογημένης κρίσης και στην κατανόηση ότι το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών αποτελεί προϊόν της δραστηριότητας σοφών ανθρώπων. Με τον τρόπο αυτό ελαχιστοποιούνται οι αρχικές αντιστάσεις των σπουδαστών και διαλύονται οι στερεοτυπικές αντιλήψεις ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα «δύσπεπτο» μάθημα λόγω της λογικής «οστεοποίησης» του. Θα ήταν λάθος σύμφωνα με τους Θωμαΐδη & Καστάνη (1987) να μην αναφέρουμε το βιβλίο "*The philosophy of Arithmetic exhibiting a progressive view of the Theory and Practice of Calculation''* του J. Leslie (1766-1832) που εκδόθηκε το 1817 και υπήρξε ίσως το πρώτο στο είδος του. Η ιστορία υπάρχει παντού και ο ρόλος της είναι μεθοδολογικός, όχι εισαγωγικός ή συμπληρωματικός. Αυτό σημαίνει ότι η ιστορία χρησιμοποιείται για να αναλύσει και να δείξει την πορεία εμφάνισης και μορφοποίησης της αριθμητικής γνώσης και για να συγκρίνει επίσης διαφορετικούς τρόπους επεξεργασίας και χειρισμού των αριθμητικών ζητημάτων. Ο Leslie (1817) παρουσίασε με αυτή την μορφή το περιεχόμενο της στοιχειώδους αριθμητικής, επηρεασμένος από την κυρίαρχη φιλοσοφική τάση στο περιβάλλον του που έθετε ως βάση της διδασκαλίας και της μάθησης «τη μελέτη του ανθρώπου και των νοητικών λειτουργιών του». Ένα από τα χαρακτηριστικά της γνωρίσματα ήταν «η διαχρονική ερμηνεία της ανάπτυξης του ανθρώπινου γένους με βάση την πρόοδο και το πλαίσιο ανάπτυξης των ιστορικών σπουδών». Η ιστορική επιστήμη θεωρείται σπουδαία, γιατί δεν περιορίζεται μόνο στη διερεύνηση και την επιβεβαίωση των ορθών ή λανθασμένων αλλά δύναται να αναδείξει τις αρχές της ομοιομορφίας της ανθρώπινης φύσης, η γνώση των οποίων κρίθηκε απαραίτητη για την ανάπτυξη τόσο της φιλοσοφίας όσο και των επιστημών.

Η ιστορία των μαθηματικών δεν αποτέλεσε μόνο μέρος της διδακτέας ύλης, αλλά αξιοποιήθηκε στη διδασκαλία επικουρικά και ως συμπλήρωμα του βασικού διδακτικού και γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών με τη μορφή των ιστορικών αναδρομών που συμπεριλήφθησαν σε βιβλία διδακτικής του αντίστοιχου μαθήματος. Μια πρώτη προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή ήταν η δημοσίευση του βιβλίου "Die Element der Mathematic" (Λειψία, 1853) από τον Richard Baltzer (1818-1887). Το βιβλίο αυτό είχε εμπλουτισθεί με ιστορικές αναφορές και ενώ απευθυνόταν κυρίως στους εκπαιδευτικούς, αξιοποιήθηκε τελικά στη σχολική διδασκαλία και από τους μαθητές.

Η τάση διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας καλλιεργήθηκε με πιο συστηματικό τρόπο στη Γερμανία λόγω της διάδοσης του νέο-ουμανισμού, μιας κύριας διανοητικής τάσης που εξέφραζε το αίτημα αναβίωσης των αξιών και ιδεωδών της κλασικής εποχής με την αξιοποίηση της ιστορίας. Ο νέος τρόπος σκέψης που αναπήδησε από την κλασική φιλολογία και τη φιλοσοφία δεν άργησε να επηρεάσει και την επιστήμη των μαθηματικών. Δεν είναι υπερβολικό να πούμε ότι η χρησιμότητα αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη αναγνωρίστηκε και αφομοιώθηκε ως αίτημα κοινής λογικής από όλους εκείνους που είχαν ασχοληθεί με τη διδακτική των μαθηματικών στη Γερμανία, γεγονός που συνέβαλε αποφασιστικά στη δημιουργία ενός ευνοϊκού κλίματος μεθοδολογικής λειτουργίας της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Σημαντικά βήματα στην ένταξη της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία του αντίστοιχου μαθήματος σημειώθηκαν από τις τελευταίες δεκαετίες του 19^{ου} αιώνα και εξής. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κείμενα, απόψεις και αναφορές σημαντικών μαθηματικών οι οποίοι υποστήριξαν και προώθησαν την εισαγωγή και ενίσχυση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

- **Πορτογαλία 1772**

Στα καταστατικά του Πανεπιστημίου της Coimbra στην Πορτογαλία έχουν καταχωρισθεί σχόλια και προτάσεις που διατύπωσε το 1772 ο Jos Monteiro da Rocha για την οργάνωση του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών του πρώτου έτους:

1. Προκειμένου η διδασκαλία των Μαθηματικών να γίνει με την σωστή σειρά και να αποβεί ωφέλιμη στους φοιτητές, ο μελετητής της γεωμετρίας του πρώτου έτους πρέπει να διαβάσει τα προλεγόμενα (prolegomena) της μαθηματικής επιστήμης.

2. Ο διδάσκων πρέπει να κάνει μια σύνοψη των κύριων επιτευγμάτων της μαθηματικής επιστήμης στις πιο αξιοσημείωτες ιστορικές περιόδους της: α) από την εμφάνιση των μαθηματικών ως τον αιώνα του Θαλή και την εποχή του Πυθαγόρα, β) από την ίδρυση της Αλεξανδρινής Σχολής ως τη χριστιανική εποχή, γ) από την εποχή καταστροφής της ελληνικής αυτοκρατορίας ως τον Descartes και δ) από την εποχή του Descartes μέχρι σήμερα.

3. Αυτή η σύνοψη θα είναι ανάλογη των ικανοτήτων των σπουδαστών. Προκειμένου να μελετήσει κανείς την πρόοδο των μαθηματικών, πρέπει να διδαχθεί ο ίδιος τις ανακαλύψεις της μαθηματικής επιστήμης που έγιναν παλαιότερα, έτσι ώστε να μην επαναληφθεί για δεύτερη φορά η ίδια ανακάλυψη.

4. Ο καθηγητής της άλγεβρας πρέπει να κάνει μια σύνοψη της ιστορίας της δείχνοντας τον λόγο που οι αρχαίοι, αν και γνώριζαν τους θεμελιώδεις κανόνες της ανάλυσης, δεν κατάφεραν να εξαγάγουν εκείνα τα συμπεράσματα που ανακάλυψαν οι σύγχρονοι μαθηματικοί (Fasanelli et al., 2000).

- **Γαλλία 1790**

Ο Joseph Louis Lagrange (1736-1813), κορυφαίος μαθηματικός στη Γαλλία, δίδαξε μετά τη Γαλλική Επανάσταση μαθηματικά σε φοιτητές και δασκάλους στην Ecole Normale. Με αφορμή ένα απόσπασμα σχετικό με τους λογαρίθμους ανέφερε: «*πως πρέπει να έχουν την περιέργεια οι μαθηματικοί να μάθουν πώς οι μεγάλοι μαθηματικοί μέσα από λάθη και δύσκολους δρόμους κατάφεραν να επιτύχουν τον στόχο τους. Πρέπει λοιπόν να είμαστε ευγνώμονες σε αυτούς ως πραγματικούς ευεργέτες της ανθρωπότητας. Τέτοιες γνώσεις εξάλλου μπορεί να σας καθοδηγούν σε παρόμοιες έρευνες και να φωτίσουν θέματα με τα οποία ασχολείστε*» (Fasanelli et al., 2000).

- **Νορβηγία 1820**

Ο Niels Henrik Abel (1802-1829), ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Νορβηγίας, έγραψε στο περιθώριο των σημειώσεών του τα εξής: «*Μου φαίνεται ότι εάν κάποιος θέλει να κάνει πρόοδο στα μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τις αυθεντίες των μαθηματικών*» (Fasanelli et al., 2000).

- **Αγγλία 1865**

Ο Augustus de Morgan (1806-1871) στην εναρκτήρια ομιλία του ως ο πρώτος πρόεδρος της μαθηματικής Εταιρίας του Λονδίνου στις 16 Ιανουαρίου 1865 μεταξύ άλλων τονίζει ότι: «*καμία τέχνη ή επιστήμη δεν είναι ελεύθερη, αν δεν μελετηθεί σε σχέση με τον τρόπο σκέψης των ανθρώπων σε προηγούμενες εποχές. Είναι εκπληκτικό το πόσο παράξενα οι μαθηματικοί μιλούν για τα μαθηματικά, επειδή δεν γνωρίζουν την ιστορία των μαθηματικών. Λένε αυτά που αντιλαμβάνονται ως γεγονότα και με αυτό τον τρόπο παραμορφώνουν την ιστορία τους. Έχουν στο μυαλό τους μία συγκεκριμένη ακολουθία γεγονότων και φαντάζονται ότι αυτή η ακολουθία υπάρχει και στην ιστορία. Ο μαθηματικός πρέπει να γνωρίζει ποια είναι η πορεία της ανακάλυψης στους διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Έτσι, αν ο κάθε μαθηματικός θέλει οι δικιές του έρευνες να οδηγηθούν σε επιτυχία, θα πρέπει να γνωρίζει τους τρόπους με τους οποίους η κατώτερη πρόταση είχε μια συνεχή εξέλιξη και έφτασε υψηλότερα*» (Fasanelli et al., 2000).

- **Αγγλία 1890**

Ο JWL Glaisher (1848-1928) πρόεδρος της Βρετανικής Ένωσης αναφέρει ότι: «*σε κάθε διατριβή ή σε βιβλίο ανώτερο από διατριβή είναι πάντα επιθυμητό να γίνονται αναφορές σε πρωτότυπα απομνημονεύματα, και, αν είναι δυνατόν, σε μικρά ιστορικά σημειώματα. Είμαι* *βέβαιος ότι χάνουν περισσότερο τα Μαθηματικά από κάθε άλλη επιστήμη, όταν γίνεται προσπάθεια να διαχωριστούν από την ιστορία τους*» (Fasanelli et al., 2000).

- **Ηνωμένο Βασίλειο 1919**

Σε μια έκθεση της Επιτροπής Μαθηματικών αναφέρεται: *«Κάθε μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει κάτι από την ανθρώπινη και προσωπική πλευρά του θέματος που μελετά. Η ιστορία των μαθηματικών θα μας δώσει κάποια βοήθεια στη διαμόρφωση της σχολικής αίθουσας. Για παράδειγμα: τα πορτρέτα των σπουδαίων μαθηματικών θα πρέπει να είναι κρεμασμένα στην τάξη και να γίνονται αναφορές για τη ζωή τους και για τις έρευνές τους από τον δάσκαλο στη διάρκεια του μαθήματος και να τονίζεται στα παιδιά η επίδραση των μαθηματικών ανακαλύψεων στην πρόοδο του πολιτισμού»* (Fasanelli et al., 2000).

- **Ηνωμένο Βασίλειο 1958**

Από την έκθεση του Υπουργείου Παιδείας του Ηνωμένου Βασιλείου αναφέρεται *: «ο δάσκαλος που γνωρίζει ελάχιστα την ιστορία των μαθηματικών, διδάσκει τεχνικές οι οποίες δεν έχουν σχέση με τα προβλήματα που τις δημιούργησαν ούτε με την ανάπτυξη των μαθηματικών γενικά. Η γνώση των επιχειρημάτων και των διαφωνιών μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει υγιή προβληματισμό και συζήτηση στην τάξη και να οδηγήσει στην κατανόηση των εννοιών. Ένα από τα πολύτιμα εργαλεία που ο δάσκαλος μπορεί να αποκτήσει από τη γνώση της ιστορίας των μαθηματικών είναι ότι θα εκτιμά την επίδραση στις σημερινές καταστάσεις. Είναι σημαντικό να γνωρίζουν οι μαθητές ότι πολλά από αυτά που διδάσκονται σήμερα είναι αποτέλεσμα αιώνων προβληματισμού ή διαμάχης πνευματικής. Τα μαθηματικά μπορούν να διδαχθούν σωστά μόνο με φόντο τη δική τους ιστορία»* (Fasanelli et al., 2000).

- **Σκωτία 1929**

Η Kathleen Ollerenshaw (1989) (b. 1912: '*living mathematics', IMA Bulletin 25(1989))* τονίζει την παιδευτική αξία του βιβλίου του Turnbull (1912) «*Οι Μεγάλοι Μαθηματικοί».* Στο βιβλίο της αναφέρει ότι κάθε νέος που ενδιαφέρεται για ένα συγκεκριμένο κλάδο της μάθησης, θα πρέπει να έχει το κατάλληλο βιβλίο που να αναφέρεται στους μεγάλους ειδικούς επιστήμονες που άνοιξαν το δρόμο ανάπτυξης του επιστημονικού τομέα τους (Fasanelli et al., 2000).

- **Ιταλία 1871**

Ο Eugenio Beltrami (1835-1899), καθηγητής της Μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, αναφέρει ότι οι μαθητές πρέπει να μάθουν να μελετούν από νωρίς τα σπουδαία έργα των μεγάλων δασκάλων αντί να γεμίζουν το μυαλό τους με στείρες ασκήσεις του κολεγίου οι οποίες δεν έχουν καμία χρησιμότητα (Fasanelli et al., 2000).

- **Βέλγιο 1877**

Ο Paul Mansion (1844-1923), καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Γάνδης, δημοσίευσε άρθρο στο οποίο θίγει το ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

- **Γερμανία 1883**

Ο S. Günther, καθηγητής μαθηματικός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσίασε την πρώτη εμπεριστατωμένη εργασία για το ρόλο της διδασκαλίας της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών. Εδώ βρίσκεται και το σημείο καμπής, καθώς το θέμα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας περνά από την περιστασιακή εξέτασή του στην αυτονομημένη και δομημένη θεώρησή του (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

- **Γερμανία 1897**

Ο Hermann Schubert (1848-1911) στο βιβλίο του «*Mathematical essays and recreations*» σημείωσε ότι η πλειοψηφία των μαθηματικών αληθειών που είναι γνωστές σε εμάς προϋποθέτουν τον πνευματικό μόχθο πολλών αιώνων. Ένας μαθηματικός λοιπόν ο οποίος επιθυμεί να αποκτήσει πλήρη κατανόηση της σύγχρονης έρευνας σε αυτόν τον τομέα πρέπει γρήγορα να ξανασκεφτεί τις μαθηματικές εργασίες πολλών αιώνων νωρίτερα (Fasanelli et al., 2000).

- **Γερμανία 1907**

Ο Γερμανός Felix Klein (1849-1925) έδωσε νέα ώθηση στην ιστορική μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών και την περιέλαβε με το κύρος του. Στις διαλέξεις που έδωσε για πρώτη φορά το 1907 στα πλαίσια της επιμόρφωσης καθηγητών των μαθηματικών αξιοποίησε ευρέως την ιστορία των μαθηματικών. Αυτές οι διαλέξεις αποτέλεσαν το περιεχόμενο του φημισμένου έργου του «*Στοιχειώδη μαθηματικά από ανωτέρα άποψη*». Οι Θωμαΐδης & Καστάνης (1987) αναφέρουν ένα απόσπασμα από το βιβλίο του: «*Είναι ουσιαστικό εμπόδιο στην ανάδυση μιας τόσο φυσικής και αληθινά επιστημονικής μεθόδου διδασκαλίας η έλλειψη ιστορικής γνώσης που τόσο συχνά γίνεται αισθητή. Για να το καταπολεμήσω αυτό αποφάσισα να εισαγάγω ιστορικές παρατηρήσεις στην παρουσίασή μου και κάνοντάς το πιστεύω ότι σας έχω ξεκαθαρίσει πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες, πως* *σχεδόν πάντα εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και πως μόνο μετά από μακρά ανάπτυξη αποκρυσταλλώθηκαν σε αυστηρές μορφές οι τόσο οικείες στη συστηματική παρουσίαση. Είναι κρυφή μου ελπίδα ότι αυτή η γνώση θα αποκτήσει μια διαρκή και καταλυτική επίδραση πάνω στο χαρακτήρα της δική σας διδασκαλίας*» (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

- **Σοβιετική Ένωση 1931**

Ο Ρώσος Mark Yacovlevich Vygodsky στο βιβλίο του *"Foundations of infinitesimal calculus"* αναφέρει ότι έγραψε αυτό το βιβλίο εξαιτίας της βαθιάς πεποίθησής του ότι κανένα από τα υπάρχοντα βιβλία δεν παραθέτει τις βασικές ιδέες […] με απαραίτητη ευκρίνεια και σαφήνεια. Αυτός είναι ο λόγος που τα βιβλία ανάλυσης δεν έχουν μαθησιακή αξία για τους μαθητές. Η εισαγωγή του αναγνώστη αυτού του βιβλίου στη μελέτη της ανάλυσης προϋποθέτει τη γνώση των πρακτικών αναγκών από τις οποίες προήλθαν οι θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών. Η αυστηροποίηση των γνώσεων αυτών αποτελεί μεταγενέστερο ζήτημα για την ανάλυση (Fasanelli et al., 2000).

- **Αμερική 1896**

Ο Florian Cajori (1859-1930) στο βιβλίο του «*A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching»* υποστήριξε ότι η εκπαίδευση του παιδιού πρέπει να συμφωνεί με τον τρόπο και με την μέθοδο της εκπαίδευσης του ανθρώπινου γένους. Με άλλα λόγια, η γέννηση της γνώσης στο άτομο πρέπει να ακολουθήσει την ίδια πορεία με τη γένεση της γνώσης στη κοινωνία. Αν το κριτήριο αυτό - γνωστό από τον Pestalozzi και τον Froebel - είναι σωστό, τότε φαίνεται πως η γνώση της ιστορίας συμβάλλει αποτελεσματικά στην αναβάθμιση της διδασκαλίας της επιστήμης. Ακόμη και στην περίπτωση που η άποψη αυτή κρίνεται αμφιλεγόμενη, η εμπειρία πολλών εκπαιδευτικών αποδεικνύει τη σημασία της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών (Fasanelli et al., 2000).

- **ΗΠΑ 1923**

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα εκδηλώθηκε ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις ΗΠΑ για την υιοθέτηση της αρχής της διαθεματικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η έμφαση δόθηκε στη σύνδεση των μαθηματικών με την ιστορία στη διδακτική πράξη. Κύριος εκπρόσωπος της τάσης αυτής αποτελεί ο David E. Smith (1860-1944) με σημαντικό έργο στην προώθηση αυτής της διδακτικής πρακτικής. Το πρώτο υπηρεσιακό ντοκουμέντο στις ΗΠΑ με αναφορά στην αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική τάξη υπήρξε το πόρισμα της Εθνικής Επιτροπής για την αναδιοργάνωση της διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (1923). Αναφέρουμε παρακάτω ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα του πορίσματος: «*συμβουλεύουμε τους δασκάλους να μάθουν τα καθοριστικά γεγονότα της ιστορίας των μαθηματικών και να μάθουν έτσι ότι τα μαθηματικά αναπτύχτηκαν ως απάντηση στις ανθρώπινες ανάγκες, τόσο στις νοητικές όσο και τις τεχνικές. Θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν αυτό το υλικό περιστασιακά στα μαθήματα τους, για να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών με άτυπες συζητήσεις για την ανάπτυξη των μαθηματικών και για τη ζωή των μεγάλων δημιουργών της επιστήμης* (…) το *ιστορικό και το βιογραφικό υλικό θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί για να κάνει τη δουλειά πιο ενδιαφέρουσα και με περισσότερη σημασία*» (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

- **ΗΠΑ 1930**

Η Vera Sanford στο βιβλίο της «*A short history of mathematics»* σημειώνει ότι πριν από ένα αιώνα ο Augustus De Morgan παρουσίασε την άποψή του σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών ως εξής: «*Μια καλή σύσταση στους μαθηματικούς όσον αφορά τη μελέτη παλαιών εργασιών είναι να δείξει ότι οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές είναι ακριβώς οι ίδιες που δυσκόλεψαν και τους μεγάλους μαθηματικούς στο παρελθόν και κάποιες από αυτές μερικές φορές σταμάτησαν την πρόοδο της έρευνάς τους*» (Fasanelli et al., 2000).

Σύμφωνα με τους Θωμαΐδη & Καστάνη (1987) στη δεκαετία του 1920 εμφανίζονται δύο ρεύματα που επέδρασαν αρνητικά στην εισαγωγή της ιστορίας στη διδακτική θεωρία και στη σχολική διδασκαλία των μαθηματικών. Το πρώτο προέρχεται από τον χώρο της ψυχολογίας και αφορά στη θεωρία του **μπιχεβιορισμού**. Κύριος εκπρόσωπος του μπιχεβιορισμού αναδείχτηκε ο E.I. Throrndike με το βιβλίο του «*The Psychology of Arithmetic»*. Βασική αρχή του μπιχεβιορισμού αποτελεί η παραδοχή ότι η μάθηση είναι μια παθητική και αναπαραγωγική διαδικασία πρόσκτησης γνώσης που μεταδίδεται από το δάσκαλο και από το βιβλίο στον μαθητή. Το μυαλό του μαθητή είναι άγραφο χαρτί πάνω στο οποίο ο δάσκαλος μπορεί να εγγράψει τη γνώση. Στο πλαίσιο αυτό το ενδιαφέρον και οι διδακτικοί χειρισμοί επικεντρώθηκαν στη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών. Το δεύτερο ρεύμα προήλθε από τον χώρο της φιλοσοφίας της επιστήμης. Πρόκειται για την επικράτηση του **λογικού θετικισμού**, ο οποίος απέκτησε από τα τέλη της δεκαετίας του 1920 μία κυρίαρχη θέση στον τρόπο κατανόησης της επιστημονικής γνώσης. Η επικράτηση αυτών των ρευμάτων είχε ως αποτέλεσμα την περιθωριοποίηση του προβληματισμού για τη φύση του περιεχομένου διδασκαλίας και ειδικότερα για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών. Η προσοχή στράφηκε στη διδασκαλία και μελέτη των θεωρητικών μαθηματικών με αντι-ιστορικό τρόπο. Βέβαια το ενδιαφέρον για την αυτήν την μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών δεν έσβησε, έχασε όμως την δυναμική που είχε εμφανίσει την πρώτη δεκαετία του 20ου αιώνα. Στο διάστημα 1930-1950 λόγω της διεθνούς πολιτικής κατάστασης δημοσιεύονται λίγα μόνο άρθρα σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών και την σύνδεσή της με την ιστορία (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

Το σκηνικό άρχισε να αλλάζει στη δεκαετία του 1950. Η επιστημονική και τεχνολογική πρόοδος ως τα τέλη της δεκαετίας του 1950 επέφερε βαθιές αλλαγές στη δομή και το περιεχόμενο της μαθηματικής παιδείας. Η μαθηματική παιδεία αναβαθμίστηκε και παράλληλα αναζωπυρώθηκε παράλληλα το ενδιαφέρον για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 ανακόπτεται για μια ακόμα φορά η δυναμική για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας λόγω των προωθούμενων αλλαγών στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών και λόγω της έμφασης που δίνεται στη λογικο-δομική φύση της μαθηματικής γνώσης. Ωστόσο δεν λείπει το έργο των θεωρητικών που άφησαν τα περιθώρια για τη διείσδυση της ιστορίας στη διδακτική μεθοδολογία.

Η εντατικοποίηση της έρευνας στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών με στόχο την ποιοτική αναβάθμιση της διδασκαλίας τους προώθησε μια νέα αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών και έδωσε μια νέα προοπτική στη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολείο. Το 1972 στα πλαίσια του 2ου Διεθνούς Συνεδρίου για την διδακτική των μαθηματικών διατυπώθηκε η άποψη ότι η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών θα μπορούσε να καταρρίψει την παγιωμένη αντίληψη ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα έτοιμο κατασκεύασμα και να αναδείξει την ανθρώπινη πλευρά τους και τη βαθύτερη σχέση τους με τον πολιτισμό πετυχαίνοντας παράλληλα τη διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Τέλος τονίστηκε η ανάγκη ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία από τους καθηγητές των μαθηματικών (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Στο Ελληνικό Πανεπιστήμιο αν και υπήρχε ενδιαφέρον για την ιστορία των μαθηματικών, δεν υπήρξε ποτέ έδρα Ιστορίας των Μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια η ιστορία των μαθηματικών διδάσκεται στο πανεπιστήμιο ως μάθημα επιλογής. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι μόνο ο Νικόλαος Χατζιδάκις, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, δίδαξε από το 1904 έως το 1938 την Ιστορία των Μαθηματικών σε έναν κύκλο ελεύθερων μαθημάτων. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση άρχισε να εκδηλώνεται ενδιαφέρον για τον διδακτικό ρόλο της Ιστορίας των Μαθηματικών στις αρχές του 20ου αιώνα όταν έγιναν γνωστές στην Ελλάδα οι ενέργειες του Felix Klein. Συγκεκριμένα, μεταφράστηκε από τον Κ.Ν. Λαμπίρη στα ελληνικά το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας που συντάχτηκε στη Γερμανία και δημοσιεύτηκε στο Ε΄ τόμο του δελτίου της ΕΜΕ το 1924. Σ΄ αυτό αναφέρεται μεταξύ των άλλων: «*…Η ιστορία των Μαθηματικών πρέπει, όπου τούτο είναι πρόσφορο, να λαμβάνεται υπ' όψιν κατά την ανάπτυξιν της διδακτέας ύλης ως και κατά τον καθορισμόν των προβλημάτων…*».

Ο Κ.Ν. Λαμπίρης το 1922 δημοσίευσε στο περιοδικό «ΠΑΙΔΑΓΩΓΟΣ» ένα άρθρο με τίτλο « *Ιστορικαί παρατηρήσεις κατά την διδασκαλίαν των μαθηματικών*» με το οποίο επιχείρησε να οριοθετήσει την εφαρμογή της Ιστορίας των Μαθηματικών στο σχολικό μάθημα. Ανάμεσα στα άλλα σημειώνει: *«(…) (.Δεν εννοώ δι' όσων λέγω ότι πρέπει να μεταβάλωμεν το μάθημα των μαθηματικών(…). Όμως δια συντόμων ιστορικών παρεκβάσεων τας οποίας συνιστώμεν θα συμπληρώσωμεν και θα τελειοποιήσωμεν την μαθηματική μόρφωσιν των μαθητών (…)».* Προτείνει ως βασικούς στόχους διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών:

α) να κατανοήσουν έμπρακτα οι μαθητές τη βαθμιαία, συνεχή και αδιάλειπτη πρόοδο της επιστήμης που σημειώθηκε χάρη στην εργασία των επίλεκτων πνευμάτων κάθε φυλής.

β) να εκτιμήσουν την μεγάλη συμβολή την οποία προσέφεραν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί στη θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης.

γ) συγκρίνοντας τις διαφορετικές μεθόδους με τις οποίες λύθηκαν κάποια θεμελιώδη ζητήματα των μαθηματικών, να εισέλθουν βαθύτερα στο πνεύμα αυτών των μεθόδων και να εκτιμήσουν με τον πιο κατάλληλο τρόπο την αξία της κάθε μιας από αυτές.

Το ευνοϊκό κλίμα για την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών ενισχύθηκε ακόμη περισσότερο την περίοδο της μεγάλης εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης του 1929. Έτσι στο αναλυτικό πρόγραμμα του μαθήματος των μαθηματικών του 1931 υπήρξε πρόβλεψη για πρώτη φορά να διδάσκεται μετά την περάτωση της ύλης της ΣΤ΄ τάξης γυμνασίου η ενότητα «Επισκόπηση των μαθηματικών, ιστορική και φιλοσοφική». Ο πρόεδρος της ΕΜΕ Ν. Σακελλαρίου χαρακτήρισε την ενότητα αυτή ως «*απαραίτητον και* *ουσιώδη δια την μόρφωση των νέων*», δεν παρέλειψε όμως να εκφράσει τις επιφυλάξεις του για τον διδακτικό χρόνο που απαιτούσε η διδασκαλία της. Το 1935 οι πολιτικές εξελίξεις οδήγησαν στην αλλαγή του εκπαιδευτικού συστήματος και στην αντικατάσταση του αναλυτικού προγράμματος μαθημάτων του 1931, γεγονός που αναπόφευκτα επηρέασε και τη διδασκαλία της ιστορικής επισκόπησης των μαθηματικών. Στο πρόγραμμα του 1931 οι συντάκτες αναγνώρισαν τη συμβολή της διδασκαλίας των μαθηματικών στη γενική μόρφωση των μαθητών αλλά έκριναν ότι σε σύνδεση με το υπόλοιπο περιεχόμενο του μαθήματος δεν θα συνέβαλε στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Έτσι αυτή η θεματική ενότητα έπαψε τελικά να διδάσκεται. Σ΄αυτό συνετέλεσε και η έλλειψη διδακτικών ωρών, αφού πολλές φορές δεν επαρκούσαν οι ώρες για την κάλυψη της «κανονικής» ύλης των μαθηματικών που κατά παράδοση διδασκόταν στα σχολεία (Θωμαΐδης & Καστάνης, 1987).

1.2 ΓΙΑΤΙ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΝΣΩΜΑΤΩΘΕΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1.2.1 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΚΑΙ ΩΣ ΣΤΟΧΟΣ

Αν διαβάσει κανείς την βιβλιογραφία σχετικά με τη διδακτική χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική εκπαίδευση, θα συναντήσει πολλά επιχειρήματα υπέρ της εισαγωγής της στη διδασκαλία, καθώς και πολλές προτάσεις για τους τρόπους διδακτικής αξιοποίησης της. Εδώ θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε τους λόγους της εισαγωγής της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία. Τα επιχειρήματα για τη χρήση της ιστορίας είναι δύο (Jankvist, 2009) και αφορούν στη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών ως εργαλείου και ως στόχου.

Α. Η ιστορία ως εργαλείο

Η κατηγορία των επιχειρημάτων της αξιοποίησης της ιστορίας **ως εργαλείου** περιλαμβάνει επιχειρήματα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν τα μαθηματικά (Jankvist, 2009). Ένα τυπικό επιχείρημα εδώ είναι ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών κινητοποιεί τους μαθητές να μάθουν και να μελετήσουν τα μαθηματικά διατηρώντας παράλληλα το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό τους για μάθηση (Farmaki & Paschos, 2007).

Επίσης έχει διατυπωθεί η άποψη ότι μια ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών μπορεί να προσδώσει στα μαθηματικά ένα πιο ανθρώπινο πρόσωπο και ίσως να διαλύσει τον φόβο που συνήθως προκαλεί το μάθημα αυτό στους μαθητές (Russ et al., 1991). Πολλές φορές θέματα μαθηματικών που στο παρελθόν είχαν ταλαιπωρήσει σπουδαίους μαθηματικούς, συνεχίζουν να ταλαιπωρούν και σήμερα τους μαθητές (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν με μεγαλύτερη ψυχραιμία τη δυσχέρειά τους στην κατανόηση των μαθηματικών, όταν διαπιστώσουν ότι τα μαθηματικά προβλήματα «δυσκόλεψαν» στο παρελθόν σπουδαίους μαθηματικούς, που χρειάστηκε να εργαστούν σκληρά για να τα λύσουν και τελικά κατόρθωσαν ύστερα από πολλά χρόνια δουλειάς να συστηματοποιήσουν τα μαθηματικά και να τους δώσουν την τελική τους μορφή (Jankvist, 2009).

Επιπλέον η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να παίξει το ρόλο ενός υποστηρικτικού γνωστικού εργαλείου στην αποτελεσματική μάθηση των μαθηματικών. Για παράδειγμα μπορεί η ιστορία να βελτιώσει τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών προτείνοντας ένα διαφορετικό τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης και μια διαφορετική οπτική στην προσέγγιση των μαθηματικών. Επίσης άλλα επιχειρήματα υποστηρίζουν ότι η ιστορική φαινομενολογία μπορεί να προετοιμάσει την ανάπτυξη μιας υποθετικής τροχιάς μάθησης η οποία μπορεί να βοηθήσει να κοιτάξουμε μέσα από τα μάτια των μαθητών. Είναι σημαντικό όμως η ιστορία να αξιοποιείται διδακτικά με τροποποιήσεις στις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας της. Η ιδέα είναι να βασιστούμε σε ιστορικά επιχειρήματα για να επιλέξουμε τη γένεση μιας έννοιας κατάλληλης για χρήση στα σχολεία και να κατασκευάσουμε ή να "εφεύρουμε" καταστάσεις διδασκαλίας που θα διευκολύνουν τη διαδικασία αυτή (Brousseau,1997, όπως στο Jankvist, 2009). Προτείνεται λοιπόν να εξανθρωπιστεί η εκπαίδευση των μαθηματικών με την εμπέδωση της ιστορικής, κοινωνικής και πολιτιστικής προέλευσής της και με την προσέγγισή της ως μιας από τις κοινωνικές δραστηριότητες που διενεργούνται στα πλαίσια της κοινωνίας. Τέλος, θεωρείται πως η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν μέσω των μαθηματικών τις έννοιες των στόχων, των αξιών, των εννοιών, των μεθόδων και των αποδείξεων σε διαφορετικές κοινωνικές πρακτικές (Miguel & Barbin, 2016).

Ο τελευταίος και πολύ χαρακτηριστικός τύπος επιχειρημάτων για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας ως εργαλείου είναι τα εξελικτικά επιχειρήματα που υποστηρίζουν τη θέση ότι δεν υπάρχει μάθηση χωρίς τη συνδρομή της ιστορίας. Το πιο ξεκάθαρο επιχείρημα είναι το λεγόμενο επιχείρημα **της ανακεφαλαίωσης** σύμφωνα με το οποίο «η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση». Σύμφωνα με τη Furinghetti (2004) τη σύνδεση της οντογένεσης με τη φυλογένεση εισηγήθηκε ο Γερμανός βιολόγος και φυσικός φιλόσοφος Enrst Haeckel (1874) που διατύπωσε τον θεμελιώδη νόμο της βιογενετικής (1906). Ο Haeckel υποστήριξε ότι η ψυχική ανάπτυξη ενός παιδιού είναι μόνο μια σύντομη επανάληψη της φυλογενετικής εξέλιξης (Furinghetti & Radford, 2002). Αυτό το επιχείρημα μεταφράζεται και ως ανακεφαλαιοποίηση, καθώς βασίζεται στη θέση ότι η εκμάθηση των μαθηματικών προϋποθέτει τη διαδρομή του μαθητευόμενου στα στάδια από τα οποία έχουν περάσει τα μαθηματικά στην ιστορική εξέλιξή τους. Το επιχείρημα δεν ισχύει μόνο για τα μαθηματικά στο σύνολό τους αλλά αφορά και τις μεμονωμένες μαθηματικές έννοιες και θεωρίες. Συχνά σχετίζεται με τον αποκαλούμενο ιστορικό παραλληλισμό που αναφέρεται στην παρατήρηση των δυσκολιών και εμποδίων μάθησης που εμφανίζονται διαχρονικά και κατ΄επανάληψη στη σχολική τάξη (Thomaidis & Tzanakis, 2007; Farmaki & Paschos, 2007). Η ιδέα του παραλληλισμού χρησιμοποιείται επίσης ως μια μεθοδολογία στη δημιουργία υποθέσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Fauvel & Van Maanen, 2000; Vasco, 1995).

Β. Η ιστορία ως στόχος

Η κατηγορία των επιχειρημάτων της **ιστορίας ως στόχου** περιλαμβάνει τα επιχειρήματα που υποστηρίζουν την άποψη ότι η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών εξυπηρετεί από μόνη της ένα σκοπό χωρίς να αποτελεί ένα ξεχωριστό μάθημα. Τα επιχειρήματα αυτά βασίζονται στην αναγνώριση της συμβολής της ιστορίας των μαθηματικών στην κατανόηση και στην ανάπτυξη των εξελικτικών πτυχών των μαθηματικών (Jankvist, 2009). Υπό την οπτική αυτή προτείνονται οι παρακάτω στόχοι της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία:

- να κατανοήσουν οι μαθητές την υπόσταση και την εξέλιξη των μαθηματικών στον χρόνο και τον χώρο (Tzanakis & Thomaidis, 2000).
- να αντιληφθούν ότι οι κατακτήσεις δεν προέκυψαν αυτόματα αλλά αποτελούν προϊόντα μιας μακράς ιστορικής εξέλιξης (Philipou & Christou, 1998).
- Να διαπιστώσουν τη συμμετοχή του ανθρώπινου παράγοντα στην εξέλιξη των μαθηματικών (Tzanakis & Thomaidis, 2007).
- να κατανοήσουν την συμβολή των διαφορετικών πολιτισμών στην εξέλιξη και ανάπτυξη των μαθηματικών και τον βαθμό αλληλεπίδρασή τους ως προς τον τρόπο διαμόρφωσης και της ανάπτυξή τους (Tzanakis & Thomaidis, 2000).
- τέλος, να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι η εξέλιξη των μαθηματικών οδηγείται από εσωτερικές και από εξωτερικές δυνάμεις (Fried, 2001).

Η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών ως στόχου δεν είναι ένα πρωταρχικό εργαλείο για την εμπεριστατωμένη και αποτελεσματική εκμάθηση των μαθηματικών, παρόλο που αυτό μπορεί να εξακολουθεί να είναι ένα (θετικό) υποπροϊόν. Η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας της ανάπτυξης και της εξέλιξης των μαθηματικών είτε εξυπηρετεί τον στόχο μάθησης της ιστορίας είτε χρησιμεύει στην επεξήγηση άλλων ιστορικών θεμάτων του πεδίου των μαθηματικών (Jankvist, 2009).

1.2.2 ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΥΠΕΡ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ιδέα ότι η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να φανεί αποτελεσματική και χρήσιμη είναι πολύ παλιά και άρχισε να εμφανίζεται ήδη από τον 19^{ο} αιώνα (De Morgan 1865, Claisher, 1890). Από την εποχή της υιοθέτησής της-τη δεύτερη πενταετία του 1960-προωθείται συστηματικά ως τις μέρες μας με την ίδρυση της ομάδας HPM (*The international Study Group on the Relation between History and Pedagogy of Mathematics*), με δημοσιεύσεις ερευνητικών άρθρων, τη διοργάνωση σχετικών συνεδρίων και την έκδοση συλλογικών τόμων (Τζανάκης, 2006).

Η εκμάθηση των μαθηματικών δεν προϋποθέτει μόνο την εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση των μαθηματικών συμβόλων, την κατανόηση των μαθηματικών θεωριών ή τη συσσώρευση και κατανόηση της γνώσης των νέων δεδομένων της μαθηματικής επιστήμης (Tzanakis & Arcavi, 2000). Η επιστημολογική θέση είναι ότι η γνώση των μαθηματικών δεν είναι αποτέλεσμα μόνο της μαθησιακής ενασχόλησης και της διατύπωσης ή ανάπτυξης των απαγωγικά σχεδιασμένων θεωριών αλλά προϋποθέτει την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να χειρίζονται αποτελεσματικά την εξειδικευμένη γλώσσα των μαθηματικών (Τζανάκης, 2009). «Μαθηματικά» είναι επίσης και αυτές οι ίδιες διαδικασίες που οδηγούν σε αυτά, οι οποίες περιλαμβάνουν τις ενέργειες για την κατασκευή και απόδοση νοήματος στις λογικές κατασκευές και στις αναστοχαστικές πρακτικές. Η διεύρυνση, η εμβάθυνση και η επέκταση του ήδη υπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου προϋποθέτει τη σύνδεση των νέων γνώσεων με τις ήδη υπάρχουσες (Hiebert & Carpenter, 1992; Tzanakis, 2009). Στα πλαίσια αυτά η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές προκύπτει ως ένας συνδυασμός παρουσίασης και εκμάθησης τελικών προϊόντων μαθηματικής σκέψης που έχει οργανωθεί επαγωγικά. Επιπλέον κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή ή φοιτητή να αποκτά εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικού συλλογισμού ή να καλλιεργεί τις αντίστοιχες δεξιότητες σε συμφωνία πάντοτε με το επίπεδο των γνώσεων και της νοητικής ικανότητας που διαθέτει. Υπό αυτή την οπτική η ιστορία των μαθηματικών προσφέρει τη δυνατότητα μελέτης των μαθηματικών κατά την εξελικτική πορεία της δημιουργίας τους. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τον σχηματισμό μιας σφαιρικής αντίληψης των μαθηματικών τόσο ως νοητικής κατασκευής με συγκεκριμένο πληροφοριακό περιεχόμενο όσο και ως ανθρώπινης δραστηριότητας με όλες τις αδυναμίες και τις κορυφώσεις της. Στα πλαίσια αυτά η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη εκπαίδευση των μαθηματικών στην τάξη (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009) .

Σήμερα είναι κοινή πεποίθηση ότι η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι πλέον ένα απομακρυσμένο ή εφαπτόμενο ζήτημα στο αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών και ότι αξίζει, όπως ειπώθηκε παραπάνω, να παίξει ένα σημαντικό και λειτουργικό ρόλο στη διδασκαλία (Yevdokimov, 2007). Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Hayes (1991): *«Πιστεύω ότι είναι σοβαρό και στρατηγικό λάθος να προσπαθήσουμε να διδάξουμε μαθηματικά χωρίς να τα συσχετίζουμε με την εκάστοτε πολιτιστική, κοινωνική, φιλοσοφική και ιστορική κληρονομιά».*

Η εκπαιδευτική μαθηματική βιβλιογραφία προσφέρει ένα μεγάλο αριθμό από επιχειρήματα υπέρ της εισαγωγής της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και προτείνει συγχρόνως τους τρόπους διδακτικής αξιοποίησής της με σκοπό τη βελτίωση και την αναβάθμιση της εκμάθησης των μαθηματικών στη σχολική εκπαίδευση (Tzanakis & Arcavi, 2000). O Jankvist (2009) ταξινομεί 17 επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών σε πέντε (5) τομείς που αφορούν: α) στην εκμάθηση των μαθηματικών, β) στην ανάπτυξη απόψεων σχετικά με τη φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας, γ) στο διδακτικό και παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών, δ) στη θετική συναισθηματική προδιάθεση προς τα μαθηματικά, ε) στην αναγνώριση των μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής-ανθρώπινης προσπάθειας. Στη συνέχεια της εργασίας θα εξετάσουμε αναλυτικά τους παραπάνω βασικούς τομείς διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών.

Α. <u>Η εκμάθηση των μαθηματικών</u>

α) Η ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών αντιπαραβαλλόμενη με το τελικό «*στιλβωμένο*» προϊόν.

Τα μαθηματικά συνήθως διδάσκονται με μια σωστά προσανατολισμένη οργάνωση. Όμως η ιστορία μάς δείχνει ότι η πλησιέστερη οργάνωση και δόμηση των μαθηματικών είναι αποτέλεσμα μιας ωρίμανσης που συντελείται σταδιακά στην πάροδο του χρόνου. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Freudental (Freudental 1983 στο Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009) : «*Καμία μαθηματική ιδέα δεν έχει ποτέ δημοσιευθεί με τον τρόπο που* *ανακαλύφθηκε»*. Τα μαθηματικά υπόκεινται σε μια διαδικασία αναδρομικής αναδιοργάνωσης. Η αναδιοργάνωση υπαγορεύεται από την ανάγκη αποφυγής πιθανών αστοχιών και μακροχρόνιων προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από την άλλη πλευρά τα ερωτήματα και τα προβλήματα αποτελούν βασικά κίνητρα για την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών ενώ οι αμφιβολίες που προκύπτουν στην πορεία διερεύνησης και οργάνωσής των μαθηματικών συλλογισμών παραμένουν κρυμμένες κάτω από ένα σώμα μαθηματικής γνώσης που οργανώνεται γραμμικά και αφαιρετικά με την συσσωρευτική προσθήκη νέων αποτελεσμάτων της έρευνας.

Στα πλαίσια αυτά η λειτουργική ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο σύμφωνα με τον Freudenthal (Freudenthal 1983 στο Tzanakis & Arcavi, 2000) συμβάλλοντας στην ανακάλυψη του τρόπου με τον οποίο «*οι μαθηματικές έννοιες, δομές, ιδέες μάς έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για την οργάνωση των φαινομένων του φυσικού, κοινωνικού και πνευματικού κόσμου»*. Με αυτόν τον τρόπο η μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας, δομής ή ιδέας, μπορεί να βελτιωθεί όταν συνδυαστεί με τα κίνητρα και τα φαινόμενα από τα οποία δημιουργήθηκε.

Δυστυχώς, αυτό το γεγονός αγνοείται συστηματικά από όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, με αποτέλεσμα να μην δίνεται στους διδασκόμενους η δυνατότητα να αντιληφθούν την ανθρώπινη διάσταση της μαθηματικής δημιουργίας και μέσω αυτής να αναπτύξουν μέσω αυτής τις απαιτούμενες μεταγνωστικές δεξιότητές τους (Τζανάκης, 2009). Αντίθετα η διαθεματική σύνδεση της ιστορίας και των μαθηματικών μπορεί να επιφέρει αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά (Barbin, 2000) και να συμβάλλει στον «εξανθρωπισμό» και την «απομυθοποίηση» της μαθηματικής επιστήμης, καθώς δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίσουν ότι τα σχολικά μαθηματικά δεν είναι ένα σύνολο «μαγικών» κανόνων, αλλά προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας η οποία αναπτύχθηκε ανάλογα με τις ανάγκες της κάθε εποχής (Καφούση, 2002).

β) Η ιστορία ως πηγή

Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει μια τεράστια δεξαμενή σχετικών ερωτημάτων, προβλημάτων και παραδειγμάτων που μπορεί να κρίνονται πολύτιμα τόσο για το περιεχόμενό τους όσο και για την δυνατότητά τους να εμπλουτίσουν την διαδικασία της μάθησης και να εμπλέξουν ενεργά και πιο αποτελεσματικά στη μαθησιακή και διδακτική πράξη τους συντελεστές της διδακτικής πράξης, τους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους

(Τζανάκης, 2009). Σε αυτό το πλαίσιο η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στον σχεδιασμό των διδακτικών δραστηριοτήτων και των ασκήσεων μπορεί να διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών και να συμβάλει με αυτόν τον τρόπο στην αναβάθμιση της γνώσης τους. Παράλληλα συμπληρώνει αποτελεσματικά το σώμα των ασκήσεων και των προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου που είναι τεχνητά σχεδιασμένα και τυποποιούν τη διδασκαλία περιορίζοντας το ενδιαφέρον και τη δημιουργικότητα των μαθητών. Επιπλέον οι ασκήσεις που συνδυάζουν αποτελεσματικά την ιστορική και μαθηματική γνώση βοηθούν τους μαθητές να παρακολουθούν την ιστορική εξέλιξη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και συγχρόνως τους εξοικειώνει με την ιστορία των μαθηματικών που μέχρι πρότινος τους φαινόταν ως «ξένο» γνωστικό αντικείμενο (Tzanakis & Arcavi, 2000).

γ) Η ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων

Η ιστορία φέρνει στο φως τις αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών πεδίων ή μεταξύ των Μαθηματικών με άλλους κλάδους της επιστήμης (π.χ., φυσική, χημεία, βιολογία, οικονομία).

Η σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και της φυσικής έχει μακρά και καθιερωμένη παράδοση ενώ η ιστορία των μαθηματικών προσφέρει πολλά παραδείγματα μαθηματικών προβλημάτων (Grugnetti & Rogers, 2002). Επίσης υποδηλώνει ότι οι διδακτικές δραστηριότητες στα μαθηματικά και τα μαθησιακά αποτελέσματα της διδασκαλίας άλλων συγγενών γνωστικών αντικειμένων μπορεί να είναι αλληλένδετα. Έτσι η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία μπορεί να συμβάλει στη δημιουργία διασυνδέσεων μεταξύ τομέων που από μια πρώτη ματιά φαίνονται ανεξάρτητοι. Δίνει επίσης τη δυνατότητα στους μαθητές να αποτιμήσουν θετικά την αξία και την αποτελεσματικότητα της διεπιστημονικής προσέγγισης της γνώσης και να διαπιστώσουν ότι η έρευνα σε ένα επιστημονικό πεδίο επηρεάζει με θετικό τρόπο παρόμοιες δραστηριότητες και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Αντίθετα, όπως συμβαίνει στην πράξη, η έρευνα συχνά ξεκινά από ερωτήματα και προβλήματα που προέρχονται από φαινομενικά ασύνδετους επιστημονικούς κλάδους (Tzanakis & Arcavi, 2000). Σχετικό πείραμα υλοποιήθηκε για δύο ακαδημαϊκά έτη με εκπαιδευτικούς στα μαθηματικά και τη φυσική. Επικεντρώθηκε στο πρώτο έτος σε μαθήματα τεχνολογίας των πληροφοριών, σε εργαστήριο μαθηματικών και φυσικής επίσης εκπαίδευση μαθηματικών και φυσικής και στο δεύτερο έτος μαθήματα για την ιστορία και τις βασικές έννοιες στα μαθηματικά και τη φυσική (Furinghetti, 2007)

δ) Η γενικότερη παιδευτική αξία της ιστορίας

Από την ενασχόληση των μαθητών με εργασίες ιστορικού προσανατολισμού είναι δυνατόν να αναπτυχθούν και άλλες δεξιότητες, που δεν συνδέονται απαραίτητα μόνο με τα μαθηματικά. Αναφέρουμε ως χαρακτηριστικά παραδείγματα τη δυνατότητα καλλιέργειας της ικανότητας των μαθητών να διαβάζουν ένα μαθηματικό κείμενο γραμμένο σε ένα αρχαιότερο γλωσσικό υποσύστημα της δικής τους γλώσσας (π.χ. αρχαία ελληνικά) και να το μεταγράφουν στην καθομιλουμένη της εποχής τους (π.χ. Κοινή Νέα Ελληνική), την ανάπτυξη των δεξιοτήτων τους στην αναζήτηση και στη συστηματική διασταύρωση των πηγών, στην τεκμηρίωση και συζήτηση των προσωπικών διαπιστώσεων και κρίσεών τους. Επίσης οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τους σημειωτικούς πόρους της μαθηματικής γλώσσας (π.χ. μαθηματικά σύμβολα) για την απόδοση περιγραφικών ορισμών στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα. Οι μαθητές μαθαίνουν να ΄΄μιλάνε΄΄ για τα μαθηματικά σε αντίθεση από να ΄΄κάνουν΄΄ τα μαθηματικά (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

Β. <u>Η φύση των μαθηματικών & της μαθηματικής δραστηριότητας</u>

α) Το περιεχόμενο των μαθηματικών.

Μια πληρέστερη εικόνα των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας μπορεί να παρέχεται από ιστορικά σημαντικά ερωτήματα, προβλήματα και απαντήσεις είτε αυτά παρέχονται απευθείας από πρωτογενείς πηγές ή αναδιατυπώνονται σε σύγχρονη γλώσσα. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν ότι τα λάθη στις διερευνητικές διαδικασίες, οι εικασίες, οι αβεβαιότητες, οι αμφιβολίες, οι ελλιπείς διατυπώσεις, τα αδιέξοδα, οι αντιπαραθέσεις και οι διαφορετικές προσεγγίσεις των προβλημάτων αποτελούν συστατικό κομμάτι της μαθηματικής δημιουργίας, και επομένως αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της οργάνωσης και δόμησης της μαθηματικής σκέψης. Ακόμη οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν κριτικά τις μαθηματικές αλήθειες ελέγχοντας αν τα θεωρήματα και οι αποδείξεις που διατυπώθηκαν στο παρελθόν, μπορούν να δώσουν ικανοποιητικές απαντήσεις σε υπάρχοντα μαθηματικά προβλήματα. Έμμεσα οι μαθητές μπορούν να ενθαρρυνθούν ώστε να διαμορφώσουν τις δικές τους ερωτήσεις, να διατυπώσουν τις δικιές τους υποθέσεις ή να αντιπροτείνουν τις δικιές τους λύσεις. Ως μέρος της διδακτικής διαδικασίας οι μαθητές μπορούν επίσης να διαπιστώσουν τα λάθη τους και να αναπτύξουν τους απαιτούμενους μηχανισμούς ώστε να διορθώνουν μόνοι τους τα λάθη και τις αστοχίες τους. Η ιστορία λοιπόν αποδεικνύεται για τους εκπαιδευτικούς και για τους μαθητές ένα σημαντικό εργαλείο κατανόησης της εξελικτικής πορείας της μαθηματικής γνώσης (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009). Επίσης η αξιοποίηση της ιστορίας στη διδακτική πράξη βελτιώνει την ποιότητα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκαν οι αποδείξεις των προτάσεων (Παναγιώτου, 2002).

