ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α' ηλικιακός κύκλος

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

της φοιτήτριας **Μακρή Ευαγγελίας (ΑΕΜ: 813)**

Τίτλος

Η συμβολή ενός ψηφιακού μοντέλου κλασικής ζυγαριάς (που ενσωματώνει λάθος από πρόθεση) στη δημιουργία μαθηματικού νοήματος από τους φοιτητές σχετικά με το σύμβολο της ισότητας

The contribution of digital scale model (incorporating intentional error) in generating mathematical meaning making by University students in relation to the equal sign

Επιβλέπων Καθηγητής: Παπαδόπουλος Ιωάννης, ΠΤΔΕ, ΑΠΘ

Εξεταστές: 1) Τζεκάκη Μαριάννα, ΤΕΠΑΕ, ΑΠΘ

2) Χρήστου Κωνσταντίνος, ΠΝΔΜ, Π.Δ.Μ.

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας αυτή την εργασία, νιώθω την ανάγκη να αναφερθώ και να ευχαριστήσω τους ανθρώπους, που με τον δικό τους τρόπο με στήριξαν σε αυτή μου την προσπάθεια.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή, κ. Παπαδόπουλο Ιωάννη, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, για την βοήθεια που μου προσέφερε με τις συμβουλές και τις γνώσεις του, καθώς και για την επιστημονική, πνευματική και ηθική υποστήριξη που μου παρείχε. Ακόμη, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την προθυμία και τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε, αλλά και για τις γνώσεις που αποκόμισα μέσα από την συνεργασία μου μαζί του. Ήδη από την παιδική μου ηλικία ξεχώριζα το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών, όμως στη διάρκεια αυτής της συνεργασίας, μου έδειξε τον τρόπο να μεταδώσω την αγάπη μου για το αντικείμενο στους μελλοντικούς μαθητές μου, ενώ παράλληλα μου εμφύσησε το ενδιαφέρον για την έρευνα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών», για όλες τις γνώσεις που μου προσέφεραν μέσα από τα μαθήματά τους και που με παρότρυναν μέσα από τις εισηγήσεις τους να διευρύνω τον τρόπο σκέψης μου.

Θέλω να ευχαριστήσω φυσικά και τους φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, που συμμετείχαν με προθυμία στην έρευνα αυτή, διότι χωρίς την συμβολή τους δεν θα ήταν εφικτή η πραγματοποίηση αυτής της ερευνητικής εργασίας.

Τέλος, ένα ειλικρινές ευχαριστώ στην οικογένειά μου, για την ανιδιοτελή και αμέριστη υποστήριξή της. Το γεγονός ότι κάνουν πάντα τη μέγιστη προσπάθεια για τη μόρφωσή μου, αλλά και η εμπιστοσύνη που μου δείχνουν, μου δίνουν δύναμη και κουράγιο στην επαγγελματική και προσωπική μου πορεία.

Περίληψη

Το σύμβολο της ισότητας είναι από τα αντικείμενα των Μαθηματικών πάνω στο οποίο στηρίζονται πολλές μαθηματικές γνώσεις, με αποτέλεσμα να αποτελεί κεντρικό θέμα για πληθώρα ερευνών τις τελευταίες δεκαετίες στον τομέα των Μαθηματικών, ώστε να βρεθούν εργαλεία τα οποία να βοηθούν την κατανόηση πάνω στην έννοια αυτή και να μειώνουν την εμφάνιση παρανοήσεων. Ωστόσο, η βιβλιογραφία φαίνεται να υστερεί σε έρευνες που συνδυάζουν την έννοια αυτή με την τεχνολογία. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκε η συγκεκριμένη ερευνητική εργασία κατά την οποία χρησιμοποιήθηκαν δυο διαφορετικά εργαλεία (γρίφοι mobile στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι, και χρήση ψηφιακού μοντέλου ζυγαριάς στο περιβάλλον του Geogebra) από φοιτητές, με σκοπό να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο αυτά συμβάλλουν στη δημιουργία μαθηματικού νοήματος για το σύμβολο της ισότητας και τις σχέσεις ισοδυναμίας που αυτό εκφράζει. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, στο περιβάλλον των γρίφων mobile, παρέχουν ενδείξεις ότι μπορούν να υποστηρίξουν την καλύτερη κατανόηση των σχέσεων ισοδυναμίας που εκφράζει το σύμβολο της ισότητας, και να προχωρήσουν με τρόπο άτυπο στη χρήση των συμβατικών βημάτων για την επίλυση μιας εξίσωσης ή ενός συστήματος εξισώσεων. Επιπλέον, τα δεδομένα στο περιβάλλον του ψηφιακού μοντέλου κλασικής ζυγαριάς, που ενσωματώνει λάθος με πρόθεση, φάνηκε να αναδεικνύουν την δυνατότητα προώθησης της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος για την έννοια του συμβόλου της ισότητας ως σχέση ισοδυναμίας, μέσα από την συχνή εμφάνιση των τεσσάρων από τις πέντε όψεις του θεωρητικού πλαισίου των 5Es των Hoyles & Noss (2016, 2017). Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της ερευνητικής αυτής εργασίας, διαπιστώνεται ότι διαφορετικά μοντέλα, διαφορετικές αναπαραστάσεις και διαφορετικά περιβάλλοντα, ευνοούν την ανάπτυξη διαφορετικών όψεων της έννοιας, πάντα όμως σε στενή συνάφεια με αυτή.

Abstract

The equal sign is one of Mathematics fundamental topics that has been the focus of numerous research studies asking to clarify its meaning and reduce possible misconceptions. However, the research on the relation between equal sign and technology is still in progress. This study aims to shed light on this by examining how two different tools (mobile puzzles on the paper-and-pencil environment and a digital model of a scale on Geogebra) were used by preservice teachers. The main focus will be on how these tools contribute to the process of meaning making in relation to the equal sign.

The collected data in the mobile environment give evidence that their use supports the understanding of the equal sign as an equivalence relationship as wells as the intuitive use of the formal steps necessary for the algebraic solution of an equation or a system of equations. Furthermore, collected data in the digital scale model environment highlight the potential of the mean to promote the process of mathematical meaning-making through the 5E's framework Hoyles & Noss (2016, 2017). It can be said that different models, representations and/or environments relevant to the notion of equality promote different aspects of it.

Λέξεις κλειδιά

σύμβολο της ισότητας, μαθηματική ισοδυναμία, δημιουργία μαθηματικού νοήματος, γρίφοι mobile, ψηφιακό μοντέλο ζυγαριάς

Key words

equality sign, mathematical equivalence, mathematical meaning-making, mobile puzzles, digital scale model

1. Εισαγωγή

Το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1557 και από τότε είναι το μαθηματικό σύμβολο που συναντάμε ίσως περισσότερο. Άλλωστε, η σχέση ισοδυναμίας που αυτό εκφράζει αποτελεί μια βασική έννοια στην τυπική αριθμητική και την άλγεβρα. Το γεγονός αυτό όμως, δεν εξαλείφει τις δυσκολίες που συναντούν στην κατανόηση του οι μαθητές όλων των βαθμίδων.

Πάρα πολλές έρευνες τα τελευταία είκοσι χρόνια σε αρκετούς τομείς έχουν ασχοληθεί με την κατανόηση αυτού του συμβόλου και έχουν αποδείξει ότι ειδικά οι μαθητές του δημοτικού, αλλά όχι μόνο αυτοί, παρουσιάζουν μια ανεπαρκή κατανόηση. Το βασικό σημείο όπου πηγάζει αυτή η λανθασμένη κατανόηση, είναι ότι επικεντρώνονται στην λειτουργική σημασία του συμβόλου και αγνοούν την σχεσιακή λειτουργία του. Με άλλα λόγια, τείνουν να βλέπουν το ίσον (=) ως ένα σύμβολο που τους δίνει την εντολή να 'κάνουν κάτι' (do something symbol). Ωστόσο, μια σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου είναι απαραίτητη, ειδικά για τον τομέα των μαθηματικών, διότι αποτελεί ένα στάδιο προετοιμασίας για την εισαγωγή στην άλγεβρα.

Η εύρεση τρόπων για την αντιμετώπιση των σχετικών παρανοήσεων έχει αποτελέσει επίσης αντικείμενο μελέτης για πολλούς ερευνητές τις τελευταίες δεκαετίες, με την εμπλοκή της τεχνολογίας στο κομμάτι αυτό να φαντάζει στην εποχή μας αυτονόητη. Πέρα από τα παραδοσιακά εργαλεία που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί, οι ερευνητές έχουν δοκιμάσει και διάφορα τεχνολογικά μέσα, προκειμένου να εντοπίσουν την διαφοροποίηση των γνώσεων των παιδιών για το σύμβολο της ισότητας με την χρήση τους. Το περιβάλλον των γρίφων mobile και η ηλεκτρονική ζυγαριά είναι δύο από αυτά τα περιβάλλοντα που προτείνονται στην παρούσα έρευνα και που φωτίζουν διαφορετικές όψεις στην κατανόηση του συμβόλου αυτού.

1.1 Σκοπός Έρευνας

Το σύμβολο της ισότητας και η έννοια της ισοδυναμίας την οποία εκφράζει είναι αντικείμενα των Μαθηματικών που δυσκολεύουν αρκετά τους μαθητές, ακόμη και στις μεγαλύτερες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Συνεπώς, είναι σημαντικό να βρεθούν εργαλεία τα οποία θα βοηθούν την κατανόηση πάνω στην έννοια αυτή και θα μειώνουν την εμφάνιση παρανοήσεων.

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να εξεταστεί το κατά πόσο δυο διαφορετικά περιβάλλοντα (χαρτί-μολύβι και ψηφιακό περιβάλλον, με έμφαση στο δεύτερο), μπορούν να βοηθήσουν τους φοιτητές στην δημιουργία μαθηματικού νοήματος για το σύμβολο της ισότητας και τις σχέσεις ισοδυναμίας που αυτό εκφράζει. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρηθεί επίσης, με ποιες ενέργειες εκφράζεται η δημιουργία μαθηματικού νοήματος από τους φοιτητές, ποιες από αυτές εμφανίζονται περισσότερο και ποιες λιγότερο και ποιες δυσκολίες μπορεί να προκύψουν κατά την προσπάθειά τους αυτή.

1.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν και υπήρχε στόχος να απαντηθούν μέσω της συγκεκριμένης ερευνητικής εργασίας είναι τα εξής:

1. Με ποιον τρόπο αξιοποιείται από τους φοιτητές το περιβάλλον των γρίφων mobile (θα παρουσιαστεί στη συνέχεια), προκειμένου να εκφράσουν τις γνώσεις τους για το σύμβολο της ισότητας ως μια σχέση ισοδυναμίας;

2. Ποιες όψεις τους θεωρητικού πλαισίου των 5Es που σχετίζεται με την δημιουργία μαθηματικού νοήματος (θα αναλυθεί στη συνέχεια), αναδεικνύει το ψηφιακό περιβάλλον κλασικής ζυγαριάς, όταν οι φοιτητές διαπραγματεύονται την έννοια της ισότητας;

1.3 Σημαντικότητα της έρευνας

Στην έρευνα αυτή δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικά περιβάλλοντα, το ένα ψηφιακό και το άλλο όχι, ώστε να εξεταστεί σε βάθος ο τρόπος σκέψης και η κατανόηση των φοιτητών σχετικά με την έννοια της ισότητας, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο δημιουργούν μαθηματικά νοήματα σχετικά με αυτή. Η κατανόηση του τρόπου σκέψης των λυτών πάνω σε μια έννοια, αποτελεί ένα από τα βασικά ζητούμενα στην έρευνα του χώρου της Διδακτικής των μαθηματικών, αφού εμβαθύνει την κατανόησή μας, τόσο σχετικά με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές το συγκεκριμένο σύμβολο, όσο και με τη δυναμική του παρεχόμενου κάθε φορά μέσου.

Το ενδιαφέρον για την ερευνητική κοινότητα αυξάνεται δεδομένης της χρήσης ψηφιακών περιβαλλόντων για τη μελέτη του συγκεκριμένου θέματος. Προς την κατεύθυνση αυτή υπάρχει πληθώρα ερευνών σχετικών με το σύμβολο της ισότητας τις τελευταίες δεκαετίες, όμως η βιβλιογραφία υστερεί στη χρήση κάποιου ψηφιακού περιβάλλοντος για το σκοπό αυτό. Μέχρι στιγμής το περιβάλλον των γρίφων mobile έχει χρησιμοποιηθεί μόνο σε έρευνα με μαθητές της πρωτοβάθμιας, επομένως έχει ενδιαφέρον να εξεταστεί η επίδραση τους σε μεγαλύτερη βαθμίδα και συγκεκριμένα σε αυτή της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Από την άλλη, είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται το ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς που ενσωματώνει λάθος από πρόθεση.

Αναμένεται η έρευνα να είναι σημαντική και για τους ίδιους τους φοιτητές που θα συμμετέχουν σε αυτή, διότι θα αντιμετωπίσουν την προσωπική τους κατανόηση για το σύμβολο αυτό, μέσα από τη χρήση νέων μέσων, γεγονός που θα αναδείξει δυνατά και αδύνατα σημεία στην κατανόηση.

Τέλος, η συγκεκριμένη ερευνητική εργασία θα μπορούσε να παρουσιάζει ενδιαφέρον και για τους εκπαιδευτικούς της πράξης, διότι προσθέτει στην εργαλειοθήκη τους δυο νέα περιβάλλοντα, που μπορούν να αποβούν χρήσιμα, τόσο για διδακτικούς όσο και για διαγνωστικούς λόγους.

1.4 Γενική Επισκόπηση

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας είναι αυτό της εισαγωγής, στο οποίο παρουσιάζονται ο σκοπός και τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και η σημαντικότητα της, τόσο στο επίπεδο των φοιτητών και των εκπαιδευτικών όσο και στο επίπεδο της κοινότητας της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελεί το θεωρητικό μέρος της εργασίας. Σ' αυτό παρουσιάζονται αρχικά οι ορισμοί των θεμελιωδών εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν και στη συνέχεια οι παρανοήσεις των μαθητών, σχετικά με το σύμβολο της ισότητας, οι αιτίες αυτών των παρανοήσεων και κάποιες προτάσεις επίλυσής τους, όπως εντοπίζονται όλα αυτά σε παλαιότερες έρευνες πάνω στο θέμα. Ακολουθούν έρευνες που έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη της ισότητας, χρησιμοποιώντας ψηφιακά και μη περιβάλλοντα. Στο τέλος του κεφαλαίου, γίνεται αναφορά στη δημιουργία μαθηματικού νοήματος που αφορά κυρίως το θεωρητικό πλαίσιο ανάλυσης των πρωτοκόλλων της δεύτερης φάσης της έρευνας.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το δείγμα των συμμετεχόντων που έλαβαν μέρος στην έρευνα και το μαθηματικό τους υπόβαθρο, ενώ επίσης περιγράφεται και η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε. Εξηγείται αναλυτικά η οργάνωση της έρευνας, η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων, καθώς και οι δραστηριότητες και τα ερευνητικά εργαλεία της κάθε φάσης, όπως αυτά δόθηκαν στους μαθητές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο καταγράφονται αναλυτικά τα ευρήματα της έρευνας για κάθε δραστηριότητα ξεχωριστά για την πρώτη φάση και για κάθε ομάδα ξεχωριστά για την δεύτερη φάση. Σχετικά με το κομμάτι των mobile puzzles παρουσιάζονται οι τρόποι επίλυσης που επιλέχθηκαν και οι μαθηματικές ενέργειες που χρησιμοποιήθηκαν άτυπα, ενώ στο κομμάτι που αφορά το περιβάλλον του ψηφιακού μοντέλου της ζυγαριάς, περιγράφεται η πορεία επίλυσης της κάθε ομάδας και παραδείγματα από την ανάλυση των πρωτοκόλλων, που αφορούν τις πέντε όψεις της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος.

Η συζήτηση αποτελεί το πέμπτο κεφάλαιο όπου στην ουσία απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα τέθηκαν εξ' αρχής σε αυτή την έρευνα, μέσα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων που συγκεντρώθηκαν και την προηγούμενη βιβλιογραφία πάνω στο θέμα.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας, που αποτελούν μια συνθετική περίληψη των όσων διαπραγματεύτηκαν σ' αυτή την εργασία γενικά, ενώ αναφέρεται και η σημασία της συγκεκριμένης έρευνας.

Τέλος, το έβδομο κεφάλαιο είναι αυτό της βιβλιογραφίας, ενώ ακολουθεί το παράρτημα με τις απαντήσεις των μαθητών στις δραστηριότητες με τους γρίφους mobile από την πρώτη φάση της έρευνας (ανά δραστηριότητα), καθώς και τα πρωτόκολλα της κάθε ομάδας από την δεύτερη φάση.

2. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

2.1 Ορισμοί Θεμελιωδών Εννοιών

Σύμβολο της ισότητας, ίσον, (=)

Το σύμβολο της ισότητας (=) εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο βιβλίο του Robert Recorde "The Whetstone of Witte" το 1557, όπου έκανε χρήση δύο παράλληλων γραμμών για να δηλώσει την ισότητα. Πριν από αυτό η ισότητα δηλωνόταν με διάφορες λέξεις ανά καιρούς. Στην ουσία όμως το συγκεκριμένο σύμβολο καθιερώθηκε μετά από την εμφάνιση του στα έργα Άγγλων Μαθηματικών (Thomas Harriot, William Oughtred και Richard Norwood).

Ο Freundenthal (1983) προσδιόρισε τους εξής ρόλους για το σύμβολο της ισότητας, που ισχύουν έως σήμερα: α) είναι ένδειξη μιας εργασίας ή μιας ερώτησης (π.χ 3+4=?, 3+?=7). Σε αυτή την περίπτωση το σύμβολο '=' υποδηλώνει ότι πρέπει να βρεθεί μια απάντηση, β) αντιπροσωπεύει ισοδύναμες καταστάσεις (ποσοτική ομοιότητα), τη συμμετρική ποιότητα του συμβόλου της ισότητας όπου το αριστερό και το δεξί μέρος σημαίνουν το ίδιο πράγμα, γ) δηλώνει ότι κάτι ισχύει για όλες τις τιμές (π.χ α+β=β+α) και δ) χρησιμοποιείται για την εισαγωγή νέας μεταβλητής (π.χ α+β=γ).

Δημιουργία μαθηματικού νοήματος

Το νόημα στα μαθηματικά είναι μια σχέση μεταξύ του ατόμου και της γνώσης και μπορεί να προέλθει από ενδομαθηματικές πηγές. Επίσης, η αναγνώριση μέσα από ένα υπολογιστή μπορεί να επιφέρει την δημιουργία νοήματος. Ωστόσο, η αναγνώριση αυτή περιλαμβάνει μια διαλεκτική αλληλεπίδραση μεταξύ του εργαλείου και της γλώσσας κατά την πορεία της διάδρασης. Επομένως, είναι λογικό ότι διαφορετικά περιβάλλοντα θα δημιουργήσουν διαφορετικά νοήματα, τα οποία βλέπουμε να αναδιαμορφώνονται και να αναδημιουργούνται εν δράσει. Λαμβάνοντας λοιπόν, υπόψη την κοινωνική διάσταση της μαθηματικής δημιουργίας νοήματος, θεωρούμε ότι είναι κάτι περισσότερο από έναν συνδυασμό που αποτελείται από το άτομο και τη γνώση (Noss & Hoyles, 1996).

Mobile puzzle

Ένα mobile puzzle αναπαριστά πολλαπλές ισορροπημένες συλλογές αντικειμένων. Οι οριζόντιες δοκοί αναρτώνται πάντα στη μέση με χορδές, επομένως αυτό σημαίνει ότι τα δύο άκρα κάθε δοκού πρέπει να έχουν το ίδιο βάρος. Υποτίθεται ότι οι δοκοί και η χορδή δεν ζυγίζουν τίποτα. Τα ίδια σχήματα έχουν το ίδιο βάρος, ενώ διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν τα ίδια ή διαφορετικά βάρη. Μπορεί να δοθεί το συνολικό βάρος ή το βάρος ορισμένων σχημάτων και να ζητείται από τον λύτη να προσδιορίσει το βάρος των άγνωστων σχημάτων (Goldenberg et al. 2015). Επίσης, μπορεί να ζητείται με βάση ένα δοσμένο mobile puzzle, να συμπληρωθεί κάποιο άλλο ή να βρεθεί εάν κάποιο άλλο θα ισορροπεί ή όχι. Πρακτικά, ο λύτης καλείται να λύσει καταστάσεις μέσα από τις σχέσεις ισοδυναμίας που δημιουργούνται.

Ένα mobile puzzle παρουσιάζει στην ουσία ένα σύστημα εξισώσεων με τη μορφή μιας εικόνας που επισημαίνει την υποκείμενη δομή, εστιάζοντας στην ισότητα των εκφράσεων. Έτσι, οι πληροφορίες που υπάρχουν σε ένα mobile puzzle μπορούν να γραφούν και με τη μορφή ενός συστήματος εξισώσεων (Goldenberg et al. 2015).

Ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς που ενσωματώνει λάθος με πρόθεση

Πρόκειται για μια ψηφιακή εκδοχή της κλασσικής ζυγαριάς με τα δυο τάσια αριστερά και δεξιά, που όμως έχει κατασκευαστεί σκόπιμα ώστε όταν είναι σε κατάσταση ισορροπίας να μην δίνει τι σωστές ενδείξεις, λόγω ενός ενσωματωμένου λάθους στην κατασκευή της.

Το συγκεκριμένο ψηφιακό μοντέλο μιας κλασικής ζυγαριάς που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα έρευνα είναι δημιούργημα ενός εκπαιδευτικού που συμμετέχει στην έρευνα του κ. Χ. Κυνηγού (2017), με σκοπό να προκαλέσει την αντίληψη των μαθητών σχετικά με την έννοια της ισοδυναμίας.

Μαθηματική Ισοδυναμία

Μαθηματική ισοδυναμία είναι η σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες που μπορούν να αντικαταστήσουν η μια την άλλη. Μπορεί να εκφραστεί συμβολικά με τη μορφή μαθηματικής πρότασης ή εξίσωσης που περιέχει δυο μαθηματικές εκφράσεις χωρισμένες από το σύμβολο της ισότητας. Η συμβολική μορφή υποδηλώνει ότι η έκφραση στην αριστερή πλευρά του συμβόλου μπορεί να αντικατασταθεί από την έκφραση στη δεξιά πλευρά του συμβόλου και το αντίθετο (M. McNeil, 2008).

Μικροπείραμα

Τα μικροπειράματα είναι αυτόνομες μονάδες ψηφιακού διδακτικού υλικού που παρέχονται επισήμως στον εκπαιδευτικό των μαθηματικών για χρήση στην τάξη και αποτελούν προτάσεις διδασκαλίας με ψηφιακά εργαλεία (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014).

2.2 Παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με το σύμβολο της ισότητας

Το σύμβολο της ισότητας είναι από τα αντικείμενα των μαθηματικών πάνω στο οποίο στηρίζονται πολλές μαθηματικές γνώσεις. Υπάρχει σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και χρησιμοποιείται σχεδόν καθημερινά από όλους μας. Ωστόσο, είναι σημαντικό το γεγονός ότι στο Δημοτικό οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα στην κατανόησή του (Carpenter, Franke & Levi , 2003, Warren, 2003, Oksuz, 2007).

Η μεγαλύτερη δυσκολία που φαίνεται να αντιμετωπίζουν σχετικά με το σύμβολο της ισότητας είναι ότι το βλέπουν σαν ένα λειτουργικό σύμβολο το οποίο τους προτρέπει να κάνουν κάτι ('do something symbol'). Είναι στην ουσία για τα παιδιά ένα διαδικαστικό σημάδι, ώστε να «βρουν το σύνολο» ή να «τοποθετήσουν την απάντηση», αγνοώντας τελείως την σχέση ισοδυναμίας που εκφράζει (Erlwanger & Nichols, 1980, Kieran, 1981, Jones et al. 2013). Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει και ο Ginsburg (1977), ο οποίος παρατήρησε πως τα παιδιά συνδέουν το σύμβολο της ισότητας με τη διαδικασία και δεν μπορούν να τα διαχειριστούν ξεχωριστά. Οι Carpenter, Franke & Levi, (2003) και η Kieran (2007) συμφωνούν, καθώς υποστηρίζουν ότι τα παιδιά μεταφράζουν το σύμβολο της ισότητας ως μια εντολή για να κάνουν έναν υπολογισμό και ότι πάντα πρέπει να ακολουθείται από μια αριθμητική απάντηση. Επιπλέον, σε ερώτηση που έγινε στα ίδια τα παιδιά σχετικά με το σύμβολο της ισότητας οι περισσότερες απαντήσεις ταίριαζαν με τα λόγια ενός μαθητή ο οποίος είπε: «όταν προστίθενται δύο αριθμοί αυτό είναι η απάντηση» (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980, Knuth et al. 2008). Οι Behr, Erlwanger & Nichols (1980) προχωρώντας ένα βήμα παρακάτω συμπεραίνουν ότι ακόμα κι αν στην αριθμητική παράσταση 3+4=__ βγάλουμε το '__' και το '=' και μείνει μόνο το 3+4 τα παιδιά θα συνεχίσουν να θεωρούν ότι αυτό είναι ερέθισμα για να κάνουν κάποια πράξη. Οι Knuth et al. (2008) στην έρευνά τους ζήτησαν από μαθητές του δημοτικού (6-8 ετών) να δώσουν έναν ορισμό για το σύμβολο της ισότητας. Κατηγοριοποίησαν τις απαντήσεις τους σε 4 κατηγορίες: α) σχεσιακές απαντήσεις, β) λειτουργικές, γ) άλλες και δ) καμία απάντηση/δεν γνωρίζω. Για να κατανοηθεί καλύτερα ο όρος σχεσιακό, στην συγκεκριμένη έρευνα των Knuth et al. (2008), μια απάντηση κατηγοριοποιούνταν ως σχεσιακή εάν ο μαθητής εξέφραζε την γενική ιδέα ότι το σύμβολο της ισότητας αναπαριστά μια ισοδύναμη σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες. Μερικές αντιπροσωπευτικές απαντήσεις των παιδιών από αυτή την κατηγορία είναι οι εξής: α) «σημαίνει πως ότι είναι στα αριστερά και στα δεξιά του συμβόλου σημαίνει το ίδιο πράγμα», β) «Το ίδιο με, ίδια αξία», και γ) «Η αριστερή πλευρά του συμβόλου της ισότητας και η δεξιά πλευρά του συμβόλου της ισότητας είναι το ίδιο πράγμα». Από την ανάλυση των απαντήσεων φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών παρείχε ορισμούς που κατηγοριοποιήθηκαν ως λειτουργικοί, ενώ ουσιαστικά λιγότεροι μαθητές παρείχαν ορισμούς κατηγοριοποιημένους ως σχεσιακούς. Παρόλο που εντοπίστηκε μια βελτίωση στον ορισμό που χαρακτηρίζεται ως σχεσιακός καθώς οι μαθητές προχωρούσαν στο δημοτικό σχολείο, η πρόοδος αυτή ήταν σχετικά μέτρια. Έτσι, κατέληξαν στο γενικότερο συμπέρασμα ότι λιγότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες σε κάθε τάξη επιδείκνυαν μια σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου.

Το ίδιο πρόβλημα εντοπίζει και ο Oksuz (2007) στην έρευνα του, ο οποίος συμπεραίνει ότι οι μαθητές του δημοτικού γενικά δεν βλέπουν το σύμβολο της ισότητας ως μια σχέση, αλλά σαν σημάδι που τους υποδεικνύει να κάνουν τον υπολογισμό από τα αριστερά προς δεξιά. Επιπλέον, ένα μεγάλο ποσοστό παιδιών στην έρευνά του θεωρούσαν την εξίσωση ως τελική απάντηση στο πρόβλημα, γεγονός που αποτελεί ακόμα μια απόδειξη σχετικά με το ότι βλέπουν το σύμβολο της ισότητας ως έναυσμα για μια υπολογιστική διαδικασία.

Η βασική αυτή παρανόηση των μαθητών οδηγεί σε μικρότερες δυσκολίες με το σύμβολο της ισότητας. Οι Behr, Erlwanger & Nichols, (1980) χωρίζουν τις δυσκολίες αυτές σε τρεις κατηγορίες: α) Προτάσεις της μορφής __=α+β, β) 'Non–action' προτάσεις (που δεν χρειάζεται κάποιος υπολογισμός) και γ) Προτάσεις ισότητας με δυο σύμβολα πρόσθεσης.

Στις προτάσεις της μορφής '__=α+β' είναι μικρό το ποσοστό των παιδιών που δέχεται μια τέτοια αριθμητική πρόταση ως σωστή. Για τα περισσότερα παιδιά είναι πιο δύσκολο να διαβαστεί και να λυθεί, διότι έχουν συνηθίσει να βλέπουν το αντίστροφο, εφόσον οι περισσότερες ασκήσεις που δίνονται στα σχολεία έχουν συνήθως την πράξη στην αριστερή πλευρά του συμβόλου της ισότητας και το αποτέλεσμα στη δεξιά. Προκειμένου να ασχοληθούν με τέτοιες αριθμητικές προτάσεις, μερικά παιδιά αλλάζουν την σειρά των μαθηματικών όρων, βάζοντας το κενό στα δεξιά (α+β=__), άλλα αλλάζουν τη θέση των συμβόλων δημιουργώντας μια διαφορετική αριθμητική παράσταση (__+α=β), ενώ άλλα τις επιλύουν σωστά, αλλά όταν προσπαθούν να το διαβάσουν φωναχτά, λένε πρώτα την πράξη και μετά το αποτέλεσμα, αγνοώντας τη σειρά με την οποία είναι γραμμένο. Γενικά, θεωρούν ότι η πράξη και το αποτέλεσμα είναι ανάποδα γι' αυτό και όταν δόθηκε σε ορισμένα παιδιά η πρόταση 'Το 8 ισούται με 3 συν 5' υπολόγισαν σωστά το 8 ως απάντηση αλλά είπαν ότι είναι τοποθετημένο σε λάθος σειρά. Με την άποψη αυτή συμφωνούν και οι Carpenter et al. (2005), οι οποίοι τονίζουν ότι τα περισσότερα παιδιά σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, σκέφτονται πως η απάντηση πρέπει να έρχεται έπειτα από το σύμβολο της ισότητας. Οι Freiman & Lee (2004) περιλαμβάνουν τις προτάσεις αυτής της μορφής σε αυτές που προκαλούν συνεχείς δυσκολίες στους μαθητές.

Τις προτάσεις που δεν χρειάζονται κάποιον υπολογισμό, τις μετατρέπουν συνήθως σε προτάσεις που απαιτούν κάποιον υπολογισμό και αυτό σύμφωνα με την έρευνα δεν φαίνεται να σχετίζεται με την πρόοδο της ηλικίας. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να προσθέσουν σύμβολα ή αριθμούς προκειμένου η αριθμητική πρόταση να βγάζει κάποιο νόημα γι' αυτά. Το '3 = 3' για παράδειγμα το κάνουν είτε '0+3=3', είτε '1+2=3'. Σε αυτό συμφωνεί και η έρευνα του Oksuz (2007), ο οποίος υποστηρίζει ότι σε αριθμητικές προτάσεις τις μορφής '6=6' κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι είναι τελείως λάθος και κάποιοι θεωρούν ότι το δεξί κομμάτι είναι απάντηση σε κάτι όπως '6–0=6'. Σε άλλες περιπτώσεις αλλάζουν την ισότητα σε πρόσθεση και γράφουν το αποτέλεσμα. Μετατρέπουν δηλαδή το '3=3' σε '3+3=6'. Αυτό έχει σχέση με το γεγονός ότι δεν μπορούν να διαβάσουν προτάσεις που εκφράζουν ισοδύναμες σχέσεις όπως το '3=3' (Freiman & Lee, 2004, Ginsburg, 1977). Εφόσον δεν έχουν κατανοήσει την σχέση ισοδυναμίας που εκφράζει το σύμβολο της ισότητας και τους είναι περισσότερο οικεία η λειτουργική του ερμηνεία, είναι αναμενόμενο να σκέφτονται ότι μια τέτοια αριθμητική πρόταση δεν γίνεται να ισχύει, αγνοώντας ακόμη και το αυτονόητο της ισότητας μεταξύ του 3 με τον εαυτό του.

Σχετικά με τις προτάσεις ισότητας με δύο σύμβολα πρόσθεσης, τα παιδιά δεν μπορούν να τις κατανοήσουν ως προτάσεις σχετικές με τις σχέσεις των αριθμών, ούτε ως υπόδειξη ομοιότητας δύο ομάδων αριθμών. Αν τους δοθεί για παράδειγμα το '2+3=3+2', θεωρούν είτε ότι είναι το ίδιο αλλά έχει γραφτεί ανάποδα, είτε επικρατεί η αντίληψη που έχουν αποκτήσει, ότι η απάντηση πρέπει να βρίσκεται στη δεξιά πλευρά του συμβόλου, κι έτσι το αλλάζουν και το μετατρέπουν σε '2+3=5'. Ακόμη, μερικοί ισχυρίζονται ότι μπορεί αυτές οι δυο εκφράσεις να μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά στην ουσία δεν είναι το ίδιο. Αυτό σχετίζεται με τον ισχυρισμό που έχουν κάνει οι ίδιοι συγγραφείς (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980) σε άλλο σημείο της έρευνας τους, όπου όταν δόθηκε σε παιδιά το '2+4' και ρωτήθηκαν για τους προσθετέους, φαίνεται ότι τους κατανοούν ως αναπαράσταση των αριθμών 2 και 4. Βλέποντας την διάταξη των συμβόλων κατανοούν πως πρέπει να κάνουν κάποια πράξη, χωρίς να σκεφτούν πιο γενικά το ‘2+4’ ως διαφορετική αναπαράσταση του αριθμού 6. Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται και από την έρευνα των Marchini & Papadopoulos (2011), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι τα παιδιά έχουν επίσης πρόβλημα στις προτάσεις ισότητας που έχουν πάνω από έναν αριθμό σε κάθε πλευρά. Με την άποψη αυτή συμφωνεί και η Warren (2001) που διαπίστωσε ότι όταν παρουσιάστηκαν στα παιδιά παραδείγματα της μορφής ‘2+3=3+2’, ένας σημαντικός αριθμός δήλωσε ότι δεν είναι σωστά, διότι το σύμβολο της ισότητας προορίζεται να μπαίνει τελευταίο και το σύμβολο της πρόσθεσης πριν από αυτό.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και μια διαφορετική αντιμετώπιση των παιδιών σχετικά με της προτάσεις αυτής της μορφής, κατά την οποία αποδέχονται ως σωστή την αριθμητική παράσταση ‘3+2=2+3’ αλλά θεωρούν λανθασμένο το ‘4+1=2+3’. Η αιτιολόγηση τους είναι ότι η πρώτη περίπτωση ισχύει, διότι έχει τους ίδιους αριθμούς απλά τους παρουσιάζει ανάποδα, ενώ η δεύτερη δεν ισχύει, διότι δεν υπάρχουν οι ίδιοι αριθμοί και στις δύο πλευρές. Αυτό εμφανώς σχετίζεται με την αδυναμία των μαθητών που αναφέρθηκε νωρίτερα, να αντιληφθούν δηλαδή και τους δύο προσθετέους ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του 5 (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980).

Μια άλλη συνήθεια που τείνουν να έχουν οι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με τέτοιου είδους προτάσεις, είναι να αλλάζουν το σύμβολο της ισότητας σε σύμβολο της πρόσθεσης, ώστε όλοι οι αριθμοί να γίνουν προσθετέοι. Αυτό συμφωνεί και με τα αποτελέσματα της έρευνας του McNeil (2005) και των Perry et al. (1988), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν γενικά στρατηγικές, οι οποίες οδηγούν στην λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου. Μια τέτοια στρατηγική είναι για παράδειγμα αυτή που ονομάζεται ‘πρόσθεση όλων (add all)’, όπου αν τους δοθεί η αριθμητική παράσταση ‘5+6=7+4’ μια από τις συχνότερες απαντήσεις είναι το 22, υποδεικνύοντας ότι τα παιδιά πρόσθεσαν απλά όλους τους αριθμούς μεταξύ τους, αγνοώντας το σύμβολο της ισότητας και τη σχέση ισοδυναμίας που υποδηλώνει.

Οι προτάσεις αυτής της μορφής (α+β=γ+δ) φαίνεται ότι δυσκολεύουν ακόμη περισσότερο τους μαθητές όταν εμπεριέχουν κάποιο κενό το οποίο πρέπει να συμπληρωθεί. Οι Carpenter et al. (2005) αναφέρουν ως παράδειγμα για αυτή τη δυσκολία των παιδιών ορισμένες απαντήσεις τους στην ανοιχτή αριθμητική πρόταση ‘8+4=_+5’. Τα περισσότερα παιδιά σε όλο το δημοτικό σχολείο αντιμετωπίζουν το σύμβολο της ισότητας σε αυτή την αριθμητική πρόταση ως ένδειξη για την εκτέλεση του προηγούμενου υπολογισμού (Behr, Erlwanger & Nichols 1980, Saenz-Ludlow & Walgmuth 1998, Carpenter, Falkner, Levi & Carpenter 1999, Franke & Levi 2003, Carpenter et al. 2005). Έτσι, οι πιο πολλοί μαθητές απαντούν ότι ο αριθμός 12 είναι αυτός που συμπληρώνει το κενό, ενώ άλλοι προσθέτουν όλους τους αριθμούς και βάζουν τον αριθμό 17 στο κενό. Οι Freiman & Lee (2004) κατατάσσουν και αυτή την κατηγορία αριθμητικών προτάσεων ανάμεσα σε αυτές που προκαλούν δυσκολίες σε διάφορες τάξεις. Από τα αποτελέσματα της έρευνας τους, αναλύουν περισσότερο τις προτάσεις στις οποίες δίνονται τρεις αριθμοί και ένα τέταρτος για να βρεθεί. Σε αυτές τις προτάσεις παρατήρησαν ότι το σκεπτικό των μαθητών ήταν κάπως μπερδεμένο. Έστω ότι έχουμε την αριθμητική πρόταση ‘α+β=γ+δ’. Όταν το κενό ήταν στην θέση γ τα περισσότερα παιδιά συμπεριφέρθηκαν σαν να μην υπήρχε κι απλά εισήγαγαν το άθροισμα των α και β. Άλλοι φάνηκε να αγνοούν το α και να ολοκληρώνουν το άθροισμα (β=γ+δ), ενώ άλλοι απλώς επανέλαβαν έναν από τους όρους α, β, δ, στο κενό. Επίσης, εντόπισαν κι αυτοί περιπτώσεις μαθητών που συμπλήρωσαν το κενό με το άθροισμα όλων των δοθέντων όρων, καθώς και περιπτώσεις που συμπλήρωσαν το κενό είτε με το άθροισμα είτε με τη διαφορά των δύο από τους 3 όρους. Οι ίδιοι συγγραφείς σχολιάζουν την γενικότερη δυσκολία των μαθητών με τις προτάσεις που περιέχουν κάποιο κενό το οποίο πρέπει να συμπληρωθεί και προσθέτουν εκτός από τις δυο κατηγορίες που παρουσιάστηκαν ήδη (α+β=_+δ και γ=α+_) τρεις ακόμα κατηγορίες που δυσκόλεψαν τους μαθητές: α) α+β=γ+_ β) α=_+γ και γ) γ=α+_.

Μια άλλη παρανόηση που παρατηρείται ακόμα και σε μεγαλύτερους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και φοιτητές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, είναι η ακολουθία διαδοχικών τπολισμών (equality strings), όπου ουσιαστικά γίνεται λανθασμένη χρήση του συμβόλου (π.χ 3+5=8+2=10+5=15) (Carpenter, Franke & Levi , 2003, Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2008, Marchini & Papadopoulos, 2011). Είναι προφανές ότι όταν συμβαίνει αυτό, ο λύτης δεν υπολογίζει ή δεν έχει κατανοήσει το γεγονός ότι και στις δύο πλευρές του συμβόλου πρέπει να υπάρχουν ίδιες ποσότητες.

Τέλος, στην έρευνα των McNeil & Alibali (2005a) οι μαθητές κατατάσσουν τις λειτουργικές ερμηνείες για το σύμβολο της ισότητας ως «εξυπνότερες» από τις σχεσιακές ερμηνείες, γεγονός που μας δείχνει ότι η ελλιπής κατανόηση του συμβόλου έχει ριζωθεί βαθιά στην σκέψη των παιδιών.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι ένα από τα συμπεράσματα στα οποία έχουν καταλήξει ορισμένοι ερευνητές που μελέτησαν τις δυσκολίες των μαθητών με το σύμβολο της ισότητας, είναι ότι η λανθασμένη άποψη για το σύμβολο δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου ή την μαθηματική ωρίμανση. Ειδικότερα, η Kieran (1981) εξέτασε την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας σε μαθητές πρωτοβάθμιας, δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πανεπιστημίου και παρατήρησε ότι η κατανόηση τους δεν βελτιώθηκε πέρα από την πρωτοβάθμια. Αυτό είναι πιθανό να ευθύνεται για ορισμένα λάθη στην μετέπειτα εκπαίδευση. Οι Carpenter, Franke & Levi (2003) σε μια μελέτη με παιδιά δημοτικού διαφόρων τάξεων, αναφέρουν ότι «η απόδοση δεν βελτιώθηκε με την ηλικία» και «στην πραγματικότητα, σε αυτό το δείγμα, τα αποτελέσματα για τους μαθητές της έκτης δημοτικού, ήταν ελαφρώς χειρότερα από τα αποτελέσματα για τους μαθητές στις προηγούμενες τάξεις». Το γεγονός αυτό υποστηρίζει και η Warren (2003) η οποία παρατηρεί, ότι οι παρανοήσεις που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην έρευνά της στην τρίτη τάξη, επέμειναν μέχρι το τέλος της πέμπτης τάξης. Τονίζει μάλιστα ότι μόλις σχηματιστούν αυτές οι παρανοήσεις φαίνεται να παραμένουν αρκετά σταθερές. Τέλος, οι Behr, Erlwanger & Nichols (1980) ρώτησαν τους μαθητές στην έρευνά τους τη σημασία της αριθμητικής πράξης 3=3. Από τις απαντήσεις που ανέλυσαν, κατέληξαν στο ότι δεν υπάρχουν στοιχεία που να δείχνουν ότι τα παιδιά άλλαξαν τον τρόπο σκέψης τους για το σύμβολο καθώς προχωρούσαν στις τάξεις. Στην πραγματικότητα, παρατήρησαν ότι ακόμη και οι μαθητές της έκτης τάξης έβλεπαν το σύμβολο της ισότητας ως διαδικαστικό σύμβολο.

2.3 Αιτίες παρανοήσεων-δυσκολιών μαθητών

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί κι έχουν αναζητήσει τις αιτίες που οδηγούν τους μαθητές να δυσκολεύονται με το σύμβολο της ισότητας και να το ερμηνεύουν με λάθος τρόπο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η βασική δυσκολία των παιδιών έγκειται στο γεγονός ότι επικεντρώνονται στη λειτουργική σημασία του συμβόλου, αγνοώντας την σχεσιακή λειτουργία του.

Με το πέρασμα του χρόνου έχουν δημιουργηθεί δύο ομάδες θεωριών που αφορούν το συγκεκριμένο ζήτημα. Υπάρχουν αρχικά οι θεωρίες που επικεντρώνονται στους αναπτυξιακούς περιορισμούς του κάθε ατόμου. Υποστηρίζουν πως οι δυσκολίες των μαθητών οφείλονται σε αναπτυξιακούς γνωστικούς περιορισμούς, με αποτέλεσμα τα παιδιά να μην είναι έτοιμα να κατανοήσουν την σχεσιακή έννοια του συμβόλου πριν από μια συγκεκριμένη ηλικία. Αν υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει, τότε οι εκπαιδευτικοί δεν χρειάζεται να 'σπαταλούν' χρόνο νωρίτερα και δεν έχουν παρά να περιμένουν να φτάσουν τα παιδιά σε μια ορισμένη ηλικία. Όλη αυτή η θεωρία είναι συνεπής με τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στις Η.Π.Α. Τα παιδιά μαθαίνουν να αιτιολογούν τις πράξεις ως διαδικασίες που πρέπει να ακολουθούν και όχι ως εκφράσεις ποσοτικών σχέσεων μέχρι το γυμνάσιο. Μία πιθανή εξαίρεση είναι τα προβλήματα σύγκρισης μεγεθών, στα οποία οι μαθητές πρέπει να αξιολογούν τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων ως μεγαλύτερες από, μικρότερες από ή ίσες μεταξύ τους. Τέτοια προβλήματα παρουσιάζονται συνήθως στο δημοτικό σχολείο και μπορεί να βοηθήσουν στην εστίαση της προσοχής των παιδιών στη σχεσιακή έννοια του συμβόλου της ισότητας, ωστόσο, δεν περιλαμβάνουν συνήθως αριθμητικές διαδικασίες (π.χ 23+52=8x10) έως το γυμνάσιο (McNeil et. al, 2006).

Με την άποψη αυτή διαφωνούν οι Baroody και Gisburg (1983) αλλά και οι Carpenter, Franke & Levi (2003), οι οποίοι παρέχουν αποδείξεις ότι η ηλικία από μόνη της δεν μπορεί να ευθύνεται για την λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου. Πιο συγκεκριμένα, όπως είδαμε νωρίτερα, οι Carpenter, Franke & Levi (2003) έδωσαν την μαθηματική πρόταση '8+4=__+5' σε παιδιά από την πρώτη έως την έκτη τάξη με σκοπό να συμπληρώσουν τον αριθμό που λείπει. Λιγότερο από το 10% σε κάθε τάξη απάντησε σωστά και η επίδοση δεν σημείωσε πρόοδο με την αύξηση της ηλικίας. Σε παρόμοια αποτελέσματα οδηγήθηκαν και οι Li, Ding, Caprarot (2008), οι οποίοι παρατήρησαν ότι η πλειοψηφία των Κινέζων μαθητών του δημοτικού λύνουν μαθηματικά προβλήματα ισοδυναμίας σωστά. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να καταλήξουν στο συμπέρασμα, ότι οι εννοιολογικοί περιορισμοί που σχετίζονται με την ηλικία δεν είναι η πρωταρχική πηγή των δυσκολιών των παιδιών. Όλοι τους έφτασαν στο συμπέρασμα, πως με τις κατάλληλες εμπειρίες των μαθητών, ακόμη και παιδιά της πρώτης τάξης του δημοτικού μπορούν να κατανοήσουν την σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου.

Η άποψη αυτή συμφωνεί με τις θεωρίες που επικεντρώνονται στην εμπειρία των παιδιών (Baroody & Ginsburg, 1983, Carpenter, Franke & Levi, 2003, Seo & Ginsburg, 2003, McNeil & Alibali 2005b, McNeil, 2008). Η ικανότητα των παιδιών σε αυτή την περίπτωση βασίζεται στο μαθησιακό πλαίσιο. Αν υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει, τότε οι εκπαιδευτικοί έχουν την ευκαιρία να δουλέψουν, προκειμένου να βελτιώσουν το μαθησιακό πλαίσιο και να προωθήσουν την σχεσιακή αντίληψη του συμβόλου.

Πρακτικά, όμως, η άποψη αυτή δεν υποστηρίζεται από την διδασκαλία στην τάξη, με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε στην κυριότερη αιτία των δυσκολιών των μαθητών με το σύμβολο της ισότητας. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου είναι υποπροϊόν των εμπειριών των μαθητών με το συγκεκριμένο σύμβολο στα σχολικά μαθηματικά του δημοτικού (Baroody & Ginsburg, 1983, Carpenter, Franke & Levi, 2003, Seo & Ginsburg, 2003, McNeil & Alibali 2005b, Li, Ding, Carparo & Carparo, 2008, Jones, Inglis, Gilmore, Evans, 2013). Ειδικότερα, υποστηρίζουν στις έρευνές τους, ότι ο δυσκολίες των παιδιών με τη μαθηματική ισοδυναμία οφείλονται, κατά ένα μέρος τουλάχιστον, σε συγκεκριμένη γνώση που κατασκευάζουν από την αρχική τους εμπειρία με την αριθμητική στο σχολείο. Οι Vincent, Bardini, Pierce, Pearn (2015) τονίζουν πως η λειτουργική οπτική που εντοπίζεται στα παιδιά, προκύπτει ως αποτέλεσμα της ισχυρής εστίασης στη συμπλήρωση τυπικών υπολογισμών. Αυτό θα μπορούσε να αντικατοπτρίζει τους τύπους των προβλημάτων που παρουσιάζονται συνήθως στα παιδιά όπου η απάντηση εμφανίζεται μετά το σύμβολο της ισότητας (Warren, 2003). Ως αποτέλεσμα της έκθεσης σε αριθμητικές παραστάσεις τέτοιας μορφής, οι Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil, Stephens (2008) υποστηρίζουν πως είναι πιθανό τα παιδιά να μην κατανοήσουν πιο προχωρημένες ερμηνείες του συμβόλου. Για να λύσουν κάτι παρόμοιο δεν είναι απαραίτητο να μπορούν να ερμηνεύσουν το σύμβολο με τη σχεσιακή του μορφή. Αρκεί να μπορούν να βρουν την απάντηση. Έτσι, επικεντρώνονται σε αυτή τη διαδικασία και συνδέουν το σύμβολο με τις πράξεις. Αυτό επιπλέον, είναι κάτι που όχι μόνο δεν μειώνεται, αλλά μάλιστα ενισχύεται με το πέρασμα του χρόνου, διότι λαμβάνουν ολοένα και περισσότερα τέτοια παραδείγματα κάθε χρόνο στην διδασκαλία των μαθηματικών. Χτίζουν επομένως, μια περιορισμένη γνώση για το σύμβολο της ισότητας, που δεν γενικεύεται πέρα από τα τυπικά αριθμητικά προβλήματα. Την άποψη αυτή επιβεβαιώνει και με τα δύο πειράματα στην έρευνα του ο McNeil (2008), ο οποίος συμπεραίνει ότι παρουσιάζονται τυπικά αριθμητικά προβλήματα στους μαθητές με την πράξη στα αριστερά και το αποτέλεσμα στα δεξιά, που ενεργοποιούν υπερβολικά στενές αναπαραστάσεις, οι οποίες δεν γενικεύονται ευρέως και δεν υπογραμμίζουν την ανταλλάξιμη φύση των δύο πλευρών μιας εξίσωσης. Συγκεκριμένα, τα τυπικά αριθμητικά προβλήματα πιστεύεται ότι ενεργοποιούν τις εξής αναπαραστάσεις των παιδιών: α) τη μορφή προβλήματος «διαδικασία=απάντηση», β) την ερμηνεία του συμβόλου της ισότητας ως «υπολογισμό του συνόλου» και γ) την στρατηγική επίλυσης προβλημάτων «εκτέλεση όλων των διαδικασιών» (McNeil & Alibali, 2005b). Επιπλέον, καταλήγει στην άποψη ότι η παρουσία τυπικών αριθμητικών προβλημάτων επιβραδύνει τη μάθηση της μαθηματικής ισοδυναμίας.

Οι Vincent, Bardini, Pierce & Pearn (2015) παρουσιάζουν πέρα από τη διδασκαλία στη σχολική τάξη και άλλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή τα οποία οδηγούν τα παιδιά σε μία λειτουργική αντίληψη του συμβόλου της ισοδυναμίας. Συγκεκριμένα, κάνουν αναφορά στις κλασικές αριθμομηχανές που χρησιμοποιούν το κουμπί '=' για τον υπολογισμό της απάντησης. Εναλλακτικά, προτείνουν κάποιες επιστημονικές αριθμομηχανές που διατηρούν τη σημασία της ισότητας για το '=', χρησιμοποιώντας το κουμπί 'exe' για τον υπολογισμό της απάντησης. Επιπλέον, αναφέρονται στα προγράμματα ανάλυσης, όπου και πάλι χρησιμοποιείται το σύμβολο '=' για να δοθεί η οδηγία να γίνει μια σειρά από αριθμητικές πράξεις. Τέλος, δίνουν κι ένα παράδειγμα που δεν αφορά τις θετικές επιστήμες, όπως είναι τα σλόγκαν, υποστηρίζοντας πως το σύμβολο '=' συναντάται σε σλόγκαν με την έννοια του 'οδηγεί σε' (π.χ προσπάθεια→ επιτυχία), πράγμα που θυμίζει τη λειτουργική ερμηνεία του στα μαθηματικά.

Επιπρόσθετα, υπάρχουν και οι ερευνητές που υποστηρίζουν ότι πριν έρθουν στο σχολείο τα παιδιά έχουν διαμορφώσει κάποιες γνώσεις σχετικά με μερικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα, ο Oksuz (2007) στην έρευνα του αναφέρει ότι όταν τα παιδιά έρχονται στο δημοτικό, ‘φέρνουν΄ μαζί τους τις γνώσεις τους σχετικά με τις βασικές αριθμητικές πράξεις. Για το λόγο αυτό, η Kieran (1981) προειδοποιεί τους εκπαιδευτικούς να είναι προσεκτικοί όταν ερμηνεύουν τον συμβολισμό των παιδιών. Τον ισχυρισμό αυτό συμμερίζονται και οι Seo & Ginsburg (2003), οι οποίοι υποστηρίζουν πως τα παιδιά έμμεσα αναπτύσσουν ιδέες για το σύμβολο της ισότητας πριν από την είσοδο τους στο σχολείο.

Τέλος, ακόμη μια αιτία αποτελεί η ελλιπής προσοχή που δίνεται στην εκμάθηση και την κατανόηση του συμβόλου στην πρωτοβάθμια αλλά και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Λόγω της μικρής ενασχόλησης στη διδασκαλία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με αυτό το σύμβολο, η κατανόηση του δεν βελτιώνεται σημαντικά (Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil, Stephens 2008), επομένως, τα παιδιά εισάγονται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση με εδραιωμένη τη λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου. Η προσοχή που δίνεται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση επίσης δεν είναι αρκετή. Φαίνεται πως οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι από τη στιγμή που η έννοια έχει εισαχθεί στο δημοτικό, χρειάζεται μικρή ή και μηδενική επανάληψη. Με τον τρόπο αυτό, δικαιολογείται η ανεπαρκής κατανόηση και στις μεγαλύτερες βαθμίδες.

2.4 Προτάσεις επίλυσης παρανοήσεων-δυσκολιών μαθητών

Το σύμβολο της ισότητας αν το δούμε σφαιρικά, χρησιμοποιείται συχνά στην διδασκαλία των μαθηματικών (π.χ σε υπολογισμούς, τύπους εμβαδού, τύπους περιμέτρου, εξισώσεις κ.ά.) κι αυτό είναι που καθιστά σημαντική την καλύτερη κατανόησή του από τους μαθητές, κυρίως στο γεγονός ότι η ισότητα είναι μια σχέση που εκφράζει την ιδέα ότι οι δυο μαθηματικές εκφράσεις έχουν την ίδια αξία (Oksuz, 2007).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μαθητές αναγνωρίζουν μόνο τη λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου, αγνοώντας τις σχέσεις ισοδυναμίας που εκφράζει. Για να αποκτήσουν μια καλή σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου, οι ερευνητές υποστηρίζουν την σημαντικότητα της αναπαράστασης της ίδιας ιδέας με διαφορετικές αναπαραστάσεις (Oksuz, 2007). Η άποψη αυτή συμφωνεί με την άποψη των McNeil et. al. (2006), οι οποίοι υποστηρίζοντας μια παλαιότερη έρευνα των Stacey & MacGregor's (1997), προτείνουν ότι οι δάσκαλοι θα πρέπει να παρουσιάσουν στα παιδιά προτάσεις ισότητας με διαφορετικούς τρόπους, ώστε να αναπτύξουν περαιτέρω την ιδέα της ισοδυναμίας. Επιπλέον, υποστηρίζουν ότι αν οι εκπαιδευτικοί θέλουν να προάγουν τη σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου της ισότητας στην τάξη, θα πρέπει να εμπλουτίσουν τα εγχειρίδια πάνω στα οποία δουλεύουν με εξισώσεις με πράξεις και στις δύο πλευρές. Και οι Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil, Stephens (2008) προτείνουν να παρουσιάζονται στα παιδιά πράξεις και στις δύο πλευρές του συμβόλου και να μειωθούν οι τυπικές αναπαραστάσεις που θέλουν την πράξη στα αριστερά του συμβόλου και το αποτέλεσμα στην δεξιά. Στο ίδιο πνεύμα οι Carpenter, Franke και Levi, (2003) προτείνουν μια δομημένη συλλογή από προτάσεις ισότητας που λειτουργούν ως μια σκαλωσιά και οδηγούν τους μαθητές να αρχίσουν πρώτα να αποδέχονται ως σωστές προτάσεις που δεν είναι της μορφής α+β=γ, για να φτάσουν στο να αντιληφθούν ότι τα δύο μέλη μια ισότητας αποτελούν διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου πράγματος. Ο Oksuz (2007) στην έρευνα του υποστηρίζει την ίδια άποψη, μόνο που δεν επικεντρώνεται σε ένα συγκεκριμένο είδος αναπαράστασης, αλλά αναφέρει ότι τα σχολικά εγχειρίδια θα πρέπει να έχουν γενικά διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Οι Carpenter, Franke και Levi (2003) στην ερευνά τους με μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κάνουν επίσης χρήση μιας σειράς από μαθηματικές προτάσεις με διαφορετικές αναπαραστάσεις, όπου λείπει ένας από τους αριθμούς με σκοπό να τον βρουν τα παιδιά. Οι Capraro, Ding, Matteson, Capraro & Li, (2007) μέσα από την έρευνα που διεξήγαγαν στην Κίνα, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η συμπερίληψη πολλαπλών αναπαραστάσεων σχετικά με την σχέση ισοδυναμίας στα σχολικά εγχειρίδια, βοηθά τους μαθητές να ερμηνεύσουν σωστά το σύμβολο της ισότητας. Αν τα παιδιά καταφέρουν να αναπαριστούν και να αντιλαμβάνονται την ίδια ιδέα με διαφορετικούς τρόπους, αυτό αποτελεί απόδειξη καλής κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Γενικεύοντας την συγκεκριμένη άποψη, οι Carpenter, Levi, Franke, Zeringue (2005), υποστηρίζουν ότι θα ήταν καλό αντί οι εκπαιδευτικοί να επικεντρώνονται αποκλειστικά σε διαδικασίες υπολογισμού απαντήσεων, η μάθηση και η διδασκαλία να γίνουν πιο συνεπείς με τα είδη γνώσης που υποστηρίζουν την εκμάθηση της άλγεβρας, ενώ ταυτόχρονα υποστηρίζεται και ενισχύεται και η εκμάθηση της αριθμητικής. Στην πραγματικότητα, αυτό που προτείνουν είναι να δημιουργηθεί μια στενότερη σχέση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας, προσθέτοντας μεγαλύτερο νόημα στα παραδείγματα που δίνονται προς επίλυση στη διδασκαλία. Διευκρινίζουν ότι δεν προτείνουν να εγκαταλειφθεί η διδασκαλία των αριθμητικών διαδικασιών, διότι η διαδικαστική ευχέρεια εξακολουθεί να αποτελεί θεμελιώδη στόχο του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Ωστόσο, συνεπάγεται κάτι περισσότερο από υπολογισμό ρουτίνας, διότι περιλαμβάνει την ευελιξία στην επιλογή του τρόπου και του χρόνου χρήσης των διαδικασιών, γεγονός που την εμπλέκει με την σχεσιακή αντίληψη (Carpenter, Levi, Franke, Zeringue 2005).

Σημαντικό κομμάτι φαίνεται να αποτελεί μέσα από την ανάλυση της βιβλιογραφίας και το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζεται η έννοια του συμβόλου της ισότητας. Συγκεκριμένα, οι McNeil & Alibali (2005a) υποστηρίζουν μέσα από την έρευνα τους, πως τα παιδιά του δημοτικού δεν παρουσιάζουν σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου, εκτός κι αν έχουν την απαραίτητη πλαισιακή υποστήριξη. Σύμφωνα με αυτό, είναι φανερός ο λόγος όπου οι McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill (2006) ισχυρίζονται ότι τα πλαίσια μέσα στα οποία οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν το σύμβολο της ισότητας, παίζουν κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξη της κατανόησης του συμβόλου από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, διεξήγαγαν στην έρευνά τους δύο πειράματα. Στο πρώτο έδωσαν στα παιδιά τυποποιημένα (π.χ 3+4=7) και μη τυποποιημένα πλαίσια (π.χ 7=3+4, 7=7) και παρατήρησαν ότι τα δεύτερα βοηθούσαν περισσότερο τους μαθητές να κατανοήσουν την σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατήρησαν επίσης ότι τα παιδιά ήταν λιγότερο πιθανό να εμφανίσουν την σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου με τα τυποποιημένα παραδείγματα, από ότι με τις δυο κατηγορίες μη τυποποιημένων παραδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν. Στο δεύτερο πείραμα τους έδωσαν δύο διαφορετικά μη τυποποιημένα πλαίσια. Το πρώτο είχε το αποτέλεσμα στην αριστερή πλευρά του συμβόλου και την πράξη στη δεξιά (π.χ 7=3+4) και το δεύτερο είχε πράξη και στις δυο πλευρές του συμβόλου (π.χ 5+2=3+4). Από τις απαντήσεις που έλαβαν είδαν ότι ήταν σχεδόν διπλάσιο το ποσοστό που κατανόησε τη σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου με την δεύτερη περίπτωση μη τυποποιημένου πλαισίου συγκριτικά με την πρώτη. Ωστόσο, οι ίδιοι ερευνητές εφιστούν την προσοχή στους εκπαιδευτικούς να προσέχουν τα πλαίσια που παρουσιάζουν στους μαθητές, διότι μικρές διαφορές στην παρουσίαση μιας προβληματικής κατάστασης, μπορεί να επηρεάσουν το τι θα κατανοήσει ο καθένας για την έννοια. Επιπλέον, επισημαίνουν τον κίνδυνο τα παιδιά να μην μπορούν να γενικεύσουν πέρα από τα πλαίσια με τα οποία εργάζονται και συγκεκριμένα να μην μπορέσουν να γενικεύσουν αργότερα στην άλγεβρα. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει τα παιδιά να κατανοούν αυτό που κάνουν και να μάθουν να σκέφτονται εναλλακτικά (Oksuz, 2007). Στόχος αυτής της πρότασης σύμφωνα με τους McNeil et al. (2006) είναι να μπορέσουν τα παιδιά να δουν ότι η σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου, μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα πλαίσια, ενώ η εφαρμογή της λειτουργικής ερμηνείας του, την οποία κατά κανόνα κατανοούν, είναι περιορισμένη. Στην ίδια λογική, οι Vincent, Bardini, Pierce & Pearn (2015) επίσης προτείνουν να χρησιμοποιηθούν και ‘μη τυπικά’ πλαίσια, προκειμένου να υπογραμμίσουν τη σχέση της ισότητας μεταξύ των ποσοτήτων σε κάθε πλευρά της εξίσωσης. Μπορεί η παρουσίαση αυτών των πλαισίων να είναι περισσότερο χρονοβόρα, έχει αποδειχθεί όμως ότι είναι πιο αποτελεσματική.

Μια άλλη δραστηριότητα που φαίνεται να βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση του συμβόλου της ισότητας είναι το να εκφράζουν τα παιδιά προφορικά τις μαθηματικές προτάσεις που τους δίνονται. Οι Vincent, Bardini, Pierce & Pearn (2015) υποστηρίζουν ότι θα πρέπει οι μαθητές να ενθαρρύνονται να εκφράζουν με λόγια αυτά που γράφουν συμβολικά. Πολλές φορές η σύνταξη τους είναι λανθασμένη και εάν διαβαστεί φωναχτά θα γίνει φανερό ότι δεν βγάζει νόημα. Δίνεται η εντύπωση ότι δεν σκέφτονται πως τα σύμβολα έχουν ένα νόημα για τον αναγνώστη. Οι ίδιοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα παιδιά θεωρούν πως η χρήση του συμβόλου είναι για να πουν ‘και μετά έκανα αυτό και το αποτέλεσμα είναι αυτό…’. Επιπλέον, αναφέρονται στην άποψη του Usiskin (2012) ο οποίος διατείνεται ότι τα μαθηματικά είναι ταυτόχρονα γραπτή και προφορική γλώσσα και ότι έχουμε πρακτικά λέξεις για όλα τα σύμβολα. Σύμφωνα με τον Usiskin (2012) η αντίληψη ότι τα σύμβολα έχουν μια σημασία και η συνήθεια να μάθουν οι μαθητές να την ελέγχουν, δηλαδή να βλέπουν αν έχουν χρησιμοποιήσει το σύμβολα σωστά με βάση την σημασία τους, είναι μια πτυχή η οποία πρέπει να καλλιεργηθεί σε όλα τα επίπεδα. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να χρησιμοποιούν στη θέση του συμβόλου ‘=’ λεξιλόγιο όπως ‘είναι ο ίδιος αριθμός’ ή ‘είναι η ίδια ποσότητα με’ (Haylock & Cockburn, 2008). Την άποψη αυτή συμμερίζεται και ο Van de Walle (2004), καθώς αναφέρει ότι είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται φράσεις για το σύμβολο της ισότητας όπως το ‘είναι ίδιο με’ αντί για το ‘ισούται’ που συνηθίζουμε να λέμε.

Μια ακόμη πρόταση για την ενίσχυση της κατανόησης του συμβόλου της ισότητας δίνεται από τους Reys, Lindquist, Lambdin, Smith & Suydam (2004), σύμφωνα με τους οποίους η χρήση μιας ζυγαριάς σε ισορροπία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την σωστή εννοιολογική κατανόηση, σχετικά με την έννοια της ισότητας και το σύμβολό της. Υπέρ της χρήσης του μοντέλου της ζυγαριάς τίθενται και οι Warren & Cooper (2009), καθώς τονίζουν ότι παρέχει ευελιξία και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλαπλές βαθμίδες. Πιο αναλυτικά, στην έρευνά τους εργάστηκαν με μαθητές της δευτέρας τάξης και παρακολούθησαν την πρόοδό τους ως την έκτη τάξη. Στα αρχικά στάδια της έρευνας, παρουσίαζαν στους μαθητές πιο συγκεκριμένες αναπαραστάσεις, ενώ στη συνέχεια μετέβαιναν σε πιο αφηρημένες. Πρώτα έδωσαν στους μαθητές μια υλική ζυγαριά και μια συλλογή τροφίμων και παρατήρησαν ότι η ζυγαριά υπήρξε ένα αποτελεσματικό μοντέλο, που αποκάλυψε την υποκείμενη δομή των εξισώσεων, ενώ παράλληλα υποστήριξε τις άτυπες συζητήσεις σχετικά με τις ιδιότητες της ισοδυναμίας. Σε επόμενη χρονική στιγμή δόθηκε στους μαθητές και πάλι η υλική ζυγαριά και κουτιά των 125 γραμμαρίων με ψημένα φασόλια και μακαρόνια. Οι περισσότεροι μαθητές σε αυτή τη φάση μπόρεσαν να αιτιολογήσουν τα αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας την αρχή της ισορροπίας. Μερικά παιδιά μάλιστα φάνηκε ότι θα μπορούσαν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους και να λύσουν καταστάσεις της μορφής ‘?+?+2=?+5’, παρ’ όλο που η επίλυση αυτού του τύπου εξίσωσης δεν είχε διδαχθεί. Γενικότερα, από τα αποτελέσματά τους, φάνηκε ότι το μοντέλο της ζυγαριάς είναι ιδιαίτερα ισχυρό όσον αφορά την ακολουθία της αυξημένης ευελιξίας, καθώς μπορεί να μετακινηθεί από φυσικές σε διαγραμματικές αναπαραστάσεις. Επιπλέον, παρέχει μια πιο ισχυρή απεικόνιση της ισοδυναμίας, βοηθώντας έτσι τους μαθητές να είναι σε θέση, όχι μόνο να λύνουν, αλλά και να αιτιολογούν τα βήματα και τις απαντήσεις τους.

Παρόμοια άποψη φαίνεται να έχει και ο Papadopoulos (2018) ο οποίος στην έρευνα του χρησιμοποιεί τα mobile puzzles, που έχουν κοινά σημεία με τη χρήση της ισορροπημένης ζυγαριάς και ισχυρίζεται ότι η χρήση τους παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να μάθουν πότε και πώς να χρησιμοποιούν συμβολική γλώσσα για την επίλυση σχετικών δραστηριοτήτων. Αυτό συμβαίνει διότι αποτελούν ένα μέσο πλούσιο σε πλαίσιο, ενώ είναι επίσης κι ένα μέσο δυναμικό, εφόσον εκθέτει τη δομή και διευκολύνει έτσι την επίλυση και την κατανόηση της προβληματικής κατάστασης. Παρ’ όλο που παλαιότερες έρευνες υποδεικνύουν ότι το μοντέλο της ζυγαριάς έχει περιορισμούς (Aczel, 1998), έχει και τα πλεονεκτήματά του, καθώς λαμβάνει υπόψη και τις δύο πλευρές της εξίσωσης και δεν δίνει με κανένα τρόπο κατευθύνσεις (Pirie & Martin 1997). Επίσης, αντιμετωπίζει την ανάγκη να ασχοληθούμε με την εξίσωση “ως οντότητα παρά ως οδηγία για να επιτύχουμε ένα αποτέλεσμα” (Warren & Cooper, 2005, σελ. 60).

Οι Saenz–Ludlow & Walgamuth (1998) προτείνουν τη χρήση της δραστηριότητας 'sum me up'. Πρόκειται για ένα τετράγωνο χωρισμένο σε τέσσερα κομμάτια, όπου μπορεί να έχει είτε τα τρία κουτάκια συμπληρωμένα με αριθμούς και να ζητείται το σύνολο, αλλάζοντας όμως κάθε φορά τη θέση από το κενό κουτί, είτε να δίνεται μόνο το ένα κουτάκι συμπληρωμένο με το σύνολο και να πρέπει να σκεφτούν τα παιδιά τους υπόλοιπους τρεις αριθμούς που το συνθέτουν. Μια εναλλακτική πρόταση είναι να ζητείται από τους μαθητές να γράφουν τις απαντήσεις τους με διαφορετικούς τρόπους, καθώς επίσης να παρουσιάζονται στα παιδιά διαφορετικές προτάσεις ισότητας με διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας ποσότητας, π.χ. '12=5+5+2' και το '12=10+2' αλλά και το '12=2*5+2' (MacGregor & Stacey, 1999). Κλασική δραστηριότητα αποτελούν οι αριθμητικές προτάσεις 'Σωστού ή Λάθους', με την διαφορά όμως ότι εδώ προτείνεται να μην δίνονται συνηθισμένες αριθμητικές προτάσεις, για να μπορούν να τις επεξεργαστούν, προκειμένου να τις κατατάξουν σε μια από τις δύο κατηγορίες (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Αυτές οι δραστηριότητες αποτελούν ταυτόχρονα ευκαιρία για τον εκπαιδευτικό προκειμένου να αναγνωρίσει τις παρανοήσεις των μαθητών του σχετικά με το σύμβολο της ισότητας. Στο ίδιο πνεύμα μπορεί να ενταχθεί και η δραστηριότητα «βρες τους αριθμούς που λείπουν», με την διαφορά όμως ότι σε αυτή τα παιδιά καλούνται να σκεφτούν τον κάθε αριθμό με όρους επιμέρους αριθμών και διαδικασιών. Παράδειγμα της άσκησης αυτής είναι να δοθεί ο αριθμός 16 με τους παρακάτω τρόπους: α) __+__=16, β) 16=__-__, γ) 16=__*__ ή δ) 16=?+__ (Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). Τέλος, προτείνεται η χρήση Μαθηματικών Ημερολογίων και Μαθηματικών Συσκέψεων (Selter, 1998). Στα Μαθηματικά Ημερολόγια θα καταγράφει το κάθε παιδί τις σκέψεις του για την ισότητα και στις Μαθηματικές Συσκέψεις θα συζητούν μεταξύ τους τις ιδέες τους, προκειμένου μέσα από την συζήτηση και την επιχειρηματολογία να επιτευχθεί καλύτερη κατανόηση της έννοιας.

Οι Hattikudur και Alibali (2010), θέλησαν να εξετάσουν εάν μια διδασκαλία που παρέχει την ευκαιρία σύγκρισης του συμβόλου της ισότητας με τα σύμβολα της ανισότητας (<, >) προωθεί καλύτερα τη σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους με μαθητές τρίτης και τετάρτης τάξης Δημοτικού, έδειξαν ότι επήλθε μεγαλύτερη εννοιολογική κατανόηση για το σύμβολο της ισότητας στο post-test, για τους μαθητές που δέχθηκαν μια διδασκαλία που περιείχε και τα σύμβολα σύγκρισης, από εκείνους που δέχτηκαν μια διδασκαλία μόνο για το σύμβολο της ισότητας. Επομένως, με την σύγκριση των σχεσιακών συμβόλων, φαίνεται ότι μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν καλύτερη εννοιολογική κατανόηση, τόσο για το σύμβολο της ισότητας, όσο και για τα σύμβολα της ανισότητας.

Ακόμη, η Perry (1991) (όπως αναφέρεται στο Bajwa, 2016) προτείνει ότι η προσοχή των μαθητών κατά τη διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζεται στην αρχή που βρίσκεται πίσω από μια σχέση και όχι στην διαδικασία, καθώς αυτό είναι πιθανό, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ερευνάς της, να παρέχει μια καλύτερη κατανόηση της κατάστασης, την οποία μετά μπορούν να μεταφέρουν και σε νέες καταστάσεις.

Επίσης, ως προτάσεις για την βελτίωση της κατανόησης του συμβόλου της ισότητας, μπορούν να λειτουργήσουν και τα περιβάλλοντα που περιγράφονται στα δύο τελευταία κεφάλαια αυτής της βιβλιογραφικής επισκόπησης, είτε αυτών που χρησιμοποιούν την τεχνολογία είτε αυτών που δεν την χρησιμοποιούν. Ειδικότερα όμως, για τα περιβάλλοντα που χρησιμοποιούν την τεχνολογία, θα πρέπει και οι εκπαιδευτικοί να αναλάβουν τον δικό τους ρόλο. Αν και υπάρχουν εκπαιδευτικοί που έχουν τη διάθεση να χρησιμοποιήσουν ψηφιακά εργαλεία στη διδασκαλία τους, ωστόσο για να συμβεί αυτό με τρόπο που να έχει προστιθέμενη αξία ως προς τα μαθησιακά αποτελέσματα, χρειάζεται να περάσουν από μια διαδικασία που να ενισχύει την επαγγελματική τους ανάπτυξη, όπως αυτή της επιμόρφωσης (Κυνηγός & Δημήτρης Διαμαντίδης, 2014). Αυτό που μερικές φορές ξεχνάμε είναι ότι η τεχνολογία είναι ένα εργαλείο και όπως κάθε εργαλείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί παραγωγικά στα χέρια ενός επιδέξιου επαγγελματία. Το υψηλό επίπεδο τέτοιων δεξιοτήτων δεν είναι κάτι που απλά συμβαίνει ή μπορεί να αναμένεται να είναι μέρος της αρχικής προετοιμασίας και των εμπειριών επαγγελματικής ανάπτυξης του κάθε δασκάλου. Αντίθετα, αυτή η δεξιοτεχνία είναι κάτι που πρέπει να διδαχθεί λεπτομερώς (Kaplan & Alon, 2013). Επομένως, πέρα από το ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εξασκηθούν και να εργαστούν οι ίδιοι με την τεχνολογία και τα περιβάλλοντα και να μάθουν πως μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν στην διδασκαλία τους, ένα ακόμη βασικό συστατικό αυτής της εμπειρίας είναι η γνώση του πώς να επιλέξεις και να εφαρμόσεις την κατάλληλη τεχνολογία για την υποστήριξη της μάθησης συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών.

Η Mann (2004) τονίζει ότι η σημασία της σωστής κατανόησης του συμβόλου της ισότητας είναι μεγάλη για την ορθή ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης που χρειάζονται οι μαθητές και που είναι η βάση για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Για το λόγο αυτό, υποστηρίζει ότι η προσέγγιση αυτή πρέπει να ξεκινά από τις μικρότερες τάξεις. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά στο άρθρο της: «Αντί να περιμένουμε την εισαγωγή της έννοιας στο γυμνάσιο, οι δάσκαλοι πρέπει να βοηθήσουν τους μαθητές στο δημοτικό να αναγνωρίσουν το σύμβολο της ισότητας ως ένα σύμβολο που αναπαριστά την ισοδυναμία και την ισορροπία» (σελ. 65). Η ελπίδα είναι ότι μια έγκαιρη εισαγωγή της ισότητας θα αλλάξει το σκηνικό που επικρατεί τα τελευταία χρόνια προς το καλύτερο (Freiman & Lee 2004).

