ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Α' Ηλικιακού Κύκλου (5-12 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

«Ανάπτυξη της ικανότητας εύρεσης του γενικού όρου στο πλαίσιο των προτύπων: μια διδακτική παρέμβαση στην Β΄ Δημοτικού»

"Developing the ability of 2nd Graders to find the general term in the context of patterns: a teaching intervention"

του

Καραγκιόζη Κωνσταντίνου, ΑΜ 830

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια Π.Τ.Ν./Παν/μιο Ιωαννίνων

Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάνα, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε./Α.Π.Θ.

Βαμβακούση Ξένια, Αναπλ. Καθηγήτρια, Π.Τ.Δ.Ε./ Παν/μιο Ιωαννίνων

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2020

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να ερευνηθεί η ικανότητα γενίκευσης των παιδιών της Β Δημοτικού, στα επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα, σχηματικά ή οπτικά, πρότυπα. Για το σκοπό αυτό, πραγματοποιήθηκε μία ημι-πειραματική έρευνα με διδακτική παρέμβαση. Η έρευνα αποτελούνταν από τρεις φάσεις: τον Προέλεγχο, την Διδακτική Παρέμβαση και τον Μεταέλεγχο. Σε αυτήν έγινε προσπάθεια να διερευνηθούν οι ικανότητες των παιδιών Β΄Δημοτικού στη συνέχιση, στη συμπλήρωση, στη διόρθωση, στην εύρεση του δομικού στοιχείου και στις κοντινές και μακρινές προβλέψεις με οπτικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Ακόμα έγινε προσπάθεια διερεύνησης των ικανοτήτων τους στη συνέχιση, τις κοντινές και μακρινές προβλέψεις, αλλά και την καταγραφή του γενικού κανόνα σε οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα. Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 20 μαθητές της Β' Τάξης (ηλικία 7 έως 8 ετών). Από την ανάλυση των στοιχείων της έρευνας φάνηκε πως οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ περισσότερο σε έργα που περιλαμβάνουν οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα, σε σχέση με εκείνα που περιλαμβάνουν επαναλαμβανόμενα. Ακόμα φάνηκε πως σε έργα συνέχισης, συμπλήρωσης, διόρθωσης και εύρεσης του δομικού στοιχείου οι μαθητές είχαν εξαιρετικές επιδόσεις. Ακόμα, ενώ κατά τον Προέλεγχο διαχειριζόντουσαν τα αναπτυσσόμενα πρότυπα ως επαναλαμβανόμενα, μετά την παρέμβαση οι επιδόσεις τους στα έργα συνέχισης αναπτυσσόμενων προτύπων ήταν αρκετά βελτιωμένες. Παρόλα αυτά, οι επιτυχίες των μαθητών στην συνέχιση αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων παρατηρούμε πως αυτές μειώνονται όσο αυξάνονται οι άξονες στους οποίους αναπτύσσεται το πρότυπο. Οι προβλέψεις στα επαναλαμβανόμενα πρότυπα δυσκόλεψαν αρκετά τους μαθητές κατά τον Προέλεγχο, ενώ μετά την παρέμβαση παρατηρήθηκε αύξηση στις κοντινές προβλέψεις με πρότυπα τύπου ΑΒ, χωρίς όμως να αλλάξει η επίδοσή τους στις μακρινές. Ακόμα φάνηκε πως οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κάνουν γενικεύσεις, να εντοπίζουν και να εκφράζουν τον γενικό κανόνα αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων. Τέλος, συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών κατά τον Προέλεγχο και κατά τον Μεταέλεγχο παρατηρείται πως η παρέμβαση φάνηκε να επιδρά θετικά στην ικανότητα κοντινών προβλέψεων με επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα και στην ικανότητα συνέχισης απλών και σύνθετων αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων.

Abstract

The aim of this paper is to investigate the generalization ability of 2nd Grade school children, in repetitive and developing, schematic or visual, models. For this purpose, a semi-experimental research was conducted with didactic intervention. The research consisted of three phases: Pre-test, Teaching Intervention and Post-test. In this research, an attempt was made to explore the abilities of 2nd Grade students to continue, to complete, to correct, to find the structural unit and to make near and far predictions with visually repetitive patterns. An attempt was also made to explore their abilities in continuing patterns, near and far generalizations, but also their ability to write down the general rule in visually developing patterns. The participants of the research were 20 2nd Graders (age 7 to 8 years). The analysis of the research data revealed, that tasks, which involve visually developing patterns, are more difficult for students, than those that involve repetitive ones. Students performance was excellent in the tasks of continuing, completing, correcting and finding the structural element. Although, during Pre-test students managed the developing patterns as repetitive, after the intervention their performance in continuing developing patterns was quite improved. Nevertheless, the success of students in continuing developing visual patterns seemed to decrease as the axes on which the pattern develops increase. During Pre-test it was difficult for students to make predictions with repetitive patterns, however after the intervention students' performance increased in near predictions with AB type patterns, but there was no effect in their performance in the far predictions. Results also showed that students have the ability to make generalizations, identify and express the general rule of developing visual patterns. Finally, comparing the performance of students during the Pre-Test and the Post-Test, it is observed that the intervention seemed to have a positive effect on the ability to make near predictions with repetitive visual patterns and the ability to continue simple and complex developing visual patterns.

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, οι ερευνητικές μελέτες που αφορούν τα μαθηματικά στην εκπαίδευσή επικεντρώνονται στον επαναπροσδιορισμό της έννοιας της αλγεβρικής σκέψης σε όλες τις τάξεις της εκπαίδευσης και ως επί το πλείστον στην πρωτοβάθμια εκπαίδευσή (Carraher & Schliemann, 2007· Kieran, 2011). Ερευνάται, λοιπόν, διεξοδικά η χρησιμότητα δραστηριοτήτων που ενισχύουν την αλγεβρική σκέψη, μέσα από γεωμετρικά μοτίβα και εικονικές ακολουθίες (π.χ. Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008 ·Moss & Beatty, 2010 ·Radford, 2010· Rivera, 2011). Σύμφωνα με αυτές τις μελέτες οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν αναδρομικές στρατηγικές για να περιγράψετε γενικεύσεις.

Ενδιαφέρουσα είναι επίσης η άποψη ότι οι μαθητές μικρότερων ηλικιών μπορούν να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη εφόσον συμμετάσχουν στα κατάλληλα εκπαιδευτικά προγράμματα. Στο πλαίσιο αυτό, μάλιστα αποδεικνύεται ότι εφόσον η άλγεβρα δε διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο και γενικότερα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την αλγεβρική σκέψη τα επόμενα χρόνια, όταν δηλαδή έρχονται σε επαφή με αυτή στο γυμνάσιο (Radford, 2008). Πρόσφατες έρευνες αναγνώρισαν, επίσης, τη σημασία της αλληλεπίδρασης του μοτίβου και της δομής με την αλγεβρική σκέψη καθώς ενισχύουν τη βασική αριθμητική στους μικρούς μαθητές (Papic, Mulligan & Mitchelmore 2011 · Wilkie & Clarke, 2016).

Ένας τομέας των μαθηματικών που θεωρείται ότι συνδέεται θετικά με την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού που εμφανίζουν (Mulligan& Mitchelmore, 2009) καθώς και της αλγεβρικής τους σκέψης (Warren, 2005) είναι τα πρότυπα ή μοτίβα (patterns). Τα τελευταία χρόνια, στο Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του δημοτικού σχολείου, εντάχθηκε η μελέτη των μοτίβων ή προτύπων (patterns). Αποτελεί μια καινούρια διδακτική ενότητα, επισημαίνοντας με αυτόν τον τρόπο τη σπουδαιότητα που αποδίδεται διεθνώς στον τομέα αυτό της Μαθηματικής επιστήμης (Steen, 1988). Στην παρούσα εργασία, θα χρησιμοποιηθεί ο όρος πρότυπα. Τα πρότυπα κατηγοριοποιούνται ως προς την μορφή αλλά και ως προς την εξέλιξή τους. Ως προς την εξέλιξη κατατάσσονται σε επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα (van de Walle, 2007). Ενώ ως προς την μορφή και το περιεχόμενό τους μπορούν να χαρακτηριστούν ως αριθμητικά ή οπτικά (Orton , Orton & Roper, 1999).

Στις μικρές ηλικίες εκπαίδευσης, οι έρευνες σχετικά με τη γενίκευση είναι περιορισμένες. Σύμφωνα με τον Mason (1996), η «έκφραση της γενικότητας» βρίσκεται στις ρίζες της άλγεβρας αλλά και χαρακτηρίζει όλη τη διαδρομή της. Ακόμα ο ίδιος έγραψε πως η γενίκευση είναι η καρδιά των Μαθηματικών και η μαθηματική σκέψη λαμβάνει χώρα μόνο όταν οι μαθητές εκφράζουν τις δικές τους γενικεύσεις. Γενικότερα, ως γενίκευση ορίζεται η αναγνώριση προτύπων, διαδικασιών, δομών και των σχέσεων διαμέσου και ανάμεσα σε αυτές (Kaput, 1999). Η Ellis (2007) ορίζει τη γενίκευση ως τη δημιουργία συσχετίσεων ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα, την αναζήτηση ομοιοτήτων και σχέσεων και την επέκταση ενός προτύπου, μιας σχέσης ή ενός κανόνα σε μια πιο γενικευμένη δομή. Τέλος, η αλγεβρική γενίκευση ενός προτύπου ορίστηκε από τον Radford (2008) ως η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν μια ομοιότητα σε κάποια στοιχεία μιας ακολουθίας και να γενικεύουν σε όλους τους όρους της, αλλά και να μπορούν να εκφράσουν άμεσα οποιονδήποτε όρο της.

Στο πλαίσιο της σημασίας της γενίκευσης στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη σε συνδυασμό με την περιορισμένη ελληνική βιβλιογραφία στο αντικείμενο αυτό, στην παρούσα εργασία επιχειρείται να ερευνηθεί η ικανότητα γενίκευσης που εμφανίζουν τα παιδιά της Β’ Δημοτικού, στα χρησιμοποιώντας αναπτυσσόμενα και επαναλαμβανόμενα οπτικά γεωμετρικά πρότυπα.

1. Ανασκόπηση βιβλιογραφίας- θεωρητικό πλαίσιο

1.1. Μοτίβα στα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

1.1.1. Έννοια μοτίβου

Το μοτίβο (pattern) ουσιαστικά είναι η αναζήτηση μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών. Ο προσδιορισμός και η εφαρμογή μοτίβων συμβάλλει στην τάξη, τη συνοχή και την προβλεπτικότητα σε φαινομενικές καταστάσεις και μας επιτρέπει να κάνουμε γενικεύσεις πέρα από τις πληροφορίες που μας είναι ήδη γνωστές και οικείες. Αν και μπορεί να θεωρηθεί ως "περιοχή περιεχομένου", το μοτίβο είναι κάτι περισσότερο από αυτό, αφού αποτελεί μια διαδικασία, έναν τομέα μελέτης και συνεπώς μια συνήθεια του νου (Clements & Sarama, 2009). Τα μοτίβα μπορεί να εστιάσουν σε μια μόνο διάσταση (π.χ. σχήμα ή χρώμα), οπότε και γίνεται επανάληψη αυτής της διάστασης(π.χ. κόκκινο- μπλε) (Rittle-Johnson et al., 2013).

Τα μοτίβα για τα μικρά παιδιά αρχικά είναι αντιληπτά ως ένας ρυθμός ή ως ένα ποίημα (Plessis, 2018). Αυτός ο ρυθμός αποτελεί την επαναλαμβανόμενη φύση του μοτίβου (Clements & Sarama, 2009) που συχνά αναφέρεται ως «Κυκλική δομή» (Liljedahl 2004). Ο εντοπισμός του ρυθμού αυτού βοηθάει τους μικρούς μαθητές να ακολουθήσουν ένα συγκεκριμένο μοτίβο (Papic 2007) ή και να σχεδιάσουν τα δικά τους μοτίβα (Threlfall 1999). Η κατανόηση ενός μοτίβου επιτρέπει στα μικρά παιδιά να προχωρήσουν σε γενικεύσεις, γεγονός που τα καθιστά ένα χρήσιμο γνωστικό εργαλείο στην άλγεβρα (Plessis, 2018)

Η κατηγοριοποίηση των μοτίβων περιλαμβάνει δύο μεγάλες ομάδες, όπως προκύπτουν από την εξέλιξή τους: τα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (van de Walle, 2007). Ειδικότερα, όταν γίνεται αναφορά στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα νοούνται αυτά που βασίζονται στην επανάληψη και ο πυρήνας τους είναι η μικρότερη επαναλαμβανόμενη αλληλουχία στοιχείων. Χαρακτηριστικό σε αυτά τα μοντέλα είναι ότι ο πυρήνας τους επαναλαμβάνεται τέλεια, ενώ έχουν συνήθως κυκλική δομή, δηλαδή υπάρχει ένα κεντρικό θέμα (π.χ. ΑΒΓ) και υποδεικνύεται η επιστροφή συνεχώς σε αυτό (ΑΒΓ-ΑΒΓ-ΑΒΓ..). Η κατηγορία των επαναλαμβάνομενων μοτίβων αποτελεί ένα εννοιολογικό σκαλοπάτι για την Άλγεβρα και ένα σημαντικό πλαίσιο για την προώθηση της γενίκευσης. Για να κατακτηθεί από τα παιδιά η γενίκευση χρειάζεται να αναγνωρισθεί η δομή του μοτίβου μέσα από τις συνεχόμενες επαναλήψεις, ώστε στη συνέχεια να μπορούν να το χρησιμοποιήσουν και τα ίδια ποικιλοτρόπως (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Η άλλη κατηγορία που αφορά τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (ή ακολουθίες). Σε αυτήν, εντοπίζονται ξεχωριστά στοιχεία ή πλαίσια στα μοτίβα, που ωστόσο το κάθε νέο πλαίσιο συνδέεται με το προηγούμενο βασιζόμενο σε έναν κανόνα. Επιδιώκεται, λοιπόν, όχι μόνο η επέκτασή των μοτίβων αλλά κυρίως ο εντοπισμός γενικεύσεων ή αλγεβρικών σχέσεων ώστε τα παιδιά να μπορούν να προβλέψουν την πορεία με την οποία πρέπει να εξελιχθεί το αναπτυσσόμενο μοτίβο (αριθμητικό ή οπτικό) ή και να εντοπίσουν το κενό σε ένα οποιοδήποτε σημείο στην πορεία του. Για να επιτευχθεί αυτό είναι αναγκαία η κατανόηση μίας συναρτησιακής σχέσης που υφίσταται μεταξύ των όρων του μοτίβου. Δεν αρκεί δηλαδή μόνο η αναγνώριση των όρων μέσα σε ένα μοτίβο, αλλά χρειάζεται και η κατανόηση της ακολουθίας τους (Van de Walle, 2007).

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να αναφερθούν οι παράγοντες που φαίνεται ότι διευκολύνουν τα παιδιά να διαχειριστούν ένα μοτίβο. Όσον αφορά τον παράγοντα του φύλου, φαίνεται ότι υπερέχουν τα αγόρια συγκριτικά με τα συνομήλικα τους κορίτσια στα έργα με τα μοτίβα (Patterson, Block & Pasnak, 2015). Επίσης, αναδεικνύονται ότι τυχόν διαφοροποιήσεις στον τρόπο που παρουσιάζονται τα μοτίβα, που αφορούν δηλαδή τα χρώματα, σχήματα, αριθμούς και γράμματα δεν επηρεάζουν ουσιαστικά τις επιδόσεις των εξάχρονων παιδιών (Gadzichowski, 2012). Ακόμα, έχει διαπιστωθεί θετική σχέση μεταξύ της ικανότητας που έχουν τα παιδιά από 6 έως 8 ετών να αναγνωρίζουν και να συνεχίζουν ένα μοτίβο και της επίδοσης που εμφανίζουν τους σε αριθμητικά προβλήματα που εμπεριέχουν ένα σενάριο. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση που γνωστικοί τους παράγοντες, όπως δηλαδή είναι η εργαζόμενη μνήμη, η ταχύτητα επεξεργασίας και οι γλωσσικές ικανότητες, έχουν ελεγχθεί (Lee, Ng, Bull, Pe, & Ho, 2011).

Σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές (π.χ. Lannin, 2005), η περιγραφή μιας ορθής ισχυρής αιτιολόγησης του γενικού κανόνα σε ένα μοτίβο αποτελεί απόδειξη της σε βάθος, και όχι επιφανειακής, κατανόησης του μοτίβου. Ο Lannin (2005) διερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο μαθητές Στ' τάξης ερμηνεύουν και προχωρούν σε γενικεύσεις ενός κανόνα σε μοτίβα με εικονική ή λεκτική αναπαράσταση και παρατήρησε πέντε διαδοχικά επίπεδα, τα οποία βαθμιαία αναπτύσσονταν από ένα πρώτο επίπεδο, όπου τα παιδιά αδυνατούν να δώσουν κάποια εξήγηση, ως ένα πολύ προχωρημένο στάδιο, όπου οι εξηγήσεις τους είναι πολύ συστηματικές.

- Τα χαρακτηριστικά που εμφανίζουν τα μοτίβα μπορεί να χωριστούν ανάλογα με τους εξής τρόπους :

- *Υλικό μοτίβου*: αφορά το υλικό που σχηματίζεται ένα μοτίβο (κατασκευή ή παρουσίαση). Μπορεί να είναι οπτικό, δηλαδή με εικόνες ή αντικείμενα. Επίσης, μπορεί να είναι κινητικό, λεκτικό ή και ακουστικό (Τζεκάκη, 2010).

- *Περιεχόμενο ή φύση των στοιχείων του μοτίβου*: ο διαχωρισμός μπορεί να γίνει σύμφωνα με το σχήμα, το μέγεθος ή το χρώμα, οπότε και αντίστοιχα μπορεί να είναι γεωμετρικές, εικονομορφικές, αλγεβρικές, σχηματικές κ.α. (Τζεκάκη, 2010· Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019).

- *Εξέλιξη του μοτίβου:* όπου μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενες, αναπτυσσόμενες, αναπτυσσόμενες αναδρομικά κ.α. (Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019).

- *Χωρικές διαστάσεις της εξέλιξης:* το μοτίβο σε αυτή την περίπτωση μπορεί να είναι μονοδιάστατο, δισδιάστατο, τρισδιάστατο κ.α. (Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019).

- *Δομή μοτίβου:* αναφέρεται στην μονάδα που επαναλαμβάνεται και στα στοιχεία που το απαρτίζουν. Η μονάδα που επαναλαμβάνεται είναι πιο περίπλοκη εφόσον εμπεριέχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, μονάδα επανάληψης μπορεί να είναι η ΑΒ και η ΑΒΒΓ με τη δεύτερη να είναι πιο περίπλοκη από την πρώτη (Skoumpourdi, 2016· Van de Walle, 2007).

1.1.2. Μοτίβα και μαθηματικά

Όταν γίνεται αναφορά στον όρο «μοτίβο» εννοείται ένα πρότυπο, ένα υπόδειγμα, μία ευδιάκριτη κανονικότητα της φύσης ή ένα τεχνητό σχέδιο, ενώ αποτελεί μετάφραση του αγγλικού όρου «pattern». Πιο συγκεκριμένα, στα μαθηματικά "*το μοτίβο αποτελεί ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά τα οποία παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων*" (Τζεκάκη& Κούλελη, 2007, σελ. 269). Σύμφωνα με τους Mulligan και Mitchelmore (2009) τα μοτίβα είναι οι προβλεπόμενες κανονικότητες που συνήθως περιλαμβάνουν αριθμητικές, χωρικές ή λογικές σχέσεις.

Από πολύ νωρίς, η έννοια του μοτίβου έχει εισαχθεί στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση, τόσο στο εξωτερικό όσο και στην Ελλάδα. Αυτό προκύπτει από την πεποίθηση ότι η εμπλοκή των παιδιών στον τομέα των μοτίβων, είτε πρόκειται για επαναλαμβανόμενα είτε για αναπτυσσόμενα, επιδρά θετικά στην ανάπτυξη τόσο του μαθηματικού συλλογισμού των παιδιών (Mulligan & Mitchelmore, 2009) όσο και της αλγεβρικής τους σκέψης (Warren, 2005).

Το ενδιαφέρον των ερευνητών τα τελευταία χρόνια για τα πρότυπα στον τομέα των μαθηματικών αφορά κυρίως στα μικρά παιδιά και τις δυνατότητες που προκύπτουν από αυτά για τη μαθηματική σκέψη. Είναι σημαντικό, ότι ερευνητικά επιβεβαιώνεται ότι τα παιδιά από μικρή ηλικία είναι ικανά να προβούν σε ικανοποιητικές ενέργειες που σχετίζονται με ένα μοτίβο, (με τον εντοπισμό, την επανάληψη, τη συμπλήρωση, τη συνέχιση αλλά και εκ νέου με την κατασκευή ενός μοτίβου με τη χρήση διάφορων υλικών (π.χ. Papic et al. 2011· Rittle-Johnson, Fyfe, McLean, & McEldoon, 2013· Τζεκάκη & Κούλελη, 2007). Το εντυπωσιακό είναι ότι τα μικρά παιδιά κατασκευάζουν συχνά μοτίβα αυθόρμητα, χωρίς δηλαδή να ακολουθούν συγκεκριμένες οδηγίες και καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό (π.χ. στο παιχνίδι), γεγονός που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον (Fox, 2005).

Ωστόσο, η διερεύνηση των επιδόσεων των μικρών παιδιών δείχνει ότι αυτές συχνά εξαρτώνται και επηρεάζονται από το περιεχόμενο και τη δομή του μοτίβου καθώς και από το είδος του υλικού που εμπλέκεται. Σίγουρα, όμως, οι επιδόσεις των παιδιών εμφανίζονται περισσότερο βελτιωμένες στα επόμενα σχολικά τους χρόνια, ως αποτέλεσμα των προηγούμενων σχετικών εμπειριών τους από την προσχολική ηλικία (Leung, Krauthausen, & Rivera, 2012), ενισχύοντας την άποψη ότι η καθυστέρηση στην ενασχόληση με τα μοτίβα και την αναζήτηση και αναγνώριση δομικών στοιχείων μέσα από αυτά αιτιολογεί τις δυσκολίες των μεγαλύτερων παιδιών στην άλγεβρα (Mulligan & Mitchelmore, 2009 . Warren & Cooper, 2008).

1.1.3. Οφέλη των παιδιών από την εμπλοκή τους με τα μοτίβα

Η διδασκαλία των μοτίβων στην πρωτοβάθμια αποδεικνύει ότι οι μαθητές μπορεί να ενισχύσουν την αλγεβρική τους σκέψη, καθώς είναι σε θέση να κατανοούν και να χρησιμοποιούν γενικεύσεις (Rivera, 2013· Radford, 2008). Σύμφωνα με τον Radford (2008) η γενίκευση ενός μοτίβου βασίζεται στην ικανότητα ενός παιδιού να κατανοεί την επανάληψη κάποιων στοιχείων (π.χ. p 1, p 2, p 3, ..., p k) και στη συνέχεια να τα επεκτείνει ή να τα γενικεύει με όμοιο τρόπο σε όλους τους επόμενους όρους (p k + 1, p k + 2, p k + 3, ...).

Υπάρχει η άποψη ότι τα παιδιά που εμπλέκονται με μια ποικιλία μοτίβων, μέσω των οποίων μπορούν να αντιληφθούν την κανονικότητα, την αλληλουχία και τις διασυνδέσεις, αναπτύσσουν την αλγεβρική τους σκέψη (Mulligan, Prescott, & Michelmore, 2004). Επίσης, η αναγνώριση και ανάλυση των μοτίβων συμβάλλει σημαντικά στο να αναπτυχθεί η νοημοσύνη των παιδιών, αλλά και στην οργάνωση κάποιων καταστάσεων που δεν είναι οργανωμένες. Θετικό ρόλο, ακόμα, διαδραματίζει στη συνειδητοποίηση του χώρου, στον τομέα της σύγκρισης αλλά και της ταξινόμησης (Clements & Sarama, 2009). Το μοτίβο επιδρά ουσιαστικά στην ανάπτυξη της αναλογικής αλλά και επαγωγικής λογικής (English, 2004), ενώ εντοπίζεται θετική σχέση και με τον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό (Mulligan & Michelmore, 1997; Papic, Mulligan &Michelmore, 2011).

Μάλιστα, από την έρευνα των Burgoyne, Witteveen, Tolan, Malone, & Hulme (2017) προκύπτει ότι πέρα από την αλγεβρική σκέψη τα μοτίβα ωφελούν ευρύτερα τη μαθηματική και γλωσσική ανάπτυξη των παιδιών, και συνεπώς το σύνολο των γνωστικών τους δεξιοτήτων. Τέλος, η κατανόηση και η εφαρμογή μοτίβων στην τάξη ενισχύει τις γενικεύσεις σε παρόμοιες καταστάσεις, αλλά και την πρόβλεψη και τη συνοχή κάποιων άλλων φαινομενικών καταστάσεων (Clements & Sarama, 2009). Ο ρόλος των εκπαιδευτικών είναι πολύ σημαντικός για την κατανόηση των μοτίβων και της γενίκευσης από τους μαθητές (Mason, Stacey & Burton, 2010 . 2010; Papic et al. 2011) .

1.1.4. Έρευνες στην ανάπτυξη δράσεων στα μοτίβα

Τα παιδιά συχνά έχουν πολλές στρατηγικές για την επίλυση των προβλημάτων των προτύπων και εν τέλει επιλέγουν εκείνη που είναι σύμφωνη με την ικανότητά τους να την εκτελέσουν και είναι ταυτόχρονα διαθέσιμη (Chen & Siegler, 2000).

Ωστόσο, σημειώνονται και κάποιες δυσκολίες που αφορούν την κατανόηση του μοτίβου και συνεπώς των γενικεύσεων για τα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Orton και Orton (1999), ένας παράγοντας που θεωρείται ανασταλτικός για μια πετυχημένη επιτυχή γενίκευση των μοτίβων αποτελεί η αριθμητική ανεπάρκεια που εμφανίζουν οι μαθητές. Αυτό σημαίνει ότι οι δυσχέρειες κάποιων μαθητών να εφαρμόσουν σωστά πράξεις αλλά και η εμμονή τους σε κάποιες σε αναδρομικές προσεγγίσεις, που μπορεί να ήταν αποτελεσματικές σε άλλες περιπτώσεις κοντινής γενίκευσης, λειτουργούν αρνητικά για την κατανόηση της δομής των μοτίβων (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Οι Zazkis και Liljedahl (2002) σημείωσαν την ύπαρξη μια διαφοράς ανάμεσα στην αναγνώριση ενός μοτίβου από την έκφρασή του. Με άλλα λόγια, οι μαθητές μπορούσαν να εκφράσουν λεκτικά ένα μοτίβο, δε μπορούσαν να το χρησιμοποιήσουν μία αλγεβρική περιγραφή για αυτό. Άλλη δυσκολία που φαίνεται ότι έχουν οι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως σε μοτίβα που συμμεταβάλλονται και όχι σε σχέσεις αλληλεξάρτησης. Το αποτέλεσμα είναι να μην είναι σε θέση να τα γενικεύουν στην πορεία και να εκφράζουν ένα αλγεβρικό συλλογισμό (Ellis, 2007).

Τέλος, ο Rivera (2010) συνέκρινε τα αριθμητικά μοτίβα με οπτικά και κατέληξε πως οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερα στη γενίκευση κατά την ενασχόληση με τα πρώτα, δηλαδή με τα αριθμητικά. Ακόμη, αν και μπορούν να αντιληφθούν τη δομή ενός μοτίβου, εκφράζουν κυρίως με οπτικό τρόπο (με σχέδιο ή σχήμα) μια μακρινή γενίκευση και όχι με προφορικό τρόπο.

1.2. Σύνδεση των μοτίβων με την Άλγεβρα και την αλγεβρική σκέψη.

Από πολύ νωρίς, δηλαδή από την εποχή του Al-Khowarizmi, η άλγεβρα θεωρούνταν ότι αποτελεί μια επιστήμη που χρησιμοποιείται για να επιλύονται εξισώσεις. Η πεποίθηση αυτή ίσχυσε για πολλά χρόνια. Προς τα τέλη της δεκαετίας του 1980 πραγματοποιήθηκαν κάποιες μεταρρυθμίσεις, στις οποίες το κύριο στοιχείο ήταν να αναθεωρηθεί η άποψη για το τι αποτελεί βασικό στοιχείο της άλγεβρας. Επίσης, εξετάστηκαν οι συνέπειες που θα υπήρχαν στην περίπτωση που γινόταν η εισαγωγή κάποιων συγκεκριμένων στοιχείων πιο νωρίς στο αναλυτικό προγράμματα των μαθηματικών που εφαρμοζόταν στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Διατυπώθηκαν δηλαδή υποθέσεις για το αν η άλγεβρα σε αυτή την περίπτωση θα ήταν περισσότερο προσιτή και οικεία σε μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών (Kieran, 2004).

Στο τέλος της δεκαετίας του 1980, η άλγεβρα διδασκόταν μόνο στο λύκειο και σε παιδιά που προετοιμαζόταν για το πανεπιστήμιο (Kieran, 1992). Ωστόσο, στην πορεία των χρόνων ενισχύθηκε η άποψη ότι οι βασικές έννοιες που απαρτίζουν την άλγεβρα που διδάσκεται στους μαθητές είναι προσιτές και στους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η λεγόμενη πρώιμη άλγεβρα. Μάλιστα διαπιστώθηκε ότι η καλλιέργεια της πρώιμης άλγεβρας συμβάλλει θετικά ώστε να αναπτυχθεί εν τέλει η αλγεβρική σκέψη των μαθητών (Loewenberg, 2003· Kaput, 1998).

Η Άλγεβρα αποτελεί μια ενότητα των μαθηματικών, που θεωρείται σημαντική αλλά και συνάμα και δύσκολη όσον αφορά τη μάθηση αλλά και τη διδασκαλία της. Η αξία που έχει έγκειται πρωτίστως σε δύο δυνατότητες που παρέχει: 1) στη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με τρόπο ακριβή και σαφή και 2) στην επίλυση προβλημάτων, κυρίως με τη μέθοδο της μοντελοποίησης με τρόπο πιο εύκολο και αποτελεσματικό (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006˙Kieran, 2007).

Η Άλγεβρα, αρχικά μπορεί να είχε σχέση κυρίως με τη μελέτη των μεθόδων λύσης των εξισώσεων, ωστόσο τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται παντού. Κάποιος μπορεί να τη συναντήσει στα δίκτυα επικοινωνίας, στη φυσική, στα λογιστικά φύλλα μέχρι τα προηγμένα συστήματα προγραμματισμού και σε πολλούς άλλους τομείς. Ακόμα, η Άλγεβρα διερευνά τις αφηρημένες δομές και τον τρόπο που επηρεάζουν ώστε να επιλυθούν τα προβλήματα (Γαβρίλης, 2011).

Η πολυδιάστατη χρήση της άλγεβρας στη σημερινή εποχή, που δεν περιορίζεται δηλαδή μόνο στο σχολείο, τεκμηριώνει και τη σημασία της (Gan, 2008). Η αυξανόμενη χρήση της άλγεβρας στην τεχνολογία και γενικότερα στον πολιτισμό δημιουργεί έντονη ανάγκη να καλλιεργηθεί σε όλα τα μέλη της κοινωνίας και συνεπώς και στα μικρά παιδιά. Θα πρέπει δηλαδή να είναι σε θέση να κατανοούν τις βασικές αρχές της άλγεβρας, αλλά και να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη (Swafford & Langrall, 2000).

Οι προκλήσεις του 21ου αιώνα για τους μαθητές καθιστούν αναγκαία την απόκτηση όσο το δυνατόν περισσότερων δεξιοτήτων και εμπειριών από το δημοτικό μάλιστα. Στο πλαίσιο της εξέλιξης των μαθητικών και συγκεκριμένα της άλγεβρας, οι μαθητές στο δημοτικό χρειάζεται να αποκτήσουν τις βασικές εμπειρίες στον τομέα αυτό(Romberg & Kaput, 1999). Αυτό σημαίνει ότι τα μαθηματικά θα επεκτείνονται πολύ περισσότερο από την απλή αριθμητική και τον υπολογισμό. Η διδασκαλία, λοιπόν, των μαθητών θα στοχεύει και στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις ώστε να αναπτυχθούν συγκεκριμένοι μαθηματικοί τρόποι σκέψης, όπως είναι για παράδειγμα τα πρότυπα, η γενίκευση, η επίλυση προβλημάτων, η μοντελοποίηση κ.α. (Kieran, 2004). Μέσα από αυτή τη διδασκαλία της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια οι μαθητές θα αποκτήσουν εμπειρίες που θα αποτελέσουν τη βάση για τη μετέπειτα διδασκαλία της άλγεβρας στις επόμενες τάξεις (Cai, Lew, Cheongwon, Morris, Moyer, Ng & Schmittau, 2005). Η άλγεβρα στις τάξεις του δημοτικού δεν αποσκοπεί μόνο στην ανάπτυξη νέων εργαλείων που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων, αλλά κυρίως αποσκοπεί στην ανάπτυξη νέου μυαλού (Cai & Knuth, 2011).

Η εισαγωγή της άλγεβρας από το δημοτικό, αποτελεί ουσιαστικά την πρώιμη άλγεβρα και διαδραματίζει ουσιώδη και καίριο ρόλο για τη μετέπειτα σχέση των μαθητών με την άλγεβρα (Stacey& Chick, 2004). Χρειάζεται, όμως, να διευκρινιστεί ότι ο όρος πρώιμη άλγεβρα διακρίνεται από τον όρο προ-άλγεβρα. Ειδικότερα, οι προσεγγίσεις για την προ- άλγεβρα «δεν αμφισβητούν την ακολουθία αριθμητικής πρώτα, και της άλγεβρα αργότερα», (Carraher & Schliemann, 2007, σελ. 675).

Τα πρώτα χρόνια στο δημοτικό οι μαθητές εξερευνούν, αναγνωρίζουν, επεκτείνουν τις ακολουθίες και τα πρότυπα. Κατόπιν, αρχίζουν να δημιουργούν και οι ίδιοι ακολουθίες, πρότυπα και γενικεύσεις. Για να το επιτύχουν αυτό χρειάζεται να έχουν βιώσει αρκετές εμπειρίες με ακολουθίες και πρότυπα, ώστε στις επόμενες τάξεις να είναι σε θέση να λειτουργούν με πιο αφηρημένο τρόπο. Η παρατήρηση επίσης μοτίβων στην φύση, σε καθημερινά γεγονότα, σε διάφορες μορφές και σε σχέδια θα συμβάλλει ώστε να κατανοήσουν ότι οι κανονικότητες αποτελούν την κινητήρια δύναμη της άλγεβρας και συνεπώς των μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics, 1992).

Η αλγεβρική σκέψη αποτελείται από διάφορες μορφές που γενικεύονται μαθηματικές ιδέες. Τα γνωρίσματα αυτά εμφανίζονται κυρίως στις κανονικότητες (Rivera& Becker, 2008). Σχετικά με την έννοια της αλγεβρικής σκέψης είναι αποδεκτό ότι αποτελεί ένα αντικείμενο που έχει προκαλέσει έντονο το ενδιαφέρον των ερευνητών και για το λόγο αυτό έχει διερευνηθεί με συστηματικό τρόπο. Αρχικά, όταν γίνεται αναφορά στην αλγεβρική σκέψη νοείται, κατά τους Swafford και Langrall (2000) η ικανότητα που διαθέτει κάποιος να χειρίζεται μια άγνωστη ποσότητα σα να είναι γνωστή. Στο σημείο αυτό μάλιστα διαφοροποιείται και από την αριθμητική σκέψη που περιλαμβάνει τον χειρισμό γνωστών ποσοτήτων. Βέβαια, θα πρέπει να τονισθεί ότι η άλγεβρα ανήκει σε μια από τις δυσκολότερες περιοχές των σχολικών μαθηματικών (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006).

