

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ  
ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΠΑΦΗΣ

ΣΤΕΡΓΙΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

ΑΕΜ 1337

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΓΙΑΓΚΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΚΟΖΑΝΗ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	2
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	3
ABSTRACT.....	4
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	5
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	6
2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ.....	8
2.1 Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης.....	8
2.2 Περιγραφή της διαδικασίας του Πειράματος.....	10
2.3 Περιγραφή Πειράματος Εφελκυσμού.....	14
2.4 Μοντελοποίηση Πειράματος Εφελκυσμού.....	16
3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	18
3.1 Γενικά.....	18
3.1.1 Γραμμική Ανάλυση.....	22
3.1.2 Μη Γραμμική Ανάλυση.....	23
3.2 Μοντελοποίηση του Πειράματος.....	31
3.2.1 Διακριτοποίηση Μοντέλου.....	32
3.2.2 Ιδιότητες.....	36
3.3 Ανάλυση Μοντέλου με Πεπερασμένα Στοιχεία.....	36
3.3.1 Γραμμική Ανάλυση Μοντέλου.....	37
3.3.2 Μη Γραμμική Ανάλυση Μοντέλου.....	43
3.3.3 Μη Γραμμική Ανάλυση - Χωρίς τη Μη Γραμμικότητα Υλικού.....	47
3.3.4 Μη Γραμμική Ανάλυση - Χωρίς Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα.....	50
4 ΣΥΜΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	51
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	53

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται ο βέλτιστος τρόπος μοντελοποίησης λεπτότοιχων διατομών σε προβλήματα επαφής. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν κατασκευές οι οποίες αποτελούνται από λεπτότοιχες διατομές (λαμαρίνες) συνδεδεμένες μεταξύ τους (π.χ θάλαμος ανελκυστήρα) και κατά τη λειτουργία τους ενδέχεται να δεχτούν σημειακό φορτίο μέσω της επαφής τους με άλλο αντικείμενο. Γι' αυτό το σκοπό έχουν αναπτυχθεί και συγκεκριμένα πρότυπα αντοχής των συγκεκριμένων κατασκευών.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση του βέλτιστου τρόπου μοντελοποίησης προβλημάτων επαφής λεπτότοιχης πλάκας, μέσω στατικής ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε πειραματική διάταξη για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής ανάλυσης.

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε η πειραματική διερεύνηση του προβλήματος. Η εξεταζόμενη πλάκα τοποθετήθηκε στην κατασκευή, ώστε να υπάρχει η κατάλληλη πάκτωση. Η δύναμη εφαρμόστηκε στην πλάκα, μέσω της επαφής της με τον κύλινδρο και τελικά η λήψη των μετρήσεων των τάσεων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση μηκυσιομέτρων. Για τον απαραίτητο προσδιορισμό των ιδιοτήτων του δοκιμίου, πραγματοποιήθηκε πείραμα εφελκυσμού κατά ISO 6892-1:2016. Επίσης, το πείραμα εφελκυσμού προσομοιώθηκε στο λογισμικό MSC Marc, ώστε να υπάρχει πλήρης κατανόηση της συμπεριφοράς του δοκιμίου.

Στη συνέχεια ακολούθησε η διαδικασία διακριτοποίησης και δόμησης του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, ακολουθούμενη από την περιγραφή της Γραμμικής και Μη Γραμμικής Ανάλυσής του. Επιπλέον Μη Γραμμική Ανάλυση, στην οποία δεν υπολογίστηκε η μη γραμμικότητα του υλικού, έδειξε την αναγκαιότητα μελέτης της πλαστικής παραμόρφωσης σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Τέλος, η σύγκριση των αποτελεσμάτων, των αναλύσεων με τις πειραματικές μετρήσεις, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για την ολοκληρωμένη αποτύπωση προβλημάτων λεπτότοιχων διατομών σε επαφή, είναι απαραίτητη η Μη Γραμμική Ανάλυση, με το μέσο σφάλμα να είναι 4.15%. Αντίθετα, η Γραμμική Ανάλυση εμφάνισε μη ρεαλιστικά αποτελέσματα και δεν λογίζεται ως κατάλληλη μέθοδος ανάλυσης.

## ABSTRACT

The subject of study of this dissertation is the optimal way of modeling thin-walled structures in contact problems. In particular there are structures that are made of interconnected (e.g. a lift chamber) thin-walled sections (sheets) and, in their operation, load to a single point may be applied, through contact with another object. For this purpose, specific standards have been developed about these particular structures.

The purpose of this dissertation is to develop an optimal way of modeling contact thin-walled plates problems, through finite element analysis. Thus, an experimental device was designed and constructed to verify the results of the analysis.

Initially, an experimental simulation of the problem was conducted. The test plate was mounted to the construction so that it could be properly restrained. The force was applied to the plate through its contact with the cylinder and finally the stress value was obtained using strain gages. For the determination of the specimen properties, a tensile test was conducted according to ISO 6892-1: 2016. Also, the tensile experiment was simulated in MSC Marc software to give a complete understanding of the specimen behavior.

Continuing with the description of the process of discretization and construction of the model, followed by the description of its Linear and Nonlinear Analysis. Further Nonlinear Analysis, which did not calculate material nonlinearity, showed the necessity to study plastic deformation in such problems.

Finally, comparing the results of the analysis with the experimental measurements leads to the conclusion that a Nonlinear analysis is necessary for a complete description of contact thin-walled problems, as the deviation between them was around 4.15%. On the contrary, Linear Analysis has shown unrealistic results and is not considered an appropriate method of addressing such problems.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Δημήτριο Γιαγκόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του, κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον υποψήφιο διδάκτορα Ζαχαράκη Ηλία για τη συμβολή του στην παρούσα εργασία. Για το τέλος, αλλά όχι τελευταίους, άφησα την οικογένεια και τους φίλους μου, τους οποίους ευχαριστώ για την έμπρακτη συμπαράσταση και υπομονή τους.

# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Λεπτότοιχες διατομές σε μορφή πλακών υπάρχουν σε πολλές εκφάνσεις της τεχνολογίας όπως είναι η μηχανική, η αεροναυπηγική, η μηχανολογία ή η χημική μηχανική. Η ευρεία χρήση των πλακών προέρχεται από τις ιδιότητές τους, καθώς με τον κατάλληλο σχεδιασμό μπορούν να υποστούν μεγάλα φορτία χωρίς να αστοχήσουν. Τέτοιες διατομές χρησιμοποιούνται κυρίως στην κατασκευαστική βιομηχανία για το μικρό τους βάρος και τη χαμηλή τιμή τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται ως μεγάλες επιφάνειες δαπέδου σε βιομηχανικά και δημόσια κτίρια, αλλά και στην κατασκευή θαλάμων ανελκυστήρων.

Οι υπολογισμοί που χρειάζονται για τον προσδιορισμό της αντοχής και της σταθερότητας μιας πλάκας, είναι από τους πιο περίπλοκους στον κατασκευαστικό τομέα. Η ανάπτυξη της υπολογιστικής δυνατότητας βοήθησε στην δημιουργία μεθόδων ανάλυσης και αντιμετώπισης σχετικών προβλημάτων με μεγάλη ακρίβεια.

Έτσι δόθηκε η ευκαιρία για μελέτη και έρευνα των διαφόρων χρήσεων των λεπτότοιχων διατομών, κυρίως λεπτότοιχες διατομές I, U, L, Z. Οι ανοιχτές αυτές διατομές μελετώνται ως προς τον λυγισμό, την στρέψη, το αξονικό ή εγκάρσιο φορτίο. Δοχεία πίεσης κατασκευάζονται από λεπτότοιχες διατομές και αναλύεται η αντοχή τους στη διαφορά εξωτερικής και εσωτερικής πίεσης. Επιπλέον, τέτοιου είδους διατομές εφαρμόζονται ως απορροφητές κραδασμών και κινητικής ενέργειας σε οχήματα και κατασκευές υποδομής, με κατάλληλη διαμόρφωση της γεωμετρίας τους.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται ένα πρόβλημα λεπτότοιχης πλάκας σε φορτίο. Η εφαρμογή του φορτίου γίνεται στο κέντρο της πλάκας, μέσω κυλίνδρου που έρχεται σε επαφή με το δοκίμιο, προσθέτοντας στην πολυπλοκότητα του προβλήματος. Στόχος της διερεύνησης είναι η δημιουργία μεθοδολογίας αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων μέσω ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Η επαλήθευση της μεθοδολογίας γίνεται με την διεξαγωγή πειράματος σε ειδικά κατασκευασμένη διάταξη.

Αναλυτικότερα, η διπλωματική εργασία περιέχει τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στο θέμα και στο σκοπό της εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η πειραματική διερεύνηση του προβλήματος. Η πειραματική διάταξη και τα μέρη της σχεδιάστηκαν με στόχο την κατάλληλη πάκτωση και στιβαρότητα της κατασκευής. Η πάκτωση είναι σημαντική, αφού αποτελεί συννοριακή συνθήκη για την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, όπως και η δύναμη. Η δύναμη εφαρμόζεται στην πλάκα, μέσω της επαφής της, με τον κύλινδρο. Στη συνέχεια, για την εξαγωγή των ιδιοτήτων του δοκιμίου, πραγματοποιήθηκε πείραμα εφελκυσμού κατά ISO 6892-1:2016. Με τη χρήση του λογισμικού MSC Marc προσομοιώθηκαν αριθμητικά, τα στάδια εφελκυσμού που υπεβλήθη το δοκίμιο του συγκεκριμένου πειράματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αρχικά γίνεται εισαγωγή στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων αλλά και πιο ειδικά στη Γραμμική και Μη Γραμμική Ανάλυση. Η Γραμμική Ανάλυση βασίζεται σε παραδοχές, οι οποίες απλοποιούν το πρόβλημα, δίνοντας στο χρήστη τη δυνατότητα γρήγορης και εύκολης σύνταξης της ανάλυσης, με ανάλογο κόστος στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Όσο αφορά την Μη Γραμμική Ανάλυση, οι επιλογές που προσφέρει για την περιγραφή του προβλήματος, απαιτούν κατανόηση της συμπεριφοράς του μοντέλου και των

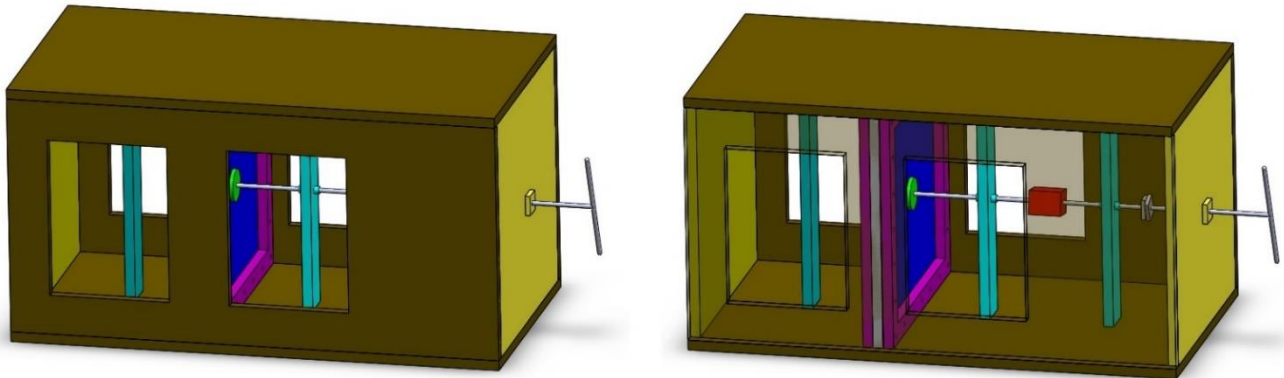
συνθηκών στις οποίες υποβάλλεται. Ένα μοντέλο που μελετάται ως προς τη μη γραμμική του συμπεριφορά δύναται να παρουσιάσει τριών ειδών γραμμικότητες. Μη Γραμμικότητα του Υλικού, Γεωμετρική Μη γραμμικότητα και Μη Γραμμικές Οριακές Συνθήκες. Η Μη Γραμμικότητα του Υλικού εμφανίζεται με διάφορες μορφές όπως Μη Γραμμικό Ελαστικό Υλικό, Υπερελαστικό Υλικό, Πλαστική Παραμόρφωση Υλικού. Η Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα είναι σύνηθες φαινόμενο στη μελέτη λεπτότοιχων διατομών και εμφανίζεται κυρίως όταν υπάρχουν μεγάλες μετατοπίσεις λόγω φορτίου. Οι Μη Γραμμικές Οριακές συνθήκες αφορούν κυρίως προβλήματα επαφής μέσω της ανάλυσης της κίνησης γεωμετρικών σχημάτων αλλά και της κίνησης εξαιτίας της αλληλεπίδρασης τους.

Επίσης, γίνεται περιγραφή της διαδικασίας διακριτοποίησης και δόμησης του μοντέλου, όπου ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στο πλέγμα της πλάκας που έρχεται σε επαφή με τον κύλινδρο και είναι η περιοχή που καταπονείται περισσότερο. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η σύνταξη της Γραμμικής Ανάλυσης και των παραδοχών που τη διέπουν. Αντίστοιχα, περιγράφονται οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν στη Μη Γραμμική Ανάλυση και η λογική πίσω από την επιλογή τους. Πραγματοποιήθηκαν δύο ειδών Μη Γραμμικές Αναλύσεις, μία συμπεριλαμβάνοντας τη Μη Γραμμικότητα του Υλικού και μία χωρίς να τη λάβουμε υπόψιν, σε μία προσπάθεια προσδιορισμού της μη γραμμικότητας με τη μεγαλύτερη επιρροή στο μοντέλο. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων συγκρίνονται μεταξύ τους, αλλά και με τις μετρήσεις από το πείραμα.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται κάποια συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για μελλοντικές εργασίες με βάση την παρούσα εργασία αλλά και την πειραματική διάταξη που κατασκευάστηκε.

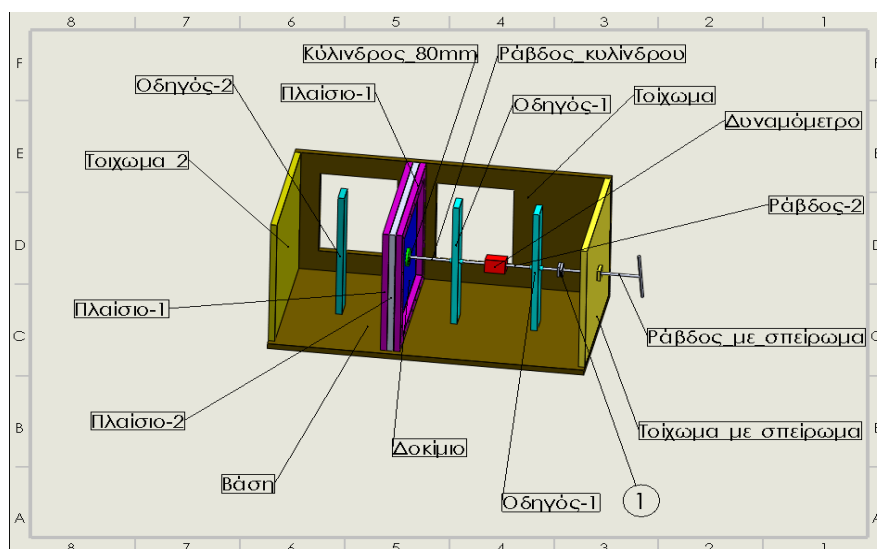
## 2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

### 2.1 Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης



**Σχήμα 2.1** Πειραματική Διάταξη-Περιεχόμενα Πειραματικής Διάταξης

Στόχος της πειραματικής διάταξης-**Σχήμα 2.1**, είναι η όσο το δυνατόν πιο ακριβής ανάλυση και μελέτη της συμπεριφοράς του δοκιμίου. Ο σχεδιασμός έγινε με γνώμονα την επαρκή πάκτωση της πλάκας αλλά και γενικά την στιβαρότητα της κατασκευής, ώστε να είναι πιο εύκολη η μέτρηση των τάσεων αλλά και η επιλογή των συνοριακών συνθηκών για την επίλυση του μοντέλου. Ο σχεδιασμός πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό CAD Solidworks. Στο **Σχήμα 2.2** παρουσιάζονται τα επιμέρους τμήματα από τα οποία αποτελείται η διάταξη.

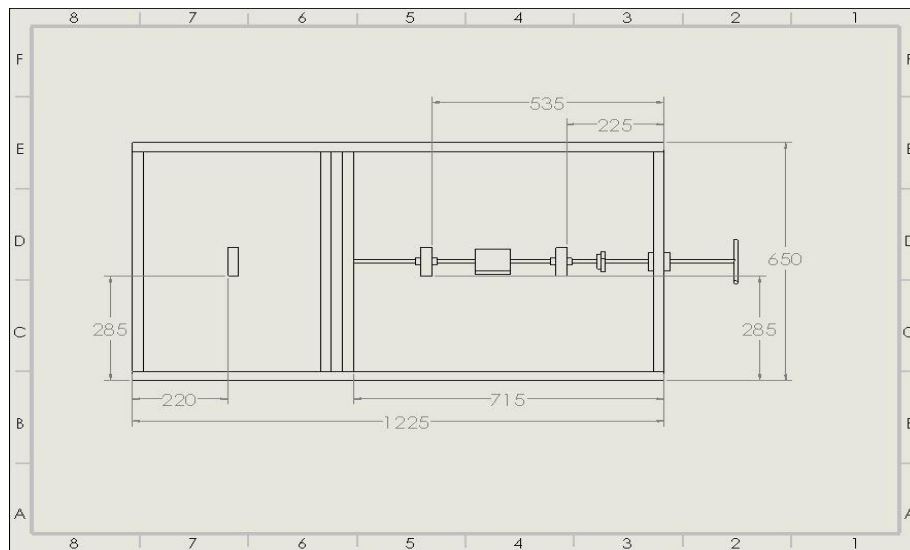


**Σχήμα 2.2** Επιμέρους τμήματα διάταξης

Η κατασκευή-**Σχήμα 2.1** και **Σχήμα 2.2**, (εκτός από το δοκίμιο, τον κύλινδρο και τις ράβδους) είναι από επεξεργασμένο ξύλο MDF (Medium Density Fibreboard – Ινόπλακα Μέτριας Πυκνότητας). Η επιλογή του υλικού έγινε με βάση την ευκολία επεξεργασίας του, καθώς τα επιμέρους κομμάτια του, σχεδιάστηκαν και κατασκευάστηκαν κατά παραγγελία. Επίσης, λόγω του ότι αποτελείται από συμπιεσμένες ίνες ξύλου με ρητίνη, το MDF είναι ένα εξαιρετικά

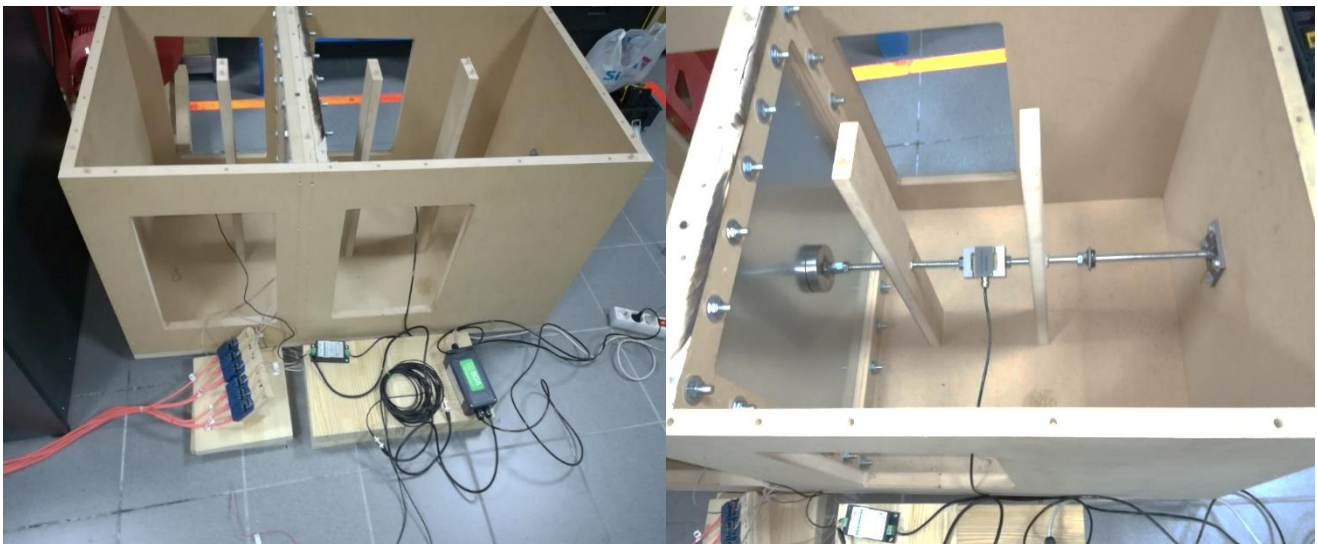


ανθεκτικό υλικό και μπορεί να ανταπεξέλθει στα φορτία που αναπτύσσονται στο πείραμα. Τέλος, το MDF δεν έχει μεγάλο κόστος, καθιστώντας το ευρέως προσβάσιμο στην αγορά.



**Σχήμα 2.3** Διαστάσεις διάταξης

Στο **Σχήμα 2.3** φαίνεται το σημείο τοποθέτησης του κάθε μέρους της διάταξης και οι μεταξύ τους αποστάσεις. Η κατασκευή είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να υπάρχει εύκολη πρόσβαση στο εσωτερικό της, μέσω των ανοιγμάτων, που είναι απαραίτητα για τη συνδεσμολογία των μηχανημάτων και οπτικό έλεγχο της διαδικασίας-**Σχήμα 2.4**. Επίσης οι αποστάσεις μεταξύ των οδηγών, των πλαισίων και του τοιχώματος με σπείρωμα, διευκολύνουν την συναρμολόγηση τους συστήματος: ράβδοι-δυναμόμετρο-κύλινδρος.