Καταληκτικά, οι Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens (2008) τονίζουν ότι η βελτίωση της κατανόησης των μαθητών για το σύμβολο της ισότητας, απαιτεί αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές των δασκάλων αλλά και αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών του δημοτικού και του γυμνασίου. Προτρέπουν τους εκπαιδευτικούς να αναγνωρίζουν αλλά και να δημιουργούν ευκαιρίες, ώστε να προωθήσουν τη σκέψη των μαθητών για το σύμβολο της ισότητας. Αυτές οι προσπάθειες μπορεί να παρέχουν πλούσια αποτελέσματα, καθώς περισσότεροι μαθητές θα είναι καλύτερα προετοιμασμένοι για την άλγεβρα.

2.5 Μη ψηφιακά περιβάλλοντα που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της ισότητας

Λόγω της σημαντικότητας της κατανόησης της σχεσιακής λειτουργίας του συμβόλου, πολλοί ερευνητές έχουν στραφεί προς αυτή την κατεύθυνση χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα ή εργαλεία, τα οποία είναι πιθανό να διευκολύνουν την κατανόηση των μαθητών γι' αυτή την έννοια. Ένα από τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται συχνά για τη διδασκαλία της έννοιας της ισότητας στην πρώιμη αλγεβρική εκπαίδευση, είναι το μοντέλο της ζυγαριάς (Leong & Horn 2011). Η χρήση μιας ζυγαριάς με σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη και μια βαθύτερη κατανόηση του συμβόλου της ισότητας έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα ωφέλιμη (Kurz, 2013). Η ζυγαριά μοντελοποιεί μια εξίσωση, απεικονίζοντας τη σημασία της ισότητας, με το κέντρο της ζυγαριάς να συσχετίζεται με το σύμβολο της ισότητας. Για να διατηρήσει την ισορροπία της, οι τιμές πρέπει να είναι ίσες και στις δύο πλευρές. Όταν επιτευχθεί μια ισορροπία, αν η μια πλευρά της αλλάξει αριθμητικά, τότε η ίδια μετατροπή πρέπει να γίνει και στην άλλη πλευρά για να επέλθει ξανά η ισορροπία (Kurz 2013). Το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί τόσο στην φυσική του μορφή όσο και στην ψηφιακή.

Με φυσικές ζυγαριές εργάστηκαν στην έρευνά τους οι Warren & Cooper (2005), οι οποίοι σκόπευαν μεταξύ άλλων να δουν εάν οι μαθητές μεταφράζουν το μοντέλο της ζυγαριάς ως μοντέλο για εξισώσεις και εάν μπορούν να το αξιοποιήσουν για να λύσουν εξισώσεις και να υπολογίσουν τους αγνώστους. Εργάστηκαν με 13 τάξεις παιδιών ηλικίας 8 ετών, σε τέσσερις δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα, δόθηκαν στους μαθητές κάποιες κάρτες με λέξεις τις οποίες έπρεπε να ομαδοποιήσουν. Για την δεύτερη δραστηριότητα δόθηκαν και πάλι κάρτες με κάποιες αριθμητικές προτάσεις που έπρεπε να χαρακτηρίσουν ως σωστές ή λανθασμένες, ενώ στην τρίτη δραστηριότητα οι ερευνητές μοντελοποίησαν με τη ζυγαριά κάποιες αριθμητικές προτάσεις κι εξισώσεις και οι μαθητές έπρεπε να εξηγήσουν τι νομίζουν ότι σημαίνει αυτό που βλέπουν. Τέλος, στην τέταρτη δραστηριότητα τους δόθηκαν τέσσερις κάρτες με εξισώσεις, μια κάθε φορά, και έπρεπε να τις λύσουν για να βρουν τον άγνωστο εξηγώντας το σκεπτικό τους. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έδειξε ότι όλοι αναγνώρισαν το φυσικό μοντέλο της ζυγαριάς και μπόρεσαν να μεταφράσουν επιτυχώς από αυτό σε κατάλληλη γλώσσα και συμβολική γραφή, δείχνοντας έτσι ότι η σαφής διδασκαλία του μοντέλου ήταν αποτελεσματική. Φάνηκε επίσης, ότι ήταν πιο εύκολο για τους μαθητές να λύσουν προβλήματα πρόσθεσης με τον άγνωστο στην πρώτη θέση, απ' ότι προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης με τον άγνωστο στη δεύτερη θέση. Γενικότερα, η σύγκριση ανάμεσα στις απαντήσεις αυτών των παιδιών και παρόμοιας ηλικίας παιδιών από προηγούμενες έρευνες (π.χ Carpenter & Levi, 2000, Warren 2001, 2002, 2003) υποδεικνύει ότι η χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς βοήθησε κάποια παιδιά να προσεγγίσουν τα προβλήματα με αγνώστους και ειδικά προβλήματα με αγνώστους και στις δύο πλευρές του συμβόλου της ισότητας. Επίσης, φάνηκε πως το μοντέλο αυτό παρέχει μια λεξιλογική βάση που βοήθησε τους μαθητές στην εξήγηση των λύσεων τους. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι μετέφερε την εστίαση μακριά από το '=' ως υπόδειξη της απάντησης, προς το '=' ως έκφραση ισοδυναμίας.

Με τη συμβολή του μοντέλου της ζυγαριάς για την σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου συμφωνούν και οι Leong & Horn (2011) στην έρευνά τους, κατά την οποία σχεδίασαν και εφάρμοσαν μια χειροπιαστή δοκό ζυγαριάς για την πρώιμη εκπαίδευση της άλγεβρας. Το 'Balance Beam' όπως το ονομάζουν, είναι ένα απτό περιβάλλον που σχεδιάστηκε για να βοηθήσει τα παιδιά να μάθουν θεμελιώδεις έννοιες στην άλγεβρα. Αποτελείται από μια ξύλινη δοκό ισορροπίας που αναπαριστά μια αλγεβρική εξίσωση.

Η δεξιά και η αριστερή πλευρά της δοκού έχουν θέσεις αριθμημένες από το 1 μέχρι το 9 για τους συντελεστές στους όρους μιας εξίσωσης. Οι ακέραιοι αριθμοί, αναπαρίστανται από πλαστικές μάρκες και μπορούν να τοποθετηθούν σε κάθε θέση για να κατασκευάσουν εξισώσεις κι ανισότητες. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε πως οι μαθητές χρησιμοποιούσαν την κλίση της δοκού για να καθορίσουν την ισότητα της εξίσωσης. Αν είχαν κάποιο λάθος το εξακρίβωναν από την κλίση. Αντίθετα, όταν η εξίσωση ήταν σωστή κοιτούσαν πρώτα το σύμβολο '=', που εμφανιζόταν σε μια οθόνη μπροστά τους και χρησιμοποιούσαν την κλίση ως δεύτερη ανατροφοδότηση. Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, τα αποτελέσματά τους παρέχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές εφαρμόζουν μια σχεσιακή κατανόηση για το σύμβολο όταν λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τη δοκό και επίσης μπορούν να λύσουν δυσκολότερα προβλήματα απ' ότι στο χαρτί και το μολύβι.

Ο Papadopoulos (2018) προκειμένου να μελετήσει παρόμοια θέματα χρησιμοποίησε το μοντέλο των mobile puzzles, που έχει ομοιότητες με τη φυσική ζυγαριά, αλλά υπάρχει μια κύρια διαφορά. Η μετάφραση από το μοντέλο μιας φυσικής ζυγαριάς σε μια συμβολική εξίσωση, οδηγεί σε μια εξίσωση που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία που αντλούνται από το μοντέλο ισορροπίας, ενώ στο πλαίσιο των mobiles μπορεί κανείς να προσθέσει όσους οριζόντιους κλάδους θέλει και μετά η μετάφραση του φυσικού μοντέλου οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων αντί σε μια μόνο εξίσωση. Με αυτό τον τρόπο, τα mobiles παρέχουν ένα επίπεδο πρόκλησης το οποίο δεν είναι εφικτό στις κλασικές ζυγαριές (Papadopoulos, 2018). Επιπλέον, το γεγονός ότι στον ίδιο κλάδο ενός mobile συνυπάρχουν διαφορετικά σχήματα με διαφορετικά βάρη, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν το άθροισμα από τα βάρη των σχημάτων περισσότερο ως έννοια, παρά ως διαδικασία του αριθμητικού αποτελέσματος της.

Σε αντίστοιχη έρευνα με τα mobile puzzles οι Papadopoulos, Kindini, Tsakalaki (2016) εργάστηκαν με μαθητές έκτης τάξης με σκοπό να εξετάσουν εάν το συγκεκριμένο περιβάλλον ενθαρρύνει την ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψης. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα δεν είχαν διδαχθεί έως τότε την έννοια της μεταβλητής και δεν είχαν δει ξανά τέτοιου είδους παζλ. Δόθηκαν συνολικά 16 mobile puzzles για επίλυση, κατηγοριοποιημένα στις εξής τρεις κατηγορίες: α) βρες τον άγνωστο, όπου τους δινόταν το συνολικό βάρος του mobile ή το βάρος κάποιου συγκεκριμένου σχήματος και έπρεπε να βρουν το βάρος ενός αγνώστου, β) Ισορροπεί; όπου τους δίνονταν κάποιες πληροφορίες και έπρεπε να αποφασίσουν πότε θα ισορροπεί ένα mobile και γ) Κατασκεύασε το δικό σου mobile όπου έπρεπε οι μαθητές να κατασκευάσουν ένα mobile που θα ισορροπεί πάντα. Τα ευρήματα αυτής της έρευνας αποδεικνύουν ότι η χρήση των mobile puzzles μπορεί να εξομαλύνει τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, καθώς οι τύποι σκέψης που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές δείχνουν μια προοδευτική πορεία προς την αλγεβρική σκέψη. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έφερε στο φως πέντε τύπους σκέψης, οι οποίοι δείχνουν αλγεβρική κατανόηση: α) μετάφραση της εικόνας σε εκφράσεις ισότητας χρησιμοποιώντας τα σχήματα του mobile puzzle, β) χρήση λέξεων για να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα του mobile puzzle, γ) χρήση συμβολικής γλώσσας για να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα του mobile puzzle, δ) συνδυασμός πάνω από έναν από τους προηγούμενους τύπους (ένδειξη πιο αναβαθμισμένης κατανόησης) και ε) χρήση ερωτηματικού ή άδειου κουτιού για να αναπαραστήσουν τον άγνωστο αριθμό.

Επιπλέον, η εργασία των μαθητών με τα mobile puzzles τους έδωσε τη δυνατότητα να επιδείξουν μια άτυπη γνώση των τυπικών κανόνων για την επίλυση εξισώσεων. Δεν προτρέπονταν να σκεφτούν και να εργαστούν με βάση αυτούς τους συγκεκριμένους κανόνες που ούτως ή άλλως αγνοούσαν. Ωστόσο, έκαναν χρήση αρκετά συχνά τέτοιων κανόνων, όπως η αντικατάσταση βαρών που είναι ισοδύναμα ή προσθήκη ή αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και στις δύο πλευρές, έχοντας ως στόχο τη διατήρηση της ισορροπίας του mobile. Αυτή η διαδικασία έδειξε ότι υπάρχει μια διαισθητική χρήση συγκεκριμένων ιδιοτήτων των πράξεων, που στη συνέχεια θα εισαχθούν επίσημα ως αντιμεταθετική, προσεταιριστική και ανακλαστική ιδιότητα.

Τα ευρήματα αυτής της έρευνας συμφωνούν με τα ευρήματα που παρουσίασαν στην έρευνά τους οι Papadopoulos & Patsiala (2018). Πιο αναλυτικά, εργάστηκαν με μαθητές τρίτης τάξης με ένα περιβάλλον το οποίο ονομάζεται ‘Father Woodland–Η φάρμα του θείου Πέτρου’, προσπαθώντας να διερευνήσουν την συμβολή του στη σκέψη των μαθητών, εξετάζοντας τους διάφορους τύπους σκέψης των παιδιών, που θα έδειχναν μια προοδευτική κίνηση προς την αλγεβρική σκέψη. Το περιβάλλον αφορά μια τσέχικη φιγούρα παραμυθιού, που έχει μια φάρμα και οργανώνει παιχνίδια διελκυστίνδας ανάμεσα στα ζώα που ζουν στη φάρμα. Η δύναμη του κάθε ζώου αναπαρίσταται από μια εικόνα κι ένα εικονίδιο (σύμβολο) και με βάση αυτές τις πληροφορίες ζητείται από τους μαθητές να αποφασίσουν ανάμεσα σε δύο ομάδες τη δυνατότερη, ή να προσθέσουν κάποια ζώα στην πιο αδύναμη ομάδα με σκοπό να τις κάνουν ισοδύναμες ή να βρουν ποιο ζώο είναι κρυμμένο για να αποκτήσουν οι ομάδες ισότητα. Οι μαθητές δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία εργασίας με τέτοιου είδους περιβάλλοντα, ούτε είχαν διδαχθεί καμία από τις βασικές έννοιες της άλγεβρας. Οι απαντήσεις τους οργανώθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες που αφορούν τέσσερις διαφορετικούς τρόπους σκέψης: α) χρήση εικονογραφημένης γλώσσας, β) χρήση λέξεων για να εκφράσουν τις σχέσεις ανάμεσα στα ζώα, γ) συνδυασμός λέξεων και συμβολικής γλώσσας (με τον όρο συμβολική εννοούμε εδώ τα εικονίδια που αναπαριστούν τα ζώα της φάρμας) ώστε να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στα ζώα και δ) χρήση συμβολικής γλώσσας για να εκφράσουν τις σχέσεις ανάμεσα στα ζώα. Αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας με εκείνα των Papadopoulos, Kindini, Tsakalaki (2016) θα διακρίνουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στους τύπους σκέψης των δύο ερευνών, που ενδυναμώνει την άποψη ότι τα περιβάλλοντα μάθησης με παζλ βοηθούν στην ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψης (Papadopoulos & Patsiala, 2018).

Τέλος, μια ακόμη προσπάθεια προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές σχετικά με την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας περιγράφεται στο άρθρο της Mann (2004), που παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο προσπάθησε να διευκολύνει τους μαθητές της στην μετάβαση της σκέψης τους για το σύμβολο της ισότητας, από το ‘η απάντηση είναι’ στο ‘είναι το ίδιο με’. Όπως υποστηρίζει, οι μαθητές πρέπει να μαθαίνουν κιναισθητικά και να μάθουν να κάνουν συσχετίσεις με πραγματικές καταστάσεις. Ξεκίνησε λοιπόν μέσα στην τάξη, μια συζήτηση σχετικά με τις τραμπάλες, στην οποία τα παιδιά εξήγησαν σωστά πως αν ένας από τους δύο που κάθονται στην τραμπάλα είναι πιο βαρύς, εκείνος θα είναι κάτω και θα σηκώνει τον απέναντι ψηλά, ενώ κατανόησαν επίσης, πως αν οι δύο άνθρωποι που κάνουν τραμπάλα έχουν το ίδιο βάρος, τότε θα μπορούσαν να ισορροπήσουν την τραμπάλα. Στην συνέχεια, τους ζήτησε να αναπαραστήσουν με τους τεντωμένους ώμους τους οι ίδιοι τις τραμπάλες, κάνοντας με αυτό τον τρόπο κάποιες δοκιμές με φρούτα, για να προβλέψουν την αντίδραση της ζυγαριάς ανάλογα με τις κινήσεις τους. Στο τέλος, τους ζήτησε να καταγράψουν τους ‘κανόνες της τραμπάλας’, όπου τα περισσότερα παιδιά φάνηκε πως είχαν κατανοήσει τους βασικούς κανόνες ισορροπίας. Έτσι, η Mann (2004) καταλήγει πως οι μαθητές αποδέχονταν καλύτερα προβλήματα ισοδυναμίας χρησιμοποιώντας τους τεντωμένους ώμους τους για να αναπαραστήσουν μια τραμπάλα.

2.6 Περιβάλλοντα που έχουν χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της ισότητας με τη χρήση της τεχνολογίας

Στη βιβλιογραφία συναντώνται και έρευνες στις οποίες εξετάζεται η συμβολή ψηφιακών μοντέλων, εργαλείων και εφαρμογών στην κατανόηση των μαθητών για το σύμβολο της ισότητας. Η τεχνολογία άλλωστε έχει τη δυνατότητα να κάνει σύνθετες και αφηρημένες ιδέες πιο προσβάσιμες στους μαθητές, ειδικά σε αυτούς που έχουν δυσκολίες με την αντιμετώπιση εννοιών, οι οποίες σχετίζονται με το πρόγραμμα σπουδών (Ko & Karadag, 2013) κι όπως έχει αναφερθεί αρκετές φορές μέχρι τώρα, το σύμβολο της ισότητας κατέχει κεντρική θέση στα σχολικά μαθηματικά.

Η πρώτη έρευνα που παρουσιάζεται (Jones, 2006), αφορά ένα λογισμικό, που αναπτύχθηκε και δοκιμάστηκε από τον ερευνητή, σε μια προσπάθεια να συμβάλει στην βιβλιογραφία σχετικά με την κατανόηση των παιδιών για το σύμβολο της ισότητας. Πιο συγκεκριμένα, ο Jones εξερεύνησε τις σκέψεις των παιδιών καθώς κατασκεύαζαν ένα φάσμα δικών τους παραδειγμάτων με προτάσεις ισότητας. Το σημείο εκκίνησής του ήταν η παραδοσιακή σχολική αριθμομηχανή, καθώς έψαχνε ένα οικείο περιβάλλον, στο οποίο το σύμβολο της ισότητας να έχει καθαρά διαδικαστικό ρόλο. Δημιούργησε λοιπόν, μια παραλλαγή της παραδοσιακής αριθμομηχανής, έναν μικρουπολογιστή, που ονόμασε «Αριθμομηχανή ισοδυναμίας», στον οποίο η διαδικαστική χρησιμότητα του κουμπιού '=' αντικαταστάθηκε από τη χρησιμότητα του ελέγχου της ισορροπίας. Το λογισμικό χωρίζεται σε τρία μέρη. Αριστερά και δεξιά μπορείς να τοποθετήσεις εκφράσεις και έπειτα να πατήσεις στη μέση, όπου αν οι εκφράσεις είναι ισοδύναμες θα εμφανιστεί το σύμβολο '=', ενώ αν δεν είναι δεν θα εμφανιστεί τίποτα. Υπάρχει επίσης, η δυνατότητα να πατήσεις με το ποντίκι επάνω στα σύμβολα που υπάρχουν ανάμεσα στις εκφράσεις και να δοθεί το αποτέλεσμα της πράξης. Οι μαθητές που εργάστηκαν με το λογισμικό ήταν 8-9 χρονών και δούλεψαν σε ζευγάρια. Τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν ένα φύλλο εργασιών με αριθμητικές προτάσεις με σκοπό να τις δουλέψει ο συμμαθητής τους. Σε γενικές γραμμές, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά άλλαξαν αβίαστα και εύκολα από την χρησιμότητα 'βρες την απάντηση' στη χρησιμότητα 'έλεγξε την απάντηση'. Το πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα ωστόσο ήταν το πόσο λίγο χρησιμοποιήθηκε το κουμπί '='. Ακόμη κι όταν το χρησιμοποιούσαν περιστασιακά ή μετά από παρότρυνση του εκπαιδευτικού, δεν έβλεπαν την σκοπιμότητά του. Επίσης, παρατηρήθηκαν πολλά παραδείγματα όπου τα παιδιά έλεγαν 'ισούται' καθώς πατούσαν σε ένα τελεστή για να πάρουν κάποιο αποτέλεσμα. Αυτό δείχνει πως η άποψη των μαθητών για τη χρησιμότητα του συμβόλου '=' μόνο ως διαδικαστικό σύμβολο, μεταφέρεται από την παραδοσιακή αριθμομηχανή και στους τελεστές αυτού του λογισμικού.

Στην ίδια έρευνα (Jones, 2006) αναδεικνύονται και ευρήματα που φαίνεται να έρχονται σε αντίθεση με την παλαιότερη βιβλιογραφια. Για παράδειγμα, έχει βρεθεί ότι οι μαθητές θεωρούν μη αποδεκτές προτάσεις της μορφής α=α (π.χ 9=9) και τις μετατρέπουν σε ενεργητικές (M. Behr, S. Erlwanger & E. Nichols, 1980, Oksuz, 2007). Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, τις προτάσεις αυτής της μορφής συνήθως τα παιδιά τις μετατρέπουν σε προτάσεις που απαιτούν κάποιον υπολογισμό, δηλαδή, μπορεί να προσθέσουν σύμβολα ή αριθμούς προκειμένου η αριθμητική πρόταση να βγάζει κάποιο νόημα γι' αυτά (M. Behr, S. Erlwanger & E. Nichols, 1980). Στην έρευνα του Jones (2006) όμως, παρατηρήθηκε ότι καθώς τα παιδιά εργάζονται με την «Αριθμομηχανή Ισορροπίας», επιδιώκουν προτάσεις αυτής της μορφής, προκειμένου να επιβεβαιώσουν την ισοδυναμία των αριθμητικών προτάσεων που βρίσκονται στην δεξιά και την αριστερή πλευρά του συμβόλου. Όταν για παράδειγμα ζητήθηκε να ελέγξουν την ισότητα μεταξύ δύο εκφράσεων (899*1000=899000), 'κλίκαραν' επάνω στο σύμβολο '*' προκειμένου να δοθεί το αποτέλεσμα της πράξης και μόνο όταν είδαν στην οθόνη της αριθμομηχανής '899000=899000' ήταν σίγουροι για την ισοδυναμία των δύο μαθηματικών εκφράσεων. Φαίνεται λοιπόν, πως σε αυτή την περίπτωση τα παιδιά σιγουρεύονταν για το αποτέλεσμα μόνο όταν η έκφραση που προηγείται του συμβόλου αντικαθίσταται από την απάντηση, δίνοντας μια τέτοια πρόταση. Τα δεδομένα της δοκιμής δείχνουν επίσης ότι οι μαθητές του δημοτικού είναι σε θέση να κατασκευάσουν ένα ευρύ φάσμα αριθμητικών προτάσεων, αλλά αυτό έχει μικρό αντίκτυπο στη συσχέτιση της μαθηματικής ισοδυναμίας με τις προτάσεις ισότητας. Όλοι οι μαθητές (ακούσια ή εκούσια) κατασκεύασαν στο λογισμικό προτάσεις τις μορφής 'απάντηση=έκφραση' (όπου το αποτέλεσμα της πράξης βρίσκεται στην αριστερή πλευρά). Όταν όμως τις σημείωναν στο χαρτί μετέφεραν χωρίς δισταγμό το αποτέλεσμα στα δεξιά. Φάνηκε λοιπόν, πως όταν τα παιδιά αντιμετώπισαν προτάσεις της μορφής 'α+β=γ' ή 'γ=α+β', πάντα κατέληγαν στην μορφή όπου το αποτέλεσμα της πράξης βρίσκεται στα δεξιά. Τέλος, τις προτάσεις που αποτελούνταν από μια διαφορετική έκφραση σε κάθε πλευρά του συμβόλου (π.χ α+β=γ+δ) τις αντιμετώπιζαν ως δύο ξεχωριστές εκφράσεις, ενώ ξίζει να αναφερθεί πως όταν τους ζητήθηκε να τις τοποθετήσουν στο λογισμικό για να δουν εάν είναι ίσες, κανένας δεν πάτησε το '=', αλλά προτίμησαν να πατήσουν τους τελεστές των εκφράσεων και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα.

Ακόμη ένα λογισμικό το οποίο σχετίστηκε με την κατανόηση των παιδιών για το σύμβολο της ισότητας, αναφέρεται στην έρευνα του Hadjerrouit (2011). Πρόκειται για ένα διαδραστικό λογισμικό εργαλείο που ονομάζεται 'Applusix' και αναπτύχθηκε για να επιτρέψει στους μαθητές να χτίσουν ελεύθερα και να μετασχηματίσουν αλγεβρικές εκφράσεις όπως κάνουν στο χαρτί. Το λογισμικό αυτό παρέχει κατάλληλη ανατροφοδότηση και διαδραστικότητα, με αποτέλεσμα να καθίσταται πηγή μάθησης. Παλαιότερες πειραματικές προσπάθειες που το χρησιμοποίησαν, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι είναι ένα χρήσιμο σύστημα υπολογιστή, που ευνοεί τη μάθηση για τη σχολική άλγεβρα, καθώς οι μαθητές κέρδισαν από αυτό αυτονομία και βελτίωσαν τις γνώσεις τους. Τονίζεται επίσης, η διευκόλυνση στην δουλειά του εκπαιδευτικού, αλλά και το χαμηλό κόστος για την συμπερίληψη του στην άλγεβρα (Hadjerrouit, 2011). Στη συγκεκριμένη έρευνα που αναλύεται το Applusix, δείχνει μια προοπτική για την εκμάθηση της σχολικής άλγεβρας, ωστόσο εκφράζονται επιφυλάξεις για το αν επωφελούνται το ίδιο καλά όλοι οι μαθητές, διότι για να έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση, θα πρέπει οι μαθητές να έχουν έστω μια βασική γνώση για τη σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου της ισότητας.

Ένα ακόμη περιβάλλον που ασχολείται με την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας από τους μαθητές ονομάζεται 'Pan Balance' και χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Kaplan & Alon (2013). Το λογισμικό αυτό περιλαμβάνει ένα κομμάτι που αφορά σχήματα κι ένα κομμάτι που αφορά αριθμούς. Στην έρευνά τους χρησιμοποιήθηκε πρώτα το κομμάτι με τα σχήματα, ενώ οι αριθμοί έρχονταν ως συνέχεια όταν ήταν επιτρεπτό από την απόδοση των μαθητών. Αναλυτικότερα, παρουσιάστηκε στους μαθητές μια ζυγαριά την οποία έπρεπε να χρησιμοποιήσουν για να βρουν τις διάφορες συσχετίσεις μεταξύ των σχημάτων ή των αριθμών. Στην αριστερή πλευρά της οθόνης τα παιδιά έβλεπαν την ζυγαριά και στη δεξιά πλευρά εμφανίζονταν οι προτάσεις που σχημάτιζαν. Αρχικά, εργάστηκαν με το περιβάλλον οι εκπαιδευτικοί και στη συνέχεια μετέφρασαν την εμπειρία τους σε διδακτικές δραστηριότητες με το Pan Balance για τους μαθητές τους.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε ότι μετά από ορισμένες δοκιμές με το περιβάλλον, τα παιδιά ξεκινούσαν να κατανοούν την λειτουργία της ζυγαριάς, αλλά και τη σημασία της ισοδυναμίας. Επίσης, το συγκεκριμένο λογισμικό βοήθησε τους μαθητές να προβλέπουν τις κινήσεις της ζυγαριάς, ανάλογα με το αν προσθέτουν ή αφαιρούν ποσότητες σε κάθε πλευρά. Σημαντικό ρόλο έπαιξε η ανατροφοδότηση που παρείχε το περιβάλλον, διότι ακόμα κι όταν τα παιδιά προχωρούσαν στη χρήση αριθμών και δεν μπορούσαν να κατανοήσουν από μόνοι τους τους αριθμητικούς συνδυασμούς, η ανατροφοδότηση προσέδιδε αίσθημα επιτυχίας και ευχέρειας. Παράλληλα, βοηθούσε τα παιδιά να μην μετράνε για να επιτύχουν ισορροπία, αλλά να μπορέσουν να συγκεντρωθούν στις απόλυτες αξίες των αριθμών. Τέλος, η οπτική της ζυγαριάς γενικότερα, και ο τρόπος με τον οποίο χαμηλώνει στη μια πλευρά όταν προστίθεται ένας αριθμός, δημιουργεί κατάλληλες συνθήκες ώστε να συγκριθούν αριθμητικές αξίες και να αναδειχθεί η έννοια της ισοδυναμίας.

Κατάλογο με ανάλογα ψηφιακά εργαλεία μπορεί να βρει κανείς στην εργασία του Kurz (2013) για τα οποία ο ίδιος δηλώνει: «Και τα 9 εργαλεία μάθησης παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να βιώσουν την τεχνολογία σε ένα μαθηματικό πλαίσιο με έμφαση στην ισορροπία. Τα εργαλεία που περιγράφονται ξεκινούν να αφορούν παιδιά πριν το νηπιαγωγείο και φτάνουν ως την έκτη τάξη. Το τελευταίο εργαλείο είναι πιο προχωρημένο και πιθανόν να απευθύνεται σε παιδιά που είναι πιο χαρισματικά» (σελίδα 3-4). Τα λογισμικά αυτά είναι τα εξής:

'Balancing Act': Πρόκειται για την προσπάθεια ισορροπίας μιας ταΐστρας πουλιών και ενός σπιτιού πουλιών τοποθετώντας τροφή, κουκούλια και πουλιά στη ζυγαριά. Υπάρχει όμως ευαισθησία σχετικά με το που θα τοποθετήσει το παιδί το αντικείμενο στη ζυγαριά, διότι αν τοποθετήσει κάτι κοντά στη βάση, η ζυγαριά θα γείρει λιγότερο απ' ότι αν το τοποθετήσει στην άκρη. Σε αυτό το περιβάλλον δεν γίνεται χρήση αριθμών, αλλά ο εκπαιδευτικός μπορεί να το χρησιμοποιήσει για να αναπτύξει την έννοια της ισοδυναμίας με τη χρήση της ζυγαριάς.

(http://pbskids.org/sid/balancingact.html)

'Can you balance?': Σε αυτό το περιβάλλον τα παιδιά λαμβάνουν κύβους και από τις δύο πλευρές της ζυγαριάς και πρέπει να διαλέξουν από δοσμένες επιλογές (στοίβες από κυβάκια) τον σωστό αριθμό από κύβους που χρειάζονται για να εξισωθεί η ζυγαριά. Αυτό πέρα από την έννοια της ισοδυναμίας μέσα από την ισορροπία της ζυγαριάς, υποστηρίζει και τη χωρική ανάπτυξη.

(http://teams.lacoe.edu/documentation/classrooms/linda/algebra/activities/balance/balance.html)

'Poddle Weight–in': Παρουσιάζεται στα παιδιά μια ζυγαριά κι ένας χαρακτήρας στην μια πλευρά της. Χρησιμοποιώντας βάρη που έχουν αξία από το 1 μέχρι το 4, πρέπει να βρουν το βάρος του χαρακτήρα προσθέτοντας ή αφαιρώντας βάρη από τη ζυγαριά. Η ζυγαριά προσαρμόζεται οπτικά ανάλογα με τις κινήσεις των μαθητών.

(http://pbskids.org/cyberchase/games/algebra)

'Monkey Math Balance': Παρέχονται στα παιδιά αριθμοί, τους οποίους πρέπει να ομαδοποιήσουν σωστά τοποθετώντας τους στο κατάλληλο σημείο, ώστε να διορθώσουν την ισορροπία της μαϊμούς.

(http://www.agame.com/game/Monkey-Math-Balance.html)

'Balance Beam Activity': Πρόκειται για μια ζυγαριά όπου οι μαθητές μέσα από τον πειραματισμό τους, πρέπει να χρησιμοποιήσουν την αξία ενός σχήματος που τους δίνεται για να βρουν την αριθμητική αξία όλων των άλλων σχημάτων.

(http://mste.illimois.edu/users/pavel/java/balance/index.html#sim)

'Pan Balance': Χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Kaplan & Alon (2013), που αναφέρθηκε νωρίτερα. Τώρα όμως ο Kurz διαχωρίζει τις δυνατότητές του. Παρουσιάζει ως ένα λογισμικό το κομμάτι που αφορά τα σχήματα (Pan Balance Shapes) και ξεχωριστά το κομμάτι με τους αριθμούς (Pan Balance Numbers). Στο πρώτο δίνονται στους μαθητές σχήματα που ποικίλουν ως προς το βάρος τους μαζί με μια ζυγαριά. Τα παιδιά πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη ζυγαριά για να αποκωδικοποιήσουν μέσα από δοκιμές και τη λογική, την ισοδυναμία ενός σχήματος όπως αυτό σχετίζεται με άλλα σχήματα. Το δεύτερο κομμάτι επικεντρώνεται στους αριθμούς και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορες τάξεις. Στις πιο μικρές τάξεις οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ακέραιους αριθμούς και να δημιουργήσουν ισοδύναμα προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Καθώς προοδεύουν, μπορούν να εργαστούν με κλάσματα χρησιμοποιώντας και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Μπορούν επίσης, να εφαρμόσουν μια σειρά από πράξεις υψώνοντας τους αριθμούς στο τετράγωνο ή στον κύβο.

(Pan Balance Shapes: http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=33)

(Pan Balance Numbers: https://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?id=26)

'Algebra Balance Scales (Negative)': Περιλαμβάνει τη χρήση αρνητικών αριθμών και μεταβλητών με τη μορφή μιας εξίσωσης, υπάρχει όμως κι εκδοχή που δεν περιλαμβάνει αρνητικούς αριθμούς. Οι μαθητές πρέπει να ισορροπήσουν και τις δύο πλευρές για να βρουν την τιμή της μεταβλητής. Πρέπει να χτίσουν και τις δύο πλευρές για να πάρουν τον άγνωστο ίσο μόνο με μια αριθμητική αξία. Μέσα από την οπτικοποίηση των πράξεων των μαθητών, φαίνεται τι σημαίνει να εφαρμόζεται μια διαδικασία και στις δύο πλευρές του συμβόλου της ισότητας.

(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions&from=category_g_3_t_2.html)

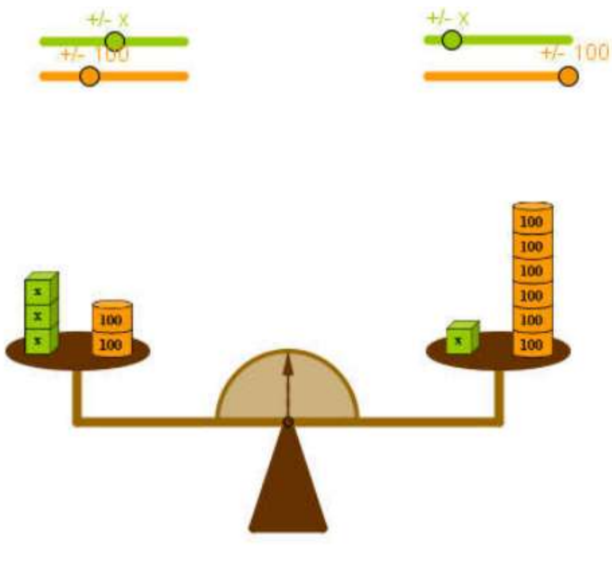
'Libra': Ένα παιχνίδι ισορροπίας που απαιτεί περισσότερη λογική απ' ότι υπολογισμό, ενώ παρουσιάζεται ως λογικό βιντεοπαιχνίδι με κάποια στοιχεία από το Tetris. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται στα παιδιά μια ζυγαριά και βάρη με ποικίλα μεγέθη και πρέπει να τοποθετήσουν στη ζυγαριά ποσότητες γραμμαρίων ώστε να επέλθει ισορροπία.

(http://www.smart-kit.com/games/libra)

Με την συμβολή ενός ψηφιακού περιβάλλοντος στην κατανόηση του συμβόλου της ισότητας ασχολήθηκε και η Bajwa (2016), η οποία εξέτασε την παιδαγωγική αποτελεσματικότητα μιας εικονικής ζυγαριάς ενσωματωμένης μέσα σε ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον πολυμέσων. Παράλληλα όμως, μετέβαλλε το επίπεδο υποστήριξης που προσφέρεται μαζί με τη ζυγαριά και αξιολόγησε τον τρόπο με τον οποίο αυτά τα διαφορετικά επίπεδα υποστήριξης, επηρεάζουν την μάθηση για τη σχεσιακή σημασία που υποδηλώνεται από το σύμβολο της ισότητας. Η ερευνήτρια σχεδίασε ένα εικονικό περιβάλλον που έμοιαζε με παιχνίδι και ονομαζόταν 'Marty's Numberland' και το εφάρμοσε σε μαθητές ηλικία 8-9 ετών. Τα διαφορετικά επίπεδα υποστήριξης αναπαραστάθηκαν από τέσσερις διαφορετικές εκδοχές του περιβάλλοντος, ενώ τα βασικά χαρακτηριστικά του παιχνιδιού, διατηρήθηκαν ίδια. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η κατανόηση των μαθητών για τη σχεσιακή λειτουργία του συμβόλου της ισότητας, μπορεί να υποστηριχθεί με την χρήση αυτού του περιβάλλοντος. Επίσης, τα ευρήματα της Bajwa (2016), υποστηρίζουν ευρήματα προηγούμενων ερευνών που επιδεικνύουν ότι μικρές αλλαγές στις οδηγίες, μπορούν να βοηθήσουν το παιδί να δει το σύμβολο σχεσιακά. Ακόμη, υποστηρίζει ότι οι πληροφορίες που παρουσιάζονται ταυτόχρονα με ακουστική και με οπτική μορφή σε μικρό χρονικό διάστημα υποστηρίζουν τη μάθηση, μειώνοντας το γνωστικό φορτίο στη μνήμη της εργασίας. Έτσι, εισάγοντας το οπτικό σύμβολο ‘=’ σε συγχρονισμό με το ηχητικό μήνυμα ‘το ίδιο με’, συμβάλει στη βελτίωση της απόδοσης των παιδιών. Τέλος, παρατηρήθηκε ακόμη ότι η πρόσληψη λιγότερης υποστήριξης, οδήγησε περισσότερους μαθητές να λύσουν περισσότερα προβλήματα ισοδυναμίας με ακρίβεια, συγκριτικά με εκείνους που έλαβαν την μεγαλύτερη υποστήριξη.

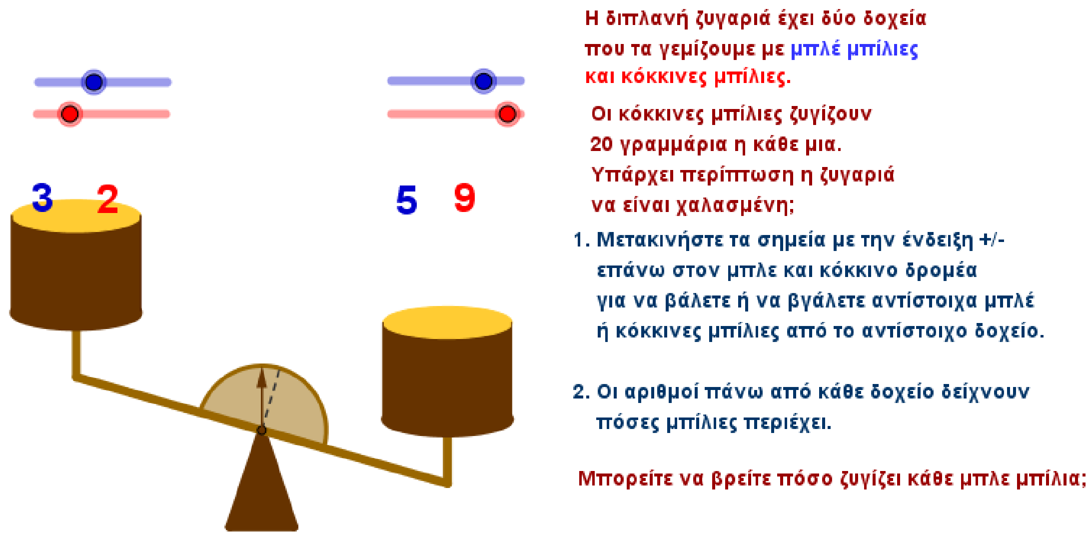
Τέλος, μελετώντας το ρόλο των Ψηφιακών Τεχνολογιών στην κατανόηση της ισότητας αξίζει να αναφερθεί η περίπτωση ενός ψηφιακού μοντέλου της κλασικής ζυγαριάς που ενσωματώνει σφάλμα (από πρόθεση) στη λειτουργία της (Χρόνης Κυνηγός, Δημήτρης Διαμαντίδης, 2014) και που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής αφού αποτελεί το βασικό εργαλείο για ένα μέρος της. Πρόκειται για την διασκευή ενός μικροπειράματος από αυτά που υπάρχουν στο Ψηφιακό Αποθετήριο του Φωτόδεντρου (http://photodentro.edu.gr).

Το αρχικό μικροπείραμα από το εμπλουτισμένο ψηφιακό βιβλίο της Β’ γυμνασίου που έχει ως τίτλο «εξισώσεις α’ βαθμού», παρουσιάζει μια εξίσωση που λύνεται με την παραδοσιακή μέθοδο αλλαγής μέλους–αλλαγής προσήμου.



Εικόνα 1: Το αρχικό μικροπείραμα

Στη συνέχεια, αυτό τροποποιήθηκε (με τη χρήση του Λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας Geogebra), δημιουργώντας ένα μοντέλο ζυγαριάς, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.



Εικόνα 2: Το διασκευασμένο μικροπείραμα

Στα δύο μέλη της ζυγαριάς υπάρχουν δύο δοχεία. Υπάρχουν κόκκινες μπίλιες που ζυγίζουν 20 γραμμάρια η κάθε μια και μπλε μπίλιες που το βάρος της κάθε μιας είναι άγνωστο. Το περιεχόμενο των δοχείων δεν είναι ορατό. Οι αριθμοί πάνω από κάθε δοχείο δείχνουν πόσες μπίλιες από κάθε χρώμα–είδος περιέχονται στο δοχείο. Τα ερωτήματα που τίθενται είναι αρχικά αν η ζυγαριά είναι χαλασμένη και στη συνέχεια αν μπορούν οι μαθητές να υπολογίσουν πόσο ζυγίζει η κάθε μπλε μπίλια. Η διαφορά του διασκευασμένου μικροπειράματος με το αρχικό αφορά κυρίως τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν. Τα αντικείμενα που ουσιαστικά ζυγίζονται (οι μπίλιες) δεν φαίνονται. Άρα η μεταβολή του πλήθους τους συμβολίζεται με την αύξηση ή τη μείωση του αντίστοιχου αριθμού κι όχι την αύξηση του ίδιου του πλήθους των αντικειμένων στην οθόνη. Πρόκειται για μια περισσότερο αφηρημένη αναπαράσταση από την προηγούμενη, που προϋποθέτει ότι οι μαθητές μπορούν να φτάσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης για να χρησιμοποιήσουν τη ζυγαριά. Φαίνεται λοιπόν, πως ο εκπαιδευτικός πιστεύει ότι οι μαθητές του μπορούν να χειριστούν πιο αφηρημένες αναπαραστάσεις. Μια δεύτερη διαφορά σχετίζεται με την αρχή λειτουργίας της ζυγαριάς. Εφόσον, η ορθότητά της τίθεται σαν ερώτημα προς τους μαθητές, δεν μπορούν να βασιστούν στην ισορροπία της για να αιτιολογήσουν την ισοδυναμία δύο μετασχηματισμών στα βάρη. Θα πρέπει εδώ να σκεφτούν αντίστροφα και μέσω της ισοδυναμίας των μετασχηματισμών να ελέγξουν την ορθότητα της ζυγαριάς. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που προκαλεί την κατανόηση των μαθητών είναι ότι ο ίδιος αριθμός στοιχείων και στα δύο μέλη της ζυγαριάς δεν εξασφαλίζει ισορροπία.

Ένα στοιχείο που επισημαίνουν οι ερευνητές είναι ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν μια γραμμικότητα, που δεν είναι βέβαιο ότι ισχύει σε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο μιας ζυγαριάς. Το σφάλμα της ζυγαριάς για παράδειγμα δεν αποδεικνύεται ότι είναι το ίδιο σε όλα τα ζυγίσματα. Μπορεί να εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όμως οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτή την ιδιότητα μάλλον χωρίς να το καταλαβαίνουν. Αυτό το απλοποιημένο μοντέλο χαλασμένης ζυγαριάς ταιριάζει με την πεποίθησή τους για τη λειτουργία της ζυγαριάς.

Το ψηφιακό αυτό μοντέλο της χαλασμένης ζυγαριάς αλλάζει το πλαίσιο του προβλήματος. Εφόσον οι μαθητές δεν μπορούν πλέον να χρησιμοποιήσουν τη ζυγαριά ως εργαλείο επικύρωσης της ισοδυναμίας των δύο μελών, θα πρέπει από την ισορροπία να συμπεράνουν αν η ζυγαριά όφειλε να ισορροπεί. Έπειτα από τη διατήρηση της μη ισορροπίας, φτάνουν να συμπεράνουν την ισοδυναμία των μετασχηματισμών στα δύο μέλη. Η επιλογή του εκπαιδευτικού να δημιουργήσει το διασκευασμένο μικροπείραμα δείχνει πως πιστεύει ότι έχει νόημα οι μαθητές να δουν την ισοδυναμία ως ένα χαρακτηριστικό πίσω από τη σωστή λειτουργία του μοντέλου, καθώς αντιστοιχεί στην πεποίθηση ότι η χρήση ισοδύναμων μετασχηματισμών στα δύο μέλη μιας εξίσωσης οφείλει να διατηρεί την ισότητα (Χρόνης Κυνηγός, Δημήτρης Διαμαντίδης, 2014, Kynigos, 2017).

Το λογισμικό Geogebra έχει χρησιμοποιηθεί και από τον Ko (2013), ο οποίος εξέτασε κατά πόσο η χρήση του από καθηγητές μαθηματικών, μπορεί να υποστηρίξει τη μάθηση για το σύμβολο της ισότητας. Ο ερευνητής κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν σωστές υποθέσεις για τη διαφορά στην οπτική αναπαράσταση όταν η αλλαγή προκύπτει στη μια μόνο πλευρά της εξίσωσης, σε αντίθεση με το όταν η αλλαγή συμβαίνει και στις δυο πλευρές. Υποστηρίζει επίσης, ότι το να παρουσιάζουμε στα παιδιά μια ποικιλία ασκήσεων που εμπλέκουν την σύγκριση δύο λειτουργιών του συμβόλου της ισότητας με τη χρήση του Geogebra, μπορεί να τους βοηθήσει να λύσουν προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους και να ενθαρρύνει την κατανόησή τους για τη σημασία της ισότητας.

Εν κατακλείδι, οι Ψηφιακές Τεχνολογίες βοηθούν να βρούμε τρόπους να προκαλέσουμε τους μαθητές να σκεφτούν πέρα από τις αυτόματες και μερικές φορές λανθασμένες ιδέες τους για τις μαθηματικές διαδικασίες και έννοιες. Τα τεχνολογικά εργαλεία επιτρέπουν στους μαθητές να κινηθούν πέρα από το τι θα γινόταν παραδοσιακά (Kurz, 2013), ενώ η εργασία σε μια οθόνη υπολογιστή επιτρέπει την παρουσίαση οπτικών και συμβολικών μηνυμάτων χωρίς χρονική καθυστέρηση, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί εύκολα όταν χρησιμοποιείται μια φυσική ζυγαριά. Αυτό όχι μόνο μειώνει το γνωστικό φορτίο, αλλά καθιστά δυνατή την επισήμανση της σχέσης κλειδί ή της υποκείμενη ιδέας του μοντέλου της ζυγαριάς. Οι υποθέσεις μπορούν εύκολα να ελεγχθούν, τα προβλήματα μπορούν να διορθωθούν και να επιχειρηθεί ξανά η λύση τους. Επίσης, δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να οπτικοποιήσουν το πώς οι χειρισμοί τους στους αριθμούς ή τα αντικείμενα επηρεάζουν την ισορροπία.

2.7 Η Δημιουργία του μαθηματικού νοήματος

Οι ερευνητές τα τελευταία χρόνια δίνουν όλο και μεγαλύτερη έμφαση στην μάθηση μαθηματικών με κατανόηση, έναντι της μάθησης απομονωμένων δεξιοτήτων και διαδικασιών με αποσυνδεδεμένο και αποσπασματικό τρόπο (Pitvorec, 2016). Οι μαθητές πρέπει να συνεχίσουν να κατανοούν τα μαθηματικά με βάση τις εμπειρίες τους στον κόσμο (Van Oers, 1996). Έτσι, η επιδίωξη της μάθησης νέων μαθηματικών εννοιών γίνεται μια δραστηριότητα δημιουργίας νοήματος (Pitvorec, 2016). Οι Hiebert et al. (1997) θεωρούν επίσης την μάθηση μαθηματικών με κατανόηση για τους μαθητές απαραίτητη, κάτι το οποίο απαιτεί δημιουργία νοήματος κατά τη διάρκεια της μαθηματικής δραστηριότητας.

Η Pitvorec (2016) αναφέρεται στον Brownell (1947), ο οποίος προτείνει μια ποικιλία λόγων για να δίνεται έμφαση και να αναμένεται η δημιουργία νοήματος στην μαθηματική δραστηριότητα. Εξηγεί ότι οι υπολογιστικές δεξιότητες που μαθαίνονται μηχανικά, αλλοιώνονται γρήγορα. Αντίθετα, οι μαθητές πρέπει να έχουν μια ουσιαστική κατανόηση ακόμη και των πιο βασικών υπολογισμών, για να διασφαλίσουν ότι θα θυμούνται και θα είναι σε θέση να χρησιμοποιούν με ευελιξία τις διαδικασίες. Επισημαίνει ότι η δημιουργία νοήματος στη μαθηματική δραστηριότητα είναι πολύ πιο ενθαρρυντική από το να θυμάσαι ή να εξασκείς γεγονότα και διαδικασίες. Στη μαθηματική δραστηριότητα η δημιουργία νοήματος σύμφωνα με την Pitvorec (2016) απαιτεί ένα κοινωνικό πλαίσιο, αλληλεπίδραση με άλλους και με τον κόσμο και ευκαιρίες για τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις, να αναγνωρίζουν σχέσεις και να δημιουργούν προσωπικό νόημα για μαθηματικές έννοιες και ιδέες.

Το ζήτημα του πώς ένα άτομο δημιουργεί το προσωπικό νόημα ενός νέου μαθηματικού αντικειμένου είναι θεμελιώδες ζήτημα στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Berger, 2006). Οι Noss, Healy & Hoyles (1997) αναφέρουν ότι τα μαθηματικά νοήματα προέρχονται από ενδο-μαθηματικές συνδέσεις που συνδέουν τις νέες μαθηματικές γνώσεις με τις παλιές.

Ο Van Oers (1996) περιγράφει τη διαδικασία δημιουργίας νοήματος μέσω διαπραγματεύσεων, στις οποίες οι ενέργειες συνδέονται με τα σύμβολα που περιλαμβάνουν για παράδειγμα γλώσσα, παραστάσεις και χειρονομίες. Όταν τα άτομα συγκεντρώνονται για να διαπραγματευτούν την έννοια των συμβόλων, η δημιουργία νοήματος και επομένως η μάθηση συμβαίνει στην κοινότητα.

Ακολουθώντας τα επιχειρήματα του Voigt (1994), η Johansson (2007) δηλώνει πως το μαθηματικό νόημα είναι θέμα διαπραγμάτευσης και προϊόν κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Η αλληλεπίδραση αφορά στον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες παρακολουθούν τις ενέργειές τους, σύμφωνα με αυτό που θεωρείται ότι είναι οι αντιλήψεις, οι προσδοκίες και οι προθέσεις του άλλου ατόμου. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται η διαπραγμάτευση του νοήματος. Πιο συγκεκριμένα, για να κατανοηθούν οι νέες μαθηματικές έννοιες, τα μέλη μιας κοινότητας διαπραγματεύονται το νόημα γι' αυτές τις έννοιες μιλώντας, μοιράζοντας, συγκρίνοντας και αντιπαραθέτοντας τις ιδέες τους. Στο πλαίσιο μιας μαθηματικής δραστηριότητας οι μαθητές μπορεί να συζητούν τις ιδέες τους για ένα πρόβλημα και να προσπαθούν να ευθυγραμμίσουν τη σκέψη και τις στρατηγικές τους με μια παρουσίαση σε ένα βιβλίο ή από τον δάσκαλο.

Πριν μερικά χρόνια, ο καινοτόμος ρόλος των ψηφιακών τεχνολογιών για την εκμάθηση των μαθηματικών έγινε πρωταρχικά αντιληπτός ως εκείνος ενός εκφραστικού μέσου, με το οποίο οι μαθητές μπορούσαν να παράγουν μαθηματικά νοήματα μέσω προγραμματισμού ενός υπολογιστή, με μια γλώσσα που δίνει φορμαλισμό και συνδεδεμένες γραφικές αναπαραστάσεις (Kynigos, 2017). Πράγματι, τα νέα διερευνητικά και εκφραστικά ψηφιακά μέσα παρέχουν στους χρήστες πρόσβαση και δυνατότητα εμπλοκής με δημιουργικές μαθηματικές σκέψεις και δραστηριότητες δημιουργίας νοήματος (Papadopoulos, Kynigos & Diamantidis, 2017). Το θέμα όμως αυτό σπάνια αντιμετωπίστηκε ως αντικείμενο έρευνας στην περιοχή της δημιουργίας νοήματος (Papadopoulos, Kynigos & Diamantidis 2016).

Το θεωρητικό μας πλαίσιο δομείται πάνω στην δουλειά των Hoyles και Noss (2016, 2017) που προτείνουν την μελέτη δημιουργίας μαθηματικού νοήματος μέσα από την μελέτη των "5E". Πρόκειται για ένα θεωρητικό πλαίσιο που αφορά στην ουσία πέντε ιδέες κλειδιά, που προέρχονται από τη θεωρητική θεμελίωση του κονστρουκριβισμού (Papert 1980 όπως αναφέρεται στο Clark-Wilson, Noss, Hoyles & Benton, 2019) και οι οποίες είναι: 1) Explore (εξερεύνηση), 2) Explain (επεξήγηση), 3) Envisage (εκ των προτέρων εκτίμηση), 4) Exchange (ανταλλαγή) και 5) bridge (διασύνδεση) και αναλύονται η καθεμία ξεχωριστά παρακάτω.

1) **<u>Explore-Εξερεύνηση</u>**: Οι μαθητές μαθαίνουν από την ανατροφοδότηση του υπολογιστή. Πρέπει να έχουν ευκαιρίες να εξερευνούν διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης των περιορισμών και των ασαφειών, καθώς και να εξερευνούν τις δικές τους ιδέες και να εντοπίζουν διαφορετικούς τύπους σφαλμάτων (Hoyles, Noss, 2016). Μέσα από αυτή την εξερεύνηση οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να αναλαμβάνουν οι ίδιοι τον έλεγχο της μάθησης τους και να κατανοούν τη λογική πίσω από τα διάφορα αποτελέσματα που προκύπτουν (Benton, Hoyles, Noss & Kalas, 2016, Clark-Wilson, Noss, Hoyles & Benton, 2019).

2) **<u>Explain–Επεξήγηση:</u>** Μια κρίσιμη πτυχή της κατανόησης ιδεών προϋποθέτει να είναι σε θέση ο μαθητής να εξηγήσει τι έχει μάθει και να αρθρώσει τους λόγους πίσω από μια επιλεγμένη προσέγγιση, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς τρόπους επικοινωνίας (Benton, Hoyles, Noss & Kalas, 2016). Έτσι, εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους επικοινωνίας προκειμένου να εκφράσουν τη μάθηση και τη λογική πίσω από τις επιλογές της προσέγγισης τους. Πρέπει να έχουν ευκαιρίες να εξηγούν τόσο τις δικές τους ιδέες, όσο και να απαντούν και να συζητούν ερωτήσεις του εκπαιδευτικού ή των συμμαθητών τους. (Hoyles, Noss, 2016, Clark-Wilson, Noss, Hoyles & Benton, 2019).

3) **<u>Envisage–Εκ των προτέρων εκτίμηση</u>**: Για να κατανοήσουμε πραγματικά μια ιδέα είναι απαραίτητο να αφιερώσουμε χρόνο, για να προβλέψουμε το αποτέλεσμα της ενέργειάς μας πριν την υλοποιήσουμε και στη συνέχεια να συγκρίνουμε το πραγματικό αποτέλεσμα με αυτήν την πρόβλεψη. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να διαπιστωθεί, εάν η αρχική διαίσθηση ήταν σωστή ή αν αυτή η γνώση πρέπει να αναδιαμορφωθεί (Benton, Hoyles, Noss & Kalas, 2016). Επομένως, εδώ οι μαθητές προβλέπουν τα αποτελέσματα των δικών τους ιδεών αλλά και των υπολοίπων, οι οποίες έχουν συγκεκριμένους στόχους, πριν την δοκιμή τους στον υπολογιστή. Πρέπει να έχουν ευκαιρίες να λαμβάνουν υπόψη τους τους στόχους του προγράμματος και τα αποτελέσματα διαφορετικών στρατηγικών πριν διεξάγουν την δική τους εξερεύνηση στο πρόγραμμα. Αυτό πρέπει να έρθει σε μια ισορροπία με τη χρήση δραστηριοτήτων, οι οποίες επιτρέπουν την ανακάλυψη μέσω της εξερεύνησης (Hoyles, Noss, 2016, Clark-Wilson, Noss, Hoyles & Benton, 2019).

4) **Exchange–Ανταλλαγή:** Η συνεργασία και η κοινή χρήση είναι ένας ισχυρός τρόπος μάθησης, στις κατασκευαστικές προσεγγίσεις που υποστηρίζουν την ανάπτυξη ιδεών μέσω αλληλεπιδράσεων με άλλους (Han & Bhattacharya, 2001 στο Benton, Hoyles, Noss & Kalas, 2016). Αυτό επιτρέπει "την απομάκρυνση από το κέντρο", ενώ γίνεται προσπάθεια να ειδωθεί ένα πρόβλημα από την οπτική γωνία ενός άλλου, καθώς και να υπερασπιστεί ο καθένας την δική του προσέγγιση και να τη συγκρίνει με εκείνες των άλλων (Benton, Hoyles, Noss & Kalas, 2016). Έτσι, οι μαθητές αναπτύσσουν ιδέες μέσα από την αλληλεπίδραση και τη σύγκριση με τους άλλους. Πρέπει να έχουν ευκαιρίες να μοιραστούν και να χτίσουν επάνω στις ιδέες, και να ενθαρρύνονται να αιτιολογούν τις δικές τους λύσεις, αλλά και να κατανοούν τις προοπτικές των υπολοίπων πάνω σε μια προβληματική κατάσταση (Hoyles, Noss, 2016, Clark-Wilson, Noss, Hoyles & Benton, 2019).

5) **bridgE–Διασύνδεση:** Οι ισχυρές ιδέες θα πρέπει να ενσωματωθούν σε οποιαδήποτε καλά σχεδιασμένη κατασκευαστική δραστηριότητα (Behrs et al. 2014) και οι ιδέες θεωρούνται ως ισχυρές εν μέρει μέσω των συνδέσεών τους με άλλους κλάδους (Papert, 2000), και εν μέρει λόγω της γλώσσας στην οποία εκφράζονται (Benton, Hoyles, Noss & Kalas, 2016). Οι μαθητές σε αυτή τη φάση λοιπόν, κάνουν συνδέσεις μεταξύ πλαισίων πέρα από το περιβάλλον προγραμματισμού στον υπολογιστή και της μαθηματικής περιοχής, με σαφή επαναπλαισίωση και ανακατασκευή εντός της γλώσσας των μαθηματικών (Hoyles, Noss, 2016, Clark-Wilson, Noss, Hoyles & Benton, 2019).

3. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας

3.1 Περιγραφή του Δείγματος

Στις δύο φάσεις της διπλωματικής αυτής εργασίας συμμετείχαν κατά μέσο όρο 35 φοιτητές του τρίτου και του τέταρτου έτους του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η δειγματοληψία μπορεί να χαρακτηρισθεί ως βολική, ενώ απαραίτητη προϋπόθεση για την επιλογή των φοιτητών αποτέλεσε η συμμετοχή τους σε κάποια επιλεγόμενα μαθήματα της Παιδαγωγικής Σχολής, που είχαν ως αντικείμενο τα Μαθηματικά και τη διδακτική τους. Το γεγονός αυτό οδήγησε στη διαφορά του αριθμού των συμμετεχόντων από τη μια βδομάδα στην άλλη (από 39 φοιτητές μέγιστο μέχρι 25 φοιτητές το λιγότερο), εφόσον η συμμετοχή τους ήταν ανάλογη με την προσέλευση τους στο μάθημα. Ως προς το φύλο του δείγματος δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές.

3.2 Μαθηματικό Υπόβαθρο

Το σύμβολο της ισότητας είναι ίσως το σύμβολο που χρησιμοποιείται συχνότερα στο αντικείμενο των Μαθηματικών. Ήδη από το νηπιαγωγείο τα παιδιά έρχονται σε μια πρώτη επαφή με αυτό χωρίς να κατανοούν βέβαια την λειτουργία του. Στην Α’ Δημοτικού το σύμβολο εισάγεται ταυτόχρονα με την πρόσθεση (Κεφάλαιο 14, Γραφή της πρόσθεσης με τη χρήση συμβόλων). Αν λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι η ιδέα της ισότητας είναι από τις θεμελιώδεις ιδέες για την ανάπτυξη της αλγεβρικής συλλογιστικής, είναι αναμενόμενο η χρήση του συμβόλου στην Πρωτοβάθμια και την Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση να είναι αναγκαία και καθημερινή. Τα πράγματα δεν διαφοροποιούνται σημαντικά στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα, αυτό που διαπραγματεύεται η έρευνα είναι η λύση πρωτοβάθμιας εξίσωσης, μια γνώση που ξεκινά από τη Στ Δημοτικού, δουλεύεται σε όλο το γυμνάσιο και χρησιμοποιείται χωρίς διακοπή σε όλη τη σχολική ζωή. Σύμφωνα λοιπόν με το αναλυτικό πρόγραμμα της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εφόσον οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα έχουν ολοκληρώσει την εκπαίδευσή τους σε γυμνάσιο και λύκειο, θεωρούμε δεδομένο ότι έχουν διδαχθεί αυτό το κομμάτι των μαθηματικών. Ωστόσο, δεν υπήρχαν προηγούμενες πληροφορίες σχετικά με το αν η κατανόησή τους για τις έννοιες αυτές ήταν ελλιπής ή ολοκληρωμένη, αλλά και για το πόσο εξοικειωμένοι ήταν στην χρήση τους. Σίγουρα όμως δεν είχαν ασχοληθεί ξανά με τέτοιου είδους γρίφους, ούτε με κάποια παρόμοια δραστηριότητα στο λογισμικό Geogebra.

3.3 Παρουσίαση Δραστηριοτήτων

Το κομμάτι της ερευνητικής αυτής εργασίας με τη συμμετοχή των φοιτητών χωρίστηκε σε δύο διαφορετικές φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά το περιβάλλον των γρίφων mobile και η δεύτερη το ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς που ενσωματώνει λάθος από πρόθεση. Η κάθε φάση αναλύεται ξεχωριστά παρακάτω.

3.3.1 1η φάση–Mobile puzzles

Το περιβάλλον των γρίφων mobile επιλέχθηκε διότι αποτελεί ένα μέσο που αναπαριστά μια εξίσωση ή ένα σύστημα εξισώσεων με τη μορφή εικόνας, στο οποίο παρέχεται η δυνατότητα εφαρμογής όλων των τυπικών βημάτων που χρησιμοποιούνται στη λύση μιας εξίσωσης. Δίνεται λοιπόν η ευκαιρία να διαπιστωθεί το κατά πόσο οι φοιτητές θα κατανήσουν ότι το συγκεκριμένο περιβάλλον αποτελεί μια άλλη αναπαράσταση της έννοιας αυτής, γεγονός που θα τους δώσει την άνεση να εκφραστούν αλγεβρικά προκειμένου να επιλύσουν τις δραστηριότητες.

Η διάρκεια της πρώτης φάσης ήταν πέντε εβδομάδες και δημιουργήθηκαν γι' αυτή πέντε διαφορετικά φύλλα εργασίας διαβαθμισμένης δυσκολίας. Κάθε εβδομάδα δινόταν ένα φύλλο εργασίας, το οποίο αποτελούνταν από δύο δραστηριότητες βασισμένες στη λογική των mobile puzzles, ξεκινώντας από το πιο εύκολο για να δοθεί την πέμπτη εβδομάδα το πιο απαιτητικό. Οι συμμετέχοντες καλούνταν να επιλύσουν τις δραστηριότητες σε ατομικό επίπεδο και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους και τα βήματα που ακολούθησαν. Τα φύλλα εργασίας παραδίδονταν ύστερα στην ερευνήτρια, χωρίς να γίνεται γνωστό στους φοιτητές αν οι απαντήσεις τους ήταν σωστές ή λανθασμένες. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και τις πέντε εβδομάδες. Τα φύλλα εργασίας μοιράζονταν σε όλους τους φοιτητές την ίδια στιγμή, σε κάποιο επιλεγμένο χρονικό διάστημα ενός συγκεκριμένου μαθήματος που παρακολουθούσαν. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα ο αριθμός του δείγματος να αλλάζει κάθε εβδομάδα (από 40 έως 25 φοιτητές), ανάλογα με την προσέλευσή τους στο μάθημα.

3.3.2 2η φάση–ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς

Το δεύτερο εργαλείο επιλέχθηκε αρχικά διότι το μοντέλο της ζυγαριάς αποτελεί ένα από τα βασικά μέσα, που προτείνονται από πολλούς ερευνητές για την καλύτερη κατανόηση της ισότητας και της σχέσης ισοδυναμίας που αυτή εκφράζει. Πόσο μάλλον όταν συνδυάζεται με το κομμάτι της τεχνολογίας, παρέχοντας την δυνατότητα να γίνουν άμεσα όποιες μεταβολές και δοκιμές επιθυμούν οι συμμετέχοντες. Επιπλέον, το συγκεκριμένο ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς (που ενσωματώνει λάθος από πρόθεση) αποτελεί ένα εργαλείο που προκαλεί τη γνώση που έχουμε για την ισότητα. Πρόκειται για μια εφαρμογή όπου η σωστή λειτουργία της ζυγαριάς δεν είναι δεδομένη, γεγονός που καλεί τους λύτες να αξιοποιήσουν όποια γνώση έχουν σχετικά, προκειμένου να υπολογίσουν το ζητούμενο βάρος.

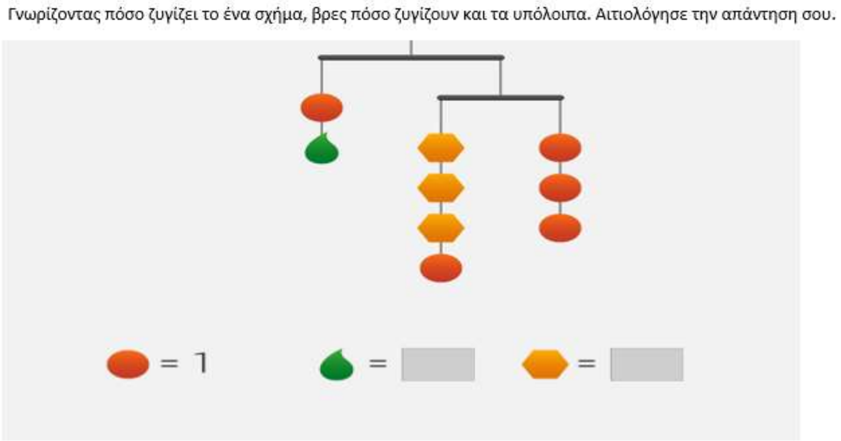
Αφού οι φοιτητές οργανώθηκαν σε τέσσερις ομάδες, σε αυτή τη φάση, η κάθε ομάδα συναντιόταν ξεχωριστά με την ερευνήτρια και καλούνταν να επιλύσει την δραστηριότητα που της δινόταν στο λογισμικό Geogebra, με το ψηφιακό μοντέλο της κλασικής ζυγαριάς. Η ερευνήτρια εξηγούσε από την αρχή στα μέλη της ομάδας ότι έπρεπε να διατυπώνουν φωναχτά οτιδήποτε σκέφτονται και να συνομιλούν μεταξύ τους, ενώ ο ρόλος της περιοριζόταν στο να παρατηρεί και να ακούει τα όσα λέγονταν. Αν χρειαζόταν στην αρχή εξηγούσε κάποια πράγματα σχετικά με τη λειτουργία του λογισμικού. Η ομάδα διάβαζε την εκφώνηση της δραστηριότητας κι από εκεί κι έπειτα δεν υπήρχε χρονικός περιορισμός για να φτάσουν σε μια απάντηση. Η διαδικασία ολοκληρωνόταν όταν η ομάδα αποφάσιζε κι ανακοίνωνε την απάντησή της.

3.4 Περιγραφή ερευνητικών εργαλείων

3.4.1 1η φάση–mobile puzzles

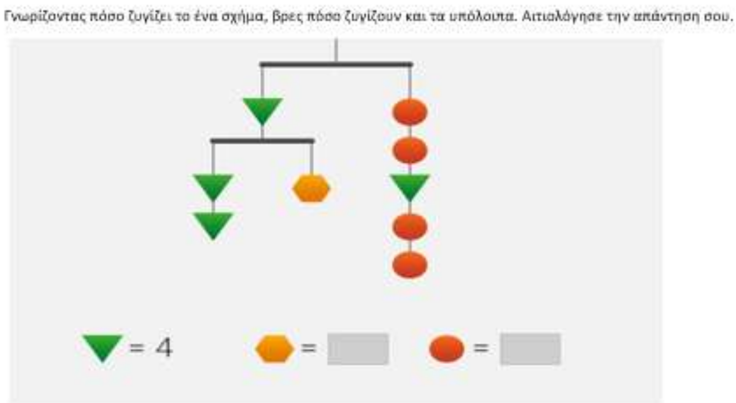
<u>1ο φύλλο δραστηριοτήτων–1η εβδομάδα</u>

Στην πρώτη δραστηριότητα που δόθηκε στους συμμετέχοντες υπάρχει ένα mobile puzzle, το οποίο περιέχει τρία διαφορετικά εικονίδια (σφαίρα, σταγόνα, εξάγωνο) και δίνεται ως δεδομένο το βάρος του ενός από αυτά (της σφαίρας). Με βάση αυτό, πρέπει να βρεθεί το βάρος των άλλων δύο σχημάτων.



Εικόνα 3: 1η δραστηριότητα

Η δεύτερη δραστηριότητα αν και μοιάζει με την πρώτη, εν τούτοις παρουσιάζει μια βασική διαφορά. Στον αριστερό κλάδο του mobile υπάρχει ένα σχήμα πάνω από την οριζόντια δοκό, κάτι που πρέπει να προσέξουν στους υπολογισμούς τους οι φοιτητές.

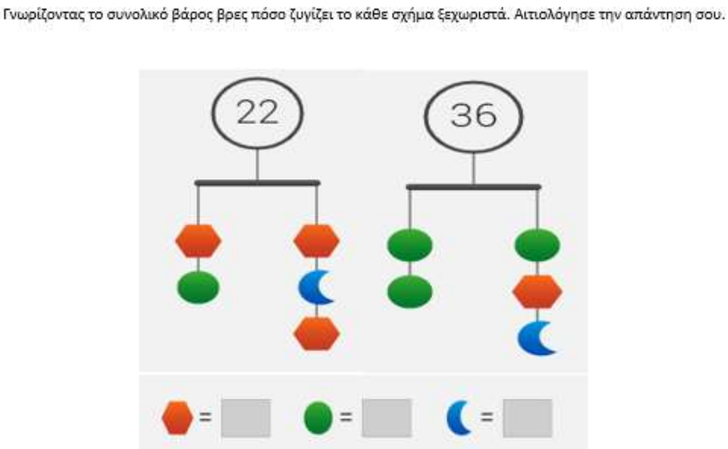


Εικόνα 4: 2η δραστηριότητα

Οι δύο αυτές δραστηριότητες υποστηρίζουν την ενέργεια της αφαίρεσης του ίδιου βάρους και από τις δύο πλευρές του mobile, αλλά και την αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της, όπως προκύπτει μέσα από τις ισοδύναμες σχέσεις που αναδεικνύονται. Επίσης, επιτρέπουν την χρήση της μεθόδου της αντικατάστασης προκειμένου να επιλυθεί η κάθε δραστηριότητα.

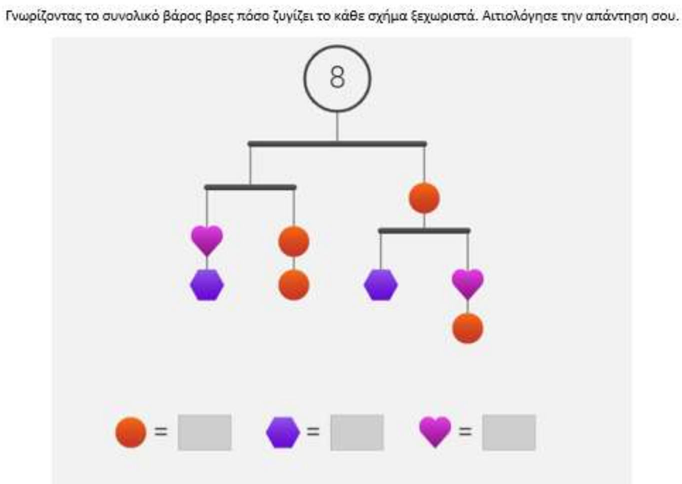
$2^{ο}$ φύλλο δραστηριοτήτων–$2^{η}$ εβδομάδα

Η πρώτη δραστηριότητα (τρίτη στο σύνολο) παρουσιάζει δυο ξεχωριστά mobile, τα οποία αποτελούνται από τα ίδια τρία εικονίδια (εξάγωνο, σφαίρα, μισοφέγγαρο) που έχουν το ίδιο βάρος και στις δύο περιπτώσεις. Αυτό που δίνεται ως δεδομένο, είναι το συνολικό βάρος του κάθε mobile ξεχωριστά. Το ζητούμενο είναι, αξιοποιώντας τις πληροφορίες που δίνονται, να βρεθεί το βάρος του κάθε σχήματος.



Εικόνα 5: $3^{η}$ δραστηριότητα

Στη δεύτερη δραστηριότητα αυτού του φύλλου (τέταρτη συνολικά), υπάρχει μόνο ένα mobile, η κάθε πλευρά του όμως αποτελείται από δύο επιμέρους mobile. Στο ένα από αυτά υπάρχει σχήμα πάνω από την οριζόντια δοκό. Αυτό που δίνεται ως δεδομένο είναι το συνολικό βάρος όλου του mobile και το ζητούμενο είναι να βρεθεί το βάρος του κάθε σχήματος.

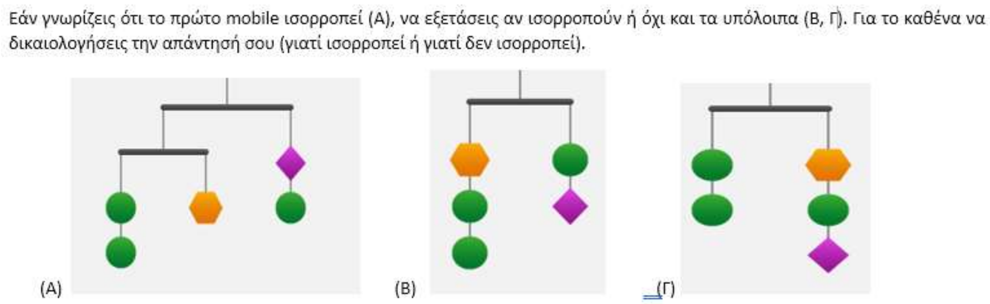


Εικόνα 6: $4^{η}$ δραστηριότητα

Και αυτές οι δραστηριότητες υποστηρίζουν την ενέργεια της αντικατάστασης μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της, την αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές του mobile και δίνουν την δυνατότητα επίλυσης τους μέσα από την μέθοδο της αντικατάστασης Η δεύτερη ($4^{η}$ συνολικά) υποστηρίζει και την προσθήκη της ίδιας ποσότητας και στις δύο πλευές του mobile.

