ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική Εκπαίδευση Β' Ηλικιακού Κύκλου (13 – 18 χρονών)

«Όψεις της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία σχετικά με την έννοια του αριθμού. Μια εμπειρική μελέτη με εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΥΓΕΡΗ ΘΕΟΔΩΡΑ (Α.Μ. 936)

Θεσσαλονίκη, 2020

Διπλωματική εργασία

«Όψεις της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία σχετικά με την έννοια του αριθμού.
Μια εμπειρική μελέτη με εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.»

Αυγέρη Θεοδώρα

Επιβλέπουσα: Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Διατμηματικού – Διεπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική των Μαθηματικών", του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολές του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Φύλο Εξέτασης

1. Επόπτης: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός: ....

Ο συγγραφέας .... βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας κα Ξένια Βαμβακούση, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, η οποία αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο, γνώσεις και καθοδήγηση, χωρίς τα οποία δε θα είχε πραγματοποιηθεί η παρούσα εργασία.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαιτέρως την κα Μαρία Καλδρυμίδου, Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και τον κο Κωνσταντίνο Χρήστου, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών, του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, ένα μεγάλο και εγκάρδιο ευχαριστώ στους εκπαιδευτικούς που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα, καθώς και στην οικογένεια μου και στους φίλους μου που με στηρίζουν σε κάθε μου βήμα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια ποιοτική έρευνα με στόχο τη διερεύνηση της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας σχετικά με βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως η πυκνή διάταξη των ρητών, η πυκνότητα των ρητών στους αρρήτους και αντίστροφα, η σχέση της πυκνότητας με τη συνέχεια και η 1-1 αντιστοιχία των αριθμών με τα σημεία της ευθείας. Για τη συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες συνεντεύξεις με 15 εν ενεργεία μαθηματικούς, οι οποίοι απασχολούνται στην ιδιωτική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Οι συνεντεύξεις βασίστηκαν σε επτά διδακτικά σενάρια τα οποία δημιουργήθηκαν για τις ανάγκες της έρευνας, βασισμένα στη βιβλιογραφία. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν α) να αξιολογήσουν τις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε έργα που πραγματεύονται τις παραπάνω έννοιες β) να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης μαθητών που έδωσαν λανθασμένη απάντηση και γ) να δώσουν την απαραίτητη ανατροφοδότηση.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ελλείμματα σε διάφορες κατηγορίες της Γνώσης Περιεχομένου και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου για τα μαθηματικά. Όσον αφορά την Κοινή Γνώση Περιεχομένου, με μία μόνο εξαίρεση, όλοι οι συμμετέχοντες προέβησαν σε λανθασμένες αξιολογήσεις απαντήσεων των υποθετικών μαθητών σχετικά με τους αριθμούς, τα αριθμητικά σύνολα και τις ιδιότητες τους. Επιπλέον, εντοπίστηκαν ελλείμματα όσον αφορά τις μεθόδους τεκμηρίωσης. Συγκεκριμένα, συχνά οι συμμετέχοντες τεκμηρίωναν με πλημμελή επαγωγικό συλλογισμό, αντιμετωπίζοντας ως ασφαλές το γενικό συμπέρασμα στο οποίο κατέληγαν βασιζόμενοι σε ειδικές περιπτώσεις. Δυσκολίες παρατηρήθηκε και στην εξήγηση του τρόπου σκέψης των μαθητών από τους συμμετέχοντες (Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών). Όσον αφορά την Εξειδικευμένη Γνώση Περιεχομένου, εντοπίστηκαν προβλήματα στον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες επέλεξαν και χρησιμοποίησαν παραδειγματικές καταστάσεις κατά την ανατροφοδότηση. Τέλος, ένα ενδιαφέρον εύρημα ήταν ότι, κατά την ανατροφοδότηση, ελάχιστες ήταν οι περιπτώσεις στις οποίες περιεγράφηκε μια ουσιαστική συμμετοχή του μαθητή (Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας).

Λέξεις Κλειδιά: Ρητός αριθμός, αρχή του επομένου, πυκνότητα, ευθεία των πραγματικών, μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία

Abstract

The present paper presents a qualitative study aimed at investigating secondary school teachers' Mathematical Knowledge for Teaching regarding fundamental properties of real numbers such as the dense ordering of rational numbers, the density of the set of rational numbers in the set of irrational numbers and vice versa, and the one-to-one correspondence between the real numbers and the points of the line. Semi-structured, task-based interviews were conducted with 15 mathematics teachers, employed in private Secondary Education. The interviews were based on seven classroom scenarios created for the needs of the study, based on the literature. Participants were asked a) to evaluate the responses of fictional students b) explain students' thinking, and c) provide necessary feedback.
The results showed shortcomings in various categories of Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge for mathematics teaching. As far as Common Content Knowledge is concerned, with one exception, all teachers made erroneous evaluations of students' responses. In addition, their justifications were often based on flawed inductive reasoning (i.e., reaching a conclusion based on specific cases and assuming that the conclusion holds in the general case). They also faced difficulty explaining students' thinking (Knowledge of Content and Students). Problems with choosing and using exemplars when providing feedback were also noted (Specialized Content Knowledge). Finally, an interesting finding was that teachers only rarely refer to any student participation in the process of feedback (Knowledge of Content and Teaching).

Key words: rational number, the concept of the next rational number, density, line of real numbers, mathematical knowledge for teaching

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα βασικότερα μαθήματα της σχολικής εκπαιδευτικής διαδικασίας, όχι μόνο στη χώρα μας, αλλά σε ολόκληρο τον κόσμο. Στη χώρα μας, τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αναλαμβάνουν οι απόφοιτοι των Μαθηματικών Τμημάτων. Ωστόσο, στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών Τμημάτων υπάρχει συνήθως έλλειμμα όσον αφορά την προετοιμασία των φοιτητών για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Shulman (1986), η γνώση που οφείλει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός σχετικά με τη διδασκαλία είναι πολύπλευρη. Προκείμενου να καθορίσει τις πτυχές της γνώσης αυτής που οφείλει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός ώστε να είναι ικανός να προσφέρει αποτελεσματική διδασκαλία κατηγοριοποίησε τη γνώση σε 7 κατηγορίες. Αυτή του η κατηγοριοποίηση αποτέλεσε βάση για πολλούς άλλους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, ώστε να προσδιορίσουν με τη σειρά τους τη γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Καινούργιες κατηγορίες που εισήχθησαν από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως η Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών και κυρίως ο Ορίζοντας της Γνώσης του Περιεχομένου, απασχολούν την ερευνητική κοινότητα που επιχειρεί να τις προσδιορίσει με ένα λειτουργικό τρόπο. Για παράδειγμα, ως Ανώτερη Μαθηματική Γνώση, ορίζεται η γνώση που αποκτά ο μαθηματικός στα πανεπιστημιακά έδρανα, γνώση που είναι δύσκολο όμως να προσδιοριστεί με ακρίβεια λόγω της διαφοροποίησης των προγραμμάτων σπουδών που παρατηρείται ανάμεσα στα μαθηματικά τμήματα της χώρας μας (Ζωιτσάκος, 2019).

Ακόμη και βασικές έννοιες για την επιστήμη των μαθηματικών, όπως η έννοια του ρητού και άρρητου αριθμού, οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί, η πυκνότητα στα σύνολα των ρητών και άρρητων, αλλά και πιο περίπλοκων όπως της πραγματικής ευθείας και του απείρου, δημιουργούν μία πληθώρα προβλημάτων όχι μόνο στους μαθητές, αλλά ακόμη και στους φοιτητές των μαθηματικών τμημάτων (Giannakoulias, Souyoul & Zachariades, 2007; Hartnett & Gelman, 1998; Malara, 2001; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Neumann, 2001; Tirosh, Fischbein, Graeber & Wilson, 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010).

Ένας από τους παράγοντες που προκαλεί παρανοήσεις στους μαθητές, είναι η «προκατάληψη του φυσικού αριθμού». Οι μαθητές όντας εξοικειωμένοι με το σύνολο των φυσικών, τείνουν να μεταφέρουν εσφαλμένα τις ιδιότητες του στο σύνολο των ρητών, δημιουργώντας παρανοήσεις σχετικά με την πυκνότητα (οι μαθητές θεωρούν ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς) (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2010, 2017; Giannakoulias et al., 2015) και με την ύπαρξη του επόμενου αριθμού (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010, 2012; Giannakoulias et al., 2007). Ένας ακόμη παράγοντας που προκαλεί παρανοήσεις είναι η κατανόηση της έννοιας του απείρου από τους μαθητές (Moss, 2000; Smith, Solomon & Carey, 2005) καθώς και η πολλαπλότητα των συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές φαίνεται να αυξάνονται καθώς περνούν στην ενασχόληση με έννοιες όπως η πυκνότητα στο σύνολο των αρρήτων (Marmour, 2019), η έννοια της πραγματικής ευθείας και η αντιστοίχιση των σημείων της με το σύνολο των πραγματικών αριθμών (Vamvakoussi, 2017), καθώς και η έννοια των περιοδικών δεκαδικών αριθμών (Ζωιτσάκος, 2019).

Στην παρούσα έρευνα, με τη διεξαγωγή ημιδομημένων συνεντεύξεων με τη μορφή διδακτικών σεναρίων σε εν ενεργεία καθηγητές των μαθηματικών, έγινε προσπάθεια ανάδειξης της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία απόφοιτων μαθηματικών τμημάτων που εργάζονται ως εκπαιδευτικοί σχετικά με τον αριθμό, τα αριθμητικά συστήματα και την πραγματική ευθεία.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από 5 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκε η έρευνα (γνώση για τη διδασκαλία, γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών, Ανώτερη Μαθηματική Γνώση). Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται διεξοδικά οι έννοιες που απασχόλησαν την έρευνα μας (ρητοί αριθμοί, πυκνή διάταξη, αρχή του επόμενου, πυκνότητα σε διάφορα σύνολα, πραγματική ευθεία, άρρητοι αριθμοί, περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί), καθώς και οι παρανοήσεις που σχετίζονται με αυτές τις έννοιες. Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία της έρευνας ξεκινώντας με το στόχο, τα ερευνητικά ερωτήματα και τους συμμετέχοντες και στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά το εργαλείο της έρευνας. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας και στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε. Στο τέλος, η εργασία συνοδεύεται από το παράρτημα στο οποίο παρουσιάζεται το εργαλείο με τη μορφή που δόθηκε στους συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικούς.

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Γνώσεις των Εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία

1.1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε κάποιες θεωρητικές προσεγγίσεις σχετικά με τις μορφές της γνώσης που οφείλουν να κατέχουν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία γενικά, αλλά και ειδικά για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ο Schulman (1986) ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε την αναγκαιότητα μελέτης των διαφόρων πτυχών της γνώσης που οφείλει να έχει ένας εκπαιδευτικός. Για τον Schulman, δεν αρκεί για έναν εκπαιδευτικό να γνωρίζει απλώς το αντικείμενο που καλείται να διδάξει (γνώση περιεχομένου). Η γνώση του αντικειμένου αποτελεί αναγκαία μεν αλλά όχι ικανή συνθήκη για την αποτελεσματική διδασκαλία. Με τη μελέτη του ανέδειξε διάφορες πτυχές της γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία, με πιο γνωστές τη «γνώση περιεχομένου» και τη «παιδαγωγική γνώση περιεχομένου».

Βασισμένοι στο έργο του Schulman, οι Ball et. al. (2008), ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, έδωσαν τη δική τους προσέγγιση σχετικά με τη γνώση που καλείται να κατέχει ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία των μαθηματικών, εισάγοντας έναν καινούργιο όρο, αυτόν της «μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία». Στη παρούσα έρευνα, υιοθετούμε την κατηγοριοποίηση των Ball et. all. (2008), προκειμένου να μελετήσουμε τη μαθηματική γνώση των καθηγητών μαθηματικών για διάφορα θέματα της μαθηματικής επιστήμης όπως η πυκνότητα στο σύνολο των ρητών και άρρητων αριθμών, η απειρία και ύπαρξη του επόμενου αριθμού, η σχέση πυκνότητας και συνέχειας, καθώς και θεμελιώδες έννοιες για την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

1.1.2 Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία

Αν και τα τελευταία χρόνια, απασχολεί έντονα την εκπαιδευτική κοινότητα η γνώση για τη διδασκαλία που οφείλει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός, στα τέλη του 19ου αιώνα στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (Η.Π.Α.), η γνώση των θεωριών και των μεθόδων διδασκαλίας διαδραμάτιζαν δευτερεύοντα ρόλο. Η γνώση που κρινόταν αναγκαία να κατέχει ένας εκπαιδευτικός δεν ήταν άλλη από την γνώση του γνωστικού αντικειμένου που δίδασκε. (Shulman, 1986).

Προκειμένου να μελετήσουν τις διάφορες πτυχές της γνώσης που οφείλει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός ο Shulman και οι συνεργάτες του υλοποίησαν ένα ερευνητικό πρόγραμμα το οποίο είχε σαν στόχο την ανάδειξη της γνώσης σχετικά με τη διδασκαλία (Shulman, 1986). Στο πρώτο στάδιο αυτού του ερευνητικού προγράμματος, ο Shulman και οι συνεργάτες του προσπάθησαν να εντοπίσουν τις αντιλήψεις των ίδιων των εκπαιδευτικών σχετικά με τα γνωστικά αντικείμενα που διδάσκουν. Η καταγραφή αυτών των αντιλήψεων, σε συνδυασμό με την παρακολούθηση διδασκαλιών ασκούμενων εκπαιδευτικών, οδήγησαν στη διάκριση και κατηγοριοποίηση της γνώσης που καλείται να κατέχει ένας εκπαιδευτικός.

Μία πρώτη διάκριση της γνώσης του περιεχομένου (content knowledge) πραγματοποιήθηκε σε τρεις κατηγορίες (Shulman, 1986):

α) Στη γνώση του γνωστικού αντικειμένου του περιεχομένου (subject matter content knowledge),

β) Στην παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (pedagogical content knowledge) και

γ) Στην γνώση του αναλυτικού προγράμματος (curricular knowledge)

Όταν αναφερόμαστε στη γνώση του γνωστικού αντικειμένου του περιεχομένου, αναφερόμαστε στη γνώση που κατέχει ο εκπαιδευτικός σχετικά με το γνωστικό αντικείμενο που καλείται να διδάξει. Ο εκπαιδευτικός, δεν οφείλει μόνο να έχει κατανοήσει πλήρως τις έννοιες και τις αρχές του γνωστικού αντικειμένου ο ίδιος, αλλά οφείλει να γνωρίζει και τον τρόπο με τον οποίο θα οργανώσει τη γνώση που ο ίδιος κατέχει. Πρέπει επίσης, να είναι σε θέση να ελέγχει την αλήθεια και την εγκυρότητα μιας πρότασης μέσα σε έναν επιστημονικό πεδίο, καθώς και να εξηγεί τους λόγους που θεωρείται έγκυρη, τους λόγους για τους οποίους αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας και μελέτης καθώς και τη συσχέτισή τους με τις προτάσεις της συγκεκριμένης επιστήμης. (Shulman, 1986)

Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αποτελεί μία διάσταση της γνώσης του γνωστικού αντικειμένου για τη διδασκαλία. Περιλαμβάνει διάφορες μορφές αναπαράστασης, επεξηγήσεων και παραδειγμάτων, οι οποίες καθιστούν το γνωστικό αντικείμενο πιο εύκολα κατανοητό από τους μαθητές. Επιπλέον, σε αυτή την κατηγορία, εντάσσεται η γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών και των παρανοήσεων που είναι πιθανό να εμφανιστούν, καθώς και των στρατηγικών με τις οποίες ο εκπαιδευτικός θα κατορθώσει να τις άρει σε περίπτωση εμφάνισής τους. (Shulman, 1986)

Τέλος, η γνώση του αναλυτικού προγράμματος περιλαμβάνει τη γνώση του περιεχομένου του προγράμματος σπουδών, των στόχων καθώς και των εκπαιδευτικών μέσων και υλικών που αφορούν μια συγκεκριμένη διδακτική περιοχή. (Shulman, 1986)

Στη συνέχεια, στην προσπάθεια του να περιγράψει τη γνώση που συγκροτεί την επαγγελματική κατάρτιση του εκπαιδευτικού, ο Schulman (1987), όπως αναφέρει και ο Ζωιτσάκος (2019), επέκτεινε την κατηγοριοποίηση του σε 7 νέες κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές είναι:

- Η Γνώση Περιεχομένου: αφορά το πλήθος των γνώσεων των εκπαιδευτικών, αλλά και την οργάνωσή τους. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να γνωρίζει όχι μόνο τον τρόπο που γίνεται κάτι αλλά και την αιτία που το προκαλεί.
- Γενική Παιδαγωγική Γνώση: αφορά τις στρατηγικές οργάνωσης και διαχείρισης της τάξης.
- Γνώση Αναλυτικού Προγράμματος: αφορά τα υλικά, τα εργαλεία και τα προγράμματα που μπορεί να αξιοποιήσει ο εκπαιδευτικός, προκειμένου να επιτύχει τους επιθυμητούς στόχους.
- Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου: αφορά τις γνώσεις που είναι αναγκαίες για τη διδασκαλία τους αντικειμένου.
- Γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους
- Γνώση του εκπαιδευτικού πλαισίου: περιλαμβάνει τους κανόνες λειτουργίας εντός και εκτός τάξης (κανόνες λειτουργίας των ομάδων εργασίας μέσα σε μία τάξη, κυβερνητικές και οικονομικές αρχές σύμφωνα με τις οποίες λειτουργεί η σχολική μονάδα).
- Γνώση των εκπαιδευτικών περιορισμών, σκοπών, αξιών και του φιλοσοφικού και ιστορικού τους υπόβαθρου.

1.1.3 Γνώση Εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Η δουλειά του Schulman αποτέλεσε βάση για πολλούς από τους ερευνητές στο χώρο της εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένων και ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Ball, 2008; Depaepe, Verschaffel & Kelchtemans, 2013). Κάθε ερευνητής δίνει τη δική του προσέγγιση. Στην παρούσα εργασία, υιοθετείται το πλαίσιο των Ball et al. (2008).

Οι Ball και οι συνεργάτες της, βασιζόμενοι στη μελέτη του Schulman, αναγνώρισαν τα είδη της γνώσης που είναι απαραίτητα για έναν εκπαιδευτικό και θεώρησαν σκόπιμο τον προσδιορισμό της γνώσης ειδικά για τον τομέα των μαθηματικών. Έτσι, αναπτύσσουν τη δική τους προσέγγιση σχετικά με τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία (mathematical knowledge for teaching). Διαιρούν τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία σε δύο κατηγορίες, *στη γνώση του γνωστικού αντικειμένου (Subject Content Knowledge)* και στη *παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge).* Η γνώση του γνωστικού αντικειμένου, υποδιαιρείται με τη σειρά του στην α) *κοινή γνώση του περιεχομένου (Common Content Knowledge),* στην β) *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου (Specialized Content Knowledge)* και στη γ*) γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου (horizon content knowledge).* Αντίστοιχα, η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου υποδιαιρείται στη α) *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (Knowledge of Content and Students)*, στη β) *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας (Knowledge of Content and Teaching)* και στη γ) *γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών (Knowledge of Content and Curriculum)* (Ball et. al., 2008).

Η κοινή γνώση του περιεχομένου ορίζεται ως «*η μαθηματική γνώση που χρησιμοποιείται και σε τομείς εκτός της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να γνωρίζουν τους όρους και τις έννοιες που διδάσκουν, πρέπει να αναγνωρίζουν πότε οι μαθητές τους δίνουν λανθασμένες απαντήσεις ή τις περιπτώσεις στις οποίες τα εγχειρίδια εμφανίζουν ανακρίβειες. Διευκρινίζεται ότι ο όρος «κοινή» δεν σημαίνει ότι αποτελεί γνώση που κατέχει ο καθένας, αλλά στο γεγονός ότι αυτή η γνώση χρησιμοποιείται και σε διάφορους άλλους τομείς εκτός της διδασκαλίας.».* (Ball et al., 2008:399)

Η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου ορίζεται ως *«η μαθηματική γνώση και δεξιότητα που απαιτείται αποκλειστικά για τη διδασκαλία, δηλαδή δεν χρειάζεται για σκοπούς εκτός απ' αυτή. Περιλαμβάνει ένα είδος αποσυμπιεσμένης γνώσης των μαθηματικών η οποία δεν χρειάζεται σε περιβάλλοντα διαφορετικά από αυτό της διδασκαλίας».* (Ball et al., 2008:400)

Ενδεικτικά κάποιες χαρακτηριστικές δραστηριότητες της διδασκαλίας που σχετίζονται με αυτό το είδος της γνώσης είναι ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται οι μαθηματικές ιδέες, οι απαντήσεις που δίνονται στα "γιατί" των μαθητών, η εύρεση και η επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων και αναπαραστάσεων για συγκεκριμένα ζητήματα κτλ. (Ball et al., 2008)

Η γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου, αφορά «*την επίγνωση για τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά θέματα συνδέονται κατά μήκος του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Κατέχοντας αυτού του είδους τη γνώση οι εκπαιδευτικοί μπορούν να λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με τον τρόπο που θα παρουσιάσουν διάφορες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον, περιλαμβάνει την δυνατότητα εύρεσης συνδέσεων με πιο προχωρημένες μαθηματικές ιδέες*» (Ball et al., 2008:403). Εμβαθύνοντας στην ιδέα αυτή, οι Ball & Bass (2009), προσδιορίζουν τέσσερα συστατικά στοιχεία στη γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου και, συγκεκριμένα: α) την επίγνωση του ευρύτερου μαθηματικού περιβάλλοντος, στο οποίο τοποθετείται ένα δεδομένο μαθηματικό περιεχόμενο σε μια δεδομένη στιγμή, β) (τη γνώση για) μείζονος σημασίας μαθηματικές ιδέες και δομές, γ) (τη γνώση για) σημαντικές μαθηματικές πρακτικές και δ) (την επίγνωση) πυρηνικών μαθηματικών αξιών και ευαισθησιών. Σύμφωνα με τους Ball και Bass, η γνώση του ορίζοντα περιεχομένου επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να κρίνει τι είναι ουσιώδες από μαθηματική άποψη, να αναγνωρίζει τη μαθηματική σημασία σε αυτά που λένε οι μαθητές, να αναδεικνύει τα κεντρικά σημεία σε ένα μαθηματικό ζήτημα, να αναγνωρίζει τις αναδυόμενες ευκαιρίες για μαθηματικά, να κάνει συνδέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές ιδέες και να είναι σε θέση να προβλέπει και να προετοιμάζει τους μαθητές για επερχόμενες μαθηματικές ιδέες, αλλά και για πιθανές δυσκολίες.

Η γνώση του περιεχομένου και των μαθητών είναι η «*γνώση που συνδυάζει τη μαθηματική γνώση και τη γνώση του εκάστοτε μαθητικού δυναμικού. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να αναμένουν τις σκέψεις των μαθητών τους καθώς και τη σύγχυση που είναι πιθανό να προκληθεί. Επιπλέον, πρέπει να είναι σε θέση να επιλέγουν παραδείγματα τα οποία θα θεωρηθούν ενδιαφέροντα και θα αποτελέσουν κίνητρο για τους μαθητές τους. Πρέπει επίσης να αναμένουν τις δυσκολίες που θα προκύψουν κατά τη διαπραγμάτευση των εννοιών, καθώς και να ακούν και να αντιλαμβάνονται τις ημιτελείς σκέψεις των μαθητών. Οι παραπάνω διαδικασίες απαιτούν την εξοικείωση του δασκάλου με τους μαθητές του, με τη μαθηματική σκέψη αλλά και με τις μαθηματικές έννοιες.».* (Ball et al., 2008:401)

Η γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας, είναι *«ο συνδυασμός της γνώσης* *σχετικά με τη διδασκαλία και με τη γνώση των μαθηματικών εννοιών. Πολλά από τα μαθηματικά αντικείμενα που διδάσκονται απαιτούν τη μαθηματική γνώση για το σχεδιασμό της διδασκαλίας τους. Οι εκπαιδευτικοί για παράδειγμα επιλέγουν ποια παραδείγματα θα δώσουν στους μαθητές τους κατά τη εισαγωγή των εννοιών και ποια για τη σε βάθος κατανόησή τους. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να αξιολογούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που εμφανίζονται με τη χρήση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων καθώς και να αναγνωρίζουν τις μεθόδους που πρέπει να ακολουθήσουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Καθεμία από τις διαδικασίες αυτές απαιτούν την αλληλεπίδραση της εξειδικευμένης μαθηματικής γνώσης και την κατανόηση των παιδαγωγικών θεμάτων τα οποία επηρεάζουν την κατανόηση των μαθητών.».* (Ball et al., 2008:401)

Τέλος, η γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών αναφέρεται στη γνώση του αναλυτικού προγράμματος, στους στόχους και τις δραστηριότητες που περιλαμβάνει. Και αυτή η κατηγορία τόσο για τους Ball et al. (2008) όσο και για τον Schulman (1986) δεν είναι ξεκάθαρο αν αποτελεί μέρος της γνώσης του περιεχομένου και της διδασκαλίας, αν διατρέχει τις υπόλοιπες κατηγορίες ή αν αποτελεί αυτούσια κατηγορία της γνώσης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Όπως αναφέρει ο Ζωιτάσκος (2019), η κατηγοριοποίηση της γνώσης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει τα εξής τρία πλεονεκτήματα σύμφωνα με τους Ball et al. (2008). Αποτελεί χρήσιμο εργαλείο στην εξακρίβωση των πτυχών της γνώσης του περιεχομένου που πρέπει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός προκειμένου να επιτύχει καλύτερα αποτελέσματα για τους μαθητές του. Επίσης, η μελέτη των διαφορετικών προσεγγίσεων της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών μπορεί να οδηγήσει αντίστοιχα σε καλύτερα αποτελέσματα για συγκεκριμένες πτυχές της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου που αυτοί κατέχουν. Τέλος, η σαφής κατηγοριοποίηση της γνώσης και του περιεχομένου για τη διδασκαλία παρέχει τη δυνατότητα του καλύτερου σχεδιασμού της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και της επαγγελματικής τους ανάπτυξης.

1.2 Γνώσεις Ανώτερων Μαθηματικών και εκπαίδευση

Στη χώρα μας, προκείμενου κάποιος να είναι σε θέση να διδάξει μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, καλείται να παρακολουθήσει μαθήματα Ανώτερων Μαθηματικών στα μαθηματικά τμήματα των πανεπιστημιακών ιδρυμάτων. Αυτό σημαίνει ότι, κατ' αρχήν, έχει ένα σώμα γνώσεων πολύ ευρύτερο από αυτό των σχολικών μαθηματικών.