β) Η μορφή των μαθηματικών

Η εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης σημειώνεται όχι μόνο στο γνωστικό περιεχόμενο των μαθηματικών, αλλά και στη μορφή, στη χρήση συμβόλων, στην ορολογία, στις υπολογιστικές μεθόδους, στους τρόπους μαθηματικής έκφρασης και στις μαθηματικές αναπαραστάσεις. Η ιστορία βοηθά τους μαθητές να συγκρίνουν τους συμβολισμούς και τη μαθηματική (λεκτική ή συμβολική) γλώσσα μιας δεδομένης περιόδου ή περιόδων και να τους βοηθήσει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ή των μαθηματικών προβλημάτων που επιλύθηκαν στο παρελθόν. Επίσης με τη βοήθεια του πρωτότυπου ιστορικού υλικού ή των μεταφρασμένων παραθεμάτων τους δάσκαλοι και μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τα πλεονεκτήματα ή και τα μειονεκτήματα της μεθοδολογίας και του σημειωτικού συστήματος της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Γ) <u>Το διδακτικό & παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών</u>

α) Προσδιορισμός κινήτρων

Η εισαγωγή (νέων) μαθηματικών γνώσεων και η διαχρονική μελέτη παραδειγμάτων που χρησίμευαν ως πρότυπα μαθηματικής σκέψης και μαθηματικού αποδεικτικού λόγου μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες (Τζανάκης, 2009; Καφούση, 2002).

β) Δυσκολίες και εμπόδια

Ο εκπαιδευτικός πρέπει να γνωρίζει τις δυσκολίες ή ακόμη και τα εμπόδια που εμφανίστηκαν κατά το παρελθόν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων και ίσως επανεμφανιστούν στην τάξη για να ευαισθητοποιηθεί και να ανταποκριθεί αποτελεσματικά στις απαιτήσεις της διδασκαλίας (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

γ) Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας «κάνω Μαθηματικά»

Οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές μπορούν να εμπλουτίσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους, όταν έρχονται σε επαφή με πρωτότυπες και δευτερεύουσες ιστορικές πηγές και αναλαμβάνουν εργασίες με θέμα την ιστορία των μαθηματικών ή ανακατασκευάζουν μια μέθοδο ή λύση προβλήματος με βάση τις πηγές αυτές (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

δ) Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου

Η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τον δάσκαλο να αναστοχαστεί για τα επιστημολογικά διλήμματά του και για τις πρακτικές του και να αναπτύξει εναλλακτικούς τρόπους για την επίλυση προβλημάτων και για την παρουσίαση μιας έννοιας διευκολύνοντας τις διαδικασίες μάθησης των μαθητών του (Fauvel & Van Maanen, 1997). Εφόσον ο διδάσκων δεν έχει πρόσβαση σε πηγές γνώσεων και πληροφοριών όπως το διαδίκτυο, μπορεί να ανακαλύψει σε ένα σώμα ιστορικών κειμένων μια δεξαμενή προβλημάτων, ερωτημάτων, εξηγήσεων, παραδειγμάτων καταστάσεων και να αξιοποιήσει αυτό το ιστορικό υλικό για τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας του (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

ε) Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων, αλλά εν τέλει «σωστών» Μαθηματικών.

Οι εκπαιδευτικοί αφού έλθουν σε επαφή με πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές, εμπλέκονται στην διαδικασία αποκωδικοποίησης των «σωστών» μαθηματικών που δεν είναι διατυπωμένα στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα ή δεν χρησιμοποιούν τους σημειωτικούς πόρους της σύγχρονης μαθηματικής γλώσσας (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

Δ) <u>Η συναισθηματική προδιάθεση προς τα μαθηματικά</u>

Η ιστορία μπορεί να προσφέρει πρότυπα ανθρώπινης δραστηριότητας από τα οποία απορρέουν και πολλές γνώσεις μεταξύ των οποίων συγκαταλέγονται και οι εξής:

α) Η θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας

Τα μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο κατασκεύασμα και όχι ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων. Είναι μια ανθρώπινη προσπάθεια που απαιτεί πνευματική προσπάθεια και καθορίζεται από πολλούς εγγενείς και εξωτερικούς παράγοντες. Ειδικότερα, τα μαθηματικά δεν είναι ένα τελικό, θεόσταλτο προϊόν, προορισμένο για αποστήθιση (Tzanakis & Arcavi, 2000). Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία συχνά ταυτίζεται με την ενημέρωση των μαθητών για τα μαθηματικά προβλήματα που απασχολούσαν τους αρχαίους λαούς, καθώς και για σημαντικά γεγονότα που σημειώθηκαν στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης (Μπούφη & Σκαφτούρου, 2002)

β) Επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας

Η ιστορική εξέλιξη κάθε επιστημονικού πεδίου είναι γεμάτη από παραδείγματα ιδεών και ερωτημάτων, τα οποία, αν και δεν οδήγησαν σε βέβαια συμπεράσματα ή λύσεις, αποτέλεσαν όμως βήματα που προώθησαν την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης κατά την ιστορική διαδρομή της έως σήμερα (Τζανάκης, 2009).

γ) Η αποφυγή της απογοήτευσης λόγω αποτυχιών, λαθών αβεβαιότητας ή παρανοήσεων.

Οι μαθητές ενδεχομένως να απογοητεύονται από την ανεπιτυχή προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος. Αυτή η αποτυχία μπορεί να προέλθει από λάθη, αβεβαιότητα ή από παρανοήσεις του προβλήματος. Όμως η ιστορία των μαθηματικών μάς έχει διδάξει πόσο δημιουργικά μπορούν να αποδειχθούν τα λάθη, η παρανόηση ή μια αποτυχημένη προσπάθεια απόδειξης μιας πρότασης. Οι αστοχίες αυτές αποτελούν το εφαλτήριο για μια νέα προσπάθεια επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων που με τη σειρά της συμβάλλει στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και της μαθηματικής επιστήμης (Τζανάκης, 2009). Επίσης δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν ότι οι δυσκολίες και τα προβλήματα αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο στη διαδικασία κατασκευής της καινούργιας γνώσης (Καφούση, 2002)

Ε. <u>Η αναγνώριση των μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής-ανθρώπινης προσπάθειας</u>

Όπως προαναφέρθηκε, τα μαθηματικά δεν αποτελούν ένα αυστηρά δομημένο σύστημα αποτελεσμάτων αλλά είναι μια διαρκώς εξελισσόμενη ανθρώπινη πνευματική διαδικασία, στενά συνδεδεμένη με άλλες επιστήμες, πολιτισμούς και κοινωνίες (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

α) Τα μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους

Μέσω της λεπτομερούς μελέτης ιστορικών παραδειγμάτων οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκτιμήσουν ότι τα μαθηματικά δεν οδηγούνται μόνο από πρακτικούς και ωφελιμιστικούς λόγους για εξυπηρέτηση της κοινωνίας (άποψη που επικρατεί και σήμερα), αλλά αναπτύσσονται και για καθαρά δικούς τους λόγους, με κίνητρα αισθητικής αναζήτησης, πνευματικής περιέργειας, πρόκλησης και ευχαρίστησης και ψυχαγωγίας (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

β) Τα μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών & πολιτιστικών παραγόντων.

Οι μαθηματικές γνώσεις ενός λαού είναι στενά συνδεδεμένες με την πολιτική, κοινωνική, και τεχνολογική του ανάπτυξη. Επίσης σχετίζονται με το επίπεδο ανάπτυξης της ευρύτερης περιοχής κατά τη δεδομένη χρονική περίοδο παραγωγής τους (Έξαρχος, 2002). Η ιστορία μπορεί να δώσει πολλά και τεκμηριωμένα παραδείγματα για το πώς η εσωτερική ανάπτυξη των μαθηματικών έγινε από συγκεκριμένες πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας, οι οποίες καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από τους κοινωνικούς και τους πολιτισμικούς παράγοντες της κάθε εποχής (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009). Επίσης η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν το πολιτισμικό, πολιτικό, κοινωνικό, και οικονομικό πλαίσιο της εποχής στο οποίο έχουν αναπτυχθεί τα συγκεκριμένα μαθηματικά και παράλληλα να διαπιστώσουν πόσο σημαντικό ρόλο έχουν διαδραματίσει οι διάφοροι πολιτισμοί στην εξέλιξή της μαθηματικής σκέψης (Ernest, 1998).

γ) Τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής παράδοσης.

Τα μαθηματικά στην σημερινή τους μορφή θεωρούνται ως ένα προϊόν δυτικού πολιτισμού. Όμως η εξέλιξη τους προέκυψε ως συνισταμένη πολλών διαφορετικών πολιτισμικών και επιστημονικών παραδόσεων. Μέσα από τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών οι δάσκαλοι και οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να γνωρίσουν και άλλες προσεγγίσεις των μαθηματικών, που είναι λιγότερο γνωστές, όπως για παράδειγμα η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης σε άλλους λαούς και ο ρόλος των μαθηματικών σ’ αυτούς. Σε ορισμένες περιπτώσεις η διαθεματική σύνδεση μαθηματικών και ιστορίας στη διδακτική πράξη διευκολύνει τις διαδικασίες αποτίμησης της τοπικής πολιτιστικής κληρονομιάς των λαών και της συμβολής της μαθηματικής σκέψης τους στην ανάπτυξη του πολιτισμού, ενθαρρύνοντας παράλληλα την καλλιέργεια της ανεκτικότητας και του σεβασμού των μαθητών στην πολιτισμική ιδιαιτερότητα των λαών (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).

1.2.3 ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΊΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αν και τα επιχειρήματα για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση ποικίλλουν και είναι βάσιμα, όμως έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς από εκπαιδευτικούς τάξης, από ερευνητές της διδακτικής και από ιστορικούς των μαθηματικών σοβαρές αντιρρήσεις για το πόσο τελικά μπορεί να συμβάλει η διδακτική χρήση της ιστορίας στη βελτίωση της διδασκαλίας και εκμάθησης των μαθηματικών. Οι λόγοι που συνηγορούν υπέρ της μη εισαγωγής και μη ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες: α) στην κατηγορία ενστάσεων επιστημολογικού και φιλοσοφικού χαρακτήρα και β) στις ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα.

A. Ενστάσεις επιστημολογικού-φιλοσοφικού χαρακτήρα

α) Σχετικά με την φύση των μαθηματικών:

- Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά. Αν πρέπει να διδάξετε την ιστορία, τότε πρέπει πρώτα να διδάξετε τα μαθηματικά. Διδάξτε πρώτα το αντικείμενο των μαθηματικών και έπειτα την ιστορία του (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).
- Πρόοδος στα μαθηματικά σημαίνει τα δύσκολα προβλήματα να γίνονται υπόθεση ρουτίνας. Άρα, γιατί να ασχολούμαστε με το τι έγινε στο παρελθόν; (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).
- Αυτά που έγιναν στο παρελθόν μπορεί να είναι περίπλοκα (Τζανάκης, 2006). Η ιστορία με την ενσωμάτωσή της μπορεί να είναι βασανιστική και να δημιουργεί μάλλον σύγχυση παρά να διαφωτίζει τους μαθητές (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Η πρώτη ένσταση μάς παραπέμπει στη επιστημολογική θέση ότι τα μαθηματικά ταυτίζονται με το αποτέλεσμα παραβλέποντας τις διαδικασίες που οδήγησαν και συνέβαλαν στην ανάπτυξή τους. Οι άλλες δύο ενστάσεις θεωρούν ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση είναι πολύπλοκη και ότι η παράλληλη διδασκαλία των μαθηματικών και της ιστορίας τους μπορεί να δυσκολέψει τους μαθητές.

β) Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος:

- Η ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων είναι δύσκολος στόχος και δεν βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση του μαθηματικού λόγου. Πράγματι, η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των πρωτότυπων πηγών είναι πολύ δύσκολη υπόθεση και θέλει προσεκτικό σχεδιασμό και συνεχή έλεγχο. Έχουν αναπτυχθεί σχετικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις και έχουν γίνει διεθνώς αντίστοιχες εφαρμογές σε όλο το φάσμα των μαθηματικών και σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν σημείο αναφοράς για την έρευνα (Τζανάκης, 2009).
- Δεν είναι σωστό να καλλιεργούμε πολιτισμικό σωβινισμό και στενόμυαλο εθνικισμό. Είναι ξεκάθαρο, ότι δεν μπορεί να απορρίψουμε την διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας από τον φόβο ότι αυτή κάποιες φορές μπορεί να μην χρησιμοποιηθεί με σωστό τρόπο στην τάξη (Τζανάκης, 2009) .
- Ένας καθηγητής μαθηματικών για να μπορεί να αξιοποιήσει την ιστορία στη διδασκαλία των μαθηματικών, πρέπει να λαμβάνει υπόψη του το επίπεδο ωριμότητας των μαθητών και την σχέση τους γενικά με την ιστορία. Αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να συνδέουν τα μαθηματικά με την ιστορία τους (Τζανάκης, 2009).

Β. <u>Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα</u>

α) Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκόντων

- Δεν υπάρχει διαθέσιμος διδακτικός χρόνος για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Δεν υπάρχει αρκετός χρόνος στην τάξη για την αποτελεσματική εκμάθηση των μαθηματικών σήμερα. Άρα, θα είναι ακόμα λιγότερος, όταν προτείνεται να διδάσκεται συγχρόνως και η ιστορία των μαθηματικών. Αρκεί όμως μια διαθεματική διδακτική παρέμβαση σε περιορισμένο μέρος της διδακτέας ύλης, που μπορεί να έχει θετικό πρόσημο για το μαθησιακό ενδιαφέρον και για τη δημιουργία κινήτρων μάθησης στους μαθητές (Τζανάκης, 2009).
- Δεν είμαι ιστορικός, άρα δεν μπορώ να ξέρω να παρουσιάζω με τον «σωστό» τρόπο το αντικείμενο της ιστορίας των μαθηματικών (Τζανάκης, 2009).
- Οι καθηγητές των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν έχουν την απαιτούμενη και κατάλληλη επιμόρφωση για την αποτελεσματική ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Η έλλειψη ιστορικής γνώσης του εκπαιδευτικού είναι συνέπεια της απουσίας κατάλληλων προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών. Πράγματι, απαιτείται όχι μόνο ιστορική αλλά και διεπιστημονική γνώση που δεν υπάρχει στους μαθηματικούς. Η έλλειψη αυτή έχει ως αποτέλεσμα οι

εκπαιδευτικοί να μην τολμούν να εισαγάγουν την ιστορία των μαθηματικών στο σχολικό μάθημα (Tzanakis & Arcavi, 2000).

- Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει αρκετό διαθέσιμο και κατάλληλο ιστορικό υλικό, για να βοηθηθούν ακόμη και εκείνοι οι εκπαιδευτικοί που μπορεί να θέλουν να ενσωματώσουν τις ιστορικές πληροφορίες στην διδασκαλία (Tzanakis & Arcavi, 2000). Γίνεται μια προσπάθεια για την δημιουργία κατάλληλου βοηθητικού διδακτικού υλικού τα τελευταία χρόνια με την οργάνωση σχετικής βιβλιογραφίας και τη δημιουργία σώματος κειμένων με πρωτότυπες πηγές σε συλλογικούς τόμους και σε ψηφιακή μορφή. Με τη λεπτομερή περιγραφή κάποιων κατάλληλα επιλεγμένων παραδειγμάτων μπορεί να εφαρμοστεί η ιστορία των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση και έτσι να μπορέσει ο εκπαιδευτικός να τα χρησιμοποιήσει στην τάξη (Τζανάκης, 2009).

β) Διαδικασίες αξιολόγησης

- Πώς μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση σε test η εξετάσεις;

  Δεν υπάρχει σαφής και συνεπής τρόπος αξιολόγησης των μαθητών με την ενσωμάτωση οποιουδήποτε ιστορικού στοιχείου στην διδασκαλία των μαθηματικών. Εάν δεν προβλέπεται αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών σ΄ αυτό το μάθημα, οι μαθητές δεν θα δώσουν την απαιτούμενη προσοχή στις ιστορικές πληροφορίες. Άλλωστε η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία έχει εκ φύσεως ποιοτικό χαρακτήρα και δεν μπορεί να αξιολογηθεί με τεστ ή εξετάσεις. (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009).
- Εάν η διδασκαλία της ιστορίας στα μαθηματικά δεν συνυπολογίζεται στην αξιολόγηση του μαθητή γιατί να ασχοληθούμε με την ιστορία; (Ho, 2008).
- Οι εκπαιδευτικοί δεν πιστεύουν στη χρησιμότητα της ιστορίας των μαθηματικών ως μέσου αναβάθμισης της διδασκαλίας των μαθηματικών (Ho, 2008).
- Υπάρχει πράγματι εμπειρική τεκμηρίωση ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των μαθηματικών; (Τζανάκης, 2009).

Αν και κρίνεται ως απαραίτητη μια τέτοια αξιολόγηση του σχολικού μαθήματος των μαθηματικών, δεν παύει να είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, καθώς βασίζεται περισσότερο σε ποιοτικές παρά σε ποσοτικές μεθοδολογίες. Είναι δύσκολο οι όποιες διδακτικές συνέπειες από την εισαγωγή μιας ιστορικής προσέγγισης στην τάξη να εντοπίσουν και να αξιολογηθούν. Γίνεται μια πολύ σοβαρή προσπάθεια τα τελευταία χρόνια με την πραγματοποίηση εμπειρικών ερευνών και αντίστοιχων πειραματικών εκπαιδευτικών εφαρμογών με σκοπό να μετρηθεί η αποτελεσματικότητα της ενσωμάτωσης της ιστορίας στην εκπαίδευση. Όμως έχουμε πολύ δρόμο ακόμα για να τεκμηριώσουμε την αποτελεσματικότητα της εισαγωγής μιας ιστορικής διάστασης στην μαθηματική εκπαίδευση (Τζανάκης, 2009). Υπάρχουν πολλοί λόγοι που δεν έχουμε ακόμη αποτελέσματα και μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται και οι εξής:

1) Κρίνεται αναγκαία η αναθεώρηση των προκαταλήψεων, παρερμηνειών και διαμορφωμένων στάσεων εκπαιδευτικών και μαθηματικών, που αφορούν στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών.

2) Διαπιστώνεται επίδραση από εξωτερικούς «τεχνικούς» παράγοντες που μπορεί να ευνοούν, να παρεμποδίζουν ή και να περιορίζουν τις δυνατότητες να εφαρμοστεί αποτελεσματικά μια προσέγγιση που βασίζεται στην ενσωμάτωση της ιστορίας στην εκπαίδευση, όπως για παράδειγμα είναι το αναλυτικό πρόγραμμα μαθημάτων, ο αριθμός των μαθητών στη τάξη και η ελευθερία που μπορεί να έχει ο εκπαιδευτικός για να εφαρμόσει μια καινοτόμο διδακτική προσέγγιση που δεν εμπίπτει αναγκαστικά στο επίσημο πρόγραμμα σπουδών.

3) Δεν είναι όλα τα θέματα των μαθηματικών το ίδιο προσβάσιμα ή κατάλληλα για να διδαχθούν.

Όλα αυτά αποτελούν ένα σύνθετο δίκτυο παραγόντων που παρεμβαίνουν μεταξύ τους, έτσι ώστε τα εμπειρικά ευρήματα διαφορετικών εργασιών να μην είναι εύκολα συγκρίσιμα (Clark & Kjeldsen et al., 2016).

γ) Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκομένων έναντι της διαθεματικής διδασκαλίας μαθηματικών και ιστορίας

- Η προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση και η παράλληλη διδασκαλία της ιστορίας στο μάθημα δεν είναι αρεστές στους διδασκομένους (Tzanakis & Arcavi, 2000 ; Τζανάκης, 2009; Siu, 2006)
- Οι διδασκόμενοι θεωρούν τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών σαν παραδοσιακό μάθημα ιστορίας και δεν αγαπούν την ιστορία (Tzanakis & Arcavi, 2000; Τζανάκης, 2009; Siu, 2006).
- Οι διδασκόμενοι βρίσκουν το μάθημα της ιστορίας των μαθηματικών εξίσου ανιαρό, όπως συμβαίνει και με το μάθημα των «παραδοσιακών» μαθηματικών (Tzanakis & Arcavi, 2000 ; Τζανάκης, 2009; Siu, 2006).
- Οι διδασκόμενοι δεν έχουν ευρύτερη παιδεία ή δεν διαθέτουν εγκυκλοπαιδικές γνώσεις σε επαρκή βαθμό, ώστε να εκτιμήσουν σωστά τα αποτελέσματα της διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών (Tzanakis & Arcavi, 2000 ; Τζανάκης, 2009; Siu, 2006).

- Αν η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι απαραίτητη - ουσιαστικά δεν αποτελεί μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών στην τάξη - τότε όταν αφιερώνεται χρόνος στη διδασκαλία της θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα σπουδών (Fried, 2011)

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε τις μεγάλες δυσλειτουργίες και τα προβλήματα της εκπαίδευσης που δεν επιτρέπουν την εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία. Εντούτοις, κρίνεται αναγκαίο να γίνουν έστω και συντηρητικές παρεμβάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως η διάθεση λίγων ωρών διδακτικού χρόνου και η επιλογή συγκεκριμένων ενοτήτων της διδακτέας ύλης για την διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών. Δεδομένου του χαμηλού ενδιαφέροντος των μαθητών για την ιστορία και κατ΄επέκταση για την ιστορία των μαθηματικών ο διδάσκων οφείλει να αξιοποιήσει εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας που διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και ενθαρρύνουν την ενεργό εμπλοκή τους στη διδακτική διαδικασία (Θωμαΐδης & Τζανάκης, 2006; Τζανάκης 2009).

1.3 ΤΡΟΠΟΙ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Στις συζητήσεις σχετικά με τη βασιμότητα και ορθότητα των επιχειρημάτων υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση μένει ανοικτό το θέμα επιλογής του τρόπου αξιοποίησής της στην σχολική διδασκαλία. Οι τρόποι με τους οποίους η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία και στη εκμάθηση των μαθηματικών μπορεί να ταξινομηθεί σε διαβαθμισμένη κλίμακα σε τρεις κατηγορίες προσεγγίσεων:

1. διαφωτιστικές προσεγγίσεις
2. οριοθετημένες προσεγγίσεις
3. προσεγγίσεις που βασίζονται στην ιστορία.

1. Διαφωτιστικές προσεγγίσεις

Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις προβλέπουν την αξιοποίηση συμπληρωματικών ιστορικών πληροφοριών που παρέχονται στους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ως εξωτερικές πηγές ή παρατίθενται ως εσωτερικές ιστορικές αναφορές στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Τα «συμπληρώματα» αυτά αναφέρονται από τον Τζανάκη και Arcavi (2000) ως "μεμονωμένες πραγματικές πληροφορίες" ή "ιστορικά αποσπάσματα", τα οποία μπορεί να καλύπτουν ονόματα, ημερομηνίες, διάσημα έργα και γεγονότα, χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες, φημισμένα προβλήματα και ερωτήσεις, κομμάτια από ιστορικά βιβλία (Tzanakis & Arcavi, 2000), ανέκδοτες ιστορίες (Man-Keung, 2000) κ.ά. Μπορούμε να σκεφτούμε αυτά τα μικρότερα συμπληρώματα στις διαφωτιστικές προσεγγίσεις ως "μπαχαρικά" που προστίθενται στην κατσαρόλα της διδασκαλίας των μαθηματικών στη σχολική τάξη (Jankvist, 2009).

Στην άλλη άκρη της κλίμακας των διαφωτιστικών προσεγγίσεων θα μπορούσαν να αναφερθούν οι "ιστορικοί επίλογοι" (ή επίλογοι). Τον όρο αυτό τον χρησιμοποίησε ο Lindstrøm (1995) στο τέλος κάθε κεφαλαίου στο βιβλίο του. Ο ιστορικός επίλογος στον οποίο περιγράφεται η ιστορία των μαθηματικών, παρουσιάζεται στο οικείο κεφάλαιο μαζί με ονόματα, ημερομηνίες, κίνητρα, πρωτότυπα έργα και ανέκδοτα. Η παράθεση των ιστορικών επίλογων αποτελεί σύμφωνα με τα πρότυπα των διαφωτιστικών προσεγγίσεων τον καταλληλότερο τρόπο αξιοποίησης πρωτότυπων ιστορικών πηγών - έστω και μικρής έκτασης - στη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών (Jankvist, 2009).

2. Οριοθετημένες προσεγγίσεις

Οι οριοθετημένες προσεγγίσεις είναι ενότητες διδασκαλίας αφιερωμένες στην ιστορία. Ο όρος "ενότητες" δόθηκε από τους Katz και Michalowicz (2004) στο (Jankvist, 2009). Όπως και στην προηγούμενη κατηγορία, οι προσεγγίσεις των ενοτήτων μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το μέγεθος και ως προς τον σκοπό.

Στην αρχή της κλίμακας είναι οι μικρότερες ενότητες που ορίζονται από τους Tzanakis & Arcavi (2000) ως «ιστορικά πακέτα» (ή ιστορικά «συμβάντα»). Αποτελούν μια συλλογή μαθηματικού υλικού που εστιάζει σε μία μικρή θεματική ενότητα των μαθηματικών και συνδέεται με το πρόγραμμα σπουδών. Επίσης είναι κατάλληλο για δύο ή τρεις ώρες διδασκαλίας και είναι έτοιμο για να το χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι στις αίθουσες διδασκαλίας τους (Tzanakis & Arcavi, 2000; Jankvist, 2009). Στη μέση της κλίμακας βρίσκουμε ενότητες για 10-20 διδακτικές ώρες που δεν είναι απαραίτητο να συνδέονται με το πρόγραμμα σπουδών (Jankvist, 2009). Στο άνω άκρο της κλίμακας βρίσκουμε πλήρη μαθήματα (ή βιβλία) σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών που έχουν ανσωματωθεί σε ένα πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών. Αυτά μπορεί να περιλαμβάνουν μία έκθεση ιστορικών δεδομένων, μία ιστορική εξέλιξη των εννοιών ή κάτι ενδιάμεσο μεταξύ αυτών των δύο (Tzanakis & Arcavi, 2000). Τέτοια μαθήματα μπορούν να βασίζονται σε πρωτότυπες ή δευτερεύουσες πηγές (ή και τα δύο) ανάλογα με το επίπεδο των μελετών ιστορίας που προορίζονται.

3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία

Η τελευταία κατηγορία προσεγγίσεων ασχολείται με τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών με έμμεσο τρόπο. Εδώ η ιστορική εξέλιξη δεν αποτελεί αναγκαστικά το πρώτο μέλημα του διδάσκοντος. Από την άλλη πλευρά ορίζει την διάταξη, τη σειρά και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα μαθηματικά θέματα (έννοιες). Ένα συχνά αναφερόμενο και συζητούμενο παράδειγμα είναι η λεγόμενη γενετική προσέγγιση (Jankvist, 2009).

1.4 ΜΟΡΦΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η εξατομίκευση ορισμένων λόγων για την ενσωμάτωση της ιστορίας στην εκπαίδευση των μαθηματικών εξακολουθεί να αφήνει ανοιχτό το ερώτημα σχετικά με τον τρόπο επίτευξης της ολοκλήρωσης αυτής της διαδικασίας. Σε γενικές γραμμές μπορούμε να διακρίνουμε τρεις διαφορετικές μορφές παράλληλης αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία με συμπληρωματική σχέση μεταξύ τους, όπως:

α) η εκμάθηση της ιστορίας των μαθηματικών με άμεση παροχή ιστορικών πληροφοριών,

β) η εκμάθηση των μαθηματικών θεμάτων μέσω μιας διδακτικής και μαθησιακής προσέγγισης διδασκαλίας εμπνευσμένης από την ιστορία,

γ) η καλλιέργεια βαθύτερης συνειδητοποίησης τόσο των ίδιων των μαθηματικών όσο και των κοινωνικών-πολιτισμικών πλαισίων στα οποία έχουν αναπτυχθεί και εξελιχθεί τα μαθηματικά (Jankvist, 2009; Tzanakis & Arcavi, 2000).

Α. <u>Εκμάθηση της ιστορίας με την παροχή και άμεση ενωμάτωση ιστορικών πληροφοριών</u>

Με την έκφραση «άμεσες ιστορικές πληροφορίες» αναφερόμαστε στα εξής:

α) σε μεμονωμένες πληροφορίες,

β) σε πλήρη μαθήματα ή βιβλία σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών (Τζανάκης, 2009; Tzanakis & Arcavi, 2000).

γ) στον *Πολιτισμό* που περιλαμβάνει την ιστορία των μαθηματικών, τη βιογραφία των μαθηματικών, τα μαθηματικά στη λογοτεχνία και στις ταινίες, τη φιλοσοφία των μαθηματικών, τις κοινωνικές επιδράσεις των μαθηματικών και τις αντιλήψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η διδασκαλία των μαθηματικών οφείλει να προάγει πνευματικές αρετές, όπως η αλήθεια, η λογική σκέψη, και να ενθαρρύνει την επίμονη προσπάθεια για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων, η σκληρή δουλειά και η γενναιοδωρία απέναντι σε όσους αγωνίζονται με ζήλο για τα μαθηματικά (Wong, 2005).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η έμφαση δίνεται περισσότερο στην παροχή των ιστορικών πληροφοριών και στη βαθύτερη κατανόηση της φύσης των μαθηματικών παρά στην εκμάθηση των μαθηματικών (σε αντίθεση με αυτά που θα περιγραφούν στις επόμενες ενότητες) (Tzanakis & Arcavi, 2000).

B. Εκμάθηση των μαθηματικών θεμάτων ακολουθώντας μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση διδασκαλίας εμπνευσμένη από την ιστορία

Είναι ουσιαστικά αυτό που μπορεί να ονομαστεί γενετική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση. Η λέξη "γενετική" προέρχεται από την ελληνική λέξη «γένεσις», η οποία στα αγγλικά μεταφράζεται είτε ως δημιουργία είτε ως ανάπτυξη. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν πολλές παραλλαγές της γενετικής προσέγγισης ή της γενετικής αρχής. Ο Schubring (1978) σε εκτεταμένη μελέτη του αναγνωρίζει και διακρίνει μεταξύ τους δύο γενετικές αρχές (Jankvist, 2009):

- η ιστορική – γενετική αρχή σύμφωνα με την οποία στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι να οδηγήσει τους μαθητές από τη βασική και στοιχειώδη γνώση των μαθηματικών στη σύνθετη και αναλυτική γνώση τους με τον ίδιο τρόπο που η ανθρωπότητα προχώρησε στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.
- η ψυχολογική-γενετική αρχή σύμφωνα με την οποία οι ίδιοι οι μαθητές ανακαλύπτουν εξ αρχής τα μαθηματικά αξιοποιώντας το δικό τους ταλέντο και τις εμπειρίες από το περιβάλλον τους.

Στη γενετική προσέγγιση, χωρίς να αγνοείται ο «τεχνικός» ρόλος της μαθηματικής γνώσης, δίνεται έμφαση περισσότερο στην αναζήτηση του σκοπού που εξυπηρετεί η προσπάθεια επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων, και λιγότερο στον τρόπο χρήσης των θεωριών, των μεθόδων και των εννοιών. Από αυτή την άποψη η ιστορική προοπτική προσφέρει ενδιαφέρουσες δυνατότητες για μια βαθιά και σφαιρική κατανόηση του γνωστικού και διδακτικού αντικειμένου σύμφωνα με το ακόλουθο γενικό σχήμα:

- Ακόμα και ο δάσκαλος που δεν είναι ιστορικός των μαθηματικών θα πρέπει να έχει αποκτήσει βασική γνώση της ιστορικής εξέλιξης του θέματος της διδασκαλίας.
- Τα κρίσιμα βήματα της ιστορικής εξέλιξης είναι οι ιδέες - κλειδιά, τα ερωτήματα και τα προβλήματα που άνοιξαν νέες ερευνητικές προοπτικές. Αυτά τα κρίσιμα βήματα ανακατασκευάζονται, ώστε να γίνουν κατάλληλα για την διδακτική τους χρήση στην τάξη (Tzanakis & Arcavi, 2000).
- Αυτά τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα δίδονται ως μία ιστορική ακολουθία προβλημάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας, έτσι ώστε η λύση του καθενός από αυτά να στηρίζεται και να προϋποθέτει τη γνώση των προηγούμενων. Η προτεινόμενη σειρά των προβλημάτων μπορεί να προσφέρει πολλές ευκαιρίες στον εκπαιδευόμενο να φτάσει σε εποικοδομητικά αποτελέσματα ξεκινώντας από τα εύκολα προβλήματα και στη συνέχεια ακολουθώντας τα κύρια βήματα του ιστορικού μονοπατιού να προχωρήσει σε δυσκολότερα προβλήματα (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Γ. <u>Καλλιέργεια βαθύτερης συνείδησης για τα μαθηματικά καθ' αυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους</u>

Οι Tzanakis και Arcavi (2000) προτείνουν ότι η ανάπτυξη συνειδητής μαθηματικής σκέψης προϋποθέτει την κατανόηση και επίγνωση της ενδογενούς και της εξωγενούς φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας.

α. Επίγνωση της ενδογενούς φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας

Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει ευκαιρίες για να ξεδιπλωθούν, να αναλυθούν και να επισημανθούν σημαντικές πτυχές των μαθηματικών, όπως:

- ο ρόλος των γενικών εννοιολογικών πλαισίων και των σχετικών κινήτρων, των ερωτήσεων και των προβλημάτων που οδήγησαν σε εξελίξεις συγκεκριμένων μαθηματικών πεδίων,
- η εξελισσόμενη φύση των μαθηματικών τόσο σε περιεχόμενο όσο και σε μορφή, καθώς και η συγκριτική μελέτη της ορολογίας, των υπολογιστικών μεθόδων, των τρόπων έκφρασης των αναπαραστάσεων και των μετα-μαθηματικών εννοιών (π.χ. απόδειξη) και τέλος, η αυστηρότητα που χρησιμοποιήθηκαν διαχρονικά από τη μαθηματική επιστήμη.

β. Επίγνωση της εξωγενούς φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας

Τα μαθηματικά θεωρούνται συχνά αποπλαισιωμένα από το κοινωνικο - πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο εμφανίστηκαν και αναπτύχθηκαν. Όμως η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να καταρρίψει ή να θέσει σε ισχυρή αμφισβήτηση την άποψη αυτή οδηγώντας σε διαπιστώσεις όπως:

- Οι πτυχές των μαθηματικών μπορούν να θεωρηθούν ως στενά συνδεδεμένες με τα φιλοσοφικά ερωτήματα και τα προβλήματα που θέτουν άλλες επιστήμες με θετικό και ανθρωπιστικό προσανατολισμό ή οι τέχνες (μουσική, αρχιτεκτονική κλπ.) (Τζανάκης, 2009).
- Οι κοινωνικές συνθήκες και η πολιτιστική «ατμόσφαιρα» έχουν συμβάλλει στην πρόοδο ή στην καθυστέρηση της ανάπτυξης ορισμένων μαθηματικών πεδίων (Τζανάκης, 2009).
- Τα μαθηματικά αναγνωρίζονται ως αναπόσπαστο μέρος της πολιτισμικής παράδοσης διαφορετικών πολιτισμών, εθνών ή εθνικών ομάδων (Τζανάκης, 2009).
- Η ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης αντανακλά τις τάσεις και τις ανησυχίες που εκδηλώθηκαν στον πολιτισμό και την κοινωνία του κάθε τόπου και της κάθε εποχής (Τζανάκης, 2009).

1.5 ΤΡΟΠΟΙ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι τρόποι ενσωμάτωσης της ιστορίας στην εκπαίδευση των μαθηματικών στην εκπαίδευση περιλαμβάνουν σαφώς τη χρήση υλικού αναφοράς που μπορεί να ταξινομηθεί σχηματικά σε τρεις διαφορετικούς τύπους:

α) σε υλικό με πηγές πρωτογενούς προέλευσης (αποσπάσματα από πρωτότυπα κείμενα μαθηματικού περιεχομένου),

β) σε υλικό με πηγές δευτερογενούς προέλευσης (εγχειρίδια με ιστορικές αφηγήσεις, ερμηνείες, ανακατασκευές μαθηματικών αποδείξεων κλπ.),

γ) σε υλικό διδακτικής περιεχομένου που αντλείται και εμπνέεται από την ιστορία, όπως για παράδειγμα η βιβλιογραφία που οργανώνεται από το πρωτογενές και δευτερογενές ιστορικό υλικό με γνώμονα μια προσέγγιση που μπορεί να συμπεριλαμβάνει μια έκθεση ενός του σεμιναρίου ή μιας άσκησης (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Οι ιστορικοί των μαθηματικών λόγω της ειδικότητάς τους ενδιαφέρονται κυρίως για τη συλλογή και επεξεργασία πληροφοριών και δεδομένων που προέρχονται από τις πρωτογενείς πηγές. Δεν παραγνωρίζουν βέβαια τη συμβολή της αξιοποίησης του σώματος των δευτερογενών πηγών στην πρόοδο και στην επιτυχία της μελέτης τους. Εστιάζουν αρχικά την έρευνά τους στις συνθήκες και διαδικασίες «ανακάλυψης» και νοητικής σύλληψης ενός θεωρήματος και στη μελέτη των μεθόδων απόδειξης και του τρόπου οργάνωσης και διατύπωσής του. Στη συνέχεια καταγράφουν το δευτερογενές υλικό έτσι ώστε να είναι περισσότερο κατανοητό από τους μαθηματικούς.

Οι καθηγητές των μαθηματικών όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης, αν και μπορούν να επωφεληθούν από την χρήση και επεξεργασία του πρωτογενούς και (ίσως περισσότερο) του δευτερογενούς υλικού, δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην τρίτη κατηγορία του υλικού αναφοράς με το διδακτικό περιεχόμενο.

1.5.1 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θα παρουσιάσουμε παρακάτω πέντε (5) κατηγορίες και τους τρόπους που προτείνονται για την υλοποίηση της χρήσης της ιστορίας στη σχολική διδασκαλία.

Α. <u>Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα</u>

1. Ιστορικά σημειώματα και ιστορικές εισαγωγές σε επιμέρους μαθηματικά θέματα.

Σε αρκετές χώρες ανά τον κόσμο έχουν ενσωματωθεί στο περιεχόμενο πολλών βιβλίων μαθηματικών όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης ιστορικές πληροφορίες τα «ιστορικά αποσπάσματα» (Tzanakis & Arcavi, 2000). Τα ιστορικά αποσπάσματα είναι παραθέματα ιστορικών πηγών που ενσωματώνονται στο κυρίως κείμενο (Ho, 2008). Προτείνεται η κατηγοριοποίηση των ιστορικών αποσπασμάτων βάσει της μορφής και του περιεχομένου τους. Συγκεκριμένα τα ιστορικά παραθέματα ταξινομούνται:

- όσον αφορά στη μορφή τους με κριτήρια:

α) την θέση του ιστορικού αποσπάσματος στο κείμενο σε σχέση με το μαθηματικό θέμα στο οποίο αναφέρεται,

β) τη διδακτική προσέγγιση που υιοθετείται, οπότε και το ιστορικό απόσπασμα είτε εκθέτει απλώς ιστορικές πληροφορίες είτε ενθαρρύνει την ενεργό συμμετοχή του μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία (Ho, 2008; Tzanakis & Arcavi, 2000).

γ) τον βαθμό της προσοχής και έμφασης που δίνεται στο περιεχόμενο του ιστορικού παραθέματος σε σύγκριση με το μαθηματικό θέμα (Tzanakis & Arcavi, 2000).

δ) το στυλ και τον σχεδιασμό του ιστορικού αποσπάσματος (Tzanakis & Arcavi, 2000).

- ως προς το περιεχόμενο με βάση:

α) τα πραγματικά δεδομένα: το απόσπασμα μπορεί να περιέχει φωτογραφίες, βιογραφίες, αποδείξεις της πνευματικής ιδιοκτησίας, ανέκδοτα, ημερομηνίες και χρονολογίες,

β) τα εννοιολογικά ζητήματα: μία αφήγηση μπορεί να μας δείξει, την προέλευση και την εξέλιξη μιας ιδέας, τα ιστορικά προβλήματα, τις αρχαίες μέθοδους υπολογισμού κ.α. (Tzanakis & Arcavi, 2000;Τζανάκης, 2009).

2. Επιτόπια εμπειρία βάσει επισκέψεων σε μουσεία, αρχαιολογικούς και ιστορικούς χώρους

Τα μαθηματικά «εμπειρίας» των εξωτερικών χώρων αναφέρονται μεταξύ άλλων στην αναγνώριση των μορφών και σχημάτων, των μοτίβων στη φύση, στην αρχιτεκτονική (παλιά και σημερινή) και στην τέχνη. Ο όρος θα μπορούσε επίσης να αναφέρεται στην μαθηματική γνώση που αποκομίζουν οι επισκέπτες μουσείων από την παρατήρηση ιστορικών εκθεμάτων με μαθηματικό περιεχόμενο.

Ένα μοναδικό παράδειγμα ιστορικού μαθηματικού εκθέματος βρίσκουμε στην ιαπωνική μαθηματική παράδοση. Η κινεζική μαθηματική κουλτούρα επηρέασε την ανάπτυξη των μαθηματικών στην Ιαπωνία. Αυτό σταδιακά οδήγησε τους Ιάπωνες στις αρχές του 17ου αιώνα να δημιουργήσουν τα πρώτα ιαπωνικά μαθηματικά που παρουσιάζουν διαφορές από τα αντίστοιχα ευρωπαϊκά ή δυτικά. Δεδομένου ότι οι απλοί άνθρωποι στην Ιαπωνία δεν είχαν την πολυτέλεια να δημοσιεύσουν τα μαθηματικά προβλήματα και τις λύσεις τους, όπως ήταν η συνηθισμένη πρακτική μεταξύ των μαθηματικών της εποχής, τα αναρτούσαν δημόσια στο «San-Gaku», ένα είδος πίνακα ανακοινώσεων που βρισκόταν στους ναούς ή στα ιερά σε αρκετές περιοχές. Συνήθιζαν να κοινοποιούν μόνο τα μαθηματικά προβλήματα και τις προτεινόμενες λύσεις τους. Στις αναρτήσεις της πινακίδας η παρουσίαση της διαδικασίας λύσης του προβλήματος είτε παραλειπόταν είτε ήταν επιφανειακή.

Στα πλαίσια αυτά η διδακτική αξιοποίηση των μαθηματικών «εμπειρίας» και οι σχετικές διδακτικές δραστηριότητες των μαθητών στοχεύουν στην κατανόηση και στη λύση του μαθηματικού προβλήματος βάσει των σύγχρονων μαθηματικών και εν συνεχεία στην επαλήθευση των απαντήσεών τους με αυτές που παρέχονται στον πίνακα ανακοινώσεων (Tzanakis & Arcavi, 2000).

3. Films, videos και άλλα οπτικά μέσα, όπου παρουσιάζονται θέματα από την ιστορία των μαθηματικών

Οι ταινίες και οι θεατρικές παραστάσεις που σχετίζονται με θέμα τη ζωή διάσημων μαθηματικών μπορούν να αξιοποιηθούν αποτελεσματικά στη διδασκαλία, καθώς αναδεικνύουν το κοινωνικο-πολιτισμικό συγκείμενο της εποχής τους και παρουσιάζουν με τρόπο παραστατικό την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών και των μαθηματικών επιχειρημάτων. Για παράδειγμα αναφέρουμε την ταινία «Ο λόφος στη σκοτεινή πλευρά του φεγγαριού» με θέμα τη ζωή της μαθηματικού Sofya Kovalevskaya. Υπάρχουν επίσης σχετικές τηλεοπτικές ταινίες κρατικών καναλιών. Πολλές εξ αυτών παρήχθησαν με σκοπό να εξυπηρετήσουν διδακτικούς σκοπούς και να εισαγάγουν την ιστορία στη σχολική διδασκαλία των μαθηματικών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ταινία « Η σήραγγα της Σάμου» που συγχωνεύει τις ιστορικές και μαθηματικές διαστάσεις της διαδικασίας κατασκευής της σήραγγας. Η ταινία εστιάζει στην οργάνωση και διατύπωση των μαθηματικών επιχειρημάτων κάνοντας χρήση γραφικών και οπτικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών ιδεών που χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή της σήραγγας (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Β. <u>Εφαρμογές που οδηγούν σε δραστηριότητες με συστηματικό σχεδιασμό</u>

1. Ερευνητικά projects για τους διδασκόμενους βασισμένα σε ιστορικά κείμενα

Τα ερευνητικά projects ενώ κατά παράδοση υλοποιούνται στην ανώτατη εκπαίδευση σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, τα τελευταία χρόνια αξιοποιούνται ευρέως με τις κατάλληλες προσαρμογές και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η υλοποίηση των projects με διεπιστημονικό περιεχόμενο στην ιστορία και στα μαθηματικά στοχεύει ώστε κάθε πτυχιούχος των μαθηματικών - ανεξάρτητα από τη μελλοντική καριέρα του ως ερευνητής, ως δάσκαλος ή ως χρήστης των μαθηματικών - να έχει τουλάχιστον μια εντύπωση της διεπιστημονικής σύνδεσης των μαθηματικών με τον ανθρώπινο πολιτισμό, την ιστορία και την κοινωνία (Tzanakis & Arcavi, 2000).

2. Η διδακτική χρήση πρωτότυπων πηγών

Η μελέτη μιας πρωτότυπης πηγής της ιστορίας των μαθηματικών απαιτεί τη λεπτομερή και βαθιά κατανόηση του ιστορικού χρόνου και του γενικού ιδεολογικού πλαισίου παραγωγής της. Με αυτόν τον τρόπο επιτρέπει στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν αποκλειστικά και μόνο ένα σώμα απρόσωπων, τυπικών γνώσεων και τεχνικών, αλλά εξελίσσονται στον χρόνο σε άμεση συνάρτηση και με το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της εποχής τους (Ho, 2008). Η διδακτική αξιοποίηση των ιστορικών πηγών επιτρέπει επίσης στους μαθητές να συγκρίνουν και να αντιπαραβάλλουν το σημειωτικό σύστημα της μαθηματικής γλώσσας του παρελθόντος με τη συνήθη γλώσσα των μαθηματικών που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία σήμερα. Βάσει αυτών θα ήταν εύλογο να υποστηρίξει κανείς ότι η ανάγνωση και η μελέτη των ιστορικών πηγών, αν και απαιτεί προσπάθεια, ανταμείβει τους μαθητές και τους δασκάλους βοηθώντας τους να κατανοήσουν σε βάθος τα μαθηματικά. Η βιβλιογραφία προτείνει τρεις γενικές ιδέες που διευκολύνουν την περιγραφή των ειδικών αποτελεσμάτων της μελέτης των ιστορικών πηγών (Tzanakis & Arcavi, 2000; Jahnke et al., 2000).

- **η αντικατάσταση**: η ενσωμάτωση της ιστορίας στα μαθηματικά αναθεωρεί τη συνηθισμένη προσέγγισή τους ως συνόλου τυπικής μαθηματικής γνώσης ή μαθηματικών τεχνικών και την αντικαθιστά με τη θεώρησή τους ως μιας ευρύτερης και συνθετότερης πνευματικής δραστηριότητας.
- **ο αναπροσανατολισμός**: η μελέτη του ιστορικού κειμένου μπορεί να οδηγήσει σε αναπροσανατολισμό των αντιλήψεων για το περιεχόμενο της μαθηματικής διδασκαλίας. Στην παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών οι μαθηματικές έννοιες προσεγγίζονται ως αυτονόητες και παγιωμένες νοητικές κατασκευές και παραγνωρίζεται η δυναμική διαδικασία σύλληψης και δόμησής τους.
- **η πολιτισμική κατανόηση**

  Η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία μάς προκαλεί να τοποθετήσουμε την ανάπτυξη των μαθηματικών στο επιστημονικό, τεχνολογικό και κοινωνικό πλαίσιο μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου. Παράλληλα μας βοηθά να κατανοήσουμε τις επιδράσεις του ιστορικού συγκείμενου στη διαμόρφωση και οργάνωση της μαθηματικής σκέψης.

<u>Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της χρήσης των πρωτότυπων πηγών:</u>

Η ιδιαίτερη αξία και η ποιότητα των πρωτογενών πηγών

Η ανάγνωση ιστορικών κειμένων από πρωτότυπες πηγές μπορεί να αιφνιδιάσει και να ξενίσει τους μαθητές, καθώς τους εμπλέκει σε γνωστικές διαδικασίες αντίληψης της αλλαγής και του αναπροσανατολισμού που αναφέρθηκαν παραπάνω. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν οι μαθητές προσεγγίζουν τις πηγές με την σύγχρονη μαθηματική γνώση. Πρέπει λοιπόν να λαμβάνεται υπόψη με τρόπο συνδυαστικό ή σε αντιπαραβολή η οπτική και οι αντιλήψεις του συγγραφέα της πρωτότυπης πηγής και του σύγχρονου αναγνώστη και μελετητή τους (Jahnke et al., 2000).

Κατανόηση της εξέλιξης των ιδεών

Υπάρχει η κοινή πεποίθηση πολλών καθηγητών και μαθητών ότι μία μαθηματική έννοια, όταν ορισθεί, παραμένει αμετάβλητη. Ακόμη και εκείνοι που δεν υιοθετούν την άποψη αυτή δεν έχουν συνήθως τις ευκαιρίες να διαπιστώσουν την δυναμική και διαχρονική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Ας δούμε ένα παράδειγμα με την έννοια των συναρτήσεων. Στην αρχή η διδασκαλία των συναρτήσεων περιορίζονταν σε όσες μπορούσαν να εκφράσουν αλγεβρικές σχέσεις. Αργότερα, η έννοια των συναρτήσεων επεκτάθηκε πέρα από τις αντιστοιχίες που μπορούν να εκφραστούν αλγεβρικά, δηλαδή πέρα από τις αντιστοιχίες που δεν περιλαμβάνουν σύνολα αριθμών καθόλου. Έτσι σήμερα χρησιμοποιείται ένας γενικότερος και τυπικότερος ορισμός τους. Σε ένα άλλο παράδειγμα διδακτικής δραστηριότητας ζητείται από μαθητές δημοτικού, αφού διαβάσουν ένα μικρό απόσπασμα από τον πάπυρο του Rhind και αποκρυπτογραφήσουν με τη βοήθεια ενός λεξικού τις αριθμητικές πράξεις, να εξηγήσουν τη λειτουργία τους και να την εφαρμόσουν σε άλλα παραδείγματα (Arcavi, 1987). Αυτή η δραστηριότητα βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν ότι οι μαθηματικές μέθοδοι και τα αριθμητικά συστήματα αλλάζουν στη διαδρομή του χρόνου (Jahnke et al., 2000).

Η εμπειρία της σχετικότητας της αλήθειας και της ανθρώπινης διάστασης της Μαθηματικής δραστηριότητας

Τη σχετικότητα της μαθηματικής αλήθειας μπορούμε να τη διαπιστώσουμε, όταν εξετάζουμε την εξέλιξη της απόδειξης στην διαδρομή της ιστορίας (Barbin, 1994). Για να αποκτήσουμε μια ιδέα για το τι σημαίνει απόδειξη, είναι ενδιαφέρον να διαβάσουμε μια ποικιλία αποδείξεων του ίδιου θεωρήματος, όπως για παράδειγμα οι διαφορετικές αποδείξεις για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου που προτάθηκαν κατά τη διάρκεια των δύο χιλιάδων χρόνων από το Ευκλείδη στον Hilbert (Barbin, 1994). Είναι επίσης διαφωτιστικό όταν μελετάμε τα μαθηματικά θεωρήματα και τις μαθηματικές αποδείξεις από πρωτότυπες πηγές, να γνωρίζουμε και καταλαβαίνουμε τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν οι μαθηματικοί, για να λύσουν τα μαθηματικά προβλήματα (Jahnke et al., 2000).

Σχέσεις μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας

Η ανάγνωση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να μας βοηθήσει να γνωρίσουμε το πολιτισμικό πλαίσιο της εποχής στην οποία γράφτηκε και να συσχετίσουμε τα μαθηματικά με άλλα πεδία επιστημονικής γνώσης (Furinghetti & Somaglia, 1998).

Δεδομένου ότι οι περισσότεροι διακεκριμένοι μαθηματικοί ήταν και φιλόσοφοι είναι συχνά ωφέλιμο οι μαθηματικοί να είναι ενήμεροι για την επικρατούσα φιλοσοφία της εποχής που μελετούν (Jahnke et al., 2000).