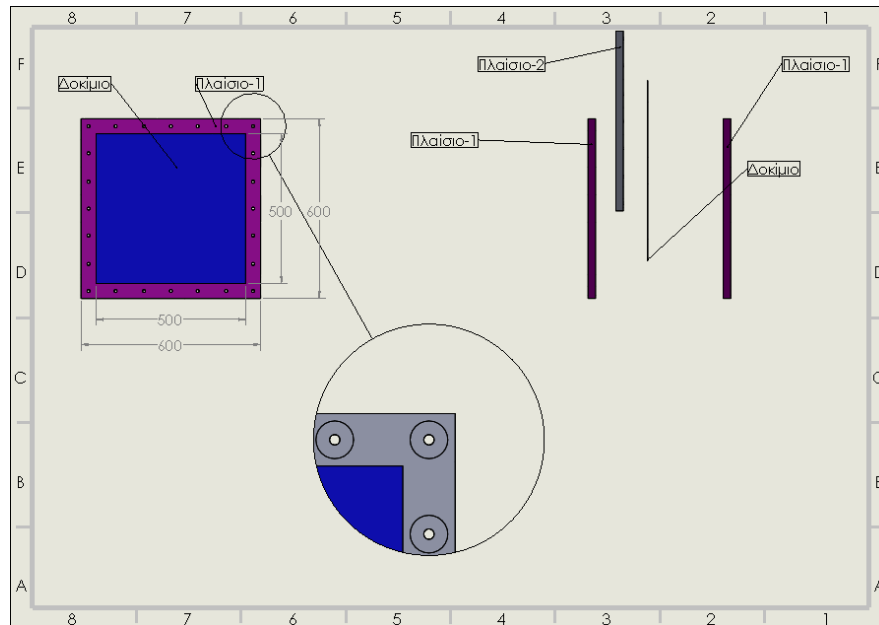


**Σχήμα 2.4** Φωτογραφία πειραματικής διάταξης-Συνδεσμολογία

Οι οδηγοί τοποθετούνται στην κατασκευή σε τρία σημεία όπως υποδεικνύουν τα: **Σχήμα 2.2** και **Σχήμα 2.3**. Σκοπός των δύο που βρίσκονται στα δεξιά του σχεδίου, είναι να οδηγήσουν τις ράβδους και κατ' επέκταση τον κύλινδρο στο κέντρο του δοκιμίου μέσω των οπών που

βρίσκονται στο κέντρο τους. Ο τρίτος (στα αριστερά), χρησιμοποιείται ως στήριγμα για την εφαρμογή οργάνων μέτρησης.

Το τμήμα της διάταξης που απεικονίζεται στο **Σχήμα 2.5**, περιλαμβάνει τα τρία πλαίσια όπως φαίνονται στο σχέδιο και δεσμεύουν το δοκίμιο. Η εξεταζόμενη πλάκα του πειράματος έχει διαστάσεις 600mm πλάτος 600mm μήκος και 0.3mm πάχος. Οι πραγματικές διαστάσεις όμως που λαμβάνουμε υπόψιν, είναι 500mm πλάτος, 500mm μήκος, καθώς τα επιπλέον 100mm είναι απαραίτητα για την ικανοποιητική πάκτωση της πλάκας.



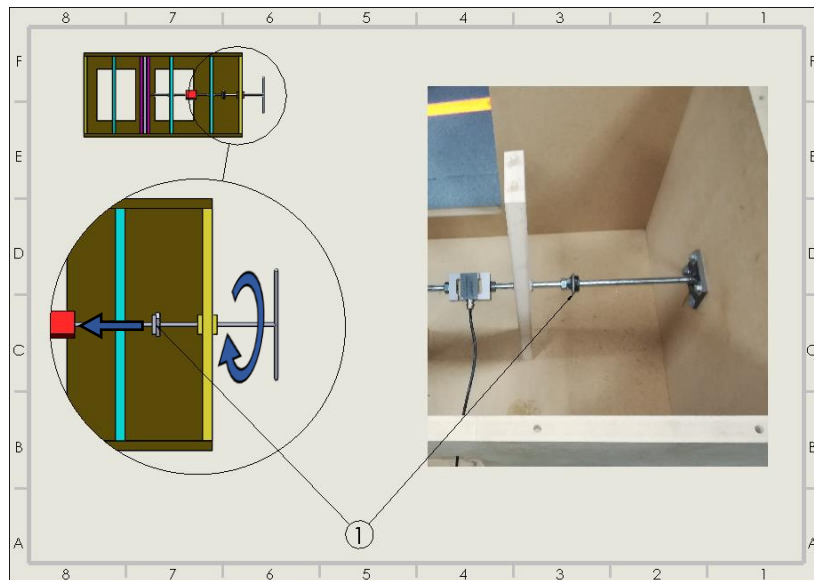
**Σχήμα 2.5** Σύστημα πλαισίων

Τα πλαίσια μοβ χρώματος (Πλαίσιο-1) είναι πανομοιότυπα, ενώ το γκρίζο (Πλαίσιο-2) διαφέρει στις οπές όπως φαίνεται, καθώς στα σημεία αυτά τοποθετήθηκαν δακτύλιοι σύσφιξης για την περαιτέρω δέσμευση της πλάκας. Το δοκίμιο βρίσκεται ανάμεσα στο μοβ και γκρίζο πλαίσιο. Ο αριθμός των οπών είναι τέτοιος, ώστε σε συνδυασμό με τον τρόπο τοποθέτησης των πλαισίων και την σύσφιξη των κοχλιών να δημιουργείται, ουσιαστικά, επιφάνεια πάκτωσης. Έτσι το φορτίο μοιράζεται στην επιφάνεια και δεν καταπονεί τους κοχλίες. Τέλος χρησιμοποιήθηκαν ξύλινοι σύνδεσμοι καβίλιας για τη συναρμολόγηση της κατασκευής, αλλά και την εύκολη αποσυναρμολόγηση της.

## 2.2 Περιγραφή της διαδικασίας του πειράματος

Στόχος του πειράματος είναι να δεχτεί η εξεταζόμενη πλάκα αρκετά μεγάλη δύναμη, ώστε αναλογικά να είναι συγκρίσιμη, με τις αντίστοιχες δυνάμεις πραγματικών συνθηκών. Το πάχος του δοκιμίου επιλέχθηκε να είναι 0.3mm και είναι κατά την ίδια αναλογία μικρότερο, από την πραγματικότητα, όσο οι δυνάμεις που αναπτύχθηκαν στο πείραμα, από το κανονικό φορτίο. Το ζητούμενο είναι να δημιουργηθεί μια προσομοίωση των εφαρμογών που υπάρχουν στη βιομηχανία σε ένα ελεγχόμενο περιβάλλον, βάσει των διαθέσιμων μέσων του εργαστηρίου. Μέρος της προσομοίωσης αυτής είναι και ο παράγοντας της επαφής μεταξύ του κυλίνδρου και του δοκιμίου, ο οποίος παίζει σημαντικό ρόλο, όπως θα φανεί από την ανάλυση.

Η δύναμη εφαρμόζεται στην εξεταζόμενη πλάκα περιστρέφοντας τη ράβδο με σπείρωμα-ντίζα όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2.6**. Λόγω του σπειρώματος που υπάρχει στο τοίχωμα η δύναμη μεταφέρεται στο σημείο [1] του ίδιου σχήματος. Εκεί η δύναμη μετατρέπεται από περιστροφική σε αξονική, αφού υπάρχει επαφή δύο δακτυλίων που έχουν συγκολληθεί με τις αντίστοιχες ράβδους. Στο **Σχήμα 2.6** τα μπλε βέλη απεικονίζουν τις δυνάμεις.



**Σχήμα 2.6** Γραφική απεικόνιση εφαρμογής της δύναμης

Οι οπές των οδηγών δεν έχουν σπείρωμα και αφήνουν τις ράβδους να κινούνται ελεύθερα, μεταφέροντας την αξονική δύναμη στο δυναμόμετρο και κατ' επέκταση στο δοκίμιο. Το δυναμόμετρο υπολογίζει τη δύναμη που αναπτύσσεται βάσει και της αντίστασης του δοκιμίου. Ο κύλινδρος που χρησιμοποιείται για την εφαρμογή της δύναμης στην πλάκα, έχει διάμετρο 80mm και βιδώνει στη ράβδο. Τα δύο αυτά τμήματα αποτελούν το σύστημα επαφής που θα μελετηθεί και στο υπολογιστικό κομμάτι. Στην άλλη πλευρά του δοκιμίου τοποθετήθηκαν μηνυσιόμετρα (*strain gages*), όπως και όργανο μέτρησης μετατόπισης (LVDT) στο κέντρο του δοκιμίου-**Σχήμα 2.7**.



**Σχήμα 2.7** Εφαρμογή strain gages σε δύο σημεία του δοκιμίου

Όπως φαίνεται, τα strain gages τοποθετήθηκαν σε δύο σημεία πάνω στην πλάκα, σε ακτίνα  $R=20\text{mm}$  και  $R=40\text{mm}$ . Οι τιμές τάσης στο δοκίμιο είναι διαφορετικές καθόλη την επιφάνεια

επαφής με τον κύλινδρο και θεωρήθηκε ότι πρέπει να ληφθούν μετρήσεις με αυτόν τρόπο, ώστε να σχηματιστεί όσο το δυνατόν καλύτερα το φάσμα των τάσεων.

Επειδή, στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει διαζονική κατάσταση τάσης, είναι απαραίτητες τρεις διαφορετικές μετρήσεις, για τον προσδιορισμό των κύριων τάσεων και κύριας παραμόρφωσης (principal stresses-strains), για κάθε σημείο. Αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιήθηκαν ορθογώνια strain gages τύπου rosette 45°. Τα strain gages rosette αποτελούν, ουσιαστικά, μία διάταξη τριών ηλεκτρικών δικτύων-μετρητών, το κάθε ένα προσανατολισμένο σε διαφορετική κατεύθυνση, με 45° διαφορά το ένα από το άλλο. Τα τρία ηλεκτρικά δίκτυα δίνουν αντίστοιχα τις μετρήσεις:  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  και  $\varepsilon_C$ , τα οποία εκφράζονται ως [1]:

$$\varepsilon_A = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2(\theta + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\varepsilon_C = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2(\theta + 90^\circ) \quad (3)$$

Όπου,

$\varepsilon_x$ : παραμόρφωση σημείου στη διεύθυνση  $x'$ .

$\varepsilon_y$ : παραμόρφωση σημείου στη διεύθυνση του  $y'$ .

$\theta$ : γωνία ηλεκτρικού δικτύου με τον άξονα των  $x'$ .

$\gamma_{xy}$ : διατμητική παραμόρφωση

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) προσδιορίζονται τα  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  και  $\gamma_{xy}$ , τα οποία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της κύριας παραμόρφωσης (principal stress):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy})^2}]$$

Οι δύο τιμές που προκύπτουν από το συν και πλην αφορούν τη μέγιστη και ελάχιστη παραμόρφωσή αντίστοιχα. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)$$

Όπου,

E: μέτρο ελαστικότητας του Young [MPa]

$\nu$ : λόγος του Poisson

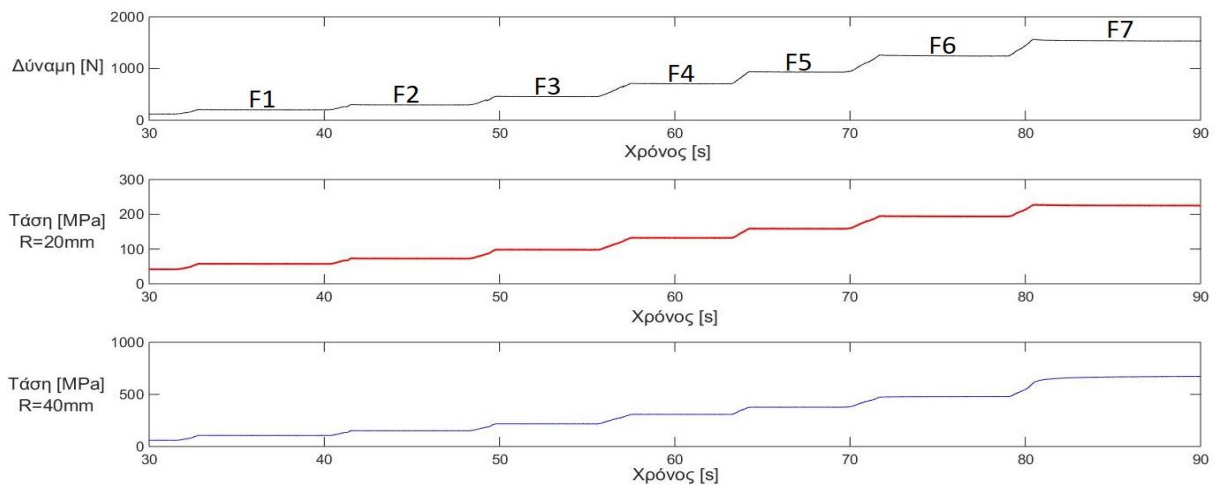
Τέλος, υπολογίζεται το κριτήριο von Mises για επίπεδη τάση:

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad [\text{MPa}]$$

Με την ισοδύναμη τάση von Mises, για σημείο, να είναι:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad [\text{MPa}]$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν μέσω λογισμικού για κάθε μία τιμή που λήφθηκε από τα strain gages rosette. Έτσι οι τιμές δύναμης από το δυναμόμετρο, μαζί με τις μετρήσεις των δύο strain gages δημιουργούν τρεις ομάδες μετρήσεων οι οποίες αντιστοιχίζονται με το χρόνο-**Σχήμα 2.8**. Το διάγραμμα της δύναμης με το χρόνο είναι αυτό που χρησιμοποιείται για την επιλογή των δυνάμεων που θα εισαχθούν στην ανάλυση, επιλέγονται δηλαδή οι τιμές τους, που είναι για αρκετό χρόνο σταθερές.



**Σχήμα 2.8** Διαγράμματα Δύναμης-Χρόνου, Ισοδύναμων Τάσεων-Χρόνου

Η ερμηνεία του παραπάνω σχήματος δίνει μορφή στον **Πίνακα 2.1** και αποτελεί το μέτρο σύγκρισης με τα αποτελέσματα των Αναλύσεων Πεπερασμένων Στοιχείων, τα οποία θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

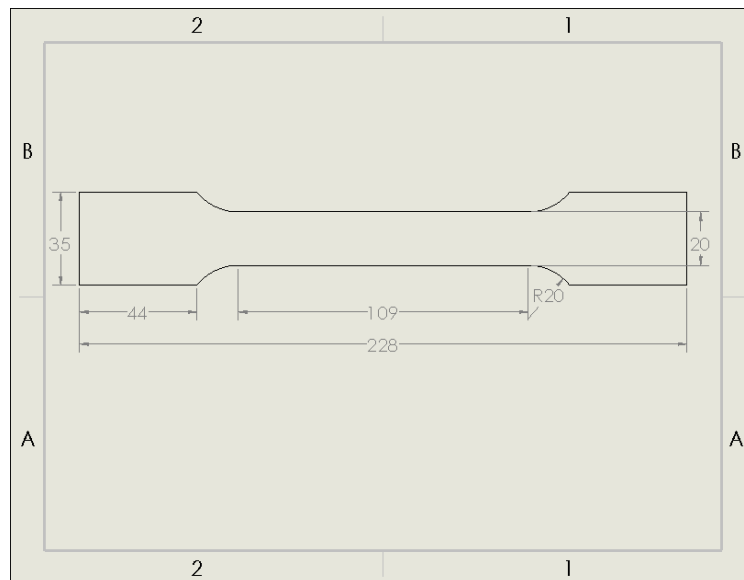
Αρίθμηση Δύναμης	Δύναμη [N]	Πειραματικές Μετρήσεις [MPa]	
		R=20mm	R=40mm
F1	200	68.0	128.3
F2	300	85.5	160.1
F3	460	114.2	219.5
F4	710	153.2	270.3
F5	940	183.0	327.8
F6	1250	223.6	389.8
F7	1520	258.0	427.2

**Πίνακας 2.1** Πειραματικές Μετρήσεις τάσεων ανά δύναμη

### 2.3 Περιγραφή πειράματος εφελκυσμού

Η εξεταζόμενη πλάκα αποκτήθηκε μέσω του εμπορίου και ενώ είναι χαλύβδινη, δεν είναι γνωστό τί είδους κατεργασίες έχει υποστεί μέχρι την απόκτησή της. Οι ιδιότητές της πλάκας, δηλαδή, δεν αναμένεται να είναι οι προκαθορισμένες ιδιότητες του χάλυβα, που ως πληροφορίες διατίθενται στο διαδίκτυο. Το δοκίμιο, ως μέρος της πειραματικής διάταξης, θα μοντελοποιηθεί για την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων των υλικών, είναι σημαντικό τμήμα της μοντελοποίησης αυτής. Κρίθηκε, έτσι, αναγκαίο να διεξαχθεί πείραμα εφελκυσμού, ώστε να προσδιοριστούν οι απαραίτητες ιδιότητες όπως το μέτρο ελαστικότητας του Young και η καμπύλη τάσης παραμόρφωσης.

Το εργαστήριο διαθέτει γενική μηχανή δοκιμών, στην οποία μπορεί να διεξαχθεί πείραμα εφελκυσμού. Στη συνέχεια, σχεδιάστηκε το σχήμα που πρέπει να έχει το δοκίμιο σύμφωνα με το ISO 6892-1:2016 για μεθόδους δοκιμών εφελκυσμού, μεταλλικών υλικών, σε θερμοκρασία δωματίου-**Σχήμα 2.9**. Το υλικό κόπηκε με ειδικό ψαλίδι στο απαιτούμενο σχήμα-**Σχήμα 2.10** και επεξεργάστηκε με μικρό τροχό ώστε να εξομαλυνθούν οι ατέλειες.



**Σχήμα 2.9** Σχέδιο δοκιμίου πειράματος εφελκυσμού



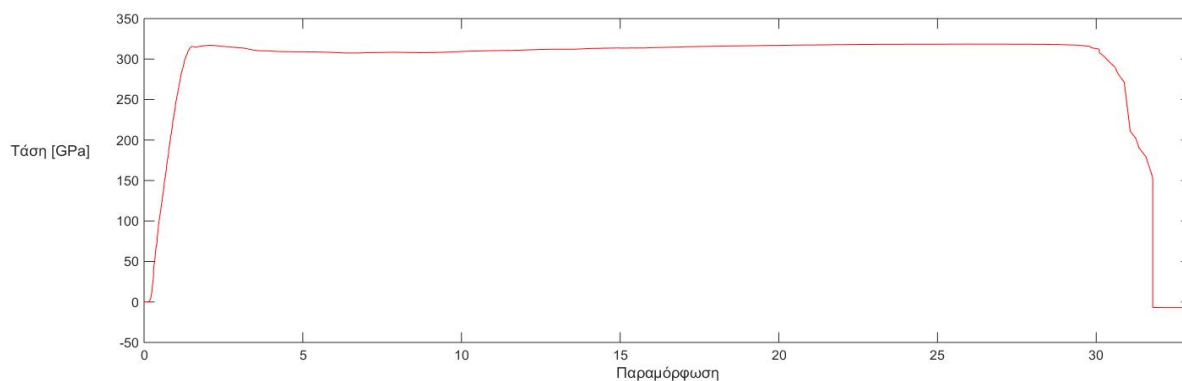
**Σχήμα 2.10** Δοκίμιο πειράματος εφελκυσμού

Το δοκίμιο πρέπει να έχει το συγκεκριμένο σχήμα για την εφαρμογή των ακρινών, πλατιών μερών του στις αρπάγες της μηχανής, αλλά και για τη δημιουργία της αστοχίας στο στενό του μέρος-**Σχήμα 2.11**.



**Σχήμα 2.11** Πείραμα εφελκυσμού

Η μηχανή προσδίδοντας εφελκυστικό φορτίο, μέχρι το σημείο θραύσης, στο δοκίμιο, δημιουργεί με τη βοήθεια λογισμικού, πίνακα με τις τιμές παραμόρφωσης του υλικού. Οι τιμές αυτές αντιστοιχίζονται με τις τιμές τάσης, ολοκληρώνοντας τον πίνακα. Θεωρώντας σημεία τις γραμμές του πίνακα σχηματίζεται η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης-**Σχήμα 2.12**.



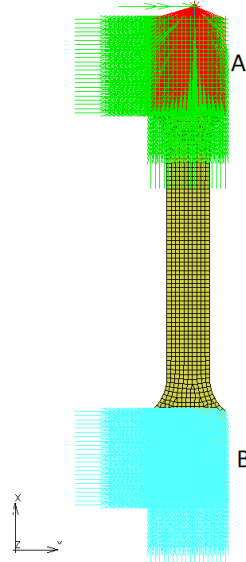
**Σχήμα 2.12** Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης εξεταζόμενης πλάκας

Από την καμπύλη εξάγεται το σημείο του ορίου διαρροής της πλάκας που είναι (1.51, 315.6). Επίσης εξάγεται και το μέτρο ελαστικότητας του Young, που είναι η κλίση της ευθείας που σχηματίζεται από το σημείο (0, 0) και το σημείο διαρροής (1.51, 315.6) και είναι  $E=209$  GPa.

## 2.4 Μοντελοποίηση Πειράματος Εφελκυσμού

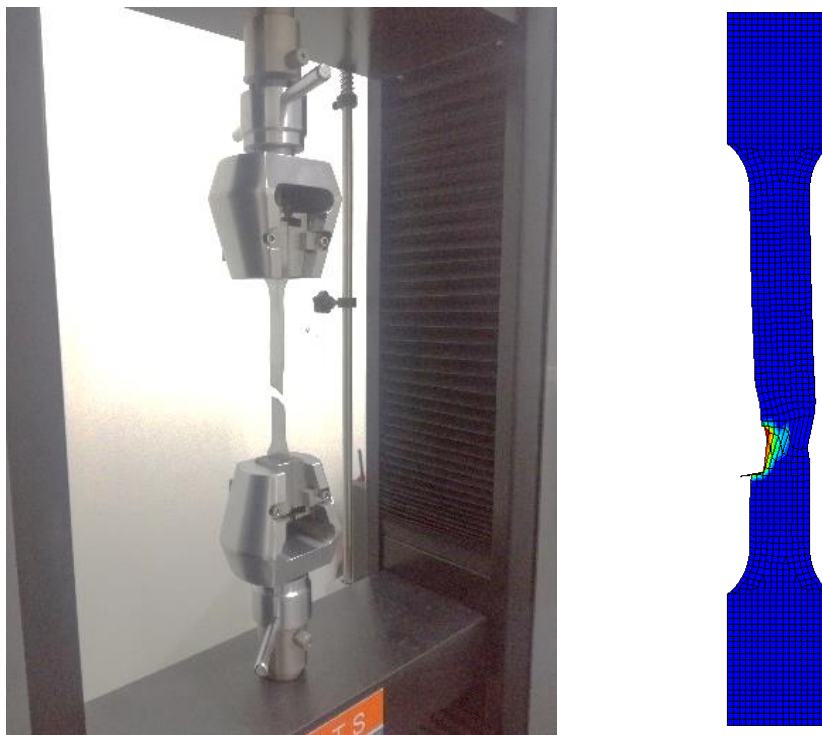
Για την θεωρητική επαλήθευση του πειράματος εφελκυσμού αποφασίστηκε να πραγματοποιηθεί μοντελοποίηση του, στο λογισμικό πακέτο MSC Marc. Το MSC Marc έχει αναπτυχθεί για την διεκπεραίωση μη γραμμικών αναλύσεων και πιο ειδικά για την ανάλυση καταστάσεων θραύσης του υλικού. Η αριθμητική προσομοίωση του πειράματος επιτυγχάνεται

με την πάκτωση της άκρης [B] του δοκιμίου, ενώ στην άκρη [A] δεσμεύεται η κίνηση προς όλες τις διευθύνσεις εκτός αυτής του άξονα  $x'x$ . Στη συνέχεια τα στοιχεία της πλευράς [A] συνδέονται με RB2 (Rigid Body Element) σε ένα σημείο, στο οποίο εισάγεται η μετατόπιση ως συνοριακή συνθήκη-**Σχήμα 2.13**. Ο πίνακας της μετατόπισης είναι γνωστός από το πείραμα εφελκυσμού που προηγήθηκε.



