ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΗΣ ΕΡΑΣΜΙΑΣ ΑΡΑΜΠΑΤΖΗ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ
Στις «Επιστήμες της Αγωγής»

Με ειδίκευση «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

ΦΛΩΡΙΝΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2018

ΦΥΛΛΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

1. Επόπτης : Χαράλαμπος Λεμονίδης

Βαθμός: _____

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Κωνσταντίνος Χρήστου

Βαθμός:_____

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Βαθμός:_____

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός:_____

Η συγγραφέας **Ερασμία Αραμπατζή** βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Περιεχόμενα

Περίληψη 4
Abstract 5
Εισαγωγή 6
Α. Θεωρητικό Πλαίσιο 8
1. Η Αίσθηση του Αριθμού 8
2. Οι δυσκολίες των μαθητών και εκπαιδευτικών στους Ρητούς 11
3. Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς 15
4. Κοινότητες Μάθησης 19
5. Νέο Πρόγραμμα σπουδών στους Ρητούς 21
6. Στόχος και ερωτήματα της έρευνας 25
Β. Ερευνητικό Μέρος 26
7. Μέθοδος 26
7.1. Συμμετέχοντες 26
7.2. Εργαλεία Έρευνας 26
7.3. Διαδικασία 38
7.4. Ανάλυση 39
8. Αποτελέσματα 40
8.1. Μελέτη εκπαιδευτικού 1 40
8.2. Μελέτη Εκπαιδευτικού 2 46
8.3. Μελέτη Εκπαιδευτικού 3 49
8.4. Μελέτη Εκπαιδευτικού 4 51
8.5. Μελέτη Εκπαιδευτικού 5 53
8.6. Μελέτη Εκπαιδευτικού 6 54
8.7. Μελέτη Εκπαιδευτικού 7 56
8.8. Συγκριτική Ανάλυση 59
9. Εντυπώσεις των Εκπαιδευτικών από το Πρόγραμμα 69
10. Συζήτηση 70
Βιβλιογραφία 72
Παράρτημα 80

Περίληψη

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά αντικείμενα στη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στα οποία μαθητές και εκπαιδευτικοί συναντούν δυσκολίες. Σκοπός της έρευνας αυτής είναι η δυνατότητα βελτίωσης της Γνώσης Περιεχομένου (ΓΠ) και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΠΓΠ) των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς μέσω μιας επιμορφωτικής παρέμβασης. Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 7 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με εμπειρία διδασκαλίας χρόνων, οι οποίοι εξετάστηκαν με ημι-δομημένες συνεντεύξεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ελλείψεις στη ΓΠ και στην ΠΓΠ που μπορούν να βελτιωθούν έπειτα από την κατάλληλη επιμόρφωση. Φάνηκε ότι η συσχέτιση μεταξύ της ΓΠ και της ΠΓΠ εξαρτάται από το είδος των ερωτήσεων και η εμπειρία των εκπαιδευτικών δεν συμβάλει σημαντικά στη διαμόρφωση των γνώσεων αυτών.

Λέξεις κλειδιά: *Γνώση Περιεχομένου (ΓΠ), Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΠ), ρητοί αριθμοί, εν ενεργεία εκπαιδευτικοί, αίσθηση του αριθμού, κοινότητα μάθησης*

Abstract

Rational numbers are one of the most important issue in teaching mathematics in Primary Education where students and teachers have difficulties. The purpose of the present study is to improve Content Knowledge (CK) and Pedagogical Content Knowledge (PCK) of in-service teachers on multiplication and division of fractions through a training intervention. The participants of this study comprised 7 primary school in-service teachers with years of teaching experience who were examined by means of an individual interview. According to findings teachers have gaps in CK and PCK than may be improve after appropriate training. It was found that the correlation between CK and PCK depends on the type of questions and the experience of teachers doesn't contribute to their knowledge.

Keywords: *Content Knowledge (CK), Pedagogical Content Knowledge (PCK), Rational numbers, in-service teachers, number sense, learning communities*

Εισαγωγή

Όλα αυτά τα χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες στη γνωστική ψυχολογία και στη διδακτική των μαθηματικών, που έδειξαν ότι τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες δυσκολεύονται στην κατανόηση των ρητών αριθμών (Aksu, 1997; Lortie-Forgues, Siegler, 2015; Lemonidis, Kaiafa, 2014; Stafylidou, & Vosniadou, 2004; Vamakoussi, & Vosniadou, 2010). Για την αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν την κατάλληλη Γνώση Περιεχομένου, δηλαδή την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς αριθμούς, όσο και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου, τη γνώση δηλαδή των παρανοήσεων των μαθητών, της αλυσίδας των διαδικασιών για τους ρητούς και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις τους για την διαλεύκανση των παρανοήσεών τους (Shulman, 2006).

Ωστόσο, προηγούμενες έρευνες έδειξαν ότι οι ΓΠ και ΠΓΠ των μελλοντικών δασκάλων είναι ανεπαρκείς (π.χ. Depaepe et al., 2015; Tirosh, 2000; Turnuklu & Yesildere, 2007).

Σημαντικές έρευνες έχουν γίνει για την μαθηματική απόδοση των μαθητών των δημοτικών σχολείων, αλλά πολύ λιγότερες για το τι καταλαβαίνουν οι ίδιοι οι δάσκαλοι. Λίγες ήταν αυτές που διερεύνησαν την μαθηματική κατανόηση των εν ενεργεία και υποψήφιων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οποίες έδειξαν όμως ότι πάρα πολλοί εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν αδυναμία στα μαθηματικά, πολλές φορές κάνουν κακή εφαρμογή του κανόνα, δεν καταλαβαίνουν την πραγματική σημασία των μαθηματικών πράξεων και γενικότερα δεν είναι προετοιμασμένοι να διδάξουν το μάθημα των μαθηματικών που τους έχει ανατεθεί (Cuff, 1993; Hungerford, 1994).

Η δουλειά του Shulman επηρέασε την έρευνα στη διδασκαλία και την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, κυρίως στα μαθηματικά και τις επιστήμες (Depaepe, Verschaffel, 2013). Οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν έδειξαν ότι οι δάσκαλοι έχουν ρόλο κλειδί στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού των μαθητών τους (Ball, 1990; Depaepe et al. 2015; Tirosh, 2000; Turkuklu & Yesildere, 2007).

Ενώ η πλειοψηφία των ερευνών εστιάζονται στους υποψήφιους εκπαιδευτικούς, η παρούσα έρευνα μελετά εν ενεργεία εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στόχος της έρευνας είναι η δυνατότητα βελτίωσης της Γνώσης Περιεχομένου και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς μέσω μιας επιμορφωτικής παρέμβασης. Ενώ στο εξωτερικό έχουν διενεργηθεί τέτοιες έρευνες, στην Ελλάδα δεν έχει γίνει κάποια τέτοια έρευνα.

Στο κείμενο που ακολουθεί παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται η εργασία και τα ερευνητικά ερωτήματα, ενώ στη συνέχεια η δομή της έρευνας και τα αποτελέσματά της.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια της αίσθησης του αριθμού. Παραθέτεται ο ορισμός της έννοιας και αναδεικνύεται η σημαντικότητά της στην μαθηματική εκπαίδευση. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση της έννοιας της κοινότητας μάθησης μέσα στο χρόνο και επισημαίνεται η αξία της στο τομέα της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι και οι μαθητές στους ρητούς αριθμούς και συγκεκριμένα στα κλάσματα. Επισημαίνονται οι παρανοήσεις που έχουν γι' αυτό το δύσκολο κομμάτι των μαθηματικών και εντοπίζονται οι πηγές τους. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για την Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου που πρέπει να διαθέτει ένας εκπαιδευτικός για μία αποτελεσματική διδασκαλία των ρητών αριθμών. Παρουσιάζονται οι σημαντικότερες έρευνες που έγιναν διεθνώς για την μελέτη της ΓΠ και της ΠΓΠ των υποψήφιων και των εν ενεργεία εκπαιδευτικών. Στο τέλος του πρώτου μέρους και στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών του καθηγητή Χαράλαμπου Λεμονίδη

για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών στο Δημοτικό Σχολείο. Το πρόγραμμα αυτό αποτέλεσε τον πυλώνα πάνω στον οποίο χτίστηκαν τα επιμορφωτικά σεμινάρια των εκπαιδευτικών.

Στη συνέχεια ακολουθεί το δεύτερο μέρος της εργασίας, όπου παρουσιάζεται η παρούσα έρευνα. Οριοθετείται ο κύριος στόχος της έρευνας και τα ερευνητικά ερωτήματα. Ακολουθεί η μεθοδολογία της έρευνας με τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή. Στη συζήτηση συνοψίζονται τα κύρια ευρήματα της έρευνας και η σημασία αυτών σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο.

Α. Θεωρητικό Πλαίσιο

1. Η Αίσθηση του Αριθμού

Τα τελευταία χρόνια ο ρυθμός εξέλιξης των σύγχρονων κοινωνιών αυξάνεται διαρκώς, με αποτέλεσμα την ταυτόχρονη αύξηση των απαιτήσεων από τους πολίτες τους. Υπάρχει ανάγκη για γνώσεις που δεν απαιτούνταν σε άλλες εποχές, με τις μαθηματικές και αριθμητικές γνώσεις να βρίσκονται στο ζενίθ τους. Λόγω του ότι τα μαθηματικά αποτελούν τη βάση σε οποιοδήποτε τεχνολογικό επίτευγμα και κρύβονται πίσω από κάθε τεχνολογική ανάπτυξη, το να είναι ένας πολίτης ενάριθμος και αριθμητικά εγγράμματος είναι πρωτεύον στόχος κάθε αναπτυγμένου κράτους σήμερα.

Ο Paulos (1998) επισημαίνει ότι η αναριθμησία συνεπάγεται με άγνοια βασικών αριθμητικών γνώσεων και μπορεί να προκαλέσει αδυναμία σε διάφορους τομείς της καθημερινής ζωής του ανθρώπου. Το σχολείο όμως δεν είναι απολύτως ικανό να παρέχει τις απαραίτητες αυτές γνώσεις ώστε να θεωρηθεί κάποιος άνθρωπος μαθηματικά ενάριθμος. Ποια είναι όμως τελικά η σημασία του όρους ενάριθμος;

Ο πρώτος ορισμός δόθηκε από την Βρετανική Κυβέρνηση (Cockcroft, 1982, παρ. 34) αναφέροντας ότι «*θα επιθυμούσαμε η λέξη ενάριθμος να αποδίδει την ταυτόχρονη ύπαρξη δύο χαρακτηριστικών. Το πρώτο από αυτά είναι η εξοικείωση με τους αριθμούς και η ικανότητα να χρησιμοποιεί κανείς μαθηματικές δεξιότητες που δίνουν την δυνατότητα σε ένα άτομο να αντιμετωπίζει τις πρακτικές απαιτήσεις της καθημερινής ζωής. Το δεύτερο είναι η ικανότητα του ατόμου να εκτιμά και να κατανοεί τις πληροφορίες που παρουσιάζονται με μαθηματικούς όρους, για παράδειγμα με γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα ή πίνακες ή με αναφορές σε ποσοστά αύξησης ή μείωσης. Συνολικά, αυτά σημαίνουν ότι ένα ενάριθμο άτομο θα πρέπει να είναι ικανό να αξιολογεί και να καταλαβαίνει μερικούς τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως μέσω επικοινωνίας*».