Απλότητα, κίνητρα και διδακτική

Υπάρχουν πρωτότυπες πηγές που μπορούν δίχως επεξεργασία να είναι πιο απλές και πιο φιλικές στους μαθητές. Αντίθετα πολλά σχολικά εγχειρίδια που διδάσκονται σήμερα στη σχολική τάξη τείνουν να είναι πιο φορμαλιστικά. Το ύφος των πρωτότυπων πηγών είναι διδακτικό και σαφές. Στην αρχή εξηγούν τη μέθοδο που εφαρμόστηκε και στη συνέχεια διατυπώνουν τη θεωρία χρησιμοποιώντας απλή αναλογική σκέψη. Η απλότητα και η φιλικότητα στο ύφος διευκολύνει την ερμηνεία και κατανόηση βασικών μαθηματικών νόμων από τους μαθητές (Jahnke et al., 2000). Ο Θωμαΐδης (2009) προτείνει τα παράδειγμα με τον κανόνα του πρόσημου στην απαλοιφή των παρενθέσεων και τον κανόνα των πρόσημων στον πολλαπλασιασμό δύο αρνητικών αριθμών.

Προοπτικές στην εκπαίδευση των μαθηματικών

Οι πρωτότυπες πηγές φαίνεται να είναι ένας ασφαλής τρόπος να μάθουν οι μαθητές τον τρόπο με τον οποίο δίδασκαν στο παρελθόν τα μαθηματικά στα σχολεία, δίνοντας βάρος στην ακρίβεια των αριθμητικών υπολογισμών. Σήμερα με την εμφάνιση και ανάπτυξη των υπολογιστών και των απαιτήσεων της τεχνολογικής κοινωνίας η έμφαση δίνεται στην εκτίμηση και στην τεκμηρίωση των απαντήσεων (Jahnke et al., 2000).

Τοπικά Μαθηματικά

Οι πρωτογενείς πηγές μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν στη μαθηματική εκπαίδευση, για να διευκολυνθούν οι μαθητές στην ανακάλυψη και κατανόηση του πολιτισμικού πλαισίου στο οποίο διαμορφώθηκε η μαθηματική σκέψη (Jahnke et al., 2000).

Ερμηνεία και Γλώσσα

Βασικό πρόβλημα ερμηνείας μιας πρωτότυπης πηγής είναι η ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ της ιστορικής κατασκευής μιας μαθηματικής έννοιας και των προθέσεων του συγγραφέα της με το νόημα που της αποδίδει ένας σύγχρονος αναγνώστης βάσει των αναγνωστικών και μαθησιακών εμπειριών του. Η διαδικασία της ερμηνείας μιας ιστορικής πηγής με μαθηματικό περιεχόμενο μπορεί να περιγραφεί σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση το ενδιαφέρον εστιάζεται στον τρόπο ερμηνείας των κειμένων ή των μαθηματικών θεωριών και προσέγγισης της οπτικής των δημιουργών τους από τον σύγχρονο αναγνώστη. Στη δεύτερη φάση ο αναγνώστης προσπαθεί να κατανοήσει την υπό μελέτη μαθηματική έννοια συγκρίνοντας την αρχική ερμηνεία της από τον δημιουργό της με αυτή που διατυπώνει ο ίδιος βάσει της σημερινής ύλης των μαθηματικών και των αρχών της σύγχρονης μαθηματικής σκέψης. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν αυτές τις δύο φάσεις και να μπορούν να μεταβούν με ευελιξία από τη μία στην άλλη.

Σημαντικός ρόλος για την ανάγνωση και κατανόηση μιας πρωτότυπης πηγής για τους μαθητές είναι η κατανόηση του γλωσσικού κώδικα που χρησιμοποιεί. Κατά την ανάγνωση μιας πηγής εμφανίζονται τουλάχιστον τρεις διαφορετικές γλώσσες: η μαθηματική γλώσσα, η γλώσσα της πρωτότυπης πηγής και η γλώσσα που χρησιμοποιούν οι σύγχρονοι μαθητές στα μαθηματικά. Αυτές οι τρεις γλώσσες πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους και οι μαθητές με τη σειρά τους θα πρέπει να είναι σε θέση να αλλάζουν με ευχέρεια αυτούς τους γλωσσικούς κώδικες (Jahnke et al., 2000).

Κείμενο - πλαίσιο – αναγνώστης

Όπως εξηγήσαμε παραπάνω, μετά την ανάγνωση μιας πρωτότυπης πηγής ακολουθεί η ερμηνεία της. Σύμφωνα με τους στόχους της διδασκαλίας θα πρέπει να υπάρξει ισορροπία μεταξύ της ορθής ανάλυσης της πρωτότυπης πηγής και του σχολιασμού του ιστορικού πλαισίου. Οι μαθητές όταν διαβάζουν ένα μαθηματικό κείμενο, συνήθως δεν ενδιαφέρονται να αναζητήσουν πληροφορίες για τις ιστορικές και κοινωνικοπολιτισμικές συνθήκες διατύπωσης των μαθηματικών θεωριών ή για το έργο και τη βιογραφία των μαθηματικών δημιουργών τους. Θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι ανεξάρτητα από το πλαίσιο της εποχής παραγωγής τους και ότι για την κατανόησή τους δεν προαπαιτούνται οι σχετικές ιστορικές γνώσεις. Για τον λόγο αυτό οι μαθητές πρέπει να καθοδηγούνται από τον καθηγητή τους να μελετούν το ιστορικό πλαίσιο πριν την ολοκλήρωση του σχολιασμού και της ερμηνείας της πηγής (Jahnke et al., 2000).

Στρατηγικές στην τάξη

Μπορούμε να δώσουμε μια γενική εικόνα του τρόπου ανάγνωσης αυτών των πηγών. Στη διδακτική πράξη εφαρμόζονται δύο στρατηγικές για την εισαγωγή της διδασκαλίας και μελέτης των ιστορικών πηγών: η άμεση και η έμμεση. Ο εκπαιδευτικός όταν χρησιμοποιεί την άμεση στρατηγική, παρουσιάζει την ιστορική πηγή στους μαθητές χωρίς προηγούμενη προετοιμασία. Αντίθετα η εφαρμογή της έμμεσης στρατηγικής προβλέπει πριν από την εισαγωγή της ιστορικής πηγής στη διδασκαλία την υλοποίηση άλλων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων.

1. Δεδομένου ότι εντοπίζονται διαχρονικά σημαντικές διαφορές στη μορφή και στη διατύπωση των μαθηματικών θεμάτων, ένας στόχος της εφαρμογής της άμεσης στρατηγικής είναι η κινητοποίηση του μαθησιακού ενδιαφέροντος και η διέγερση της φιλοπεριέργειας των μαθητών με την πρόκληση της έκπληξης και του αιφνιδιασμού τους.

2. Η εφαρμογή της έμμεσης στρατηγικής επιλέγεται από τον διδάσκοντα, όταν στόχος της διδασκαλίας είναι η αξιοποίηση των πηγών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ο διδάσκων μπορεί αρχικά να σχολιάσει την άμεση σύνδεση των μαθηματικών με το ιστορικό συγκείμενό της παραγωγής τους και στη συνέχεια να ενημερώσει τους μαθητές για τα ονόματα και τον βίο διακεκριμένων μαθηματικών που έδρασαν κατά τη διάρκεια της υπό μελέτη ιστορικής περιόδου. Οι μαθητές επιλέγουν έναν ή περισσότερους μαθηματικούς και προσπαθούν να συγκεντρώσουν πληροφορίες για αυτούς (Jahnke et al., 2000).

Ανάλυση μιας πρωτότυπης πηγής και γνωστικές αντιπαραθέσεις

Η ανάλυση και η μελέτη των πρωτότυπων ιστορικών πηγών από τους μαθητές είναι μια απαιτητική διδακτική δραστηριότητα. Μερικές φορές οι μαθητές πρέπει να υποστηρίζονται και να καθοδηγούνται στην εργασία τους από τις ερωτήσεις του διδάσκοντος. Άλλες φορές φαίνεται ότι είναι καλύτερο να αφήνει ο διδάσκων τους μαθητές να θέτουν οι ίδιοι τις ερωτήσεις. Το σημαντικό όμως είναι να βρεθούν και να διατυπωθούν τα κατάλληλα ερωτήματα έτσι ώστε οι μαθητές να εμβαθύνουν στη μελέτη του ιστορικού πλαισίου του κειμένου. Ορισμένα κείμενα πρέπει να μεταφραστούν να τροποποιηθούν ή να προσαρμοστούν στο γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο παρήχθησαν. Όλα όμως τα κείμενα πρέπει να διαθέτουν βαθμό αναγνωριστικής δυσκολίας αντίστοιχο προς τα γνωστικά όρια των μαθητών και να επιτρέπουν την ευθυγράμμιση της σκέψης τους με την αντίληψη του δημιουργού της πρωτότυπης πηγής (Jahnke et al., 2000).

Μετάφραση πρωτότυπης πηγής

Έχουμε δύο τύπους μετάφρασης:

α) τις μεταφράσεις σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, β) τη διαγλωσσική μετάφραση: μετάφραση του πρωτότυπου κειμένου στη γλώσσα διδασκαλίας (Jahnke et al., 2000).

Σύγκριση

Η σύγκριση διαφόρων κειμένων και παραθεμάτων είναι επίσης μια διδακτική προσέγγιση της ιστορίας των μαθηματικών που διεγείρει το ενδιαφέρον των διδασκόμενων. Η σύγκριση μπορεί να περιλαμβάνει κείμενα της ίδιας ιστορικής εποχής ή διαφορετικών ιστορικών περιόδων. Αυτές οι συγκρίσεις πρέπει να συνοδεύονται από δραστηριότητες και ασκήσεις κατανόησης σε μορφή ερωτημάτων που έχουν ως στόχο να καταστήσουν την ανάλυση της πρωτότυπης πηγής πιο ελκυστική. Η σύγκριση των ιστορικών πρωτότυπων κειμένων επιτρέπει επίσης στους μαθητές να διαπιστώσουν και να κατανοήσουν την εξέλιξη του σημειωτικού συστήματος της μαθηματικής γλώσσας. Επίσης τους βοηθά να επικεντρωθούν αποτελεσματικότερα στη μελέτη των ιστορικών κειμένων με μαθηματικό περιεχόμενο (Jahnke et al., 2000).

Σύνθεση

Οι μαθητές πρέπει να υλοποιούν τις δραστηριότητες σύνθεσης εκτός του μαθήματος υπό μορφή εργασίας στο σπίτι και να εφαρμόζουν για τη διευκόλυνσή τους όλες οι στρατηγικές που αναφέρονται παραπάνω (Jahnke et al., 2000).

3. Φύλλα εργασίας

Τα φύλλα εργασίας μπορούν να χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών συνοδευόμενα από παραθέματα πρωτότυπων ιστορικών πηγών ή άλλων κειμένων εμπνευσμένων από την ιστορία. Αξιοποιούνται επίσης στην υλοποίηση ατομικών και ομαδικών εργασιών των μαθητών που εκπονούνται στη σχολική τάξη ή στο σπίτι υπό την καθοδήγηση του διδάσκοντος μαθηματικού. Τα φύλλα εργασίας είναι δύο κατηγοριών:

- φύλλα εργασίας που περιέχουν μια συλλογή ασκήσεων για την διδασκαλία μιας έννοιας ή για την εμπέδωση ενός θέματος που έχει διδαχθεί στην τάξη.
- φύλλα εργασίας που έχουν σχεδιαστεί ως ένα καλά οργανωμένο και καθοδηγούμενο σύνολο ερωτήσεων για την εισαγωγή ενός νέου θέματος ή μιας σειράς προβλημάτων και θεμάτων προς συζήτηση. Ο σχεδιασμός των φύλλων εργασίας πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις πρότερες γνώσεις του μαθητή και να περιλαμβάνει διαβαθμισμένης δυσκολίας ερωτήσεις που οδηγούν σταδιακά τους μαθητές στην ανάπτυξη των βασικών

εννοιών ενός άγνωστου μαθηματικού θέματος. (Tzanakis & Arcavi, 2000). Αυτός ο δεύτερος τύπος φύλλου εργασίας είναι ιδιαίτερα κατάλληλος για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία και μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης.

Για τον σχεδιασμό και την οργάνωση της δομής των φύλλων εργασίας επιλέγονται σύντομης έκτασης ιστορικές πηγές. Η παράθεση του ιστορικού κειμένου συνοδεύεται από ιστορικές πληροφορίες και εύστοχες ερωτήσεις που συμβάλλουν στην κατανόηση των υπό συζήτηση μαθηματικών ζητημάτων και στην εμπέδωση του τρόπου επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων. Η διατύπωση των ερωτημάτων διευκολύνει τους μαθητές να συγκρίνουν τη μαθηματική γλώσσα της σύγχρονης εποχής με τους μαθηματικούς σημειωτικούς πόρους της ιστορικής περιόδου που μελετούν. Οι στοχευμένες ερωτήσεις που διατυπώνουν οι μαθητές, όταν εντοπίζουν άγνωστα μαθηματικά σύμβολα στις ιστορικές πηγές, διευκολύνουν την αποτελεσματική διεκπεραίωση διδακτικών δραστηριοτήτων μετάφρασής τους στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα. Όταν το ιστορικό παράθεμα είναι πυκνό και πλούσιο σε πληροφορίες, οι ερωτήσεις καθοδηγούν και διευκολύνουν τους μαθητές στην ανάλυση και ερμηνεία της ιστορικής πηγής περιορίζοντας την πολυπλοκότητά της (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Γ. <u>Ευέλικτες εφαρμογές πιο «τοπικού» χαρακτήρα εφαρμοζόμενες ανάλογα με το πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται</u>

1. Διδακτική αξιοποίηση των «λαθών», των εναλλακτικών αντιλήψεων, της αλλαγής της οπτικής με την οποία προσεγγίζεται ένα θέμα, της αναθεώρησης υποθέσεων, των διαισθητικών η/ και (ημι)εμπειρικών επιχειρημάτων κ.λ.π.

Ένα πλεονέκτημα της εφαρμογής της ιστορίας στην παρουσίαση και στη μάθηση των μαθηματικών είναι η δυνατότητα που δίνεται στους διδάσκοντες και στους μαθητές να διαπιστώσουν και να επιβεβαιώσουν τη διδακτική αξία της κριτικής αποτίμησης των μαθηματικών παραδόξων, των υποθέσεων, των μαθηματικών εννοιών και των διαισθητικών ή (ημι) εμπειρικών επιχειρημάτων, που διατυπώθηκαν διαχρονικά στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Η δυνατότητα ολιστικής προσέγγισης και σφαιρικής οπτικής των διακριτών τομέων των μαθηματικών που διδάσκονται στη σχολική τάξη, συγκαταλέγεται στα διδακτικά αποτελέσματα αυτής της διδακτικής πρακτικής. Για παράδειγμα, η διάκριση μεταξύ της σύνθεσης και της ανάλυσης στη γεωμετρία είναι μια ενδιαφέρουσα εικόνα του τρόπου με τον οποίο οι μαθηματικές μέθοδοι και οι απόψεις για ένα μαθηματικό θέμα δεν είναι μοναδικές και δεν αφορούν αποκλειστικά και μόνο το θέμα αυτό. Η επεξεργασία του ίδιου γεωμετρικού προβλήματος τόσο με σύνθεση (μέθοδο του Ευκλείδη) όσο και με ανάλυση (με τη βοήθεια της άλγεβρας) μπορεί να είναι πολύ διαφωτιστική για την κατανόηση του ρόλου της ανακάλυψης και της απόδειξης στη γεωμετρία (Tzanakis & Arcavi, 2000).

2. Αξιοποίηση στον διδακτικό σχεδιασμό μαθηματικών προβλημάτων από την ιστορία που είτε έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών είτε είχαν (ή έχουν) ψυχαγωγικό χαρακτήρα

Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει μια τεράστια δεξαμενή προβλημάτων που μπορούν να διεγείρουν αποτελεσματικά το ενδιαφέρον και την προσοχή εκπαιδευτικών και μαθητών. Από διδακτική άποψη τα μαθηματικά προβλήματα διακρίνονται (Tzanakis & Arcavi, 2000):

- στα μαθηματικά προβλήματα χωρίς λύση, όπως για παράδειγμα είναι τα τρία διάσημα προβλήματα της αρχαιότητας: ο διπλασιασμός του κύβου, η τριχοτόμηση μιας γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου. Αυτά τα προβλήματα μπορούν δοθούν και για ψυχαγωγικούς λόγους στους μαθητές.

- στα φημισμένα προβλήματα που δεν έχουν ακόμα λυθεί ή έχουν λυθεί με μεγάλη δυσκολία.

- στα προβλήματα με έξυπνες, εναλλακτικές ή υποδειγματικές λύσεις, όπως είναι οι πολλές και διαφορετικές απλές αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος που έχουν προταθεί από μαθηματικούς με διαφορετικές πολιτισμικές καταβολές.
- στα προβλήματα που εξάπτουν τη μαθηματική περιέργεια ή δημιουργούν προσδοκίες για την ανάπτυξη ενός ολόκληρου (μαθηματικού) τομέα.

Δ. <u>Εφαρμογές πιο «πειραματικού» και εμπειρικού χαρακτήρα</u>

1. Η επαφή και ενδεχόμενη χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων που αυτούσια ή παραλλαγμένα διαδραμάτισαν ρόλο στην ιστορική πορεία των μαθηματικών.

2. Βιωματικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Μια βιωματική μαθηματική δραστηριότητα περιλαμβάνει:

- κριτική αποτίμηση μαθηματικών αποδείξεων και διατύπωση νέων επιχειρημάτων.

- πειραματισμούς στη χρήση του σημειωτικού συστήματος των μαθηματικών που χρησιμοποιούνταν στην αρχαιότητα από τους μαθηματικούς. Για παράδειγμα προτείνεται στους μαθητές να κάνουν αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα της αρχαιότητας,
- χρήση υπολογιστικών μεθόδων που χρησιμοποιούνταν σε παλαιότερες εποχές,
- διευκόλυνση της κατανόησης και εκμάθησης των μαθηματικών από τους μαθητές μέσω της συμμετοχής τους σε παιχνίδια που συνηθίζονταν στην αρχαιότητα (Tzanakis & Arcavi, 2000).

3. Αξιοποίηση μεθόδων ενεργητικής μάθησης όπως η διοργάνωση θεατρικών παραστάσεων εμπνευσμένων από την ιστορία των μαθηματικών

Οι μαθητές και οι μαθήτριες συμμετέχουν ενεργά σε θεατρικές παραστάσεις. Συνθέτουν την πλοκή των θεατρικών έργων αξιοποιώντας ιστορικές πηγές με θέμα την ιστορία των μαθηματικών αποδείξεων ή τις διαφωνίες που εκδηλώθηκαν διαχρονικά από διακεκριμένους μαθηματικούς για διάφορες μαθηματικές θεωρίες και την τεκμηρίωσή τους (Tzanakis & Arcavi, 2000). Οι μαθητές σε συνεργασία με τους καθηγητές τους σκηνοθετούν τις παραστάσεις και αναλαμβάνουν εθελοντικά να υποδυθούν τους ρόλους των προσώπων του θεατρικού σεναρίου. Διδακτικός σκοπός τέτοιων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων είναι να αναδειχθεί η ανθρώπινη πλευρά της μαθηματικής επιστήμης και ταυτόχρονα να κατανοήσουν με τρόπο βιωματικό την ιστορική εξέλιξη οργάνωσης και ωρίμανσης της μαθηματικής σκέψης.

Ε. <u>Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας</u>

Ο Παγκόσμιος Ιστός (Internet) διευκολύνει τη διαδικασία της εισαγωγής και ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών με διττό τρόπο είτε ως μέσο είτε ως πηγή επικοινωνίας.

1. Το διαδίκτυο ως μέσο επικοινωνίας

Η δημιουργία ιστοσελίδων με διδακτικό υλικό σχετικό με τη διδακτικούς πόρους για το μάθημα των μαθηματικών διευκολύνει και αναβαθμίζει το διδακτικό έργο των καθηγητών. Οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να εργάζονται από το προσωπικό χώρο τους και να αλληλεπιδρούν με τον καθηγητή και τους συμμαθητές τους. Στις ιστοσελίδες είναι δυνατόν να σχολιάζονται οι εργασίες και οι απαντήσεις των μαθητών από τον διδάσκοντα καθηγητή ή τους συμμαθητές και ύστερα από την παρέλευση ενός εύλογου και καθορισμένου χρόνου να αναρτώνται από τους διαχειριστές των μαθημάτων (site) οι σωστές απαντήσεις των ασκήσεων. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται στους μαθητές η απαιτούμενη ανατροφοδότηση ενώ παράλληλα εξασφαλίζονται και οι προϋποθέσεις ανάπτυξης των μεταγνωστικών δεξιοτήτων τους. Η μεγάλη χρηστική αξία του διαδικτύου ως διδακτικού εργαλείου αποδεικνύεται και από το γεγονός ότι, εκτός από τη λειτουργία του ψηφιακού φόρουμ της τάξης, δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας μιας διευρυμένης ψηφιακής κοινότητας μάθησης στην οποία μπορούν να συμμετέχουν και άλλοι μαθηματικοί συμβάλλοντας με τα σχόλια τους και τις γνώσεις τους στη δημιουργική μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές. Ο Rogers (2010) αναφέρει μια παρόμοια διδακτική αξιοποίηση του διαδικτύου: *«Περίπου είκοσι εκπαιδευτικοί και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών σε όλη τη χώρα εντάχθηκαν σε ένα άτυπο σεμινάριο on-line για να πειραματιστούν με τα διαθέσιμα υλικά και να προτείνουν ιδέες για την παρουσίαση της τρέχουσας ύλης και των νέων θεμάτων που θα πρέπει να διερευνηθούν».* (Tzanakis & Arcavi, 2000)

2. Το διαδίκτυο ως πηγή πληροφοριών

Ο Παγκόσμιος Ιστός αποτελεί στις μέρες μας την κεντρική αποθήκη της ανθρώπινης γνώσης. Στο διαδίκτυο διακινείται ένας τεράστιος όγκος πληροφοριών που είναι εύκολα προσβάσιμος για όλους τους χρήστες, μαθητές και εκπαιδευτικούς. Οι υπηρεσίες του παρέχονται δωρεάν και το υλικό του συνεχώς ανανεώνεται. Όμως όσο εύκολα βρίσκουμε στο διαδίκτυο την πληροφορία που θέλουμε, τόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε στην επιλογή τους, αφού οι χρήστες του κυβερνοχώρου μπορούν να διοχετεύουν ανώνυμα οποιαδήποτε πληροφορία χωρίς να υπόκεινται σε άμεσο έλεγχο. Για αυτό πρέπει οι μαθητές να είναι πολύ προσεκτικοί και να αντλούν πληροφορίες από πηγές που ελέγχονται για την αξιοπιστία και την επιστημονική εγκυρότητά τους. Από την πλευρά του ένας υπεύθυνος δάσκαλος οφείλει να ενημερώνει τους μαθητές τους για την αμφιλεγόμενη ποιότητα των πληροφοριών που διακινούνται στο διαδίκτυο (Van Brummelen, 2000)

3. Web ιστορικοί πόροι για τον καθηγητή των μαθηματικών

Το γενικό επιχείρημα είναι ότι το διδακτικό έργο των καθηγητών και η μαθησιακή προσπάθεια των μαθητών ενισχύονται σε μεγάλο βαθμό από τους διαθέσιμους ιστορικούς πόρους στο διαδίκτυο. Διάφοροι διαδικτυακοί τόποι προσφέρονται για την ανεύρεση ιστορικού υλικού ή άλλων πληροφοριών που διευκολύνουν τον διδάσκοντα και τους μαθητές στην κριτική προσέγγιση των ιστορικών πηγών. Στις διαδικτυακές τοποθεσίες συγκαταλέγονται ιστοσελίδες με θέματα όπως η γενική ιστορία των μαθηματικών, οι βιογραφίες και το έργο διακεκριμένων μαθηματικών, οι ποικίλες πηγές πληροφοριών για περιφερειακά μαθηματικά και διάφορα διαδικτυακά εκθέματα, παρουσιάσεις σπουδαστών, επιστημονική βιβλιογραφία, κατάλογος επιστημονικών εταιρειών κ.α.

Η δυνατότητα πρόσβασης στον διακινούμενο όγκο πληροφοριών χωρίς χρονικούς ή τοπικούς περιορισμούς ενισχύει την αυτενέργεια και την αυτονομία του διδάσκοντος και των διδασκομένων στη διαδικασία της μάθησης και μάλιστα ανεξαρτήτως του χωροχρόνου της σχολικής διδασκαλίας. Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να αξιοποιηθεί στη διδακτική πράξη για τη σταδιακή εξοικείωση των μαθητών με το νέο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Παράλληλα οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες ασφαλούς αναζήτησης και κριτικής επεξεργασίας ιστορικού υλικού από το διαδίκτυο. Ο διδάσκων τέλος μπορεί να αξιοποιήσει διδακτικά τους διαδικτυακούς πόρους κατά την έναρξη της διδασκαλίας του και να πετύχει τη διέγερση του μαθησιακού ενδιαφέροντος των μαθητών και την ενίσχυση της διάθεσής τους για ενεργητική συμμετοχή στη διδακτική διαδικασία. Στα πλαίσια αυτά η συμβολή του διαδικτύου στην αναβάθμιση της διδασκαλίας κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική (Barrow-Green, 2000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$

2.1 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρηθεί μια βιβλιογραφική ανασκόπηση με αναφορά σε αρθρογραφία που εστιάζει στους τρόπους αξιοποίησης της ιστορίας στη διδασκαλία και στις διαδικασίες μάθησης της γεωμετρίας. Από τους Gulikers και Blom (2001) ομαδοποιήθηκαν και ταξινομήθηκαν σε οκτώ (8) κατηγορίες οι περιπτώσεις των θεμάτων τις γεωμετρίας. Οι κατηγορίες αυτές είναι:

1) Υπολογισμοί στη γεωμετρία: υπολογισμοί του μήκους, της επιφανείας, και του όγκου, οι αναλογίες και η τριγωνομετρία.
2) Γεωμετρικές κατασκευές: κατασκευές με κανόνα και διαβήτη ή άλλα όργανα.
3) Ιδιότητες δισδιάστατων και τρισδιάστατων μορφών: ομοιότητα, ισότητα, αναλογίες.
4) Γεωμετρία όρασης: σχήματα με προοπτική, δισδιάστατες τομές τρισδιάστατων σχημάτων, δίχτυα.
5) Ιστορία της γεωμετρίας: βιογραφίες, διάλογοι, ιστορίες, ανέκδοτα.
6) Γεωμετρικοί τόποι: συστήματα συντεταγμένων, διανύσματα.
7) Αποδεικτικός μαθηματικός συλλογισμός (αποδείξεις, δομές γεωμετρικών αποδείξεων) και γνώση των εννοιών, όπως ορισμός, θεώρημα, αξίωμα.
8) Γεωμετρία και φυσική.

Στη βιβλιογραφία είναι πλούσιες οι αναφορές για το Πυθαγόρειο θεώρημα. Για παράδειγμα, ο Swetz (1977) παρουσιάζει την τεχνική της συσσώρευσης τετραγώνων, η οποία χρησιμοποιεί τη διαισθητική προσέγγιση για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε στην αρχαία Ελλάδα και τη Βαβυλώνα, αλλά σύμφωνα με τον Swetz εξελίχθηκε σε μεγάλο βαθμό στην Κίνα (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Burns (1997) περιγράφει την ομαδική εργασία που συντόνισε σχετικά με την μελέτη ενός δίσκου των Βαβυλώνιων από άργιλο (1750 π.Χ.). Το ερώτημα που έθεσε στους μαθητές ήταν να αποκωδικοποιήσουν και να αποδώσουν το μαθηματικό περιεχόμενο του δίσκου των αρχαίων Βαβυλωνίων. Η εμπειρία του ήταν θετική. Οι περισσότερες από τις ομάδες των μαθητών ανταποκρίθηκαν με σοβαρότητα σε αυτήν την πρόκληση και πρότειναν έξυπνες απαντήσεις. Ωστόσο αποκαλύφθηκαν μερικές αξιοσημείωτες διαφορές. Μερικοί μαθητές ανακάλυψαν ποιο ήταν το περιεχόμενο του δίσκου χωρίς να συνειδητοποιήσουν τι είχαν επιτύχει, ενώ άλλοι μαθητές, χωρίς να έχουν την παραμικρή υποψία για το αντικείμενο της ερευνάς τους, έδωσαν την «σωστή» απάντηση αξιοποιώντας πληροφορίες από εξωτερικές πηγές για τον συμβολισμό των αριθμών που περιείχε ο δίσκος (Gulikers & Blom, 2001).

O MacKinnon (1992) χρησιμοποίησε επίσης στην ερευνά του τον δίσκο αυτό, καθώς και άλλους Βαβυλωνιακούς δίσκους από άργιλο που περιείχαν διαφορετικές εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος (Gulikers & Blom, 2001).

O Eagle (1998) περιγράφει τα βήματα με τα οποία οδήγησε τους σπουδαστές στην εύρεση του τύπου του όγκου μιας σφαίρας $\boldsymbol{V = 4/3\,\pi\, r^3}$. Πρότεινε στους μαθητές του να δικαιολογήσουν αυτόν τον μαθηματικό τύπο με εφαρμογή της μεθόδου του Αρχιμήδη. Τους έδειξε ότι η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί στην προετοιμασία ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος με τα διαδοχικά αθροίσματα (Gulikers & Blom, 2001).

Η μέθοδος του Αρχιμήδη ενέπνευσε επίσης τον μελετητή Mackinnon (1989) να αποδείξει τον τύπο επιφάνειας της σφαίρας αξιοποιώντας τις προβολές της υδρόγειου σφαίρας σε χάρτη (Gulikers & Blom, 2001) .

O Führer (1991) χρησιμοποίησε το μαθηματικό συλλογισμό του Ερατοσθένη, για να δείξει στους μαθητές του να σχεδιάσουν ένα τρόπο υπολογισμού της περιφέρειας της σφαίρας. Για την ανάπτυξη αυτού του τρόπου υπολογισμού πρότεινε στους μαθητές του να εργαστούν με την μέθοδο της «κατευθυνόμενης επανεφεύρεσης» (Gulikers & Blom, 2001).

O Corris (1990) έδειξε στους μαθητές του τον τρόπο να επιχειρούν προσεγγίσεις του π με τη βοήθεια ασκήσεων κατασκευής και υπολογισμού εμπνευσμένων από το έργο του Αρχιμήδη (Gulikers & Blom, 2001) .

O Führer (1991) αναφέρθηκε στο έργο του Αρχιμήδη σε συνδυασμό με το έργο του Viète και του Descartes, για να εισαγάγει την έννοια της προσέγγισης. Υποστήριξε ότι η μελέτη των έργων τους μπορεί να εμπνεύσει τους καθηγητές και να εμπλουτίσει τις γνώσεις τους (Gulikers & Blom, 2001) .

Η αρχαία ελληνική παράδοση της κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων με τον χάρακα και διαβήτη δίνει μια καλή ευκαιρία στους μαθητές να εργαστούν με τις παλιές μεθόδους. Η κατασκευή των κανονικών πολυγώνων αναφέρεται σε πολλά άρθρα. Ο Hogendijk (1996) περιγράφει την κατασκευή ενός πεντάγωνου από ένα παλιό περσικό χειρόγραφο (Gulikers & Blom, 2001). Οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν αυτή την μέθοδο κατασκευής ακολουθώντας την περιγραφή ενός μεταφρασμένου χειρογράφου. Τα περσικά χειρόγραφα αναφέρονται συχνά στον σχεδιασμό διαφόρων σχημάτων για τη δημιουργία ψηφιδωτών. Ο Hogendijk πιστεύει ότι αυτά τα ψηφιδωτά δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να πειραματιστούν και να δουλέψουν σε πολλές γεωμετρικές κατασκευές (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Lumpkin (1978) παρουσιάζει μέθοδο του Khayyam (11ος αιώνας μ.Χ.) για τη λύση των τριτοβάθμιων εξισώσεων η οποία χρησιμοποιεί τις γνωστές ιδιότητες των τεμνόμενων κωνικών τομών. Υποστηρίζει ότι οι μαθητές αξιοποιώντας τη μέθοδο αυτή θα σχηματίσουν καλύτερη εικόνα για τη γεωμετρική φύση των κωνικών τομών μέσα από αυτήν την εργασία. Ο Lumpkin χρησιμοποίησε τη σύγχρονη αναλυτική γεωμετρία για να αναλύσει την αραβική και ελληνική μέθοδο επίλυσης αυτών των εξισώσεων με τεμνόμενες κωνικές τομές. Ο σκοπός του σε αυτή την περίπτωση ήταν να δείξει στους μαθητές του τη δυναμική ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Θεώρησε ότι η προσέγγιση αυτή θα βοηθούσε τους μαθητές του να αναθεωρήσουν την άποψή τους ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα κλάδο στατικό και παράλληλα να εκτιμήσουν ότι τα μαθηματικά είναι δημιούργημα του ανθρώπινου νου (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Lightner (1975) ανέλυσε τα βιογραφικά στοιχεία των πρώτων «γιγάντων» της γεωμετρίας: του Θαλή, του Πυθαγόρα, του Πλάτωνα, του Ευκλείδη και του Απολλώνιου (Gulikers & Blom, 2001).

Ένα άλλο πλεονέκτημα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών είναι η παράθεση ενός μεγάλου αριθμού «παλαιών» προβλημάτων. Ο Lehmann (1992) προσφέρει 25 «παλιά» μαθηματικά προβλήματα, που άντλησε από διάφορες πηγές, για την πρόκληση και την ευχαρίστηση εξεύρεσης λύσης τους (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Baptist και ο Diener (1988) θεώρησαν ότι η εξέταση της διαχρονικής εξέλιξης ενός μαθηματικού προβλήματος θα προσφέρει στους μαθητές μια καλή ευκαιρία να ανακαλύψουν μια ποικιλία διαφορετικών προτεινόμενων τρόπων επίλυσής του, να αποκτήσουν εμπειρία και να αναθεωρήσουν τον τρόπο σκέψης για την οργάνωση και ανάπτυξη του αποδεικτικού συλλογισμού. Παρουσίασαν ως παράδειγμα το πρόβλημα των δύο πύργων καθώς και τις τέσσερις διαφορετικές λύσεις που πρότεινε για το πρόβλημα αυτό από ο Leonardo of Piza (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Edwards (1992) σε ένα καθαρά ιστορικό άρθρο περιέγραψε το επίπεδο γνώσης για τη σφαιρική τριγωνομετρία στην εποχή του Κολόμβου, Ένα διαφορετικό τύπο άρθρου που σχετίζεται με την ιστορία της γεωμετρίας βρίσκουμε στο έργο του Strecker και του Rickey. Και οι δύο συζητούν τη μέτρηση του μεγέθους της γης. Πιο συγκεκριμένα ο Strecker (1998) σχολίασε μια ιστορική μαθηματική άσκηση για τη μέτρηση της σφαίρας από ένα σχολικό βιβλίο που βασίζεται στο έργο του Ερατοσθένη. Αναγνωρίζοντας την σπουδαιότητα της ανάπτυξης της κριτικής σκέψης των μαθητών πρότεινε μια σειρά από κρίσιμα ερωτήματα κατανόησης της προαναφερθείσας άσκησης. Οι ερωτήσεις διατυπώθηκαν με τρόπο που διέγειραν το ενδιαφέρον για συστηματική μελέτη της άσκησης (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Rickey (1992) παρουσιάζει τις μαθηματικές γνώσεις στις οποίες στηρίχτηκε ο Κολόμβος για να σχεδιάσει το ταξίδι του. Παρουσίασε στους μαθητές του το έργο του Ερατοσθένη και υποστήριξε ότι αξίζει να συζητηθούν τα αποτελέσματα των εσφαλμένων μετρήσεων. Στο άρθρο του πρότεινε τρόπους για περεταίρω διερεύνηση αυτού του θέματος (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Van Maanen (1992α) ανέπτυξε ένα πρωτότυπο διδακτικό σενάριο για την εκμάθηση του τρόπου διαμοιρασμού των προσχωσιγενών ιζηματογενών εδαφών, δηλαδή των έφορων εδαφών. Ο διδακτικός σχεδιασμός αφορούσε εντεκάχρονους μαθητές που εκτός από μαθηματικά διδάσκονταν στο σχολείο και τη λατινική γραμματεία. Προτάθηκε στους μαθητές να μελετήσουν αποσπάσματα στη λατινική από το έργο του Bartolus του Saxoferrato (1355 μ.Χ.) και συγκεκριμένα τα σημεία όπου ο Bartolus προτείνει το μαθηματικό κριτήριο της μέγιστης χωρικής εγγύτητας της παλιάς και της νέας γης ως προϋπόθεση για την υπαγωγή του νέου κλήρου στην κυριότητα του επίδοξου ιδιοκτήτη. Το κριτήριο αυτό παραπέμπει στη μαθηματική θεωρία των μεσοκαθέτων. Η διδακτική αξιοποίηση του παραθέματος από το πρωτότυπο έργο του Bartolus βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τη σημασία των μαθηματικών στην κοινωνία και να ανακαλύψουν την εργαλειακή αξία του κανόνα και του διαβήτη στις κατασκευές σχημάτων (Culikers & Blom, 2001). Τέλος, αποδείχθηκε ότι η συγκεκριμένη διδακτική εφαρμογή ενθάρρυνε σημαντικά τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών.

Ο Arsac (1987) μελέτησε την ιστορική προέλευση της μαθηματικής απόδειξης στην Ελλάδα τον 5ο αιώνα π.Χ. Στόχος της εργασίας του ήταν η διερεύνηση της ιστορικής εμφάνισης της μαθηματικής απόδειξης είτε ως αποτελέσματος συσχετισμού της με την ανάγκη επίλυσης ενός συγκεκριμένου προβλήματος είτε ως συνέπειας της εξελικτικής πορείας της ελληνικής σκέψης (Gulikers & Blom, 2001).

Οι Horak και Horak (1981) έδειξαν τον τρόπο με τον οποίο οι Έλληνες χειρίστηκαν τα γεωμετρικά σχήματα στην εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων προκειμένου να αποδείξουν αλγεβρικές ταυτότητες. Κατά τη γνώμη τους ο τρόπος αυτός μπορεί να αξιοποιηθεί στη σχολική διδασκαλία συμβάλλοντας στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών και στον εμπλουτισμό των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών (Gulikers & Blom, 2001).

Ο Deakin (1990) περιέγραψε το ιστορικό των αποδείξεων του θεωρήματος: « σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης είναι ίσες». Ξεκίνησε με την απόδειξη που προτάθηκε στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ($5^{η}$ πρόταση) και ολοκλήρωσε την παρουσίασή του με διεξοδική αναφορά στις σύγχρονες αποδείξεις (Gulikers & Blom, 2001) .

Ο Τζανάκης το (1999) πρότεινε δύο παραδείγματα γενετικής προσέγγισης που αποκαλύπτει την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και φυσικής: πρώτον, ότι ο νόμος βαρύτητας του Νεύτωνα προέκυψε από το νόμο του Κέπλερ και δεύτερον, ότι η χρήση της άλγεβρας των πινάκων είναι η βάση της ειδικής θεωρίας σχετικότητας. Περιέγραψε επίσης τη θεωρία και τις ασκήσεις που διδάσκονται οι μαθητές Λυκείου και οι πρωτοετείς φοιτητές (Gulikers & Blom, 2001).

Σε ένα άρθρο των Τζανάκη και Θωμαΐδη (1998) σχολιάστηκε η σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής και προτάθηκαν συγκεκριμένα παραδείγματα (Gulikers & Blom, 2001).

Σε άρθρο του ο Μιχαηλίδης (2009) πρότεινε τρεις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν για να οδηγηθούν οι μαθητές βήμα-βήμα στην ανακάλυψη θεμελιωδών εννοιών. Στη πρώτη δραστηριότητα ζητείται ο προσδιορισμός των ψηφίων του π. Η δεύτερη δραστηριότητα αναφέρεται στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας. Στην τρίτη δραστηριότητα παρουσιάζεται το αριθμητικό τρίγωνο και οι εφαρμογές του στη συνδυαστική, στις πιθανότητες και στην άλγεβρα. Και στις τρεις δραστηριότητες προτείνεται στους μαθητές να προγραμματίσουν υπολογιστή που θα κάνει τους υπολογισμούς (Μιχαηλίδης, 2009).

Ο Θωμαΐδης (1990) αξιοποίησε στη διδακτική πράξη ένα ιστορικό σχόλιο του βιβλίου της Α΄ Λυκείου σχετικά με την τριχοτόμηση μιας γωνίας. Η δραστηριότητα αυτή φάνηκε ενδιαφέρουσα στους μαθητές, γιατί τους επέτρεψε να αναπτύξουν τη δημιουργικότητά τους και να ζήσουν την εμπειρία της διαδικασίας εναλλαγής στη δόμηση της κριτικής σκέψης, δηλαδή να υποβληθούν νοητικές διεργασίες μετάβασης από την αποδοχή μιας κρίσης στην απόρριψή της και στην αναθεώρηση προηγούμενων αντιλήψεων. Σύμφωνα με τον συγγραφέα οι μαθητές αντιλήφθηκαν τα μαθηματικά ως μια νοητική διαδικασία σε εξέλιξη και όχι σαν μια οριστικοποιημένη και αφηρημένη θεωρία (Θωμαΐδης, 1990) .

Ο Θωμαΐδης (1990) σε άλλη διδακτική εφαρμογή αξιοποίησε ένα σχόλιο από το βιβλίο της Β΄ Λυκείου που συνοδεύει μια άσκηση και πληροφορεί τους μαθητές ότι πρόκειται για μια εφαρμογή του θεωρήματος του Πτολεμαίου. Σε ερώτηση μαθητή σχετικά με τη σκοπιμότητα επιλογής της συγκεκριμένης άσκησης δόθηκε η απάντηση ότι η πρόταση αυτή έπαιξε ρόλο-κλειδί στην κατασκευή ενός πίνακα χορδών. Αυτός ο πίνακας ήταν απαραίτητος για να λυθούν σημαντικά προβλήματα μετρήσεων της αρχαίας αστρονομίας. Η πρόταση και ο πίνακας χορδών που ισοδυναμεί με το σημερινό πίνακα ημιτόνων, περιέχονται στο μεγάλο αστρονομικό έργο του Πτολεμαίου «Μαθηματική Σύνταξις». Αυτό το έργο υπήρξε η βίβλος των αστρονόμων γεωγράφων και εξερευνητών μέχρι τον 16ο αιώνα. Τέλος, δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να συζητήσουν για την αλληλεπίδραση της γεωμετρίας και της άλγεβρας (Θωμαΐδης, 1990).

Οι Θωμαΐδης και Τζανάκης (2006) παρουσίασαν την εκπαιδευτική έρευνα που υλοποίησαν με στόχο τη αποτίμηση των αποτελεσμάτων της διδακτικής αξιοποίησης των πρωτότυπων κειμένων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών στη διαμόρφωση ενός νέου διδακτικού περιβάλλοντος που ενθαρρύνει την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών και παράλληλα τους μυεί με τρόπο δημιουργικό στη διαδικασία εξεύρεσης και διατύπωσης των μαθηματικών αποδείξεων. Η εκπαιδευτική έρευνα είχε διάρκεια 10 διδακτικών δίωρων. Κατά τη διάρκεια των προβλεπόμενων διδασκαλιών δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασίας με πρωτότυπα κείμενα σε αρχαιοελληνικό λόγο από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (300 π.Χ. περίπου) και με παραθέματα από σχόλια του Πρόκλου (5ος αιώνας μ.Χ.). Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους τέθηκαν. Εφαρμόστηκε μια διαθεματική διδασκαλία με σύνδεση τριών διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων, της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, των Αρχαίων Ελληνικών και της Ιστορίας. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι η διαθεματική προσέγγιση της γεωμετρίας και η εισαγωγή της μελέτης πρωτότυπων ιστορικών κειμένων στη σχολική διδασκαλία των μαθηματικών άλλαξε το σύνηθες σκηνικό και δημιούργησε ένα πρωτόγνωρο διδακτικό περιβάλλον που ενθάρρυνε τη δημιουργική μάθηση και την ανάπτυξη της κριτικής και αναλυτικής σκέψης των μαθητών (Θωμαΐδης & Τζανάκης, 2006).

Στη Δανία σε σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πραγματοποιήθηκε εργασία από 16χρονους μαθητές με θέμα τη μελέτη του τρόπου και των λόγων αρίθμησης των Αιγυπτίων. Σύμφωνα με τον Kjeldsen (2011) το προτζέκτ ήταν διαθεματικό και συνδύαζε την ιστορία της Αρχαίας Αιγύπτου με τα μαθηματικά. Οι διδακτικοί στόχοι, που ετέθησαν, είναι οι εξής:

α) να ενισχυθεί η ικανότητα των μαθητών να εργάζονται σε ομάδες,
β) να ενισχυθεί η ανεξάρτητη μάθηση των μαθητών,
γ) να αναπτυχθούν οι δεξιότητες των μαθητών στην προφορική παρουσίαση,
δ) να αποκτήσουν οι μαθητές νέες εμπειρίες,
ε) να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά σε παρελθούσες ιστορικές περιόδους ήταν διαφορετικά από αυτά που είναι σήμερα,
στ) να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι, αντίθετα με επικρατούσες απόψεις, τα μαθηματικά δεν είναι στατικά και ο τρόπος εξαγωγής και διατύπωσης των μαθηματικών αποτελεσμάτων είναι διαχρονικά εξελισσόμενος,
ζ) να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά αναπτύσσονται αλληλοεπιδρώντας με τον πολιτισμό και την κοινωνία.

Οι τέσσερεις πρώτοι στόχοι απέβλεπαν στην ενεργοποίηση του μαθητή, ενώ οι άλλοι τρεις στόχοι αφορούσαν στην ιστορία των μαθηματικών. Ο δάσκαλος οργάνωσε το πρότζεκτ σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο σχεδιάστηκε η αξιοποίηση ενός ιστορικού κειμένου και η εξοικείωση των μαθητών με τα μαθηματικά των αρχαίων

Αιγυπτίων, όπως η μέθοδο πολλαπλασιασμού με επαναλαμβανόμενο διπλασιασμό, τα σύμβολα αριθμών και ο τρόπος διαμόρφωσης των μαθηματικών προβλημάτων. Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τεσσάρων με την καθοδήγηση του διδάσκοντος. Στο τρίτο στάδιο κάθε ομάδα κλήθηκε να παρουσιάσει τα αποτελέσματα της εργασίας της στην ολομέλεια της τάξης υποστηρίζοντας την προφορική παρουσίαση με την προβολή σχετικών power point παρουσίαση.

Από την κριτική μελέτη των άρθρων και μελετών που παρουσιάστηκαν παραπάνω προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

α) Διαπιστώνεται ένα μεγάλο κενό ανάμεσα στα άρθρα που γράφουν οι ιστορικοί των μαθηματικών και οι καθηγητές/διδάσκοντες των μαθηματικών.

β) Τα περισσότερα άρθρα στερούνται «νομιμοποίησης» ιδεών και προτάσεων. Οι καθηγητές των μαθηματικών συνήθως εκφράζουν προσωπικές κρίσεις και δεν χρησιμοποιούν τις περισσότερες φορές διδακτικά η μεθοδολογικά επιχειρήματα για να τεκμηριώσουν τις διαπιστώσεις τους.

γ) Παρατηρείται ερευνητικό και βιβλιογραφικό έλλειμμα στη διερεύνηση του τρόπου διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Από τις διαπιστώσεις αυτές δημιουργούνται τα εξής ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν:

α) Πώς διεγείρουμε το ενδιαφέρον των μαθητών για συμμετοχή των μαθητών σε μια διαδικασία ευρετικής και ανακαλυπτικής μάθησης;

β) Ποιες πηγές θεωρούνται χρήσιμες και υποστηρικτικές στη διαδικασία «ανακάλυψης» ενός γεωμετρικού θεωρήματος από τους μαθητές και ποιες όχι;

γ) Τα αποτελέσματα της οργάνωσης της «επανεφεύρεσης» ενός συγκεκριμένου γεωμετρικού θέματος μπορούν να γενικευτούν και να εφαρμοστούν σε άλλους τομείς της γεωμετρίας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

3.1 ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1946 ΕΩΣ ΣΗΜΕΡΑ

Όλα τα βιβλία στα οποία θα αναφερθούμε παρακάτω, διαφέρουν μεταξύ τους όχι μόνο ως προς τη διάταξη της ύλης που παρουσιάζουν αλλά και ως προς την μέθοδο που προσεγγίζουν τα διάφορα γεωμετρικά θέματα. Μπορούμε να πούμε επίσης ότι το κάθε ένα βιβλίο παρουσιάζει διαφορετικές προσεγγίσεις στην παρουσίαση της ύλης από αυτές που προτείνει το Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και προσφάτως το Ι.Ε.Π. Θα παρουσιάσουμε τους προλόγους των επτά (7) βιβλίων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχουν διδαχθεί οι μαθητές κατά καιρούς στα ελληνικά σχολεία. Οι πρόλογοι αυτών των βιβλίων εκτός από τα δύο τελευταία που έχουν και κάποια ιστορικά κείμενα στην αρχή ή στο τέλος των κεφαλαίων είναι το μοναδικό σημείο της ύλης όπου εμφανίζεται ιστορικό κείμενο. Οι πρόλογοι αυτοί έχουν συνταχθεί από τον κ. Χ. Μπαρμπαστάθη (1948), τον κ. Ν. Νικολάου (1953), τον κ. Ι. Ιωαννίδη (1968), τον κ. Χ. Παπανικολάου (1975), από τους κ. Παπαμιχαήλ-Σκιαδά (1977), από τον κ. Α. Αλιμπινίση κ.ά. (1996), τον κ. Ι. Θωμαΐδη κ.ά. (1999) και τον κ. Η Αργυρόπουλο κ.ά. (2001).

- Χ. Μπαρμπαστάθη Θεωρητική γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των γυμνασίων νέου τύπου, εν Αθήναις, Ο.Ε.Σ.Β. 1948.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ο άνθρωπος ασχολείται διαρκώς με πράγματα, τα οποία βλέπει και εγγίζει. Τα πράγματα αυτά τα ονομάζομεν υλικά σώματα απλώς σώματα. Έκαστον σώμα, καταλαμβάνει χώρον. Ο χώρος τον οποίο καταλαμβάνει έν σώμα, λέγεται έκτασις αυτού. Εξ άλλου, τα διάφορα σώματα τελειώνουν εξωτερικώς κατά διαφόρους τρόπους . Ο τρόπος με τον οποίον τελειώνει έν σώμα εξωτερικώς, λέγεται σχήμα αυτού.

2. Ενός σώματος δυνάμεθα να εξετάσωμεν και να ίδωμεν την ύλην, εκ της οποίας είναι κατασκευασμένον, το βάρος, το χρώμα κλπ. Όταν όμως εξετάζωμεν εν σώμα, μόνον διά να ίδωμεν τι σχήμα και τι έκτασιν έχει, χωρίς να μας ενδιαφέρη τίποτε άλλο, το λεγόμενον γεωμετρικόν σώμα η στερεόν (γεωμετρικόν).

3. Αν λάβωμεν οιονδήποτε στερεόν και εξετάσωμεν την έκτασιν του, θα ίδωμεν, ότι αύτη εκτείνεται προς τα άνω, προς τα εμπρός και προς τα πλάγια, ήτοι εκτείνεται κατά τρείς διαστάσεις. Ώστε παν στερεόν έχει τρεις διαστάσεις.

4. Έκαστον σώμα έχει άκρα. Τα άκρα ενός σώματος, όλα ομού, αποτελούν την επιφάνεια αυτού. Αν προσέξουμε τας επιφάνειας διαφόρων στερεών, θα ίδωμεν, ότι μερικαί από αυτάς είναι πολύ διάφοροι από τας άλλας. Όλαι όμως έχουν σχήμα και έκτασιν. Αν δε εξετάσωμεν τας επιφάνειας αυτών ως προς την έκτασίν των, θα ίδωμεν ότι αύται έχουν δύο διαστάσεις. Είναι λοιπόν η έκτασις της επιφάνειας διάφορος από την έκτασιν των στερεών.

5. Τα άκρα μιάς επιφάνειας η μέρους αυτής αποτελούν όλα ομού γραμμήν. Και αι γραμμαί έχουν σχήμα και έκτασιν…

10. Είδαμεν ότι κάθε σώμα, επιφάνεια και γραμμή έχει σχήμα και έκτασιν. Η επιστήμη που εξετάζει το σχήμα και την έκτασιν αυτών λέγεται Γεωμετρία.»

Εν συνεχεία αναφέρει για τα αξιώματα το θεώρημα την απόδειξη, τα πορίσματα το πρόβλημα καθώς και την λύση του.