Σύμφωνα με τον Kaput (2008) η αλγεβρική σκέψη στις μικρές τάξεις εμφανίζει δύο βασικές πτυχές της αλγεβρική σκέψης γενικότερα, ενώ περιλαμβάνει και δύο πτυχές της άλγεβρας. Ειδικότερα, η πρώτη πτυχή σχετίζεται με την προσέγγιση δομής, γενίκευση και η δεύτερη πτυχή αφορά τη διαχείριση συμβόλων σύμφωνα με τους συντακτικούς κανόνες που ισχύουν σε οργανωμένα συμβολικά συστήματα.

Βέβαια, δεν θα πρέπει να αγνοούνται και κάποιες μαθηματικές ικανότητες, όπως είναι η επίλυση εξισώσεων και οι πράξεις με αφηρημένα σύμβολα, οι οποίες αποτελούσαν για πολύ καιρό τον ορισμό της άλγεβρας. Ο συνδυασμός αυτών των πτυχών επιτρέπει μια ολοκληρωμένη θεώρηση για την αλγεβρική σκέψη (Kieran, 2004).

Η διαφοροποίηση της αλγεβρικής σκέψης από τη παραδοσιακή διδασκαλία της έγκειται στο ότι η αλγεβρική σκέψη είναι μια πιο γενική έννοια συγκριτικά με τον όρο της άλγεβρας. Αυτό συμβαίνει γιατί η άλγεβρα επικεντρώνεται στη διαχείριση των μεταβλητών, την επίλυση εξισώσεων και την απλοποίηση εκφράσεων, κάτι που δε συμβαίνει στην αλγεβρική σκέψη, αν και περιλαμβάνει μεταβλητές και εκφράσεις. Ειδικότερα, η αλγεβρική σκέψη στις μικρότερες τάξεις δεν περιορίζεται μόνο στη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού (Kieran, 2004). Βέβαια, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν ότι η ο ρόλος της στις μικρές τάξεις είναι γενικότερα υποστηρικτικός ώστε να αποτελέσει τη βάση των γνώσεων για τα μαθηματικά που θα ακολουθήσουν στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης (Van Amerom, 2003).

Η αλγεβρική σκέψη προκύπτει από την ικανότητα που έχουν οι μαθητές:

(α) να γενικεύουν τις ιδιότητες των πράξεων, καθώς και τις ιδιότητες των αριθμών (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008), ενώ στη συνέχεια να μπορούν να αιτιολογήσουν τις γενικεύσεις τους

(β) να γενικεύουν διαφορετικά μοτίβα που εμπεριέχουν τη ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών. Αυτή η γενίκευση προκύπτει από τον εντοπισμό του κανόνα που περιγράφει τη σχέση. Στη συνέχει να είναι είναι σε θέση να εκφράζουν τις γενικεύσεις που έχουν διαπιστώσει με τη χρήση οποιοδήποτε μέσο (π.χ. φυσική γλώσσα, διάγραμμα) αιτιολογώντας αυτές (Blanton et al., 2011; Blanton & Kaput, 2005, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004) .

(γ) να μεταβάλλουν τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλαγές που μπορεί να γίνουν σε γραφικές παραστάσεις αλλά και σύμφωνα με την αντικατάσταση σε κανόνες. Αυτές οι μεταβολές θα πρέπει να τους κάνουν να συλλογίζονται για τη σχέση που υφίστανται ανάμεσα στις δύο μεταβλητές (Goodrow & Schliemann, 2003; Moyer, Huinker & Cai, 2004),

(δ) να κατανοούν και να αναγνωρίζουν την τιμή του αγνώστου που ταιριάζει στην κάθε εξίσωση (ή το εύρος τιμών για μια ανίσωση) (Blanton et al., 2011; Cai, Moyer, Wang, & Nie, 2011; Kieran, 2004)

(ε) να προχωρούν σε συλλογισμούς σχετικά με τις ιδιότητες της ισότητας (Blanton et al., 2011), και να εκτελούν διάφορες πράξεις με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων για πραγματοποιήσουν απλοποίηση (Blanton & Kaput, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004) και τέλος

(στ) να μοντελοποιούν σχέσεις που μπορούν να εκφραστούν με λεκτικό τρόπο με τη χρήση αλγεβρικών εκφράσεων (Carraher et al., 2001; Hewitt, 2012).

Ο Kaput (2008) ορίζει την αλγεβρική σκέψη λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο βαθμίδες της εκπαίδευσης. Το κύριο στοιχείο της αλγεβρικής σκέψης που επισημαίνει σε όλες τις ηλικίες είναι η αναγνώριση, η συστηματική έκφραση και η αιτιολόγηση των γενικεύσεων χρησιμοποιώντας τρόπους που με σταδιακό ρυθμό γίνονται πιο τυπικοί. Η διαδικασία των γενικεύσεων υπάρχει σε τρεις παράγοντες αλγεβρικής σκέψης: στη γενικευμένη αριθμητική, στο συλλογισμό με μεταβλητές και στη μοντελοποίηση για την έκφραση και επισημοποίηση γενικεύσεων. Οι τρεις αυτοί παράγοντες αναλύονται ακολούθως:

Αρχικά, ο παράγοντας της «Γενικευμένης αριθμητικής» έχει σχέση με δραστηριότητες που εφαρμόζεται η αλγεβρική σκέψη σε αριθμητικά συγκείμενα. Πολύ συχνά τονίζεται η ανάγκη κατανόησης των σχέσεων και της δομής που υφίσταται πίσω από τους αριθμούς και τις πράξεις ώστε να μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν την αριθμητική (π.χ. Empson, Levi & Carpenter, 2011). Έτσι, λοιπόν, η «Γενικευμένη αριθμητική» ενσωματώνει ότι αφορά με τη διαχείριση των αριθμών και των ιδιοτήτων που έχουν, την ανάλυση των πράξεων και των ιδιοτήτων που έχουν αυτές, τις εξισώσεις, τόσο δηλαδή το μετασχηματισμό τους όσο και την επίλυση των εξισώσεων, την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας και τη χρήση των γραμμάτων με σκοπό τη γενίκευση σχέσεων (Blanton & Kaput, 2005).

Σχετικά με τον παράγοντα «Συλλογισμός με μεταβλητές», αυτός αφορά την αναγνώριση καθώς και την περιγραφή των σχέσεων που υπάρχουν σε μια συνάρτηση, στις οποίες συμπεριλαμβάνονται τόσο ανεξάρτητες όσο και εξαρτημένες μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα, ο παράγοντας αυτός εμπεριέχει έννοιες του ρυθμού, της μεταβολής, των επαναλαμβανόμενων μοτίβων, και της συνδιακύμανσης. Επίσης, σε αυτόν συμπεριλαμβάνεται και η ανάπτυξη της έννοιας των συμβόλων και η διαχείρισή τους με σκοπό τον συμβολισμό των ποσοτήτων (Kieran, 2011).

Τέλος, ο παράγοντας «Μοντελοποίηση» σχετίζεται με δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται με την έκφραση και την επισημοποίηση γενικεύσεων που προκύπτουν από μαθηματικοποιημένες καταστάσεις μέσα στα μαθηματικά ή και σε καθημερινές καταστάσεις. Εξάλλου, σημαντική χρήση της αλγεβρικής σκέψης αποτελεί η αναπαράσταση προβλημάτων που αναδύονται μέσα από περίπλοκα ρεαλιστικά φαινόμενα. Η χρήση διάφορων συμβόλων ώστε να διαμορφωθεί το μοντέλο και η αντιστοίχηση μεταξύ του μοντέλου και της πραγματικής κατάστασης αποτελούν στοιχεία του παράγοντα αυτού (Blanton & Kaput, 2005).

1.3. Εμφάνιση των μοτίβων στο πρόγραμμα σπουδών

Έχοντας γίνει αντιληπτή η σημασία της άλγεβρας και της αλγεβρικής σκέψης, τα τελευταία χρόνια τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών έχουν συμπεριλάβει αρκετά στοιχεία για την αλγεβρική σκέψη (Υπουργείο Παιδείας και πολιτισμού, 2010· NCTM, 2000· DfEE, 1999). Όσον αφορά τα πρότυπα, υπάρχει η άποψη ότι όσο το δυνατόν νωρίτερα έρθουν σε επαφή με αυτά, τόσο καλύτερα μπορούν να κατανοήσουν τα Μαθηματικά (Wittmann, 2007).

Από τους πρώτους που είχαν προτείνει την εισαγωγή της άλγεβρας στα αναλυτικά προγράμματα των παιδιών μικρής ηλικίας ήταν ο Kaput (1995). Την πρότασή του αυτή την έχει τεκμηριώσει σε τρία στοιχεία: α) αποδεσμεύει το αναλυτικό πρόγραμμα των τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να εισαχθούν σύγχρονα θέματα που αφορούν τα μαθηματικά, β) επιτρέπει την ύπαρξη συνοχής, βάθους και δυναμικής κυρίως στον τρόπο σκέψης των παιδιών αλλά και στη δομή των αναλυτικών προγραμμάτων και γ) περιορίζει την απότομη και μειωμένη εκμάθηση της άλγεβρας μόνο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευσή, γεγονός που αποτελεί το κύριο μειονέκτημα στα σχολικά μαθηματικά. Σε αυτήν την θέση, χρειάζεται να προστεθεί και η άποψη της MacGregor (2004) ότι η άλγεβρα είναι ουσιαστική σημασίας για την γνώση των μαθηματικών σε πολλές σχολές του πανεπιστημίου αλλά και σε πολλούς επαγγελματικούς κλάδους.

Ειδικότερα, ο ρόλος των μοτίβων στα αναλυτικά προγράμματα ενισχύει τη μύηση των μαθητών στο να αποδεικνύουν κάτι μέσα από προσωπική τους διερεύνηση. Τα πρότυπα εξάλλου συνδέονται με την λειτουργική απόδειξη, αν και ο όρος αυτός δεν είναι απολύτως σωστός, αφού ολόκληρη η διαδικασία είναι "λειτουργική" και όχι μόνο η απόδειξη. Οι ιδιότητες που έχουν λειτουργικές αποδείξεις είναι οι ακόλουθες: α) προέρχονται από τη διερεύνηση κάποιου μαθηματικού προβλήματος, β) στηρίζονται πάνω σε διαδικασίες που εμπεριέχουν ημι-πραγματικά (quasi-real) μαθηματικά αντικείμενα, και γ) υπάρχει η δυνατότητα να γίνει η περιγραφή τους με μικρή ανάγκη συμβολισμού (Wittmann, 2007).

Στο σημείο αυτό, θα περιγραφεί η ενσωμάτωση της άλγεβρας και των μοτίβων στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών διάφορων χωρών. Το Ηνωμένο Βασίλειο, η άλγεβρα εισήχθηκε από το νηπιαγωγείο με διάφορα θέματα ανάμεσα στα οποία είναι η κατασκευή και η επίλυση των εξισώσεων, η αναγνώριση μοτίβων, η έκφραση σχέσεων, η εύρεση ισότιμων μορφών, η παραγοντοποίηση αριθμών, η χρήση αντίθετων και αντίστροφων πράξεων και η κατανόηση της αντιμεταθετικής, προσεταιριστικής και επιμεριστικής ιδιότητας (DfEE). Ακόμα, ενδιαφέρουσα είναι η σύγκριση στα προγράμματα σπουδών της Άλγεβρας της Αυστραλίας και της Ρωσίας, καθώς το καθένα δίνει έμφαση σε διαφορετικούς τομείς. Έτσι, οι Αυστραλοί μαθητές που το πρόγραμμα σπουδών τους στην Άλγεβρα επιμένει στη γενίκευση και στα μοτίβα αποδεικνύεται ότι έχουν καλύτερες επιδόσεις από τους Ρώσους μαθητές που το αναλυτικό τους πρόγραμμα βασίζεται στον φορμαλισμό (Routitsky & Zammit, 2001).

Όσον αφορά την πραγματικότητα στην Ελλάδα, όπως προκύπτει από το τον Αναλυτικό Οδηγό Σπουδών (2011), η άλγεβρα συμπεριλαμβάνεται στο πρόγραμμα του δημοτικού. Ειδικότερα, η θεματική «άλγεβρα» περιλαμβάνει τρεις άξονες: α) ισότητες & ανισότητες, β) αλγεβρικές παραστάσεις και γ) μοτίβα/ κανονικότητες & συναρτήσεις. Το σημαντικό είναι αυτοί οι άξονες συχνά συσχετίζονται, διασταυρώνονται και ενοποιούνται, αν και κάτι τέτοιο δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο. Ειδικότερα για τα μοτίβα, τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών εφιστούν την προσοχή τους όχι μόνο στην ενθάρρυνση δράσεων που σχετίζονται με τον εντοπισμό και την περιγραφή μοτίβων, αλλά και στην ανάδειξη των σχέσεων, των δομών και των κανόνων τους. Σχεδόν σε όλα τα σύγχρονα προγράμματα για το δημοτικό σχολείο και το νηπιαγωγείο, όπως και στο πρόσφατο ελληνικό (Δαφέρμου, Κουλούρη & Μπασογιάννη, 2005 . Ι.Ε.Π., 2003), η αναγνώριση μοτίβων θεωρείται μαθησιακός άξονας που στηρίζει τόσο την αριθμητική όσο και την άλγεβρα.

1.4. Πρότυπα και μαθηματική γενίκευση

Ο όρος της γενίκευσης αποτελεί ένα μέσο που πραγματοποιείται η μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη. Η γενίκευση συναντιέται στη φιλοσοφία (Χούσερλ, 2003), στην ψυχολογία (Rosch & Mervis, 1975), αλλά και στη μαθηματική επιστήμη (Radford, 2003· 2006). Από την άποψη της ψυχολογίας, η γενίκευση σημαίνει: «δίνουμε την ίδια απάντηση σε παρόμοιες καταστάσεις» (Olson & Hergenhan, 2010).

Η μαθηματική γενίκευση σχετίζεται άμεσα με την Άλγεβρα καθώς αποτελεί τη γλώσσα μέσω της οποίας μπορούμε να εκφράσουμε τις γενικεύσεις των ποσοτήτων που κάνουμε. Κατά τον Mason (1996), η μαθηματική γενίκευση αποτελεί την βάση των Μαθηματικών, καθώς η μαθηματική σκέψη συντελείται μόνο όταν οι μαθητές εκφράζουν τις γενικεύσεις που προκύπτουν από αυτούς.

Αποτελεί μια έννοια με την οποία οι ερευνητές έχουν ασχοληθεί από νωρίς στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Έτσι, ο Polya (1998) επισήμανε ότι η γενίκευση είναι ένα σταδιακό πέρασμα από την θεώρηση ενός αντικειμένου στην θεώρηση ενός συνόλου στο οποίο εμπεριέχεται το συγκεκριμένο αντικείμενο. Ουσιαστικά δηλαδή πρόκειται για μια διαδικασία που εξετάζονται συγκεκριμένα παραδείγματα με έμφαση στην κανονικότητα που υπάρχει σε αυτά.

Ωστόσο, σημειώνονται και πιο σύγχρονες απόψεις για τη μαθηματική γενίκευση. Έτσι, για τον Kaput (1999) η μαθηματική γενίκευση αποτελεί το μέσο για να πραγματοποιηθεί μια μακροπρόθεσμη αλλαγή στον τρόπο που αντιμετωπίζει ο μαθητής την άλγεβρα. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα μπορέσουν να αναπτύξουν την αλγεβρική σκέψη σε βάθος, καθώς θα την έχουν κατανοήσει και δε θα την έχουν μάθει απλά μέσα από μηχανιστικές διαδικασίες με σύμβολα. Έτσι, δε θα την αντιμετωπίζουν με αρνητικό τρόπο και ως ένα μάθημα δύσκολο. Η Ellis (2007) θεωρεί τη γενίκευση ως τη δημιουργία συσχετίσεων ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα, την αναζήτηση ομοιοτήτων και σχέσεων και την επέκταση που μπορεί να λάβει ένα μοτίβο, μια σχέση ή κάποιος κανόνας σε μια δομή που είναι γενικευμένη.

Τα πρότυπα διαδραματίζουν έναν πολύ σημαντικό και ιδιαίτερο ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητας για γενίκευση. αλλά και της συναρτησιακής σκέψης, Αυτό συμβαίνει γιατί εμπεριέχουν διαφορετικούς βαθμούς δυσκολίας (Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011).

Για να πετύχουν οι μαθητές να κατανοήσουν και να εκφράσουν μια γενίκευση που προκύπτει από ένα πρότυπο, χρειάζεται σε πρώτη φάση να αντιληφθούν ότι ένας κανόνας που προκύπτει από ένα πρότυπο περιγράφει ουσιαστικά μια μαθηματική κατάστασης και συνεπώς αποτελεί μια γενίκευση (Lannin, 2005). Οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναπαριστούν μεταφορικά ένα πρότυπο, αλλά και να χρησιμοποιούν σωστά κάποιες μεταβλητές. Βέβαια, για να αποκτήσουν την ικανότητα να γενικεύσουν ένα πρότυπο, είναι αναγκαία η σωστή καθοδήγηση αλλά και η επαφή με διαφορετικές παραστατικές, αριθμητικές και λεκτικές αναπαραστάσεις προτύπων καθώς επίσης και στις μεταξύ τους σχέσεις (Rivera & Becker, 2008).

Η οπτική, και συνεπώς η κατανόηση, κάθε μαθητή είναι διαφορετική όσον αφορά τα πρότυπα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργεί διαφορετικές γενικεύσεις συγκριτικά με κάποιον άλλο μαθητή (Rivera & Becker, 2008). Όλοι, όμως, οι μαθητές είναι σε θέση να παράγουν γενικεύσεις, ο καθένας, όμως, γενικεύει σε διαφορετικό επίπεδο (Orton, 1997). Ωστόσο, μια σημαντική ιδέα στη γενίκευση, που αναπαράγει ένας μαθητής, είναι η αναγνώριση μιας νέας κατάστασης στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί και να προσαρμοστεί κατάλληλα (Van de Walle, 2007). Η τυπική δραστηριότητα σχεδίασης ενός προτύπου παρέχει ένα πλαίσιο ζητώντας από τους μαθητές να κατασκευάσουν έναν κανόνα που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για τον προσδιορισμό άλλων συγκεκριμένων περιπτώσεων (Lannin, 2005).

Κάποιοι παράγοντες, σύμφωνα με την Orton (1997) που φαίνεται ότι εμποδίζουν τους μαθητές να γενικεύσουν και να εκφράσουν εν τέλει αυτή τη γενίκευση είναι οι ακόλουθοι:

➔ η αριθμητική ανικανότητα που εμφανίζουν οι μαθητές (π.χ. να κάνουν λάθη στην πρόσθεση)

➔ η σύγχυση ανάμεσα στον αριθμό του όρου και στον αριθμό των σχημάτων που απεικονίζονται σε αυτόν

➔ η χρήση σύντομων μεθόδων που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές όταν υπάρχουν μεγάλοι αριθμοί

➔ η δυσκολία αντίληψης ότι ο 20ος ή 100 ος όρος ακολουθεί τον ίδιο κανόνα και συνεπώς διέπεται από τις ίδιες σχέσεις

➔ η επιμονή των μαθητών στις διαφορές ή στη σχέση επανάληψης (π.χ. προσθέτω δύο κάθε φορά)

➔ η δυσκολία αντίληψης του τι χρειάζεται να γίνει, καθώς δεν αναγνωρίζεται η σχέση που υφίσταται ανάμεσα σε δύο όρους

➔ ο φόβος και συνεπώς η ανικανότητα των μαθητών να επεξεργαστούν κάτι που είναι «άγνωστο».

Ο Radford (2008) ασχολήθηκε πιο συγκεκριμένα με την αλγεβρική γενίκευση ενός μοτίβου, την οποία και όρισε ως την ικανότητα που έχουν οι μαθητές να εντοπίζουν την ομοιότητα που μπορεί να υφίσταται στα στοιχεία μιας ακολουθίας και κατόπιν να την γενικεύουν σε όλους τους όρους της αλλά και να μπορούν να εκφράσουν άμεσα οποιονδήποτε όρο της. Τέλος, οι Carraher, Martinez και Schliemann (2008) τονίζουν ότι η μαθηματική γενίκευση αποτελεί μια διανοητική δραστηριότητα για την οποία ισχύουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Τυπικά, συμπεριλαμβάνει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων (π.χ. "ισχύει για όλους τους ακέραιους αριθμούς"). Θεωρούν σημαντικό ότι για να κατανοηθεί η γενίκευση, θα πρέπει να αρχικά να κατανοηθούν οι λόγοι για τους οποίους συντελείται μια γενίκευση.

Ειδικότερα, η μαθηματική γενίκευση στα παιδιά του δημοτικού έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τους ερευνητές. Οι Warren και Cooper (2005) πραγματοποίησαν ένα πείραμα διδασκαλίας σε παιδιά Α' και Β΄ Δημοτικού και αποδείχθηκε ότι τα παιδιά αυτής της ηλικίας όχι μόνο μπορούν να γενικεύουν, αλλά έχουν την ικανότητα να προσδιορίζουν μια υφιστάμενη σχέση αλλά και να περιγράφουν αντίστροφες σχέσεις. Οι Moss, Beatty, McNab και Eisenband (2006) στην έρευνά τους κατέληξαν ότι οι μαθητές της Β΄και της Δ΄ Δημοτικού είναι σε θέση να δημιουργούν γεωμετρικά μοτίβα που βασίζονται σε αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι μπορούν να αντιλαμβάνονται και τους κανόνες που υπάρχουν στα μοτίβα αυτά. Με αυτόν τον τρόπο αναδεικνύεται η ικανότητα να κατανοούν την όποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στις δυο μεταβλητές του προβλήματος. Οι Carraher, Schliemann, Brizuela και Earnest (2006) διαπίστωσαν ότι παιδιά από τη Β' έως τη Δ' Δημοτικού μπορούν να κατανοήσουν, αλλά και να αναπαραστήσουν έννοιες της άλγεβρας που τυπικά απουσιάζουν από το δημοτικό σχολείο. Αυτό μάλιστα το κάνουν με τη χρήση γραμμάτων ως μεταβλητές, καθώς έτσι εκφράζονται γενικευμένες σχέσεις ανάμεσα σε δυο μεταβλητές (π.χ. Ν+2).

Στην έρευνά των Cooper και Warren (2008) προέκυψε ότι οι μαθητές του δημοτικού, και ειδικότερα της Γ΄ και Ε΄ τάξης είναι σε θέση να γενικεύουν. Στη συγκεκριμένη έρευνα αυτό το πέτυχαν μέσα από ποικίλες δραστηριότητες, όπως τα αυξανόμενα γεωμετρικά μοτίβα και δραστηριότητες με ζυγούς που ισορροπούν. Για την γενίκευση χρησιμοποίησαν ποικιλίες αναπαραστάσεων. Ακόμα, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι και οι μικρότεροι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν ισχυρές μαθηματικές δομές που αποτελούν αντικείμενο της άλγεβρας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σε μια άλλη έρευνα των Carraher, Martinez και Schliemann (2008), χρησιμοποιήθηκε σε μαθητές της Γ΄ τάξη του δημοτικού ένα μη-τυποποιημένο πρόβλημα σε δύο μαθήματα για να ερευνηθεί ο τρόπος που χρησιμοποιηθούν οι μαθητές για να παράγουν γενικεύσεις, πώς τις παρουσιάζουν καθώς και την ενδεχόμενη μετάβαση από τις εμπειρικές σε θεωρητικές γενικεύσεις. Από την έρευνα αυτή προέκυψε ότι τα παιδιά είναι αναγκαίο να ξεκινήσουν από προσεκτικά σχεδιασμένα περιβάλλοντα που να μοιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερο με φυσικά για να κατανοήσουν τις γενικεύσεις. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καίριος καθώς με την βοήθεια αυτού το παιδί μπορεί να αντιληφθεί τη στρατηγική που θα χρησιμοποιήσει για να πετύχει μια γενίκευση.

Οι γενικεύσεις στις οποίες προβαίνουν οι μαθητές μπορούν να πραγματοποιηθούν σε τρία επίπεδα : α) να αναγνωρίσουν την ομοιότητα που υπάρχει σε ένα μοτίβο, β)να την επεκτείνουν σε όλους τους επακόλουθους όρους και γ) να επισημανθεί ο συμβολικός τύπος που το αναπαράγει (Radford. 2003). Σύμφωνα με τον Rivera (2010) για να εκτελέσουν οι μαθητές μια γενίκευση των προτύπων χρειάζεται αμοιβαίος συντονισμός στις αντιληπτικές και συμβολικές τους ικανότητες. Αυτό θα συμβάλλει ώστε να μπορούν να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν μια εύλογη και αλγεβρικά χρήσιμη δομή που θα υπάρχει η δυνατότητα να μεταφερθεί με τη μορφή άμεσης φόρμουλας (τύπος) (Rivera, 2010).

Έτσι, λοιπόν, συνοψίζοντας, αρχικά, με τη γενίκευση αναζητούνται τα κοινά χαρακτηριστικά ορισμένων στοιχείων ενός προτύπου (μια σταδιακή διαδικασία). Ακολούθως, ερευνάται ο τρόπος με τον οποίο τα στοιχεία αυτά μπορεί να επεκταθούν ή να γενικευτούν σε όλους τους επόμενους όρους και τέλος, πώς μπορεί χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας (Radford, 2006, 2008). Ενδιαφέρουσα είναι επίσης η ύπαρξη διαφοράς που υφίστανται ανάμεσα στη κατανόησης μιας γενίκευσης και τελικά στην έκφραση αυτής. Συχνά, δηλαδή, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στο να εκφράσουν μια γενίκευση, παρόλο που την έχουν καταλάβει. Αυτό συμβαίνει γιατί υπολείπονται στο γλωσσικό κομμάτι που σχετίζεται με τη γενίκευση (Cooper & Warren, 2011).

1.4.1. Δράσεις που βοηθούν τα παιδιά να οδηγηθούν σε γενικεύσεις στα πρότυπα

Από την έρευνα των Warren & Cooper (2008) προέκυψαν κάποιες υποστηρικτικές πρακτικές οι οποίες βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν κατανόηση σχετικά με τα αναπτυσσόμενα μοτίβα καθώς και διαδικασίες που εμπόδισαν τη γενίκευση. Οι διδακτικές πρακτικές εκείνες που φάνηκε να βοηθούν στην ανάπτυξη γενικεύσεων ήταν οι εξής:

- Η χρήση χειραπτικών υλικών
- Σχέδια όπου η σχέση μεταξύ μοτίβου και θέσης ήταν ρητή
- Σαφείς ερωτήσεις για τη σύνδεση της θέσης με το μοτίβο
- Γενικεύοντας από το πρότυπο σε κοντινές θέσεις και έπειτα σε μακρινές θέσεις
- Χρησιμοποιώντας χρώμα για να αντιπροσωπεύει διαφορετικά αναπτυσσόμενα στοιχεία ενός μοτίβου
- Χρησιμοποιώντας οπτικά μοτίβα που δεν ήταν σε σειρά (Warren & Cooper, 2007)

Αντίθετα οι μαθητές φάνηκε να αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σχετικά με τη γενίκευση σε αναπτυσσόμενα μοτίβα. Πιο συγκεκριμένα παρουσίασαν δυσκολίες σχετικά με διάφορα θέματα όπως:

- Γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της γενίκευσης
- Εκφράζοντας την γενίκευση γραπτά σε σχέση με την προφορική έκφραση
- Συμπληρώνοντας μοτίβα-μονή διακύμανση
- Αντιστρέφοντας τη σκέψη (Warren & Cooper, 2007)

Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο παίζει και το είδος, το μέγεθος, ο προσανατολισμός καθώς και το υλικό του προτύπου. Σε έρευνα που διεξήχθη σε παιδιά Α’ Δημοτικού από την Gadzichowski (2012) ερευνήθηκαν τα είδη των μοτίβων τα οποία είναι εύκολο να μάθουν τα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν 48 μοτίβα που διέφεραν στο μέγεθος, τον προσανατολισμό, τη θέση των στοιχείων που έλειπαν καθώς και την απόσταση ανάμεσα στα στοιχεία που έλειπαν. Βρέθηκε πως δεν έχει ιδιαίτερη σημασία η διάσταση στην οποία παρουσιάζεται ένα μοτίβο, αλλά ο αριθμός των στοιχείων που παραλείπονται σε αυτό. Επομένως, στη διδασκαλία μπορεί να χρησιμοποιηθούν μοτίβα σε οποιαδήποτε διάσταση και να διδάσκονται πρώτα τα μοτίβα που παραλείπουν ένα μόνο στοιχείο και έπειτα μοτίβα που παραλείπουν δύο ή περισσότερα στοιχεία.

Δυσκολεύονται να διακρίνουν τη δομή του και τον σχηματισμό του, καθώς αυτά τα στοιχεία μπορεί να εκφραστούν με διάφορους τρόπους. Εξάλλου, τα δύο βασικά χαρακτηριστικά των δομών των εικονιστικών μοτίβων είναι η ύπαρξη μιας μονάδας που επαναλαμβάνεται , γεγονός που οδηγεί τον μαθητή να κατασκευάσει μια συναρτησιακά δομημένη γενίκευση (Rivera, 2015).

Ακόμα η έρευνα των Blanton και Kaput (2004) έδειξε ότι οι νέοι μαθητές είναι ικανοί να σκέφτονται συναρτησιακά. Τα αποτελέσματα δείχνουν επίσης ότι υπάρχουν ποικίλες διδακτικές ενέργειες που υποστηρίζουν αυτή τη σκέψη, δηλαδή τη χρήση συγκεκριμένων υλικών για τη δημιουργία μοτίβων, συγκεκριμένων ερωτήσεων για να καταστεί σαφής η σχέση μεταξύ του προτύπου και της θέσης του και συγκεκριμένες ερωτήσεις που βοηθούν τους μαθητές να επιτύχουν γενίκευση σε σχέση με άγνωστες θέσεις. Οι νέοι μαθητές δεν είναι μόνο ικανοί να σκεφτούν τη σχέση μεταξύ δύο συνόλων δεδομένων, αλλά και να εκφράσουν τη σχέση αυτή σε μια πολύ αφηρημένη μορφή (Warren & Cooper, 2008).

Σύμφωνα με τον Presmeg (2006), μια στρατηγική που διδάσκεται σε μεγάλο βαθμό από τους εκπαιδευτικούς είναι η οπτική συλλογιστική για την επίλυση προβλημάτων προτύπων σε ένα αρχικό στάδιο. Η σημασία της οπτικοποίησης προκύπτει από το γεγονός ότι τα Μαθηματικά στα νέα προγράμματα σπουδών εμπεριέχουν τη μελέτη των προτύπων, ενώ η οπτικοποίηση συμβάλλει στην ικανότητα να δρουν με απλές και ισχυρές προσεγγίσεις (Thornton, 2001)

1.5. Έρευνες στα μοτίβα

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι μια διδακτική παρέμβαση που αποβλέπει στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να διαχειρίζονται τα πρότυπα και να τα γενικεύουν μπορεί να είναι επιτυχημένη και να επιφέρει θετικά αποτελέσματα.

Η Warren (2005) διεξήγαγε μια έρευνα σε παιδιά Δ' Δημοτικού και είχε ως στόχο να εξεταστούν οι δράσεις υποστήριξης των εκπαιδευτικών στα παιδιά αυτά. Ειδικότερα, το δείγμα ήταν 45 παιδιά που φοιτούσαν στη Δ' Δημοτικού, αλλά σε δύο τάξεις διαφορετικών σχολείων. Η παρέμβαση είχε διάρκεια 2 μονόωρων μαθημάτων που έγιναν σε δύο συνεχόμενες μέρες. Διερευνήθηκε αν οι μαθητές μπορούν α) να κατανοήσουν τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα μετά την παρέμβαση των εκπαιδευτικών ως σχέσεις συμμεταβολής και να χρησιμοποιήσουν αυτήν την κατανόηση για να προβλέψουν τα άγνωστα βήματα σε επόμενα μοτίβα σχέσεις, και β) να εκφράσουν αυτές τις σχέσεις σε ένα γενικότερο πλαίσιο ώστε να χρησιμοποιήσουν επαναλαμβανόμενα πρότυπα για να εισαγάγουν αναλογική σκέψη.

Το πρώτο μάθημα περιλάμβανε τέσσερις φάσεις: (1) την αντιγραφή και συνέχιση ενός απλού σχεδίου ΑΒΒ (2) την αποκάλυψη προοδευτικών συνόλων επαναλήψεων, καταμέτρηση του αριθμού των Α και Β σε αυτά τα σύνολα και καταγραφή των δεδομένων σε έναν πίνακα (3) τον προσδιορισμό σχέσεων εντός του πίνακα, και (4) τη χρήση αυτής της σχέσης για να προβλέψουν τον αριθμό των πλακιδίων Α, Β και των συνολικών πλακιδίων σε έναν αμέτρητο αριθμό επαναλήψεων. Το δεύτερο μάθημα επικεντρώθηκε στην επέκταση όσων διδάχθηκαν στο πρώτο, ωστόσο εμπεριείχε πιο περίπλοκα επαναλαμβανόμενα πρότυπα, με σκοπό οι μαθητές να μπορέσουν να διακρίνουν τα μοτίβα για οποιαδήποτε θέση, και να αντιστρέψουν τη σκέψη (δηλαδή, να μπορούν να προσδιορίσουν τη θέση όταν δίνεται το σχέδιο).

Δόθηκε στα παιδιά ένα τεστ πριν παρέμβαση και ένα τεστ μετά το πέρας των διδασκαλιών, τα οποία συγκρίθηκαν μεταξύ τους για να ελεγχθεί η αν και κατά πόσο η παρέμβαση είχε αποτέλεσμα. Βασικό συμπέρασμα της έρευνας ήταν πως τα παιδιά έδειξαν να δυσκολεύονται περισσότερο στην επίλυση δραστηριοτήτων με αναπτυσσόμενα μοτίβα σε σχέση με επαναλαμβανόμενα. Αυτό φαίνεται να συμβαίνει κατά κύριο λόγο επειδή στο σχολικό πρόγραμμα δεν υπάρχουν αρκετές δραστηριότητες με αναπτυσσόμενα μοτίβα, επομένως οι εμπειρίες των παιδιών με αυτού του είδους τα μοτίβα είναι περιορισμένες. Αυτό το γεγονός είναι και το πιο ανησυχητικό επειδή τα αναπτυσσόμενα μοτίβα είναι εκείνα που δημιουργούν την γέφυρα ανάμεσα στην αριθμητική και την άλγεβρα.

Αντιθέτως οι Papic et al. (2011) σε μία εξάμηνη παρέμβασή τους για την ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικών μοτίβων, σε παιδιά νηπιαγωγείου, με στόχο να αναπτυχθεί η ικανότητα των παιδιών να διαχειρίζονται μοτίβα, κατέληξαν πως η δυσκολία με τα αναπτυσσόμενα μοτίβα δεν ήταν απαραιτήτως συνέπεια της απουσία τους από τα προγράμματα σπουδών ή η υπεροχή των επαναλαμβανόμενων μοτίβων σε αυτά, όπως υποστήριξε η Warren (2005).

