



ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

**Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΟΠΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ  
ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΒΕΛΩΝΗ ΜΑΛΑΜΑΤΗΣ

ΦΛΩΡΙΝΑ  
ΙΟΥΝΙΟΣ 2020

## Φύλλο Εξέτασης

Επόπτης: \_\_\_\_\_

Βαθμός: \_\_\_\_\_

Υπογραφή: \_\_\_\_\_ Ημερομηνία: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Δεύτερος Βαθμολογητής: \_\_\_\_\_

Βαθμός: \_\_\_\_\_

Υπογραφή: \_\_\_\_\_ Ημερομηνία: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Ο/η συγγραφέας .....

βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά σε εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

## Περιεχόμενα

Φύλλο Εξέτασης.....	2
Συντομογραφίες και Ακρωνύμια.....	5
Περίληψη.....	6
Abstract .....	7
Λέξεις κλειδιά.....	8
Key Words.....	8
Κεφάλαιο 1.....	9
Εισαγωγή.....	9
Προσδιορίζοντας τον όρο «πολιτιστικά μαθηματικά».....	10
Αντικείμενα έρευνας και σημαντικότητα της μελέτης.....	11
Περιορισμοί της έρευνας.....	13
Κεφάλαιο 2.....	14
Βιβλιογραφική ανασκόπηση .....	14
Η αλλαγή της ιδεολογικής δομής στη φιλοσοφία των μαθηματικών.....	14
Η επιρροή των πολιτιστικών προοπτικών στη παιδαγωγική των μαθηματικών .....	17
Αλλάζοντας τις αντιλήψεις δασκάλων και μαθητών για τα μαθηματικά.....	17
Τα μαθηματικά ως ένα ανθρώπινο εγχείρημα.....	18
Μαθηματικά από και για όλους τους πολιτισμούς.....	19
Πεποιθήσεις για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.....	22
Αυξάνοντας την αποτελεσματική γνωστική ανάπτυξη.....	26
Δημιουργώντας συνδέσεις.....	29
Ζητήματα Υλοποίησης.....	32
Καταλληλότητα των εκπαιδευτικών .....	33
Προγράμματα επιμόρφωσης.....	33
Διαθεσιμότητα πόρων και βοηθημάτων .....	34
Δέσμευση χρόνου.....	34
Δυσκολίες στην αξιολόγηση των μαθητών .....	34
Η ιστορία των μαθηματικών ως οδηγός σπουδών.....	35
Τοποθετώντας τα πολιτιστικά μαθηματικά στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης.....	37
Η χρήση των πολιτιστικών μαθηματικών στην τάξη της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.....	37
Κεφάλαιο 3.....	39
Βοηθήματα και πόροι της τάξης.....	39
Υλικό για την διδασκαλία ιστορικών μαθηματικών.....	39

Κεφάλαιο 4.....	43
Μεθοδολογία .....	43
Οι συμμετέχοντες της έρευνας .....	43
Το πρόγραμμα της έρευνας .....	44
Το περιβάλλον της έρευνας.....	45
Σχεδιασμός της έρευνας .....	46
Συλλογή Δεδομένων.....	47
Ανάλυση των Δεδομένων.....	48
Κεφάλαιο 5.....	49
Πολιτιστικά Μαθηματικά σε δράση.....	49
Η προσέγγιση της Ruth .....	50
Επιλογή πολιτιστικών προοπτικών για συγκεκριμένα θέματα του οδηγού σπουδών .....	50
Θέμα του οδηγού σπουδών (IRP): Τρισδιάστατα Στερεά.....	50
Θέμα του οδηγού σπουδών (IRP): Μονάδες Μέτρησης Μήκους.....	52
Η προσέγγιση της Sarah .....	53
Επιλογή μαθηματικών αντικειμένων που σχετίζονται με συγκεκριμένους πολιτισμούς .....	53
Επίσκεψη στην Αρχαία Αίγυπτο .....	54
Επίσκεψη στην Αρχαία Ελλάδα .....	55
Οι υπόλοιπες οκτώ «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο» .....	57
Η προσέγγιση της «ομάδας των τεσσάρων» .....	58
Επιλογή μαθηματικών αντικειμένων σύμφωνα με την διαθεσιμότητα πόρων.....	58
Θέμα της σειράς MMC: Κοχύλια, ξυλάκια και βότσαλα.....	59
Τα υπόλοιπα κεφάλαια της σειράς MMC που επιλέχθηκαν.....	60
Κεφάλαιο 6.....	62
Συμπεράσματα και επιπτώσεις της έρευνας.....	62
Ο συλλογισμός για την υιοθέτηση πολιτιστικών προοπτικών .....	62
Η δυνατότητα εφαρμογής των πολιτιστικών μαθηματικών .....	66
Επιπτώσεις και Τελικά Συμπεράσματα .....	68
Βιβλιογραφικές Αναφορές .....	69
Δικτυογραφία .....	80

## Συντομογραφίες και Ακρωνύμια

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

IRP: Integrated Resource Package (ο οδηγός σπουδών που χρησιμοποιείται στην Βρετανική Κολομβία)

ICMI: International Commission on Mathematics Instruction

HMN: Humanistic Mathematics Network

G4: τέσσερις εκπαιδευτικοί σε μια ομαδική μελέτη περίπτωσης («ομάδα των τεσσάρων»)

TDE: Teacher Development Experiment

MMC: Mathematics for Many Cultures (τίτλος συγγράμματος)

## Περίληψη

Βασικό στόχο της παρούσας πτυχιακής εργασίας, αποτελεί η διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζουν την υιοθέτηση των πολιτιστικών προοπτικών στην διδασκαλία των μαθηματικών, στα πλαίσια του οδηγού σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και κατά πόσο είναι δυνατόν να ξεπεραστούν οποιαδήποτε εμπόδια προς αυτήν την κατεύθυνση.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στα τρία πρώτα κεφάλαια, είναι αυτή της βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Στα πλαίσια του πρώτου κεφαλαίου αποσαφηνίζεται ο όρος «πολιτιστικά μαθηματικά», ενώ παράλληλα αναφέρεται η σημαντικότητα της παρούσας μελέτης. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται λόγος για την μεταβολή των πεποιθήσεων δασκάλων και μαθητών, όσο αφορά το αντικείμενο των μαθηματικών, ενώ αναφέρονται πλεονεκτήματα και δυσκολίες που προκύπτουν από την διδασκαλία των πολιτιστικών μαθηματικών. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια ιστορική αναδρομή που εξετάζει τον ρόλο των μαθηματικών στα πλαίσια διαφόρων οδηγών σπουδών, ενώ παράλληλα εξετάζεται η θέση των πολιτιστικών μαθηματικών σε αυτούς, καθώς και κατά πόσο εφαρμόζονται από τους εκπαιδευτικούς οι κατευθυντήριες γραμμές, που προωθούν τις πολιτιστικές προοπτικές. Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται λόγος για την διαθεσιμότητα κατάλληλα διαμορφωμένων πόρων και βοηθημάτων που κρίνονται αναγκαία για την διδασκαλία των πολιτιστικών μαθηματικών.

Στα επόμενα κεφάλαια, παρουσιάζεται μια ποιοτική έρευνα της Percival, η οποία έλαβε χώρα το 2004 και χρησιμοποίησε τη μέθοδο μελέτης περίπτωσης. Όσο αφορά το τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται λόγος για την μεθοδολογία, το δείγμα, το πρόγραμμα και τον σχεδιασμό της έρευνας, καθώς και για την συλλογή και την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από αυτήν. Έπειτα, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική αναφορά ορισμένων μαθημάτων των συμμετεχόντων, εστιάζοντας στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και ορισμένα ενδιαφέροντα περιστατικά. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν λαμβάνοντας υπόψη τόσο την βιβλιογραφική έρευνα, όσο και την ποιοτική έρευνα της Percival.

Σημαντικό εύρημα της παρούσας εργασίας, αποτελεί το γεγονός πως οι εκπαιδευτικοί που διαθέτουν πρόσβαση στους κατάλληλα διαμορφωμένους πόρους, είναι ικανοί να διδάξουν το αντικείμενο των μαθηματικών, προωθώντας το πολιτιστικό του υπόβαθρο, ενώ επιπλέον φάνηκε πως κατανοούν τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από μια τέτοιου είδους διδασκαλία. Ωστόσο, διαπιστώθηκε πως μόνο όσοι εκπαιδευτικοί διαθέτουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αναφορικά με τις πολιτιστικές προοπτικές, θα λάβουν την απόφαση να διδάξουν τα μαθηματικά με αυτόν τον τρόπο. Επιπλέον, το πλήθος των επαγγελματικών υποχρεώσεων, καθώς και η πίεση του χρόνου, αποτελούν τις συνηθέστερες δικαιολογίες των εκπαιδευτικών που δεν επιθυμούν να αφιερώσουν επιπλέον χρόνο για την προετοιμασία των μαθημάτων ή δεν διαθέτουν την απαραίτητη αυτοπεποίθηση, όσο αφορά τις μαθηματικές τους ικανότητες.

## Abstract

The main purpose of this thesis, is the investigation of the factors that play a role in the teaching of mathematics -with the use of cultural perspectives- within the curriculum of the elementary schools, as well as at what extend it is possible to overcome any difficulties that may arise.

The method that is used in the first three chapters is literature review. Within the boundaries of the first chapter, the term “cultural mathematics” is clarified, while the significance of the study is being mentioned. The second chapter studies the change in the beliefs of students and teachers alike regarding mathematics, as well as the advantages and disadvantages that occur from the teaching of cultural mathematics. Moreover, this chapter mentions the history of the subject of mathematics within different curriculums, the role of cultural dimensions regarding this subject through the years and at what extend teachers implement the curriculum guidelines that promote cultural perspectives. In the third chapter, there is a brief mention of the availability of appropriately adapted material that is necessary for teaching cultural mathematics.

The next three chapters present a qualitative research executed by Percival in 2004, which used the method of case study. The forth chapter mentions the methodology, the research participants, the schedule and the design of the study, as well as the collection and analysis of the data that occurred. The next chapter deals with analytical reports of some of the lessons that took place, focusing on the strategies that were used and some interesting events that happened in the classes, during that time. Lastly, the sixth chapter mentions the conclusions of the study, taking into consideration the literature review and the qualitative research by Percival.

One of the most important findings of this study is the fact that teachers who have access to suitably adapted material, are capable of teaching mathematics in a way that promotes the cultural background of the subject, while it is obvious that they are completely aware of the advantages that arise from this method of teaching. However, it seems that only the teachers who possess particular interest in cultural perspectives, will decide to teach mathematics in such a way. Moreover, the many professional commitments and the lack of time, seem to be the most popular excuses among the teachers that are not willing to devote the extra time that is needed to plan these lessons or the ones that don't have the necessary confidence in their mathematical skills, thus don't want to be out of their comfort zone.

## Λέξεις κλειδιά

Πολιτιστικά μαθηματικά, πολιτιστικές προοπτικές, μαθηματική εκπαίδευση, πεποιθήσεις εκπαιδευτικών, μελέτη περίπτωσης

## Key Words

Cultural mathematics, cultural perspectives, mathematics education, teacher beliefs, case study



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Τα μαθηματικά αποτελούσαν ανέκαθεν, καταλυτικό παράγοντα σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης και προόδου. Παρόλα αυτά, μόλις τους δύο τελευταίους αιώνες ξεκίνησαν ερευνητές, μαθηματικοί και εκπαιδευτικοί ανά τον κόσμο, να εξερευνούν τις συνδέσεις της Μαθηματική επιστήμης, με την ιστορία της εξέλιξής της. Όπως αναφέρθηκε το 1795 από τον μαθηματικό Lagrange στην τάξη των εκπαιδευόμενων του, η γνώση για την εξέλιξη των μαθηματικών «δεν αποτελεί ζήτημα απλής περιέργειας. Είναι ικανή να μας προσφέρει καθοδήγηση σε παρόμοιες έρευνες, αλλά και να μας δια φωτίσει όσον αφορά διάφορα άλλα θέματα με τα οποία ασχολούμαστε.» (Fauvel & Van Maanen, 2000 σσ. 35)

Είναι προφανές, πως η πρόοδος και η ανάπτυξη του ανθρώπινου είδους σε οποιονδήποτε τομέα, είχε ως δομική συνιστώσα της, την επιστήμη των μαθηματικών. (Κοτοπούλης, 2007) Έτσι, τα τελευταία χρόνια ολοένα και μεγαλύτερο πλήθος ερευνητών προσπαθεί να διαλευκάνει, με ποιόν τρόπο η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών είναι ικανή να τροφοδοτήσει και να επηρεάσει θετικά, την διδακτική τους προσέγγιση στο σύγχρονο Σχολείο. (Fauvel & Van Maanen, 2000) Μέσω της παρούσας διερεύνησης, επηρεάστηκε η διαμόρφωση τόσο των στόχων της διδακτικής των μαθηματικών, όσο και των οδηγιών σπουδών, κάτι που αποδεικνύεται από τη συμπερίληψη των πολιτιστικών προοπτικών στα Πρότυπα του Οδηγού Σπουδών και Αξιολόγησης των Σχολικών Μαθηματικών (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) τα οποία παρουσιάστηκαν από το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics- NCTM) το 1989:

«Κρίνεται απαραίτητο οι μαθητές να διαθέτουν πλήθος εμπειριών που σχετίζονται με τη πολιτιστική, ιστορική και επιστημονική εξέλιξη των μαθηματικών, έτσι ώστε να είναι σε θέση να εκτιμήσουν τον ρόλο των μαθηματικών στην ανάπτυξη της σύγχρονης κοινωνίας, καθώς και να εξερευνήσουν τις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και των διάφορων τομέων που αυτά επηρεάζουν, όπως τις φυσικές και ανθρωπιστικές επιστήμες.» (σσ. 5)

Η παραπάνω παράγραφος, προέτρεψε τον εκδοτικό κόσμο να παράγει κατάλληλα διαμορφωμένα υλικά, τα οποία να προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εύκολη πρόσβαση στις πολιτιστικές προοπτικές των μαθηματικών. Παρόλα αυτά, ακόμα και σήμερα δεν υφίστανται συγκεκριμένες οδηγίες ή προτάσεις, που να υποδεικνύουν με ποιόν τρόπο οι εκπαιδευτικοί θα καταφέρουν την κατανόηση των πολιτιστικών προοπτικών, ενώ το μεγαλύτερο μέρος των δασκάλων δεν γνωρίζουν αυτή τη πλευρά των μαθηματικών, ούτε την ύπαρξη ανάλογων υλικών για την διδασκαλία της. ( Percival, 2004 σσ. 1-2)

Η παρούσα πτυχιακή εργασία μέσω της βιβλιογραφικής έρευνας, επιβεβαιώνει το πλήθος των πλεονεκτημάτων που προκύπτουν από την διδασκαλία των επονομαζόμενων «πολιτιστικών μαθηματικών». Αν και τα άρθρα που πραγματεύονται την χρήση ιστορικών προοπτικών, στην διδασκαλία των μαθηματικών από εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι σπάνια, (Bohan, & Bohan, 2003; Gardner, 1991; Van Mannen, 1992; Voolich, 1993) πλήθος προφορικών μαρτυριών υποστηρίζουν τα θετικά αποτελέσματα που είναι δυνατόν να προκύψουν, από μια τέτοιου είδους διδασκαλία. Το μεγαλύτερο μέρος των ερευνητών αυτού του τομέα είναι και οι ίδιοι δάσκαλοι, ενώ στοιχεία των ερευνών τους υποδηλώνουν πως αν και δεν το επιλέγουν, θα ήταν σε θέση να εφαρμόσουν επιτυχώς την πρόταση του οδηγού σπουδών, όσον αφορά τις πολιτιστικές προοπτικές. Όλα τα παραπάνω υποδηλώνουν την επιτακτικότητα πραγματοποίησης περαιτέρω έρευνας, πάνω στο συγκεκριμένο ζήτημα.

## Προσδιορίζοντας τον όρο «πολιτιστικά μαθηματικά»

Οι όροι «πολιτιστικά μαθηματικά» και «ιστορία των μαθηματικών και/ή πολυπολιτισμικά μαθηματικά» αν και αρκετά παρόμοιοι, δεν είναι ταυτόσημοι. Για να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση, προτείνεται ο διαχωρισμός αυτών των δύο εννοιών, με βάση το κύριο θέμα του κειμένου. Έτσι, επισημαίνοντας πως κάνοντας λόγο για κείμενα «ιστορικού» χαρακτήρα, αναφερόμαστε σε συγκεκριμένους μαθηματικούς και το έργο τους, ενώ όταν κάνουμε λόγο για κείμενα «πολυπολιτισμικού» χαρακτήρα, κάνουμε λόγο για το έργο μιας συγκεκριμένης πολιτισμικής ομάδας, ή για τη σύγκριση του έργου δύο τέτοιων ομάδων. ( Percival, 2004 σσ. 3)

Εάν στόχος μας είναι να έρθουμε σε επαφή με ένα αντικείμενο από έναν άλλον πολιτισμό (όπως σε αυτήν την περίπτωση τα μαθηματικά), με τον οποίο δεν μεγαλώσαμε ή δεν είμαστε ήδη γνώριμοι, πρώτο βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση αποτελεί η αναγνώριση των επιρροών του δικού μας πολιτισμού, και πως αυτές επηρεάζουν την αντίληψή μας για τους υπόλοιπους. Όταν βρισκόμαστε αντιμέτωποι με δραστηριότητες άλλων πολιτισμών, οι προϋπάρχουσες αντιλήψεις τείνουν να εμποδίζουν την κατανόηση του πως εκλαμβάνει ο διαφορετικός πολιτισμός την συγκεκριμένη δραστηριότητα. (Gilsdorf, 2012 σσ.11)

Οι όροι «πολιτιστική διάσταση» ή «πολιτιστικές προοπτικές» των μαθηματικών, χρησιμοποιούνται εναλλασσόμενα και καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος δραστηριοτήτων οι οποίες σχετίζονται τόσο με ιστορικές, όσο και τις πολυπολιτισμικές προοπτικές των μαθηματικών. Αυτές οι δραστηριότητες ενδέχεται να περιλαμβάνουν από μελέτη αρχαίων υπολογιστικών μηχανισμών, μέχρι δραματοποιήσεις με θέμα διάφορους φημισμένους μαθηματικούς.

Αν και υπάρχουν πολλά άλλα πολιτιστικά ζητήματα που σχετίζονται άμεσα με τους μαθητές όπως: η «νεανική κουλτούρα», η «ποπ κουλτούρα», η «καταναλωτική κουλτούρα» και η «κουλτούρα των ηλεκτρονικών μέσων», το συνεχώς εντεινόμενο

ενδιαφέρον για ιστορικά ζητήματα, καθώς και η διαθεσιμότητα κατάλληλα προσαρμοσμένου υλικού για την διδασκαλία ιστορικών και «πολυπολιτισμικών» μαθηματικών, οδήγησε στην επικέντρωση στις δύο παραπάνω πλευρές του πολιτιστικού υπόβαθρου των μαθηματικών. (Percival, 2004 σσ. 3)

## Αντικείμενα έρευνας και σημαντικότητα της μελέτης

Κύριος στόχος της παρούσας μελέτης αποτελεί, η διερεύνηση της υιοθέτησης πολιτιστικών προοπτικών στην διδασκαλία των μαθηματικών, από μη εξειδικευμένους εκπαιδευτικούς. Αναγκαίες προϋποθέσεις για να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος στόχος, αποτελούν τόσο η εξακρίβωση του κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί βρίσκουν γόνιμη αυτού του είδους την εργασία, όσο και ο εντοπισμός των δυσκολιών που ενδεχομένως να αποτρέπουν τους εκπαιδευτικούς, από την υιοθέτηση τέτοιου είδους πρακτικών. Αν και έχουν συγγραφεί αρκετά έργα που πραγματεύονται από θεωρητική άποψη, τα πλεονεκτήματα των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά, δεν υπάρχουν παρά μόνο προφορικές μαρτυρίες που να υποστηρίζουν την αναγνώριση αυτών των πρακτικών από τους εκπαιδευτικούς, ειδικά όσο αφορά την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Με σκοπό την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αντικειμενικότητα των συμπερασμάτων και αποτελεσμάτων της παρούσας μελέτης, θα ληφθεί υπόψη η έρευνα της Percival, η οποία έλαβε χώρα το 2004. Στην προαναφερθείσα έρευνα επιλέχθηκε ως δείγμα ένα σύνολο εκπαιδευτικών, εκ των οποίων κάποιοι είχαν συμπεριλάβει τις πολιτιστικές προοπτικές στην διδασκαλία των μαθηματικών, ενώ κάποιοι από αυτούς δεν ήταν γνώριμοι με τέτοιες πρακτικές. Για να ξεπεραστούν τυχόν δυσκολίες στην εύρεση πρόθυμων εκπαιδευτικών, που να ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία, έγινε ξεκάθαρη η πρόθεση παροχής οποιουδήποτε είδους βοήθειας αυτοί θεωρούσαν αναγκαία. Τα μαθήματα και οι συζητήσεις που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της έρευνας, μας επιτρέπουν να εξερευνήσουμε κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί εκτιμούν τα προνόμια που θεωρούν ότι λαμβάνουν από τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω των πολιτιστικών προσεγγίσεων, καθώς και τα προνόμια που θεωρούν πως λαμβάνουν οι μαθητές τους. (Percival, 2004 σσ. 4)

Δεύτερος στόχος της έρευνας, αποτελεί η διερεύνηση των πρακτικών πλευρών της ενσωμάτωσης των πολιτιστικών προσεγγίσεων, στα σχολικά μαθηματικά. Με βάση την βιβλιογραφία και με στόχο την επίτευξη του παραπάνω στόχου, θα εξερευνήσουμε ένα σύνολο ερωτημάτων που κατατάσσονται στις πέντε παρακάτω κατηγορίες :

### 1) Χρονική δέσμευση

Πόσος χρόνος απαιτείται για την προετοιμασία των μαθημάτων, ειδικότερα όταν το μαθηματικό αντικείμενο είναι άγνωστο; Επιπλέον,

πόσο χρόνο επιλέγουν να αφιερώσουν οι εκπαιδευτικοί στις πολιτιστικές προσεγγίσεις κατά την διδασκαλία;

- 2) *Σχετικότητα των πολιτιστικών προοπτικών με τις οδηγίες του οδηγού σπουδών*

Είναι σε θέση οι εκπαιδευτικοί, να εντοπίσουν τις συνδέσεις μεταξύ του εξειδικευμένου πολιτιστικού υλικού και των αναμενόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων; Θεωρούν τέτοιου είδους συνδέσεις αναγκαίες, για να επιτευχθούν τα αναμενόμενα αποτελέσματα και κατά πόσο κάνουν ξεκάθαρες αυτές τις συνδέσεις στους μαθητές τους;

- 3) *Αναγκαίοι πόροι και ειδικά διαμορφωμένα υλικά, για την διδασκαλία με τη βοήθεια πολιτιστικών προσεγγίσεων*

Γνωρίζουν οι δάσκαλοι από πού να προμηθευτούν τα κατάλληλα διαμορφωμένα υλικά, που κρίνονται απαραίτητα για την εφαρμογή των πολιτιστικών προσεγγίσεων στην διδασκαλία τους;

- 4) *Επαφή με το πολιτιστικό υλικό*

Κατά πόσο το υλικό είναι άγνωστο στους εκπαιδευτικούς; Διαθέτουν επαρκείς ικανότητες στα μαθηματικά για να κατανοήσουν το νέο υλικό, αλλά και να διδάξουν το παλιό με νέους τρόπους;

- 5) *Διάρκεια των αποτελεσμάτων από την έκθεση των εκπαιδευτικών στα πολιτιστικά μαθηματικά*

Θα συνεχίσουν οι εκπαιδευτικοί την ενσωμάτωση ιστορικών και πολυπολιτισμικών προοπτικών στα μαθηματικά, ακόμα και μετά από την πρώτη χρονιά επιβλεπόμενης εφαρμογής του συγκεκριμένου υλικού; Ποιοι παράγοντες ενδέχεται να επηρεάσουν την απόφασή τους για την συνέχιση, ή διακοπή αυτής της πρακτικής;

Η ανάλυση της σημαντικότητας όλων των παραπάνω παραγόντων, θα μπορούσε να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη, σε όσους επιθυμούν την προώθηση της ενσωμάτωσης των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η αιτιολογική ενότητα του οδηγού σπουδών της Βρετανικής Κολομβίας, η οποία ενώ αναφέρει στις κατευθυντήριες γραμμές της την συμπερίληψη ιστορικών και πολιτιστικών μαθηματικών στο ωρολόγιο πρόγραμμα, κάτι τέτοιο πραγματοποιείται από ελάχιστους εκπαιδευτικούς. (Fauvel, 1991) Μέσω αυτής της έρευνας, θα γίνει δυνατή η διαλεύκανση των βασικών παραγόντων που ευθύνονται για τη συμμόρφωση τόσο μικρού ποσοστού των εκπαιδευτικών, στις οδηγίες του οδηγού σπουδών, τις οποίες θα έπρεπε κανονικά να ακολουθούν.

## Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα πτυχιακή εργασία, πέρα από την θεωρητική έρευνα, στηρίχθηκε σε ένα μέρος στην εμπειρική έρευνα την οποία διεξήγαγε η Percival το 2004, στα πλαίσια της διδακτορικής της εργασίας. Η μεθοδολογία που επιλέχθηκε στην συγκεκριμένη έρευνα, απαιτούσε την επιλογή ενός μικρού αριθμητικά δείγματος. Στην προσπάθεια να διατηρηθεί ο αντικειμενικός χαρακτήρας των αποτελεσμάτων, η ερευνήτρια επέλεξε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα εκπαιδευτικών, με διαφορετικά υπόβαθρα, ενώ παράλληλα έλαβε υπόψη την προηγούμενη γνώριμία της με τους συμμετέχοντες. Η προαναφερθείσα σκόπιμη επιλογή του δείγματος, αποτελεί περιορισμό της έρευνας, διότι θα ήταν δυνατόν να θεωρηθεί, πως η ερευνήτρια επέλεξε συμμετέχοντες οι οποίοι θα επέφεραν τα αποτελέσματα που η ίδια επιθυμούσε. (Percival, 2004 σσ. 6) Όπως αναφέρεται και από τους Guba and Lincoln, «ένας ανήθικος ερευνητής θα μπορούσε να επιλέξει μέσα από το πλήθος των ερευνητικών δεδομένων, μόνο αυτά τα οποία υποστηρίζουν την άποψη που αυτός επιθυμεί να προβάλλει.» (Lincoln, & Guba, 1985)

Επιπλέον, η προηγούμενη εμπειρία της ερευνήτριας, στην διδασκαλία των πολιτιστικών μαθηματικών, θα μπορούσε να θεωρηθεί πως την καθιστά προκατειλημμένη. Στην προσπάθειά της να ελαχιστοποιήσει την πιθανότητα εμπλοκής οποιασδήποτε προσωπικής της προκατάληψης, επέλεξε να συμπεριλάβει σχόλια, μαρτυρίες και πράξεις των εκπαιδευτικών αυτούσιες. Όπως αναφέρεται και από τους Philip και Heather Hodgkinson, λόγω του μεγάλου όγκου δεδομένων που προκύπτουν κατά τη διάρκεια μιας έρευνας περιπτώσεων, ο εκάστοτε ερευνητής είναι αναγκασμένος να λάβει αποφάσεις για την σημαντικότητα τους, καθώς και με ποιόν τρόπο θα επιλέξει να τα διαμορφώσει. Έτσι καμία έρευνα δεν είναι, ούτε θα μπορούσε να είναι εντελώς αντικειμενική. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, ένας καλός ερευνητής οφείλει να παρουσιάζει απτά στοιχεία, τα οποία να υποστηρίζουν τα συμπεράσματά του (Hodkinson & Hodgkinson, 2001).

Ένα ακόμα πιθανό πρόβλημα θα μπορούσε να θεωρηθεί ο δυαδικός ρόλος της ως εκπαιδευτικός αλλά και ερευνήτρια. Λόγω αυτού επέλεξε να περιορίσει στο ελάχιστο την δική της εμπλοκή παρά μόνο όταν κρινόταν εντελώς απαραίτητη ή της ζητούνταν από τους εκπαιδευτικούς ( Percival, 2004 σσ. 6).

Λόγω της πραγματοποίησης της έρευνας σύμφωνα με το πρόγραμμα του εκάστοτε εκπαιδευτικού, η ερευνήτρια δεν ήταν σε θέση να παρευρίσκεται σε όλα τα μαθήματα που έλαβαν χώρα. Για να αντιμετωπίσει αυτό το πρόβλημα ενημερωνόταν από τους εκπαιδευτικούς είτε μέσω συζητήσεων, είτε μέσω ηχογραφημένου (σπανίως βιντεοσκοπημένου) υλικού του μαθήματος.

Τέλος, η περιορισμένη χρονική διάρκεια της έρευνας είναι σε θέση να μας παρέχει ένα μεγάλο μέρος πληροφοριών, αλλά δεν επαρκεί για να καθοριστούν με βεβαιότητα τα μακροχρόνια αποτελέσματα της εφαρμογής των πρακτικών που εξετάζονται (Percival, 2004 σσ. 7).

## Κεφάλαιο 2

### Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Υπάρχει μια προφανής αντίθεση μεταξύ των πολιτιστικών προσεγγίσεων και των παραδοσιακών φιλοσοφιών όσο αφορά το αντικείμενο των μαθηματικών. Έτσι, για να επικυρωθεί η χρήση των πολιτιστικών προσεγγίσεων στα πλαίσια της σχολικής τάξης, αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσει με μια αναφορά στην αλλαγή της ιδεολογικής δομής που συνέβη στην φιλοσοφία των μαθηματικών, την συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Η επόμενη υποενότητα, θα πραγματευτεί την ενσωμάτωση των ιστορικών και των πολυπολιτισμικών προοπτικών, όσο αφορά την μαθηματική εκπαίδευση και θα ακολουθηθεί από μια συνοπτική ανακεφαλαίωση, των ιδεών του φιλοσοφικού πλαισίου αυτού του τομέα. Η τελευταία υποενότητα, θα προχωρήσει σε μια σύνοψη στοιχείων για την χρήση των πολιτιστικών προοπτικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ στην συνέχεια θα ασχοληθεί συνοπτικά με το εύρος προώθησης τέτοιων ιδεών, από τους οδηγούς σπουδών σε ολόκληρο τον κόσμο (Percival, 2004 σσ. 9).

### Η αλλαγή της ιδεολογικής δομής στη φιλοσοφία των μαθηματικών

Η ορμή για την αντικατάσταση των απολυταρχικών παραδοσιακών φιλοσοφιών των μαθηματικών, προήλθε από τα γεγονότα του ευρύτερου πεδίου της φιλοσοφίας της επιστήμης. Όπως αναφέρει και ο Paul Ernest:

«υπάρχει μια αλλαγή της ιδεολογικής δομής στη φιλοσοφία των μαθηματικών.... Παρόλο που η παραδοσιακή προσέγγιση υποστηρίζεται από τους Benacerraf και Putnam (1983), μια νέα νατουραλιστική στροφή στην φιλοσοφία των μαθηματικών έχει αρχίσει ήδη να αναδύεται. Αυτή η μεταστροφή αποτελεί ένα ασαφές κίνημα, το οποίο οι Aspray και Kitcher (1988) ονομάζουν “αντικομοφορμιστική” παράδοση. Αυτό που συνδέει το συγκεκριμένο κίνημα, είναι μια κοινή απόρριψη των επιστημολογικών υποθέσεων της “κανονιστικής” φιλοσοφίας των μαθηματικών και μια θετική στάση, απέναντι στην διεύρυνση του πεδίου της φιλοσοφίας του αντικειμένου» ( Ernest, 1991 σσ.335-350).

Τόσο η ιδέα του Kuhn περί «επιστημονικών επαναστάσεων», όσο και η θέση του Popper για την πιθανότητα ύπαρξης λαθών στις επιστημονικές θεωρίες, οδήγησαν στην επανεκτίμηση της φύσης του συγκεκριμένου θέματος. Ο Ούγγρος μαθηματικός Lakatos, έντονα επηρεασμένος από το έργο του Popper δημιούργησε

μια σειρά άρθρων κατά την διάρκεια των ετών 1963-64, στα οποία πρόβαλε την ιδέα πως οι μαθηματικές θεωρίες δεν χρειάζεται και για την ακρίβεια δεν είναι δυνατόν, να είναι απόλυτα λογικές, οριστικές και αμετάκλητες (Percival, 2004 σσ. 9). Μετά από δεκατρία χρόνια, το σύνολο αυτών των άρθρων εμφανίστηκε στο βιβλίο του «Αποδείξεις και Διαψεύσεις» («Proofs and Refutations»), στο οποίο αναλύει την πεποίθησή του, πως «τα άτυπα, καθημερινά μαθηματικά δεν εξελίσσονται μέσα από την μονότονη αύξηση του αριθμού των αδιαμφισβήτητων θεωρημάτων, αλλά με τη σταδιακή βελτίωση εικασιών μέσω της κριτικής, σύμφωνα με την λογική των αποδείξεων και των διαψεύσεων» (Lakatos, 1976 σσ. 5). Επίσης, εξηγεί πως η οριστικότητα αποτελεί «ένα ευχάριστο μπόνους, χωρίς όμως να είναι υποχρεωτική» (Lakatos, 1976, σσ. 64). Οι ιδέες του για την πιθανότητα της ύπαρξης λαθών στις θεωρίες των μαθηματικών, αλλά και η συνειδητοποίηση της σημαντικότητας ολόκληρης της κοινότητας των μαθηματικών και όχι μεμονωμένων ατόμων, αποτελούν τα δύο βασικά θέματα των σύγχρονων μαθηματικών φιλοσοφιών (Percival, 2004 σσ. 10).

Με την βοήθεια των ιδεών του Lakatos και άλλων μαθηματικών και ερευνητών, πλέον το αντικείμενο των μαθηματικών δεν διαθέτει απόλυτες και οριστικές αποδείξεις, αλλά ουσιαστικά αποτελεί ένα σύνολο θεωριών με μεγάλη πιθανότητα ορθότητας. Ακολουθώντας τα βήματα του, ο Hersh (1994) απορρίπτοντας την παραδοσιακή υπόθεση της Δυτικής φιλοσοφίας, πως οποιοδήποτε αντικείμενο έχει φυσική ή νοητική υπόσταση, υποστήριξε την ύπαρξη ενός πλήθους αφηρημένων εννοιών και αντικειμένων, τα οποία δεν ανήκουν σε καμία από τις δύο παραπάνω κατηγορίες. Το επιχείρημά του για την ύπαρξη μιας τρίτης κατηγορίας αντικειμένων, την οποία ονόμασε «κοινωνικο-πολιτιστικο-ιστορική οντότητα», είναι βασισμένη στο έργο του Karl Popper ο οποίος πρώτος έκανε λόγο για την ύπαρξη τριών «κόσμων», οι οποίοι βοηθούν στον διαχωρισμό μεταξύ των τριών επιπέδων της πραγματικότητας. Στην παραπάνω θεωρία, ο πρώτος κόσμος περιέχει το σύνολο των φυσικών αντικειμένων, ο δεύτερος αποτελεί τον νοητικό κόσμο, ενώ ο τρίτος αποτελείται από «όλη την μη υλική κουλτούρα της ανθρωπότητας ... στην οποία ανήκουν και τα μαθηματικά» (Davis, & Hersh, 1981 σσ. 410).

