ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Επιστήμες της Αγωγής: Επαγγελματική Μάθηση και Καινοτομίες στην Εκπαίδευση

Διπλωματική εργασία

«Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και η Έννοια της Μεταβλητής στην Άλγεβρα»

της Μάρκου Αντωνίας, ΑΕΜ:923

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Χρήστου, Επίκουρος Καθηγητής
Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Φλώρινα, 2020

Ονοματεπώνυμο: Μάρκου Αντωνία

Α.Ε.Μ.: 923

Ηλεκτρονική διεύθυνση: antwmarkou@gmail.com

Τίτλος διπλωματικής εργασίας: «Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού και η έννοια της μεταβλητής στην άλγεβρα»

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία δεν αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και είναι προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας. Η βιβλιογραφία και οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει έχουν δηλωθεί κατάλληλα με παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο ή/και πηγές άλλων συγγραφέων αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Ημερομηνία: 16 - 6 - 2020

Η δηλούσα

Μάρκου Αντωνία

Ευχαριστίες:

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου, στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επαγγελματική Μάθηση και Καινοτομίες στην Εκπαίδευση».

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου, για την καθοδήγηση του και την γνωστική και ηθική υποστήριξη. Μέσα από την επικοινωνία που αναπτύξαμε, τόσο στο πλαίσια των Μεταπτυχιακών μαθημάτων, τα οποία αφορούσαν τη Γνωστική Ψυχολογία και την Ποσοτική έρευνα στην Εκπαίδευση, όσο και κατά την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας, είχα την ευκαιρία να μάθω και να εξελίξω τις μαθηματικές και όχι μόνο γνώσεις μου. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους άλλους δύο επιβλέποντες καθηγητές τον κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο και τον κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο για τη συνεργασία.

Ευχαριστώ θερμά τους μαθητές και εκπαιδευτικούς του Γυμνασίου, οι οποίοι ανταποκρίθηκαν άμεσα και συμμετείχαν ενεργά στην έρευνα της εργασίας, συμβάλλοντας σε μια ολοκληρωμένη συλλογή δεδομένων.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένεια μου και την κολλητή μου φίλη, για όλη τους την υπομονή, υποστήριξη, καθοδήγηση και εμπιστοσύνη σε ό,τι κι αν κάνω.

Περίληψη:

Οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες και οδηγούνται σε παρερμηνείες στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής. Η συγκεκριμένη έρευνα έχει ως στόχο να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν την έννοια της μεταβλητής καθώς επίσης και το κατά πόσο τείνουν να εφαρμόζουν σε αυτή την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Στην έρευνα συμμετείχαν μέσω ενός ερωτηματολογίου κλειστού τύπου, μαθητές και μαθήτριες της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου, οι οποίοι επέλεγαν ή απέρριπταν σύνολα τιμών για μια μεταβλητή ή για μια αλγεβρική παράσταση. Μέσα από τα αποτελέσματα της έρευνας εντοπίστηκε η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν τιμές που είχαν την ίδια μορφή και το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο και αυτό δημιουργείται από μια γενικότερη τάση που έχουν να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα αυτά αναλύονται και συζητιούνται βάσει του θεωρητικού πλαισίου και των ευρημάτων προηγούμενων ερευνών. Ακόμη παρατίθενται διδακτικές παρεμβάσεις αλλά και θέματα για περαιτέρω διερεύνηση αναφορικά με την έννοια της μεταβλητής.

Λέξεις - κλειδιά: μεταβλητή, προκατάληψη του φυσικού αριθμού, εννοιολογική αλλαγή, άλγεβρα

Abstract:

Students frequently face difficulties and are led to misconceptions in their effort to understand the meaning of the variable. The aim of this study is to explore the way students understand the mathematical concept of variable as well as their tendency to apply their pre-existing knowledge of natural numbers when reasoning about the number values that variable can represent. The survey was conducted through a closed-ended questionnaire administered to high school students. The participants were asked to choose or reject a possible set of values for a variable or for an algebraic representation. The results of the research confirmed the presence of a tendency among students to assign values to variables, based on their knowledge of natural numbers and either to be led to misconceptions concerning the preservation of the integrity of the form of the algebraic expressions or the preservation of its phenomenal sign. These results are discussed on the basis of the theoretical framework and the findings of previous research. Educational implications and topics for further investigation regarding the concept of the variable are also provided.

Key words: variable, natural number bias, conceptual change, algebra

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Καθώς διανύουμε τον 21ο αιώνα, τα Μαθηματικά αποκτούν όλο και μεγαλύτερη αξία στη ζωή όλων μας. Το γεγονός, ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν τη δυνατότητα να ασχοληθούν ή να αξιοποιήσουν απλές αλλά και πιο σύνθετες μαθηματικές γνώσεις, έχει δώσει μεγάλη χαρά στους επιστήμονες, ωστόσο πολλοί μαθητές δεν μπορούν ακόμα να βρουν το νόημα και την αξία των Μαθηματικών. Δημιουργούνται δηλαδή ερωτήματα όπως «Γιατί να ασχοληθώ με τα Μαθηματικά;», «Που και πότε και θα χρησιμοποιήσω αυτόν τον τύπο των Μαθηματικών» κ.α. (Ζαού, 2016).

Η επαφή των ανθρώπων με τα Μαθηματικά τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο, συμβάλλει στην προσωπική τους εξέλιξη, αναπτύσσει την επαγωγική και κριτική τους σκέψη, καθώς επίσης καλύπτει επαγγελματικές, κοινωνικές και μορφωτικές τους ανάγκες. Επιπλέον, κοινά αποδεκτή είναι η άποψη κατά την οποία κάθε μαθηματικός γραμματισμός βοηθά τον άνθρωπο να βελτιωθεί όχι μόνο γνωστικά αλλά και κοινωνικά, διευκολύνοντας δηλαδή κάθε κοινωνική του αλληλεπίδραση.

Σύμφωνα με την Παπαδιοφάντους(2016) «η επιστήμη των αριθμών, των σχημάτων και των φυσικών μεγεθών, που μελετά τις μεταξύ τους σχέσεις καθώς και τις σχέσεις τους στον χώρο και στον χρόνο» συνιστά το κρηπίδωμα πάνω στο οποίο στηρίχθηκαν όλες οι σύγχρονες επιστήμες: φυσική, χημεία, πληροφορική, μηχανολογία, βιολογία, αστρονομία κ.α.

Ακόμη μεγαλύτερη είναι η αξία των Μαθηματικών για τον μαθητή. Κατά την ενασχόληση του με το μάθημα αυτό και συγκεκριμένα μέσα από δημιουργικές δραστηριότητες καλλιεργεί έναν πιο κριτικό τρόπο σκέψης, μαθαίνει να δοκιμάζει νέους τρόπους και νέες μεθόδους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το μάθημα της γεωμετρίας, στο οποίο ο μαθητής καλείται να ξεπεράσει το «προφανές» και να οικοδομήσει νέες γνώσεις μέσα από απλές και βοηθητικές ευθείες, αλλά και να φιλτράρει περιττές πληροφορίες που δεν βοηθούν κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Επιπρόσθετα ο μαθητής έχει την ευκαιρία να διερευνήσει ένα ζητούμενο, να εντοπίσει κοινά στοιχεία με κάποια προηγούμενη του προσπάθεια ακόμη και να ανακαλύψει νέους τρόπους επίλυσης που ίσως ακόμη δεν έχει διδαχθεί. Η μεγαλύτερη εξοικείωση του με τα Μαθηματικά σημαίνει και απόκτηση μεθοδικότητας, επινοητικότητας αλλά και ένα είδος συστηματικής αντίληψης των πραγμάτων (Τζεκάκη, 2011).

Η μεταβλητή ως μια από τις βασικές μαθηματικές έννοιες, έχει και αυτή με τη σειρά της κυρίαρχο ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών στο σχολείο, όπως επίσης και σε άλλα μαθήματα όπως η Φυσική, η Χημεία και η Οικονομία (Dogbey & Kersaint, 2012). Η σημασία που έχει σε όλα αυτά τα γνωστικά αντικείμενα αναδεικνύεται από τις πολλές και ποικίλες χρήσεις της, ενώ η υπεροχή της κατά την επίτευξη στόχων στα σχολικά Μαθηματικά είναι εμφανής όταν κάποιος προσπαθεί να περιγράψει κανόνες και να λύσει απλές ασκήσεις (Dogbey & Kersaint, 2012). Ωστόσο μέσα από πολλές μελέτες έχουν αναδειχθεί ποικίλες δυσκολίες και παρανοήσεις που προκύπτουν κατά την επαφή των μαθητών με δραστηριότητες που εμπεριέχουν μεταβλητές ή αλγεβρικές παραστάσεις. Οι δυσκολίες αυτές άλλοτε αφορούν το ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται σωστά το ρόλο και τη χρήση της μεταβλητής, ενώ άλλοτε εστιάζουν σε παρανοήσεις που αυτοί εμφανίζουν αναφορικά με τις τιμές που αυτή μπορεί να πάρει.

Στόχος αυτής της μελέτης είναι να αναδείξει δυσκολίες των μαθητών με την κατανόηση και τη χρήση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα θα διερευνηθεί κατά πόσο οι μαθητές οδηγούνται σε λάθη και παρανοήσεις όταν καλούνται να λύσουν ασκήσεις και προβλήματα που εμπεριέχουν μεταβλητές. Οι παρανοήσεις αυτές προκύπτουν από το ότι οι μαθητές βασίζονται και χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς και για το λόγο αυτό στόχος είναι οι δυσκολίες αυτές να αναλυθούν μέσω του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής.

Λόγω θεμελιωδών διαφορών που υπάρχουν μεταξύ των φυσικών και μη φυσικών αριθμών, οι μαθητές δυσκολεύονται κατά την εξοικείωση τους με την έννοια της μεταβλητής και φαίνεται να της αποδίδουν χαρακτηριστικά του φυσικού αριθμού, τα οποία έχουν κατακτήσει σε βάθος(Greer,2006 όπ.ανάφ. στο Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007). Πιο συγκεκριμένα εμφανίζουν την τάση να αντικαθιστούν τη μεταβλητή μόνο με ακέραιους αριθμούς όταν η μεταβλητή έχει ακέραια μορφή και με κλάσματα όταν έχει κλασματική μορφή. Ακόμη πολλές φορές τείνουν να κάνουν λάθη και ως προς το πρόσημο. Αποδίδουν δηλαδή σε μια μεταβλητή με θετικό πρόσημο μόνο θετικές τιμές και σε μια μεταβλητή με αρνητικό πρόσημο μόνο αρνητικές τιμές. Από τα παραπάνω προκύπτει η διάκριση των δύο βασικών παρανοήσεων, αυτής που αφορά την ακεραιότητα της τιμής που θα πάρει η μεταβλητή και αυτή του φαινομενικού προσήμου, οι οποίες οφείλονται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού και θα διερευνηθούν λεπτομερώς στη συγκεκριμένη έρευνα.

Ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσεται η εργασία αυτή έχει ως εξής. Αρχικά στο πρώτο μέρος παρατίθεται η βιβλιογραφική και θεωρητική πλαισίωση του ζητήματος, η οποία διαχωρίζεται σε δύο επιμέρους κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, η οποία σχετίζεται με την έννοια της μεταβλητής. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού περιγράφεται η ιστορική αναδρομή της μεταβλητής, πώς και πότε δηλαδή χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά, πως εξελίχθηκε και έφτασε σήμερα να κατέχει τόσο σπουδαίο ρόλο στη διδασκαλία των Μαθηματικών και συγκεκριμένα της άλγεβρας. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου επισημαίνονται και περιγράφονται διάφοροι ορισμοί που έχουν δοθεί από επιστήμονες για τη μεταβλητή, όπως επίσης και διάφοροι τρόποι χρήσης της. Στο τρίτο μέρος, το οποίο είναι και αυτό που σχετίζεται πιο άμεσα με το ερευνητικό κομμάτι της εργασίας, παρατίθενται οι δυσκολίες, οι παρανοήσεις και τα λάθη που σημειώνονται από τους μαθητές όταν καλούνται να ασχοληθούν με τις μεταβλητές. Τα περισσότερα από αυτά μάλιστα αποτελούν αποτελέσματα και ευρήματα προηγούμενων, συναφών ερευνών. Με αφορμή αυτές τις πιθανές δυσκολίες περιγράφεται και γενικότερα, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές συσχετίζουν τι μεταβλητή με τον φυσικό αριθμό και μεταβαίνουν ουσιαστικά από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, το οποίο διευκολύνει την κατανόηση της παραπάνω σχέσης μεταξύ μεταβλητής και φυσικού αριθμού. Αρχικά αναλύεται η εννοιολογική αλλαγή ως έννοια, πως επιτυγχάνεται ή παρεμποδίζεται η αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης και όλο αυτό στη συνέχεια συσχετίζεται με μαθηματικές έννοιες όπως και η έννοια της μεταβλητής. Όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο αυτό, οι μαθητές τις περισσότερες φορές συναντούν δυσκολίες κατά την προσπάθεια τους για εννοιολογική αλλαγή αναφορικά με την έννοια της μεταβλητής, μια από τις οποίες είναι και η προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Η προκατάληψη αυτή περιγράφεται και αναλύεται στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αυτού.

Στη συνέχεια ακολουθεί το δεύτερο και ερευνητικό μέρος της εργασίας. Στο τρίτο κεφάλαιο δηλαδή, περιγράφεται αρχικά ο βασικός στόχος και η υπόθεση της έρευνας και ακολουθεί έπειτα η μεθοδολογία, η οποία περιλαμβάνει τους συμμετέχοντες, το ερευνητικό εργαλείο καθώς επίσης και τη διαδικασία συγκέντρωσης και ανάλυσης των δεδομένων. Έπειτα στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα και στο πέμπτο κεφάλαιο ακολουθεί η συζήτηση αυτών. Τέλος ακολουθούν οι περιορισμοί της έρευνας στο έκτο κεφάλαιο, οι διδακτικές παρεμβάσεις που μπορούν να γίνουν στο έβδομο κεφάλαιο και τα ζητήματα για περαιτέρω διερεύνηση στο όγδοο κεφάλαιο. Η εργασία ολοκληρώνεται με την ξενόγλωσση και ελληνική βιβλιογραφία, όπως αυτή παρουσιάζεται στο ένατο και δέκατο κεφάλαιο και με το παράρτημα.

1.Μεταβλητή

1.1. Η έννοια της μεταβλητής

Στα μέσα του 3ου αιώνα ο Διόφαντος χρησιμοποίησε σύμβολα για να λύσει μαθηματικά προβλήματα και για να αναπαραστήσει άγνωστες ποσότητες με αυτά. Ακολούθησε ο Καρτέσιος στις αρχές του 17ου αιώνα, ο οποίος καθιέρωσε την παράδοση της χρήσης των γραμμάτων, τα οποία είναι στην αρχή της αλφαβήτου, για να αντικαταστήσει κάποιες παραμέτρους και αυτά, τα οποία είναι στο τέλος του αλφαβήτου, για να αντικαταστήσει ποικίλες ποσότητες. Οι Sfard και Sierpinska αναφέρθηκαν στην έννοια της μεταβλητής, επισημαίνοντας ότι η γενική αποδοχή μεταξύ της μαθηματικής κοινότητας για την έννοια αυτή, ως μια ποσότητα που ποικίλει και ως ένα σύνολο αριθμών, προχώρησε αργά. Ανά τους αιώνες, μέχρι και σήμερα προέκυψαν πολλές και νέες χρήσεις της μεταβλητής, οι οποίες δεν αντικατέστησαν τις προηγούμενες, αλλά την επέκτειναν, δημιουργώντας ένα πολύπλοκο ρεπερτόριο (Dogbey & Kersaint,2012).

Αν και η έννοια της μεταβλητής διαφέρει αρκετά από την έννοια του αριθμού, συνδέονται και αλληλεπιδρούν σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους. Αυτή η στενή σχέση που έχουν, δείχνει φυσικά πως για να μπορέσουν οι μαθητές να κατακτήσουν και να κατανοήσουν την ιδέα της μεταβλητής, πρέπει να έχουν τις απαραίτητες γνώσεις για τους αριθμούς. Εξίσου στενή βέβαια είναι και η σχέση της μεταβλητής με την άλγεβρα, μολαταύτα η κατανόηση της όταν οι μαθητές μεταβαίνουν από την αριθμητική στην άλγεβρα έχει φανεί ότι είναι μια δύσκολη διαδικασία. Το ότι οι μεταβλητές έχουν το χαρακτηριστικό να αντιπροσωπεύουν άλλοτε μια σταθερά κι άλλοτε έναν συγκεκριμένο αριθμό φαίνεται να τους δημιουργεί εμπόδια και να επιδρά αρνητικά στις επιδόσεις τους. Αυτό οφείλεται ίσως στην άποψη του Kucheman(όπ.ανάφ. στο Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018), βάσει της οποίας οι μαθητές για να μπορέσουν να αντιληφθούν και να κατανοήσουν ότι η μεταβλητή αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό και γενικευμένο αριθμό, χρειάζεται να βρίσκονται σε ένα υψηλότερο επίπεδο κατανόησης. Για να φτάσει κανείς σε αυτό το επίπεδο πρέπει πρώτα να τα καταφέρνει καλά στο τυπικό διαδικαστικό επίπεδο και αυτό επιτυγχάνεται κατά τον Piaget μετά τα δώδεκα έτη. Από την ηλικία αυτή και μετά οι μαθητές μπορούν και σκέφτονται πιο γενικά και πιο αφηρημένα, έτσι που αρχίζουν να αποδίδουν στη μεταβλητή και αφηρημένους αριθμούς. Πέρα όμως την άποψη του Piaget άλλες έρευνες, πιο πρόσφατες, έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούν να ερμηνεύσουν και να διαχειριστούν τις μεταβλητές πολύ νωρίτερα από την ηλικία των δώδεκα ετών.

Ανά τα χρόνια έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί και χαρακτηρισμοί για την έννοια της μεταβλητής. Επιπλέον ποικιλία εμφανίζεται και ως προς την κατηγοριοποίηση που κάνουν μελετητές και μαθηματικοί αναφορικά με το τι αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές, σε τι αντιστοιχούν και πως χρησιμοποιούνται βάσει συγκεκριμένων πλαισίων. Αρχικά ως μεταβλητή ορίζεται «ένα σύμβολο που μπορεί να αναπαριστά οποιοδήποτε από τα στοιχεία ενός συγκεκριμένου συνόλου». Έπειτα στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου αναφέρεται ο εξής ορισμός: «Μεταβλητή είναι ένα γράμμα(π.χ. x, y, t, …) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου». Η μεταβλητή έχει οριστεί ακόμη και ως «μια μαθηματική οντότητα», που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντιπροσωπεύσει οποιοδήποτε αριθμό μέσα σε ένα εύρος αριθμών και επίσης μπορεί να σταθεί σε επίσημο αλγεβρικό σύστημα(Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007). Πέρα από τους ορισμούς όμως πολλοί μελετητές επεσήμαναν κάποια πλαίσια μέσω των οποίων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν οι χρήσεις της μεταβλητής.

Ο Kucheman (1978,1981 όπ. ανάφ. στο Dogbey & Kersaint,2012) προσδιόρισε έξι τρόπους με τους οποίους οι Βρετανοί μαθητές μέσης εκπαίδευσης αντιλαμβάνονται τα γράμματα μέσα στις αλγεβρικές παραστάσεις:

1)Το γράμμα χρησιμοποιείται για να αντικαταστήσει μέσω ετικέτας ή συντομογραφίας ένα αντικείμενο (π.χ. η χρήση του χ και του ψ για να δηλωθεί ότι 15χ =1ψ, όπου χ είναι οι μαθητές και ψ η σχολική τάξη)

2)Χρησιμοποιείται ως μεταβλητή για να αντιπροσωπεύσει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών (π.χ. η χρήση του «α» ως 4, 12, 3.7 κ.α.)