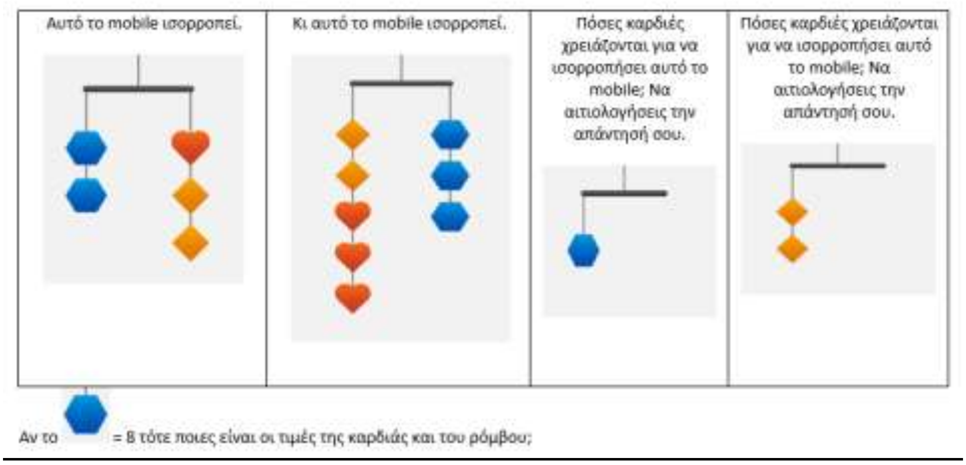
3ο φύλλο δραστηριοτήτων–3η εβδομάδα

Η πρώτη δραστηριότητα (πέμπτη συνολικά), αποτελείται από τρία ξεχωριστά mobile, στα οποία υπάρχουν τρία ίδια εικονίδια (εξάγωνο, σφαίρα, ρόμβος) και έχουν ίσο βάρος το καθένα στο κάθε mobile. Δεν είναι γνωστό ούτε το συνολικό βάρος κάποιου mobile, ούτε το βάρος κάποιου σχήματος. Το μόνο που δίνεται ως δεδομένο είναι ότι το πρώτο mobile ισορροπεί και με βάση αυτό πρέπει οι φοιτητές να εξετάσουν εάν το δεύτερο και το τρίτο mobile ισορροπούν ή όχι.



Εικόνα 7: 5η δραστηριότητα

Στη δεύτερη δραστηριότητα (έκτη στο σύνολο) υπάρχουν τέσσερα mobile, δύο από τα οποία είναι ολοκληρωμένα και ισορροπούν και δύο που χρειάζεται να συμπληρωθούν από τους φοιτητές με ισοδύναμες ποσότητες. Όλα αποτελούνται από τα ίδια τρία εικονίδια (εξάγωνο, καρδιά, ρόμβος), που έχουν ίσο βάρος σε όλα τα mobile. Ως δεδομένα δίνονται το βάρος του εξαγώνου και το γεγονός ότι τα δύο ολοκληρωμένα mobile ισορροπούν. Με βάση αυτά, οι φοιτητές πρέπει να βρουν με πόσες καρδιές ισοδυναμεί ένα εξάγωνο και αντίστοιχα με πόσες καρδιές ισοδυναμούν δύο ρόμβοι, ενώ ταυτόχρονα πρέπει να υπολογίσουν το βάρος της καρδιάς και του ρόμβου.



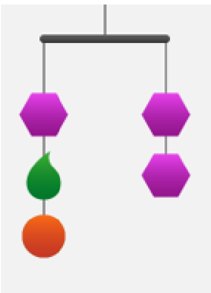
Εικόνα 8: 6η δραστηριότητα

Η πέμπτη και η έκτη δραστηριότητα υποστηρίζουν επίσης τις ίδιες ενέργειες με τις προηγούμενες δραστηριότητες (αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της, αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές του mobile, μέθοδος της αντικατάστασης). Η πρώτη από αυτές δίνει επιπλέον τη δυνατότητα να ακολουθηθεί μια επίλυση που οδηγεί σε αυτό που είναι γνωστό στα μαθηματικά ως «απαγωγή σε άτοπο». Ακόμη, η δεύτερη υποστηρίζει την πρόσθεση αλλά και την αφαίρεση δύο εξισώσεων κατά μέλη, ώστε να βρεθεί η απάντηση.

4^{ο} φύλλο δραστηριοτήτων–4^{η} εβδομάδα

Στην πρώτη δραστηριότητα αυτού του φύλλου (έβδομη συνολικά), υπάρχει ένα ισορροπημένο mobile και δίπλα δίνονται έξι περιπτώσεις σχετικές με το mobile, που αφορούν πρόσθεση, αφαίρεση ή μετακίνηση σχημάτων σε αυτό. Το ζητούμενο είναι να ελέγξουν για κάθε μια από τις περιπτώσεις, αν θα διατηρήσουν την ισορροπία του mobile ή όχι, όταν εφαρμοστούν.

Ποια/ες από τις παρακάτω αλλαγές θα διατηρήσουν το mobile σε ισορροπία. Να δικαιολογήσεις κάθε απάντησή σου (γιατί θα το διατηρήσει και γιατί όχι).



α) Το να προσθέσουμε ένα εξάγωνο σε κάθε πλευρά.

β) Το να προσθέσουμε 5 σταγόνες σε κάθε πλευρά.

γ) Να μετακινήσουμε όλα τα εξάγωνα στη δεξιά πλευρά.

δ) Το να αλλάξουμε πλευρά την σταγόνα και τον κύκλο.

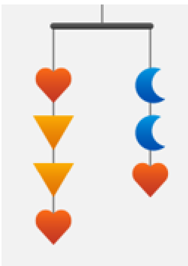
ε) Το να προσθέσουμε έναν κύκλο στην δεξιά πλευρά.

στ) Να αφαιρέσουμε ένα εξάγωνο από κάθε πλευρά.

Εικόνα 9: 7^{η} δραστηριότητα

Στην δεύτερη δραστηριότητα της εβδομάδας (όγδοη στο σύνολο) ακολουθείται παρόμοιο σκεπτικό. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται ένα ισορροπημένο mobile κι ένα γράμμα για κάθε εικονίδιο που το αποτελεί. Παράλληλα, δίνονται έξι αλγεβρικές εξισώσεις σχετικές με το mobile και το ζητούμενο είναι να εξετάσουν οι φοιτητές εάν οι εξισώσεις ισχύουν ή όχι με βάση το αρχικό mobile. Για πρώτη φορά δίνεται δραστηριότητα στους συμμετέχοντες που περιέχει ρητά αλγεβρικό συμβολισμό.

Βασιζόμενος/η στο παρακάτω mobile, εξέτασε εάν οι προτάσεις που δίνονται είναι σωστές ή λανθασμένες. Να αιτιολογήσεις κάθε σου απάντηση.



α) h + s + s + h = m + m + h

β) 2s + h = 2m

γ) 6h + 6s = 6m + 3h

δ) 2m + h = h + 2s + h

ε) 3s + 2h = 2m + h + s

στ) 3h = 2m + 2s

= s = h = m

Εικόνα 10: 8^{η} δραστηριότητα

Η έβδομη και η όγδοη δραστηριότητα διαπραγματεύονται κατά βάση την αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές του mobile, αλλά και την προσθήκη της ίδιας ποσότητας και στις δύο πλευρές του mobile. Επιπλέον, η όγδοη δραστηριότητα υποστηρίζει τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση των ποσοτήτων που υπάρχουν στις δύο πλευρές με τον ίδιο αριθμό.

$5^{ο}$ φύλλο δραστηριοτήτων–$5^{η}$ εβδομάδα

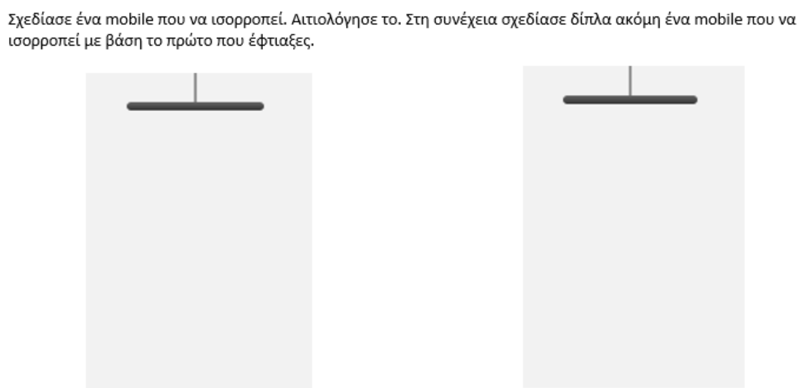
Στην ένατη στο σύνολο δραστηριότητα, υπάρχει ένα ισορροπημένο mobile. Αυτό είναι το μοναδικό στοιχείο που δίνεται καθώς δεν είναι γνωστό ούτε το συνολικό βάρος του mobile, αλλά ούτε του κάθε εικονιδίου. Το ζητούμενο για τους λύτες είναι να δημιουργήσουν ένα δεύτερο mobile, το οποίο θα ισορροπεί με βάση το πρώτο. Η δραστηριότητα αυτή, όπως και η επόμενη, διαφέρουν από τις προηγούμενες, καθώς οι φοιτητές δεν θα μεταφράσουν μόνο πληροφορίες από ισορροπημένα mobile, αλλά θα μπουν στη λογική να δημιουργήσουν και οι ίδιοι μερικά.

Έτσι, η δραστηριότητα αυτή βοηθάει να γίνει αντιληπτό τι έχουν κατανοήσει και συγκρατήσει οι συμμετέχοντες από τις προηγούμενες δραστηριότητες, αν θα καταφέρουν να φτιάξουν ένα ισορροπημένο mobile με βάση αυτό που τους δίνεται και πάνω σε τι θα βασιστούν για να το δημιουργήσουν. Ακόμη, έχουν την δυνατότητα να αξιοποιήσουν οποιαδήποτε τακτική και ενέργεια επιθυμούν.

Εικόνα 11: $9^{η}$ δραστηριότητα

Η δέκατη δραστηριότητα μοιάζει με την προηγούμενη με τη διαφορά ότι ζητείται από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν οι ίδιοι και τα δύο mobile. Θα φτιάξουν δηλαδή αρχικά, ελεύθερα ένα mobile που να ισορροπεί και στη συνέχεια θα δημιουργήσουν ένα δεύτερο mobile που θα ισορροπεί με βάση το πρώτο.

Η τελευταία αυτή δραστηριότητα είναι θεωρητικά η δυσκολότερη, διότι οι συμμετέχοντες καλούνται να εφαρμόσουν όσα αποκόμισαν από τις προηγούμενες. Δίνει την δυνατότητα να παρατηρηθεί τι κατανόησαν μέχρι τώρα και ποιες είναι οι δυνατότητές τους ως προς την δημιουργία ισορροπημένων mobile. Και σε αυτό το σημείο οι λύτες έχουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν οποιαδήποτε ενέργεια και τακτική επιθυμούν.



Εικόνα 12: $10^{η}$ δραστηριότητα

3.4.2 2η φάση

Στην δεύτερη φάση της παρούσας ερευνητικής εργασίας, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν μια προβληματική κατάσταση με ένα ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, το οποίο ενσωμάτωνε λάθος από πρόθεση.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι δημιούργημα του κ. Δημήτρη Διαμαντίδη, ενός μαθηματικού από την Αθήνα, ο οποίος επέλεξε ένα μικροπείραμα που υπήρχε στη διαδικτυακή πύλη για το βιβλίο των Μαθηματικών της Β' γυμνασίου και κάνοντας κάποιες αλλαγές, το μετέτρεψε σε κάτι διαφορετικό (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014; Kynigos, 2017).

Το μικροπείραμα λοιπόν, αφορά ένα ψηφιακό μοντέλο κλασική ζυγαριάς. Στην κάθε πλευρά της ζυγαριάς υπάρχει ένα δοχείο, το περιεχόμενο του οποίου δεν είναι ορατό. Υπάρχουν κόκκινες μπίλιες που ζυγίζουν 20 γραμμάρια η κάθε μια (γνωστό βάρος, δεδομένο) και μπλε μπίλιες το βάρος των οποίων είναι άγνωστο. Το κάθε δοχείο περιέχει και μπλε και κόκκινες μπίλιες. Πάνω από κάθε δοχείο υπάρχουν δύο δρομείς, ένας για να μεταβάλλεται ο αριθμός από τις μπλε μπίλιες κι ένας για τις κόκκινες μπίλιες. Ακριβώς από κάτω υπάρχουν αριθμοί που δείχνουν πόσες μπλε και πόσες κόκκινες μπίλιες διαθέτει το κάθε δοχείο εκείνη τη χρονική στιγμή. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι η σωστή λειτουργία της ζυγαριάς δεν είναι δεδομένη. Τα ερωτήματα που τίθενται προς επίλυση είναι τα εξής: Το πρώτο αφορά τον έλεγχο της σωστής λειτουργίας της ζυγαριάς και το δεύτερο τον υπολογισμό του βάρους της μπλε μπίλιας.

Εικόνα 13: Το μικροπείραμα όπως δόθηκε στους φοιτητές

3.5 Συλλογή και Ανάλυση Δεδομένων

Στην πρώτη φάση της έρευνας τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν οι απαντήσεις των φοιτητών στα πέντε φύλλα εργασίας με τις δραστηριότητες με τους γρίφους mobile που τους δόθηκαν. Για την ανάλυσή τους χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της Θεματικής Ανάλυσης Περιεχομένου (thematic content analysis) (Mayring, 2014). Η ανάλυση των πρώτων φύλλων εργασίας οδήγησε στη δημιουργία ορισμένων κατηγοριών σχετικών με τους τρόπους επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές, αλλά και τις ενέργειες που χρησιμοποίησαν κατά τις απαντήσεις τους. Καθώς αναλύονταν όλο και περισσότερα φύλλα εργασίας, οι κατηγορίες αυτές αναθεωρούνταν, ώσπου στο τέλος οριστικοποιήθηκαν. Η τελική ταξινόμηση εξετάστηκε και από δεύτερο ερευνητή. Στα σημεία όπου υπήρχε κάποια διαφωνία μεταξύ των δύο ερευνητών, σχετικά με την κατηγορία στην οποία ανήκε μια απάντηση, μέσα από τη συζήτηση αποφασιζόταν σε ποια κατηγορία θα ενταχθεί. Οι κατηγορίες αυτές παρουσιάζονται αναλυτικά στο κομμάτι των αποτελεσμάτων της πρώτης φάσης και της συζήτησης.

Η συλλογή των δεδομένων της δεύτερης φάσης στηρίχθηκε στη μέθοδο ‘Thinking aloud’ (Σκέφτομαι Φωναχτά), κατά την οποία ο ερευνητής προτρέπει τα υποκείμενα να εκφράζουν φωναχτά τις σκέψεις τους, καθώς επιλύουν ένα πρόβλημα ή μια άσκηση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση της παρούσας ερευνητικής εργασίας τα μέλη των ομάδων συζητούσαν μεταξύ τους τις απόψεις και τις προτάσεις τους και ο καθένας από αυτούς έλεγε δυνατά αυτά που σκεφτόταν. Αν κάποια στιγμή πραγματοποιηθεί κάποια παύση, ο ερευνητής πρέπει να υπενθυμίζει στα υποκείμενα να συνεχίσουν να σκέφτονται φωναχτά. Πέρα από αυτή την υπενθύμιση, η αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας με τον ερευνητή πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο μικρή, για να μην παρεμβαίνει στη ροή των σκέψεων του υποκειμένου. Παράλληλα, όλη η συνάντηση ηχογραφείται και καταγράφονται οι κινήσεις που πραγματοποιούνται στην οθόνη του υπολογιστή, ενώ ο ερευνητής μπορεί να κρατάει κάποιες σημειώσεις για τα σημεία που θεωρεί ότι χρειάζονται κάποιες διευκρινήσεις, προκειμένου μεταγενέστερα τα προφορικά δεδομένα να μετεγγραφούν και να παρουσιαστούν κατά λέξη. Με αυτή τη μέθοδο συλλέγεται μεγάλος αριθμός προφορικών δεδομένων καθ’ όλη τη διάρκεια της επίλυσης της προβληματικής κατάστασης, τα οποία συνδυάζονται αργότερα με την ανάλυση των πρωτοκόλλων. Οι δύο αυτές διαδικασίες επιτρέπουν στον ερευνητή να αναγνωρίσει τις πληροφορίες στις οποίες επικεντρώνονται τα μέλη της ομάδας κατά την διάρκεια της συνάντησης και το πώς οι πληροφορίες αυτές διευκολύνουν την επίλυση της προβληματικής κατάστασης που τους παρουσιάστηκε. Έτσι, μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τις συλλογιστικές διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν.

Αφού συλλέχθηκαν τα δεδομένα με τους τρόπους που προαναφέρθηκαν, σε επόμενη φάση έγινε η μεταγραφή τους σε κείμενο. Τα πρωτόκολλα που προέκυψαν αναλύθηκαν στη συνέχεια. Αρχικά υπογραμμίστηκαν στα πρωτόκολλα λέξεις ή φράσεις οι οποίες συνδέονταν με το ζητούμενο της έρευνας και τις 5 όψεις της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος. Με αυτό τον τρόπο γνωστοποιούνταν το λεξιλόγιο στο οποίο επικεντρώνονταν οι φοιτητές κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος. Ακολούθησε προσπάθεια μιας πρώτης κωδικοποίησης των δεδομένων αυτών, με βάση τις κατηγορίες των πέντε όψεων της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος. Η αρχική αυτή κωδικοποίηση ήταν προσωρινή, καθώς στη συνέχεια θα χρειάζονταν περεταίρω ερμηνεία, με περισσότερη λεπτομέρεια και ακρίβεια.

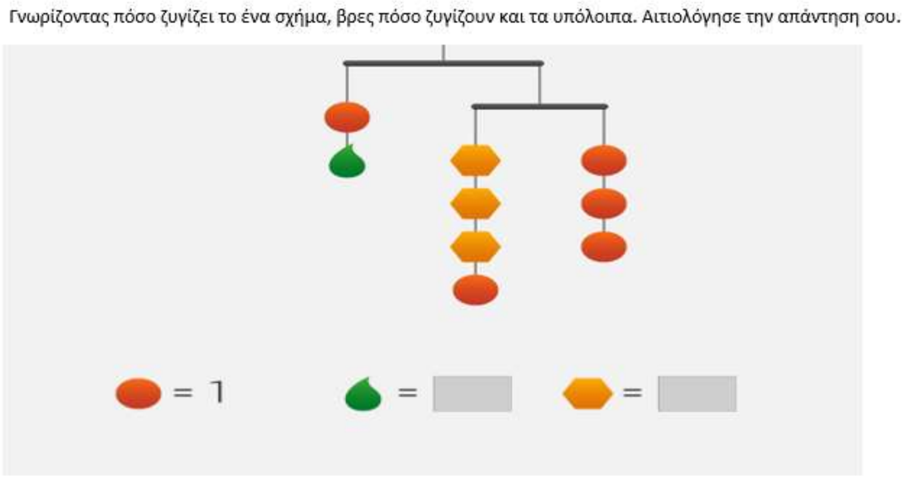
Στη συνέχεια το κωδικοποιημένο υλικό οργανώθηκε γύρω από τις πέντε όψεις του μοντέλου των ‘5Es’ από τους Hoyles & Noss (2016, 2017), που αφορά τις εξής πέντε ιδέες – κλειδιά: 1) Explore (Εξερεύνηση), 2) Explain (Επεξήγηση), 3) Envisage (Εκ των προτέρων εκτίμηση), 4) Exchange (Ανταλλαγή) και 5) bridge (Διασύνδεση) και οι οποίες σχετίζονται με την δημιουργία μαθηματικού νοήματος. Έτσι, στάθηκε εφικτό να διευκρινιστούν τα σημεία στα οποία επικεντρώθηκαν τα υποκείμενα κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος και να αναδειχθούν τα σημεία που φανερώνουν τον τρόπο με τον οποίο αναπτύχθηκε κάθε μια από τις όψεις της δημιουργίας νοήματος.

4. Αποτελέσματα

4.1 Ανάλυση δραστηριοτήτων με τα mobiles

Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους συμμετέχοντες ήταν συνολικά δέκα (2 σε κάθε φύλλο δραστηριοτήτων) και στη συνέχεια θα αναλυθούν σχετικά με τους τρόπους επίλυσης που επέλεξαν οι φοιτητές, αλλά και με τις μαθηματικές ενέργειες που πραγματοποίησαν και οι οποίες σχετίζονται με τις ενέργειες που κάνουμε όταν λύνουμε μια τυπική μαθηματική εξίσωση. Η κάθε δραστηριότητα θα παρουσιαστεί ξεχωριστά και στο τέλος θα υπάρξουν ορισμένες κοινές παρατηρήσεις.

4.1.1 Ανάλυση 1ης δραστηριότητας

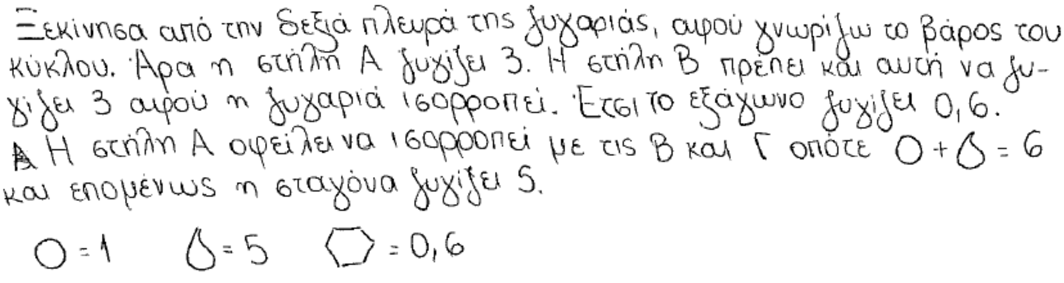


Εικόνα 14: 1η δραστηριότητα

Την πρώτη δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 39 φοιτητές. Κατά την ανάλυση των απαντήσεων τους, αυτό που παρουσίασε ενδιαφέρον είναι ότι ένα μεγάλο ποσοστό από τους λύτες ακολούθησαν τα ίδια ακριβώς βήματα προκειμένου να φτάσουν στην σωστή απάντηση. Πιο συγκεκριμένα, οι λύτες ξεκινούσαν από τον δεξιό κλάδο με τις τρεις σφαίρες, ο οποίος έχει βάρος ίσο με τρεις μονάδες, εφόσον τους δινόταν ως δεδομένο ότι η μια σφαίρα ζυγίζει μια μονάδα. Επομένως, έβρισκαν ότι στο δεξί mobile ο αριστερός κλάδος με τα τρία εξάγωνα και τη μια σφαίρα πρέπει να ζυγίζει τρεις μονάδες, αφού το mobile βρίσκεται σε ισορροπία. Στη συνέχεια, αφαιρώντας από κάθε κλάδο μια σφαίρα προέκυπτε ότι τα τρία εξάγωνα έχουν βάρος ίσο με 2 μονάδες, για να καταλήξουν επομένως ότι το κάθε εξάγωνο ζυγίζει 2/3. Έπειτα, υπολόγιζαν το συνολικό βάρος του δεξιού mobile, το οποίο είναι ίσο με 6 και το χρησιμοποιούσαν για να βρουν το βάρος της σταγόνας. Εφόσον όλο το σύστημα στην εικόνα βρίσκεται σε ισορροπία σημαίνει ότι ο αριστερός κλάδος του συστήματος θα έχει το ίδιο βάρος με το mobile στα δεξιά. Επομένως, η σταγόνα και η μια σφαίρα μαζί πρέπει να ζυγίζουν 6 μονάδες. Από αυτές αφαιρούσαν το βάρος της σφαίρας κι έφταναν στο βάρος της σταγόνας που είναι ίσο με 5.

Ωστόσο, παρά την κοινή πορεία που φαίνεται να ακολούθησαν για την λύση της δραστηριότητας, ο τρόπος υλοποίησής της δεν ήταν ο ίδιος για όλους. Συγκεκριμένα, στη δραστηριότητα αυτή παρατηρήθηκαν συνολικά πέντε διαφορετικοί **τρόποι επίλυσης**.

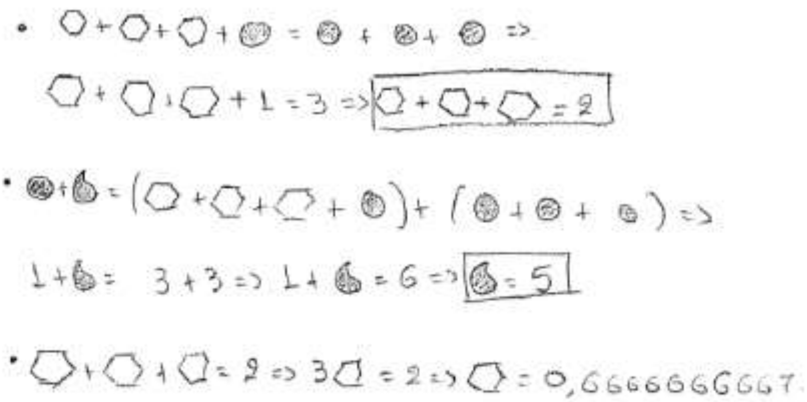
Ο πιο συχνός τρόπος με τον οποίο επέλεξαν να εργαστούν οι φοιτητές ήταν ο ***κειμενικός*** (15/39), σύμφωνα με τον οποίο οι λύτες χρησιμοποίησαν μόνο λόγια για να περιγράψουν την πορεία επίλυσης που ακολούθησαν. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα για να κατανοηθεί καλύτερα ο συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης.



Εικόνα 15: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

Αρχικά ο λύτης ονομάζει τους τρεις κλάδους του συστήματος με τα γράμματα Α, Β και Γ. Όπως περιγράφει και ο ίδιος ξεκινά από τον κλάδο με τις 3 σφαίρες που βρίσκεται στα δεξιά (Α), διότι δίνεται το βάρος της μιας σφαίρας και έτσι εύκολα βρίσκει ότι ο κλάδος αυτός ζυγίζει συνολικά τρεις μονάδες. Έπειτα, προχωράει στον αριστερό κλάδο του δεξιού mobile (Β), που αποτελείται από τρία εξάγωνα και μια σφαίρα και ο οποίος -όπως γράφει- ζυγίζει επίσης τρείς μονάδες, εφόσον ισορροπεί με τον κλάδο Α. Αυτό τον βοηθάει να βρει το βάρος του εξαγώνου για το οποίο απευθείας γράφει πως είναι ίσο με 0,6 (προσεγγιστική τιμή και όχι η ακριβής 2/3). Στη συνέχεια, το ενδιαφέρον του στρέφεται στον κλάδο του συστήματος στα αριστερά που αποτελείται από μια σταγόνα και μια σφαίρα και ο οποίος -όπως γράφει- έχει το ίδιο βάρος με το mobile στα αριστερά. Το βάρος του επομένως θα είναι στο σύνολο 6 μονάδες (3 και 3 για κάθε επιμέρους κλάδο). Αφαιρώντας από το βάρος του κλάδου αυτού λοιπόν την τιμή της μιας μονάδας, που είναι το βάρος της σφαίρας, βρίσκει το βάρος της σταγόνας ίσο με πέντε.

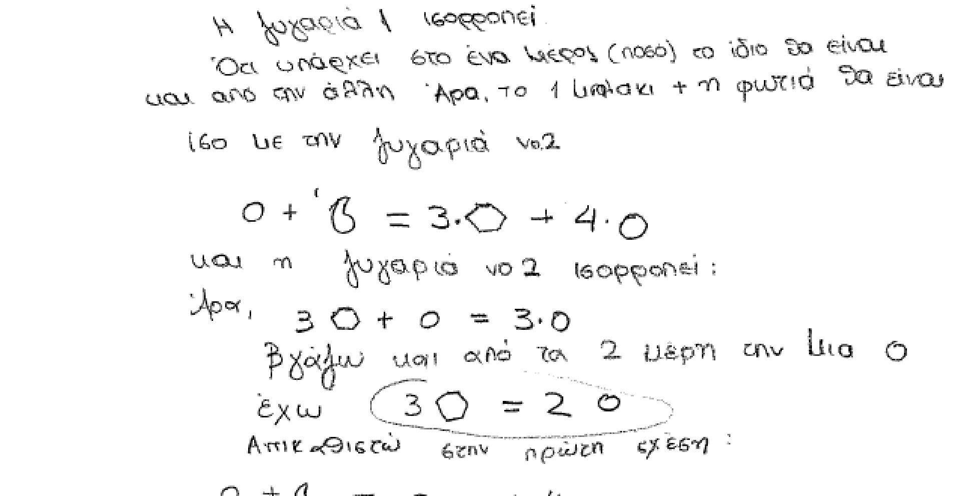
Με αρκετά μικρότερη συχνότητα έγινε ***χρήση των εικονιδίων του συστήματος*** (4/39) όπου στην ουσία οι λύτες δούλεψαν με τα εικονίδια που προϋπάρχουν ενσωματωμένα στο περιβάλλον του mobile και μέσω αυτών προσπάθησαν να φτάσουν στην λύση της δραστηριότητας. Πρακτικά αναπαριστούν σχέσεις και ισότητες με την χρήση των εικονιδίων (Εικόνα 16), αντί να χρησιμοποιούν γράμματα όπως συμβαίνει σε μια τυπική αλγεβρική προσέγγιση.



Εικόνα 16: Παράδειγμα τρόπου επίλυσης με χρήση των εικονιδίων του συστήματος

Ο συγκεκριμένος λύτης ξεκινάει μεταφέροντας την κατάσταση ισορροπίας του δεξιού mobile σε μορφή εξίσωσης, με τη χρήση των εικονιδίων που υπάρχουν στο mobile. Έτσι, η πρώτη στη σειρά τέτοια εξίσωση δηλώνει ότι το βάρος που έχουν τα τρία εξάγωνα και η μια σφαίρα είναι ίσο με το βάρος που έχουν οι τρείς σφαίρες. Στη συνέχεια, στην εξίσωση αυτή αντικαθιστά την τιμή της μιας μεταβλητής (βάρος σφαίρας) που είναι ήδη γνωστή (1 μονάδα) και φτάνει έτσι στην δεύτερη εξίσωση, που δηλώνει ότι το βάρος των τριών εξαγώνων αυξημένο κατά ένα είναι ίσο με 3. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει (επόμενη εξίσωση) ότι το βάρος των τριών εξαγώνων είναι ίσο με δύο μονάδες. Το επόμενο βήμα είναι να μεταφέρει σε μορφή εξίσωσης την κατάσταση ισορροπίας του συνολικού συστήματος των mobiles. Έτσι, μια σταγόνα και μια σφαίρα έχουν το ίδιο βάρος με τρία εξάγωνα και μια σφαίρα και τρεις ακόμα σφαίρες. Αντικαθιστώντας τα βάρη των δυο κλάδων του μικρού mobile (και οι δυο έχουν βάρος 3), καταλήγει ότι το βάρος της σταγόνας αυξημένο κατά ένα είναι ίσο με 6. Άρα το βάρος της είναι 5. Στο σημείο αυτό επιστρέφει στην επιμέρους εξίσωση ότι τα τρία εξάγωνα έχουν βάρος ίσο με δύο μονάδες για να καταλήξει ότι το βάρος του κάθε εξαγώνου ίσο με 0,666.

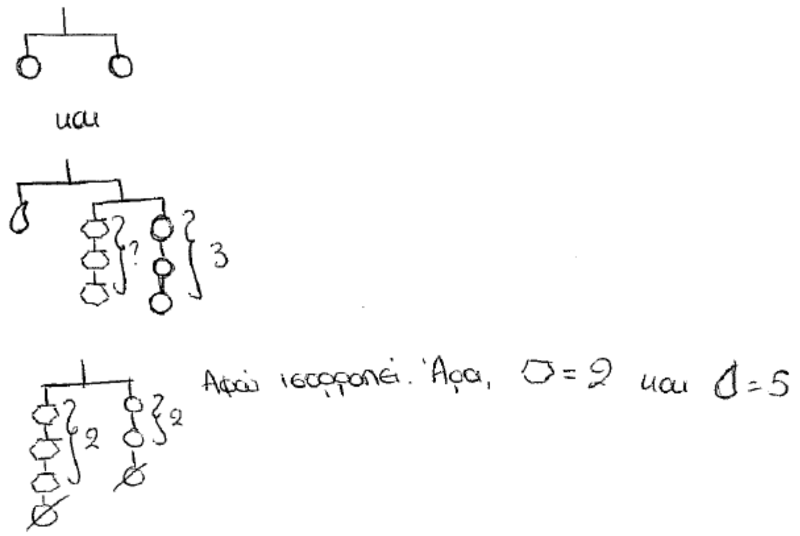
Ο επόμενος τρόπος επίλυσης (**συνδυαστικός**) κάνει ταυτόχρονη χρήση δυο από τους παραπάνω τρόπους επίλυσης, *του κειμενικού και της χρήσης των εικονιδίων* (3/39). Σε συνέχεια του προηγούμενου τρόπου, οι λύτες κάνουν χρήση των εικονιδίων από το περιβάλλον του mobile για να αναπαραστήσουν τις διάφορες σχέσεις που υπάρχουν και συμπληρώνουν με λόγια έτσι ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητό και πιο αναλυτικό το σκεπτικό τους.



Εικόνα 17: Χρήση συνδυαστικού τρόπου επίλυσης (κειμενικού με χρήση εικονιδίων)

Στην Εικόνα 17 βλέπουμε ένα παράδειγμα αυτού του τρόπου επίλυσης όπου ο λύτης αρχικά ονομάζει με τον αριθμό 1 όλο το mobile, τον αριστερό κλάδο του ως 1α και το μικρότερο mobile που σχηματίζεται στην δεξιά πλευρά ως 1β και μεταφράζοντας σωστά την ισορροπία του mobile ως μια σχέση ισοδυναμίας δηλώνει πως ό,τι υπάρχει στη μια πλευρά του θα υπάρχει και στην άλλη. Έτσι, γράφει ότι η μια σφαίρα και η μια σταγόνα («μπάλα και φωτιά») έχουν το ίδιο βάρος με ό,τι υπάρχει στο υπόλοιπο mobile. Συνεχίζει παρουσιάζοντας την σκέψη του πιο αναλυτικά με τη χρήση των εικονιδίων του συστήματος και δείχνει πως μια σφαίρα και μια σταγόνα έχουν το ίδιο βάρος με τρία εξάγωνα και τέσσερις σφαίρες. Ύστερα, επικεντρώνεται στο μικρότερο mobile και ξανά με την χρήση των εικονιδίων αναπαριστά την ισότητα που ισχύει, όπου τρία εξάγωνα και μια σφαίρα έχουν ίδιο βάρος με τρεις σφαίρες. Από αυτή την ισότητα αφαιρεί μια σφαίρα από κάθε πλευρά, αφού μια τέτοια ενέργεια δεν επηρεάζει την κατάσταση ισορροπίας και έτσι προκύπτει ότι τρία εξάγωνα ισοδυναμούν στο βάρος με δύο σφαίρες, μια ισότητα την οποία χρησιμοποιεί αμέσως μετά στην αρχική σχέση που αφορά το συνολικό mobile (μια σφαίρα και μια σταγόνα έχουν ίσο βάρος με τρία εξάγωνα και τέσσερις σφαίρες), αντικαθιστώντας τα τρία εξάγωνα με τις δύο σφαίρες. Έτσι, αυτό που προκύπτει είναι μια νέα ισότητα, στην οποία μια σφαίρα και μια σταγόνα έχουν βάρος ισοδύναμο με αυτό έξι σφαιρών. Για άλλη μια φορά αφαιρεί μια σφαίρα από κάθε πλευρά. Με τον τρόπο αυτό βρίσκει πως μια σταγόνα έχει ίσο βάρος με πέντε σφαίρες, άρα με πέντε μονάδες αφού το βάρος της κάθε σφαίρας είναι μια μονάδα. Τέλος, επιστρέφει και πάλι στο μικρότερο mobile και στη σχέση όπου τρία εξάγωνα έχουν ίσο βάρος με δύο σφαίρες, δηλαδή είναι ίσα με δύο μονάδες, για να καταλήξει ότι το βάρος κάθε εξαγώνου ισούται με 2/3.

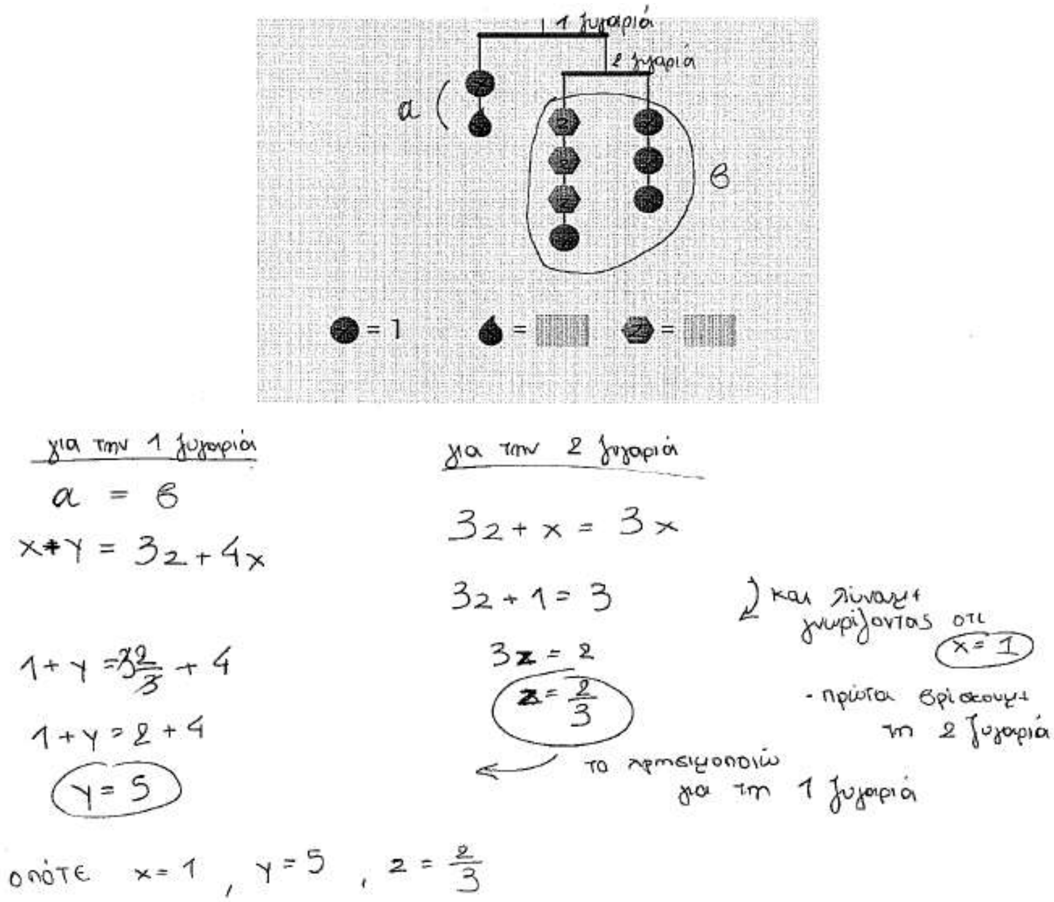
Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο επόμενος τρόπος επίλυσης που τον ονομάζουμε ***εξεικονιστικό***, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε μόλις μια φορά στην δραστηριότητα αυτή. Ο λύτης κάνει και εδώ χρήση των εικονιδίων, ενταγμένων όμως στο mobile (Εικόνα 18), δείχνοντας όχι τη σειρά των παρεμβάσεων που κάνει στο σύστημα (όπως γίνεται στην χρήση των εικονιδίων), αλλά παρουσιάζοντας την συνολική κατάσταση κάθε φορά του συστήματος μετά από την παρέμβασή του. Στην ουσία πρόκειται και πάλι για την χρήση εικονιδίων του συστήματος, που απεικονίζουν όμως τα διακριτά βήματα και όχι την αναλυτική πορεία της επίλυσης.



Εικόνα 18: Παράδειγμα εξεικονιστικού τρόπου επίλυσης

Το πρώτο mobile που έχει σχεδιάσει ο λύτης είναι δηλωτικό της έκφρασης της ισορροπίας ως μιας αναπαράστασης του συμβόλου της ισότητας. Δυο ίσου βάρους ποσότητες δημιουργούν κατάσταση ισορροπίας σε ένα mobile. Το επόμενο στιγμιότυπο απεικονίζει την νέα κατάσταση του συστήματος μετά την απομάκρυνση μιας σφαίρας από κάθε κλάδο του αρχικού mobile, γεγονός που διατηρεί την ισορροπία του συστήματος. Ταυτόχρονα, αυτή η επιλογή επιτρέπει στο λύτη να αποδώσει και συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές σε οντότητες που υπάρχουν στην νέα κατάσταση του συστήματος. Η επιλογή αυτή δεν είναι στο σύνολό της σωστή όπως φαίνεται και στο σχέδιο του λύτη. Δηλαδή, η απομάκρυνση αυτή διατηρεί την ισορροπία στο συνολικό σύστημα (και επομένως ορθά η αρχική δοκός είναι οριζόντια) όμως δεν διατηρεί την ισορροπία στο μικρό mobile στα δεξιά, όπου μετά την απομάκρυνση της μια σφαίρας ο αριστερός του κλάδος έγινε ελαφρύτερος από τον δεξί και επομένως αυτό θα έπρεπε να δηλωθεί με μια κλίση της δοκού. Αυτό έχει ενδιαφέρον γιατί δείχνει τον βαθμό στον οποίο είναι εδραιωμένη μια σε βάθος κατανόηση της λειτουργίας της ισοδυναμίας ανάμεσα σε ποσότητες. Το τρίτο στιγμιότυπο επικεντρώνεται στο μικρό mobile που υπάρχει στην αρχική κατάσταση και όπου γραφικά αναπαριστά την επέμβαση του στο επιμέρους σύστημα με την απομάκρυνση δύο σφαιρών. Αυτό τον βοηθά να αποδώσει τιμές στο περιεχόμενο των κλάδων και να φτάσει στη σωστή απάντηση.

Τέλος, άλλος ένας τρόπος που χρησιμοποιήθηκε αρκετά από τους φοιτητές είναι ο ***αλγεβρικός*** (13/39). Οι λύτες, εξοικειωμένοι με την αλγεβρική επίλυση, στην ουσία αρχικά μετέφρασαν την κατάσταση ισορροπίας σε ένα σύστημα εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, το οποίο στη συνέχεια έλυσαν προκειμένου να προσδιορίσουν τις τιμές των διαφόρων μεταβλητών (Εικ. 19).



Εικόνα 19: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

Όπως φαίνεται, ο λύτης στην αρχή ονομάζει τον αριστερό κλάδο του mobile (αριστερό σκέλος της εξίσωσης) ως α, και τον δεξί κλάδο (δεξί σκέλος της εξίσωσης) ως β. Επίσης, ονομάζει και τις επιμέρους μεταβλητές (την σφαίρα ως χ, το εξάγωνο z και την σταγόνα y). Έπειτα, μεταφράζει σε αλγεβρική μορφή την κατάσταση ισορροπίας όλου του συστήματος ως x+y=3z+4x. Στην συνέχεια, επικεντρώνεται στο μικρότερο mobile όπου και πάλι δημιουργεί την αλγεβρική εξίσωση που το περιγράφει: 3z+x=3x. Αντικαθιστά το x με την δοσμένη τιμή του και έτσι η εξίσωση έχει πια μόνο έναν άγνωστο και την λύνει ακολουθώντας τα τυπικά βήματα επίλυσης γραμμικής εξίσωσης με έναν άγνωστο, για να βρει ότι το z (εξάγωνο) έχει βάρος 2/3. Αντικαθιστά τις τιμές των x και z στην αρχική εξίσωση και έτσι από εξίσωση με τρεις αγνώστους μετασχηματίζεται σε εξίσωση με έναν άγνωστο, που και πάλι λύνεται με την σειρά των τυπικών βημάτων επίλυσης εξίσωσης, γεγονός που τον οδηγεί στη λύση y=5 που δηλώνει και το βάρος της σταγόνας.

Σε γενικές γραμμές στην πρώτη αυτή δραστηριότητα φαίνεται ότι οι φοιτητές που είναι ήδη εξοικειωμένοι με τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης, καταφεύγουν αμέσως στη χρήση μεταβλητών κα έτσι το συγκεκριμένο περιβάλλον των mobiles δεν υπηρετεί τίποτε άλλο πέρα από την χρήση μια διαφορετικής αναπαράστασης. Όσοι όμως δεν είναι εξοικειωμένοι με την χρήση της άλγεβρας καταφεύγουν σε εναλλακτικές προσεγγίσεις για την επίλυση, όπως ο κειμενικός τρόπος επίλυσης, η χρήση των εικονιδίων του συστήματος και ο εξεικονιστικός τρόπος επίλυσης. Υπήρξαν και 3 φοιτητές όπου επέλεξαν να μην γράψουν τίποτα στην κενή σελίδα που τους δόθηκε και απλώς συμπλήρωσαν τις τιμές των σχημάτων επάνω στην εικόνα, χωρίς να εξηγήσουν τίποτα περαιτέρω.

Ακολουθώντας τον τρόπο επίλυσης των φοιτητών (ανεξάρτητα του ποιον επέλεξαν), αυτό που αποτυπώνει την αντίληψη για την ισότητα ως σχέση ισοδυναμίας, είναι ο τρόπος που επεμβαίνουν στο σύστημα κάθε φορά διατηρώντας την ισορροπία του. Σε αυτές τις ενέργειες που αρχικά γίνονται με κριτήριο την διατήρηση της ισορροπίας, είναι δυνατόν να διακρίνουμε τις τυπικές μαθηματικές ενέργειες στις οποίες προβαίνει ένας λύτης (και επομένως μελλοντικά οι μαθητές μας) όταν λύνει μια εξίσωση ή ένα σύστημα αλγεβρικά. Προφανώς στην κατηγορία αυτή δεν ανήκουν οι περιπτώσεις λύσεων που βασίστηκαν έτσι και αλλιώς στην αλγεβρική επίλυση.

Μαθηματική ενέργεια 1: <u>Από τα δυο μέλη μιας ισότητας μπορώ να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό.</u>

Όπως φαίνεται στην λύση της Εικόνας 16, ο λύτης και στην πρώτη και στην τρίτη γραμμή διαγράφει μια σφαίρα από τους δυο κλάδους του συστήματος, με την γνώση ότι αυτό διατηρεί την ισορροπία του. Το ίδιο συμβαίνει και στην λύση της Εικόνας 17, όπου ο φοιτητής αναπαριστά αρχικά την ισότητα που υπάρχει στο μικρότερο mobile (τρία εξάγωνα και μια σφαίρα έχουν ίσο βάρος με τρεις σφαίρες) και στη συνέχεια όπως περιγράφει και ο ίδιος «βγάζει και από τα δύο μέρη την μια σφαίρα» κι έτσι απομένουν τρία εξάγωνα τα οποία έχουν ίσο βάρος με δύο σφαίρες.

Παρόμοια τακτική ακολουθείται και σε όλη τη λύση της Εικόνας 18. Το πρώτο στιγμιότυπο δηλώνει αρχικά τη γνώση ότι κάθε ποσότητα είναι ίση με τον εαυτό της (ανακλαστική ιδιότητα), για να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια αυτή η γνώση στην επόμενη ενέργεια του λύτη που διαγράφει μια σφαίρα από κάθε πλευρά, στην προσπάθεια να οδηγηθεί σε απλούστερη μορφή του συστήματος, χωρίς όμως να διαταραχθεί η κατάσταση ισορροπίας του.

Όλες αυτές οι ενέργειες που περιγράφηκαν παραπάνω αντανακλούν άτυπα όμως δηλωμένη την φορμαλιστική γνώση, ότι από τα δύο μέρη μιας ισότητας *μπορούμε να αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα με την ισότητα να διατηρείται,* ενέργεια που αποτελεί κλασσικό βήμα στην πλειονότητα των εξισώσεων που λύνονται αλγεβρικά.

Μαθηματική ενέργεια 2: <u>Η ισότητα διατηρείται όταν μια ποσότητα αντικατασταθεί με ισοδύναμή της (η περίπτωση της αντικατάστασης).</u>

Μια άλλη μαθηματική ενέργεια που παρατηρήθηκε στις επιλύσεις των φοιτητών και η οποία μας παραπέμπει στην αλγεβρική λύση μιας εξίσωσης ή ενός συστήματος είναι η *αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμη της*.

Όπως μπορεί να δει κανείς πιο πάνω στην Εικόνα16, στο τέλος της τρίτης σειράς, ο λύτης αντικαθιστά τα τρία εξάγωνα με δύο σφαίρες, μια ισότητα που έχει διαπιστώσει προηγουμένως. Έτσι, ακριβώς από κάτω, αντί να δηλώσει πως η σταγόνα έχει ίσο βάρος με τρία εξάγωνα και τρεις σφαίρες, γράφει απευθείας πως η σταγόνα έχει το βάρος πέντε σφαιρών.

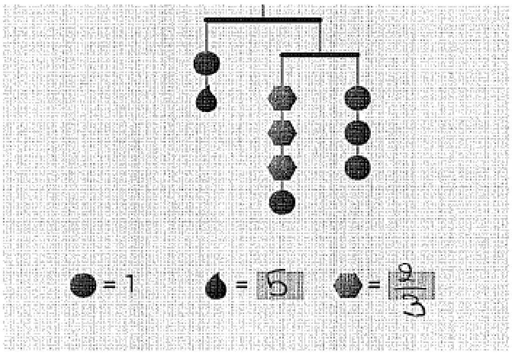
Τα ίδια περίπου βήματα ακολουθεί και ο λύτης στην Εικόνα 17, ο οποίος αφού έχει εντοπίσει την ισότητα ανάμεσα στα τρία εξάγωνα και τις δύο σφαίρες, αποφασίζει να αντικαταστήσει τα τρία εξάγωνα με τις δύο σφαίρες («αντικαθιστώ στην πρώτη σχέση» όπως γράφει χαρακτηριστικά) κι έτσι προκύπτει πως μια σφαίρα και μια σταγόνα ισοδυναμούν με έξι σφαίρες.

Μαθηματική ενέργεια 3: <u>Διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου</u>

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή της ανάλυσης μεγάλο ποσοστό των συμμετεχόντων ακολούθησαν τα ίδια βήματα ώστε να επιλύσουν την δραστηριότητα. Στην επίλυση τους λοιπόν, έφταναν σε ένα σημείο όπου τα τρία εξάγωνα φαινόταν να έχουν ίσο βάρος με δύο σφαίρες και για να βρουν το βάρος του κάθε εξαγώνου έπρεπε να κάνουν την διαίρεση, η οποία παραπέμπει άμεσα σε αυτό που στην φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης αποκαλούμε *διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου*. Στις λύσεις των εικόνων 16 και 17 βλέπουμε ξεκάθαρα να χρησιμοποιείται αυτή η ενέργεια. Στην εικόνα 17 για παράδειγμα, στην τελευταία σειρά της επίλυσης του, ο φοιτητής καταλήγει στην ισότητα σύμφωνα με την οποία 3 εξάγωνα ισοδυναμούν με 2 σφαίρες και επομένως με 2 μονάδες, εφόσον η κάθε σφαίρα έχει βάρος ίσο με 1 μονάδα. Το τελευταίο του βήμα προκειμένου να βρει το βάρος του ενός εξαγώνου είναι να διαιρέσει το συνολικό βάρος των τριών εξαγώνων (2 μονάδες) με την ποσότητα των εξαγώνων (3 εξάγωνα). Με λίγα λόγια, διαιρεί με τον συντελεστή της άγνωστης ποσότητας προκειμένου να βρει την τιμή της. Το ίδιο συμβαίνει και στην λύση της εικόνας 15, με πιο έμμεσο όμως τρόπο. Ο λύτης γνωρίζει πως η πλευρά με τα τρία εξάγωνα και τη μια σφαίρα έχει ίσο βάρος με 3 σφαίρες. Αφαιρώντας λοιπόν, μια σφαίρα από κάθε πλευρά προκύπτει πως τρία εξάγωνα ισοδυναμούν με 2 μονάδες (2 σφαίρες). Έτσι, η τιμή που αποδίδει στο εξάγωνο (0,6), έχει προκύψει από τη διαίρεση με τον συντελεστή του εξαγώνου.

Μαθηματική ενέργεια 4: <u>Χωρίζω τις γνωστές ποσότητες από τις άγνωστες</u>

Τέλος, μια ακόμη μαθηματική ενέργεια που παρατηρήθηκε στις επιλύσεις των φοιτητών είναι ότι χώριζαν τα άγνωστα σχήματα από τα γνωστά, ώστε να μπορέσουν να βρουν την τιμή των αγνώστων σχημάτων. Αυτό το βήμα στην επίλυσή τους καταλαβαίνουμε ότι αντανακλά την άτυπη γνώση πως μπορούμε να *χωρίσουμε τις γνωστές από τις άγνωστες τιμές* σε μια ισότητα, προκειμένου να βρούμε την τιμή των αγνώστων. Στα συγκεκριμένα παραδείγματα που έχουν δοθεί παραπάνω, η ενέργεια αυτή δεν φαίνεται με ξεκάθαρο τρόπο. Για το λόγο αυτό παρουσιάζεται η παρακάτω εικόνα, στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε εμφανώς το σκεπτικό του λύτη. Στο τέλος της επίλυσής του, στην προτελευταία σειρά, αναδεικνύει την ισότητα που αντιστοιχεί στον δεξί κλάδο του συνολικού mobile, σύμφωνα με την οποία, μια σφαίρα και μια σταγόνα ισοδυναμούν με 6 μονάδες. Επόμενό του βήμα είναι να αντικαταστήσει την τιμή της σφαίρας την οποία γνωρίζει και στη συνέχεια να την μεταφέρει στη δεξιά πλευρά της ισότητας, έτσι ώστε να χωρίσει την άγνωστη μεταβλητή του (βάρος σταγόνας) από τις γνωστές.



Ξέραμε ότι: $1 + \sigma = 4 + 3⬡$

Επίσης : Οι 3 σφαίρες (●) είναι ίσες με τρία πολύγωνα και μια σφαίρα.
Άρα οι 2 σφαίρες είναι ίσες με 3 πολύγωνα
Επομένως, 3 πολύγωνα είναι ίσα με 2

$\boxed{⬡ = \frac{2}{3}}$

Άρα : $4 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 4 + \frac{6}{3} = 4 + 2 = 6$

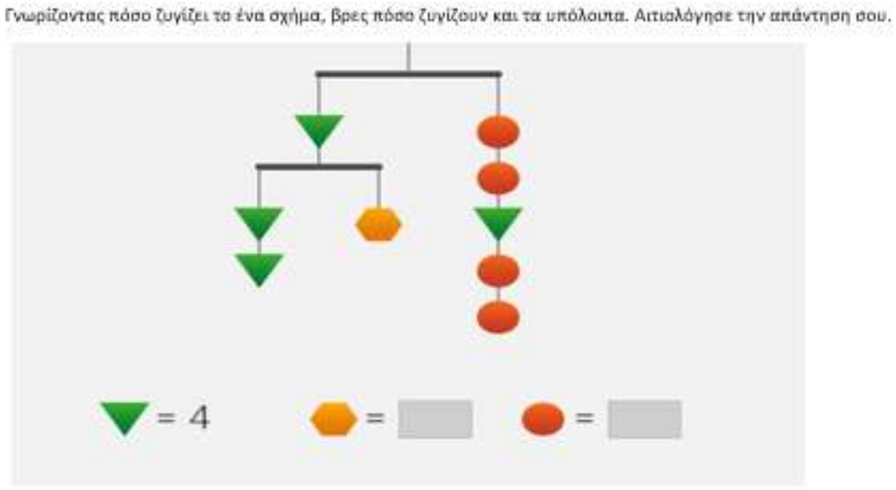
$○ + \sigma = 6 \Rightarrow 1 + \sigma = 6 \Rightarrow \sigma = 6 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sigma = 5}$

Εικόνα 20: Παράδειγμα μαθηματικής ενέργειας-χωρίζω γνωστές ποσότητες από άγνωστες

Αν θέλουμε να δούμε τις τέσσερις αυτές μαθηματικές ενέργειες συγκεντρωτικά στο επίπεδο που χρησιμοποιήθηκαν από τους λύτες στην πρώτη δραστηριότητα, πιο πολλές φορές εντοπίστηκε η διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου (αν αφαιρέσουμε από το σύνολο τους 12 που έλυσαν με εξίσωση), γεγονός που δικαιολογείται από όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως. Με μικρότερη συχνότητα παρατηρήθηκε χρήση της αφαίρεσης ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές (20/27) και της ενέργειας να χωρίζουν γνωστούς από αγνώστους. Τέλος, λιγότερο συγκριτικά με τις υπόλοιπες χρησιμοποιήθηκε η αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμη της (15/27), χωρίς αυτό να μειώνει την σημαντικότητά της.

4.1.2 Ανάλυση 2ης δραστηριότητας

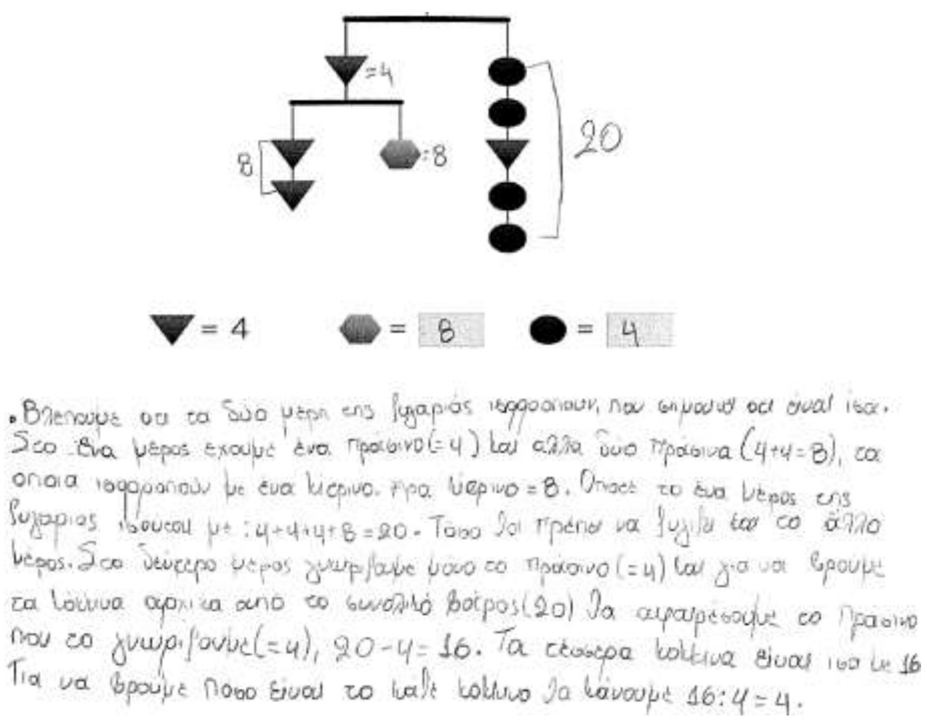


Εικόνα 21: 2η δραστηριότητα

Την δεύτερη δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 39 φοιτητές, η πλειονότητα των οποίων ακολούθησε την ίδια πορεία προκειμένου να φτάσει στην επίλυσή της. Πιο αναλυτικά, οι λύτες ξεκινούσαν από τον αριστερό κλάδο του μικρότερου mobile, όπου εντόπιζαν την σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στα δύο τρίγωνα και το ένα εξάγωνο. Η τιμή του τριγώνου ήταν γνωστή, καθώς δινόταν ως δεδομένο της άσκησης και εφόσον το εξάγωνο ισοδυναμεί με δύο τρίγωνα ήταν εύκολο να βρεθεί η τιμή του βάρους του (8 μονάδες–4 μονάδες το κάθε τρίγωνο). Το επόμενο βήμα ήταν να υπολογίσουν την συνολική τιμή του αριστερού κλάδου του συστήματος, αντικαθιστώντας τις τιμές των δυο μεταβλητών (βάρος τριγώνου και βάρος εξαγώνου) που τους ήταν πλέον γνωστές. Έτσι, έβρισκαν το συνολικό βάρος του αριστερού κλάδου του συστήματος ίσο με 20 μονάδες, τιμή η οποία αποτελεί και το βάρος του δεξιού κλάδου εφόσον όλο το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία. Στον δεξί κλάδο του mobile υπάρχουν 4 σφαίρες και ένα τρίγωνο που ζυγίζουν συνολικά 20 μονάδες. Οι λύτες αφαιρούσαν από το συνολικό βάρος του δεξιού κλάδου το βάρος του τριγώνου και έτσι προέκυπτε μια νέα εξίσωση κατά την οποία τέσσερις σφαίρες ισοδυναμού με 16 μονάδες, για να καταλήξουν έπειτα ότι το βάρος της κάθε σφαίρας είναι ίσο με 4 μονάδες.

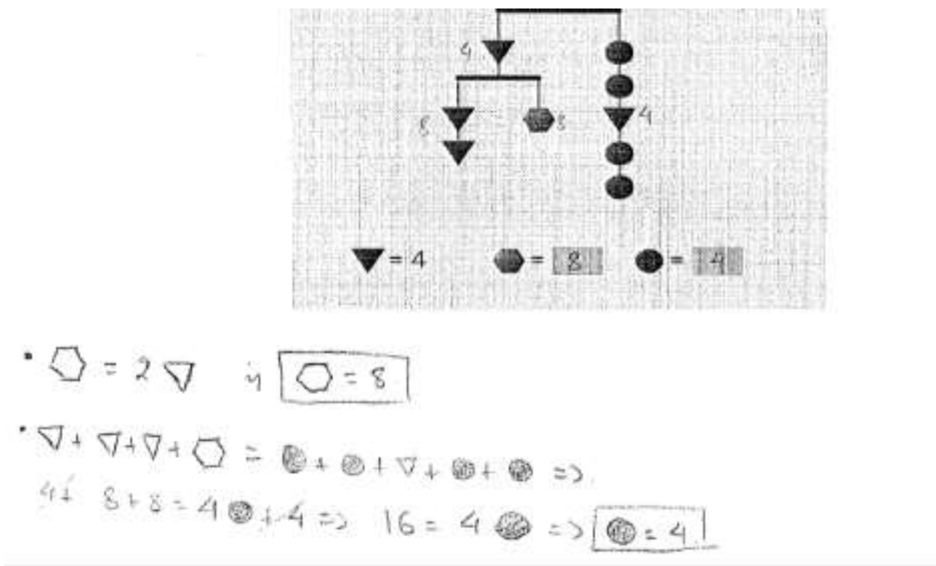
Παρά την κοινή πορεία των περισσότερων για την επίλυση της δραστηριότητας, ο τρόπος με τον οποίο την προσέγγισαν δεν ήταν ίδιος για όλους. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν πέντε διαφορετικοί τρόποι επίλυσης, οι οποίοι όμως δεν διέφεραν συγκριτικά με την προηγούμενη δραστηριότητα. Ακόμη και η συχνότητα με την οποία χρησιμοποιήθηκαν δεν διαφοροποιήθηκε σημαντικά στους περισσότερους από αυτούς.

Οι περισσότεροι φοιτητές επέλεξαν τον ***κειμενικό*** τρόπο επίλυσης (16/39), κατά τον οποίο χρησιμοποίησαν μόνο λόγια για να περιγράψουν τα βήματα της διαδικασίας που ακολούθησαν, όπως φαίνεται στην εικόνα 22. Συγκεκριμένα ο λύτης στο παράδειγμα της εικόνας εξηγεί με λόγια από την αρχή την σκέψη του, ξεκινώντας πρώτα από την κατάσταση ισορροπίας όλου του συστήματος, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζει αναλυτικά τις ενέργειες που πραγματοποίησε με σκοπό να βρει τις τιμές των μεταβλητών της δραστηριότητας.



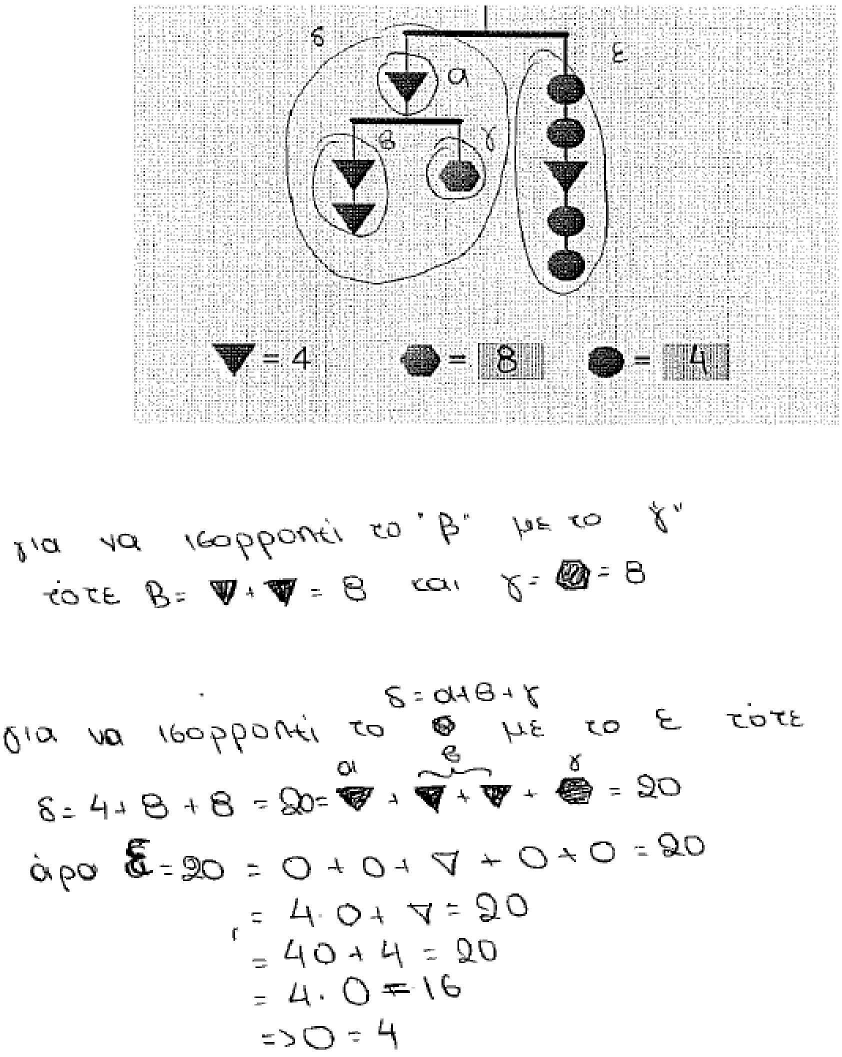
Εικόνα 22: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

Λιγότεροι ήταν εκείνοι που επέλεξαν να κάνουν ***χρήση των εικονιδίων*** που υπήρχαν ενσωματωμένα στο περιβάλλον του mobile (4/39) με σκοπό να περιγράψουν την πορεία της επίλυσής τους. Παρά την μικρή χρήση του τρόπου αυτού, είναι σημαντικό το ότι στην περίπτωση αυτή οι λύτες απεικονίζουν εναλλακτικά σχέσεις και ισότητες, καθώς δεν επιλέγουν την τυπική αλγεβρική προσέγγιση που θέλει να γίνεται χρήση γραμμάτων-μεταβλητών. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στην εικόνα 23, ο λύτης μεταφέρει αρχικά την κατάσταση ισορροπίας του μικρότερου στα αριστερά mobile και στη συνέχεια όλου του συστήματος σε μορφή εξίσωσης, με την χρήση όμως των εικονιδίων που προϋπήρχαν στο mobile. Βρίσκει πρώτα την τιμή του βάρους του εξαγώνου μέσα από την ισοδυναμία του με τα δύο τρίγωνα και έπειτα αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην σχέση που αντιπροσωπεύει το συνολικό mobile, βρίσκει και την τιμή του βάρους της σφαίρας.



Εικόνα 23: Παράδειγμα Εικονικού τρόπου επίλυσης

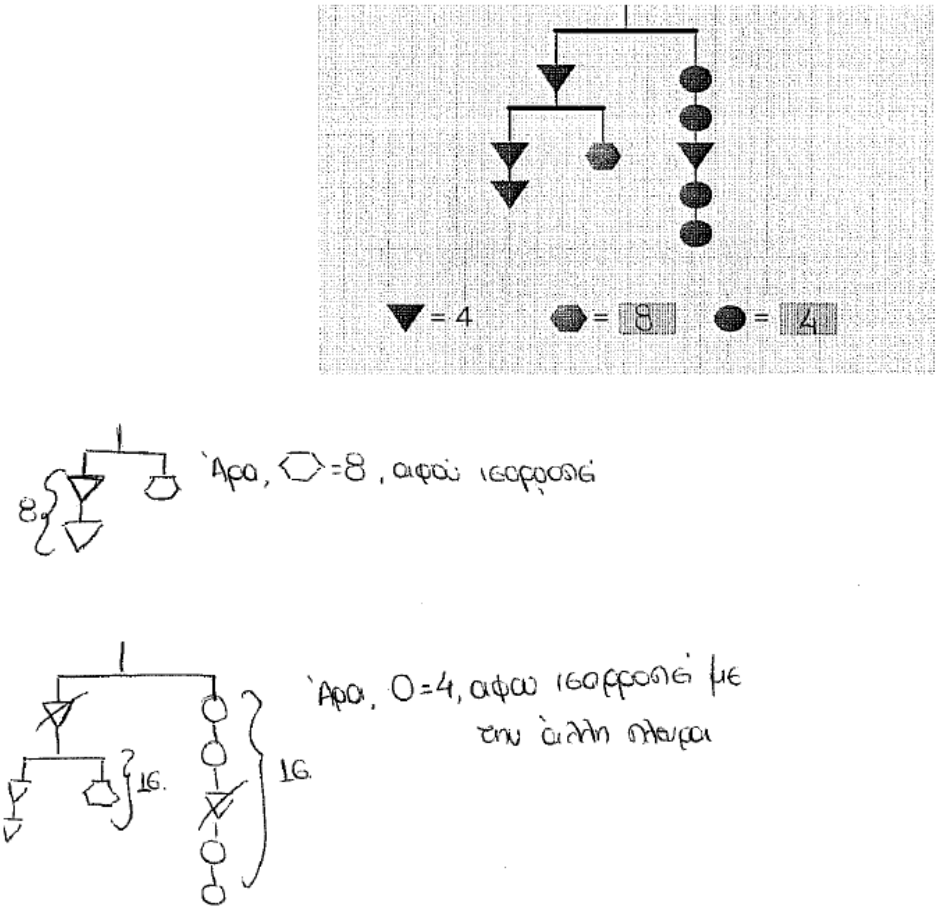
Παραπλήσια τακτική φαίνεται ότι ακολούθησαν όσοι επέλεξαν έναν ***συνδυαστικό*** τρόπο επίλυσης (6/39) καθώς χρησιμοποίησαν και τους δύο τρόπους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Στην εικόνα 24 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο λύτης χρησιμοποιεί ταυτόχρονα λέξεις αλλά και τα εικονίδια από το περιβάλλον του mobile, ώστε να διατυπώσει όσο καλύτερα γίνεται τα βήματα πάνω στα οποία στήριξε την επίλυσή του. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί τα λόγια για να περιγράψει την σκέψη του, αλλά κάνει χρήση των σχημάτων για να αποτυπώσει τις διάφορες σχέσεις και ισότητες που εντοπίζει μέσα από το mobile.



Εικόνα 24: Παράδειγμα συνδυαστικού τρόπου επίλυσης

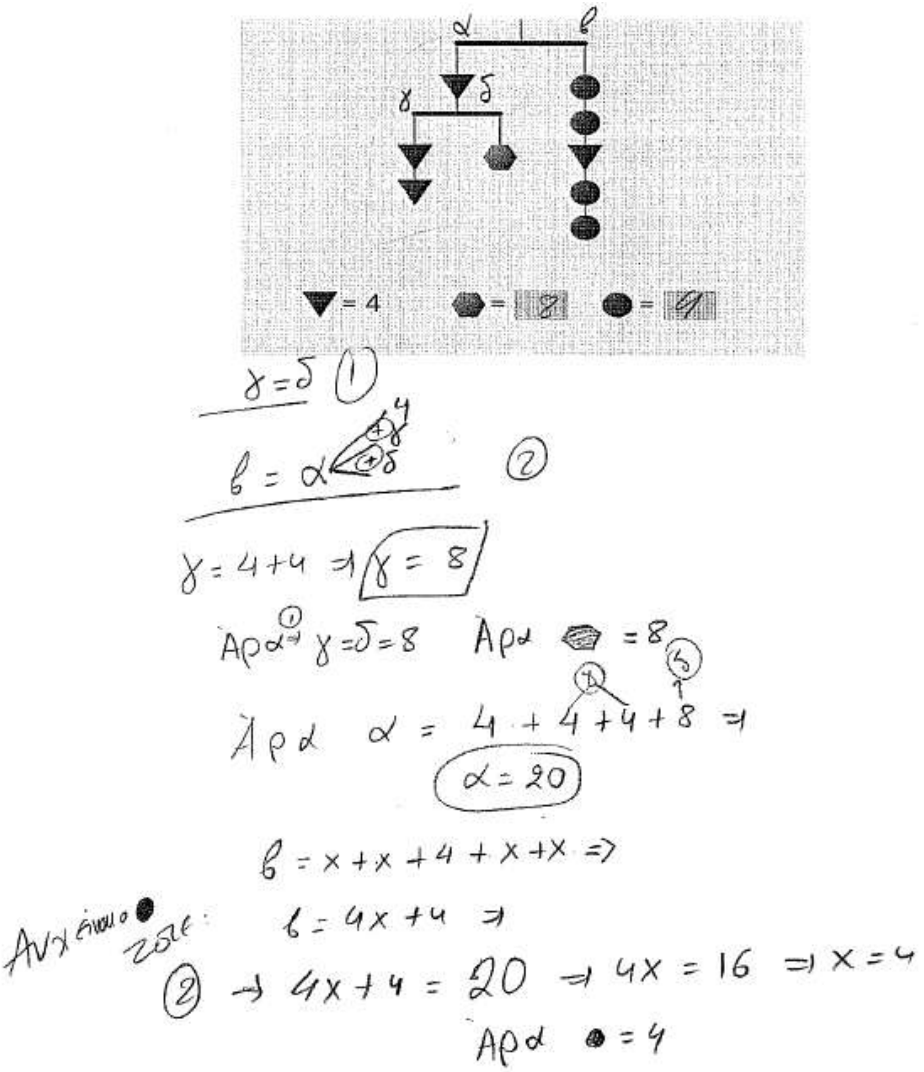
Επίσης, παρατηρήθηκε ξανά η χρήση του **εξεικονιστικού** τρόπου επίλυσης, ο οποίος έχει αναλυθεί στην πρώτη δραστηριότητα. Αν και χρησιμοποιήθηκε μόνο από δύο φοιτητές, αξίζει να το αναφέρουμε, διότι βλέπουμε να γίνεται χρήση των εικονιδίων του συστήματος με έναν διαφορετικό, μη τυπικό τρόπο, παρουσιάζοντας συνολικά την κατάσταση του συστήματος μετά από κάθε παρέμβαση του λύτη σε αυτό. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στην εικόνα 25, ο λύτης αρχικά παρουσιάζει απομονωμένο το μικρότερο mobile, που σχηματίζεται στην αριστερή πλευρά του συστήματος, κάτι που ουσιαστικά αποτελεί το πρώτο βήμα του στην διαδικασία της επίλυσης της δραστηριότητας. Στη συνέχεια αφού έχει βρει την τιμή της μια μεταβλητής (βάρος εξαγώνου), μας μεταφέρει στο επόμενο βήμα της επίλυσης αποτυπώνοντας συνολικά το mobile, στο οποίο μπορεί και αποδίδει συγκεκριμένες τιμές στα σχήματα.

Στο βήμα αυτό φαίνεται καθαρά η ιδέα του λύτη ότι σε μια εξίσωση μπορώ να αφαιρέσω και από τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό χωρίς αυτό να επηρεάζει την ισότητα. Πιο συγκεκριμένα, ο λύτης διαγράφει από κάθε κλάδο του mobile ένα τρίγωνο, διευκολύνοντας με τον τρόπο αυτό τη διαδικασία επίλυσης.