Ακόμα, οι μαθητές ακολούθησαν προσθετικές στρατηγικές όταν χρησιμοποίησαν πίνακες δεδομένων για να βρουν την σχέση ανάμεσα στα δεδομένα. Ακόμα βρέθηκε πως με συγκεκριμένες στρατηγικές διδασκαλίας και ερωτήσεις, οι εκπαιδευτικοί, μπορούν να βοηθήσουν τα μικρά παιδιά να αρχίσουν να αναζητούν σχέσεις πέρα από τα μοτίβα. Πιο συγκεκριμένα έπειτα από αυτή την επανεστίαση τα παιδιά ήταν σε θέση να απαντούν σωστά σε ερωτήσεις γενίκευσης, με μία μαθήτρια συγκεκριμένα να καταφέρνει να κάνει γενίκευση για αμέτρητα βήματα. Τέλος σύμφωνα με την έρευνα της Warren τα παιδιά φαίνεται πως μπορούν να εκφράσουν γενικεύσεις με την χρήση αφηρημένων συστημάτων συμβόλων.

Οι Warren και Cooper (2007) διεξήγαγαν ένα διδακτικό πείραμα με στόχο να εντοπίσουν εκείνες τις δράσεις των εκπαιδευτικών που ενισχύουν την αλγεβρική σκέψη των μαθητών και βοηθούν στην μετάβασή τους από τα αναπτυσσόμενα μοτίβα στις αλγεβρικές εκφράσεις. Το διδακτικό πείραμα διεξήχθη σε παιδιά ηλικίας 8 χρονών. Είχε διάρκεια 2 μονόωρων μαθημάτων και κάθε μάθημα είχε διαφορετικούς στόχους. Το πρώτο μάθημα επικεντρώθηκε στην αντιγραφή και συνέχιση απλών οπτικών αναπτυσσόμενων μοτίβων. Τα παιδιά περιέγραφαν τα μοτίβα χρησιμοποιώντας εκφράσεις σχετικά με την θέση και χρησιμοποιούσαν αυτές τις εκφράσεις για να προβλέψουν το μοτίβο σε άλλες θέσεις. Στην περίπτωση αυτή τα μοτίβα που επιλέχθηκαν ήταν εκείνα όπου σχέση ανάμεσα στο μοτίβο και τη θέση ήταν αρκετά εμφανής. Το δεύτερο μάθημα περιλάμβανε επανεξέταση ορισμένων από αυτά τα μοτίβα. Έμφαση δόθηκε στον εμπλουτισμό της γλώσσας και στην ανάπτυξη της σκέψης των νέων μαθητών ώστε να περιγράφουν και να προβλέπουν τα μοτίβα σε οποιαδήποτε θέση. Τέλος, ασχολήθηκαν με δραστηριότητες αντιστροφής αυτής της σκέψης (reversing the thinking), δηλαδή να προσδιορίζουν τη θέση όταν τους δίνεται το μοτίβο. Συγκρίνοντας τα προ και ποστ τεστ τα αποτελέσματα έδειξαν πως υπήρξε βελτίωση στην κατανόηση των αναπτυσσόμενων μοτίβων από τα παιδιά, καθώς και στην έκφραση με γενικούς όρους της σχέσης του μοτίβου με την θέση.

Στα αποτελέσματα των ερευνών φάνηκε ότι τα μικρά παιδιά έχουν την ικανότητα να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να αναπαράγουν, να επεκτείνουν και να κατασκευάζουν μοτίβα. Είναι φανερό όμως ότι οι επιδόσεις τους είναι άμεσα εξαρτημένες και επηρεάζονται από τη μορφή του μοτίβου, τη δομή του προτύπου που επαναλαμβάνεται, το είδος του υλικού και του μέσου που χρησιμοποιείται, καθώς και με το αν έχει προηγηθεί ή όχι διδασκαλία. Οι περισσότερες από τις παραπάνω έρευνες καταλήγουν, στο ότι για την περαιτέρω βελτίωση της επίδοσης των παιδιών είναι αναγκαία η διδακτική παρέμβαση από τις μικρές ηλικίες. Σε αυτό συνηγορούν και έρευνες που δείχνουν ότι πολλές από τις δυσκολίες των μεγαλύτερων παιδιών στην άλγεβρα ίσως ξεκινάνε από την έλλειψη εμπειριών σε μικρές ηλικίες, για τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (Warren & Cooper, 2008). Τέλος, τονίζεται πως η ανάπτυξη επαναλαμβανόμενων προτύπων χωρίς έμφαση στην κατανόηση της μονάδας επανάληψης είναι αυτή που ενδεχομένως εμποδίζει την ανάπτυξη της κατανόησης των αναπτυσσόμενων προτύπων από τα παιδιά (Papic et al., 2011).

Στις έρευνες των Kidd et al. (2013, 2014)και Pasnat et al. (2015), η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν παρόμοια. Συγκεκριμένα, αξιολογήθηκε η επίδραση της διδασκαλίας σε δεξιότητες ανάγνωσης και μαθηματικών για παιδιά ηλικίας 6 έως 7 ετών που εμφάνιζαν χαμηλές βαθμολογίες σε μια μορφή μοτίβου. Στο μοτίβο αυτό τα παιδιά χρειαζόταν να επιλέξουν το στοιχείο που λείπει σε μια ακολουθία πέντε στοιχείων γραμμάτων, αριθμών ή περιστρεφόμενων αντικείμενων. Τα παιδιά είχαν σχηματίσει με τυχαίο τρόπο ζευγάρια σε ένα από τα τέσσερα εκπαιδευτικά προγράμματα: μοτίβο-διδασκαλία, ανάγνωση, μαθηματικά ή κοινωνικές σπουδές. Η ομάδα που σχετιζόταν με τα μοτίβα έλαβε επανειλημμένη πρακτική προσδιορίζοντας το στοιχείο που λείπει στο μοτίβα. Τα παιδιά διδάσκονταν επίσης να χρησιμοποιούν αντικείμενα για να δημιουργήσουν, ολοκλήρωση και επέκταση μοτίβων. Τα μαθήματα των εκπαιδευτικών λάμβαναν μέρος σε συνεδρίες 15 λεπτών τρεις φορές την εβδομάδα για 6-7 μήνες. Τα παιδιά αξιολογήθηκαν, μετά από οδηγίες, σε σχετικά τυποποιημένα κριτήρια ανάγνωσης και μαθηματικών. Αποδεικνύεται ότι η εξάσκηση βελτιώνει την απόδοση των μαθητών, τόσο στα μαθηματικά όσο και στην ανάγνωση. Βέβαια, χρειάζεται να σημειωθεί ότι τα δείγματα ήταν μικρά στις έρευνες αυτές οπότε και τίθεται θέμα αξιοπιστίας και εγκυρότητας.

Υπάρχουν μελέτες που δείχνουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν αναδρομικές στρατηγικές για να περιγράψουν γενικεύσεις, παρά να χρησιμοποιούν άμεσα τις εμπλεκόμενες μεταβλητές (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008· Moss & Beatty, 2010· Radford, 2010· Rivera, 2011).

Δύο τυχαίες έρευνες, απέδειξαν ότι η διδασκαλία που παρέχεταιι στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα συμβάλλει θετικά στην απόκτηση της γνώσης των μαθηματικών. Σε δύο ξεχωριστές μελέτες, ο Kidd κ.α. (Kidd et al., 2013; Kidd et al., 2014) ανέθεσαν τυχαία σε μαθητές προσχολικής ηλικίας που συμμετείχαν σε συμπληρωματική διδασκαλία για τα μοτίβα, τα μαθηματικά, την ανάγνωση ή τις κοινωνικές σπουδές. Η διδασκαλία προτύπων περιλάμβανε επαναλαμβανόμενα μοτίβα και άλλους τύπους μοτίβων (π.χ. συμμετρικά μοτίβα, μοτίβα περιστροφής) και έλαβε μέρος τρεις φορές την εβδομάδα για περίοδο έξι μηνών. Η παρέμβαση προτύπων είχε ως αποτέλεσμα να εμφανίσουν τα παιδιά καλύτερη απόδοση στις τυποποιημένες μαθηματικές αξιολογήσεις, σε σχέση με τις άλλες παρεμβάσεις.

Συμπερασματικά, οι δραστηριότητες προτύπων σε μαθητές δημοτικού φαίνεται ότι βελτιώνουν τις μαθηματικές τους ιδέες τους καθώς χρειάζεται να αιτιολογήσουν ότι εργάστηκαν στην διερεύνηση και ανάπτυξη μοντέλων για να επιλύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα (Watters, English, & Mahoney, 2004). Με την ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου οι μαθητές επιτυγχάνουν βαθύτερη και ευρύτερη εννοιολογική κατανόηση καθώς και μαθηματικοποίηση των αντικειμένων, των σχέσεων και των μοτίβων (Λεμονίδης, Νικολαντωνάκης & Μήτσου, 2011).

2. Μεθοδολογία

2.1. Στόχος της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να ερευνηθεί η ικανότητα γενίκευσης των παιδιών της Β Δημοτικού, στα επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα, σχηματικά ή οπτικά, πρότυπα.

Πιο συγκεκριμένα θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τα παρακάτω ερωτήματα

- Είναι τα παιδιά αυτής της ηλικίας σε θέση να διαχειρίζονται, δηλαδή να συνεχίζουν, να συμπληρώνουν, να διορθώνουν και να εντοπίζουν την μονάδα επανάληψης σε απλά και σύνθετα επαναλαμβανόμενα πρότυπα;
- Είναι τα παιδιά αυτής της ηλικίας σε θέση να συνεχίζουν απλά και σύνθετα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα και σε τι βαθμό;
- Είναι σε θέση να κάνουν κοντινές και μακρινές προβλέψεις σε επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα;
- Μπορούν τα παιδιά να εντοπίζουν τον κανόνα αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων;
- Τι επιρροή μπορεί να έχει μία διδακτική παρέμβαση που στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας γενίκευσης προτύπων στους μαθητές αυτής της τάξης.

2.2. Αποσαφήνιση εννοιολογικού πλαισίου

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαία η αποσαφήνιση των όρων δράση, δραστηριότητα και έργο που χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη ερευνητική εργασία.

Ειδικότερα, ο όρος της δραστηριότητας αποσκοπεί στη δημιουργία νέων γνώσεων που βασίζονται ωστόσο στο συνδυασμό των δεξιοτήτων και των ικανοτήτων που ήδη έχουν κατακτήσει οι μαθητές. Το κάθε παιδί έχει τη σκέψη και η δραστηριότητα που οργανώνεται από τον εκπαιδευτικό συμβάλλει ώστε αυτή η σκέψη να μεταβάλλεται σε γνώση (Βρατσάλης, 1996). Με τον όρο δραστηριότητα αναφερόμαστε σε έργα που περιλαμβάνουν δράσεις συνέχισης, κοντινής και μακρινής πρόβλεψης και εύρεσης της μονάδας επανάληψης σε οπτικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα, καθώς και συνέχισης, μακρινής και κοντινής πρόβλεψης και καταγραφής του γενικού κανόνα σε οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα. Στην παρούσα εργασία ο όρος δράση χρησιμοποιείται για τις ενέργειες που ζητούνται από τα παιδιά στο πλαίσιο κάθε δραστηριότητας,

Σύμφωνα με τις Δεσλή και Γαϊτανέρη (2017), τα απλά επαναλαμβανόμενα πρότυπα είναι τα πρότυπα που βασίζονται στην επανάληψη. Σ' αυτά συνδυάζονται χωρίς τροποποίηση διάφορα αντίγραφα ενός αρχικού σχεδίου ή προτύπου. Τα επαναλαμβανόμενα είναι τα μοτίβα που βασίζονται στην επανάληψη και ο πυρήνας τους είναι η μικρότερη επαναλαμβανόμενη αλληλουχία στοιχείων. Ο πυρήνας τους επαναλαμβάνεται πάντοτε με ακρίβεια. Η δομή τους είναι κυκλική, και εμπεριέχουν ένα αναγνωρίσιμο, επαναλαμβανόμενο κύκλο στοιχείων ο οποίος αναφέρεται ως «μονάδα επανάληψης».

Αναπτυσσόμενα πρότυπα ή ακολουθίες ονομάζονται τα πρότυπα εκείνα που αποτελούνται από μία σειρά ξεχωριστών στοιχείων ή πλαισίων, με το κάθε νέο πλαίσιο να συνδέεται με το προηγούμενο σύμφωνα με έναν κανόνα (Desli & Gaitaneri, 2017).

Γενίκευση είναι η μετάβαση από τη θεώρηση ενός αντικειμένου στη θεώρηση ενός συνόλου που περιέχει αυτό το αντικείμενο· η μετάβαση από τη θεώρηση ενός περιορισμένου συνόλου στη θεώρηση ενός ευρύτερου που περιέχει το πρώτο (Polya, 1998, σελ. 97).

2.3. Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό (προέλεγχος-παρέμβαση-μεταέλεγχος).

Στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο, τα δεδομένα συλλέχτηκαν με τη χρήση φύλλων εργασίας με κατάλληλα έργα που απαντήθηκαν ατομικά. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, τα δεδομένα συλλέχτηκαν με παρατήρηση και σύγχρονη καταγραφή, που έγινε από τον ίδιο τον ερευνητή.

2.4. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 20 μαθητές της Β' Τάξης (ηλικία 7 έως 8 ετών) ενός Ιδιωτικού Δημοτικού Σχολείου της Θεσσαλονίκης. Τα 10 ήταν κορίτσια και τα 10 αγόρια. Όλα τα παιδιά είχαν φοιτήσει μαζί στο ίδιο Νηπιαγωγείο και Α' Δημοτικού. Κανένα από τα παιδιά δεν είχε κάποια μαθησιακή δυσκολία.

2.5. Διαδικασία

Η διαδικασία της έρευνας ακολούθησε την εξής σειρά. Αρχικά πραγματοποιήθηκε προέλεγχος, έπειτα διδακτική παρέμβαση και τέλος μεταέλεγχος των ικανοτήτων των παιδιών στα επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Κατά τον Προέλεγχο έγινε διερεύνηση και καταγραφή των ικανοτήτων των παιδιών να γενικεύουν σε διαφορετικά είδη προτύπων. Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν περιλάμβαναν δράσεις: συνέχισης, συμπλήρωσης, εύρεσης λάθους, εύρεσης της μονάδας επανάληψης και πρόβλεψης με επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα και έργα συνέχισης, πρόβλεψης και καταγραφής του γενικού κανόνα με αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα ήταν σχηματικά και χρωματικά της μορφής ΑΒ και ΑΒΓ. Αντίστοιχα τα αναπτυσσόμενα πρότυπα ήταν σχηματικά και αναπτύσσονταν στον κάθετο άξονα, στον οριζόντιο, αλλά και στους δύο ταυτόχρονα. Η διερεύνηση έγινε ατομικά με φύλλα εργασίας (βλ. Παράρτημα). Οι μαθητές κλήθηκαν να ολοκληρώσουν τα έργα μέσα σε μία διδακτική ώρα (45').

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προελέγχου οργανώθηκε μια διδακτική παρέμβαση. Η διδακτική παρέμβαση έλαβε χώρα σε δύο διδασκαλίες διάρκειας 45 λεπτών η κάθε μία. Οι διδασκαλίες απείχαν χρονικά μία μέρα η μία από την άλλη. Κατά τη διάρκεια κάποιων δράσεων τα παιδιά συμμετείχαν σε ομάδες των δύο ατόμων, σε άλλες έδρασαν ατομικά και σε κάποιες συμμετείχαν στην ολομέλεια της τάξης.

Η Πρώτη μέρα της παρέμβασης σχεδιάστηκε, λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα των μαθητών του Προελέγχου. Από αυτά φάνηκε πως οι ικανότητες των μαθητών να κάνουν κοντινές και μακρινές προβλέψεις, ήταν μειωμένες. Έτσι σχεδιάστηκε μία δραστηριότητα η οποία χωριζόταν σε τρεις δράσεις. Οι δράσεις αυτές επικεντρωνόντουσαν στα επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα και πιο συγκεκριμένα είχαν ως στόχο την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να μετασχηματίζουν ένα επαναλαμβανόμενο οπτικό πρότυπο χρησιμοποιώντας διαφορετική αναπαράσταση, να εντοπίζουν το στοιχείο επανάληψης του προτύπου και να κάνουν προβλέψεις (κοντινές και μακρινές) με αυτό.

Η διδασκαλία της δεύτερης μέρας παρέμβασης επικεντρώθηκε στα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, καθώς τα αποτελέσματα του Προελέγχου έδειξαν πως οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο σε αυτά. Έτσι η δεύτερη διδασκαλία της παρέμβασης περιλάμβανε τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες επικεντρώθηκαν στα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Η πρώτη δραστηριότητα χωριζόταν σε δύο δράσεις. Η πρώτη δράση είχε ως στόχο την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να συνεχίζουν αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα και η δεύτερη να εξάγουν τον γενικό κανόνα. Ανάμεσα στην πρώτη και τη δεύτερη δράση της πρώτης δραστηριότητας παρεμβλήθηκε η δεύτερη δραστηριότητα, που είχε μία δράση. Στόχος αυτής της δράσης ήταν να αναπτυχθεί η ικανότητα των μαθητών να βρίσκουν ομοιότητες ανάμεσα σε αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η τρίτη δραστηριότητα χωριζόταν σε δύο δράσεις με στόχο να αναπτυχθεί η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν δικά τους αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα και να εξάγουν τον κανόνα τέτοιου είδους προτύπων. Τέλος η τέταρτη δραστηριότητα είχε μία μόνο δράση η οποία είχε ως στόχο την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να κάνουν κοντινές και μακρινές προβλέψεις σε αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα.

Τέλος, ο Μεταέλεγχος, πραγματοποιήθηκε δύο εβδομάδες μετά την παρέμβαση. Στους μαθητές μοιράστηκαν φύλλα εργασίας που περιείχαν έργα αυξημένης δυσκολίας για να παρατηρηθεί η ενδεχόμενη επίδραση της παρέμβασης στην επίδοσή τους και η ενδεχόμενη διεύρυνση των ικανοτήτων τους. Πιο συγκεκριμένα κατά το Μεταέλεγχο χρησιμοποιήθηκαν έργα εύρεσης του δομικού στοιχείου σε επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα, έργα κοντινών και μακρινών προβλέψεων σε επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, έργα συνέχισης σύνθετων αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων και έργα εύρεσης και διατύπωσης του γενικού κανόνα

2.6. Εργαλεία-υλικό

Για τις φάσεις του προελέγχου και του μεταελέγχου χρησιμοποιήθηκαν δύο φύλλα εργασίας. Το φύλλο εργασίας του Προελέγχου περιλάμβανε 9 έργα και το φύλλο εργασίας του Μεταελέγχου περιλάμβανε 6. Και τα δύο φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν περιλάμβαναν έργα που είχαν χρησιμοποιηθεί από τις Δεσλή και

Γαϊτανέρη (2017) και τους Warren και Cooper (2008) οι οποίες προσαρμόστηκαν στις ηλικιακές ανάγκες των μαθητών. Επειδή, η διάσταση, το χρώμα, η μορφή, το μέγεθος και ο προσανατολισμός του προτύπου φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά την επίδοση των μαθητών (Gadzichowski, 2012) επιλέχθηκαν πρότυπα χαμηλής και μέτριας δυσκολίας στον προέλεγχο. Έτσι, καθώς τα παιδιά φαίνεται να δυσκολεύονται λιγότερο όταν έχουν να διαχειριστούν πρότυπα τα οποία έχουν ξανασυναντήσει ή προέρχονται γενικότερα από την καθημερινότητά τους (Σκουμπουρδή, 2014), επιλέχθηκαν χρωματικά και σχηματικά πρότυπα της μορφής ΑΒ και ΑΑΒ καθώς και αναπτυσσόμενα πολλαπλασιαστικά πρότυπα. Αυτή η επιλογή έγινε με βάση τα σχολικά εγχειρίδια της Α και Β Δημοτικού, που περιλαμβάνουν τέτοιου είδους πρότυπα.

2.6.1. Προέλεγχος

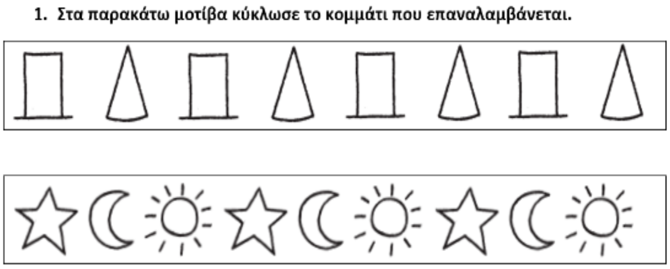
Κατά τον προέλεγχο δόθηκε ένα φύλλο εργασίας που περιείχε εννέα έργα με στόχο να ελεγχθεί η κατανόηση και η ικανότητα διαχείρισης των προτύπων από τα παιδιά.

Τα έργα χωρίζονται σε 2 μεγάλες κατηγορίες ως προς το περιεχόμενό τους. Την Ομάδα Α που περιλαμβάνει τα έργα 1 έως 5, τα οποία αναφέρονται σε επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα και την Β ομάδα που περιλαμβάνει τα έργα 6 έως 9 που αναφέρονται σε αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Η Ομάδα Α περιείχε έργα συνέχισης, συμπλήρωσης, εύρεσης του λάθους, εύρεσης της μονάδας επανάληψης και κοντινών και μακρινών προβλέψεων σε επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα. Αντίστοιχα η Ομάδα Β περιείχε έργα συνέχισης, συμπλήρωσης, πρόβλεψης και διατύπωσης του γενικού κανόνα σε οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα.

Ομάδα Α΄Έργων Προελέγχου

Στα έργα 1 και 3 ο στόχος ήταν να ελεγχθεί η ικανότητα των παιδιών να εντοπίζουν τα δομικά στοιχεία (μονάδα επανάληψης) σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα τύπου ΑΒ και ΑΒΓ.

Πιο συγκεκριμένα στο έργο 1 (Εικ. 1) τους ζητήθηκε να κυκλώσουν το κομμάτι που επαναλαμβάνεται και στο έργο 3 (Εικ. 2) να εντοπίσουν το λάθος που υπάρχει, σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα της μορφής ΑΒ και ΑΒΓ.

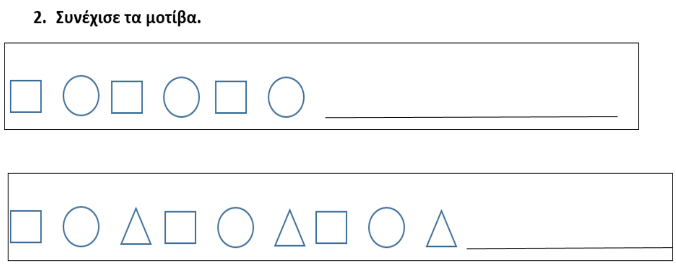


Εικόνα 1: Έργο Α1.1 και Α1.2

Εικόνα 2: Έργο Α3.1 και Α3.2

Έτσι, ζητήθηκε από τα παιδιά να διαγράψουν το λάθος, για να ελεγχθεί εάν είναι σε θέση να εντοπίζουν τη μονάδα επανάληψης και να διαγράφουν αυτό που πρέπει έτσι ώστε να αναδυθεί η επαναληπτικότητα- περιοδικότητα- του προτύπου.

Τα έργα 2 και 4 (Εικ. 3 και 4) είχαν ως στόχο να ελεγχθεί η ικανότητα των παιδιών να συνεχίζουν και να συμπληρώνουν πρότυπα. Δόθηκαν πρότυπα τύπου ΑΒ και ΑΒΓ και ζητήθηκε από τα παιδιά να συνεχίσουν το πρότυπο στο έργο 2 και να συμπληρώσουν το πρότυπο στο έργο 4.



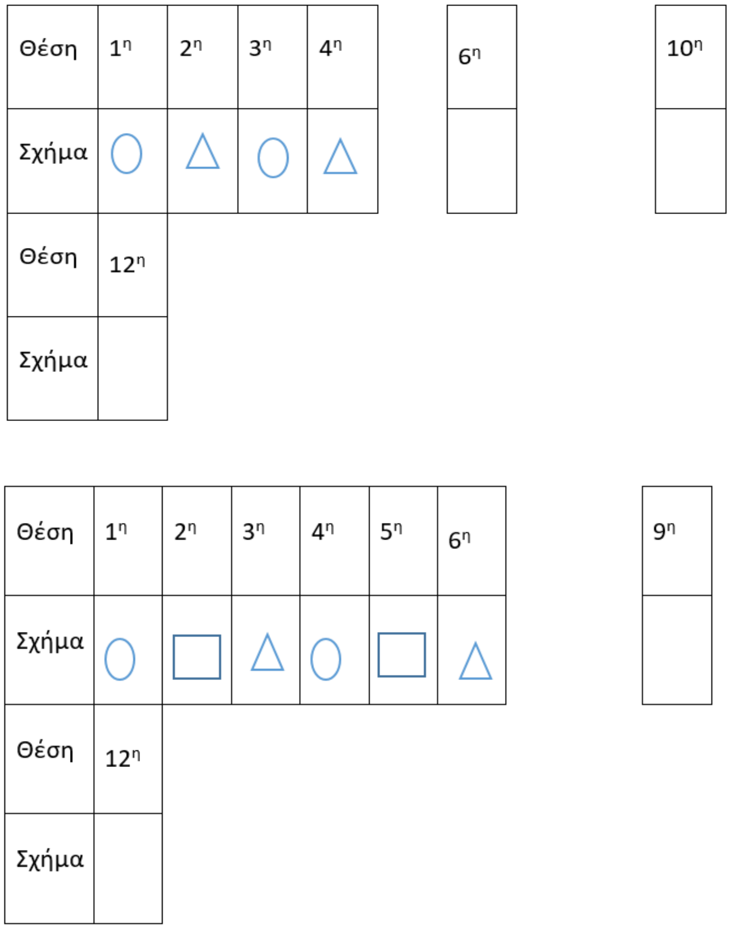
Εικόνα 3: Έργο Α2.1 και Α2.2

Εικόνα 2: Έργο Α4.1 και Α4.2

Στα δύο αυτά έργα χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές αναπαραστάσεις. Στο έργο 2 χρησιμοποιήθηκε σχηματική, ενώ στο έργο 4 χρωματική αναπαράσταση, για να ελεγχθεί η ικανότητα των παιδιών να διαχειρίζονται πρότυπα με διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Με το Έργο 5 (Εικ. 5) ολοκληρώνεται η ομάδα των επαναλαμβανόμενων προτύπων. Σε αυτήν στόχος ήταν να ελεγχθεί η ικανότητα των παιδιών να κάνουν πρόβλεψη, κοντινή και μακρινή, με επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Δίνονται πρότυπα τύπου ΑΒ και ΑΒΓ τα παιδιά καλούνται να προβλέψουν το στοιχείο που θα βρίσκεται μετά από 2, 4 και 6 θέσεις.

5. **Βρες ποιο σχήμα θα βρίσκεται στα κενά κουτάκια.**



Εικόνα 3: Έργο Α5

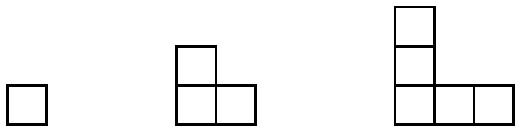
Ομάδα Β΄Έργων Προελέγχου

Τα έργα 6 έως 9 του προελέγχου αφορούν αναπτυσσόμενα πρότυπα. Στα Έργα 6 και 7 ζητήθηκε από τους μαθητές να συνεχίσουν αναπτυσσόμενα πρότυπα, στα οποία δίνονται τα τρία πρώτα στοιχεία. Το πρότυπο του έργου 6 (Εικ. 6) αναπτύσσεται μόνο στον κάθετο άξονα (τύπου Ι), ενώ το πρότυπο του έργου 7 (Εικ. 7) αναπτύσσεται ταυτόχρονα στον οριζόντιο και στον κάθετο άξονα (τύπου L).

6. Βρίσκω τον κανόνα και συνεχίζω το μοτίβο.

Εικόνα 6: Έργο Β6

7. Βρίσκω τον κανόνα και συνεχίζω το μοτίβο.



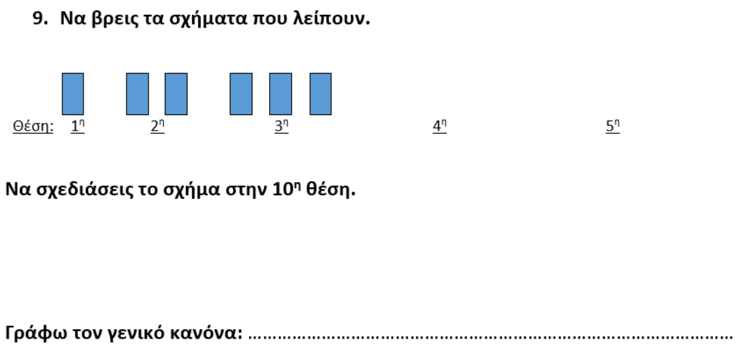
Εικόνα 7: Έργο Β7

Στόχος των έργων αυτών ήταν να ελεγχθεί ο βαθμός εξοικείωσης των μαθητών με αναπτυσσόμενα πρότυπα και η ικανότητά τους να τα συνεχίζουν.

Το έργο 9 χωρίζεται σε τρία υποέργα (Εικ. 8). Στο πρώτο υποέργο 9.1 δόθηκαν οι τρεις πρώτες θέσεις ενός προτύπου που αναπτύσσεται στον οριζόντιο άξονα και ζητήθηκε από τους μαθητές να το συνεχίσουν. Στόχος ήταν να ελεγχθεί η ικανότητα συνέχισης αναπτυσσόμενων προτύπων.

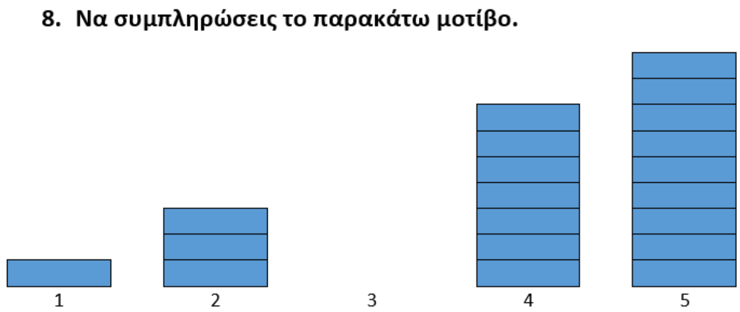
Στο δεύτερο υποέργο 9.2 ζητήθηκε από τους μαθητές να προβλέψουν το στοιχείο στην $10^{η}$ θέση. Στόχος της δράσης ήταν να ελεγχθεί η ικανότητα των μαθητών να κάνουν προβλέψεις με αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα.

Τέλος στην τρίτη δράση 9.3 ζητήθηκε να διατυπώσουν έναν κανόνα για αυτό που σκέφτηκαν. Η δράση αυτή είχε ως στόχο να ελεγχθεί η ικανότητα των μαθητών να διατυπώνουν έναν γενικό κανόνα.



Εικόνα 8: Έργο Β9 υποέργα 9.1, 9.2 και 9.3

Τέλος το έργο 8 (Εικ. 9) περιλαμβάνει ένα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο με ένα κενό στο οποίο καλούνται οι μαθητές να σχεδιάσουν το στοιχείο που λείπει. Το πρότυπο αναπτύσσεται στον κάθετο άξονα. Από τις πέντε πρώτες θέσεις του προτύπου, λείπει η τρίτη.



Εικόνα 9: Έργο Β8

Στόχος του έργου είναι να ελεγχθεί η ικανότητα συμπλήρωσης αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα έργα, ο τύπος προτύπου και οι δράσεις που ζητήθηκαν από τα παιδιά

Πίνακας 1: Συγκεντρωτική παρουσίαση έργων προελέγχου

Ομάδα	**Έργο**	**Τύπος προτύπου**		**Δράση/ Ικανότητα που ελέγχεται**

A	A1.1	AB		Εύρεση δομικού στοιχείου
	A1.2	ABΓ		Εύρεση δομικού στοιχείου
	A2.1	AB		Συνέχιση
	A2.2	ABΓ		Συνέχιση
	A3.1	AB		Εύρεση λάθους
	A3.2	ABΓ		Εύρεση λάθους
	A4.1	AB		Συμπλήρωση (πρόβλεψη στο εσωτερικό)
	A4.2	ABΓ		Συμπλήρωση (πρόβλεψη στο εσωτερικό)
	A5.1	AB		Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη (μετά από 2 και 4 θέσεις)
	A5.2	ABΓ		Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη (μετά από 2 και 4 θέσεις)
B	B6	Σε κάθετο άξονα (τύπου I)		Συνέχιση
	B7	Σε οριζόντιο και κάθετο άξονα (τύπου L)		Συνέχιση
	B8	Σε κάθετο άξονα (τύπου I)		Συμπλήρωση (πρόβλεψη στο εσωτερικό)
	B9.1	Σε οριζόντιο άξονα		Συνέχιση
	B9.2	Σε οριζόντιο		Μακρινή πρόβλεψη (μετά από 5 θέσεις)

		άξονα		
	Β9.3	Σε οριζόντιο άξονα		Καταγραφή του γενικού κανόνα

2.6.2. Μεταέλεγχος

Το φύλλο εργασίας που χρησιμοποιήθηκε κατά το μεταέλεγχο περιείχε έργα ίδιου τύπου με εκείνα του προελέγχου, όμως με αυξημένη δυσκολία. Περιλάμβανε έργα μέσα από τα οποία μπορούσε να αναδειχθεί η ενδεχόμενη βελτίωση και ανάπτυξη των ικανοτήτων των παιδιών στις οποίες εστίασε η παρέμβαση. Έτσι ως στόχο του είχε να ελεγχθεί διεύρυνση των ικανοτήτων των παιδιών να κάνουν κοντινές και μακρινές γενικεύσεις μέσα από επαναλαμβανόμενα (Ομάδα Α) και αναπτυσσόμενα (Ομάδα Β) οπτικά πρότυπα. Η Ομάδα Α περιλάμβανε τα έργα 1 και 2 ενώ η Ομάδα Β τα έργα 3 έως 6.

Ομάδα Α΄Έργων Μεταελέγχου

Ειδικότερα στο έργο 1 (Εικ. 10) δόθηκαν στους μαθητές δύο επαναλαμβανόμενα πρότυπα τύπου ΑΒ και ΑΒΓ και τους ζητήθηκε να προβλέψουν το στοιχείο του προτύπου στις θέσεις που έλειπαν. Το έργο αυτό είχε ως στόχο να ελεγχθεί η ικανότητα των μαθητών να προβλέπουν την κοντινή και μακρινή θέση των στοιχείων επαναλαμβανόμενων προτύπων.

1. Βρες ποιο σχήμα θα βρίσκεται στα κενά κουτάκια.

Θέση	1η	2η	3η	4η		6η
Σχήμα	○	△	○	△		
Θέση	10η	15η				
Σχήμα						

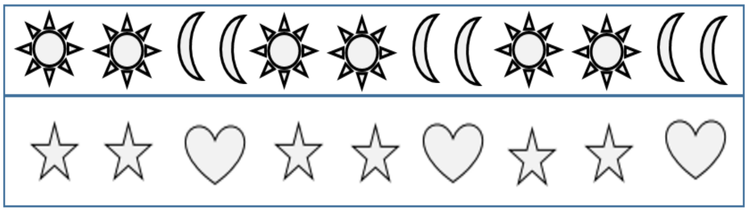
Θέση	1η	2η	3η	4η	5η	6η		9η
Σχήμα	○	□	△	○	□	△		
Θέση	11η	14η						
Σχήμα								

Εικόνα 10: Έργο Α1, υποέργο Α1.1 και Α1.2

Στο υποέργο Α1.1 ζητήθηκε το πρότυπο μετά από 2, 6 και 11 θέσεις, ενώ στο υποέργο Α1.2 μετά από 3, 5 και 8 θέσεις.

