ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜ. ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜ.ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής – Με ποιόν τρόπο επιδρά η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων.»

Δέσποινα - Ιωάννα Κύρβεη

ΑΕΜ: 808

Θεσσαλονίκη 2020

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του διδρυματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών:

«Επιστήμες της Αγωγής: Διδακτική των Μαθηματικών»

Και εγκρίθηκε στις ……………………………… 2020 από την εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο		Υπογραφή
1.Κωνασταντίνο Π. Χρήστου (επιβλέπων καθηγητής)	Επίκουρο καθηγητή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	…………..
2.Ξένια Βαμβακούση	Επίκουρη καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων	…………..
3.Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη	Αναπληρωτή καθηγητή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	…………..

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους συνέβαλαν στην προσπάθεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας και ιδιαίτερα στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Χρήστου για την αμέριστη κατανόηση, βοήθεια και υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια προετοιμασίας και συγγραφής. Οι παρατηρήσεις και οι προτάσεις του ήταν πάντοτε ακριβείς και στοχευμένες.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διευθυντές και τους συναδέλφους των σχολείων για τη συνεργασία και τη δυνατότητα που μου έδωσαν να ολοκληρώσω αυτή την έρευνα.

Ένα ευχαριστώ σε όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού που με βοήθησαν να κατανοήσω και να δω την εκπαίδευση των Μαθηματικών και από την ερευνητική ματιά.

Τέλος ένα ευχαριστώ στην οικογένεια μου και κυρίως στους γονείς μου Βαγγέλη και Ζωή για την κατανόηση, την υποστήριξή και τη δική τους βοήθεια όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Οι μεταβλητές στην άλγεβρα αποτελούν αλφαβητικά σύμβολα που αναπαριστούν οποιονδήποτε αριθμό. Παρ' όλα αυτά προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει ότι εξαιτίας της προκατάληψης του φυσικού αριθμού οι μαθητές τείνουν να παρερμηνεύουν τις μεταβλητές θεωρώντας πρωταρχικά ότι αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Προκατάληψη του φυσικού αριθμού ονομάζεται το φαινόμενο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους αριθμούς - η οποία είναι οργανωμένη σε ένα ενιαίο σώμα γνώσης για τους αριθμούς όπου αυτοί έχουν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών – σε καταστάσεις όπου αυτή η γνώση δεν έχει εφαρμογή. Εξαιτίας αυτής της προκατάληψης, οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν πρωτίστως φυσικούς αριθμούς (π.χ. ότι το κ+3 αναπαριστά αριθμούς όπως 4, 6, 9 κλπ.) και κατά συνέπεια θεωρούν ότι το πρόσημο που φαίνεται να έχει μια αλγεβρική παράσταση (δηλαδή το φαινομενικό της πρόσημο) είναι το πρόσημο των αριθμητικών τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει (π.χ. ότι το –β αναπαριστά μονάχα αριθμούς όπως -2,-3 κλπ.). Η παρούσα εργασία επιχειρεί να παρουσιάσει ποσοτικά δεδομένα από μια μελέτη στην οποία μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν μια σειρά από προτάσεις σχετικές με τις αριθμητικές τιμές αλγεβρικών παραστάσεων. 138 μαθητές της Β' και Γ' γυμνασίου απάντησαν σε ένα ερωτηματολόγιο με 48 ισχυρισμούς με αριθμούς που είναι ή δεν είναι δυνατό να αποδοθούν σε έξι αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές έτειναν να συμφωνούν με τους ισχυρισμούς που ήταν σύμφωνοι με τη διαίσθησή τους ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς παρά ρητούς αριθμούς και ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν αριθμούς του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της κάθε παράστασης. Επιπλέον φάνηκε ότι η επίδραση της ακεραιότητας ήταν πιο ισχυρή από την επίδραση του φαινομενικού προσήμου.

Λέξεις-κλειδιά: μεταβλητή, εννοιολογική αλλαγή, προκατάληψη φυσικού αριθμού, ακεραιότητα, παρερμηνεία φαινομενικού προσήμου, άλγεβρα

Abstract

Variables are literal symbols that stand for any number. However, prior research has shown that due to a natural number bias students tend to misinterpret variables to stand primarily for natural numbers. Natural number bias is the phenomenon of students using their prior knowledge of numbers – which is organized in a coherent body of knowledge where numbers have the properties of natural numbers – in situations where this knowledge does not apply. Due to this bias, students tend to think that variables stand primarily for natural numbers (i.e. that k+3 stands for 3, 6, etc.) and as a result they tend to think that the sign an algebraic expression appears to have (i.e. its phenomenal sign) is the sign of the values it may only represent (i.e. that –b only stands for -2 etc.). This report aims to present quantitative results from a study where students had to evaluate a series of statements about the numerical value of algebraic expressions. 138 8th and 9th graders were given a questionnaire with 48 statements with numbers that can or cannot be assigned to six algebraic expressions that contained literal symbols. The results showed that students tended to agree with statements which were in line with their intuition that variables stand for whole numbers rather than rational numbers and that algebraic expressions stand for numbers of the same sign as the expressions' phenomenal sign. It also appeared that the integrity effect was stronger than the phenomenal sign effect.

Key words: variable, conceptual change, natural number bias, phenomenal sign effect, integrity effect, algebra

1 Εισαγωγή

Η έννοια της μεταβλητής βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς θεωρείται ότι η εισαγωγή της στα σχολικά μαθηματικά ουσιαστικά σηματοδοτεί το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Στη σχολική άλγεβρα η μεταβλητή χρησιμοποιείται ως γενικευμένος αριθμός για να εκφράσει μαθηματικές σχέσεις, ως ο άγνωστος αριθμός σε μια εξίσωση, αλλά και ως αριθμός που ορίζει κάποια συναρτησιακή σχέση. Παρατηρείται συνεπώς μια άρρηκτη σχέση μεταξύ μεταβλητής και αριθμού.

Παρά τη σημασία όμως της μεταβλητής, η σχετική με τη μελέτη της, βιβλιογραφία, έχει αναδείξει λάθη και παρανοήσεις γύρω από την έννοια που οφείλονται σε εναλλακτικούς τρόπους ερμηνείας της μεταβλητής από τους μαθητές και έχουν ως συνέπεια τη γενικότερη δυσκολία στην άλγεβρα και τα μαθηματικά.

Η σύνδεση της μεταβλητής με την έννοια του αριθμού από τη μια και η σημαντική της θέση για την άλγεβρα από την άλλη, έκανε απαραίτητη την ενδελεχή μελέτη της έννοιας από την ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία συνέδεσε ορισμένες από τις παρερμηνείες και τα λάθη στη μεταβλητή με την προηγούμενη εμπειρία των μαθητών με την αριθμητική αλλά και με το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού. Σύμφωνα με αυτή την τελευταία οπτική, οι μαθητές παρουσιάζουν την τάση να χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους αριθμούς, η οποία είναι οργανωμένη γύρω από τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, σε καταστάσεις όπου αυτή δεν έχει εφαρμογή. Μια από αυτές τις καταστάσεις είναι και η ερμηνεία των αλφαβητικών συμβόλων στην άλγεβρα, όπου οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τις μεταβλητές σαν αριθμούς που μπορούν να αναπαραστήσουν μόνο φυσικές τιμές.

Η παρούσα ερευνητική εργασία λοιπόν, εστιάζει στη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής ως έναν σύμβολο που μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε πραγματική τιμή στην Άλγεβρα, επηρεασμένοι από την προκατάληψη του ΦΑ. Για τη διερεύνηση του παραπάνω θέματος επιχειρήσαμε να μελετήσουμε την τάση των μαθητών Β’ και Γ’ Γυμνασίου να ερμηνεύουν τις μεταβλητές στην άλγεβρα ως ακέραιους αριθμούς και την τάση τους να θεωρούν ότι μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητές, αναπαριστά αποκλειστικά αριθμό του ίδιου προσήμου με αυτό που φαίνεται να έχει η αλγεβρική παράσταση.

Για τη μελέτη του παραπάνω φαινομένου, χρησιμοποιήθηκε ένα τεστ στο οποίο οι μαθητές όφειλαν να αξιολογήσουν 48 ισχυρισμούς για τις τιμές που μπορούν ή δεν μπορούν να αναπαραστήσουν 6 αλγεβρικές παραστάσεις (α, -β, κ+3, -δ-4, 4/5y, -4/5z). Οι αριθμητικές τιμές που αποδόθηκαν στις παραστάσεις ήταν ακέραιοι αριθμοί, θετικού και αρνητικού προσήμου, κλάσματα και δεκαδικοί. Η χρήση διαφορετικών κατηγοριών αριθμητικών αναπαραστάσεων παρείχε τη δυνατότητα να εξεταστεί εάν οι μαθητές αντικαθιστούν συχνότερα τις μεταβλητές με ακεραίους αριθμούς ή με αριθμούς του ίδιου προσήμου με αυτό των παραστάσεων. Εάν δηλαδή υπερισχύει κάποια από τις όψεις της προκατάληψης του ΦΑ στην ερμηνεία της μεταβλητής.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια της μεταβλητής, τις δυσκολίες και τα λάθη που μπορεί να προκαλέσει καθώς και τις πηγές των προαναφερθέντων δυσκολιών. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά ο σκοπός και τα ερωτήματα της παρούσας μελέτης καθώς και η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε ώστε να διερευνηθούν. Στο τρίτο κεφάλαιο καταγράφονται τα αποτελέσματα της μελέτης ενώ στο τέταρτο και στο πέμπτο κεφάλαιο συζητιούνται αναλυτικά τα συμπεράσματα της μελέτης καθώς και προτάσεις για την περαιτέρω διερεύνηση των ζητημάτων που αναλύθηκαν και προέκυψαν καθώς και εκπαιδευτικές εφαρμογές.

2 ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

2.1 Η έννοια της μεταβλητής στην άλγεβρα

Η άλγεβρα κατέχει σημαντική θέση στα σχολικά προγράμματα σπουδών καθώς θεωρείται ότι αποτελεί το πέρασμα από την αριθμητική στα ανώτερα Μαθηματικά. Είναι αυτός ο κλάδος των μαθηματικών που παρέχει τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για την αναπαράσταση και ανάλυση ποσοτικών σχέσεων, τη μοντελοποίηση καταστάσεων και τη λύση προβλημάτων σε όλες τις περιοχές των μαθηματικών (Kaput, 1998; Moses & Cobb, 2001; National Research Council, 1998). Ο θεμελιώδης ρόλος της άλγεβρας σε όλους τους τομείς των μαθηματικών καθιστά τη γνώση χειρισμού και την κατανόηση της, συστατικά απαραίτητα για μια επιτυχή πορεία στα μαθηματικά (NCTM, 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008; RAND Mathematics Study Panel, 2003). Παρά τη σημασία της όμως, πολλοί είναι αυτοί που αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην κατανόηση και το χειρισμό της κυρίως γιατί αντιλαμβάνονται την άλγεβρα ως αποστήθιση κανόνων για το χειρισμό των συμβόλων της, χωρίς να αποδίδουν νόημα στο τι μπορεί να σημαίνουν ή να αναπαριστούν τα σύμβολα αυτά (Kaput, 1998). Αρκετοί είναι εκείνοι που θεωρούν ότι για να βελτιωθούν η γνώση και επίδοση στα μαθηματικά απαραίτητη είναι η μάθηση θεμελιωδών αλγεβρικών αρχών (Kaput, 1998; Olive, Izsak, & Blanton, 2002). Σύμφωνα με αυτή την οπτική η διδασκαλία της άλγεβρας οφείλει να μετατοπιστεί από τη δευτεροβάθμια σε χαμηλότερες βαθμίδες της εκπαίδευσης όχι ως χειρισμός άγνωστων ποσοτήτων αλλά ως αλγεβρικός τρόπος σκέψης που συνυπάρχει με τις αριθμητικές σχέσεις που διδάσκονται οι μαθητές στην αριθμητική (Knuth et al., 2016; Asquith et al., 2007; Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2008; Kaput, Carraher, & Blanton, 2017).

Στο πλαίσιο αυτό η ερευνητική κοινότητα προσπάθησε να παρουσιάσει μια συνεχή εικόνα της άλγεβρας και να καταγράψει τόσο τα αλγεβρικά σύμβολα που είναι απαραίτητα στην ουσιαστική κατανόηση της, όσο και τις δυσκολίες που αυτά δημιουργούν. Στο επίκεντρο των παραπάνω ερευνών λοιπόν βρέθηκε η έννοια της μεταβλητής, η οποία φαίνεται να κατέχει θεμελιώδη ρόλο για την άλγεβρα (Küchemann 1978; MacGregor & Stacey 1997; Philipp 1992; Usiskin 1988). Σύμφωνα με τον Usiskin (1988), η έννοια της μεταβλητής συνδέεται τόσο στενά με την αλγεβρική σκέψη που πολλές φορές η ίδια η άλγεβρα ορίζεται ως η μελέτη της χρήσης και των ιδιοτήτων της μεταβλητής. Ο ίδιος προσπάθησε να «ορίσει» το τι είναι η μεταβλητή ανάλογα με το αλγεβρικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αυτή έχει εφαρμογή. Έτσι όταν η άλγεβρα θεωρείται ως:

1. *Γενικευμένη αριθμητική*: οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται ως γενικευμένοι αριθμοί για να εκφράσουν μαθηματικές σχέσεις όπως η α+β = β+α.
2. *Το πεδίο μελέτης των διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων*: οι μεταβλητές παίρνουν τη θέση του αγνώστου σε μια εξίσωση (π.χ. 5x+3=18) και μπορούν να πάρουν συγκεκριμένες τιμές, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση.
3. *Το πεδίο μελέτης ποσοτικών σχέσεων*: οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν συναρτησιακές σχέσεις (π.χ. y=5x), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενώ οι τιμές της y εξαρτώνται από τις τιμές της x και τη δοθείσα σχέση.
4. *Το πεδίο μελέτης μαθηματικών δομών*: οι μεταβλητές είναι αυθαίρετα μαθηματικά αντικείμενα μέσα σε δομές όπως ομάδες, σώματα και δακτύλιοι που λειτουργούν κάτω από ορισμένους κανόνες και αρχές [π.χ. a*(b*c)=(a*b)*c].

Από τις παραπάνω χρήσεις της μεταβλητής οι τρεις πρώτες είναι αυτές που συναντώνται στα σχολικά μαθηματικά. Επιπλέον, σε έρευνα του προγράμματος «Έννοιες των Μαθηματικών και της Επιστήμης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση» (Concepts in Secondary Mathematics and Science, CSMS), στην οποία συμμετείχαν 3000 μαθητές ηλικίας 13-15 ετών, ο Kuchemann (1978,1981) πρόσφερε μια ταξινόμηση για τις ερμηνείες που έδωσαν οι μαθητές για τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα. Σύμφωνα με τα παραπάνω:

1. Στο γράμμα αποδίδεται μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή σχετική με το πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται και χρησιμοποιείται αυτή αντί για το γράμμα.
2. Το γράμμα είτε αγνοείται είτε δεν του δίνεται ιδιαίτερη σημασία.
3. Το γράμμα ερμηνεύεται ως κάποια συντομογραφία του ονόματος ενός αντικειμένου ή ως το ίδιο το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται.
4. Το γράμμα ερμηνεύεται ως κάποιος συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός.

5. Το γράμμα ερμηνεύεται ως σύμβολο που αναπαριστά πολλούς και όχι μόνο έναν αριθμό.
6. Το γράμμα ερμηνεύεται ως μεταβλητή, ως σύμβολο που αναπαριστά δηλαδή ένα εύρος τιμών και όπου η τιμή του μεταβάλλεται ανάλογα με μια σχέση που έχει με άλλα γράμματα-μεταβλητές.

Αυτή η ποικιλία στον ορισμό, αλλά και οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη μεταβλητή είναι κάποιοι από τους λόγους που καθιστούν την κατανόησή των αλφαβητικών συμβόλων στην άλγεβρα μια διαδικασία δύσκολή και απαιτητική για τους μαθητές. Για τον λόγο αυτό, η ερευνητική κοινότητα προχώρησε στη μελέτη και καταγραφή των λαθών που εμφανίζουν οι μαθητές με την έννοια της μεταβλητής στην προσπάθεια ερμηνείας των παραπάνω δυσκολιών.

2.2 Κατανόηση της μεταβλητής από τους μαθητές – λάθη και παρανοήσεις

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια από τις αρχικές αντιλήψεις σχετικά με την έννοια της μεταβλητής είναι αυτή που θέλει τους μαθητές να ερμηνεύουν τα αλφαβητικά σύμβολα στην άλγεβρα ως συντομογραφίες, ετικέτες ή αντικείμενα. Αρκετοί ερευνητές ήταν αυτοί που εντόπισαν ότι οι μαθητές βλέποντας για παράδειγμα την μεταβλητή β σε μια αλγεβρική έκφραση, θεωρούσαν ότι αυτό που αναπαριστά είναι συντομογραφία για κάποιο μέγεθος (π.χ. β=βάρος) ή για κάποιο αντικείμενο (π.χ. β=βιβλία) (Lucariello, Tine & Ganley, 2014; Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007; MacGregor & Stacey, 1997; Philipp, 1992; Kuchemann, 1978, 1981). Αυτή η ερμηνεία φάνηκε σε ορισμένες περιπτώσεις να δημιουργεί παρανοήσεις σχετικά με την αριθμητική αξία των συμβόλων όπως στις περίπτωση της έρευνας των MacGregor & Stacey (1997) καθώς και της Wagner (1981). Οι πρώτοι σε μελέτη με 2000 μαθητές παρατήρησαν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι μαθητές αντιστοίχιζαν τα σύμβολα του αλφαβήτου (μεταβλητές) με τη θέση τους στο αλφάβητο προκειμένου να τους αποδώσουν μια αριθμητική τιμή (π.χ. $h + 10 = 18$ αφού το h είναι το $8^{ο}$ γράμμα της αλφαβήτου). Ερμήνευαν δηλαδή τις μεταβλητές με βάση την προηγούμενη εμπειρία τους με άλλα συμβολικά συστήματα όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση το αλφάβητο (MacGregor & Stacey, 1997). Ακόμη, η ερμηνεία των αλφαβητικών συμβόλων στην άλγεβρα ως ετικέτες ή αντικείμενα, φάνηκε να δημιουργεί δυσκολία στην κατανόηση των μεταβλητών ως σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς και την επίλυση λεκτικών προβλημάτων που περιείχαν μεταβλητές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα στο οποίο φοιτητές έπρεπε να μοντελοποιήσουν το εξής πρόβλημα: «Υπάρχουν 6 φορές περισσότεροι μαθητές (S) από τους καθηγητές (P). Να γράψετε μια εξίσωση για τον παραπάνω ισχυρισμό». Τα 2/3 των λανθασμένων απαντήσεων στο συγκεκριμένο πρόβλημα περιείχαν την απάντηση 6S = P, με τους ερωτηθέντες να αντιλαμβάνονται το S όχι σα μεταβλητή που συμβολίζει το πλήθος των μαθητών αλλά σαν ετικέτα συνδεδεμένη με τον αριθμό 6 (Clement, Lochhead & Monk, 1981; Rosnick, 1981).

Η αδυναμία επίλυσης λεκτικών προβλημάτων με αλγεβρικό τρόπο εξαιτίας της ύπαρξης των μεταβλητών τονίστηκε και από άλλους ερευνητές οι οποίοι εντόπισαν ότι οι μαθητές είτε επέλεγαν να λύσουν τα προβλήματα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους αριθμούς στη θέση των μεταβλητών, είτε δυσκολεύονταν στο να δημιουργήσουν τις κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις (Warren, 1998; Kieran & Chalouh, 1993). Συγκεκριμένα όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν απάντηση στο «πόσοι μαθητές θα μεταφερθούν συνολικά από 3 λεωφορεία όταν το καθένα μεταφέρει x μαθητές και 4 αυτοκίνητα που το καθένα μεταφέρει y μαθητές» εκείνοι δεν κατάφεραν να δώσουν την απάντηση 3x + 4y χωρίς να χρησιμοποιήσουν αριθμητικές τιμές στη θέση των μεταβλητών (Warren, 1998 όπως αναφέρεται στο Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018).