Η έννοια της επιστήμης των μαθηματικών που εξελίχθηκε μέσω του έργου των μαθηματικών τις δεκαετίες του '70 και του '80, έγινε ευρέως γνωστή μετά από την ίδρυση του *Humanistic Mathematics Network (HMN)* το 1986. Αυτός ο οργανισμός αποτελούνταν από πανεπιστημιακούς μαθηματικούς, εκπαιδευτικούς και φιλόσοφους των μαθηματικών, οι οποίοι κλήθηκαν από τον Alvin White για να συζητήσουν για την σχέση μεταξύ των μαθηματικών και των ανθρωπιστικών επιστημών. Βασικός σκοπός του συγκεκριμένου οργανισμού αποτελούσε η επίλυση της γενικότερης δυσαρέσκειας που επικρατούσε εκείνη την χρονική περίοδο, για τον τρόπο με τον οποίο προβάλλονταν το αντικείμενο των μαθηματικών και στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Percival, 2004, σσ. 10). Εφόσον το HMN εξέδωσε έξι τεύχη μετονομάστηκε, με την καινούργια του ονομασία να είναι πλέον *The Humanistic Mathematics Network Journal (HMNJ)* και συνέχισε να ευδοκίμει μέχρι το 2004, συνδέοντας άτομα με πάθος για το αντικείμενο των πολιτιστικών μαθηματικών (Skrivanos, & Zhang, 2013 σσ.33).

Έτσι δημιουργήθηκε από τον Brown η παρακάτω λίστα αρχών, αναφορικά με την ενσωμάτωση των ιστορικών και πολυπολιτισμικών προσεγγίσεων, στην εκμάθηση των μαθηματικών:

- 1) Εκτίμηση του ρόλου της διαίσθησης όχι μόνο στην κατανόηση, αλλά και στη δημιουργία εννοιών που εμφανίζονται στην τελική τους μορφή «απλώς τεχνικές».
- 2) Εκτίμηση των ανθρώπινων διαστάσεων που παρακινούν την ανακάλυψη, τον ανταγωνισμό, τη συνεργασία και την παρόρμηση για την δημιουργία ολιστικών εικόνων.
- 3) Κατανόηση της αξίας της κριτικής ως μέσο εξέλιξης. Η λογική από μόνη της δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τι ερευνάται, με ποιόν τρόπο και για ποιόν λόγο.
- 4) Ανάγκη για δημιουργία δομών διδασκαλίας και μάθησης, οι οποίες θα βοηθήσουν στην απομάκρυνση των μαθητών από την άποψη πως η γνώση αποτελεί κάτι σίγουρο και οριστικό.
- 5) Δημιουργία ευκαιριών για τους μαθητές, συμπεριλαμβάνοντας την ευκαιρία να σκεφτούν σαν έναν μαθηματικό, να εργαστούν πάνω σε θέματα με μικρή ευκρίνεια και έτσι να δημιουργηθούν νέα προβλήματα, τα οποία θα οδηγήσουν σε γόνιμες συζητήσεις και διαφωνίες πάνω σε μαθηματικά ζητήματα (Brown, 1996 σσ. 1302).

Ο Hersh (1979, 1994; Davis, & Hersh, 1981) ασχολήθηκε εκτενώς με την φιλοσοφία των μαθηματικών, προωθώντας την άποψη πως η μαθηματική γνώση είναι τόσο επιρρεπής σε λάθη, αβέβαιη και εξελισσόμενη, όσο οποιοσδήποτε άλλος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα πως τα μαθηματικά πρέπει να κατανοηθούν, ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα η οποία λαμβάνει χώρα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Σύμφωνα με τον ίδιο

«Τα μαθηματικά δεν έχουν ούτε φυσική, ούτε νοητική υπόσταση αλλά κοινωνική. Αποτελούν μέρος της κουλτούρας και της ιστορίας όπως οι νόμοι, η θρησκεία, το χρήμα, όπως όλα αυτά τα πολύ αληθινά πράγματα που είναι αληθινά μόνο ως ένα μέρος της συλλογικής ανθρώπινης συνείδησης» (Katsap, 2002 σσ. 18).

Στο βιβλίο του «*What is mathematics really?*» (1997) ο Hersh έκανε λόγο για το έργο άλλων επιστημόνων όπως των Wilder και Ernest οι οποίοι υποστήριζαν την ίδια άποψη, όσο αφορά την επιστήμη των μαθηματικών. Ο καθένας εξ αυτών των τριών επιστημόνων, εστίαζε σε μια διαφορετική πλευρά του ρόλου του ανθρώπινου στοιχείου στην εξέλιξη των μαθηματικών όπως: η ιστορία και οι εφαρμογές, η θέση τους στην ανθρώπινη κουλτούρα και οι καθημερινές πρακτικές των μαθηματικών επιστημόνων. Έτσι δημιουργήθηκε μια ιστορική και πολυπολιτισμική επίγνωση, όσο



αφορά την επιστήμη των μαθηματικών, η οποία ενσωματώθηκε στην μοντέρνα φιλοσοφία του αντικειμένου.

## Η επιρροή των πολιτιστικών προοπτικών στη παιδαγωγική των μαθηματικών

Ντετερμινιστικές φιλοσοφίες των μαθηματικών περιγράφουν την πειθαρχία ως αποπροσωποποιημένη και απομονωμένη από το συγκείμενο, έτσι υιοθετούν μια παιδαγωγική η οποία υποστηρίζει την σημαντικότητα των κανόνων μάθησης, των θεωρημάτων και των αποδείξεων με ελάχιστες αναφορές στην ανθρωπιστική τους καταγωγή (Davis, & Hersh, 1981). Όταν οι παραπάνω φιλοσοφίες αντικαταστάθηκαν από νέες, οι οποίες βασίζονταν σε κονστρουκτιβιστικές και ανθρωπιστικές αρχές, έγινε δυνατή η εξέταση του αντικειμένου των μαθηματικών, μέσω ενός ιστορικού και πολυπολιτισμικού πρίσματος, χωρίς διαμάχες. Όπως αναφέρεται και από τον Katz, «η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του αντικειμένου... και μέσω αυτού, είναι δυνατή η παρουσίαση μιας πληρέστερης εικόνας του τι ακριβώς είναι τα μαθηματικά, στο ευρύτερο κοινωνικό σύνολο» (Katz, 2000 σσ. 3). Η παρούσα ενότητα, θα ασχοληθεί με τα διάφορα επιχειρήματα που έχουν παρουσιαστεί με σκοπό την αιτιολόγηση, ή την αμφισβήτηση της υιοθέτησης των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά.

### Αλλάζοντας τις αντιλήψεις δασκάλων και μαθητών για τα μαθηματικά

Η βιβλιογραφία με θέμα τις πεποιθήσεις των μαθητών όσο αφορά τα μαθηματικά, συνοψισμένη από τον McLeod (1992), κάνει λόγο για την σημαντικότητα, την δυσκολία, την οδηγούμενη από κανόνες φύση των μαθηματικών αλλά και για την μοναδικότητα των αλγορίθμων και την ταχύτητα με την οποία είναι δυνατή η επίλυση των προβλημάτων. Παρόλα αυτά, δεν κάνει την παραμικρή αναφορά στις πεποιθήσεις των μαθητών, για το πολιτιστικό υπόβαθρο του αντικειμένου.

Πλήθος κειμένων τα οποία επικεντρώνονται σε ιστορικά και πολυπολιτισμικά θέματα, συγκλίνουν στο γεγονός πως οι μαθητές δεν γνωρίζουν την καταγωγή των μαθηματικών (Swetz, 1994; Zaslavsky, 1996). Όπως αναφέρει η Thompson (1984), μόνο ένα μικρό ποσοστό δασκάλων διαθέτει γνώσεις για την ιστορία των μαθηματικών, ενώ οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί εξισώνουν το αντικείμενο των μαθηματικών με αυτό που διδάσκεται στο σχολείο, αντικρούοντας τις μοντέρνες φιλοσοφίες περί πειθαρχίας. Σύμφωνα με τους Fauvel και Van Maanen, μια πιθανή λύση σε αυτό το πρόβλημα θα αποτελούσε η υιοθέτηση συστημάτων επιβράβευσης, με σκοπό την αναγνώριση του κόπου που καταβάλουν οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι

εξελίσσουν τις ικανότητές τους, όσο αφορά τις ιστορικές και πολυπολιτισμικές προοπτικές, στον τομέα των μαθηματικών. Μέσω της εφαρμογής μιας τέτοιας τακτικής, οι εκπαιδευτικοί είναι πιθανότερο να είναι καλύτερα ενημερωμένοι και να διαθέτουν μεγαλύτερο κίνητρο, εφόσον θα υπάρξει έντονα η σκέψη της ανταμοιβής (Fauvel, & Van Maanen, 2000 σσ. 32).

## Τα μαθηματικά ως ένα ανθρώπινο εγχείρημα

Η συνειδητοποίηση πως τα μαθηματικά στην πραγματικότητα αποτελούν δημιούργημα των ανθρώπων, έρχεται σε άμεση αντίθεση με την κοινώς αποδεκτή πεποίθηση των μαθητών πως «βρίσκονται απλώς στο κεφάλι του δασκάλου, ή εμφανίζονται στην ολοκληρωμένη τους μορφή στα μαθηματικά εγχειρίδια» (Zaslavsky, 1996 σσ.29). Ένα αρκετά ισχυρό επιχείρημα όσον αφορά τις πολιτιστικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά, το οποίο έχαιρε μεγάλης εκτίμησης και αποδοχής ιδιαίτερα στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα ήταν το βιολογικό, η άποψη δηλαδή πως η ανάπτυξη της γνώσης του ατόμου, ακολουθεί την ίδια την ιστορία των μαθηματικών. Η παραπάνω άποψη αποτελούσε το κυριότερο χαρακτηριστικό των απόψεων του Spenser, οι οποίες ασκούσαν σημαντική επιρροή στην εκπαίδευση την δεκαετία του 1860. Σύμφωνα με τον Spenser:

«Η εκπαίδευση ενός παιδιού, πρέπει να ακολουθεί τον τρόπο και τη διάταξη της εκπαίδευσης της ανθρωπότητας, όπως αυτή θεωρείται από την ιστορία. Με άλλα λόγια, η γένεση της γνώσης του μαθητή επιβάλλεται να ακολουθεί την ίδια πορεία, με αυτήν της γένεσης της γνώσης της ανθρώπινης φυλής» (Spenser, 1896 σσ. 3).

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, η αναφορά ιστοριών και περιστατικών από τις ζωές των ανδρών και των γυναικών, που συνέβαλαν στην δημιουργία και εξέλιξη των μαθηματικών, είναι ικανή να διαλύσει τον μύθο πως τα μαθηματικά ήταν από πάντα τα ίδια σε όλο τον κόσμο, ενώ επιπλέον με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα είναι σε θέση να κατανοήσουν πως τα μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινο εγχείρημα και έτσι κατ' επέκταση, πως είναι και αυτοί σε θέση να συμμετέχουν (Reimer, & Reimer, 1995 c). Αυτού του είδους οι ιστορίες, δεν αποδεικνύουν μόνο την ανθρώπινη καταγωγή των μαθηματικών, αλλά επίσης προσφέρουν στους μαθητές ένα όνομα και έναν τόπο ή ένα γεγονός, μέσω του οποίου μπορούν να βοηθηθούν και να ανακαλέσουν στην μνήμη τους το ανάλογο υλικό (Kelly, 2000).

Παρόλα αυτά, η ακαδημαϊκή κοινότητα φαίνεται διχασμένη όσο αφορά την συγκεκριμένη στρατηγική. Σύμφωνα με τον Fowler, τέτοιου είδους αφηγήσεις «ενδέχεται να δημιουργήσουν ένα μυθικό και απλουστευμένο παρελθόν, αδικώντας με αυτόν τον τρόπο την ιστορία» (Fowler, 1991 σσ. 12). Μια πιο σύγχρονη άποψη στο ίδιο πνεύμα αποτελεί αυτή του Michael N. Fried, η οποία υποστηρίζει πως η κυριότερη δυσκολία στο εγχείρημα της υιοθέτησης των ιστορικών προσεγγίσεων στην διδασκαλία των μαθηματικών, αποτελεί το γεγονός πως η επίτευξη αυτού του στόχου έρχεται αντιμέτωπη με την δέσμευση διδασκαλίας των μοντέρνων

μαθηματικών τεχνικών, έτσι ο εκπαιδευτικός θα αναγκαστεί να υποβαθμίσει, ή να διαστρεβλώσει την ιστορία ( Fried, 2001 σσ. 391). Από την άλλη πλευρά, ο Fuhrer (1991) υποστηρίζει πως τα ιστορικά δεδομένα εξ ορισμού δεν είναι σε θέση να θεωρηθούν ως η βέβαιη αλήθεια, καθώς και πως μέσω της αφήγησης μιας καλής ιστορίας ενδέχεται να ενταθεί το ενδιαφέρον των μαθητών ως προς την μελέτη των μαθηματικών λεπτομερειών (σσ. 25), αλλά και να είναι σε θέση να θυμούνται μεγαλύτερο μέρος του υλικού που διδάσκονται. Ένα ακόμα επιχείρημα του Fuhrer το οποίο υποστηρίζεται και από το έργο του Egan (1986), αφορά την σημαντικότητα της αφήγησης ιστοριών ως ένα μέσο αύξησης της φαντασίας των παιδιών, κάτι το οποίο ο ίδιος θεωρεί πολύ σημαντικό και υποτιμημένο εργαλείο μάθησης.

Οι μαθητές θα είναι σε θέση να συμμετέχουν ακόμα περισσότερο, στην ανθρωπιστική πλευρά των μαθηματικών, μέσω διάφορων δραστηριοτήτων όπως δραματοποιήσεις με θεματικό άξονα τις ζωές γνωστών μαθηματικών, τον εορτασμό των γενεθλίων συγκεκριμένων μαθηματικών ή ακόμα την δημιουργία διαλόγων σε στυλ τηλεοπτικών συνεντεύξεων, όπου οι μαθητές στον ρόλο ενός ή μιας μαθηματικού θα απαντούν ερωτήσεις για την ζωή τους. Σύμφωνα με τον Van Maanen, αν και αυτού του είδους οι δραστηριότητες καταναλώνουν αρκετό χρόνο, «η ενεργή εμπλοκή των μαθητών σε αυτές... θα μπορούσε να έχει πλεονεκτήματα που θα διαρκέσουν εφ' όρου ζωής... καθώς θα εξασφαλιστεί η υιοθέτηση των ιδεών της εξέλιξης των μαθηματικών δυνάμεων των μαθητών» (Fauvel, & Van Maanen, 2000 σσ. 332).

## Μαθηματικά από και για όλους τους πολιτισμούς

Η μελέτη του έργου συγκεκριμένων μαθηματικών, αποτελεί έναν εύκολο τρόπο εξανθρωπισμού της μαθηματικής επιστήμης. Παρόλα αυτά, οι μαθηματικές έννοιες έχουν αναπτυχθεί σταδιακά στο πέρασμα του χρόνου και δεν αποτελούν επίτευγμα ενός μόνο ατόμου (Percival, 2004 σσ. 14). Έτσι, ο Bishop μετά από την ανάλογη έρευνα πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, πρότεινε τους έξι παρακάτω τομείς της καθημερινότητας, στους οποίους τα μαθηματικά εξελίχθηκαν :

- I. Καταμέτρηση
- II. Μέτρηση
- III. Εντοπισμός
- IV. Σχεδιασμός
- V. Παιχνίδι
- VI. Επεξήγηση

Μέσω του βιβλίου του “Mathematical Enculturation”, προσεγγίζει τα μαθηματικά ως ένα αντικείμενο το οποίο εξελίχθηκε για να δώσει λύση στις ανάγκες των ανθρώπων σε ολόκληρο τον κόσμο, ενώ παράλληλα προτείνει έναν τρόπο διδασκαλίας τους, ο οποίος διαφέρει ριζικά από τον παραδοσιακό οδηγό σπουδών. Επιπλέον, υποστηρίζει πως η επίγνωση του πολιτιστικού υπόβαθρου των μαθηματικών, αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για οποιαδήποτε πολυπολιτισμική εργασία αναφορικά με το συγκεκριμένο αντικείμενο, ενώ επιπροσθέτως αναφέρει

πως «για να είναι κάποιος σε θέση να δώσει πολυπολιτισμικό χαρακτήρα σε έναν οδηγό σπουδών, πρέπει πρώτα να του δώσει πολιτιστικό χαρακτήρα» (Bishop, 1988 σσ. 96).

Παρόλη την συμβολή διάφορων πολιτισμών στην εξέλιξη της επιστήμης των μαθηματικών, τα μαθηματικά τα οποία παρουσιάζονται στις σχολικές τάξεις αποτελούν αυτά μιας Ευρωπαϊκό-κεντρικής παράδοσης. Με αυτόν τον τρόπο, αγνοείται πλήθος εγχώριων μαθηματικών που προέρχονται από άλλα μέρη του κόσμου, αρκετά εκ των οποίων θα έδιναν στο συγκεκριμένο αντικείμενο μια διαφορετική φιλοσοφία, πέρα από τη δομημένη και λογική Ευρωπαϊκή μέθοδο (Percival, 2004 σσ. 14).

Έχει υποστηριχτεί πως η χρήση ενός Ευρωπαϊκόκεντρικού οδηγού σπουδών, αποτελεί μια αντιπαραγωγική τακτική όσο αφορά την ένταξη μαθητών οι οποίοι προέρχονται από μειονότητες, στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός πως η έλλειψη ενός εθνικού πρότυπου, θα ήταν ικανή να οδηγήσει τους μαθητές στο λανθασμένο συμπέρασμα, πως άτομα από μη Ευρωπαϊκούς πολιτισμούς δεν είναι ικανά να εργαστούν στον τομέα των μαθηματικών. Έτσι, παρουσιάζοντας σε αυτούς τους μαθητές μαθηματικά τα οποία δημιουργήθηκαν και εξελίχθηκαν από άτομα της δικής τους εθνικότητας, δεν τους παρέχεται μόνο περηφάνια όσο αφορά την καταγωγή τους, αλλά επίσης αυξάνεται ραγδαία και η αυτοπεποίθησή τους (D' Ambrosio, 2001; Shirley, 1995; Wiest, 2002; Zaslavsky, 1996).

Λόγω όλων των παραπάνω, ο πολιτιστικός πλουραλισμός πολλές φορές θεωρείται ένα από τα πιο σημαντικά επιχειρήματα για την συμπερίληψη των πολυπολιτισμικών μαθηματικών στην σχολική τάξη (D' Ambrosio, 2001; Zaslavsky, 1991, 1996). Μια παραπλήσια άποψη είναι και αυτή του Joseph, ο οποίος υποστήριξε πως τέτοιου είδους υλικό θα έπρεπε να συμπεριλαμβάνεται στον οδηγό σπουδών, «όχι πρωτίστως για να τονώσει την αυτοπεποίθηση των μαθητών των μειονοτήτων, αλλά για να βοηθήσει όλα τα παιδιά να ενταχθούν πιο αποτελεσματικά, σε ένα πολυπολιτισμικό περιβάλλον» (Joseph, 1993 σσ.6). Στο ίδιο πνεύμα ο D' Ambrosio υποστήριξε, πως οι πολυπολιτισμικές μαθηματικές δραστηριότητες είναι αρκετά σημαντικές, όχι μόνο όσο αφορά την ανάπτυξη σεβασμού των μαθηματικών άλλων πολιτισμών, αλλά και για να βοηθήσουν τους μαθητές να «αναπτύξουν μεγαλύτερο σεβασμό για αυτούς που διαφέρουν από τους ίδιους» (D' Ambrosio, 2001, σσ. 308). Επιπλέον, έθιξε την καταλληλότητα αυτού του είδους των δραστηριοτήτων οι οποίες λάμβαναν χώρα εκείνη τη χρονική περίοδο, χαρακτηρίζοντάς τες ακατάλληλες, εφόσον οι εκπαιδευτικοί τις εφάρμοζαν λόγω απλής περιέργειας.

Στα βήματα του D' Ambrosio, ο Zaslavsky εξέφρασε και αυτός παρόμοιες απόψεις, καθώς χαρακτήρισε ως «πρωτόγονες πρακτικές» τις δραστηριότητες που εφαρμόζονταν, προσθέτοντας πως «είναι εύκολο να υποβαθμιστεί η έννοια των πολυπολιτισμικών μαθηματικών χρησιμοποιώντας τα ως παραδείγματα σε προσεγγίσεις θεμάτων όπως αυτά των εορτών. Καλύτερα να μην εφαρμόζονται καθόλου!» (Zaslavsky, 1993b σσ.53).

Οι εκπαιδευτικοί στην προσπάθειά τους να εντάξουν μη Ευρωπαϊκά μαθηματικά, πρότειναν δραστηριότητες όπως η ιχνογραφία περίπλοκων συστημάτων

στην άμμο (Zaslavsky, 1973) ή η εξερεύνηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας η οποία κρύβεται στα πλεκτά κουμπιά των Μοζαμβίκων (Gerdes, 1997) διαφωτίζοντας με αυτόν τον τρόπο τα θέματα του παραδοσιακού οδηγού σπουδών. Ο Pimm παραδέχτηκε πως «περιλαμβάνοντας την εξερεύνηση και εκτίμηση της ποικιλομορφίας των μαθηματικών πρακτικών, διαφορετικών ανθρώπων και πολιτισμών, η μαθηματική εκπαίδευση θα μπορούσε να συνεισφέρει στην διατήρηση της πνευματικής ποικιλομορφίας, ζωντανής και παραγωγικής» (Pimm, 1995 σσ.135). Παρόλα αυτά, ήταν αντίθετος σε τέτοιου είδους πρακτικές, θέτοντας το βασικό ερώτημα εάν και κατά πόσο, τα μέλη αυτών των πολιτιστικών ομάδων πίστευαν πως όντως διδάσκονταν μαθηματικά, σε αυτές τις συνθήκες.

Πρώιμες προσπάθειες ένταξης πολιτιστικών μαθηματικών στην Αγγλία ήρθαν αντιμέτωπες με την *Καμπάνια για Πραγματική Εκπαίδευση (Campaign for Real Education)* το 1984, η οποία υποστήριζε πως τα κοινωνικά ζητήματα δεν έχουν καμία θέση στα μαθηματικά. Την ίδια χρονιά η Margaret Thatcher εξέφρασε τη δυσαρέσκειά της, καθώς σύμφωνα με την ίδια «παιδιά που θα έπρεπε να μαθαίνουν να υπολογίζουν και να πολλαπλασιάζουν διδάσκονται αντιρατσιστικά μαθηματικά-ότι και αν είναι αυτό» (Ernest, 1991). Λίγα χρόνια μετά, οι Shan και Bailey πραγματοποίησαν μια δυνατή επίθεση στον παραδοσιακό οδηγό σπουδών, όσο αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση μέσω του βιβλίου τους με τίτλο “*Multiple Factors: Classroom Mathematics for Equality and Justice*”. Το παραπάνω σύγγραμμα προώθησε την ιδέα, πως τα σχολικά μαθηματικά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ως ένας τόπος δημόσιας συζήτησης, μέσω του οποίου θα αποκαλύπτονταν οι κοινωνικές ανισότητες και αδικίες, που ακόμα επικρατούσαν στο μεγαλύτερο μέρος του κόσμου. Παράλληλα πρότεινε την σύγκριση στατιστικών από χώρες του «πρώτου κόσμου» και του «τρίτου κόσμου», ως έναν τρόπο επίτευξης αυτού του στόχου (Shan & Bailey, 1991).

Σύμφωνα με την Shan, αν και μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών ήταν πρόθυμοι να υιοθετήσουν πολυπολιτισμικά στοιχεία στην διδασκαλία των μαθηματικών, κανένας δεν ήταν πρόθυμος να χρησιμοποιήσει την διδασκαλία αυτού του αντικειμένου, για να εξερευνήσει ζητήματα ισότητας και δικαιοσύνης. Ο Tate πρότεινε δύο πιθανούς λόγους για αυτόν τον δισταγμό, υποστηρίζοντας πως οι εκπαιδευτικοί ενδέχεται να μην νιώθουν άνετα κάνοντας λόγο για κοινωνικά και φυλετικά ζητήματα στα μαθήματά τους, εν μέρει διότι αυτό αποτελεί αποχώρηση από τη παραδοσιακή προσέγγιση των μαθηματικών, αλλά επίσης διότι «έχουν εκπαιδευτεί να μην χρησιμοποιούν τη φυλή ως ευρετικό οδηγό στη παιδαγωγική τους» (Tate, 1995 σσ.349). Επιπλέον, θεωρεί πιθανόν οι εκπαιδευτικοί να θεωρούν πως τα μαθηματικά «κινδυνεύουν», όταν τα μαθήματα εστιάζουν σε κοινωνικά ή πολιτικά ζητήματα, παρόλο που οι αναλύσεις τέτοιων μαθημάτων έφτασαν στο συμπέρασμα, πως το ανάλογο περιεχόμενο του οδηγού σπουδών και πάλι καλύπτονταν.

Οι ιδέες που μέχρι τώρα αναφέρθηκαν, εστιάζουν κυρίως στην εθνική διάσταση του πολιτισμού, αλλά ο Zaslavsky (1996) σημείωσε πως στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο ομάδες των οποίων η συνεισφορά στα μαθηματικά αγνοείται σε συνεχόμενη βάση: «των γυναικών και των έγχρωμων», κάτι το οποίο αναγνωρίστηκε από το NCTM στο ετήσιο ημερολόγιό τους το 1997 το οποίο είχε τον τίτλο: “*Multicultural and Gender Equality in the Mathematics Classroom*”

(Trentacosta, & Kenney, 1997). Η έννοια του φύλου ως η βάση των προκαταλήψεων στα μαθηματικά, είναι κάτι το οποίο αναφέρεται αρκετά συχνά (Campbell, 1995; Leder, 1992; Secada, 1992). Σύμφωνα με την Eccles J.S., παρόλες τις προσπάθειες για την βελτίωση της κατάστασης μέσω υποτροφιών και άλλων μέτρων, τα στατιστικά δεδομένα δείχνουν πως τα ποσοστά των γυναικών και των ανδρών, που εισέρχονται σε τομείς επαγγελματών οι οποίοι σχετίζονται με τα μαθηματικά, είναι κατά πολύ άνισα (Eccles, 1989). Ο Ernest (1991) ασχολήθηκε με το συγκεκριμένο ζήτημα σε σχέση με τη θεωρία των ηθικών πλαισίων που προτάθηκε από την Gilligan (1982), κάνοντας λόγο για την εξάρτηση της παραδοσιακής μαθηματικής παιδαγωγικής, από το «ξεχωριστό» πλαίσιο το οποίο συχνά θεωρείται μέρος του πολιτιστικού προσδιορισμού της αρρενωπότητας, σημειώνοντας πως τέτοιοι μέθοδοι συνάδουν με τις ντετερμινιστικές φιλοσοφίες των μαθηματικών. Οι σύγχρονες ανθρωπιστικές και κονστρουκτιβιστικές φιλοσοφίες από την άλλη πλευρά, συνάδουν με ένα «συνδεδεμένο» πλαίσιο το οποίο επικεντρώνεται στην στοργή και την εμπάθεια, κάτι που θεωρείται ως επί το πλείστον θηλυκό.

Προς την ίδια κατεύθυνση, μια εθνική έρευνα η οποία έλαβε χώρα το 2004 και είχε ως δείγμα 1.722 γυναίκες, οι οποίες φοιτούσαν σε 29 πανεπιστήμια των Ηνωμένων Πολιτειών, σε προπτυχιακά προγράμματα των θετικών επιστημών, ανακάλυψε πως οι έγχρωμες γυναίκες είχαν λιγότερο δυνατό το αίσθημα του «ανήκειν», από ότι οι λευκές γυναίκες. Επιπλέον, οι έγχρωμες αφρικανικής καταγωγής γυναίκες, λάμβαναν λιγότερο θετικό κλίμα στα πλαίσια της πανεπιστημιούπολης, όσο αφορά την καταγωγή τους, από ότι οι υπόλοιπες γυναίκες άλλων εθνικών ομάδων (Dawn, 2007). Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, προκύπτει ένα συμπέρασμα το οποίο συμφωνεί με τις απόψεις του Zaslavsky, ότι δηλαδή όχι μόνο αγνοείται η συνεισφορά των γυναικών στο αντικείμενο των μαθηματικών, αλλά αποθαρρύνονται και από την συμμετοχή τους σε τομείς των θετικών επιστημών.

Μεγάλο μέρος κειμένων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αναφορικά με τις συγκεκριμένες ιστορικές και πολυπολιτισμικές προσεγγίσεις, διαφωτίζουν εν μέρη την συνεισφορά των γυναικών (Percival, 2004 σσ.16). Παρόλα αυτά, σύμφωνα με την Anglin η υπερβολική έμφαση του ρόλου των γυναικών στα μαθηματικά, είναι ικανή όχι μόνο να διαταράξει, αλλά ακόμα και να χειραγωγήσει την ιστορία (Anglin, 1992). Προς την ίδια κατεύθυνση, ο Joseph εξέφρασε παρόμοια ανησυχία εναντίον της υιοθέτησης συγκαταβατικής συμπεριφοράς, σε ότι έχει να κάνει με τα μαθηματικά των μειονοτήτων, αναφέροντας πως τέτοιου είδους πολιτικά ζητήματα, οφείλουν να διαχειρίζονται με ευαισθησία (Joseph, 1993).

## Πεποιθήσεις για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων

Όσο αφορά το αντικείμενο των μαθηματικών, φαίνεται πως υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ των προϋπάρχοντων πεποιθήσεων των μαθητών και την μάθηση. Οι εμπειρίες των μαθητών όσο αφορά τη μάθηση, ενδέχεται να επηρεάσουν άμεσα τις πεποιθήσεις τους για το τι σημαίνει εκμάθηση μαθηματικών, ενώ από την άλλη πλευρά οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά, είναι πιθανό να

επηρεάσουν τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγίσουν νέες μαθηματικές εμπειρίες. Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι προφανές πως οι προϋπάρχουσες πεποιθήσεις στον τομέα των μαθηματικών, επηρεάζουν έντονα την αξιολόγηση των μαθητών αναφορικά με τις ικανότητες τους, την προθυμία τους να συμμετέχουν σε μαθηματικές εργασίες και δραστηριότητες, αλλά και στην τελική τους μαθηματική κλίση (NCTM, 1989 σσ.233).

Συχνά αναφέρεται πως οι άνθρωποι αντιδρούν με έκπληξη, όταν πληροφορούνται για την ύπαρξη υπολογιστικών αλγορίθμων, οι οποίοι διαφέρουν από αυτούς που ήδη γνωρίζουν. Η προσωπική τους εμπειρία με την χρήση ενός μόνο αλγορίθμου για κάθε πράξη, τους οδηγεί στο λανθασμένο συμπέρασμα πως δεν υπάρχει κανένας άλλος (Mason, 1998; Sgroi, 1998; Zaslavsky, 1996). Η πεποίθηση των μαθητών πως «υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος, για να λυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα» (Schoenfeld, 1992 σσ.359) είναι δυνατόν να αντικρουστεί εάν τους παρουσιαστεί η ποικιλομορφία των τεχνικών, που αποκαλύπτονται μέσω των πολιτιστικών προοπτικών. Με τον παραπάνω τρόπο, όχι μόνο καταρρίπτεται ο μύθος πως οι αλγόριθμοι είναι παγκόσμιοι και μόνιμοι, αλλά είναι δυνατόν οι μαθητές να αποδεχθούν τα μαθηματικά ως έναν τρόπο επίλυσης προβλημάτων, αντί ως μια απλή ακολουθία συγκεκριμένων κανόνων (Morroe, 1998).

Ο Hirigoyen (1997) έκανε λόγο όχι μόνο για διαφορετικούς αλγόριθμους, αλλά για διαφορετικές αναπαραστάσεις αριθμών και γεωμετρικών κανόνων. Επιπλέον, σημείωσε πως η ελλιπής κατανόηση των μαθηματικών από έναν μαθητή, είναι πολύ πιθανόν να οφείλεται στην ελλιπή κατανόηση της “μαθηματικής διαλέκτου”, που χρησιμοποιείται στο σχολείο. Παράλληλα, τόνισε πως όσο αφορά τα παιδιά που προέρχονται από άλλους πολιτισμούς και κουλτούρες, θα πρέπει να επιτραπεί η συνέχεια χρήσης των μεθόδων που ήδη γνωρίζουν. Η χρήση μιας συγκεκριμένης ομάδας αλγορίθμων, δημιουργεί ένα σημαντικό μειονέκτημα για τους μαθητές που έχουν διδαχθεί διαφορετικές τεχνικές, ενώ ζούσαν σε διαφορετικές γεωγραφικά περιοχές και αυτό έχει ως πιθανό αποτέλεσμα να τους μπερδέψει, αλλά και να ρισκάρει την πίστη των ίδιων στις ικανότητές τους. Με το να επιτραπεί στους μαθητές να χρησιμοποιούν τις δικές τους μεθόδους, αλλά και να τις μοιράζονται με τους υπόλοιπους μαθητές επικυρώνεται η κουλτούρα τους, ενώ η επιμονή στην αλλαγή των μεθόδων αποτελεί ένα αρκετά απαιτητικό εγχείρημα (Percival, 2004, σσ. 17).

Υποστηρίζοντας την παραπάνω άποψη, ο Ron (1998) τόνισε πως οι εκπαιδευτικοί είναι ανάγκη να γνωρίζουν την ύπαρξη αλγορίθμων που προέρχονται από άλλα μέρη του κόσμου, καθώς τέτοιου είδους τεχνικές χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά και από τους γονείς, στην προσπάθειά τους να βοηθήσουν τα παιδιά τους. Οι πολιτιστικές προοπτικές στα μαθηματικά, αποκαλύπτουν επιπλέον, πως οι αποδεκτές απαντήσεις σε ένα ερώτημα ενδέχεται να διαφέρουν, ανάλογα με τον χρονική περίοδο και τον τόπο. Η συγκεκριμένη άποψη, ανατρέπει την πεποίθηση των μαθητών πως «τα μαθηματικά προβλήματα, διαθέτουν μια και μόνο σωστή απάντηση» (Schoenfel., 1992 σσ.359), ενώ ένα κλασικό παράδειγμα από την ιστορία των μαθηματικών, αποτελεί ο δισταγμός της αποδοχής του μηδενός, των αρνητικών ή φανταστικών αριθμών ως λύσεις σε εξισώσεις. Επιπλέον, μέσω της έρευνας της Spangler (1992) μπορούμε να δούμε, πως εάν δύο μαθητές καταλήξουν σε διαφορετική λύση για το

ίδιο πρόβλημα, συνήθως γίνεται κοινώς αποδεκτή στην σχολική τάξη, η λύση η οποία διατυπώθηκε από τον μαθητή που διαθέτει μεγαλύτερο επίπεδο επάρκειας, σύμφωνα με τους συμμαθητές του. Η αποδοχή δύο διαφορετικών απαντήσεων, ως σωστών λύσεων στο ίδιο πρόβλημα αποτελεί υπερβολικά σπάνιο φαινόμενο, κάτι το οποίο υποστηρίζει τις απόψεις της Frank (1988), πως οι μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά ως ένα «κυνήγι» για την εύρεση της ορθής απάντησης.