**Σχήμα 2.13** Προσομοίωση συνθηκών πειράματος εφελκυσμού

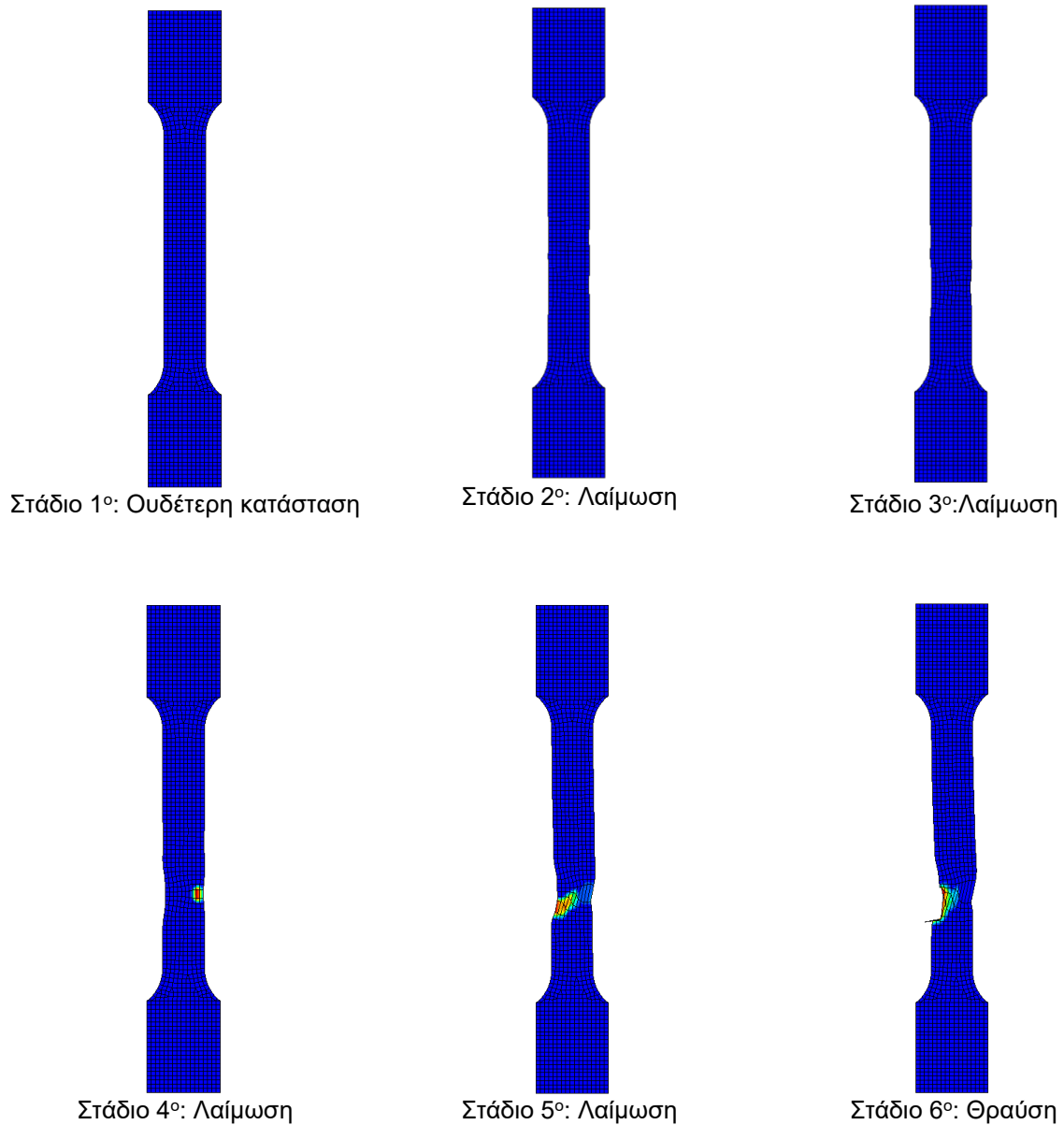
Η εκτέλεση της προσομοίωσης οδηγεί το δοκίμιο στην τελική κατάσταση θραύσης (απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε αντιστοιχία με το δοκίμιο του πειράματος στο **Σχήμα 2.14**.



**Σχήμα 2.14** Σύγκριση πειράματος εφελκυσμού-προσομοίωσης



Τέλος, η προσομοίωση παρέχει την δυνατότητα παρατήρησης των διαφόρων σταδίων εφελκυσμού, που δεν είναι ορατά και διακριτά, διά γυμνού οφθαλμού, σε πραγματικό χρόνο. Το φαινόμενο της λαίμωσης, που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά των όλκιμων υλικών επί την επίδραση φορτίου, γίνεται εμφανές κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, όχι όμως και του πειράματος-**Σχήμα 2.15**.



**Σχήμα 2.15** Απεικόνιση συμπεριφοράς δοκιμίου μέσω προσομοίωσης

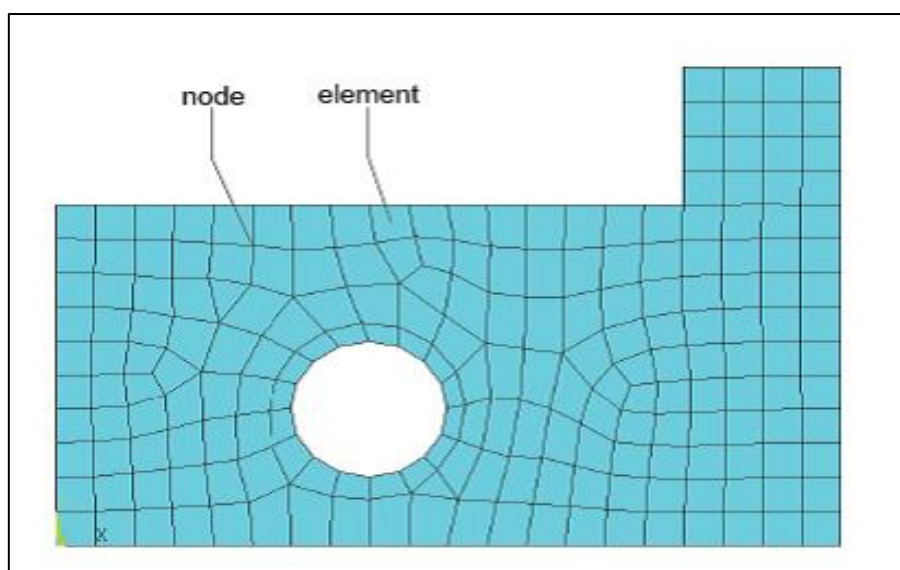
## 3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

### 3.1 Γενικά

Η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Analysis-FEA) είναι μία μέθοδος επίλυσης προβλημάτων, συνήθως κατά προσέγγιση, στην μηχανική και την επιστήμη. Χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα που δεν μπορούν να εκφραστούν επακριβώς, με μαθηματική μορφή. Τέτοιου είδους μέθοδοι είναι απαραίτητες, γιατί αναλυτικές μέθοδοι δεν μπορούν να ανταπεξέλθουν με τα πραγματικά, πολύπλοκα προβλήματα που συναντάμε στην μηχανική. Για παράδειγμα, η μηχανική αντοχή των υλικών και η μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί η πίεση και η καταπόνηση μίας κυρτής δοκού. Από την άλλη όμως, τίποτα από τα δύο δεν θα συνέβαλε στην κατανόηση της κίνησης μίας ανάρτησης ενός αυτοκινήτου όταν αυτό στρίβει. Η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, όταν εφαρμόζεται σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο, απαιτεί μεγάλο αριθμό υπολογισμών για αυτό και η ανάπτυξη της βασίστηκε και στην παράλληλη εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η μέθοδος αυτή, πλέον, χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα φαινομένων. Από δονήσεις και ιδιότητες υλικών, όπως η γραμμική ελαστική συμπεριφορά (νόμος του Hooke), αλλά και παρεκκλίσεις της (μη γραμμική ελαστική-πλαστική συμπεριφορά), μέχρι θερμική αγωγιμότητα, μηχανική των ρευστών και ηλεκτρολογία. Υπάρχουν πολλά υπολογιστικά προγράμματα γενικής χρήσης, που καλύπτουν γενικές περιπτώσεις, αλλά και πιο ειδικά, για εφαρμογές όπως τα δυναμικά φαινόμενα. Ανάλογα με το είδος και την πολυπλοκότητα της ανάλυσης, τέτοια προγράμματα μπορούν να τρέχουν σε μικροϋπολογιστές ή σε supercomputers.

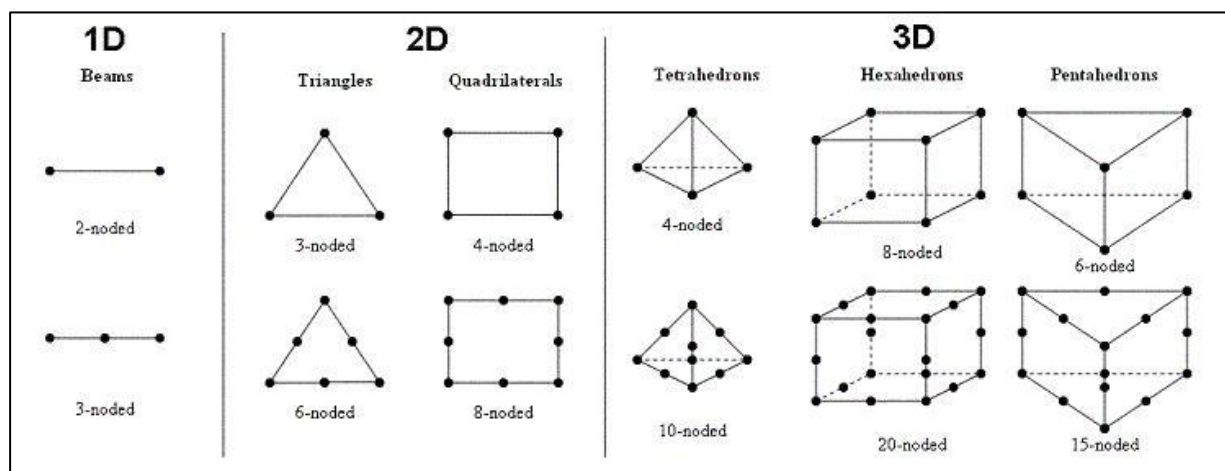
#### Διακριτοποίηση

Η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να εφαρμοστεί σε μονοδιάστατα προβλήματα, αλλά κυρίως σε επιφάνειες και όγκους για τους οποίους απαιτείται λύση. Έτσι το δοκίμιο χωρίζεται σε πολλές μικρότερες επιφάνειες ή όγκους, τα οποία ονομάζονται *πεπερασμένα στοιχεία (finite elements)*. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *διακριτοποίηση* και η «συλλογή» των στοιχείων *πλέγμα (mesh)*. **Σχήμα 3.1**



**Σχήμα 3.1** Παράδειγμα διακριτοποίησης πλάκας

Τα στοιχεία μπορούν να είναι διαφόρων σχημάτων σε δύο ή και τρεις διαστάσεις, όπως φαίνονται στο **Σχήμα 3.2** .



**Σχήμα 3.2** Τα είδη των πεπερασμένων στοιχείων

Τα στοιχεία φαίνεται να συνδέονται μεταξύ τους, αλλά μόνο σε διασυνδεδεμένες αρθρώσεις ή **κόμβους (nodes)**. Οι κόμβοι είναι στις γωνίες των στοιχείων και αναλόγως το είδος του στοιχείου, μπορεί να είναι και στο μέσο των ακμών. Επίσης, οι κόμβοι στα όρια των στοιχείων πρέπει να ανήκουν και στα στοιχεία με τα οποία συνορεύουν. Η ανάλυση υπολογίζει την μετατόπιση στους κόμβους για το φορτίο που εφαρμόζεται στο μοντέλο. Η μετατόπιση του κάθε σημείου του στοιχείου καθορίζεται από την μετατόπιση του κόμβου, είναι δηλαδή συνάρτηση της μετατόπισης των κόμβων.

Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα υπολογισμού της μετατόπισης του κάθε σημείου του αντικειμένου, αντικαθίσταται με πρόβλημα υπολογισμού της μετατόπισης ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων, στην προκειμένη, των κόμβων. Έτσι, η μετατόπιση του κάθε σημείου καθορίζεται από την μετατόπιση των κόμβων, του στοιχείου στο οποίο ανήκει το σημείο. Αν υποθέσουμε ένα δισδιάστατο μοντέλο, τότε η μετατόπιση κάθε σημείου αποτελείται από δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στον άξονα  $x$  και η άλλη παράλληλη στον άξονα  $y$ : αυτοί είναι οι **βαθμοί ελευθερίας**. Κάθε κόμβος σε αυτή την περίπτωση έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Για ένα τρισδιάστατο εξάεδρο ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου είναι τρεις. Άρα για να υπολογίσουμε το συνολικό αριθμό των βαθμών ελευθερίας του μοντέλου πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των κόμβων με τους βαθμούς ελευθερίας κάθε κόμβου. Το υπολογιστικό κόστος και ο χρόνος διεκπεραίωσης αυξάνονται όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας.[2]

Η Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων πραγματοποιείται σε τρία στάδια, τα οποία γίνονται από ένα πακέτο προγραμμάτων ή συνδυασμό αυτών. Οι διεργασίες αυτές είναι η προεπεξεργασία, επίλυση και η μεταγενέστερη επεξεργασία.

### Pre-processing – προεπεξεργασία

Στην **προεπεξεργασία (pre-processing)** δημιουργείται το μοντέλο και ορίζουμε τον τρόπο με τον οποίο δέχεται το φορτίο. Τα προγράμματα προεπεξεργασίας έχουν γραφικό περιβάλλον που επιτρέπει την δημιουργία του μοντέλου αλλά και τη διακριτοποίησή του. Η επιτυχία και η αποτελεσματικότητα της ανάλυσης καθορίζεται σε αυτό το στάδιο από την ικανότητα του χρήστη να επιλέξει τι θα απλοποιήσει, σε σχέση με την πραγματική κατάσταση, αλλά και το

είδος των στοιχείων και του πλέγματος που θα χρησιμοποιηθούν. Το υλικό του μοντέλου πρέπει να έχει τις κατάλληλες ιδιότητες, όπως και το ίδιο το μοντέλο πρέπει να έχει ελευθερία κινήσεων ως προς τις σωστές κατευθύνσεις.

Στη συνέχεια τα γεωμετρικά και υπόλοιπα δεδομένα της προεπεξεργασίας, τα εισάγουμε στο *πρόγραμμα επίλυσης (solver)*, με τη μορφή αρχείου εισαγωγής (input file). Σε αυτό το αρχείο μπορούμε να διαλέξουμε το είδος της ανάλυσης ή τα αποτελέσματα που θέλουμε.

### Solver-Λογισμικό Επίλυσης

Στο κομμάτι της ανάλυσης, της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, το πρόγραμμα επίλυσης επεξεργάζεται το αρχείο εισαγωγής και αφού το ελέγχει για σφάλματα, στη συνέχεια εμφανίζει το αρχείο αποτελεσμάτων (output file). Το συγκεκριμένο αρχείο περιέχει τεράστιο όγκο δεδομένων, για αυτό το λόγο εισάγεται σε *πρόγραμμα μεταγενέστερης επεξεργασίας (post-processor)*.

Το *πρόγραμμα επίλυσης (solver)* έχει συγκεκριμένη λογική στην επίλυση των εξισώσεων, η οποία περιγράφεται με συντομία παρακάτω.

Μετά την εισαγωγή του διακριτοποιημένου μοντέλου ως αρχείο εισαγωγής στο πρόγραμμα επίλυσης, οι εξισώσεις για κάθε στοιχείο υπολογίζονται, συνδυάζονται και δίνουν την εξίσωση του συστήματος. Όταν σχηματιστεί η γενική μορφή των εξισώσεων ενός είδους στοιχείου, ο υπολογισμός των εξισώσεων τους για κάθε τέτοιο στοιχείο γίνεται αρκετά απλός. Οι συντεταγμένες των κόμβων, οι ιδιότητες του υλικού και οι συνθήκες φόρτισης του στοιχείου, απλώς αντικαθίστανται στη γενική μορφή. Οι «ατομικές» εξισώσεις του κάθε στοιχείου συνδυάζονται με αυτές του συστήματος, οι οποίες περιγράφουν την συμπεριφορά ολόκληρου του σώματος. Για στατική ανάλυση και κατασκευαστικά προβλήματα, οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:  $F=K*u$ . Όπου  $[K]$  είναι ένας τετράγωνος πίνακας, γνωστός και ως *πίνακας ακαμψίας (stiffness matrix)*,  $[u]$  είναι το διάνυσμα των άγνωστων μετατοπίσεων των κόμβων και  $[F]$  είναι το διάνυσμα του φορτίου στους κόμβους. Η εξίσωση είναι άμεσα συγκρίσιμη με το ισοζύγιο ή τη σχέση φορτίου-μετατόπισης, που χρησιμοποιείται σε ένα απλό, μονοδιάστατο πρόβλημα ελατηρίου  $k$ , όπου μία δύναμη  $F$  προκαλεί απόκλιση  $u$ . Για να βρούμε την μετατόπιση λόγω μίας γνωστής δύναμης αντιστρέφουμε την παραπάνω σχέση:  $u=k^{-1}f$ .

Η ίδια λογική ισχύει και στη μέθοδο πεπερασμένων. Ωστόσο, πριν αντιστραφεί η συνάρτηση, πρέπει να εφαρμοστούν συνοριακές συνθήκες. Η εξίσωση δεν είναι εύκολο να επιλυθεί, αφού ο αριθμός των εξισώσεων τείνει να είναι πολύ μεγάλος. Δεν είναι παράξενο να υπάρχουν 250000 εξισώσεις, και συνεπώς δεν είναι απλό να αντιστραφεί ο  $[K]$ . Έχουν, όμως, αναπτυχθεί τεχνικές που εκμεταλλεύονται τις ιδιότητες του  $[K]$ , όπως την ομαδοποίηση των τιμών των κελιών γύρω από την κύρια διαγώνιο και τις μηδενικές τιμές μακριά από αυτή, χωρίς να χρειάζεται η αντιστροφή. Αφού βρεθούν, έτσι, οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι πιο απλό να βρεθούν η κόπωση και οι πιέσεις των στοιχείων, βάσει των μετατοπίσεων και των απαραίτητων σχέσεων.

### Post Processing-Λογισμικό Μεταγενέστερης Επεξεργασίας

Το λογισμικό μεταγενέστερης επεξεργασίας λαμβάνει τις πληροφορίες από το αρχείο αποτελεσμάτων και τις παρουσιάζει με γραφικές αναπαραστάσεις και πίνακες κ.α. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί χρώμα για να τονίσει την κλίμακα της πίεσης που δέχεται ένα σώμα.

### 3.1.1 Γραμμική Ανάλυση-Linear analysis

Το πρόβλημα επαφής θα μελετηθεί με δύο ειδών αναλύσεις: Γραμμική Στατική Ανάλυση (**Linear Static Analysis**) και Μη Γραμμική Στατική Ανάλυση (**Non-Linear Static Analysis**).

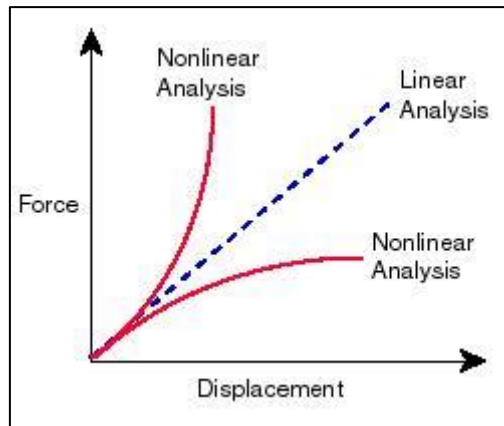
Όσον αφορά την Γραμμική Στατική Ανάλυση, όταν τα φορτία εφαρμόζονται σε ένα σώμα, το σώμα παραμορφώνεται και η επίδραση των φορτίων μεταφέρεται σε ολόκληρο το σώμα. Τα εξωτερικά φορτία προκαλούν εσωτερικές δυνάμεις και αντιδράσεις που το καθιστούν σε κατάσταση ισορροπίας. Μέσω της Γραμμικής Στατικής Ανάλυσης υπολογίζονται οι μετατοπίσεις, η κόπωση, οι πιέσεις και οι δυνάμεις αντίδρασης που προκαλούνται από τα εφαρμοσμένα φορτία. Στην Γραμμική Στατική Ανάλυση γίνονται οι παρακάτω παραδοχές:

#### Παραδοχή Στατικότητας

Όλα τα φορτία εφαρμόζονται αργά και βαθμιαία μέχρι να φτάσουν στο τελικό τους μέγεθος και στη συνέχεια παραμένουν σταθερά (ανεξάρτητα του χρόνου). Αυτή η παραδοχή μας επιτρέπει να αμελήσουμε τις αδρανειακές δυνάμεις και αυτές της απόσβεσης, λόγω των πολύ μικρών επιταχύνσεων και ταχυτήτων. Φορτία που μεταβάλλονται με το χρόνο και προκαλούν σημαντικές αδρανειακές ή αποσβεστικές δυνάμεις, επιβάλλουν δυναμική ανάλυση. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στατική ανάλυση για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς ενός περιστρεφόμενου σώματος με σταθερή ταχύτητα ή σταθερή μεταφορική επιτάχυνση, αφού τα παραγόμενα φορτία δεν αλλάζουν με το χρόνο.[3]

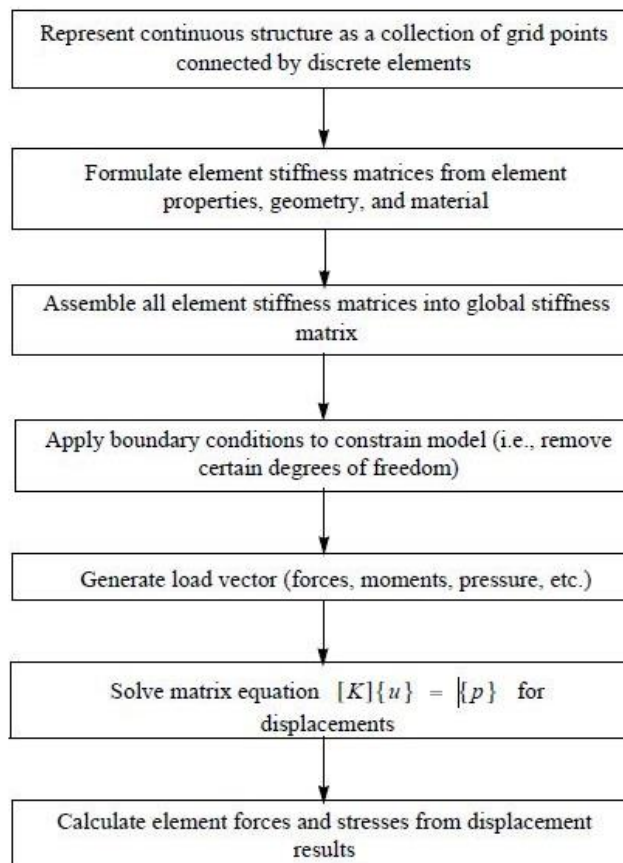
#### Παραδοχή Γραμμικότητας

Στη Γραμμική Ανάλυση υποθέτουμε ότι οι αποκλίσεις και οι κοπώσεις είναι πολύ μικρές και οι πιέσεις μικρότερες του ορίου διαρροής. Συνεπώς, υποτίθεται ότι υπάρχει γραμμική σχέση ανάμεσα στα εφαρμοσμένα φορτία και την αντίδραση της κατασκευής. Η ακαμψία θεωρείται αμετάβλητη και η εξίσωση ισοζυγίου πεπερασμένων στοιχείων ( $F=K*u$ ) είναι γραμμική, όπου ο πίνακας  $K$  είναι ανεξάρτητος των υπολοίπων-**Σχήμα 3.3**. Αυτή η γραμμικότητα σημαίνει ότι οποιαδήποτε αύξηση ή μείωση στο φορτίο θα επιφέρει ανάλογη αύξηση ή μείωση στην μετατόπιση, στην κόπωση και στις πιέσεις. Λόγω της γραμμικής σχέσης, ο υπολογισμός της ακαμψίας γίνεται μόνο μία φορά. Η γραμμική ανάλυση είναι η πιο απλή μορφή ανάλυσης και η πιο οικονομικά συμφέρουσα, για αυτό και χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε κατασκευαστικά προβλήματα. Η συμπεριφορά ενός ιστροπικού, γραμμικού, ελαστικού υλικού ορίζεται από δύο σταθερές: τη σταθερά του Young (μέτρο ελαστικότητας) και το λόγο του Poisson. Στην πραγματικότητα η γραμμική ανάλυση είναι μία προσέγγιση της πραγματικής αντίδρασης της κατασκευής. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η προσέγγιση είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα και σε άλλες παρέχει ανακριβή αποτελέσματα.[4]



**Σχήμα 3.3** Γραμμικότητα της σχέσης  $F=K*u$

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα ροής (Σχήμα 3.4) των ενεργειών, στη Γραμμική Στατική Ανάλυση, που πραγματοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος.



