ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β Ηλικιακός Κύκλος

Διπλωματική εργασία

«Διδασκαλία και μάθηση γραμμικών συστημάτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Ιστορίας»

Της

Χατζοπούλου Χρυσάνθη
926

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής
Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Θεσσαλονίκη,2020

Διπλωματική εργασία

Διδασκαλία και μάθηση γραμμικών συστημάτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Ιστορίας

Χατζοπούλου Χρυσάνθη

Επιβλέπων: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής
Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Η παρούσα Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού – Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική των Μαθηματικών", του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Η πλήρης αναφορά στο κείμενο αυτό είναι:

Χατζοπούλου Χρυσάνθη. 2020. Διδασκαλία και μάθηση των γραμμικών συστημάτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Ιστορίας. (Επιβλέπων Κ. Νικολαντωνάκης). Διπλωματική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Παιδαγωγική Σχολή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Διατμηματικό – Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», σελ. 197.

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ....

Ο συγγραφέας .... βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αφορά τον σχεδιασμό διδακτικής παρέμβασης με στόχο την ανάπτυξη δομικής αντίληψης της έννοιας του γραμμικού συστήματος μέσα από την εμφάνισή και ανάπτυξη τους στους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων, Αιγυπτίων, Ελλήνων, Κινέζων και των περιόδων του Μεσαίωνα, της Αναγέννησης και τον 18^{ο} αιώνα μ.Χ. στην Ευρώπη.

Θα ήθελα καταρχάς να ευχαριστήσω θερμά την Εξεταστική Επιτροπή για την ενεργό και ουσιαστική συμβολή της στην εκπόνηση της εργασίας αυτής. Η βοήθεια του κ. Νικολαντωνάκη Κ. υπήρξε καθοριστική στη διαμόρφωση του πλαισίου ανάπτυξης της εργασίας. Ο κ. Χρήστου Κ. με καίρια σχόλια, συνετέλεσε ουσιαστικά στη διαμόρφωσή της. Ευχαριστώ και τον κ. Λεμονίδη Χ. για τα δικά του σχόλια επίσης.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τους γονείς μου Ζήση και Μαργαρίτα, την αδερφή μου Ειρήνη, τους φίλους και συναδέλφους μου, για την ουσιαστική συμπαράσταση και βοήθειά τους καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και της επίπονης προσπάθειάς μου για την συγγραφή της εργασίας αυτής. Τους οφείλω πολλά.

"The history of mathematics, lacking the guidance of philosophy, [is] blind, while the philosophy of mathematics, turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics, is empty."

"Η ιστορία των μαθηματικών, που στερείται την καθοδήγηση της φιλοσοφίας, είναι τυφλή, ενώ η φιλοσοφία των μαθηματικών, που στρέφει την πλάτη της στα πιο ενδιαφέροντα φαινόμενα στην ιστορία των μαθηματικών, είναι κενή. "

Imre Lakatos (1976). "Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery", p.2, Cambridge University Press.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΚΟΝΩΝ-ΠΙΝΑΚΩΝ

Διδασκαλία και μάθηση γραμμικών συστημάτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Ιστορίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά σχεδιασμό διδακτικής παρέμβασης με στόχο την ανάπτυξη δομικής αντίληψης της έννοιας του γραμμικού συστήματος μέσα από την εμφάνισή και ανάπτυξη τους στους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων, Αιγυπτίων, Ελλήνων, Κινέζων και στη διάρκεια του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης στην Ευρώπη. Η εργασία έγινε στο πλαίσιο του Αναλυτικού Ισχύοντος Προγράμματος Σπουδών του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε τμήμα 6 μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου κατά το σχολικό έτος 2019-2020. Λαμβάνοντας υπόψη την Ιστορία των Μαθηματικών χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας, test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων, προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου και ερωτηματολόγιο με στόχο την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές των γραμμικών συστημάτων και των τρόπων επίλυσής τους. Τα εργαλεία βασίστηκαν στις παρανοήσεις των αλγεβρικών εκφράσεων, αλγεβρικών εξισώσεων και της γραφικής παράστασης, ενώ εφαρμόστηκαν δραστηριότητες που προτείνονται και από άλλους ερευνητές. Συγκεκριμένα το προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου και το ερωτηματολόγιο εξετάζουν αν θα επιτευχθούν οι στόχοι και θα αναδείξουν τις παρανοήσεις. Οι μαθητές άλλοτε χωρισμένοι σε ομάδες και άλλοτε ατομικά, συμμετέχουν στην παρουσίαση της εξέλιξης των γραμμικών συστημάτων και εργάζονται σε ιστορικά κείμενα. Στόχο αποτελεί η διερεύνηση της επίδρασης της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και των ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων στην απόκτηση δομικής αντίληψης της έννοιας και στη δυνατότητα απόκτησης θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά. Επεκτείνοντας αναδεικνύεται η ανάγκη συστηματικότερης ενσωμάτωσής της Ιστορίας των Μαθηματικών και των ομαδοσυνεργατικών προσεγγίσεων στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα.

Λέξεις κλειδιά: γραμμικά συστήματα, Ιστορία των Μαθηματικών, διδακτικός σχεδιασμός, μέθοδος αντικατάστασης, μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Teaching and learning linear systems in Middle School by using History

ABSTRACT

This paper is about designing a teaching intervention aimed at developing a structural understanding of the concept of the linear system through their emergence and development in the cultures of Babylon, Egyptians, Hellenics and Chinese but also during the Middle Age and the Renaissance. The work was done in the context of the Valid Curriculum of the Hellenic Educational Program. The intervention was applied to a third class of lower secondary school of 6 students during the school year 2019-2020. With History of Mathematics, worksheets, test of existing knowledge, proposed cognitive test to check the results of the teaching package and questionnaire were used in order to understand the concepts by the students of the linear systems and the ways of solving them. The tools were based on misunderstandings of algebraic expressions, algebraic equations and graphs, while implementing activities suggested by researchers. Specifically, the proposed cognitive test to check the results of the teaching package and questionnaire examine whether the goals will be achieved and the misunderstandings will be highlighted. Students, sometimes divided into groups and sometimes individually, participated in the presentation of the evolution of linear systems and worked on historical texts. The positive contribution of the History of Mathematics and the collaborative activities in the acquisition of a structural perception of the concept and the possibility of changing the attitude of the students towards Mathematics were highlighted. By expanding, it is need for a more systematic integration of the History of Mathematics and collaborative groups in the Hellenic Educational System.

Keywords: linear systems, History of Mathematics, didactic design, method of substitution, method of elimination

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά είναι ένα από τα μεγαλύτερα πολιτιστικά και πνευματικά επιτεύγματα της ανθρωπότητας όπου οι πολίτες πρέπει να τα αντιμετωπίσουν με εκτίμηση και κατανόηση. Η διδασκαλία τους προϋποθέτει τη δημιουργία, τον εμπλουτισμό, τη διατήρηση και την προσαρμογή της ώστε ο μαθητής να κινηθεί προς τους μαθηματικούς στόχους, να συλλάβει, να διατηρήσει το ενδιαφέρον και να εμπλακεί στην οικοδόμηση της μαθηματικής κατανόησης.

Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία μπορεί να διευκολύνει για τους μαθητές την κατανόηση των εννοιών που σχετίζονται με γραμμικές εξισώσεις και γραμμικά συστήματα. Δίνει τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να αναπτύξουν μαθηματική λογική με αποτέλεσμα να επικοινωνήσουν και να αιτιολογήσουν μαθηματικά, να κάνουν μαθηματικές συνδέσεις και να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά ως μέσο για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων πραγματικής ζωής. Επιπλέον, η παροχή πληροφοριών για την Ιστορία μπορεί να είναι τέτοιες ώστε να εκτιμήσουν οι αποδέκτες τους την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών και τη συμβολή των διαφορετικών πολιτισμών στην εξέλιξη αυτή, όπως ζητούν οργανισμοί ανά τον κόσμο, λόγου χάρη η Αμερικανική Ένωση για την Προώθηση της Επιστήμης (AAAS) στην έκθεσή της «Επιστήμη για όλους τους Αμερικανούς». Στο 1^{ο} κεφάλαιο αναλύονται τα θετικά, τα αρνητικά και οι δυσκολίες στη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά και οι τρόποι ενσωμάτωσής της.

Η επίλυση των γραμμικών συστημάτων αποτελεί ένα από τα κύρια θέματα μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας. Για αυτό βρίσκουμε αρχαίους πολιτισμούς που ασχολήθηκαν με αυτά ενώ αποτελεί θέμα μελέτης και για τους σύγχρονους μαθηματικούς. Στους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων τον 4^{ο} περίπου αιώνα π.Χ. συναντάμε πάπυρους με αντικείμενο που μπορεί να ενταχθεί στο πεδίο των γραμμικών συστημάτων και κάποιες μεθόδους επίλυσής τους, όπως η ψευδής παραδοχή. Παρότι στην Ελλάδα από τον 3^{ο} αιώνα π.Χ. άκμαζε η Γεωμετρία, υπήρχαν μαθηματικοί από τον 1^{ο} έως τον 4^{ο} αιώνα μ.Χ., που έθεσαν τα θεμέλια της αλγεβρικής προσέγγισης. Τρία ήταν τα μεγάλα ονόματα: ο Διόφαντος, ο Νικόμαχος και ο Πάππος. Στα έργα του Διόφαντου συναντώνται έντονα τα γραμμικά συστήματα, ενώ παρατηρείται η λεκτική απόδοση της απάντησης, μάλλον λόγω ακμής της ρητορικής και της φιλοσοφίας εκείνη την περίοδο αλλά και λόγω ανυπαρξίας άλλου συμβολικού συστήματος αναπαράστασης. Οι Κινέζοι τον $1^{ο}$ αιώνα π.Χ. δημιουργούν το μεγάλο έργο «Τα εννέα κεφάλαια της μαθηματικής τέχνης», στο οποίο δίνουν κανόνες και λύσεις σε αρκετά μαθηματικά ζητήματα. Ωστόσο το δημοσιεύει ο Liu Hui τον $1^{ο}$ αιώνα μ.Χ. Ένα από αυτά είναι και η επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Συναντάμε τον κανόνα Fangcheng, γνωστό ως γκαουσσιανή απαλοιφή, παρατηρώντας πως αυτός ο κανόνας ήταν πολύ πιο παλιός από τότε που τον χρησιμοποίησε ο Gauss. Μεγάλα ονόματα μαθηματικών στις περιόδους του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης ασχολήθηκαν επίσης με τα γραμμικά συστήματα, όπως ο Fibonacci, ο Jordanus de Nemore, ο Nicolas Chuquet και ο Viéte. Έχει μεγάλο ενδιαφέρον να παρακολουθήσει κανείς το μετασχηματισμό που υπέστη η άλγεβρα σε αυτά τα 1350 χρόνια. Ο Διόφαντος λύνει το πρόβλημα γενικά αλλά το επιλύει μόνο για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, ο Jordanus το λύνει γενικά αλλά και λεκτικά ενώ ο Viéte το επιλύει τελείως συμβολικά. Η μέθοδος της αντικατάστασης εμφανίζεται τον $18^{ο}$ με $19^{ο}$ μ.Χ. στην Ευρώπη. Αναλυτικά για τον κάθε πολιτισμό θα δούμε στο $2^{ο}$ κεφάλαιο, στο οποίο παρουσιάζονται και αυθεντικά προβλήματα που βρέθηκαν σε βιβλία και άλλα ντοκουμέντα.

Τα τελευταία χρόνια, η επιτυχία στην άλγεβρα θεωρείται συχνά η πύλη για την επιτυχία στα σχολικά χρόνια αλλά και την ένταξη στις ανώτερες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επομένως, η προετοιμασία για την άλγεβρα στις μέσες βαθμίδες είναι απαραίτητη για τον μαθητή. Ωστόσο υπάρχει πληθώρα παρανοήσεων και λαθών που σχετίζονται με την άλγεβρα, τα οποία πολλές φορές η μέση εκπαίδευση δεν καταφέρνει να επιλύσει και διαιωνίζονται στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση. Στο πλαίσιο των γραμμικών συστημάτων, συναντώνται παρανοήσεις που αφορούν τις αλγεβρικές εκφράσεις, τις εξισώσεις, τις συναρτήσεις και τη χρήση γραφικής παράστασης. Έρευνες ωστόσο, φτιάχνουν και εφαρμόζουν μοντέλα και δραστηριότητες, βασισμένα στη βιβλιογραφία, με σκοπό την αποφυγή ή αποσαφήνιση τέτοιων παρανοήσεων και λαθών. Η διαπραγμάτευση όλων αυτών λαμβάνει χώρα στο $3^{ο}$ και $4^{ο}$ κεφάλαιο.

Σημαντικό ρόλο παίζουν τα προγράμματα σπουδών, τα οποία είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς μελών μιας επιτροπής εμπειρογνωμόνων με εμπειρίες που πηγάζουν από την ερευνητική τους ενασχόληση με τα Μαθηματικά και τη Διδακτική των Μαθηματικών ή/και από την πολύχρονη διδασκαλία τους στη σχολική τάξη και στην αρχική και συνεχιζόμενη εκπαίδευση. Εξίσου χρήσιμο εργαλείο είναι και ο οδηγός του εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, που στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού ώστε να μπορέσει να υλοποιήσει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη φιλοσοφία του προγράμματος σπουδών. Το ισχύον Αναλυτικό Ελληνικό Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα προσφέρει ένθετα στο τέλος κάθε κεφαλαίου με ιστορικές πληροφορίες σχετιζόμενες με το κεφάλαιο. Προτείνει επίσης στον εκπαιδευτικό είτε ο ίδιος να παρουσιάσει είτε να υλοποιήσει διαθεματικά σχέδια εργασίας όπου θα αναδεικνύονται ιστορικά γεγονότα. Αναλυτικά για τους στόχους και τον τρόπο διδασκαλίας, γίνονται αναφορές στο 5^{ο} κεφάλαιο, στο οποίο αναλύονται και το Πρόγραμμα Σπουδών αλλά και το Βιβλίο του Καθηγητή του Προγράμματος 2011, το οποίο εν τέλει δεν εφαρμόστηκε στα σχολεία.

Η σχεδίαση της διδακτικής παρέμβασης στηρίχθηκε στη μελέτη της ιστορίας των γραμμικών συστημάτων από τους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων, Αράβων, Κινέζων, Λατίνων και έλαβε υπόψη της όλες τις παρανοήσεις που σχετίζονται με τα γραμμικά συστήματα και την επίλυση αυτών. Επιπλέον η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος και σχολικού βιβλίου.

Στο 6^{ο} κεφάλαιο, αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας. Παρατίθενται η χρησιμότητα, ο σκοπός τα ερευνητικά ερωτήματα, τα εργαλεία και οι διδακτικές παρεμβάσεις. Πιο συγκεκριμένα στα εργαλεία, αναλύεται η δομή των φύλλων εργασίας και η βιβλιογραφική βάση που στηρίχθηκαν.

Τέλος, στο 7^{ο} κεφάλαιο παρατίθεται η πιλοτική έρευνα που εφαρμόστηκε, των δύο πρώτων φάσεων της διδακτικής παρέμβασης και στο 8^{ο} ένας επίλογος.

1. ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, προσπαθώντας να φτάσουμε στον τελικό στόχο, συχνά αδυνατούμε να επεξηγήσουμε το λόγο, τη χρησιμότητα και τους ανθρώπους που συμπλέχτηκαν για να δημιουργηθεί η συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Έτσι η διδασκαλία καταλήγει σε μία βαρετή διαδικασία στείρας απομνημόνευσης. Στο ίδιο μήκος σκέψης ο Jacques Barzun γράφει στο βιβλίο του "Teacher in America": *«Έχω την εντύπωση – σχεδόν τη βεβαιότητα – ότι η άλγεβρα έχει γίνει απωθητική εξαιτίας της απροθυμίας ή της ανικανότητας των δασκάλων να εξηγήσουν τα γιατί. Δεν υπάρχει ιστορικό πλαίσιο στην διδασκαλία, έτσι δίνεται η αίσθηση ότι όλο το σύστημα έχει πέσει έτοιμο από τον ουρανό και για να χρησιμοποιηθεί μόνο από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς»* (Barzun 1954, σ.82). Ωστόσο υπάρχουν κατά καιρούς κάποιοι επίμονοι μαθητές που ρωτούν «γιατί να το μάθουμε αυτό» και «που μας χρησιμεύει». Σίγουρα είναι λίγοι που τολμούν να ρωτήσουν αλλά η πλειοψηφία ταλανίζεται με τέτοιου είδους σκέψεις. Οφείλουμε να μην προσπεράσουμε τις ερωτήσεις τους, καθώς αυτό θέλουμε από το σχολείο, να παράγει μαθητές με κρίση, να μη δέχονται τίποτα που δεν είναι αποδεδειγμένο και κατά κύριο λόγο ολοκληρωμένες προσωπικότητες που ξέρουν τι κάνουν και γιατί.

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία είναι να εισάγουμε την Ιστορία στη διδασκαλία μας. Πολλοί ερευνητές τάσσονται υπέρ της χρήσης της ενώ έχει παρατηρηθεί πως επηρεάζει το σύνολο του εκπαιδευτικού συστήματος. Τα οφέλη της χρήσης της Ιστορίας θα παρουσιαστούν στη συνέχεια μετά την σημείωση ενός τμήματος του Guedji, καθηγητή στο πανεπιστήμιο Paris VIII, από το βιβλίο του "Το θεώρημα του παπαγάλου" στο οποίο σατιρίζει την ανυπαρξία ιστορικού πλαισίου στη διδασκαλία ως εξής: "*Ο Jonathan είχε συναντηθεί με το Θαλή αρκετές φορές. Κάθε φορά όμως, ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε, στο μάθημα των μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Πού και πού κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια: Θαλής, Πυθαγόρας, Pascal, Descartes ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για* *το πότε ή το πού συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς προσγειωνόντουσαν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Αλλά και τα βουνά έχουν κάποια ιστορία, κάποια αρχή"* (Guedji 1998, p.35).

1.2 ΘΕΤΙΚΑ ΧΡΗΣΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ

Η Ιστορία μπορεί να είναι ένας παράγοντας κινητοποίησης για τους μαθητές, βοηθώντας τους να διατηρήσουν το ενδιαφέρον τους (Farmaki & Paschos, 2007). Επομένως η Ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για να πλαισιώσει την κάθε μαθηματική έννοια, να πάψει πια να είναι απρόσωπη και μέσα από τη χρονική διαδρομή μέχρι να φτάσει η έννοια στη σημερινή της μορφή οι μαθητές να ταυτιστούν με τις δυσκολίες που προέκυψαν τότε και το χρόνο που χρειάστηκε. Αυτά ονομάζονται επιχειρήματα ανακεφαλαίωσης (*recapitulation argument*) σύμφωνα με τα οποία για να μάθει κάποιος μαθηματικά πρέπει να ακολουθήσει τα ίδια βήματα που έχουν ακολουθήσει τα ίδια τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους (Jankvist, 2009).

Η Ιστορία όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως στόχος. Τόσο εσωτερικοί όσο και εξωτερικοί λόγοι οδήγησαν στην εξέλιξη και την ανάπτυξη των μαθηματικών, αλλά και πολιτιστικές και κοινωνικές πτυχές των μαθηματικών κατά την ιστορία έπαιξαν σημαντικό ρόλο (Jankvist 2009b§1.1). Στόχος σύμφωνα με τους Tzanakis και Thomaidis (2000) είναι να δείξουμε στους μαθητές ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο.

Οι Tzanakis και Archavi (2000) έχουν εντάξει τα επιχειρήματα υπέρ της χρήσης Ιστορίας σε πέντε σημαντικές κατηγορίες που σχετίζονται με:

1) Τη βελτίωση στη μάθηση των μαθηματικών (the learning of mathematics): Η Ιστορία μπορεί να εισάγει πιθανούς τρόπους παρουσίασης μαθημάτων με έναν πιο φυσικό τρόπο, δρα ως γέφυρα ανάμεσα στα μαθηματικά και άλλα μαθήματα, είναι πηγή πληροφοριών και έχει διδακτική αξία.

2) Τη φύση των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας (The nature of mathematics and mathematical activity): Στο περιεχόμενο της Ιστορίας, προσφέρεται μια πιο ακριβής προσέγγιση των μαθηματικών και της μαθηματικής

δραστηριότητας. Τα μαθηματικά αποτελούν μια εξελικτική διαδικασία ως προς τη μορφή τους ενώ βοηθάει στην κατανόησή της.

3) Το διδακτικό υπόβαθρο των καθηγητών (The didactical background of teachers): Οι μαθητές αναγνωρίζουν το κίνητρο πίσω από τη μαθηματική γνώση ενώ ενημερώνονται για τις δυσκολίες, τα εμπόδια και το πόσο πολυσύνθετο μπορεί να είναι ένα φαινομενικά απλό μαθηματικό αντικείμενο (Tzanakis, 1996). Επιπρόσθετα πρόκειται για μία δημιουργική διαδικασία του «κάνω μαθηματικά» (Barbin, 1997) ενώ παράλληλα εμπλουτίζεται η διδακτική πρακτική με εξηγήσεις, παραδείγματα και εναλλακτικές προσεγγίσεις παρουσίασης. Ας μην ξεχαστεί και η συμμετοχή σε μια κατάσταση στην οποία θα πρέπει να αποκρυπτογραφηθεί και να κατανοηθεί ένα γνωστό κομμάτι σωστών μαθηματικών των οποίων ο χειρισμός δεν είναι καθορισμένος.

4) Τη συναισθηματική προδιάθεση προς τα μαθηματικά (The affective predisposition towards mathematics): Τα μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο μάθημα παρά ένα σύστημα από αμετάβλητες αξίες που μας διδάσκει να μην απογοητευόμαστε μετά από κάθε αποτυχία, λάθος, αβεβαιότητα ή παρανόηση. Άλλωστε η αξία της εμμονής με ιδέες οδηγεί τις περισσότερες φορές σε μια ανακάλυψη.

5) Η αποτίμηση των Μαθηματικών ως μια πολιτισμική προσπάθεια (The appreciation of mathematics as a cultural endeavor): Μέσα από τη λεπτομερή μελέτη ιστορικών παραδειγμάτων οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν ότι τα Μαθηματικά δεν οδηγούνται μόνο από χρηστικούς λόγους αλλά αναπτύσσονται για τους δικούς τους λόγους (Hallez, 1990) που υποκινούνται από παράγοντες όπως τα αισθητικά κριτήρια και τη διανοητική περιέργεια (Kragh, 1990).

Υπάρχουν παραδείγματα για το πώς η εσωτερική ανάπτυξη των μαθηματικών όταν καθοδηγείται είτε από χρηστικούς είτε από «αγνούς» λόγους, έχει επηρεαστεί ή ακόμη και καθοριστεί σε μεγάλο βαθμό, από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες. Αυτό οδηγεί τους καθηγητές και τους μαθητές να είναι ενήμεροι του πως να αντιμετωπίσουν τις μαθηματικές έννοιες από διαφορετικούς πολιτισμούς. Υπέρ της χρήσης της Ιστορίας στη διδασκαλία έχουν ταχθεί κατά καιρούς αρκετοί μαθηματικοί και καθηγητές, μέσα από διαφορετικές ιδέες και λόγους. Αναφέρονται ενδεικτικά ονόματα, ημερομηνίες και ιδιότητες:

- Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) κορυφαίος μαθηματικός στη Γαλλία στα χρόνια της Γαλλικής Επανάστασης, του ανατέθηκε να διδάξει μαθηματικά σε φοιτητές δασκάλους στην Ecole Normale (Γαλλία 1790).
- Niels Henrik Abel (1802-1829), ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Νορβηγίας. Βρέθηκε στο περιθώριο ενός από τα σημειωματάρια του 1820 μία παράγραφος που τάσσεται υπέρ της χρήσης της ιστορίας στη διδασκαλία.
- Augustus De Morgan (1806-1871) στην εναρκτήρια ομιλία του ως πρώτος πρόεδρος της Μαθηματικής Εταιρείας του Λονδίνου (Λονδίνο 1865).
- Eugenio Beltrami (1835-1899), καθηγητής της μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια (Ιταλία 1871).
- JWL Glaisher (1848-1928) πρόεδρος της Βρετανικής Ένωσης για την Πρόοδο της Επιστήμης (Αγγλία 1890).
- Σε μια έκθεση μαθηματικής επιτροπής (Ηνωμένο Βασίλειο 1919).Φ
- Σε μία έκθεση του Βρετανικού Υπουργείου Παιδείας (Ηνωμένο Βασίλειο 1958).

1.3 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΕΜΠΟΔΙΑ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Στον αντίποδα των θετικών της ενσωμάτωσης της Ιστορίας στη διδασκαλία, υπάρχουν πολλά προβλήματα αλλά και πεποιθήσεις που εναντιώνονται σε αυτήν την ιδέα. Παρατίθεται μία λίστα των Tzanakis & Arcavi (2000, σελ.202) όπου χωρίζουν τα εμπόδια σε δύο κατηγορίες.

Α)Επιστημολογικής και φιλοσοφικής φύσεως

- Δεν εντάσσεται στο μάθημα των μαθηματικών. Από πολλούς υπάρχει ο ισχυρισμός πως θα πρέπει να προηγείται μεμονωμένα η μάθηση των καθαρών μαθηματικών και έπειτα σε ξεχωριστό μάθημα να διδάσκεται η ιστορία τους.
- Πολλοί μαθητές διαθέτουν άσχημα συναισθήματα για το μάθημα της Ιστορίας. Κατ’ επέκταση η χρήση ιστορίας στα μαθηματικά μπορεί να προκαλέσει τα ίδια συναισθήματα τα οποία εύκολα μπορούν να περάσουν και για τα ίδια τα μαθηματικά.

- Οι μαθητές δεν διαθέτουν μία ολοκληρωμένη άποψη για το παρελθόν και την ιστορική πλαισίωσή του με αποτέλεσμα η ιστορική μαθηματική προσέγγιση σε ένα πλαίσιο κενό ευρύτερης και γενικής ιστορίας μπορεί να προκαλέσει σύγχυση παρά διαφώτιση.
- Τα μαθηματικά είναι φτιαγμένα για την αντιμετώπιση δύσκολων και χρονοβόρων προβλημάτων. Εφόσον λύθηκαν γιατί να δυσκολέψουν και να σπαταλήσουν το χρόνο του σήμερα;
- Η χρήση της ιστορίας μπορεί να καλλιεργήσει πολιτιστικό σωβινισμό και τοπικιστικό εθνικισμό.

Β)Πρακτικής φύσεως

- Έλλειψη διδακτικού χρόνου. Ο χρόνος μέσα στην τάξη είναι ήδη λιγοστός, οπότε η χρήση ιστορίας τον περιορίζει περισσότερο.
- Έλλειψη πόρων. Οι τάξεις δε διαθέτουν αρκετές πηγές και διδακτικό υλικό.
- Έλλειψη εμπειρίας. Οι καθηγητές των μαθηματικών δεν αποτελούν αξιόπιστους ιστορικούς, δε διαθέτουν κατάλληλη επιμόρφωση αλλά ούτε και το αντίστοιχο διδακτικό υλικό. Αυτό τους κάνει ακατάλληλους να διδάξουν ένα τέτοιο άγνωστο πεδίο στο οποίο δεν μπορούν να είναι ακριβείς αλλά και αξιόπιστοι.
- Από τη μεριά των μαθητών, δεν υπάρχει η επαρκής πολιτισμική και κοινωνική ανάπτυξη για την εκτίμηση της ιστορίας σε συνδυασμό με την απάθεια πολλών και στο ίδιο το μάθημα των μαθηματικών.
- Έλλειψη αξιολόγησης. Εάν δε βαθμολογείται η ιστορία, οι μαθητές δε θα δώσουν βάση.
- Έλλειψη επιστημονικών ευρημάτων για τα οφέλη της χρήσης της ιστορίας

1.4 ΤΡΟΠΟΙ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Έπειτα από την ανάλυση των θετικών της Ιστορίας στη διδασκαλία, παρά των προβλημάτων, ακολουθεί το ερώτημα του πως θα μπορούσε αυτή να ενταχθεί. Υπήρξαν αρκετοί ερευνητές που ασχολήθηκαν με αυτό το θέμα και τα ευρήματά τους παρατίθενται παρακάτω.

Το μοντέλο της Furinghetti (2000) προτείνει έξι επίπεδα για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία.

1.γνώση των πηγών

2.επιλογή θεμάτων κατάλληλων για την τάξη

3. ανάλυση των αναγκών της τάξης

4.σχεδιασμός της δραστηριότητας στην τάξη, με βάση την καταλληλότητα των μέσων, τους στόχους και το πλαίσιο της δραστηριότητας

5.πραγματοποίηση του project, και

6.αξιολόγηση της δραστηριότητας

Σύμφωνα με άρθρο των Tzanakis & Arcavi (2000),τρεις είναι οι βασικές κατηγορίες:

1.Απευθείας χρήση ιστορικών πηγών.

Α)Σε αυτή την κατηγορία δίνονται απομονωμένα πραγματικά στοιχεία (ως πληροφορία και όχι ως εξεταστέα ύλη).Κάποια τέτοια είδη θα μπορούσαν να είναι ονόματα, ημερομηνίες, διάσημα έργα και εκδηλώσεις, διαγράμματα χρόνου, βιογραφίες, μεγάλα προβλήματα και ερωτήματα, απόδοση προτεραιότητας, αντίγραφα κ.τ.λ..

Β)Παράλληλα χρειάζονται πλήρη μαθήματα και ιστορικά βιβλία των μαθηματικών. Δηλαδή απλές συλλογές ιστορικών δεδομένων, είτε ιστορίες των εννοιολογικών εξελίξεων είτε και κάποιο κράμα αυτών των δύο. Σύμφωνα με τον Jankvist αυτός είναι ο στόχος˙ η έμφαση στην παροχή της Ιστορίας και όχι τόσο στη μάθηση των μαθηματικών.

2.Ακολουθία μίας διδακτικής και μαθησιακής προσέγγισης εμπνευσμένης από την Ιστορία.

Αυτή η κατηγορία έχει το εξής γενικό πλαίσιο που τη χαρακτηρίζει:

Α)Ακόμη και ο δάσκαλος που δεν είναι ιστορικός πρέπει να έχει αποκτήσει μια βασική γνώση της ιστορικής εξέλιξης του θέματος.

Β)Σε αυτή τη βάση, τα κρίσιμα βήματα αυτής της ιστορικής εξέλιξης, προσδιορίζονται ως οι βασικές ιδέες, τα ερωτήματα και τα προβλήματα που άνοιξαν νέες προοπτικές της έρευνας.

Γ)Αυτά τα κρίσιμα βήματα έχουν ανακατασκευαστεί, έτσι ώστε να καθίστανται διδακτικά κατάλληλα για χρήση στην τάξη.

Δ)Αυτά τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα δίνονται ως ακολουθίες ιστορικών προβλημάτων αυξανόμενου επιπέδου δυσκολίας, έτσι ώστε το καθένα να βασίζεται σε ορισμένα από τα προηγούμενά του. Η μορφή αυτών των προβλημάτων μπορεί να διαφέρει από απλές ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα, αλλά να θέτουν τις ερωτήσεις που πιθανώς θα πρέπει να αντιμετωπιστούν ως μέρος ενός συγκεκριμένου σχεδίου μελέτης ή συνεργασίας μαθητών.

Ο ίδιος ο Schubring (1978) διαχωρίζει δύο γενετικές αρχές πάνω στην εκπαίδευση: Την ιστορική – γενετική αρχή (historical – genetic principle) με στόχο να οδηγήσει από βασικές σε πιο σύνθετες γνώσεις όπως η ανθρωπότητα έχει προοδεύσει στην Ιστορία των Μαθηματικών και τη ψυχολογική – γενετική αρχή (psychological – genetic principle) κατά την οποία οι μαθητές καλούνται να ξαναανακαλύπτουν ή να εφεύρουν οι ίδιοι μαθηματικά χρησιμοποιώντας τις δυνατότητές τους και τις εμπειρίες τους.

Ο Jankvist θεωρεί σε αυτό το στάδιο την Ιστορία ως εργαλείο όπου δίνεται έμφαση στη μάθηση των μαθηματικών παρά στην ιστορία. Σύμφωνα με άρθρο των Tzanakis & Thomaidis (2000, σ. 247), ακολουθούν κάποια παραδείγματα:

Α) Διδακτικές ενότητες και μαθηματικά βιβλία που διαπνέονται από την ιστορία.

Β)Μαθητές ερευνούν έργα βασισμένα σε αυθεντικά κείμενα.

Γ)Εργασίες βασισμένες σε πρωτότυπες πηγές, είτε σχεδιασμένες ως καθοδηγούμενα σύνολα ερωτήσεων για εισαγωγή σε ένα νέο θέμα, ένα σύνολο προβλημάτων ή θέματα για συζήτηση, είτε στη μορφή μιας συλλογής ασκήσεων, ανακατασκευασμένων προβλημάτων και παιχνιδιών για την εδραίωση ενός θέματος

Δ)Σχολιασμένα αποσπάσματα αυθεντικών κειμένων για εισαγωγή σε ένα θέμα που θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να αντιληφθεί καλύτερα τη μαθηματική έννοια, τόσο στη μοντέρνα όσο και στην αυθεντική της μορφή.

Ε)Ιστορικά πακέτα με τη μορφή συλλογής υλικού, έτοιμα για χρήση στην τάξη, στενά εστιασμένα σε ένα μικρό μαθηματικό θέμα και σε στενή σχέση με το αναλυτικό πρόγραμμα.

Στ)Περισσότερο εντοπισμένη και ιστορικά θεμελιωμένη διδασκαλία που αποσκοπεί στη μάθηση μέσα από λάθη, εναλλακτικές αντιλήψεις, αλλαγή προοπτικής, αναθεωρήσεις, με σκοπό να υποστηρίξει τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος.

Ζ)Αναφορές για το παρελθόν ή και πρόσφατες εξελίξεις σχετικά με παλιά θέματα και προβλήματα που παραμένουν άλυτα ή που ανακατασκευάστηκαν με πιο έξυπνες λύσεις, για να φανερώσουν στους μαθητές τον εξελικτικό χαρακτήρα των μαθητών.

3.Ανάπτυξη μίας βαθύτερης συνείδησης/επίγνωσης, τόσο για τα ίδια τα μαθηματικά, όσο και για το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο στο οποίο υπάρχουν (Tzanakis, et al., 2000; Τζανάκης, 2009). Η μαθηματική επίγνωση χωρίζεται στη μελέτη της εγγενούς φύσης (intrinsic nature) όπου περιλαμβάνονται σημαντικές πτυχές του «κάνω μαθηματικά» όπως το μέρος των γενικών εννοιολογικών πλαισίων και των σχετικών κινήτρων που παρέχονται και της εξωγενούς φύσεως (extrinsic nature) όπου τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως μια αρχή απομονωμένη από τις κοινωνικές και πολιτισμικές ανησυχίες και επιρροές. Σύμφωνα με τον Jankvist εκτός από στόχος διακρίνεται σε δύο κατηγορίες, την «εσωτερική» και την «εξωτερική» φύση της μαθηματικής δραστηριότητας.

3α) Εσωτερική φύση

Εδώ παίρνουν μέρος δραστηριότητες που αφορούν το «κάνω» μαθηματικά όπως:

Α) Γενικά εννοιολογικά πλαίσια και συναφή κίνητρα, ερωτήματα και προβλήματα άρρηκτα συνδεδεμένα με την εξέλιξη συγκεκριμένων μαθηματικών πεδίων.

Β) Η εξελισσόμενη φύση των μαθηματικών, το περιεχόμενό της και η μορφή, η σημειογραφία, η ορολογία, οι υπολογιστικές μέθοδοι, οι τρόποι έκφρασης και παραστάσεων. Δε θα μπορούσαν να λείπουν οι μετα-μαθηματικές έννοιες όπως: απόδειξη, αυστηρότητα, τεκμηρίωση σε σύγκριση με τα μαθηματικά του σήμερα.

Γ)Παράδοξα, αμφιβολίες, αντιφάσεις, διαισθήσεις, ευρετικές μέθοδοι πειραματισμών και δυσκολιών κατά την εκμάθηση και την παραγωγή νέων μαθηματικών στο πλαίσιο των ειδικών ζητημάτων και προβλημάτων. Τέλος προσθέτονται τα κίνητρα για γενίκευση, αφαίρεση και φορμαλισμό σε ένα τέτοιο πλαίσιο.

3β) Εξωτερική φύση

Οι κοινωνικές και πολιτισμικές συνιστώσες δε θα μπορούσαν να μην επηρεάσουν και τα μαθηματικά. Δίνονται αναλυτικότεροι οι κύριοι λόγοι:

Α) Φιλοσοφικά ερωτήματα και προβλήματα, τέχνες (μουσική, αρχιτεκτονική κ.λπ.) αλλά και άλλες ανθρωπιστικές επιστήμες συλλέγουν υλικό και πληροφορίες από τα μαθηματικά.

Β) Τα μαθηματικά είναι αναγνωρισμένα ως ένα αναπόσπαστο μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς και λειτουργίας των διαφόρων πολιτισμών ή εθνών.

Γ) Το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον επηρεάζει τα μαθηματικά πεδία ωστόσο δεν είναι πάντα θετική αυτή η επιρροή.

Δ) Διατρέχοντας την Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αντιληφθεί κανείς πως τάσεις και ανησυχίες στον πολιτισμό και την κοινωνία υπήρχαν ανέκαθεν.

Ο Jankvist (2009α §2.4, 2.6, 2009c §6,9), αναφέρει τρείς άλλες μορφές διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αφορούν ουσιαστικά τη γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας και της μάθησης. Δεν είναι ούτε αυστηρά επαγωγική, ούτε αυστηρά ιστορική προσέγγιση, αλλά η θεμελιώδης θέση της είναι ότι ένα θέμα μπορεί να μελετηθεί μόνο όταν κάποιος έχει κινητοποιηθεί αρκετά να το κάνει, και κάποιος μπορεί να μάθει μόνο στην κατάλληλη στιγμή της νοητικής του ανάπτυξης, αυτό σημαίνει ότι τα ερωτήματα και τα προβλήματα στα οποία απευθύνεται ένα θέμα, έχουν αποσαφηνιστεί και εκτιμηθεί επαρκώς.

1) Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination approaches):

Με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στην τάξη αλλά και με τα βιβλία που χρησιμοποιούνται, συμπληρώνονται ιστορικές πληροφορίες ποικίλου μεγέθους και έμφασης.

2) Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (modules approaches)

Πρόκειται για εισαγωγικές ενότητες της Ιστορίας των Μαθηματικών με συχνά λεπτομερή μελέτη των συγκεκριμένων περιπτώσεων. Πρόκειται για άμεση προσέγγιση της Ιστορίας.

3) Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία (history-based approaches)

Αφορά μία έμμεση προσέγγιση της Ιστορίας των Μαθηματικών καθώς εμπνευσμένη και στηριγμένη σε αυτήν η διδασκαλία, δε συζητιέται μέσα στην τάξη αλλά καθορίζει συχνά τη σειρά και τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά θέματα παρουσιάζονται.

1.5 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ

Το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί σε όλη αυτή τη διαδικασία σαφώς και παίζει κύριο λόγο. Κατηγοριοποιείται κατά προσέγγιση σε τρεις τύπους:

a) υλικό πρωτότυπων πηγών (αποσπάσματα από πρωτότυπα μαθηματικά κείμενα)

b) υλικό δευτερευουσών πηγών (εγχειρίδια με ιστορικές εξιστορήσεις, ερμηνείες, ανακατασκευές, κλπ.)

c) υλικό διδακτικών πηγών (βιβλιογραφία η οποία έχει απομονωθεί από πρωτότυπες και δευτερεύουσες πηγές, με στόχο μία προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία) (Tzanakis, et al., 2000).

Οι ιστορικοί των μαθηματικών κάνουν έρευνα και μελετούν θεωρήματα και μαθηματικές ιδέες σε όλο το βάθος τους συμβάλλοντας στη γενικότερη γνώση. Αυτό το καταφέρνουν κυρίως μέσα από πρωτογενείς πηγές αναφοράς (χειρόγραφα, μελέτες, κ.λπ.). Ένας ιστορικός των μαθηματικών όμως θα πρέπει να έχει το επαρκές μαθηματικό υπόβαθρο για να μπορεί να μελετήσει και να εξετάσει τα έγγραφα που μελετά. Δεν παραθέτει απλώς τα ευρήματα αλλά μέσα από συνδυαστική μελέτη και ανάγνωση δευτερογενών πηγών, προσπαθεί να δώσει φως σε όλες τις ιδέες, τα προβλήματα και τις κοινωνικοπολιτιστικές καταστάσεις που τα περιβάλλουν . Οι εκπαιδευτικοί (όλων των επιπέδων) μπορούν να χρησιμοποιήσουν τόσο πρωτογενείς όσο και δευτερογενείς πηγές για τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας τους. Οφείλουν είτε τα ατομικά είτε τα συνεργατικά με άλλους εκπαιδευτικούς, επιτεύγματά τους να τα δημοσιοποιούν για ευρεία χρήση από όλη την κοινότητα. Με τον όρο διδακτικό υλικό, εννοούμε το σώμα της βιβλιογραφίας, η οποία προκύπτει από πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές με έμφαση σε μια προσέγγιση εμπνευσμένη από την ιστορία. Παρακάτω δίνονται 13 προτεινόμενοι τρόποι, χωρισμένοι σε 5 κατηγορίες (Tzanakis, et al., 2000, Τζανάκης, 2009).

Α)Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα

Α1) Ιστορικά «σημειώματα» και ιστορικές εισαγωγές σε επιμέρους μαθηματικά θέματα τα οποία κατηγοριοποιούνται με βάση:

i. Τη μορφή: θέση στο κείμενο, διδακτική προσέγγιση, ουσία, στυλ και σχεδιασμό
ii. Το περιεχόμενο: πραγματικά δεδομένα, εννοιολογικά θέματα

Α2) Εμπειρία σε εξωτερικούς χώρους(επισκέψεις σε μουσεία, αρχαιολογικούς και ιστορικούς χώρους).

Α3) Films, videos και άλλα οπτικά μέσα με θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Β) Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες

Β1) Ερευνητικά projects

Β2) Διδακτική χρήση πρωτότυπων πηγών

Β3) Φύλλα εργασίας.

Β4) Πακέτα Ιστορίας των Μαθηματικών (ένα σύνολο από διδακτικά υλικά, εστιασμένο σε ένα πολύ συγκεκριμένο θέμα, για την εφαρμογή στην τάξη σε περιορισμένη χρονική διάρκεια).

Γ) Ευέλικτες εφαρμογές πιο «τοπικού» χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με το πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται.

Γ1) Διδακτική αξιοποίηση λαθών, εναλλακτικών αντιλήψεων, αλλαγής της οπτικής από την οποία μελετάται ένα θέμα, αναθεώρησης υποθέσεων, διαισθητικών ή/και εμπειρικών επιχειρημάτων, κ.λπ.

Γ2) Διδακτικό υλικό ή/και σχεδιασμός διδασκαλίας βασισμένων σε ιστορικά προβλήματα που είτε έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών, ή απλώς είχαν (ή έχουν) ψυχαγωγικό χαρακτήρα.

Δ) Εφαρμογές πιο «πειραματικού» και εμπειρικού χαρακτήρα.

Δ1) Χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων στη διδασκαλία όπου τα ίδια ή παραλλαγές τους διαδραμάτισαν ρόλο στην ιστορική πορεία των μαθηματικών.

Δ2) Μαθηματικές δραστηριότητες βιωματικού χαρακτήρα (ιστορικά εμπνεόμενες συζητήσεις ή «διαμάχες» στην τάξη πάνω σε ένα μαθηματικό ή μετα-μαθηματικό ζήτημα, η αντιμετώπιση και επίλυση ήδη γνωστών προβλημάτων με τη βοήθεια παλαιότερου και ενδεχομένως παρωχημένου συμβολισμού ή μεθόδου). Υπάρχουν τέσσερις τύποι:

Δ3) Θεατροποίηση (θεατρικά έργα βασισμένα στη ζωή διάσημων επιστημόνων, μαθηματικών εννοιών αλλά και διαφωνιών του παρελθόντος).

Ε) Το διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας: διαδικτυακοί τόποι για την εξαγωγή εργαλείων: σελίδες γενικής Ιστορίας των Μαθηματικών, πηγές πληροφοριών στο διαδίκτυο, βιογραφικές, τοπικά μαθηματικά, διαδικτυακά εκθέματα, ηλεκτρονικά, παρουσιάσεις και εργασίες μαθητών, βιβλιογραφία, επιστημονικές εταιρείες, ιστορία των υπολογισμών, εκπαίδευση και διάφοροι άλλοι ιστότοποι που εμφανίζουν κάποιο ενδιαφέρον και χρηστικότητα, Barrow-Green (2000).

1.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας υπάρχουν τόσο επιχειρήματα όσο και αντεπιχειρήματα για τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Ωστόσο έρευνες γίνονται με θετικά αποτελέσματα όσον αφορά τα υπέρ και πολλοί τρόποι ενσωμάτωσής αναλύονται από ερευνητές. Ακόμη και καταξιωμένοι επιστήμονες τάχθηκαν στα υπέρ, βλέποντας έναν καινούργιο πολλά υποσχόμενο κλάδο. Όλων όμως οι έρευνες είναι σε θεωρητικό επίπεδο εφόσον δεν υποστηρίζονται από αντίστοιχη εμπειρική έρευνα.

Κατ' επέκταση είναι επιτακτική ανάγκη να σχεδιαστούν συγκεκριμένες διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες και να υλοποιηθούν σε πραγματικές συνθήκες τάξης, ερευνώντας παράλληλα τα οφέλη αλλά και την απήχηση που αυτές έχουν στους μαθητές. Η υλοποίηση πρέπει να γίνει σε διάφορα σχολεία ανά την επικράτεια και από διαφορετικούς κάθε φορά μαθηματικούς, αυξάνοντας έτσι το βαθμό αξιοπιστίας, εγκυρότητας και γενίκευσης.

2. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ-ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιστορία της γραμμικής άλγεβρας έχει βαθιές ρίζες στο χρόνο και μεγάλη ανάπτυξη στον τρόπο και τα εργαλεία αντιμετώπισης γραμμικών εξισώσεων. Περίπου το 300 π.Χ. οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι έλυναν προβλήματα τα οποία σήμερα θεωρούνται προβλήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. Οι Κινέζοι ανάμεσα στο 200 με 100 π.Χ. χρησιμοποίησαν πίνακες στα *Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης* (Δυναστείας Han). Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν είναι ουσιαστικά η μέθοδος του Gauss. Δεν πρέπει να ξεχνάμε πως κανείς από τους αρχαίους λαούς δεν είχε το συμβολισμό για τις πράξεις ή τους αγνώστους που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ωστόσο, οι γραφείς ήταν ικανοί να λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τελείως ρητορικές μεθόδους.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ασχολήθηκαν αρκετά με τα μαθηματικά του εμπορίου, για αυτό και βρέθηκαν αρκετά προβλήματα τους που αφορούσαν τις αναλογίες. Τις περισσότερες φορές τα προβλήματα αυτά είχαν γεωμετρικό χαρακτήρα. Παρότι προϋπήρχαν πολιτισμοί που είχαν διαμορφώσει αλγόριθμους για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων και συστημάτων, οι Έλληνες επηρέασαν γεωμετρικά την επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Μεγάλα ονόματα Ελλήνων του 1^{ου} έως 4^{ου}

αιώνα μ.Χ. που διαμόρφωσαν την άλγεβρα παγκοσμίως, ήταν ο Διόφαντος, ο Νικόμαχος και ο Πάππος.

Παράλληλα το 700-1200 μ.Χ. το Ισλάμ αποτελούσε γόνιμο έδαφος τόσο για τη διατήρηση των αρχαίων μαθηματικών παραδόσεων όσο και για την ανάπτυξη νέων μαθηματικών. Η Βαγδάτη (τώρα η πρωτεύουσα του Ιράκ), που ιδρύθηκε το 766 μ.Χ., ήταν το κέντρο της μάθησης για τον ισλαμικό κόσμο. Μέχρι τον ένατο αιώνα, η αναγνώρισή της ως πνευματικού κέντρου επιτεύχθηκε με την ίδρυση βιβλιοθήκης και ερευνητικού κέντρου που ονομάζεται Bayt al-Hikma (Σπίτι της Σοφίας), από τον Χαλίφη al-Ma'mun (βασιλεύει 813-833). Ένας από τους μεγαλύτερους ισλαμικούς μαθηματικούς της εποχής ήταν και ο Abu-Abdullah Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi (ο Μωάμεθ, πατέρας του Αμπντουλάχ και γιος του Μωυσή, ο Khwarezmite). Πρόκειται για έναν από τους πολλούς μελετητές τους οποίους ο Χαλίφης αλ-Μα'μουν συγκέντρωνε στο Σπίτι της Σοφίας της Βαγδάτης. Γύρω στο 820, ο Al-Khwarizmi έγραψε το διάσημο βιβλίο του, Arithmetic. Ήταν το πρώτο αραβικό κείμενο που ασχολήθηκε με τους ινδουιστικούς αριθμούς. Γύρω στο 825, ο Al-Khwarizmi έγραψε ένα ακόμα πιο σημαντικό έργο, το Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr w'al'muqabalah (Το Συμπυκνωμένο Βιβλίο για τους υπολογισμούς του al-jabr και του al-muqabala), από το οποίο προέρχεται ο όρος άλγεβρα. Αυτό το βιβλίο επηρέασε τη διαδικασία των μαθηματικών υπολογισμών σε μέρη τόσο μακριά όσο η Ευρώπη για πολλούς αιώνες. Αναφέρεται συνήθως, στη συντομευμένη μορφή του, ως Al-jabr. Αυτό το έργο περιείχε αλγόριθμους για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων, υλικό για τη βασική γεωμετρία και επίσης ένα πολύ μεγάλο τμήμα αφιερώνεται σε προβλήματα που σχετίζονται με τον ισλαμικό νόμο περί κληρονομικών.

Αργότερα ο Cardan στο βιβλίο του *Ars Magna* (το *Μεγάλο Έργο*) το 1545 δίνει έναν κανόνα που είναι ουσιαστικά ο κανόνας του Cramer για την επίλυση εξισώσεων, προσεγγίζοντας την έννοια της ορίζουσας. Στην Ιαπωνία ο Seki (1642-1708) το 1683 έγραψε την «μέθοδο επίλυσης των απόκρυφων προβλημάτων» όπου εισήγαγε τις ορίζουσες και έδωσε μεθόδους για τον υπολογισμό τους (χωρίς όμως να τις ορίσει ως αυτόνομη έννοια). Την ίδια ακριβώς ημερομηνία (1683) στην Ευρώπη ο Leibniz (Γερμανία 1646–1716) σε ένα γράμμα του στον de L'Hopital εξηγούσε τη συνθήκη στην ορίζουσα χωρίς να την ονομάζει έτσι για να είναι συμβατό ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Δούλεψε σε αυτά από το 1678 και μετά ως το τέλος της ζωής του. Στα κείμενά του έδειχνε διάφορους τρόπους για τον υπολογισμό της ορίζουσας. Έπειτα ο Cramer (Ελβετία 1704-1752) το 1750 δίνει τον γενικό κανόνα που είναι σήμερα γνωστός με το όνομά του για τη λύση ενός nxn συστήματος. Η προσπάθειά του ήταν να βρει την εξίσωση μίας καμπύλης που περνάει από δεδομένο αριθμό σημείων.

Ο Maclaurin (Σκωτία 1698 - 1746) έγραψε το 1730 την *Πραγματεία της άλγεβρας*. Αυτή εκδόθηκε το 1748 και περιέχει τα πρώτα δημοσιευμένα αποτελέσματα πάνω στις ορίζουσες. Στο προσκήνιο το 1801 η εργασία του *Disquisitiones arithmeticae* που εξετάζει τετραγωνικές μορφές και εισάγει τον όρο «ορίζουσα». Γράφει τους συντελεστές μίας τετραγωνικής μορφής σε τετράγωνους πίνακες και περιγράφει τον πολλαπλασιασμό πινάκων ως σύνθεση συναρτήσεων μορφών και αντιστρόφων. Χρησιμοποιεί τη μέθοδο της απαλοιφής για τη μελέτη της τροχιάς του αστεροειδούς Αθηνά σε ένα σύστημα με 6 εξισώσεις και 6 αγνώστους. Την ορίζουσα μελετούν και διαμορφώνουν επίσης οι Bezout το 1764, Vandermonde το 1771 και Laplace το 1772. Ο Cauchy συνδέει την ορίζουσα με το θεώρημα του πολλαπλασιασμού το 1812 και τον όρο πίνακα (array) το 1826. Ασχολείται επίσης και με τις ιδιοτιμές, τη διαγωνιοποίηση πινάκων και τις ιδιότητες ομοίων πινάκων. Σε αυτό το πλαίσιο κινήθηκαν και οι Jacobi το 1841, Kronecker το 1850 και Weierstrass το1860.

Την ίδια περίοδο μεγάλη πρόοδο έκαναν και οι Cayley (1821-1895) και Sylvester (1814-1897) με επάγγελμα τόσο τα μαθηματικά όσο και τη νομική. Ο όρος matrix (μητρώο) εισάχθηκε πρώτη φορά από τον Sylvester το 1850 ενώ ο Cayley είχε δημοσιεύσει το θέμα των οριζουσών από το 1841. Το 1858 αφού συνάντησε τον Sylvester δημοσίευσε το «Μνημόνιο στη θεωρία των πινάκων». Επίσης ο Cayley εισήγαγε τον συμβολισμό $|A|$ για την ορίζουσα του Α αλλά συνένωσε και τα προηγούμενα αποτελέσματα. Όρισε την άλγεβρα των πινάκων ορίζοντας την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, τον σκαληνό πολλαπλασιασμό και τους αντίστροφους πίνακες. Τέλος απέδειξε ότι οι πίνακες ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση και το έλεγξε για 3x3.

Ο Frobenius (Γερμανία 1849-1917) εισήγαγε τη βαθμίδα πίνακα (1878), έλεγξε πως κάθε πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση (1878) και μετονόμασε το Θεώρημα των Cayley-Hamilton αφού διάβασε το βιβλίο του Cayley (1896). Το 1903 μετά τον θάνατό των Weierstrass και Kronecker δημοσιεύτηκαν δύο εργασίες τους που έθεταν την θεωρία των οριζουσών σε αξιωματική βάση.

Στη συνέχεια της ιστορίας στο προσκήνιο μπήκαν οι διανυσματικοί χώροι. Ο Cayley το 1843 εισήγαγε τη διάσταση και ο Hamilton το 1843 δημιούργησε τις γνωστές τετράδες του Hamilton -όρο διάνυσμα. Ο Grassman (1809-1877) το 1844 ασχολήθηκε με τις έννοιες n-διάστατου διανυσματικού χώρου, υποχώρου, βάσης, διάστασης και γραμμικού μετασχηματισμού. Στην Ιταλία ο Peano (1858-1932) το 1888 επηρεάστηκε από τον Grassman και έδωσε τον αξιωματικό ορισμό διανυσματικού χώρου πάνω από τους πραγματικούς και απέδειξε διάφορα θεωρήματα για τη διάσταση. Όμως οι ιδέες του δεν έγιναν άμεσα αποδεκτές.

Στο πεδίο των διανυσματικών χώρων ο Weyl (Γερμανία 1885-1955) το 1918 ανέπτυξε τη θεωρία της σχετικότητας στην γεωμετρία και ο Banach (Αυστρία 1892-1945) το 1920 τη μοντέρνα μορφή στην ανάλυση. Επιπρόσθετα η Emmy Noether (1882-1935) το 1921 διαμόρφωσε τους διανυσματικούς χώρους στην άλγεβρα. Τέλος ο Van der Waerden (Ολλανδία 1903-1996), επηρεασμένος από την Noether, έγινε ο συγγραφέας του περίφημου *Modern Algebra* (1930).Σε αυτό το έργο υπήρχε κεφάλαιο με τίτλο Linear Algebra, όρος που χρησιμοποιείται όπως και σήμερα.

Έπειτα από αυτή τη σύντομη ιστορική εξιστόρηση της πορείας της Γραμμικής Άλγεβρας, ακολουθεί λεπτομερής ανάλυση της εξέλιξης των γραμμικών συστημάτων από τους Βαβυλώνιους (3500 π.Χ.) έως την Αναγέννηση ($17^{ος}$ αιώνας μ.Χ.). Σημαντικές εξελίξεις στη Γραμμική Άλγεβρα σημειώθηκαν και έπειτα από τον $17^{ο}$ αιώνα, ωστόσο δε θα συμπεριληφθούν στην έρευνα καθώς θεωρούμε πως δεν μπορούν αυτού του είδους οι πληροφορίες να ενταχθούν στην ύλη της τρίτης γυμνασίου.

2.2 ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ (3500 π.Χ.- 600 μ.Χ.)

Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα, ανακαλύφθηκαν γύρω στις 500.000 πήλινοι δίσκοι με έγγραφα των Βαβυλωνίων όμως λιγότερα από 5000 είχαν μαθηματικό περιεχόμενο. Αυτά χρονολογούνται από το 1800 έως το 1600 π.Χ. (Teresi, 2002). Στα τέλη του $19^{ου}$αιώνα τα περισσότερα μεταφράστηκαν ενώ τη δεκαετία του 1920 μπόρεσαν να καταλάβουν τις μεθόδους που χρησιμοποιούσαν για την επίλυση προβλημάτων (Høyrup, 2002). Εκτός από τα αλγεβρικά κείμενα περί εξισώσεων και συστημάτων όπου θα εστιάσει η συγκεκριμένη έρευνα, βρέθηκε πως οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το μετρικό σύστημα, την τιμή της τετραγωνικής ρίζας του 2 και τους πυθαγόρειους αριθμούς (πυθαγόρειες τριάδες).

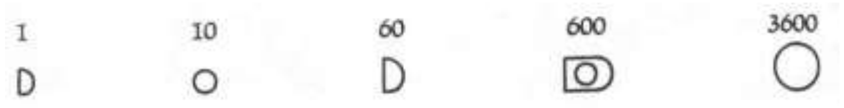
2.2.1 ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΗΛΙΝΩΝ ΔΙΣΚΩΝ

Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν τη δική τους βαβυλωνιακή γλώσσα η οποία αποτελεί μία διάλεκτο των Ακκάδιων, βόρειων γειτόνων των Σουμέριων. Είναι εκ φύσεως σημιτική γλώσσα και πολύ κοντινή με τις κλασσικές εβραϊκές και αραβικές γλώσσες. Τα κείμενα στους δίσκους ήταν γραμμένα με σφηνοειδή γραφή, γεγονός που βοήθησε στη μακροχρόνια συντήρηση τους. Χρησιμοποιούσαν ένα αμβλύ καλάμι, τη γραφίδα, και με αυτό έγραφαν τα κείμενα τους σε υγρό αρχικά πηλό. Στη συνέχεια τα έψηναν είτε σε φούρνο είτε τα άφηναν στον ήλιο. Οι χαρακτήρες έπαιρναν το σχήμα σφήνας και ως εκ τούτου πήρε την ονομασία της. Πρώτοι οι Σουμέριοι χρησιμοποίησαν αυτόν τον τρόπο γραφής ενώ ακολούθησαν και άλλοι μεσοποτάμιοι πολιτισμοί. Ωστόσο πολλά λάθη βρέθηκαν σε αυτούς τους δίσκους καθώς οι συγγραφείς τους έπρεπε να είναι γρήγοροι για να μην προλάβει ο πηλός να στεγνώσει (Teresi, 2002).

2.2.2 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

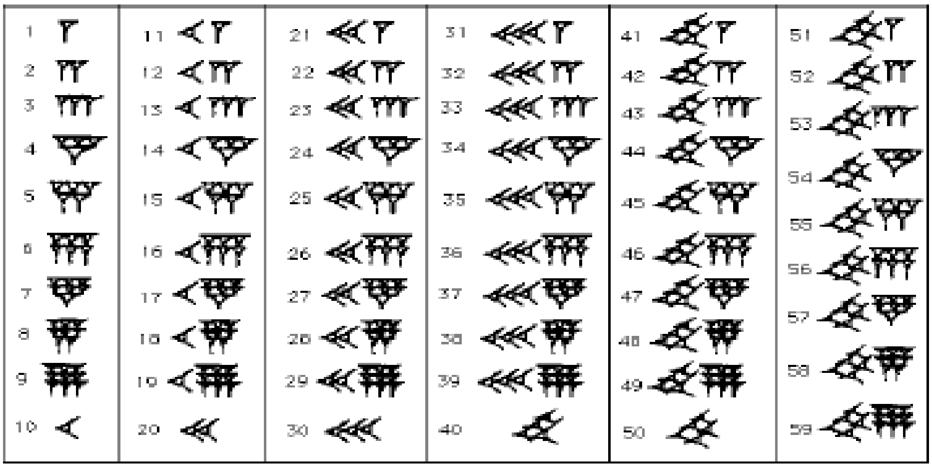
Οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει ένα αρκετά διαφορετικό σύστημα αρίθμησης σε σχέση με τους περισσότερους πολιτισμούς του κόσμου. Το πιο ευρέως γνωστό σύστημα είναι το δεκαδικό. Χρησιμοποιούνται οι αριθμοί 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 και ανάλογα με τη θέση που θα τοποθετηθούν αποκτούν άλλη αξία. Για παράδειγμα οι αριθμοί 6,60,600 διαφέρουν καθώς η τιμή 6 βρίσκεται αρχικά στις μονάδες, έπειτα στις δεκάδες και τέλος στις εκατοντάδες. Ωστόσο οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν ένα εξηνταδικό και όχι δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, δηλαδή με βάση το 60 (Hodgkin,2005). Αυτό το σύστημα χρησιμοποιείται και στη σύγχρονη εποχή όπως για τη μέτρηση του χρόνου ή των γεωγραφικών συντεταγμένων. Για παράδειγμα το μέτρο της γωνίας 4°1’15” είναι ισοδύναμο με $4 + (\frac{1}{60}) + (\frac{15}{60^2})$.Ωστόσο δεν έχει βρεθεί πως χρησιμοποιούσαν 60 ψηφία άρα δεν είχαν καθαρό εξηνταδικό σύστημα αλλά χρησιμοποιούσαν τόσο αυτό όσο και το δεκαδικό (Teresi,2002).

Οι Σουμέριοι καθιέρωσαν το εξηνταδικό σύστημα και ήταν οι μόνοι με τα παρακάτω σύμβολα (πριν από το 2000π.Χ.):



Εικόνα 1. Εξηνταδικό σύστημα Σουμέριων

Οι Βαβυλώνιοι όμως επινόησαν ένα πιο απλό σύστημα: ένα σχήμα καρφίτσας (σφήνα) που αντιπροσωπεύει τη μονάδα και ένα σχήμα φτερού που αντιπροσωπεύει το δέκα (Teresi,2002). Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τους αριθμούς από το 1 έως το 59 σε σφηνοειδή μορφή.



Εικόνα 2. Οι αριθμοί 1 έως 59 των Βαβυλωνίων

Οι Βαβυλώνιοι αντιλήφθηκαν ότι θα γινόταν το σύστημα τους πιο εύχρηστο αν απεικόνιζε διαφορετική αξία η θέση στην οποία θα έμπαινε η καρφίτσα και το φτερό. Η φορά ανάγνωσης ήταν όπως και η δική μας από τα αριστερά προς τα δεξιά. Έτσι ο αριθμός 95 γράφεται ως εξής:

Εικόνα 3. Παράδειγμα του αριθμού 95 σε γραφή Βαβυλωνίων

Η πρώτη καρφίτσα αντιπροσωπεύει το 60,τα φτερά το 10 άρα και τα 3 μαζί το 30 και στο τέλος οι καρφίτσες αποτελούν 5 μονάδες (Teresi,2002).

Ωστόσο υπήρχαν κάποιες δυσκολίες σε αυτό το σύστημα. Δεν υπήρχε αντίστοιχο νούμερο για το 0 ή κάποιο σύμβολο για να δείξει πως η συγκεκριμένη στήλη ήταν κενή. Για αυτό άφηναν κενό ανάμεσα στις θέσεις των αξιών. Επιπλέον στην κάθε θέση χρησιμοποιούσαν διαφορετικό μέγεθος συμβόλων. Κατά συνέπεια αυτά δημιουργούσαν σύγχυση καθώς ο καθένας μπορεί να ερμήνευε ή να έγραφε διαφορετικά τα κενά ανάμεσα στις θέσεις ενώ και το μέγεθος των συμβόλων ήταν υποκειμενικό.