Σε μια παραπομπή σχολιάζει την ιστορική αναφορά του Ηρόδοτου για τις στοιχειώδεις γεωμετρικές γνώσεις των αρχαίων Αιγύπτιων και την αντίληψή τους για το εύρος του γνωστικού αντικειμένου της Γεωμετρίας που το περιόριζαν στη μέτρηση της Γης. Η θεώρηση της γεωμετρίας ως επιστήμης του σχήματος και της έκτασης, που ισχύει ως τις μέρες μας αποδίδεται στους αρχαίους Έλληνες και συγκεκριμένα στον Θαλή, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, και τον Απολλώνιο, οι οποίοι πρώτοι καλλιέργησαν την γεωμετρική γνώση και την προήγαγαν σε επιστήμη. Επίσης αναφέρεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ως ένα σύγγραμμα τέλειο. Όπως αναφέρει, το έργο αυτό εκτός ελάχιστων μεταβολών αποτελεί ακόμα και σήμερα τη βάση της διδασκαλίας της Στοιχειώδους γεωμετρίας. Η αναφορά στο έργο του Ευκλείδη είναι η μόνη ιστορική αναφορά σε όλο το βιβλίο.

- Ν. Νικολάου, Θεωρητική Γεωμετρία διά τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. Εν Αθήναις, Ο.Ε.Σ.Β. 1953.

«<u>Ποίαι ανάγκαι εγέννησαν την Γεωμετρία.</u> Αφ' ότου οι άνθρωποι ησθάνθησαν την ανάγκην οικοδομημάτων χάριν ανετωτέρας διαμονής, αφ' ότου το αίσθημα της ιδιοκτησίας εδημιούργησε την ανάγκην οριοθεσίας, μετρήσεως και διαιρέσεως, η δημιουργία Γεωμετρίας κατέστη αναγκαία και αναπόφευκτος, τουλάχιστον υπό την πρωτόγονον και εντελώς πρακτικήν μορφήν.

Πληροφορίαι από την απωτάτην αρχαιότητα ενισχύουσι την άποψιν ταύτην. Ούτως ο Ηρόδοτος (5ος π.Χ. αιών.) αναφέρει τα εξής. Οσάκις ο Νείλος εκάλυπτε μέρος των αγρών των Αιγυπτίων, ο Βασιλεύς απέστελλε τους μετρητάς, δια να κανονίζωσι τον πληρωτέον φόρον αναλόγως προς την υπολειφθείσαν έκτασιν του αγρού εκάστου. Κατ' άλλας μαρτυρίας οι μετρηταί ησχολούντο να ορίζωσιν εκ νέου τα όρια των αγρών των Αιγυπτίων μετά την αποχώρησιν των υδάτων του Νείλου. Από την ανάγκη αυτήν, καθ' οιανδήποτε εκδοχήν εξεπήδησαν αι πρώται πρακτικαί γνώσεις της Γεωμετρίας. Παρεμφερείς γνώσεις φαίνεται ότι είχον και οι Χαλδαίοι, ως αποδεικνύουσι τα σχέδια των ανασκαπτόμενων οικοδομημάτων και πολλά κείμενα ομιλούνται περί πωλήσεως οικοπέδων. Αι πρακτικαί αύται γνώσεις άνευ εσωτερικής συνοχής απετέλουν τέχνην μάλλον ή επιστήμην. Πρώτοι δε οι αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι και Μαθηματικοί δια της φιλοσοφικής ιδιοφυΐας των ήρχισαν την εξέτασιν των σχημάτων καθ' εαυτά και ούτω βαθμηδόν διεμόρφωσαν την Γεωμετρίαν εις Επιστήμην. Όθεν δικαίως αύτη θεωρείται ως κατ΄ εξοχήν Ελληνική Επιστήμη.» (σελ. 9)

- Ι. Ιωαννίδη, Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, τόμος β΄. Αθήναι, Ο.Ε.Δ.Β. 1968

«Η σπουδή της Γεωμετρίας όπως και των άλλων Επιστημών συνδέεται με την προσπάθεια του ανθρώπου να ερμηνεύση κατά ένα τρόπο καθολικόν τον περί αυτόν Κόσμον. Κατά την προσπάθεια ταύτην συνειδητοποιεί ότι η γνώσις του είναι κατ΄ανάγκην περιωρισμένη, διότι, ως εμπειρική, αναφέρεται εις ότι η αντίληψις εκ του αισθητού Κόσμου του επιτρέπει εκάστοτε να εννοήση… Γεωμετρικός Χώρος-Αισθητός Χώρος. Πρέπει να δεχθώμεν ότι, μέχρι του Θαλού του Μιλησίου (639-548 π.Χ.) ο ανθρώπινος νους δεν είχεν απελευθερωθή από την εκ του αισθητού εποπτείαν. Η ταιαύτη εκ του αισθητού εποπτεία απετέλει, μέχρι της εποχής του την προϋπόθεσιν και την αιτίαν της δημιουργίας της Γεωμετρίας, την οποίαν ήσκουν οι Αιγύπτιοι και οι Ανατολικοί λαοί.

Ο Θαλής δια της εισαγωγής του «Απαγωγικού συλλογισμού» και της «Υποθέσεως», μετέφερε την αναζήτησιν της αλήθειας από την περιοχήν του «αισθητού» εις την περιοχήν του «νοητού». Η υπό του Θαλού θεμελιωθείσα αποδεικτική

Επιστήμη, τίποτε το κοινόν δεν έχει με την προ αυτού Γεωμετρίαν των Ανατολικών λαών, διαφέρει αυτής και κατά το περιεχόμενον και κατά τον σκοπόν.

Αι από του τέλους του παρελθόντος αιώνος επελθούσαι βελτιώσεις και τροποποιήσεις καθ' όσον αφορά την «παρουσίασιν» της Ελληνικής Γεωμετρίας, ουδέν σχεδόν προσθέτουν εις την δημιουργίαν του Θαλού, η οποία υπήρξεν απαλλαγή της ανθρώπινης σκέψεως από της εκ του αισθητού δεσποτείας.

Η εκ του αισθητού εποπτεία αντικαθίσταται δια του Θαλού υπό της Γεωμετρικής εποπτείας, και ο αισθητός Χώρος υπό του Γεωμετρικού Χώρου. Τα στοιχεία τα οποία συνθέτουν την έννοια του Γεωμετρικού χώρου δυνάμεθα να τα προσεγγίσουμε εκ των αντιστοίχων στοιχείων του αισθητού χώρου, δια της αφαιρετικής εργασίας του νου δια της οποίας τα στοιχεία ταύτα του αισθητού χώρου (σημείον, ευθεία, επίπεδον) απαλλάσσονται από τα μη κοινά αυτών χαρακτηριστικά (χρώμα, πάχος ,…) με τα οποία εμφανίζονται συνδεδεμένα.

Η μετάβασις εκ των ανωτέρω εποπτικών εννοιών εις τας αντιστοίχους αφηρημένας εννοίας, αι οποίαι θα ονομασθούν γεωμετρικαί είναι το πρώτο βήμα προς την αφηρημένην Γεωμετρία. Ο σκοπός της αφηρημένης Γεωμετρίας δεν είναι η θεώρησις των γεωμετρικών εννοιών καθ΄εαυτάς αλλά κυρίως η έρευνα των μεταξύ των σχέσεων, τότε η ανεξαρτησία εκ του αισθητού χώρου εξασφαλίζεται άμα τη εισαγωγή των εννοιών αι οποίαι θα θεωρηθούν ως αρχικαί (μη οριζόμεναι εξ άλλων εννοιών) και του δια των τιθεμένων (εισαγωμένων) αξιωμάτων καθορισμού των μεταξύ των ανωτέρω αρχικών εννοιών σχέσεων. Ο τοιούτος όμως καθορισμός δύναται και επιβάλλεται να είναι ανεξάρτητος της εκ του αισθητού εποπτείας.

Ούτως, η Γεωμετρία θέλει θέση, δι' εαυτήν τα αξιώματα αυτής, ανεξαρτήτως της εκ του αισθητού εποπτείας και δύναται εκ του λόγου τούτου να είναι Ευκλείδειος η μη Ευκλείδειος... Ο Γεωμετρικός Χώρος αποτελεί νοητικόν κατασκεύασμα όλως διάφορον του αισθητού Χώρου. Η Γεωμετρική ένεκα τούτου εποπτεία προώρισται να μας οδηγήση εις αλήθειας τας οποίας ουδέποτε θα ήτο δυνατόν να γνωρίσωμεν δια της εκ του αισθητού εποπτείας.» (σελ. 5-8)

Στη συμέχεια γίνεται αναφορά στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ως το πρώτο στην ιστορία παράδειγμα θεμελίωσης μιας επιστήμης με αξιωματική μέθοδο. Επίσης μνημονεύονται οι εισηγητές και θεμελιωτές των μη ευκλείδειων γεωμετριών

Lobatchewsky (1793-1856) και Riemann (1826-1866). Και τέλος γίνεται αναφορά στον D. Hilbert (1862-1943), ο οποίος θεμελίωσε την Ευκλείδεια γεωμετρία προτείνοντας ένα σύστημα αξιωμάτων. Αυτό το σύστημα απετέλεσε τη βάση ανάπτυξης της γεωμετρίας μέχρι την εποχή αυτή.

- Χ. Παπανικολάου, Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ’ Γυμνασίου και Δ’, Ε’, ΣΤ’ Γυμνασίου Αθήναι Ο.Ε.Δ.Β. 1975

«Ιστορικό Σημείωμα: Γεωμετρία κατά τους αρχαίους είναι η τέχνη του μετράν την Γην (το έδαφος). Ο πατήρ της Ιστορίας Ηρόδοτος αναφέρει ότι η Γεωμετρία εδημιουργήθη εις την Αίγυπτον την εποχήν, κατά την οποίαν ο βασιλεύς Σέσωστρις διένειμεν εις κλήρους το έδαφος της Αιγύπτου και παρέστη ανάγκη να ανευρίσκη έκαστος Αιγύπτιος τον γεωργικόν κλήρον του, μετά εκάστην πλημμύραν του Νείλου. Παρά ταύτα η αληθής πατρίς της Γεωμετρίας είναι η αρχαία Ελλάδα, διότι οι αρχαίοι πρόγονοί μας έδωσαν μεγάλην ώθησιν εις την σπουδήν της. Ως πρώτος θεμελιωτής της γεωμετρίας θεωρείται ο Θαλής ο Μιλήσιος (ΣΤ’ αιών π.Χ.), ο οποίος δια του θεωρήματος των αναλόγων τμημάτων, των περιλαμβανομένων μεταξύ παραλλήλων ευθειών, υπελόγισε το ύψος αιγυπτιακής πυραμίδος, καταπλήξας τον βασιλέα της Αιγύπτου Άμασιν. Ο Θαλής ίδρυσε εις Μίλητον την Ιωνικήν Σχολήν και επλούτισεν τας γεωμετρικάς γνώσεις. Η σπουδή της γεωμετρίας εξακολουθεί εις την μεγάλην Ελλάδα (κάτω Ιταλίαν) όπου ο εκ Σάμου Πυθαγόρας (580-500 π.Χ.) ίδρυσεν εις τον Κρότωνα την περίφημον Σχολήν του. Κατόπιν ο Ιπποκράτης ο Χίος (450 π.Χ.) εδημοσίευσε Στοιχεία Γεωμετρίας, θεωρείται δε ως ο πρώτος γράψας βιβλίον γεωμετρίας. Μετά ο φιλόσοφος Πλάτων (430-347 π.Χ.) επεξέτεινε την σπουδήν της γεωμετρίας, τόσην δε σημασίαν έδωσεν εις αυτήν, ώστε εις το άνω μέρος της θύρας της ιδρυθείσης υπ’ αυτού εν Αθήναις Σχολής, της «Ακαδημίας», ανέγραψε το ρητόν: «μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω». Εις τον Πλάτωνα οφείλεται η εισαγωγή της αναλυτικής μεθόδου ερεύνης και η διδασκαλία των γεωμετρικών τόπων. Κατόπιν οι τρεις μεγάλοι αρχαίοι συγγραφείς μαθηματικών βιβλίων Ευκλείδης (330-270 π.Χ.), Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) και Απολλώνιος (260-200 π.Χ.) συνετέλεσαν κατά πολύ εις την περαιτέρω ανάπτυξιν της γεωμετρίας, ιδίως ο Ευκλείδης με τα «Στοιχεία», σύγγραμμα αποτελούμενο από 13 βιβλία. Εις τον Ευκλείδην οφείλεται η εισαγωγή της μεθόδου της εις άτοπον επαγωγής, εις δε τον Αρχιμήδην οφείλονται αι πρώται έννοιαι των ορίων. Ώθησιν επίσης έδωσαν εις την ανάπτυξιν των γεωμετρικών γνώσεων και οι Αλεξανδρινοί, Μενέλαος-Πτολεμαίος-Πάππος. Μετά τους Αλεξανδρινούς η ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών υπήρξε βραδυτάτη μέχρι της Αναγεννήσεως. Μετά την Αναγέννησιν ήρχισεν η αλματώδης πρόοδος της γεωμετρίας. Ο Καρτέσιος (Descartes 1596-1650) με τας ορθογωνίους συντεταγμένας ενός σημείου, δημιουργεί την αναλυτικήν γεωμετρίαν, ιδιαίτερον κλάδον των μαθηματικών και παρέσχε νέας μεθόδους ερεύνης. Αι νέαι αύται μέθοδοι και η κατά τον ΙΖ' αιώνα διατύπωσις της απειροστικής αναλύσεως, συνετέλεσαν εις την ανάπτυξιν της γεωμετρίας και προς άλλας κατευθύνσεις. Ούτω εδημιουργήθησαν και άλλοι κλάδοι της γεωμετρίας, όπως η διαφορική γεωμετρία, η παραστατική γεωμετρία, η προβολική γεωμετρία, η γεωμετρία της θέσεως κ.λ.π.» (σελ. 12)

- Δ. Παπαμιχαήλ- Α. Σκιαδά: Θεωρητική Γεωμετρία, Α΄Λυκείου Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα

«Ο Έλληνας γεωμέτρης Ευκλείδης υπήρξε ο πιο διάσημος μαθηματικός όλων των εποχών και όλων των εθνών. Για την ζωή του ξέρουμε πολύ λίγα πράγματα. Γεννήθηκε το 330 π.Χ. στην Σικελία η στην Συρία και πέθανε το 270 η 275 π.Χ.. Ο πατέρας του ο Ναύκρατος τον έστειλε αρχικά για σπουδές στην Αθήνα, όπου γρήγορα διακρίθηκε για τις μαθηματικές του ικανότητες και τις γεωμετρικές του εργασίες. Αργότερα πήγε ως προσκεκλημένος του Πτολεμαίου στην Αλεξάνδρεια και δίδαξε Αριθμητική και Γεωμετρία. Η διδασκαλία του εκεί άφησε εποχή και ο Ευκλείδης ταύτισε για εκατοντάδες χρόνια το όνομά του με την γεωμετρία στην οποία είχε ιδιαίτερη αγάπη. Κατά τον Πάππο (3^{ος} αιώνας μ.Χ.) ο Ευκλείδης ήταν πράος και είχε ξεχωριστή ικανότητα να μεταδίδει γνώση στους συνανθρώπους του. Η μεγάλη φήμη του Ευκλείδη οφείλεται κυρίως στο έργο του «Στοιχεία», από το οποίο πήρε το όνομα του «Στοιχειωτού». Το έργο αυτό που αποτελεί υπόδειγμα θεμελειώσεως και παρουσιάσεως μαθηματικού κλάδου έμεινε για πολλούς αιώνες το βασικό κείμενο διδασκαλίας της γεωμετρίας στα πιο περίφημα σχολεία… Πολλοί και μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν τους τελευταίους αιώνες με την θεμελίωση της Γεωμετρίας που καθιέρωσε ο Ευκλείδης και αρκετοί από αυτούς συνέβαλαν στο να γίνει σήμερα η θεμελίωση αυτή με πιο αυστηρό τρόπο. Μερικοί τροποποίησαν ακόμη και ορισμένες από τις αρχές που έβαλε ο Ευκλείδης και δημιούργησαν άλλα λογικά «οικοδομήματα» τα οποία όμως δεν έχουν ούτε την απλότητα ούτε την ομορφιά της γεωμετρίας που στηρίζεται στις αρχές της Γεωμετρίας. Αυτές οι αρχές κυριαρχούν μέχρι και σήμερα στη Γεωμετρία η οποία διδάσκεται σε όλα τα γυμνάσια του κόσμου και ονομάζεται «Ευκλείδεια Γεωμετρία».»

- Αλιμπινίσης Α.Ν.-Δημάκος Γ.- Έξαρχος Θ.- Κοντογιάννης Δ. – Τασσόπουλος Γ.: Θεωρητική Γεωμετρία Α΄ Ενιαίου Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β. 1990

«ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ: Οι ρίζες της Γεωμετρίας εντοπίζονται…] Η Γεωμετρία λοιπόν των ανατολικών χωρών γεννήθηκε από την ανάγκη επίλυσης πρακτικών προβλημάτων. Ο πρώτος λαός που ίδρυσε και ανάπτυξε την Θεωρητική Γεωμετρία ως μαθηματική επιστήμη, τέλεια αποδεικτική, ήταν οι αρχαίοι Έλληνες. Αυτοί εισήγαγαν και ανάπτυξαν την αποδεικτική διαδικασία… Οι περισσότεροι μελετητές ακόμα και σήμερα, θεωρούν ως ένα από τους κλάδους των Μαθηματικών που είναι υποδειγματικά θεμελιωμένος». Στη συνέχεια αναφέρεται στον ιδρυτή της Θεωρητικής Γεωμετρίας τον Θαλή τον Μιλήσιο και στις γεωμετρικές προτάσεις που τον ανέδειξαν ως τον Θεμελιωτή της Γεωμετρίας, στον Πυθαγόρα και στα έργα του, στον πρόδρομο του Ευκλείδη όπως αναφέρει Ιπποκράτη τον Χίο και, τέλος, στον ίδιο τον Ευκλείδη και στα «Στοιχεία» του. Τα «Στοιχεία» αποτελούν ένα έργο σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών. Ο Ευκλείδης διατύπωσε μερικές βασικές αρχές και όρους, όπως η πρόταση ότι αν επιλεγεί ένα σταθερό σύνολο προτάσεων, τότε η αλήθεια κάθε πρότασης προκύπτει από αυτές και από τις προηγούμενες της προτάσεις με λογικές διαδικασίες και συλλογισμούς. «Έτσι συγκέντρωσε όλα τα γνωστά έργα των παλαιοτέρων μαθηματικών, ταξινόμησε την ύλη, τη βελτίωσε, τη συμπλήρωσε, την ανάπτυξε και την τοποθέτησε σε μια ιεραρχική σειρά… έτσι, την αποδεικτική μέθοδο που εισήγαγε ο Θαλής και ανάπτυξαν οι Πυθαγόρειοι και οι μαθηματικοί που ακολούθησαν, την τελειοποίησε ο Ευκλείδης, δημιουργώντας έτσι ένα πρότυπο θεωρητικό και επιστημονικό έργο που αποτελεί τη σημαντικότερη συμβολή στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης». Εν συνεχεία αναφέρει τους όρους «αιτήματα», «κοιναί έννοιαι», όπως διατυπώνονται στην αρχαία και στην νεοελληνική γλώσσα.

- Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου από τους Ι. Θωμαΐδη, Α. Πούλο, Θ. Ξένο. 1999

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας γεωμετρίας: «Στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου γνωρίσαμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες ενός σημαντικού αριθμού γεωμετρικών σχημάτων (ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, τρίγωνο, τετράπλευρο, παραλληλόγραμμο, κύκλος, κανονικό πολύγωνο, πρίσμα, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος, σφαίρα). Τις ιδιότητες των σχημάτων, όπως π.χ. το *άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180^o*, τις διαπιστώσαμε με εμπειρικό τρόπο, κάνοντας κυρίως μετρήσεις με την βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων. Αυτός ο τρόπος μελέτης των γεωμετρικών σχημάτων, που συνιστά την Πρακτική Γεωμετρία, μας επιτρέπει να ανακαλύψουμε πολλές ιδιότητες τους, αλλά δεν εξασφαλίζει ότι αυτές ισχύουν γενικά, ανεξάρτητα από το συγκεκριμένο σχήμα το οποίο εξετάζουμε…] Η χρήση των μεθόδων της Πρακτικής Γεωμετρίας παρουσιάζει τα εξής μειονεκτήματα:

α) οι μετρήσεις δεν παρέχουν απόλυτη ακρίβεια.

β) τα συμπεράσματα των μετρήσεων ισχύουν μόνο για την περίπτωση που πραγματοποιήθηκαν

Για να εξασφαλίσουμε απόλυτη βεβαιότητα σχετικά με τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και να διατυπώσουμε ακριβείς και γενικές προτάσεις, χρειάζεται να επινοήσουμε μεθόδους που θα στηρίζονται στην άμεση παρατήρηση ή τις μετρήσεις. Στο σημείο αυτό ακριβώς αρχίζει η διαφοροποίηση της Πρακτικής από την Θεωρητική Γεωμετρία η όπως συνηθίσαμε να λέμε, την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η Ευκλείδεια γεωμετρία έχει ως αφετηρία ορισμένες πρωταρχικές έννοιες, όπως είναι το σημείο, η ευθεία, το επίπεδο. Στη συνέχεια ορίζει σταδιακά νέα σχήματα (π.χ. γωνία, παραλληλόγραμμο, τρίγωνα) και επαληθεύει τις ιδιότητές τους με την βοήθεια συλλογισμών.

- Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σίδερης: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α’ και Β’ Ενιαίου Λυκείου. 2001

«<u>Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας</u>

Η γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι προσιτό και πλούσιο, πρόσφορα για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται… Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο… με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να ήταν ακριβής και τα αποτελέσματα δεν γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από την Θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στο ότι προωθεί τη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επί μέρους συμπεράσματα… Τις γνώσεις η γεωμετρία τις θεμελιώνει δηλαδή τις οργανώνει σε σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν….χρησιμοποιώντας την διαδικασία που λέγεται απόδειξη και που στηρίζεται στους κανόνες της λογικής… Η Γεωμετρία προχωρά από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου και με τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, δηλαδή της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά. Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στη τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων μέσω μιας «αλγοριθμικής» διαδικασίας, ενός κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μια νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου περί το 440 π.Χ., και τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Με τη μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες αργότερα. Αναφέρουμε για παράδειγμα τη θεωρία των κωνικών τομών του Απολλωνίου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17^{ο} αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στις θεμελιώδεις αρχές της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της, καθώς και με τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας. Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Τον 18^{ο} αιώνα διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μόνζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται

από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μόνζ.
Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετιόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του $19^{ου}$ αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπολυαϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου. Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετριών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρη-μάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του $19^{ου}$ αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεωμετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.» (σελ. 5-6).
Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, έγκειται στη συστηματική χρήση της λογικής για τη θεμελίωση των γνώσεών μας για το χώρο, χωρίς να καταφεύγουμε σε μετρήσεις και στη διεξαγωγή συμπερασμάτων. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις διάσπαρτες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα συμπεράσματα, που έχουν εξαχθεί με την

εφαρμογή της αποδεικτικής διαδικασίας η οποία λέγεται απόδειξη και στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς εξελίσσεται αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωρεί από το πιο απλό στο πιο σύνθετο**».

Στα έξι πρώτα εισαγωγικά κείμενα παρουσιάζεται η δημιουργία της Γεωμετρίας το 300 π.Χ. με ιστορικά δεδομένα και θεωρίες σχετικές με την διαφορά του Γεωμετρικού Χώρου από τον Αισθητικό Χώρο. Δεν γίνεται με έκδηλο τρόπο η μετάβαση από την Πρακτική Γεωμετρία στην Θεωρητική Γεωμετρία. Οι ιστορικές αναφορές θα δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές να αντλήσουν πληροφορίες για τον τρόπο οργάνωσης και θεμελίωσης της Γεωμετρίας και επίσης θα τους βοηθήσουν να κατανοήσουν πως διατυπώθηκαν οι έννοιες, χωρίς να τους δημιουργήσουν κάποιον προβληματισμό ή αφορμή για συζήτηση ώστε να προκύψει κάτι ενδιαφέρον για την γεωμετρία.

Στο προτελευταίο βιβλίο απουσιάζουν τα εισαγωγικά πληροφοριακά σημειώματα. Επισημαίνονται τα μειονεκτήματα των μεθόδων της Πρακτικής Γεωμετρίας και αναφέρεται η διαφοροποίηση της Πρακτικής από την Θεωρητική Γεωμετρία. Τα ιστορικά σημειώματα υπάρχουν διάσπαρτα στο βιβλίο. Αυτό δίνει την αφορμή στον μαθηματικό να ζητήσει από τους μαθητές να αναζητήσουν συμπληρωματικές πληροφορίες. Η αξιοποίηση των ιστορικών παραθεμάτων και το συμπληρωματικό πληροφοριακό υλικό των μαθητών και του καθηγητή, εξασφαλίζουν τις προϋποθέσεις διεξαγωγής γόνιμης συζήτησης στην τάξη.

Στο τελευταίο βιβλίο παρουσιάζονται οι διαφορές της Πρακτικής από την Θεωρητική Γεωμετρία. Παρατίθενται στη συνέχεια την έννοια της απόδειξης. Παρουσιάζει την εξέλιξη της Γεωμετρίας από το 300 π.Χ. και εξής με εστίαση στον μετασχηματισμό της γεωμετρίας σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη από τον Ευκλείδη και στην δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Επίσης σχολιάζεται η συμβολή της Γεωμετρίας στη δημιουργία νέων κλάδων της μαθηματικής επιστήμης, όπως είναι η

Προβολική γεωμετρία, καθώς επίσης και η συνεισφορά της στην ανάπτυξη άλλων επιστημών. Τέλος η παρουσίασή του εκτείνεται ως και τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

3.2 Η ΑΜΦΙΣΒΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΥΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ένας πολύ σοβαρός λόγος που υπαγορεύει την ανάγκη διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Ελληνικό σχολείο, εκτός από τη διαχρονική μορφωτική αξία του μαθήματος, είναι οι ελληνικές καταβολές της γεωμετρίας ως επιστήμης. Η επιλογή διδασκαλίας του μαθήματος έχει ιδεολογικές προεκτάσεις και χρησιμοποιήθηκε ως μέσο γεφύρωσης του σύγχρονου Ελληνισμού με τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό εξυπηρετώντας συγκεκριμένες πολιτικές. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αποκτήσει η σχολική γεωμετρία σταθερά χαρακτηριστικά και η μορφή της διδασκαλίας να μην αλλάξει μέχρι το τέλος του 1950. Βέβαια στο ελληνικό σχολείο διδάχτηκαν μόνο τη γεωμετρία του Legendre και ποτέ τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (Θωμαΐδης, 1991).

Η σημερινή μορφή του μαθήματος της γεωμετρίας είναι συνέπεια ορισμένων κρίσιμων επιλογών που ακολούθησαν την μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» στη διάρκεια της δεκαετίας 1960 (Θωμαΐδης, 1996). Τον Νοέμβριο του 1959 διοργανώθηκε υπό την αιγίδα του Ο.Ο.Σ.Α. το σεμινάριο του Royaumont για την μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών της Μέσης Εκπαίδευσης που είχε στο οποίο συμμετείχε ενεργά η Ελλάδα. Η Ελλάδα αντιμετώπισε ισχυρή πίεση για κατάργηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών και την αντικατάστασή της από σύγχρονα νέα μαθηματικά. Ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne (1906-1992) εκφώνησε το διαβόητο σύνθημα «να φύγει ο Ευκλείδης». Μεταξύ των άλλων ανέφερε: «*Αυτή η δήλωσή μου ίσως σοκάρει μερικούς από εσάς, αλλά θα σας πω ισχυρά επιχειρήματα υπέρ αυτής. Θέλω αρχικά να αναφέρω ότι τρέφω βαθύτατο θαυμασμό για τα επιτεύγματα των Ελλήνων στα μαθηματικά. Θεωρώ δική τους δημιουργία την γεωμετρία, ίσως ένα από τα πιο εντυπωσιακά διανοητικά επιτεύγματα που πραγματοποίησε η ανθρωπότητα. Στους Έλληνες οφείλεται ότι μπορέσαμε να κτίσουμε το πανύψηλο οικοδόμημα της σύγχρονης επιστήμης…*» και συνεχίζει λέγοντας ότι «*αφού οι βασικές έννοιες της γεωμετρίας επεξεργάστηκαν από τα μέσα του 19^{ου} αιώνα και μετά διαχωρίζοντας ό,τι είναι θεμελιώδες από ένα χαοτικό σωρό αποτελεσμάτων χωρίς καμμιά σημασία εκτός από το να είναι σκόρπια υπολείμματα άκομψων μεθόδων ή παρωχημένης προσέγγισης*» (Θωμαΐδης, 2014).

Με τον τρόπο αυτό ο Dieudonne επιχείρησε ουσιαστικά να καταργήσει το έργο του Ευκλείδη που εκσυγχρόνισε ο Legendre το 1792 με το βιβλίο του «Στοιχεία Γεωμετρίας» συμβάλλοντας αποφασιστικά στην διάδοση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε όλο τον κόσμο. Η μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» εκτόπισε την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως μάθημα από όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου. Σήμερα μετά από 60 χρόνια περίπου οι βασικοί στόχοι της μεταρρύθμισης αυτής έχουν αποτύχει η διδασκαλία αλγεβρικών δομών και συνόλων ενώ η διδασκαλία άλλων τομέων συνεχίζει να επιβιώνει (π.χ. διδασκαλία Στατιστικής, Πιθανοτήτων και Διανυσματικού λογισμού). Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας σε όλο τον κόσμο παραμένει θολή. Ένας Άγγλος μαθηματικός και Παιδαγωγός ο Douglas Quadling είπε: «*Ο Ευκλείδης έχει φύγει, αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί χάος*» (Θωμαΐδης, 2014).

Στο ζήτημα της χρησιμότητας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί κανείς να παραθέσει ένα απόσπασμα από τις αυτοβιογραφικές σημειώσεις του Albert Einstein, συγκεκριμένα από γεγονότα της παιδικής και εφηβικής του ζωής που είχαν μεγάλη επίδραση στην μετέπειτα εξέλιξή του: «*Σε ηλικία 12 ετών δοκίμασα μια δεύτερη, τελείως διαφορετική έκπληξη: σ΄ ένα μικρό βιβλίο Ευκλείδειας επίπεδης γεωμετρίας(...) υπήρχαν ισχυρισμοί, για παράδειγμα όπως ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο, οι οποίοι αν και καθόλου προφανείς, μπορούσαν ωστόσο να αποδειχθούν με τέτοια βεβαιότητα, ώστε να μη χωρεί η παραμικρή αμφιβολία. Αυτή η σαφήνεια και βεβαιότητα μου προξένησαν μια εντύπωση που δεν μπορεί να περιγραφεί. Το γεγονός ότι τα αξιώματα έπρεπε να γίνουν δεκτά χωρίς απόδειξη δεν με ενόχλησε. Σε κάθε περίπτωση, μου αρκούσε πλήρως το γεγονός ότι, μπορούσα να στηρίζω τις αποδείξεις σε προτάσεις, η εγκυρότητα των οποίων ήταν για μένα αναμφισβήτητη»*

Η άσκηση ισχυρής πίεσης για κατάργηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τα αναλυτικά προγράμματα και η αντικατάσταση ή η αφομοίωσή της από σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες προκάλεσε σύγκρουση ανάμεσα στο αίτημα για εκσυγχρονισμό της εκπαίδευσης και για τεχνολογική ανάπτυξη από τη μια μεριά και στην παραδοσιακή εκπαιδευτική πολιτική προβολής του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού από την άλλη. Η σύγκρουση αυτή οδήγησε τελικά στην υιοθέτηση μιας συμβιβαστικής λύσης. Έτσι, το αναλυτικό πρόγραμμα του 1968 συνδύαζε την ιδιαίτερη έμφαση στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση τύπου Hilbert και στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, που εξέφραζαν τον εκσυγχρονισμό, με τη διατήρηση μιας εκτεταμένης παραδοσιακής ύλης και προβλημάτων πάνω στη γεωμετρία του τριγώνου, τους γεωμετρικούς τόπους και τις γεωμετρικές κατασκευές, δηλαδή της ύλης που οι μεταρρυθμιστές επεδίωκαν να καταργήσουν (Θωμαΐδης, 1996).

Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μια φοβερή διόγκωση της ύλης την οποία σε μεγάλο βαθμό συντηρούσαν οι εισαγωγικές εξετάσεις στα Α.Ε.Ι.. Είναι χαρακτηριστικό ότι, ενώ από το 1940 έως το 1968 κυκλοφόρησαν δύο μόνο σχολικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας, στο ίδιο χρονικό διάστημα εκδόθηκαν πάρα πολλές συλλογές εξωσχολικών βιβλίων με την ύλη αυτής της γεωμετρίας για τους υποψήφιους των πανελλαδικών εξετάσεων (Θωμαΐδης, 2014). Από την άλλη μεριά έναρξη της διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας από την Γ΄ Γυμνασίου (Θωμαΐδης, 1991) και από την άλλη η υπερβολική έμφαση στην αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας στο σχολικό βιβλίο του Ι. Ιωαννίδη και η εισαγωγή νέας ύλης πάνω στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς αποσύνδεσαν τις γεωμετρικές έννοιες από την εμπειρία και τις αισθήσεις (Θωμαΐδης, 1991). Τέλος, ενώ το μάθημα της γεωμετρίας παλαιότερα διδασκόταν 4 χρόνια στο σχολείο και εξεταζόταν στις εισαγωγικές εξετάσεις τα τελευταία χρόνια διδάσκεται 2 χρόνια χωρίς να υπάρχει το κίνητρο των πανελληνίων. Στους παραπάνω λόγους πιθανόν να εντοπίζονται και οι αιτίες της μετέπειτα υποβάθμισης και παρακμής του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

3.3 ΦΕΚ- ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στο αναλυτικό πρόγραμμα που δημοσιεύθηκε στο ΦΕΚ του 1969 αναφέρονται οι γενικοί στόχοι διδασκαλίας της γεωμετρίας:

α. Η διέγερση και συνειδητοποίηση του a priori γεωμετρικού εφοδίου του ανθρωπίνου πνεύματος, με βάση τα εκ της εμπειρίας προβαλλόμενα γεωμετρικά προβλήματα και ειδικώτερον, η ακριβής αντίληψη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και των αυτών σχέσεων.

β. Η εκμάθησις τρόπων αριθμητικού λογισμού.

γ. Η άσκησις των μαθητών εις την διατύπωσιν των πάσης φύσεως σκέψεων των κατά τρόπον μονοσήμαντον και σαφή και εις την απόδειξιν αυτών κατά το μαθηματικόν υπόδειγμα, προς πρόληψιν παρανοήσεων και συγχύσεων» (ΦΕΚ Α 225-10.11.1969).

Η κατάσταση αυτή άλλαξε μετά το 1976, όταν η δευτεροβάθμια εκπαίδευση χωρίστηκε σε Γυμνάσιο-Λύκειο και καθιερώθηκε η διδασκαλία της Αναλυτικής Γεωμετρίας αρχικά στην Γ΄ λυκείου και σταδιακά στην Β΄ Λυκείου. Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας περιορίσθηκε στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Με την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1976 αρχίζει μια μεγάλη περίοδος παρακμής για την σχολική γεωμετρία. Η ύλη συρρικνώνεται και η σχολική γεωμετρία εξοστρακίζεται σταδιακά από την εξεταστέα ύλη των εισαγωγικών εξετάσεων στα Α.Ε.Ι. Από το 1983 και μετά οι εξετάσεις των πανελλαδικών εξετάσεων διεξάγονται μόνο με την ύλη των μαθημάτων της Γ΄ Λυκείου, ενώ αποκλείεται από την εξεταστέα ύλη η θεωρητική γεωμετρία, γεγονός που συνετέλεσε στην πλήρη υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο σχολείο (Θωμαΐδης, 1991).

Το ΦΕΚ Α 270-20/09/1977 αναφέρει τους γενικούς και ειδικούς σκοπούς:

ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ

α. Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στην γενίκευση, στην κριτική, και στις λογικές διεργασίες καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.

β. Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, επειδή τα μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη, τη δημιουργική φαντασία (…) καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

γ. Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη εννοιών και μεγεθών (…) ιδιαίτερα εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πρακτικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με την σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

δ) Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.

ε) Η κατανόηση του ρόλου των μαθηματικών στους διαφόρους τομείς της γνώσεως και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για την συνέχιση των σπουδών τους.

ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΟΙ ΣΚΟΠΟΙ

α) Να κατανοήσει ο μαθητής βαθύτερα και να εμπεδώσει τις γνώσεις και ακόμα να αναπτύξει και να χρησιμοποιήσει πιο συνειδητά τις λογιστικές ικανότητες που άρχισε να αποκτά στο δημοτικό σχολείο.

β) Να εξασφαλίσει σε όποιον δε συνεχίσει σπουδές μετά την αποφοίτησή του από το Γυμνάσιο τις απαραίτητες γνώσεις που θα χρειάζεται και θα χρησιμοποιήσει στην ζωή του.

γ) Να ασκήσει σε κάθε ευκαιρία το μαθητή στην αποσαφήνιση εννοιών, στην αιτιολόγηση ενεργειών, στην ανάλυση και «μαθηματικοποίηση» καταστάσεων.

δ) Να εισάγει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής αποδείξεως.

ε) Να φέρει σε επαφή το μαθητή με ποικίλα θέματα εφαρμοσμένων μαθηματικών, ώστε να μπορέσει να ενταχθεί φυσιολογικά στο σύγχρονο κοινωνικό περιβάλλον.

Από το 1979 έως και το 1988 οι συντάκτες των αναλυτικών προγραμμάτων δεν προχωρούν σε καμιά ειδική αναφορά για τον σκοπό και την διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας παρά μόνο γενικές διατυπώσεις και οδηγίες για την διδασκαλία των μαθηματικών. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία αναφέρονται μόνο στην κατανομή του χρόνου διδασκαλίας ανά κεφάλαιο, ενώ αντιθέτως για την άλγεβρα, σε αυτό το διάστημα υπάρχουν πολλές και λεπτομερείς αναφορές.

Από το 1988 και εξής δίνονται οδηγίες διδασκαλίας της γεωμετρίας προς τους καθηγητές και διατυπώνονται οι γενικοί και ειδικοί σκοποί (Π.Ι., 1988) για την διδασκαλία της γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου.

ΓΕΝΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ:

- Να κατανοήσουν οι μαθητές το ρόλο των αξιωμάτων στη θεμελίωση και ανάπτυξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας και γενικότερα ενός κλάδου των Μαθηματικών. Να κατανοήσουν ακόμα ότι είναι φυσικό η επιλογή των αξιωμάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας να γίνεται έτσι ώστε να εκφράζουν «αυτονόητα» συμπεράσματα εποπτείας.

- Να εξοικειωθούν με την «αποδεικτική διαδικασία»
- Να κατανοήσουν τι σημαίνουν οι όροι «γεωμετρική κατασκευή» και «γεωμετρικός τόπος».

ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΚΟΠΟΙ:

- Να γνωρίσουν οι μαθητές τους βασικούς γεωμετρικούς τόπους και να τους χρησιμοποιούν σε απλές γεωμετρικές κατασκευές (με κανόνα και διαβήτη)
- Όχι στην «ασκησιολογία» αλλά στην κατοχύρωση και διερεύνηση των γνώσεων που έχουν οι μαθητές από Γυμνάσιο.
- Η μύηση στην αποδεικτική διαδικασία.
- Η πρώτη επαφή τους με απλά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και γεωμετρικών τόπων (Π.Ι., 1988; Θωμαΐδης, 1991).

Σύμφωνα με τους παραπάνω σκοπούς ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει τον ρόλο των αξιωμάτων και τη σημασία των θεμελιωδών νόμων της λογικής, ώστε να καταστεί βαθμιαία ικανός να συνειδητοποιήσει και να ελέγξει μια συλλογιστική πορεία. Όμως στη σχολική διδασκαλία της γεωμετρίας σχεδόν αγνοείται το πρώτο κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου όπου ο μαθητής καλείται να κατανοήσει την ανάγκη της αξιωματικής θεμελίωσης στην γεωμετρία, ενώ οι διδάσκοντες βιάζονται να φτάσουν στο πραγματικό αντικείμενο διδακτικής και μαθησιακής ενασχόλησης που είναι η πρακτική και θεωρητική άσκηση των μαθητών στα τρίγωνα, τα τετράπλευρα και τον κύκλο. Επίσης τα βασικά κεφάλαια των γεωμετρικών τόπων και κατασκευών, καθώς και τα στοιχεία της γεωμετρίας του χώρου σχεδόν δεν διδάσκονται με τη δικαιολογία ότι ο χρόνος δεν επαρκεί ή ότι η θέση αυτών των κεφαλαίων είναι στο τέλος της διδασκόμενης ύλης. Έτσι οι σκοποί που τέθηκαν για την διδασκαλία της σχολικής θεωρητικής γεωμετρίας βρίσκονται σε αντίφαση με την πραγματική διδασκαλία στην τάξη. Το βασικό γνώρισμα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, η έννοια της γεωμετρικής κατασκευής, σχεδόν δεν διδάσκεται. Εντούτοις, η επίκληση της ελληνικότητας του μαθήματος μάλλον δεν αφήνει και πολλά περιθώρια εκσυγχρονισμού (Θωμαΐδης, 1991).

Τίθεται λοιπόν επιτακτικό το αίτημα να γίνει μια αποσαφήνιση για το ρόλο της θεωρητικής γεωμετρίας μέσα στην εκπαίδευση. Αν θέλουμε να διατηρήσουμε την Ευκλείδεια παραδοσιακή γεωμετρία στο σχολείο, σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (1991) δεν χρειάζονται νέα βιβλία. Εκτός από τα υπάρχοντα κατά καιρούς σχολικά εγχειρίδια κυκλοφορούν πολύ καλά εξωσχολικά βιβλία από την εποχή που η γεωμετρία ήταν εξεταζόμενο μάθημα στις πανελλήνιες εξετάσεις. Αυτά τα βιβλία καλύπτουν άριστα τις ανάγκες διδασκαλίας της τόσο σημαντικής Ευκλείδειας γεωμετρίας. Αν όμως θέλουμε να εκσυγχρονιστεί το μάθημα, τότε πρέπει να σκεφτούμε τη διεύρυνση των γεωμετρικών γνώσεων από το γυμνάσιο και τη διασύνδεσή τους με άλλους κλάδους ή κατευθύνσεις της μαθηματικής επιστήμης. Για παράδειγμα, η χρησιμοποίηση των συντεταγμένων, των διανυσμάτων, της τριγωνομετρίας δίνει αρκετές φορές πιο απλές και πιο ενδιαφέρουσες αποδείξεις σε προτάσεις, θεωρήματα και προβλήματα της γεωμετρίας. Επίσης θα μπορούσαμε να διευρύνουμε το μάθημα της θεωρητικής γεωμετρίας ενσωματώνοντας σ' αυτό έννοιες και μεθόδους από την Διανυσματική και την Αναλυτική Γεωμετρία (Θωμαΐδης, 1996). Θα είχαμε τη δυνατότητα με αυτόν τον τρόπο να συνδέσουμε τα διανύσματα και την αναλυτική γεωμετρία, που διδάσκονται οι μαθητές στο Γυμνάσιο, με την διδασκόμενη ύλη του μαθήματος στη Β΄ λυκείου και να πολλαπλασιάσουμε τις αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων. Μέχρι το 1990 εκδόθηκαν 6 βιβλία γεωμετρίας, σχετικά μεγάλος αριθμός σχολικών εγχειριδίων θεωρητικής γεωμετρίας, αν σκεφτεί κανείς ότι οι διδακτικοί σκοποί του μαθήματος της γεωμετρίας δεν είχαν αλλάξει και το μάθημα αυτό διατηρούσε όλα αυτά τα χρόνια σταθερά χαρακτηριστικά. Ακολούθησαν σε γενικές αρχές την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, αλλά σταδιακά μειώθηκε ο αριθμός των αξιωμάτων με ταυτόχρονη προβολή της εμπειρικής προέλευσης των αρχικών γεωμετρικών εννοιών. Διαμορφώθηκε ένα ψευδο-αξιωματικό σύστημα θεμελίωσης για σχολική χρήση που συνδύαζε στοιχεία από τον Ευκλείδη, τον Legendre, και τον Hilbert (Θωμαΐδης, 1996).

Διαπιστώνονται, όμως, διαφορές ανάμεσα στα σχολικά εγχειρίδια ως προς το αξιωματικό σύστημα θεμελίωσης που υιοθέτησαν. Στο βιβλίο της γεωμετρίας του Χ. Παπανικολάου αναμειγνύονται στοιχεία από τις γεωμετρίες του Legendre και Hilbert, ενώ στο βιβλίο των Δ. Παπαμιχαήλ-Α. Σκιαδά εφαρμόζεται μόνο η γεωμετρία του Hilbert. Ο Αλιμπινίσης Α. στη Γεωμετρία του αποδίδει στα αξιώματα έναν «εργαλειακό» χαρακτήρα αξιοποιώντας ένα μικρό αριθμό αξιωμάτων, που είναι γνωστά στους μαθητές από την διδασκαλία των μετρήσεων των ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών σε προηγούμενες σχολικές τάξεις. Με τον τρόπο αυτό γεφυρώνεται το χάσμα ανάμεσα στις γεωμετρικές γνώσεις που είχαν αποκτήσει οι μαθητές στο γυμνάσιο και τη γεωμετρία που διδάσκονται στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου (Θωμαΐδης, 1996)

Το 1997 ψηφίστηκαν νόμοι (Ν.2525/1997) για το Ενιαίο Λύκειο, πρόσβασης των αποφοίτων του στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση αλλάζει η διαδικασία των εξετάσεων για πρόσβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στο συγκεκριμένο νόμο αναφέρονται και οι στόχοι για το Ενιαίο Λύκειο:

- η παροχή γενικής παιδείας υψηλού επιπέδου,
- η ανάπτυξη ικανοτήτων, της πρωτοβουλίας, της δημιουργικότητας και της κριτικής σκέψης των μαθητών,
- η προσφορά στους μαθητές των απαραίτητων γνώσεων και εφοδίων για τη συνέχιση των σπουδών τους στην επόμενη εκπαιδευτική βαθμίδα,
- η καλλιέργεια στους μαθητές δεξιοτήτων που θα τους διευκολύνουν την πρόσβαση, ύστερα από περαιτέρω εξειδίκευση ή κατάρτιση, στην αγορά εργασίας…» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1998).

Το 1999 με το (ΦΕΚ 1342/Β/30-6-1999) καθορίστηκε το Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των μαθηματικών γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου που αναφέρεται στις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές και τον τρόπο με τον οποίο θα επιτευχθεί η απόκτηση αυτών των γνώσεων και δεξιοτήτων. Πιο συγκεκριμένα:

- Η διδασκαλία των Μαθηματικών οργανώνεται στη βάση μιας αρμονικής συνύπαρξης ενός σχεδιασμού κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού της επιθυμητής τελικής προσπάθειας.
- Μια δραστηριότητα πρέπει να είναι κατανοητή και χωρίς παρανοήσεις, να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια, να ενθαρρύνει την συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, να μην επιτρέπει έμμεση προσέγγιση σε μοναδική λύση, να είναι πλούσια σε εμπλεκόμενες έννοιες και να μην προτείνει ασκήσεις δυσεπίλυτες για τον μαθητή.
- Οι ερευνητικές εργασίες στο γυμνάσιο θα προετοιμάσουν τους μαθητές ώστε να αντιληφθούν το νόημα της μαθηματικής απόδειξης στο λύκειο. Τα τελευταία είκοσι χρόνια παγκοσμίως οι μαθηματικοί συμφωνούν ότι μια απόδειξη είναι ένα σύνολο επιχειρημάτων που στοχεύουν στην επικύρωση ενός ισχυρισμού. Η ουσία της

απόδειξης βρίσκεται κυρίως στη διαπραγμάτευση του νοήματος μέσω της κοινωνικής διαδικασίας, παρά στην εφαρμογή τυπικών κριτηρίων εκ των έξωθεν.

- Όπως είθισται, στην παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών παρουσιάζεται αρχικά η θεωρία που θέλουμε να διδάξουμε στην τελική της μορφή, ενώ θα έπρεπε να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να συμμετάσχουν σε όλες τις φάσεις του δημιουργικού κύκλου της μαθηματικής έρευνας.
- Η προσέγγιση μιας έννοιας από τους μαθητές πρέπει να διαθέτει πολλαπλότητα και συγχρόνως πρέπει να υπάρχουν δικλείδες ασφαλείας όπως: η διδασκαλία μέσω αναπαραστάσεων, η διαθεματική σύνδεση γνωστικών αντικειμένων (Φυσική-Βιολογία-Περιβαλλοντολογική Εκπαίδευση κ.α.) που προσφέρουν υλικό για τη μαθηματική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και, τέλος, αναφορά στην **ιστορία των μαθηματικών.** Η ιστορία των μαθηματικών είναι ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες και ερεθίσματα για την αποτελεσματική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών.
- Τέλος, κάθε μαθηματική έννοια έχει διπλή διδακτική υπόσταση. Είναι συγχρόνως εργαλείο και αντικείμενο μάθησης. Η μαθηματική έννοια αποτελεί αρχικά η ίδια αντικείμενο μελέτης και στη συνέχεια αξιοποιείται ως εργαλείο για την κατασκευή και κατανόηση άλλων εννοιών η διαδικασιών.

Από το 1999 έως και σήμερα έχουν εκδοθεί δύο βιβλία θεωρητικής γεωμετρίας για το σχολείο,

- Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου από τους Ι. Θωμαΐδη, Α. Πούλο, Θ. Ξένος. 1999.
- Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου από τους Η. Αργυρόπουλο κ.α. 2001.

Στα δύο αυτά τελευταία βιβλία παρατηρούμε μια μεγάλη αλλαγή στο τρόπο συγγραφής και διάταξης της ύλης τους. Αρχικά γίνεται αναφορά σε ορισμούς και αιτήματα, ακολουθούν τα θεωρήματα με ορισμένες αποδείξεις και στη συνέχεια παρατίθενται κάποια πορίσματα. Η θεωρία συνοδεύεται από ερωτήσεις κατανόησης προτάσεις Σ-Λ, και ασκήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας τις οποίες οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν αξιοποιώντας την προηγούμενη γνώση. Έτσι ο μαθητής σταδιακά εφαρμόζει όσα έχει κατανοήσει και δοκιμάζει τις μαθησιακές γνώσεις του σε ασκήσεις με διαβαθμισμένη δυσκολία. Επίσης υπάρχουν ιστορικά σχόλια και σημειώματα, καθώς και εφαρμογές της θεωρίας σε πρακτικά ζητήματα. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου και των δύο βιβλίων γίνεται ανακεφαλαίωση των βασικών σημείων της θεωρίας. Τα δύο αυτά βιβλία αν και έχουν ένα ήπιο αξιωματικό σύστημα και παραθέτουν αποδείξεις χαμηλής δυσκολίας, υποστηρίζουν ουσιαστικά μια αποτελεσματική διδασκαλία του μαθήματος.

Όλα αυτά τα βιβλία λοιπόν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές και στο γεωμετρικό περιεχόμενό τους όσο και στον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών γνώσεων.

Στην εισαγωγή όλων αυτών των βιβλίων, εκτός των δύο τελευταίων, γίνεται μια αναφορά στις καταβολές της γεωμετρίας, στην εξέλιξη και στην ανάπτυξη που σημείωσε σταδιακά κατά τα χρόνια της αρχαιότητας έως και την καθιέρωσή της ως επιστήμης. Στα δύο τελευταία βιβλία η παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης της γεωμετρίας επεκτείνεται έως και τη σύγχρονη εποχή ενώ παράλληλα σχολιάζεται και η διάχυσή της σε όλους τους παραδοσιακούς κλάδους της μαθηματικής επιστήμης αλλά και σε νεότερους όπως για παράδειγμα η προβολική γεωμετρία. Διαπιστώνεται λοιπόν ότι:

α) η γεωμετρία έχει διαχυθεί σε όλους τους κλάδους της γεωμετρίας

β) οι επιδράσεις εντοπίζεται στην θεωρητική Φυσική

γ) η γεωμετρία επλέκεται σε μεγάλο βαθμό σε σχέσεις αλληλεπίδρασης, με μεγάλο φάσμα του πολιτισμικού γίγνεσθαι σε κάθε εποχή (Στράντζαλος, 2010).

Στα δύο αυτά βιβλία είναι πρόδηλη η διαφορά της Πρακτικής από την Θεωρητική Γεωμετρία. Οι μαθητές κατανοούν τη μετάβαση από την παρατήρηση και τους υπολογισμούς στην εφαρμογή της αποδεικτικής διαδικασίας και της αναζήτησης των αιτιών που δικαιολογούν τις όποιες μαθηματικές, αποδεικτικές εφαρμογές.