**Σχήμα 3.4** Διάγραμμα ροής Γραμμικής Στατικής Ανάλυσης

### 3.1.2 Μη Γραμμική Ανάλυση-Non Linear Analysis

Οι διαφορές της Γραμμικής με τη Μη-Γραμμική Ανάλυση (Non-Linear Analysis) σε μαθηματικούς όρους έχει να κάνει με τις σχέσεις μεταξύ των γνωστών δεδομένων εισαγωγής και των ζητούμενων. Δηλαδή, μία ανάλυση είναι γραμμική αν η εξίσωση είναι της μορφής

$F=K*u$ , όπου  $F$  είναι το γνωστό δεδομένο,  $u$  είναι το ζητούμενο και  $K$  είναι μία σταθερά. Είναι σαν την εξίσωση μίας ευθείας γραμμής ( $\Psi=\alpha*X$ , όπου  $\alpha$  είναι η κλίση της ευθείας και είναι σταθερή για κάθε τιμή του  $X$ ). Στις Μη Γραμμικές εξισώσεις, η κλίση είναι συνάρτηση του  $X$  ( $\Psi=\alpha(X)*X$ ). Παρόμοια η εξίσωση της ανάλυσης γίνεται  $F=K(u)*u$ . Έτσι η εξίσωση θα είναι τουλάχιστον τετάρτου βαθμού πολυωνυμική και άρα μη γραμμική.

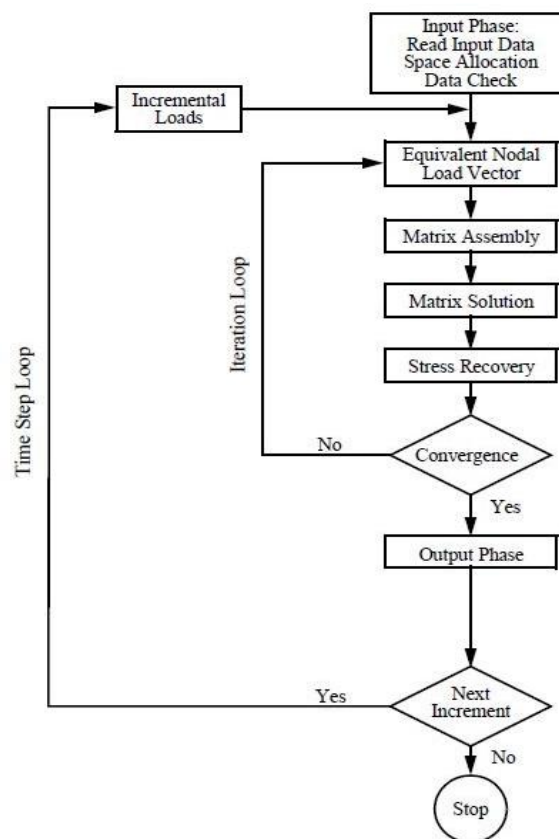
Από την πλευρά της μηχανικής τώρα, στη Γραμμική Ανάλυση, το πρόβλημα λύνεται με ένα βήμα, με μία ανάλυση του πίνακα ακαμψίας  $[K]$ . Η Γραμμική Ανάλυση περιορίζεται σε μικρές μετατοπίσεις, γιατί αλλιώς ο πίνακας ακαμψίας αλλάζει και πρέπει να επαναυπολογιστεί ώστε να χρησιμοποιηθεί. Είναι αναγκαίο να ληφθούν υπόψιν τα μη γραμμικά αποτελέσματα στις κατασκευές, όταν μοντελοποιούνται υλικά με μη γραμμικές συμπεριφορές και μπορεί να εμφανιστούν μεγάλες παραμορφώσεις. Επιπλέον, τα προβλήματα επαφής παρουσιάζουν μη γραμμικά αποτελέσματα, κυρίως λόγω της μεταβολής των οριακών συνθηκών. Σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα η ακαμψία της κατασκευής εξαρτάται από την μετατόπιση και η απόκριση δεν είναι πια γραμμική ως προς το εφαρμοσμένο φορτίο. Όσο η κατασκευή μετατοπίζεται λόγω του φορτίου, η ακαμψία αλλάζει και όσο η ακαμψία αλλάζει, αλλάζει και η απόκριση της κατασκευής.

Συνεπώς, τα μη γραμμικά προβλήματα απαιτούν μεθόδους επίλυσης, σταδιακής αύξησης (**incremental solution**) που διαιρούν το πρόβλημα σε βήματα υπολογίζοντας τη μετατόπιση και στη συνέχεια ενημερώνουν την ακαμψία. Το ολικό φορτίο διαιρείται σε μικρότερα κομμάτια ώστε να μπορέσει να συγκλίνει η λύση. Αυτές οι υποδιαιρέσεις ονομάζονται προσαυξήσεις (increments). Κάθε βήμα χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα του προηγούμενου σαν σημείο έναρξης. Επομένως, ο πίνακας ακαμψίας πρέπει να δημιουργηθεί και να αποσυντεθεί πολλές φορές, προσθέτοντας κόστος και χρόνο στην ανάλυση.

Κατά τη διάρκεια της επίλυσης με σταδιακή αύξηση, οι άνισες δυνάμεις που εμφανίζονται σε μία προσαύξηση φορτίου (load increment), επανεισάγονται στη λύση μέχρι αυτή να συγκλίνει. Η διαδικασία της αναδιανομής των άνισων δυνάμεων λέγεται επανάληψη (**iteration**). Οι επαναλήψεις συνεχίζονται σε μία προσαύξηση φορτίου, ώσπου η λύση να συγκλίνει ή κάποιο από τα υπόλοιπα κριτήρια σύγκλισης επιτευχθεί.[5]

Κριτήριο σύγκλισης είναι η ανοχή σφάλματος και συχνά ορίζεται ως ποσοστό του εφαρμόσιμου φορτίου ή της εξωτερικής δύναμης του μοντέλου, με τιμές 10% έως 1%. Στη συνέχεια υπολογίζεται η διαφορά μεταξύ του εξωτερικού φορτίου (δίνεται από το χρήστη) και του εσωτερικού (υπολογίζεται από το πρόγραμμα). Οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι η διαφορά να είναι αποδεκτά μικρή, μικρότερη, δηλαδή, από το κριτήριο σύγκλισης, όπου και η λύση θεωρείται ότι συγκλίνει.[6] Η μη γραμμική ανάλυση είναι δύσκολη διαδικασία και αποτελεί πρόκληση για τους μηχανικούς. Ένα μη γραμμικό πρόβλημα μπορεί να μην έχει μοναδική λύση. Η μη γραμμική ανάλυση απαιτεί την επιλογή μίας στρατηγικής επίλυσης, η οποία περιλαμβάνει τη διαίρεση του φορτίου σε βήματα, έλεγχο της αριθμητικής επεξεργασίας και σχεδιασμό για την πιθανότητα αλλαγής της στρατηγικής επίλυσης κατά τη διάρκεια της ανάλυσης. Η επιλογή της μεθόδου επίλυσης εξαρτάται από την κατασκευή, τη φύση του φορτίου και την αναμενόμενη μη γραμμική συμπεριφορά. Σε μερικές περιπτώσεις μία μέθοδος μπορεί να υπερτερεί μιας άλλης και σε άλλες το αντίθετο. Αν μία λύση είναι αποδεκτή, υπάρχει και το θέμα της αποδοτικότητας. Πολύ σημαντικό για την αποδοτικότητα είναι το μέγεθος του προβλήματος. Ο χρόνος για τη δημιουργία του πίνακα ακαμψίας, όπως και ο χρόνος για την εύρεση των πιέσεων μετά τη λύση, μεταβάλλονται σχεδόν γραμμικά με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας. Στο **Σχήμα 3.5** παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής της διαδικασίας της Μη

Γραμμικής Ανάλυσης. Τέλος υπάρχουν τρεις πηγές μη γραμμικής συμπεριφοράς στην ανάλυση κατασκευών: μη γραμμικότητα των υλικών, γεωμετρική μη γραμμικότητα και μη γραμμικές οριακές συνθήκες.



Σχήμα 3.5 Διάγραμμα ροής Μη Γραμμικής Στατικής Ανάλυσης

### Μη γραμμικότητα των υλικών – Material non-linearity

Η μη γραμμικότητα των υλικών (Material non-linearity) γίνεται ζήτημα στην ανάλυση αν η σχέση πίεσης-κόπωσης είναι μη γραμμική. Βασικές εξισώσεις χαρακτηρίζουν τη μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού, που προέρχεται από τη μικροσκοπική του σύσταση. Όλα τα υλικά της μηχανικής είναι εν δυνάμει μη γραμμικά. Είναι, όμως, αδύνατο να χαρακτηριστεί ένα υλικό από μία εξίσωση για όλο το φάσμα των φυσικών καταστάσεων όπως είναι η φόρτιση, η θερμοκρασία και ο ρυθμός της παραμόρφωσης. Ανάλογα με την εφαρμογή ή την περίπτωση, η συμπεριφορά ενός υλικού μπορεί να γίνει ιδεατή ή να απλοποιηθεί για συγκεκριμένα φαινόμενα, που είναι σημαντικά για την ανάλυση.

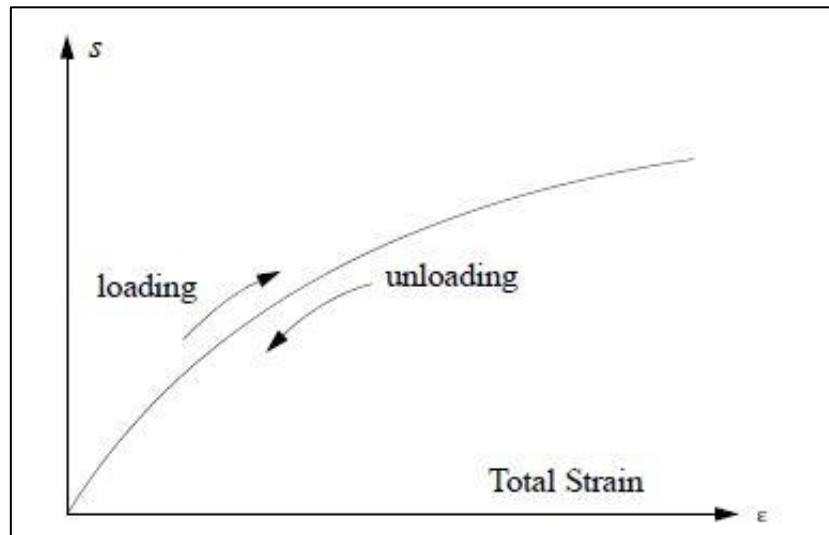
Το ελαστικό (βάσει του Νόμου του Hooke), γραμμικό υλικό είναι η πιο απλή περίπτωση. Ενώ το σώμα αρχίζει να δέχεται κόπωση, το υλικό παρουσιάζει μη γραμμική συμπεριφορά: μη γραμμική ελαστική συμπεριφορά αν μπορεί να επανέλθει και πλαστική αν δεν μπορεί. Αν η θερμοκρασία επηρεάζει τις ιδιότητες του υλικού, τότε πρέπει να ληφθεί υπόψιν η θερμική και μηχανική συμπεριφορά. Επίσης, αν ο ρυθμός της κόπωσης επηρεάζει την αντίδραση του υλικού τότε οι θεωρίες *ισώδους ελαστικότητας* (**visco-elasticity**) ή *ισώδους πλαστικότητας* (**visco-plasticity**) περιγράφουν κατάλληλα τη συμπεριφορά του υλικού. Προσθέτοντας ιστροπικές ιδιότητες το μοντέλο γίνεται πιο περίπλοκο. Μερικά μη γραμμικά υλικά είναι : Μη



γραμμικό πλαστικό, Υπερελαστικό, Ελαστικό-Πλαστικό, Ιξώδους ελαστικότητας, Θερμικά εξαρτώμενο.

### Μη Γραμμικό Ελαστικό Υλικό-Nonlinear Elastic Material

Η σχέση πίεσης-κόπωσης ενός μη γραμμικού ελαστικού υλικού φαίνεται στο **Σχήμα 3.6**, στο οποίο φαίνεται επίσης ότι τόσο η φόρτιση, όσο και η αποφόρτιση ακολουθούν την ίδια διαδρομή. Οι μη γραμμικές ελαστικές θεωρίες βοηθούν στο να προβλεφθεί η πίεση του υλικού σε όλους τους άξονες, για το οποίο υπάρχουν περιορισμένα δεδομένα.



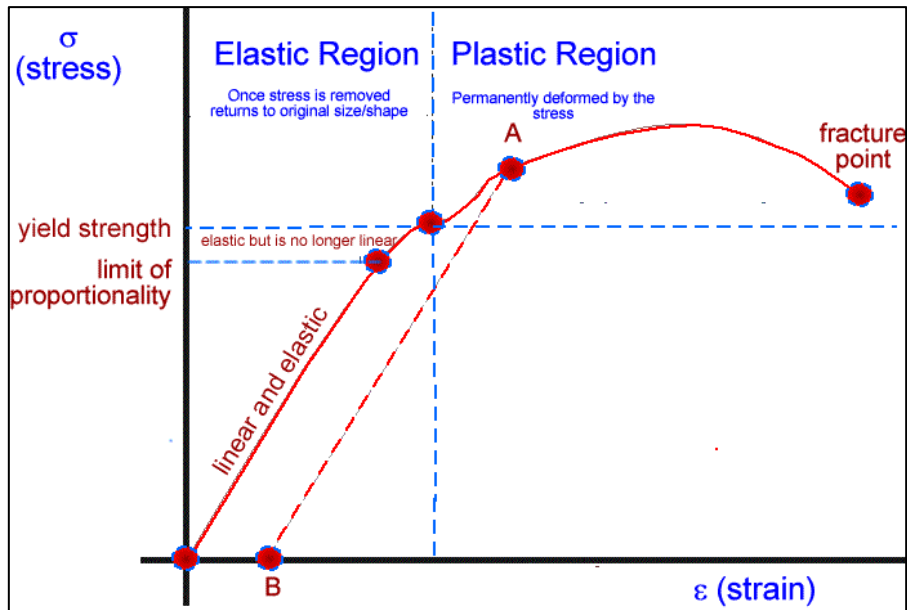
**Σχήμα 3.6** Μη Γραμμικό Ελαστικό Υλικό

### Υπερελαστικό Υλικό – Hyperelastic Material

Το υπερελαστικό μοντέλο χρησιμοποιείται για την ανάλυση των ελαστομερών σε μεγάλη κόπωση. Ελαστομερή είναι φυσικά ή συνθετικά υλικά σαν το λάστιχο, που έχουν την ικανότητα να παραμορφωθούν υπό την επίδραση δύναμης και να επανακτήσουν το αρχικό τους σχήμα, όταν σταματήσει η δύναμη. Χρησιμοποιούνται εκτενώς στη βιομηχανία, λόγω μεγάλης διαθεσιμότητας και χαμηλού κόστους.

### Ελαστικό-Πλαστικό Υλικό – Elastic-Plastic Material

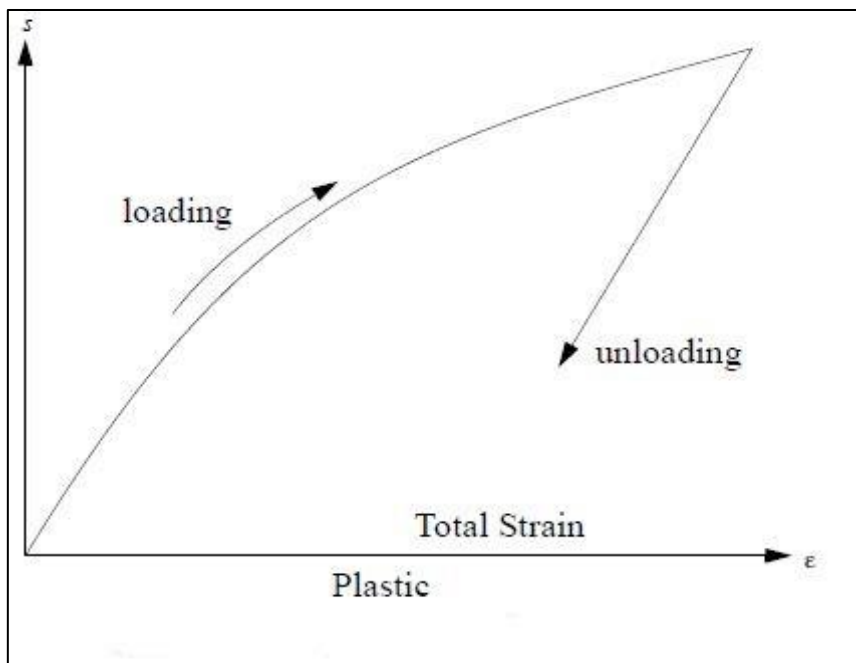
Μία άλλη περίπτωση μη γραμμικότητας υλικού είναι και η πλαστική παραμόρφωση. Η πλαστική παραμόρφωση περιγράφει την συμπεριφορά ενός μη γραμμικού υλικού στην περιοχή που το υλικό παραμορφώνεται μόνιμα από μία δύναμη. Τα περισσότερα υλικά στην μηχανική παρουσιάζουν ελαστική-πλαστική συμπεριφορά, καθώς σε κάθε περίπτωση δύναται να υπάρχει μετάβαση σε πλαστική παραμόρφωση. Αυτή η μετάβαση συμβαίνει όταν το επίπεδο της πίεσης στο φορτισμένο σώμα ξεπερνά το όριο διαρροής. Ένα ελαστικό-πλαστικό υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά στην περιοχή κάτω από το όριο διαρροής, όπου οι παραμορφώσεις δεν είναι μόνιμες-**Σχήμα 3.7**.



**Σχήμα 3.7** Διάγραμμα πίεσης κόπωσης-ελαστικής πλαστικής περιοχής

Επιπλέον το πρόβλημα εξαρτάται από τη διαδρομή (καμπύλη) και η λύση βασίζεται στο ιστορικό της φόρτισης. Όταν ένα πλαστικά παραμορφωμένο σώμα αποφορτίζεται, πιέσεις σε μικροσκοπικό επίπεδο παραμένουν και επηρεάζουν το λυγισμό με ένα διαφορετικό φορτίο. Αν η προηγούμενη κόπωση είναι μία ομοιόμορφη υπερέκταση του σώματος, τότε επαναφορτίζεται ώστε να συμπυκνώνεται στην ίδια κατεύθυνση, με μικρότερο, όμως, φορτίο. Αυτή η κατάσταση είναι γνωστή ως το *Φαινόμενο του Bauschinger* (**Bauschinger Effect**).

Το φαινόμενο του Bauschinger περιγράφεται καλύτερα με αναφορά στο **Σχήμα 3.8**, το οποίο παρουσιάζει μία ιδεατή καμπύλη πίεσης-κόπωσης ενός μετάλλου, αρχικά παραμορφωμένου από μία ομοιόμορφη δύναμη, που όταν σταματά, το σώμα επαναφορτίζεται σε συμπύκνωση.



**Σχήμα 3.8** Το φαινόμενο του Bauschinger

## Ιξώδους Ελαστικότητας Υλικό – Visco-Elastic Material

Υπάρχουν υλικά που η μη γραμμικότητα τους εξαρτάται από το χρόνο. Αυτό ισχύει για μεγάλο αριθμό υλικών που βρίσκονται κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, όπου ο ρυθμός της εξάρτησης του υλικού δεν μπορεί πλέον να αγνοηθεί.

Παράδειγμα τέτοιας μη γραμμικότητας στη μηχανική συνεχούς μέσου, είναι η ιξώδης ελαστική συμπεριφορά. Αυτή η συμπεριφορά εμφανίζεται σε υλικά που βρίσκονται σε διαδικασία διαμόρφωσης και έχουν την τάση να γυρίζουν σε προηγούμενες καταστάσεις ανά χρονικά διαστήματα, μετά από παραμόρφωση. Το υλικό σχετίζεται με τη μνήμη σχήματος (shape memory), η οποία αποτελείται από ολόκληρο το ιστορικό της ιξώδους κόπωσης.