Το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης που χρειάζεται να έχει κάποιος, ώστε να μπορεί να διδάξει μαθηματικά είναι ένα ερώτημα που έχει απασχολήσει την ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Παρά το γεγονός ότι φαίνεται να υπάρχει συμφωνία ότι ένα δάσκαλος των μαθηματικών, σε οποιοδήποτε επίπεδο, πρέπει να έχει περισσότερες μαθηματικές γνώσεις από αυτές που καλείται να διδάξει στα παιδιά, το ερώτημα «πόσο περισσότερες;» δεν είναι εύκολο να απαντηθεί (Ball, Hill & Bass, 2005). Το ερώτημα αυτό παραπέμπει στη συζήτηση για τη γνώση μαθηματικών πέραν των σχολικών μαθηματικών και τη σχέση της με τη διδασκαλία.

Ένας όρος που συναντάμε αρκετά συχνά στη βιβλιογραφία και για τον οποίο έχει γίνει αρκετή συζήτηση είναι αυτός της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης (Advanced Mathematical Knowledge) ή, όπως τον αποδίδει ο Ζωιτσάκος (2019), «Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών»). Σύμφωνα με τις Zazkis & Leikin (2010) ως Ανώτερη Μαθηματική Γνώση ορίζεται η γνώση του αντικειμένου που αποκτάει κάποιος κατά τη διάρκεια των σπουδών του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Ένα ζήτημα που προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό είναι ότι δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί το περιεχόμενο της Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης, καθώς εξαρτάται από το πρόγραμμα σπουδών στο τμήμα φοίτησης των εκπαιδευτικών, αλλά και από τις επικρατούσες διδακτικές προσεγγίσεις σε κάθε τμήμα. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ένα συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο μπορεί να ενταχθεί στα σχολικά μαθηματικά σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, ενώ σε κάποια άλλη χρονική περίοδο μπορεί να αποτελέσει γνώση που παρέχεται αποκλειστικά στο πανεπιστήμιο. Παραδείγματος χάρη, στη χώρα μας, οι αλγεβρικές ομάδες και οι διανυσματικοί χώροι πριν κάποια χρόνια αποτελούσαν ύλη των σχολικών μαθηματικών, ενώ τώρα διδάσκονται μόνο στην τριτοβάθμια. Αντίθετα, στοιχεία του Διαφορικού Λογισμού διδάσκονται πλέον και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ένα ουσιώδες ζήτημα είναι ότι η φοίτηση σε ένα πανεπιστημιακό τμήμα δεν εξασφαλίζει απαραίτητα «Ανώτερη Μαθηματική Γνώση» σε έναν απόφοιτο. Πράγματι, μπορεί να σκεφτεί κανείς ότι αν η ενασχόληση με τα ανώτερα μαθηματικά εστιάζει στην απομνημόνευση της θεωρίας και των διαδικασιών επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, το προϊόν αυτής της διαδικασίας δε θα μπορούσε να χαρακτηριστεί «Ανώτερη Μαθηματική Γνώση». Η επισήμανση αυτή οδήγησε τον Ζωιτσάκο (2019) να αντιπροτείνει τον όρο «Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών». Ενδεχομένως, ο όρος «Γνώσεις Ανώτερων Μαθηματικών» θα απέδιδε καλύτερα την ουσία αυτού που προσπαθούν να προσδιορίσουν οι Zazkis & Leikin (2010) και ο Ζωιτσάκος (2019) και αυτόν θα υιοθετήσουμε στη συνέχεια. Ως «Γνώσεις Ανώτερων Μαθηματικών» θεωρούνται οι γνώσεις που έχουν αποκομίσει οι απόφοιτοι πανεπιστημιακών τμημάτων ερχόμενοι σε επαφή με μαθηματικό περιεχόμενο πέραν των σχολικών μαθηματικών, χωρίς δεσμεύσεις ως προς το επίπεδο (πρβλ. το «Ανώτερη Μαθηματική Γνώση») ή την ευρύτητα των γνώσεων αυτών (πρβλ. το «Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών»).

Αν και θεωρείται δεδομένο ότι κάποιος που δεν έχει επαρκείς γνώσεις για τα μαθηματικά, δεν μπορεί να διδάξει αποτελεσματικά τα σχολικά μαθηματικά, η έρευνα δείχνει καθόλου ή πολύ αδύναμες συσχετίσεις της «ποσότητας» των Γνώσεων Ανώτερων Μαθηματικών των εκπαιδευτικών (μετρημένη με το πλήθος των πανεπιστημιακών μαθημάτων μαθηματικών που έχουν παρακολουθήσει), με τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών. Επιπλέον, οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται ιδιαίτερα να προσδιορίσουν συγκεκριμένα παραδείγματα στα οποία οι Γνώσεις Ανώτερων Μαθηματικών κρίνονται απαραίτητες κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας, ακόμα και αν αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα τους (Zazkis & Leikin, 2010). Ενδεχομένως, πρόκειται για μια όψη της «διπλής ασυνέχειας» που επεσήμανε ο Felix Klein (1932, όπως αναφέρεται στο Ζωιτσάκος, 2019) ανάμεσα στην πανεπιστημιακή και τη σχολική μαθηματική εκπαίδευση και, συγκεκριμένα, την αποσύνδεση των γνώσεων που ένας μαθηματικός διδάσκεται στο πανεπιστήμιο, με τις γνώσεις που καλείται να διδάξει.

Από την άλλη μεριά όμως, η σύνδεση μεταξύ των γνώσεων για τα πανεπιστημιακά μαθηματικά και τα σχολικά μαθηματικά, απαιτεί βαθιά κατανόηση και για τα δύο περιεχόμενα. Με άλλα λόγια, δεν είναι η «ποσότητα», αλλά η ποιότητα της γνώσης που έχει κανείς για τα πανεπιστημιακά και τα σχολικά μαθηματικά που μπορεί να επιτρέψει την ανίχνευση και αξιοποίηση των συνδέσεων. Για να μπορέσει κανείς να δει τα σχολικά μαθηματικά από την προοπτική των ανώτερων μαθηματικών (Klein, 1924, όπως αναφέρεται στο Ball & Bass, 2009), φαίνεται να είναι ουσιαστικά τα συστατικά στοιχεία της Γνώσης του Ορίζοντα του Περιεχομένου (Ball & Bass, 2009; Ball et al., 2008)

1.3 Μεθοδολογικές προσεγγίσεις στη Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία

Όπως είδαμε λοιπόν, η διερεύνηση των διαφόρων πτυχών την γνώσης για τη διδασκαλία και ειδικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί έντονα την ερευνητική κοινότητα. Όμως η διερεύνηση αυτή παρουσιάζει πολλές μεθοδολογικές προκλήσεις. Ένα από τα εργαλεία που συχνά χρησιμοποιούνται είναι τα διδακτικά σενάρια, δηλαδή περιπτώσεις που αν και υποθετικές θα μπορούσαν να συμβούν στην πραγματικότητα.

Από πολύ νωρίς έχει διαπιστωθεί ότι οι αυτό-αναφορικές απαντήσεις των εκπαιδευτικών όταν ερωτώνται για τις θεωρητικές αντιλήψεις που οι ίδιοι έχουν για τα μαθηματικά και την παιδαγωγική αποκλίνουν σημαντικά από τις πρακτικές που εφαρμόζουν κατά τη διδασκαλία τους (Thompson, 1992, όπως αναφέρεται στο Ζωιτσάκος, 2019). Από την άλλη μεριά, η συστηματική παρατήρηση της διδασκαλίας ενέχει δυσκολίες και απαιτεί πόρους που την καθιστούν απαγορευτική σε πολλές περιπτώσεις. Μια εναλλακτική, η οποία έχει προταθεί και φαίνεται να είναι βιώσιμη είναι η χρήση διδακτικών σεναρίων (Biza, Nardi & Zachariades, 2007; Nardi, Biza & Zachariades, 2012; Ζωιτσάκος,, 2019). Σε ένα διδακτικό σενάριο, αρχικά πραγματοποιείται μία εικασία, η οποία στη συνέχεια, είτε γίνεται αποδεκτή, είτε τροποποιείται και βελτιώνεται, είτε μπορεί ακόμη και να απορριφθεί (Ζωιτσάκος, 2019).

Τα σενάρια συνήθως ακολουθούν μια προκαθορισμένη μορφή. Στην αρχή του διδακτικού σεναρίου, τίθεται σε μία υποθετική τάξη, κάποιο ερώτημα σχετικά με ένα μαθηματικό ζήτημα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι απαντήσεις κάποιων υποθετικών μαθητών στο ερώτημα που τέθηκε. Οι απαντήσεις των μαθητών είναι συνήθως αμφίσημες, δεν είναι δηλαδή ούτε πλήρως ορθές, ούτε πλήρως λανθασμένες. Οι εκπαιδευτικοί αφού τους δοθεί ο απαιτούμενος χρόνος, προκειμένου να κατανοήσουν και να επεξεργαστούν το διδακτικό σενάριο, καλούνται να αξιολογήσουν αρχικά τις απαντήσεις των μαθητών. Σε επόμενο στάδιο καλούνται να εξηγήσουν τον πιθανό τρόπο σκέψης των υποτιθέμενων μαθητών και να αναγνωρίσουν τις παρανοήσεις τις οποίες τις περισσότερες φορές παρουσιάζουν οι απαντήσεις τους. Τέλος καλούνται να δώσουν την κατάλληλη ανατροφοδότηση προκειμένου να γίνει αντιληπτή η μαθηματική έννοια που πραγματεύεται το κάθε σενάριο και να άρουν τις παρανοήσεις των μαθητών.

Γενικά, σύμφωνα με τους Biza et. al. (2007) και όπως αναφέρει και ο Ζωιτσάκος (2019) η χρήση των διδακτικών σεναρίων, μπορεί να υποστηρίξει διάφορους στόχους, όπως:

1. «*Διερεύνηση της γνώσης του περιεχομένου των εκπαιδευτικών (teachers' subject-matter knowledge*)». Αφορά τη βαθιά κατανόηση δύσκολων μαθηματικών εννοιών οι οποίες χρήζουν ιδιαίτερη προετοιμασία από τους εκπαιδευτικούς προκειμένου να γίνει η σωστή παρουσίαση τους στην τάξη.

2. «*Διερεύνηση του ενδιαφέροντος των εκπαιδευτικών για συγκεκριμένους τύπους παιδαγωγικής*». Με τη χρήση κατάλληλων διδακτικών σεναρίων, μπορούμε να διερευνήσουμε τις προτιμήσεις και τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη χρήση διδακτικών μεθόδων, όπως για παράδειγμα τη συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

3. «*Διερεύνηση της βαρύτητας που δείχνουν οι εκπαιδευτικοί σε ορισμένους τύπους διδακτικής πρακτικής*». Ανάλογα με την ανατροφοδότηση που επιλέγει να δώσει ένας εκπαιδευτικός σε ένα διδακτικό σενάριο, μπορούν να βγουν συμπεράσματα για τον τρόπο με τον οποίο επιλέγει, τόσο να εξηγήσει τις μαθηματικές έννοιες στους μαθητές του, όσο και να αντιμετωπίσει τις παρανοήσεις τους. Για παράδειγμα η χρήση ή μη παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, η χρήση εποπτικών μέσων κτλ.

Υιοθετώντας αυτό το πλαίσιο στην παρούσα έρευνα αποφασίστηκε το ερευνητικό εργαλείο να έχει τη μορφή διδακτικών σεναρίων. Με τη κατασκευή και χρήση των διδακτικών σεναρίων θεωρήσαμε ότι μπορούμε να έχουμε πιο αυθεντική πρόσβαση σε διάφορες πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία και στον τρόπο διαχείρισης ενός μαθηματικού ζητήματος των συμμετεχόντων στην έρευνα καθηγητών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται και συζητιούνται βασικά στοιχεία για το μαθηματικό περιεχόμενο και την κατανόησή του, από μαθητές και εκπαιδευτικούς, που χρησιμοποιήθηκε στα διδακτικά σενάρια της παρούσας έρευνας.

Κεφάλαιο 2ο

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε εκτενής αναφορά στις πτυχές της γνώσης που οφείλει να έχει ο εκπαιδευτικός. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εστιάσουμε στα μαθηματικά θέματα που αποτέλεσαν τη βάση των διδακτικών μας σεναρίων. Πιο συγκεκριμένα, θα αναλύσουμε την έννοια του ρητού αριθμού και τις δυσκολίες που συναντούν τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί κατά την ενασχόλησή τους με αυτό το σύνολο. Θα ασχοληθούμε επιπλέον με την ευθεία των πραγματικών αριθμών, αλλά και το σύνολο των άρρητων αριθμών.

2.1 Οι ρητοί αριθμοί και η πυκνή διάταξή τους

2.1.1. Η έννοια του ρητού αριθμού

Η έννοια του ρητού αριθμού είναι μία από τις πιο πολύπλοκες αλλά και πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες που τα παιδιά συναντούν από την πρωτοβάθμια κιόλας εκπαίδευση (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών, ο ρητός αριθμός ορίζεται ως ένας αριθμός που έχει τη μορφή α/β ή μπορεί να εκφραστεί με αυτήν την μορφή (όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$). Κατά συνέπεια, όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή α/β (ακέραιοι, πεπερασμένοι δεκαδικοί, περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί) θεωρούνται ρητοί αριθμοί. Ο σχολικός ορισμός αυτός αφήνει το περιθώριο ο ίδιος ρητός αριθμός να έχει πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι οι αριθμοί 0,5, 500/1.000, 1/2, 4/8 είναι όλοι ρητοί αριθμοί. Ωστόσο, εξετάζοντας κανείς προσεχτικά τους παραπάνω δοθέντες αριθμούς, αντιλαμβάνεται ότι πρόκειται για διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός και μόνο ρητού αριθμού.

Στα τυπικά μαθηματικά, ο ρητός αριθμός ορίζεται ως το σύνολο πηλίκο του ZXZ* με τη σχέση ισοδυναμίας $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Ο ορισμός αυτός για τους ρητούς υπερβαίνει το πρόβλημα των πολλαπλών αναπαραστάσεων και επιτρέπει τη θεώρησή τους ως μοναδικά μαθηματικά αντικείμενα, αμετάβλητα και ανεξάρτητα από τις αναπαραστάσεις με τις οποίες εμφανίζονται, που αποκτούν νόημα στο πλαίσιο ενός αριθμητικού συστήματος (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Αυτή η θεώρηση δεν είναι, όμως, εξαρχής διαθέσιμη στους μαθητές. Οι μαθητές, στο πλαίσιο του σχολείου και πιο συγκεκριμένα από τις πρώτες κιόλας τάξεις του δημοτικού, συναντούν τους ρητούς αριθμούς είτε με τη μορφή κλάσματος είτε με τη μορφή δεκαδικού αριθμού. Οι «ρητοί αριθμοί» παρότι αποκαλούνται επίσης «αριθμοί», διαφοροποιούνται από τους μαθητές σε σχέση με τους φυσικούς, καθώς οι τελευταίοι είναι συνδεδεμένοι με την απόλυτη ποσότητα. Κι αυτό, παρά το γεγονός ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι υποσύνολο των ρητών.

Δύο από τις μεγαλύτερες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές με τους ρητούς αριθμούς πηγάζουν από τις πολλαπλές συμβολικές τους αναπαραστάσεις, καθώς και από τις διαφορές τους σε σχέση με τους οικείους στους μαθητές φυσικούς αριθμούς (προκατάληψη φυσικού αριθμού) (Markowits & Sowder, 1991; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).Και οι δύο αυτές δυσκολίες επηρεάζουν την κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών.

2.1.2.Απειρία ενδιαμέσων – Ύπαρξη επόμενου αριθμού

Μία από τις βασικές ιδιότητες του συνόλου των ρητών αριθμών είναι αυτή της πυκνής διάταξης. Ένα σύνολο θεωρείται πυκνά διατεταγμένο, όταν ανάμεσα από δύο διαφορετικά στοιχεία α, β του συνόλου υπάρχει πάντα ένα τρίτο στοιχείο γ τέτοιο ώστε $α < β < γ$. Η ιδιότητα της πυκνής διάταξης που συναντάμε στο σύνολο των ρητών αριθμών, μπορεί να περιγραφεί με μια πληθώρα διαφορετικών εκφράσεων, οι οποίες ωστόσο είναι μαθηματικά ισοδύναμες (Vamvakoussi, 2017):

- Μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών ρητών αριθμών, υπάρχει πάντα ένας άλλος ρητός. (απειρία των ενδιάμεσων)
- Κανένας ρητός αριθμός δεν έχει μοναδικό επόμενο αριθμό. Η ύπαρξη μοναδικού επόμενου αριθμού, αφορά μόνο το σύνολο των φυσικών αριθμών (μη ύπαρξη επόμενου).
- Οι ρητοί αριθμοί είναι άπειρα διαιρέσιμοι (άπειρη διαιρεσιμότητα).

Ήδη από την πρώτη βαθμίδα της εκπαίδευσης, οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους εργαλεία που, εν δυνάμει, μπορούν να οδηγήσουν στην ιδιότητα της πυκνότητας. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να βρει ενδιάμεσους αριθμούς σε ένα διάστημα μόνο με το να αυξήσει τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων ενός δεκαδικού ή με την μετατροπή ενός κλάσματος σε μία ισοδύναμη κλασματική μορφή. Ωστόσο, η έννοια της πυκνότητας ενός συνόλου φαίνεται να δυσκολεύει όχι μόνο τους μαθητές όλων των βαθμίδων, αλλά και φοιτητές των μαθηματικών τμημάτων, ακόμη και τους εκπαιδευτικούς. (Giannakoulias et. al., 2007; Hartnett & Gelman, 1998; Malara, 2001; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Neumann, 2001; Tirosh, et al., 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007, 2010).

Όσον αφορά την απειρία των ενδιάμεσων, τα ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι οι μαθητές συχνά υποστηρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς συγκεκριμένης μορφής, υπάρχει είτε πεπερασμένο, είτε μηδενικό πλήθος ρητών αριθμών, όπως συμβαίνει στο σύνολο των φυσικών. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Vamvakoussi & Vosniadou (2004), ένας μαθητής Α΄ Γυμνασίου υποστηρίζει ότι ανάμεσα στους αριθμούς 0,05 και 0,06 δεν υπάρχει κάποιος αριθμός, ενώ ανάμεσα στους αριθμούς 3/8 και 5/8 υπάρχει ένας αριθμός ο 4/8. Αντίστοιχα, σε έρευνα των Giannakoulias et al. (2007) που διεξήχθη σε πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικού τμήματος, το 87% των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στην περίπτωση του 1/3 και του 2/3, ενώ ένα μικρότερο ποσοστό της τάξης του 71%, απάντησε σωστά στην περίπτωση του 0,1 και 0,001.

Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2010) αλλά και ο Neuman (2001), βρήκαν ότι οι μαθητές διαμορφώνουν την άποψη τους για το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα, ανάλογα με τη μορφή των άκρων του διαστήματος. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Vamvakoussi & Vosniadou (2004), ένας άλλος μαθητής δηλώνει ότι ανάμεσα στο 0,001 και στον 0,01 υπάρχουν 9 αριθμοί, ενώ ανάμεσα στο 3/5 και στο 4/5 υπάρχουν άπειροι. Εξηγεί μάλιστα ότι ενώ ανάμεσα στους 0,001 και 0,01 υπάρχουν 9 αριθμοί, αν μετατρέψουμε αυτούς τους αριθμούς σε κλάσματα, θα υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσά τους. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι θεωρεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ως διαφορετικούς αριθμούς και, μάλιστα, με διαφορετική συμπεριφορά ως προς τη διάταξη (πυκνή/ διακριτή). Στο σύνολο των δεκαδικών αριθμών, μεταφέρει εσφαλμένα την έννοια της διακριτότητας από τους φυσικούς, ενώ αναγνωρίζει την πυκνότητα ως ιδιότητα του συνόλου των κλασμάτων.

Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι, ακόμη και οι μαθητές οι οποίοι όταν ερωτώνται για το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα και απαντούν σωστά άπειροι, δεν σημαίνει ότι αντιλαμβάνονται την έννοια του απείρου (Smith et al., 2005). Πράγματι, πολλοί μαθητές μπορεί να εννοούν ένα πολύ μεγάλο πλήθος αριθμών (π.χ. «ένα δισεκατομμύριο», «όσο οι κόκκοι της άμμου στην έρημο») που, όμως, παραμένει πεπερασμένο (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012; Φωκάς, 2019).

Η δεύτερη πτυχή της πυκνής διάταξης, η μη ύπαρξη του επόμενου στους ρητούς αριθμούς, φαίνεται να είναι ιδιαίτερα απαιτητική, καθώς παραβιάζει μια θεμελιώδη αρχή που αφορά το σύνολο των φυσικών αριθμών. Η αρχή αυτή, συχνά αναφέρεται ως η «αρχή του επομένου» (Cheung, Rubenson & Barner, 2017). Σαν ενήλικες, αντιλαμβανόμαστε την απειρία του συνόλου των φυσικών αριθμών, καθώς και ότι από έναν οποιονδήποτε αριθμό μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν μεγαλύτερο απλά προσθέτοντας μία μονάδα. Ένα παιδί που κατανοεί πραγματικά τη λειτουργία του επόμενου αριθμού στο σύνολο των φυσικών αριθμών, πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n, υπάρχει πάντα ένας μοναδικός επόμενος και αυτός θα είναι ο n + 1, καθώς και να κατανοεί τη μη ύπαρξη του μεγαλύτερου απ' όλους τους αριθμούς αυτού του συνόλου (Cheung et al., 2017; Φωκάς, 2019). Ωστόσο οι μαθητές διαφόρων βαθμίδων, επηρεασμένοι από το σύνολο των φυσικών αριθμών, φαίνεται να θεωρούν ότι και στους ρητούς αριθμούς συνεχίζει να ισχύει η αρχή του επόμενου. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές αντιμετωπίζουν ερωτήματα σχετικά με τον επόμενο ενός ρητού αριθμού π.χ. του 2. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας του Φωκά (2019) με μαθητές της Β΄ Λυκείου, κάποιοι μαθητές θα προσδιόριζαν τον αμέσως επόμενο ως το 2,1. Άλλοι μαθητές θα αύξαναν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, αντιπροτείνοντας π.χ. το 2,001. Άλλοι μαθητές θα δήλωναν ότι ο αριθμός αυτός δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια, πάραυτα υπάρχει. Τέλος, κάποιοι μαθητές θα πρότειναν τον αριθμό 2,000…..1 ως τον επόμενο αριθμό. Η απάντηση αυτή σχετίζεται με την κατανόηση της περιοδικής αναπαράστασης των ρητών, που θα συζητήσουμε εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα. Το κοινό στοιχείο σε όλες τις απαντήσεις είναι η πεποίθηση ότι η αρχή του επόμενου διατηρείται στους ρητούς. Η πεποίθηση αυτή είναι ιδιαίτερα ανθεκτική και συνεχίζει να εκδηλώνεται ακόμα και σε φοιτητές Μαθηματικών Τμημάτων. Για παράδειγμα, 35% των συμμετεχόντων της έρευνας των Giannakoulias και συνεργατών (2007), όλοι φοιτητές ελληνικού μαθηματικού τμήματος, συμφώνησαν ότι «υπάρχει ρητός αριθμός q, μεγαλύτερος από το 3/5, τέτοιος ώστε να μην υπάρχει άλλος αριθμός ανάμεσα στο q και το 3/5». Το ποσοστό αυτό είναι αξιόλογο, δεδομένου του μαθηματικού υποβάθρου των συμμετεχόντων.

2.2 Ρητοί, Άρρητοι και Πραγματικοί Αριθμοί

Ένα από τα βασικά ζητήματα στα οποία ενδεχομένως είναι πιο προφανής η σημασία της Γνώσης Ανώτερων Μαθηματικών, είναι αυτό που σχετίζεται με τα αριθμητικά σύνολα που αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας στα σχολικά μαθηματικά και, συγκεκριμένα, με τα σύνολα των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών αριθμών. Όπως γνωρίζουμε, τα παιδιά, ήδη από τη νηπιαγωγείο έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς, ενώ στις πρώτες τάξεις του δημοτικού, με τα κλάσματα και τους (ρητούς) δεκαδικούς αριθμούς. Με άρρητους αριθμούς τα παιδιά έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά στη Β' Γυμνασίου, ενώ στην Γ' Γυμνασίου παρουσιάζονται για πρώτη φορά τα αριθμητικά σύνολα και οι μεταξύ τους σχέσεις (σχέσεις συνόλου / υποσυνόλου). Ο τρόπος που ορίζονται τα σύνολα των αριθμών, οι μεταξύ τους σχέσεις, οι αναπαραστάσεις των στοιχείων τους, ιδιαίτερα η δεκαδική όταν υπάρχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, η δομή του κάθε συνόλου, αλλά και οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ των συνόλων (π.χ. ως προς τη διάταξη και ως προς τη δομή), είναι θέματα που έχουν απασχολήσει την επιστήμη των μαθηματικών επί αιώνες. Δεν είναι λοιπόν απρόσμενο ότι, τόσο μαθητές, όσο και εκπαιδευτικοί, αντιμετωπίζουν δυσκολίες με αυτό το περιεχόμενο. Στην ενότητα αυτή θα εστιάσουμε α) στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών, β) στις αντιλήψεις σχετικά με τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

2.2.1. Δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών

Οι πραγματικοί αριθμοί, ρητοί και άρρητοι, μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω της δεκαδικής αναπαράστασης. Οι δεκαδικές αναπαραστάσεις των πραγματικών μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες, αυτές που έχουν πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων και αυτές που έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Στην πρώτη κατηγορία αντιστοιχούν οι ρητοί αριθμοί. Η δεύτερη κατηγορία μπορεί να διακριθεί σε δύο υποκατηγορίες: αυτή στην οποία τα άπειρα δεκαδικά ψηφία διέπονται από περιοδικότητα και αντιστοιχεί πάλι σε ρητούς αριθμούς και β) αυτήν στην οποία τα δεκαδικά ψηφία δεν παρουσιάζουν περιοδικότητα και αντιστοιχεί σε άρρητους αριθμούς.

Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς μέσα από τη διαδικασία της διαίρεσης. Για παράδειγμα, το πηλίκο 1:3, το οποίο συμβολίζεται και ως 1/3, είναι 0,333….. Στο Γυμνάσιο, οι μαθητές διδάσκονται μια μέθοδο μετατροπής ενός περιοδικού δεκαδικού στην κλασματική του μορφή. Μια άλλη προσέγγιση είναι να θεωρήσει κανείς την ακολουθία 0,3, 0,33, 0,333, .0,3333, 0,333333, ….(αντίστοιχη σειρά της ακολουθίας με γενικό όρο $a_k = 3\,\frac{1}{10^k}$, k =1,2,3). Το να δεχτεί κανείς ότι αυτή η ακολουθία τείνει στο 0,33333…. είναι διαισθητικά αποδεκτό. Εφαρμόζοντας μαθηματικά εργαλεία σχετικά με το όριο, η ακολουθία αυτή συγκλίνει, με όριο το 1/3.