3)Χρησιμοποιείται ως μεταβλητή για να αντικαταστήσει ένα συγκεκριμένο αλλά άγνωστο αριθμό (π.χ. το «λ» στην αλγεβρική παράσταση «λ+3», το οποίο είναι ένας άγνωστος αριθμός που μπορεί όμως να βρεθεί με την επίλυση της εξίσωσης)

4) Οι τιμές κάποιων γραμμάτων αγνοούνται και δε συμμετέχουν σε κάποιο υπολογισμό (π.χ. όταν οι μεταβλητές «α» και «β» χρησιμοποιούνται για κάποια ιδιότητα πράξης, $α * (β+γ) = (α*β) + (α*γ)$)

5)Το γράμμα μπορεί να πάρει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή (π.χ. το σύμβολο π που δηλώνει την αναλογία της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρο του, και με αριθμητική προσέγγιση 3.1416 είναι μια σταθερά)

6) Χρησιμοποιείται ως μεταβλητή που αντικαθιστά έναν γενικό αριθμό, ο οποίος μπορεί να πάρει περισσότερες από μια τιμές (π.χ. η μεταβλητή «α», όταν συναντάται στο «$3α – 5 < 8$»)

Έπειτα μια άλλη ενδιαφέρουσα κατηγοριοποίηση των χρήσεων του κυρίαρχου συμβόλου της άλγεβρας, δηλαδή της μεταβλητής, είναι αυτή του Freudental (1983 όπ.ανάφ. στο Heck,2001). Η χρήση της μεταβλητής που προκύπτει μέσα από αυτή τη μελέτη είναι η εξής: 1)ορίζεται ως ένα σύμβολο αντικατάστασης, το οποίο δηλώνει μέσα σε μια παράσταση τις θέσεις ή τα σημεία που δηλώνουν τον ίδιο αριθμό, την ίδια ποσότητα ίσως και την ίδια έννοια, 2)χαρακτηρίζουν τη μεταβλητή ως ένα «πολυδύναμο όνομα» δηλαδή ένα όνομα για ένα αντικείμενο, το οποίο μπορεί να πάρει πολλές αξίες (χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση του «ν» όταν αυτό είναι διαιρέτης του 24 και φυσικά οι πιθανές τιμές που μπορούν να το αντικαταστήσουν είναι πολλές όπως 3,4,6,8 και άλλες), 3)μια άλλη χρήση της μεταβλητής είναι αυτή του μεταβλητού αντικειμένου (ένα σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται για να αντικαταστήσει ένα αντικείμενο ή μια έννοια με μεταβλητή τιμή).

Σύμφωνα με μια άλλη νεότερη έρευνα, αυτή του Βερύκιου(2003, όπ.ανάφ. στη Καστανίδη, 2011) έχουν καταγραφεί πέντε διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει μια μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα η μεταβλητή χρησιμοποιείται :

1)Στους τύπους για να εκφράσουν σχέσεις, παράδειγμα Εορθογωνίου= β * υ, όπου β=βάση του ορθογωνίου και υ=ύψος του ορθογωνίου

2)Στα προγράμματα υπολογιστών για να υποδείξουν θέσεις αποθήκευσης

3)Για να περιγραφούν ακολουθίες ή συναρτήσεις

4)Για να δηλώσουν ιδιότητες ή γενικεύσεις, παράδειγμα: α+β = β+α

5)Στις εξισώσεις σαν άγνωστοι αριθμοί, παράδειγμα:12-χ=7

Ενδιαφέρον παρουσιάζει σχετικά με την κατηγοριοποίηση των μεταβλητών ως προς τις χρήσεις τους και η άποψη του Phillip(1992, όπ. ανάφ στο Dogbey & Kersaint,2012). Ειδικότερα υποστήριξε πως οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως ετικέτες, σταθερές, συγκεκριμένοι άγνωστοι, γενικοί άγνωστοι, γενικευμένοι αριθμοί, μεταβλητές ποσότητες και αφηρημένα σύμβολα. Ως ετικέτες χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές όταν αντικαθιστούν ως συντομογραφία ένα αντικείμενο, ενώ ως σταθερές όταν αντιπροσωπεύουν ποσότητες με σταθερή αξία είτε σε συγκεκριμένο πλαίσιο είτε σε μια πιο γενική μορφή (π=3,14). Επιπρόσθετα η χρήση τους ως συγκεκριμένοι άγνωστοι αφορά τις μεταβλητές που αντικαθιστούν αριθμούς που μόνο αυτοί μπορούν να βρεθούν μες στην αλγεβρική παράσταση, σε αντίθεση με τους γενικούς άγνωστους στους οποίους η τιμή που μπορεί να δοθεί είναι παραπάνω από μία. Με τον όρο γενικευμένοι αριθμοί νοούνται οι μεταβλητές οι οποίες συμμετέχουν σε παραστάσεις με σκοπό να αντιπροσωπεύσουν πρότυπα ή ακολουθίες, ενώ όταν εξυπηρετούν το σκοπό των αφηρημένων συμβόλων, χρησιμοποιούνται αυθαίρετα, πιθανόν για κάποιους πρόχειρους υπολογισμούς.

Τέλος ο Usiskin (1988, όπ.ανάφ. στο Χρήστου,2009) έκανε μια άλλη διάκριση μεταξύ των διαφορετικών χρήσεων των μεταβλητών στην άλγεβρα. Αρχικά υποστήριξε πως οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως γενικευμένοι αριθμοί με στόχο να φανούν οι σχέσεις οι οποίες μπορεί να υπάρχουν μεταξύ οποιωνδήποτε αριθμών. Στην περίπτωση αυτή, έχοντας τον ρόλο ενός συγκεκριμένου αριθμού μπορούν να συμμετέχουν σε αλγοριθμικές διεργασίες. Ακόμη κατά την προσπάθεια μαθητών ή και ενηλίκων να λύσουν μαθηματικά προβλήματα, οι μεταβλητές μπορούν να αναπαραστήσουν τον άγνωστο της εξίσωσης που προκύπτει από το πρόβλημα. Σύμφωνα με τους Sfard και Linchevsky(1994 όπ.ανάφ. στο Χρήστου,2009), η άποψη αυτή για τη χρήση της μεταβλητής έχει οριστεί ως «προσέγγιση της σταθερής αξίας» και αποτελεί την πρώτη επαφή εκ μέρους των μαθητών με τα γράμματα στο χώρο των Μαθηματικών, όταν αυτοί καλούνται να συμπληρώσουν τον αριθμό που λείπει για να ισχύει μια ισότητα. Μια άλλη χρήση που αναφέρεται είναι αυτή των αυθαίρετων αντικειμένων και συναντάται κυρίως σε μελέτη δομών, όπως δηλαδή σωμάτων ή ομάδων. Κλείνοντας, λαμβάνοντας υπόψη ότι η άλγεβρα είναι ένα είδος μελέτης που γίνεται ανάμεσα σε κάποιες ποσότητες, οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν σχέσεις συναρτήσεων.

1.2. Δυσκολίες, λάθη και παρερμηνείες σχετικά με την έννοια της μεταβλητής

Οι δυσκολίες και οι παρερμηνείες των μαθητών αναφορικά με την έννοια της μεταβλητής φαίνεται να οφείλονται στις πολλές και διαφορετικές τις χρήσεις. Αρχικά μια πρώτη παρερμηνεία των μαθητών είναι ότι αντιμετωπίζουν τα γράμματα των μεταβλητών ως ετικέτες για κάποια αντικείμενα ή ονόματα, όπως για παράδειγμα D=David ή h=height. Εναλλακτικά ακόμα και αν θεωρήσουν ότι τα γράμματα αντιστοιχούν σε αριθμούς, πιστεύουν ότι αφορούν μόνο έναν συγκεκριμένο αριθμό (Collis, 1975; Booth, 1984; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005; Kuchemann, 1978, 1981; Stacey & MacGregor, 1997, όπ.ανάφ. στο Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007).

Επιπρόσθετα ένα άλλο πρόβλημα που δυσκολεύει τους μαθητές όταν καλούνται να λύσουν αλγεβρικές παραστάσεις αφορά το ότι έχουν μάθει στην αριθμητική να συνδέουν και να ενώνουν αριθμούς κι αυτό να αφορά ουσιαστικά την πρόσθεση. Στην άλγεβρα όταν συνδέεται ένα γράμμα - μεταβλητή με έναν αριθμό, πρόκειται για ένα είδος πολλαπλασιασμού, όπως για παράδειγμα το 2α αφορά την πράξη 2 φορές το α. Αυτό δεν γίνεται και τόσο εύκολα αντιληπτό από τους μαθητές για αυτό και όταν τους ζητήθηκε να αντικαταστήσουν με 2 το «α» στην αλγεβρική παράσταση «3α», αυτοί απάντησαν 32. Μόνο όταν τους διευκρίνισαν να απαντήσουν συγκεκριμένα «για την άλγεβρα» μερικοί μαθητές το αντιμετώπισαν ως 3 φορές το 2 (Chalouh & Herscovics όπ.ανάφ. στο Christou, Vosniadou & Vamvakoussi,2007). Μια άλλη δυσκολία που αναφέρει ο Usiskin είναι ότι πολλοί μαθητές θεωρούν ότι οι μεταβλητές είναι γράμματα που αντιστοιχούν μόνο σε αριθμούς ακόμα κι όταν οι ρόλοι της μεταβλητής δεν είναι απαραίτητα αριθμητικοί και αφορούν έννοιες ή κάποια συγκεκριμένη ορολογία. Πέρα από αυτές τις γενικές παρατηρήσεις, οι Ortega & Ursini(όπ.ανάφ. στο Dogbey & Kersaint,2012) υποστήριξαν ότι τα κορίτσια τείνουν να εμφανίζουν περισσότερες δυσκολίες όταν δουλεύουν με μεταβλητές από ότι τα αγόρια, ιδιαίτερα όταν χρειάζεται να αλλάξουν μεταξύ διαφορετικών χρήσεων των μεταβλητών στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο.

Παρόμοιες αναφορές σχετικά με τις παρερμηνείες που γίνονται με τις μεταβλητές εμφανίζονται και στη μελέτη του Switzer (2017). Συγκεκριμένα σύμφωνα με τον Fujii(2003) οι μαθητές των μεσαίων τάξεων κι όχι μόνο, συχνά πιστεύουν ότι τα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν και σε διαφορετικούς αριθμούς, δεν μπορούν δηλαδή και το «χ» και το «ψ» να αντικαθιστούν το 6. Ακόμη οι Fujii & Stephens (2008) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν και αποδίδουν στις μεταβλητές «αξίες με όρια». Υποστηρίζουν δηλαδή ότι οι προσθετέοι δεν μπορούν να είναι μεγαλύτεροι από το άθροισμα.

Σύμφωνα με τα όσα υποστήριξε η Booth (1984 όπ.αναφ. στο Χρήστου, 2009), η απροθυμία των μαθητών να δεχτούν τα γράμματα (μεταβλητές) ως γενικευμένους αριθμούς, δικαιολογείται μέσα από κάποιες παλαιότερες ερμηνείες. Σύμφωνα με αυτές τις ερμηνείες, για να μπορέσει κάποιος μαθητής να κατανοήσει και να διαχειριστεί κάποιες έννοιες όπως η μεταβλητή, θα πρέπει να έχει φτάσει σε ένα συγκεκριμένο στάδιο ανάπτυξης. Επίσης απέδωσε μερίδια ευθύνης και στον τρόπο διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα παρατηρείται ότι καθώς οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής, μαθαίνουν πως το κάθε γράμμα μπορεί να αντιπροσωπεύσει και μια συγκεκριμένη αξία και όχι έναν γενικευμένο αριθμό. Μια επιπλέον δυσκολία που επισημάνθηκε από την Booth και έχει αναφέρει και ο Collis (1975) είναι το ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δεν μπορούσε να δεχτεί πως το τελικό αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής παράστασης γίνεται να περιέχει γράμματα. Ήταν δύσκολο δηλαδή να συλλάβουν ως ιδέα το ότι μια σειρά πράξεων ολοκληρώνεται, ενώ δεν έχει βρεθεί ουσιαστικά ένα τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα και αυτό ήταν που τους οδήγησε στο να χαρακτηρίσουν τη δυσκολία αυτή ως «αποδοχή μη περάτωσης». Μια πιθανή ερμηνεία για αυτό το πρόβλημα είναι η επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης των φυσικών αριθμών και της αριθμητικής. Για πολλά χρόνια οι μαθητές έχουν εξασκηθεί στο να πραγματοποιούν πράξεις μεταξύ ακεραίων και να οδηγούνται σε ένα αποτέλεσμα που περιλαμβάνει ακέραιο αριθμό, οπότε η εμφάνιση γράμματος λογικό είναι να τους οδηγεί σε μια σύγχυση.

1.3. Από τον φυσικό αριθμό στη μεταβλητή και από την αριθμητική στην άλγεβρα

Βλέποντας την άλγεβρα ως ένα βασικό κομμάτι του προγράμματος σπουδών, με το οποίο αλληλεπιδρούν οι μαθητές από τη μικρή τους ηλικία, καλό θα είναι οι εκπαιδευτικοί να τους βοηθούν να δημιουργήσουν ένα στερεό υπόβαθρο κατανόησης και εμπειρίας ως ένα είδος προετοιμασίας για τις πιο περίπλοκες αλγεβρικές ασκήσεις (NCTM, 2000 όπ.ανάφ. στο Asquith, Stephens, Knuth & Alibali,2007). Προτού όμως τεθούν τα θεμέλια της άλγεβρας, πολλοί μαθηματικοί θεωρούν ότι οι μαθητές καλό είναι να κατακτήσουν πλήρως την αριθμητική, να εξασκηθούν δηλαδή σε αυτή, ώστε να μπορέσουν έπειτα να προχωρήσουν και στα αλγεβρικά δεδομένα. Η αριθμητική αφορά κυρίως πράξεις στις οποίες εμπλέκονται συγκεκριμένοι αριθμοί, ενώ η άλγεβρα εστιάζει σε πιο γενικευμένους αριθμούς και στις μεταβλητές. Η διαφορά αυτή αποκαλύπτεται και από το περιεχόμενο της διδασκαλίας μεταξύ μικρότερων και μεγαλύτερων, ως προς την ηλικία τάξεων. Πιο συγκεκριμένα οι εκπαιδευτικοί μικρών μαθητών επικεντρώνονται σε ζητήματα που αφορούν αριθμούς, στην αίσθηση του αριθμού και σε λεκτικά προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν συγκεκριμένες αξίες. Από την άλλη πλευρά οι εκπαιδευτικοί μεγαλύτερων ηλικιακά μαθητών, οι οποίοι καλούνται να διδάξουν άλγεβρα, εστιάζουν κυρίως στο στάδιο στο οποίο εμπλέκονται τα γράμματα(μεταβλητές), για να αντικαταστήσουν άγνωστους αριθμούς ή άγνωστα σύνολα αριθμών. Σχετικά όμως με την πορεία και την επίδοση στην αλγεβρική λογική τα επίπεδα της γνωστικής τους ανάπτυξης, φαίνεται να είναι περιορισμένα και ανεπαρκή και αυτό επιδρά αρνητικά στην εξέλιξη τους. Επιπλέον οι αλγεβρικές έννοιες και ο αντίστοιχος συλλογισμός απαιτούν ένα βαθμό αφαιρετικότητας και γνωστικής ωριμότητας, την οποία όμως οι περισσότεροι μαθητές πρωτοβάθμιας αλλά και οι έφηβοι δεν έχουν (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001). Γι’ αυτόν ακριβώς τον λόγο πολλοί ερευνητές συμφωνούν στο ότι στο ότι η άλγεβρα είναι ναι μεν δομημένη αλλά ταυτόχρονα είναι και αφηρημένη. Οι μετασχηματισμοί που λαμβάνουν χώρα αφορούν αλγεβρικές παραστάσεις και όχι συγκεκριμένους αριθμούς όπως στην αριθμητική η οποία είναι πιο συγκεκριμένη και διαδικαστική.

Αυτές λοιπόν οι θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας συχνά έχουν χαρακτηριστεί ως «γνωστικό χάσμα» (Herscovics & Linchevski,1994), «σημείο κοπής» ή «διδακτική χαρακιά» (Filloy & Rojano,1989) και μέσα από αυτούς τους χαρακτηρισμούς οι παραπάνω μελετητές ήθελαν να επισημάνουν τα λάθη ή τις παρερμηνείες που συμβαίνουν κατά τη μετάβαση από την απλή γνώση της αριθμητικής στην πιο σύνθετη γνώση της άλγεβρας (Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007). Είναι τόσα τα εμπόδια της άλγεβρας, σύμφωνα με την Kieran (1992, όπ.ανάφ. στο Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007), που οι μαθητές λόγω της αδυναμίας τους να κατανοήσουν κάποιους βασικούς κανόνες, καταφεύγουν στην απομνημόνευση κανόνων και διαδικασιών, θεωρώντας ότι αυτή η λύση αντιπροσωπεύει την άλγεβρα στο σύνολο.

Αναφορικά με τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, έχει φανεί πως πολλοί την συσχετίζουν με τη μετάβαση από τον φυσικό αριθμό στο ρητό ή και με τη μετάβαση από τον φυσικό αριθμό στην έννοια της μεταβλητής. Μια και η μεταβλητή αναλύθηκε διεξοδικά παραπάνω, στο σημείο αυτό θα αναφερθούν κάποια βασικά στοιχεία των ρητών αριθμών. Από την άποψη των μαθηματικών, ένας ρητός αριθμός ορίζεται συνήθως ως ένας αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως ένα κλάσμα , όπου «α» και «β» είναι ακέραιοι αριθμοί και ο αριθμός «β» δεν είναι μηδέν.