Υπάρχει ποικιλία από διαδικασίες διαμόρφωσης ή επεξεργασίας στις οποίες πρέπει να μοντελοποιηθούν οι ιξώδεις ελαστικές επιπτώσεις. Παράδειγμα είναι η μέθοδος ρεόντων υλικών που περιλαμβάνει εξαγωγή πολυμερών. Σε αυτό το παράδειγμα μόνο οι όροι ιξώδους μοντελοποιούνται. Οι αδρανειακές επιπτώσεις είναι αμελητέες, αφού ένας πολύ μικρός αριθμός Reynolds ( $Re \ll 1$ ) σχετίζεται με το ρέον υλικό. Όταν μοντελοποιείται ρέον υλικό με μεγαλύτερο αριθμό Reynolds πρέπει να ληφθούν υπόψιν και οι αδρανειακοί όροι στις βασικές εξισώσεις.

### Ερπυσμός - Creep

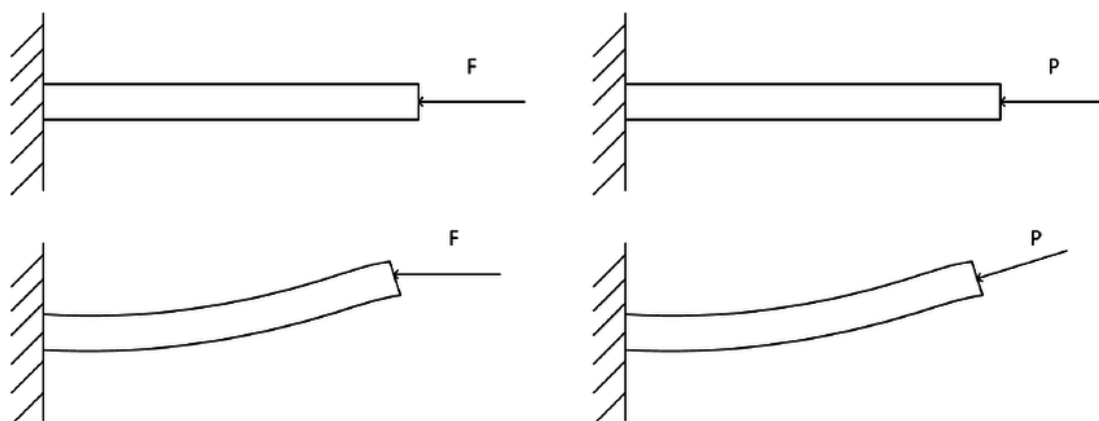
Ερπυσμός είναι μία συμπεριφορά που εξαρτάται από το χρόνο και μπορεί να εμφανιστεί σε οποιοδήποτε μέγεθος φορτίου, μεγάλο ή μικρό, είτε πάνω είτε κάτω από το όριο διαρροής του υλικού. Ο ερπυσμός γίνεται σημαντικός παράγοντας της διεργασίας όταν υπάρχουν υψηλές θερμοκρασίες. Σε πολλές περιπτώσεις, τον ερπυσμό ακολουθεί η πλαστική παραμόρφωση, όταν όμως η πίεση βρίσκεται πάνω από το όριο διαρροής.

### Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα – Geometric Non-Linearity

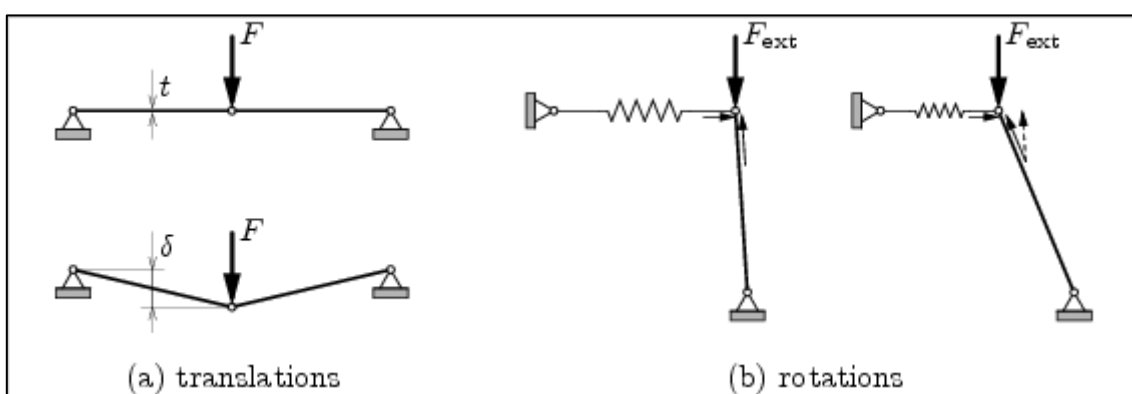
Η *Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα (Geometric Non-linearity)* εμφανίζεται σε προβλήματα που περιλαμβάνουν μεγάλες περιστροφές και μεγάλες παραμορφώσεις. Τα χαρακτηριστικά της είναι οι *ακολουθητικές δυνάμεις (follower forces)* και γεωμετρική ακαμψία εξαιτίας των μεγάλων περιστροφών και μεγάλη κόπωση λόγω της παραμόρφωσης.

Ο όρος ακολουθητικές δυνάμεις αναφέρεται στα εφαρμοσμένα φορτία που αλλάζουν κατεύθυνση και μέγεθος, ως αποτέλεσμα των κατασκευαστικών μετατοπίσεων και περιστροφών-**Σχήμα 3.9**.

Οι γεωμετρικές μη γραμμικές επιπτώσεις είναι σημαντικές αν οι διαφορές στο σχήμα του παραμορφωμένου σώματος, είναι διακριτές με γυμνό μάτι-**Σχήμα 3.10**. Ένας πιο αυστηρός και περιεκτικός ορισμός των μεγάλων παραμορφώσεων (large deformations) μπορεί να αποδοθεί από την θεωρία πλακών των Kirchhoff και Love: υπάρχει μεγάλη παραμόρφωση όταν αυτή ξεπερνά το 20% του πάχους της πλάκας. Ωστόσο, αυτός ο ορισμός θεωρείται λίγο συντηρητικός για μία αριθμητική ανάλυση και δεν υπάρχει ξεκάθαρο όριο για τις μεγάλες μετατοπίσεις, επειδή οι γεωμετρικές μη γραμμικές επιπτώσεις σχετίζονται με τις οριακές συνθήκες, όπως και με τις διαστάσεις της κατασκευής. Αν δύναται να εκτιμηθεί το οριακό σημείο της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης, τότε το σημείο φόρτισης θα είναι στην πλαστική περιοχή.[7]



**Σχήμα 3.9** Παράδειγμα μη ακολουθητικής (αριστερά) και ακολουθητικής (δεξιά) δύναμης



**Σχήμα 3.10** Ορατή Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα

Περιστροφή άκαμπτου σώματος ή παραμορφώσης λόγω περιστροφών, φανερώνουν την ύπαρξη γεωμετρικής μη γραμμικότητας που περιλαμβάνει μεγάλη περιστροφή. Σκλήρυνση μίας μεμβράνης ή ενός εκκρεμούς, ανήκουν επίσης στην ίδια κατηγορία. Η κίνηση του εκκρεμούς υπό την επίδραση του βάρους προκαλείται από τη γεωμετρική ακαμψία. Ακολουθητικές δυνάμεις σχηματίζονται όταν τα εφαρμοσμένα φορτία εξαρτώνται από τη μετατόπιση, όπως το φορτίο της πίεσης ή ένα θερμικό φορτίο στα οποία υπόκειται μία περιστρεφόμενη επιφάνεια. Η φυγοκεντρική δύναμη είναι επίσης ακολουθητική δύναμη. Επιπτώσεις μεγάλης κόπωσης συναντώνται σε διαμόρφωση μετάλλου, λάστιχου και ελαστομερών εφαρμογών. Σε αυτές τις περιπτώσεις η κόπωση ξεπερνά το 100% και χρειάζεται η διατύπωση της σε πεπερασμένη μορφή, ώστε να αντιμετωπιστούν αυτού του είδους προβλήματα.[8]

### Μη Γραμμικές Οριακές Συνθήκες – Non Linear Boundary Conditions

Υπάρχουν τριών ειδών μη γραμμικές οριακές συνθήκες: επαφή, μη γραμμική στήριξη και μη γραμμική φόρτιση. Η μη γραμμική στήριξη (non linear support) μπορεί να περιλαμβάνει μη γραμμικά ελατήρια. Μη γραμμικότητες που παρουσιάζονται λόγω άκαμπτων συνδέσμων, και ενεργοποιούνται ή απενεργοποιούνται στην ανάλυση, μπορούν να μοντελοποιηθούν προσαρμόζοντας τις γραμμικές εδράσεις.

Ασυνέχειες είναι η εκ φύσεως αιτία πολλών τέτοιων μη γραμμικοτήτων, δυσκολεύοντας την επίλυση. Μερικές από τις πιο έντονες μη γραμμικότητες στη μηχανική εισάγονται και αντιμετωπίζονται μέσω των οριακών συνθηκών.

Η μη γραμμικότητα φόρτισης (nonlinear loading) εμφανίζεται όταν η κατασκευή παραμορφώνεται και οι διευθύνσεις, μαζί με τις περιοχές των επιφανειακών δυνάμεων, αλλάζουν. Γενικά, τέτοιες μεταβολές είναι πολύ μικρές και οι επιπτώσεις τους στο ισοζύγιο αγνοούνται. Σε μερικές κατασκευές, όμως, όπως μία εύκαμπτη κατασκευή από στοιχεία κελύφους (shell elements), που δέχεται μεγάλα φορτία, τα αποτελέσματα της ανάλυσης μπορεί να είναι τέτοια, ώστε να χρειαστεί να συμπεριληφθούν οι επιπτώσεις των επιφανειακών δυνάμεων στις εξισώσεις επίλυσης.

### Μη Γραμμικότητα Επαφής

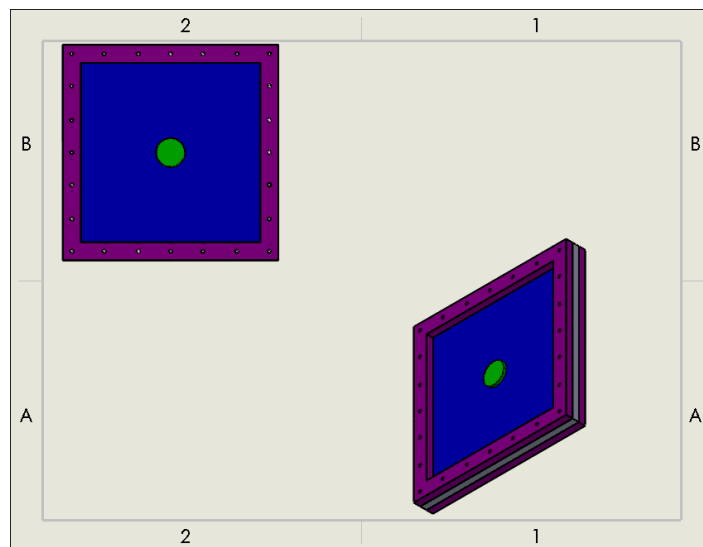
Η προσομοίωση υλικών προβλημάτων απαιτεί την ικανότητα της μοντελοποίησης φαινομένων επαφής. Αυτή περιλαμβάνει την ανάλυση του μοντελοποιημένου και συναρμολογημένου μηχανισμού, λάστιχα, συγκρούσεις και διεργασίες κατασκευής ανάμεσα σε άλλα. Η ανάλυση επαφής είναι περίπλοκη λόγω των απαιτήσεων για την ακριβή παρακολούθηση της κίνησης, πολλών γεωμετρικών σωμάτων και την κίνηση εξαιτίας της αλληλεπίδρασης αυτών, μετά την επαφή. Έτσι είναι αναγκαίος ο συμβολισμός της τριβής μεταξύ των επιφανειών και η μεταφορά θερμότητας, αν χρειάζεται. Ο στόχος εδώ είναι η κατανόηση της κίνησης των σωμάτων, η εφαρμογή των κατάλληλων περιορισμών, ώστε να μην διαπεράσει το ένα σώμα το άλλο και ο ορισμός των οριακών συνθηκών ώστε να προσομοιωθεί η τριβή και η μεταφορά θερμότητας.

Σε μερικά κατασκευαστικά προβλήματα, η επαφή εμφανίζεται μεταξύ δύο παραμορφώσιμων σωμάτων ή το ένα να είναι αρκετά πιο άκαμπτο από το ενδιαφερόμενο και να μοντελοποιείται ως άκαμπτο. Στην περίπτωση των κατασκευαστικών προβλημάτων η επαφή χαρακτηρίζει τις πιέσεις και τις δυνάμεις που μεταφέρονται, ενώ σε προβλήματα θερμοκρασίας χαρακτηρίζει την θερμότητα. Υπάρχει, βέβαια και ο συνδυασμός αυτών των δύο προβλημάτων με τη μεταφορά θερμότητας και πιέσεων.

## 3.2 Μοντελοποίηση του Πειράματος

Στη διαδικασία της προεπεξεργασίας επιλέχθηκε να μοντελοποιηθεί μόνο το σύστημα των πλαισίων-πλάκας μαζί με τον κύλινδρο-**Σχήμα 3.11**. Η επιλογή αυτή έγινε, λόγω του ότι η εξεταζόμενη περιοχή επηρεάζεται άμεσα, μόνο από τα παραπάνω τμήματα. Ο ρόλος της υπόλοιπης κατασκευής είναι να προσδίδει στιβαρότητα και ακινησία, οπότε μπορεί να μην ληφθεί υπόψιν αν αντικατασταθεί από την κατάλληλη πάκτωση.

Η μοντελοποίηση του εξεταζόμενου τμήματος πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό ANSA pre-processor της BETA CAE Systems S.A. Το λογισμικό προσφέρει τη δυνατότητα σχεδιασμού και σχηματισμού του πλέγματος, επεξεργασίας των συνθηκών του μοντέλου, αλλά και τρόπους επίλυσης μέσω του ενσωματωμένου solver Epilysis. Το συγκεκριμένο μοντέλο έχει απλή γεωμετρία κάνοντας τη δημιουργία του πλέγματος αρκετά απλή και εύκολη, χωρίς να χρειάζεται ιδιαίτερη επεξεργασία, παρά σε μερικά ειδικά σημεία.



Σχήμα 3.11 Μοντελοποιημένο τμήμα

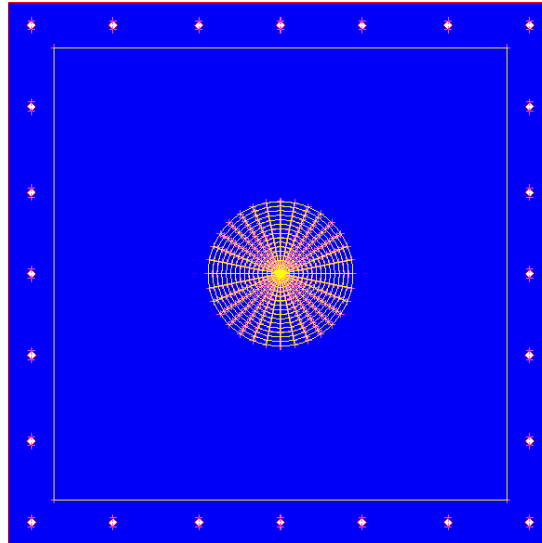
### 3.2.1 Διακριτοποίηση Μοντέλου

Σε όλες τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιήθηκε το ίδιο μοντέλο όσο αφορά την διακριτοποίηση (αριθμός-είδος στοιχείων), την πάκτωση και τις ιδιότητές του. Οι διαφορές που υπάρχουν στις επιμέρους αναλύσεις θα παρουσιαστούν στις αντίστοιχες ενότητες.

#### Διακριτοποίηση Δοκιμίου

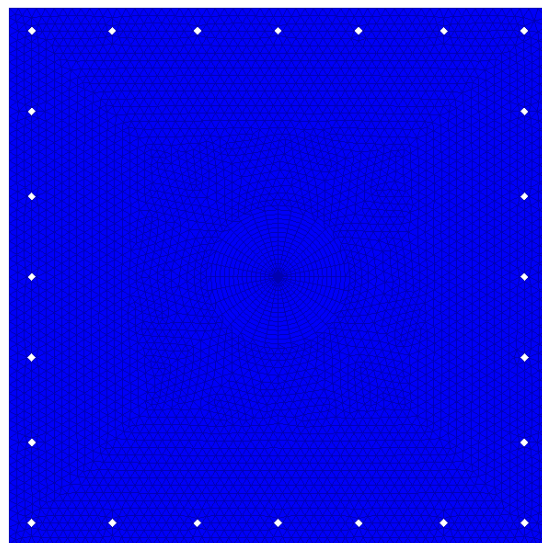
Το δοκίμιο ως λεπτότοιχη πλάκα αναλύεται μόνο σε δισδιάστατα επιφανειακά στοιχεία, που έχουν τις κατάλληλες ιδιότητες για να δημιουργηθεί μία σωστή προσέγγιση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, στην ευρύτερη περιοχή επαφής του κυλίνδρου (διάμετρος κυλίνδρου: 80mm) με την πλάκα, θεωρήθηκε σωστό να σχεδιαστεί το πλέγμα και να μη γίνει αυτόματος σχηματισμός του από το λογισμικό. Έτσι, αφού το ένα αντικείμενο επαφής είναι κυλινδρικού σχήματος, σχεδιάστηκαν 16 ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο, το κέντρο του δοκιμίου. Ο μεγαλύτερος κύκλος έχει ακτίνα 80mm και κάθε επόμενος, 5mm μικρότερη ακτίνα. Οι κύκλοι χωρίζονται σε μικρότερα τμήματα με 32 ακτινικά ευθύγραμμα τμήματα όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.12**. Αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία 480 τετραγωνικών στοιχείων (quads) και 64 τριγωνικών (trias), στην επιφάνεια με ακτίνα 80mm. Το σχηματισμένο πλέγμα είναι αρκετά πυκνό, ώστε να αποδώσει με μεγαλύτερη ακρίβεια και λεπτομέρεια τις τάσεις που δέχεται.

Στη συνέχεια για να προσομοιωθεί η επιφάνεια πάκτωσης που δημιουργείται λόγω των πλαισίων και της σύσφιξης των κοχλιών, επικολλήθηκαν οι εσωτερικές ακμές των πλαισίων που έχουν επαφή με την πλάκα-**Σχήμα 3.12**. Αυτή η τεχνική δίνει τη δυνατότητα παραγωγής πανομοιότυπου πλέγματος μεταξύ των κοινών επιφανειών, των πλαισίων και του δοκιμίου.



**Σχήμα 3.12** Σχέδιο πλέγματος δοκιμίου

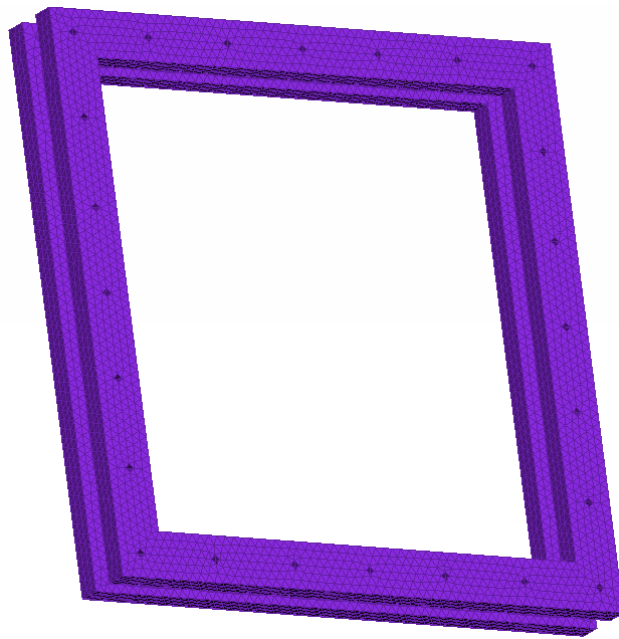
Το υπόλοιπο της πλάκας διακριτοποιήθηκε αυτόματα μέσω του λογισμικού, καθώς εκτός από την ευρύτερη περιοχή της επαφής του κυλίνδρου με την πλάκα, δεν αναμένεται να αναπτυχθούν υψηλές τάσεις σε άλλη περιοχή. Έτσι το πλέγμα αποτελείται από 8508 τριγωνικά και 480 τετραγωνικά επιφανειακά στοιχεία και κάθε πλευρά ορίζεται 10mm-**Σχήμα 3.13**.



**Σχήμα 3.13** Πλέγμα δοκιμίου

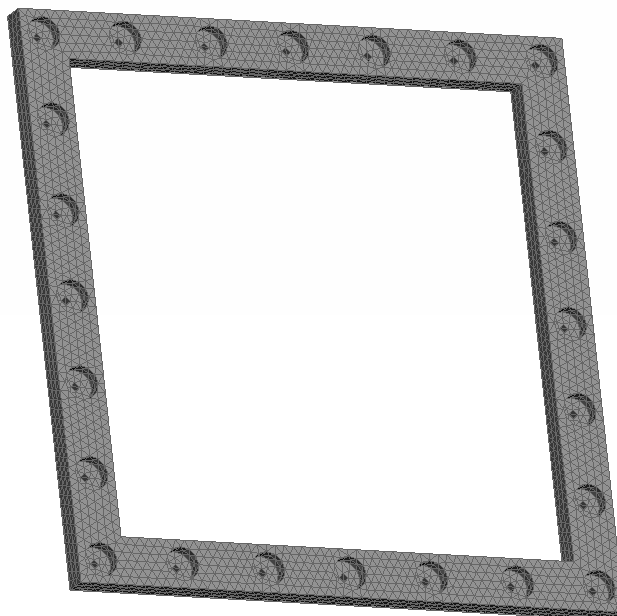
### Διακριτοποίηση πλαισίων

Τα πλαίσια μοβ χρώματος είναι πανομοιότυπα-**Σχήμα 3.11** και το ίδιο ισχύει για το πλέγμα τους. Εδώ, επίσης, οι πλευρές των στοιχείων είναι 10mm, αλλά έχουμε τετραεδρικά χωρικά στοιχεία (tetras)-**Σχήμα 3.13**. Τα συγκεκριμένα στοιχεία προέρχονται από τριγωνικά επιφανειακά, που προβάλλονται στο χώρο, έτσι έχουμε ταύτιση με το πλέγμα του δοκιμίου. Επιπλέον, τα τετραεδρικά στοιχεία έχουν το πλεονέκτημα να προσαρμόζονται εύκολα σε περίπλοκες γεωμετρίες, όπως είναι οι οπές στα πλαίσια. Συνολικά, για τα δύο πλαίσια, δημιουργήθηκαν 41420 τετραεδρικά χωρικά στοιχεία.