Ο Bishop δίνοντας ένα παράδειγμα από την δουλειά του με μαθητές της Νέας Γουινέας, αναφέρει πως σχεδίασε στον πίνακα δύο τετράγωνα διαφορετικών μεγεθών και στη συνέχεια ρώτησε τους μαθητές του, «Εάν αυτά τα δύο τετράγωνα ήταν κήποι, ποιο θα προτιμούσατε να έχετε;». Οι μαθητές απάντησαν «Εξαρτάται από πολλά πράγματα, δεν μπορώ να απαντήσω. Παίζει ρόλο το χρώμα η σκιά...» ( Bishop, 1979 σσ.144). Οι αναπάντεχες απαντήσεις των μαθητών του τον έβαλαν σε σκέψεις:

«Ήταν ξεκάθαρο πως η επονομαζόμενη μαθηματική μου εκπαίδευση, με έκανε να κοιτώ μόνο τη σχέση μεταξύ των αριθμητικών μεγεθών των δύο κήπων, ενώ για τους μαθητές το μέγεθος του κήπου αποτελούσε κατά πολλές απόψεις, το λιγότερο σημαντικό του χαρακτηριστικό» ( Bishop, A. J., 1988 σσ.38).

Τέτοιου είδους προβλήματα αναφέρονται στα παραδοσιακά μαθηματικά κείμενα, αν και είναι ικανά να δώσουν στους μαθητές μια μικρή γεύση αυτού που ο Borasi αποκαλεί “προβληματικές καταστάσεις”, με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι σημερινοί μαθηματικοί. (Borasi, 1992 σσ.159). Σύμφωνα με τους Cobb, Wood & Yackel, η επαφή με τέτοιου είδους καταστάσεις αποτελεί σημαντικό παράγοντα της διαμόρφωσης της μαθηματικής γνώσης. Για να “αναγκαστεί” το παιδί να οικοδομήσει νέες γνωστικές δομές, πρέπει προηγουμένως να έρθει αντιμέτωπο με προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες ενδεχομένως να περιλαμβάνουν την επίλυση μιας αντίφασης, τη δικαιολόγηση ενός αποτελέσματος που προκαλεί έκπληξη, την εξήγηση μιας λύσης ή ακόμα και τη διευθέτηση συγκρουόμενων απόψεων ( Cobb, Wood, & Yackel, 1991).

Μια ακόμα πεποίθηση των μαθητών που αναφέρεται από τον Schoenfeld, είναι πως όλες οι ερωτήσεις που σχετίζονται με τα μαθηματικά είναι δυνατόν να απαντηθούν μέσα σε λίγα λεπτά, μια άποψη η οποία οδηγεί σε έλλειψη επιμονής στην επίλυση προβλημάτων. Η ίδια η ιστορία των μαθηματικών παρέχει πλήθος παραδειγμάτων, μέσω των οποίων αποδεικνύεται η αξία της επιμονής στην επίλυση προβλημάτων, ενώ ο Swetz θεωρούσε πως οι μαθητές ενθαρρύνονται και καθησυχάζονται, γνωρίζοντας πως «συχνά τα επιτεύγματα δεν έχουν να κάνουν σε τόσο μεγάλο βαθμό με την ιδιοφυία του ατόμου, αλλά με την επιμονή του» (Swetz, 1994 σσ.2).

Ένα πρόβλημα που σχετίζεται άμεσα με τα παραπάνω, αποτελεί αυτό του ρόλου των λαθών στην επίλυση προβλημάτων. Στην σύγχρονη παιδαγωγική, τα λάθη θεωρούνται το «ελατήριο της έρευνας» (Borasi, 1994) με μια έρευνα της ιστορίας των μαθηματικών να ενισχύει αυτήν την άποψη. Όπως αναφέρεται από τον Κοτοπούλη:

«Η μελέτη της ιστορίας τους αποδεικνύει ότι η εξελικτική πορεία των μαθηματικών εννοιών συνοδεύονταν, όχι σπάνια, από



λάθη, παραλήψεις αδιέξοδα και ανεπιτυχείς προσπάθειες. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, η άποψη ότι τα σχολικά μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και ορθών απαντήσεων βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με την πραγματική φύση της μαθηματικής επιστήμης» (Κοτοπούλης, 2007 σσ.143).

Η Paola σημειώνει, πως η ιστορία προσδίδει αξιοπρέπεια στα λάθη που γίνονται από τους μαθητές, καθώς «δεν ήταν φοβερό λάθος αν το έκανε και ένας μαθηματικός» (Paola, οπ. αναφ. Furinghetti and Radford, 2002 σσ.33). Πλήθος ερευνητών υποστηρίζουν την παρούσα άποψη, προσθέτοντας πως οι μαθητές θα καθησυχαστούν γνωρίζοντας πως ακόμα και γνωστοί μαθηματικοί, είχαν τις αμφιβολίες τους και έκαναν λάθη ( Jones, 1969; Ofir, 1991).

Άξιο αναφοράς αποτελεί και ένα ακόμα συμπέρασμα του Schoenfeld, στο οποίο αναφέρει πως οι μαθητές θεωρούν τα μαθηματικά ως μια «μοναχική δραστηριότητα, με την οποία ασχολούνται άτομα που βρίσκονται σε κάποιου είδους απομόνωση» (Schoenfeld, 1992 σσ.359). Με την παραπάνω άποψη συμφωνούν και τα αποτελέσματα της έρευνας της Spangler. Η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές να φανταστούν πως είναι ένας μαθηματικός, τι εξωτερικά χαρακτηριστικά διαθέτει, που βρίσκεται και τι έχει γύρω του, ενώ στην συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να ζωγραφίσουν αυτό που φαντάστηκαν. Η πλειοψηφία των μαθητών απεικόνισαν έναν γκριζομάλλη άντρα που φοράει γυαλιά, ο οποίος βρίσκεται μόνος του σε ένα γραφείο και χρησιμοποιεί μολύβι και χαρτί, διάφορα βιβλία, κομπιουτεράκι ή υπολογιστή και ορισμένες φορές χάρακα. Αυτές οι παρατηρήσεις υποδεικνύουν πως οι μαθητές όχι μόνο θεωρούν τα μαθηματικά μια “μοναχική δραστηριότητα”, αλλά πως επιπλέον θεωρούν πως τέτοιου είδους δραστηριότητες συμβαίνουν σε ένα περιβάλλον αρκετά διαφορετικό από το δικό τους, ενώ πιστεύουν πως αυτός ο τομέας είναι ανδροκρατούμενος ( Spangler, 1992 σσ.22).

Αν και η ιστορία αρχικά φαίνεται να επιβεβαιώνει αυτή την σκέψη, μέσω του τρόπου με τον οποίο ονομάζονται τα θεωρήματα, με μια πιο κοντινή ματιά αποκαλύπτεται πως οι μαθηματικοί συχνά επικοινωνούν μεταξύ τους είτε μέσω μείλ , είτε σε κάποιες περιπτώσεις δημιουργώντας μια κοινότητα. Μέσω αυτού επιβεβαιώνεται η έννοια της ομαδικής εργασίας, η οποία πλέον κερδίζει ολοένα και περισσότερη δημοσιότητα στην σχολική τάξη, ενώ παράλληλα η ιστορία επιβεβαιώνει τη χρήση της διαίσθησης στα μαθηματικά, (Davitt, 2000; Kleiner, 1988) ενισχύοντας με αυτόν τον τρόπο την σύγχρονη επικέντρωση στην ανακαλυπτική μάθηση.

Ένα από τα βασικά κοινά παράπονα των μαθητών, αποτελεί ο γεγονός πως τα μαθηματικά που διδάσκονται «έχουν μικρή ή και καθόλου σχέση, με τον πραγματικό κόσμο» (Schoenfeld, 1992 σσ.359). Αντίθετα με την παραπάνω άποψη, οι πολιτιστικές προοπτικές που εφαρμόζονται στα μαθηματικά, υποδεικνύουν πως το συγκεκριμένο αντικείμενο επηρεαζόταν και ακόμα επηρεάζεται, από την κοινωνία στην οποία υφίσταται (Bishop, 1988; Kline, 1953; Wilder, 1981). Η εισαγωγή αρχαίων εργαλείων όπως αυτά για τον υπολογισμό ή την μέτρηση γωνιών, είναι σε θέση να φανερώσει την σύνδεση μεταξύ των “σχολικών μαθηματικών” και των

“μαθηματικών του πραγματικού κόσμου” (Bartolini Bussi, 2000; Charbonneau, 2002).

## Αυξάνοντας την αποτελεσματική γνωστική ανάπτυξη

Αρκετά χρόνια πριν, ο Barzun υποστήριξε πως η έλλειψη ιστορικού πλαισίου, σε συνδυασμό με την προφανή έλλειψη ανθρώπινης συμμετοχής, ενδεχομένως να αποτελούσαν τις κύριες αιτίες της αντιπάθειας των μαθητών, σε ότι αφορά οποιονδήποτε κλάδο των μαθηματικών.

«Διαθέτω παραπάνω από μια υποψία, –τείνει προς την βεβαιότητα- πως η άλγεβρα έχει γίνει απωθητική λόγω της απροθυμίας, ή της ανικανότητας των εκπαιδευτικών να την εξηγήσουν... Η έλλειψη οποιασδήποτε ιστορικής έννοιας η οποία να είναι σε θέση να υποστηρίξει τη διδασκαλία, εντείνει το αίσθημα πως ολόκληρο το σύστημα κατέφθασε έτοιμο από τον ουρανό και είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί μόνο από εκ γενετής ειδικούς» (Barzun, 1945 σ.82).

Οι σύγχρονοι εκπαιδευτικοί επαναλαμβάνουν το συγκεκριμένο σχόλιο, σημειώνοντας πως οι ιστορικές εξηγήσεις βοηθούν στην παράκαμψη της αποστροφής των μαθητών, όσο αφορά ένα αντικείμενο το οποίο θεωρούν ως ένα σύνολο αυθαίρετων κανόνων. Τέτοιου είδους εξηγήσεις περιλαμβάνουν την προέλευση μιας λέξης, απαντήσεις σε πραγματολογικές ερωτήσεις όπως «γιατί έχουμε εξήντα λεπτά σε μια ώρα;» ή την καταγωγή συμβολικών συμβάσεων, το σύνολο των οποίων έχουν ως βάση τους ανθρώπινες αποφάσεις. (Bidwell, 1993; Jones, 1969; Reimer, & Reimer, 1995c). Στις πολιτιστικές προοπτικές των μαθηματικών έχει επίσης αποδοθεί, η μείωση της μαθηματικοφοβίας και τα αυξημένα κίνητρα, αναφορικά με την εκμάθηση μαθηματικών, (Ernest, 1998; Fauvel, & Van Maanen, 2000; Perkins, 1991) τα οποία συχνά παρουσιάζονται ως επαρκής αιτιολόγηση, για τον ισχυρισμό ύπαρξης μιας παράλληλης αύξησης και στην κατανόηση.

Παρόλα αυτά, η Barbin (2000) υποστηρίζει πως υπάρχουν δύο υποβόσκουσες υποθέσεις όσο αφορά την φύση της μάθησης, οι οποίες δημιουργούνται συνήθως από όσους υποστηρίζουν την εφαρμογή των πολιτιστικών προοπτικών, στην μαθηματική εκπαίδευση. Η πρώτη εξ αυτών είναι πως οι μαθητές στους οποίους έχει κινηθεί το ενδιαφέρον, θα εργαστούν πιο σκληρά και μέσω αυτού οδηγούμαστε στην δεύτερη υπόθεση, η οποία υποστηρίζει πως με αυτόν τον τρόπο θα προκύψουν υψηλότερα ποσοστά μάθησης και κατανόησης. Άξια αναφοράς αποτελεί και η άποψη του McLeod, ο οποίος συγκλίνοντας με την άποψη και άλλων επιστημόνων σημειώνει πως: «οι συμπεριφορές απέναντι στα μαθηματικά δεν αποτελούν έναν μονοδιάστατο παράγοντα, καθώς υπάρχει πλήθος διαφορετικών ειδών μαθηματικών, όπως και πλήθος συναισθημάτων απέναντι στον κάθε διαφορετικό τύπο» (McLeod, 1992 σσ.581).

Οι πολιτιστικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά, συχνά παρουσιάζουν στους μαθητές μια ποικιλία μεθόδων επίλυσης προβλημάτων. Το παραπάνω συμπέρασμα

υποστηρίζουν οι Carrol και Porter (1998), καθώς θεωρούν πως υπάρχουν αποτελεσματικά πλεονεκτήματα της παρούσας πρακτικής, εφόσον μετά από παρατήρηση μαθητών οι οποίοι είχαν διδαχθεί πολλούς και διαφορετικούς αλγόριθμους, έφτασαν στο συμπέρασμα πως έμοιαζαν να διαθέτουν περισσότερη αυτοπεποίθηση στην προσέγγιση των προβλημάτων, γνωρίζοντας πως αν μια προσέγγιση αποτύχει, θα ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν μια άλλη. Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με την έρευνα που διεξήγαγε η Denise A. Spangler, όταν οι μαθητές ερωτήθηκαν εάν προτιμούν να διαθέτουν μια μέθοδο, την οποία να χρησιμοποιούν για την επίλυση όλων των προβλημάτων, ή πλήθος μεθόδων μέσω των οποίων να διαλέγουν ποια να χρησιμοποιήσουν κάθε φορά, η πλειοψηφία των μαθητών προτιμούσε την πρώτη εναλλακτική. Αυτό συνέβη, διότι θεωρούσαν πως για να διαθέτουν πλήθος μεθόδων, θα ήταν εξαναγκασμένοι να απομνημονεύσουν μεγαλύτερο όγκο πληροφοριών, κάτι που μας δείχνει πως οι μαθητές θεωρούν την απομνημόνευση ως βασικό συστατικό, της διαδικασίας εκμάθησης των μαθηματικών. Παρόλα αυτά, ένας μικρός αριθμός των μαθητών προτίμησε την δεύτερη εναλλακτική, καθώς θεωρούσαν πως θα είναι σε θέση να επιβεβαιώσουν την ορθότητα της απάντησής τους, βλέποντας κατά πόσο κατέληγαν στο ίδιο αποτέλεσμα μετά από την χρήση διαφορετικών μεθόδων, για την επίλυση ενός προβλήματος. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές τόνισαν πως ανάλογα με το πρόβλημα, κάποιες μέθοδοι είναι πιο αποτελεσματικές από κάποιες άλλες (Spangler, 1992 σσ.20).

Πιο γενικά, η ευκαιρία της σύγκρισης και εύρεσης αντιθέσεων, στις τεχνικές και λύσεις που προέρχονται από διαφορετικές εποχές και τόπους, έχει αναγνωριστεί ως πολύτιμη εξάσκηση της κριτικής σκέψης (Ernest, 1991; Ransom, 1991). Παρομοίως, η μελέτη άλλων συστημάτων αρίθμησης θεωρείται πως σε γενικές γραμμές βοηθάει και βελτιώνει την κατανόηση των μαθητών, όσο αφορά το αριθμητικό σύστημα που διδάσκεται σήμερα (Ofir, 1991; Percival, 1999; Uy, 2003), αν και ο Nelson (1993) προειδοποιεί πως τέτοιου είδους εμπειρίες ενδεχομένως να μπερδέψουν τους μαθητές.

Περεταίρω ευκαιρίες για χρήση της κριτικής σκέψης, προκύπτουν από τα παιχνίδια στρατηγικών (Barta, & Schaelling, 1998; Gorman, 1997) Σύμφωνα με τον Dresher, «η θεωρία των παιχνιδιών στρατηγικής είναι δυνατόν να περιγράψει ως μια μαθηματική θεωρία, στην οποία οι συμμετέχοντες καλούνται να λάβουν αποφάσεις, στα πλαίσια ενός ανταγωνιστικού περιβάλλοντος». Επιπλέον, ο Dresher υποστηρίζει πως σε ένα τυπικό πρόβλημα (όπως αυτό ενός παιχνιδιού στρατηγικής), κάθε ένας που συμμετέχει είναι σε θέση να επηρεάσει με κάποιον τρόπο το αποτέλεσμα. Έτσι, κανένας από αυτούς που συμμετέχουν στην απόπειρα επίλυσης του προβλήματος, (σε αυτή την περίπτωση την νίκη του παιχνιδιού), δεν είναι σε θέση να καθορίσει εξ ολοκλήρου το αποτέλεσμα από μόνος του (Dresher, 2012 σσ.1). Από όλα τα παραπάνω είναι δυνατόν να συμπεράνουμε, πως μέσω της χρήσης παιχνιδιών στρατηγικής καλλιεργείται τόσο το ομαδικό πνεύμα, όσο και ο υγιής ανταγωνισμός μεταξύ των μαθητών στα πλαίσια της τάξης.

Επιπροσθέτως, η συγκεκριμένη πρακτική ταιριάζει ιδανικά στις πολιτιστικές προσεγγίσεις που εφαρμόζονται στα μαθηματικά, καθώς τέτοιου είδους παιχνίδια παίζονται από τους ανθρώπους σε όλο τον κόσμο, αρκετά συχνά πριν από την ανάπτυξη γραπτών καταγραφών, οι οποίες να διατυπώνουν τους κανόνες τους

(Bishop, 1988). Κάτι τέτοιο ενδέχεται να οδηγήσει σε αβεβαιότητα αναφορικά με το πώς θα πρέπει να είναι οι κανόνες, έτσι μέσω αυτού οι μαθητές που θα διαπραγματευτούν τους κανόνες, ενώ στην πορεία θα ανακαλύπτουν τις συνέπειες των αποφάσεών τους, θα είναι σε θέση να κερδίσουν πολύτιμη εμπειρία και ανάπτυξη των επικοινωνιακών και λογικών ικανοτήτων σκέψης τους. Επιπλέον, η Szendrei (1996) υπέδειξε πως οι αυστηροί κανόνες των παιχνιδιών, παρουσιάζουν στους μαθητές το σύστημα των αξιωμάτων, κάτι που αποτελεί σημαντική και πολύτιμη εξάσκηση της μαθηματικής τους σκέψης.

Η χρήση πρωτογενών πηγών που προέρχονται από την ιστορία των μαθηματικών, ενθαρρύνει την ενστικτώδη μη γραμμική σκέψη, ενώ παράλληλα βοηθά τους μαθητές να «σκέφτονται όπως ένας μαθηματικός» (Janke, 2000). Αντίθετα με τα σύγχρονα εγχειρίδια στα οποία τα μαθηματικά έχουν υποστεί “αντιδιδασκτική αντιμετάθεση”, (Freudenthal, 1983) τα γνήσια κείμενα συχνά υποδεικνύουν την χρονολογική ανάπτυξη του αντικειμένου, αντί να κρύβουν την παρακίνηση για εργασία πίσω από ένα σύνολο τυπικά διατυπωμένων δηλώσεων. Κάνοντας την διαδικασία προφανή, δεν βοηθιούνται μόνο οι μαθητές να κατανοήσουν τους λόγους της συγκεκριμένης παρακίνησης, αλλά επίσης επιβεβαιώνεται αυτό που ο Lakatos (1976) ονόμασε ως “το ζιγκ ζαγκ της ανακάλυψης”. Όπως φαίνεται και από την έρευνα της Spangler, οι μαθητές είναι σε θέση να ακολουθήσουν την “πεπατημένη” με αποτέλεσμα να επιλύσουν ένα πρόβλημα, χωρίς να έχουν κατανοήσει τον λόγο που ακολουθούν τα συγκεκριμένα βήματα. Αυτό το ζήτημα είναι δυνατόν να επιλυθεί, μέσω επαναληπτικών διδασκαλιών, οι οποίες θα πραγματοποιούνται με στόχο την επεξήγηση όρων και διαδικασιών (Spangler, 1992 σσ.20).

Μέσω της εφαρμογής των ιστορικών προοπτικών στην διδασκαλία των μαθηματικών, οι μαθητές θα είναι σε θέση να κατανοήσουν σε βάθος την καταγωγή και εξέλιξη του αντικειμένου, κάτι που θα συντελέσει στην κατανόηση των πεπατημένων διαδρομών τις οποίες διδάσκονται, με σκοπό την ταχύτερη και ευκολότερη επίλυση προβλημάτων. Επιπλέον, θα είναι σε θέση να κατανοήσουν πως αυτές οι διαδρομές δεν αποτελούνται από αυθαίρετους κανόνες, αλλά έχουν δημιουργηθεί από τους ανθρώπους μετά από την δοκιμασία διάφορων τεχνικών και μεθόδων επίλυσης προβλημάτων, με σκοπό την απλούστευση της παραπάνω διαδικασίας. Παρόλα αυτά, ορισμένοι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν πως οι ιστορικές λεπτομέρειες, είναι πιθανότερο να μπερδέψουν, παρά να αποσαφηνίσουν τις μαθηματικές έννοιες (Fauvel, 1991; Fowler, 1991). Ακόμα και ο Freudenthal, αν και υποστηρικτής της υιοθέτησης των ιστορικών προοπτικών στην τάξη των μαθηματικών, θεωρεί πως «τα αδιέξοδα (της ιστορίας) είναι ενδιαφέροντα μόνο ως ζητήματα τα οποία προκαλούν περιέργεια» (Freudenthal, 1981 σσ.30).

Η πρακτική της ανάγνωσης γνήσιων μαθηματικών κειμένων, αποτελεί μια στρατηγική μάθησης η οποία επιδοκιμάζεται από αρκετούς ιστορικούς των μαθηματικών, για το βάθος της κατανόησης που είναι ικανή να προσφέρει, (Barbin, 2000; Calinger, 1995; Fauvel, 1990; Fauvel, & Gray, 1987; Janke, 2000) ενώ αποτελεί το αντικείμενο σημαντικής έρευνας η οποία πραγματοποιείται από τα *Ινστιτούτα Ερευνών για την Διδασκαλία των Μαθηματικών (Institutes for Research on the Teaching of Mathematics- IREMs)* στην Γαλλία (Barbin, 1990-1991). Ο Swetz

συμφωνώντας με την παραπάνω άποψη, πρότεινε τη χρήση ιστορικών προβλημάτων διότι θεωρούσε πως οι μαθητές είναι δυνατόν να κερδίσουν «ενθουσιασμό και ικανοποίηση από την επίλυση προβλημάτων, των οποίων η διατύπωση προέρχεται από πολλούς αιώνες πριν» ( Swetz, 1989 σσ.371). Επιπλέον, έκανε λόγο για την μαθηματική και κοινωνική διορατικότητα που είναι δυνατόν να αποκτηθεί μέσω τέτοιου είδους ερωτήσεων, συγκρίνοντάς τες με τα έργα τέχνης ενός μουσείου:

« [τα μαθηματικά προβλήματα της ιστορίας]... αποτελούν παιδαγωγικά και πνευματικά έργα τέχνης, τα οποία μαρτυρούν μια έκφραση της ανθρώπινης ιδιοφυΐας. Αντίθετα με τα εκθέματα ενός μουσείου, τα συγκεκριμένα έργα τέχνης είναι δυνατόν να αποκτηθούν από τους θεατές, μέσω της συμμετοχής τους στην διαδικασία της επίλυσης» ( Swetz, 1989 σσ.376).

Τα αρχαία προβλήματα εκτός από όλα τα παραπάνω, βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν «την οικονομία και τη δύναμη των σύγχρονων μαθηματικών συμβόλων και διαδικασιών» (Grugnetti, & Rogers, 2000 σσ.78). Παρόλο που η μελέτη πρωτογενών αρχείων και κειμένων, είναι πιο εύκολα εφαρμόσιμη στα μαθηματικά που διδάσκονται στην δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση, ορισμένα γνήσια κείμενα είναι αρκετά απλά που είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ακόμα και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Arcavi, 1987; Bruckheimer, Ofir, & Arcavi, 1992; Gardner, 1991; Ofir, 1991; Percival, 1999, 2001).

Επιπλέον, το υλικό από την ιστορία των μαθηματικών ενδέχεται να έχει ιδιαίτερη αξία όσο αφορά τα χαρισματικά παιδιά, στα οποία οι κλασικές ασκήσεις της σχολικής τάξης δεν παρέχουν τα κατάλληλα ερεθίσματα που χρειάζονται, έτσι ώστε να ενθουσιαστούν και να ενεργοποιηθεί η περιέργεια και η σκέψη τους. Αυτού του είδους το υλικό, όχι μόνο παρέχει δραστηριότητες εμπλουτισμού, αλλά η ποικιλομορφία των προσεγγίσεων όσο αφορά τα μαθηματικά που φανερώνεται μελετώντας την ιστορία, παρέχει στα χαρισματικά παιδιά την επιβεβαίωση των αντικομορμιστικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, τις οποίες συχνά υιοθετούν (Daniel, 2000). Παρόλα αυτά, οι ερωτήσεις με θέμα το ιστορικό υπόβαθρο των μαθηματικών, είναι σε θέση να παρακινήσουν έρευνες, οι οποίες θα αφορούν παιδιά όλων των επιπέδων επάρκειας (Bidwell, 1993; Ponza, 1998).

## Δημιουργώντας συνδέσεις

Με τον ανταγωνισμό στην αγοράς εργασίας να αυξάνεται όλο και περισσότερο, μέσα σε μια συνεχώς αναπτυσσόμενη παγκόσμια οικονομία, απαιτείται από την κοινωνία η διαμόρφωση ατόμων τα οποία να διαθέτουν μεγαλύτερα επίπεδα επάρκειας, όσο αφορά την κριτική σκέψη, τη δημιουργική επίλυση προβλημάτων και την καινοτομία (Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2013). Για να επιτευχθεί ο παραπάνω στόχος, είναι αναγκαία η κατάλληλη επιμόρφωση αυτών των ατόμων. Αυτό είναι δυνατόν να επέλθει μέσα από την εισαγωγή των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά, κάτι που περαιτέρω αιτιολογείται μέσω των διεπιστημονικών και

ενδοεπιστημονικών ευκαιριών που αυτά είναι δυνατό να παρέχουν (Ernest, 1998; Furinghetti, & Somaglia, 1998; Grugnetti, & Rogers, 2000; Wilson, & Chavot, 2000).

Σύμφωνα με τους Monroe και Mikonch, υπάρχουν επαρκείς αποδείξεις οι οποίες επιβεβαιώνουν την άποψη πως για να επέλθει ουσιαστική μάθηση, οι έννοιες που διδάσκονται στα πλαίσια του κάθε αντικειμένου, οφείλουν να συνδέονται με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες του μαθητή. Ειδικότερα, όσο αφορά τα μαθηματικά υπάρχουν τριών ειδών συνδέσεις, που είναι σε θέση να επιφέρουν σημαντικά μαθησιακά πλεονεκτήματα :

- I. οι ενδοεπιστημονικές συνδέσεις στα πλαίσια του αντικειμένου των μαθηματικών
- II. οι διεπιστημονικές συνδέσεις των μαθηματικών, με τα υπόλοιπα μαθήματα του οδηγού σπουδών
- III. οι συνδέσεις του αντικειμένου με την καθημερινή ζωή (Monroe & Mikonch, 1994 σσ. 371-376).

Όλα τα παραπάνω, συνάδουν με την πεποίθηση του οργανισμού Humanistic Mathematics Network (HMN), ο οποίος επιπλέον υποστηρίζει πως τα μαθηματικά θα έπρεπε να λαμβάνονται υπόψιν ολιστικά. Την ίδια θέση υποστηρίζει και ο Δόρτσιος, ο οποίος τονίζει πως «ο ολιστικός χαρακτήρας και η οριζόντια σύνδεση των διάφορων μαθηματικών κλάδων με τα υπόλοιπα μαθήματα είναι μια αναγκαιότητα της σύγχρονης εποχής» (Δόρτσιος, 2002 σσ.732-733). Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν αποτελεί μια νέα ιδέα στην μαθηματική εκπαίδευση, καθώς σχεδόν έναν αιώνα πριν, ο Branford παρότρυνε εκπαιδευτικούς να δίνουν «ερεθίσματα για την ελεύθερη ανταλλαγή ιδεών στα διαφορετικά τμήματα των σπουδών των μαθητών, έτσι ώστε να μην κατασκευάσουν ένα ον του οποίου η νοημοσύνη θα μοιάζει με ένα σπίτι που διαθέτει πολλά δωμάτια, χωρίς να διαθέτει πόρτες ή παράθυρα» (Branford, 1908 σσ. 262-263). Η ιδέα της “δημιουργίας συνδέσεων”, αποτελεί πλέον ακρογωνιαίιο λίθο των σύγχρονων οδηγιών σπουδών των μαθηματικών, όπως αυτών του NCTM (1989, 2000), του Υπουργείου Παιδείας της Βρετανικής Κολομβίας (British Columbia Ministry of Education, 1995) και το Πρωτόκολλο του Δυτικού Καναδά (Western Canadian Protocol, 1995).

Οι Grugnetti και Rogers (2000), υποστήριξαν πως οι ενδοεπιστημονικές συνδέσεις που γίνονται φανερές από μια μελέτη στην ιστορία των μαθηματικών, βοηθούν τους μαθητές στο να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση του αντικειμένου. Με σκοπό να υποστηρίξουν την παραπάνω τους άποψη, ανέφεραν πλήθος συνδέσεων οι οποίες εκτίνοντας από αυτές που απαιτούσαν βασικές μαθηματικές γνώσεις, όπως η πρωτοποριακή σύνδεση άλγεβρας και γεωμετρίας, η οποία πραγματοποιήθηκε από τον Descartes, μέχρι και πιο σύγχρονες και προχωρημένες συνδέσεις, όπως αυτές μεταξύ αλγεβρικών σχηματικών δομών και την κατηγοριοποίηση διαφορετικών τύπων γεωμετρικών μεταμορφώσεων. Παρόλα αυτά, οι διεπιστημονικές συνδέσεις είναι αυτές που συνήθως αποτελούν το επίκεντρο της προσοχής όσο αφορά τον οδηγό σπουδών, όπως φαίνεται και από την δήλωση του NCTM πως οι μαθητές «θα έπρεπε να έχουν πολλές ευκαιρίες να παρατηρήσουν την αλληλεπίδραση των μαθηματικών, με άλλα σχολικά μαθήματα» (NCTM, 1989, σσ.84).

Με τις παραπάνω απόψεις συμφωνεί και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, καθώς υποστηρίζει πως η διαθεματικότητα :

«δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να συγκροτεί ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων, μια ολιστική εν πολλοίς αντίληψη της γνώσης, που του επιτρέπει να διαμορφώνει προσωπική άποψη για θέματα των επιστημών τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς και με ζητήματα της καθημερινής ζωής» (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2001, τ. Α΄, σσ.10).

Οι Grugnetti και Rogers, όπως προαναφέρθηκε πραγματεύονται διάφορων τύπων συνδέσεις, δίνοντας παραδείγματα από τη φυσική, τη γεωγραφία, τα οικονομικά, την τέχνη, την μουσική, τη θρησκεία και την φιλοσοφία. Επιπλέον, τονίζουν πως αυτού του είδους οι διεπιστημονικές συνδέσεις, εμπλουτίζουν την κατανόηση των μαθητών, όσο αφορά μεμονωμένους κλάδους των μαθηματικών. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση των προοπτικών της Αναγεννησιακής τέχνης, η μελέτη των πινάκων είναι σε θέση να ενισχύσει την μαθηματική μελέτη της προβολικής γεωμετρίας, ενώ παράλληλα η επίγνωση των μαθηματικών που βρίσκονται πίσω από την χρήση των προοπτικών από τον καλλιτέχνη, ενδέχεται να οδηγήσει σε μια αύξηση της εκτίμησης (αναφορικά με την εικόνα) από τον μαθητή. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Μπαλή, τα μαθηματικά συνδέονται άμεσα με τα μαθήματα της ιστορίας, της αρχαίας ελληνικής γραμματείας και της λογοτεχνίας. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά:

«Τα μαθηματικά με τον τρόπο που παρουσιάζονται στα σχολικά, βιβλία και όπως διδάσκονται αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση άλλων επιστημών και την επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Αυτή είναι μια μόνο όψη των μαθηματικών. Υπάρχουν όμως και άλλες εξίσου ενδιαφέρουσες» ( Μπαλής, 2003 σ σ.456-464).

Τα διεπιστημονικά πλεονεκτήματα της μελέτης αρχαίων αριθμητικών συστημάτων, έχουν αναφερθεί αρκετές φορές (Ofir, 1991; Percival, 1999; Zaslavsky, 2001) ενώ περεταίρω περιγραφές των διεπιστημονικών συνδέσεων βρίσκονται στο βιβλίο των Davis & Hersh, με τίτλο “ The Mathematical Experience”(1981).

Η Barbin (2000) υποστήριξε πως η ιστορία των μαθηματικών επιδεικνύει την σημαντικότητα της ενδοεπιστημονικής διδασκαλίας, αλλά παράλληλα αναγνώρισε πως ένα μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών, ενδεχομένως να χρειαστεί βοήθεια από τους δασκάλους άλλων αντικειμένων, κάτι που πιθανόν θα αποβεί προβληματικό, όσο αφορά τον προγραμματισμό των σχολείων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Από την άλλη πλευρά, η Michalowicz (2000) έκανε λόγο για την αντίθετη κατάσταση, όσο αφορά τα σχολεία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών αυτής της βαθμίδας, διδάσκουν όλα τα μαθήματα του σχολικού προγράμματος, ενώ διαθέτουν λιγιστό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Επιπλέον, υποστήριξε πως τα μαθηματικά απέκτησαν μεγαλύτερη αξία για τους συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς, όταν ήταν σε θέση να τα συνδέσουν με τις κοινωνικές επιστήμες και την λογοτεχνία, ενώ παράλληλα ομολόγησε πως υπάρχει «λίγη εάν όχι καθόλου σχετική έρευνα» (σσ.173) που να είναι σε θέση να υποστηρίξει τον ισχυρισμό της, ο οποίος βασίζεται σε ένα σύνολο προφορικών μαρτυριών.

Οι ενδοεπιστημονικές συνδέσεις προωθούνται περαιτέρω μέσω των πολυπολιτισμικών προοπτικών, οι οποίες εφαρμόζονται στο αντικείμενο των μαθηματικών (D' Ambrosio, 2001; Shirley, 1995; Silvermann, Strawser, Strothauer, & Marzano, 2001; Taylor, 1997, Zaslavsky, 1996). Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η δημιουργία ισχυρών συνδέσεων με τις κοινωνικές επιστήμες, καθώς και με τις τέχνες πολιτιστικών ομάδων που προέρχονται από όλο τον κόσμο, οι οποίες διαθέτουν άριστο υλικό για την παρότρυνση συζητήσεων αναφορικά με την συμμετρία, τους μετασχηματισμούς και να ψηφιδωτά. Παρόλα αυτά, ο Zaslavsky (1991) τονίζει πως αρκετά συχνά οι εκπαιδευτικοί πραγματοποιούν τις παραπάνω δραστηριότητες, χωρίς να γνωρίζουν τα μαθηματικά που είναι εμφυτευμένα σε αυτές.