Ο Skemp (1976) προσπαθώντας να εμβαθύνει στο κομμάτι των νοερών υπολογισμών διαχώρισε τη γνώση σε εννοιολογική (relational) και εργαλειακή (instrumental). Η εννοιολογική γνώση εστιάζεται στην κατανόηση των εννοιών και την αλληλοσύνδεσή τους, ώστε ο μαθητής να ξέρει για ποιο λόγο κάνει τι και όχι να εφαρμόζει μηχανικά έναν αλγόριθμο, όπως συμβαίνει στην εργαλειακή. Κάποια χρόνια αργότερα οι McIntosh et al. (1994), στηριζόμενοι στους όρους του Skemp, επέκτειναν τους όρους αυτούς στον τομέα των στρατηγικών των νοερών υπολογισμών. Συγκεκριμένα, με βάση τις εργαλειακές στρατηγικές οι μαθητές χρησιμοποιούν κάποιες τεχνικές χωρίς να τις κατανοούν, όπως για παράδειγμα στην πράξη 1/2 : 1/4 εφαρμόζουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης δύο κλασμάτων: 1/2 : 1/4 = 1/2 x 4/1 = 4/2 = 2. Αντίθετα, στις εννοιολογικές στρατηγικές φαίνεται να κατανοούν τη σημασία των πράξεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στην πράξη 1/2:1/4 οι μαθητές αναπαριστούν τα κλάσματα σε ένα ρολόι και βλέπουν το 1/2 σαν μισή ώρα και το 1/4 σαν τέταρτο της ώρας. Έτσι, σκέφτονται ότι η μισή ώρα έχει 2 τέταρτα και έτσι δίνουν την απάντηση 2 (Λεμονίδης, 2013).

Έχει περάσει πάνω από μισός αιώνας που ο Dantzig (1954) προσπάθησε να θέσει όρια στο τι είναι τελικά η αίσθηση του αριθμού αναφερόμενος στην ικανότητα του ανθρώπου να χειρίζεται τόσο τους αριθμούς όσο και τις πράξεις μεταξύ τους. Παρόλα αυτά συνεχίζει να είναι μία έννοια που δύσκολα ορίζεται. Μετά από εκείνον, πολλοί ερευνητές εμπλούτιζαν την έννοια προσπαθώντας να δώσουν όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένο ορισμό. Ο Greeno (1991) προτείνει ότι «*η αίσθηση του αριθμού είναι ένα όρος που απαιτεί θεωρητική ανάλυση, από ότι έναν ορισμό*».

Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην ικανότητα ενός ατόμου να κατανοεί τους αριθμούς και τις πράξεις, να χειρίζεται καταστάσεις της καθημερινής ζωής που σχετίζονται με αριθμούς, καθώς και να χρησιμοποιεί ευέλικτες και αποτελεσματικές στρατηγικές για την εκτέλεση νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων, για την διαχείριση αριθμητικών προβλημάτων (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998; Sowder, 1992).

Κάποια χρόνια αργότερα οι Kalchman, Moss και Case (2001) προσθέτουν ότι τα χαρακτηριστικά της καλής αίσθησης του αριθμού περιλαμβάνουν: α) ευχέρεια στην εκτίμηση και την κρίση των μεγεθών, β) ικανότητα αναγνώρισης παράλογων αποτελεσμάτων, γ) ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς, δ) ικανότητα κίνησης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων και χρήση της πιο κατάλληλης αναπαράστασης.

Η αίσθηση του αριθμού επισημαίνεται μέσα στα έγγραφα μεταρρύθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης επειδή αντιπροσωπεύει την μάθηση των μαθηματικών ως μία νοερή (νοητική) δραστηριότητα. Το National Council of Teachers of Mathematics στο Principles and Standards for School Mathematics επισημαίνει ότι η αίσθηση του αριθμού είναι μια θεμελιώδης ιδέα στην οποία οι μαθητές κατανοούν τον αριθμό, τους τρόπους αναπαράστασης των αριθμών και τις σχέσεις μεταξύ τους, κατανοούν την σημασία των πράξεων και το πώς σχετίζονται η μία με την άλλη, και τέλος υπολογίζουν με ευχέρεια και κάνουν λογικές εκτιμήσεις (NCTM, 2000, p.32).

Οι McIntosh et al. (1992) δηλώνουν ότι η υψηλή ικανότητα στους γραπτούς υπολογισμούς δεν συνοδεύεται υποχρεωτικά από την αίσθηση του αριθμού. Αυτό το εύρημα επιβεβαιώνει ότι το περιεχόμενο στο οποίο δίνεται έμφαση είναι αυτό που διδάσκεται και συνάδει με τις δηλώσει (Sowder, 1988, p.227) ότι «*οι σωστές απαντήσεις δεν είναι ασφαλής ένδειξη καλής σκέψης» και ότι «οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εξετάζουν πέρα από τις απαντήσεις και να απαιτούν κάτι περισσότερο από απαντήσεις*». Μπορεί δηλαδή ένας μαθητής ή και ενήλικας να βρίσκει μηχανικά την σωστή απάντηση για μια πράξη, χωρίς να καταλαβαίνει τη σημασία των αριθμών ή της πράξης. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της διαίρεσης 1/2:1/4 που αναφέρθηκε παραπάνω, όπου εκείνοι που βρίσκουν το σωστό αποτέλεσμα, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι καταλαβαίνουν πως το 1/4 χωράει δύο φορές στο 1/2.

Πολλές φορές, ωστόσο, μεγάλο μέρος της προσοχής που δίνεται στην αίσθηση του αριθμού αποτελεί αντίδραση στην μεγάλη έμφαση που δίνεται στον γραπτό αλγόριθμο χωρίς την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού (Yea-Ling Tsao, 2004). Για παράδειγμα, η αντίδραση των μαθητών στην ερώτηση αν ο υπολογισμός φαίνεται λογικός, είναι να ξανά υπολογίσουν παρά να εξετάσουν το αποτέλεσμα υπό το πρίσμα του πλαισίου και των αριθμών που συμπεριλαμβάνει (Wyatt, 1986).

Έχει διαπιστωθεί (Λεμονίδης, 2013) ότι οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις είναι ένα υποσύνολο της αίσθησης του αριθμού, με αυτούς να εξαρτώνται άμεσα από την αίσθηση του αριθμού και πως «*η εξάσκηση με τους νοερούς υπολογισμούς δημιουργεί καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού*» (McIntosh, 1990; Sowder, 1990).

Ο Leutzinger (1999) δήλωσε ότι αφιερώνεται πάρα πολύς χρόνος στην επαναλαμβανόμενη εξάσκηση αντί σε διερευνητικές δραστηριότητες, οι οποίες δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν άλλες στρατηγικές σκέψης. Ο Calvert (1999) συμφωνεί ότι οι πρακτικές διεργασίες χωρίς σκέψη και κατανόηση προκαλούν εξάρτηση από τον τυποποιημένο γραπτό αλγόριθμο και εμποδίζουν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Bums, 1994; Kamii & Lewis, 1991). Οι νοερές στρατηγικές και η αίσθηση του αριθμού μπορεί να επιτευχθεί μέσα από εννοιολογική κατανόηση και όχι από απομνημονευμένους κανόνες (NCTM, 1995).

Έχουν γίνει πολλές έρευνες σε υποψήφιους δασκάλους, μελετώντας την αίσθηση αριθμού για τους ρητούς αριθμούς (Newton,2008; Tsao, 2004a, Yang, 2007; Yang, Reys &Reys, 2009). Τα αποτελέσματα όμως έδειξαν ότι οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών στην αίσθηση του

αριθμού όσο και στην χρήση στρατηγικών της αίσθησης του αριθμού και ευελιξίας ήταν χαμηλό.

Επίσης, ο Newton (2008) βρήκε ότι η ευελιξία των φοιτητών ήταν χαμηλή και δεν βελτιώθηκε αισθητά μετά από την διδασκαλία. Ο συγγραφέας υποστηρίζει ότι ευελιξία θεωρήθηκε η τάση να επιλέγονται εναλλακτικές διαδικασίες σε αντίθεση με τις γενικές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, 70 από τους 85 φοιτητές έλυσαν σωστά την πράξη 2/4 - 3/6 κατά τη διάρκεια του pre-test, με την εύρεση ενός κοινού παρονομαστή και στη συνέχεια την αφαίρεση των αριθμητών (π.χ. 6/12 - 6/12) και μόνο 7 φοιτητές χρησιμοποίησαν την τροποποίηση των κλασμάτων σε ½ (1 / 2-1 / 2). Ακόμη και μετά την διδασκαλία τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια, με 72 από τους 85 φοιτητές να κάνουν την πράξη με την χρήση κοινών παρονομαστών, ενώ οι 11 χρησιμοποίησαν τη μέθοδο 1/2 - 1/2.

2. Οι δυσκολίες των μαθητών και εκπαιδευτικών στους Ρητούς

Η περιορισμένη κατανόηση των μαθητών αλλά και των ενηλίκων στον τομέα των ρητών αριθμών και οι πολλαπλές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν έχουν ερευνηθεί και έχουν αποδειχθεί σε πολλές χώρες (Clarke, & Roche, 2009; Lemonidis, Kaiafa, 2014; Nunes, and Bryant., 2009; Mack, 1995; Stafylidou, & Vosniadou, 2004; Vamvakousi, & Vosniadou, 2004; Zhou et al., 2006).

Όλο και περισσότερο τα τελευταία χρόνια παρουσιάζονται θεωρίες σχετικά με τις αιτίες που προκαλούν δυσκολίες στους ρητούς αριθμούς. Μια από αυτές είναι η λεγόμενη προνομιακή θεωρία (Leslie, Gelman & Gallistel,2008; Wynn, 2002). Σύμφωνα με αυτή η ανάπτυξη της γνώσης των ακεραίων αριθμών κατέχει προνομιακή θέση σε σχέση με αυτή των ρητών, καθώς η ανάπτυξη της γνώσης των κλασμάτων και γενικότερα των ρητών αριθμών βασίζεται πάνω σε εκείνη των ακεραίων. Οι υποστηρικτές αυτές της θεωρίας δηλώνουν ότι εξειδικευμένοι μηχανισμοί μάθησης καθιστούν ευκολότερη τη μάθηση των ακέραιων αριθμών απ' ότι των κλασματικών ή άλλου τύπου αριθμών (Gelman & Williams, 1998; Wynn, 2002).

Μερικά χρόνια αργότερα, άλλη μια προσέγγιση βασισμένη στις αναπτυξιακές θεωρίες έρχεται να προσθέσει ότι οι ακέραιοι αριθμοί είναι βιολογικά πρωτογενείς, σε αντίθεση με τα κλάσματα που είναι βιολογικά δευτερογενείς (Geary, 2006). Θεωρεί πως οι περιορισμοί και οι μεροληψίες που κάνουν εύκολη τη μάθηση των ακεραίων αριθμών, δυσκολεύουν τη μάθηση των κλασμάτων.

Τέλος, μια τρίτη κατηγορία προσεγγίσεων είναι αυτή που βασίζεται στην θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής (Ni & Zhou, 2005; Vamvakousi & Vosniadou, 2004), που δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη της γνώσης των κλασμάτων σε σύγκριση με τις προνομιακές και αναπτυξιακές θεωρίες. Κύρια αιτία δυσκολίας των μαθητών, με βάση αυτή τη θεωρία αποτελεί η διαφορά μεταξύ των βαθιά ριζωμένων προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς και ορισμένα χαρακτηριστικά του συστήματος των ρητών αριθμών που διαφέρουν από εκείνα του συστήματος των φυσικών (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Σύμφωνα με αυτές, η «μεροληψία των φυσικών αριθμών», που παρεμποδίζει τη μάθηση των ρητών αριθμών, αναφέρεται σε αυτά τα συστηματικά λάθη που οφείλονται σε μία λάθος γενίκευση των προϋπάρχουσων γνώσεων για τους φυσικούς αριθμούς. Ένα παράδειγμα της «μεροληψίας των φυσικών αριθμών» είναι η λάθος υπόθεση ότι 2/5+ 3/4= 5/9, επειδή 2+3 ισούται με 5 και 5+4 με 9 (Depaepe et al., 2014).

Από αποτελέσματα ερευνών συμπεραίνουμε ότι οι προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών με τους φυσικούς αριθμούς επηρεάζουν αρνητικά τον χειρισμό των συμβόλων των ρητών αριθμών. Οι μαθητές χειρίζονται τα σύμβολα α/β ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς ή επικεντρώνονται στην προσθετική παρά στην πολλαπλασιαστική έκφραση της σχέσης μεταξύ των α και β. Παράλληλα, παρατηρήθηκε ότι θεωρούν πως όταν το δεκαδικός μέρος έχει περισσότερα ψηφία, είναι μεγαλύτερος ο αριθμός ή όταν οι όροι του κλάσματος είναι μεγάλοι αριθμοί, είναι μεγάλο και το κλάσμα. (Kieren, 1993; Moskal & Magone, 2000; Lamon, 1999; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Οι Stafylidou & Vosniadou, (2004) διερεύνησαν την κατανόηση των κλασμάτων σε Έλληνες μαθητές και παρατήρησαν ότι οι περισσότεροι μαθητές ηλικίας από 11 έως 13 ετών δεν χειρίζονταν τις γραπτές αναπαραστάσεις των κλασμάτων ως πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ του αριθμητή και του παρονομαστή. Ενώ πολλοί νεότεροι μαθητές (10 ετών) χειρίζονταν τον αριθμητή και τον παρονομαστή ως ανεξάρτητους αριθμούς.