Οι μετέπειτα μεταφραστές αυτών των κειμένων προσπάθησαν να βάλουν κόμματα στους ακέραιους και ερωτηματικά στα εξηνταδικά κλάσματα για να κατανοήσουν καλύτερα τα σύμβολα, με πρωτοπόρο το μελετητή Otto Neugebauer τη δεκαετία του 1930. Κατά αυτόν τον τρόπο εύκολα μπορεί να μετατρέψει κανείς έναν βαβυλωνιακό αριθμό σε δεκαδικό. Πολλαπλασιάζει την τιμή στο δεξί άκρο με 60^0,τον αμέσως προηγούμενό του από τα αριστερά με 60^1,το δικό του προηγούμενο από τα αριστερά με 60^2 και ούτω καθεξής. Στο τέλος το άθροισμα αυτών των αριθμών δίνει το ζητούμενο αριθμό. Για παράδειγμα το 1,15 είναι $15*60^0 + 1*60^1 = 75$. Ομοίως, το 44, 26, 40 έχει τιμή $40*60^0 + 26*60^1 + 44*60^2 = 40 + 1560 + 158.400 = 160.000$ (Hodgkin, 2005). Όσον αφορά τα δεκαδικά κλάσματα, οι Βαβυλώνιοι δεν χρησιμοποιούσαν κάποιο σύμβολο. Ωστόσο εντάσσοντας τα ερωτηματικά οι μεταφραστές μπορεί κάποιος εύκολα να βρει τον αριθμό διαιρώντας την πρώτη τιμή στα δεξιά του ερωτηματικού με το 60^1, την αμέσως δεξιά της προηγούμενης με το 60^2, την αμέσως δεξιά αυτής με το 60^3 κ.λπ. και στη συνέχεια παίρνει το άθροισμα αυτών των τιμών. Για παράδειγμα το 1;20 υπολογίζεται ως $1 + (\frac{20}{60}) = \frac{4}{3}$. Όμοια είναι το 1; 24, 51, 10, που ισοδυναμεί με $1*60^0 + (\frac{24}{60}) + (\frac{51}{60^2}) + (\frac{10}{60^3}) = 1{,}41421\overline{296}$.

Οι μεταφραστές των κειμένων ωστόσο έπεσαν στις ίδιες παρανοήσεις με τους Βαβυλώνιους. Διαφορετικά κάποιοι εξέλαβαν τα κενά ανάμεσα στους αριθμούς (δηλαδή την ύπαρξη ή μη του μηδενός) και διαφορετικά το μέγεθος των συμβόλων που αντιπροσωπεύει την αξία τους. Επιπλέον και η ανυπαρξία συμβόλου για τα κλάσματα οδήγησε τους μεταφραστές σε διαφορετικές αριθμητικές λύσεις των κειμένων.

Οι Βαβυλώνιοι προσπάθησαν να εξαλείψουν την ασάφεια της ανυπαρξίας τιμής σε στήλη, εισάγοντας ένα καινούργιο σύμβολο που είχε την ίδια κατεύθυνση με το μηδέν (Teresi, 2002, σελ. 50). Αυτή η ενέργεια χρονολογείται κάπου ανάμεσα στο 700 και 300 π.Χ. και πρόκειται για δύο μικρά τρίγωνα στην αντίστοιχη στήλη που ήθελαν το κενό, όπως δείχνει και η εικόνα παρακάτω για τον αριθμό $7240 = 2*60^2 + 0*60^1 + 4*10*60^0$.

Εικόνα 4. Παράδειγμα του αριθμού 7240 με εισαγωγή κενού σε γραφή Βαβυλωνίων

Ωστόσο δεν μπορεί κανείς να πει πως το σύμβολο κενής θέσης είναι πρόγονος του μηδενός, καθώς ποτέ δε βρέθηκε τοποθετημένο στην τελευταία θέση. Εκ των πραγμάτων όμως ήταν ένα πολύ βοηθητικό εργαλείο για τους μεταφραστές των κειμένων.

Ο Høyrup (2002) σημειώνει: «Βλέπουμε ότι σύνθετα συστήματα γραμμικών εξισώσεων έχουν συνταχθεί και επιλυθεί και ότι οι Βαβυλώνιοι συστηματικά ανέπτυξαν προβλήματα τετραγωνικού χαρακτήρα -σίγουρα ήξεραν να τα λύσουν- όλα αυτά με μια υπολογιστική τεχνική που είναι εξ ολοκλήρου ισοδύναμη με τη δική μας. Αν αυτή ήταν η κατάσταση ήδη παλιά βαβυλωνιακή, από εκεί και πέρα θα πρέπει να εξεταστεί και η μεταγενέστερη εξέλιξη με διαφορετικά μάτια» (σελ. 2). Παρόλο που οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούν προβλήματα που μπορούν να μετατραπούν σε τετραγωνικές εξισώσεις, οι ίδιοι δεν το γνώριζαν και τα έλυναν με δικές τους μεθόδους. Η μετατροπή σε τετραγωνικές εξισώσεις τέτοιων προβλημάτων, εμφανίστηκε τον εικοστό αιώνα μ.Χ. Τα δισκία που περιείχαν προβλήματα των τετραγωνικών εξισώσεων, υπερβαίνουν σε δυσκολία κατά πολύ εκείνες που περιέχουν γραμμικά προβλήματα (Katz, 2004). Στην πραγματικότητα, από το 2000 π.Χ., οι Βαβυλώνιοι ήταν σε θέση να λύσουν τα συστήματα τα οποία μπορούν να είναι ισοδύναμα με εξισώσεις της μορφής:

$$x+y = \rho \ , \ xy = q \ , \ x^2 + q = px$$

Μεγάλο ενδιαφέρον έχει το πώς προσέγγισαν τον αριθμό $\sqrt{2}$ αλλά και η μελέτη που έκαναν για τους πυθαγόρειους αριθμούς με το πολύ γνωστό κείμενο "Plimpton 322" που βρίσκεται στη Βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου της Κολούμπια από το 1943 (Katz, 2004). Ωστόσο η παρούσα έρευνα θα εστιάσει στις εξισώσεις και τα συστήματα και στον τρόπο που τα προσέγγισαν οι Βαβυλώνιοι.

2.2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Τα προβλήματα που ακολουθούν βρέθηκαν σε πίνακες των Βαβυλωνίων. Οι πίνακες λαμβάνουν τις ονομασίες τους από τις συλλογές που ανήκουν. Για παράδειγμα, YBC είναι η βαβυλωνιακή συλλογή του Γέιλ, BM είναι η συλλογή του Βρετανικού μουσείου, VAT είναι η Vorderasiatische Abteilung,Tontafeln του μουσείου του Βερολίνου και Plimpton είναι η συλλογή Plimpton του πανεπιστημίου Κολούμπια.

Προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, παρατηρείται πως παρόλο που ο συγγραφέας δίνει τη σωστή λύση, δεν αναγράφει πουθενά την τεχνική επίλυσης του. Για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα από την πινακίδα YBC 4652 όπου ο συγγραφέας δίνει μόνο την απάντηση, διαβάζουμε:

- «Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Όταν πρόσθεσα ένα έβδομο και ένα ενδέκατο (του νέου βάρους) ζύγιζε 1 mina (=60 gin). Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;». Σαν εξίσωση γράφεται ως εξής: $(x+\frac{x}{7}) + \frac{1}{11}(x+\frac{x}{7})=60 \leftrightarrow x=48\ {}^{1}/_{8}$ gin, Neugebauer, O., Sachs, A. J., & Götze, A. (1945,σελ. 101).

Ωστόσο, περισσότερες πληροφορίες βρίσκουμε στους πίνακες, για τον τρόπο επίλυσης γραμμικών συστημάτων με δύο αγνώστους. Η πιο συχνή μέθοδος ήταν αυτή της εικασίας και της μετέπειτα διόρθωσης, γεγονός που δείχνει την κατανόηση της γραμμικότητας από μεριάς Βαβυλωνίων. Ο συγγραφέας βρίσκει ένας ζεύγος αριθμών που ικανοποιεί τη μία εξίσωση, συνήθως την πιο εύκολη. Το αντικαθιστά στην άλλη και αν δεν πετύχει το σωστό, το νούμερο που βρήκε θα έχει μία απόκλιση από αυτό που ζητάει η εξίσωση. Έβρισκε αυτή την απόκλιση και την έθετε ισοδύναμη με το γινόμενο του αθροίσματος των συντελεστών των αγνώστων της εξίσωσης επί έναν άγνωστο. Αυτός ο άγνωστος θα αποτελούσε την αύξηση και τη μείωση στους αριθμούς του αρχικού ζεύγους που αντικατέστησε. Έβρισκε συνεπώς, πόσο θα πρέπει να αυξομειωθούν οι αριθμοί ενός ζεύγους που πληρούσαν τη μία εξίσωση και όχι την άλλη, έτσι ώστε πλέον να πληρούν και τη δεύτερη. Παρακάτω παρατίθεται πρόβλημα από το παλιό βαβυλωνιακό κείμενο VAT 838, στο οποίο αναλύεται η μέθοδος αυτή:

- «Ένα χωράφι δίνει $\frac{2}{3}$ sila ανά sar, ενώ ένα άλλο δίνει $\frac{1}{2}$ sila ανά sar (sila ανά sar είναι μονάδες χωρητικότητας και εμβαδού αντίστοιχα). Η σοδειά από το πρώτο ήταν 500 sila μεγαλύτερη από τη σοδειά του δεύτερου. Το εμβαδόν και των δύο είναι μαζί 1800 sar. ποιο είναι το μέγεθος κάθε χωραφιού;». Στη σημερινή εποχή το πρόβλημα θα αναχθεί στο εξής γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$ όπου x,y τα άγνωστα εμβαδά.

Ο Βαβυλώνιος συγγραφέας κάνει αρχικά μία υπόθεση πως x=y=900. Έπειτα υπολογίζει $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 =$150. Παρατηρεί πως η διαφορά είναι 500-150=350. Για να διορθώσει τις απαντήσεις ,ο συγγραφέας προφανώς γνώριζε πως κάθε μοναδιαία αύξηση της τιμής του x και συνακόλουθη μείωση της τιμής του y προκαλούσε μία αύξηση της «συνάρτησης» $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$ κατά $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$. Επομένως αρκούσε να λύσει την εξίσωση $\frac{7}{6}z = 350$ για να βρει την αναγκαία αύξηση z=300. Άρα x=900+300=1200 και y=900-300=600 οι οποίες είναι και οι ορθές απαντήσεις.

Άλλα προβλήματα από αρχαίους βαβυλωνιακούς δίσκους που λύθηκαν από τον συγγραφέα με την ίδια μέθοδο, είναι τα εξής:

- Το ένα τέταρτο του πλάτους συν το μήκος είναι επτά παλάμες. Το μήκος και το πλάτος είναι δέκα παλάμες. Προσδιορίστε το μήκος και το πλάτος. Λύση: μήκος=6, πλάτος=4.
- Ένα χωράφι δίνει ⅔ σιλά ανά sar. Ένα άλλο χωράφι δίνει ½ σιλά ανά sar. Το άθροισμα των αποδόσεων των δύο χωραφιών είναι 1100 σίλα. Η διαφορά των αποδόσεων των δύο χωραφιών είναι 600 sar. Πόσο μεγάλο είναι κάθε χωράφι; Λύση: 1200sar, 600 sar.
- Ένα χωράφι δίνει ⅔ σιλά ανά sar. Ένα άλλο χωράφι δίνει ½ σιλά ανά sar. Η διαφορά των εκτάσεων των δύο χωραφιών είναι 600 sar. Η διαφορά των αποδόσεών τους είναι 500 σιλά. Πόσο μεγάλο είναι κάθε χωράφι; Λύση: 1200sar, 600 sar.

- Ένα χωράφι δίνει ⅔ σιλά ανά sar. Ένα άλλο χωράφι δίνει ½ σιλά ανά sar. Το άθροισμα των περιοχών των δύο χωραφιών είναι 1800 sar. Το άθροισμα των αποδόσεων είναι 1100 σίλα. Πόσο μεγάλο είναι κάθε πεδίο; Λύση: 1200sar, 600 sar.

2.3 ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ (3000 π.Χ.- 400 μ.Χ.)

Ο αρχαίος πολιτισμός της Αιγύπτου είχε μια πλούσια μαθηματική παράδοση. Αυτή η παράδοση αναπτύχθηκε κατά μήκος της κοιλάδας του Νείλου με την ανάπτυξη της γεωργίας και της μνημειακής αρχιτεκτονικής της Αιγύπτου (π.χ. πυραμίδες ή βασιλικοί τάφοι των Φαραώ και οι μεγάλοι ναοί του Λούξορ και του Καρνάκ).

Οι κύριες πηγές πληροφόρησης, σχετικά με τη μαθηματική παράδοση των αρχαίων Αιγυπτίων, απαντώνται στον πάπυρο Rhind (A'h-mose) και στον πάπυρο της Μόσχας (Golenischev). Ο πάπυρος είναι μια μορφή χαρτιού που παράγεται από καλάμια που αναπτύσσονται σε αφθονία κατά μήκος του ποταμού Νείλου. Αυτά τα έγγραφα δείχνουν ότι οι Αιγύπτιοι είχαν ένα σύστημα δεκαδικής αριθμητικής και ότι θα μπορούσαν να δουλέψουν με κλάσματα και να λύσουν προβλήματα που ισοδυναμούν με γραμμικές εξισώσεις. Υποδεικνύουν επίσης ότι τα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά ασχολούνταν γενικά με την επίλυση πρακτικών προβλημάτων της εποχής τους και ότι οι Αιγύπτιοι εξέφραζαν ρητορικά τις μαθηματικές τους ιδέες σε αντιδιαστολή με τη σημερινή συμβολική μας αντίληψη.

2.3.1 Ο ΠΑΠΥΡΟΣ RHIND

Ο πάπυρος Rhind, που γράφτηκε γύρω στο 1650 π.Χ., είναι το μεγαλύτερο, περισσότερο μαθηματικά κατατοπιστικό και καλά διατηρημένο έγγραφο στη συλλογή των παπύρων στα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά. Αναφέρεται ότι βρέθηκε στα ερείπια ενός μικρού κτηρίου κοντά στο θυσιαστήριο ναό του Ραμσή ΙΙ στη Θήβα. Πρόκειται για μια συλλογή από 85 προβλήματα γραμμένα σε ιερατική μορφή σε ένα ρολό μήκους 18 ποδιών με πλάτος 13 ίντσες. Το Ιερατικό σύστημα είναι ένας τρόπος γραφής στον πάπυρο. Διαφέρει από το εικονογραφικό ιερογλυφικό σύστημα που χρησιμοποιείται για τη γραφή σε τοίχους των ναών ή το σκάλισμα στις στήλες. Στην τελευταία μορφή, τα σύμβολα είναι συχνά συμβατικές εικόνες των πραγμάτων που αντιπροσωπεύουν.

Ο πάπυρος Rhind πήρε το όνομά του από τον A. Henry Rhind, σκωτσέζο μελετητή και αρχαιολόγο, που γεννήθηκε το 1833. Αυτός αγόρασε αυτόν τον πάπυρο από ένα κατάστημα στο Λούξορ το 1858, ενώ περνούσε τον χειμώνα στην Αίγυπτο για λόγους υγείας. Πέθανε από τη φυματίωση, το 1863, στο δρόμο του από άλλη επίσκεψη στην Αίγυπτο. Μετά το θάνατό του, το Βρετανικό Μουσείο απέκτησε τον πάπυρο Rhind από τον εκτελεστή της περιουσίας του. Ο πάπυρος σήμερα στεγάζεται στο Μουσείο.

Όταν το βρετανικό μουσείο απέκτησε το Rhind, ήταν σε δύο κομμάτια με μέρος της περιοχής από θραύση να λείπει. Ωστόσο, μερικά από τα χαμένα θραύσματα εντοπίστηκαν από τον Αιγυπτιολόγο καθηγητή Percy Edward Newberry, το 1922, στην αιγυπτιακή συλλογή της Ιστορικής Εταιρείας της Νέας Υόρκης στο Μουσείο του Μπρούκλιν. Αυτά τα θραύσματα είχαν αποκτηθεί στο Λούξορ γύρω στο 1862-1863 από τον Edwin Smith, έναν αμερικανικό αντιπρόσωπο, και παρουσιάστηκαν στην Ιστορική Εταιρεία της Νέας Υόρκης μετά το θάνατό του από την κόρη του.

Ο πάπυρος Rhind είναι επίσης γνωστός ως ο πάπυρος Ahmes ή A'h-mose μετά τον γραφέα που το έγραψε. Αρχίζει με μια εισαγωγή, ακολουθούμενη αντίστοιχα από αριθμητικά, γεωμετρικά και διάφορα προβλήματα και τις λύσεις τους. Στην εισαγωγή, ο A'h-mose αναφέρει ότι γράφει το έτος 33 στον τέταρτο μήνα της εποχής πλημμυρών της βασιλείας του βασιλιά A-user-Re (Apophis). Ο βασιλιάς A-user-Re ήταν βασιλιάς της δεκαπενταετούς δυναστείας κατά τη διάρκεια του Hyksos ή της δεύτερης ενδιάμεσης περιόδου. Ο A'h-mose δηλώνει επίσης ότι αντιγράφει έργα γραμμένα υπό την εποχή του βασιλιά Ne-ma'et-Re (Nymare). Το Ne-ma'et-Re ήταν το όνομα θρόνου και εκείνη την περίοδο βασίλευε ο έκτος βασιλιάς της δωδέκατης δυναστείας (κατά το δεύτερο μισό του δέκατου ένατου αιώνα π.Χ.). Ο A'h-mose έγραψε ότι ο πάπυρος παρείχε "είσοδο στη γνώση όλων των υπαρχόντων πραγμάτων και όλων των σκοτεινών μυστικών". Ο πάπυρος Rhind δεν περιέχει θεωρητικά αποτελέσματα. Τα προβλήματα αντικατοπτρίζουν τις ανάγκες μιας γεωργικής κοινωνίας. Συγκεκριμένα, υπάρχει τμήμα που παρέχει πληροφορίες για τα αιγυπτιακά έθιμα και τις μεθόδους εμπορίας, τη φορολογία, τη διατροφή των ζώων και τον καθορισμό συγκριτικών τιμών διαφόρων αγαθών και ποτών, με βάση κάποια υλική μονάδα (τρόφιμα, ζώα κ.τ.λ.) και όχι κάποιο νόμισμα. Το γράψιμο του παπύρου ολοκληρώνεται με την προσευχή ενός αγρότη στον θεό Ρα για ζέστη, άνεμο και βροχή έτσι ώστε να είναι δυνατή η κατάσβεση επιβλαβών ζιζανίων και η αλίευση ψαριών.

2.3.2 Ο Πάπυρος της Μόσχας

Ο Πάπυρος της Μόσχας είναι μια συλλογή 25 προβλημάτων που αφορούν κυρίως την πρακτική ζωή, παρόμοια με τα προβλήματα του πάπυρου Rhind. Χρονολογούνται γύρω στο 1650 π.Χ. Τα προβλήματα είναι γραμμένα σε ιερατικά σε ρολό μήκους 18 πόδια και πλάτους 3 ίντσες. Είναι επίσης γνωστός ως ο πάπυρος Golenischev, μετά του άντρα που το αγόρασε το 1893 στην Αίγυπτο. Αυτός ο πάπυρος στεγάζεται πλέον στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι όπως και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της (ενιαίας) ψευδούς παραδοχής για να λύσουν προβλήματα που ισοδυναμούν με γραμμικές εξισώσεις (2000 π.Χ. - 1000 π.Χ.). Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε στην Ευρώπη στις αρχές του δέκατου τέταρτου αιώνα σε ιταλικά σχολεία και εμφανίστηκε στα αμερικανικά εγχειρίδια μόλις το 1780.Η μέθοδος της ψευδούς θέσης περιγράφεται στους πάπυρους Rhind και Μόσχας. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι θα μαντέψουν μια βολική αλλά μερικές φορές λάθος απάντηση και στη συνέχεια θα τις προσαρμόσουν για να πάρουν το σωστό αποτέλεσμα.

2.3.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ακολουθούν προβλήματα που βρέθηκαν στους δύο πάπυρους.

- «Μια ποσότητα και το τέταρτο της που προστίθενται μαζί δίνουν 15. Ποια είναι η ποσότητα;»

Για να γίνει η μέθοδος πιο κατανοητή, θα χρησιμοποιήσουμε τη σύγχρονη σημείωση. Έστω x η "ποσότητα". Τότε το πρόβλημα μπορεί να γραφτεί συμβολικά ως $x + \frac{1}{4} x = 15$.Υποθέτουμε ότι το x είναι 4 επειδή θα είναι εύκολο να πάρουμε ¼ του 4. Τώρα $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$ που δεν είναι το αποτέλεσμα που ψάχνουμε . Αλλά γνωρίζουμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε το 5 με 3, θα έχουμε την επιθυμητή απάντηση 15. Έτσι, προσαρμόζουμε την εικασία μας πολλαπλασιάζοντας την κατά 3 και αυτήν. Η λύση είναι $x = 3 \cdot 4 = 12$. Τώρα ελέγχουμε αυτήν τη λύση: $12 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 12 + 3 = 15$, το επιθυμητό αποτέλεσμα. Μπορούμε να δείξουμε ότι αυτή η μέθοδος θα ισχύει και με άλλες εικασίες, όπως x = 8. Στη συνέχεια, παίρνουμε $8 + 1 / 4 \cdot 8 = 8 + 2 = 10$ και πολλαπλασιάζουμε το 10 με 1 ½ για απόδοση 15. Επομένως η λύση μας είναι $x = 8 \cdot 1\frac{1}{2} = 12$, όπως και προηγουμένως.

- Θεωρούμε ένα πρόβλημα από μια διαφορετική εποχή και το επιλύουμε χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο. Ένα διάσημο πρόβλημα γραμμικής εξίσωσης περιγράφεται σε ένα μύθο για τη θέληση του Al-Khwarizmi. Η διαθήκη του γράφτηκε καθώς πλησίαζε ο θάνατος και η γυναίκα του περίμενε το παιδί του. Κατά ιδίαν βούληση δήλωσε πως αν η σύζυγός του είχε ένα γιο, ο γιος επρόκειτο να κληρονομήσει τα 2/3 της περιουσίας και η σύζυγος το 1/3. Αν η σύζυγός του είχε μια κόρη, τότε η σύζυγος θα κληρονομούσε τα 2/3 της περιουσίας και η κόρη το 1/3. Μετά το θάνατό του η σύζυγός του είχε δίδυμα, αγόρι και κορίτσι. Πώς διαχωρίστηκε το κτήμα έτσι ώστε να συμβαδίζει με τη βούληση του Al-Khwarizmi;

Προφανώς ήθελε ο γιός του να έχει τη διπλάσια περιουσία από τη γυναίκα του και η κόρη του τη μισή από αυτήν. Σε σύγχρονο συμβολισμό έχουμε: $2x + x + ½ x = 1$ όπου 1 είναι ολόκληρη η περιουσία του. Χρησιμοποιώντας την αιγυπτιακή μέθοδο της ψευδούς παραδοχής, θα μπορούσαμε να μαντέψουμε το τμήμα της συζύγου, x, να είναι 2. Τότε $2\cdot 2 + 2 + ½ \cdot 2 = 7$. Δεδομένου ότι $(1/7) \cdot 7 = 1$, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την εικασία μας κατά 1/7. Επομένως, $x = (1/7) \cdot 2 = 2/7$ είναι το μερίδιο της συζύγου. Το μερίδιο του γιου στο κτήμα είναι 4/7, ενώ το μερίδιο της κόρης είναι 1/7.

2.4 ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ (1ος αιώνας μ.Χ.- 4ος αιώνας μ.Χ.)

Υπήρξαν μεγάλα ονόματα Ελλήνων μαθηματικών που ασχολήθηκαν την άλγεβρα. Ο Νικόμαχος (~60-120 μ.Χ.) έχει συνδεθεί με τη Στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών, ο Διόφαντος (3ος αιώνας μ.Χ.) ασχολήθηκε με την πρώιμη ελληνική άλγεβρα ενώ ο Πάππος (4ος αι. μ.Χ.), ο τελευταίος μαθηματικός της ελληνικής παράδοσης, ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε έργο μαθηματικής ανάλυσης και σύνθεσης.

Εστιάζοντας στις γραμμικές εξισώσεις στην αρχαία Ελλάδα, πρέπει να μελετήσουμε το έργο του Διόφαντου του Αλεξανδρεύς (3ος αιώνας μ.Χ.). Έζησε στην Αλεξάνδρεια της ρωμαϊκής Αιγύπτου. Έχει αποκληθεί «πατέρας της άλγεβρας» εξαιτίας του εμβληματικού έργου του «Αριθμητικά», όπου περιέχονται αλγεβρικά προβλήματα τα οποία λύνονται με μεθόδους που μπορούν να ισοδυναμούν με εξισώσεις και συστήματα πρώτου και δευτέρου βαθμού. Την τιμή αυτή την μοιράζεται μαζί με τον Πέρση μαθηματικό αλ-Χουαρίζμι, από του οποίου το βιβλίο προέρχεται και το όνομα «άλγεβρα». Ο Διόφαντος συνεισέφερε πολύ στην ανάπτυξη της αριθμητικής, καθιέρωσε και τυποποίησε έναν τύπο σύντομου μαθηματικού συμβολισμού για τη γραφή προβλημάτων, για πρώτη φορά σε ευρεία κλίμακα άρχισε να χρησιμοποιεί τα κλάσματα ως πραγματικούς αριθμούς και ασχολήθηκε με την επίλυση εξισώσεων με πολλαπλούς αγνώστους όρους. Ωστόσο ακόμα και με τον Διόφαντο ο ελληνικός μαθηματικός συμβολισμός παρέμεινε βασισμένος στον καθημερινό λόγο και δύσχρηστος με τα σημερινά δεδομένα.

2.4.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Τα περισσότερα από τα προβλήματα του Διόφαντου είναι απροσδιόριστα, δηλαδή οι άγνωστοι των εξισώσεών του είναι περισσότεροι από τις υπάρχουσες εξισώσεις. Συχνά έχουν άπειρες λύσεις. Όμως ο Διόφαντος δείχνει πώς να βρεθεί μία λύση. Ωστόσο γενικεύοντας τον τρόπο του μπορεί κανείς να βρει και άλλες λύσεις. Ακολουθούν παραδείγματα:

- «Δοθείς αριθμός να διασπαστεί σε δύο αριθμούς με δοθείσα διαφορά». Ο Διόφαντος λύνει το πρόβλημα με δοθέντα αριθμό το 100 και δοθείσα διαφορά το 40. Με σύγχρονο συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε ότι εάν x είναι ο μικρότερος αριθμός της διαφοράς υπολογίζει πως θα πρέπει να ισχύει 2x+40=100 οπότε εύκολα βρίσκει ότι x=30 και άρα ο δεύτερος αριθμός είναι το 70. Μπορεί ο Διόφαντος να λύνει το πρόβλημα με συγκεκριμένους αριθμούς, η τακτική του όμως γενικεύεται για οποιονδήποτε δοθέντα αριθμό a που αναλύεται σε b+c,με b>c, και για τη διαφορά τους ισχύει δοθέντας αριθμός d=b-c.Συγκεκριμένα η λύση είναι : b=$\frac{1}{2}$(a+d) και c= $\frac{1}{2}$(a-d).
- «Δοθείς αριθμός να διασπαστεί σε δύο αριθμούς, τέτοιους ώστε αν προστεθούν κλασματικά μέρη του καθενός, όχι ίσα, να έχουν άθροισμα δοθέντα αριθμό». Σε σύγχρονο συμβολισμό δίνονται οι a,b,r,s (r<s) και ζητούνται οι αριθμοί u,v έτσι ώστε: $\begin{cases} u+v=a \\ \frac{1}{r}u+\frac{1}{s}v=b \end{cases}$.Ο Διόφαντος, όπως και εδώ, συνηθίζει να θεωρεί τα κλάσματα μοναδιαία. Στη συνέχεια παρατηρεί πως μόνο αν ισχύει $\frac{1}{r}$a<b<$\frac{1}{s}$a υπάρχει λύση για το πρόβλημα και επιλέγει να το λύσει για a=100, b=30, r=3, s=5 δηλαδή: $\begin{cases} u+v=100 \\ \frac{1}{3}u+\frac{1}{5}v=30 \end{cases}$.Έστω ότι το ένα μέρος του 100 είναι 5x. Τότε το άλλο μέρος είναι το 3(30-x). Άρα 90+2x=100 και x=5.Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 75 και 25.Στο

συγκεκριμένο πρόβλημα ο Διόφαντος θεωρεί άγνωστο το $\frac{1}{5}$ του δεύτερου μέρους. Αυτό του επιτρέπει να αποφύγει όλα τα κλάσματα στους υπόλοιπους υπολογισμούς του αφού το $\frac{1}{3}$ του πρώτου μέρους ισούται με 30-x και το πρώτο μέρος ισούται με 3(30-x).Πώς συνεχίζεται η λύση είναι σαφές. Ο γενικός κανόνας που βγαίνει από το Διόφαντο, κανόνας ο οποίος ο Διόφαντος και πάλι δε δίνει αλλά η μεθοδολογία του ισχύει για οποιουσδήποτε δοθέντες αριθμούς, είναι: $x=\frac{a-br}{s-r}$ και ανάλογα βρίσκονται τα υπόλοιπα.

Στα προβλήματα του Βιβλίου Ι, οι δοθείσες τιμές επιλέγονται έτσι ώστε να καταλήγουμε σε ακέραιους αριθμούς για λύσεις. Σε άλλα βιβλία όμως η γενική συνθήκη είναι να καταλήγουν σε θετικούς ρητούς αριθμούς. Προφανώς ο Διόφαντος το κάνει για λόγους ευκολίας, όντας εισαγωγικά προβλήματα, με τη λογική πως ο όρος αριθμός σημαίνει για το Διόφαντο ρητός αριθμός.

Κάποιες πρακτικές του θυμίζουν τη βαβυλωνιακή πρακτική και εδώ ερωτόμαστε εάν ο Διόφαντος έμαθε τις πρακτικές από εκεί ή εκμεταλλεύτηκε τις γεωμετρικές λύσεις που απαντώνται στα έργα *Στοιχεία* ή *Δεδομένα*. Μπορεί η ερώτηση να μη δύναται να απαντηθεί, αλλά είναι εμφανές πως η μεθοδολογία του Διόφαντου δεν είναι γεωμετρική γεγονός που δείχνει πως ίσως στην εποχή αυτήν οι βαβυλωνιακές αλγεβρικές μέθοδοι, χωρίς τις γεωμετρικές καταβολές τους ήταν γνωστές στον ελληνικό κόσμο, Katz (2004).

2.5 ΚΙΝΕΖΟΙ (1ος αιώνας π.Χ. έως 3ος αιώνας μ.Χ.)

Συχνά εικάζεται πως η γνωστή μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων, η απαλοιφή Gauss,οφείλεται στον ίδιο το μαθηματικό που φέρει και το όνομά της. Στο αρχαίο κινεζικό κείμενο ωστόσο «Τα εννέα κεφάλαια» το οποίο μιλά για τη μαθηματική τέχνη (Shen et al., 1999) και συντάχθηκε τον πρώτο αιώνα π.Χ., έχει ένα κεφάλαιο με τίτλο Fangcheng το οποίο μεταφράζεται ως «Rectangular Arrays». Σε αυτό εισάγεται ο κανόνας Fangcheng, που είναι μια γενική μέθοδος για την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας ορθογώνιες συστοιχίες.

Κατά την αρχαιότητα, δεν ήταν πρωταρχικό μέλημα η επίλυση συστημάτων και για αυτό έχουν βρεθεί μόνο κάποια μεμονωμένα προβλήματα χωρίς γενική λύση

Grcar (2011). Αυτό δεν ίσχυε όμως και για τους Κινέζους καθώς βρέθηκε στο έργο «Τα εννέα κεφάλαια» ο κανόνας Fangcheng. Αντίθετα στη δύση η συμβολική γλώσσα και τα συστήματα αργότερα ήρθαν μετά την Αναγέννηση ($15^{ος}$ – $17^{ος}$ αι.). Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων αναπτύχθηκε για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα της ανακρίβειας των λύσεων. Ο Gauss χρησιμοποίησε τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων κατά τον υπολογισμό της τροχιάς του αστεροειδούς Ceres το 1794 ή 1795, αλλά η μέθοδος δεν δημοσιεύθηκε μέχρι το 1809 (Gauss,1809). Η απαλοιφή Gauss εμφανίστηκε αφού ο Legendre είχε δημοσιεύσει την έκδοση του (Legendre,1805) και χρόνια αργότερα ονομάστηκε γκαουσιαννή απαλοιφή προς τιμή του Gauss (Grcar, 2011, σελ. 209).

Ωστόσο από το ανώνυμο και πλέον παραδοσιακό κείμενο «Τα εννέα κεφάλαια για τη μαθηματική τέχνη», φαίνεται πως οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης τουλάχιστον 2000 πριν. Πρόκειται για ένα έργο ισοδύναμο με την ισχύ του έργου τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Αφορά μια σειρά από 246 προβλήματα και τις λύσεις τους οι οποίες οργανώνονται σε εννέα κεφάλαια σύμφωνα με το θέμα. Από ότι φαίνεται συντάχθηκαν για την αντιμετώπιση των πρακτικών αναγκών της κυβέρνησης, του εμπορίου και της μηχανικής. Τα προβλήματα και οι λύσεις δεν περιλαμβάνουν μια γενική εξήγηση του πως λειτούργησε μια συγκεκριμένη μέθοδος λύσης. Σε αντίθεση με την ελληνική έμφαση στις αποδείξεις, οι Κινέζοι έδιναν έμφαση στους αλγορίθμους για την επίλυση προβλημάτων. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν γνωρίζουν γιατί ο αλγόριθμος λειτούργησε, δείχνει μόνο ότι ο σημαντικότερος στόχος ήταν να δείξει στους μαθητές πώς να εκτελέσουν τους υπολογισμούς σωστά.

Τα κεφάλαια του βιβλίου δείχνουν ότι υπήρχε ένα εκτεταμένο σώμα μαθηματικών γνώσεων γνωστό στους αρχαίους Κινέζους. Τα κεφάλαια ήταν τα εξής:

1)Ορθογώνια πεδία: Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με τη μέτρηση της γης και δίνει τους τύπους για την κάλυψη των επιφανειών των διαφόρων μορφών.

2)Κεχρί και ρύζι: Τα κεφάλαια 2 και 3 περιέχουν ποικίλα προβλήματα από τη γεωργία, τη βιομηχανία και το εμπόριο.

3)Κατανομή ανά αναλογία.

4)Σύντομο πλάτος: Τα προβλήματα σε αυτό το κεφάλαιο συνεπάγονται την αλλαγή των διαστάσεων σε ένα πεδίο, στην ίδια περιοχή και περιλαμβάνει αλγορίθμους για την επεξεργασία των τετραγωνικών ριζών και την εργασία με κύκλους.

5)Διαβουλεύσεις κατασκευής: Αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει τύπους για όγκους διαφόρων στερεών.

6)Δίκαιες αμοιβές: Τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου προέρχονται από τους φόρους και την κατανομή της εργασίας.

7)Πλεονασμός και έλλειμμα: Χρησιμοποιείται ο κανόνας της διπλής ψευδούς παραδοχής για την επίλυση των γραμμικών ο οποίος επιλύει μια ποικιλία προβλημάτων σε αυτό το κεφάλαιο (η διπλή ψευδής παραδοχή αναφέρεται σε μια μέθοδο επίλυσης μιας γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας δοκιμές και σφάλματα, χρησιμοποιώντας μια σειρά από καθορισμένα βήματα για τη λήψη της σωστής λύσης από πληροφορίες που αναφέρθηκαν σχετικά με λανθασμένες εικασίες και εξακολουθεί να είναι πολύτιμη μέχρι σήμερα).

8)Ορθογώνιες συστοιχίες: Ο κανόνας Fangcheng εισάγεται για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

9)Ορθογώνια τρίγωνα: Αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει τον Κανόνα Gougu, γνωστό στα δυτικά μαθηματικά ως το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Ο γνωστός Κινέζος μαθηματικός Liu Hui (3^{ος} αι. μ.Χ.) το 263 μ.Χ. επεξεργάστηκε και δημοσίευσε τα *Εννέα Κεφάλαια* και ήταν ίσως ο πρώτος μαθηματικός που ανακάλυψε, κατανόησε και χρησιμοποίησε αρνητικούς αριθμούς. Δε ξέρουμε πολλά παραπάνω για τη ζωή του, έχουμε όμως το σχόλιο που έχει κάνει στην εισαγωγή για το κίνητρό του.

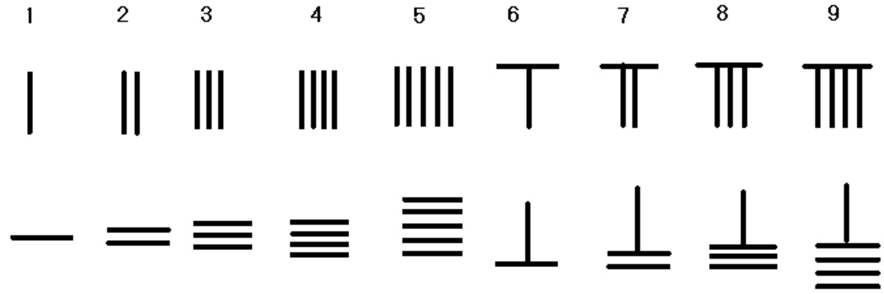
«Διάβασα τα Εννέα Κεφάλαια ως αγόρι και τα μελετούσα λεπτομερώς όταν ήμουν μεγάλος. Παρατήρησα τη διαίρεση μεταξύ των διπλών φύσεων του Γιν και του Γιανγκ (των θετικών και των αρνητικών πτυχών) που συνοψίζουν τα βασικά των μαθηματικών. Η διεξοδική έρευνα δείχνει την αλήθεια εκεί, η οποία μου επιτρέπει να συλλέξω τις ιδέες μου και να έχω την ελευθερία να τις σχολιάσω. Τα πράγματα είναι γνωστόν ότι ανήκουν σε διάφορες ταξινομήσεις. Ακριβώς όπως τα κλαδιά ενός δέντρου ανήκουν στον κορμό του, έτσι είναι ένα πλήθος πραγμάτων στο αρχέτυπο. Ως εκ τούτου, προσπάθησα να εξηγήσω όλη τη θεωρία όσο το δυνατόν συντομότερα, με χωρικές μορφές που παρουσιάζονται σε διαγράμματα, έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει λογική και καλά σφαιρική κατανόηση όλων».

Καθώς τα *Εννέα Κεφάλαια* δεν παρέχουν ένα διάγραμμα ή αλγόριθμο με τον Κανόνα Fangcheng είναι δύσκολο για τους σύγχρονους ερευνητές να το μελετήσουν. Το σχόλιο του Liu Hui θα αποδειχθεί ανεκτίμητο καθώς προσπαθούμε να αποκρυπτογραφήσουμε τις αρχαίες κινεζικές οδηγίες για την επίλυση ορθογώνιων συστοιχιών.

2.5.1 ΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

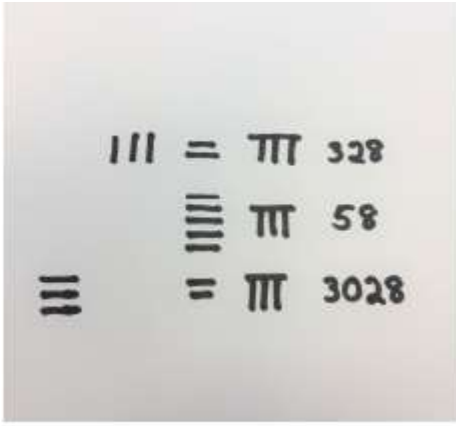
Σε αντίθεση με τη σημερινή εποχή όπου οι υπολογιστές αναλαμβάνουν να κάνουν αριθμητικές πράξεις, κατά την αρχαιότητα έπρεπε οι ίδιοι να ανταπεξέλθουν σε κάθε μία με το χέρι. Γρήγορα οι αρχαίοι Κινέζοι ανέπτυξαν μία στρατηγική με ράβδους, 1500 π.Χ. μέχρι το 500 π.Χ περίπου και αργότερα αντικαταστάθηκαν από τον άβακα (Shen et al., 1999, σελ. 11-17). Επιπρόσθετα, σε αντίθεση με τους Βαβυλώνιους, το σύστημα που ανέπτυξαν ήταν με βάση το δέκα.

Οι ράβδοι ήταν μικρά μπαστούνια μπαμπού, διαμέτρου περίπου 2,5 mm και μήκους 15 cm. Η καθεμία αντιστοιχούσε στη μονάδα και ανάλογα τη θέση της είχε άλλη αξία (δεκάδα, εκατοντάδα κτλ.). Όπως φαίνεται και από την εικόνα παρακάτω, τοποθετούσαν τις ράβδους είτε οριζόντια είτε κάθετα. Οι πρώτες 5 ράβδοι είχαν ίδιο προσανατολισμό και για τους αριθμούς από το 6 έως το 9 έμπαιναν οι υπόλοιποι ράβδοι από πάνω από μία.



Εικόνα 5. Συμβολισμοί Κινέζων για τους αριθμούς 1 έως 9

Σχετικά με τις υπόλοιπες θέσεις με διαφορετική αξία, επέλεγαν να εναλλάσσουν τον προσανατολισμό των ράβδων από τη μία στην άλλη θέση. Όπως φαίνεται και στην εικόνα παρακάτω για τον αριθμό 328 χρησιμοποιούν στην τελευταία θέση το σύμβολο για το 8 (αρχίζουν με μία οριζόντια ράβδο δηλαδή το 5 και μετά άλλες 3 κάθετες δηλαδή μαζί το 8),έπειτα αλλάζουν αρχικό προσανατολισμό και με 2 κάθετες δείχνουν το 2 αλλά επειδή είναι στη δεύτερη θέση είναι το 20 και στην τρίτη θέση αλλάζουν πάλι τον προσανατολισμό και βάζουν 3 οριζόντιες γραμμές που στη θέση αυτή αντιπροσωπεύουν 300.



Εικόνα 6. Παραδείγματα αριθμών με κινέζικους συμβολισμούς

Σύμβολο για το μηδέν δεν είχαν, για αυτό και άφηναν ένα κενό ανάμεσα στα σύμβολα (όπως φαίνεται στην προηγούμενη εικόνα για τον αριθμό 3028). Το κενό μπορεί να σημαίνει ανυπαρξία εκατοντάδας σε εκείνη τη θέση, δεν παύει όμως να υπάρχει η θέση και προσμετρείται για αυτό και ο προσανατολισμός στις χιλιάδες είναι ο ίδιος με τις δεκάδες. Ωστόσο για πολλές κενές θέσεις η εναλλαγή του προσανατολισμού των ράβδων δεν δίνει σαφές αριθμό μηδενικών, πράγμα που δείχνει τη σημαντικότητα ύπαρξης συμβόλου για το κενό ή το μηδέν.

2.5.2 ΚΑΝΟΝΑΣ FANGCHENG ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ο Κανόνας Fangcheng παρέχει οδηγίες βήμα προς βήμα για την επίλυση προβλημάτων σε πίνακες οι οποίες ισοδυναμούν με συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Ο κανόνας μπορεί να χωριστεί σε δύο ξεχωριστά βήματα. Το πρώτο βήμα ονομάζεται απαλοιφή στα σύγχρονα μαθηματικά, δεδομένου ότι η διαδικασία χρησιμοποιεί μια εξίσωση, ξεκινώντας από την πρώτη, για να αφαιρέσει τις μεταβλητές από τις εξισώσεις που ακολουθούν. Η αρχαία κινεζική έκδοση της απαλοιφής χρησιμοποιεί, όπως την έχουμε ονομάσει πλέον, την τριγωνική μορφή ή την κάτω τριγωνική μορφή. Ο αλγόριθμος για την επίλυση της τριγωνικής μορφής θα αναφέρεται ως αντικατάσταση αφού η απλούστερη μέθοδος επίλυσης είναι να αρχίσουμε με την επίλυση της εξίσωσης με μία μόνο μεταβλητή και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τις γνωστές τιμές των μεταβλητών στην υπόλοιπη εξίσωση για να λύσουμε για μια μεταβλητή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

- Στο τρίτο κεφάλαιο από τα εννέα, υπάρχουν προβλήματα για τη μοιρασιά αγαθών. Στο πρόβλημα 1 ζητείται να μοιραστούν σε πέντε αξιωματούχους πέντε ελάφια σε αναλογία 5:4:3:2:1.Ο συγγραφέας εργάζεται ως εξής: προσθέτει τους όρους της αναλογίας, βρίσκει 15 και στη συνέχεια πολλαπλασιάζει κάθε όρο της αναλογίας επί τα 5 ελάφια και διαιρεί διά 15.Έτσι αν n ο κάθε αξιωματούχος το μερίδιό το είναι 5*$\frac{n}{15}$.Άρα ο πρώτος έχει $1^2/_3$ ο επόμενος $1\ ^1/_3$ κτλ.
- Το δεύτερο κεφάλαιο περιέχει πολλά προβλήματα απλών αναλογιών όπως το αιγυπτιακό πρόβλημα των ψωμιών. Στο πρόβλημα 3 δίνεται ότι 50 μονάδες κεχριού ανταλλάσσονται με 24 μονάδες καθαρισμένου ρυζιού. Ζητείται πόσο ρύζι θα παίρνει κάποιος δίνοντας $4^5/_{10}$μονάδες κεχριού. Με το σύγχρονο συμβολισμό αναλογιών θα είχαμε $4^5/_{10}$:x=50:24. Ο συγγραφέας ανάγει όμως τη δεξιά πλευρά σε 25:12 και επιλύει το πρόβλημα όπως και εμείς, δηλαδή πρώτα πολλαπλασιάζει 12* $4^5/_{10}$και στη συνέχεια ό,τι βρει διά 25.

2.5.3 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ – ΕΛΛΕΙΜΜΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Οι Κινέζοι έδωσαν και αυτοί βάση στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας δύο βασικούς τρόπους επίλυσης. Στο έβδομο κεφάλαιο απαντάται η μία από τις δύο μεθόδους, του πλεονάσματος και του ελλείμματος. Όπως και οι Βαβυλώνιοι έτσι και οι Κινέζοι ξεκινούν με μία εικασία, περνούν στη διόρθωση της αποδεικνύοντας την κατανόηση της γραμμικότητας. Το πρόβλημα 17 αναφέρει: «Η τιμή ενός αγρού με καλό χώμα επιφάνειας ενός ακρ είναι 300 χρυσά νομίσματα. Η τιμή ενός αγρού με κακό χώμα επιφάνειας 7 ακρ είναι 500 χρυσά νομίσματα. Κάποιος αγόρασε 100 ακρ με 10000 χρυσά νομίσματα. Πόσο καλή και πόσο κακή γη αγόρασε;» Το σύστημα που θα φτιάχναμε σήμερα θα ήταν το εξής:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 300x + \dfrac{500}{7}y = 10000 \end{cases}$$

Ο κινεζικός κανόνας επίλυσης αναφέρει: «Έστω ότι ο καλός αγρός είναι 20 ακρ και ο κακός 80 ακρ. Τότε έχουμε πλεόνασμα $1714\frac{2}{7}$.Αν ο καλός αγρός είναι 10 ακρ και ο κακός αγρός 90 ακρ, τότε το έλλειμμα είναι $571\frac{3}{7}$».Ο κινέζος συγγραφέας πολλαπλασιάζει $20*571\frac{3}{7}$,$10*1714\frac{2}{7}$προσθέτει τα γινόμενα και τέλος, διαιρεί το άθροισμα αυτό διά του αθροίσματος $571\frac{3}{7}+1714\frac{2}{7}$.Το αποτέλεσμα για το μέγεθος του καλού αγρού είναι 12½ και εύκολα βρίσκεται για τον κακό αγρό 87½.Ο συγγραφέας δεν εξηγεί τον αλγόριθμο που χρησιμοποίησε ωστόσο εμφανίστηκε στον ισλαμικό κόσμο αργότερα και πολύ μετέπειτα στη Δυτική Ευρώπη. Ο τύπος για τον αλγόριθμο είναι ο εξής: $x=\frac{b_1x_2+b_2x_1}{b_1+b_2}$, όπου b_1 το πλεόνασμα για την παραδοχή x_2 καιb_2 το έλλειμμα για την παραδοχή x_1. Υπάρχει η εικασία πως ο αλγόριθμος οφείλεται στην παρατήρηση πως η διαφορά της ορθής και άγνωστης τιμής του x και της εικαζόμενης τιμής 20, αντιστοιχεί σε αλλαγή της τιμής της «συνάρτησης» $300x + \frac{500}{7}y$ κατά $1714\frac{2}{7}$. Ενώ η διαφορά του 10 και του x αντιστοιχεί στην αλλαγή της τιμής της ίδιας συνάρτησης κατά $571\frac{3}{7}$. Ο παρακάτω λόγος είναι σταθερός λόγω γραμμικότητας άρα: $\frac{20-x}{1714\frac{2}{7}} = \frac{x-10}{571\frac{3}{7}}$ (προκύπτει και από το γενικό τύπο που δόθηκε παραπάνω).

Υπάρχει μία περιγραφή του κανόνα από τον John Bonnycastle, από τον *Οδηγό του Ακαδημαϊκού για την Αριθμητική* (1780):

1. Πάρτε δύο βολικούς αριθμούς και συνεχίστε με τον καθένα σύμφωνα με τους όρους της ερώτησης.

2. Βρείτε πόσο τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά από το αποτέλεσμα της εξίσωσης.

3. Πολλαπλασιάστε κάθε ένα από τα λάθη με την αρχική υπόθεση και βρείτε το άθροισμα και τη διαφορά.

4. Εάν τα σφάλματα είναι ίδια, διαιρέστε τη διαφορά από το βήμα 3 από τη διαφορά των σφαλμάτων και ο λόγος θα είναι η απάντηση.

5. Αν τα σφάλματα είναι διαφορετικά, διαιρέστε το άθροισμα του βήματος 3 από το άθροισμα των σφαλμάτων και το πηλίκο θα είναι η απάντηση.

Σημείωση: Τα σφάλματα λέγονται ότι είναι ίδια, όταν είναι πάρα πολύ μεγάλα ή και τα δύο πολύ μικρά. Αντίθετα, δεν είναι ίδια όταν κάποιο είναι πάρα πολύ μεγάλο και το άλλο πολύ μικρό.

Στο έβδομο κεφάλαιο και τα 20 προβλήματα λύνονται με αυτόν τον αλγόριθμο. Αξίζει να σημειωθεί πως οποιοσδήποτε αρχαίος πολιτισμός δεν είχε στη διάθεση του το σύγχρονο μας συμβολισμό, που μας επιτρέπει γρήγορα να λύνουμε τέτοια συστήματα. Όλα τα προβλήματα και οι λύσεις τους περιγράφονταν με λέξεις, ακόμα και με δύσκολα περιγράψιμες λύσεις, ίσως επειδή ήθελαν να πείσουν τους μαθητές τους ότι η καλή γνώση των μεθόδων θα τους βοηθούσε για τα δύσκολα προβλήματα. Ακολουθούν προβλήματα που λύνονται με τη μέθοδο του πλεονάσματος και του ελλείμματος.

- Στο Κεφάλαιο 7 το πρόβλημα 13: «Ένα τέταρτο λικέρ κοστίζει 50 νομίσματα και 1 τέταρτο κρασί κοστίζει 10 νομίσματα. Τώρα 2 τέταρτα ποτών κοστίζουν 30 νομίσματα. Πόσα λικέρ και πόσο κρασί περιέχεται;
- Στο Κεφάλαιο 7 το πρόβλημα 14 : «5 μεγάλα δοχεία και 1 μικρό έχουν συνολική χωρητικότητα 3 γαλόνια. Επίσης 1 μεγάλο δοχείο και 5 μικρά δοχεία έχουν χωρητικότητα 2 γαλόνια. Πείτε τη χωρητικότητα ενός μεγάλου και ενός μικρού δοχείου.»
- Στο Κεφάλαιο 7, πρόβλημα 1 : «Ένα αντικείμενο αγοράζεται από κοινού. Αν όλοι συνεισφέρουν 8 δολάρια, περισσεύουν 3 δολάρια. Αν όλοι συνεισφέρουν 7 δολάρια, λείπουν 4 δολάρια. Πείτε τον αριθμό των ατόμων και την τιμή του αντικειμένου».
- Στο Κεφάλαιο 7, πρόβλημα 2: «Τα κοτόπουλα αγοράζονται από κοινού. Εάν όλοι συνεισφέρουν 9 δολάρια, περισσεύουν 11.Εάν όλοι συνεισφέρουν 6 δολάρια, λείπουν 12. Πείτε στον αριθμό των ανθρώπων και την τιμή των κοτόπουλων».
- Στο Κεφάλαιο 7, πρόβλημα 5: «Ο χρυσός αγοράζεται από κοινού. Εάν ο καθένας συνεισφέρει 400 νομίσματα, περισσεύουν 3400. Αν όλοι συνεισφέρουν 300 νομίσματα, περισσεύουν 100.Πείτε στον αριθμό των ανθρώπων και την τιμή του χρυσού».
- Στο Κεφάλαιο 7, πρόβλημα 6: «Τα πρόβατα αγοράζονται από κοινού. Αν ο καθένας συνεισφέρει 5 νομίσματα, λείπουν 45. Αν όλοι συνεισφέρουν 7 νομίσματα, λείπουν 3.Πείτε τον αριθμό των ανθρώπων και την τιμή των προβάτων».

- «Ένας κύριος έχει δύο άλογα μεγάλης αξίας και μια σέλα αξίας 50 νομισμάτων. Τώρα αν η σέλα τοποθετηθεί στο πίσω μέρος του πρώτου αλόγου, θα κάνει την αξία του να είναι διπλάσια από αυτή του δεύτερου. Αλλά εάν βρεθεί στο πίσω μέρος του δεύτερου, θα κάνει την αξία του τριπλή από εκείνη του πρώτου. Ποια είναι η αξία κάθε αλόγου;». Τα νομίσματα που αναφέρονται δεν είναι τα νομίσματα των Κινέζων εκείνης της εποχής.

2.5.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στο όγδοο κεφάλαιο απαντάται η δεύτερη μέθοδος για τα γραμμικά συστήματα. Πρόκειται πάλι για αρχικές εικασίες, ωστόσο είναι σχεδόν ταυτόσημη με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. O Jiuzhang Suanshu δεν παρέχει καμία εξήγηση για το γιατί αυτή η μέθοδος λειτουργεί ή πώς προέκυψε. Παρατίθεται το πρόβλημα 1 του κεφαλαίου 8 που δείχνει αναλυτικά τα βήματα της μεθόδου:

«Υπάρχουν 3 κατηγορίες σιταριού και 3 σωροί από την πρώτη, 2 από τη δεύτερη και 1 από την τρίτη κατηγορία. Μαζί κάνουν 39 μετρικές μονάδες. Όμως 2 από την πρώτη, 3 από τη δεύτερη και 1 από την τρίτη κάνουν 34 μονάδες. Τέλος 1 από την πρώτη,2 από τη δεύτερη και 3 από την τρίτη κάνουν 26 μονάδες. Από πόσες μονάδες σιταριού αποτελείται ο κάθε σωρός;» Σήμερα θα είχαμε το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Ο κινέζικος αλγόριθμος έλεγε: «Τοποθέτησε τους 3, τους 2 και τον 1 σωρό των 3 κατηγοριών καθώς και την ποσότητα των μονάδων τους δεξιά. Τοποθέτησε τα δεδομένα των άλλων συνθηκών στο μέσον και στα αριστερά». Επομένως έχουμε :

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Συνεχίζει: «Τώρα πολλαπλασίασε τη μεσαία στήλη με την πρώτη κατηγορία της δεξιάς στήλης και αμέσως παράλειψε». Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τη μεσαία στήλη με το 3 (πρώτη κατηγορία της δεξιάς στήλης) και έπειτα αφαιρούμε τη μεσαία στήλη από τη διπλάσια της δεξιάς για να προκύψει 0 στην πρώτη θέση της μεσαίας. Δηλαδή:

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Το ίδιο και με την αριστερή στήλη:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

«Τώρα με αυτό που απομένει στη δεύτερη κατηγορία της μεσαίας στήλης αμέσως παράλειψε». Δηλαδή τις ίδιες πράξεις αλλά με τη μεσαία και την αριστερή στήλη:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Αυτό ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2y + \quad z = 39 \\ \qquad 5y + \quad z = 24 \\ \qquad\qquad 36z = 99 \end{cases}$$

Ο συγγραφέας εξηγεί πως επιλύεται αυτό το σύστημα με τη μέθοδο που σήμερα ονομάζεται «ανάστροφη αντικατάσταση» αρχίζοντας από την z=$\frac{99}{36}$=2¾.

Οι τρόποι που κατέληγαν όμως στα αποτελέσματα δεν υποδεικνύονταν από το συγγραφέα ωστόσο πάντα έβρισκαν ακριβείς λύσεις. Εικάζεται πως οι Κινέζοι είχαν ανακαλύψει πως αφαιρώντας πολλαπλάσια εξισώσεων ανάγονται σε συστήματα ισοδύναμα λύσεων με το αρχικό. Ακριβώς την ίδια πορεία θα ακολουθούσε και ένας λύτης στον άβακα με τις λογιστικές ράβδους. Αναρωτιέται κανείς όμως τι τακτική ακολουθούσαν αν στις πράξεις τους κατέληγαν σε αρνητικό αριθμό.

- Το πρόβλημα 3 αναγόταν στο εξής σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y \qquad = 1 \\ \quad 3y + z = 1 \\ x \qquad + 4z = 1 \end{cases}$$

Δεν υπήρχε κάποιο πρόβλημα καθώς ο συγγραφέας έλεγε: «Για την αφαίρεση – εάν τα πρόσημα είναι ίδια αφαίρεσε τη μία από την άλλη. Εάν τα πρόσημα είναι διαφορετικά πρόσθεσε τη μία στην άλλη. Θετικό από τίποτε δίνει αρνητικό, αρνητικό από τίποτε δίνει θετικό. Για την πρόσθεση - εάν τα πρόσημα είναι διαφορετικά αφαίρεσε τη μία από την άλλη. Εάν τα πρόσημα είναι ίδια πρόσθεσε τη μία στην άλλη. Θετικό και τίποτε δίνει θετικό, αρνητικό και τίποτε δίνει αρνητικό». Ακολουθούν προβλήματα του όγδοου κεφαλαίου:

- Το πρόβλημα 13 είναι ένα παράδειγμα δύσκολου συστήματος με 5 εξισώσεις 6 αγνώστων:

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ 3y+z = s \\ 4z+u = s \\ 5u + v = s \\ 6v = s \end{cases}$$

Η μέθοδος οδηγεί στην εξίσωση v $=\frac{76s}{721}$. Αν s=721 τότε v=76.Αυτή είναι και η μόνη απάντηση που δίνεται. Δεν υπάρχει όμως η παραμικρή ένδειξη τόσο για τους Κινέζους όσο και για τους Βαβυλώνιους αν είχαν ερευνήσει και για άλλες λύσεις ή αν γνώρισαν το άπειρο σύνολο των λύσεων του συστήματος. Για αυτό και στις περισσότερες περιπτώσεις ασχολούνταν με συστήματα ίδιου αριθμού εξισώσεων και αγνώστων.

- Στο ίδιο πλαίσιο κινείται και το πρόβλημα των «100 πτηνών» από το μαθηματικό εγχειρίδιο του Zhang Quijian, περίφημο πρόβλημα επειδή εμφανίζεται σε διάφορες μορφές σε μαθηματικά έργα στην Ινδία, τον Ισλαμικό κόσμο και την Ευρώπη. Το αρχικό πρόβλημα του Zhang ήταν: «Ένας πετεινός κοστίζει 5 νομίσματα, μία κότα 3 νομίσματα και 3 κοτόπουλα 1 νόμισμα. Με 100 νομίσματα αγοράσαμε 100 πτηνά. Πόσους πετεινούς, κότες και κοτόπουλα αγοράσαμε;». Το σύστημα που θα φτιάχναμε σήμερα θα ήταν το εξής:

$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Ο Zhang δίνει 3 απαντήσεις: 4/8/12 πετεινούς,18/11/4 κότες και 78/81/84 κοτόπουλα αντίστοιχα. Υπαινίσσεται τη μέθοδό του: «Αύξησε το πλήθος των πετεινών τέσσερις φορές τη φορά, μείωσε τις κότες εφτά φορές τη φορά και αύξησε τα κοτόπουλα τρεις φορές τη φορά». Παρατήρησε δηλαδή πως η μεταβολή των τιμών αφήνει τόσο το κόστος όσο και το πλήθος των πουλερικών αμετάβλητο. Τροποποιώντας την απαλοιφή του Gauss,που υπάρχει στο Jiuzhang suanshu, βρίσκουμε τη λύση:

$$x=-100+4t, \; y=200-7t, \; z=3t$$

Και σε αυτό το πρόβλημα δεν κατάφερε κανείς από τους μετέπειτα μελετητές να δώσει εύλογη αιτιολόγηση της μεθόδου ή του τρόπου γενίκευσης της σε άλλα προβλήματα. Το σπουδαίο εδώ είναι πως οι 3 λύσεις που δόθηκαν στο έργο είναι και οι μοναδικές θετικές, γεγονός που προβληματίζει για το αν ήξερε ο συγγραφέας να ψάξει άλλο συνδυασμό λύσεων ή αν εφάρμοσε όντως τον παραπάνω τρόπο.

- Το πρόβλημα 7, θα μπορούσε κάλλιστα να είναι ένα πρόβλημα σχολικού βιβλίου. Θέτει το εξής πρόβλημα ο συγγραφέας: «Υπάρχουν 5 βόδια και 2 πρόβατα τα οποία κοστίζουν 10 αργυρά liang. Ενώ 2 βόδια και 5 πρόβατα κοστίζουν 8 αργυρά liang. Πείτε ποιο είναι το κόστος μιας αγελάδας και ενός προβάτου, αντίστοιχα». Το liang είναι μια αρχαία κινεζική μονάδα βάρους που αντιστοιχεί σε περίπου 16 γραμμάρια ή λίγο περισσότερο από μισή ουγγιά, σε σύγχρονες μονάδες (Shen et al., 1999, σελ. 9-11). Η λύση είναι παρόμοια με τα προηγούμενα προβλήματα.

- Το πρόβλημα 8 απαιτεί τη χρήση αρνητικών αριθμών στη διαμόρφωση του πίνακα. Είναι το εξής: «Τώρα πούλησε 2 αγελάδες και 5 πρόβατα, για να αγοράσεις 13 γουρούνια. Υπάρχει πλεόνασμα 1000 μετρητά. Πούλησε 3 αγελάδες και 3 γουρούνια για να αγοράσεις 9 πρόβατα. Υπάρχουν ακριβώς τα μετρητά. Πούλησε 6 πρόβατα και 8 γουρούνια. Έπειτα αγόρασε 5 αγελάδες. Υπάρχει έλλειμμα 600 νομίσματα. Πείτε ποια είναι η τιμή μιας αγελάδας, ενός προβάτου και ενός γουρουνιού αντίστοιχα» (Shen et al., 1999, σελ. 409).