Ένα πλήθος ερευνών δείχνει ότι μαθητές σε διάφορες βαθμίδες αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τους περιοδικούς ρητούς αριθμούς. Μια κυρίαρχη δυσκολία φαίνεται να είναι ότι οι περιοδικοί αριθμοί δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτοί ως (πεπερασμένα) αντικείμενα, αντίθετα θεωρούνται ως ατέρμονες διαδικασίες. Από την οπτική των ορίων, μια παρόμοια θεώρηση είναι ότι μια ακολουθία πλησιάζει πολύ κοντά στο όριό της, χωρίς να το φτάνει ποτέ (Edwards, 1995; Tall & Swarzenberger, 1978; Μαμωνά, 1987, όπως αναφέρονται στο Ζωιτσάκος, 2019). Έτσι, πολλοί μαθητές και φοιτητές, ακόμα και μαθηματικών τμημάτων, θεωρούν ότι ο αριθμός 0,999… είναι μικρότερος του 1 και το 0,3333…. είναι μικρότερος από το 1/3. Σε άλλες περιπτώσεις γίνεται αποδεκτή η ισότητα του 1/3 με το 0,3333…, αλλά όχι του 0,9999…. με το 1

Περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί προτείνονται και ως προηγούμενοι/επόμενοι ρητών αριθμών (π.χ. Φωκάς, 2019). Για παράδειγμα, το 0,999…. θεωρείται ως προηγούμενος του 1, με το σκεπτικό ότι είναι τόσο κοντά του, ώστε να μην υπάρχει άλλος αριθμός ενδιάμεσα και, ταυτόχρονα, μικρότερος του.

Το ζήτημα της δεκαδικής αναπαράστασης των άρρητων αριθμών είναι ακόμα πιο σύνθετο. Βάσει της ανασκόπησης της σχετικά περιορισμένης βιβλιογραφίας για την κατανόηση των αρρήτων από μαθητές και εκπαιδευτικούς των Scirotic & Zazkis (2010) και συμπεριλαμβανομένων των δικών τους ευρημάτων σε μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας, ο ορισμός και οι αναπαραστάσεις των αρρήτων φαίνεται να προκαλούν πολλές δυσκολίες. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες διαφόρων ηλικιών και επιπέδων εκπαίδευσης φαίνεται να δυσκολεύονται να δώσουν έναν ορισμό για τους άρρητους αριθμούς και να αναγνωρίσουν άρρητους αριθμούς. Μια ιδιαίτερη δυσκολία φαίνεται να είναι η ταύτιση του άρρητου αριθμού με την τις ρητές του προσεγγίσεις (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων). Επιπλέον, συχνά η αρρητότητα συγχέεται με την απειρία των δεκαδικών ψηφίων, ενώ συνεχίζει να υφίσταται η δυσκολία να γίνει αντιληπτός ένας άρρητος αριθμός ως ένα πεπερασμένο μαθηματικό αντικείμενο.

2.3. Πυκνότητα συνόλου σε σύνολο

Στην ενότητα 2.1, συζητήθηκαν θέματα που αφορούν την πυκνή διάταξη των ρητών. Αυτή η ενότητα επικεντρώνεται στο γενικότερο ζήτημα της πυκνότητας ενός συνόλου σε ένα άλλο σύνολο που ορίζεται ως εξής: Δεδομένων δύο συνόλων X και Ω με $X \subset \Omega$, το X είναι πυκνό στο Ω αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \Omega$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\alpha < x < \beta$. Από τοπολογικής άποψης, το σύνολο των ρητών αριθμών (A) είναι ένα πυκνό υποσύνολο των πραγματικών, δηλαδή για κάθε μη κενό και ανοιχτό υποσύνολο B του συνόλου των πραγματικών αριθμών ισχύει $A \cap B \neq 0$.

Υπό αυτό το πρίσμα, η πυκνή διάταξη των ρητών αντιστοιχεί στην πυκνότητα του συνόλου Q στο Q, δηλαδή, στον εαυτό του. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα να εξεταστεί η πυκνότητα του Q σε άλλα σύνολα και, συγκεκριμένα, στο σύνολο των άρρητων και στο σύνολο των πραγματικών, καθώς και τα αντίστοιχα για τους άρρητους. Η έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών μέχρι τώρα, έχει επικεντρωθεί κυρίως στην πυκνότητα του συνόλου των ρητών στον εαυτό του (Marmour, Maitinho & Zazkis, 2019). Υπάρχουν ωστόσο ορισμένες έρευνες που διερεύνησαν την πυκνότητα συνόλου σε σύνολο. Οι Scirotic & Zazkis (2007) ζήτησαν από 46 μελλοντικούς εκπαιδευτικούς των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας να αξιολογήσουν την ορθότητα των ακόλουθων δηλώσεων και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στην παρένθεση σημειώνεται το ποσοστό των σωστών απαντήσεων:

α) Είναι πάντα δυνατόν να βρεθεί ένας ρητός αριθμός ανάμεσα σε δύο άρρητους; (52%)

β) Είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας άρρητος αριθμός μεταξύ δύο άρρητων αριθμών; (69,5%)

γ) Είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας άρρητος αριθμός ανάμεσα σε δύο ρητούς; (71,6%)

δ) Είναι πάντα δυνατόν να βρεθεί ένας ρητός αριθμός ανάμεσα σε δύο ρητούς; (52%)

Στα αποτελέσματα αυτά, εντύπωση προκαλεί η οριακή πλειοψηφία των σωστών απαντήσεων στα (α) και (δ), ιδιαίτερα στο τελευταίο που αφορά την πυκνή διάταξη των ρητών. Συνολικά, φαίνεται ότι οι συμμετέχοντες θεωρούν τους άρρητους «πιο πυκνούς» από τους ρητούς, ενώ ένα τρίτο περίπου των απαντήσεων στα (β) και (γ) είναι λανθασμένες.

Οι Marmour et. al. (2019) μελέτησαν την κατανόηση πρωτοετών φοιτητών ενός μαθηματικού τμήματος για την πυκνότητα του συνόλου των ρητών, στο σύνολο των πραγματικών. Όπως επισημαίνουν οι ερευνητές αυτοί, η πυκνότητα ενός συνόλου δεν συνεπάγεται άμεσα πυκνότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (R) και απαιτεί ξεχωριστή εξέταση ως προς την πυκνότητα, καθώς εμφανίζει αρκετές δυσκολίες

Πιο συγκεκριμένα στην έρευνα τους ζήτησαν από 95 πρωτοετείς φοιτητές να συνεχίσουν τον διάλογο δύο φοιτητών οι οποίοι διαφωνούσαν για το πλήθος των ρητών αριθμών που υπάρχουν μεταξύ δύο τυχαίων αριθμών a, b. Με την άποψη του φοιτητή που υποστήριζε ότι επιλέγοντας δύο τυχαίους αριθμούς a, b από την ευθεία των πραγματικών αριθμών, βρίσκουμε άπειρους ρητούς ανάμεσά τους, συμφώνησαν 69 από τους 96 συμμετέχοντες, ενώ με την άποψη ότι βρίσκουμε ένα ρητό ανάμεσα τους συμφώνησαν 10 από τους 95. Έντεκα από τους 95 συμμετέχοντες θεώρησαν σωστές τις απαντήσεις και των δύο φοιτητών, ενώ 5 δεν θεώρησαν καμία. Αναφορικά με τον τρόπο που επέλεξαν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους (συνέχιση του διαλόγου ώστε να είναι μαθηματικά και παιδαγωγικά ορθός), οι συμμετέχοντες διακρίθηκαν σε 4 κατηγορίες:

α) σε αυτούς που επέλεξαν να παρομοιάσουν την ευθεία σαν έναν χάρακα πάνω στον οποίο τοποθετούνται οι αριθμοί.

β) σε αυτούς που προκειμένου να επιχειρηματολογήσουν δούλεψαν με συγκεκριμένα διαστήματα και στη συνέχεια πέρασαν στη γενίκευση.

γ) σε αυτούς που χρησιμοποίησαν συγκεκριμένα διαστήματα πολύ κοντά στο 0 (χρήση διαστημάτων με άκρα αριθμούς κλασματικής μορφής).

δ) σε αυτούς που ερμήνευσαν την έκφραση «άπειροι ρητοί αριθμοί μεταξύ των a και b» ως την ύπαρξη ρητών αριθμών με άπειρη δεκαδική αναπαράσταση.

2.4 Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών αποτελεί μια πολύ ισχυρή αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών, η οποία εντάσσεται στα σχολικά μαθηματικά από πολύ νωρίς. Από τις πρώτες κιόλας τάξεις του δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν να τοποθετούν τους φυσικούς αριθμούς για αρχή, και στη συνέχεια τους ρητούς αριθμούς πάνω στην ευθεία.

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών βασίζεται στην αναλογία «οι αριθμοί είναι σαν τα σημεία της ευθείας» (με πιο τυπικό συμβολισμό: αριθμός: αριθμητικό σύστημα: σημείο: ευθεία, (Herbst, 1997, όπως αναφέρεται στο Vamvakoussi, 2019) που λεκτικά θα μπορούσε να εκφραστεί ως «ο αριθμός για το αριθμητικό σύστημα είναι όπως το σημείο για την ευθεία»). Η αναλογία αυτή είναι μια «επεξεργασμένη αναλογία», όπως ορίζεται από τον Polya (1954), όπως αναφέρεται στο Vamvakoussi, 2019. Δυο συστήματα είναι ανάλογα, όταν αφενός υπάρχουν ξεκάθαρα ορισμένες σχέσεις μεταξύ των δύο συστημάτων, και αφετέρου, οι σχέσεις εντός του κάθε συστήματος υπακούουν στους ίδιους νόμους. Στην περίπτωση της πραγματικής ευθείας, η σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των σημείων της ευθείας είναι η 1-1 αντιστοιχία, ενώ εντός του κάθε πεδίου ορίζεται σχέση διάταξης που υπακούει στους ίδιους νόμους: για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε πάντα να αποφανθούμε ποιος είναι μεγαλύτερος και ομοίως για δύο οποιαδήποτε σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αποφανθούμε για το ποιο βρίσκεται πιο δεξιά. Επιπλέον όπως οι πραγματικοί αριθμοί, έτσι και τα σημεία της ευθείας είναι πυκνά διατεταγμένα.

Οι απαρχές αυτής της αναλογίας βρίσκονται στις προσπάθειες των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών να μετρήσουν ένα οποιοδήποτε μήκος. Ωστόσο η θεώρηση του αριθμού ως μια διακριτή οντότητα, και της ευθείας ως μιας «συνεχούς» οντότητας η οποία δεν εμφανίζει κενά, οδήγησε στη μη πραγματοποίηση μιας αντιστοιχίας μέχρι τον 19^{ο} αιώνα (Vamvakoussi, 2019). Κατά τη διάρκεια αυτής της μακροπρόθεσμης σύγκρισης και οι δύο έννοιες υπέστησαν ριζικές αλλαγές ώστε να φτάσουν να έχουν τη μαθηματική έννοια που κατέχουν σήμερα στη μαθηματική επιστήμη. Στην αρχή το μόνο σύνολο αριθμών που θεωρούταν δεκτό, ήταν αυτό των φυσικών αριθμών. Ωστόσο στην πορεία άλλαξε προκειμένου να συμπεριληφθούν και οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί, καταλήγοντας έτσι στη σημερινή έννοια του πραγματικού αριθμού. Αντίστοιχα η ευκλείδεια ευθεία επαναπροσδιορίστηκε ως σύνολο των σημείων και πάλι ως ισομορφισμός των πραγματικών αριθμών (Vamvakoussi, 2019). Τον 19^{ο} αιώνα, οι μαθηματικοί Cantor και Dedekind στην προσπάθειά τους να προσδιορίσουν αυστηρά το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δέχτηκαν ως αξίωμα την ένα προς ένα αντιστοιχία των σημείων της ευθείας και του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η αντιστοιχία αυτή σήμερα είναι γνωστή ως το αξίωμα Cantor–Dedekind. Από την άλλη μεριά, ο Hilbert, όρισε την καρτεσιανή ευθεία έτσι ώστε να υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία των σημείων της και του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η αντιστοιχία, από αυτή την προοπτική, προκύπτει εξ ορισμού της ευθείας.

Η αναπαράσταση των πραγματικών με τη μορφή της ευθείας, εμφανίζει αρκετές δυσκολίες. Αρχικά, η αναπαράσταση των αριθμών ως σημείων της ευθείας περικλείει δύσκολες έννοιες, όπως η έννοια του αριθμού, του σημείου και της ευθείας, δηλαδή έννοιες που όπως είδαμε απασχόλησαν για αιώνες τη μαθηματική κοινότητα μέχρι να αποσαφηνιστούν. Εκτός όμως από τις εγγενείς δυσκολίες που εμφανίζει η ευθεία, ένας άλλος παράγοντας που παίζει ανασταλτικό ρόλο στην κατανόηση των μαθητών, είναι οι αντιλήψεις των ίδιων των μαθητών για την ευθεία. Οι αντιλήψεις αυτές συχνά προέρχονται από την καθημερινή ζωή και από τις έννοιες που προσδίδονται στην ευθεία. Οι μαθητές συχνά θεωρούν την ευθεία ως μια σειρά από διακριτά σημεία, ανάμεσα στα οποία μπορεί ή όχι να υπάρχει κενό. Ή συχνά βλέπουν την ευθεία σαν ένα χάρακα χωρίς κενά. Οι αντιλήψεις αυτές όμως μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές στην ιδέα ότι το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα είναι πεπερασμένο και όχι άπειρο (Vamvakoussi, 2019).

Κεφάλαιο 3ο: Μεθοδολογία

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε αρχικά το ερευνητικό πρόβλημα, τους στόχους και τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα έρευνα. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στους συμμετέχοντες στην έρευνα και θα πραγματοποιηθεί εκτενής ανάλυση του εργαλείου που κατασκευάσαμε. Έπειτα ακολουθεί η παρουσίασης της διαδικασίας διεξαγωγής της έρευνας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση του τρόπου ανάλυσης των δεδομένων.

3.2 Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να εξεταστούν πτυχές της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία απόφοιτων μαθηματικών τμημάτων που εργάζονται ως εκπαιδευτικοί σχετικά με τον αριθμό, τα αριθμητικά συστήματα και την πραγματική ευθεία.

Όπως είδαμε στο θεωρητικό μέρος, η Γνώση Ανώτερων Μαθηματικών και η Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου παίζουν καθοριστικό ρόλο στην αποτελεσματική διδασκαλία (βλ. παράγραφο 1.2). Προκειμένου να ερευνήσουμε την ύπαρξη ή μη αυτών των μορφών της γνώσης στους συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικούς, φροντίσαμε αυτές οι μορφές της γνώσης να διέπουν και τα 7 διδακτικά σενάρια που αποτέλεσαν το ερευνητικό εργαλείο της παρούσας έρευνας (βλ. Παράρτημα).

Τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν τα εξής:

- Υπάρχουν πτυχές των εννοιών της πυκνότητας στο R, της συνέχειας και του απείρου που δεν έχουν κατανοήσει οι απόφοιτοι μαθηματικών τμημάτων; (κοινή γνώση περιεχομένου)
- Είναι οι απόφοιτοι μαθηματικοί που διδάσκουν μαθηματικά σε θέση να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών; (γνώση περιεχομένου και των μαθητών).
- Είναι σε θέση να ανταποκριθούν στοχευμένα στις αποκρίσεις των μαθητών σε ένα

μαθηματικό πρόβλημα;

- Τι είδους και ποια διδακτικά εργαλεία αξιοποιούν για να δώσουν ανατροφοδότηση στους μαθητές;

3.3 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 άτομα (5 άντρες, 10 γυναίκες), απόφοιτοι ελληνικών μαθηματικών τμημάτων, οι οποίοι εργάζονται στην ιδιωτική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η ημερομηνία κτήσης του πτυχίου των συμμετεχόντων δεν ξεπερνά τα 7 χρόνια, η πλειοψηφία των οποίων είτε φοιτά, είτε έχει λάβει ήδη κάποιο μεταπτυχιακό δίπλωμα σπουδών. Ωστόσο πρέπει να τονιστεί ότι με εξαίρεση μια συμμετέχουσα, κανείς άλλος δεν εξειδικεύεται στη διδακτική των μαθηματικών.

3.4 Επιλογή Μεθόδου

Στην παρούσα έρευνα λοιπόν, επιλέξαμε την ημιδομημένη, βασισμένη σε έργα (task-based) συνέντευξη, προκειμένου να επιτευχθεί η διερεύνηση της μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών, για τη διδασκαλία. Θεωρήσαμε προτιμότερο αυτό το είδος της συνέντευξης σε σχέση με μια συνέντευξη γενικών ερωτήσεων, καθώς θελήσαμε να αποφύγουμε, στο βαθμό του δυνατού, γενικές απαντήσεις, καθώς και απαντήσεις που δεν ανταποκρίνονται στις πρακτικές που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί. Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν είναι διδακτικά σενάρια, τα οποία προέρχονται από τη βιβλιογραφία και κατασκευάστηκαν προκειμένου να υποστηρίξουν ερευνητικούς στόχους, όπως για παράδειγμα τη διερεύνηση της γνώσης του περιεχομένου των εκπαιδευτικών και τη διερεύνηση της χρήσης συγκεκριμένων στρατηγικών μέσω της ανατροφοδότησης που παρέχουν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές τους (Biza et al., 2007). Για τη διεξαγωγή της έρευνας δημιουργήθηκαν από την ερευνήτρια 7 διδακτικά σενάρια. Σε κάθε σενάριο δόθηκαν απαντήσεις μαθητών σε συγκεκριμένες ερωτήσεις που τίθενται από τον εκπαιδευτικό της τάξης και ζητήθηκε από τον συμμετέχοντα να σχολιάσει την ορθότητα των απαντήσεων, τον τρόπο σκέψης τους, αλλά και να δώσει ο ίδιος μια πιθανή ανατροφοδότηση.

3.5 Περιγραφή Εργαλείου

Το εργαλείο της έρευνας (βλ. Παράρτημα) αποτελείται από 7 διαφορετικά διδακτικά σενάρια που πραγματεύονταν τις έννοιες της πυκνότητας στο σύνολο των ρητών και των άρρητων αριθμών, την έννοια του απείρου και της συνέχειας, την ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς, καθώς και την ισοδυναμία μαθηματικών αναπαραστάσεων.
Τα διδακτικά σενάρια που κατασκευάστηκαν είχαν κοινή διάρθρωση:
α) Μαθηματικό ερώτημα: Στην αρχή κάθε σεναρίου παρουσιαζόταν το μαθηματικό ερώτημα που είχε τεθεί από τον καθηγητή στη σχολική τάξη.
β) Απαντήσεις ενός ή παραπάνω μαθητών: Στη συνέχεια παρουσιαζόταν οι απαντήσεις ενός ή παραπάνω μαθητών στο ερώτημα που είχε τεθεί. Οι απαντήσεις των μαθητών εκφράζουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης του ερωτήματος που τίθεται σε κάθε διδακτικό σενάριο.
Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες στην έρευνα:
α) Αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών (εξετάζεται η γνώση περιεχομένου). Ως πρώτο ζητούμενο θέσαμε το ερώτημα “Υπάρχει κάποια απάντηση που θεωρείται σωστή; Αν ναι ποια; Αν όχι, ποια θα θεωρούσατε εσείς σωστή απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα.”
β) Εξήγηση του τρόπου σκέψης των μαθητών (γνώση περιεχομένου και των μαθητών). Στη συνέχεια τέθηκε το ερώτημα “Πως θεωρείτε ότι προέκυψε η απάντηση καθενός από τους μαθητές;”, προκειμένου να γίνει εμφανές, αν είναι οι απόφοιτοι μαθηματικοί που διδάσκουν μαθηματικά σε θέση να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών.
γ) Πιθανή Ανατροφοδότηση (γνώση περιεχομένου και των μαθητών). Τέλος τέθηκε το ερώτημα “Τι ανατροφοδότηση θα δίνατε εσείς αν βρισκόσασταν στη θέση του καθηγητή”, προκειμένου να μελετηθεί αν οι συμμετέχοντες είναι σε θέση να ανταποκριθούν στοχευμένα στις αποκρίσεις των μαθητών σε ένα μαθηματικό πρόβλημα και τι είδους και ποια διδακτικά εργαλεία αξιοποιούν για να δώσουν ανατροφοδότηση στους μαθητές. Μικρές παραλλαγές σε αυτή τη διάρθρωση αναφέρονται στη συνέχεια κατά την παρουσίαση των σεναρίων.

Έργο 1 (Ε1, «Ενδιάμεσοι στο (1,1, 1,3)»)

Στο πρώτο διδακτικό σενάριο (βλ. Πλαίσιο 1) η ερώτηση που τίθεται είναι "Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1,1 και του 1,3" (Ε.1 «Ενδιάμεσοι στο (1,1, 1,3)») με τους μαθητές να δίνουν τρεις διαφορετικές απαντήσεις. Ο πρώτος μαθητής θεωρεί ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός, ο δεύτερος 19 και τους κατονομάζει και ο τρίτος υποστηρίζει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί, πάνω από ένα δισεκατομμύριο, τους οποίους μόνο ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει.

Αυτό το διδακτικό σενάριο αφορά την πυκνότητα των ρητών αριθμών και, ειδικότερα, την απειρία των ενδιαμέσων, όπως συζητήθηκε στην παράγραφο 2.1.2. Οι απαντήσεις των μαθητών εκφράζουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης για την πυκνή διάταξη (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Οι απαντήσεις των Μαθητών Α και Β εκφράζουν άμεσα την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, ενώ η απάντηση του Μαθητή Γ αντιστοιχεί στην ερμηνεία της έκφρασης «άπειροι αριθμοί» ως «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, πλήθος αριθμών» (που, έμμεσα, σχετίζεται και με την προκατάληψη του φυσικού αριθμού).

1ο Διδακτικό Σενάριο:

Σε μια σχολική τάξη Γ' Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών, ο καθηγητής θέτει στους μαθητές την παρακάτω ερώτηση: "Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1,1 και του 1,3;"

Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:

Μαθητής Α: ένας, ο 1,2 (Ε.1.1)

Μαθητής Β: 19, οι 1,12, 1,13, 1,14, 1,15, ... 1,19, 1,20, 1,21, ... 1,29 (Ε.1.2)

Μαθητής Γ: Είναι άπειροι... πάρα πολλοί.... πάνω από ένα δισεκατομμύριο. Μόνο ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. (Ε.1.3)

Πλαίσιο 1: Το διδακτικό σενάριο « Ενδιάμεσοι στο 1,1 και το 1,3» (Ε1)

Έργο 2 (Ε2, «Ενδιάμεσοι στο (3/8, 5/8)»)

Στο δεύτερο διδακτικό σενάριο (βλ. Πλαίσιο 2) (Ε.2 «Ενδιάμεσοι στο (3/8, 5/8)»), ένας μαθητής ερωτάται ξανά για το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα, μόνο που αυτή τη φορά οι αριθμοί είναι κλασματικοί, το 3/8 και το 5/8. Ο μαθητής αρχικά υποστηρίζει ότι υπάρχει ένας αλλά στη συνέχεια αλλάζει την άποψή του και υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει κανένας υποστηρίζοντας ότι το 4/8 γίνεται 1/2 και έτσι δεν υπάρχει κανένας αριθμός στο διάστημα που ερωτάται. Και αυτό το διδακτικό σενάριο αφορά την πυκνότητα των ρητών αριθμών, συγκεκριμένα την απειρία των ενδιαμέσων, όπως συζητήθηκε στην παράγραφο 2.1.2. Η συγκεκριμένη απάντηση οφείλεται, στη δυσκολία πολλών μαθητών να αντιληφθούν ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις μπορεί να αναφέρονται στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο (βλ. παράγραφο 2.1) (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2010).

2ο Διδακτικό Σενάριο:
Ένας μαθητής Γ' Γυμνασίου ερωτάται πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8. Στη συνέχεια δίνεται αυτούσια η απάντηση του μαθητή.
Μαθητής: "Υπάρχει ένας... Όχι, μια στιγμή! Κανένας δεν υπάρχει! Γιατί το 4/8 γίνεται 1/2 και αυτό δεν είναι ανάμεσα."

Πλαίσιο 2: Το διδακτικό σενάριο «Ενδιάμεσοι στο (3/8, 5/8)» (Ε2)

Έργο 3 (Ε3, «Ευθεία των πραγματικών)

Στο τρίτο διδακτικό σενάριο (βλ. Πλαίσιο 3), (Ε.3 «Ευθεία των πραγματικών»), δίνονται κάποιοι πραγματικοί αριθμοί στους μαθητές (δεκαδικός, κλάσμα, φυσικός, περιοδικός, άρρητος) και τους ζητείται να αποφανθούν αν τοποθετούνται όλοι πάνω στην ευθεία των πραγματικών. Οι απαντήσεις που παρουσιάζονται προέρχονται από δύο μαθητές εκ των οποίων ο ένας υποστηρίζει ότι όλοι μπορούν να τοποθετηθούν, ενώ ο άλλος ότι μπορούν να τοποθετηθούν όλοι εκτός από τον περιοδικό και τον άρρητο. Με αυτό το διδακτικό σενάριο εξετάζεται η ένα-προς-ένα αντιστοιχία των πραγματικών αριθμών με τα σημεία της ευθείας («Ευθεία αριθμών»), όπως συζητήθηκε και στην ενότητα 2.4. Με την απάντησή του, ο πρώτος μαθητής αποκλείει από την ευθεία τους πιο «παράξενους» αριθμούς. Η απάντηση του δεύτερου μαθητή αντιστοιχεί στην ορθή απάντηση, η οποία παρουσιάζεται και στα σχολικά εγχειρίδια. Οι συγκεκριμένες απαντήσεις, οφείλονται στη δυσκολία πολλών μαθητών να αντιληφθούν την ένα προς ένα αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των σημείων της καρτεσιανής ευθείας, (βλ. παράγραφο 2.4) αλλά και της δεκαδικής αναπαράστασης των περιοδικών δεκαδικών αριθμών και των άρρητων (βλ. παράγραφο 2.2.1) (Ζωιτσάκος, 2019).

Τέλος, παρουσιάζεται από την ερευνήτρια το ερώτημα ενός τρίτου μαθητή, ο οποίος διερωτάται πως προκύπτει η δυνατότητα τοποθέτησης όλων των πραγματικών αριθμών πάνω στην ευθεία ("Πώς ξέρουμε ότι ισχύει αυτό; Αποδεικνύεται;"). Με την ερώτηση του τρίτου μαθητή έχουμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε τη γνώση των συμμετεχόντων σχετικά με τον επιστημολογικό χαρακτήρα αυτής της αντιστοίχισης (είναι αξίωμα; είναι ορισμός; αποδεικνύεται; άλλο;, βλ. ενότητα 2.4), αλλά και της διδακτικής διαχείρισης από τον εκπαιδευτικό.