Στο ΦΕΚ 1168/Β/8-6-2011 αναφέρεται ότι ένας από τους στόχους στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου είναι η θεώρηση των μαθηματικών ως πολιτισμικό και ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα. Πιο συγκεκριμένα, για το μάθημα της γεωμετρίας αναφέρεται ότι αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών στη Θεωρητική Γεωμετρία, η οποία είναι το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να διδάξει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των μαθηματικών. Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας και της έννοιας της απόδειξης στα μαθηματικά …]. Στη διδασκαλία της Γεωμετρίας ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας και ιδιαίτερα τα παρεχόμενα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας. Έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση τέτοιων λογισμικών μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διερευνούν, να διατυπώνουν υποθετικές κρίσεις, να κατανοούν γενικότερα τη Γεωμετρία και να αναπτύσσουν μαθηματικούς συλλογισμούς. Ωστόσο η επιλογή από τον καθηγητή του τρόπου εφαρμογής των δυναμικών ψηφιακών εργαλείων στην τάξη καθορίζει και τον βαθμό αποτελεσματικότητάς τους στη μάθηση.

Από την ανάγνωση των ΦΕΚ που δημοσιεύτηκαν από το 1969 μέχρι και σήμερα, διαπιστώνεται ότι για πρώτη φορά το 1999 γίνεται αναφορά στην ιστορία των μαθηματικών «*ως ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για διδακτική προσέγγιση μιας μαθηματικής έννοιας*». Βεβαίως στα επόμενα χρόνια εισάγονται στα σχολικά εγχειρίδια της γεωμετρίας του Λυκείου κεφάλαια με ιστορικές αναφορές. Το 2007 εμπλουτίζονται με περισσότερα ιστορικά σημειώματα τα καινούργια βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου και μόλις το 2011 προτείνεται να θεωρηθούν τα μαθηματικά '*ως πολιτισμικό, ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα'*. Για να μπορέσει ο μαθηματικός να ασχοληθεί με την ιστορία των μαθηματικών πρέπει αρχικά να κάνει σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων (παραθεμάτων) και στη συνέχεια να προτείνει τις σωστές οδηγίες διδακτικής επεξεργασίας τους στους μαθητές. Απαιτείται λοιπόν η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών μαθηματικών στις κατάλληλες μεθόδους και εφαρμογές της διδακτικής αξιοποίησης των μαθηματικών και η παροχή κατάλληλου υλικού. Επιβάλλεται όμως πρώτα ο ίδιος ο μαθηματικός να αναθεωρήσει τις παραδοχές του για την ιστορία των μαθηματικών και στη συνέχεια να προσπαθήσει να διαμορφώσει μια θετικότερη στάση των μαθητών προς τα μαθηματικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{O}

4.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Η φοίτησή μου στο μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών στη «Διδακτική των Μαθηματικών» και ιδιαίτερα η μελέτη του μαθήματος της Ιστορίας των Μαθηματικών με οδήγησαν στην εκπόνηση της εργασίας με θέμα: **Σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας με αξιοποίηση ιστορικών κειμένων.**

Θα χρησιμοποιήσουμε πρωτότυπες πηγές (αποδείξεις) από ιστορικά βιβλία τις Γεωμετρίας και συγκεκριμένα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη από τη γαλλική έκδοση Produire et lire des textes de demonstration (2001) και από τα σχολικά βιβλία της γεωμετρίας των τελευταίων 60 χρόνων. Θα δώσουμε στους μαθητές ένα γνωστό θεώρημα με όλες τις αποδείξεις που έχουν διαχρονικά προταθεί. Αναμένεται ότι οι μαθητές μέσω αυτής της διδακτικής εφαρμογής να κατανοήσουν ότι η γεωμετρία δεν εξαντλείται στην απόδειξη των θεωρημάτων και τις λύσεις των ασκήσεων. Με την εισαγωγή της ιστορίας και της διδακτικής αξιοποίησης των ιστορικών κειμένων μπορεί να αναδειχθούν η εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης και ο τρόπος οργάνωσης και διατύπωσης του μαθηματικού και αποδεικτικού λόγου. Επίσης οι μαθητές θα παρακολουθήσουν τις αλλαγές στη χρήση του σημειωτικού συστήματος των μαθηματικών και θα καλλιεργήσουν τις μεταγλωσσικές δεξιότητές τους. Οι μαθητές θα παρουσιάσουν και θα επεξεργαστούν τις ιστορικές πηγές με την βοήθεια των καθηγητών, μαθηματικού και φιλολόγου, και θα συνδέσουν τις αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων με το ευρύτερο μαθηματικό, φιλοσοφικό και ιστορικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύχθηκαν, αμφισβητήθηκαν και τελικά καθιερώθηκαν.

Οι μαθητές στα πλαίσια εκπόνησης των δημιουργικών εργασιών τους θα έχουν την ευκαιρία να συνεργαστούν με τους συμμαθητές τους σε ομάδες και να αξιοποιήσουν τις κεκτημένες γνώσεις και τις ευρύτερες δεξιότητές τους όχι μόνο στην κατανόηση μιας απόδειξης ενός θεωρήματος αλλά και στην αναζήτηση και στην επεξεργασία των πηγών, καθώς και στην παρουσίαση των εργασιών τους στην ολομέλεια της τάξης. Η διδασκαλία θα στοχεύει στην ανάπτυξη της μαθηματικής ευχέρειας των μαθητών και στην καλλιέργεια της κριτικής και αναλυτικής σκέψης τους με τρόπο που διευκολύνει την αυτενέργεια και την παραγωγή μαθηματικού συλλογισμού από τους ίδιους τους μαθητές, όπως η κριτική επεξεργασία των αποδείξεων διακεκριμένων μαθηματικών και κυρίως η ενθάρρυνση των μαθητών για παραγωγή και διατύπωση προσωπικών εναλλακτικών αποδείξεων του υπό μελέτη θεωρήματος. Επίσης αναμένεται ότι οι μαθητές θα καλλιεργήσουν κριτική ιστορική σκέψη συνδέοντας την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και του μαθηματικού σημειωτικού συστήματος με το πολιτισμικό και κοινωνικό πλαίσιο της εποχής τους.

Η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να κάνει τον μαθητή να δει τα μαθηματικά πιο φιλικά και ενδιαφέροντα. Έχει παρατηρηθεί ότι η ιστορία των μαθηματικών προκάλεσε το ενδιαφέρον όχι μόνο των αδιάφορων μαθητών, αλλά και αυτών που είχαν προβλήματα συμπεριφοράς (Ponza, 1998).

Ο καθηγητής θα διανείμει στους μαθητές φύλλα εργασίας με τα πρωτότυπα ιστορικά κείμενα συνοδευόμενα από τη μετάφρασή τους στη νέα ελληνική. Οι προτεινόμενες ερωτήσεις και διδακτικές δραστηριότητες θα καλύψουν ένα ευρύ πεδίο μάθησης συσχετίζοντας το γνωστικό αντικείμενο της γεωμετρίας με την ιστορία και θα διαμορφώσουν ένα πλούσιο σε ερεθίσματα περιβάλλον μάθησης, προσιτό και ενδιαφέρον για τους περισσότερους αν όχι για όλους τους μαθητές.

4.2 ΘΕΣΜΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Για την υλοποίηση των διδακτικών στόχων της διδακτικής παρέμβασής μας επιλέχθηκε η αξιοποίηση του δυναμικού περιβάλλοντος μάθησης που δημιουργεί η αποτελεσματική εφαρμογή του θεσμού των δημιουργικών εργασιών για τις πρώτες τάξεις του Λυκείου. Όπως θα επιβεβαιωθεί από την παρουσίαση του σχετικού νομοθετικού πλαισίου, οι διδακτικές αρχές και οι διδακτικοί στόχοι του θεσμού των δημιουργικών εργασιών ανταποκρίνονται στο αίτημα που θέσαμε για την υιοθέτηση της ολιστικής και κριτικής προσέγγισης της διδασκαλίας της γεωμετρίας και για την υλοποίηση συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, όπως είναι η ανάπτυξη του (κριτικού) μαθηματικού, γλωσσικού γραμματισμού και της ιστορικής επίγνωσης των μαθητών και η παράλληλη καλλιέργεια των κοινωνικών δεξιοτήτων τους.

Σύμφωνα με το (Ν. 4521/2018, παρ.5, αρθ.34) «(…) *οι δημιουργικές εργασίες καθιερώνονται ως υποχρεωτικές στο Γενικό Λύκειο, καθώς κρίνεται αναγκαίο να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στην δημιουργική σκέψη και δράση. Η δημιουργική εργασία αποτελεί διδακτική πρακτική που ενισχύει την ενεργό εμπλοκή των μαθητών/τριών στη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης προωθώντας την κριτική, δημιουργική σκέψη και δράση, μέσα σε ένα παιδαγωγικό κλίμα ελεύθερης και ισότιμης επικοινωνίας των* *μελών της σχολικής τάξης και αμοιβαίας δέσμευσης τους στην επιτέλεση ενός έργου. Δίνει επίσης έμφαση στις αρχές της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, έτσι ώστε κάθε μαθητής/τρια να ωφελείται με συγκεκριμένο τρόπο προσαρμοσμένο στις ιδιαίτερες ανάγκες και τα ιδιαίτερα ενδιαφέροντά του/της.*

Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές/τριες καλούνται είτε να επιλύσουν με τρόπο δημιουργικό ένα πρόβλημα-ερώτημα που τους κινεί το ενδιαφέρον και το οποίο σχετίζεται με κάποιο θέμα της διδασκόμενης ύλης, σε ένα ή περισσότερα μαθήματα, εμβαθύνοντας τις γνώσεις τους γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα ή/ και αναπλαισιώνοντάς τες με τρόπο κριτικό, πρωτότυπο, ευρηματικό. Είτε να εκφραστούν δημιουργικά, μέσα από ένα δικό τους καλλιτεχνικό έργο, εμπνεόμενοι από κάποια ενότητα που έχουν μελετήσει. Είτε να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν μια κατασκευή/ ένα τέχνημα, που σχετίζεται με κάποια διδακτική ενότητα.

Οι δημιουργικές εργασίες αφορούν όλα τα μαθήματα Α΄ και Β΄ λυκείου υλοποιούνται στο πλαίσιο των μαθημάτων και είναι ομαδικές.

Τα προτεινόμενα θέματα πρέπει να είναι ανάλογα του διατιθέμενου χρόνου (εντός σχολείου) και καλό είναι να προκύπτουν ως αποτέλεσμα συζήτησης ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς και μαθητές/τριες του τμήματος, ώστε να ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και στις προσλαμβάνουσες παραστάσεις τους, και να τους κινούν την περιέργεια και να τους παρακινούν σε δράση. Κάθε δημιουργική εργασία αναφέρεται και υλοποιείται σε ένα συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο, ενώ είναι δυνατόν να καλύπτει και άλλο η άλλα, προσλαμβάνοντας έτσι διαθεματικό – διεπιστημονικό χαρακτήρα.

Τα θέματα των δημιουργικών εργασιών εντάσσονται στους ακόλουθους δύο πυλώνες:
Θ.Π. 1 Ανθρωπιστικές-Κοινωνικές επιστήμες
Θ.Π. 2 Φυσικών-Μαθηματικών-Πληροφορικών επιστημών και Φυσικής αγωγής.

Οι εκπαιδευτικοί προτείνουν στα τμήματα θέματα με βάση τις διδακτικές ενότητες που θα έχει επεξεργαστεί και συζητήσει στην τάξη, τις παραλλαγές των θεμάτων η άλλες ιδέες που θα καταθέσουν οι μαθητές/τριες. ***Καλό θα είναι κάθε ομάδα να ασχοληθεί με διαφορετικά θέματα ή διαφορετικό θέμα ή υπόθεμα ενός κοινού θέματος ώστε η παρουσίαση της δημιουργικής εργασίας να διατηρήσει το ενδιαφέρον της***

ολομέλειας του τμήματος*. Είναι όμως δυνατόν και όλες οι ομάδες να ασχοληθούν με ένα θέμα, εφόσον αυτό επιδέχεται πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις ή και λύσεις».*

Με βάση αυτές τις οδηγίες για τις δημιουργικές εργασίες θα παρουσιάσουμε την διδακτική μας πρόταση. Στο τέλος αυτής της παρουσίασης θα αποτιμήσουμε τα αποτελέσματα εφαρμογής του προτεινόμενου διδακτικού σχεδιασμού και θα απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουμε θέσει.

4.3 ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1. Να ενθαρρύνουμε τους μαθητές/τριες, μέσω της εκπόνησης δημιουργικών εργασιών να διερευνήσουν τους συσχετισμούς ωρίμανσης της μαθηματικής σκέψης με τις ιστορικές συνθήκες παραγωγής της, ώστε να εμπλουτίσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους και να αποκτήσουν ενδιαφέρον για τη γεωμετρία.

2. Να αναπτύξουν κριτική και αναλυτική σκέψη μελετώντας τη διαδικασία εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης και οργάνωσης του μαθηματικού αποδεικτικού λόγου στον χρόνο.

3. Να αναγνωρίζουν τις αλλαγές που σημειώθηκαν διαχρονικά στη χρήση του μαθηματικού σημειωτικού συστήματος και της μαθηματικής γλώσσας.

4. Να αποτιμήσουν τις αλλαγές που επέφερε η προτεινόμενη διδασκαλία της Θεωρητικής γεωμετρίας στις στάσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών/τριών για το μάθημα της γεωμετρίας.

<u>Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι</u>:

Α. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές και οι μαθήτριες, αφού μελέτησαν συγκριτικά διαφορετικούς τρόπους απόδειξης του ίδιου θεωρήματος, εντόπισαν και κατανόησαν τις διαφορές και ομοιότητες στον τρόπο εφαρμογής των αποδεικτικών μεθόδων, στη δομή και στην οργάνωση των μαθηματικών αποδείξεων από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι και σήμερα;

Β. Πώς σχολίασαν οι μαθητές και οι μαθήτριες την εξέλιξη της μαθηματικής γλώσσας και των μαθηματικών συμβόλων από την εποχή του Ευκλείδη έως σήμερα.

Γ. Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός επηρέασε τις στάσεις και το επίπεδο ενδιαφέροντος και ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών και μαθητριών - και μάλιστα αυτών με μειωμένο ενδιαφέρον και με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά - στο μάθημα της γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

5.1 Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Η παρούσα έρευνα διεξήχθη το σχολικό έτος 2018-2019 στο Γενικό Λύκειο Πολυκάστρου σε μαθητές και μαθήτριες της Α΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα στην έρευνα συμμετείχαν 24 μαθητές εκ των οποίων 7 ήταν αγόρια και 17 κορίτσια. Από το σύνολο των συμμετεχόντων μαθητών οι 17 μαθητές δήλωσαν ότι προσανατολίζονταν προς τις θετικές σπουδές ενώ οι υπόλοιποι 7 μαθητές προς τις ανθρωπιστικές σπουδές. Επίσης, το ενδιαφέρον των μαθητών για το μάθημα της γεωμετρίας εκτός κάποιων εξαιρέσεων δεν ήταν υψηλό. Δέκα (10) μαθητές με χαμηλές επιδόσεις στη γεωμετρία δήλωσαν ότι δεν είχαν σχεδόν κανένα ενδιαφέρον για το μάθημα αυτό.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες χωρίστηκαν σε 6 ομάδες των 4 ατόμων. Οι ομάδες διέθεταν την απαιτούμενη ετερογένεια και περιελάμβαναν η καθεμιά χωριστά έναν ή δύο μαθητές ή μαθήτριες με προσανατολισμό στις θετικές σπουδές, έναν με προσανατολισμό προς τις ανθρωπιστικές σπουδές και έναν μαθητή με χαμηλό ενδιαφέρον για το μάθημα της γεωμετρίας.

Στη συζήτηση που διεξήχθη μέσα στην τάξη οι καθηγητές, ο μαθηματικός και η φιλόλογος, ενημέρωσαν τους μαθητές και τις μαθήτριες για τα στάδια υλοποίησης της εργασίας. Συγκεκριμένα βάσει του ερευνητικού σχεδιασμού προτάθηκε να δοθεί από τον μαθηματικό στους μαθητές ένα θεώρημα σχετικό με το ισοσκελές τρίγωνο που υπάρχει στο σχολικό εγχειρίδιο (« Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες»), συνοδευόμενο από τη διατύπωση και τις αποδείξεις του που υπάρχουν στο έργο «Στοιχεία» του Ευκλείδη, καθώς και από τις διαφορετικές αποδείξεις του που προτείνονται στο Produire et lire des textes de demonstration (2001) και στα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων 60 χρόνων. Στη συνέχεια οι μαθητές και μαθήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήματα σχετικά με την απόδειξη του ευκλείδειου θεωρήματος και να συγκρίνουν την προτεινόμενη απόδειξη με άλλες αντίστοιχες, σχολιάζοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές τους ως προς τον τρόπο οργάνωσης και ανάπτυξης του αποδεικτικού συλλογισμού αλλά και ως προς τη χρήση των μαθηματικών συμβόλων. Βάσει του διδακτικού σχεδιασμού οι μαθητές και οι μαθήτριες ενημερώθηκαν από τη φιλόλογο για τις βιβλιογραφικές πηγές από τις οποίες θα αντλήσουν πληροφορίες για τη βιογραφία και για το ιστορικό και κοινωνικοπολιτικό συγκείμενο της εποχής και του τόπου διαβίωσης των μαθηματικών /ερευνητών που διατύπωσαν και απέδειξαν το υπό μελέτη θεώρημα. Σύμφωνα με τις προβλεπόμενες διδακτικές δραστηριότητες ζητήθηκε από τους μαθητές και τις μαθήτριες σε συνεργασία με τα υπόλοιπα μέλη των ομάδων τους, που στο μεταξύ είχαν συγκροτηθεί, να συζητήσουν και να επεξεργαστούν το πληροφοριακό υλικό και να αποφασίσουν από κοινού για τον τρόπο παρουσίασής του στην ολομέλεια της τάξης.

Αμέσως μετά από τη συζήτηση μαθητών και καθηγητών όπου καθορίστηκε το πλάνο της εργασίας, οι μαθητές και οι μαθήτριες με προσανατολισμό προς τις ανθρωπιστικές σπουδές προσφέρθηκαν να συλλέξουν και να παρουσιάσουν στην τάξη το πληροφοριακό υλικό με τις ιστορικές αναφορές ενώ οι μαθητές και μαθήτριες με προσανατολισμό προς τις θετικές σπουδές προθυμοποιήθηκαν να αναλάβουν την εργασία παρουσίασης των αποδείξεων του θεωρήματος. Τις παρουσιάσεις στην τάξη με υπολογιστή ανέλαβαν οι μαθητές που έχουν άνεση στη χρήση και την αξιοποίηση των ψηφιακών μέσων, ενώ ο συνδυασμός μαθηματικών και ιστορίας τούς δυσκολεύει.

Επιπλέον τονίστηκε στους μαθητές ότι η εργασία τους δεν υπόκειται στον έλεγχο μιας τυπικής αξιολόγησης (εξέταση και βαθμολόγηση εργασιών) και ότι ερευνητική διαδικασία εστιάζει στην αποτίμηση του ενδιαφέροντος και του βαθμού συμμετοχής των μαθητών στη διδακτική διαδικασία, ώστε μετά το τέλος των 6-8 διδακτικών ωρών να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τον βαθμό ανταπόκρισης των μαθητών σε μια διαφορετική από τις καθιερωμένες διδακτικές προσεγγίσεις του μαθήματος της γεωμετρίας. Ο διδάσκων ενημέρωσε την τάξη ότι στόχος της εργασίας είναι να γίνει ένα «διαφορετικό» μάθημα γεωμετρίας που θα αξιολογηθεί και από τους ίδιους τους μαθητές. Θα αξιολογηθούν θετικά από τον διδάσκοντα, σύμφωνα με τις οδηγίες του Υπουργείου για την εκπόνηση των δημιουργικών εργασιών, η φιλότιμη προσπάθεια των μαθητών και ο βαθμός της ενεργητικής εμπλοκή τους στις διδακτικές δραστηριότητες. Όλοι οι μαθητές και μαθήτριες δήλωσαν ότι θα συμμετάσχουν πρόθυμα σε όλα τα στάδια υλοποίησης της δημιουργικής εργασίας.

5.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ένα θεώρημα 10 αποδείξεις και όχι μόνο…

Για την διδακτική μας πρόταση έχουμε επιλέξει το θεώρημα που αναφέρεται στο ισοσκελές τρίγωνο: («Σε κάθε ισοσκελές τριγώνου οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες»), η απόδειξη του οποίου δεν προϋποθέτει τη γνώση πολλών προηγούμενων προτάσεων και είναι το δεύτερο κατά σειρά που έχει αποδειχθεί στο σχολικό βιβλίο. Στην εργασία μας θα αξιοποιήσουμε δέκα διαφορετικές αποδείξεις του θεωρήματος εστιάζοντας στις ομοιότητες και διαφορές που παρουσιάζουν οι αποδείξεις αυτές ως προς τον τρόπο της μαθηματικής τεκμηρίωσης και τη χρήση του σημειωτικού συστήματος της μαθηματικής γλώσσας.

Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση της απόδειξης του θεωρήματος που παρατίθεται στο έργο «Στοιχεία» του Ευκλείδη (3^{ος} αιώνας π.Χ.), το παλαιότερο γνωστό κείμενο που επιχειρεί την οργάνωση μαθηματικής γνώσης στη βάση του αποδεικτικού συλλογισμού. Αυτό το έργο υπήρξε πρότυπο μελέτης και βιβλίο αναφοράς για την γεωμετρία μέχρι τον εικοστό αιώνα. Αποτέλεσε επίσης τη βάση της διδασκαλίας των μαθηματικών για τουλάχιστον είκοσι αιώνες. Στη συνέχεια θα προτείνουμε την απόδειξη του ίδιου θεωρήματος από τον Herigone P. (1634 μ.Χ.). Από αυτή την περίοδο και εξής διατυπώνονται όλο και περισσότερες επικρίσεις κατά των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Εδώ αναφέρουμε την περίπτωση του Arnauld ο οποίος μεταξύ άλλων στο έργο του « Νέα Στοιχεία της Γεωμετρίας» (1667 μ.Χ.) πρότεινε μια τρίτη απόδειξη του θεωρήματος. Αυτό το έργο, που βασίζεται στην καινούργια γνώση και σε μια άλλη αντίληψη της απόδειξης, και επηρέασε αποφασιστικά τον τρόπο διδασκαλίας της γεωμετρίας κατά τον 18^{ο} αιώνα. Περίπου έναν αιώνα αργότερα ο Clairaut (1753 μ.Χ.) στο έργο του «Στοιχεία της Γεωμετρίας» θα προτείνει μια νέα προσέγγιση του θεωρήματος εστιάζοντας στον τρόπο επίλυσης προβλημάτων. Στόχος του συγγραφέα ήταν να κεντρίσει το ενδιαφέρον του αναγνώστη και να διαφωτίσει τους αρχάριους στη μελέτη της γεωμετρίας. Η επιστροφή στη «φιλοσοφία» και στην αντίληψη της ευκλείδειας γεωμετρίας σηματοδοτείται στο τέλος του 18^{ου} αιώνα και σε όλη τη διάρκεια του 19^{ου} με το έργο του Legendre. Ο Legendre δημοσίευσε το 1794 μ.Χ. τα «Στοιχεία της Γεωμετρίας» με ιδιαίτερες αναφορές στη διδασκαλία της στοιχειώδους γεωμετρίας. Το βιβλίο του Legendre σημείωσε μεγάλη επιτυχία πραγματοποιώντας συνεχείς εκδόσεις σε όλη την διάρκεια του 19^{ου} αιώνα. Εντούτοις, στο τέλος του 19^{ου} αιώνα και στις αρχές του 20^{ου} η επιστημονική γραμματεία στον τομέα της γεωμετρίας θα χαρακτηριστεί από ένα ρεύμα ανανέωσης, καθώς επεδίωξε να εισαγάγει στο αποδεικτικό κείμενο τις έννοιες της κίνησης και του μετασχηματισμού και να το καταστήσει περισσότερο σαφές, σύντομο και απλό. Το ρεύμα αυτό βρίσκει την έκφρασή του στα κείμενα των

Houel, Hadamand και Borel. Το βιβλίο του D' Haramand, «Μαθήματα Γεωμετρίας», θα γίνει κλασικό και θα καλύψει τις ανάγκες μελέτης και διδασκαλίας της γεωμετρίας κατά το πρώτο μισό του εικοστού αιώνα. Τέλος, αναφέρεται το κείμενο του Hilbert (δεν θα ασχοληθούμε στην εργασία) ο οποίος στις αρχές του εικοστού αιώνα επεδίωξε να ανασκευάσει την ευκλείδεια λογική «χτίζοντάς» την σε νέα θεμέλια. Με το έργο του Hilbert εισάγεται στη μαθηματική σκέψη η αρχή της μεθόδου των αξιωμάτων και του φορμαλισμού της σύγχρονης εποχής (Barbin et al, 2001).

1η Εργασία (2 διδακτικές ώρες)

Δόθηκαν στους μαθητές σε πρωτότυπο αρχαιοελληνικό κείμενο οι 23 ορισμοί, τα 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες (αξιώματα) και το υπό μελέτη θεώρημα (5η πρόταση) από το βιβλίο «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Η πέμπτη πρόταση συνοδευόταν από την απόδειξή της (βλ. παράρτημα 1), ενώ οι πρώτες 4 προτάσεις δόθηκαν χωρίς τις αποδείξεις τους. Ζητήθηκε από τους μαθητές με την υποστήριξη της φιλολόγου και τη βοήθεια της παράλληλης αντικριστής μετάφρασης των αρχαιοελληνικού κειμένου να μεταγράψουν το παράθεμα σε νεοελληνικό λόγο.

Προτάθηκε στους μαθητές στο επόμενο διδακτικό δίωρο να απαντήσουν στα κάτωθι ερωτήματα:

- Με χρονικό σημείο αναφοράς την περίοδο ζωής του Ευκλείδη (325-265 π.Χ.) να σχολιάσετε αρχικά τη θέση της «Αλεξάνδρειας» στο πνευματικό γίγνεσθαι την περίοδο των ελληνιστικών χρόνων και στη συνέχεια τη σχέση που ανέπτυξε ο Ευκλείδης στο φημισμένο πνευματικό κέντρο της αρχαιότητας;
- Ποιο είναι το πολιτισμικό και το κοινωνικοπολιτικό περιβάλλον της εποχής του Ευκλείδη;
- Να αντλήσετε πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του Ευκλείδη και να συντάξετε ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα του φημισμένου μαθηματικού.
- Να σχολιάσετε τεκμηριωμένα τη συνεισφορά του Ευκλείδη στην θεμελίωση της Γεωμετρίας παρουσιάζοντας παράλληλα το συνολικό σώμα των έργων του.
- Να παρουσιάσετε σύντομα το περιεχόμενο του έργου «Στοιχεία» του Ευκλείδη.
- Να μελετήσετε την απόδειξη της πρότασης του θεωρήματος του Ευκλείδη, να παρατηρήσετε και να διατυπώσετε κρίσεις σχετικά με τη δομή της απόδειξης.

- Να συγκρίνετε της διατύπωση της απόδειξης του θεωρήματος που παρατίθεται στο σχολικό εγχειρίδιο με αυτή που προτείνεται στα « Στοιχεία» του Ευκλείδη, παρουσιάζοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές που υπάρχουν μεταξύ τους.
- Με σημείο αναφοράς την απόδειξη του θεωρήματος που προτείνει ο Ευκλείδης, να σκεφτείτε και να πειραματιστείτε στη διατύπωση μιας προσωπικής σας απόδειξης του εν λόγω θεωρήματος.
- Να μεταγράψετε την απόδειξη της πρότασης του θεωρήματος του Ευκλείδη χρησιμοποιώντας το σημειωτικό σύστημα της μαθηματικής γλώσσας (σύμβολα μαθηματικών) και τον τρόπο διατύπωσης των αποδείξεων και των ασκήσεων (περιορισμένη χρήση λέξεων), που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Ο καθηγητής προκειμένου να διευκολύνει την προσπάθεια των μαθητών για τη διεκπεραίωση της εργασίας τους, ενθάρρυνε τους μαθητές να συνεργαστούν με τα μέλη της ομάδας τους και να διεξαγάγουν μια βιβλιογραφική έρευνα αναζητώντας και αξιοποιώντας βιβλιογραφικές πηγές από το Διαδίκτυο (π.χ. σχετικές μελέτες και έρευνες με συναφές αντικείμενο) και αφού μελετήσουν προσεκτικά και αφού επεξεργαστούν κριτικά το ίδιο το κείμενο του Ευκλείδη, να συζητήσουν και να διατυπώσουν τεκμηριωμένα τις προσωπικές κρίσεις τους για τον τρόπο οργάνωσης και διατύπωσης του θεωρήματος. Επίσης, ο καθηγητής επέστησε την προσοχή των μαθητών και μαθητριών στα κρίσιμα ζητήματα ορθής χρήσης των βιβλιογραφικών πηγών από το διαδίκτυο όπως η αποφυγή της λογοκλοπής και της παραβίασης πνευματικών δικαιωμάτων των συγγραφέων, ο κριτικός έλεγχος της αξιοπιστίας και επιστημονικής εγκυρότητας του διακινούμενου πληροφοριακού υλικού στον κυβερνοχώρο.

Στην επόμενη διδακτική συνάντηση η πρώτη ομάδα των μαθητών και μαθητριών έστησε τον προτζέκτορα και ξεκίνησε η παρουσίαση των εργασιών των μαθητών. Οι μαθητές και μαθήτριες που είχαν αναλάβει την παρουσίαση του ιστορικού «θέματος» της εργασίας παρουσίασαν τον τρόπο άντλησης και συλλογής του ιστορικού υλικού (αναζήτηση έγκριτων βιβλιογραφικών πηγών από το Διαδίκτυο, αξιοποίηση πληροφοριών από cd εγκυκλοπαίδειες ή συμβατικά σχολικά εγχειρίδια ή εξωσχολικά βιβλία) και απάντησαν σε ερωτήματα σχετικά με τη βιογραφία του Ευκλείδη και το ιστορικό και κοινωνικοπολιτικό συγκείμενο της εποχής του. Το ιστορικό υλικό που παρουσίασαν οι μαθητές συνοδεύτηκε από εικόνες και πολυτροπικά κείμενα. Μετά το τέλος της παρουσίασης του κάθε θέματος ακολούθησαν σχετικές με το θέμα συζητήσεις στην ολομέλεια της τάξης, σχολιασμός και κριτική επεξεργασία του πληροφοριακού υλικού από το σύνολο των μαθητών.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές και οι μαθήτριες παρουσίασαν ιστορικό υλικό σχετικό με την ίδρυση της Αλεξάνδρειας (ίδρυση Αλεξάνδρειας 331 π.Χ. από τον Αλέξανδρο), τη γενέτειρα και το χώρο της δράσης του μεγάλου μαθηματικού. Σχολίασαν την πνευματική κίνηση της πόλης που την ανέδειξε σε σπουδαίο πνευματικό κέντρο της εποχής, κάνοντας ιδιαίτερη αναφορά στο «Μουσείο», τον χώρο πνευματικής δημιουργίας και συγκέντρωσης πολλών πνευματικών ανδρών της εποχής μεταξύ των οποίων και ο Ευκλείδης. Οι μαθητές αναφέρθηκαν στην ίδρυση της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και στον σπουδαίο ρόλο της στο χώρο των Γραμμάτων και των Επιστημών (Canfora, 1989).

Επίσης, δόθηκαν από τους μαθητές και τις μαθήτριες πληροφορίες σχετικές με τη βιογραφία και το επιστημονικό έργο του Ευκλείδη, όπως η πιθανή ημερομηνία της γέννησής του, η πρόσκληση του Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια από τον Πτολεμαίο τον Α΄, η πιθανολογούμενη ανάθεση της διεύθυνσης του Μουσείου της Αλεξάνδρειας στον ίδιο και η συνεισφορά του στον τομέα της γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης κατάφερε να συνδέσει το παρελθόν και το παρόν με το μέλλον της μαθηματικής επιστήμης και ιδιαίτερα της γεωμετρίας. Ανέδειξε την γεωμετρία σε επιστήμη, διατύπωσε ορισμούς, αιτήματα και προτάσεις και παρουσίασε τη διαδικασία της απόδειξης καθιερώνοντας ένα μαθηματικό σύστημα που με ελάχιστες διαφορές ισχύει μέχρι και σήμερα. Σημαντική είναι η συνεισφορά του και σε άλλους επιστημονικούς τομείς που σχετίζονται άμεσα ή όχι με τη μαθηματική επιστήμη. Οι μαθητές και οι μαθήτριες αναφέρθηκαν εκτός από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και σε άλλα έργα του που είτε σώθηκαν είτε όχι, όπως η Οπτική (πραγματεία σχετικά με την προοπτική), Κατοπτρική (κατοπτρική θεωρία μαθηματικών), τα Δεδομένα (πραγματεία σχετική με τη φύση και τις συνέπειες των δοσμένων πληροφοριών στα γεωμετρικά προβλήματα), τα Φαινόμενα (πραγματεία για τη σφαιρική αστρονομία), η Κατανομή κανόνος και Εισαγωγή στην Αρμονική.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες παρουσίασαν συνοπτικά το φημισμένο έργο του Ευκλείδη «Στοιχεία». Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 βιβλία εκ των οποίων τα πρώτα 6 αναφέρονται στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου, τα επόμενα 3 στη θεωρία των αριθμών, το δέκατο στους άρρητους αριθμούς και τα 3 τελευταία στη στερεομετρία. Στα «Στοιχεία» περιλαμβάνονται 121 ορισμοί, 5 αιτήματα, 9 κοινές έννοιες (αξιώματα) και 465 προτάσεις (θεωρήματα- προβλήματα). Από τα 13 βιβλία των στοιχείων τα 8 ή 9 είναι εδώ και πάρα πολλά χρόνια μέρος της διδακτέας ύλης της γεωμετρίας στα ελληνικά σχολεία. Πολλές προτάσεις και αποδείξεις θεωρημάτων υπάρχουν αυτούσιες στα σχολικά εγχειρίδια. Στις διαφάνειες εμφανίζονται οι πρώτοι ορισμοί που μετέφρασαν με σχετική ευκολία οι μαθητές και στη συνέχεια προσπάθησαν να τους αντιστοιχήσουν με ορισμούς του σχολικού βιβλίου. Οι μαθητές και μαθήτριες με προσανατολισμό προς τις θετικές επιστήμες και δύο μαθητές με προσανατολισμό στις ανθρωπιστικές σπουδές δεν δυσκολεύτηκαν στην αντιστοίχιση των ορισμών. Οι υπόλοιποι μαθητές συμβουλεύτηκαν το σχολικό βιβλίο τους για τον εντοπισμό των ορισμών άλλοτε με επιτυχία και άλλοτε όχι, δεδομένου ότι η διατύπωση των ορισμών στο σχολικό εγχειρίδιο διαφέρει από αυτή του πρωτότυπου κειμένου. Σε ορισμένες περιπτώσεις η αδυναμία εντοπισμού των ορισμών ήταν αποτέλεσμα άγνοιας της διάταξης της ύλης του σχολικού βιβλίου από τους μαθητές. Οι μαθητές που αντιμετώπισαν δυσκολίες ξεπέρασαν τα εμπόδια σε συνεργασία με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους. Το ίδιο συνέβη και με τις διδακτικές δραστηριότητες που αφορούσαν στη μελέτη και στον σχολιασμό των αιτημάτων και των αξιωμάτων.

Αυτή η διδακτική διαδικασία και η μαθησιακή προσέγγιση του σχολικού μαθήματος κέντρισε για πρώτη φορά το ενδιαφέρον πολλών μαθητών για τη γεωμετρία. Οι μαθητές και οι μαθήτριες ενθουσιάστηκαν με την παρουσίαση του ιστορικού υλικού για τη βιογραφία και το επιστημονικό έργο του Ευκλείδη καθώς και με τη σύνδεσή του με το μάθημα της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα δήλωσαν ότι δεν μπορούσαν να φανταστούν πως μπορεί η ιστορία να δώσει αφορμές αλλά και απαντήσεις για τη διαδικασία θεμελίωσης και οργάνωσης της μαθηματικής επιστήμης και ιδιαίτερα της γεωμετρίας. Σαφώς εδώ διαπιστώνεται και η ενεργοποίηση του μαθησιακού ενδιαφέροντος του συνόλου των μαθητών της τάξης. Οι μαθητές εξομολογήθηκαν ότι ενώ ήταν εξοικειωμένοι με τον όρο Ευκλείδεια Γεωμετρία, στην πράξη αγνοούσαν τις ιστορικές ρίζες της, τους λόγους και τον τρόπο θεμελίωσής της. Επίσης, όπως ανέφεραν, μέσω της παρουσίασης της εργασίας των συμμαθητών τους βρήκαν την ευκαιρία να πληροφορηθούν για τη ζωή του Ευκλείδη και να συνδέσουν την Αλεξάνδρεια με τα μαθηματικά, τον βίο και το επιστημονικό έργο του Ευκλείδη.

Στην παρουσίαση των εργασιών τους οι μαθητές και οι μαθήτριες σχολίασαν την επίδραση του κοινωνικοπολιτικού και πολιτικού συγκείμενου της εποχής του Ευκλείδη στη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης του. Ανέτρεξαν επίσης στις απαρχές διαμόρφωσης της ορθού λόγου στην αρχαία Ελλάδα και παρουσίασαν το μαθηματικό έργο του Ευκλείδη στη διπλή διάστασή του, ως προϊόν της μαθηματικής ευφυΐας του και ως απότοκο μιας σταδιακής ωρίμανσης της ελληνικής μαθηματικής σκέψης που ξεκίνησε με την απελευθέρωση του ανθρώπινου νου από το μύθο και τις δεισιδαιμονίες ήδη από τα χρόνια του Ιωνικού Ορθολογισμού (6^{ο} αιώνας π.Χ.). Οι Έλληνες της Ιωνίας προσπάθησαν πέρα από κάθε πρακτική σκοπιμότητα να παράγουν πνευματικό έργο με τις αξιώσεις της επιστήμης, επιδιώκοντας μέσω διαλεκτικής, της κριτικής διαπραγμάτευσης και της κριτικής σκέψης την αναζήτηση και τη σύλληψη της αλήθειας (Lesky, 1990). Οι μαθητές παρουσίασαν τα ιστορικά δεδομένα που άντλησαν από διάφορες πηγές με αφορμή την ιστορική αναφορά του Struik (1993) ότι «τα σύγχρονα μαθηματικά γεννήθηκαν στην ατμόσφαιρα του Ιωνικού Ορθολογισμού».

Συγκεκριμένα εστίασαν στη μεγάλη συνεισφορά του Θαλή του Μιλήσιου στην ορθολογική οργάνωση της μαθηματικής σκέψης με την εισαγωγή της διερευνητικής μεθόδου - ο Ίωνας μαθηματικός εισήγαγε το «γιατί;» στη θέση του «πώς» που μονοπωλούσε το ενδιαφέρον της εποχής - και με τη γενίκευση των πρακτικών κανόνων. Ένας μαθητής στη συνέχεια παρουσίασε και σχολίασε τη συμβολή του Πυθαγόρα στη συστηματοποίηση των μαθηματικών ως αυτοτελούς συνόλου γνώσεων με την εισαγωγή της διακριτότητας του χώρου, με τον καθορισμό των χαρακτηριστικών της αριθμητικής μονάδας (Boyer, 1997, ό.π. στο Λέκκας, 2019) και με την εισαγωγή των ορισμών βάσει της μαθηματικής φύσης του υποκειμένου (Heath, 1981, ό.π. στο Λέκκας, 2019). Ένας μαθητής ανέλαβε και παρουσίασε στην ολομέλεια της τάξης το έργο αρχαίων γεωμετρών που, αν και συνέβαλαν με το έργο τους στην αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας, παραμένουν άγνωστοι για την σχολική μαθηματική παράδοση. Έγινε αναφορά στον Αναξαγόρα τον Κλαζομένιο, τρεις προτάσεις του οποίου εμπεριέχονται στα στοιχεία του Ευκλείδη. Σχολίασαν επίσης το έργο του Οινοπίδη τον Χίο που χρησιμοποίησε αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη τηρώντας ήδη από την εποχή του τα τρία πρώτα αξιώματα των Στοιχείων (Λέκκας, 2019) και έγινε γνωστός από την ανακάλυψη του ελλειπτικού κύκλου (Lesky, 1990). Τέλος, οι μαθητές αναφέρθηκαν στην πνευματική κίνηση των σοφιστών του 5^{ου}

αιώνα, που άνοιξαν τον δρόμο για την ανάπτυξη των επιστημών. Καμιά άλλη πνευματική κίνηση δεν μπορεί να συγκριθεί με τη σοφιστική ως προς την αυθεντικότητα των συνεπειών της στην κοινωνική και πολιτική ζωή και στη θεμελίωση της επιστημονικής σκέψης (Lesky,1990). Οι σοφιστές σχετικοποίησαν την αλήθεια, αμφισβήτησαν και έθεσαν σε κριτικό έλεγχο όλες τις παραδεδομένες αξίες και τις «αυθεντίες» (Romilly, 1994). Ανέπτυξαν ένα πλαίσιο επιχειρηματολογίας για την υποστήριξη και την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων που εκτός από την κοινωνική και πολιτική ζωή επηρέασε και την μαθηματική σκέψη. Στη διάδοση των παραγωγικών μαθηματικών κατά την περίοδο της σοφιστικής συνέβαλε και η προώθηση της καθιερωμένης για την εποχή τους μαθηματικής πρακτικής που αφορούσε στη λεκτική παρουσίαση των επιχειρημάτων μέσω της προσφιλούς μεθόδου διδασκαλίας τους, δηλαδή των δημοσίων διαλέξεων σε εκλεπτυσμένο και φιλομαθές ακροατήριο (Saito & Sidoli, 2012). Επίσης όπως ανέφεραν οι μαθητές, οι σοφιστές προώθησαν τη μαθηματική επιστήμη με την ενασχόλησή τους με τη γεωμετρία (γεωμετρία του κύκλου), της τριχοτόμησης της γωνίας και του τετραγωνισμού του κύκλου (Lesky,1990). Μέσω της παρουσίασης αυτής οι μαθητές αντιλήφθηκαν ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης και της γεωμετρίας δεν ακολούθησε μια αυτόνομη ιστορική πορεία και ότι είναι άμεσα συναρτώμενη με την πολιτισμική και την ευρύτερη πνευματική εξέλιξη που σημειώθηκε στις κοινωνίες και στην εποχή οργάνωσής τους (περισσότερα στο παράρτημα 2). Τη δεύτερη ώρα του διδακτικού δίωρου δόθηκαν στους μαθητές οι πρώτες τέσσερεις προτάσεις από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη χωρίς τις αποδείξεις τους.

Πρόταση 1(Ι.1)

Με πλευρά δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο.

Πρόταση 2(Ι.2)

Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα ίσο με δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα και με το ένα άκρο του επίσης δεδομένο.

Πρόταση 3(Ι.3)

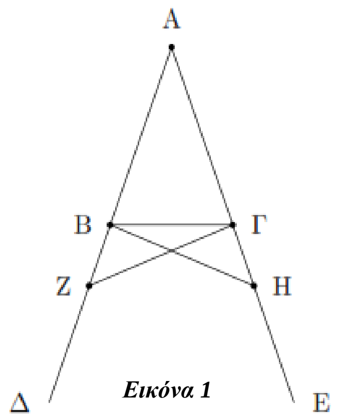
Αν δοθούν δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, να αφαιρεθεί από το μεγαλύτερο, τμήμα ίσο με το μικρότερο.

Πρόταση 4(Ι.4)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες και θα είναι ίσα, δηλαδή θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Οι προτάσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για την απόδειξη της πέμπτης πρότασης που μας ενδιαφέρει. Η Πέμπτη πρόταση που θα σχολιασθεί από τους μαθητές στην επόμενη διδακτική συνάντηση, έχει ήδη δοθεί στους μαθητές για να την μελετήσουν στο σπίτι. Την παρουσίαση της εργασίας ανέλαβαν οι μαθητές της δεύτερης ομάδας με προσανατολισμό προς τις θετικές επιστήμες. Στις διαφάνειες που προβλήθηκαν υπήρχε η εκφώνηση τις πρότασης και η απόδειξη μεταφρασμένη από την αρχαία ελληνική στα νεοελληνικά. Στις σημειώσεις τους οι μαθητές συμπεριέλαβαν και τις τέσσερεις προτάσεις.

Οι μαθητές αρχικά διατύπωσαν την προς απόδειξη πρόταση και έγραψαν στον πίνακα τα δεδομένα: σχεδίασαν ένα ισοσκελές τρίγωνο (εικ.1) και το ερμήνευσαν ως ΑΒ=ΑΓ, σημείωσαν επίσης και το ζητούμενο, τις γωνίες Β=Γ. Στη συνέχεια πήραν τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ΒΔ και ΓΕ. Στην ΒΔ και στην ΓΕ πήραν δύο σημεία Ζ και Η τέτοια ώστε ΒΖ=ΓΗ. Τέλος χάραξαν τα τμήματα ΖΓ και ΒΗ και σύγκριναν τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΒΗ. Αυτά έχουν:



Εικόνα 1

ΑΒ=ΑΓ από υπόθεση, γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,
ΑΗ=ΑΖ , από κατασκευή,
και την γωνία $\hat{A}$ κοινή.
Άρα, σύμφωνα με την πρόταση (Ι.4) το θεώρημα ισότητας τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και τα υπόλοιπα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα, δηλαδή: ΒΗ=ΓΖ και οι γωνίες $\hat{Z}=\hat{H}$ και $\widehat{A\Gamma Z}=\widehat{ABH}$ (1). Επίσης σύγκριναν τα τρίγωνα ΒΓΖ και ΒΓΗ. Αυτά έχουν: ΒΖ=ΓΗ γιατί από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΑΗ αφαιρώ ίσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και προκύπτουν ίσα τμήματα (κοινή έννοια 3).

ΖΓ=ΗΒ από την προηγούμενη απόδειξη
Η γωνία $\widehat{\Gamma HB}$= γωνία $\widehat{BZ\Gamma}$ και
η ΒΓ κοινή πλευρά

Άρα, το τρίγωνο ΒΓΗ είναι ίσο με το ΒΖΓ, και τα υπόλοιπα στοιχεία θα είναι ίσα, δηλαδή: $\widehat{ΖΒΓ}=\widehat{ΒΓΗ}$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι, αν από την μεγαλύτερη γωνία αφαιρέσουμε την μικρή λαμβάνουμε ίσες γωνίες δηλαδή $\widehat{ΑΓΒ}=\widehat{ΑΒΓ}$. Η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Οι μαθητές απέδειξαν την πρόταση με τον σύγχρονο σημειωτικό σύστημα των μαθηματικών (σύγχρονα μαθηματικά σύμβολα) και έκαναν περιορισμένη χρήση λέξεων. Στο σημείο αυτό παρενέβη ο μαθηματικός και έκανε μια αναφορά σχετικά με τον τρόπο διατύπωσης των αποδείξεων από τον Ευκλείδη. Συγκεκριμένα, πληροφόρησε τους μαθητές και τις μαθήτριες ότι: πρώτον ο Ευκλείδης ό,τι σχεδίαζε το κατασκεύαζε με κανόνα και διαβήτη, δεύτερον ότι διατύπωνε τις αποδείξεις του κατά όμοιο τρόπο και ανεξάρτητα από την μέθοδο που υιοθετούσε. Στη διατύπωση και απόδειξη της πρότασης διακρίνονται τα έξι μέρη από τα οποία αποτελείται δηλαδή: η πρόταση, η έκθεση, ο διορισμός, η κατασκευή, η απόδειξη και το συμπέρασμα. Ο καθηγητής καθοδήγησε και βοήθησε όλους τους μαθητές να εντοπίσουν με καθοδήγησή του τα μέρη από τα οποία αποτελείται η πρόταση και η απόδειξή της. Οι μαθητές διάβασαν το πρωτότυπο κείμενο και αναζήτησαν:

α) την **πρόταση** (Δεδομένα-Διατύπωση). Οι μαθητές διάβασαν την πρόταση.

β) την **έκθεση** (Γραφική αναπαράσταση της πρότασης- Στοιχεία ή δεδομένα της πρότασης). Οι μαθητές παρέπεμψαν την τάξη στο εξής χωρίο του κειμένου «Έστω τρίγωνο ισοσκελές…προς την πλευράν ΑΓ».

γ) το **διορισμό** ή προσδιορισμό (απαιτούμενα για την απόδειξη). Οι μαθητές διάβασαν το χωρίο « λέγω ότι η μεν … ίση προς την ΒΓΕ».

δ) την **κατασκευή** ή την προετοιμασία που συμπληρώνει τα δεδομένα και διευκολύνει την εύρεση του ζητουμένου. Οι μαθητές την εντόπισαν στο χωρίο « ειλήφθω γαρ…ΖΓ, ΗΒ ευθείαι».

ε) την **απόδειξη.** Οι μαθητές παρέπεμψαν στο χωρίο του κειμένου «Επεί ούν ίση εστίν…εισιν υπό την βάση».

στ) το **συμπέρασμα** (Επιστροφή στην πρόταση). Οι μαθητές διάβασαν το χωρίο «Των ισοσκελών…αλλήλαις έσονται. Όπερ έδει δείξαι».

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι ακόμη και σήμερα στη σχολική διδασκαλία ακολουθείται η ίδια μέθοδος διατύπωσης και απόδειξης του θεωρήματος ή λύσης μιας άσκησης. Συγκεκριμένα οι μαθητές παρατήρησαν ότι πάντοτε πριν τη μελέτη του σχήματος σχεδιάζουμε δύο στήλες: στην πρώτη στήλη παραθέτουμε τα δεδομένα (όσα ξέρω) και στη δεύτερη στήλη αναγράφουμε το συμπέρασμα (αυτό που πρέπει να αποδείξω). Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το σχήμα της άσκησης και προχωρούμε στην απόδειξη του θεωρήματος ή της άσκησης. Τέλος διατυπώνουμε το συμπέρασμα, δηλαδή το αποδεικτέο της άσκησης. Διαφοροποίηση εντοπίζεται στις λεξιλογικές επιλογές και στη χρήση των εισαγωγικών φράσεων της απόδειξης. Δεν χρησιμοποιούμε δηλαδή την αναφορική πρόταση «Όπερ έδει δείξαι», αλλά εισάγουμε τη διατύπωση του συμπεράσματος με τον αποτελεσματικό σύνδεσμο «άρα». Οι μαθητές μελετώντας τα πρωτότυπα κείμενα με τις προτάσεις και τις αποδείξεις, που τους δόθηκαν, παρατήρησαν ότι απουσιάζουν τα σύμβολα της ισότητας, της γωνίας και του τριγώνου. Διαπίστωσαν επίσης ότι η απόδειξη είναι αναλυτικά διατυπωμένη και το κείμενο είναι «καθαρό» από μαθηματικά σύμβολα και παρατίθεται αμιγώς σε γραπτό λόγο.

Οι μαθητές επίσης σχολίασαν ότι για την απόδειξη ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τις προτάσεις 3 και 4 που προηγούνται, κάποια από τα αξιώματα και τις κοινές έννοιες. Συγκεκριμένα, για την απόδειξη του θεωρήματος προχωρεί σε δύο συγκρίσεις τριγώνων αποδεικνύοντας ότι αυτά είναι ίσα. Από αυτό συμπεραίνει ότι τα τρίγωνα είναι ίσα, όπως και τα υπόλοιπα στοιχεία τους, δηλαδή οι γωνίες και οι πλευρές τους. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί επίσης την πρόταση σύμφωνα με την οποία, αν από ίσες γωνίες αφαιρέσουμε ίσες γωνίες, τότε προκύπτουν ίσες γωνίες.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες σχολίασαν σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος ότι:

- ο βαθμός δυσκολίας της απόδειξης δεν είναι υψηλός αλλά είναι μεγάλη η έκτασή της,
- η δυσκολία στην απόδειξη του θεωρήματος εντοπίζεται στην προϋπόθεση προέκτασης των ίσων πλευρών του τριγώνου, στάδιο απόδειξης που οι ίδιοι δεν θα μπορούσαν να σκεφτούν.