Η κατανόηση των ρητών αριθμών είναι πολύ σημαντική, καθώς σχετίζεται με τα μεταγενέστερα μαθηματικά επιτεύγματα και με την κατανόηση ειδικότερων πτυχών των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα οι Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof & Verschaffel(2013) έχουν επισημάνει τρία ευρήματα ερευνών αναφορικά με την αξία και τη σημασία των αριθμών αυτών. Αρχικά σύμφωνα με την έρευνα των Booth & Newton(2012) η γνώση των κλασμάτων είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας που βοηθά στην μετέπειτα επαφή με την άλγεβρα, πιο σημαντικός ακόμη και από τη γνώση της αριθμητικής. Επιπλέον οι Siegler, Thompson & Schneider(2011) διαπίστωσαν συσχετίσεις μεταξύ της γνώσης των μαθητών δημοτικού για τα κλάσματα και του γενικότερου μαθηματικού επιτεύγματος. Μέσω μιας επέκτασης του ευρήματος αυτού προέκυψε και μια διαπίστωση βάσει της οποίας η γνώση των μαθητών για τους ρητούς αριθμούς και συγκεκριμένα για τα κλάσματα βοηθά σημαντικά στις επιδόσεις τους στα μαθηματικά και την άλγεβρα, στις δυνατότητες τους ως προς την ανάγνωση, στο IQ τους, στη μνήμη εργασίας, στο οικογενειακό εισόδημα ακόμα και στην οικογενειακή εκπαίδευση. Για όλα τα παραπάνω ευρήματα, θεωρείται δυσάρεστο το ότι πολλοί μαθητές ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ή και ενήλικες δεν μπορούν να κατανοήσουν βασικά χαρακτηριστικά των ρητών αριθμών. Κάποιοι από τους λόγους για τους οποίους δεν δύνανται πολλοί μαθητές να κατανοήσουν τα χαρακτηριστικά αυτά είναι οι εξής. Στους ρητούς αριθμούς οι μαθητές συναντούν νέες έννοιες, οι οποίες πρέπει όχι απλά να γίνουν κατανοητές αλλά και να συνδυαστούν, όπως για παράδειγμα το κλάσμα ως όλο και το κλάσμα ως μέρος. Ακόμη αυτό το οποίο εμποδίζει τους μαθητές είναι το ότι εισάγονται νέα σύμβολα και παραστάσεις κι έτσι οι εκπαιδευόμενοι καλούνται να οικοδομήσουν ένα νέο γνωστικό δίκτυο βάσει των πολλαπλασιαστικών και όχι των προσθετικών σχέσεων. Προκύπτει δηλαδή η ανάγκη για επαναπροσδιορισμό της μονάδας, των πράξεων και των ήδη κεκτημένων μαθηματικών γνώσεων (Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof, Verschaffel, 2013). Πολλοί ερευνητές θεωρούν επίσης ότι πολλά από τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς οφείλονται στην προϋπάρχουσα γνώση τους από τους φυσικούς αριθμούς. Θεωρητικά πλαίσια όπως αυτά της εννοιολογικής αλλαγής, μελετούν ακριβώς τον τρόπο με τον οποίο η προϋπάρχουσα αυτή γνώση μπορεί και να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση της νέας πληροφορίας, όταν αυτή έχει θεμελιώδεις διαφορές με την αρχική γνώση.

2. Εννοιολογική αλλαγή

2.1.Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής

Ο Thomas Kuhn εισήγαγε τον όρο «εννοιολογική αλλαγή» το 1970 για να δηλώσει ότι οι έννοιες που ενσωματώνονται σε μια επιστημονική θεωρία αλλάζουν όταν αλλάζει και η θεωρία. Η άποψη αυτή του Kuhn στηρίχθηκε στη «Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων» βάσει της οποίας, οι γνώσεις και οι πληροφορίες μιας επιστήμης εμπλουτίζονται και εξελίσσονται, ωστόσο δεν πρόκειται για μια διαδικασία συσσωρευτική. Μέσα από ποικίλα παραδείγματα που αφορούν κυρίως τον χώρο των φυσικών επιστημών, έχει φανεί πως στις «εννοιολογικές επαναστάσεις» μια νέα θεωρία με ό,τι αυτή περιλαμβάνει συγκρούεται και τελικά κυριαρχεί της παλιάς, και δεν την εμπλουτίζει απλά (Χρήστου, 2009). Η αντίληψη όμως αυτή κατά την οποία όχι μόνο επιστημονικοί όροι αλλά και απλές έννοιες αποκτούν νόημα στα πλαίσια μιας θεωρίας και ότι το νόημα αυτό αλλάζει ως αποτέλεσμα της αλλαγής της θεωρίας δεν έμεινε μόνο στον χώρο της φιλοσοφίας και της ιστορίας της επιστήμης, αλλά πέρασε και στον χώρο της ψυχολογίας και της εκπαίδευσης. Πρωτεργάτες σε αυτή την επενέργεια της εννοιολογικής αλλαγής και σε άλλες πιο εξειδικευμένες επιστήμες ήταν η Carey (1985) και οι Posner, Strike, Hewson, & Gertzog (1982, όπ. ανάφ. στο Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti 2008).

Με το πέρασμα του χρόνου βέβαια ακολούθησαν πολλοί ακόμα ορισμοί και τοποθετήσεις σχετικά με την προσέγγιση αυτή της εννοιολογικής αλλαγής σε ποικίλα ζητήματα. Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με την Chi (1992) η εννοιολογική αλλαγή αφορά έναν εκ νέου προσδιορισμό μιας έννοιας όταν αυτή εντάσσεται σε μια νέα και διαφορετική οντολογική κατηγορία ή τη δημιουργία νέων οντολογικών κατηγοριών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έννοια της γης όταν εντάσσεται στα αστρονομικά αντικείμενα και αποκόπτεται εν μέρει νοηματικά από την κατηγορία των φυσικών επιστημών (Vosniadou & Skopeliti, 2005). Άλλοι ερευνητές, οι οποίοι έδωσαν μια ευρύτερη ερμηνεία για τον όρο της εννοιολογικής αλλαγής, επεσήμαναν άλλα επιμέρους είδη εννοιολογικών αλλαγών που συμβαίνουν στη διαδικασία μάθησης και ανάπτυξης καθώς και στην ιστορία της επιστήμης κι όχι μόνο εκείνες που συνοδεύουν την αλλαγή μιας θεωρίας. Αυτές οι επιμέρους αλλαγές θα μπορούσαν να διακριθούν σε πιο απλές όπως για παράδειγμα η προσθήκη μιας νέας περίπτωσης ή ενός νέου κανόνα για μια έννοια και σε πιο σύνθετες, δηλαδή αλλαγές που μπορούν να συμβούν στο «οντολογικό δέντρο» μιας κατηγορίας (Thagard,1992 όπ.ανάφ. στο Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti,2008). Μια άλλη κατηγοριοποίηση των ειδών της εννοιολογικής αλλαγής αφορά: 1)την αναθεώρηση πεποιθήσεων, 2) τον μετασχηματισμό νοηματικών μοντέλων και 3) την αλλαγή οντολογικής και σημασιολογικής κατηγορίας (Chi, 1992 όπ. ανάφ στο Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

Παρά τις όποιες διαφοροποιήσεις, οι οποίες παρουσιάζονται μεταξύ των ερευνητών, που έχουν μελετήσει την εννοιολογική αλλαγή, μια σχεδόν καθολική και κοινή παραδοχή αποτελεί το ότι πρόκειται για μια αργή και σταδιακή διαδικασία (Vosniadou, 1994 όπ.ανάφ. στο Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof & Verschaffel (2013). Κάτι τέτοιο οφείλεται σε διάφορους λόγους. Αρχικά μπορεί να αποδοθεί στο ότι οι άνθρωποι δεν έχουν τη δυνατότητα να εξετάσουν και να αντλήσουν πληροφορίες για όλες τις υποθέσεις της αρχικής θεωρίας , είτε γιατί δεν τις γνωρίζουν είτε γιατί είναι «σιωπηρές» κι έτσι καθυστερούν στο να τροποποιήσουν ή να αντικαταστήσουν αρχικές θεωρίες και έννοιες. Επιπλέον κατά τη μετάβαση από την αρχική θεωρία πλαισίου στην επιστημονική προοπτική δημιουργούνται σε πολλές περιπτώσεις παρανοήσεις και σύνθετες αντιλήψεις (Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof & Verschaffel,2013). Αυτό οφείλεται επίσης και στο ότι οι αρχικές ερμηνείες του φυσικού κόσμου δεν αποτελούν παρατηρήσεις ασύνδετες μεταξύ τους, αλλά ένα «συνεκτικό όλο» ή καλύτερα μια θεωρία πλαισίου. Η αλλαγή της θεωρίας αυτής είναι δύσκολη, καθώς πρόκειται για ένα πολύπλοκο, νοηματικό σύστημα, το οποίο υποστηρίζεται από την εμπειρία της καθημερινής ζωής και επαναπροσδιορίζεται συνεχώς από αυτήν(Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Όταν κληθούν λοιπόν οι άνθρωποι να δώσουν νέες και εναλλακτικές ερμηνείες για ένα γνωστικό αντικείμενο, αυτές βασίζονται είτε σε όσα διδάσκονται κατά τη μαθησιακή διαδικασία είτε στις διαισθητικές σκέψεις τους, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται εμπόδια.

Οι εννοιολογικές αλλαγές που συμβαίνουν σε κάθε άνθρωπο αποτελούν βασικό χαρακτηριστικό της γνωστικής του ανάπτυξης. Βάσει και των όσων έχουν αναφερθεί παραπάνω, αλλαγές που έχουν μελετηθεί από τη διεθνή βιβλιογραφία αφορούν αναδιοργανώσεις γνώσεων και εννοιών για την έννοια του νου (Wellman, 1990), της ύλης (Smith, Carey& Wiser, 1985; Wiser &Smith υπό έκδοση), της δύναμης (Chi,1992; Ioannides & Vosniadou,2002), του αριθμού (Smith, Solomon & Carey,2005) και της γης (Vosniadou & Brewer,1992). Χαρακτηριστικά παραδείγματα «άδηλων» μηχανισμών θεωρούνται οι μηχανισμοί αφομοίωσης και συμμόρφωσης (Piaget), ο συλλογισμός με χρήση αναλογιών που βασίζονται στην ομοιότητα (Vosniadou,1989) και η εσωτερίκευση (Vygotsky,1978). Αντίστοιχα παραδείγματα «συνειδητών» μηχανισμών εννοιολογικής αλλαγής είναι η σκόπιμη χρήση αναλογιών, η κατασκευή νοερών πειραμάτων και η διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων. Βάσει των ως τώρα μελετών και εμπειριών, οι περισσότερες εννοιολογικές αλλαγές οι οποίες συμβαίνουν κατά τη γνωστική ανάπτυξη, αφορούν προϊόντα μηχανισμών εμπλουτισμού, οι οποίοι δεν είναι υπό τον συνειδητό έλεγχο του υποκειμένου. Για τον λόγο αυτό στην περίπτωση των μαθητών και της διδασκαλίας με στόχο την εννοιολογική αλλαγή, οι εκπαιδευτικοί καλό είναι να λαμβάνουν υπόψη τους την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και να θέσουν ως βασικό στόχο την αναδιοργάνωση και μετά τον εμπλουτισμό της. Κάτι τέτοιο βέβαια προϋποθέτει τη δημιουργία κατάλληλων αναλυτικών προγραμμάτων, μέσω των οποίων οι μαθητές θα έχουν κίνητρα μάθησης, αλλά και ένα είδος μεταγνωστικής επίγνωσης η οποία θα συμβάλλει σε μια πιο ουσιαστική κατανόηση των θεωριών και των αντίστοιχων εννοιών τους (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

2.2. Εννοιολογική Αλλαγή στα Μαθηματικά

Σύμφωνα με τους Vosniadou & Verschaffel(2004) η προέλευση της εννοιολογικής αλλαγής βρίσκεται στις φυσικές επιστήμες. Πρόσφατα όμως φάνηκε ότι η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία και στην έρευνα σχετικά με την εκμάθηση των μαθηματικών.

Τα μαθηματικά αλλά και η εννοιολογική αλλαγή που συμβαίνει σε αυτά διαφέρουν από τις φυσικές επιστήμες, καθώς η εξέλιξη τους βασίζεται σε μια γραμμική διαδικασία η οποία δεν περιλαμβάνει επαναστάσεις και κενά. Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι πολλές αλλαγές που συμβαίνουν σε μαθηματικές έννοιες θα μπορούσαν να θεωρηθούν «επιστημονικές επαναστάσεις» και βασικό παράδειγμα αυτών είναι η έννοια του αριθμού. Η μετάβαση δηλαδή από τους φυσικούς αριθμούς στην έννοια των ρητών αριθμών περιλαμβάνει τόσο βαθιές και ουσιαστικές αλλαγές που δεν γίνεται να αποτελούν απλώς ένα είδος εξέλιξης ή εμπλουτισμού των παλιών εννοιών. Προκύπτουν σημαντικές και ριζικές αλλαγές στην προϋπάρχουσα γνώση γι' αυτό και μπορεί να υιοθετηθεί η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής και στα μαθηματικά. Στις αλλαγές αυτές μάλιστα έχουν αναφερθεί κάποιοι ερευνητές υποστηρίζοντας ότι αλλάζει το λανθάνον επιστημολογικό πλαίσιο, οι λανθάνουσες μαθηματικές οπτικές ή πεποιθήσεις (Χρήστου,2009).

Σε μια προσπάθεια απόδοσης του ορισμού της εννοιολογικής αλλαγής στα Μαθηματικά υποστηρίχθηκε ότι αυτά βασίζονται σε αποδείξεις και όχι σε παρατήρηση ή πειράματα όπως οι φυσικές επιστήμες. Έχουν χαρακτηριστεί ανθεκτικά, δομημένα, συσσωρευτικά και κάθε νέα μαθηματική θεωρία που προκύπτει εντάσσεται απλά στο σώμα των μαθηματικών χωρίς να αντικαθιστά κάποια άλλη (Crowe,1975). Για άλλους βέβαια θεωρήθηκε ότι υπάρχουν επαναστατικές αλλαγές στα μαθηματικά, διαφοροποιημένες φυσικά από αυτές των φυσικών επιστημών, ωστόσο οι δυο αυτές αντικρουόμενες απόψεις θα αναλυθούν παρακάτω. Το κύριο και βασικό νόημα για τη συγκεκριμένη μελέτη είναι το ότι η εφαρμογή του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής σε μελέτες που εστιάζουν σε μαθηματικές έννοιες όπως για παράδειγμα στην κατανόηση της έννοιας του αρνητικού αριθμού (Vlassis,2004) αποδείχθηκε μια πολύ παραγωγική και αποτελεσματική επιλογή.

Πιο συγκεκριμένα σχετικά με τον τομέα του αριθμού, η βασική παραδοχή είναι ότι οι μαθητές από την αρχή της ζωής τους οργανώνουν όλες τις εμπειρίες με τους αριθμούς στηριγμένοι σε μια θεωρία πλαισίου, η οποία έχει συνοχή και βασίζεται σε σιωπηρές υποθέσεις. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία πλαισίου οι φυσικοί αριθμοί φαίνεται να είναι προνομιούχοι καθόλη τη διάρκεια της γνωστικής κατάρτισης και εξέλιξης των μαθητών. Προτού αυτοί εισαχθούν και διδαχθούν τους ρητούς αριθμούς, υπάρχει ήδη θεμελιωμένη μια έννοια για τον αριθμό που έχει τις ιδιότητες της μαθηματικής έννοιας του φυσικού αριθμού.

Οι πρώτες και αρχικές θεωρίες για τους αριθμούς διαμορφώνονται από τα παιδιά σύμφωνα με τη Gelman(2000) στην προσχολική ακόμα ηλικία, 4-5 χρονών και βασίζονται στις αρχές απαρίθμησης διακριτών ποσοτήτων. Τρεις βασικές αρχές είναι η αρχή της «ένα προς ένα» αντιστοίχισης των ονομάτων των αριθμών με τα απαριθμούμενα αντικείμενα, η αρχή της σταθερής σειράς των ονομάτων και η αρχή που επιβάλλει το όνομα του τελευταίου αριθμού να αντιπροσωπεύει την πληθικότητα του απαριθμούμενου συνόλου. Πέρα όμως από αυτά, τα παιδιά προτού ακόμα να διδαχθούν κάτι συστηματικά, μέσω της απαρίθμησης τείνουν να κάνουν απλές πράξεις κυρίως προσθέσεις και αφαιρέσεις με μικρούς αριθμούς και να λύνουν μαθηματικά προβλήματα που αφορούν κυρίως το πλήθος ενός συνόλου (Ni & Zhou, 2005; Smith, Solomon & Carey, 2005; Vamvakoussi, Vosniadou & Van Dooren, 2013 όπ.ανάφ. στο Χρήστου, υπό δημοσίευση). Στις πρώτες τάξεις του σχολείου η διδασκαλία των Μαθηματικών εστιάζει στους φυσικούς αριθμούς κι έτσι η αρχική κατανόηση των παιδιών για τον αριθμό ταιριάζει και συμβαδίζει με τις πληροφορίες και τις ιδέες τις οποίες διδάσκονται. Αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς η αρχική έννοια που είχαν για τον αριθμό επιβεβαιώνεται και ενισχύεται, και στη μέση περίπου της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι περισσότεροι μαθητές έχουν συλλάβει και οικοδομήσει μια εννοιολόγηση του αριθμού που έχει τις ιδιότητες της μαθηματικής έννοιας του φυσικού αριθμού. Πιο συγκεκριμένα αφορούν τον αριθμό που βασίζεται στην αρίθμηση και έχει έναν μοναδικό επόμενο αριθμό (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

Πρόσφατα η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή είχε χρησιμοποιηθεί επιτυχώς για να ερμηνεύσει τις δυσκολίες τις οποίες συναντούν οι μαθητές όταν εισάγονται στους ρητούς αριθμούς . Συναντούν δηλαδή εμπόδια όταν έχοντας μάθει τους φυσικούς αριθμούς, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν και ρητούς ή πραγματικούς αριθμούς ή όταν πέρα από θετικούς χρησιμοποιούν και αρνητικούς. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να φανεί χρήσιμη και κατά την διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η αρχική γνώση για τους αριθμούς μπορεί να ασκήσει επιρροή στις τιμές τις οποίες θεωρούν οι μαθητές ότι μπορούν να αντιπροσωπεύσουν οι μεταβλητές (Christou, 2017). Όπως έχει υποστηρίξει μάλιστα και ο Greer(2006), μέσα από την προσπάθεια που κάνουν οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοιας τους μεταβλητής μαθαίνουν να αναθεωρούν και τη γνώση τους για τους αριθμούς. Για να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της μεταβλητής, θα πρέπει δηλαδή να αναδιοργανώσουν το αρχικό τους πλαίσιο για τους αριθμούς μέσα στο οποίο οι αριθμοί είναι φυσικοί και να επεκτείνουν τα εννοιολογικά τους πεδία πέρα από τους φυσικούς κι αυτό προβλέπεται να είναι μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι απόψεις αναφορικά με το αν οι νέες θεωρίες και έννοιες όσον αφορά τα Μαθηματικά εισάγονται ομαλά στην ήδη υπάρχουσα δομή ή μετά από επιστημονικές και εννοιολογικές επαναστάσεις διίστανται. Αφενός επικρατεί η άποψη ότι οι μαθηματικές έννοιες είναι δομημένες συσσωρευτικά και όταν προκύπτουν άλλες νέες γίνονται απλά και ομαλά μέρος της προηγούμενης γνώσης χωρίς να αντικαθιστούν κάποια άλλη (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Αφετέρου πολλοί είναι αυτοί που υποστηρίζουν ότι κάθε νέα μαθηματική έννοια που συναντά ένας μαθητής, εμποδίζει τη μαθηματική μου εξέλιξη και επίδοση λόγω του ότι δημιουργούνται ποικίλες παρανοήσεις. Βάσει των όσων αναφέρθηκαν παραπάνω για την εννοιολογική αλλαγή που εμφανίζεται κατά τη μετάβαση των μαθητών από τις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς στις νέες τους γνώσεις που αφορούν την έννοια της μεταβλητής, προκύπτει και ένα άλλο αξιοσημείωτο ζήτημα, που έχει χαρακτηριστεί από προηγούμενους μελετητές ως «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» (Ni & Zhou, 2005).