Την δυσκολία των μαθητών να αποδεχτούν μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητές ως αποτέλεσμα μιας άσκησης / ενός προβλήματος φαίνεται να είχαν εντοπίσει και ο Collis (1975), αλλά και πλήθος άλλων ερευνητών (Booth, 1984; Kieran, 1992; Linchevski & Herscovics, 1996; Schmittau, 2005). Από αυτούς η Booth ήταν εκείνη που συνέδεσε τη δυσκολία αποδοχής μιας παράστασης με γράμματα, και όχι μιας αριθμητικής τιμής, ως το τελικό αποτέλεσμα ασκήσεων με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, στην προηγούμενη εμπειρία των μαθητών με την αριθμητική.

Μια ακόμη δυσκολία των μαθητών με τη μεταβλητή προκύπτει από την αδυναμία τους να την κατανοήσουν ως σύμβολο που δεν αναπαριστά έναν συγκεκριμένο, αλλά οποιονδήποτε αριθμό. Ήδη από το 1978 ο Küchemann είχε εντοπίσει ότι οι μαθητές αποδίδουν στις μεταβλητές συγκεκριμένες τιμές, τυχαίες πολλές φορές, για να τις χειριστούν. Για παράδειγμα όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν το αποτέλεσμα στην ερώτηση «Αν e + f = 8, τότε με τι ισούται η παράσταση e + f + g;», ένα συχνό λάθος ήταν οι μαθητές να απαντούν με μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή π.χ. 12, αποτέλεσμα που προκύπτει αν αποδώσει κανείς μια αριθμητική τιμή στη μεταβλητή g και τη χρησιμοποιήσει ώστε να γίνει η πρόσθεση μεταξύ συγκεκριμένων αριθμών. Το ίδιο λάθος εντόπισαν και η Booth (1984) αλλά και αργότερα οι Asquith, Stephens, Knuth και Alibali (2007) οι οποίοι παρατήρησαν επιπλέον ότι οι μαθητές εξέφραζαν την άποψη ότι μια μεταβλητή μπορεί να λάβει μια συγκεκριμένη μονοψήφια τιμή, δηλαδή αριθμούς από το 0 έως το 9. Η συγκεκριμένη παρανόηση φαίνεται να είναι αρκετά συχνό φαινόμενο σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Blanton, 2008; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2008; MacGregor & Stacey, 1997; Lucariello και συνεργάτες, 2014). Μάλιστα η Lucariello και οι συνεργάτες της (2014) κατέταξαν την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών ως τη δεύτερη πιο συνηθισμένη μετά την πεποίθηση ότι τα γράμματα συμβολίζουν ετικέτες ή ονόματα.

Πέρα από την καταγραφή των σχετικών με την έννοια της μεταβλητής λαθών και παρανοήσεων, έγιναν προσπάθειες ώστε να ερμηνευτεί η προέλευσή τους. Μια ευρέως διαδεδομένη άποψη ήταν αυτή σύμφωνα με την οποία οι δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα οφείλονται κατά βάθος στην προηγούμενη εμπειρία των μαθητών με την αριθμητική (Matz, 1980; Booth, 1984; Kieran, 1992; Herscovics & Linchevski, 1994; MacGregor & Stacey, 1997, Lucariello και συνεργάτες, 2014). Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση οι μαθητές φαίνεται να ερμηνεύουν την καινούρια πληροφορία που αφορά την άλγεβρα, χρησιμοποιώντας την προϋπάρχουσα γνώση τους. Μάλιστα παρανοήσεις που δημιουργούνται λόγω της προηγούμενης γνώσης των μαθητών, φαίνεται όχι μόνο να επηρεάζουν τις επιδόσεις τους και να αποτελούν εμπόδιο για την επίλυση ποικίλων μαθηματικών προβλημάτων, αλλά και να γίνονται όλο και πιο στέρεες με τον καιρό, προκαλώντας ακόμη περισσότερα προβλήματα στους μαθητές μεγαλύτερων βαθμίδων της μαθηματικής εκπαίδευσης (MacNeil & Alibali, 2005; Lucariello και συνεργάτες, 2014). Η αντίληψη αυτή φαίνεται να είναι σύμφωνη με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία και θα αναλυθεί παρακάτω.

2.3 Εννοιολογική αλλαγή για τις δυσκολίες των μαθητών στην έννοια της μεταβλητής

Όπως είδαμε προηγουμένως, ένα μεγάλο μέρος της ερευνητικής κοινότητας για να εξηγήσει τις δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών στην έννοια της μεταβλητής στην άλγεβρα, στράφηκε στην προϋπάρχουσα εμπειρία των μαθητών με την αριθμητική. Μια θεωρητική προσέγγιση που στηρίζεται στην αλληλεπίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης με τη νέα πληροφορία και μπορεί όχι μόνο να ερμηνεύσει τα λάθη των μαθητών, αλλά και να τα προβλέψει, είναι αυτή της εννοιολογικής αλλαγής. Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής προέρχεται από την έρευνα πάνω στην ιστορία της επιστήμης όταν ο Kuhn (1970) ισχυρίστηκε ότι κατά την εξέλιξη της επιστήμης, το κοινώς αποδεκτό ως το επιστημονικά ορθό δεν προκύπτει από τη συσσώρευση και τον εμπλουτισμό των γνώσεων που αποκτήθηκαν, αλλά είναι το αποτέλεσμα της σύγκρουσης νέων με τις υπάρχουσες εδραιωμένες θεωρίες (όπως αναφέρεται στο Χρήστου, 2009). Αντίστοιχα στην περιοχή της γνωσιακής επιστήμης, οι ερευνητές παρατήρησαν ότι τα παιδιά, ήδη από την προσχολική ηλικία, προκειμένου να ερμηνεύσουν φαινόμενα τόσο στο φυσικό όσο και στο πολιτισμικό τους περιβάλλον οργανώνουν τις πληροφορίες που δέχονται από τα ερεθίσματά τους και τις διαισθητικές τους γνώσεις, σε εσωτερικά συνεπείς εξηγήσεις που έχουν τη μορφή θεωρίας. Ωστόσο οι εξηγήσεις αυτές, τα εναλλακτικά ερμηνευτικά πλαίσια, συχνά παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση από τις αντίστοιχες επιστημονικές εξηγήσεις, ενώ παράλληλα είναι πολύ δύσκολο να αλλάξουν (Vosniadou, 1994; Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008).

Ένα σύνολο από σχετικές μεταξύ τους τέτοιες εξηγήσεις συγκροτεί μια θεωρία-πλαίσιο βάση του οποίου οι μαθητές ερμηνεύουν τις νέες πληροφορίες και έννοιες που δέχονται από το περιβάλλον ή και διδάσκονται. Η θεωρία-πλαίσιο στην εννοιολογική αλλαγή προέρχεται από την κονστρουκτιβιστική παράδοση στη μάθηση και τη διδασκαλία, που θέλει τη μάθηση να προκύπτει από την προσπάθεια των μαθητών να κατανοήσουν μια νέα πληροφορία χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που ήδη έχουν αποκτήσει. Κάθε νέα πληροφορία ερμηνεύεται σύμφωνα με όσα είναι ήδη γνωστά και συνήθως αφομοιώνεται ομαλά στην προϋπάρχουσα γνωστική δομή, η οποία λειτουργεί ως βάση για την περαιτέρω δόμηση της γνώσης (Vosniadou, 2001 όπως αναφέρεται στο Χρήστου, 2009). Παρ’ όλα αυτά υπάρχουν περιπτώσεις όπου η προϋπάρχουσα γνώση φαίνεται να λειτουργεί ως εμπόδιο στην κατανόηση νέων εννοιών, καθώς επιδρά προκαλώντας συστηματικά (και όχι τυχαία) λάθη των μαθητών σε ορισμένες δοκιμασίες (Fishbein, 1987; Sfard, 1994; Greer, 1994; Kieran, 1992). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εμφάνιση των συνθετικών λαθών, δηλαδή παρερμηνειών που προκύπτουν όταν οι μαθητές, στην προσπάθεια ενσωμάτωσης της νέας γνώσης σε ένα ήδη υπάρχον καλά συγκροτημένο ερμηνευτικό πλαίσιο, εμπλουτίζουν προσθετικά την προϋπάρχουσα γνώση με τη νέα πληροφορία, χωρίς να καταφέρνουν να εγκαταλείψουν κάποιες από τις υπάρχουσες πεποιθήσεις τους που πιθανόν να χρειάζονται αλλαγή (βλέπε Vosniadou, 1994· 1999; Vosniadou και συνεργάτες, 2008).

Με βάση τα παραπάνω το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής υποστηρίζει ότι η γνώση δεν αποτελείται από αποσπασματικές παρατηρήσεις, αλλά είναι το αποτέλεσμα ενός δικτύου πληροφοριών που συγκροτείται ως θεωρία. Στις περιπτώσεις εκείνες που η νέα γνώση βρίσκεται σε σύγκρουση με στοιχεία της υπάρχουσας θεωρίας των μαθητών, απαιτείται αναδιοργάνωση του υπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου. Η διαδικασία αυτή αποτελεί την «εννοιολογική αλλαγή» και θεωρείται μια διαδικασία χρονοβόρα αλλά και απαιτητική καθώς απαιτεί αλλαγές σε μια σειρά εννοιών και σχέσεων του υπάρχοντος εννοιολογικού δικτύου (Smith, Salomon & Carey, 2005; Vosniadou, 1999; Vosniadou et al., 2007; Vosniadou et al., 2008).

Η εννοιολογική αλλαγή, εξαιτίας της σύγκρουσης της ήδη κατακτημένης γνώσης με την καινούρια πληροφορία, αποτελεί ένα θεωρητικό πλαίσιο με εφαρμογή και στο χώρο των μαθηματικών καθώς θεωρήθηκε ότι τόσο ιστορικά μπορεί να προκύψουν επαναστατικές αλλαγές στα ίδια τα μαθηματικά (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Greer & Verschaffel, 2007; Ernest, 1993; Dauben, 1984; Confrey, 1981), όσο και γνωστικά κατά τη μάθησή τους μπορεί νέες μαθηματικές έννοιες να απαιτούν την αλλαγή και διαπραγμάτευση του ήδη υπάρχοντος εννοιολογικού πλαισίου (Χρήστου, 2009). Σε γνωστικό επίπεδο στα μαθηματικά, η εννοιολογική αλλαγή ως αλλαγή του νοήματος και όχι ως αντικατάσταση εννοιών φαίνεται να έχει ανταπόκριση για να ερμηνεύσει και να αντιμετωπίσει περιπτώσεις όπως οι παρακάτω: Αρχικά ερευνητές όπως η Resnick (2006) θεωρούν ότι οι διαισθητικές γνώσεις των μαθητών μπορεί να αποτελέσουν τροχοπέδη για τη μάθηση νέων εννοιών στα μαθηματικά. Άλλοι όπως οι Fishbein και οι συνεργάτες του (1985), οι Stafylidou & Vosniadou (2004) και οι Vamvakousi & Vosniadou (2007) θεωρούν ότι η αρχική έκθεση των μαθητών σε ορισμένες μαθηματικές έννοιες, μπορεί να εμποδίσει την κατανόηση ανώτερων εννοιών. Ακόμη, ο διαφορετικός τρόπος χρήσης της ίδιας μαθηματικής έννοιας ή του ίδιου μαθηματικού συμβολισμού, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο βρίσκεται, μπορεί να δημιουργήσει την αδυναμία κατανόησης της έννοιας από τους μαθητές αλλά και λάθη και παρανοήσεις (Gelman, 1994). Τέλος, ο τρόπος διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών και συμβόλων μπορεί να σταθεί ως εμπόδιο στην κατανόηση των ίδιων, όταν αυτά εμφανίζονται έχοντας μια διαφορετική χρήση, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα με την έννοια του αριθμού στην αριθμητική αρχικά και αργότερα των συμβόλων που τον αναπαριστούν στην άλγεβρα (Booth, 1984; Hercsovics, 1989; Kieran, 1992; MacGregor & Stacey, 1997 όπως αναφέρεται στο Χρήστου, 2009). Χαρακτηριστικά παραδείγματα των προαναφερθέντων περιπτώσεων αποτελούν η έννοια της μεταβλητής, που όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να έχει διαφορετική χρήση ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται, αλλά και το σύμβολο της ισότητας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο ως σύμβολο που δείχνει το αποτέλεσμα μιας μαθηματικής πράξης (π.χ. 5-2 = 3), όσο και ως το σύμβολο της ισότητας ανάμεσα στα δύο μέλη μιας εξίσωσης στην άλγεβρα (π.χ. 3x + 4 = 10 + x) (Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2007; Greer, 2006; Kieran, 1981).

Πως όμως το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να θεωρηθεί χρήσιμο στην περίπτωση της μελέτης της έννοιας της μεταβλητής η οποία μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία; Είδαμε ότι στη βιβλιογραφία εμφανίζεται μια ποικιλία λαθών και παρερμηνειών που αφορούν στη μεταβλητή. Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής λοιπόν, υποστηρίζει ότι τα λάθη αυτά των μαθητών με τη συγκεκριμένη έννοια δεν είναι λάθη τα οποία προέκυψαν τυχαία και είναι ασύνδετα μεταξύ τους. Αντίθετα, εμφανίζονται με τρόπο συστηματικό και οφείλονται στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για το τι συμβολίζουν τα γράμματα στα μαθηματικά. Σε ένα πρώτο επίπεδο οι μαθητές είδαμε ότι μέσα από τη διδασκαλία έχουν δεχθεί ότι τα γράμματα αποτελούν ταμπέλες ή συντομογραφίες αντικειμένων (π.χ. το γράμμα **μ** συμβολίζει **μέτρα**). Με την εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής στη διδασκαλία οι μαθητές καλούνται να επαναδιαπραγματευτούν τα όσα ήδη γνωρίζουν για το τι συμβολίζουν τα αλφαβητικά σύμβολα, φτάνοντας στο σημείο να αντιληφθούν τελικά τη μεταβλητή ως ένα σύμβολο που αναπαριστά αριθμούς. Ωστόσο ακόμα και όταν οι μαθητές κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής ως ένα σύμβολο που αναπαριστά αριθμούς, παρατηρήθηκε ότι αδυνατούν να κατανοήσουν τη μεταβλητή ως σύμβολο που αναπαριστά ένα εύρος πραγματικών αριθμητικών τιμών, και όχι έναν ή και κάποιους συγκεκριμένους αριθμούς (Χρήστου, 2009).

Η παρερμηνεία ότι μια μεταβλητή αναπαριστά έναν ή ένα συγκεκριμένο είδος (μια συγκεκριμένη αναπαράσταση) αριθμών, σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής οφείλεται στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τον ίδιο τον αριθμό. Από τη στιγμή που οι μαθητές δέχονται τη σχέση ανάμεσα στα γράμματα ως μεταβλητές και στους αριθμούς, έχει θεωρηθεί ότι ενεργοποιείται ένα εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό, το οποίο είναι οργανωμένο γύρω από το συμβολισμό και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Έτσι δημιουργείται μια τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως αριθμούς φυσικούς, ή αριθμούς που τείνουν να διατηρούν κάποιες από τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, δημιουργώντας έτσι λάθη και παρανοήσεις σε ποικίλα μαθηματικά πλαίσια. Για να διερευνηθεί επομένως η τάση των μαθητών να κατανοούν και να ερμηνεύουν τη μεταβλητή στην άλγεβρα ως συγκεκριμένους αριθμούς και όχι ως οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, οφείλει να διερευνηθεί η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν την έννοια του αριθμού σύμφωνα με τις γνώσεις για το φυσικό αριθμό, ένα φαινόμενο που είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως «προκατάληψη του φυσικού αριθμού».

2.4 Προκατάληψη του φυσικού αριθμού στην ερμηνεία των αριθμών

Πολλοί ήταν εκείνοι οι ερευνητές που εντόπισαν ότι υπάρχει μια έντονη τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν άλλες αναπαραστάσεις αριθμών, όπως τα κλάσματα, οι δεκαδικοί ή οι αρνητικοί αριθμοί (Christou, 2015, 2017; Ni & Zhou, 2005; Vlassis, 2004; Staffylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Merenluoto & Leihtinen, 2004; Gelman, 2000; Harnett & Gelman 1998; Resnick et al.; 1989; Mack, 1988). Η τάση αυτή των μαθητών να αποδίδουν στους κλασματικούς ή δεκαδικούς αριθμούς ιδιότητες των φυσικών στην προσπάθειά τους να τους κατανοήσουν χαρακτηρίστηκε από τους Ni και Zhou (2005) ως «προκατάληψη του ακέραιου (whole) αριθμού». Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές ο όρος «προκατάληψη» ορίζεται ως μια συστηματική απόκλιση από τον κανόνα (Caverni, Fabre & Gonzalez, 1990 όπως αναφέρεται στο Χρήστου, 2009).

Κάποιες από τις προσεγγίσεις σχετικά με τη δημιουργία και την ανάπτυξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, συνδέουν το φαινόμενο με την ύπαρξη ενός εμποδίου που δημιουργείται εξαιτίας ενός εξειδικευμένου γνωστικού μηχανισμού που είναι υπεύθυνος για την ικανότητα της απαρίθμησης από τα παιδιά (Gallistel & Gelman, 1992). Αυτό συμβαίνει καθώς κατά την απαρίθμηση ισχύουν ορισμένες αρχές όπως η ένα-προς-ένα αντιστοίχιση αντικειμένου με αριθμό, η σταθερή διάταξη στη λίστα που καταμετρείται, η αφαίρεση και η πληθικότητα (το πλήθος ενός συνόλου), οι οποίες ενισχύουν την εστίαση σε διακριτές ποσότητες όπως είναι οι φυσικοί αριθμοί. Μια άλλη προσέγγιση υποστηρίζει ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού οφείλεται, όχι σε κάποιον έμφυτο μηχανισμό, αλλά στη γνωστική ανάπτυξη που προκύπτει από την αφομοίωση των πολιτισμικών εργαλείων, ένα από τα οποία είναι και η απαρίθμηση (Mix, Levine & Huttenlocher, 2002). Ακόμη, μια οπτική θέλει το φαινόμενο της ΠΦΑ να συνδέεται με τη μάθηση και να οφείλεται στην προβληματική διδασκαλία και στην καθημερινή επαφή των μαθητών με τους αριθμούς στο κοινωνικό-πολιτιστικό τους περιβάλλον (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993 όπως αναφέρεται στο Χρήστου, 2009).