Μία άλλη δυσκολία, που παρουσιάζεται στις έρευνες αλλά θα συναντήσει κάποιος εκπαιδευτικός και στην πράξη, είναι ότι οι μαθητές χειρίζονται τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως διαφορετικό είδος αριθμών και όχι ως εναλλασσόμενες αναπαραστάσεις των

ίδιων αριθμών (π.χ. O' Connor, 2001; Vergnaud, 1997). Οι Markovits, & Sowder, (1991) σε μια έρευνα τους σε μαθητές μέσης εκπαίδευσης βρήκαν ότι οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονταν στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ δεκαδικών και κλασματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, δυσκολεύονταν να ταξινομήσουν σε σειρά αριθμούς που παρουσιάζονται με μορφή κλασμάτων και δεκαδικών και είτε τους ταξινομούσαν ξεχωριστά είτε δήλωναν ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει.

Πριν τρία χρόνια ο Lemonidis, Kaifa (2014) πραγματοποίησαν μια έρευνα σε 122 και 144 μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης αντίστοιχα, που είχαν θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν αξιοσημείωτα. Το 73% των μαθητών της Ε΄ τάξης εκτέλεσε σωστά την αφαίρεση ¾ - ½ , αλλά μόνο το 3,3% μπόρεσε να υπολογίσει το αποτέλεσμα με τρεις διαφορετικούς τόπους. Το 46% των μαθητών έκανε λάθος στην πράξη 0,3 x 0,3 με απάντηση το 0,9. Από το λάθος αυτό αναδεικνύεται η αδυναμία ελέγχου της αξίας θέσης ψηφίου των δεκαδικών αριθμών, καθώς και η αντίληψη ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό. Η μεγαλύτερη αποτυχία παρουσιάστηκε όταν κλήθηκαν να βρουν υο ½ του 1/4 (32%). Εδώ οι μαθητές έναν διαίρεση αντί για πολλαπλασιασμό, επηρεαζόμενοι από την λογική των ακεραίων.

Δυσκολίες, όμως δεν παρουσιάζονται μόνο στους μαθητές του δημοτικού. Στο National Assessment of Educational Progress (NAEP) του 2004, το 50% των μαθητών της Γ' γυμνασίου (8th grade) δεν μπορούν να διατάξουν σωστά, σύμφωνα με το μέγεθός τους, τα κλάσματα 2⁄7, 1⁄12 και 5⁄9 (Martin, et al. 2007).

Αυτές τις δυσκολίες με τους ρητούς αριθμούς των μαθητών, ενηλίκων αλλά και εκπαιδευτικών σε όλα τα μέρη του κόσμου, προσπάθησαν να ερμηνεύσουν και να ταξινομήσουν διάφοροι ερευνητές όλα αυτά τα χρόνια (Lortie-Forgues, and Siegler, 2015, Van Dooren, Lehtinen, Verschaffel, 2015).

Μια βασική ερμηνεία, ανάμεσα στις πολλές που δίνονται για τις δυσκολίες με τους ρητούς αριθμούς είναι 'η προκατάληψη των φυσικών αριθμών' (the natural number bias) που υποστηρίζεται από πολλούς ερευνητές (π.χ. Gelman, R., 1991, Ni and Zhou, 2005, Vamvakoussi et al. 2011, 2012, Vamvakoussi, and Vosniadou, 2004, Van Dooren, Lehtinen, Verschaffel, 2015, Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015). Η προκατάληψη των φυσικών αριθμών αναφέρεται στην ιδέα ότι οι δυσκολίες με τους ρητούς αριθμούς μπορεί να προέρχονται από ακατάλληλες εφαρμογές των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Η καλή αίσθηση των φυσικών αριθμών είναι απαραίτητη και σημαντική για την ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών και γενικότερα για την μαθηματική κατανόηση. Αλλά αυτή η κατανόηση των φυσικών αριθμών μπορεί, σε αρκετές περιπτώσεις, να μην είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση των ρητών αριθμών και οι μαθητές να συνεχίζουν να εφαρμόζουν έμμεσα ή άμεσα τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους ρητούς αριθμούς. Εμφανίζονται λοιπόν συστηματικά λάθη όταν οι ρητοί αριθμοί γίνονται αντιληπτοί διαφορετικά από τους φυσικούς αριθμούς, ενώ όταν οι καταστάσεις των ρητών αριθμών είναι συμβατές με τη σκέψη στους φυσικούς αριθμούς δεν δημιουργούνται τέτοια λάθη (Nunes & Bryant, 2008).

Έχουν γίνει πολλές έρευνες ανά διαστήματα που παρουσιάζουν οργανωμένες κατηγορίες των δυσκολιών των μαθητών στους ρητούς αριθμούς (π.χ. Lortie-Forgues, and Siegler, 2015, Van Dooren, Lehtinen, Verschaffel, 2015). Μία από αυτές είναι των Lortie-Forgues, και Siegler (2015) όπου κατηγοριοποιούν τις δυσκολίες σε εγγενής και δυσκολίες πολιτισμικής προέλευσης. Ως εγγενείς θεωρούν τις δυσκολίες που μπορεί να υπάρχουν ανεξάρτητα από το εκπαιδευτικό σύστημα και τον πολιτισμό στον οποίο μαθαίνουν, ενώ ως δυσκολίες πολιτισμικής προέλευσης θεωρούν τους παράγοντες που δεν είναι εγγενείς αλλά καθορίζονται από τις πολιτισμικές αξίες και τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών συστημάτων.

Ο Λεμονίδης (2017) πραγματοποιεί μία κατηγοριοποίηση των δυσκολιών στους ρητούς αριθμούς πάνω σε τρεις βασικές ομάδες:

- Παράγοντες σχετικοί με τη διαφορετική μαθηματική φύση των φυσικών και ρητών αριθμών.
- Παράγοντες σχετικοί με το αφηρημένο των διαδικασιών των πράξεων των ρητών.
- Πολιτισμικοί παράγοντες.

Στην πρώτη ομάδα υπάρχουν πέντε παράγοντες που σχετίζονται με την διαφορετική φύση των φυσικών και των ρητών αριθμών. Ο πρώτος αφορά τον διαφορετικό προσδιορισμό του μεγέθους του ρητού απ' ότι του φυσικού αριθμού. Ο προσδιορισμός του μεγέθους των ρητών βασίζεται στη σχέση δύο ποσοτήτων, ενώ των φυσικών σε μία ποσότητα. (Kerslake, 1986, Kieren,1993, Moskal & Magone, 2000, Lamon, 1999; Moss, 2005, Stafylidou & Vosniadou, 2004). Σε περίπτωση όμως που δεν τηρηθεί αυτή η συνθήκη παρουσιάζονται λάθη όπως το να χειρίζονται οι όροι του κλάσματος ως ανεξάρτητοι αριθμοί, για παράδειγμα να θεωρούνται μεγαλύτερα τα κλάσματα που έχουν μεγαλύτερους όρους, να κρίνεται το μέγεθος ενός δεκαδικού από το πλήθος των ψηφίων του και τέλος να χρησιμοποιείται η «σκέψη του διάκενου». Με τον όρο αυτό διατυπώνεται η σκέψη ότι λαμβάνεται ως κριτήριο η διαφορά μονάδων του αριθμητή κα του παρονομαστή ενός κλάσματος. Για παράδειγμα, σε μια σύγκριση κλασμάτων 3⁄4 και 5/6 τα κλάσματα θεωρούνται ίσα επειδή και στα δύο υπολείπεται ένα για να γίνουν ίσα με τη μονάδα (Clarke & Roche, 2009).

Ο δεύτερος παράγοντας σχετίζεται με το πυκνό των ρητών αριθμών. Όπως είναι γνωστό σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς, οι φυσικοί είναι διακριτοί, δηλαδή υπάρχει επόμενος και προηγούμενος αριθμός. Αυτό δεν συμβαίνει στους ρητούς, όπου ανάμεσα με δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει επόμενος και προηγούμενος ενός ρητού (Vamakoussi, & Vosniadou, 2010, Vamakoussi et al. 2011).Έτσι, σε περίπτωση που δεν ληφθεί υπόψη η παραπάνω συνθήκη, οι μαθητές θεωρούν για παράδειγμα ότι μεταξύ του 0,3 και του 0,4 δεν υπάρχουν δεκαδικοί αριθμοί και πως ο επόμενος του 4/5 είναι το 5/5.

Ο τρίτος παράγοντας αφορά τον πολλαπλό συμβολισμό που υπάρχει στους ρητούς αριθμούς. Σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς που συμβολίζονται με έναν και μόνο τρόπο, οι ρητοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή δεκαδικού, κλάματος και ποσοστού (0,75=3/4=75%). Όλο αυτού έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να χειρίζονται τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως διαφορετικά είδη αριθμών και να δυσκολεύονται στην αναγνώριση και στον χειρισμό ισοδύναμων κλασμάτων (Khoury & Zazkis, 1994； Markovits, & Sowder, 1991; Nunes, et al. ,2006; O' Connor, 2001; Vergaud, 1997).

Η διαφορετική σημασία στο αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με πολλαπλασιαστή ή διαιρέτη μικρότερο της μονάδας αποτελεί τον τέταρτο παράγοντα δυσκολίας, αφού όταν πολλαπλασιάζουμε ρητό αριθμό με μικρότερο του ένα το αποτέλεσμα στης πράξης μικραίνει (Siegler & Lortie-Forgues, 2015； Vamvakoussi, al., 2012). Τέλος, ο τέταρτος παράγοντας δυσκολίας αφορά τη συνθήκη για την σύγκριση των κλασμάτων που αναφέρονται στο ίδιο όλο.

Η δεύτερη κατηγορία που προτείνει ο Λεμονίδης (2017) περιλαμβάνει την αυτοματοποίηση και την αδιαφάνεια των κανόνων των πράξεων των ρητών αριθμών και την διαφορετικότητα στους κανόνες των πράξεων των ρητών αριθμών. Οι κανόνες για την εκτέλεση πράξεων των ρητών είναι πυκνοί και δύσκολο να κατανοηθούν από τους μαθητές. Επίσης, οι κανόνες που ισχύουν στις πράξεις των ρητών αριθμών είναι διαφορετικοί σε κάθε μια πράξη. Όλα αυτά προκαλούν σύγχυση στους μαθητές.

Τέλος, ο Λεμονίδης (2017) στην τελευταία του κατηγορία αναφέρεται στους πολιτισμικούς παράγοντες που σχετίζονται με την εκπαίδευση. Οι Lortie-Forgues, και Siegler, (2015) διακρίνουν αυτή την κατηγορίας σε δύο ακόμη υποκατηγορίες, στους παράγοντες που σχετίζονται με την διδασκαλία και στους παράγοντες σχετικούς με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των εκπαιδευομένων. Ο Λεμονίδης (2015) υιοθετεί μόνο την πρώτη κατηγορία και επικεντρώνεται στους περιορισμούς στην κατανόηση του περιεχομένου και της παιδαγωγικής

γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών. Στον τομέα αυτό, οι κύριες δυσκολίες που παρουσιάζονται είναι το λάθος στην κατεύθυνση της επίδρασης της πράξης στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων και δεκαδικών με πολλαπλασιαστή ή διαιρέτη <1, η αδυναμία ερμηνείας των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων και αδυναμία δημιουργίας ενός προβλήματος που απεικονίζει τη σημασία των πράξεων αυτών και τέλος η μη ευελιξία στη χρήση των κανόνων των πράξεων και η άγνοια των στρατηγικών νοερού υπολογισμού των ρητών αριθμών.