<u>3ο Διδακτικό Σενάριο:</u> Σε μια σχολική τάξη Γ' Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης συζητιέται το εξής ερώτημα: "Δίνονται οι αριθμοί: 0,5, 1/3, 5, -9, 0,333, 0,88888......, (√2 + √5). Μπορούν να τοποθετηθούν όλοι αυτοί οι αριθμοί στην ευθεία των πραγματικών αριθμών;" Στη συνέχεια δίνονται οι απαντήσεις δύο μαθητών: *<u>Μαθητής Α:</u>* Ναι! Μπορούμε να τους τοποθετήσουμε όλους εκτός από το 0,8888.... και το (√2 + √5). (Ε.3.1) *<u>Μαθητής Β:</u>* Μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους αριθμούς στην ευθεία. Πάντα μπορούμε, όποιος και να είναι ο αριθμός που μας δίνεται. (Ε.3.2) Ένας τρίτος μαθητής κάνει την εξής ερώτηση: "Πως ξέρουμε ότι ισχύει αυτό; Αποδεικνύεται;" (Ε.3.3)

Πλαίσιο 3: Το διδακτικό σενάριο «Ευθεία των πραγματικών» (Ε3)

Έργο 4 (Ε4, «Μεγαλύτερη Τιμή»)

Στο τέταρτο έργο (βλ. Πλαίσιο 4) ο εκπαιδευτικός της τάξης ρωτάει τα παιδιά αν μπορεί να προσδιοριστεί η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να λάβει μια μεταβλητή στο διάστημα (0,1) (Ε.4 «Μεγαλύτερη τιμή»). Οι απαντήσεις των παιδιών είναι μία τιμή πάρα πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι η τιμή 1, ο αριθμός 0,999 και ο αριθμός 0,9999.... Και σε αυτό το διδακτικό σενάριο εξετάζεται η πυκνότητα των πραγματικών αριθμών και ειδικότερα, η άρση της αρχής του επομένου, όπως συζητήθηκε στις παραγράφους 2.1, 2.1.2. Τέλος, με την απάντηση του μαθητή Γ, έχουμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε τον βαθμό κατανόησης, αντιμετώπισης και εξήγησης ενός περιοδικού δεκαδικού αριθμού, ο οποίος σύμφωνα με τη βιβλιογραφία μας (Giannakoulias, Souyoul & Zachariades, 2007; Ζωιτσάκος, 2019) (βλ. παράγραφο 2.2), δημιουργεί συχνά προβλήματα όχι μόνο στους μαθητές, αλλά και στους φοιτητές μαθηματικών τμημάτων.

4ο Διδακτικό Σενάριο:

Στο μάθημα της Άλγεβρας της Α' Λυκείου, στο κεφάλαιο των ανισοτήτων δίνεται στην τάξη το παρακάτω ερώτημα:

"Έστω x ϵ R, με x ϵ (0, 1). Μπορεί να προσδιοριστεί η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει η μεταβλητή x;"

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις απαντήσεις 3 μαθητών:

Μαθητής Α: Μια τιμή πάρα πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι το 1. (Ε.4.1)

Μαθητής Β: Το 0,999 (Ε.4.2)

Μαθητής Γ: Το 0,9999...... (Ε.4.3)

Πλαίσιο 4:Το διδακτικό σενάριο «Μεγαλύτερη Τιμή» (Ε4)

Έργο 5 (Ε5, «Πυκνή διάταξη ρητών – αρρήτων»)

Στο πέμπτο διδακτικό σενάριο (βλ. Πλαίσιο 5) δίνονται στους συμμετέχοντες οι απαντήσεις ενός φοιτητή μαθηματικού τμήματος σε ερωτήσεις σωστού λάθους που αφορούν την πυκνή διάταξη (Ε.5 «Πυκνή διάταξη ρητών – άρρητων»). Πιο συγκεκριμένα, οι ερωτήσεις πραγματεύονται την ύπαρξη ρητού αριθμού ανάμεσα σε δύο άρρητους (πυκνότητα του συνόλου των ρητών στο σύνολο των άρρητων), την ύπαρξη άρρητου ανάμεσα σε δύο άρρητους (πυκνότητα του συνόλου των άρρητων στο σύνολο των άρρητων), άρρητου ανάμεσα σε δύο ρητούς (πυκνότητα του συνόλου των άρρητων στο σύνολο των ρητών) και τέλος ρητού ανάμεσα σε δύο ρητούς (πυκνότητα του συνόλου των ρητών στο σύνολο των ρητών). Οι λανθασμένες απαντήσεις που δίνει ο φοιτητής οφείλονται, όπως συζητήθηκε στη παράγραφο 2.3, στη δυσκολία που αντιμετωπίζουν τόσο οι μαθητές όσο και οι φοιτητές όταν περνάμε από την πυκνότητα του συνόλου των ρητών στο σύνολο των ρητών αριθμών, στη πυκνότητα του συνόλου των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (Marmour et al., 2019).

5ο Διδακτικό Σενάριο:

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις απαντήσεις ενός πρωτοετή φοιτητή Μαθηματικού Τμήματος, σε ερώτηση σωστού - λάθους.

Ερώτηση	Σ	Λ
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσά σε δύο άρρητους αριθμούς, να βρεθεί ένας ρητός. (Ε.5.1)		Χ
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσα σε δύο άρρητους αριθμούς, να βρεθεί ένας άρρητος. (Ε.5.2)	Χ	
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, να βρεθεί ένας άρρητος. (Ε.5.3)	Χ	
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, να βρεθεί ένας ρητός αριθμούς. (Ε.5.4)		Χ

Πλαίσιο 5: Το διδακτικό σενάριο «Πυκνή διάταξη ρητών – αρρήτων» (Ε5)

Έργο 6 (Ε6, «Νοητικό Πείραμα»)

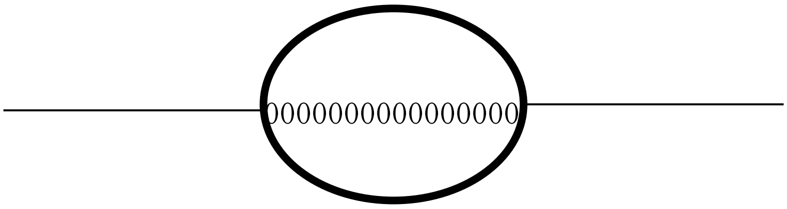
Στο έκτο έργο (βλ. Πλαίσιο 6), το διδακτικό σενάριο βασίζεται σε ένα νοητικό πείραμα (Ε.6, «Νοητικό Πείραμα»). Η καθηγήτρια της τάξης ζητάει από τους μαθητές της να φανταστούν ότι μπορούν να κοιτάξουν ένα ευθύγραμμο τμήμα από πολύ κοντά, μεγεθύνοντας όσες φορές θέλουν και να σχεδιάσουν αυτό που θα έβλεπαν. Ο Μαθητής Α, σχεδίασε την ευθεία ως μια διακριτή διάταξη σημείων η οποία παρουσιάζει κενά ανάμεσα στα σημεία. Ο Μαθητής Β, σχεδίασε και αυτός την ευθεία ως μια διακριτή διάταξη σημείων, χωρίς όμως να εμφανίζεται κενό ανάμεσά τους. Ο Μαθητής Γ σχεδίασε την ευθεία ακριβώς όπως συνηθίζουμε να τη σχεδιάζουμε, ως μαθηματικό αντικείμενο. Τέλος, ο Μαθητής Δ σχεδίασε την ευθεία ως πραγματικό αντικείμενο που μεγεθύνεται σε μήκος και πλάτος.

Σε αυτό το διδακτικό σενάριο έχουμε τη δυνατότητα να ελέγξουμε την κατανόηση και τη διαχείριση της πυκνότητας των σημείων της ευθείας, όπως συζητήθηκε στην ενότητα 2.4. Επίσης παίρνουμε μια ξεκάθαρη εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί “βλέπουν” την ευθεία των πραγματικών αριθμών (βλ. παράγραφο 2.4). Σε αυτό το έργο θεωρήσαμε ως ορθή απάντηση την απάντηση του Μαθητή Γ, καθώς ακόμη και με τον “μαγικό μεγεθυντικό φακό” η εικόνα της ευθείας δεν θα αλλάξει. Οι λανθασμένες απαντήσεις των Μαθητών Α, και Β οφείλονται στις λάθος αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για τη μορφή της ευθείας και προέρχονται από την καθημερινή ζωή, θεωρούν την ευθεία ως μια “σειρά” σημείων.(βλ, παράγραφο 2.42) (Vamvakoussi, 2019). Η απάντηση του Μαθητή Δ προέρχεται από την αντίληψη ότι η ευθεία είναι ένα φυσικό αντικείμενο, το οποίο μεγεθύνεται σε μήκος και σε πλάτος με τη χρήση του μεγεθυντικού φακού.

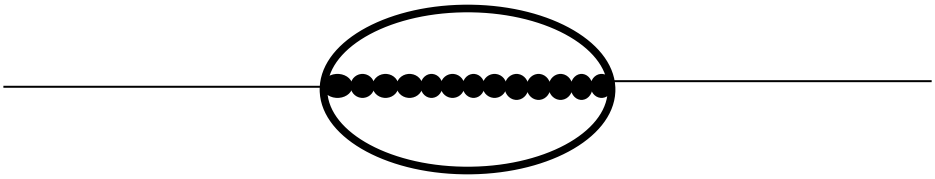
<u>6ο Διδακτικό Σενάριο:</u>

Σε μια τάξη μαθηματικών της Γ' Λυκείου, η καθηγήτρια ζητά από τα παιδιά να κάνουν το εξής νοητικό πείραμα: Να φανταστούν ότι έχουν ένα μαγικό μεγεθυντικό φακό και μπορούν να κοιτάξουν ένα ευθύγραμμο τμήμα από πολύ κοντά, μεγεθύνοντας όσες φορές θέλουν. Τους ζητάει να σχεδιάσουν τι θα έβλεπαν.

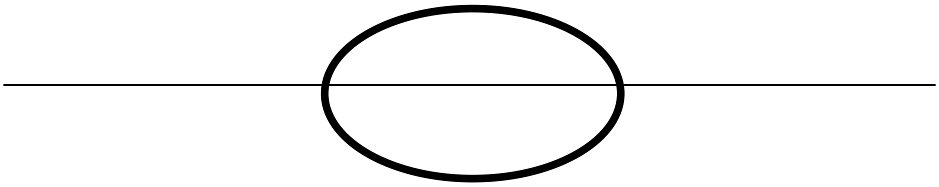
Ε.6.1



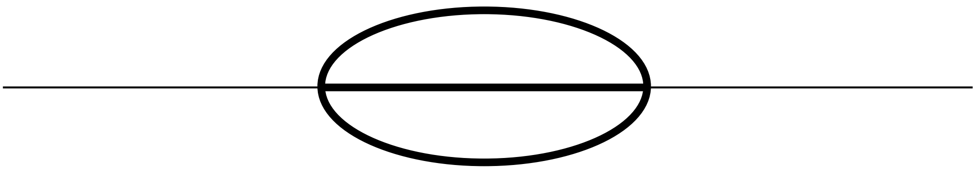
Ε.6.2



Ε.6.3



Ε.6.4



Πλαίσιο 6: Το διδακτικό σενάριο «Νοητικό Πείραμα» (Ε6)

Έργο 7 (Ε7, «Συνέχεια»)

Στο έβδομο και τελευταίο έργο (βλ. Πλαίσιο 7) η καθηγήτρια ζητάει από φοιτητές μαθηματικού τμήματος να εξηγήσουν με δικά τους λόγια τι σημαίνει ότι η ευθεία των πραγματικών είναι συνεχής και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι απαντήσεις δύο φοιτητών («Συνέχεια», Ε7). Ο πρώτος φοιτητής υποστηρίζει ότι σημαίνει ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους, ότι για κάθε πραγματικό υπάρχει ένας αριθμός που είναι κολλητά, ενώ ο δεύτερος θεωρεί ότι σημαίνει ότι αν πάρεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, πάντα μπορείς να βρεις άπειρους πραγματικούς ανάμεσά τους. Με το έβδομο και τελευταίο διδακτικό σενάριο μελετάμε τη σχέση της πυκνότητας και συνέχειας, δύο εννοιών που, όπως συζητήθηκε στην ενότητα 2.5, συγχέονταν μέχρι σχετικά πρόσφατα και στην επιστήμη των Μαθηματικών (Vamvakoussi, 2017; Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

7ο Διδακτικό Σενάριο:

Σε ένα Μαθηματικό Τμήμα, η καθηγήτρια ζητά από τους φοιτητές να εξηγήσουν με δικά τους λόγια τι σημαίνει ότι η ευθεία των πραγματικών είναι “συνεχής”.

Φοιτητής 1: Σημαίνει ότι οι πραγματικοί είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους, ότι για κάθε πραγματικό υπάρχει ένας αριθμός που είναι “κολλητά”, δεν υπάρχει κενό ανάμεσά τους.(Ε.7.1)

Φοιτητής 2: Σημαίνει ότι αν πάρεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, πάντα μπορείς να βρεις άπειρους πραγματικούς ανάμεσά τους. (Ε.7.2)

Πλαίσιο 7: Το διδακτικό σενάριο «Συνέχεια» (Ε7)

3.6 Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας

Η πλειοψηφία των συνεντεύξεων πραγματοποιήθηκε μέσω Skype καθώς δεν ήταν δυνατή η φυσική παρουσία των συμμετεχόντων. Η συλλογή των δεδομένων είχε διάρκεια περίπου ένα μήνα (20 Δεκεμβρίου 2019 έως 20 Ιανουαρίου 2020), καθώς τα προγράμματα εργασίας των συμμετεχόντων αποτέλεσαν ανασταλτικό παράγοντα. Η διάρκεια κάθε συνέντευξης κυμάνθηκε από 30 έως 50 λεπτά της ώρας, μαγνητοφωνήθηκε και ακολούθησε η πλήρης απομαγνητοφώνησή της. Ο κάθε συμμετέχων είχε στη διάθεσή του τα διδακτικά σενάρια καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης, και δεχόταν τις προκαθορισμένες ερωτήσεις από την ερευνήτρια. Πριν την έναρξη της επεξεργασίας κάθε διδακτικού σεναρίου δινόταν χρόνος στον συμμετέχων προκειμένου να διαβάσει και να κατανοήσει το περιεχόμενο του σεναρίου. Επιπρόσθετα, δινόταν χρόνος και κατά τη διάρκεια της συζήτησης όπου ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες. Κρίνουμε σκόπιμο να τονιστεί ότι δεν υπήρξε κάποιο χρονικό όριο. Η πραγμάτευση των ερωτήσεων του σεναρίου πραγματοποιήθηκε μέσα σε ένα ευρύτερο πλαίσιο κατανόησης μαθηματικών εννοιών και δομών, όπως το άπειρο, η πυκνότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών και η συνέχεια.

3.7 Περιγραφή Ανάλυσης Δεδομένων

Αφού συλλέχθηκαν τα δεδομένα, έγινε η πλήρης απομαγνητοφώνηση όλων των συνεντεύξεων και η καταγραφή τους σε αρχεία κειμένου, ξεκίνησε η πρώτη ανάλυση των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα εξετάσαμε τις απαντήσεις που πήραμε από τους συμμετέχοντες σχετικά με α) την αξιολόγηση των υποθετικών απαντήσεων των μαθητών, β) τις εξηγήσεις που έδωσαν τόσο για τον τρόπο σκέψης και αξιολόγησης των ίδιων, όσο και για τον τρόπο σκέψης των μαθητών και γ) την ανατροφοδότηση που παρείχαν. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών καταγράφηκαν ανά άξονα και ανά έργο.

Οι αξιολογήσεις των υποθετικών απαντήσεων των μαθητών εξετάστηκαν ως προς την ορθότητα (βλ. και ενότητα 4.1). Οι εξηγήσεις του τρόπου σκέψης των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σε ουσιαστικές και μη ουσιαστικές (βλ. και ενότητα 4.3).

Για την ανάλυση της τεκμηρίωσης της αξιολόγησης, καθώς και της ανατροφοδότησης, επιλέχθηκε να εφαρμοστεί η θεματική ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, ακολουθήσαμε τις 6 φάσεις της θεματικής ανάλυσης «Εξοικείωση και κωδικοποίηση», «Προσπάθεια κατηγοριοποίησης», «Επανέλεγχος και καθορισμός κατηγοριών» και «Ανάπτυξη τελικού κειμένου» (Terry, Hayfield, Clarke & Braun, 2017).

Στις πρώτες δύο φάσεις («Εξοικείωση και κωδικοποίηση») οι οποίες είναι άρρηκτα συνδεδεμένες και για αυτό το λόγο μπορούν να θεωρηθούν και σαν μία, είχαμε τη δυνατότητα να γνωρίσουμε καλύτερα και να εισέλθουμε στην ανάλυση των δεδομένων. Όταν αναπτύχθηκε μια καλή αίσθηση για τα δεδομένα που επεξεργαζόμασταν ξεκίνησε η κωδικοποίηση. Σε αυτό το στάδιο έγινε προσπάθεια να κωδικοποιηθούν τα δεδομένα μας σε μια πιο σύντομη μορφή (αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με τη μορφή σημειώσεων). Με αυτό το τρόπο άρχισε να διαφαίνεται η ουσία των δεδομένων που είχαμε λάβει αλλά και η σύνδεσή τους με τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνάς μας. Στο τρίτο στάδιο «Προσπάθεια κατηγοριοποίησης» επεξεργαζόμενοι την κωδικοποίηση που είχαμε δημιουργήσει, ξεκίνησε η προσπάθεια δημιουργίας κατηγοριών. Αναζητήσαμε τα κοινά γνωρίσματα που εμφάνιζαν τα δεδομένα που είχαμε στη διάθεσή μας (για παράδειγμα αναφορικά με την ανατροφοδότηση το είδος της διδασκαλίας ή των εργαλείων που χρησιμοποιούνται) προκειμένου να κατηγοριοποιηθούν και να δούμε τι συμπεράσματα μπορούμε να αντλήσουμε από αυτά. Στο τέταρτο στάδιο («Επανέλεγχος και καθορισμός κατηγοριών») πραγματοποιήσαμε επανέλεγχο των δεδομένων μας, της κωδικοποίησης αλλά και της κατηγοριοποίησης που είχαμε εφαρμόσει στα προηγούμενα στάδια. Ελέγχθηκαν εκ νέου τα κοινά χαρακτηριστικά που παρατηρήσαμε και έγινε η τελική κατάταξη στις κατηγορίες που είχαμε δημιουργήσει, περνώντας έτσι στην τελική συγγραφή των αποτελεσμάτων («Ανάπτυξη τελικού κειμένου»).

Κρίνεται αναγκαίο να διευκρινιστεί ότι τα παραπάνω στάδια της θεματικής ανάλυσης που ακολουθήθηκε ήταν άρρηκτα συνδεδεμένα μεταξύ τους με αποτέλεσμα πολλές φορές να αναδιαμορφώνονται και να επαναπροσδιορίζονται οι κατηγοριοποιήσεις και παρουσιάσεις των αποτελεσμάτων.

Με τη θεματική ανάλυση ασχολήθηκαν δύο πρόσωπα, που κωδικοποίησαν αρχικά μαζί μέρος των δεδομένων, στη συνέχεια ξεχωριστά τα υπόλοιπα και, τέλος, διαμόρφωσαν από κοινού τις θεματικές.

Κεφάλαιο 4ο: Αποτελέσματα

4.1 Αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς (Κοινή γνώση περιεχομένου)

Οι αξιολογήσεις των απαντήσεων των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς εξετάστηκαν ως προς την ορθότητα τους. Καθώς στο κάθε έργο εμφανίζονται περισσότερες από μία απαντήσεις μαθητών, κρίθηκε σκόπιμο να εξεταστεί η αξιολόγηση των εκπαιδευτικών για κάθε απάντηση ξεχωριστά. Για παράδειγμα, στο Έργο 1 στο οποίο υπάρχουν 3 απαντήσεις μαθητών προς αξιολόγηση, εξετάστηκε η αξιολόγηση των εκπαιδευτικών σε καθεμία από τις απαντήσεις ξεχωριστά (Ε.1.1, Ε.1.2, Ε.1.3, βλ. Πλαίσιο 1). Το Έργο 2, εξετάστηκε ως προς την αξιολόγηση της απάντησης του μαθητή. Η διάκριση των έργων σε υποέργα παρουσιάζεται αναλυτικά και στο Παράρτημα.

Οι αρχικές κατηγορίες που ορίστηκαν ήταν «Ορθή Αξιολόγηση» και «Λανθασμένη Αξιολόγηση». Ωστόσο, κατά την ανάλυση των απομαγνητοφωνήσεων, παρατηρήθηκε ότι υπήρχαν εκπαιδευτικοί οι οποίοι άλλαζαν την αξιολόγηση τους κατά τη διάρκεια της συζήτησης. Ενώ στην αρχή αξιολογούσαν λανθασμένα, στην πορεία άλλαζαν άποψη και διόρθωναν την απάντηση τους. Δεν έλειψαν όμως και οι αντίστροφες περιπτώσεις, στις οποίες ενώ αρχικά αξιολογούσαν ορθά, στη συνέχεια κατέληγαν σε λανθασμένη αξιολόγηση. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις περιπτώσεις, οι τελικές κατηγορίες που προέκυψαν ήταν οι εξής: «Λανθασμένη», «Αρχικά Ορθή, Τελικά Λανθασμένη», «Αρχικά Λανθασμένη, Τελικά Ορθή», «Ορθή». Στον **Πίνακα 1** παρουσιάζεται η συχνότητα καθεμίας από της παραπάνω κατηγορίες ανά έργο. Σημειώνεται ότι το υποέργο Ε.3.3 του Έργου 3 (Ε3, «Ευθεία Αριθμών») δεν εξετάζεται εδώ, καθώς αφορά μια ερώτηση μαθητή και δεν απαιτεί αξιολόγηση (Για την ανάλυση αυτού του υποέργου (βλ. παράγ 4.4.3 Έργο 3 – «Πώς το ξέρουμε;»).

Πίνακας 1:

Συχνότητα των κατηγοριών απάντησης ως προς την αξιολόγηση των μαθητών

Έργο	Αξιολόγηση	Κατηγορία απάντησης				Σύνολο
		(0)	(1)	(2)	(3)	
1	E.1.1	0	0	0	15	15
	E.1.2	0	0	2	13	15
	E.1.3	7	0	2	6	15
2	E.2	1	0	0	14	15
3	E.3.1	0	1	0	14	15
	E.3.2	0	1	1	13	15
4	E.4.1	10	0	0	5	15
	E.4.2	1	0	0	14	15
	E.4.3	5	0	1	9	15
5	E.5.1	3	0	0	12	15
	E.5.2	0	0	0	15	15
	E.5.3	1	0	0	14	15
	E.5.4	1	0	0	14	15
6	E.6.1	0	0	0	15	15
	E.6.2	2	0	1	12	15
	E.6.3	5	0	0	10	15
	E.6.4	8	1	0	6	15
7	E.7.1	4	0	1	10	15
	E.7.2	11	0	0	4	15
	Σύνολο	59	3	8	215	285

Σημείωση: 0: Λανθασμένη Αξιολόγηση, 1: Αρχικά Ορθή Αξιολόγηση - Τελικά Λανθασμένη, 2: Αρχικά Λανθασμένη Αξιολόγηση - Τελικά Ορθή, 3: Ορθή Αξιολόγηση

Από τα στοιχεία του **Πίνακα 1** προκύπτει ότι η επικρατούσα κατηγορία είναι η «Ορθή Αξιολόγηση», όπως είναι αναμενόμενο από το μαθηματικό υπόβαθρο των συμμετεχόντων. Πιο συγκεκριμένα από τις 285 αξιολογήσεις που λάβαμε, οι 223 ήταν τελικά ορθές (78,25%). Ωστόσο ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αριθμός των τελικά λανθασμένων αξιολογήσεων που ανέρχεται συνολικά στις 62, δηλαδή σχεδόν το 22% των συνολικών αξιολογήσεων. Αν και κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι αυτό το ποσοστό είναι μικρό, όταν αναφερόμαστε σε απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων, καταλαβαίνουμε ότι αυτό το ποσοστό αποκτά άλλη σημασία. Παρατηρούμε ότι, από τα συνολικά 19 υποέργα, μόνο 4 απέσπασαν σωστές αξιολογήσεις από όλους τους συμμετέχοντες. Εντύπωση προκαλεί επίσης ότι σε κανένα από τα 7 έργα δεν αξιολογούν σωστά όλοι οι συμμετέχοντες. Πιο συγκεκριμένα, εντός κάθε έργου, πάντα υπάρχει τουλάχιστον ένα υποέργο στο οποίο εμφανίζονται λανθασμένες απαντήσεις, τουλάχιστον αρχικά. Εξετάζουμε με περισσότερη λεπτομέρεια τα έργα στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις τελικές απαντήσεις των συμμετεχόντων (σωστές / λανθασμένες).

Το έργο που προκάλεσε τις περισσότερες λανθασμένες αξιολογήσεις ήταν το Έργο 7 (Ε7, «Συνέχεια»). Σε αυτό το έργο οι λανθασμένες απαντήσεις ανέρχονται σε ποσοστό 50% (15 λανθασμένες σε σύνολο 30 αξιολογήσεων). Το υποέργο στο οποίο συναντάμε το μεγαλύτερο πλήθος λανθασμένων αξιολογήσεων (11 στις 15) είναι το Ε.7.2 στο οποίο ο υποθετικός φοιτητής περιγράφει τη συνέχεια ως απειρία των ενδιάμεσων σημείων. Το Ε.7.2 απέσπασε και τις περισσότερες λανθασμένες αξιολογήσεις στο σύνολο όλων των υποέργων.. Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο υποέργο αυτό, η λανθασμένη αξιολόγηση είναι η επικρατούσα κατηγορία απάντησης.

Σε πλήθος λανθασμένων αξιολογήσεων έπεται το Έργο 4 (Ε4, «Μεγαλύτερη Τιμή»), με ποσοστό 35,6% (16 λανθασμένες σε σύνολο 45 αξιολογήσεων). Το ερώτημα που προκάλεσε τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις, ήταν το υποέργο Ε.4.1 με 10 από τις 15 αξιολογήσεις αυτού του έργου να είναι λανθασμένες Πρόκειται για τη δήλωση του υποτιθέμενου μαθητή ότι η μεγαλύτερη τιμή στο (0,1) είναι ένα αριθμός πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι 1. Στο Ε.4.1, η λανθασμένη αξιολόγηση είναι επίσης η επικρατούσα κατηγορία απάντησης.

Ακολουθεί το Έργο 6 (Ε6, «Νοητικό Πείραμα»), με ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων 26,7% (16 από τις συνολικά 60 αξιολογήσεις). Σε αυτό το έργο το υποέργο

Ε.6.4 συγκεντρώνει τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις (9 στις 15 αξιολογήσεις) και αποτελεί το δεύτερο πιο απαιτητικό υποέργο στο σύνολο των υποέργων. Και στο Ε.6.4, η λανθασμένη αξιολόγηση είναι η επικρατούσα κατηγορία απάντησης. Ακολουθεί το υποέργο Ε.6.3, που αποτελεί και τη σωστή απάντηση σε αυτό το έργο (5 στις 15 αξιολογήσεις).

Παρατηρούμε επίσης ότι το Ε1 παρουσιάζει αρκετά μεγάλο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων (15,6% , 7 στις 45 αξιολογήσεις), οι οποίες οφείλονται αποκλειστικά στο υποέργο Ε.1.3. Πρόκειται για το υποέργο στο οποίο ο υποθετικός μαθητής δήλωνε ότι ένας υπολογιστής μπορεί να βρει όλους τους (άπειρους) αριθμούς σε ένα διάστημα. Στο υποέργο αυτό η διαφορά μεταξύ των σωστών και των λανθασμένων αξιολογήσεων είναι οριακή.