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, απ' όπου θεωρούμε και ότι πηγάζει το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού: από το πολιτισμικό προνόμιο, τη μορφή του μαθηματικού συμβολισμού, τις διαισθήσεις των μαθητών για τον αριθμό ή τη διδασκαλία, οι μαθητές ήδη από την προσχολική ηλικία έχουν σχηματίσει μια αντίληψη για το τι μπορεί να είναι ο αριθμός, ποια η μορφή και ποιες οι ιδιότητές του. Η εικόνα αυτή για την έννοια του αριθμού είναι πολύ συμβατή με την μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού και σε ένα πρώτο στάδιο λειτουργεί βοηθητικά κατά την μάθηση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007· Χρήστου, 2009). Επιπλέον, αυτή η αντίληψη των μαθητών για το τι αποτελεί έναν αριθμό ενισχύεται τα πρώτα χρόνια της διδασκαλίας καθώς οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς και τις πράξεις μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να συγκροτείται ένα εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο, μια θεωρία για την έννοια του αριθμού, οργανωμένη γύρω από το φυσικό αριθμό. Αυτή η θεωρία-πλαίσιο ωστόσο έρχεται σε σύγκρουση με τη νέα πληροφορία που προκύπτει για τον αριθμό, με την εισαγωγή στη διδασκαλία των κλασμάτων και των δεκαδικών αρχικά, όπως και των αρνητικών αριθμών στη συνέχεια. Στην προσπάθειά τους λοιπόν οι μαθητές να συνδυάσουν την ήδη υπάρχουσα γνώση για τον αριθμό, που είναι οργανωμένη γύρω από το φυσικό αριθμό, με τις νέες αναπαραστάσεις αριθμών που καλούνται να μάθουν και να διαχειριστούν, κάνουν χρήση των κανόνων και των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε περιστάσεις όπου εμπλέκονται άλλοι αριθμοί (π.χ. κλάσματα ή δεκαδικοί). Αυτή η τάση των μαθητών φαίνεται να ευθύνεται για μια ποικιλία λαθών και παρανοήσεων σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών (Nesher & Peled, 1986; Fishbein et al, 1985; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Christou, 2015· 2017, Christou & Vosniadou, 2012). Κάποια από αυτά, τα οποία συνδέονται άμεσα ή έμμεσα με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, θα αναλυθούν παρακάτω μέσα από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας για την προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

2.4.1 Προκατάληψη των φυσικών αριθμών και έννοια του αριθμού

Οι πρώτες έρευνες που εντόπισαν την τάση των μαθητών να κάνουν χρήση της γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν ρητοί, επικεντρώθηκαν στην ίδια την έννοια του αριθμού και τις ιδιότητές του. Χαρακτηριστικά, οι Nesher & Peled (1986), οι Reschnik και συνεργάτες (1989) έδειξαν ότι οι μαθητές λανθασμένα θεωρούσαν ότι όσο μεγαλύτερο πλήθος ψηφίων έχει ένας δεκαδικός αριθμός, τόσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του (π.χ. 2.305 > 2.35), μια ιδιότητα που ισχύει στην περίπτωση των φυσικών αριθμών. Επιπλέον, μια άλλη ιδιότητα των φυσικών αριθμών, η διακριτότητα, φάνηκε να δημιουργεί εμπόδια στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Οι μαθητές, για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη γνώση ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν μοναδικό προηγούμενο και έναν επόμενο αριθμό θεωρούσαν ότι δεν υπάρχει κανένας αριθμός μεταξύ των διαδοχικών δεκαδικών 0.5 και 0.6 (Hannula et al., 2006; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Σε αυτή την κατεύθυνση οι Vamvakoussi και Vosniadou (2010) έδειξαν επιπλέον ότι υπάρχουν ενδιάμεσα στάδια αποδοχής από τους μαθητές της ύπαρξης άπειρων αριθμών μέσα σε οποιοδήποτε διάστημα.

Αντίστοιχα ευρήματα για τους κλασματικούς αριθμούς, έδειξαν ότι οι μαθητές έτειναν να συγχέουν το πλήθος των μερών μιας διαμέρισης με το μέγεθος του κάθε μέρους. Ισχυρίζονταν, για παράδειγμα, ότι $1/4 > 1/3$ αφού $4 > 3$. Ακόμη, υπήρχαν περιπτώσεις όπου οι μαθητές πίστευαν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος τόσο μεγαλύτερο είναι και το ίδιο το κλάσμα (Hartnett & Gelman, 1998; Moss, 2005), ή αντίθετα όσο μικρότεροι οι όροι του κλάσματος σε μέγεθος τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα (DeWolf & Vosniadou 2014; Resnick και συνεργάτες, 1989; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Στα ευρήματα που ενισχύουν την άποψη ότι οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών επηρεάζουν την κατανόηση των ρητών είναι και η δυσκολία σύγκρισης διαφόρων κλασμάτων με τη μονάδα, όπως επίσης και δεκαδικών με το 0. Πιο συγκεκριμένα, όταν ζητήθηκε από μαθητές να συγκρίνουν και κατ' επέκταση να διατάξουν κλάσματα σε σχέση με το 1 παρατηρήθηκε το εξής φαινόμενο: οι μαθητές έτειναν να θεωρούν όλα τα δοσμένα κλάσματα μικρότερα της μονάδας, ή όλα μεγαλύτερα της μονάδας (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Σύμφωνα με τις Stafylidou & Vosniadou (2004), η παραπάνω παρανόηση μπορεί να οφείλεται στο δημοφιλές σχήμα μέρος-όλου που χρησιμοποιείται για την εισαγωγή των κλασμάτων στη διδασκαλία και θέλει το κλάσμα να θεωρείται το μέρος του όλου, συνεπώς οι μαθητές (θεωρώντας τη μονάδα ως το όλο και το κλάσμα ως το μέρος) αντιλαμβάνονται το κλάσμα πάντοτε μικρότερο της μονάδας. Διαφορετικά η υπεργενίκευση της ιδιότητας της μονάδας ως ο μικρότερος φυσικός αριθμός, οδηγεί στην παρανόηση ότι το 1 αποτελεί το μικρότερο αριθμό γενικότερα, επομένως και κάθε κλάσμα θα είναι μεγαλύτερο από αυτό (Stafylidou & Vosniadou 2004). Αντίστοιχα, παρατηρήθηκε ότι μαθητές, όπως και υποψήφιοι δάσκαλοι θεωρούσαν δεκαδικούς αριθμούς της μορφής 0.9 ή 0.67 μικρότερους του 0, δηλαδή ως αρνητικούς (Stacey, Helme & Steinle, 2001).

2.4.2 Προκατάληψη των φυσικών αριθμών και αριθμητικές πράξεις

Ένα ακόμη μεγάλο μέρος της έρευνας ασχολείται με τις επιδόσεις των μαθητών στις αριθμητικές πράξεις. Στο πεδίο αυτό, ήδη από το 1985, ο Fishbein και οι συνεργάτες του διαπίστωσαν ότι τα διαισθητικά μοντέλα, δηλαδή γνωσιακές πεποιθήσεις με χαρακτήρα άμεσο, αυτονόητο και βέβαιο, που έχουν αναπτυχθεί στους μαθητές για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, επιβάλλουν ορισμένους περιορισμούς για τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται και τους ρόλους που αυτοί έχουν μέσα στη δομή ενός προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, εντοπίστηκε ότι οι μαθητές λανθασμένα θεωρούσαν πως ο πολλαπλασιασμός πάντοτε παράγει ένα μεγαλύτερο αποτέλεσμα από τους αρχικούς όρους της πράξης ενώ η διαίρεση μικρότερο (Fishbein et al., 1985; Harel et al., 1994, Christou, 2015). Αντίστοιχη πεποίθηση διαπιστώθηκε και για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, όπου οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι η πρόσθεση πάντοτε μεγαλώνει ενώ η αφαίρεση μικραίνει (Green et al., 2008; Tirosh et al. 2008).

Οι αντιλήψεις αυτές των μαθητών για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων μελετήθηκαν στη συνέχεια υπό το πρίσμα της προκατάληψης του φυσικού αριθμού. Θεωρήθηκε ότι η γνώση περί φυσικών επεμβαίνει στη σκέψη των μαθητών, καθώς το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού μεταξύ δυο τυχαίων φυσικών αριθμών είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τους αρχικούς αριθμούς (εκτός αν ανάμεσα στους όρους της πράξης υπάρχει το 0 ή το 1), ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση μεταξύ δύο φυσικών αριθμών σίγουρα θα οδηγήσει σε αποτέλεσμα μικρότερο από τον αφαιρετέο και τον διαιρετέο αντίστοιχα (Christou, 2015). Παρ’ όλα αυτά δε συμβαίνει το ίδιο και στις περιπτώσεις όπου στις πράξεις συμμετέχουν αριθμοί ρητοί μικρότεροι της μονάδας ή αρνητικοί αριθμοί. Τότε οι προσδοκίες των μαθητών για τα αποτελέσματα των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων διαψεύδονται. Για παράδειγμα, το $7: 0.2$ είναι μεγαλύτερο του 7, το 8×0.5 μικρότερο του 8, και το $6 + (-2)$ μικρότερο του 6.

Η Βαμβακούσση και οι συνεργάτες της (2013), έδειξαν ότι ακόμη και ενήλικες μαθητές χρησιμοποιούσαν το διαισθητικό σύστημα σκέψης τους ώστε να απαντήσουν σε δραστηριότητες που περιλάμβαναν και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις σε αλγεβρικές παραστάσεις με δοσμένους αριθμούς και αλφαβητικά σύμβολα. Στην μελέτη αυτή, οι μαθητές λανθασμένα θεωρούσαν ότι η παράσταση $5 + 2x$ είναι πάντοτε μεγαλύτερη από το 5, επηρεασμένοι από το σύμβολο της πρόσθεσης. Διαπιστώθηκε λοιπόν, ότι τα πρωταρχικά μοντέλα που δημιουργούνται και αφορούν στις αριθμητικές πράξεις, είναι συμβατά και βασισμένα στους φυσικούς αριθμούς, με το χαρακτηριστικό ότι η επιρροή τους (είτε το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο είτε μικρότερο) αφορά μονάχα την εκάστοτε αριθμητική πράξη, χωρίς να λαμβάνονται υπ’ όψει οι αριθμοί που συμμετέχουν σε αυτήν. Επιπλέον θεωρήθηκε ότι μια από τις στρατηγικές που μπορεί να χρησιμοποιήθηκαν στις παραπάνω δοκιμασίες ήταν η δοκιμή με συγκεκριμένους αριθμούς στη θέση της μεταβλητής, όπου η χρήση κυρίως φυσικών αριθμών ενισχύει ακόμη περισσότερο τους ισχυρισμούς για την επιρροή τους (Christou, 2012).

Θέλοντας να ενισχύσει τα παραπάνω ευρήματα ο Christou (2015, 2017), προχώρησε σε δυο ποσοτικές έρευνες, όπου αρχικά μαθητές της 5ης και 6ης τάξης και μετέπειτα της 7ης και 8ης εξετάστηκαν σε ερωτήματα συμβατά και ασύμβατα με τις σχετικές διαισθήσεις τους. Αυτά περιλάμβαναν εκφράσεις είτε με αριθμητικές πράξεις μεταξύ δοσμένων αριθμών και αριθμών που έλειπαν, είτε με σύγκριση δυο τιμών όταν έλειπε το σύμβολο της αριθμητικής πράξης όπως επίσης και ερωτήσεις για τη διάταξη και την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Για παράδειγμα οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν εάν 7 x _= 21, 6 x _=11 και 2:_=5. Για άλλη μια φορά έγινε φανερό το γεγονός ότι στο πεδίο των αριθμητικών πράξεων υπάρχει όντως προκατάληψη των φυσικών αριθμών η οποία επεμβαίνει στο συλλογισμό των μαθητών με δυο τρόπους. Πρώτον, ενισχύει και πιθανότατα επίσης σχηματίζει την τάση των μαθητών να δημιουργούν διαισθητικά μια συσχέτιση της κάθε πράξης με συγκεκριμένα αποτελέσματα (όπως για παράδειγμα ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τους αριθμούς που συμμετέχουν στην πράξη και ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι πάντοτε μικρότερο από τους όρους της πράξης). Δεύτερον, στις πράξεις μεταξύ αριθμών που δεν αναπαρίστανται με συγκεκριμένα νούμερα, η προκατάληψη των φυσικών αριθμών ωθεί τους μαθητές να αντικαθιστούν τα κενά μόνο με φυσικούς αριθμούς.

Τέλος, έχοντας ενδείξεις από τη βιβλιογραφία σχετικά με τις δυσκολία των μαθητών με την έννοια του αριθμού και την τάση τους να θεωρούν τους ρητούς όχι ως ένα ενιαίο σύνολο αριθμών (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), αλλά να αντιλαμβάνονται τους δεκαδικούς και τα κλάσματα ως διαφορετικά είδη αριθμών (Khoury & Zazkis, 1994; O'Connor, 2001), ο Christou (2017, 2018) μελέτησε και το πως το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού επηρεάζει τις προσδοκίες των μαθητών σχετικά με το είδος των αριθμών που συμμετέχουν ως όροι στην κάθε αριθμητική πράξη. Ο όρος «είδος αριθμών» χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του αριθμού, όπως οι φυσικοί αριθμοί, οι δεκαδικοί και τα κλάσματα. Η παραπάνω έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου θεωρούσαν ότι το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης οφείλει να είναι αριθμός του ίδιου είδους με τους όρους της πράξης (ιδιότητα που σαφώς ισχύει στους φυσικούς αριθμούς, με εξαίρεση την πράξη της διαίρεσης). Για παράδειγμα το αποτέλεσμα της διαίρεσης μεταξύ δυο δεκαδικών αριθμών θα πρέπει να είναι δεκαδικός (και όχι ακέραιος), ή το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού μεταξύ κλασμάτων οφείλει να είναι κλάσμα. Τα παραπάνω συμπεράσματα προέκυψαν καθώς οι μαθητές απάντησαν σωστά σε μεγαλύτερο ποσοστό σε ερωτήματα όπου τόσο ο ένας όρος της πράξης όσο και το αποτέλεσμα ήταν του ίδιου είδους (π.χ. 41 ×_=7 ή 6,3 × .... = 2,1), σε αντίθεση με ερωτήματα όπου ο ένας από τους όρους διέφερε σε είδος από το αποτέλεσμα (π.χ. 4: .... = 7,6).

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει δείξει επιπλέον και μια ραγδαία αύξηση στα λάθη των μαθητών από τη στιγμή που εισάγονται οι αρνητικοί αριθμοί στις αριθμητικές πράξεις (Gallardo, 2002; Gallardo & Romero, 1999; Glaeser, 1981; Vlassis, 2002; Vlassis, 2004). Υπάρχουν ενδείξεις πως τα λάθη αυτά οφείλονται στην προσπάθεια των μαθητών να αφομοιώσουν τα νέα δεδομένα για τους αρνητικούς αριθμούς στις προϋπάρχουσες γνώσεις και διαισθήσεις τους για τους φυσικούς (Widjaja, Stacey & Steinle, 2011; Gallardo, 2002; Gallardo & Rojano, 1994; Gallardo & Romero, 1999; Glaeser, 1981; Peled, Mukhopadhyay, & Resnick, 1989; Thompson & Dreyfus, 1988; Vergnaud, 1989). Η Vlassis (2004) χαρακτηριστικά αναφέρει ότι κατά την αναγωγή ομοίων όρων σε πολυώνυμα πρώτου βαθμού με συντελεστές τόσο θετικούς όσο και αρνητικούς ακεραίους αριθμούς, οι μαθητές χρησιμοποιούσαν λανθασμένα διαδικασίες που έχουν εφαρμογή στους φυσικούς αριθμούς και καταλήγει στην αδυναμία απόδοσης νοήματος από τους μαθητές (φυσικό και λεκτικό) στο συμβολισμό των αρνητικών αριθμών σε πολυωνυμικές παραστάσεις. Γίνεται επομένως αντιληπτό ότι η επίδραση των φυσικών αριθμών μπορεί να δημιουργήσει εμπόδια στη σκέψη των παιδιών και στο στάδιο της επαφής τους με τους αρνητικούς αριθμούς και τις αλγεβρικές διαδικασίες.

2.4.3 Προκατάληψη των φυσικών αριθμών και αντικατάσταση των αλφαβητικών συμβόλων στην άλγεβρα

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού φάνηκε ακόμη να επηρεάζει και την ερμηνεία των αλφαβητικών συμβόλων στην άλγεβρα μέσα από τις έρευνες των Βοσνιάδου και Χρήστου (Christou & Vosniadou 2005, 2012) καθώς και της Van Hoof και των συνεργατών της (Van Hoof et al., 2015). Οι πρώτοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές της 10ης τάξης έτειναν να αντικαθιστούν αλφαβητικά σύμβολα σε αλγεβρικές παραστάσεις σχεδόν αποκλειστικά με φυσικούς αριθμούς έτσι ώστε να αποφανθούν για την τιμή των εκφράσεων. Για παράδειγμα όταν κλήθηκε να συγκρίνει τις τιμές 5d και 4/d, η πλειοψηφία των μαθητών, είτε δοκίμασε με συγκεκριμένες τιμές φυσικών αριθμών στη θέση του d, είτε απάντησε ότι η παράσταση 5d είναι μεγαλύτερη της 4/d αφού «ο πολλαπλασιασμός οδηγεί σε μεγαλύτερο αποτέλεσμα ενώ η διαίρεση σε μικρότερο». Επιπλέον και η Van Hoof και οι συνεργάτες της παρατήρησαν ότι οι μαθητές κατέληγαν σε συμπεράσματα για την ισχύ αλγεβρικών ανισοτήτων αντικαθιστώντας κατά βάση τις μεταβλητές με θετικές ακέραιες τιμές, ή εφαρμόζοντας γενικούς κανόνες για τις πράξεις οι οποίοι έχουν ισχύ μόνο στους φυσικούς αριθμούς. Οι παραπάνω στρατηγικές διατυπώνονταν ξεκάθαρα μέσα από ατομικές συνεντεύξεις που περιλάμβαναν οι έρευνες (Van Hoof et al., 2015; Christou & Vosniadou, 2012).

Ακόμη η έρευνα του Switzer (2018), για τη χρήση μη τυπικών αναπαραστάσεων για τις μεταβλητές, σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και συγκεκριμένα 4ης - 6ης τάξης έδειξε ότι οι μαθητές είχαν την τάση να χρησιμοποιούν θετικούς ακέραιους για να αναπαραστήσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης με άγνωστες ποσότητες όπου το αποτέλεσμα ήταν δοσμένο. Τα αποτελέσματα επιπλέον έδειξαν ότι ακόμη και όταν οι συμμετέχοντες δήλωναν ότι ρητοί αριθμοί θα μπορούσαν να αντικαταστήσουν τις συμβολικές αναπαραστάσεις των αγνώστων ποσοτήτων, κατέληγαν τελικά στο να χρησιμοποιούν αποκλειστικά θετικούς ακεραίους αποδεικνύοντας την έντονη επιρροή των φυσικών αριθμών και ενισχύοντας την άποψη ότι η αδυναμία κατανόησης αλγεβρικών συμβόλων όπως η μεταβλητή μπορεί να ξεκινάει ήδη από αρχικά στάδια της μάθησης, ακολουθώντας τους μαθητές στη μετέπειτα πορεία τους στην άλγεβρα.

2.4.4 Παράγοντες της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην ερμηνεία των μεταβλητών

Εκτός από την ανάδειξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού ως φαινόμενο που επηρεάζει την ερμηνεία των μεταβλητών ή των αλγεβρικών παραστάσεων, με την έννοια ότι οι μαθητές τείνουν να αντικαθιστούν τα αλφαβητικά σύμβολα στην άλγεβρα με φυσικούς αριθμούς, οι έρευνες του Χρήστου (2009) ανέδειξαν και την ύπαρξη δυο παραγόντων αυτής της προκατάληψης, οι οποίοι επιδρούν στην ερμηνεία των μεταβλητών. Σύμφωνα με τον Χρήστου (2009), η κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα επηρεάζεται από την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς (που βασικό χαρακτηριστικό τους είναι η ακεραιότητα) καθώς και από το «φαινομενικό πρόσημο» που έχουν οι μεταβλητές ή οι αλγεβρικές παραστάσεις.

Σύμφωνα με το Χρήστου (2009), ως *φαινομενικό πρόσημο* ορίζεται το πρόσημο που φαίνεται να έχει μια μεταβλητή. Για παράδειγμα η μεταβλητή α φαίνεται να έχει πρόσημο θετικό αφού στα μαθηματικά η απουσία προσήμου υποδηλώνει θετική αξία, ενώ αντίθετα η –β φαίνεται να φέρει αρνητικό πρόσημο, αφού η ύπαρξη αρνητικού προσήμου μπροστά από έναν αριθμό υποδηλώνει αρνητική αξία. Ωστόσο, το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής δεν επηρεάζει τις τιμές που μπορεί αυτή να αναπαραστήσει, αφού η μεταβλητή εξ' ορισμού μπορεί να ερμηνευτεί ως οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Με αντίστοιχο τρόπο λειτουργεί το φαινομενικό πρόσημο και για μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. η παράσταση «-3x» έχει αρνητικό φαινομενικό πρόσημο). Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου συνεπώς ορίζεται ως μια τάση των μαθητών να θεωρούν το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών ή των αλγεβρικών παραστάσεων ως το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που μπορούν αυτές να αναπαριστούν. Για παράδειγμα, οι μαθητές της παραπάνω έρευνας έτειναν να αντικαθιστούν αλγεβρικές εκφράσεις της μορφής «-β» μόνο με αρνητικούς ακεραίους, ενώ εκφράσεις που δεν περιείχαν το αρνητικό πρόσημο θεωρήθηκε ότι μπορούσαν να αναπαριστούν μόνο θετικές τιμές. Αντιθέτως, όταν ρωτήθηκαν για τις τιμές που δεν μπορεί να πάρει η έκφραση «-β», πολλοί ήταν οι μαθητές που απάντησαν με ακέραιες τιμές διαφορετικού προσήμου από το φαινομενικό πρόσημο της έκφρασης (Χρήστου, 2009).

Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου λοιπόν, η οποία έχει εντοπιστεί και από άλλους ερευνητές (Chiarugi, Fracassina, & Furinghetti, 1990; Crowley et al., 1994; Gallardo, 2002; Vlassis, 2004), θα μπορούσε να αποτελεί προϊόν της προκατάληψης των φυσικών αριθμών, καθώς χαρακτηριστικό της αριθμητικής αποτελεί όντως το γεγονός ότι η μη ύπαρξη προσήμου συνεπάγεται θετικές τιμές και η ύπαρξη του αρνητικού προσήμου αρνητικές τιμές. Αν σκεφτούμε δηλαδή με όρους αριθμών, το θετικό πρόσημο δηλώνει θετική αξία ενώ το αρνητικό, αρνητική αξία (π.χ. το +3 ή -3). Επιπλέον, καθώς η προκατάληψη των φυσικών αριθμών ωθεί τους μαθητές να αντικαθιστούν τις μεταβλητές μόνο με θετικές ακέραιες τιμές, θεωρείται λογικό και το συμπέρασμα να αντιλαμβάνονται το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής ως το «πραγματικό» της πρόσημο (Christou & Vosniadou, 2012).

Ο Χρήστου (2009) προχώρησε ακόμη στο να εξετάσει αν οι μαθητές ερμηνεύουν τις μεταβλητές με βάση το προϋπάρχουν εννοιολογικό πλαίσιο για τον αριθμό, το οποίο είναι οργανωμένο γύρω από τον φυσικό αριθμό, και σε περιπτώσεις όπου οι μεταβλητές δεν εμφανίζονται μόνες τους ή σε αλγεβρικές παραστάσεις, αλλά μέσα σε συγκεκριμένα μαθηματικά πλαίσια. Επέλεξε το μαθηματικό πλαίσιο των ανισώσεων, όπου οι μαθητές έχει θεωρηθεί ότι για την επίλυση τους, εφαρμόζουν την προϋπάρχουσα γνώση τους χρησιμοποιώντας κανόνες και μετασχηματισμούς από τις εξισώσεις, οι οποίοι κατά την κατανόηση των ανισώσεων δημιουργούν παρανοήσεις (Bazzini & Tsamir, 2001, 2004; Sfard & Lincevski, 1994; Tsamir & Almog, 2001; Tsamir & συνεργάτες, 1998; Tsamir & Bazzini, 2002, 2004; Verikios & Farmaki, 2006, όπως αναφέρεται στο Χρήστου, 2009). Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση των δυο μελών μιας ανίσωσης με μια αλγεβρική παράσταση, χωρίς να δοθεί προσοχή στο πρόσημο της παράστασης για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής μπορεί να οδηγήσει σε λάθη κατά την επίλυση. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε το πεδίο των γραφικών παραστάσεων όπου εξετάστηκε αν οι μαθητές επηρεασμένοι από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού έτειναν να δίνουν συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές των συναρτήσεων οδηγώντας τους στην κατασκευή ελλιπών γραφικών παραστάσεων ή γραφικών παραστάσεων που εκτείνονται σε ένα περιορισμένο χώρο του καρτεσιανού επιπέδου, παρά την επισήμανση της διδασκαλίας και των σχολικών εγχειριδίων ότι οι μεταβλητές των συναρτήσεων αναπαριστούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Το πεδίο των συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε και για να εξεταστεί πιο διεξοδικά η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, καθώς επιλέχθηκαν συγκεκριμένα είδη συναρτήσεων, όπως είναι οι συναρτήσεις που περιέχουν τη μεταβλητή σε τετραγωνική ρίζα, έτσι ώστε να φανεί αν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αποφανθούν για το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης, εφόσον αυτό ορίζεται όταν η υπόριζη ποσότητα είναι μη αρνητική, θα χρησιμοποιήσουν το φαινομενικό πρόσημο και όχι το πραγματικό πρόσημο των μεταβλητών των υπόριζων ποσοτήτων.

Τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης έδειξαν ότι οι μαθητές ερμηνεύουν τα αλφαβητικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν μεταβλητές, ως φυσικούς αριθμούς ακόμα και σε περιπτώσεις όπου αυτές εμφανίζονται μέσα σε οικεία μαθηματικά πλαίσια όπως είναι αυτά των συναρτήσεων, ένα βασικό πλαίσιο όπου η έννοια της μεταβλητής βρίσκει εφαρμογές, και των ανισώσεων. Οι μαθητές όχι μόνο φάνηκε να περιορίζονται στο να δίνουν φυσικές τιμές στις μεταβλητές των συναρτήσεων δημιουργώντας λανθασμένες γραφικές παραστάσεις που περιορίζονταν στο πρώτο τεταρτημόριο, αλλά ακόμη θεωρούσαν το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών ως το πραγματικό τους πρόσημο με αποτέλεσμα τη χαμηλή επίδοσή τους στους μετασχηματισμούς για τη λύση των ανισώσεων. Και στο συγκεκριμένο πείραμα εμφανίστηκε η τάση των μαθητών να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής ως το πραγματικό της πρόσημο σε μεγαλύτερο βαθμό όταν αυτό ήταν αρνητικό παρά θετικό, κάτι που είχε παρατηρηθεί και στις έρευνες όπου οι μεταβλητές εμφανίζονταν έξω από κάποιο συγκεκριμένο πλαίσιο και έχει ενδιαφέρον να ερευνηθεί περεταίρω.

Στο πλαίσιο των παραπάνω ερευνών γύρω από τη μελέτη της ερμηνείας των μεταβλητών από τους μαθητές με βάση την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και κατ’ επέκταση την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, ο Χρήστου (2012) προχώρησε και στο σχεδιασμό ειδικής διδακτικής παρέμβασης σε μαθητές της Α’ Λυκείου. Στόχος της παρέμβασης αυτής ήταν, χρησιμοποιώντας την άμεση διδασκαλία και την τεχνική της γνωστικής σύγκρουσης για τη μάθηση, να βοηθήσει τους μαθητές να έρθουν σε σύγκρουση με την παρερμηνεία που θέλει το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής ή μιας αλγεβρικής παράστασης να ταυτίζεται με το πραγματικό της πρόσημο. Επιπλέον μέσα από την παρέμβαση ο ερευνητής επιδίωξε να καταστήσει τους μαθητές μεταεννοιολογικά ενήμερους, δηλαδή σε θέση να συγκρουστούν με το υπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο που έχουν συγκροτήσει για τη μεταβλητή και το πρόσημό της και να διατηρήσουν τη νέα γνώση που επήλθε έπειτα από την εννοιολογική αλλαγή και σε επόμενα χρονικά στάδια. Ακόμη τη νέα αυτή γνώση που αποκτήθηκε να μπορέσουν οι μαθητές να τη μεταφέρουν και από ένα μαθηματικό πλαίσιο σε ένα άλλο.

Τα αποτελέσματα της παρέμβασης έδειξαν ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας βελτίωσαν τις επιδόσεις τους στις δοσμένες δοκιμασίες σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, αλλά μόνο στο μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο είχαν λάβει ρητές οδηγίες και παραδείγματα, αυτό του πεδίου ορισμού των τετραγωνικών ριζών. Ακόμη φάνηκε ότι οι μαθητές πέρα από το ότι δεν κατάφεραν να μεταφέρουν την εννοιολογική σύγκρουση για την παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου στα άλλα μαθηματικά πλαίσια (ανισώσεις και απόλυτες τιμές), δεν κατάφεραν επίσης να τη διατηρήσουν χρονικά.

Η διδακτική αυτή παρέμβαση τόνισε ότι το ζήτημα της παρερμηνείας του φαινομενικού προσήμου είναι βαθιά ριζωμένο στις πεποιθήσεις των μαθητών για τη μεταβλητή και τις τιμές που μπορεί αυτή να αναπαραστήσει και θα μπορούσε πιθανόν να λυθεί μέσα από την εννοιολογική αλλαγή η οποία όμως θα ήταν αποτέλεσμα όχι μιας μοναδικής διδακτικής παρέμβασης, αλλά μιας συνεχόμενης διδακτικής στρατηγικής, οργανωμένης ήδη από τις χαμηλότερες βαθμίδες τις μαθηματικής εκπαίδευσης. Η συνεχιζόμενη αυτή διδακτική προσέγγιση οφείλει να έχει ως στόχο το πέρασμα από την έννοια του αριθμού ως το φυσικό αριθμό, στη μεταβλητή ως σύμβολο που μπορεί να αναπαραστήσει όχι μόνο φυσικούς, αλλά ένα εύρος πραγματικών αριθμητικών τιμών.

Τέλος, οι Christou & Vosniadou (2012) στην έρευνά τους, εντόπισαν μια προθυμία των μαθητών να δεχθούν τελικά ως τιμές των μεταβλητών και τιμές με το αντίθετο από το φαινομενικό πρόσημο, αλλά όχι μη ακέραιες τιμές. Παρατηρήθηκε δηλαδή σε ορισμένα ερωτήματα μια πιο έντονη επίδραση της ακεραιότητας σε σχέση με αυτή που ασκεί το φαινομενικό πρόσημο. Όταν για παράδειγμα, ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν αριθμητικές τιμές που δε μπορεί να πάρει η έκφραση «-β» εκείνοι απάντησαν σε μεγάλο ποσοστό με θετικούς ακέραιους αριθμούς, ενώ στην περίπτωση που επέλεγαν μη ακεραίους αριθμούς ως μη αποδεκτές τιμές για το «-β», οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούσαν θετικό πρόσημο. Από την άλλη, ορισμένοι τύποι ερωτημάτων ανέδειξαν μια υπεροχή της προκατάληψης του φαινομενικού προσήμου.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι υπάρχουν ενδιάμεσα στάδια στην κατανόηση και την αποδοχή της φύσης της μεταβλητής, κάτι που θα θέλαμε επιπλέον να ερευνήσουμε.

3 ΣΚΟΠΟΣ, ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Σκοπός και ερωτήματα της έρευνας

Με την παρούσα έρευνα θα επιχειρήσουμε να ενισχύσουμε τα υπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού στην ερμηνεία των μεταβλητών καθώς επίσης και να εξετάσουμε πιο διεξοδικά το ρόλο του προσήμου και της αναπαράστασης των αριθμών στην παραπάνω διαδικασία.

Καθώς η έννοια της μεταβλητής διαδραματίζει ένα σπουδαίο ρόλο στις μαθηματικές διαδικασίες της σχολικής άλγεβρας, όπως επίσης και στη γενικότερη αλγεβρική σκέψη θεωρήσαμε απαραίτητο αλλά και ενδιαφέρον να χαρτογραφηθούν όσο πιο αναλυτικά γίνεται τα λάθη και οι παρανοήσεις στην άλγεβρα που οφείλονται στην ελλιπή κατανόηση της μεταβλητής και στην επιρροή των φυσικών αριθμών. Οι προηγούμενες σχετικές έρευνες ανέδειξαν τη δυσκολία κατανόησης των μεταβλητών ως σύμβολα που μπορούν να πάρουν ένα εύρος τιμών, αλλά και ως σύμβολα που μπορούν να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Επιπλέον τόνισαν την ύπαρξη της διπλής επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού με το να επηρεάζει τους μαθητές να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως αριθμούς φυσικούς και όχι ρητούς και με το να θεωρούν ότι το πρόσημο του αριθμού που μια αλγεβρική παράσταση αναπαριστά οφείλει να είναι το ίδιο με αυτό που φαίνεται να έχει η αλγεβρική παράσταση.

Στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε λοιπόν να υποστηρίξουμε και να ενισχύσουμε την επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της μεταβλητής. Θα επιχειρήσουμε, πιο συγκεκριμένα, να εξετάσουμε, εάν στις δυο τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου, η προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς αριθμούς επηρεάζει τους μαθητές να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως αριθμούς ακέραιους και όχι ρητούς και να θεωρούν ότι το αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής έκφρασης οφείλει να είναι αριθμός του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της κάθε έκφρασης. Σε αντίθεση με τις προϋπάρχουσες έρευνες που κατέληξαν στα παραπάνω συμπεράσματα ζητώντας από τους μαθητές να αποδώσουν αριθμούς σε δοσμένες αλγεβρικές εκφράσεις που περιείχαν μεταβλητές χρησιμοποιώντας ερωτηματολόγια και προσωπικές συνεντεύξεις, στην παρούσα μελέτη ζητήσαμε από τους μαθητές να αξιολογήσουν φράσεις που αποδίδουν αριθμητικές τιμές ως τιμές που μπορούν, ή δεν μπορούν να αναπαραστήσουν ορισμένες αλγεβρικές εκφράσεις. Με αυτόν το σχεδιασμό προσπαθήσαμε να απαντήσουμε επιπλέον στο ερώτημα ποιος από τους δυο παράγοντες της προκατάληψης του ΦΑ επιδρά περισσότερο στα λάθη τους: η τάση να αντικαθιστούν τις μεταβλητές αποκλειστικά με ακέραιους αριθμούς ή η τάση να τις αντικαθιστούν με θετικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να προκύπτουν αριθμοί του ίδιου «φαινομενικού προσήμου» με τις δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις.

Τέλος θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα πως η παρουσία ακέραιων ή μη ακέραιων συντελεστών σε μια αλγεβρική παράσταση, επηρεάζει το είδος της αναπαράστασης των αριθμητικών τιμών που δέχονται οι μαθητές ως τιμές που μπορούν να πάρουν οι εκφράσεις. Επιπροσθέτως, θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στο πως η παρουσία του φαινομενικού προσήμου σε μια αλγεβρική παράσταση μπορεί να επηρεάσει τις αριθμητικές τιμές που αποδέχονται οι μαθητές ως αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής παράστασης.

Συγκεκριμένα επιχειρούμε να απαντήσουμε στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Εάν η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τα λάθη των μαθητών κατά την ερμηνεία μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις και με ποιον τρόπο λειτουργούν οι παράγοντές της.
- Ποιος από τους δυο παράγοντες της ΠΦΑ επιδρά περισσότερο στην ερμηνεία των μεταβλητών από τους μαθητές, η ακεραιότητα ή το φαινομενικό πρόσημο.
- Πως επιδρά η παρουσία ρητών (μη φυσικών) συντελεστών στην ερμηνεία των αλγεβρικών παραστάσεων.

3.2 Μέθοδος

3.2.1 Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 138 μαθητές από δημόσια Γυμνάσια του Ν. Σερρών. Από αυτούς, 68 ήταν μαθητές της Β' τάξης και 70 μαθητές της Γ' (61 αγόρια και 77 κορίτσια).

3.2.2 Υλικά

Στους μαθητές της έρευνας δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 48 προτάσεις σχετικές με την αριθμητική τιμή που μπορεί να πάρει μια αλγεβρική έκφραση. Οι μαθητές κλήθηκαν να κρίνουν την ισχύ της κάθε πρότασης σημειώνοντας είτε ότι συμφωνούν είτε ότι διαφωνούν με αυτή.

Από τις 48 προτάσεις του ερωτηματολογίου, οι μισές ήταν καταφατικά διατυπωμένες (π.χ. ***Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 2***), ενώ οι υπόλοιπες ήταν αρνητικά διατυπωμένες (π.χ. ***Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -8***) ώστε σωστή να είναι η απάντηση «συμφωνώ» στην πρώτη περίπτωση «διαφωνώ» στη δεύτερη.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν και για τις 48 προτάσεις ήταν οι εξής έξι: *α, -β, κ+3, -δ-4,* $\frac{4}{5}y$, -$\frac{4}{5}z$ η καθεμία από τις οποίες χρησιμοποιήθηκε σε οκτώ προτάσεις. Όπως είναι φανερό από τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, οι τέσσερις περιλαμβάνουν ακέραιους συντελεστές (α, -β, κ+3, -δ-4), ενώ οι υπόλοιπες κλασματικούς (4/5y, -4/5z). Η χρήση αλγεβρικών εκφράσεων με ακέραιους και κλασματικούς συντελεστές έγινε με σκοπό να εξεταστεί εάν η παρουσία ακέραιων συντελεστών στην αλγεβρική παράσταση επηρεάζει τους μαθητές στο να θεωρούν ότι η παράσταση αναπαριστά αποκλειστικά ακέραιους αριθμούς ή όχι. Ομοίως αν η παρουσία κλασματικών συντελεστών επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι η παράσταση αναπαριστά κλασματικές τιμές ή και άλλα είδη αριθμητικών αναπαραστάσεων.

Επιπλέον, οι τρείς από τις παραστάσεις που δόθηκαν (α, κ+3 και 4/5y) φέρουν ένα θετικό ή «ουδέτερο» φαινομενικό πρόσημο, ενώ στις υπόλοιπες παραστάσεις (–β, -δ-4 και -4/5z) το πρόσημο που φαίνεται να έχουν οι παραστάσεις, δηλαδή το φαινομενικό πρόσημο, είναι αρνητικό. Η χρήση αλγεβρικών εκφράσεων τόσο θετικού, όσο και αρνητικού φαινομενικού προσήμου έγινε έτσι ώστε να εξεταστεί εάν η ύπαρξη του φαινομενικού προσήμου μπορεί να επηρεάσει τους μαθητές στο να θεωρούν ότι μια αλγεβρική έκφραση θετικού φαινομενικού προσήμου αναπαριστά θετικούς αριθμούς, ενώ αντίστοιχα μια παράσταση αρνητικού προσήμου αναπαριστά μόνο αρνητικούς αριθμούς.

Σε κάθε μία από τις παραπάνω αλγεβρικές εκφράσεις (*α, -β, κ+3, -δ-4,* $\frac{4}{5}y$, -$\frac{4}{5}z$) αποδόθηκαν οχτώ διαφορετικές αριθμητικές τιμές. Οι αριθμητικές τιμές που χρησιμοποιήθηκαν και ουσιαστικά αντιστοιχήθηκαν σε κάθε αλγεβρική παράσταση ήταν αριθμοί που προκύπτουν εάν η μεταβλητή της παράστασης πάρει αριθμούς φυσικούς, αρνητικούς ακέραιους, δεκαδικούς/κλασματικούς θετικού προσήμου ή αρνητικού προσήμου.

Τα παραπάνω είχαν ως αποτέλεσμα έργα που είναι συμβατά ή μη συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά την ακεραιότητα καθώς και συμβατά ή μη συμβατά με την πεποίθηση ότι το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων ταυτίζεται με το πραγματικό τους πρόσημο. Η συμβατότητα ή μη των έργων εκπορεύεται από την τάση των μαθητών, επηρεασμένοι από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, να θεωρούν ότι τα γράμματα στην άλγεβρα αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της μορφής και του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων που περιέχουν μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα, συμβατοί με την ακεραιότητα (ΣυμβΑΚ) ήταν εκείνοι οι ισχυρισμοί στους οποίους ακέραιοι αριθμοί αποδόθηκαν σε ακέραιας μορφής αλγεβρικές εκφράσεις (π.χ. θα μπορούσε το **α** να πάρει την τιμή **6**) ή ισχυρισμοί όπου σε κλασματικής μορφής αλγεβρικές παραστάσεις αποδόθηκαν αριθμητικές τιμές που προκύπτουν από την αντικατάσταση της μεταβλητής με ακέραιους αριθμούς (π.χ. Δεν θα μπορούσε το **4/5 y** να πάρει την τιμή **16/5**). Μη συμβατοί με την ακεραιότητα (Μη-συμβΑΚ) ήταν εκείνοι οι ισχυρισμοί στους οποίους κλασματικοί ή δεκαδικοί αριθμοί αποδόθηκαν σε ακέραιας μορφής εκφράσεις (π.χ. δεν θα μπορούσε το **α** να πάρει την τιμή **1/6**). Συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ) ήταν εκείνα τα έργα στα οποία ο αριθμός που αποδόθηκε σε μια αλγεβρική παράσταση ήταν αριθμός του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης (π.χ. θα μπορούσε το **-β** να πάρει την τιμή **-2.8**). Τέλος, ισχυρισμοί μη συμβατοί με το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΦΠ) ήταν εκείνοι στους οποίους οι αριθμητικές τιμές είχαν αντίθετο πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο της αντίστοιχης αλγεβρικής έκφρασης (π.χ. θα μπορούσε το **-β** να πάρει την τιμή **4/3**).