2.3. Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού

Η καλή γνώση των ρητών αριθμών θεωρείται μια βασική πτυχή του μαθηματικού γραμματισμού. Είναι όμως κοινά αποδεκτό ότι η μάθηση των αριθμών αυτών παρουσιάζει μαθητές με αρκετές και ουσιώδεις δυσκολίες. Συγκεκριμένα οι μαθητές φαίνεται να κάνουν συστηματικά λάθη, όταν μια εργασία απαιτεί μια λογική που δεν είναι σύμφωνη με την προηγούμενη γνώση και εμπειρία που αφορά τους φυσικούς αριθμούς. Από την άλλη πλευρά οι μαθητές ανταποκρίνονται αποτελεσματικά σε εργασίες με ρητούς αριθμούς, όταν αυτές είναι συμβατές με τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Σύμφωνα με τον Butterworth(2007) η συλλογιστική αυτή πορεία χαρακτηρίστηκε ως προτίμηση στους φυσικούς αριθμούς, ενώ νωρίτερα οι Ni & Zhou(2005) είχαν χρησιμοποιήσει τον όρο προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Πρόκειται για ένα καλά τεκμηριωμένο φαινόμενο, το οποίο βοηθά στην ερμηνεία των λαθών που κάνουν οι μαθητές όταν συλλογίζονται με μη φυσικούς. Έχουν δηλαδή την τάση να αξιοποιούν και να εφαρμόζουν την προϋπάρχουσα εμπειρία και γνώση ακόμα και σε ασκήσεις και προβλήματα τα οποία απαιτούν μια λογική μη συμβατή με αυτή, όπως για παράδειγμα σε περιπτώσεις που εμπλέκονται κλάσματα ή δεκαδικοί (Moss,2005, Ni & Zhou,2005, Smith,Solomon & Carey,2005, Βαμβακούση & Βοσνιάδου,2010 όπ. ανάφ. στο Christou,2015). Οι προκατειλημμένες απαντήσεις των μαθητών συνήθως δίνονται ασυνείδητα και γρήγορα. Οι μαθητές δηλαδή δεν έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν και να επανεξετάσουν όλες τις υποθέσεις της αρχικής θεωρίας πλαισίου του φυσικού αριθμού, κυρίως επειδή δεν τις γνωρίζουν ή είναι σιωπηλές. Για τον λόγο αυτό δημιουργούνται πολλές φορές ασυνέπειες και παρανοήσεις, οι οποίες αναλύονται παρακάτω.

Σύμφωνα με τους Alibali & Sidney(2015) η προκατάληψη αυτή προκύπτει όταν οι αναπαραστάσεις που κάνουν οι άνθρωποι για μεγέθη ή ασκήσεις με ρητούς αριθμών δεν είναι επαρκώς ενεργοποιημένες ή ακριβείς ώστε να καθοδηγήσουν τη συγκεκριμένη άσκηση σε συγκεκριμένο πλαίσιο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, κατά τις οποίες οι αναπαραστάσεις που κάνουν οι άνθρωποι για τους φυσικούς αριθμούς είναι πιο ξεκάθαρες, πιο ακριβείς και σε πολύ πιο μεγάλο βαθμό ενεργοποιημένες, υποκρύπτονται και καθοδηγούν τις απαντήσεις τους άρα και τις επιδόσεις τους. Αυτή η τάση του να υπερισχύουν και να καλύπτουν οι φυσικοί αριθμοί τους κανόνες και τις ιδιότητες των άλλων αριθμών και συγκεκριμένα των ρητών, χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητότητα ως προς το αν θα την εμφανίσουν κάποια άτομα και ποια θα είναι αυτά. Αυτό φυσικά καθορίζεται από το προφίλ του ανθρώπου (προσωπικό και γνωστικό), από τις ασκήσεις που καλείται να λύσει αλλά και τα περιβάλλοντα με τα οποία αλληλεπιδρά (Alibali & Sidney, 2015).

Μια άλλη άποψη σχετικά με το που βασίζεται και από που προέρχεται η τάση των μαθητών να αξιοποιούν τη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς σε περιπτώσεις που δεν αντιστοιχούν είναι αυτή των Galistel & Gelman(1992), όπ. ανάφ. στο Christou(2015). Οι συγκεκριμένοι μελετητές υποστήριξαν ότι η προκατάληψη αυτή προέρχεται από τον γνωστικό μηχανισμό του ανθρώπου ο οποίος εστιάζει στην αριθμητική του ικανότητα. Αυτός ο γνωστικός μηχανισμός έχει την τάση να δημιουργεί μια δυσκολία στους ανθρώπους όταν επεξεργάζονται τους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, οι φυσικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται απο διακριτότητα, δεν υπάρχει δηλαδή άλλος φυσικός ανάμεσα σε δύο φυσικούς και πάντα υπάρχει προηγούμενος και επόμενος αριθμός. Αντίθετα οι ρητοί αριθμοί χαρακτηρίζονται από πυκνότητα, βάσει της οποίας ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί και δεν υπάρχει ένας και μοναδικός επόμενος ή προηγούμενος αριθμός. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, δημιουργείται σύγχυση στους μαθητές και η προκατάληψη των φυσικών αριθμών είναι δύσκολο να αποφευχθεί ή να μειωθεί με εκπαιδευτικές παρεμβάσεις, μια και είναι ένα έμφυτο «γνωστικό εμπόδιο».

Τέλος, μια ακόμη προσέγγιση που επικεντρώνεται κυρίως στη μάθηση χαρακτηρίζει την προκατάληψη φυσικού αριθμού ως αποτέλεσμα δυσλειτουργικής μάθησης και διδασκαλίας (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel,1993). Η αρχική κατανόηση του αριθμού η οποία αφορά κατά κύριο λόγο τους φυσικούς αριθμούς θεωρείται ότι επιδρά και καθορίζει την μετέπειτα αλληλεπίδραση των μαθητών και με άλλα είδη αριθμών.

Πέρα από το να ορίσουν και να περιγράψουν την προκατάληψη του φυσικού αριθμού οι ερευνητές, επεσήμαναν και τις πιθανές παρανοήσεις που μπορεί να προκαλέσει. Αρχικά στην περίπτωση των δεκαδικών αριθμών, οι μαθητές σκέφτονται λανθασμένα ότι ένας αριθμός με περισσότερα δεκαδικά ψηφία από έναν άλλο είναι και μεγαλύτερος (2.367>2.3) (Nesher & Peled,1986, Resnick et al,1989 όπ.ανάφ. στο Christou,2015). Με παρόμοιο τρόπο σκέφτονταν οι μαθητές και για τα κλάσματα. Υποστηρίζουν δηλαδή ότι το «$\frac{3}{2}$» είναι μεγαλύτερο από το «$\frac{1}{4}$»,σκεπτόμενοι ότι το 3 είναι μεγαλύτερο του 1(Hartnett & Gelman,1998; Moss,2005 όπ.ανάφ. στο

Christou,2015). Επιπλέον οι μαθητές τείνουν να πιστεύουν ότι όλοι οι αριθμοί είναι διακριτοί ως προς την πυκνότητα όπως οι φυσικοί. Δεν αντιλαμβάνονται δηλαδή ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ρητών υπάρχουν άπειροι αριθμοί και θεωρούν ότι ο κάθε αριθμός έχει έναν και μοναδικό επόμενο και προηγούμενο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Αναφορικά με τη σχέση της μονάδας (1) και του κλάσματος, δημιουργούνται και πάλι παρανοήσεις από τη μεριά των μαθητών. Ένα μέρος αυτών θεωρεί ότι το «1» είναι μεγαλύτερο από κάθε κλάσμα και οι υπόλοιποι ότι το «1» είναι μικρότερο από κάθε κλάσμα (Σταφυλίδου & Βοσνιάδου, 2004). Αυτή η σκέψη και η δυσκολία των μαθητών πηγάζει πιθανόν από την εισαγωγή τους στην ιδέα του μέρους - όλου όταν εισάγονται για πρώτη φορά στα κλάσματα. Πρόσφατες έρευνες έδειξαν τέλος ότι υπάρχει προκατάληψη και στον τρόπο που οι μαθητές ερμηνεύουν τα γράμματα όταν αυτά χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές κάτι που θα αναλυθεί διεξοδικά και στο ερευνητικό μέρος παρακάτω. Σύμφωνα με τους Christou & Vosniadou(2005) οι μαθητές μέχρι και τις μεγάλες τάξεις έχουν την τάση να αντιμετωπίζουν τις μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς όταν αυτές εμπλέκονται σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Ενδιαφέρον σχετικά με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού παρουσιάζει η διερεύνηση του ποιος, πότε και πως την εμφανίζει. Πρώτα από όλα φαίνεται ότι όλοι εμφανίζουν μια μορφή προκατάληψης του φυσικού αριθμού. Έχει παρατηρηθεί σε μαθητές δημοτικού σχολείου, σε μαθητές Γυμνασίου, σε ενήλικες ακόμα και σε εμπειρογνώμονες μαθηματικούς (Alibali & Sidney,2015). Η προκατάληψη είναι εμφανής όχι μόνο σε μαθητές που έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με ρητούς αριθμούς αλλά και σε άτομα που έχουν μεγάλη εξοικείωση με αυτούς, ωστόσο όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το πρότυπο των ασκήσεων που εμφανίζεται η προκατάληψη ποικίλει μεταξύ των συμμετεχόντων. Σε κάποιες περιπτώσεις η προκατάληψη εμφανίζεται στα λάθη που κάνουν, σε κάποιες άλλες στον χρόνο αντίδρασης και σε άλλες στις στρατηγικές που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν. Όσον αφορά το πότε εμφανίζεται η προτίμηση και η αξιοποίηση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών χωρίς αυτό να είναι αναγκαίο, ένα πρώτο παράδειγμα είναι ο τρόπος με τον όποιο απαντούν όταν κληθούν να συγκρίνουν δύο κλάσματα. Βασισμένοι στη γνώση των μεγεθών των φυσικών αριθμών και όχι στα μεγέθη των ίδιων των κλασμάτων, οδηγούνται σε λάθος απαντήσεις (Dewolf & Vosniadou, όπ.ανάφ. στο Alibali & Sidney, 2015). Ακόμη όπως επισημάνθηκε και παραπάνω στις συνέπειες, αλλά και κατά τη σύγκριση των δεκαδικών αριθμών φαίνεται να χρησιμοποιούν ιδιότητες των φυσικών αριθμών για να απαντήσουν. Υποστηρίζουν δηλαδή, πως όσο μακρύτερος τόσο μεγαλύτερος ή πως αν προσθέσουν ένα μηδενικό στο τέλος του αριθμού, αυξάνεται το μέγεθος του. Αυτό βέβαια δε συμβαίνει σε κάθε δοκιμασία που καλούνται να λύσουν. Συγκεκριμένα μαθητές ηλικίας 9-11 ετών απαντούν με προκατάληψη στα μισά περίπου ερωτήματα μιας άσκησης (Durkin & Rittle, Johnson όπ. ανάφ. στο Alibali & Sidney,2015). Ένα τρίτο και χαρακτηριστικό παράδειγμα σύμφωνα με μελέτες των τελευταίων χρόνων στο οποίο εμφανίζεται η προκατάληψη είναι οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν πράξεις (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel,2012). Αυτό που παρατηρείται ως προς τις πράξεις είναι ότι οι μαθητές χωρίς να δοκιμάσουν ή να λύσουν μια άσκηση, υποστηρίζουν ως κοινή αποδοχή ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δίνουν ένα αποτέλεσμα μεγαλύτερο από τους αριθμούς που συμμετέχουν στην πράξη, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση δίνουν ένα αποτέλεσμα μικρότερο (Christou 2015a, b, 2017).

Στη συγκεκριμένη μελέτη η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα διερευνηθεί μέσα από τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής. Όπως προκύπτει από ευρήματα προηγούμενων ερευνών οι μαθητές τείνουν να αντικαθιστούν τα γράμματα που χρησιμοποιούνται για να αντιπροσωπεύσουν μεταβλητές μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις, μόνο με φυσικούς αριθμούς. Θεωρούν πως οι φυσικοί αριθμοί είναι μια εύκολη εναλλακτική λύση, καθώς συνεπάγεται ευκολότερους υπολογισμούς. Πέρα όμως από αυτό το πιο γενικό εύρημα, ο Christou(2017) μέσα από έρευνα του επιβεβαίωσε κάποιες επιμέρους παρανοήσεις. Συγκεκριμένα προέκυψαν εμπειρικές ενδείξεις ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού σχετίζεται με την τάση των μαθητών να ταυτίζουν το φαινομενικό πρόσημο της μεταβλητής με το πραγματικό πρόσημο της τιμής που αντιπροσωπεύει. Ακόμη σύμφωνα με την ίδια έρευνα φάνηκε πως οι μαθητές ήταν πιο εύκολο να επηρεαστούν όταν μια αλγεβρική παράσταση είχε αρνητικό πρόσημο συγκριτικά με μια αλγεβρική παράσταση που είχε θετικό πρόσημο. Για παράδειγμα οι μαθητές υποστήριξαν πως το «-2χ-1» αντιπροσωπεύει αποκλειστικά αρνητικούς αριθμούς χωρίς να υποστηρίζουν απαραίτητα ότι το «2χ+1» μπορεί να πάρει αποκλειστικά και μόνο θετικούς αριθμούς. Το συμπέρασμα αυτό υποστήριξε και άλλη προηγούμενη έρευνα των Christou & Vosniadou(2012) και θα συζητηθεί και σε σχέση με παρούσα έρευνα βάσει των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν. Επιπλέον σε προηγούμενη μελέτη των Christou & Vosniadou(2005), στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στο ποιες τιμές θα μπορούσαν να πάρουν κάποιες μεταβλητές ή κάποιες αλγεβρικές παραστάσεις, προέκυψε πως μόνο το ένα τρίτο των μαθητών απάντησε σωστά και επέλεξε δηλαδή την εξής απάντηση: «όλοι οι αριθμοί μπορούν να αντιστοιχούν σε κάθε αλγεβρική παράσταση». Ένα ακόμη εύρημα που αξίζει να αναφερθεί αποτελεί το ότι όταν ένα σύνολο μαθητών ερωτήθηκε για το τι τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή «α», το 66% απάντησε πως μπορεί να πάρει μόνο φυσικούς αριθμούς. Παράλληλα στο ίδιο ερωτηματολόγιο όταν οι ίδιοι μαθητές απάντησαν για τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή «-β», μεγάλος αριθμός μαθητών απάντησε μόνο αρνητικούς αριθμούς (Christou & Vosniadou & Vamvakoussi, 2007).

Κάπως έτσι προκύπτουν και τα δύο βασικά είδη παρανοήσεων που προκύπτουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και αποτελούν βασικό αντικείμενο διερεύνησης της συγκεκριμένης μελέτης. Αφενός εμφανίζεται η παρανόηση που αφορά το να διατηρούν πολλές φορές την ακεραιότητα της μορφής μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές, αποδίδοντας σε αυτές μόνο φυσικούς αριθμούς. Η παρανόηση αυτή των μαθητών, προκύπτει από την τάση τους να αξιοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς όταν δίνουν αριθμητικές τιμές στις μεταβλητές. Αφετέρου το άλλο είδος της παρανόησης αφορά το πρόσημο της τιμής που θα επιλεχθεί για μια μεταβλητή, εάν δηλαδή οι μαθητές επιλέξουν μόνο αρνητικές τιμές για μια αλγεβρική παράσταση με αρνητικό φαινομενικό πρόσημο και μόνο θετικές τιμές για μια μεταβλητή με θετικό φαινομενικό πρόσημο. Με τον όρο φαινομενικό πρόσημο, νοείται το πρόσημο το οποίο φαίνεται να έχει μια μεταβλητή, ως εξωτερικό χαρακτηριστικό της (Χρήστου 2009). Όταν δηλαδή οι μαθητές συναντούν τη μεταβλητή «α», υποστηρίζουν ότι, όπως στους αριθμούς έτσι και στις μεταβλητές, η απουσία προσήμου σημαίνει θετικός αριθμός (π.χ. 3, 8, 12....). Ομοίως, όταν δίνουν πιθανές τιμές για τη μεταβλητή «-β», επιλέγουν μόνο αρνητικές (π.χ. -4, -7, -15…), λόγω της παρουσίας αρνητικού προσήμου μπροστά από τη μεταβλητή. Μέσω αυτής της παρανόησης φαίνεται και η δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν ότι η κάθε μεταβλητή ανεξαρτήτου «φαινομενικού προσήμου» μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε αριθμό θετικό ή ακέραιο. Όπως στη μεταβλητή έτσι και οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση, η οποία περιέχει μεταβλητή, έχει ένα φαινομενικό πρόσημο το οποίο όμως δεν είναι το πραγματικό πρόσημο της τιμής που μπορεί να πάρει (Χρήστου, 2009). Για παράδειγμα η αλγεβρική παράσταση «4γ», η οποία έχει θετικό φαινομενικό πρόσημο, μπορεί να αντικατασταθεί και από θετικούς και από αρνητικούς αριθμούς. Ανάλογα στην αλγεβρική παράσταση «-4γ», στην οποία το φαινομενικό πρόσημο είναι αρνητικό, ο μαθητής μπορεί να δώσει και θετικές και αρνητικές τιμές. Η παρανόηση αυτή προέκυψε και από άλλη μια προηγούμενη έρευνα της Vlassi(2004) που αφορούσε τα πολυώνυμα. Οι δυο αυτές παρανοήσεις εξετάστηκαν μέσα από απαντήσεις μαθητών σε ερωτηματολόγια κλειστού τύπου, στα οποία αυτοί επέλεγαν τιμές που μπορεί ή δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή ή μια αλγεβρική παράσταση και αναλύονται παρακάτω.

Προηγούμενες μελέτες που εξετάζουν το ζήτημα της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής σε μαθητές Γυμνασίου, έχουν χρησιμοποιήσει τόσο ανοιχτού τύπου ερωτηματολόγια όσο και κλειστού τύπου. Ο Χρήστου(2007, 2009 και 2012) χρησιμοποίησε ανοιχτού και κλειστού τύπου ερωτηματολόγια κατά τη διερεύνηση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και της επίδρασης που αυτή έχει στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Το κλειστό ερωτηματολόγιο του Χρήστου(2007, 2009) ζητούσε από τους μαθητές να επιλέξουν από ένα σύνολο δοσμένων τιμών εκείνες που θεωρούσαν ότι δεν μπορεί να πάρει κάθε αλγεβρική παράσταση που είχε δοθεί ως ερώτημα. Ως εκ τούτου οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν μία ή παραπάνω από αυτές τις τιμές που άνηκαν σε διάφορες κατηγορίες, όπως θετικοί και αρνητικοί ακέραιοι αλλά και ρητοί. Η παρούσα έρευνα κάνει ένα βήμα παραπέρα και ως ερευνητικό εργαλείο χρησιμοποιεί ένα ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου, στο οποίο για κάθε ερώτηση δίνονται ομαδοποιημένες επιλογές πολλαπλών απαντήσεων και όχι μόνο μιας αριθμητικής τιμής όπως γινόταν στα προηγούμενα ερωτηματολόγια κλειστού τύπου που χρησιμοποιήθηκαν για το συγκεκριμένο ζήτημα. Ο μαθητής δηλαδή καλείται να επιλέξει ή να απορρίψει κάποιους αριθμούς για μια μεταβλητή ή μια αλγεβρική παράσταση μέσα από απαντήσεις, καθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει πολλαπλούς αριθμούς ως πιθανές απαντήσεις. Επίσης στην παρούσα μελέτη το κλειστό ερωτηματολόγιο δόθηκε και για τις δύο συνθήκες (τιμές που ***μπορεί*** και ***δεν μπορεί*** να πάρει η δοσμένη αλγεβρική παράσταση), ενώ σε προηγούμενες μελέτες είχε εφαρμοστεί μόνο στη συνθήκη ***δεν μπορεί***. Με τον τρόπο αυτό θα εξετάσουμε εκ νέου τα ερευνητικά ερωτήματα των προηγούμενων μελετών και θα συγκρίνουμε τα ευρήματα της παρούσας έρευνας με τις προηγούμενες.