- Το πρόβλημα 12 λύνεται και αυτό με τριγωνοποίηση. Το πρόβλημα λέει το εξής: «Υπάρχουν τρία είδη αλόγων. Τα στρατιωτικά άλογα, τα συνηθισμένα άλογα και τα κατώτερα άλογα. Ένα στρατιωτικό άλογο με ένα συνηθισμένο άλογο μπορεί να μεταφέρει 400 κιλά πάνω σε ένα βουνό. Δύο συνηθισμένα άλογα και ένα κατώτερο άλογο μπορούν επίσης να φέρουν 400 κιλά πάνω σε ένα βουνό. Τέλος, τρία κατώτερα άλογα και ένα στρατιωτικό άλογο μπορούν επίσης να φέρουν 400 κιλά πάνω σε ένα βουνό. Πόσο μπορεί να φέρει κάθε είδος αλόγου;»

- Ίδια τακτική ακολουθούμε και στο πρόβλημα 14: «Έχουμε δύο τετραγωνικά bu χωράφια λευκών σπόρων, 3 τετραγωνικά bu χωράφια πράσινων σπόρων,4 τετραγωνικά bu χωράφια κίτρινων σπόρων και 5 τετραγωνικά bu χωράφια μαύρων σπόρων. Κάθε τύπος αποδίδει λιγότερο από 1 dou σπόρους. Τα χωράφια λευκών σπόρων απαιτούν 1 τετραγωνικό bu κάθε ένα από ένα χωράφι πράσινων και ένα χωράφι κίτρινων κόκκων για να δώσουν 1 dou. Τα χωράφια των πράσινων σπόρων απαιτούν 1 τετραγωνικό bu κάθε ένα από ένα χωράφι κίτρινων και ένα χωράφι μαύρων σπόρων για να δώσουν 1 dou. Τα χωράφια των κίτρινων σπόρων απαιτούν 1 τετραγωνικό bu κάθε ένα από ένα χωράφι μαύρων και ένα χωράφι λευκών σπόρων για να δώσουν 1 dou. Και τα χωράφια μαύρων σπόρων απαιτούν 1 τετραγωνικό bu ενός χωραφιού λευκών και ενός χωραφιού πράσινων σπόρων για να δώσουν 1 dou. Πόσους σπόρους αποδίδει 1 τετραγωνικό bu από κάθε τύπο χωραφιού;»

- Πρόβλημα 16: «Δεδομένου ότι ένας δικαστής επαρχίας, 5 αξιωματούχοι και 10 υπάλληλοι τρώνε συνολικά 10 κοτόπουλα. Επίσης 10 δικαστές, 1 αξιωματούχος και 5 υπάλληλοι τρώνε 8 κοτόπουλα. Αλλά και 5 δικαστές, 10 αξιωματούχοι και 1 υπάλληλος τρώνε 6 κοτόπουλα. Πόσα κοτόπουλα τρώει ο καθένας;»

- Πρόβλημα 17: «Δεδομένου ότι 5 πρόβατα,4 σκυλιά,3 κότες και 2 κουνέλια κοστίζουν συνολικά 1496 νομίσματα. Επίσης 4 πρόβατα,2 σκυλιά,6 κότες και 3 κουνέλια κοστίζουν 1175 νομίσματα. Επιπρόσθετα 3 πρόβατα,1 σκύλος,7 κότες και 5 κουνέλια κοστίζουν 958 νομίσματα. Αλλά και 2 πρόβατα, 3 σκυλιά, 5 κότες και 1 κουνέλι κοστίζουν 861 νομίσματα. Πόσο κοστίζει κάθε ζώο;»

2.6 ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ (5ος αιώνα μ.Χ.- 15ος αιώνα μ.Χ.)

2.6.1 ΛΕΟΝΑΡΝΤΟ ΤΗΣ ΠΙΖΑΣ Ή ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ

Ένα μεγάλο όνομα στους επιστημονικούς κύκλους εκείνης της εποχής ήταν ο Λεονάρντο της Πίζας (Σεπτέμβριος 1175 – 1240), γνωστός και ως Λεονάρντο Πιζάνο (Leonardo Pisano) ή Φιμπονάτσι (Fibonacci).Ήταν Ιταλός μαθηματικός που έμεινε στην ιστορία για την περίφημη Ακολουθία Φιμπονάτσι και για την εισαγωγή στην Ευρώπη του αραβικού δεκαδικού συστήματος αρίθμησης καθώς και άλλων μαθηματικών καινοτομιών σε μια σκοτεινή εποχή για τις επιστήμες στην Ευρώπη.

Το διασημότερο αριστούργημά του, ήταν το *Libberabbaci* (Το βιβλίο του υπολογισμού). Η λέξη abbaci δεν αναφέρεται σε κάποια υπολογιστική συσκευή, αλλά σε κάθε είδους υπολογισμό. Στην πραγματικότητα ο Λεονάρδος παρουσίασε τα μαθηματικά του Ισλάμ του δέκατου αιώνα και αυτό που δίνει αξία στο σύγγραμμά του είναι πως αποτελούσε την πρώτη συγκεντρωτική εισαγωγή στην Ευρώπη των μαθηματικών που υπήρχαν στα έργα των μουσουλμάνων. Παρείχε μία μεγάλη ποικιλία μεθόδων που αποτέλεσαν την αφετηρία για πιο σύγχρονες μεθόδους.

2.6.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ

Σε αυτό το έργο υπάρχουν κανόνες με τα νέα ινδοαραβικά ψηφία, ποικίλα πρακτικά προβλήματα πλαισιωμένα από τα συνηθισμένα σημερινά αλγεβρικά εγχειρίδια, το κινέζικο πρόβλημα των υπολοίπων, προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού και λιγοστή θεωρία για την άθροιση σειρών και γεωμετρικών αποδείξεων τύπων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Σχετικά με τα γραμμικά συστήματα, περιέχει δύο προβλήματα που τα επιλύει αρκετά διαισθητικά αλλά σε επόμενα προβλήματα δίνει πιο σαφείς αλγεβρικές οδηγίες. Ορισμένα είναι τα εξής:

- Δύο άνδρες έχουν κάποια χρήματα. Ο πρώτος λέει στο δεύτερο: «Εάν μου δώσεις ένα δηνάριο, θα έχουμε τα ίδια χρήματα». Ο δεύτερος λέει στον πρώτο: «Εάν μου δώσεις ένα δηνάριο θα έχω δέκα φορές το ποσόν που έχεις». Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Με μοντέρνο συμβολισμό όπου x,y τα χρήματα του πρώτου και του δεύτερου αντίστοιχα, θα είχαμε: $\begin{cases} x+1=y-1 \\ y+1=10(x-1) \end{cases}$.

Ο Λεονάρδος προσθέτει έναν νέο άγνωστο, τον z=x+y (το συνολικό ποσόν).Τότε έχουμε : $\begin{cases} x+1=\frac{1}{2}z \\ \mathrm{y}+1=\frac{10}{11}z \end{cases}$. Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις έχουμε : z+2= $\frac{31}{22}$z.Από εδώ έχουμε πως z=$\frac{44}{9}$, x=1$\frac{4}{9}$, y=3$\frac{4}{9}$.

- Επίσης υπάρχουν προβλήματα με παραπάνω από 2 μεταβλητές. Για παράδειγμα ο πρώτος, ο δεύτερος και ο τρίτος άνδρας σε μία ομάδα τεσσάρων ανδρών έχουν μαζί 27 δηνάρια. Ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος έχουν μαζί 31 δηνάρια, ο τρίτος, ο τέταρτος και ο πρώτος έχουν 34 δηνάρια ενώ ο τέταρτος, ο πρώτος και ο δεύτερος έχουν 37 δηνάρια. Σε σύγχρονη μορφή θα φτιάχναμε το 4x4 σύστημα :

$$\begin{cases} x+y+z=27 \\ \mathrm{y}+\mathrm{z}+\mathrm{w}=31 \\ \mathrm{x}+\mathrm{z}+\mathrm{w}=34 \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{w}=37 \end{cases}$$

Ο Λεονάρδος γρήγορα υπολογίζει πως το τριπλάσιο του συνολικού ποσού είναι 129 δηνάρια προσθέτοντας όλες τις εξισώσεις. Εύκολα υπολογίζει τις επιμέρους εξισώσεις. Σε παρόμοιο πρόβλημα που ανάγεται στο σύστημα

$$\begin{cases} x+y=27 \\ \mathrm{y}+\mathrm{z}=31 \\ \mathrm{z}+\mathrm{w}=34 \\ \mathrm{x}+\mathrm{w}=37 \end{cases}$$

παρατηρεί πως είναι αδύνατο αφού υπάρχουν δύο διαφορετικά αποτελέσματα για το συνολικό ποσόν. Συγκεκριμένα από τις (1) και (3) προκύπτει πως είναι 61 και από τις (2) και (4) προκύπτει πως είναι 68.

- Το πιο περίφημο πρόβλημα του συγγράμματος είναι το πρόβλημα με τα κουνέλια. Πόσα ζευγάρια κουνέλια παράγονται από ένα ζευγάρι κατά έναν χρόνο; Κάποιος βάζει ένα ζευγάρι κουνέλια σε έναν τόπο που είναι φραγμένος με τοίχο. Θέλουμε να μάθουμε πόσα ζευγάρια θα παραχθούν από το ζευγάρι αυτό σε έναν χρόνο, υποθέτοντας ότι φυσιολογικά γεννιέται ένα ζευγάρι κουνέλια το μήνα και ότι κάθε νέο ζευγάρι μπορεί να αναπαραχθεί από το δεύτερο μήνα και μετά. Το σκεπτικό του Λεονάρδου είναι το εξής:

➢ Μετά τον πρώτο μήνα θα υπάρχουν δύο ζευγάρια μετά τον δεύτερο τρία ζευγάρια κτλ.

➢ Τον τρίτο μήνα αναπαράγονται δύο ζευγάρια, οπότε στο τέλος του μήνα υπάρχουν 5 ζευγάρια.

➢ Τον τέταρτο μήνα αναπαράγονται τέσσερα ζευγάρια οπότε στο τέλος υπάρχουν οχτώ ζευγάρια.

➢ Συνεχίζοντας στο τέλος του δωδέκατου μήνα θα υπάρχουν 377 ζευγάρια.

➢ Καταγράφει την ακολουθία 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377 και παρατηρεί πως κάθε όρος της είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων.

➢ Πρόκειται για τη γνωστή σήμερα ακολουθία Fibonacci από την οποία προέκυψαν εξαιρετικές ιδιότητες που ούτε ο ίδιος ο Λεονάρδος δε γνώριζε. Ανάμεσά τους και η σχέση με το ελληνικό πρόβλημα που αφορά τη διαίρεση μίας ευθείας στο μέσο και άκρο λόγο.

2.6.3 JORDANUSDENEMORE

Ένας πιο σύγχρονος του Λεονάρδου ήταν ο Jordanus de Nemore ο οποίος δίδαξε στο Παρίσι γύρω στο 1220 μ.Χ. Στο έργο του «Η Αριθμητική» ασχολείται με ευκλείδεια θέματα όπως τους λόγους, τις αναλογίες, τους πρώτους και σύνθετους αριθμούς, τον ευκλείδειο αλγόριθμο και τη γεωμετρική άλγεβρα των *Στοιχείων*II. Εκτός από υλικό εμπνευσμένο από τον Ευκλείδη, συναντάται και η λεπτομερής μελέτη ονοματισμένων λόγων του Νικόμαχου αλλά και προβλήματα του Λεονάρδου.

2.6.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ JORDANUSDENEMORE

Σχετικά με τα γραμμικά συστήματα, ο Jordanus ασχολήθηκε όταν θέλησε να λύσει προβλήματα με αναλογίες. Για αυτό θα δούμε την πρόταση II-18 : «Εάν δοθείς αριθμός διαιρεθεί σε μέρη οποιουδήποτε πλήθους, που η συνεχής αναλογία τους δίνεται, τότε κάθε μέρος είναι προσδιορισμένο». Ο Jordanus, όπως και οι σύγχρονοί του, δεν είχε τρόπο να εκφράσει οποιοδήποτε πλήθος μερών, θεωρεί έναν που διαιρείται σε τρία μέρη : $a=x+y+z$. Θεωρεί γνωστούς τους λόγους $\frac{x}{y}=b$ και $\frac{y}{z}=c$. Σημειώνει πως ο λόγος $\frac{x}{z}$ είναι γνωστός. Επειδή το a είναι γνωστό μπορούμε να προσδιορίσουμε τα x,y,z.Με ένα παράδειγμα ακολουθούμε τη λεκτική του περιγραφή:

➢ Έστω $60=x+y+z$, $x=2y$, $y=3z$.

➢ Εύκολα προκύπτει $x=6z$.

➢ Επομένως $y+z=\frac{2}{3}x$.

➢ Άρα με αντικατάσταση στην αρχική $60=1\frac{2}{3}x$.

- Άρα x=36, y=18, z=6.

Η ευκολία με την οποία αντιστρέφει τους λόγους δείχνει τη βαθιά κατανόηση του Jordanus για τους λόγους και το συνδυασμό τους.

2.7 ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ (15ος αιώνα μ.Χ. -17ος αιώνα μ.Χ.)

Κατά τον ύστερο Μεσαίωνα η Αναγέννηση ξεκινά από την Ιταλία και εξαπλώνεται σε όλη την Ευρώπη. Η Ιταλία, η Γερμανία και η Γαλλία αναπτύσσονται ραγδαία στον τομέα της άλγεβρας λόγω αναγκών στο εμπόριο και την οικονομία. Στη Γαλλία συγκεκριμένα ο Nicolas Chuquet (15ος αιώνας),γιατρός στο επάγγελμα, έγραψε τη μαθηματική πραγματεία του στη Λυών λίγο πριν το τέλος της ζωής του το 1484. Πρόκειται για το έργο *Tripaty* με περιεχόμενο αριθμητικής και άλγεβρας χωρισμένο σε τρία μέρη, το οποίο αποτελούσε βάση κανόνων που έβρισκαν εφαρμογές σε τρία μετέπειτα συναφή έργα με προβλήματα από διάφορα πεδία.

2.7.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε αυτό το έργο ο Chuquet σημειώνει πως το συγκεκριμένο σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους έχει πολλαπλές λύσεις. Για να λύσει το σύστημα: $\begin{cases} x+y=3z \\ x+z=5y \end{cases}$ θέτει x=12 και έπειτα βρίσκει y=$3\frac{3}{7}$, z=$5\frac{1}{7}$ ενώ για y=8 βρίσκει x=28 και z=12.Επομένως συμπεραίνει, «φαίνεται ότι ο προτεινόμενος αριθμός και μόνον προσδιορίζει την εκάστοτε απάντηση». Καθώς ο Chuquet έβρισκε τριπλέτες λύσεων, παρατηρείται πως για πρώτη φορά στην Ευρώπη κάποιος δέχεται αρνητικές λύσεις. Ωστόσο δεν ήταν συνεπής καθώς σε άλλα προβλήματα απέρριπτε τις αρνητικές λύσεις ενώ ουδέποτε θεωρεί λύση το μηδέν.

Ο Viѐte στο έργου του τα *Πέντε Βιβλία της Ζητητικής* (1591) για να υπολογίσει ποικίλα προβλήματα της αρχαίας και πιο σύγχρονής του άλγεβρας, κλήθηκε να επιλύσει συστήματα. Σχετικά με τα γραμμικά αρχίζει την αντιμετώπισή τους όπως ο Διόφαντος και ο Jordanus de Nemore: Έστω η διαφορά και το άθροισμα δύο αριθμών. Να βρεθούν οι αριθμοί. Ο Viѐte προσεγγίζει το πρόβλημα άμεσα: Εάν B η διαφορά και D το άθροισμα και A ο μικρότερος αριθμός από τους δύο, τότε ο μεγαλύτερος είναι ο E=A+B.Άρα το άθροισμα τους είναι το 2A+B που ισούται με D.Επομένως 2A=D-B και A= ½ D-½B ενώ ο μεγαλύτερος αριθμός είναι ο

E=½D+½B.Έχοντας γράψει την απάντηση συμβολικά την αναδιατυπώνει λεκτικά: «Το μισό του αθροίσματος των αριθμών μείον το μισό της διαφοράς τους ισούται με το μικρότερο συν το μισό αυτής της διαφοράς με το μεγαλύτερο». Έπειτα ολοκληρώνει με ένα παράδειγμα: για B=40,D=100 τότε A=30 και E=70.Ενώ έχει εισάγει συμβολικές μεθόδους, συχνά επαναδιατυπώνει τις απαντήσεις λεκτικά ίσως θέλοντας να πείσει τους σκεπτικιστές πως η νέα συμβολική μέθοδος μπορεί πάντοτε να μεταγραφεί σε μια πιο οικεία ρητορική εκφραστική μορφή.

Είναι διαφωτιστικό να δούμε τις διαφορές στους τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος από τους Διόφαντο, Jordanus και Viète.

- Ο Διόφαντος διατυπώνει το πρόβλημα γενικά αλλά το λύνει μόνο για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα.
- Ο Jordanus το λύνει γενικά αλλά και λεκτικά.
- Ο Viète το επιλύει τελείως συμβολικά .

Αυτή διαφοροποίηση δείχνει το μετασχηματισμό που υπέστη η άλγεβρα μέσα σε 1350 χρόνια.

2.8 ΕΥΡΩΠΗ (18^{ος} αιώνας μ.Χ. - 19^{ος} αιώνας μ.Χ.)

2.8.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Παλαιότερα από τη μέθοδο γραφημάτων για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, η μέθοδος αντικατάστασης εντοπίζεται εύκολα στα βιβλία άλγεβρας της δεκαετίας του 1800. Ωστόσο, δεν είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος. Σε πολλές περιπτώσεις δεν αξίζει καν να εφαρμοστεί.

Η αντικατάσταση εμφανίζεται στην άλγεβρα του Joseph Ray, MD, ενός παραγωγικού συγγραφέα βιβλίων στα μέσα του 1800. Η αντικατάσταση μπορεί επίσης να βρεθεί στο Bibliothèque Universelle Des Dames, Algebre, Tome Second, A Paris, Avec Approbation & Privilege du Roi, 1789. Η ιστορική αξία σε αυτό το βιβλίο δεν παρατηρεί ότι η αντικατάσταση χρησιμοποιήθηκε στα τέλη του 1700. Μάλλον, η σημασία είναι ότι το βιβλίο εγκρίθηκε από τον βασιλιά "Roi",το έτος της Γαλλικής Επανάστασης. Μπορεί να ήταν η τελευταία του "βασιλική" πράξη πριν τον αποκεφαλισμό.

Στην «Πραγματεία για την Άλγεβρα» (1848) ο George Perkins φαίνεται να έχει εμμονή με τη χρήση υποκατάστασης με συστήματα εξισώσεων. Παρακάτω είναι το πρώτο απλό παράδειγμα του που πρέπει να λυθεί με αντικατάσταση.

$$5x+2y = 45$$

$$4x + y = 33$$

Αμέσως μετά από αυτό το παράδειγμα, περνά σε συστήματα με 3 αγνώστους. Θα δοθούν 3 προβλήματα από αυτά των Ray και Perkins οι οποίοι παρόλο που τα έλυσαν με τη μέθοδο της αντικατάστασης, υπάρχουν πολλοί πιο εύκολοι τρόποι επίλυσης.

- «Ένα αγόρι δίνει 84 σεντ για να προμηθευτεί λεμόνια και πορτοκάλια και πουλάει 3 σεντ το κάθε λεμόνι και 5 σεντς το κάθε πορτοκάλι. Ακολούθως πωλούσε το 1/2 των λεμονιών και το 1/3 των πορτοκαλιών, για 40 σεντς και με τον τρόπο έβγαλε κέρδος 8 σεντς. Πόσα αγόρασε από τον καθένα; (*Άλγεβρα*, 1848)»

Λύση:8 λεμόνια και 12 πορτοκάλια

- «Ένας αγρότης έχει 2 άλογα και μια σέλα αξίας 25 δολαρίων. Αν η σέλα τοποθετηθεί στο πρώτο άλογο, η αξία του θα είναι διπλάσια από αυτή του δεύτερου. Αλλά εάν η σέλα τοποθετηθεί στο δεύτερο άλογο, η αξία του θα είναι τριπλάσια από την πρώτη. Απαιτείται η αξία κάθε αλόγου. (*Άλγεβρα*, 1848)»

Λύση: 15,20

- «Ένα άτομο έχει τρία άλογα και μια σέλα, η οποία από μόνη της αξίζει 220 δολάρια. Εάν βάλει τη σέλα στο πίσω μέρος του πρώτου αλόγου, θα κάνει την αξία του ίση με αυτή του δεύτερου και του τρίτου. Αλλά αν το βάλει στο πίσω μέρος του δεύτερου αλόγου, θα κάνει την αξία του διπλάσια από του πρώτου και του τρίτου. Αν τη βάλει στο πίσω μέρος του τρίτου αλόγου, θα κάνει την αξία του τριπλή από εκείνη του πρώτου και δεύτερου. Ποια είναι η αξία κάθε αλόγου; (*Πραγματεία της Άλγεβρας*, 1848)»

Λύση: 20, 100, 140

3. ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Οι μαθηματικές δεξιότητες είναι το κλειδί για την καθιέρωση μίας επιστημονικής και τεχνολογικής κοινωνίας. Είναι επίσης σημαντικό να δημιουργηθεί μια γενιά ικανή στον τομέα της επιστήμης και της τεχνολογίας με σκοπό τη συνεχή πρόοδο στην εποχή της παγκοσμιοποίησης. Οι μαθηματικές δεξιότητες δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εξελιχθούν σε διάφορους τομείς όπως η οικονομία, η μηχανική, οι επιχειρήσεις, η επιστήμη των υπολογιστών και η τεχνολογία. Τα μαθηματικά δοκιμάζουν τη νοημοσύνη των μαθητών να σκέφτονται και να επιλύουν καθημερινά προβλήματα ζωής.

Σε αυτήν την προσπάθεια ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψεις, δημιουργούνται συχνά, αν όχι διαρκώς, παρανοήσεις που αφορούν έννοιες, εργαλεία, αλγορίθμους, μοντελοποίηση προβλημάτων κ.ά. Κάθε μαθητής δεν έρχεται «κενός» στην κάθε έναρξη σχολικής χρονιάς, αλλά φέρνει την προηγούμενη γνώση μαζί του μαζί με τις παρανοήσεις που έχει μαζέψει. Έχει συσχετιστεί η κατοχή καλής γνώσης περιεχομένου με τη μνήμη (Chi, 1978, Tenenbaum, Tehan, Stewart, & Christensen, 1999), με τη δημιουργία συμπερασμάτων(Chi, Hutchinson, & Robin, 1989), με την κατηγοριοποίηση (Chi, Feltovich, & Glaser, 1981), τη στρατηγική χρήση (Gaultney, 1995, Schwanenflugel & Alexander, 1994) και με λογικά επιχειρήματα (Gobbo & Chi, 1986, Johnson, Scott & Mervis, 2004). Επομένως, οι μαθητές που δεν προσπαθούν να κατακτήσουν αυτήν τη σημαντική γνώση είναι σε μειονεκτική θέση ως προς την επιτυχή επίλυση προβλημάτων ή την εκμάθηση νέων πληροφοριών. Στο πεδίο της αλγεβρικής επίλυσης προβλημάτων, βασικό στοιχείο είναι η εννοιολογική κατανόηση των χαρακτηριστικών του προβλήματος (π.χ. ισόποσο, μεταβλητές, όροι, αρνητικές ενδείξεις κ.λπ.). Πρόκειται για την εννοιολογική γνώση αυτών των χαρακτηριστικών όχι μόνο αναγνωρίζοντας τα σύμβολα ή πραγματοποιώντας μια πράξη, αλλά κατανοώντας όλες τις λειτουργίες μίας εξίσωσης και πώς η αλλαγή της θέσης της ισοδυναμίας θα επηρεάσει το συνολικό πρόβλημα. Έχει παρατηρηθεί πως η μη κατανόηση αυτών των χαρακτηριστικών μπορεί να επηρεάσει την απόδοση των μαθητών και την εκμάθηση διαδικασιών επίλυσης εξισώσεων και συστημάτων.

Πολλοί μελετητές έχουν επικεντρωθεί στη διδασκαλία και εκμάθηση της άλγεβρας στο σχολείο. Στις επόμενες ενότητες θα αναφερθούμε στις κυριότερες παρανοήσεις.

3.1 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ

Οι Booth και Watson (1990), Booth (1986), Kilpatrick (2001) και οι Stacey και MacGregor (1997) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με τις αλγεβρικές εκφράσεις επειδή δεν κατανοούν εννοιολογικά ποιες είναι και τι αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές, ειδικά όταν είναι πάνω από δύο και σε γινόμενο όπως το 7ab, ενώ επίσης δεν καταλαβαίνουν γιατί η απάντηση μπορεί να είναι κάτι διαφορετικό από έναν αριθμό (π.χ. μια αλγεβρική έκφραση, ένας παράγοντας κ.τ.λ.). Η Kieran (1992) σημείωσε ότι εκτός από την κατανόηση των εκφράσεων, οι μαθητές δυσκολεύονται να απλοποιήσουν τις εκφράσεις σωστά, που σημαίνει ότι δυσκολεύονται με το διαδικαστικό κομμάτι. Για παράδειγμα, οι μαθητές προσπαθούν να απλοποιήσουν το 30x - 5 σε 25x ή δεν εκτελούν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα όταν είναι απαραίτητο. 0O Dede (2004) επιβεβαίωσε περαιτέρω τον ισχυρισμό ενώ οι Capraro και Joffrion (2006) διαπίστωσαν ότι όταν οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν την έκφραση "κατά τέσσερα λιγότερο από έναν αριθμό" το δήλωσαν ως 4- n αντί για το n - 4.

Η διδασκαλία της κατανόησης ότι οι μεταβλητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σχηματίσουν αλγεβρικές εκφράσεις για γενίκευση μιας κατάστασης για οποιοδήποτε ποσό, μπορεί να είναι δύσκολη. Στο άρθρο «Early Algebra is Not the Same as Algebra Early», οι Carraher και άλλοι (2008) έδειξαν πώς ένας δάσκαλος βοήθησε τους μαθητές του με αυτή τη διαδικασία. Ο δάσκαλος έγραψε τα εξής : "Ο Γιάννης έχει τρεις καραμέλες λιγότερες από τη Μαρία" (Carraher et al., 2008, σελ. 244). Ενώ ο δάσκαλος εισήγαγε στην τάξη του ότι ο αριθμός των καραμελών που έχει ο Γιάννης μπορεί να είναι N καραμέλες, δηλαδή οποιοδήποτε ποσό, άφησε τους μαθητές να καταλάβουν πόσες καραμέλες έχει η Μαρία. Στην αρχή, οι μαθητές μάντεψαν ότι η Μαρία έχει επίσης N καραμέλες και ο δάσκαλος τους βοήθησε συνειδητοποιήσουν ότι αυτό θα σήμαινε πως ο Γιάννης και η Μαρία έχουν το ίδιο ποσό. Στη συνέχεια ρώτησε ποιος έχει τις λιγότερες καραμέλες και οι μαθητές απάντησαν "ο Γιάννης". Τελικά δύο μαθητές δήλωσαν ότι η Μαρία είχε N + 3 καραμέλες, δημιουργώντας έτσι μια αλγεβρική έκφραση.

Ο Van Amerom (2003) ανέφερε έναν παρόμοιο διάλογο στην τάξη, όπου δοκίμασαν κάρτες και ζήτησαν να σχηματίσουν αλγεβρικές εκφράσεις χρησιμοποιώντας τους αριθμούς και τα γράμματα (μεταβλητές) των καρτών. Οι Stacey και MacGregor (l997) ρώτησαν σε φοιτητές το ακόλουθο: "Ο Ντέιβιντ είναι 10 εκ. ψηλότερος από τον Κον. Μπορείτε να γράψετε το ύψος του Ντέιβιντ;”. Διαπίστωσαν ότι μόνο το 50% του πρώτου έτους φοιτητών μαθηματικών και το 75%

των φοιτητών μαθηματικών τρίτου ή τέταρτου έτους θα μπορούσαν να γράψουν μία σωστή έκφραση που αντιπροσωπεύει το ύψος του Ντέιβιντ (π.χ. h + 10 ή ισοδύναμο). Αυτά τα ποσοστά είναι ανησυχητικά ειδικά για φοιτητές πρώτου έτους σε σχολή μαθηματικών, ωστόσο το ίδιο ανησυχητικά είναι και για οποιαδήποτε άλλη.

Οι Weinberg και άλλοι (2004) διενήργησαν γραπτή αξιολόγηση για τις αλγεβρικές εκφράσεις σε ένα γυμνάσιο. Επίσης, συμμετείχαν σε συνεντεύξεις με τους 31 από τους μεγαλύτερους μαθητές. Δύο από τα ερωτήματα σχετικά με τη γραπτή αξιολόγηση ήταν τα παρακάτω:

Ερώτηση 1: Οι ακόλουθες ερωτήσεις αφορούν την έκφραση: 2n + 3

α) Θα μπορούσε το σύμβολο να στέκει για τον αριθμό 4; Εξηγήστε την απάντησή σας.

β) Θα μπορούσε το σύμβολο να στέκει για τον αριθμό 37; Εξηγήστε την απάντησή σας.

γ) Θα μπορούσε το σύμβολο να στέκει για την έκφραση 3r + 2; Παρακαλώ εξηγήστε την απάντησή σας.

Ερώτηση 2: Οι τούρτες κοστίζουν c δολάρια η καθεμία και τα κουλουράκια κοστίζουν b δολάρια το καθένα.

Ας υποθέσουμε ότι αγοράζω 4 τούρτες και 3 κουλουράκια. Τι συμβαίνει με το 4c + 3b;

Τα αποτελέσματα από το πρώτο ερώτημα έδειξαν ότι λιγότεροι μαθητές απάντησαν "ναι" στην ερώτηση γ από ό, τι στις ερωτήσεις α ή β. Αυτό το αποτέλεσμα δεν προκαλεί έκπληξη, δεδομένου ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται συχνά μία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει ένα αντικείμενο ή έναν αριθμό, το οποίο δεν βλέπουν ως έκφραση ικανοποιώντας αυτό το κριτήριο. Επιπλέον, οι μεγαλύτεροι μαθητές είχαν υψηλότερα ποσοστά από αυτούς της πρώτης και δεύτερης τάξης ενώ της δεύτερης είχαν υψηλότερα ποσοστά από αυτούς της πρώτης. Στην ερώτηση 2 τα ποσοστά ήταν 22%, 37% και 27% για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη τάξη αντίστοιχα. Οι περισσότεροι δήλωσαν εσφαλμένα ότι 4c + 3b σήμαινε 4 τούρτες και 3 κουλουράκια. Αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές είδαν τις μεταβλητές ως ετικέτες, με το c σημαίνει τούρτες αντί για" φορές το κόστος μιας τούρτας" και b σημαίνει κουλουράκια αντί για "φορές το κόστος από το κουλουράκι"(όπως επίσης συναντήθηκε σε ένα παρόμοιο πρόβλημα στον Swan, 2000).

Οι Graham και Thomas (2000) έβαλαν τους μαθητές τους να χρησιμοποιήσουν προγράμματα γραφικών αναπαραστάσεων για να μάθουν να χειρίζονται τα γράμματα ως καθορισμένες τιμές, γενικευμένους αριθμούς και μεταβλητές. Δοκίμασαν τα γράμματα A και B σε κάθε έναν από τους παραπάνω τρόπους και στη συνέχεια ανέλυσαν τις εκφράσεις τους. Χρησιμοποιώντας πριν και μετά τεστ (test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων/προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου), τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι το πρόγραμμα γραφικών αναπαραστάσεων βοήθησε τους μαθητές να δημιουργήσουν μια ευέλικτη εικόνα των διαφορετικών χρήσεων των γραμμάτων. Επιπλέον, οι φοιτητές απολάμβαναν τη μάθηση με το πρόγραμμα αναπαράστασης γραφικών και φαινόταν να έχουν μεγαλύτερο κίνητρο καθώς χρησιμοποιούσαν την τεχνολογία.

Ο Swan (2000) πρότεινε τις ακόλουθες μεθόδους για να βοηθήσουν τους μαθητές να καταλάβουν αλγεβρικές εκφράσεις: "Συγκρίνοντας αναπαραστάσεις μαθηματικών ισοδυναμιών: Οι μαθηματικές έννοιες έχουν πολλές αναπαραστάσεις, από συμβατικά αποδεκτές σημειώσεις έως ανεπίσημες διανοητικές αναπαραστάσεις. Αυτός ο τύπος δραστηριότητας περιλαμβάνει την κοινή χρήση, ερμηνεία, σύγκριση και ταξινόμηση των αναπαραστάσεων». Ο ίδιος πρότεινε τη χρήση επιτραπέζιων μοντέλων και επιφανειών για την αναπαραγωγή αλγεβρικών εκφράσεων. Οι Kieran και Sfard(1999), Day και Jones (1997), Briggs, Demana καιOsborne (1986) και Bottoms (2003)πρότειναν στους καθηγητές να διδάξουν τους μαθητές πως οι εκφράσεις αναπαριστούν καταστάσεις βάζοντας τους μαθητές να αντιστοιχούν τις εκφράσεις με πίνακα και γράφημα. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων και να αρχίσουν να δουλεύουν με τις συναρτήσεις. Η Kieran (2008) επεσήμανε πως οι αλγεβρικές εκφράσεις θέτουν τις βάσεις για τις εξισώσεις και η κατανόηση τους, τόσο σχετικά με τις μεταβλητές όσο και με την ισοδυναμία, είναι απαραίτητη κατά την ενασχόληση με τις εξισώσεις.

Συμπερασματικά, ο αλγεβρικός συμβολισμός είναι μια δύσκολη ιδέα την οποία οι μαθητές μπορούν να μην αντιληφθούν για διάφορους λόγους. Ένας κύριος λόγος αποτελεί το γεγονός πως συχνά αγωνίζονται με τις πολλαπλές έννοιες και χρήσεις τους και αυτό είναι αρκετά πολύπλοκο (Asquithetal., 2007;Booth, 1984;Küchemann, 1978;Philipp, 1992;Stacey & MacGregor, 2000; Stephens, 2005; Swan, 2000; Usikin, 1988). Δεύτερον, οι μαθητές έχουν δυσκολία στο να συντάξουν μία αλγεβρική πρόταση (Novotna & Hoch, 2008; Stacey & MacGregor, 1997; Warren, 2003; Welder, 2007;Witzel, 2005). Και τέλος, οι μαθητές βρίσκουν τις αλγεβρικές εκφράσεις δύσκολες επειδή δεν κατανοούν εννοιολογικά το τι ορίζουν (π.χ. το προαναφερθέν 7ab) (Booth, 1986; Booth & Watson, 1990; Carraher et aI., 2008; Stacey & MacGregor, 1997; Van Amerom, 2003).

3.2 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η Linchevski (1995) στο άρθρο της «Άλγεβρα με αριθμούς και αριθμητική με γράμματα: Ένας ορισμός της πρώιμης άλγεβρας» οργάνωσε το πρόγραμμα σπουδών της πρώιμης άλγεβρας στις εξής τέσσερις κατηγορίες:

- ανάπτυξη της έννοιας της «λύσης» μέσω παραδειγμάτων αντικατάστασης αριθμών στα γράμματα για εξάσκηση (μέσω της αριθμητικής επαλήθευσης).
- αντιμετώπιση ισοδύναμων εξισώσεων μέσω της αντικατάστασης.
- δημιουργία γνωστικών σχεδίων μέσω της αντανακλαστικής δραστηριότητας που επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιούν τις δικές τους αυθόρμητες διαδικασίες
- εξάσκηση σχηματισμού εξισώσεων ως συμπληρωματική δραστηριότητα στην επίλυση εξισώσεων (Linchevski, 1995, σελ. 117).

Οι τέσσερις αυτές κατηγορίες της πρώιμης άλγεβρας ενσωματώνουν την έννοια της αλγεβρικής εξίσωσης δείχνοντας πόσο σημαντικό ρόλο διαδραματίζει. Άλλωστε και ο Bottoms (2003) δήλωσε πως η επίλυση εξισώσεων με μια μεταβλητή, καθώς και η κατασκευή εξισώσεων μιας μεταβλητής ερχόμενη από λεκτικά προβλήματα, είναι βασική προαπαιτούμενη γνώση για την άλγεβρα. Παράλληλα αποτελεί επαρκή γνώση για τη μεταπήδηση στην επίλυση εξισώσεων με δύο μεταβλητές, τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά. Αρκετοί ερευνητές συμφώνησαν πως οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο σε εξισώσεις 2 μεταβλητών παρά μίας (Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1980). Οι μαθητές δεν μπορούν πλέον να βασίζονται στην αριθμητική για την επίλυση εξισώσεων, όπως είχαν προηγουμένως να κάνουν με τις απλές εξισώσεις για παράδειγμα στο 2x + 4 = 8 (Herscovics & Linchevski, 1994).Πρέπει να κάνουν χρήση των αλγεβρικών ιδιοτήτων (π.χ. ιδιότητες ισότητας, επιμεριστική ιδιότητα κ.τ.λ.) και να έχουν μια σταθερή αντίληψη της ισοδυναμίας για να γίνουν καλοί λύτες εξισώσεων.

Οι Kieran και Sfard (1999) αναδεικνύουν έναν διάλογο ανάμεσα σε μαθητή και δάσκαλο όπου ο μαθητής γνωρίζει τους κανόνες επίλυσης μίας εξίσωσης, αλλά όχι γιατί ισχύουν και τι αντιπροσωπεύουν. Αυτή η μη εννοιολογική κατανόηση των βημάτων είναι ένα σύνηθες φαινόμενο ειδικά όταν πρόκειται να εμπλακούν αρνητικοί αριθμοί, δεκαδικοί και κλάσματα (Wu,2001; Capraro & Joffrion, 2006; Kalchman &Koedinger,2005;Kieran, 1992). Με παρόμοιες έρευνα οι Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2018), Χρήστου Κ. (2009) σε μαθητές γυμνασίου και λυκείου, διαπίστωσαν πως βλέπουν τις μεταβλητές ως γενικευμένους αριθμούς με τάση να αντικαθιστούν στα γράμματα-μεταβλητές κυρίως φυσικούς αριθμούς. Ακόμη και σε ασκήσεις που οι ίδιοι έπρεπε να δώσουν τιμές σε μεταβλητές, αυτοί αρκούνταν μόνο σε φυσικούς. Το φαινόμενο οφείλεται του «φυσικού αριθμού» που χαρακτηρίζει την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία τους για τους φυσικούς αριθμούς για την κατανόηση και χρήση των ρητών αριθμών (Ni & Zhou,2005).

Ο Χρήστου Κ. (2009) και το φαινομενικό πρόσημο μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων. Πρόκειται για την παρερμηνεία τον μαθητών να προσδίδουν πρόσημο σε μία μεταβλητή πιστεύοντας πως μόνο τέτοιους αντιπροσωπεύει. Για παράδειγμα το «4γ» έχει φαινομενικά θετικό πρόσημο ενώ το «-β» είναι φαινομενικά μία αρνητική έκφραση. Έτσι στη συνέχεια οι μαθητές έχουν την πεποίθηση πως μόνο αρνητικοί ή μόνο θετικοί αριθμοί μπορούν να αντικατασταθούν στην κάθε παράσταση αντίστοιχα.

Οι Kieran και Sfard (1999), Kalchman και Koedinger (2005) και οι Carraher και άλλοι (2006) πρότειναν ότι οι εξισώσεις θα πρέπει να διδάσκονται παράλληλα με πίνακες και γραφήματα έτσι ώστε οι μαθητές να συνδέουν πάντα μια εξίσωση, έναν πίνακα και ένα γράφημα μαζί. Επιπλέον, πιστεύουν ότι τα προβλήματα (κυρίως ιστορικά) θα πρέπει να διδάσκονται σε συνδυασμό και αυτά με πίνακες και γραφήματα έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να δουν τις διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών εξισώσεων (Kieran & Sfard, 1999). Οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν τις μεταβλητές σε εξισώσεις ως ποσότητες που μπορούν να αντικατασταθούν από οποιονδήποτε αριθμό και όχι ως «συγκεκριμένους άγνωστους». Οι Capraro και Joffrion (2006) διαπίστωσαν ότι «... η απλή γνώση των διαδικαστικών δεξιοτήτων προκάλεσε αδυναμία στους μαθητές να επιλύσουν τα προβλήματα. Η εννοιολογική προσέγγιση της μετάφρασης από μαθηματικές λέξεις σε συμβολικές αναπαραστάσεις δεν βοήθησε τους μαθητές να πετύχουν αυτά που απαιτούνταν για να αναπτύξουν αυτήν ικανότητα» (Capraro & Joffrion, 2006, σελ. 162).

Λόγω των πολλών μεθόδων επίλυσης, αναπαραστάσεων και μοντελοποιήσεων προβλημάτων σε εξισώσεις, έχει καταγραφεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός παρανοήσεων εκ μέρους των μαθητών και για αυτό πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη αυτών. Η Kieran (1992) αναφέρει τις παρακάτω μεθόδους επίλυσης εξισώσεων όπου και βρίσκονται οι περισσότερες παρανοήσεις:

α) χρήση αριθμητικών στοιχείων και δεδομένων

β) χρήση αριθμητικών τεχνικών

γ) κάλυψη

δ) αντίστροφο σκεπτικό (ή δουλεύοντας ανάποδα)

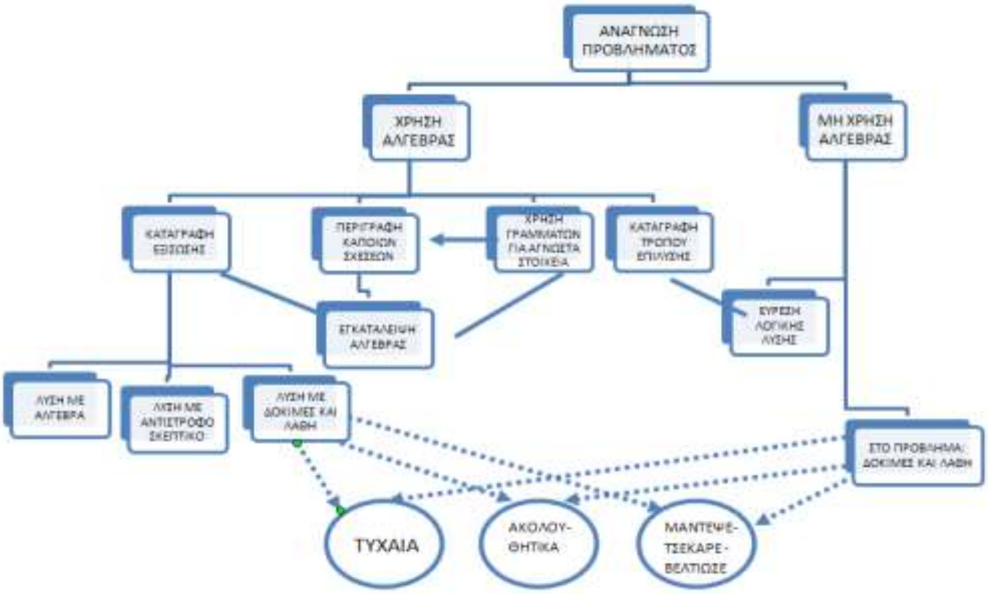
ε) αντικατάσταση με τυχαία νούμερα-δοκιμή και σφάλμα

στ) μεταφορά στα μέλη (δηλαδή αλλαγή μέλους και αλλαγή πρόσημου)

ζ) εκτέλεση ίδιας πράξης και στα δύο μέλη (Kieran, 1992, σελ. 400).

Οι δύο τελευταίες μέθοδοι, οι οποίες μεταφέρουν και εκτελούν πράξεις στα δύο μέλη θεωρούνται οι επίσημες μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων. Οι Herscovics και Kieran (1980) και Capraro και Joffrion (2006) επικροτούν τέτοιου είδους ενέργειες καθώς έτσι προωθείται και ενθαρρύνεται η έννοια της ισοδυναμίας.

Ο MacGregor (2002) ρίχνει φως σε αυτή την πολυπλοκότητα μέσω του ακόλουθου διαγράμματος, περιγράφοντας τις πιθανές διαδρομές που αρχίζουν με την ανάγνωση ενός προβλήματος.



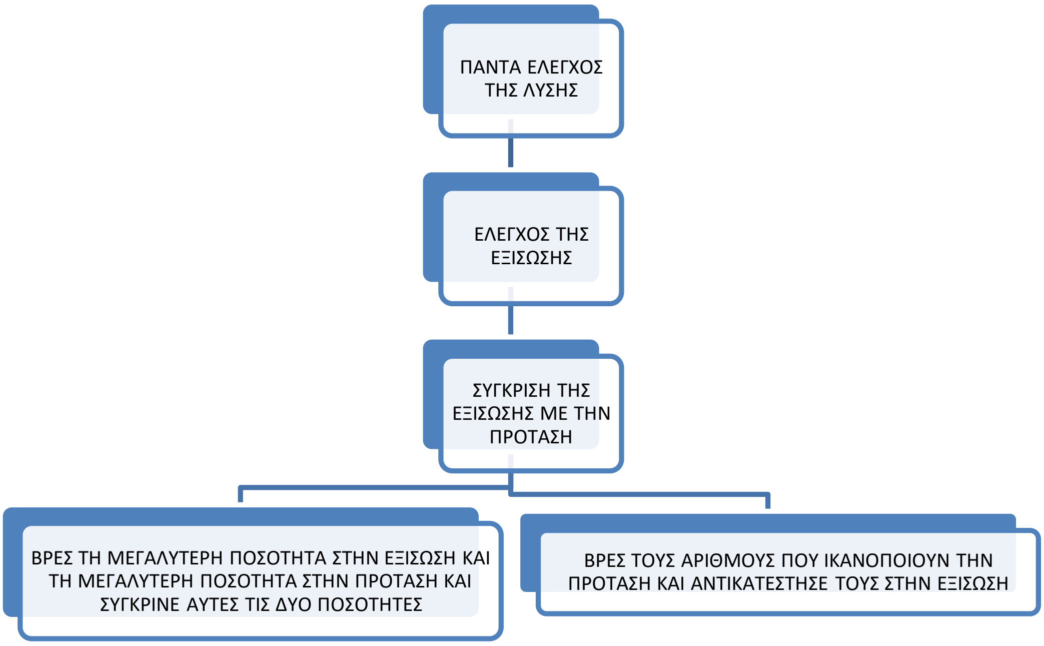
Εικόνα 7. Διάγραμμα MacGregor(2000)για την ανάγνωση προβλήματος

Οι Perrenet και Wolters (1994) ισχυρίστηκαν ότι ενώ πολλές μελέτες επικεντρώνονται στον τρόπο κατά τον οποίο οι μαθητές επιλύουν γραμμικές εξισώσεις, υπάρχει έλλειψη ερευνών που να μελετούν το πώς και αν οι μαθητές ελέγχουν τις λύσεις τους. Ως εκ τούτου, διεξήγαγαν μια έρευνα στην οποία συμμετείχαν 83 τελειόφοιτοι μαθητές από δύο λύκεια όπου εξετάσθηκε η συμπεριφορά τους ως προς τον έλεγχο λύσης. Διαπίστωσαν ότι, από τους 83 μαθητές, οι 29 δεν έλεγχαν καθόλου και από τους 54 που έκαναν έλεγχο, μόνο10 μαθητές ήταν σταθερά σωστοί στον έλεγχο. Ποσοστιαία αυτό ανάγεται σε 35% των μαθητών να μην προβαίνουν καν σε έλεγχο λύσης και το 12% να κάνει σωστό έλεγχο. Δεκατέσσερις μαθητές που έλεγξαν αλλά είχαν λάθη, επιλέχθηκαν για συνεντεύξεις. Ήταν ενδιαφέρον πως κάποιοι μαθητές έγραφαν κάθε λεπτομέρεια, συμπεριλαμβανομένων των σφαλμάτων τους ενώ άλλοι μαθητές έκαναν σφάλματα επειδή δεν έγραφαν αναλυτικά τα βήματα. Η πρώτη ομάδα μαθητών τείνουν να έχουν εννοιολογικά κενά ενώ οι μαθητές που παρακάμπτουν τα βήματα αντιλαμβάνονται πως με έναν έλεγχο θα εντόπιζαν τα λάθη αλλά δεν το εφαρμόζουν.

Η επίλυση εξισώσεων μπορεί να λάβει πολλές μορφές, συμπεριλαμβανομένων των προβλημάτων ιστορίας, των λεκτικών προβλημάτων και συμβολικών εξισώσεων. Προκειμένου οι εκπαιδευτικοί να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν παρανοήσεις και λάθη στην επίλυση εξισώσεων, είναι σημαντικό να γνωρίζουν ότι οι μαθητές εκ των προτέρων τις βρίσκουν προκλητικές και δύσκολες (Shulman,1986). Οι Nathan και Koedinger (2000) διεξήγαγαν μία μελέτη στην οποία μια ομάδα εκπαιδευτικών και ερευνητών κατέταξε με βάση τη δυσκολία, διαφορετικούς τύπους προβλημάτων επίλυσης εξισώσεων. Διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές κατατάσσουν κυρίως τα προβλήματα ιστορίας και τα λεκτικά προβλήματα ως πιο δύσκολα ενώ στην πραγματικότητα οι μαθητές ανταποκρίνονται καλύτερα στα προβλήματα που περιέχουν τη βασική άλγεβρα και γεωμετρία μέσα σε προβλήματα ιστορίας, λεκτικά και περισσότερο με αυτά που ακολουθούν μία συμβολική εξίσωση (όπως πρότεινε και ο Booth, 1984). Αυτό το εύρημα υποδεικνύει ότι πρέπει να εστιάσουμε στη συμβολική αντιπροσώπευση και κατανόηση των εξισώσεων στο επίπεδο της μέσης εκπαίδευσης (Nathan & Koedinger, 2000).

Από τις πιο γνωστές παρανοήσεις είναι η δυσκολία μοντελοποίησης ενός προβλήματος. Σε σχετική έρευνα των Clement, Lochhead & Monk (1981), δόθηκε σε φοιτητές να μοντελοποιήσουν το εξής πρόβλημα: «Γράψτε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές S και P για να αναπαραστήσετε τα παρακάτω: Υπάρχουν έξι φορές περισσότεροι φοιτητές από καθηγητές σε αυτό το πανεπιστήμιο. Χρησιμοποιήστε το S για τον αριθμό των φοιτητών και το P για τον αριθμό των καθηγητών». Ενώ η αρχική μελέτη διεξήχθη σε προπτυχιακούς φοιτητές, πολλοί συγγραφείς επανεξέτασαν και παρουσίασαν το πρόβλημα αυτό σε μαθητές (Abouchedid & Nasser, 2000;Clement, 1982; Clement, Narode, & Rosnick, 1981;Fisher, 1988;Philipp, 1992; Rosnick & Clement, 1980; Swan, 2000; Wollman, 1983). Το σφάλμα που συνήθως συναντάμε με αυτό το πρόβλημα είναι το "σφάλμα αντιστροφής" στο οποίο οι μαθητές θα γράψουν ότι 6S = P αντί για το σωστό S = 6P. Δυστυχώς, το σφάλμα αυτό εντοπίστηκε ακόμη και σε φοιτητές θετικών σχολών (Clement, Narode et al., 1981). Επιπλέον, το σφάλμα εξακολουθούσε να υπάρχει και όταν διεξήχθησαν μελέτες με την αλλαγή πράξης σε κάποια άλλη ή την ενσωμάτωση εικόνων, διαγραμμάτων και πινάκων (Clement, 1982;Fisher, 1988; Rosnick & Clement, 1980). Όσον αφορά την εφαρμογή της αρχικής έρευνας, από όπου και το πρόβλημα έμεινε γνωστό ως «το πρόβλημα των φοιτητών και των καθηγητών», οι Lochhead και Mestre(1988) περιγράφουν δύο βασικά λάθη που έκαναν οι φοιτητές. Πρώτον επιδεικνύουν μια έντονη δυναμική προς την εκτέλεση πράξεων σε μία γραμμή από τα αριστερά προς δεξιά έτσι όπως διαβάζουν το πρόβλημα, έτσι προκύπτει το κοινό σφάλμα, 6S = P. Δεύτερον, οι φοιτητές συχνά συγχέουν τη διάκριση μεταξύ μεταβλητών. Τα σύμβολα "S" και "P" συχνά ερμηνεύονται ως ετικέτες για "φοιτητές" και "καθηγητές", και όχι ως μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν τον «αριθμό φοιτητών» και τον «αριθμό καθηγητών» (Lockhead & Mestre, 1988, σελ. 129-130).

Ο Wollman (1983) αποδίδει σαν αιτίες αυτού του σφάλματος τη γρήγορη επίλυση του προβλήματος, τη χωρίς έλεγχο δημιουργία και επίλυση της εξίσωσης, την αδυναμία σύνδεσης της εξίσωσης με την έννοια της πρότασης και τη χρήση μη αλγεβρικών συμβόλων. Επιπλέον, ο Wollman παρείχε ένα διάγραμμα με την ιεραρχία των διαδικασιών που ισχύει για τη διατύπωση των εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν καταστάσεις.



Εικόνα 8. Η ιεραρχία των διαδικασιών παρακολούθησης του Wollman(1983)

Μία μελέτη των Linchevski και Herscovics (1996), σχεδιασμένη με τεστ πριν και μετά την έρευνα (pretest/posttest), προσπάθησε να αναδείξει τις δυσκολίες των παιδιών της πρώτης τάξης του γυμνασίου στην επίλυση εξισώσεων μίας μεταβλητής, όπου θα υπήρχαν στο ένα μέλος ή και στα δύο μέλη. Η έρευνα έδειξε πως οι μαθητές δυσκολεύονταν να χρησιμοποιήσουν αντίθετες πράξεις μέσα σε μία εξίσωση, οπότε κατέφευγαν σε τέτοιου είδους λύσεις:

$12n + 30 = 13n + 19 \Rightarrow 12n + 30 = 12n + 1n + 19 \Rightarrow 30 = 1n + 19.$

Ο Ashlock (2006) υπέθεσε ότι οι μαθητές έκαναν λάθη κατά την επίλυση των εξισώσεων επειδή συνδυάζουν λανθασμένα (ή δεν συνδυάζουν καθόλου) τους όμοιους όρους, πραγματοποιούν τις αντίστροφες πράξεις λανθασμένα και δεν χρησιμοποίησαν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα.

Σε μία μελέτη των Swafford και Langrall (2000),σε σχολείο της Μεσογείου, που αφορούσε υψηλής ικανότητας παιδιά έκτης δημοτικού, τους ζητήθηκε να κάνουν τις εξής ενέργειες σε 6 προβλήματα που τους δόθηκαν:

- να περιγράψουν προφορικά την κατάσταση
- να περιγράψουν το πρόβλημα συμβολικά με μεταβλητές σε γραπτή μορφή
- να πάρουν τη συμβολική τους εκπροσώπηση για να λύσουν την υπόθεση.

Όλοι οι μαθητές στη μέχρι τώρα σχολική πορεία τους δεν είχαν προηγούμενη επίσημη διδασκαλία πάνω στην άλγεβρα. Τα προβλήματα ήταν παρμένα από την καθημερινότητα (π.χ. καθίσματα αίθουσας, αναδίπλωση χαρτιού, χρήματα κ.τ.λ.) και αφορούσαν αναλογίες, γραμμικότητα, εκθετικές ακολουθίες και αντίστροφη διαδικασία. Το παράδειγμα αναλογίας ήταν το εξής: Σε ορισμένες πολιτείες, τα αλουμινένια δοχεία χρεώνονται και όταν επιστρέφονται ο καταστηματάρχης δίνει πίσω το ποσόν που αντιστοιχεί στο κόστος του δοχείου. Στη Νέα Υόρκη, είναι 5 σεντς ανά δοχείο.

α) Ποια θα ήταν η επιστροφή χρημάτων για την επιστροφή 6,10,12 δοχείων αντίστοιχα;

β) Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο ο ιδιοκτήτης του καταστήματος θα υπολογίσει το ποσό της επιστροφής για οποιοδήποτε αριθμό επιστρεφόμενων δοχείων.

γ) Έστω R αντιπροσωπεύει το ποσό επιστροφής και C αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δοχείων που επεστράφησαν. Γράψτε μια εξίσωση για το ποσό της επιστροφής χρημάτων.

δ) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση σας για να μάθετε πόσα κουτιά θα έπρεπε να επιστρέψετε για να πάρετε σαν επιστροφή $ 3,00; Πόση επιστροφή θα λάβετε αν δώσετε 100 κουτιά; (Swafford & Langrall, 2000, σελ. 17-18).

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως αρκετοί μαθητές χειρίστηκαν με ευκολία την προφορική γενίκευση των καταστάσεων και την καταγραφή εξισώσεων χρησιμοποιώντας μεταβλητές. Ωστόσο οι εξισώσεις δεν ήταν τυπικά γραμμένες όπως γνωρίζουμε στην επίσημη άλγεβρα. Αντίθετα υπήρχαν μαθητές που ενώ μπόρεσαν να περιγράψουν προφορικά την κατάσταση, αδυνατούσαν να περάσουν στη συμβολική της αναπαράσταση. Στη συνέχεια λίγοι ήταν οι μαθητές που μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν τις εξισώσεις τους για να απαντήσουν τις ερωτήσεις. Τέλος ακόμη και αυτοί οι μαθητές που προχώρησαν περισσότερο δυσκολεύτηκαν στην ερώτηση της αντίστροφης διαδικασίας όπου ρωτιούνται τώρα πόσα κουτιά πρέπει να δώσω για να πάρω ένα συγκεκριμένο ποσό αλλά και σε ερωτήματα που χρειάστηκαν μέρη συνόλου, δηλαδή αριθμοί μικρότεροι της μονάδας, όπως το μισό ή το ένα τρίτο.

Η μελέτη του Vlassis (2008) εξέτασε τις δυσκολίες των μαθητών να χρησιμοποιούν την αφαίρεση και το αρνητικό σύμβολο στην επίλυση των εξισώσεων. Ο Vlassis πήρε συνέντευξη από 17 μαθητές της δεύτερης τάξης του γυμνασίου, οι οποίοι κλήθηκαν να λύσουν έξι εξισώσεις, τρεις από τις οποίες είχαν ως αποτέλεσμα θετική λύση και τρεις με αρνητική λύση. Ο Vlassis βρήκε διαφορές στις λύσεις των μαθητών σχετικά με θετική ή αρνητική λύση. Για παράδειγμα, μια εξίσωση που παρουσιάστηκε στους μαθητές ήταν $4 - x = 5$. Ο Vlassis βρήκε ότι οι μαθητές είχαν τρεις βασικές δυσκολίες με αυτή την εξίσωση. Πρώτον, ορισμένοι μαθητές προσπάθησαν να βρουν έναν αριθμό που θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την εξίσωση (δηλαδή εικασία και έλεγχος) και δεν μπορούσαν να δώσουν απάντηση, διότι ο μικρότερος αριθμός θεωρούσαν ότι ήταν μηδέν (δεν έλαβαν υπόψη τους αρνητικούς αριθμούς). Δεύτερον, αρκετοί μαθητές έλυσαν με τον τυπικό αλγόριθμο την εξίσωση και όταν πήγαν να κάνουν επαλήθευση μπερδεύτηκαν, καθώς βρήκαν $4 - (- 1) = 5$. Αυτοί οι μαθητές πίστευαν ότι δεν ήταν δυνατόν να υπάρξουν δύο πρόσημα "αφαίρεσης" τοποθετημένα δίπλα-δίπλα. Τέλος υπήρξαν οι μαθητές οι οποίοι παρέλειψαν το αρνητικό πρόσημο. Αφού αφαίρεσαν τέσσερα και από τα δύο μέλη της εξίσωσης αντί να απλουστεύσουν σε $-x = 1$ απλοποίησαν σε $x = 1$, με αποτέλεσμα μια λανθασμένη λύση.

Στη μελέτη του Vlassis (2008), η εξίσωση με τον ελάχιστο αριθμό σωστών απαντήσεων ήταν η $-6x = 24$. Τα συνηθέστερα λάθη των μαθητών εδώ ήταν τα εξής: προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο της αντικατάστασης (εικασία και έλεγχος) με την εσφαλμένη απάντηση $x = 4$ ή έβλεπαν το $-6x$ ως $-6 + x$ (άθροισμα) ή $-6-x$(διαφορά). Στη συζήτησή του ο Vlassis πρότεινε ότι η χρήση αγκυλών βοηθά τους μαθητές να δουν τη διαφορά μεταξύ των ρόλων του "-" ως σημείου αφαίρεσης και αρνητικού πρόσημου.

Για να βοηθηθούν οι μαθητές στην αξιολόγηση των εξισώσεων, αρκετοί συγγραφείς έχουν κάνει προτάσεις προκειμένου να δημιουργηθεί εννοιολογική κατανόηση. Ο Van de Walle και άλλοι (2010) συνέστησαν στους μαθητές τους να χρησιμοποιήσουν κλίμακες αλγεβρικής ισορροπίας για να εξετάσουν εννοιολογικά εξισώσεις (algebraic balance scales). Πρόκειται για ζυγαριές, όπου ζητούνται από τους μαθητές να τοποθετήσουν είτε σχήματα τα οποία αντιστοιχούν σε κάποια κιλά είτε κάρτες οι οποίες φέρουν πάνω τους αριθμούς, με τέτοιο τρόπο ώστε να μένει η ζυγαριά πάντα σε ισορροπία. Ο Swan (2000) πρότεινε ότι οι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν σε μία "πάντα, μερικές φορές ή ποτέ "δραστηριότητα. Κατά τη διάρκεια αυτής της δραστηριότητας στους μαθητές παρουσιάζονται πολλές εξισώσεις, όπως $2t - 3 = 3 - 2t$ και $x^2= 5x$, όπου κλήθηκαν να τις ταξινομήσουν σε τρεις στήλες - πάντα αληθείς, μερικές φορές αληθείς και ποτέ αληθείς. Ο Swan διαπίστωσε ότι κατά τη διάρκεια αυτής οι μαθητές άλλαξαν το μυαλό τους πολλές φορές και αναγκάστηκαν να αιτιολογήσουν την απόφασή τους σε κάθε εξίσωση. Επιπλέον, οι μαθητές έπρεπε να "δοκιμάσουν" τις αποφάσεις τους με δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς.

Ο Hawes (2007) πρότεινε τη δραστηριότητα "δώσε το στυλό στον δίπλα" με σκοπό να βοηθηθεί όλη η τάξη και οι εκπαιδευτικοί να εντοπίσουν παρανοήσεις και λάθη μαθητών. Σε αυτήν τη δραστηριότητα ο κάθε μαθητής λύνει ένα βήμα της εξίσωσης στον πίνακα και έπειτα δίνει το στυλό στον διπλανό του να κάνει το επόμενο βήμα. Όταν γίνει μία ερώτηση, πρέπει ο μαθητής με το στυλό εκείνη τη στιγμή να απαντήσει ή να σηκώσει έναν συμμαθητή του, να βοηθήσει στην απάντηση. Η διαδικασία πηγαίνει κυκλικά, γεγονός που σημαίνει πως θα σηκωθούν όλοι αλλά χωρίς να πέσει η πίεση σε έναν και μόνο μαθητή. Ο Hawes ζήτησε από τους μαθητές του να συμπληρώσουν το έντυπο που τους είχε δώσει όπου θα έπρεπε να προβληματιστούν για τα λάθη που έγιναν. Με αυτήν τη δραστηριότητα, η ανάλυση των σφαλμάτων δεν ήταν μόνο ευθύνη του δασκάλου, αλλά και των μαθητών.

Συνοψίζοντας, οι μαθητές φαίνεται να έχουν διάφορες δυσκολίες στην επίλυση και τη συμβολική γραφή αλγεβρικών εξισώσεων. Οι έρευνες έδειξαν πως οι μαθητές δυσκολεύονται με: τον έλεγχο της λύσης τους (Perrenet & Wolters, 1994), τη συμβολική γραφή (Nathan & Koedinger, 2000; Swafford & Langrall, 2000), τις αντίθετες πράξεις μέσα σε μία εξίσωση (Abouchedid &Nasser, 2000;Clement, 1982;Clement, Lochheadet al., 1981;Fisher, 1988;Philipp,1992; Rosnick & Clement, 1980; Swan, 2000), τις πράξεις ανάμεσα σε όμοιους όρους (Ashlock,2006), με την αντίστροφη διαδικασία σκέψης (Ashlock, 2006), την επιμεριστική ιδιότητα (Ashlock,2006), τους αρνητικούς αριθμούς (Vlassis, 2008; Wu, 2001; Δημητρακοπούλου Σ. & Χρήστου Κ.,2018; Χρήστου Κ.,2009) και τους κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς (Wu,2001; Χρήστου Κ.,2009; Δημητρακοπούλου Σ. & Χρήστου Κ. ,2018). Συμπέρασμα όλων των μελετητών είναι πως συνιστάται μια εννοιολογική προσέγγιση στη διδασκαλία των αλγεβρικών εξισώσεων, που να συνδέει ένα πρόβλημα με μια εξίσωση και ένα γράφημα, όπως επισημάνουν και οι Carraher et al., 2006;Kalchman&Koedinger, 2005;Kieran & Sfard, 1999).