Οι Luo, Lo. & Leu, (2011) σε μια διακρατική μελέτη ρώτησαν αμερικανούς και ταϊβανέζους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας να βρουν αν ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση κλασμάτων ήταν ο κατάλληλος τρόπος για να λύσουν ένα λεκτικό πρόβλημα. Βρέθηκε ότι οι Ταϊβανέζοι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είχαν πολύ υψηλότερη επίδοση (74%) από τους Αμερικανούς (34%). Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι επιδόσεις των εκπαιδευτικών μπορεί να επηρεάζονται και από πολιτισμικές διαφορές.

3. Γνώση Περιεχομένου και Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς

Πολλοί είναι οι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά ο ίδιος ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που παίζει τον καθοριστικό ρόλο στην μαθησιακή διαδικασία. Έτσι, δημιουργείται ο εύλογος συνειρμός ότι εκείνος που ξέρει καλά μαθηματικά είναι και ο καταλληλότερος για να τα διδάξει. Τι συμβαίνει όμως με την παράμετρο του να ξέρει να διδάσκει μαθηματικά;

Ο Lee Shulman, ένας από τους σημαντικότερους θεμελιωτές της έρευνας της διδακτικής των Μαθηματικών ανέπτυξε μία τυπολογία για να αποδώσει τον κατάλληλο χαρακτηρισμό και να προσδιορίσει εννοιολογικά την επαγγελματική γνώση για την διδασκαλία (Shulman, 1987).

Συγκεκριμένα διέκρινε τις εξής επτά κατηγορίες :

- Γενικές παιδαγωγικές γνώσεις, οι οποίες αναφέρονται σε γενικές αρχές και στρατηγικές διαχείρισης της τάξης και οργάνωσης.
- Γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους.
- Γνώση των εκπαιδευτικών πλαισίων που ποικίλουν ανάλογα με την εργασία σε ομάδα ή τάξη, την κυβέρνηση και την χρηματοδότηση των σχολικών περιφερειών, τον χαρακτήρα της κοινωνίας και του πολιτισμού.
- Γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών, στόχων, αξιών και η φιλοσοφική και ιστορική βάση τους.
- Γνώση περιεχομένου.
- Γνώση του αναλυτικού προγράμματος, των μέσων διδασκαλίας και των προγραμμάτων.
- Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, δηλαδή ο συνδυασμός του περιεχομένου με την παιδαγωγική που αποτελεί προσωπική ευθύνη του δάσκαλου.

Η πρώτη από τις τρεις τελευταίες και σημαντικότερες κατηγορίες, η γνώση περιεχομένου (ΓΠ), περιλαμβάνει τη γνώση για το αντικείμενο, για παράδειγμα τα Μαθηματικά, και τις οργανωτικές δομές του (Grossman, Wilson, & Shulman, 1989; Shulman, 1986; Wilson, Shulman, & Richert, 1987). Ο Shulman, (1986, p.9) αναφερόμενος σε αυτήν την κατηγορία, επισήμανε «*ο δάσκαλος πρέπει όχι μόνο να κατανοεί ότι κάτι είναι έτσι, αλλά επιπλέον να κατανοεί γιατί είναι έτσι*».

Η δεύτερη κατηγορία, γνώση του αναλυτικού προγράμματος, «*αντιπροσωπεύει τα πλήρη προγράμματα που έχουν σχεδιαστεί για την διδασκαλία κάθε αντικειμένου και θέματος, τα ποικίλα διαθέσιμα εκπαιδευτικά υλικά και την περιγραφή όλων των χαρακτηριστικών που λειτουργούν ως ενδείξεις και αντενδείξεις για τη χρήση του συγκεκριμένου αναλυτικού προγράμματος*» (Shulman, 1986, p.10).

Για την τρίτη κατηγορία, την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ΠΓΠ), ο Shulman την ορίζει ως*: «…οι πιο χρήσιμες αναπαραστάσεις αυτών των ιδεών, οι πιο ισχυρές αναλογίες (analogies), εικόνες, παραδείγματα, επεξηγήσεις και παρουσιάσεις – με μία λέξη, οι πιο χρήσιμοι τρόποι αναπαράστασης και διατύπωσης του μαθήματος οι οποίοι το καθιστούν κατανοητό στους άλλους…. Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, επίσης, περιλαμβάνει την κατανόηση του τι κάνει εύκολη ή δύσκολη τη μάθηση συγκεκριμένων θεμάτων. Τις αντιλήψεις και τις προκαταλήψεις που φέρνουν οι μαθητές διαφορετικών ηλικιών και υποβάθρων στη μάθηση θεμάτων και μαθημάτων που διδάσκονται συχνότερα.»* (Shulman, 1986).

Έξι χρόνια αργότερα, οι Fennema και Franke (1992) καθόρισαν 4 είδη γνώσεων που πρέπει να έχει εκείνος που καλείται να διδάξει μαθηματικά. Πρώτον, να γνωρίζει μαθηματικά, να γνωρίζει τις αναπαραστάσεις των μαθηματικών, να γνωρίζει τι ξέρουν οι μαθητές και τέλος, να έχει γνώσεις από διδασκαλία και να παίρνει αποφάσεις.

Οι Fennema και Franke (1992) συμφώνησαν ότι αν ο δάσκαλος έχει εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, τότε επηρεάζει και την διδασκαλία των μαθηματικών θετικά. Επίσης, έδωσαν μεγάλη βαρύτητα στην γνώση των αναπαραστάσεων των μαθηματικών, καθώς τα μαθηματικά αποτελούν ένα μεγάλο σύνολο αφηρημένων εννοιών, τονίζοντας ότι «*αν οι εκπαιδευτικοί δεν ξέρουν πώς να μεταφέρουν αυτές τις αφηρημένες έννοιες σε μια μορφή που επιτρέπει στους μαθητές να συσχετίσουν τα μαθηματικά με αυτά που ήδη γνωρίζουν, δεν θα κατανοήσουν αυτά που μαθαίνουν*». Το να γνωρίζουν τι ξέρουν ήδη οι μαθητές είναι πολύ σημαντικό στοιχείο, καθώς σύμφωνα με τους ίδιους , η μάθηση βασίζεται στο τι συμβαίνει στην τάξη, όχι μόνο στο τι κάνουν οι ίδιο οι μαθητές αλλά και στο περιβάλλον διδασκαλίας. Τέλος, οι πεποιθήσεις, οι γνώσεις, οι κρίσεις και οι σκέψεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν τις αποφάσεις που λαμβάνουν, οι οποίες κατά συνέπεια καθορίζουν τα σχέδια και τις ενέργειές τους στην τάξη (Fennema και Franke, 1992).

Βασιζόμενοι στην έννοια της ΠΓΠ του Shulman (1987), οι αποτελεσματικοί δάσκαλοι μπορούν να αποκτήσουν βαθιά γνώση στο πώς να αναπαραστήσουν το αντικείμενο της μάθησης στους μαθητές (Parker & Heywood, 1987).

Σύμφωνα με τους An, Kulm και Wu (2004) η ΠΓΠ έχει τρεις άξονες: την γνώση περιεχομένου, την γνώση του αναλυτικού προγράμματος και την γνώση της διδασκαλίας. Επιπλέον, επισήμαναν την σημαντικότητα της γνώσης της διδασκαλίας και την δέχθηκαν σαν κύριο στοιχείο της γνώσης περιεχομένου. Τι εννοούμε όμως όταν λέμε γνώση της διδασκαλίας; Σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικού γνωρίζει τον τρόπο που μπορεί να σκέφτονται οι μαθητές, μπορεί και αντιμετωπίζει τις παρανοήσεις που έχουν, χτίζει πάνω στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις που έχουν για τα μαθηματικά, προωθεί τον και εμπλέκει τους μαθητές στην μάθηση των μαθηματικών (An, Kulm & Wu, 2004). Συνοψίζοντας, οι Grouws & Schulz (1992) αναφέρουν ότι «*η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου περιλαμβάνει, χωρίς να περιορίζεται όμως, χρήσιμες αναπαραστάσεις, ξεκάθαρα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, βοηθητικές αναλογίες, σημαντικές σχέσεις και συνδέσεις μεταξύ των ιδεών*» (Grouws & Schulz, 1996: 443).

Σύμφωνα με τον Shulman (1986) η γνώση περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αποτελούν κύρια μέρη μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών. Σε περίπτωση που δομούνται μαθηματικές έννοιες στο μυαλό των μαθητών, τόσο η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου όσο και η γνώση περιεχομένου είναι απαραίτητες. Σύμφωνα με τους Kahan, Cooper και Bethea's (2003) οι ερευνητές συχνά καταλήγουν ότι «*οι μαθητές θα μάθουν καλά μαθηματικά εάν οι δάσκαλοι ξέρουν πολύ καλά μαθηματικά αλλά η γνώση περιεχομένου των μαθηματικών δεν είναι επαρκής για καλή διδασκαλία* (223)». Επίσης οι ίδιοι υπογραμμίζουν ότι η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου είναι «*ειδικό περιεχόμενο και την ίδια στιγμή υπερβαίνει την γνώση των μαθηματικών που ένας μαθηματικός ίσως δεν την κατέχει*» (Kahan, Cooper & Bethea, 2003: 223).

Η δουλεία του Shulman επηρέασε πολύ την έρευνα στην διδασκαλία και στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, κυρίως στην εκπαίδευση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών (Depaepe, Verschaffel, & Kelchtermans, 2013). Στην μαθηματική εκπαίδευση, τρεις έρευνες μεγάλη κλίμακας καθιέρωσαν την εμπειρική έρευνα στην ΓΠ και στην ΠΓΠ των εκπαιδευτικών, καθώς και την σχέση ανάμεσα στην διδασκαλία των εκπαιδευτικών και στα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών: η έρευνα MKT (Mathematical Knowledge for Teaching), η COACTIV (professional competence of teachers, COgnitively ACTIVating instruction, and development of students' mathematical literacy) και η TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics).

Η μελέτη COACTIV διεξήχθη στη Γερμανία το 2003 και διερεύνησε την επαγγελματική γνώση των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με στόχο να εξετάσει το αντίκτυπο που έχουν η ΓΠ και η ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στις επιδόσεις των μαθητών τους στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα οι ειδικές γνώσεις των εκπαιδευτικών για τα

αντικείμενα των μαθηματικών συσχετίζονται με υψηλής ποιότητας διδασκαλία και μάθηση. Η ΠΓΠ ως ειδική μορφή της μαθηματικής γνώσης είναι αδιανόητη χωρίς την επαρκή ΓΠ, αλλά δεν μπορεί να την υποκαταστήσει. Κάποιο έλλειμμα στην ΓΠ είναι εις βάρος της ΠΓΠ περιορίζοντας το πεδίο ανάπτυξης της μάθησης των μαθητών.

Οι Ball, Hill και οι φοιτητές τους (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Rowan, & Ball, 2005) ερεύνησαν τις μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών για διδασκαλία και την επίδρασή τους στην ποιότητα της διδασκαλίας και στις αποδόσεις των μαθητών τους. Η MKT καλύπτει τρεις κατηγορίες που σχετίζονται με την ΓΠ: η κοινή, η ειδική και η οριζόντια ΓΠ, καθώς και άλλες τρεις που σχετίζονται με την ΠΓΠ: γνώση του περιεχομένου και των μαθητών, του περιεχομένου και της διδασκαλίας, του περιεχομένου και του αναλυτικού προγράμματος (Ball, Themes & Phelps, 2008).

Πολλές ερευνητές ασχολήθηκαν με διαφορετικές πτυχές της ΓΠ και της ΠΓΠ. Οι Jones και Moreland (2004) περιέγραψαν τα πλαίσια και τα γνωστικά εργαλεία που πρέπει να έχουν αναπτυχθεί για να ενισχυθεί η ΠΓΠ των δασκάλων στα δημοτικά σχολεία. Οι Daehler και Shinohara (2001) ερεύνησαν την δυναμική των υποθέσεων στην διδασκαλία της φυσικής για την εμβάθυνσης στην ΓΠ και στην ΠΓΠ. Ο Stacey και άλλοι (2001) ερεύνησαν την ΓΠ και την ΠΓΠ των υποψηφίων εκπαιδευτικών στην δεκαδική αρίθμηση. Ζήτησαν από τους υποψήφιους δασκάλους να συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς και να κάνουν μία λίστα με τις δυσκολίες που μπορεί να συναντούσαν οι μαθητές καθώς και να εξηγήσουν το γιατί. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν την ανάγκη της εκπαίδευσης των δασκάλων για έμφαση στην ΓΠ και στην ΠΓΠ που περιλαμβάνει την κατανόηση των κοινών δυσκολιών των μαθητών.