Ένα από τα βασικά επιχειρήματα των αντιτασόμενων στην ενσωμάτωση των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά, αποτελεί η άποψη πως οι μικροί σε ηλικία μαθητές δεν διαθέτουν ιστορική αντίληψη, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά και ο Friedman, «εφόσον η αντίληψη του χρόνου είναι γνωστό πως είναι αρκετά αδύναμη στους ανήλικους, σίγουρα οι ιδέες που έχουν τα παιδιά όσο αφορά τον χρόνο, θα είναι μπερδεμένες και απροσδιόριστες» (Friedman, 1944 σσ. 337). Επιπλέον, σύμφωνα με τον Piaget, η αίσθηση της ιστορίας δεν αναπτύσσεται μέχρι την ένταξη των μαθητών στα πλαίσια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αν και ορισμένοι θεωρούν πως η διαμόρφωσή της ξεκινά νωρίτερα, γύρω στην ηλικία των έντεκα ετών (Jahoda, 1963). Παρόλα αυτά, πρόσφατα οι ιστορικοί εκπαιδευτές υποστήριξαν πως ακόμα και οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, είναι σε θέση να αναπτύξουν ιστορική αντίληψη με την βοήθεια ιστοριών, έργων τέχνης, μοντέλων και χρονικών πινάκων (Blyth, 1982). Ο Charbonneau (2002), συμφωνώντας με τη παραπάνω άποψη, τόνισε την σημαντικότητα εύρεσης τρόπων για την υπενθύμιση ιστορικών περιόδων, στην περίπτωση διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών σε αρκετά νεαρούς μαθητές, ενώ αναφέρθηκε στους διάφορους τρόπους με τους οποίους θα ήταν δυνατό, να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι που προαναφέρθηκαν. Παράλληλα επισήμανε τη χρήση της αρχιτεκτονικής, της μουσικής, της τοπικής ιστορίας, της ιστορίας του αντικειμένου αλλά και τομέων ενδιαφέροντος μεμονωμένων μαθητών, ενώ παρουσίασε παραδείγματα, με σκοπό να δείξει με ποιον τρόπο το σύνολο των παραπάνω ιδεών, σχετίζεται άμεσα με συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα.

## Ζητήματα Υλοποίησης

Σύμφωνα με την Barbin (2000), η εισαγωγή των ιστορικών προοπτικών στα σχολικά μαθηματικά, αποτελεί μια διαδικασία η οποία συμβαίνει σταδιακά. Το πρώτο βήμα της παρούσας διαδικασίας, αποτελεί η αναδιαμόρφωση των πεποιθήσεων και της κατανόησης των εκπαιδευτικών, όσο αφορά το αντικείμενο των μαθηματικών. Μέσω της νέας εκτίμησης της αξίας του αντικειμένου, (η οποία θα έχει επέλθει από το προηγούμενο βήμα), θα επηρεαστεί με τη σειρά της και η διδασκαλία τους, κάτι που θα οδηγήσει στην αλλαγή του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα σχολικά μαθηματικά. Όπως αναφέρεται από τους Charalambous, Panaoura και Philiprou, τόσο οι ερευνητές, όσο και οι εκπαιδευτές των μελλοντικών δασκάλων,



συμφωνούν πως οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, αποτελούν τους βασικότερους παράγοντες που διαμορφώνουν και επηρεάζουν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις. Επιπλέον, υποστηρίζουν πως πέρα από τον εμπλουτισμό των γνώσεων αυτών των δασκάλων, τα προγράμματα κατάρτισης και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, οφείλουν να τους παρέχουν ευκαιρίες όσο αφορά την ανάπτυξη παραγωγικών στάσεων και πεποιθήσεων, απέναντι στην μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών (Charalambous, Panaoura, & Philiprou, 2009).

Παρόλα αυτά, η εκκίνηση της παραπάνω διαδικασίας δεν αποτελεί ένα εύκολο εγχείρημα. Η Michalowicz εξαιρετικά στοχευμένα παρατήρησε, πως «όταν κάποιος ανακαλύπτει πως ένας εκπαιδευτικός της πρωτοβάθμιας, ή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης χρησιμοποιεί την ιστορία των μαθηματικών, με παιδαγωγικό τρόπο αυτό συμβαίνει ... διότι ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός αποτελεί έναν ερασιτέχνη μαθηματικό ιστορικό» (Michalowicz, 2000, σσ. 171). Επιπλέον, επισήμανε την ύπαρξη δύο βασικών προϋποθέσεων για την ένταξη των ιστορικών προοπτικών στα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης:

A) την εκπαίδευση του δασκάλου και

B) τους αναγκαίους πόρους

### Καταλληλότητα των εκπαιδευτικών

Σχολιάζοντας την άποψη, πως τα παραδοσιακά μαθήματα ιστορίας των μαθηματικών δεν είναι κατάλληλα για εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς δεν διαθέτουν αυτοπεποίθηση όσο αφορά την διδασκαλία του αντικειμένου, η Michalowicz (2000) προτείνει, την δημιουργία μιας νέας σειράς μαθημάτων. Τα συγκεκριμένα μαθήματα, θα έχουν ως κύριο θεματικό άξονα τις συνδέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στο πολιτιστικό υλικό και τον παραδοσιακό οδηγό σπουδών. Πέρα από τη μελέτη του πολιτιστικού υπόβαθρου του αντικειμένου, αυτά τα μαθήματα θα ήταν σε θέση να εξοικειώσουν του εκπαιδευτικούς, με ζητήματα που αφορούν την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, αρκετές εκ των οποίων αποτελούν επιστημολογικά εμπόδια για τους σύγχρονους μαθητές ( Hefendehl- Hebeker, 1991; Radford, 1995, 2000; Sfard, 1995).

### Προγράμματα επιμόρφωσης

Μια μελέτη που πραγματοποιήθηκε από το ICMI, με θέμα μια σειρά μαθημάτων της ιστορίας των μαθηματικών σε εκπαιδευόμενους εκπαιδευτικούς, (Schubring, 2000) ανακάλυψε πως μόνο ένας μικρός αριθμός χωρών διοργανώνει τέτοιου είδους μαθήματα, τα οποία να απευθύνονται σε όσους επιθυμούν να διδάξουν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, η παραπάνω έρευνα διαπίστωσε πως ακόμα και τα μαθήματα που πραγματοποιούνταν, ακολουθούσαν τις παραδοσιακές γραμμές, χωρίς να είναι απόλυτα επιτυχή. Παρόλα αυτά, οι μαρτυρίες του Lingard (1996-1997) από τα μαθήματα του στην Αγγλία, σε συνδυασμό με ένα σύνολο αξιολογήσεων από τους μαθητές, επιδεικνύουν πως τα παραπάνω προγράμματα είναι δυνατόν να έχουν θετικά αποτελέσματα. Τα παραπάνω μαθήματα περιλάμβαναν εκτός των άλλων, ποικίλους τρόπους προσέγγισης του πολιτιστικού υλικού, και

σύμφωνα με τον Lingard οι μαθητές του ήταν ενθουσιασμένοι σε τέτοιο βαθμό, που οι περισσότεροι εξ αυτών επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν τις ιστορικές προοπτικές και στην δική τους διδασκαλία των μαθηματικών.

### Διαθεσιμότητα πόρων και βοηθημάτων

Η Michalowicz (2000), σχολιάζοντας τις δαπάνες και την έλλειψη παγκόσμιας διαθεσιμότητας των κατάλληλων βοηθημάτων, υποστήριξε πως τέτοιου είδους προβλήματα είναι δυνατόν να ξεπεραστούν, εάν οι εκπαιδευτικοί πραγματοποιούν λεπτομερείς έρευνες στο διαδίκτυο, με σκοπό την εύρεση του κατάλληλου υλικού με το χαμηλότερο δυνατό κόστος. Αν και υπάρχουν τα κατάλληλα βοηθήματα όσο αφορά την ιστορία των μαθηματικών, ο Lingard κατέκρινε αυτά που απευθύνονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, υποστηρίζοντας πως εμπεριέχουν αναληθή υλικά του πιο πατροναριστικού είδους, τα οποία θα έκαναν αρκετούς μαθηματικούς να ανησυχούν έντονα.

### Δέσμευση χρόνου

Ένα ακόμα πρόβλημα αποτελεί η έλλειψη χρόνου (Buhler, 1990) τόσο όσο αφορά την απόκτηση της αρχικής γνώσης από τον δάσκαλο, όσο και αυτού που είναι αναγκαίο να δαπανηθεί στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Παρόλα αυτά, ο χρόνος που θα δαπανήσουν οι εκπαιδευτικοί για την προσωπική μελέτη του αντικειμένου, αιτιολογείται μέσω του επιχειρήματος πως κάτι τέτοιο θα οδηγήσει σε σημαντικό εμπλουτισμό των γνώσεων τους, ενώ θα είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν, κάθε χρόνο από εκεί και πέρα (Gulikers, & Blom, 2001). Επιπλέον, ο χρόνος που θα καταναλωθεί στα πλαίσια της τάξης αιτιολογείται μέσω του επιχειρήματος πως το ιστορικό υλικό που θα παρουσιαστεί εκτός των άλλων θα ενισχύσει και τους βασικούς στόχους του παραδοσιακού οδηγού σπουδών (Tzanakis, & Arcavi, 2000).

### Δυσκολίες στην αξιολόγηση των μαθητών

Μια περαιτέρω ένσταση για την υιοθέτηση των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά, αποτελεί ο αυξημένος βαθμός δυσκολίας της αξιολόγησης των μαθητών σε αυτόν τον τομέα, κάτι που έχει ως άμεσο επακόλουθο, οι μαθητές να θεωρήσουν πως εφόσον η εργασία τους σε αυτό το αντικείμενο δεν αξιολογείται, δεν έχει καμία αξία (Tzanakis, & Arcavi, 2000). Παρόλα αυτά, ο Zaslavsky έκανε λόγο για την καταλληλότητα ένταξης των αξιολογήσεων που επικεντρώνονται στην απόδοση σε έναν πολυπολιτισμικό οδηγό σπουδών, προτείνοντας πως αυτού του είδους το υλικό επιτρέπει στους μαθητές να «εστιάζουν περισσότερο στην γνώση την οποία αποκτούν, παρά να τους τιμωρεί για όσα δεν γνωρίζουν» (Zaslavsky, 1996 σσ. 18). Επιπλέον, ο Lingard (1996) έχει περιγράψει την επιτυχία των ερευνητικών εργασιών και παρουσιάσεων ως μέσα αξιολόγησης. Ακόμα και αν οι μαθητές του ήταν εκπαιδευόμενοι εκπαιδευτικοί, αυτές οι ιδέες είναι δυνατό να προσαρμοστούν και να εφαρμοστούν σε μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

## Η ιστορία των μαθηματικών ως οδηγός σπουδών

Η αποδοχή της ιστορικής διάστασης των μαθηματικών, επαναφέρει το επιχείρημα πως «η οντογένεση ανακεφαλαιώνει την φυλογένεση», το οποίο συχνά αφήνεται να εννοηθεί, εάν δεν αναφερθεί συγκεκριμένα, στην βιβλιογραφία που συνδέει την ιστορία με την παιδαγωγική των μαθηματικών (Ernest, 1998; Fauvel, 1991; Jones, 1969). Όλα τα παραπάνω, θεωρούνταν ως βιογενετικός νόμος σύμφωνα με τον Haeckel το 1866, ενώ ο ίδιος παράλληλα υποστήριζε πως η βιολογική ανάπτυξη του ατόμου, οφείλει να ακολουθεί την ανάπτυξη του ανθρώπινου είδους. Τον παραπάνω νόμο υποστήριξε ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών επιστημόνων, καθώς η εφαρμογή του θεωρούνταν ως ένας τρόπος, για να αποφευχθεί η αυστηρότητα που υποστηρίζονταν από τους συναδέλφους τους, παρά ως μια οδηγία που έπρεπε να εφαρμοστεί κατά γράμμα (Furinghetti, & Radford, 2002).

Επιπλέον, ο Branford (1908) τον χρησιμοποίησε ως στρατηγική για τον σχεδιασμό του οδηγού σπουδών, ενώ στην συνέχεια δημιούργησε μια ακριβή καταγραφή, της σχέσης μεταξύ της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών ιδεών και τα επίπεδα εκπαίδευσης στα οποία θα έπρεπε αυτές να διδαχθούν. Ωστόσο, ακόμα και ο ίδιος ομολόγησε, πως οι ομοιότητες μεταξύ της ανάπτυξης του ατόμου και αυτής της φυλής, αποδίδεται στη συνολική δομή και όχι στις λεπτομέρειες, κάτι το οποίο επαναλαμβάνεται και σε πιο σύγχρονες περιόδους, (Byers, 1982; Charbonneau, 2002; Ernest, 1998) ενώ παράλληλα τόσο ο Branford, όσο και άλλοι ερευνητές τονίζουν την ματαιότητα της επανάληψης των λαθών του παρελθόντος (Freudenthal, 1981; Jones, 1969).

Μια ακόμα πρώιμη παιδαγωγική χρήση των μαθηματικών, αποτελούσε η επονομαζόμενη «γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας», η οποία εμφανίστηκε την δεκαετία του 1920, στο έργο των Izvolsky και Toeplize (αναφορά στο Furinghetti, & Radford, 2002). Η παραπάνω μέθοδος, είναι δυνατό να θεωρηθεί ως ένας «διδασκτικός συμβιβασμός» μεταξύ της αυστηρά λογικής προσέγγισης και μιας ιστορικής προσέγγισης, η οποία εξηγεί τον συλλογισμό που βρίσκεται πίσω από την ανάπτυξη ενός αντικειμένου. Όπως εξηγεί ο Freudenthal :

« Αν και ενθαρρύνεται η άποψη πως οι ιδέες διδάσκονται γενετικά, κάτι τέτοιο δεν σημαίνει πως είναι αναγκαίο να παρουσιάζονται με την σειρά που δημιουργήθηκαν... Τα ιστορικά χνάρια του εφευρέτη, δεν αποτελούν τον δρόμο τον οποίο οφείλουμε να ακολουθήσουμε, καθώς επιβάλλεται να συνεχίσουμε μέσω ενός βελτιωμένου, καλύτερα κατευθυνόμενου μαθήματος της ιστορίας» (Freudenthal, 1973, σσ. 101,103).

Η θεωρία της ανακεφαλαίωσης έχασε μεγάλο μέρος της δημοτικότητας της, όταν έγινε φανερή η καθοριστική σημασία των πολιτιστικών παραγόντων, στην

γνωστική ανάπτυξη. Η υπόθεση πως η ύπαρξη μιας μοναδικής φυλογονίας, είναι απαραίτητη στην συγκεκριμένη θεωρία, ήταν εσφαλμένη λαμβάνοντας υπόψη τα διαφορετικά πολιτιστικά υπόβαθρα, κάτι το οποίο οδήγησε τους Werner και Vygotsky στην απόρριψη της παρούσας θεωρίας. Οι Piaget και Garcia, επέλεξαν να ερμηνεύσουν εκ νέου τον νόμο που αναφέρθηκε παραπάνω, με γνώμονα τους μηχανισμούς μετάβασης μεταξύ των σταδίων ανάπτυξης και όχι το μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο αποκτήθηκε, ενώ αναφέρονταν στο έργο τους ως «γενετική επιστημολογία» (οπ. αναφ. Radford, 1997).

Παρόλα αυτά, η θεωρία της ανακεφαλαίωσης συνεχίζει να έχει θέση στην βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τον Ernest (1998), η ιστορία των μαθηματικών είναι σε θέση να υποδείξει μια λογική σειρά όσο αφορά την ανάπτυξη, αλλά και να επισημάνει τα βήματα στα οποία ενδέχεται να προκύψουν δυσκολίες. Με αυτόν τον τρόπο ερμηνεύει τον νόμο του Haeckel, τόσο για τον σχεδιασμό οδηγών σπουδών μεγάλης κλίμακας, όσο και για τον προγραμματισμό μικρής κλίμακας, όπως πλάνα τα οποία αφορούν το κάθε αντικείμενο. Μια ιστορική προσέγγιση των μαθηματικών, προσφέρει «έναν τέλειο μεγεθυντικό φακό για τον εντοπισμό αόρατων παγίδων, καθώς και μια πολύτιμη πηγή ιδεών για τρόπους με τους οποίους θα ήταν δυνατόν να υπερνικηθούν» (Sfard, 1994 σ σ.269). Εάν οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν την ύπαρξη αυτών των παγίδων, όχι μόνο θα καταφέρουν να αναπτύξουν στρατηγικές, με σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές τους να τις αποφύγουν ή να τις ξεπεράσουν, αλλά επίσης θα είναι σε θέση να τους παρέχουν περισσότερο χρόνο για να εξοικειωθούν με δύσκολες ιδέες. Επιπλέον, θα μπορούν να καθησυχάσουν ανήσυχους μαθητές, επισημαίνοντας πως τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν είναι συνηθισμένα, κάτι που είναι ικανό να ανακουφίσει το άγχος των περισσότερων εξ αυτών (Jones, 1969).

Η Hefendehl- Hebeker (1991), χρησιμοποίησε αυτήν την ιδέα στο άρθρο της με θέμα τους αρνητικούς αριθμούς, στα πλαίσια του οποίου αναφέρθηκε με λεπτομέρεια στα προβλήματα που προέκυψαν πριν από την απόλυτη αποδοχή της συγκεκριμένης κατηγορίας αριθμών. Παράλληλα, έκανε λόγο για τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί που γνωρίζουν το παρόν πρόβλημα, είναι σε θέση να βοηθήσουν τους μαθητές τους, να αποφύγουν τέτοιου είδους δυσκολίες. Παρόλα αυτά, η θεωρία της ανακεφαλαίωσης επικαλείται για να καταδικάσει αρκετές σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας, ενώ αρκετές όψεις του λογισμού συχνά διδάσκονται με την βοήθεια μεθόδων, οι οποίες είναι βασισμένες στην λογική και όχι στην διαίσθηση και το ένστικτο. Λόγω της χρήσης αυτών των μεθόδων, αντιστρέφεται η ιστορική σειρά με την οποία είχαν αναπτυχθεί, δημιουργώντας κατά συνέπεια δυσκολίες στους μαθητές (Grabiner, 1983). Από όλα τα παραπάνω, είναι δυνατό να συμπεράνουμε πως ο νόμος του Haeckel συνδέεται σε έναν βαθμό με την μαθηματική παιδαγωγική, αλλά σύμφωνα με τον Wheeler επιβάλλεται μεγάλη προσοχή καθώς :

«για να βρεθεί η πραγματική σχέση μεταξύ της παιδαγωγικής και της ιστορίας των μαθηματικών, επιβάλλεται να ερευνησουμε αυτά τα δύο αντικείμενα σε μεγαλύτερο βάθος. Το κοινό έδαφος ανάμεσα στην παιδαγωγική και την ιστορία, αποτελεί το γεγονός πως και τα δύο αντικείμενα αφορούν τα υπό κατασκευή μαθηματικά, αυτά τα οποία

βρίσκονται υπό κατασκευή, στον νου των ανθρώπων» (Wheeler, 1981, σσ.3).

Αν και απομακρύνεται από την αποδοχή μιας άμεσης συσχέτισης της ιστορίας των μαθηματικών και της παιδαγωγικής της, το σχόλιό του ενισχύει την άποψη πως οι ιστορικές και πολυπολιτισμικές προοπτικές στα μαθηματικά, συνάδουν με τις σύγχρονες ανθρωπιστικές κονστρουκτιβιστικές φιλοσοφίες, όσο αφορά το συγκεκριμένο αντικείμενο.

## Τοποθετώντας τα πολιτιστικά μαθηματικά στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης

Σύμφωνα με τον Thom, «οποιαδήποτε πλευρά της μαθηματικής παιδαγωγικής, ακόμα και αν διαθέτει ελάχιστη συνοχή, βασίζεται στην φιλοσοφία των μαθηματικών» (Thom, 1973, σσ. 204). Τα πλεονεκτήματα της δημιουργίας ενός αναλυτικού πλαισίου όσο αφορά την μαθηματική εκπαίδευση, διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Higginson, ο οποίος πρότεινε το «τετράεδρο μοντέλο MAPS» που πήρε το όνομά του όπως φαίνεται παρακάτω: «M για Mathematics, A για Philosophy (arbitrary), P για Psychology και S για Sociology» (Higginson, 1980 σσ. 5). Μια δεκαετία αργότερα, ο Ernest (1991) παρήγαγε ένα πιο λεπτομερές πλαίσιο, το οποίο περιείχε δεκατέσσερα στοιχεία που συνδυάζονταν για να δημιουργήσουν ένα μοντέλο παιδαγωγικής ιδεολογίας, με βάση τις επιστημολογικές και ηθικές προοπτικές. Στην εισαγωγή αυτού του κειμένου, πρότεινε τέσσερα βασικά ζητήματα, τα οποία θα έπρεπε να αντιμετωπιστούν από την φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης:

- I. Η φιλοσοφία των μαθηματικών
- II. Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης
- III. Η φύση της μάθησης
- IV. Η φύση της διδασκαλίας

## Η χρήση των πολιτιστικών μαθηματικών στην τάξη της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Η μελέτη της ICMI, περιλαμβάνει μια σύνοψη του ρόλου της ιστορίας των μαθηματικών επί του παρόντος, στα εθνικά προγράμματα σπουδών (Fasanelli, 2000). Μέσω αυτού αποκαλύπτεται το γεγονός, πως οι περισσότερες χώρες του κόσμου συμπεριλαμβάνουν αναφορές στο πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθηματικών, στους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά λίγες εξ αυτών απαιτούν την ανάλυση συγκεκριμένων θεμάτων, ειδικά όσο αφορά την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Μια ενδιαφέρουσα εξαίρεση, αποτελεί η χρήση ενοποιημένων σειρών μαθηματικών

εγχειριδίων στην Κίνα, τα οποία διαθέτουν δεκαέξι θέματα που σχετίζονται με την ιστορία των μαθηματικών, ενώ τα μισά εξ αυτών κάνουν λόγο για την συνεισφορά των Κινέζων μαθηματικών στην επιστήμη. Παρόλα αυτά, ο Fasanelli υποστηρίζει πως ένα μικρό μέρος των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί αυτό το υλικό, πέρα από την στοχευμένη επιλογή τμημάτων, τα οποία υιοθετούνται με σκοπό τη προώθηση του πατριωτισμού, στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Μια πιο αναλυτική αντιμετώπιση των πολιτιστικών θεμάτων, πραγματοποιείται στο πρόγραμμα «*Mathematics 2001*» στην Πολωνία, κάτι που αποτελεί μια εκ των πολλών προτάσεων για την διαμόρφωση ενός νέου οδηγού σπουδών για τα μαθηματικά, σε αυτή την χώρα. Ακόμα και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, το παρόν πρόγραμμα περιλαμβάνει μαθησιακά αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται σε συγκεκριμένα πολιτιστικά θέματα όπως: ο Κινέζικος άβακας, το αριθμητικό σύστημα των Αζτέκων και το κόσκινο του Ερατοσθένη.

Λαμβάνοντας υπόψη την γενική έλλειψη καθοδήγησης από τον οδηγό σπουδών, όσο αφορά τις πολιτιστικές προοπτικές των μαθηματικών, τα μαθηματικά περιοδικά έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο στην διάδοση αυτών των ιδεών. Κατά την διάρκεια του εναρκτήριου έτους του «*Arithmetic Teacher*», το πρώτο του τεύχος αφιερώθηκε εξ ολοκλήρου στα μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου, ενώ συμπεριλάμβανε δύο άρθρα με θέμα την ιστορία των μαθηματικών. Το πρώτο άρθρο εξ αυτών (Willerding, 1954), ήταν θεωρητικό και προωθούσε τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία της αριθμητικής, ενώ το δεύτερο άρθρο (Jenkins, 1954) χρησιμοποιούσε την ιστορική δομή, για να παρέχει πληροφορίες για τον άβακα και πολλά άλλα αρχαία υπολογιστικά συστήματα.

Αν και τα άρθρα για την χρήση της ιστορίας των μαθηματικών, συνέχισαν να εμφανίζονται και στα επόμενα τεύχη, ήταν σπάνια και εφόσον δεν έχουν αναφερθεί εμπειρίες χρήσης τους στα πλαίσια της τάξης, είναι ασαφές το τι επίδραση θα είχαν τέτοιου είδους άρθρα, στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η αναγνώριση από το NCTM, όσο αφορά την άμεση απόδοση προσοχής στο πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθηματικών (NCTM, 1989) ενθάρρυνε την έκδοση μεγάλου αριθμού άρθρων που είτε προωθούσαν αυτήν την προσέγγιση, (Bidwell, 1993; D' Ambrosio, 1997; Fauvel, 1991; Shirley, 1995; Zaslavsky, 1991) είτε εξηγούσαν τους τρόπους με τους οποίους ήταν δυνατή η διδασκαλία ορισμένων θεμάτων (Ascher, 2001; Naylor, and Naylor, 2001; Phillip, 1996; Swetz, 1989; Zepp, 1992). Ωστόσο, άρθρα τα οποία μαρτυρούσαν την χρήση τέτοιων προοπτικών στα πλαίσια της σχολικής τάξης, παρέμεναν σπάνια.

Η σημασία που συνδέεται με την ιστορία των μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς, επιδεικνύεται μέσω της ενασχόλησης τεσσάρων αγγλόγλωσσων περιοδικών με την μαθηματική εκπαίδευση, ενώ το μεγαλύτερο μέρος αυτών, έχουν αφιερώσει ολοκληρωμένα τεύχη στην σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ιστορία των μαθηματικών και τη μάθηση και διδασκαλία του αντικειμένου. Τα τεύχη που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι τα εξής:

- I. «For the Learning of Mathematics» (1991, 11 (2) )
- II. «Mathematical Gazette» (1992, 76 (475) )
- III. « Mathematics in School» (1997, 26 (3) και 1998, 27 (4) )

#### IV. « Mathematics Teacher» (2000, 93 (8) )

Το πρώτο από αυτά τα ιδιαίτερα τεύχη, εστιάζει σε εμπειρίες στα πλαίσια της σχολικής τάξης καλύπτοντας όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, ενώ τα υπόλοιπα τεύχη περιλαμβάνουν ένα σύνολο θεωρητικών, αλλά και πρακτικών άρθρων.

Τα άρθρα τα οποία πραγματεύονται τις πολυπολιτισμικές προοπτικές των μαθηματικών στα πλαίσια της σχολικής τάξης, είναι πιο πρόσφατα από αυτά που κάνουν λόγο για την ιστορία τους. Ακόμα και με λίγες εξαιρέσεις, όπως τα πρώιμα έργα του Zaslavsky (1973, 1980, 1981), το συγκεκριμένο υλικό δεν έκανε την εμφάνισή του στα περιοδικά μέχρι την δεκαετία του 1990. Ο πρώτος ερευνητής που συμπεριέλαβε την περιγραφή της εργασίας των μαθητών του, ήταν ο J. Smith το 1995 στο άρθρο του με τίτλο « Threading mathematics into social studies». Στα πλαίσια του οποίου έγινε αναφορά σε μια τάξη του Δημοτικού Σχολείου, στην οποία οι μαθητές όχι μόνο διερεύνησαν τις μαθηματικές έννοιες που βρίσκονται στα παραδοσιακά καπιτονέ παπλώματα, αλλά επίσης εξέτασαν τα μαθηματικά μοτίβα και τους τρόπου με τους οποίους συνδέονται, με τους τετράγωνους αριθμούς. Προς την ίδια κατεύθυνση, η Gorman (1997) συσχετίζει τις εμπειρίες των μαθητών της (που ανήκουν στην Πέμπτη τάξη του Δημοτικού), με το παιχνίδι των Σουμέριων «kalah» υποστηρίζοντας πως τέτοιου είδους ενασχόληση με παιχνίδια, ικανοποιεί τα πρότυπα του

NCTM

(1989).

Στην συνέχεια, εξηγεί ένα σύνολο άλλων παιχνιδιών, υποδεικνύοντας με ποιον τρόπο θα μπορούσαν να μετατραπούν σε εξερευνήσεις της τάξης, χωρίς όμως να παρέχει ανατροφοδότηση από τους μαθητές της. Ωστόσο, άρθρα τα οποία πραγματεύονται εμπειρίες μέσα από τις σχολικές τάξεις, συχνά αναφέρουν τον ενθουσιασμό των μαθητών, ενώ παράλληλα παρέχουν πολύτιμες προφορικές αποδείξεις της επιτυχίας αυτής της διδακτικής προσέγγισης.

## Κεφάλαιο 3

### Βοηθήματα και πόροι της τάξης

Μέχρι και την τελευταία δεκαετία του 20<sup>ου</sup> αιώνα, ένα βασικό μειονέκτημα όσο αφορά την υιοθέτηση των πολιτιστικών προοπτικών στα σχολικά μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αποτελούσε η έλλειψη των πόρων και βοηθημάτων, τα οποία θα χρησιμοποιούνταν στα πλαίσια της διδασκαλίας (Rogers, 1991). Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα μελετηθεί η διαθεσιμότητα πόρων που κρίνονται αναγκαίοι κατά την διδασκαλία των ιστορικών μαθηματικών, ειδικά όσο αφορά τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

### Υλικό για την διδασκαλία ιστορικών μαθηματικών

Το πρώτο κείμενο που έκανε λόγο για την ιστορία των μαθηματικών, αλλά παράλληλα ήταν διαθέσιμο για τους μαθητές του Δημοτικού Σχολείου, ήταν το κλασικό έργο του D. Smith με τίτλο « Number Stories of Long Ago». Το συγκεκριμένο έργο εκδόθηκε το 1919, ενώ επανεκδόθηκε πολλές φορές κατά τη διάρκεια του αιώνα, με την τελευταία του έκδοση να έχει πραγματοποιηθεί το 1995. Μέσω αυτού του έργου, εξιστορείται η εκκίνηση και εξέλιξη της αριθμητικής, με την βοήθεια ιστοριών στις οποίες πρωταγωνιστούν παιδιά, τα οποία προέρχονται από διαφορετικούς τόπους και χρονικές εποχές. Ο Smith αιτιολόγησε τη συγγραφή του έργου του ως εξής:

«Η ιστορία των αριθμών μας, οι προσπάθειες του κόσμου για να μετρήσει, τα διάφορα πειράματα για την γραφή αριθμών και όλες οι δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν μέσα στα χρόνια όσο αφορά την πραγματοποίηση καθημερινών υπολογισμών- όλα αυτά είναι συνδεδεμένα με την ιστορία της ανθρωπότητας και αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος για κάθε σκεπτόμενο άνθρωπο ... Η ιστορία των μαθηματικών δεν αποτελεί μικρό τμήμα της ιστορίας του πολιτισμού» (Smith, 1995 σσ. ix).

Πέρασαν πάνω από τριάντα χρόνια μέχρι να εμφανιστεί το επόμενο κείμενο για την ιστορία των μαθηματικών, το οποίο να απευθύνεται σε παιδιά. Το έργο « The Wonderful World of Mathematics» συγγράφηκε από τον Hogben το 1955 και παρέχει μια επισκόπηση των μαθηματικών που είναι δυνατόν να εκτιμηθεί από τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου. Ένα παρόμοιο κείμενο με τίτλο « The Giant Golden Book of Mathematics» (Adler, 1960) εμφανίστηκε λίγο καιρό αργότερα, αλλά εστίαζε λιγότερο στις ιστορικές προσεγγίσεις, από ότι αυτό του Hogben. Το 1969, το NCTM αναγνώρισε την μεγάλη σημασία της ιστορίας των μαθηματικών, υιοθετώντας το συγκεκριμένο αντικείμενο ως κύριο θέμα της τριαντακοστής πρώτης τους επετηρίδας. Τόσο το παρόν κείμενο, όσο και άλλα έργα της ίδιας περιόδου, (Bunt, Jones, & Bedient, 1976; Dedron, & Itard, 1959/1973) παρείχαν πολύτιμες πληροφορίες για όσους εκπαιδευτικούς επιθυμούσαν να συμπεριλάβουν το αντικείμενο των ιστορικών μαθηματικών στις σχολικές τους τάξεις, αν και το παρόν υλικό σπάνια παρουσιάζονταν με μορφή, που ήταν δυνατόν να χρησιμοποιηθεί απευθείας από τους μαθητές.

Το βιβλίο του H. W. Eves με τίτλο «In Mathematical Circles» (1969) και οι τέσσερις διάδοχοί του, παρείχαν μια πρώιμη πηγή μαθηματικών ιστοριών και προφορικών μαρτυριών, οι οποίες διαλεύκαναν το πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθηματικών. Το σύγγραμμα της Pappa «Joy of Mathematics» (1989), είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ο άμεσος κληρονόμος της παράδοσης του έργου του Eves, καθώς το συγκεκριμένο έργο παρουσιάζει ένα σύνολο άρθρων με μικρή έκταση, ενώ συχνά περιλαμβάνει στοιχεία των ιστορικών προοπτικών των μαθηματικών. Επιπλέον, το υλικό που βρίσκεται στο παρόν έργο είναι δυνατόν να προσαρμοστεί, έτσι ώστε να παρουσιαστεί στα πλαίσια της τάξης, ενώ παράλληλα παρέχει τις απαραίτητες πληροφορίες για την δημιουργία διάφορων πρότζεκτ, τα οποία απευθύνονται στους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων του Δημοτικού.



Αρκετά συγγράμματα εστιάζουν στα μαθηματικά ενός συγκεκριμένου πολιτισμού, με την Αίγυπτο να αποτελεί το δημοφιλέστερο θέμα, ειδικά στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, η πλειοψηφία των βιβλίων περιλαμβάνουν μαθηματικά διαφορετικών πολιτισμών, ορισμένες φορές οριοθετημένα σε ξεχωριστά κεφάλαια (Eagle, 1995), ή ως διαφορετικές προσεγγίσεις μιας συγκεκριμένη έννοιας. Ένα μεγάλο μέρος των συγγραμμάτων που πραγματεύονται το αντικείμενο των ιστορικών μαθηματικών, παραθέτουν βιογραφικές πληροφορίες διάφορων γνωστών μαθηματικών, με τα πιο διαδεδομένα έργα εξ αυτών να αποτελούν οι δύο τόμοι «Mathematicians are people too: Stories from the lives of great Mathematicians» (Reimer, &Reimer, 1990, 1995b). Όπως ο D. Smith, οι συγγραφείς τονίζουν πως αυτές οι ιστορίες «αποτελούν σημαντικό κομμάτι της κληρονομιάς μας και ζωτικό συνδετικό κρίκο με το παρελθόν μας» (Reimer, &Reimer, 1990. σσ. iv), ενώ παράλληλα επισημαίνουν πως «σχεδόν τίποτα δεν αιχμαλωτίζει την φαντασία και προσοχή των μαθητών, όσο μια καλή ιστορία» (Reimer, &Reimer, 1995b σσ. iv). Οι ιστορίες των δύο αυτών έργων πέρα από διδακτικές, ενδιαφέρουσες και εύκολα κατανοητές, είναι και αρκετά σύντομες, κάτι το οποίο τις καθιστά ιδανικές για ανάγνωση και παρουσίαση στην τάξη ( Percival, 2004, σσ.38) .