3.3 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Τα γραμμικά συστήματα αποτελούνται n εξισώσεις με n αγνώστους. Η κάθε εξίσωση αποτελεί μία συνάρτηση. Στην περίπτωση των 2x2 γραμμικών συστημάτων, πρόκειται για δύο συναρτήσεις με δύο αγνώστους όπου η γραφική τους παράσταση αποτελείται από μία ευθεία για την καθεμία. Το σύστημα μελετά την τομή αυτών των δύο συναρτήσεων. Είτε πρόκειται για 1 ζεύγος λύσεων, είτε για κανένα είτε για άπειρα, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να κατανοούν και να χειρίζονται τις συναρτήσεις. "Η έννοια της συνάρτησης είναι ίσως τόσο σημαντική όσο κάθε έννοια στα μαθηματικά. Εμπλέκει όλα τα μαθηματικά που έχουν διδαχθεί, από το πρώτο έτος στην άλγεβρα, από το λογισμό και πέρα μέχρι σε σχεδόν όλες τις εφαρμογές των μαθηματικών"(Willoughby, 1997, σελ. 215). Πολλοί ερευνητές ενστερνίζονται αυτήν την άποψη όπως οι Peled και Carraher (2008) ενώ επιπλέον ο Kilpatrick και άλλοι (2001) τόνισαν τη δυσκολία των μαθητών όσο αφορά την ερμηνεία και τη χρήση της συνάρτησης.

Στο δημοτικό οι μαθητές αρχίζουν να μαθαίνουν για «συναρτήσεις» και διαδικασίες χρησιμοποιώντας μια απλή "αριθμομηχανή τεσσάρων πράξεων" με επαναλαμβανόμενες λειτουργίες, χωρίς να τις ονομάζουν ακόμη συναρτήσεις (Thorpe, 1989; Willoughby, 1997) μέσω γεωμετρικών και αριθμητικών προτύπων (Blanton, 2008; Blanton και Kaput, 2005; Carraher και Schliemann, 2007). Ένας άλλος συνήθης τρόπος να εκπροσωπούν τις «συναρτήσεις» είναι να χρησιμοποιήσουν μια «λειτουργική μηχανή» όπου οι μαθητές πρέπει να εισάγουν την ανεξάρτητη μεταβλητή και η υπολογισμένη τιμή τους να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Στο γυμνάσιο, οι μαθητές προχωρούν από την εκμάθηση σχεδίων μέσω εικόνων και ακολουθιών στην εκμάθηση σχεδίων με τη μορφή λειτουργιών. Ο Bottoms το 2003 υπογράμμισε πως ο προσδιορισμός των αποτελεσμάτων όταν εισάγουμε μία τιμή στη συνάρτηση είναι βασική προϋπόθεση γνώσης για την άλγεβρα, καθώς τις διερευνάμε χρησιμοποιώντας τύπους, ποσοστά αλλαγής και γραμμικές ή μη συναρτήσεις. Στο γυμνάσιο, η εστίαση συχνά τοποθετείται σε γραμμικές συναρτήσεις. Με απλά λόγια, οι γραμμικές συναρτήσεις αναπτύσσονται με ένα σταθερό ή γραμμικό πρότυπο και μπορούν να φανούν εύκολα σε ένα γράφημα (Van de Walle et aI., 2010). Ο Vande Walle και άλλοι (2010) συνέστησαν στους μαθητές να συγκρίνουν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων, όπως η περίμετρος και το εμβαδόν, για να ανακαλύψουν ότι η περίμετρος είναι μία συνάρτηση με σταθερό ρυθμό μεταβολής, ενώ η συνάρτηση του εμβαδού είναι τετραγωνική επομένως αλλάζει συνεχώς ο ρυθμός μεταβολής της.

Πιο ειδικά για τις διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη συναρτήσεων οι μαθητές δυσκολεύονται αρκετά για να τις διακρίνουν. Σε έρευνα του MFAS Florida center for research in science ρωτήθηκαν μαθητές της Β΄ Γυμνασίου αν η συνάρτηση του εμβαδού ενός ορθογώνιου ισοσκελούς τριγώνου $E= \frac{1}{2} s^2$ αποτελεί γραμμική συνάρτηση. Αναδείχθηκαν αρκετές παρανοήσεις με ιδιαίτερο ενδιαφέρον εκείνες που δείχνουν πως δεν κατανοούν εννοιολογικά την έννοια της γραμμικότητας. Αυτοί οι οποίοι λανθασμένα υποστήριξαν πως αποτελεί γραμμική συνάρτηση το αιτιολόγησαν ως εξής μπερδεύοντας την αγγλική λέξη γραμμικός (linear) με τη λέξη γραμμή (line) οπότε θεώρησαν πως είναι γραμμική. Άλλοι πίστεψαν πως μοιάζει η μορφή της με γραμμική καθώς θεώρησαν κλίση το $α= \frac{1}{2}$ και σταθερό το $β=0$. Όσοι προσπάθησαν να απαντήσουν γραφικά, υποστήριξαν πως οι πλευρές του τριγώνου είναι ίσες, αυτό αποτελεί εννοιολογική παρανόηση ή πως αν αναπαρασταθεί γραφική η συνάρτηση θα αποτελεί ευθεία, όπου υποδηλώνεται η δυσκολία σύνδεσης από τους μαθητές των αλγεβρικών συναρτήσεων με τα γραφήματα. Αρκετοί ωστόσο υποστήριξαν πως είναι μη γραμμική, όχι όμως για το σωστό λόγο, αλλά βασισμένοι σε ποικίλες παρανοήσεις. Η γλωσσική παρανόηση πάλι εμφανίζεται καθώς πολλοί πίστεψαν πως εφόσον το εμβαδόν του τριγώνου δεν είναι γραμμή (line) είναι και μη γραμμικό (non-linear) ή επειδή πρόκειται για τρεις γραμμές που ενώνονται και όχι για μία. Μένοντας σε αυτού του είδους την παρανόηση κάποιοι απάντησαν πως δεν είναι όλες οι πλευρές ίσες εξού και η γραμμική ιδιότητα μίας συνάρτησης ή επειδή το πρόβλημα φαντάζει πολύ περίπλοκο δε θα μπορούσε να είναι γραμμικό. Όσοι προσπάθησαν να το εξηγήσουν αλγεβρικά βασίστηκαν στην έλλειψη του y ή στην ύπαρξη εκθέτη στη μεταβλητή. Οι τελευταίοι συνδύασαν τις απαντήσεις τους με κάποια από τις παραπάνω διότι δεν τους φαινόταν αρκετό. Υπήρχαν αρκετές απαντήσεις που δήλωναν πως δεν γνωρίζουν τις έννοιες ή τη διαφορά τους.

Ο Smith (2008) δημιούργησε ένα πλαίσιο λειτουργικής σκέψης. Στο πλαίσιο του, παρείχε έξι δραστηριότητες που αποτελούν την κατασκευή συναρτήσεων. Είναι τα εξής:

Εμπλοκή συνάρτησης σε ένα πρόβλημα

1. Συμμετοχή σε κάποιο είδος φυσικής ή εννοιολογικής κατάστασης στο πρόβλημα.

2. Προσδιορισμός δύο ή περισσοτέρων ποσοτήτων που διαφέρουν και αφορούν το πρόβλημα και επικέντρωση της προσοχής στη σχέση μεταξύ αυτών των δύο μεταβλητών.

Δημιουργία συνάρτησης

3. Καταγραφή των αντίστοιχων τιμών αυτών των ποσοτήτων, συνήθως σε πίνακα, γράφημα ή εικόνα.

4. Αναγνώριση μοτίβων σε αυτά τα αρχεία.

5. Συντονισμός των προσδιορισμένων μοτίβων με τις ενέργειες που σχετίζονται για την υλοποίηση του προβλήματος.

6. Χρησιμοποιώντας αυτό το συντονισμό, δημιουργία αναπαράστασης του προβλήματος (Smith, 2008, σελ. 143-144).

Οι μαθητές πρέπει να δουν τη σύνδεση των μεταβλητών μεταξύ τους (Van Dyke & Craine, 1997), ενώ οι Markovits, Eylon, και ο Bruckheimer (1988) μέσα από έρευνες κατέληξαν πως ένας πίνακας ή ένα γράφημα δίνει την καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης στους μαθητές, καθώς αποτελούν ένα οπτικό μέσο. Ωστόσο παρατηρείται πως τα προγράμματα σπουδών παρουσιάζουν πάντα αλγεβρικά τις συναρτήσεις και αργότερα μόνο μέσω του τύπου δημιουργείται και το γράφημα. Έτσι πολλές φορές παρανοούνται τα εξής:

- πως η άλγεβρα είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται για τη μαθηματική ανάλυση (Van Dyke & Craine, 1997)

- πως οι αναλογίες είναι συναρτήσεις (Ellis,2009)
- ο ρυθμός μεταβολής σχετίζεται με τη συνάρτηση παρόλο που είναι έννοιες της καθημερινότητάς τους όπως η ταχύτητα, η απόσταση, τα κέρδη, τα έξοδα και το ωρομίσθιο (Davidenko 1997; Kaput 2000; Van de Walle et al. 2010).

Οι Kaput και Van de Walle και άλλοι (2010) έκαναν έρευνες σε μαθητές δημοτικού και γυμνασίου όπου μέσω γραφημάτων παρουσίαζαν: το ρυθμό μεταβολής ο πρώτος και την κλίση της ευθείας ο δεύτερος.

Συχνά συναντάται η παρανόηση πως οι γραμμικές εξισώσεις αφορούν αναλογίες καθώς αυξάνουν (ή μειώνουν) με σταθερό ρυθμό. Ο Van de Walle και άλλοι επεσήμαναν ότι για να δίνει σχέση αναλογίας μία γραμμική εξίσωση θα πρέπει να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή να είναι της μορφής $y=mx$. Τονίζουν τη σημασία του να διδάσκεται πρώτα η περίπτωση αυτή και μετά οι μη αναλογικές γραμμικές εξισώσεις.

Ο Usiskin (1988) έγραψε τέσσερις έννοιες της άλγεβρας. Περιέχουν τα ακόλουθα:

• Η άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική.

• Η άλγεβρα ως μελέτη των διαδικασιών επίλυσης ορισμένων τύπων προβλημάτων.

• Η άλγεβρα ως μελέτη των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων

• Η άλγεβρα ως μελέτη δομών (Usiskin, 1988, σελ. 11-15).

Στην κατηγορία των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων εντάσσονται και οι συναρτήσεις. Ένας λόγος που οι μαθητές αναπτύσσουν αρκετές παρανοήσεις είναι και το γεγονός πως οι μεταβλητές εκπροσωπούν πληθώρα αριθμών και αυτό από μόνο του μπερδεύει πολύ όπως αναφέρει και η Kieran (1992). Ο Usiskin επεκτείνει αυτήν τη σκέψη λέγοντας πως εξίσου σύγχυση προκαλεί η πληθώρα γραμμάτων στην $y=mx+b$ που δείχνει παραμέτρους(m,b), εξαρτημένες(y) και ανεξάρτητες μεταβλητές(x).

Οι Kalchman και Koedinger (2005) υποστήριξαν πως οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας θα πρέπει να έχουν καταλάβει εννοιολογικά την έννοια της συνάρτησης της ευθείας (εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή, κλίση κ.τ.λ.) αλλά και να μπορούν με ευχέρεια να τη χειρίζονται (να τοποθετούν τιμές στις μεταβλητές και να βρίσκουν αποτελέσματα). Επιπλέον θα πρέπει εύκολα να δημιουργούν πίνακες και γραφήματα αλλά και αντίθετα να παίρνουν δεδομένα όταν τους δίνονται έτοιμα. Επιπλέον οι Labato και Ellis (2010) προσθέτουν πως θα πρέπει οι μαθητές με ευκολία να συνδέουν την έννοια της κλίσης με τη γραφική παράσταση. Σε έρευνα που διεξήχθη από τον Brenner και άλλους (1995), εστίασε στη διδασκαλία μαθητών αρχικών σταδίων άλγεβρας. Υπήρξαν 7 διαφορετικές τάξεις σε 3 διαφορετικά σχολεία όπου σε ένα εικοσαήμερο πρόγραμμα δίδαξαν τη συνάρτηση της ευθείας με έμφαση στις πολλαπλές αναπαραστάσεις συμπεριλαμβανομένων πινάκων, γραφημάτων, εξισώσεων και λέξεων. Ωστόσο υπήρχε και μία τάξη η οποία διδάχθηκε με τον παραδοσιακό τρόπο, όπως ορίζει το πρόγραμμα σπουδών το οποίο έδινε έμφαση στη διαδικασία επίλυσης ασκήσεων. Η έρευνα είχε πριν και μετά τεστ (pre-test/posttest), τα οποία όταν εξετάσθηκαν στο τέλος δεν αποκάλυψαν σημαντική διαφορά ανάμεσα στις τάξεις. Ωστόσο, οι πειραματικές τάξεις χρησιμοποίησαν περισσότερες γραφικές αναπαραστάσεις κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Brenner, et al., 1995).

Ο Ellis (2009) εισήγαγε την ακόλουθη ιδέα περί συναρτήσεων για μαθητές μέσης εκπαίδευσης.

- οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν προσεκτικά ένα πρόβλημα προκειμένου να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές κατανοούν το πλαίσιο του προβλήματος
- συζητιούνται ιδέες μέσα στην τάξη έτσι ώστε να σχηματίσουν οι μαθητές τη συνάρτηση, πάντα καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτικό, καθώς αυτός είναι το κλειδί για λειτουργήσει και να προχωρήσει η συζήτηση στην τάξη
- μέσω της συζήτησης οι μαθητές κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και την έννοια της γραμμικότητας.

Συμπερασματικά, πολλοί εκπαιδευτικοί και ερευνητές θεωρούν την έννοια της συνάρτησης να είναι μία από τις σημαντικότερες στα μαθηματικά (Peled & Carraher, 2008; Thorpe, 1989; Willoughby, 1997). Πρέπει οι μαθητές να εισάγονται σταδιακά στις συναρτήσεις καθώς πλέον ασχολούνται με την εκμάθηση μοτίβων τόσο αριθμητικών όσο και γεωμετρικών (Blanton, 2008; Blanton & Kaput, 2005;Carraher&Schliemann, 2007) έτσι ώστε να μάθουν μοτίβα σε συναρτήσεις (Bottoms, 2003). Δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με αυτήν την έννοια συχνά περιλαμβάνουν και την κλίση (Van de Walle et al., 2010) όπως και την αναλογία (Pugalee,2010; Van de Walle et al., 2010). Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, συνιστάται οι συναρτήσεις να διδάσκονται συνδέοντας μια εξίσωση τόσο με έναν πίνακα τιμών όσο και με ένα γράφημα (Brenner et al., 1995; Markovitsetal., 1988; VanDyke & Craine, 1997).

3.4 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΑΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δεν υπάρχουν αρκετά άρθρα και έρευνες δημοσιευμένα που να αφορούν μόνο τις παρανοήσεις των γραμμικών συστημάτων. Γεγονός αποτελεί ωστόσο πως οι προαναφερθείσες παρανοήσεις βρίσκονται και στη μάθηση των γραμμικών συστημάτων καθώς αποτελούν εργαλεία της άλγεβρας περιέχοντας αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις. Υπάρχουν όμως κάποιες παρανοήσεις που εμφανίζονται ειδικά στα συστήματα και το ινστιτούτο της Καλιφόρνιας MFAS Florida center for research in science έχει διεξάγει έρευνες αναρτώντας τα αποτελέσματά τους στην ιστοσελίδα τους (https://www.cpalms.org/Public/ResourceCollection/Preview/202).

Τα συνήθη εκτελεστικά λάθη των πράξεων, αλλά και η αδυναμία διαχείρισης των αρνητικών αριθμών, κάνουν την εμφάνισή τους και στα συστήματα. Ωστόσο πολλοί μαθητές στην όψη ενός συστήματος δε ξέρουν πώς να αρχίσουν ή εφαρμόζουν αναποτελεσματικές τακτικές. Στην προσπάθειά τους κάποιοι δοκιμάζουν αριθμούς στην τύχη, δείχνοντας πλήρη άγνοια άλγεβρας. Οι παρανοήσεις είναι όμως πιο βαθιές καθώς εφαρμόζουν την αντικατάσταση ή τους αντίθετους συντελεστές. Κατά τον πρώτο αλγόριθμο, λύνουν ως προς διαφορετικές μεταβλητές ή ως προς διαφορετικά πολλαπλάσια της ίδιας μεταβλητής και τα εξισώνουν. Εννοιολογικά δεν έχουν καταλάβει την έννοια της ισότητας και της εξίσωσης ίσων εκφράσεων ωστόσο γνωρίζουν τα διαδικαστικά του αλγορίθμου. Στους αντίθετους συντελεστές συναντήθηκαν συχνά οι πράξεις μετά ομοίων μεν όρων, αλλά διαφορετικών μελών κατά της πρόσθεση κατά μέλη καταπατώντας και πάλι την έννοια της ισότητας. Δεν ήταν λίγοι που πρόσθεσαν τις εξισώσεις χωρίς να φροντίσουν για αντίθετους συντελεστές ή αυτοί που αγνόησαν τελείως τους αλγορίθμους, θεώρησαν πως πρόκειται για δύο ξεχωριστές εξισώσεις και προσπάθησαν να τις λύσουν παραγκωνίζοντας την ύπαρξη δύο διαφορετικών μεταβλητών. Οι τελευταίοι δεν κατανοούν ούτε την έννοια του συστήματος, των κοινών λύσεων και της εξίσωσης με ημεταβλητές. Υπάρχουν προβλήματα ωστόσο και στον έλεγχο της λύσης, καθώς την αντικαθιστούν σε μία από τις δύο εξισώσεις ή δεν επιλέγουν τις αρχικές. Επιπλέον πέρα από την εύρεση ενός σημείου, οι αδύνατες και αόριστες λύσεις παρερμηνεύονται ή συχνότερα δεν γνωρίζουν πώς να το εξηγήσουν.

Τα προβλήματα και οι λεκτικές εντολές πάντα αποτελούσαν πρόβλημα των μαθητών θεωρώντας τα εξαρχής «δύσκολα». Μία από τις έρευνες του ινστιτούτου έδινε στους μαθητές ένα σύστημα και αφού το έλυναν τους ζητούσε να πολλαπλασιάσουν με το 5 τη μία εξίσωση, να προσθέσουν τις δύο αρχικές και να φτιάξουν από αυτές τις δύο ένα καινούργιο σύστημα αποδεικνύοντας πως θα έχει την ίδια λύση με το αρχικό. Πολλοί δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν το σύστημα βρίσκοντας πολλά εμπόδια ενώ όσοι το βρήκαν και το έλυσαν δεν μπορούσαν να εξηγήσουν γιατί έχει την ίδια λύση με το αρχικό. Στα λεκτικά προβλήματα το συχνότερο είναι η γρήγορη ανάγνωση και η λάθος καταγραφή μίας ή και των δύο εξισώσεων. Εκτός από τις εντελώς λάθος εξισώσεις συχνό λάθος αποτελεί η ανάμιξη των δεδομένων της μίας πρότασης που θα έπρεπε να δίνει τη μία εξίσωση με τα δεδομένα της άλλης. Δεν ήταν λίγες οι φορές που παρατηρήθηκε η μη αντίληψη ύπαρξης δύο εξισώσεων με το σύστημα να αναδεικνύει την κοινή τους λύση και αντί αυτού η καταγραφή μίας εξίσωσης που προσπαθεί να εντάξει όλες τις πληροφορίες του προβλήματος. Ενδιαφέρον είχαν οι μαθητές που κατάστρωσαν πίνακες με πιθανούς αριθμούς που μπορεί να επαληθεύουν το πρόβλημά τους κάνοντας πολλές πράξεις (προσθέσεις, πολλαπλασιασμούς κ.τ.λ.). Λιγότερο συχνά συναντώνται μαθητές που καταγράφουν σωστά συστήματα αλλά δε δηλώνουν τι αναπαριστούν οι μεταβλητές τους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι έρευνες οι οποίες εξετάζουν αν οι μαθητές είναι σε θέση χωρίς να λύσουν ένα σύστημα, να διαπιστώσουν το πλήθος των λύσεών του. Πολλοί μαθητές δεν απάντησαν καθώς δήλωσαν πως δε γνωρίζουν τι σημαίνει ένα σημείο (πολλές φορές δεν εννοούσαν το διατεταγμένο ζεύγος) να αποτελεί λύση του συστήματος. Συχνά παρανοείται και η έννοια της κλίσης καθώς μπορούν να την αναγνωρίσουν σε μία εξίσωση αλλά δεν μπορούν να βγάλουν συμπεράσματα συνδυάζοντάς την με την κλίση της άλλης εξίσωσης. Ένα παράδειγμα αποτελεί μαθητής ο οποίος σε σύστημα με κλίσεις αντίθετους αριθμούς ισχυρίστηκε πως οι ευθείες είναι κάθετες. Στο αόριστο σύστημα υπήρχαν απαντήσεις όπως «παράλληλη λύση», «πολλαπλές λύσεις», «πολλά σημεία» και όχι άπειρα ή «κάποια άπειρα σημεία». Ωστόσο υπήρχε μεγάλο ποσοστό ικανοποιητικών απαντήσεων σε αυτό το είδος της έρευνας.

3.5 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Σχεδόν όλοι οι μαθητές, όλων των δυνατοτήτων στα μαθηματικά, είναι σε θέση να εκτελέσουν τους αλγόριθμους για τη λύση εξισώσεων και ανισώσεων έστω και με κάποια λάθη. Παρατηρήθηκε όμως πως η διαφορά των δυνατών μαθητών από τους αδύναμους ήταν η γεωμετρική αναπαράσταση τόσο των εξισώσεων και ανισώσεων όσο και των λύσεών τους (Garfunkel & Plotkin, 1966).

Οι Corter and Zahren (2007) υπογραμμίζουν ότι πρέπει να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ της δομής του προβλήματος που δίνεται στους μαθητές και του οπτικού εργαλείου (αλλά και για τη χρησιμότητα του).Αν όχι, μπορεί να προκύψει ένα πρόβλημα στην κατανόηση και τη δημιουργία γνώσης από τους μαθητές. Επίσης οι μαθητές μπορούν να εξαρτώνται μόνο από το δεδομένο μοντέλο ή οπτικό υλικό ή συσκευή αντί της γνώσης που στοχεύει (Ponte etal., 1994). Είναι απαραίτητο για τους μαθητές να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ της συμβολικής μορφής της μαθηματικής έννοιας και της οπτικής της αναπαράστασης (Viholainen, 2008). Αν όχι, θα υπάρξει αντίστροφη επίδραση στην κατανόηση από τους μαθητές της νέας γνώσης.

Οι Zazkis, Dubinsky και Dautermann (1996) και ειδικότερα οι Eisenberg και Dreyfus (1991) θεωρούν πως είναι συχνή η δυσκολία με την οπτικοποίηση καθώς οι μαθητές έχουν δείξει έλλειψη ικανότητας να συνδέσουν ένα διάγραμμα με τη συμβολική αναπαράστασή του. Ενώ παράλληλα πιστεύεται πως αυτά τα μοντέλα και οι αναπαραστάσεις είναι δύσκολο να κατασκευαστούν και να κατανοηθούν από τους μαθητές. Υπάρχει επιπλέον η πεποίθηση από μεγάλο μέρος της κοινωνίας πως τα οπτικά μοντέλα και οι αναπαραστάσεις δεν μπορούν να αποτελούν μέρος της απόδειξης. Οι Yerushalmy και Chazan (1990) αναφέρουν πως προκύπτουν πιθανά παραπλανητικά χαρακτηριστικά μέσω της χρήσης της απεικόνισης ενώ οι Zodik και Zaslavsky (2007) δηλώνουν πως οι μαθητές μπορεί να μην είναι σε θέση να αντιληφθούν ολόκληρο το διάγραμμα, σε όλα του τα σημεία καθώς "απειρίζει", αλλά να το μελετούν και κατανοούν τοπικά.

Τέλος υπάρχουν πολλές παρανοήσεις και από τους ίδιους τους καθηγητές. Δεδομένου ότι οι περισσότερες από τις επιτυχίες στα μαθηματικά έγιναν μέσω συμβολικών μελετών τον 19ο και 20ό αιώνα (χαρακτηρίζοντας τα ως επίσημα μαθηματικά), απαιτείται και από τους μαθητές να χρησιμοποιούν συμβολικές και τυπικές απεικονίσεις και όχι οπτικές αναπαραστάσεις (Cunningham, 1991). Ως εκ τούτου οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί προτιμούν να χρησιμοποιούν τα "επίσημα" μαθηματικά όταν τους ζητείται να λύσουν ερωτήσεις ή να αποδείξουν κάτι (Vinner, 1989).Ακόμη και στην περίπτωση που οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις, αυτό γίνεται αφού έλυσαν με άλλους τρόπους το πρόβλημα, επομένως αυτό οδηγεί σε μια κατάσταση όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα οπτικά εργαλεία ως τελικό στόχο αντί να είναι μέσα (Zimmermann & Cunningham, 1991). Τέλος, μία άλλη πτυχή δείχνει ότι η χρήση της οπτικοποίησης αντιπροσωπεύει μόνο ένα περιορισμένο μέρος της δεδομένης κατάστασης, και η μεγάλη εξάρτηση από την απεικόνιση μπορεί να αποτρέψει τους μαθητές από τη μαθηματική σκέψη (Brown, 1969; Fennema, 1972; Presmeg, 1986).

Το Δεκέμβριο του 2016 οι Merve Özkaya, Mehmet Fatih Öçal & Alper Cihan Konyalioğlu διεξήγαγαν μία έρευνα με τίτλο «Η οπτικοποίηση στην επίλυση ερωτημάτων ανισότητας: Περίπτωση εκπαιδευόμενων καθηγητών μαθηματικών κατά την αρχική τους φοίτηση». Σκοπός αυτής της μελέτης περίπτωσης ήταν να προσδιοριστεί κατά πόσον οι εκπαιδευτές στην αρχική τους εκπαίδευση χρησιμοποιούν την απεικόνιση στην επίλυση ερωτημάτων ανισότητας και έτσι να καθορίσουν το ρόλο της απεικόνισης που χρησιμοποιείται ως κατάλληλη οπτική αναπαράσταση ως εργαλείο στα μαθήματα για την επίλυση των αρνητικών πτυχών που έχουν οι εκπαιδευτικοί που προσφέρουν τις υπηρεσίες τους. Επιπλέον, περιλαμβάνονται οι απόψεις τους σχετικά με τη χρήση οπτικών βοηθημάτων για την επίλυση προβλημάτων. Το δείγμα αυτής της μελέτης αποτελούνταν από 20 εν δυνάμει καθηγητές μαθηματικών που ήταν εγγεγραμμένοι στην Εκπαιδευτική Σχολή. Ως εργαλεία συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα τεστ με ανοιχτές ερωτήσεις που υποβλήθηκαν στους εκπαιδευτικούς αρχικής εκπαίδευσης. Στη συνέχεια, οι απόψεις τους συγκεντρώθηκαν μέσω του μέσου όρου των γραπτών απαντήσεων τους.

Στο τέλος, πραγματοποιήθηκαν δύο ημι-δομημένες συνεντεύξεις πρόσωπο με πρόσωπο.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν σε αυτή τη μελέτη αποκάλυψαν ότι οι εν δυνάμει καθηγητές μαθηματικών προτιμούσαν γενικά τις αλγεβρικές λύσεις και έχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές απόψεις σχετικά με τη χρήση της απεικόνισης στην επίλυση των ερωτήσεων. Πιο συγκεκριμένα:

Όσον αφορά τις 11 συνεντεύξεις όπου φαίνονται οι απόψεις για τα θετικά και τα αρνητικά της οπτικοποίησης, τα αποτελέσματα ήταν τα εξής: Τη θετική πτυχή της οπτικοποίησης βλέπουν 6 στους 11 καθώς συγκεκριμενοποιεί τις αφηρημένες έννοιες, κάνει μόνιμη τη γνώση και εύκολη διαχείριση της εννοιολογικής κατανόησης. Σε μικρότερο ποσοστό έρχονται η σύνδεση με την καθημερινή ζωή, το ενδιαφέρον των μαθητών και η κατασκευή μίας εναλλακτικής λύσης. Στον αντίποδα την αρνητική πτυχή της οπτικοποίησης υποστηρίζουν 5 στους 11 καθώς είναι ανεπαρκείς οι γνώσεις τους για την κατασκευή τους, καταναλώνει χρόνο και έχει μικρή εφαρμογή στο εύρος των μαθηματικών. Σε μικρότερα ποσοστά έρχονται η μικρή πιθανότητα εφαρμογής λόγω της φύσης των μαθηματικών, το υψηλό κόστος και η αδυναμία χρήσης τους στις προαγωγικές εξετάσεις. Στην επόμενη συνέντευξη κλήθηκαν οι τέσσερις επιτυχόντες του δεύτερου και του τρίτου ερωτήματος και τρεις οι οποίοι απάντησαν σωστά μόνο το τρίτο, έτσι ώστε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Παρατηρήθηκε πως οι εκπαιδευτικοί που έκαναν σωστά την επίλυση των ερωτήσεων δεν μπορούσαν να δώσουν λογικές εξηγήσεις για τις λύσεις. Ομοίως, εκείνοι που έκαναν λάθος στην επίλυση των ερωτήσεων δεν μπορούσαν επίσης να παρουσιάσουν μια ιδέα για τα λάθη τους και γιατί.

Γενικά, οι παραπάνω μαθητές προσπάθησαν να λύσουν τα ερωτήματα με την αλγεβρική προσέγγιση και έκαναν από ένα λάθος στην επίλυση αυτών των ερωτήσεων. Αυτά τα ευρήματα μπορούν να αποδοθούν σε δύο εξηγήσεις. Η πρώτη είναι πως οι μαθητές γενικά δεν βλέπουν την οπτική απεικόνιση οποιασδήποτε λύσης ως επίσημης απόδειξης (Alcock & Weber, 2010). Στην πραγματικότητα, οι ερευνητές προτείνουν οι μαθητές να βασίσουν τις επίσημες αποδείξεις τους σε οπτικές αναπαραστάσεις όπως τα διαγράμματα και τα γραφικά (Raman, 2003) έτσι ώστε να μπορούν να συνδέσουν καλύτερα τις μεταβλητές στις ερωτήσεις. Ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι ότι οι μαθητές δεν μπορούν να απεικονίσουν τι είναι αυτό που αναμένεται στα ερωτήματα γραφικά ή με άλλα οπτικά μέσα (Weber, 2001).

Σε σύγκριση με τις αλγεβρικές και τις αριθμητικές λύσεις, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των μαθητών είναι υψηλότερο στη γεωμετρική προσέγγιση, η οποία περιλαμβάνει μια σειρά γραμμών ή γραφικές αναπαραστάσεις. Για τους μαθητές που απεικονίζουν τις λύσεις γραφικά, οι απαντήσεις τους είναι γενικά σωστές. Ως εκ τούτου, τα οπτικά βοηθήματα είναι καθοριστικής σημασίας για την επίλυση των ερωτήσεων για την ανισότητα. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν επίσης τη χρήση αριθμητικών γραμμών (Rey etal., 1998), γραφικά και διαγράμματα (Arcavi, 2003; Corter & Zahren, 2007; Jung, 2002).

Από τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών, εμφανίστηκαν τόσο θετικές όσο και αρνητικές στάσεις απέναντι στην οπτικοποίηση για την επίλυση των ανισοτήτων. Ορισμένες θετικές πτυχές των απεικονίσεων με υψηλές συχνότητες ήταν ότι "βοηθά στην κατασκευή εναλλακτικών μεθόδων", "ευκολία εννοιολογικής κατανόησης", "αναφέρεται στις μαθηματικές έννοιες στην καθημερινή ζωή". Όλα αυτά υποστηρίζονται από άλλους ερευνητές στη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, ο Goldin (2002) δείχνει ότι η οπτικοποίηση των ερωτήσεων ή των προβλημάτων βοηθά τους μαθητές να βρουν νέα λύση και στρατηγικές. Επιπλέον, η χρήση οπτικής αναπαράστασης των εκφράσεων είναι ένας τρόπος με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να κάνουν συγκεκριμένες αφηρημένες έννοιες σε μαθηματικά ζητήματα (Bishop, 1989; Ferrara et al. 2006). Επιπλέον, οι ερευνητές αναφέρουν τις άμεσες σχέσεις μεταξύ της εννοιολογικής κατανόησης και των οπτικών αναπαραστάσεων τέτοιων (Tall, 1991).

Το 2006 οι Rösken, B. και Rolka, K. διεξήγαγαν μία έρευνα η οποία περιγράφει ορισμένες σημαντικές πτυχές που αφορούν τον ρόλο της απεικόνισης στη μαθηματική μάθηση και επικεντρώθηκαν στον ολοκληρωτικό λογισμό με βάση τις οπτικές ερμηνείες. Η εμπειρική μελέτη βασίζεται σε τέσσερα προβλήματα που σχετίζονται με την ολοκληρωμένη έννοια που επισημαίνει διάφορες όψεις απεικόνισης. Συγκεκριμένα, ενδιαφέρονται για τις οπτικές εικόνες που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να δουλεύουν σε συγκεκριμένα προβλήματα και πώς αντιμετωπίζουν τις δοσμένες απεικονίσεις. Τα ευρήματα δείχνουν τη σημασία του οπτικού μέσου καθώς και τις δυσκολίες των μαθητών στη διαχείρισής του.

Η έρευνα έγινε σε δύο γερμανικά λύκεια στην τάξη των τελειόφοιτων, σε συνολικά 52 μαθητές. Η μία τάξη αποτελούταν από 24 μαθητές (14 κορίτσια και 10 αγόρια) ενώ η άλλη από 28 μαθητές (6 κορίτσια και 22 αγόρια). Οι σωστές απαντήσεις ήταν σε ποσοστό 27%, οι λάθος σε ποσοστό 67% και αυτοί που δεν έδωσαν καμία απάντηση αποτελούσαν το 6%. Μόνο το 8% έκανε χρήση γραφικής παράστασης.

Από τη μία πλευρά, η απεικόνιση αποδεικνύεται χρήσιμο εργαλείο για την εργασία στα προβλήματα και φαίνεται να πως όταν χρησιμοποιείται αποφεύγονται άλλα λάθη. Για παράδειγμα, οι μαθητές που τη χρησιμοποίησαν στο πρόβλημα είχαν όλοι σωστά αποτελέσματα. Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο είναι ότι ακόμη και φοιτητές που δεν δείχνουν απεικόνιση στο χαρτί τους ήταν σε θέση να λύσουν το πρόβλημα 3 σωστά. Αυτό τονίζει για άλλη μια φορά τη σημασία των εικόνων στο μυαλό (Presmeg, 1986). Από την άλλη η επιλεγμένη οπτικοποίησή τους αντικατοπτρίζει μόνο μία συγκεκριμένη περιοχή της συνάρτησης. Αυτό συνεπάγεται ορισμένες σημαντικές συνέπειες για το πρόβλημα. Για παράδειγμα, η περιορισμένη απεικόνιση αποδεικνύεται ότι αποτελεί εμπόδιο για τη λύση του προβλήματος. Στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να κάνουν την γραφική παράσταση του ημιτόνου πέρα από τις γνωστές περιοχές, όπως η περιοχή πριν από το μηδέν.

Επιπρόσθετα, μπορεί κάποιοι μαθητές να έκαναν τη γραφική παράσταση σωστά, αυτό όμως δεν ήταν αρκετό για να δώσουν και τη σωστή απάντηση. Δεν διαθέτουν τη γνωστική ευελιξία που πρέπει να χρησιμοποιήσουν τόσο οπτικές όσο και αλγοριθμικές τεχνικές (Arcavi, 2003). Τέλος, οι μαθητές που δεν επέλεξαν να απεικονίσουν το πρόβλημα αλλά το προσέγγισαν αλγοριθμικά είχαν μεγάλα ποσοστά αποτυχίας. Είναι γνωστικώς σταθεροποιημένοι σε αλγόριθμους και διαδικασίες χωρίς να αναγνωρίζουν τα πλεονεκτήματα της οπτικοποίησης του προβλήματος - ένα φαινόμενο το οποίο ο Eisenberg (1994) περιγράφει ως «απροθυμία να απεικονίσει».

Έρευνες του ινστιτούτου της Καλιφόρνιας MFAS Florida center for research in science που αφορούσαν γραφική αναπαράσταση συστημάτων ή έθεταν σε αντιδιαστολή γραφικές και αλγεβρικές λύσεις μαθητών, ανέδειξαν πέρα από τις προαναφερθείσες παρανοήσεις και εκείνες που σχετίζονται μόνο με τα γραμμικά συστήματα και τη γραφική αναπαράσταση. Μεγάλο ποσοστό μαθητών έλυσε αλγεβρικά λάθος και σωστά γραφικά το σύστημα ή το αντίθετο, αλλά δεν αντιλήφθηκε πως δε θα έπρεπε να βρει διαφορετικές λύσεις, αφήνοντας τα γραπτά έτσι. Σε μικρότερο αλλά ικανοποιητικό ποσοστό, υπήρχαν μαθητές που δούλεψαν σωστά τους αλγόριθμους της άλγεβρας αλλά δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τι σημαίνει γραφικά αυτό, κάνοντας μία μόνο από τις δύο εξισώσεις ή κάνοντας και τις δύο χωρίς όμως να μπορούν να εντοπίσουν τη λύση. Κάποιοι επίσης ισχυρίστηκαν πως εφόσον μία ευθεία έχει άπειρα σημεία, το σύστημα είναι αόριστο, παρανοώντας την έννοια του συστήματος. Πλειοψηφία αποτελούν οι μαθητές οι οποίοι σχεδίασαν τις ευθείες αλλά δεν τις επέκτειναν αρκετά ώστε να βρουν το κοινό σημείο. Ελάχιστοι μαθητές θεώρησαν ως λύσεις τα σημεία τομής της μίας ή και των δύο ευθειών με τους άξονες, καθώς ήταν η πρώτη τους επαφή με τα σημεία από τομή στη διδακτική ύλη έως τώρα. Τέλος ένα μικρό ποσοστό δεν αντιλαμβάνεται τις εξισώσεις ως ευθείες, αλλά ως μεμονωμένα που βρήκε με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να λύσει το σύστημα. Το αποτέλεσμα των ερευνών αποκαλύπτει πως στο Γυμνάσιο μικρό ποσοστό είναι σε θέση να λύσουν τόσο αλγεβρικά όσα και γραφικά ένα σύστημα και επιπλέον να εξηγήσουν τη στρατηγική τους και το είδος του αποτελέσματός τους.

4. ΟΠΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμοί που αφορούν την οπτική αναπαράσταση:

- Το είδος της συλλογιστικής δραστηριότητας που βασίζεται στη χρήση οπτικών και χωροταξικών στοιχείων, είτε διανοητικών είτε σωματικών, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων ή την απόδειξη ιδιοτήτων (Guttierrez,1996).

- Η ανάπτυξη και η σταθεροποίηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των ανθρώπων (μαθητών) και των πραγμάτων(Arcavi,2003).

- Η διαδικασία διαμόρφωσης εικόνων (διανοητικά, με μολύβι και χαρτί ή με τη βοήθεια τεχνολογίας) και η αποτελεσματική χρήση τέτοιων εικόνων για μαθηματική ανακάλυψη και κατανόηση (Zimmermann & Cunningham,1991).

- Η διαδικασία μετασχηματισμού από το οπτικό και χωροταξικό μοντέλο στην διανοητική δομή (Schnotz et al.,1995).

- Η πράξη με την οποία ένα άτομο δημιουργεί μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ ενός εσωτερικού κατασκευάσματος και κάτι στο οποίο η πρόσβαση αποκτάται μέσω των αισθήσεων (Zazki et al.,1996).

Έναν πιο αφηρημένο ορισμό δίνει ο Konyalıoğlu (2003): «πρόκειται για τη γέφυρα μεταξύ του πειραματικού κόσμου και της σκέψης σε συνδυασμό με τη συλλογιστική».

4.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Η επίλυση συστημάτων εξισώσεων μπορεί να γίνει μέσω και της γραφικής παράστασης των εξισώσεων με την εύρεση του σημείου ή των σημείων τομής (εάν υπάρχουν).Αν και η γραφική απεικόνιση εμφανίζεται σε διάφορα εγχειρίδια πριν από έναν αιώνα ή περισσότερο, είναι μια σύγχρονη μέθοδος όταν εξετάζεται το εύρος της ιστορίας της άλγεβρας. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η λύση για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων με γραφική παράσταση δεν εμφανίστηκε στα σχολικά βιβλία άλγεβρας μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα. Κάποιος μπορεί να βρει γράφημα σε κείμενα κολλεγίων αναλυτικής γεωμετρίας που αρχίζουν στα μέσα της δεκαετίας του 1800.

Στην τυπική άλγεβρα από τον William J. Milne (l908) η γραφική παράσταση για λύσεις παρουσιάζεται εικονογραφικά. Αυτό μπορεί να είναι ένα από τα πρώτα κείμενα άλγεβρας που εκτυπώνονται στις Ηνωμένες Πολιτείες για να το κάνουν αυτό.

Τα παραδείγματα πρακτικής του Milne (1908, σελ. 208) που συνοδεύουν τη μέθοδο γραφήματος δεν περιλαμβάνουν κανένα λεκτικό πρόβλημα. Ακολουθούν μερικά από τα παραδείγματα που βρέθηκαν σε ένα κείμενο του 1908.Οι οδηγίες είναι οι εξής:

Κατασκευάστε τα γραφήματα καθενός από τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων. Λύστε, αν είναι δυνατόν. Αν δεν υπάρχει λύση, πείτε το γιατί.

- $x + y = 8$, $2x - 5y = 5$
- $2x - 6y = -9$, $10\,y = 2x + 1$
- $3x = y + 9$, $x + 3y = -6$
- $2y = 6x + 18$, $2x - 4y = -12$

Οι Corter και Zahner (2007) ανέφεραν δύο τύπους οπτικοποίησης: την εσωτερική (π.χ. νοητικές εικόνες) και την εξωτερική(π.χ. εικόνες, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα). Ο Konyalıoğlu (2003) διέκρινε δύο άλλους τύπους: τις μη μαθηματικές αναπαραστάσεις που βρίσκονται στη φύση(π.χ. ο ήλιος αντανακλά την έννοια της σφαίρας) και τις μαθηματικές αναπαραστάσεις με τη μορφή γραφικών αναπαραστάσεων που έχουν ρίζες από την εσωτερική δομή των ίδιων των μαθηματικών. Στην τομή των δύο θεωριών ο μαθητής περνά από τα διανοητικά μη μαθηματικά (ένα συγκεκριμένο αντικείμενο), σε φυσικές μαθηματικές έννοιες(π.χ. σχήματα) και τέλος στο αυθαίρετο μαθηματικό συγκεκριμένο αντικείμενο που μελετά (σε γραφικές παραστάσεις κ.τ.λ.).Σε αυτήν τη σειρά διεργασιών ο μαθητής δυσκολεύεται κυρίως να κατανοήσει και να περάσει στις αφηρημένες έννοιες και διαδικασίες.

Στο πλαίσιο της αντιμετώπισης αυτών των δυσκολιών, η οπτική (εξωτερική) αναπαράσταση των εξισώσεων και ανισώσεων έχει γίνει αντικείμενο μελέτης (Presmeg,2006; Arcavi, 2003;Presmeg, 1986; Presmeg, 2006; Rösken & Rolka, 2006) καθώς σύμφωνα με τον Bishop (1989) είναι βοηθητική και δίνει τη φυσική έννοια της αλγεβρικής παράστασης.

4.3 ΘΕΤΙΚΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Είναι προφανές ότι ενώ οι μαθητές βλέπουν διαφορετικούς τύπους αναπαράστασης ταυτόχρονα, μπορούν εύκολα να κάνουν σύνδεση και να κατανοήσουν την επίδραση οποιασδήποτε αλλαγής στην αναπαράσταση (Jung, 2002). Ο Hacısalihoğlu (1998) δηλώνει ότι η κύρια πηγή πληροφοριών είναι η αίσθηση του να βλέπεις καθώς έτσι μπορούμε να έχουμε οποιεσδήποτε πληροφορίες γι' αυτό. Ως εκ τούτου, η απεικόνιση μπορεί να παρέχει στους μαθητές καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που είναι ήδη από τη φύση τους σύνθετες και αφηρημένες (Hitt, 2011). Επιπρόσθετα οι Yenilmez και Shan (2008) τονίζουν τη σημασία των εικόνων, των μορφών και της παρατήρησης καθώς μπορούν να προκαλέσουν διανοητικές λειτουργίες όπως η κατασκευή σχέσεων μεταξύ αφηρημένων εννοιών. Επίσης, οι Işık και Konyalıoğlu (2005) δήλωσαν ότι η απεικόνιση έχει θετική επίδραση τόσο σε γνωστικό όσο και σε συναισθηματικό επίπεδο στη διαδικασία της μαθηματικής εκπαίδευσης.

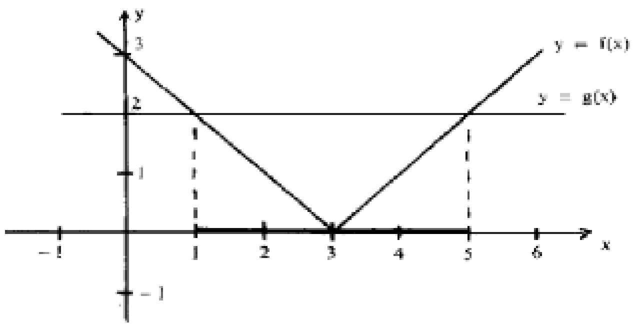
Παγκοσμίως αποδεκτή είναι η άποψη πως μέσω της οπτικοποίησης οι μαθητές σταματούν να απομνημονεύουν, γεγονός πολύ θετικό καθώς δεν υπάρχει μάθηση μέσω της απομνημόνευσης, όπως υποστηρίζει και ο Soylu (2008).Σύμφωνα με τους Hsieh και Lin (2008) οι μαθητές επίσης μπορούν εύκολα να ενστερνιστούν τις διαδικασίες που απαιτούνται για τις επιτυχείς διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων ενώ μέσω της οπτικοποίησης μπορούν να μεταφέρουν τις γνώσεις που έχουν αποκτηθεί παλαιότερα σε νέες καταστάσεις και επιτυχώς να επιλύσουν τις νέες εργασίες ή προβλήματα.

4.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Οι Tommy Dreyfus και Theodore Eisenberg παρουσίασαν μία μέθοδο για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, η οποία παρατίθεται παρακάτω:

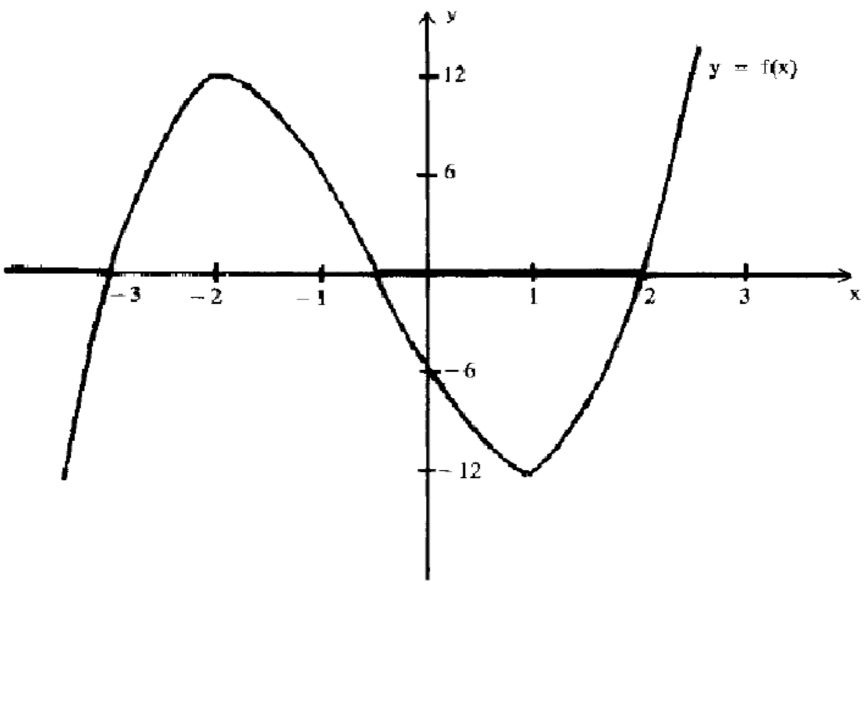
Οι έννοιες της εξίσωσης και της ανίσωσης είναι στενά συνδεδεμένες με την έννοια της μεταβλητής. Μία οπτική γωνία είναι να δεις τα δύο μέλη σαν δύο συναρτήσεις και να βρεις το x για το οποίο αυτές είναι ίσες ή η μία ξεπερνάει την άλλη.

❖ Οι απόλυτες τιμές έχουν την έννοια της απόστασης επομένως είναι πιο εύκολες να σχεδιαστούν. Για παράδειγμα στις $|x-3|=2$και $|x-3|<2$, μπορεί να θεωρηθεί σαν δύο συναρτήσεις $f(x)=x-3$ (σχεδιάζεται με την έννοια της απόστασης από το 3) και $g(x)=2$ (ευθεία παράλληλη στον άξονα των x), να σχεδιαστούν γραφικά και εύκολα φαίνεται πώς λύση της εξίσωσης είναι τα σημεία τομής των συναρτήσεων στο 1 και 5 ενώ οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x που ανήκουν στο (1,5) και μόνο αυτά.



Εικόνα 9. Γραφική επίλυση εξίσωσης και ανίσωσης με απόλυτη τιμή

❖ Πολυώνυμα οποιουδήποτε βαθμού τα οποία παραγοντοποιούνται, μπορούν εύκολα να παρασταθούν γραφικά καθώς από την παραγοντοποίηση είναι εύκολο να βρεθούν α) οι ρίζες (δηλαδή οι τομές με τον άξονα των x), β) το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου από πού έρχεται η συνάρτηση (για την ανίσωση) και έπειτα είναι εύκολο να βγουν τα συμπεράσματα που ζητάει η εξίσωση ή η ανίσωση. Για παράδειγμα η $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$ αρκεί να παραγοντοποιηθεί σε $(x - 2)(x + 3)(2x + 1)=0$.



Εικόνα 10. Γραφική επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης και ανίσωσης

Εύκολα διαπιστώνεται πως οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα σημεία -3,-½ και 2 ενώ για την οποιαδήποτε ανίσωση εύκολα φαίνονται τα διαστήματά της.

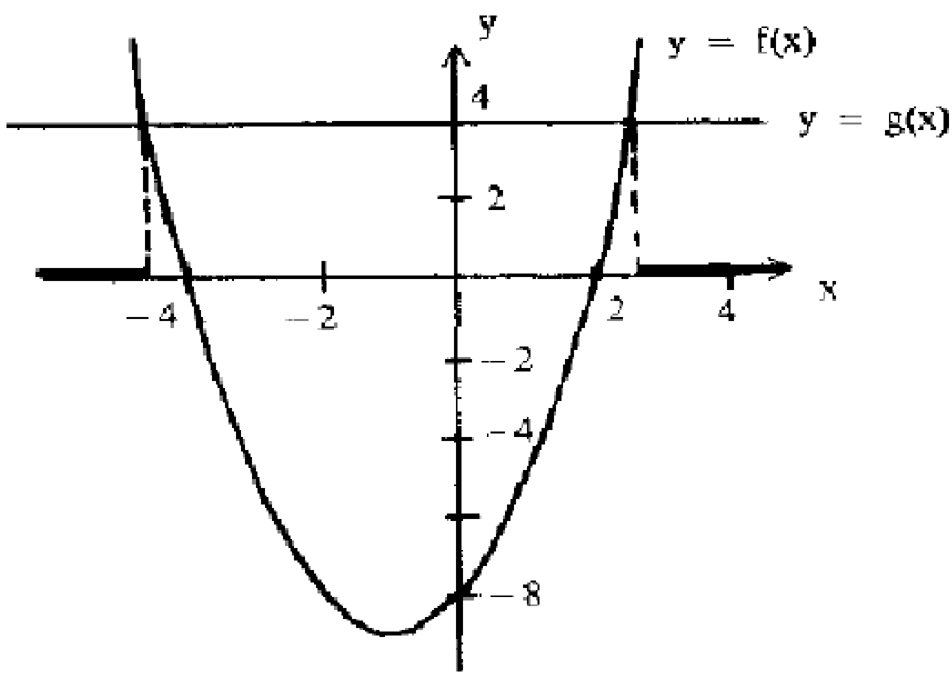
Πρέπει να σημειωθεί πως η λύση της ανίσωσης εξαρτάται από το αν έχει λύση η εξίσωση. Αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ακόμη και στις μεθόδους που ενστερνίζονται τα παιδιά για οποιοδήποτε είδος ανίσωσης. Επίσης τέτοιου είδους ανισώσεις αρκεί για να βρεθούν τα σημεία τομής με άξονα των x και μία καλά ποιοτικά γραφική παράσταση θα δώσει τη λύση εύκολα.

❖ Με παρόμοιο τρόπο αναπαρίστανται οι εξισώσεις και ανισώσεις όπου στο ένα μέλος υπάρχει ένα πολυώνυμο και στο δεύτερο ένα μονώνυμο μηδενικού βαθμού διάφορου του μηδενός. Υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης.

α) Φέρνουμε τον αριθμό στο μέλος που είναι το πολυώνυμο οπότε ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση.

β) Θεωρούμε τα δύο μέλη ως δύο συναρτήσεις και αναπαριστώντας τες γραφικά βρίσκουμε πότε η μία είναι ίση ή πάνω/κάτω από την άλλην.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να λύσουμε την $x^2+ 2x - 8 = 4$ και $x^2+ 2x - 8 > 4$ μπορούμε να την ανάγουμε σε $x^2+ 2x - 12 = 0$ και $x^2+ 2x - 12 > 0$ ή να θεωρήσουμε $f(x)= x^2+ 2x – 8$, $g(x)=4$ οπότε προκύπτει το εξής γράφημα:

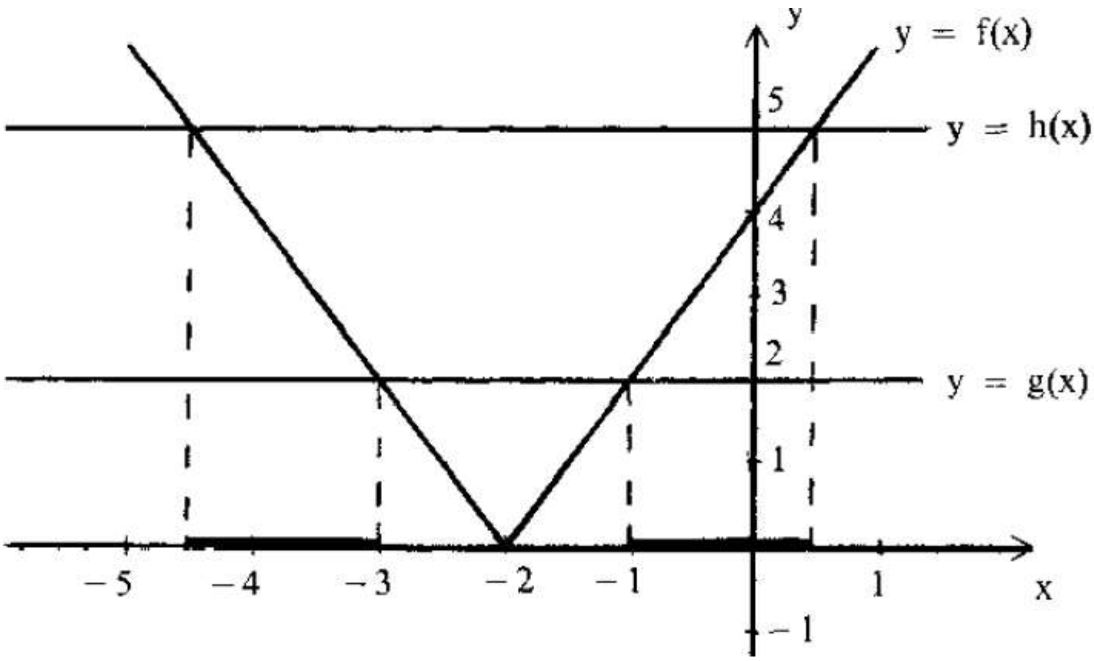


Εικόνα 11. Επίλυση εξίσωσης και ανίσωσης με πολυώνυμα και στα δύο μέλη

Εύκολα διαπιστώνεται πως τα x που ικανοποιούν την εξίσωση είναι τα -4,6 και 2,6 ενώ της ανίσωσης βρίσκονται στο διάστημα (-∞,-4,6)U(2,6,∞).

❖ Στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν τέμνει τον άξονα των x,ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπιστώσει αν το γράφημα του είναι πάνω από τον άξονα ή κάτω, οπότε ανάλογα αν ισχύει ή ανίσωση για όλα τα x ή για κανένα x.

❖ Στην περίπτωση της διπλής ανίσωσης με απόλυτο, η λύση μέσω της γραφικής παράστασης οδηγεί το μαθητή να θέσει τρεις συναρτήσεις. Για παράδειγμα για τη λύση της ανίσωσης $2 < |2x + 4| < 5$ θέτουμε $f(x) = |2x + 4|, g(x) = 2, h(x) = 5$.

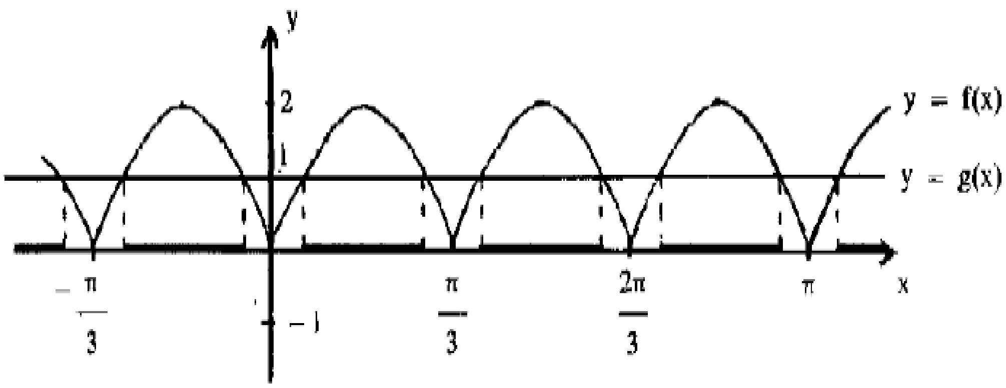


Εικόνα 12. Επίλυση διπλής ανίσωσης με απόλυτη

Εύκολα διαπιστώνεται πως η f(x) βρίσκεται ανάμεσα στις g(x) και h(x) για τα x που ανήκουν στο διάστημα (-9/2, -3)U(- 1,1/2).

Οι αλγόριθμοι που λύνουν τις εξισώσεις και τις ανισώσεις απαιτούν λογικές συνδέσεις και ευχέρεια στις πράξεις και τις επιλύσεις εξισώσεων ενώ η προσέγγιση με τη γραφική παράσταση δίνει ευκολία στις λύσεις αρκεί να υπάρχει καλή κατανόηση των διαφόρων συναρτήσεων. Όσο δυσκολεύουν οι συναρτήσεις έχει παρατηρηθεί πως η γραφική απεικόνιση βοηθά ακόμη περισσότερο ενώ οι μαθητές που διαχειρίζονται και τους δύο τρόπους βρίσκονται σε πλεονεκτική θέση.

❖ Εξισώσεις και ανισώσεις που εμπλέκουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις απαιτούν την περιοδική επανάληψη, η οποία φαίνεται ξεκάθαρα σε γράφημα. Για παράδειγμα στις |2sin(3x + π)| = 1 και |2sin(3x + π)| > 1 θέτουμε f(x) = |2sin(3x + π)| και g(x) = 1.

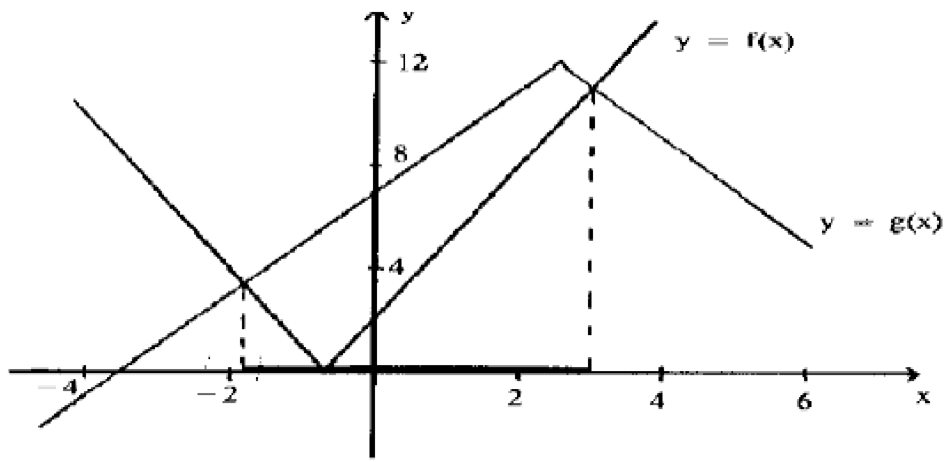


Εικόνα 13. Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης και ανίσωσης

Εύκολα διαπιστώνεται πως τα σημεία τομής είναι τα (6n±l)7π/18 και η f(x) βρίσκεται πάνω από την g(x) για x που ανήκουν στο διάστημα ((6n±l)7π/18, (6(n+1)±l)7π/18).

Η επίλυση της εξίσωσης έχει ένα επίπεδο δυσκολίας μεγαλύτερο από τις προηγούμενες, ωστόσο είναι κατανοητό πότε να λυθεί η εξίσωση και η γραφική επίλυση ξεπερνάει όλες τις τεχνικές δυσκολίες που μπορεί να φέρει ο αλγόριθμος επίλυσης ανισώσεων.

❖ Όταν εμπλέκονται δύο διαφορετικές απόλυτες τιμές, θα πρέπει να ορίσουμε δύο συναρτήσεις όπου η καθεμία να περιέχει μία από τις δύο απόλυτες τιμές. Για παράδειγμα στην |3x + 2| + |2x - 5| < 12 και στην |3x + 2| + |2x - 5| < 12,περνάμε τη μία απόλυτη τιμή στο δεύτερο μέλος και θέτουμε f(x) = |3x + 2|,g(x) = 12 - |2x - 5|.

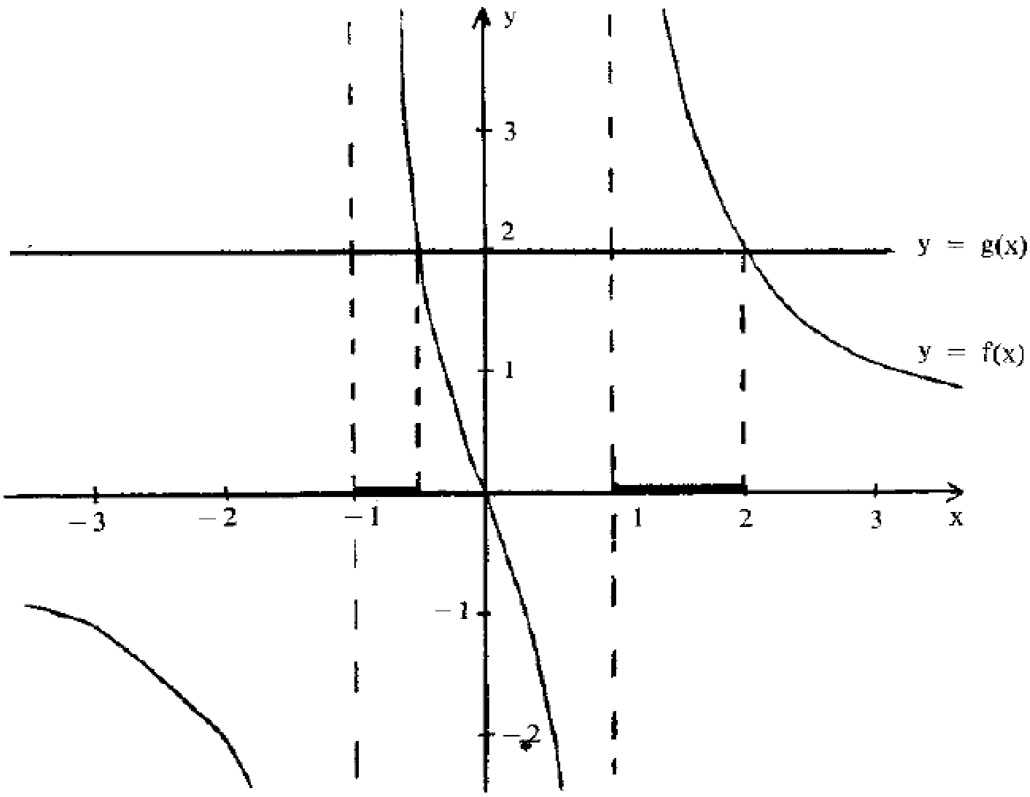


Εικόνα 14. Επίλυση εξίσωσης και ανίσωσης με δύο απόλυτες τιμές

Εύκολα διαπιστώνεται πως τέμνονται στα σημεία $-\frac{9}{5}$ και 3 ενώ η f(x) βρίσκεται κάτω από την g(x) για τα x που ανήκουν στο διάστημα $(-\frac{9}{5},3)$.