Εικόνα 25: Παράδειγμα Εξεικονιστικού τρόπου επίλυσης

Τέλος, αρκετοί ήταν και πάλι αυτοί που επέλεξαν να επιλύσουν την δραστηριότητα με ***αλγεβρικό*** τρόπο (9/39). Στην ουσία το περιβάλλον του mobile για αυτούς αποτέλεσε απλά μια διαφορετική αναπαράσταση της ισορροπίας του συστήματος και χρησιμοποιήθηκε μόνο για να μεταφράσουν αυτή την κατάσταση ισορροπίας με τη χρήση αλγεβρικής γλώσσας. Στην Εικόνα 26), ο λύτης χρησιμοποιεί γράμματα για να ονομάσει τους κλάδους του mobile και να εκφράσει τις ισότητες μεταξύ αυτών των κλάδων (ο κλάδος γ ισοδυναμεί με τον κλάδο δ αφού αποτελούν ένα μικρότερο mobile το οποίο ισορροπεί και ο κλάδος α ισοδυναμεί με τον κλάδο β αφού όλο το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία). Στη συνέχεια, βρίσκει την τιμή του εξαγώνου και την συνολική τιμή του κλάδου α, η οποία ισχύει και για τον κλάδο β λόγω της ισορροπίας του mobile. Στο τέλος, παρατηρούμε ότι μεταφράζει την ισορροπία όλου του mobile σε μια εξίσωση, την οποία έπειτα λύνει προκειμένου να βρει και την τιμή της άγνωστης μεταβλητής (βάρος σφαίρας) που έχει ονομάσει με το γράμμα χ.



Εικόνα 26: Παράδειγμα Αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

Συγκεντρωτικά, φαίνεται ότι οι φοιτητές που είναι εξοικειωμένοι με τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης, καταφεύγουν ευκολότερα σε αυτόν, αν και αυτό που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι συγκριτικά με την πρώτη δραστηριότητα, ο συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης χρησιμοποιήθηκε από λιγότερους φοιτητές. Οι περισσότεροι όμως προτίμησαν τρόπους επίλυσης διαφορετικούς από τον αλγεβρικό, όπως είναι ο κειμενικός τρόπος επίλυσης που επιλέχθηκε από αρκετούς λύτες, η χρήση των εικονιδίων που υπήρχαν στο mobile, ο συνδυασμός των δύο αυτών τρόπων αλλά και ο εξεικονιστικός τρόπος. Υπήρξαν και τρεις φοιτητές οι οποίοι είτε δεν έλυσαν καθόλου την δραστηριότητα είτε δεν έγραψαν κάτι που να μας δείχνει τον τρόπο σκέψης τους.

Παράλληλα, αναλύθηκε ο τρόπος παρέμβασης των φοιτητών πάνω στο αρχικό σύστημα, δηλωτικός πάντα της πρόθεσής τους να απλοποιήσουν την κατάσταση, διατηρώντας όμως την ισορροπία του mobile και ο οποίος μας παραπέμπει στις μαθηματικές ενέργειες ενός λύτη που ασχολείται με ένα τυπικό σύστημα εξισώσεων στην άλγεβρα. Σε αυτή την δραστηριότητα συναντάμε συνολικά τέσσερις τέτοιες ενέργειες, οι οποίες δεν διαφοροποιούνται από αυτές που αναλύθηκαν στην προηγούμενη δραστηριότητα. Οι ενέργειες αυτές όπως αποκαλούνται κατά την φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης είναι η *αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τα δύο μέλη μιας ισότητας* και η *αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της* χωρίς να διαταράσσεται η ισότητα. Επίσης, συναντάμε και τη *διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου* αλλά και την ενέργεια κατά την οποία ο λύτης *χωρίζει γνωστούς από αγνώστους* προκειμένου να βρει τις τιμές των μεταβλητών που του ζητούνται. Οι δυο τελευταίες ενέργειες αναλύονται με μια μικρή επιφύλαξη διότι μερικές φορές δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε απόλυτα τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονταν οι λύτες.

Πιο αναλυτικά, στο αρχικό σημείο της επίλυσης τους, όπου οι φοιτητές εντόπιζαν ότι το βάρος ενός εξαγώνου ισοδυναμεί με το βάρος των δύο τριγώνων, αντικαθιστούσαν την τιμή του τριγώνου που ήταν γνωστή κι έτσι κατέληγαν στο ότι το κάθε εξάγωνο έχει βάρος ίσο με 8 μονάδες (4 και 4 για κάθε τρίγωνο). Στην προσπάθειά τους λοιπόν να βρουν την τιμή της μιας μεταβλητής (βάρος εξαγώνου), αποκαλύπτεται άτυπα η πεποίθησή τους ότι μπορούμε να *αντικαταστήσουμε μια ποσότητα με μια ισοδύναμή της,* με την ισότητα να παραμένει αναλλοίωτη. Στην εικόνα 23 είναι ορατή αυτή η ενέργεια, καθώς ο λύτης έχει μεταφέρει την κατάσταση ισορροπίας του mobile σε μορφή εξίσωσης με τη χρήση των εικονιδίων του συστήματος και στην αμέσως επόμενη σειρά αντικαθιστά τις τιμές των μεταβλητών που γνωρίζει, αφήνοντας ουσιαστικά μια άγνωστη μεταβλητή την οποία θα βρει στη συνέχεια.

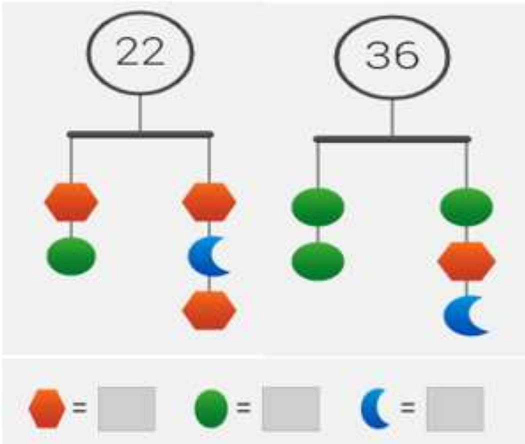
Λίγο παρακάτω, έχοντας βρει πως το συνολικό βάρος του αριστερού κλάδου του συστήματος είναι ίσο με 20 μονάδες, μετέφεραν την τιμή αυτή και στον δεξί κλάδο του mobile (4 σφαίρες και 1 τρίγωνο), εφόσον όλο το σύστημα ισορροπεί. Αυτό που ήθελαν να βρουν ήταν η τιμή του βάρους της σφαίρας και για να το πετύχουν αφαιρούσαν από το συνολικό βάρος του δεξιού κλάδου (20) το βάρος του τριγώνου (4). Οι περισσότεροι σύμφωνα με τα όσα φάνηκαν από τις απαντήσεις τους, αποφάσισαν να πραγματοποιήσουν αυτό το βήμα *αφαιρώντας* ουσιαστικά *την ίδια ποσότητα και από τις δύο πλευρές της ισότητας* (4 σφαίρες=16*)*, δηλαδή το τρίγωνο από τη μια πλευρά και 4 μονάδες βάρους από την άλλη πλευρά που ήταν η ισοδύναμη τιμή του. Η ενέργεια αυτή μπορεί να επιβεβαιωθεί και την εικόνα 23, όπου ο φοιτητής αναλύει την ισότητα ανάμεσα στις δυο πλευρές του mobile (4+8+8=4 σφαίρες+4) και στην συνέχεια διαγράφει και από τις δυο πλευρές 4 μονάδες. Λιγότεροι ήταν εκείνοι που επέλεξαν να αντικαταστήσουν την τιμή του τριγώνου και στη συνέχεια να *χωρίσουν τις γνωστές μεταβλητές* (βάρος τριγώνου και συνολική τιμή του δεξιού κλάδου) *από τις άγνωστες* (βάρος σφαίρας) με σκοπό να βρουν την τιμή της σφαίρας. Συγκεκριμένα, στην εικόνα 23 μπορούμε να διαπιστώσουμε την συγκεκριμένη ενέργεια. Στο τελευταίο κομμάτι της απάντησής του ο λύτης παρουσιάζει, χρησιμοποιώντας τα εικονίδια του συστήματος, την ισότητα που αντιστοιχεί στον αριστερό κλάδο του συνολικού mobile, κατά την οποία τέσσερις σφαίρες και ένα τρίγωνο ισοδυναμούν με 20 μονάδες βάρους. Στην αμέσως επόμενη σειρά, εντοπίζουμε ότι ο λύτης έχει αντικαταστήσει την τιμή του τριγώνου, η οποία αποτελεί δεδομένο της δραστηριότητας και την έχει μεταφέρει στην δεξιά πλευρά της ισότητας, με σκοπό να διαχωρίσει την άγνωστη μεταβλητή του (το βάρος της σφαίρας). Διαπιστώνεται λοιπόν ξανά μια άτυπη εμφάνιση ορισμένων τυπικών βημάτων που ακολουθεί ένας λύτης όταν επιλύει ένα αλγεβρικό σύστημα.

Στο τέλος, οι περισσότεροι φοιτητές κατέληξαν στο ότι τέσσερις σφαίρες ισοδυναμούν με 16 μονάδες. Η πλειονότητα αυτών προκειμένου να βρει την τιμή βάρους της μιας σφαίρας, διαίρεσε την συνολική τιμή όλων των σφαιρών με τον αριθμό από τις σφαίρες, ενέργεια που παραπέμπει άμεσα σε αυτό που στην φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης αποκαλούμε *διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου*. Η εικόνα 23 επιβεβαιώνει την ύπαρξη της παραπάνω ενέργειας διότι στο τελευταίο κομμάτι της επίλυσης του ο φοιτητής καταλήγει στην ισότητα όπου 4 σφαίρες είναι ίσες με 16 μονάδες. Το επόμενό του βήμα είναι να διαιρέσει τον αριθμό που υποδηλώνει την ποσότητα από τις σφαίρες με το συνολικό βάρος όλων των σφαιρών (16). Στην ουσία δηλαδή διαιρεί με τον συντελεστή της άγνωστης μεταβλητής του που είναι το βάρος της σφαίρας.

Τονίζεται ότι στην δεύτερη αυτή ανάλυση σχετικά με τις ενέργειες που πραγματοποίησαν οι φοιτητές με σκοπό την διατήρηση της ισορροπίας του συστήματος, δεν συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις που χρησιμοποίησαν αλγεβρικό τρόπο επίλυσης, διευκρινίζοντας με αυτό τον τρόπο τη διαφορά που προκύπτει ανάμεσα στο αρχικό δείγμα και στους αριθμούς που δίνονται σε αυτή την τελευταία παράγραφο. Κοιτώντας συνολικά τις τέσσερις αυτές μαθηματικές ενέργειες παρατηρούμε ότι περισσότερο εντοπίστηκαν στις απαντήσεις των φοιτητών η αντικατάσταση (28/30) και η διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου (27/30). Έπειτα ακολουθεί σε χρήση η ενέργεια κατά την οποία αφαιρούν την ίδια ποσότητα και από τις δύο πλευρές (15/30), ενώ τέλος λιγότεροι ήταν εκείνοι που χώρισαν τις γνωστές από τις άγνωστες τιμές, για να βρουν κάποιο από τα ζητούμενα της δραστηριότητας (6/30).

4.1.3 Ανάλυση 3ης δραστηριότητας

Γνωρίζοντας το συνολικό βάρος βρες πόσο ζυγίζει το κάθε σχήμα ξεχωριστά. Αιτιολόγησε την απάντηση σου.



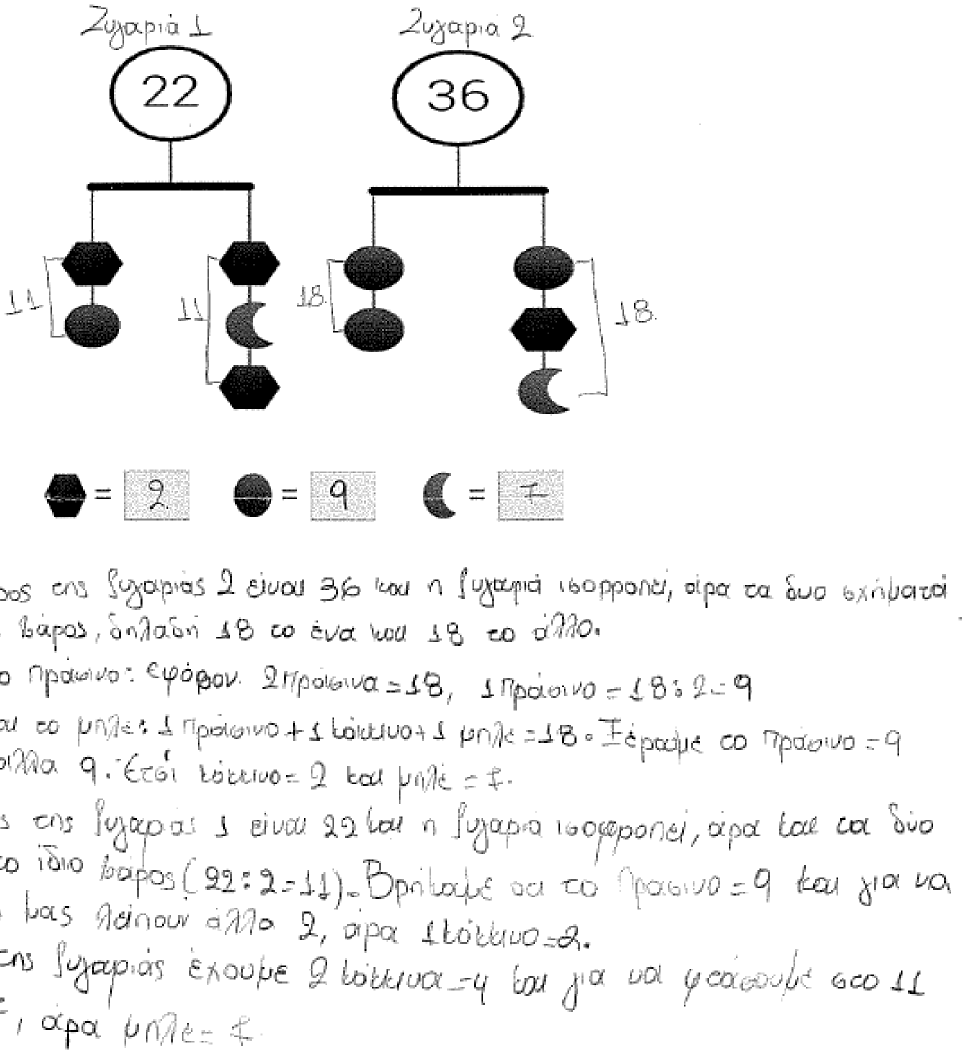
Εικόνα 27: $3^{η}$ δραστηριότητα

Την τρίτη δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 37 φοιτητές. Αυτή τη φορά η δραστηριότητα, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα, περιλαμβάνει δύο διαφορετικά mobile κι αυτό που δινόταν ως δεδομένο ήταν το συνολικό βάρος του κάθε mobile. Όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητες έτσι και σε αυτή, η πλειονότητα των φοιτητών ακολούθησε μια κοινή πορεία προκειμένου να την επιλύσει.

Πιο αναλυτικά, οι περισσότεροι φοιτητές ξεκινούσαν από το mobile στα δεξιά, στο οποίο διαιρούσαν το συνολικό του βάρος (36) με το 2, προκειμένου να βρουν ξεχωριστά το βάρος του κάθε κλάδου. Έτσι, έβρισκαν πως ο κάθε κλάδος στο δεξί mobile ισοδυναμεί με 18 μονάδες βάρους. Στον αριστερό κλάδο αυτού του mobile υπήρχαν μόνο δύο ίδιες σφαίρες, επομένως, ήταν εύκολο για τους λύτες να διαιρέσουν το βάρος της αριστερής πλευράς του mobile (18) με το 2, εφόσον δυο ήταν τα ίδια σχήματα και να βρουν ότι η κάθε σφαίρα έχει βάρος ίσο με 9 μονάδες. Το επόμενό τους βήμα αφορούσε το αριστερό mobile της δραστηριότητας, στο οποίο ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν (διαίρεση του συνολικού βάρους με το 2), έβρισκαν πως το βάρος του κάθε κλάδου ήταν ισοδύναμο με 11 μονάδες. Έπειτα, προκειμένου να βρουν το βάρος του εξαγώνου χρησιμοποιούσαν το βάρος της σφαίρας που βρήκαν προηγουμένως. Ο αριστερός κλάδος του πρώτου mobile αποτελούνταν από ένα εξάγωνο και μια σφαίρα τα οποία συνολικά ζυγίζαν 11 μονάδες. Αντικαθιστούσαν ή αφαιρούσαν λοιπόν σε αυτή την ισότητα την τιμή της σφαίρας (9), με αποτέλεσμα να βρίσκουν το βάρος του εξαγώνου ίσο με 2 μονάδες. Μετά από αυτό έμενε να βρουν το βάρος από το μισοφέγγαρο. Για να το καταφέρουν αυτό χρησιμοποιούσαν την τιμή της μεταβλητής που μόλις βρήκαν, δηλαδή του εξαγώνου, στον δεξιό κλάδο του πρώτου mobile, όπου 2 εξάγωνα και 1 μισοφέγγαρο ζυγίζουν συνολικά 11 μονάδες. Έτσι, αντικαθιστούσαν την τιμή των δύο εξαγώνων και κατέληγαν στο βάρος του μισοφέγγαρου το οποίο έχει την τιμή 7.

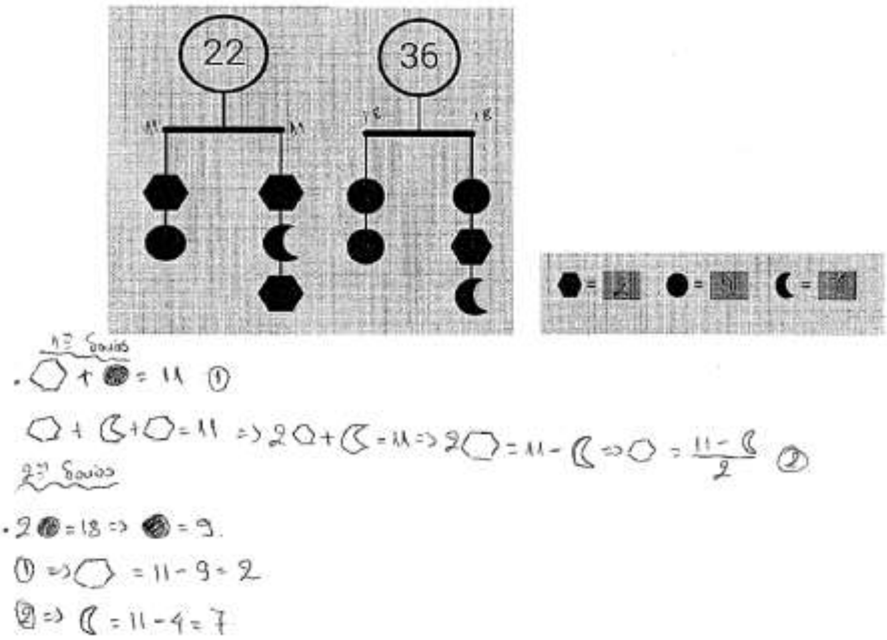
Ωστόσο, ο τρόπος με τον οποίο υλοποίησαν την επίλυση της δραστηριότητας, δεν ήταν ίδιος για όλους, παρά την κοινή πορεία που περιγράφηκε παραπάνω. Παρατηρήθηκαν συνολικά έξι διαφορετικοί **τρόποι επίλυσης**, πέντε από τους οποίους έχουμε συναντήσει και αναλύσει ξανά.

Ο πιο συχνός τρόπος με τον οποίο επέλεξαν να εργαστούν οι φοιτητές ήταν ο **κειμενικός** (11/37), κατά τον οποίο περιέγραφαν τα βήματα που ακολούθησαν μόνο με λέξεις. Στην εικόνα 28 παρατηρούμε έναν φοιτητή να περιγράφει αναλυτικά με λόγια τον τρόπο σκέψης του και την πορεία που ακολουθεί για να επιλύσει την δραστηριότητα, η οποία μάλιστα είναι συμβατή με την κοινή πορεία που περιγράφηκε στην αρχή του κειμένου. Ξεκινώντας λοιπόν από το mobile στα δεξιά, βρήκε το βάρος της μιας σφαίρας και στη συνέχεια το χρησιμοποίησε στο αριστερό mobile για να βρει και το βάρος των άλλων δυο μεταβλητών.



Εικόνα 28: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

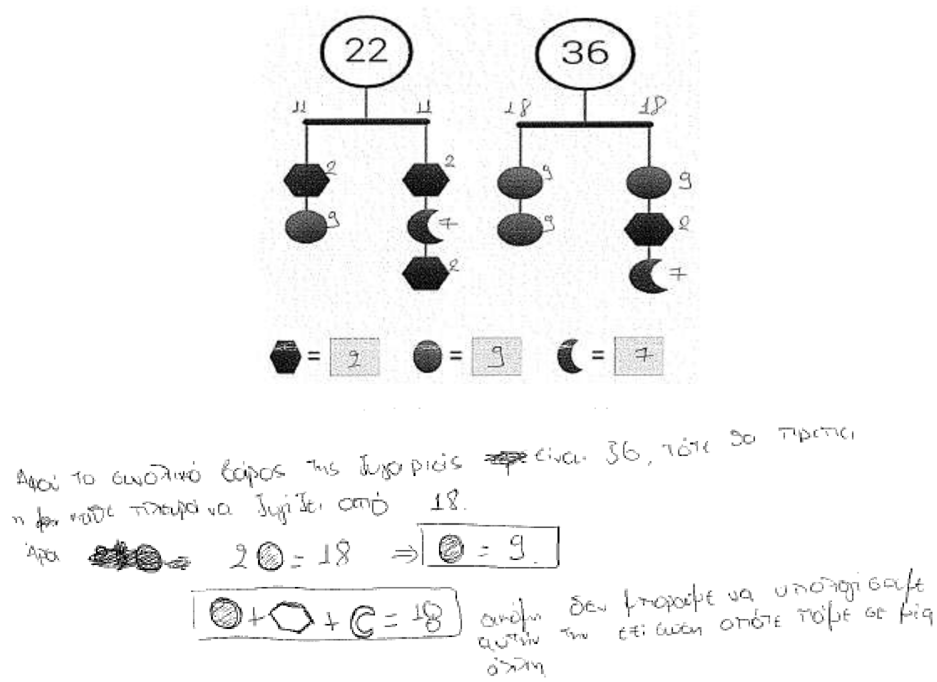
Μικρότερος ήταν ο αριθμός των λυτών που επέλεξαν να επιλύσουν την δραστηριότητα κάνοντας **χρήση των εικονιδίων του συστήματος** (9/37). Ένα παράδειγμα αυτού του τρόπου επίλυσης φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

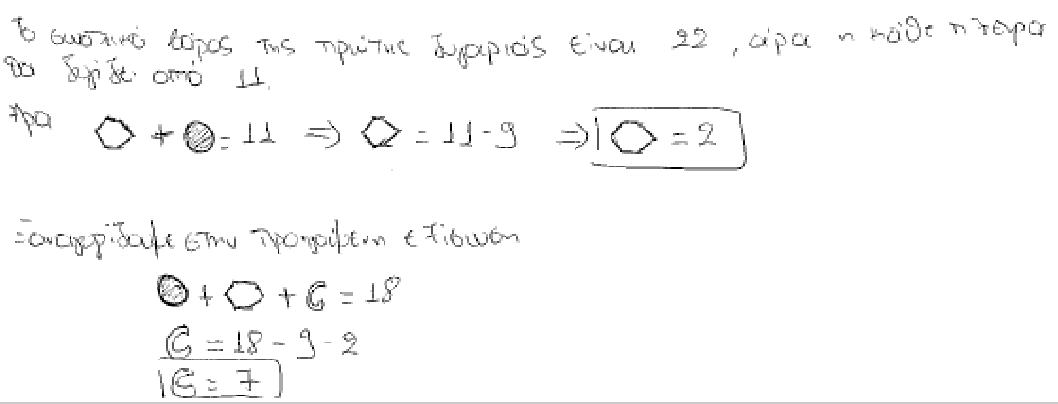


Εικόνα 29: Παράδειγμα τρόπου επίλυσης με χρήση των εικονιδίων του συστήματος

Ο συγκεκριμένος φοιτητής παρουσιάζει την πορεία της επίλυσής του χρησιμοποιώντας μόνο τα εικονίδια που υπάρχουν στα mobile που του δόθηκαν. Αρχικά, φαίνεται πως ξεκινάει διαφορετικά από τους περισσότερους, καθώς ασχολείται πρώτα με το mobile στα αριστερά. Ασχολείται λοιπόν, με την ισότητα που υπάρχει στον δεξί κλάδο του πρώτου mobile, όπου δύο εξάγωνα και ένα μισοφέγγαρο ισοδυναμούν με 11 μονάδες βάρους και προσπαθεί να την λύσει ως προς τη μια άγνωστη μεταβλητή του, την τιμή του εξαγώνου. Ωστόσο, δεν προχώρησε περαιτέρω αυτή του την σκέψη. Έτσι, στη συνέχεια ακολούθεί την ίδια πορεία με τους υπόλοιπους, προκειμένου να επιλύσει την δραστηριότητα.

Με παραπλήσια συχνότητα χρησιμοποιήθηκε από τους φοιτητές και ο **συνδυαστικός** τρόπος επίλυσης (8/37).

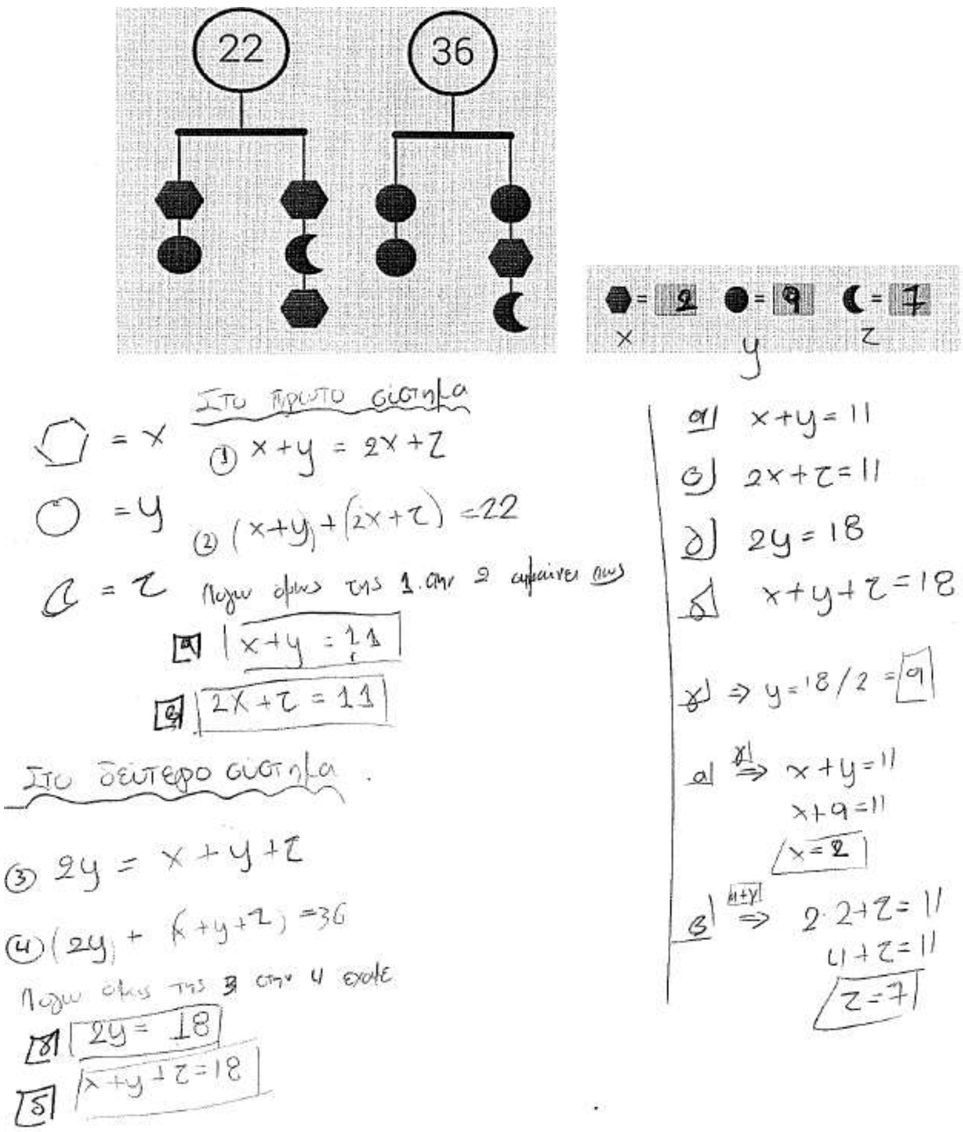




Εικόνα 30: Παράδειγμα συνδυαστικού τρόπου επίλυσης

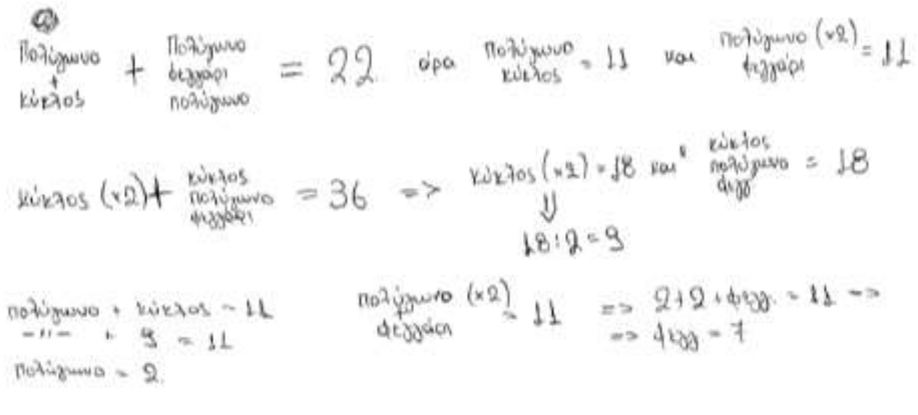
Όπως παρατηρείται στην εικόνα 4, ο φοιτητής σε αυτή την περίπτωση έχει χρησιμοποιήσει ταυτόχρονα λέξεις αλλά και τα εικονίδια του συστήματος, για να περιγράψει τα βήματα που ακολούθησε. Το ενδιαφέρον συγκριτικά με τις προηγούμενες εικόνες που παρουσιάστηκαν είναι ότι ενώ στο μεγαλύτερο μέρος της πορείας της επίλυσης της δραστηριότητας έχει ακολουθηθεί το ίδιο σκεπτικό με την πλειονότητα των συμμετεχόντων, εντούτοις, στο τέλος υπάρχει διαφοροποίηση. Πιο συγκεκριμένα, αφού ο λύτης βρίσκει την τιμή του εξάγωνου ίση με 2 μονάδες βάρους, στη συνέχεια αντί να στραφεί στον δεξί κλάδο του πρώτου mobile για να βρει το βάρος από το μισοφέγγαρο, όπως έκαναν οι περισσότεροι, εκείνος επιλέγει τον δεξί κλάδο του δεύτερου mobile. Σε αυτόν μια σφαίρα, ένα εξάγωνο και ένα μισοφέγγαρο ισοδυναμούν συνολικά με 18 μονάδες. Αντικαθιστά λοιπόν στη σχέση αυτή τις τιμές των μεταβλητών που βρήκε προηγουμένως και καταλήγει να βρει το βάρος του μισοφέγγαρου να είναι ίσο με 7 μονάδες.

Αρκετά χρησιμοποιήθηκε από τους φοιτητές και ο **αλγεβρικός** τρόπος λύσης (9/37), κατά τον οποίο οι λύτες ουσιαστικά μετέφρασαν την κατάσταση ισορροπίας των δύο mobile σε εξισώσεις με πολλούς αγνώστους, τις οποίες στη συνέχεια έλυσαν για να βρουν τις τιμές των μεταβλητών. Στην παρακάτω εικόνα, ο λύτης σε αρχικό στάδιο αποτυπώνει σε μορφή αλγεβρικών εξισώσεων την κατάσταση ισορροπίας που περιγράφει η εικόνα και στη συνέχεια, επιδίδεται σε μια προσπάθεια επίλυσης του συστήματος εξισώσεων που δημιούργησε. Ο τρόπος με τον οποίο το επιτυγχάνει δεν διαφέρει από την κοινή πορεία των περισσότερων φοιτητών που έχει περιγραφεί.

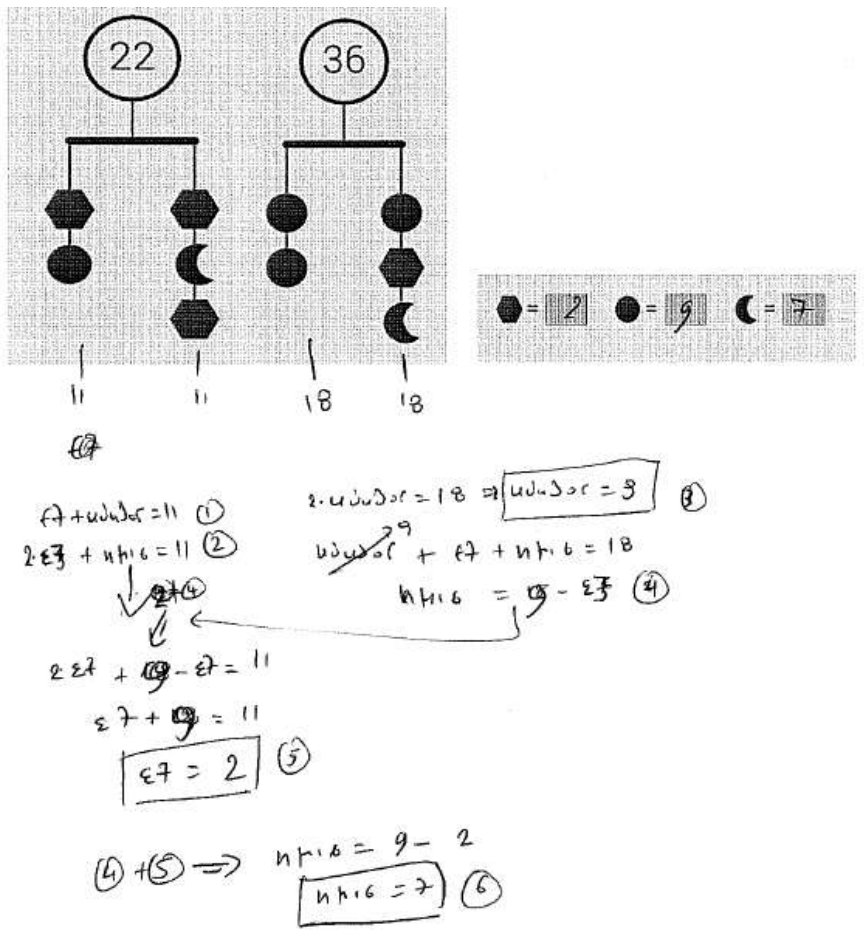


Εικόνα 31: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εμφάνιση μιας παραλλαγής του αλγεβρικού τρόπου επίλυσης στην δραστηριότητα αυτή. Αναλυτικότερα, υπήρχαν δυο λύτες οι οποίοι επέλεξαν μια **αλγεβρική λύση χωρίς την χρήση γραμμάτων στις μεταβλητές** (2/37).



Εικόνα 32: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου χωρίς τη χρήση γραμμάτων στις μεταβλητές (α)



Εικόνα 33: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου χωρίς τη χρήση γραμμάτων στις μεταβλητές (β)

Αυτό που διακρίνεται στις παραπάνω εικόνες και το οποίο χαρακτηρίζει αυτό τον τρόπο επίλυσης είναι το γεγονός ότι οι λύτες αντί για γράμματα χρησιμοποιούν λέξεις ως μεταβλητές. Και στις δυο εικόνες οι φοιτητές κατά την επίλυσή τους μεταφράζουν την κατάσταση ισορροπίας των mobile, χρησιμοποιώντας τις ονομασίες των σχημάτων που υπάρχουν σε αυτά. Ο πρώτος λύτης χρησιμοποιεί ολόκληρες τις ονομασίες ενώ ο δεύτερος χρησιμοποιεί συντομογραφίες. Και οι δυο παρουσιάζουν αρχικά αναλυτικά τις ισότητες που προκύπτουν από τον κάθε κλάδο των mobile (1 εξάγωνο και μια σφαίρα = 11 και 2 εξάγωνα και ένα μισοφέγγαρο = 11 και το ίδιο για το δεύτερο mobile), ωστόσο καταλήγουν να βρουν τις τιμές των άγνωστων μεταβλητών της δραστηριότητας ακολουθώντας τα ίδια βήματα με τους περισσότερους. Ο συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης μας δείχνει εμφανώς την εξοικείωση των φοιτητών με τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης, όμως η διαφοροποίησή του από αυτόν, καθώς γίνεται χρήση ολόκληρων λέξεων και όχι γραμμάτων, είναι που τον καθιστά ενδιαφέρον.

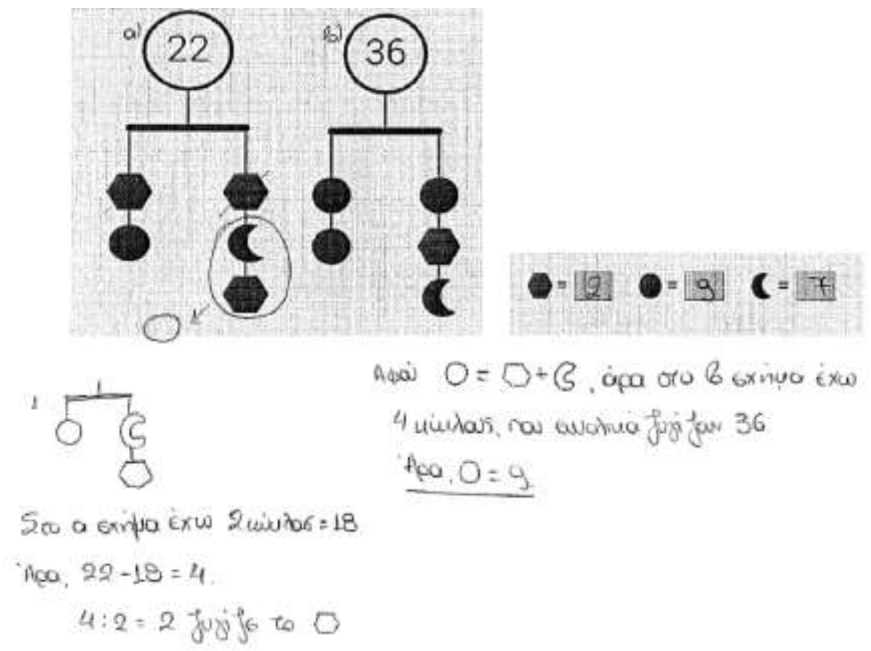
Αξίζει επίσης να σημειωθεί, ότι σε αυτή τη δραστηριότητα δεν συναντήθηκε καθόλου ο εξεικονιστικός τρόπος επίλυσης, κατά τον οποίο ο λύτης κάνει χρήση των εικονιδίων του συστήματος ενταγμένων όμως στο mobile, και στην ουσία επιλέγει να απεικονίσει τα διακριτά βήματα της λύσης του και όχι την αναλυτική πορεία.

Συνολικά διαπιστώνεται ότι στην τρίτη δραστηριότητα προτιμήθηκαν κυρίως ο κειμενικός αλλά και ο αλγεβρικός τρόπος επίλυσης από τους φοιτητές, γεγονός που μας οδηγεί να υποθέσουμε πως οι λύτες είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τη χρήση τους. Ο εικονικός και ο συνδυαστικός τρόπος επίλυσης χρησιμοποιήθηκαν λιγότερο, όχι όμως σε τόσο μικρά νούμερα ώστε να μην προκαλούν ενδιαφέρον.

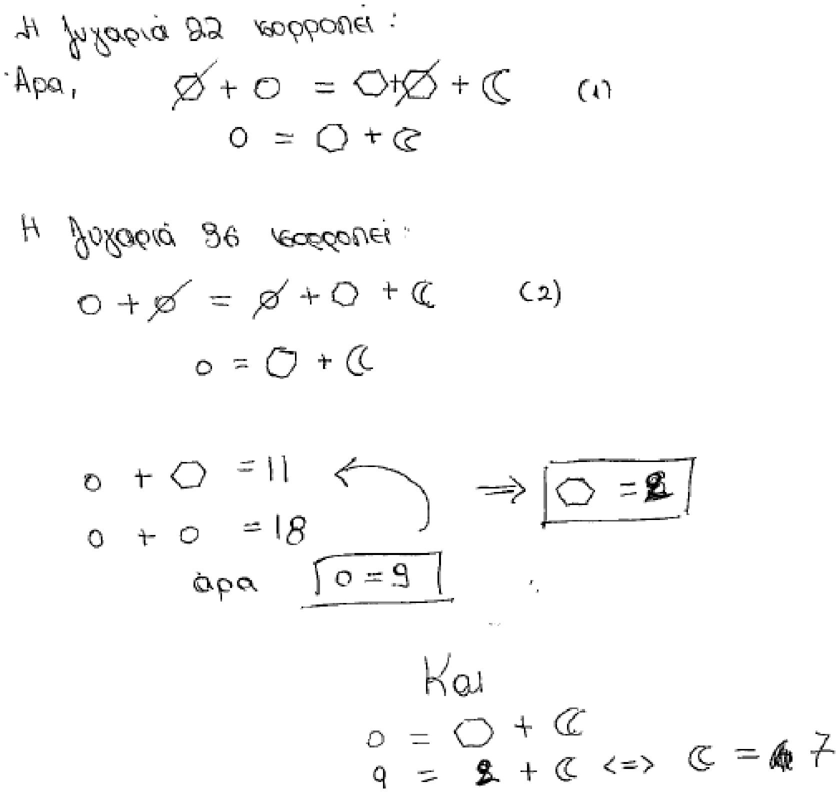
Εξίσου σημαντικός με τον τρόπο επίλυσης της δραστηριότητας είναι και ο τρόπος με τον οποίο επεμβαίνουν οι συμμετέχοντες πάνω στο σύστημα, διατηρώντας όμως πάντα την ισορροπία του. Για το λόγο αυτό, αναλύθηκαν οι ενέργειες που έγιναν από τους φοιτητές, στην προσπάθεια τους να λύσουν την δραστηριότητα και οι οποίες παραπέμπουν στην τυπική γνώση για τις μαθηματικές ενέργειες που προβαίνει ένας λύτης όταν αντιμετωπίζει μια εξίσωση ή ένα σύστημα αλγεβρικά. Σε αυτή τη δραστηριότητα παρατηρήθηκαν συνολικά 5 τέτοιες δραστηριότητες, τις 4 από τις οποίες έχουμε συναντήσει και αναλύσει ξανά σε προηγούμενες δραστηριότητες.

Ειδικότερα, όπως φαίνεται στην εικόνα 29 προκειμένου να βρει την τιμή του ενός εξαγώνου, ο λύτης ασχολείται με την ισότητα κατά την οποία ένα εξάγωνο και μια σφαίρα έχουν βάρος ίσο με 11 μονάδες βάρους. Αφού προηγουμένως έχει βρει την τιμή της μιας σφαίρας (9), την αντικαθιστά σε αυτή την ισότητα (προτελευταία σειρά της επίλυσής του), με αποτέλεσμα να βρει το βάρος του εξαγώνου ίσο με 2 μονάδες. Το ίδιο μπορεί να παρατηρηθεί και στις εικόνες 30, 32 και 33, όπου οι λύτες πρώτα βρίσκουν την τιμή της μιας σφαίρας και στη συνέχεια την αντικαθιστούν, με σκοπό να βρουν τις τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών της δραστηριότητας. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν και την δεύτερη τιμή που βρίσκουν με τον ίδιο τρόπο, καθώς αντικαθιστούν και πάλι προκειμένου να καταλήξουν στην τιμή του βάρους από το μισοφέγγαρο. Όλες αυτές οι ενέργειες αντανακλούν άτυπα τη φορμαλιστική γνώση ότι σε μια ισότητα μπορούμε *να αντικαταστήσουμε μια ποσότητα με μια ισοδύναμή της με την ισότητα να διατηρείται σταθερή*.

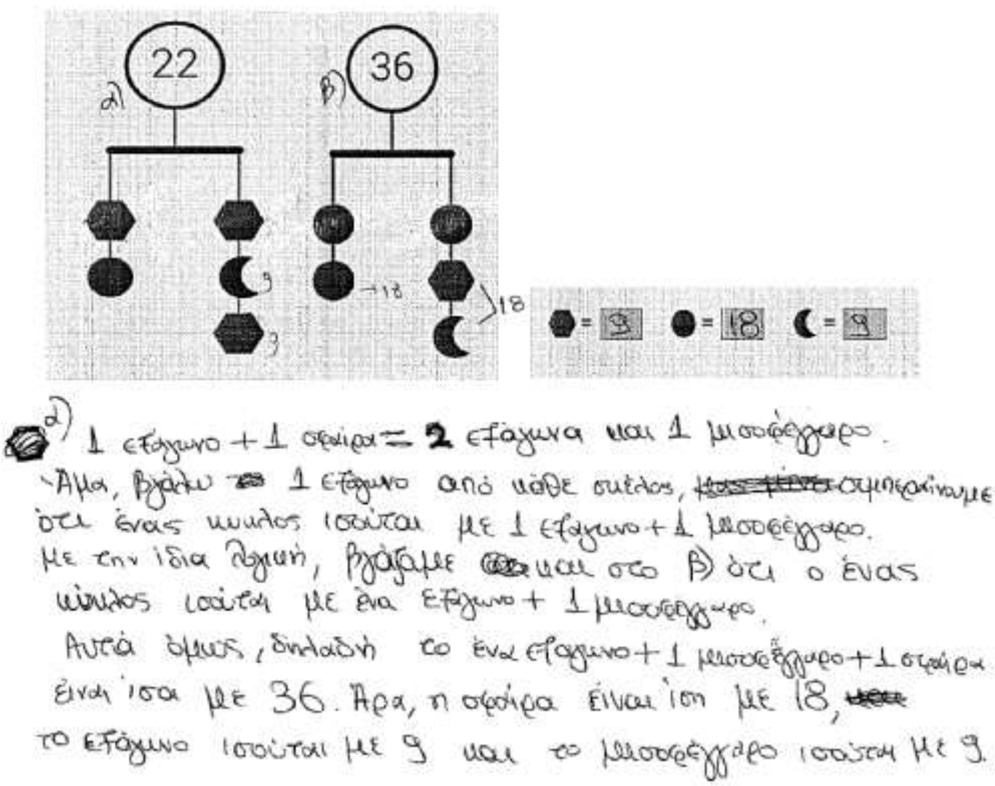
Ακόμη μια μαθηματική ενέργεια η οποία μπορεί να διατηρήσει αναλλοίωτη μια ισότητα είναι η *αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές της*. Είναι μια ενέργεια η οποία αποτελεί κλασικό βήμα στην πλειονότητα των εξισώσεων που λύνονται αλγεβρικά και η οποία χρησιμοποιήθηκε και στη συγκεκριμένη δραστηριότητα από τους συμμετέχοντες.



Εικόνα 34: Παράδειγμα αφαίρεσης ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές (α)



Εικόνα 35: Παράδειγμα αφαίρεσης ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές (β)



Εικόνα 36: Παράδειγμα αφαίρεσης ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές (γ)

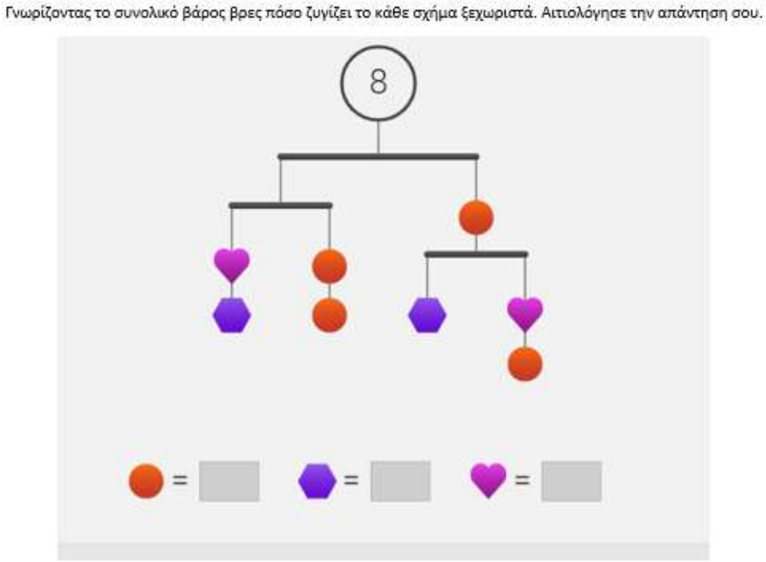
Αναλυτικότερα στην εικόνα 34, παρατηρούμε πως ο λύτης έχει εργαστεί αρχικά πάνω στην εικόνα με τα δύο mobile του δόθηκε. Έτσι, στο πρώτο–αριστερό mobile έχει διαγράψει ένα εξάγωνο από κάθε κλάδο του, για να καταλήξει στην ισότητα σύμφωνα με την οποία μια σφαίρα ισοδυναμεί με ένα εξάγωνο και ένα μισοφέγγαρο. Την ίδια πορεία έχει ακολουθήσει και ο λύτης στην εικόνα 36, ο οποίος κάνει το ίδιο πράγμα, παρουσιάζοντας το όμως με λέξεις. Όπως λέει χαρακτηριστικά «Άμα βγάλω ένα εξάγωνο από κάθε σκέλος, συμπεραίνουμε ότι ένα κύκλος ισούται με ένα εξάγωνο και ένα μισοφέγγαρο». Στην εικόνα 35, τόσο στο κομμάτι όπου ασχολείται με το πρώτο mobile, όσο και στο κομμάτι που ασχολείται με το δεύτερο mobile, βλέπουμε εμφανώς ότι ο λύτης διαγράφει στη μια περίπτωση ένα εξάγωνο από κάθε πλευρά και στην άλλη μια σφαίρα από κάθε πλευρά, χωρίς να διαταράξει την ισορροπία του συστήματος.

Μια ακόμη μαθηματική ενέργεια που εντοπίστηκε κατά την ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών φαίνεται στην εικόνα 29, στο σημείο όπου ο λύτης αναζητά την τιμή του εξαγώνου. Για να το επιτύχει αυτό επιστρέφει στην ισότητα που είχε βρει αρχικά, όπου ένα εξάγωνο και μια σφαίρα έχουν συνολικό βάρος ίσο με 11 μονάδες βάρους. Στη συνέχεια, όχι μόνο αντικαθιστά την τιμή της σφαίρας, την οποία έχει βρει νωρίτερα, αλλά την μεταφέρει και στην δεξιά μεριά της ισότητας, απομονώνοντας έτσι την άγνωστη μεταβλητή που τον ενδιαφέρει, δηλαδή το βάρος του εξαγώνου. Η λογική αυτή υποστηρίζεται και από τον λύτη της εικόνας 30, ο οποίος κατά την αναζήτηση του βάρους του εξαγώνου, ασχολείται και αυτός με την ίδια ισότητα και πραγματοποιεί τις ίδιες ενέργειες. Το ίδιο σκεπτικό ακολουθούν και για να βρουν το βάρος του μισοφέγαρου. Βρίσκουν δηλαδή μια ισότητα στην οποία περιέχεται, αντικαθιστούν την τιμή των γνωστών μεταβλητών και τις μεταφέρουν στην άλλη πλευρά της ισότητας, ξεχωρίζοντας έτσι την άγνωστη μεταβλητή (βάρος του μισοφέγγαρου). Αυτές οι ενέργειες αποτυπώνουν την τυπική γνώση των λυτών για τις αλγεβρικές εξισώσεις, όπου *χωρίζουμε τις γνωστές ποσότητες από τις άγνωστες, προκειμένου να βρούμε τις τιμές των αγνώστων*.

Στην εικόνα 30 ο λύτης αφού βρίσκει ότι κάθε πλευρά του δεξιού mobile ζυγίζει 18, εντοπίζει την ισότητα κατά την οποία δύο ίδιες σφαίρες ζυγίζουν συνολικά 18 μονάδες. Για να βρει το βάρος της μιας σφαίρας, διαιρεί το συνολικό βάρος των δυο σφαιρών (18), με την ποσότητα τους (2) και καταλήγει πως η κάθε σφαίρα ζυγίζει 9 μονάδες (τρίτη σειρά της επίλυσής του). Αυτή η ενέργεια του λύτη μας παραπέμπει σε αυτό που στην τυπική φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης ονομάζουμε *διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου*. Την ίδια ενέργεια πραγματοποιεί και ο λύτης στην εικόνα 29, όπου στην προσπάθεια του να απομονώσει μια από τις άγνωστες μεταβλητές του (βάρος εξαγώνου), καταλήγει στην ισότητα κατά την οποία δύο εξάγωνα ισοδυναμούν με 11 μονάδες μειωμένες κατά το βάρος του μισοφέγγαρου. Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι για να βρει πόσο ζυγίζει μόνο το ένα εξάγωνο, διαιρεί με τον συντελεστή του αγνώστου και έτσι προκύπτει η σχέση κατά την οποία ένα εξάγωνο ισούται με το μισό της προηγούμενης ισότητας (11–τιμή μισοφέγγαρου/2).

Κάνοντας μια συνολική εκτίμηση στην τρίτη δραστηριότητα, παρατηρούμε ότι περισσότερο χρησιμοποιήθηκε από τους συμμετέχοντες η αντικατάσταση (23/28). Αρκετές φορές εντοπίστηκε και η διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου αλλά και η διαδικασία σύμφωνα την οποία χωρίζουν τις γνωστές ποσότητες από τις άγνωστες, ενώ λιγότερο χρησιμοποιήθηκε η ενέργεια που αφορά την αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές της ισότητας (9/28). Τέλος, παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά δυο λύτες να προσπαθούν να επιλύσουν την δραστηριότητα ως προς τη μια από τις τρείς άγνωστες μεταβλητές της.

4.1.4 Ανάλυση 4ης δραστηριότητας



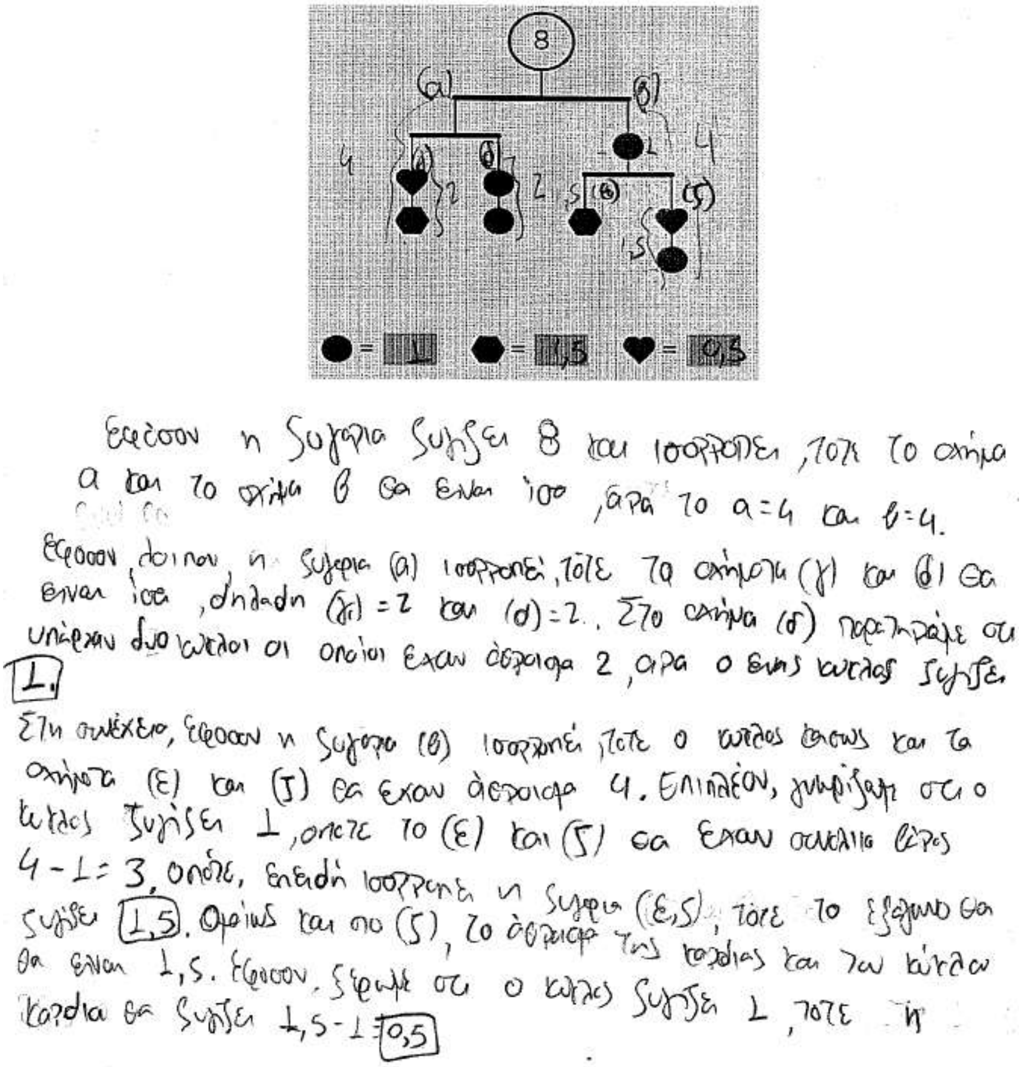
Εικόνα 37: $4^{η}$ δραστηριότητα

Την $4^{η}$ δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 37 φοιτητές. Κατά την ανάλυση των απαντήσεων που έδωσαν, παρατηρήθηκε ότι ένα μεγάλο ποσοστό από τους λύτες ακολούθησε τα ίδια ακριβώς βήματα, προκειμένου να φτάσει στη σωστή απάντηση. Αυτήν τη φορά η δραστηριότητα περιλαμβάνει ένα mobile με δύο κλάδους, οι οποίοι στη συνέχεια χωρίζονται ξανά σε μικρότερα mobile (εικόνα 37).

Οι περισσότεροι συμμετέχοντες ξεκινούσαν διαιρώντας το συνολικό βάρος του mobile (8) με το 2 (2 βασικοί κλάδοι) λόγω του ότι βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, προκειμένου να βρουν το βάρος του κάθε κλάδου (4 μονάδες βάρους). Στη συνέχεια επικεντρώνονταν στον αριστερό κλάδο, ο οποίος χωριζόταν επίσης σε δυο επιμέρους κλάδους και επομένως ακολουθούσαν την ίδια διαδικασία και έβρισκαν ότι ο κάθε επιμέρους κλάδος ζυγίζει 2 μονάδες. Το επόμενό τους βήμα ήταν να βρουν το βάρος της μιας σφαίρας, διότι η δεξιά πλευρά του αριστερού κλάδου του αρχικού mobile αποτελούνταν από δύο ίδιες σφαίρες. Επομένως, αφού και οι δύο συνολικά ζύγιζαν 2 μονάδες, έβρισκαν πως η κάθεμια έχει βάρος ίσο με μια μονάδα. Έπειτα, μεταφέρονταν στον δεξί κλάδο του αρχικού mobile ο οποίος ισοδυναμούσε με 4 μονάδες. Από το σύνολο αυτό αφαιρούσαν το βάρος της μιας σφαίρας, η οποία βρισκόταν στο κεντρικό σχοινί του δεξιού κλάδου. Έτσι, απέμειναν 3 μονάδες που μοιράζονταν εξ ίσου στους δύο μικρότερους κλάδους της δεξιάς πλευράς (1,5 μονάδα ο καθένας). Από αυτό το σημείο και μετά άλλοι έβρισκαν πρώτα το βάρος της καρδιάς και ύστερα του εξαγώνου ενώ άλλοι επέλεγαν το αντίστροφο. Το βάρος του εξαγώνου ήταν εύκολο να βρεθεί αφού δεν υπήρχε άλλο σχήμα στον αριστερό κλάδο, με αποτέλεσμα να ζυγίζει 1,5 μονάδα. Ο δεξιός κλάδος αποτελούνταν από μια καρδιά και μια σφαίρα που μαζί ζυγίζουν 1,5 μονάδα. Οι λύτες αφαιρούσαν από αυτή την τιμή το βάρος της σφαίρας (1 μονάδα) και κατέληγαν στο βάρος της καρδιάς που είναι ίσο με 0,5.

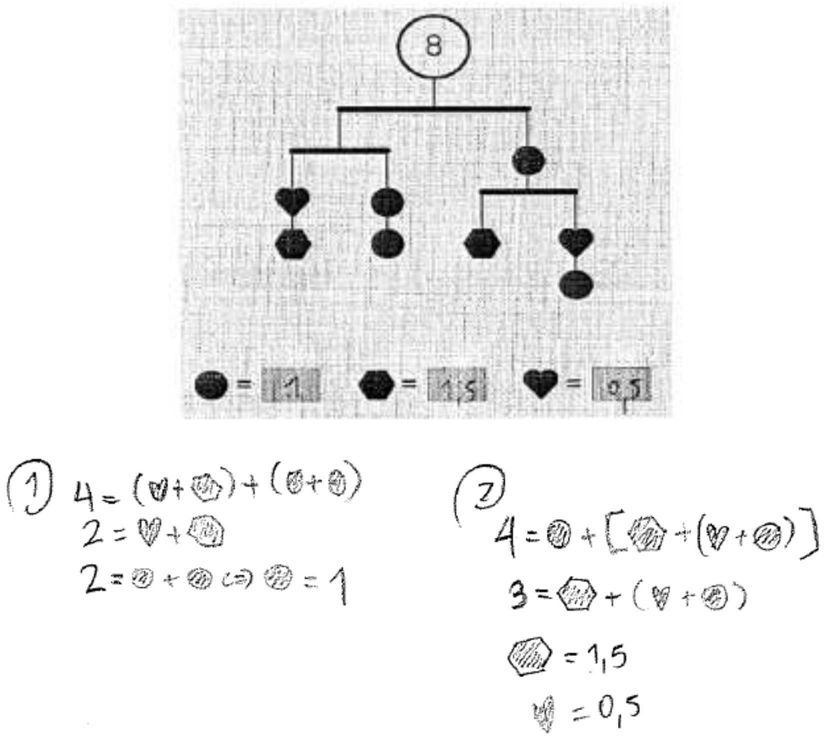
Όπως συνέβη και στις προηγούμενες δραστηριότητες ο τρόπος με τον οποίο προσέγγισαν την δραστηριότητα διέφερε μεταξύ των λυτών, παρά την κοινή τους πορεία προς την επίλυση. Συγκεκριμένα, στη δραστηριότητα αυτή παρατηρήθηκαν συνολικά 5 διαφορετικοί τρόποι επίλυσης τους οποίους έχουμε συναντήσει ξανά.

Το 1/3 περίπου των συμμετεχόντων επέλεξε να χρησιμοποιήσει τον **κειμενικό τρόπο επίλυσης,** κατά τον οποίο περιγράφουν μόνο με λόγια τα βήματα που ακολουθούν για να επιλύσουν την δραστηριότητα. Στην παρακάτω εικόνα για παράδειγμα, ο λύτης ακολουθεί ακριβώς την πορεία επίλυσης που αναλύθηκε παραπάνω ως «κοινή πορεία των λυτών», χρησιμοποιώντας μόνο λέξεις προκειμένου να την περιγράψει.



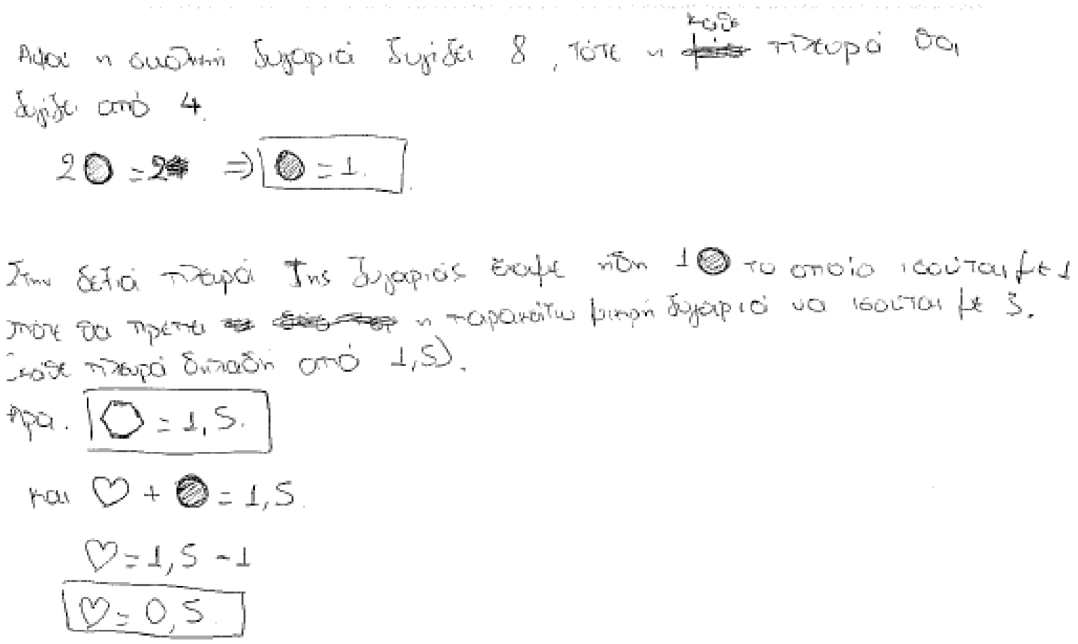
Εικόνα 38: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

Λιγότεροι ήταν εκείνοι που επέλεξαν να κάνουν **χρήση των εικονιδίων** που υπήρχαν ενσωματωμενα στο περιβάλλον του mobile, με σκοπό να περιγράψουν την πορεία της επίλυσής τους. Στο παράδειγμα αυτού του τρόπου επίλυσης (εικόνα 39), βλέπουμε ότι ο συγκεκριμένος φοιτητής πρακτικά αναπαριστά τις σχέσεις και τις ισότητες που υπάρχουν στο σύστημα με τη χρήση των εικονιδίων, ενώ ακολούθησε κι αυτός την ίδια πορεία με τους υπόλοιπους, προκειμένου να φτάσει στην επίλυση της δραστηριότητας.



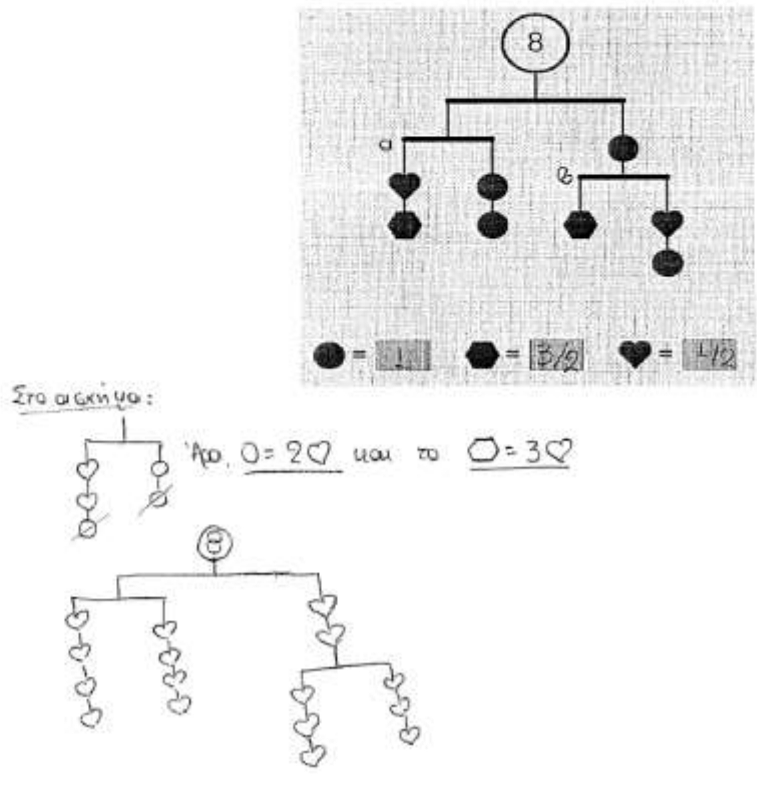
Εικόνα 39: Παράδειγμα εικονικού τρόπου επίλυσης

Με την ίδια συχνότητα προτίμησαν οι λύτες να χρησιμοποιήσουν τον **συνδυαστικό τρόπο επίλυσης** κάνοντας ταυτόχρονα χρήση και των δύο τρόπων που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Στην εικόνα 40 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο λύτης χρησιμοποιεί τόσο κείμενο όσο και τα εικονίδια από το περιβάλλον του mobile, προκειμένου να κάνει φανερά τα βήματα πάνω στα οποία στήριξε την επίλυσή του, η οποία δεν διαφέρει από την κοινή πορεία που περιγράφηκε αρχικά.



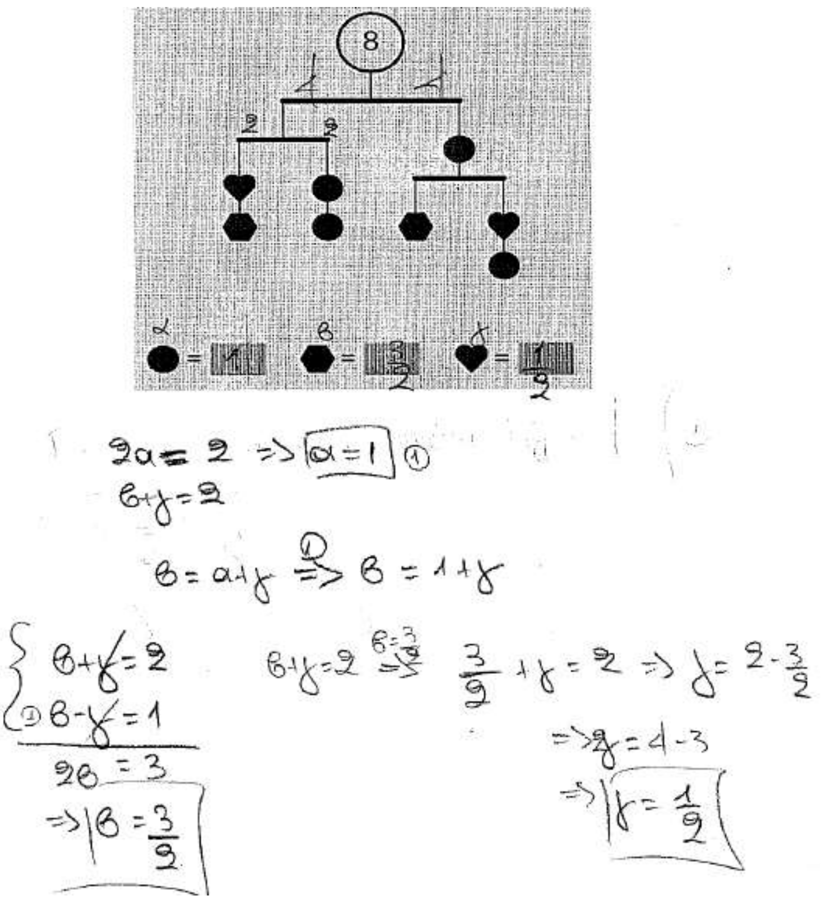
Εικόνα 40: Παράδειγμα συνδυαστικού τρόπου επίλυσης

Για ακόμη μια φορά παρατηρήθηκε η **χρήση του εξεικονιστικού τρόπου επίλυσης.** Ο λύτης όπως φαίνεται στην εικόνα 41, κάνει χρήση των εικονιδίων του mobile, παρουσιάζοντας κάθε φορά την συνολική κατάσταση του συστήματος μετά από την παρέμβασή του. Πιο αναλυτικά, ο φοιτητής χωρίς να το γράψει καθαρά, αναγνωρίζει την σχέση κατά την οποία ένα εξάγωνο ισοδυναμεί με μια καρδιά και μια σφαίρα και την αντικαθιστά στο μικρότερο mobile που σχηματίζεται στην αριστερή πλευρά του συστήματος. Έτσι, καταλήγει στην ισότητα όπου 2 καρδιές και μια σφαίρα ισοδυναμούν με δύο σφαίρες. Στη συνέχεια, αφαιρεί μια σφαίρα από κάθε πλευρά και έτσι βρίσκει πως μια σφαίρα ισοδυναμεί μια δυο καρδιές και κατ' επέκταση ένα εξάγωνο με τρείς καρδιές. Χρησιμοποιεί αυτές τις δυο σχέσεις για να αντικαταστήσει τα εξάγωνα και τις σφαίρες του συστήματος με καρδιές, με σκοπό να βρει το βάρος της καρδιάς. Το μεγαλύτερο mobile αποτελείται τελικά από 16 καρδιές οι οποίες συνολικά ζυγίζουν 8 μονάδες. Κάνοντας την απαραίτητη διαίρεση (8 : 16) βρίσκει πως μια καρδιά είναι ίση με μισή μονάδα.



Εικόνα 41: Παράδειγμα εξεικονιστικού τρόπου επίλυσης

Τέλος, αρκετοί ήταν και πάλι αυτοί που επέλεξαν να επιλύσουν την δραστηριότητα με **αλγεβρικό τρόπο**. Η εικόνα 42 αποτελεί παράδειγμα του συγκεκριμένου τρόπου επίλυσης, όπου ο λύτης μεταφράζει την κατάσταση ισορροπίας του mobile σε ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους. Στη συνέχεια, επιδίδεται σε μια προσπάθεια επίλυσης του συστήματος εξισώσεων που δημιούργησε. Πιο συγκεκριμένα, αυτός ο λύτης βρίσκει πρώτα την τιμή της σφαίρας και στη συνέχεια με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους καταλήγει στην τιμή του εξαγώνου. Έπειτα, χρησιμοποιεί τις τιμές που βρήκε για να εντοπίσει και την τιμή της τελευταίας μεταβλητής, της καρδιάς.



Εικόνα 42: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

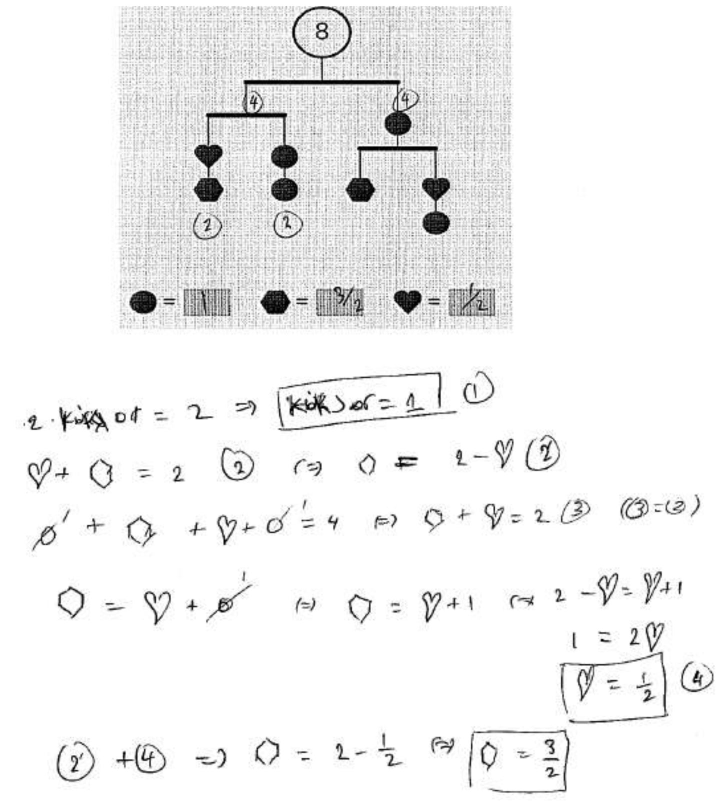
Σε γενικές γραμμές στην τέταρτη αυτή δραστηριότητα οι τέσσερις από τους πέντε τρόπους επίλυσης που εντοπίστηκαν, χρησιμοποιήθηκαν με παρόμοια συχνότητα. Τη μεγαλύτερη συχνότητα παρουσίασε ο κειμενικός τρόπος επίλυσης (10/37), ενώ ο αλγεβρικός, ο εικονικός και ο συνδυαστικός τρόπος επίλυσης εμφανίστηκαν με την ίδια συχνότητα (8/37). Ο εξεικονιστικός τρόπος επίλυσης συναντήθηκε μόνο μια φορά, ενώ υπήρξαν ένας φοιτητής που δεν έγραψε καμία επεξήγηση για τις τιμές που βρήκε και ένας ο οποίος δεν την έλυσε καθόλου.

Παράλληλα, αναλύθηκε ο τρόπος παρέμβασης των φοιτητών επάνω στο αρχικό σύστημα και ο οποίος μας παραπέμπει στις μαθηματικές ενέργειες ενός λύτη που ασχολείται με ένα τυπικό σύστημα εξισώσεων στην άλγεβρα. Σε αυτή τη δραστηριότητα παρατηρήθηκαν συνολικά 5 τέτοιες ενέργειες, 4 από τις οποίες έχουν αναλυθεί ήδη στις προηγούμενες δραστηριότητες.