Πέρα από τα δύο παραπάνω έργα αυτοί οι συγγραφείς δημιούργησαν μια σειρά βιβλίων με τίτλο «Historical Connections in Mathematics» (1992, 1993, 1995a), τα οποία περιλαμβάνουν φυλλάδια εργασιών για τους μαθητές. Επιπλέον, πολλές από της δραστηριότητες στην παρούσα σειρά ενθαρρύνουν μια πιο πρακτική προσέγγιση, καθώς οι συγγραφείς θεωρούσαν πως «οι μαθητές θα εμπλακούν περισσότερο στην διαδικασία, με αποτέλεσμα να θυμούνται τις έννοιες καλύτερα» (Reimer, & Reimer, 1992 σσ.92). Παρόλα αυτά, άξια αναφοράς αποτελούν και τα συγγράμματα τα οποία εστιάζουν στην συνεισφορά των γυναικών, στην ανάπτυξη των μαθηματικών (Cooney,1996; Osen, 1975/2003) αλλά και άλλα έργα τα οποία βασισμένα σε προφορικές μαρτυρίες αναφορικά με έναν μαθηματικό δημιούργησαν μια ιστορία για παιδιά, ολοκληρωμένη με την ανάλογη εικονογράφηση (Allen, 1980; Glass,1998).

Ωστόσο, τα βοηθήματα που κρίνονται αναγκαία, για την υιοθέτηση των ιστορικών και πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά, δεν περιορίζονται μόνο σε αυτά που βρίσκονται στην μορφή συγγραμμάτων, καθώς υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός βοηθητικών ιστοσελίδων, οπτικοακουστικού υλικού και εκπαιδευτικών αφισών, σχετικά πάντα με το συγκεκριμένο αντικείμενο. Άξια αναφοράς αποτελεί η ιστοσελίδα: <http://www.kidsmathgamesonline.com/facts.html>, στα πλαίσια της οποίας αναφέρονται με σύντομο αλλά και κατανοητό τρόπο, ενδιαφέροντα στοιχεία για την ιστορία των μαθηματικών από όλο τον κόσμο, ενώ απευθύνεται σε όλες τις τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, αναφέρεται σύντομα σε ένα σύνολο ανακαλύψεων γνωστών μαθηματικών, οι οποίες συνοδεύονται με φωτογραφίες των επιστημόνων, κάτι το οποίο ενδέχεται να αποβεί αρκετά χρήσιμο, εφόσον έτσι θα μπει ένα πρόσωπο σε όλα τα γεγονότα που συζητούνται στην τάξη. Αν και στα πλαίσια της συγκεκριμένης ιστοσελίδας, δεν υπάρχουν αναλυτικές περιγραφές των γεγονότων, ενδέχεται να αποτελέσει το τέλειο εργαλείο για την εκκίνηση μιας επικοινωνιακής συζήτησης στην τάξη, ή να βοηθήσει τους μαθητές να θυμηθούν όλα όσα έχουν ήδη διδαχθεί, λαμβάνοντας τον ρόλο μιας επανάληψης. Μια παρόμοια

ιστοσελίδα με περισσότερο και αναλυτικότερο υλικό, αποτελεί η: <https://nrich.maths.org/9443>. Στην συγκεκριμένη ιστοσελίδα, υπάρχει ένα μεγάλο σύνολο κειμένων που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών, σε όλο τον κόσμο. Τα κείμενα που συμπεριλαμβάνονται, είναι διαχωρισμένα σύμφωνα με την ηλικία των μαθητών στην οποία απευθύνονται, ενώ παράλληλα συνοδεύονται και με τις ανάλογες εικόνες.

Πέρα από τα βιογραφικά στοιχεία, υπάρχουν και πιο απλές ιστοσελίδες, οι οποίες αφορούν τα μαθηματικά πρώιμων πολιτισμών, όπως αυτή που βρίσκεται στην διεύθυνση: <https://discoveringegypt.com>, η οποία επεξηγεί το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων, ενώ παράλληλα εμπεριέχει αρκετές διαδραστικές δραστηριότητες. Επιπλέον, στην ιστοσελίδα: <https://www.preceden.com/timelines/325732-history-of-mathematics> υπάρχει μια κατάλληλα εικονογραφημένη ιστορική αναδρομή, της ιστορίας των μαθηματικών ανά τον κόσμο, με την παρουσία ενός διαδραστικού χάρτη.

Όσο αφορά οπτικοακουστικό υλικό, το οποίο να ανταποκρίνεται στο αντικείμενο των ιστορικών μαθηματικών, η ταινία με τίτλο «Donald in Mathmagic Land» η οποία δημιουργήθηκε από την Walt Disney Educational Media το 1959, αποτελεί ένα παράδειγμα άξιο αναφοράς. Στα πλαίσια αυτής της ταινίας, ο πρωταγωνιστής Donald Duck ταξιδεύει πίσω στον χρόνο στην Αρχαία Ελλάδα και ανακαλύπτει πως «μπορείς να βρεις τα μαθηματικά, στα πιο απρόσμενα μέρη», ενώ παράλληλα διαπιστώνει την άμεση σχέση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες, αλλά και με διάφορες τέχνες. Αυτή η ταινία προτείνεται για όλες τις ηλικίες, ενώ είναι σε θέση να παροτρύνει την δημιουργία πολλών μαθηματικών δραστηριοτήτων, στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Εκτός του πλαισίου των ταινιών, υπάρχει ένα σύνολο ολιγόλεπτων εκπαιδευτικών βίντεο στην πλατφόρμα <https://www.youtube.com>, όπως αυτό με τίτλο «A brief history of numerical systems- Alessandra King», το οποίο επεξηγεί με κατανοητό τρόπο, την δημιουργία και εξέλιξη των συστημάτων αρίθμησης. Ένα ακόμα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, αποτελεί η σειρά τεσσάρων βίντεο με τίτλο «The History of Non-Euclidian Geometry- Sacred Geometry- Extra History-#1,#2,#3,#4», τα οποία αναφέρονται τόσο στην ιστορία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όσο και στην συνεισφορά άλλων μαθηματικών σε αυτό το αντικείμενο.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην κατηγορία των εκπαιδευτικών βοηθημάτων ανήκουν και οι αφίσες. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα είναι δυνατόν να βρεθούν σε διάφορες ιστοσελίδες του διαδικτύου όπως αυτές που παρατίθενται παρακάτω:

- I. <https://www.educatorstechnology.com/2014/01/a-beautiful-math-poster-featuring.html?m=1>
- II. <https://www.dreambox.com/blog/female-math-pioneers-infographic>
- III. <https://www.etsy.com/listing/424477841/great-women-of-mathematics-motivational>

Στην πρώτη διεύθυνση υπάρχει μια αφίσα με τους πιο γνωστούς μαθηματικούς και τις βασικότερες ανακαλύψεις τους. Επιπλέον, στις δύο επόμενες ιστοσελίδες υπάρχουν αφίσες οι οποίες εστιάζουν στην συνεισφορά των γυναικών στην μαθηματική

επιστήμη, από το παρελθόν μέχρι και την σύγχρονη εποχή. Πέρα από την αναφορά βιογραφικών στοιχείων, υπάρχουν και πιο απλές αφίσες οι οποίες εστιάζουν στα μαθηματικά, ενός μόνο πολιτισμού. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν, οι αφίσες που βρίσκονται στις ιστοσελίδες:

- I. [https://www.twinkl.co.uk/resource/t2-m-1070-roman-numerals-poster?utm\\_source=pinterest&utm\\_medium=social&utm\\_campaign=history](https://www.twinkl.co.uk/resource/t2-m-1070-roman-numerals-poster?utm_source=pinterest&utm_medium=social&utm_campaign=history)
- II. <https://nrich.maths.org/6832>
- III. <https://resource-bank.scholastic.co.uk/resources/370299>

Στην πρώτη διεύθυνση υπάρχει ένα πακέτο αφισών, οι οποίες απεικονίζουν το σύστημα αρίθμησης των Ρωμαίων, ενώ στην δεύτερη διεύθυνση βρίσκεται μια αφίσα που εστιάζει σε ένα Αιγυπτιακό πρόβλημα. Τέλος, στην τρίτη διεύθυνση υπάρχει ένα ηλεκτρονικό αρχείο, το οποίο είναι δυνατόν να τυπωθεί στην μορφή αφίσας και απεικονίζει το αριθμητικό σύστημα των Μάγια.

## Κεφάλαιο 4

### Μεθοδολογία

Όπως έχει προαναφερθεί, η παρούσα πτυχιακή εργασία στηρίζεται σε ένα μέρος στην έρευνα την οποία διεξήγαγε η Percival, στα πλαίσια της διδακτορικής της εργασίας το 2004. Λόγω αυτού, το κεφάλαιο το οποίο ακολουθεί πραγματεύεται την επιλογή των συμμετεχόντων της έρευνας, το περιβάλλον που αυτή έλαβε χώρα, το πρόγραμμα και τον σχεδιασμό της, την διαδικασία συλλογής και τις μεθόδους ανάλυσης των δεδομένων που προέκυψαν.

### Οι συμμετέχοντες της έρευνας

Εφόσον το ερευνητικό πρόγραμμα της Percival, χρησιμοποιούσε μεθόδους μελέτης περιπτώσεων, η επιλογή των συμμετεχόντων αποτελούσε ζήτημα μεγάλης σημασίας. Στην προσπάθειά της να επιλέξει τους κατάλληλους υποψήφιους, χρησιμοποίησε την προσέγγιση της σκόπιμης δειγματοληψίας, η εφαρμογή της οποίας απαιτούσε την προηγούμενη γνωριμία της με αυτούς. Από τους δέκα υποψήφιους εκπαιδευτικούς που θεωρούσε κατάλληλους για την παρούσα έρευνα, η ερευνήτρια επικεντρώθηκε σε δύο μελέτες περίπτωσης και μια ομαδική μελέτη περίπτωσης, ενώ για λόγους ανωνυμίας, επέλεξε να αλλάξει τα ονόματα τόσο των εκπαιδευτικών και των μαθητών, όσο και αυτά των σχολείων.

Οι δύο πρώτοι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί ήταν η Ruth και η Sarah, οι οποίες ήδη διέθεταν κάποια εμπειρία όσο αφορά την εφαρμογή των πολιτιστικών μαθηματικών στην σχολική τάξη. Έπειτα, ακολούθησε η ομάδα τεσσάρων

εκπαιδευτικών, οι οποίοι δίδασκαν στο ίδιο σχολείο με την Sarah και έδειχναν αρκετό ενδιαφέρον για την εργασία της, πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Παρόλα αυτά, κανένας από τους παραπάνω εκπαιδευτικούς δε είχε επιχειρήσει να εντάξει τις πολιτιστικές προοπτικές στην δική του διδασκαλία των μαθηματικών. Στο δείγμα που επιλέχθηκε από την ερευνήτρια υπήρχαν τόσο άνδρες, όσο και γυναίκες εκπαιδευτικοί, οι οποίοι δίδασκαν από την Τρίτη ( Γ' ) μέχρι και την Έκτη (ΣΤ') τάξη του Δημοτικού, ενώ είχαν εμπειρία στον τομέα της εκπαίδευσης, από πέντε μέχρι και πάνω από τριάντα χρόνια ( Percival, 2004, σσ. 46).

Η Ruth, αν και ήταν αρκετά δεκτική στην ιδέα της υιοθέτησης πολιτιστικών στοιχείων στα μαθηματικά, δεν έδειχνε να διαθέτει αυτοπεποίθηση όσο αφορά την εμπειρία της σε αυτόν τον τομέα. Από την άλλη πλευρά, η Sarah είχε παρακολουθήσει ένα μάθημα με τίτλο *Math Around the World and Across the Ages*, το οποίο διδάσκονταν από την Percival στα πλαίσια του μεταπτυχιακού της προγράμματος το 2000. Ως τελική εργασία σε αυτό το πρόγραμμα, η Sarah δημιούργησε μια σειρά «Ημερών Ταξιδιού στον Χρόνο» («Time-Travel Days»). Μέσω αυτής της σειράς, γινόταν δυνατή η ενσωμάτωση των μαθηματικών, με άλλες πτυχές του οδηγού σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο» σύντομα κέντρισαν το ενδιαφέρον και άλλων εκπαιδευτικών, κάτι που μετά από δικές τους παρακλήσεις οδήγησε την Sarah να παρουσιάσει ορισμένα θέματα ιστορίας των μαθηματικών, στην τάξη της Joan. Η Joan ενθουσιάστηκε σε τέτοιο βαθμό από το υλικό, αλλά και από το ενδιαφέρον των μαθητών απέναντι στο αντικείμενο, που αποφάσισε να εφαρμόσει μια ιστορική προσέγγιση στα μαθηματικά, την επομένη σχολική χρονιά. Λόγω των παραπάνω συμβάντων, το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών εντάθηκε περαιτέρω, με αποτέλεσμα την συμμετοχή τριών εξ αυτών, της Barbara, της Maureen και του Mike. Οι τρεις αυτοί εκπαιδευτικοί και η Joan, ακολούθησαν μια κοινή προσέγγιση όσο αφορά την διδασκαλία των ιστορικών και πολυπολιτισμικών μαθηματικών, έτσι η ερευνήτρια επέλεξε να τους χειριστεί ως μια ομαδική μελέτη περίπτωσης και όχι ως τέσσερα ξεχωριστά άτομα, ενώ αναφέρονται στην έρευνα ως «Group of Four» (G4) (Percival, 2004, σσ. 48).

## Το πρόγραμμα της έρευνας

Η έρευνα πεδίου όσο αφορά την μελέτη περίπτωσης της Ruth και την μελέτη περίπτωσης της ομάδας G4, έλαβε χώρα την ακαδημαϊκή χρονιά 2001-2002, ενώ η έρευνα πεδίου αναφορικά με την μελέτη περίπτωσης της Sarah είχε μεγαλύτερη χρονική έκταση, καθώς πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια τριών ακαδημαϊκών ετών, (2000-2001 έως 2002-2003) εφόσον ολόκληρο το πρόγραμμα εφαρμόστηκε από την εκπαιδευτικό για τρεις συνεχόμενες σχολικές χρονιές. Η ερευνήτρια παρέμεινε σε επαφή με όλους τους συμμετέχοντες, ενώ κατέστησε σαφές πως ήταν πρόθυμη να βοηθήσει, όποτε οι εκπαιδευτικοί το επιθυμούσαν.

Κατά την διάρκεια της έρευνας πεδίου, το πρόγραμμα καθορίζονταν από τον κάθε εκπαιδευτικό ξεχωριστά. Η Ruth, επέλεξε να πραγματοποιήσει

δεκαεφτά μαθήματα με εφαρμογή των πολιτιστικών προοπτικών, στο χρονικό διάστημα δύο μηνών, ενώ η Sarah δίδαξε δέκα μαθήματα, στα πλαίσια της σειράς «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο», επιλέγοντας να αφιερώνει σε αυτά μια ημέρα κάθε μήνα της σχολικής χρονιάς. Ωστόσο, αρκετές φορές η διδακτική ενότητα απαιτούσε περισσότερες μέρες αφιέρωσης για να ολοκληρωθεί. Κάθε μέλος της ομάδας G4 σχεδίασε πέντε μαθήματα «πολιτιστικών μαθηματικών», αλλά όπως και στην περίπτωση της Sarah, πολλές φορές ήταν αναγκαία η αφιέρωση παραπάνω μαθημάτων για την ολοκλήρωση της ενότητας (Percival, 2004, σσ. 49).

Αν και η ερευνήτρια ήταν σε επικοινωνία με τους εκπαιδευτικούς τόσο πριν, όσο και μετά από τα συγκεκριμένα μαθήματα, η σύγκρουση μεταξύ των προγραμμάτων, δεν της επέτρεπε να παρευρίσκεται σε όλα τα μαθήματα που έλαβαν χώρα. Λόγω αυτού, η Percival παρευρισκόταν σε όλα τα μαθήματα της ομάδας G4 και της Sarah, τα οποία πραγματοποιούνταν μια ημέρα κάθε μήνα, αλλά λόγω της απρόβλεπτης φύσης του προγράμματος της Ruth, κατόρθωσε να παρευρεθεί στα δέκα από τα δεκαεφτά μαθήματα, ενώ ενημερώθηκε για τα υπόλοιπα μέσω ηχογραφήσεων.

## Το περιβάλλον της έρευνας

Η παρούσα έρευνα διεξήχθη σε δύο διαφορετικά σχολεία, τα οποία ακολουθούσαν τις ίδιες κατευθυντήριες γραμμές, σύμφωνα με τον οδηγό σπουδών που επικρατεί στη Βρετανική Κολομβία. Το σχολείο στο οποίο δίδασκε η Ruth, βρίσκονταν σε περιοχή χαμηλού κοινωνικο-οικονομικού κύρους, ενώ η ίδια υποστήριζε πως όλες οι τάξεις της διέθεταν αρκετά μεγάλο αριθμό μαθητών, με ειδικές μαθησιακές ανάγκες. Από την άλλη πλευρά, το σχολείο στο οποίο δίδασκε η Sarah και η ομάδα G4, βρίσκονταν σε περιοχή που η πλειοψηφία των κατοίκων ανήκαν στην μεσαία τάξη, ενώ η Sarah ανέφερε πως υπήρχαν αρκετοί μαθητές, που προέρχονταν από οικογένειες ανώτερου κοινωνικού επιπέδου, στις τάξεις τις οποίες αυτή δίδασκε. Ωστόσο, είχε την πεποίθηση πως μέσω της εφαρμογής των πολιτιστικών προοπτικών στην διδασκαλία των μαθηματικών, θα ήταν σε θέση να φέρει όλους τους μαθητές στο ίδιο επίπεδο, καθώς αυτό το υλικό θα ήταν το ίδιο άγνωστο σε όλους (Percival, 2004 σσ. 49).

Τα μαθήματα λάμβαναν χώρα ως επί το πλείστον στις κανονικές αίθουσες με λίγες εξαιρέσεις, όπως στην περίπτωση πραγματοποίησης δραστηριοτήτων, στα πλαίσια των οποίων οι μαθητές μετακινούνταν σε διαφορετικά μέρη του σχολείου. Η πλειοψηφία των τάξεων ήταν επίσημα οργανωμένες, με τα θρανία των μαθητών να βρίσκονται σε σειρές, ενώ μόνο ένας μικρός αριθμός τάξεων διέθετε διαφορετική οργάνωση, με τα θρανία να είναι διαρρυθμισμένα σε ομάδες. Η Sarah ήταν η μόνη εκπαιδευτικός, που επέλεγε να αλλάζει την διαρρύθμιση της τάξης, ανάλογα με το αντικείμενο το οποίο δίδασκε κάθε φορά. Επιπλέον, στα πλαίσια των μαθημάτων των πολιτιστικών μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί κοσμούσαν τους τοίχους της αίθουσας με αφίσες που αντιστοιχούσαν κάθε φορά στο αντικείμενο του μαθήματος, ενώ η Ruth και η Sarah σε συνδυασμό με τις ανάλογες αφίσες, επέλεγαν διάφορα έργα τέχνης και πίνακες που συνδέονταν με τα μαθηματικά.

Οι συζητήσεις που πραγματοποιούνταν τόσο πριν, όσο και μετά από το πέρας των μαθημάτων, λάμβαναν χώρα στο γραφείο των καθηγητών, σε κάποια κενή αίθουσα, στο σπίτι της ερευνήτριας ή το σπίτι του εκάστοτε εκπαιδευτικού. Παράλληλα, η ερευνήτρια ήταν σε συνεχή επικοινωνία με όλους τους εκπαιδευτικούς, μέσω τηλεφώνου ή ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (Percival, 2004 σσ. 50).

## Σχεδιασμός της έρευνας

Η αξία του ποιοτικού παραδείγματος, όσο αφορά την διερεύνηση των ιστορικών προσεγγίσεων στην διδασκαλία των μαθηματικών, αποτελεί ένα από τα θέματα που έχει απασχολήσει εκτενώς την E. Barbin. Σύμφωνα με την ίδια, οι ποσοτικού τύπου απόπειρες προσδιορισμού του αντίκτυπου που έχει αυτού του είδους η εργασία, απέτυχαν εφόσον « η επίτευξη των σκοπών της χρήσης της ιστορίας, δεν είναι δυνατόν να μετρηθεί μέσω αξιολογήσεων» (Barbin, 2000 σσ.66).

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της μελέτης περίπτωσης, ενώ και οι τρεις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, αποτελούσαν αυτό που οι Denzin και Lincoln αποκαλούν «οργανική μελέτη περίπτωσης», καθώς οι εκπαιδευτικοί μελετήθηκαν με σκοπό να παραχθεί μια εικόνα για ένα συγκεκριμένο ζήτημα, χωρίς να αποτελούν οι ίδιοι το αντικείμενο του ενδιαφέροντος. Επιπλέον, εάν ληφθούν υπόψιν ως σύνολο, είναι σε θέση να δημιουργήσουν την βάση για μια «συλλογική μελέτη περίπτωσης». Κάτι τέτοιο, θα συμβάλλει στην δημιουργία μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας, μέσω της συλλογής δεδομένων από εκπαιδευτικούς που έχουν εξερευνήσει τα μαθηματικά από αυτή την διαφορετική σκοπιά, ή ενδιαφέρονται να το επιχειρήσουν (Percival, 2004 σσ. 51).

Καθώς η ερευνήτρια βοήθησε ενεργά τους συμμετέχοντες, ο σχεδιασμός της έρευνας της επηρεάστηκε έντονα από το πείραμα εξέλιξης των εκπαιδευτικών (TDE), το οποίο ο Simon περιέγραψε ως: «μια μεθοδολογία για την μελέτη της εξέλιξης των εκπαιδευτικών, που βασίζεται στην κεντρική αρχή του πειράματος κονστρουκτιβιστικής διδασκαλίας ... η οποία υποστηρίζει, πως ένα σύνολο ενημερωμένων και ικανών ερευνητών, είναι σε θέση να μελετήσει την εξέλιξη ενθαρρύνοντάς την, ως μέρος ενός συνεχόμενου κύκλου ανάλυσης και παρεμβάσεων» (Simon, 2000 σσ. 336).

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο όρος «εξέλιξη εκπαιδευτικών» χρησιμοποιείται για να εκφράσει «τις αλλαγές στους τομείς της γνώσης, των πεποιθήσεων, των τάσεων και των δεξιοτήτων που υποστηρίζουν την ικανότητα των εκπαιδευτικών, να ενσωματώσουν επιτυχώς τις αρχές της τρέχουσας μεταρρύθμισης, στην μαθηματική εκπαίδευση» (Simon, 2000 σσ. 335). Έτσι, η ερευνήτρια χρησιμοποίησε το TDE ως σημείο εκκίνησης, ενώ έπειτα προχώρησε στη χρήση πιο παραδοσιακής ποιοτικής μεθοδολογίας.

Επιπλέον, εφόσον η Percival απευθύνονταν σε έναν μικρό αριθμό εκπαιδευτικών και όχι σε μια ολόκληρη τάξη, όπως συνέβαινε στο πείραμα εξέλιξης των εκπαιδευτικών (TDE), επέλεξε να διεξάγει ένα σύνολο προκαταρκτικών ερευνών, όσο αφορά τους εκπαιδευτικούς που γνώριζε πως διέθεταν ενδιαφέρον, πάνω στον τομέα των εναλλακτικών προσεγγίσεων στην διδασκαλία των μαθηματικών. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών των ερευνών, βοήθησε στην δημιουργία ερωτήσεων και διαδικασιών, με στόχο την συλλογή και ανάλυση δεδομένων (Percival, 2004, σσ. 52).

## Συλλογή Δεδομένων

Η ερευνήτρια, πριν από την διαδικασία συλλογής των δεδομένων, έλαβε την συγκατάθεση των περιφερειακών σχολικών συμβουλίων, των διευθυντών, των καθηγητών, των μαθητών, αλλά και των γονέων των μαθητών. Στην συνέχεια, χρησιμοποίησε ένα σύνολο μεθόδων συλλογής δεδομένων όπως: ερωτηματολόγια και συνεντεύξεις (οι οποίες ενέπλεκαν τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές), σημειώσεις πεδίου, φωτογραφίες, ηχογραφήσεις και σε μερικές περιπτώσεις βιντεοσκοπήσεις, πάντα στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Επιπλέον, στην τελική αξιολόγηση πέρα από όλα τα παραπάνω, λήφθηκαν υπόψιν αντίγραφα των δραστηριοτήτων των μαθητών, καθώς και παραδείγματα της εργασίας τους (Percival, 2004 σσ. 53).

Πριν από την διεξαγωγή της έρευνας, ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να συμπληρώσουν ένα σύντομο ερωτηματολόγιο, όσο αφορά τις απόψεις τους για τις πολιτιστικές προοπτικές των μαθηματικών, το οποίο σε συνδυασμό με ένα ακόμα ερωτηματολόγιο που εστίαζε σε πιο προσωπικές ερωτήσεις, αποτέλεσαν το πρώτο βήμα της έρευνας. Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν και αυτοί ένα σύντομο ερωτηματολόγιο, με σκοπό να αποκαλυφθούν οι γνώσεις τους στα μαθηματικά άλλων τόπων και εποχών, καθώς και να προσδιοριστούν οι αντιλήψεις τους πάνω σε αυτά.

Η παρακολούθηση της τάξης, αποτελούσε μια ακόμη βασική μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στην διαδικασία της συλλογής δεδομένων. Πέρα από την παρατήρηση των εκπαιδευτικών, η ερευνήτρια παρακολουθούσε στενά και τους μαθητές, ενώ προς το τέλος της διαδικασίας επέλεξε να πραγματοποιήσει συνεντεύξεις, έτσι ώστε να είναι σε θέση να κατανοήσει πλήρως, τις επιδράσεις που είχε η παρούσα εναλλακτική διδασκαλία στους μαθητές. Όσο αφορά τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς, μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας η ερευνήτρια τους ζήτησε να απαντήσουν σε ένα σύνολο ερωτήσεων, οι οποίες εστίαζαν στην εμπειρία της διδασκαλίας πολιτιστικών προοπτικών στο αντικείμενο των μαθηματικών, καθώς και στις απόψεις των εκπαιδευτικών για μελλοντική χρήση αυτών των δεδομένων (Percival, 2004 σσ. 54).

Κατά την διάρκεια των μαθημάτων, η ερευνήτρια κρατούσε γραπτές σημειώσεις αναφορικά με το τι ακριβώς διαδραματίζονταν στην τάξη, φροντίζοντας

να συμπεριλαμβάνει και διαλόγους ανάμεσα στους μαθητές και τον/την εκπαιδευτικό. Αυτές οι σημειώσεις, εξυπηρετούσαν δύο πολύ σημαντικούς σκοπούς:

- I. από την μια πλευρά περιέγραφαν γεγονότα και δραστηριότητες που λάμβαναν χώρα στα πλαίσια της τάξης, με μεγάλη λεπτομέρεια (γκριμάτσες και χειρονομίες των μαθητών),
- II. ενώ από την άλλη πλευρά, είχαν τον ρόλο μιας «ερευνητικής ενδοσκόπησης» όπως ονομάζεται και από τον Eisenhart (1988), δηλαδή μιας λειτουργίας κατά την οποία ο ερευνητής σημειώνει σχόλια, ομοιότητες και αντιθέσεις των δραστηριοτήτων μεταξύ των τάξεων, ή ακόμα και τους τρόπους με τους οποίους συγκρίνονται οι δραστηριότητες, με το πλάνο διδασκαλίας του/της εκπαιδευτικού (Percival, 2004 σσ. 56).

Σε αυτό το σημείο οφείλει να σημειωθεί, πως παρόλη τη καθοριστική σημασία όλων των παραπάνω μεθόδων, η ηχογράφηση, φωτογράφιση και βιντεοσκόπηση της τάξης, εμπεριέχει το ρίσκο της απόσπασης της προσοχής των μαθητών, και την αλλαγή στην συμπεριφορά τους, κάτι το οποίο υποστηρίζουν και οι Bogdan και Bicklen (1998, σσ.102). Στην παρούσα έρευνα κάτι τέτοιο δεν αποτέλεσε πρόβλημα, καθώς οι μαθητές προσαρμόστηκαν στις νέες συνθήκες αρκετά γρήγορα. Έτσι, με την βοήθεια των δεδομένων που λήφθηκαν μέσω όλων των παραπάνω μεθόδων, η ερευνήτρια ήταν σε θέση να δημιουργήσει μια ολοκληρωμένη εικόνα για το σύνολο των μαθημάτων (Percival, 2004 σσ. 56).

## Ανάλυση των Δεδομένων

Η συγκέντρωση μεγάλου όγκου δεδομένων, αποτελεί άμεση συνέπεια της φύσης της ποιοτικής έρευνας. Ωστόσο, όπως τονίζει και ο Wolcott, το σημαντικότερο έργο «δεν είναι η συλλογή όσο το δυνατόν μεγαλύτερου όγκου δεδομένων, αλλά η δυνατότητα αφαίρεσης των περισσότερων δεδομένων» (Wolcott, 1990 σσ.35). Οι συνεντεύξεις σε συνδυασμό με τις σημειώσεις κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, βοήθησαν την ερευνήτρια να παρακολουθεί την πορεία των δεδομένων που συνέλεγε, ενώ μέσω συνεχούς ανάλυσης των σημειώσεών της, ήταν σε θέση να υπογραμμίζει τα σημαντικότερα τμήματα τους για μελλοντική χρήση (Percival, 2004 σσ. 57).

Στην συνέχεια, η ερευνήτρια πραγματοποίησε μια προκαταρκτική ανάλυση των δεδομένων, εντοπίζοντας σημαντικές δηλώσεις και διαμορφώνοντας τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα, με την βοήθεια διαφορετικών γραμματοσειρών ή χρωμάτων υπογράμμισης, όπου αυτό κρίνονταν αναγκαίο. Με αυτόν τον τρόπο, ήταν ικανή να δημιουργήσει έναν αρχικό, εύκολα κατανοητό μηχανισμό κωδικοποίησης, ο οποίος φάνηκε αρκετά χρήσιμος, στα πλαίσια της επίσημης ανάλυσης. Αν και η εναλλακτική περιγραφή της ποιοτικής έρευνας, ακολουθεί τη λογική της «δημιουργίας μια εικόνας κατά τη διαδικασία συλλογής και εξέτασης των στοιχείων», (Bogdan, & Biklen, 1998 σσ.6-7) το θεωρητικό πλαίσιο που αναφέρθηκε παραπάνω,



σε συνδυασμό με την εφαρμογή της εκπαιδευτικής αναδιαμόρφωσης, παρείχαν ένα περίγραμμα ως προς ποια χαρακτηριστικά ενδέχεται να περιέχει αυτή η εικόνα.

Έπειτα, η ερευνήτρια προχώρησε στην επίσημη ανάλυση, ξεκινώντας με μια σύντομη επισκόπηση όλων των συγκεντρωμένων δεδομένων, χρησιμοποιώντας τα κωδικοποιημένα τμήματα όπως προαναφέρθηκε, έτσι ώστε να μπορέσει να καθορίσει τις βασικές κατηγορίες ενός αρχικού, κωδικοποιητικού σχεδίου. Στην συνέχεια, μελέτησε τα δεδομένα με μεγαλύτερη προσοχή κωδικοποιώντας κάθε «στοιχείο», ένας όρος που χρησιμοποιείται από τους Lincoln και Guba, για να περιγράψει «μια γνώση ή πράξη, την οποία ο ερευνητής πρέπει να διαθέτει ή να λάβει ... Πρέπει να αποτελεί το μικρότερο τμήμα πληροφορίας όσο αφορά ένα ζήτημα, το οποίο να είναι σε θέση να σταθεί από μόνο του» (Lincoln, & Guba, 1985 σσ.345). Τέλος, τα κωδικοποιημένα πλέον δεδομένα ομαδοποιήθηκαν σε ξεχωριστά αρχεία (Percival, 2004 σσ. 58).

Οι ταξινομημένες πληροφορίες, επέτρεψαν στην ερευνήτρια να εστιάζει σε συγκεκριμένες πλευρές της χρήσης των πολιτιστικών μαθηματικών. Ωστόσο, μια συμπληρωματική μέθοδος παρουσίασης της δυνατότητας υλοποίησης τέτοιου είδους εργασίας, αποτελεί η αναφορά ορισμένων παραδειγμάτων των μαθημάτων που έλαβαν χώρα. Τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα αυτών των μαθημάτων, υποβλήθηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό ανάλυσης από ότι τα υπόλοιπα, ενώ ο συλλογισμός των εκπαιδευτικών όσο αφορά την επιλογή των υλικών και των μεθόδων παρουσίασης, ήταν συνυφασμένος με τα δεδομένα της τάξης που αυτός δίδασκε (Percival, 2004 σσ. 58).

## Κεφάλαιο 5

### Πολιτιστικά Μαθηματικά σε δράση

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, υιοθέτησαν αρκετά διαφορετικές προσεγγίσεις, αναφορικά με τη χρήση των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά. Στο παρακάτω κεφάλαιο, εξηγούνται αναλυτικά οι διαφορετικές στρατηγικές που εφαρμόστηκαν, ενώ παράλληλα περιγράφονται τα μαθήματα που έλαβαν χώρα, συμπεριλαμβάνοντας περιστατικά και συζητήσεις που συνέβησαν στα πλαίσια της κάθε σχολικής τάξης.

Αρχικά, παρουσιάζεται η προσέγγιση της Ruth, η οποία έλαβε ως βάση τον οδηγό σπουδών και χρησιμοποίησε ένα σύνολο διαφορετικών βοηθημάτων, με σκοπό να καταφέρει να διδάξει συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα, μέσω δραστηριοτήτων που έδιναν έμφαση στην εφαρμογή των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά. Από την άλλη πλευρά, η Sarah δημιούργησε μια σειρά δραστηριοτήτων τις οποίες ονόμασε «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο» («Time-Travel Days»), επιλέγοντας διάφορες ιστορικές περιόδους και εστιάζοντας σε μαθηματικά θέματα μιας συγκεκριμένης εποχής ενός τόπου, στα πλαίσια της κάθε

δραστηριότητας. Μέσω αυτής της προσέγγισης, παρέχονταν το κατάλληλο εμπλουτισμένο υλικό το οποίο κρίνονταν αναγκαίο, έτσι ώστε να επέλθουν τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα, σύμφωνα με τον οδηγό σπουδών. Η «ομάδα των τεσσάρων» (G4) χρησιμοποίησε ένα συγκεκριμένο βοήθημα ως βάση, ενώ στη συνέχεια ο κάθε εκπαιδευτικός επέλεξε τα τέσσερα από τα έξι κεφάλαια που προτεινόταν για την δική του τάξη. Αν και επιχείρησαν να συνδέσουν αυτές τις δραστηριότητες με τον οδηγό σπουδών, φαίνονταν να θεωρούν τα πολυπολιτισμικά μαθηματικά ως ένα ξεχωριστό αντικείμενο από αυτό των παραδοσιακών μαθηματικών ( Percival, 2004 σσ. 59).