**Σχήμα 3.13** Πλέγμα Πλαισίου-1

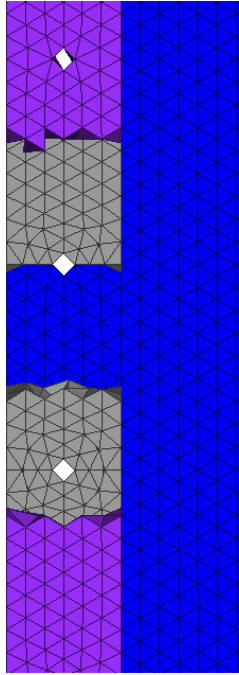
Όσο αφορά το γκρίζο πλαίσιο (Πλαίσιο-2), η διαφορά του με τα προηγούμενα (Πλαίσιο-1) είναι στις σπές. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε, όμως, είναι ίδια, ώστε να υπάρχει κοινό πλέγμα. Έτσι, δημιουργήθηκαν 19281 τετραεδρικά χωρικά στοιχεία-**Σχήμα 3.14**.



**Σχήμα 3.14** Πλέγμα Πλαισίου-2

Στο **Σχήμα 3.15** παρουσιάζεται το κοινό πλέγμα που σχηματίζεται τελικά και προσδίδει τις ιδιότητες της επιφάνειας πάκτωσης στο μοντέλο.

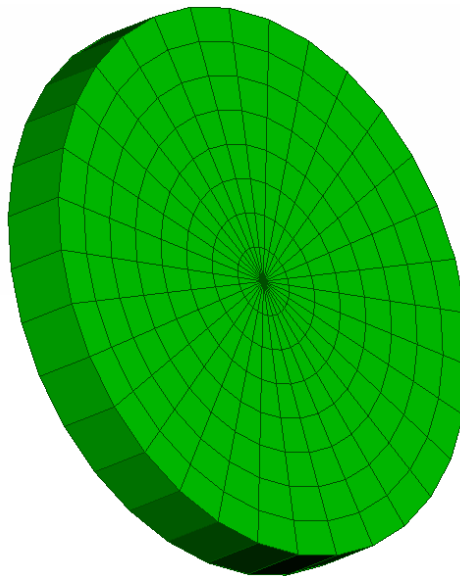




**Σχήμα 3.15** Κοινό πλέγμα πλάκας-πλαισίων

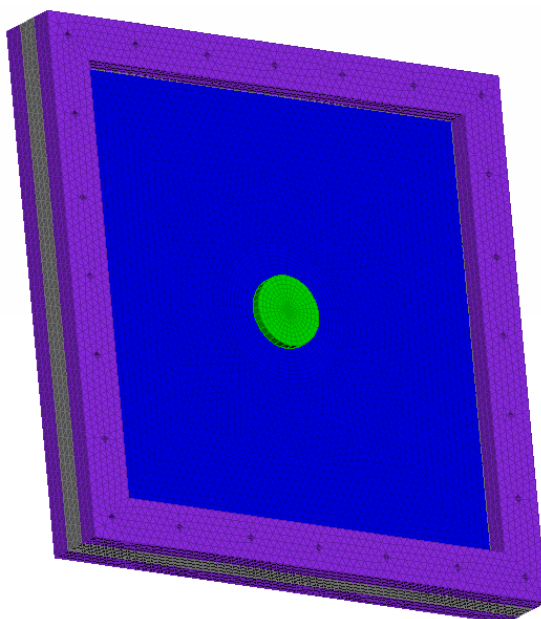
### Διακριτοποίηση Κυλίνδρου

Ο κύλινδρος διαμέτρου 80mm διακριτοποιήθηκε όπως η κεντρική επιφάνεια της πλάκας. Σχεδιάστηκαν, δηλαδή, κύκλοι, όπου ο κάθε ένας έχει 5mm μικρότερη ακτίνα από τον προηγούμενο και χωρίστηκε από ακτινικά ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι, το τελικό πλέγμα που σχηματίστηκε περιέχει 32 πεντάεδρα και 224 εξάεδρα χωρικά στοιχεία, αφού το επιτρέπει η απλή γεωμετρία του κυλίνδρου-**Σχήμα 3.16**.



**Σχήμα 3.16** Πλέγμα κυλίνδρου

Συγκεντρωτικά, το μοντέλο αποτελείται από 8988 επιφανειακά (480 τετραγωνικά και 8508 τριγωνικά) και 60956 χωρικά στοιχεία (60700 τετράεδρα, 32 πεντάεδρα και 224 εξάεδρα)-**Σχήμα 3.17**.



Σχήμα 3.17 Τελικό πλέγμα μοντέλου

### 3.2.2 Ιδιότητες υλικών

Η πειραματική διάταξη κατασκευάστηκε από επεξεργασμένο ξύλο MDF, οι ιδιότητες του οποίου είναι διαθέσιμες στο διαδίκτυο, όπως και του χάλυβα αντίστοιχα για τον κύλινδρο. Τέλος, οι απαραίτητες ιδιότητες του δοκιμίου ελήφθησαν από το πείραμα εφελκυσμού- Πίνακας 3.1.

Τμήμα	Στοιχείο	Μέτρο ελαστικότητας του Young [MPa]	Λόγος Poisson	Πυκνότητα [ton/mm <sup>3</sup> ]
Πλαίσιο 1	Χωρικό	40000	0.25	7.55E-10
Πλαίσιο 2	Χωρικό	40000	0.25	7.55E-10
Κύλινδρος	Χωρικό	210000	0.3	7.85E-9
Δοκίμιο	Επιφανειακό (πάχος t=0.3mm)	209000	0.3	7.85E-9

Πίνακας 3.1 Ιδιότητες υλικών

### 3.3 Ανάλυση μοντέλου με πεπερασμένα στοιχεία

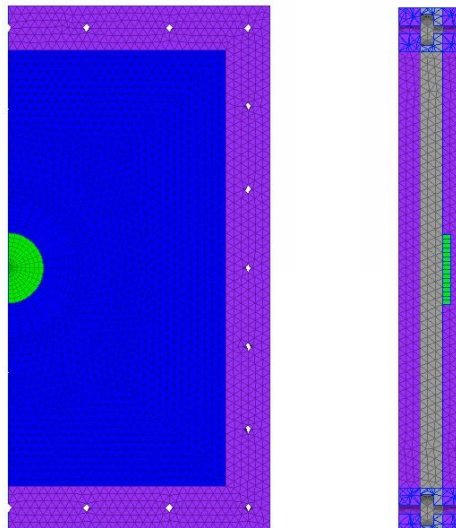
Για την ορθότερη, πιο ολοκληρωμένη ανάλυση του πειράματος και κατά συνέπεια του προβλήματος, που τέθηκε ως αφορμή για αυτή τη διερεύνηση, αποφασίστηκε να γίνουν δύο ειδών αναλύσεις: Γραμμική και Μη Γραμμική Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων. Στη Γραμμική ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν απλές και ελάχιστες εντολές βάσει των παραδοχών, ώστε η ανάλυση να συντάσσεται, αλλά και να επιλύεται πιο γρήγορα. Η μη γραμμική ανάλυση,

από την άλλη, αποτελείται από σύνθετες εντολές για την κάλυψη των τριών μη γραμμικοτήτων που υπάρχουν στο πρόβλημα, είναι όμως πιο περίπλοκη και χρονοβόρα στην εκτέλεση της.

### 3.3.1 Γραμμική ανάλυση του μοντέλου

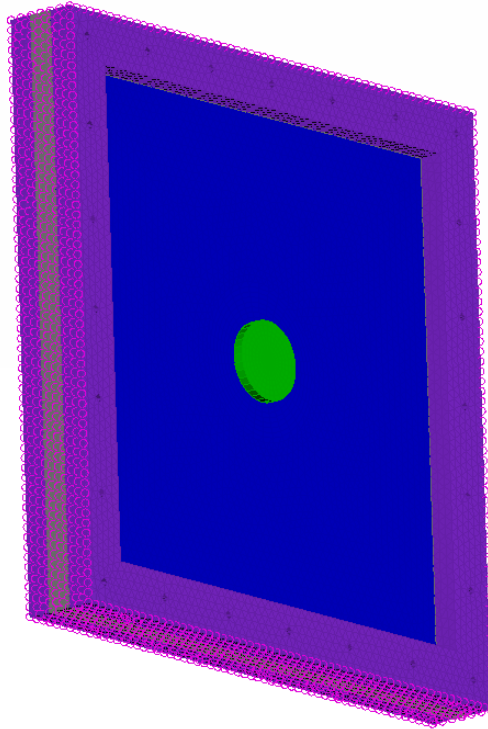
Η Γραμμική Ανάλυση πραγματοποιήθηκε για να εξεταστεί, κατά πόσο ευσταθούν οι παραδοχές, που δύναται να γίνουν σε ένα πρόβλημα επαφής με λεπτότοιχες διατομές. Οι παραδοχές αυτές αποσκοπούν στην διευκόλυνση του μελετητή, τόσο στην κατανόηση του προβλήματος, όσο και στη σύνταξη της ανάλυσης που πραγματοποιεί. Στο παρόν μοντέλο η σταθερότητα του πίνακα ακαμψίας  $[K]$ , δηλαδή, η μη μεταβλητότητά του συναρτήσει της μετατόπισης του δοκιμίου, είναι μία παραδοχή, αφού ο πίνακας υπολογίζεται μία μόνο φορά. Επίσης, αναγκαία παραδοχή είναι και η αυστηρώς πλαστική παραμόρφωση της πλάκας, αφού δεν υπάρχει δυνατότητα για επεξεργασία πληροφοριών πλαστικής παραμόρφωσης σε αυτό το είδος ανάλυσης.

Στη Γραμμική Ανάλυση δεν είναι δυνατή η επίλυση μη γραμμικοτήτων, όπως είναι η επαφή μεταξύ σωμάτων, έτσι ο κύλινδρος, για τη συγκεκριμένη ανάλυση, είναι επικολλημένος στην επιφάνεια της πλάκας, ώστε να θεωρηθούν ως ένα σώμα-**Σχήμα 3.18**.



**Σχήμα 3.18** Μοντέλο με επικολλημένο τον κύλινδρο στο δοκίμιο

Μέρος των οριακών συνθηκών που ορίστηκαν στο μοντέλο είναι η πάκτωση προς όλες τις κατευθύνσεις, προσομοιώνοντας την πάκτωση της πειραματικής διάταξης. Στην διάταξη η πάκτωση του συστήματος πλαισίων, πλάκας γίνεται μέσω των ξύλινων συνδέσμων καβίλιας που βρίσκονται περιμετρικά των πλαισίων. Έτσι στο μοντέλο εφαρμόστηκε SPC (single point constraint) σε 2412 κόμβους, περιμετρικά των πλαισίων, δεσμεύοντας την κίνηση τους προς όλες τις κατευθύνσεις-**Σχήμα 3.19**.



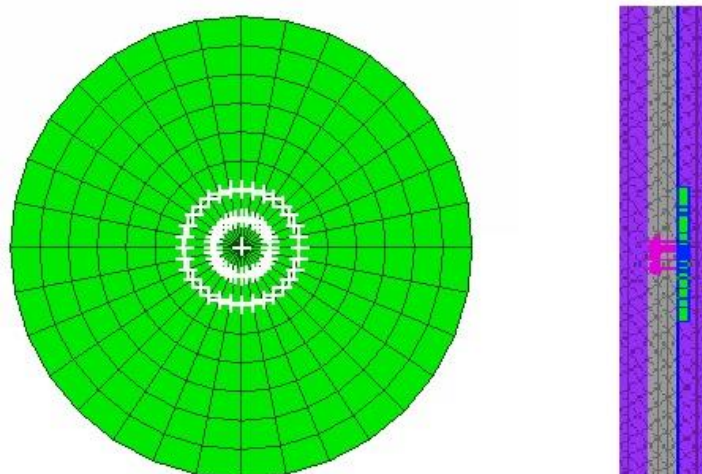
**Σχήμα 3.19** Εφαρμογή SPC περιμετρικά των πλαισίων

Συμπληρώνοντας τις οριακές συνθήκες του πειράματος ορίστηκαν οι δυνάμεις που δέχεται το μοντέλο. Οι τιμές τους εξήχθησαν από τη διαδικασία του πειράματος και τις μετρήσεις του δυναμόμετρου. Με τη βοήθεια του διαγράμματος που σχηματίστηκε από το δυναμόμετρο-**Σχήμα 2.8**, και επιλέγοντας τιμές που είναι σταθερές για αρκετό χρόνο, δημιουργήθηκε ο πίνακας δυνάμεων-**Πίνακας 3.2**.

Δύναμη [N]	200	300	460	710	940	1250	1520
---------------	-----	-----	-----	-----	-----	------	------

**Πίνακας 3.2** Δυνάμεις που χρησιμοποιήθηκαν

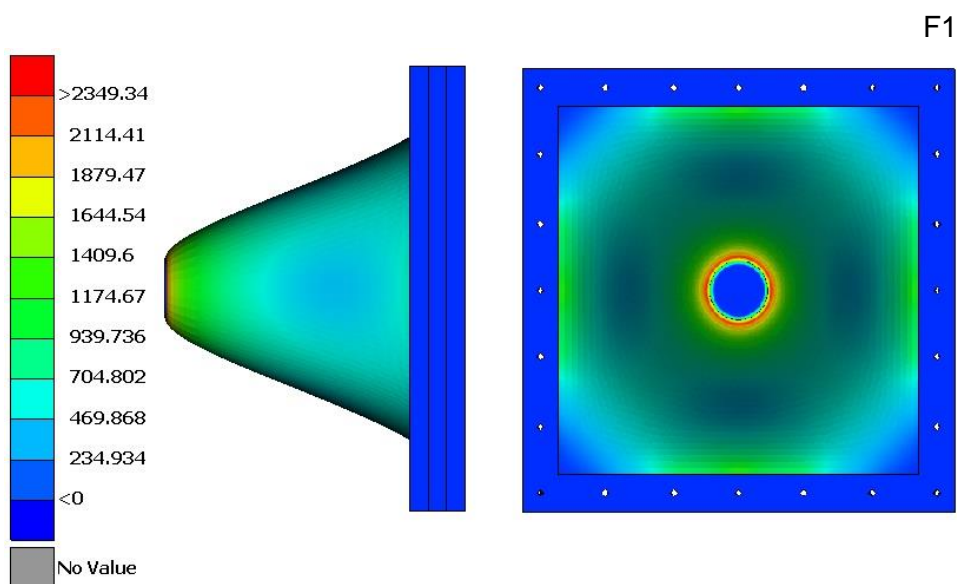
Η δύναμη εφαρμόστηκε ως αξονική στους κόμβους, κυκλικής περιοχής του κυλίνδρου ακτίνας 10mm-**Σχήμα 3.21**, με κατεύθυνση το δοκίμιο. Η εξεταζόμενη τιμή δύναμης διαιρείται με τον αριθμό των κόμβων και στη συνέχεια εφαρμόζεται σαν πολλές μικρότερες σε κάθε κόμβο, ώστε αθροιστικά να έχει την αρχική τιμή. Πραγματοποιήθηκαν επτά Γραμμικές Αναλύσεις, μία για κάθε διαφορετική δύναμη του πίνακα. Ως λογισμικό επίλυσης (solver) χρησιμοποιήθηκε το Nastran, κυρίως για τις επιλογές που παρέχει στη Μη Γραμμική Ανάλυση και κατά συνεπεία, για λόγους σύγκρισης, χρησιμοποιήθηκε και στη Γραμμική ανάλυση.



**Σχήμα 3.21** Περιοχή εφαρμογής της δύναμης-Κατεύθυνση Δύναμης

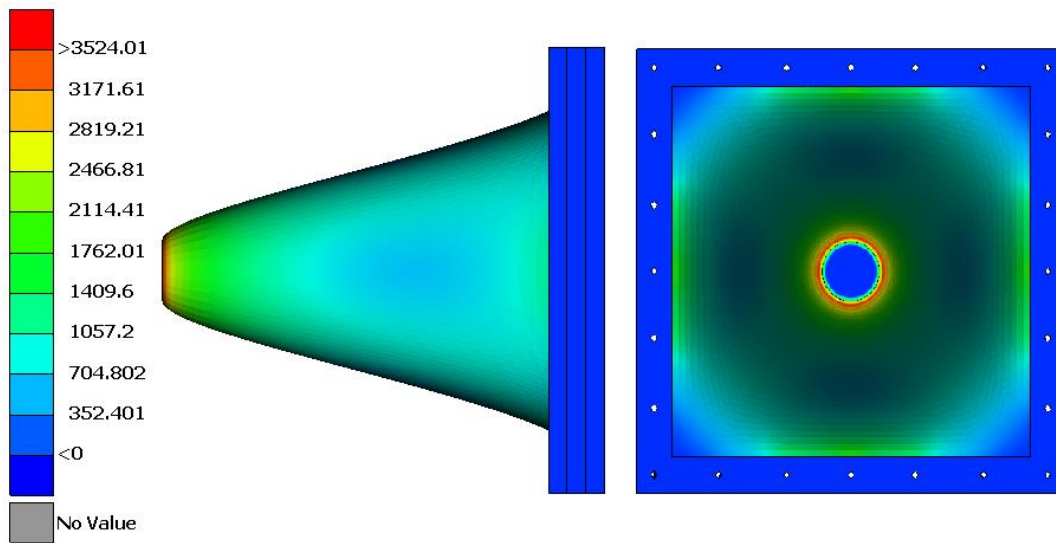
### Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα των αναλύσεων για κάθε μία δύναμη παρουσιάζονται παρακάτω, μέσω του λογισμικού  $\mu$ ETA post-processor, της BETA CAE Systems S.A.



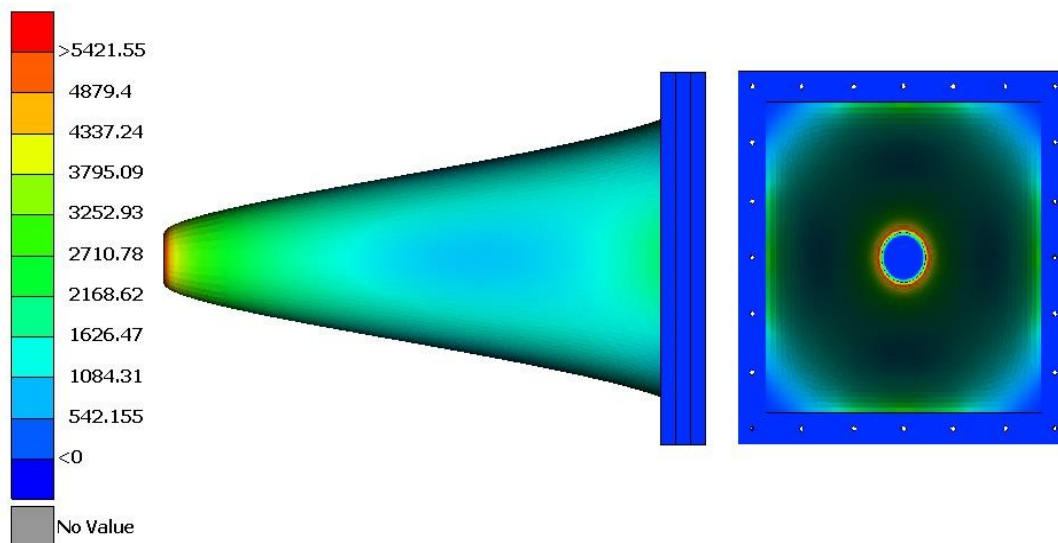
**Σχήμα 3.22** Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)

F2

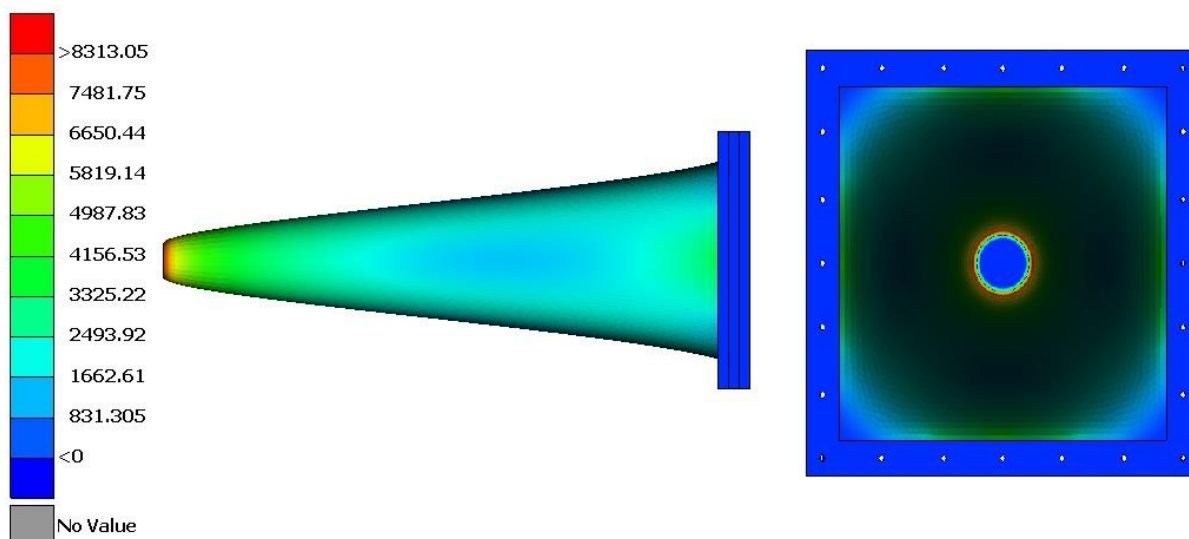


Σχήμα 3.23 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη 300N

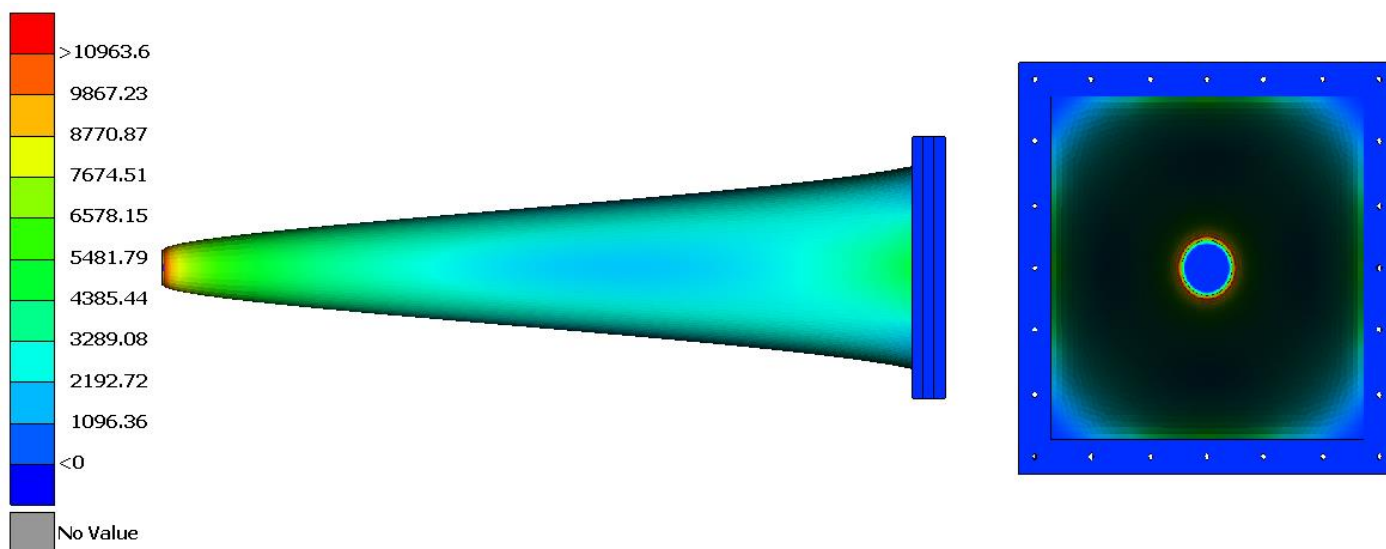
F3



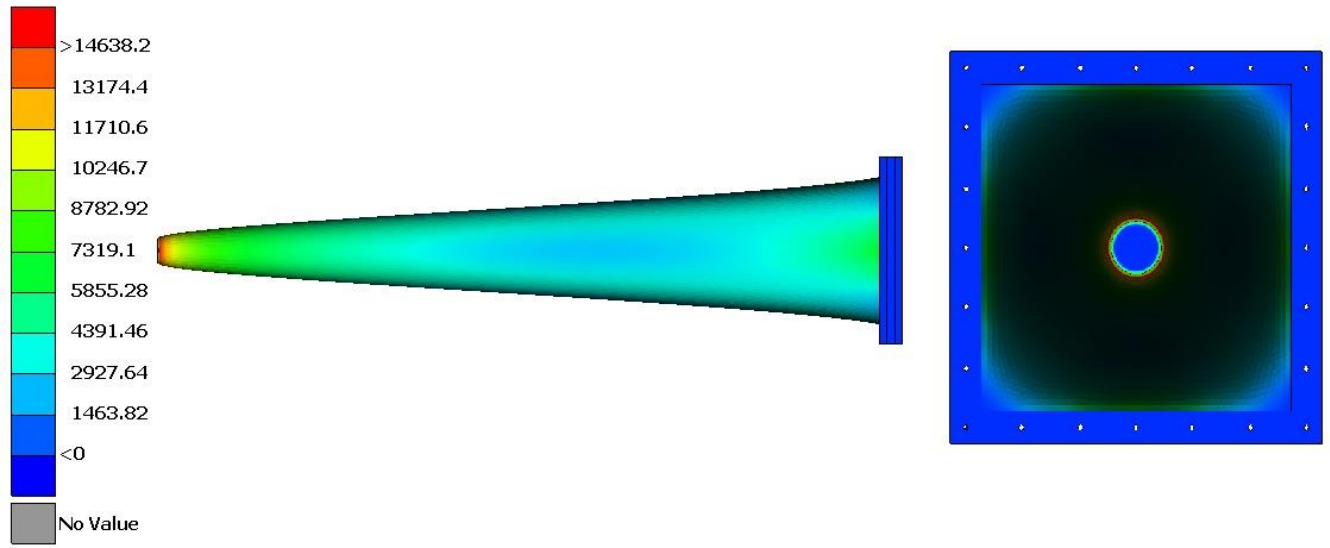
Σχήμα 3.24 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη 460N