3. Μεθοδολογία

3.1.Σκοπός Έρευνας- Ερευνητικές Υποθέσεις

Η βασική υπόθεση της παρούσας έρευνας είναι ότι οι μαθητές της Β’ και Γ’ Γυμνασίου θα εμφανίζουν προκατάληψη του φυσικού αριθμού όταν συλλογίζονται για τις αριθμητικές τιμές μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές. Η ύπαρξη προκατάληψης του φυσικού αριθμού αναμένουμε να οδηγεί σε παρανοήσεις όσον αφορά τη διατήρηση του προσήμου μιας αλγεβρικής παράστασης αλλά και της ακεραιότητας της μορφής της. Συγκεκριμένα, η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητες αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς θα έχει ως αποτέλεσμα να θεωρούν ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν μόνο αριθμούς με ίδια μορφή και ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο αυτών, όπως για παράδειγμα ότι το «-β» αναπαριστά μόνο ακέραιους και αρνητικούς αριθμούς όπως το «-3, -8, -12…» και το «α» αναπαριστά μόνο ακέραιους και θετικούς αριθμούς όπως το «2, 5, 17…». Στόχος είναι επίσης να εξεταστεί ποια από τις δυο παρανοήσεις είναι πιο ισχυρή, δηλαδή η τάση να διατηρούν τη μορφή της αλγεβρικής παράστασης όταν επιλέγουν ή απορρίπτουν τιμές για αυτή ή η τάση να διατηρούν το πρόσημο βάσει του φαινομενικού προσήμου της αλγεβρικής παράστασης, καθώς επίσης και αν υπάρχουν διαφορές ανά τάξη και φύλο.

3.2. Μέθοδος

3.2.1.Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 89 μαθητές και μαθήτριες από δημόσιο Γυμνάσιο του δήμου Αλμωπίας. Οι συμμετέχοντες επιλέχθηκε να είναι μαθητές των Β’ και Γ΄ τάξεων. Η Α’ Γυμνασίου δεν επιλέχθηκε, καθώς είναι η χρονιά εισαγωγής των αλγεβρικών παραστάσεων και της χρήσης της μεταβλητής μέσα σε αυτές. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη μιας εν γένει σφαιρικής εξοικείωσης των μαθητών με τις παραπάνω έννοιες μέχρι το πέρας της φοίτησης τους στην τάξη αυτή.

Στο δείγμα μας αντιπροσωπεύονται αναλογικά και τα δύο φύλα, καθώς αποτελείται από 47 αγόρια και 42 κορίτσια. Ωστόσο, δεν ισχύει το ίδιο για την αντιπροσώπευση των δύο σχολικών τάξεων, με 38 μαθητές να φοιτούν στην Β’ τάξη και 51 στην Γ’ τάξη. Ο μέσος όρος ηλικίας των μαθητών ήταν 13 ετών.

3.2.2. Υλικά

Κάθε ένας από τους ογδόντα εννέα συμμετέχοντες κλήθηκε να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις κλειστού τύπου, με 5 επιλογές απαντήσεων, εκ των οποίων κάθε μία αντιπροσωπεύει και έναν διαφορετικό τύπο. Οι 12 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: Οι πρώτες έξι ερωτήσεις (Ερ.1-Ερ.6) καλούν τους μαθητές να απαντήσουν, επιλέγοντας τιμές που ***μπορεί*** να πάρει μια αλγεβρική παράσταση (συνθήκη ***μπορεί***). Σε κάθε μία από τις ερωτήσεις αυτές, το είδος της μεταβλητής έχει άλλη μορφή, παραπέμποντας σε διαφορετικά είδη πράξεων μεταξύ δύο μεταβλητών ή μεταβλητής και ακεραίου.

Στη δεύτερη κατηγορία ερωτήσεων (Ερ.7-Ερ.12) οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν επιλέγοντας τις τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει μια αλγεβρική παράσταση (συνθήκη ***δεν μπορεί***). Και πάλι, σε κάθε μία από τις ερωτήσεις αυτές το είδος της μεταβλητής έχει άλλη μορφή, παραπέμποντας σε διαφορετικά είδη πράξεων μεταξύ δύο μεταβλητών ή μεταβλητής και ακεραίου. Το είδος των αλγεβρικών παραστάσεων που χρησιμοποιείται σε κάθε ερώτηση περιγράφεται αναλυτικά στον Πίνακα 1. Οι ίδιες παραστάσεις χρησιμοποιήθηκαν και στις δυο συνθήκες.

Ερωτήσεις ερωτηματολογίου	Αλγεβρική Παράσταση	Περιγραφή
Ερ.1/ Ερ.7	α	απλή μεταβλητή α
Ερ.2/ Ερ.8	4γ	μεταβλητή ως παράγοντας γινομένου(παραπέμπει σε πολλαπλάσιο του 4)
Ερ.3/ Ερ.9	-β	μεταβλητή ως πολλαπλάσιο αρνητικού αριθμού
Ερ.4/ Ερ.10	κ+κ+κ	μεταβλητή εκφρασμένη ως άθροισμα
Ερ.5/ Ερ.11		μεταβλητή ως πηλίκο μεταβλητών
Ερ.6/ Ερ.12	λ+3	μεταβλητή ως άθροισμα με ακέραιο

Πίνακας 1: Είδος αλγεβρικών παραστάσεων ανά ερώτηση

Οι απαντήσεις των πρώτων έξι ερωτήσεων (Ερ.1-Ερ.6) είναι δομημένες έτσι ώστε κάθε μία από τις δοσμένες εναλλακτικές να εκφράζει ένα διαφορετικό είδος παρανόησης με μόνο μία απάντηση να είναι πάντοτε η σωστή απάντηση, που επιτρέπει σε μία μεταβλητή να πάρει τιμές από διάφορες κατηγορίες αριθμών. Οι κατηγορίες απαντήσεων έχουν δοθεί με διαφορετική σειρά σε κάθε ερώτηση. Συγκεκριμένα οι δοσμένες εναλλακτικές ανήκουν σε 5 κατηγορίες:

1. Διατήρηση ακεραιότητας / Διατήρηση πρόσημου (π.χ. για την αλγεβρική παράσταση «*α*» οι 1, 3, 5,…)
2. Διατήρηση ακεραιότητας / Μη Διατήρηση πρόσημου (π.χ. για την αλγεβρική παράσταση «*α*» οι 3,5, -3, -5,…)
3. Μη διατήρηση ακεραιότητας / Διατήρηση πρόσημου (π.χ. για την αλγεβρική παράσταση «*α*» οι 3.5, 2.8, 12, 812)
4. Μη διατήρηση ακεραιότητας/ Μη Διατήρηση πρόσημου (π.χ. για την αλγεβρική παράσταση *«α»* οι -3.5, -2.8, 12, -812)

5. Αποτελεί την σωστή απάντηση, αντιπροσωπεύοντας πάντα την μη ύπαρξη κάποιας προκατάληψης (σε κάθε μία περίπτωση είναι : Όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς)

Όπως φαίνεται και παραπάνω η Διατήρηση ακεραιότητας / Διατήρηση προσήμου αφορά την τάση του μαθητή να θεωρεί πως σε μια αλγεβρική παράσταση που εμπεριέχει μεταβλητές, ο μαθητής αντιμετωπίζει την καθεμία επιμέρους μεταβλητή ως ξεχωριστή οντότητα, που μπορεί να πάρει τιμές ακέραιες και ομόσημες. Παραδείγματος χάρη, στην αλγεβρική παράσταση «-β» η Διατήρηση ακεραιότητας / Διατήρηση προσήμου οδηγεί τον μαθητή στην επιλογή αρνητικών και ακεραίων τιμών (π.χ., -4, -52, -16…). Ομοίως στην αλγεβρική παράσταση «$\frac{\alpha}{\beta}$», επιλέγει θετικά κλάσματα. Ακολουθώντας την ίδια λογική, στην δεύτερη κατηγορία, κατά την οποία ο μαθητής διατηρεί την ακεραιότητα όχι όμως το πρόσημο, τείνει να επιλέγει μόνο ακεραίους αριθμούς για την αλγεβρική παράσταση «κ+κ+κ» (π.χ., 7, -24, 345...), ως πιθανούς αριθμούς που μπορεί να πάρει, οι οποίοι όμως μπορεί να είναι και θετικοί και αρνητικοί. Επιπρόσθετα η Μη Διατήρηση ακεραιότητας / Διατήρηση προσήμου, ως τρίτη κατηγορία απάντησης, εμφανίζεται μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών, οι οποίες αφορούν αριθμούς όχι μόνο ακεραίους αλλά και δεκαδικούς και κλάσματα, πάντα όμως ομόσημους με τη μεταβλητή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το να επιλέξουν για την αλγεβρική παράσταση «4γ», θετικούς μόνο αριθμούς (π.χ., 6.8, 38, 24...) οι οποίοι όμως μπορεί να είναι δεκαδικοί, ακέραιοι και κλάσματα. Η τέταρτη κατηγορία αφορά τη Μη Διατήρηση ακεραιότητας / Μη διατήρηση προσήμου, η οποία θα μπορούσε να θεωρηθεί και η πιο πλησιέστερη στη σωστή απάντηση. Ο μαθητής δηλαδή όταν καλείται να επιλέξει πιθανούς αριθμούς για τη μεταβλητή «α», επιλέγει και θετικούς και αρνητικούς αναφορικά με το πρόσημο αλλά και ακεραίους, δεκαδικούς ή κλάσματα (π.χ., 13, -5.4, -8, 34). Τέλος η πέμπτη κατηγορία, η οποία είναι και η σωστή απάντηση, που λέει ότι η μεταβλητή ή η αλγεβρική παράσταση μπορεί να πάρει «όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς» και είναι αυτή η οποία επιλέγεται από έναν μαθητή όταν έχει κατανοήσει σε βάθος την έννοια της μεταβλητής και αντιλαμβάνεται ότι αυτή μπορεί να πάρει όλες τις παραπάνω περιπτώσεις αριθμών και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς. Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να αναφερθεί πως στην συνθήκη των ερωτήσεων που αφορά τις τιμές που ***μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή, στην πραγματικότητα καμία απάντηση δεν είναι πραγματικά λανθασμένη. Μία μεταβλητή μπορεί να πάρει όλες τις τιμές που δίνονται ως επιλογές κάθε είδους απάντησης. Ωστόσο, για το σκοπό αυτής της έρευνας ως σωστή λαμβάνεται μόνο η πληρέστερη απάντηση, δηλαδή αυτή που περιλαμβάνει όλες τις υπόλοιπες απαντήσεις και κάθε άλλο αριθμό. Όσον αφορά τη συνθήκη ***δεν μπορεί*** τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα: καμία απάντηση δεν είναι σωστή παρά μόνο αυτή που δεν αποκλείει καμία τιμή.

Ανάλογα διαμορφώνονται και οι πέντε κατηγορίες εναλλακτικών απαντήσεων των επόμενων έξι ερωτήσεων (Ερ.7-Ερ.12), με μόνο μία απάντηση να είναι πάντοτε η σωστή απάντηση, που δεν απαγορεύει κανένα είδος τιμών από τις επιτρεπτές τιμές μιας μεταβλητής και συγκεκριμένα λέει ότι η μεταβλητή ή η αλγεβρική παράσταση δεν μπορεί να πάρει «Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς». Και σε αυτή την περίπτωση οι κατηγορίες απαντήσεων έχουν δοθεί με διαφορετική σειρά σε κάθε ερώτηση.

Οι εναλλακτικές απαντήσεις, όπως αυτές παρουσιάζονται παραπάνω, ακολουθούν μία φθίνουσα σειρά σημαντικότητας ως προς το μέγεθος του σφάλματος του μαθητή. Πιο αναλυτικά, μια απάντηση που αντιστοιχεί στην Διατήρηση τόσο της ακεραιότητας όσο και του προσήμου είναι αυτή που αντικατοπτρίζει την προκατάληψη του φυσικού αριθμού τόσο μέσα από παρανόηση του προσήμου όσο και της ακεραιότητας. Ωστόσο, η απάντηση που αντιστοιχεί στη Μη Διατήρηση προσήμου/ Μη Διατήρηση ακεραιότητας, είναι μια πιο εκλεπτυσμένη απάντηση και σχεδόν σωστή για τη συνθήκη ***μπορεί***, χωρίς όμως αυτό να ισχύει και για τη συνθήκη ***δεν μπορεί***. Ο μαθητής δηλαδή είναι αρκετά κοντά στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, αλλά δυσκολεύεται να φτάσει στο επίπεδο πλήρους κατανόησης που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση. Με την λογική αυτή, η κάθε απάντηση έχει πάρει ένα σκορ ως προς το πόσο κοντά στο σωστό βρίσκεται ο μαθητής. Όσο μεγαλύτερο το σκορ, τόσο πιο κοντά στην αρτιότερη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής βρίσκεται.

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε παρατίθεται στο Παράρτημα και ένα παράδειγμα ανά συνθήκη (τιμές που *μπορεί* και τιμές που *δεν μπορεί* να πάρει μια μεταβλητή) βρίσκεται στον Πίνακα 2.

Συνθήκη	**Τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή**	**Τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή**
Παράδειγμα Ερώτησης και Απαντήσεων	Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το –β; α) -3.4, -$\frac{2}{5}$, -8.3, β) 2.3, -$\frac{4}{5}$, -6.8, $\frac{2}{5}$, … γ) -$\frac{4}{16}$,…-1, -2, -3, -4, … δ) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) 1, -2, 3, - 6, 8, ….	Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το κ+κ+κ; α) 1, 2, 3, 5, 11,…. β) $\frac{9}{16}$,4,5, $\frac{3}{20}$,$\frac{4}{16}$, 9.25, … γ) -3.4, 6.7,-$\frac{3}{20}$,$\frac{4}{16}$,… δ) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) -3, -6, -9,-12, …

Πίνακας 2: Ενδεικτικό παράδειγμα ερωτήσεων και εναλλακτικών απαντήσεων από το Ερωτηματολόγιο της μελέτης

3.2.3.Ερευνητική Διαδικασία

Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων

Τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν στους μαθητές από την ερευνήτρια, και αφού τους δόθηκαν οι παραπάνω οδηγίες, είχαν στην διάθεση τους είκοσι λεπτά για να τα συμπληρώσουν. Συγκεκριμένα για τις πρώτες έξι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου δόθηκαν οι εξής οδηγίες: *«Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε γράμματα όπως τα (α, β, x, y…) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Σε αυτό το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιούμε αυτά τα γράμματα με αυτόν τον τρόπο. Διαβάστε προσεκτικά τις παρακάτω ερωτήσεις. Κυκλώστε την απάντηση, που θεωρείτε ότι είναι η πιο σωστή. Για κάθε ερώτηση, υπάρχει μόνο μια σωστή απάντηση».* Αφού ολοκλήρωσαν λοιπόν τις πρώτες έξι ερωτήσεις, η ερευνήτρια συνέχισε δίνοντας τις απαραίτητες οδηγίες για τις υπόλοιπες έξι ερωτήσεις επισημαίνοντας τα εξής: «*Οι επόμενες ερωτήσεις είναι λίγο διαφορετικές. Βάλτε σε κύκλο την απάντηση που θεωρείτε σωστή.»*.

Οι συμμετέχοντες, στις πρώτες έξι ερωτήσεις επέλεξαν την σωστή απάντηση βάσει των τιμών που θα μπορούσε να πάρει η μεταβλητή σε κάθε μία από τις δοθείσες αλγεβρικές παραστάσεις, ενώ στις επόμενες έξι κλήθηκαν να επιλέξουν την σωστή απάντηση βάσει των τιμών που δεν θα μπορούσε να πάρει η αντίστοιχη μεταβλητή. Κατά την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από τους μαθητές, πέρα από την ερευνήτρια ήταν παρών και ο καθηγητής των μαθηματικών στην αίθουσα διδασκαλίας τους. Υπήρξε η δυνατότητα απάντησης διευκρινιστικών ερωτήσεων, στις οποίες δόθηκαν και οι ανάλογες απαντήσεις, με προσοχή στο να μην ασκηθεί καμία επιρροή στις επιλογές των απαντήσεων του μαθητή. Η ερευνητική διαδικασία ολοκληρώθηκε επιτυχώς και απρόσκοπτα, στον προβλεπόμενο χρόνο.

Διαδικασία Ανάλυσης Δεδομένων

Για την επεξεργασία και την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν χρησιμοποιήθηκαν στατιστικά εργαλεία για περιγραφική στατιστική, παραμετρικούς και μη ελέγχους υποθέσεων (χ^2 έλεγχος ανεξαρτησίας, ANOVA), αφού πρώτα ελέγχθηκε πως τα δεδομένα πληρούν τις προϋποθέσεις του εκάστοτε στατιστικού ελέγχου (έλεγχος γραμμικότητας μεταξύ μεταβλητών, υπόθεση κανονικότητας και ομοιογένειας). Για την διαδικασία αυτή χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R, ακολουθώντας τις οδηγίες των Κολυβά, Μαχαίρα και Μπράτσα (2018).

Στην συνέχεια έγινε καθαρισμός των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, αφαιρέθηκαν τα ερωτηματολόγια δύο μαθητών της Γ’ Γυμνασίου (ένα αγόρι και ένα κορίτσι), καθώς δεν ακολούθησαν τις οδηγίες συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου και επέλεξαν πολλαπλές απαντήσεις σχεδόν σε κάθε ερώτηση.

4.Αποτελέσματα

Η εξέταση των ερευνητικών ερωτημάτων της παρούσας μελέτης έγινε μέσω της ανάλυσης των απαντήσεων στα ερωτηματολόγια. Αρχικά, υπολογίστηκε η συνολική επίδοση ανά μαθητή, ως άθροισμα της επίδοσης του στο σύνολο όλων των απαντήσεων. Για να γίνει αυτό, δόθηκε ένα σκορ επίδοσης στις κατηγορίες των απαντήσεων του μαθητή, ανάλογα με την κατηγορία στην οποία υπάγονται.

Συγκεκριμένα, 1 μονάδα επίδοσης αντιστοιχήθηκε με τη «Διατήρηση ακεραιότητας/ Διατήρηση πρόσημου» για τη συνθήκη ***μπορεί*** καθώς επίσης και για τη «Μη Διατήρηση ακεραιότητας/ Μη διατήρηση προσήμου» για τη συνθήκη ***δεν μπορεί***. Έπειτα 2 μονάδες δόθηκαν για τις απαντήσεις που αντιστοιχούσαν στη «Διατήρηση ακεραιότητας/ Μη Διατήρηση προσήμου» και στη «Μη Διατήρηση ακεραιότητας/ Διατήρηση προσήμου». Τέλος οι κατηγορίες «Μη Διατήρηση ακεραιότητας/ Μη Διατήρηση προσήμου» για τη συνθήκη μπορεί και η «Σωστή Απάντηση» αντιστοιχήθηκαν με 3 μονάδες επίδοσης. Με βάση την παραπάνω βαθμολόγηση υπολογίστηκε η συνολική επίδοση στο ερωτηματολόγιο για κάθε συμμετέχοντα. Έγινε στατιστική ανάλυση ANOVA με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση αυτή και με ανεξάρτητες μεταβλητές το φύλο και την τάξη του κάθε μαθητή, ώστε να εξεταστεί αν αυτές οι δύο μεταβλητές επηρεάζουν το συνολικό αποτέλεσμα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν εντοπίζεται στατιστικά σημαντική επίδραση στο συνολική επίδοση των μαθητών, ούτε από το φύλο, $F(1, 85) = 0.05$, $p = .82$, ούτε από την τάξη, $F(1, 85) = 1.38$, $p = .244$. Για τον λόγο αυτό αποφασίστηκε η ανάλυση των αποτελεσμάτων να πραγματοποιηθεί στο σύνολο των μαθητών και των δύο τάξεων σε ενοποιημένο δείγμα. Σημειώνεται πως και στις δύο περιπτώσεις, ελέγχθηκαν και πληρούνται οι προϋποθέσεις κανονικότητας και ομοιογένειας του δείγματος.