## Η προσέγγιση της Ruth

### Επιλογή πολιτιστικών προοπτικών για συγκεκριμένα θέματα του οδηγού σπουδών

Η πρώτη εμπειριστατωμένη απόπειρα της Ruth, να χρησιμοποιήσει τις πολιτιστικές προοπτικές των μαθηματικών στην διδασκαλία της, έλαβε χώρα το 2002 σε μια τάξη που περιείχε είκοσι επτά μαθητές της Τετάρτης (Δ΄) και Πέμπτης (Ε΄) τάξης του Δημοτικού, ενώ αρκετοί εξ αυτών ήταν μετανάστες που κατάγονταν από την Κορέα. Παρόλα αυτά, είχε χρησιμοποιήσει κάποιες πολιτιστικές ιδέες όσο αφορά το αντικείμενο των μαθηματικών στο παρελθόν, μετά από επισκέψεις της στην Αίγυπτο το 1999 και στην Ιορδανία το 2000. Όταν της έγινε πρόταση από την ερευνήτρια να συμμετέχει στη παρούσα έρευνα, έγινε ξεκάθαρη τόσο η χαρά της να συμμετέχει, όσο και η πρόθεσή της να συνδέσει τα πολιτιστικά μαθηματικά με τον παραδοσιακό οδηγό σπουδών στα πλαίσια των μαθημάτων της. Όπως ανέφερε και η ίδια:

« Θα ενδιαφερόμουν να πραγματοποιήσω και άλλα μαθήματα πολυπολιτισμικών μαθηματικών, ιδιαίτερα εφόσον πρέπει να ξεκινήσω την ενότητα *Σχήματα και Χώρος* αρκετά σύντομα και θα υπάρχουν αρκετά στοιχεία στην παρούσα ενότητα, τα οποία θα οδηγούν με φυσικό τρόπο στην διδασκαλία των πολυπολιτισμικών μαθηματικών».

Κάποιες από τις ενότητες που δίδαξε η Ruth στα πλαίσια της έρευνας, ήταν: τα τρισδιάστατα στερεά, τα δισδιάστατα σχήματα, το εμβαδόν και η περίμετρος και οι μονάδες μέτρησης μήκους ( Percival, 2004 σσ. 60).

### Θέμα του οδηγού σπουδών: Τρισδιάστατα Στερεά

Η Ruth ξεκίνησε το πρώτο μάθημα της συγκεκριμένης ενότητας, ανακοινώνοντας στην τάξη πως το αντικείμενο που θα μελετήσουν σε αυτό το

μάθημα ήταν τα σχήματα και ο χώρος. Στην συνέχεια, μοίρασε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (που προέρχονταν από ένα ανάλογο βοήθημα), στο οποίο απεικονίζονταν τέσσερα διαφορετικά σπίτια. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τις εικόνες του φύλλου εργασίας και έναν παγκόσμιο χάρτη, η Ruth ζήτησε από τους μαθητές να επιχειρήσουν να εντοπίσουν, σε ποια σημεία του κόσμου συναντάται ο κάθε τύπος σπιτιού που εμφανίζεται στο φύλλο.

Στα πλαίσια του δεύτερου μαθήματος της ενότητας, η Ruth πραγματοποίησε μια συζήτηση με τους μαθητές, όσο αφορά τις πεποιθήσεις τους για την σημασία του όρου «πολυπολιτισμικά μαθηματικά», ανακαλύπτοντας πως η πλειονότητα των μαθητών είχαν αντιληφθεί εν μέρει την σημασία του όρου, ακόμα και αν δεν την είχαν διδαχθεί. Οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση της Ruth: «Τι νομίζεται πως εννοούμε όταν λέμε “πολυπολιτισμικά μαθηματικά”;» κυμαίνονταν από «[μαθηματικά] όχι μόνο ενός πολιτισμού» μέχρι και «αφού το πρόθεμα πολύ-δηλώνει πολλαπλασιασμό, τα πολυπολιτισμικά μαθηματικά είναι μαθηματικά από πολλές χώρες». Η Ruth έμεινε αρκετά ικανοποιημένη από τις απαντήσεις των μαθητών, ενώ τόνισε πως: «αν και θα ασχοληθούμε με διαφορετικές δραστηριότητες από το συνηθισμένο, εξακολουθούμε να εργαζόμαστε στο αντικείμενο των μαθηματικών, απλά από μια διαφορετική οπτική γωνία» (Percival, 2004 σσ. 61).

Το μάθημα συνεχίστηκε, με την ανάλυση της γεωγραφικής θέσης και των γεωμετρικών σχημάτων των σπιτιών που προαναφέρθηκαν, ενώ η εκπαιδευτικός υποστήριξε πως:

«ένας από τους κύριους λόγους που πραγματοποιώ μαθήματα με πολιτιστικές προοπτικές, είναι οι συνδέσεις που μπορούμε να κάνουμε με τα παιδιά στα πλαίσια της τάξης. Με όσο περισσότερους τρόπους καταφέρουμε να συσχετίσουμε το πολιτιστικό υλικό με το μάθημα, έτσι ώστε να το κατανοήσουν οι μαθητές, τόσο το καλύτερο».

Στη συνέχεια, η Ruth παρουσίασε στην τάξη μια αφίσα που είχε δημιουργήσει μια παλιότερη τάξη, ζητώντας από τους μαθητές της να αναγνωρίσουν τα διάφορα σχήματα που απεικονίζονταν σε αυτήν. Σύμφωνα με την εκπαιδευτικό, μέσω αυτής της δραστηριότητας επιχειρούσε να ενθαρρύνει τους μαθητές, να διαχωρίζουν την ορολογία των δισδιάστατων σχημάτων, από αυτή των τρισδιάστατων στερεών (Percival, 2004 σσ. 61).

Έπειτα, το μάθημα εστιάστηκε στις ιδιότητες διαφορετικών σχημάτων και τη σημασία του ανάλογου γεωμετρικού λεξιλογίου. Στα πλαίσια της παραπάνω συζήτησης, έγινε λόγος για τις πυραμίδες, οδηγώντας την Ruth να τις χαρακτηρίσει «τετράεδρα» και να ζητήσει από τους μαθητές να εντάξουν αυτόν τον όρο, στο λεξικό των μαθηματικών τους όρων. Με αφορμή την αναφορά στις πυραμίδες, η Ruth εξέλιξε περαιτέρω τη συζήτηση, κάνοντας λόγο για τα διάφορα είδη και σχήματα των πυραμίδων που συνάντησε, κατά τη διάρκεια του ταξιδιού της στην Αίγυπτο.

Τέλος, η εκπαιδευτικός παρουσίασε στην τάξη μια ακόμη αφίσα, η οποία αναφέρονταν σε διάφορους γνωστούς μαθηματικούς και τα επιτεύγματά τους στο πέρασμα του χρόνου. Όπως αναφέρει η Ruth: «γνωρίζοντας το πρόσωπο πίσω από τις μαθηματικές ανακαλύψεις, ακόμα και αν πρόκειται για ένα όνομα ή μια φωτογραφία,

φαίνεται πως τα μαθηματικά ζωντανεύουν στα μάτια των μαθητών» (Percival, 2004 σσ. 62).

### Θέμα του οδηγού σπουδών: Μονάδες Μέτρησης Μήκους

Η Ruth ξεκίνησε τη παρούσα ενότητα, ζητώντας από τους μαθητές να απαντήσουν γραπτώς στις τέσσερις παρακάτω ερωτήσεις:

- I. Τι γνωρίζεις όσο αφορά το σύστημα μέτρησης;
- II. Τι είναι;
- III. Γιατί το χρησιμοποιούμε;
- IV. Από πού προήλθε;

Εφόσον φάνηκε πως οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να απαντήσουν σε αυτές τις ερωτήσεις, η Ruth εξήγησε στην τάξη κάποιες βασικές έννοιες του συστήματος και των μονάδων μέτρησης, έτσι ώστε να ενταχθεί το σύνολο της τάξης στο κλίμα του μαθήματος. Στην συνέχεια, η εκπαιδευτικός ρώτησε τους μαθητές εάν γνωρίζουν: «ποιος ανακάλυψε την πρώτη μονάδα μέτρησης που καταγράφηκε γραπτώς;» και προς έκπληξή της, μια μαθήτρια απάντησε σωστά, υποδεικνύοντας την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι και ονομάζονταν «πήχης». Η συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης, αντιστοιχούσε στην απόσταση που μεσολαβεί ανάμεσα στις άκρες των δακτύλων του χεριού και τον αγκώνα. Με αυτήν την αφορμή, η εκπαιδευτικός ανέπτυξε περαιτέρω το παρόν θέμα διαβάζοντας επιπλέον πληροφορίες από ένα σχετικό σύγγραμμα, ενώ ζήτησε από όλους τους μαθητές να σκεφτούν παραδείγματα διαφορετικών μονάδων μέτρησης, καθώς και πότε θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ( Percival, 2004 σσ.75).

Στο επόμενο μάθημα, η Ruth μοίρασε στην τάξη φωτοτυπίες κάποιων σελίδων του συγγράμματος «*Everything you need to know about Math homework*» (Zeman, & Kelly, 1994), ενώ έκανε λόγο για διάφορες μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούσαν οι Βίκινγκς (οργιά), οι Ρωμαίοι (πόδι, ίντσα, μίλι) και οι Βρετανοί (γιάρδα), αναφέροντας παράλληλα τον καθοριστικό ρόλο που έπαιξε ο Ναπολέοντας στην ανάπτυξη του μετρικού συστήματος. Στη συνέχεια, προσπαθώντας να συνδέσει το παρελθόν με το παρόν, η εκπαιδευτικός έθεσε ερωτήσεις όπως: « Πως είναι δυνατόν να φτάσαμε από αυτές τις παλιές μονάδες, σε αυτές που χρησιμοποιούμε σήμερα;» και «Γιατί πιστεύετε πως οι άνθρωποι έπρεπε να αλλάξουν [τις μονάδες που χρησιμοποιούσαν] ;» ως θέματα για σκέψη.

Στο κεφάλαιο των μετρήσεων του σχολικού εγχειριδίου, περιλαμβάνονταν η περιγραφή μιας Αιγυπτιακής μεθόδου μέτρησης, με τη βοήθεια σχοινιών και κόμπων, κάτι που παρότρυνε την Ruth να οργανώσει ένα «ταξίδι στην Αίγυπτο» στα πλαίσια αυτού του μαθήματος. Στην αρχή του μαθήματος, η εκπαιδευτικός διάβασε το ανάλογο υλικό του εγχειριδίου μαζί με την υπόλοιπη τάξη. Έπειτα, ανακοίνωσε στους μαθητές πως θα επιχειρήσουν να εφαρμόσουν αυτόν τον τρόπο μέτρησης και οι ίδιοι, επιτρέποντάς τους να επιλέξουν πόση απόσταση θα έχουν οι κόμποι μεταξύ τους, αλλά και με ποιόν τρόπο θα την μετρήσουν. Ορισμένοι μαθητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν πιο αναχρονιστικές μονάδες μέτρησης με τη βοήθεια του χάρακα,

ενώ κάποιοι άλλοι κατέφυγαν σε παλαιότερες μονάδες όπως αυτή του «πήχη» (Percival, 2004 σσ.76).

Αν και η Ruth εφάρμοσε ένα σύνολο πολιτιστικών ιδεών, σε αρκετά μαθηματικά αντικείμενα κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, προτίμησε να στηριχθεί στις προϋπάρχουσες γνώσεις της, χωρίς να αναζητήσει συγκεκριμένες ιστορικές και πολυπολιτισμικές συνδέσεις. Ωστόσο, άξια αναφοράς αποτελούν και τα δύο μαθήματα που οργάνωσε η εκπαιδευτικός με θέμα τα «πολυπολιτισμικά αντικείμενα», στα πλαίσια των οποίων ο κάθε μαθητής προσκόμιζε στην τάξη ένα αντικείμενο, το οποίο να αντιπροσωπεύει το εθνικό του υπόβαθρο. Έτσι, επηρεασμένη από την φιλοσοφία που υποστηρίζει πως «τα μαθηματικά βρίσκονται παντού», η Ruth ζήτησε από τους μαθητές της να συνθέσουν ερωτήσεις βασισμένοι σε αυτά τα αντικείμενα. Το σύνολο της τάξης φάνηκε να ενθουσιάζεται με τα αντικείμενα των διαφορετικών πολιτισμών, ενώ παράλληλα παράγαγε μια ενδιαφέρουσα συλλογή ερωτήσεων, οι οποίες αφορούσαν θέματα συμμετρίας, εκτίμησης και ισοτιμιών.

## Η προσέγγιση της Sarah

### Επιλογή μαθηματικών αντικειμένων που σχετίζονται με συγκεκριμένους πολιτισμούς

Στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών με την βοήθεια ιστορικών προσεγγίσεων, η Sarah δημιούργησε τις «Ημέρες Ταξιδιού στο Χρόνο» («Time-Travel Days»). Σε αντίθεση με προηγούμενα φανταστικά ταξίδια που είχαν πραγματοποιήσει οι μαθητές, βασικός σκοπός αυτών των ημερών αποτελούσε η επαφή των μαθητών με το αντικείμενο των μαθηματικών, καθώς και με μαθηματικούς παλαιότερων εποχών. Λόγω αυτού, παρόλη τη σύντομη διάρκεια αυτών των ημερών η εκπαιδευτικός επιθυμούσε να τις επεκτείνει, όπως αναφέρει η ίδια:

« πρέπει να βρω ένα τρόπο να τις ενισχύσω, έτσι ώστε να μην αποτελούν υπόθεση μιας ημέρας. Με ότι και αν ασχολούμαστε σε αυτές τις «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο», πρέπει να βρω έναν τρόπο να το ενισχύσω μέχρι να πραγματοποιηθεί το επόμενο ταξίδι» (Percival, 2004 σσ.78).

Η Sarah πραγματοποίησε για πρώτη φορά αυτό το πρόγραμμα, την ακαδημαϊκή χρονιά 2000/2001 στην Τρίτη (Γ΄) τάξη του Δημοτικού, η οποία περιείχε είκοσι δύο μαθητές. Στα χρόνια που ακολούθησαν, η εκπαιδευτικός προσάρμοζε το πρόγραμμα στις ανάγκες της κάθε τάξης, ενώ υποστήριζε πως το κίνητρό της για να συνεχίσει την εφαρμογή του προγράμματος ήταν το γεγονός πως:

«τα παιδιά πρέπει να καταλάβουν πως τα μαθηματικά δημιουργήθηκαν από πραγματικούς ανθρώπους και επηρεάζονταν από ότι συνέβαινε στην κοινωνία την κάθε χρονική περίοδο. Προσπαθώ να τους δείξω πως τα μαθηματικά του παρελθόντος, συνδέονται με αυτά που χρησιμοποιούμε σήμερα και με όσους περισσότερους τρόπους το καταφέρω αυτό, τόσο περισσότερο θα κατανοήσουν πως τα μαθηματικά είναι ζωντανά» (Percival, 2004 σσ.78).

Τα θέματα που επέλεξε να διδάξει η Sarah, στα πλαίσια του προγράμματος κυμαίνονταν από την «Λίθινη Εποχή», έως και τα «Μαθηματικά του Μέλλοντος». Αν και η δομή των ημερών μεταβάλλονταν αρκετά, η πλειονότητά τους ξεκινούσε με μια σύντομη συζήτηση, όσο αφορά την ιστορία και την γεωγραφία του τόπου που θα επισκέπτονταν στην πορεία, ενώ κάποιες φορές ακολουθούσε η προβολή οπτικοακουστικού υλικού, το οποίο σχετίζονταν με το θέμα που μελετούσαν. Έπειτα, η εκπαιδευτικός ζητούσε από όλους τους μαθητές να κλείσουν τα μάτια τους και να κρατηθούν χέρι-χέρι, ενώ η ηλεκτρονική μουσική έβαζε την τάξη στο κατάλληλο κλίμα. Ορισμένες από τις «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο» εστίαζαν στο έργο γνωστών μαθηματικών επιστημόνων μιας χρονικής περιόδου, ενώ άλλες είχαν να κάνουν με τα μαθηματικά που χρησιμοποιούσε ένας συγκεκριμένος πολιτισμός. Παρακάτω θα παρουσιαστούν δύο «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο» αναλυτικά, ενώ όλες οι υπόλοιπες διδασκαλίες που έλαβαν χώρα θα παρουσιαστούν περιληπτικά, εστιάζοντας στα σημαντικά σημεία της καθεμίας.

### Επίσκεψη στην Αρχαία Αίγυπτο

Η Sarah, με σκοπό να προετοιμάσει τους μαθητές για το μάθημα και να τους βοηθήσει να ενταχθούν ομαλότερα στο κλίμα της χρονικής περιόδου, οργάνωσε μια καλλιτεχνική δραστηριότητα, κατά την οποία τους ζήτησε να χρωματίσουν φυλαχτά, κολιέ και διακοσμητικά για τα μαλλιά, ανακοινώνοντάς τους πως θα τα φορέσουν την ημέρα του συγκεκριμένου μαθήματος. Επιπλέον, στα πλαίσια των δραστηριοτήτων προετοιμασίας, η Sarah είχε διαμορφώσει ανάλογα το ημερολόγιο της τάξης, γράφοντας τις ημερομηνίες του κάθε μήνα, στο σύστημα αρίθμησης του πολιτισμού που θα μελετούσαν. Με αυτόν τον τρόπο, κατάφερε να κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών, οι οποίοι συζητούσαν μεταξύ τους προσπαθώντας να ανακαλύψουν ποιον πολιτισμό θα μελετήσουν στην πορεία (Percival, 2004 σσ.79).

Εφόσον κατέφθασαν στην Αίγυπτο, οι μαθητές ξεκίνησαν να συζητούν με ενθουσιασμό για τις πυραμίδες, κάτι το οποίο η εκπαιδευτικός είχε προβλέψει πως θα συμβεί και για αυτό τον λόγο, είχε επιλέξει να διδάξει την ενότητα των τρισδιάστατων σχημάτων την προηγούμενη βδομάδα, παρέχοντας έτσι στους μαθητές τις απαραίτητες προϋπάρχουσες γνώσεις. Στην συνέχεια, η εκπαιδευτικός αφού μοίρασε χάρτινα μοντέλα των πυραμίδων, ζήτησε από τους μαθητές να εργαστούν ομαδικά πάνω σε ένα φύλλο εργασιών που η ίδια είχε δημιουργήσει, συνδυάζοντας πληροφορίες για τη πυραμίδα του Βασιλιά Khufu και ανάλογες ερωτήσεις πάνω σε αυτό το θέμα. Η εκπαιδευτικός είχε συνθέσει τις ερωτήσεις με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να υπάρχει κλιμακωτή βαθμίδα δυσκολίας, με τις τελευταίες από αυτές να

απαιτούν την βοήθεια λεξικού, για την εύρεση άγνωστων εννοιών. Όπως αναφέρει η Sarah: «Θέλω οι μαθητές να εξοικειωθούν με την χρήση λεξικών.»

Στην συνέχεια, η εκπαιδευτικός έκανε λόγο για την γεωμετρία που περιείχε η κατασκευή των πυραμίδων, εστιάζοντας στο σχήμα της βάσης και το είδος των γωνιών που απαιτούνταν, έτσι ώστε η πυραμίδα να είναι ίσια, κάτι το οποίο οδήγησε στην εξάσκηση του κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου, αλλά και στην διαπίστωση του μεγάλου αριθμού εργατών διαφορετικών επαγγελμάτων που ήταν αναγκαίος, για την ολοκλήρωση ενός τέτοιου μνημείου. Έπειτα, η Sarah έκανε λόγο για την Αιγυπτιακή μέθοδο κατασκευής παπύρου και αφού έδειξε στην τάξη ένα ολοκληρωμένο φύλλο παπύρου, οργάνωσε μια δραστηριότητα κατά την οποία οι μαθητές θα δημιουργούσαν το δικό τους φύλλο από εφημερίδες και κομμάτια χαρτιού. Εφόσον όλοι οι μαθητές είχαν ολοκληρώσει την δημιουργία των φύλλων τους, η Sarah τους ζήτησε να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα (που η ίδια είχε δημιουργήσει), γράφοντας πάνω στον πάπυρο που είχαν φτιάξει. Επιπλέον, η εκπαιδευτικός μοίρασε στους μαθητές φύλλα εργασιών που περιείχαν διάφορες πράξεις και εξισώσεις «αιγυπτιακών αριθμών», ενώ στην πορεία ζήτησε από τους μαθητές να δημιουργήσουν και οι ίδιοι παρόμοιες εξισώσεις (Percival, 2004 σσ.88).

### Επίσκεψη στην Αρχαία Ελλάδα

Η Sarah, βλέποντας τα θετικά αποτελέσματα των προκαταρκτικών δραστηριοτήτων, όσο αφορά την ένταξη των μαθητών στο κλίμα της εποχής που μελετούσαν, αποφάσισε να τις επαναλάβει, εξηγώντας στην τάξη πώς να δημιουργήσουν την δική τους αρχαιοελληνική ενδυμασία, την οποία θα φορούσαν για αυτή την «Ημέρα Ταξιδιού στον Χρόνο». Επιπλέον, στην συγκεκριμένη ενότητα η εκπαιδευτικός αποφάσισε να εστιάσει στις ανακαλύψεις, συγκεκριμένων μαθηματικών επιστημόνων και όχι στα μαθηματικά μιας πολιτιστικής ομάδας, όπως αναφέρει και η ίδια: «άλλαξα τον τρόπο μελέτης του αντικειμένου, γιατί ήθελα να ασχοληθούμε με μεμονωμένους μαθηματικούς εφόσον είχα αρκετό κατάλληλο υλικό, ενώ επιπλέον ήθελα να παρουσιάσω και μια γυναίκα μαθηματικό».

Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, η Sarah χώρισε την τάξη σε έξι ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων, εκ των οποίων η κάθε μια ασχολούνταν με έναν συγκεκριμένο μαθηματικό. Η εκπαιδευτικός φάνηκε ενθουσιασμένη με αυτή τη μέθοδο διδασκαλίας καθώς όπως υποστήριξε:

«Οι μαθητές αναγκάζονται να λύσουν τα προβλήματά τους μόνοι τους, εφόσον εγώ δεν είμαι διαθέσιμη. Με το να μην τους οδηγεί κάποιος βήμα-βήμα, αναγκάζονται να σκεφτούν και να πάρουν αποφάσεις αυτόνομα, καθώς και να ασχοληθούν περισσότερο για να λύσουν κάτι που τους προβληματίζει. Έτσι, μόνο όταν έρθουν αντιμέτωποι με κάτι το οποία πραγματικά δεν είναι σε θέση να διαχειριστούν, θα με καλέσουν για να τους βοηθήσω» (Percival, 2004 σσ.89).

Η κάθε ομάδα διέθετε ένα φύλλο εργασιών και έναν φάκελο με πληροφορίες για έναν Έλληνα μαθηματικό, καθώς και μερικές εικόνες από κτίρια και ναούς εκείνης της εποχής, έτσι ώστε να ενταχθεί η τάξη στο ανάλογο κλίμα. Όσο αφορά τις

ιστορίες για τον Αρχιμήδη, τον Ευκλείδη, την Υπατία, τον Πυθαγόρα και τον Θαλή, η εκπαιδευτικός τις είχε λάβει από τους δύο τόμους του «*Mathematicians are People too*» (Reimer, & Reimer, 1990, 1995b), ενώ εφόσον δεν υπήρχε ανάλογο κεφάλαιο για τον Ερατοσθένη, κατέφυγε στο σύγγραμμα του Lasky «*The Librarian who measured the Earth*» (Lasky, 1994). Επιπλέον, οι πληροφορίες για τους έξι παραπάνω μαθηματικούς, προήλθαν από τους τρεις τόμους με τίτλο «*Historical connections in Mathematics*» (Reimer, & Reimer, 1992,1993, 1995a).

Αν και η Sarah ήταν αρκετά προβληματισμένη, για το πόσο χρόνο θα χρειαζόντουσαν οι μαθητές για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων, καθώς και για το αν θα ήταν σε θέση να παραμείνουν συγκεντρωμένοι, ολόκληρη η τάξη φάνηκε ενθουσιασμένη και παρέμεινε απόλυτα συγκεντρωμένη. Στα πλαίσια αυτών των εργασιών, οι μαθητές όφειλαν να διαβάσουν σε όλη την τάξη την ιστορία για τον μαθηματικό που είχαν αναλάβει, ενώ στην συνέχεια έπρεπε να καταγράψουν γραπτώς «δέκα ενδιαφέροντα γεγονότα», βασισμένοι στην παραπάνω ιστορία και τις πληροφορίες που διέθεταν. Έπειτα, ήταν σε θέση να επιλέξουν με ποιες δραστηριότητες επιθυμούσαν να ασχοληθούν, με την δημιουργία και τον χρωματισμό Πλατωνικών στερεών (στα πλαίσια της ομάδας που είχε αναλάβει τον Πυθαγόρα) να αποτελεί την δημοφιλέστερη εξ αυτών, καθώς οι περισσότεροι μαθητές επιθυμούσαν να παραμείνουν στην τάξη την ώρα του διαλλείματος, έτσι ώστε να ολοκληρώσουν τα μοντέλα τους (Percival, 2004 σσ.90).

Όσο αφορά την ομάδα που ασχολήθηκε με τον Αρχιμήδη, οι μαθητές ενθουσιάστηκαν σε τέτοιο βαθμό διαβάζοντας την ιστορία για το στέμμα του Βασιλιά Ήρωνα, που δημιούργησαν μια σύντομη θεατρική αναπαράσταση, κάνοντας πρόβες την ώρα του διαλλείματος. Οι υπόλοιπες δραστηριότητες αυτής της ομάδας, είχαν να κάνουν με το ενδιαφέρον του Αρχιμήδη για την ισορροπία.

Από την άλλη πλευρά, η ομάδα που είχε αναλάβει τον Ερατοσθένη, εξερεύνησε τους περιττούς αριθμούς με την βοήθεια της μεθόδου του κόσκινου, ενώ η ομάδα που ασχολήθηκε με τον Θαλή, ήρθε αντιμέτωπη με ένα σύνολο προβλημάτων λογικής. Αν και οι μαθητές δεν είχαν προηγούμενες εμπειρίες με παρόμοιες δραστηριότητες, φάνηκαν να απολαμβάνουν την ενασχόλησή τους με αυτές, κάτι το οποίο ώθησε την Sarah στο να αναλογιστεί την περαιτέρω χρήση αυτής της κατηγορίας δραστηριοτήτων στο μέλλον.

Μια ακόμα σειρά δραστηριοτήτων που έλαβε χώρα στα πλαίσια της παρούσας ενότητας και είναι άξια αναφοράς, είναι αυτή με θέμα τα Ελληνικά συστήματα αρίθμησης. Η Sarah, διαμόρφωσε το ημερολόγιο της τάξης, εντάσσοντας αριθμούς οι οποίοι προέρχονταν τόσο από το «παλιό» (Αττικό), όσο και από το «νέο» (Ιωνικό) σύστημα, ζητώντας από τους μαθητές να κάνουν και αυτοί το ίδιο, εφόσον πρώτα είχαν μελετήσει το ολοκληρωμένο ημερολόγιο. Στην συνέχεια, η εκπαιδευτικός έγραψε μια σειρά Ελληνικών αριθμών στον πίνακα της τάξης και ζήτησε από τους μαθητές να τους μεταφράσουν, κάτι το οποίο κατάφεραν με μεγάλη επιτυχία. Τέλος, η Sarah σύγκρινε το Ελληνικό σύστημα αρίθμησης με αυτό που χρησιμοποιείται σήμερα, εστιάζοντας στην ανάγκη ύπαρξης του ψηφίου του μηδενός στο σύγχρονο σύστημα αρίθμησης (Percival, 2004 σσ.94).



## Οι υπόλοιπες οκτώ «Ημέρες Ταξιδιού στον Χρόνο»

Οι δύο ημέρες που αναφέρθηκαν παραπάνω, αναπαριστούν τις δύο ριζικά διαφορετικές στρατηγικές οργάνωσης που εφάρμοσε η Sarah, στα πλαίσια των «Ημερών Ταξιδιού στον Χρόνο». Όσο αφορά τα μαθήματα που έλαβαν χώρα στα πλαίσια των θεματικών ενοτήτων: «Αναγέννηση» και «Γυναίκες στα μαθηματικά», ακολούθησαν την δομή της επίσκεψης στην Αρχαία Ελλάδα, χωρίζοντας την τάξη σε ομάδες και αναθέτοντας στην κάθε ομάδα, να εργαστεί πάνω σε έναν συγκεκριμένο μαθηματικό. Από την άλλη πλευρά, τα μαθήματα που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια των θεματικών ενοτήτων: «Λίθινη Εποχή», «Μεσοποταμία», «Κίνα», «Ρώμη και Ινδία», «Μεσαιώνας» και «Μαθηματικά του μέλλοντος», ακολούθησαν το μοντέλο που είχε χρησιμοποιηθεί κατά την διάρκεια της ημέρας επίσκεψης στην Αρχαία Αίγυπτο, καθώς όλοι οι μαθητές μελετούσαν τα ίδια μαθηματικά θέματα.

Επιπλέον, η Sarah προσπαθούσε να χρησιμοποιεί διαφορετικές τεχνικές και μεθόδους διδασκαλίας, έτσι ώστε να μην είναι όλες οι μέρες παρόμοιες μεταξύ τους και χαθεί το ενδιαφέρον των μαθητών, όπως αναφέρει και η ίδια: «προσπαθώ να βρίσκω συνεχώς νέους τρόπους για την διδασκαλία των αντικειμένων, δεν θέλω όλες οι μέρες να είναι ίδιες μεταξύ τους». Η προσπάθειά της προς αυτήν την κατεύθυνση, την οδήγησε στο να εφαρμόσει αρκετές παραλλαγές και συνδυασμούς τρόπων εργασίας των μαθητών, κατά τη διάρκεια αυτών των μαθημάτων, όπως: ατομική εργασία, εργασία σε ζευγάρια ή ομάδες και συζητήσεις στις οποίες συμμετείχε το σύνολο της τάξης.

Κατά τη διάρκεια της ημέρας επίσκεψης στη «Λίθινη Εποχή», πολλοί από τους μαθητές είχαν λάβει τον ρόλο αρχαιολόγων, οι οποίοι εξερευνώντας τις εγκοπές απολιθωμένων οστών, ανακάλυπταν στοιχεία για τα μαθηματικά της εποχής. Έπειτα, στα πλαίσια της επίσκεψης στην Μεσοποταμία, οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες έλαβαν μέρος σε ένα παιχνίδι ρόλων ως κάτοικοι έξι διαφορετικών οικισμών, οι οποίοι εμπορεύονταν αγαθά με την βοήθεια της Sarah που είχε λάβει τον ρόλο ενός εμπόρου. Η παραπάνω δραστηριότητα, βοήθησε το σύνολο της τάξης να συνειδητοποιήσει την ανάγκη ύπαρξης γραπτών καταγραφών των συναλλαγών που λάμβαναν χώρα, κάτι που σε συνδυασμό με την παρότρυνση της Sarah, τους βοήθησε να ανατρέξουν στην ιστορία των αριθμών, από τα πρώιμα νομίσματα των Σουμέριων μέχρι τα σύμβολα της σφηνοειδούς γραφής των Βαβυλώνιων. Στα πλαίσια της ημέρας που είχε αφιερωθεί στην Κίνα, η οποία είχε προσχεδιαστεί έτσι ώστε να συμπίπτει με τον εορτασμό της Κινέζικης Πρωτοχρονιάς, οι μαθητές χωρισμένοι σε ζευγάρια ανακάλυψαν πώς να χρησιμοποιούν τον άβακα. Στην συνέχεια, έχοντας ο καθένας το δικό του σετ «ράβδων μέτρησης», εξερεύνησαν πώς μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν για να αναπαραστήσουν διάφορες πράξεις, ενώ στην πορεία διερεύνησαν το Κινέζικο αριθμητικό σύστημα, το οποίο χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα (Percival, 2004 σσ.95).

Έπειτα, κατά την διάρκεια της νοητής επίσκεψης των μαθητών στην Ρώμη και την Ινδία, οι μαθητές μελέτησαν το αριθμητικό σύστημα των Ρωμαίων, ενώ στην συνέχεια η Sarah χρησιμοποίησε την ιστορία με τίτλο «The Rising and Fall of Roman Numerals» του συγγραμματος «*Math Stories for Kids and Other People Too*»

(Pappas, 1997) με σκοπό να μεταβάλει το σκηνικό του μαθήματος, εστιάζοντας στην Ινδία. Τον μήνα που ακολούθησε, οι μαθητές έχοντας λάβει τον ρόλο ευγενών οι οποίοι ζούσαν σε έξι διαφορετικά μεσαιωνικά κάστρα, πειραματίστηκαν με διάφορες γεωμετρικές κατασκευές με την καθοδήγηση και την βοήθεια της Sarah, ενώ αργότερα μέσα στην ημέρα εξερεύνησαν την ακολουθία του Fibonacci, καθώς και διάφορα μαγικά κόλπα που βασίζονται σε αυτήν.

Επιπλέον, στα πλαίσια της ημέρας ταξιδιού στην εποχή της Αναγέννησης, επιλέχθηκαν έξι άνδρες μαθηματικοί τους οποίους μελέτησαν οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες. Στην συνέχεια, για να επέλθει ισορροπία η Sarah επέλεξε να μελετηθούν παλαιότερες, αλλά και πιο σύγχρονες γυναίκες μαθηματικοί, καθώς θεωρούσε πως κάτι τέτοιο θα συνέβαλε στην δημιουργία κατάλληλων προτύπων για τις μαθήτριες της τάξης. Όσο αφορά την τελευταία «Ημέρα Ταξιδιού στον Χρόνο» η οποία έλαβε χώρα στο τέλος της σχολικής χρονιάς, η εκπαιδευτικός κάλεσε έναν καθηγητή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να μιλήσει στην τάξη για τις γραφικές αναπαραστάσεις των πράξεων. Ο συγκεκριμένος καθηγητής ξεκινώντας κάνοντας λόγο για το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν με ποιον τρόπο αναπαριστώνται γραφικά απλές εξισώσεις. Αν και η Sarah επιθυμούσε να πραγματοποιήσει επιπλέον δραστηριότητες, στα πλαίσια του συγκεκριμένου θέματος, λόγω του πιεσμένου χρονικά προγράμματος των μαθητών, δεν τα κατάφερε (Percival, 2004 σσ.96).