Ένας μαθητής σχολιάζοντας την έκταση της απόδειξης του Ευκλείδη ανέφερε δηκτικά: M_1: «Θέλει να μας «κάνει» τον έξυπνο ο Ευκλείδης». Επίσης, οι μαθητές παρατήρησαν και σχολίασαν ότι στο σχολικό εγχειρίδιο το θεώρημα αποδεικνύεται με μία μόνο σύγκριση τριγώνων. Εδώ παρεμβαίνει ο καθηγητής και ρωτά τους μαθητές γιατί ο Ευκλείδης δεν αποδεικνύει την πρόταση με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο, δηλαδή χαράζοντας την διχοτόμο και συγκρίνοντας ένα ζεύγος τριγώνων. Ακούστηκαν πολλές και διαφορετικές απόψεις. Ο M_1 υποστήριξε ότι ο Ευκλείδης γνωρίζει ένα κριτήριο ισότητας τριγώνων και το χρησιμοποιεί πολλές φορές. Ο M_2: «Αυτόν μόνον τον τρόπο ήξερε, αυτόν και χρησιμοποίησε». Άλλος μαθητής σχολίασε ότι ο Ευκλείδης προέκτεινε τις ίσες πλευρές για να τους δυσκολέψει (M_3: «Τι ήθελε; Να μας δυσκολέψει! Τι άλλο;») και άλλος ότι δεν μπορούσε να σχεδιάσει την διχοτόμο (M_4: «Ο Ευκλείδης δεν μπορούσε να σχεδιάσει τη διχοτόμο»). Δύο ή τρεις μαθητές που μάλλον είχαν κατανοήσει καλά το αξιωματικό σύστημα της γεωμετρίας του Ευκλείδη παρατήρησαν ότι στις προηγούμενες 4 προτάσεις και στους ορισμούς, στα αξιώματα και στις έννοιες δεν περιλαμβάνεται η έννοια της διχοτόμου ούτε και η κατασκευή της. Με την προτροπή του μαθηματικού οι μαθητές διάβασαν την πρόταση 9 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη όπου γίνεται η κατασκευή της διχοτόμου. Οι μαθητές διαπίστωσαν ότι προϋπόθεση για την κατασκευή της διχοτόμου είναι να γνωρίζουμε ότι οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Όλοι οι μαθητές – ίσως για πρώτη φορά – κατανόησαν τη λογική συνέχεια των προτάσεων – θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Επίσης διαπιστώθηκε από έναν μαθητή μια «ασυνέπεια» στην κατανομή της διδακτέας ύλης που αφορά στη διδασκαλία της κατασκευής της διχοτόμου και στην αξιοποίησή της για την απόδειξη του θεωρήματος ως ήδη προϋπάρχουσας και «δεδομένης» γνώσης για τους μαθητές (M_5: «Στο σχολικό βιβλίο δεν προηγείται η κατασκευή της διχοτόμου και θέλουν να τη χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη!! Αφού δεν θεωρείται διδαγμένη, άρα δεν πρέπει ούτε και το βιβλίο να τη χρησιμοποιεί»). Ο μαθηματικός σχολιάζοντας τη διάταξη της ύλης στο σχολικό εγχειρίδιο της γεωμετρίας εξηγεί στους μαθητές ότι αν και βάσει του σχολικού εγχειριδίου η κατασκευή της διχοτόμου διδάσκεται αργότερα, η διχοτόμος ως έννοια είναι ήδη γνωστή και χρησιμοποιείται για λόγους «διδακτικής απλότητας». Επίσης, πρόσθεσε ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στη γεωμετρία του σχήματα που σχεδιάζονται μόνο με κανόνα και διαβήτη, οπότε μια απόδειξη του θεωρήματος με την διχοτόμο θα είχε ως προϋπόθεση να έχει προηγηθεί η κατασκευή της διχοτόμου. Η διχοτόμος με βάση τις πληροφορίες που δίνουν τα «Στοιχεία» θα κατασκευαστεί αργότερα.

Στο ερώτημα αν οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να προτείνουν άλλες αποδείξεις της ίδιας πρότασης, δόθηκαν οι εξής απαντήσεις:

M_1 : «Κάνουμε την απόδειξη του βιβλίου αλλά αντί για διχοτόμο χαράζουμε διάμεσο ή ύψος».

M_2 : « Με σύγκριση τριγώνων!».

Οι μαθητές που είχαν κατανοήσει το αξιωματικό σύστημα, που παρατίθεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, σχολίασαν την αδυναμία του να αξιοποιήσει στην απόδειξη του θεωρήματος τις έννοιες της διαμέσου και του ύψους δεδομένου ότι πάλι δεν είχαν κατασκευαστεί και δεν είχαν οριστεί οι έννοιες αυτές. Ένας μαθητής ανέφερε χαρακτηριστικά:

M_3: «Πώς να χρησιμοποιήσει τη διάμεσο και το ύψος; Ακόμη δεν τις είχε κατασκευάσει!».

Κάποιοι μαθητές σχολιάζοντας είπαν: «έχουν ορισθεί αυτές οι έννοιες της διαμέσου και του ύψους στο σχολικό εγχειρίδιο, οπότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για λόγους «διδακτικής απλότητας» αν και δεν έχει αποδειχθεί ότι οι έννοιες αυτές τέμνουν την βάση του ισοσκελούς όπως και η διχοτόμος».

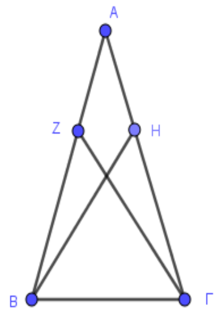
M_4 : « Και τη διάμεσο και το ύψος να έχουμε ορίσει, δεν αρκεί το πρώτο κριτήριο της ισότητας. Για να αποδειχθεί το θεώρημα, χρειάζονται και τα άλλα θεωρήματα ισότητας τριγώνων» είπε ένας άλλος μαθητής.

Κάποιοι μαθητές και οι μαθήτριες, με σημείο αναφοράς το σχολικό εγχειρίδιο διαπίστωσαν ότι βασική προϋπόθεση της απόδειξης του θεωρήματος με αυτές τις έννοιες είναι η απόδειξη όλων των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων, απλών και ορθογωνίων. Αναφέρουμε ενδεικτικά το σχόλιο ενός μαθητή:

M_5 : «Ας αποδείξουμε όλα τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων, τότε θα καταλάβουμε τι γίνεται»

Ο μαθηματικός, επιμένοντας έθεσε εκ νέου στους μαθητές το ερώτημα, αν με αφορμή την απόδειξη των «Στοιχείων» του Ευκλείδη μπορούν να προτείνουν μια άλλη απόδειξη που να υπακούει στο αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη και να είναι μάλιστα παρόμοια με αυτήν. Δύο μαθητές πρότειναν από κοινού (εικ.2):

M_1 : «Αντί να προεκτείνουμε κατά ίσα τμήματα ΒΖ=ΓΗ τις ίσες πλευρές ΑΒ=ΑΓ, να πάρουμε ίσα τμήματα ΒΖ=ΓΗ πάνω στις ίσες πλευρές ΑΒ=ΑΓ».



Εικόνα 2

Ο M_2 συνέχισε την παρουσίαση του συλλογισμού: «Πάλι θα συγκριθούν δύο τρίγωνα αλλά στο τέλος η ισότητα των γωνιών Β και Γ θα προκύψει ως άθροισμα, ίσων γωνιών».

Ο μαθηματικός έθεσε ένα τελευταίο ερώτημα στους μαθητές σχετικά με τον τρόπο κατασκευής ενός τμήματος ίσου με κάποιο άλλο και η απάντηση ήταν η ίδια σχεδόν από όλους τους μαθητές: «Με κανόνα και διαβήτη!». Οι μαθητές επηρεασμένοι πιθανότατα από τις κατασκευές του Ευκλείδη απάντησαν γρήγορα και σωστά. Στο τέλος της παρουσίασης της πρότασης που εμπεριέχεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, έγινε μια ανακεφαλαίωση της παρουσίασης του όλου θέματος από ιστορικές αναφορές ως και τις λεπτομέρειες της απόδειξης.

Οι μαθητές αποτίμησαν θετικά τη διδακτική δραστηριότητα και τόνισαν εμφατικά τη συμβολή της στη διέγερση του μαθησιακού ενδιαφέροντός τους.

M_1 : «*Για πρώτη φορά δεν βαρέθηκα τις γωνίες, τις διαμέσους και τα τρίγωνα»*

M_2: «Δεν περίμενα ποτέ ένα θεώρημα να μου κρατήσει το ενδιαφέρον τόση ώρα!»

στην ενθάρρυνση της ενεργητικής εμπλοκής τους στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία

M_3 *: « Επιτέλους!! Πρότεινα και εγώ μια δική μου λύση σε ένα θεώρημα»*

και στην καλλιέργεια της κριτικής και αναλυτικής σκέψης τους.

M_4*: «Νομίζω το πιο σημαντικό για μένα ήταν ότι για πρώτη φορά αξιολόγησα την απόδειξη του αρχαίου «σοφού» και πρότεινα τη δική μου λύση!» και*

M_5*: « Για πρώτη φορά δεν αποστηθίζω, αλλά σκέφτομαι»)*

Η Αντωνία είπε*: «δεν περίμενα ότι μπορούσε μια πρόταση (θεώρημα) στην γεωμετρία να μου κρατήσει τόσο πολύ το ενδιαφέρον και μάλιστα παρουσιασμένη με αυτόν τον τρόπο».*

Ο Πέτρος είπε: *«Δεν μπορούσα να φανταστώ ότι 2000 χρόνια πριν θα είχαν γίνει αποδείξεις θεωρημάτων με τον ίδιο σχεδόν τρόπο από τον Ευκλείδη».*

Η Ελισάβετ είπε: *«Δεν ήξερα ότι υπήρχαν τα «Στοιχεία του Ευκλείδη!».*

Ο Δημήτρης είπε: *«Χάρηκα που με αφορμή την απόδειξη του Ευκλείδη, σκέφτηκα την παρόμοια απόδειξη».*

Η Ευπραξία είπε: *«Απέκτησε η γεωμετρία για δύο ώρες ανθρώπινο πρόσωπο».*

Άλλες αποδείξεις της ίδιας πρότασης.

Στη συνέχεια οι μαθητές μελέτησαν και παρουσίασαν τις αποδείξεις άλλων μαθηματικών από το 17^{ο} έως και τον 20^{ο} αιώνα. Συγκεκριμένα οι μαθητές και οι μαθήτριες μελέτησαν τις αποδείξεις Γάλλων μαθηματικών, εκπροσώπων πολλών ρευμάτων της μαθηματικής επιστήμης, καθώς και Ελλήνων μαθηματικών, συγγραφέων σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών. Τα κείμενα των Γάλλων μαθηματικών μεταφράστηκαν με τη βοήθεια των καθηγητριών γαλλικών του σχολείου αλλά και μαθητών/τριών και καθηγητών που γνώριζαν γαλλικά. Δόθηκαν στους μαθητές οι μεταφράσεις των κειμένων αυτών στη νέα ελληνική. Αρχικά οι μαθητές μελέτησαν τις αποδείξεις του Herigone, P. (1634), Cours Mathematique, tome 1, Paris, p. 5-6 και στη συνέχεια του Houel, J. (1867), Essai critique sur les principles de la geometrie elementaire, Paris Gauthier – Villars, p.17-18.

Εργασία 2^{η} (1 διδακτική ώρα)

Στην επόμενη διδακτική συνάντηση οι μαθητές και οι μαθήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν και να σχολιάσουν με την βοήθεια του μαθηματικού τα θέματα που ακολουθούν:

- Αξιοποιώντας τις ιστορικές γνώσεις να δώσετε πληροφορίες για το κίνημα του Διαφωτισμού στη Γαλλία.
- Να συντάξετε ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα για τον Herigone, αφού αναζητήσετε πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του.
- Να συντάξετε ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα για τον Houel, αφού αναζητήσετε πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του.
- Να διατυπώσετε τις αλλαγές που εντοπίζονται στις αποδείξεις που προτάθηκαν για την ίδια πρόταση από τον Ευκλείδη, τον Herigone και τον Houel.

- Ποια από αυτές τις αποδείξεις θεωρείτε ότι είναι πιο κοντά στις αποδείξεις που εφαρμόζουμε σήμερα;

ΔΙΑΦΩΤΙΣΜΟΣ

Μια μαθήτρια από την τρίτη ομάδα ανέλαβε να ενημερώσει την ολομέλεια της τάξης για τα χαρακτηριστικά του κινήματος του Διαφωτισμού στην Ευρώπη και τις επιδράσεις του στην οργάνωση της μαθηματικής σκέψης και στον προσανατολισμό της μαθηματικής επιστήμης. Παρακάτω αναφέρουμε βασικά σημεία της παρουσίασής της.

Η απόρριψη κάθε αυθεντίας, η κριτική σε κάθε μορφή υφιστάμενης γνώσης, η αποδοχή της λογικής ως του μόνου ασφαλούς τρόπου ερμηνείας του κόσμου και η πεποίθηση ότι ο άνθρωπος μπορεί να προοδεύσει διαρκώς χάρη στη λογική ικανότητά του ήταν θέσεις που υιοθέτησαν πολλοί Ευρωπαίοι διανοούμενοι. Έτσι διαμορφώθηκε σταδιακά ένα κίνημα που ονομάσθηκε Διαφωτισμός. Πρωτοεμφανίσθηκε στην Αγγλία τον 17ο αιώνα, κορυφώθηκε στη Γαλλία τον 18ο αιώνα και εξαπλώθηκε στην υπόλοιπη Ευρώπη και έξω από αυτήν. Παράλληλα η πρόοδος των φυσικών επιστημών που είχε αρχίσει να γίνεται αισθητή από το 17ο και 18ο αιώνα άνοιξε τον δρόμο για την απελευθέρωση του ανθρώπινου νου από τις πνευματικές αγκυλώσεις και τις προκαταλήψεις. Την εποχή αυτή κάποιοι διανοούμενοι επιχείρησαν βασιζόμενοι στην λογική να ανακαλύψουν τους νόμους που διέπουν την λειτουργία του φυσικού κόσμου. Η πρόοδος της επιστήμης και ιδιαίτερα της Φυσικής και των Μαθηματικών κατά το 17ο αιώνα έδωσε το έναυσμα για την κριτική αναθεώρηση των κυρίαρχων κοινωνικών και πολιτικών αντιλήψεων και των μεθόδων ερμηνείας της κοινωνικοοικονομικής και πολιτικής ζωής, η οποία με τη σειρά της συνέβαλε περαιτέρω την εξέλιξη των επιστημών.

Τα μαθηματικά ως μια επιστήμη συνυφασμένη με την πορεία της ανθρώπινης εξέλιξης έχουν τις ρίζες τους βαθιά στερεωμένες στα θεμέλια της παγκόσμιας ιστορίας. Η μαθηματική σκέψη – έστω και ακατέργαστη – πρωτοεμφανίστηκε αρκετές χιλιάδες χρόνια πριν. Ωστόσο σε όλη την διάρκεια της εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης επικρατούσε μια επιφυλακτική – ίσως και αρνητική- στάση έναντι των μαθηματικών και ίσως πολύ περισσότερο από κάθε άλλη φυσική επιστήμη. Κατά την διάρκεια του 17ου αιώνα, όμως, μια ομάδα μαθηματικών -

κυρίως Γάλλων - με ανήσυχο πνεύμα έκανε το καθοριστικό βήμα για την αναβάθμιση των επιστημών, υψώνοντας τα λάβαρα για μια «επιστημονική επανάσταση».

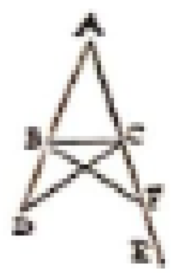
Η ανάγκη των επιστημόνων για επικοινωνία και ανταλλαγή ιδεών οδήγησε σε πρωτοποριακές κινήσεις. Από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα αρχίζουν να κυκλοφορούν στην Ευρώπη τα πρώτα περιοδικά με επιστημονικό περιεχόμενο. Παράλληλα, η εξέλιξη των μέσων γραπτής εξ αποστάσεως επικοινωνίας (της αλληλογραφίας) και η κυκλοφορία των εφημερίδων διευκόλυναν την προσπάθεια των διανοούμενων να συγκροτήσουν μια ισχυρή και ενωμένη κοινότητα. Τώρα η αυστηρή λογική των μαθηματικών γίνεται λίγο πιο φιλική στα μάτια αυτών που ως τότε την αμφισβητούσαν πλήρως. Τα χρόνια αυτά επανεμφανίζεται και η ιδέα του ορθολογισμού συνυφασμένη άμεσα με την πίστη του ανθρώπου στην λογική και με το αίτημα απόρριψης του δογματισμού και της αυθεντίας (Δουβή κ.ά., 2019).

Στη συνέχεια ένας άλλος μαθητής από την τρίτη ομάδα παρουσίασε πληροφορίες για τη βιογραφία και το επιστημονικό έργο του Pierre Herigone (1580-1643). Η προφορική παρουσίαση της εργασίας του μαθητή συνοδεύτηκε από την προβολή εικόνων από το έργο του. Παραθέτουμε παρακάτω βασικές πληροφορίες για τη βιογραφία, το έργο και την αποτίμηση της συνεισφοράς του στη μαθηματική επιστήμη που ανέφερε ο μαθητής στην παρουσίασή του: Ο Herigone ήταν Γάλλος μαθηματικός και αστρονόμος. Είχε βασκική καταγωγή και δίδαξε στο Παρίσι για το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του. Μόνο ένα έργο του, όπως πιστεύεται, έχει διασωθεί. Πρόκειται για το «Cours mathematique» που δημοσιεύθηκε στο Παρίσι σε έξι τόμους. Το συγκεκριμένο έργο αποτελεί μια συλλογή κειμένων για τα στοιχειώδη μαθηματικά γραμμένων στα γαλλικά και στα λατινικά. Όπως επιβεβαιώνουν πολλοί αναγνώστες και μελετητές του, η μεγάλη συνεισφορά του Herigone στη μαθηματική επιστήμη είναι ότι εισήγαγε πάρα πολλά νέα σύμβολα στη μαθηματική γλώσσα εκ των οποίων κάποια χρησιμοποιούνται έως και σήμερα. Το νέο σημειωτικό σύστημα μαθηματικών που επινόησε (προφανώς μία πρώτη προσπάθεια ταχυγραφίας) έγινε γνωστό από τη συλλογή του, που έχει διασωθεί ακέραιη.

Ο ίδιος ο Herigone σχολίασε στο βιβλίο του «Cours mathematique» τη συνεισφορά του στην ανανέωση της «φιλοσοφίας» της μαθηματικής επιστήμης με την εισαγωγή μιας νέας μεθόδου διατύπωσης και οργάνωσης της απόδειξης. Συγκεκριμένα αναφέρει: «*Επινόησα μία νέα μέθοδο απόδειξης, σύντομη και κατανοητή, χωρίς την* *χρήση οποιασδήποτε γλώσσας. Ότι είναι μικρή και κατανοητή και δεν απαιτείται χρήση γλώσσας το καταλαβαίνει κανείς αμέσως με το άνοιγμα του βιβλίου. Ότι είναι κατανοητή θα γίνει αντιληπτό σε εκείνους που θα μάθουν τα σύμβολά μου και θα ακολουθήσουν τις σκέψεις μου που αυτά απεικονίζουν. Επίσης δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η μέθοδός μου είναι καλύτερη από την συνήθη (εννοεί του Ευκλείδη), αν λάβουμε υπόψη ότι στην δικιά μου τίποτα δεν γίνεται δεκτό, χωρίς την αναφορά του στα προηγούμενα δεδομένα. Κάτι που οι άλλοι συγγραφείς δεν το τηρούν πιστά. Όλοι αναγνωρίζουμε την αναγκαιότητα των αναφορών, είτε είναι προφανείς είτε όχι, και στηρίζονται σε αποτελέσματα χωρίς αναφορές, οι οποίες παρόλα αυτά θα ήταν αναγκαίες στους αδύνατους μαθητές. Ας προστεθεί ότι στη συνήθη μέθοδο χρησιμοποιούνται πολλές λέξεις και αξιώματα των οποίων δεν έχει δοθεί η εξήγηση ενώ στην δικιά μου μέθοδο τίποτα δεν λέγεται χωρίς να έχει προηγουμένως αναπτυχθεί και να έχει γίνει κατανοητό. Ακόμα και στις πιο μικρές αποδείξεις, με ελληνικά γράμματα αναφέρονται όσα έχουν αποδειχθεί προηγουμένως στην πορεία της απόδειξης. Και επειδή κάθε συμπέρασμα – αποτέλεσμα εξαρτάται απευθείας από την πρόταση που τίθεται, η απόδειξη έχει από την αρχή μέχρι το συμπέρασμα, μια σειρά συνεχών αποτελεσμάτων, αναγκαίων και άμεσων, κάθε ένα από τα οποία περιέχεται σε ένα μικρότερο μέρος του κειμένου και στο σύνολο αποτελούν βοήθεια στον τελικό συλλογισμό*» (Loria, 1933)

Οι μαθητές και οι μαθήτριες παρακολούθησαν με μεγάλη προσοχή την παρουσίαση του συμμαθητή τους και συγχρόνως διάβασαν το σχετικό απόσπασμα από το βιβλίο του P. Herigone σε νεοελληνική μετάφραση. Στη συνέχεια διατύπωσαν τις παρατηρήσεις και τα σχόλιά τους. Πολλοί από τους μαθητές σχολίασαν ότι η απόδειξη του Herigone (Παράρτημα 3), (εικ. 3) είναι παρόμοια με αυτή του Ευκλείδη. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι διαφέρει από την απόδειξη του Ευκλείδη, δεδομένου ότι δεν συνοδεύεται από κείμενο και ότι χρησιμοποιεί πολλούς μαθηματικούς συμβολισμούς. Όλοι οι μαθητές παρατήρησαν ότι η δομή του κειμένου του Herigone οργανώνεται εύστοχα με χαρακτηρισμούς-ετικέτες όπως: Υπόθεση, Απαιτούμενη απόδειξη, Προετοιμασία απόδειξης, Απόδειξη, Συμπέρασμα. Διαπίστωσαν επίσης ότι η δομή της εκφώνησης και της απόδειξης είναι παρόμοια μ' αυτή στην απόδειξη του Ευκλείδη. Η αναφορά στις υποθέσεις της εκφώνησης δηλώνεται με ένα αριθμό, ενώ η αναφορά σε όσα θεωρούνται γνωστά γίνεται με συντομογραφίες ή ελληνικά γράμματα (υπόθεση, κατασκευή, απόδειξη). Οι μαθητές σχολίασαν τις επιλογές του Herigone και απέδωσαν τον τρόπο διατύπωσης της δομής της απόδειξης στην πρόθεσή του να ελέγχει την πορεία της απόδειξης αλλά και να επαναχρησιμοποιεί με άνεση τις προτάσεις αυτές, όποτε τυχόν τις χρειαστεί, κάτι που δεν εφάρμοσε ο Ευκλείδης. Γενικότερα παρατήρησαν ότι το κείμενο του Herigone βρίσκεται σε συμφωνία με αυτό που προτείνεται από τη σημερινή διδασκαλία με οργανόγραμμα, καθώς περιέχει όλα τα μέρη της πρότασης και της απόδειξης που χρησιμοποιεί και ο Ευκλείδης. Ένας μαθητής σχολίασε χαρακτηριστικά: «Είναι ο Ευκλείδης χωρίς λόγια».

Οι μαθητές και οι μαθήτριες αφού διάβασαν και μελέτησαν την απόδειξη, επιχείρησαν με την καθοδήγηση του μαθηματικού τους την ερμηνεία των νέων μαθηματικών συμβόλων και τις συντομογραφίες που συνάντησαν στο κείμενο του Herigone. Συγκεκριμένα εντόπισαν τα εξής σύμβολα:



Εικόνα 3

1. (<) για την τυχαία γωνία,

2. (-) για τη δήλωση μιας ευθείας,

3. (=) για τις ευθείες παράλληλες,

4. (2/2) για το συμβολισμό της ισότητας, που θεωρήθηκε πρωτότυπο από τους μαθητές. Οι μαθητές αξιοποίησαν επίσης τις διευκρινήσεις σχετικά με συμβολισμούς – παραπομπές του κειμένου, που συνοδεύουν την απόδειξη στο γαλλικό κείμενο. Συγκεκριμένα μελέτησαν και χρησιμοποίησαν τις κάτωθι διευκρινήσεις – παραπομπές:

α. Το (3.1) : proposition 3, Livre1 (πρόταση 3, βιβλίο1) δηλαδή χρησιμοποιεί αυτήν την πρόταση.

Β. Το (1.p.1) : postulat 1, Livre 1 (αξίωμα 1, βιβλίο1).

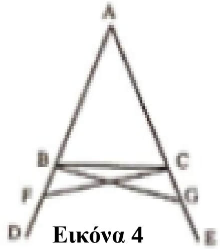
Γ. Το 3.a.1. : axiome 3, Livre1 (αξίωμα 3, βιβλίο 1).

Δ. Το snt (είναι).

Ε. Το req (απαιτούμενη), κ.α..

Οι μαθητές συμφώνησαν ότι η απόδειξη του Herigone είναι πιο σύντομη από αυτή του Ευκλείδη και ότι σε αντίθεση με τον Ευκλείδη που αποφεύγει τα μαθηματικά σύμβολα, ο Herigone αξιοποιεί ευρέως στην απόδειξή του τους μαθηματικούς σημειωτικούς πόρους αλλά με μορφή διαφορετική από αυτήν που χρησιμοποιεί σήμερα η γεωμετρία. Επίσης τα σημεία συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα όπως και σήμερα, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα, η γωνία και το τρίγωνο γράφεται με μικρά γράμματα: τμήμα ad αντί AD, γωνία < adc αντί <ADC. Ένας μαθητής σχολίασε: «Σίγουρα είπε είναι μια απόδειξη πιο κοντά στις σημερινές αποδείξεις θεωρημάτων και ασκήσεων». Τέλος, οι μαθητές υπογράμμισαν ότι ένας εύστοχος τίτλος στην προηγούμενη απόδειξη θα ήταν «Συμβολισμός και Απόλυτη Αυστηρότητα» (Παράρτημα 3).

Οι μαθητές και μαθήτριες στη συνέχεια μελέτησαν την απόδειξη της ίδιας πρότασης που διατύπωσε ο Houel 200 χρόνια περίπου αργότερα από τον Herigone (εικ. 4).



Εικόνα 4

Στην προέκταση BD και AB παίρνουμε ένα σημείο F, και στο AE>AF, πάρτε ένα τμήμα AG=AF [πρ.3]. Στη συνέχεια χαράσσουμε, FC, GB. Στα τρίγωνα ACF, ABG έχουμε: AF=AG, AC=AB, και η γωνία A είναι κοινή. [πρ.4]. Άρα FC=GB, ACF=ABC, AFC=AGB. Επίσης, επειδή AF=AG και AB=AC, τότε [αξ.3] BF=CG. Για τα τρίγωνα FBC, GCB, έχουμε BF=CG, FC=BG, BFC=BGC. Από την [πρ.4] FBC=GCB, BCF=CBG. Έχουμε ABG=AC και CBG=BCF. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα [αξ.3] ABC=ACB άρα αποδείχτηκε.

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι υπάρχουν όλα τα στάδια απόδειξης της πρότασης που είδαμε στους προηγούμενους μαθηματικούς αλλά παρουσιάζονται με τρόπο διαφορετικό. Για παράδειγμα όλες οι προπαρασκευαστικές εργασίες είναι ενσωματωμένες στην εκφώνηση του θεωρήματος. Επίσης η απλή γλώσσα διατύπωσης της απόδειξης αντικαθίσταται όσο το δυνατό περισσότερο από αλγεβρικά σύμβολα, απουσιάζουν όμως τα σύμβολα της γωνίας και του τριγώνου. Οι μαθητές παρατήρησαν ακόμη ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες και τα τρίγωνα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα ενώ υπάρχουν και αναφορές για τα αξιώματα και τις προτάσεις που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη. Οι μαθητές συμπέραναν ότι ο τρόπος διατύπωσης της απόδειξης από τον Houel προσιδιάζει σ΄αυτό που υιοθέτησε ο Herigone και συμφώνησαν πως βρίσκεται κοντά στο τρόπο των σημερινών αποδείξεων. Παρατήρησαν ότι κάνει αναφορές για τις προτάσεις που χρησιμοποιεί όπως και ο Herigone. Όπως σχολίασαν οι μαθητές, το σύμβολο της ισότητας είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιεί η σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες έκριναν ότι η εργασία σύγκρισης των τριών διαφορετικών τύπων απόδειξης (Ευκλείδη-Herigone-Houel) ήταν πολύ ενδιαφέρουσα. Παρατήρησαν ότι η απόδειξη ήταν ίδια, όμως διέφερε η παρουσίασή της. Όλοι οι μαθητές διαπίστωσαν ότι όλοι οι παραπάνω τύποι αποδεικτικού συλλογισμού εκτός από τον τύπο απόδειξης του Ευκλείδη είχαν αναφορές σε προηγούμενες προτάσεις που χρειάστηκαν για την απόδειξη αυτής της πρότασης (αξιωματικό σύστημα). Όπως παρατήρησε ένας μαθητής, σημειώθηκε μετάβαση « *από ένα κείμενο όλο λόγια* (απόδειξη Ευκλείδη) *σε κείμενα απόδειξης μόνο με συμβολισμούς και παραπομπές (Herigone) και τέλος σε ένα κείμενο που είναι συνδυασμός των δύο προηγουμένων (Houel)».*

<u>Εργασία 3^{η}</u> (1 διδακτική ώρα)

Το θεώρημα που μελετάμε εμφανίζεται στο κείμενο του Arnauld (Παράρτημα 3) ως πόρισμα του 13^{ου} βιβλίου του, δηλαδή καταλαμβάνει ένα μικρό μόνο μέρος στο τέλος του έργου του Arnauld. Παρακάτω παρουσιάζουμε το πρωτότυπο γαλλικό κείμενο μεταφρασμένο στα νεοελληνικά.

Δεύτερο θεώρημα.

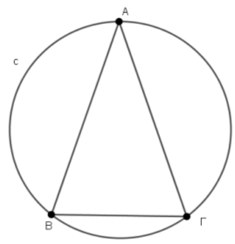
Σε ένα τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη γωνία, και η μεγαλύτερη γωνία αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη πλευρά. Διότι σύμφωνα με το 2^{ο} λήμμα, κάθε τρίγωνο μπορεί να εγγράφεται σε ένα κύκλο, και στη συνέχεια το μήκος του κύκλου χωρίζεται σε τρία τόξα ενώ σε κάθε ένα από αυτά βαίνει κάθε μία γωνία του τριγώνου.

Πρώτο πόρισμα

Όλες οι πλευρές του τριγώνου είναι ίσες, όλες οι γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα. Επειδή είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο, σε ίσες χορδές έχουμε ίσα τόξα. Άρα και οι γωνίες που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα είναι ίσες. Και αντιστρόφως αν είναι ίσες οι τρεις γωνίες, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι πλευρές είναι ίσες. Επειδή οι ίσες γωνίες δίνουν ίσα τόξα και τα ίσα τόξα δίνουν ίσες χορδές (πλευρές).

Δεύτερο πόρισμα

Κάθε τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις ίσες πλευρές είναι ίσες και αντίστροφα. Εγγράφοντας αυτό το τρίγωνο σε κύκλο, θα το αποδείξουμε με το ίδιο τρόπο όπως το προηγούμενο (εικ. 5).



Εικόνα 5

Αναφορά απόδειξης

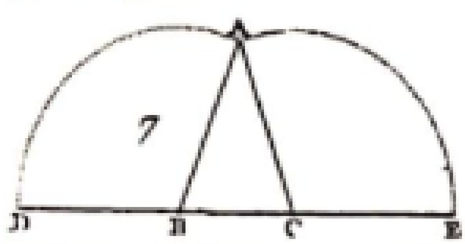
Όλες οι γωνίες που είναι εγγεγραμμένες στην ίδια χορδή ή βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.

Οι μαθητές διάβασαν την μετάφραση του γαλλικού κειμένου που προβλήθηκε στο προτζέκτορα και παρατήρησαν ότι αποτελεί μία εντελώς διαφορετική πρόταση απόδειξης. Συγκεκριμένα προτάθηκε μια απόδειξη και των τριών προτάσεων-μεταξύ αυτών και της πρότασης που μας ενδιαφέρει-με την χρήση του κύκλου. Αν και οι μαθητές της Α΄ Λυκείου δεν έχουν διδαχθεί ακόμα το κεφάλαιο με τον κύκλο. Επίσης θεωρούνται γνωστές από τα γυμνασιακά χρόνια των μαθητών οι σχέσεις που ισχύουν μεταξύ επίκεντρης γωνίας, τόξων, χορδών και αντίστοιχα με τις εγγεγραμμένες γωνίες. Οι μαθητές και οι μαθήτριες έκριναν ότι η απόδειξη ήταν πολύ εύκολη, γιατί δεν τους δυσκόλεψε η κατανόηση των σχέσεων γωνιών – τόξων – χορδών. Ένας μαθητής μάλιστα σχολίασε ότι « *Με μία παρατήρηση και χωρίς σύγκριση τριγώνων αποδείχτηκε η πρόταση. Μου αρέσει πολύ*!».

Σε ερώτημα σχετικό με τις διαφορές μεταξύ της απόδειξης Arnauld και των προηγούμενων αποδείξεων οι μαθητές διαπίστωσαν ότι από την απόδειξη Arnauld απουσιάζουν οι κοπιώδεις συγκρίσεις τριγώνων και ότι η απόδειξη αυτή είναι πιο απλή ακόμα και από την απόδειξη που παρατίθεται στο σχολικό βιβλίο. Οι μαθητές συμφώνησαν ότι με βάση το αξιωματικό σύστημα της γεωμετρίας που υιοθετούμε σήμερα, δεν θα μπορούσαμε να δεχθούμε την ισχύ αυτής της απόδειξης, αν και είναι σωστή, τουλάχιστον στα αρχικά κεφάλαια της διδακτέας ύλης του σχολικού βιβλίου. Η απόδειξη θα μπορούσε να διδαχθεί στο κεφάλαιο του κύκλου όταν πλέον θα έχουν παρουσιαστεί όλες οι προτάσεις και τα θεωρήματα που ισχύουν στον κύκλο.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε μια απόδειξη του Clairaut A. (1753), Elements de Geometrie partie, XXXI, Paris, p. 32-33. Reprint, Laval, Siloe, 1987. Είναι μια ενδιαφέρουσα και εμπνευσμένη απόδειξη (εικ. 6), (Παράρτημα 3).

«Εάν από τις τρεις πλευρές του τριγώνου ABC μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τη βάση BC, και επίσης το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή οι δύο πλευρές AB και AC είναι ίσες: είναι προφανές ότι θα αρκούσε να μετρήσουμε μια από τα δύο γωνίες ABC, ACB γιατί τότε η μία θα είναι ίση με την άλλη».



Εικόνα 6

Μπορούμε εύκολα να δικαιολογήσουμε την πρόταση αυτή, αν υποθέσουμε τι θα συμβεί, σε περίπτωση που οι δύο πλευρές AB και AC του τριγώνου ABC βρίσκονταν πρώτα στη θέση BD και CE στις προεκτάσεις της BC, και στη συνέχεια στρέφονταν προς τα πάνω για να ενωθούν τα άκρα τους στο σημείο A. Η ισότητα αυτών των δύο πλευρών θα εμπόδιζε την μία πλευρά να κινηθεί μακρύτερα από την άλλη και κατά συνέπεια, όταν θα συναντιούνταν, θα είχαν την ίδια κλίση με την βάση BC ή θα διαπιστώνονταν ότι η γωνία ABC θα ήταν ίση με την γωνία ACB.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές και τις μαθήτριες σε συνεργασία με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους να υλοποιήσουν τις παρακάτω διδακτικές προτάσεις:

- να συγκεντρώσετε πληροφορίες για τη ζωή και το επιστημονικό έργο του Clairant και να συντάξετε το βιογραφικό σημείωμά του.
- να σχολιάσετε την εκφώνηση και την διατύπωση της απόδειξης που προτείνει.
- να συγκρίνετε την απόδειξη του Clairant με όσες έχουμε ήδη μελετήσει.
- να σχολιάσετε τεκμηριωμένα αν ο Clairant ακολουθεί στη διατύπωση της απόδειξής του τη αξιωματική διαδικασία.

Η ανάγνωση της απόδειξης Clairant ξάφνιασε τους μαθητές που δήλωσαν:

M_1: *«Δεν είναι απόδειξη αυτή είπαν πολλοί».*

M_2 :*«Δεν δικαιολογεί αυτά που λέει».*

M_3 :*«Δεν αποδεικνύουμε έτσι τα θεωρήματα και τις ασκήσεις».*

M_4: *«Είμαστε σίγουροι για αυτό που βγάζει ως συμπέρασμα;»*

M_5:: *«Όλοι οι μαθητές, είπαν, ότι μπορεί να γίνει και έτσι, είναι απλό».*

M_6 : «*Αυτό είναι σαν την κατασκευή του τριγώνου*»

Ο μαθηματικός με αφορμή την τελευταία απάντηση του μαθητή πρότεινε στους μαθητές και στις μαθήτριες να εντοπίσουν στη διδαχθείσα ύλη του σχολικού βιβλίου της γεωμετρίας αυτή τη διαδικασία κατασκευής τριγώνου. Οι περισσότεροι μαθητές θετικού προσανατολισμού σχολίασαν ότι μοιάζει με την κατασκευή τριγώνου αν δοθούν τρία στοιχεία του, δηλαδή τα μήκη των τριών πλευρών. Συμπλήρωσαν ότι για αυτή την κατασκευή του τριγώνου, όπως αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο, χρησιμοποιούμε χάρακα για να χαράξουμε μία πλευρά του τριγώνου και διαβήτη για να χαράξουμε δύο ίσους κύκλους με ακτίνες τις ίσες πλευρές AB και AC και κέντρα τα άκρα B και C του τμήματος BC. Το σημείο τομής των κύκλων είναι η κορυφή A.

«Δεν έχει καμιά σχέση η απόδειξη με τις προηγούμενες» σχολίασαν οι μαθητές και «*ούτε ακολουθεί κάποια αξιωματική διαδικασία. Αυτή στηρίζεται μόνο σε αυτό που βλέπουμε».*

Όμως οι μαθητές που μέχρι τώρα δεν είχαν δείξει κάποιο μαθησιακό ενδιαφέρον στην γεωμετρία, είτε γιατί είχαν χαμηλή επίδοση στο μάθημα είτε γιατί έδειχναν μειωμένο ενδιαφέρον για αυτό, παρατήρησαν ότι αυτή η απόδειξη τους άρεσε. Ένας από τους μαθητές αυτούς που είχε ενημερωθεί στην τάξη για το θεώρημα με το οποίο επρόκειτο να ασχοληθούμε, ανέλαβε εθελοντικά να κάνει μια κατασκευή και να την παρουσιάσει στους συμμαθητές του. Πήρε ένα ξυλάκι και θεώρησε ότι αυτό είναι η βάση BC. Στη συνέχεια στα δύο άκρα έδεσε δύο κομμάτια σχοινί ίσου μήκους, που σύμφωνα με το κείμενο ήταν οι ίσες πλευρές AC και AB. Σήκωσε τα σχοινάκια που είχαν ίσο μήκος και τα ένωσε στην κορυφή A. «*Οι γωνίες είναι ίσες, εμένα μου φτάνει αυτό*» είπε. Ο μαθητής έκανε μια αναπαράσταση της απόδειξης του Clairaut.

Ο μαθηματικός σχολίασε στους μαθητές του ότι πράγματι δεν πρόκειται για παραδοσιακή παρουσίαση μιας πρότασης με την απόδειξή της. Η εκφώνηση δίνεται στο πλάι σε δύο διακριτά τμήματα (παράρτημα 3). Πρώτα διατυπώνει τον ορισμό του αντικειμένου και στη συνέχεια εκθέτει το συμπέρασμα. Ο Clairaut αποφεύγει συστηματικά να δίνει οποιαδήποτε πρόταση υπό μορφή θεωρήματος ότι όλες αυτές οι προτάσεις, που αποδεικνύουμε, είναι αληθείς, χωρίς να έχουμε δείξει πώς καταφέραμε να τις σκεφτούμε. Παρουσιάζει το θεώρημα σύμφωνα με την κοινή λογική επίλυσης προβλημάτων που μπορεί να υιοθετήσει ο οποιοσδήποτε αναγνώστης, δηλαδή ως ένα εργαλείο για την κατασκευή τριγώνου με συγκεκριμένα δεδομένα. Ο Clairaut χρησιμοποιεί επίσης ένα μη ακαδημαϊκό λεξιλόγιο («φτάνουμε», «συναντάμε», «συναντιόμαστε», «πηγαίνουμε» κ.ά.) ή λέξεις που δίνουν έμφαση στο ρόλο των αποδεικτικών στοιχείων («είναι προφανές», « μπορούμε εύκολα να δούμε τον λόγο» …) και εντοπίζονται σε όλο το βιβλίο του. Ο Clairaut γνωρίζει ότι ο τρόπος διατύπωσης που υιοθετεί σχεδόν αρνείται την διαδικασία της απόδειξης στο κείμενο. Συγκεκριμένα αναφέρει: «*Μπορεί να κατηγορηθώ ίσως σε ορισμένα σημεία των στοιχείων, ότι αναφέρομαι πάρα πολύ στη μαρτυρία των ματιών μου και ότι δεν χρησιμοποιώ την αυστηρή ακρίβεια των αποδείξεων. Παρακαλώ αυτούς που μπορεί να με κατηγορούν, να παρατηρήσουν ότι το χρησιμοποιώ μόνο σε προτάσεις των οποίων η αλήθεια ανακαλύπτεται, εάν δώσουμε λίγο προσοχή. Χρησιμοποιώ αυτόν τον τρόπο, ειδικά στην αρχή ή πιο συχνά σε προτάσεις όπως αυτή, γιατί έχω παρατηρήσει ότι εκείνοι που έχουν διάθεση για την γεωμετρία, θέλουν να ασκήσουν λίγο το μυαλό τους,, ενώ αντιθέτως την απέρριπταν, γιατί τους κούραζαν οι αποδείξεις…».* Το έργο του από παιδαγωγικής άποψης μπορεί «*να προκαλέσει ενδιαφέρον και να φωτίσει» τους αρχάριους και «να συνηθίσει το πνεύμα να αναζητεί και να ανακαλύπτει*». Στο αποδεικτικό κείμενό του τίθεται το ερώτημα αν πρέπει να θεμελιώσει την αλήθεια ή να πείσει για την αλήθεια (Barbin et al, 2001).

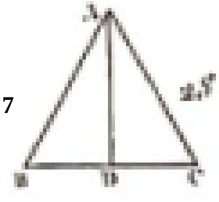
<u>Εργασία 4η</u> (1 διδακτική ώρα)

<u>Η επιστροφή στον Ευκλείδη</u>

Το θεώρημα που μελετάμε τώρα εμφανίζεται στο κείμενο του Legendre, A. M. 1813), *Elements de Geometri*,10η έκδοση, βιβλίο Ι, πρόταση 12, Παρίσι. Σελ. 14-15, (παράρτημα 3).

Σε ισοσκελές τρίγωνο, οι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές είναι ίσες (εικ. 7)
Ας είναι AB=AC, Λέω ότι θα έχουμε C=B.

Εικόνα 7



Χαράξτε το τμήμα AD από την κορυφή A στο σημείο D, μέσο της βάσης BC, τα δύο τρίγωνα ABD, ADC, θα έχουν τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία. Ξέρουμε ότι AD κοινή, AB=AC από υπόθεση και BD=DC από κατασκευή. Επομένως, με βάση το προηγούμενο θεώρημα η γωνία B είναι ίση με την γωνία C.

Πόρισμα: Ένα τρίγωνο ισόπλευρο είναι ταυτόχρονα και ισογώνιο, δηλαδή έχει ίσες γωνίες.

Σχόλιο: Η ισότητα των τριγώνων ABD, ADC αποδεικνύει επίσης και τη γωνία BAD=DAC, και ότι η γωνία BDA=ADC. Από αυτά τα δύο συμπεράσματα προκύπτει ότι η AD είναι και διχοτόμος της γωνίας A και ότι είναι κάθετη στην βάση δηλαδή ύψος.

Στη συνέχεια προτάθηκαν στους μαθητές και τις μαθήτριες οι συγκεκριμένες δραστηριότητες:

1.να συντάξετε το βιογραφικό σημείωμα του Legendre.

2.να συγκρίνετε την απόδειξη αυτή με την αντίστοιχη του Ευκλείδη και να εντοπίσετε τις τυχόν ομοιότητές τους.

3. να εντοπίσετε τις ομοιότητες και τις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στον τρόπο διατύπωσης της απόδειξης του Legendre και σ' αυτόν που υιοθετεί το σχολικό εγχειρίδιο.

4. να σχολιάσατε τη χρήση μαθηματικών συμβόλων στην απόδειξη του Legendre.

Ο καθηγητής με καθοδηγητικές ερωτήσεις βοήθησε τους μαθητές του να ανακαλέσουν τις γνώσεις τους για τα χαρακτηριστικά μέρη από τα οποία αποτελείται μία πρόταση και η απόδειξη της (πρόταση-έκθεση-διορισμός-κατασκευή-απόδειξη-συμπέρασμα). Οι μαθητές μελετώντας την απόδειξη σημείωσαν στο κείμενο του Legendre τα χαρακτηριστικά μέρη της πρότασης-απόδειξης. Οι περισσότεροι μαθητές αρχικά εντόπισαν όλα τα μέρη στη δομή που συνάντησαν στο Ευκλείδειο κείμενο. Παρατήρησαν ότι αυτή η απόδειξη ήταν εντελώς διαφορετική από τις αποδείξεις των Ευκλείδη, Herigone και Houel. Διαπίστωσαν ότι είναι πιο σύντομη και ότι είναι πιο εύκολο να την σκεφτούν και να την αποδείξουν.

Οι μαθητές σχολίασαν ότι: « *Σε σχέση με την απόδειξη στο σχολικό βιβλίο η διαφορά είναι η χάραξη της διαμέσου ενώ στο βιβλίο χαράχτηκε η διχοτόμος. Αυτή η απόδειξη είναι στο σχολικό βιβλίο, μετά την απόδειξη των τριών κριτηρίων ισότητας τριγώνων.*

Και οι δύο αποδείξεις όμως στηρίζονται στην ισότητα ζεύγους τριγώνων και, αφού βγουν ίσα, τότε και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα άρα προκύπτει το ζητούμενο».

Όλοι οι μαθητές επίσης παρατήρησαν ότι « *Μετά την απόδειξη ακολουθεί το πόρισμα ότι όλες οι γωνίες είναι ίσες στο ισόπλευρο τρίγωνο»*, και επίσης διαπίστωσαν ότι « *Στο σχόλιο που ακολουθεί υπάρχουν και άλλα συμπεράσματα από αυτή την απόδειξη, εκτός από το ζητούμενο».* Δεδομένου ότι πρόκειται για μια απόδειξη παρόμοια με αυτή που ήδη γνωρίζουν, οι μαθητές υπέθεσαν ότι η ισότητα των τριγώνων που προκύπτει από τις τρεις πλευρές τους είναι ένα κριτήριο τριγώνων που σίγουρα ο Legendre το έχει αναφέρει νωρίτερα στο βιβλίο του, για να μπορεί να το επικαλεστεί αργότερα. Τέλος σχολιάζοντας τα μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιεί ο Legendre διαπίστωσαν ότι το σύμβολο της ισότητας έχει πια καθιερωθεί ως (=), ενώ απουσιάζουν σύμβολα για τις γωνίες και τα τρίγωνα. Και εδώ τα τμήματα και οι γωνίες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα. Οι μαθητές για μία ακόμα φορά κατάλαβαν ότι ο κάθε μαθηματικός χρησιμοποιεί το δικό του αξιωματικό σύστημα στην γεωμετρία, για να αποδείξει το ίδιο θεώρημα.

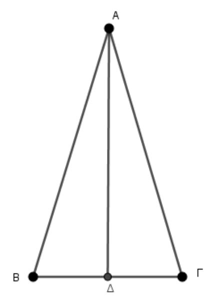
Εργασία 5η (1 διδακτική ώρα)

Στην επόμενη διδακτική ώρα οι μαθητές μελέτησαν το θεώρημα του Houel, J. (1867), Essai critique sur les principles de la geometrie elementaire, Paris, Gauthier- Villars,p. 51-52, (παράρτημα 3).

Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο ισοσκελές, στο οποίο ΑΒ=ΑΓ. Ας περιστρέψουμε το επίπεδο αυτού του τριγώνου, έτσι ώστε να κάνει μισή στροφή γύρω από την διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α, ή ομοίως, διπλώστε το σχήμα στα δύο, γυρίζοντας μία από της πλευρές του γύρω από την ΑΔ ως άξονα. Τότε βλέπουμε ότι τα δύο μισά στο σχήμα, εφαρμόζουν τέλεια.

Θεώρημα:

Σε τρίγωνο ισοσκελές:
Πρώτον, οι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές είναι ίσες.
Δεύτερον, η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι κάθετος στη βάση.
Τρίτον, διχοτόμος χωρίζει τη βάση σε δύο ίσα μέρη (εικ. 8).



Εικόνα 8

Πρόκειται για μία απόδειξη του ίδιου θεωρήματος αλλά με διαφορετική εκφώνηση και εντελώς διαφορετική δικαιολόγηση. Οι μαθητές διαπίστωσαν ότι «ξεκινά λέγοντας τη μέθοδο και τον τρόπο δικαιολόγησης». Παρατήρησαν επίσης ότι «δεν υπάρχει σύγκριση τριγώνων. Γίνεται περιστροφή του βασικού σχήματος με χρήση της διχοτόμου ως άξονα περιστροφής ή διπλώνοντας το σχήμα στα δύο σε σχέση με τη διχοτόμο». Σύμφωνα με έναν άλλον μαθητή « ο Houel χρησιμοποιεί τη διχοτόμο ως άξονα συμμετρίας».

Η αποδεικτική διαδικασία του θεωρήματος από τον Houel ανακάλεσε στη μνήμη των μαθητών τις τακτικές απόδειξης που χρησιμοποιούσαν στο γυμνάσιο, όταν δικαιολογούσαν πολλές προτάσεις με ταύτιση σχημάτων και στη συνέχεια διατύπωναν τα συμπεράσματά τους. Η απόδειξη του Houel φάνηκε στο σύνολο των μαθητών – και μάλιστα στους μαθητές που δεν έδειχναν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία- ευχάριστη και εύκολη. Κάποιος μαθητής την παρομοίασε με την απόδειξη του Clairaut.

Ακολούθησε μια γόνιμη συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές και τον καθηγητή. Ένας μαθητής έθεσε το ερώτημα: «Αυτή την μέθοδο θα μπορούσαμε να την χρησιμοποιήσουμε και σε άλλες αποδείξεις;». Η ερώτηση σχολιάστηκε από έναν συμμαθητή του: «*Κάθε φορά αποδεικνύουμε με όποιο τρόπο θεωρούμε πιο εύκολο, αρκεί να έχουμε προηγουμένως αναφερθεί και ορίσει τα έννοιες αυτές*». Ο μαθηματικός με τη σειρά του σχολίασε ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη απόδειξη είναι αυτή της δράσης και της κίνησης. Διάβασε μια σημείωσή του Houel: «*Είναι επωφελές να εισαχθεί αυτή η ιδέα της γεωμετρικής κίνησης όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρα. Κερδίζουμε πολλά από την άποψη της σαφήνειας και της ακρίβειας της γλώσσας και είμαστε καλύτερα προετοιμασμένοι να εισαγάγουμε αργότερα τις έννοιες του χρόνου και της ταχύτητας στην κινηματική*». Επίσης πληροφόρησε τους μαθητές του ότι το κείμενο του Houel προβληματίζει τον αναγνώστη σχετικά με τη σκοπιμότητα διεξοδικών αναφορών στον τρόπο διατύπωσης και σύνταξης του αποδεικτικού κειμένου και μάλιστα σε ένα βιβλίο του οποίου βασικός στόχος είναι η οργάνωση και η μεθοδική παρουσίαση βασικών γνώσεων σχετικών με το υπό εξέταση γνωστικό αντικείμενο. Όμως ο Houel και ο Clairaut αμφισβητούν τους σκοπούς ενός επινοητικού κειμένου. Ο καθηγητής θέτει στους μαθητές του τον προβληματισμό: Το κείμενο πρέπει απλώς να πείσει τον αναγνώστη για την ορθότητα των διατυπωμένων κρίσεων ή μήπως πρέπει να επιδιώξει να τον διαφωτίσει για όσα υποστηρίζει ο Houel (Barbin et al, 2001);

Οι μαθητές σχολίασαν:

M1: *Ωραία, φαίνεται εύκολη η απόδειξη αλλά πώς θα την σκεφτώ;»*

M2*: Εμένα η δίπλωση και ταύτιση με καλύπτει, αλλά πώς θα την κάνω πρακτικά; Θα διπλώσω τον πίνακα ή το τετράδιο;*

M3*: Πρέπει να έχω ένα ψαλίδι μαζί μου να κάνω τέλειο σχήμα για να το κόψω και να το περιστρέψω.*

M4: «*Έχουμε συνηθίσει σε άλλη αποδεικτική διαδικασία μέχρι τώρα που στηρίζεται σε ορισμούς, προτάσεις, θεωρήματα με μία λογική συνδεδεμένα ενώ αυτή που προτείνεται παραπάνω είναι μεν πολύ εύκολη, αλλά αν δεν σχεδιαστεί το σχήμα καλά δεν μπορείς να το δικαιολογήσεις, δηλαδή δεν θα ταυτιστούν».*

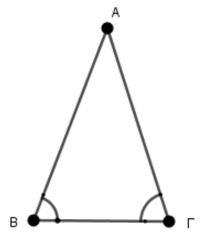
M5: *«Μου θύμισε αποδείξεις που κάναμε στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο».*

M6: «*Είναι αποδείξεις για μικρά παιδιά».*

<u>Δεύτερο Θεώρημα</u>

Το θεώρημα που στη συνέχεια μελέτησαν οι μαθητές, παρατίθεται στο βιβλίο του Hadamard, J. (1898), Lecons de Geometrie, 13^{η} έκδοση (1947), Τόμος I, κεφάλαιο II, Παρίσι, σελ. 23), (παράρτημα 3)

Θεώρημα: Σε ένα τρίγωνο ισοσκελές οι απέναντι πλευρές είναι ίσες (εικ. 9).