Είναι καθοριστικός προφανώς, ο ρόλος των εκπαιδευτικών στο να βοηθούν τους μαθητές τους να αναπτύξουν την αίσθηση του αριθμού, υπάρχουν πολλές μελέτες σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς που εξετάζουν την Γνώση Περιεχομένου (Content knowledge, CK) και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge, PCK) στους ρητούς αριθμούς (π.χ., Ball, 1990, Behr, et al. 1997, Borko, et al. 1992, Cramer & Lesh 1988, Depaepe et al. 2015, Newton, 2008, Tirosh, 2000, Turkulku & Yesildere, 2007) υπάρχουν και λίγες μελέτες σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς (Lemonidis, Tsakiridou, Meliopoulou, 2017, Ma, 1999, Post et al. 1988, Zhou, Peverly, & Xin, 2006).

Οι Λεμονίδης, Τσακιρίδου και Μελιοπούλου (2017) στην έρευνά τους εξέτασαν την ΓΠ και την ΠΓΠ των Ελλήνων εκπαιδευτικών στην αίσθηση του αριθμού και ειδικότερα στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. Εξετάστηκαν 70 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι δίδασκαν τα τελευταία πέντε χρόνια στην Ε΄ και Στ΄ τάξη. Οι εκπαιδευτικοί απάντησαν σε 24 ερωτήσεις ΓΠ στους ρητούς αριθμούς και σε 3 ερωτήσεις σχετικές με τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των ρητών αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ΓΠ των εκπαιδευτικών ήταν υψηλή σε απλές πράξεις κλασμάτων, δεκαδικών και ποσοστών, ενώ μόνο οι μισοί έδειξαν ότι είχαν βαθιά κατανόηση των ρητών αριθμών, που σχετίζεται με την ΠΓΠ. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας σχετίζονται άμεσα με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών που παρουσιάζουν την ίδια έλλειψη τόσο σε εν ενεργεία (Ma, 1999; Post et al, 1988) όσο και σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς (Ball, 1990; Depaepe et al. 2015; Tirosh, 2000; Turkulku & Yesildere, 2007).

Οι έρευνες στην διαίρεση κλασμάτων έχουν δείξει ότι οι δάσκαλοι συγχαίουν τις καταστάσεις όπου απαιτούν διαίρεση με εκείνες που θέλουν πολλαπλασιασμό (Armstrong & Bezuk, 1995; Ball, 1990; Borko, Eisenhart, Brown, Underhall, Jones, & Agard, 1992; Ma, 1999; Sowder, Philipp, Armstrong, & Schappelle, 1998). Ο Ball (1990) ζήτησε από 10 υποψήφιους εκπαιδευτικούς και 9 καθηγητές μαθηματικών να λύσουν την πράξη 1 ¾ : ½ και να διατυπώσουν ένα πρόβλημα με λύση αυτή τη διαίρεση. Από τους 19 εκπαιδευτικούς οι 17 υπολόγισαν σωστά τη πράξη και μόνο οι 5 ήταν ικανοί να κάνουν κάποιο πρόβλημα όπου

φαινόταν το αυτή τη πράξη, 1 εκπαιδευτικός αποτύπωσε πρόβλημα για την πράξη 1 ¾ x ½ και οι 8 δεν μπόρεσαν να δημιουργήσουν κανένα πρόβλημα είτε σωστό είτε λάθος.

Ο Borko (1996) αναφέρει μία περίπτωση όπου ένας υποψήφιος δάσκαλος ρωτήθηκε από έναν μαθητή του να εξηγήσει την αντιστροφή στην πράξη της διαίρεσης και τον πολλαπλασιασμό στην πράξη της διαίρεσης ¾ : 1/2. Ο εκπαιδευτικός για να το εξηγήσει διατύπωσε ένα πρόβλημα και οι τάξη υπολόγιζε την πράξη. Το πρόβλημα όμως παρουσίαζε μία κατάσταση όπου έδειχνε την πράξη ¾ x ½ αντί για τη διαίρεση.

Η Dina Tirosh (2000) πραγματοποίησε μία έρευνα σε 30 υποψήφιους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης του Ισραήλ. Η έρευνα εστιάζεται στη διερεύνηση και ενίσχυση της ΠΓΠ των υποψηφίων εκπαιδευτικών στη διαίρεση κλασμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν σοβαρά προβλήματα στη ΠΓΠ. Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί ξέρουν να διαιρούν κλάσματα αλλά δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τη πράξη. Παρουσιάζουν δυσκολία στο να προβλέψουν τα λάθη των μαθητών τους και όταν το κάνουν εστιάζουν μόνο στα αλγοριθμικά. Μετά από εξάσκηση όμως υπήρξε καλύτερη κατανόηση των παρανοήσεων και σε διαδικαστικό και σε εννοιολογικό επίπεδο.

Έρευνα σε 45 υποψήφιους καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πραγματοποίησαν οι Yesildere & Turnuklu (2007) στην Τουρκία. Οι μαθηματικοί απάντησαν σε ερωτήσεις ανοιχτού τύπου: έλυσαν προβλήματα (ΓΠ) και προέβλεψαν τις δυσκολίες των μαθητών (ΠΓΠ). Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι υποψήφιοι μαθηματικοί έχουν δυσκολία στο να προβλέψουν τις δυσκολίες που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές τους.

Κάποια χρόνια μετά οι Depaepe et all., (2015) πραγματοποίησαν μια συγκριτική έρευνα μεταξύ της ΓΠ και της ΠΓΠ 192 εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί έχουν κενά στη ΓΠ και στη ΠΓΠ. Μάλιστα, οι επιδόσεις τους στη ΓΠ ήταν υψηλότερες από ότι στη ΠΓΠ. Παρόλα αυτά όμως, η ικανότητά τους αυτή δεν τους έδινε τη δυνατότητα να απαντήσουν και σε ερωτήσεις ΠΓΠ. Φάνηκε ότι η ΓΠ και η ΠΓΠ σχετίζονται θετικά. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι η ΓΠ και η ΠΓΠ είναι καθοριστικοί παράγοντες της ποιότητας της διδασκαλίας και της προόδου των μαθητών.

4. Κοινότητες Μάθησης

Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών αποτελεί κύριο ζήτημα την εκπαιδευτικής πολιτικής όλων των χωρών τα τελευταία χρόνια. Οι παλαιότερες μορφές επιμόρφωσης δεν ήταν αποτελεσματικές αφού κρίθηκαν μονοδιάστατες, δεν πρόσφεραν ουσιαστική βοήθεια στους εκπαιδευτικούς και δεν κάλυπταν τις εκπαιδευτικές και προσωπικές τους ανάγκες (Μαυρογιώργος, 1996; Βεγρίδης & Κόκκος, 2010; Μόνεσης, 2011).

Αυτός είναι και ο λόγος που υπάρχει μία στροφή στη θεώρηση της διδασκαλίας ως μια ερευνητική διαδικασία, η οποία συνδυάζει την ανάπτυξη θεωρίας και πράξης, βοηθά τον εκπαιδευτικό να ενισχύσει την αυτοπεποίθησή του, να διευρύνει τις πρακτικές του, να εμβαθύνει σε αυτές, ελέγχοντας όμως ταυτόχρονα τις εκπαιδευτικές αξίες που τις ορίζουν, σε σχέση με το ευρύτερο κοινωνικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον (Τσάφος & Κατσαρου, 2000). Οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν μαθαίνοντας και μαθαίνουν διδάσκοντας, αναστοχάζονται και μετασχηματίζουν τη θεωρητική γνώση σε διδακτική (Κουτσελίνη & Ιωαννίδου, 2010).

Γι' αυτό το λόγο οργανώνονται σε δίκτυα, ώστε να συνεργαστούν και να αναπτύξουν την κουλτούρα της μάθησης. Τα δίκτυα αυτά, οι τυπικές και άτυπες μορφές επιμόρφωσης αποκτούν όλο και σημαντικότερο ρόλο σήμερα (Μπαγάκης, 2011). Η δημιουργία τέτοιων ομάδων από τους εκπαιδευτικούς μετατρέπεται σε κοινότητες μάθησης.

Αρχικά, οι κοινότητες ορίζονται ως σύνολα ανθρώπων που μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά, όπως το μέγεθος, η τοποθεσία, ο χώρος και ο χρόνος (Preece, 2000). Ένας τέτοιος ορισμός συνδέει την έννοια της κοινότητας με την επικράτεια στην οποία υπάρχει, δίνοντας περισσότερο έμφαση στη συνύπαρξη ατόμων στον ίδιο χώρο και στον ίδιο χρόνο. Ένας άλλος ορισμός της κοινότητας τονίζει περισσότερο την ύπαρξη κοινού ενδιαφέροντος ανάμεσα στα μέλη και δεν θεωρείται απαραίτητη η παρουσία των μελών στον ίδιο χώρο και χρόνο. Ο Hugg το 1992 προσθέτει στον ορισμό που δίνει ότι η κοινότητα είναι ένα σύνολο ανθρώπων, όπου τα μέλη αλληλεπιδρούν για να εκτελέσουν μία διεργασία ή να ολοκληρώσουν ένα κοινό στόχο.

Ήδη από τον Μεσαίωνα, η έννοια της κοινότητας άρχισε να εξελίσσεται. Μέσα σε μία κοινωνία που διαρκώς εξελίσσεται αλλάζει και η σημασία των λέξεων. Αυτό συμβαίνει και με την κοινότητα, μία λέξη δυναμική (Anderson, 1999). Ορισμένοι ερευνητές (Wenger, 1999) θεωρούν ότι αυτή η συμμετοχή σε κοινότητες, τις Κοινότητες Πρακτικής, όπως τις ονομάζει, αποτελούν το βασικό παράγοντα μάθησης.

Οι Κοινότητες Μάθησης στηρίζονται στις θεωρίες μάθησης που αποδεικνύουν το ρόλο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στην οικοδόμηση της γνώσης και την αλλαγή του ρόλου του δασκάλου ως διαμεσολαβητή της γνώσης, κυρίως του Dewey και του Vygotsky (Brook & Oliver, 2003; Δαπόντες, 2002). Έχουν οριστεί σε ποικίλους τρόπους στη βιβλιογραφία, προσδιοριζόμενες ως μία ομάδα ατόμων που μοιράζονται το κοινό ενδιαφέρον τους και το κοινό σκοπό, που είναι η καλλιέργεια της μάθησης, μέσα από τα πλαίσια της κοινότητας (Kilpatrick, et. Al., 2003).

Η ιδέα της κοινότητας μάθησης έχει συζητηθεί ως εναλλακτική πρόταση της παραδοσιακής διδασκαλίας (Wilson & Ryder, 1996). Οι κοινότητες μάθησης αποτελούνται από άτομα που συνδέονται με φυσική θέληση, μοιράζονται κοινές αξίες και ιδανικά και επηρεάζουν το ένα το άλλο στη μαθησιακή διαδικασία (Kouch & Schwier, 1997). Τέτοιες κοινότητες οικοδομούνται βασιζόμενες σε αρχή κοινής συμμετοχής, ενώ την ίδια στιγμή προκαλούν τις παραδοσιακές μορφές σχέσεων δασκάλου – μαθητή (Roth, 1998, αναφ. P. Ringle, 2002), δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είναι πλέον φορείς της πληροφορίας αλλά συνεργάτες σε συνομιλίες, που σκοπό έχουν την οικοδόμηση της γνώσης. Όλα τα μέλη μιας κοινότητας μάθησης αναμένεται να μάθουν, να είναι έτοιμα να εμπλακούν στις απαιτούμενες δραστηριότητες (Wilson & Ryder, 1996) και οφείλουν να ενδιαφέρονται για την επιτυχία των άλλων μελών (Rovai, 2002). Η καλλιέργεια προσωπικών σχέσεων και η ανταλλαγή πληροφοριών οδηγεί στη δημιουργία ισχυρών κοινωνικών δεσμών (Moller, 1998).