Αυτό που διερευνήθηκε αρχικά για το σύνολο των μαθητών, είναι το κατά πόσο υπάρχει στατιστικώς σημαντική εξάρτηση μεταξύ του αν οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για τις τιμές που μπορεί ή δεν μπορεί να πάρει η μεταβλητή και του αν απαντούν σωστά ή λανθασμένα. Για τον σκοπό αυτό υπολογίστηκε το άθροισμα του συνόλου των σωστών απαντήσεων και για τις 6 αλγεβρικές παραστάσεις των πρώτων 6 ερωτήσεων που αφορούν τις τιμές που ***μπορεί*** να πάρει μια μεταβλητή και έπειτα των υπολοίπων 6 ερωτήσεων του ερωτηματολογίου. Ομοίως υπολογίστηκε και το συνολικό άθροισμα όλων των υπολοίπων απαντήσεων, δηλαδή των λανθασμένων απαντήσεων για τις δύο κατηγορίες ερωτήσεων. Να σημειωθεί πως ως σωστές λαμβάνονται οι απαντήσεις που επέλεξαν την απόλυτα σωστή απάντηση που στην συνθήκη ***μπορεί*** έλεγε ότι «Η μεταβλητή ή αλγεβρική παράσταση μπορεί να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς», ενώ στη συνθήκη ***δεν μπορεί*** έλεγε ότι «Η μεταβλητή ή η αλγεβρική παράσταση δεν μπορεί να πάρει κανένα από τους παραπάνω, θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς».

Όσον αφορά τις λανθασμένες απαντήσεις, ως τέτοιες λαμβάνονται όλες οι υπόλοιπες επιλογές κάθε ερώτησης.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν και παρουσιάζονται στον Πίνακα 3, δείχνουν ιδιαιτέρως αυξημένο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων, με εντονότερη την τάση των μαθητών να απαντούν λανθασμένα στην περίπτωση των ερωτήσεων που αφορούν τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή.

	Σωστές Απαντήσεις	Λανθασμένες Απαντήσεις
Τιμές που **ΜΠΟΡΕΙ** να πάρει η μεταβλητή	156 (30%)	366 (70%)
Τιμές που **ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ** να πάρει η μεταβλητή	132 (25%)	390 (75%)

Πίνακας 3:Συχνότητα (ποσοστό %) σωστών και λανθασμένων απαντήσεων ανά συνθήκη

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, τα ποσοστά σωστών και λανθασμένων απαντήσεων στις δύο συνθήκες είναι κοντά μεταξύ τους, κάτι που υποστηρίζεται και από έλεγχο χ^2, που διεξήχθη στα αποτελέσματα του Πίνακα 3 δείχνοντας ότι δεν υπάρχει κάποια στατιστικά σημαντική εξάρτηση ανάμεσα στα ποσοστά ορθών και λανθασμένων απαντήσεων και στο αν οι μαθητές απαντούν ως προς τις πιθανές τιμές που ***μπορεί*** ή ***δεν μπορεί*** να πάρει μια μεταβλητή, $\chi2(1, N=1332)=2{,}76$, $p=0.1$.

.

Στη συνέχεια υπολογίστηκε το συνολικό ποσοστό σωστών απαντήσεων ανά αλγεβρική παράσταση, καθώς θα είχε ενδιαφέρον να εξεταστεί το κατά πόσο η κάθε αλγεβρική παράσταση οδήγησε τους μαθητές να απαντήσουν σωστά ή δημιούργησε σύγχυση οδηγώντας τους σε λανθασμένη απάντηση. Το ποσοστό αυτό υπολογίστηκε και για τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές όταν κλήθηκαν να απαντήσουν στο τι τιμές *μπορεί* να πάρει η μεταβλητή αλλά και στο τι τιμές ***δεν μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.

	Αλγεβρικές Παραστάσεις					
	Α	-β	4γ	κ+κ+κ	α/β	λ+3
Τιμές που **ΜΠΟΡΕΙ** να πάρει η μεταβλητή	55%	26%	27%	31%	15%	24%
Τιμές που **ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ** να πάρει η μεταβλητή	38%	17%	25%	26%	20%	25%

Πίνακας 4: Συχνότητα (ποσοστό %) σωστών απαντήσεων ανά αλγεβρική παράσταση

Αναλύοντας τον Πίνακα 4, ενδιαφέρον παρουσιάζει η τάση των μαθητών να δίνουν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις στη μεταβλητή «α», καθώς στην αλγεβρική παράσταση αυτή το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι αρκετά μεγαλύτερο από το αντίστοιχο συνολικό ποσοστό των σωστών απαντήσεων (Πίνακας 3). Ανάμεσα στα ποσοστά σωστών απαντήσεων των υπόλοιπων αλγεβρικών παραστάσεων δεν σημειώνονται αξιόλογες αποκλίσεις, με την κυρίαρχη τάση να είναι το ιδιαιτέρως χαμηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων, δηλαδή αυτών που δέχονται όλους τους δοσμένους αριθμούς ως πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή. Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση των σύνθετων αλγεβρικών παραστάσεων το ποσοστό αυτό είναι κατά κύριο λόγο χαμηλότερο από το αντίστοιχο συνολικό ποσοστό του Πίνακα 3.

Τέλος, αξίζει να σχολιαστεί το γεγονός πως αν ο Πίνακας 4 αναλυθεί ανά αλγεβρική παράσταση, παρατηρείται στην πλειονότητα των παραστάσεων, χαμηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις που αφορούν τις τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, αλλά όπως φάνηκε παραπάνω στην ανάλυση με έλεγχο χ^2 η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικώς σημαντική.

Τη μελέτη των σωστών απαντήσεων ακολούθησε και η ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων. Πιο συγκεκριμένα εξετάστηκε ανά αλγεβρική παράσταση κατά πόσο η προκατάληψη φυσικού αριθμού οδήγησε τους μαθητές σε παρανοήσεις όπως η διατήρηση ακεραιότητας ή η διατήρηση του πρόσημου. Οι παρανοήσεις αυτές, που εμφανίζονται όταν για παράδειγμα οι μαθητές θεωρούν ότι μπορεί να πάρει μόνο ομόσημες τιμές μια μεταβλητή ή μόνο κλάσματα και δεκαδικούς μια μεταβλητή που έχει κλασματική μορφή, μελετήθηκαν μέσα από τις απαντήσεις που έδωσαν για τις τιμές που ***μπορεί*** (Πίνακας 5) αλλά και για τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή (Πίνακας 6).

Μελετώντας τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από την ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων στον Πίνακα 5 με βασικό κριτήριο το αν διατηρούν ή όχι την ακεραιότητα ή το πρόσημο, παρατηρείται αρχικά πως στη μεταβλητή «–β», το 49% διατηρεί το πρόσημο στη συνθήκη ***μπορεί*** . Επομένως το αρνητικό πρόσημο της μεταβλητής, δείχνει να καθορίζει αντίστοιχα και το πρόσημο των τιμών που ***μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή. Αυτό είναι και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του φαινομενικού πρόσημου. Όμοια είναι η συμπεριφορά της συγκεκριμένης αλγεβρικής παράστασης και στον Πίνακα 6, όπου και πάλι εμφανίζεται υψηλό ποσοστό διατήρησης προσήμου (36%) στις τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή, χωρίς όμως στην περίπτωση αυτή να συνοδεύεται και από διατήρηση της ακεραιότητας.

Ένα ακόμη αξιοσημείωτο αποτέλεσμα είναι το ποσοστό των απαντήσεων που αντιστοιχεί στην τάση των μαθητών να διατηρούν την ακεραιότητα της μορφής στην αλγεβρική παράσταση «$\frac{\alpha}{\beta}$» (59%) αποδίδοντας μόνο θετικά κλάσματα στην συνθήκη ***μπορεί***(βλ.Πίνακα 5).

Αλγεβρική Παράσταση	Διατήρηση ακεραιότητας /Διατήρηση πρόσημου	Διατήρηση ακεραιότητας /Μη διατήρηση πρόσημου	Μη διατήρηση ακεραιότητας /Διατήρηση πρόσημου	Μη διατήρηση ακεραιότητας /Μη διατήρηση πρόσημου
α	26 (30%)	7 (8%)	6 (7%)	0 (0%)
-β	44 (49%)	0 (0%)	0 (0%)	20 (23%)
4γ	31 (36%)	11 (13%)	18 (20%)	3 (3%)
κ+κ+κ	33 (38%)	10 (11%)	12 (14%)	5 (6%)
$\frac{\alpha}{\beta}$	51(59%)	9 (10%)	0 (0%)	14 (16%)
λ+3	35 (40%)	13 (15%)	15 (17%)	3 (3%)

Πίνακας 5: Συχνότητα (ποσοστό %) απαντήσεων ανά ερώτηση στη συνθήκη Μπορεί

Εξετάζοντας συγκριτικά τον Πίνακα 5 και τον Πίνακα 6 ανά αλγεβρική παράσταση, προκύπτουν κάποιες ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Αρχικά παρατηρείται αναμενόμενα και συμβατά αποτελέσματα ως προς τα ποσοστά κάθε είδους σφάλματος ανάμεσα στο τι τιμές *μπορεί* ή *δεν μπορεί* να πάρει η συγκεκριμένη αλγεβρική παράσταση. Για παράδειγμα το «-β» εμφανίζει τα χαμηλότερα ποσοστά του (0%) σε σφάλματα Διατήρησης ακεραιότητας/ Μη διατήρησης προσήμου και Μη διατήρησης ακεραιότητας/ Διατήρησης προσήμου όσον αφορά τις τιμές που μπορεί να πάρει, ενώ στα αντίστοιχα σφάλματα έχει τα υψηλότερα ποσοστά (23% και 36%) στην περίπτωση των τιμών που δεν μπορεί να πάρει. Δηλαδή στη συνθήκη ***μπορεί,*** για την αλγεβρική παράσταση «-β», καμία απάντηση μαθητή δεν αφορά δεκαδικούς και θετικούς αριθμούς όπως για παράδειγμα το 2.3 ως πιθανό αριθμό για αυτήν ή θετικούς ακέραιους, π.χ., 3 ή 6. Στη συνθήκη ***δεν μπορεί*** σεβαστό ποσοστό μαθητών επέλεξε δεκαδικούς ή και κλασματικούς θετικούς αριθμούς ως τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει το «-β». Αντίστοιχα ευρήματα ισχύουν και σε όλες τις υπόλοιπες αλγεβρικές παραστάσεις.

Αλγεβρική Παράσταση	Διατήρηση ακεραιότητας /Διατήρηση προσήμου	Διατήρηση ακεραιότητας /Μη διατήρηση προσήμου	Μη διατήρηση ακεραιότητας /Διατήρηση προσήμου	Μη διατήρηση ακεραιότητας /Μη διατήρηση προσήμου
α	11 (13%)	10 (11%)	24 (28%)	9 (10%)
-β	10 (11%)	20 (23%)	31 (36%)	11 (13%)
4γ	6 (7%)	25 (28%)	14 (16%)	20 (23%)
κ+κ+κ	10 (11%)	11 (13%)	25 (28%)	18 (21%)
$\frac{\alpha}{\beta}$	16 (18%)	20 (23%)	16 (18%)	18 (21%)
λ+3	15 (17%)	0 (0%)	35 (40%)	15 (17%)

Πίνακας 6: Συχνότητα (ποσοστό %) απαντήσεων ανά ερώτηση στη συνθήκη Δεν μπορεί

Στη συνέχεια, δημιουργήθηκε ένας συγκεντρωτικός πίνακας των λανθασμένων απαντήσεων ανά τύπο σφάλματος για την περίπτωση της συνθήκης ***μπορεί*** και την περίπτωση της συνθήκης ***δεν μπορεί***. Ο Πίνακας 7 παρουσιάζει το συνολικό ποσοστό των απαντήσεων που εμφανίζουν ή όχι παρανόηση ως προς την ακεραιότητα και το πρόσημο όπως αυτές προκύπτουν από τον Πίνακα 5 και απο τον Πίνακα 6.

	Διατήρηση ακεραιότητας Διατήρηση προσήμου	Διατήρηση ακεραιότητας Μη διατήρηση προσήμου	Μη διατήρηση ακεραιότητας Διατήρηση προσήμου	Μη διατήρηση ακεραιότητας Μη διατήρηση προσήμου
Τιμές που **ΜΠΟΡΕΙ** να πάρει η μεταβλητή	169 (46%)	50 (14%)	102 (28%)	45 (12%)
Τιμές που **ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ** να πάρει η μεταβλητή	68 (17%)	86 (22%)	145 (37%)	91 (23%)

Πίνακας 7: Συχνότητα (ποσοστό) απαντήσεων ανά κατηγορία

Ο έλεγχος χ^2 που πραγματοποιήθηκε στα αποτελέσματα του Πίνακα 7, έδειξε την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής εξάρτησης μεταξύ του αν οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για τις τιμές που ***μπορεί*** ή τις τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει μια μεταβλητή και του αν το σφάλμα που κάνουν αφορά ή όχι την διατήρηση της ακεραιότητας και του προσήμου, $\chi^2(3, N = 756) = 74.93, p < .001$. Αρχικά αξίζει να σημειωθεί πως όταν οι μαθητές απαντούν για τις τιμές που ***μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή, τείνουν να επιλέγουν αριθμούς που διατηρούν και την ακεραιότητα αλλά και το πρόσημο κι αυτό επιβεβαιώνεται και από το αντίστοιχο υψηλό ποσοστό (46%). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μεταβλητή «-β», στην οποία οι μαθητές τείνουν να επιλέγουν ως πιθανούς αριθμούς το «-2» ή το «-16», οι οποίοι είναι αρνητικοί, διατηρούν δηλαδή το πρόσημο της μεταβλητής αλλά ταυτόχρονα είναι και ακέραιοι. Οι απαντήσεις αυτές εκφράζουν την έντονη επιρροή του φαινομενικού πρόσημου καθώς και τη προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

Αναφορικά με την περίπτωση στην οποία οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για τις τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει η μεταβλητή, οι μαθητές εμφάνισαν την τάση να απορρίπτουν τιμές στη βάση της μη διατήρησης είτε της ακεραιότητας είτε του προσήμου σε σχετικά κοντινό ποσοστό. Αυτό είναι και αναμενόμενο και έρχεται να υποστηρίξει την προκατάληψη του φυσικού αριθμού που εμφανίζουν. Συγκεκριμένα, με βάση τα ποσοστά που εμφανίζουν οι κατηγορίες απαντήσεων «Μη διατήρηση ακεραιότητας/ Διατήρηση προσήμου» και «Διατήρηση ακεραιότητας /μη Διατήρηση προσήμου», φαίνεται μια τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι αριθμητικές τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση πρέπει να διατηρούν το φαινομενικό πρόσημο παρά την ακεραιότητα, αλλά αυτές οι διαφορές δεν ήταν στατιστικώς σημαντικές, χ^2(1,N=383)=0.75221, p=.39 .

5. Συζήτηση

Η μελέτη αυτή εστιάζει στη διερεύνηση της επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, στην τάση των μαθητών να θεωρούν ότι τα γράμματα που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν μεταβλητές μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις μπορούν να πάρουν ως πιθανές τιμές μόνο φυσικούς αριθμούς και όχι οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό. Εξετάστηκε κατά πόσο η προκατάληψη του φυσικού αριθμού δημιουργεί παρανοήσεις στους μαθητές κάνοντας τους να απαντούν ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν συγκεκριμένες τιμές και ειδικά τιμές που διατηρούν τη μορφή ή το φαινομενικό πρόσημο της αλγεβρικής παράστασης κι όχι όλες τις τιμές που δύναται να αναπαραστήσουν. Ένα ακόμη ζήτημα το οποίο διερευνήθηκε είναι το αν οι μαθητές φαίνεται να επηρεάζονται από το είδος της μεταβλητής ή της αλγεβρικής παράστασης, για την οποία καλούνται να επιλέξουν πιθανές τιμές.

Προηγούμενες μελέτες του Χρήστου(2007, 2009 και 2012) είχαν εξετάσει τα παραπάνω ερωτήματα με ανοιχτού και κλειστού τύπου ερωτηματολόγια. Ωστόσο το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιείται στην παρούσα έρευνα φαίνεται να διαφοροποιείται από το ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου των προηγούμενων ερευνών. Συγκεκριμένα στο κλειστό ερωτηματολόγιο του Χρήστου(2007, 2009), οι μαθητές επέλεγαν μέσα από ένα σύνολο τιμών, εκείνες που θεωρούσαν ότι δεν μπορούσε να αντικαταστήσουν την αλγεβρική παράσταση, έχοντας τη δυνατότητα να επιλέξουν μια ή και παραπάνω τιμές. Η καινοτομία και το σημείο στο οποίο διαφοροποιείται το ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου της συγκεκριμένης έρευνας αποτελεί το ότι για κάθε ερώτηση δόθηκε στους μαθητές ένα σύνολο ομαδοποιημένων επιλογών πολλαπλών απαντήσεων. Ακόμη, το συγκεκριμένο κλειστό ερωτηματολόγιο, σε αντίθεση με τα κλειστά ερωτηματολόγιο των προηγούμενων ερευνών, διερεύνησε την εμφάνιση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στους μαθητές και όταν αυτοί επέλεγαν για τις τιμές που μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση αλλά και όταν αυτοί απέρριπταν τις τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για να διερευνηθούν όλα τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα δόθηκε σε μαθητές της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου ένα ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου. Στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν μέσα από πέντε επιλογές πολλαπλών απαντήσεων τους αριθμούς που μπορούσε να πάρει μια μεταβλητή ή μια αλγεβρική παράσταση ενώ στο δεύτερο μέρος του οι μαθητές επέλεγαν για τις ίδιες μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις τις τιμές που δεν μπορούσαν να πάρουν. Οι απαντήσεις των πρώτων έξι ερωτήσεων) ήταν κατάλληλα διαμορφωμένες δομημένες έτσι ώστε κάθε μία από τις δοσμένες εναλλακτικές να αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό είδος παρανόησης (ακεραιότητας και προσήμου) με μόνο μία απάντηση να είναι πάντοτε η σωστή απάντηση. Αντίστοιχα και στις επόμενες έξι ερωτήσεις οι πέντε κατηγορίες εναλλακτικών απαντήσεων διαμορφώθηκαν με τον ίδιο τρόπο και μόνο μία απάντηση ήταν πάντοτε η σωστή απάντηση, αυτή δηλαδή που δεν απέρριπτε κανένα είδος αριθμών ως τιμές που δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Και στα δύο μέρη του ερωτηματολογίου τα οποία αντιστοιχούσαν σε δυο επιμέρους συνθήκες, ***μπορεί*** και ***δεν μπορεί***, οι πέντε κατηγορίες απαντήσεων δόθηκαν με διαφορετική σειρά σε κάθε ερώτηση.