Εικόνα 9

Περιστρέψτε τη γωνία ΒΑΓ γύρω από τον εαυτό της, το ΑΒ παίρνει την κατεύθυνση ΑΓ και αντίστροφα. Δεδομένου ότι τα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, το σημείο Β θα αντικαταστήσει το σημείο Γ και αντίστροφα. Επομένως, η γωνία ΑΒΓ θα έρθει στη γωνία ΑΓΒ, έτσι ώστε αυτές οι δύο γωνίες να είναι ίσες.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες σχολίασαν ότι αν και πρόκειται για μια «πολύ έξυπνη» απόδειξη και μάλιστα αρκετά παρόμοια με την απόδειξη του Houel, είναι δύσκολο να την αποδεχθούν δεδομένου ότι στερείται επιστημονικής τεκμηρίωσης. Σύμφωνα με κάποιους μαθητές «*Είναι απόδειξη για μικρά παιδιά*». Κάποιοι μαθητές την θεώρησαν «*πιο πρακτική*». Άλλοι μαθητές σχολίασαν: «*Οι προηγούμενες αποδείξεις ήταν επιστημονικές και αποτέλεσμα λογικών σκέψεων».* Οι μαθητές με μειωμένο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία αξιολόγησαν θετικά τον τρόπο διατύπωσης της απόδειξης. Όπως ανέφεραν, η εξήγηση ήταν σαφής χωρίς να προϋποθέτει εξειδικευμένες γνώσεις.

Ο μαθηματικός ενημέρωσε τους μαθητές και της μαθήτριες ότι η διατύπωση του σκοπού της απόδειξης του Hadamand βασίζεται στη χρήση της έννοιας της μεταφοράς και στον ορισμό της ισότητας των δύο σχημάτων. Στη συνέχεια σχολίασε τον τρόπο παρουσίασής της στο έργο του. Σύμφωνα με τον ορισμό των ίσων σχημάτων δύο γωνίες θεωρούνται ίσες, εάν μεταφέροντας την μία πάνω στην άλλη κατορθώσουμε να τις καταστήσουμε ταυτιζόμενες. Δύο ίσες γωνίες μπορούν να τοποθετηθούν η μία πάνω στην άλλη με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο καθηγητής τόνισε στους μαθητές του ότι είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουν ότι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τον Hadamard και αυτή που βρήκαν ως παραλλαγή της απόδειξης από τον Houel ήταν ήδη γνωστή στην αρχαιότητα από τον Πάππο (περίπου το 300 μ.Χ.).

Με την παρότρυνση και την καθοδήγηση του διδάσκοντος ένας μαθητής σχολίασε τον τρόπο οργάνωσης του κειμένου του Hadamard και εντόπισε την χρήση - μάλιστα με σοβαρές συντομεύσεις - των έξι σταδίων του κανόνα του Ευκλείδη, που είναι η γενική δήλωση, η έκθεση χωρίς εξήγηση των ίσων πλευρών, ο διορισμός με αναφορά στο σχήμα στο οποίο διατυπώνεται σε αντίθεση με την ισχύουσα αποδεικτική πρακτική το συμπέρασμα, η κατασκευή με την αντιστροφή της γωνίας, η απόδειξη και το συμπέρασμα. Επίσης ένας άλλος μαθητής σχολίασε τη μέθοδο ανάπτυξης του επιχειρήματος από τον συγγραφέα και διαπίστωσε ότι η επιχειρηματολογία είναι παραγωγικού τύπου. Επίσης παρατήρησε ότι οι αναφορές στις προτάσεις που χρησιμοποιούνται, εξηγούνται από τους αριθμούς με έντονα γράμματα που περικλείονται σε παρένθεση.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες διαπίστωσαν με τη βοήθεια του καθηγητή τους ότι, όπως ο Houel, έτσι και ο Hadamard βασίζεται στην έννοια της κίνησης και υιοθετεί έναν τρόπο απόδειξης πιο κοντά στη διαίσθηση εκκινώντας από την παρατήρηση των γωνιών. Οι μαθητές διάβασαν στην ανακοίνωση της δεύτερης έκδοσης του έργου του

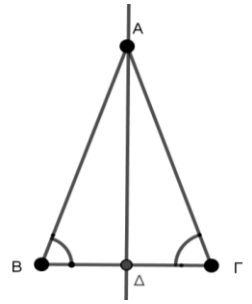
Hadamard (1902) το προσωπικό σχόλιό του για την επαλήθευση της πρόβλεψης, που διατύπωσε το 1898 (ημερομηνία της πρώτης έκδοσης του *Lecons de Geometrie),* σχετικά με την επίδραση που θα ασκούσε το έργο του στην ανανέωση και μεταρρύθμιση των αναλυτικών προγραμμάτων διδασκαλίας της γεωμετρίας. Ο Hadamard σημείωσε: «*Από την εμφάνιση αυτού του έργου, η διδασκαλία των μαθηματικών, και ειδικά της γεωμετρίας, έχει υποστεί – όχι μόνο στις λεπτομέρειές της αλλά και σε όλο το βάθος της – τις ριζικές αλλαγές που όλοι περίμεναν και καθολικά απαιτούσαν. Είναι πιο ξεκούραστο για τους αρχάριους να δουλεύουν με την πρακτική και την διαίσθηση, και όχι πλέον με την Ευκλείδεια μέθοδο, της οποίας τη χρησιμότητα δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν*» (Barbin et al, 2001).

Τρίτο Θεώρημα

Το θεώρημα που μελετήθηκε στη συνέχεια διατυπώθηκε από τον Borel E. Στο έργο του *Geometrie* (1905), Paris, p.34. (παράρτημα 3)

Θεώρημα

Καλούμε βάση του ισοσκελούς τριγώνου την απέναντι πλευρά από την κορυφή. Τα δύο άκρα Β και Γ της βάσης είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας του τριγώνου (εικ. 10), προκύπτει ότι:



Εικόνα 10

Θεώρημα 2.

Οι δύο γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Αντιστρόφως, αν οι γωνίες της βάσης του τριγώνου είναι ίσες, το τρίγωνο είναι ισοσκελές, επειδή είναι ορατά συμμετρικά σε σχέση με την κάθετη που διέρχεται από το μέσον της βάσης.

Οι μαθητές αντιλήφθηκαν αμέσως ότι πρόκειται για μια απόδειξη που βασίζεται στη χρήση της συμμετρίας. Σε ερώτηση που τους απηύθυνε ο μαθηματικός τους και αφορούσε στον εντοπισμό του άξονα συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ οι μαθητές ανέφεραν: «*άξονας συμμετρίας ενός σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν, όταν το σχήμα διπλωθεί κατά μήκος της ευθείας*». Στην ερώτηση αν υπάρχει σχετική απόδειξη του θεωρήματος, οι μαθητές παρατήρησαν: «*Κάνει υποδείξεις στην αρχή πριν το θεώρημα και με τον τρόπο αυτό δείχνει τον τρόπο*. *Μάλλον θεωρεί ότι αυτές οι έννοιες σχετικά με τη* *συμμετρία είναι γνωστές και πρέπει να τις σκεφτούμε εμείς οι μαθητές».* Πράγματι, ο Borel υπενθυμίζει τη συμμετρία και συγκεκριμένα θεωρεί ότι ορισμένα στοιχεία όπως η συμμετρία είναι τόσο γνωστά ώστε δεν υπάρχει λόγος να αποδειχθούν. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει: «Είναι ορατά συμμετρικά». Ένας μαθητής σχολίασε: *«γνωρίζουμε ότι το ισοσκελές τρίγωνο έχει έναν άξονα συμμετρίας και ότι η συμμετρία διατηρεί τις γωνίες ίσες».* Ο καθηγητής ενθάρρυνε τους μαθητές του να ανατρέξουν στις προηγούμενες αποδείξεις που σχολιάστηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και να αναζητήσουν τις κοινές αναφορές τους με την απόδειξη του Borel. Οι μαθητές και οι μαθήτριες εντόπισαν τις ομοιότητες που υπάρχουν στις σχετικές αποδείξεις και αφορούν στον τρόπο διατύπωσης και οργάνωσής τους.

Επίσης σχολιάστηκε ότι επιφυλακτικές στάσεις για την επιλογή και τη διδακτική εφαρμογή μιας τέτοιας μορφής απόδειξης υιοθετούνται από έναν περιορισμένο αριθμό δασκάλων που επιθυμούν να διατηρήσουν με κάθε τρόπο ένα ευκλείδειο στυλ στη διδασκαλία και στην επιστημονική προσέγγιση της γεωμετρίας, υπονομεύοντας ή ακυρώνοντας με τον τρόπο αυτόν τους μετασχηματισμούς στους τρόπους απόδειξης που παραθέτουν τα κείμενα.

Εργασία 6η (1 διδακτική ώρα)

Το θεώρημα όπως έχει αποδειχθεί από τα σχολικά βιβλία τα Γεωμετρίας των τελευταίων 70 χρόνων

Για την τελευταία διδακτική ώρα των δημιουργικών εργασιών δόθηκαν στους μαθητές και στις μαθήτριες οι αποδείξεις της παραπάνω πρότασης με τον τρόπο παρουσίασής τους στα σχολικά εγχειρίδια γεωμετρίας που γράφτηκαν και διδάχτηκαν στο ελληνικό σχολείο μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο (παράρτημα 4). Την εισαγωγή των βιβλίων παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκρίνοντας τα βιβλία αυτά διαπίστωσαν τη διαφορετική διάταξης της ύλης (διαφορετική σειρά κεφαλαίων από βιβλίο σε βιβλίο) και τον διαφορετικό τρόπο απόδειξης της συγκεκριμένης πρότασης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές και οι μαθήτριες μελέτησαν τις σημειώσεις και διατύπωσαν τις παρατηρήσεις τους. Συγκεκριμένα παρατήρησαν ότι το θεώρημα στου Χ. Μπαρμπαστάθη (1948) έχει παρόμοια απόδειξη με αυτή που προτείνει ο Hadamard με τη διαφορά ότι ο Hadamard περιστρέφει το τρίγωνο, ενώ στο θεώρημα εμφανίζονται δύο τρίγωνα. Όπως διαπίστωσε ένας μαθητής, το ένα από τα δύο τρίγωνα επαναλαμβάνεται σε σχέση με το άλλο σύμφωνα με την απόδειξη και, τελικά η ισότητα των γωνιών αποδεικνύεται με εφαρμογή των ίσων γωνιών Α και α έτσι ώστε η πλευρά αγ να «πέσει» στην πλευρά ΑΒ και η πλευρά αβ να «πέσει» στην πλευρά ΑΓ. Ο τρόπος απόδειξης του θεωρήματος από τον Ν. Νικολάου (1953) είναι ο ίδιος με αυτόν που υιοθέτησε ο Legendre χρησιμοποιώντας τη διάμεσο και την ισότητα των τριγώνων. Αντίθετα, οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν διαπίστωσαν ομοιότητες μεταξύ της απόδειξης του θεωρήματος του Ι. Ιωαννίδη (1968) με αυτές που μελέτησαν κατά τη διάρκεια της δημιουργικής εργασίας. Πιθανότατα οι μαθητές δεν κατανόησαν σωστά τη λογική της απόδειξης και χρησιμοποιώντας τις ήδη κεκτημένες γνώσεις τους θεώρησαν ίδια και «ισοδύναμη» με την ανάγνωση των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΒ που στην προκειμένη περίπτωση διαφοροποιείται. Προτάθηκε η εξήγηση ότι στο βιβλίο αυτό δύο οποιαδήποτε σημεία Α, Β μιας ευθείας ε ορίζουν δύο διατεταγμένα ζεύγη το (Α,Β) και το (Β,Α). Αφού το ζεύγος (Α,Β) των σημείων της ευθείας ε ορίζει σε αυτήν μία φορά, τότε το ζεύγος (Β,Α) ορίζει μία άλλη φορά διαφορετική της πρώτης. Αν η μία φορά ονομαστεί θετική, η άλλη θα ονομαστεί αρνητική. Οι μαθητές σχολίασαν ότι η συλλογιστική της απόδειξης τους θυμίζει τα διανύσματα. Δεν παρέλειψαν όμως να επισημάνουν τη δυσκολία αυτής της απόδειξης του θεωρήματος.

Οι μαθητές θεωρούν ότι η απόδειξη του θεωρήματος από τον Χ. Παπανικολάου (1975) έχει περισσότερες ομοιότητες με την απόδειξη που προτείνει ο Borel. Η διαπίστωση αυτή βασίστηκε στην αρχή της συμμετρίας που αναφέρεται στην απόδειξη του Borel. Ο Borel δέχεται ότι το ισοσκελές τρίγωνο έχει έναν άξονα συμμετρίας και ότι η συμμετρία αυτή διατηρεί τις γωνίες. Σε αυτή την απόδειξη αφού αποδεικνύει ότι η κάθετος από την κορυφή Α στη βάση ΒΓ είναι μεσοκάθετος, στη συνέχεια αναφέρεται στην συμμετρία για να αποδείξει ότι οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Για την απόδειξη του θεωρήματος από τους Παπαμιχαήλ-Σκιαδά (1977), των κ. Α. Αλιμπινίση κ.ά. (1996), των κ. Γ.Θωμαΐδη κ.ά. (1999) και των Η. Αργυρόπουλο κ.ά. (2001) οι μαθητές διαπίστωσαν την πλήρη ταύτισή της μ’αυτή του σχολικού εγχειριδίου τους. Επίσης, οι μαθητές δήλωσαν ότι πρόκειται για μια απόδειξη πολύ εύκολη στην κατανόησή της, αν και δεν ήταν εύκολο να σκεφτούν να χαράξουν την διχοτόμο.

Στο σημείο αυτό τελειώνει η επτάωρη δημιουργική εργασία. Επιδιώχθηκε μέσω αυτής της διδακτικής πρότασης να συνδυαστούν διακριτά μαθήματα του αναλυτικού προγράμματος σπουδών (γεωμετρία, ιστορία, ιστορία της γεωμετρίας). Στο σώμα των κειμένων που συλλέχθηκαν και μελετήθηκαν από τους μαθητές και μαθήτριες συμπεριλήφθησαν παραθέματα από τις αρχαιοελληνικές πηγές του 300 π.Χ., και από το έργο οκτώ Γάλλων μαθηματικών του 1600-1900 μ.Χ., καθώς επίσης και αποσπάσματα από οκτώ σχολικά βιβλία γεωμετρίας των τελευταίων 60 χρόνων. Δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασίας με τα πρωτότυπα κείμενα, συνοδευόμενα από νεοελληνική μετάφραση έτσι ώστε να διευκολυνθεί η εργασία των μαθητών. Οι μαθητές διέθεσαν πολύ λίγο χρόνο εργασίας στο σπίτι και όλη η προετοιμασία της εργασίας ολοκληρώθηκε από τους μαθητές σε κλίμα συνεργασίας στην τάξη. Έξι (6) μαθητές- ένας από κάθε ομάδα-αξιοποίησαν τις γνώσεις και τις δεξιότητές τους στη χρήση των σύγχρονων ψηφιακών και τεχνολογικών μέσων συμβάλλοντας αποτελεσματικά στην επιτυχή παρουσίαση των εργασιών από τους συμμαθητές τους. Κατάφεραν να ψηφιοποιήσουν το έντυπο υλικό των εργασιών με σκάνερ και να προβάλουν τα κείμενα ταυτόχρονα με την προφορική παρουσίαση των εργασιών στην ολομέλεια της τάξης.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της δημιουργικής εργασίας οι μαθητές και οι μαθήτριες έδειξαν ενδιαφέρον και συμμετείχαν πρόθυμα σε όλα τα στάδια υλοποίησής της. Ο τρόπος συμμετοχής τους αλλά και ο βαθμός του ενδιαφέροντός τους επηρεάστηκε από το γνωστικό προσανατολισμό τους. Οι μαθητές και μαθήτριες με σαφή προτίμηση προς τις ανθρωπιστικές σπουδές και τα γλωσσικά μαθήματα ανέλαβαν τη μετάφραση του αρχαιοελληνικού κειμένου στα νεοελληνικά. Όπως σχολίασαν, το πρωτότυπο κείμενο ήταν « *άριστα δομημένο συντακτικά*». Συμμετείχαν με τα υπόλοιπα μέρη της ομάδας τους στη συλλογή πληροφοριών με ιστορικό περιεχόμενο. Με τις βιογραφικές και ιστορικές πληροφορίες, που συγκέντρωσαν και παρουσίασαν, κατάφεραν να αναδείξουν όσο το δυνατόν καλύτερα το κλίμα της αντίστοιχης ιστορικής εποχής και να συνδυάσουν δημιουργικά δύο γνωστικά αντικείμενα, την ιστορία και τα μαθηματικά, που παραδοσιακά διδάσκονται ως ανεξάρτητα μαθήματα χωρίς εσωτερική σύνδεση μεταξύ τους. Οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάστηκαν μαζί με την ομάδα τους για την εύρεση των ιστορικών πηγών έχοντας τη διακριτική βοήθεια και καθοδήγηση της φιλολόγου που τους πρότεινε σχετική βιβλιογραφία με ψηφιακό πληροφοριακό υλικό (π.χ. ψηφιακές εγκυκλοπαίδειες, ηλεκτρονικές διευθύνσεις για αναζήτηση υλικού) καθώς και ιστορικές πηγές σε έντυπη μορφή (π.χ. σχολικά ιστορικά εγχειρίδια, επιστημονικά ιστορικά συγγράμματα και ιστορικές μελέτες) .

Οι μαθητές με προσανατολισμό προς τις θετικές σπουδές ανέλαβαν στην πλειοψηφία τους την παρουσίαση των αποδείξεων και τον σχολιασμό των ιδιαιτεροτήτων τους στον τρόπο διατύπωσης και οργάνωσής τους. Σύγκριναν και αντιπαρέβαλαν τους τρόπους απόδειξης εντοπίζοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές τους. Κατέθεσαν τις προσωπικές κρίσεις τους και συμμετείχαν στη διεξαγωγή ενός διερευνητικού και γόνιμου διαλόγου με τους συμμαθητές τους για τις προσωπικές επιλογές και ιδιαιτερότητες των γεωμετρών στον τρόπο οργάνωσης και παρουσίασης της αποδεικτικής διαδικασίας του υπό μελέτη θεωρήματος. Το σημαντικότερο, αξιοποίησαν τη συλλογιστική των αποδείξεων που μελετήθηκαν στην τάξη και πρότειναν νέες μεθόδους απόδειξης του θεωρήματος.

Οι μαθητές με μέτριο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τα γλωσσικά μαθήματα ανέλαβαν δραστικό ρόλο στην οργάνωση και στον σχεδιασμό των παρουσιάσεων των συμμαθητών τους. Επίσης ανάλογα με τις δυνατότητές τους συμμετείχαν αποτελεσματικά στη συλλογή του ιστορικού υλικού και στον σχολιασμό των μελετώμενων αποδείξεων του θεωρήματος.

Ιδιαιτέρως σημαντική αποδείχθηκε η εργασία των μαθητών στο πλαίσιο των ομάδων τους. Οι μαθητές εργάστηκαν σε κλίμα αγαστής συνεργασίας και αλληλεγγύης. Οι μαθητές κατάφεραν να συντονίσουν αποτελεσματικά την εργασία τους και να διασφαλίσουν την ισότιμη και την ισόρροπη συμμετοχή όλων των μελών της ομάδας στην κοινή προσπάθεια αναπληρώνοντας ο ένας τις αδυναμίες του άλλου. Με άλλα λόγια στην επιτυχή ολοκλήρωση της δημιουργικής εργασίας συνέβαλε αποτελεσματικά εκτός από τον προσωπικό ζήλο και την ατομική προσπάθεια η δυναμική που ανέπτυξε η ομάδα των μαθητών. Οι μαθητές παρουσίασαν με άνεση τις εργασίες τους, δεν δίστασαν να παρουσιάσουν πληροφορίες που είχαν προσωπικά επεξεργαστεί και να προχωρήσουν στη διατύπωση προσωπικών κρίσεων και παρατηρήσεων στο έργο των γεωμετρών. Η συμμετοχή σε ομαδικές εργασίες και το πνεύμα συνεργασίας της ομάδας ενίσχυσαν την αυτοπεποίθηση των μαθητών και απομάκρυναν τον φόβο προσωπικής «έκθεσης» των μαθητών κατά την παρουσίαση των εργασιών τους στην ολομέλεια της τάξης. Σε αυτό συνέβαλε και το γεγονός ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες είχαν ήδη ενημερωθεί από τον καθηγητή τους ότι η ατομική προσπάθεια και οι επιδόσεις τους στις ομαδικές δημιουργικές δραστηριότητες δεν υπόκεινται στον έλεγχο μιας τυπικής αξιολόγησης.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες με τη συμμετοχή τους στη δημιουργική εργασία ενίσχυσαν και εμβάθυναν τις γνώσεις τους στη γεωμετρία και στα μαθηματικά. Το σημαντικότερο, οι μαθητές συνειδητοποίησαν πως τα μαθηματικά δεν έμειναν στάσιμα, αλλά με το πέρασμα του χρόνου εξελίχθησαν και διαφοροποιήθηκαν. Διαπίστωσαν ότι τουλάχιστον στη διάρκεια των περιόδων της ιστορικής διαδρομής των μαθηματικών που μελέτησαν «*τα μαθηματικά επηρεάστηκαν και ανεπτύχθησαν από τον πολιτισμό και την κοινωνική κατάσταση της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου*». Οι μαθητές και οι μαθήτριες δήλωσαν ότι είναι δύσκολο να αποτιμήσουν τα θετικά αποτελέσματα της διδακτικής πρότασης στη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας στη σχολική τάξη. Το σίγουρο όμως είναι ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας με βάση τη διαθεματική σύνδεση της ιστορίας και των μαθηματικών και την κριτική επεξεργασία των αποδείξεων της γεωμετρίας από τους ίδιους τους μαθητές «τάραξε τα νερά» και δημιούργησε ένα νέο διδακτικό περιβάλλον στη σχολική τάξη. Ενεργοποίησε όλους τους μαθητές διεγείροντας σε διαφορετικό βαθμό το ενδιαφέρον τους για το μάθημα της γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}

6.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η αποτίμηση των διδακτικών και μαθησιακών αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την εφαρμογή της διαθεματικής διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου με τη διασύνδεση του γνωστικού αντικειμένου του οικείου μαθήματος με την ιστορία. Βασικός προσανατολισμός του διδακτικού σχεδιασμού ήταν η μελέτη της δομής και της απόδειξης του ευκλείδειου θεωρήματος από τους μαθητές μέσω της εξέτασης της διαχρονικής ιστορικής εξέλιξής του και του κριτικού συσχετισμού του με τους τρόπους απόδειξης που προτάθηκαν από το Ευκλείδη διακεκριμένους μαθηματικούς του ευρωπαϊκού διαφωτισμού και της νεώτερης εποχής. Η εισαγωγή και η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία του μαθήματος της θεωρητικής γεωμετρίας υπαγορεύτηκε αφενός από την ανάγκη υπέρβασης του στενού πλαισίου της «παραδοσιακής» διδασκαλίας που υποστηρίζει τον κάθετο χωρισμό του αναλυτικού προγράμματος σε αυτόνομα γνωστικά πεδία αναπαράγοντας τον κατακερματισμό της σχολικής γνώσης (Θεοφιλίδης, 1997), αφετέρου από το αίτημα εισαγωγής μεθόδων διερευνητικής και ενεργητικής μάθησης με αφετηρία τις εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και με στόχο την κατάκτηση της γνώσης ως προϊόντος διερεύνησης και βιωματικότητας.

Στα πλαίσια αυτά ο βασικός διδακτικός σχεδιασμός στόχευσε όχι μόνο στην ανάπτυξη της μαθηματικής ευχέρειας των μαθητών μέσω της εμβάθυνσης και στερεοποίησης της γνώσης των γεωμετρικών εννοιών και των γεωμετρικών σχέσεων αλλά προσανατολίστηκε και στην καλλιέργεια του κριτικού γραμματισμού των μαθητών με την πρακτική άσκησή τους στην κριτική και στη λογική επεξεργασία διαφορετικών εκδοχών απόδειξης του ίδιου θεωρήματος, καθώς και στην ανάπτυξη της μεθοδικής αναλυτικής και συνθετικής σκέψης τους (ΔΕΠΠΣ, 2003). Συγκεκριμένα θέσαμε ως πρώτο ερευνητικό ερώτημα της μελέτης μας:

Σε ποιο βαθμό οι μαθητές και οι μαθήτριες, αφού μελέτησαν συγκριτικά διαφορετικούς τρόπους απόδειξης του ίδιου θεωρήματος, εντόπισαν και κατανόησαν τις διαφορές και ομοιότητες στον τρόπο εφαρμογής των αποδεικτικών μεθόδων, στη δομή και στην οργάνωση των μαθηματικών αποδείξεων από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι και σήμερα;

Όπως προέκυψε από τα αποτελέσματα εφαρμογής των προβλεπόμενων διδακτικών δραστηριοτήτων, οι μαθητές και οι μαθήτριες μέσω κριτικής μελέτης παρατήρησαν και κατανόησαν τις ομοιότητες και τις διαφορές που εμφανίζει ο αποδεικτικός συλλογισμός του Ευκλείδη ως προς τον τρόπο παρουσίας, δομής και οργάνωσης σε σχέση με όσους παρατίθενται στο σχολικό εγχειρίδιο και με όσους προτάθηκαν από άλλους διακεκριμένους μαθηματικούς όπως ο Herigone, ο Houel, ο Arnauld, ο Clairaut, ο Legendre, ο Hadamard και ο Borel.

Επίσης οι μαθητές και οι μαθήτριες αξιοποίησαν εποικοδομητικά το κεφάλαιο των κεκτημένων μαθηματικών γνώσεων και των εμπειριών που αποκόμισαν από τη σχολική διδασκαλία της γεωμετρίας σε προηγούμενες τάξεις και ανέπτυξαν στρατηγικές επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων και πρακτικές ελέγχου των μαθηματικών αποδείξεων. Εντόπισαν «λάθη», «αστοχίες» και «απλοϊκότητα» στη διατύπωση ορισμένων αποδεικτικών συλλογισμών από μεγάλους μαθηματικούς. Έτσι έμαθαν να υιοθετούν κριτική στάση στην παρεχόμενη γνώση και να αμφισβητούν γόνιμα και δημιουργικά τη μαθηματική «αυθεντία». Παράλληλα έμαθαν να διατυπώνουν με σαφήνεια και λιτότητα ερωτήσεις, προσωπικές κρίσεις και πειστικούς ισχυρισμούς για την ακρίβεια και την επιστημονική εγκυρότητα των προτεινόμενων μαθηματικών λύσεων. Τέλος, ο διδάσκων ενθάρρυνε τους μαθητές του να αναδιατυπώσουν τον αποδεικτικό συλλογισμό και να αντιπροτείνουν έναν δικό τους πρωτότυπο τρόπο απόδειξης για το υπό μελέτη θεώρημα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές και οι μαθήτριες άσκησαν την παρατηρητικότητα, την προσοχή τους και ανέπτυξαν ικανότητα αυτοσυγκέντρωσης. Παράλληλα εμπλούτισαν τη δημιουργική φαντασία τους και ανέπτυξαν πρωτοβουλία και ελεύθερη γνώση (ΔΕΠΠΣ, 2003).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διδακτική πράξη εστίασε βάσει του διδακτικού σχεδιασμού, στη μελέτη από τους μαθητές της εξέλιξης του μαθηματικού γλωσσικού κώδικα που χρησιμοποιήθηκε διαχρονικά για τη δόμηση του αποδεικτικού συλλογισμού της θεωρητικής γεωμετρίας. Η αντίληψη της λειτουργίας των μαθηματικών συμβόλων στην παραγωγή μαθηματικού νοήματος κρίνεται ως βασική προϋπόθεση εμπέδωσης των μαθηματικών εννοιών και εμβάθυνσης των μαθηματικών γνώσεων από τους μαθητές (Gobert & Clement, 1999). Οι σημειωτικοί πόροι της μαθηματικής γλώσσας χρησιμοποιούνται είτε ως εργαλεία κατανόησης των μαθηματικών σχέσεων και εννοιών που διευκολύνουν τους μαθητές στην αναδιοργάνωση και μετάφραση των μαθηματικών ιδεών σε σύμβολα είτε ως εργαλεία επικοινωνίας που βοηθούν τους μαθητές στην έκθεση των μαθηματικών νοημάτων και στην αποτελεσματική συμμετοχή τους σε μαθηματικές συζητήσεις (Zazkis & Liljedahl, 2004, ό.π. στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2011). Εκκινώντας από της παραδοχές αυτές θέσαμε το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της μελέτης μας:

Πώς σχολίασαν οι μαθητές και οι μαθήτριες την εξέλιξη της μαθηματικής γλώσσας και των μαθηματικών συμβόλων, από την εποχή του Ευκλείδη έως σήμερα;

Κατά την εφαρμογή του προβλεπόμενου διδακτικού σεναρίου οι μαθητές και οι μαθήτριες κλήθηκαν να παρακολουθήσουν την εξέλιξη του σημειωτικού συστήματος της μαθηματικής γλώσσας και συγκεκριμένα τη βαθμιαία αντικατάσταση του περιγραφικού και αφηγηματικού λόγου των μαθηματικών με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, κεφαλαίων γραμμάτων της αλφαβήτου (π.χ. για τη δήλωση του τριγώνου) και άλλων στενογραφικών μαθηματικών συμβόλων για τη δήλωση της ευθείας, των παράλληλων ευθειών και της σχέσης ισότητας. Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν από τον διδάσκοντα καθηγητή να αποκωδικοποιήσουν τη σημασία και τη λειτουργία των μαθηματικών συμβόλων και να αξιολογήσουν κριτικά την αποτελεσματικότητα της χρήσης διαφορετικών σημειωτικών πόρων από διακεκριμένους μαθηματικούς στη διατύπωση, οργάνωση και αναπαράσταση του μαθηματικού συλλογισμού. Αυτές οι διδακτικές δραστηριότητες συνέβαλαν στην ανάπτυξη των μεταγλωσσικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών και στην καλλιέργεια της κριτικής γλωσσικής επίγνωσής τους.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές και οι μαθήτριες κατανόησαν ότι η μαθηματική γλώσσα ενώ ενέχει έναν βαθμό «αυθαιρεσίας» στη σύλληψη και στην καθιέρωση των μορφολογικών και δομικών χαρακτηριστικών της, αποτελεί παράλληλα ένα αυστηρά λογικό κατασκεύασμα που αναπαριστά τον γραπτό λόγο μέσω των συμβόλων ή ενός συστήματος συμβόλων ακριβείς μαθηματικές σχέσεις και αυστηρά διατυπωμένες μαθηματικές έννοιες και μαθηματικά αξιώματα (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2011). Διαμόρφωσαν επίσης την αντίληψη ότι το μαθηματικό κείμενο αποτελεί προϊόν συνδυασμού πολλών σημειωτικών πόρων (μαθηματικά σύμβολα, γεωμετρικά σχήματα) που συμπληρώνουν και αλληλεπιδρούν με το αμιγώς γλωσσικό σύστημα για την παραγωγή λογικά διαρθρωμένου νοήματος. Τέλος, μέσω του χειρισμού και της κριτικής επεξεργασίας της λειτουργίας των σημειωτικών πόρων της γεωμετρίας ασκήθηκαν στην κατασκευή και ανάπτυξη νοητικών εικόνων και αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών (Goldenberg, 1995), γεγονός που συνέβαλε περαιτέρω στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης και στην καλλιέργεια της δημιουργικής φαντασίας τους.

Παράλληλα στην παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε τον τρόπο επίδρασης της εισαγωγής και ενσωμάτωσης της ιστορίας στις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών και μαθητριών για το μάθημα της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα θέσαμε το τρίτο ερευνητικό ερώτημα:

Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός, επηρέασε τις στάσεις και το επίπεδο του ενδιαφέροντος και της ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών και μαθητριών, και μάλιστα αυτών που εκδηλώνουν μειωμένο ενδιαφέρον και χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, στο μάθημα της γεωμετρίας;

Όπως διαπιστώθηκε μέσα από τα προσωπικά σχόλια των ίδιων των μαθητών και την παρατήρηση του βαθμού και της πρόθεσης συμμετοχής τους στη διδακτική διαδικασία, η αποδέσμευση της διδασκαλίας από τα πλαίσια της τυποποιημένης διδασκαλίας και εκμάθησης της διδακτέας ύλης της γεωμετρίας και ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας με ομαδικές διδακτικές δραστηριότητες συλλογής και κριτικής επεξεργασίας ιστορικών πηγών σχετικών με τη βιογραφία και το ιστορικό συγκείμενο της εποχής δράσης των διακεκριμένων μαθηματικών και η επικέντρωσή της στην κριτική θεώρηση της διαχρονικής εξέλιξης των προτεινόμενων μαθηματικών αποδείξεων του θεωρήματος αποδυνάμωσε τις αρνητικές παραδοχές τους για το μάθημα της γεωμετρίας.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές και οι μαθήτριες αναθεώρησαν τη διαμορφωμένη μέσω της σχολικής εμπειρίας αντίληψη τους για τα μαθηματικά ως απρόσωπο σύνολο επιστημονικών γνώσεων ή άκαμπτων μαθηματικών κανόνων. Ανακάλυψαν την ανθρώπινη πτυχή των μαθηματικών και τα συνέδεσαν με τον κοινωνικο- πολιτισμικό και ιστορικό πλαίσιο σύλληψής τους. Οι μαθητές και οι μαθήτριες μελέτησαν κριτικά τις αποδείξεις των μεγάλων μαθηματικών και κατανόησαν τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί στη διατύπωση και στην οργάνωση του αποδεικτικού συλλογισμού τους. Διαπίστωσαν εμπειρικά την ύπαρξη επιστημολογικών εμποδίων στην αναζήτηση της μαθηματικής αλήθειας και στη διαμόρφωση του μαθηματικού συλλογισμού ως «φυσιολογικό» στάδιο της διαδικασίας ωρίμανσης της επιστημονικής σκέψης (Brousseau, 1997, ό.π. στο Μιόγλου, 2017). Στα πλαίσια αυτά οι μαθητές/τριες υιοθέτησαν στάση γόνιμης αμφισβήτησης της μαθηματικής «αυθεντίας». Απενοχοποίησαν τα προσωπικά λάθη και τις δυσκολίες τους στην κατανόηση και εφαρμογή των γνώσεων της γεωμετρίας. Τέλος, η διαπίστωση των μαθητών ότι ένας δυσνόητος μαθηματικός συλλογισμός είναι αποτέλεσμα δουλειάς εκατοντάδων χρόνων μέχρι να φτάσει στη τελική μορφή του, τους ενδυνάμωσε ψυχικά (Bakker, 2004) και διαμόρφωσε τις συνθήκες μιας δυνητικής εκλογίκευσης της φοβίας τους προς τα μαθηματικά (Russ et al., 1991), εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα τις προϋποθέσεις για τη διαμόρφωση μιας θετικότερης στάσης προς το μάθημα αυτό.

Η ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας του ευκλείδειου θεωρήματος λειτούργησε ως παράγοντας διέγερσης και ανανέωσης του ενδιαφέροντος των μαθητών για την εκμάθηση και κριτική μελέτη του ευκλείδειου θεωρήματος. Διαπιστώθηκε ότι η διαμόρφωση των στάσεων των μαθητών επηρεάστηκε από τις μαθησιακές προτιμήσεις τους, τις επιδόσεις τους στο μάθημα της γεωμετρίας και τον βαθμό ενδιαφέροντός τους για το μάθημα. Πιο συγκεκριμένα, η πρόβλεψη του διδακτικού σχεδιασμού για την αναζήτηση και τον κριτικό σχολιασμό ιστορικών πηγών και για την παράλληλη μελέτη πρωτότυπων κειμένων στην αρχαία ελληνική και τη μετεγγραφή τους στη νέα ελληνική προκάλεσε τον ενθουσιασμό των μαθητών και μαθητριών με προτίμηση προς τις ανθρωπιστικές σπουδές και κινητοποίησε το ενδιαφέρον τους για τη συμμετοχή τους στο μάθημα.

Ειδικότερα για τους μαθητές και τις μαθήτριες με προσανατολισμό προς τις θετικές επιστήμες η μη συμβατική διδασκαλία της θεωρητικής γεωμετρίας μέσω της διαχρονικής μελέτης και κριτικής επεξεργασίας των διαφορετικών εκδοχών απόδειξης του ευκλείδειου θεωρήματος ανέτρεψε τις διαμορφωμένες προσδοκίες τους και ανανέωσε το μαθησιακό ενδιαφέρον τους. Ενθάρρυνε την ενεργητικότερη συμμετοχή τους σε μια διαδικασία σταδιακής ανακάλυψης και οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης. Οι μαθητές συμμετείχαν πρόθυμα σε ασκήσεις δημιουργικής αναδιατύπωσης και ανακατασκευής των προτεινόμενων αποδείξεων ενώ παράλληλα ενθαρρύνθηκαν στη διατύπωση προσωπικών εναλλακτικών αποδείξεων του θεωρήματος. Ανέπτυξαν παραγωγική σκέψη και ασκήθηκαν στις διαδικασίες εύρεσης μαθηματικών λύσεων. Η επιτυχία των μαθητών στην δόμηση ορθού αποδεικτικού συλλογισμού τούς παρείχε θετική ανατροφοδότηση και συνέβαλε στην ενίσχυση της αυτοπεποίθησης, στην ανανέωση και τόνωση του ενδιαφέροντός τους για το μάθημα της γεωμετρίας.

Για τους μαθητές που σημείωναν στη σχολική διαδρομή τους χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά και εκδήλωναν μειωμένο ενδιαφέρον για τη γεωμετρία, η εισαγωγή στη διδασκαλία δραστηριοτήτων μη σχετιζόμενων αυστηρά και μόνο με το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών (π.χ. αναζήτηση βιβλιογραφικών πηγών, μελέτη της χρήσης του σημειωτικού συστήματος της μαθηματικής γλώσσας στη διαχρονική εξέλιξή του, σύγκριση της δομής και του τρόπου παρουσίασης διαφορετικών αποδείξεων του ίδιου θεωρήματος) αύξησε τη διάθεσή τους για συμμετοχή στη διδακτική πράξη και κινητοποίησε την προσοχή και το ενδιαφέρον τους για τη μελέτη και κατανόηση της απόδειξης του θεωρήματος. Παράλληλα, η πρόβλεψη του διδακτικού σχεδιασμού για την υλοποίηση ομαδικών δραστηριοτήτων και η δημιουργία του κατάλληλου συνεργατικού και φιλικού κλίματος στις ομάδες εργασίας των μαθητών διέλυσε τους ενδοιασμούς τους για ενεργητικότερη συμμετοχή τους στο μάθημα, ενθάρρυνε την ανάληψη πρωτοβουλίας και δημιουργικής αυτενέργειας των μαθητών.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΕΡΕΥΝΑΣ

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, στην παρούσα έρευνα θέσαμε ως βασικό στόχο την αποτίμηση των μαθησιακών και διδακτικών αποτελεσμάτων και των αλλαγών που επέφερε στις στάσεις και στις αντιλήψεις των μαθητών η εισαγωγή των ιστορικών κειμένων στην σχολική διδασκαλία της θεωρητικής γεωμετρίας. Τα συμπεράσματα προέκυψαν από την επεξεργασία και σχολιασμό των προσωπικών σχολίων των μαθητών/τριών της Α΄Λυκείου που συμμετείχαν στην υλοποίηση του προτεινόμενου διδακτικού σχεδιασμού. Από την στιγμή που για τη συλλογή του ερευνητικού και την εξαγωγή των συμπερασμάτων δεν αξιοποιήθηκαν εργαλεία ποσοτικής μεθόδου έρευνας δεν είναι δυνατή η γενίκευση των συμπερασμάτων. Η μελέτη όμως δεν χάνει την ερευνητική της αξία δεδομένου ότι το ερευνητικό ενδιαφέρον εστίασε στην ανίχνευση των ρητών και υπόρρητων μαθησιακών αναγκών των μαθητών, καθώς και των αλλαγών που επέφερε η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη στις στάσεις και στις παραδοχές των μαθητών για το μάθημα της γεωμετρίας. Η αξιοποίηση αυθεντικών δεδομένων από τις προσωπικές αφηγήσεις των μαθητών διευκόλυνε την ανίχνευση και την ανάδειξη των προσωπικών νοηματοδοτήσεών τους για τη διδακτική αξία της διαθεματικής διασύνδεσης της θεωρητικής γεωμετρίας με την ιστορία των μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία (Ιωσηφίδης, 2008). Στα πλαίσια αυτά κρίθηκε σκόπιμο να αποφευχθεί η απρόσωπη και αφαιρετική γλώσσα της στατιστικής και των φορμαλιστικών μοντέλων (Ισαρη & Πουρκός, 2015). Εξάλλου η γενίκευση των συμπερασμάτων δεν αποτέλεσε στόχο της έρευνας. Φιλοδοξία του ερευνητή ήταν να συμπληρώσει με νέα δεδομένα το αντίστοιχο ερευνητικό πεδίο τα Διδακτικής των Μαθηματικών και να δώσει τα ερεθίσματα για περαιτέρω μελέτη του ερευνητικού θέματος στο μέλλον.

6.2 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Συμπερασματικά η διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας στην Α΄Λυκείου με την εισαγωγή και ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών συμβάλλει σημαντικά στην αναβάθμιση και στη βελτίωση της σχολικής διδασκαλίας του μαθήματος. Η διασύνδεση της γεωμετρίας με την ιστορία διαλύει τις στερεοτυπικές αντιλήψεις των μαθητών για τον μονότονο χαρακτήρα του μαθήματος. Ικανοποιεί το διδακτικό αίτημα για την ανάδειξη των ανθρώπινων πτυχών των μαθηματικών και την άμεση σύνδεσή τους με την ανθρώπινη ζωή. Προσδίδει μια νέα διάσταση στην αντίληψη της γεωμετρίας από τους μαθητές ως προϊόντος μιας δυναμικής διαδικασίας εξέλιξης στον ιστορικό χρόνο και της δημιουργικής σύνθεσης των γνώσεων, των εμπειριών και της μαθηματικής κουλτούρας διαφορετικών πολιτισμών (Tzanakis & Arcavi, 2000). Επίσης, λειτουργεί ως παράγοντας διέγερσης του μαθησιακού ενδιαφέροντος των μαθητών και κινητοποίησης των μαθητών για ενεργητικότερη συμμετοχή τους στη διδακτική διαδικασία. Εμπλουτίζει τη δημιουργική φαντασία των μαθητών και συμβάλλει στην καλλιέργεια του κριτικού γραμματισμού των μαθητών, καθώς ενθαρρύνει υλοποίηση διδακτικών δραστηριοτήτων για κριτική επεξεργασία ιστορικών πηγών και για κριτική ερμηνεία της μαθηματικής σκέψης, όπως αυτή διαμορφώθηκε σταδιακά στην εξελικτική πορεία ανάπτυξή της. Η επαφή με τις πρωτότυπες ιστορικές πηγές και οι εργασίες με προσανατολισμό στην κριτική αποτίμηση της ιστορικής εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας και να αναπτύξουν βαθύτερη εκτίμηση για το μάθημα της γεωμετρίας (Μιόγλου, 2017). Τέλος, η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθηματικής ευχέρειας των μαθητών διευκολύνοντας την βαθύτερη κατανόηση των μεθόδων εύρεσης μαθηματικών λύσεων και στη συνειδητοποίηση τρόπων οργάνωσης και δόμησης του μαθηματικού αποδεικτικού συλλογισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Έξαρχος, Θ. (2002). «Μαθηματικά στους αρχαίους πολιτισμούς: Επίπεδα ανάπτυξης και αλληλεπιδράσεις» *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* 'Τα μαθηματικά Διαχρονικός παράγοντας Πολιτισμού'', σελ. 2-33.

Δουβή, Ε., & Ξιφαράς, Δ. (2019). *Νεότερη και Σύγχρονη Ιστορία.* Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη

Θεοφιλίδης, Χ. (1997). Διαθεματική Προσέγγισης της Διδασκαλίας. Αθήνα: Γρηγόρης

Θωμαΐδης, Ι., & Καστάνης, Ν. (1987). Μία διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄.* Τόμος 16, σελ. 61-92.

Θωμαΐδης, Ι. (1990). «Ιστορικές παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας». *Ευκλείδης Γ΄.* Τόμος 25, σελ. 27-41.

Θωμαΐδης, Ι. (1991). «Οι συντεταγμένες της σχολικής γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990)». *Σύγχρονη εκπαίδευση ,τεύχος 61, σελ., 27-38*

Θωμαΐδης, Ι. (1996). Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών,* τεύχος 1, σελ., 72-92.

Θωμαΐδης, Ι., & Τζανάκης, Κ. (2006). Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Περιέχεται στο Ι. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, Κ. Τζανάκης, (Επιμ.) *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση.* Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 253-270

Θωμαΐδης, Ι. (2009). Η ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών. Περιέχεται στο Ξ. Βαμβακούση, Γ. Θωμαΐδης, Θ. Πάσχος, κ.ά., *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 193-219.

Θωμαΐδης, Ι. (2014). Ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για τη διδακτική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εισήγηση στη συζήτηση Στρογγυλού Τραπεζιού με θέμα:

Το πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης της Γεωμετρίας: Υπάρχει λύση; Ανακτήθηκε 30 Νοεμβρίου 2019 από ιστοσελίδα:

https://www.kalamari.gr/images/stories/hmerida_mathimatikwn/4hmeridamathimatikwn/thomaidis.pdf

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας. Εφαρμογές στην Ψυχολογία και στην Εκπαίδευση.* Σύνδεσμος ελληνικών ακαδημαϊκών βιβλίων. Εθνικό Μετσόβιο Πανεπιστήμιο.
Ανακτήθηκε από https://repository.kallipos.gr/handle/11419/5826

Ιωσηφίδης, Θ. (2008). *Εισαγωγή στην Ανάλυση Δεδομένων Ποιοτικής Κοινωνικής Ερευνας.* Μυτιλήνη, Σημειώσεις. Ανακτήθηκε από www.cultural-representation.com/files/SIMEIOSEISiosifidis.doc

Καφούση, Σ. (2002). «Συζητώντας για την ιστορία των μαθηματικών στη σχολική τάξη», *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού, σελ. 175-184.

Λέκκας, Α. (2019). Κριτική Θεώρηση των αξιωματικών συστημάτων των σχολικών εγχειριδίων της Γεωμετρίας του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος 1888- 2015. Διπλωματική Εργασία. Πανεπιστήμιο Πατρών

Μιόγλου, Κ. (2017). *Πεποιθήσεις των δασκάλων για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών του Δημοτικού.* Διπλωματική εργασία στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας Παιδαγωγική Σχολή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Φλώρινα.

Μιχαηλίδης, Τ. (2009). «Το λάπτοπ του Αρχιμήδη», στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (eds), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 269 – 298.

Μπούφη, Α., & Σκαφτούρου, Φ. (2002). «Συναντήσεις της ιστορίας των μαθηματικών με τη διδασκαλία τους». *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* ‘Τα μαθηματικά Διαχρονικός παράγοντας Πολιτισμού’’, σελ. 185-194.

Παναγιώτου, Ε. (2002). «Ο ρόλος της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών». *Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* ‘Τα μαθηματικά Διαχρονικός παράγοντας Πολιτισμού’’, σελ. 117-130.

Πάσχος, Θ. (2007). «Ενσωμάτωση γενετικών στιγμών της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική προσέγγιση βασικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης». Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ανακτήθηκε από https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/23787.

Πάσχος, Θ. (χ.χ). «Η αξιοποίηση τα ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πρακτική στο γυμνάσιο». Ένα παράδειγμα συνεργατικής μαθητικής δραστηριότητας. Ανακτήθηκε από την: http://me.math.uoa.gr/conf2/papers/pashos.pdf

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής, Α. (2011). «Οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης τα μαθηματικής γνώσης: τα συστήματα τα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία». *Θέματα στην Εκπαίδευση*, 2 (3), 247-272.

Στράντζαλος, Χ. (2010). «Στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας». Περιέχεται στο Αγγελόπουλος Β., Βασιλείου Ε. κ. ά., *Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 89-103.

Τζανάκης, Κ. (2009). «Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει τα διεθνούς εμπειρίας». Περιέχεται στο Ξ. Βαμβακούση, Γ. Θωμαΐδης, Θ. Πάσχος κ. ά., *Αξιοποίηση τα Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 17-39.

Τζανάκης, Κ. (2006). «Η Διεθνής Ομάδα Μελέτης των Σχέσεων Μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης». Περιέχεται στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, Κ. Τζανάκης, (Επιμ.) *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση.* Θεσσαλονίκη : Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 202-212.

<u>ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *Arithmetic teacher.* Vol. 35, 4, pp. 13-16.

Barbin, E. (1994). The meanings of mathematical proof. On relations between history and mathematical education. [eds.] J. M. Anthony. *Eves' Circles.* Washington D.C. : Mathematical Association of America, pp. 41-52.

Barbin, E. (2000). Integrating history: research perspectives, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 66-77

Barrow-Green, J. (2000). Web historical of Mathematical Proof: On Relations Between History and Mathematical Education in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 362-370.

Bakker, A. (2004). Design research in statistics education. On symbolizing and computer tools'. Utrecht, The Netherlands: CD BETA PRESS.

Bernand,A. (1997). «Αλεξάνδρεια των Πτολεμαίων». Μεταφρ. Καλλέγια-Γαδ., Α. Αθήνα: Πρωτοπορία.

Canfora, L. (1989). «Η χαμένη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας». Μετάφρ. Γ. Αρβανίτης. Αθήνα: Αλεξάνδρεια

Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016, July). History of mathematics in mathematics education. Recent developments.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in school, 27*(4), 25-31.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 83-106.

Fasanelli, F., et al. (2000) ‘Quotations on the use of history of mathematics in mathematics teaching and learning’, in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6 σελ.33-38, Kluwer Academic Publishers, N.Y. /Boston/ Dordrecht/ London/ Moscow, 2002.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an ICMI study (1997–2000). *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 255-259.

Fauvel, J., and Van Maanen, J. (2000). History in mathematics Education: The ICMI Study VOLUME 6. Kluwer Academic Publishers, N.Y. /Boston/ Dordrecht/ London/ Moscow, 2002.

Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education, 10*(4), 391-408.

Fried, M. (2011). History of mathematics in mathematics education: Problems and prospects. *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 6th ESU*, 13-26.

Furinghetti, F., & Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in school*, *27*(4), 48-51.

Furringetti, F., & Radford, L. (2002). ‘Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice’, in L. English (ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, New York: Laurence Erlbaum, pp. 631 -654

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(1-2), 1-20.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 131-143.

Gobert, J., & Clement, J. (1999). Effects of student – generated diagrams versus student – generated summaries on conceptual understanding of casual and dynamic Knowledge in plate tectonics. *Journal of Research in Science Teaching*, 36(1), 39-53.

Goldenberg, E. (1995). Multiple Representations: A vehicle for Understanding. In P.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia mathematica*, *31*(2), 163-185.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2002). "*Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues''. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds),* "History in Mathematics Education: The ICMI Study", (pp. 39-62). Dordrecth, The Netherlands Kluwer Academic Publishers.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 223-258.

Hayes, R. L. (1991). History—a way back to mathematics. *History and Pedagogy of Mathematics Newsletter*, *22*, 10-12.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 65-97.

Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. *1st RICE, Singapore: Raffles Junior College*.

Jahnke, H. N., et al. (2000). "The use of original sources in the mathematics classroom" in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 291-328.