Απαραίτητη είναι η διασφάλιση της επικοινωνίας ανάμεσα στα μέλη μιας ομάδας, ώστε να μην δημιουργούνται αποκλεισμοί (Pea, 1994). Αυτό που είναι περισσότερο σημαντικό είναι η συνεργασία των μελών μιας κοινότητας μάθησης. Ο Schrage (1990) υποστηρίζει ότι η συνεργασία είναι το κλειδί της επιτυχίας για μια κοινότητα. Μέσω της συνεργασίας και την εκπλήρωση των μαθησιακών στόχων και την διεκπεραίωση εργασιών καλλιεργούνται οι διαπροσωπικές σχέσεις μεταξύ των μελών (Hare & Davies, 1994). Η καλλιέργεια διαπροσωπικών σχέσεων μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην ανάπτυξη δεσμών εμπιστοσύνης μεταξύ των μελών μιας μαθησιακής κοινότητας (Cutler, 1995). Αυτό κρίνεται απαραίτητο για να παραμείνουν όλα τα μέλη αφοσιωμένα στη μαθησιακή διαδικασία (Garber, 2004).

Η καλλιέργεια μιας αίσθησης κοινότητας είναι απαραίτητη και οδηγεί σε μια πετυχημένη μαθησιακή διαδικασία (Palloff & Pratt, 1999). Η αίσθηση της κοινότητας συνδέεται με μια αύξηση στην επιμονή των μαθητών να μάθουν, στη ροή των πληροφοριών, στη διαθεσιμότητα υποστήριξης, στη δέσμευση σε κοινούς στόχους, στη συνεργασία και στη γενικότερη ικανοποίηση (Rovai, 2002). Ο Schwier (2002, αναφ. από Garber, 2004) ισχυρίζεται ότι στο εσωτερικό μιας κοινότητας οι ισχυρές συνδέσεις ανάμεσα στα μέλη οδηγούν σε κοινές αξίες, οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε νέα γνώση και μάθηση.

Με τις κοινότητες μάθησης επιτυγχάνεται η εξ αποστάσεως εκπαίδευση σε διάφορα θέματα. Είναι ιδιαίτερα σημαντική η συνεισφορά των ψηφιακών κοινοτήτων στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και στην εφαρμογή προγραμμάτων δια βίου μάθησης (Κανελλόπουλος, 2005; Φατσέα & Ορφανός, 2006). Η μάθηση μέσω ψηφιακών κοινοτήτων είναι ιδιαίτερα σημαντική ειδικότερα στην σύγχρονη εποχή καθώς διαθέτει πολλά πλεονεκτήματα. Διαθέτει ευελιξία, χωρίς χωρικούς και χρονικούς περιορισμούς, όπως η παραδοσιακή διδασκαλία. Σημαντικό ρόλο στο συγκεκριμένο τύπο μάθησης παίζει και η παροχή εκπαιδευτικού υλικού, που διατίθεται μέσω του διαδικτύου, κρατώντας το άτομο πάντα ενημερωμένο, με ένα τρόπο πιο εύχρηστο και οικονομικό (Κανελλόπουλος, 2005).

Σύμφωνα με τον ορισμό που παρουσιάζουν οι Φατσέα & Ορφανός (2006) και ο οποίος προέρχεται από τους Barab & Schat (2001), οι ψηφιακές κοινότητες μάθησης είναι ένα συνεχές κοινωνικό δίκτυο που αποτελείται από άτομα τα οποία έχουν ως κοινό σκοπό την ανάπτυξη και το μοίρασμα μιας βάσης γνώσεων, ενός συνόλου πεποιθήσεων, αξιών κι εμπειριών που αφορούν μια κοινή τους πρακτική ή στηρίζονται σε έναν αμοιβαίο στόχο, έχοντας ως βασικό βοηθητικό τους εργαλείο στην προσπάθειά τους την τεχνολογία για την επικοινωνία των χρηστών και συγκεκριμένα τις τεχνολογίες επικοινωνίας και πληροφορίας και το διαδίκτυο.

Οι κοινότητες μάθησης προϋπήρχαν κατά πολύ της δικτυακής τεχνολογίας. Όσο όμως οι νέες τεχνολογίες διαδίδονται και χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο, τόσο αυξάνεται η δημιουργία δικτυακών κοινοτήτων μάθησης (Garber, 2004), η χρήση των οποίων εισάγει ανεπανάληπτες δυνατότητες για διδασκαλία, μάθηση και συνεργασία (Harasim, 199; Linn, 1998, αναφ. από Pringle, 2002).

5. Νέο Πρόγραμμα σπουδών στους Ρητούς

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία εντοπίζεται όλο και πιο συχνά η έννοια της τροχιάς μάθησης (learning trajectories). Ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο ήταν ο M. Simon (1995), και μάλιστα τον όρο «υποθετικές τροχιές μάθησης», προσπαθώντας να αναπαραστήσει «τα μονοπάτια από τα οποία μπορεί να προχωρήσει η μάθηση» (σελ. 135) όταν οι μαθητές, προχωρούν από τα δικά τους σημεία εκκίνησης προς ένα επιδιωκόμενο μαθησιακό στόχο.

Σύμφωνα με τον Simon μια υποθετική τροχιά μάθησης για ένα μάθημα "αποτελείται από τρεις συνιστώσες: το μαθησιακό στόχο που καθορίζει την κατεύθυνση, τις μαθησιακές δραστηριότητες, και τις υποθετικές διαδικασίες μάθησης μια πρόβλεψη του τρόπου που θα εξελιχθούν η σκέψη και η κατανόηση των μαθητών στο πλαίσιο των μαθησιακών δραστηριοτήτων" (Simon, 1995, σελ. 136).

Οι τροχιές μάθησης είναι μια θεωρία που συνθέτει ερευνητικά αποτελέσματα από τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών για να περιγράψει μια εξελικτική πορεία μάθησης και διδασκαλίας προς κάποιους στόχους μαθηματικών περιεχομένων (Λεμονίδης, 2017).

Οι Clements and Sarama (2004) δίνουν τον παρακάτω ορισμό για τις τροχιές μάθησης: «*Είναι οι περιγραφές της σκέψης και της μάθησης των παιδιών σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα, και μια σχετική εικαζόμενη διαδρομή διαμέσου ενός συνόλου διδακτικών έργων που έχουν σχεδιαστεί για να προκαλέσουν αυτές τις διανοητικές διαδικασίες ή ενέργειες. Αυτές υποθέτονται για να μετακινήσουν τα παιδιά διαμέσου μιας αναπτυξιακής εξέλιξης επιπέδων της σκέψης, που δημιουργήθηκε με πρόθεση την υποστήριξη των επιδόσεων των παιδιών σε συγκεκριμένους στόχους αυτού του μαθηματικού τομέα.*» (σελ.83).

Στις τροχιές μάθησης περιγράφεται μια υποθετική πορεία ανάπτυξης της κατανόησης και της μάθησης του παιδιού σε συγκεκριμένους μαθηματικούς στόχους αλλά και προτείνονται διδακτικά έργα που σχεδιάστηκαν για να προκαλέσουν αυτήν την ανάπτυξη. Οι τροχιές μάθησης είναι μια σύγχρονη έννοια που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό πιο συναφών και διδακτικά χρήσιμων προτύπων, προγραμμάτων σπουδών, αξιολογήσεων και προσεγγίσεων για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στο διεθνή χώρο (Clements, & Sarama, 2009, Confrey, et al. 2011, Daro, et al. 2011, Sztajn, et al. 2012).

Οι Clements & Sarama (2009) σημειώνουν ότι: "Οι τροχιές μάθησης έχουν τρία μέρη: ένα μαθηματικό στόχο, μια αναπτυξιακή διαδρομή κατά μήκος της οποίας τα παιδιά αναπτύσσονται για να φτάσουν αυτόν τον στόχο, και ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες, ή έργα, που ταιριάζουν με καθένα από τα επίπεδα της σκέψης σε αυτήν την διαδρομή και βοηθούν τα παιδιά να αναπτύσσονται προς όλο και υψηλότερα επίπεδα σκέψης." (σελ. 3).

Συγκεκριμένα οι Clements & Sarama (2009, σελ 3-4) λέγοντας μαθησιακό στόχο αναφέρονται στις Μεγάλες Ιδέες των μαθηματικών, δηλαδή στο σύνολο εννοιών και των δεξιοτήτων που είναι μαθηματικά κεντρικές και συνεκτικές σύμφωνες με τη σκέψη του παιδιού και γενεσιουργοί μελλοντικής μάθησης. Οι Clements & Sarama λένε ότι αυτές οι μεγάλες ιδέες προέρχονται από διάφορα προγράμματα όπως αυτά του National Council of Teachers of Mathematics και το National Math Panel (NCTM, 2006; NMP, 2008). Αναφέρουν για παράδειγμα, ως μια μεγάλη ιδέα την εξής: η απαρίθμηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε μια συλλογή.

Στο δεύτερο επίπεδο η τροχιά μάθησης περιγράφει μια τυπική διαδρομή που ακολουθούν τα παιδιά στην ανάπτυξη της κατανόησης και των ικανοτήτων σχετικά με αυτό το μαθηματικό περιεχόμενο. Τέλος, το τρίτο μέρος μιας τροχιάς μάθησης αποτελείται από ένα σύνολο διδακτικών έργων που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα επίπεδα σκέψης της αναπτυξιακής εξέλιξης.

Ο Λεμονίδης (2017) στο βιβλίο του «Στην τροχιά των ρητών» προτείνει ένα νέο πρόγραμμα σπουδών για την διδασκαλία των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών σε όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου. Το νέο αυτό πρόγραμμα βασίζεται σε ουσιαστικές καινοτομίες και αλλαγές που θα επιφέρουν καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση των ρητών αριθμών. Οι βασικότερες καινοτομίες και αλλαγές είναι τέσσερις.

Πρώτη και σημαντικότερη αλλαγή είναι η σειρά παρουσίασης των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. Η πορεία παρουσίασης είναι από τα κλάσματα προς τους δεκαδικούς αριθμούς και όχι το αντίθετο. Θεωρείται πιο σωστά ιστορικά και επιστημολογικά, οι δεκαδικοί αριθμοί να θεμελιώνονται με βάση τα δεκαδικά κλάσματα. Οπότε, παρουσιάζονται τα κλάσματα στην Γ΄ τάξη και με βάση τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται οι δεκαδικοί αριθμοί στην Δ΄ τάξη. Σήμερα τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί εισάγονται ταυτόχρονα για πρώτη φορά στην Γ΄ τάξη. Και ενώ τα κλάσματα εισάγονται στη Γ΄ τάξη, στη Δ΄ τάξη δεν προχωρά καθόλου η διδασκαλία τους, παρά μόνο η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών. Με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα μεγάλο κενό και να υπάρχει συσσώρευση στην Ε΄ τάξη. Γι' αυτό το λόγο προτείνεται ισορροπημένη και εξελικτική κατανομή των εννοιών σε όλες τις τάξεις.

Επίσης, έχει παρατηρηθεί πως η παραδοσιακή διδασκαλία δίνει μεγάλη έμφαση στους κανόνες και στους αλγόριθμους και τους εισάγει πρόωρα, χωρίς να υπάρξει κατανόηση. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην ανάγκη να υπάρχει πρώτα από όλα βαθιά κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και των πράξεων με κλάσματα. Συγκεκριμένα, επιδιώκεται η κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την δημιουργία και την ανάλυση του κλάσματος με βάση το μοναδιαίο κλάσμα και στη συνέχεια να τοποθετηθεί σε αριθμογραμμή. Όταν ένα κλάσμα παρουσιάζεται πάνω στην αριθμογραμμή γίνεται καλύτερα κατανοητή η οντότητα και η αξία του αριθμού. Φαίνεται καλύτερα πώς αναλύεται σε κλασματικές μονάδες και η διατακτική του αξία σε σχέση με τους υπόλοιπους αριθμούς και κυρίως το 0, το ½ και το 1. Επιπλέον, είναι ευδιάκριτος ο τρόπος που οι ακέραιοι μεταφράζονται σε κλάσματα καθώς και τα καταχρηστικά κλάσματα και οι μεικτοί αριθμοί.