Αναλυτικότερα, αν ξεκινήσουμε από την εικόνα 41, παρατηρούμε στο πρώτο mobile που έχει σχηματίσει ο λύτης να διαγράφει και από τους δυο κλάδους του, μια σφαίρα. Η ενέργεια αυτή του λύτη αντανακλά άτυπα την φορμαλιστική γνώση ότι διατηρούμε μια ισότητα ακόμη κι αν *αφαιρέσουμε μια ίδια ποσότητα και από τις δύο πλευρές της*. Η ενέργεια αυτή μπορεί να παρατηρηθεί και από τον λύτη της εικόνας 39 στην δεξιά πλευρά της επίλυσής του, όπου αναλύει την σχέση κατά την οποία δυο σφαίρες, ένα εξάγωνο και μια καρδιά ισοδυναμούν με 4 μονάδες. Στην αμέσως επόμενη γραμμή, εντοπίζουμε ότι έχει αφαιρέσει από την δεξιά πλευρά της ισότητας μια σφαίρα και από την αριστερή πλευρά μια μονάδα καταλήγοντας έτσι στην σχέση στην οποία μια σφαίρα, ένα εξάγωνο και μια καρδιά ισοδυναμούν πλέον με 3 μονάδες.

Η περίπτωση της εικόνας 41 είναι χαρακτηριστική και μιας ακόμη τυπικής μαθηματικής ενέργειας στην επίλυση συστήματος εξισώσεων. Ένας από τους προτεινόμενους στα εγχειρίδια τρόπους επίλυσης συστήματος είναι το να λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και να τον αντικαθιστούμε σε μια επόμενη, ώστε σταδιακά να μειώνουμε τον αριθμό των αγνώστων, γνωστή ως *μέθοδος της αντικατάστασης*. Αυτό ακριβώς κάνει ο λύτης εδώ. Σταδιακά αντικαθιστά μία-μία τις μεταβλητές, για να καταλήξει τελικά σε μια εξίσωση με έναν άγνωστο (την καρδιά) και μετά με βάση την τιμή αυτής της μεταβλητής, να προσδιορίσει τις τιμές όλων των άλλων.

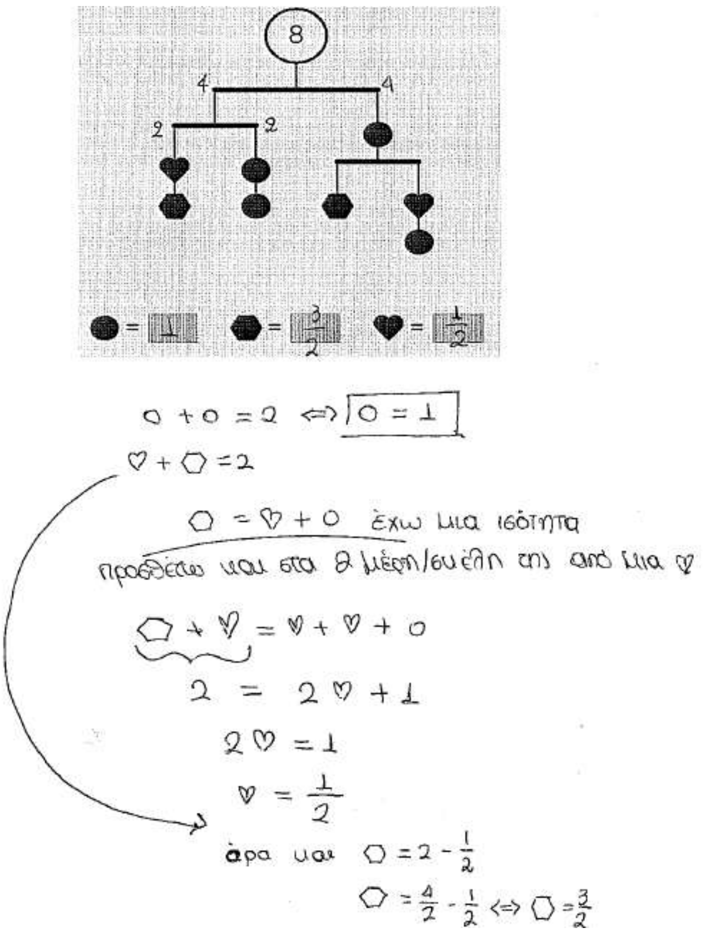
Μια ακόμη μαθηματική ενέργεια που χρησιμοποιήθηκε από τους λύτες της δραστηριότητας και που μπορεί επίσης να διατηρήσει σταθερή μια ισότητα, είναι *η αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της*. Αν παρατηρήσουμε την εικόνα 41), μπορούμε να εντοπίσουμε ότι ο λύτης βρίσκει την ισοδυναμία μιας σφαίρας με δύο καρδιές και αντίστοιχα ενός εξαγώνου με τρεις σφαίρες και τις αντικαθιστά στο αρχικό mobile με σκοπό να βρει την τιμή της καρδιάς. Και στο παράδειγμα της εικόνας 40, εντοπίζουμε την ίδια ενέργεια στο τελευταίο στάδιο της επίλυσης του λύτη, όπου ο φοιτητής παρουσιάζει την σχέση κατά την οποία μια καρδιά και μια σφαίρα έχουν βάρος ίσο με 1,5 μονάδα. Στη συνέχεια, αντικαθιστά την τιμή της σφαίρας προκειμένου να βρει την τιμή της καρδιάς. Στο ίδιο ακριβώς σημείο, ο λύτης πέρα από την αντικατάσταση της σφαίρας με την τιμή της, προβαίνει σε μια ακόμη μαθηματική ενέργεια κατά την οποία *χωρίζει τις γνωστές μεταβλητές* (βάρος σφαίρας και συνολική τιμή δεξιού κλάδου) *από τις άγνωστες* (βάρος καρδιάς). Παράλληλα λοιπόν, με την αντικατάσταση της σφαίρας, ο λύτης την μεταφέρει στην δεξιά πλευρά της ισότητας, με σκοπό να διαχωρίσει την άγνωστη μεταβλητή από τις υπόλοιπες. Διαπιστώνεται έτσι ξανά, μια άτυπη εμφάνιση ορισμένων τυπικών βημάτων που ακολουθεί ένας λύτης όταν επιλύει ένα αλγεβρικό σύστημα.



Εικόνα 43: Παράδειγμα για διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου

Η εικόνα 43 αποτελεί παράδειγμα για μια ακόμη μαθηματική ενέργεια που χρησιμοποιήθηκε από τους λύτες και η οποία στην φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης ονομάζεται *διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου.* Ειδικότερα, στο σημείο όπου ο λύτης ασχολείται με την σχέση, κατά την οποία ένα εξάγωνο ισοδυναμεί με μια καρδιά και μια σφαίρα και κάνει ορισμένες αντικαταστάσεις προκειμένου να βρει την τιμή της καρδιάς, καταλήγει στη σχέση όπου δυο καρδιές έχουν βάρος ίσο με μια μονάδα. Αμέσως μετά διαιρεί και τους δύο αριθμούς με τον συντελεστή της άγνωστης μεταβλητής, για να καταλήξει στο ότι μια καρδιά ισοδυναμεί με ½. Η περίπτωση αυτή μπορεί κατά μια έννοια να συμπεριληφθεί στην κλασσική περίπτωση της αλγεβρικής προσέγγισης αν θεωρήσουμε ότι τα σχήματα παίζουν το ρόλο της μεταβλητής.

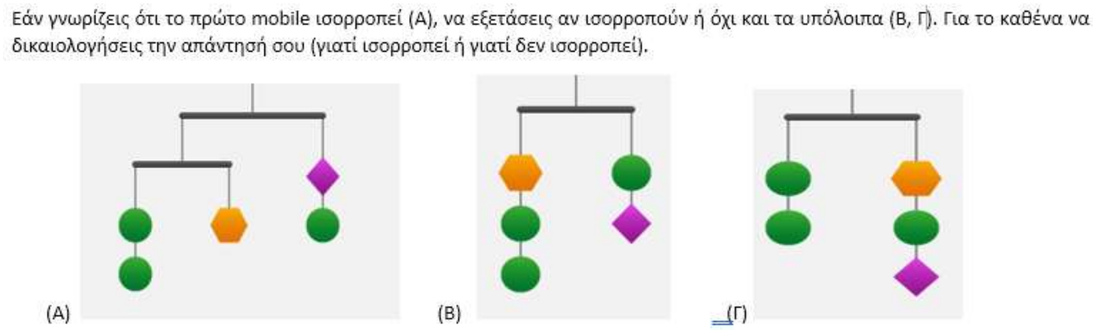
Τέλος, στην εικόνα 8, εντοπίζουμε την χρήση μιας ενέργειας που δεν έχουμε συναντήσει ξανά προηγουμένως. Συγκεκριμένα, ο λύτης έχει εντοπίσει δύο ισότητες (μια καρδιά και ένα εξάγωνο=2 μονάδες και ένα εξάγωνο=με μια καρδιά και μια σφαίρα) και τις χρησιμοποιεί για να επιτύχει την επίλυση της δραστηριότητας. Προκειμένου να βρει την τιμή της καρδιάς προσθέτει, όπως γράφει χαρακτηριστικά, και στα δύο μέλη της δεύτερης ισότητας (ένα εξάγωνο είναι ίσο με μια καρδιά και μια σφαίρα) από μια καρδιά. Το βήμα αυτό βοηθάει τον λύτη να βρει το συνολικό βάρος της αριστερής πλευράς της ισότητας, διότι πλέον δεν έχει μόνο ένα εξάγωνο σε αυτή την πλευρά, αλλά μια καρδιά και ένα εξάγωνο, για τα οποία γνωρίζει το συνολικό τους βάρος από την πρώτη ισότητα που παρουσίασε (ένα εξάγωνο και μια καρδιά ισοδυναμούν με 2 μονάδες). Το γεγονός ότι για να το επιτύχει όλο αυτό πρόσθεσε και στα δύο μέλη της ισότητας από μια καρδιά, αποκαλύπτει άτυπα την γνώση του ότι *μπορούμε να προσθέσουμε την ίδια ποσότητα και στα δύο μέλη μιας ισότητας διατηρώντας την*.



Εικόνα 44: Παράδειγμα για προσθήκη ίδιας ποσότητας και στα δυο μέλη μιας ισότητας

Σε αυτή την ανάλυση σχετικά με τις ενέργειες που πραγματοποίησαν οι φοιτητές, με σκοπό την διατήρηση της ισορροπίας του συστήματος, τονίζεται ότι δεν συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις που χρησιμοποίησαν αλγεβρικό τρόπο επίλυσης. Αν θέλουμε να δούμε τις πέντε μαθηματικές ενέργειες συνολικά στο επίπεδο που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την δραστηριότητα, πιο πολλές φορές εντοπίστηκε η περίπτωση της αντικατάστασης μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της (24/29). Με μικρότερη αλλά παραπλήσια μεταξύ τους συχνότητα χρησιμοποιήθηκαν η αφαίρεση μιας ποσότητας και από τις δυο πλευρές μιας ισότητας, η διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου και η ενέργεια κατά την οποία χωρίζουν τις γνωστές από τις άγνωστες ποσότητες. Τέλος, μόλις μια φορά παρατηρήθηκε η προσθήκη της ίδιας ποσότητας και στις δυο πλευρές μιας ισότητας.

4.1.5 Ανάλυση 5ης δραστηριότητας

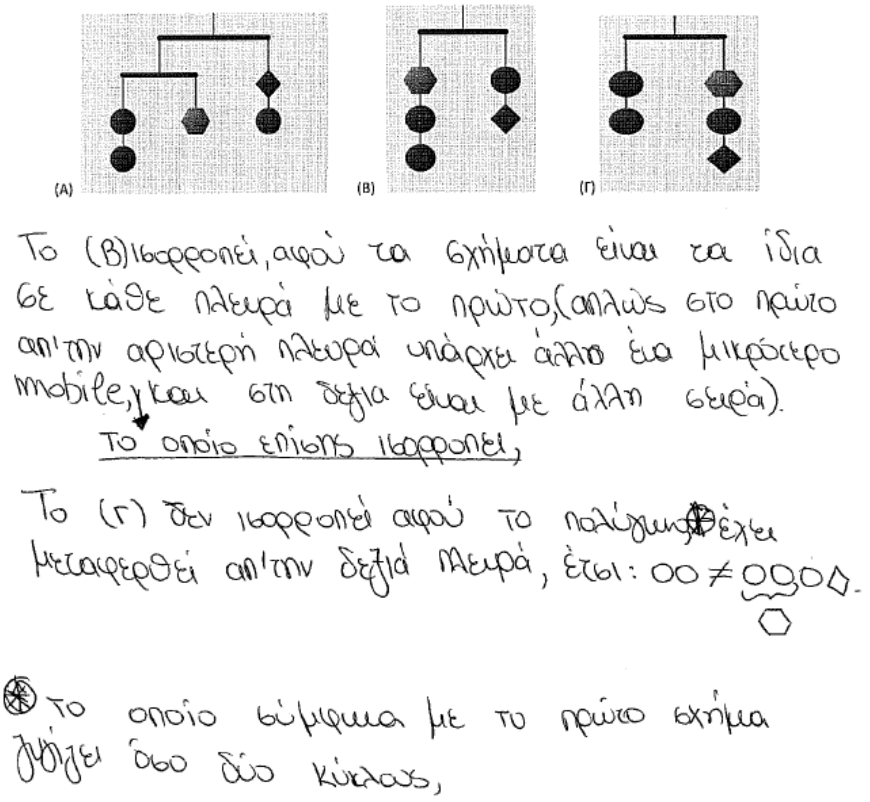


Εικόνα 45: 5η δραστηριότητα

Την 5η δραστηριότητα συμπλήρωσαν στο σύνολο 33 φοιτητές. Η δραστηριότητα αυτή είχε διαφορετική δομή με όσες αναλύθηκαν μέχρι τώρα, διότι το ζητούμενό της δεν ήταν να βρεθούν οι τιμές των σχημάτων που υπήρχαν ενσωματωμένα στο σύστημα. Ειδικότερα, δινόταν στους συμμετέχοντες ένα mobile (Α) το οποίο ισορροπούσε και με βάση αυτό και τις σχέσεις τις οποίες περιείχε, έπρεπε οι λύτες να απαντήσουν αν ισορροπούν και τα άλλα δυο mobile που αποτελούνταν από τα ίδια σχήματα (Β και Γ). Κατά την ανάλυση των απαντήσεων τους, παρατηρήθηκε ότι ένα μεγάλο ποσοστό από τους λύτες ακολούθησαν τα ίδια ακριβώς βήματα, προκειμένου να φτάσουν στη σωστή απάντηση. Πιο αναλυτικά, οι περισσότεροι απαντούσαν με ευκολία πως το mobile Β θα ισορροπεί, διότι είναι το ίδιο με το mobile Α, με την διαφορά πως τα σχήματα που στο mobile Α δημιουργούν ένα μικρότερο mobile (2 σφαίρες και ένα εξάγωνο), στο mobile Β αποτελούν όλα μαζί τον αριστερό του κλάδο κι έτσι η σχέση που υπάρχει και στα δύο παραμένει η ίδια (δηλαδή 2 σφαίρες και ένα εξάγωνο έχουν ίσο βάρος με μια σφαίρα και έναν ρόμβο). Σχετικά με το mobile Γ το μεγαλύτερο ποσοστό των λυτών απαντούσαν ότι δεν ισορροπεί βασιζόμενοι σε μια σχέση όπου προκύπτει από το mobile Α, σύμφωνα με την οποία δυο σφαίρες ισοδυναμούν με ένα εξάγωνο. Επομένως, οι συμμετέχοντες αιτιολογούσαν την απάντησή τους, χρησιμοποιώντας την κοινή λογική, διότι μπορεί ο αριστερός κλάδος του mobile Γ να αποτελούνταν μόνο από δυο σφαίρες, ο δεξιός κλάδος όμως είχε άλλα δυο σχήματα πέρα από το εξάγωνο (το οποίο συμπληρώνει την παραπάνω σχέση). Έτσι, αυτή η σχέση ισοδυναμίας υποστήριζαν πως δεν μπορεί να ισχύει, καθώς ο δεξιός κλάδος έχει περισσότερο βάρος απ' όσο χρειάζεται για να ισορροπήσει με τον αριστερό.

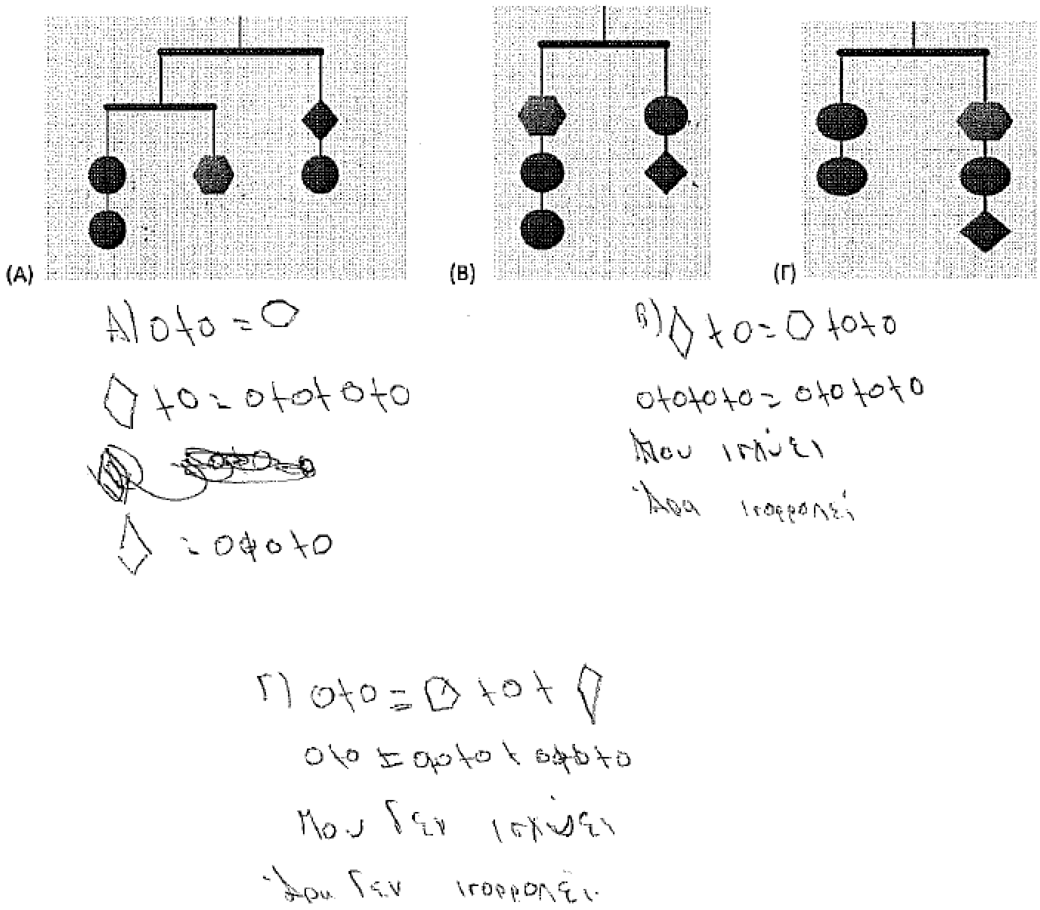
Ο τρόπος όμως με τον οποίο επέλεξαν να πραγματοποιήσουν αυτή την κοινή πορεία επίλυσης της δραστηριότητας διαφοροποιήθηκε μεταξύ των λυτών, όπως συνέβη και στις προηγούμενες δραστηριότητες. Παρατηρήθηκαν συνολικά 4 διαφορετικοί τρόποι επίλυσης τους οποίους έχουμε συναντήσει και αναλύσει ξανά.

Ο πιο συχνός τρόπος που επέλεξαν να εργαστούν οι φοιτητές είναι ο **κειμενικός** (13/33), κατά τον οποίο χρησιμοποιούν μόνο λέξεις προκειμένου να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους και τα βήματα που ακολουθούν. Η εικόνα 46 αποτελεί παράδειγμα του συγκεκριμένου τρόπου, στο οποίο ο λύτης δεν διαφοροποιεί την επίλυσή του από αυτή που περιγράφηκε νωρίτερα ως κοινή πορεία των συμμετεχόντων. Αν και κατά την αιτιολόγηση για το mobile Γ, γράφει πως δεν ισορροπεί, διότι το εξάγωνο έχει μεταφερθεί στη δεξιά πλευρά, στην ουσία βλέπουμε ότι αντικαθιστά τις δυο σφαίρες με το εξάγωνο (σχέση που προκύπτει από το mobile Α), δηλώνοντας με αυτό τον τρόπο ότι το mobile δεν ισορροπεί, διότι από την δεξιά πλευρά έχει κι άλλα σχήματα πέρα από το εξάγωνο που ισοδυναμεί με τις δυο σφαίρες της αριστερής πλευράς.



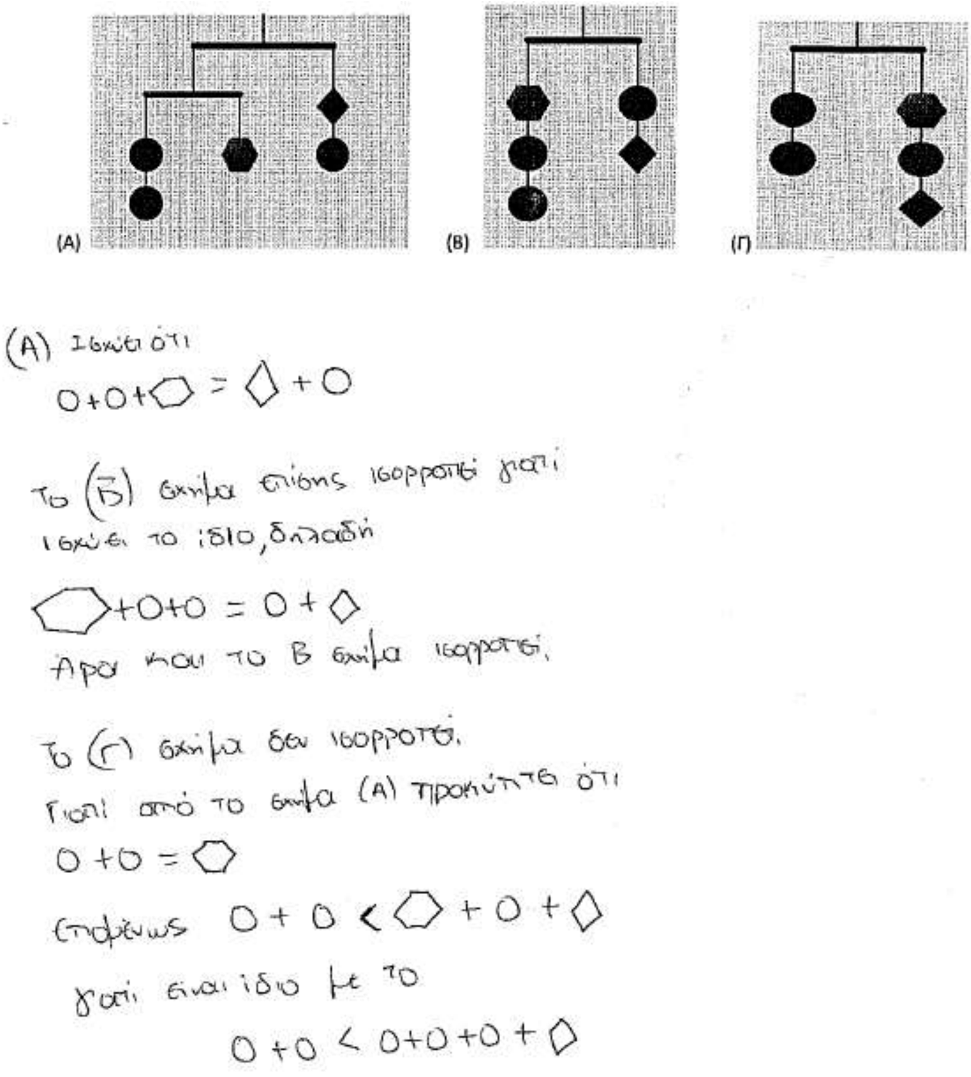
Εικόνα 46: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

Λιγότεροι ήταν εκείνοι που επέλεξαν να κάνουν **χρήση των εικονιδίων του συστήματος** προκειμένου να επιλύσουν την δραστηριότητα. Όπως φαίνεται στην εικόνα 47, ο λύτης δούλεψε με τα εικονίδια που υπάρχουν ενσωματωμένα στο περιβάλλον του mobile και μέσω αυτών προσπάθησε να φτάσει στην επίλυση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η πορεία που ακολούθησε για να επιλύσει την δραστηριότητα, διότι χρησιμοποίησε κυρίως την αντικατάσταση ποσοτήτων με ισοδύναμές τους. Πιο αναλυτικά, από το πρώτο μικρότερο mobile που δημιουργείται, βρήκε την ισοδυναμία ανάμεσα σε ένα εξάγωνο και δυο σφαίρες. Τη σχέση αυτή χρησιμοποίησε αμέσως μετά, για να αντικαταστήσει το εξάγωνο στη μεγαλύτερη σχέση που εκφράζει όλο το πρώτο mobile (όπου ένας ρόμβος και μια σφαίρα είναι ίσα με δυο σφαίρες κι ένα εξάγωνο) και να καταλήξει στο γεγονός πως ένας ρόμβος και μια σφαίρα έχουν το ίδιο βάρος με 4 σφαίρες ή ισοδύναμα ότι ο ρόμβος έχει το ίδιο βάρος με τρεις σφαίρες (σχέση Α). Τις δυο αυτές ισοδυναμίες χρησιμοποίησε στη συνέχεια, καθώς στα δυο επόμενα mobile αντικατέστησε το εξάγωνο και τον ρόμβο με σφαίρες με σκοπό να δει αν τα mobile ισορροπούν ή όχι. Έτσι, στο δεύτερο mobile (περίπτωση Β, εικόνα 47) προκύπτει ότι με την αντικατάσταση του εξαγώνου η ισότητα που δημιουργείται είναι ίδια με αυτή του πρώτου mobile, άρα εφόσον το πρώτο ισορροπεί, θα ισορροπεί και το δεύτερο. Στο τρίτο mobile (περίπτωση Γ, εικόνα 47) προκύπτει ότι δυο σφαίρες έχουν ίσο βάρος με έξι σφαίρες, σχέση η οποία δεν μπορεί να ισχύει και επομένως το mobile δεν ισορροπεί.



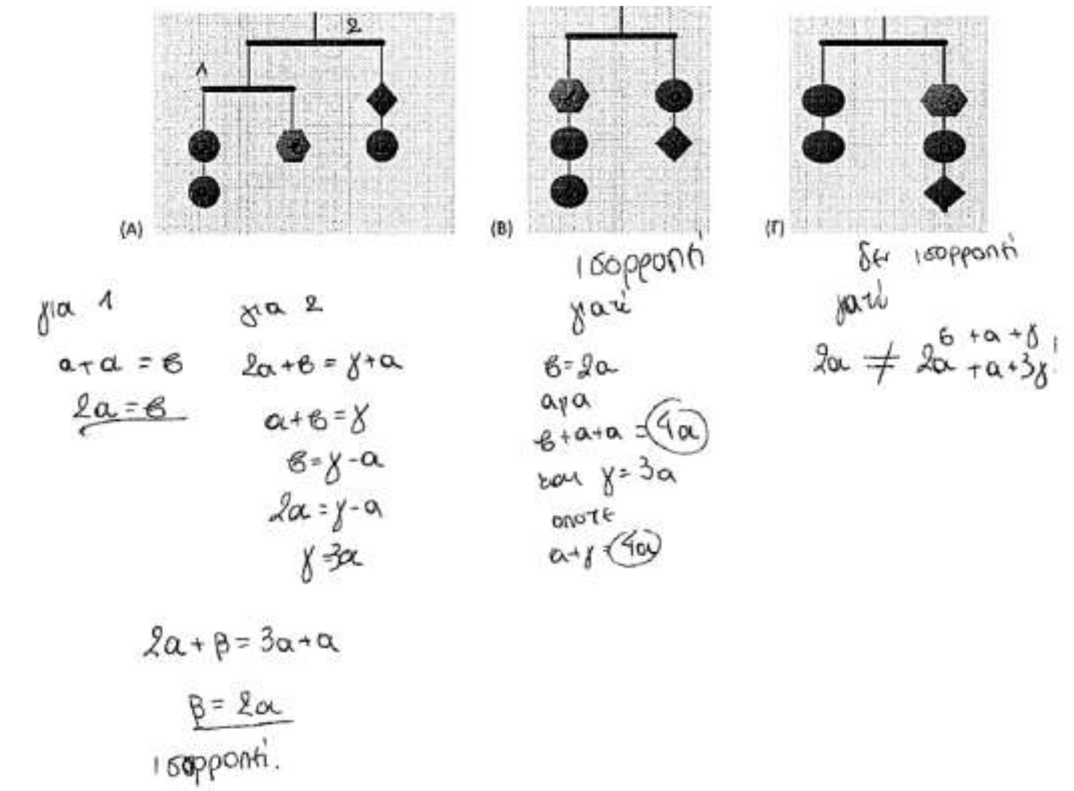
Εικόνα 47: Παράδειγμα εικονικού τρόπου επίλυσης

Με παραπλήσια συχνότητα χρησιμοποιήθηκε από τους φοιτητές και ο **συνδυαστικός** τρόπος επίλυσης. Όπως φαίνεται στην εικόνα 48, ο λύτης κάνει χρήση των εικονιδίων από το περιβάλλον του mobile, για να αναπαραστήσει τις διάφορες σχέσεις που εντοπίζει και συμπληρώνει με λόγια έτσι ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητό το σκεπτικό του, το οποίο δεν διαφοροποιείται από αυτό της πλειονότητας των συμμετεχόντων. Χρησιμοποιεί ωστόσο και αυτός την αντικατάσταση του εξαγώνου με μια ισοδύναμη ποσότητα, δηλαδή τις δυο σφαίρες, για να τονίσει την διαφορά που δημιουργείται ανάμεσα στις δυο πλευρές, καταλήγοντας να έχει η δεξιά πλευρά του mobile περισσότερο βάρος από την αριστερή.



Εικόνα 48: Παράδειγμα συνδυαστικού τρόπου επίλυσης

Τέλος, μικρότερος ήταν ο αριθμός των λυτών που επέλεξαν να επιλύσουν την δραστηριότητα χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό τρόπο. Η 49η εικόνα αποτελεί παράδειγμα αυτού του τρόπου επίλυσης, κατά το οποίο ο λύτης αφού αρχικά συμβόλισε τα σχήματα που υπάρχουν στο σύστημα με γράμματα, έπειτα μετέφρασε την κατάσταση ισορροπίας του mobile σε ένα σύστημα εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, ενώ εύκολα εντόπισε και την ισοδυναμία ανάμεσα στο εξάγωνο και τις δυο σφαίρες. Στην συνέχεια από την αρχική σχέση (2α+β=γ+α) αφαίρεσε μια σφαίρα (α) από κάθε πλευρά, για να καταλήξει στη σχέση όπου μια σφαίρα και ένα εξάγωνο είναι ίσα με έναν ρόμβο (α+β=γ). Αντικαθιστώντας το εξάγωνο με δυο σφαίρες (σχέση ισοδυναμίας που παρατήρησε αρχικά), καταλήγει στην ισοδυναμία ανάμεσα στον ρόμβο και τρεις σφαίρες. Από αυτό το σημείο κι έπειτα η πορεία της επίλυσής του μοιάζει αρκετά με την επίλυση στην εικόνα 47, καθώς στο δεύτερο mobile αντικαθιστά το ρόμβο και το εξάγωνο με τις ισοδύναμες σφαίρες, για να καταλήξει στην σχέση κατά την οποία τέσσερις σφαίρες έχουν ίσο βάρος με τέσσερις σφαίρες, γεγονός που ισχύει και άρα το mobile ισορροπεί. Το ίδιο σκεπτικό ακολουθεί και στο τρίτο mobile, όπου μετά την αντικατάσταση του ρόμβου και του εξαγώνου με σφαίρες, προκύπτει πως δύο σφαίρες ισοδυναμούν με έξι σφαίρες, σχέση η οποία δεν μπορεί να ισχύει και επομένως το mobile δεν θα ισορροπεί.



Εικόνα 49: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

Κοιτώντας συνολικά τις απαντήσεις των φοιτητών παρατηρούμε ότι προτίμησαν κυρίως τον κειμενικό τρόπο επίλυσης ενώ οι άλλοι τρεις τρόποι επίλυσης που εντοπίστηκαν, χρησιμοποιήθηκαν σχεδόν στο ίδιο επίπεδο.

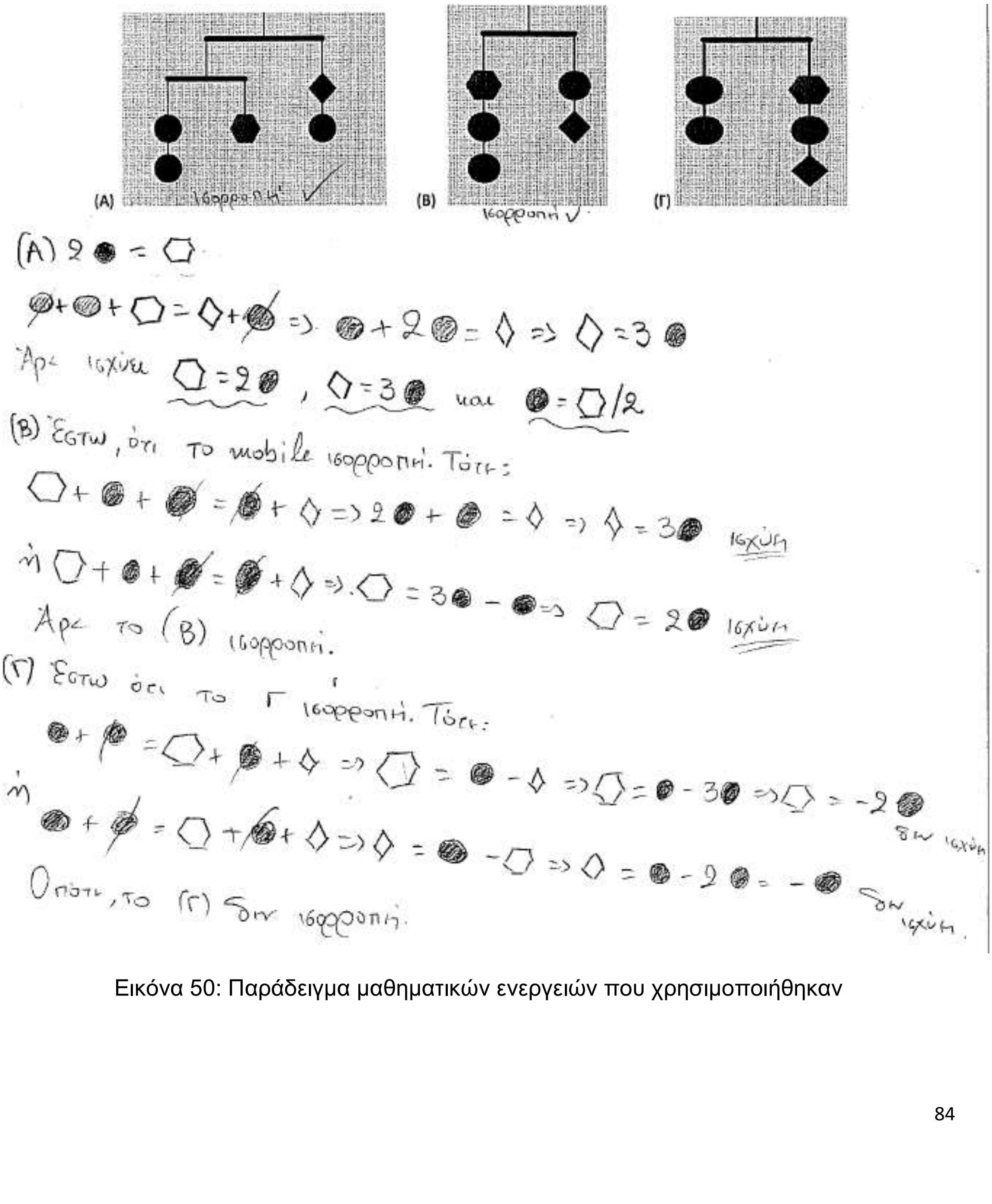
Παράλληλα με τους τρόπους επίλυσης αναλύθηκε και ο τρόπος παρέμβασης των φοιτητών πάνω στο αρχικό σύστημα, δηλωτικός πάντα της πρόθεσής τους να απλοποιήσουν την κατάσταση, διατηρώντας όμως την ισορροπία και ο οποίος μας παραπέμπει στις μαθηματικές ενέργειες ενός λύτη που ασχολείται με ένα τυπικό σύστημα εξισώσεων στην άλγεβρα. Συγκεκριμένα, σε αυτή την δραστηριότητα παρατηρήθηκαν τέσσερις τέτοιες ενέργειες, τις οποίες έχουμε συναντήσει και αναλύσει σε προηγούμενες δραστηριότητες. Λόγω της φύσης της δραστηριότητας, οι λύτες μπορούσαν να βρουν με κοινή λογική την απάντηση, με αποτέλεσμα να μην παρατηρηθούν οι μαθηματικές ενέργειες με την συχνότητα που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες δραστηριότητες.

Πιο αναλυτικά, μια μαθηματική ενέργεια που εντοπίστηκε κατά την ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών είναι η διαδικασία κατά την οποία μπορούμε *να αντικαταστήσουμε σε μια ισότητα μια ποσότητα με μια ισοδύναμή της, διατηρώντας την ωστόσο αναλλοίωτη*. Η ενέργεια αυτή αποτελεί κλασικό βήμα στην πλειονότητα των εξισώσεων που λύνονται αλγεβρικά, ωστόσο εδώ την εντοπίζουμε και στις απαντήσεις των φοιτητών που έχουν χρησιμοποιήσει διαφορετικό τρόπο επίλυσης. Εντοπίζεται λοιπόν, στην εικόνα 46 στο σημείο όπου ο λύτης εξηγεί ότι το εξάγωνο σύμφωνα με το mobile A ζυγίζει όσο δυο σφαίρες και στη συνέχεια στη σχέση που γράφει, παρατηρούμε ότι χρησιμοποιεί την παραπάνω ισοδυναμία αντικαθιστώντας το εξάγωνο. Το ίδιο ακριβώς κάνει και ο λύτης της εικόνας 48, ο οποίος προσπαθώντας να αποδείξει αν ισορροπεί ή όχι το mobile Γ, αντικαθιστά το εξάγωνο με δυο σφαίρες.

Τέλος, στην εικόνα 47 ο λύτης στηρίζει την απάντησή του εξ ολοκλήρου στην ενέργεια της αντικατάστασης μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της, εφόσον αντικαθιστά το εξάγωνο και το ρόμβο με σκοπό να δει αν τα mobile ισορροπούν ή όχι.

Ακόμη μια ενέργεια η οποία μπορεί να διατηρήσει αναλλοίωτη μια ισότητα και την οποία εντοπίσαμε στις απαντήσεις των φοιτητών, είναι η *αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δυο πλευρές της*. Στην εικόνα 47 για παράδειγμα, ο λύτης αρχικά γράφει, την σχέση που αναπαριστά το πρώτο mobile (ένας ρόμβος και μια σφαίρα είναι ίσα με δυο σφαίρες και ένα εξάγωνο), κάνοντας χρήση των εικονιδίων του συστήματος. Στη συνέχεια αντικαθιστά το εξάγωνο με δυο σφαίρες (σχέση ισοδυναμίας που εντόπισε από το mobile), για να αφαιρέσει στο τέλος από κάθε πλευρά μια σφαίρα και να καταλήξει στο ότι ένας ρόμβος ισοδυναμεί με 3 σφαίρες.

Για να περιγράψουμε τις επόμενες δυο ενέργειες που παρατηρήθηκαν είναι χρήσιμο να προσθέσουμε ακόμη μια εικόνα από την επίλυση της συγκεκριμένης δραστηριότητας.



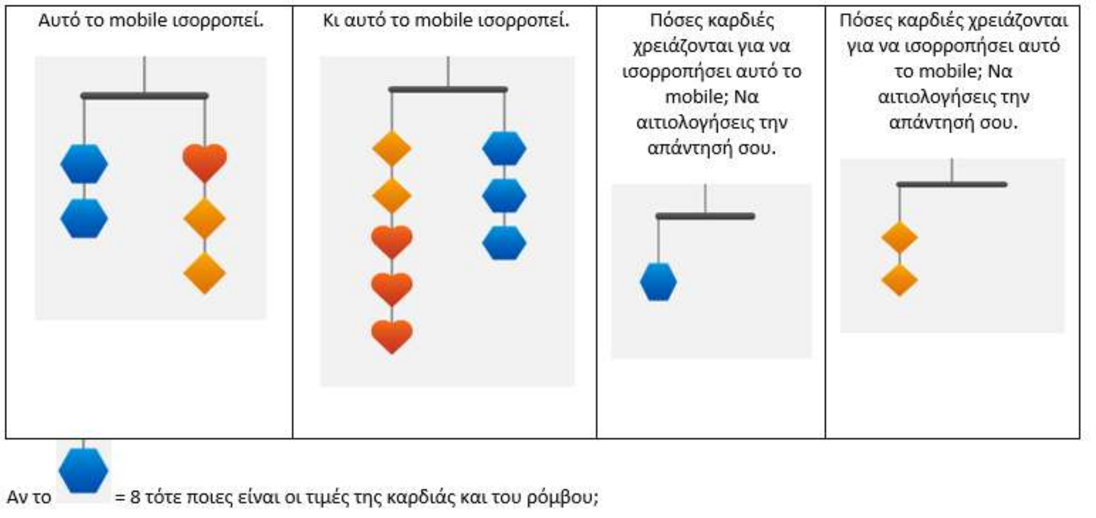
Εικόνα 50: Παράδειγμα μαθηματικών ενεργειών που χρησιμοποιήθηκαν

Το πρώτο που παρουσιάζει ενδιαφέρον στην εικόνα 50, είναι η λογική πάνω στην οποία βασίζεται η δουλειά του φοιτητή. Στην περίπτωση Β ξεκινά από την υπόθεση ότι ισχύει η δοσμένη σχέση και με μια σειρά από λογικά βήματα καταλήγει σε κάτι που γνωρίζει ότι ισχύει. Οπότε αφού ισχύει το δεύτερο θα ισχύει και το πρώτο. Για την περίπτωση Γ ακολουθεί αυτό που στα Μαθηματικά είναι γνωστό ως «απαγωγή σε άτοπο». Ξεκινά με την υπόθεση ότι η περίπτωση Γ ισχύει και με μια σειρά από λογικούς ισχυρισμούς καταλήγει σε κάτι που γνωρίζει ότι δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση που έκανε ότι το mobile Γ ισορροπεί δεν είναι σωστή και άρα δεν ισορροπεί.

Έχει επίσης ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τις ενέργειες τις οποίες πραγματοποίησε ο συγκεκριμένος φοιτητής. Στη μέση της επίλυσής του, στο σημείο που εξετάζει αν ισορροπεί ή όχι το mobile Β, γράφει κάνοντας χρήση των εικονιδίων του συστήματος, την σχέση που αναπαριστά το mobile Α (ένα εξάγωνο και δυο σφαίρες είναι ίσες με μια σφαίρα κι έναν ρόμβο). Στη συνέχεια, απομονώνει στη μια πλευρά το εξάγωνο και μεταφέρει όλα τα υπόλοιπα σχήματα στην άλλη πλευρά. Η κίνηση αυτή παραπέμπει άμεσα σε αυτό που στην φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης αποκαλούμε *χωρίζω γνωστούς από αγνώστους για να βρω την τιμή των άγνωστων μεταβλητών*. Τον ίδιο ακριβώς τρόπο ακολουθεί και στο mobile Γ, εξετάζοντας το μάλιστα δυο φορές, μια με βάση το εξάγωνο και μια τον ρόμβο.

Συνολικά, διαπιστώνεται ότι στην πέμπτη δραστηριότητα οι λύτες χρησιμοποίησαν περισσότερο δυο από τις βασικές μαθηματικές ενέργειες, οι οποίες διατηρούν αναλλοίωτη μια ισότητα, την αντικατάσταση και την αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δυο πλευρές της, ενώ οι άλλες δυο ενέργειες που περιγράφηκαν (διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου και χωρίζω γνωστούς από αγνώστους) εντοπίστηκαν ελάχιστα.

4.1.6 Ανάλυση 6ης δραστηριότητας



Εικόνα 51: 6η δραστηριότητα

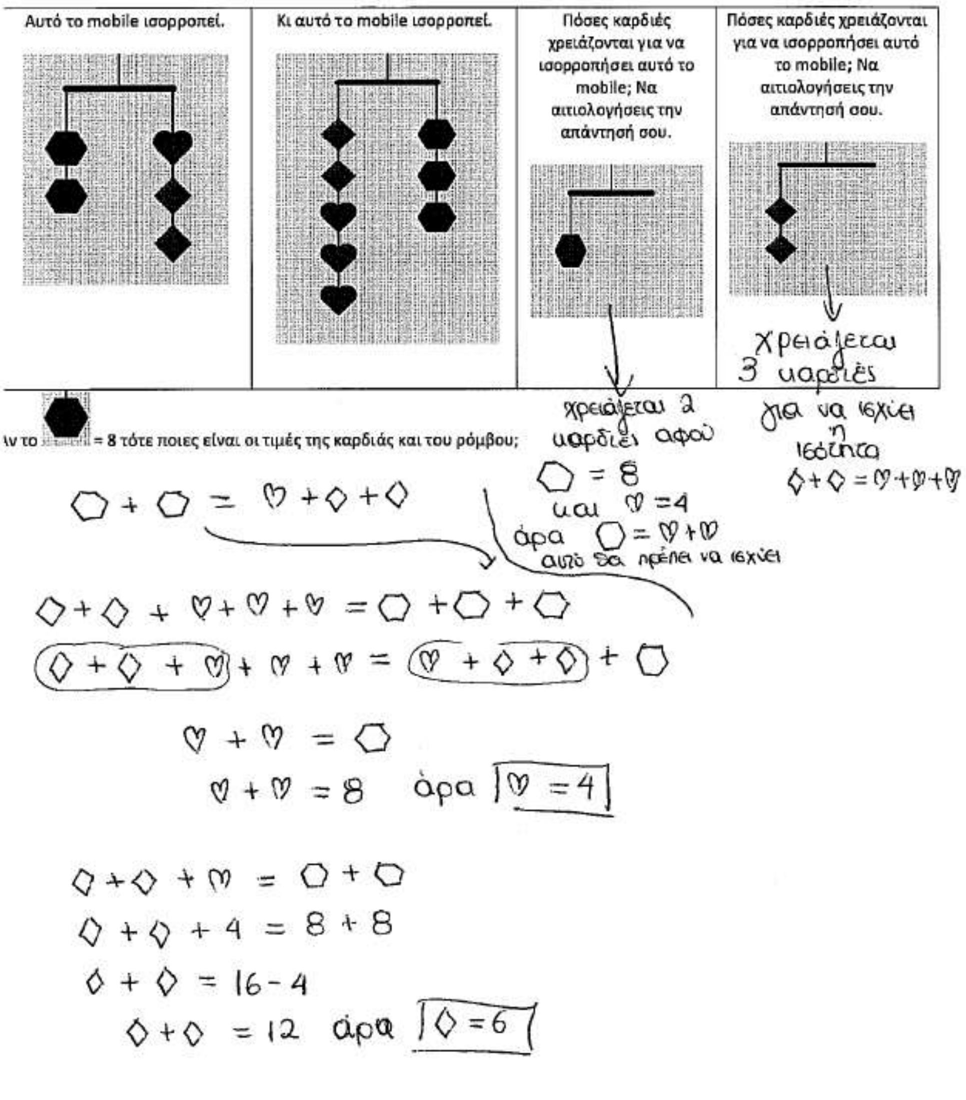
Την 6η δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 33 φοιτητές. Το ζητούμενό της ήταν διαφορετικό από τα προηγούμενα. Αρχικά, δίνονταν στους συμμετέχοντες δυο mobile, τα οποία ισορροπούσαν και με βάση αυτά οι λύτες έπρεπε να εντοπίσουν πόσες καρδιές χρειάζεται να συμπληρώσουν στον δεξί κλάδο, από τα επόμενα δυο mobile, προκειμένου να ισορροπήσουν, αλλά και να βρουν την τιμή των δύο άγνωστων μεταβλητών (της καρδιάς και του ρόμβου), γνωρίζοντας την τιμή του εξαγώνου που δινόταν ως δεδομένο. Η πλειονότητα των φοιτητών, προκειμένου να επιλύσει τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, ακολούθησε μια κοινή έως ένα σημείο πορεία. Πιο αναλυτικά, οι περισσότεροι λύτες, εύκολα εντόπιζαν την βασική διαφορά ανάμεσα στο πρώτο και το δεύτερο mobile, ότι δηλαδή στο δεύτερο mobile έχει προστεθεί ένα εξάγωνο στη μια πλευρά και δυο καρδιές στην άλλη πλευρά (σε σχέση με το πρώτο mobile). Επομένως, αυτόματα δινόταν η απάντηση στο τρίτο mobile καθώς από τη σχέση που βρήκαν (ένα εξάγωνο ισούται με δύο καρδιές), απαντούσαν ότι χρειάζονται δυο καρδιές για να ισορροπήσει το τρίτο mobile. Από το σημείο αυτό κι έπειτα, δεν ακολούθησαν όλοι τα ίδια βήματα, ωστόσο υπήρχαν τρεις κοινές κατευθύνσεις.

Στην πρώτη, αντικαθιστούσαν στο δεύτερο mobile τα τρία εξάγωνα με έξι καρδιές (εφόσον είχαν βρει νωρίτερα ότι ένα εξάγωνο ισοδυναμεί με 2 καρδιές), με αποτέλεσμα το mobile να έχει στον αριστερό κλάδο δύο ρόμβους και τρεις καρδιές και στον δεξί κλάδο έξι καρδιές. Στη συνέχεια, αφαιρούσαν από κάθε κλάδο τρεις καρδιές (την ίδια ποσότητα), για να καταλήξουν στην σχέση όπου δύο ρόμβοι ισοδυναμούν με τρείς καρδιές. Η δεύτερη ήταν παρόμοια με την πρώτη με τη διαφορά ότι επικεντρώνονταν στο πρώτο mobile. Συγκεκριμένα, αντικαθιστούσαν στο πρώτο mobile τα δύο εξάγωνα με τέσσερις καρδιές (ένα εξάγωνο ισοδυναμεί με δύο καρδιές), για να καταλήξουν σε μια ισότητα όπου στην αριστερή πλευρά είχε τέσσερις καρδιές και στην δεξιά πλευρά είχε μια καρδιά και δύο ρόμβους. Έπειτα, αφαιρούσαν μια καρδιά από κάθε πλευρά και έτσι έβρισκαν ότι δύο ρόμβοι ισοδυναμούν με τρείς καρδιές.

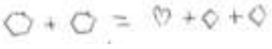
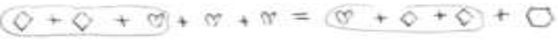
Τέλος, υπήρχαν ορισμένοι οι οποίοι χρησιμοποίησαν την τιμή του εξαγώνου, που δόθηκε ως δεδομένο της δραστηριότητας, για να μπορέσουν να συμπληρώσουν το ζητούμενο του τέταρτου mobile. Γνώριζαν από την αρχή ότι το κάθε εξάγωνο είχε βάρος ίσο με 8 μονάδες και εφόσον το καθένα ισοδυναμεί με δύο καρδιές, η κάθε καρδιά έχει βάρος ίσο με 4 μονάδες, αφήνοντας έτσι ως άγνωστη μόνο την τιμή του ρόμβου. Μετέφραζαν λοιπόν, στην ουσία την ισορροπία του πρώτου mobile σε μια εξίσωση με μοναδικό άγνωστο την τιμή του ρόμβου (8+8=4+2 ρόμβοι). Κάνοντας τις απαραίτητες ενέργειες για να λύσουν την εξίσωση, έβρισκαν ότι δύο ρόμβοι ζυγίζουν 12 μονάδες κι άρα ισοδυναμούν με τρεις καρδιές, αφού η κάθε καρδιά ζυγίζει 4 μονάδες. Με αυτόν τον τρόπο απαντούσαν ταυτόχρονα και στο τελευταίο ζητούμενο τις δραστηριότητας, όπου τους δινόταν η τιμή του εξαγώνου και έπρεπε να βρουν την τιμή του ρόμβου και της καρδιάς. Στις απαντήσεις των υπολοίπων που δεν ακολούθησαν καμία από αυτές τις πορείες, δεν παρατηρήθηκαν κάποια κοινά βήματα με τα οποία κατέληγαν στις τιμές του ρόμβου και τις καρδιάς.

Με παρόμοιο τρόπο ήταν μοιρασμένος και πάλι ο αριθμός των συμμετεχόντων σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο επέλεξαν να πραγματοποιήσουν την επίλυση της δραστηριότητας. Συνολικά, στην έκτη δραστηριότητα παρατηρήθηκαν τέσσερις διαφορετικοί **τρόποι επίλυσης**, τους οποίους έχουμε συναντήσει ξανά σε αναλύσεις προηγούμενων δραστηριοτήτων.

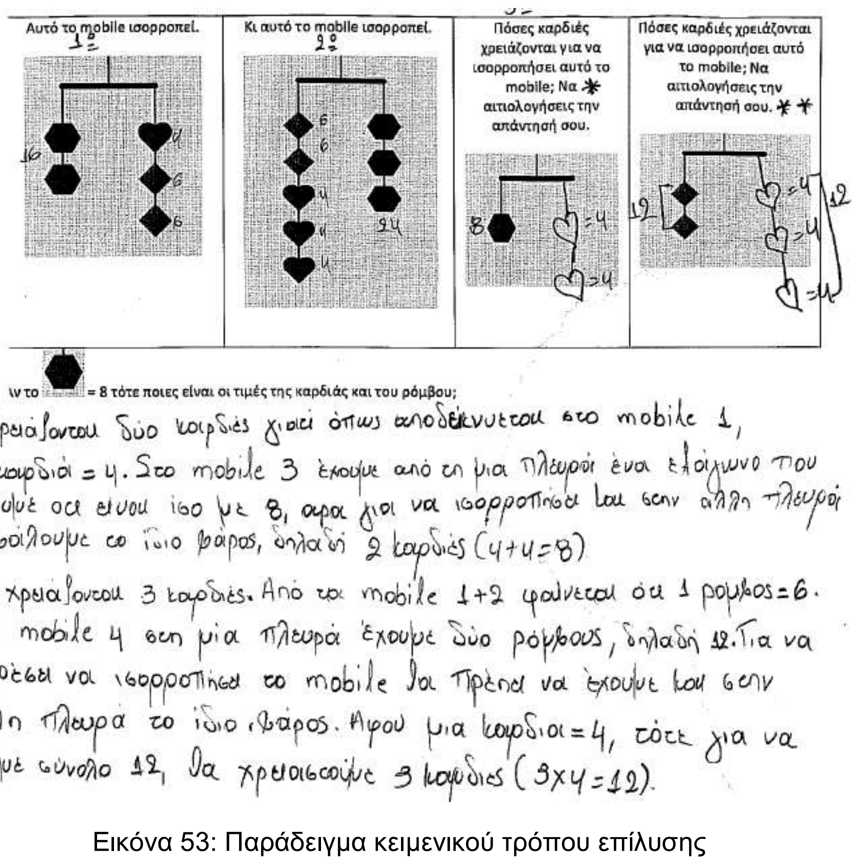
Πιο αναλυτικά, το 1/3 περίπου των φοιτητών επέλεξε να επιλύσει την δραστηριότητα κάνοντας **χρήση των εικονιδίων** του συστήματος.



Εικόνα 52: Παράδειγμα εικονικού τρόπου επίλυσης

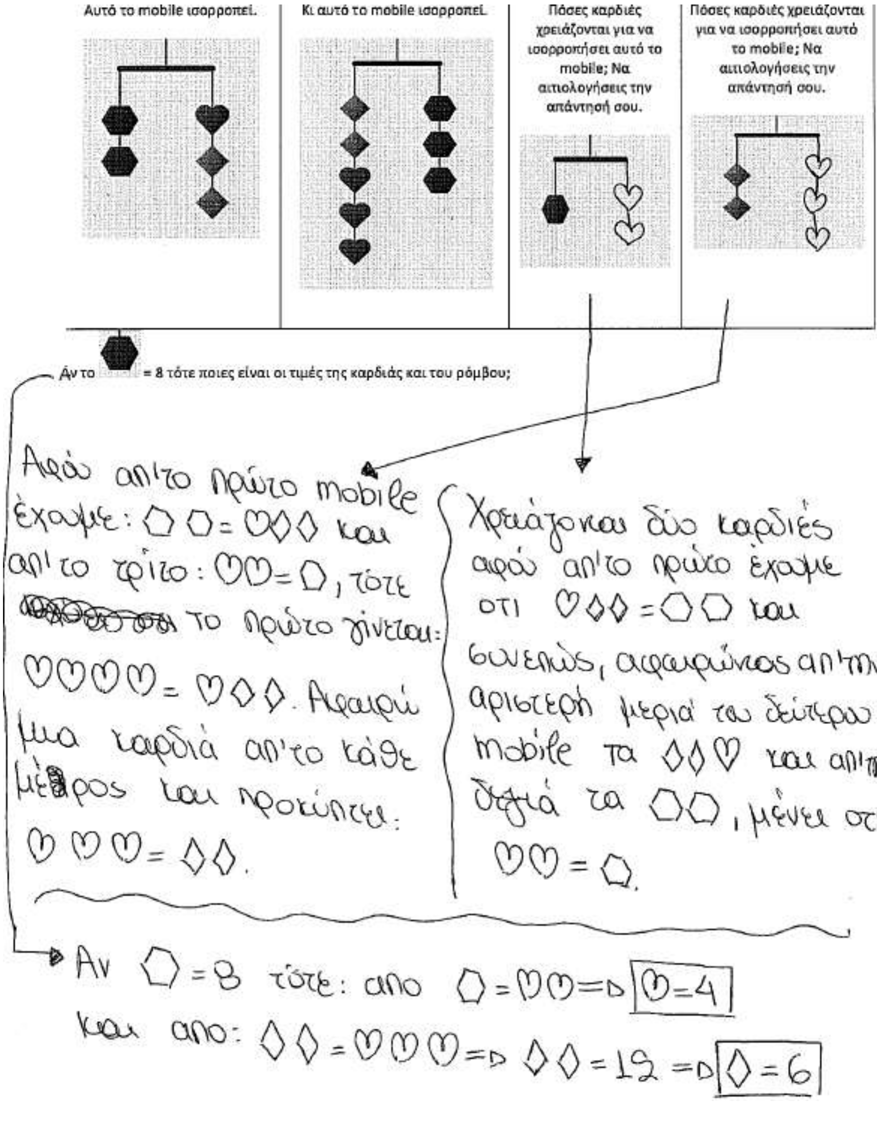
Όπως φαίνεται στην εικόνα 52, ο λύτης πρακτικά αναπαριστά τις σχέσεις που υπάρχουν στο mobile χρησιμοποιώντας τα εικονίδια του συστήματος, αντί να χρησιμοποιήσει γράμματα όπως συμβαίνει και σε μια τυπική αλγεβρική προσέγγιση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ωστόσο, η προσέγγιση του συγκεκριμένου φοιτητή, διότι στο αρχικό στάδιό της δεν παρουσιάζει ομοιότητα με όσες πορείες επίλυσης περιγράφηκαν παραπάνω. Ξεκινά γράφοντας αναλυτικά τις δύο ισότητες που αναπαριστούν τα δυο πρώτα ισορροπημένα mobile ( - 1η σχέση,  - 2η σχέση). Χρησιμοποιεί στη συνέχεια την πρώτη σχέση για να αντικαταστήσει στην δεύτερη σχέση τα δυο εξάγωνα (με μια καρδιά και δυο ρόμβους)  .Το επόμενο του βήμα είναι να αφαιρέσει από κάθε πλευρά της ισότητας την ίδια ποσότητα (1 καρδιά και δύο ρόμβους – αυτά που έχει κυκλώσει) για να καταλήξει στην εξής ισοδύναμη σχέση: , από την οποία βρίσκει ότι και οι δυο καρδιές μαζί ζυγίζουν 8 μονάδες, όσο το βάρος του εξαγώνου, επομένως η κάθε καρδιά ζυγίζει 4 μονάδες. Η υπόλοιπη επίλυσή του βασίζεται στην αντικατάσταση των τιμών του εξαγώνου και της καρδιάς, αφήνοντας ως άγνωστη μεταβλητή την τιμή του ρόμβου. Τα βήματα αυτά περιγράφηκαν αναλυτικά πιο πάνω.

Άλλος ένας τρόπος επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε αρκετά ήταν ο **κειμενικός**. Η εικόνα 53 αποτελεί παράδειγμα του συγκεκριμένου τρόπου επίλυσης, κατά το οποίο παρατηρούμε τον λύτη να εξηγεί αναλυτικά ένα κομμάτι της σκέψης του χρησιμοποιώντας μόνο λέξεις. Το κομμάτι που παραλείπει να περιγράψει εκτενώς, αφορά τα βήματα με βάση τα οποία βρήκε την τιμή του ρόμβου και της καρδιάς από τα δύο πρώτα mobile. Η διαφορά του συγκεκριμένου λύτη σε σχέση με την πλειοψηφία είναι ότι πρώτα βρίσκει τις τιμές των σχημάτων που υπάρχουν στα mobiles και ύστερα με βάση αυτές συμπληρώνει το τρίτο και το τέταρτο mobile.



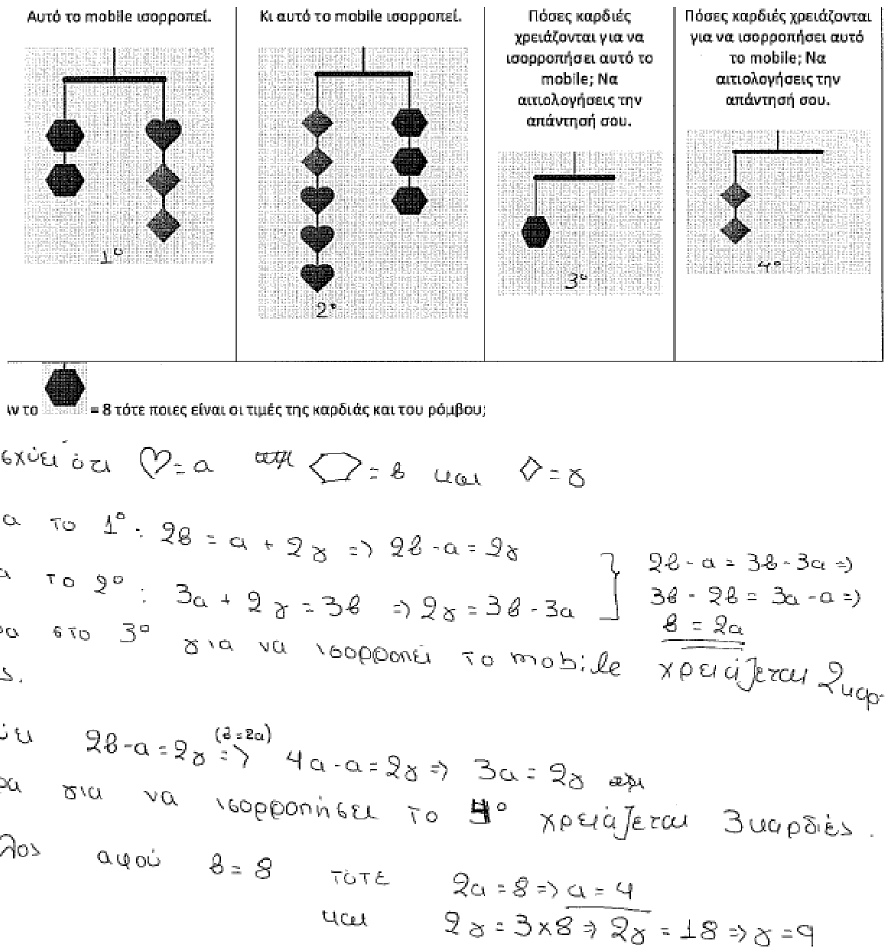
Εικόνα 53: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

Με παραπλήσια συχνότητα χρησιμοποιήθηκε από τους φοιτητές και ο **συνδυαστικός** τρόπος επίλυσης. Στην εικόνα 54 παρατηρούμε ότι ο λύτης χρησιμοποιεί ταυτόχρονα λέξεις αλλά και τα εικονίδια του συστήματος, προκειμένου να διατυπώσει όσο καλύτερα γίνεται τα βήματα πάνω στα οποία στήριξε την επίλυσή του. Τα βήματα αυτά ταυτίζονται πλήρως με την δεύτερη περίπτωση που περιγράφηκε στην αρχή, ως μια από τις κοινές πορείες των λυτών προς την επίλυση.



Εικόνα 54: Παράδειγμα συνδυαστικού τρόπου επίλυσης

Τέλος, λιγότεροι ήταν εκείνοι που επέλεξαν τον **αλγεβρικό τρόπο** για να επιλύσουν την δραστηριότητα. Στην εικόνα 55 ο λύτης αρχικά, συμβόλισε τα γράμματα και στη συνέχεια μετέφρασε την κατάσταση ισορροπίας των mobile, σε ένα σύστημα εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, το οποίο έπειτα προσπαθεί να επιλύσει, φανερώνοντας έτσι την εξοικείωσή του με την αλγεβρική επίλυση.



Εικόνα 55: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

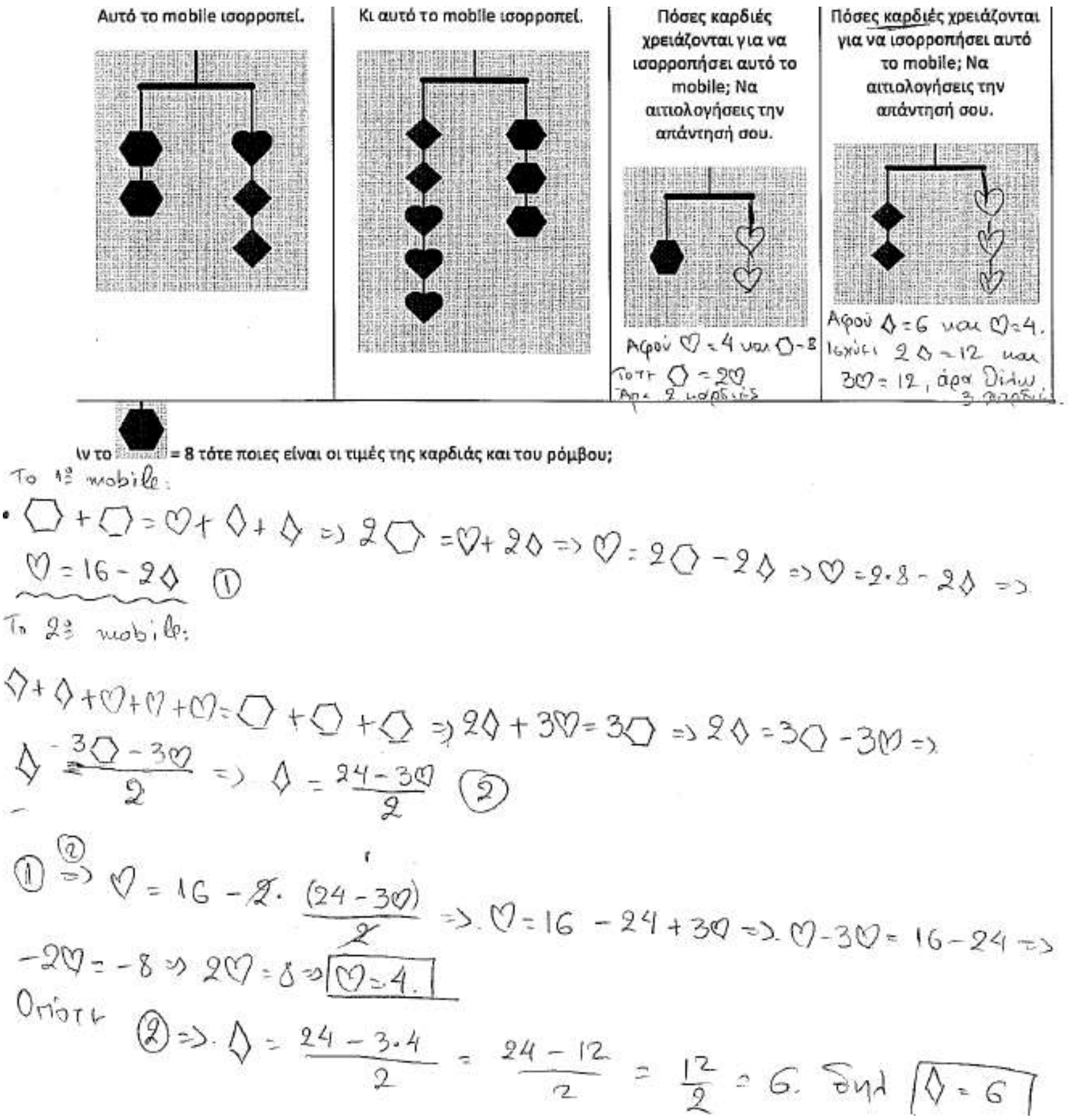
Κάνοντας μια συνολική εκτίμηση σχετικά με τους τρόπους επίλυσης σε αυτή τη δραστηριότητα, παρατηρείται συχνότερη χρήση των εικονιδίων του συστήματος, με τον κειμενικό τρόπο επίλυσης και τον συνδυαστικό να ακολουθούν, ενώ ο αλγεβρικός συναντήθηκε μόλις σε πέντε επιλύσεις.

Επίσης, σε σχέση με τις μαθηματικές ενέργειες που προβαίνει ένας λύτης όταν αντιμετωπίζει μια εξίσωση ή ένα σύστημα αλγεβρικά, βρέθηκαν σε αυτή τη δραστηριότητα τα εξής:

Μια μαθηματική ενέργεια η οποία χρησιμοποιήθηκε αρκετά από τους λύτες, όπως φάνηκε από την ανάλυση των απαντήσεων τους, είναι η διαδικασία κατά την οποία μπορούμε να *αντικαταστήσουμε μια ποσότητα σε μια ισότητα με μια ισοδύναμή της, διατηρώντας την ωστόσο αναλλοίωτη*. Ήδη μέσα από τις εικόνες που παρουσιάζονται παραπάνω, μπορούμε να εντοπίσουμε την ενέργεια αυτή (βλ. Παράδειγμα στην Εικόνα 52).

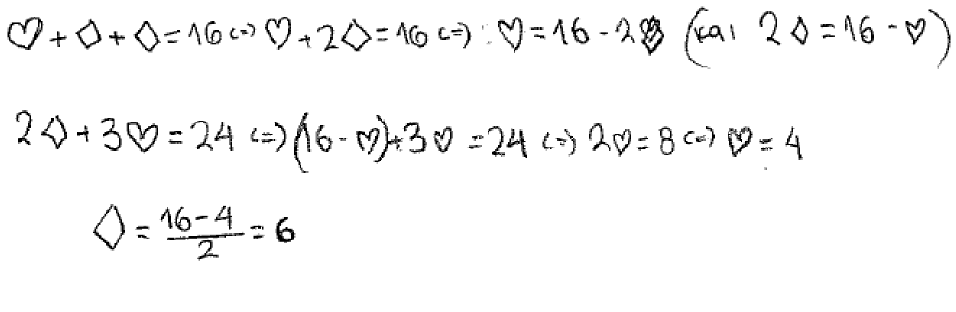
Στις Εικόνες 54 και 52 μπορούμε να παρατηρήσουμε ακόμη μια τυπική περίπτωση μαθηματικής ενέργειας, την γνώση ότι μπορούμε να *αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα και από τις δυο πλευρές μιας ισότητας* χωρίς να την διαταράξουμε.

Επιπλέον, στην Εικόνα 52 οι ενέργειες του λύτη παραπέμπουν σε αυτό που στην φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης ονομάζουμε *χωρίζω γνωστούς από αγνώστους*, δηλαδή τις γνωστές από τις άγνωστες ποσότητες. Την ίδια ενέργεια εντοπίζουμε και στην Εικόνα 56.



Εικόνα 56: Παράδειγμα μαθηματικών ενεργειών που χρησιμοποιήθηκαν

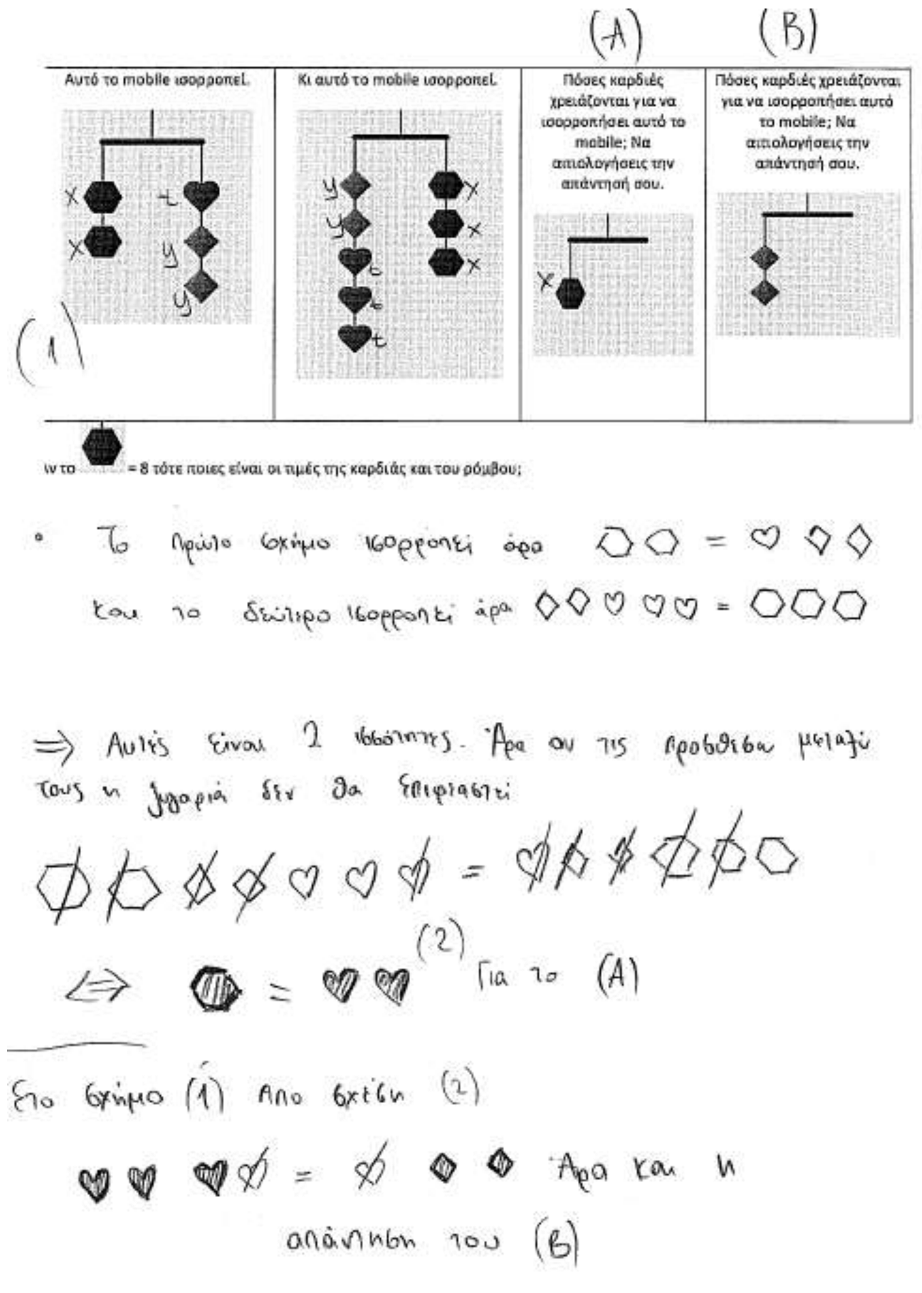
Στην Εικόνα 56, εντοπίζεται ακόμη μια ενέργεια η οποία μας παραπέμπει στην αλγεβρική λύση μιας εξίσωσης, η *διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου* όπως την αποκαλούμε.