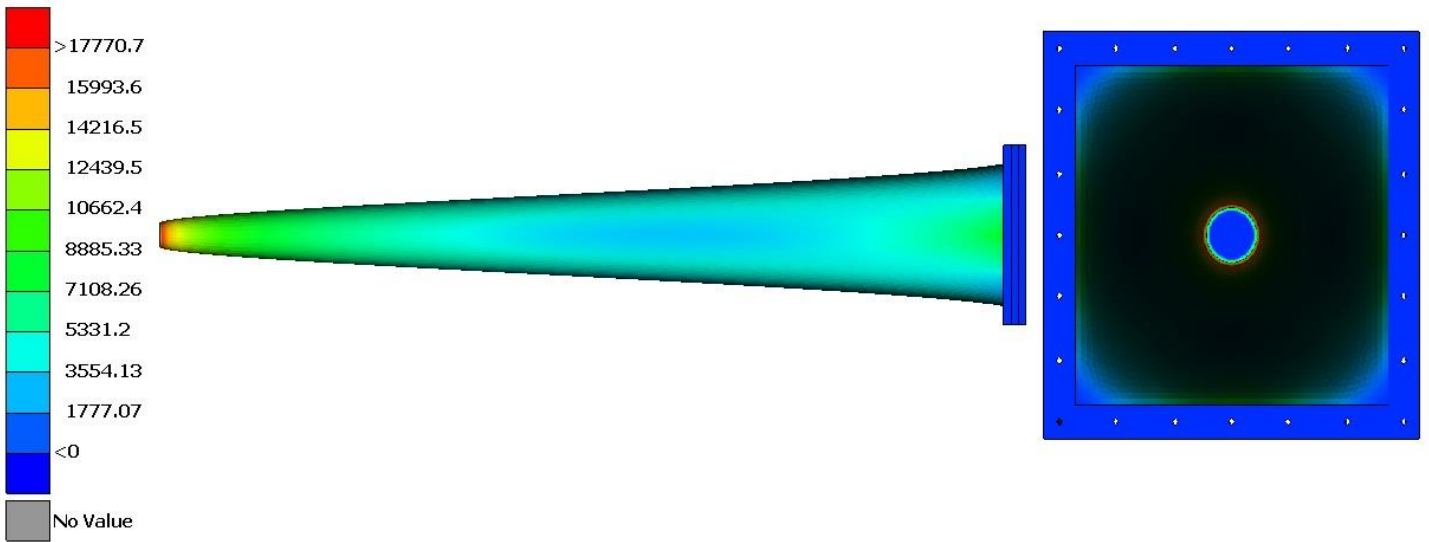
Σχήμα 3.25 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη 710N



Σχήμα 3.26 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη 940N



Σχήμα 3.27 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)



Σχήμα 3.28 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)



Όπως φαίνεται από τις εικόνες τα αποτελέσματα δεν αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα, καθώς ακόμα και στις μικρότερες δυνάμεις οι τάσεις και η μετατόπιση της πλάκας είναι υπερβολικά μεγάλες. Ειδικότερα, αν συγκριθούν με τις μετρήσεις του πειράματος, που αποτελούν ρεαλιστικές τιμές, θα παρατηρηθούν τεράστιες διαφορές-**Πίνακας 3.3**.

Δύναμη [N]	Γραμμική Ανάλυση [MPa]	Μετρήσεις Πειράματος [MPa]
200	2349.3	128.3
300	3524.0	160.1
460	5421.5	219.5
710	8313.0	270.3
940	10963.6	327.8
1250	14638.2	389.8
1520	17770.7	427.2

**Πίνακας 3.3** Ισοδύναμες τάσεις von Mises(MPa)-Μετρήσεις πειράματος(MPa) ανά δύναμη

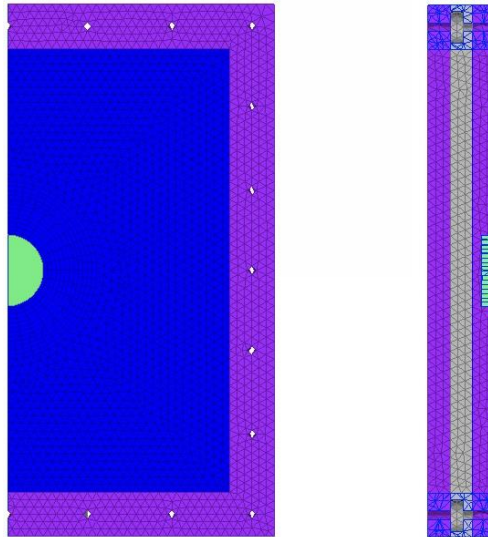
Τα αποτελέσματα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι παραδοχές της Γραμμικής Ανάλυσης δεν ευσταθούν για την αντιμετώπιση προβλημάτων επαφής. Επιπλέον, έχοντας λεπτή διατομή (0.3mm), το δοκίμιο δεν θα έχει μόνο ελαστική συμπεριφορά και η συγκεκριμένη ανάλυση δεν έχει τη δυνατότητα επεξεργασίας της.

### 3.3.2 Μη Γραμμική Ανάλυση Μοντέλου

Η Μη Γραμμική Ανάλυση παρέχει τη δυνατότητα επεξεργασίας φυσικών συμπεριφορών των σωμάτων, που δεν είναι δυνατή με τη Γραμμική Ανάλυση. Η επαφή μεταξύ των σωμάτων, η πλαστική παραμόρφωση είναι τέτοιες συμπεριφορές και παρουσιάζονται στο πρόβλημα που έχει τεθεί. Το λογισμικό Nastran, που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της ανάλυσης, διαθέτει εργαλεία για την αποτελεσματική αποτύπωση του προβλήματος, ώστε τα αποτελέσματα να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτά του πειράματος.

Η διακριτοποίηση του μοντέλου πραγματοποιήθηκε, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Για την εφαρμογή της πάκτωσης και της δύναμης ακολουθήθηκαν τα βήματα της Γραμμικής Ανάλυσης-**Πίνακας 3.2**.

Επειδή η επαφή του δοκιμίου με τον κύλινδρο θα μελετηθεί σε αυτή την ενότητα, ο κύλινδρος τοποθετήθηκε σε απόσταση 10mm από την πλάκα, ώστε η δύναμη να προκαλέσει την επαφή τους-**Σχήμα 3.29**.



**Σχήμα 3.29** Απόσταση κυλίνδρου από το δοκίμιο

Το ANSA ως πρόγραμμα προ-επεξεργασίας έχει τα απαραίτητα εργαλεία για τις δυνατότητες του ενσωματωμένου solver: Epilysis. Το Nastran, όμως, είναι πιο ισχυρό λογισμικό, κατασκευασμένο για περίπλοκα προβλήματα και προσφέρει πληθώρα επιλογών. Το Epilysis δεν υποστηρίζει μη γραμμική ανάλυση και κατά συνέπεια το ANSA δεν παρέχει τη δυνατότητα χρήσης τέτοιων εντολών. Πλην βασικών λειτουργιών, η επεξεργασία του μοντέλου ως μη γραμμικό, έγινε απευθείας στο αρχείο.

### **NLPARM**

Το βασικότερο κομμάτι της Στατικής Μη Γραμμικής Ανάλυσης είναι η εντολή *NLPARM*. Η *NLPARM* δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να επιλέγει τις παραμέτρους της ανάλυσης, ανάλογα με την στρατηγική επαναλήψεων και σύγκλισης που θέλει να ακολουθήσει. Περισσότερες λεπτομέρειες για τα βήματα που ακολουθεί η Μη Γραμμική Ανάλυση, παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Αρχικά, επιλέχθηκε ο αριθμός των προσαυξήσεων να είναι 20, καθώς με τον προκαθορισμένο αριθμό των 10, η λύση δεν συνέκλινε με αποτέλεσμα τη διακοπή της διαδικασίας. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε η επιλογή *FNT*, για την ανανέωση του πίνακα ακαμψίας [K] σε κάθε επανάληψη, ώστε τα αποτελέσματα να είναι πιο ακριβή, αλλά η ανάλυση να διαρκεί περισσότερο. Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων σε μία προσαύξηση φορτίου ορίστηκε 30 και είναι αρκετά μεγάλος για να συγκλίνουν οι λύσεις. Τέλος, υπάρχουν τα κριτήρια σύγκλισης που πρέπει να καλυφθούν, για να υπάρχει λύση. Τα κριτήρια περιλαμβάνουν το σφάλμα μετατόπισης:  $U$ , το σφάλμα φορτίου:  $P$  και το σφάλμα έργου:  $W$ , σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ανοχές τους *EPSU*, *EPSP* και *EPSW*. Επιλέγοντας, στην προκειμένη περίπτωση,  $P$  υποδεικνύεται στο λογισμικό να ψάξει για λύση, που καλύπτει τις ανοχές σε σφάλμα *EPSP* η τιμή του οποίου είναι η προκαθορισμένη 0.01.

### **Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα**

Η Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα εμφανίζεται στο πρόβλημα με τη μορφή των μεγάλων μετατοπίσεων. Ενσωματώνεται στην ανάλυση με την παράμετρο *LGDISP* και μία τιμή 1 ή 2, για τον υπολογισμό ή μη, των ακολουθητικών δυνάμεων αντίστοιχα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι ακολουθητικές δυνάμεις δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά του δοκιμίου, οπότε και οι δύο τιμές είναι αποδεκτές. Αυτό που προσφέρει, τελικά, η εντολή και την καθιστά

αναγκαία, είναι η συνεχής ενημέρωση των συντεταγμένων, των μη γραμμικών στοιχείων, ως αποτέλεσμα μεγάλων μετατοπίσεων.

### Μη Γραμμικότητα του Υλικού

Το κύριο στοιχείο για την ανάλυση της μη γραμμικότητας του υλικού είναι η εισαγωγή της καμπύλης Τάσης-Παραμόρφωσης. Η καμπύλη υπολογίστηκε από το πείραμα εφελκυσμού και ενσωματώνεται στην ανάλυση, μέσω της εντολής *TABLES1*, καταγράφοντας τα σημεία της. Η εντολή αντιστοιχίζει, στη συνέχεια, τη καμπύλη με το υλικό που ανήκει (δοκίμιο).

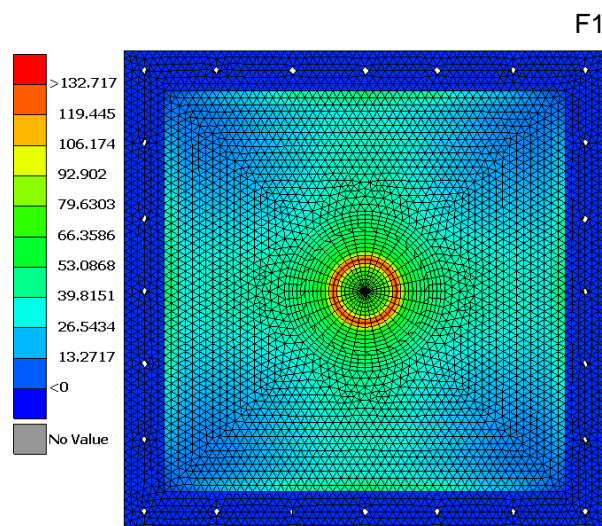
Η εντολή *MATEP* παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των ελαστικο-πλαστικών ιδιοτήτων του υλικού. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγεται ο τρόπος υπολογισμού της πλαστικής συμπεριφοράς, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η καμπύλη της εντολής *TABLES1*. Επίσης, επιλέγεται το κριτήριο αστοχίας βάσει του οποίου θα γίνει η επίλυση: von Mises. Το κριτήριο ισοδύναμης τάσης von Mises είναι αυτό που χρησιμοποιείται κυρίως, για την εύρεση μίας τάσης αστοχίας, σε ισότροπα υλικά, όπως η εξεταζόμενη μεταλλική πλάκα.

### Μη Γραμμικότητα Επαφής

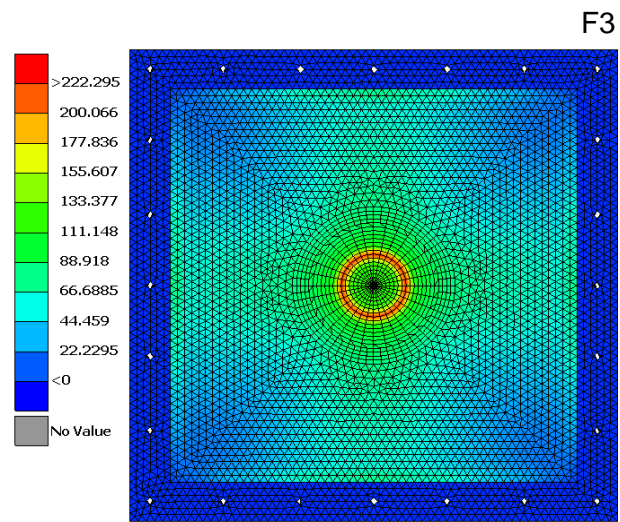
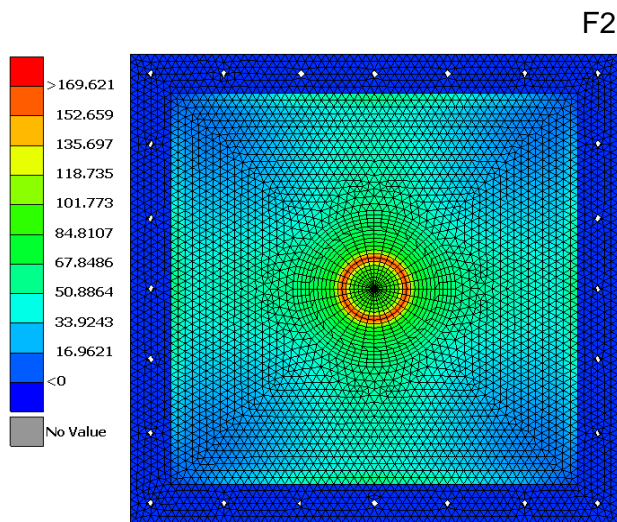
Η Μη Γραμμικότητα Επαφής περιγράφεται στην ανάλυση με την εντολή *BCONNECT*. Η εντολή αυτή απαιτεί ως δεδομένο την δημιουργία ζεύγους slave – master. Ως slave ορίστηκε η πλάκα σαν μη κινούμενο αντικείμενο, που δέχεται την επαφή και ως master ο κύλινδρος, στον οποίο εφαρμόζεται η δύναμη και κινείται προς την πλάκα.

### Αποτελέσματα

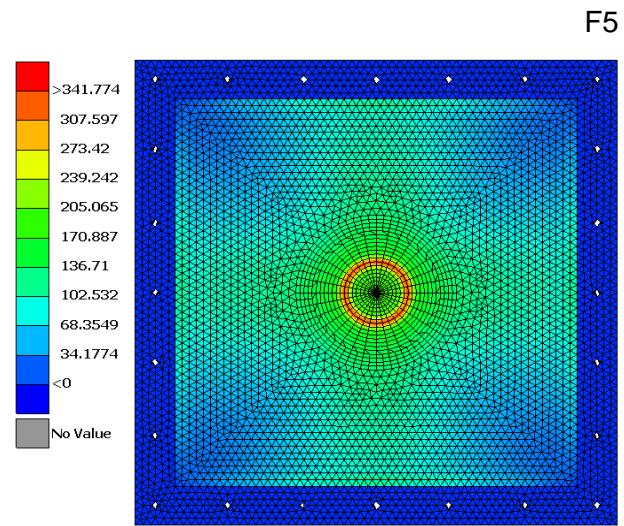
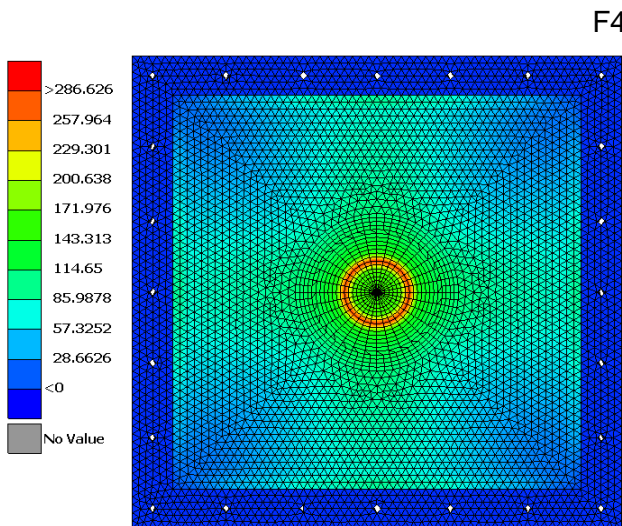
Τα αποτελέσματα των αναλύσεων για κάθε μία δύναμη παρουσιάζονται παρακάτω μέσω του λογισμικού μΕΤΑ.



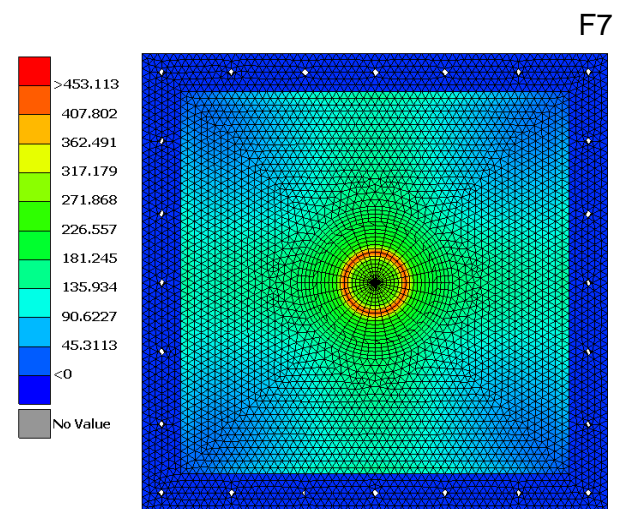
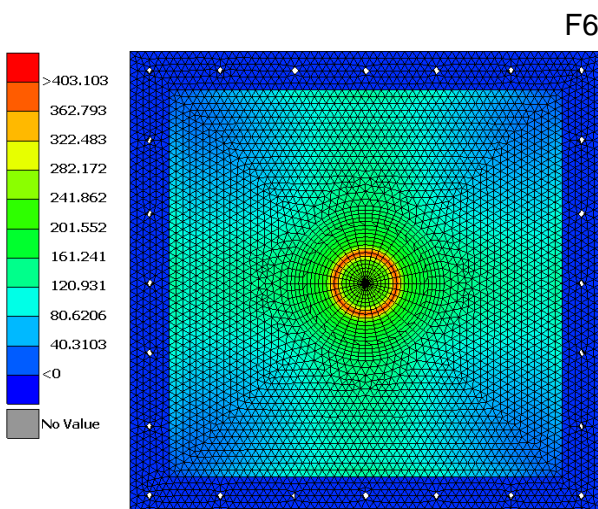
Σχήμα 3.30 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F1



Σχήμα 3.31 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa) -Δύναμη F2 και F3



Σχήμα 3.32 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F4 και F5



Σχήμα 3.33 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F6 και F7

Τα αποτελέσματα που εξάγονται από τη Μη Γραμμική Ανάλυση αποδίδουν με μεγαλύτερο ρεαλισμό τη συμπεριφορά του δοκιμίου, σε σχέση με τη Γραμμική Ανάλυση, όπως παρουσιάζεται και στον **Πίνακα 3.4**. Συγκεκριμένα για τον πίνακα, η πρώτη κύρια στήλη περιέχει τη δύναμη που εφαρμόζεται και στη συνέχεια γίνεται σύγκριση των τιμών των αναλύσεων, με τις μετρήσεις, ακολουθούμενες από το ποσοστιαίο σφάλμα. Οι συγκρίσεις ομαδοποιούνται ανάλογα με τη θέση στην οποία ανήκουν.