Η τρίτη αλλαγή αφορά την εξελικτική παρουσίαση της ύλης με βάση τις τροχιές μάθησης. Οι έννοιες παρουσιάζονται εξελικτικά, με βάση την εξελικτική ανάπτυξη, δηλαδή τις ικανότητες των μαθητών και την λογική των τροχών μάθησης, πράγμα που δεν συμβαίνει στη σημερινή διδασκαλία των ρητών αριθμών.

Η τέταρτη και τελευταία αλλαγή σχετίζεται με τις διδακτικές επιλογές. Η παρουσίαση των εννοιών των ρητών αριθμών πρέπει να προέρχονται μέσα από πλαίσια της καθημερινής ζωής, με υλικά ελκυστικά και αντιπροσωπευτικά. Η χρήση της λογοτεχνίας αλλά και της τεχνολογίας μπορούν να λειτουργήσουν βοηθητικά. Για την επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς προτείνεται να χρησιμοποιηθούν πραγματικές καταστάσεις, όπου μπορούν να λυθούν με οπτικοποίηση του προβλήματος, πριν καν γίνει εισαγωγή του κανόνα. Σε αυτό βοηθάει η χρήση εποπτικών μέσων και μοντέλων, όπως οι λωρίδες, οι κλασματικοί κύκλοι, αλλά και οι εικονικές αναπαραστάσεις όπως τα κυκλικά διαγράμματα και η αριθμογραμμή. Τέλος, η χρήση νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων βοηθά πολύ στην κατανόηση των ρητών αριθμών, γιατί καλλιεργείται περισσότερο η αίσθηση του αριθμού καθώς και γνωστικές λειτουργίες, όπως η μεταγνώση.

Σύμφωνα με το νέο πρόγραμμα σπουδών του Λεμονίδη (2017), η ουσιαστική διδασκαλία των κλασμάτων ξεκινάει από την Γ΄ τάξη με τις κλασματικές μονάδες και τον ορισμό του κλάσματος με βάση αυτές. Αλλά ήδη οι μαθητές από την Α΄ και Β΄ τάξη έρχονται σε επαφή με τα κλάσματα, καθώς εξασκούνται στον χωρισμό γεωμετρικών σχημάτων σε ίσα μέρη. Η ικανότητα αυτή αποτελεί προαπαιτούμενο για τον ορισμό του κλάσματος ως μέρος-όλου.

Αφού, λοιπόν, εισαχθούν τα κλάσματα στην Γ΄ τάξη, ένα χρόνο αργότερα, στην Δ΄ τάξη μπαίνουν οι δεκαδικοί αριθμοί, που ορίζονται με βάση τα δεκαδικά κλάσματα.

Τέλος, τα ποσοστά εισάγονται στην Ε΄ τάξη, μεταφέροντας απλά την άτυπη γνώση που έχουν γι' αυτά ήδη οι μαθητές από την καθημερινή τους ζωή. Ενώ στην Στ΄ τάξη γίνεται πιο ενδελεχής αναφορά.

Τάξη	Τροχιά	Μεγάλες ιδέες
Α'	Γεωμετρία-Γεωμετρικά σχήματα	Χωρισμός σχημάτων
Β'	Γεωμετρία-Γεωμετρικά σχήματα	Χωρισμός σχημάτων
Γ'	Κλάσματα	• Μοναδιαία κλάσματα και κλάσματα με βάση τα μοναδιαία • Αναπαράσταση κλασμάτων επάνω στην αριθμογραμμή • Ισοδύναμα κλάσματα • Σύγκριση κλασμάτων
Γ'	Δεκαδικοί αριθμοί	• Οργάνωση άτυπης γνώσης δεκαδικών αριθμών
Δ'	Κλάσματα	• Επέκταση της κατανόησης της ισοδυναμίας και της διάταξης κλασμάτων • Ανάλυση και σύνθεση κλασμάτων με βάση τα μοναδιαία κλάσματα
		• Πρόσθεση και αφαίρεση ομωνύμων κλασμάτων • Πολλαπλασιασμός κλάσματος με ακέραιο αριθμό
Δ'	Δεκαδικοί αριθμοί	• Ερμηνεία των δεκαδικών αριθμών με δεκαδικά κλάσματα • Σύγκριση δεκαδικών αριθμών
Ε'	Κλάσματα	• Πρόσθεση και αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων • Το κλάσμα ως διαίρεση • Πολλαπλασιασμός κλασμάτων ○ Πολλαπλασιασμός κλάσματος με ακέραιο ○ Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα (χωρίς υποδιαιρέσεις) ○ Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα ○ Πολλαπλασιασμός μεικτών και καταχρηστικών κλασμάτων ○ Ερμηνεία του πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα • Διαίρεση κλασμάτων ○ Διαίρεση ακέραιου με μοναδιαίο κλάσμα και μοναδιαίου κλάσματος με ακέραιο ○ Διαίρεση κλάσματος με κλάσμα
Ε'	Δεκαδικοί αριθμοί	• Κατανόηση του αριθμητικού συστήματος • Πραγματοποίηση πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς ○ Πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών αριθμών ○ Πολλαπλασιασμός και διαίρεση δεκαδικών αριθμών
Ε'	Ποσοστά	• Εισαγωγή στα ποσοστά

Πίνακας 1: Οι μεγάλες ιδέες στη διδασκαλία των ρητών αριθμών στο Δημοτικό Σχολείο.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί προηγουμένως η διδασκαλία των κλασμάτων ξεκινάει στην Α΄ και Β΄ τάξη με τον χωρισμό γεωμετρικών σχημάτων σε ίσα μέρη. Στη συνέχεια, όπως φαίνεται στον πίνακα 1, στην Γ΄ τάξη εισάγεται για πρώτη φορά η ισοδυναμία των κλασμάτων μέσω της οπτικοποίησης, αλλά ο ορισμός δίνεται στην Δ΄ τάξη. Ακόμα, οι μαθητές εξασκούνται στα μοναδιαία κλάσματα και στην τοποθέτησή τους πάνω στην αριθμογραμμή. Η αριθμογραμμή αποτελεί κύριο μέσω αναπαράστασης των κλασμάτων στις τάξεις του δημοτικού. Τέλος, σ' αυτή τη τάξη οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν κλάσματα με ίδιο αριθμητή ή ίδιο παρονομαστή με τη βοήθεια οπτικών μοντέλων.

Στην Δ΄ τάξη γίνεται επέκταση των γνώσεων για την ισοδυναμία των κλασμάτων καθώς και της διάταξής τους. Μπορούν να πραγματοποιούν και να δικαιολογούν, με τη χρήση οπτικών μοντέλων των κλασμάτων, την ανάλυση ενός κλάσματος σε άθροισμα ομωνύμων κλασμάτων με πολλούς τρόπους για παράδειγμα: 3⁄4 = 1⁄4 + 1⁄4 + 1⁄4 και μπορούν να προσθέτουν και να αφαιρούν κλάσματα με τη βοήθεια ανάλυσης σε μοναδιαία. Τέλος, πολλαπλασιάζουν κλάσματα με ακέραιους αριθμούς.

Στην συνέχεια, στην Ε΄ τάξη οι μαθητές πλέον προσθέτουν και αφαιρούν ετερώνυμα κλάσματα με τη βοήθεια αναπαραστάσεων και μοντέλων γι' αυτά. Κατανοούν τη σημασία της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων με την πραγματοποίηση λογικών εκτιμήσεων και νοερών υπολογισμών και θεωρούν το κλάσμα ως διαίρεση. Εφαρμόζουν και επεκτείνουν την προηγούμενη κατανόηση στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων μέσω εκτιμήσεων, επίλυσης λεκτικών προβλημάτων και οπτικοποιήσεων. Επίσης, παρουσιάζεται εξελικτικά ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων, όπου αρχικά παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός κλάσματος με ακέραιο αριθμό, στη συνέχεια ο πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα χωρίς υποδιαιρέσεις του μοναδιαίου διαστήματος, μετά ο πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα με υποδιαιρέσεις του μοναδιαίου διαστήματος και τέλος παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός μεικτών ή καταχρηστικών κλασμάτων. Στη συνέχεια εξελικτικά παρουσιάζεται και η διαίρεση, όπου αρχικά οι μαθητές διαιρούν μοναδιαία κλάσματα με ακέραιους αριθμούς και ακέραιους αριθμούς με μοναδιαία κλάσματα και στη συνέχεια διαιρούν κλάσμα με κλάσμα. Οι μαθητές πλέον μπορούν να κατανοήσουν τη σημασία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων και τη μεταξύ τους σχέση.

6. Στόχος και ερωτήματα της έρευνας

Οι περισσότερες έρευνες στη διεθνή επιστημονική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών μελετούν τη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των υποψηφίων εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς. Η παρούσα έρευνα, όμως, έρχεται να παρέμβει με μια επιμορφωτική παρέμβαση στα δύο είδη γνώσεων των εν ενεργεία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και ιδιαίτερα στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων και να εξετάσει τις αλλαγές που επιφέρει η παρέμβαση αυτή.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται προς απάντησης είναι τα εξής πέντε:

- Ποια ήταν η Γνώση Περιεχομένου και η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με ρητούς αριθμούς πριν από την επιμόρφωσή τους;
- Ποια ήταν η Γνώση Περιεχομένου και η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με ρητούς αριθμούς μετά την επιμόρφωσή τους;
- Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με ρητούς αριθμούς;
- Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ Γνώσης Περιεχομένου και Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των εκπαιδευτικών;
- Η εμπειρία των εν ενεργεία εκπαιδευτικών συμβάλει στη διαμόρφωση της ΓΠ και της ΠΓΠ τους;

Σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες η ΓΠ και η ΠΓΠ των υποψήφιων εκπαιδευτικών στη διαίρεση και στο πολλαπλασιασμό κλασμάτων είναι περιορισμένη (Depaepe, 2015; Tirosh,2000; Turnuklu & Yesildere, 2007), οπότε αναμένονται κενά τόσο στη ΓΠ όσο και στη ΠΓΠ των εν ενεργεία εκπαιδευτικών αντίστοιχα στις ίδιες έννοιες (υπόθεση 1). Επίσης, έρευνες όπως της Tirosh (2000) έδειξαν ότι υπήρξε βελτίωση της ΓΠ και της ΠΓΠ στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων έπειτα από εξάσκηση, επομένως αναμένεται βελτίωσή τους και στην παρούσα έρευνα (υπόθεση 2). Επιπλέον, σύμφωνα με τις έρευνες των Baumert et al. (2000) και της Depaepe (2015) αναμένουμε τόσο καλύτερες επιδόσεις στη ΓΠ από ότι στη ΠΓΠ, όσο και θετική συσχέτιση μεταξύ τους (υπόθεση 3 και 4). Τέλος, αναμένουμε η εμπειρία των εν ενεργεία εκπαιδευτικών να επηρεάζει την ΓΠ, παρουσιάζοντας υψηλότερα ποσοστά (Ball, 1990, Lemonidis & Meliopoulou, 2014; Lemonidis, Tsakiridou, Meliopoulou, 2017; Ma, 1999; Post et al., 1988) (υπόθεση 5).

Β. Ερευνητικό Μέρος

7. Μέθοδος

7.1. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της έρευνας αποτελούνταν από 7 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης του νομού Πέλλας. Οι εκπαιδευτικοί είχαν πάνω από 5 χρόνια προϋπηρεσίας στη δημόσια εκπαίδευση και επέλεγαν αρκετά συχνά για διδασκαλία τις δύο μεγάλες τάξεις, και είχαν την απαραίτητη εμπειρία στη διδασκαλία των μαθητών για να απαντήσουν στα ερωτήματα της έρευνας. Οι 7 συμμετέχοντες έχουν κατά μέσο όρο 16 χρόνια προϋπηρεσίας, με τους 5 (71%) να κυμαίνονται πάνω από 15 χρόνια και τους 2 (29%) κοντά στα 10. Και οι 7 εκπαιδευτικοί επέλεγαν τα τελευταία χρόνια μόνο τις τάξεις Ε΄ και Στ΄.