Εικόνα 57: Παράδειγμα μαθηματικών ενεργειών που χρησιμοποιήθηκαν

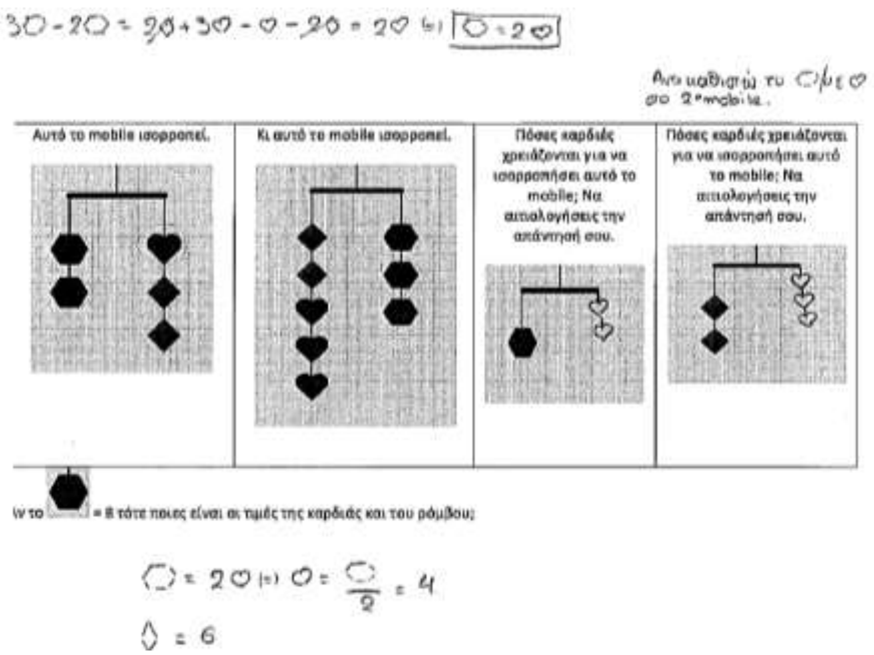
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρήση επίσης της *μεθόδου της αντικατάστασης* (Εικόνα 57), όπου η σχέση «δύο ρόμβοι ισοδυναμούν με 16 μονάδες μειωμένες κατά μια καρδιά» αντικαθίσταται στο δεύτερο mobile, για να μπορέσει να προσδιοριστεί η τιμή του ρόμβου.

Η δυνατότητα *να προσθέσουμε κατά μέλη* δυο εξισώσεις είναι μια καινούργια μαθηματική ενέργεια που εντοπίστηκε σε αυτή την δραστηριότητα (Εικόνα 58). Αρχικά, ο λύτης μεταφράζει σωστά την ισορροπία των mobile και γράφει τις σχέσεις ισότητας που προκύπτουν από τα δυο πρώτα. Από την σχέση που προκύπτει προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ισότητες (δύο εξάγωνα και δύο ρόμβοι και τρεις καρδιές ισοδυναμούν με δυο εξάγωνα και μια καρδιά και έναν ρόμβο), αφαιρεί την ίδια ποσότητα (δύο εξάγωνα, μια καρδιά, δύο ρόμβους) από κάθε πλευρά και καταλήγει στην ισοδυναμία ανάμεσα σε ένα εξάγωνο και δυο καρδιές.

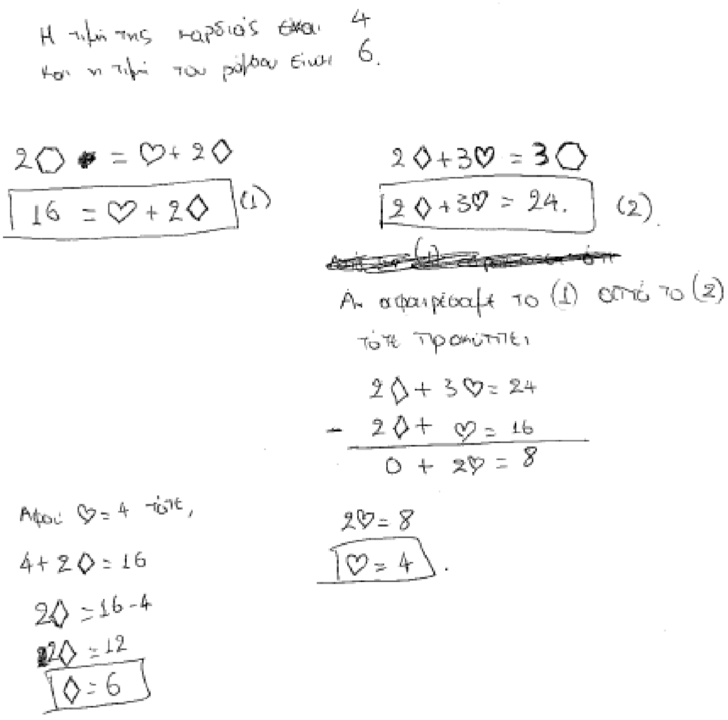


Εικόνα 58: Παράδειγμα πρόσθεσης κατά μέλη

Στο ίδιο πνεύμα, οι λύτες των Εικόνων 59 και 60 επιδεικνύουν τη γνώση της δυνατότητας *να αφαιρέσουμε κατά μέλη* δυο εξισώσεις. Στην εικόνα 60, ο φοιτητής έχει ξαναγράψει τις δυο σχέσεις που αναπαριστούν τα δύο πρώτα mobile αντίστοιχα (16=δύο ρόμβοι και μια καρδιά, δύο ρόμβοι και τρεις καρδιές=24) και στη συνέχεια αποφασίζει να αφαιρέσει την πρώτη από τη δεύτερη για να καταλήξει στο ότι δυο καρδιές ζυγίζουν 8 μονάδες. Το ίδιο ακριβώς κάνει και ο λύτης στην εικόνα 59, με την διαφορά ότι χρησιμοποιεί τα αρχικά εικονίδια και δεν έχει αντικαταστήσει το εξάγωνο με την τιμή του.



Εικόνα 59: 1ο παράδειγμα αφαίρεσης κατά μέλη

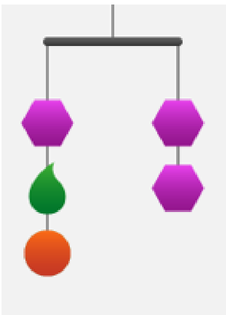


Εικόνα 60: 2ο παράδειγμα αφαίρεσης κατά μέλη

Συγκεντρωτικά, φαίνεται ότι χρησιμοποιήθηκε πιο πολύ από τους λύτες η ενέργεια της αντικατάστασης μιας ποσότητας από μια ισοδύναμή της, ενώ αρκετά χρησιμοποιήθηκε και η αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δυο πλευρές μιας ισότητας. Η διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου, η δυνατότητα να χωρίζουν τις γνωστές από τις άγνωστες ποσότητες και η μέθοδος της αντικατάστασης, κατά την οποία λύνουν ως προς τον έναν άγνωστο κι έπειτα αντικαθιστούν, χρησιμοποιήθηκαν από μια μικρότερη μερίδα των φοιτητών. Τέλος, παρατηρήθηκαν δυο μαθηματικές ενέργειες στην έκτη δραστηριότητα, η αφαίρεση κατά μέλη αλλά και η πρόσθεση κατά μέλη, τις οποίες δεν είχαμε συναντήσει ξανά.

4.1.7 Ανάλυση 7ης δραστηριότητας

Ποια/ες από τις παρακάτω αλλαγές θα διατηρήσουν το mobile σε ισορροπία. Να δικαιολογήσεις κάθε απάντησή σου (γιατί θα το διατηρήσει και γιατί όχι).



α) Το να προσθέσουμε ένα εξάγωνο σε κάθε πλευρά.

β) Το να προσθέσουμε 5 σταγόνες σε κάθε πλευρά.

γ) Να μετακινήσουμε όλα τα εξάγωνα στη δεξιά πλευρά.

δ) Το να αλλάξουμε πλευρά την σταγόνα και τον κύκλο.

ε) Το να προσθέσουμε έναν κύκλο στην δεξιά πλευρά.

στ) Να αφαιρέσουμε ένα εξάγωνο από κάθε πλευρά.

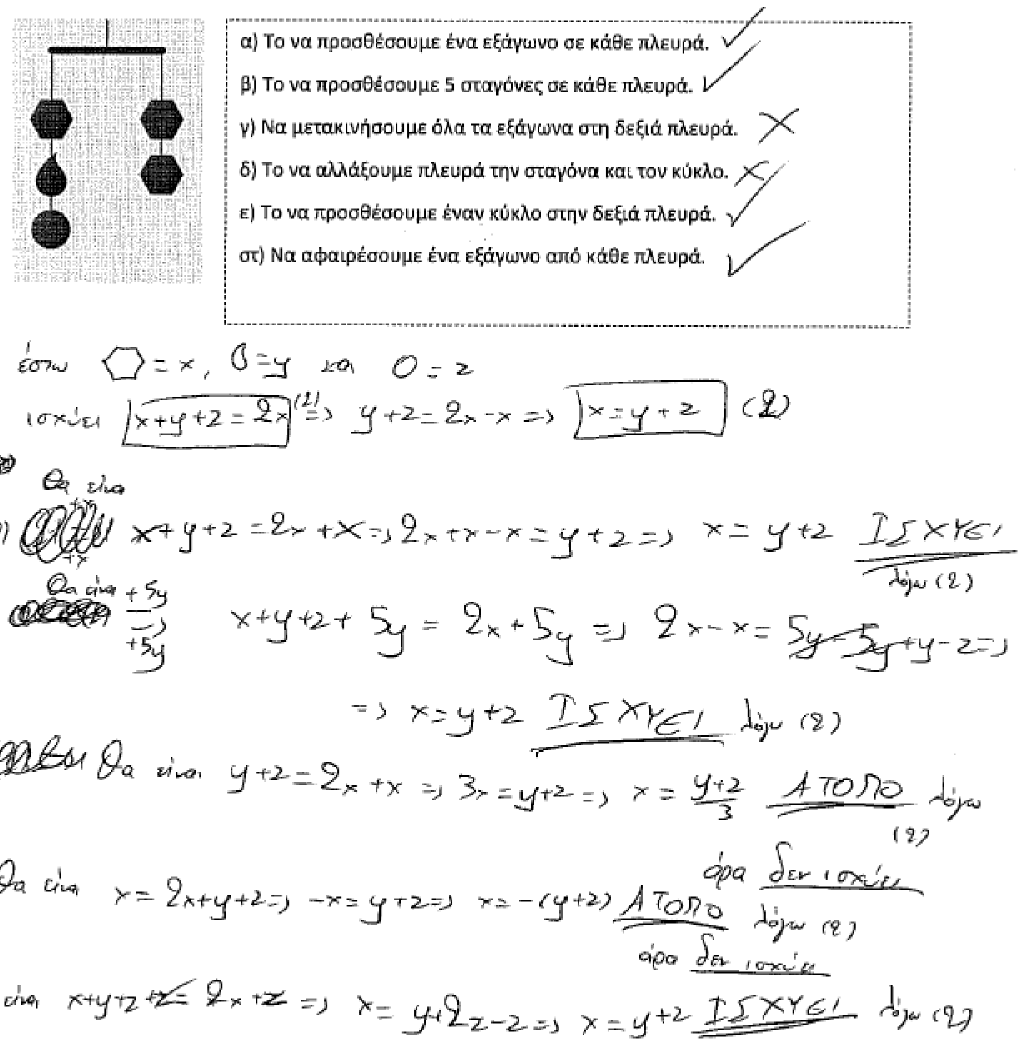
Εικόνα 61: 7^{η} δραστηριότητα

Την 7^{η} δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 30 φοιτητές. Η δραστηριότητα αυτή διέφερε από τις προηγούμενες όπως φαίνεται και από την εκφώνησή της. Λόγω της δομής της δραστηριότητας, οι περισσότεροι λύτες εφάρμοζαν νοερά τις αλλαγές που τους δίνονταν πάνω στο mobile και στη συνέχεια έγραφαν και δικαιολογούσαν την απάντησή τους. Δεν επενέβησαν επομένως στο σύστημα προκειμένου να εφαρμόσουν τις προτεινόμενες αλλαγές. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η πλειονότητα των φοιτητών να ακολουθήσει το ίδιο σκεπτικό και να δώσει τις ίδιες αιτιολογήσεις. Πιο αναλυτικά, για τις προτάσεις α και β αιτιολογούσαν ότι αφού προσθέτουμε το ίδιο βάρος και στους δυο κλάδους το mobile θα ισορροπεί. Για τις επόμενες δύο προτάσεις (γ, δ) έγραφαν ότι από την στιγμή που μετακινούμε από τον αριστερό κλάδο ενός ισορροπημένου mobile ένα σχήμα στον δεξί κλάδο, τότε αυτός (ο δεξιός) θα έχει περισσότερο βάρος και άρα το mobile δεν θα ισορροπεί. Για την πέμπτη πρόταση (ε) έγραφαν πως δεν θα ισορροπεί και το αιτιολογούσαν με το σκεπτικό ότι προσθέτουμε σε ένα mobile που ισορροπεί μια ποσότητα (ένα σχήμα) μόνο στον έναν κλάδο του και άρα αυτός ο κλάδος θα έχει περισσότερο βάρος και το mobile θα γέρνει προς εκείνη την πλευρά. Τέλος, για την επόμενη πρόταση (στ) έγραφαν πως το mobile θα συνεχίσει να ισορροπεί, διότι αφαιρούμε το ίδιο βάρος και από τους δύο κλάδους κι αυτή είναι μια κίνηση που δεν διαταράσσει την ισορροπία του.

Υπήρχαν βέβαια και λίγοι οι οποίοι αρχικά έδιναν υποθετικές τιμές στα σχήματα του mobile και με βάση αυτές δοκίμαζαν όλες τις προτάσεις που τους δίνονταν.

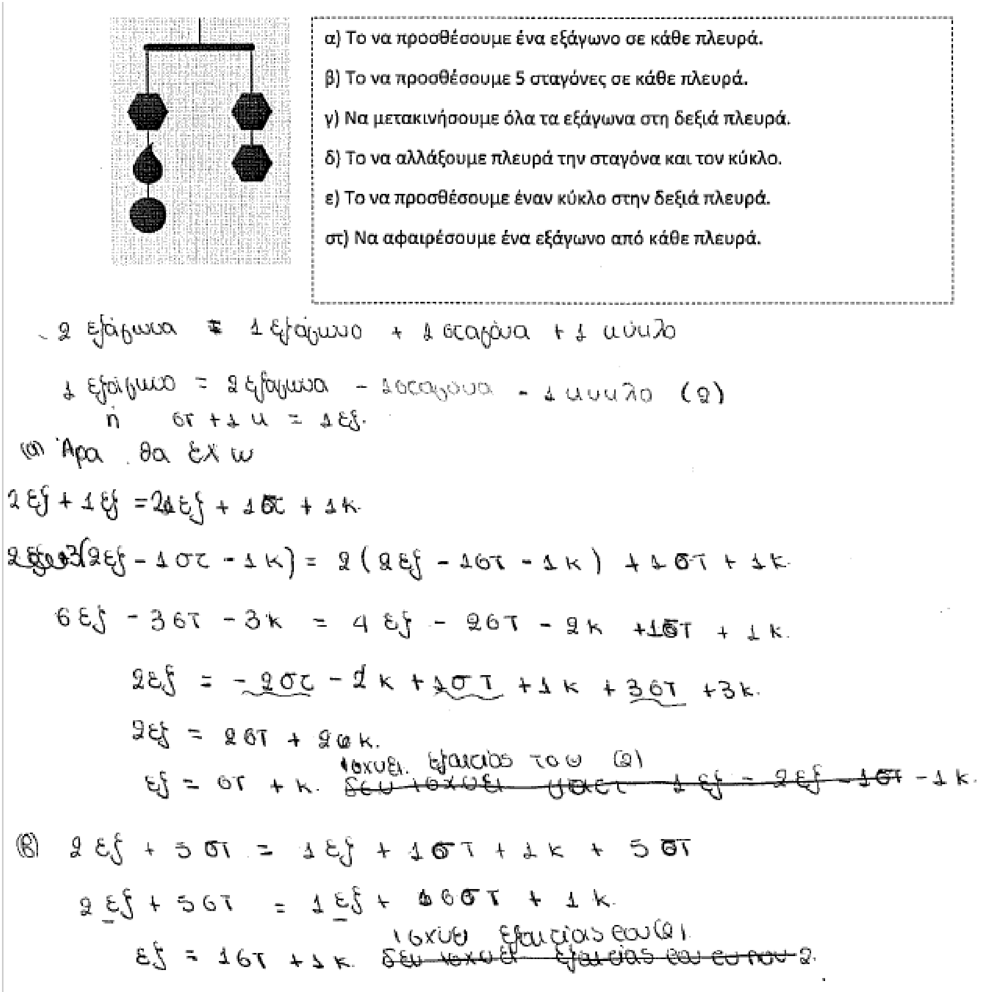
Στην 7^{η} αυτή δραστηριότητα, παρά το κοινό σκεπτικό των περισσότερων φοιτητών, εντοπίστηκαν κυρίως δύο τρόποι επίλυσης ο **κειμενικός,** όπου οι λύτες χρησιμοποιούν μόνο λέξεις για να απαντήσουν στα ζητούμενα της δραστηριότητας και να αιτιολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους και ο **συνδυαστικός,** κατά τον οποίο χρησιμοποιούν τις λέξεις για να περιγράψουν τον συλλογισμό τους, αλλά κάνουν χρήση των εικονιδίων του συστήματος για να αποτυπώσουν τις διάφορες σχέσεις και ισότητες που εντοπίζουν από το mobile.

Ο **αλγεβρικός** τρόπος επίλυσης συναντήθηκε μόνο μια φορά με τον λύτη να κινείται ανάμεσα στο «ΙΣΧΥΕΙ» και «ΑΤΟΠΟ», ανάλογα με το αν η ζητούμενη επέμβαση στο σύστημα διατηρούσε ή όχι την ισορροπία του συστήματος (Εικόνα 62).



Εικόνα 62: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

Τέλος, χρησιμοποιήθηκε και μια παραλλαγή του αλγεβρικού τρόπου επίλυσης όπου χρησιμοποιούνται οι ονομασίες των σχημάτων (ολόκληρες και σε συντομογραφία) ως μεταβλητές (Εικόνα 63).



Εικόνα 63: Παράδειγμα αλγεβρικής λύσης χωρίς την χρήση γραμμάτων στις μεταβλητές

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή, η διαφορά αυτής της δραστηριότητας με τις προηγούμενες είναι το ζητούμενο, καθώς δεν χρειάζεται να επέμβουν στο σύστημα και να κάνουν αλλαγές, αλλά να τεκμηριώσουν τον λόγο για τον οποίο κάποιες αλλαγές θα διατηρήσουν ή όχι την ισορροπία του mobile. Για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό να δούμε αναλυτικά τα επιχειρήματά τους για κάθε περίπτωση.

Στην πρώτη περίπτωση (να προσθέσουμε ένα εξάγωνο σε κάθε πλευρά), το βασικό τους επιχείρημα είναι ότι στους δύο κλάδους ενός ισορροπημένου mobile προσθέτουμε ίσο αριθμό από ισοδύναμα βάρη, με αποτέλεσμα ο φόρτος που προστίθεται στους δυο κλάδους να είναι ο ίδιος και άρα να μην διαταράσσει την ισορροπία του mobile. Για την δεύτερη περίπτωση (να προσθέσουμε πέντε σταγόνες σε κάθε πλευρά), η τεκμηρίωσή τους παραμένει ακριβώς ίδια με την πρώτη, εφόσον το μόνο που αλλάζει είναι η ποσότητα από τα βάρη που προστίθενται σε κάθε πλευρά (αντί για ένα εξάγωνο σε κάθε πλευρά προσθέτουμε πέντε σταγόνες σε κάθε πλευρά).

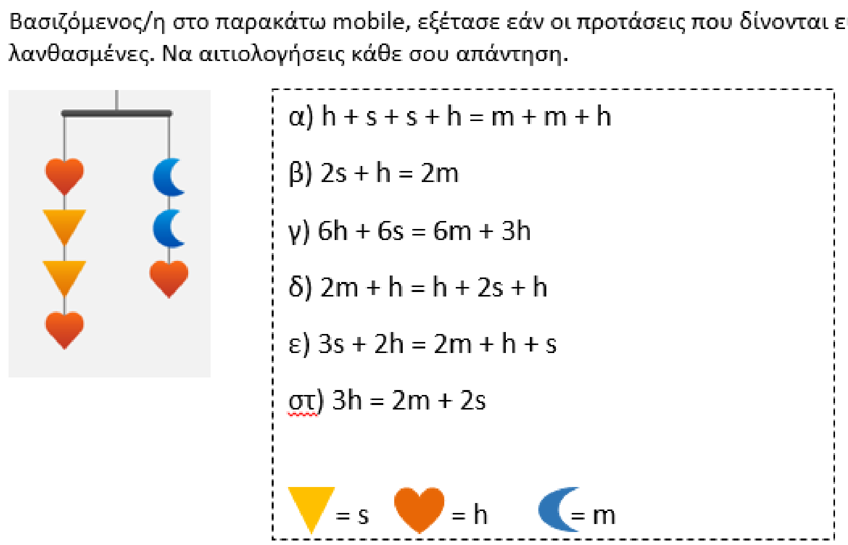
Στην τρίτη περίπτωση (να μετακινήσουμε όλα τα εξάγωνα στη δεξιά πλευρά), υποστήριζαν ότι θα διαταραχθεί η ισορροπία του mobile, διότι από ένα mobile που ισορροπεί αφαιρούμε ένα βάρος από τον αριστερό κλάδο και το προσθέτουμε στον δεξί, χωρίς καμία άλλη αλλαγή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το βάρος του δεξιού κλάδου να είναι μεγαλύτερο και άρα το mobile να γέρνει προς τα δεξιά. Υπήρχαν βέβαια ορισμένοι οι οποίοι έκαναν νοερά την αλλαγή και αιτιολογούσαν πιο συγκεκριμένα γράφοντας ότι η σχέση που προκύπτει (1 σφαίρα και 1 σταγόνα=3 εξάγωνα) δεν ισχύει και άρα το mobile δεν θα συνεχίσει να ισορροπεί.

Η τεκμηρίωση της τέταρτης περίπτωσης (να αλλάξουμε πλευρά την σταγόνα και τον κύκλο), δεν διέφερε από αυτή της τρίτης διότι και πάλι υπήρχε μετακίνηση φορτίου από τον αριστερό στον δεξί κλάδο. Και εδώ εντοπίστηκαν απαντήσεις όπου αιτιολογούσαν με βάση τη σχέση που προκύπτει. Έτσι, κατέληγαν στη σχέση όπου ένα εξάγωνο ισούται με δύο εξάγωνα, μια σφαίρα και μια σταγόνα, κάτι που γνώριζαν ότι δεν ισχύει και επομένως αυτό αρκούσε για να επιβεβαιώσουν το σκεπτικό τους, πως το mobile δεν θα ισορροπεί.

Στην πέμπτη περίπτωση (να προσθέσουμε ένα κύκλο στη δεξιά πλευρά), το βασικό τους επιχείρημα ήταν πως σε μια σχέση ισότητας ότι αλλαγές κάνουμε στο ένα σκέλος πρέπει να κάνουμε και στο άλλο για να παραμείνει η ισότητα. Έτσι, αν στο συγκεκριμένο mobile που ισορροπεί προσθέσουμε μια ποσότητα επιπλέον στη μια μόνο πλευρά (τη δεξιά), τότε το mobile θα πάψει να ισορροπεί και θα γέρνει προς τα δεξιά.

Τέλος, για την έκτη περίπτωση (να αφαιρέσουμε ένα εξάγωνο από κάθε πλευρά), η αιτιολόγησή τους στηριζόταν στο ίδιο σκεπτικό με την αιτιολόγηση για τις δύο πρώτες προτάσεις, καθώς όπως έγραφαν ισχύει το ίδιο πράγμα και για την πρόσθεση και για την αφαίρεση ποσοτήτων. Από τη στιγμή λοιπόν, που έχουμε ένα ισορροπημένο mobile και αφαιρούμε από κάθε κλάδο του ίσο αριθμό από ισοδύναμα βάρη, τότε το mobile θα συνεχίσει να ισορροπεί, διότι το βάρος που θα μείνει σε κάθε κλάδο του θα συνεχίσει να είναι ίσο.

4.1.8 Ανάλυση 8ης δραστηριότητας



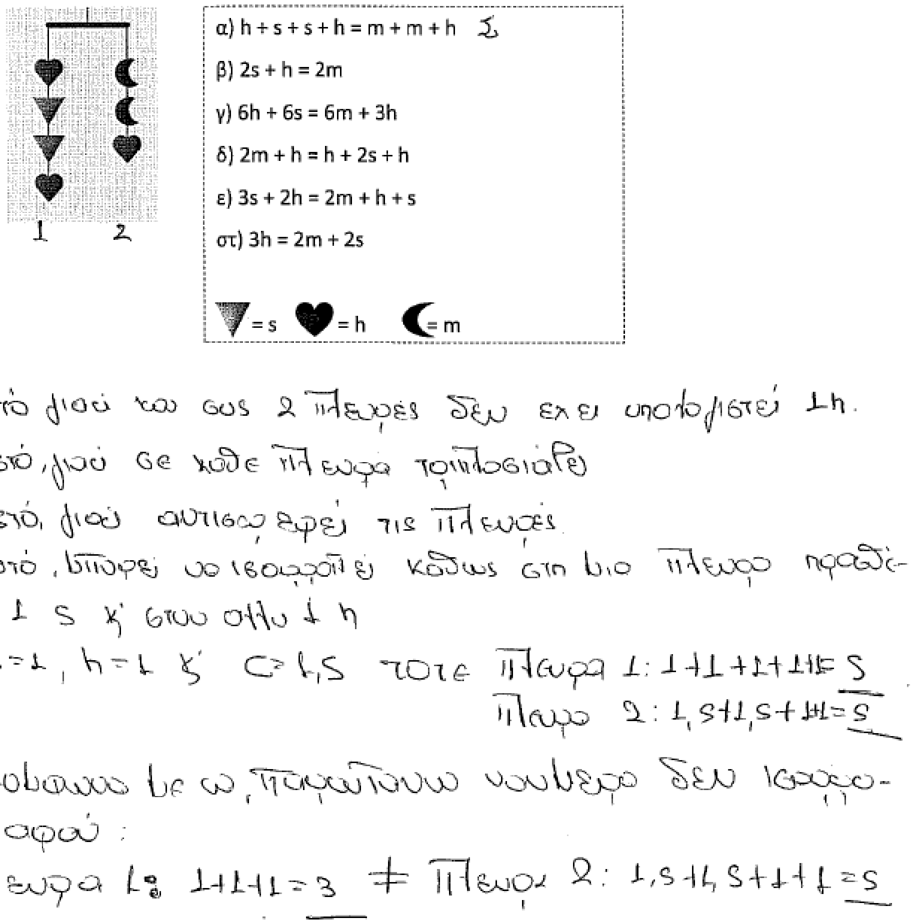
Εικόνα 64: 8η δραστηριότητα

Την 8η δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 30 φοιτητές. Η δραστηριότητα αυτή διαφοροποιείται από όσες έχουμε αναλύσει μέχρι στιγμής. Πιο συγκεκριμένα, δινόταν στους συμμετέχοντες ένα mobile, το οποίο ισορροπούσε και δινόταν επίσης ένα γράμμα για κάθε εικονίδιο που υπήρχε στο mobile (Εικόνα 64). Στη συνέχεια τους δίνονταν έξι αλγεβρικές εξισώσεις, για τις οποίες έπρεπε να απαντήσουν εάν είναι ορθές ή λανθασμένες με βάση το αρχικό mobile. Οι λύτες καλούνταν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Οι περισσότερες αιτιολογήσεις δεν διέφεραν πολύ μεταξύ τους, εφόσον η πλειονότητα κατέληγε στα ίδια συμπεράσματα. Για πρώτη φορά δίνεται στους φοιτητές δραστηριότητα που περιέχει ρητά αλγεβρικό συμβολισμό.

Αναλυτικότερα, η πρώτη εξίσωση χαρακτηρίστηκε αληθής καθώς είναι η σχέση που αναπαριστά συμβολικά το mobile. Η δεύτερη πρόταση χαρακτηρίστηκε επίσης αληθής, διότι αφαιρέθηκε μια καρδιά από κάθε κλάδο του mobile κι αυτό δεν επηρεάζει την ισορροπία του. Όμοια στην τρίτη, διότι στην ουσία πολλαπλασιάστηκαν και τα δύο μέλη της αρχικής με τον αριθμό 3. Η τέταρτη εξίσωση θεωρήθηκε αληθής, είτε λόγω της αντιμεταθετικότητας που επιτρέπει να δουν τους κλάδους από τα αριστερά προς τα δεξιά, είτε λόγω της πρώτης εξίσωσης. Η πέμπτη εξίσωση θεωρήθηκε αληθής, λόγω του ότι προστέθηκε σε κάθε κλάδο του mobile ένα τρίγωνο και αυτό διατηρεί την ισορροπία του. Τέλος, η έκτη εξίσωση ήταν η μόνη που δίχασε τους λύτες, καθώς παρατηρήθηκαν τουλάχιστον οκτώ διαφορετικές πορείες προκειμένου να εξεταστεί το αν είναι αληθής ή όχι.

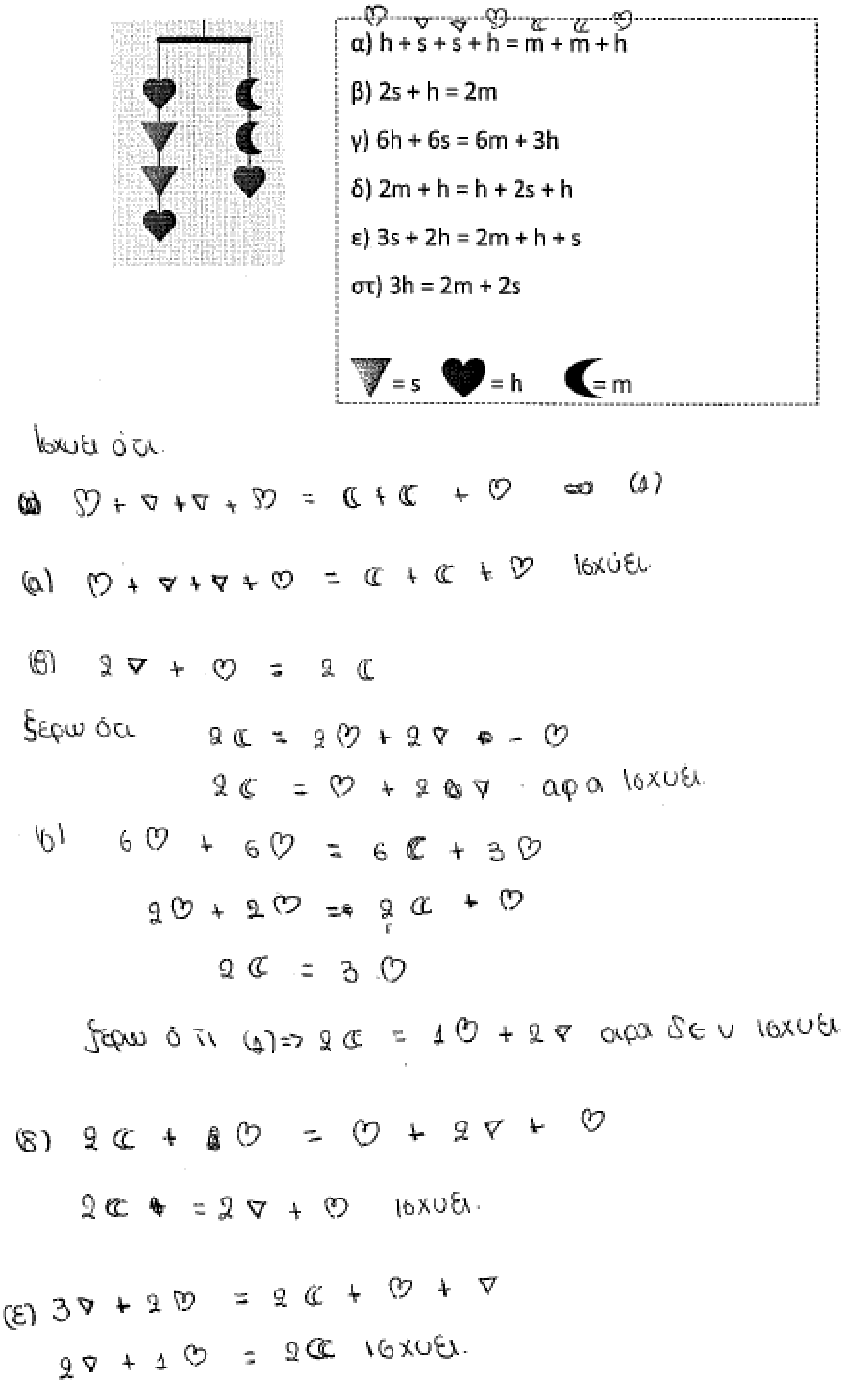
Όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους επέλεξαν να επιλύσουν την δραστηριότητα, παρατηρήθηκαν συνολικά 6 διαφορετικοί τρόποι επίλυσης, οι τρεις από τους οποίους αποτελούν συνδυασμό κάποιων άλλων.

Ένας από τους τρόπους επίλυσης που εντοπίστηκαν ήταν ο **κειμενικός**. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 65, ο λύτης χρησιμοποιεί λέξεις για να παρουσιάσει και να αιτιολογήσει το σκεπτικό του.



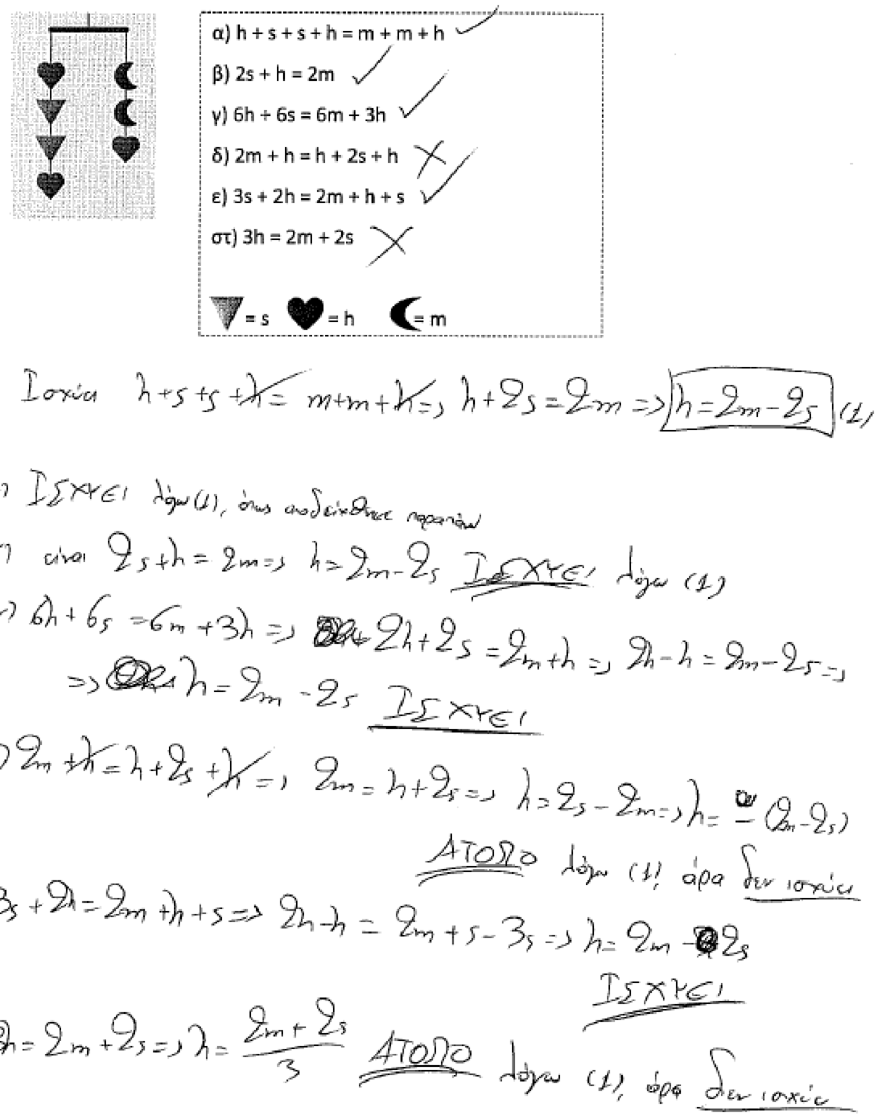
Εικόνα 65: Παράδειγμα κειμενικού τρόπου επίλυσης

Επίσης, παρατηρήθηκε ξανά η χρήση του **εικονικού** τρόπου επίλυσης. Παράδειγμα αυτού του τρόπου αποτελεί η Εικόνα 66, στην οποία η τακτική που ακολουθεί ο λύτης διαφοροποιείται από τα βήματα που ακολουθεί η πλειονότητα. Πιο αναλυτικά, ξαναγράφει τις σχέσεις που δίνονται με αλγεβρική μορφή, χρησιμοποιώντας όμως τα εικονίδια που υπάρχουν ενσωματωμένα στο mobile και κάθε φορά κάνοντας τις απαραίτητες ενέργειες σε κάθε σχέση, καταλήγει σε μια άλλη σχέση, με βάση την ισχύ ή τη μη ισχύ της οποίας θα ισχύει και η αρχική σχέση.



Εικόνα 66: Παράδειγμα εικονικού τρόπου επίλυσης

Μικρότερος ήταν ο αριθμός των λυτών που επέλεξαν να κάνουν χρήση του **αλγεβρικού** τρόπου για να επιλύσουν την δραστηριότητα. Στην εικόνα 67 έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε ο συγκεκριμένος λύτης. Μέσα από την αρχική ισότητα εντόπισε μια σχέση (h=2m–2s) και με βάση αυτή εξέταζε κάθε περίπτωση, προκειμένου να δει αν ισχύει ή αν δεν ισχύει (άτοπο) και κατ' επέκταση αν διατηρεί ή όχι την ισορροπία του συστήματος.



Εικόνα 67: Παράδειγμα αλγεβρικού τρόπου επίλυσης

Παρουσιάστηκαν επίσης, προσεγγίσεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν **δύο ή περισσότεροι τρόποι επίλυσης,** από αυτούς που έχουμε δει μέχρι στιγμής. Πιο αναλυτικά, υπήρξαν απαντήσεις όπου οι λύτες συνδύασαν τον κειμενικό και τον εικονικό τρόπο επίλυσης, συνδυασμό τον οποίο έχουμε συναντήσει ξανά, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα τα εικονίδια του συστήματος αλλά και λέξεις προκειμένου να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους. Κάποιοι άλλοι φοιτητές, αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν συνδυαστικά τον κειμενικό και τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης. Για κάθε εξίσωση αιτιολογούσαν την απάντησή τους πρώτα μόνο με λέξεις και έπειτα δοκίμαζαν τις ενέργειες πάνω στην αρχική σχέση με αλγεβρικές σχέσεις για να επιβεβαιώσουν ή όχι το σκεπτικό τους. Τέλος, ένας φοιτητής επέλεξε να συνδυάσει τρεις διαφορετικούς τρόπους επίλυσης: τον κειμενικό, τον εικονικό και τον αλγεβρικό. Ανάλογα με την κάθε εξίσωση, χρησιμοποιούσε είτε λόγια, είτε τα εικονίδια του mobile, είτε αλγεβρικές σχέσεις, ώστε να μπορέσει να απαντήσει στο ζητούμενο της δραστηριότητας.

Η δραστηριότητα αυτή, αν εξεταστεί προσεκτικά κάνει φανερό ότι συνδυάζει μια σειρά από μαθηματικές ενέργειες, που λαμβάνουν χώρα σε μια προσπάθεια επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων, όμως είναι η πρώτη φορά στην έρευνά μας που δίνονται με τόσο σαφή τρόπο. Επομένως, έχει ενδιαφέρον να δούμε αναλυτικά για κάθε περίπτωση το σκεπτικό και τα βασικά επιχειρήματα, με τα οποία στήριξαν οι λύτες τις απαντήσεις τους.

Στην *πρώτη εξίσωση* (h+s+s+h=m+m+h) εύκολα αναγνώριζαν, ότι η σχέση που υπάρχει γραμμένη είναι μεταφορά σε συμβολική μορφή της κατάστασης που αναπαριστά η ισορροπία στο mobile. Έγραφαν λοιπόν, ότι η σχέση είναι αληθής είτε γιατί είναι αυτό ακριβώς που βλέπουν στην εικόνα, είτε διότι πρόκειται για αντιστοιχία των συμβόλων με γράμματα, ή ακόμα και αντικατάσταση του mobile με γράμματα. Ένας λύτης το απέδωσε ως εξής: είναι απλά η “εξήγηση” της ισορροπίας του σχήματος. Η ισορροπία συμβολίζεται με το “=” και το άθροισμα από τα βάρη με το “+”.

Για την *δεύτερη εξίσωση* (2s+h=2m) έγραφαν πως είναι αληθής, διότι στην ουσία έχει αφαιρεθεί μια καρδιά από κάθε πλευρά του mobile. Εφόσον αφαιρέθηκε η ίδια ποσότητα από τα δύο μέλη της ισότητας δεν επηρεάζεται η ισορροπία του mobile.

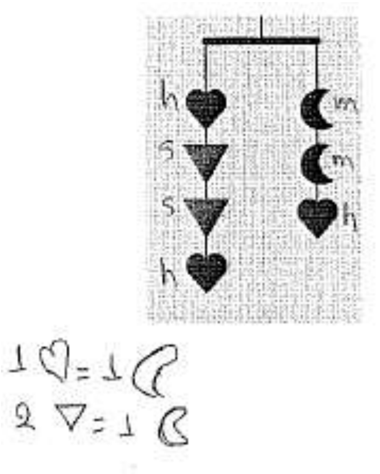
Στην *τρίτη* εξίσωση (6h+6s=6m+3h) το βασικό τους επιχείρημα με το οποίο τεκμηρίωναν ότι είναι αληθής, ήταν ότι και τα δύο μέλη της ισότητας πολλαπλασιάστηκαν με τον αριθμό 3 και αυτό είναι μια ενέργεια που διατηρεί την ισορροπία του mobile. Υπήρχαν ορισμένοι οι οποίοι απέδειξαν την ισχύ της πρότασης ξεκινώντας από αυτήν και διαιρώντας και τα δύο μέλη με το 3, για να καταλήξουν στην σχέση 2h+2s=2m+h που γνωρίζουν ότι ισχύει.

Για την *τέταρτη* εξίσωση (2m+h=h+2s+h) αναγνώρισαν όλοι ότι είναι αληθής, αλλά και την ομοιότητα της με το αρχικό mobile και την πρώτη περίπτωση. Ειδικότερα, η βασική αιτιολόγησή τους ήταν, πως είναι η ίδια πρόταση με την πρώτη περίπτωση (α), που γνωρίζουν ότι ισορροπεί, απλά έχουν αντιμετατεθεί οι πλευρές της (αναφορά στην αντιμεταθετική ιδιότητα της ισότητας). Εφόσον, τα σχήματα και ο αριθμός τους παρέμειναν ίδια, η αλλαγή στις πλευρές δεν επηρεάζει την ισορροπία του mobile.

Η *πέμπτη εξίσωση* (3s+2h=2m+h+s) υποστήριξαν όλοι ότι είναι αληθής, με το επιχείρημα πως έχει προστεθεί ένα τρίγωνο (s) σε κάθε πλευρά. Το σκεπτικό τους ήταν ότι εφόσον προσθέτουμε την ίδια ποσότητα και στα δύο μέλη μιας ισότητας, το mobile θα συνεχίσει να ισορροπεί.

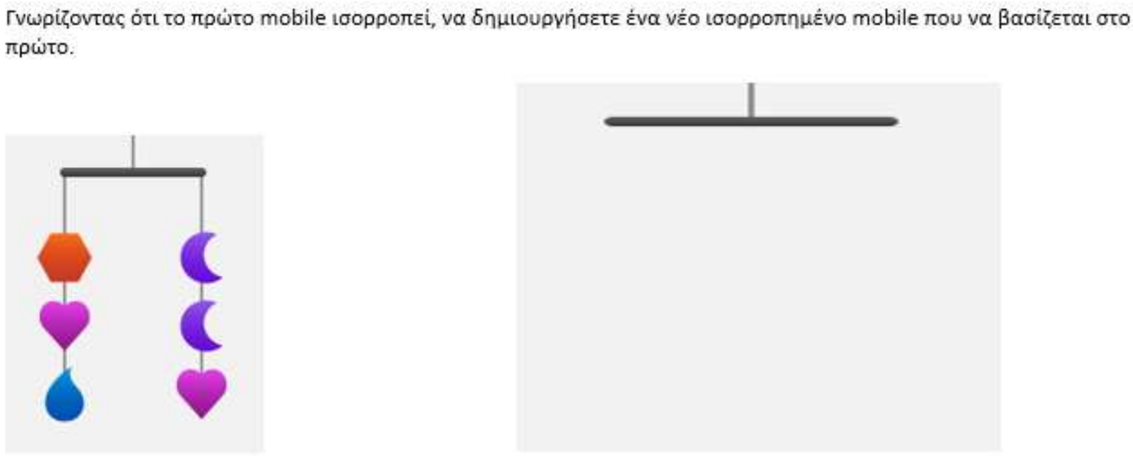
Στην *έκτη εξίσωση* (3h=2m+2s) τα πράγματα έγιναν πιο περίπλοκα για τους λύτες, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Οι περισσότεροι μπορούσαν να αναγνωρίσουν το γεγονός ότι είναι ψευδής, ωστόσο δυσκολεύονταν να βρουν τον τρόπο να το αιτιολογήσουν. Κάποιοι υποστήριξαν ότι στην ουσία αλλάζουν μέλος τα δύο τρίγωνα με την καρδιά, αλλά από την στιγμή που αυτά τα δύο δεν είναι ισοδύναμα, παύει να διατηρείται η ισορροπία. Άλλοι έδιναν τυχαίες τιμές στα εικονίδια που υπήρχαν στο mobile και με βάση αυτές προσπαθούσαν να εξετάσουν αν η πρόταση είναι αληθής ή όχι. Παρατηρήθηκαν επίσης περιπτώσεις, όπου οι φοιτητές επέλεγαν μια από τις προηγούμενες εξισώσεις και παρεμβαίνοντας σε αυτές (είτε με κάποια τροποποίηση είτε προσπαθώντας να την λύσουν ως προς την μεταβλητή h), προσπαθούσαν να καταλήξουν στην έκτη εξίσωση ή σε κάποια σχέση που να την επιβεβαιώνει. Υπήρξαν βέβαια και αυτοί που ερμήνευσαν λανθασμένα τις σχέσεις με αποτέλεσμα να θεωρούν αληθή την έκτη εξίσωση.

Τέλος, για όλες τις περιπτώσεις ορισμένοι επέλεξαν να επιλύσουν χωρίς αιτιολόγηση, κυρίως αυτοί που χρησιμοποίησαν τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης. Επίσης, μερικοί μετέφρασαν λανθασμένα την ισορροπία του mobile (Εικόνα 68), με αποτέλεσμα να απαντήσουν λάθος και στην δραστηριότητα.



Εικόνα 68: Παράδειγμα λανθασμένης μετάφρασης της ισορροπίας του mobile

4.1.9 Ανάλυση 9ης δραστηριότητας

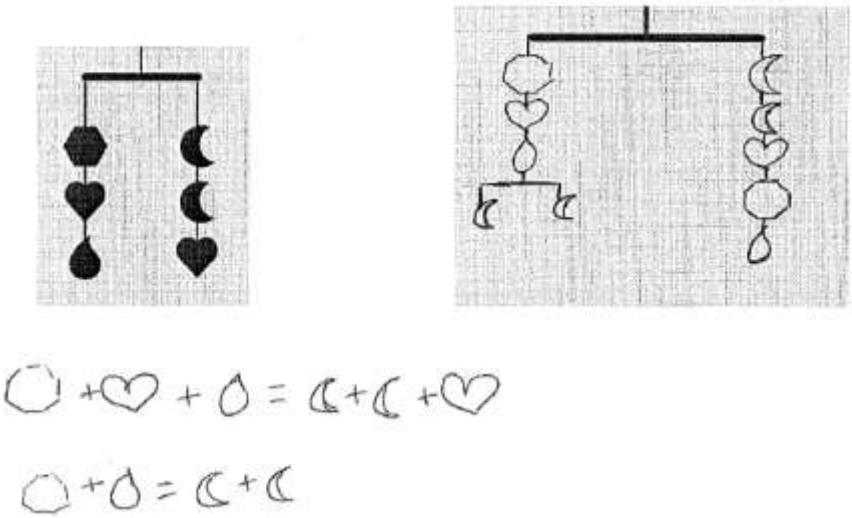


Εικόνα 69: 9η δραστηριότητα

Την 9η δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 23 φοιτητές. Το ζητούμενο αυτή τη φορά ήταν να δημιουργήσουν οι ίδιοι ένα mobile, βασισμένο όμως πάνω στο mobile που τους δινόταν στα αριστερά. Οι λύτες επέδειξαν μια σειρά από διαφορετικές προσεγγίσεις. Μερικοί τροποποίησαν απλώς το υπάρχον mobile, άλλοι δημιούργησαν ένα νέο mobile με βάση τις σχέσεις που προέκυπταν από το αρχικό, ενώ ορισμένοι έδωσαν τυχαίες τιμές στα εικονίδια που υπήρχαν στο αρχικό mobile και με βάση αυτές δημιούργησαν κάτι νέο. Οι περισσότεροι όμως, επέλεξαν να τροποποιήσουν το αρχικό mobile και πιο συγκεκριμένα να αφαιρέσουν μια καρδιά από κάθε κλάδο του και στη συνέχεια να προσθέσουν μια ίδια ποσότητα και στους δύο κλάδους. Η ποσότητα αυτή διέφερε ανάμεσα στους λύτες.

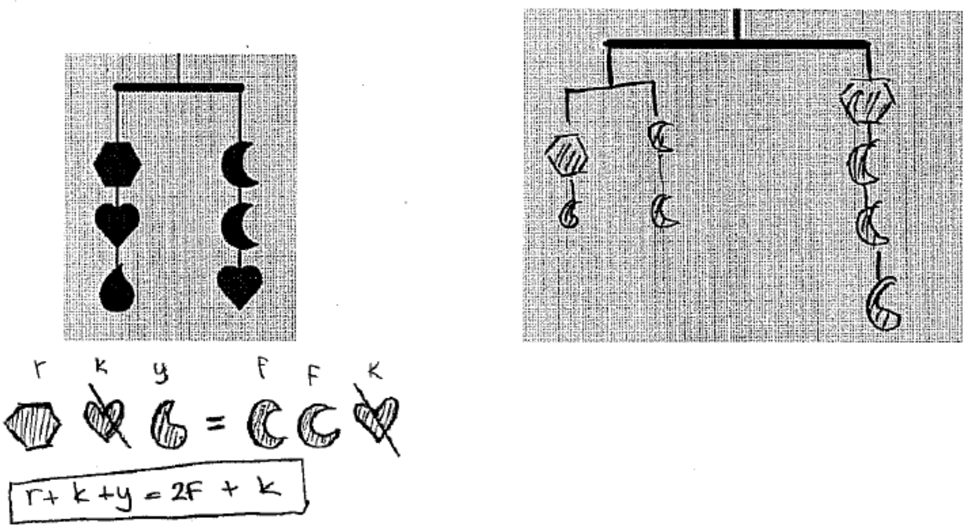
Η δραστηριότητα αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε κατά πόσο οι φοιτητές είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την άτυπη γνώση που αναπτύχθηκε σε όλη τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με τα mobiles. Η γνώση αυτή αφορά στις ιδιότητες των πράξεων και του συμβόλου της ισότητας, απαραίτητα και τα δύο στην αλγεβρική επίλυση εξισώσεων. Στην κατασκευή λοιπόν του δικού τους mobile, γίνεται προσπάθεια να εντοπίσουμε στιγμιότυπα που να κάνουν φανερή αυτήν την άτυπη γνώση που εφαρμόζεται με σκοπό να δημιουργήσουν μια κατασκευή που να διατηρεί την ισορροπία. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε πώς χρησιμοποιούν την άτυπη αυτή μαθηματική γνώση, προκειμένου να φτιάξουν ένα νέο mobile που να ισορροπεί, σε συνδυασμό όμως με τα δεδομένα που λαμβάνουν από το δοσμένο mobile. Έτσι, οι κατασκευές των φοιτητών αναλύθηκαν και παρουσιάζονται με βάση το μαθηματικό τους περιεχόμενο.

Η *πρώτη κατηγορία* αφορά κατασκευές mobile με περισσότερα από δύο σχήματα σε κάθε κλάδο (ίσο αριθμό όμως και στους δύο κλάδους). Το βασικό επιχείρημα για την ισορροπία του mobile σε αυτή την περίπτωση είναι πως όταν έχω πολλούς προσθετέους, μπορώ να τους προσθέσω με όποια σειρά θέλω χωρίς να επηρεάζεται το αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Όπως μπορούμε να δούμε στην εικόνα 70 ο φοιτητής έχει και στους δύο κλάδους τα ίδια σχήματα (2 μισοφέγγαρα, 1 σταγόνα, 1 εξάγωνο, 1 καρδιά), χωρίς όμως να είναι τοποθετημένα με την ίδια σειρά. Συμβολικά αυτό θα μπορούσε να παρουσιασθεί ως $α+β+γ+2δ=2δ+β+α+γ$, που στην ουσία αντανακλά εφαρμογή της **προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης**. Η ιδιαιτερότητα στην συγκεκριμένη κατασκευή είναι ότι ο φοιτητής αξιοποίησε στην κατασκευή του και σχέσεις ανάμεσα σε υποκλάδους, καθώς ο ένας από τους κλάδους αποτελείται από δυο υποκλάδους που επίσης ισορροπούν. Αυτό ενέχει μια δυσκολία, διότι πρέπει ο λύτης να εξασφαλίσει τόσο την επιμέρους ισορροπία των υποκλάδων όσο και την ισορροπία του γενικού συστήματος.



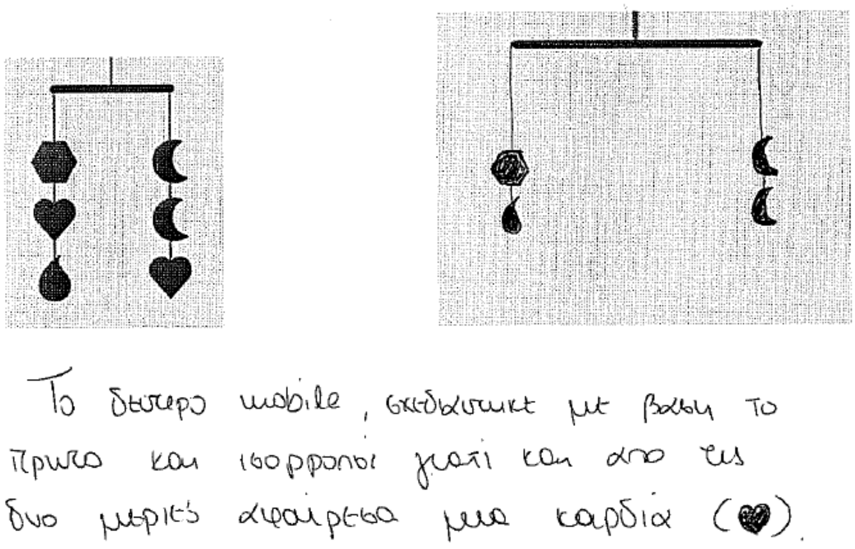
Εικόνα 70: Παράδειγμα κατασκευής με προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης

Η *δεύτερη κατηγορία* περιλαμβάνει κατασκευές mobile που περιέχουν και στους δύο κλάδους τους ακριβώς τα ίδια σχήματα, με την ίδια σειρά. Όπως φαίνεται στην εικόνα 71, ο λύτης έχει τοποθετήσει και στους δύο κλάδους τα ίδια ακριβώς σχήματα, με τη διαφορά ότι στον αριστερό κλάδο έχει δημιουργήσει έναν υποκλάδο, ο οποίος αξιοποιεί τη σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει από το αρχικό mobile (1 εξάγωνο+1 σταγόνα=2 μισοφέγγαρα). Διαβάζοντας τον αριστερό κλάδο του κεντρικού mobile από τα αριστερά προς τα δεξιά και τον δεξιό κλάδο από πάνω προς τα κάτω, προκύπτει η ισότητα α+3β=α+3β. Η περίπτωση αυτή αντανακλά τη χρήση της **ανακλαστικής ιδιότητας της πρόσθεσης** μέσα από την άτυπη αυτή μορφή, που εκφράζεται εδώ με την ιδέα ότι αν έχω τα ίδια σχήματα με την ίδια σειρά τότε εξασφαλίζω ισορροπία.



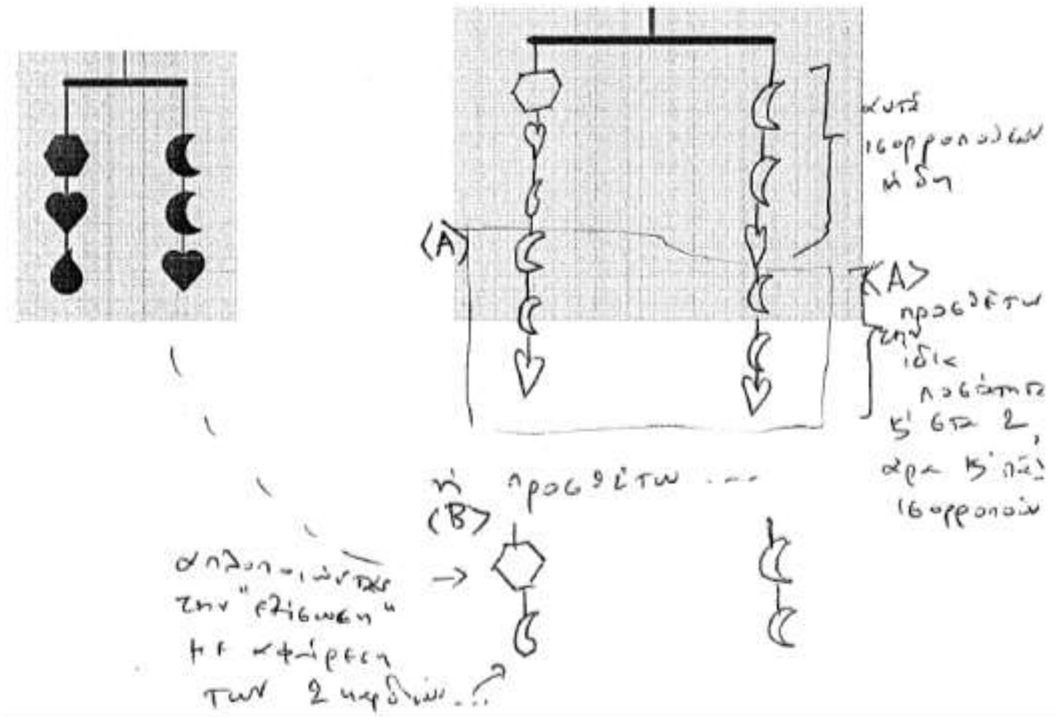
Εικόνα 71: Παράδειγμα κατασκευής με ανακλαστική ιδιότητα της πρόσθεσης

Η *τρίτη κατηγορία* αφορά κατασκευές mobile, οι οποίες δημιουργήθηκαν με **αφαίρεση μιας ποσότητας** (της ίδιας και από τους δύο κλάδους) από το αρχικό mobile. Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία όπως μπορούμε να δούμε στο παράδειγμα της εικόνας 72, ο λύτης έχει αφαιρέσει μια καρδιά από κάθε κλάδο του αρχικού mobile και δημιούργησε ένα νέο mobile το οποίο επίσης ισορροπεί. Αυτή η κίνηση αποτυπώνει την άτυπη γνώση των φοιτητών, ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε από μια ισότητα την ίδια ποσότητα και από τα δύο μέλη, με την ισότητα να εξακολουθεί να διατηρείται.

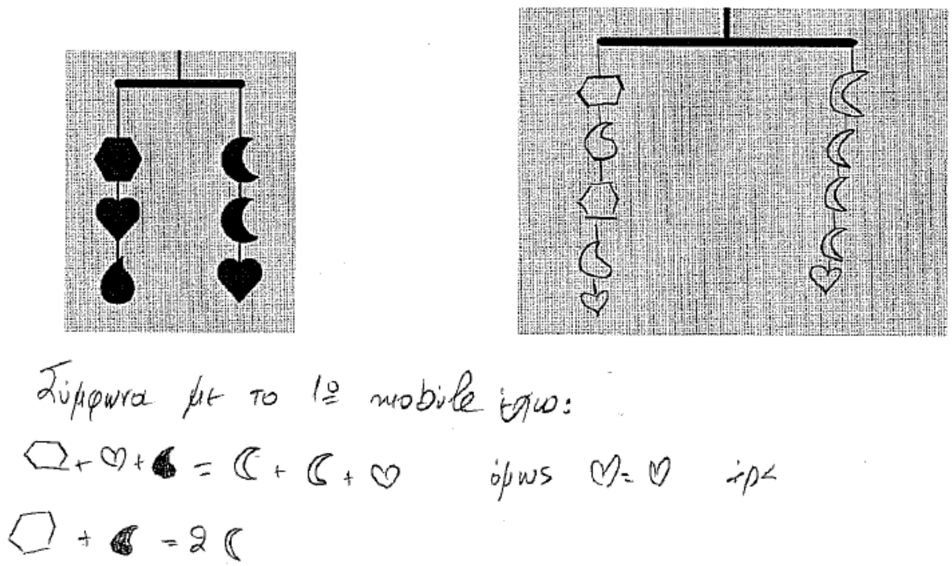


Εικόνα 72: Παράδειγμα κατασκευής με αφαίρεση ποσοτήτων

Η *τέταρτη κατηγορία* περιλαμβάνει κατασκευές που δημιουργήθηκαν **προσθέτοντας μια ποσότητα** (την ίδια και στους δύο κλάδους) στο αρχικό mobile. Στην κατηγορία αυτή υπάρχουν φοιτητές που ακολούθησαν την πιο απλή περίπτωση και πρόσθεσαν το ίδιο σχήμα και στους δυο κλάδους και φοιτητές που σκέφτηκαν λίγο πιο σύνθετα, καθώς στηρίχθηκαν σε μια σχέση ισοδυναμίας που εντόπισαν από το αρχικό mobile. Η πιο απλή περίπτωση φαίνεται στην εικόνα 73 όπου στην ουσία ο φοιτητής έχει δημιουργήσει ένα νέο mobile, κρατώντας ως βάση το αρχικό mobile και στη συνέχεια πρόσθεσε δύο μισοφέγγαρα και μια καρδιά σε κάθε κλάδο του νέου mobile. Την πιο σύνθετη περίπτωση μπορούμε να την δούμε στην $74^{η}$ εικόνα, στην οποία ο λύτης χρησιμοποίησε κι αυτός το αρχικό mobile και έπειτα πρόσθεσε στη μια πλευρά δύο μισοφέγγαρα και στην άλλη ένα εξάγωνο και μια σταγόνα. Οι ποσότητες αυτές ισοδυναμούν μεταξύ τους σύμφωνα με την ισορροπία του πρώτου mobile, διότι αν στο αρχικό mobile αφαιρέσουμε μια καρδιά από κάθε πλευρά, προκύπτει η σχέση κατά την οποία ένα εξάγωνο και μια σταγόνα έχουν ίσο βάρος με δύο μισοφέγγαρα.

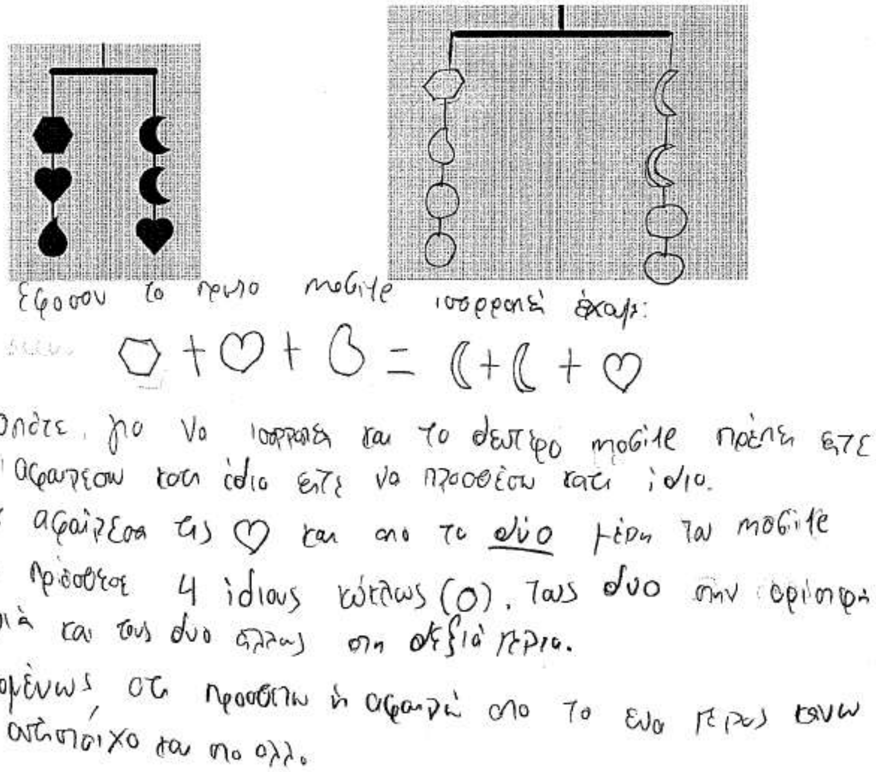


Εικόνα 73: Παράδειγμα κατασκευής με προσθήκη ποσοτήτων (α)

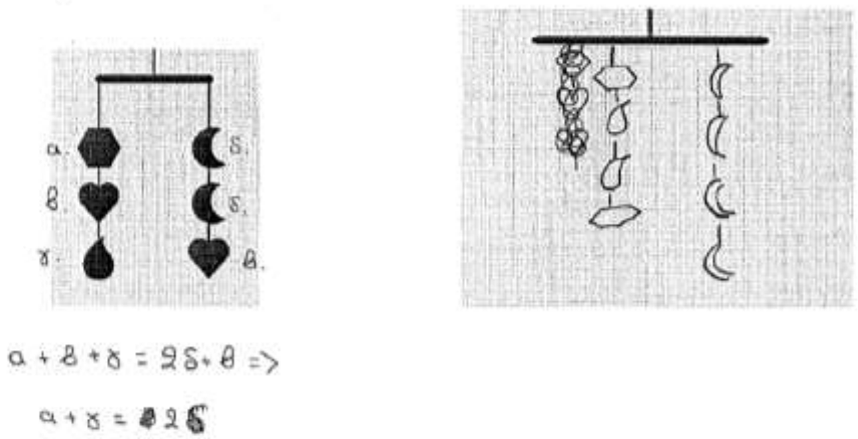


Εικόνα 74: Παράδειγμα κατασκευής με προσθήκη ποσοτήτων (β)

Στην *πέμπτη κατηγορία* συμπεριλήφθηκαν οι κατασκευές για τη δημιουργία των οποίων επιλέχθηκαν **δύο διακριτά βήματα**. Στο πρώτο βήμα οι φοιτητές **αφαιρούσαν** από το αρχικό mobile την ίδια ποσότητα και από τους δύο κλάδου, ενώ στη συνέχεια στο δεύτερο βήμα **πρόσθεταν** μια άλλη ποσότητα και στους δύο κλάδους του mobile. Πρόκειται με λίγα λόγια για συνδυασμό των δύο παραπάνω κατηγοριών. Και σε αυτή την κατηγορία υπάρχουν φοιτητές που πρόσθεσαν ακριβώς τα ίδια σχήματα σε κάθε κλάδο του mobile, ενώ άλλοι πρόσθεσαν διαφορετικά αλλά ισοδύναμα σχήματα σύμφωνα με τη σχέση που εντοπίστηκε παραπάνω (1 εξάγωνο+1 σταγόνα=2 μισοφέγγαρα). Σε αυτή την δεύτερη περίπτωση φαίνεται ότι χρησιμοποιείται συνδυαστικά και η ενέργεια της **αντικατάστασης μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της**, βήμα που συνεχίζει να διατηρεί την ισότητα. Πιο συγκεκριμένα, ο λύτης στην εικόνα 75 πρώτα αφαιρεί από το αρχικό mobile μια καρδιά από τον κάθε κλάδο και στη συνέχεια προσθέτει σε κάθε κλάδο δύο σφαίρες (την ίδια ποσότητα). Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος φοιτητής είναι ο μοναδικός ο οποίος χρησιμοποίησε κάποιο σχήμα το οποίο δεν υπήρχε στο αρχικό mobile. Μια άλλη επίλυση που εντάσσεται σε αυτή την κατηγορία είναι αυτή στην εικόνα 76, κατά την οποία ο λύτης ως πρώτο βήμα αφαίρεσε μια καρδιά από κάθε κλάδο του αρχικού mobile. Το επόμενό του βήμα ήταν να προσθέσει ένα εξάγωνο και μια σταγόνα αριστερά και δύο μισοφέγγαρα δεξιά, ποσότητες ισοδύναμες σύμφωνα με τη σχέση που προαναφέρθηκε.

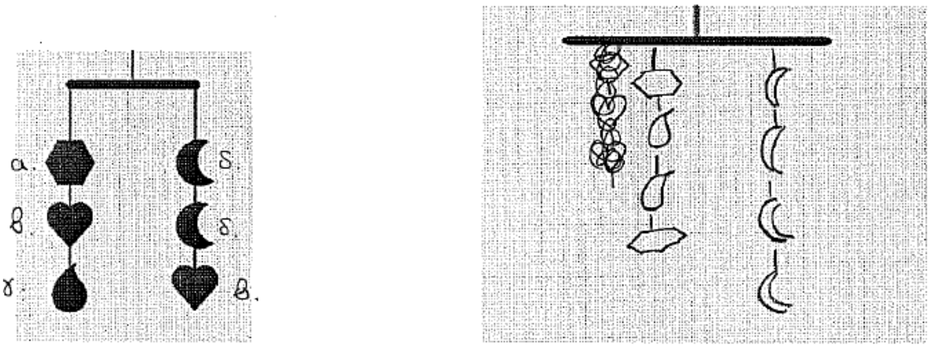


Εικόνα 75: Παράδειγμα κατασκευής με δύο διακριτά βήματα (α)



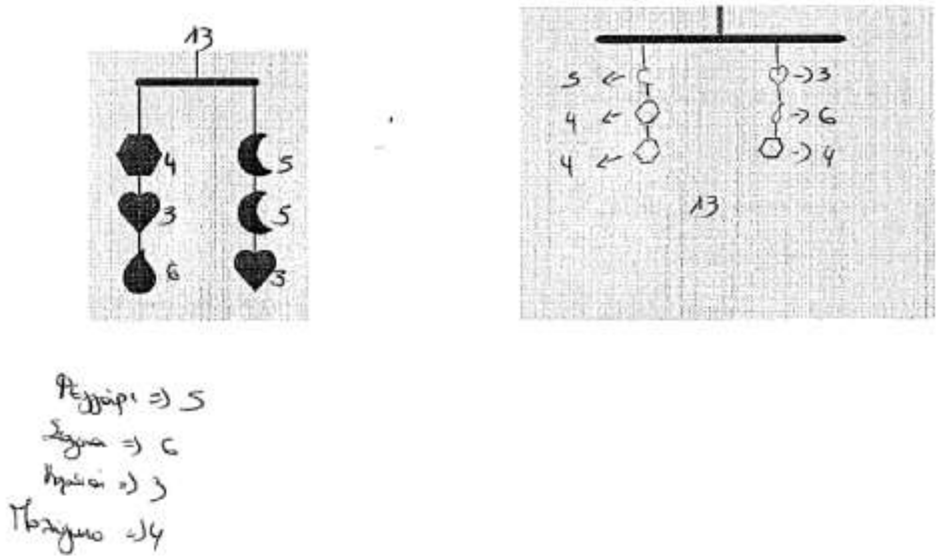
Εικόνα 76: Παράδειγμα κατασκευής με δύο διακριτά βήματα (β)

Στην επόμενη κατηγορία, την έκτη, περιλαμβάνουμε ενέργειες των λυτών που είναι ενδεικτικές της γνώσης, ότι αν σε μια ισότητα **πολλαπλασιάσω και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό** η ισότητα διατηρείται. Ο λύτης στην Εικόνα 77 χρησιμοποίησε το αρχικό mobile, για να καταλήξει στη σχέση α+γ=2δ (ένα πολύγωνο και μια σταγόνα έχουν το ίδιο βάρος με 2 μισοφέγγαρα). Στο δικό του mobile διπλασιάζει το αριστερό μέλος της σχέσης αυτή,ς παρουσιάζοντας μια επανάληψη του ζεύγους πολύγωνο-σταγόνα και εξασφαλίζει την ισορροπία διπλασιάζοντας τα μισοφέγγαρα στο δεξί μέλος. Συμβολικά η κατασκευή του περιγράφεται από την σχέση: α+γ=2δ, 2(α+γ) = 2×2δ=4δ



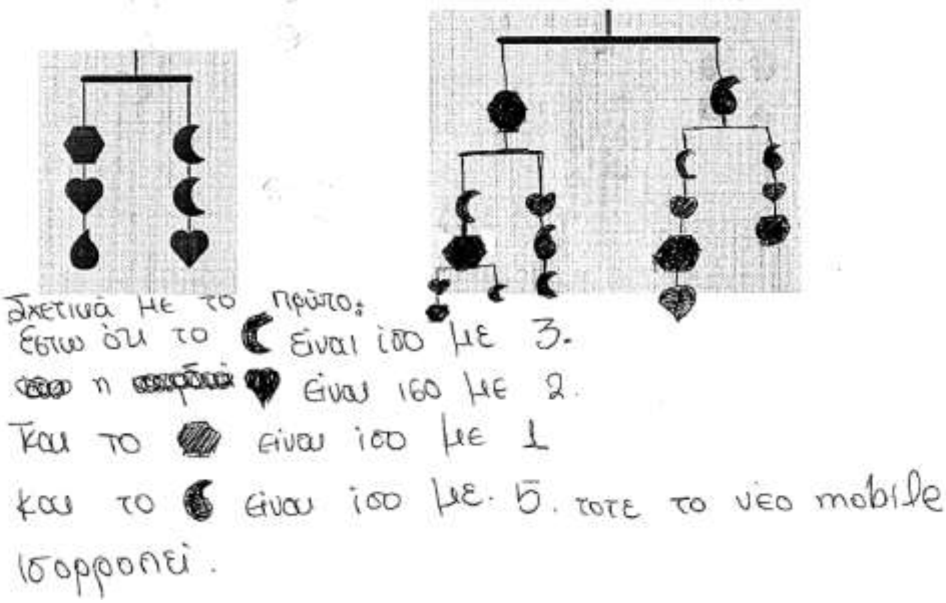
Εικόνα 77: Παράδειγμα κατασκευής με θεμελιώδη δομική μονάδα

Η *επόμενη κατηγορία, η έβδομη,* αφορά κατασκευές οι οποίες βασίστηκαν σε **τυχαίες τιμές** που έδωσαν οι φοιτητές στα σχήματα του αρχικού mobile. Στην εικόνα 78 φαίνεται ότι ο λύτης κάνει αρχικά μια υπόθεση, δίνοντας τυχαίες τιμές στα σχήματα και στη συνέχεια δημιουργεί το νέο mobile χωρίς να χρησιμοποιήσει καμία από τις σχέσεις του αρχικού, αλλά βασίζεται καθαρά στις τιμές που έδωσε.