Jankvist, U. T. (2009). *Using history as a' goal' in mathematics education* (Vol. 464). IMFUFA, Institut for Natur, Systemer og Modeller, Roskilde Universitet.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Kjeldsen, T. H. (2011). Uses of history in mathematics education: Development of learning strategies and historical awareness. In *CERME 7, Proceedings of the seventh*

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1700-1709).

Loria, G. Ιστορία των Μαθηματικών Τόμος β΄. Εκδόσεις Παραζήση –Ελληνική μαθηματική Εταιρία. Αθήνα 1933.

Lesky, A. (1990). Ιστορία της Αρχαίας Ελληνικής Λογοτεχνίας. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη (σελ. 481-483, 671-673).

Man-Keung, S. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (under graduate) classroom. *PALEONTOLOGICAL SOCIETY PAPERS*, *6*, 3-10.

Miguel, A., & Barbin, E. (2008). 'The role of the history of mathematics in mathematics education'. Ανακτήθηκε από την: https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/TSG_23_Report_BB_FF.pdf

Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2013). Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?. *Journal of Curriculum and Teaching*, *2*(2), 37-46.

Pfeiffer, R. (1972). Ιστορία τα κλασικής φιλολογίας: *Από των αρχών μέχρι του τέλους των ελληνιστικών χρόνων*. Μετάφρ. Π. Ξένος. Αθήνα: Ακαδημία Αθηνών.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational studies in mathematics*, *35*(2), 189-206.

Ponza, V. (2000). Mathematical Dramatisation. (eds.) in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 335-342.

Rogers, L. (2010). History, heritage, and the UK mathematics classroom. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 2781-2790).

Romilly, L. (1994). Οι Μεγάλοι Σοφιστές στην Αθήνα του Περικλή. Αθήνα: Καρδαμίτσα (σελ. 137).

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Arcavi, A., Barbin, E., Brown, G., & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 7-16.

Saito, K., Sidoli, N. (2012). Diagrams and arguments in ancient Greek mathematics: Lessons drawn from comparisons of the manuscript diagrams with those in modern critical editions, in K. Chemla, ed., The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions (Cambridge: Cambridge University Press), pp. 135-162.

Siu, M. K. (2006). 'No, I don't use history of mathematics in my class. Why?', in F. Furinghetti, S. Kaisjer, C. Tzanakis (eds), P*roceedings HPM 2004 & ESU 4*, University of Crete, Greece, pp. 268 –277.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historial development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 44-55.

Tzanakis, C., Arcavi, A. (2000). 'Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey' in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 201-240.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). 'The notion of historical "parallelism" revisited. Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line', *Educational Studies in Mathematics, 66*, pp. 165 – 183.

Yevdokimov, O. (2007). Using the history of mathematics for mentoring gifted students: Notes for teachers. In *Proceedings of the 21st Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers Inc.* (Vol. 1, pp. 267-275). Australian Association of Mathematics Teachers Inc..

Van Brummelen, G. (2000). 'Teachers, learners and the World Wide Web' in J. Fauvel & J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, The ICMI Study VOLUME 6, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 358-362.

Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. *Software goes to school—teaching for understanding with new technologies*, 56-69.

Wong, K. Y. (2005). Add cultural values to mathematics instruction: A Singapore initiative. In *4th Asian Mathematical Conference Singapore*.

ΒΙΒΛΙΑ

Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001. *Ευκλείδη 'Στοιχεία'* . Τόμος Ι. Αθήνα 2001.

Boyer, C., & Merzbach U., 1997. *Η ιστορία των μαθηματικών.* Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού. Αθήνα

Struik D., 2008. *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*. Εκδότης 'ΔΑΙΔΑΛΟΣ' Ι. Ζαχαρόπουλος.

Lucas N. H. Bunt- Phillip S. Jones- Jack D. Bedient. *Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών.* Εκδότης Γ. Α. Πνευματικού. Αθήνα 1981.

Sir Thomas L. Heath. "*Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών''.* Τόμος 2. Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001

Barbin E., Laborde C., Houdebine J., Giorgiutti I., Duval R., 2001. *Produire et lire des textes de demonstration.*

Σχολικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Αλιμπινίσης Α., Δημάκος Γ., Δρακόπουλου Π., Κυριαζή Α. και Τασσόπουλου Γ.

(1991). Θεωρητική Γεωμετρία Α' Λυκείου. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π. (2001).

Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Ιωαννίδης Ι. (1968). Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. Τόμος 2ος (Γεωμετρία). Σελ. 49-50.

ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Θωμαΐδη Ι., Πούλος Α., Ξένος Θ. (1999). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου

Μπαρμπαστάθη Χ. (1948). Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των γυμνασίων νέου τύπου, εν Αθήναις, Ο.Ε.Σ.Β.

Νικολάου Ν. (1953). Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Παπαμιχαήλ Δ., Σκιαδά Α. (1977). Θεωρητική Γεωμετρία. Τεύχος 1ο, Γ' Γυμνασίου. Σελ. 61. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Παπανικολάου Χ. (1975). Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ’ Γυμνασίου και Δ’, Ε’ και ΣΤ’ Γυμνασίου Θεωρητικής Κατευθύνσεως. Σελ. 70-71. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1969) Περί των ωρολογίων και αναλυτικών προγραμμάτων των μαθητών των σχολείων Μέσης Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 225 τ. Β’.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1977) Περί ωρολογίου προγράμματος του Ημερησίου Γυμνασίου και αναλυτικού προγράμματος των Α’ και Β’ τάξεων αυτού, ΦΕΚ 270 τ. Α’.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1984) Τροποποίηση του αναλυτικού προγράμματος των σχολείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 146 τ. Α’.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1985) Ωρολόγιο και αναλυτικό πρόγραμμα Λυκείων Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης, ΦΕΚ 170 τ. Α’.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1995). *Σχέδιο Αναλυτικού Προγράμματος Ευκλείδειας Γεωμετρίας Αθήνα.*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998[α]). *Πρόγραμμα Σπουδών Ευκλείδειας Γεωμετρίας.*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1997) *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1998) Πρόγραμμα Σπουδών των μαθημάτων των Α’ και Β’τάξεων του Ενιαίου Λυκείου για το σχολικό έτος 1998-99, ΦΕΚ 327 τ. Β’.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1999) Πρόγραμμα Σπουδών των μαθηματικών γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου. ΦΕΚ 1342/ τ. Β’/30-6-1999

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2004) *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007) Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007-2008. Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. ΟΕΔΒ. Αθήνα.

Πρόγραμμα σπουδών Μαθηματικών για την Α΄ Λυκείου ΦΕΚ 1168/Β/8-6-2011

Ν. 4521/2018, παρ.5, αρθ.34, για τις δημιουργικές εργασίες.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε. Π.Π.Σ.) και Αναλυτική Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Υποχρεωτικών Εκπαίδευσης Μαθηματικών (2003). Παιδαγωγικό Ινστιοτύτο. Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων. Ανακτήθηκε από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Ορισμοί

1. ***Σημείο είναι κάθε τι που δεν έχει μέρη (διαστάσεις).***
2. ***Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος***
3. ***Τα άκρα κάθε γραμμής είναι σημεία.***
4. ***Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή, η οποία κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.***
5. ***Επιφάνεια είναι κάθε τι που έχει μόνο μήκος και πλάτος.***
6. ***Τα πέρατα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.***
7. ***Επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η επιφάνεια, η οποία κείται εξ ίσου προς τις ευθείες της.***
8. ***Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο ευθειών γραμμών του επιπέδου που τέμνονται χωρίς να αποτελούν ευθεία.***
9. ***Όταν δε οι ευθείες που περιέχουν μια γωνία αποτελούν ευθεία, η γωνία ονομάζεται ευθύγραμμη (ευθεία).***
10. ***Όταν μια ευθεία τέμνει άλλη ευθεία και σχηματίζει τις εφεξής γωνίες ίσες, κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η τέμνουσα ονομάζεται κάθετος της ευθείας που τέμνει.***
11. ***Αμβλεία γωνία είναι η μεγαλύτερη της ορθής γωνίας.***
12. ***Οξεία γωνία είναι η μικρότερη της ορθής γωνίας.***
13. ***Σύνορο (όριο) είναι ό,τι είναι πέρας κάποιου (αντικειμένου).***
14. ***Σχήμα είναι ό,τι περιέχεται σε ένα ή περισσότερα σύνορα.***
15. ***Κύκλος (κυκλικός δίσκος) είναι το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται σε μια γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια (κύκλος), της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.***
16. ***Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο του κύκλου.***
17. ***Διάμετρος κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δυο ίσα μέρη.***
18. ***Ημικύκλιο ονομάζεται το σχήμα που περιέχεται από τη γραμμή που αποτελείται από μια διάμετρο του κύκλου και από το αντίστοιχο στη διάμετρο τόξο. Κέντρο του ημικυκλίου είναι το κέντρο του κύκλου.***
19. ***Ευθύγραμμα σχήματα είναι αυτά που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, τρίπλευρα (τρίγωνα), αυτά που περικλείονται από τρεις, τετράπλευρα από τέσσερις, πολύπλευρα (πολύγωνα) από περισσότερες των τεσσάρων γραμμές.***
20. ***Από τα τρίπλευρα σχήματα αυτό που έχει ίσες τις τρεις πλευρές ονομάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, αυτό που έχει δύο μόνο πλευρές ίσες ισοσκελές και σκαληνό αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.***
21. ***Από τα τρίπλευρα σχήματα, ορθογώνιο τρίγωνο είναι αυτό που έχει μία γωνία ορθή, αμβλυγώνιο αυτό που έχει μια γωνία αμβλεία και οξυγώνιο αυτό που έχει τις γωνίες οξείες.***
22. ***Από τα τετράπλευρα σχήματα, τετράγωνα είναι εκείνα τα οποία είναι ισόπλευρα και ορθογώνια, ετερομήκη είναι εκείνα που είναι ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα, ρόμβοι είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια και ρομβοειδή είναι εκείνα που δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα ονομάζονται τραπέζια.***
23. ***Παράλληλες ονομάζονται οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον εκατέρωθεν δεν τέμνονται.***

Κοινές έννοιες (αξιώματα)

Τα αιτήματα ακολουθούν εννέα *κοινές έννοιες* (αξιώματα), οι εξής:

1. ***Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους ίσα.***
2. ***Και αν σε ίσα προστεθούν ίσα προκύπτουν ίσα.***
3. ***Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, μένουν ίσα.***
4. ***Και αν σε άνισα προσθέσουμε ίσα, προκύπτουν άνισα.***
5. ***Και τα διπλάσια του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.***
6. ***Και τα μισά του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.***
7. ***Και αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους, είναι ίσα μεταξύ τους.***
8. ***Και ολόκληρο (το μέγεθος) είναι μεγαλύτερο ενός μέρους του.***
9. ***Και δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια (χωρίο).***

3. Αιτήματα

Μετά τους ορισμούς ακολουθούν τα αιτήματα (postulati), που είναι πέντε, τα εξής:

Αίτημα 1

Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.

Αίτημα 2

Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Αίτημα 3

Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα, είναι δυνατό να γράψουμε κύκλο.

Αίτημα 4

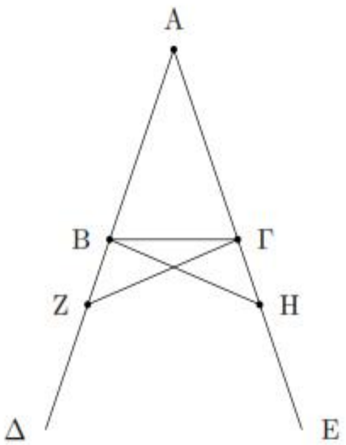
Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Αίτημα 5

Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος "εντός και επί τα αυτά" γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

Α'.ε'

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Η Αλεξάνδρεια. Ιδρύθηκε από τον Αλέξανδρο (331 π.Χ.) και γρήγορα εξελίχθηκε σε οικονομικό και πολιτιστικό κέντρο. Άρχισε να ακμάζει, όταν έγινε πρωτεύουσα της Αιγύπτου μετά τον θάνατο του Αλέξανδρου, κατά τη βασιλεία του Πτολεμαίου Α' Σωτήρα (367–283 π. Χ.), γιου του Λάγου και ιδρυτή της δυναστείας των Πτολεμαίων ή Λαγιδών. Ο τελευταίος επικράτησε το 321 π.Χ. στη σύγκρουση των επιγόνων για την κατοχή της σορού του Αλέξανδρου που θεωρούνταν σύμβολο ισχύος και εξουσίας και τη μετέφερε στην Αλεξάνδρεια από όπου τελικά χάθηκε μετά την απομάκρυνσή της από τη θέση που φυλασσόταν. Την κατοικούσαν Έλληνες, Αιγύπτιοι και Εβραίοι. Η ανάπτυξή της οφειλόταν κυρίως στο μεγάλο λιμάνι, γνωστό από το νησάκι Φάρο, που βρισκόταν στην είσοδο του και το προστάτευε. Ο όγκος των εμπορικών συναλλαγών αυξήθηκε και έγινε κέντρο πολιτισμού και γραμμάτων στην ευρύτερη περιοχή. Ωστόσο, στη συνέχεια η κακοδιοίκηση, οι δυναστικές έριδες και οι αναμείξεις της Ρώμης στις εσωτερικές της υποθέσεις την οδήγησαν σε τέτοια παρακμή ώστε το 80 π.Χ. η πόλη τέθηκε επισήμως υπό ρωμαϊκή κηδεμονία. Πάνω στο νησάκι κατασκευάστηκε ένα από τα επτά θαύματα, ένας πύργος που είχε στην κορυφή του φανό για να διευκολύνει την είσοδο των πλοίων στο λιμάνι. Μεταξύ των οικοδομημάτων που τη διακοσμούσαν ξεχώριζε το Μουσείο και η Βιβλιοθήκη.

Οι Αλεξανδρινοί γεωμέτρες επεξεργάστηκαν τις αρχές που έθεσαν οι προγενέστεροι Έλληνες μαθηματικοί με νέα στοιχεία, τα οποία άντλησαν από τις βαβυλωνιακές και αιγυπτιακές πηγές γνώσης. Λέγεται πως ο Δημήτριος ο Φαληρέας προσκάλεσε τον Ευκλείδη να διδάξει στην Αλεξάνδρεια, το έργο του «Στοιχεία» το οποίο υπήρξε η βάση της γεωμετρίας επί σειρά αιώνων. Οι διάδοχοί του, ιδιαίτερα ο Απολλώνιος του 2ου π.Χ. αιώνα και ο Ίππαρχος του 2ου μ.Χ. αιώνα, συνέχισαν την έρευνά του στα κωνικά σχήματα. Ο Αρχιμήδης, ένας από τους πρώτους σχολαστικούς που συνδέονταν με την Αλεξάνδρεια εφάρμοσε τις αστρονομικές και γεωμετρικές Θεωρίες στην κίνηση μηχανικών συσκευών.

Από τη λαμπρή πόλη των Πτολεμαίων, την Αλεξάνδρεια, δεν μπορούσε να λείπει και ένα ίδρυμα που θα την καθιστούσε πολιτιστικό κέντρο του αρχαίου κόσμου. Το ίδρυμα αυτό ονομάστηκε **«Μουσείο»,** δηλαδή τέμενος των Μουσών και των τεχνών που αυτές αντιπροσωπεύουν. Εμπνευσμένο από τις αρχές του αριστοτελικού Λυκείου, το Μουσείο ιδρύθηκε από τον Πτολεμαίο Α΄ Σωτήρα με βάση τις οδηγίες του Δημήτριου του Φαληρέα, μαθητή του Θεοφράστου και ενός από τους πρώτους Περιπατητικούς. Το **Μουσείο** ήταν ένα οικοδομικό συγκρότημα αφιερωμένο στις Μούσες, όπου συγκεντρώνονταν πνευματικοί άνθρωποι. Περιελάβανε βοτανικό, ζωολογικό κήπο και χώρους για αστρονομικές μελέτες. Το Μουσείο ανήκει επίσης στο σύμπλεγμα των βασιλικών ανακτόρων, και διαθέτει διάδρομο περιπάτου, χώρο συζητήσεων με καθίσματα και ένα μεγάλο κτήριο που στεγάζει την τραπεζαρία των λογίων οι οποίοι ανήκουν στο Μουσείο. Η περιγραφή αποτυπώνει τη βασική λειτουργία του Μουσείου: στόχος του ήταν να στεγάσει λόγιους και επιστήμονες από όλα τα μέρη του κόσμου και να τους παράσχει τις κατάλληλες υποδομές για να αναπτύξουν ερευνητικό έργο. Όσοι γίνονταν δεκτοί στο Μουσείο βρίσκονταν υπό την προστασία και την οικονομική υποστήριξη των Πτολεμαίων και ήταν αναπόσπαστο κομμάτι της βασιλικής αυλής.

Ο «κλειστός κύκλος» των τρόφιμων του Πτολεμαϊκού Μουσείου είχε στη διάθεσή του, εκτός από χρήματα και δωρεάν διαβίωση, όλα τα μέσα για την καλλιέργεια των γραμμάτων και την επιστημονική έρευνα. Για τους επιστήμονες (γιατρούς, βιολόγους, μαθηματικούς, αστρονόμους) θα υπήρχαν εργαστήρια ανατομίας, αίθουσες με φυτικά και ζωικά δείγματα, επιστημονικά όργανα. Για τους λόγιους οι Πτολεμαίοι δημιούργησαν έναν θρυλικό χώρο, τη Βιβλιοθήκη, όπου συγκέντρωσαν όλα τα βιβλία και τα έργα που κυκλοφορούσαν στον αρχαίο κόσμο.

Ο διττός χαρακτήρας του Μουσείου, που από τη μία πλευρά ήταν πνευματικό και ερευνητικό ίδρυμα και από την άλλη φιλοδοξούσε να στεγάσει όλη την παγκόσμια γνώση στη Βιβλιοθήκη, εξέφραζε όσο τίποτε άλλο το όραμα του Αριστοτέλη για την ανθρώπινη παιδεία. (Bernand, 1997; Canfora, 1989; Pfeiffer, 1972)

Οι μαθητές εξεπλάγησαν θετικά με τον διπλό ρόλο του μουσείου της Αλεξάνδρειας και ένας μαθητής αρκετά καλός γνώστης της ιστορίας είπε ότι ήταν σαν πανεπιστήμιο σημερινό με μαθήματα και έρευνα και είναι λογικό να συγκεντρώνονταν τότε πολλοί φιλόσοφοι και μαθηματικοί.

Με τον όρο **Βιβλιοθήκη** της Αλεξάνδρειας εννοείται η αρχαία βιβλιοθήκη της πόλης της Αλεξάνδρειας, στην Αίγυπτο, η οποία ιδρύθηκε στην Ελληνιστική εποχή επί διακυβέρνησης Πτολεμαίου Α', του επονομαζόμενου Σωτήρος, με την παρότρυνση του Δημήτριου Φαληρέα, και έγινε το εκδοτικό κέντρο του τότε γνωστού κόσμου, υπερσκελίζοντας ως προς τον πλούτο των χειρόγραφων της, κάθε άλλη γνωστή βιβλιοθήκη της εποχής της και του παρελθόντος. Στη Βιβλιοθήκη εργάζονταν οι γραμματικοί, άνθρωποι με φιλολογική παιδεία, που ασχολήθηκαν με την καταγραφή και το σχολιασμό των κειμένων των αρχαίων συγγραφέων. Η εύκολη παροχή γραφικής ύλης, από την επεξεργασία του φυτού πάπυρος, συνέβαλε στη μεγάλη παραγωγή χειρόγραφων. Υπολογισμοί ανεβάζουν τον αριθμό των χειρόγραφων της Βιβλιοθήκης σε μισό εκατομμύριο (Βιβλίο Ιστορίας Α' Λυκείου). Όπως είναι φυσικό η συσσώρευση της γνώσης στην Βιβλιοθήκη είχε ως αποτέλεσμα και την άνθηση των επιστημών. Οι αλεξανδρινοί μαθηματικοί εργάστηκαν ιδιαίτερα πάνω στη γεωμετρία, αλλά γνωρίζουμε πως έγιναν συγκεκριμένες έρευνες πάνω στη θεωρία των αριθμών. Άλλωστε οι αριθμοί, από την εποχή του Πυθαγόρα και μετά, ήταν ένα θέμα που συνάρπαζε. Ο Ερατοσθένης ο Βιβλιοθηκάριος ασχολήθηκε με τους αριθμούς, ο Εύδοξος ο Κνίδιος, της Ακαδημίας του Πλάτωνα, έγινε γνωστός μια την ανάπτυξη μιας πρώιμης μεθόδου ολοκλήρωσης, για τη χρήση των αναλογιών, ο Πάππος, σοφός του 4ου αιώνα, ήταν ένας από τους τελευταίους Έλληνες μαθηματικούς, ο οποίος επικεντρώθηκε στους μεγάλους αριθμούς και τη μέτρηση των ημικυκλίων, Τέλος ο Θέων και η κόρη του Υπατία συνέχισαν τις σπουδές στα μαθηματικά, σχολιάζοντας έργα των προγενεστέρων τους, αλλά κανένα από τα έργα τους δε διασώθηκε.

Για το ποιος ήταν ο **Ευκλείδης** μια μαθήτρια μας είπε: ο Ευκλείδης θεωρείται ως ο πιο διάσημος μαθηματικός όλων των εποχών και το όνομά του είναι συνώνυμο με τη γεωμετρία. Από την αρχαιότητα αναφέρεται ως ο Γεωμέτρης η ο Στοιχειωτής. Για την ζωή του και την δράση του γνωρίζουμε ελάχιστα. Επίσης παραμένει άγνωστο που γεννήθηκε καθώς πότε ακριβώς γεννήθηκε και πέθανε. (Ευκλείδη «στοιχεία»). Τότε ένας μαθητής ο οποίος είχε πληροφορία από άλλη πηγή είπε ότι γεννήθηκε περίπου το 330 π.Χ..

Από αυτά που γνωρίζουμε, φαίνεται ότι ο Ευκλείδης φοίτησε στην Ακαδημία του Πλάτωνα, η οποία ήταν το μεγαλύτερο πνευματικό κέντρο της εποχής, στην Αθήνα. Ήταν μαθητής του Πλάτωνα, μεγαλύτερος από τον Αρχιμήδη και τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο. Ο Δημήτριος ο Φαληρεύς που γώριζε των Ευκλείδη ως καρυφαίο μαθηματικό προέτρεψε τον Πτολεμαίο να τον καλέσει στην Αλεξάνδρεια και να του αναθέσει την διεύθυνση του Μουσείου. Έζησε στην Αλεξάνδρεια το 295 π.Χ. περίπου την εποχή του 1^{ου} Πτολεμαίου, όπου έγραψε το πιο περίφημο από τα έργα του, τα Στοιχεία. Εκεί ίδρυσε την μεγάλη σχολή των μαθηματικών που άκμασε στην Αλεξάνδρεια. Σε αυτήν διδάχτηκαν μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί και αστρονόμοι όπως: ο Αρχιμήδης, ο Κόνων ο Σάμιος, ο Ερατοσθένης ο Κυριναίος, ο Απολλώνιος ο Περγαίος, ο Ίππαρχος, ο Ήρων ο Αλεξανδρινός, ο Διόφαντος, ο Πάππος, ο Θέων ο Αλεξανδρινός, η Υπατία και άλλοι. Πολλούς από αυτούς κάποιοι μαθητές τους ήξεραν άλλους δεν τους ήξεραν όμως τους έκανε εντύπωση που όλοι αυτοί σπούδασαν στην Αλεξάνδρεια. Η εξήγηση ήταν το Μουσείο και την Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη δεν ήταν μόνο δικό του έργο, ούτε όμως και σκέψη μιας συγκεκριμένης χρονικής στιγμής. Ήταν αποτέλεσμα μεγάλης προσπάθειας συλλογής του έργου όλων εκείνων των μαθηματικών και φιλοσόφων 300 χρόνια πριν, από το 600-300 π.Χ. που έζησαν και δημιούργησαν όλα αυτά τα χρόνια, σε ένα καταπληκτικό και γόνιμο περιβάλλον για την επιστήμη. Συγκέντρωσε λοιπόν και ταξινόμησε την ύλη τους που αναφέρετε σε θέματα γεωμετρίας και αριθμών, την ανέλυσε, την συμπλήρωσε την ιεράρχησε και την τοποθέτησε φτιάχνοντας ένα νέο μαθηματικό σύστημα δικό του. Καθόρισε τους ορισμούς, τα αιτήματα και θέσπισε μια διαδικασία απόδειξης με την βοήθεια των ορισμών και των προτάσεων που τις είχε προηγουμένως αποδείξει. Έτσι δημιούργησε για πρώτη φορά ένα μαθηματικό σύστημα που ισχύει μέχρι και σήμερα με λίγες διαφορές. Οι γεωμέτρες στα τέλη του 19^{ου} αιώνα στηρίχτηκαν πιστά στον Ευκλείδη, για να δημιουργήσουν την σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας. Δημιούργησε μια μαθηματική θεωρία με μια παρουσίαση της ύλης με γενικές αποδείξεις, κάθε πρόταση στη σωστή θέση όπου κάθε επόμενη στηρίζεται στην προηγούμενη χωρίς τίποτε το άσχετο η το περιττό. Πλησιάζει την τελειότητα. Καθιερώνει την γεωμετρική απόδειξη στα μαθηματικά που κρατά για πολλούς αιώνες. Αυτό επηρεάζει όλους σχεδόν τους μεγάλους μαθηματικούς και επιστήμονες που ακολούθησαν (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001).

Η πρώτη τυπωμένη εκδοχή των «στοιχείων» εμφανίστηκε στην Βενετία το 1482 και είναι ένα από τα πρώτα μαθηματικά βιβλία που τυπώθηκαν. Εκτιμάται ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 εκδόσεις των «στοιχείων» και είναι το 2^{ο} έργο παγκοσμίως σε πλήθος εκδόσεων μετά την Αγία γραφή (Bouer & Merzbach, 1997). Τα «στοιχεία» αποτελούνται από 13 βιβλία εκ των οποίων τα πρώτα 6 αναφέρονται στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου, τα επόμενα 3 στη θεωρία των αριθμών, το δέκατο στους άρρητους αριθμούς και τα 3 τελευταία στη στερεομετρία. Επίσης περιλαμβάνουν 121 ορισμούς, 5 αιτήματα 9 κοινές έννοιες (αξιώματα) και 465 προτάσεις (θεωρήματα). Από τα 13 βιβλία των στοιχείων τα 8 η 9 είναι εδώ και πάρα πολλά χρόνια μέρος της σχολικής γεωμετρίας μας. Πολλές προτάσεις και αποδείξεις θεωρημάτων υπάρχουν ακριβώς στα σχολικά μας βιβλία. Τα βιβλία αυτά του Ευκλείδη ήταν πάντα γοητευτικά για όλους σχεδόν τους μαθηματικούς, αλλά δυσκόλευαν τους μαθητές. Η λογική δομή τους έχει επηρεάσει τον τρόπο σκέψης των μαθηματικών πιο πολύ από κάθε άλλο κείμενο στον κόσμο (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001).

Ο Ευκλείδης εκτός των Στοιχείων έγραψε και άλλα έργα κάποια από αυτά σώθηκαν και άλλα όχι. Αυτά που σώθηκαν είναι: 1) Δεδομένα 2) Οπτικά 3) Κατοπτρικά 4) Φαινόμενα (αστρονομικόν) 5) κατανομή κανόνος 6) Εισαγωγή Αρμονική (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001).

ΘΑΛΗΣ- ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ- ΠΛΑΤΩΝ

Κατά τη διάρκεια του 7ου και του 6ου αιώνα π.Χ. εμφανίστηκε ένας εντελώς νέου τύπου πολιτισμός: Ο πολιτισμός της αρχαίας Ελλάδος. Πόλεις χτίστηκαν στα μικρασιατικά παράλια και στην ηπειρωτική Ελλάδα. Ήταν εμπορικές πόλεις, όπου οι έμποροι επικράτησαν της τάξης των μικροεμπόρων και τεχνιτών. Έτσι δημιουργήθηκε η ελληνική αυτοδιοικούμενη πόλη-κράτος. Σημαντικότερες Ελληνικές πόλεις-κράτη που δημιουργήθηκαν ήταν η Ιωνία η Μίλητος και άλλες πόλεις, οι οποίες με το εμπόριο με Αίγυπτο Μεσοποταμία και άλλες πόλεις απέχτησαν πλούτο και δύναμη. Στην ηπειρωτική Ελλάδα ήταν η Κόρινθος και η Αθήνα. Στην Ιταλία ήταν ο Κρότων ο Τάραντας και η Συρακούσες. Έτσι δημιουργήθηκε ένας νέου τύπου άνθρωπος. Ο έμπορος (Struik, 1966).

Με το εμπόριο και τη ναυσιπλοΐα αποκόμιζαν πόρους ζωής. Η ναυσιπλοΐα και η αστρονομία ήταν πηγές γνώσης. Η ανάγκη κατασκευής πλοίων δημιούργησε βιομηχανική δραστηριότητα. Έτσι με τα ταξίδια τους οι Έλληνες ήρθαν σε επαφή με καινούργιες γνώσεις. Προβληματίστηκαν για το «πώς» και το «γιατί» δηλαδή δεν έμειναν στις πρακτικές εφαρμογές (Bunt et al., 1980) αλλά υιοθέτησαν στοιχεία από του ξένους πολιτισμούς, και έτσι να προχωρούν πέρα από τους προκατόχους τους. Έδωσαν, όμως, ζωή σε ότι άγγιξαν.(Bouer & Merzabach, 1968) Ο καθηγητής Θ. Έξαρχος (2001) αναφερόμενος στα μαθηματικά που ανεπτύχθησαν στην Ελλάδα, από

Έλληνες μαθηματικούς από 600 π.Χ. έως 150 π.Χ. αναφέρει: « Τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν κατά την περίοδο αυτή ονομάστηκαν Ελληνικά Μαθηματικά. Αυτά βοήθησαν να βρεθεί μια τάξη μέσα στο χάος, να μπουν οι έννοιες και οι ιδέες σε μια λογική σειρά και να διατυπωθούν αρχικές έννοιες. προτάσεις και αρχές που θα διέπουν στο εξής το μαθηματικό οικοδόμημα. Στους αρχαίους Έλληνες οφείλεται αποκλειστικά η θεωρητική μορφή των Μαθηματικών, δηλαδή η μορφή εκείνη που στηρίζεται στην καθαρά λογική εξέταση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων και που έχει θεμελιωμένη και ιεραρχημένη σειρά στην εκτέλεση των πράξεων κατά τη λύση προβλημάτων».

Σύμφωνα με την παράδοση, πατέρας των Ελληνικών μαθηματικών είναι ο έμπορος Θαλής ο Μιλήσιος (624-547 π.Χ.) (Struik, 1966). Είναι ο άνθρωπος που έκαμε τα πρώτα βήματα της γεωμετρίας, πάνω σε ένα δρόμο που φτάνει μέχρι και σήμερα, ένας από τους ''επτά σοφούς της Αρχαίας Ελλάδας'' (Bunt et al., 1980). Σύμφωνα με το Πρόκλο, αρχικά μετέβη στην Αίγυπτο, από όπου έφερε την Γεωμετρία στην Ελλάδα. Ο ίδιος επινόησε πολλά θεωρήματα και δίδαξε τις αρχές που διέπουν πολλά άλλα.

Στην εποχή του Περικλή, στο δεύτερο μισό του $5^{ου}$ αιώνα, τα δημοκρατικά στοιχεία της Αθήνας άρχισαν να επικρατούν. Αποτέλεσαν την κινητήριο δύναμη για την οικονομική και στρατιωτική εξάπλωση. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο ο φιλόσοφοι και οι διδάσκαλοι παρουσίαζαν τις θεωρίες τους αλλά μαζί και τα νέα μαθηματικά. Αυτή η ομάδα των μορφωμένων ανθρώπων ονομάστηκαν «σοφιστές», είχαν κριτικό μυαλό λιγότερο παραδοσιακοί, προσέγγισαν προβλήματα μαθηματικής φύσης σε μια προσπάθεια να κατανοηθούν οι έννοιες, ανεξάρτητα από αν παρουσιάζουν πρακτική χρησιμότητα. Παράλληλα με τους «σοφιστές», με κάποια σχέση μεταξύ τους υπήρχε μια άλλη ομάδα φιλοσόφων με ενδιαφέρον στα μαθηματικά τους οποίους τους ονόμαζαν «πυθαγόρειους». Ιδρυτής της σχολής αυτής ήταν-μάλλον-ο Πυθαγόρας (Struik, 1966).

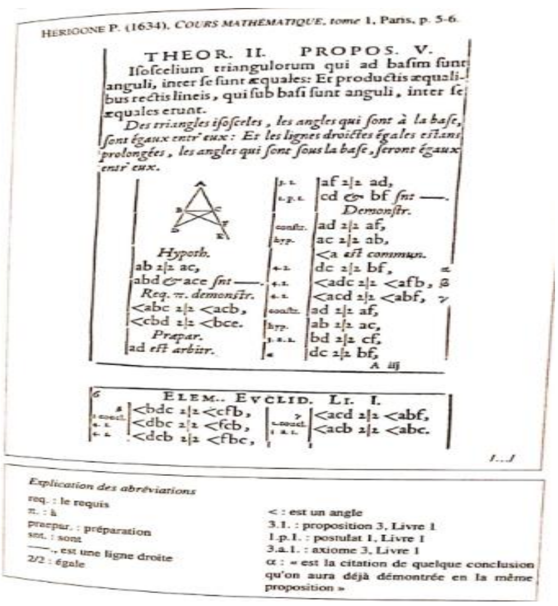
Ο Πυθαγόρας γεννήθηκε στη Σάμο, ένα νησί κοντά στη Μίλητο, τη γενέτειρα του Θαλή. Ο Πυθαγόρας ταξίδευσε και αυτός στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα και πιθανώς και στην Ινδία. Όταν επέστρεψε στην Ελλάδα εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα, στην νοτιοανατολική σημερινή Ιταλία, η οποία ονομαζόταν τότε μεγάλη Ελλάδα. Εκεί ίδρυσε μια μυστική οργάνωση (Bouer & Merzbach, 1997) με μέλη κυρίως από τις ανώτερες τάξεις. Έπρεπε να έχουν ιδιαίτερες ικανότητες, και τους μυούσε στα βαθύτερα μυστικά της Πυθαγόρειας Τάξης. Σύμβολο της Τάξης αυτής ήταν ένα αστεροειδές πεντάγωνο (πεντάλφα) (Bunt et al., 1980). Το σύνθημα της Πυθαγόρειας Σχολής ήταν «Το πάν είναι αριθμός». Ο Πυθαγόρειος Αρχύτας διαίρεσε τα μαθηματικά σε τέσσερα μέρη: μουσική-αριθμητική-αστρονομία-γεωμετρία.

Ο Πλάτων οδήγησε τα Μαθηματικά, γενικά, και ειδικότερα τη Γεωμετρία σε ραγδαία πρόοδο, χάρη στο ζήλο που έδειχνε προς τις επιστήμες αυτές. Αυτό προκύπτει από τα συγγράμματά του που ήταν γεμάτα με μαθηματικές πραγματείες, και ότι δεν έχανε την ευκαιρία να διεγείρει το ενδιαφέρον προς τα μαθηματικά για εκείνους που άρχιζαν να μελετούν φιλοσοφία. Ο Πλάτων θεωρούσε ότι τα μαθηματικά αποτελούνται από τέσσερεις κλάδους την Αριθμητική-Γεωμετρία-Αστρονομία-Στερεομετρία. Ήταν το πρώτο βασικό στοιχείο της εκπαίδευσης των φιλοσόφων και εκείνων που επρόκειτο να κυβερνήσουν την ιδανική Πολιτεία του. Πάνω από την πύλη της Ακαδημίας του έγραφε «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω μου την στέγην». Αυτό δείχνει την μεγάλη σπουδαιότητα που προσέδιδε στις μαθηματικές επιστήμες. Τονίζει ότι η αξία των Μαθηματικών είναι για την άσκηση του νου, ενώ η πρακτική χρησιμότητά τους είναι άνευ σημασίας ώστε να γίνεται σύγκριση. Έτσι η αριθμητική πρέπει να μελετάται χάρη της γνώσης και όχι για κάποιο πρακτικό σκοπό, όπως η χρήση της στο εμπόριο γιατί η πραγματική επιστήμη της Αριθμητικής δεν έχει τίποτε κοινό με τις πράξεις, το αντικείμενό της είναι η γνώση (Thomas, 2001). Τόνιζε ότι η αποδεικτική σκέψη που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία, δεν αναφέρεται στα σχήματα που σχεδιάζουμε, αλλά στις απόλυτες έννοιες που αντιπροσωπεύουν. Στον Πλάτωνα αποδίδεται η λεγόμενη ως αναλυτική μέθοδος. Στα αποδεικτικά μαθηματικά ξεκινάμε από τα δεδομένα, η γενικότερα με τα αξιώματα η πιο συγκεκριμένα με τα δεδομένα των προβλημάτων που θέλουμε να λύσουμε. Στη συνέχεια προχωρώντας βήμα-βήμα, καταλήγουμε στη πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε. Φαίνεται ότι ο Πλάτων τόνιζε ότι συχνά είναι παιδαγωγικά συμφέρον να αντιστρέφομε την διαδικασία όταν η ευθεία απόδειξη δεν είναι προφανής. Με άλλα λόγια μπορούμε να ξεκινήσουμε με το ζητούμενο και από εκεί να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα γνωστό. Αντιστρέφοντας τα βήματα αυτής της διαδικασίας, το αποτέλεσμα θα είναι μια απόδειξη της πρότασης.

Ο Ευκλείδης καθόρισε τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες. Καθιέρωσε μια διαδικασία απόδειξης με την βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων, των κοινών εννοιών και των προτάσεων που έχουν προηγουμένως αποδειχθεί. Δημιούργησε για πρώτη φορά στην ιστορία της ανθρωπότητας ένα αξιωματικό μαθηματικό σύστημα, το οποίο ισχύει μέχρι και σήμερα με ελάχιστες μόνο διαφοροποιήσεις. Εκτός από την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας δημιούργησε και μια μαθηματική θεωρία με δομή που είναι και σήμερα σύγχρονη. Καθιέρωσε ένα τρόπο και μια διαδικασία παρουσίασης της ύλης, με γενικές αποδείξεις άψογες, όπου κάθε πρόταση τοποθετείται στην κατάλληλη θέση και ακολουθεί η επόμενη πρόταση με μια αυστηρώς λογική τάξη, με τις λιγότερο δυνατές υποθέσεις, χωρίς να παρεμβάλλεται τίποτε το άσχετο ή περιττό. Κάτι που πλησιάζει την τελειότητα (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Herigone


HERIGONE P. (1634), *COURS MATHEMATIQUE*, tome 1, Paris, p. 5-6.

THEOR. II. PROPOS. V.

Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli, inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt anguli, inter se æquales erunt.

Des triangles isosceles, les angles qui sont à la base, sont égaux entr'eux: Et les lignes droictes égales estans prolongées, les angles qui sont sous la base, seront égaux entr'eux.

Hypoth.
ab 2|2 ac,
abd & ace *snt* ——.
Req. π. demonstr.
<abc 2|2 <acb,
<cbd 2|2 <bce.
Præpar.
ad *est arbitr.*

3.1. af 2|2 ad,
1.p.1. cd & bf *snt* ——.
Demonstr.
constr. ad 2|2 af,
hyp. ac 2|2 ab,
<a *est commun.*
4.1. dc 2|2 bf, α
4.1. <adc 2|2 <afb, β
4.1. <acd 2|2 <abf, γ
constr. ad 2|2 af,
hyp. ab 2|2 ac,
3.a.1. bd 2|2 cf,
α dc 2|2 bf,

A iij

6 ELEM. EVCLID. LI. I.

β 1 concl. 4.1. 4.1. <bdc 2|2 <cfb,
<dbc 2|2 <fcb,
<dcb 2|2 <fbc,

γ 2 concl. 3.a.1. <acd 2|2 <abf,
<acb 2|2 <abc.

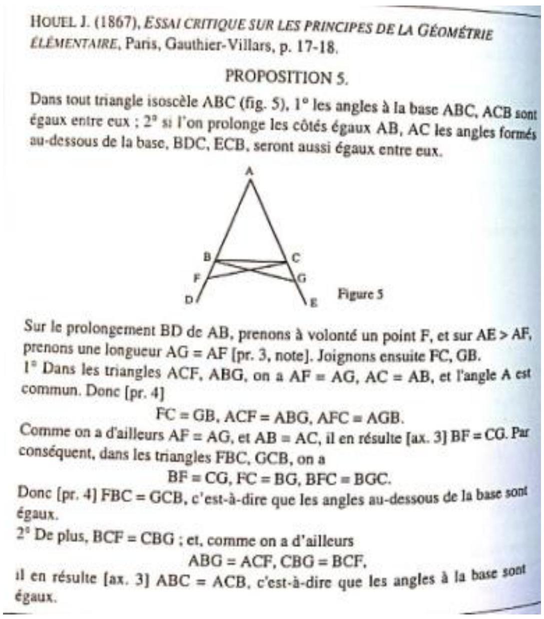
[...]

Explication des abréviations

req. : le requis
π. : à
præpar. : préparation
snt. : sont
——. : est une ligne droite
2/2 : égale

< : est un angle
3.1. : proposition 3, Livre 1
1.p.1. : postulat 1, Livre 1
3.a.1. : axiome 3, Livre 1
α : « est la citation de quelque conclusion qu'on aura déjà démontrée en la même proposition »

Houel


HOUEL J. (1867), *ESSAI CRITIQUE SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE*, Paris, Gauthier-Villars, p. 17-18.

PROPOSITION 5.

Dans tout triangle isoscèle ABC (fig. 5), 1° les angles à la base ABC, ACB sont égaux entre eux ; 2° si l'on prolonge les côtés égaux AB, AC les angles formés au-dessous de la base, BDC, ECB, seront aussi égaux entre eux.

Figure 5

Sur le prolongement BD de AB, prenons à volonté un point F, et sur AE > AF, prenons une longueur AG = AF [pr. 3, note]. Joignons ensuite FC, GB.

1° Dans les triangles ACF, ABG, on a AF = AG, AC = AB, et l'angle A est commun. Donc [pr. 4]

FC = GB, ACF = ABG, AFC = AGB.

Comme on a d'ailleurs AF = AG, et AB = AC, il en résulte [ax. 3] BF = CG. Par conséquent, dans les triangles FBC, GCB, on a

BF = CG, FC = BG, BFC = BGC.

Donc [pr. 4] FBC = GCB, c'est-à-dire que les angles au-dessous de la base sont égaux.

2° De plus, BCF = CBG ; et, comme on a d'ailleurs

ABG = ACF, CBG = BCF,

il en résulte [ax. 3] ABC = ACB, c'est-à-dire que les angles à la base sont égaux.

Clairaut **Legendre**

CLAIRAUT A. (1753), *ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE*, Première partie, XXXI, Paris, p. 32-33. Reprint, Laval, Siloë, 1987.

XXXI.

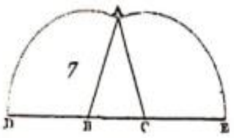
FIG. 7.

Le triangle isocèle est celui qui a deux côtés égaux.

Si des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit mesurer que la base BC, & qu'on sçût d'ailleurs que ce triangle fût isocele, c'est-à-dire, que les deux côtés AB & AC, fussent égaux : il est évident qu'il suffiroit de mesurer un des deux angles ABC, ACB ; car alors l'autre lui seroit égal.

On en voit aisément la raison, si on se représente ce qui arriveroit, en supposant que les deux côtés AB, AC, du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur BD, & sur CE, prolongemens de la base BC, & qu'ensuite on les relevat pour réunir leurs extrémités au point A ; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcherait de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pancheraient également sur la base BC. Donc l'angle ABC seroit égal à l'angle ACB.

Les angles que ces côtés font avec la base, sont égaux en-tr'eux.

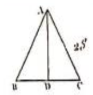


LEGENDRE A.-M. (1813), *ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE*, 10è édition, Livre I, proposition 12, Paris, Firmin Didot, p. 14-15.

PROPOSITION XII

THÉORÈME.

Dans un triangle isoscele, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.



Soit le côté AB=AC, je dis qu'on aura l'angle C = B.

Tirez la ligne AD du *sommet* A au point D, milieu de la *base* BC, les deux triangles ABD, ADC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun ; savoir AD commun, AB = AC par hypothèse, et BD = DC par construction ; donc, en vertu du théorème précédent, l'angle B est égal à l'angle C.

Corollaire. Un triangle équilatéral est en même temps équiangle, c'est-à-dire, qu'il a ses angles égaux.

Scholie. L'égalité des triangles ABD, ACD, prouve en même temps que l'angle BAD = DAC, et que l'angle BDA = ADC ; donc ces deux derniers sont droits ; *donc la ligne menée du sommet d'un triangle isoscele au milieu de sa base, est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.*

Houel

Haramard

HOÜEL J. (1867), *ESSAI CRITIQUE SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE*, Paris, Gauthier-Villars, p. 51-52.

§ 20.

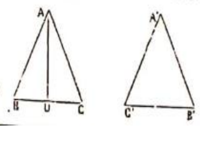
DU TRIANGLE ISOSCÈLE. – Soit ABC (fig. 41) un triangle isoscèle, dans lequel AB=AC. Retournons le plan de ce triangle, en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice AD de l'angle A ; ou, ce qui revient au même, plions la figure en deux, en faisant tourner une des moitiés autour de AD comme charnière. On voit alors que les deux moitiés de la figure se recouvrent parfaitement.

Si l'on ne veut pas d'abord introduire la bissectrice, on commencera par faire voir que le triangle retourné A'B'C' peut se placer sur sa première position ABC. Alors la bissectrice de l'angle C'B'A' coïncide avec celle de l'angle BAC, le milieu de C'B' avec le milieu de BC, etc. Donc :

Théorème. – Dans un triangle isoscèle, 1° les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ; 2° la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base ; 3° elle partage cette base en deux parties égales.

Autre énoncé. – Si d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et deux obliques égales entre elles, 1° ces obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire ; 2° elles sont également inclinées sur la perpendiculaire ; 3° elles sont également inclinées sur la base donnée.

Figure 41



HADAMARD J. (1898), *LEÇONS DE GÉOMÉTRIE*, 13è ÉDITION (1947), TOME I, CHAPITRE II, Paris, Armand Colin, p. 23. Réédition Gabay, 1988.

23. Théorème. – *Dans tout triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit le triangle isoscèle ABC (fig. 20). Retournons l'angle BAC sur lui-même (10), AB prenant la direction AC et réciproquement.

Puisque AB et AC sont égaux, le point B viendra prendre la place du point C et inversement. L'angle $\widehat{ABC}$ sera donc venu en $\widehat{ACB}$, de sorte que ces deux angles sont égaux. C. Q. F. D.

Figure 20

Borel

1.8. SIMPLICITÉ ET TRANSFORMATIONS

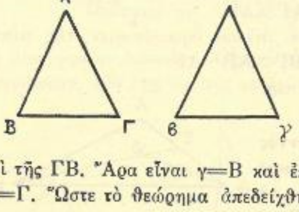
BOREL É. (1905), *GÉOMÉTRIE*, Paris, Armand Colin, p. 34.

On appelle *base* d'un triangle isoscèle le côté opposé au sommet ; les deux extrémités B et C de la base sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie du triangle, il en résulte que :

Théorème II. – Les deux angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux.

Réciproquement, *si les angles à la base d'un triangle sont égaux, le triangle est isoscèle*, car il est visiblement symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de la base.

73. Θ ε ώ ρ η μ α. ***Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (αἱ παρὰ τὴν βάσιν), εἶναι ἴσαι.***



Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ. Ἐὰν ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ πλευρὰ αβ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ αγ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ εὐθεῖα βγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ. Ἄρα εἶναι γ=Β καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ γ=Γ, ἔπεται ὅτι Β=Γ. Ὥστε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

Arnauld

ARNAULD A. (1667), *NOUVEAUX ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE*, Livre XIII, Paris, p. 265.

VIII.

SECOND THÉORÈME.

Dans tout triangle le plus grand costé soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand costé. Car par 2° lemme, tout triangle peut estre inscrit dans un cercle, & alors la circonference du cercle est partagée en trois arcs, sur chacun desquels est appuyé chacun des angles du triangle.

Or ces trois arcs sont :

/…/

IX.

PREMIER COROLLAIRE.

Tous les costez du triangle estant égaux, tous les angles le font aussy : & au contraire tous les angles estant égaux, les cotez le font aussy.

Car estant inscrits dans un cercle, les costez égaux soûtiennent des arcs égaux. Or les angles appuyez sur des arcs égaux, sont égaux. IX, 21.

Que si au contraire on supposoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les costez sont égaux. Car les angles égaux seront appuyez sur des arcs égaux. IX, 21. Or les arcs égaux sont soûtenus par des costez égaux.

X.

SECOND COROLLAIRE.

Tout triangle qui a deux costez égaux a les deux angles soûtenus par ces costez égaux ; & au contraire. En inscrivant ce triangle dans le cercle, on prouvera ce Corollaire de la même sorte que le precedent.

Référence de la démonstration d'Arnauld :

XXI.

TROISIEME COROLLAIRE.

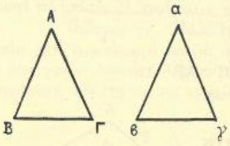
Tous les angles inscrits dans le même segment, ou appuyés sur le même arc, ou sur des arcs égaux, sont égaux. (Livre IX)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

<u>Το θεώρημα όπως έχει αποδειχθεί από τα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας των τελευταίων 70 χρόνων</u>

73. Θεώρημα. ***Εἰς πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (αἱ παρὰ τὴν βάσιν), εἶναι ἴσαι.***

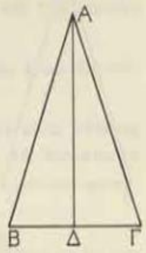
Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ. Ἐὰν ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ πλευρὰ αβ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ αγ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ σημεῖον β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ εὐθεῖα βγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ. Ἄρα εἶναι γ=Β καὶ ἐπειδὴ εἶναι καὶ γ=Γ, ἕπεται ὅτι Β=Γ. Ὥστε τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.



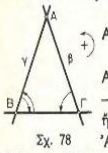
§ 80. Νὰ συγκριθῶσιν αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 54).

Ἂν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουσιν ΑΒ = ΑΓ καὶ ΒΔ = ΔΓ καὶ τὴν ΑΔ κοινήν. Εἶναι ἄρα (§ 77) ταῦτα ἴσα καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.



78. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 78

Ἤτοι: $\beta = \gamma \Leftrightarrow (\mathrm{B\Gamma}, \mathrm{BA}) = (\mathrm{\Gamma A}, \mathrm{\Gamma B})$. Ἐθέσαμεν ΑΒ = γ, ΑΓ = β.

Ἀπόδειξις. Ἔστω β = γ. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ (Σχ. 78) ἔχομεν: γ = β, β = γ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = −(ΑΓ, ΑΒ). Ἑπομένως θὰ εἶναι (75): (ΒΓ, ΒΑ) = −(ΓΒ, ΓΑ), ἤτοι (ΒΓ, ΒΑ) = (ΓΑ, ΓΒ).

Ἀντιστρόφως: ἔστω (ΒΓ, ΒΑ) = (ΓΑ, ΓΒ). Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ ἔχομεν ΒΓ = ΓΒ, (ΒΓ, ΒΑ) = −(ΓΒ, ΓΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = −(ΒΓ, ΒΑ). Ἑπομένως θὰ εἶναι (76) β = γ.

111. Θεώρημα. Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΑΒ = ΑΓ, τότε αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

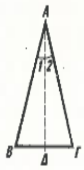
Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ (σχ. 115). Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΑΓ, ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, ἑπομένως ὑπάρχει συμμετρία ὡς πρὸς τὴν ΑΔ. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Θὰ δεί-

ΘΕΩΡΗΜΑ: Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλ. $\beta = \gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Απόδ. Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Αν φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ, έχουμε τριγΑΒΔ = τριγΑΓΔ (γιατί ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) και άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την πρόταση αυτή έχουμε αμέσως τα πορίσματα:



Θεώρημα II

Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

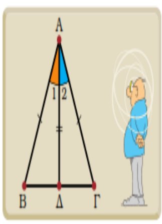
Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), (σχ. 27). Θεωρούμε τη διχοτόμο ΑΔ αυτού. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι ίσα, διότι ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ (κοινή πλευρά) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

σχ. 27

Θεώρημα III

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 *Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες.*

Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, χρησιμοποιώντας δύο κατάλληλα τρίγωνα στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί το 1ο κριτήριο ισότητας. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου, η οποία χωρίζει την $\hat{A}$ σε δύο ίσες γωνίες. Τότε δημιουργούνται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ τα οποία είναι ίσα, επειδή έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ (κοινή πλευρά) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Άρα, είναι και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. ▲



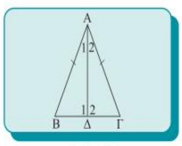
ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ (σχ.12).
Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12