## Η προσέγγιση της «ομάδας των τεσσάρων»

### Επιλογή μαθηματικών αντικειμένων σύμφωνα με την διαθεσιμότητα πόρων

Όπως προαναφέρθηκε, στα πλαίσια της έρευνας πέρα από τις δύο μελέτες περίπτωσης, υπήρχε και μια ομαδική μελέτη περίπτωσης, στην οποία περιλαμβάνονταν τέσσερις εκπαιδευτικοί. Οι συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί, είχαν λίγες ή ακόμα και καθόλου γνώσεις, αναφορικά με το πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθηματικών. Επιπλέον, αν και δέχονταν με χαρά την βοήθεια της ερευνήτριας, σπάνια την ζητούσαν οι ίδιοι, καθώς επέλεξαν να στηριχθούν σε μεγάλο βαθμό στο υλικό της σειράς «*Mathematics from Many Cultures*» (MMC), με τον κάθε δάσκαλο να επιλέγει το πακέτο της σειράς που ταιριάζει καλύτερα στο επίπεδο της τάξης του. Ωστόσο, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί προσάρμοζαν τις ιδέες του πακέτου στον δικό τους τρόπο διδασκαλίας, στην πλειοψηφία των μαθημάτων (εφόσον είχαν επιλέξει την ενότητα που επιθυμούσαν να διδάξουν), ακολουθούσαν πιστά το υλικό που προσφέρονταν στο πακέτο MMC, χωρίς να κρίνουν το επίπεδο καταλληλότητας του.

Όσο αφορά τους τέσσερις πρώτους μήνες της εφαρμογής των μαθημάτων των πολυπολιτισμικών μαθηματικών, ο κάθε εκπαιδευτικός επέλεγε ένα από τα έξι

προτεινόμενα κεφάλαια του πακέτου του MMC κάθε μήνα. Παρόλα αυτά, ολόκληρη η ομάδα αφιέρωσε το τελευταίο μάθημα στην εξερεύνηση των ιδιοτήτων διάφορων πολύγωνων, μέσω της τεχνικής της αναδίπλωσης χαρτιού, κάτι το οποίο αποφάσισαν μετά από ένα ανάλογο σεμινάριο που είχε οργανώσει η Sarah. Αν και υπήρχε μεγάλος αριθμός ανάλογων δραστηριοτήτων επίλυσης προβλημάτων, η σύνδεση με το πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθηματικών ήταν αρκετά αδύναμη, καθώς δεν στηρίζονταν σε τίποτα άλλο πέρα από μια αναφορά στη χρήση της τεχνικής του οριγκάμι από τους Ιάπωνες και την πολιτιστική καταγωγή της λέξης (Percival, 2004 σσ.97). Παρακάτω θα παρουσιαστεί αναλυτικά ένα μάθημα που έλαβε χώρα στο συγκεκριμένο πλαίσιο, ενώ όλα τα υπόλοιπα μαθήματα θα αναφερθούν περιληπτικά, εστιάζοντας στα σημαντικά σημεία τους.

### Θέμα της σειράς MMC: Κοχύλια, ξυλάκια και βότσαλα

Η Joan, δίδαξε το παρόν μάθημα σε είκοσι έξι μαθητές της Τετάρτης (Δ΄) τάξης του Δημοτικού, διότι ασχολείται με διαφορετικές μορφές του ζαριού σε όλο τον κόσμο, αλλά και τη χρήση του σε διάφορα παιχνίδια, κάτι το οποίο κατά την ίδια κινεί το ενδιαφέρον των μαθητών εφόσον είναι πιο πρακτικό, ενώ παράλληλα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν διάφορα αντικείμενα ως βοηθήματα διδασκαλίας. Επιπλέον, η εκπαιδευτικός υποστήριξε πως : «δεν έχω ασχοληθεί με παιχνίδια φέτος, αλλά οι μαθητές ενδιαφέρονται πολύ για τέτοιου είδους μαθήματα, στην πραγματικότητα εκεί μπορεί να δει κανείς τις ικανότητες κριτικής σκέψης» (Percival, 2004 σσ.104).

Η εκπαιδευτικός ξεκίνησε το μάθημα, αναφέροντας τις μορφές που ενδέχεται να έχει ένα ζάρι σε διαφορετικά μέρη του κόσμου, εστιάζοντας στα ξυλάκια που χρησιμοποιούνταν στην Αρχαία Αίγυπτο για αυτόν τον σκοπό. Στην συνέχεια, μοίρασε στην τάξη ξυλάκια, τα οποία είχε χρωματίσει μαύρα από την μια πλευρά, με σκοπό να μοιάζουν με αυτά των Αιγυπτίων. Έπειτα, ανέθεσε στους μαθητές να πειραματιστούν με διάφορους συνδυασμούς που μπορούσαν να δημιουργήσουν με τα ξυλάκια, έτσι ώστε να καταφέρουν να αναπαραστήσουν πόντους στα πλαίσια ενός παιχνιδιού. Οι μαθητές σκέφτηκαν διάφορες έξυπνες ιδέες, όπως: η μαύρη πλευρά να ισούται με δέκα πόντους, ενώ η άσπρη με έναν πόντο, ή ακόμα η μαύρη πλευρά να ισούται με έναν πόντο και η άλλη με μηδέν. Η Joan θεωρώντας την τελευταία απάντηση αρκετά ενδιαφέρουσα, ρώτησε τον μαθητή: «Γιατί να υπάρχει πλευρά που να ισούται με μηδέν;» και ο μαθητής της απάντησε πως: «Σκοπός είναι να μετράς μόνο τις μαύρες πλευρές».

Εφόσον η εκπαιδευτικός διαπίστωσε πως το σύνολο της τάξης, είχε αρχίσει να εισέρχεται στο κλίμα του μαθήματος, προχώρησε σε μια πιο απαιτητική δραστηριότητα, στα πλαίσια της οποίας ζήτησε από τους μαθητές να ανακαλύψουν ένα σύστημα, έτσι ώστε να είναι σε θέση να αναπαραστήσουν όλους τους αριθμούς από το ένα μέχρι και το έξι, χρησιμοποιώντας τέσσερα ξυλάκια. Αρκετοί από τους μαθητές δημιούργησαν πίνακες για να σημειώνουν τα αποτελέσματά τους, ενώ ορισμένες προτάσεις ήταν αρκετά εφευρετικές. Ένας μαθητής πρότεινε: «η λευκή πλευρά να ισούται με μείον ένα, έτσι ώστε αν η μαύρη πλευρά σημαίνει δύο, τρεις

μαύρες πλευρές και μια άσπρη να ισούνται με πέντε». Μετά από αρκετή ώρα εξερεύνησης διαφορετικών προτάσεων, η Joan εξήγησε στην τάξη την μέθοδο των Αιγυπτίων συγκρίνοντάς την με τις διάφορες προτάσεις των μαθητών (Percival, 2004 σσ.105).

Στην συνέχεια, προσπαθώντας να εστιάσει στο αντικείμενο των πιθανοτήτων, η εκπαιδευτικός μοίρασε τέσσερα ξυλάκια στον κάθε μαθητή και τους ζήτησε να τα ρίξουν μια φορά, με τον ίδιο τρόπο που θα έριχναν τα ζάρια στα πλαίσια ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού. Έπειτα, ρώτησε τους μαθητές εάν είχε τύχει σε κάποιον από αυτούς όλα τα ξυλάκια να έχουν πέσει με την μαύρη πλευρά προς τα πάνω λαμβάνοντας διαφορετικές απαντήσεις. Αυτό επαναλήφθηκε αρκετές φορές, με την εκπαιδευτικό να εξηγεί στην τάξη πως αν επιθυμούν να εξετάσουν το αντικείμενο των πιθανοτήτων, πρέπει να καταγράφουν πόσες προσπάθειες χρειάστηκαν για να πέσουν όλα τα ξυλάκια με την μαύρη πλευρά προς τα πάνω, όχι απλά να τα πετούν μέχρι να συμβεί. Αν και ορισμένοι μαθητές λανθασμένα θεώρησαν, πως ο μοναδικός στόχος της δραστηριότητας ήταν η επίτευξη του παραπάνω αποτελέσματος, το σύνολο της τάξης φάνηκε ενθουσιασμένο.

Εφόσον η Joan είχε ολοκληρώσει την παραπάνω δραστηριότητα, συνέχισε κάνοντας λόγο για την χρήση κοχυλιών ως ζάρι σε διάφορα παιχνίδια, από πολιτισμούς της Αφρικής και της Ινδίας. Έπειτα, χώρισε τους μαθητές σε ζευγάρια και έδωσε σε κάθε ζευγάρι έξι κοχύλια ζυμαρικών, ζητώντας τους να ανακαλύψουν ένα σύστημα για να αναπαραστήσουν πόντους, όπως προηγουμένως. Στην συνέχεια, η εκπαιδευτικός προχώρησε στην επανάληψη της δεύτερης δραστηριότητας του μαθήματος, ζητώντας από τους μαθητές να ρίξουν τα κοχύλια ζυμαρικών, όπως θα έριχναν ζάρια. Ενώ η πλειονότητα των μαθητών, μετρούσε πόσα κοχύλια έπεφταν με το άνοιγμα προς τα πάνω, ένας μαθητής πρότεινε: « Το άνοιγμα πρέπει να ισούται με μηδέν και αν όλα τα κοχύλια πέσουν με το άνοιγμα προς τα πάνω, να δικαιούσαι μια ακόμα προσπάθεια, ενώ άμα γίνει το ακριβώς αντίθετο να χάνεις την σειρά σου». Η Joan συνεχάρη τον μαθητή για την εφευρετική ιδέα του, αναφέροντας την ύπαρξη παρόμοιων κανόνων και στα παραδοσιακά παιχνίδια, εστιάζοντας στο παιχνίδι Ινδικής καταγωγής Pachisi, ενώ παράλληλα εξηγούσε το σύστημα αρίθμησης στον πίνακα (κανένα άνοιγμα προς τα πάνω- είκοσι πέντε πόντοι και μια επιπλέον προσπάθεια/ ένα άνοιγμα προς τα πάνω- δέκα πόντοι και μια επιπλέον προσπάθεια/ ανοίγματα προς τα πάνω- ένας πόντος για το κάθε άνοιγμα) (Percival, 2004 σσ.107).

Αν και η εκπαιδευτικός υποστήριξε πως αντιμετώπισε αρκετές δυσκολίες, καθώς η τάξη ξέφευγε εύκολα από το θέμα καταναλώνοντας περισσότερο χρόνο για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων, από αυτόν που η ίδια είχε υπολογίσει, φάνηκε αρκετά ικανοποιημένη από την επίδοση των μαθητών. Επιπλέον, επηρεασμένη από τα θετικά αποτελέσματα αυτής της διδασκαλίας, αποφάσισε να επαναλάβει τις δραστηριότητες με θέμα τις πιθανότητες την επόμενη εβδομάδα, κάτι το οποίο είχε επίσης πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

Τα υπόλοιπα κεφάλαια της σειράς MMC που επιλέχθηκαν

Η Barbara δίδαξε το κεφάλαιο «Κομψή Τέχνη» πρώτο από όλα, καθώς την είχε προσελκύσει εξ αρχής λόγω της άμεσης σύνδεσής του με τα γεωμετρικά θέματα που μελετούσαν στην τάξη, εκείνη την χρονική περίοδο. Έπειτα, επέλεξε το ιδιαίτερο κεφάλαιο με τίτλο «Απεριόριστα Μονοπάτια», το οποίο δημιούργησε ορισμένες αντιπαραθέσεις όσο αφορά το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg. Στην περίπτωση αυτού του κεφαλαίου, το κίνητρο της επιλογής του δεν αφορούσε τα μαθηματικά αλλά την λογοτεχνία, καθώς οι μαθητές μελετούσαν ήδη το αντικείμενο των λαβύρινθων στα πλαίσια του μαθήματος της λογοτεχνίας, κάτι που οδήγησε την εκπαιδευτικό στην δημιουργία της παρούσας διεπιστημονικής σύνδεσης. Επιπλέον, η Barbara δίδαξε το κεφάλαιο «Πήχης σε Μέτρα», στα πλαίσια του οποίου παρουσίασε στην τάξη ένα σύνολο αρχαίων μονάδων μέτρησης, ενώ παράλληλα έκανε λόγο για την ιστορία του μετρικού συστήματος. Στα πλαίσια αυτών των μαθημάτων, η εκπαιδευτικός καλούσε τους μαθητές να σηκωθούν και να δείξουν στον χάρτη, την χώρα καταγωγής του μαθηματικού αντικειμένου που μελετούσαν κάθε φορά, ενώ οι μαθητές εργάζονταν στις δραστηριότητες, με ελάχιστη περαιτέρω βοήθεια από την Barbara (Percival, 2004 σσ.114).

Άξια αναφοράς αποτελούν και ορισμένα από τα κεφάλαια που επέλεξε η Joan. Το κεφάλαιο με τίτλο «Μαγικά Τετράγωνα» ενθουσίασε τους μαθητές, παρόλο τον μεγάλο αριθμό δραστηριοτήτων επίλυσης προβλημάτων, ενώ το κεφάλαιο «Τέλεια Ισορροπία» κάνοντας λόγο για την συμμετρία σχεδίων που έχουν βρεθεί σε Ιαπωνικά, Ινδιάνικα και Αφρικανικά τεχνουργήματα, εστίαζε σε δραστηριότητες που είχε συγκεντρώσει η εκπαιδευτικός από το έργο του Zaslavsky με τίτλο: «*Multicultural Math: Hands-on Math Activities from Around the World*» (Zaslavsky, 1994). Στην συνέχεια, η Joan σε συνεργασία με την Barbara οργάνωσαν μια δραστηριότητα, στα πλαίσια της οποίας οι μαθητές διακοσμούσαν Ουκρανικά πασχαλινά αυγά. Βασικός στόχος της παραπάνω δραστηριότητας, αποτελούσε η ενίσχυση της ιδέας πως η συμμετρία αποτελεί μια πλευρά των μαθηματικών, η οποία παρουσιάζεται στα καλλιτεχνικά σχέδια όλων των πολιτισμών. Τέλος, η Joan επέλεξε το κεφάλαιο «Κώνοι, θόλοι και Ορθογώνια παραλληλόγραμμα», το οποίο αφορούσε την σύνδεση μεταξύ τρισδιάστατων σχημάτων.

Ο Mike ξεκίνησε τα μαθήματά του με το κεφάλαιο «Ηλιος, Εποχές και Ηλιοστάσιο», το οποίο αφορούσε διάφορες μεθόδους μέτρησης του χρόνου και των εποχών, σε διαφορετικά μέρη του κόσμου, ενώ παράλληλα ο εκπαιδευτικός κατάφερε να συνδέσει αυτό το υλικό τόσο με την γεωγραφία, όσο και με την μελέτη των μαθητών στο μάθημα της Φυσικής. Στην συνέχεια, ο εκπαιδευτικός επέλεξε το κεφάλαιο με τίτλο «Καταγεγραμμένα Σχέδια», το οποίο μελετούσε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που βρίσκονται σε Περσικά, Ιαπωνικά και Ινδιάνικα τεχνουργήματα, κάτι το οποίο συσχετιζόνταν άμεσα με αντικείμενα που είχαν μελετήσει πρόσφατα οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών. Επιπροσθέτως, ο Mike αφιέρωσε ένα μάθημα στα «Παιχνίδια Αναπήδησης», στα πλαίσια του οποίου οι μαθητές μελέτησαν παιχνίδια από όλο τον κόσμο, ενώ παράλληλα προωθούνταν η ανάπτυξη της στρατηγικής σκέψης (Percival, 2004 σσ.115).

Η Maureen επέλεξε το κεφάλαιο «Παιχνίδια Σκέψης» για να ξεκινήσει τα μαθήματά της, σημειώνοντας πως ορισμένες στρατηγικές των παιχνιδιών στηρίζονταν σε παραγοντοποιήσεις και πολλαπλασιασμούς, κάτι το οποίο αποτελούσε το

επίκεντρο της μελέτης των μαθητών εκείνη την περίοδο, σύμφωνα πάντα με τις οδηγίες του οδηγού σπουδών. Όπως η ίδια υποστήριξε: «υπάρχει ένα μεγάλο μέρος λογικής σκέψης, το οποίο ταιριάζει αρκετά με αυτό που έχουμε ασχοληθεί, ενώ αποτελεί έναν καλό τρόπο για να ενθουσιαστούν [οι μαθητές] με το μάθημα των μαθηματικών». Στην συνέχεια, η εκπαιδευτικός επέλεξε το κεφάλαιο με θέμα τους Αιγυπτιακούς αριθμούς και ακολουθώντας το παράδειγμα της Sarah, ζήτησε από τους μαθητές της να δημιουργήσουν τον δικό τους πάπυρο. Άξιο αναφοράς αποτελεί και το κεφάλαιο «Αναδιπλώσεις και Υφαντά», το οποίο προτίμησε η Maureen λόγω της άμεσης εμπλοκής των μαθητών στην ανάλυση και αναπαραγωγή ενός μοτίβου ύφανσης, κάτι το οποίο φάνηκε να ενθαρρύνει ιδιαίτερα ορισμένους μαθητές, οι οποίοι αντιμετώπιζαν συνήθως δυσκολίες όσο φορά την συγκέντρωση στην εργασία τους. Τέλος, η εκπαιδευτικός επέλεξε το κεφάλαιο «Ολίσθηση και Στροφές», λόγω της στενής σύνδεσής του με την ύλη του οδηγού σπουδών που μελετούσαν οι μαθητές εκείνη την χρονική περίοδο.

## Κεφάλαιο 6

### Συμπεράσματα και επιπτώσεις της έρευνας

Όπως φαίνεται αναλυτικά και στο δεύτερο κεφάλαιο, οι απόψεις των συμμετεχόντων αναφορικά με τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν μέσω της χρήσης πολιτιστικών προοπτικών, συγκλίνουν με αυτές που αναφέρονται στην βιβλιογραφία. Ωστόσο, πέρα από τις ομοιότητες, το συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναφερθεί και σε ορισμένες σημαντικές διαφορές, προτείνοντας πιθανές εξηγήσεις. Στην συνέχεια, θα μελετηθεί εάν είναι δυνατή η υιοθέτηση των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά, στα πλαίσια τάξεων τις οποίες διδάσκουν εκπαιδευτικοί με γενικές γνώσεις. Το συγκεκριμένο ζήτημα, χωρίζεται σε δύο ευδιάκριτα υποερωτήματα: κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να διδάξουν με αυτόν τον τρόπο; , αλλά και κατά πόσο είναι διατεθειμένοι να λάβουν μια τέτοια απόφαση; Επιπλέον, στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου θα διαλευκανθεί εάν το είδος εργασίας που παρουσιάζεται παραπάνω, πραγματικά προωθεί τις ιστορικές και πολυπολιτισμικές προοπτικές, ή αν απλώς αποτελεί ένα σύνολο αποκλίσεων, οι οποίες παρέχουν μια ενδιαφέρουσα αλλαγή από την μονότονη ρουτίνα των μαθημάτων του αντικειμένου των μαθηματικών. Τέλος, αναφέρονται οι επιπτώσεις της έρευνας, καθώς και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα όσο αφορά τα νέα ζητήματα που ήρθαν στο φως (Percival, 2004 σσ.165).

### Ο συλλογισμός για την υιοθέτηση πολιτιστικών προοπτικών

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών, γνώριζαν το πλήθος των πλεονεκτημάτων της διδασκαλίας των πολιτιστικών προοπτικών, που αναφέρεται στην βιβλιογραφία, έτσι ο ρόλος του υλικού που πραγματεύονταν το πολυπολιτισμικό υπόβαθρο των μαθηματικών, (ιδιαίτερα όσο αφορά την προώθηση της ιδέας πως τα μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινο εγχείρημα), θεωρήθηκε από όλους ιδιαίτερα σημαντικός. Αυτό συνέβη, διότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν πως με αυτόν τον τρόπο

τα μαθηματικά γίνονταν πιο προσιτά στους μαθητές, ενώ παράλληλα θα ήταν σε θέση να κατανοήσουν καλύτερα την αξία των επιτευγμάτων διάφορων πολιτιστικών ομάδων. Επιπλέον, οι συμμετέχοντες τόνισαν πως μέσω της κατανόησης διάφορων τομέων των μαθηματικών που αναπτύχθηκαν στο παρελθόν, οι μαθητές θα ήταν ικανοί να εκτιμήσουν την σημαντικότητα του αντικειμένου στην σύγχρονη κοινωνία (Percival, 2004 σσ.165).

Κάνοντας λόγο για πιο πρακτικά ζητήματα, οι συμμετέχοντες συμφωνώντας με την άποψη που καταγράφεται στην βιβλιογραφία, υποστήριζαν πως η χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων στην διδασκαλία των πολιτιστικών προοπτικών των μαθηματικών, είναι ικανή να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τόσο την κριτική τους σκέψη, όσο και τις ικανότητές τους για την επίλυση προβλημάτων. Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί σημείωσαν πως στα πλαίσια αυτής της εργασίας, παρέχονται περισσότερες ευκαιρίες για ομαδική εργασία και διερεύνηση. Παρόλη την θετική άποψη εκπαιδευτικών και ειδικών, όσο αφορά την παρότρυνση που δίνεται στους μαθητές στα πλαίσια των πολυπολιτισμικών μαθηματικών, υπήρχε σημαντική ανομοιογένεια όσο αφορά την αξία που καταλογίζονταν σε αυτού του είδους την εργασία, καθώς και στην επιρροή που αυτή είχε στην γνωστική και συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Τα σχόλια των εκπαιδευτικών έδειξαν πως οι ίδιοι θεωρούσαν ως μεγαλύτερο πλεονέκτημα της πολυπολιτισμικής εργασίας, το αντίκτυπο που αυτή είχε στην συμπεριφορά των μαθητών, απέναντι στην εργασία στο αντικείμενο των μαθηματικών, ενώ σύμφωνα με την βιβλιογραφία σημαντικότερο αποτέλεσμα αποτελεί, η αυξημένη κατανόηση του αντικειμένου, η οποία επέρχεται μέσω της μελέτης αυτού του υλικού.

Σε πολλές περιπτώσεις, οι απόψεις των εκπαιδευτικών ενδεχομένως επηρεάζονταν από τις δικές τους άσχημες εμπειρίες με τα μαθηματικά, αλλά ακόμα και αυτοί που απολάμβαναν το αντικείμενο των μαθηματικών ως παιδιά, θεωρούσαν τον συναισθηματικό παράγοντα ως τον σημαντικότερο λόγο εφαρμογής τέτοιου είδους εργασίας. Επιπλέον, σύμφωνα με τους συμμετέχοντες η θετική επίδραση της ενασχόλησης των μαθητών με το πολυπολιτισμικό υλικό, φαίνονταν ξεκάθαρα μέσω της προθυμίας τους να εργαστούν περισσότερο, τους ενθουσιώδεις διαλόγους τους (όσο αφορά το αντικείμενο) στα πλαίσια του μαθήματος, αλλά και τις προτάσεις τους για τη μελέτη αντικειμένων, τα οποία σχετίζονται άμεσα με το δικό τους εθνικό υπόβαθρο. Οι παραπάνω παρατηρήσεις, υποδεικνύουν πως η συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών μέσω αυτής της εργασίας, έφτανε σε υψηλότερα επίπεδα από ότι προτείνεται στη βιβλιογραφία, κάτι που επιβεβαιώθηκε μετά από τη πραγματοποίηση ενός συνόλου μαθημάτων, τα οποία περιείχαν διαδραστικές δραστηριότητες (Percival, 2004 σσ.166).

Για έναν μεγάλο αριθμό εκπαιδευτικών, οι ευκαιρίες που προσφέρουν τα πολιτιστικά μαθηματικά για πρακτικές προσεγγίσεις πάνω στο αντικείμενο, αποτελούσαν τον καθοριστικό παράγοντα για την επιλογή των θεμάτων που θα μελετούσαν, κάτι το οποίο αναφέρεται ελάχιστα στα πλαίσια της βιβλιογραφίας. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν πως η θετική στάση των παιδιών απέναντι στα πολιτιστικά μαθηματικά, μεταφέρονταν και στα μαθήματα των «παραδοσιακών» μαθηματικών, κάτι που υποστηρίζεται από αρκετές βιβλιογραφικές αναφορές.

Παρόλα τα αναγνωρισμένα πλεονεκτήματα των πολιτιστικών μαθηματικών όσο αφορά την συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών, ένα μεγάλο μέρος ειδικών θεωρούσε πως ο κύριος ρόλος του αντικειμένου, ήταν να προωθεί τον πολιτιστικό πλουραλισμό και τις ιδέες της κοινωνικής δικαιοσύνης. Οι συμμετέχοντες αναγνωρίζοντας την σημαντικότητα και αυτού του ρόλου των πολιτιστικών μαθηματικών, προσπάθησαν να τον προωθήσουν στα πλαίσια των μαθημάτων τους, σε σύνδεση με το πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθητών της τάξης που είχαν αναλάβει. Ωστόσο, το μοναδικό ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης στο οποίο απευθύνθηκαν, ήταν αυτό του ρόλου της γυναίκας στην επιστήμη των μαθηματικών και αυτό συνέβη μόνο στα πλαίσια των μαθημάτων της Sarah (Percival, 2004 σσ.167).

Η σχετική βιβλιογραφία, τονίζει τα θετικά αποτελέσματα που επέρχονται από την χρήση της ιστορίας των μαθηματικών ως παιδαγωγικό εργαλείο, ειδικά όσο αφορά την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Οι απόψεις των ειδικών συχνά εστιάζουν στην χρήση πρωτογενών πηγών, υποστηρίζοντας πως όχι μόνο βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν την διαδικασία σκέψης, που οδήγησε στην ανάπτυξη διάφορων μαθηματικών ιδεών, αλλά παράλληλα παρέχουν μια πηγή ερωτήσεων προς διερεύνηση. Ωστόσο, η πλειονότητα των παραπάνω βιβλιογραφικών αναφορών κάνει λόγο για μαθητές της δευτεροβάθμιας ή της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ αν και υπάρχουν περιπτώσεις χρήσης πρωτογενών πηγών στα πλαίσια τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι συμμετέχοντες της έρευνας δεν είχαν πρόσβαση σε κατάλληλα διαμορφωμένα υλικά.

Ορισμένοι από τους συμμετέχοντες, υποστήριζαν πως η εργασία που εστίαζε στα πολιτιστικά στοιχεία των μαθηματικών, βοηθούσε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την ύλη του οδηγού σπουδών, ακόμα και αν δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν περαιτέρω την άποψη τους. Παρόλα αυτά, οι εκπαιδευτικοί δεν έδειχναν να συλλογίζονται αρκετά το υλικό που επιβάλλονταν να μελετήσουν, έτσι ώστε να επιτύχουν οι ίδιοι την αυξημένη κατανόηση του υλικού. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι νέοι αλγόριθμοι που μάθαιναν απλώς προσθέτονταν στις υπόλοιπες τεχνικές που γνώριζαν, κάτι το οποίο υποδεικνύει πως για να επέλθουν τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα από την χρήση των πολιτιστικών προοπτικών, είναι αναγκαία η καθοδήγηση των εκπαιδευτικών.

Αν και η βιβλιογραφία εστιάζει στην γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, κάτι τέτοιο είναι απίθανο να συμβεί, εάν οι εκπαιδευτικοί δεν είναι ενημερωμένοι για τις δυνατότητες που προσφέρουν τα κατάλληλα πολιτιστικά υλικά, όσο αφορά αυτόν τον τομέα. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις αν και οι απόψεις των συμμετεχόντων συμφωνούσαν με αυτές της ανάλογης βιβλιογραφίας, οι πράξεις τους δεν ακολουθούσαν την ίδια πορεία. Παραδείγματος χάρη, αν και συμφωνούσαν με την άποψη των ειδικών, πως η διδασκαλία εναλλακτικών αλγορίθμων θα ήταν σε θέση να αυξήσει την αυτοπεποίθηση των μαθητών παρέχοντάς τους εναλλακτικές τεχνικές, σπάνια ενθάρρυναν τους μαθητές να δοκιμάσουν αυτές τις μεθόδους, ακόμα και όταν δεν λειτουργούσαν οι παραδοσιακές τεχνικές. Το παραπάνω παράδειγμα, αποδεικνύει πως σε αντίθεση με τις απόψεις που δήλωναν πως υποστηρίζουν, οι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν τα πολυπολιτισμικά μαθηματικά ως ένα ξεχωριστό αντικείμενο στα πλαίσια του οδηγού σπουδών (Percival, 2004 σσ.168).



Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων, υποστήριζε πως ακόμα και οι μαθητές των μικρότερων τάξεων του Δημοτικού, είναι σε θέση να κατανοήσουν στοιχειωδώς την έννοια του χρόνου και των ιστορικών γεγονότων, κάτι το οποίο επιβεβαιώθηκε από την εργασία που πραγματοποίησε η Sarah, με την βοήθεια χρονικών πινάκων, ιστοριών και οπτικοακουστικού υλικού. Αν και κανένας από τους εκπαιδευτικούς, δεν αναφέρθηκε συγκεκριμένα στον ρόλο των μαθηματικών στα πλαίσια τέτοιου είδους εργασίας, ο συλλογισμός σε ότι αφορά: πριν από πόσο καιρό συνέβησαν τα γεγονότα, πόσα χρόνια μεσολάβησαν μεταξύ δύο γεγονότων, ή πόσο καιρό υπήρχε ένα πολιτισμός, ενδέχεται να παίξει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας του χρόνου και των ιστορικών περιόδων.

Ένα ακόμα σημαντικό ζήτημα αποτελεί η αξιολόγηση των μαθητών. Ορισμένοι ειδικοί υποστηρίζουν πως η ακαταλληλότητα των παραδοσιακών μεθόδων αξιολόγησης ενδέχεται να αποθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς, κάτι το οποίο δεν φαίνεται να ισχύει στην πράξη. Οι συμμετέχοντες εκτιμούσαν τις δραστηριότητες που θα ευχαριστούσαν περισσότερο τους μαθητές, αντί να ανησυχούν με ποια κριτήρια θα τους βαθμολογήσουν. Επιπλέον, αρκετοί εκπαιδευτικοί εκτιμούσαν τον ανεπίσημο χαρακτήρα των δραστηριοτήτων, που παρέχονταν στα πλαίσια των μαθημάτων των πολιτιστικών μαθηματικών, καθώς τους έδινε την δυνατότητα να μελετήσουν την πορεία σκέψης των μαθητών, ενώ παράλληλα τους επέτρεπε να διακρίνουν τα δυνατά και αδύναμα σημεία των μαθητών, χωρίς απαραίτητα αυτά να συνδέονται με το υλικό των παραδοσιακών εγχειριδίων (Percival, 2004 σσ.168).

Άξια αναφοράς αποτελεί και η άποψη των συμμετεχόντων, πως μέσω των πολιτιστικών μαθηματικών επηρεάστηκε άμεσα ο τρόπος διδασκαλίας τους. Ορισμένες από τις αλλαγές που παρατηρήθηκαν, οφείλονταν σε προτάσεις που υπήρχαν στα πλαίσια των υλικών και των βοηθημάτων που χρησιμοποιούνταν, ενώ άλλες οφείλονταν στην φύση του μαθήματος. Αν και η επαγγελματική εξέλιξη των εκπαιδευτικών αναφέρεται σπάνια στην βιβλιογραφία, αποτελεί μια σημαντική συνέπεια της υιοθέτησης των πολιτιστικών προοπτικών στα μαθηματικά. Επιπλέον, παρόλη την σπανιότητα των βιβλιογραφικών αναφορών για την δημιουργία διαθεματικών συνδέσεων στα πολιτιστικά μαθηματικά, οι εκπαιδευτικοί τόνιζαν την μεγάλη σημασία αυτής της εργασίας, καθώς θεωρούσαν πως μέσω της δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών και άλλων αντικειμένων του οδηγού σπουδών, διεγείρονταν η φαντασία των μαθητών.

Τέλος, αν και οι ειδικοί φαίνονται διχασμένοι αναφορικά με την χρήση προφορικών μαρτυριών ως υλικό στα πλαίσια των μαθημάτων, οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης φάνηκαν να μην έχουν αμφιβολίες για τον ενθαρρυντικό χαρακτήρα της αφήγησης ιστοριών. Παρομοίως, οι εκπαιδευτικοί ήταν λιγότερο επικριτικοί από τους ειδικούς, σε ότι έχει να κάνει με τα βοηθήματα και τους πόρους που χρησιμοποιούνται σε αυτά τα μαθήματα, ενδεχομένως διότι δεν ήταν ενήμεροι για τις δραστικές απλοποιήσεις που πραγματοποιούνται αρκετές φορές στα πολιτιστικά κείμενα. Ωστόσο, ακόμα και όταν οι εκπαιδευτικοί ενημερώθηκαν για όλα τα παραπάνω, οι λεπτομέρειες τους φάνηκαν ασήμαντες σε σύγκριση με την ευκαιρία που είχαν να παρουσιάσουν τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα (Percival, 2004 σσ.169).

## Η δυνατότητα εφαρμογής των πολιτιστικών μαθηματικών

Όσο αφορά την εφαρμοστικότητα των πολιτιστικών μαθηματικών, υπάρχουν δύο ευδιάκριτα ζητήματα που πρέπει να ληφθούν υπόψιν:

- I. η δυνατότητα των εκπαιδευτικών να εκτελέσουν με επιτυχία τέτοιου είδους διδασκαλίες
- II. η προθυμία τους να λάβουν αυτήν την απόφαση.

Σύμφωνα με όλα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα, φαίνεται ξεκάθαρα πως η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών, είναι σε θέση να πραγματοποιήσουν την διδασκαλία των μαθηματικών εφαρμόζοντας τις πολιτιστικές προοπτικές, αλλά μόνο όσοι ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για αυτό το αντικείμενο, θα προχωρήσουν στην διδασκαλία του.

Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας όσο αφορά τον πρώτο χρόνο εφαρμογής τους προγράμματος ήταν αρκετά ενθαρρυντικά. Οι εκπαιδευτικοί ανακάλυψαν μια νέα, ενδιαφέρουσα και χρηστική προσέγγιση, ενώ ο καθένας διέθετε τις δικές του ιδέες για τη βελτίωση του προγράμματος, κατά την διάρκεια του δεύτερου χρόνου της εφαρμογής του. Επιπλέον, τα πρακτικά προβλήματα υιοθέτησης του πολιτιστικού υλικού στην διδασκαλία ξεπεράστηκαν και ήταν φανερό, πως οι πολιτιστικές προοπτικές ήταν δυνατόν να συμπεριληφθούν στην διδασκαλία των μαθηματικών, χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες (Percival, 2004 σσ.170).