Μέσα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων βάσει των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές, φάνηκε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών απαντά λανθασμένα όταν καλείται να επιλέξει τις τιμές που μπορεί ή δεν μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση. Παρεμποδίζονται δηλαδή λόγω της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς, να δεχτούν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, ως πιθανή τιμή μιας μεταβλητής και επιλέγουν βασισμένοι στην μορφή και το πρόσημο της μεταβλητής ή της αλγεβρικής παράστασης. Συγκεκριμένα όταν οι μαθητές επέλεγαν αριθμούς που μπορεί να πάρει η αλγεβρική παράσταση, επέλεγαν μόνο θετικούς αριθμούς όταν αυτή ήταν θετική και μόνο αρνητικούς, όταν το φαινομενικό πρόσημο της ήταν αρνητικό. Αντίστοιχα στην αλγεβρική παράσταση η οποία ήταν κλασματικής μορφής, μεγάλο ποσοστό των μαθητών επέλεγε μόνο κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς ενώ όταν συναντούσαν ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις οι αριθμοί που επέλεγαν ήταν κυρίως ακέραιοι. Στην περίπτωση που οι μαθητές καλούνταν να απορρίψουν τιμές που θεωρούσαν ότι δεν μπορούσε να πάρει μια αλγεβρική παράσταση, απέρριπταν αριθμούς οι οποίοι είτε δε διατηρούσαν την ακεραιότητα είτε δεν διατηρούσαν το πρόσημο και αυτό είναι που αποδεικνύει την ύπαρξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, η οποία τους οδηγεί στο να απορρίπτουν και να μη δέχονται όλους τους αριθμούς.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας υποστηρίζουν την αρχική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές εμφανίζουν προκατάληψη του φυσικού αριθμού όταν καλούνται να επιλέξουν τιμές που μπορεί ή δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Δυσκολεύονται δηλαδή στο να αναδιοργανώσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να την εφαρμόζουν σε περιπτώσεις της άλγεβρας στις οποίες δεν αρμόζει. Εμφανίζεται επίσης συνέπεια των παραπάνω αποτελεσμάτων σε σχέση με προηγούμενες έρευνες, όπως αυτή των Christou & Vosniadou(2005) αλλά και αυτή των Christou, Vosniadou & Vamvakoussi(2007). Τόσο οι έρευνες αυτές όσο και η συγκεκριμένη έρευνα, υποστηρίζουν την υπόθεση της εννοιολογικής αλλαγής ότι η εφαρμογή των μεταβλητών στην άλγεβρα από τους μαθητές, επηρεάζεται έντονα από την εμπειρία τους με τους αριθμούς και συγκεκριμένα με τους φυσικούς αριθμούς. Αυτή η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, η οποία προκύπτει από τις απαντήσεις των μαθητών, γίνεται εμφανής μέσα από δύο επιμέρους παρανοήσεις. Πρώτα απ’ όλα οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να αντικαθιστούν μόνο με φυσικούς αριθμούς τις μεταβλητές και να διατηρούν την ακεραιότητά της, ως προς τη μορφή, στις τιμές που της δίνουν. Δεύτερον υποστηρίζεται και η τάση που έχει διαπιστωθεί από τον Christou και τους συνεργάτες του (2007), σύμφωνα με την οποία, οι μαθητές ερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων, ως το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που μπορεί να αναπαριστούν.

Πιο αναλυτικά, αυτό που φάνηκε μέσα από τη συγκεκριμένη έρευνα είναι το ότι υπήρχαν πολλές λανθασμένες απαντήσεις στα ερωτηματολόγια που εξέταζαν την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και συγκεκριμένα των αριθμών που μπορούν να πάρουν. Αυτό δείχνει την ελλιπή κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου από τη διδασκαλία που έχουν λάβει και ενισχύει διάφορες θεωρητικές και ερευνητικές αναφορές που αφορούν λάθη, δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με τη μεταβλητή, όπως για παράδειγμα Χρήστου(2009, 2012, 2007), και Δημητρακοπούλου και Χρήστου(2018).

Οι μαθητές του δείγματος είχαν την τάση να διατηρούν το πρόσημο όταν καλούνταν να επιλέξουν τιμές, τις οποίες μπορεί να πάρει μια μεταβλητή ή μια αλγεβρική παράσταση και αυτό υποστηρίζει και την ύπαρξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού. Ειδικότερα στην αλγεβρική παράσταση «-β», οι μισοί σχεδόν συμμετέχοντες επέλεξαν μόνο αρνητικούς αριθμούς για να την αντικαταστήσουν (π.χ. -2, -6, -8,…). Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύει το εύρημα των Christou, Vosniadou & Vamvakoussi(2007), σύμφωνα με το οποίο η επιρροή του φαινομενικού προσήμου εμφανίζεται έντονα σε αρνητικές αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες οι μαθητές είχαν την τάση να δίνουν αρνητικές τιμές. Στην προαναφερθείσα έρευνα, μεγάλο ποσοστό των μαθητών φάνηκε πως διατήρησε το αρνητικό πρόσημο της μεταβλητής, ποσοστό πολύ κοντά με το ποσοστό της παρούσας έρευνας. Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί, πως οι μαθητές εμφάνισαν την τάση αυτή ως προς το φαινομενικό πρόσημο κυρίως όταν οι αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες κλήθηκαν να δώσουν τιμές ήταν αρνητικές παρά θετικές και αυτό συμφωνεί και με την έρευνα της Vlassis(2004) για την αντίληψη της ύπαρξης του αρνητικού προσήμου ως συμβόλου αρνητικότητας.

Όλα τα προηγούμενα χρόνια οι μαθητές έχουν κατακτήσει ως βασική μαθηματική γνώση πως οι αριθμοί «χωρίς πρόσημο» έχουν «θετική αξία», ενώ οι αριθμοί με «αρνητικό πρόσημο» έχουν «αρνητική αξία». Όταν χρειαστεί να μεταφέρουν τις γνώσεις αυτές στον τομέα της άλγεβρας, όπου χρησιμοποιούνται μεταβλητές για την αναπαράσταση αριθμητικών τιμών οδηγούνται σε λάθη γιατί μία μεταβλητή θα μπορούσε να έχει θετικό φαινομενικό πρόσημο αλλά παρόλα αυτά να αναπαριστά αρνητικές τιμές (π.χ. η μεταβλητή «γ» μπορεί να αναπαριστά τις τιμές «-4, -12...κ.α.». Για να κατανοήσουν δηλαδή οι μαθητές ότι το φαινομενικό πρόσημο δεν είναι απαραίτητα το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που αναπαριστά η μεταβλητή, πρέπει να αναδιοργανώσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους αριθμούς στην αριθμητική .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ωστόσο και η έντονη τάση των μαθητών (να διατηρούν την ακεραιότητα στην αλγεβρική παράσταση «$\frac{\alpha}{\beta}$» και να επιλέγουν για αυτή ως πιθανές τιμές θετικά κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς (π.χ.$\frac{3}{7}$, 3.6, $\frac{1}{10}$,…).

Ενισχύεται και σε αυτή την περίπτωση η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, η οποία εμποδίζει τους μαθητές να κατανοήσουν πως μια αλγεβρική παράσταση με κλασματική μορφή μπορεί να αντικατασταθεί όχι μόνο από ένα κλάσμα αλλά και από οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό. Εμφανίζεται δηλαδή γρήγορα και τις περισσότερες φορές ασυνείδητα μια διαισθητική προσέγγιση η οποία στην προκειμένη περίπτωση οδηγεί τους μαθητές στο να επιλέξουν μόνο κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς για την αλγεβρική παράσταση «$\frac{\alpha}{\beta}$». Η προσέγγιση αυτή δεν επιτρέπει τον μαθητή να επεξεργαστεί και να σκεφτεί αναλυτικά τι του ζητείται να απαντήσει με αποτέλεσμα να απαντά με την πιο εύχρηστη και οικεία για αυτόν γνώση, αυτή που αφορά τους φυσικούς αριθμούς (Christou, 2018).

Αναφορικά με τη συνθήκη κατά την οποία οι μαθητές απορρίπτουν τις τιμές, τις οποίες δεν μπορεί να πάρει μια αλγεβρική παράσταση, φάνηκε πως οι μαθητές είτε θα απέρριπταν τιμές που δε διατηρούσαν το πρόσημο είτε τιμές που δε διατηρούσαν την ακεραιότητα. Το εύρημα αυτό ενισχύει την θεωρία περί ύπαρξης προκατάληψης του φυσικού αριθμού, η οποία αναλύθηκε παραπάνω, καθώς οι μαθητές για να έχουν την τάση να απορρίπτουν κάποιες τιμές δείχνουν ότι έχουν την τάση να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών . Αν δεν απέρριπταν τις τιμές αυτές και δέχονταν όλους τους αριθμούς για κάθε αλγεβρική παράσταση θα είχαν κατανοήσει πλήρως και την έννοια της μεταβλητής.

Ένα ακόμη αποτέλεσμα το οποίο χρήζει συζήτησης, αποτελεί η τάση των μαθητών να απαντούν λανθασμένα σε σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις, όπως για παράδειγμα οι «λ+3» ή «κ+κ+κ», αλλά να απαντούν σωστά σε μια πιο απλή αλγεβρική παράσταση όπως αυτή της μεταβλητής «α». Το γεγονός αυτό φαίνεται να συμφωνεί με την ύπαρξη δύο διαφορετικών επιπέδων εμφάνισης της διαισθητικής σκέψης που γεννά το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, ανάμεσα σε ερωτήσεις γεγονότων και παραγωγικές ερωτήσεις, η οποία έχει διαπιστωθεί και από προηγούμενες μελέτες (Vosniadou & Brewer, 1992). Η ερώτηση «τι τιμές μπορεί να πάρει το ‘α’» αποτελεί μια ερώτηση γεγονότων (factual question). Αυτού του είδους οι ερωτήσεις εκθέτουν τον ενδιαφερόμενο σε μία πληροφορία, χωρίς να τον παρακινούν σε περαιτέρω διερεύνηση ή ερμηνεία της πληροφορίας αυτής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα των ερωτήσεων αυτών αποτελεί η ερώτηση που τίθεται στους μαθητές για το τι σχήμα έχει η Γη. Οι μαθητές δηλαδή που έχουν διδαχθεί και κατανοήσει πως το σχήμα της Γης είναι στρογγυλό, απαντούν ορθά όταν ερωτώνται για αυτό, δεν μπορούν ωστόσο να χρησιμοποιήσουν πάντα και με ορθό τρόπο την πληροφορία αυτή. Πιο συγκεκριμένα αν οι μαθητές κληθούν μέσω μιας παραγωγικής ερώτησης να αναπαραστήσουν με πλαστελίνη τη γη, κάτι το οποίο απαιτεί περαιτέρω γνώσεις και λεπτομέρειες, συναντούν δυσκολίες. Με τον ίδιο τρόπο, στην περίπτωση που τους ζητείται να απαντήσουν στο τι τιμές μπορεί να πάρει το «α», έχουν την εξοικείωση να απαντήσουν ορθά, καθώς ο ορισμός της μεταβλητής όπως αυτός διδάχθηκε στους μαθητές απαντά ακριβώς στην ερώτηση. Αντίθετα, η ερώτηση «τι τιμή μπορεί να πάρει το 'λ+3'» ή «τι τιμή δεν μπορεί να πάρει το '-β'», αποτελούν παραγωγικές ερωτήσεις (generative questions), οι οποίες καλούν τους μαθητές να επεξεργαστούν παραγωγικά προϋπάρχουσες γνώσεις και είτε να τις εφαρμόσουν σε πιο σύνθετα περιβάλλοντα είτε να προβούν σε νέα συμπεράσματα (Χρήστου, 2019). Για να μπορέσουν δηλαδή να απαντήσουν σε τέτοιου είδους ερωτήσεις χρειάζεται να συνδυάσουν τις γνώσεις τους που αφορούν τόσο τους ορισμούς της μεταβλητής όσο και τους τρόπους χρήσης της.

Η δυνατότητα των μαθητών να απαντούν σωστά σε μία παραγωγική ερώτηση είναι ενδεικτική της κατανόησης και αφομοίωσης της μεταβλητής ως μαθηματική έννοια, ενώ η σωστή απάντηση μιας ερώτησης γεγονότος μπορεί να βασιστεί περισσότερο στη διαισθητική γνώση ή στη βασική κατανόηση του ορισμού της μεταβλητής. Επομένως, τα χαμηλά ποσοστά που εντοπίζονται στις σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις του ερωτηματολογίου πιθανόν να σχετίζονται με το γεγονός πως στις ερωτήσεις αυτές οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τους ορισμούς της μεταβλητής και τους τρόπους χρήσης τους στα συγκεκριμένα μαθηματικά έργα με έναν πιο σύνθετο τρόπο(Χρήστου, 2019).

Τα παραπάνω συσχετίζονται και με τα χαμηλότερα ποσοστό σωστών απαντήσεων που εμφανίζονται στις ερωτήσεις που αφορούν τις τιμές που ***δεν μπορεί*** να πάρει μια μεταβλητή. Το γεγονός πως η ερώτηση «τι τιμές δεν μπορεί να πάρει η μεταβλητή» δεν συνδέεται με διαισθητικό τρόπο σκέψης, οδηγεί τους μαθητές είτε να απαντήσουν βασισμένοι στην ήδη προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς είτε να μην έχουν επαρκή γνώση ώστε να επιλέξουν την σωστή απάντηση.

6. Περιορισμοί της μελέτης

Η παρούσα έρευνα αντιμετωπίζει κάποιους περιορισμούς που θα ήταν αδύνατο να μην αναφερθούν. Αρχικά, το δείγμα των 89 μαθητών είναι ικανοποιητικό για την εξαγωγή κάποιων πρωταρχικών συμπερασμάτων και τον εντοπισμό τάσεων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον και επαληθεύουν τις υποθέσεις της μελέτης αυτής. Ωστόσο το μικρό του μέγεθος το καθιστά μη αντιπροσωπευτικό, επομένως μη επαρκές για να προβεί κανείς σε γενικεύσεις και οριστικά συμπεράσματα.

Επιπλέον, το γεγονός πως ως εργαλείο χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών απαντήσεων κλειστού τύπου, αντί συνέντευξης, δημιουργεί κάποιους επιπρόσθετους περιορισμούς. Ο βασικότερος εξ αυτών είναι το γεγονός πως μέσα από την ανάλυση των ερωτήσεων ενός ερωτηματολογίου αποδεχόμαστε την απώλεια των λεπτομερειών και του βάθους της πληροφορίας. Η ερευνήτρια δεν μπορεί να επιβεβαιώσει τα πραγματικά κίνητρα επιλογής μιας απάντησης από τον κάθε μαθητή, ούτε τον τρόπο σκέψης, την στρατηγική και τις νοερές διαδικασίες που τον ώθησαν στην επιλογή αυτή.

Τέλος, ένας μεθοδολογικός περιορισμός της έρευνας αυτής, ο οποίος επιβάλλεται από το είδος της ίδιας της μελέτης και των ερευνητικών ερωτημάτων που πραγματεύεται, είναι η αντίθεση ανάμεσα στο σύνολο των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων ανάμεσα στις ερωτήσεις της συνθήκης ***μπορεί*** και αυτές της συνθήκης ***δεν μπορεί.*** Πιο συγκεκριμένα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην πραγματικότητα κάθε μία από τις δοθείσες επιλογές στην συνθήκη ***μπορεί*** είναι μια εν δυνάμει σωστή απάντηση, και ως σύμβαση για τις ανάγκες της μελέτης αυτής θεωρείται ως σωστή μόνο η απάντηση που επιτρέπει σε μία μεταβλητή να πάρει κάθε δυνατή τιμή. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως η μεταβλητή δεν μπορεί να πάρει και τις αριθμητικές τιμές που δίνονται ως επιλογές σε όλες τις υπόλοιπες απαντήσεις, γεγονός που μπορεί να δημιουργήσει μια σύγχυση στον μαθητή. Αντίθετα, στις ερωτήσεις της συνθήκης ***δεν μπορεί*** κάθε επιλογή πέραν της σωστής απάντησης, ότι δηλαδή δεν υπάρχει αριθμητική τιμή που δεν μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, είναι λανθασμένη.

7. Παιδαγωγικές εφαρμογές

Κάθε φορά που οι μαθητές εισάγονται σε νέες μαθηματικές γνώσεις, υπάρχει η ανάγκη αυτό να γίνεται στα πλαίσια μιας κατάλληλα διαμορφωμένης και συστηματοποιημένης διδασκαλίας. Με αυτόν τον τρόπο θα έχουν τη δυνατότητα, αξιοποιώντας την προϋπάρχουσα γνώση τους να την εμπλουτίζουν και να την αναδιοργανώνουν στον βαθμό που μπορούν. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές στις τάξεις του Γυμνασίου καλούνται να μάθουν μια έννοια άγνωστη για αυτούς, η οποία είναι η έννοια της μεταβλητής, χρειάζεται να αναθεωρήσουν και να επεκτείνουν τις έως τώρα μαθηματικές τους γνώσεις οι οποίες εστίασαν κυρίως στους φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο η επίτευξη αυτής της εννοιολογικής αλλαγής δεν είναι μια εύκολη διαδικασία και δεν έχει τις περισσότερες φορές τα επιθυμητά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα όπως έχει υποστηρίξει ο Χρήστου(2009), οι μαθητές συναντούν εμπόδια στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν ότι μια μεταβλητή μπορεί να αντικατασταθεί από έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό και όχι μόνο από φυσικούς αριθμούς. Για τον λόγο αυτό κρίνεται αναγκαίο ένα σύνολο διδακτικών παρεμβάσεων οι οποίες όμως δε θα οδηγούν απλώς σε άμεσα αποτελέσματα, αλλά θα έχουν ως βασικό στόχο να αντιμετωπιστούν σε βάθος οι λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών.

Όπως φάνηκε και από τη συγκεκριμένη έρευνα, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου, εμφανίζει την τάση να απαντά λανθασμένα όταν καλείται να επιλέξει ή να απορρίψει τιμές για μια μεταβλητή ή για μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητή. Ειδικότερα φαίνεται ότι οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν δύο επιμέρους παρανοήσεις με την πρώτη να αφορά το φαινομενικό πρόσημο και τη δεύτερη να σχετίζεται με τη διατήρηση της ακεραιότητας της μεταβλητής. Οι παρανοήσεις αυτές προκύπτουν από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού η οποία διακατέχει τους μαθητές και αυτό είναι που καθιστά ξεκάθαρο ότι η πρώτη και κύρια διδακτική παρέμβαση θα πρέπει να εστιάσει στην αναδιοργάνωση του αρχικού εννοιολογικού πλαισίου των μαθητών για τον αριθμό, που είναι διαμορφωμένο βάσει του φυσικού αριθμού.