Στο έργο 2 (Εικ. 11) ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν το δομικό στοιχείο σε πιο σύνθετα επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα. Το είδος των προτύπων που τους δόθηκαν ήταν ΑΑΒΒ και ΑΑΒ. Στόχος του έργου ήταν η εύρεση δομικού στοιχείου σε σύνθετα επαναλαμβανόμενα πρότυπα.

2. Κύκλωσε το κομμάτι που επαναλαμβάνεται.



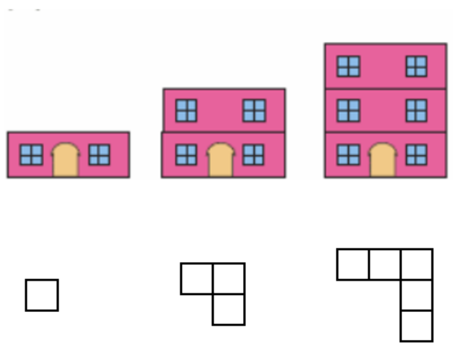
Εικόνα 11: Έργο Α2, υποέργα Α2.1 και Α2.2

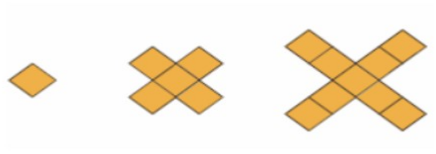
Ομάδα Β΄Έργων Μεταελέγχου

Σε αυτή την ομάδα περιλαμβάνονται τα έργα 3 έως 6 στα οποία οι μαθητές καλούνται να συνεχίσουν σύνθετα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, να κάνουν μακρινές προβλέψεις και να εξάγουν τον γενικό κανόνα.

Πιο συγκεκριμένα στο έργο 3 (Εικ.12) ζητήθηκε από τους μαθητές να συνεχίσουν τρία οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα. Στόχος του έργου ήταν ο έλεγχος της ικανότητας των μαθητών να συνεχίζουν σύνθετα αναπτυσσόμενα πρότυπα, αλλά και να αναδειχθεί η ενδεχόμενη βελτίωση. Το έργο περιλάμβανε τρία πρότυπα ξεκινώντας από το πιο απλό προς το πιο σύνθετο. Το πρώτο πρότυπο (Β3.1) ήταν τύπου Ι και αναπτυσσόταν στον κάθετο άξονα, το δεύτερο (Β3.2) τύπου L οπότε αναπτυσσόταν στον κάθετο και στον οριζόντιο άξονα και το τρίτο ήταν τύπου Χ και αναπτυσσόταν προς τέσσερις κατευθύνσεις.

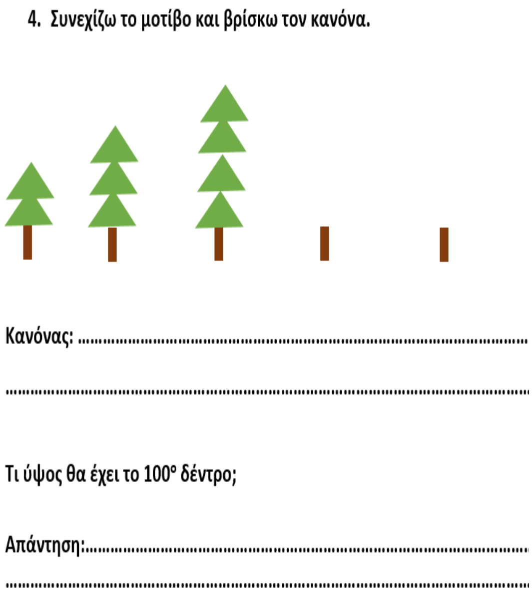
3. Συνεχίζω τα μοτίβα.



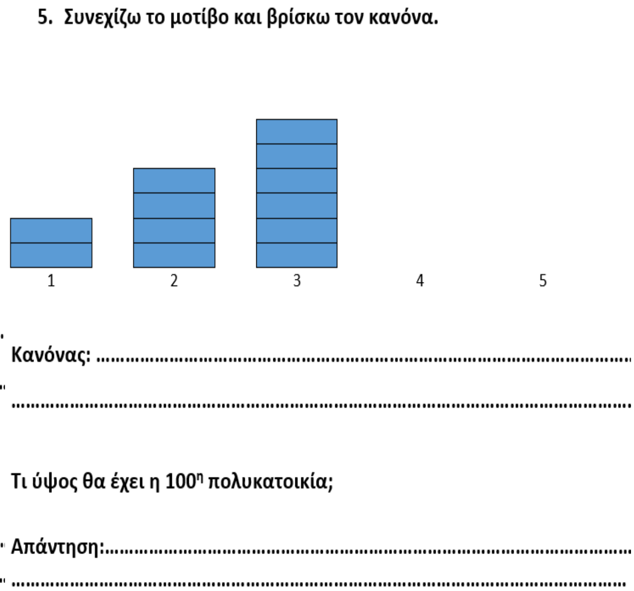


Εικόνα 12: Έργο Β3 υποέργα Β3.1, Β3.2 και Β3.3

Στα έργα 4 και 5 στόχος είναι να ελεγχθεί η ικανότητα των μαθητών να εξάγουν έναν κανόνα από ένα αναπτυσσόμενο πρότυπο, να τον διατυπώνουν και να προβλέπουν το στοιχείο του προτύπου σε μια μακρινή θέση. Κάθε έργο χωριζόταν σε τρεις δράσεις. Στα έργα αυτά (Εικ. 13 και 14) δόθηκαν πρότυπα που αναπτυσσόταν στον κάθετο άξονα (τύπου Ι). Το πρότυπο του έργου 4 είχε κανόνα ν+1 και αυτό του έργου 5 είχε κανόνα 2ν. Στις δράσεις 4.1 και 5.1 ζητήθηκε από τα παιδιά να συνεχίσουν το πρότυπο, στις δράσεις 4.2 και 5.2 να διατυπώσουν τον κανόνα με τον οποίο αναπτύσσεται κάθε πρότυπο και τέλος στις δράσεις 4.3 και 5.3 να κάνουν πρόβλεψη για τον όρο του προτύπου στην εκατοστή θέση.

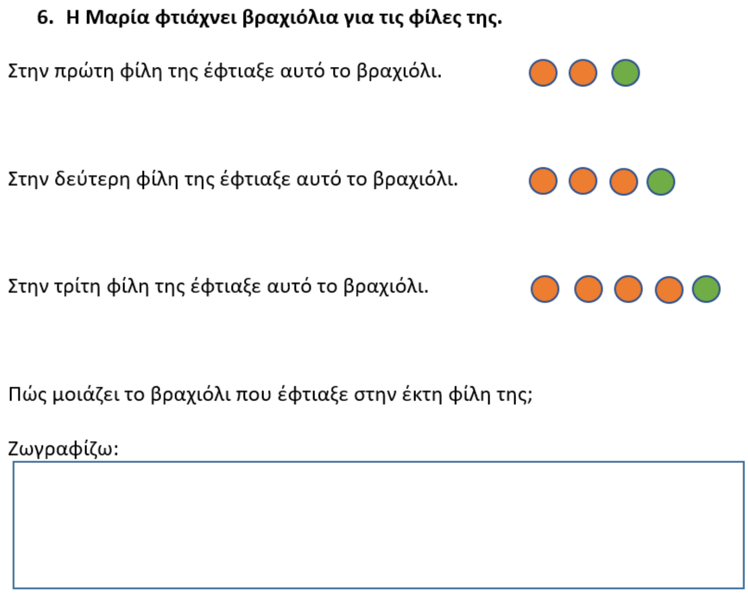


Εικόνα 13: Έργο 4, υποέργα Β4.1 και Β4.2 και Β4.3



Εικόνα 14: Έργο 5, υποέργα Β5.1 και Β5.2 και Β5.3

Τέλος στο έργο 6 (Εικ. 15) δίνεται ένα λεκτικό πρόβλημα. Το αφήγημα του προβλήματος λέει πως η Μαρία έφτιαξε βραχιόλια για τις φίλες της. Δίνεται το βραχιόλι που έφτιαξε στην πρώτη, τη δεύτερη και την τρίτη φίλη της και ζητείται από τα παιδιά να σχεδιάσουν το βραχιόλι που θα φτιάξει στην έκτη φίλη της. Στόχος είναι να ελεγχθεί κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να κάνουν μία κοντινή πρόβλεψη σχετικά με ένα αναπτυσσόμενο πρότυπο και να σχεδιάσουν. Η μορφή του έργου είναι διαφορετική από τα προηγούμενα (λεκτικό πρόβλημα) για να ελεγχθεί ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές είναι σε θέση να κάνουν κοντινές προβλέψεις.



Εικόνα 15: Έργο Β6

Πίνακας 2: Συγκεντρωτική παρουσίαση έργων Μεταελέγχου

Ομάδα	**Έργο**	**Είδος προτύπου ως προς την εξέλιξη**	**Περιεχόμενο προτύπου**	**Είδος αναπαράστασης προτύπου**	**Ικανότητα που ελέγχεται**
Α	Α1.1	Επαναλαμβανόμενο	ΑΒ	Σχηματική	Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη (μετά από 2, 4 και 5 θέσεις)
	Α1.2		ΑΒΓ		Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη (μετά από 2, 4 και 5 θέσεις)
	Α2.1		ΑΑΒΒ		Εύρεση δομικού στοιχείου
	Α2.2		ΑΑΒ		Εύρεση δομικού στοιχείου
Β	Β3.1	Αναπτυσσόμενο	Σε κάθετο άξονα (τύπου Ι)		Συνέχιση

	B3.2		Σε οριζόντιο και κάθετο άξονα (τύπου L)		Συνέχιση
	B3.3		Τύπου Χ		Συνέχιση
	B4.1		Σε κάθετο άξονα (τύπου Ι) με κανόνα ν+1		Συνέχιση
	B4.2				Καταγραφή κανόνα
	B4.3				Μακρινή πρόβλεψη
	B5.1		Σε κάθετο άξονα (τύπου Ι) με κανόνα 2ν		Συνέχιση
	B5.2				Καταγραφή κανόνα
	B5.3				Μακρινή πρόβλεψη
	B6			Σχηματική και χρωματική	Κοντινή πρόβλεψη

2.7. Σχεδιασμός παρέμβασης

Ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης στηρίχθηκε στα αποτελέσματα του Προελέγχου, όπου ελέγχθηκαν οι ικανότητες των παιδιών. Όπως ήταν αναμενόμενο οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται σημαντικά στα έργα που σχετιζόντουσαν με αναπτυσσόμενα, εν αντιθέσει με τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Για παράδειγμα, στον Προέλεγχο (όπως θα αναφερθούν στα αποτελέσματα) στα έργα συνέχισης και συμπλήρωσης επαναλαμβανόμενων προτύπων, όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά. Αντίθετα πολλοί διαχειρίστηκαν τα αναπτυσσόμενα πρότυπα ως επαναλαμβανόμενα. Έτσι η παρέμβαση εστίασε στις αδυναμίες των μαθητών. Αυτές ήταν η εύρεση του δομικού στοιχείου σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα, η πρόβλεψη κοντινών και μακρινών όρων επαναλαμβανόμενων προτύπων, η συνέχιση αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων, η καταγραφή- διατύπωση του κανόνα ανάπτυξής τους και η πρόβλεψη του μακρινού όρου ενός αναπτυσσόμενου προτύπου.

Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν μέσω της ενεργούς εμπλοκής τους να εξοικειωθούν με δραστηριότητες που αφορούν τα επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα πρότυπα. Να εστιάσουν την προσοχή τους στην επαναλαμβανόμενη δομική μονάδα των προτύπων με απώτερο στόχο την γενίκευση. Επομένως οι δραστηριότητες της παρέμβασης σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να υποστηρίζουν αυτούς τους στόχους. Πιο συγκεκριμένα οι δράσεις είχαν ως στόχο να αναπτυχθεί η ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ένα πρότυπο, να αναλύουν τα στοιχεία του, να κατανοούν τις μεταξύ τους σχέσεις και την ύπαρξη ενός κανόνα που οργανώνει τα στοιχεία του προτύπου. Ακόμα, αναφορικά με τα αναπτυσσόμενα πρότυπα, να είναι σε θέση να εξάγουν τον κανόνα του προτύπου, αλλά και να τον ακολουθούν έτσι ώστε να κατασκευάσουν το πρότυπο.

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης τα παιδιά συμμετείχαν σε δραστηριότητες οι οποίες περιλάμβαναν την επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα την πρώτη μέρα και αναπτυσσόμενα τη δεύτερη. Αν και οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα των επαναλαμβανόμενων προτύπων ήταν αρκετά υψηλές, τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της πρώτης μέρας της παρέμβασης για εξοικείωση με τις δράσεις γενίκευσης και ως έναυσμα για την εισαγωγή των μαθητών στα αναπτυσσόμενα. Οι δράστηριότητες είχαν σχεδιαστεί με σκοπό οι μαθητές μετά το τέλος της παρέμβασης να είναι σε θέση να διαχειρίζονται σύνθετα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, να κάνουν προβλέψεις και να καταγράφουν τον κανόνα.

Ολόκληρη η διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε 5 δραστηριότητες και έλαβε χώρα σε 2 διδακτικές ώρες διάρκειας 45 λεπτών η κάθε μία και σε ξεχωριστές ημέρες με μία μέρα απόσταση η μία από την άλλη.

Την πρώτη μέρα της παρέμβασης έλαβε χώρα μία δραστηριότητα η οποία περιείχε 3 δράσεις που σχετιζόντουσαν με επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Στόχος των δράσεων ήταν να μπορούν οι μαθητές να αντιγράφουν ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο και να το μετασχηματίζουν χρησιμοποιώντας διαφορετική αναπαράσταση, να εντοπίζουν τη δομική μονάδα των επαναλαμβανόμενων προτύπων και να είναι σε θέση να κάνουν γενικεύσεις, προβλέποντας τα στοιχεία τους σε μακρινές θέσεις.

Τη δεύτερη μέρα της παρέμβασης έλαβαν χώρα τέσσερις δραστηριότητες. Το περιεχόμενό τους ήταν τα αναπτυσσόμενα πρότυπα. Η $1^{η}$ Δραστηριότητα της δεύτερης μέρας περιλάμβανε 2 δράσεις που είχαν ως στόχο οι μαθητές να συνεχίζουν αναπτυσσόμενα πρότυπα και να εξάγουν τον κανόνα τους. Η $2^{η}$ Δραστηριότητα παρεμβλήθηκε ανάμεσα στην $1^{η}$ και $2^{η}$ δράση της $1^{ης}$ δραστηριότητας και είχε ως στόχο οι μαθητές να βρίσκουν ομοιότητες ανάμεσα σε ίδια πρότυπα τα οποία δίνονταν με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η $3^{η}$ δραστηριότητα περιλάμβανε 2 δράσεις που είχαν ως στόχο οι μαθητές να κατασκευάζουν δικά τους αναπτυσσόμενα πρότυπα και να εξάγουν τον κανόνα από αυτά. Τέλος η $4^{η}$ δραστηριότητα περιλάμβανε μόνο μία δράση η οποία είχε ως στόχο οι μαθητές να κάνουν γενικεύσεις πάνω σε αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα.

Καθ’ όλη τη διάρκεια της παρέμβασης ο ερευνητής παρουσίαζε τα έργα στα παιδιά και τα προέτρεπε να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία. Έκανε ερωτήσεις, οργάνωνε, ρύθμιζε και κατεύθυνε τη συζήτηση και τη ροή των δράσεων. Στη συνέχεια, συζητούσε μαζί τους για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να ελέγξουν την ορθότητα των απαντήσεων τους και τους ζητούσε αιτιολογήσεις. Στο τέλος του κάθε έργου ήταν εκείνος που παρουσίαζε το συμπέρασμα που έβγαινε από τη συζήτηση και τις δοκιμές των παιδιών, επισημοποιώντας έτσι την γνώση της ομάδας. Όλα τα παιδιά συμμετείχαν σε όλα τα έργα με τη σειρά ενώ μπορούσαν παράλληλα να λένε την άποψη τους για να εξηγούν στους άλλους συμμετέχοντες το τι έκαναν και γιατί.

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν ο διαδραστικός πίνακας στον οποίο παρουσιάστηκαν κάποια αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα (Εικ. 24), τουβλάκια (Εικ. 17) και φύλλα εργασίας που απεικόνιζαν επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα πρότυπα και ερωτήσεις πάνω σε αυτά.

2.7.1. 1η μέρα παρέμβασης

Το πρώτο μάθημα επικεντρώθηκε στα επαναλαμβανόμενα πρότυπα καθώς οι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι με αυτό το είδος προτύπων σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Δημοτικού. Έτσι η πρώτη διδασκαλία εστίασε στην αντιγραφή και συνέχιση επαναλαμβανόμενων προτύπων πιο σύνθετων από εκείνα που είχαν χειριστεί μέχρι τώρα. Ακόμα κατά την πρώτη μέρα της παρέμβασης οι μαθητές ασχολήθηκαν με τον εντοπισμό και την περιγραφή της μονάδας επανάληψης σύνθετων προτύπων, αλλά και το μετασχηματισμό προτύπων χρησιμοποιώντας άλλο υλικό-αναπαράσταση.

Στο ξεκίνημα της δραστηριότητας μοιράστηκε στους μαθητές το υλικό που θα χρησιμοποιούσαν (Εικ. 16 και 17): πολύχρωμα τουβλάκια και δύο φύλλα εργασίας στα οποία απεικονίζονταν επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα της μορφής ΑΒΑ και ΑΒΒΑ. Κάθε φύλλο εργασίας περιλάμβανε έξι ερωτήσεις. Στην πρώτη ερώτηση καλούνταν να κυκλώσουν και έπειτα να κατασκευάσουν το κομμάτι του προτύπου που επαναλαμβανόταν. Έπειτα υπήρχαν ερωτήσεις που κατεύθυναν την προσοχή των παιδιών στη σχέση της θέσης με τα στοιχεία του προτύπου. Κάθε θρανίο- ζευγάρι μαθητών- πήρε ένα φύλλο εργασίας με το Πρότυπο 1 , ένα φύλλο εργασίας με το Πρότυπο 2 και τουβλάκια δύο χρωμάτων. Για πρακτικούς λόγους, μοιράζοντας τα τουβλάκια άλλοι μαθητές είχαν κόκκινο και μπλε, άλλοι μαθητές κίτρινο και κόκκινο και άλλοι πράσινο και κίτρινο.


Πρότυπο 1:

Ποιο κομμάτι επαναλαμβάνεται κάθε φορά;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $3^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $6^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $2^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $4^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $8^{η}$ θέση;

Πρότυπο 2:

Ποιο κομμάτι επαναλαμβάνεται κάθε φορά;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $3^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $6^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $2^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $4^{η}$ θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην $8^{η}$ θέση;

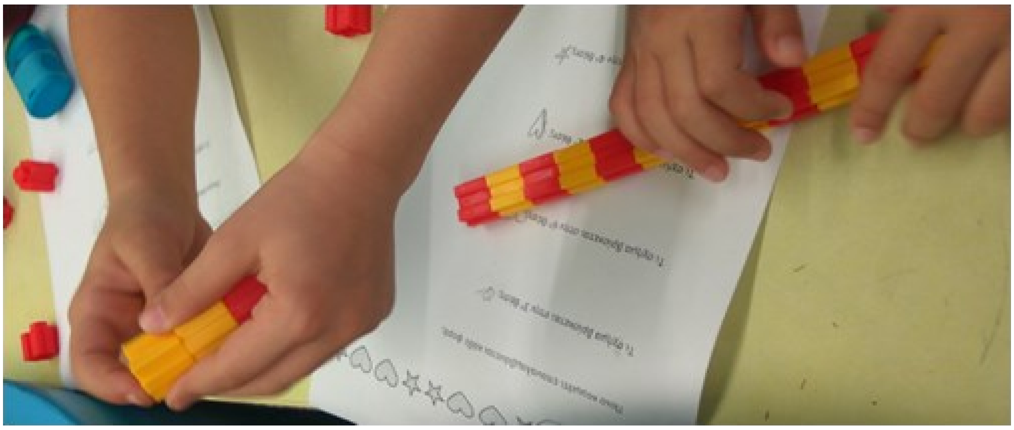
Εικόνα 16: Φύλλο εργασίας και ερωτήσεις 1ης μέρας παρέμβασης

Εικόνα 17: Τουβλάκια που χρησιμοποιήθηκαν από τα παιδιά

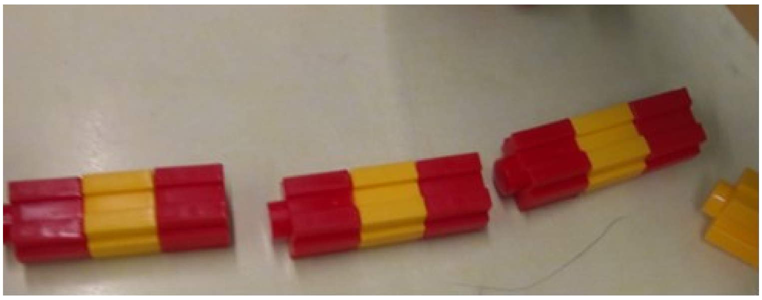
Καθώς τα παιδιά ήταν εξοικειωμένα με τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα δε χρειάστηκε να γίνει κάποια εισαγωγή.

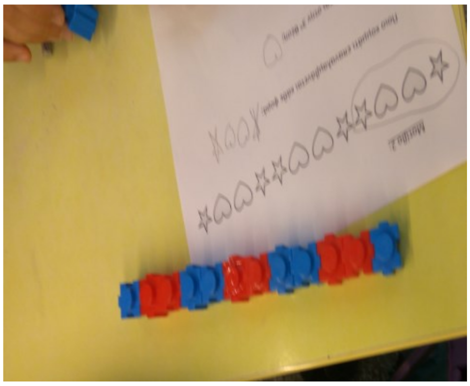
ΔΡΑΣΗ 1η (μετασχηματισμός προτύπου με τη χρήση άλλου υλικού)

Η $1^{η}$ Δράση είχε ως στόχο οι μαθητές να μετασχηματίσουν το πρότυπο που τους δόθηκε με τη χρήση άλλου υλικού. Τα παιδιά εργάστηκαν σε ομάδες των δύο. Κάθε ομάδα είχε ένα φύλλο εργασίας για κάθε πρότυπο και τουβλάκια δύο χρωμάτων. Ζητήθηκε από τα παιδιά χρησιμοποιώντας τα τουβλάκια που είχαν στα χέρια τους να κατασκευάσουν το πρότυπο 1 και το πρότυπο 2 των φύλλων εργασίας (Εικ. 19). Τα παιδιά συμμετείχαν όλα και εργάστηκαν με πολύ καλή διάθεση. Δεν έδειξαν να δυσκολεύονται και σχεδόν όλα τα παιδιά κατάφεραν να μετασχηματίσουν τα πρότυπα του σχεδίου. Κάποια συνέχισαν το πρότυπο πέρα από τις δοθείσες θέσεις προτού τους ζητηθεί. Τέλος, ένας μαθητής μη δίνοντας σημασία στο πρότυπο που τους δόθηκε κατασκεύασε δικό του. Όταν το είδε αυτό ο διπλανός κατάλαβε το λάθος και αμέσως άρχισε να σπάει το λανθασμένο πρότυπο και να το τροποποιεί έτσι ώστε να γίνει σωστό (Εικ. 18).



Εικόνα 18: Διόρθωση λανθασμένου προτύπου





Εικόνα 19: Παραδείγματα μετασχηματισμού προτύπων του φύλλου εργασίας

ΔΡΑΣΗ 2η (εντοπισμός της μονάδας επανάληψης)

Στη συνέχεια της δραστηριότητας τα παιδιά καλούνται να απαντήσουν τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Η πρώτη ερώτηση του φυλλαδίου καλεί τα παιδιά να εντοπίσουν το κομμάτι του προτύπου που επαναλαμβάνεται. Οι μαθητές ανατρέχουν στο πρότυπο που κατασκεύασαν με τα τουβλάκια και απομονώνουν- κόβουν το κομμάτι που επαναλαμβάνεται (Εικ. 20).

Έπειτα απαντούν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας (Εικ. 21). Για να καταφέρουν να απαντήσουν σωστά έφτιαξαν πολλές φορές το κομμάτι που επαναλαμβάνεται και το χρησιμοποίησαν για να εντοπίζουν τα στοιχεία που ζητούνταν κάθε φορά. Έτσι στα παιδιά δόθηκε η ευκαιρία να εστιάσουν την προσοχή τους στη σχέση ανάμεσα στη θέση και στο στοιχείο του προτύπου. Αυτή η διαδικασία εκτελείται και για τα δύο φυλλάδια. Τα παιδιά ολοκληρώνουν το πρώτο που περιλαμβάνει το πρότυπο της μορφής ΑΒΑ και έπειτα το επόμενο με το πρότυπο της μορφής ΑΒΒΑ. Κατά τη διάρκεια επεξεργασίας του προτύπου ΑΒΑ ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Δάσκαλος: Τώρα που έχετε τα κομμάτια. Μπορείτε να φτιάξετε το πρότυπο;

Μαθητής: Ναι! Έτσι. (δείχνει το ένα δίπλα από το άλλο.)

Δάσκαλος: Ωραία. Για δείτε. Αν έχω μόνο ένα κομμάτι σε ποια θέση στη σειρά βρίσκεται το κίτρινο τουβλάκι;

Μαθητής: Είναι δεύτερο στη σειρά.

Δάσκαλος: Αν βάλω άλλο ένα κομμάτι;

Μαθητής (μετά από μέτρηση) Είναι τέταρτο.

Δάσκαλος: Μόνο;

Μαθητής Στο πρώτο κομμάτι είναι δεύτερο και στο άλλο τέταρτο.

Δάσκαλος: Για βάλτε άλλο ένα κομμάτι; Ποια είναι η σειρά του κίτρινου;

Οκτώ.

Για να μαζέψουμε όλες τις σειρές από τα κίτρινα τουβλάκια.

Μαθητές: Δύο, πέντε, οκτώ

Δάσκαλος: Με αυτό τον τρόπο θα μπορούσε κάποιος να βρει το επόμενο;

(περισσότεροι από τους μισούς μαθητές σήκωσαν το χέρι τους για να δώσουν μια απάντηση)

Μαθητής: Έντεκα!

Δάσκαλος: Πώς το βρήκες;

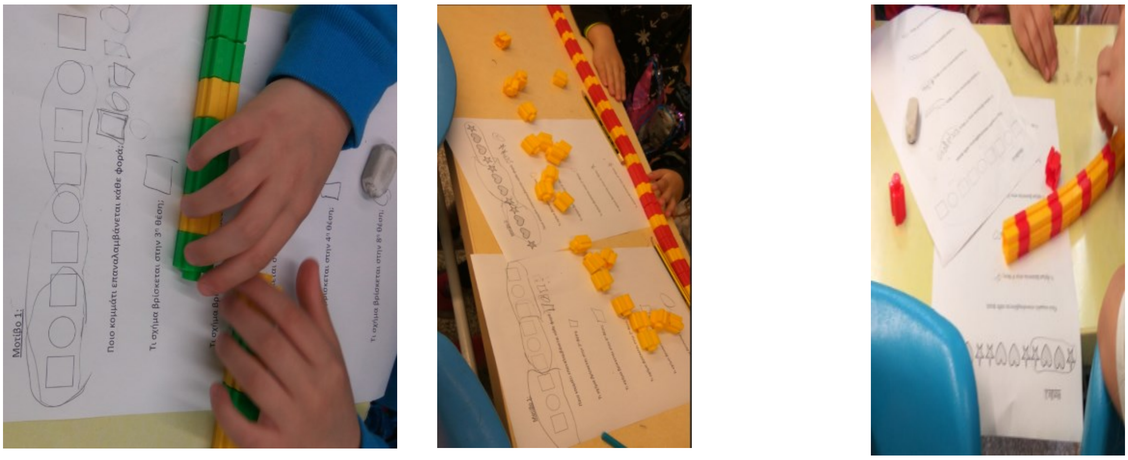
Μαθητής: Έβαλα άλλα τρία.

Δάσκαλος: Άρα θα μπορούσαμε να σκεφτούμε έναν κανόνα- οδηγία σε κάποιον για να βρίσκει συνέχεια τα κίτρινα τουβλάκια

Μαθητής 2: Ναι είναι δύο, πέντε, οκτώ, έντεκα, δεκατέσσερα

Μαθητής 1: Όχι. Είναι ανεβαίνω τρία τρία

Εικόνα 20: Παραδείγματα Κατασκευής δομικών μονάδων



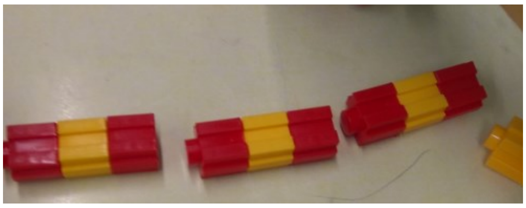
Εικόνα 21: Παραδείγματα απαντήσεων στα φύλλα εργασιών της 1ης μέρας της παρέμβασης

ΔΡΑΣΗ 3η (προβλέψεις)

Τέλος η 3η δράση στόχο είχε στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να κάνουν προβλέψεις με το πρότυπο που είχαν κατασκευάσει. Στην 2η δράση είχαν απαντήσει σε ερωτήσεις κατασκευάζοντας το πρότυπο. Έτσι ήταν πολύ εύκολο για εκείνα να μετρήσουν και να βρουν την σωστή απάντηση. Ως επέκταση της 2ης δράσης τους ζητήθηκε να κάνουν διάφορες προβλέψεις χωρίς να κατασκευάζουν το πρότυπο και έπειτα να τις επαληθεύουν με τα υλικά που είχαν στη διάθεσή τους. Έτσι ο εκπαιδευτικό έδινε κάθε φορά τις ζητούμενες θέσεις και εκείνοι έπρεπε να προβλέψουν το χρώμα του προτύπου στην εκάστοτε θέση. Οι μαθητές απαντούσα σκεπτόμενοι νοερά και στη συνέχεια επαλήθευαν με τα τουβλάκια τους. Στην αρχή οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται να κάνουν προβλέψεις νοερά, γι' αυτό χρειαζόταν συνεχώς να κατασκευάζουν το πρότυπο έτσι ώστε να το βλέπουν. Στην εξέλιξη της δράσης κάποιοι μαθητές κατάφεραν να κάνουν κάποιες από τις προβλέψεις χωρίς να χρειάζεται να κατασκευάσουν το πρότυπο. Έτσι ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος μέσα στην τάξη:

Δάσκαλος: Μπορείτε να μαντέψετε τι χρώμα θα είναι το τουβλάκι στην εικοστή θέση;

(είναι κατασκευασμένες οι 9 πρώτες θέσεις του προτύπου ΑΒΑ με τουβλάκια κόκκινα και κίτρινα) (Εικ. 22)



Εικόνα 22

Μαθήτρια: Θα είναι κόκκινο.

Δάσκαλος: Γιατί; Πώς το σκέφτηκες;

Μαθήτρια: Να εδώ έχω δέκα (προσθέτει άλλο ένα κόκκινο τουβλάκι). Το τελευταίο είναι κόκκινο, αν βάλω άλλα τόσα πάλι το τελευταίο θα είναι κόκκινο.

Εδώ βλέπουμε πως η μαθήτρια κατάφερε να ξεπεράσει το χειραπτικό υλικό και να κάνει νοερούς υπολογισμούς. Βέβαια ο συλλογισμός της, την οδήγησε σε λάθος απάντηση.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι δράσεις της δραστηριότητας της πρώτης διδασκαλίας, σε συνάρτηση με τα υλικά και τον στόχο κάθε δράσης.

Πίνακας 3: Δραστηριότητες 1ης μέρας παρέμβασης

Πρώτη μέρα παρέμβασης	**Υλικά**	**Στόχος**	**Περιγραφή**
Δράση 1	Φύλλο εργασίας με πρότυπα της μορφής ΑΒΑ και	Να μετασχηματίζουν πρότυπο με την χρήση	Δίνεται στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας που περιέχει πρότυπα της μορφής ΑΒΑ και ΑΒΒΑ. Σε αυτά τα πρότυπα εμφανίζονται οι 9 και οι 12 πρώτες θέσεις αντίστοιχα. Ζητείται από τους μαθητές να τα μετασχηματίσουν, μετατρέποντας

	ABBA Χειραπτικό υλικό (τουβλάκια)	άλλου υλικού	την αναπαράσταση που είχαν στο φύλλο εργασίας χρησιμοποιώντας άλλο υλικό (τουβλάκια).
Δράση 2	Φύλλο εργασίας με πρότυπα της μορφής ΑΒΑ και ΑΒΒΑ Χειραπτικό υλικό (τουβλάκια)	Να εντοπίζουν το στοιχείο επανάληψης	Οι μαθητές απαντούν στις ερωτήσεις του φύλου εργασίας, ξεκινώντας από την πρώτη όπου τους ζητείται να εντοπίσουν το στοιχείο εκείνο που επαναλαμβάνεται σε κάθε ένα και να το κατασκευάσουν με τα τουβλάκια τους. Έπειτα απαντώνται οι υπόλοιπες που έχουν ως στόχο οι μαθητές να εστιάσουν την προσοχή τους στα δομικά στοιχεία των προτύπων.
Δράση 3	Χειραπτικό υλικό (τουβλάκια)	Να κάνουν προβλέψεις	Καθώς από το προ τεστ φάνηκε πως τα παιδιά δεν παρουσίαζαν κάποια ιδιαίτερη δυσκολία στη συνέχιση των επαναλαμβανόμενων προτύπων τους ζητήθηκε να προβλέψουν τα στοιχεία του προτύπου σε διάφορες, κοντινές και μακρινές, θέσεις.

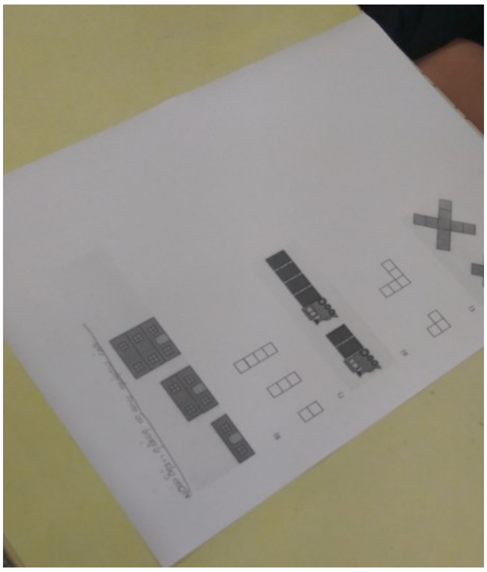
2.7.2. 2η μέρα παρέμβασης

Η δεύτερη διδασκαλία επικεντρώθηκε στα αναπτυσσόμενα πρότυπα. Η διδασκαλία περιλάμβανε τέσσερις δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες 1 και 3 αποτελούνταν από 2 δράσεις η κάθε μία, ενώ οι δραστηριότητες 2 και 4, μόνο από μία δράση. Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για τις δραστηριότητες ήταν ένα φύλλο εργασίας με αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, ένα φύλλο εργασίας με κουτάκια- θέσεις, ο διαδραστικος πίνακας της τάξης και πολύχρωμα τουβλάκια. Καθώς στον προέλεγχο ένας μεγάλος αριθμός μαθητών είχε χειριστεί τα αναπτυσσόμενα πρότυπα ως επαναλαμβανόμενα, προτεραιότητα είχε η εξοικείωση των μαθητών με αυτά.