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση οδήγησε τελικά στην ταξινόμηση σε τέσσερις κατηγορίες έργων αφού κάθε ένας από τους ισχυρισμούς μπορούσε να είναι ταυτόχρονα συμβατός ή μη συμβατός με την ακεραιότητα και συμβατός ή μη συμβατός με το φαινομενικό πρόσημο. (βλ. Πίνακα 1)

Κατηγορία έργων	Παράδειγμα
ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -4 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -8
ΣυμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 2 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 3
Μη-συμβΑΚ / ΣυμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -2.8 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -1/2
Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 4/3 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 5/6

Πίνακας 1 – Κατηγορίες έργων συμβατών και μη ως προς την ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο.

Τα παραπάνω έργα σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να αναδείξουν εάν οι μαθητές είναι περισσότερο διατεθειμένοι να δεχθούν ως τιμές μιας αλγεβρικής παράστασης αριθμούς που προκύπτουν από την αντικατάσταση των μεταβλητών με φυσικές/ακέραιες τιμές παρά με αριθμούς που θα μπορούσαν να ανατρέψουν τη συνθήκη της ακεραιότητας (π.χ. κλασματικούς ή δεκαδικούς). Ακόμη ώστε να εξεταστεί αν οι μαθητές δέχονται με μεγαλύτερη ευκολία θετικές τιμές παρά αριθμούς που ανατρέπουν τη συνθήκη του φαινομενικού προσήμου, όπως συμβαίνει με βάση τη σχετική βιβλιογραφία.

Η αποφυγή χρήσης άλλων αναπαραστάσεων ρητών αριθμών (π.χ. τετραγωνικές ρίζες, απόλυτες τιμών κ.α.) έγινε γιατί θεωρήθηκε ότι, οι μαθητές σε αυτές τις ηλικίες δεν έχουν αποκτήσει την απαιτούμενη εξοικείωση με τις προαναφερθείσες αριθμητικές αναπαραστάσεις, και πιθανώς η χρήση τους να προσέδιδε δυσκολία στην κατανόηση του ίδιου του ερωτηματολογίου ή/και να προκύπταν λάθη που οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης των παραπάνω αναπαραστάσεων και όχι στην έλλειψη κατανόησης της μεταβλητής εξαιτίας των διαισθήσεων για τους φυσικούς αριθμούς που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε στην παρούσα έρευνα.

3.2.3 Διαδικασία

Σε πρώτη φάση ελέγξαμε πιλοτικά σε ένα δείγμα 16 μαθητών με ίδια χαρακτηριστικά με αυτά του τελικού δείγματος, σε προηγούμενη χρονική στιγμή από τη χορήγηση του εργαλείου, εάν αυτό είναι κατανοητό ως προς το περιεχόμενο, τη σειρά των ερωτημάτων και τις οδηγίες έτσι ώστε να πραγματοποιηθούν οι κατάλληλες διορθώσεις. Το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο μοιράστηκε στους μαθητές κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας των Μαθηματικών υπό την επίβλεψη τόσο του καθηγητή της τάξης όσο και της ερευνήτριας, ενώ δόθηκαν σαφείς προφορικές αλλά και γραπτές οδηγίες για τον τρόπο συμπλήρωσής τους.

Συγκεκριμένα οι γραπτές οδηγίες ήταν:

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε γράμματα όπως τα (α, β, x, y…) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Σε αυτό το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιούμε αυτά τα γράμματα με αυτόν τον τρόπο. Διαβάστε προσεκτικά τις παρακάτω προτάσεις. Συμπληρώστε με X στο αντίστοιχο πλαίσιο, εάν συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

Προφορικά ειπώθηκε στους μαθητές ότι:

«Όπως θα έχετε μάθει παιδιά στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στην άλγεβρα για να συμβολίσουμε αριθμούς χρησιμοποιούμε εκτός από τους ίδιους τους αριθμούς και γράμματα όπως για παράδειγμα το α, το β, το x, το y κ.ο.κ. Τέτοια γράμματα, τις μεταβλητές όπως τις αποκαλούμε στα μαθηματικά, μπορεί να συνυπάρχουν μαζί με τους αριθμούς και μέσα σε μαθηματικές παραστάσεις, τις αλγεβρικές παραστάσεις και να συμβολίζουν και αυτές αριθμούς. Στο ερωτηματολόγιο που σας δόθηκε υπάρχουν τέτοιες αλγεβρικές παραστάσεις και αριθμοί τους οποίους μπορούν ή δεν μπορούν να αναπαραστήσουν. Θα θέλαμε να διαβάσετε προσεκτικά τις προτάσεις του ερωτηματολογίου και να σημειώσετε με ένα Χ αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε με αυτές. Για παράδειγμα αν πιστεύετε ότι το α θα μπορούσε να συμβολίζει την τιμή 6 θα βάλετε Χ κάτω από το πλαίσιο που γράφει συμφωνώ δίπλα στην αντίστοιχη πρόταση. Θέλω να σας πω ότι το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο δεν πρόκειται για κάποιο τεστ στο οποίο θα βαθμολογηθείτε και επηρεάσει το βαθμό σας στα Μαθηματικά. Παρ' όλα αυτά θα ήθελα να σκεφτείτε καλά πριν απαντήσετε σε κάθε πρόταση. Διαβάστε καλά και τις γραπτές οδηγίες και μη διστάσετε να ρωτήσετε αν έχετε οποιαδήποτε απορία. Σας ευχαριστώ»

4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Αξιοπιστία

Για την μέτρηση της αξιοπιστίας της εσωτερικής συνέπειας, χρησιμοποιήθηκε ο δείκτης Cronbach's a (Cronbach, 1951), Τιμές του δείκτη άνω του 0.7 θεωρούνται αποδεκτές (Eisinga, Grotenhuis & Pelzer, 2012). Στην παρούσα έρευνα, αξιολογήθηκε η συνολική αξιοπιστία του ερωτηματολογίου η οποία θεωρείται αποδεκτή (0.738).

4.2 Αποτελέσματα

Διαφορά στη συνολική επίδοση των μαθητών ως προς το φύλο και ως προς τη σχολική τάξη.

Σε πρώτη φάση σχεδιάστηκε ένα μοντέλο διπαραγοντικής ανάλυσης διακύμανσης 2 (φύλο: αγόρι, κορίτσι) Χ 2 (τάξη: Β' Γυμνασίου, Γ' Γυμνασίου) με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση στο ερωτηματολόγιο. Οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν ως σωστό (βαθμός 1) ή λάθος (βαθμός 0).

Ο έλεγχος της ομοιογένειας της διασποράς με το κριτήριο του Levene κατέληξε σε στατιστικώς σε μη στατιστικώς σημαντικό αποτέλεσμα $F(3,134) = 2.194$, $p = .092$, δείχνοντας την ομοιογένεια του δείγματος. Όσον αφορά το φύλο τα αγόρια σημείωσαν υψηλότερη μέση επίδοση από τα κορίτσια, με τη διαφορά ωστόσο να μην είναι στατιστικά σημαντική $F(1,134) = 2.36$, $p = .127$, $\eta_p^2 = .017$. Επιπλέον οι μαθητές της Β' Γυμνασίου (Μ.Ο. = 25.48 , Τ.Σ. = .765) φάνηκε να έχουν υψηλότερη μέση επίδοση από τους μαθητές της Γ' Γυμνασίου (Μ.Ο. = 25.16 , Τ.Σ. = .754), με τη διαφορά να είναι και πάλι μη στατιστικά σημαντική, $F(1,134) = 0.088$, $p = .768$, $\eta_p^2 = .001$. Δεν παρατηρούνται επομένως στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση που να σχετίζονται με το φύλο των μαθητών, ούτε με την τάξη.

4.2.1 ΕΕ1 - Προκατάληψη φυσικού αριθμού κατά την ερμηνεία μεταβλητών

Για να εξεταστεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, εάν δηλαδή οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν τις μεταβλητές σε αλγεβρικές παραστάσεις επηρεασμένοι από τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους για τους αριθμούς, εξετάστηκε η συνολική επίδοση των μαθητών στις κατηγορίες συμβατών και μη συμβατών ερωτημάτων ως προς την ακεραιότητα αλλά και το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων και τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 2.

	Ελάχιστο	Μέγιστο	Μ.Ο.	Τ.Σ.
ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ	3	12	8,38	2,235
ΣυμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ	0	12	6,01	2,529
Μη-συμβΑΚ / ΣυμβΦΠ	1	12	6,11	2,256
Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ	0	12	4,89	2,714

Πίνακας 2 - Επίδοση μαθητών στα συμβατά και μη-συμβατά ερωτήματα με ακεραιότητα και φαινομενικό πρόσημο συνδυαστικά

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2, οι επιδόσεις των μαθητών ήταν υψηλότερες στην κατηγορία ερωτημάτων που ήταν συμβατά με την ακεραιότητα και συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ). Επιπλέον, από το συσχετισμένο έλεγχο t, φάνηκε ότι υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών ανάμεσα στα έργα που ήταν συμβατά τόσο με την ακεραιότητα όσο και με το φαινομενικό πρόσημο ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ σε σχέση με τα έργα που ήταν μη συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ, [$t(137) = 11.250$, $p<.001$]. Τα παραπάνω δεδομένα δείχνουν μια τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τις αλγεβρικές παραστάσεις είτε ως φυσικούς αριθμούς, είτε ως αριθμούς που διατηρούν κάποιες από τις ιδιότητες των φυσικών (π.χ. ακέραιοι), γεγονός που τονίζει τη διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο.

Στη συνέχεια εξετάστηκε πιο αναλυτικά και μεμονωμένα ο ρόλος της ακεραιότητας και του φαινομενικού προσήμου κατά την ερμηνεία των μεταβλητών.

Επίδραση της ακεραιότητας

Σε πρώτη φάση εξετάστηκε πιο αναλυτικά εάν ο παράγοντας ακεραιότητα επηρεάζει τις απαντήσεις των μαθητών κατά την ερμηνεία μεταβλητών σε αλγεβρικές εκφράσεις. Για να εξεταστεί το παραπάνω, συγκρίθηκε η διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών ανάμεσα στα ερωτήματα εκείνα που ήταν συμβατά με την ακεραιότητα (ΣυμβΑΚ) (π.χ. *Δεν θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 3*) και σε εκείνα που ήταν μη-σύμβατα με την ακεραιότητα (Μη-συμβΑΚ) (π.χ. *Δεν θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 1/6*). Η διαφορά στην επίδοση των μαθητών εξετάστηκε σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις: (α) όταν και οι δύο κατηγορίες ερωτημάτων ήταν συμβατές με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ) (βλ. προαναφερθέντα παραδείγματα) και (β) όταν και οι δυο κατηγορίες ερωτημάτων ήταν μη σύμβατες με το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΦΠ).

Στην περίπτωση (α), έχοντας έργα συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ), οι μαθητές φάνηκε να παρουσιάζουν υψηλότερη επίδοση στα ΣυμβΑΚ έργα σε σύγκρισή με τα αντίστοιχα Μη-συμβΑΚ, με τη διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική [$t(137) = 11.064$, $p < .001$, $d = 0.94$]. Αντίστοιχα ευρήματα προέκυψαν και στην περίπτωση (β) όταν δηλαδή εξετάστηκε η διαφορά στην επίδοση των μαθητών έχοντας Μη-συμβΦΠ έργα. Και εκεί φάνηκε οι μαθητές να σημειώνουν συνολικά καλύτερες επιδόσεις στα ΣυμβΑΚ έργα, σε σύγκριση με τα αντίστοιχα Μη-συμβΑΚ, με τη διαφορά να είναι και πάλι στατιστικά σημαντική [$t(137) = 5.332$, $p < .001$, $d = 0{,}45$] (βλ. Πίνακας 2).

Αντίστοιχοι έλεγχοι έγιναν και για να εξεταστεί εάν οι επιδόσεις των μαθητών διαφέρουν όταν αλλάζει ο παράγοντας πρόσημο.

Επίδραση του φαινομενικού προσήμου

Προκειμένου να ελεγχθεί αν ο παράγοντας του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων επηρεάζει τις απαντήσεις των μαθητών κατά την ερμηνεία μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις εξετάστηκε αρχικά η διαφορά στις απαντήσεις ανάμεσα στα ερωτήματα εκείνα που ήταν συμβατά ως προς το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ) (π.χ. *Θα μπορούσε το* ***-δ-4*** *να πάρει την τιμή* ***-9***), δηλαδή τα ερωτήματα στα οποία ο αριθμός-αποτέλεσμα έχει το ίδιο πρόσημο με αυτό της αλγεβρικής παράστασης (συνέπεια αντικατάστασης των μεταβλητών αποκλειστικά με θετικούς αριθμούς), και σε εκείνα που είναι μη συμβατά με την παραπάνω λογική (π.χ. *Θα μπορούσε το* ***-δ-4*** *να πάρει την τιμή* ***3***). Η διαφορά εξετάστηκε σε δυο διαφορετικές περιπτώσεις, όπως παραπάνω: (α) όταν και οι δυο κατηγορίες ερωτημάτων ήταν συμβατές με την ακεραιότητα (ΣυμβΑΚ) (βλ. προαναφερθέντα παραδείγματα) και (β) όταν και οι δύο κατηγορίες ερωτημάτων ήταν μη συμβατές με την ακεραιότητα (Μη-συμβΑΚ) (π.χ. *Θα μπορούσε το* ***-δ-4*** *να πάρει την τιμή* **-4.7** και *Θα μπορούσε το* ***-δ-4*** *να πάρει την τιμή* ***4/5***).

Στην πρώτη περίπτωση, έχοντας ΣυμβΑΚ έργα, οι μαθητές σημείωσαν υψηλότερες επιδόσεις στα ΣυμβΦΠ ερωτήματα σε σύγκριση με τα Μη-συμβΦΠ, με τη διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική [$t(137) = 9.267$, $p <.001$, $d = 0.79$]. Παρόμοια ευρήματα προέκυψαν και κατά τον έλεγχο της διαφοράς λόγω προσήμου ανάμεσα στις κατηγορίες Μη-συμβΑΚ ερωτημάτων. Οι μαθητές φάνηκε να απαντούν συνολικά καλύτερα στα ΣυμβΦΠ σε σχέση με τα Μη-συμβΦΠ έργα, με τη διαφορά να είναι και πάλι στατιστικά σημαντική [$t(137) = 4.275$, $p <.001$, $d = 0.36$] (βλ. Πίνακας 2).

4.2.2 ΕΕ2 - Μέγεθος επίδρασης ακεραιότητας και φαινομενικού προσήμου

Για να απαντήσουμε τελικά στο ερώτημα, αν κατά την ερμηνεία μεταβλητών αλγεβρικών παραστάσεων, τα λάθη των μαθητών οφείλονται σε μεγαλύτερο βαθμό στην τάση τους να τις αντικαθιστούν με ακέραιους αριθμούς ή στην τάση τους να τις αντικαθιστούν με αριθμούς του ίδιου φαινομενικού προσήμου (με αυτό της αλγεβρικής παράστασης), εξετάσαμε το μέγεθος της επίδρασης που ασκεί η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο αντίστοιχα στις επιδόσεις των μαθητών κατά την αξιολόγηση των ισχυρισμών του ερωτηματολογίου. Για να γίνει αυτό συγκρίναμε το μέγεθος της διαφοράς στις επιδόσεις ανάμεσα στις κατηγορίες συμβατών και μη συμβατών ερωτημάτων ως προς την ακεραιότητα όπως και ως προς το φαινομενικό πρόσημο ξεχωριστά. Πιο συγκεκριμένα συγκρίναμε το μέγεθος της διαφοράς των επιδόσεων σε τέσσερις περιπτώσεις: (1) σε ΣυμβΑΚ και Μη-συμβΑΚ όταν οι ισχυρισμοί ήταν

ΣυμβΦΠ, (2) σε ΣυμβΦΠ / Μη-συμβΦΠ όταν οι ισχυρισμοί ήταν ΣυμβΑΚ, (3) σε ΣυμβΑΚ/Μη-συμβΑΚ όταν τα έργα ήταν Μη-συμβΦΠ και (4) ανάμεσα σε ΣυμβΦΠ/Μη-συμβΦΠ όταν τα έργα ήταν Μη-συμβΑΚ.

Ο παραπάνω έλεγχος έδειξε ότι η διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών ανάμεσα στα ΣυμβΑΚ και Μη-συμβΑΚ ερωτήματα (όταν αυτά ήταν ΣυμβΦΠ) ήταν μεγάλη ($d = 0.94$). Στην περίπτωση του φαινομενικού προσήμου (ΣυμβΦΠ / Μη-συμβΦΠ όταν τα ερωτήματα είναι ΣυμβΑΚ) η παραπάνω διαφορά στην επίδοση ήταν και πάλι μεγάλη σε μέγεθος ($d = 0.79$). Αντίστοιχα όταν τα ερωτήματα ήταν μη σύμβατα ως προς το πρόσημο (Μη-συμβΦΠ) η διαφορά που οφείλεται στην ακεραιότητα των αριθμών που αντικαθιστούν τις μεταβλητές (ΣυμβΑΚ / Μη-συμβΑΚ) ήταν μεσαία ($d = 0.45$). Επιπλέον από τον έλεγχο του μεγέθους της διαφοράς λόγω προσήμου (ΣυμβΦΠ / Μη-συμβΦΠ ερωτήματα), όταν τα ερωτήματα ήταν Μη-συμβΑΚ βρέθηκε ότι η διαφορά αυτή είναι μικρή ($d = 0.36$)

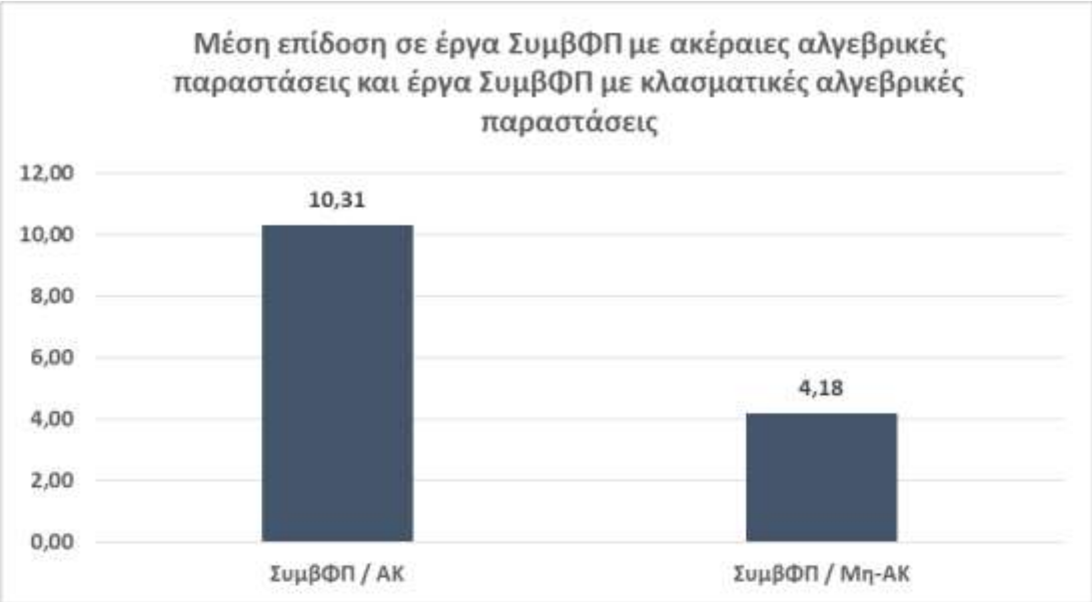
Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο παράγοντας ακεραιότητα και στις δυο περιπτώσεις (συμβατών και μη συμβατών έργων) ήταν ισχυρότερος από ότι ο παράγοντας του φαινομενικού προσήμου οδηγώντας τους μαθητές σε μεγαλύτερες αποκλίσεις στην επίδοση κατά τη διαδικασία ερμηνείας των μεταβλητών σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις, εύρημα το οποίο θα συζητηθεί παρακάτω.