Ο αλγόριθμος για την επίλυση τέτοιας εξίσωσης απαιτεί τον διαχωρισμό τεσσάρων περιπτώσεων και την επίλυση της εκάστοτε πρωτοβάθμιας εξίσωσης. Η γραφική παράσταση όμως εδώ βοηθάει καθώς φαίνεται πως τα σημεία τομής τους προέρχονται από την περίπτωση που και οι δύο απόλυτες βγαίνουν με θετικό πρόσημο και την περίπτωση που και οι δύο απόλυτες βγαίνουν με αρνητικό πρόσημο. Σε αυτό το πρόβλημα η αληθινή δυσκολία είναι η επίλυση της εξίσωσης και όχι της ανίσωσης.

Σε ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθείται η ίδια διαδικασία. Για παράδειγμα στην επίλυση της $\frac{3x}{x^2-1}=2$ και της $\frac{3x}{x^2-1}>2$ θέτουμε $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$, $g(x)=2$.



Εικόνα 15. Επίλυση κλασματικής εξίσωσης και ανίσωσης

Εύκολα διαπιστώνεται πως τέμνονται στα σημεία -½ και 2 ενώ η f(x)>g(x) για τα x που ανήκουν στο διάστημα (-1,-½)U(1,2).

5. ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν το αναλυτικό τωρινό πρόγραμμα που χρησιμοποιείται στο γυμνάσιο, το αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 το οποίο δεν εφαρμόστηκε στα σχολεία και τα αντίστοιχα βιβλία του καθηγητή.

5.1 ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΙΣΧΥΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ- ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το ισχύον πρόγραμμα σπουδών απορρίπτει το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας κατά το οποίο τονίζονται τα αποτελέσματα της μαθηματικής δημιουργίας και ο τρόπος παρουσίασης τους με το σκεπτικό ότι υποβαθμίζεται η διαδικασία που αυτά παράγονται. Βαρύτητα δίνεται στη δραστηριότητα η οποία ενεργοποιεί το μαθητή και μέσω της οποίας προκύπτει το αποτέλεσμα. Τα ισχύοντα σχολικά βιβλία έχουν μία φιλοσοφία που μοιάζει να βασίζεται στις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής

Εκπαίδευσης (ΡΜΕ), ως προς τις δραστηριότητες που προτείνουν. Ωστόσο στην ουσία δεν βασίζεται σε καμία διδακτική θεωρία. Όσον αφορά τη χρήση τεχνολογίας γίνονται αναφορές στην ανάγκη δημιουργίας ενός κατάλληλου εκπαιδευτικού περιβάλλοντος και σε αυτή την κατεύθυνση συμβάλλουν οι "νέες" τεχνολογίες. Άλλωστε το διαδραστικό βιβλίο περιλαμβάνει δραστηριότητες και παραπομπές στο Φωτόδεντρο (αποθετήριο ψηφιακού υλικού και δραστηριοτήτων για την εκπαιδευτική κοινότητα).

Ειδικότερα για τα γραμμικά συστήματα θέτει:

Ως θεματικές ενότητες:

- Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης
- Η έννοια του γραμμικού συστήματος και γραφική επίλυσή του
- Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Ως στόχο:

- Να παριστάνουν γραφικά μια γραμμική εξίσωση.
- Να λύνουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα.
- Να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο:

-της αντικατάστασης

-των αντίθετων συντελεστών

- Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων.

Ως διατιθέμενο χρόνο:

- 7 ώρες

5.2 ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΙΣΧΥΟΝΤΟΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Γ’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Όπως επισημάνει και στην εισαγωγή: «Βασικός σκοπός του βιβλίου αυτού είναι η υποστήριξη του έργου του διδάσκοντος, καθώς παρέχει μια πρώτη οργάνωση των διδακτικών ωρών που απαιτούνται για τη διδασκαλία κάθε ενότητας, σημειώνει τους κύριους και δευτερεύοντες διδακτικούς στόχους της, υπογραμμίζει τις βασικές έννοιες που πρέπει να διδαχθούν σ' αυτήν και προτείνει ενδεικτικές οδηγίες διδασκαλίας. Οι ώρες διδασκαλίας είναι ενδεικτικές. Ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να τις αναπροσαρμόζει, έτσι ώστε να ολοκληρώνεται η διδακτέα ύλη στις προβλεπόμενες ώρες».

Ειδικότερα για τα γραμμικά συστήματα στο κάθε κεφάλαιο:

- 3.1. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης (2 διδακτικές ώρες)

Ως δραστηριότητα:

Με τη δραστηριότητα, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να καταλήξουν σε μια εξίσωση με δύο αγνώστους της μορφής $αx + βy = γ$ (την $2x + y = 6$) και να διαπιστώσουν ότι λύσεις της εξίσωσης είναι διατεταγμένα ζεύγη (x, y), τα οποία αν παρασταθούν με σημεία σ' ένα σύστημα αξόνων, τότε όλα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε. Επιπλέον μπορούν να διαπιστώσουν ότι οι συντεταγμένες κάθε σημείου της ευθείας είναι λύση της εξίσωσή της.

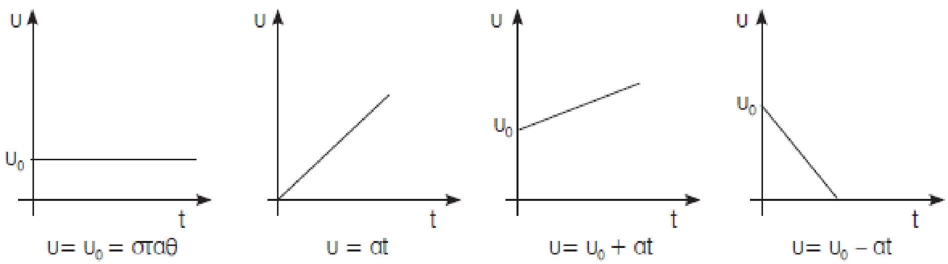
Ως διδακτικούς στόχους:

- Να μάθουν τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πότε ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών είναι λύση της.
- Να γνωρίζουν πότε μια γραμμική εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ παριστάνει ευθεία και πώς αυτή σχεδιάζεται στις περιπτώσεις που τέμνει τους άξονες ή είναι παράλληλη σ' έναν από αυτούς.

Ως διδακτικές οδηγίες:

- Αν και στην προηγούμενη τάξη οι μαθητές έχουν διδαχθεί τη γραμμική εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ με $α\neq 0$ ή $β\neq 0$, κρίθηκε ωστόσο αναγκαία η επανάληψή της για την κατανόηση της γραφικής επίλυσης των συστημάτων.

- Για τον σχεδιασμό της ευθείας αx + βy = γ με α≠0 ή β≠0, είναι αρκετό να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες δύο σημείων της (συνήθως βρίσκουμε τα κοινά της σημεία με τους άξονες). Για τον προσδιορισμό των σημείων αυτών δεν είναι απαραίτητο η γραμμική εξίσωση να μετασχηματιστεί στην αντίστοιχη γραμμική συνάρτηση.
- Να τονιστεί ότι η λύση μιας γραμμικής εξίσωσης αx + βy = γ δεν είναι ένας αριθμός, αλλά ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών.
- Να διευκρινιστεί με συγκεκριμένα παραδείγματα ότι ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της (παραδείγματα 1, 2,άσκηση 2).
- Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος για τη διερεύνηση ή τον προσδιορισμό της εξίσωσης της ευθείας, αλλά μόνο για τον σχεδιασμό μιας ευθείας, όταν είναι γνωστή η εξίσωση της.
- Η εξοικείωση των μαθητών με τον σχεδιασμό και την ερμηνεία των στοιχείων της ευθείας που παριστάνει μια γραμμική εξίσωση είναι βασική επιδίωξη της ενότητας αυτής και γι’ αυτό επιβάλλεται οι μαθητές να χρησιμοποιούν τετραγωνισμένο χαρτί και οι ευθείες να γίνονται με επιμέλεια και προσοχή στο τετράδιο ή στον πίνακα.
- Τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου ενός κινητού που εκτελεί ομαλή ή ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση προσφέρονται για να εμπεδώσουν οι μαθητές ορισμένες από τις μορφές της γραφικής παράστασης μιας γραμμικής εξίσωσης.



Εικόνα 16.Διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος

3.2. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του (1 διδακτική ώρα)

Ως διδακτικούς στόχους:

- Τι είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και πότε ένα ζεύγος αριθμών είναι η λύση του.
- Να επιλύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να κατανοήσουν πότε έχει μια λύση, πότε είναι αδύνατο και πότε είναι αόριστο.

Ως διδακτικές οδηγίες:

- Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους προσφέρεται για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι εκτός από την περίπτωση μιας λύσης ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις (παράδειγμα 2).
- Δεν πρέπει να διατεθεί χρόνος για τη διερεύνηση του συστήματος.
- Είναι δυνατόν μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα να διευκρινιστεί ότι για ένα σύστημα της μορφής: $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$, ισχύουν

Αν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$,τότε το σύστημα έχει μια λύση.

Αν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$,τότε το σύστημα είναι αδύνατον.

Αν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$,τότε το σύστημα είναι αόριστο.

- Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να ερμηνεύουν και να εξάγουν συμπεράσματα από τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος (ασκήσεις 3, 4)
- Να δοθεί ιδιαίτερο βάρος στην εξοικείωση των μαθητών με τις γεωμετρικές και αλγεβρικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται ισοδύναμα στο κεφάλαιο αυτό. Η δυνατότητα «μετάβασης» από το ένα είδος έκφρασης στο άλλο είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση της γραφικής επίλυσης των συστημάτων. Π.χ.

Γεωμετρική έκφραση		Αλγεβρική έκφραση
Το σημείο $M(x_0, y_0)$ **ανήκει** στην ευθεία ε.	↔	Οι συντεταγμένες (x_0, y_0) του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωσή της.
Μια ευθεία ε **διέρχεται** από το σημείο $M(x_0,y_0)$.	↔	Το ζεύγος των συντεταγμένων (x_0, y_0) του σημείου Μ είναι λύση της εξίσωσή της.
Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ **τέμνονται**.	↔	Το σύστημα των εξισώσεων έχει **μοναδική λύση**.
Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ είναι **παράλληλες**.	↔	Το σύστημα των εξισώσεων είναι **αδύνατον**.
Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ **ταυτίζονται**.	↔	Το σύστημα των εξισώσεων είναι **αόριστο**.

Εικόνα 17. Συσχέτιση γεωμετρικής και αλγεβρικής έκφρασης στην έννοια της ευθείας του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος

Ως εναλλακτική διδασκαλία με τη χρήση Η/Υ (Διερευνητική προσέγγιση) με θέμα τη γραφική επίλυση συστήματος:

Η διδασκαλία της γραφικής επίλυσης ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, προσφέρεται να υποστηριχτεί από Η/Υ. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει καταρχήν να επιλεγεί το κατάλληλο λογισμικό το οποίο να σχεδιάζει την ευθεία που παριστάνει η γραμμική εξίσωση αx + βy = γ και όχι η συνάρτηση y = αx + β, π.χ. το Graphmatica for windows. Στη συνέχεια θα πρέπει να σχεδιαστεί μια δραστηριότητα με βασικό στόχο:

- Να ανακαλύψουν οι μαθητές τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος και της λύσης του.
- Να κατανοήσουν τη θέση των ευθειών στο επίπεδο όταν το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Υποστηρικτικό υλικό για τη διδασκαλία αυτή θα βρει ο διδάσκων και στην Εκπαιδευτική Πύλη του ΥΠΕΠΘ www.e-yliko.gr.

➢ 3.3. Η αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος (4 διδακτικές ώρες)

Ως διδακτικούς στόχους:

- Να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

– Με τη μέθοδο της αντικατάστασης

– Με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών

- Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια των συστημάτων.

Ως διδακτικές οδηγίες:

- Να τονιστεί ότι ανάλογα με το σύστημα επιλέγεται και ο καταλληλότερος τρόπος επίλυσής του (ερώτηση κατανόησης 5).
- Η επίλυση συστημάτων να μη περιοριστεί μόνο σε συστήματα με αγνώστους x, y αλλά και σε συστήματα με αγνώστους α,β,υ,t κ.τ.λ.
- Να χρησιμοποιηθεί η αλγεβρική επίλυση συστημάτων για τη λύση προβλημάτων της καθημερινής μας ζωής, της Γεωμετρίας, της Φυσικής, της Χημείας κ.τ.λ.
- Να επισημανθεί με συγκεκριμένα παραδείγματα ότι ορισμένα από τα προβλήματα που λύνονται μ' ένα σύστημα με δύο αγνώστους, μπορούν να λυθούν και με μία εξίσωση που να περιέχει έναν μόνον άγνωστο.
- Μια από τις διδακτικές ώρες θα μπορούσε να αφιερωθεί στην επίλυση προβλημάτων κίνησης που λύνονται με συστήματα (όπως οι ασκήσεις 16, 19).
- Ως εργασία για το σπίτι προτείνεται να δοθούν οι ασκήσεις 15 και 14 από τις γενικές.

Το ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης, έχει χρησιμοποιηθεί ως προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου για την έρευνα (παράρτημα Ζ). Πρόκειται για τις ίδιες ασκήσεις, με την ίδια σειρά, χωρίς την εικαστική διαμόρφωση με εικόνες του προτεινόμενου γνωστικού test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου.

5.3 ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ 2011-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑΓ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στο πρόγραμμα σπουδών του 2011 αναφέρεται ως διδακτική θεωρία η τροχιά μάθησης όπως αυτή παρουσιάζεται στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση. Η εστίαση δίνεται «σε μία εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων» (Βασικές αρχές μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών).Έτσι ορίζονται οι εξής βασικές θεματικές περιοχές που διατρέχουν όλους τους ηλικιακούς κύκλους : Αριθμοί - Άλγεβρα, Χώρος-Γεωμετρία-Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Στο πρόγραμμα αναφέρεται πως οι μαθητές πρέπει να αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών και των αντίστοιχων διαδικασιών και κρίνεται απαραίτητο να δοθεί η δυνατότητα να συσχετίσουν μαθηματικές έννοιες με τον πραγματικό κόσμο (Π.Ι. «Νέο Σχολείο– Νέο πρόγραμμα σπουδών, 2011, σ.10).

Σχετικά με τη χρήση τεχνολογίας προτείνει την αξιοποίηση ημι-δομημένων χειραπτικών εργαλείων (algebra tiles) για τις πράξεις των ακεραίων, καθώς και αναπαραστατικών εργαλείων όπως η αριθμογραμμή. Προτείνεται γενικώς η χρήση ψηφιακών εργαλείων (Οδηγίες 2011, σελ.6) με τη μορφή μικροπειραμάτων και ως βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες.

Ειδικότερα για τα γραμμικά συστήματα θέτει

Ως προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

- Αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy=γ, τις αναπαριστούν γραφικά και τις συνδέουν με συναρτήσεις της μορφής y=αx+β.
- Αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του.
- Ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του.
- Μοντελοποιούν προβλήματα με δύο γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy=γ ή με δύο συναρτήσεις της μορφής y=αx+β. Επιλύουν το σύστημα γραφικά και αλγεβρικά (με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης) και επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.

Ως ενδεικτικές ώρες:

- 7 ώρες

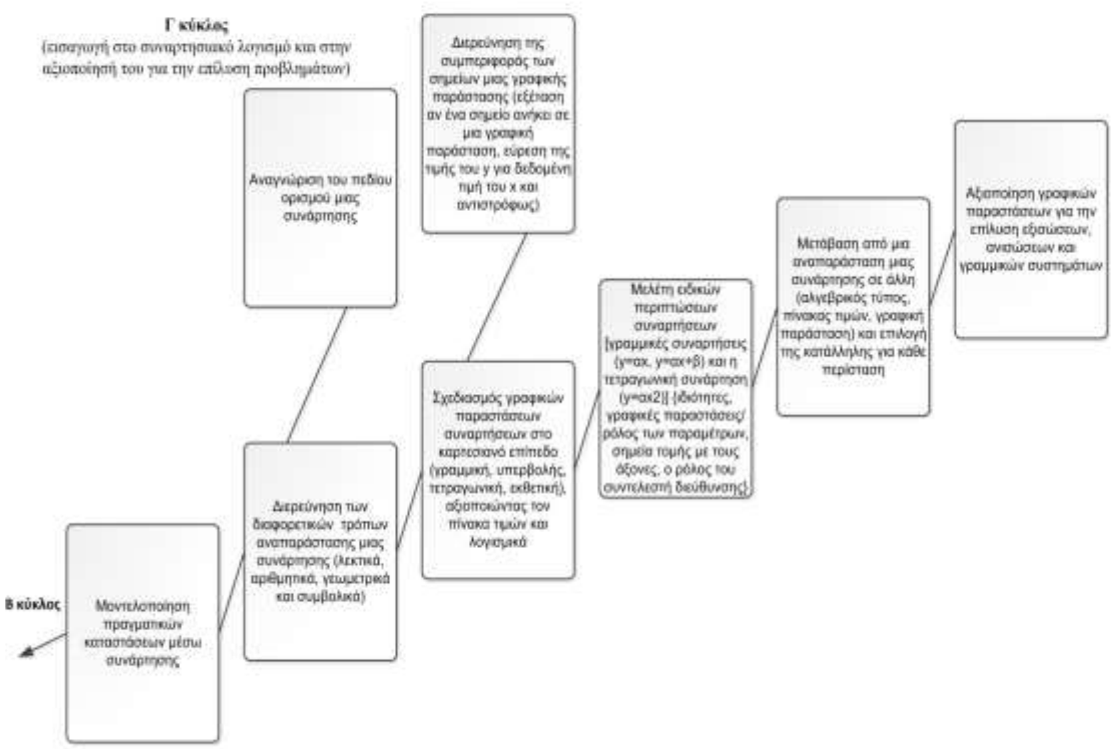
5.4 ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ 2011-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Όπως τονίζεται και στην εισαγωγή: «Ο οδηγός του εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού ώστε να μπορέσει να υλοποιήσει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη φιλοσοφία του νέου προγράμματος σπουδών. Ο οδηγός δεν δίνει στον εκπαιδευτικό “συνταγές” για το τι θα κάνει στην τάξη του, αλλά προσπαθεί να τον βοηθήσει στην κατανόηση του νέου προγράμματος σπουδών και τη σχεδίαση της διδασκαλίας.

Επίσης προτείνει κατά τη διάρκεια της χρονιάς: πορτφόλιο (χαρτοφυλάκιο), ημερολόγια, παρατήρηση, αξιολόγηση συνθετικής εργασίας.

Ειδικότερα για το κεφάλαιο των γραμμικών συστημάτων θέτει:

Ως τροχιά για τα γραμμικά συστήματα:



Εικόνα 18. Τροχιά συναρτησιακού λογισμού αναλυτικού προγράμματος 2011

Ως εκπαιδευτικό υλικό για δραστηριότητες σχετικές με γραμμικά συστήματα:

- http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/WProblem2Eq.shtml
- http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/naBalVar1.pdf

- http://www2.edc.org/mathproblems/problems/printProblems/ekSubElim.pdf

5.5 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

Στο υποκεφάλαιο 3.1, το σχολικό βιβλίο αρχίζει δηλώνοντας τον αρχικό στόχο του βιβλίου του καθηγητή, την έννοια της γραμμικότητας. Ωστόσο δίνει ένα παράδειγμα συνάρτησης χωρίς να ξαναφέρει πουθενά τη γραμμικότητα. Στη συνέχεια μέσω παραδείγματος εξηγεί πως μία εξίσωση της μορφής αx + βy = γ παριστάνει ευθεία, πως συμπληρώνω πίνακα τιμών και τι αρκεί για να σχεδιάσω γραφικά μία ευθεία. Έπειτα, όπως προτείνουν και οι στόχοι, διερευνά τις ειδικές περιπτώσεις της ευθείας. Ακολουθούν τρείς εφαρμογές, με την τελευταία να έχει θέμα από τον τομέα της Γεωμετρίας. Τονίζεται η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους και το πότε ένα ζεύγος αποτελεί λύση μίας ευθείας.

Στο υποκεφάλαιο 3.2, δίνεται τόσο ο αυστηρός ορισμός όσο και μία πιο αναλυτική προσέγγιση μέσω παραδείγματος της έννοιας του συστήματος και της λύσης του. Ακολουθούν τρία παραδείγματα με γραφική επίλυση συστημάτων, Το κάθε παράδειγμα έχει και από μία από τις πιθανές λύσεις ενός συστήματος και σ\αντίστοιχα σχετικές σχέσεις δύο ευθειών. Ακολουθούν δύο εφαρμογές. Πουθενά στο κεφάλαιο δε γίνεται ιδιαίτερη προσέγγιση στις διάφορες εκφράσεις (γεωμετρικές και αλγεβρικές) που προτείνει το βιβλίο του καθηγητή.

Στο υποκεφάλαιο 3.3 με δύο παραδείγματα αναλύονται οι δύο μέθοδοι επίλυσης. Το πρώτο παράδειγμα αρχίζει με ένα πρόβλημα και ξανασυναντάμε ένα υποτυπώδες πρόβλημα στις εφαρμογές. Παρόλο που τονίζεται στους στόχους, δε γίνεται κάποια ιδιαίτερη αναφορά στο ποια είναι η καταλληλότερη μέθοδος σε κάθε περίπτωση, ούτε υπάρχει παράδειγμα με παραμετρικό σύστημα.

Σε όλες τις ασκήσεις του κεφαλαίου δίνονται λίγα παραδείγματα, κυρίως Γεωμετρίας και καθημερινότητας ενώ λίγα Φυσικής. Μόνο σε ασκήσεις παρατηρούνται παραμετρικά συστήματα και κυρίως στις σύνθετες στο τέλος του κεφαλαίου.

6. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

6.1 ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι έννοιες των αλγεβρικών εξισώσεων και γραμμικών συστημάτων, είναι βασικές για όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Προετοιμάζονται από το δημοτικό και στο λύκειο θεωρούνται κεκτημένες γνώσεις για την εισαγωγή στο διαφορικό λογισμό. Ωστόσο αρκετά συχνά δημιουργούνται παρανοήσεις οι οποίες οδηγούν στη χρήση λανθασμένων διαδικασιών για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων (Van Lehn & Jones, 1993). Η αδυναμία απόκτησης δομικής αντίληψης της έννοιας επιφέρει δυσκολία στους μαθητές στην αντιμετώπιση θεμάτων που αφορούν την έννοια του συστήματος, πολλές φορές ακόμα και σε δραστηριότητες διαδικαστικής φύσης.

Οι έννοιες της ισότητας, της ανισότητας, της τομής και κατ' επέκταση των συστημάτων έχουν βαθιά τις ρίζες τους στη μαθηματική επιστήμη. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσχέρειες τόσο σε ορισμούς και θεωρήματα όσο και στην εφαρμογή τους. Η διδασκαλία δεν αφήνει περιθώρια να διδαχθούν οι μαθητές από τα λάθη τους ενώ δεν υπάρχει εμβάθυνση στις έννοιες.

Η διδακτική παρέμβαση η οποία περιγράφεται στην παρούσα διπλωματική εργασία στηρίχθηκε στη μελέτη της ιστορίας των γραμμικών συστημάτων από τους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων, Αράβων, Κινέζων, Λατίνων και έλαβε υπόψη της όλες τις παρανοήσεις που σχετίζονται με τα γραμμικά συστήματα και την επίλυση αυτών, όπως αυτές αναλύθηκαν σε προηγούμενες ενότητες. Επιπλέον η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος και σχολικού βιβλίου. Ταυτόχρονα είχε ως φιλοδοξία την προτροπή των μαθητών να διώξουν τις διάφορες ετικέτες που δίνονται κατά καιρούς στα Μαθηματικά όπως δύσκολα, ακατανόητα, ανιαρά και να αντιληφθούν πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι να τα διδαχθούν, πιο κοντά στους ίδιους, στην καθημερινότητά τους, κάνοντας ακόμη αποδεκτά τα λάθη όπως έκαναν μεγάλοι επιστήμονες στο βάθος της Ιστορίας πριν από οποιαδήποτε ανακάλυψή τους. Επίσης λόγω έλλειψης εμπειρικών ερευνών που αφορούν την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση, συμβάλλει στην απόκτηση παραπάνω αποτελεσμάτων σχετικά με τα οφέλη αλλά και την απήχηση που αυτές έχουν στους μαθητές.

Πέρα από τη χρήση της Ιστορίας, στην έρευνα εντάχθηκε και η γραφική αναπαράσταση ως μέσο επίλυσης προβλημάτων. Αρκετές προκαταλήψεις υπάρχουν γύρω από τις γραφικές παραστάσεις λ.χ. είναι εκτός ύλης, δεν αποτελούν επίσημη απόδειξη ή η χρήση της γίνεται μόνο για επαλήθευση. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιήθηκαν αρκετές ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες με μεγάλο ενδιαφέρον που αναλύεται στη συζήτηση, καθώς το δείγμα των μαθητών δεν είχε εργαστεί ποτέ ξανά πάνω σε τέτοιες.

Τέλος η διδακτική παρέμβαση της παρούσας εργασίας αποσκοπεί στη διαμόρφωση ενός πακέτου διδασκαλίας του τρίτου κεφαλαίου της Γ΄ γυμνασίου. Αυτό το πακέτο θα μπορεί να το χρησιμοποιήσει ο οποιοσδήποτε εκπαιδευτικός, με βασικές γνώσεις της Ιστορίας των γραμμικών συστημάτων, με σκοπό να διδάξει γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους.

6.2 ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα γραμμικά συστήματα αποτελούν το τελευταίο κεφάλαιο της άλγεβρας στο βιβλίο της Γ΄ γυμνασίου και οι μαθητές τα ξανασυναντούν στο πρώτο κεφάλαιο της άλγεβρας της Β΄ λυκείου. Το σχολικό βιβλίο στα τρία υποκεφάλαια που διαθέτει, παραθέτει πρώτα παραδείγματα, έπειτα δίνει αν χρειάζεται ορισμό και στη συνέχεια παραθέτει κάποιες λυμένες εφαρμογές. Στόχος σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών είναι ο μαθητής να μπορεί να λύσει με τις δύο μεθόδους ένα γραμμικό σύστημα και να επιλύουν προβλήματα που ανάγονται σε γραμμικά συστήματα. Η παρέμβαση αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του προγραμματισμού ανάπτυξης της διδακτέας ύλης που καθορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας. Αποτελεί επομένως προσπάθεια επίτευξης των στόχων που θέτουν οι οδηγίες διδασκαλίας του Υπουργείου και οι οποίες έχουν ήδη αναφερθεί, ακολουθώντας την ίδια διάρθρωση της ύλης . Με γνώμονα την κάλυψη των προηγούμενων στόχων, η παρέμβαση εστιάζει στην προσπάθεια ανάπτυξης δομικής αντίληψης από τους μαθητές, των εννοιών της συνάρτησης της ευθείας και των γραμμικών συστημάτων. Υπό αυτό το πρίσμα, σχεδιάστηκαν και δομήθηκαν οι ερωτήσεις των φύλλων εργασίας (παραρτήματα Β-ΣΤ), ώστε η ικανότητα επίλυσης των ασκήσεων από τους μαθητές να προκύπτει ως αποτέλεσμα της εννοιολογικής κατανόησης των ιδιοτήτων της ευθείας και του γραμμικού συστήματος.

Σκοπός λοιπόν, είναι να στηθεί ένα πακέτο διδασκαλίας για τα γραμμικά συστήματα, να αναλυθούν τα αποτελέσματα και να απαντηθούν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Πώς επιδρά η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως εργαλείου στη δομική αντίληψη από τους μαθητές των εννοιών της ευθείας και των γραμμικών συστημάτων σε συνθήκες σχολικής τάξης;
- Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλάζει τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά κάνοντας τα λιγότερο απρόσωπα δείχνοντας ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο μάθημα παρά ένα σύστημα από αμετάβλητες αξίες που μας διδάσκει να μην απογοητευόμαστε μετά από κάθε αποτυχία, λάθος, αβεβαιότητα ή παρανόηση και μία πολιτισμική προσπάθεια;

6.3 ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση απευθύνεται σε μαθητές Γ΄ γυμνασίου. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης δουλεύουν ατομικά είτε χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων. Η παρέμβαση αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του προγραμματισμού ανάπτυξης της διδακτέας ύλης και των 7 ωρών που καθορίζονται από το Υπουργείο Παιδείας.

6.4 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης περιλαμβάνει test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων με σκοπό τη διερεύνηση κενών ή παρανοήσεων από την ύλη της Β΄ γυμνασίου που είναι απαραίτητα εφόδια για το κεφάλαιο των γραμμικών συστημάτων (παράρτημα Α). Επίσης περιλαμβάνονται πέντε φύλλα εργασίας για τις πέντε φάσεις της διδακτικής παρέμβασης (παραρτήματα Β-ΣΤ), προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου (παράρτημα Ζ) και ερωτηματολόγιο αποτίμησης (παράρτημα Η).

Εκτός της συμβολής της Ιστορίας των Μαθηματικών, έγινε προσπάθεια αξιοποίησης των δυνατοτήτων που παρέχουν οι ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες στη διδασκαλία. Στόχος είναι η ανάπτυξη ενός περιβάλλοντος μάθησης που προωθεί την εννοιολογική κατανόηση των γραμμικών συστημάτων έναντι της στείρας απομνημόνευσης διαδικασιών επίλυσης ασκήσεων, όπως σύντομα περιγράφεται αμέσως παρακάτω. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσα από τέτοιες δραστηριότητες οι οποίες προάγουν το διάλογο, την αλληλοβοήθεια μεταξύ συνομηλίκων και αποβάλλουν μεγάλο μέρος του άγχους που προκύπτει από το ατομικό βάρος επίλυσης μίας άσκησης.

Οι ασκήσεις στα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν με βάση την διερευνητική – ανακαλυπτική μάθηση του Bruner. Η διδασκαλία είναι φτιαγμένη έτσι ώστε να μη δέχονται τη γνώση έτοιμη οι μαθητές, αλλά να συμμετέχουν στη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης. Βασική αρχή της θεωρίας είναι ο μαθητής να προσεγγίζει την γνώση με καινούριες δεξιότητες μέσω πειραματισμού και πρακτικής. Σύμφωνα και με τον Glasersfeld, τα μαθηματικά απαιτούν διαφορετική προσέγγιση, λόγω της αφηρημένης τους φύσης και για αυτό χρειάζεται μία διδασκαλία με δυναμικό περιβάλλον στο οποίο θα είναι ευνοϊκές οι συνθήκες για την εξέλιξη των ατόμων μέσα σε αυτήν. Η δυναμική επίσης της ομάδας και όχι της ατομικής διδασκαλίας, δίνει τη δυνατότητα να συζητήσουν και να ερμηνεύσουν τα δεδομένα έως ότου φτάσουν στη λύση.

Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της μορφής διδασκαλίας είναι πως η συμμετοχή των μαθητών σε αυτήν την περίπτωση είναι ενεργητική και όχι παθητική. Μάλιστα, οι μαθητές καλούνται να πειραματιστούν και να ερευνήσουν, ώστε οι ίδιοι ομαδικά να δώσουν λύσεις στα καθημερινά εκπαιδευτικά καθήκοντα και δραστηριότητες. Οι μαθητές καλούνται από μικρή ηλικία να κοινωνικοποιηθούν και να αναπτύξουν έναν πιο συλλογικό τρόπο σκέψης και οι δραστηριότητες αυτές διευκολύνουν αυτό το κομμάτι (Γκίκας, 2017). Σύμφωνα με τον Παναγάκο (2001), μέσω της κοινωνικής αλληλοεπίδρασης στη μαθησιακή ομάδα καλλιεργείται μεγαλύτερη αυτοεκτίμηση, ενώ αυξάνεται και η κοινωνική υποστήριξη που νιώθουν οι μαθητές ότι έχουν.

6.4.1 TEST ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΥΠΑΡΧΟΥΣΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ

Για το διερευνητικό τεστ επιπέδου των μαθητών (παράρτημα Α) με σκοπό των εντοπισμό κενών και την κάλυψή τους πριν την εφαρμογή, χρησιμοποιήθηκαν διάφορες πηγές. Δε χρησιμοποιήθηκε για να συσχετιστεί με το προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου διότι δεν εξετάζουν ισοδύναμα ζητήματα και επιπρόσθετα περιέχει θέματα εξισώσεων που δεν περιέχει το προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου. Αρχικά, με την άσκηση 1, εξετάζεται η ικανότητα των στις πράξεις μεταξύ αλγεβρικών πολυωνύμων και μονωνύμων. Παρόμοια άσκηση βρίσκεται τόσο στο σχολικό βιβλίο όσο και στο αναλυτικό πρόγραμμα του 2011. Περιέχει πρώτου βαθμού εξισώσεις, οι οποίες είναι απαραίτητες για το κεφάλαιο των συστημάτων. Από το βιβλίο του εκπαιδευτικού της Β΄ γυμνασίου, πάρθηκαν οι ασκήσεις 2,3,4 με μικρές διαφοροποιήσεις στους αριθμούς, οι οποίες αφορούν την κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης, των πιθανών λύσεών της, της επίλυσης και της μοντελοποίησης προβλημάτων. Από την ιστοσελίδα του κυπριακού Υπουργείου Παιδείας όπου έχουν αναρτημένες ενδεικτικές ασκήσεις και προτείνονται από το αναλυτικό πρόγραμμα του 2011, πάρθηκε η άσκηση 5, η οποία αφορά μοντελοποίηση προβλήματος στο πλαίσιο της Γεωμετρίας. Τέλος, η ευθεία έχει μελετηθεί στη Β΄ γυμνασίου και παρόλο που θα μελετηθεί ξανά στην πρώτη διδακτική φάση, τοποθετούμε την άσκηση 6 με σκοπό να διαπιστώσουμε τι γνώσεις έχουν κρατήσει οι μαθητές. Πρόκειται για άσκηση από τις ενδεικτικές ασκήσεις της κυπριακής ιστοσελίδας του Υπουργείου Παιδείας. Τυχόν κενά που θα διαπιστωθούν σε αυτή την άσκηση, δε θα καλυφθούν με προηγούμενες μικροδιδασκαλίες, εφόσον η πρώτη φάση θα αφορά αυτές τις έννοιες.

6.4.2 ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΝΟ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Τα φύλλα εργασίας (παραρτήματα Β-ΣΤ) έχουν διαμορφωθεί με βάση τους στόχους και την κατανομή των ωρών στο τωρινό αναλυτικό πρόγραμμα. Έχουν χρησιμοποιηθεί ασκήσεις (οι οποίες διαμορφώθηκαν) από το βιβλίο του καθηγητή που προτείνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 που δεν εφαρμόστηκε, ασκήσεις από το κυπριακό σχολικό βιβλίο και από αυτές που προτείνει η ιστοσελίδα του Κυπριακού Υπουργείου Παιδείας. Επίσης τα φύλλα αφορούν είτε ατομικές είτε ομαδικές ασκήσεις που θα αναλυθούν παρακάτω. Συγκεκριμένα το πρώτο φύλλο εργασίας αφορά ατομικές ασκήσεις για μία πιο ομαλή ένταξη των μαθητών στο ύφος αυτών των διδασκαλιών που διαφέρουν από τις σχολικές. Περαιτέρω τα προβλήματα που τοποθετήθηκαν είναι στην πλειοψηφία τους από αυθεντικά ιστορικά κείμενα, τα οποία βρέθηκαν είτε σε πάπυρους είτε σε κείμενα άλλου είδους από κάθε πολιτισμό. Ωστόσο οι αριθμοί των προβλημάτων προσαρμόστηκαν έτσι ώστε να ταιριάζουν με το σκοπό της κάθε άσκησης. Μετά από επεξεργασία, η τελική μορφή τόσο των προβλημάτων όσο και των ενδιάμεσων ερωτήσεων έγινε για την ανάδειξη και την αντιμετώπιση των παρανοήσεων που έχουν μελετηθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

6.4.3 1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το πρώτο φύλλο εργασίας (παράρτημα Β), αφορά την πρώτη φάση της διδακτικής παρέμβασης. Σύμφωνα με τους Tzanakis και Archavi (2000), η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να δράσει ως γέφυρα, εξυπηρετώντας τον καθηγητή να εισάγει την καινούργια έννοια στην τάξη. Βάσει αυτού το πρώτο φύλλο ξεκινά με δύο κριτικές ερωτήσεις: «Πόσο παλιά πιστεύετε πως είναι η έννοια των εξισώσεων που έχετε δει και των συστημάτων που θα μελετήσουμε;» και «Ήταν πιστεύετε ένας άνθρωπος που έφτιαξε αυτές τις έννοιες και βρήκε τους κανόνες που ξέρουμε σήμερα;». Περιμένουμε από τα παιδιά να έχουν έλλειψη κατανόησης του χρόνου όπως και λανθασμένη αίσθηση των αιώνων, απαντώντας λίγα χρόνια παλιότερα. Ακόμη περισσότερο αναμένουμε να είναι προκατειλημμένοι από τις ονομασίες θεωρημάτων και κανόνων (όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα) και να απαντήσουν πως ένας σπουδαίος μαθηματικός και μόνο, ίσως και σε μικρό χρονικό διάστημα, ανέπτυξε αυτήν την ιδέα/έννοια/θεώρημα/κανόνα. Στη συνέχεια ακολουθεί παράθεση μερικών πολιτισμών και προσωπικοτήτων, από αρκετές χρονικές περιόδους, αναδεικνύοντας και μία σπουδαία γυναίκα μαθηματικό, οι οποίοι συντέλεσαν στη διαμόρφωση της έννοιας και των κανόνων των συστημάτων. Παράλληλα παραθέτουμε και αντίστοιχες φωτογραφίες. Σκοπός είναι να αναθεωρήσουν οι μαθητές τον τρόπο που σκέφτονται για τη γέννηση μίας έννοιας. Εν συνεχεία, εισάγουμε τους δύο πρώτους πολιτισμούς που αφορούν το πρώτο φύλλο εργασίας, τους Βαβυλωνίους και τους Αιγυπτίους. Ξεκινώντας από τους πρώτους εισάγουμε μία μικρή παράγραφο με πληροφορίες τις οποίες επιλέγουμε να τοποθετηθούν στη μέση, σαν ροή του κειμένου όχι στην άκρη σαν ένθετο. Πρόκειται για μία παράγραφο που αναδεικνύει τη θέληση των Βαβυλωνίων για επιβολή ως φυλή μέσω των επιστημών. Πέρα από την ιστορική αναφορά χρησιμοποιείται ως κίνητρο για να πείσουμε τους μαθητές να ασχοληθούν με το αντικείμενο. Στη συνέχεια δίνονται πληροφορίες για τη σφηνοειδή γραφή με σκοπό και πάλι το κίνητρο. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, πρέπει να μελετηθούν ξανά οι έννοιες της ευθείας, των σχετικών θέσεων της με τον άξονα x΄x και της γραμμικότητας. Ακολουθώντας αυτούς τους στόχους, δίνεται το βαβυλωνιακό πρόβλημα της σελίδας 4, στο οποίο οι αριθμοί έχουν αντικατασταθεί από τους αντίστοιχους βαβυλωνιακούς, οι οποίοι αναλύθηκαν πιο πριν.

Μεταφράζοντας το πρόβλημα, το επόμενο βήμα είναι η μοντελοποίησή του. Έχοντας υπόψη πως οι μαθητές δεν κατανοούν εννοιολογικά ποιες είναι και τι αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές, ειδικά όταν είναι πάνω από δύο σύμφωνα με τους Booth και Watson (1990), Booth (1986), Kilpatrick (2001), Stacey και MacGregor (1997), φτιάχνουμε έναν πίνακα στον οποίο καταγράφουμε τις μεταβλητές και το γράμμα που τις θέτουμε (στη σελίδα 4). Είναι μία διαδικασία που θα απαιτείται σε κάθε μοντελοποίηση προβλήματος, σε όλα τα φύλλα εργασίας. Δίνεται αυτή η έμφαση τόσο για την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής όσο και της ετικέτας που της δίνεται, καθώς υπάρχει μεγάλη σύγχυση, όπως επισημαίνουν οι Weinberg et al. (2004), Lochhead & Mestre (1988) σε σχετικές τους έρευνες. Ωστόσο αυτό που μας ενδιαφέρει πρωτίστως, όπως υπέδειξαν και οι Swafford & Langrall (2000) σε σχετική τους έρευνα, είναι να μπορούν οι μαθητές να περιγράφουν προφορικά ένα πρόβλημα, να αντιστοιχίζουν τις μεταβλητές και να μπορούν να φτιάξουν την ανάλογη αλγεβρική εξίσωση.

Στη συνέχεια προσεγγίζεται με την επόμενη άσκηση η απειρία των λύσεων μίας εξίσωσης με 2 αγνώστους (στη σελίδα 5). Τόσο διαισθητικά από τους μαθητές, όσο και δοκιμάζοντας τα δοσμένα ζευγάρια της άσκησης προσπαθώντας να εντοπίσουν ποιο την ικανοποιεί. Αυτό οδηγεί στην ανακάλυψη της διαδικασίας κατά την οποία βρίσκουμε σημεία που ανήκουν στην ευθεία αλλά και στην ερώτηση, ποιος αριθμός ζευγαριών είναι ικανοποιητικός για τη γραφική παράστασή της. Εδώ υπάρχει μία επισήμανση, όπως σημειώνει και το πρόγραμμα σπουδών, σχετικά με την έννοια των διατεταγμένων σημείων στο επίπεδο, έννοια αρκετά καινούργια για τα παιδιά της τρίτης γυμνασίου.

Μετά το πέρας αυτής της διαδικασίας δίνεται το σχεδιάγραμμα της ιεραρχίας των διαδικασιών παρακολούθησης του Wollman (1983). Δίνεται στο τέλος για να διαπιστώσουν οι μαθητές κατά πόσο έκαναν αυτά τα βήματα και στη συνέχεια να μελετηθεί για μελλοντική χρήση. Επιχειρούμε από το πρώτο πρόβλημα, μέχρι και το τέλος της έρευνας να συνδέουμε τη γραφική παράσταση, ακόμη και με αυτήν να επιτευχθεί η λύση του ανάλογου προβλήματος για να αποφύγουμε, σύμφωνα με τους Vinner (1989), Zimmermann & Cunningham, (1991), την λανθασμένη εντύπωση των μαθητών να αντιλαμβάνονται τα γραφήματα σαν οπτικά εργαλεία ή τρόπους επιβεβαίωσης των λύσεων αντί για μέσα επίλυσης προβλημάτων.

Ακολουθεί η μελέτη των Αιγυπτίων. Αρχικά για λόγους φυσικής σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης που θα ακολουθήσει, δίνονται ιστορικά στοιχεία για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων μέσα από ιστορικά αποσπάσματα και αυθεντικές εικόνες. Η συζήτηση αφορά το γιατί οι επιστήμες τους αναπτύχθηκαν κυρίως γύρω από τις όχθες του Νείλου, συνδέοντας το κοινωνικό και πολιτισμικό υπόβαθρο της εποχής. Επιλέγεται να δοθούν πληροφορίες για του πάπυρους Rhind και της Μόσχας μόνο εγκυκλοπαιδικά και σαν ένθετο. Επομένως με ένα πρόβλημα των Αιγυπτίων (στη σελίδα 8), εφαρμόζεται όλη η προηγούμενη διαδικασία μοντελοποίησης της εξίσωσης και αναπαράστασης της ευθείας, αναμένοντας να εφαρμοστούν με μεγαλύτερη ευκολία.

Μετά τη μελέτη της έρευνας της Kieran (1992) αλλά και των ευρημάτων πολλών άλλων, Kieran & Sfard (1999), Day & Jones (1997), Briggs, Demana & Osborne (1986), Bottoms (2003), Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996), Eisenberg & Dreyfus (1991) οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιστοιχούν τα προβλήματα με τις εκφράσεις και τους ανάλογους πίνακες και γραφήματα. Σύμφωνα με τους Corter & Zahren (2007) και Kieran (2008) οι συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων θέτουν τις βάσεις για τις εξισώσεις και την κατανόηση τους, τόσο σχετικά με τις μεταβλητές όσο και με την ισοδυναμία, η οποία είναι απαραίτητη κατά την ενασχόληση με αυτές. Επομένως θεωρήθηκε αναγκαίο να τοποθετηθεί μία αντίστοιχη άσκηση. Στις σελίδες 9 και 10 του φύλλου εργασίας, βρίσκεται η άσκηση κατά την οποία οι μαθητές θα πρέπει να αντιστοιχίσουν το πρόβλημα, με την ανάλογη εξίσωση και το αντίστοιχο γράφημα.

Η αντιστοίχιση των σωστών απαντήσεων αυτής της άσκησης, οδηγεί στην ανακάλυψη των σχετικών θέσεων της ευθείας με τους άξονες. Επομένως εξάγονται συμπεράσματα για το πότε μία εξίσωση τέμνει τους άξονες σε 2 ξεχωριστά σημεία, πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πότε είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τι συμβαίνει στην κάθε περίπτωση τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά. Κατ’ επέκταση, ακολουθούν δύο ασκήσεις (στις σελίδες 10 και 11 αντίστοιχα), κατά τις οποίες εξασκείται η μοντελοποίησης προβλήματος, η δημιουργία γραφικής παράστασης αλλά και σχετικής θέσης με τους άξονες.

Το πρώτο φύλλο εργασίας κλείνει με επεξήγηση και ανάλογη δραστηριότητα περί γραμμικότητας συναρτήσεων. Είναι μία έννοια την οποία το αναλυτικό πρόγραμμα θέτει ως στόχο την κατανόησή της, ωστόσο το βιβλίο δηλώνει ως γραμμική συνάρτηση την ευθεία και δεν ασχολείται σε καμία άσκηση με αυτήν. Σε αυτό το φύλλο διδασκαλίας, προσεγγίζεται η γραμμικότητα σύμφωνα με την γενική εξίσωση της ευθείας $y=ax+b$ και οποιασδήποτε άλλης, τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά. Η πιο οικεία μη γραμμική συνάρτηση στους μαθητές της τρίτης γυμνασίου, είναι η συνάρτηση της θέσης σε σχέση με το χρόνο σε μία επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη ομαλή κίνηση. Πρόκειται για μία δευτέρου βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση η οποία προβάλλεται σε αντιδιαστολή με μία ευθεία. Κατασκευάζεται τόσο η ευθεία όσο και η παραβολή βάσει σημείων που παίρνουμε από πίνακα τιμών. Σύμφωνα με τους Kieran & Sfard (1999) τα προβλήματα θα πρέπει να διδάσκονται σε συνδυασμό με πίνακες και γραφήματα έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να δουν τις διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών εξισώσεων. Τέλος, συνδυάζοντας την παρουσίαση των γραμμικών και μη συναρτήσεων σε αντιδιαστολή, αλλά και τις απόψεις που προηγήθηκαν περί σημαντικότητας παρουσίασης γραφικών παραστάσεων, ακολουθεί η τελευταία άσκηση (σελίδες 13 και 14). Πρόκειται για 5 συναρτήσεις και 3 διαγράμματα, τα οποία οι μαθητές πρέπει να χαρακτηρίσουν ως γραμμικά ή μη. Η μη ενασχόληση τους με τις γραφικές παραστάσεις, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, δυσκολεύει τους μαθητές όταν έρχονται σε επαφή μαζί τους. Αναμένουμε ανάλογα αποτελέσματα από αυτήν τη διδασκαλία, κατά την οποία η γραφική αναπαράσταση προηγείται της άλγεβρας σε αντίθεση με την τετριμμένη διδασκαλία στο σχολείο.

6.4.4 2ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το δεύτερο φύλλο εργασίας (παράρτημα Γ), χρησιμοποιήθηκε στη δεύτερη φάση της διδακτικής παρέμβασης. Στην αρχή κάθε φύλλου εργασίας, περιλαμβάνεται μία μικρή υπενθύμιση όλων των βασικών στοιχείων που ειπώθηκαν στις προηγούμενες διδασκαλίες η οποία θα διαρκεί περίπου 5 λεπτά. Σκοπός είναι τόσο η προφανής υπενθύμιση, αλλά και ο συνδυασμός όλων των διδασκαλιών μέχρι τον τελικό στόχο με τη δημιουργία μίας μεθοδολογίας.

Αυτό το φύλλο εργασίας αφορά την αρχαία Ελλάδα, όπου δίνονται πληροφορίες για τον Πάππο, το Νικόμαχο και το Διόφαντο. Έπειτα ακολουθεί δημιουργική συζήτηση με αφορμή μία ιστορική σημείωση πως η εκφώνηση και η επίλυση των περισσότερων προβλημάτων που βρέθηκαν ήταν λεκτικές.

Όλα τα προβλήματα που ακολουθούν είναι του Διόφαντου ακριβώς όπως βρέθηκαν και κάποια με διαφοροποιημένους αριθμούς για την επίτευξη άλλων στόχων ή ενταγμένα μέσα σε προβλήματα. Επομένως με το πρόβλημα της σελίδας 3, μετά τη μοντελοποίησή του εισέρχεται η έννοια της κοινής λύσης. Έπειτα μέσω της γραφικής παράστασης αναμένουμε την επίλυση του προβλήματος διαισθητικά από τους μαθητές, αφήνοντάς τους να ανακαλύψουν την καινούργια αυτήν έννοια. Σε αυτό το σημείο δίνεται χρόνος για μία συζήτηση σχετικά με τη μοναδικότητα μίας λύσης και πως μπορούμε να το δούμε γραφικά. Ακολουθώντας τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος, ακολουθούν 2 προβλήματα (στις σελίδες 4 και 5 αντίστοιχα). Το πρόβλημα της σελίδας 4 καταλήγει σε αδύνατο σύστημα ενώ το πρόβλημα της σελίδας 5 σε αόριστο σύστημα. Ωστόσο πριν τη λύση ζητείται από τους μαθητές η κρίση τους για το ποιο θα μπορούσε να είναι το αποτέλεσμα. Σε αυτό το σημείο μελετάται και η μορφή του συστήματος το οποίο οδηγεί σε μία μοναδική, καμία ή άπειρες λύσεις.

Το πρόβλημα στη σελίδα 7 συνοψίζει όλα όσα ειπώθηκαν. Επιπρόσθετα κρίνεται αν μία λύση είναι λύση του συστήματος ή μίας εκ των δύο εξισώσεων. Σε αυτή την άσκηση όπως και στις άλλες, ακολουθείται η ανακαλυπτική διδασκαλία του Bruner, δίνοντας στους μαθητές πιθανές λύσεις του συστήματος, βάζοντάς τους στη διαδικασία της σκέψης και της συζήτησης. Αφού καταλήξει η τάξη στο απαιτούμενο συμπέρασμα, ακολουθεί η άσκηση στη σελίδα 9 με ακριβώς τα ίδια ζητούμενα, η οποία αναμένεται να μπει ως άσκηση για το σπίτι.

Στη σελίδα 10 βρίσκεται η τελευταία άσκηση του φύλλου εργασίας, η οποία αφορά την αντιστοίχιση 5 συστημάτων με τα αντίστοιχα γραφήματά τους. Η άσκηση βασίζεται στα ευρήματα των ερευνών των Kieran & Sfard (1999), Day & Jones (1997), Briggs, Demana & Osborne (1986) και Bottoms (2003) οι οποίοι συμπέραναν πως οι αλγεβρικές εκφράσεις πρέπει να συνδέονται με τις αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις.

Τέλος παρατίθεται το περίφημο πρόβλημα (στη σελίδα 12) που βρέθηκε στον τάφο του Διόφαντου και αφορά την εύρεση της ηλικίας του, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί σαν ιστορικό δεδομένο και ως αληθινό γεγονός για να ενθουσιάσει τους μαθητές. Μέσα από αυτό το πρόβλημα θα αναδειχθεί ωστόσο και η ικανότητά τους για μοντελοποίηση προβλημάτων.

6.4.5 3º ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το τρίτο φύλλο εργασίας (παράρτημα Δ), αφορά την τρίτη φάση της διδακτικής παρέμβασης. Αυτό το φύλλο εργασίας, όπως και τα άλλα, ξεκινάει με μία υπενθύμιση όλων όσων προηγουμένως ειπώθηκαν. Υπενθυμίζει από τι αποτελείται ένα γραμμικό σύστημα, πόσες είναι οι πιθανές περιπτώσεις λύσεων, τι συμπεραίνουμε για τις αντίστοιχες ευθείες και τέλος πότε ένα σημείο είναι λύση του συστήματος.

Το θέμα αυτού του φύλλου εργασίας είναι ο κινεζικός πολιτισμός και στη σελίδα 2, παρατίθεται ένα ιστορικό κείμενο για το έργο «Τα Εννέα Κεφάλαια». Αναφέρει τον περίφημο κανόνα Fangcheng, από πόσα προβλήματα αποτελείται το έργο και το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου. Κατά τους Tzanakis & Arcavi (2000), έχει δοθεί απευθείας η ιστορική πηγή με στόχο μία διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία. Συγκεκριμένα, προβάλλοντας αυτή την πηγή δίνεται χρόνος να συζητηθούν τα κρίσιμα βήματα αυτής της ιστορικής εξέλιξης, προσδιορίζοντας τις βασικές ιδέες και το λόγο που αναπτύχθηκε.

Σε συνέχεια της πηγής, δίνονται πληροφορίες και αναπαραστάσεις μέσα από εικόνες, για το μετρικό σύστημα που χρησιμοποιούσαν. Έτσι όπως έγινε και με τους Βαβυλώνιους, παρατίθεται ένα πρόβλημα από το έργο των Κινέζων (κεφάλαιο 7, πρόβλημα 14) όπου έχουν αντικατασταθεί οι αριθμοί με τα αντίστοιχα σύμβολα του κινεζικού μετρικού συστήματος (στη σελίδα 3). Σκοπός είναι η ενθάρρυνση των μαθητών με την ενασχόληση τόσο των μαθηματικών όσο και της ιστορίας τους. Αφού μεταφραστεί το πρόβλημα, βρεθούν οι μεταβλητές και φτιαχτούν οι εξισώσεις (διαδικασίες που έχουν διδαχθεί στα προηγούμενα φύλλα εργασίας) τίθεται το ερώτημα πως βρίσκεται η λύση του συστήματος χωρίς γραφική επίλυση. Σε αυτό το σημείο, αναμένουμε σύμφωνα με τον Shulman (1986), οι μαθητές να βρουν την επίλυση του συστήματος εκ των προτέρων δύσκολη μόνο από το οπτικό κομμάτι ενός συστήματος με εξισώσεις το οποίο φαντάζει τρομακτικό. Για αυτό, εάν δεν αναφερθεί και από τους ίδιους τους μαθητές, μελετάται αυτό που έκαναν τόσο οι Κινέζοι όσο και άλλοι πολιτισμοί αρχικά, την τυχαία τοποθέτηση ζευγαριών. Αυτό βέβαια είναι εξαντλητικό χωρίς τη σιγουριά μίας σίγουρης απάντησης (πόσο μάλλον στην περίπτωση του αδύνατου συστήματος). Έτσι οι Κινέζοι (και με μία παρόμοια μορφή οι Βαβυλώνιοι) βρήκαν τη μέθοδο της ψευδούς παραδοχής, η οποία μέσα από παράδειγμα, αναπαρίσταται στους μαθητές. Είναι όμως ένας τρόπος δύσκολος και για αυτό αναπτύχθηκαν και άλλοι τρόποι. Με το ίδιο σύστημα αναπαρίσταται η μέθοδος της αντικατάστασης. Ακολουθούν τρία προβλήματα 17, 6 και 13 από το κεφάλαιο 7 των «Εννέα Κεφαλαίων» (στις σελίδες 5, 6 και 7 αντίστοιχα), όπου στο τελευταίο εντάσσονται και κλασματικοί αριθμοί βάσει παρανοήσεων που αναφέρει και ο Wu (2001), πως οι κλασματικοί και δεκαδικοί αριθμοί δυσκολεύουν επιπρόσθετα τους μαθητές στις εξισώσεις ακόμα και στη διαδικασία επίλυσής τους, όπου με ακέραιους αριθμούς θα ήταν σε θέση να την πραγματοποιήσουν. Οι ασκήσεις αφού επιλυθούν με τον τρόπο της αντικατάστασης, ζητείται να επιβεβαιωθούν και γραφικά. Επισημαίνουμε πως οποιοσδήποτε τρόπος αποτελεί επίσημη λύση του προβλήματος, απλώς στην περίπτωση της γραφικής παράστασης χρειαζόμαστε κάποια εργαλεία διότι ζητάμε ακρίβεια.

Η άσκηση στη σελίδα 7, δίνει δύο συστήματα με αδύνατη και αόριστη λύση, τα οποία αφού πρώτα παρατηρηθούν και γίνει μία προσέγγιση λύσης από τους μαθητές, λύνονται με αυτόν τον καινούργιο τρόπο. Επίσης ζητείται να χαρακτηριστεί και η σχετική θέση των αντίστοιχων ευθειών του συστήματος πριν την επίλυση του συστήματός τους.

Τέλος, στη σελίδα 8 παρατίθενται δύο προβλήματα της σημερινής καθημερινότητας ακολουθώντας τους στόχους του κεφαλαίου στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών που λέει χαρακτηριστικά: «Να χρησιμοποιηθεί η αλγεβρική επίλυση συστημάτων για τη λύση προβλημάτων της καθημερινής μας ζωής». Το πρώτο πρόβλημα της σελίδας 8, τον συνδυασμό μπέργκερ και μερίδων πατατών. Το πρόβλημα αυτό διαθέτει στοιχεία τόσα ώστε να δημιουργηθούν δύο εξισώσεις και το σύστημα που θα προκύψει να έχει μία λύση. Στο δεύτερο πρόβλημα της σελίδας 8 θα ασχοληθούν αφορά την τιμή χυμών και ντόνατ. Το πρόβλημα έχει τόσα στοιχεία τόσα ώστε να φτιαχτεί μόνο μία εξίσωση με δύο αγνώστους και να οδηγηθούν οι μαθητές στο συμπέρασμα πως υπάρχουν άπειρα ζευγάρια που την ικανοποιούν και δεν υπάρχει μία και μοναδική λύση. Ωστόσο πολλαπλάσια αυτής της εξίσωσης, είναι γνωστά, οπότε μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιον που αγόρασε ακριβώς τα διπλά, τριπλά κ.τ.λ. προϊόντα της εικόνας. Είναι ένα πρόβλημα με άμεση σύνδεση στην καθημερινότητα, διαχείριση ενός αόριστου συστήματος και την κατανόηση της αναγκαίας συνθήκης για την εύρεση μίας λύσης ενός συστήματος να είναι η ύπαρξη δύο και μη εξαρτημένων εξισώσεων.

Έχει σημασία να δουν οι μαθητές πως τα μαθηματικά θα τους χρησιμεύσουν στην καθημερινότητά τους καθώς μεγάλο ποσοστό σύμφωνα με τους Davidenko (1997), Kaput (2000) και Van de Walle et al. (2010) μπορεί να χρησιμοποιεί μαθηματικά εργαλεία (όπως ο ρυθμός μεταβολής) και να μην καταλαβαίνει πως σχετίζονται με τον κόσμο του. Παρόμοια είναι τα ευρήματα σχετικά και με τη σύνδεση των γραφικών παραστάσεων και της καθημερινότητας, σύμφωνα με έρευνα των Merve Özkaya, Mehmet Fatih Öçal και Alper Cihan Konyalioğlu (2016). Άλλωστε είναι κοινός παρονομαστής πολλών ερευνών, όπως των Swafford & Langrall (2000), τα μαθηματικά προβλήματα να είναι παρμένα από την καθημερινότητα. Τα συγκεκριμένα προβλήματα πάρθηκαν από το αντίστοιχο τωρινό σχολικό βιβλίο της Κύπρου, το οποίο βρίσκεται διαθέσιμο σε ηλεκτρονική μορφή στην αντίστοιχη ιστοσελίδα του κυπριακού Υπουργείου Παιδείας και το προτείνει το αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 (http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko).

6.4.6 4ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το τέταρτο φύλλο εργασίας (παράρτημα Ε), αφορά στην τέταρτη φάση της διδακτικής παρέμβασης. Η έναρξη αυτού του φύλλου εργασίας, περιλαμβάνει όπως όλα μία υπενθύμιση όσων προηγήθηκαν. Οπότε θυμίζει τα βήματα της επίλυσης ενός συστήματος με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τις τρεις περιπτώσεις λύσεων ενός γραμμικού συστήματος. Επίσης αυτό το φύλλο εργασίας αφορά πάλι τον κινέζικο πολιτισμό, όπου θα εισαχθεί η μέθοδος τον αντίθετων συντελεστών.

Γίνεται εισαγωγή με ένα αυθεντικό ιστορικό απόσπασμα (πρόκειται για έναν τρόπο ένταξης της ιστορίας στη διδασκαλία σύμφωνα με τους Tzanakis και Arcavi, 2000) του κινέζου μαθηματικού Liu Hui ο οποίος επεξεργάστηκε και δημοσίευσε τα «Εννέα Κεφάλαια» το 263 μ.Χ. Καταγράφει την άποψή του για το έργο αυτό, παρομοιάζοντάς το με το Γιν και Γιανγκ δηλαδή το καλό και το κακό. Καθώς ο Jankvist θεωρεί την ιστορία ως εργαλείο όπου δίνεται έμφαση στη μάθηση των μαθηματικών παρά στην ιστορία, οι Tzanakis και Thomaidis (2012, σ. 247), υπογραμμίζουν πως όταν οι μαθητές μελετούν αυθεντικά κείμενα ή έργα βασισμένα σε αυτά, επιτυγχάνεται αυτή η έμφαση. Εδώ θα συζητηθεί το εισαγωγικό σημείωμα του Liu Hui, καθώς αναφέρει σύνδεση των μαθηματικών με τη θρησκεία, τη φύση και τη γενικότερη αλήθεια. Έπειτα ακολουθεί μία μνεία στον πολύ γνωστό κανόνα Fangcheng, γνωστός σε εμάς ως απαλοιφή του Gauss. Εδώ θα συζητηθεί το πώς στο πέρασμα του χρόνου οι έννοιες περνάνε σε διαφορετικούς πολιτισμούς και ο τρόπος δημοσίευσή τους.

Εν συνεχεία επεξηγείται ο γενικός κανόνας της απαλοιφής στα γραμμικά συστήματα 2x2 δηλαδή ο κανόνας των αντίθετων συντελεστών. Αυτός ο κανόνας αναλύεται στο πρόβλημα της σελίδας 3, το οποίο αποτελεί το πρόβλημα 7 του κεφαλαίου 8 των «9 κεφαλαίων». Ακολουθούν τα προβλήματα 8, 12, 16 και 17 από το κεφάλαιο 8 των «9 κεφαλαίων» για εξάσκηση πάνω στον καινούργιο κανόνα (στις σελίδες 4 τα δύο πρώτα και 2 τα άλλα δύο αντίστοιχα). Όλα τα προβλήματα έχουν μία και μοναδική λύση, ωστόσο είναι βασισμένα πάνω σε παρανοήσεις της βιβλιογραφίας. Το πρόβλημα 12 είναι βασισμένο στο γνωστό πρόβλημα των «καθηγητών και φοιτητών» της έρευνας των Clement, Lochhead και Monk (1981) το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές έρευνες άλλων. Πρόκειται για το σφάλμα της αντιστροφής, στο οποίο δεν μπορούν οι μαθητές να ξεχωρίσουν ποια μεταβλητή είναι πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια της άλλης. Τα προβλήματα 16 και 17 πάλι βασίστηκαν στο πρόβλημα αυτό και κυρίως στην έντονη δυναμική προς την εκτέλεση πράξεων σε μία γραμμή από τα αριστερά προς δεξιά έτσι όπως διαβάζεται το πρόβλημα. Συγκεκριμένα η πρώτη πρόταση των προβλημάτων δίνει την πρώτη σχέση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές ενώ η δεύτερη πρόταση με τη δεύτερη σχέση των μεταβλητών δίνει τις μεταβλητές με διαφορετική σειρά από ότι η πρώτη. Εδώ συναντάται και η τάση των μαθητών για γρήγορη ανάγνωση της εκφώνησης ενός προβλήματος (πολλές φορές και μη ανάγνωση της), χωρίς την πλήρη κατανόησή της.