Δύναμη [N]	Ακτίνα R=20mm			Ακτίνα R=40mm		
	Μη Γραμμική Ανάλυση	Μετρήσεις	Σφάλμα [%]	Μη Γραμμική Ανάλυση	Μετρήσεις	Σφάλμα [%]
200	70.0	68.0	2.9	132.5	128.3	3.2
301	90.8	85.5	5.8	169.6	160.1	5.6
460	120.4	114.2	5.1	222.3	219.5	1.3
710	160.0	153.2	4.3	286.6	270.3	5.7
940	192.8	183.0	5.1	341.7	327.8	4.1
1250	234.4	223.6	4.6	403.1	389.8	3.3
1520	267.2	258.0	3.4	447.7	427.2	4.6

**Πίνακας 3.4** Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Μετρήσεις πειράματος (MPa) ανά δύναμη

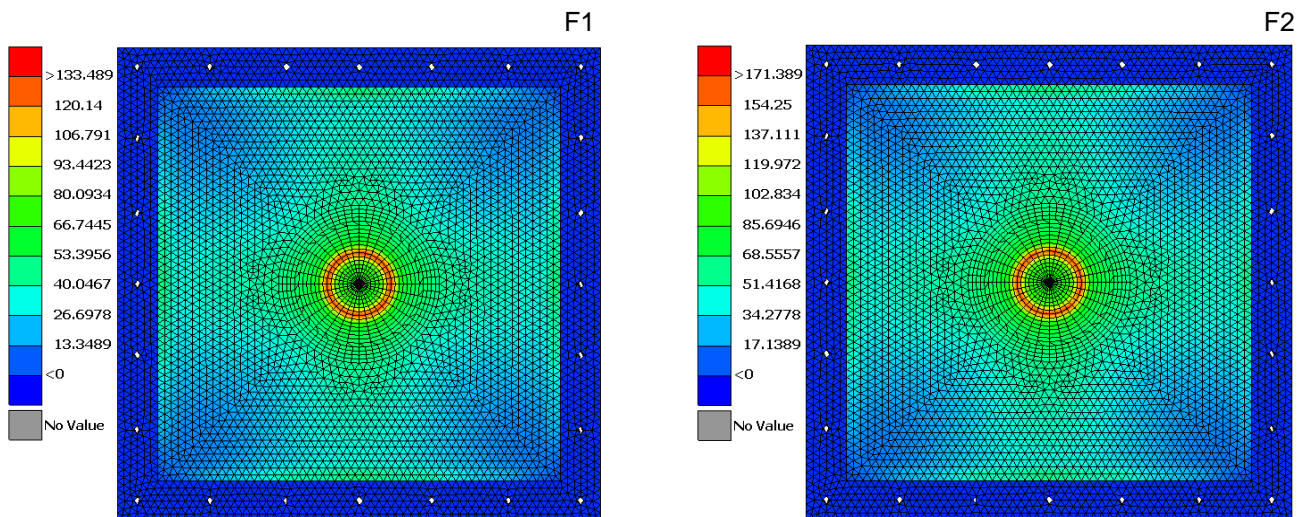
Τα σφάλματα των τιμών στη θέση R=20mm, είναι μικρά σε όλο το εύρος των δυνάμεων, όπως και στη θέση R=40mm. Οι αποκλίσεις αυτές πιθανώς να οφείλονται σε ατέλειες της κατασκευής της πειραματικής διάταξης ή ιδιότητες του δοκιμίου, που δεν έχουν μοντελοποιηθεί επαρκώς στην ανάλυση.

### 3.3.3 Μη Γραμμική Ανάλυση - Χωρίς τη Μη Γραμμικότητα Υλικού

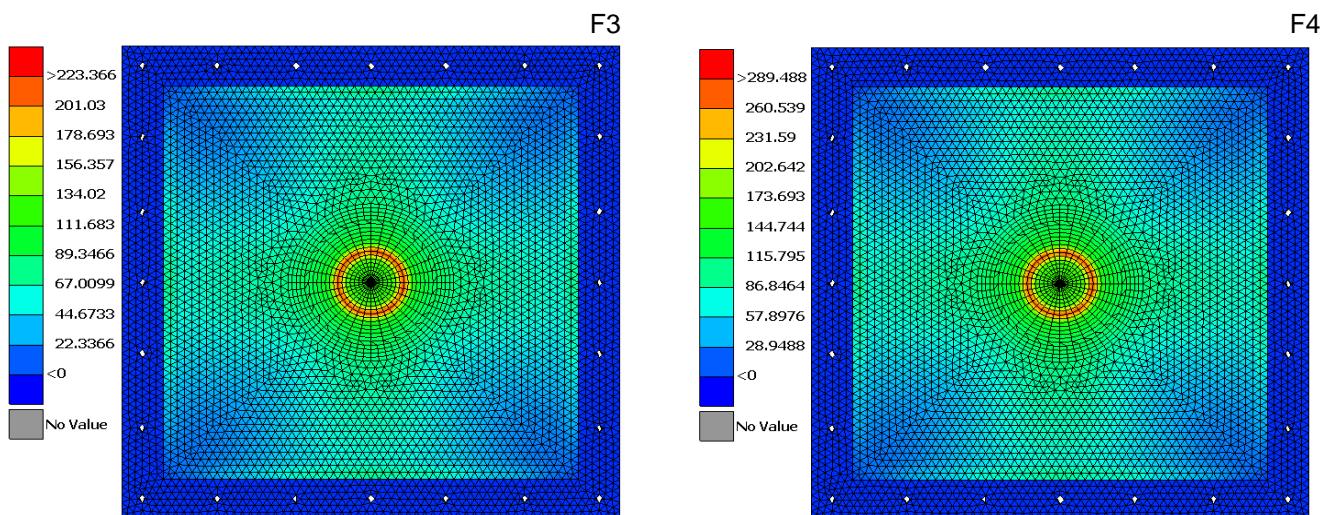
Για τη καλύτερη κατανόηση του προβλήματος, αλλά και σε μία προσπάθεια απόκτησης αποτελεσμάτων πιο κοντινών στις μετρήσεις, αποφασίστηκε να γίνει διερεύνηση, για τον προσδιορισμό της Μη Γραμμικότητας που επηρεάζει περισσότερο τη συμπεριφορά του μοντέλου. Αρχικά πραγματοποιήθηκε Μη Γραμμική Ανάλυση, χωρίς τη Μη Γραμμικότητα του Υλικού. Έτσι, απενεργοποιήθηκαν οι εντολές της Μη Γραμμικότητας του Υλικού: *MATEP* και *TABLES1*. Το υπόλοιπο μοντέλο παραμένει ίδιο, όπως περιγράφηκε παραπάνω.

#### **Αποτελέσματα**

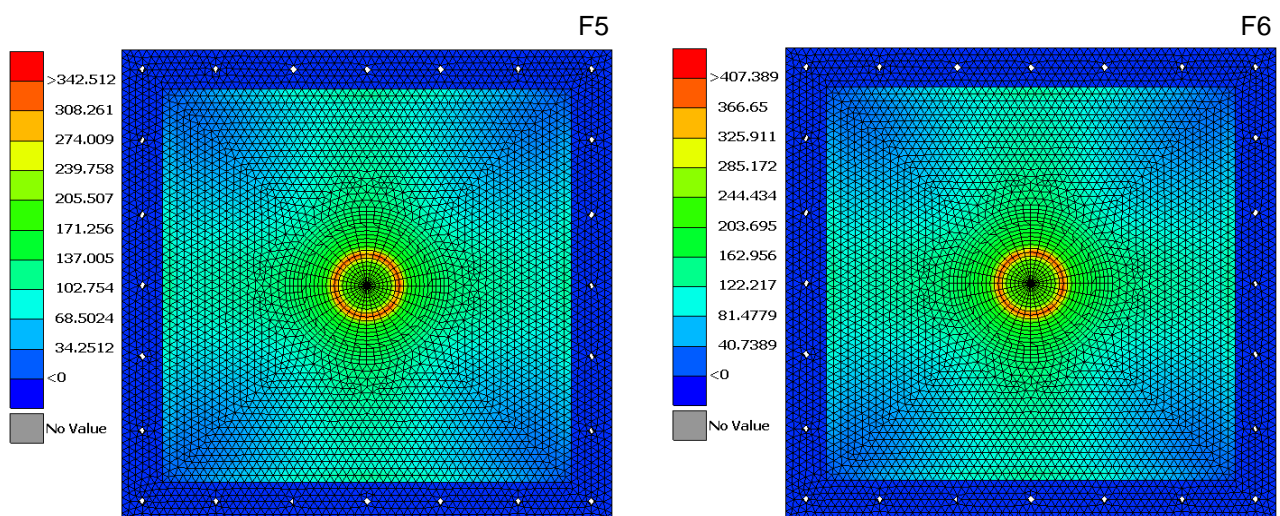
Τα αποτελέσματα της ανάλυσης για κάθε μία δύναμη παρουσιάζονται παρακάτω μέσω του λογισμικού μΕΤΑ.



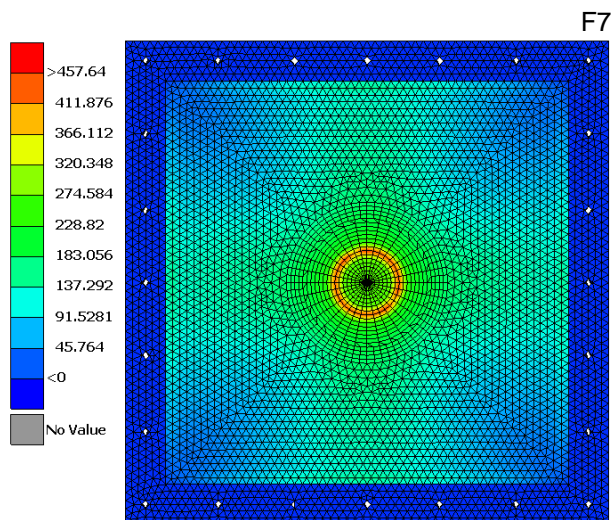
Σχήμα 3.34 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F3 και F4



Σχήμα 3.35 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F3 και F4



Σχήμα 3.36 Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F6 και F7



**Σχήμα 3.37** Ισοδύναμες τάσεις von Mises (MPa)-Δύναμη F7

Δύναμη [N]	Ακτίνα R=20mm			Ακτίνα R=40mm		
	Μη Γραμμική Ανάλυση	Μετρήσεις	Σφάλμα [%]	Μη Γραμμική Ανάλυση	Μετρήσεις	Σφάλμα [%]
200	70.4	68.0	3.4	133.5	128.3	3.9
301	91.22	85.5	6.3	171.4	160.1	6.6
460	120.9	114.2	5.5	223.3	219.5	1.7
710	160.7	153.2	4.7	289.5	270.3	6.6
937	193.4	183.0	5.4	342.5	327.8	4.3
1250	235	223.6	4.9	407.4	389.8	4.3
1520	267.8	258.0	3.7	457.6	427.2	6.6

**Πίνακας 3.4** Σύγκριση Ισοδύναμων τάσεων von Mises (MPa)-Μετρήσεις πειράματος (MPa) ανά δύναμη

Όπως γίνεται εμφανές από τον **Πίνακα 3.4**, οι διαφορές των Μη γραμμικών Αναλύσεων (ενεργοποιημένη-απενεργοποιημένη η Μη Γραμμικότητα του Υλικού) είναι πολύ μικρές, όπως υποδεικνύουν και οι τιμές του σφάλματος-**Πίνακας 3.5**. Αυτό, όμως, δεν αλλάζει το γεγονός ότι οι τιμές της Μη Γραμμικής Ανάλυσης με ενεργοποιημένη τη μη γραμμικότητα του υλικού, είναι πιο κοντά σε αυτές των πειραματικών μετρήσεων, καθιστώντας αναγκαία την μελέτη της συγκεκριμένης μη γραμμικότητας, καθώς το δοκίμιο μεταβαίνει στην περιοχή της πλαστικής παραμόρφωσης.

R=20mm		R=40mm	
Σφάλμα ανάλυσης με Μη Γραμμικότητα Υλικού [%]	Σφάλμα ανάλυσης χωρίς Μη Γραμμικότητα Υλικού[%]	Σφάλμα ανάλυσης με Μη Γραμμικότητα Υλικού[%]	Σφάλμα ανάλυσης χωρίς Μη Γραμμικότητα Υλικού[%]
2.9	3.4	3.2	3.9
5.8	6.3	5.6	6.6
5.1	5.5	1.3	1.7
4.3	4.7	5.7	6.6
5.1	5.4	4.1	4.3
4.6	4.9	3.3	4.3
3.4	3.7	4.6	6.6

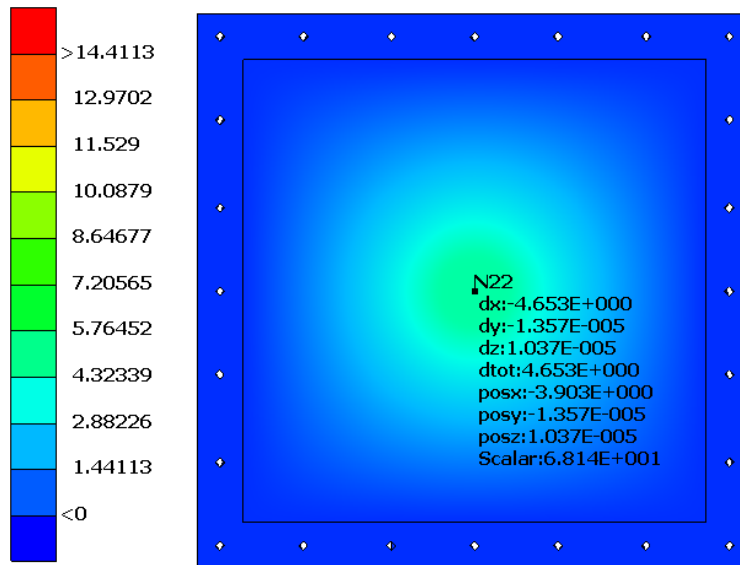
**Πίνακας 3.5** Σύγκριση σφαλμάτων Μη Γραμμικών Αναλύσεων, με και χωρίς Γεωμετρική Μη γραμμικότητα

### 3.3.4 Μη Γραμμική Ανάλυση – Χωρίς Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα

Για την πραγματοποίηση Μη Γραμμικής Ανάλυσης, χωρίς Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα πρέπει να απενεργοποιηθεί η εντολή *LGDISP*. Η διαδικασία της ανάλυσης διακόπηκε, καθώς δεν συνέκλιναν οι λύσεις λόγω των μεγάλων μετατοπίσεων των στοιχείων του δοκιμίου. Αυτή η κατάληξη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κύρια Μη Γραμμικότητα του μοντέλου είναι η γεωμετρική.

Λαμβάνοντας υπόψιν το πάχος των 0.3mm της πλάκας, είναι πολύ εύκολο να καλυφθούν τα κριτήρια ισχύος της θεωρίας των Kirchhoff και Love: υπάρχει μεγάλη παραμόρφωση όταν αυτή ξεπερνά το 20% του πάχους της πλάκας. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 3.38**, η μετατόπιση ξεπερνά κατά πολύ το 20% του πάχους της πλάκας. Με την εφαρμογή της μικρότερης δύναμης, των 200N, το κέντρο του δοκιμίου μετατοπίζεται 4.653mm στη διεύθυνση του άξονα των  $x'x'$ .





**Σχήμα 3.38** Απεικόνιση μετατόπισης σημείου στο κέντρο-Αποτέλεσμα Μη Γραμμικής Ανάλυσης για δύναμη 200N

## 4 Συμπεράσματα

Στον κλάδο των μεταλλικών κατασκευών χρησιμοποιούνται ευρέως λεπτότοιχες διατομές σε συνδυασμό μεταξύ τους. Τέτοιες κατασκευές (π.χ. θάλαμος ανελκυστήρα) είναι δυνατό να δεχτούν σημειακά φορτία κατά τη διάρκεια της λειτουργίας τους, οδηγώντας στην ανάπτυξη προτύπων αντοχής των συγκεκριμένων κατασκευών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται ο βέλτιστος τρόπος μοντελοποίησης λεπτότοιχων διατομών σε προβλήματα επαφής.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση του βέλτιστου τρόπου μοντελοποίησης προβλημάτων επαφής λεπτότοιχης πλάκας, μέσω στατικής ανάλυσης. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, κάνοντας χρήση γραμμικών αλλά και μη γραμμικών εντολών. Επιπλέον, έγινε πειραματική διερεύνηση, μέσω πειραματικής διάταξης για τη σύγκριση αποτελεσμάτων, αλλά και την αναγωγή τους, παραμετρικά, σε προβλήματα μεγαλύτερων διαστάσεων.

Αρχικά έγινε ο σχεδιασμός και η κατασκευή της πειραματικής διάταξης στο λογισμικό CAD Solidworks. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στην κατάλληλη πάκτωση της εξεταζόμενης πλάκας, αλλά και στην εφαρμογή της δύναμης μέσω της επαφής της με τον κύλινδρο, που αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες των αναλύσεων. Επίσης, από το πείραμα εξήχθησαν οι τάσεις παραμόρφωσης που δέχεται το δοκίμιο και χρησιμοποιήθηκαν ως μέτρο σύγκρισης με τα αποτελέσματα των αναλύσεων.

Στη συνέχεια, διεξήχθη πείραμα εφελκυσμού για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του δοκιμίου, κυρίως του μέτρου ελαστικότητάς του και της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης. Ο σχεδιασμός του δοκιμίου έγινε βάσει του ISO 6892-1:2016 για μεθόδους δοκιμών εφελκυσμού, μεταλλικών υλικών, σε θερμοκρασία δωματίου. Για την καλύτερη αντίληψη της συμπεριφοράς του δοκιμίου, του πειράματος εφελκυσμού, έγινε προσομοίωση των συνοριακών συνθηκών και μοντελοποίησή του, στο λογισμικό MSC Marc.

Ακολούθησε η μοντελοποίηση του προβλήματος μέσω του λογισμικού προ-επεξεργασίας ANSA. Σε αυτό το στάδιο σχεδιάστηκε το πλέγμα της περιοχής της επαφής, επιλέχθηκαν τα

στοιχεία και οι ιδιότητές τους. Πραγματοποιήθηκαν δύο ειδών αναλύσεις για το ίδιο μοντέλο: Γραμμική και Μη Γραμμική Ανάλυση. Τα αποτελέσματα της Γραμμικής Ανάλυσης δεν είναι ρεαλιστικά αποδεικνύοντας ότι οι παραδοχές στις οποίες βασίζεται, αδυνατούν να περιγράψουν το πρόβλημα επαρκώς. Από την άλλη, τα αποτελέσματα της Μη Γραμμικής Ανάλυσης υποδεικνύουν την ύπαρξη μη γραμμικότητας.

Τα αποτελέσματα της Μη Γραμμικής Ανάλυσης συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα, μιας σειράς Μη Γραμμικών Αναλύσεων στις οποίες δεν λήφθηκε υπόψιν η μη γραμμικότητα του υλικού. Η σύγκριση παρουσιάζει μικρές διαφορές, με τις τιμές της ανάλυσης, που περιέχει Μη Γραμμικότητα του Υλικού, να είναι πιο ακριβείς. Εξάγεται, έτσι, το συμπέρασμα ότι η πλάκα επιδεικνύει πλαστική συμπεριφορά, που είναι η κύρια αιτία μη γραμμικότητας του υλικού.

Στη περεταίρω σύγκριση με τις μετρήσεις του πειράματος, φαίνεται να αποτυπώνεται πλήρως η συμπεριφορά του δοκιμίου στην Μη Γραμμική Ανάλυση. Εν αντιθέσει, η Γραμμική Ανάλυση αποτυγχάνει να εμφανίσει αποτελέσματα που να δικαιολογούν τη χρήση της σε τέτοιου είδους προβλήματα. Τα σφάλματα της Μη Γραμμικής Ανάλυσης χαρακτηρίζονται αποδεκτά και για της δύο περιοχές μελέτης. Η εμφάνιση τους μπορεί να δικαιολογηθεί από την ελλιπή μοντελοποίηση, αγνώστων ατελειών και ιδιοτήτων, της κατασκευής και του δοκιμίου.

Συμπερασματικά, η Μη Γραμμική Ανάλυση χαρακτηρίζεται μονόδρομος για την αντιμετώπιση προβλημάτων λεπτότοιχων διατομών, καθώς διαθέτει τη δυνατότητα να αποτυπώνει επαρκώς τη συμπεριφορά του μοντέλου. Σε αυτές τις περιπτώσεις η Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα έχει το μεγαλύτερο ρόλο, αφού επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό μεγάλων μετατοπίσεων, όπως αυτές έχουν οριστεί.

Ως αντικείμενο μελλοντικής έρευνας προτείνεται, η δυναμική ανάλυση του μοντέλου που παρουσιάστηκε, που θα αποφέρει περισσότερο ακριβή στοιχεία, σχετικά με την εφαρμογή της δύναμης στη διαδικασία του πειράματος. Επίσης, ως πειραματική διερεύνηση θα μπορούσαν να δοκιμαστούν και άλλες διατομές ή σχήματα εφαρμογής της δύναμης, στην υπάρχουσα διάταξη.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] MICRO-MEASUREMENTS TECH-NOTE TN-515, *STRAIN GAGE ROSETTES-SELECTION, APPLICATION AND DATA REDUCTION*

[2] MANCHESTER COMPUTER CENTRE UMIST SUPPORT UNIT, *INTRODUCTION TO FINITE ELEMENT ANALYSIS*, MANCHESTER, 2010

[3] NICHOLAS J. ROSE, *INTRODUCTION TO LINEAR ANALYSIS*, NORTH CAROLINA, 1998

[4] KLAUS-JURGEN BATHE, *FINITE ELEMENT PROCEDURES FOR SOLIDS AND STRUCTURE-LINEAR ANALYSIS*, BOSTON, 1982

[5] SANG H. LEE, *MSC/NASTRAN NONLINEAR ANALYSIS HANDBOOK V.67*, LOS ANGELES, 1992

[6] PETER BARRET, *STRESS ANALYSIS CONVERGENCE TIPS [ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ]*, [HTTPS://CAEAI.COM/BLOG/STRESS-ANALYSIS-CONVERGENCE-TIPS-DUMMIES](https://caeai.com/blog/stress-analysis-convergence-tips-dummies)

[7] VINESH V. NISHAWALA, *A STUDY OF LARGE DEFLECTION OF BEAMS AND PLANES*, NEW JERSEY, 2011

[8] EDUARD VENTSEL, THEODOR KRAUTHHAMMER, *THIN PLATES AND SHELLS-THEORY, ANALYSIS, AND APPLICATIONS*, PENNSYLVANIA, 2001