4.2.3 ΕΕ3 - Επίδραση ακεραιότητας και φαινομενικού προσήμου εξαιτίας της παρουσίας ακέραιων και κλασματικών, θετικών και αρνητικών συντελεστών

Στη συνέχεια εξετάστηκε το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν το είδος των αριθμητικών αναπαραστάσεων που αποτελούν συντελεστές μιας αλγεβρικής παράστασης μπορεί να επηρεάσει τη σκέψη των μαθητών κατά την ερμηνεία των μεταβλητών και των αριθμών που μπορεί η αλγεβρική παράσταση να αναπαραστήσει.

Για να γίνει αυτό, εξετάστηκε σε πρώτη φάση εάν ο παράγοντας ακεραιότητα επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών στις περιπτώσεις που οι αλγεβρικές παραστάσεις είναι ακέραιας και μη ακέραιας μορφής. Για τον έλεγχο αυτό υπολογίστηκε η διαφορά στη συνολική επίδοση των μαθητών στα συμβατά ως προς το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ) έργα που περιέχουν ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις (ΑΚ) (π.χ. α, -β, -δ-

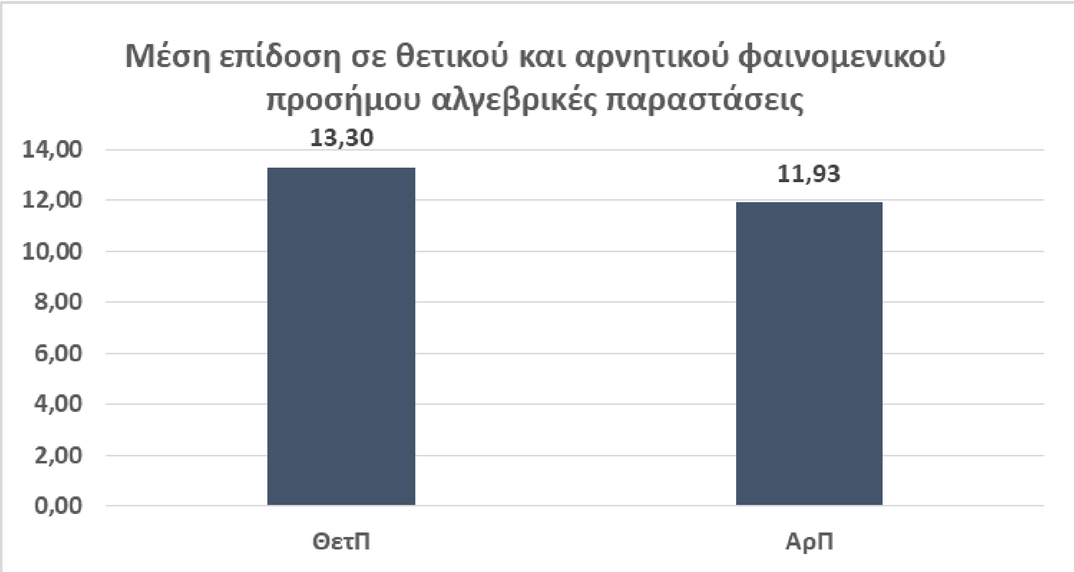
4) και στα αντίστοιχα έργα με μη ακέραιες παραστάσεις (Μη-ΑΚ) (π.χ. 4/5y, -4/5z). Όπως φαίνεται στον Διάγραμμα 1, οι μαθητές παρουσίασαν υψηλότερες επιδόσεις όταν οι αλγεβρικές παραστάσεις ήταν ακέραιες (Μ.Ο. = 10.31, Τ.Α. = 2.70), παρά όταν ήταν κλασματικές (Μ.Ο. = 4.18, Τ.Α. = 1.74). Ο συσχετισμένος έλεγχος t για τη μέση συνολική επίδοση στις παραπάνω κατηγορίες ερωτημάτων έδειξε ότι η διαφορά αυτή ήταν στατιστικά σημαντική [$t(137) = 28.683$, $p < .001$].



Διάγραμμα 1

Τα παραπάνω δείχνουν ότι οι μαθητές ήταν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχτούν κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς ως αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής παράστασης με ακέραιους συντελεστές, παρά να δεχθούν ακέραιους αριθμούς ως αποτέλεσμα κλασματικών παραστάσεων, γεγονός που τονίζει την επίδραση της παρουσίας μη ακέραιων συντελεστών παρά της απουσίας τους.

Στη συνέχεια ελέγχθηκε η διαφορά στην επίδοση των μαθητών που οφείλεται στην επίδραση του φαινομενικού προσήμου που φέρει η αλγεβρική παράσταση. Εξετάστηκε αν η ύπαρξη ενός ουδέτερου φαινομενικά προσήμου σε μια αλγεβρική έκφραση οδηγεί τους μαθητές να απαντούν ότι ο αριθμός που αυτή αναπαριστά είναι θετικός (αριθμός αντίστοιχου ουδέτερου προσήμου) ή και αρνητικός. Αντίστοιχα αν η ύπαρξη ενός αρνητικού φαινομενικού προσήμου οδηγεί τους μαθητές να θεωρούν ότι ο αριθμός που αναπαριστά η παράσταση είναι αρνητικός ή μπορεί να είναι και αριθμός θετικού προσήμου. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκε εάν υπάρχει η πεποίθηση ότι το αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής έκφρασης οφείλει να είναι αριθμός του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό της πρόσημο, θεωρώντας ότι ο αριθμός με τον οποίο αντικαθίσταται η μεταβλητή της εκάστοτε αλγεβρικής έκφρασης οφείλει να είναι θετικού προσήμου, σύμφωνα με τις διαισθήσεις περί φυσικών, μη προσημασμένων αριθμών.



Διάγραμμα 1

Ο παραπάνω έλεγχος έδειξε ότι οι επιδόσεις των μαθητών ήταν υψηλότερες στα έργα όπου οι αλγεβρικές παραστάσεις ήταν θετικού φαινομενικού προσήμου (ΘετΠ) (Μ.Ο. = 13.29, Τ.Α. = 0.331), σε σύγκριση με τις επιδόσεις στα έργα εκείνα στα οποία το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων ήταν αρνητικό (ΑρΠ) (Μ.Ο.= 11.92, Τ.Α.= 0.302). Η παραπάνω διαφορά στις επιδόσεις ήταν και πάλι στατιστικά σημαντική, $t(137) = 4.127$, $p <.001$, (βλ. Διάγραμμα 2).

Είναι φανερό λοιπόν, ότι οι μαθητές ήταν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχθούν αρνητικούς αριθμούς ως αποτέλεσμα μιας φαινομενικά θετικής αλγεβρικής παράστασης, παρά θετικούς αριθμούς σε μια φαινομενικά αρνητική παράσταση. Το παραπάνω δείχνει την επίδραση της παρουσίας του αρνητικού φαινομενικού προσήμου παρά της απουσίας του.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Συζήτηση

Σκοπός αυτής της ερευνητικής εργασίας ήταν να μελετήσει τον τρόπο που επιδρούν οι δυο παράγοντες της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο, στην ερμηνεία μεταβλητών σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις από μαθητές Β’ και Γ’ Γυμνασίου. Πέρα από το να μελετηθεί πιο διεξοδικά η επίδραση της ακεραιότητας και του φαινομενικού προσήμου, σκοπός ήταν και να εξεταστεί αν κάποιος από αυτούς τους δυο παράγοντες υπερισχύει κατά το συλλογισμό των μαθητών στην παραπάνω διαδικασία. Τέλος να εξεταστεί αν η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές στο να ερμηνεύουν τις μεταβλητές των αλγεβρικών παραστάσεων ως συγκεκριμένους αριθμούς ανάλογα με το είδος των συντελεστών των παραστάσεων αυτών (π.χ. ακέραιοι αριθμοί ως αποτέλεσμα ακέραιων παραστάσεων, κλασματικοί ως αποτέλεσμα κλασματικών κ.ο.κ).

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης υποστήριξαν την υπόθεση ότι κατά την ερμηνεία αλγεβρικών παραστάσεων οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα οι αλγεβρικές παραστάσεις να αναπαριστούν πολλαπλάσια των συντελεστών τους, και ότι οι αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν αριθμούς του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό τους πρόσημο. Όπως φάνηκε από τη σύγκριση της συνολικής επίδοσης των μαθητών μεταξύ των τεσσάρων κατηγοριών ισχυρισμών του ερωτηματολογίου, οι μαθητές εμφανίζουν υψηλότερες επιδόσεις στα ερωτήματα που είναι συμβατά με την ακεραιότητα και συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ) σε σχέση με τα ερωτήματα εκείνα που ήταν μη συμβατά με την ακεραιότητα όπως και μη συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ). Οι υψηλές επιδόσεις στην παραπάνω κατηγορία έργων φανερώνουν ότι οι μαθητές, κατά την ερμηνεία μιας μεταβλητής, δείχνουν να επηρεάζονται από τις διαισθήσεις τους για τους αριθμούς, οι οποίες είναι οργανωμένες γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού. Παρατηρείται δηλαδή η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι μια αλγεβρική έκφραση αναπαριστά αριθμούς που προκύπτουν από την αντικατάσταση της μεταβλητής με φυσικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα αυτά ήταν συμβατά και ενισχύουν προυπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας που υπογραμμίζουν την τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα γράμματα που βρίσκονται στη θέση των μεταβλητών ως φυσικούς αριθμούς (Christou και Vosniadou, 2012).

Ταυτόχρονα οι χαμηλότερες επιδόσεις στα Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ έργα φανερώνουν και πάλι την τάση των μαθητών να απορρίπτουν ως αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής παράστασης έναν αριθμό, όταν αυτός δεν προκύπτει από την αντικατάσταση της μεταβλητής με ακέραιο αριθμό και δεν έχει το ίδιο πρόσημο με το πρόσημο που φαίνεται να φέρει η παράσταση. Παρατηρείται δηλαδή η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τα αλφαβητικά σύμβολα στην άλγεβρα ως φυσικούς αριθμούς, ενώ παράλληλα φάνηκε ότι η προκατάληψη του ΦΑ επηρεάζει τους μαθητές κατά την ερμηνεία των μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις με δύο τρόπους, όπως ήταν αναμενόμενο.

Αρχικά, η στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη επίδοση των μαθητών ανάμεσα στα συμβατά με την ακεραιότητα και συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο έργα έναντι των μη συμβατών έργων τόσο με την ακεραιότητα όσο και με το φαινομενικό πρόσημο δείχνει ότι οι μαθητές, ανάμεσα σε παραστάσεις που έχουν το ίδιο φαινομενικό πρόσημο με τις αριθμητικές τιμές που τους αποδίδονται, φαίνεται να απαντούν πιο σωστά στη συνθήκη που θέλει τις μεταβλητές να αναπαριστούν ακέραιες τιμές, παρά κλασματικές ή δεκαδικές. Φαίνεται δηλαδή, πως οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως ακέραιους αριθμούς και όχι ως αριθμούς δεκαδικούς ή κλασματικούς όταν τα έργα είναι παράλληλα συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ), όταν δηλαδή η αλγεβρική παράσταση και η αντίστοιχη αριθμητική τιμή έχουν το ίδιο πρόσημο. Επιπλέον, η στατιστικώς σημαντική διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στα συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο και στα μη συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο έργα υποδεικνύει ότι οι μαθητές τείνουν και στην συνθήκη όπου η αλγεβρική παράσταση και ο αριθμός που της αποδίδεται έχουν διαφορετικό πρόσημο (Μη-συμβΦΠ), να απαντούν πιο σωστά όταν ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν ακέραιους αριθμούς και κλασματικής μορφής παραστάσεις, παριστάνουν κλάσματα. Και σε αυτή την περίπτωση δηλαδή, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως ακέραιους αριθμούς. Ένα συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί από τα παραπάνω είναι ότι ο παράγοντας «ακεραιότητα» της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, μπορεί ξεχωριστά να επηρεάσει τη σκέψη των μαθητών όταν αυτοί καλούνται να αξιολογήσουν την αριθμητική τιμή που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή ή απλή αλγεβρική έκφραση, είτε στην περίπτωση που άρεται η επίδραση του φαινομενικού προσήμου, είτε όχι. Αποτέλεσμα αυτής της ανεξάρτητης επίδρασης της ακεραιότητας θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι είναι η εμφάνιση συνθετικών λαθών, στην προσπάθεια των μαθητών να άρουν κάποιες από τις παρερμηνείες που έχουν δημιουργηθεί από το αρχικό εννοιολογικό πλαίσιο που θέλει τα αλφαβητικά σύμβολα να αποτελούν φυσικούς αριθμούς. Με άλλα λόγια οι μαθητές, στη δεύτερη περίπτωση φαίνονται διατεθειμένοι να αποδεχτούν και αριθμητικές τιμές αντίθετου προσήμου από το φαινομενικό πρόσημο της αντίστοιχης αλγεβρικής παράστασης, αρκεί οι αριθμοί που αναπαριστούν οι μεταβλητές να είναι ακέραιας μορφής.

Αντίστοιχα, η στατιστικώς σημαντική διαφορά στην επίδοση των μαθητών ανάμεσα στις κατηγορίες συμβατών με την ακεραιότητα και συμβατών με το ΦΠ έναντι των συμβατών με την ακεραιότητα και μη συμβατών με το ΦΠ ερωτημάτων υποδεικνύει πως με τα έργα και στις δυο κατηγορίες να είναι συμβατά με την ακεραιότητα, δηλαδή ακέραιοι αριθμοί να αντιστοιχίζονται σε ακέραιες εκφράσεις κ.ο.κ οι μαθητές φαίνεται να σημειώνουν υψηλότερες επιδόσεις στη συνθήκη κατά την οποία οι αλγεβρικές εκφράσεις εμφανίζουν φαινομενικό πρόσημο αντίστοιχο με της αριθμητικές τιμές που τους αποδίδονται, παρά όταν το φαινομενικό πρόσημο της αλγεβρικής παράστασης και του αριθμού διαφέρουν. Ομοίως η, στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στα μη συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το ΦΠ σε σχέση με τα μη συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το ΦΠ έργα υποδεικνύει ότι και στην περίπτωση που σε ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις αντιστοιχήθηκαν ρητοί αριθμοί και το αντίστροφο, οι μαθητές έδειχναν περισσότερο διατεθειμένοι να αποδεχτούν ότι οι εκφράσεις μπορούν να πάρουν αριθμητικές τιμές που έχουν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των εκφράσεων. Κατά συνέπεια θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι, όπως και με την ακεραιότητα, έτσι και ο παράγοντας φαινομενικό πρόσημο μπορεί να επηρεάσει ανεξάρτητα την ερμηνεία των μεταβλητών με το να δημιουργεί την πεποίθηση ότι μια αλγεβρική παράσταση και η αριθμητική τιμή που αυτή αναπαριστά οφείλουν να έχουν το ίδιο πρόσημο είτε οι μεταβλητές των παραστάσεων ερμηνεύονται ως ακέραιοι αριθμοί, είτε ως αριθμοί κλασματικοί και δεκαδικοί. Και στη συγκεκριμένη περίπτωση θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε την μεμονωμένη επίδραση αυτή ως ένα ενδιάμεσο στάδιο στην κατανόηση των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει μια μεταβλητή. Οι μαθητές δηλαδή προσπαθώντας να ενσωματώσουν στο εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο που θέλει τη μεταβλητή να είναι φυσικός αριθμός, την πληροφορία που έχουν διδαχθεί ότι η μεταβλητή αναπαριστά οποιονδήποτε αριθμό, φαίνονται διατεθειμένοι να αμφισβητήσουν κάποιες από τις ιδιότητες του φυσικού αριθμού, όπως η ακεραιότητα, και να δεχθούν κλασματικές ή δεκαδικές τιμές, διατηρώντας ωστόσο κάποιες άλλες ιδιότητες όπως αυτή του θετικού προσήμου.

Τα παραπάνω ευρήματα ενισχύουν και αυτά αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών που εντοπίζουν ότι οι μαθητές στην προσπάθειά τους να μετασχηματίσουν το υπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για τις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, άλλες φορές εμφανίζονται περισσότερο διατεθειμένοι να άρουν την πεποίθηση ότι οι μεταβλητές είναι φυσικοί αριθμοί (με βασικό τους χαρακτηριστικό την ακεραιότητα) και άλλες φορές εμφανίζονται διατεθειμένοι να άρουν την ιδέα ότι μια μεταβλητή ή μια αλγεβρική παράσταση οφείλει να αναπαριστά αριθμό του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό της πρόσημο (Χρήστου, 2009).

Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, εάν κάποιος από τους δύο παράγοντες της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, η ακεραιότητα ή το φαινομενικό πρόσημο επιδρά περισσότερο κατά την ερμηνεία των μεταβλητών στις αλγεβρικές παραστάσεις από τους μαθητές, τα ευρήματα και πάλι συγκλίνουν με προϋπάρχουσες μελέτες. Οι Χρήστου και Βοσνιάδου (2012), εντόπισαν ότι κάτω από συνθήκες όπου οι μαθητές έπρεπε να δώσουν απαντήσεις μη διαισθητικές σχετικά με τις αριθμητικές τιμές που αναπαριστούν οι μεταβλητές, τότε εκείνοι φάνηκαν περισσότερο πρόθυμοι να άρουν την επίδραση του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών παρά την επίδραση του φυσικού αριθμού με βασικό του στοιχείο την ακεραιότητα. Με άλλα λόγια ήταν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχτούν ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις θα μπορούσαν να αναπαριστούν και αριθμούς αντίθετου προσήμου από το φαινομενικό τους πρόσημο παρά ότι οι ακέραιες αλγεβρικές εκφράσεις θα μπορούσαν να αναπαριστούν αριθμούς μη ακέραιους.