Στη σελίδα 6, χωρισμένοι σε ομάδες των 2, εφαρμόζεται η δραστηριότητα του Swan. Ο Swan (2000) πρότεινε τη δραστηριότητα "πάντα, μερικές φορές ή ποτέ ". Κατά τη διάρκεια αυτής της δραστηριότητας στους μαθητές παρουσιάζονται πέντε συστήματα, τα οποία πρέπει να ταξινομήσουν σε τρεις στήλες - πάντα αληθείς, μερικές φορές αληθείς και ποτέ αληθείς. Εμείς μετατρέπουμε αυτή τη δραστηριότητα σε αντίστοιχη με συστήματα. Τα συστήματα θα είναι είτε αδύνατα, είτε αόριστα, είτε με μία λύση. Πρώτα απαιτούμε, όπως και ο Swan, την ταξινόμηση και μετά εμείς προσθέτουμε την αντίστοιχη γραφική αναπαράσταση.

Τέλος στη σελίδα 7 τοποθετήθηκαν δύο προβλήματα. Το 1 σχετίζεται με τον τομέα της γεωμετρίας και το 2 με τον τομέα της επιχειρησιακής έρευνας. Πάρθηκαν από το αντίστοιχο τωρινό σχολικό βιβλίο της Κύπρου, το οποίο βρίσκεται διαθέσιμο σε ηλεκτρονική μορφή στην αντίστοιχη ιστοσελίδα του κυπριακού Υπουργείου Παιδείας και το προτείνει το αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 (http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/exetastika-dokimia). Τοποθετήθηκαν διότι συχνά οι μαθητές μένουν στην αλγεβρική επίλυση ενός προβλήματος παρανοώντας τη σχέση εννοιών (π.χ. ταχύτητα. ωρομίσθιο κ.τ.λ.) με την καθημερινότητα σύμφωνα με τους Davidenko (1997), Kaput (2000) και Van de

Walle et al. (2010). Επομένως βάσει αυτής της παρανόησης και σχετιζόμενοι πάντα με τους στόχους του υπουργείου που ζητά σύνδεση και με άλλες επιστήμες, ακολουθούν αυτές οι δύο ασκήσεις. Ειδικότερα η άσκηση 2 αυτής της σελίδας, αφορά ένα σύστημα αόριστο, δηλαδή δύο παράλληλες ευθείες, τις οποίες δύσκολα θα μπορούσαν να πλαισιώσουν οι μαθητές με ένα πρόβλημα είτε άλλων επιστημονικών κλάδων είτε της καθημερινότητας.

6.4.7 5^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το πέμπτο και τελευταίο φύλλο εργασίας (παράρτημα ΣΤ) της πέμπτης φάσης, ξεκινάει με μία υπενθύμιση όλων όσων ειπώθηκαν στα προηγούμενα μαθήματα (λύσεις γραμμικού συστήματος, μέθοδοι επίλυσης και κάποιες υπενθυμίσεις). Το θέμα αυτού του φύλλου εργασίας είναι ο Μεσαίωνας και η Αναγέννηση. Για αυτό και παραθέτονται πληροφορίες για το μαθηματικό Fibonacci, μόνο ως ιστορική πηγή, χωρίς περαιτέρω σχολιασμό. Με αφορμή ένα πρόβλημα του Fibonacci εφαρμόζεται η δραστηριότητα «δώσε το μαρκαδόρο στον άλλον» του Hawes (2007) με σκοπό την κινητοποίηση όλης της τάξης. Με αυτή τη δραστηριότητα, αναλαμβάνει όλη η τάξη να λύσει το πρόβλημα, καθώς σηκώνεται ο κάθε μαθητής και συμπληρώνει ένα βήμα τη φορά στην άσκηση, μέχρι να σηκωθούν όλοι κυκλικά και ίσως πάλι από την αρχή. Η δραστηριότητα βοηθά επίσης στην αποβολή του άγχους από τους μαθητές από το βάρος της ατομικής επίλυσης της άσκησης. Επιπλέον τα λάθη στη διάρκεια της δραστηριότητας θα λυθούν από τους ίδιους τους μαθητές, με καθοδήγηση του καθηγητή χωρίς απευθείας βοήθειας από αυτόν. Με την ίδια τακτική, δίνονται ιστορικές πληροφορίες για το μαθηματικό Jordanus de Nemore και έπειτα ένα πρόβλημά του (στη σελίδα 3) που θα λυθεί με την ίδια δραστηριότητα.

Ακολουθούν δύο προβλήματα (στη σελίδα 6) μαθηματικών της Αναγέννησης τα οποία σε ομάδες των δύο κατασκευάζεται και επιλύεται το σύστημα. Οι ασκήσεις έχουν ένα ακόμη υποερώτημα. Στην πρώτη ζητείται το εμβαδόν που σχηματίζεται από τις ευθείες και τον οριζόντιο άξονα, εντάσσοντας για μία ακόμη φορά τον τομέα της Γεωμετρίας. Στη δεύτερη δίνεται ένα πρόβλημα με δύο μεταβλητές και τρείς εξισώσεις, έτσι ώστε να διερευνηθεί ο απαιτούμενος ελάχιστος αριθμός εξισώσεων για την εύρεση δύο μεταβλητών.

Η επόμενη άσκηση (στη σελίδα 5), αφορά παραμετρικό σύστημα και παραμετρική ευθεία. Τα στοιχεία που δίνονται είναι η ύπαρξη σημείων ως λύσεις.

Αναμένεται η σύγχυση των μαθητών καθώς υπάρχει πληθώρα γραμμάτων, μεταβλητές εξαρτημένες, ανεξάρτητες και παράμετροι (Usiskin,1988). Σκοπός είναι η κατανόηση του πότε ένα σημείο είναι λύση εξίσωσης ή συστήματος, που υποδεικνύεται από την πρώτη κιόλας διδασκαλία.

Τέλος, οι σελίδες 6 και 7 έχουν προβλήματα που σχετίζονται με άλλου επιστημονικούς κλάδους (φυσική, χημεία, οικονομία), όπως προτείνει, σαν οδηγίες, το βιβλίο του καθηγητή του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος σπουδών. Γίνεται στις συγκεκριμένες οδηγίες ιδιαίτερη μνεία στην ενασχόληση με τη φυσική και την ιδιαίτερη αλληλεξάρτησή της με τα μαθηματικά. Σε αυτό το φύλλο εργασίας χρησιμοποιούνται δύο ασκήσεις (στη σελίδα 6), το πρώτο με ταχύτητα και το δεύτερο με ρεύμα και αντιστάσεις, παρμένες από το κυπριακό σχολικό βιβλίο (http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko). Το τρίτο πρόβλημα (στη σελίδα 6) είναι πρόβλημα από τον κλάδο της χημείας, παρμένο από το σχολικό βιβλίο της Β΄ λυκείου, με πιο απλουστευμένες έννοιες και νούμερα, για την κατανόηση των δεδομένων. Το τέταρτο πρόβλημα (στη σελίδα 7) αφορά τον κλάδο της οικονομίας και είναι παρμένο από τις ενδεικτικές ασκήσεις της κυπριακής ιστοσελίδας του Υπουργείου Παιδείας (http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/endeiktiko-yliko) και περιλαμβάνει γραφική επίλυση.

6.4.8 POSTEST

Το διερευνητικό τεστ (παράρτημα Ζ) που ακολουθεί μετά την εφαρμογή της διδασκαλίας, είναι το διαγώνισμα που προτείνει το αναλυτικό ισχύον πρόγραμμα στο βιβλίο του καθηγητή, μετά το πέρας του κεφαλαίου των συστημάτων. Χρησιμοποιήθηκε αυτούσιο, καθώς η διδασκαλία αυτή έχει τους ίδιους στόχους με το αναλυτικό πρόγραμμα, επομένως αναμένουμε τα ίδια αποτελέσματα όσον αφορά το πλαίσιο των καινούργιων γνώσεων. Η άσκηση 1 είναι άσκηση σωστού λάθους με έννοιες που αφορούν λύση εξίσωσης με δύο μεταβλητές, τομές με άξονες και παραλληλία ευθειών. Η άσκηση 2 αφορά την επίλυση γραμμικού συστήματος νοητικά με διάφορες μορφές ενώ η άσκηση 3 ζητά την επίλυση συστήματος όπου οι μαθητές θα διαλέξουν έναν από τους δύο τρόπους. Τέλος η άσκηση 4 αφορά παραμετρικό σύστημα, το οποίο λύνεται με την κατανόηση της έννοιας «πότε ένα ζεύγος είναι λύση του συστήματος».

6.4.9 ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ

Μετά το προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου ακολουθεί η συμπλήρωση από τους μαθητές, ενός ερωτηματολογίου αποτίμησης (παράρτημα Η). Οι ερωτήσεις 2,7 και 8 τοποθετήθηκαν με σκοπό να κατανοήσουμε αν οι μαθητές είδαν θετικά αυτή τη διδακτική παρέμβαση, άλλαξαν έστω και λίγο στάση απέναντι στα μαθηματικά και αν επιθυμούν τέτοιου είδους προσεγγίσεις από το σχολείο τους. Οι ερωτήσεις 1,3 και 4 αφορούν τη γνώμη τους για την ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας ενώ η ερώτηση 5 για τις ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες. Τέλος η ερώτηση 6 ερευνά την άποψή τους για την καινούργια γνώση που αποκτήθηκε.

6.5 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Στην παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν: 1) 5 φύλλα εργασίας με ιστορικές αναφορές και κείμενα, 2) test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων και προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου, 3) ερωτηματολόγιο αποτίμησης 4) κινητό για την ηχογράφηση των διδασκαλιών από την εκπαιδευτικό. Τα φύλλα εργασίας περιέχουν τα κυριότερα κατά την κρίση μας, ως προς τη διδακτική αξιοποίηση, σημεία της ιστορικής εξέλιξης των γραμμικών συστημάτων, καθώς και εφαρμογές τους. Επίσης περιλαμβάνονται τα αριθμητικά συστήματα των Βαβυλωνίων και των Κινέζων, το εισαγωγικό σημείωμα του Liu Hui στο κινέζικο έργο «Τα 9 κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης», όπως και το περιεχόμενο των κεφαλαίων αυτών. Οι προτεινόμενοι, από το πρόγραμμα, στόχοι που αντιστοιχούσαν σε κάθε κεφάλαιο ικανοποιούνται από τα φύλλα εργασίας ώστε να καλύπτονται οι απαιτήσεις του Ελληνικού Προγράμματος Σπουδών σχετικές με τις δεξιότητες που οφείλουν να αποκτήσουν οι μαθητές μετά τη διδασκαλία της ενότητας αυτής, χωρίς όμως αυτό να είναι αποτέλεσμα επιτυχούς εφαρμογής συγκεκριμένης μεθοδολογίας, αλλά αποτέλεσμα απόκτησης δομικής κατανόησης της έννοιας των γραμμικών συστημάτων. Το test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων χρησιμοποιήθηκε ένα μήνα πριν την εφαρμογή των διδασκαλιών, για να αναγνωρισθούν κενά και παρανοήσεις των μαθητών στις αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις, ώστε μέσα από μαθήματα να καλυφθούν αυτά τα κενά πριν από τη διδακτική παρέμβαση. Τα ερωτηματολόγια, χρησιμοποιήθηκαν ώστε να εκφραστούν οι προσωπικές απόψεις των μαθητών και να αναδειχθεί η δυνατότητα των μαθητών εφαρμογής στην επίλυση ασκήσεων όσων διδάχθηκαν. Η αξιολόγηση της παρέμβασης έγινε μέσω των απαντήσεων των μαθητών ή των ομάδων στα φύλλα εργασίας, των ατομικών απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο και της συζήτησης μέσα στην τάξη μέσω των μαγνητοφωνημένων διδασκαλιών.

7. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ-ΡΟΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

7.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ TEST ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΥΠΑΡΧΟΥΣΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ

Η πρώτη άσκηση του test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων (παράρτημα Α) έχει δύο αλγεβρικές παραστάσεις τις οποίες πρέπει να τις αθροίσουν και να τις πολλαπλασιάσουν. Το άθροισμα έγινε σωστά από τους 5 εκτός από τον ένα ο οποίος δεν έκανε πρόσθεση όμοιους όρους. Σε αντίθεση με το επόμενο ερώτημα, όπου την επιμεριστική ιδιότητα κατά τον πολλαπλασιασμό μόνο ένας μαθητής εφάρμοσε σωστά, με τους υπόλοιπους είτε να μην πολλαπλασιάζουν όλους τους όρους είτε να τους προσθέτουν.

Η άσκηση δύο είναι πολλαπλής επιλογής η οποία αφορά αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις. Σχετικά με τις αλγεβρικές εκφράσεις και τις εξισώσεις που κατέληγαν σε μία λύση τα πήγαν καλά. Ωστόσο κανένας μαθητής στις απλές εξισώσεις δεν μπήκε στη διαδικασία να βρει με το μυαλό τη λύση ή να δοκιμάσουν τις επιλογές που τους έδινε η άσκηση, αλλά εφάρμοσαν το αλγόριθμο επίλυσης εξισώσεων. Όσες εξισώσεις κατέληγαν σε αδύνατες ή αόριστες, κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να τις βρει σωστές.

Στην επόμενη άσκηση 3, ακολουθούν δύο εξισώσεις πρώτου βαθμού με παρενθέσεις και αγκύλες η πρώτη και κλάσματα η δεύτερη. Μόνο δύο μαθητές έλυσαν σωστά την εξίσωση με τις παρενθέσεις και αγκύλες, ενώ οι υπόλοιποι έκαναν κυρίως λάθη στην επιμεριστική ιδιότητα. Η εξίσωση με τα κλάσματα είχε πολύ καλύτερα αποτελέσματα, με τους μαθητές να θυμούνται πως πρέπει να χρησιμοποιήσουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Το κοινό λάθος των περισσοτέρων ήταν πως το κλάσμα που είχε το αρνητικό πρόσημο μπροστά, δεν το υπολόγιζαν πως πηγαίνει σε ολόκληρη την παράσταση του αριθμητή και όχι μόνο στον πρώτο όρο.

Η άσκηση 4, αφορούσε ένα πρόβλημα το οποίο μετά τη μοντελοποίησή του κατέληγε σε εξίσωση με λύση το 0. Κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να το μοντελοποιήσει, παρόλο που ήταν μία εύκολη έκφραση. Ωστόσο δόθηκαν οδηγίες πως όποιος θέλει μπορεί να το λύσει με τη λογική του. Κανένας πάλι δεν μπόρεσε να εξάγει το συμπέρασμα πως μόνο ο αριθμός 0 έχει την ιδιότητα το διπλάσιο του να είναι ίσο με το τριπλάσιό του.

Η άσκηση 5 αφορά την κατασκευή δύο αλγεβρικών εκφράσεων μέσα από γεωμετρικά σχήματα. Η άσκηση ζητούσε να βρεθεί η περίμετρος δύο σχημάτων με πλευρές κάποιες δοσμένες αλγεβρικές εκφράσεις. Οι περισσότεροι μαθητές δεν θυμόνταν πώς να βρίσκουν περίμετρο. Αφού ειπώθηκε ο ορισμός της 4 στους 6 μαθητές βρήκαν σωστά τις εκφράσεις των περιμέτρων ενώ όλοι μπόρεσαν να κάνουν το δεύτερο υποερώτημα το οποίο τους έδινε συγκεκριμένες τιμές στους αγνώστους τους και έτσι έβρισκαν συγκεκριμένη τιμή για την περίμετρο.

Η άσκηση 6 αφορούσε διατεταγμένα ζεύγη και έννοιες από την ευθεία. Η συμπλήρωση του πίνακα έγινε μόνο από 2 μαθητές. Αφού δόθηκε η διευκρίνηση πως «η εξίσωση της ευθείας είναι το κλειδί για τη συμπλήρωση του πίνακα», μπόρεσαν όλοι να τον συμπληρώσουν (όχι όλοι σωστά όμως, κάνοντας λάθη σε πράξεις). Από τα υπόλοιπα υποερωτήματα της άσκησης μπόρεσαν όλοι να κάνουν σωστά μόνο την τοποθέτηση των σημείων πάνω στους άξονες.

Ακολούθησαν δύο διδασκαλίες πριν τη διδακτική παρέμβαση οι οποίες αφορούσαν τις πράξεις ανάμεσα σε αλγεβρικές εκφράσεις και τις πρώτου βαθμού εξισώσεις. Η μοντελοποίηση προβλημάτων και οι έννοιες της ευθείας εντάσσονται στη διδακτική παρέμβαση και για αυτό δεν εντάχθηκαν σε αυτά τα δύο μαθήματα.

7.2 1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Η πρώτη φάση της διδακτικής παρέμβασης, έγινε την Παρασκευή 28/02/2020 στις 17:30 και διήρκησε 80 λεπτά με ένα δεκάλεπτο διάλειμμα. Όλες οι ασκήσεις ήταν σε ατομικό επίπεδο. Μοιράστηκε στους μαθητές το πρώτο φύλλο εργασίας παράρτημα Β) και ρωτήθηκαν τα παιδιά για το πόσο παλιά πιστεύουν πως είναι η έννοια της εξίσωσης και των συστημάτων και αν ποιος ή ποιοι συντέλεσαν στη δημιουργία και επίλυσή τους. Οι απαντήσεις ήταν οι αναμενόμενες, με τα παιδιά να πιστεύουν πως ένας είναι ως συνήθως αυτός που βρίσκει κάποιον τύπο ή θεώρημα και προφανώς είναι αυτός που φέρει και το όνομα του θεωρήματος ή του κανόνα (έδωσαν παράδειγμα το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Μετά από συζήτηση επ' αυτού, αναλύθηκαν οι ερωτήσεις που βρίσκονται στη σελίδα 3 και διαβάστηκαν οι πληροφορίες για τη σφηνοειδή γραφή. Οι μαθητές δεν είχαν ιδιαίτερη συμμετοχή και η όλη διαδικασία της συζήτησης έμοιαζε πρωτόγνωρη για αυτούς.

Στη συνέχεια μεταφράζοντας πρόβλημα με βαβυλωνιακούς αριθμούς, δουλεύτηκε η διαδικασία μοντελοποίησης προβλήματος, η διαπίστωση αν μία λύση ανήκει στην ευθεία και η γραφική απεικόνιση της ευθείας. Τονίστηκε η ύπαρξη άπειρων σημείων που ανήκουν στην ευθεία και η αναγκαιότητα μόνο δύο εξ αυτών για τη γραφική της απεικόνιση. Η όλη διαδικασία αποτελεί το 3^{ο} κεφάλαιο της άλγεβρας Β΄ Γυμνασίου, το οποίο είχαν διδαχθεί την προηγούμενη χρονιά. Από τις απαντήσεις των μαθητών φάνηκε πως ήταν αναγκαία η αφιέρωση 1,5 ώρας σε αυτές τις έννοιες καθώς είτε δεν είχαν εμπεδωθεί σαφώς την προηγούμενη χρονιά είτε είναι αρκετός ο χρόνος που πέρασε και η μνήμη τους εξασθένισε.

Αφού συζητήθηκε το διάγραμμα της σελίδας 6 επιφανειακά, δόθηκε χρόνος να συζητηθούν οι ερωτήσεις που αφορούν το κομμάτι των Αιγυπτίων. Οι μαθητές εξακολουθούσαν να είναι παθητικοί.

Ακολούθησαν ασκήσεις αντιστοίχισης προβλήματος-εξίσωσης-γραφήματος και δύο προβλήματα τα οποία αφορούσαν ευθείες παράλληλες στο άξονα x΄x και ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να κάνουν συσχέτιση τα προβλήματα με τις εξισώσεις. Ένας μαθητής υποστήριξε πως το Π2 πρόβλημα δεν θα μπορεί να αντιστοιχίζεται με την Ε3 εξίσωση διότι δεν έχει δύο αγνώστους. Ωστόσο η αντιστοίχιση με τα γραφήματα έγινε σωστά από όλους. Εδώ έγινε μία επισήμανση για τη συσχέτιση των ευθειών με τον τύπο της ευθείας.

Τέλος, έγινε μία μικρή συζήτηση για τη γραμμικότητα. Η άσκηση που παρατίθεται στο τέλος έδειξε την αδυναμία των μαθητών να χειριστούν τη γραμμικότητα αλγεβρικά, ωστόσο στις γραφικές απεικονίσεις τα πήγαν πολύ καλύτερα.

7.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ 1^{ης} ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

Οι απαντήσεις των παιδιών στις αρχικές ερωτήσεις που αφορούσαν το κομμάτι της Ιστορίας, υπέδειξαν δυσκολίες εκ μέρους τους να απαντήσουν αλλά και απορία γιατί όπως ειπώθηκε αργότερα κανείς μαθηματικός δεν τους είχε ρωτήσει κάτι τέτοιο. Όσο επέμενε ο καθηγητής, κανείς μαθητής δεν απαντούσε στην ερώτηση πόσο παλιά είναι η έννοια που μελετάμε ή ποιος την εφηύρε. Όταν όμως άρχισε τις ερωτήσεις (αν είναι πριν 10 χρόνων, πριν 20, αν ασχολήθηκε ένα άτομο μόνο, μία χώρα κ.τ.λ.) οι μαθητές απαντούσαν ανάλογα. Μία μαθήτρια πήρε το λόγο και υπέθεσε πως είναι από την αρχαία Ελλάδα. Η επόμενη ερώτηση ήταν γιατί πιστεύουν πως αναπτύχθηκε αυτή έννοια και η ίδια μαθήτρια δήλωσε πως: «Προφανώς υπήρξαν μερικοί άνθρωποι που προβληματίστηκαν για κάτι και την εφηύραν». Μετά από μία μικρή συζήτηση, διότι οι μαθητές δεν ήταν ενεργοί, υπογραμμίστηκε η παλαιότητα της έννοιας και οι πολλοί πολιτισμοί που ασχολήθηκαν. Επίσης τονίστηκε η χρησιμότητα των μαθηματικών να λύνει και όχι να δημιουργεί προβλήματα. Τέλος με αφορμή την ύπαρξη μόνο μίας γυναίκας στο σχεδιάγραμμα των σελίδων 1 και 2, ρωτήθηκαν γιατί πιστεύουν πως συμβαίνει αυτό. Ένας μαθητής υποστήριξε πως γινόταν λόγω της διάκρισης του φύλου.

Η πρώτη ερώτηση που τέθηκε στους Βαβυλώνιους είναι αν πιστεύουν πως μία κοινωνία γίνεται ισχυρή μέσα από τις επιστήμες. Μία μαθήτρια απάντησε πως: «Ναι διότι θα έκαναν σπουδαία πράγματα». Η εκπαιδευτικός όμως ρωτάει πως θα τα χρησιμοποιήσουν; Αυτά που έμαθαν τόσο καιρό τα χρησιμοποίησαν οι ίδιοι τους; Όλοι ομόφωνα απάντησαν όχι. Οπότε τέθηκε ξανά η ερώτηση του πως. Ένας μαθητής, από τους πιο λιγομίλητους, απάντησε πως με τα μαθηματικά θα αύξαναν την οικονομία τους. Η εκπαιδευτικός πρόσθεσε και άλλους τομείς που βοηθούν τα μαθηματικά. Ωστόσο στην ερώτηση αν αξίζουν να μάθουν μαθηματικά, δεν ήταν πολύ θερμοί.

Έπειτα η τάξη ασχολήθηκε με τον τρόπο γραφής των Βαβυλωνίων. Ένας μαθητής θεώρησε πως εκείνα τα χρόνια έγραφαν με καλαμιές. Δεν μπορούσαν να σκεφτούν άλλον τρόπο γραφής. Όταν ο εκπαιδευτικός ρώτησε αν γνωρίζουν τη σφηνοειδή γραφή αμέσως απάντησαν «ναι, κάτι έχουμε κάνει, κάπου το έχουμε δει στην Ιστορία και όχι στα Μαθηματικά». Ξαφνικά ένας μαθητής θυμήθηκε πως έγραφαν με «σφήνες» και το φώναξε με ιδιαίτερη χαρά που το θυμήθηκε. Έπειτα η εκπαιδευτικός εξηγεί την όλη διαδικασία γραφής με σφήνες και θέτει το ερώτημα γιατί μπορεί τα έργα των Βαβυλωνίων που βρέθηκαν να ήταν γεμάτα λάθη. Δύο μαθητές συνεργάζονται και απαντούν πως βιάζονταν να μη στεγνώσει ο πηλός.

Στη συνέχεια δίνονται διευκρινίσεις για τον πίνακα στη σελίδα 4 με τους αριθμούς των Βαβυλωνίων και ένα παιδί αναλαμβάνει να μεταφράσει το πρόβλημα που ακολουθεί. Το ίδιο παιδί μπερδεύεται και με τη βοήθεια των υπολοίπων βρίσκονται οι δύο αριθμοί του προβλήματος. Αυτό οδηγεί στην καταγραφή των μεταβλητών. Το πρόβλημα είναι: «Το πλάτος συν 4 φορές το μήκος ενός ορθογωνίου είναι 28 μέτρα». Οι μαθητές σιωπούν καθώς δε γνωρίζουν τι αντιστοιχεί στις μεταβλητές. Μετά από επεξήγηση βρίσκουν εύκολα πως οι μεταβλητές είναι το πλάτος και το μήκος. Ωστόσο όταν καλούνται να δώσουν γράμματα στις μεταβλητές, δίνουν τα x και y, καθώς αυτά υποστήριξαν θα έδινε και η κυρία τους στο σχολείο. Μετά από παρότρυνση κατέληξε η τάξη να δώσει για το πλάτος και ω για το μήκος.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος είχε δυσκολίες για τους μαθητές. Ο πρώτος που αποπειράθηκε είπε α·ω ενώ ο δεύτερος έφτιαξε για αρχή το 4α αντί για το 4ω που αντιστοιχεί στο μήκος. Ο τελευταίος μαθητής μετά από καθοδήγηση κατάφερε και είπε τη σωστή εξίσωση. Όταν ρωτήθηκαν πόσες είναι οι πιθανές λύσεις αυτής της εξίσωσης, μετά από μία μεγάλη σιωπή ένας μαθητής πρότεινε να αντικαταστήσει αριθμούς στις μεταβλητές αλλά δεν μπορούσε να εξηγήσει περαιτέρω το σκεπτικό του. Έτσι η εκπαιδευτικός τους οδήγησε στην παρακάτω άσκηση όπου έπρεπε να διαπιστώσουν αν τέσσερα ζευγάρια ήταν λύσεις της εξίσωσης. Με μια δυσκολία στην αρχή έκαναν αντικατάσταση, αλλά στη συνέχεια κατάλαβαν τη μέθοδο. Έτσι η εκπαιδευτικός ξανά ρωτάει: «εδώ βρήκαμε δύο ζευγάρια που την ικανοποιούν, πόσα ακόμη υπάρχουν άραγε;» και με αρκετή αυτοπεποίθηση πήρε ένας μαθητής το λόγο και απάντησε άπειρα. Οπότε στη συνέχεια ζήτησε να της πουν μερικά ακόμη ζευγάρια. Δεν μπόρεσαν ωστόσο να βρουν έναν τρόπο για να ανακαλύψουν ζευγάρια. Έτσι η εκπαιδευτικός πρότεινε να τοποθετήσουν έναν τυχαίο αριθμό στη θέση του α και να βρουν το αντίστοιχο ω. Έτσι κατάφεραν να εφαρμόσουν αυτόν τον αλγόριθμο και εύκολα να βρουν και άλλα ζευγάρια. Ωστόσο δοκίμαζαν μόνο φυσικούς αριθμούς, ούτε καν το μηδέν. Έπειτα από παρότρυνση της εκπαιδευτικού, τελικά δοκιμάστηκε το μηδέν και ένας δεκαδικός.

Έπειτα η άσκηση ζητούσε τα ζευγάρια που βρήκαν να τα ονομάσουν σα σημεία και να τα τοποθετήσουν στους άξονες. Η εύρεση των ζευγαριών, οι τετμημένες και τεταγμένες, ήταν μία εύκολη διαδικασία για αυτούς που από ό,τι φαίνεται δε ξέχασαν από πέρσι. Ιδιαίτερη εντύπωση έκανε η παρατήρηση ενός παιδιού που ενώ οι υπόλοιποι προσπάθησαν να τοποθετήσουν τα σημεία στους άξονες, εκείνος ζήτησε πρώτα να ονομαστούν οι άξονες με α και ω. Οι μαθητές ατομικά και υπό την επίβλεψη της εκπαιδευτικού τοποθέτησαν τα σημεία στους άξονες. Παρατηρήθηκε από κάποιους αδυναμία τοποθέτησης σημείου με τη μία συντεταγμένη μηδέν, μη συμμετρική τοποθέτηση των αριθμών πάνω στους άξονες (είτε πάνω στον ίδιο άξονα είχαν διαφορετική απόσταση οι αριθμοί είτε σε αντιστοιχία με τους άξονες μεταξύ τους) ή σχηματισμός ενός ευθύγραμμου τμήματος αντί για ευθείας. Η τάξη επανέλαβε πως έχει άπειρα σημεία η ευθεία καθώς το εμπέδωσε και μετά από ερωτο-απαντήσεις κατέληξε πως αρκούν δύο σημεία για τη γραφική αναπαράσταση μίας ευθείας.

Ακολούθησε μία μικρή ενημέρωση για το διάγραμμα στη σελίδα 6, που δείχνει τη μοντελοποίηση ενός προβλήματος. Δόθηκε μικρή σημασία σε αυτό και το ενδιαφέρον ήταν πως τους φάνηκε περίεργο καθώς δεν έχουν δει κάτι τέτοιο σε σχολικό βιβλίο. Τέλος, το θεώρησαν βοηθητικό αλλά επειδή δεν κάνουν προβλήματα στο σχολείο ή επειδή η κυρία τους δεν τους έχει «δείξει» τέτοιο τρόπο, είπαν πως δε θα το χρησιμοποιούσαν.

Εδώ πραγματοποιήθηκε ένα δεκάλεπτο διάλειμμα.

Όταν γύρισαν στην τάξη, η εκπαιδευτικός προχώρησε στο κομμάτι των Αιγυπτίων. Συζητήθηκε η παράγραφος που αναδεικνύει την άνθιση των μαθηματικών στις όχθες του Νείλου, χωρίς μεγάλη συμμετοχή των μαθητών. Οι πληροφορίες για τους πάπυρους δε διαβάστηκαν, καθώς θεωρήθηκε πως κουράστηκαν οι μαθητές, αλλά επειδή είχαν δοθεί και ως παραπομπές. Οπότε διαβάστηκε το πρόβλημα της σελίδας 8 με σκοπό να γίνει η διαδικασία που είχε προηγηθεί και στην προηγούμενη άσκηση. Εύκολα αυτή τη φορά εντοπίστηκαν οι μεταβλητές, ωστόσο επέμεναν στην ονομασία x και y την οποία χρησιμοποίησαν σε όλα τα υπόλοιπα φύλλα εργασίας. Η μοντελοποίηση του προβλήματος πάλι έφερε σιωπή στην τάξη, ωστόσο μία μαθήτρια στην πρώτη της προσπάθεια, βρήκε σωστά την εξίσωση. Έπειτα διαλέχτηκαν δύο πιο ήσυχοι μαθητές που συμμετείχαν λιγότερο, για να εντοπίσουν δύο σημεία της ευθείας. Ο πρώτος μαθητής τοποθέτησε έναν αριθμό στη θέση του x αλλά δεν μπόρεσε να βρει το αντίστοιχο y. Αφού βοηθήθηκε από την εκπαιδευτικό, ακολούθησε ο δεύτερος μαθητής ο οποίος με λιγότερη δυσκολία βρήκε ένα άλλο σημείο. Ακολούθησε η τοποθέτηση των σημείων στους άξονες η οποία έγινε με μεγαλύτερη ευκολία αυτή τη φορά, αλλά αρκετοί επέμεναν να ενώνουν τα σημεία και να φτιάχνουν ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Η επόμενη άσκηση της σελίδας 9, αφορά την αντιστοίχιση Αιγυπτιακών προβλημάτων με την αντίστοιχη εξίσωση και γραφική του παράσταση. Οι μαθητές εύκολα έκαναν την αντιστοίχιση αλλά δεν ήταν σε θέση να διεξάγουν συμπεράσματα για το πότε μία ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πότε τους τέμνει και τους δύο σε διαφορετικά σημεία και στην έννοια της κλίσης. Αυτά αναλύθηκαν από την εκπαιδευτικό και θα επαναληφθούν στα επόμενα μαθήματα.

Το πρόβλημα της σελίδας 11, συνοψίζει όλα όσα ειπώθηκαν μέχρι στιγμής. Κρίθηκε σωστό σύμφωνα με τη ροή της διδασκαλίας να μπει αυτό το πρόβλημα σαν άσκηση για το σπίτι.

Τελευταίο μέρος αποτελεί η έννοια της γραμμικότητας. Είναι μία έννοια που δεν έχουν αντιληφθεί και όταν ρωτήθηκαν γιατί δε ζήτησαν από τον καθηγητή τους περισσότερες επεξηγήσεις, αποκρίθηκαν πως είτε τον φοβούνται είτε δε θέλουν να ρεζιλευτούν. Αναλύθηκε η έννοια από την εκπαιδευτικό σε αντιδιαστολή με μία μη γραμμική συνάρτηση, τη γνωστή για τους μαθητές απόσταση στην ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση. Οι μαθητές δέχτηκαν την έννοια χωρίς καμία ερώτηση ή αντίρρηση. Οπότε ακολούθησε η τελευταία άσκηση διαχωρισμού γραμμικών και μη γραμμικών συναρτήσεων. Στις συναρτήσεις που δόθηκαν, εύκολα διαπίστωσαν ποιες είναι οι μη γραμμικές, ωστόσο στις ειδικές περιπτώσεις της ευθείας (όπου $α=0$ ή $β=0$), δυσκολεύτηκαν να τις ονομάσουν γραμμικές. Στις γραφικές παραστάσεις πάλι εύκολα διαπιστώθηκαν οι μη γραμμικές, ενώ αυτές που ξεκάθαρα φαίνονταν για ευθείες έκαναν τους μαθητές να αμφιταλαντευτούν.

Το πρόβλημα της σελίδας 10 έγινε τελευταίο, για να υπάρξει ένα μικρό κενό καθώς αναλύεται η γραμμικότητα και να συνοψιστεί όλη η θεωρία που ειπώθηκε σε αυτή τη διδασκαλία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η παρατήρηση ενός μαθητή κατά τη διαδικασία διάκρισης των μεταβλητών. Το πρόβλημα αφορούσε τη διαφορά δύο εκτάσεων χωραφιών. Όλοι οι υπόλοιποι μαθητές δήλωσαν πως οι μεταβλητές είναι τα δύο χωράφια, ένας όμως τόνισε πως είναι η έκταση των δύο χωραφιών. Περιμέναμε αυτήν την παρανόηση σύμφωνα με τον Swan (2000), πως οι μαθητές θα δώσουν εσφαλμένες ετικέτες στις μεταβλητές, απλώς για να τις ονομάσουν. Το πρόβλημα εύκολα μοντελοποιήθηκε και οι μαθητές κατάφεραν να την αναπαραστήσουν. Ωστόσο και πάλι δεν ήταν σε θέση να αντιληφθούν μόνο από τον τύπο της, την σχετική της θέση σε σχέση με τους άξονες.

7.4 2η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Η δεύτερη φάση της διδακτικής παρέμβασης, έγινε την Παρασκευή 06/03/2020 στις 17:30 και διήρκησε 85 λεπτά με ένα δεκάλεπτο διάλειμμα. Μοιράστηκε στους μαθητές το δεύτερο φύλλο εργασίας (παράρτημα Γ) και με ερωτο-απαντήσεις μέσω της άσκησης που είχαν για το σπίτι, έγινε μία επανάληψη όλων όσων ειπώθηκαν στο προηγούμενο μάθημα σχετικά με τις ευθείες. Μετά αυτό το δεκάλεπτο, έγινε η ίδια διαδικασία, όπου συζητήθηκε η σελίδα 2, η οποία αναφέρει ονόματα Ελλήνων μαθηματικών που εμπλέκονται με τις έννοιες των συστημάτων και συζητείται η λεκτική και όχι συμβολική γραφή των απαντήσεων εκείνη την περίοδο. Οι μαθητές δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον από την προηγούμενη διδασκαλία και εμπλέκονται αρκετοί στη συζήτηση.

Οι μαθητές με μεγαλύτερη ευκολία μοντελοποίησαν το πρόβλημα της σελίδας 3 και ορίστηκε από την εκπαιδευτικό η έννοια της κοινής λύσης και του συστήματος. Έτσι αναπαραστάθηκε και γραφικά το σύστημα. Στη συνέχεια δόθηκε βαρύτητα στη μοναδικότητα της λύσης και στο πλήθος των λύσεων που μπορούν να προκύψουν από ένα γραμμικό σύστημα.

Ακολουθεί το πρόβλημα της σελίδας 4, με τους μαθητές να κινούνται αρκετά θετικά και να λειτουργούν σε ομάδες των δύο ατόμων. Δίνει η καθηγήτρια οδηγίες και ακολουθεί μία τρίλεπτη συζήτηση μεταξύ των ομάδων. Η πρώτη εξίσωση βγήκε εύκολα από τις ομάδες, αλλά η δεύτερη που ζητούσε το τριπλάσιο της διαφοράς τους μπέρδεψε. Η πρώτη ερώτηση από μαθητή προς την καθηγήτρια ήταν αν του επιτρέπεται να βάλει παρένθεση στο x-y. Παρόλο που πρόκειται για έναν δυνατό μαθητή ο οποίος ήταν κοντά στη λύση, δεν τόλμησε να βάλει ο ίδιος μία παρένθεση και ρώτησε αν μπορεί. Το ενδιαφέρον εδώ ήταν πως δεν ρώτησε αν είναι αυτή η σωστή εξίσωση για επαλήθευση, αλλά επειδή δεν μοντελοποιεί συχνά προβλήματα και δεν έχει μπει στη διαδικασία να τοποθετήσει ο ίδιος παρενθέσεις, θεώρησε πως μπορεί να μην έχει το δικαίωμα να βάλει. Οι υπόλοιπες ομάδες, μετά από κάποια λεπτά έφτασαν στην λανθασμένη εξίσωση 3x-y=9, όπου το λάθος είναι η μη χρήση παρένθεσης. Αφού δόθηκαν οι σωστές εξισώσεις και απλοποιήθηκαν, οι μαθητές έφτιαξαν με μεγάλη ευκολία τις ευθείες. Ωστόσο ενδιαφέρον είχε ο τρόπος που έβρισκαν ζευγάρια. Δεν έμπαιναν στη διαδικασία να βάλουν ένα τυχαίο x και να λύσουν την εξίσωση. Προσπαθούσαν να βρουν ζευγάρια που ικανοποιούν την εξίσωση. Εάν δεν δούλευαν ακέραιοι, δοκίμαζαν δεκαδικούς, προσθαφαιρώντας κάθε φορά μέχρι να το πετύχουν. Σε δεύτερη μοίρα ήταν οι αρνητικοί και δε χρησιμοποιούσαν καθόλου κλάσματα.

Τα προβλήματα που ακολουθούν, λύθηκαν και αυτά στις ίδιες ομάδες των δύο ατόμων. Το πρόβλημα της σελίδας 5 το οποίο αφορά αδύνατο σύστημα, δεν ήταν σε θέση οι μαθητές να το αντιληφθούν εξαρχής. Ωστόσο το πρόβλημα της σελίδας 6, το οποίο καταλήγει σε αόριστο σύστημα, η γραφική παράσταση δεν τους μπέρδεψε και το αναγνώρισαν. Στη συνέχεια συνολικά η τάξη ασχολήθηκε με την αντιστοίχιση των συστημάτων και των γραφημάτων της άσκησης στη σελίδα 10.

Τέλος με ερωτο-απαντήσεις σε όλη την τάξη, λύθηκε η άσκηση της σελίδας 7, όπου στο τέλος υπογραμμίστηκε από την εκπαιδευτικό πότε ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία και πότε σε ένα σύστημα. Το πρόβλημα της σελίδας 9 και το πρόβλημα του Διόφαντου στη σελίδα 12 δόθηκαν σαν ασκήσεις για το σπίτι.

7.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ 2ης ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στην αρχή του μαθήματος, ελέγχθηκε η άσκηση του προηγούμενου φύλλου εργασίας (παράρτημα Β). Το 50% της τάξης ασχολήθηκε και βρήκε σωστά τις μεταβλητές αλλά δεν μπόρεσε να βρει τη σωστή εξίσωση. Αφού λύθηκε η άσκηση, μέσω αυτής, υπογραμμίστηκαν οι σημαντικότερες έννοιες του προηγούμενου μαθήματος που αναφέρονται στην πρώτη σελίδα του δεύτερου φύλλου εργασίας (παράρτημα Γ) που μοιράστηκε στα παιδιά.

Αρχίζοντας το δεύτερο φύλλο εργασίας, τα παιδιά ρωτήθηκαν ποιους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς γνωρίζουν. Προς έκπληξη μας, οι μαθητές δεν μπέρδεψαν αρχαίους μαθηματικούς και φιλόσοφους και απάντησαν Πυθαγόρας, Ευκλείδης, Θαλής και Διόφαντος (ο τελευταίος είχε αναφερθεί στο χρονολόγιο του 1ου φύλλου εργασίας). Η εκπαιδευτικός πρόσθεσε και τον Αρχιμήδη και την ιστορία του με το χρυσό στεφάνι. Έπειτα έγινε μία συζήτηση για την προέλευση της λέξης γεωμετρία και άλγεβρα. Οι μαθητές έδειχναν περισσότερο ενδιαφέρον από την πρώτη διδασκαλία. Στην ερώτηση γιατί τα περισσότερα κείμενα ήταν γραμμένα λεκτικά και όχι συμβολικά, δεν είχαν κάποια απάντηση εύκαιρη να δώσουν, ωστόσο διαπίστωσαν πως δε θα μπορούσαν να το κάνουν στο σχολείο αυτό διότι οι καθηγητές τους δε θα το δέχονταν.

Επόμενο βήμα, είναι η επίλυση του προβλήματος της σελίδας 3. Οι μεταβλητές βρέθηκαν εύκολα από τους μαθητές. Η μοντελοποίηση του προβλήματος δείχνει κάποια προβλήματα στην εννοιολογική κατανόηση των πράξεων και αντιστοίχιση με τη λεκτική τους σημασία. Είχαν ειπωθεί τέτοιες παρανοήσεις και στο προηγούμενο φύλλο εργασίας, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα να ζητάει άθροισμα ή διαφορά δύο μεταβλητών και εκείνοι να το δηλώνουν ως x·y ή x:y. Μετά από αντίστοιχη διευκρίνηση για τις πράξεις, δόθηκαν εξηγήσεις για το τι είναι κοινή λύση ευθειών και σύστημα. Αρχικά οι μαθητές προσπάθησαν να μάθουν να φτιάχνουν το άγκιστρο. Στη συνέχεια έγινε η διαδικασία γραφικής αναπαράστασης των ευθειών, με μεγάλη ευκολία από τους μαθητές πλέον. Όταν όμως έγινε η γραφική παράσταση, δεν τους ήταν εύκολο να διαπιστώσουν ποιο σημείο είναι το κοινό σημείο άρα και λύση του προβλήματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε η συζήτηση σε αυτό το σημείο, αφότου δηλαδή έγινε σωστά η γραφική αναπαράσταση των δύο ευθειών.

Κ: Αφού φτιάξατε τις ευθείες, ψάξτε για το ζευγάρι που ικανοποιεί και τις δύο.

Ολιγόλεπτη σιωπή

M_1: Είναι αυτό το σημείο (δείχνει το σημείο τομής της πρώτης ευθείας με τον άξονα x΄x).

Κ: Ποιο σημείο είναι αυτό; Ποιες οι συντεταγμένες του;

M_1: 100 κόμμα 0

Κ: Ωραία. Για δες ανήκει στην άλλη ευθεία;

M_1:100 πλην 0 κάνει 100 και όχι 40.

Κ: Άρα;

M_1: Άρα δεν ανήκει

M_2: Μήπως αυτό; (δείχνει το σημείο τομής της δεύτερης ευθείας με τον άξονα x΄x)

Κ: Ανήκει στην άλλη ευθεία; Βλέπεις η άλλη ευθεία να περνά από αυτό;

M_2: Όχι

Κ: Σκεφτείτε έξυπνα. Θέλω ένα σημείο που να περνάνε και οι δύο ευθείες, βγάζοντας τελείως από το μυαλό σας τους άξονες

M_3: Ε τότε αυτό

Κ: Τι συντεταγμένες έχει αυτό;

M_3: 70 κόμμα 30

Το ενδιαφέρον αυτής της συζήτησης ήταν πως όταν ειπώθηκε από την εκπαιδευτικό η πρόταση «να βρείτε το ζευγάρι που ικανοποιεί και τις δύο ευθείες» οι μαθητές δεν το αντιλήφθηκαν γραφικά. Ενώ όταν το έθεσε με γεωμετρικούς όρους, δηλαδή «από ποιο σημείο περνάνε και οι δύο ευθείες», τότε τους ήταν πολύ εύκολο. Επιπρόσθετα τα πρώτα σημεία που τους ήρθαν στο μυαλό να πουν ήταν τα σημεία τομής με τους άξονες γιατί αυτά είχαν δουλευτεί πιο πολύ πέρυσι σύμφωνα με τα λεγόμενά τους.

Υπογραμμίστηκε πως πρέπει να γίνεται επαλήθευση στις αρχικές εξισώσεις με μεγάλη προσοχή να μη γίνει αντικατάσταση μόνο στη μία αλλά και στις δύο. Σε αυτό το σημείο, για να ξεκουραστούν και οι μαθητές, έγινε μία συζήτηση για τις σχετικές σχέσεις δύο ευθειών. Είναι ύλη της Α΄ Γυμνασίου, ωστόσο αποτελεί και ένα διαισθητικό αποτέλεσμα αντίληψης του χώρου. Ρωτήθηκαν, λοιπόν, αν εκτός από ένα κοινό σημείο, όπως είδαμε και στην άσκηση, μπορούν δύο ευθείες να έχουν και παραπάνω, όπως δύο. Ένας μαθητής απάντησε γρήγορα πως «όχι, δε γίνεται, δεν μπορώ να το φανταστώ», αλλά δεν μπόρεσε να το εξηγήσει. Στη συνέχεια ένας άλλος μαθητής υπέδειξε τις παράλληλες ευθείες αλλά όταν ρωτήθηκε πόσα κοινά σημεία έχουν, εκείνος αποκρίθηκε δύο. Ρωτήθηκε ξανά αν έχουν κοινά σημεία οι παράλληλες και αυτή τη φορά απάντησε κανένα. Την περίπτωση να ταυτίζονται δεν τη βρήκε κανένας μαθητής. Οι τρεις περιπτώσεις καταγράφηκαν και συσχετίστηκαν με τα κοινά σημεία που θα έχουν κάθε φορά οι ευθείες. Έτσι υπογραμμίστηκε πως αν υπάρχει μία λύση, αυτή είναι και μοναδική.

Το πρόβλημα της σελίδας 4, έγινε σε ομάδες των δύο ατόμων. Για αρχή διάβασαν μεταξύ τους το πρόβλημα και προσπάθησαν να βρουν τις μεταβλητές. Μία ομάδα βρέθηκε κοντά στη λύση, αλλά πίστεψε πως πρέπει να ρωτήσει αν έχει το δικαίωμα να βάλει σε παρένθεση τις μεταβλητές. Όταν δόθηκαν διευκρινίσεις, έφτιαξε εύκολα και την δεύτερη εξίσωση. Η δεύτερη ομάδα δεν προνόησε να βάλει παρένθεση ενώ η τρίτη ήταν αρκετά μακριά από τη λύση. Η εκπαιδευτικός περνούσε από τις ομάδες και απαντούσε σε ερωτήσεις ή έθετε η ίδια. Δεν δόθηκαν απευθείας απαντήσεις. Εφόσον όλοι οι μαθητές έφτιαξαν τις σωστές εξισώσεις και τις απλοποίησαν με επιμεριστική, ήταν όλοι σε θέση να τις σχεδιάσουν γραφικά. Το ενδιαφέρον ήταν πως οι εξισώσεις είχαν μόνο ένα ζευγάρι φυσικών αριθμών και οι μαθητές αναγκαστικά ασχολήθηκαν με αρνητικούς και δεκαδικούς αριθμούς. Ωστόσο τους βγήκε φυσικά, χωρίς να πουν πως δεν υπάρχουν άλλα ζευγάρια ή η άσκηση είναι δύσκολη, όπως αναμενόταν. Μόνο η μία ομάδα ήθελε μία καθοδήγηση για να βρει περαιτέρω ζευγάρια, ωστόσο χωρίς απευθείας απαντήσεις από την εκπαιδευτικό, αλλά με ερωτήσεις, μπόρεσαν να βρουν. Το κοινό σημείο βρέθηκε από όλες τις ομάδες. Το ενδιαφέρον ήταν πως σε αυτήν την πρώτη ομαδική άσκηση ήταν η πρώτη φορά που συμμετείχαν πιο ενεργά δύο μαθητές οι οποίοι δεν είχαν υψηλές αποδόσεις στο σχολείο και μέχρι στιγμής δεν είχαν ενεργοποιηθεί στις διδασκαλίες.

Σε αυτό το σημείο πραγματοποιήθηκε ένα δεκάλεπτο διάλειμμα.

Μετά το διάλειμμα, οι ομάδες κλήθηκαν να λύσουν το πρόβλημα της σελίδας 5 το οποίο ζητάει να βρεθούν δύο αριθμοί που το άθροισμά τους κάνει 3 και το άθροισμά τους κάνει 5. Η μοντελοποίηση έγινε από όλες τις ομάδες. Προτού λύσουν το σύστημα, ρωτήθηκαν αν πιστεύουν πως υπάρχουν δύο τέτοιοι αριθμοί. Οι 4 μαθητές απάντησαν ναι και οι 2 απάντησαν όχι. Εύκολα πλέον βρήκαν από δύο σημεία για την κάθε ευθεία και τις αναπαράστησαν. Τα σημεία που επέλεξαν ήταν και πάλι με ακεραίους, εφόσον απολογήθηκαν πως αυτά είναι πρώτα που σκέφτονται και αν διαλέξουν κάτι άλλο δε θα γινόταν δεκτό από τον καθηγητή τους. Μετά την αναπαράσταση, διαπίστωσαν πως πρόκειται για παράλληλες ευθείες. Μέσα από ερωτο-απαντήσεις, κατέληξαν πως δεν έχουν κοινά σημεία οι ευθείες άρα δεν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί. Εδώ υπογραμμίστηκε πως το σύστημα λέγεται αδύνατο καθώς οι ευθείες είναι παράλληλες. Το κλίμα στη διάρκεια των ομαδικών ασκήσεων ήταν ιδιαίτερα ευχάριστο. Ένας μαθητής μετά το τέλος της άσκησης άνοιξε τον εξής διάλογο:

M_1: Εφόσον η άσκηση μας ρωτάει στην αρχή αν υπάρχουν, σίγουρα δε θα υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

Κ: Άρα πιστεύεις πως είναι παγίδα;

M_1: Ναι.

Κ: Ένας συμμαθητής σου πριν είπε πως βρήκε λύση στο πρόβλημα. Τους αριθμούς 2 και 3. Εσύ τι πιστεύεις;

M_1: Θα κάνω αντικατάσταση. Α ναι, 2+3=5. Άρα ισχύει.

Κ: Συμφωνείτε όλοι;

M_2: Ναι αλλά κυρία, 2+3 δεν κάνει 3.

Κ: Άρα πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο εξισώσεις. Προσοχή μεγάλη! Λύνετε πλέον συστήματα, έχετε δύο πληροφορίες που θα πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο. Είναι κλασσικό λάθος, σπουδαίο ερώτημα για ασκήσεις σωστού λάθους, να κάνετε αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση και να μένετε εκεί.

Το επόμενο πρόβλημα στη σελίδα 6, καταλήγει σε ένα αόριστο σύστημα. Πάλι στις ίδιες ομάδες οι μαθητές συνεργάζονται για την επίλυσή της. Κατά τη μοντελοποίηση, παρατηρείται και πάλι η παρανόηση των πράξεων από τη λεκτική εκφώνηση κατά την μετατροπή στην αλγεβρική έκφραση. Η εύρεση σημείων γίνεται πλέον μία εύκολη διαδικασία και για τους πιο αδύναμους μαθητές, οι οποίοι δοκιμάζουν με άνεση δεκαδικούς και αρνητικούς. Στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν τις ευθείες,, ένας μαθητής δηλώνει πως: «αυτή την ευθεία την ξανακάναμε». Η εκπαιδευτικός ρωτάει για τη σχετική θέση των ευθειών και πόσα κοινά σημεία έχουν και ο μαθητής αποκρίνεται αρχικά πως τέμνονται, μετά το διόρθωσε πως ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Γραφικά συνειδητοποίησαν πιο εύκολα τα άπειρα κοινά σημεία αυτών, παρά το κανένα κοινό σημείο των παραλλήλων. Εδώ σημειώνεται πως το σύστημα είναι αόριστο.

Η άσκηση της σελίδας 7 γίνεται ατομικά. Ο κάθε μαθητής είναι υπεύθυνος για το σύστημα που θα φτιάξει. Η άσκηση είναι η εξής: «Ένας Σπαρτιάτης και ένας

Αθηναίος είχαν ο καθένας χωράφια. Ο Σπαρτιάτης είχε 3 στρέμματα λιγότερα από τον Αθηναίο και ο Αθηναίος είχε τα διπλάσια στρέμματα από το Σπαρτιάτη. Να βρεθεί πόσα στρέμματα είχε ο καθένας». Δε δίνει λεκτικά τις πράξεις όπως άλλα προβλήματα αλλά δίνει τις λέξεις ¨λιγότερα¨ και ¨διπλάσια¨. Τα λιγότερα μπέρδεψαν αρκετά. Κάποιοι έφτιαξαν τις εξισώσεις x+y=3 ή y+3 σκέτο. Μετά από υποδείξεις βρήκαν τις σωστές. Στην εξίσωση που συμπεριλάμβανε το «διπλάσια» περιμέναμε την παρανόηση που τονίζουν και οι Clement Lochhead & Monk (1981) πως θα έβαζαν τα γράμματα όπως τα άκουγαν χωρίς να τα επεξεργαστούν και για αυτό υπέθεσαν x=2y και όχι y=2x. Αυτό ωστόσο δεν έγινε.

Η άσκηση δίνει 3 ζεύγη και ρωτάει αν είναι λύση το καθένα της πρώτης εξίσωσης, της δεύτερης εξίσωσης ή του συστήματος. Εύκολα αντικατέστησαν για να δουν αν είναι λύση της κάθε εξίσωσης, όμως το αν αποτελεί λύση του συστήματος μπερδεύτηκαν χωρίς να έχουν τρόπο να το επαληθεύσουν. Μετά την υπόδειξη από την καθηγήτρια, εύκολα απάντησαν και στα υπόλοιπα ερωτήματα για τα άλλα δύο ζεύγη.

Τέλος, αφού αναδείχθηκαν οι τρόποι που μπορεί κανείς να καταλάβει πόσες λύσεις έχει ένα σύστημα, έγινε στην τάξη σε ατομικό επίπεδο, η άσκηση της σελίδας 10 που αφορά την αντιστοίχιση συστημάτων με τα αντίστοιχα γραφήματά τους. Ένας μαθητής υπέθεσε πως το πρώτο σύστημα αντιστοιχίζεται με το γράφημα iv. Εσφαλμένα το υπέθεσε αυτό καθώς είδε ένα σημείο της μίας ευθείας στο γράφημα, το (5,10) και το αντικατέστησε στην πρώτη εξίσωση του πρώτου συστήματος χωρίς να λάβει υπόψη του πως δεν είναι σημείο τομής. Μετά από υπόδειξη της καθηγήτριας, βρήκαν ένα σημείο της άλλης ευθείας που όμως δεν επαλήθευε τη δεύτερη εξίσωση. Έχοντας σαν πρότυπο αυτά τα σημεία, προσανατολίστηκαν και βρήκαν πως το γράφημα ivαντιστοιχεί στο σύστημα 2. Έπειτα ένας μαθητής παρατήρησε το iii γράφημα που αφορά παράλληλες και υπέθεσε πως θα ήταν εύκολο να βρεθεί το σύστημα του. Μετά όμως από αποτυχημένες προσπάθειες όλης της τάξης, η καθηγήτρια υπέδειξε το σύστημα 3 και εξήγησε ξανά τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε πότε είναι αδύνατο ένα σύστημα. Έτσι οδηγήθηκε η τάξη στην αναγνώριση του αόριστου συστήματος και του αντίστοιχου γραφήματός του. Έχουν απομείνει μόνο δύο συστήματα τα οποία έχουν μία μοναδική λύση. Ένας μαθητής παρατήρησε ένα σημείο μίας ευθείας του i διαγράμματος (εξακολουθούν να μη παρατηρούν το κοινό σημείο τομής) και το αντικατέστησε στα δύο συστήματα που έμειναν, οπότε βρήκε σε ποιο αντιστοιχεί.

Το πρόβλημα της σελίδας 9 και το πρόβλημα του Διόφαντου της σελίδας 12, δόθηκαν ως ασκήσεις για το σπίτι.

Μεγάλο ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός, ενός πολύ αδύναμου μαθητή, ο οποίος μετά το τέλος του μαθήματος, σε προσωπική συζήτηση με την καθηγήτρια, εξέφρασε κάποιες απορίες:

-Γιατί δε μας τα διδάσκουν αυτά στο σχολείο;

-Όλη μέρα οι αρχαίοι ασχολούταν με αυτά; Δεν είχαν πραγματικές δουλειές;

-Πως συνδέονται δηλαδή με την καθημερινότητα;

Η πολύ θετική ανταπόκριση του μαθητή οδήγησε σε μία μικρή συζήτηση με την καθηγήτρια.

7.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΙΛΟΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

Οι δύο πιλοτικές διδακτικές παρεμβάσεις που έγιναν, δεν είναι αρκετές για να μπορέσουμε να εξάγουμε αποτελέσματα απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα. Μπορούν όμως να προκύψουν κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα με σκοπό μελλοντικά την καθολική εφαρμογή του διδακτικού πακέτου ή συναφών ερευνών. Ακολουθούν οι εξής πίνακες:

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ TEST ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΥΠΑΡΧΟΥΣΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ
ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Επίλυση εξίσωσης (χωρίς παρενθέσεις, κλάσματα και δεκαδικούς) που καταλήγει σε μία λύση είτε νοερά είτε με τον αλγόριθμο
Αλγοριθμική επίλυση εξίσωσης με κλάσματα
Εύρεση τιμής παράστασης για δεδομένη τιμή x
Τοποθέτηση σημείων σε άξονες
ΛΑΘΗ ΠΟΥ ΒΡΕΘΗΚΑΝ
Πράξεις με ανόμοιους όρους
Λάθος εκτέλεση επιμεριστικής
Αδυναμία επίλυσης εξίσωσης με αδύνατη ή αόριστη λύση (είτε αλγοριθμικά είτε νοερά)
Δυσκολία στην επίλυση εξισώσεων με παρενθέσεις και αγκύλες (κυρίως κατά την

επιμεριστική ιδιότητα)
Αδυναμία μοντελοποίησης προβλημάτων
Αδυναμία συμπλήρωσης πίνακα τιμών μίας ευθείας
Αδυναμία εύρεσης σημείου με δεδομένη τη μία συντεταγμένη από γραφική παράσταση

Πίνακας 1.Αποτελέσματα test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων

ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΝΤΟΠΙΣΤΗΚΑΝ
Αδυναμία μοντελοποίησης προβλημάτων
Χρήση τετριμμένων γραμμάτων όπως x,y
Η αυθεντία του καθηγητή του σχολείου και ο φόβος προς το πρόσωπό του
Μη κατανόηση απείρου (όπως άπειρων λύσεων ενός συστήματος/μίας εξίσωσης)
Προκατάληψη φυσικών αριθμών
Λάθος ετικέτες σε μεταβλητές
Μη έλεγχος λύσης
Δυσκολία μετάβασης από λεκτική έκφραση πράξης σε συμβολική (π.χ. άθροισμα και πρόσθεση)
Μη αντιστοίχιση ευθείας/συστήματος με το αντίστοιχο γράφημά τους
Μη κατανόηση διαγραμμάτων για μεθοδολογίες (π.χ. τρόποι μοντελοποίησης προβλήματος)
Δεν επαρκεί το κεφάλαιο της εξίσωσης της ευθείας στη Β΄ γυμνασίου και όντως χρειάζεται επανάληψη αυτού στη Γ΄ γυμνασίου

Πίνακας 2. Παρανοήσεις που εντοπίστηκαν

ΘΕΤΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ
Η συνεχής ενασχόληση με προβλήματα βοήθησε στην πιο εύκολη μοντελοποίησή τους
Θετική στάση στην γραφική επίλυση προβλημάτων με ευχέρεια στη χρήση της
Η γραμμικότητα δεν προκαλεί σύγχυση
Μεγαλύτερη απόδοση με ομάδες και διεξαγωγή ενδιαφερουσών συζητήσεων
Συμμετοχή μη ενεργών και ήσυχων μαθητών

Πίνακας 3. Θετικά συμπεράσματα από τις διδασκαλίες

ΘΕΤΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΙΣΤΟΡΙΑΣ
Επιτυχής απάντηση σε ιστορικά πλαισιωμένη ερώτηση έδινε ενθάρρυνση
Τα κείμενα τα οποία θέτονταν για συζήτηση προκαλούσαν ενδιαφέρον και ανάγκη

για την επίλυση προβλημάτων και από ίδιους

Πίνακας 4.Θετικά συμπεράσματα από τη χρήση ιστορίας

ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ
Ελλιπής ή καθόλου γνώση ιστορίας και κατανόηση χρονολογικών περιόδων με αποτέλεσμα τη δυσκολία συζητήσεων σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών
Κείμενα χωρίς συζήτηση, με εγκυκλοπαιδικές γνώσεις και ιστορικές εικόνες, δεν προκαλούσαν το ενδιαφέρον και κούραζαν

Πίνακας 5. Αρνητικά συμπεράσματα από τη χρήση της ιστορίας

8. ΑΝΤΙ ΕΠΙΛΟΓΟΥ

Η παραπάνω μελέτη ουσιαστικά διαμορφώνει και δημιουργεί ένα διδακτικό πακέτο για τη διδασκαλία των γραμμικών συστημάτων με τα εξής χαρακτηριστικά: τη μελέτη ιστορικών στοιχείων, τη χρήση παρανοήσεων και την ένταξη ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων. Όλα στο πλαίσιο και τη διάρθρωση της ύλης του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος και του σχολικού βιβλίου. Εστιάζει τόσο στο μαθητές όσο και στους καθηγητές, δίνοντάς τους έναν πολύ ενεργό ρόλο.

Η έρευνα ξεκίνησε το Φεβρουάριο του 2020. Στις 07/02/2020 μοιράστηκαν τα test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων. Αυτά έγιναν με σκοπό να διαπιστωθούν κενά και παρανοήσεις των μαθητών στις αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις, με αποτέλεσμα να γίνουν 2 διδακτικές ώρες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης, κατά τις οποίες μελετήθηκαν αυτές οι έννοιες. Η πρώτη φάση της διδακτικής παρέμβασης έγινε στις 08/02/2020 και η δεύτερη φάση στις 06/03/2020. Τα αποτελέσματά τους αναλύονται στην ενότητα 7. Η διδακτική παρέμβαση διακόπηκε κατά το κλείσιμο των εκπαιδευτικών εγκαταστάσεων λόγω του ιού Covid-19. Έπειτα από δύο μήνες κλειστών εκπαιδευτικών εγκαταστάσεων, η επαναλειτουργία τους ήταν υπό όρους, που δεν επέτρεψαν τη συγκεκριμένη έρευνα να συνεχιστεί. Επομένως, συμπεράσματα ως προς τα ερευνητικά ερωτήματα δεν μπόρεσαν να βγουν, καθώς η έρευνα έγινε πιλοτικά μόνο για τις δύο πρώτες φάσεις της διδακτικής παρέμβασης και για αυτό αναλύονται τα συμπεράσματα μόνο αυτών.