Στα υπόλοιπα έργα (Ε2, Ε3, Ε5) εμφανίζονται μονοψήφια ποσοστά λανθασμένων αξιολογήσεων, ενώ σε όλα τα υποέργα επικρατούσα κατηγορία είναι η ορθή αξιολόγηση. Ωστόσο, σε κανένα από αυτά τα έργα δεν υπάρχει μηδενική συχνότητα της λανθασμένης αξιολόγησης.

Στη συνέχεια, στον **Πίνακα 2**, παρουσιάζεται αναλυτικά η αξιολόγηση κάθε εκπαιδευτικού σε καθένα από τα έργα. Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζονται οι λανθασμένες αξιολογήσεις, με πορτοκαλί χρώμα παρουσιάζονται οι αρχικά ορθές αξιολογήσεις οι οποίες στη συνέχεια μετατρέπονται σε λανθασμένες, ενώ με κίτρινο χρώμα οι αρχικά λανθασμένες αξιολογήσεις που μετατρέπονται σε ορθές. Τέλος, με πράσινο χρώμα συμβολίζονται οι ορθές αξιολογήσεις.

Πίνακας 2

Προφίλ των εκπαιδευτικών, ανάλογα με την αξιολόγηση ανά έργο.

Συμμετέχοντες										Έργα									
	E1				E2		E3			E4			E5		E6			E7	
	E.1.1	E.1.2	E.1.3	E.2	E.3.1	E.3.2	E.4.1	E.4.2	E.4.3	E.5.1	E.5.2	E.5.3	E.5.4	E.6.1	E.6.2	E.6.3	E.6.4	E.7.1	E.7.2
Σ1																			
Σ2																			
Σ3																			
Σ4																			
Σ5																			
Σ6																			
Σ7																			
Σ8																			
Σ9																			
Σ10																			
Σ11																			
Σ12																			
Σ13																			
Σ14																			
Σ15																			

Σημείωση: κόκκινο: Λανθασμένη αξιολόγηση, πορτοκαλί: αρχικά ορθή αξιολόγηση – τελικά λανθασμένη αξιολόγηση, κίτρινο: αρχικά λανθασμένη αξιολόγηση – τελικά ορθή αξιολόγηση, πράσινο: Ορθή αξιολόγηση

Στον **Πίνακα 2** παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στους συμμετέχοντες ως προς το πλήθος των λανθασμένων αξιολογήσεων που κάνουν. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζοντας τις τελικώς λανθασμένες αξιολογήσεις (χρώματα κόκκινο και πορτοκαλί), βλέπουμε ότι μόνο ένας από τους συμμετέχοντες ανταποκρίθηκε ορθά στο σύνολο των αξιολογήσεων (19/19, Σ12), ακολουθούμενος από τους Σ1 και Σ15 (18/19) και τους Σ10 (17/19) και Σ9 και Σ5 (16/19). Μια ομάδα 4 συμμετεχόντων (Σ6, Σ7, Σ11, Σ14) έκανε το πολύ 5 (συγκεκριμένα, 4 ή 5) λανθασμένες αξιολογήσεις. Μια ομάδα 3 συμμετεχόντων (Σ3, Σ4, Σ8) έκανε τελικώς 6 λανθασμένες αξιολογήσεις. Οι υπόλοιποι 2 συμμετέχοντες (Σ2, Σ13) έκαναν πάνω από 5 λανθασμένες αξιολογήσεις, με τον Σ13 να δίνει τις περισσότερες (8). Από τον **Πίνακα 2** φαίνεται επίσης ότι, εν γένει, οι συμμετέχοντες διατήρησαν τις αρχικές τους αξιολογήσεις, είτε ήταν ορθές, είτε όχι. Ωστόσο, 6 εκπαιδευτικοί, αναθεώρησαν την αρχικά λανθασμένη αξιολόγησή τους σε μία (Σ1, Σ9, Σ13, Σ15) ή δύο περιπτώσεις (Σ2, Σ5).

Αξίζει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν 2 συμμετέχοντες που αξιολόγησαν στην αρχή σωστά και, στη συνέχεια, άλλαξαν την αρχική τους απάντηση αξιολογώντας τελικά λάθος. Πιο συγκεκριμένα, ο Σ3 αξιολογεί αρχικά ορθά, αλλά καταλήγει σε λάθος στα υποέργα Ε.3.1 και Ε.3.2. Παρόμοια, ο Σ2 αλλάζει την αρχικά ορθή του αξιολόγηση σε λανθασμένη στο Ε.6.4.

Τέλος παρατηρώντας τις δύο τελευταίες στήλες του **Πίνακα 2**, δηλαδή τα υπόεργα Ε.7.1, Ε.7.2, βλέπουμε ότι 13 από τους συνολικά 15 εκπαιδευτικούς αξιολογούν λανθασμένα τουλάχιστον ένα από τα δύο υποέργα. Αυτή η εικόνα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί συγχέουν τις έννοιες της πυκνότητας και της συνέχειας.

4.2 Τεκμηρίωση της Αξιολόγησης

Σε κάθε έργο ζητήσαμε από τους συμμετέχοντες όχι μόνο να αξιολογήσουν τις απαντήσεις των μαθητών των σεναρίων, αλλά και να τεκμηριώσουν τον τρόπο με τον οποίο κατέληξαν σε αυτή την αξιολόγηση. Προκειμένου να καταλήξουμε στο είδος της τεκμηρίωσης που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί χρειάστηκε σε κάποιες περιπτώσεις, να κοιτάξουμε και το σκέλος της ανατροφοδότησης.

Οι τεκμηριώσεις των εκπαιδευτικών καταγράφτηκαν αρχικά ανά υποέργο. Στη φάση της εξοικείωσης με τα δεδομένα διαπιστώθηκε ότι σε ορισμένα έργα η ίδια τεκμηρίωση αφορούσε όλα τα υποέργα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η τεκμηρίωση καταγράφτηκε και παρουσιάζεται παρακάτω ανά έργο. Από τη φάση της εξοικείωσης έγινε εμφανής η διάκριση ανάμεσα στον τρόπο τεκμηρίωσης, όταν οι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν ότι γνώριζαν εκ των προτέρων ποια είναι η σωστή απάντηση, και όταν δεν το γνώριζαν. Στην πρώτη περίπτωση η τεκμηρίωση γινόταν με δήλωση του θεωρούμενου ως μαθηματικού δεδομένου που στήριζε την αξιολόγησή τους. Στη δεύτερη, η απόπειρα τεκμηρίωσης ήταν σύμφυτη με την απόπειρα αξιολόγησης. Οι αρχικοί κωδικοί που χρησιμοποιήθηκαν ήταν «δήλωση» και «απόπειρα απόδειξης», οι οποίοι στη συνέχεια διαφοροποιήθηκαν, καταλήγοντας στις εξής 6 κατηγορίες τεκμηριώσεων: «Χωρίς Τεκμηρίωση», «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Ορθή», «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Λανθασμένη», «Απόπειρα Ανάκλησης Πληροφορίας», «Επαγωγικός Συλλογισμός», «Απόπειρα Παραγωγικού Συλλογισμού». Η Επίκληση Προσωπικής Γνώσης αφορά είτε γνωστές – δεδομένες μαθηματικές ιδέες και συμπεράσματα («Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Ορθή»), είτε προσωπικές γνώσεις και πεποιθήσεις των συμμετεχόντων οι οποίες δεν είναι σωστές («Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Λανθασμένη»).

Στην κατηγορία «Απόπειρα Ανάκλησης Πληροφορίας» συμπεριελήφθησαν οι περιπτώσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός προσπάθησε να ανακαλέσει γνώσεις που έχει, όπως θεωρήματα και πορίσματα, χωρίς ωστόσο να δώσει παραπάνω εξηγήσεις.

Στην κατηγορία «Πλημμελής Επαγωγικός Συλλογισμός» συμπεριελήφθησαν οι περιπτώσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός προέβη στην τεκμηρίωση με τη χρήση παραδειγμάτων και μόνο. Οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν 1 – 2 παραδείγματα και έπειτα περνούν στη γενίκευση (εξ ου και η ονομασία «πλημμελής χρήση επαγωγικού συλλογισμού»).

Στην κατηγορία «Απόπειρα Παραγωγικού Συλλογισμού» κατατάχθηκαν οι τεκμηριώσεις των εκπαιδευτικών που αναγνωρίζοντας τους περιορισμούς του επαγωγικού συλλογισμού, χρησιμοποιούν στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού. Στον πίνακα που ακολουθεί **(Πίνακας 3)** παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια παραδείγματα ανά κατηγορία.

Τέλος, στην κατηγορία «Χωρίς Τεκμηρίωση» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός είτε εξέφραζε την αδυναμία τεκμηρίωσης, είτε παρέβλεπε το σκέλος της ερώτησης που αφορούσε την τεκμηρίωση.

Πίνακας 3

Παραδείγματα Τεκμηρίωσης της Αξιολόγησης

Κατηγορίες	Παραδείγματα
Χωρίς Τεκμηρίωση ΧΤ	"*Εγώ θα έλεγα τον μαθητή Γ*", Σ2, Ε.1 "*Ε όλα σωστά*", Σ10, Ε.5 *«Ε ναι, το δεύτερο...Καλά δεν ξέρω αν είμαι και εγώ σωστή. Μπορεί να λέω χαζομάρες»*, Σ11, Ε.2
Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Ορθή ΕΠΓΟ	"*Είμαι κοντά στο τρίτο, αλλά επειδή είναι άπειροι και δεν μπορούν να μετρηθούν, θεωρώ ότι όλες είναι λάθος.*" , Σ1, Ε.1
Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Λανθασμένη ΕΠΓΛ	"*Εεεε… οκ… Αυτό που έχει απαντήσει για το 4/8 έχει μία λογική το ότι επειδή γίνεται απλοποίηση πάνω στον αριθμό δεν είναι ανάμεσα, αλλά επειδή ζητάει ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8 και επειδή μιλάμε για κλάσματα, ο μοναδικός που υπάρχει είναι το 4/8 και νομίζω ότι δεν υπάρχει λόγος να μιλήσουμε για απλοποίηση, να σου πω την αλήθεια.*", Σ13, Ε.2
Απόπειρα Ανάκλησης Πληροφορίας	"*Τώρα ισχύει ένας κανόνας, αλλά δεν ξέρω*

ΑΑΠ	*αν είναι σωστό αυτό που θυμάμαι. Ε ανάμεσα από δύο άρρητους δεν υπάρχει πάντα ένας ρητός; Η ανάμεσα από δύο ρητούς δεν υπάρχει πάντα ένας άρρητος; Δεν τα θυμάμαι ρε Θεοδώρα. Θα με κάνεις μετά από εδώ να ψάξω θεωρία αριθμών*", Σ5, Ε.5
Πλημμελής Επαγωγικός Συλλογισμός ΕΠ	*"Βασικά δεν έκανα κάτι. Πήγα να το λύσω λίγο θεωρητικά, αλλά μετά σκέφτηκα ότι γιατί να το λύσω θεωρητικά; Πάρε το √2 και το √3. Είναι και οι δύο άρρητοι και ανάμεσά τους δεν έχει ρητό γιατί βγαίνει 1,2 και 1 κόμμα κάτι, πόσο είναι το √3." Σ8, Ε.5*
Απόπειρα Παραγωγικού Συλλογισμού ΑΠΣ	"*Και πες ότι παίρνουμε έναν ο οποίος έχει διαφορά με τον π, ουσιαστικά στο τελευταίο τελευταίο, τελευταίο ψηφίο, αν το μετρήσουμε με 30 δεκαδικά ξέρω εγώ. (μεγάλη παύση) Εκεί πέρα δεν θα υπάρχει. Αλλά δεν μπορούμε να το αποδείξουμε έτσι. Θέλουμε πιο χειροπιαστό παράδειγμα. Ωραία. Ξανά. (πολλή μεγάλη παύση) Πω ρε, θέλω θεωρητικές αποδείξεις για το σκεφτώ. (πολλή μεγάλη παύση) Πρέπει να ξανά πιάσω τα μαθηματικά αυτά. Ωραία. Ας πούμε δύο άρρητους όπως, το π ας πούμε και έναν πολύ διπλανό του άρρητο; (μικρή παύση) Δεν μπορώ να αποδείξω έτσι ότι δεν θα υπάρχει ρητός. (παύση) Έστω ότι υπάρχει λοιπόν ρητός. (παύση)*", Σ5, Ε.5

Στον **Πίνακα 4** που ακολουθεί παρουσιάζεται η συχνότητα καθεμίας από τις παραπάνω κατηγορίες ανά έργο. Παρατηρήθηκε ότι στα έργα Ε1, Ε2, Ε3, Ε4 και Ε7 οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν έναν κοινό τρόπο τεκμηρίωσης για όλα τα υποέργα, γι' αυτό και επιλέξαμε να εξεταστούν και να αναλυθούν ανά έργο όχι ανά υπέργο. Αντίθετα, τα Έργα 5 («Πυκνή διάταξη ρητών – αρρήτων») και 6 («Νοητικό Πείραμα»), επιλέξαμε να εξεταστούν και να αναλυθούν ανά υποέργο καθώς παρατηρήθηκε διαφοροποίηση από πρόταση σε πρόταση αναφορικά με τον τρόπο τεκμηρίωσης της αξιολόγησης.

Πίνακας 4

Τεκμηρίωση της Αξιολόγησης: Συχνότητες των κατηγοριών απάντησης ανά Έργο – Υποέργο

Έργα	Τρόπος Σκέψης						Σύνολο
	ΧΤ	ΕΠΓΟ	ΕΠΓΛ	ΑΑΠ	ΕΠ	ΑΠΣ	
Ε.1	3	8	4	0	0	0	15
Ε.2	8	5	2	0	0	0	15
Ε.3	0	11	1	3	0	0	15
Ε.4	0	5	10	0	0	0	15
Ε.5.1	1	5	0	2	6	1	15
Ε.5.2	0	4	1	1	7	2	15
Ε.5.3	2	4	0	2	6	1	15
Ε.5.4	1	4	2	3	4	1	15
Ε.6.1	3	10	2	0	0	0	15
Ε.6.2	3	6	6	0	0	0	15
Ε.6.3	8	4	3	0	0	0	15
Ε.6.4	3	3	9	0	0	0	15
Ε.7	3	3	8	1	0	0	15
Σύνολο	35	72	48	12	23	5	195

Σημείωση: *ΧΤ: «Χωρίς Τεκμηρίωση», ΕΠΓΟ: «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Ορθή», ΕΠΓΛ: «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Λανθασμένης». ΑΑΠ: «Απόπειρα Ανάκλησης Πληροφορίας», ΕΠ: «Πλημμελής Επαγωγικός Συλλογισμός», ΑΠΣ: «Απόπειρα Παραγωγικού Συλλογισμού»*

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι η επικρατούσα κατηγορία είναι η Επίκληση Προσωπικής Γνώσης- Ορθή (36,92 %, 72 σε σύνολο 195 απαντήσεων). Η δεύτερη συχνότερη κατηγορία είναι η Επίκληση Προσωπικής Γνώσης –Λανθασμένη (24,6%, 48 σε σύνολο 195). Ακολουθεί η κατηγορία «Πλημμελής Επαγωγικός Συλλογισμός» (23 σε σύνολο 195 απαντήσεων) που ανέρχεται σε ποσοστό 11,79%. Ελάχιστες είναι οι περιπτώσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες αποπειράθηκαν να παράξουν μια απόδειξη, ή έστω δήλωσαν ότι απαιτείται μια απόδειξη.

Πιο αναλυτικά, στο Έργο 1(«Ενδιάμεσοι στο 1,1 και στο 1,3») οι 8 από τις 15 τεκμηριώσεις γίνονται με επίκληση ορθής προσωπικής γνώσης των συμμετεχόντων και, συγκεκριμένα, γνώση για την απειρία των αριθμών σε οποιοδήποτε διάστημα πραγματικών. Λανθασμένη προσωπική γνώση παρατηρήθηκε στις τεκμηριώσεις 4 εκπαιδευτικών. Δύο από αυτούς εμφανίστηκαν να συγχέουν διαφορετικά αριθμητικά σύνολα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω, στο οποίο ο εκπαιδευτικός αρχικά ονομάζει Z «το σύνολο των δεκαδικών» και – πιο σημαντικό- θεωρεί ότι υπάρχουν μιγαδικοί ως ενδιάμεσοι στα διαστήματα:

> "*-Σ: Όχι ότι τα άλλα είναι λάθος. Αναλόγως σε ποιο σύστημα βρισκόμαστε. Αν βρισκόμαστε ας πούμε στο δεκαδικό….*
> *-Ε: Δηλαδή;*
> *-Σ: Δηλαδή αν το σύνολο αριθμών είναι το Z, τότε το B είναι σωστό ότι είναι το 1,12 εεεε το 1,13 και τα σχετικά.*
> *-Ε: Γιατί στο σύνολο των Z να είναι σωστό;*
> *-Σ: (γέλιο) Όχι; Γιατί είναι δεκαδικοί.*
> *-Ε: Το σύνολο των Z τι είναι;*
> *-Σ: ωχ οι ακέραιοι. Λάθος. (γέλιο). Ναι αναλόγως σε ποιο σύστημα βρισκόμαστε. Τώρα αν μετρήσουμε όλους τους αριθμούς, ό,τι υπάρχει. Και τους μιγαδικούς και τα σχετικά, το γ είναι το σωστό γιατί υπάρχουν άπειροι αριθμοί στο ενδιάμεσο. Μπορεί να είναι οτιδήποτε. Μπορεί να είναι ακόμη και μιγαδικοί.*" (Σ6)

Δύο εκπαιδευτικοί εμφανίζονται να θεωρούν ότι ένας αλγόριθμος μπορεί να υπολογίσει όλους τους ενδιάμεσους αριθμούς σε πεπερασμένο χρόνο. Χαρακτηριστική διατύπωση η εξής:

> "*εεεε… και συμφωνώ στο ότι ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. Ένας ο οποίος θα έχει προγραμματιστεί από κάποιον μαθηματικό τέλος πάντων, και θα τρέξει έναν αλγόριθμο πχ για να τους βρει όλους. Εκεί κλίνω*" (Σ7)

Στο Έργο 2, 8 από τις συνολικά 15 αξιολογήσεις μένουν ατεκμηρίωτες (ΧΤ). Οι τεκμηριώσεις με επίκληση προσωπικής ορθής γνώσης βασίζονται στη γνώση για την απειρία των ενδιάμεσων και ιδιότητες των ισοδύναμων κλασμάτων. Ωστόσο εντύπωση προκαλούν οι απαντήσεις 2 συμμετεχόντων, οι οποίοι επικαλούνται λανθασμένες προσωπικές απόψεις για την τεκμηρίωση της αξιολόγησης που έδωσαν. Μάλιστα ο ένας έχει αξιολογήσει σωστά αλλά για τους λάθος λόγους όπως φαίνεται απ' τα λεγόμενά του. Πιο συγκεκριμένα:

> "*εεεε... κοίταξε σε κλάσματα που έχουμε κλάσματα με ακέραιο αριθμητή και ακέραιο παρονομαστή εεεε οκ ναι δεν υπάρχει ανάμεσα, αλλά αν τους κάνουμε δεκαδικό ναι, υπάρχουν πάρα πολλοί αριθμοί. Ο 3/8 και το 5 δια 8 αν γίνουν ας πούμε δεκαδικοί υπάρχουν ανάμεσα πάρα πολλοί αριθμοί*." (Σ7)

> "*εεε... οκ. Αυτό που έχει απαντήσει για το 4/8 έχει μία λογική το ότι επειδή γίνεται απλοποίηση πάνω στον αριθμό δεν είναι ανάμεσα, αλλά επειδή ζητάει ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8 και επειδή μιλάμε για κλάσματα, ο μοναδικός που υπάρχει είναι το 4/8 και νομίζω ότι δεν υπάρχει λόγος να μιλήσουμε για απλοποίηση. Να σου πω την αλήθεια*." (Σ13)

Στο Έργο 3 («Ευθεία των πραγματικών») η πλειοψηφία των συμμετεχόντων (11 από τους 15) τεκμηριώνουν την αξιολόγησή τους επικαλούμενοι ορθά ότι «όλοι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν στην ευθεία», ενώ τρεις προσπαθούν να ανακαλέσουν πώς γνωρίζουν αυτό το δεδομένο. Για παράδειγμα:

> "*... ε ναι, το δεύτερο ψηφίζω..... Α δεν ξέρω αν αποδεικνύεται! Καλά δεν ξέρω αν είμαι και εγώ σωστή. Μπορεί να λέω χαζομάρες.... Ναι.. γιατί και το √2 είχαμε, εγώ το θυμάμαι....*" Σ11

Αναφορικά με το Έργο 4 («Μεγαλύτερη Τιμή») η πλειοψηφία των απαντήσεων των συμμετεχόντων (10 στις 15) ανήκουν στην κατηγορία «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Λανθασμένη». Μάλιστα το έργο αυτό συγκεντρώνει τη δεύτερη μεγαλύτερη συχνότητα απαντήσεων αυτής της κατηγορίας (10 σε σύνολο 48 απαντήσεων). Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι εκπαιδευτικοί συνδυάζουν την (ορθή) γνώση για τα ανοιχτά διαστήματα, με τη λανθασμένη αντίληψη ότι υπάρχει η μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής στο διάστημα. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

> *"...όταν έχουμε x ανήκει είπαμε στο ανοιχτό (0,1). Ωραία, ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει. Μεγαλύτερη τιμή θα είναι αυτή που θα είναι πλησιέστερα στο 1, χωρίς να παίρνει τη τιμή 1."*(Σ5)

> "*Και με τους τρεις συμφωνώ, απλά θα έλεγα ότι πιο πολύ θα συμφωνήσω με τον μαθητή Α, γιατί καταρχάς, αφού μιλάμε για μαθητές Α' Λυκείου γνωρίζουν για ανοιχτά και κλειστά σύνολα. Από τη στιγμή που μιλάμε για ανοιχτό σύνολο, σίγουρα τη τιμή 0 και 1 δεν μπορεί να την πάρει το x σίγουρα. Οπότε μπορούμε να ξεκινήσουμε από το 0,1 μέχρι το 0,999999…. Τώρα και η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει η μεταβλητή x σίγουρα θα ήταν αυτή που θα είναι πολύ κοντά στο 1, θα μπορούσε…."*(Σ13)

Το Έργο 5 («Πυκνή διάταξη Ρητών – Αρρήτων») επιλέξαμε να εξεταστεί ανά υποέργο καθώς οι συμμετέχοντες τεκμηρίωναν ξεχωριστά για κάθε υποέργο. Ο λόγος είναι ότι σε αυτό το έργο οι συμμετέχοντες εξέτασαν μία-μία τις δηλώσεις ξεχωριστά, καθώς δεν είχαν εξ αρχής διαθέσιμη απάντηση. Παρά ταύτα, ο τρόπος με τον οποίο προσέγγισαν την απάντηση είχε πολλές ομοιότητες σε όλα τα υποέργα. Πράγματι, οι συμμετέχοντες, κατά κύριο λόγο, βασίστηκαν σε παραδείγματα συγκεκριμένων διαστημάτων και προσπάθησαν να βρουν ενδιάμεσους αριθμούς, ρητούς ή άρρητους.

Στις πιο πολλές περιπτώσεις, η δυνατότητα εύρεσης ενδιάμεσων αριθμών σε συγκεκριμένο διάστημα, ήταν αρκετή ώστε οι συμμετέχοντες να δεχτούν ότι είναι πάντα εφικτό να βρεθούν ενδιάμεσοι αριθμοί. Επομένως, η κατηγορία που εμφανίζει τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι αυτή του «Πλημμελούς Επαγωγικού Συλλογισμού» καθώς εκεί ανήκουν 23 από τις συνολικά 60 απαντήσεις. Το έργο αυτό συγκεντρώνει όλες απαντήσεις τις κατηγορίας αυτής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τεκμηρίωσης με πλημμελή επαγωγικό συλλογισμό είναι το εξής:

> *"Λοιπόν, κάτσε να το πάμε λίγο λογικά. Ανάμεσα σε δύο άρρητους, άρρητος, πες ότι είναι, όχι πες είναι το √3 πχ. √3 και √5. Ναι… εε…. Περίμενε. Να πάρω δύο*

άρρητους αριθμούς √3, √4 είναι το 2…Το β σωστό μου φαίνεται. Σωστό θα το βάλω. Είναι πάντα εφικτό ανάμεσα σε άρρητους αριθμούς να βρεθεί ένας ρητός." (Σ14)

Σε αυτό το έργο συναντάμε και τη μεγαλύτερη συχνότητα «Απόπειρα Ανάκλησης Πληροφορίας» 8 από τις συνολικά 12 απαντήσεις σε αυτή την κατηγορία. Συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες προσπαθούν να θυμηθούν θεωρήματα που έχουν συναντήσει κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το εξής:

"*Αυτό κάπου το έχω ακούσει στη σχολή. Δεν θυμάμαι τώρα που. Κάπου το έχω μάθει. Δεν ξέρω αν είναι σωστό ή λάθος και αν θυμάμαι καλά.* (…) *Κάτσε (παύση). Ναι μωρέ άντε, όλα σωστά είναι.*" (Σ9)

Τέλος σε αυτό το έργο συναντάμε όλες τις τεκμηριώσεις (συνολικά 5) στις οποίες έγινε προσπάθεια παραγωγικού συλλογισμού (ΑΠΣ). Σε αυτές τις περιπτώσεις οι συμμετέχοντες είτε διατύπωσαν επιχειρήματα για τη γενική περίπτωση, είτε απλώς αναγνώρισαν τους περιορισμούς του επαγωγικού συλλογισμού, ή και αποπειράθηκαν να παράξουν οι ίδιοι μια απόδειξη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης είναι το εξής:

"*Ναι αν πάρουμε δύο ρητούς αριθμούς και βρούμε πάλι το άθροισμά τους δια δύο, και αυτός πάλι ένας ρητός δε θα είναι; Πάντα. Ωπα! Ψέματα! περίμενε! Σωστό είναι όχι λάθος.*" (Σ5)

Αξίζει να σημειωθεί ότι ενδείξεις παραγωγικού συλλογισμού στην τεκμηρίωση υπήρχαν και σε περιπτώσεις που η πρόταση που θεωρούσε αληθής ο συμμετέχων ήταν, στην πραγματικότητα, ψευδής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω, στο οποίο ο εκπαιδευτικός θεωρεί αληθές (και προσπαθεί να αποδείξει) ότι δεν υπάρχει πάντα ρητός ανάμεσα σε δύο άρρητους:

"*Και πες ότι παίρνουμε έναν ο οποίος έχει διαφορά με τον π, ουσιαστικά στο τελευταίο τελευταίο, τελευταίο ψηφίο, αν το μετρήσουμε με 30 δεκαδικά ξέρω εγώ. (μεγάλη παύση) Εκεί πέρα δεν θα υπάρχει. Αλλά δεν μπορούμε να το* *αποδείξουμε έτσι. Θέλουμε πιο χειροπιαστό παράδειγμα. Ωραία. Ξανά. (πολλή μεγάλη παύση) Πω ρε, θέλω θεωρητικές αποδείξεις για το σκεφτώ. (πολλή μεγάλη παύση) Πρέπει να ξαναπιάσω τα μαθηματικά αυτά. Ωραία. Ας πούμε δύο άρρητους όπως, το π ας πούμε και έναν πολύ διπλανό του άρρητο;(μικρή παύση) Δεν μπορώ να αποδείξω έτσι ότι δεν θα υπάρχει ρητός. (παύση) Έστω ότι υπάρχει λοιπόν ρητός. (παύση)... Γιατί τώρα που το σκέφτομαι, δεν μπορώ να αποδείξω με αντιπαράδειγμα ότι δεν υπάρχει. Δεν μου έρχεται κάτι στο μυαλό για αυτό. Αν και νομίζω ότι είναι λάθος, παρ' όλα αυτά, δεν μου έρχεται στο μυαλό κάποιο αντιπαράδειγμα για να το πω.*" (Σ6)

Όσον αφορά το Έργο 6 («Νοητικό Πείραμα»), από τα στοιχεία του **Πίνακα 4** προκύπτει ότι, σε σύνολο 60 τεκμηριώσεων, 17 (28,3%) ανήκουν στην κατηγορία «Χωρίς Τεκμηρίωση», 23 (38,3%) στην «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Ορθή» και 20 (33,3%) στην κατηγορία «Επίκληση Παγιωμένης Γνώσης – Λανθασμένη».