Το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων, δεν γνώριζε την ύπαρξη βιβλίων, αφισών και οπτικοακουστικού υλικού τα οποία προωθούσαν τις πολιτιστικές προοπτικές. Όταν στα πλαίσια του προγράμματος τους δόθηκε η κατάλληλη καθοδήγηση, θεώρησαν αυτό το υλικό αρκετά κατανοητό και εύχρηστο, ωστόσο χωρίς την βοήθεια και τις υποδείξεις της ερευνήτριας, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δεν θα ήταν πρόθυμοι ή ικανοί να συμπεριλάβουν τις πολιτιστικές διαστάσεις των μαθηματικών στην διδασκαλία τους.

Λόγω των διαφορετικών απόψεων των εκπαιδευτικών, υπήρξαν αρκετές προσεγγίσεις οι οποίες αναπτύχθηκαν με σκοπό να εντάξουν τις πολιτιστικές προοπτικές στην διδακτική των μαθηματικών. Από την μια πλευρά, οι εκπαιδευτικοί υιοθετούσαν τις κατευθυντήριες γραμμές του οδηγού σπουδών, ενώ παράλληλα εντόπιζαν το ανάλογο πολιτιστικό υλικό, έτσι ώστε να επιτύχουν τα μαθησιακά αποτελέσματα που επιθυμούσαν. Από την άλλη πλευρά, οι εκπαιδευτικοί ξεκινούσαν βρίσκοντας πληροφορίες για τα μαθηματικά μιας πολιτιστικής ομάδας, αλλά και τον ρόλο που αυτά έπαιζαν σε εκείνες τις κοινωνίες, συνδέοντάς τα στη πορεία με τον οδηγό σπουδών. Πέρα από τις δύο αντίθετες απόψεις που προαναφέρθηκαν, υπήρχαν και ενδιάμεσες προσεγγίσεις, όπως όταν οι εκπαιδευτικοί επέλεγαν ένα θέμα του οδηγού σπουδών, στο οποίο είχαν συνεισφέρει πολιτιστικές ομάδες που εκπροσωπούσαν στην τάξη. Παρόλα αυτά, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων της έρευνας προτίμησε να βασιστεί σε μεγαλύτερο βαθμό στον οδηγό σπουδών, κάτι το

οποίο τους επέτρεψε να εντάξουν την πολυπολιτισμική εργασία στα πλαίσια του συνολικού προγραμματισμού τους, με στόχο να επιτύχουν όλα τα απαραίτητα μαθησιακά αποτελέσματα (Percival, 2004 σσ.171).

Αρκετοί εκπαιδευτικοί επέλεξαν να εμπλουτίσουν τα μαθήματα της κοινωνιολογίας με παραδείγματα των μαθηματικών που μελετούνταν σε διαφορετικά μέρη του κόσμου σε παλαιότερες εποχές, καθώς υποστήριζαν πως τα μαθηματικά αποτελούσαν έναν σημαντικό, αλλά συχνά παραμελημένο τομέα όσο αφορά την μελέτη αρχαίων πολιτισμών. Επιπλέον, αν και στα πλαίσια της έρευνας φάνηκε πως οι συμμετέχοντες κατάφεραν να μεταβιβάσουν την θεμελιώδη αντίληψη πως τα μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινο εγχείρημα, ήταν προφανές πως ορισμένοι εξ αυτών ήταν πιο επιδέξιοι στην εφαρμογή των πολιτιστικών προοπτικών από άλλους. Αν και οι γνώσεις στο αντικείμενο της ιστορίας αποτελούσαν σημαντικό πλεονέκτημα, η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών σε ότι αφορά τον τομέα των μαθηματικών, φάνηκε να αποτελεί σημαντικότερο κριτήριο για την επιτυχία. Ακόμα και αν οι συμμετέχοντες δεν διέθεταν πλήρη αυτοπεποίθηση στις μαθηματικές τους ικανότητες, η προθυμία τους να λάβουν ρίσκα διδάσκοντας υλικό με την προσθήκη των πολιτιστικών διαστάσεων, ήταν πιθανότερο να τους οδηγήσει στα επιθυμητά αποτελέσματα, κάτι το οποίο συνέβη και στις περιπτώσεις της Sarah και της Ruth, ενώ αντιθέτως οι εκπαιδευτικοί που δεν είχαν την διάθεση να λάβουν αυτά τα ρίσκα αντιμετώπισαν προβλήματα. Ωστόσο, οι πολιτιστικές πληροφορίες που απαιτούνταν για τη διδασκαλία των ιστορικών ή πολυπολιτισμικών προοπτικών των μαθηματικών, ήταν εύκολο να αφομοιωθούν, ιδιαίτερα όσο αφορά το επίπεδο που όφειλαν να διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Percival, 2004 σσ.172).

Όπως προαναφέρθηκε, η αυτοπεποίθηση στον τομέα των μαθηματικών ήταν σημαντικότερη από ότι η καλή γνώση του αντικειμένου της ιστορίας, όσο αφορά την υποστήριξη ενός πολιτιστικού προγράμματος. Παρόλα αυτά, μέσω της παρούσας έρευνας φάνηκε πως η αγάπη για το μάθημα της ιστορίας, αποτελούσε απαραίτητη προϋπόθεση για την εκκίνηση της διαδικασίας, ιδιαίτερα στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Επίσης, όπως αναφέρθηκε και από τους περισσότερους συμμετέχοντες, η αντίληψη πως τα μαθηματικά διαθέτουν πολιτιστικό υπόβαθρο δεν περνάει από το μυαλό των περισσότερων ανθρώπων, κάτι το οποίο επιβεβαιώνει την άποψη της Michalowicz (2000) πως οι εκπαιδευτικοί που χρησιμοποιούν ιστορικές προοπτικές για την διδασκαλία των μαθηματικών, αποτελούν ερασιτέχνες ιστορικούς του αντικειμένου.

Ένα ακόμα ζήτημα αποτελεί η εφαρμογή των πολιτιστικών μαθηματικών ως ξεχωριστό αντικείμενο, το οποίο δεν χαίρει ίδιας εκτίμησης με αυτό των παραδοσιακών μαθηματικών. Αν και αρκετά μαθήματα που διοργάνωσε η «ομάδα των τεσσάρων», θα ήταν δυνατόν να ενταχθούν στην κατηγορία που ο D' Ambrosio (2001) ονομάζει «περιέργειες» καθώς διαθέτουν λίγες ή καθόλου συνδέσεις με τον οδηγό σπουδών, εφόσον ήταν ικανά να μεταβάλουν τις απόψεις των μαθητών θεωρήθηκαν από την ερευνήτρια αρκετά αποτελεσματικά. Επιπλέον, παρόλο που η Ruth και η Sarah ξεκίνησαν από διαφορετικές αφετηρίες και οι δύο κατάφεραν να τοποθετήσουν τα μαθηματικά σε ένα κοινωνικό πλαίσιο, κάτι το οποίο οδήγησε τους μαθητές να εκτιμήσουν τις συνεισφορές διαφορετικών πολιτιστικών ομάδων, στην επιστήμη των μαθηματικών. Παρόλα τα θετικά αποτελέσματα αυτού του είδους της

διδασκαλίας που αναφέρθηκαν παραπάνω, φάνηκε πως αν και οι εκπαιδευτικοί υποστήριζαν πως θα ξαναχρησιμοποιήσουν τις συγκεκριμένες δραστηριότητες, κάτι τέτοιο δεν συνέβη στην πραγματικότητα. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στο συμπέρασμα, πως η διδασκαλία των πολυπολιτισμικών μαθηματικών στα πλαίσια ενός σχολικού έτους, δεν ήταν αρκετή για να τους εξοικειώσει πλήρως με το υλικό (Percival, 2004 σσ.173).

Ένα ακόμα ζήτημα άξιο αναφοράς αποτελεί ο χρόνος που απαιτήθηκε για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών για αυτά τα μαθήματα. Όπως υποστηρίζουν όλοι οι συμμετέχοντες, η επιπλέον προετοιμασία για αυτά τα μαθήματα των πολυπολιτισμικών μαθηματικών ήταν αρκετά χρονοβόρα. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί που ανήκαν στην «ομάδα των τεσσάρων» και πραγματοποίησαν το πρόγραμμα μόνο για ένα σχολικό έτος, υποστήριζαν πως η πίεση του χρόνου και οι περαιτέρω επαγγελματικές τους υποχρεώσεις, τους οδήγησαν στην απόφαση να διακόψουν το πρόγραμμα. Ωστόσο, η άρνησή τους να επαναλάβουν αυτά τα μαθήματα, υποδεικνύει πως δεν είχαν κατανοήσει πλήρως το απαραίτητο υλικό. Όπως συμβαίνει στα πλαίσια οποιουδήποτε θέματος, η επαναλαμβανόμενη έκθεση στο υλικό είναι αναγκαία έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα αίσθημα ασφάλειας, μια διαδικασία στην οποία δεν επιθυμούσαν να εισέλθουν οι συμμετέχοντες που δεν επανέλαβαν το πρόγραμμα. Μέσω της παρούσας έρευνας, προκύπτει το συμπέρασμα πως μόνο όσοι εκπαιδευτικοί λάμβαναν προσωπική ικανοποίηση μαθαίνοντας για τα πολιτιστικά μαθηματικά, θα αφιέρωναν επαρκή χρόνο σε αυτού του είδους την μελέτη (Percival, 2004 σσ.174).

## Επιπτώσεις και Τελικά Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα εστίασε στην διδασκαλία έξι μόνο εκπαιδευτικών, ωστόσο τόσο τα λεγόμενα, όσο και οι πράξεις τους επιβεβαιώνουν πως τα πολιτιστικά μαθηματικά είναι δυνατόν να έχουν θετική επιρροή, όσο αφορά τις πεποιθήσεις των μαθητών για το αντικείμενο των μαθηματικών, ενώ παράλληλα όλα τα προβλήματα εφαρμογής τους μπορούν να ξεπεραστούν. Επιπλέον, με την καθοδήγηση ενός ειδικού, οι εκπαιδευτικοί είναι σε θέση να επιτύχουν τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα που αναφέρονται στον οδηγό σπουδών, τα οποία εστιάζουν στο πολιτιστικό υπόβαθρο των μαθηματικών.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν και αρκετά δυσάρεστα ευρήματα, με το πιο απογοητευτικό εξ αυτών να αποτελεί το γεγονός πως η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, πιθανότατα να μην εφαρμόσει ποτέ τις πολιτιστικές προοπτικές που αναφέρονται στα πλαίσια του οδηγού σπουδών. Η αντίληψή πως τα μαθηματικά διαθέτουν πολιτιστικό υπόβαθρο, δεν έρχεται εύκολα στον νου των εκπαιδευτικών, καθώς οι αναφορές του οδηγού σπουδών σε αυτό είναι σπάνιες και τις περισσότερες φορές μένουν απαρατήρητες. Επιπλέον, μέσω της παρούσας έρευνας φάνηκε καθαρά πως οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν διαθέτουν το κατάλληλο υπόβαθρο, έτσι ώστε να είναι ικανοί να εντοπίσουν κατάλληλα μέσα

και βοηθήματα, ενώ παράλληλα αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες, στην επιλογή των ιστορικών και πολυπολιτισμικών διαστάσεων των μαθηματικών που θα χρησιμοποιήσουν για να επιτύχουν συγκεκριμένα μαθησιακά αποτελέσματα. Επίσης, σημαντικό πρόβλημα αποτελεί η άγνοια των εκπαιδευτικών, όσο αφορά την ύπαρξη κατάλληλα διαμορφωμένων μέσων και βοηθημάτων, κάτι που υποδεικνύει την ανάγκη για περαιτέρω εκπαίδευσή τους σε αυτόν τον τομέα. Λαμβάνοντας υπόψη την απουσία προηγούμενης εμπειρίας, καθώς και την έλλειψη επαρκούς εκπαίδευσης για την εύρεση κατάλληλων βοηθημάτων, δεν θα έπρεπε να προκαλεί έκπληξη το γεγονός πως ελάχιστοι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να επιφέρουν τα επιθυμητά αποτελέσματα (Percival, 2004 σσ.175).

Αν και η πλειοψηφία των συμμετεχόντων φάνηκε ενθουσιασμένη στην ιδέα συνέχισης του προγράμματος για δεύτερη συνεχόμενη σχολική χρονιά, μόνο αυτοί που διέθεταν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσο αφορά την συγκεκριμένη προσέγγιση, συνέχισαν την εφαρμογή του. Ακόμα και οι εκπαιδευτικοί που είχαν ευχάριστες εμπειρίες στα πλαίσια του πρώτου έτους εφαρμογής και είχαν προετοιμάσει κατάλληλα διαμορφωμένο υλικό για την επανάληψη των μαθημάτων, δυστυχώς εγκατέλειψαν το πρόγραμμα λόγω διάφορων πιέσεων και επαγγελματικών υποχρεώσεων.

Τέλος, η γενική έλλειψη γνώσης πάνω στο αντικείμενο των πολιτιστικών μαθηματικών, υποδηλώνει την αναγκαιότητα περαιτέρω έρευνας σε αυτόν τον τομέα. Με τη βοήθεια μακροχρόνιων μελετών ομάδων εκπαιδευτικών, υπό την επίβλεψη ειδικών ερευνητών, ενδεχομένως να ανακαλυφθούν εξωτερικά κίνητρα τα οποία θα είναι σε θέση να ωθήσουν τους εκπαιδευτικούς, στην εκτεταμένη εφαρμογή των πολιτιστικών προγραμμάτων. Μέσω τέτοιου είδους μακροχρόνιων ερευνών, θα ήταν δυνατόν να καθοριστεί κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί που χαίρουν κατάλληλης υποστήριξης, αναπτύσσουν την αναγκαία αυτοπεποίθηση όσο αφορά την συνεχή χρήση των μεθόδων που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία (Percival, 2004 σσ.115).

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

Adler, I. (1960). *Giant Golden Book of Mathematics: Exploring the World of Numbers and Space*. New York: Golden Press.

Allen, P. (1980). *Mr. Archimedes Bath*. Sydney: Collins

Anglin, W. S. (1992). Mathematics and history. *The Mathematical Intelligencer*, 14 (4), 6-12.

Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher*, 35 (4), 13-16.

- Ascher, M. (2001). Learning with games of strategy from Mongolia. *Teaching children Mathematics*, 8 (2), 96-98.
- Barbin, E. (1990). Οπ. αναφ. Fauvel, J. (Ed), *History in the Mathematics Classroom: the IREM papers*. Leicester: The Mathematical Association.
- Barbin, E. (1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 12-13.
- Barbin, E. (2000). Integrating History: research perspectives. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 63-90. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Barta, J. & Schaelling, D. (1998). Games we play: Connecting mathematics and culture in the classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4 (7), 388-393.
- Bartolini-Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the modern classroom. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 343-350. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Barzun, J. M. (1945). *Teacher in America*. Boston: Little, Brown and Company.
- Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 86 (6), 461.
- Bishop, A. J. (1979). Visualizing and mathematics in a pre-technological teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 10 (2), 135-146.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematical education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Blyth, J. E. (1982). *History in primary schools*. Maidenhead, England: McGraw-Hill book Company.
- Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods*. Boston: Allyn and Bacon.
- Bohan, H., & Bohan, S. (1993). Extending the regular curriculum through creative problem solving. *Arithmetic Teacher*, 41 (2), 83-87.
- Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books, Inc.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: a teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, 25 (2), 166-208.
- Branford, B. (1908). *A study of mathematical education including the teaching of arithmetic*. Oxford: Clarendon Press.
- British Columbia Ministry of Education. (1995). *Mathematics K to 7 integrated resource package*. Victoria, BC, Canada: Author.
- Brown, S. I. (1996). Towards humanistic mathematics education. Οπ. αναφ. Bishop, A. J. , Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds), *International*

*handbook of mathematics education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Bruckheimer, M., Ofir, R. & Arcavi, A. (1995). The case for and against “Casting out nines”. *For the Learning of Mathematics*, 15 (2), 23-28.

Buhler, M. (1990). Reading Archimedes’ measurement of a circle. Οπ. αναφ. Fauvel, J. (Ed) *History in the mathematics classroom: The IREM papers*. Leicester: The Mathematical Association.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S. & Bedient, J. D. (1976). *The historical roots of elementary mathematics*. New York: Dover Publications.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 13 (1), 59-66.

Campbell, P. B. (1995). Redefining the “girl problem in mathematics” Οπ. αναφ. Secada, W. G., Fennema, E. & Adanain, L. B. (Eds), *New directions for equity in mathematics education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Carroll, W. M. & Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. Οπ. αναφ. Morrow, L. G. & Kenney, M. J. (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (1998 Yearbook)*.

Charbonneau, L. (2002). Histoire de mathematiques et enseignement des mathematiques au primaire. *Instantanes Mathematiques*, 39 (1), 21-36.

Charalambous, C. Y., Panaoura, A. & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teacher’s beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 71 (2).

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1991). A Constructivist approach to second grade mathematics. Οπ. αναφ. Glasefeld, E. V. (Ed), *Radical Constructivism in Mathematics Education*. New York: Kluwer Academic Publishers.

D’ Ambrosio, U. (1997). Diversity equity and peace: From dream to reality. Οπ. αναφ. Trentacosta, J. & Kenney, M. J. (Eds), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom (1997 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

D’ Ambrosio, U. (2001). What is mathematics and how can it help children in schools? . *Teaching Children Mathematics*, 7 (2).

Daniel, C. (2000). Mathematically gifted and talented students. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in mathematics education: The ICMI study*, 188-195 Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

Davitt, R. D. (2000). The revolutionary character of mathematics. *Mathematics Teacher*, 93 (8), 692-694.

- Dawn, J. (2007). *Sense of belonging among women of color in science, technology, engineering and math majors: Investigating the contributions of campus racial climate perceptions and other college environments* (Διδακτορική Διατριβή). United States: University of Maryland.
- Dedron, P. & Itard, J. (1959/1973). *Mathematics and Mathematicians. (Vols. 1 and 2)*. Bristol, England: Transworld Publishers Ltd.
- Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2000). *The handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.
- Dresher, M. (2012). *The Mathematics of Games of Strategy: Theory and Applications*. New York: Dover Publications, Inc.
- Eagle, M. R. (1995). *Exploring maths through history*. Cambridge University Press.
- Egan, K. (1986). *Teaching as story telling: an alternative approach to teaching and curriculum in elementary school*. London, ON: Althouse press.
- Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 99-114.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. New York: Falmer Press.
- Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in Schools*, 27 (4), 25-31.
- Eves, H. W. (1969). *In mathematical circles (Vols. 1 & 2)*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, Inc.
- Eccles, J. S. (1989). Bringing Young Women to Math and Science. Οπ. αναφ. Crawford, M. & Gentry, M. (Eds), *Gender and Thought: Psychological Perspectives*. New York: Springer, Inc.
- Eli, J. A. & Mohr- Schroeder, M. J. (2013). Mathematical Connections and Their Relationship to Mathematics Knowledge for Teaching Geometry. *School Science and Mathematics*, 113 (3).
- Fasanelli, F. (2000). The political context. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds.), (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Fauvel, J. (Ed.). (1990). *History in the Mathematics Classroom: the IREM papers*. Leicester: The Mathematical Association.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 3-6.
- Fauvel, J. & Gray, J. (Eds.), (1987). *The history of mathematics: A reader*. London: Macmillan.



- Fowler, D. (1991). Perils and pitfalls of history. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 15-16.
- Frank, M. L. (1988). Problem Solving and Mathematical Beliefs. *Arithmetic Teacher*, 35 (5), 32-34.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? . *For the Learning of Mathematics*, 2 (1), 30-33.
- Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? . *Science & Education*, 10 (4).
- Friedman, K. C. (1944). Time concepts of Elementary School Children. *The Elementary School Journal*, 44 (6), 337.
- Fuhrer, L. (1991). Historical stories in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 24-31. B
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. Οπ. αναφ. English, L. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, 631-654. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School*, 27 (4), 48-51.
- Gardner, J. H. (1991). “How fast does the wind travel?” : History in the primary mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 17-20.
- Gerdes, P. (1997). On culture, geometrical thinking and mathematics education. Οπ. αναφ. Powell, A. B. & Frankenstein, M. (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in mathematics education*. Albany: State University of New York Press.
- Gilligan, C. (1982). *In a different voice*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Glass, J. (1998). *The fly on the ceiling: a math myth*. London: Random House.
- Gorman, J. (1997). Strategy games: Treasures form ancient times. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (2), 110-116.
- Grabiner, J. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56 (4), 195-206.
- Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 63-90. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Gulikers, L. & Blom, K. (2001). “A historical angle”, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational studies in Mathematics*, 47, 223-258.

- Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: obstacles in the revolutions from intuitive to intellectual constructs. *For the Learning of Mathematics*, 11 (1), 26-32.
- Hersh, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. *Advances in Mathematics*, 31, 31-50.
- Hersh, R. (1994). Fresh breezes in the philosophy of mathematics. Οπ. αναφ. Ernest, P. (Ed.). *Mathematics, education and philosophy: an international perspective*. London, Washington, DC: Falmer Press.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?*. Oxford University Press.
- Higginson, W. (1980). On the foundation of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1 (2), 3-7.
- Hirigoyen, H. (1997). Dialectal variations in the language of mathematics: a source for multicultural experiences. Οπ. αναφ. Trentacosta, J. & Kenney, M. J. (Eds.), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom (1997 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hodkinson, P. & Hodkinson, H. (2001). The Strengths and Limitations of Case Study Research. Στο *Making an Impact on Policy and Practice*. Cambridge: University of Leeds.
- Hogben, L. T. (1955). *The wonderful world of mathematics*. Garden City, NY: Doubleday & Co, Inc.
- Jahoda, J. (1963). Children's concept of time and history. *Educational Review*, 15 (2).
- Jenkins, O. (1954). Larry and the abacus. *Arithmetic Teacher*, 1 (3), 21-24.
- Jones, P. S. (1969). The history of mathematics as a teaching tool. Οπ. αναφ. National Council of Teachers of Mathematics. *Historical topics for the mathematics classroom*. Washington, DC: Author.
- Joseph, G. G. (1993). A rationale for a multicultural approach to mathematics. Οπ. αναφ. Nelson, D., Joseph, G. G. & Williams, G. (1993). *Multicultural mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Katsap, A. (2002). Humanizing Mathematics: The Humanistic Impression in the Course for Mathematics Teaching. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 26.
- Katz, V. J. (2000). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. United States: Mathematical Association of America, Inc.
- Kelly, L. (2000). A mathematical history tour. *The Mathematics Teacher*, 93 (1), 14-17.
- Kleiner, I. (1988). Thinking the unthinkable: The story of complex numbers. *Mathematics Teacher*, 81 (2), 592-593.
- Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York: Oxford University Press.

- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lasky, K. (1994). *The librarian who measured the earth*. Boston: Joy Street Books.
- Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. Οπ. αναφ. Grouwns, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Simon & Schuster and Prentice Hall International.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage Publications.
- Lingard, D. (1996). Mathematics enquiry and the history of mathematics. *British Society for the History of Mathematics Newsletter* 31.
- Lingard, D. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. *Report Written for the ICMI study*. Οπ. αναφ. Percival, I., (2004). *The use of Cultural Perspectives in the Elementary School Mathematics Classroom* (Διδακτορική Διατριβή).
- Mason, D. E. (1998). Capsule lessons in alternative algorithms for the classroom. Οπ. αναφ. Morrow, L. G. & Kenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (1998 Yearbook)*.
- McLeod, B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. Οπ. αναφ. Grouwns, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Simon & Schuster and Prentice Hall International.
- Michalowicz, K. D. (2000). History in support of diverse educational requirements-opportunities for change. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 63-90. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Monroe, E. E. & Mikovch, A. K. (1994). Making Mathematical Connections Across the Curriculum: Activities to Help Teachers Begin. *School Science and Mathematics*, 94 (7), 371-376.
- Morrow, L. G. & Kenney, M. J. (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (1998 Yearbook)*.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1969). *Historical topics for the mathematics classroom (Thirty-first yearbook)*. Washington, DC: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Naylor, M. & Naylor, P. (2001). Building and using the amazing abacus. *Teaching Children Mathematics*, 8 (4), 202-205.
- Nelson, D. (1993). Teaching mathematics from a multicultural viewpoint. Οπ. αναφ. Nelson, D., Joseph, G. G. & Williams, G. (1993). *Multicultural mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

- Nelson, D., Joseph, G. G. & Williams, G. (1993). *Multicultural mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Ofir, R. (1991). Historical happenings in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 21-23.
- Ofir, R. & Arcavi, A. (1992). Word problems and equations: an historical activity for the algebra classroom. *Mathematical Gazette*, 76 (475), 69-84.
- Osen, L. M. (1975/2003). *Women in mathematics*. MIT Press.
- Pappas, T. (1986). *The joy of mathematics: Discovering mathematics all around you*. San Carlos, CA: World Wide Publishing/ Tetra.
- Pappas, T. (1997). *Math stories for kids and other people too!* San Carlos, CA: Wide World Publishing/ Tetra.
- Percival, I. (1999). *Mathematics in history: Intergrading the mathematics of ancient civilizations with the Grade 7 social studies curriculum*. Unpublished master's thesis, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada. Οπ. αναφ. Percival, I. (2004). *The Use of Cultural Perspectives in the Elementary School Mathematics Classroom* (Διδακτορική Διατριβή). Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada.
- Percival, I. (2001). An artefactual approach to ancient arithmetic. *For the Learning of Mathematics*, 21 (3), 16-21.
- Percival, I. (2004). *The Use of Cultural Perspectives in the Elementary School Mathematics Classroom* (Διδακτορική Διατριβή). Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada.
- Perkins, P. (1991). Using history to enrich mathematics lessons in a girl's school. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 9-10.
- Phillip, R. A. (1996). Multicultural mathematics and alternative algorithms. *Teaching Children Mathematics*, 3 (3), 128-132.
- Pimm, D. (1995). Some issues in globalizing mathematics education. Οπ. αναφ. Snively, G. & MacKinnon, A. (Eds.), *Thinking globally about mathematics & science education*. Vancouver, BC, Canada: Centre for the Study of Curriculum & Instruction Development, University of B. C.
- Ponza, M. V. (1998). A role for the history of mathematics in the teaching and the learning of mathematics: An Argentinean experience. *Mathematics in Schools*, 27 (4), 10-13.
- Powell, A. B. & Frankenstein, M. (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in mathematics education*. Albany: State University of New York Press.
- Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: didactic inquiries on the methods and problems of medieval Italian algebra. *For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 28-38.

- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17 (1), 26-33.
- Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 63-90. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Ransom, P. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 7-9.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1990). *Mathematicians are people too: Stories from the lives of great mathematicians. Vol. 1*. Palo Alto, CA, Dale Seymour Publications.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1992). *Historical connections in mathematics. Vol. 1*. Aurora, ON: Spectrum Educational Supplies Ltd.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1993). *Historical connections in mathematics. Vol. 2*. Aurora, ON: Spectrum Educational Supplies Ltd.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1995a). *Historical connections in mathematics. Vol. 3*. Aurora, ON: Spectrum Educational Supplies Ltd.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1995b). *Mathematicians are people too: Stories from the lives of great mathematicians. Vol. 2*. Palo Alto, CA, Dale Seymour Publications.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1995c). Connecting mathematics with its history: A powerful practical linkage. Οπ. αναφ. House, P. A. & Coxford, A. E., *Connecting mathematics across the curriculum: 1995 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Rogers, L. (1991). History of mathematics: resources for teachers. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 48-52.
- Ron, P. (1998). My family taught me this way. Οπ. αναφ. Morrow, L. G. & Kenney, M. J. (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (1998 Yearbook)*.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. Οπ. αναφ. Grouwns, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Simon & Schuster and Prentice Hall International.
- Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 63-90. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Secada, W. G. (1992). Race, ethnicity, social class, language and achievement in mathematics. Οπ. αναφ. Grouwns, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Simon & Schuster and Prentice Hall International.

- Sfard, A. (1994). Mathematical practices, anomalies and classroom communication Problems. Οπ. αναφ. Ernest, P. (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education*. London, Washington, D.C.: Falmer Press.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14.
- Sgroi, L. (1998). An exploration of the Russian peasant method of multiplication. . Οπ. αναφ. Morrow, L. G. & Kenney, M. J. (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (1998 Yearbook)*.
- Shan, S-J & Bailey, P. (1991). *Multiple factors: Classroom mathematics for equality and justice*. Stoke-on-Trent, England: Trentham Books.
- Shirley, L. H. (1995). Using ethnomathematics to find multicultural mathematical connections. Οπ. αναφ. House, P. A. & Coxford, A. E., *Connecting mathematics across the curriculum: 1995 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Silvermann, F. L., Strawser, A. B., Strohauer, D. L., & Marzano, N. N. (2001). On the road with Cholo, Vato and Pano. *Teaching Children Mathematics*, 7 (6), 330-333.
- Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. Οπ. αναφ. Kelly, A. E. & Lesh, R. A. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Skriwanos, C. & Zhang, Q. (2013). Humanistic Mathematics Network Newsletter: A Bibliographic Report, *Journal of Humanistic Mathematics*, 3 (1), 33-61.
- Smith, D. (1919). *Number stories of long ago*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Smith, J. (1995). Threading mathematics into social studies. *Teaching Children Mathematics*, 1 (7), 438-444.
- Spangler, D. A. (1992). Assessing Students Beliefs About Mathematics. *The Mathematics Educator*, 3 (1).
- Spencer, H. (1896). *Education: intellectual moral and physical*. New York: D. Appleton and company.
- Swetz, F. J. (1989). Using problems from the history of mathematics in the classroom. *Mathematics Teacher*, 82(5).
- Swetz, F. J. (1994). *Learning activities form the history of mathematics*. Portland, ME: J. Weston Walch.
- Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. Οπ. αναφ. Bishop, A., J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds), *International handbook of mathematics education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

- Tate, W. (1995). Mathematics communication: Creating opportunities to learn. *Teaching Children Mathematics*, 1 (6), 344-349,369.
- Taylor, L. (1997). Integrating mathematics and American Indian cultures. Οπ. αναφ. Trentacosta, J. & Kenney, M. J. (Eds), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom (1997 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? Οπ. αναφ. Howson, A. G. (Ed.), *Developments in mathematics education*. Cambridge University Press.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Trentacosta, J. & Kenney, M. J. (Eds), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom (1997 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. Οπ. αναφ. Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds), *History in Mathematics Education: the ICMI study*, 63-90. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Uy, F. L. (2003). The Chinese numeration system and place value, *Teaching Children Mathematics*, 9 (5), 243-247.
- Voolich, E. D. (1993). Using biographies to humanize the mathematics class. *Arithmetic Teacher*, 41 (1), 14-17.
- Western Canadian Protocol. (1995). *The common curriculum framework for K-12 mathematics*. Barhead, AB, Canada, June 5-9.
- Wheeler, D. (1981). *What should a teacher know about the history of mathematics?* Στο Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education study Group, Edmonton, AB, Canada, June 5-9.
- Wiest, L. R. (2002). Multicultural mathematics instruction: Approaches and recourses. *Teaching Children Mathematics*, 9 (1), 49-55.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Oxford: Pergamon Press.
- Willerding, M. F. (1954). History of mathematics in teaching arithmetic. *Arithmetic Teacher*, 1 (2), 24-25.
- Wilson, P. S., & Chavot, J. B. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Mathematics Teacher*, 93 (8), 642-645.
- Wolcott, H. F. (1990). *Writing up qualitative research*. Newbury Park, CA: Sage.
- Zaslavsky, C. (1973). *Africa counts: number and pattern in African culture*. Boston Prindle, Weber and Schmidt.
- Zaslavsky, C. (1980). *Count on your fingers African style*. New York: Crowell.

- Zaslavsky, C. (1981). Networks: New York Subways, A Piece of String, and African Traditions, *Arithmetic Teacher*, 29 (2), 42-47.
- Zaslavsky, C. (1991). World cultures in mathematics class. *For the Learning of Mathematics*, 11 (2), 32-36.
- Zaslavsky, C. (1993b). *Multicultural mathematics: Interdisciplinary co-operative learning activities*. Portland, ME: J. Weston Walch.
- Zaslavsky, C. (1994). *Multicultural Math: Hands-on activities from around the world*. New York: Scholastic Professional Books.
- Zaslavsky, C. (1996). *The multicultural classroom: Bringing in the world*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Zaslavsky, C. (2001). Developing number sense: What can other cultures tell us? . *Teaching Children Mathematics*, 7 (6), 312-319.
- Zeman, A., & Kelly, K. (1994). *Everything you need to know about Math homework*. New York: Irving Place Press.
- Zepp, R. A. (1992). Numbers and codes in ancient Peru: The quipu. *Arithmetic Teacher*, 39 (9), 32-41.
- Δόρτσιος, Κ. (2002). Η Διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών: Ένας Προβληματισμός. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, 19, 732-733.
- Κοτοπούλης, Θ. Β. (2007). Η διδακτική των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση: Όψεις και προοπτικές. *Επιστημονικό Βήμα*, 6.
- Μπαλής, Σ. (2003). Διαθεματική Προσέγγιση των: Μαθηματικών-Ιστορία- Αρχαία Ελληνική Γραμματεία- Λογοτεχνία. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, 20, 456-464.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, τ. Α'. (2001). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών- Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*, Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

## Δικτυογραφία

A brief history of numerical systems- Alessandra King, <<https://www.youtube.com/watch?v=cZH0YnFpjwU&t=108s>>.

Discovering Ancient Egypt, <<https://discoveringegypt.com>>.

Donald in Mathmagic Land, <[https://www.youtube.com/watch?v=U\\_ZHsk0-eF0&t=960s](https://www.youtube.com/watch?v=U_ZHsk0-eF0&t=960s)>.



DreamBox, <<https://www.dreambox.com/blog/female-math-pioneers-infographic>>.

Educational Technology and Mobile Learning, <<https://www.educatorstechnology.com/2014/01/a-beautiful-math-poster-featuring.html?m=1>>.

Etsy, <<https://www.etsy.com/listing/424477841/great-women-of-mathematics-motivational>>.

Kids Math Games, <<http://www.kidsmathgamesonline.com/facts.html>>.

NRICH, <<https://nrich.maths.org/9443>>.

NRICH-Poster, <<https://nrich.maths.org/6832>>.

Preceden, <<https://www.preceden.com/timelines/325732-history-of-mathematics>>.

Scholastic, <<https://resource-bank.scholastic.co.uk/resources/370299>>.

The History of Non-Euclidian Geometry- Sacred Geometry- Extra History-#1, <<https://www.youtube.com/watch?v=nkvVR-sKJT8>>.

The History of Non-Euclidian Geometry- Sacred Geometry- Extra History-#2, <<https://www.youtube.com/watch?v=vUWKMo5scKY&t=29s>>.

The History of Non-Euclidian Geometry- Sacred Geometry- Extra History-#3, <<https://www.youtube.com/watch?v=H74AayZkpXg&t=11s>>.

The History of Non-Euclidian Geometry- Sacred Geometry- Extra History-#4, <<https://www.youtube.com/watch?v=i5goUkT1irw&t=153s>>.

Twinkl, <[https://www.twinkl.co.uk/resource/t2-m-1070-roman-numerals-poster?utm\\_source=pinterest&utm\\_medium=social&utm\\_campaign=history](https://www.twinkl.co.uk/resource/t2-m-1070-roman-numerals-poster?utm_source=pinterest&utm_medium=social&utm_campaign=history)>.