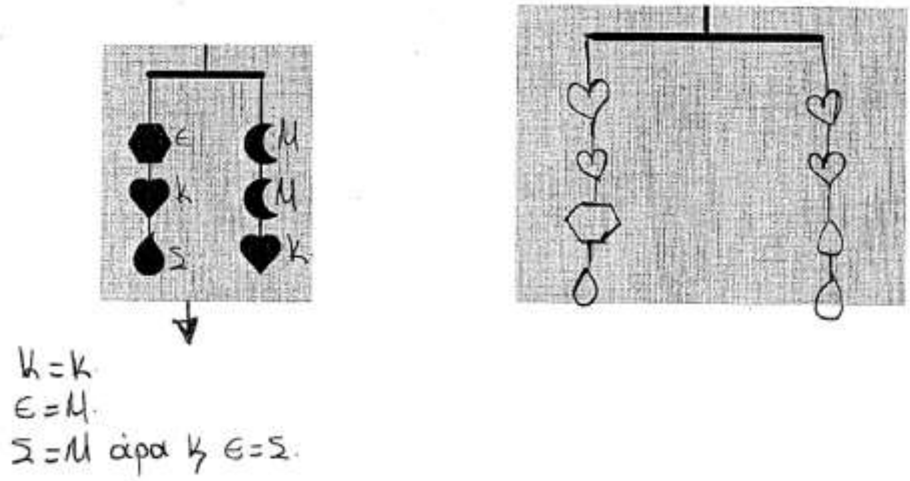
Εικόνα 78: Παράδειγμα δημιουργίας mobile με βάση τυχαίες τιμές

Το επόμενο παράδειγμα χρησιμοποιεί το ίδιο σκεπτικό με την τελευταία κατηγορία, παρουσιάζεται όμως ξεχωριστά, διότι πέρα από τις σχέσεις και την ισορροπία του συνολικού συστήματος αξιοποιεί και σχέσεις ανάμεσα σε υποκλάδους. Συγκεκριμένα, στην εικόνα 79, ο φοιτητής έχει προσπαθήσει να δημιουργήσει ένα πιο πολύπλοκο οπτικά mobile, καθώς και οι δύο κλάδοι του βασικού mobile αποτελούνται από δύο υποκλάδους και ο ένας από αυτούς στην αριστερή πλευρά χωρίζεται σε ακόμη δύο υποκλάδους. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί πως με βάση τις τυχαίες τιμές που έχει δώσει και μόνο, εξασφαλίζει τόσο την επιμέρους όσο και την γενική ισορροπία του mobile.



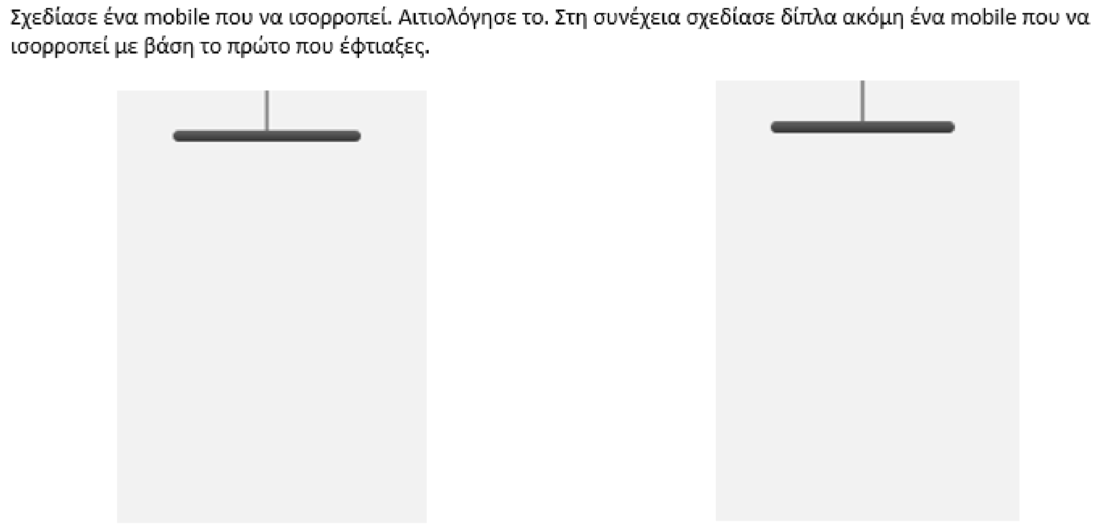
Εικόνα 79: Επίλυση φοιτητή 9.20

Η *τελευταία κατηγορία* αφορά τις κατασκευές που στηρίχθηκαν σε **λανθασμένη μετάφραση της ισορροπίας** του αρχικού mobile. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η λύση της εικόνας 80, όπου φαίνεται καθαρά το σκεπτικό του φοιτητή, σύμφωνα με το οποίο αν από το αρχικό mobile αφαιρέσουμε τις καρδιές, όλα τα υπόλοιπα σχήματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Έτσι, δημιουργεί ένα mobile στο οποίο χρησιμοποιεί ως ισοδύναμες ποσότητες το εξάγωνο με τη σταγόνα, σχέση η οποία δεν υφίσταται.



Εικόνα 80: Παράδειγμα λανθασμένης μετάφρασης της ισορροπίας του mobile

4.1.10 Ανάλυση 10ης δραστηριότητας

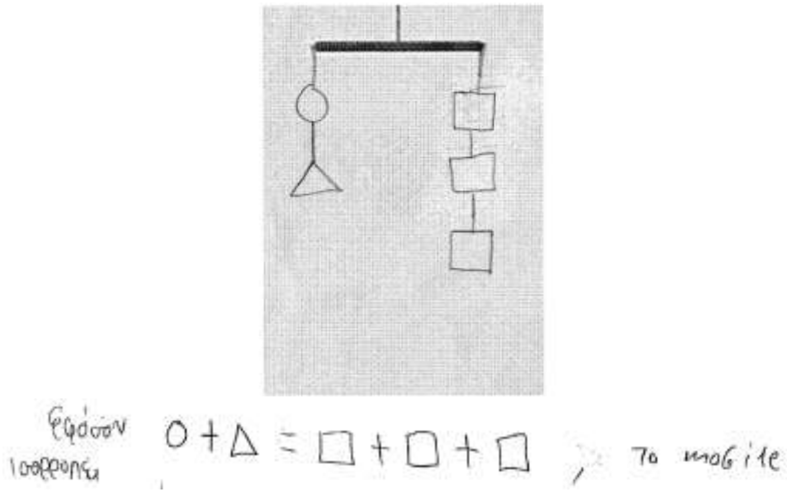


Εικόνα 81: 10η δραστηριότητα

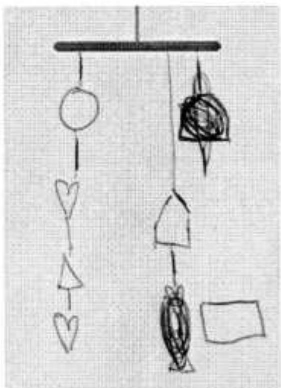
Την τελευταία δραστηριότητα συμπλήρωσαν συνολικά 23 φοιτητές. Το ζητούμενό της, μοιάζει έως ένα βαθμό με της προηγούμενης, στην οποία έπρεπε να κατασκευάσουν ένα mobile που ισορροπεί, βασισμένο όμως στο ισορροπημένο mobile που τους δινόταν αρχικά. Αυτή τη φορά έπρεπε να κατασκευάσουν οι ίδιοι σε πρώτη φάση ένα ισορροπημένο mobile και στη συνέχεια να κατασκευάσουν ένα δεύτερο mobile που να ισορροπεί με βάση το πρώτο. Όπως και στην 9η δραστηριότητα, έτσι κι εδώ έχουμε τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε, κατά πόσο οι φοιτητές είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την άτυπη γνώση που αφορά το σύμβολο της ισότητας και τις ιδιότητες των πράξεων και η οποία αναπτύχθηκε σε όλη τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με τα mobiles. Η ανάλυσή μας περιλαμβάνει σε πρώτο στάδιο τις κατασκευές των φοιτητών για το πρώτο ισορροπημένο mobile και σε δεύτερο στάδιο τις κατασκευές τους για το δεύτερο mobile με βάση πάντα το μαθηματικό τους περιεχόμενο.

Σχετικά με την κατασκευή του πρώτου mobile, η τακτική που ακολούθησαν σε γενικές γραμμές οι περισσότεροι φοιτητές ήταν να ορίσουν διάφορες σχέσεις και με βάση αυτές να τοποθετήσουν ισοδύναμες ποσότητες και στους δύο κλάδους του mobile. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, οι απαντήσεις των φοιτητών να μας οδηγήσουν σε δύο βασικά χαρακτηριστικά, το πλήθος των σχέσεων ισοδυναμίας και την πρόσθεση ίσων ποσοτήτων και στα δύο μέλη της ισότητας, με βάση τα οποία χωρίστηκαν και σε δύο κεντρικές κατηγορίες.

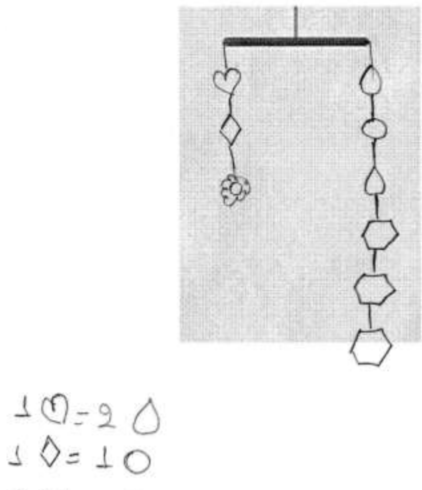
Πιο αναλυτικά, στην *πρώτη κατηγορία* ανήκουν οι επιλύσεις που βασίστηκαν σε **σχέσεις ισοδυναμίας**, όπου εντοπίστηκαν περιπτώσεις που έχουμε 1, 2 ή 3 τέτοιες σχέσεις, οι οποίες διατηρούσαν την ισορροπία. Παρακάτω παρουσιάζονται τρία παραδείγματα αυτών των περιπτώσεων (εικόνες 82, 83 και 84), ένα για κάθε περίπτωση, στα οποία οι λύτες έχουν τοποθετήσει ορισμένα σχήματα στου δύο κλάδους του mobile και έπειτα όρισαν κάποιες σχέσεις με τις οποίες αιτιολογούν την ισορροπία του. Αν αντιστοιχήσουμε τα σχήματα που έχουν τοποθετηθεί στους κλάδους των mobile σύμφωνα με τις σχέσεις ισοδυναμίας, θα επιβεβαιώσουμε την ισορροπία του mobile. Για να γίνει πιο κατανοητό μπορούμε να δούμε το παράδειγμα της εικόνας 4, στην οποία ο φοιτητής έχει δημιουργήσει ένα ισορροπημένο mobile τοποθετώντας τρία σχήματα στον αριστερό κλάδο και έξι σχήματα στον δεξί κλάδο. Στη συνέχεια, ορίζει τρεις σχέσεις ισοδυναμίας (1 καρδιά=2 σταγόνες, 1 ρόμβος=1 σφαίρα, 3 εξάγωνα=1 λουλούδι) σύμφωνα με τις οποίες, αν αντιστοιχήσουμε τα σχήματα θα επιβεβαιώσουμε την ισορροπία του mobile.



Εικόνα 82: Παράδειγμα κατασκευής με μια σχέση ισοδυναμίας

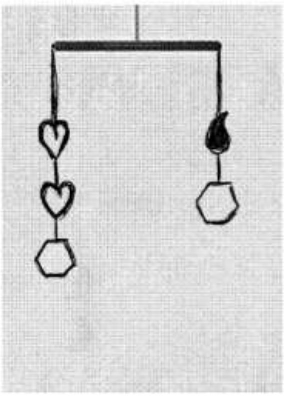


Εικόνα 83: Παράδειγμα κατασκευής με δύο σχέσεις ισοδυναμίας



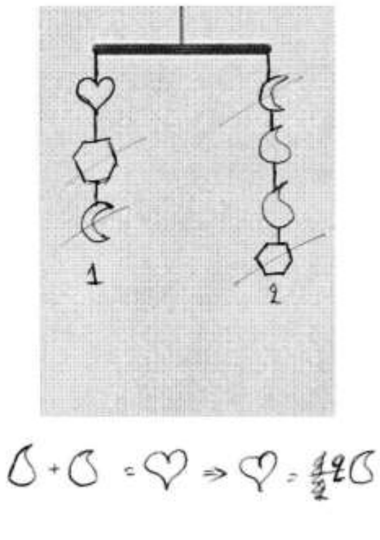
Εικόνα 84: Παράδειγμα κατασκευής με τρεις σχέσεις ισοδυναμίας

Η *δεύτερη κατηγορία* αφορά κατασκευές mobile, στις οποίες πέρα από τις **σχέσεις ισοδυναμίας** αξιοποιήθηκαν **και ίδια σχήματα** που προστέθηκαν στους δύο κλάδους του mobile. Συναντήθηκαν περιπτώσεις όπου οι φοιτητές πρόσθεσαν από ένα έως τρία σχήματα στους κλάδους του mobile. Οι εικόνες που παρουσιάζονται παρακάτω (85, 86 και 87) αποτελούν παραδείγματα των περιπτώσεων αυτών, στα οποία μπορούμε να δούμε ότι οι φοιτητές, αφού εξασφάλισαν με τις σχέσεις ισοδυναμίας την ισορροπία του mobile, ήξεραν ότι μπορούν να προσθέσουν την ίδια ποσότητα και στους δύο κλάδους του mobile, χωρίς να επηρεάσουν την ισορροπία του. Στην εικόνα 87 για παράδειγμα, βλέπουμε ότι ο λύτης έχει τοποθετήσει τα σχήματα στο mobile με βάση δύο σχέσεις που έχει ορίσει (μια καρδιά=ένα τρίγωνο+μια σφαίρα, ένα αστέρι=ένα τρίγωνο+ένα μισοφέγγαρο), ενώ προσθέτει επιπλέον τρία ακόμη σχήματα σε κάθε κλάδο του mobile (δύο τρίγωνα και ένα τετράγωνο) τα οποία έχουν ίσο βάρος εφόσον είναι ίδια.

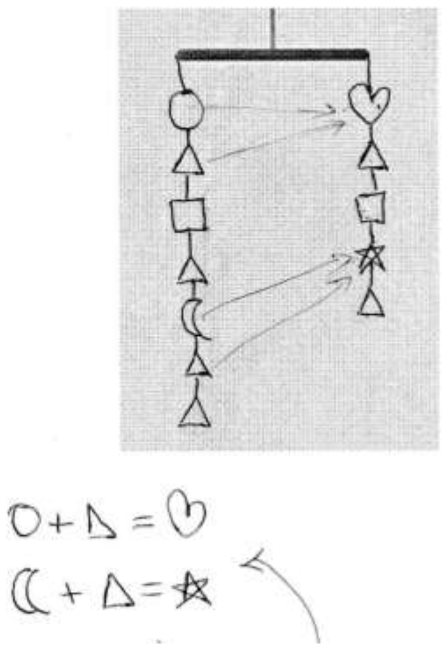


• Στο πρωτο mobile σχεδίασα 2 καρδιές (♡) οι οποίες ισούνται με μια σταγόνα. και 2 εξάγωνα που υπαρχουν και στις δυο πλευρές.

Εικόνα 85: Παράδειγμα κατασκευής με μια σχέση ισοδυναμίας και ένα ίδιο σχήμα

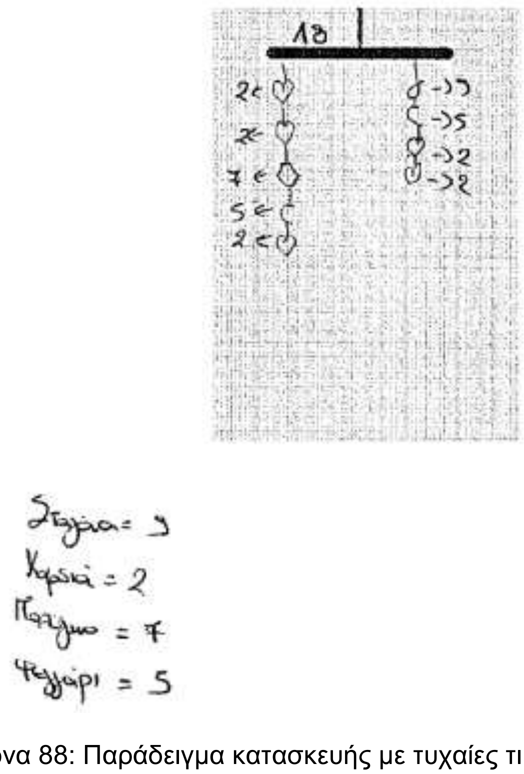


Εικόνα 86: Παράδειγμα κατασκευής με μια σχέση ισοδυναμίας και δύο ίδια σχήματα



Εικόνα 87: Παράδειγμα κατασκευής με δύο σχέσεις ισοδυναμίας και τρία ίδια σχήματα

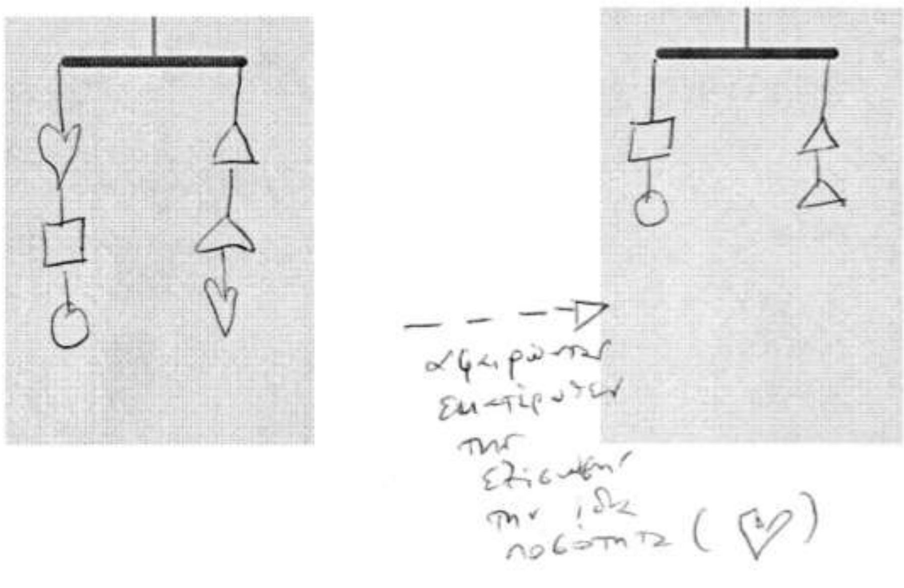
Η *τρίτη κατηγορία* αποτελεί ξεχωριστή περίπτωση και χρησιμοποιήθηκε από μικρό αριθμό φοιτητών. Αφορά κατασκευές που βασίστηκαν σε **τυχαίες τιμές,** τις οποίες έδωσαν οι φοιτητές στα σχήματα που αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν. Στην εικόνα 88 μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα του τρόπου αυτού, στο οποίο ο φοιτητής έχει τοποθετήσει στους δύο κλάδους ορισμένα σχήματα, χωρίς κάποια άλλη τακτική πέρα από το άθροισμα του βάρους τους. Όρισε για το κάθε σχήμα μια τιμή και φρόντισε να τα τοποθετήσει, έτσι ώστε ο κάθε κλάδος να έχει άθροισμα 18.



Εικόνα 88: Παράδειγμα κατασκευής με τυχαίες τιμές

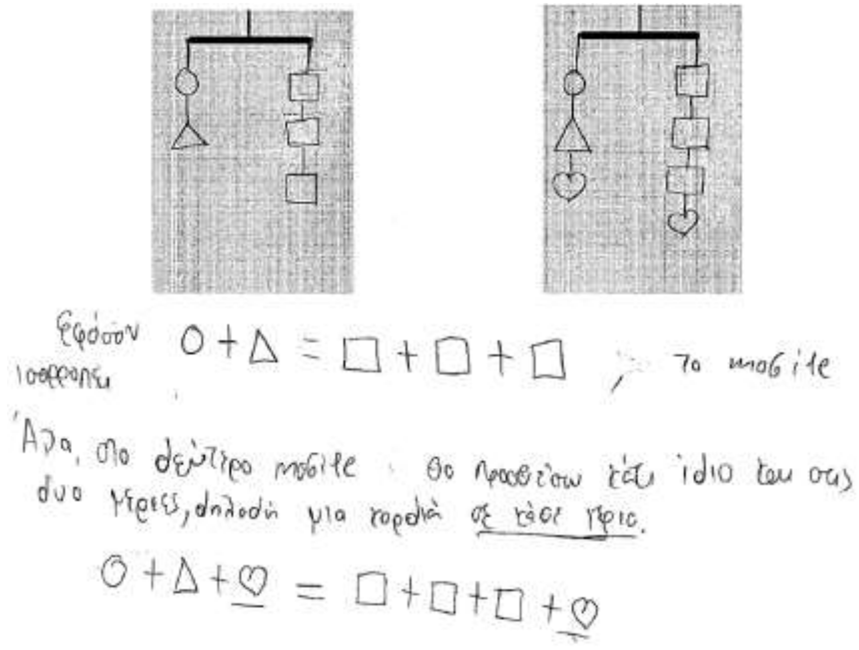
Η συνέχεια της ανάλυσης αφορά το δεύτερο mobile που κλήθηκαν να φτιάξουν οι φοιτητές, έχοντας ως βάση το πρώτο mobile που κατασκεύασαν. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι περισσότεροι λύτες στο πρώτο κομμάτι της δραστηριότητας, επέλεξαν να ορίσουν κάποιες σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των σχημάτων και με βάση αυτές να τα τοποθετήσουν σωστά στους δύο κλάδους, ώστε να δημιουργήσουν ένα ισορροπημένο mobile. Στο δεύτερο βήμα η πλειονότητα χρησιμοποίησε μερικές ή και όλες τις σχέσεις που είχε ορίσει αρχικά, προκειμένου να δημιουργήσει το δεύτερο ισορροπημένο mobile. Στην ουσία από το πρώτο mobile αντλούσαν μόνο τις σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των σχημάτων και με βάση αυτές δημιουργούσαν εκ νέου ένα δεύτερο mobile που ισορροπούσε. Και σε αυτό το σημείο οι απαντήσεις των φοιτητών χωρίστηκαν σε κατηγορίες ανάλογα με το μαθηματικό τους περιεχόμενο.

Η *πρώτη κατηγορία* αφορά κατασκευές mobile οι οποίες δημιουργήθηκαν με **αφαίρεση μιας ποσότητας** (της ίδιας και από τους δύο κλάδους) από το πρώτο mobile. Όπως μπορούμε να δούμε και στην εικόνα 89, είναι ένας από τους πιο εύκολους τρόπους για να δημιουργηθεί το δεύτερο mobile, διότι ο φοιτητής έχει απλά αφαιρέσει μια καρδιά από κάθε κλάδο του πρώτου mobile, και χρησιμοποιώντας αυτούσια τα υπόλοιπα σχήματα για την κατασκευή του δεύτερου.

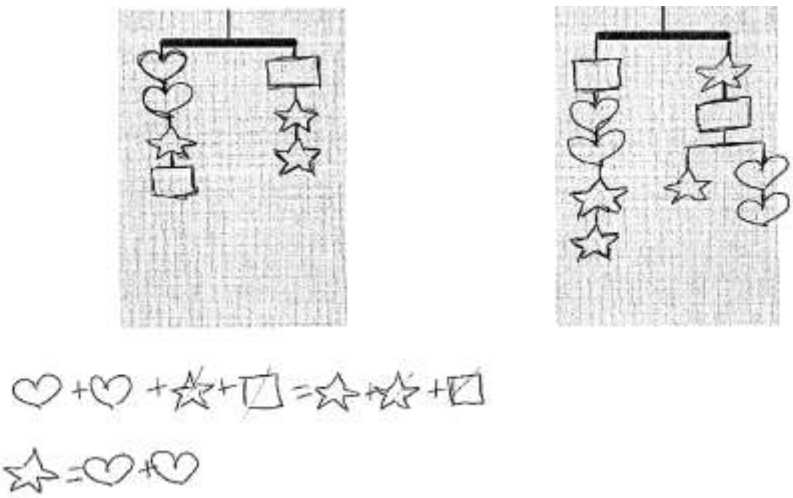


Εικόνα 89: Παράδειγμα κατασκευής με αφαίρεση ίδιας ποσότητας

Στην *δεύτερη κατηγορία* ανήκουν οι κατασκευές που δημιουργήθηκαν με **προσθήκη μιας ποσότητας** (της ίδιας και στους δύο κλάδους) στο πρώτο mobile. Εδώ υπάρχουν φοιτητές που επέλεξαν την πιο απλή περίπτωση και πρόσθεσαν το ίδιο σχήμα και στους δύο κλάδους (Εικόνα 90), ενώ άλλοι προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν την ενέργεια της αντικατάστασης, προσθέτοντας διαφορετικά αλλά ισοδύναμα σχήματα, με βάση κάποια σχέση που όρισαν κατά την κατασκευή του αρχικού mobile (Εικόνα 91).

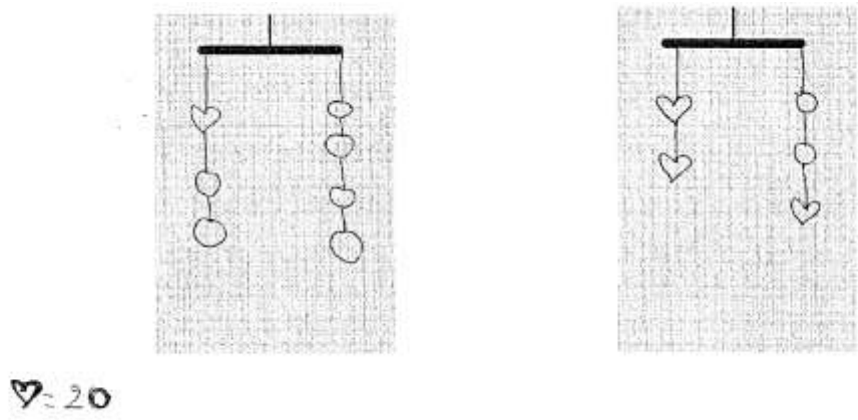


Εικόνα 90: Παράδειγμα κατασκευής με προσθήκη ίδιας ποσότητας (ίδια σχήματα)



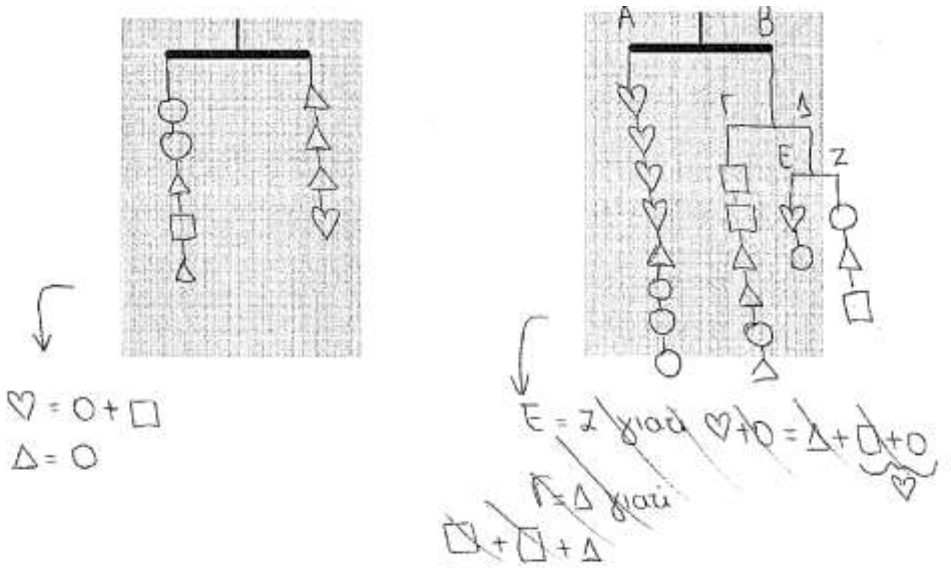
Εικόνα 91: Παράδειγμα κατασκευής με προσθήκη ίδιας ποσότητας (ισοδύναμα σχήματα)

Η *τρίτη κατηγορία* αφορά κατασκευές mobile που πραγματοποιήθηκαν με **δύο διακριτά βήματα**. Στο πρώτο βήμα οι φοιτητές αφαιρούσαν από το πρώτο mobile την ίδια ποσότητα και από τους δύο κλάδους, ενώ στη συνέχεια, στο δεύτερο βήμα πρόσθεταν μια άλλη ποσότητα και στους δύο κλάδους του mobile. Στην ουσία πρόκειται για συνδυασμό των δύο παραπάνω κατηγοριών. Στην εικόνα 92 μπορούμε να δούμε για παράδειγμα, ότι ο λύτης πρώτα αφαίρεσε από το αρχικό mobile δύο σφαίρες από κάθε κλάδο κι έπειτα πρόσθεσε μια καρδιά σε κάθε κλάδο, δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο το δεύτερο mobile.



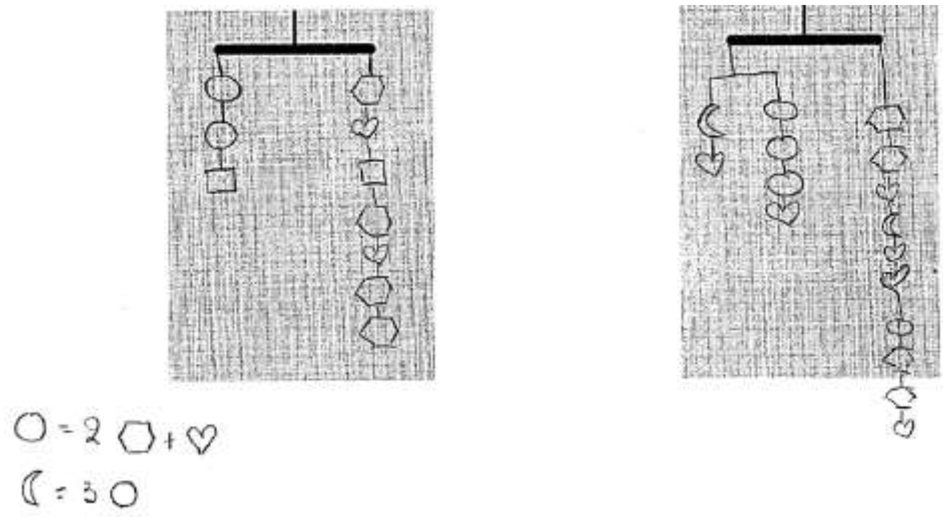
Εικόνα 92: Παράδειγμα κατασκευής με δύο διακριτά βήματα

Στην επόμενη *κατηγορία*, την *τέταρτη*, εντάσσονται οι κατασκευές που στηρίχθηκαν στις **υπάρχουσες σχέσεις ισοδυναμίας**, τις οποίες όρισαν οι ίδιοι οι λύτες για το πρώτο mobile. Αναλυτικότερα, σε αυτή την κατηγορία οι λύτες κατασκεύαζαν ένα νέο mobile, με βάση τις σχέσεις που είχαν ορίσει για το αρχικό. Στην ουσία δεν έκαναν κάποια τροποποίηση πάνω στο αρχικό mobile, αλλά χρησιμοποιούσαν τα ισοδύναμα σχήματα του για να δημιουργήσουν ένα νέο. Παράδειγμα αυτής της τακτικής αποτελεί η επίλυση που παρουσιάζεται στην εικόνα 93, στην οποία όπως παρατηρούμε ο λύτης έχει κατασκευάσει ένα σχετικά απλό πρώτο mobile. Στην κατασκευή του δεύτερου όμως αποφάσισε να χρησιμοποιήσει τις ίδιες σχέσεις ισοδυναμίας και να φτιάξει ένα mobile αυξημένης οπτικά πολυπλοκότητας με υποκλάδους, στο οποίο θα έπρεπε να δοθεί ταυτόχρονα προσοχή στην επιμέρους ισορροπία των υποκλάδων, αλλά και τη γενικότερη ισορροπία όλου του mobile. Επιπλέον, μερικοί φοιτητές, όπως είδαμε και στην δεύτερη κατηγορία για την ανάλυση του πρώτου mobile, κατασκεύασαν mobiles τα οποία δημιουργήθηκαν με βάση τις **υπάρχουσες σχέσεις ισοδυναμίας** από το πρώτο mobile, προσθέτοντας όμως **και** κάποιο **ίδιο σχήμα** στους δύο κλάδους τους.



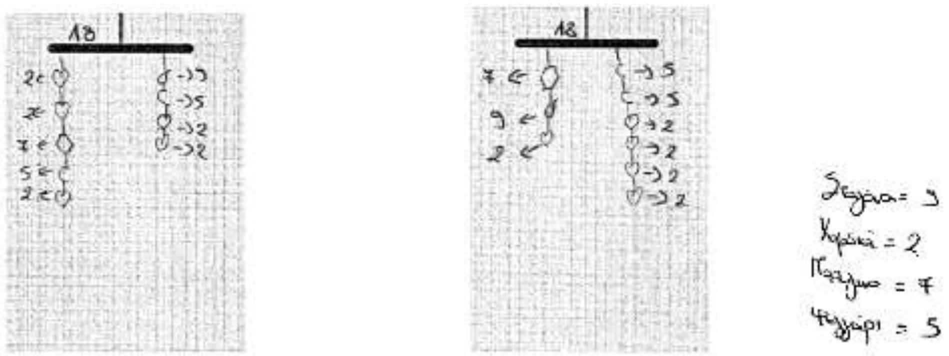
Εικόνα 93: Παράδειγμα κατασκευής ενός πιο πολύπλοκου οπτικά mobile

Η *πέμπτη κατηγορία* αφορά κατασκευές mobile για τις οποίες αξιοποιήθηκαν οι **υπάρχουσες σχέσεις** από το πρώτο mobile, ορίστηκαν όμως συνδυαστικά **και νέες σχέσεις**. Στην εικόνα 94 μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτό το σκεπτικό, όπου ο φοιτητής έχει γράψει δύο σχέσεις ισοδυναμίας στην επίλυσή του. Την πρώτη την χρησιμοποίησε και στα δύο mobile (1 σφαίρα=2 εξάγωνα+1 καρδιά), ωστόσο την δεύτερη φαίνεται να την δημιούργησε για να αιτιολογήσει την ισορροπία του δεύτερου mobile, εφόσον μόνο σε αυτή βλέπουμε να χρησιμοποιεί τα συγκεκριμένα ισοδύναμα σχήματα (1 μισοφέγγαρο=3 σφαίρες).



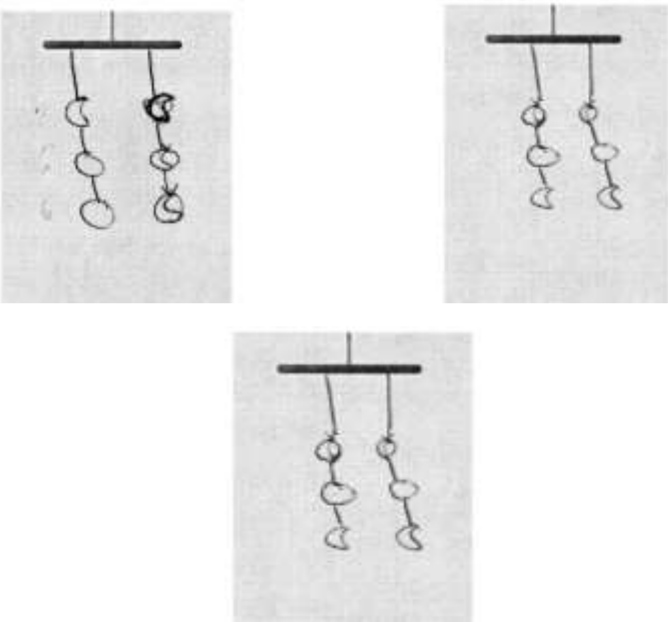
Εικόνα 94: Παράδειγμα κατασκευής με υπάρχουσες σχέσεις ισοδυναμίας και ορισμός νέας

Την επόμενη *κατηγορία*, την *έκτη*, την συναντήσαμε και στην προηγούμενη δραστηριότητα και αφορά mobiles που κατασκευάστηκαν με βάση **τυχαίες τιμές** που έδωσαν οι φοιτητές στα σχήματα που χρησιμοποίησαν στο πρώτο mobile. Πιο συγκεκριμένα στην εικόνα 95, φαίνεται ότι ο λύτης για να δημιουργήσει το δεύτερο mobile έχει χρησιμοποιήσει τα ίδια σχήματα και τις ίδιες τιμές με το πρώτο, κατασκευάζοντας όμως ένα νέο διαφορετικό mobile. Ωστόσο, ο φοιτητής σε αυτή την περίπτωση έχει φροντίσει να τοποθετήσει τα σχήματα με τέτοιο τρόπο ώστε τα δύο mobile να έχουν συνολικά ίσο βάρος. Ο κάθε κλάδος τους ισοδυναμεί με 18 μονάδες, ενώ το κάθε mobile συνολικά έχει ίσο βάρος με 36 μονάδες.



Εικόνα 95: Παράδειγμα κατασκευής με βάση τυχαίες τιμές

Την *έβδομη κατηγορία* αποτελεί η επίλυση ενός φοιτητή, γι' αυτό και παρουσιάζεται τελευταία, ο οποίος αξιοποίησε την **ανακλαστική ιδιότητα της πρόσθεσης**. Στην εικόνα 96 παρατηρούμε ότι ο λύτης έχει χρησιμοποιήσει τα ίδια σχήματα με το πρώτο mobile και έχει τοποθετήσει ένα από το καθένα σε κάθε κλάδο και μάλιστα με την ίδια σειρά. Άρα το mobile ισορροπεί λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της πρόσθεσης η οποία εδώ είναι της μορφής α+β+γ=α+β+γ.



Εικόνα 96: Παράδειγμα κατασκευής με χρήση ανακλαστικής ιδιότητας

4.2 Ανάλυση πρωτοκόλλων

4.2.1 Πορεία λύσης 1ης ομάδας

Η ομάδα ξεκινάει προσπαθώντας να κατανοήσει το πρόβλημα και τα δεδομένα του. Πρώτη τους σκέψη προκειμένου να διερευνήσουν την κατάσταση είναι να τοποθετήσουν τον ίδιο συνδυασμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές (20-23). Αυτή τους η ενέργεια βοηθά να εντοπίσουν την προβληματική συμπεριφορά της ζυγαριάς (24-32). Το επόμενο βήμα είναι να βρουν τη φύση της προβληματικής συμπεριφοράς. Για να το καταφέρουν, προσπαθούν να πετύχουν στο ψηφιακό μοντέλο της ζυγαριάς μια κατάσταση ισορροπίας (51-52) και τότε ένα από τα μέλη προτείνει να αξιοποιήσουν το εύρημα αυτό. Σκοπός του είναι να πειραματιστούν με τις μπίλιες και να πετύχουν μια δεύτερη κατάσταση ισορροπίας με διαφορετικό αριθμό από μπίλιες (67-71). Ωστόσο, τα υπόλοιπα μέλη δεν δείχνουν να συμφωνούν μαζί του και αποφασίζουν να πειραματιστούν μόνο με τις κόκκινες μπίλιες (84-90). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα κάποια στιγμή μετά από δοκιμές να εντοπίσουν την απόκλιση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς (97-101). Κάνουν μια επαλήθευση προκειμένου να είναι σίγουροι για την τιμή της απόκλισης (108-117). Προκειμένου τώρα να δώσουν απάντηση στο ζητούμενο του προβλήματος, αποφασίζουν να ξεκινήσουν από μια αρχική κατάσταση όπου η ζυγαριά δεν έχει καθόλου μπίλιες σε καμιά από τις πλευρές της (118-123). Η στρατηγική τους λέει ότι θα κρατήσουν κενό τον ένα δίσκο και θα προσθέσουν περιεχόμενο στον άλλο. Μηδενίζουν έτσι τον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς και τοποθετούν μια μπλε που είναι το ζητούμενο και όσες κόκκινες χρειάζεται (γνωστό βάρος), προκειμένου να πετύχουν ισορροπία. Αυτό συμβαίνει με την προσθήκη μόλις 1 κόκκινης μπίλιας στην δεξιά πλευρά(126-127). Χρησιμοποιώντας την απόκλιση που βρήκαν νωρίτερα και το γνωστό βάρος της κόκκινης μπίλιας, που είναι το δεδομένο τους, καταλήγουν να βρουν την μπλε μπίλια ίση με 40 μονάδες βάρους (126-130). Προχωρούν σε μια επαλήθευση, διπλασιάζοντας αυτή τη φορά το βάρος και τον αριθμό από μπίλιες και καταλήγουν σίγουροι πια στο ίδιο αποτέλεσμα (158-167).

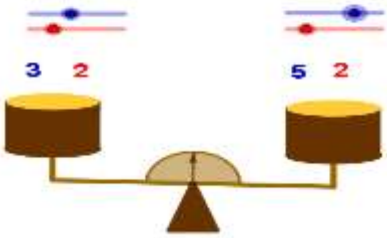
<u>Χαρακτηριστικά δημιουργίας μαθηματικού νοήματος μέσα από τη χρήση του πλαισίου των 5Ε</u>

Στο πρωτόκολλο της πρώτης ομάδας συναντάμε αρκετές φορές τις 2 από τις πέντε συνιστώσες (Explore, Exchange) του θεωρητικού πλαισίου των Benton, Hoyles, Kalas και Noss (2016). Κυρίαρχη σε αυτή την ομάδα είναι η συνιστώσα του ‘Exchange’, και ακολουθεί η συνιστώσα του “Explore”. Η συνιστώσα του “Explain” εμφανίζεται με μικρότερη συχνότητα, η συνιστώσα του “Envisage” μόλις μια φορά, ενώ η συνιστώσα του “bridge” δεν συναντάται καθόλου. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα από κάθε συνιστώσα με σκοπό να διευκολυνθεί η κατανόηση της διαδικασίας δημιουργίας μαθηματικού νοήματος από τα μέλη της ομάδας.

Exchange

37 -Λοιπόν βάλε, ααα ξες τι θα κάνουμε; Άσε σταθερό το κόκκινο και πείραξε τα μπλε
38 να δούμε που ζυγίζουνε, να δούμε που ισορροπεί το μπλε, κράτα σταθερό το
39 κόκκινο μην το πειράξεις και βρες το μπλε που ισορροπεί.

40 [κρατάνε σταθερό από την αριστερή πλευρά το 3–2 (3 μπλε και 2 κόκκινες μπίλιες) και στη
41 δεξιά πλευρά ανεβάζουν σιγά σιγά τις μπλε μπίλιες, σταματώντας στις 5 μπλε και 2 κόκκινες]

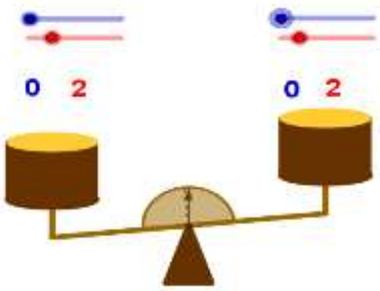


42 -Στο 5 ξεφεύγει και όταν είναι 4 πάλι ξεφεύγει.

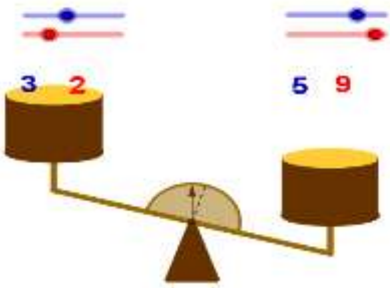
43 -Όχι ρε, στο 5 είναι σχεδόν ίσο.

Στο σημείο αυτό ένα από τα μέλη της ομάδας επικοινωνεί μια ιδέα του στους υπόλοιπους, την οποία φαίνεται ότι αποδέχονται και δοκιμάζουν και στη συνέχεια συζητούν σχετικά με αυτή.

67 -Α, περίμενε. Αν κρατήσουμε αυτό εδώ το σχήμα και πούμε ότι είναι η ισότητα μας
68 (και οι δύο πλευρές έχουν μηδέν μπλε και 2 κόκκινες μπίλιες - πρώτη εικόνα), να δούμε
69 που αλλού θα υπάρχει. Δηλαδή στο 2-3 και 5-9 (αρχική κατάσταση της
70 ζυγαριάς–δεύτερη εικόνα) που ήταν πριν; Ήταν ακριβώς το ίδιο σχήμα;
71 Αποτυπώστε το λίγο το σχήμα. Έχει μια κλίση.



($1^{η}$ εικόνα)



($2^{η}$ εικόνα)

72 -Τώρα εδώ έχει 40 γραμμάρια από τη μια και 40 από την άλλη…

73 -Και ισορροπεί.

74 -Θα ισορροπούσε αν ήτανε…

75 -Άρα παρεκκλίνει λίγο της γραμμής.

76 -Αν παρεκκλίνει τι σημαίνει;

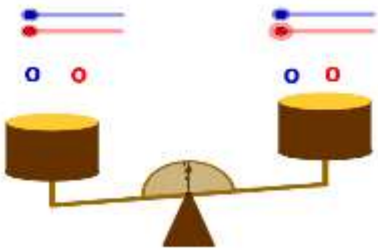
77 -Ότι δεν ισορροπεί.

78 -Όχι εδώ ισορροπεί απλά είναι χαλασμένη είπαμε.

Το συγκεκριμένο απόσπασμα αποτελεί ένα κλασσικό παράδειγμα της συνιστώσας του “Exchange”, καθώς υπάρχει πυκνή διαδοχή απόψεων σχετικά με μια ιδέα. Πιο αναλυτικά, ένα μέλος προτείνει, αφού έχουν φέρει την ζυγαριά σε μια κατάσταση ισορροπίας, να πειραματιστούν ξανά με τις μπίλιες, έτσι ώστε να φέρουν ξανά την ζυγαριά στην ίδια κατάσταση, αλλά με διαφορετικό αριθμό από μπίλιες.

118 -Οπότε τώρα θα αρχίζουμε να πειράζουμε τις μπλε να δούμε τι γίνεται.

119 -Λοιπόν σβήσε την κόκκινη κάντο 0 και 0 (φέρνουν την ζυγαριά σε κατάσταση
120 όπου δεν έχει καμία μπίλια).



121 …και βάζε από εδώ μπλε και θα δούμε πότε θα πάει εδώ (δείχνει τις διακεκομμένες
122 γραμμές επομένως εννοεί ότι θα ισορροπήσει).

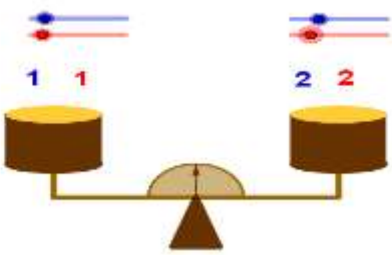
123 -Βάλε κόκκινη και μπλε.

Η ομάδα μέχρι στιγμής έχει βρει την απόκλιση ανάμεσα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς η οποία είναι ίση με 60 και προσπαθούν να βρουν με ποιο τρόπο θα προχωρήσουν παρακάτω. Έτσι, αφού προτείνει κάποιος αρχικά να μηδενίσουν όλες τις μπίλιες από τη ζυγαριά, μέσα από την συζήτηση καταλήγουν στο ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουν και τα δύο χρώματα από μπίλιες, ώστε να έχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα.

159 -Άμα βάλουμε από τη μια πλευρά 120 γραμμάρια κι από την άλλη να βάλουμε 60
160 γραμμάρια.

161 -Αντίστοιχα όμως γιατί από εδώ χρειάζεται 60 παραπάνω.

162 -Ναι δηλαδή βάλε από εδώ (αριστερά) 120 γραμμάρια κι από εδώ (60 γραμμάρια).



163 -Άρα αφού αυτό κάνει 40 γραμμάρια, θέλουμε 80, άρα δυο μπλε.

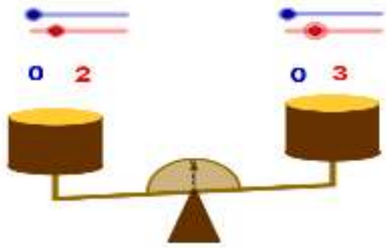
Λίγο πριν το τέλος της συνάντησης με την πρώτη ομάδα, έχουν βρει την τιμή της μπλε μπίλιας και αποφασίζουν να κάνουν μια επαλήθευση για να σιγουρευτούν. Καθώς συζητάνε με ποιο τρόπο θα επαληθεύσουν την απάντησή τους, ένα από τα μέλη προτείνει μια ιδέα την οποία όλοι μαζί συγκεκριμενοποιούν και δοκιμάζουν.

Explore

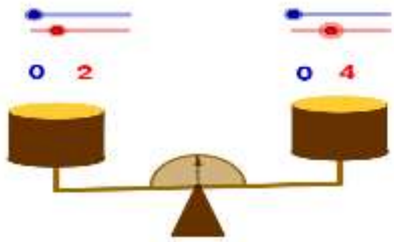
84 -Για αύξησε μια κόκκινη σε κάποιο.

85 -Μια κόκκινη.

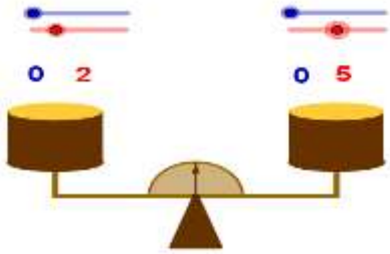
86 (η αριστερή πλευρά της ζυγαριάς παραμένει σταθερή έχοντας 0 μπλε και 2 κόκκινες **87**
μπίλιες και πειραματίζονται με την δεξιά πλευρά, αυξάνοντας κατά μία τις κόκκινες μπίλιες. **88**
Τώρα δηλαδή η δεξιά πλευρά έχει 0 μπλε και 3 κόκκινες μπίλιες).



89 -Ναι. Άλλη μια. (η δεξιά πλευρά έχει 0 μπλε κα 4 κόκκινες μπίλιες τώρα)



90 -Άλλη μια! (η δεξιά πλευρά έχει 0 μπλε κα 5 κόκκινες μπίλιες τώρα)



91 -Ωραία οπότε ισορροπεί όταν έχουμε 2 από εδώ (αριστερά) και 5 από εδώ (δεξιά).

Στο συγκεκριμένο σημείο τα μέλη της ομάδας αποφασίζουν να ακολουθήσουν μια στρατηγική, σύμφωνα με την οποία μηδενίζουν όλες τις μπίλιες και προσθέτουν μια-μια κόκκινες μπίλιες, μέχρι να φτάσουν στο σημείο της ισορροπίας της ζυγαριάς. Ακολουθεί μια συστηματική διερεύνηση της κατάστασης, η οποία τους οδήγησε να βρουν την απόκλιση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς.

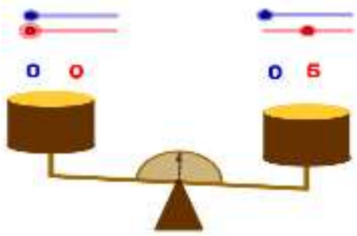
103 -Όταν από τη μια είναι 40 γραμμάρια από την άλλη…

104 -Μηδένισε το από τη μια.

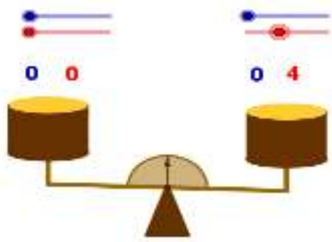
105 -…είναι παραπάνω.

106 -Βασικά ναι. Ουσιαστικά…

107 (μηδενίζουν την αριστερή πλευρά, οπότε δεν έχει καμία μπίλια)



108 -Βάλε 0 και 4 (στη δεξιά πλευρά–0 μπλε και 4 κόκκινες μπίλιες).



109 -Κατά 3

110 -Βάλε 0 και 3

111 -0 και 3 είπαμε;

112 -Ναι.

Σε αυτό το απόσπασμα συναντάμε την συνιστώσα του “Explore” με την έννοια της διερεύνησης, καθώς αποφασίζουν τα μέλη της ομάδας να κάνουν ακόμη ένα παράδειγμα, ώστε να είναι σίγουροι για την τιμή της απόκλισης μεταξύ των δύο πλευρών της ζυγαριάς.

140 -Ένα λεπτό, είδαμε ότι έχουν 30 απόκλιση, ε; 20 ζυγίζει (η μια κόκκινη)…άρα γιατί
141 40; 10 δεν πρέπει να είναι; (η μπλε)

142 -60 είπαμε ότι έχει απόκλιση.

Εδώ συναντάμε την συνιστώσα του “Explore” με την έννοια του εντοπισμού ενός λάθους στη σκέψη κάποιου άλλου, διότι στην ουσία ο δεύτερος εντοπίζει το αριθμητικό λάθος του πρώτου.

Explain

97 -Θα δούμε πόσο αποκλείει η ζυγαριά. Δηλαδή ε…

98 -Έχει δηλαδή απόκλιση. Αμα ήταν δηλαδή 2+2 με το 2+5…. Δηλαδή έχει
99 απόκλιση 3 κόκκινες μπάλες.

100 -Άρα 3*20=60 γραμμάρια.

101 -Ναι.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα, δίνεται μια εξήγηση μεταξύ των μελών της ομάδας, σχετικά με την αριθμητική τιμή της απόκλισης που παρουσιάζει η ζυγαριά. Ερμηνεύεται η απόκλιση με όρους πλήθους γνωστού αριθμητικού βάρους, προκειμένου να γίνει ο τελικός υπολογισμός της απόκλισης.

147 -Αυτό ισχύει, οπότε για να ισορροπήσει η χαλασμένη ζυγαριά από εδώ πέρα (δεξιά
148 πλευρά) πρέπει να έχεις 60 γραμμάρια.

149 -Παραπάνω από το αριστερό.

150 -Άμα έχεις 1 έχεις 20 γραμμάρια κι άλλα 40=60 γραμμάρια. Και ισορροπεί.

151 -Άρα η μια μπλε κάνει 40.

Εδώ γίνεται μια προσπάθεια από δύο μέλη της ομάδας, συμπληρώνοντας ο ένας τον άλλον, να εξηγήσουν στους υπόλοιπους, οι οποίοι φαίνεται να είναι διστακτικοί, το σκεπτικό με το οποίο κατέληξαν στην τιμή της μπλε μπίλιας που ήταν και το ζητούμενο του προβλήματος.

Envisage

20 -Βάλε βασικά και εδώ 3 και 2 (3 μπλε και 2 κόκκινες μπίλιες) για να δείξουμε ότι
21 όντως δεν είναι χαλασμένη η ζυγαριά. Βάλε δηλαδή εδώ (δείχνει το δεξί κομμάτι της
22 ζυγαριάς) 3 και 2.

Ο συγκεκριμένος λύτης προτείνει μια σύνθεση στο περιεχόμενο των δίσκων του ζυγού και προβλέπει τη συμπεριφορά της ζυγαριάς στην περίπτωση αυτή. Αν λοιπόν βάλουν την ίδια σύνθεση από μπίλιες και από τις δύο πλευρές της ζυγαριάς (3Μ και 2Κ), αυτή θα ισορροπήσει και αυτό θα αποτελεί ένδειξη ότι η ζυγαριά δεν παρουσιάζει κανένα λειτουργικό πρόβλημα.

4.2.2 Πορεία λύσης 2ης ομάδας

Η ομάδα ξεκινάει προσπαθώντας να ερμηνεύσει την κατάσταση που της δίνεται (2, 3) και αναζητώντας τις παραμέτρους του προβλήματος (22, 23). Καθώς τα μέλη της πειραματίζονται με το περιβάλλον και συζητούν για το πώς θα συνεχίσουν, σχεδόν φτάνουν στην κατάσταση ισορροπίας της ζυγαριάς, μέσα από την οποία εντοπίζουν και μια προβληματική συμπεριφορά σε αυτή (43). Στη συνέχεια, προτείνεται από ένα μέλος της ομάδας μια στρατηγική, που γίνεται αποδεκτή από τους υπόλοιπους, αλλά τους οδηγεί σε λανθασμένο συμπέρασμα, διότι δεν έχουν συμπεριλάβει στις εκτιμήσεις τους, το γεγονός ότι πρόκειται για μια χαλασμένη ζυγαριά (88, 89). Εντοπίζουν το λάθος τους και συνεχίζουν να πειραματίζονται, κάτι που τους οδηγεί στη διαπίστωση πως στην κατάσταση ισορροπίας οι δυο πλευρές της ζυγαριάς δεν έχουν ίδια στοιχεία (7 μπλε και 8 κόκκινα στα αριστερά, ενώ 7 μπλε και 10 κόκκινα στα δεξιά) (111, 112). Αυτό τους επιτρέπει να συμπεράνουν ότι υπάρχει μια αρχική απόκλιση ανάμεσα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς (40 γραμμάρια) (133-136). Στη συνέχεια, η ομάδα διχάζεται ανάμεσα στην άποψη ότι δεν μπορεί να βρεθεί το βάρος της μιας μπλε μπίλιας, εφόσον η ζυγαριά είναι χαλασμένη (144-146) και της άποψης ότι αυτό είναι εφικτό, αρκεί να συνυπολογίσουν και την απόκλιση που βρήκαν προηγουμένως (147). Όλη αυτή η συζήτηση βασίζεται βέβαια σε μια κατάσταση ισορροπίας που δεν είναι απόλυτη (υπάρχει μικρή απόκλιση από την πλήρη ισορροπία). Εντοπίζουν όμως το λάθος τους και βρίσκουν την πραγματική απόκλιση η οποία είναι 60 γραμμάρια (175-177). Αποφασίζουν να συνεχίσουν με την εξής στρατηγική: Μηδενίζουν το αριθμό από τις μπίλιες και στις δύο πλευρές της ζυγαριάς. Αυτό όμως δεν τους επιτρέπει να προχωρήσουν (223-230). Τροποποιούν λοιπόν τη στρατηγική τους, αποφασίζοντας να συνδυάσουν μπίλιες και από τα δύο χρώματα (236-241), προκειμένου να βρουν πόσες κόκκινες μπίλιες αντιστοιχούν σε μια μπλε. Φτάνουν στη διαπίστωση ότι μια κόκκινη μπίλια από τα αριστερά ισορροπεί με δύο μπλε μπίλιες από τα δεξιά (συνυπολογιζόμενης και της απόκλισης των 60 γραμμαρίων). Επομένως, οι δυο μπλε ζυγίζουν 60+20=80 γραμμάρια και έτσι, η μια μπλε μπίλια ζυγίζει 40 γραμμάρια (246-250). Αποφασίζουν να δοκιμάσουν και άλλα παραδείγματα για να επιβεβαιώσουν την απάντησή τους (265-266). Στην προσπάθεια τους αυτή ένα μέλος εντοπίζει ένα σφάλμα στην επιχειρηματολογία, επισημαίνοντας ότι μια κόκκινη μπίλια, που ζυγίζει 20 γραμμάρια, δεν είναι δυνατόν να είναι πιο βαριά από μια μπλε μπίλια, η οποία ζυγίζει 40 γραμμάρια (336). Ακολουθεί μια συζήτηση με επιχειρήματα και για τις δύο περιπτώσεις και υπάρχει διχογνωμία σχετικά με το αν πρέπει να λάβουν υπόψη τους στην τελική απάντηση την απόκλιση της ζυγαριάς ή όχι (358-380). Καταλήγουν στο ότι αυτή η μη λογική συμπεριφορά είναι φαινομενική λόγω της προβληματικής ζυγαριάς και επιστρέφουν στην αρχική τους απάντηση, σύμφωνα με την οποία μια μπλε μπίλια ισούται με δύο κόκκινες μπίλιες και άρα ζυγίζει 40 γραμμάρια (396-403).

<u>Χαρακτηριστικά δημιουργίας μαθηματικού νοήματος μέσα από τη χρήση του πλαισίου των 5Ε</u>

Στο πρωτόκολλο της δεύτερης ομάδας συναντάμε αρκετές φορές τις 4 από τις πέντε συνιστώσες (Explore, Explain, Exchange, Envisage) του θεωρητικού πλαισίου των Benton, Hoyles, Kalas και Noss (2016). Κυρίαρχη στη συγκεκριμένη ομάδα είναι η συνιστώσα ‘Exchange’, ενώ τη μικρότερη συχνότητα με μεγάλη διαφορά εμφανίζει η συνιστώσα ‘Envisage’. Η συνιστώσα (bridgE) δεν απαντάται καθόλου. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα από κάθε συνιστώσα με σκοπό να διευκολυνθεί η κατανόηση της διαδικασίας δημιουργίας μαθηματικού νοήματος από τα μέλη της ομάδας.

Explore

90 -Άρα ωραία. Μια μπλε μπίλια είναι 4 κόκκινες.

91 -Ναι αλλά δεν έχεις κανονική ζυγαριά έχεις χαλασμένη.

Η ομάδα έχει φτάσει σε μια κατάσταση ισορροπίας όπου στα αριστερά υπάρχει μια μπλε μπίλια και δεξιά 4 κόκκινες. Η ισορροπία αυτή εμπλέκει προφανώς και το γεγονός της απόκλισης, λόγω του σφάλματος που παρουσιάζει η ζυγαριά. Το ένα μέλος της ομάδας το αγνοεί και θεωρεί ότι η ισότητα είναι στην ουσία ανάμεσα μόνο στην 1 μπλε και στις 4 κόκκινες μπίλιες. Ο άλλος όμως εξετάζει το επιχείρημα και διαπιστώνει το κενό που υπάρχει στο σκεπτικό.

90 -Άρα ωραία. Μια μπλε μπίλια είναι 4 κόκκινες

95 -Άρα μια μπίλια μπλε είναι 60 γραμμάρια. Δεν ξέρω που κατέληξα.

96 -Που βλέπεις το 60;

97 -2 φορές το 4. Εεεε 80.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση κάποιος εντοπίζει ένα αριθμητικό λάθος σε έναν υπολογισμό άλλου μέλους της ομάδας και του το υποδεικνύει. Η κατάσταση ισορροπίας δείχνει (χωρίς τον υπολογισμό της απόκλισης) να ισορροπεί η μια μπλέ μπίλια με 4 κόκκινες. Άρα ο υπολογισμός που είχε πρόθεση ο συγκεκριμένος λύτης να κάνεις ήταν 4x20=80. Παρ' όλ' αυτά βρήκε 60. Εύκολα όμως μετά την παρέμβαση αντιλαμβάνεται το λάθος και διορθώνει.

295 -Σκεφτείτε το πρώτο παράδειγμα.

296 -1 (1 κόκκινη μπίλια αριστερά) και 2 (μπλε μπίλιες δεξιά) πρέπει να ήτανε;

297 -Ναι.

298 -1 και 2, 3 και 3, 5 και 4, 7 και 5, για βάλε το 7 και 5 να δούμε

304 -Προσπαθείς να βρεις έναν κανόνα για να τον εφαρμόζεις;

305 -…Ναι ναι για να τον εφαρμόσω και να βρω που θα ισορροπήσει η ζυγαριά.

307 -Το μοτίβο.

308 -Ότι αυτό ισχύει για κάθε φορά που είναι…

309 -Δεν το χρειαζόμαστε αυτό.

310 -Εμείς δεν πρέπει να βρούμε απλά πόσο ζυγίζει η μπάλα;

311 -Άρα τζάμπα το κάνεις. Τζάμπα καίγεσαι.

312 –Ναι

Πρόκειται για ένα χαρακτηριστικό σύντομο επεισόδιο με βάση το Explore. Μετά από μια σειρά παραδειγμάτων ισορροπίας που έχει πετύχει η ομάδα (1Κ-2Μ, 3Κ-3Μ, 5Κ-4Μ, 7Κ-5Μ), όλη η συζήτηση εστιάζει στην αναζήτηση ενός γενικού κανόνα, ο οποίος να σχετίζεται κάθε φορά με τον αριθμό από τις μπίλιες στον κάθε δίσκο. Η διαδικασία αυτή διακόπτεται όταν ένα άλλο μέλος της ομάδας διακρίνει τον εσφαλμένο εστιασμό και υπενθυμίζει ότι το ζητούμενο του προβλήματος είναι να βρεθεί το βάρος της μιας μπίλιας.

Explain

23 -Οι κόκκινες μπάλες ζυγίζουν 20 γραμμάρια η κάθε μια. Δεν ξέρω αν παίζουν ρόλο

24 τα γραμμάρια.

25 -Άρα οι 5 μπάλες μπλε, αν ζυγίζουν ίσο με 7 από αυτά (κόκκινες) σημαίνει ότι είναι

26 πιο βαριές οι μπλε μπάλες από τις κόκκινες.

Στο μικρό αυτό απόσπασμα η ομάδα βρίσκεται στις πρώτες προσπάθειες για την επίλυση και προσπαθεί να εντοπίσει τις παραμέτρους του προβλήματος. Μια ενέργεια στην οποία προβαίνουν είναι να μεταφράσουν σε επίπεδο λογικής σκέψης την εικόνα που βλέπουν. Η εικόνα μπροστά τους είναι μια κατάσταση ισορροπίας ανάμεσα σε 5 μπλε και 2 κόκκινες μπίλιες. Ένα μέλος της ομάδας θεωρεί ότι ότι οι μπλε μπίλιες πρέπει να είναι βαρύτερες από τι κόκκινες και εξηγεί το σκεπτικό του.

46 -Χα, ισορρόπησαν

47 -Άρα είναι χαλασμένη, γιατί ισορροπεί με 3 μπλε εδώ και εδώ με 5.

48 -Ναι ισχύει.

49 -Είναι χαλασμένη. Ωραία.

Στη φάση αυτή οι λύτες προσπαθούν να τεκμηριώσουν τον ισχυρισμό ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη. Επιτυγχάνουν μια κατάσταση ισορροπίας κατά την οποία υπάρχουν 3Μ-4Κ από την μια και 5Μ-4Κ από την άλλη. Εδώ λοιπόν ο συγκεκριμένος λύτης εξηγεί/αιτιολογεί το σκεπτικό του που αποδεικνύει το πρόβλημα. Δεν γίνεται να υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στις δυο συλλογές. Δεδομένου ότι έχουμε τον ίδιο αριθμό από το ένα χρώμα, θα έπρεπε το ίδιο να συμβαίνει και με το άλλο. Δεν γίνεται το 3Μ+4Κ να είναι ίσο με 5Μ+4Κ.

255 -Λοιπόν, έχουμε βρει ότι μεταξύ τους, εδώ πέρα είναι χαλασμένη η ζυγαριά γιατί
256 εδώ πέρα (αριστερή πλευρά) προσθέτουμε κάθε φορά συν 60 για να

257 ισορροπήσουν. Άρα αν βρούμε ότι εδώ πέρα 2 μπλε μπίλιες ισορροπούν με μια

258 κόκκινη, ξέρουμε ότι στην ουσία αυτό το δοχείο (αριστερή πλευρά) ζυγίζει 20

259 γραμμάρια από το κόκκινο συν τα 60 κάθε φορά που έχουμε από την απόκλιση.

260 Άρα ουσιαστικά κάνουμε μετά…μισό…αφού έχουμε βρει ότι εδώ ζυγίζει 80 αυτή

261 η πλευρά, κάνουμε 80 δια 2 για να βρούμε πόσο ζυγίζει η μια μπλε μπάλα.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα ένα από τα μέλη της ομάδας αφού έχουν δώσει μια απάντηση στην προβληματική κατάσταση, αναλαμβάνει να εξηγήσει στην λεπτομέρειά του τον κανόνα με τον οποίο λειτουργεί η χαλασμένη αυτή ζυγαριά, μέσα από τη χρήση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος. Αν η κατάσταση ισορροπίας είναι 2Μ=1Κ, αυτό για τα βάρη σημαίνει ότι λαμβάνοντας υπόψιν την απόκλιση η πραγματική εξίσωση είναι 2Μ=20+60, 2Μ=80, Μ=80:2=40.

Exchange

140 -Λοιπόν περιμένετε λίγο. Αυτό έχει 10 κόκκινες (δεξιά) και αυτό έχει 8 κόκκινες
141 (αριστερά) σύνολο. Έτσι;

142 -Ναι.

143 -Από αυτή τη μεριά λοιπόν έχουμε…200 γραμμάρια, κι από την άλλη έχουμε πόσα;

144 -160. 40 γραμμάρια διαφορά.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα έχουμε ένα παράδειγμα της κατηγορίας ‘exchange’, όπου υπάρχει διαδοχή ερωτήσεων και απαντήσεων, καθώς ένα από τα μέλη της ομάδας με ερωτήματα παρουσιάζει την ιδέα του και παίρνει επιβεβαίωση από τα υπόλοιπα μέλη.

196 -Κάτσε να δούμε όλες τις σχέσεις που έχουμε. Ωραία;

197 -Ωραία.

198 -Αυτό είναι χ κι αυτό είναι χ συν 60.

199 -Ωραία.

200 -Οι μπλε μπάλες τώρα από γραμμάρια στο πρώτο είναι 7 επί 20 άρα 140

201 γραμμάρια συν τα 60 που βάζουμε από την απόκλιση, 200.

202 -Ωραία.

203 -Κι οι άλλες ζυγίζουν πάλι ίσα με 200.

Στην ίδια λογική κινείται και αυτό το απόσπασμα. Όπως και στο προηγούμενο, έτσι κι εδώ ένα μέλος της ομάδας μοιράζεται τις ιδέες του, με τις οποίες εκφράζει το πώς αριθμητικά αντιλαμβάνεται την κατάσταση ισορροπίας με συνυπολογισμό της απόκλισης. Οι υπόλοιποι συμφωνούν μαζί του κάτι που ενισχύει την ανάγκη για αυτοπεποίθηση.

233 -Δες! Να δούμε πόσα μπλε από εδώ, ισορροπούν με πόσα κόκκινα από εδώ, κι

234 απλά να δούμε μετά, να κάνουμε κάτι με την απόκλιση που έχουμε βρει μεταξύ τους.

235 -Με το 60 δηλαδή.

236 -Ναι αλλά πρέπει να το βρούμε σύμφωνα με τα κόκκινα.

237 -Ναι.

238 -Ωραία. Πάντως τα μπλε, με 0 από εκεί (αριστερά) με το μπλε δεν ισορροπεί.

239 -Ναι.

240 -Άρα πρέπει να βάλουμε κόκκινες.

241 -Ναι, για βάλε κόκκινα.

Μετά από μια σειρά αποτυχημένων συνδυασμών για την επίτευξη ισορροπίας, ένα μέλος επικοινωνεί στην ομάδα την ιδέα του να έχουν διαφορετικά χρώματα σε κάθε πλευρά και στη βάση αυτή να προσπαθήσουν να πετύχουν μια κατάσταση ισορροπίας. Προσπαθεί να προωθήσει την ιδέα να υπολογιστούν τα μπλε σε συνάρτηση με τα κόκκινα και την απόκλιση. Υπάρχει η παρακίνηση (Δες!), και η πυκνή διαδοχή επιμέρους προτάσεων που βρίσκουν την αποδοχή της ομάδας.

Envisage

Το envisage συνδέεται με μια πρόβλεψη που κάνει ο λύτης. Σε ένα ψηφιακό περιβάλλον μπορούν να εντοπιστούν δυο τέτοια είδη προβλέψεων. Το ένα αφορά την συμπεριφορά της εφαρμογής κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, ενώ το δεύτερο αφορά τη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος. Πολλές φορές αυτά τα δυο συνδυάζονται. Η εφαρμογή, προβλέπεται ότι θα συμπεριφερθεί με έναν συγκεκριμένο τρόπο στη βάση πρόβλεψης που βασίζεται στο μαθηματικό μέρος του προβλήματος.

74 -Άμα βάλουμε μια μπλε εκεί; Αλλά είναι χαλασμένη η ζυγαριά, δεν θα καταλάβουμε
75 κάτι

Στο σημείο αυτό η ομάδα έχει μηδενίσει τον αριθμό από μπίλιες και στις δυο πλευρές της ζυγαριάς και η πρόταση που γίνεται από ένα μέλος της ομάδας είναι να τοποθετήσουν μια μόνο μπλε μπίλια στη μια πλευρά για να μελετήσουν τις ενδείξεις της ζυγαριάς. Όμως αμέσως προβλέπει ότι μια τέτοια ενέργεια θα δώσει αποτέλεσμα που δεν μπορεί να «μεταφραστεί» με ασφάλεια, λόγω του ότι δεν έχει εντοπιστεί η απόκλιση.

130 -Αν βγάλουμε άλλες δυο κόκκινες αυτό ισορροπεί.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα η ομάδα έχει φτάσει σε μια κατάσταση όπου η ζυγαριά δεν ισορροπεί. Το συγκεκριμένο μέλος της ομάδας προτείνει να αφαιρέσουν δύο κόκκινες μπίλιες και προβλέπει ότι αυτό θα οδηγήσει την ζυγαριά σε κατάσταση ισορροπίας. Η πρόταση αυτή είναι ενδεικτική του ότι έχει κατανοήσει τη λειτουργία της ζυγαριάς και τις αριθμητικές σχέσεις που τη διέπουν και είναι σε θέση να προβλέπει την συμπεριφορά της στη βάση συγκεκριμένων ενεργειών.

4.2.3 Πορεία λύσης 3ης ομάδας

Η ομάδα αρχικά διαβάζει την εκφώνηση της δραστηριότητας και προσπαθεί να κατανοήσει τα δεδομένα της, αλλά και τη λειτουργία του ψηφιακού περιβάλλοντος που της έχει δοθεί (1-17). Πρώτη τους σκέψη είναι να τοποθετήσουν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές (19-21). Η ενέργεια αυτή τους βοηθά να εντοπίσουν την προβληματική συμπεριφορά της ζυγαριάς (22-23). Προκειμένου να βρουν την φύση της προβληματικής συμπεριφοράς, ένα από τα μέλη προτείνει να δημιουργήσουν στο ψηφιακό μοντέλο της ζυγαριάς μια κατάσταση ισορροπίας, την οποία στην συνέχεια θα εκμεταλλευτούν για να καταλήξουν στην απάντησή τους (50-52). Βρίσκουν λοιπόν το σημείο που ισορροπεί η ζυγαριά (χωρίς να υπολογίσουν την απόκλιση) χρησιμοποιώντας αρχικά μόνο κόκκινες μπίλιες και έπειτα μόνο μπλε μπίλιες. Στη συνέχεια, αποφασίζουν να συνδυάσουν και τα δύο χρώματα από μπίλιες προκειμένου να φτάσουν την ζυγαριά στο ίδιο σημείο ισορροπίας. Μέσα από αυτή την διερεύνησή τους καταλήγουν να βρουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις μπλε και τις κόκκινες μπίλιες (1 μπλε μπίλια ισούται με 2 κόκκινες μπίλιες) (119-121) και κατ' επέκταση βρίσκουν και την τιμή της μπλε μπίλιας. Προκειμένου να σιγουρευτούν ξεκινούν να εξηγούν την λογική που ακολούθησαν. Στην πορεία αυτή, κάποια από τα μέλη αρχίζουν να αμφιβάλλουν για την απάντησή τους και οι υπόλοιποι αναλαμβάνουν να τους εξηγήσουν ότι η πορεία της λύσης τους είναι ορθή. Η διαδικασία αυτή τους οδηγεί στην επιβεβαίωση της λογικής τους μέσα κι από άλλα παραδείγματα (155-167, 204-206). Μέσα σε όλη αυτή τη διερεύνηση φτάνουν αρκετά κοντά στην αναγνώριση της απόκλισης ανάμεσα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς, χωρίς όμως να το αντιλαμβάνονται κι έτσι το προσπερνούν (239-243). Στο τέλος, αποφασίζουν να προχωρήσουν σε μια επαλήθευση, διπλασιάζοντας αυτή τη φορά το βάρος και τον αριθμό από μπίλιες και καταλήγουν όλοι σίγουροι πια στο ίδιο αποτέλεσμα (255-266), το οποίο εξηγούν για μια τελευταία φορά (268-276).

<u>Χαρακτηριστικά δημιουργίας μαθηματικού νοήματος μέσα από τη χρήση του πλαισίου των 5E</u>

Στο πρωτόκολλο της τρίτης ομάδας συναντάμε τις τρεις από τις πέντε συνιστώσες (Explain, Exchange, Explore) του θεωρητικού πλαισίου των Benton, Hoyles, Kalas και Noss (2016). Κυρίαρχη σε αυτή την ομάδα είναι η συνιστώσα του ‘Explain’, ενώ ακολουθούν με μεγάλη διαφορά στην συχνότητα εμφάνισης οι συνιστώσες του “Exchange” και του “Explore”. Οι συνιστώσες του “Envisage” και του “bridgE” δεν συναντώνται καθόλου. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα από κάθε συνιστώσα, με σκοπό να διευκολυνθεί η κατανόηση της διαδικασίας δημιουργίας μαθηματικού νοήματος από τα μέλη της ομάδας.

Explain

120 -Έχω μπερδευτεί λίγο.

121 -Κοίτα εδώ. Αυτό είναι το σημείο ισορροπίας. Εδώ έχουμε μια μπλε και εδώ 2 κόκκινες.

122 -Ναι. Άρα αυτό είναι 40 κι αυτό είναι;

123 -40.

124 -Όχι. Α ναι.

125 -Ναι αυτό είναι 40. Άρα η μια μπλε είναι 40.

126 -40 είναι η μια μπλε.

127 -Γιατί ρωτάει πόσο ζυγίζει η κάθε μπλε μπίλια;

128 -40.