Στην κατηγορία «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Ορθή», οι τεκμηριώσεις βασίστηκαν κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι η ευθεία είναι μονοδιάστατο αντικείμενο. Για παράδειγμα:

"*θεωρώ τη τρίτη σωστή. Γιατί συμπεριλαμβάνει και τη μονή διάσταση της ευθείας που όσο και να μεγεθύνεις δεν αυξάνεται σε μέγεθος στο σημείο. Δεν έχει πάχος.*" (Σ12)

Στην κατηγορία «Επίκληση Παγιωμένης Γνώσης –Λανθασμένη», οι τεκμηριώσεις βασίζονταν στην αντιμετώπιση των σημείων ή της ευθείας ως φυσικά αντικείμενα.

"*Εεε... νομίζω μου αρέσει πιο πολύ η τελευταία, γιατί το έχει κάνει σκούρο. Μου αρέσει γιατί νομίζω δίνει την αίσθηση του πόσο πυκνό είναι, ίσως.*", Σ4

"*Ναι... εγώ δεν θεωρώ ότι είναι κάποια από αυτές, γιατί όταν παίρνουμε μεγεθυντικό φακό και το βάζουμε από κάπου από πάνω, το κομμάτι που βάζουμε στο μεγεθυντικό φακό, το φέρνει λίγο πιο πάνω σε σχέση με τη γραμμή σε εκείνο το σημείο. Αυτό. Εντάξει, δεν είναι ότι ασχολούμαι με μεγεθυντικό φακό κάθε μέρα αλλά έτσι το έχω στο μυαλό μου.*", Σ14

Τέλος, στο Έργο 7 («Συνέχεια») η επικρατούσα κατηγορία είναι η «Επίκληση Προσωπικής Γνώσης – Λανθασμένη». 8 από τις συνολικά 15 τεκμηριώσεις που λαμβάνουμε σε αυτό το έργο προέρχονται με αυτό τον τρόπο. Αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο, καθώς η πλειοψηφία των συμμετεχόντων συμφωνεί με τον έναν, ή και τους δύο υποθετικούς φοιτητές. Μεγάλο μέρος των τεκμηριώσεων εστιάζει στο λόγο των δύο φοιτητών. Για παράδειγμα:

> "*Λοιπόν... (παύση) Θα προτιμούσα του φοιτητή 2. Μου φαίνεται πιο... καλύτερα ορισμένη ας πούμε για το μαθηματικό τμήμα.*" (Σ4)

> "*Ο πρώτος έχει δώσει απάντηση λυκείου, ο δεύτερος λίγο πιο εμπεριστατωμένη ας πούμε άποψη...Ναι κάτσε να διαβάσω ξανά γιατί διάβασα γρήγορα. (Διαβάζει ξανά). Δεν μου αρέσει η γλώσσα που χρησιμοποιεί, αλλά εν μέρη ναι. Ο 2 είναι τέρμα σωστός. Ότι δεν έχει τρύπες.*" (Σ8)

4.3 Εξήγηση της λανθασμένης απάντησης του μαθητή (Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών)

Προκειμένου να κατηγοριοποιηθούν οι εξηγήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τις λανθασμένες απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές, καταγράψαμε σε πρώτο στάδιο όλες τις αξιολογήσεις των εκπαιδευτικών ανά έργο. Στη συνέχεια, κατηγοριοποιήσαμε τις εξηγήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί για τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, εφόσον είχαν αξιολογήσει σωστά την απάντηση. Στο στάδιο αυτό παρατηρήσαμε μια μεγάλη ποικιλία εξηγήσεων από πλευράς των εκπαιδευτικών, δεδομένης και της ποικιλίας των έργων. Κατηγοριοποιήσαμε τις εξηγήσεις αυτές σε 3 αδρές κατηγορίες, οι οποίες δεν αφορούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του περιεχομένου της κάθε εξήγησης: «Καμία Εξήγηση / Αδυναμία Εξήγησης», «Μη ουσιαστική εξήγηση», «Ουσιαστική Εξήγηση». Το περιεχόμενο των εξηγήσεων σχολιάζεται παρακάτω ανά έργο. Στον **Πίνακα 5** που ακολουθεί, παρουσιάζεται αναλυτικά η κατανομή των εξηγήσεων των εκπαιδευτικών, σε αυτές τις 3 κατηγορίες.

Στην κατηγορία «Καμία Εξήγηση / Αδυναμία Εξήγησης» συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων που είτε εξέφραζαν οι ίδιοι την αδυναμία τους να εξηγήσουν, είτε απέφευγαν να δώσουν εξήγηση.

Στην κατηγορία «Μη ουσιαστική εξήγηση», συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες ο καθηγητής είτε έδινε την απάντηση του μαθητή παραποιημένη, είτε υποστήριζε ότι “ Δεν το έχει καταλάβει / Δεν το έχει διδαχθεί / Δεν ξέρει / δεν έχει το μαθηματικό υπόβαθρο σε αυτή την τάξη”. Σε αυτή την κατηγορία επίσης, συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις του τύπου “απάντησε στη τύχη”, “είναι επιπόλαιο λάθος”, “ξέχασε”, “βιάστηκε”, “είναι έξυπνος”, “δεν είναι καλός μαθητής”, “δεν το σκέφτηκε”.

Στην κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση», συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι καθηγητές προσπάθησαν να καταλάβουν και να ερμηνεύσουν ουσιαστικά τον τρόπο που σκέφτηκε ο μαθητής και κατέληξε στην απάντησή του. Σε αυτή την κατηγορία συμπεριλάβαμε επίσης και τις απαντήσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός θεώρησε ότι ο μαθητής σκέφτηκε με τη χρήση παραδειγμάτων.

Στον **Πίνακα 5** που ακολουθεί παρουσιάζονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα των κατηγοριών αυτών.

Πίνακας 5

Παραδείγματα Κατηγοριών Εξήγησης

Κατηγορίες	Παραδείγματα
«Καμία Εξήγηση / Αδυναμία Εξήγησης»	*"Τι εννοεί.... 0,6 και το άλλο είναι και το 5/8 είναι... Τώρα εδώ πέρα χάθηκα τι θέλει να πει ο ποιητής. Πώς το σκέφτηκε. Δεν ξέρω πως το σκέφτηκε*" (Σ2, Έ2)
«Μη ουσιαστική Εξήγηση»	"*εεε... ο γάμα... ο γάμα είναι ο γάμα... πάνω από ένα δισεκατομμύριο..."* (Σ11,Έ1, δίνει παραποιημένη την απάντηση του μαθητή) "*Για εμένα δεν έχει καταλάβει, γιατί θα έπρεπε είτε να προσπαθήσει να απλοποιήσει....*" (Σ3, Ε2) "*Είναι μία επιπόλαιη απάντηση που μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ο ένας είναι το υπόβαθρο γενικώς, ο δεύτερος είναι η επιπολαιότητα*" (Σ1, Ε2)
«Ουσιαστική Εξήγηση»	"*Εεε... πιστεύω ότι ο καθένας πήρε και όρισε το δικό του πεδίο, δηλαδή ο πρώτος έβαλε εεε... έκανε τη στρογγυλοποίηση ας πούμε μέχρι το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, δηλαδή λέει 1,1 και θα το κρατήσει ως εκεί, μέχρι εκείνη τη μονάδα επομένως μετά λέει ο 1,2. Μετά ο άλλος που λέει 1,12 1,13 1,14 νομίζω ότι χρησιμοποίησε την ίδια λογική απλά συν ένα δεκαδικό ψηφίο...*" (Σ4, Ε1)

Στον **Πίνακα 6** που ακολουθεί παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των παραπάνω 3 κατηγοριών, ανά έργο. Με Α συμβολίζουμε την κατηγορία «Καμία Εξήγηση / Αδυναμία Εξήγησης», με Β συμβολίζουμε την κατηγορία «Μη ουσιαστική Εξήγηση» και με Γ την κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση». Στον πίνακα συμπεριελήφθησαν μόνο τα υποέργα τα οποία αφορούν λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών (14 από τα 19 υποέργα).

Πίνακας 6

Κατηγορίες εξηγήσεων – Συχνότητα ανά έργο

Έργα	Κατηγορίες			Σύνολο
	Α	Β	Γ	
Ε.1.1	2	7	6	15
Ε.1.2	2	8	5	15
Ε.1.3	5	2	1	8
Ε.2	1	2	11	14
Ε.3.1	14	0	0	14
Ε.4.1	2	2	1	5
Ε.4.2	4	1	9	14
Ε.4.3	4	2	4	10
Ε.5.1	3	3	6	12
Ε.5.4	4	2	8	14
Ε.6.1	6	0	9	15
Ε.6.2	6	0	7	13
Ε.6.4	2	2	2	6
Ε.7.1	1	3	7	11
Ε.7.2	1	1	2	4
Σύνολο	57	35	78	170

Σημείωση: Α:«Καμία Εξήγηση / Αδυναμία Εξήγησης», Β: «Μη Ουσιαστική Εξήγηση», Γ: «Ουσιαστική Εξήγηση»

Παρατηρώντας τον **Πίνακα 6** βλέπουμε ότι οι περισσότερες απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση»(45,88%). Ωστόσο ένα ποσοστό εξηγήσεων της τάξης του 33,53% ανήκει στην κατηγορία «Αδυναμία Εξήγησης / Καμία Εξήγηση», ενώ ένα ποσοστό της τάξης του 20,6 % (35 στις 170) ανήκει στην κατηγορία «Μη ουσιαστική Εξήγηση». Ενώ λοιπόν, η «Ουσιαστική εξήγηση» είναι η επικρατούσα κατηγορία, οι δύο άλλες κατηγορίες μαζί την υπερβαίνουν σε συχνότητα.

Το έργο που δυσκόλεψε περισσότερο τους συμμετέχοντες φαίνεται να είναι το Έργο 3 (Ευθεία Αριθμών»), και πιο συγκεκριμένα η ερμηνεία του τρόπου σκέψης του Μαθητή Α (Ε.3.1) («Ναι! Μπορούμε να τους τοποθετήσουμε όλους εκτός από το 0,888... και το √2 + √5.»), καθώς και οι 14 εκπαιδευτικοί που αξιολόγησαν σωστά την απάντηση του δεν έδωσαν κάποια εξήγηση, είτε δήλωσαν ότι δεν μπορούν να εξηγήσουν, είτε απλά το απέφυγαν. Αντίστοιχα το μεγαλύτερο πλήθος ουσιαστικών εξηγήσεων παρουσιάζεται στο Έργο 2 («Ενδιάμεσοι στο (3/8, 5/8)»). Οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να αντιλαμβάνονται τον τρόπο σκέψης του μαθητή στο συγκεκριμένο έργο. Επισημαίνουν ότι “βλέπει” ξεχωριστά τους όρους του κλάσματος και τους αντιμετωπίζει σαν φυσικούς αριθμούς. Κρίνουμε λοιπόν, ότι κατανοούν την ύπαρξη της “προκατάληψης του φυσικού αριθμούς”, χωρίς ωστόσο να την κατονομάζουν. Στη συνέχεια παραθέτουμε εκτεταμένα παραδείγματα ουσιαστικών εξηγήσεων.

Στο Έργο 1 (Ε1,«Ενδιάμεσοι στο (1,1, 1,3)»), οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν αφορούσαν τον τρόπο αντιμετώπισης των δεκαδικών αριθμών ως φυσικούς, αλλά και την κατανόηση της έννοιας του απείρου:

> “*Εεε... πιστεύω ότι ο καθένας πήρε και όρισε το δικό του πεδίο, δηλαδή ο πρώτος έβαλε εεε... έκανε τη στρογγυλοποίηση ας πούμε μέχρι το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, δηλαδή λέει 1,1 και θα το κρατήσει ως εκεί, μέχρι εκείνη τη μονάδα επομένως μετά λέει ο 1,2. Μετά ο άλλος που λέει 1,12 1,13 1,14 νομίζω ότι χρησιμοποίησε την ίδια λογική απλά συν ένα δεκαδικό ψηφίο...*” Σ4

> “*Ε ο πρώτος ρε παιδί μου σκέφτηκε ότι μετά το 1,1 πως να το πω, στο δεκαδικό μέρος, μετά το 1 υπάρχει το 2 και μετά το 3. Άρα ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 υπάρχει το 1,2. Ο άλλος, πήρε δύο ψηφία στο δεκαδικό μέρος, δέκατα και εκατοστά.*” Σ5

> “*Γιατί του δίνω εγώ 1,1 και 1,3 και από το 1 μέχρι το 3 υπάρχει μόνο το 2. Οπότε θα πω το 1,2.*” Σ9

"*Φαντάζομαι ότι ο πρώτος μαθητής το σκέφτηκε σαν να είναι το 11 και το 13 και απλά είδε το κόμμα και σκέφτηκε ότι το 12 θα είναι ανάμεσά τους. Για αυτό είπε το 1,2.*" Σ10

"Εεε.. *ο τρίτος σκέφτηκε ότι υπάρχουν άπειροι, αλλά το γεγονός ότι λέει ότι είναι πάνω από ένα δισεκατομμύριο, βάζει κάποιο φράγμα, πάει να τους μετρήσει, δεν νομίζω ότι η έννοια του απείρου είναι κατανοητή ακόμη και σε αυτόν που είναι πιο κοντά.*" Σ15.

Στο Έργο 2 (Ε2, «Ενδιάμεσοι στο (3/8, 5/8)»), οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν, αφορούσαν την "προκατάληψη των φυσικών αριθμών". Επισημαίνουμε ότι κανείς από τους εκπαιδευτικούς δεν αποπειράθηκε να εξηγήσει γιατί ο υποθετικός μαθητής, ενώ θεωρεί ότι το 4/8 είναι ανάμεσα στο 3/8 και το 5/8, ταυτόχρονα δηλώνει ότι το 1/2 δεν είναι.

"*Ε και πάλι έβαλε ως αριθμητή, τον αμέσως επόμενο από το 3 και τον αμέσως προηγούμενο από τον 5 και θεώρησε ότι είναι μόνο 4/8, ο οποίος γίνεται κιόλας 1/2 αν τον απλοποιήσεις και θεωρεί ότι δεν είναι ανάμεσα από το 3/8 και το 5/8 αλλά προφανώς και είναι...*" Σ3

" *Εεε... Καταρχάς αρχικά στο 4/8 κατέληξε γιατί είδε αρχικά ότι έχουμε τον ίδιο παρονομαστή, και μετά σκέφτηκε απλά ποιος αριθμός είναι ανάμεσα στο 3 και στο 5 και σκέφτηκε το 4. Για αυτό έβαλε και το 4 και έβαλε και τον παρονομαστή ουσιαστικά 4/8. Δηλαδή είδε ουσιαστικά τους ίδιους παρονομαστές, τους ξέχασε, είδε το 3 και το 5 και έβαλε 4. Μετά επανήλθε πίσω και έβαλε το 4/8 και τότε κατάλαβε ότι το 4/8 είναι 1/2 (μικρή παύση) και μετά λέει ότι δεν είναι ανάμεσα.*" Σ10

Στο Έργο 4 (Ε4, «Μεγαλύτερη Τιμή»), οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν αφορούσαν, είτε διαισθητικές αντιλήψεις για το όριο, είτε τη γνώση για τον ορισμό του ανοιχτού διαστήματος..

"*Τώρα για τον Α, (παύση) ο Α νομίζω ότι είναι έξω από το σκεπτικό των Β και Γ, έχει στο μυαλό του το διάστημα (0,1) όπως γεωμετρικά διδάσκεται και έχει στο* *μυαλό του να προσεγγίσει το 1, κατά το όσο το δυνατόν πιο κοντά.*” Σ1

“Λοιπόν... εε... πιστεύω ότι ο μαθητής Α εεε πιστεύω ότι έχει στο νου του τον ορισμό, ότι ας πούμε είναι ανοιχτό σύνολο, θα προσεγγίσει το Α, θα φτάσει όσο πιο κοντά γίνεται, αφαιρώντας ένα ε, όπου ε μια οποιαδήποτε μικρή ποσότητα, επομένως πιστεύω ότι έχει ίσως το όριο κατά νου, μια τιμή πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι το 1.” Σ4

Ενδιαφέρον έχει η παρατήρηση ότι ο Σ4 εκφράζει και ο ίδιος μια διαισθητική, μη ορθή, αντίληψη για το όριο.

Στο Έργο 5 (Ε5, «Πυκνή διάταξη ρητών - αρρήτων»), οι ουσιαστικές εξηγήσεις βασίζονται στην υπόθεση ότι οι φοιτητές γνωρίζουν ότι οι άρρητοι είναι περισσότεροι από τους ρητούς, ενώ αναφέρθηκε και το (μηδενικό) μέτρο του συνόλου των ρητών:

“*Εεε για το τελευταίο, ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς, αυτός λέει ότι δεν μπορεί να βρεθεί άλλος ρητός ίσως έχουν την εντύπωση ότι οι ρητοί είναι λιγότεροι από τους άρρητους, οπότε ανάμεσα σε δύο ρητούς είναι πιο απίθανο να βρεθεί ρητός πάλι. Ίσως για αυτό το έβαλε λάθος. Και το πρώτο, για τον ίδιο λόγο νομίζω, ανάμεσα σε δύο άρρητους να βρεθεί ρητός, νομίζω ότι πιθανοθεωρητικά ίσως το σκέφτονται ότι από τη στιγμή που σαν ποσότητα οι άρρητοι είναι πιο πολλοί είναι πιο απίθανο να βρεθεί ένας ρητός. Τελείως ενστικτωδώς νομίζω το πήγε.*” Σ15

Στο Έργο 6 (Ε6, «Νοητικό Πείραμα»), οι ουσιαστικές εξηγήσεις των εκπαιδευτικών αφορούσαν, κατά κύριο λόγο, τη σύγχυση μεταξύ των φυσικών και των μαθηματικών αντικειμένων:

“*Έχει στο μυαλό του την έννοια του νήματος, που εκτός από μήκος, έχει σαν φυσική σημασία και το πλάτος. Οπότε νομίζω ότι έχει πατήσει τη γραμμή για να φαίνεται πιο πλατιά η γραμμή των αριθμών*” Σ1

“*Η τέταρτη, εγώ πιστεύω ότι αυτό που απάντησαν εδώ πέρα στο τέταρτο είναι καθαρά θέμα καθημερινής ζωής. Μου αρέσει που συνεχίζουν να το έχουν μία* *συνεχή γραμμή αλλά από θέμα κάμερας, κινητών φακών, ότι θα μεγαλώνει κάτι όταν το μεγεθύνουν*". Σ15

Άλλες ουσιαστικές εξηγήσεις αναφέρθηκαν στη θεώρηση της ευθείας ως σύνολο σημείων, τα οποία είναι, τελικά, διακριτά:

"*Ο πρώτος σκέφτηκε λάθος πιστεύω, είναι εε... σκέφτηκε ότι αν μεγεθύνεις όσο θες τη γραμμή θα βρει ακριβώς ένα σημείο. Γιατί μία ευθεία παριστάνεται από άπειρα σημεία. Σκέφτηκε ότι αν τη μεγεθύνεις πάρα πολύ θα βρεις το κάθε σημείο.*" Σ5

Ένα εκπαιδευτικός αναφέρθηκε στην αντιστοιχία των σημείων με τους αριθμούς και υπέθεσε ότι ο οι μαθητές θεωρούν ότι οι αριθμοί είναι διακριτοί και μεταφέρουν αυτό το χαρακτηριστικό και στα σημεία της ευθείας:

"*...λοιπόν, ο πρώτος, φαντάζομαι ότι σκέφτηκε ότι η γραμμή, ότι η γραμμή είναι ουσιαστικά οι αριθμοί. Και ο πρώτος έχει στο νου του ότι οι αριθμοί είναι πάρα πολλοί και είναι βαλμένοι ο ένας δίπλα από τον άλλον. Οπότε σκέφτηκε ότι αν ζουμάρει πάρα πολύ θα τους δει αυτούς τους αριθμούς που είναι ο ένας δίπλα από τον άλλον. Δηλαδή θα έλεγε αυτό το δίπλα από τον άλλον. Ο δεύτερος, θεωρεί ότι ο ένας αριθμός είναι δίπλα από τον άλλον, απλά καταλαβαίνει ότι είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους οπότε για αυτό πάει και τους κολλάει λίγο μεταξύ τους. Δηλαδή τους ξεχωρίζει σαν αριθμούς αλλά θέλει, αλλά προσπαθεί να τους βάλει ότι είναι δίπλα δίπλα ο ένας με τον άλλον.*" Σ10

Τέλος, στο Έργο 7 («Συνέχεια»), οι ουσιαστικές εξηγήσεις των εκπαιδευτικών αφορούν, κατά κύριο λόγο, την πρώτη δήλωση του υποθετικού φοιτητή, και αναφέρονται στη μη κατανόηση της άρσης της αρχής του επόμενου στους πραγματικούς:

" *ο πρώτος, καταλαβαίνει ότι γενικά κατά μια έννοια δύο αριθμοί είναι πολύ κοντά ο ένας στον άλλον, απλά δεν έχει ξεκαθαρίσει την έννοια ότι δεν υπάρχει επόμενος ενός αριθμού. Δηλαδή καταλαβαίνει ότι είναι πάρα πολλοί οι αριθμοί* *και αν τους δώσω ένα διαστηματάκι θα έχει πάρα πολλούς αριθμούς εκεί μέσα, απλά δεν καταλαβαίνει ότι αναγκαστικά υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ δύο αριθμών. Για αυτό μπαίνει στη διαδικασία να λέει το κολλητά.*" Σ10

"*Ο πρώτος σκέφτηκε ότι αφού είναι συνεχής, άμα πάρουμε έναν αριθμό πραγματικό, επειδή πάντα από δίπλα θα υπάρχει ένα αριθμός, και που κολλητά του θα υπάρχει πάντα και άλλος ένας, και άλλος ένας, και άλλος ένας, δεν θα διακόπτεται πουθενά αυτή η ευθεία." Σ9*

4.3.1 Προφίλ Εκπαιδευτικών ως προς τις αξιολογήσεις και τις εξηγήσεις

Προκειμένου να δημιουργήσουμε το προφίλ των εκπαιδευτικών ως προς τις αξιολογήσεις και τις εξηγήσεις που δίνουν αναλύσαμε μόνο τα έργα / υποέργα στα οποία οι μαθητές των διδακτικών σεναρίων δίνουν λάθος απάντηση. Όταν αναφερόμαστε στις εξηγήσεις που δίνουν οι εκπαιδευτικοί, εννοούμε τις εξηγήσεις που δίνουν για τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Οι κατηγορίες ήταν οι εξής: α) οι εκπαιδευτικοί που κάνουν σωστή αξιολόγηση και δίνουν ουσιαστική εξήγηση, β) οι εκπαιδευτικοί που κάνουν σωστή αξιολόγηση και δίνουν μη ουσιαστική εξήγηση, γ) οι εκπαιδευτικοί που κάνουν σωστή αξιολόγηση και δε δίνουν καμία εξήγηση και δ) οι εκπαιδευτικοί που αξιολογούν λανθασμένα.

Να διευκρινίσουμε ότι σε αυτό τον πίνακα στην κατηγορία «Ορθή αξιολόγηση» συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις που ανήκουν τόσο στη κατηγορία «Ορθή αξιολόγηση», όσο και στην κατηγορία «Αρχικά Λανθασμένη και τελικά Ορθή αξιολόγηση». Αντίστοιχα στην κατηγορία «Λανθασμένη αξιολόγηση», συμπεριελήφθησαν τόσο οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία «Λανθασμένη αξιολόγηση», όσο και αυτές που ανήκουν στην κατηγορία «Αρχικά Ορθή και τελικά Λανθασμένη αξιολόγηση».

Στον **Πίνακα 7**, παρουσιάζεται η συχνότητα των ουσιαστικών εξηγήσεων και των ορθών αξιολογήσεων ανά συμμετέχοντα, καθώς και ο λόγος τους. Ο πίνακας είναι διατεταγμένος ως προς τους λόγους, σε φθίνουσα σειρά.

Πίνακας 7

Συχνότητα των ουσιαστικών εξηγήσεων και των ορθών αξιολογήσεων ανά συμμετέχοντα, και ο λόγος των συχνοτήτων, ανά συμμετέχοντα

Συμμετέχοντες	Ουσιαστικές Εξηγήσεις	Ορθές Αξιολογήσεις	Λόγος
Σ15	11	14	0,79
Σ10	8	13	0,62
Σ4	6	10	0,60
Σ2	6	10	0,60
Σ13	4	8	0,50
Σ7	5	11	0,45
Σ1	6	14	0,43
Σ3	4	10	0,40
Σ5	4	12	0,33
Σ8	3	9	0,33
Σ9	4	12	0,33
Σ14	4	12	0,33
Σ6	3	10	0,33
Σ11	2	11	0,18
Σ12	2	15	0,13
Σύνολο	72	165	0,42

Παρατηρούμε ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί, σε τουλάχιστον τρεις περιπτώσεις ο καθένας, αν και αξιολόγησαν σωστά, δεν ήταν σε θέση να δώσουν ουσιαστική εξήγηση για τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Είναι επίσης εμφανές ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές.

Πράγματι, υπολογίζοντας το λόγο των ουσιαστικών εξηγήσεων προς τις ορθές αξιολογήσεις συνολικά (0,42), προκύπτει ότι, κατά μέσο όρο, λιγότερες από τις μισές απαντήσεις των μαθητών εξηγήθηκαν ουσιαστικά από τους εκπαιδευτικούς που τις είχαν αξιολογήσει ορθά. Από την άλλη μεριά, ο μέγιστος ατομικός λόγος είναι 0,79 (Σ15), ενώ ο ελάχιστος είναι 0,13 (Σ12). Υπάρχει, δηλαδή, μεγάλο εύρος στις τιμές του λόγου.

Από τα στοιχεία του **Πίνακα 7** φαίνεται ότι, σε ατομικό επίπεδο, το μεγάλο πλήθος ορθών αξιολογήσεων δε συνεπάγεται απαραίτητα μεγάλο πλήθος ουσιαστικών εξηγήσεων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι εκπαιδευτικοί Σ12 και Σ11, αλλά και οι Σ5, Σ14.