Κατά τη μελέτη των παρανοήσεων που αφορούν τα γραμμικά συστήματα παρατηρήθηκε πληθώρα άρθρων και ερευνών σχετικά με τις αλγεβρικές εκφράσεις, εξισώσεις και συναρτήσεις, ωστόσο δεν υπήρχε αρκετή βιβλιογραφία για τις παρανοήσεις στα γραμμικά συστήματα, παρά μόνο έρευνες χωρίς επίσημα συμπεράσματα. Από την πιλοτική εφαρμογή των δύο πρώτων φάσεων της διδακτικής παρέμβασης, προέκυψαν αρκετές παρανοήσεις στα συστήματα. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα, πως υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω έρευνες σχετικά με τα συστήματα.

Η ανάλυση των σχολικών προγραμμάτων έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της διδακτικής παρέμβασης, καθώς είναι ο ακρογωνιαίος λίθος κάθε εκπαιδευτικού συστήματος. Τα αναλυτικά προγράμματα, τα εγχειρίδια των καθηγητών και τα σχολικά βιβλία, διαμορφώνουν όλο το εκπαιδευτικό σύστημα και τον τρόπο διδασκαλίας. Μικρές αλλαγές στα προαναφερθέντα, μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την εκπαιδευτική κοινότητα. Ενδιαφέρουσα υπήρξε και η μελέτη του αναλυτικού προγράμματος 2011 που δεν εφαρμόστηκε εν τέλει στα σχολεία. Η διδακτική αυτή προσέγγιση είχε χαρακτηριστικά και από αυτό το αναλυτικό πρόγραμμα, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα πως η μελέτη διαφορετικών αναλυτικών προγραμμάτων (και ξένων) μπορεί να βοηθήσει έναν εκπαιδευτικό κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας του. Μακροπρόθεσμα, αυτό οδηγεί και στην επιτακτική ανάγκη εκσυγχρονισμού του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος αφού πρώτα γίνουν έρευνες και μελέτες στην ελληνική εκπαιδευτική και σχολική κοινότητα.

Οι προσεγγίσεις στα γραμμικά συστήματα μέσω ιστορικής σκοπιάς και με την εφαρμογή ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων, ίσως μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για μια διαφορετική, από διδακτικής σκοπιάς προσέγγιση, της διδασκαλίας της Άλγεβρας. Σύμφωνα και με το θεωρητικό πλαίσιο η παρουσίαση των θεμάτων με ιστορικό τρόπο έχει θετικές επιδράσεις στους μαθητές. Δηλαδή να ξεκινάει με τη διατύπωση «αφελών» εικασιών μέσω κάποιων προβλημάτων προς μια άτυπη δικαιολόγηση της ισχύος ή όχι αυτών. Οι παρανοήσεις από την άλλη σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, χτίζουν μία διδασκαλία η οποία αρχικά θα τις αναδείξει και μετέπειτα θα τις καταρρίψει, χτίζοντας μία σωστή εννοιολογική αντίληψη επί του θέματος. Έπειτα οι ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν σε αρκετές έρευνες, έδειξαν πως οι μαθητές τις προτιμούν καθώς χάνεται το «εγώ» στο σύνολο και έτσι εργάζονται καλύτερα, παίρνοντας βοήθεια από τους συνομηλίκους τους. Όλα τα παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία για τη δημιουργία ενός διδακτικού πακέτου στα γραμμικά συστήματα με στόχο την ανάπτυξη και καλλιέργεια των λειτουργιών σχετικά με την αντίληψη των μαθητών γύρω από τα γραμμικά συστήματα.

Έπειτα από τη μελέτη όλων των παραπάνω αντικειμένων, προκύπτει η ανάγκη να εφαρμοστεί μελλοντικά η παραπάνω διδακτική παρέμβαση, προσθέτοντας συμπεράσματα και αποτελέσματα τόσο στον τρόπο διδασκαλίας της Άλγεβρας όσο και στην ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Σε μία εποχή με την τεχνολογία να αποκτά ραγδαία αύξηση, τα πολιτικοκοινωνικά φαινόμενα να πληθαίνουν και η κοινή γνώμη να διχάζεται συνεχώς οφείλουμε να δώσουμε στους μαθητές και αυριανούς πολίτες, το δικαίωμα της μαθηματικής γνώσης. Καθώς η γνώση των μαθηματικών αποτελεί δύναμη ισχύος. Ως εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών οφείλουμε να κάνουμε τα περίπλοκα απλά και κατά τη διδασκαλία μας να ακολουθούμε πάντα το ρητό του William Paul Thurston «*Τα μαθηματικά δεν είναι αριθμοί, εξισώσεις, πράξεις και αλγόριθμοι˙ είναι πάνω από όλα κατανόηση*».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abouchedid, K., & Nasser, R. (2000). *The role of presentation and response format in understanding, preconceptions and alternative concepts in algebra problems.* Washington, D.C.: United States Department of Education.

Adu, E., Assuah, C. K., & Asiedu-Addo, S. K. (2015). Students' errors in solving linear equation word problems: Case study of a Ghanaian senior high school. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, *11*, 17-30.

Agwu, N., Frey, P., Greer, T., & Taylor, G. (2004). Linear Equations. *Historical Modules Project*

Alcock, L. and Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof production: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematical Learning,* 3, 1-22.

Andrews-Larson, C. (2015). Roots of linear algebra: An historical exploration of linear systems. *Primus*, *25*(6), 507-528.

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.

Ashlock, D. (2006). *Evolutionary computation for modeling and optimization*. Springer Science & Business Media.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal,* 9(3),249-272.

Barbin, E. (1997). "Histoire et enseignement des mathématiques: pourquoi? comment?". *Bulletin AMQ, Montréal,* 37 (1), 20–25.

Barrow-Green, J. (2000). Chapter 10, 10.3.2 Web historical resources for the mathematics teacher. [eds.] John Fauvel and Jan van Maanen. *History in Mathematics Education, The ICMI Study.* Dordrecht : Kluwer, pp. 362-370.

Barzun, J. (1954]). "*Teacher in America*". New York: Doubleday and Co.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann Educational Books.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journalfor Research in Mathematics Education,* 36(5),412-446.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 7–16.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 412-446.

Bonnycastle, J. (1795). *The Scholar's Guide to Arithmetic; Or a Complete Exercise-book for the Use of Schools. With Notes,... The Sixth Edition. By John Bonnycastle,......* J. Johnson.

Booth, L. R (1984). *Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor, UK: NFER-NELSON.

Booth, L. R. (1986). Difficulties in Algebra. *Australian Mathematics Teacher*, *42*(3), 2-4.

Booth, J. L., & Koedinger, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 30, No. 30).

Booth, L. R, &Watson, J. (1990). Research for teaching: Learning and teaching algebra. *Australian Mathematics Teacher,* 46(3), 12-14.

Bottoms, G. (2003). *Getting students ready for Algebra I: What middle grades students need to know and be able to do.* Atlanta, GA: Southern Regional Education Board.

Brenner, M. E., Brar, T., Duran, R., Mayer, R. E., Moseley, B., & Smith, B. R. (1995, October). *The role of multiple representations in learning algebra.* Paper presented at the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH.

Briggs, J., Demana, F., & Osborne, A. R. (1986). Moving into algebra: Developing the concepts of variable and function. *Australian Mathematics Teacher,* 42,5-8.

Brown, G.S. (1969). *Laws of the Form*. London: Allen & Unwin

Bruner J S (1983) Child's Talk: Learning to use Language Oxford: Oxford University Press

Bush, S. B. (2011). Analyzing common algebra-related misconceptions and errors of middle school students.*Electronic Thesesand Dissertations. Paper 187.*

Capraro, M. M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols?. *Reading Psychology*, *27*(2-3), 147-164.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2017). Early algebra is not the same as algebra early. In *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.

Chi, M. (1978). Knowledge structures and memory development. *Children's thinking: What develops*, 73-96.

Chi, M. T., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices.*Cognitive science*, *5*(2), 121-152.

Chi, M. T., Hutchinson, J. E., & Robin, A. F. (1989). How inferences about novel domain-related concepts can be constrained by structured knowledge. *Merrill-Palmer Quarterly (1982-)*, 27-62.

Christensen, J., & Gustafson, G. (2012). A Brief History of Linear Algebra. *Grant Gustafson Univ. Utah*.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education,* 13(1),16-30.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly, 88*(4), 286-290.

Clement, J., Narode, R., & Rosnick, P. (1981). Intuitive misconceptions in algebra as a source of math anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *3*(4), 36-45.

Corter, J.E. and Zahren, D.C. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal, 6*(1), 22-50.

Cunningham, S. (1991). The visualisation environment for mathematics education. In W. Zimmennann and S. Cunningham (Eds.), *Visualisation in teaching and learning mathematics* (67-76) Providence, RI: MAA Notes, 19.

Davidenko, S. (1997). Building the concept of function from students' everyday activities. *Mathematics Teacher, 90(2),* 144-149.

Day, R., & Jones, G. A. (1997). Building bridges to algebraic thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 2(4),208-212.

Dede, Y. (2004). The concept of variable and identification its learning difficulties. [Article]. *Educational Sciences: Theory &Practice*, 4(1),50-56.

DeVries, D., & Arnon, I. (2004). Solution--What Does It Mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1985). A graphical approach to solving inequalities. *School Science and Mathematics*, *85*(8), 651-662.

Eisenberg, T. and Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds), *Visualisation in teaching and learning mathematics.* (25-37) Providence RI: MAA Notes Series 9.

Ellis, A. B. (2009). Patterns, quantities, and linear functions. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 14(8),482-491.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). “Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities”. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 83-106.

Fennema, E. (1972). Models and mathematics. *Arithmetic Teacher*, 19, 635-639.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Guttierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (237-273), The Netherlands: Sense Publishers, Rotterdam.

Fisher, K. M. (1988). The students-and-professors problem revisited. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(3), 260-261.

Flagg, M. (2017). Solving a System of Linear Equations Using Ancient Chinese Methods. *Linear Algebra. 1.*

Furinghetti F. (2000b). “The long tradition of history in mathematics teaching”. In V. Katz (Ed.). *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (pp. 49- 58). Washington. DC: The Mathematical Association of America.

Garfunkel, J., & Plotkin, B. (1966). Using geometry to prove algebraic inequalities. *The Mathematics Teacher*, *59*(8), 730-734.

Gaultney, J. F. (1995). The effect of prior knowledge and metacognition on the acquisition of a reading comprehension strategy. *Journal of Experimental Child Psychology*, *59*(1), 142-163.

Gauss, C. F. (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Vol. 7). Perthes et Besser.

Gobbo, C., & Chi, M. (1986). How knowledge is structured and used by expert and novice children. *Cognitive development*, *1*(3), 221-237.

Graham, A. T., & Thomas, M. O. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator.*Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 265-282.

Grcar, J. F. (2011). Mathematicians of Gaussian elimination.*Notices of the AMS*, *58*(6), 782-792.

Guedji, D. (1998). "*Le theoreme du perroquet*". Editions du Seuil. Ελληνική έκδοση: *Το θεώρημα του παπαγάλου*, Μετάφραση: Τ, Μιχαηλίδης. Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, 1999.

Gutierrez, A. (1996). *Visualisation in 3-dimentional geometry: In search of framework*, Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,Valencia, Spain.

Hall, R. D. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of mathematics education journal*, *15*(1), 1-67.

Hacısalihoğlu, H. H. (1998). *Açış konuşması*. Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu, 20-22 Mayıs, Erzurum.

Hallez, M. (1990). "Teaching Huygens in the rue Huygens" in J. Fauvel (ed), *History in the mathematics classroom*: the IREM papers, Leicester: Mathematical Association, 97–112.

Hawes, K. (2007). Using error analysis to teach equation solving. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 12(5),238-242.

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, *73*(8), 572-580.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics,27*(1), 59-78.

Hitt, F. (2011). *Working group on representation and mathematics visualisation*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (1998-2001), pp.1-7. Paper retrieved on 20th of April, 2011 from http://www.matedy.cinvestav.mx/Wg-hit.pdf.

Hodgkin, L. H. (2005). *A history of mathematics: From Mesopotamia to modernity*. Oxford: Oxford University Press.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin*. Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences. New York: Springer.

Høyrup, J. (2010). Old Babylonian “algebra”, and what it teaches us about possible kinds of mathematics. *Gaṇita Bhāratī, 32,* 87-110.

Hsieh C. and Lin, S. (2008). Dynamic visual computer design for factors and multiples word problem learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(2), 215-232.

Işık, A. and Konyalıoğlu, A.C. (2005). Visualisation approach in mathematics education. *Journal of Kazım Karabekir Education Faculty*, 11, 462-471.

Issakova, M. (2006). Comparison of student errors made during linear equation solving on paper and in interactive learning environment. In *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*.

Jankvist U. T. (2009). “A categorization of the “whys” and “hows” on using history in mathematics education”. *Educational Studies in Mathematics 71*, pp.235-261.

Johnson, K. E., Scott, P., & Mervis, C. B. (2004). What are theories for? Concept use throughout the continuum of dinosaur expertise. *Journal of Experimental Child Psychology*, *87*(3), 171-200.

Jones, K., & Day, J. D. (1997). Discrimination of two aspects of cognitive-social intelligence from academic intelligence. *Journal of educational psychology*, *89*(3), 486.

Jung, I. (2002). *Student representation and understanding of geometric transformations with technology experience*. Unpublished Doctoral Thesis, University of Georgia, Georgia, USA

Kalchman, M., & Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom*, 351-393.

Kaput, 1. J. (2000). *Transforming algebrafrom an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the k-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Katz, V. J. (2004). *A history of mathematics* . Pearson/Addison-Wesley.

Kragh, H. (1990). “*Dirac; a scientific biography*”. Cambridge: University Press.

Kieran, C. (1980, April). *Constructing meaning for non-trivial equations.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EDI84899&site=ehost-Iive

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra.

Kieran, C., & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on learning problems in mathematics, 21*(1), 1-17.

Kieran, C. (2008). What do students struggle with when first introduced to algebra symbols? Retrieved from http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_andAdvocacylResearchiClips and Briefs/BriefOIo20-%20What%20Can%20 We%20Learn.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (pp. 115-135). National research council (Ed.). Washington, DC: National Academy Press.

Konyalıoğlu, A.C. (2003). *Üniversite düzeyinde vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi,* Unpublished Doctoral Thesis, Atatürk University, Erzurum, Turkey.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School* (9), 23-26.

Labato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Developing the essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning: Grades* 6-8. Reston, V A: National-Council of Teachers of Mathematics.

Larson, C. (2009). On the Histories of Linear Algebra: The Case of Linear Systems. *Proceedings for the Thirteenth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Legendre, A. M. (1805). *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. F. Didot.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113-120.

Lobato, J., Ellis, A., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics: Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Lochhead, J., & Mestre, J. P. (1988). From words to algebra: Mending misconceptions. *The ideas of algebra, K, 12.*

MacGregor, M. (2002). Using words to explain mathematical ideas. *Australian Journal of Language and Literacy, The*, *25*(1), 78.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-J* 2. (Vol. 1988 Yearbook, pp. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nasser, R., & Abouchedid, K. (2000). Attitudes and concerns towards distance education: The case of Lebanon. *Online Journal of Distance Learning Administration*, *3*(4), 1-10.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researcher's beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 168-190.

Neugebauer, O., 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. I-III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937.

Neugebauer, O., Sachs, A. J., & Götze, A. (1945). Mathematical cuneiform texts (Vol. 29). American Oriental Society.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*,*20*(2), 93-104.

ÖZKAYA, M., ÖÇAL, M. F., & KONYALIOĞLU, A. C. (2016). Visualization in Solving Inequality Questions: Case of Pre-Service Mathematics Teachers. *Journal of Education and Human Development*, *5*(4), 119-137.

Peled, I.,& Carraher, D. W. (2008). Signed numbers and algebraic thinking. In J. 1. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 303-328). New York, NY: Routledge.

Perrenet, J. C., & Wolters, M. A. (1994). The art of checking: A case study of students' erroneous checking behavior in introductory algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*,*13*(3), 335-358.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*,85(7),557-561.

Ponte, P. J., Matos, F.J., Guimar, M.H., Leal, C.L. and Canavarro, P.A. (1994). Teachers' and students' views and attitudes towards a new mathematics curriculum: A case study, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 347–365.

Presmeg, N.C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 42-46.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Reys, R.E., Marilyn, N.S., Mary, M.L. and Nancy, L.S. (1998). *Helping children learn mathematics* (5th edition). Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006, July). A picture is worth a 1000 words–the role of visualization in mathematics learning. In*Proceedings 30th conference of the International Group for the Psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 457-464).

Rosnick, P., & Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *The Journal of mathematical behavior*.

Schnotz, W., Zink, T. and Pfeiffer, M. (1995). *Visualisation in learning and instruction: Effect of graphic representation formats on the structure and application of knowledge*, Research Report-5, Freidrich-Schiller University of Jena.

Schubring (1978). "*Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*". Bielefeld: Klett – Cotta.

Schwanenflugel, P. J., Fabricius, W. V., & Alexander, J. (1994). Developing theories of mind: Understanding concepts and relations between mental activities. *Child Development*, *65*(6), 1546-1563.

Shen, K., J. N. Crossley, and A. W.-C. Lun. 1999. *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. New York: Oxford University Press.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15, 4-14.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. 1. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York, NY: Routledge.

Soylu, Y. (2008). Matematik derslerinde başarıya ulaşmada somut-yarı somut-soyut ilkesinin etkisi, *Journal of Qafqaz University*, 22, 174-181.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teacher, 90(2), 110-113.*

Stephens, A. C. (2005). Developing students' understandings of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 11(2),96-100.

Swafford, J., & Langrall, C. (2000). Uso Preinstruccional de Ecuaciones para describir y representar situaciones Problema en un Grupo de Sexto Grado. *Revista EMA*, *5*(3), 203-235.

Swan, M. (2000). Making sense of algebra. *Mathematics Teaching(171), 16-19.*

Tall, D. (1986). *Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A tribute to Richard Skemp*, in Papers in Honour of Richard Skemp, 21–36, Warwick.

Tzanakis, C. (1996). "The history of the relation between Mathematics and Physics as an essential ingredient of their presentation", *Proc. of the Second European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, (eds) E. Veloso et al., Universidade do Minho, Braga, Portugal, pp.96-104.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). "Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey". In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study"*, (pp. 201 - 240). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). "Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks". *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44 – 55.

Tenenbaum, G., Tehan, G., Stewart, G., & Christensen, S. (1999). Recalling a floor routine: The effects of skill and age on memory for order. *Applied Cognitive Psychology: The Official Journal of the Society for Applied Research in Memory and Cognition*, *13*(2), 101-123.

Teresi, D. (2002). *Lost discoveries: The ancient roots of modern science—from the Babylonians to the Maya*. New York: Simon & Schuster.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it? In S.Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 11-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, *8*, 19.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63-75.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7 ed.). New York: Pearson Education.

VanDyke, F., & Craine, T. V. (1997). Equivalent representations in the learning of algebra. *Mathematics Teacher, 90(8), 616-619.*

VanLehn, K., & Jones, R. M. (1993, January). Better Learners Use Analogical Problem Solving Sparingly. In *ICML* (pp. 338-345).

Veloo, A., Krishnasamy, H. N., & Wan Abdullah, W. S. (2015). Types of student errors in mathematical symbols, graphs and problem-solving. *Asian Social Science*, *11*(15), 324-334.

Viholainen, A. (2008). *Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability*, Unpublished doctoral thesis, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyvaskyla, Jyvaskyla: Finland.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics,*11, 149-156.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 555-570.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119.

Weinberg, A. D., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Krill, D. E., Knuth, E. J., & Alibali, M.W. (2004, April). *Students initial and developing conceptions of variable.* Paper presented at the Annual Meeting for the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Welder, R. M. (2007). *Preservice elementary teachers' mathematical content knowledge of prerequisite algebra concepts* (Doctoral dissertation). A vailiable from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3254740).

Willoughby, S. S. (1997). Activities to help in learning about functions. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 2(4),214-219.

Witzel, B. S. (2005). Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 3*(2), 49-60.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14, 169-181.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator* 25(2), 10-17.

Yerushalmy, M. and Chazan, D. (1990). Overcoming visualisation obstacles with the aid of the supposer. *Educational Studies in Mathematics,* 21, 199-219.

Zara, T. (2008). A Brief Study of Some Aspects of Babylonian Mathematics. *Senior Honors Papers,* 23.

Zazkis, R., Dubinsky, E. and Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457

Zehavi, N. (1999). *History of mathematics on the web: from flow of information to significant learning.* Rehovot : Weizmann Institute of Science.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991). Editor’s introduction: What is mathematical visualisation? In W. Zimmerman and S. Cunningham (Eds.), *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics* (1-8) Providence, RI: MAA Notes, 19.

Zodik, I. and Zaslavsky, O. (2007). *Is a visual example in geometry always helpful?* In J-H. Woo, H-C. Lew, K-S, Park, & DY, Seo (Eds.), Proceedings of the 31th conference of the international group for the psychology of mathematics education, 4, 265-272, Seoul, Korea.

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Στ. Χρυσοβέργης Μ. Βιβλίο Εκπαιδευτικού Γ΄ Γυμνασίου. Υπουργείο παιδείας δια βίου μάθησης και θρησκευμάτων Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Στ. Χρυσοβέργης Μ. Σχολικό Βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου. Υπουργείο παιδείας δια βίου μάθησης και θρησκευμάτων Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ. Βιβλίο Εκπαιδευτικού Β΄ Γυμνασίου. Υπουργείο παιδείας δια βίου μάθησης και θρησκευμάτων Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

Γκίκας, Α. (2017). Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία στα νέα Αναλυτικά Προγράμματα

Θρησκευτικών του Γυμνασίου με τη χρήση Διδακτικών Σεναρίων. Εμπειρική Προσέγγιση. Ζητήματα Διδακτικής των Θρησκευτικών, 1, 332-337.

ΔΕΠΠ, Σ., & ΑΠ, Σ. Μ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. *ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε στις, 27*(11), 2013.

Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2018). ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ: ΠΩΣ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (11), 31-52.

Ινστιτούτο, Π. (2011). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)–Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους άξονες προτεραιότητας 1, 2, 3-Οριζόντια πράξη.Ανακτήθηκε 11 Ιανουαρίου 2014 από http://ebooks.edu.gr/new/ps.php

Ινστιτούτο, Π. (2011). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)–Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους άξονες προτεραιότητας 1, 2, 3-Οριζόντια πράξη. Οδηγός για τον εκπαιδευτικό.

Κανάκης, Ι (1987). Η Οργάνωση της Διδασκαλίας-Μάθησης με Ομάδες-Εργασίας. Αθήνα: Εκδόσεις Τυπωθήτω.

Ματσαγγούρας, Η. (2004). Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση. Γ΄ Έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρης.

Παναγάκος, Ι. (2001). Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Κοινωνικοσυναισθηματική. Ανάπτυξη των Μαθητών κατά την Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων. Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 6, 80-90.

Τζανάκης Κ. (2009). “Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ της Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας”, στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης, Γ., Πάσχος Θ. (επιμ.), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 17 – 39.

Χρήστου, Κ. (2009). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης).

Χρυσαφίδης, Κ. (2000). Βιωματική- Επικοινωνιακή Διδασκαλία. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΑΠΟ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/57035

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/57039

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/59145

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/59690

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/59691

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/59692

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/59693

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/59705

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/60553

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/60557

https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceAssessment/Preview/68556

http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko

http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/endeiktiko-yliko

http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/exetastika-dokimia

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α – Test διερεύνησης υπαρχουσών γνώσεων

1) Δίνονται τα πολυώνυμα $A = 2x^2 + 5x - 6$ και $B = x - 2$
Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις .

α) $A + B$
β) $A \cdot B$

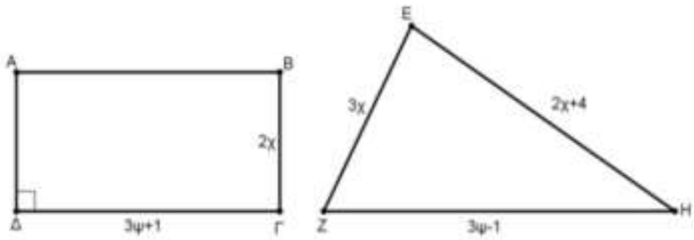
2) Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ	Δ
Η παράσταση 3x–2x+6x+x είναι ίση με:	7x	8x	-8x	10x
Οι εξισώσεις 3x = 6 και 2x = 6 έχουν κοινή λύση την:	x=8	x=2	Δεν έχουν κοινή λύση	x=3
Η εξίσωση x = x:	Έχει λύση μόνο x = 1	Είναι ταυτότητα	Είναι αδύνατη	Έχει λύση μόνο τους θετικούς αριθμούς
Η εξίσωση 3x-3x=0:	Έχει λύση την x=0	Είναι αδύνατη	Έχει λύση την x=3	Είναι ταυτότητα
Η εξίσωση 4x + 4 = 0 έχει λύση:	x=-1	x=0	x=4	Καμία
Η εξίσωση 3x + x = 0 έχει λύση:	x=3	x=-3	Άπειρες	x=0
Η εξίσωση 4 = 8x έχει λύση:	x=1	x=2	x=8	$x=\frac{1}{2}$
Η εξίσωση 2x+3 = 2x+4 έχει λύση:	Άπειρες	x=0	Καμία	x=1

3) Να λυθούν οι εξισώσεις.
α) $2[3(x-1) + 1] = x - 4$
β) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{4} = 2 + \frac{2x+1}{6}$

4) **Να γράψετε την αλγεβρική εξίσωση και να τη λύσετε**, της έκφρασης « να βρεθεί ένας αριθμός που το διπλάσιο του είναι ίσο με τριπλάσιό του»

5) Στα πιο κάτω σχήματα δίνονται οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου και ενός τριγώνου σε εκατοστά.



α) Να αποδείξετε ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις των περιμέτρων των δύο σχημάτων είναι αντίστοιχα:

$Π_{ορθογωνίου} = 4x + 6y + 2$ $\qquad$ $Π_{τριγώνου} = 5x + 3y + 3$

β) Αν ισχύει ότι $x = 2$ και $y = 3$, να υπολογίσετε το άθροισμα των περιμέτρων των δύο σχημάτων.

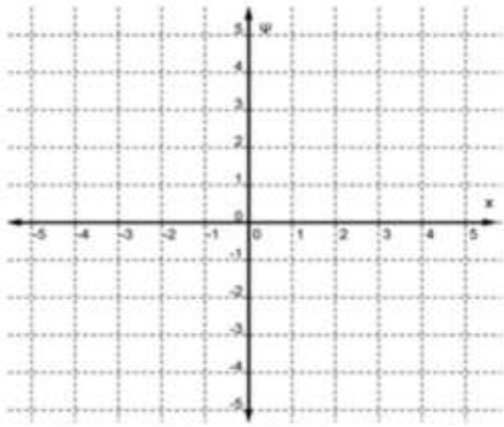
6) Δίνεται ο τύπος της συνάρτησης $y = x - 2$.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της πιο πάνω συνάρτησης.

x	y	Ζεύγος (x,y)
-1		
0		
3		
4		

β) Με τη βοήθεια του πίνακα τιμών, να κάνετε το βελοειδές διάγραμμα της συνάρτησης.

γ) Να τοποθετήσετε τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



δ) Αν το σημείο Ε με τετμημένη x=2 ανήκει στη πιο πάνω συνάρτηση να βρείτε την τεταγμένη του y.

Παράρτημα Β – $1^{ο}$ Φύλλο Εργασίας

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: Η ΓΝΩΜΗ ΣΑΣ ΜΕΤΡΑΕΙ!! 1

ΠΟΣΟ ΠΑΛΙΑ ΠΙΣΤΕΥΕΤΕ ΠΩΣ ΕΙΝΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΟΥ ΕΧΕΤΕ ΔΕΙ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΘΑ ΜΕΛΕΤΗΣΟΥΜΕ;;

……………………………………………………………………………………

ΗΤΑΝ ΠΙΣΤΕΥΕΤΕ, ΕΝΑΣ ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΠΟΥ ΕΦΤΑΙΞΕ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΒΡΗΚΕ ΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΟΥ ΞΕΡΟΥΜΕ ΣΗΜΕΡΑ;;

……………………………………………………………………………………

ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ (3500 π.Χ.- 600 μ.Χ.)

→

ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ (3000 π.Χ.- 400 μ.Χ.)

→

ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ ($3^{ος}$ έως $1^{ος}$ αι π.Χ.)

ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

Κινέζοι (200π.Χ.- 100 π.Χ.)

ΤΑ 9 ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΗΣ

→

ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ ($5^{ος}$ - $15^{ος}$ αιώνα μ.Χ.)

Λεονάρντο της Πίζας ή Φιμπονάτσι

→

ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ ($15^{ος}$- $17^{ος}$ αιώνα μ.Χ.)

Nicolas Chuquet

Leibniz (Γερμανία 1646–1716)

→

Cramer (Ελβετία 1704-1752)

→

Maclaurin (Σκωτία 1698 - 1746)

Bezout 1764

Vandermonde 1771

Laplace 1772

Frobenius (Γερμανία 1849-1917)

Cayley 1896

Hamilton 1843

Banach (Αυστρία 1892-1945)

Emmy Noether (1882-1935)

Van der Waerden (Ολλανδία 1903-1996)

- ΚΑΙ ... ΠΟΛΛΟΙ ΑΛΛΟΙ ΠΟΥ ΜΕΛΕΤΗΣΑΝ,ΜΕΤΕΦΡΑΣΑΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΤΗΚΑΝ ΜΑΖΙ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΝ ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ Ή ΝΑ ΕΞΕΛΙΞΟΥΝ ΤΙΣ ΗΔΗ ΥΠΑΡΧΟΥΣΕΣ.

- ΟΙ 6 ΠΡΩΤΟΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΙ-ΣΤΑΘΜΟΙ ΘΑ ΣΑΣ ΒΟΗΘΗΣΟΥΝ ΝΑ ΜΑΘΕΤΕ ΝΑ ΛΥΝΕΤΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΔΕ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΑΤΕ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΚΑΛΥΤΕΡΟ ΔΑΣΚΑΛΟ!

1 ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ-ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ (3500 π.Χ.- 600 μ.Χ.)

Περίπου το 2000 π.Χ. όπου ανέπτυσσαν τη φυλή τους οι Βαβυλώνιοι, έκαναν μεγάλη προσπάθεια να επιβληθούν ως φυλή. Πίστευαν πως μέσα από τις επιστήμες θα το πετύχουν.

- Πιστεύετε πως μία κοινωνία που αναπτύσσει τις επιστήμες (όπως τα μαθηματικά) είναι μία ισχυρή κοινωνία;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..

- Αξίζει λοιπόν να μάθετε μαθητικά για να γίνετε «ισχυροί»;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..

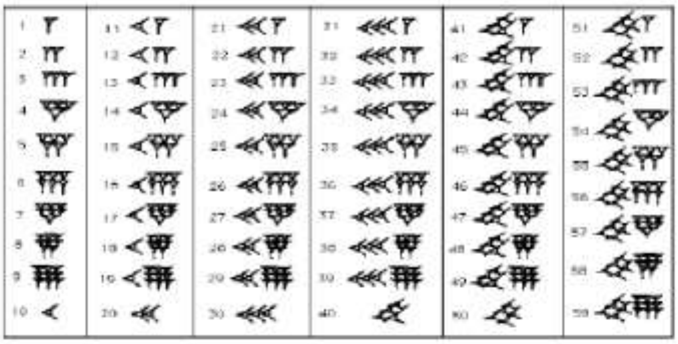
«Η ΥΠΕΡΟΧΗ ΚΑΙ Η ΤΕΛΕΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΥΗΜΕΡΙΑ ΤΗΣ ΠΟΛΙΤΕΙΑΣ, ΝΑΠΟΛΕΩΝ (1769-1825)»

ΣΦΗΝΟΕΙΔΗΣ ΓΡΑΦΗ

Τα κείμενα στους δίσκους ήταν γραμμένα με σφηνοειδή γραφή, γεγονός που βοήθησε στη μακροχρόνια συντήρηση τους. Χρησιμοποιούσαν ένα αμβλύ καλάμι, τη γραφίδα και με αυτό έγραφαν τα κείμενα τους σε υγρό αρχικά πηλό. Στη συνέχεια τα έψηναν είτε σε φούρνο είτε τα άφηναν στον ήλιο. Οι χαρακτήρες έπαιρναν το σχήμα σφήνας και ως εκ τούτου πήρε την ονομασία της. Πρώτοι οι Σουμέριοι χρησιμοποίησαν αυτόν τον τρόπο γραφής ενώ ακολούθησαν και άλλοι μεσοποτάμιοι πολιτισμοί. Ωστόσο πολλά λάθη βρέθηκαν σε αυτούς τους δίσκους καθώς οι συγγραφείς τους έπρεπε να είναι γρήγοροι για να μην προλάβει ο πηλός να στεγνώσει.

- Άρα δε γράφουμε βιαστικά γιατί έτσι κάνουμε λάθη, μας τα είπαν και οι Βαβυλώνιοι!!

Οι Βαβυλώνιοι παίρνοντας ως βάση το αριθμητικό σύστημα των Σουμέριων έφτιαξαν τους δικούς τους αριθμούς. Δε μοιάζουν με τους σημερινούς δικούς μας σίγουρα!!



Ένα σχήμα καρφίτσας αντιπροσωπεύει τη μονάδα και ένα σχήμα φτερού που αντιπροσωπεύει το δέκα.

Σας προκαλώ να μεταφράσετε αυτό το πρόβλημα που βρέθηκε σε έναν αρχαίο βαβυλωνιακό δίσκο!

« Το πλάτος συν  φορές το μήκος ενός ορθογωνίου είναι  μέτρα.»

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ:……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Συγχαρητήρια, μπορείτε πλέον να διαβάζετε ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΑ!!

Αυτό το πρόβλημα δεν είναι όμως στη μορφή που ξέρουμε και ούτε μπορούμε να το δουλέψουμε.

Ας βρούμε τις μεταβλητές και να τις δώσουμε ένα όνομα

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
…………………	…………
…………………	…………

Ας γράψουμε τη σχέση που συνδέει τις μεταβλητές μας:

………………………………………………………

- Πόσες λύσεις πιστεύετε έχει αυτή η εξίσωση;……………………
- Είναι οι παρακάτω τιμές λύσεις της εξίσωσης;
  Πλάτος= 18 , Μήκος= 5
  Πλάτος= 20 , Μήκος= 2

Πλάτος= 8 , Μήκος= 1
Πλάτος= 18 , Μήκος= 2,5

Σε μία εξίσωση με 2 αγνώστους λοιπόν υπάρχουν ΑΠΕΙΡΑ ζευγάρια λύσεων.

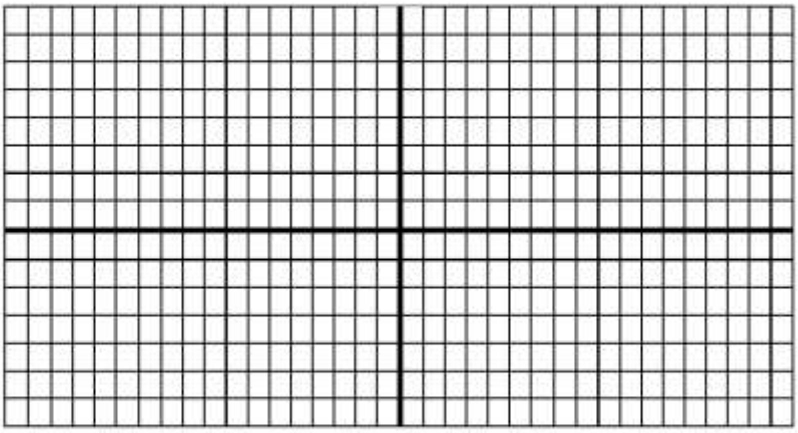
Αυτά τα ζευγάρια όμως συνδέονται από την παραπάνω σχέση. Μπορούμε να τα παραστήσουμε και γραφικά βέβαια. Ας φτιάξουμε έναν πίνακα τιμών με μερικά ζευγάρια (δεν μπορούμε όλα γιατί είναι άπειρα!) που ικανοποιούν τη σχέση μας.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ				

Με αυτά τα ζευγάρια που βρήκατε θα φτιάξουμε **σημεία** , δηλαδή **διατεταγμένα ζεύγη**. Προσοχή!! Μελετάμε σημεία στο **επίπεδο** πλέον οπότε θα έχουν δύο μεταβλητές και γράφονται με τη μορφή Α(x,y) όπου το x είναι η τετμημένη και το y τεταγμένη.

Άρα έχουμε: Α(,) - Β(,) - Γ(,) – Δ(,)

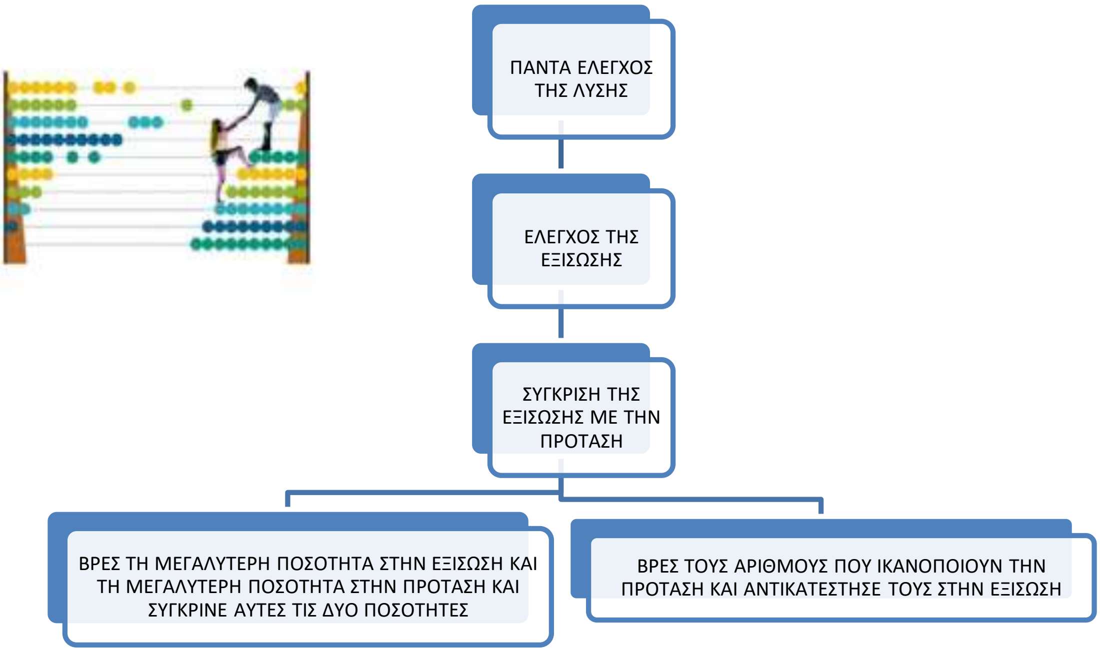
Τώρα θα τοποθετήσουμε αυτά τα σημεία στους άξονες και θα τα ενώσουμε



Τι είδους είναι η γραμμή που προέκυψε;……………………………………………………

Πόσα σημεία πιστεύετε είναι αρκετά για να φτιαχτεί αυτού του είδους η γραμμή;……

Για να είστε σίγουροι πως γράψατε τη σωστή εξίσωση από ένα πρόβλημα συμβουλευτείτε αυτό το διάγραμμα!!



Τώρα με βάση τους Αιγύπτιους θα πάμε να εφαρμόσουμε ό,τι μάθαμε!

ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ (3000 π.Χ.- 400 μ.Χ.)

Ο αρχαίος πολιτισμός της Αιγύπτου είχε μια πλούσια μαθηματική παράδοση. Αυτή η παράδοση αναπτύχθηκε κατά μήκος της κοιλάδας του Νείλου με την ανάπτυξη της γεωργίας και της μνημειακής αρχιτεκτονικής της Αιγύπτου (π.χ. πυραμίδες ή βασιλικοί τάφοι των Φαραώ και οι μεγάλοι ναοί του Λούξορ και του Καρνάκ).

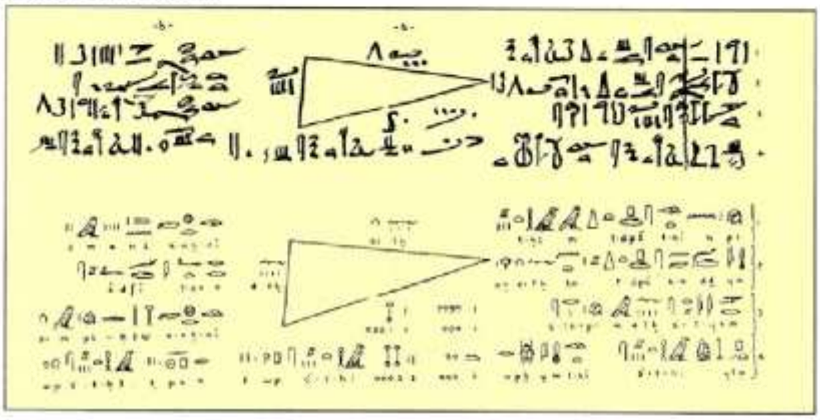
- Γιατί αναπτύχθηκαν τα μαθητικά κυρίως στις όχθες του Νείλου; Μπορείτε να φανταστείτε;

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

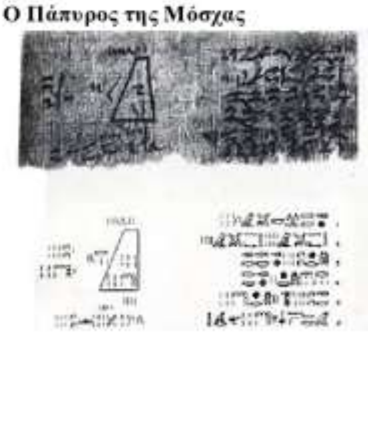
Οι κύριες πηγές πληροφόρησης, σχετικά με τη μαθηματική παράδοση των αρχαίων Αιγυπτίων, απαντώνται στον πάπυρο Rhind (A'h-mose) και στη Μόσχα (Golenischev).

Ο ΠΑΠΥΡΟΣ RHIND



Ο πάπυρος Rhind, που γράφτηκε γύρω στο 1650 π.Χ., είναι το μεγαλύτερο, πιο μαθηματικά κατατοπιστικό και καλά διατηρημένο έγγραφο στη συλλογή των παπύρων στα αρχαία αιγυπτιακά μαθηματικά. Αναφέρεται ότι βρέθηκε στα ερείπια ενός μικρού κτηρίου κοντά στο θυσιαστήριο ναό του Ραμσή II στη Θήβα. Πρόκειται για μια συλλογή από 85 προβλήματα γραμμένα σε ιερατική μορφή σε ένα ρολό μήκους 18 ποδιών με πλάτος 13 ίντσες. Ο πάπυρος Rhind πήρε το όνομά του από τον A. Henry Rhind, σκωτσέζικο μελετητή και αρχαιολόγο, που γεννήθηκε το 1833. Αυτός αγόρασε αυτόν τον πάπυρο από ένα κατάστημα στο Λούξορ το 1858, ενώ περνούσε τον χειμώνα στην Αίγυπτο για λόγους υγείας. . Μετά το θάνατό του, το Βρετανικό Μουσείο απέκτησε τον πάπυρο Rhind από τον εκτελεστή της περιουσίας του. Ο πάπυρος σήμερα στεγάζεται στο Μουσείο. Ο πάπυρος Rhind είναι επίσης γνωστός ως ο πάπυρος Ahmes ή A'h-mose μετά τον γραφέα που το έγραψε. Αρχίζει με μια εισαγωγή, ακολουθούμενη αντίστοιχα από αριθμητικά, γεωμετρικά και διάφορα προβλήματα και τις λύσεις τους. Το γράψιμο του παπύρου ολοκληρώνεται με την προσευχή ενός αγρότη στον θεό Ρα για θερμότητα, άνεμο και υψηλό νερό και για να είναι δυνατή η κατάσβεση επιβλαβών ζιζανίων και η αλίευση ψαριών και ποντικών!

Ο Πάπυρος της Μόσχας



Ο Παπύρος της Μόσχας είναι μια συλλογή 25 προβλημάτων που αφορούν κυρίως στην πρακτική ζωή, παρόμοια με τα προβλήματα του πάπυρου Rhind. Χρονολογούνται γύρω στο 1650 π.Χ. Τα προβλήματα είναι γραμμένα σε ιερατικά σε ρολό 18 πόδια μακριά από 3 ίντσες πλάτος. Είναι επίσης γνωστός ως ο πάπυρος Golenischev, μετά του άντρα που το αγόρασε το 1893 στην Αίγυπτο. Αυτός ο πάπυρος στεγάζεται πλέον στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας.

- Εμείς αφού ευχαριστήσουμε τον Αιγύπτιο Ahmes για τη μεγάλη του προσφορά να γράψει αυτόν τον πάπυρο, θα πάρουμε ένα πρόβλημα να το δουλέψουμε.

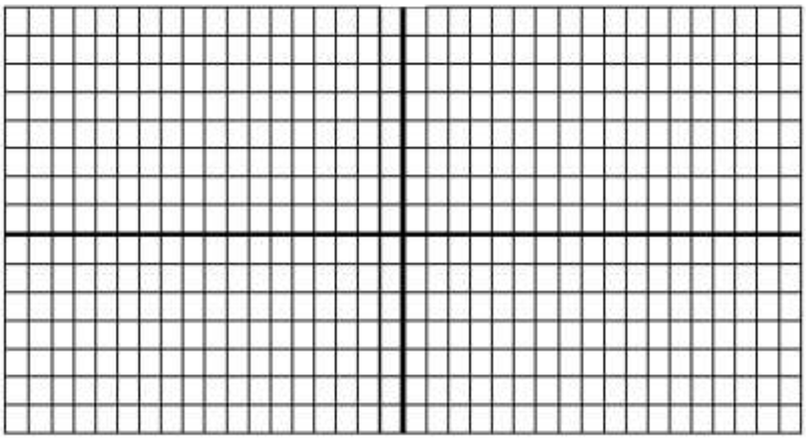
«Μια ποσότητα υγρού και το ένα τέταρτο μιας άλλης ποσότητας υγρού που προστίθενται μαζί δίνουν 15 λίτρα»

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
…………………	……………
…………………	……………

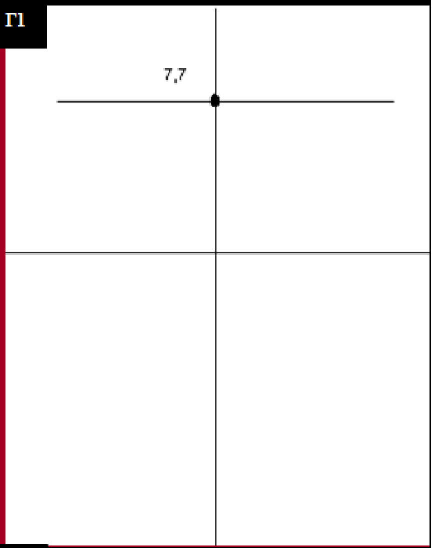
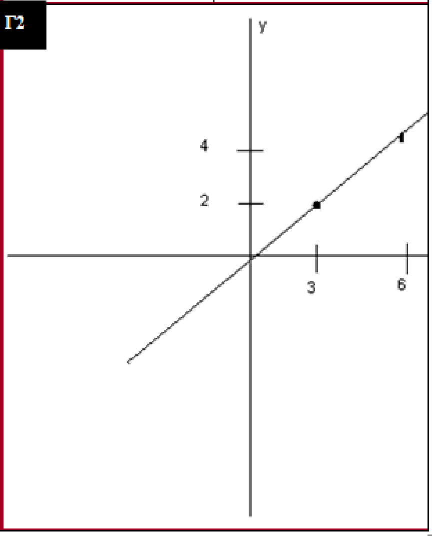
Σχέση που συνδέει τις μεταβλητές μας:…………………………………………………..

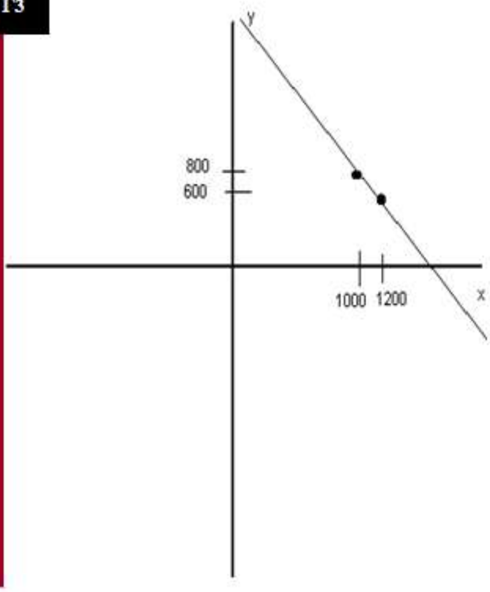
Βρίσκω 2 σημεία : A(,) - B(,)

Τα τοποθετώ και φτιάχνω την **ευθεία**



- Στη συνέχεια θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε τα 3 προβλήματα των Αιγυπτίων με τις αντίστοιχες εξισώσεις και γραφικές τους παραστάσεις.

	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ		ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ		ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ
Π1	«Το εμβαδόν δύο χωραφιών είναι μαζί 1800 sar (μονάδα μέτρησης εμβαδού)»	Ε1	$y = \frac{2}{3}x$	Γ1	
Π2	«Όταν πρόσθεσα ένα έβδομο και ένα ενδέκατο του βάρους μίας πέτρας ζύγιζε 1,8 gin (μονάδα μέτρησης βάρους)»	Ε2	$x + y = 1800$	Γ2	

Π3		Ε3		Γ3	
	«Ένα χωράφι δίνει τα $\frac{2}{3}$ σιλό από ένα άλλο χωράφι (μονάδα μέτρησης όγκου, μέχρι που έφτανε η στάθμη του σιλό)»		$\frac{1}{7}y + \frac{1}{11}y = 1{,}8 \Leftrightarrow$ $11y + 7y = 138{,}6 \Leftrightarrow$ $18y = 138{,}6 \Leftrightarrow$ $y = 7{,}7$		

Τα σωστά είναι:

- ………………. και ………………… και ……………….
- ………………. και ………………… και ……………….
- ………………. και ………………… και ……………….

Τι παρατηρείτε;

Πότε μία ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x;…………………………

Πότε μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων;………………………

Πότε μία ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες;………………………………..

Τέλος θα δούμε δύο προβλήματα Βαβυλωνίων και θα εφαρμόσουμε ό,τι μάθαμε για τις εξισώσεις 2 αγνώστων!

- Το πρώτο πρόβλημα λέει:

«Η διαφορά των εκτάσεων των δύο χωραφιών είναι 600 SAR»

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
……………….	…………
……………….	…………

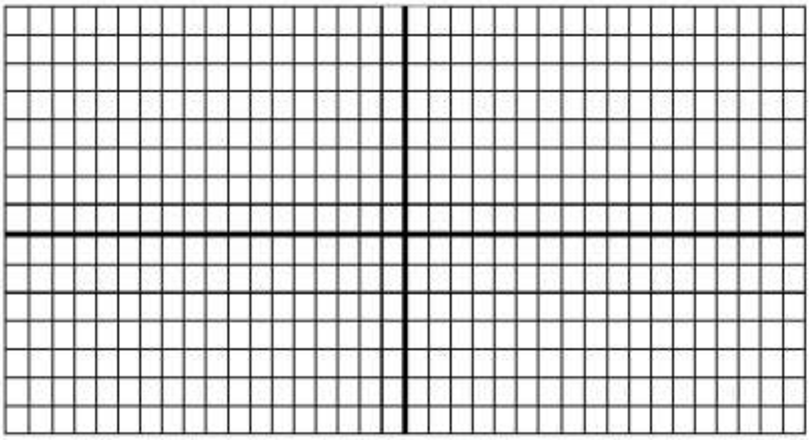
Σχέση που συνδέει τις μεταβλητές μας:……………………………………………………

Θα τέμνει η ευθεία τους άξονες;…………………………………………………………..

Είναι τα σημεία Α(1000,400) , Β(800,600) λύσεις της εξίσωσης;

Βρίσκω 2 σημεία της ευθείας: Α(,   ) - Β(,   )

Τα τοποθετώ και φτιάχνω την ευθεία



- Το δεύτερο πρόβλημα λέει:

«Το αριστερό χωράφι ενός αγρότη *έχει* εξαπλάσιο εμβαδόν από το δεξί χωράφι του»

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
…………………	……………
…………………	……………

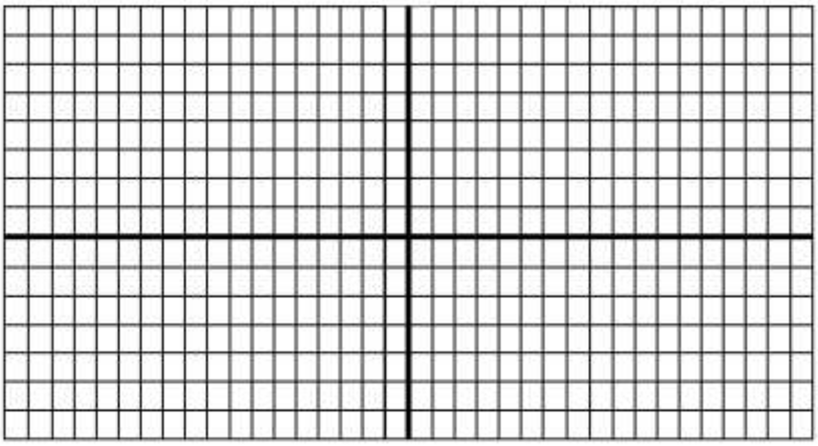
Σχέση που συνδέει τις μεταβλητές μας:……………………………………………………

Θα τέμνει η ευθεία τους άξονες;…………………………………………………………..

Είναι τα σημεία Α(1000,400) , Β(800,600) λύσεις της εξίσωσης;

Βρίσκω 2 σημεία της ευθείας: Α(,   ) - Β(,   )

Τα τοποθετώ και φτιάχνω την ευθεία



ΑΣ ΔΟΥΜΕ ΤΙ ΕΣΤΙ … ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ!

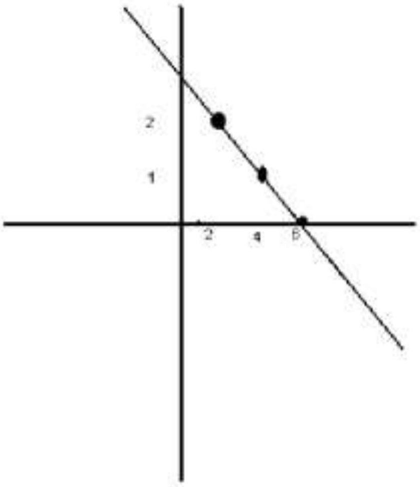
Έστω μία ευθεία (δηλαδή της μορφής y= αx+β) η: **y= -2x+6**

Παίρνουμε μερικά σημεία της για να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση

x	0	1	2
y	6	4	2

Βάζοντας τα σημεία

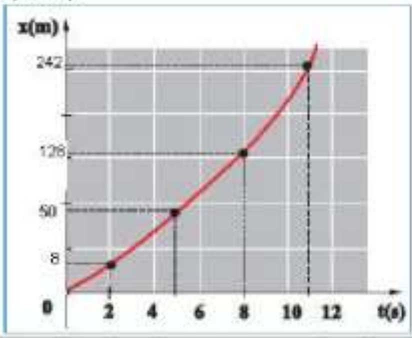
φτιάχνουμε την ευθεία:



Τι θα γίνει όμως αν η συνάρτηση δεν είναι της μορφής αυτής; Ας πάρουμε τη συνάρτηση της θέσης και του χρόνου σε μία επιταχυνόμενη ομαλή κίνηση που γνωρίζουμε από τη φυσική $x=\frac{1}{2}at^2$. Αν $a=4$ m/s² έχουμε τη συνάρτηση $x= 2t^2$. Ας βρούμε σημεία :

t	0	2	5	8	11
x	0	8	50	128	242

Βάζοντας τα σημεία
φτιάχνουμε την καμπύλη:



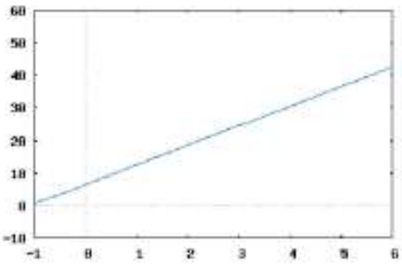
Αυτή δεν είναι μία γραμμική συνάρτηση!! Και αυτό γιατί δεν ήταν της μορφής

$y= \alpha x+\beta$

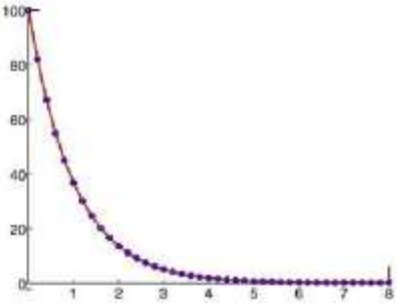
Δείτε τώρα μπορείτε να ξεχωρίσετε τις γραμμικές και μη γραμμικές συναρτήσεις;;

1) $y=5x+3$
2) $y=8x^3+1$
3) $y=-9x$
4) $y=\frac{2}{x}$
5) $y=7$

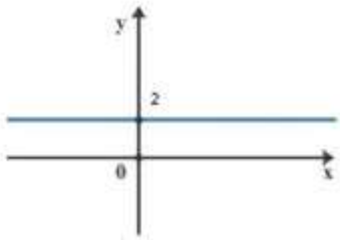
6)

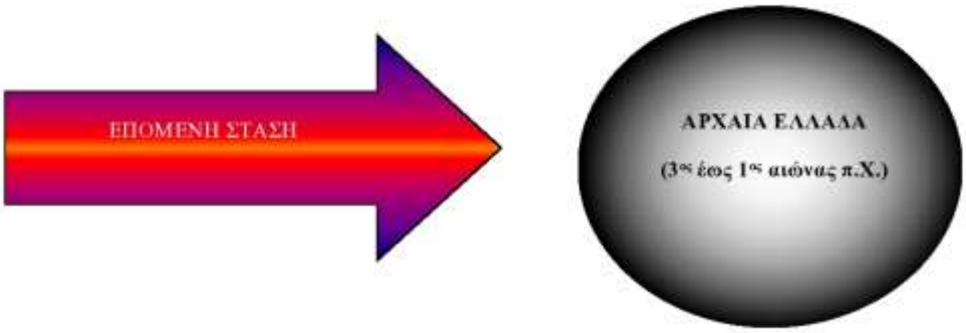

60
50
40
30
20
10
0
-10
-1 0 1 2 3 4 5 6

7)

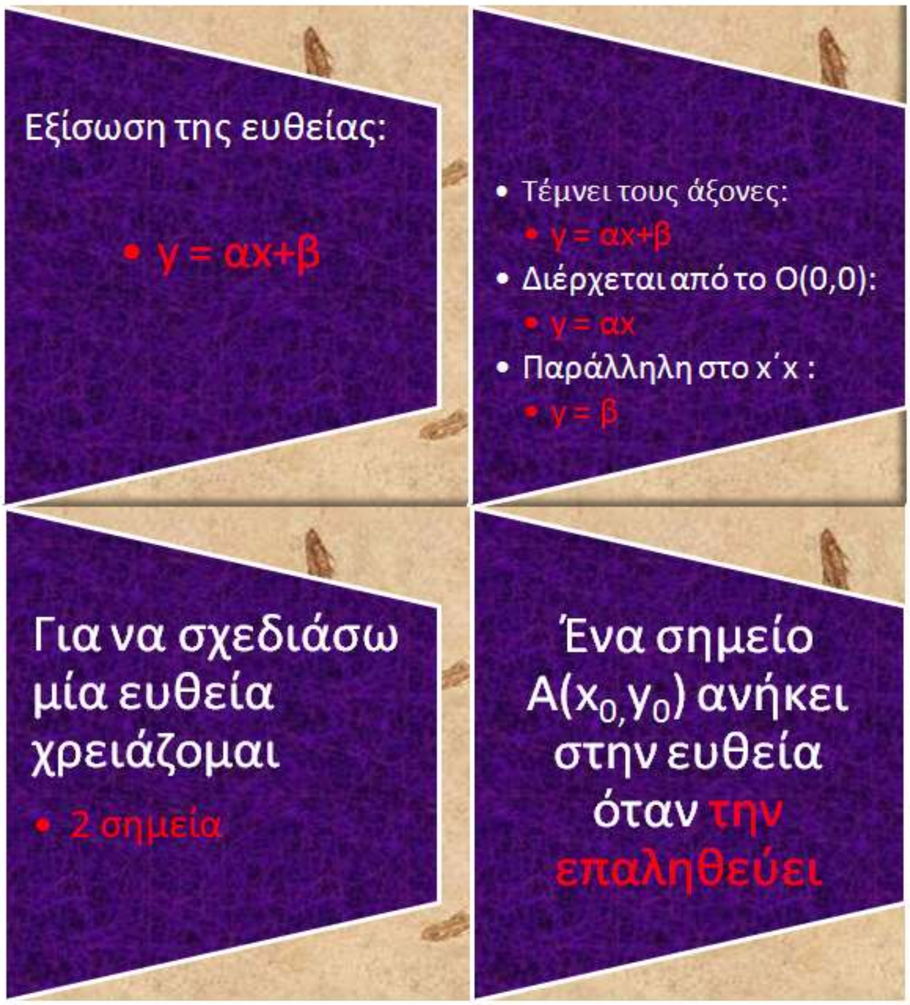

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8

8)


y
2
0
x


ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΤΑΣΗ
ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ
(3ος έως 1ος αιώνας π.Χ.)

Παράρτημα Γ – 2ο Φύλλο Εργασίας



2

2 ΕΛΛΗΝΕΣ

Όλοι γνωρίζουμε πως γύρω από τον 3° αιώνα π.Χ. στην Ελλάδα άνθιζε η Γεωμετρία (εξού και η προέλευση του ονόματος Γεωμετρία = Γεω + Μετρώ δηλαδή μετρώ τη γη) αλλά και άλλες επιστήμες όπως η Φυσική. Ωστόσο έχουμε πολύ μεγάλα ονόματα Ελλήνων μαθητικών που ασχολήθηκαν με την άλγεβρα και έμειναν στην ιστορία!

Νικόμαχος (περίπου 60 μ.Χ.-120 μ.Χ., Στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών)

Διόφαντος (περίπου 201 μ.Χ.-290 μ.Χ., ονομάστηκε «Πατέρας της Άλγεβρας»)

Πάππος ο Αλεξανδρεύς (περίπου 290 μ.Χ.-350 μ.Χ., ο τελευταίος μαθηματικός της ελληνικής παράδοσης)

Σε όλα τα μαθηματικά κείμενα που διασώζονται εκείνης της εποχής, παρατηρούμε πως οι εκφωνήσεις αλλά και οι απαντήσεις είναι λεκτικά γραμμένες κάνοντας μας να απορούμε ΓΙΑΤΙ;;

Έχετε κάποια ιδέα;;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

- Την εποχή εκείνη άκμαζε επίσης και η ρητορική, η οποία είχε υψηλή θέση μέσα στην κοινωνία. Οπότε έδιναν τις εκφωνήσεις και τις απαντήσεις λεκτικά ίσως θέλοντας να πείσουν και τους πιο δύσπιστους πως η μέθοδος τους μπορεί πάντοτε να μεταγραφεί σε μια πιο οικεία ρητορική εκφραστική μορφή και να μη θεωρήσουν αυτά τα καινούργια μαθηματικά για αυτούς ΕΞΩΓΗΙΝΑ!!

Γυρνώντας τώρα στα προβλήματα, εμείς κάνοντας τη ζωή μας πιο εύκολη, χρησιμοποιούμε την **άλγεβρα** για να μοντελοποιήσουμε ένα πρόβλημα. Πώς όμως θα το κάνουμε αυτό;;

- Ας δούμε ένα παράδειγμα, πρόβλημα του Διόφαντου μήπως και βοηθηθούμε!

«Να βρεθούν δύο αριθμοί που το άθροισμα τους κάνει 100 και η διαφορά τους 40»

Πόσο δύσκολο να είναι άραγε;

Ας τα πάρουμε με τη σειρά.