Επομένως, οι δραστηριότητες είχαν ως στόχο οι μαθητές να εξοικειωθούν με τέτοιου είδους πρότυπα. Πιο συγκεκριμένα να είναι σε θέση να συνεχίζουν και να κατασκευάζουν οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα, να βρίσκουν ομοιότητες ανάμεσα σε πρότυπα με διαφορετικές αναπαραστάσεις, να εξάγουν τον κανόνα ενός αναπτυσσόμενου προτύπου και να εκτελούν κοντινές και μακρινές προβλέψεις.

Δραστηριότητα 1:

Στη Δραστηριότητα 1 μοιράστηκαν φύλλα εργασίας (Εικ.23) στους μαθητές με πέντε αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Σε όλα τα πρότυπα δίνονταν οι δύο πρώτες θέσεις.



Εικόνα 23: Φύλλο εργασίας με αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Δραστηριότητα 1 Δράση 1 Β μέρας παρέμβασης

Το πρώτο ήταν απλό και αναπτυσσόταν στον κάθετο άξονα (τύπου Ι) με κανόνα ν, το δεύτερο αναπτυσσόταν πάλι στον κάθετο άξονα, αλλά ήταν λίγο πιο σύνθετο, με κανόνα ν+1. Το τρίτο πρότυπο αναπτυσσόταν στον οριζόντιο άξονα με κανόνα 2ν. Το τέταρτο αναπτυσσόταν στον κάθετο και στον οριζόντιο άξονα (τύπου L) και τέλος το πέμπτο πρότυπο αναπτυσσόταν σε τέσσερις κατευθύνσεις (τύπου Χ).

Δράση 1

Η εξοικείωση των μαθητών με τα αναπτυσσόμενα πρότυπα δεν ήταν μεγάλη, όπως φάνηκε από τον προέλεγχο. Η 1η δράση της 1ης Δραστηριότητας της Β μέρας είχε εισαγωγικό ρόλο. Αφού μοιράστηκαν τα φύλλα εργασίας (Εικ.23), ένα σε κάθε μαθητή, κλήθηκαν να συνεχίσουν τα πρότυπα που έβλεπαν. Αρκετοί ήταν εκείνοι που διαχειρίστηκαν τα πρότυπα ως επαναλαμβανόμενα. Η απάντηση που έδωσε ένα μεγάλο μέρος των μαθητών ήταν η εξής:

Μαθητές: Θα γίνει πάλι ένας όροφος, δύο και μετά τρείς.

Από αυτή την απόκριση φαίνεται πως βλέπουν το πρότυπο ως κάτι που επαναλαμβάνεται.

Δάσκαλος: Αν σας μαρτυρήσω πως το επόμενο είναι αυτό;

(Ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει το επόμενο στοιχείο του προτύπου -τέσσερις ορόφους).

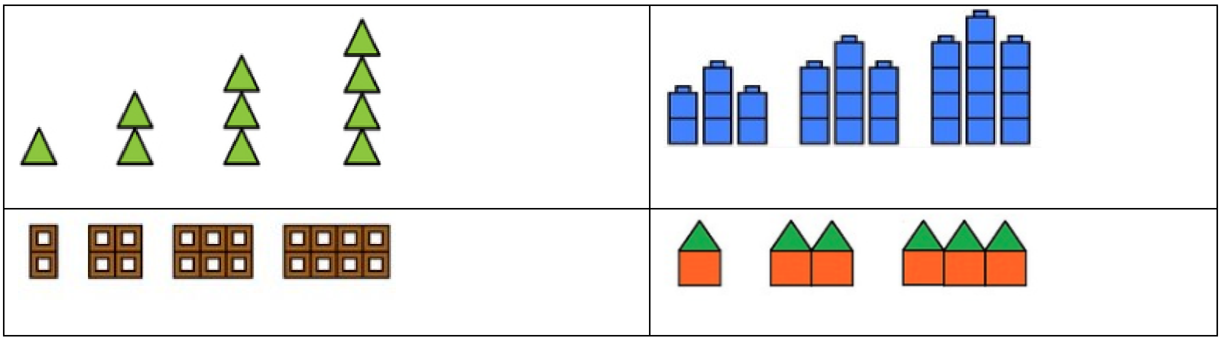
Δάσκαλος: Ποιο θα είναι τότε το αμέσως επόμενο;

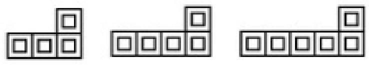
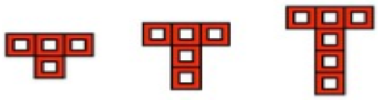
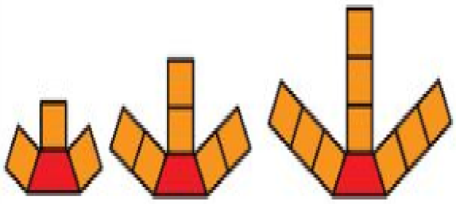
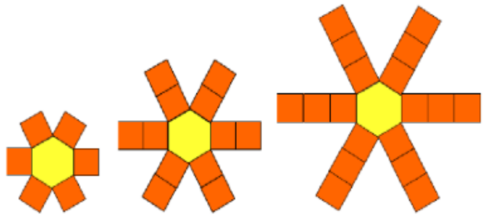
Μαθητές: (Άλλαξαν γνώμη και απάντησαν κατευθείαν) Θα βάλω πέντε ορόφους!

Έπειτα τα παιδιά κλήθηκαν να συνεχίσουν τα υπόλοιπα πρότυπα. Από τα 5 είδη προτύπων δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στα πρότυπα τύπου X και L. Η δυσκολία τους είχε να κάνει περισσότερο με την ταυτόχρονη μεταβολή προς όλους τους άξονες προσανατολισμού. Η προσοχή τους εστίαζε σε ένα ή δύο μόνο άξονες, τους οποίους και συνέχιζαν σωστά ενώ έκαναν λάθη στους υπόλοιπους. Οι ορθές απαντήσεις παρουσιάστηκαν στην ολομέλεια και συζητήθηκε ο τρόπος που σκέφτηκαν. Επειδή όλα τα παιδιά έδειξαν αδυναμία κατανόησης στο πέμπτο πρότυπο, παραλείφθηκε.

Δραστηριότητα 2

Ανάμεσα από τη δράση 1 και τη δράση 2 της δραστηριότητας 1 παρεμβλήθηκε η δραστηριότητα 2. Στόχος της δραστηριότητας ήταν να είναι σε θέση οι μαθητές να εντοπίζουν ομοιότητες στον τρόπο εξέλιξης των αναπτυσσόμενων προτύπων που εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο, αλλά δίνονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Κατά τη δραστηριότητα 2 παρουσιάστηκαν στους μαθητές ορισμένα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα στον διαδραστικό πίνακα της τάξης (Εικ.). Κάποια από αυτά ακολουθούσαν τους ίδιους κανόνες με εκείνα του φυλλαδίου της δραστηριότητας 1, αλλά δινόντουσαν με διαφορετικές αναπαραστάσεις.



Εικόνα 24: Πρότυπα που παρουσιάστηκαν στον διαδραστικό, δραστηριότητα 2

Έπειτα ζητήθηκε από τα παιδιά να βρουν ομοιότητες ανάμεσα σε αυτά τα πρότυπα και εκείνα του φυλλαδίου. Η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε από την ολομέλεια της τάξης. Κάθε φορά που παρουσιαζόταν ένα πρότυπο στον διαδραστικό πίνακα, οι μαθητές καλούνταν να βρουν με ποιο πρότυπο του φυλλαδίου μοιάζει. Αρχικά εστίασαν περισσότερο στην αναπαράσταση των προτύπων. Ο εκπαιδευτικός με κατευθυντήριες ερωτήσεις προσπάθησε να στρέψει την προσοχή των μαθητών στον τρόπο που εξελίσσονται τα πρότυπα και όχι στην αναπαράσταση που χρησιμοποιείται. Τέτοιες ερωτήσεις ήταν: «*Υπάρχει κάποια ομοιότητα σε αυτά τα δύο μοτίβα;*» «*Αν ήταν και τα δύο φτιαγμένα με τα ίδια σχήματα θα έμοιαζαν;*» «*Αν φτιάχναμε ξανά από την αρχή τα δύο πρότυπα με τα τουβλάκια, τότε; Θα έμοιαζαν;*» Ακολούθησε συζήτηση, όπου όλοι οι μαθητές απάντησαν λέγοντας την γνώμη τους. Το τελικό συμπέρασμα της δραστηριότητας ανακοινώθηκε από τον εκπαιδευτικό.

Δραστηριότητα 1 Δράση 2

Η δράση 2 της δραστηριότητας 1 είχε ως στόχο να είναι σε θέση οι μαθητές να εξάγουν τον κανόνα με τον οποίο αναπτύσσεται ένα πρότυπο. Οι μαθητές είχαν μπροστά τους τα φύλλα εργασίας με τα αναπτυσσόμενα πρότυπα. Τους ζητήθηκε να βρουν και να ανακοινώσουν φωναχτά στους υπόλοιπους μαθητές τον κανόνα κάθε προτύπου του φύλλου εργασίας. Όλοι οι μαθητές προσπάθησαν να εκφράσουν τους κανόνες με λόγια. Κάποιοι έγραψαν τον κανόνα στο φύλλο εργασίας. Όλοι σχεδόν οι μαθητές απάντησαν. Μόνο έξι ήταν εκείνοι που έδειξαν αδυναμία έκφρασης κάποιου κανόνα. Οι πιο συχνές απαντήσεις για κάθε πρότυπο ήταν:

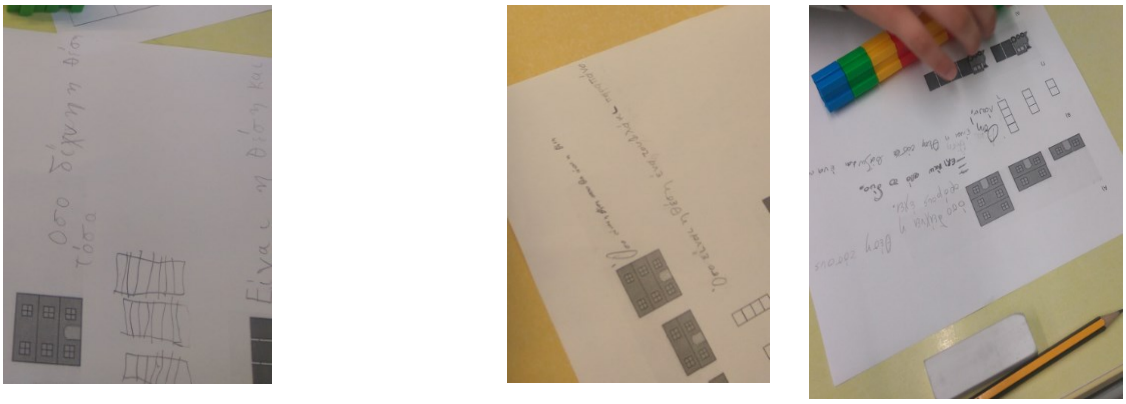
Α πρότυπο: «*Ανεβαίνω ένα ένα*»

Β πρότυπο: «*Ανεβαίνω ένα ένα*»

Γ πρότυπο: «*Προσθέτω δύο κάθε φορά*»

Δ πρότυπο: «*Μεγαλώνω τις άκρες*»

Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει σε κάποιες απαντήσεις που δόθηκαν. Στο Α πρότυπο τρεις μαθητές συνέδεσαν τη θέση του προτύπου με το ύψος λέγοντας πως «Όσο δείχνει η θέση τόσους ορόφους βάζω» (Εικ. 25). Στο Β πρότυπο μία μαθήτρια έγραψε πως «Όσο είναι η θέση ένα τουβλάκι παραπάνω» και μία άλλη συμπλήρωσε «Ξεκινάω από το δύο και όσο είναι η θέση ένα παραπάνω». Ακόμα, στο Γ πρότυπο, η τελευταία είπε πως ο κανόνας είναι η προπαίδεια του 2.



Εικόνα 25: Παραδείγματα απαντήσεων Δραστηριότητα 1 Δράση 2

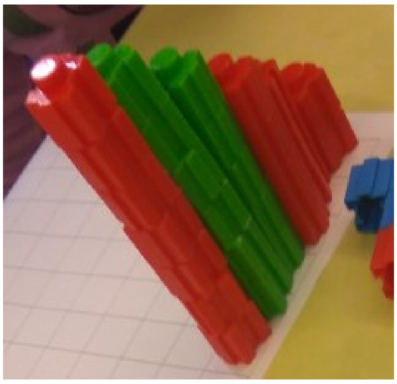
Δραστηριότητα 3

Στόχος της δραστηριότητας ήταν να κατασκευάζουν αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα και να εξοικειωθούν με αυτά. Τα υλικά που τους δόθηκαν ήταν πολύχρωμα τουβλάκια, ίδια με εκείνα της πρώτης μέρας της παρέμβασης.

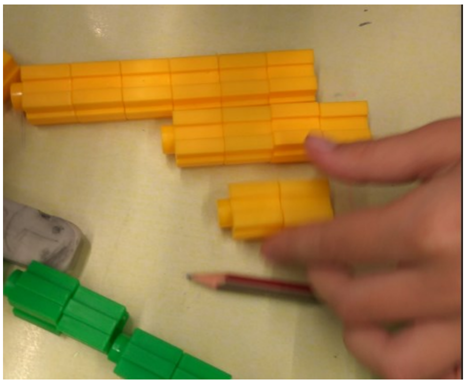
Δράση 1

Στην 1η Δράση της Δραστηριότητας 3 ζητήθηκε από τα παιδιά να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρότυπο που να αυξάνεται- μεγαλώνει. Όλα τα παιδιά κατασκευάσανε πρότυπα που αυξάνονταν στον κάθετο άξονα. Κάποια από αυτά είχαν κανόνα ν+1 (Εικ. 26) και κάποια άλλα κανόνα 2ν (Εικ. 27).

Παραδείγματα προτύπων που κατασκεύασαν τα παιδιά



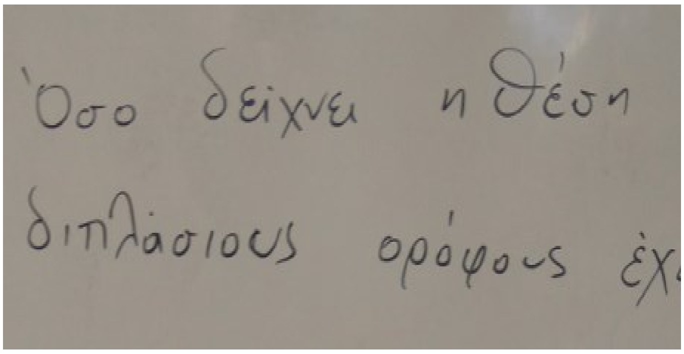
Εικόνα 26: πρότυπο με κανόνα ν+1



Εικόνα 27: πρότυπο με κανόνα 2ν

Δράση 2

Συνεχίζοντας την δραστηριότητα, αφού όλοι οι μαθητές είχαν κατασκευάσει ένα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο με τα τουβλάκια τους, το έδειχναν στους συμμαθητές τους και εκείνοι προσπαθούσαν να μαντέψουν τον κανόνα. Όλα τα παιδιά συμμετείχαν στην εύρεση του κανόνα. Καθώς όμως τα περισσότερα πρότυπα είχαν κανόνα ν τα παιδιά δεν έδειξαν να δυσκολεύονται. Πιο συγκεκριμένα όλες οι απαντήσεις που ακούστηκαν ήταν ανεβαίνω ένα κάθε φορά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρατηρήθηκε όταν ρωτήθηκαν για τον κανόνα του προτύπου 2ν. Τότε ένας μαθητής απάντησε πως «*Όσο δείχνει η θέση διπλάσιους ορόφους έχει*» (Εικ.28).



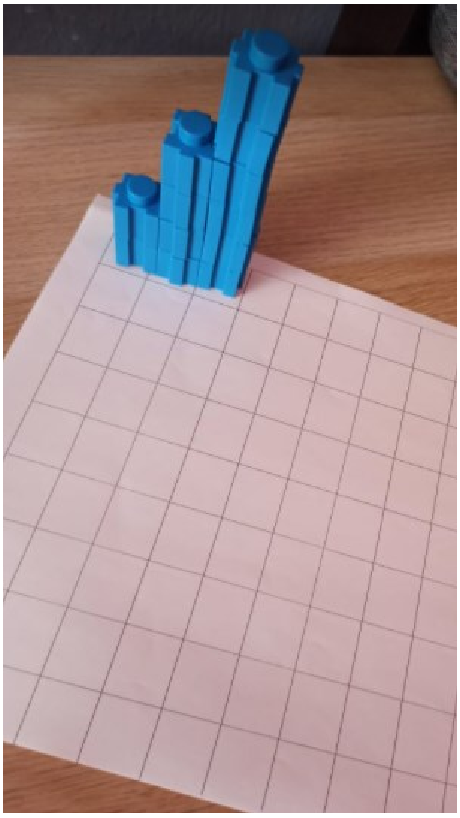
Εικόνα 28: απάντηση Δραστηριότητα 3 Δράση 2

Δραστηριότητα 4

Στόχος αυτής της δραστηριότητας ήταν οι μαθητές να κάνουν κοντινές και μακρινές προβλέψεις με αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Μοιράστηκε στους μαθητές φύλλο εργασίας με κουτάκια- θέσεις (Εικ. 29).

Εικόνα 29:4 Φύλλο εργασίας με κουτάκια- θέσεις

Οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε δυάδες, ανά θρανίο, και κάθε δυάδα πήρε ένα φύλλο εργασίας. Παρουσιάστηκε στους μαθητές ένα πρότυπο της μορφής 2ν (Εικ. 30). Το πρότυπο είχε κατασκευαστεί από τον εκπαιδευτικό με τουβλάκια και εμφανίζονταν οι 3 πρώτες θέσεις.



Εικόνα 30: Πρότυπο που παρουσιάστηκε στη Δραστηριότητα 4 του Μεταελέγχου

Κάθε ομάδα κλήθηκε να αντιγράψει το πρότυπο στο φύλλο εργασίας με τις θέσεις. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να κάνουν προβλέψεις για διάφορες θέσεις σε κοντινή αλλά και πιο μακρινή απόσταση. Για να γίνει πιο ελκυστική η δραστηριότητα προς τους μαθητές επιλέξαμε να τους δώσουμε ένα αφήγημα, που ήταν το εξής: «Είστε βοηθοί ενός πολιτικού μηχανικού, του κ. Γιώργου, που θέλει να χτίσει ένα συγκρότημα πολυκατοικιών. Οι πολυκατοικίες ακολουθούν τον κανόνα που φαίνεται στο σχήμα (Εικ. 30). Μπορείτε να τον βοηθήσετε να συνεχίζει να χτίζει;».

Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας έγινε ο παρακάτω διάλογος.

Δάσκαλος*: Πώς θα μπορέσουμε να βοηθήσουμε τον κ. Γιώργο να συνεχίσει το χτίσιμο;*

Μαθητής*: Θα βάλουμε οκτώ ορόφους.*

Δάσκαλος*: Μπράβο! Μετά πόσους ορόφους;*

Μαθητής*: Εύκολο είναι αυτό. Θα βάλουμε δέκα και μετά δώδεκα.*

Δάσκαλος*: Μπράβο! Ας δούμε τώρα κάτι δύσκολο. Σε αυτή τη θέση (δείχνει την δέκατη) πόσους ορόφους θα έχει;*

Μαθητής*: Δεν ξέρω.*

Μαθητής*: Ξέρω εγώ! Θα βάλουμε αυτά και θα δούμε* (βάζει τουβλάκια για να συμπληρώσει τις κενές θέσεις).

Η πλειοψηφία των μαθητών συμφώνησε πως θα υπολογίσουν ξεκινώντας από την αρχή και υπολογίζοντας όλες τις ενδιάμεσες θέσεις.

Δάσκαλος*: Πολύ σωστά. Άρα ο κ. Γιώργος συνέχεια θα χτίζει για να βρει την επόμενη πολυκατοικία; Δεν μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να τον βοηθήσουμε να γλιτώσει χρόνο;*

Στόχος του εκπαιδευτικού ήταν να δημιουργηθεί η ανάγκη στους μαθητές να βρουν έναν κανόνα για να κάνουν προβλέψεις σε όλες τις θέσεις. Κάτι τέτοιο δεν έγινε επομένως δόθηκε σαν δράση στους μαθητές να εντοπίσουν τον κανόνα με βάση τον οποίο χτίζονται οι όροφοι των πολυκατοικιών.

Δάσκαλος: Μπορούμε να βρούμε έναν κανόνα για να βοηθήσουμε τον κ. Γιώργο να χτίζει πιο γρήγορα τις πολυκατοικίες του;

Επειδή οι μαθητές έδειξαν να δυσκολεύονται να συνδέσουν τη θέση της πολυκατοικίας με τους ορόφους της, ο εκπαιδευτικός συνέχισε.

Δάσκαλος: Για δείτε εδώ. Στην αρχή έχουμε δύο ορόφους, μετά τέσσερις, μετά έξι, οκτώ, δέκα.

Μαθητής: Σαν την προπαίδεια του δύο!

Εδώ αξίζει να σημειωθεί πως οι μαθητές είχαν ασχοληθεί πολύ όλη την χρονιά με την προπαίδεια, οπότε την ανακαλούσαν συνεχώς.

Δάσκαλος: Ποιο είναι το κόλπο που μπορούμε να πούμε στον κ. Γιώργο για να βρίσκει τους ορόφους πιο γρήγορα;

Μαθητής: Να λέει την προπαίδεια του δύο κάθε φορά.

Δάσκαλος: Πολύ ωραία. Έτσι θα πρέπει όμως να υπολογίζει όλες τις πολυκατοικίες. Και αν θέλει να χτίσει κάπου χωρίς να έχει υπολογίσει;

Οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται αρκετά να συνδέσουν την θέση με τους ορόφους επομένως σταδιακά αυξήθηκαν οι θέσεις για τις οποίες έπρεπε να γίνουν οι προβλέψεις (μακρινή πρόβλεψη).

Δάσκαλος: Ας σκεφτούμε το εξής. Σε αυτή τη θέση, τη θέση πέντε, θα βάλει δέκα ορόφους. Αν θέλει μετά να χτίσει στη θέση έξι, θα βάλει δώδεκα ορόφους. Στην θέση επτά, θα βάλει δεκατέσσερις. Στην θέση δέκα;

Μαθητής: Θα βάλει είκοσι!

Δάσκαλος: Μπράβο! Στην θέση είκοσι;

Μαθητής: Θα βάλει σαράντα!

Δάσκαλος: Στη θέση πενήντα;

Μαθητής: Θα βάλει εκατό!

Δάσκαλος: Τέλεια! Άρα ποιον κανόνα μπορούμε να πούμε στον κ. Γιώργο για να χτίζει γρήγορα;

Μαθητής: Βάζεις κάθε φορά το διπλάσιο.

Έτσι οι μαθητές συσχέτισαν τη θέση του προτύπου με το ύψος του, καθώς παρατήρησαν πως το ύψος κάθε πύργου είναι διπλάσιο από τον αριθμό που δείχνει η θέση.

Ακολούθησαν ερωτήσεις κατά τις οποίες οι μαθητές έπρεπε να βρουν το ύψος των πολυκατοικιών σε διάφορες θέσεις. Για να απαντήσουν σωστά σκεφτόντουσαν το διπλάσιο της εκάστοτε θέσης. Το συγκεκριμένο πρότυπο βοήθησε αρκετά τα παιδιά να κάνουν μακρινές προβλέψεις καθώς είναι πολλαπλασιαστικό και τα παιδιά είχαν διδαχθεί πρόσφατα τον πολλαπλασιασμό. Αντίστοιχα δυσκολεύτηκαν όταν τους δόθηκε πρότυπο με κανόνα ν+1. Αξίζει να τονιστεί πως οι μαθητές έδειξαν να δυσκολεύονται στην αρχή. Όσο όμως έβλεπαν και άλλα παραδείγματα εξοικειώνονταν και όλο και περισσότεροι απαντούσαν σωστά. Για να επιτευχθεί ο τελικός στόχος, που ήταν η γενίκευση, έπρεπε οι ερωτήσεις να εστιάζουν στη σχέση θέσης – προτύπου και στη συμμεταβολή των δύο αυτών στοιχείων.

Πίνακας 4: Δραστηριότητες 2ης μέρας παρέμβασης

Δραστηριότητες	**Υλικά**	**Στόχος**	**Περιγραφή**
Δραστηριότητα 1 Δράση 1	Φύλλο εργασίας με αναπτυσσόμενα πρότυπα	Να συνεχίζουν	Δίνεται στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας που περιέχει αναπτυσσόμενα πρότυπα. Τα δύο πρώτα πρότυπα είχαν κάθετο προσανατολισμό με κανόνα ν και ν+1 αντίστοιχα. Το τρίτο πρότυπο ήταν στον οριζόντιο άξονα με κανόνα 2ν. Τέλος τα δύο τελευταία πρότυπα αναπτύσσονταν σε δύο και σε τέσσερις άξονες αντίστοιχα. Το τέταρτο ήταν τύπου L και το τελευταίο τύπου X. Οι μαθητές κλήθηκαν να συνεχίσουν τα πρότυπα
Δραστηριότητα 2 (Παρεμβλήθηκε)	Διαδραστικός πίνακας	Να βρίσκουν ομοιότητες ανάμεσα σε μοτίβα με διαφορετικές αναπαραστάσεις	Παρουσιάζεται στους μαθητές μία σειρά προτύπων που ακολουθούν τους ίδιους κανόνες με εκείνα του φυλλαδίου, αλλά χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις. Έπειτα ζητείται από τα παιδιά να βρουν ομοιότητες ανάμεσα σε αυτά τα πρότυπα. Πιο συγκεκριμένα ποια πρότυπα «μοιάζουν» μεταξύ τους.
Δραστηριότητα 1 Δράση 2	Φύλλο εργασίας με αναπτυσσόμενα πρότυπα	Να εξάγουν τον κανόνα	Ζητείται από τα παιδιά να βρουν ποιος είναι ο κανόνας που ακολουθήθηκε στα 5 πρότυπα που παρουσιάζονται στο φύλλο εργασίας.
Δραστηριότητα 3			
Δράση 1	Χειραπτικό υλικό (τουβλάκια)	Να κατασκευάζουν	Ζητείται από τα παιδιά να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρότυπο που να αυξάνεται.
Δράση 2	Χειραπτικό υλικό (τουβλάκια)	Να εξάγουν τον κανόνα	Κάθε θρανίο παρουσιάζει στην ολομέλεια το πρότυπο που έφτιαξε. Οι υπόλοιποι μαθητές προσπαθούν να βρουν πώς σκέφτηκε ο συμμαθητής τους.

Δραστηριό τητα 4	Φύλλο εργασίας με κουτάκια – θέσεις Χειραπτικό υλικό (τουβλάκια)	Να κάνουν κοντινές και μακρινές προβλέψει ς	Μοιράστηκε στους μαθητές φύλλο εργασίας με κουτάκια - θέσεις και χωρίστηκαν οι μαθητές σε ομάδες των δύο. Δόθηκε στους μαθητές ένα πρότυπο της μορφής 2ν, όπου εμφανίζονταν οι 3 πρώτες θέσεις. Κάθε ομάδα κλήθηκε να αντιγράψει το πρότυπο με τα τουβλάκια στο φύλλο εργασίας με τις θέσεις. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να κάνουν προβλέψεις για διάφορες θέσεις σε κοντινή απόσταση (κοντινές προβλέψεις). Σταδιακά οι θέσεις για τις οποίες έπρεπε να γίνουν οι προβλέψεις αυξάνονταν φτάνοντας στην 100η θέση (μακρινή πρόβλεψη). Το ίδιο επαναλήφθηκε με ένα πρότυπο που είχε ως κανόνα το ν+1.

Για την υλοποίηση όλων των παραπάνω στόχων ήταν απαραίτητο από την πλευρά του διδάσκοντα να ακολουθηθούν κάποιες διδακτικές τεχνικές, οι οποίες διευκολύνουν την ομαλή κατανόηση από την πλευρά των μαθητών. Αρχικά, όπως προαναφέρθηκε χρησιμοποιήθηκαν πρότυπα οικεία στους μαθητές, αλλά και απτά υλικά, όπως τουβλάκια. Ακόμα χρησιμοποιήθηκαν πρότυπα όπου η σχέση μεταξύ του προτύπου και της θέσης ήταν εύκολα αντιληπτή. Για τη σύνδεση της σχέσης αυτής ο εκπαιδευτικός έκανε πολλές κατευθυντήριες ερωτήσεις για να κατευθύνει την προσοχή των μαθητών. Τέλος αναφορικά με τις γενικεύσεις, οι μαθητές ξεκίνησαν σταδιακά. Αρχικά προηγήθηκαν γενικεύσεις σε μικρούς αριθμούς θέσης, όπως το επόμενο ή μεθεπόμενο στοιχείο, και σταδιακά προχώρησαν σε μεγαλύτερους, φτάνοντας ακόμα και σε πολύ μεγάλες θέσεις όπως η 100η θέση. (Warren & Cooper, 2008).

3. Αποτελέσματα

3.1. Προέλεγχος

3.1.1. Αποτελέσματα Προελέγχου -Α Ομάδα έργων

Τα έργα της Ομάδας Α αφορούσαν τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Τα αποτελέσματα του προελέγχου έδειξαν πως οι μαθητές είχαν ιδιαίτερα υψηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα αυτά. Όπως φαίνεται και στον πίνακα 5 στα έργα εύρεσης λάθους, συνέχισης και συμπλήρωσης επαναλαμβανόμενων οπτικών προτύπων οι μαθητές έδειξαν εξαιρετικά υψηλές επιδόσεις. Αντίθετα στα έργα κοντινής και μακρινής πρόβλεψης φάνηκε να δυσκολεύονται αρκετά (Πίνακας 6).

Πίνακας 5: Συχνότητες απαντήσεων στα επαναλαμβανόμενα πρότυπα του προελέγχου

	Συνέχιση προτύπου		**Εύρεση λάθους**		**Συμπλήρωση**	
Τύπος Προτύπου Κωδικός Έργου	ΑΒ (Α2.1)	ΑΒΓ (Α2.2)	ΑΒ (Α3.1)	ΑΒΓ (Α3.1)	ΑΒ (Α4.1)	ΑΒΓ (Α4.1)
Σωστό	20	19	20	18	20	20
Λάθος		1		2		
Σύνολο	20	20	20	20	20	20

Πιο συγκεκριμένα στο έργο που αφορούσε την συνέχιση ΑΒ προτύπου (Πίνακας 5) όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ σε εκείνο που αφορούσε την συνέχιση ΑΒΓ προτύπου απάντησαν σωστά οι 19. Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει για έναν μαθητή που συνέχισε το ΑΒΓ πρότυπο ως ΑΒ αγνοώντας τελείως τον Γ όρο.

Στο έργο εύρεσης λάθους σε ΑΒ πρότυπο και οι 20 μαθητές απάντησαν σωστά (Πίνακας 5). Αντίστοιχα στο έργο που παρουσίαζε πρότυπο της μορφής ΑΒΓ απάντησαν σωστά 18 μαθητές, ενώ 2 μαθητές μετέτρεψαν το ΑΒΓ πρότυπο σε ΑΒ για να το διαχειριστούν.

Στα έργα συμπλήρωσης ΑΒ και ΑΒΓ προτύπων όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά (Πίνακας 5). Η επιτυχία αυτή αποδίδεται πιθανώς στην χρήση χρωματικών αναπαραστάσεων οι οποίες είναι πιο οικείες στους μαθητές.

Στα έργα κοντινής και μακρινής πρόβλεψης δόθηκαν στους μαθητές δύο πρότυπα. Το ένα πρότυπο ήταν της μορφής ΑΒ (Έργο Α5.1 Προελέγχου), ενώ το άλλο της μορφής ΑΒΓ (Έργο Α5.2 Προελέγχου).

Πίνακας 6: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο κοντινής και μακρινής πρόβλεψης σε πρότυπα ΑΒ και ΑΒΓ του προελέγχου

Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	ΑΒ (Α5.1)		ΑΒΓ (Α5.2)	
Είδος πρόβλεψης	Κοντινή	Μακρινή	Κοντινή	Μακρινή
Σωστό	12	12	10	11
Λάθος	8	8	10	9
Σύνολο	20	20	20	20

Αναφορικά με την κοντινή και μακρινή πρόβλεψη σε ΑΒ επαναλαμβανόμενο οπτικό πρότυπο οι μαθητές φάνηκαν να δυσκολεύονται αρκετά (Πίνακας 6). Πιο συγκεκριμένα στο Έργο Α5.1 του Προελέγχου από τους 20 μαθητές μόλις οι 12 απάντησαν σωστά στην κοντινή πρόβλεψη και 12 στην μακρινή. Από αυτούς αρκετοί ήταν εκείνοι που χρειάστηκε να σχεδιάσουν τις ενδιάμεσες θέσεις για να προβλέψουν το στοιχείο που θα έμπαινε στην κατάλληλη θέση.

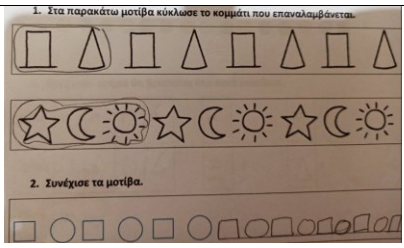
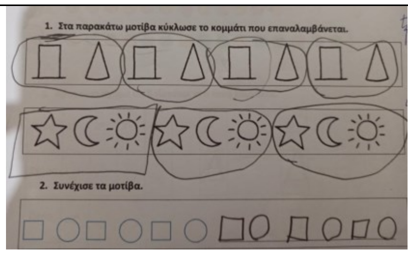
Στο πρότυπο της μορφής ΑΒΓ τα παιδιά δυσκολεύτηκαν λίγο παραπάνω (Πίνακας 6). Στο έργο Α5.2 του Προελέγχου, που αφορούσε κοντινή και μακρινή πρόβλεψη σε ΑΒΓ πρότυπο, από το σύνολο των μαθητών οι σωστές προβλέψεις σε κοντινή θέση ήταν 10 ενώ σε μακρινή θέση 11. Αυτά τα ευρήματα είναι χαμηλότερα από εκείνα της έρευνας των Δεσλή και Γαϊτανέρη (2017) η οποία πραγματοποιήθηκε σε παιδιά της Γ και Δ τάξης. Εκεί βρέθηκε πως τα παιδιά προέβλεψαν το στοιχείο στην επόμενη θέση σε ποσοστό 69,25% και στην μακρινή σε ποσοστό 71%.

Ιδιαίτερα αυξημένη ήταν και η επίδοση των μαθητών στα έργα εύρεσης του δομικού στοιχείου τόσο σε πρότυπο τύπου ΑΒ αλλά και τύπου ΑΒΓ. Στο έργο αυτό μπορούμε να δούμε τα διαφορετικά επίπεδα εξοικείωσης των μαθητών με τα οπτικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα.