Στην παρούσα μελέτη το μέγεθος της διαφοράς στις επιδόσεις των μαθητών ήταν πιο μεγάλο ανάμεσα στα συμβατά και μη συμβατά ερωτήματα με την ακεραιότητα (όταν ο παράγοντας πρόσημο ήταν σταθερός) συγκριτικά με το μέγεθος της διαφοράς στις επιδόσεις ανάμεσα σε συμβατά και μη συμβατά ερωτήματα με το φαινομενικό πρόσημο (όταν ο παράγοντας ακεραιότητα ήταν σταθερός). Αυτό προκύπτει από τη σύγκριση του μεγέθους της διαφοράς ανάμεσα στην κατηγορία συμβατών με την ακεραιότητα και με το φαινομενικό πρόσημο και μη συμβατών με την ακεραιότητα αλλά συμβατών με το φαινομενικό πρόσημο έργων και στο μέγεθος της διαφοράς στην επίδοση ανάμεσα στα συμβατά με την ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο έναντι των συμβατών με την ακεραιότητα αλλά μη συμβατών με το ΦΠ έργων, όπου η διαφορά στην επίδοση προέκυψε μεγαλύτερη στην πρώτη κατηγορία. Όταν δηλαδή το φαινομενικό πρόσημο είναι σταθερά συμβατό με τις διαισθήσεις των μαθητών, σχετικά με το ποιους αριθμούς αναπαριστούν οι μεταβλητές, προκύπτουν περισσότερα λάθη εξαιτίας του παράγοντα της ακεραιότητας από ότι όταν παραμένει σταθερά συμβατή με τις διαισθήσεις των μαθητών η ακεραιότητα και αλλάζει ο παράγοντας πρόσημο. Το ίδιο έδειξε και η σύγκριση του μεγέθους της διαφοράς ανάμεσα στα συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το ΦΠ έργα και μη συμβατά με την ακεραιότητα και ταυτόχρονα μη συμβατά με το ΦΠ έργα σε σχέση με τη διαφορά στα μη συμβατά με την ακεραιότητα και συμβατά με το ΦΠ έργα και μη συμβατά με την ακεραιότητα και μη συμβατά με το ΦΠ έργα. Το συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από τα παραπάνω ευρήματα είναι ότι αφού ο παράγοντας ακεραιότητα φαίνεται να δημιουργεί περισσότερα λάθη αναφορικά με το τι είδους αριθμητικές τιμές μπορούν να αναπαριστούν οι αλγεβρικές εκφράσεις, τόσο όταν οι αριθμητικές τιμές έχουν το ίδιο πρόσημο με το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών εκφράσεων (ΣυμβΦΠ), όσο και όταν έχουν αντίθετο πρόσημο (Μη-ΣυμβΦΠ), θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η ακεραιότητα (βασικό στοιχείο του φυσικού αριθμού) ασκεί μεγαλύτερη επίδραση σε σύγκριση με τον παράγοντα φαινομενικό πρόσημο. Με άλλα λόγια, οι μαθητές φαίνεται στην προσπάθειά τους να εντάξουν στο υπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο, σύμφωνα με το οποίο οι μεταβλητές είναι σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς, την πληροφορία ότι η μεταβλητή μπορεί να συμβολίζει οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, καταλήγουν στο να δέχονται κάποιες αναπαραστάσεις αριθμών που διατηρούν κάποια από τα στοιχεία του φυσικού αριθμού, όπως είναι οι ακέραιοι (θετικοί και αρνητικοί). Ωστόσο δεν φαίνεται να δέχονται με την ίδια ευκολία και αριθμούς που δεν διατηρούν το στοιχείο της ακεραιότητας όπως οι δεκαδικοί ή τα κλάσματα.

Όσον αφορά το τελευταίο ερευνητικό ερώτημα, εάν δηλαδή το είδος των συντελεστών μιας αλγεβρικής παράστασης επηρεάζει τους μαθητές στο να ερμηνεύουν τις μεταβλητές, και κατ’ επέκταση τις αλγεβρικές παραστάσεις με συγκεκριμένους αριθμούς φάνηκε ότι οι συντελεστές επιδρούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές να θεωρούν ότι συγκεκριμένου είδους εκφράσεις αναπαριστούν συγκεκριμένους αριθμούς. Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει καθώς στην περίπτωση των έργων με ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις οι μαθητές παρουσίασαν υψηλότερες επιδόσεις από ότι στην περίπτωση όπου τα έργα περιείχαν αλγεβρικές παραστάσεις με κλασματικούς συντελεστές. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές φάνηκαν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχτούν ως τιμές μιας ακέραιας αλγεβρικής παράστασης, κλάσματα ή δεκαδικούς αριθμούς (π.χ. Θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 3/4), από ότι ακέραιους ή δεκαδικούς αριθμούς ως τιμές μιας παράστασης με κλασματικούς συντελεστές (π.χ. Θα μπορούσε το 4/5 y να πάρει την τιμή 6.9). Η παρουσία συνεπώς κλασματικών συντελεστών φαίνεται να έχει μεγαλύτερη επίδραση στις επιδόσεις των μαθητών παρά η απουσία τους.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού φαίνεται να επηρεάζει τις προσδοκίες των μαθητών για το είδος της αριθμητικής αναπαράστασης που οφείλει να συμβολίζει μια αλγεβρική έκφραση, ανάλογα με το είδος των συντελεστών που περιέχονται στην παράσταση, ιδιαίτερα όταν εμπλέκονται μη ακέραιοι αριθμοί. Τα παραπάνω έρχονται σε σύγκλιση με συμπεράσματα προηγούμενων ερευνών, σύμφωνα με τα οποία, η ΠΦΑ δείχνει να επηρεάζει τις προσδοκίες των μαθητών σχετικά με το είδος της αναπαράστασης που οφείλει να έχει το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης μεταξύ αριθμών συγκεκριμένου είδους (Christou, 2017). Οι μαθητές έχουν για παράδειγμα την τάση να θεωρούν ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης μεταξύ ακέραιων αριθμών οφείλει να είναι ακέραιος και ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης μεταξύ κλασμάτων οφείλει να είναι κλάσμα.

Αντίστοιχη ήταν και η επίδραση του φαινομενικού προσήμου στις απαντήσεις των μαθητών. Φάνηκε πως στην περίπτωση των έργων με φαινομενικά θετικές παραστάσεις οι μαθητές παρουσίασαν υψηλότερες επιδόσεις από ότι στην περίπτωση των έργων με φαινομενικά αρνητικές. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές φάνηκαν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχτούν αρνητικούς αριθμούς ως τιμές μιας φαινομενικά θετικής παράστασης (π.χ. Θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή -3), από ότι θετικούς αριθμούς ως τιμές μιας παράστασης φαινομενικά αρνητικής (π.χ. Δεν θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή 8). Η παρουσία επομένως του αρνητικού φαινομενικού προσήμου μοιάζει να έχει μεγαλύτερη επίδραση στις απαντήσεις των μαθητών παρά η απουσία του. Η μεγαλύτερη επίδραση του αρνητικού φαινομενικού προσήμου συμφωνεί με προηγούμενα ευρήματα της βιβλιογραφίας σύμφωνα με τα οποία η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου, η λανθασμένη πεποίθηση δηλαδή ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας μεταβλητής ή αλγεβρικής παράστασης είναι το πρόσημο των τιμών που αυτή μπορεί να αναπαραστήσει, είναι πιο έντονη σε περιπτώσεις φαινομενικά αρνητικών παραστάσεων παρά φαινομενικά θετικών (Christou, 2012).

5.3 Περιορισμοί της έρευνας

Τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτουν από τις απαντήσεις μαθητών από δυο μόνο δημόσια σχολεία και μάλιστα από ένα συγκεκριμένο γεωγραφικό διαμέρισμα, αυτό της Κεντρικής Μακεδονίας και επομένως αποτελούν ένα μικρό δείγμα που δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων για το σύνολο των μαθητών των ηλικιών που μελετήθηκαν.

Ένας ακόμη παράγοντας που περιορίζει τη σημαντική συνεισφορά της παρούσας μελέτης είναι ότι στηρίχθηκε στις απαντήσεις μαθητών της Β’ και Γ’ Γυμνασίου αποκλειστικά, με αποτέλεσμα να περιορίζεται το δείγμα σε ένα μικρό τμήμα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ένας ακόμη περιορισμός της παρούσας μελέτης αποτελεί η άντληση πληροφοριών μέσω της χρήσης ποσοτικών μονάχα μεθόδων, και μάλιστα ερωτηματολογίου με ερωτήσεις αποκλειστικά κλειστού τύπου. Αρχικά η χρήση διχοτομικού τύπου ερωτήσεων (Συμφωνώ/Διαφωνώ) δεν επέτρεψε την αυθόρμητη απάντηση των ερωτηθέντων σχετικά με το ποιες αριθμητικές τιμές θεωρούν οι ίδιοι ότι μπορούν να αναπαριστούν οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις και ποια είδη αριθμητικών τιμών απορρίπτουν. Επιπλέον η χρήση μεθοδολογικών εργαλείων ποιοτικής έρευνας όπως η συνέντευξη ή η παρατήρηση, θα μπορούσε να ενισχύσει και να συμπληρώσει τα ποσοτικά δεδομένα. Ακόμη ο σχεδιασμός ειδικών διδακτικών παρεμβάσεων θα μπορούσε να βοηθήσει στην μελέτη των τρόπων επίλυσης των προβλημάτων που δημιουργεί στους μαθητές η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της μεταβλητής ως ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Ωστόσο τέτοιου είδους προσεγγίσεις δεν ήταν εφικτές εξαιτίας του περιορισμένου χρόνου της έρευνας σε συνάρτηση με το μέγεθος των ερωτηματολογίων.

Τέλος, η μελέτη της έννοιας των μεταβλητών, μόνες τους ή σε αλγεβρικές παραστάσεις, έξω από κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο η έννοια βρίσκει εφαρμογή, όπως θα μπορούσε να είναι αυτό των ανισώσεων ή των συναρτήσεων περιορίζει την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο θα αντιλαμβάνονταν οι μαθητές την έννοια μέσα σε συγκεκριμένες μαθηματικές συνθήκες.

Ωστόσο οι αδυναμίες που επισημαίνονται εδώ θα μπορούσαν να αποτελέσουν, όπως και τα αποτελέσματα της εμπειρικής μελέτης, υλικό για περαιτέρω διερεύνηση και μελλοντική αξιοποίηση.

5.4 Γενικά Συμπεράσματα

Καθώς η άλγεβρα αποτελεί ένα πεδίο-σταθμό ανάμεσα στην αριθμητική και τα ανώτερα μαθηματικά και ο ορθός χειρισμός της θεωρείται απαραίτητος για μια επιτυχή πορεία στα μαθηματικά, η έρευνα για την εκπαίδευση των μαθηματικών επικεντρώθηκε σε ένα μεγάλο βαθμό στις δυσκολίες που αυτή δημιουργεί στους μαθητές ως προς την κατανόησή της. Ένα από τα αλγεβρικά σύμβολα που φάνηκε να απασχολεί ιδιαίτερα είναι αυτό της μεταβλητής, η οποία φαίνεται να εμφανίζεται σε ποικίλα πλαίσια απαιτώντας διαφορετικό χειρισμό. Συνεπώς η ανάλυση των λαθών που προκαλεί, αλλά και η προέλευση τους θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια επιτυχημένη διδακτική προσέγγιση όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής αλλά και την άλγεβρα γενικότερα.

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις. Τα ευρήματα που προέκυψαν συμφωνούν με προηγούμενες σχετικές μελέτες και θέλουν τους μαθητές να επηρεάζονται κατά την ερμηνεία των μεταβλητών σύμφωνα με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού από δύο βασικούς παράγοντες. Πρώτον, οι μαθητές, κατά την αξιολόγηση της ορθότητας ισχυρισμών όπου αριθμητικές τιμές διαφόρων αναπαραστάσεων αποδίδονταν σε αλγεβρικές εκφράσεις, παρουσίαζαν την τάση να ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως φυσικούς αριθμούς και συνεπώς τις αλγεβρικές εκφράσεις ώς πολλαπλάσια των συντελεστών τους. Δεύτερον, οι μαθητές έτειναν να θεωρούν ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής έκφρασης είναι και το πραγματικό πρόσημο του αριθμού που αυτή αναπαριστά. Ακόμη οι δύο αυτοί παράγοντες της ΠΦΑ, η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο, φαίνεται να μπορούν να επιδράσουν ανεξάρτητα στο συλλογισμό των μαθητών για τις μεταβλητές προκαλώντας μια ποικιλία συνθετικών λαθών.

Επιπλέον, τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι το βασικό χαρακτηριστικό το φυσικού αριθμού που είναι η ακεραιότητα ασκεί μεγαλύτερη επίδραση από ότι ο παράγοντας του φαινομενικού προσήμου κατά την ερμηνεία των μεταβλητών και των αλγεβρικών εκφράσεων, αφού οι μαθητές φαίνονται περισσότερο διατεθειμένοι να δεχτούν ως τιμή μιας μεταβλητής έναν ακέραιο αριθμό ακόμα και αν αυτός έχει πρόσημο αντίθετο από το φαινομενικό πρόσημο της μεταβλητής, παρά έναν μη ακέραιο (π.χ. κλασματικό ή δεκαδικό).

Τέλος οι μαθητές φαίνεται να επηρεάζονται περισσότερο από την ύπαρξη ρητών συντελεστών στις αλγεβρικές παραστάσεις, ερμηνεύοντας λανθασμένα τις μεταβλητές που αυτές περιέχουν. Αυτό φάνηκε να συμβαίνει και σε περιπτώσεις όπου ο συντελεστής της παράστασης ήταν αρνητικός ακέραιος (π.χ. -β), αλλά και σε περιπτώσεις που ο συντελεστής ήταν αριθμός κλασματικός (π.χ. 4/5y).

Το γεγονός ότι οι απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν από ένα εργαλείο σχεδιασμένο έτσι ώστε να μετρά με συστηματικό τρόπο τις επιδόσεις τους ανάλογα με τη συμβατότητα ή μη με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για το τι αριθμούς μπορεί να αναπαριστούν μεταβλητές και αντίστοιχες αλγεβρικές παραστάσεις, μας κάνει να πιστεύουμε ότι τα λάθη αυτά των μαθητών δεν οφείλονται σε τυχαίους παράγοντες. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, βασίζονται σε βαθιά ριζωμένες πεποιθήσεις, οι οποίες όταν έρθουν σε σύγκρουση με την πληροφορία ότι η μεταβλητή αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, οδηγούν σε μια σταδιακή άρση των επιμέρους παρερμηνειών που προκαλεί η ΠΦΑ μέχρι η νέα γνώση να επαναδιαπραγματευτεί πλήρως, και να επέλθει η ουσιαστική κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής.

5.5 Εφαρμογές στην εκπαίδευση

Στη διδασκαλία, η μάθηση μιας νέας έννοιας συχνά θεωρείται ότι μπορεί να επιτευχθεί αν χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές η προηγούμενη γνώση τους ώστε να δομηθεί πάνω σε αυτήν σταδιακά η νέα πληροφορία που απαιτείται για την κατανόηση της καινούριας έννοιας. Ένα παράδειγμα όπου βρίσκει εφαρμογή η παραπάνω στρατηγική είναι αυτό της διδασκαλίας της έννοιας του αριθμού στα πρώτα χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπου γίνεται αξιοποίηση των διαισθήσεων των μαθητών έτσι ώστε να κατανοηθεί η έννοια του φυσικού αριθμού (Χρήστου, 2009; Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Ωστόσο, όπως φάνηκε από τη μελέτη της βιβλιογραφίας η μέθοδος αυτή μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στη μάθηση και να μην είναι πάντα αποτελεσματική, αφού σύμφωνα με την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, οι μαθητές μπορεί να έχουν συγκροτήσει ένα εναλλακτικό ερμηνευτικό πλαίσιο για μια έννοια, το οποίο να αποτελεί εμπόδιο για τη μάθηση περισσότερο περίπλοκων εννοιών (Resnick, 2006).

Στην παρούσα μελέτη παρουσιάστηκαν εμπειρικά δεδομένα που ενισχύουν προϋπάρχουσες μελέτες και υποστηρίζουν ότι τα λάθη και οι παρανοήσεις με την έννοια της μεταβλητής δεν είναι τυχαία και ότι η κατανόησή της ως σύμβολο που αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό στην άλγεβρα, συνδέεται άμεσα με υπάρχουσες διαισθήσεις και γνώσεις για την έννοια του αριθμού στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, τα λάθη που προκύπτουν από την αδυναμία των μαθητών να ερμηνεύσουν τις μεταβλητές σε αλγεβρικές παραστάσεις ως οποιονδήποτε αριθμό, οφείλονται στην ισχυρή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού με δύο βασικούς παράγοντες: την ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο. Μέσα από αυτό το πρίσμα, η παραπάνω αδυναμία των μαθητών μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα ζήτημα εννοιολογικής αλλαγής. Συνεπώς, θα πρέπει η διδασκαλία να στοχεύει στην επαναδιαπραγμάτευση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών και στην αναδιοργάνωση του εννοιολογικού πλαισίου για τον αριθμό, το οποίο είναι συγκροτημένο με βάση την έννοια και τις ιδιότητες του φυσικού αριθμού.

Αρχικά το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται, οφείλει να συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, όχι σαν ένα σύμβολο της άλγεβρας που αναπαριστά απλώς αριθμούς, αλλά ως ένα σύμβολο που αναπαριστά τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Όπως φάνηκε, για παράδειγμα, από τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης οι μαθητές τείνουν να επηρεάζονται από το είδος της αριθμητικής αναπαράστασης των συντελεστών μιας αλγεβρικής έκφρασης και να ερμηνεύουν αντίστοιχα τις μεταβλητές της παράστασης αυτής. Συγκεκριμένα η χρήση ρητών συντελεστών, είτε κλασματικών είτε αρνητικών ακεραίων φάνηκε να οδηγεί σε λάθη σχετικά με την ερμηνεία των μεταβλητών που ακολουθούσαν σε κάθε αλγεβρική παράσταση. Θα μπορούσε επομένως να ενταχθεί στο εκπαιδευτικό υλικό μια ποικιλία από παραδείγματα τέτοια ώστε να βοηθούν τους μαθητές να εξοικειωθούν με τις παραπάνω αναπαραστάσεις των αλγεβρικών εκφράσεων και να οδηγήσουν στη ρήξη της πεποίθησης ότι ο αριθμός που αναπαριστά μια ρητή αλγεβρική έκφραση οφείλει να είναι αριθμός πολλαπλάσιος του συντελεστή της. Εξάλλου η πρόταση της χρήσης όχι μόνο φυσικών αριθμών στη θέση των μεταβλητών κατά τη διδασκαλία έχει διατυπωθεί ήδη από τον Greer (2006), με παραδείγματα όπως η λύση εξισώσεων της μορφής $2.67x^2 - 3.86x - 2.23 = 0$, αφού είναι πιθανό η επιλογή εξισώσεων με λύσεις φυσικούς αριθμούς να επαληθεύει και να ενισχύει την λανθασμένη πεποίθηση των μαθητών για τις τιμές που αναπαριστά μια μεταβλητή, κάτι που έχει διαπιστώσει και η Booth (1984).

Ωστόσο, η χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων, όπως αυτά που αναφέρθηκαν προηγουμένως, δε θα αρκούσε έτσι ώστε οι μαθητές να αποδομήσουν και να αναδιοργανώσουν ένα ήδη υπάρχον εννοιολογικό δίκτυο στο οποίο η έννοια της μεταβλητής επηρεάζεται από την έννοια του αριθμού, που στηρίζεται στις ιδιότητες του φυσικού αριθμού. Για να γίνει μια τέτοια αναδιοργάνωση, θα πρέπει οι ίδιοι οι μαθητές να έρθουν σε γνωστική σύγκρουση με την πεποίθηση ότι οι μεταβλητές παριστάνουν φυσικούς αριθμούς και ότι το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων είναι το πραγματικό πρόσημο των τιμών που αυτές αναπαριστούν. Για να προκύψει αυτή η γνωστική σύγκρουση μέσα από τη διδασκαλία οι μαθητές θα πρέπει να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής και για να γίνει αυτό θα πρέπει, σύμφωνα με το Fishbein (1987), οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να ακούσουν και να συζητήσουν για την εξέλιξη μιας έννοιας τόσο ιστορικά όσο και γνωστικά. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουν να κατανοήσουν πως μια μαθηματική έννοια, όπως αυτή της μεταβλητής αλλά και του αριθμού, μπορεί να αλλάξει και να διαφοροποιηθεί ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται. Προς αυτή την κατεύθυνση θεωρείται ότι οι μαθητές πρέπει επίσης να έχουν κατάλληλα κίνητρα για να μπορέσουν να μεταβάλλουν τις ήδη εδραιωμένες πεποιθήσεις τους (DeCorte, 2004). Επιπλέον, οφείλουν να αποκτήσουν μεταεννοιολογική επίγνωση για την έννοια της μεταβλητής μέσα από τη συζήτηση, καθώς οι λανθασμένες πεποιθήσεις τους μπορεί συχνά να μην ελέγχονται συνειδητά αλλά αντιθέτως να είναι προϊόν εσωτερικών αναπαραστάσεων (Vosniadou και συνεργάτες, 2001; Fishbein και συνεργάτες, 1985).