1) Πόσους αγνώστους έχουμε;………………..
2) Πώς θα τους ονομάσουμε;…………………
3) Μπορούμε να βρούμε μία σχέση που να εκφράζει πως «το άθροισμα τους κάνει **100**»;………………………………………..
4) Μπορούμε να βρούμε μία σχέση που να εκφράζει πως «η διαφορά τους κάνει **40**»;………………………………………..
5) Βάλτε τις 2 εξισώσεις που βρήκατε μέσα σε αυτό το άγκιστρο:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ΣΥΓΧΑΡΗΤΗΡΙΑ ΜΟΛΙΣ ΦΤΙΑΞΑΤΕ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΣΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ!!!

Και τι είναι το γραμμικό σύστημα;;

- Έχετε 2 αγνώστους οπότε πρέπει να βρείτε 2 εξισώσεις για να μπορέσετε να έχετε λύση (2 πληροφορίες δηλαδή)
- Εφόσον φτιάξετε τις εξισώσεις τις βάζετε μέσα σε ένα άγκιστρο για να δημιουργηθεί το σύστημα
- Εάν οι εξισώσεις σας είναι γραμμικές, δημιουργήσατε ένα γραμμικό σύστημα
- Σειρά έχει το να βρούμε τη λύση αυτού του συστήματος

Έχουμε όμως **2 ευθείες**, κάτι που ξέρουμε να αναπαριστούμε, οπότε ας δούμε τι γίνεται!

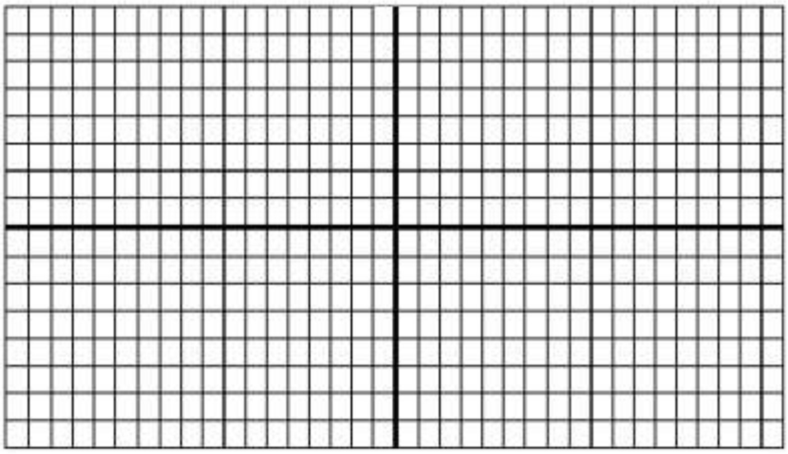
Πίνακας τιμών για την: **x + y = 100**

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία:	A(,) και B(,)	

Πίνακας τιμών για την: **x - y = 40**

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία:	Γ(,) και Δ(,)	

Τα βάζουμε στους άξονες, φτιάχνουμε τις 2 ευθείες και τι παρατηρούμε;;



Ναι, το κοινό τους σημείο είναι η λύση!!

Είναι το σημείο Ε(,) άρα δύο αριθμοί <u>ΜΟΝΑΔΙΚΟΙ</u> αριθμοί που το άθροισμα τους κάνει 100 και η διαφορά τους 40 είναι το ……… και το ………..

Τι σημαίνει ΜΟΝΑΔΙΚΗ;;;……………………………………………………………………

- Σε μία παραλλαγή του προβλήματος του Διόφαντου, πάμε να κάνουμε το ίδιο:

«Να βρεθούν δύο αριθμοί που το διπλάσιο του αθροίσματός τους κάνει 100 και το τριπλάσιο της διαφοράς τους 90»

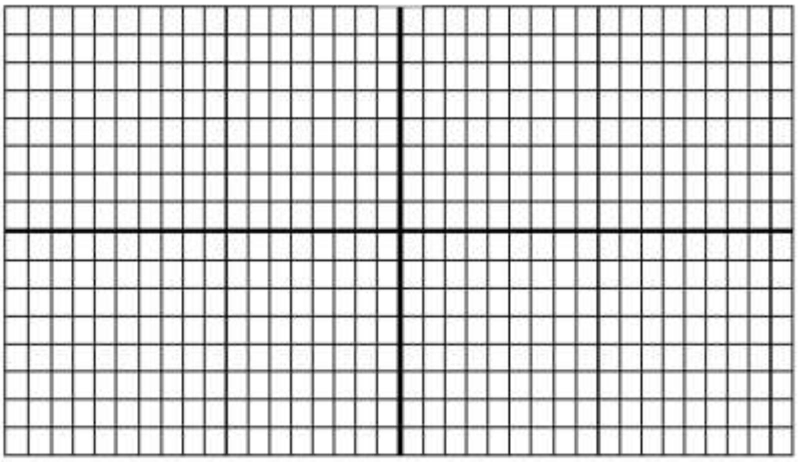
1) Πως θα ονομάσουμε τους αγνώστους;………………..
2) Ποιες είναι οι δύο εξισώσεις;…………………………………………………
3) Μπορώ να τις απλοποιήσω;…………………………………………………...
4) Φτιάχνω πίνακα τιμών και γραφήματα:

Πίνακας τιμών για την: ……………………

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία: A(,) και B(,)		

Πίνακας τιμών για την: …………………..

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία: Γ(,) και Δ(,)		



Κοινή λύση: ………………………………………………………………………

➢ Για να δούμε τώρα σε αυτό το πρόβλημα ποια θα είναι η λύση:

«Να βρεθούν δύο αριθμοί που το άθροισμα τους κάνει 3 αλλά το άθροισμά τους κάνει και 5»

Πιστεύετε πως υπάρχουν 2 τέτοιοι αριθμοί;;…………………………………

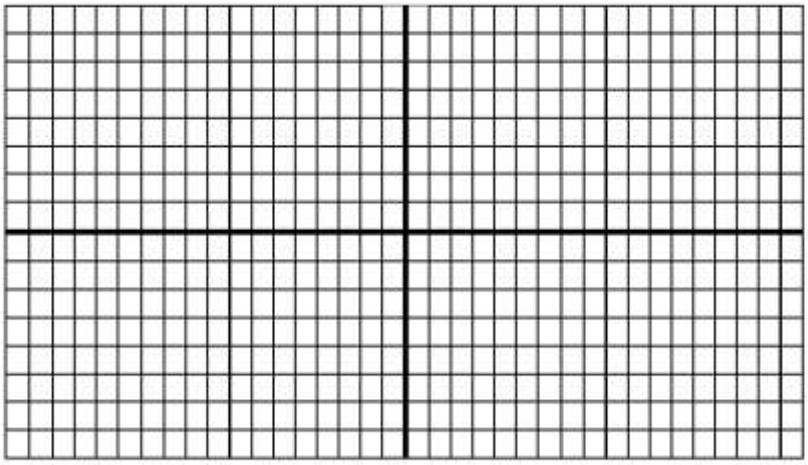
ΓΙΑ ΝΑ ΔΟΥΜΕ ΤΙ ΛΕΕΙ Η ΑΛΓΕΒΡΑ

1) Πως θα ονομάσουμε τους αγνώστους;………………..
2) Ποιες είναι οι δύο εξισώσεις;……………………………………………………
3) Φτιάχνω πίνακα τιμών και γράφημα
4) Πίνακας τιμών για την: ……………………

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία: A(,) και B(,)		

Πίνακας τιμών για την: …………………..

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία: Γ(,) και Δ(,)		



Ποιο είναι το κοινό σημείο;……………………………………………………………

Βγήκε η αρχική σας εικασία σωστή;…………………………………………………..

Τι είδους ευθείες είναι αυτές που δεν τέμνονται;……………………………………

Άρα το σύστημα λέγεται ……………….. όταν οι ευθείες είναι …………………..

Τώρα που μάθατε τόση άλγεβρα, ένα πρόβλημα ακόμη δεν πειράζει!

- **«Να βρεθούν δύο αριθμοί που η διαφορά τους κάνει 25 και το τριπλάσιο της διαφοράς τους κάνει 75»**

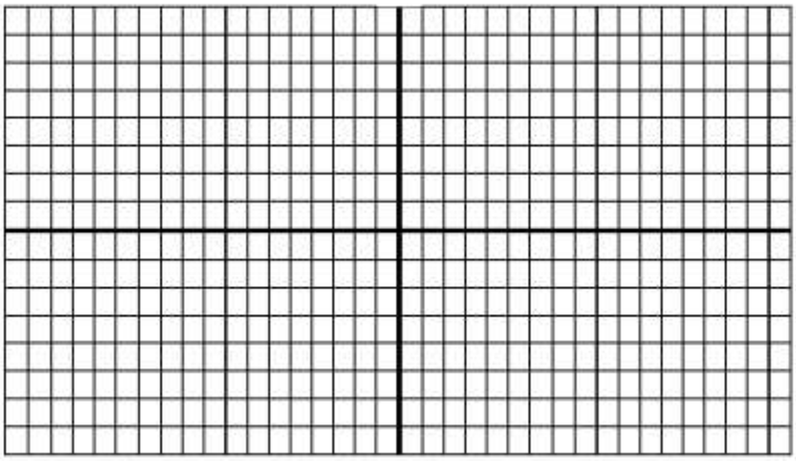
1) Πως θα ονομάσουμε τους αγνώστους;…………………………………………..
2) Ποιες είναι οι δύο εξισώσεις;…………………………………………………
3) Μπορώ να τις απλοποιήσω;…………………………………………………...
4) Φτιάχνω πίνακα τιμών και γραφήματα:

Πίνακας τιμών για την: ……………………..

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία:	Α(,) και Β(,)	

Πίνακας τιμών για την: …………………..

x		
y		
Άρα έχουμε τα σημεία:	Γ(,) και Δ(,)	



Κοινή λύση: ………………………………………………………………………….
Ποια είναι η θέση των ευθειών μεταξύ τους;…………………………………...
Άρα το σύστημα λέγεται …………………… όταν οι ευθείες ………………..

- **Ένας Σπαρτιάτης και ένας Αθηναίος είχαν ο καθένας χωράφια. Ο Σπαρτιάτης είχε 3 στρέμματα λιγότερα από τον Αθηναίο και ο Αθηναίος είχε τα διπλάσια στρέμματα από το Σπαρτιάτη. Να βρεθεί πόσα στρέμματα είχε ο καθένας.**

1) Πως θα ονομάσουμε τους αγνώστους;
   Σπαρτιάτης: ……………
   Αθηναίος: ……………
2) Ποιες είναι οι δύο εξισώσεις;…………………………………………………

3) Θα μπορούσα να τις γράψω διαφορετικά;

....

4) Φτιάχνω το σύστημα:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

1) Η κάθε εξίσωση πόσες λύσεις έχει; ....

2) Μπορώ να δω αν η λύση $\begin{cases} Σπαρτιάτης = 2 \\ Αθηναίος = 5 \end{cases}$

   i. Είναι λύση της πρώτης εξίσωσης;
   ii. Είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης;
   iii. Είναι λύση του συστήματος;

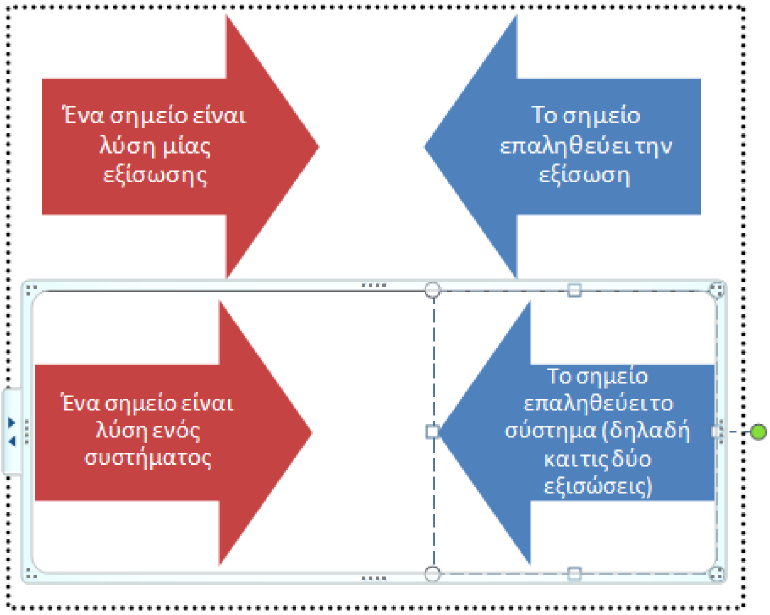
3) Μπορώ να δω αν η λύση $\begin{cases} Σπαρτιάτης = 1 \\ Αθηναίος = 2 \end{cases}$

   i. Είναι λύση της πρώτης εξίσωσης;
   ii. Είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης;
   iii. Είναι λύση του συστήματος;

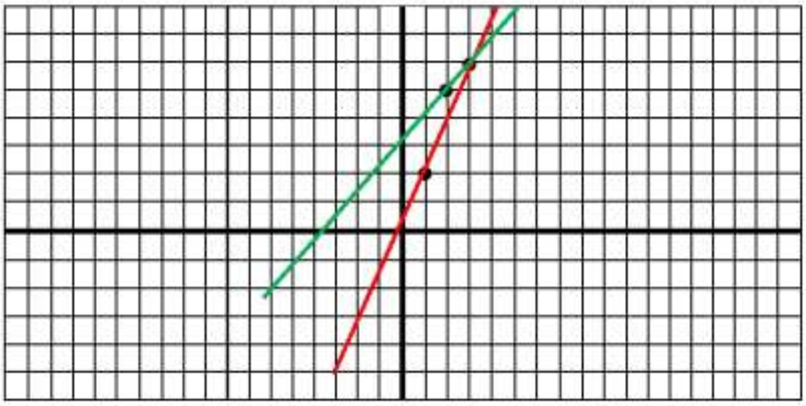
4) Μπορώ να δω αν η λύση $\begin{cases} Σπαρτιάτης = 3 \\ Αθηναίος = 6 \end{cases}$

   i. Είναι λύση της πρώτης εξίσωσης;
   ii. Είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης;
   iii. Είναι λύση του συστήματος;

Άρα:



Φαίνεται και από τη γραφική παράσταση



- **«Ένα άτομο είχε ένα άσπρο άλογο, ένα μαύρο και μία σέλα. Η σέλα κόστιζε 220 νομίσματα. Η τιμή του άσπρου αλόγου μαζί με την τιμή της σέλας κάνει την τιμή του μαύρου αλόγου. Το άθροισμα των τιμών των δύο αλόγων κάνει τη δεκαπλάσια τιμή της σέλας. Πόσο κοστίζει κάθε άλογο;»**

1) Πως θα ονομάσουμε τους αγνώστους;
   Άσπρο άλογο: ……………
   Μαύρο άλογο: ……………
2) Ποιες είναι οι δύο εξισώσεις;…………………………………………………
3) Φτιάχνω το σύστημα:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

4) Μπορώ να δω αν η λύση $\begin{cases} Άσπρο\ άλογο = 500 \\ Μαύρο\ άλογο = 720 \end{cases}$
   i. Είναι λύση της πρώτης εξίσωσης;
   ii. Είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης;
   iii. Είναι λύση του συστήματος;

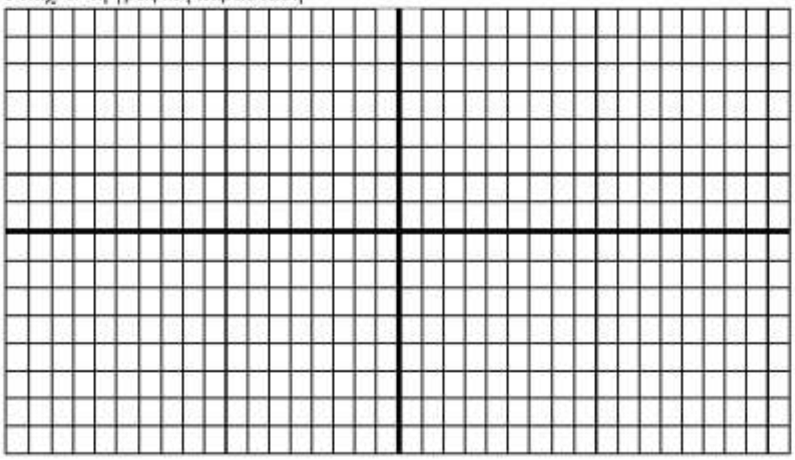
5) Μπορώ να δω αν η λύση $\begin{cases} Άσπρο\ άλογο = 1110 \\ Μαύρο\ άλογο = 1110 \end{cases}$

i. Είναι λύση της πρώτης εξίσωσης;
ii. Είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης;
iii. Είναι λύση του συστήματος;

6) Μπορώ να δω αν η λύση $\begin{cases} Άσπρο\ άλογο = 1000 \\ Μαύρο\ άλογο = 1220 \end{cases}$

i. Είναι λύση της πρώτης εξίσωσης;
ii. Είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης;
iii. Είναι λύση του συστήματος

7) Φτιάχνω τη γραφική παράσταση



➤ Για να δούμε τώρα αν μπορείτε να βρείτε ποιο σύστημα αντιστοιχεί σε ποια γραφική παράσταση!

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 45 \\ 4x + y = 33 \end{cases}$

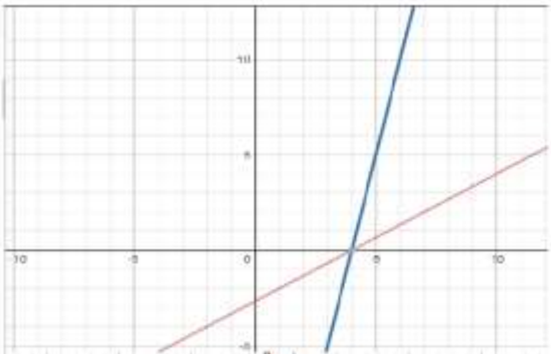
2) $\begin{cases} 5x + 2y = 45 \\ 4x + y = 30 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 4y = 14 \\ -10x - 8y = 32 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -3x - y = -9 \\ 21x + 7y = 63 \end{cases}$

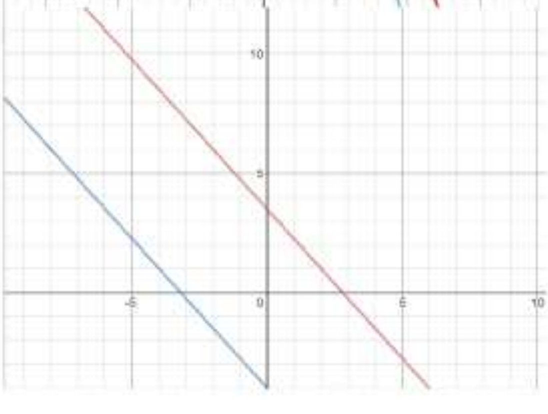
5) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 5x - y = 20 \end{cases}$

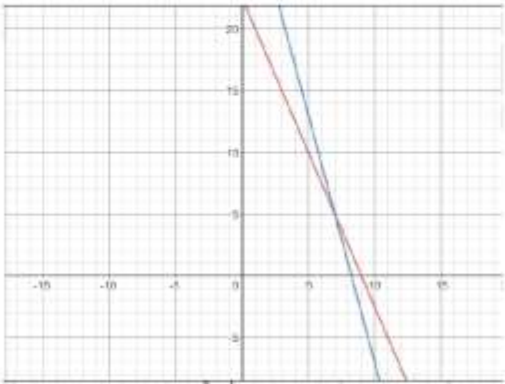
i.

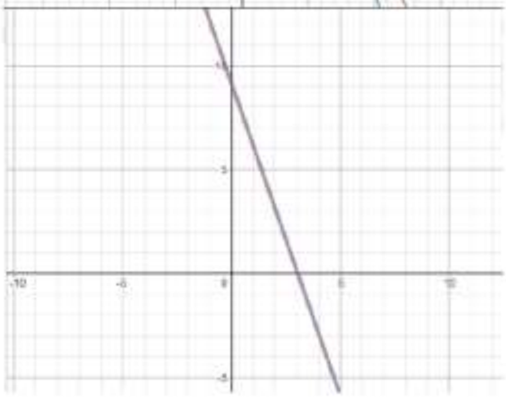


ii.

iii.



iv. 

v. 

* Για να τιμήσουμε και το Διόφαντο, σας παραθέτουμε το πρόβλημα που βρέθηκε στην επιτάφια πλάκα του (πιθανολογείται πως ήταν δική του) για να βρείτε πόσα χρόνια έζησε (ήταν τρελοί αυτοί οι Έλληνες!!)

«Ο Διόφαντος το 1/6 της ζωής του ήταν παιδί, το 1/12 αυτής ήταν νεαρός και από τότε πέρασε το 1/7 της ζωής του ώσπου να παντρευτεί. Πέντε χρόνια μετά, γεννήθηκε ο γιος του. Η διάρκεια της ζωής του γιου του, ήταν η μισή ζωή του Διόφαντου. Μετά το θάνατο του γιου του, έζησε τέσσερα χρόνια σε βαθιά θλίψη μέχρι να πεθάνει».

ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΤΑΣΗ

ΑΡΧΑΙΑ ΚΙΝΑ

(ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1ος αιώνας π.Χ. έως 3ος αιώνας

Παράρτημα Δ – 3ο Φύλλο Εργασίας

3 ΚΙΝΕΖΟΙ

Κατά την αρχαιότητα, δεν ήταν πρωταρχικό μέλημα η επίλυση συστημάτων και για αυτό έχουν βρεθεί μόνο κάποια μεμονωμένα προβλήματα χωρίς γενική λύση. Αυτό δεν ίσχυε όμως και για τους Κινέζους καθώς βρέθηκε στο έργο «Τα εννέα κεφάλαια» ο κανόνας Fangcheng. . Πρόκειται για ένα έργο ισοδύναμο με την ισχύ του έργου τα στοιχεία του Ευκλείδη. Αφορά μια σειρά από 246 προβλήματα και τις λύσεις τους οι οποίες οργανώνονται σε εννέα κεφάλαια με βάσει το θέμα. Τα θέματα σε κάθε κεφάλαιο ήταν:

1)Ορθογώνια πεδία: Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με τη μέτρηση της γης και δίνει τους τύπους για την κάλυψη των περιοχών των διαφόρων μορφών.

2)Κεχρί και ρύζι: Τα κεφάλαια 2 και 3 περιέχουν ποικίλα προβλήματα από τη γεωργία, τη βιομηχανία και το εμπόριο.

3)Κατανομή ανά αναλογία.

4)Σύντομο πλάτος: Τα προβλήματα σε αυτό το κεφάλαιο συνεπάγονται την αλλαγή των διαστάσεων σε ένα πεδίο, στην ίδια περιοχή και περιλαμβάνει αλγορίθμους για την επεξεργασία των τετραγωνικών ριζών και την εργασία με κύκλους.

5)Διαβουλεύσεις κατασκευής: Αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει τύπους για όγκους διαφόρων στερεών.

6)Δίκαιες αμοιβές: Τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου προέρχονται από τους φόρους και την κατανομή της εργασίας.

7)Πλεονασμός και έλλειμμα: Χρησιμοποιείται ο κανόνας της διπλής ψευδούς παραδοχής για την επίλυση των γραμμικών ο οποίος επιλύει μια ποικιλία προβλημάτων σε αυτό το κεφάλαιο.

8)Ορθογώνιες συστοιχίες: Ο κανόνας Fangcheng εισάγεται για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

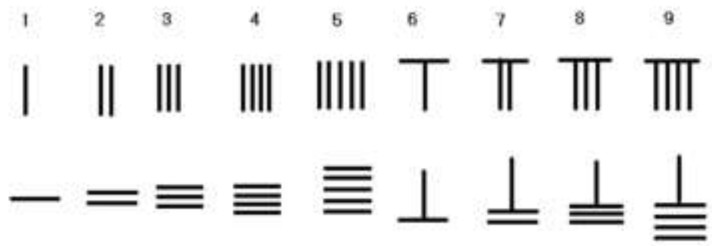
9)Ορθογώνια τρίγωνα: Αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει τον Κανόνα Gougu, γνωστό στα δυτικά μαθηματικά ως το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Βλέπεται ο στόχος τους ήταν να βοηθήσουν την καθημερινότητά τους και αυτό θα μπορούσαν να το κάνουν μόνο μέσα από τα μαθηματικά!!

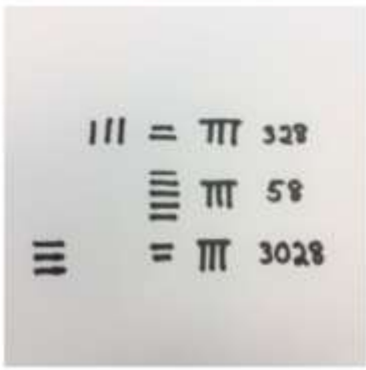
ΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Για να δούμε πως μετρούσαν οι Κινέζοι!

Οι Κινέζοι ανέπτυξαν μία στρατηγική με ράβδους, 500 π.Χ. μέχρι το 1500 π.Χ περίπου και αργότερα αντικαταστάθηκαν από τον άβακα.



Οι ράβδοι ήταν μικρά μπαστούνια μπαμπού, διαμέτρου περίπου 2,5 mm και μήκους 15 cm. Η καθεμία αντιστοιχούσε στη μονάδα και ανάλογα τη θέση της είχε άλλη αξία (δεκάδα, εκατοντάδα κτλ.). Όπως φαίνεται και την εικόνα παρακάτω, τοποθετούσαν τις ράβδους είτε οριζόντια είτε κάθετα. Οι πρώτες 5 ράβδοι είχαν ίδιο προσανατολισμό και για τους αριθμούς από το 6 έως το 9 έμπαιναν οι υπόλοιποι ράβδοι από πάνω από μία τώρα, οι οποίοι είχαν άλλον προσανατολισμό. Σχετικά με τις υπόλοιπες θέσεις με διαφορετική αξία, επέλεγαν να εναλλάσσουν τον προσανατολισμό των ράβδων από τη μία στην άλλη θέση.



Μεταφράστε τώρα το δικό σας πρόβλημα!!

«Έχουμε 𝍤 μεγάλα δοχεία και 𝍠 μικρό τα οποία έχουν συνολική χωρητικότητα 𝍠𝍩 λίτρα. Επίσης 𝍡 μεγάλα δοχεία και 𝍠𝍫 μικρά δοχεία έχουν χωρητικότητα 𝍠𝍰 λίτρα. Πείτε τη χωρητικότητα ενός μεγάλου και ενός μικρού δοχείου.» (Κεφάλαιο 7, πρόβλημα 14)

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ:...
....
....

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
....	....
....	....

Ας γράψουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές μας:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Πώς όμως θα βρούμε τη λύση του συστήματός μας χωρίς γραφική παράσταση; Καθώς γραφικά δεν μπορούμε πάντα με ακρίβεια να προσδιορίσουμε τη λύση.

Οι Κινέζοι αλλά και άλλοι πολιτισμοί (όπως οι Βαβυλώνιοι) δοκίμασαν αρχικά το εξής: την <u>ψευδής παραδοχή.</u> Έβαζαν δηλαδή τυχαίους αριθμούς μέχρι να βρουν τη λύση. Για να το δοκιμάσουμε!
Πιστεύετε αξίζει τον κόπο;...
Βρήκαν όμως έναν τρόπο που μέσα από τη λάθος λύση να βρουν τη σωστή!
Ας δούμε πως:

Έχουμε το σύστημα μας $\begin{cases} 5x + y = 11 \\ 2x + 14\,y = 18 \end{cases}$

Βρίσκουμε ένα ζευγάρι που να ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση (εύκολο αυτό!!)

Ας πούμε για x=1 και y=6. Όντως 5*1+6=5+6=11.
Αν το βάλουμε στην επόμενη βρίσκουμε: 2*1+14*6 = 2+84 = 86. Αυτό έχει διαφορά 75 μονάδες από το 18 που θέλαμε να βρούμε εμείς. <u>Άρα έχουμε πλεόνασμα 75.</u>

Αν πούμε x=1,5 και y= όντως 5*2,1+0,5=10,5+0,5=11.
Αν το βάλουμε στην επόμενη βρίσκουμε: 2*2,1+14*0,5=4,2+7=11,2. Αυτό έχει διαφορά 6,8 από το 18. <u>Άρα έχουμε έλλειμμα 6,8.</u>
Οπότε ο Κινέζος συγγραφέας κάνει το εξής: 1*6,8=6,8 και 2,1*75=157,50 και 6,8+75= 81,8.

Για να βρει το x κάνει το εξής: $x=\frac{6,8+157,5}{81,8}=2$.
Εύκολα βρίσκουμε μετά πως y=1.

Πόσο εύκολος είναι αυτός ο τρόπος;;………………………………………

Γρήγορα βρήκαν έναν άλλον τρόπο, τη **μέθοδο της αντικατάστασης** που χρησιμοποιούμε και εμείς μέχρι σήμερα.

Στο σύστημα $\begin{cases} 5x + y = 11 \\ 2x + 14y = 18 \end{cases}$ λύνω μία από τις 2 εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο (διαλέγω αυτόν που έχει συντελεστή 1 ή -1 για πιο εύκολες πράξεις, αν δεν έχω δεν πτοούμαι ξέρω πως και με τα κλάσματα καλά τα πάω!)
Έπειτα αντικαθιστώ αυτό που βρήκα πως είναι ίσο στην άλλην εξίσωση. Πλέον κατάφερα να έχω εξίσωση με έναν άγνωστο, κάτι το οποίο μπορώ και να λύσω!
Δηλαδή:

$$\begin{cases} y = 11 - 5x \\ 2x + 14y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 5x \\ 2x + 14(11 - 5x) = 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 11 - 5x \\ 2x + 154 - 70x = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 5x \\ 2x - 70x = 18 - 154 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 11 - 5x \\ -68x = -136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 5x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 - 5 * 2 \\ x = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Πολύ καλύτερος τρόπος!
Ας δούμε άλλο πρόβλημα των Κινέζων:

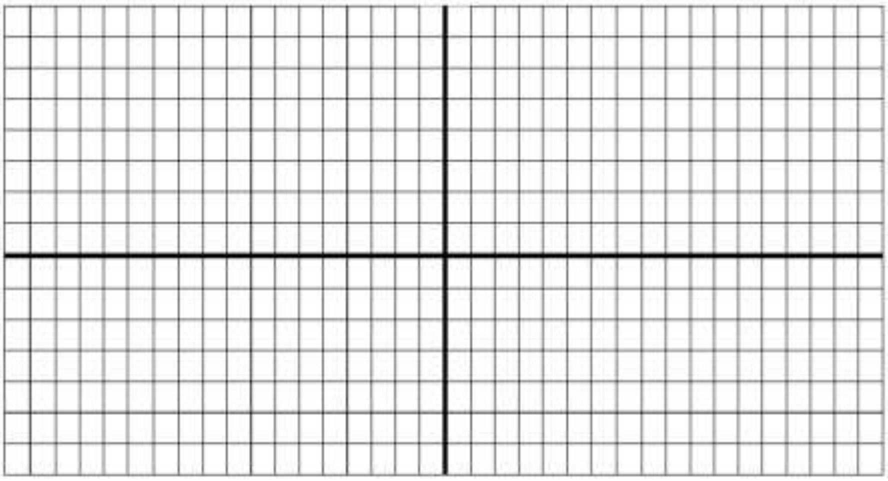
«Η τιμή ενός αγρού με καλό χώμα επιφάνειας 1 ακρ είναι 30 χρυσά νομίσματα. Η τιμή ενός αγρού με κακό χώμα επιφάνειας 1 ακρ είναι 50 χρυσά νομίσματα. Κάποιος αγόρασε 20 ακρ με 760 χρυσά νομίσματα. Πόσο καλή και πόσο κακή γη αγόρασε;» (ακρ=μονάδα μέτρησης εμβαδού) (Κεφάλαιο 7, πρόβλημα 17)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
…………………	…………
…………………	…………

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \text{..............................} \\ \text{..............................} \end{cases}$$

Και να το επιβεβαιώσουμε γραφικά:



Ή ένα άλλο:

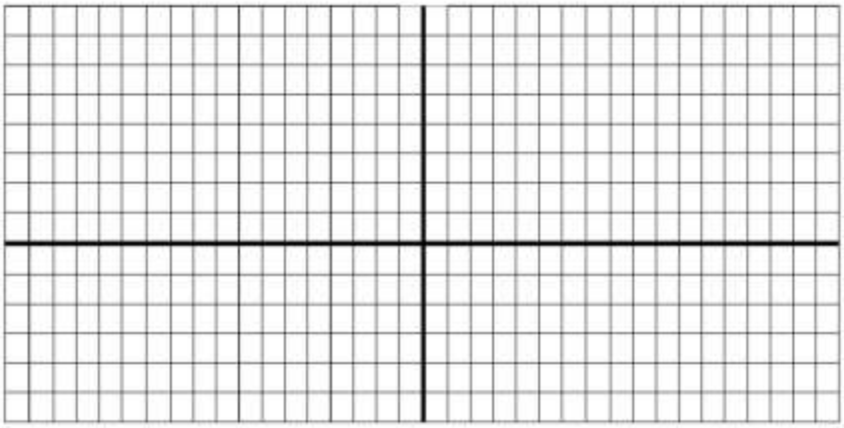
«Τα πρόβατα αγοράζονται από κοινού. Αν ο καθένας συνεισφέρει 5 νομίσματα, λείπουν 45. Αν όλοι συνεισφέρουν 7 νομίσματα, λείπουν 3.Πείτε τον αριθμό των ανθρώπων και την τιμή των προβάτων» (Κεφάλαιο 7, Πρόβλημα6)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
....	....
....	....

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \text{..............................} \\ \text{..............................} \end{cases}$$

Και να το επιβεβαιώσουμε γραφικά:



Ή ένα άλλο

«Ένα τέταρτο λικέρ και 1 τέταρτο κρασί κοστίζουν 60 νομίσματα. Τα 2 τέταρτα λικέρ και τα 3 τέταρτα κρασί κοστίζουν 130 νομίσματα. Να βρεθεί πόσο κοστίζει το 1 λίτρο λικέρ και το 1 λίτρο κρασί». (Κεφάλαιο 7, Πρόβλημα 13)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
....	....
....	....

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

- Να λυθούν ομοίως τα παρακάτω συστήματα:
  1. $\begin{cases} x + 11y = 6 \\ 2x + 22y = 9 \end{cases}$

     Τι παρατηρείτε;....................................

     Τι σημαίνει αυτό για τις ευθείες του συστήματος;........................
  2. $\begin{cases} 4x + y = 34 \\ -8x - 2y = -68 \end{cases}$

     Τι παρατηρείτε;....................................

     Τι σημαίνει αυτό για τις ευθείες του συστήματος;........................

Ήρθε η ώρα να λύσουμε δύο προβλήματα που θα βοηθήσουν τη δική μας καθημερινή ζωή σίγουρα!

1) Θέλουμε να αγοράσουμε ένα μπέργκερ και μία μερίδα τηγανητές πατάτες. Δε ξέρουμε όμως πόσο κοστίζουν. Ρωτήσαμε δύο πελάτες που βγήκαν από το μαγαζί και μας απάντησαν τι αγόρασαν και πόσα πλήρωσαν. Μπορείτε να βρείτε πόσο κοστίζουν;

Κύριος Άλκης		€9,60
Κυρία Μαρίνα		€15

2) Η Νικολέτα πλήρωσε €5 για να αγοράσει τα πιο κάτω προϊόντα:

α) Ποια είναι η εξίσωση που χαρακτηρίζει την αγορά της;……………..

β)Πείτε 3 τιμές που μπορεί να αντιστοιχούν στα προϊόντα.

Ένα ντόνατ…………… Ένας χυμός……………..

Ένα ντόνατ…………… Ένας χυμός……………..

Ένα ντόνατ…………… Ένας χυμός……………..

➢ Ξέροντας μόνο αυτά τα δεδομένα μπορούμε να βρούμε ακριβώς πόσο κοστίζουν;……………

Μπορούμε να βρούμε μήπως κάποιο από τα παρακάτω παιδιά πόσο πλήρωσε;

Μελίνα

Γιώργος

Μιχάλης

Στέφανος

Χριστίνα

ΘΑ ΠΑΡΑΜΕΙΝΟΥΜΕ ΣΤΟΥΣ ΚΙΝΕΖΟΥΣ, ΚΑΘΩΣ ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΕΧΟΥΝ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΔΕΥΤΕΡΟ ΤΡΟΠΟ ΝΑ ΜΑΣ ΔΕΙΞΟΥΝ!!

Παράρτημα Ε – 4ο Φύλλο Εργασίας

4 ΚΙΝΕΖΟΙ

2

Ο γνωστός Κινέζος μαθηματικός Liu Hui ($3^{ος}$ αι. μ.Χ.) το 263 μ.Χ. επεξεργάστηκε και δημοσίευσε τα «9 κεφάλαια» και ήταν ίσως ο πρώτος μαθηματικός που ανακάλυψε, κατανόησε και χρησιμοποίησε αρνητικούς αριθμούς. Ήταν απόγονος του μαρκησίου της επαρχίας Zi District, της δυναστείας των ανατολικών Χαν, όπου σήμερα είναι οι περιοχές Zichuan, Zibo, Shandong. Πιθανότατα επισκέφθηκε το Luoyang, όπου μέτρησε τη σκιά του ήλιου. Δε ξέρουμε πολλά παραπάνω για τη ζωή του, έχουμε όμως το σχόλιο που έχει κάνει στην εισαγωγή για το κίνητρό του.

«Διάβασα τα Εννέα Κεφάλαια ως αγόρι και τα μελετούσα λεπτομερώς όταν ήμουν μεγάλος. Παρατήρησα τη διαίρεση μεταξύ των διπλών φύσεων του Γιν και του Γιανγκ (των θετικών και των αρνητικών πτυχών) που συνοψίζουν τα βασικά των μαθηματικών. Η διεξοδική έρευνα δείχνει την αλήθεια εκεί, η οποία μου επιτρέπει να συλλέξω τις ιδέες μου και να έχω την ελευθερία να τις σχολιάσω. Τα πράγματα είναι γνωστόν ότι ανήκουν σε διάφορες ταξινομήσεις. Ακριβώς όπως οι κλαδιά ενός δέντρου ανήκουν στον κορμό του, έτσι είναι ένα πλήθος πραγμάτων στο αρχέτυπο. Ως εκ τούτου, προσπάθησα να εξηγήσω όλη τη θεωρία όσο το δυνατόν συντομότερα, με χωρικές μορφές που παρουσιάζονται σε διαγράμματα, έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει λογική και καλά σφαιρική κατανόηση όλων».

Πώς σας φαίνονται οι απόψεις του Liu Hui;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Στα «9 Κεφάλαια» βρέθηκε και ένας άλλος κανόνας για την επίλυση γραμμικών συστημάτων. Ο Κανόνας Fangcheng παρέχει οδηγίες βήμα προς βήμα για την επίλυση προβλημάτων σε πίνακες οι οποίες ισοδυναμούν με συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Ο κανόνας μπορεί να χωριστεί σε δύο ξεχωριστά βήματα. Το πρώτο βήμα ονομάζεται απαλοιφή στα σύγχρονα μαθηματικά, δεδομένου ότι η διαδικασία χρησιμοποιεί μια εξίσωση, ξεκινώντας από την πρώτη, για να αφαιρέσει τις μεταβλητές από τις εξισώσεις που ακολουθούν.

Ο Gauss αιώνες μετά, χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτήν κατά τον υπολογισμό της τροχιάς του αστεροειδούς Ceres το 1794 ή 1795, αλλά η μέθοδος δεν δημοσιεύθηκε μέχρι το 1809. Η απαλοιφή Gauss εμφανίστηκε αφού ο Legendre είχε δημοσιεύσει την έκδοση του (Legendre,1805) και χρόνια αργότερα ονομάστηκε γκαουσιαννή απαλοιφή προς τιμή του Gauss.

Βλέπεται στις επιστήμες, ποτέ κανείς δε ξύπνησε και έβγαλε ένα θεώρημα, έναν κανόνα ή έναν τύπο!! Υπήρχαν από παλιότερα ιδέες, που πέρασαν από πολλούς επιστήμονες και ο καθένας πρόσθεσε ακόμη μία πληροφορία ή διέψευσε κάτι μέχρι να φτάσουμε εδώ που είμαστε σήμερα και σίγουρα….η ιστορία ακόμη συνεχίζεται. Όσον αφορά ποιανού το όνομα θα πάρει, αυτό είναι άλλο θέμα!

Πώς θα χρησιμοποιήσουμε εμείς τον κανόνα; Έστω ένα πρόβλημα από τα 9 κεφάλαια:

«Υπάρχουν 5 βόδια και 2 πρόβατα τα οποία κοστίζουν 12 αργυρά LIANG. Ενώ 2 βόδια και 5 πρόβατα κοστίζουν 9 αργυρά LIANG. Πείτε ποιο είναι το κόστος μιας αγελάδας και ενός προβάτου, αντίστοιχα». (Το liang είναι μια αρχαία κινεζική μονάδα βάρους) (Κεφάλαιο 8, Πρόβλημα 7)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
Τιμή βοδιών	…x….
Τιμή προβάτων	…y….

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} *(+5) \\ => \\ *(-2) \end{matrix}$$

Διαλέγουμε τώρα μία από τις 2 μεταβλητές για να την απαλείψουμε. Διαλέγουμε ας πούμε τη y. Θα πολλαπλασιάσουμε και τις 2 εξισώσεις με τέτοια νούμερα ώστε ο συντελεστή του y στην πρώτη εξίσωση να γίνει αντίθετος του συντελεστή του y στη δεύτερη εξίσωση.

$$\begin{cases} 25x + 10y = 60 \\ -4x - 10y = -18 \end{cases} \quad =>$$

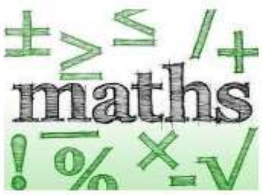
Τώρα προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και προκύπτει μία άλλη όπου έχει μόνο x (και αυτός είναι ο σκοπός να μείνει μόνο ένας άγνωστος). Δε ξεχνάμε να κρατάμε μία από τις 2 εξισώσεις ακόμη στο σύστημα.

$$\begin{cases} 21x = 42 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 2 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

Δε ξεχνάμε πάντα να βρίσκουμε και τη δεύτερη μεταβλητή!!! Αντικαθιστούμε το x στην άλλην εξίσωση που τόση ώρα κουβαλούσαμε.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 * 2 + 5y = 9 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 2 \\ 5y = 5 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα: $\begin{cases} \text{βόδια} = 2 \text{ αργυρά liang} \\ \text{πρόβατα} = 1 \text{ αργυρό liang} \end{cases}$



Για να λύσουμε και άλλα προβλήματα με τη **μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.**

«Αν πουλήσεις 2 αγελάδες και αγοράσεις 13 γουρούνια θα έχεις κέρδος 1000 νομίσματα. Αν πουλήσεις 1 αγελάδα και αγοράσεις 5 γουρούνια θα έχεις έλλειμμα 1800 νομίσματα. Πόσο κοστίζουν οι αγελάδες και πόσο τα γουρούνια; » (Κεφάλαιο 8,Πρόβλημα 8)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
…………………	………….
…………………	………….

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

«Υπάρχουν 2 είδη αλόγων. Τα στρατιωτικά άλογα και τα συνηθισμένα άλογα. Δύο συνηθισμένα άλογα και ένα στρατιωτικό άλογο μπορούν να μεταφέρουν 400 κιλά πάνω σε ένα βουνό. Επίσης ένα στρατιωτικό άλογο μεταφέρει εξαπλάσιο φορτίο από ένα συνηθισμένο άλογο πάνω σε ένα βουνό. Πόσο μπορεί να φέρει κάθε είδος αλόγου;» (Κεφάλαιο 8,Πρόβλημα 12)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
…………………	………….
…………………	………….

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

5

•Δεδομένου ότι ένας δικαστής επαρχίας και 5 αξιωματούχοι τρώνε συνολικά 10 κοτόπουλα και επίσης 1 αξιωματούχος και 9 δικαστές τρώνε 24 κοτόπουλα, πόσα κοτόπουλα τρώνε ο καθένας;• (Κεφάλαιο 8,Πρόβλημα 16)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
……………….	………….
……………….	………….

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

• Αν πουλήσεις 6 κότες και αγοράσεις 3 κουνέλια έχεις έλλειμμα 60 νομίσματα. Αν πουλήσεις 4 κότες, αγοράσεις 1 κουνέλι και 1 κότα τότε τα μετρητά σου ήρθαν ακριβώς. Πόσο κοστίζει ένα κουνέλι και πόσο μία κότα;• (Κεφάλαιο 8,Πρόβλημα 17)

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
……………….	………….
……………….	………….

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ΑΣ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ ΤΩΡΑ ΜΕ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

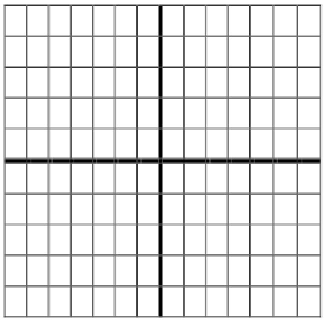
«ΠΑΝΤΑ-ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ-ΠΟΤΕ»

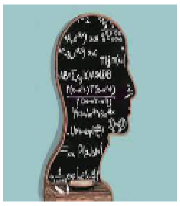
6

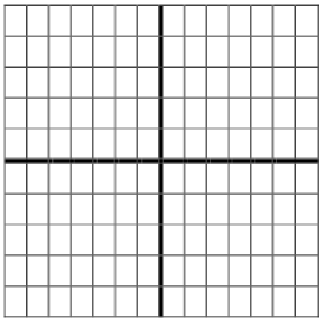
ΒΑΛΤΕ Χ ΣΤΟ ΣΩΣΤΟ ΚΟΥΤΑΚΙ ΚΑΙ ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ΝΑ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΕΤΕ!!

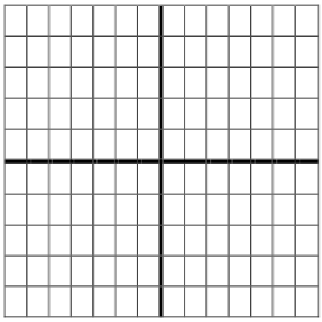
	ΠΑΝΤΑ	ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ	ΠΟΤΕ
$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=6 \end{cases}$			
$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$			
$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$			
$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=12 \end{cases}$			
$\begin{cases} 3x+3y=21 \\ 2x+2y=14 \end{cases}$			
$\begin{cases} 5x+5y=50 \\ 4x+4y=30 \end{cases}$			

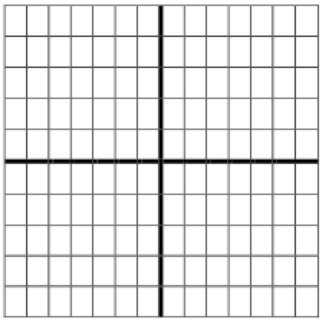
ΚΑΙ ΠΩΣ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΟΥΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ??

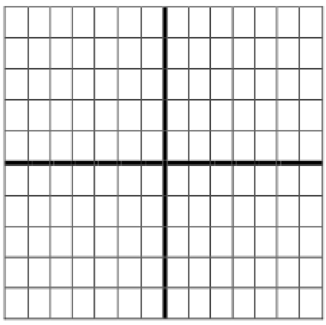


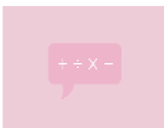


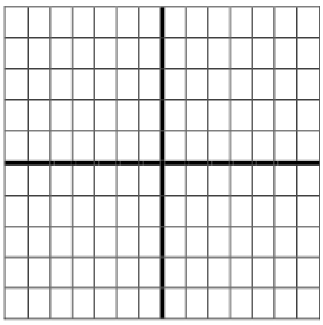












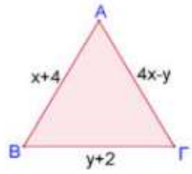
7

ΓΙΑ ΝΑ ΔΟΥΜΕ ΑΛΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΜΟΝΟ ΜΕ ΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΛΥΝΟΝΤΑΙ!

1) Το διπλανό τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Πώς θα βρω την πλευρά του; ………..

Τι πρέπει να ξέρω;……………………

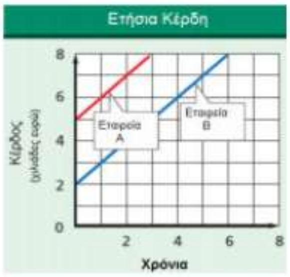


2) Στη γραφική παράσταση φαίνεται το μέσο κέρδος των εταιρειών Α και Β τα πρώτα χρόνια λειτουργίας τους.

(α) Ποια εταιρεία είχε τα περισσότερα κέρδη τα πρώτα 5 χρόνια της λειτουργίας της;

(β) Ποια εταιρεία έχει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης των κερδών από τη μια χρονιά στην άλλη;

(γ) Αν θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός αύξησης των κερδών των δύο εταιρειών διατηρείται σταθερός, όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση, μέχρι τα πρώτα 20 χρόνια, σε ποια χρονιά τα κέρδη των δύο εταιρειών θα είναι ίσα;



ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΤΑΣΗ

ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ
($5^{ος}$ - $15^{ος}$ αιώνα μ.Χ.)

ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ
($15^{ος}$-$17^{ος}$ αιώνα μ.Χ.)

Παράρτημα ΣΤ – 5ο Φύλλο Εργασίας

5 ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ-ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ

ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ (5ος - 15ος αιώνα μ.Χ.)

Ένα μεγάλο όνομα στους επιστημονικούς κύκλους εκείνης της εποχής ήταν ο Λεονάρντο της Πίζας (Σεπτέμβριος 1175 – 1240), γνωστός και ως Λεονάρντο Πιζάνο (Leonardo Pisano) ή Φιμπονάτσι (Fibonacci).

Ήταν Ιταλός μαθηματικός που έμεινε στην ιστορία για την περίφημη « Ακολουθία Φιμπονάτσι» και για την εισαγωγή στην Ευρώπη του αραβικού δεκαδικού συστήματος αρίθμησης καθώς και άλλων μαθηματικών καινοτομιών σε μια σκοτεινή εποχή για τις επιστήμες στην Ευρώπη.

Το διασημότερο αριστούργημά του, ήταν το Libber abbaci (Το βιβλίο του υπολογισμού). Η λέξη abbaci δεν αναφέρεται σε κάποια υπολογιστική συσκευή, αλλά σε κάθε είδους υπολογισμό. Στην πραγματικότητα ο Λεονάρδος παρουσίασε τα μαθηματικά του Ισλάμ του δέκατου αιώνα και αυτό που δίνει αξία στο σύγγραμμά του είναι πως αποτελούσε την πρώτη συγκεντρωτική εισαγωγή στην Ευρώπη των μαθηματικών που υπήρχαν στα έργα των μουσουλμάνων.

- Πάμε να τολμήσουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα του Fibonacci!!

Αλλά θα κάνουμε κάτι το διαφορετικό. Θα λύσουμε το πρόβλημα με τη δραστηριότητα «Δώσε το μαρκαδόρο στον άλλον». Θα σηκώνεστε ένας ένας στον πίνακα και θα λύνετε μόνο ένα μικρό βήμα! Στο τέλος η λύση θα είναι ομαδικό δημιούργημα!

«Δύο άνδρες έχουν κάποια χρήματα. Ο πρώτος λέει στο δεύτερο: «Εάν μου δώσεις ένα δηνάριο, θα έχουμε τα ίδια χρήματα». Ο δεύτερος λέει στον πρώτο: «Εάν μου δώσεις ένα δηνάριο θα έχω δέκα φορές το ποσόν που έχεις». Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;»

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
………………..	…………..
………………..	…………..

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \text{.......................................} \\ \text{.......................................} \end{cases}$$

Ένας πιο σύγχρονος του Λεονάρδου ήταν ο Jordanus de Nemore ο οποίος δίδαξε στο Παρίσι γύρω στο 1220 μ.Χ. Στο έργο του «Η Αριθμητική» ασχολείται με ευκλείδια θέματα όπως τους λόγους, τις αναλογίες, τους πρώτους και σύνθετους αριθμούς, τον ευκλείδιο αλγόριθμο και τη γεωμετρική άλγεβρα των Στοιχείων ΙΙ.

Εκτός από υλικό εμπνευσμένο από τον Ευκλείδη, συναντάται και η λεπτομερής μελέτη ονοματισμένων λόγων του Νικόμαχου αλλά και προβλήματα του Λεονάρδου.

- Ας λύσουμε ένα πρόβλημα του Jordanus με τη δραστηριότητα «Δώσε το μαρκαδόρο στον άλλον»

«Αν το άθροισμα 2 αριθμών είναι 60 και η αναλογία τους είναι 3 να βρεθούν αυτοί οι αριθμοί».

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
………………..	………….
………………..	………….

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ (15ος-17ος αιώνα μ.Χ.)

Κατά τον ύστερο Μεσαίωνα η Αναγέννηση ξεκινά από την Ιταλία και εξαπλώνεται σε όλη την Ευρώπη. Η Ιταλία, η Γερμανία και η Γαλλία αναπτύσσονται ραγδαία στον τομέα της άλγεβρας λόγω αναγκών στο εμπόριο και την οικονομία. Στη Γαλλία συγκεκριμένα ο Nicolas Chuquet (15ος αιώνας), γιατρός στο επάγγελμα, έγραψε τη μαθηματική πραγματεία του στη Λυών λίγο πριν το τέλος της ζωής του το 1484. Πρόκειται για το έργο Tripaty με περιεχόμενο αριθμητικής και άλγεβρας χωρισμένο σε τρία μέρη, το οποίο αποτελούσε βάση κανόνων που έβρισκαν εφαρμογές σε τρία μετέπειτα συναφή έργα με προβλήματα από διάφορα πεδία.

O Viète στο έργου του τα Πέντε Βιβλία της Ζητητικής (1591) για να υπολογίσει ποικίλα προβλήματα της αρχαίας και πιο σύγχρονής του άλγεβρας, κλήθηκε να επιλύσει συστήματα.

- Ας δοκιμάσουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα του Viete

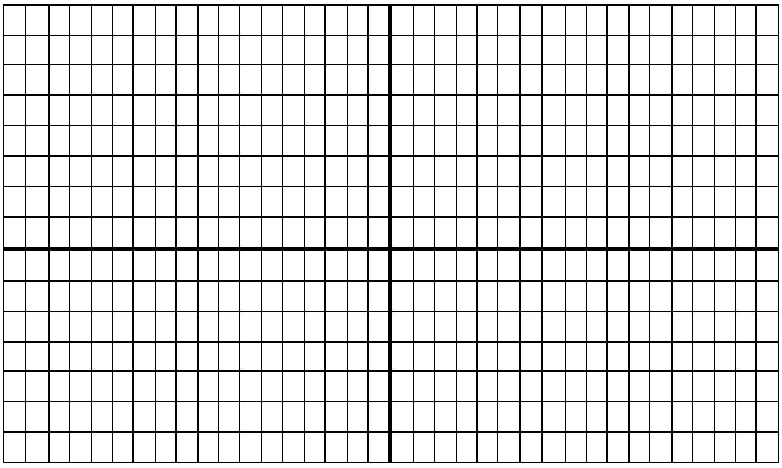
«Έστω το άθροισμα δύο αριθμών 100 και η διαφορά τους 40. Να βρεθούν οι δύο αριθμοί».

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
……………….	…………
……………….	…………

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Τώρα αφού παρασταθούν γραφικά, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι δύο ευθείες με τον άξονα x΄x.



- Για να δούμε μία παραλλαγή του προβλήματος του Viete.

«Έστω δύο αριθμοί με άθροισμα 5, διαφορά 1 και το διπλάσιο του μικρότερου να είναι ίσο με το μεγαλύτερο αυξημένο κατά 1».

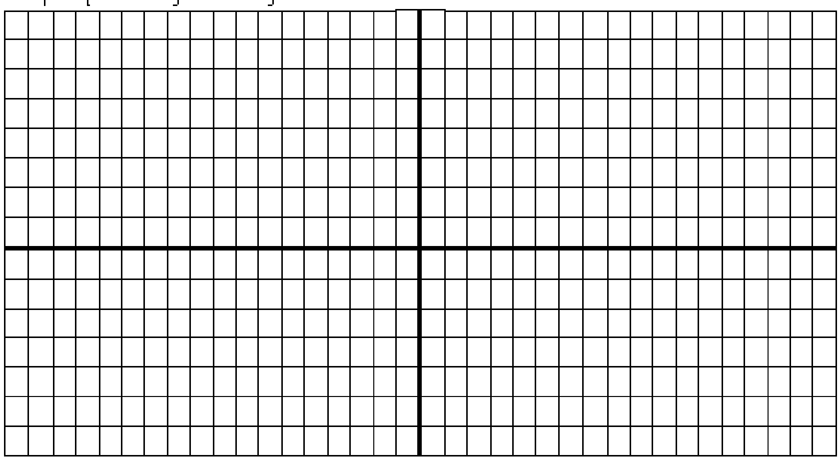
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	ΘΕΤΩ ΩΣ
……………….	…………
……………….	…………

5

Ας γράψουμε το σύστημα που σχηματίζεται και να το λύσουμε:

$$\begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$$

Ας παραστήσουμε και τις 3 ευθείες



Ποιο είναι το κοινό τους σημείο;…………………………………..

Πιστεύετε πως χρειάζονταν και οι 3 πληροφορίες (ευθείες), για να βρούμε την λύση;…………………………………………………………..

- Ας κάνουμε κάτι διαφορετικό τώρα, για να εξασκήσουμε το μυαλό μας!

Αν οι ευθείες ε_1: $(\kappa-1)x + \lambda y = 26$ και ε_2: $(\kappa+1)x - (\lambda+1)y = 6$ τέμνονται στο σημείο **Μ (2,4)**, να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών κ , λ.

- Τι ξέρουμε για ένα σημείο που είναι σίγουρα λύση ενός συστήματος;;

- Με την ίδια λογική:

Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ ώστε η πιο πάνω ευθεία να διέρχεται από τα σημεία **Α(2,5)** και **Β(-1,-7)**.

- Τι ξέρουμε για ένα σημείο που διέρχεται σίγουρα από μία ευθεία;

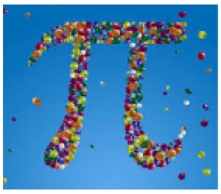
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ...ΜΕΛΛΟΝ!

Τα γραμμικά συστήματα έχουν τις ρίζες τους βαθιά στο χρόνο αλλά μας χρησιμεύουν μέχρι σήμερα και σίγουρα για πολλά χρόνια ακόμη! Ας δούμε……

ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Δύο αυτοκίνητα κινούνται με σταθερές ταχύτητες και απέχουν μεταξύ τους 45 Km .

Αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση θα συναντηθούν μετά από 3 ώρες , ενώ αν κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση , θα συναντηθούν σε 20 λεπτά. Κάθε αυτοκίνητο έχει την ίδια ταχύτητα σε km\h και στις 2 περιπτώσεις. Με ποιά ταχύτητα, σε km\h, κινείται κάθε αυτοκίνητο ;



$$\begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$$

Οι αντιστάσεις R_1, R_2, αν συνδεθούν παράλληλα , έχουν ολική αντίσταση 2,4 Ω.

Αν η αντίσταση R_2 συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση 12 Ω , τότε η ολική τους αντίσταση είναι R_1. Να βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_1 , R_2 .

$$\begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$$

ΣΤΗ ΧΗΜΕΙΑ

Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

$$\begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$$

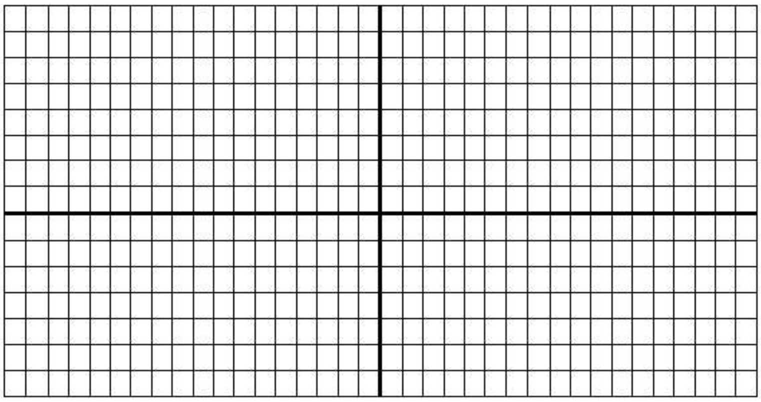
7

ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Μία εταιρία έχει έσοδα που χαρακτηρίζονται από αυτήν την ευθεία: $y=\frac{x}{2}-10$ και έξοδα που χαρακτηρίζονται από την ευθεία: $y=-\frac{x}{2}+50$, όπου x είναι οι μέρες και y τα χρήματα που κερδίζουν. Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας όπου τα έσοδα είναι ίσα με τα έξοδα.

$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Να γίνει και η γραφική παράσταση



Μη ξεχνάτε πως παίζετε πολύ σημαντικό ρόλο στη συνέχιση των μαθηματικών και εσείς οι ίδιοι. Ωστόσο «το μυαλό δεν είναι ένα δοχείο που πρέπει να γεμίσει, αλλά μια φωτιά που πρέπει να ανάψει» είπε ο Πλούταρχος. Στο χέρι σας είναι!!

Παράρτημα Ζ – Προτεινόμενο γνωστικό test για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του διδακτικού πακέτου

Άσκηση 1)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είν λανθασμένες.

α) Το ζεύγος (3, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x - 2y = 5$.
β) Η ευθεία ε : $2x - 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
γ) Η εξίσωση $y = -3$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y_y.
δ) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αόριστο

Άσκηση 2)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Οι ευθείες $ε_1$: $2x - 3y = 18$ και ε2 : $3x + 5y = 8$ έχουν κοινό σημείο το

α) Α(9, 0), β) Β(1, 1), γ) Γ(6, –2), δ) Δ(3, –4)

ii. Αν για την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$$

εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, τότε προκύπτει η εξίσωση:

α) $5x = 6$, β) $3x = 3$, γ) $-2x = 3$, δ) $3x = 9$

iii. Το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

α) έχει μία λύση, β) είναι αόριστο, γ) είναι αδύνατο

Άσκηση 3)

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 5y = -8 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4)

Αν οι ευθείες $ε_1$: $(κ + 2)x + (λ - 1)y = 26$ και $ε_2$: $(κ + 4)x - λy = 6$ τέμνονται στο σημείο Μ(2, 4) να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών κ, λ.

Παράρτημα Η – Ερωτηματολόγιο Αποτίμησης

Η ΓΝΩΜΗ ΜΟΥ

1) Τα ιστορικά δεδομένα που σας δόθηκαν σας άρεσαν; Πιστεύετε ότι ήταν βαρετά, ενδιαφέροντα, ωφέλιμα, αποτελεσματικά, δύσκολα ως προς την κατανόηση, αδιάφορα; Απαντήστε με όσους χαρακτηρισμούς θέλετε (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και δικούς σας) και δικαιολογείστε τους.

2) Μάθατε κάτι από αυτά; Θα θέλατε να κάνετε αυτού του είδους το μάθημα και στο σχολείο, με περισσότερα ιστορικά δεδομένα και δραστηριότητες;

3) Πιστεύετε χρειάζεται τελικά να μαθαίνουμε όλο το ιστορικό πλαίσιο μίας έννοιας;

4) Θεωρείτε πως τα μαθηματικά τα «φτιάχνουν» συγκεκριμένες ομάδες ανθρώπων, δεν αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου και δε χρησιμεύουν στην καθημερινότητα; Θεωρείτε ότι οι πεποιθήσεις σας για τα μαθηματικά έχουν αλλάξει έστω και λίγο μετά την παρέμβαση αυτή; Αν ναι, τι είναι αυτό που άλλαξε;

5) Πιστεύετε ότι η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας λειτούργησε θετικά για εσάς στην πορεία του μαθήματος ή όχι και γιατί;

6) Πιστεύετε πως μάθατε καλά να χειρίζεστε την ευθεία και να λύνετε καλά τα γραμμικά συστήματα;

7) Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων ασχοληθήκαμε με ιστορικά πρόσωπα και γεγονότα και δράσατε μέσα από ομάδες και δραστηριότητες. Σας άρεσαν αυτά; Ποιο κομμάτι σας άρεσε πιο πολύ στα μαθήματα;

8) Πιστεύετε τελικά αξίζει να μάθετε μαθηματικά για να γίνετε ισχυροί;

ΚΑΙ ΜΗ ΞΕΧΝΑΤΕ...

«Ο ΜΟΝΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΝΑ ΜΑΘΕΤΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΝΑ ΚΑΝΕΤΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»