Ο εκπαιδευτικός ο οποίος αξιολογεί σωστά το μεγαλύτερο ποσοστό των έργων και συγχρόνως παρέχει και ουσιαστική εξήγηση για τον τρόπο σκέψης των μαθητών είναι ο Σ15 (0,79, 11 ουσιαστικές εξηγήσεις στις 14 ορθές αξιολογήσεις) και ακολουθεί ο Σ10 (0,62, 8 στις 13, αντίστοιχα). Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Σ15 είναι κάτοχος διπλώματος του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών για τη «Διδακτική των Μαθηματικών» (όταν πραγματοποιήθηκε η έρευνα δεν είχε ολοκληρώσει τον κύκλο σπουδών).

Ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί ο Σ12. Ο εκπαιδευτικός Σ12 είναι ο μόνος από τους συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικούς ο οποίος αξιολογεί ορθά όλα τα έργα. Ωστόσο ο λόγος των ουσιαστικών εξηγήσεων προς τις ορθές αξιολογήσεις ανέρχεται στο 0,13 (ο χαμηλότερος που συναντούμε.

4.4 Ανατροφοδότηση (Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας – Εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου)

Αρχικά καταγράφτηκαν οι ανατροφοδοτήσεις των εκπαιδευτικών ανά έργο. Στη φάση της εξοικείωσης με τα δεδομένα, οι ανατροφοδοτήσεις εξετάστηκαν αρχικά ανά έργο, και στη συνέχεια συνολικά. Ένα ζήτημα ενδιαφέροντος ήταν εξαρχής κατά πόσο οι συμμετέχοντες ανταποκρίνονται στις συγκεκριμένες απαντήσεις των μαθητών που θεωρούσαν λανθασμένες. Για παράδειγμα, θεωρούν σημαντικό να ζητήσουν από το μαθητή να εξηγήσει τον τρόπο που σκέφτηκε; Εστιάζουν στα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της απάντησης; Από τη φάση της εξοικείωσης προέκυψε ένα γενικότερο θέμα, αυτό του ρόλου του μαθητή στη διαδικασία της ανατροφοδότησης. Πράγματι, από πολλές περιγραφές των εκπαιδευτικών φάνηκε να λείπει οποιαδήποτε αναφορά σε εμπλοκή των μαθητών κατά την ανατροφοδότηση.

Ένα δεύτερο ζήτημα ενδιαφέροντος ήταν η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου, την οποία χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά την ανατροφοδότηση. Εστιάζουμε στη χρήση παραδειγματικών καταστάσεων, μια θεματική που αναδύθηκε ως κεντρική από τα δεδομένα μας.

Τέλος, αντλούμε παραδείγματα από τα δεδομένα της ανατροφοδότησης τα οποία αναδεικνύουν πτυχές της γνώσης του ορίζοντα των συμμετεχόντων.

4.4.1. Ρόλος του μαθητή στη διαδικασία της ανατροφοδότησης

Κατά τη διαδικασία της ανατροφοδότησης χρησιμοποιήθηκαν αρχικά οι κωδικοί «εμπλοκή» (του μαθητή, στις περιπτώσεις που οι συμμετέχοντες αναφέρονταν σε οποιαδήποτε συμμετοχή του μαθητή / της τάξης στη διαδικασία της ανατροφοδότησης) και «μη εμπλοκή» (του μαθητή στις περιπτώσεις που ο εκπαιδευτικός δεν αναφερόταν με κανένα τρόπο στο μαθητή / την τάξη). Στη συνέχεια, οι ανατροφοδοτήσεις στις οποίες αντιστοιχούσε ο κωδικός «εμπλοκή» εξετάστηκαν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, ως προς το βαθμό εμπλοκής των μαθητών. Προέκυψαν τρεις κατηγορίες ανατροφοδοτήσεων: «Καμία εμπλοκή», «Υποτυπώδης Εμπλοκή», «Εμπλοκή». Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνουν εξ ολοκλήρου την ευθύνη να παρουσιάσουν/εξηγήσουν ή/και να τεκμηριώσουν αυτή που θεωρούν ως σωστή απάντηση. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της κατηγορίας είναι τα παρακάτω:

> *"Λοιπόν, νομίζω ότι θα έκανα το 1/3 δεκαδικό, εντάξει θα τα έβαζα κατά προσέγγιση, περίπου τη √2, τη √5, θα έβρισκα το άθροισμά τους, εεεε... και νομίζω θα τα έβαζα κατά προσέγγιση, μια ταξινόμηση θα έκανα, δηλαδή το 0,8888... θα το έβαζα κοντά στο... λίγο πριν το 1, κάπου εκεί, κάπως έτσι νομίζω θα το έκανα... Θα τα έκανα όλα δεκαδικά και θα τα τοποθετούσα στην ευθεία. Έτσι."* (Σ7, Ε3)

> *"Θα έλεγα ότι για το ευθύγραμμο τμήμα, υπάρχουν άπειρα σημεία, και...(παύση) τι να πω; εεε... μισό λεπτό να σκεφτώ (παύση μεγάλη) εεε... και υπάρχουν άπειρες κουκκίδες, όπως του δεύτερου κολλημένες τις οποίες δεν μπορούμε να τις διακρίνουμε και να τις ξεχωρίσουμε. Αυτό θα έλεγα."* (Σ9, Ε6)

> *"Εεε... ότι επειδή είναι πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και ότι επειδή είναι άπειροι όλοι αυτοί οι αριθμοί, ότι προφανώς ανάμεσα σε δύο αριθμούς δεν υπάρχει μόνο ένας δύο κτλ, υπάρχουν πάρα πολλοί τους οποίους δεν είναι εύκολο να βρούμε, και ότι συνήθως στην καθημερινότητα και για αυτό που χρησιμοποιούμε εμείς κυρίως στα μαθήματα, χρησιμοποιούμε τους πιο εύκολους δηλαδή το 1,13 το 1,14 κτλ. Απλά υπάρχουν και άλλοι κρυμμένοι οι οποίοι όμως δεν είναι τόσο εύχρηστοι. Έτσι θα τους το εξηγούσα"* (Σ13, Ε1)

Στη δεύτερη κατηγορία («Υποτυπώδης Εμπλοκή») εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες αν και οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να εμπλέκουν τους μαθητές, ουσιαστικά προβαίνουν είτε σε κατευθυντικές ερωτήσεις (π.χ. "Δεν είναι το ίδιο πράγμα;") είτε σε ερωτήσεις οι οποίες είναι τόσο γενικές, που είναι ανούσιες (π.χ. "θα τον ρώταγαν αν καταλαβαίνει τι είναι ρητός"). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και οι περιπτώσεις στις οποίες ο καθηγητής απευθύνει ερωτήσεις κλειστού τύπου στον μαθητή (δηλαδή ερωτήσεις στις οποίες η απάντηση είναι “Ναι / Όχι”.) Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της κατηγορίας είναι τα παρακάτω:

> *“Θα του έλεγα στην αρχή, για να το καταλάβει, ότι το 3/8 βγαίνει περίπου τόσο και το 5/8 βγαίνει περίπου τόσο. Και θα του έλεγα δεν είναι και ο αριθμός αυτός ανάμεσα σε αυτούς; Ή δεν είναι και αυτός, δεν είναι και το μηδέν κόμμα τέσσερα κάτι; Άρα δεν είναι ένας, είναι και το 4/8. Και μετά δεν έχεις, θα του έλεγα, ότι είτε 4/8 πούμε, είτε 1/2, είναι ισοδύναμα, απλώς έχει κάνει απλοποίηση και το έχεις κάνει ανάγωγο. Το ίδιο δεν βγαίνει”;*(Σ11, Ε2)

> *“Αν έχουμε σαν δεδομένο την πληρότητα του R, μετά θα το πήγαινα σε άτοπο (…). (*Εστω*) ότι έχουμε δύο άρρητους αριθμούς και ανάμεσά τους δεν έχουμε κανέναν ρητό. Τότε το κλειστό διάστημα, ρ1, ρ2 που είναι οι άρρητοι, αποτελείται μόνο από άρρητους. Οπότε θα τον ρώταγα. Έστω να πάρω ένα τυχαίο άρρητο από εκεί μέσα, από το ρ1 και ρ2, έστω ρ3. Ο ρ3 δε πρέπει να είναι το όριο από μία ακολουθία ρητών; Γιατί έτσι βγάζουμε την πληρότητα στο R”.*(Σ10, Ε5)

Στην τρίτη κατηγορία εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί εμπλέκουν το συγκεκριμένο μαθητή (π.χ., ζητώντας του να εξηγήσει πώς σκέφτηκε) ή την τάξη (π.χ. αναφέροντας ότι ζητάνε τη γνώμη άλλων μαθητών, ή αναθέτοντας σε ομάδες μαθητών να επεξεργαστούν το πρόβλημα). Συμπεριελήφθησαν επίσης και περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε ερωτήματα που απαιτούσαν κάποια επεξεργασία από τους μαθητές. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της κατηγορίας είναι τα παρακάτω:

> *“Εεε ναι ρωτάμε τι εννοούν και προοδευτικά, από την απλούστερη λύση την πρώτη, μέχρι τη τρίτη, εε προσπαθεί να εξηγήσει ο ένας στον άλλον γιατί επέλεξε να ζωγραφίσει το εν λόγω σχήμα (…) Η δική μου παρέμβαση έχει να κάνει με τη σειρά των παιδιών που θα ρωτήσω. (…) Θα ρωτήσω τον πρώτο γιατί τα έκανε έτσι, μετά θα ζητήσω από τον δεύτερο να διορθώσει τον πρώτο, μετά θα περάσω στον τέταρτο*” (Σ1, Ε6)

"Ωραία. Να προσπαθήσουν για αυτά που μου έβαλαν λάθος να προσπαθήσουν να βρουν αντιπαράδειγμα που δεν ισχύει, είτε να ψάξουν να βρουν την απόδειξη, πως αυτό θα μπορούσε να βγει και να τα συζητήσουμε μετά μαζί. Ώστε να ψάξουν. Γιατί αν δεν τα ψάξουν δεν θα τα μάθουν." (Σ6, Ε5)

Στον **Πίνακα 8** που ακολουθεί καταγράφεται η συχνότητα των τριών αυτών τύπων εμπλοκής των μαθητών, όπως προκύπτουν από τις ανατροφοδοτήσεις των μαθητών.

Πίνακας 8
Συχνότητα του τύπου εμπλοκής των μαθητών στην ανατροφοδότηση

Έργα	Ανατροφοδότηση			Σύνολο
	Καμία Εμπλοκή	Υποτυπώδης Εμπλοκή	Εμπλοκή	
Ε1	9	4	2	15
Ε2	12	2	1	15
Ε3	13	2	0	15
Ε4	12	1	2	15
Ε5	13	0	2	15
Ε6	11	3	1	15
Ε7	14	0	1	15
Σύνολο	84	12	9	105

Παρατηρώντας αυτό τον πίνακα βλέπουμε ότι στη μεγάλη πλειοψηφία των ανατροφοδοτήσεων (80%) δεν αναφέρεται κανενός είδους συμμετοχή των μαθητών. Στις περιπτώσεις αυτές οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν αποκλειστικά πρώτο πρόσωπο και σκιαγραφούν μια κατάσταση στην οποία οι ίδιοι παρουσιάζουν ή/και εξηγούν αυτό που θεωρούν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Η κατηγορία «Υποτυπώδης Εμπλοκή Μαθητών» ανέρχεται στο ποσοστό της τάξεως του 11,43%. Στις περιπτώσεις αυτές, η συμμετοχή των μαθητών, όπως περιγράφεται από τους εκπαιδευτικούς, είναι εντελώς τετριμμένη.

Την κατηγορία «Εμπλοκή Μαθητών» τη συναντούμε σε ένα ποσοστό της τάξεως του 8,57%. Ωστόσο πρέπει να τονίσουμε ότι οι ανατροφοδοτήσεις στις οποίες περιγράφεται μια ουσιαστικότερη εμπλοκή των μαθητών δόθηκαν από 2 συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς (Σ1, Σ6) (βλ. παραπάνω παραδείγματα).

4.4.2. Χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων

Τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα των ανατροφοδοτήσεων εξετάστηκαν για δεύτερη φορά ως προς τα εργαλεία που αξιοποίησαν οι εκπαιδευτικοί κατά την ανατροφοδότησή τους. Αρχικά σημειώθηκε με λεπτομέρεια τι πρότεινε ο κάθε συμμετέχων ανά έργο (π.χ., «μετατροπή των κλασμάτων σε ισοδύναμα», «παράδειγμα με ενδιάμεσα κλάσματα», «επανάληψη της διαδικασίας»).

Όλοι οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε μια παραδειγματική κατάσταση σε δύο τουλάχιστον από τα έργα. Τα έργα στα οποία χρησιμοποιήθηκαν συχνότερα αντιπαραδείγματα ήταν αυτά που αφορούν την απειρία των αριθμών ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς (Ε1), δύο κλάσματα (Ε2) και την πυκνότητα των ρητών στους ρητούς, τους άρρητους και αντίστροφα (Ε5).

Πράγματι, όσον αφορά τα Ε1 και Ε2, όλοι οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν (σε τουλάχιστον ένα από τα δύο έργα) σε παραδείγματα ενδιάμεσων αριθμών, ως αντιπαράδειγμα στους ισχυρισμούς των υποθετικών μαθητών. Τυπικές χρήσεις του αντιπαραδείγματος ήταν α) η παρουσίασή του, β) παρουσίαση και απευθείας διατύπωση του συμπεράσματος («υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί»). Συχνά φαίνεται ότι ο εκπαιδευτικός αναμένει ότι η παρουσίαση του αντιπαραδείγματος αρκεί για να φτάσουν τα παιδιά στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί. Χαρακτηριστικά τα παρακάτω παραδείγματα:

> *"Θα τους ρωτούσα ας πούμε, το.. ωραία είναι αυτοί οι αριθμοί που θέλετε, υποτίθεται ότι θεωρείται ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3. Το 1,135 ας πούμε είναι ανάμεσα; Εκεί πιστεύω ας πούμε ότι όλοι οι μαθητές θα κοντοστέκονταν και θα έλεγαν α ναι είναι ανάμεσα. Και θα έλεγα ας πούμε το 1,1355 ας πούμε είναι ανάμεσα, είναι ανάμεσα. Να φτάσουν έτσι στο άτοπο, να καταλάβουν ότι είναι λάθος το σκεπτικό τους"* (Σ15, Ε1)

> *"Το να τα κάνουνε δεκαδικούς. Να κάνουνε τη διαίρεση στα κλάσματα, στο 3/8 και στο 5/8 και να δούνε ότι υπάρχουν και μικρότεροι αριθμοί. Σαν κλάσματα δεν θα το καταλάβαιναν, αλλά αν το δούνε δεκαδικό, ίσως να τους πήγαινε το μυαλό ότι ίσως υπάρχουν και άλλοι πολλοί αριθμοί ανάμεσα στο 3/8 και στο*

5/8." (Σ7, Ε2)

Μόνο τέσσερις συμμετέχοντες (Σ1, Σ3, Σ8, Σ10, Σ12) αναφέρθηκαν σε μια επαναλήψιμη διαδικασία, η οποία μπορεί να υποστηρίξει τους ίδιους τους μαθητές να συναγάγουν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί. Από αυτούς, μόνο ο ένας (Σ12) το έκανε και στα δύο έργα. Για παράδειγμα:

> *"Θα έπαιρνα, θα τους έλεγα ποια είναι η μέση; Θα πάρω τη μέση αυτού του ευθυγράμμου τμήματος. Άρα υπάρχει ένας σίγουρα. Μετά στη μέση θα διαλέξω το ένα από τα δύο και θα το πήγαινα έτσι".* (Σ12, Ε1)

> *"Βρίσκονται άπειροι αριθμοί, αυτό θα τους έλεγα και θα τους εξηγούσα ένα παράδειγμα, πχ το 1,3 θα το έκανα 1,300 οπότε γιατί σταμάτησες στο 1,29, θα πήγαινες στο 1,299 ο δεύτερος, θα μου πει ναι. Θα του πω βάλε όσο μηδενικά θες, άρα δεν τελειώνεις ποτέ."* (Σ8, Ε2)

Στο Ε5, σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες (με εξαίρεση δύο) αναφέρθηκαν στη χρήση «παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων» στην ανατροφοδότησή τους (στις περιπτώσεις που είχαν αξιολογήσει σωστά), κατά κύριο λόγο με απλή αναφορά στην πρόθεσή τους να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένα διαστήματα (ως παράδειγμα) και συγκεκριμένους ενδιάμεσους αριθμούς (ως αντιπαράδειγμα σε ισχυρισμούς του υποθετικού φοιτητή). Εννιά από τους συμμετέχοντες αναφέρθηκαν επιπλέον στην αναγκαιότητα απόδειξης για το γενικό ισχυρισμό «είναι πάντα εφικτό», ενώ πέντε (Σ2, Σ5, Σ8, Σ11, Σ13, Σ14) όχι. Σημειώνουμε και την περίπτωση ενός εκπαιδευτικού που αποπειράθηκε να δώσει μια εξήγηση για τη γενική περίπτωση, βασιζόμενος όμως σε ένα μη έγκυρο επιχείρημα:

> "*Εγώ δεν ξέρω αν είναι σωστά, αυτά που είπα. Εγώ θα του έλεγα γενικότερα, εεεε, επειδή ένας, ανάμεσα σε δύο αριθμούς, υπάρχουν άπειροι αριθμοί, μπορούμε να βρούμε και ρητό και άρρητο ανάμεσα σε οποιουσδήποτε αριθμούς. Αυτό. Και έτσι το σκέφτηκα και εγώ.*" (Σ9, Ε5)

Σε τέσσερις περιπτώσεις, τρεις συμμετέχοντες αναφέρθηκαν σε καταστάσεις καθημερινότητας, τις οποίες θεώρησαν ανάλογες των μαθηματικών καταστάσεων που περιγράφονταν σε έργα. Πιο συγκεκριμένα, οι Σ2 και Σ15 μετέφεραν το πρόβλημα της ύπαρξης άπειρων ενδιάμεσων αριθμών στο πλαίσιο των χρημάτων, που στην πραγματικότητα περιορίζεται σε αριθμούς μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία:

> *"εεε.. μπορείς για παράδειγμα, (παύση) να τους δείξεις μια τιμή ότι, από θέμα τι εννοώ, κάτσε να το σκεφτώ πως θα το πω, περίμενε να το συντάξω. Για παράδειγμα μπορείς να αγοράσεις πράγματα με πολλά, με πολύ περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Άρα θα τους έδειχνα κάποια υλικά παραδείγματος χάρη, τα οποία τα αγοράζεις, η αξία τους είναι με πολλά παραπάνω δεκαδικά ψηφία, για να τους δείξω ότι υπάρχουν πολλοί δεκαδικοί αριθμοί. Και αυτοί χάνουν αυτούς τους αριθμούς."* (Σ2, Ε1)

> *".... Εεε ας πούμε μπορεί να ήταν θέμα χρηματικό, να είχαμε κέρματα, αν ήταν ένα παιδί το οποίο που ας πούμε, είχε μία έφεση στο να δίνει ρέστα, στο να υπολογίζει χρήματα και αυτά, νομίζω ας πούμε τα χρήματα θα ήταν ένα καλό μέσο. Να είχες πολλά κέρματα και να είχες και κάτι που διαιρείται και με το 8 ώστε να βγάζεις όγδοα εεε.. να χωρίζεις, να χωρίζεις, να χωρίζεις"* (Σ15, Ε2)

Ο συμμετέχων Σ2 πρότεινε ως ανάλογο τους ευθύγραμμου τμήματος, αλλά και της ευθείας το δρόμο με εμφανή τη δεύτερη διάσταση, αλλά και αμφίβολη την συνέχεια σε αντιληπτικό επίπεδο:

> "*Θα τους έφερνα για παράδειγμα τον δρόμο που προχωράμε, την ευθεία, το ότι ο δρόμος είναι ένα συνεχόμενο πράγμα που προχωράμε, δεν κάνει, δεν έχει πουθενά κενά... άρα το ευθύγραμμο τμήμα είναι σαν τον δρόμο αποτελείται από συνεχόμενα συνεχόμενα σημεία που ενώνονται μεταξύ τους. Αυτό θα τους έλεγα ότι είναι το ευθύγραμμο τμήμα."* (Σ2, Ε6)

Τέλος, ο συμμετέχων Σ11 πρότεινε την πραγματοποίηση του νοητικού πειράματος του Ε6 με πραγματικό μεγεθυντικό φακό:

“Εγώ θα τους το έκανα στην πράξη και ό,τι έβγαινε. Μπορεί να είμαι και εγώ λάθος. Στα δύο πρώτα, σε καμία περίπτωση δεν θα έβλεπα κάτι τέτοιο. Δεν ξέρω κιόλας. Δεν έχω μεγεθυντικό να το κοίταγα. Θα τους έλεγα ότι όταν έχω ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια γραμμή δηλαδή ευθεία από το Α στο Β και πάρουμε ένα μεγεθυντικό φακό, ε αυτό που θα έβλεπα θα ήταν, είναι σαν να ζουμάρουμε την ευθεία. Θα δω ποιο έντονη την ευθεία. Αλλά αυτά τα κυκλάκια δεν ξέρω τι είναι.” (Σ11, Ε6)

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλοι οι συμμετέχοντες που αποπειράθηκαν να εξηγήσουν τι σημαίνει «άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί» βασίστηκαν, χρησιμοποίησαν την απειρία των φυσικών αριθμών ως ανάλογη περίπτωση («δεν τελειώνουν ποτέ», «πάντα μπορείς να βρεις κι άλλο», «συνεχίζουν και συνεχίζουν»). Σε μια περίπτωση, αυτή η αναλογία με τους φυσικούς αριθμούς οδήγησε στην εξής ανατροφοδότηση, η οποία περιέχει ένα εμφανές μαθηματικό σφάλμα:

“Κοίτα επειδή η απάντηση είναι ίδια και στους 3, θα τους μάζευα και θα τους έλεγα, ότι γενικά οι αριθμοί όπως ξέρουμε είναι άπειροι. Αυτό δεν σημαίνει ότι αρχίζω και μετράω 0,1,2,3,4 και δεν σταματάω ποτέ γιατί είναι άπειροι. Ακόμη και οι αριθμοί που μεσολαβούν για να πάμε από το 1 στο 2 είναι άπειροι, γιατί όπως καταλαβαίνουμε ότι όταν μετράω 0,1,2,3,4,5 συνεχίζω στο άπειρο, από το 0 να πάω στο 1 υπάρχει μετά ο αριθμός 0,1 0,2 0,3, οπότε με την ίδια λογική στη πρώτη φορά φτάνω στο άπειρο, έτσι και στο 0 κόμμα 1, κόμμα 2, κόμμα 3 κόμμα 4, πάντα είναι άπειροι οι αριθμοί για να φτάσω, να προχωρήσω στο 2.” (Σ14, Ε1)

4.4.3. Έργο 3- «Πώς το ξέρουμε;»

Ιδιαίτερη αναφορά θεωρούμε ότι αξίζει να γίνει στην ανατροφοδότηση του τρίτου έργου (Ε3 «Ευθεία των πραγματικών αριθμών). Σε αυτό το έργο, όπως είδαμε, εκτός από την αξιολόγηση των απαντήσεων των υποθετικών μαθητών, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση ενός μαθητή, ο οποίος αναρωτιέται πώς γνωρίζουμε ότι «όλοι οι αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν στην ευθεία» και αν αποδεικνύεται.

Υπενθυμίζουμε ότι, με μία εξαίρεση, όλοι οι εκπαιδευτικοί είχαν αξιολογήσει σωστά στο συγκεκριμένο έργο. Σημειώνουμε επίσης ότι κατά την ανατροφοδότηση 5 εκπαιδευτικοί (Σ4, Σ7, Σ8, Σ9 και Σ13) επέλεξαν να εξηγήσουν ότι όλοι οι δεδομένοι αριθμοί είναι πραγματικοί και λάβουν ως παραδοχή ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί τοποθετούνται στην ευθεία. Για παράδειγμα:

> "*Ουσιαστικά οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένας κύκλος και ότι υπάρχει μέσα στον κύκλο είναι υπό των πραγματικών αριθμών, δηλαδή οι ρητοί, οι άρρητοι, τα κλάσματα, οι δεκαδικοί, οι φυσικοί και οι ακέραιοι ουσιαστικά όλο αυτό μας κάνει τους πραγματικούς αριθμούς. Άρα, οτιδήποτε, οποιονδήποτε αριθμό και να μας δώσουνε, από τη στιγμή που οι πραγματικοί σαν αριθμοί εμπεριέχουν όλους αυτούς, κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί πάνω στην ευθεία. Δηλαδή το ένα εμπεριέχεται μέσα στο άλλο, οπότε καταλήγουμε στο συνολικό. Δηλαδή ο κύκλος είναι οι πραγματικοί αριθμοί και ότι υπάρχει μέσα είναι τα υπόλοιπα, οπότε ναι, οτιδήποτε μπορεί.*" (Σ13, Ε3)

Οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί επέλεξαν να τοποθετήσουν προσεγγίσεις των δεδομένων αριθμών στην ευθεία:

> "*ναι... ναι... όχι σκέφτομαι πως μπορούσα να του το πω. Λοιπόν, νομίζω ότι θα έκανα το 1/3 δεκαδικό, εντάξει θα τα έβαζα κατά προσέγγιση, περίπου τη $\sqrt{2}$, τη $\sqrt{5}$, θα έβρισκα το άθροισμά τους, εεεε... και νομίζω θα τα έβαζα κατά προσέγγιση, μια ταξινόμηση θα έκανα, δηλαδή το 0,8888... θα το έβαζα κοντά στο... λίγο πριν το 1, κάπου εκεί, κάπως έτσι νομίζω θα το έκανα... Θα τα έκανα όλα δεκαδικά και θα τα τοποθετούσα στην ευθεία. Έτσι."* (Σ7, Ε3)

Όσον αφορά την αντιμετώπιση του ερωτήματος «Πώς ξέρουμε ότι ισχύει αυτό; Αποδεικνύεται;»), 5 από τους 15 εκπαιδευτικούς (Σ3, Σ4, Σ6, Σ11, Σ13) δήλωσαν ότι δεν γνωρίζουν αν υπάρχει ή όχι απόδειξη:

> *"Εεε.. δε ξέρω αν αποδεικνύεται η αλήθεια είναι. Εεε... (παύση) Κοίτα. Αν αποδεικνύεται δε ξέρω, αλλά.".* Σ4

5 από τους 15 (Σ7, Σ8, Σ9, Σ15, Σ14) δήλωσαν βέβαιοι για την ύπαρξη απόδειξης:

"Αποδεικνύεται από την ανισότητα. Ξέρεις ανισώσεις; Ναι! Βάλε από το μεγαλύτερο στο μικρότερο ή από το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Τη διάταξη δηλαδή.", Σ8

"Ναι, αποδεικνύεται. Στα βιβλία πανεπιστημιακής εκπαίδευσης. Μπορούμε να ανατρέξουμε σε αυτά.", Σ14

ενώ 1 από τους 15 (Σ5) δήλωσε βέβαιος για τη μη ύπαρξη απόδειξης:

"Όχι δε μπορείς να το αποδείξεις. Μόνο αυτό που σου είπα. Προσεγγιστικά να το δεις.", Σ5

Μόνο 2 από τους συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικούς αναφέρθηκαν ρητά στην ύπαρξη αξιώματος (Σ1, Σ12):

"Τι εννοείς πως το ξέρουμε. Αυτό το έχουμε, είναι αξίωμα. Αυτό το πράγμα. Δηλαδή το έχουμε συμφωνήσει μεταξύ μας ότι θέλουμε, οπουδήποτε αγγίζουμε την ευθεία...να είναι ένας αριθμός. Είναι το αξίωμα της πληρότητας ουσιαστικά.", Σ12

Ενώ τέλος, 2 εκπαιδευτικοί (Σ2, Σ10) δεν δίνουν κάποια απάντηση.