Σημαντικός για την εννοιολογική αλλαγή των μαθητών κατά τη διδασκαλία είναι και ο ρόλος των εκπαιδευτικών. Σύμφωνα με το Χρήστου (2009), η έρευνα θα πρέπει να επικεντρώσει το ενδιαφέρον της, πέρα από τα λάθη των μαθητών για τη μεταβλητή, και στις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τα πιθανά αυτά λάθη αλλά και την προέλευσή τους. Για τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των ίδιων σχετικά με τους τρόπους που θεωρούν ότι μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις προκαταλήψεις και να διορθώσουν τα λάθη και τις παρανοήσεις που οφείλονται στην προϋπάρχουσα γνώση τους για ορισμένες έννοιες. Τα στοιχεία από τις μελέτες αυτές θα μπορέσουν να αποτελέσουν εργαλεία έτσι ώστε στη συνέχεια να γίνει κατάλληλη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Εάν οι δάσκαλοι είναι ενήμεροι σχετικά με το ποιες έννοιες οφείλουν να πριμοδοτηθούν κατά τη διδασκαλία, ώστε να συμβάλουν στη μάθηση της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά οποιονδήποτε αριθμό, αλλά και ποιες είναι εκείνες οι ιδέες που οφείλουν να αποφευχθούν ή να συζητηθούν διότι ενισχύουν το εναλλακτικό εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών που θέλει τη μεταβλητή να είναι κατά βάση φυσικός αριθμός, θα είναι σε θέση να οργανώσουν με κατάλληλο τρόπο τις διδακτικές τους προσεγγίσεις (Swafford & Langrall, 2000). Η παραπάνω γνώση είναι χρήσιμη και απαραίτητη ακόμα και για τους δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης όπου η έννοια της μεταβλητής μπορεί να μην έχει ακόμα εισαχθεί, όμως οι μαθητές έρχονται σε επαφή με ανεπίσημα σύμβολα για την αναπαράσταση μεταβλητών, όπως κενά κ.α. (π.χ. __ + __ = 12, ☐ + Δ = 12, και ☐+ ☐ = 12) καθώς η ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού αποτελεί έναν από τους στόχους του προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά ήδη από τις τάξεις του δημοτικού (Switzer, 2018).

Τέλος, ο σχεδιασμός ειδικά οργανωμένων διδακτικών παρεμβάσεων για τη μεταβλητή αλλά και την έννοια του αριθμού θα μπορούσε να βοηθήσει ώστε οι μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες στην ερμηνεία των μεταβλητών. Παρ' ότι έχει διαπιστωθεί ότι η έννοια της μεταβλητής εμφανίζεται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου συχνότερα με την πιο εκλεπτυσμένη μορφή του «Γενικευμένου αριθμού» και επιπλέον ότι τα ποσοστά εμφάνισης απόδοσης φυσικών και μη φυσικών τιμών στις μεταβλητές των σχολικών εγχειριδίων είναι περίπου τα ίδια, δεν διαπιστώθηκε πουθενά η ρητή αναφορά των διαφορετικών μορφών εμφάνισης των μεταβλητών (Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018). Η εμφανής διατύπωση τόσο του ρόλου της έννοιας της μεταβλητής σε συνάρτηση με το μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται, όσο και του ότι η μεταβλητή δεν είναι ένα σύμβολο που αναπαριστά συγκεκριμένες τιμές (π.χ. φυσικούς ή ακέραιους αριθμούς), θα μπορούσε να συμβάλει στη ρήξη της παρερμηνείας ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Αντίστοιχες διατυπώσεις θα μπορούσαν να εμφανίζονται και για το φαινομενικό πρόσημο των μεταβλητών και των αλγεβρικών παραστάσεων. Εξάλλου, ήδη υπάρχουσες διδακτικές παρεμβάσεις με την αξιοποίηση του ανατρεπτικού κειμένου, δηλαδή ενός κειμένου που αρχικά αναδεικνύει και αμέσως μετά αντικρούει μια υπάρχουσα παρανόηση τονίζοντας τελικά την επιστημονικά ορθή χρήση μιας έννοιας, έχουν δείξει ότι τέτοιου είδους κείμενα είναι αποτελεσματικά στο να βοηθήσουν τους μαθητές να απαλλαγούν, ακόμα και μακροπρόθεσμα, από αντίστοιχες παρανοήσεις όπως ότι «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει» (βλέπε Christou & Prokopou, 2020; Diakidoy, Mouskounti & Ioannides, 2011; Tippett, 2010). Σύμφωνα με τους Χρήστου και Προκόπου (2020), τέτοιου είδους ανατρεπτικά κείμενα όχι μόνο θα μπορούσαν να αποτελέσουν εργαλεία για έναν εκπαιδευτικό, αλλά θα μπορούσαν ακόμη και να ενταχθούν στα σχολικά εγχειρίδια σε συνδυασμό με τα κείμενα που παρουσιάζουν μια μαθηματική έννοια.

5.6 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα έρευνα ενισχύει προηγούμενα ευρήματα της βιβλιογραφίας που θέλουν τους μαθητές να κάνουν συγκεκριμένα λάθη με την έννοια της μεταβλητής εξαιτίας της τάσης τους να την ερμηνεύουν ως ένα σύμβολο που αναπαριστά φυσικούς αριθμούς ή αριθμούς που διατηρούν κάποιες από τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (π.χ. ακέραια μορφή, θετικό πρόσημο). Επιπλέον έδειξε ότι κατά την ερμηνεία των μεταβλητών οι μαθητές τείνουν να κάνουν λάθη σε μεγαλύτερο βαθμό εξαιτίας της ακεραιότητας των φυσικών αριθμών παρά εξαιτίας του φαινομενικού προσήμου των μεταβλητών το οποίο θεωρούν το πραγματικό τους πρόσημο. Φάνηκε δηλαδή ότι οι δύο αυτές παρερμηνείες που οφείλονται στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (βλέπε Ni & Zhou, 2005) δρουν τόσο ταυτόχρονα, όσο και ανεξάρτητα η μια από την άλλη δημιουργώντας συνθετικά λάθη των μαθητών.

Στο πλαίσιο αυτό θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί περεταίρω αυτή η μεγαλύτερη επίδραση του παράγοντα της ακεραιότητας όπως και να αναλυθούν οι λόγοι που μπορεί η ακεραιότητα των φυσικών αριθμών να είναι βαθύτερα ριζωμένη στις πεποιθήσεις των μαθητών για το τι είναι αριθμός και ποιοι είναι εκείνοι οι αριθμοί που αναπαριστούν τα αλφαβητικά σύμβολα στην άλγεβρα. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να μελετηθεί και μέσα από προσωπικές συνεντεύξεις με τους μαθητές έτσι ώστε να καταγραφεί ουσιαστικά και ρητά ο τρόπος σκέψης τους. Ακόμη η μεγαλύτερη επίδραση της ακεραιότητας έναντι του φαινομενικού προσήμου θα μπορούσε να ερευνηθεί και σε μεγαλύτερα δείγματα μαθητών, με διαφορετικά χαρακτηριστικά έτσι ώστε να αναλυθεί το πόσο συστηματική είναι αυτή η επίδραση της ακεραιότητας.

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής που χρησιμοποιήθηκε για να ερμηνευτούν τα λάθη των μαθητών που προέκυψαν από την παρούσα και από τις παλαιότερες σχετικές έρευνες (βλέπε Χρήστου, 2009) θα μπορούσε επίσης να φανεί χρήσιμο στο σχεδιασμό καλά οργανωμένων διδακτικών παρεμβάσεων με στόχο την επαναδιαπραγμάτευση, από τους μαθητές, της αντίληψης ότι οι αριθμοί που αναπαριστούν μεταβλητές στην άλγεβρα είναι φυσικοί και ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής έκφρασης είναι και το πραγματικό της πρόσημο. Ο σχεδιασμός ακόμη ερευνών που αποτιμούν τους στόχους διδακτικών παρεμβάσεων στην κατεύθυνση που αναφέρθηκε προηγουμένως θα μπορούσε να αποδειχθεί σημαντικός για τη δημιουργία μιας περισσότερο καθολικής διδακτικής στρατηγικής βασισμένης στις επιμέρους παρεμβάσεις, με στόχο την εννοιολογική αλλαγή στις έννοιες του αριθμού και της μεταβλητής στην άλγεβρα.

Τέλος, ενδιαφέρον θα είχε και η περαιτέρω μελέτη της κατανόησης των μη τυπικών συμβόλων που αναπαριστούν αριθμούς (βλέπε Christou, 2015; Switzer, 2018) και στην Ελλάδα. Η μελέτη του πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές του δημοτικού τα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς θα μπορούσε πιθανότατα να ρίξει φως στον τρόπο που αργότερα οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα αλφαβητικά σύμβολα στην άλγεβρα και να βοηθήσει στη γνωστική σύγκρουση των μαθητών και την αντιμετώπιση πιθανών παρερμηνειών για τον αριθμό από μικρότερες ηλικίες, με στόχο την εννοιολογική αλλαγή στο πλαίσιο του αριθμού και των συμβόλων που αναπαριστούν αριθμούς ήδη από τις τάξεις του δημοτικού, όταν εισάγονται πλέον και αριθμοί πέρα από τους φυσικούς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A Longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9(3)*, 221-247.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249-272.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and errors.* Windsor: Berkshire: NFER-Nelson

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273–301). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34-63.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912 (Paperback: $24.50). Web site: www. heinemann. com.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? Στο M.v.d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (σελ. 130-140). Utretch University, The Netherlands.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 87-115.

Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of PME*, *14*, 231-238.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. ZDM Mathematics Education, 47(5), 747-758. doi: 10.1007/s11858-015-0675-6

Christou, K. P. (2012). Helping students remedy the phenomenal sign bias: the case of a refutational lecture. In C. Prachalias (Ed.), *Proceedings of the 8th International Conference on Education* (pp. 643–648). Greece: Samos.

Christou, K. P., & Prokopou, A. (2020). Using refutational text to address the multiplication makes bigger misconception. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair, 7*(1).

Christou, K. P. & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. Mathematical Thinking and Learning, 14(1), 1-27. http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986065.2012.625074

Christou, K. P. (2017) Students' interpretation of variables and the phenomenal sign of algebraic expressions, MENON: Journal of Educational Research, 4, 161-175.

Christou K., Vosviadou St. (2005), *How Students Interpret Literal Symbols in Algebra: A Conceptual Change.* In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.).

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. Mathematical Thinking and Learning, 14(1), 1-27. doi: 10.1080/10986065.2012.625074

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286-290.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Confrey, J. (1981). Conceptual change analysis: Implications for mathematics and curriculum. *Curriculum Inquiry*, *11*(3), 243-257.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *psychometrika*, *16*(3), 297-334.

Dauben, J. (1984). Conceptual revolutions and the history of mathematics: Two studies in the growth of knowledge. In D. Gillies (Eds.), *Revolutions in mathematics* (p. 49-71). New York: Oxford University Press Inc.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied psychology*, *53*(2), 279-310.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2014). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *Advance online publication.*,. doi:10.1016/j.learninstruc.2014.07.002.

Diakidoy, I. A. N., Mouskounti, T., & Ioannides, C. (2011). Comprehension and learning from refutation and expository texts. *Reading Research Quarterly, 46*(1), 22-38.

Eisinga, R., Te Grotenhuis, M., & Pelzer, B. (2013). The reliability of a two-item scale: Pearson, Cronbach, or Spearman-Brown?. *International journal of public health*, *58*(4), 637-642.

Ernest, P. (1993). Are there revolutions in mathematics. *Humanistic Mathematics Network Journal*, *1*(8), 21.

Fishbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. Journal of Research in Mathematics Education, 16, 3-17. doi: 10.2307/748969

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171–192.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1993). Negative solutions in the context of algebraic word problems. In J. Becker, & B. Pence (Eds.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Pacific Grove*, CA, Vol. I. (pp. 121–127).

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Baton Rouge*, LA (pp. 159–165).

Gallardo, A., & Romero, M. (1999). Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), Proceedings of the Twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mexico, Vol. I. (pp. 275–282).

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1-2), 43-74.

Gelman, R. (1994). Constructivism and supporting environments. Στο D. Tirosh (Εκδ.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (σελ. 55-82). New York: Ablex

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *21*, 27-37.

Glaeser, G. (1981). Episte´mologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathe´matiques, 2(37), 303–346.

Green, M., Piel, J. A., & Flowers, C. (2008). Reversing education majors' arithmetic misconceptions with short-term instruction using manipulatives. *The Journal of Educational Research*, *101*(4), 234–242. doi:10.3200/JOER.101.4.234-242.

Greer, B. (1989). Conceptual obstacles to the development of the concepts of multiplication and division. In H. Mandl, E. De Corte, S. N. Bennet, & H. F. Friedrich (Eds.), *Learning and instruction: European research in an international context* (Vol. 2, pp. 461–476). Oxford: Pergamon.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 61-85.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 89-98). Springer, Boston, MA.

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science, 4*(2), 317–337.

Harel, G., & Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany: SUNY Press.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. London: John Murray.

Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? Learning and Instruction, 8(4), 341-374. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00026-1

Hersovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S.Wagner & Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 60-86). Reston: VA: NCTM.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59-78.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2000). Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2017). *Algebra in the early grades*. Routledge.

Kaput, J. (1998): Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Paper presented at the Algebra Symposium, Washington, DC, May, 1998.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. Educational Studies in Mathematics, 27, 191–204.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Στο D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (σελ. 390–419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, 179-198.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 68-76.

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M., & Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, *97*(6), 65-68.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, *7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. Στο K. Hart (Εκδ.), *Children's understanding of mathematics:* 11-16. (σελ. 102-119). London: John Murray.

Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions (2nd edition)* (First edition: 1962 ed.). Chicago: Chicago press.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39–65.

Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 30-41.

Mack, N. K. (1988). Learning fractions with understanding: Building upon informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 16-32.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

Matz, M. (1980). Building a metaphoric theory of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: understanding the real numbers. In M. Limon & L.Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Dordrecht: Kluwer.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 519-534.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them?. *Psychological bulletin*, *128*(2), 278.

Moses, R. P., & Cobb, C. E. (2001). *Radical equations*. Boston: Beacon Press.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: new approaches to teaching the rational-number system. In S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp. 309–349). Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council (NRC). (1998). *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum*. Washington, DC: National Academy Press.

Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. Educational studies in mathematics, 17(1), 67-79. doi: 10.1007/bf00302379

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40(1), 27-52. doi: 10.1207/s15326985ep4001_3

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction, 28*, 64–72. doi:10.1016/j.learninstruc.2013.05.003.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. Educational Studies in Mathematics, 46, 143-185.

Olive, J., Izsak, A., & Blanton, M. (2002). Investigating and enhancing the development of algebraic reasoning in the early grades (K-8): The Early Algebra Working Group. In *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 119-120).

Olive, J., & Steffe, L. P. (2010). The construction of fraction schemes using the generalized number sequence. In *Children's fractional knowledge* (pp. 277-314). Springer, Boston, MA.

Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), P*roceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. III. (pp. 108–111).

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: A strategic research and development program in mathematics education*. Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.

Resnick, L. B. (2006). The dilemma of mathematical intuition in learning. Εργασία που παρουσιάστηκε στο 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Prague.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 8–27. doi:10.2307/749095.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, *74*(6), 418-450.

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 16-22.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students'understanding of the infinite divisibility of number and matter. Cognitive Psychology (51), 101-140. doi: 10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-217).

Stacey, K., & Steinle, V. (1999). A longitudinal study of children's thinking about decimals: a preliminary analysis. *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 4–217).

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of the numerical value of fractions: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 503–518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112. doi: 10.2307/749821

Switzer, J., M. (2018). U.S. grade 4–6 students' rational-number substitutions for odd-sum unknown addend tasks, *Investigations in Mathematics Learning*, 10(1), 33-53, DOI: 10.1080/19477503.2017.1371999

Thompson, P., & Dreyfus, T. (1988). Integers as transformations. Journal for Research in Mathematics Education, 19(2), 115–133.

Tippett, C. D. (2010). Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(6), 951-970.

Tirosh, D., Tsamir, P., & Hershkovitz, S. (2008). Insights into children's intuitions of addition, subtraction, multiplication, and division. In A. Cockburn & G. Littler (Eds.), *Mathematical misconceptions* (pp. 54–70). London: Sage.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12, 8*, 19.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. Educational Studies in Mathematics 82(2), 323-330. doi: 10.1007/s10649-012-9432-8

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 265-282.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. Cognition and Instruction, 28(2), 181 - 209. doi: 10.1080/07370001003676603

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. Learning and Instruction, 30, 30-38. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.004

Vergnaud, G. (1989). L'obstacle des nombres ne´gatifs et l'introduction a` l'alge`bre. In N. Bednarz, & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs (pp. 76–83). Ottawa: Agence d'ARC.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the Twenty-fifth International

Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands, Vol. IV. (pp. 375–382).

Vlassis, J. (2002a). About the flexibility of the minus sign in solving equations. In A. Cockburn, & E.Nardi (Eds.), Proceedings of the Twenty-sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK, Vol. IV. (pp. 321–328).

Vlassis, J. (2002b). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. Educational Studies in Mathematics, 49(3), 341–359.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction*, *14*(5), 469-484.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. Learning and Instruction, 4, 45–69.

Vosniadou, S. (1999). Conceptual change research: state of art and future directions. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), New perspectives on conceptual change (pp. 3–14). Oxford: Elsevier Science.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. Στο S. Vosniadou (Ed.) *International Handbook of Research on Conceptual Change.* New York, NY: Routledge, 3-34.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variables. *Journal for Research in Mathematics education*, *12*, 107-118

Warren El., (1998). *Students' understanding of the concept of variable,* Australian Catholic University.

Widjaja, W., Stacey, K., & Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of pre-service primary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(1), 80-91.

Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2018). Τα Γράμματα-Μεταβλητές: Πως τα κατανοούν οι μαθητές και πως εμφανίζονται στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (11), 31-52.

Χρήστου, Κ. (2009). *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγιο

Σχολείο:…….. Τάξη:…….. Τμήμα:……..

Ημ. Γέννησης:…….. Φύλο: αγόρι ☐ κορίτσι☐

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε γράμματα όπως τα (α, β, x, y…) για να αναπαραστήσουμε αριθμούς. Σε αυτό το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιούμε αυτά τα γράμματα με αυτόν τον τρόπο. Διαβάστε προσεκτικά τις παρακάτω προτάσεις. Συμπληρώστε με X στο αντίστοιχο πλαίσιο, εάν συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

	Συμφωνώ	**Διαφωνώ**
Θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 6		
Θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή 3		
Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή $-\frac{1}{2}$		
Δεν θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή -1		
Θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή -2		
Θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή $-\frac{4}{5}$		
Δεν θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή 5		
Θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή 6.9		
Δεν θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή 5.6		
Δεν θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή -5		
Θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή $\frac{16}{5}$		
Θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή -4.7		
Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 3		
Δεν θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή $-\frac{2}{5}$		
Δεν θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή -6		

Δεν θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή $\frac{12}{40}$		
Δεν θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή $\frac{8}{5}$		
Θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή 9		
Δεν θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή $-\frac{12}{5}$		
Θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή 2		
Θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή $\frac{4}{5}$		
Θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή $\frac{4}{5}$		
Θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή -2		
Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -8		
Δεν θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή $-\frac{7}{8}$		
Δεν θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή $\frac{16}{5}$		
Θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή -2.8		
Θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή -5.2		
Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή $\frac{5}{6}$		
Θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή -3		
Θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή -9		
Δεν θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή $\frac{1}{6}$		
Δεν θα μπορούσε το -δ-4 να πάρει την τιμή 8		
Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -2.8		
Δεν θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή 5.8		

Θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή $-\frac{16}{5}$		
Δεν θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 3		
Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 2		
Δεν θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή 4.2		
Δεν θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή $-\frac{8}{5}$		
Θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή -8.9		
Δεν θα μπορούσε το κ+3 να πάρει την τιμή $-\frac{5}{2}$		
Δεν θα μπορούσε το $-\frac{4}{5}$z να πάρει την τιμή -6.9		
Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -4		
Δεν θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή -3.4		
Θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή $\frac{3}{4}$		
Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή $\frac{4}{3}$		
Θα μπορούσε το $\frac{4}{5}$y να πάρει την τιμή $\frac{8}{5}$		

Σας ευχαριστούμε για τη συνεργασία!!