Πίνακας 7: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο εύρεσης του δομικού στοιχείου των επαναλαμβανόμενων προτύπων του προελέγχου

	Εύρεση δομικού στοιχείου		
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		ΑΒ (Α1.1)	ΑΒΓ (Α1.2)
Σωστό	Τα κύκλωσαν όλα*	13	12
	Κύκλωσαν το πρώτο**	6	6
Λάθος	Από ΑΒΓ σε ΑΒ		1
	Βρήκε λανθασμένο δομικό στοιχείο	1	1
Σύνολο		20	20
* Κύκλωσαν ένα ένα όλα τα δομικά κομμάτια του προτύπου που επαναλαμβανόντουσαν			
** Απάντησαν απευθείας στο έργο κυκλώνοντας μόνο το πρώτο στοιχείο			

Στη δραστηριότητα εύρεσης του δομικού στοιχείου σε πρότυπο τύπου ΑΒ του Προελέγχου, από τους 20 μαθητές οι 19 απάντησαν σωστά, ενώ στο έργο με πρότυπο τύπου ΑΒΓ 18 απάντησαν σωστά (Πίνακας 7). Παρατηρήθηκε πως κάποιοι μαθητές απαντούσαν απευθείας (Εικ. 31), ενώ άλλοι χρειαζόταν να κυκλώσουν όλες τις μονάδες επανάληψης (Εικ. 32). Και στα δύο έργα (ΑΒ και ΑΒΓ) 6 μαθητές απάντησαν κυκλώνοντας το δομικό στοιχείο του προτύπου απευθείας, ενώ οι υπόλοιποι χρειάστηκε να κυκλώσουν το δομικό στοιχείο όλες τις φορές που επαναλαμβανόταν. Επομένως φαίνεται πως, ενώ οι περισσότεροι μαθητές έπρεπε να οπτικοποιήσουν την επανάληψη του στοιχείου για να απαντήσουν, υπήρχαν κάποιοι οι οποίοι μπόρεσαν να το κάνουν αυτό νοερά. Τέλος, στο έργο που περιείχε το πρότυπο ΑΒΓ ένας μαθητής επηρεασμένος από το πρώτο πρότυπο, που ήταν της μορφής ΑΒ, κύκλωσε τους όρους σαν να ήταν της μορφής ΑΒ αγνοώντας τον όρο Γ.

	
Εικόνα 31: Παράδειγμα απάντησης όπου απάντησαν απευθείας	Εικόνα 32: Παράδειγμα απάντησης όπου τα κύκλωσαν όλα

Από τα αποτελέσματα επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι μαθητές μπορούν να ανταπεξέλθουν πολύ καλά σε έργα συνέχισης, συμπλήρωσης, διόρθωσης και εύρεσης της μονάδας επανάληψης σε οπτικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Αντίθετα φαίνεται να δυσκολεύονται αρκετά να πραγματοποιήσουν κοντινές και μακρινές προβλέψεις με αυτά.

3.1.2. Αποτελέσματα Προελέγχου- Ομάδα Β

Αναφορικά με τα έργα αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων οι μαθητές έδειξαν να δυσκολεύονται περισσότερο από εκείνα των επαναλαμβανόμενων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μαθητές κλήθηκαν να διαχειριστούν διάφορα έργα γενίκευσης, όπως είναι η συνέχιση, η συμπλήρωση, η μακρινή και κοντινή πρόβλεψη και η εύρεση του γενικού κανόνα σε αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα.

Τα έργα συνέχισης ήταν δύο. Το ένα περιλάμβανε ένα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο σε κάθετο άξονα (τύπου I) με κανόνα 2ν-1, ενώ το άλλο αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο σε κάθετο και οριζόντιο άξονα (τύπου L).

Πίνακας 8: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχιση οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο άξονα (τύπου Ι) του προελέγχου

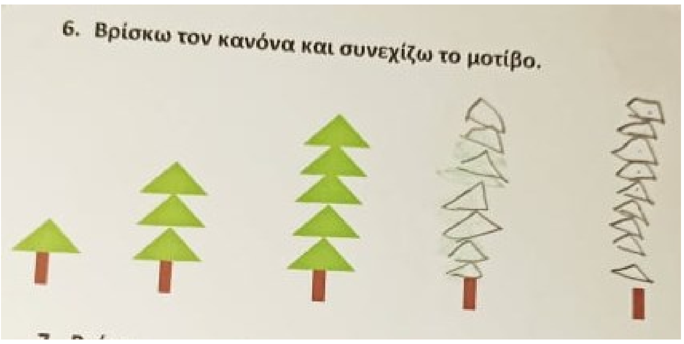
Συνέχιση οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου

	Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο σε κάθετο άξονα, τύπου Ι (Β6)
Σωστό	Αριθμητικά και μορφολογικά	1
	Μόνο αριθμητικά	2
	Μόνο μορφολογικά	3
Λάθος	Επαναλαμβανόμενα	10
	Όλα ίδια	1
	Συμμετρικό	2
	Τα άλλαξε να αυξάνονται ανά ένα	1
Σύνολο		20

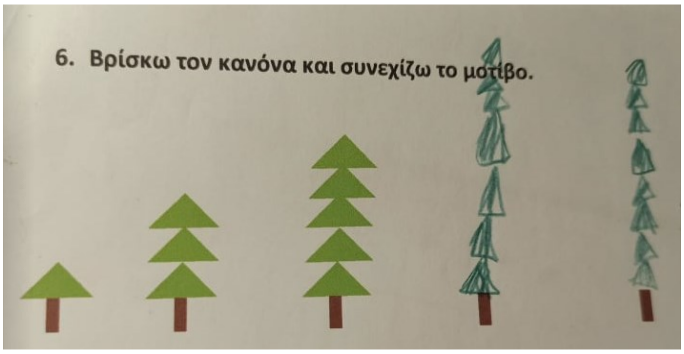
Στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου με κάθετο αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο (τύπου Ι), που αναπτύσσεται με κανόνα 2ν-1, υπήρξε ιδιαίτερη ποικιλομορφία στις απαντήσεις που δόθηκαν.

Αρχικά, οι περισσότεροι μαθητές συνέχισαν το πρότυπο ως επαναλαμβανόμενο (Εικ. 35). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός πως η εμπειρία των μαθητών με αναπτυσσόμενα πρότυπα είναι περιορισμένη. Ακόμα, από το σύνολο των μαθητών μόνο 1 συνέχισε το πρότυπο σωστά (Εικ. 32), σύμφωνα με τον κανόνα. Αντίστοιχα κάποιοι μαθητές προσπάθησαν να συνεχίσουν το πρότυπο, όμως δεν κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά μορφολογικά την εξέλιξη του προτύπου. Ειδικότερα 2 μαθητές δεν απέδωσαν ορθά την μορφή του προτύπου, ενώ το είχαν αποτυπώσει σωστά αριθμητικά, δηλαδή είχαν βρει το πλήθος των ορόφων που θα έχει το πρότυπο σε κάθε θέση (Εικ. 33). Αντίθετα 3 άλλοι μαθητές, οι οποίοι είχαν σχεδιάσει σωστά μορφολογικά το πρότυπο, δεν κατάφεραν να βρουν αριθμητικά το πλήθος των τριγώνων που έπρεπε να έχουν τα δέντρα στις επόμενες θέσεις (Εικ. 34). Έτσι, παρόλο που μορφολογικά είχαν σχεδιάσει σωστά την εξέλιξη του προτύπου, το ύψος ήταν σωστά τοποθετημένο, το πλήθος των τριγώνων ήταν λανθασμένο. Ιδιαίτερη περίπτωση αποτελούν οι απαντήσεις 2 μαθητών, οι οποίοι συνέχισαν το μοτίβο συμμετρικά (Εικ. 36). Τέλος 2 από τους μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται αρκετά με την συνέχιση του προτύπου «προσαρμόζοντάς» τα έτσι ώστε να μπορούν να τα διαχειριστούν. Έτσι, ο ένας το μετέτρεψε ώστε να αυξάνεται ανά ένα (Εικ. 37) και ο άλλος επανέλαβε το ίδιο σχήμα τρεις φορές (Εικ. 38).

Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο άξονα (τύπου Ι) (εικόνες 32-38)

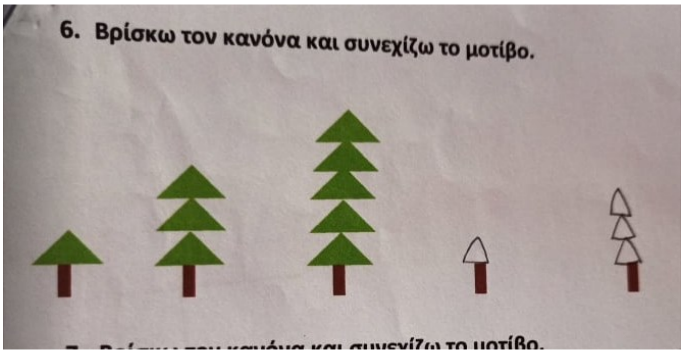


Εικόνα 32: Σωστή συνέχιση στο πρότυπο τύπου Ι

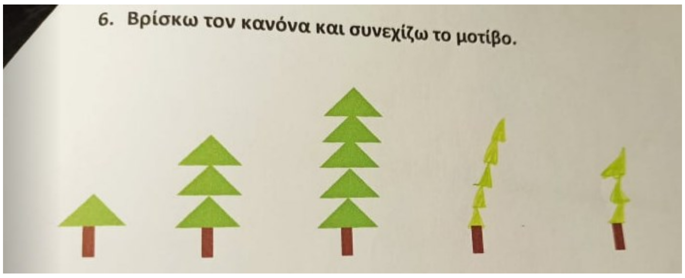


Εικόνα 33: Σωστή μόνο αριθμητικά συνέχιση στο πρότυπο τύπου Ι

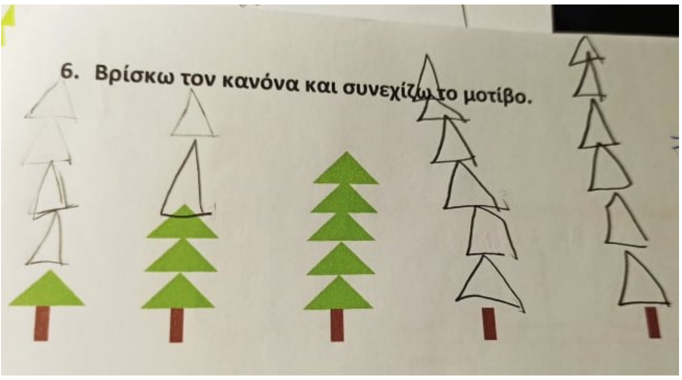
Εικόνα 34: Σωστή μόνο μορφολογικά *συνέχιση στο πρότυπο τύπου Ι*



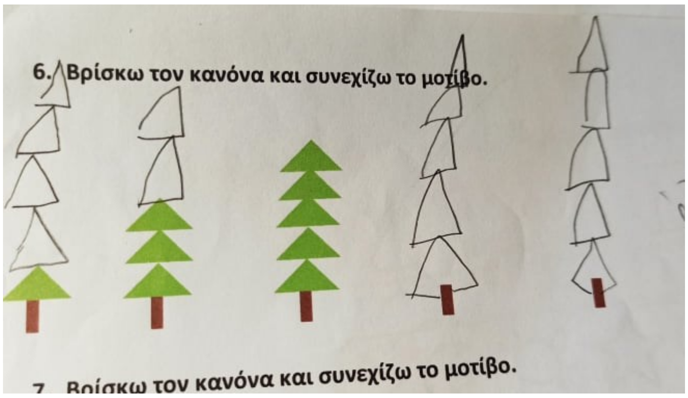
Εικόνα 35: Συνέχιση ως επαναλαμβανόμενο στο πρότυπο τύπου Ι



Εικόνα 36: Συνέχιση συμμετρικά στο πρότυπο τύπου Ι



Εικόνα 37: Συνέχισε με κανόνα ν+1 στο πρότυπο τύπου Ι



Εικόνα 38: Συνέχισε κάνοντάς τα όλα στο ίδιο ύψος στο πρότυπο τύπου Ι

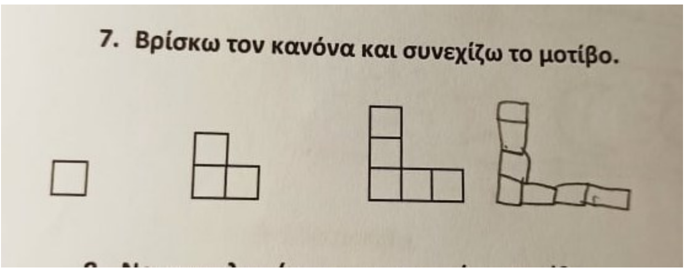
Το επόμενο έργο του Προελέγχου αναφέρεται σε αναπτυσσόμενο πρότυπο τύπου L. Το πρότυπο που δόθηκε στα παιδιά ήταν ένα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο, που αναπτύσσεται ταυτόχρονα στον κάθετο και στον οριζόντιο άξονα. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 9 το πρότυπο δυσκόλεψε αρκετά τα παιδιά.

Πίνακας 9: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο και οριζόντιο άξονα (τύπου L) του προελέγχου

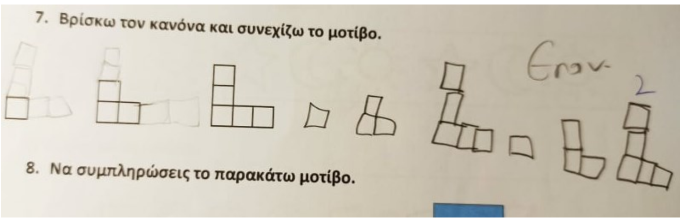
		Συνέχιση
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο σε κάθετο και οριζόντιο άξονα, τύπου L (B7)
Σωστό	Μορφολογικά και αριθμητικά	2
	Μόνο μορφολογικά	1
	Σωστό μόνο στον έναν άξονα	2
Λάθος	Επαναλαμβανόμενο	13
	Αντέγραψε το τελευταίο στοιχείο	1
	Λανθασμένη συνέχιση	1
Σύνολο		20

Πιο συγκεκριμένα μόνο 2 μαθητές απάντησαν σωστά (Εικ. 39). Από τους υπόλοιπους μαθητές 1 το σχεδίασε σωστά μορφολογικά, αλλά όχι αριθμητικά (Εικ. 41), ενώ 2 το σχεδίασαν σωστά μόνο στον έναν άξονα (Εικ. 42). Ακόμα οι 13 συνέχισαν το πρότυπο σαν να είναι επαναλαμβανόμενο (Εικ. 40). Τέλος 2 μαθητές είχαν τελείως διαφορετικές απαντήσεις. Ο ένας συνέχισε τελείως λάθος το πρότυπο ενώ ο άλλος αντέγραψε το τελευταίο στοιχείο του προτύπου.

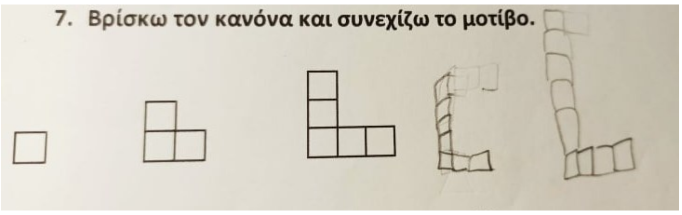
Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου τύπου L του προελέγχου (εικόνες 39-42)



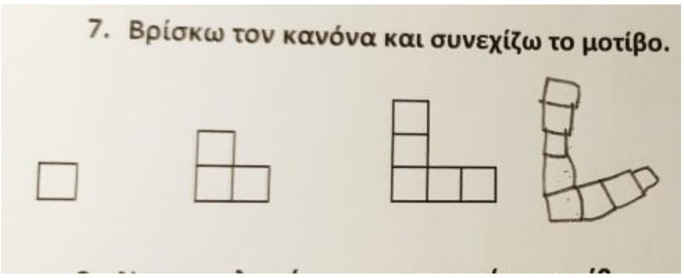
Εικόνα 39: Παράδειγμα σωστής συνέχισης προτύπου τύπου L



Εικόνα 40: Παράδειγμα συνέχισης ως επαναλαμβανόμενο προτύπου τύπου L



Εικόνα 41: Παράδειγμα μόνο μορφολογικά σωστής συνέχισης προτύπου τύπου L



Εικόνα 42: Παράδειγμα συνέχισης σωστής μόνο στον έναν άξονα προτύπου τύπου L

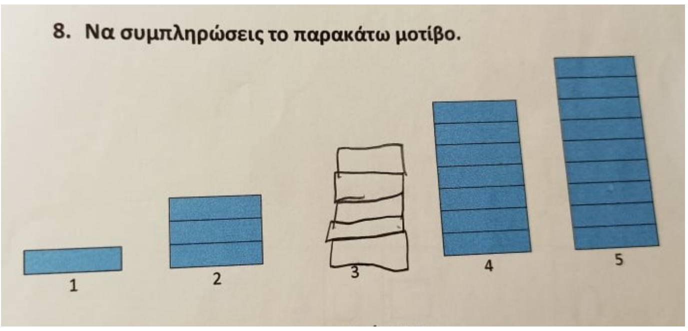
Στο έργο Β8 οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το κενό μέσα σε ένα κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο. Σε αυτό το έργο βλέπουμε επιπλέον αύξηση των σωστών απαντήσεων (Πίνακας 10). Αυτή η αύξηση μπορεί να παρατηρείται επειδή τα παιδιά έχουν ήδη δει 2 έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα, επομένως πλέον εξοικειώθηκαν περισσότερο με τέτοιου είδους πρότυπα.

Πίνακας 10: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συμπλήρωσης μέσα σε κάθετα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο του προελέγχου

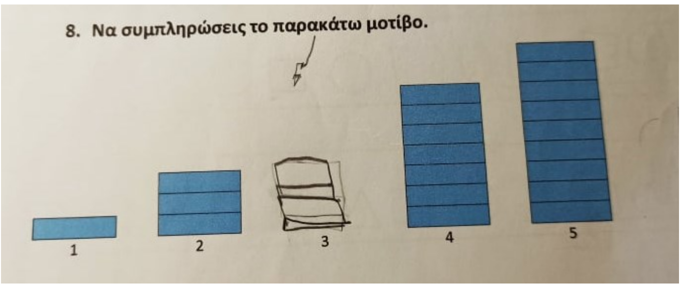
		Συμπλήρωση
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Κάθετα αναπτυσσόμενο τύπου Ι (Β8)
Σωστό	Αριθμητικά και μορφολογικά	9
	Μόνο αριθμητικά	3
	Μόνο μορφολογικά	5
Λάθος	Λανθασμένη συμπλήρωση	2
	Όλα ίδια	1
Σύνολο		20

Έτσι 9 μαθητές απάντησαν σωστά (Εικ. 43). Ακόμα 3 συμπλήρωσαν σωστά αριθμητικά, αλλά το σχέδιό τους ήταν λανθασμένο μορφολογικά (Εικ. 46). Αντίστοιχα 5 ήταν οι μαθητές που είχαν σωστό μορφολογικά σχέδιο, αλλά λανθασμένο αριθμητικά (Εικ. 45). Τέλος 2 μαθητές έδειξαν αδυναμία να συμπληρώσουν σωστά το πρότυπο (Εικ. 44) και 1 σχεδίασε τον ίδιο αριθμό από κουτάκια με σε όλες τις θέσεις (Εικ. 47).

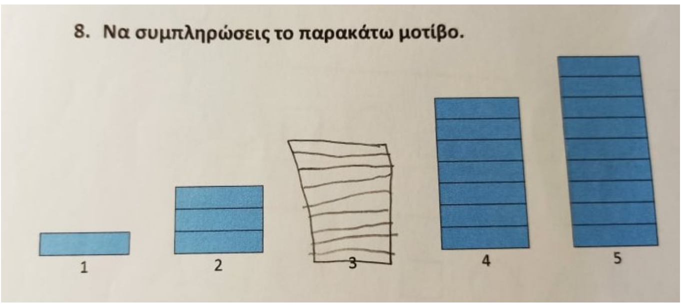
Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συμπλήρωσης μέσα σε κάθετα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο του προελέγχου (εικ. 43-47)



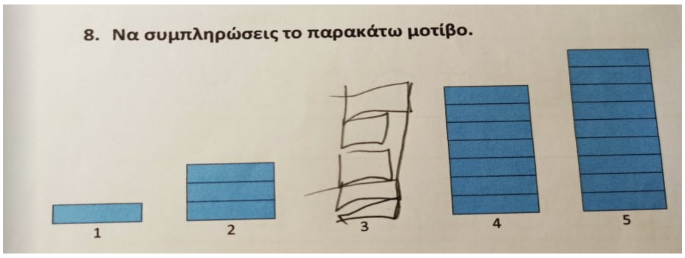
Εικόνα 43: Σωστή απάντηση στο έργο συμπλήρωσης



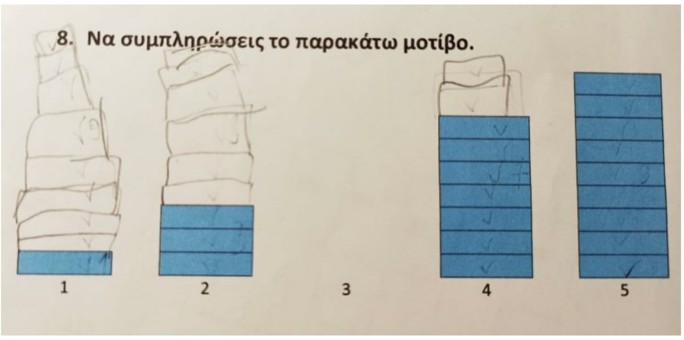
Εικόνα 44: Λανθασμένη απάντηση στο έργο συμπλήρωσης



Εικόνα 45: Μόνο μορφολογικά σωστή απάντηση στο έργο συμπλήρωσης



Εικόνα 46: Μόνο αριθμητικά σωστή απάντηση στο έργο συμπλήρωσης



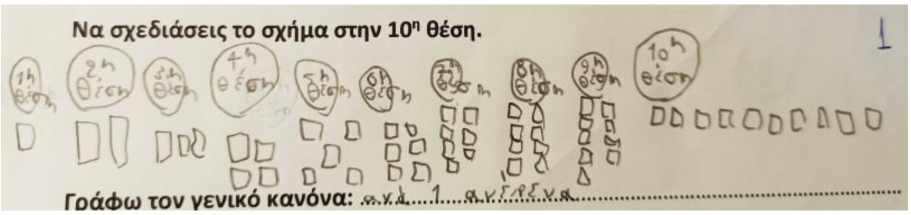
Εικόνα 47: Μετέτρεψε το πρότυπο ίδιο σε όλες τις θέσεις στο έργο συμπλήρωσης

Αναφορικά με την μακρινή πρόβλεψη σε αναπτυσσόμενο πρότυπο οι μαθητές στον Προέλεγχο κλήθηκαν να συνεχίσουν ένα απλό αναπτυσσόμενο πρότυπο στον οριζόντιο άξονα. Αρχικά τους δόθηκαν τα τρία πρώτα στοιχεία του προτύπου και οι θέσεις που αντιστοιχούσαν στο καθένα και τους ζητήθηκε να το συνεχίσουν ως την 5η θέση. Έπειτα τους ζητήθηκε να προβλέψουν το σχήμα στην 10η θέση. Στο έργο της συνέχισης του αναπτυσσόμενου προτύπου, η πλειοψηφία των παιδιών συνέχισε σωστά το πρότυπο που ήταν πολύ εύκολο.

Πίνακας 11: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης αναπτυσσόμενου προτύπου και πρόβλεψης της 10ης θέσης

	Συνέχιση	**Πρόβλεψη της 10ης θέσης**
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο στον οριζόντιο άξονα (Β9.1)	Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο στον οριζόντιο άξονα (Β9.2)
Σωστό	16	16
Λάθος	4	4
Σύνολο	20	20

Έτσι 16 από τα 20 παιδιά συνέχισαν σωστά το πρότυπο. Αντίστοιχα στο έργο της πρόβλεψης της 10^{ης} θέσης επίσης 16 ήταν οι σωστές απαντήσεις. Οι περισσότεροι μαθητές έχοντας φτάσει μέχρι την 5^{η} θέση δε χρειαζόταν να σχεδιάσουν τα ενδιάμεσα μέχρι τη 10^{η}. Ένας μαθητής φάνηκε να δυσκολεύεται να προβλέψει το στοιχείο στη 10^{η} θέση, γι’ αυτό σχεδίασε όλες τις ενδιάμεσες θέσεις του προτύπου.



Εικόνα 48: Απάντηση μαθητή που σχεδίασε όλες τις θέσεις του προτύπου για να βρει την 10η θέση. Έργο 9 υποέργο 2 προελέγχου

Πίνακας 12: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο εύρεσης κανόνα σε αναπτυσσόμενο πρότυπο

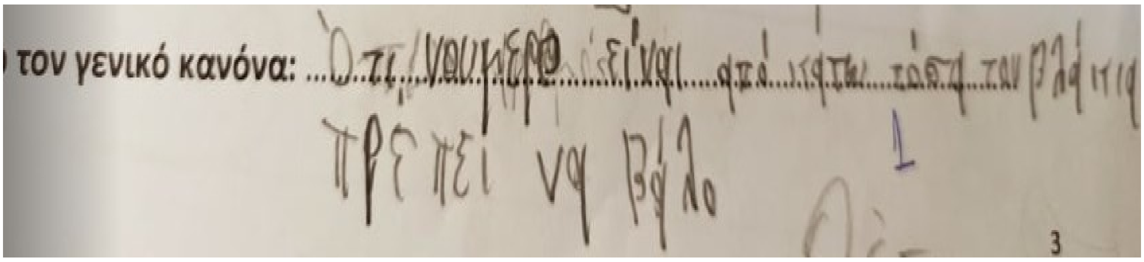
Εύρεση κανόνα

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο στον οριζόντιο άξονα (Β9.3)
Σωστό	Αναδρομικά*	13
	Διατύπωση με βάση τη θέση**	4
Λάθος	Λανθασμένος κανόνας	1
	Έλλειψη έκφρασης	2
Σύνολο		20

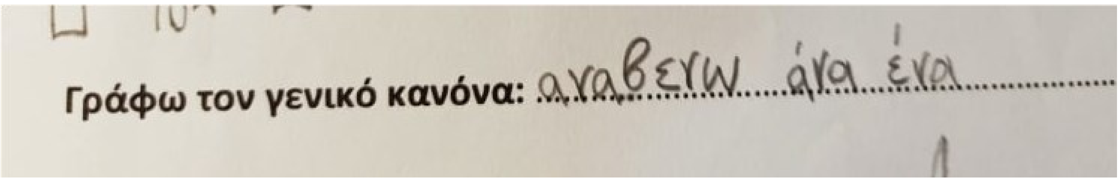
* Ανεβαίνω ανά ένα

** Η θέση του προτύπου δείχνει πόσα κουτάκια θα βάλω

Αναφορικά με τον κανόνα του προτύπου, στο έργο εύρεσης του κανόνα σε αναπτυσσόμενο πρότυπο, 4 μαθητές έγραψαν πως η θέση του προτύπου δείχνει πόσα κουτάκια θα βάλω (Εικ. 49). Αντίστοιχα 13 μαθητές έγραψαν πως ανεβαίνουμε ένα κάθε φορά (Εικ. 50). Τέλος 1 μαθητής απάντησε λάθος στο ερώτημα της διατύπωσης του κανόνα ενώ 2 δεν απάντησαν καθόλου.



Εικόνα 49: Παράδειγμα διατύπωσης κανόνα με βάση τη θέση



Εικόνα 50: Παράδειγμα διατύπωσης κανόνα προσθετικά

3.2. Μεταέλεγχος

3.2.1. Αποτελέσματα Μεταελέγχου -Α Ομάδα

Αναφορικά με τα έργα πρόβλεψης της κοντινής και της μακρινής θέσης σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά. Οι μαθητές κλήθηκαν να προβλέψουν σε μία κοντινή και μία μακρινή θέση το σχήμα που λείπει. Το ένα πρότυπο που δόθηκε στους μαθητές ήταν της μορφής ΑΒ (έργο Α1.1 Μεταελέγχου), ενώ το άλλο της μορφής ΑΒΓ (έργο Α1.2 Μεταελέγχου).

Πίνακας 13: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο κ*οντινή και μακρινή πρόβλεψη σε πρότυπο ΑΒ*

Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Επαναλαμβανόμενο ΑΒ (Α1.1)		Επαναλαμβανόμενο ΑΒΓ (Α1.2)	
Είδος πρόβλεψης	Κοντινή	Μακρινή	Κοντινή	Μακρινή
Σωστό	17	11	12	11
Λάθος	3	8	8	8
ΔΑ	0	1	0	1
Σύνολο	20	20	20	20

Στα έργα κοντινών και μακρινών προβλέψεων σε επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα του Μεταελέγχου παρατηρείται αύξηση στον αριθμό των σωστών απαντήσεων (Πίνακας 13). Πιο συγκεκριμένα στα έργα με πρότυπα τύπου ΑΒ, στις κοντινές προβλέψεις, από τους 20 μαθητές οι 17 απάντησαν σωστά. Αντίθετα στις μακρινές προβλέψεις οι σωστές απαντήσεις ήταν περιορισμένες, με μόνο 11 να απαντούν σωστά.

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 13 στο έργο πρόβλεψης με πρότυπο της μορφής ΑΒΓ τα παιδιά δυσκολεύτηκαν το ίδιο με το πρότυπο τύπου ΑΒ. Παρατηρήθηκε λοιπόν πως 12 μαθητές προέβλεψαν σωστά το στοιχείο που έλλειπε στην κοντινή θέση, δύο παραπάνω από τον προέλεγο. Αντίστοιχα στην πρόβλεψη της μακρινής θέσης απάντησαν σωστά 11 μαθητές, όσοι και εκείνοι και του Προελέγχου.

Στο έργο εύρεσης του δομικού στοιχείου του μεταελέγχου δόθηκαν στους μαθητές δύο σύνθετα επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα. Το ένα ήταν της μορφής ΑΑΒΒ και το άλλο της μορφής ΑΑΒ.

Πίνακας 14: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο εύρεσης δομικού στοιχείου ΑΒ και ΑΒΓ επαναλαμβανόμενου προτύπου

Εύρεση δομικού στοιχείου

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		ΑΑΒΒ (Α2.1)	ΑΑΒ (Α2.2)
Σωστό	Τα κύκλωσαν όλα*	4	6
	Κύκλωσαν μόνο το πρώτο**	13	11
Λάθος	Ξεχωριστά ΑΑ-ΒΒ	1	
	Μορφής ΑΑΒ***	1	
	Μορφής ΑΑΒΒ****		1
ΔΑ		1	2
Σύνολο		20	20

* Κύκλωσαν ένα ένα όλα τα δομικά κομμάτια του προτύπου που επαναλαμβανόντουσαν

** Απάντησαν απευθείας στο έργο κυκλώνοντας μόνο το πρώτο στοιχείο

*** Το διαχειρίστηκαν ως πρότυπο της μορφής ΑΑΒ

**** Προσπάθησαν να το μετατρέψουν σε πρότυπο της μορφής ΑΑΒΒ

Οι επιδόσεις των μαθητών ήταν αρκετά υψηλές (Πίνακας 14). Συνολικά από τους 20 μαθητές οι 17 απάντησαν σωστά στην εύρεση του δομικού στοιχείου και στις δύο περιπτώσεις. Στο ΑΑΒΒ οπτικό πρότυπο από τις 17 σωστές απαντήσεις, οι 4 φάνηκε να βασίζονται στη δομική μονάδα του προτύπου, ενώ οι υπόλοιπες με βάση τη δομή του συνόλου. Αντίστοιχα 17 ήταν και οι σωστές απαντήσεις στο πρότυπο της μορφής ΑΑΒ με 11 παιδιά να στηρίζονται στην δομή του συνόλου. Τέλος 1 μαθητής ξεχώρισε τα στοιχεία ΑΑ και ΒΒ του πρώτου προτύπου θεωρώντας τα ξεχωριστά στοιχεία, ενώ 1 χειρίστηκε το ΑΑΒΒ πρότυπο ως ΑΑΒ. Στο ΑΑΒ πρότυπο 2 μαθητές δεν κατάφεραν να εντοπίσουν το δομικό στοιχείο ενώ 1 προσπάθησε να μετατρέψει το πρότυπο σε AABB.

3.2.2. Αποτελέσματα Μεταελέγχου - Ομάδα Β

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα έργα του Μεταελέγχου της Ομάδας Β περιείχαν πιο σύνθετα αναπτυσσόμενα οπτικά. Οι επιδόσεις των μαθητών ήταν αρκετά καλές.

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 15 στο έργο συνέχισης αναπτυσσόμενου οπτικού προτύπου σε κάθετο άξονα 9 μαθητές απάντησαν σωστά (Εικ. 51).

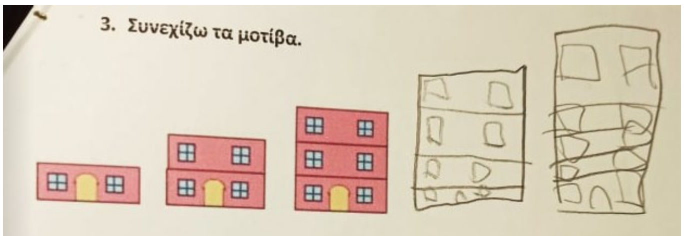
Πίνακας 15: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο άξονα (τύπου Ι)

Συνέχιση

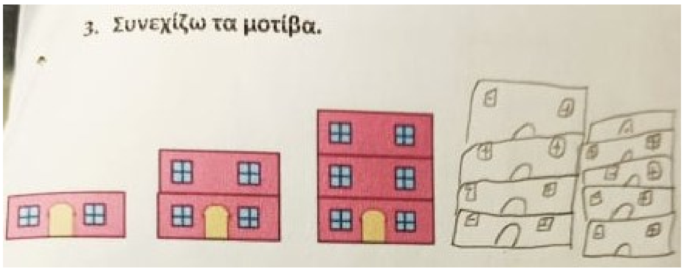
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο σε κάθετο άξονα της μορφής Ι (Β3.1)
Σωστό	Αριθμητικά και μορφολογικά	9
	Αριθμητικά σωστό	3
	Μορφολογικά σωστό	1
Λάθος	Επαναλαμβανόμενα	7
Σύνολο		20

Ακόμα, 3 μαθητές, ενώ κατάφεραν να συνεχίσουν σωστά αριθμητικά το πρότυπο, δηλαδή υπολογίζοντας σωστά το ύψος του προτύπου, έδειξαν αδυναμία στην ορθή σχεδίασή του (Εικ. 52). Αντίθετα, 1 απάντηση ήταν σωστή μορφολογικά και λάθος αριθμητικά (Εικ. 53). Τέλος, 7 από τους μαθητές συμπεριφέρθηκαν στο πρότυπο σαν να είναι επαναλαμβανόμενο (Εικ. 54).

Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο άξονα (τύπου Ι) (εικ. 51-54)

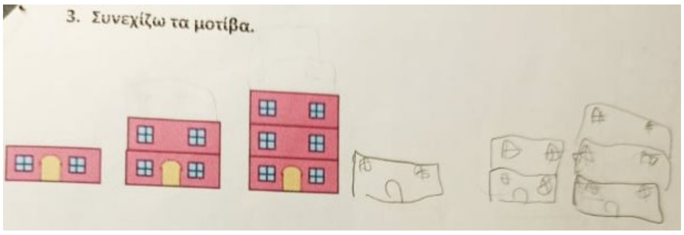


Εικόνα 51: Σωστή συνέχιση σε πρότυπο τύπου Ι



Εικόνα 52: Σωστή μόνο αριθμητικά συνέχιση σε πρότυπο τύπου Ι

Εικόνα 53: Σωστή μόνο μορφολογικά συνέχιση σε πρότυπο τύπου Ι



Εικόνα 54: Συνέχιση ως επαναλαμβανόμενο σε πρότυπο τύπου Ι

Στο έργο συνέχισης οπτικά αναπτυσσόμενου προτύπου που αναπτ΄θσσεται ταυτόχρονα σε δύο άξονες οι μαθητές δυσκολεύτησκαν λίγο περισσότερο (Πίνακας 16).