Σε αυτό το σημείο ένα από τα μέλη της ομάδας φαίνεται να έχει μπερδευτεί με το σχέδιο λύσης που ακολούθησαν για να φτάσουν στην απάντηση κι έτσι ένας άλλος αναλαμβάνει να του εξηγήσει το σκεπτικό, σύμφωνα με το οποίο κατέληξαν στην τιμή της μπλε μπίλιας. Η ομάδα έφτασε στη διαπίστωση ότι μια μπλε μπίλια έχει ισοδύναμο βάρος με δυο κόκκινες. Η κατάσταση αυτή αριθμητικά ερμηνεύεται ως εξής: Το βάρος της κόκκινης μπίλιας είναι γνωστό 20 γραμμάρια. Επομένως αφού η μπλε έχει ίδιο βάρος με δυο κόκκινες, τότε το βάρος της θα είναι 2x20=40 γρ.

263 -Ξεκινήσαμε από τη μια πλευρά να έχουμε 5 και 2 κι από την άλλη 5 κι 8. Βάλαμε
264 την ίδια ποσότητα και από τις δυο πλευρές και είδαμε ότι δεν έχει ισορροπία και
265 ότι έχει ένα άλλο σημείο ισορροπίας, στο οποίο οι δυο ποσότητες όταν είναι ίσες,
266 βρίσκεται σε αυτό το σημείο η ζυγαριά. Έτσι, σκεφτήκαμε εμείς να βάλουμε μια
267 κόκκινη από τη μια πλευρά που ξέρουμε πόσο είναι, βασικά θα βάλουμε μια
268 μπλε και θα δούμε με πόσες κόκκινες είναι ίσο η μια μπλε. Και είδαμε ότι μια
269 κόκκινη δεν γίνεται, βάλαμε άλλη μια, 20 και 20 40. 40 είναι η μια μπλε.

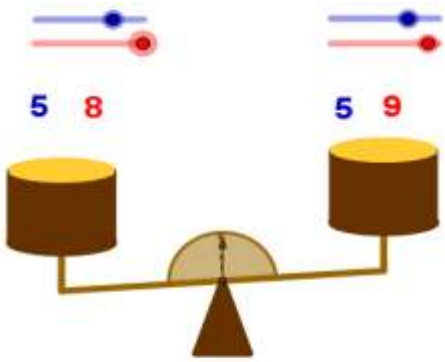
Με το απόσπασμα αυτό ολοκληρώνεται η ενασχόλησή της ομάδας με την συγκεκριμένη δραστηριότητα, καθώς εξηγούν συγκεντρωμένα για μια τελευταία φορά τον τρόπο σκέψης τους και τις ενέργειες που πραγματοποίησαν, προκειμένου να απαντήσουν στο ζητούμενο. Ειδικότερα, η ομάδα ξεκίνησε βάζοντας τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές της ζυγαριάς και είδε ότι ισορροπεί σε ένα άλλο σημείο απ' αυτό που θα έπρεπε να ισορροπεί. Κράτησαν λοιπόν αυτό το σημείο και σκέφτηκαν να τοποθετήσουν από τη μια πλευρά μια μπλε μπίλια κι από την άλλη να προσθέτουν κόκκινες μπίλιες, μέχρι η ζυγαριά να φτάσει σε αυτό το συγκεκριμένο σημείο, να ισορροπήσει δηλαδή. Είδαν ότι μια μπλε μπίλια ισορροπεί με δύο κόκκινες κι επομένως η τιμή της μπλε μπίλιας είναι ίση με 40 γραμμάρια. (2x20 γραμμάρια που ζυγίζει η κάθε κόκκινη).

Exchange

19 -Άμα βάλουμε 5 και 9 (και από τις δύο πλευρές) μπορούμε να δούμε αν είναι
20 χαλασμένη.

21 -Ναι για να δούμε αν…

22 (προσπαθούν να βάλουν 5 και 9 και στα αριστερά αλλά βλέπουν ότι οι κόκκινες
23 μπίλιες από τα αριστερά πηγαίνουν μέχρι το 8)



24 -Εγώ θέλω αλλά αυτό όχι.

25 -Βάλε 5 και 8.

26 -Στο άλλο.

Στο αρχικό σημείο διερεύνησης της δραστηριότητας ένας λύτης επικοινωνεί μια ιδέα που σκέφτηκε. Προτείνει λοιπόν, να τοποθετήσουν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρέ,ς για να δουν εάν η ζυγαριά ισορροπεί ή όχι. Η ιδέα που προτείνει γίνεται δεκτή. Αμέσως το προσπαθούν και ως αποτέλεσμα βλέπουν την προβληματική συμπεριφορά της ζυγαριάς, γεγονός που οδηγεί στην νέα πρόταση μέλους για αλλαγή στη σύνθεση της μιας πλευράς της.

39 -Άμα βάλουμε…μπορούμε να βγάλουμε τελείως μια μπίλια; Να έχει μηδέν. Να
40 βάλουμε μόνο μια κόκκινη…

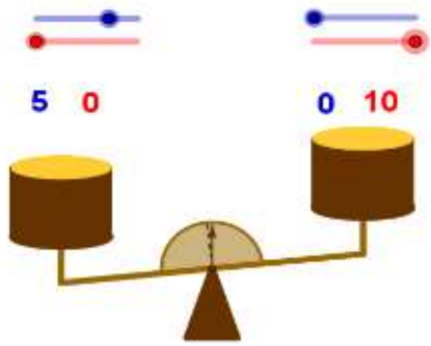
41 -Και να δούμε σε πόσες αντιστοιχεί;

42 -Ναι. Αλλά είναι χαλασμένη.

43 -Ναι είναι χαλασμένη.

44 -Περίμενε.

45 (βάζουν 5 μπλε και 0 κόκκινες από αριστερά και 0 μπλε και 10 κόκκινες από δεξιά)



46 -Αυτό τώρα πως θα το βρούμε;

47 -Όπως και να έχει είναι χαλασμένη. Δεν είναι ίσο για να ισορροπεί.

48 -Άρα καταλήξαμε στο ότι είναι χαλασμένη.

49 -Α, μπορούμε να βρούμε όμως το σημείο που υποτίθεται ότι…

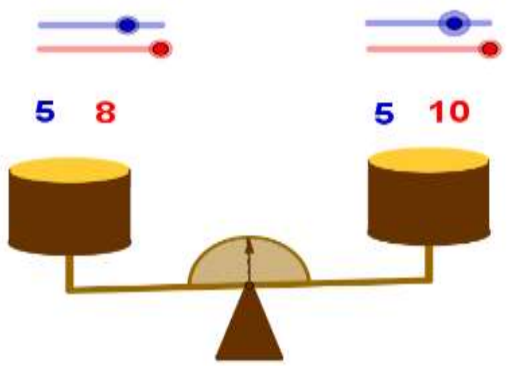
50 -Ότι ισορροπούν.

51 -Ναι.

52 -Δηλαδή να ξαναπάμε πίσω στο 5 8…

53 -Ή και σε οποιοδήποτε.

54 (βάζουν 5 μπλε και 8 κόκκινες από αριστερά και 5 μπλε και 10 κόκκινες από τα δεξιά)



55 -Βασικά ξες τι; Νομίζω δεν θα το κάνουμε έτσι. Θα το κάνουμε…Να δούμε όντως **56** ότι ισορροπεί. Κατάλαβες;

57 -Ναι.

Το κομμάτι αυτό αποτελεί μια πυκνή διαδοχή απόψεων, όπου η ομάδα προτείνει μερικές ιδέες και τις δοκιμάζουν. Συγκεκριμένα στην αρχή προτείνουν να μηδενίσουν κάποιες μπίλιες και να κρατήσουν από τη μια πλευρά μόνο μπλε κι από την άλλη μόνο κόκκινες για να βρουν την αντιστοιχία μεταξύ τους. Στην πορεία όμως δυσκολεύονται, διότι βλέπουν ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη και δεν ισορροπεί στο σημείο που θα έπρεπε. Επομένως, ένας άλλος προτείνει να βρουν ένα υποθετικό σημείο ισορροπίας της ζυγαριάς, στο οποίο δεν θα χρειαστεί να υπολογίσουν ότι είναι χαλασμένη. Αυτό το καταφέρνουν παρακάτω βάζοντας τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές και κρατώντας εκείνο το σημείο ως το σημείο ισορροπίας της.

Explore

210 -Εδώ έχουμε δύο τρεις έχει πεντακόσια.

211 -Αάααα κάτσε λίγο.

212 -Τι 500; Κάτσε κάτσε.

213 -Καλά το πάει.

214 -500…

215 -50 καλέ τι 500…

216 -50 γραμμάρια είναι.

217 -Αα ναι.

218 -Τι 50; Πως το κάνατε αυτό; τρεις είκοσι εξήντα.

Το απόσπασμα αυτό αποτελεί κλασσικό παράδειγμα της συνιστώσας του "Explore", διότι ένα από τα μέλη της ομάδας εντοπίζει ένα αριθμητικό λάθος στην σκέψη των υπολοίπων. Η κατάσταση ισορροπίας δείχνει (με τον υπολογισμό της απόκλισης) να ισορροπεί μια μπλε μπίλια από τα αριστερά με μια μπλε και τρεις κόκκινες μπίλιες από τα δεξιά. Ο υπολογισμός που είχαν πρόθεση να κάνουν ήταν να βρουν το συνολικό βάρος από τις κόκκινες μπίλιες, επομένως 3x20. Μπερδεύονται όμως και βρίσκουν 500. Εύκολα μετά την παρέμβαση αντιλαμβάνονται το λάθος τους.

250 -Θέλετε να το δοκιμάσουμε με μεγαλύτερους αριθμούς αν βγαίνει; Δηλαδή το
251 διπλάσιο.

252 -Με την αντιστοιχία δηλαδή;

253 -Ναι.

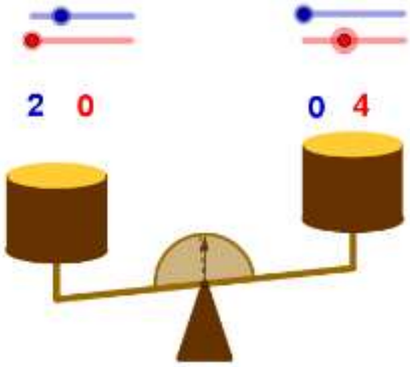
254 -Οκ ας το δοκιμάσουμε.

255 -Ας βάλουμε εδώ δυο, να πάει 80.

256 -Από εδώ δύο μπλε (αριστερά) κι από εδώ πόσες είπαμε….

257 -4…Ώπα.

258 (βάζουν 2 μπλε μπίλιες αριστερά και 4 κόκκινες δεξιά)



259 -Να το. Αυτό είναι. Εκεί δεν ήταν το σημείο ισορροπίας.

260 -Ναι.

261 -Η ζυγαριά είναι χαλασμένη και η κάθε μπλε ζυγίζει 40.

Στο κομμάτι αυτό συναντάμε την συνιστώσα του "Explore" με την έννοια της διερεύνησης, καθώς ένα από τα μέλη της ομάδας προτείνει να κάνουν ένα ακόμη παράδειγμα ώστε να είναι σίγουροι για την τιμή της μπλε μπίλιας που έχουν δώσει ως απάντηση. Η ομάδα έχει καταλήξει στο ότι μια μπλε μπίλια ισούται με δυο κόκκινες κι επομένως το βάρος της κάθε μπλε μπίλιας είναι 40 γραμμάρια (2x20 γρ. που ζυγίζει η κάθε κόκκινη μπίλια). Ένας από τους λύτες προτείνει να κάνουν μια επαλήθευση πριν δώσουν την τελική τους απάντηση, βάζοντας αυτή τη φορά το διπλάσιο πλήθος από μπίλιες. Θέλουν να δουν δηλαδή αν δύο μπλε μπίλιες θα ισορροπούν με τέσσερις κόκκινες μπίλιες. Η ζυγαριά βρίσκεται στο ίδιο σημείο με πριν, επομένως σιγουρεύουν την απάντησή τους.

4.2.4 Πορεία λύσης 4ης ομάδας

Η ομάδα ξεκινάει διαβάζοντας την εκφώνηση και επιστρέφει αρκετές φορές σε αυτή στο αρχικό στάδιο της επίλυσης, μέχρι να κατανοηθεί η προβληματική κατάσταση. Πρώτη τους κίνηση είναι να μεταβάλλουν το πλήθος από τις μπίλιες στις δύο πλευρές για να δουν τι συμβαίνει. Αυτό που εντοπίζουν γρήγορα είναι ότι η εφαρμογή επιτρέπει διαφορετικό μέγιστο πλήθος από κόκκινες μπίλιες στην κάθε πλευρά (44-47). Έπειτα αποφασίζουν ότι πρέπει αρχικά να σιγουρευτούν αν η ζυγαριά είναι χαλασμένη ή όχι. Έτσι, τοποθετούν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές και προβλέπουν ότι η ζυγαριά θα ισορροπήσει. Αυτό όμως δεν συμβαίνει και το ερμηνεύουν ως ένδειξη ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη, χωρίς όμως να τους απασχολεί η αριθμητική απόκλιση ανάμεσα στις δύο πλευρές, που θα βοηθήσει στην εύρεση του ζητούμενου (92-94, 104, 105, 113). Ένα από τα μέλη επικοινωνεί την ιδέα μήπως οι μπλε μπίλιες έχουν διαφορετικό βάρος από κάθε μεριά (116-120). Για να εξετάσουν αυτή την υπόθεση, αποφασίζουν να μηδενίσουν τις κόκκινες μπίλιες από την ζυγαριά και να χρησιμοποιήσουν μόνο τις μπλε (146-153). Αυτό όμως δεν οδηγεί σε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα κι έτσι επιστρέφουν στο αρχικό τους ερώτημα, αν η ζυγαριά είναι όντως χαλασμένη ή όχι. Για να απαντήσουν σε αυτό, φέρνουν την ζυγαριά σε κατάσταση όπου δεν έχει καμία μπίλια επάνω (204-206). Στην ουσία δημιουργούν μια κατάσταση στην οποία μια φυσιολογική ζυγαριά θα ισορροπούσε. Έτσι, θεωρούν πως η ζυγαριά είναι χαλασμένη, αφού δεν ανταποκρίνεται σε αυτήν την πρόβλεψη. Η ομάδα διαπραγματεύεται την ιδέα αυτή στο μεγαλύτερο μέρος της επίλυσης της και επιδιώκει σε κάθε περίπτωση να ερμηνεύσει την κατάσταση που παρουσιάζει η ζυγαριά. Στην αδυναμία τους να εξηγήσουν την προβληματική συμπεριφορά της, οδηγούνται στην άποψη πως δεν είναι δυνατόν να βρεθεί το βάρος της μπλε μπίλιας, εφόσον η ζυγαριά είναι χαλασμένη, μια ιδέα στην οποία επιστρέφουν συνεχώς, μετά από κάθε δοκιμή που δεν τους οδηγεί στην επίλυση της δραστηριότητας. Σκέφτονται λοιπόν, να αναζητήσουν την διαφορά βάρους που υπάρχει ανάμεσα στις μπλε και στις κόκκινες μπίλιες. Μέσα από τυχαίες επιλογές φτάνουν στην επιθυμητή απάντηση (268-272), μα όπως συμβαίνει και αργότερα σε ανάλογη περίπτωση (331-337), δεν κατανοούν ότι πρόκειται για την σωστή απάντηση με αποτέλεσμα να την προσπερνούν. Επιστρέφουν και πάλι στην ιδέα ότι το πρόβλημα μάλλον δεν λύνεται και δεν γίνεται να βρεθεί η τιμή της μπλε μπίλιας. Αυτό βρίσκει αντιμέτωπο ένα μέλος της ομάδας που επιμένει ότι το πρόβλημα πρέπει να έχει μια λύση. Έτσι, πειραματίζονται και πάλι με το ψηφιακό περιβάλλον της ζυγαριάς, για να καταλήξουν στο τέλος ότι αυτό που έχει σημασία είναι η ποσότητα και όχι το βάρος από τις μπλε μπίλιες. Ειδικότερα, υποστηρίζουν ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη και επομένως δεν μπορούν να βρουν την ακριβή τιμή της μπλε μπίλιας, η οποία έχει διαφορετική τιμή σε κάθε πλευρά, μπορούν όμως να υπολογίσουν αν θα ισορροπεί η όχι η ζυγαριά με βάση την ποσότητα από τις μπλε μπίλιες.

<u>Χαρακτηριστικά δημιουργίας μαθηματικού νοήματος μέσα από τη χρήση του πλαισίου των 5Ε</u>

Ανεξάρτητα από το αν η ομάδα καταφέρνει να φτάσσει στην σωστή απάντηση ή όχι, στην μεταξύ τους αλληλεπίδραση εξακολουθούμε να συναντάμε στιγμιότυπα από κάποιες από τις πέντε συνιστώσες (Explore, Exchange, Explain) του θεωρητικού πλαισίου των Benton, Hoyles, Kalas και Noss (2016). Κυρίαρχες σε αυτή την ομάδα φαίνεται να είναι οι συνιστώσες του ‘Exchange’ και του “Explore”. Ακολουθεί η συνιστώσα του “Explain” ενώ η συνιστώσα του “Envisage” εμφανίζεται μόνο μια φορά. Τέλος, η συνιστώσα του “bridgE” δεν συναντάται καθόλου. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα από κάθε συνιστώσα, με σκοπό να διευκολυνθεί η κατανόηση της διαδικασίας δημιουργίας μαθηματικού νοήματος από τα μέλη της ομάδας.

Explore

28 -Το ένα είναι 180 και το άλλο είναι 20.

29 -Τι είκοσι βρε; 40.

30 -40. Συγγνώμη.

Στο σημείο αυτό ένα από τα μέλη της ομάδας εντοπίζει ένα αριθμητικό λάθος κάποιου άλλου και τον διορθώνει. Συγκεκριμένα, ο πρώτος προσπαθεί να υπολογίσει το βάρος από τις κόκκινες μπίλιες και στις δυο πλευρές της ζυγαριάς. Από τη μια πλευρά υπάρχουν 9 κόκκινες μπίλιες και από την άλλη 2. Επομένως, αφού η καθεμία ζυγίζει 20 γραμμάρια, από την μια πλευρά θα υπάρχουν 180 γραμμάρια κι από την άλλη 40. Ο πρώτος όμως μπερδεύεται και λέει 20 αντί για 40 με αποτέλεσμα να τον διορθώσει ο δεύτερος.

526 -Βλέπεις υπάρχει αναλογία. Ααα…Τι έκανες τώρα εσύ αύξησες τις κόκκινες;

527 -Όχι οι κόκκινες παρέμειναν ίδιες. Εσύ είχες πει ότι είναι 2 προς 1. Εγώ τώρα που
528 το έβαλα 1 προς 2 βγήκε πάλι το ίδιο πράγμα. Αν αυτό θέλουμε για ίσο.

529 -Άρα αυτό δεν επαληθεύει την θεωρία μου την προηγούμενη. Γιατί αυτό είναι το
530 αντίθετο. Σημαίνει ότι οι κόκκινες ζυγίζουνε διπλάσια από τις μπλε.

Σε αυτό το απόσπασμα συναντάμε και πάλι την συνιστώσα του “Explore”, διότι ένας από τους λύτες εντοπίζει το λάθος στην σκέψη του προηγούμενου. Ο πρώτος έχει υποθέσει προηγουμένως ότι πρέπει να υπάρχει συγκεκριμένη αναλογία ανάμεσα στις μπλε και τις κόκκινες μπίλιες. Συγκεκριμένα, για να ισορροπεί η ζυγαριά χρειάζεται οι μπλε να είναι διπλάσιες από τις κόκκινες μπίλιες. Καθώς όμως κάποιος άλλος από την ομάδα δοκιμάζει το αντίθετο, δηλαδή οι κόκκινες μπίλιες να είναι διπλάσιες από τις μπλε, βλέπουν ότι καταλήγουν ακριβώς στο ίδιο αποτέλεσμα με πριν. Αυτό λειτουργεί ως αντιπαράδειγμα, που καθιστά εσφαλμένη την υπόθεση του πρώτου, διόρθωση που την ασπάζεται όλη η ομάδα.

Exchange

146 -Μήπως να βγάλουμε όλες τις κόκκινες; Και να αφήσουμε όλες τις μπλε;

147 -Για βγάλε.

148 -Τέλεια.

149 -Τι σημαίνει αυτό; Ότι δεν είναι ίδιες.

150 -Ότι δεν είναι ίσες.

151 -Ή δεν είναι ίδιες ή η ζυγαριά είναι χαλασμένη. Γιατί δεν γίνεται. 10 να έχεις. 10 να
152 ζυγίζουν οι μπάλες ας πούμε, οι μπλε, 70 και 70 να είναι, δεν υπάρχει ισορροπία.

153 -Δεν γίνεται όχι.

Στον διάλογο αυτό, φαίνεται η προσπάθεια της ομάδας να ερμηνεύσει μέσα από τη συζήτηση την κατάσταση της ζυγαριάς. Αρχικά, προτείνουν να μηδενίσουν τις κόκκινες μπίλιες και να χρησιμοποιήσουν μόνο μπλε, 10 σε κάθε πλευρά της ζυγαριάς. Το εφαρμόζουν και τότε ένα μέλος της ομάδας ρωτάει τι σημαίνει το γεγονός ότι η ζυγαριά φαίνεται να μην ισορροπεί. Ο πρώτος δίνει την ερμηνεία ότι οι μπλε μπίλιες δεν ζυγίζουν όλες το ίδιο και αυτό μπορεί να δικαιολογήσει το ότι αν και βλέπουμε 10 σε κάθε πλευρά, εν τούτοις το βάρος δεν είναι ίδιο και από τις δύο πλευρές. Κάποιος άλλος όμως αντιπροτείνει ότι υπάρχει και το ενδεχόμενο η ζυγαριά να είναι χαλασμένη. Θεωρώντας ότι όλες οι μπλε μπίλιες έχουν το ίδιο βάρος και με ένα υποθετικό βάρος για την κάθε μια 10 μονάδων, το συνολικό βάρος αριστερά, όπως και δεξιά, θα είναι 7x10=70 και θα έπρεπε να υπάρχει ισορροπία. Το απόσπασμα αυτό δείχνει μια ανταλλαγή ιδεών και μια διαπραγμάτευση της σκέψης των μελών της ομάδας.

236 -Λοιπόν αφού οι κόκκινες είναι είκοσι γραμμάρια εδώ και είκοσι εδώ…

237 -Ναι.

238 -…άρα η μπλε αυτή (από την αριστερή πλευρά) είναι πιο πολλά γραμμάρια για να
239 πάει αυτό πιο κάτω. Κι αυτή η μπλε (από τη δεξιά πλευρά) είναι πιο λίγα. Έτσι δεν
240 θα έπρεπε να είναι;

241 -Ναι, έστω ότι έχουμε είκοσι και είκοσι…

242 -Εδώ αλλάζει το αποτέλεσμα, στις μπλε.

243 -…αυτή θα πρέπει να είναι πιο βαριά από αυτή.

244 -Ναι ναι κατάλαβα τι λέτε.

245 -Αλλά θα πρέπει δηλαδή να βρούμε την καθεμία μπάλα;

246 -Αυτό. Αφού το λέει εδώ. Κάθε μπλε μπίλια.

247-Μου λες ότι πρέπει να βρούμε 7 κι 7;

Στο σημείο αυτό συναντάμε μια ανταλλαγή απόψεων της ομάδας στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν την προβληματική συμπεριφορά του περιβάλλοντος. Η ζυγαριά έχει και στις δύο πλευρές της το ίδιο πλήθος από μπίλιες (1 κόκκινη και 1 μπλε) και παρ' όλα αυτά δεν ισορροπεί. Το σκεπτικό λοιπόν, που συζητούν τα μέλη της ομάδας είναι ότι εφόσον γνωρίζουν το βάρος της κόκκινης μπίλιας (20 γραμμάρια), το οποίο είναι και στις δύο πλευρές το ίδιο, η προβληματική συμπεριφορά της ζυγαριάς δεν μπορεί να οφείλεται στις κόκκινες μπίλιες, διότι έχουν ίσο βάρος. Επομένως, σκέφτονται πως υπάρχει κάποια διαφορά στο βάρος από τις μπλε μπίλιες, η οποία οδηγεί την ζυγαριά να μην ισορροπεί. Η ομάδα δεν έχει βρει την αριθμητική απόκλιση ανάμεσα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς, η οποία θα την βοηθούσε στην εξήγηση αυτού του φαινομένου. Έτσι, θεωρούν ότι οι μπλε μπίλιες έχουν μεγαλύτερη τιμή στην αριστερή πλευρά απ' ότι στη δεξιά, με αποτέλεσμα η ζυγαριά να είναι πιο βαριά από την αριστερή πλευρά.

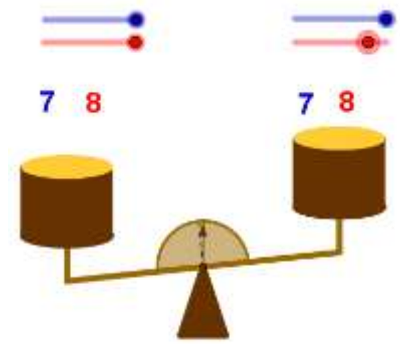
Explain

370 -Πάλι αυτό δηλαδή είναι παραπάνω. Οι μπλε οι μπίλιες οι αριστερές, έχουν
371 τουλάχιστον είκοσι με δέκα απόκλιση από τις δεξιές. Κι αυτό ισχύει γιατί αν αυτές
372 τις μηδενίσεις, αδιαφορούμε για τις μπλε και βάλεις μια κόκκινη από εδώ που
373 ξέρουμε ότι σίγουρα είναι 20 και μια κόκκινη από εδώ που σίγουρα ξέρουμε ότι
374 είναι 20, πάλι υπάρχει απόκλιση.

Το συγκεκριμένο απόσπασμα είναι ένα παράδειγμα της βασικής ιδέας της ομάδας, η οποία κατά το μεγαλύτερο μέρος της επίλυσής της δημιουργεί μια κατάσταση, όπου μια φυσιολογική ζυγαριά θα ισορροπούσε και προσπαθούν να εργαστούν και να συγκρίνουν όλες τις υπόλοιπες μεταβολές με αυτή. Εδώ συγκεκριμένα, ένα μέλος εξηγεί ότι ανεξάρτητα του ότι το βάρος της κάθε μπλε μπίλιας είναι άγνωστο, το γεγονός ότι έχουμε τον ίδιο αριθμό από μπίλιες στις δυο πλευρές της ζυγαριάς και αυτή δεν ισορροπεί αποδεικνύει ότι είναι χαλασμένη. Η αδυναμία των άλλων μελών να ανταποκριθούν, τον οδηγεί στο να εξηγήσει με ακόμη πιο πειστικό τρόπο το επιχείρημά του, βασιζόμενος σε συγκεκριμένα μετρήσιμα μεγέθη. Μηδενίζουν τις μπλε και βάζουν μόνο 1 κόκκινη μπίλια σε κάθε πλευρά. Τώρα γνωρίζουν τα βάρη. Είναι 20 τόσο δεξιά όσο και αριστερά. Και πάλι όμως η ζυγαριά δεν ισορροπεί και αυτό αποδεικνύει ότι είναι χαλασμένη.

Envisage

92 -Δεν γίνεται να είναι…Βάλε λίγο 7 και 7, βασικά 7 κι 8 όσο είναι και 7 κι 8.



93 -Και πάλι δεν εξισορροπεί.

94 -Ναι.

104 -Ρε παιδιά δεν γίνεται να έχουμε 8 από τη μια 10 από την άλλη μπάλες και να **105** υπάρχει ισορροπία.

113 -Δεν γίνεται να έχει 7 απ' τη μια 7 απ' την άλλη και 8 και 10. Έχει απόκλιση 40.

Πρόκειται για μια κατάσταση που την συναντάμε αρκετές φορές στην προσπάθεια αυτής της ομάδας. Οι λύτες προβλέπουν την συμπεριφορά της ζυγαριάς με βάση την αντίληψη που έχουν για την ισότητα μεγεθών στα δυο μέλη μιας ισότητας. Στο απόσπασμα 92-94 η ομάδα τοποθετεί και από τις δύο πλευρές τις ίδιες μπίλιες και προβλέπει ότι η ζυγαριά θα ισορροπεί. Αυτό όμως δεν συμβαίνει και έτσι το ερμηνεύουν ως ένδειξη ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη. Τα άλλα δύο σημεία (104-105, 113) λειτουργούν συμπληρωματικά, διότι εξηγούν για ποιο λόγο θεωρούν πλέον ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη, σε αντίθεση με την πρόβλεψη που έκαναν πριν.

5. Συζήτηση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια προσπάθεια να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας, με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι λοιπόν, θα απαντηθούν αρχικά ξεχωριστά, τα δύο ερευνητικά ερωτήματα και στη συνέχεια θα γίνει μια προσπάθεια σύγκρισης των δύο περιβαλλόντων, που χρησιμοποιήθηκαν στο ερευνητικό κομμάτι της εργασίας.

Πως το περιβάλλον των γρίφων mobile υποστηρίζει την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας ως μια σχέση ισοδυναμίας;

Προφανώς, για κάποιον ο οποίος έχει το απαραίτητο αλγεβρικό υπόβαθρο, φάνηκε πως το συγκεκριμένο περιβάλλον δεν έχει να του προσφέρει κάτι καινούργιο. Είναι ικανός να δει κατευθείαν την δομή του συστήματος στην εικονική του μορφή, να την μεταφράσει με τη χρήση αλγεβρικής γλώσσας και στη συνέχεια να φτάσει στη λύση με τις κλασικές-αλγεβρικές μεθόδους. Ωστόσο, στο δείγμα αυτής της έρευνας, ήταν λίγοι εκείνοι που ακολούθησαν αυτό το σκεπτικό.

Για το μεγαλύτερο κομμάτι των συμμετεχόντων, το περιβάλλον λειτούργησε ως διευκολυντής, που τους έδωσε την δυνατότητα να ανακαλύψουν και να εκφράσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές. Φάνηκε λοιπόν, από τα ευρήματα ότι το περιβάλλον μπορεί να ενθαρρύνει την εμφάνιση διαφορετικών τρόπων λύσης των συστημάτων όπως: α) κειμενικός, β) χρήση των εικονιδίων του συστήματος, γ) αλγεβρικός, δ) εξεικονιστικός και ε) συνδυασμός δύο ή περισσότερων από τους προηγούμενους τρόπους.

Ο **κειμενικός τρόπος επίλυσης** είναι αυτός που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο συγκριτικά με τους υπόλοιπους (περίπου το 33% των συμμετεχόντων τον εφάρμοσε). Οι φοιτητές που τον επέλεξαν για να επιλύσουν τις δραστηριότητες με τα mobile puzzles, στην ουσία χρησιμοποίησαν λέξεις για να εκφράσουν το σκεπτικό που ακολούθησαν (Εικόνα 22, Σελίδα 56).

Αρκετά δημοφιλής υπήρξε και η **χρήση των εικονιδίων του συστήματος** ως τρόπος επίλυσης, κατά τον οποίο οι λύτες χρησιμοποιήσαν τα εικονίδια που υπήρχαν ενσωματωμένα στα mobile puzzles, προκειμένου να εκφράσουν το σκεπτικό τους για την επίλυση της δραστηριότητας (Εικόνα 16, Σελίδα 48).

Για τους ήδη εξοικειωμένους με την αλγεβρική σκέψη η λύση ήταν μονόδρομος (**αλγεβρικός τρόπος επίλυσης**). Ουσιαστικά, πρώτα μετέφρασαν την κατάσταση ισορροπίας σε ένα σύστημα εξισώσεων με πολλούς αγνώστους, το οποίο στη συνέχεια έλυσαν, προκειμένου να προσδιορίσουν τις τιμές των διάφορων μεταβλητών (Εικόνα 31, Σελίδα 66). Αξίζει να σημειωθεί και μια **παραλλαγή του αλγεβρικού τρόπου επίλυσης** που χρησιμοποιήθηκε, η οποία συναντήθηκε μόλις τρεις φορές σε όλες τις επιλύσεις. Συγκεκριμένα, στις τρεις αυτές περιπτώσεις οι λύτες επέλεξαν να επιλύσουν την δραστηριότητα χωρίς τη χρήση γραμμάτων στις μεταβλητές, αντικαθιστώντας τα με ολόκληρες λέξεις (Εικόνα 32, σελίδα 66).

Λιγότερο συχνός ήταν ο **εξεικονιστικός τρόπος επίλυσης**, ο οποίος στην ουσία αποτελεί μια διαφοροποίηση συγκριτικά με την μέχρι τώρα σχετική με τα mobile puzzles βιβλιογραφία. Παρατηρήθηκε, λοιπόν, ότι μερικοί φοιτητές έκαναν χρήση των εικονιδίων του συστήματος, ενταγμένων όμως στο mobile puzzle, δείχνοντας όχι την σειρά των παρεμβάσεων που έκαναν στο σύστημα (όπως γίνεται όταν χρησιμοποιούνται τα εικονίδια του συστήματος), αλλά παρουσιάζοντας συνολικά κάθε φορά την κατάσταση του συστήματος μετά από την παρέμβαση τους, απεικονίζοντας ουσιαστικά τα διακριτά βήματα και όχι την αναλυτική πορεία της επίλυσης (Εικόνα 41, Σελίδα 74).

Ο **συνδυαστικός τρόπος επίλυσης** ήταν η δεύτερη πιο συχνή επιλογή των φοιτητών μετά από τον κειμενικό. Πιο συγκεκριμένα, ορισμένοι φοιτητές επέλεξαν να συνδυάσουν δύο ξεχωριστούς τρόπους επίλυσης, καταλήγοντας έτσι, να επιλύουν τις δραστηριότητες χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα λέξεις (κειμενικός τρόπος), αλλά και τα εικονίδια του συστήματος (Εικόνα 54, Σελίδα 89). Παρατηρήθηκε η χρήση κι άλλων συνδυαστικών τρόπων επίλυσης, η συχνότητα των οποίων όμως ήταν σημαντικά μικρότερη. Αναλυτικότερα, μερικοί λύτες συνδύασαν τον κειμενικό με τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης, τη χρήση των εικονιδίων του συστήματος με τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης, ενώ άλλοι επέλεξαν να συνδυάσουν τρείς διαφορετικούς τρόπους. Έτσι, εντοπίστηκε η ταυτόχρονη χρήση λέξεων, των εικονιδίων του συστήματος και της εξεικόνισης αλλά και του κειμενικού τρόπου, του αλγεβρικού τρόπου σε συνδυασμό με τη χρήση των εικονιδίων του συστήματος σε μια επίλυση.

Έχει ενδιαφέρον σε αυτό το σημείο να εξετάσουμε τα μέχρι τώρα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, σε συνάφεια με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών που έχουν αξιοποιήσει τα mobile puzzles ως ερευνητικό εργαλείο. Οι Papadopoulos, Kindini, και Tsakalaki (2016) στην έρευνά τους με μαθητές 6ης Δημοτικού, χρησιμοποίησαν τα mobile puzzles προκειμένου να εξετάσουν, εάν ενθαρρύνουν την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων τους οδήγησε στους εξής πέντε τύπους σκέψης, όπως τους ονόμασαν: α) μετάφραση της εικόνας σε εκφράσεις ισότητας χρησιμοποιώντας τα σχήματα του mobile, β) χρήση λέξεων για να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα του mobile puzzle, γ) χρήση συμβολικής γλώσσας για να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα του mobile, δ) συνδυασμός περισσοτέρων από έναν από τους προηγούμενους τύπους (ο τύπος αυτός αποτελεί ένδειξη βαθύτερης κατανόησης) και ε) χρήση ερωτηματικού ή άδειου κουτιού για να αναπαραστήσουν τον άγνωστο αριθμό. Φαίνεται να υπάρχει μια ταύτιση των αποτελεσμάτων αυτών με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας

Ωστόσο, παρατηρήθηκαν και ορισμένες διαφορές όπως για παράδειγμα ο πέμπτος τύπος σκέψης (ε) που παρουσίασαν οι Papadopoulos, Kindini & Tsakalaki (2016), ο οποίος δεν χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την έρευνα. Αντίθετα, στην παρούσα έρευνα εντοπίστηκε ο εξεικονιστικός τρόπος επίλυσης, που δεν είχε εμφανισθεί εκεί. Οι Papadopoulos, Kindini, Tsakalaki (2016) θεωρούν ότι η εμφάνιση αυτών των τύπων σκέψης ακολουθούσε μια αναπτυξιακή πορεία, καθώς οι τύποι (γ) και (δ) που είναι πιο προχωρημένοι, εμφανίζονται προς το τέλος της μελέτης. Αντιθέτως, στην παρούσα έρευνα ο αλγεβρικός και ο συνδυαστικός τρόπος που μπορεί να θεωρηθούν πιο προχωρημένοι, χρησιμοποιήθηκαν από την πρώτη κιόλας δραστηριότητα από τους φοιτητές. Αυτό όμως που λειτουργεί ως ένδειξη της πιθανής συμβολής του περιβάλλοντος αυτού σε σχέση με το σύμβολο ισότητας, είναι το γεγονός ότι παρ' όλο που ορισμένοι συμμετέχοντες δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση αλγεβρικής γλώσσας, εφάρμοσαν κάποιες τακτικές, που όταν τις δει κανείς από μαθηματική σκοπιά, θα αναγνωρίσει τα τυπικά βήματα που ακολουθούνται κατά την αλγεβρική επίλυση εξισώσεων. Στην προσπάθειά τους δηλαδή, να εκφράσουν αυτές τις σχέσεις και να βρουν τις απαντήσεις, άρχισαν χωρίς να το συνειδητοποιούν, να χρησιμοποιούν άτυπα τα κλασικά βήματα της επίλυσης.

Μαθηματική Ενέργεια 1: <u>Από τα δύο μέλη μιας ισότητας μπορώ να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό</u>

Διαπιστώθηκε ότι οι συμμετέχοντες αρκετές φορές αφαίρεσαν το ίδιο σχήμα και από τις δύο πλευρές ενός mobile, χωρίς να ανησυχούν μήπως χαλάσει η ισορροπία του συστήματος. Αυτή η ενέργεια αντανακλά άτυπα τη φορμαλιστική γνώση ότι από τα δύο μέρη μιας ισότητας μπορούμε να αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα, με την ισότητα να διατηρείται (Εικόνες 34, Σελίδα 68, Εικόνα 35, Σελίδα 69, Εικόνα 36, Σελίδα 69).

Μαθηματική Ενέργεια 2: <u>Η ισότητα διατηρείται όταν μια ποσότητα αντικατασταθεί με ισοδύναμή της (η περίπτωση της αντικατάστασης)</u>

Αποτελεί κλασικό βήμα στην πλειονότητα των εξισώσεων που λύνονται αλγεβρικά η αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια ισοδύναμή της. Οι φοιτητές βασισμένοι στις διάφορες σχέσεις που αντλούσαν από τα mobile που τους δίνονταν, αντικαθιστούσαν μια συγκεκριμένη ποσότητα με μια ισοδύναμή της, προκειμένου να επιλύσουν ευκολότερα την δραστηριότητα (Εικόνα 57, Σελίδα 91).

Μαθηματική Ενέργεια 3: <u>Μέθοδος της αντικατάστασης</u>

Σε ορισμένες επιλύσεις φοιτητών παρατηρήθηκε ότι αντικαθιστούσαν μια–μια τις μεταβλητές για να καταλήξουν τελικά σε μια εξίσωση με έναν άγνωστο και ύστερα με βάση την τιμή αυτής της μεταβλητής προσδιόριζαν τις τιμές όλων των άλλων. Αυτή η ενέργεια των λυτών οδηγεί σε έναν από τους προτεινόμενους τρόπους επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων, που είναι γνωστός ως μέθοδος της αντικατάστασης. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε την τιμή σε μια επόμενη εξίσωση, ώστε σταδιακά να μειωθεί ο αριθμός των αγνώστων (Εικόνα 41, Σελίδα 74).

Μαθηματική Ενέργεια 4: <u>Στα δύο μέλη μιας ισότητας μπορώ να προσθέσω τον ίδιο αριθμό</u>

Άλλη μια ενέργεια που εμφανίζεται στις επιλύσεις των φοιτητών, αφορά την προσθήκη της ίδιας ποσότητας και στις δύο πλευρές του mobile, με σκοπό να βρουν τις τιμές των μεταβλητών. Το γεγονός ότι εφαρμόζουν την ενέργεια αυτή με τη σιγουριά ότι το σύστημα θα συνεχίσει να ισορροπεί, αποκαλύπτει άτυπα τη γνώση που έχουν, ότι μπορούμε να προσθέσουμε την ίδια ποσότητα και στα δύο μέλη μιας ισότητας, διατηρώντας την ισότητα (Εικόνα 44, Σελίδα 77).

Μαθηματική Ενέργεια 5: <u>Μπορώ να πολλαπλασιάσω και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό</u>

Με παρόμοιο σκεπτικό στο μυαλό τους ορισμένοι λύτες αποφασίζουν προκειμένου να προχωρήσουν την επίλυση της δραστηριότητας, να πολλαπλασιάσουν και τις δύο πλευρές του mobile με τον ίδιο αριθμό. Αυτό τους οδηγεί σε μια νέα ισότητα, ισοδύναμη με την αρχική και η πράξη τους αυτή αντανακλά τη φορμαλιστική γνώση, ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, διατηρώντας την αναλλοίωτη.

Μαθηματική Ενέργεια 6: <u>Μπορώ να διαιρέσω και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό</u>

Λιγότεροι ήταν εκείνοι που επέλεξαν να διαιρέσουν και τις δύο πλευρές του mobile με τον ίδιο αριθμό, με σκοπό να καταλήξουν σε μια αρχική ισοδυναμία που δίνεται από το mobile. Ωστόσο, κι αυτοί θεωρούν δεδομένο ότι η ισότητα που προκύπτει μετά τη διαίρεση των δύο πλευρών με τον ίδιο αριθμό, είναι ισοδύναμη της αρχικής. Η ενέργεια αυτή των φοιτητών παραπέμπει άμεσα στην τυπική γνώση για την επίλυση εξισώσεων, κατά την οποία γνωρίζουμε ότι μια ισότητα θα διατηρηθεί, εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με τον ίδιο αριθμό.

<u>Μαθηματική Ενέργεια 7: Διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου</u>

Αρκετές φορές οι φοιτητές στις επιλύσεις τους κατέληγαν σε σχέσεις όπου δύο ή περισσότερα ίδια εικονίδια (η τιμή των οποίων είναι το ζητούμενο της δραστηριότητας), είχαν ίσο βάρος με κάποιο άλλο εικονίδιο, το βάρος του οποίου γνώριζαν (π.χ 2 εξάγωνα=1 σφαίρα). Σε αυτή την περίπτωση, το επόμενο βήμα για να βρουν την τιμή του ενός εικονιδίου, διαιρούσαν και τα δύο μέλη της ισότητας με τον συντελεστή της άγνωστης ποσότητας. Έτσι, αποκαλύπτεται άτυπα η γνώση των φοιτητών σχετικά με αυτό που στην φορμαλιστική επίλυση μιας εξίσωσης αποκαλούμε διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου (Εικόνα 43, Σελίδα 76).

Μαθηματική Ενέργεια 8: <u>Χωρίζω τις γνωστές ποσότητες από τις άγνωστες</u>

Ακόμα μια μαθηματική ενέργεια που παρατηρήθηκε στις επιλύσεις των φοιτητών είναι ότι χώριζαν τα εικονίδια που γνώριζαν τις τιμές τους, από τα εικονίδια που δεν τις γνώριζαν προκειμένου να μπορέσουν να βρουν τις άγνωστες τιμές. Αυτό το βήμα στην επίλυσή τους παραπέμπει φανερά στην άτυπη γνώση, πως μπορούμε να χωρίσουμε τις γνωστές από τις άγνωστες ποσότητες σε μια ισότητα, ώστε να καταλήξουμε στην τιμή των αγνώστων (Εικόνα 44, Σελίδα 77).

Μαθηματική Ενέργεια 9: <u>Μπορώ να προσθέσω κατά μέλη δύο εξισώσεις</u>

Οι λύτες σε ορισμένες περιπτώσεις μεταφράζοντας σωστά την ισορροπία του συστήματος κατέληγαν σε δύο σχέσεις ισοδυναμίας, τις οποίες αποφάσιζαν να προσθέσουν κατά μέλη και να αξιοποιήσουν ύστερα την σχέση που προέκυπτε. Οι περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκε αυτή η επίλυση ήταν λίγες, ωστόσο αντανακλούν την άτυπη γνώση των φοιτητών ότι υπάρχει η δυνατότητα να προσθέσουμε κατά μέλη δύο εξισώσεις (Εικόνα 58, Σελίδα 92).

Μαθηματική Ενέργεια 10: <u>Μπορώ να αφαιρέσω κατά μέλη δύο εξισώσεις</u>

Στο ίδιο πνεύμα, εντοπίστηκαν επιλύσεις κατά τις οποίες οι φοιτητές αναγνώρισαν τις σχέσεις ισοδυναμίας που αναπαρίστανται στο σύστημα του mobile και αποφάσισαν να αφαιρέσουν την μια από την άλλη, προκειμένου να προχωρήσουν την επίλυσή τους. Έτσι, το βήμα αυτό αποδεικνύει την γνώση τους σχετικά με τη δυνατότητα να αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο εξισώσεις (Εικόνες 59 και 60, Σελίδα 93).

Όλες αυτές οι ενέργειες που αναφέρθηκαν παραπάνω, χρησιμοποιήθηκαν κατά βάση από τους φοιτητές χωρίς να τους έχει ζητηθεί, έχοντας ως στόχο να διατηρήσουν την ισορροπία του mobile ή την ισότητα που υπάρχει σε αυτό αναλλοίωτη. Αυτό το γεγονός μας δείχνει ότι υπάρχει μια διαισθητική χρήση συγκεκριμένων ιδιοτήτων των πράξεων.

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν τριτοετείς φοιτητές, οι οποίοι δεν είχαν δει ξανά τέτοιου είδους παζλ, είχαν όμως διδαχθεί την έννοια της μεταβλητής και τον τρόπο επίλυσης μιας εξίσωσης ήδη από τα σχολικά τους χρόνια. Ωστόσο, είναι εντυπωσιακό ότι δεν κατέφυγαν στην αλγεβρική επίλυση (κάτι που θα ήταν αναμενόμενο), αλλά στράφηκαν σε προσεγγίσεις με τις οποίες φαίνεται να αισθάνονταν πιο ασφαλείς και οι οποίες ευνοούνταν από το συγκεκριμένο περιβάλλον.

Καταλήγοντας, τα δεδομένα που συλλέχθηκαν για την έρευνα αυτή, δίνουν ενδείξεις ότι πράγματι το συγκεκριμένο περιβάλλον των γρίφων, έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας ως μια σχέση ισοδυναμίας. Αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι έδωσε την δυνατότητα στους συμμετέχοντες, που δεν φάνηκαν τόσο εξοικειωμένοι με την αλγεβρική επίλυση, να μεταφράσουν την εικόνα σε ισοδύναμες σχέσεις και να τις εκφράσουν με διαφορετικούς τρόπους πέρα από τον αλγεβρικό. Επιπλέον, στην προσπάθεια τους να εκφράσουν αυτές τις σχέσεις και να εργαστούν με αυτές, προκειμένου να επιλύσουν τις δραστηριότητες, χρησιμοποίησαν, χωρίς να το καταλαβαίνουν, τις τυπικές μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται για την επίλυση μιας εξίσωσης αλγεβρικά. Τέλος, οι δραστηριότητες με το συγκεκριμένο περιβάλλον, όπως αυτές που δόθηκαν στην παρούσα έρευνα, φαίνεται ότι δίνουν την ευκαιρία στους συμμετέχοντες να εργαστούν με τις μαθηματικές ενέργειες που βοηθούν να διατηρηθεί μια σχέση ισοδυναμίας, έτσι ώστε να μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχέσεις ισοδυναμίας που εκφράζει το σύμβολο της ισότητας.

<u>Με ποιον τρόπο το περιβάλλον ενός ψηφιακού μοντέλου μιας κλασικής ζυγαριάς (που ενσωματώνει λάθος με πρόθεση), προωθεί τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος, σχετικά με την έννοια της ισότητας;</u>

Όπως έχει ήδη αναλυθεί στο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής επισκόπησης, η μελέτη της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος γίνεται με βάση το θεωρητικό πλαίσιο των ‘5Es’ από τους Hoyles & Noss (2016, 2017). Αφορά στην ουσία τις εξής πέντε ιδέες – κλειδιά: 1) Explore (Εξερεύνηση), 2) Explain (Επεξήγηση), 3) Envisage (Εκ των προτέρων εκτίμηση), 4) Exchange (Ανταλλαγή) και 5) bridge (Διασύνδεση).

Οι φοιτητές που συμμετείχαν σε αυτή την φάση της έρευνας, είχαν ασχοληθεί προηγουμένως με τα mobile puzzles, οπότε ήταν πιθανό να είχαν αναπτύξει μια καλύτερη κατανόηση για την έννοια του συμβόλου της ισότητας ως σχέση ισοδυναμίας. Δόθηκε λοιπόν, μετά από αυτή την εμπειρία, το συγκεκριμένο περιβάλλον ενός ψηφιακού μοντέλου κλασικής ζυγαριάς, το οποίο σχεδιαστικά προκαλεί αυτήν την κατανόηση τους, καθώς ενσωματώνει λάθος με πρόθεση. Η ιδέα κλειδί στη χρήση των mobile ήταν ότι σε κατάσταση ισορροπίας η δοκός είναι οριζόντια, ενδεικτικό του ότι συνολικά ότι υπάρχει αριστερά και δεξιά έχει ίσο βάρος. Αυτό φάνηκε να καθοδηγεί την προσπάθεια των λυτών στη δραστηριότητα με το ψηφιακό μοντέλο της ζυγαριάς, διότι η πρώτης τους ενέργεια ήταν να τοποθετήσουν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες κάθε χρώματος στις δυο πλευρές. Μερικοί σκέφτηκαν μάλιστα να μηδενίσουν τελείως το πλήθος από μπίλιες, διότι είναι μια κατάσταση στην οποία η ζυγαριά πρέπει σίγουρα να ισορροπεί, ενώ επίσης θα αποκλείσουν οποιονδήποτε άλλο παράγοντα μπορεί να επηρεάσει την ισορροπία της ζυγαριάς, όπως για παράδειγμα να έχουν διαφορετικό βάρος οι μπίλιες ίδιου χρώματος σε κάθε πλευρά. Ο προβληματικός σχεδιασμός του μοντέλου, με το να αμφισβητεί την βασική αυτή ιδέα, έγινε αφορμή να αναδειχθούν μια σειρά από επεισόδια που αντανακλούν τις τέσσερις από τις πέντε όψεις του θεωρητικού μοντέλου που σχετίζεται με τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος.

Η πρώτη συνιστώσα είναι η **Εξερεύνηση** (Exploration) που αναφέρεται στη δυνατότητα που δίνει το περιβάλλον στα μέλη της ομάδας για συστηματική διερεύνηση. Για παράδειγμα, η ιδέα της εύρεσης ενός γενικού κανόνα που να σχετίζεται κάθε φορά με τον αριθμό από μπίλιες στον κάθε δίσκο είναι μια τέτοια περίπτωση (Σελίδα 128, Γραμμές 295-312). Ακόμη ένα παράδειγμα αυτής της συνιστώσας αποτελεί η προσπάθεια να ανακαλύψουν, εάν η ζυγαριά λειτουργεί σωστά ή όχι, κατά την οποία οι περισσότερες ομάδες δοκιμάζουν να τοποθετήσουν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές της ζυγαριάς (Σελίδα 133, Γραμμές 19-21). Με το ίδιο σκεπτικό αποτελούν παραδείγματα και οι προσπάθειες των ομάδων να βρουν το σημείο ισορροπίας της ζυγαριάς (με ή χωρίς τον υπολογισμό της απόκλισης, αλλά και οι περιπτώσεις κατά τις οποίες διερευνώνται διάφοροι συνδυασμοί από μπίλιες με σκοπό να επαληθευτεί η επίλυση της ομάδας. Τέλος, τα πρωτόκολλα ανέδειξαν και το ενδεχόμενο η διαδικασία εξερεύνησης να οδηγήσει στον εντοπισμό πιθανών λαθών στη διαδικασία επίλυσης. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί ο εντοπισμός ενός αριθμητικού λάθους από ένα μέλος της ομάδας στους υπολογισμούς των υπολοίπων και στη συνέχεια η επισήμανση του σωστού αποτελέσματος (Σελίδα 135, Γραμμές 210-218).

Η δεύτερη συνιστώσα είναι η **Επεξήγηση** (Explanation), η οποία σχετίζεται με το να έχουν οι φοιτητές ευκαιρίες να εξηγούν τις ιδέες τους, αλλά και να συζητούν και να απαντούν σε ερωτήσεις των άλλων μελών της ομάδας. Για παράδειγμα, όταν ένα από τα μέλη της ομάδας εξηγεί στα υπόλοιπα με συγκεκριμένα μετρήσιμα μεγέθη, την βασική ιδέα που διαπραγματεύονται καθ’ όλη την διάρκεια της επίλυσης, διότι μερικοί αδυνατούν να την κατανοήσουν, συναντάμε μια τέτοια περίπτωση. Σύμφωνα με την ιδέα αυτή, παρ’ όλο που δεν γνωρίζουν το βάρος της κάθε μπλε μπίλιας, εφόσον τοποθετούν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές της ζυγαριάς και αυτή δεν ισορροπεί, σημαίνει ότι είναι χαλασμένη (Σελίδα 139, Γραμμές 370-374). Ακόμη, όταν δίνεται μια εξήγηση μεταξύ των μελών της ομάδας σχετικά με την απόκλιση που παρουσιάζει η ζυγαριά, την οποία ερμηνεύουν με όρους πλήθους γνωστού αριθμητικού βάρους, ώστε να γίνει ο τελικός υπολογισμός της τιμής της (Σελίδα 125, Γραμμές 97-101), πρόκειται επίσης για περίπτωση που ανήκει σε αυτή την συνιστώσα.

Όσον αφορά το κομμάτι της **Ανταλλαγής** (Exchange) δίνεται η δυνατότητα στους λύτες να μοιραστούν τις ιδέες τους και να τις αναπτύξουν μέσα από την αλληλεπίδραση με τους άλλους. Για παράδειγμα, αφού η ομάδα έχει φέρει μια φορά τη ζυγαριά σε ισορροπία, η πρόταση από ένα μέλος να δοκιμάσουν κι άλλους συνδυασμούς από μπίλιες, ώστε να φέρουν ξανά τη ζυγαριά σε ισορροπία και η συζήτηση της ομάδας πάνω στην ιδέα αυτή, αποτελεί μια τέτοια περίπτωση (Σελίδα 122, Γραμμές 67-78).

Τέλος, σχετικά με την τέταρτη συνιστώσα, την **Εκ των προτέρων Εκτίμηση** (Envisage), οι συμμετέχοντες προβλέπουν τα αποτελέσματα των δικών τους ιδεών αλλά και των υπολοίπων, πριν τις δοκιμάσουν στο περιβάλλον του υπολογιστή. Το γεγονός που αναφέρθηκε νωρίτερα, κατά το οποίο οι ομάδες προκειμένου να ελέγξουν εάν η ζυγαριά λειτουργεί σωστά ή όχι, τοποθετούσαν τον ίδιο αριθμό από μπίλιες και στις δύο πλευρές της ζυγαριάς, με το σκεπτικό ότι έτσι οφείλει να ισορροπεί, αποτελεί παράδειγμα της συνιστώσας αυτής (Σελίδα 126, Γραμμές 20-22).

Συμπεραίνεται λοιπόν, από τα παραπάνω παραδείγματα ότι μια δραστηριότητα τέτοιου τύπου σε αυτό το συγκεκριμένο περιβάλλον, έχει τη δυνατότητα να συμβάλλει στην προώθηση της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος για την έννοια του συμβόλου της ισότητας ως σχέσης ισοδυναμίας, διότι προκαλεί την συχνή εμφάνιση των τεσσάρων από τις πέντε όψεις του θεωρητικού πλαισίου των ‘5Es’ των Hoyles & Noss (2016, 2017). Η πέμπτη όψη του πλαισίου, η **διασύνδεση** (bridge), δεν εμφανίστηκε καθόλου κατά τις προσπάθειες επίλυσης των ομάδων, δημιουργώντας έτσι την υπόθεση, πως το περιβάλλον αυτό δεν δίνει την δυνατότητα ανάπτυξη της. Φυσικά, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι ομάδες για να επιλύσουν την δραστηριότητα έδειξαν να στηρίζονται στην εμπειρία τους με τα mobile puzzles και τις προηγούμενες γνώσεις που διέθεταν, ωστόσο δεν εμφανίστηκε κάποια περίπτωση διασύνδεσης με αντικείμενο κάποιου διαφορετικού κλάδου.

Σύγκριση των δύο περιβαλλόντων σχετικά με την συμβολή τους πάνω στην έννοια της ισοδυναμίας, που εκφράζει το σύμβολο της ισότητας

Η συνδυαστική χρήση περιβαλλόντων που διαπραγματεύονται την ίδια έννοια αναδεικνύει την βασική ιδέα του ότι «ένα δεν είναι αρκετό» (Papadopoulos & Dagdilelis, 2004). Και τα δύο περιβάλλοντα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την διάρκεια της παρούσας έρευνας μπορούν να αξιοποιηθούν κατά την διδασκαλία της έννοιας της ισοδυναμίας. Ωστόσο, αν και διαπραγματεύονται την ίδια έννοια, αναδεικνύουν διαφορετικά πράγματα σχετικά με αυτήν.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο περιβάλλον, φάνηκε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων και την σύνδεση με την προηγούμενη βιβλιογραφία, ότι έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας ως μια σχέση ισοδυναμίας. Αυτό συμπαιραίνεται καθώς φάνηκε ότι επιτρέπει στους συμμετέχοντες που δεν ήταν εξοικειωμένοι με την αλγεβρική επίλυση, να μπορέσουν να εντοπίσουν τις ισοδύναμες σχέσεις που υπάρχουν στο σύστημα και να τις εκφράσουν στην συνέχεια με διαφορετικούς τρόπους. Κατά την προσπάθειά τους να εκφράσουν όσο καλύτερα γίνεται αυτές τις σχέσεις ισοδυναμίας και να τις χρησιμοποιήσουν για να επιλύσουν τις δραστηριότητες, τους δίνεται επίσης η ευκαιρία να εργαστούν άτυπα με τις μαθηματικές ενέργειες, που απαιτούνται για την αλγεβρική επίλυση μιας εξίσωσης.

Το δεύτερο περιβάλλον, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, φάνηκε ότι μπορεί να συμβάλλει στη δημιουργία μαθηματικού νοήματος σχετικά με την έννοια της ισοδυναμίας. Αναλυτικότερα, οι συμμετέχοντες μπορούν να δοκιμάζουν αυτά που σκέφτονται πάνω στο περιβάλλον, να κάνουν προβλέψεις για την συμπεριφορά της ζυγαριάς και να τις ελέγχουν αμέσως μετά, μεταβάλλοντας τις ανάλογες παραμέτρους. Αυτό αυτόματα σημαίνει ότι ελέγχουν την αντίληψη που οι ίδιοι έχουν σχετικά με το σύμβολο της ισότητας και τη σχέση ισοδυναμίας. Στο περιβάλλον αυτό, έχουν την ευκαιρία να ακούσουν και να αξιολογήσουν το σκεπτικό των υπόλοιπων μελών της ομάδας, καθώς και να εξηγήσουν το δικό τους σε εκείνους. Επιπλέον, δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν την προηγούμενη γνώση που απέκτησαν μέχρι αυτό το σημείο, για να μπορέσουν να κατανοήσουν τον τρόπο λειτουργίας της ζυγαριάς. Στόχος τώρα δεν είναι η διατήρηση της ισορροπίας, όπως συνέβαινε στο περιβάλλον των γρίφων mobile, όπου όλες οι κινήσεις γίνονταν με βάση αυτή την λογική, αλλά ο έλεγχος της συμπεριφοράς του δομήματος στη βάση της κατανόησης του συμβόλου της ισότητας. Μέσα από την ενασχόλησή τους με αυτή την δραστηριότητα, έχουν την ευκαιρία να δουν την ισοδυναμία ως ένα χαρακτηριστικό που υπάρχει πίσω από την σωστή λειτουργία του μοντέλου της ζυγαριάς και να κατανοήσουν ότι η χρήση ισοδύναμων μετασχηματισμών στα δύο μέλη μιας ισότητας, οφείλει να την διατηρεί.

Συνοψίζοντας, αυτό που φαίνεται από τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας είναι ότι διαφορετικά μοντέλα, διαφορετικές αναπαραστάσεις και διαφορετικά περιβάλλοντα, ευνοούν την ανάπτυξη διαφορετικών όψεων της έννοιας, πάντα όμως σε συνάφεια με αυτήν. Επιπλέον, να διευκρινισθεί ότι στο κομμάτι που αφορά την δημιουργία μαθηματικού νοήματος, δεν είναι απαραίτητο ότι ένα περιβάλλον μπορεί να υποστηρίξει την ανάπτυξη όλων των όψεων του μοντέλου για το μαθηματικό νόημα. Όπως φάνηκε στην παρούσα έρευνα, το κομμάτι της διασύνδεσης, δεν παρουσιάστηκε καθόλου.

6. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αρχικά συνοπτικά τα βασικά αποτελέσματα της παρούσας έρευνας και στη συνέχεια αναλύεται η σημασία της για την κοινότητα των μαθηματικών, τους φοιτητές και τους εκπαιδευτικούς.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν στην έρευνα αυτή από την ενασχόληση των φοιτητών με τα mobile puzzles δίνουν ενδείξεις, υποστηρίζοντας παλαιότερη βιβλιογραφία, για την δυνατότητα συμβολής του περιβάλλοντος των γρίφων mobile στην κατανόηση του συμβόλου της ισότητας ως μιας σχέσης ισοδυναμίας. Αυτό γίνεται φανερό από το ότι οι συμμετέχοντες κατάφεραν να μεταφράσουν το περιβάλλον του mobile και να εντοπίσουν τις ισοδύναμες σχέσεις, ακόμη κι αν μερικοί έδειξαν ότι δεν είχαν το κατάλληλο αλγεβρικό υπόβαθρο και στη συνέχεια να τις εκφράσουν και να τις χρησιμοποιήσουν με διαφορετικούς τρόπους, προκειμένου να επιλύσουν την δραστηριότητα. Επιπλέον, είναι εξίσου σημαντικό ότι χρησιμοποίησαν άτυπα στις επιλύσεις τους, τις τυπικές γνώσεις που απαιτούνται για την αλγεβρική επίλυση εξισώσεων.

Η δεύτερη φάση της έρευνας αναδεικνύει τη δυνατότητα που έχει το ψηφιακό μοντέλο κλασικής ζυγαριάς, που ενσωματώνει λάθος με πρόθεση, να συμβάλλει στη δημιουργία μαθηματικού νοήματος για την έννοια της ισότητας από τους φοιτητές. Οι συμμετέχοντες μπόρεσαν να κατανοήσουν καλύτερα κάποιες πλευρές της έννοιας, μέσα από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον και την ομάδα, έχοντας ως στόχο την επίλυση της δραστηριότητας. Ωστόσο, δεν έκαναν συνδέσεις με άλλα πλαίσια κι αντικείμενα κι αυτό γίνεται φανερό από την απουσία της πέμπτης όψης της δημιουργίας μαθηματικού νοήματος, της διασύνδεσης, όπως αυτή αναφέρεται στο θεωρητικό πλαίσιο των Hoyles & Noss (2016, 2017), που έχει αναλυθεί νωρίτερα. Έτσι, συμπεραίνεται ότι η επιλογή του εργαλείου που θα χρησιμοποιηθεί στην διδασκαλία, δεν είναι μια απλή διαδικασία και πρέπει να γίνεται με γνώμονα το ποια πτυχή της έννοιας επιθυμείται να αναπτυχθεί και να διδαχθεί εκείνη την χρονική στιγμή.

Κατά τη διάρκεια της βιβλιογραφικής αναζήτησης, παρατηρήθηκε ότι ενώ υπάρχει μεγάλος όγκος βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια της ισότητας και το σύμβολο της, υπάρχει έλλειψη ερευνών που να συνδυάζουν την έννοια αυτή με περιβάλλοντα που αξιοποιούν την τεχνολογία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μένει ανεκμετάλλευτος αυτός ο συνδυασμός, παρ' ότι τα τελευταία χρόνια η ανάγκη χρήσης της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι επιτακτική.

Με αυτό το σκεπτικό υλοποιήθηκε η συγκεκριμένη έρευνα, η οποία παρέχει ενδείξεις για τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι φοιτητές σχετικά με την έννοια της ισότητας, αλλά και της δυναμικής των χρησιμοποιούμενων μέσων. Επιπλέον, δίνει πληροφορίες για τα δύο περιβάλλοντα που χρησιμοποιήθηκαν και την συμβολή τους στην κατανόηση της έννοιας από τους φοιτητές. Μέσα από τις δραστηριότητες με τα mobile puzzles οι ερευνητές μπορούν να δουν, αν εντοπίζουν οι φοιτητές τις ισοδύναμες σχέσεις και πως τις αξιοποιούν ύστερα για την εύρεση του ζητούμενου, ενώ μέσα από το ψηφιακό μοντέλο της ζυγαριάς, τους παρέχονται πληροφορίες σχετικές με τον τρόπο σκέψης των φοιτητών για την έννοια της ισότητας και το μαθηματικό νόημα που δημιουργούν γύρω από αυτή. Οι πληροφορίες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες έρευνες, με στόχο τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης με τις άλλες δύο βαθμίδες και την προηγούμενη βιβλιογραφία.

Οι φοιτητές που συμμετείχαν στην ερευνητική αυτή εργασία, ήρθαν σε επαφή με βασικές έννοιες των μαθηματικών, τις οποίες είχαν διδαχθεί παλαιότερα, όπως η έννοια της ισότητας και της μεταβλητής, η αλγεβρική επίλυση και η έννοια της ισοδυναμίας. Ωστόσο, μερικοί από αυτούς, όπως φαίνεται και μέσα από την βιβλιογραφία, δεν φάνηκε να κατέχουν σε άριστο βαθμό τις γνώσεις αυτές, ώστε να μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν. Η συμβολή των περιβαλλόντων που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την έρευνα, φαίνεται από το γεγονός ότι δεν καθιστούσαν την απουσία του αλγεβρικού υπόβαθρου για ορισμένους φοιτητές, ανασταλτικό παράγοντα για την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων, το οποίο αν δινόταν στην παραδοσιακή του μορφή, ίσως να μην μπορούσε να λυθεί ακριβώς λόγω της παρουσίας της συγκεκριμένης γνώσης.

Το περιβάλλον των γρίφων mobile περιόρισε την ανάγκη για αλγοριθμική διαδικασία και τη χρήση φορμαλιστικών βημάτων επίλυσης, καθιστώντας τους φοιτητές ικανούς να λύσουν το σύστημα, καθώς χρησιμοποίησαν διαισθητικά όλα τα βήματα, που στην τυπική άλγεβρα παρουσιάζονται ως τα απαραίτητα συμβατικά μέσα για την επίλυση μιας εξίσωσης. Εν κατακλείδι, οι φοιτητές διαπίστωσαν ότι η χρήση του κατάλληλου, σχετικά με την κάθε έννοια, περιβάλλοντος μπορεί να βοηθήσει να κατανοηθεί καλύτερα η έννοια αυτή, απ’ ότι άμα διδασκόταν χωρίς την χρήση κάποιου περιβάλλοντος.

7. Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

1. Aczel, J. (1998). Learning algebraic strategies using a computerised balance model. In A. Oliver & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 1-16). Stellenbosch: PME.

2. Bajwa, N. P. (2016). *Developing a relational meaning of the equal sign: effects of using a balance analogy in a game-based virtual environment* (Doctoral dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign).

3. Baroody, A. J., & Ginsburg, H. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *Elementary School Journal*, *84*(2), 199-212.

4. Behr, M. J., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*(1), 13-15.

5. Bers, M. U., Flannery, L., Kazakoff, E. R., & Sullivan, A. (2014). Computational thinking and tinkering: Exploration of an early childhood robotics curriculum. *Computers & Education*, *72*, 145-157.

6. Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I., & Noss, R. (2016). Building mathematical knowledge with programming: Insights from the ScratchMaths project. In A. Sipitakiat & N. Tutiyaphunegprasert (Eds.), *Proceedings of constructionism 2016* (pp. 25–32). Bangkok: Suksapattana Foundation.

7. Berger, M. (2006). Making mathematical meaning: from preconcepts to pseudoconcepts to concepts. *Pythagoras*, *2006*(63), 14-21.

8. Capraro, M. M., Ding, M., Matteson, S., Capraro, R. M., & Li, X. (2007). Representational implications for understanding equivalence. *School Science and Mathematics*, *107*(3), 86–88.

9. Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (research report). Madison: University of Wisconsin-Madison, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science

10. Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann

11. Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. (2005). Algebra thinking in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 53–59.

12. Clark-Wilson, A., Noss, R., Hoyles, C., & Benton, L. (2019, February). Key Factors for Successfully Embedding a Programming Approach to the Primary Maths Curriculum at Scale. In *Eleventh Congress of the European Society for*

Research in Mathematics Education (No. 06). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

13. Dagdilelis, V., & Papadopoulos, I. (2004). An open problem in the use of software for educational purposes. In Elspeth McKay (Ed) *Acquiring and Constructing Knowledge Through Human-Computer Interaction Creating New Visions for the Future of Learning, Proceedings of the International Conference on Computers in Education*, (ICCE-2004) pp. 919-924, RMIT University, Melbourne, Australia.

14. Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic.* New York: Van Nostrand.

15. Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equality sign. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 415– 422). Bergen, Norway: Bergen University College.

16. Goldenberg, E. P., Mark, J., Kang, J. M., Fries, M. K., Carter, C. J., & Cordner, T. (2015). *Making sense of algebra: Developing students' mathematical habits of mind.* Portsmouth, NH: Heinemann.

17. Hadjerrouit, S. (2011). Using the interactive learning environment Aplusix for teaching and learning school algebra: A research experiment in a middle school. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, *10*(4), 384-389.

18. Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(1), 15–30.

19. Haylock, D., & Cockburn, A. (2008). *Understanding Mathematics for Young Children.* London: Sage Publications.

20. Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., et al. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

21. Hoyles, C., & Noss, R. (1987b). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *18*(4), 581-595.

22. Hoyles, C., & Noss, R. (2016). Mathematics and digital technology: Challenges and examples from design research. *Paper to TSG 36, 13th International Congress on Mathematical Education*, Hamburg.

23. Johansson, M. (2007) 'Mathematical meaning making and textbook tasks', *For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 45-51.

24. Jones, I. (2006a). The design of equality statements. *Working Papers of the Warwick Suminer Group*, *2*, 63–82.

25. Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 34-39.

26. Kaplan, R. G., Alon, S. (2013). Using technology to teach equivalence. *Teaching Children Mathematics*, *19*(6), 382–389.

27. Kieran, C. (1981). 'Concepts associated with the equality symbol', *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

28. Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

29. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.), (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academies Press

30. Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 514–519.

31. Ko, Y. Y., & Karadag, Z. (2013). Fostering middle school students' relational thinking of the equal sign using GeoGebra. *Mevlana International Journal of Education*, *3*(3), 45–49.

32. Kurz, T. (2013). Using technology to balance algebraic explorations. *Teaching Children Mathematics*, *19*(9), 554-562.

33. Kynigos, C. (2017). Innovations Through Institutionalized Infrastructures: The Case of Dimitris, His Students and Constructionist Mathematics. In *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education* (pp. 197-214). Springer, Cham.

34. Leong, Z. A., & Horn, M. S. (2011). Representing equality: A tangible balance beam for early algebra education. *In Proceedings of IDC 2011* (pp. 173–176). New York: ACM Press.

35. Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, *26*(2), 195 – 217.

36. MacGregor, M., Stacey, K. (1999). A Flying Start to Algebra. *Teaching Children Mathematic*s, *6*(2), 78-86

37. Mann, R. L. (2004). Balancing act: the truth behind the equals sign. *Teaching Children Mathematics, 11*(2), 65–69.

38. Marchini, C. & Papadopoulos, I. (2011). Are useless brackets useful tools for teaching? In B. Ubus (Ed.), *Proc. 35th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME

39. Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Klangenfurt, Germany: Beltz

40. McNeil, N. M. (2005). *When the basics backfire: The changeresistance account of equation-learning difficulties.* University of Wisconsin, Madison

41. McNeill, N. M. (2008). Limitations to teaching children 2 + 2 = 4: Typical arithmetic problems can hinder learning of mathematical equivalence. *Child Development*, *79*(5), 1524-1537.

42. McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005a). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. Journal of *Cognition and Development*, *6*(2), 285–306.

43. McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005b). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, *76*(4), 1–17.

44. McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). Middle school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*, *24*(3), 367–385.

45. Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(2), 203–233.

46. Oksuz, C. (2007). Children's understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *8*, 1-19.

47. Papadopoulos, I. (2018). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior* https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.07.001.

48. Papadopoulos, I., Kindini, T., & Tsakalaki, X. (2016). Using mobile puzzles to develop algebraic thinking. In Csikos, C., et al. (eds.), *Proceedings 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 43−50), Szeged, Hungary: PME

49. Papadopoulos, I., Diamantidis, D.,& Kynigos, C. (2016). Meanings around Angle with Digital Media Designed to Support Creative Mathematical Thinking. In C. Csikos, R. A., & J. Szitanyi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4, (pp. 35–42). Szeged, Hungary: PME.

50. Papadopoulos, I., Diamantidis, D., & Kynigos, C. (2017, February). Meaning-generation through an interplay between problem solving and constructionism in the C-book technology environment. *In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2619-2626). Dublin, Ireland: DCU and ERME

51. apadopoulos, I., & Patsiala, N. (2019). When the “Tug-of-War” Game Facilitates the Development of Algebraic Thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(7), 1401-1421.

52. Papert, S. (2000). What’s the big idea: Towards a pedagogy of idea power. *IBM Systems Journal*, *39*(3.4), 720-729.

53. Perry, M., Church, R. B., & Goldin-Meadow, S. (1988). Transitional knowledge in the acquisition of concepts. *Cognitive Development*, *3*, 359 – 400.

54. Pirie, S., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 159–181.

55. Pitvorec, K. A. (2016). *Mathematics as Meaning-Making Activity: Describing Preservice Teachers’ Discourse during Meaning Making* (Doctoral dissertation, University of Illinois at Chicago).

56. Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *Elementary School Journal*, *112*(4), 627–648.

57. Reys, R. E., Lindquist, M., Lambdin, D., Smith, N., & Suydam, M. (2004). *Helping children learn mathematics: Active learning edition with integrated field activities* (7th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley &. Sons.

58. Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 153-187

59. Selter, C. (1998). Building on children’s mathematics. A teaching experiment in grade three. *Educational Studies in Mathematics, 36*(1), 1–27.

60. Seo, K-H, & Ginsburg, H. P. (2003). "You've got to carefully read the math sentence...": Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills.* Mahwah, NJ: Erlb

61. Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(4), 252–260.

62. Usiskin, Z. (2012). What does it mean to understand some mathematics? *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* Seoul, Korea: ICME.

63. Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentall*y (5th ed.). Boston, MA: Pearson

64. van Oers, B. (1996). Learning mathematics as meaningful activity. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 91-114). Mahwah, NJ: Erlbaum

65. van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1/3), 59-85

66. Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., & Pearn, C. (2015). Misuse of the equals sign: An entrenched practice from early primary years to tertiary mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 29*(2), 31–39.

67. Warren, E. (2001). Algebra understanding: The importance of learning in the early years. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra. *Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 2, pp. 633-640). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

68. Warren, E. (2002). Unknowns, arithmetic to algebra: Two exemplars. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 369-376). Norwich: PME.

69. Warren, E., (2003). Young children's understanding of equals: A longitudinal study. In N. Pateman, G. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 379-387). Hawaii: PME.

70. Warren, E., & Cooper T. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(1), 58-72.

71. Warren, E., & Cooper, T. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 76–95.

Ελληνική βιβλιογραφία

1. Κυνηγός, Χ., & Διαμαντίδης, Δ. (2014). Οι αρχές του σχεδιασμού των μικροπειραμάτων των διαδραστικών βιβλίων και ο ρόλος τους ως εφαλτήριο για τη δημιουργία δομημάτων. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επ.). Πρακτικά 1ου Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (σ. 823-842). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.

Περιεχόμενα Εικόνων