Κεφάλαιο 5ο: Συζήτηση- Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναδείξουμε τα πιο σημαντικά ευρήματα που προέκυψαν από την έρευνα, με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Συγχρόνως θα γίνει ο συσχετισμός των εξαγόμενων αποτελεσμάτων με τις γνώσεις που έχουμε από την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Οι εκπαιδευτικοί προκειμένου να είναι ικανοί να προσφέρουν στους μαθητές τους μια ουσιαστική και αποτελεσματική διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών πρέπει να κατέχουν μια ποικιλία γνώσεων, που σχετίζεται τόσο με τη μαθηματική επιστήμη, όσο και με τη διδασκαλία τους. Στην παρούσα έρευνα υιοθετήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο των Ball et al. (2008) και διερευνήσαμε τη Μαθηματική Γνώση για τη Διδασκαλία εκπαιδευτικών της ιδιωτικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που είναι απόφοιτοι ελληνικών πανεπιστημιακών τμημάτων μαθηματικών. Εξ αντικειμένου, όλοι οι συμμετέχοντες διαθέτουν γνώσεις ανώτερων μαθηματικών - Ανώτερη Γνώση Μαθηματικών (Zazkis & Leikin, 2010) ή Γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών (Ζωιτσάκος, 2019).

Στους συμμετέχοντες δόθηκαν έργα υπό τη μορφή διδακτικών σεναρίων (Biza et al., 2007) σχετικά με τα αριθμητικά σύνολα και την ευθεία των πραγματικών αριθμών που αφορούσαν διάφορες πτυχές της πυκνής διάταξης των ρητών και των σημείων της ευθείας, την πυκνότητα των ρητών στους αρρήτους και αντίστροφα, καθώς και τη σχέση της συνέχειας με την πυκνότητα. Όπως συζητήθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο 2, είναι τεκμηριωμένο βιβλιογραφικά ότι το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων που επιλέξαμε να δημιουργήσουμε προκαλεί μεγάλες δυσκολίες σε μαθητές όλων των βαθμίδων, ακόμα και σε φοιτητές σε Τμήματα Μαθηματικών, και εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικοί κλήθηκαν αρχικά να αξιολογήσουν την ορθότητα των απαντήσεων που παρουσιαζόταν στα σενάρια και στη συνέχεια τους ζητήθηκε να τεκμηριώσουν τον τρόπο που κατέληξαν στην αξιολόγησή τους. Έπειτα τους ζητήθηκε να εξηγήσουν τον τρόπο που θεωρούν ότι σκέφτηκαν οι μαθητές τους και τέλος να μπουν στη θέση του καθηγητή του εκάστοτε διδακτικού σεναρίου και να δώσουν οι ίδιοι ανατροφοδότηση στους μαθητές.

Μέσω της αξιολόγησης των απαντήσεων των υποθετικών μαθητών διερευνήθηκαν πτυχές της Κοινής Γνώσης Περιεχομένου των συμμετεχόντων (Ball et al., 2008). Στο σύνολο των υποέργων, η ορθή αξιολόγηση ήταν η επικρατούσα κατηγορία απόκρισης των συμμετεχόντων, όπως είναι αναμενόμενο δεδομένου του μαθηματικού τους υπόβαθρου. Ωστόσο, μια βαθύτερη εξέταση αναδεικνύει ελλείμματα στην Κοινή Γνώση Περιεχομένου. Πράγματι, από τις συνολικά 19 υποθετικές απαντήσεις που αξιολογήθηκαν, μόνο 4 αξιολογήθηκαν ορθά από όλους τους συμμετέχοντες. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι έγιναν λανθασμένες αξιολογήσεις, ακόμα και σε έργα στα οποία αυτό δε θα ήταν αναμενόμενο (όπως για παράδειγμα, το Ε1 («Ενδιάμεσοι στο (1,1, 1,3)» και το Ε3 («Ευθεία των πραγματικών»)). Ταυτόχρονα, δεν υπήρξε κανένα έργο που να απέσπασε μόνο ορθές αξιολογήσεις από όλους τους συμμετέχοντες. Εξετάζοντας ατομικά τους συμμετέχοντες, φάνηκε ότι, ενώ υπήρξαν διαφορές ως προς το πλήθος των λανθασμένων αξιολογήσεων, μόνο ένας (Σ12) από τους 15 συμμετέχοντες στην έρευνα εκπαιδευτικούς κατόρθωσε να αξιολογήσει σωστά όλα τα έργα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα έργα τα οποία απέσπασαν τις περισσότερες λανθασμένες αξιολογήσεις και, ιδιαίτερα, τα υποέργα στα οποία επικρατούσα ήταν η λανθασμένη αξιολόγηση. Με την εξαίρεση δυο συμμετεχόντων, όλοι οι υπόλοιποι φάνηκαν να θεωρούν ότι η πυκνή διάταξη είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του αριθμητικού συνεχούς. Τα δύο τρίτα των συμμετεχόντων συμφώνησαν ότι υπάρχει η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή $x \in R$, με $x \in (0, 1)$ και ότι «αυτή είναι ένας αριθμός πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι 1» (Ε.4.1). Τα τρία πέμπτα των συμμετεχόντων θεώρησαν ότι σε ένα νοητικό πείραμα μεγέθυνσης της γεωμετρικής ευθείας, η ευθεία αυξάνεται ως προς το πλάτος (Ε.6.4). Επιπλέον, περίπου οι μισοί συμμετέχοντες θεώρησαν σωστή την άποψη ότι ένα υπολογιστής θα μπορούσε να βρει όλους τους ενδιάμεσους αριθμούς σε ένα διάστημα (Ε.1.3). Τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι πτυχές της Κοινής Γνώσης Περιεχομένου για τους αριθμούς, τα αριθμητικά σύνολα και τις ιδιότητές τους (πυκνή διάταξη, πληρότητα) αποδείχτηκαν απαιτητικές για τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνά μας, παρόμοια με μαθητές της δευτεροβάθμιας (π.χ. Vamvakoussi, 2011), φοιτητές Μαθηματικών Τμημάτων (Marmour et al., 2019; Souyoul et al., 2008), αλλά για εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που έχουν αντιμετωπίσει παρόμοια έργα (Ζωιτσάκος, 2019).

Εξετάσαμε επίσης τους τρόπους τεκμηρίωσης της αξιολόγησης από τους εκπαιδευτικούς, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι εκπαιδευτικοί προκειμένου να αξιολογήσουν την ορθότητα των απαντήσεων των διδακτικών σεναρίων. Φάνηκε ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν αντλώντας από την προσωπική τους γνώση. Όπως έχει ήδη συζητηθεί παραπάνω, η προσωπική τους γνώση δεν ήταν απαραίτητα πάντα μαθηματικά ορθή και σε κάποιες περιπτώσεις αντανακλούσε παρανοήσεις παρόμοιες με αυτές των υποθετικών μαθητών των σεναρίων. Ενδιαφέρον είχαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί είχαν αμφιβολίες για τη σωστή απάντηση. Η κατάσταση αυτή εμφανίστηκε κατά κύριο λόγο στο Έργο 5 «Πυκνή διάταξη ρητών – αρρήτων». Στις περιπτώσεις αυτές, κάποιοι εκπαιδευτικοί προσπάθησαν να ανακαλέσουν πληροφορίες που είχαν διδαχθεί κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, αποφεύγοντας να προσπαθήσουν να εξετάσουν οι ίδιοι την ορθότητα μιας πρότασης. Άλλοι εκπαιδευτικοί κατέφυγαν σε συγκεκριμένα παραδείγματα ειδικών περιπτώσεων και βασιζόμενοι σε αυτά, κατέληξαν σε συμπέρασμα για τη γενική περίπτωση, επιδεικνύοντας πλημμελή χρήση του επαγωγικού συλλογισμού. Λίγες ήταν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν τους περιορισμούς του επαγωγικού συλλογισμού και δήλωσαν την αναγκαιότητα μιας απόδειξης, είτε μόνο ρητά, είτε προσπαθώντας να σκιαγραφήσουν μια απόδειξη (για παρόμοια ευρήματα σε φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος, βλ. Mammur et al., 2019). Τα ευρήματα αυτά αναδεικνύουν ελλείμματα σε μια άλλη πτυχή της Κοινής Γνώσης Περιεχομένου, που αφορά τις μεθόδους τεκμηρίωσης.

Μέσω της εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών από τους συμμετέχοντες διερευνήθηκαν πτυχές της Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών, που αποτελεί μια από τις κατηγορίες της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου που πρέπει να κατέχει ο εκπαιδευτικός προκειμένου να είναι σε θέση να διδάξει μαθηματικά (Ball et. al., 2008). Σύμφωνα με τα ευρήματά μας, κατά μέσο όρο, λιγότερες από τις μισές απαντήσεις των μαθητών εξηγήθηκαν ουσιαστικά από τους εκπαιδευτικούς που τις είχαν αξιολογήσει ορθά, ενώ φάνηκαν και ατομικές διαφορές ως προς το πλήθος των ουσιαστικών εξηγήσεων που έδωσε κάθε συμμετέχων. Υπήρξαν, δε, χαρακτηριστικές περιπτώσεις συμμετεχόντων που έδωσαν πολλές σωστές αξιολογήσεις, αλλά πολύ λίγες ουσιαστικές εξηγήσεις της σκέψης των μαθητών. Μια επιπλέον παρατήρηση είναι ότι η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί αναφορικά με την εξήγηση του τρόπου σκέψης των μαθητών φαίνεται να είναι ανεξάρτητη της δυσκολίας του μαθηματικού περιεχομένου που πραγματεύονται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το υποέργο Ε.3.1 στο οποίο ο μαθητής υποστηρίζει ότι στην ευθεία των αριθμών μπορούν να τοποθετηθούν όλοι οι αριθμοί που του έχουν δοθεί εκτός από το 0,8888.... και το ($\sqrt{2} + \sqrt{5}$). Αν και οι εκπαιδευτικοί (με μία μόνο εξαίρεση) αξιολόγησαν σωστά την συγκεκριμένη απάντηση, και μάλιστα χωρίς να εμφανίζουν ιδιαίτερη δυσκολία, εξέφρασαν αδυναμία εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών.

Ζητώντας από τους εκπαιδευτικούς να δώσουν ανατροφοδότηση στους υποθετικούς μαθητές, διερευνήσαμε άλλες πτυχές της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Ένα κεντρικό εύρημα που αναδύθηκε από τα δεδομένα μας αφορά τη Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας, καθώς αφορά την κατανόηση «παιδαγωγικών θεμάτων τα οποία επηρεάζουν την κατανόηση των μαθητών» (Ball et al., 2008: 401). Πιο συγκεκριμένα, το εύρημα αυτό αφορά τον τρόπο με τον οποίο αναφέρθηκαν οι εκπαιδευτικοί στη συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της ανατροφοδότησης. Στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι αναφορές αυτές ήταν ανύπαρκτες, ή περιέγραφαν μια τετριμμένη συμμετοχή του μαθητή, κυρίως μέσω προσχηματικών ερωτήσεων. Με την εξαίρεση δύο εκπαιδευτικών που (σε κάποια από τα έργα) περιγράφουν μια πιο ουσιαστική συμμετοχή των μαθητών, οι υπόλοιποι περιγράφουν μια κατάσταση στην οποία θέτουν τους εαυτούς τους σε ομιλητές και τους μαθητές σε ακροατήριο, αναλαμβάνοντας πλήρως την ευθύνη της παρουσίασης και της εξήγησης της σωστής απάντησης.

Από την εξέταση των ανατροφοδοτήσεων προκύπτουν επίσης ευρήματα που αφορούν στην Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου (Ball et al., 2008). Εστιάζοντας στον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν παραδειγματικές καταστάσεις στην ανατροφοδότησή τους, εντοπίσαμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, η απλή παρουσίαση αντιπαραδειγμάτων στους ισχυρισμούς των υποθετικών μαθητών θεωρήθηκε αρκετή ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν τη μαθηματική κατάσταση. Επιπλέον, εμφανίστηκε και πάλι το φαινόμενο του πλημμελούς επαγωγικού συλλογισμού, με τους εκπαιδευτικούς να θεωρούν ότι συμπεράσματα για τη γενική περίπτωση μπορούν να εξαχθούν ασφαλώς βάσει ειδικών περιπτώσεων. Σε περιπτώσεις που οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε (θεωρούμενες ως) ανάλογες καταστάσεις από την καθημερινή ζωή, διαπιστώσαμε ότι το πλαίσιο που επέλεξαν ήταν ακατάλληλο για την πραγμάτευση του μαθηματικού περιεχομένου. Εντοπίσαμε, επίσης, και μια περίπτωση στην οποία ο εκπαιδευτικός θα προέτρεπε τους μαθητές να σκεφτούν κατ' αναλογία με τους φυσικούς αριθμούς, που οδήγησε σε ένα εμφανές μαθηματικό σφάλμα. Τα ευρήματα αυτά δίνουν ενδείξεις για ελλείμματα στην Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου.

Τέλος, το ερώτημα «πώς γνωρίζουμε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν στην ευθεία;» αφορά στη Γνώση Ορίζοντα του Περιεχομένου (Ball & Bass, 2009; Ball et al., 2008). Από τις αποκρίσεις των συμμετεχόντων διαφαίνεται ότι, με δύο εξαιρέσεις, δε γνωρίζουν πώς προκύπτει ένα μαθηματικό δεδομένο, το οποίο βρίσκεται στη βάση μιας αναπαράστασης για τους πραγματικούς αριθμούς που είναι κεντρική στα σχολικά μαθηματικά.

Συνοψίζοντας, η συγκεκριμένη έρευνα δίνει ενδείξεις για ελλείμματα σε διάφορες κατηγορίες της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, όπως τις εξειδικεύουν για τα μαθηματικά οι Ball και οι συνεργάτες της (2008), σε απόφοιτους Μαθηματικών Τμημάτων που εργάζονται ως εκπαιδευτικοί στην ιδιωτική εκπαίδευση. Φυσικά, ο αριθμός των συμμετεχόντων ήταν περιορισμένος (15 συμμετέχοντες) με αποτέλεσμα να μη μπορούμε να γενικεύσουμε με ασφάλεια τα συμπεράσματα που προκύπτουν. Περαιτέρω έρευνα, με μεγαλύτερο και αντιπροσωπευτικότερο δείγμα εκπαιδευτικών είναι απαραίτητη για τη γενίκευση των συμπερασμάτων . Τέλος, στους περιορισμούς της έρευνας θα πρέπει να προστεθεί και η έλλειψη εμπειρίας της ερευνήτριας. Με την εκ των υστέρων γνώση, υπάρχουν πολλές διευκρινιστικές ερωτήσεις που θα ευχόταν να είχε κάνει στους συμμετέχοντες.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

<u>Ξενόγλωσση</u>

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The elementary school journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Biza, I., Nardi, E., &Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation- specific contexts. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 301–309.

Cheung, P., Rubenson, M., &Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Children generalize the successor function to all possible numbers years after learning to count. *Cognitive psychology*, *92*, 22-36.

Depaepe, F., Verschaffel, L., &Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and teacher education*, *34*, 12-25.

DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., &Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *40*(1), 71.

DeWolf, M., &Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational studies in mathematics*, *58*(3), 335-359.

Fischbein, E. P. H. R. A. I. M., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics*, 3-40.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., &Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings?.*Learning and instruction*, *8*(4), 341-374.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the learning of mathematics*, *17*(3), 36-45.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, *2*, 1-27.

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 183-199.

Kieren, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

Lakoff, G., &Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York: Basic Books.

Li, L., & Tall, D. (1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming. *Proceedings of PME*, *17*(2), 41-48.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?.*Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Markovits, Z., &Sowder, J. T. (1991). Students' Understanding of the Relationship between Fractions and Decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13*(1), 3-11.

Marmur, O. Conversations on Density of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ OferMarmur Ion Moutinho Rina Zazkis Simon Fraser University Universidade Federal Fluminense Simon Fraser University We explore the notion of density of the set of rational numbers in the set of real numbers, as interpreted by undergraduate mathematics students. Participants’ responses to a scripting task.

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education II* (pp. 35-46). Praga: UniverzitaKarlova v Praze, PedagogickáFaculta.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., &Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept (s). *Learning and Instruction*, *37*, 14-20.

Merenluoto, K., &Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 232-257). Springer, Dordrecht.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for research in mathematics education*, 122-147.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. *How students learn: Mathematics in the classroom*, 121-162.

Nardi, E., Biza, I., &Zachariades, T. (2012). 'Warrant'revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173.

Neumann, R. A. I. N. E. R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. In *Proceedings of the Annual Meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104).

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, *40*(1), 27-52.

Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H., &Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 345.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). Princeton University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Siegler, R. S., &Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909.

Singer, F. M., &Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188-205.

Smith, C. L., Solomon, G. E., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*(2), 101-140.

Tall, D., &Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, *82*.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 199-238.

Terry, G., Hayfield, N., Clarke, V., & Braun, V. (2017). Thematic analysis. *The Sage handbook of qualitative research in psychology*, 17-37.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities*, *50*(6), 614-620.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Retrieved June 11, 2004, 2004.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 213-219.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., &Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers.

Vamvakoussi, X. (2010). The 'numbers are points on the line'analogy. *Use of Representations in Reasoning and Problem Solving: Analysis and Improvement*, 209.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*(5), 676-685.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., &Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Vamvakoussi, X., &Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. Learning and Instruction, 14(5 SPEC.ISS.), 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., &Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., &Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the “rubber line” bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265-284.

Vamvakoussi, X. Vamvakoussi, X.(2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics. ZDM Mathematics Education.

Vamvakoussi, X. (2019). The Use of Analogies in Mathematics Instruction: Affordances and Challenges. In *Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning* (pp. 247-268). Academic Press.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Number sense in the transition fromnatural to rational numbers. *British Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 43-56.

Vosniadou, S. (2014). Examining cognitive development from a conceptual change point of view: The framework theory approach. *European Journal of Developmental Psychology*, *11*(6), 645-661.

Vosniadou, S., &Skopeliti, I. (2014). Conceptual change from the framework theory side of the fence. *Science & Education*, *23*(7), 1427-1445.

Zazkis, R., &Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *MathematicalThinkingandLearning*, *12*(4), 263-281.

Ελληνική

Ζωιτσάκος, Σ. (2019). <<Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδαδκαλία των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση>> (Διδακτορική Διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Μαμωνά, Γ. (1987). Διαισθητικές προσεγγίσεις της ευθείας των αριθμών από τους μαθητές. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (4), 283-290.

Τσαμάτος, Π. (2014). *Τοπολογία*. Αθήνα: Εκδόσεις Τζιόλα

Τσε, Ε. (2020). «Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης: Η περίπτωση των κλασμάτων» (Μεταπτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα.

Φωκάς, Δ., (2019). *«Η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών: Μια μελέτη περίπτωσης»* (Μεταπτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα.

Παράρτημα: Ερευνητικό Εργαλείο

Παρακάτω παρουσιάζεται το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα. Ο κάθε συμμετέχων είχε μπροστά του τα παρακάτω διδακτικά σενάρια καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης.

1ο Διδακτικό Σενάριο: (Ε1)
Σε μια σχολική τάξη Γ' Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών, ο καθηγητής θέτει στους μαθητές την παρακάτω ερώτηση: "Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1,1 και του 1,3;"
Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:

Μαθητής Α: ένας, ο 1,2 (Ε.1.1)
Μαθητής Β: 19, οι 1,12, 1,13, 1,14, 1,15, ... 1,19, 1,20, 1,21, ... 1,29 (Ε.1.2)
Μαθητής Γ: Είναι άπειροι... πάρα πολλοί.... πάνω από ένα δισεκατομμύριο. Μόνο ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. (Ε.1.3)

2ο Διδακτικό Σενάριο:(Ε2)
Ένας μαθητής Γ' Γυμνασίου ερωτάται πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 3/8 και στο 5/8. Στη συνέχεια δίνεται αυτούσια η απάντηση του μαθητή.
Μαθητής: "Υπάρχει ένας... Όχι, μια στιγμή! Κανένας δεν υπάρχει! Γιατί το 4/8 γίνεται 1/2 και αυτό δεν είναι ανάμεσα."

3ο Διδακτικό Σενάριο: (Ε3)
Σε μια σχολική τάξη Γ' Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης συζητιέται το εξής ερώτημα: "Δίνονται οι αριθμοί: 0,5, 1/3, 5, -9, 0,333, 0,88888......, ($\sqrt{2} + \sqrt{5}$). Μπορούν να τοποθετηθούν όλοι αυτοί οι αριθμοί στην ευθεία των πραγματικών αριθμών;"
Στη συνέχεια δίνονται οι απαντήσεις δύο μαθητών:
Μαθητής Α: Ναι! Μπορούμε να τους τοποθετήσουμε όλους εκτός από το 0,8888.... και το ($\sqrt{2} + \sqrt{5}$). (Ε.3.1)
Μαθητής Β: Μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους αριθμούς στην ευθεία. Πάντα μπορούμε, όποιος και να είναι ο αριθμός που μας δίνεται. (Ε.3.2)
Ένας τρίτος μαθητής κάνει την εξής ερώτηση: "Πως ξέρουμε ότι ισχύει αυτό;

Αποδεικνύεται;" (Ε.3.3)
Τι θα του απαντούσατε;

<u>4ο Διδακτικό Σενάριο:</u> (Ε.4)
Στο μάθημα της Άλγεβρας της Α' Λυκείου, στο κεφάλαιο των ανισοτήτων δίνεται στην τάξη το παρακάτω ερώτημα:
"Έστω x є R, με x є (0, 1). Μπορεί να προσδιοριστεί η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει η μεταβλητή x;"
Στη συνέχεια παραθέτουμε τις απαντήσεις 3 μαθητών:
<u>Μαθητής Α:</u> Μια τιμή πάρα πολύ κοντά στο 1, αλλά όχι το 1. (Ε.4.1)
*<u>Μαθητής Β:</u>*Το 0,999 (Ε.4.2)
<u>Μαθητής Γ:</u> Το 0,9999...... (Ε.4.3)

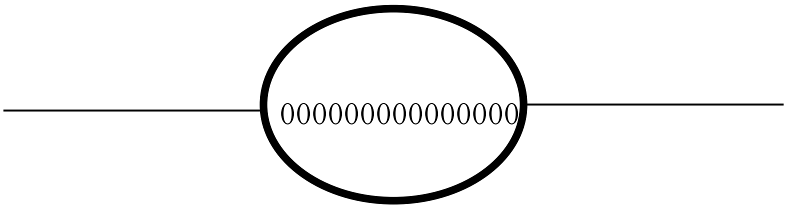
<u>5ο Διδακτικό Σενάριο:</u> (Ε5)
Στη συνέχεια παραθέτουμε τις απαντήσεις ενός πρωτοετή φοιτητή Μαθηματικού Τμήματος, σε ερώτηση σωστού - λάθους.

Ερώτηση	Σ	Λ
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσά σε δύο άρρητους αριθμούς, να βρεθεί ένας ρητός. (Ε.5.1)		Χ
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσα σε δύο άρρητους αριθμούς, να βρεθεί ένας άρρητος. (Ε.5.2)	Χ	
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, να βρεθεί ένας άρρητος. (Ε.5.3)	Χ	
Είναι πάντα εφικτό, ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, να βρεθεί ένας ρητός αριθμούς. (Ε.5.4)		Χ

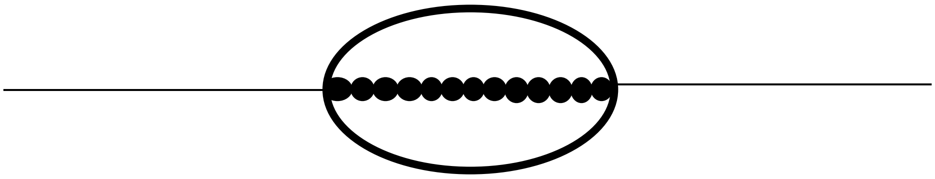
<u>6ο Διδακτικό Σενάριο:</u> (Ε6)
Σε μια τάξη μαθηματικών της Γ' Λυκείου, η καθηγήτρια ζητά από τα παιδιά να κάνουν το

εξής νοητικό πείραμα: Να φανταστούν ότι έχουν ένα μαγικό μεγεθυντικό φακό και μπορούν να κοιτάξουν ένα ευθύγραμμο τμήμα από πολύ κοντά, μεγενθύνοντας όσες φορές θέλουν. Τους ζητάει να σχεδιάσουν τι θα έβλεπαν.

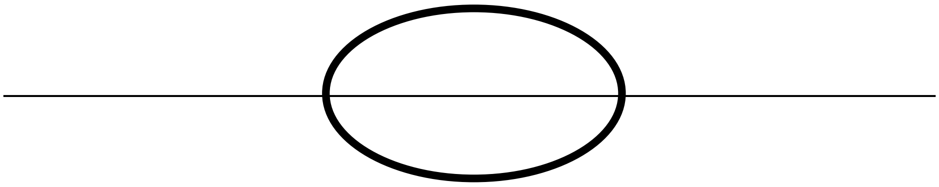
(E.6.1)



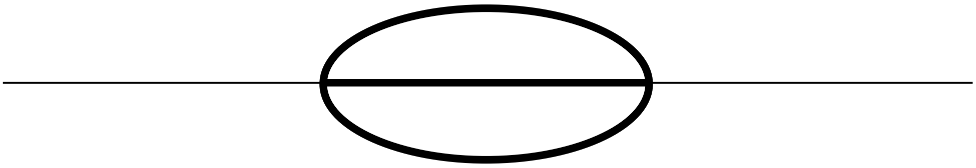
(E.6.2)



(E.6.3)



(E.6.4)



<u>7ο Διδακτικό Σενάριο:</u> (E7)

Σε ένα Μαθηματικό Τμήμα, η καθηγήτρια ζητά από τους φοιτητές να εξηγήσουν με δικά τους λόγια τι σημαίνει ότι η ευθεία των πραγματικών είναι "συνεχής".

<u>Φοιτητής 1:</u> Σημαίνει ότι οι πραγματικοί είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους, ότι για κάθε πραγματικό υπάρχει ένας αριθμός που είναι "κολλητά", δεν υπάρχει κενό ανάμεσά τους. (E.7.1)

<u>Φοιτητής 2:</u> Σημαίνει ότι αν πάρεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, πάντα μπορείς να βρεις άπειρους πραγματικούς ανάμεσά τους. (E.7.2)