Πίνακας 16: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο και οριζόντιο άξονα (τύπου L)

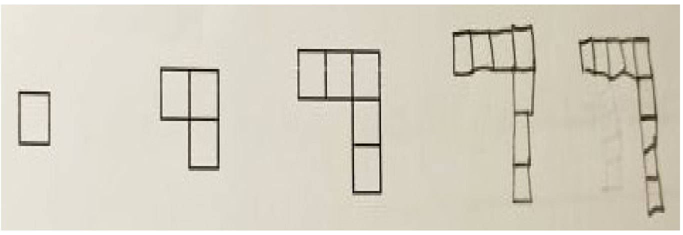
Συνέχιση

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο σε κάθετο άξονα της μορφής L (B3.2)
Σωστό	Σωστή συνέχιση	6
	Μόνο μορφολογικά σωστό	1
	Μόνο μια διάσταση	3

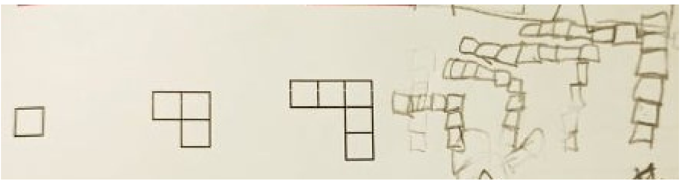
Λάθος	Επαναλαμβανόμενο	6
	Μέτρησε τη γωνία 2 φορές	2
ΔΑ		2
	Σύνολο	20

Στο έργο συνέχισης της μορφής L, 6 μαθητές κατάφεραν να το διαχειριστούν και να το συνεχίσουν σωστά και στις δύο διαστάσεις. Επίσης, 3 είχαν σωστή μόνο τη μία από τις δύο διαστάσεις, ενώ αξίζει να σημειωθεί πως 2 έκαναν λάθος μετρώντας την γωνία δύο φορές μία κάθετα και μία οριζόντια. Τέλος 6 μαθητές διαχειρίστηκαν το πρότυπο ως επαναλαμβανόμενο, ενώ 2 δεν μπόρεσαν να το συνεχίσουν καθόλου.

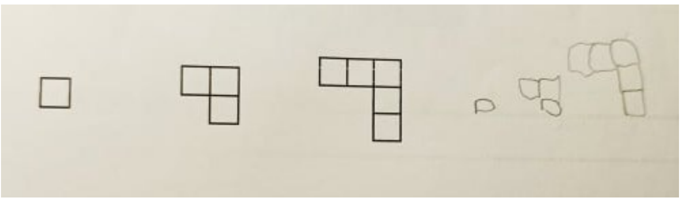
Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο και οριζόντιο άξονα (τύπου L) (εικ. 55-59)



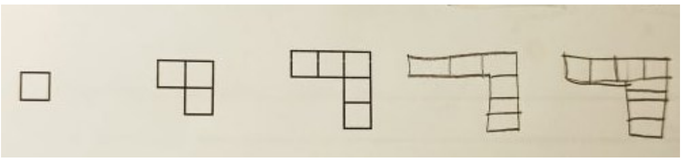
Εικόνα 55: Σωστή συνέχιση σε πρότυπο τύπου L



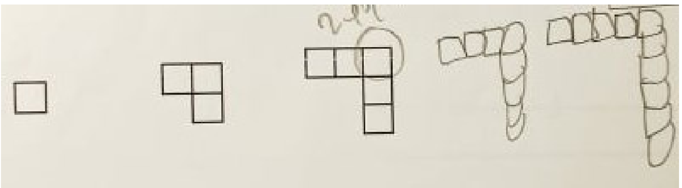
Εικόνα 56: Σωστή μόνο μορφολογικά συνέχιση σε πρότυπο τύπου L



Εικόνα 57: Συνέχιση ως επαναλαμβανόμενο σε πρότυπο τύπου L



Εικόνα 58: Σωστή σε μόνο μία διάσταση συνέχιση σε πρότυπο τύπου L



Εικόνα 59: Συνέχιση όπου μέτρησε τη γωνία δύο φορές σε πρότυπο τύπου L

Στο υποέργο αυτό (Β3.3) του προελέγχου δόθηκε στους μαθητές ένα πρότυπο που αναπτυσσόταν προς τέσσερις κατευθύνσεις και ήταν της μορφής Χ. Πρόκειται για ένα πρότυπο που δεν είχαν ξαναδιαχειριστεί, καθώς κατά τη διάρκεια της παρέμβασης είχε δυσκολέψει τα παιδιά και είχε παραλειφθεί.

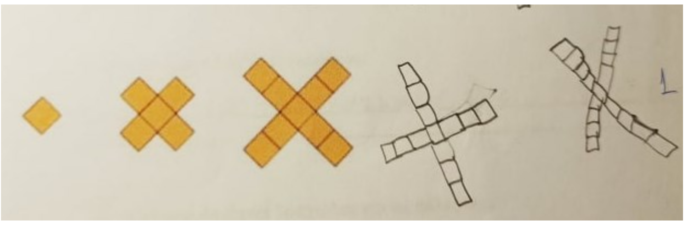
Πίνακας 17: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης αναπτυσσόμενου οπτικού προτύπου της μορφής Χ του Μεταελέγχου

Συνέχιση

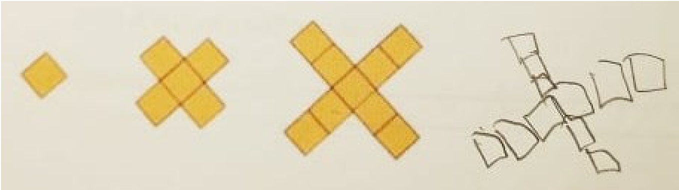
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο της μορφής Χ (Β3.3)
Σωστό	Σωστή συνέχιση	3
	Σωστές μερικές διαστάσεις	4
	Επαναλαμβανόμενα	8
Λάθος	Λανθασμένη συνέχιση	5
Σύνολο		20

Στον Πίνακα 17 βλέπουμε πως μόνο 3 απαντήσεις ήταν σωστές, ενώ 4 παιδιά κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά μερικές αλλά όχι όλες τις διαστάσεις, καθώς φάνηκε πως δεν μπορούσαν να εστιάσουν ταυτόχρονα στη συμμεταβολή και των τεσσάρων διαστάσεων. Τέλος 8 μαθητές συνέχισαν το πρότυπο ως επαναλαμβανόμενο και 5 απάντησαν λανθασμένα, δηλαδή δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν σωστά καμία από τις τέσσερις διαστάσεις του σχήματος.

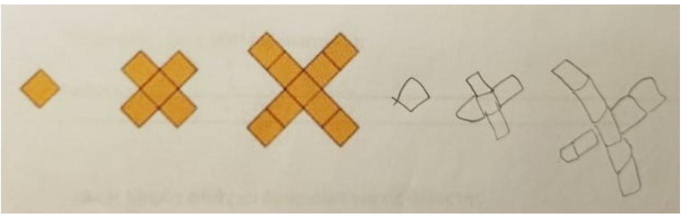
Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης αναπτυσσόμενου οπτικού προτύπου της μορφής Χ (εικ. 60-63)



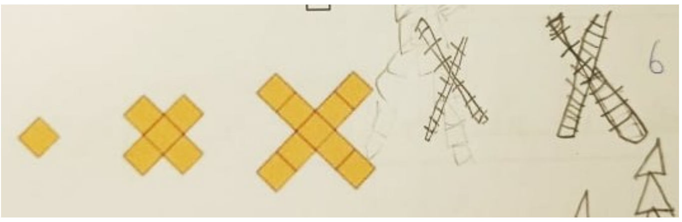
Εικόνα 60: Σωστή συνέχιση σε πρότυπο τύπου Χ



Εικόνα 61: Σωστή συνέχιση μόνο σε μερικές διαστάσεις σε πρότυπο τύπου L



Εικόνα 62: Συνέχιση ως επαναλαμβανόμενο σε πρότυπο τύπου L



Εικόνα 60: Λανθασμένη συνέχιση σε πρότυπο τύπου Χ

Στο έργο συνέχισης αναπτυσσόμενου οπτικού προτύπου σε κάθετο άξονα με κανόνα ν+1, όπως βλέπουμε και στον Πίνακα 18, 13 μαθητές συνέχισαν σωστά το πρότυπο (Εικ. 64).

Πίνακας 18: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής ν+1 Μεταελέγχου

Συνέχιση

	Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Κάθετα αναπτυσσόμενο προτύπο της μορφής ν+1 (Β4.1)
Σωστό	Σωστή συνέχιση	13
	Μόνο αριθμητικά	1

	Μόνο μορφολογικά	2
Λάθος	Επαναλαμβανόμενα	3
	Λανθασμένη συνέχιση	1
Σύνολο		20

Από τους υπόλοιπους μαθητές 1 σχεδίασε το πρότυπο σωστά μόνο αριθμητικά και όχι αριθμητικά (Εικ. 66), ενώ 2 το αντίστροφο (Εικ. 65). Αντίστοιχα 3 ήταν οι μαθητές που συμπεριφέρθηκαν στο πρότυπο σαν να είναι επαναλαμβανόμενο (Εικ. 68) και 1 το συνέχισε λανθασμένα (Εικ. 67).

Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής ν+1 (εικ. 64-68)

Εικόνα 64: Σωστή συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα ν+1

Εικόνα 65: Σωστή μόνο μορφολογικά συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα ν+1

Εικόνα 66: Σωστή μόνο αριθμητικά συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα ν+1

Εικόνα 67: Λανθασμένη συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα ν+1

Εικόνα 68: Συνέχιση ως επαναλαμβανόμενο σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα ν+1

Πίνακας 19: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο πρόβλεψης 100ης θέσης κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής ν+1 Μεταελέγχου

Πρόβλεψη 100ης θέσης

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο της μορφής ν+1 (Β4.3)
Σωστό	4
Λάθος	16
Σύνολο	20

Η πρόβλεψη στην 100η θέση (Β4.2) φαίνεται να δυσκόλεψε αρκετά τα παιδιά καθώς μόλις 4 απάντησαν σωστά και 16 λάθος (Πίνακας 19).

Πίνακας 20: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο εύρεσης του κανόνα κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής ν+1 Μεταελέγχου

Εύρεση κανόνα

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο της μορφής ν+1 (Β4.2)
Ανεβαίνω ανά ένα	17
Προσθέτω ένα	2
ΔΑ	1
Σύνολο	20

Τέλος, αναφορικά με το υποέργο εύρεσης του κανόνα διαπιστώθηκε, όπως βλέπουμε και στον Πίνακα 20, αδυναμία συσχέτισης της θέσης με το πρότυπο, καθώς η συντριπτική πλειοψηφία- 17 μαθητές- εστίασαν με την αλλαγή που συντελείται λέγοντας πως ο κανόνας είναι ανεβαίνω ανά ένα, ενώ 2 παιδιά απάντησαν προσθετικά απαντώντας προσθέτω ένα κάθε φορά. Επομένως φαίνεται πως σε πρότυπα που η σύνδεση θέσης και προτύπου δεν είναι εμφανής οι μαθητές προσεγγίζουν το πρότυπο αναδρομικά για να εξάγουν τον κανόνα. Τέλος 1 δεν απάντησε καθόλου.

Στο έργο συνέχισης κάθετα αναπτυσσόμενου οπτικού προτύπου δόθηκε στους μαθητές ένα κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα 2ν.

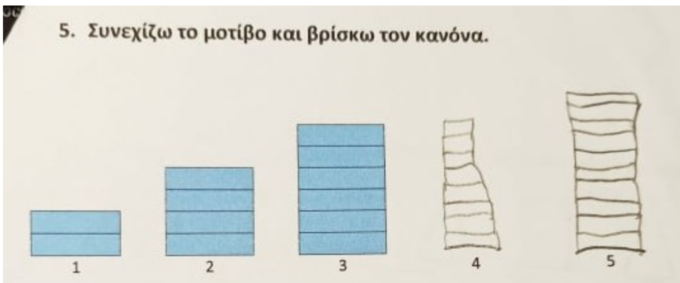
Πίνακας 21: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο συνέχισης κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής 2ν Μεταελέγχου

Συνέχιση

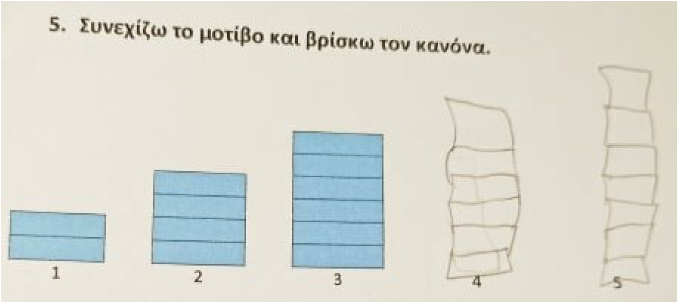
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο της μορφής 2ν (Β5.1)
Σωστό	Σωστή συνέχιση	5
	Μόνο αριθμητικά	4
	Μόνο μορφολογικά	5
Λάθος	Επαναλαμβανόμενα	3
	Λανθασμένη συνέχιση	3
Σύνολο		20

Σύμφωνα με τον Πίνακα 21, στο υποέργο Β5.1, 3 μαθητές συνέχισαν το πρότυπο σαν να είναι επαναλαμβανόμενο. Οι σωστές απαντήσεις ήταν 5, ενώ 4 απάντησαν σωστά μόνο αριθμητικά και 5 μόνο μορφολογικά. Τέλος οι λανθασμένες απαντήσεις ήταν 3.

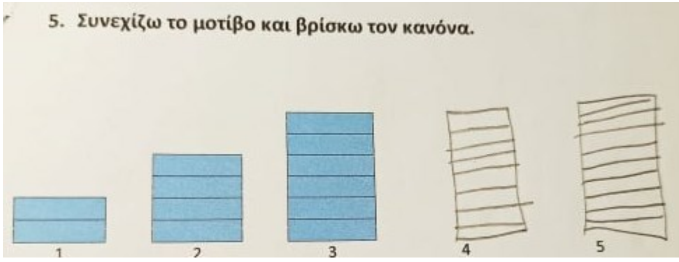
Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο συνέχισης κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής 2ν (εικ. 69-73)



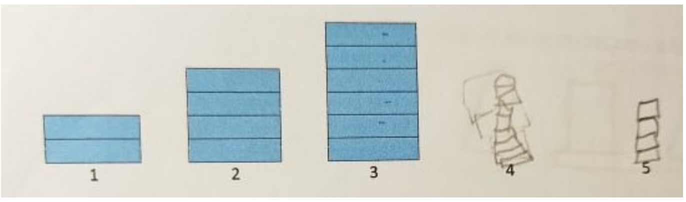
Εικόνα 69: Σωστή συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα 2ν



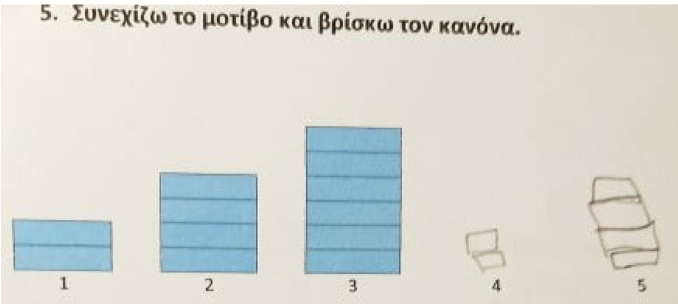
Εικόνα 70: Σωστή μόνο μορφολογικά συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα 2ν



Εικόνα 66: Σωστή μόνο αριθμητικά συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα 2ν



Εικόνα 67: Λανθασμένη συνέχιση σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα 2ν



Εικόνα 68: Συνέχιση ως επαναλαμβανόμενο σε αναπτυσσόμενο πρότυπο με κανόνα 2ν

Στο επόμενο υποέργο (Β5.3) που έπρεπε να γίνει πρόβλεψη της 100^{ης} θέσης απάντησαν σωστά 6 μαθητές ενώ 14 απάντησαν λανθασμένα (Πίνακας 22).

Πίνακας 22: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο πρόβλεψης 100ης θέσης κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής 2ν

Πρόβλεψη 100ης θέσης

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο της μορφής 2ν (Β5.3)
Σωστό	6
Λάθος	14
Σύνολο	20

Κλείνοντας, αναφορικά με τη διατύπωση του κανόνα (Πίνακας 23), 6 μαθητές φάνηκε να επηρεάζονται από το προηγούμενο έργο και απάντησαν πως ανεβαίνουν ανά 1 ενώ 10 μαθητές απάντησαν ανεβαίνω ανά 2.

Πίνακας 23: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο εύρεσης κανόνα κάθετα αναπτυσσόμενου προτύπου της μορφής 2ν Μεταελέγχου

Εύρεση κανόνα

Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Κάθετα αναπτυσσόμενο πρότυπο της μορφής 2ν (Β5.2)
Σωστό	Ανεβαίνω ανά 2	10
	Βάζω το διπλάσιο	1
Λάθος	Ανεβαίνω ανά 1	6
	Ανεβαίνω ανά 4	1
ΔΑ		2
Σύνολο		20

Άξια αναφοράς είναι η απάντηση ενός μαθητή που είπε πως σε κάθε θέση βάζω το διπλάσιο. Βλέπουμε επομένως πως οι μαθητές της Β Δημοτικού είναι σε θέση να εκφράζουν μια πολλαπλασιαστική σχέση χρησιμοποιώντας απλές εκφράσεις (Blanton & Kaput, 2004), παρόλα αυτά η πλειοψηφία των μαθητών προσέγγισε το πρότυπο αναδρομικά. Τέλος 1 παιδί απάντησε πως ανεβαίνω ανά 4 και 2 παιδιά δεν απάντησαν καθόλου.

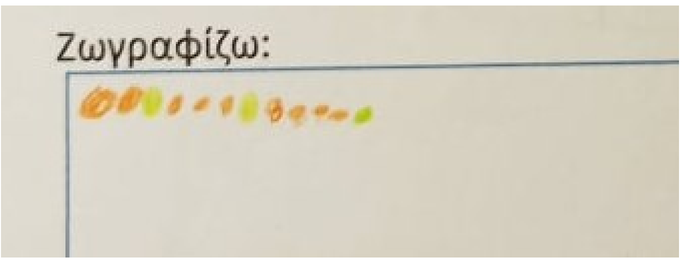
Πίνακας 24: Συχνότητες απαντήσεων στο έργο λεκτικού προβλήματος πρόβλεψης Μεταελέγχου

	Λεκτικό πρόβλημα πρόβλεψης
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	Αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο που αναπτύσσεται στον οριζόντιο άξονα με χρωματική και σχηματική αναπαράσταση (B6)
Σωστό	12
Λάθος	8
Σύνολο	20

Τέλος στο δόθηκε στους μαθητές ένα λεκτικό πρόβλημα στο οποίο κλήθηκαν να κάνουν μία πρόβλεψη. Γνωρίζοντας τις τρείς πρώτες θέσεις ενός αναπτυσσόμενου προτύπου και έπρεπε να βρουν την έκτη θέση. Βλέπουμε πως 12 από τους μαθητές απάντησαν σωστά σε αυτή την πρόβλεψη ενώ οι υπόλοιποι 8 έδειξαν αδυναμία να προβλέψουν σωστά (Πίνακας 24).

Παρακάτω βλέπουμε μερικά παραδείγματα απαντήσεων στο έργο λεκτικού προβλήματος πρόβλεψης (εικ. 74 και 75)

Εικόνα 74: Σωστή απάντηση στο λεκτικό πρόβλημα



Εικόνα 75: Λανθασμένη απάντηση στο λεκτικό πρόβλημα

3.3. Σύγκριση έργων Προελέγχου και Μεταελέγχου

Κοιτάζοντας με μια πρώτη ματιά τα έργα του Μεταελέγχου συγκριτικά με εκείνα του Προελέγχου μπορούμε να δούμε πως οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα κοντινής πρόβλεψης φάνηκαν να βελτιώνονται (Πίνακας 26). Επίσης όπως φαίνεται στον Πίνακα 25 περισσότεροι μαθητές ήταν πλέων σε θέση να εντοπίζουν τη μονάδα επανάληψης επαναλαμβανόμενων προτύπων νοερά. Τέλος, παρατηρήθηκε μείωση των μαθητών που διαχειρίστηκαν τα αναπτυσσόμενα πρότυπα ως επαναλαμβανόμενα.

Πίνακας 25: *Συχνότητες απαντήσεων στα έργα* εύρεσης δομικού στοιχείου ΑΒ και ΑΒΓ

Εύρεση δομικού στοιχείου

		Προέλεγχος		Μεταέλεγχος	
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		ΑΒ (Α1.1)	ΑΒΓ (Α1.2)	ΑΑΒΒ (Α2.1)	ΑΑΒ (Α2.2)
Σωστό	Τα κύκλωσαν όλα*	13	12	4	6
	Κύκλωσαν το πρώτο**	6	6	13	11
Λάθος	Μετέτρεψε το ΑΒΓ σε ΑΒ		1		
	Ξεχωριστά ΑΑ-ΒΒ			1	
	Μορφής ΑΑΒ***			1	
	Μορφής ΑΑΒΒ****				1
	Βρήκε λανθασμένο δομικό	1	1		
ΔΑ				1	2
Σύνολο		20	20	20	20

* Κύκλωσαν ένα ένα όλα τα δομικά κομμάτια του προτύπου που επαναλαμβάνονταν

** Απάντησαν απευθείας στο έργο κυκλώνοντας μόνο το πρώτο

*** Το διαχειρίστηκαν ως πρότυπο της μορφής ΑΑΒ

**** Προσπάθησαν να το μετατρέψουν σε πρότυπο της μορφής ΑΑΒΒ

Στα έργα του προελέγχου που αφορούσαν την εύρεση του δομικού στοιχείου, οι μαθητές φάνηκε να μην δυσκολεύονται ιδιαίτερα. Πιο συγκεκριμένα στο έργο εύρεσης δομικού στοιχείου σε επαναλαμβανόμενο πρότυπο ΑΒ του προελέγχου από τους 20 μαθητές οι 19 απάντησαν σωστά. Από αυτούς μόνο οι 6 απάντησαν απευθείας στο έργο, βρίσκοντας νοερά το δομικό στοιχείο που επαναλαμβάνεται.

Αντίστοιχα στο έργο Α1.2 τα ποσοστά ήταν εξίσου υψηλά. Από τους 20 οι 18 απάντησαν σωστά, ενώ από αυτούς οι 6 απάντησαν απευθείας. Ακόμα, ένας μαθητής επηρεασμένος από το πρώτο μοτίβο, που ήταν της μορφής ΑΒ, κύκλωσε στο ΑΒΓ πρότυπο τους όρους σαν να ήταν της μορφής ΑΒ αγνοώντας τον όρο Γ.

Στα αντίστοιχα έργα του μεταελέγχου όπου τα παιδιά κλήθηκαν να εντοπίσουν την δομική μονάδα σε πιο περίπλοκα πρότυπα από εκείνα του προελέγχου, ΑΑΒΒ και ΑΑΒ, οι επιδόσεις των μαθητών ήταν αντίστοιχες με εκείνες του προελέγχου. Ειδικότερα στο έργο με ΑΑΒΒ πρότυπο 17 παιδιά βρήκαν σωστά το δομικό στοιχείο από τα οποία τα 13 το εντόπισαν νοερά, χωρίς δηλαδή να πρέπει να κυκλώσουν όλα τα στοιχεία ένα ένα. Αντίστοιχα 17 ήταν και οι σωστές απαντήσεις στο πρότυπο της μορφής ΑΑΒ με 11 παιδιά να κυκλώνουν απευθείας. Βλέπουμε έτσι διαφοροποίηση στον τρόπο σκέψης των μαθητών. Κατά τον προέλεγχο φάνηκε να δυσκολεύονται να εντοπίσουν νοερά- απευθείας τη μονάδα επανάληψης και χρειαζόταν να κυκλώσουν όλα τα στοιχεία του προτύπου για να εντοπίσουν το κομμάτι που επαναλαμβάνεται. Αντίθετα κατά τον Μεταέλεγχο αυτό άλλαξε, πιθανώς επειδή οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης είχαν την ευκαιρία να επεξεργαστούν αρκετά πρότυπα και να εξοικειωθούν περισσότερο με αυτά. Τέλος 1 μαθητής ξεχώρισε τα στοιχεία ΑΑ και ΒΒ του πρώτου προτύπου θεωρώντας τα ξεχωριστά στοιχεία, ενώ 1 χειρίστηκε το ΑΑΒΒ πρότυπο ως ΑΑΒ. Στο ΑΑΒ πρότυπο 2 μαθητές δεν κατάφεραν να εντοπίσουν το δομικό στοιχείο ενώ 1 προσπάθησε να μετατρέψει το πρότυπο σε ΑΑΒΒ.

Αναφορικά με τα έργα πρόβλεψης της κοντινής και της μακρινής θέσης σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά. Οι μαθητές κλήθηκαν να προβλέψουν σε μία κοντινή και μία μακρινή θέση το σχήμα που λείπει. Το ένα πρότυπο που δόθηκε στους μαθητές ήταν της μορφής ΑΒ (Πίνακας 26), ενώ το άλλο της μορφής ΑΒΓ (Πίνακας 27).

Πίνακας 26: *Συχνότητες απαντήσεων στα έργα κοντινής και μακρινής πρόβλεψης σε πρότυπο ΑΒ*

Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη

	Προέλεγχος		Μεταέλεγχος	
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	ΑΒ (Α5.1)		ΑΒ (Α1.1)	
Είδος πρόβλεψης	Κοντινή	Μακρινή	Κοντινή	Μακρινή
Σωστό	12	12	17	11
Λάθος	8	8	3	8
ΔΑ	0	0	0	1
Σύνολο	20	20	20	20

Αναφορικά με την κοντινή και μακρινή πρόβλεψη σε ΑΒ επαναλαμβανόμενο οπτικό πρότυπο οι μαθητές φάνηκαν να δυσκολεύονται αρκετά. Πιο συγκεκριμένα όπως βλέπουμε στον Πίνακα 26 κατά τη διάρκεια του Προελέγχου από τους 20 μαθητές μόλις οι 12 απάντησαν σωστά στην κοντινή πρόβλεψη και 12 στην μακρινή. Από αυτούς αρκετοί ήταν εκείνοι που χρειάστηκε να σχεδιάσουν τις ενδιάμεσες θέσεις για να προβλέψουν το στοιχείο που θα έμπαινε στην κατάλληλη θέση.

Αντίστοιχα στην Έργο Α1.1 του Μεταελέγχου παρατηρείται σημαντική αύξηση στον αριθμό των σωστών απαντήσεων στις κοντινές προβλέψεις (Πίνακας 26). Αντιθέτως στις μακρινές προβλέψεις οι σωστές απαντήσεις ήταν ίδιες με του Προελέγχου. Πιο συγκεκριμένα από τους 20 μαθητές οι 17 απάντησαν σωστά στην κοντινή πρόβλεψη, ενώ στην μακρινή οι σωστές απαντήσεις ήταν μόνο 11, όπως και κατά τον Προέλεγχο. Από αυτή την αύξηση μπορούμε να συμπεράνουμε πως οι μαθητές μετά την παρέμβαση ήταν πιο εξοικειωμένοι με επαναλαμβανόμενα πρότυπα τύπου ΑΒ και άρα μπορούσαν πιο εύκολα να κάνουν κοντινές προβλέψεις, τόσο σε σχέση με τις μακρινές, αλλά και με τα πιο περίπλοκα πρότυπα τύπου ΑΒΓ.

Πίνακας 27: *Συχνότητες απαντήσεων στα έργα κοντινής και μακρινής πρόβλεψης σε πρότυπο ΑΒ*Γ

Κοντινή και μακρινή πρόβλεψη

	Προέλεγχος		Μεταέλεγχος	
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)	ΑΒΓ (Α5.2)		ΑΒΓ (Α1.2)	
Είδος πρόβλεψης	Κοντινή	Μακρινή	Κοντινή	Μακρινή
Σωστό	10	11	12	11
Λάθος	10	9	8	8
ΔΑ	0	0	0	1
Σύνολο	20	20	20	20

Στο πρότυπο της μορφής ΑΒΓ τα παιδιά δυσκολεύτηκαν εξίσου. Στο έργο Α5.2 του Προελέγχου από το σύνολο των μαθητών οι σωστές προβλέψεις σε κοντινή θέση ήταν 10 ενώ σε μακρινή θέση 11 (Πίνακας 27). Αυτά τα ευρήματα είναι χαμηλότερα από εκείνα της έρευνας των Δεσλή και Γαϊτανέρη (2017) η οποία πραγματοποιήθηκε σε παιδιά της Γ και Δ τάξης. Εκεί βρέθηκε πως τα παιδιά προέβλεψαν το στοιχείο στην επόμενη θέση σε ποσοστό 69,25% και στην μακρινή σε ποσοστό 71%.

Αντίστοιχα στο έργο Α1.2 του Μεταελέγχου οι σωστές απαντήσεις κυμάνθηκαν στα ίδια επίπεδα. Έτσι, 12 μαθητές προέβλεψαν σωστά το στοιχείο που έλλειπε στην κοντινή θέση, ενώ στην μακρινή θέση απάντησαν σωστά 11 μαθητές, όσοι και εκείνοι του Προελέγχου.

Στα έργα που περιείχαν αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα οι μαθητές έδειξαν να δυσκολεύονται περισσότερο από εκείνα που περιείχαν επαναλαμβανόμενα.

Πίνακας 28: Συχνότητες απαντήσεων στα έργα συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο άξονα (τύπου Ι)

Συνέχιση

		Προέλεγχος	Μεταέλεγχος
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Οπτικό αναπτυσσόμενο πρότυπο σε κάθετο άξονα τύπου Ι (Β6)	Οπτικό αναπτυσσόμενο πρότυπο σε κάθετο άξονα τύπου Ι (Β3.1)
Σωστό	Σωστή συνέχιση	1	9
	Μόνο αριθμητικά	2	3
	Μόνο μορφολογικά	3	1
Λάθος	Επαναλαμβανόμενα	10	7
	Όλα ίδια	1	0
	Συμμετρικό	2	0
	Τα άλλαξε να αυξάνονται ανά ένα	1	0
Σύνολο		20	20

Το έργο Β6 του Προελέγχου, παρουσιάζει ένα κάθετο αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο, που αναπτύσσεται με κανόνα 2ν-1. Εδώ οι απαντήσεις των παιδιών παρουσίασαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού υπήρξε ιδιαίτερη ποικιλομορφία (Πίνακας 28).

Αρχικά, 10 από τους μαθητές διαχειρίστηκαν το πρότυπο ως επαναλαμβανόμενο. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν συναντήσει και διαχειριστεί μόνο επαναλαμβανόμενα πρότυπα και σχεδόν καθόλου αναπτυσσόμενα πρότυπα. Από το σύνολο των μαθητών μόνο 1 συνέχισε το πρότυπο σωστά, σύμφωνα με τον κανόνα. Ακόμα, κάποιοι μαθητές προσπάθησαν να συνεχίσουν το πρότυπο, όμως δεν κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά μορφολογικά την εξέλιξη του προτύπου. Ειδικότερα 2 μαθητές δεν απέδωσαν ορθά την μορφή του προτύπου, ενώ το είχαν αποτυπώσει σωστά αριθμητικά, δηλαδή είχαν βρει το πλήθος των ορόφων που θα έχει το πρότυπο σε κάθε θέση. Αντίθετα 3 άλλοι μαθητές, οι οποίοι είχαν σχεδιάσει σωστά μορφολογικά το πρότυπο, δεν κατάφεραν να βρουν αριθμητικά το πλήθος των τριγώνων που έπρεπε να έχουν τα δέντρα στις επόμενες θέσεις. Έτσι, παρόλο που μορφολογικά είχαν σχεδιάσει σωστά την εξέλιξη του προτύπου, το ύψος ήταν σωστά τοποθετημένο, το πλήθος των τριγώνων ήταν λανθασμένο. Ιδιαίτερη περίπτωση αποτελούν οι απαντήσεις 2 μαθητών, οι οποίοι συνέχισαν το πρότυπο συμμετρικά. Τέλος 2 από τους μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται αρκετά με την συνέχιση του προτύπου «προσαρμόζοντάς» τα έτσι ώστε να μπορούν να τα διαχειριστούν. Έτσι, ο ένας το μετέτρεψε ώστε να αυξάνεται ένα ένα και ο άλλος επανέλαβε το ίδιο σχήμα τρεις φορές.

Στο αντίστοιχο έργο του μεταελέγχου (Β3.1) οι σωστές απαντήσεις ήταν 9. Η αύξηση αυτή παρατηρείται πιθανώς επειδή οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης ήρθαν σε επαφή πολλά αναπτυσσόμενα πρότυπα και είχαν την ευκαιρία να τα επεξεργαστούν, να τα κατασκευάσουν και να αναστοχαστούν πάνω σε αυτά. Τρεις μαθητές ενώ κατάφεραν να προβλέψουν την συνέχεια του προτύπου αριθμητικά, δηλαδή υπολογίζοντας σωστά το ύψος του προτύπου, έδειξαν αδυναμία στην ορθή σχεδίασή του. Αντίθετα, 1 απάντηση ήταν σωστή μορφολογικά και λάθος αριθμητικά. Τέλος, 7 μαθητές συμπεριφέρθηκαν στο πρότυπο σαν να είναι επαναλαμβανόμενο, 3 λιγότεροι από εκείνους του προελέγχου.

Πίνακας 29: Συχνότητες απαντήσεων στα έργα συνέχισης οπτικού αναπτυσσόμενου προτύπου σε κάθετο και οριζόντιο άξονα (τύπου L)

Συνέχιση

		Προέλεγχος	Μεταέλεγχος
Τύπος Προτύπου (κωδικός έργου)		Οπτικό αναπτυσσόμενο προτύπου σε κάθετο και οριζόντιο άξονα τύπου L (B7)	Οπτικό αναπτυσσόμενο προτύπου σε κάθετο και οριζόντιο άξονα τύπου L (B3.2)
Σωστό	Σωστή συνέχιση	2	6
	Σωστό μόνο μορφολογικά	1	1
	Σωστό μόνο στον έναν άξονα	2	3
Λάθος	Επαναλαμβανόμενο	13	6
	Αντέγραψε το τελευταίο στοιχείο	1	
	Μέτρησε τη γωνία 2 φορές		2
	Αδυναμία απάντησης		2
	Λανθασμένη συνέχιση	1	
Σύνολο		20	20

Το έργο Β7 του Προελέγχου αναφέρεται σε αναπτυσσόμενο πρότυπο τύπου L. Το πρότυπο που δόθηκε στα παιδιά ήταν ένα αναπτυσσόμενο οπτικό πρότυπο, που αναπτύσσεται τόσο στον κάθετο, αλλά και στον οριζόντιο άξονα. Σε αυτό το έργο μόνο 2 μαθητές απάντησαν σωστά. Από τους υπόλοιπους μαθητές 1 το σχεδίασε σωστά μορφολογικά, αλλά όχι αριθμητικά, ενώ 2 το σχεδίασαν σωστά μόνο στον κάθετο άξονα και όχι στον οριζόντιο. Ακόμα οι 13 συνέχισαν το πρότυπο σαν να είναι επαναλαμβανόμενο. Τέλος 2 μαθητές είχαν τελείως διαφορετικές απαντήσεις. Ο ένας συνέχισε τελείως λάθος το πρότυπο ενώ ο άλλος αντέγραψε το τελευταίο στοιχείο του προτύπου (Πίνακας 29).