Σύμφωνα με την Booth(1984, όπ. ανάφ. στο Χρήστου, 2009), ακόμα και όταν οι μαθητές κάνουν τα πρώτα τους βήματα στην άλγεβρα συναντούν κυρίως ασκήσεις οι οποίες, ίσως για διευκόλυνση των μαθητών, περιλαμβάνουν αποκλειστικά ακέραιους αριθμούς. Κάτι τέτοιο ενισχύει την όποια προϋπάρχουσα λανθασμένη αντίληψη των μαθητών για το ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Κρίνεται σκόπιμη επομένως, η αντικατάσταση των ασκήσεων αυτών στα σχολικά εγχειρίδια αλλά και στις καθημερινές ασκήσεις που ανατίθενται στους μαθητές, εμπλουτίζοντας τα με περισσότερα παραδείγματα μη ακεραίων τιμών μιας μεταβλητής. Με τον τρόπο αυτό, θα δημιουργηθεί τριβή των μαθητών με μη ακέραιες τιμές μιας μεταβλητής από τις πρώτες τους επαφές με την μαθηματική αυτή έννοια, αμβλύνοντας έτσι τυχόν παρανοήσεις. Όπως έχουν υποστηρίξει και οι Δημητρακοπούλου & Χρήστου(2018) τα σχολικά βιβλία αποτελούν βασικό συνδετικό κρίκο μεταξύ μαθητή και εκπαιδευτικού και ο ρόλος τους στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα είναι καθοριστικός. Για τον λόγο αυτό θα ήταν ιδιαίτερα βοηθητικό αν στα σχολικά εγχειρίδια η ανάλυση και η περιγραφή της μεταβλητής, όπως επίσης και των χρήσεων ή των τιμών που μπορεί αυτή να πάρει, ήταν πιο αναλυτικός και ξεκάθαρος από τις πρώτες κιόλας τάξεις. Ακόμη βάσει του ότι οι περισσότεροι μαθηματικοί κανόνες και οι περισσότερες εργασίες που καλούνται να λύσουν οι μαθητές εμπεριέχουν και βασίζονται κατά κύριο λόγο σε φυσικούς, ακέραιους και θετικούς αριθμούς, θεωρώντας τους πιο προσιτούς και οικείους για τους μαθητές, κρίνεται αναγκαία η εφαρμογή κάθε νέας γνώσης στα Μαθηματικά και σε άλλα είδη πραγματικών αριθμών.

Πέρα από την παρακίνηση των μαθητών να εμπλακούν στην μαθησιακή διαδικασία, είναι σημαντικό οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί να είναι ενήμεροι για τις παρανοήσεις που δημιουργούνται στους μαθητές όταν δίνουν τιμές σε μια μεταβλητή. Μόνο έτσι θα μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη τους και να την αντιμετωπίσουν στοχευμένα, προσαρμόζοντας κατάλληλα τη διδασκαλία τους και το υλικό τους. Στόχος θα πρέπει να είναι το να καταστεί σαφές στους μαθητές πως οι αντιλήψεις τους, οι οποίες αφορούν τους φυσικούς αριθμούς, δεν μπορούν να εφαρμοστούν στις μεταβλητές, πράγμα που θα διδαχθούν μέσα από παραδείγματα αλλά και συζήτηση και ανάλυση των λαθών που κάνουν.

Μια ακόμη διδακτική παρέμβαση η οποία θα διευκόλυνε την εξοικείωση των μαθητών με την άλγεβρα και την έννοια της μεταβλητής, θα μπορούσε να γίνει μέσα από έναν πρόλογο κατά την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια αυτή. Οι μαθητές θα πρέπει να αντιληφθούν τη νέα γνώση ως μια νέα επιστημονική εμπειρία. Με τον τρόπο αυτό θα μεταβούν σε έναν «μαθηματικό χώρο» καινούριο για αυτούς, στον οποίο θα ανακαλύψουν νέες έννοιες και νέες ιδιότητες (Resnick, 2006 όπ.ανάφ. στο Χρήστου, 2009).

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενες έρευνες η εννοιολογική αλλαγή απαιτεί πολύ χρόνο και τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές χρειάζεται με τον τρόπο τους να προσπαθήσουν πολύ(Greer & Verschaffel,2007, Van Dooren και συνεργάτες, 2004, Vosniadou και συνεργάτες, 2008, Χρήστου, 2009). Κάθε διδακτική παρέμβαση μπορεί να αποδειχθεί ωφέλιμη, ωστόσο πρέπει να αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης και συστηματικής διδακτικής στρατηγικής. Σύμφωνα με μια διδακτική παρέμβαση που εφαρμόστηκε από τον Christou(2012) σχετικά με το φαινομενικό πρόσημο, οι επιδόσεις των μαθητών βελτιώθηκαν. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει την άποψη, βάσει της οποίας, αν η διδακτική παρέμβαση που θα εφαρμοστεί είναι κατάλληλα σχεδιασμένη, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν την τάση τους να θεωρούν ότι το πρόσημο της μεταβλητής είναι και το πρόσημο του αριθμού που την αντικαθιστά. Ωστόσο αυτή η βελτίωση των επιδόσεων και η αλλαγή των αντιλήψεων δεν είχε μεγάλη χρονική διάρκεια για όλους τους μαθητές. Κρίνεται ιδιαίτερα σκόπιμο επομένως να διερευνηθούν και να αναπτυχθούν περισσότερες διδακτικές παρεμβάσεις, με στόχο την διαχείριση του θέματος αυτού.

8. Μελλοντικές επεκτάσεις της έρευνας

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στους μαθητές είναι ένα υπαρκτό φαινόμενο, το οποίο εκδηλώνεται μέσα από την παρανόηση ως προς το φαινομενικό πρόσημο αλλά και ως προς την ακεραιότητα στα πλαίσια της έννοιας της μεταβλητής και των τιμών που μπορεί να πάρει, ειδικά στα πρώτα χρόνια διδασκαλίας της έννοιας αυτής. Η προκατάληψη αυτή, η οποία όπως προκύπτει από προηγούμενες έρευνες (Χρήστου, 2009, 2012) έχει προεκτάσεις και εμφανίζεται και σε άλλες μαθηματικές έννοιες, δεν είναι πάντοτε αναγνωρίσιμη από τους εκπαιδευτικούς και από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας φαίνεται πως το διδακτικό σύστημα των μαθηματικών μέχρι σήμερα δεν την αντιμετωπίζει επιτυχώς. Παρ’ότι την τελευταία δεκαετία έχει γίνει μια αξιόλογη σειρά μελετών και ερευνών του ζητήματος, κρίνεται σημαντική η περαιτέρω και σε βάθος διερεύνηση των επιμέρους πτυχών του.

Αρχικά, ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξέταση της επίδρασης των σχολικών εγχειριδίων στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών κατά την εισαγωγή τους, καθώς και στην ενίσχυση ή αντιμετώπιση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και την εκδήλωσή της στις έννοιες αυτές. Όπως έχει προαναφερθεί από τους Δημητρακοπούλου και Χρήστου (2018) «Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν συνδετικό κρίκο ανάμεσα στους στόχος που τίθενται από τα αναλυτικά προγράμματα και στα ζητούμενα αποτελέσματα». Παρότι η σημασία των σχολικών εγχειριδίων είναι αναγνωρισμένη, μέχρι στιγμής δεν έχει διεξαχθεί κάποια συστηματική και ολοκληρωμένη μελέτη για τον ρόλο τους και πιθανές βελτιώσεις αυτών. Επιπλέον, ανοιχτό ερώτημα παραμένει η καταλληλότητα του τρόπου με τον οποίο παρέχεται η γνώση μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια στους μαθητές, αλλά και η ύπαρξη πιθανών επιπλέον εργαλείων που μπορούν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για καλύτερη καλλιέργεια της μαθηματικής κατανόησης νέων εννοιών.

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι ένα φαινόμενο το οποίο έχει πολλαπλές προεκτάσεις στην ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης από τους μαθητές. Παρουσιάζει λοιπόν ιδιαίτερο ενδιαφέρον μια πληρέστερη μελέτη κάθε πιθανής εμφάνισης του φαινομένου στο σύνολο των μαθηματικών εννοιών της άλγεβρας. Μια συστηματική μελέτη και καταγραφή των εκφάνσεων της προκατάληψης του φυσικού αριθμού θα βοηθήσει σε καλύτερη κατανόηση του φαινομένου, άρα θα οδηγήσει και σε συμπεράσματα για την βέλτιστη αντιμετώπισή του. Για να επιτευχθεί αυτό, κρίνεται απαραίτητη η μελέτη των νοητικών διαδικασιών και της συλλογιστικής πορείας που ακολουθούν οι μαθητές κατά την προσπάθεια τους να κατανοήσουν μια νέα μαθηματική έννοια, είτε αυτή είναι η έννοια της μεταβλητής, είτε των εξισώσεων, είτε ενός νέου μαθηματικού συνόλου. Μεγαλύτερο δείγμα μαθητών σε συνδυασμό με μία έρευνα μακράς διάρκειας, που περιλαμβάνει εκτός των ερωτηματολογίων και συνεντεύξεις ή και διαδραστικά ερευνητικά εργαλεία (π.χ. με μορφή γνωστικού παιχνιδιού) θα παρέχει βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου και ασφαλέστερη γενίκευση των συμπερασμάτων.

9. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers’ knowledge of students’ understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 249–272.
- Booth, L. R. (1984). Algebra: children's strategies and errors. Windsor: Berkshire: NFER-Nelson.
- Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper’s doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*(4), 247–253.
- Butterworth, D. S. 2007. Why a management procedure approach? Some positives and negatives. – ICES Journal of Marine Science, 64: 613–617.
- Carey, S. (1985). Conceptual change in childhood . Cambridge, MA: MIT Press.
- Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.(pp. 130-140) Utrecht University, The Netherlands.
- Christou, K. P., & Vosniadou St. (2005). How Students Interpret Literal Symbols in Algebra: A Conceptual Change. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.). Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society(pp.453-458).Stresa,Italy.
- Christou, K. P., Vosniadou St., & Vamvakoussi X. (2007). Students’ Interpretations of Literal Symbols in Algebra, Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction. Elsevier Press, 283-297.
- Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2009). Misinterpreting the use of literal symbols in Algebra. Paper presented at the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece.
- Christou, K. P., (2012). Helping students remedy the phenomenal sign bias: The case of a refutational lecture. In C. Prachalias (Ed.) Proceedings of the 8th International Conference on Education (pp. 643-648). Samos, Greece.

- Christou, K. P., & Vosniadou, St. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. Mathematical Thinking and Learning, 14(1), 1-27.
- Christou, K. P.(2015). Natural number bias in operations with missing numbers. ZDM Mathematics Education, 47(5), 1-12
- Christou, K. P. (2018). The natural number bias in arithmetic operations: the case of the representational form of the number. In Bergqvist, E., Österholm, M., Granberg, C., & Sumpter, L. (Eds.). (2018). Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 267-274). Umeå, Sweden: PME.
- Collis, K. (1975). The development of formal reasoning. Newcastle, Australia: U. of Newcastle.
- Dogbey J., & Kersaint, Gl., (2012). Treatment of Variables in Popular Middle-Grades Mathematics Textbooks in the USA: Trends from 1957 through 2009, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2(1)1-30.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 9, 19-25.
- Fujji, T. (2003). Probing students’ understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox, Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp.49-65).
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1-2), 43–74.
- Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics. New York: SUNY Press.
- Heck, A. (2001). Variables in computer algebra, mathematics and science. International Journal of Computers in Mathematics Education, 8 (3), 195-221.
- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. Education studies in Mathematics (27), 59-78.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419). New York.
- Kuhn, T. (1970). The structure of scientific revolutions. (2nd edition), (First edition 1962 ed.) Chicago: Chicago press.
- Moss, J. (2005). Pipes, tubes and beakers: New approaches to teaching the rational - number system. Στο S. Donovan & J.D. Bransford History (εκδ.), How students learn: History, mathematics and science in the classroom. (pp.309-349)Washington, D.C.: National Academy Press
- Nesher, P. & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. Educational studies in Mathematics, 17, 67-79.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40(1), 27–52.
- Post, T. R., Creamer, K. A., Behr, M., Lesh, R. and Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg, Rational numbers: An integration of research(pp.327-362).Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. Learning and Instruction, 28, 64–72.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62(4), 273-296.
- Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. Cognitive Psychology (51), 101 - 140.
- Switzer, J., M. (2017). What Conceptions have US Grade 4-6 Students' Generalized for Formal and Informal Common Representations of Unknown Addends? (pp.9-12).Texas Christian University.
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, St. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding

of rational numbers and their notation. Cognition and Instruction, 28(2), 181–209.

- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of Mathematical Behavior, 31(3), 344–355.
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. Learning and instruction, 14(5), 469-484.
- Vosniadou, S. & Brewer, W.F. (1992). Mental Models of the Earth: A Study of Conceptual Change in Childhood. Cognitive Psychology, 24, 535-585.
- Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. In L. Verschaffel & S. Vosniadou (Guest Eds.), The conceptual change approach to mathematics learning and teaching, Special Issue of Learning and Instruction, 14, 445-451.
- Vosniadou, S. & Skopeliti, I. (2005). Developmental Shifts in Children’s Categorization of the Earth, In B. G. Bara, L.Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.) Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society, (pp. 2325-2330).
- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), Handbook of research on conceptual change (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vygotsky, L. S. (1978). Mind and society: The development of higher mental processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wiser, M. & Smith, C. L. (υπό έκδοση). Learning and Teaching about Matter in Grades K-8: When should the atomic-molecular theory be introduced? Στο S. Vosniadou (Ed.) International Handbook of Research on Conceptual Change. Routledge
- Wellman, H. M. (1990). The child's theory of mind. Cambridge, MA: MIT Press.

10. Ελληνική Βιβλιογραφία

- Βαμβακούσης, Σ. (2014). Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Αθήνα: Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών , Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.
- Βερύκιος, Π. (2003). Η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα: Εμπόδια στη μαθησιακή πορεία του μαθητή. Η περίπτωση της εξίσωσης. Πρακτικά του 20ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, Βέροια.
- Δημητρακοπούλου, Σ. & Χρήστου, Κ. (2018). Τα Γράμματα - Μεταβλητές : Πώς τα κατανοούν οι μαθητές και πως εμφανίζονται στα βιβλία των μαθητών του Γυμνασίου. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (11), 31-52.
- Ζάου, Κ.(2016). Γιατί πρέπει να μαθαίνουμε Μαθηματικά; Στο "Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, Κείμενα από τον Διαγωνισμό Δημοσιογραφικού Άρθρου, Φιλοσοφικού Προβληματισμού και Έκφρασης Ιδεών, 8-9.
- Καστανίδη, Φ. (2011). Το Γράμμα ως Μεταβλητή στη Β΄Γυμνασίου. Κατανόηση και Επίλυση Προβλημάτων. Πανεπιστήμιο Κρήτης: Ηράκλειο, 38-43.
- Παπαδιοφάντους, Κ. (2016).Γιατί πρέπει να μαθαίνουμε Μαθηματικά; Στο "Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, Κείμενα από τον Διαγωνισμό Δημοσιογραφικού Άρθρου, Φιλοσοφικού Προβληματισμού και Έκφρασης Ιδεών, 6-7.
- Χρήστου, Κ. (2009). Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ)
- Χρήστου, Κ. (2019). Εννοιολογική αλλαγή και το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της έννοια της μεταβλητής. Στο: Σκοπελίτη Ειρήνη (επιμ.), Συλλογικό έργο, Νόηση και Μάθηση υπό το πρίσμα της Εννοιολογικής Αλλαγής. Μέρος Γ΄ (σσ. 163-184). Gutenberg.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σχολείο:........ Τάξη:........ Τμήμα:........

Ημ. Γέννησης:........ Φύλο: αγόρι κορίτσι

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε γράμματα όπως τα (α, β, x, γ…) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Σε αυτό το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιούμε αυτά τα γράμματα με αυτόν τον τρόπο. Διαβάστε προσεκτικά τις παρακάτω ερωτήσεις. Κυκλώστε την απάντηση, που θεωρείτε ότι είναι η πιο σωστή.

- Για κάθε ερώτηση, υπάρχει **μόνο μια σωστή απάντηση**.

Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το α; α) 1, 2, 3, 7, 12, 56, … β) 1, 2, 4, -1, -2, -3, … γ) 2.3, $\frac{3}{4}$, 4.5, $\frac{4}{5}$, 6.83, …. δ) 2.3, -$\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$, -6.8, … ε) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς	**Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το 4γ;** α) -4, -8, -12, 8, 16, …. β) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς γ) $\frac{4}{3}$, 5.3, $\frac{9}{2}$, 7.89, … δ) 4, 8, 12, 20, 24, … ε) -2.3, -$\frac{4}{5}$, 6.8, $\frac{9}{5}$, 9,37 …
Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το –β; α) -3.4, -$\frac{2}{5}$, -8.3, … β) 2.3, -$\frac{4}{5}$, -6.8, $\frac{2}{5}$, … γ) -$\frac{4}{16}$,…-1, -2, -3, -4, … δ) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) -1, -2, -3, -6, -8, ….	**Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το κ+κ+κ;** α) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς β) 2.1, $\frac{18}{3}$, 16.4, $\frac{12}{17}$, … γ) -2.3, -$\frac{4}{5}$, 6.8, $\frac{9}{2}$, … δ) -3, -6, -12, 3, 6, 15, …. ε) 3, 6, 12, 30, 45, 81…

Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το $\frac{\alpha}{\beta}$;	Τι αριθμούς μπορεί να πάρει το λ+3;
α) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς β) -8, -11, 5, 7, 13 … γ) 1, 3, 5, 7, 83, …. δ) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{7}$, 3.6, $\frac{1}{10}$, 7.9, 11.78, $\frac{32}{12}$ … ε) -2.3, -$\frac{2}{5}$, 4.5, -$\frac{3}{20}$, $\frac{4}{16}$,…	α) 4, 5, 6, 7, 8, 9… β) 4.5, $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{2}$, 6.83, … γ) -4, -8, -12, 8, 16, …. δ) όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) -2.3, -$\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$, 6.8, …

Οι επόμενες ερωτήσεις είναι λίγο διαφορετικές

- Βάλτε σε κύκλο την απάντηση που θεωρείτε σωστή
- Για κάθε ερώτηση, υπάρχει **μόνο μια σωστή απάντηση**.

Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το α;	Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το 4γ;
α) -2, -3, 6, 8, -11 … β) 1, 4, 2 , 3, 9, … γ) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς δ) $\frac{3}{4}$, 3.5, $\frac{5}{6}$, 11.58, $\frac{12}{17}$, … ε) -2.3, -$\frac{2}{5}$, 4.5 , -$\frac{3}{20}$, $\frac{4}{16}$,…	α) 4.3, $\frac{2}{3}$, 1.2, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, … β) $\frac{3}{20}$, -12.3, -$\frac{7}{8}$, 9.4, … γ) 5, 7, 8, 14, …. δ) -4, -8, -12, -17, …. ε) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς

Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το –β; α) -1, - 2, -3, -8, … β) 3, 5, 8, 11, …… γ) -$\frac{7}{28}$, -2.5 ,-$\frac{9}{16}$, -3.68, … δ) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) -3.4, 6.7, -$\frac{3}{20}$,$\frac{4}{16}$,…	**Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το κ+κ+κ;** α) 1, 2, 3, 5, 11,…. β) $\frac{9}{16}$,4,5, $\frac{3}{20}$,$\frac{4}{16}$, 9.25, … γ) -3.4, 6.7,-$\frac{3}{20}$,$\frac{4}{16}$,… δ) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) -3, -6, -9,-12, …
Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το $\frac{\alpha}{\beta}$; α) $\frac{2}{3}$, -3,6, -$\frac{3}{7}$, 13.85 , … β) 1, 2, 3, …. γ) 2.3, $\frac{2}{3}$, 7.4, $\frac{4}{16}$, … δ) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς ε) -1, -4, -3, -8, …	**Τι αριθμούς <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το λ+3;** α) 4, 5, 6, 3, … β) -3, -6, -9, … γ) 1.2, $\frac{2}{3}$, 2.34, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{5}$,… δ) -3.4, 6.7, $\frac{3}{4}$,-$\frac{9}{16}$,… ε) Κανένα από τα παραπάνω. Θα μπορούσε να πάρει όλους τους παραπάνω και πολλούς άλλους τέτοιους αριθμούς

Σας ευχαριστούμε για τη συνεργασία!!