Στο αντίστοιχο έργο του Μεταελέγχου, 6 μαθητές κατάφεραν να το διαχειριστούν και να το συνεχίσουν σωστά και στις δύο διαστάσεις, τέσσερις περισσότεροι από τον Προέλεγχο. Ακόμα, 3 είχαν σωστή μόνο τη μία από τις δύο διαστάσεις, ενώ αξίζει να σημειωθεί πως 2 έκαναν λάθος μετρώντας την γωνία δύο φορές μία κάθετα και μία οριζόντια. Τέλος 6 μαθητές διαχειρίστηκαν το πρότυπο ως επαναλαμβανόμενο – μισοί σε σχέση με αυτούς του Προελέγχου, ενώ 2 δεν μπόρεσαν να το συνεχίσουν καθόλου

(Πίνακας 29). Αυτή η διαφορά πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός πως οι μαθητές μετά την παρέμβαση είχαν εξοικειωθεί αρκετά με τα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα και πλέον τα ξεχώριζαν από τα επαναλαμβανόμενα.

4. Συζήτηση – Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μία ημι-πειραματική έρευνα με διδακτική παρέμβαση. Σε αυτήν έγινε προσπάθεια να διερευνηθούν οι ικανότητες των παιδιών Β΄Δημοτικού στη συνέχιση, στη συμπλήρωση, στη διόρθωση, στην εύρεση του δομικού στοιχείου και στις κοντινές και μακρινές προβλέψεις με οπτικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Ακόμα έγινε προσπάθεια διερεύνησης των ικανοτήτων τους στη συνέχιση, τις κοντινές και μακρινές προβλέψεις, αλλά και την καταγραφή του γενικού κανόνα σε οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα. Έπειτα ακολούθησε μια διδακτική παρέμβαση με στόχο την ανάπτυξη των ικανοτήτων γενίκευσης των μαθητών.

Από την τρέχουσα έρευνα προέκυψαν ενδιαφέροντα ευρήματα. Καταρχήν, φάνηκε πως οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ περισσότερο σε έργα που περιλαμβάνουν οπτικά αναπτυσσόμενα πρότυπα, σε σχέση με εκείνα που περιλαμβάνουν επαναλαμβανόμενα. Μια πρώτη πιθανή εξήγηση σύμφωνα με τους Wijns, Torbeyns, Bakker, De Smedt, και Verschaffel (2019) θα μπορούσε να είναι ότι τα έργα με αναπτυσσόμενα πρότυπα είναι γνωστικά διαφορετικά από τα έργα με επαναλαμβανόμενα πρότυπα, καθώς τα έργα με αναπτυσσόμενα πρότυπα απαιτούν γνωστικές διεργασίες που οι μικροί μαθητές δεν μπορούν να κατακτήσουν σε τόσο μικρές ηλικίες. Συγκεκριμένα, σε ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο, τα παιδιά πρέπει να επικεντρωθούν σε αυτό που παραμένει το ίδιο (δηλαδή, τη μονάδα επανάληψης), ενώ σε ένα αναπτυσσόμενο πρότυπο τα παιδιά πρέπει να επικεντρώνονται σε ό, τι αλλάζει (δηλαδή, τον κανόνα).

Πιο συγκεκριμένα σε έργα συνέχισης, συμπλήρωσης και διόρθωσης οι μαθητές είχαν εξαιρετικές επιδόσεις (βλ. Πίνακα 5). Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των Lüken και Sauzet (2020), οι οποίοι βρήκαν πως οι μικροί μαθητές μέχρι την ηλικία των 5 ετών δεν αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες σε έργα συνέχισης, συμπλήρωσης και διόρθωσης επαναλαμβανόμενων προτύπων. Σύμφωνα με τους ίδιους η μεγαλύτερη δυσκολία εντοπίζεται στα έργα εύρεσης του δομικού στοιχείου. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έρχονται σε αντίθεση με αυτή τη θέση, καθώς οι μαθητές στα έργα εύρεσης του δομικού στοιχείου είχαν εξαιρετικά υψηλές επιδόσεις τόσο σε απλά (ΑΒ και ΑΒΓ), αλλά και πιο σύνθετα (ΑΑΒΒ και ΑΑΒ) πρότυπα (βλ. Πίνακα 27).

Αντίθετα στα έργα με αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά. Στα έργα συνέχισης των αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων η πλειοψηφία των μαθητών κατά τον Προέλεγχο διαχειρίστηκε τα πρότυπα ως επαναλαμβανόμενα (βλ. Πίνακες 9 και 10). Αυτό πιθανώς να οφείλεται στην έλλειψη εμπειριών από την πλευρά των μαθητών με αναπτυσσόμενα πρότυπα. Σύμφωνα με τους Warren και Cooper (2008) οι μαθητές από μικρή ηλικία είναι σε θέση να συνεχίζουν απλά αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα εάν υπάρξει η κατάλληλη διδασκαλία. Αυτή η θέση έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Μεταελέγχου. Ενώ οι μαθητές δυσκολευόντουσαν αρκετά πριν την Παρέμβαση, μετά από αυτή, οι επιδόσεις τους στα έργα συνέχισης ήταν αρκετά βελτιωμένες (βλ. Πίνακες 30 και 31).

Συγκρίνοντας τις επιτυχίες των μαθητών στην συνέχιση οπτικών προτύπων παρατηρούμε πως αυτές μειώνονται ανάλογα με τον εξέλιξης του προτύπου, γραμμικό ή μη γραμμικό. Επομένως οι σωστές απαντήσεις μειώνονται όσο αυξάνονται οι άξονες στους οποίους αναπτύσσεται το πρότυπο (βλ. Πίνακες 17, 18 και 19). Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των Jurdak και El Mouhayar (2014), οι οποίοι έδειξαν πως τα πρότυπα που αναπτύσσονται γραμμικά, δηλαδή σε έναν άξονα, είναι πιο εύκολα για τους μαθητές, ενώ εκείνα που αναπτύσσονται ταυτόχρονα σε περισσότερους άξονες, μη γραμμικά, τους δυσκολεύουν αρκετά. Μία πιθανή εξήγηση είναι ότι τα γραμμικά έργα είναι λιγότερο περίπλοκα από τα μη γραμμικά καθώς η ανάπτυξη μεταξύ των διαδοχικών βημάτων είναι σταθερή ενώ η ανάπτυξη στα τελευταία διαφέρει. Από τα αποτελέσματα οι μαθητές φαίνεται να έχουν την ικανότητα να διαχειριστούν αρκετά περίπλοκα πρότυπα (βλ. Πίνακα 19). Πιο εκτεταμένη έρευνα θα μπορούσε να γίνει για να ερευνηθεί πόσο περίπλοκα πρότυπα μπορούν να διαχειριστούν οι μαθητές αυτής της ηλικίας καθώς και κατά πόσο μια διδακτική παρέμβαση θα βοηθούσε στην αύξηση των επιδόσεων των μαθητών με σύνθετα αναπτυσσόμενα πρότυπα.

Κατά τη διάρκεια του Προελέγχου οι μαθητές φάνηκαν να δυσκολεύονται στα έργα κοντινής και μακρινής πρόβλεψης σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Μετά την παρέμβαση παρατηρήθηκε αύξηση στις κοντινές προβλέψεις με πρότυπα τύπου ΑΒ, χωρίς όμως να αλλάξει η επίδοσή τους στις μακρινές (βλ. Πίνακα 28). Βλέπουμε επομένως πως οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κάνουν προβλέψεις με επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα από μικρή ηλικία και με κατάλληλη διδασκαλία οι επιδόσεις τους θα μπορούσαν να αυξηθούν.

Αναφορικά με τα αναπτυσσόμενα πρότυπα, η πρόβλεψη του στοιχείου του προτύπου σε μακρινή θέση σύμφωνα με τους Jurdak και El Mouhayar (2014) δυσκολεύει τους μαθητές περισσότερο από την εύρεση του επόμενου στοιχείου και την κοντινή πρόβλεψη. Το εύρημα αυτό επαληθεύεται στην παρούσα έρευνα όπου οι μαθητές όταν κλήθηκαν να κάνουν μία κοντινή πρόβλεψη ($10^η$ θέση) σημείωσαν μεγάλη επιτυχία (βλ. Πίνακα 12), ενώ αντίστοιχα όταν κλήθηκαν να κάνουν μία μακρινή πρόβλεψη δυσκολεύτηκαν αρκετά (βλ. Πίνακες 21 και 24). Ανοιχτό για περεταίρω έρευνα μένει το ερώτημα εάν μία διδασκαλία εξειδικευμένη στο κομμάτι των προβλέψεων θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αυξήσουν την ικανότητά τους να εκτελούν τέτοιου είδους προβλέψεις.

Οι μαθητές έχουν δείξει μια αξιοσημείωτη ικανότητα να κατασκευάζουν γενικεύσεις, αλλά συχνά χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές και αιτιολογήσεις για να κατασκευάσουν και να δικαιολογήσουν την ίδια γενίκευση (Lannin, 2005). Οι English και Warren (1998) αναφέρουν την αναδρομική προσέγγιση ως μία προσέγγιση την οποία οι μαθητές προτιμούν και συχνά επανέρχονται σε αυτή όταν έχουν να διαχειριστούν περίπλοκα πρότυπα. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας είναι σύμφωνα με αυτή τη θέση, καθώς ο μεγαλύτερος αριθμός των μαθητών προσέγγισαν το πρότυπο αναδρομικά.

Πιο συγκεκριμένα, κατά τον Προέλεγχο δόθηκε ένα οπτικό αναπτυσσόμενο πρότυπο που αναπτύσσονταν στον οριζόντιο άξονα. Δίνονταν τα τρία πρώτα στοιχεία του προτύπου και κάτω από αυτά ήταν γραμμένη η θέση κάθε στοιχείου. Ο κανόνας του προτύπου ήταν ν, επομένως ήταν εύκολο να συνδεθεί η θέση με το κάθε στοιχείο του προτύπου καθώς ακολουθούσε το αριθμητικό μοντέλο. Η πλειοψηφία των μαθητών προσέγγισε τον κανόνα αναδρομικά, ενώ κάποιοι από αυτούς κατάφεραν να εξάγουν τον γενικό κανόνα (βλ. Πίνακα 13). Αυτή η αναδρομική προσέγγιση των προτύπων παρατηρήθηκε και στα έργα του Μεταελέγχου. Σε αυτά τα έργα τα πρότυπα ακολουθούσαν πιο σύνθετους κανόνες. Και τα δύο αναπτύσσονταν σε κάθετο άξονα, το ένα με κανόνα ν+1 και το άλλο με κανόνα 2ν. στο έργο που πειείχε το πρώτο πρότυπο, όλοι οι μαθητές σκέφτηκαν προσθετικά, δηλαδή χρησιμοποίησαν τη σχέση μεταξύ των στοιχείων του προτύπου για να εξάγουν τον κανόνα. Καθώς στο πρότυπο αυτό δεν ήταν εύκολη η συσχέτιση της θέσης με το κάθε στοιχείο του προτύπου κανένας μαθητής δεν διατύπωσε κάποιον κανόνα χρησιμοποιώντας την θέση (βλ. Πίνακα 22). Αναφορικά με το δεύτερο, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο. Ένας φαίνεται να κατάφερε να συνδέσει τη θέση πολλαπλασιαστικά, γράφοντας πως κάθε φορά βάζω το διπλάσιο (βλ. Πίνακα 23). Βλέπουμε επομένως πως οι μαθητές της Β Δημοτικού είναι σε θέση να εκφράζουν μια πολλαπλασιαστική σχέση χρησιμοποιώντας απλές εκφράσεις (Blanton & Kaput, 2004).

Με βάση τα παραπάνω διαπιστώνουμε τα παρακάτω:
ως προς το πρώτο ερευνητικό ερώτημα οι μαθητές ήδη από τον Προέλεγχο φάνηκε πως είναι σε θέση να συνεχίζουν, να συμπληρώνουν και να διορθώνουν απλά επαναλαμβανόμενα πρότυπα. Ακόμα φάνηκε πως έχουν την ικανότητα να εντοπίζουν τη μονάδα επανάληψης τόσο σε απλά (Προέλεγχος) αλλά και πιο σύνθετα (Μεταέλεγχος) επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα.

Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, από την παρούσα έρευνα, φάνηκε πως οι μαθητές έχουν την ικανότητα να συνεχίζουν αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, τους λείπει όμως η εμπειρία με αυτά. Βλέπουμε έτσι πως κατά τον Προέλεγχο τα διαχειρίζονται ως επαναλαμβανόμενα, καθώς αυτά είναι τα μόνα που έχουν συναντήσει. Έπειτα από την παρέμβαση είδαμε πως μπορούν να συνεχίζουν τόσο απλά, αλλά και πιο σύνθετα αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα. Επομένως βλέπουμε πως οι μαθητές έχουν την ικανότητα να συνεχίζουν αναπτυσσόμενα οπτικά πρότυπα, αλλά χρειάζεται κατάλληλη διδακτική παρέμβαση για να ξεπεράσουν το στερεότυπο των επαναλαμβανόμενων προτύπων που δημιουργείται τα πρώτα χρόνια της τυπικής εκπαίδευσης.

Σχετικά με τις κοντινές και μακρινές προβλέψεις παρατηρήθηκε πως οι μαθητές με απλά επαναλαμβανόμενα πρότυπα δυσκολεύονται στις κοντινές και μακρινές προβλέψεις. Έπειτα όμως από μία σύντομη διδακτική παρέμβαση οι επιδόσεις τους στις κοντινές φαίνεται να αυξάνονται, χωρίς όμως να αυξάνονται οι επιδόσεις τους στις μακρινές.

Αναφορικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα βλέπουμε πως οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κάνουν γενικεύσεις, να εντοπίζουν και να εκφράζουν τον γενικό κανόνα αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων.

Τέλος, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Προελέγχου και του Μεταελέγχου παρατηρείται πως η παρέμβαση φάνηκε να επιδρά θετικά σε δύο τομείς: στην ικανότητα κοντινών προβλέψεων με επαναλαμβανόμενα οπτικά πρότυπα και στην ικανότητα συνέχισης απλών και σύνθετων αναπτυσσόμενων οπτικών προτύπων.

Βιβλιογραφία

Βαμβακούση, Ξ., & Κυλάφης, Π. (2011) Ο ρόλος των patterns στην ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού. Ανάκτηση από https://olympias.lib.uoi.gr/jspui/handle/123456789/26589

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. International Group For The Psychology Of Mathematics Education.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412–446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series.* New York: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. W., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5.* Essential Understanding Series. Reston, VA: NCTM.

Burgoyne, K., Witteveen, K. M, Tolan, G. A, Malone, S. & Hulme, C. (2017). Pattern understanding: relationships with arithmetic and reading development. *Child Development Perspectives,11*(4), 239-244.

Γαβρίλης, Κ. (2011), Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της (σχολικής) Άλγεβρας,, στο: *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, Θεσσαλονίκη : Ζήτη.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). Introduction: A global dialogue about early algebraization. In J. Cai & Knuth, E., (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives (pp. vii-xi).* New York, NY: Springer.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (International Review on Mathematics Education), 37*(1), 5-15.

Carraher, D.W, Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 130-140)*. Utrecht, The Netherlands: PME.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education, 37,* 87-115.

Carraher, D.W. & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (Vol II,p. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D.W., Martinez, M.V., & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40,* 3–22.

Chen, Z., & Siegler, R. (2000). Overlapping waves theory. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 65*(2), 7–11.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach.* New York: Routledge.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM, 40*(1), 23-37.

Cooper T.J. & Warren E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. In Cai J., Knuth E. (Eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education.* Springer, Berlin: Heidelberg.

Desli, D. & Gaitaneri, D. (2017). Η κατανόηση των μαθηματικών μοτίβων από παιδιά Γ' και Δ' δημοτικού και οι στρατηγικές σκέψης τους. *Preschool and Primary Education, 5*(1), 63-83.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 11,* 100-114.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education,* 194-229.

Empson, S.B., Levi, L., & Carpenter, T.P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education,* 409-428.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. The mathematics teacher, 91(2), 166.

Gadzichowski, Marinka. (2012). Examining Patterning Abilities in First Grade Children: A Comparison of Dimension, Orientation, Number of Items Skipped and Position of the Missing Item. *Psychology. (3)*. 1177-1182.

Gan, W. L. (2008). *A research into year five pupils' pre-algebraic thinking in solving pre-algebraic problems* (Doctoral thesis), University of Science Malaysia, Malaysia.

Goodrow, A., & Schliemann, A.D. (2003). Linear Function Graphs and Multiplicative Reasoning in Elementary School. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Honolulu, HI.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 139-159.

Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. Educational Studies in Mathematics, 85(1), 75-92.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, & National Research Council (Ed.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium (pp. 25–26).* Washington, DC: National Academies Press.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In *Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 145-168).* Routledge.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades (pp. 235-272).* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Kidd, J. K., Pasnak, R., Gadzichowski, M., Gallington, D. A., McKnight, P., Boyer, C. E., & Carlson, A. (2014). Instructing first-grade children on patterning improves reading and mathematics. *Early Education and Development, 25,* 134–151.

Kidd, J. K., Carlson, A. G., Gadzichowski, M., Boyer, C. E., Gallington, D. A., & Pasnak, R. (2013). Effects of patterning instruction on the academic achievement of 1 st -Grade children. *Journal of Research in Childhood Education, 27,* 224–238.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-763).* Charlotte, NC: Information Age.

Kieran C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives (pp. 557-577)*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Lannin, J. K. (2005) Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7* (3), 231-258.

Λεμονίδης, Κ. Νικολαντωνάκης, Ε. Μήτσου, (2011). Η λύση προβλημάτων μοντελοποίησης σε μαθητές Στ’ δημοτικού και σε μελλοντικούς δασκάλους: μια μελέτη περίπτωσης. Πρακτικά 28ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας: *Μαθηματική Μοντελοποίηση*. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα 11-13 Νοεμβρίου, σελ. 367-385.

Liljedahl, P., (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24–42.

Loewenberg, D. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education.* USA: Rand Corporation.

Lüken, M. M., & Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3-to 5-year-old children’s patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-21.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee, (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching,* Kluwer, Dordrecht/Boston/London, pp 65-86.

Mason, J., Stacey, K. & Burton, L. (2010). *Thinking Mathematically (2th edition)*, Edinburgh: Pearson.

Moss, J. & Beatty, R. (2010). Knowledge Building and Mathematics: Shifting the Responsibility for Knowledge Advancement and Engagement. *Canadian Journal of Learning and Technology, 36*(1)

Moss, J., Beatty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2006). *The potential of geometric sequences to foster young students’ ability to generalize in mathematics.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco (April).

Moyer, J. C., Huinker, D., & Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the U.S. Investigation series, *Journal of Mathematics Educators (Singapore), 8*(1), 6-38.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21,* 33-49.

Mulligan, J., Prescott, A., & Michelmore, M. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. Johnsen Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 393-401 and Vol. 4, pp. 417-424). Norway.

National Council of Teachers of Mathematics. (1992). *A core curriculum: Making mathematics count for everyone.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Maths*. Reston: NCTM.

Olson, M., & Hergenhahn, B. R. (2010). *An Introduction to Theories of Personality (8th Ed.).* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Orton, J. (1997). Matchsticks, pattern and generalisation, Education 3-13: *International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education, 25* (1), 61-65.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics (pp. 104-120).* London, England: Cassell.

Papic, M., (2007). Promoting repeating patterns with young children – More than just alternating colours, *Australian Primary Mathematics Classroom 12*(3), 8–13.

Papic, M., Mulligan, J. & Mitchelmore, M., (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning, *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3)*,* 237–268.

Pasnak, R., Kidd, J., Gadzichowski, M., Gallington, D. A., Schmerold, K. L., Schmerold, K. L., & West, H. (2015). Abstracting sequences: Reasoning that is a key to academic achievement. *The Journal of Genetic Psychology, 176,* 171–193.

Plessis, J., (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase, , *South African Journal of Childhood Education, 8*(2), a578.

Polya G., (1998), *Πώς να το Λύσω*, Αθήνα: Καστανιώτη.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez, &P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.205-235). Dordrecht, Netherlands:Sense Publishers.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic–cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education. 2*, 95-101.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 83- 96.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396.

Rivera, F. & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM, 40*(1), 65–82.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 7(*3), 297 – 328.

Rivera, F. D. (2013). Teaching and Learning Patterns in School Mathematics. New York: Springer.

Rivera, F. (2015). The distributed nature of pattern generalization. *PNA*, 9(2).

Romberg, T., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.) *Mathematics Classrooms that Promote Understanding (pp. 3–32).* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosch, E., & Mervis, B. (1975). Family Resemblances: Studies in the Internal Structure of Categories. *Gognitive Psychology, 7*, 573-605.

Routitsky, A., & Zammit, S. (2001). What can we learn from TIMSS: A comparison of Australian and Russian TIMSS-R results in algebra. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra*

(Proceedings of the **12**th ICMI Study Conference, pp. 523–530). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Skoumpourdi, C. (2016). Patterns for kindergartners: a developmental framework. In B. Maj-Tatsis, MPytlak & E. Swoboda (Eds.) *CME Inquiry Based Mathematical Education, (pp. 107-116)*. University of Rzeszow, Rzeszow, Poland.

Stacey, K, & Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. In K. Stacey., H. Chick, & M. Kendal, (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra.* The 12th ICMI Study. (pp. 1-20). Boston: Kluwer.

Swafford, J., & Langrall, C. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations To Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (1), 89-112.

Threlfall, J., (1999). Repeating patterns in the primary years', in A. Orton (ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics,* pp. 18–30, London: Cassell.

Thornton, S. (2001). A Picture is Worth a Thousand Words. In A. Rogerson (Ed.). New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference on the Mathematics Education into the 21 st Century Project (pp. 251-256). Retrieved from http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Τζεκάκη, Μ., & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επιμ.), *Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 268-278). Αθήνα: Τυπωθήτω.

Τζεκάκη, Μ., Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2019). Κανονικότητες (patterning) στις μικρές ηλικίες: Συνθετική παρουσίαση ερευνών. Στο Κ. Χρίστου (Επιμ.), Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ) (σελ. 276-284). Λευκωσία, Κύπρος: ΕΝ.ΕΔ.ΙΜ.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra, *Educational Studies in Mathematics, 54,*63–75.

Van de Walle, (2007). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentaly (7th ed.)*. New York: Pearson Education, Inc.

Zazkis, R., & Liljedahk, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics, 49*(3), 379-402.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. Chick. & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 305-312)*. Melbourne, Australia: PME.

Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150.

Watters, J., English, L. & Mahoney, S. (2004). Mathematical Modeling in the Elementary School. *Presented at the American Educational Research Association Annual meeting*.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185.

Wilkie, K.J. & Clarke, D.M., (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure, *Mathematics Education Research Journal, 28,* 223.

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*,*49*, 152-163.

Wittmann, E. C, (2007). Operative Proof in Elementary Mathematics. *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, (Vol 2, pp.251-256).* The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwa.p

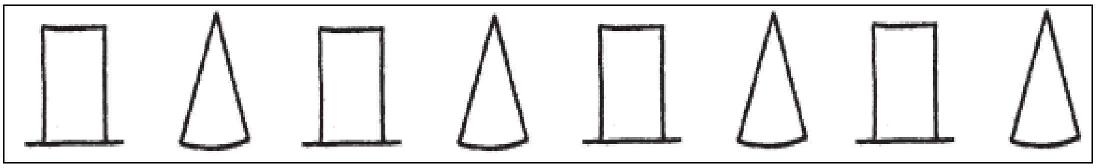
Χούσερλ, Έ. (2003). *Η προέλευση της γεωμετρίας.* (Π. Κόντος, Trans.) Αθήνα : Εκδόσεις Εκκρεμές.

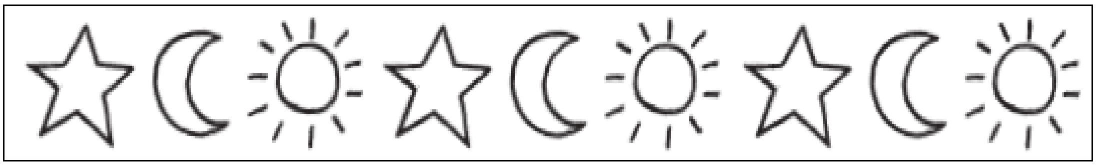
Παράρτημα

Εργαλείο Προελέγχου

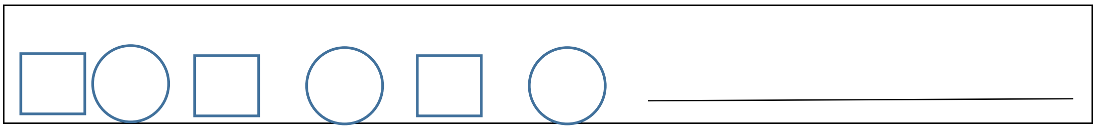
Όνομα: ………………………………………..
Τάξη: ………………

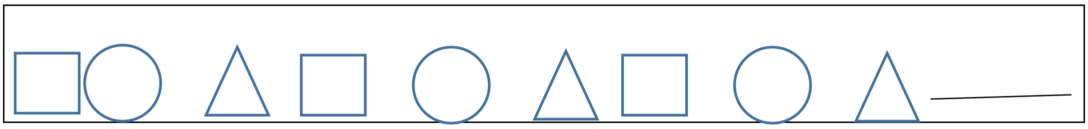
1. **Στα παρακάτω μοτίβα κύκλωσε το κομμάτι που επαναλαμβάνεται.**



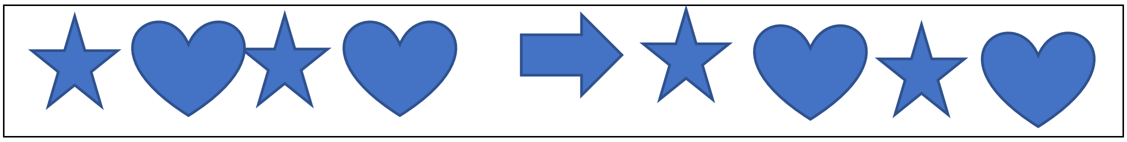


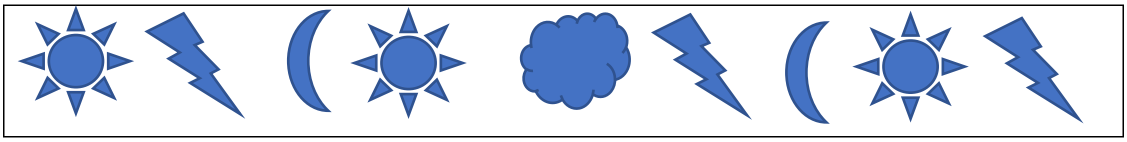
2. **Συνέχισε τα μοτίβα.**



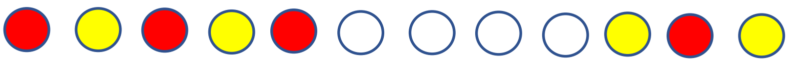


3. **Να διαγράψεις το σχήμα που δεν ταιριάζει σε κάθε γραμμή.**





4. **Ζωγράφισε τις χάντρες με το σωστό χρώμα έτσι ώστε να ολοκληρωθούν τα μοτίβα.**

Α) 

Β) 

5. Βρες ποιο σχήμα θα βρίσκεται στα κενά κουτάκια.

Θέση	$1^{η}$	$2^{η}$	$3^{η}$	$4^{η}$	$6^{η}$	$10^{η}$
Σχήμα	○	△	○	△		

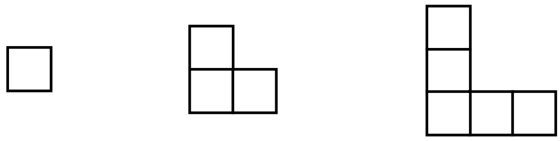
Θέση	$12^{η}$
Σχήμα	

Θέση	$1^{η}$	$2^{η}$	$3^{η}$	$4^{η}$	$5^{η}$	$6^{η}$	$9^{η}$
Σχήμα	○	□	△	○	□	△	

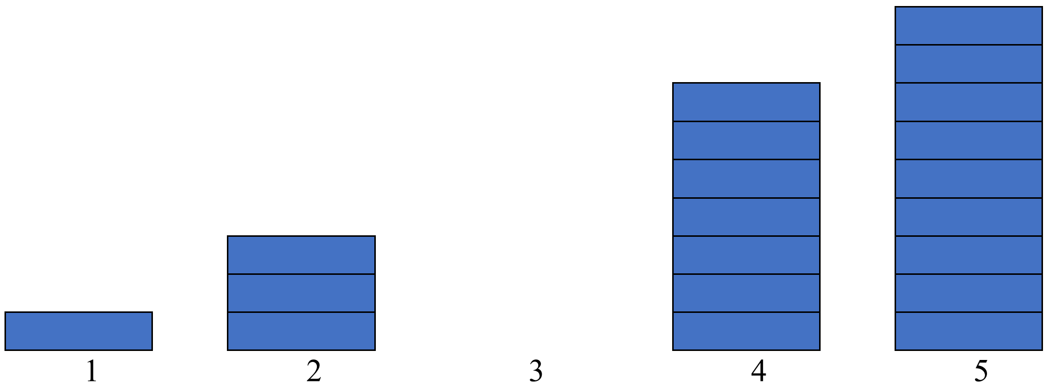
Θέση	$12^{η}$
Σχήμα	

6. Βρίσκω τον κανόνα και συνεχίζω το μοτίβο.

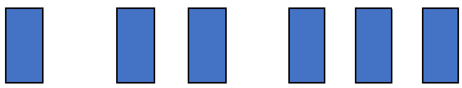
7. Βρίσκω τον κανόνα και συνεχίζω το μοτίβο.



8. Να συμπληρώσεις το παρακάτω μοτίβο.



9. Να βρεις τα σχήματα που λείπουν.



<u>Θέση:</u> <u>$1^{η}$</u> <u>$2^{η}$</u> <u>$3^{η}$</u> <u>$4^{η}$</u> <u>$5^{η}$</u>

Να σχεδιάσεις το σχήμα στην $10^{η}$ θέση.

Γράφω τον γενικό κανόνα:
……………………………………………………………………………………

Εργαλείο Μεταελέγχου

Όνομα: ………………………………………..

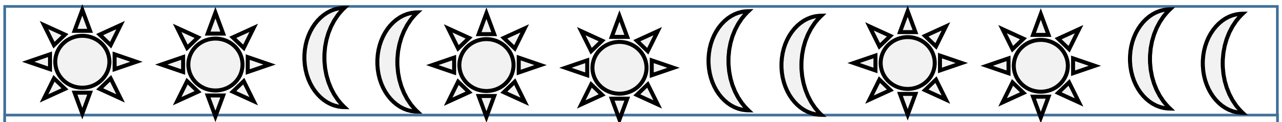
Τάξη: ………………

1. Βρες ποιο σχήμα θα βρίσκεται στα κενά κουτάκια.

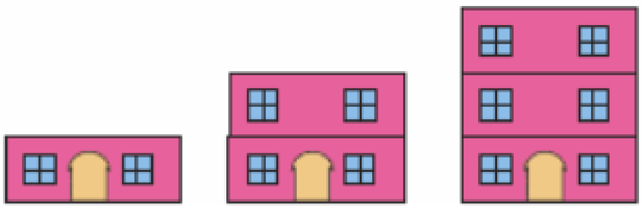
Θέση	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$		$6^η$
Σχήμα	○	△	○	△		
Θέση	$10^η$	$15^η$				
Σχήμα						

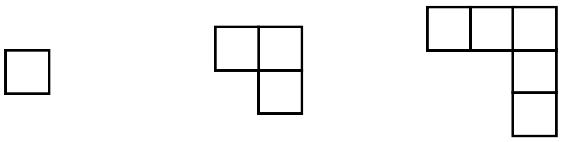
Θέση	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$		$9^η$
Σχήμα	○	□	△	○	□	△		
Θέση	$11^η$	$14^η$						
Σχήμα								

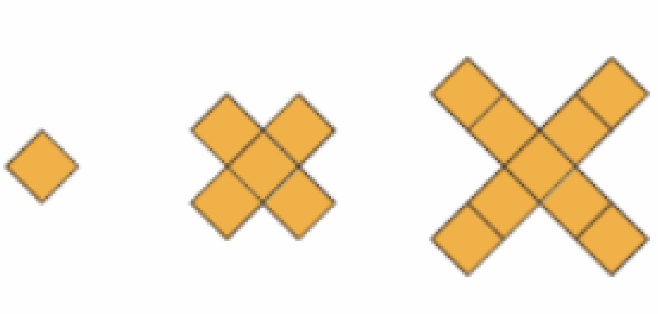
2. Κύκλωσε το κομμάτι που επαναλαμβάνεται.



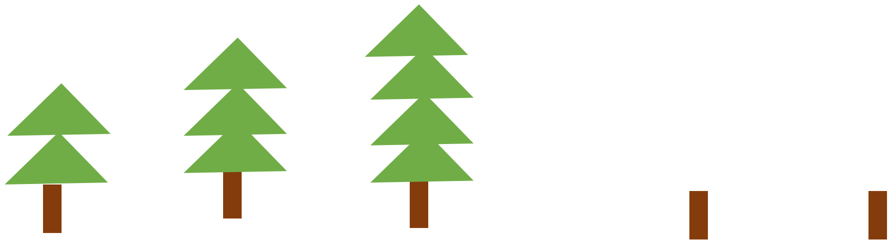
3. Συνεχίζω τα μοτίβα.







4. Συνεχίζω το μοτίβο και βρίσκω τον κανόνα.



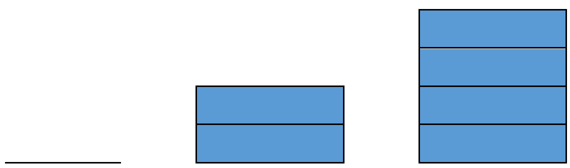
Κανόνας:
……………………………………………………………………………………
……………………………

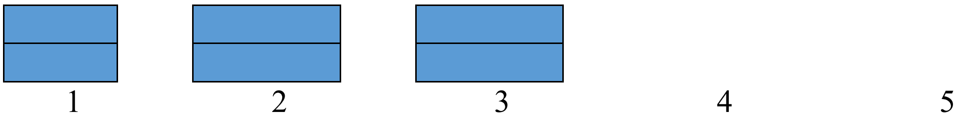
……………………………………………………………………………………
…………………………………

Τι ύψος θα έχει το 100ο δέντρο;

Απάντηση:……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
………………………………………………………………

5. Συνεχίζω το μοτίβο και βρίσκω τον κανόνα.





Κανόνας:
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
…………………………………………

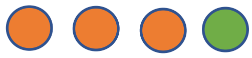
Τι ύψος θα έχει η 100^{η} πολυκατοικία;

Απάντηση:……………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………

6. Η Μαρία φτιάχνει βραχιόλια για τις φίλες της.

Στην πρώτη φίλη της έφτιαξε αυτό το βραχιόλι.

Στην δεύτερη φίλη της έφτιαξε αυτό το βραχιόλι.



Στην τρίτη φίλη της έφτιαξε αυτό το βραχιόλι.

Πώς μοιάζει το βραχιόλι που έφτιαξε στην έκτη φίλη της;

Ζωγραφίζω:

Φύλλα εργασίας 1η μέρα παρέμβασης

Πρότυπο 1:

Ποιο κομμάτι επαναλαμβάνεται κάθε φορά;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 3η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 6η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 2η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 4η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 8η θέση;

Πρότυπο 2:

Ποιο κομμάτι επαναλαμβάνεται κάθε φορά;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 3η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 6η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 2η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 4η θέση;

Τι σχήμα βρίσκεται στην 8η θέση;

Φύλλα εργασίας 2η μέρα παρέμβασης