Από το σύνολο του πληθυσμού των 7 εκπαιδευτικών, οι 5 (71%) ήταν γυναίκες και οι 2 (29%) ήταν άνδρες. Αξίζει να σημειωθεί και το επίπεδο σπουδών των συμμετεχόντων, καθώς οι 2 από τους 7 κατείχαν μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών και μάλιστα στον τομέα των παιδαγωγικών.

7.2. Εργαλεία Έρευνας

7.2.1. Συνέντευξη

Για την πραγματοποίηση της έρευνας σχεδιάστηκε ένα τεστ ώστε να μετράει τις επιδόσεις των εκπαιδευτικών στη ΓΠ και στην ΠΓΠ στους ρητούς αριθμούς (σελ. 80). Οι δάσκαλοι εξετάστηκαν σε αυτό υπό τη μορφή ημι-δομημένων ατομικών συνεντεύξεων δύο φορές, μία πριν τη διαδικασία της επιμόρφωσης και μία μετά το τέλος της. Το σύνολο των ερωτήσεων ήταν 15 με 34 υποερωτήματα, εκ των οποίων τα 25 αφορούσαν τη ΓΠ και τα υπόλοιπα 9 την ΠΓΠ στους ρητούς. Το τεστ περιελάμβανε ερωτήσεις κατασκευής και επίλυσης προβλημάτων, μαζί με τις αναπαραστάσεις των πράξεων των κλασμάτων, εκτέλεση, σύγκριση και μετατροπή κλασμάτων, όπως φαίνονται κατηγοριοποιημένες παρακάτω στον πίνακα 2.

Για την πληρότητα της εξέτασης επιλέχθηκαν ερωτήσεις ώστε να περιέχουν διάφορες πλευρές του περιεχομένου των ρητών αριθμών (πυκνότητα και πράξεις με ρητούς) και καταστάσεις, όπου απαιτούνται πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Όσον αφορά το επίπεδο της γνώσης που απαιτείται για τις ερωτήσεις της συνέντευξης, αυτό αντιστοιχεί στα Μαθηματικά που διδάσκονται στην Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού σύμφωνα με το ισχύον ΔΕΠΠΣ- ΑΠΣ Μαθηματικών.

Όπως παρουσιάζεται παρακάτω στον πίνακα 2 υπήρχαν 25 ερωτήσεις ΓΠ σχετικές με τη γνώση κανόνων και αλγόριθμων που στόχευαν στην μέτρηση της διαδικαστικής γνώσης των εκπαιδευτικών και άλλες που αναζητούσαν βαθύτερη κατανόηση και στόχευαν στην εννοιολογική γνώση.

Στη μέτρηση της διαδικαστικής γνώσης στόχευαν οι ερωτήσεις:

- ΠΥ: Να υπολογίσεις το γινόμενο ¾ x ½.
- ΔΥ: Να υπολογίσεις το πηλίκο ¾ : ½ .
- ΔΜΥ: Να υπολογίσετε την πράξη 1 ¾ : ½.
- ΔΥΑ: Να εκτελέσεις τη πράξη: ¼ : 4.
- ΔΥΚ: Να εκτελέσεις την πράξη: ¼ : ¾.
- ΛΠΔΚ: Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους 3/4 του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το κάθε ένα έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;
- ΛΠΠΚ : Ο Κώστας αγόρασε 3/4 του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε;

Στη μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης στόχευαν:

- ΠΠ: Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα όπου το γινόμενο ¾ x ½ να είναι η λύση του.
- ΔΠ: Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα όπου το πηλίκο ¾ : ½ να είναι η λύση του.
- ΔΜΠ: Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα όπου η λύση του θα είναι η πράξη 1 ¾ : ½.
- ΠΑ: Να κάνεις μια αναπαράσταση της πράξης ¾ x ½
- ΔΑ: Να κάνεις μια αναπαράσταση της πράξης ¾ : ½ .
- ΔΜΑ: Να κάνεις μια αναπαράσταση της πράξης ¾ : ½ .
- ΑΠΠΛ: Αποτύπωσε μια αναπαράσταση του προβλήματος.
- ΑΠΔΚ: Αποτύπωσε μια αναπαράσταση του προβλήματος.
- ΣΚΕ: Να συγκρίνεις τα κλάσματα ¾ και 7/9.
- ΣΚΥ: Να συγκρίνεις τα κλάσματα 5/6 και 7/8.
- ΣΚΜ: Να συγκρίνεις τα κλάσματα ½ και 5/8 .
- ΣΚ: Να συγκρίνεις τα κλάσματα 3/7 και 5/8.
- ΜΚ1: Τι θα συμβεί την τιμή του κλάσματος α/β, αν το α αυξηθεί 4 φορές και το β υποδιπλασιαστεί.
- ΜΚ2: Πόσες φορές;
- ΑΚ1: Τοποθετήστε το κλάσμα 3/4 στην αριθμογραμμή.
- ΑΚ2: Τοποθετήστε το κλάσμα 3/8 στην αριθμογραμμή.
- ΥΠΚ: Να βρείτε τρία κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1.

Οι ερωτήσεις αυτές παρουσιάζονται ανά κατηγορία στον παρακάτω πίνακα 2.

Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και διαίρεσης	**ΠΠ**	Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα όπου το γινόμενο ¾ x ½ να είναι η λύση του.
	ΔΠ	Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα όπου το πηλίκο ¾ : ½ να είναι η λύση του.
	ΔΜΠ	Να διατυπώσεις ένα πρόβλημα όπου η λύση του θα είναι η πράξη 1 ¾ : ½.
Πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης	**ΠΥ**	Να υπολογίσεις το γινόμενο ¾ x ½ .
	ΔΥ	Να υπολογίσεις το πηλίκο ¾ : ½ .
	ΔΜΥ	Να υπολογίσετε την πράξη 1 ¾ : ½.
	ΔΥΑ	Να εκτελέσεις τη πράξη: ¼ : 4.

Κλασμάτων	**ΔΥΚ**	Να εκτελέσεις την πράξη: ¼ : ¾.
	ΠΑ	Να κάνεις μια αναπαράσταση της πράξης ¾ x ½ .
	ΔΑ	Να κάνεις μια αναπαράσταση της πράξης ¾ : ½ .
	ΔΜΑ	Να κάνεις μια αναπαράσταση της πράξης 1 ¾ : ½.
	ΑΠΠΛ	Αποτύπωσε μια αναπαράσταση του προβλήματος: Ο Κώστας αγόρασε 3/4 του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε;
	ΑΠΔΚ	Αποτύπωσε μια αναπαράσταση του προβλήματος: Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους 3/4 του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το κάθε ένα έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;
Επίλυση Προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων	**ΛΠΠΚ**	Ο Κώστας αγόρασε 3/4 του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε;
	ΛΠΔΚ	Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους 3/4 του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το κάθε ένα έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;
Σύγκριση Κλασμάτων	**ΣΚΕ**	Να συγκρίνεις τα κλάσματα ¾ και 7/9.
	ΣΚΥ	Να συγκρίνεις τα κλάσματα 5/6 και 7/8.
	ΣΚΜ	Να συγκρίνεις τα κλάσματα ½ και 5/8 .
	ΣΚ	Να συγκρίνεις τα κλάσματα 3/7 και 5/8.
Μετατροπή του αριθμητή και παρονομαστή Κλασμάτων	**ΜΚ1**	Τι θα συμβεί την τιμή του κλάσματος α/β, αν το α αυξηθεί 4 φορές και το β υποδιπλασιαστεί.
	ΜΚ2	Πόσες φορές;
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην αριθμογραμμή	**ΑΚ1**	Τοποθέτησε το κλάσμα ¾ στην αριθμογραμμή.
	ΑΚ2	Τοποθέτησε το κλάσμα 3/8 στην αριθμογραμμή.
Πυκνότητα Κλασμάτων	**ΥΠΚ**	Να βρείτε τρία κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1.

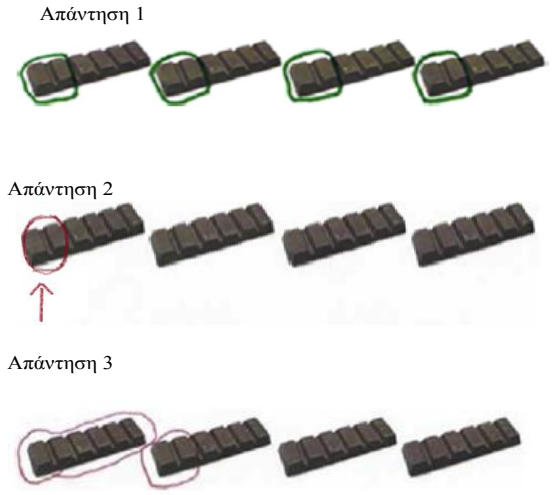
Πίνακας 2: Διαμόρφωση των ερωτήσεων ΓΠ ανά κατηγορία ερωτήσεων (κατηγορία, κωδικοποίηση, ερώτηση).

Οι 9 ερωτήσεις ΠΓΠ που υπάρχουν στο τεστ δίνουν έμφαση στην ερμηνεία των εκπαιδευτικών για τις παρανοήσεις των ίδιων των μαθητών στα Μαθηματικά και μάλιστα σε αντίστοιχες ερωτήσεις της ΓΠ. Αναμένεται οι δάσκαλοι να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν και να ερμηνεύσουν τα λάθη των μαθητών καθώς και να εντοπίσουν την πηγή προέλευσής τους.

Η 1η ερώτηση με κωδικό ΕΠΚ, παρουσίαζε τον ισχυρισμό ενός μαθητή ότι «δεν υπάρχει κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1, γιατί μετά το 7/8 είναι το 8/8 που είναι ίσο με 1».

Ζητήθηκε από τους δασκάλους να αξιολογήσουν την απάντηση του μαθητή και να αιτιολογήσουν το σκεπτικό του. Στόχος αυτής της ερώτησης ήταν να ελεγχθεί αν και σε ποιο βαθμό οι συνεντευξιαζόμενοι ήταν ικανοί να ερμηνεύουν τη σκέψη των μαθητών βασισμένοι στον λάθος χειρισμό των ρητών αριθμών ως φυσικών/ακέραιων αριθμών και συγκεκριμένα σκεπτόμενοι με βάση την ακολουθία φυσικών/ακεραίων αριθμών (1, 2, 3, ..7, 8, ..) που δεν ισχύει στους ρητούς αριθμούς.

Στην 2η ερώτηση ΠΓΠ, την ΕΑΚ, δόθηκαν οι απαντήσεις τριών μαθητών στην ερώτηση «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω».



Εικόνα 1: Οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση ΕΑΚ.

Σε αυτήν την ερώτηση οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να αξιολογήσουν τις απαντήσεις-αναπαραστάσεις μία προς μία και να τις ερμηνεύσουν εξηγώντας το σκεπτικό κάθε μαθητή. Συγκεκριμένα, στόχος της ερώτησης ήταν να αναδειχθεί κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί ήταν ικανοί να εξηγήσουν τις απαντήσεις με βάση τις θεωρήσεις των μαθητών για το μέρος όλου σε κάθε περίπτωση. Δηλαδή, στην απάντηση 1 ο μαθητής θεωρεί ως όλο την κάθε σοκολάτα (6 μέρη) από το οποίο παίρνει τα 2 μέρη (1/3). Στην απάντηση 2, ο μαθητής θεωρεί ως όλο τη μία σοκολάτα μόνο. Στην απάντηση 3, ο μαθητής θεωρεί ως όλο τις 4 σοκολάτες (ή τα 24 κομμάτια σοκολάτας) και από αυτό το όλο παίρνουν το 1/3, δηλαδή μια ολόκληρη σοκολάτα (που αποτελείται από 6 κομμάτια) και 2 κομμάτια.

Στην 3η ερώτηση ΕΛΠΔΚ, δίνεται η λύση ενός μαθητή στο παρακάτω μαθηματικό πρόβλημα: *«Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι με μήκος 3/4 του μέτρου. Θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει;»*
Η λύση του μαθητή ήταν η εξής: «3/4 : 1/8= 4/3 x 1/8 =..»
Οι εκπαιδευτικοί καλούνταν να αξιολογήσουν την απάντηση του μαθητή στο πρόβλημα και να και να εντοπίσουν το λάθος του. Το λάθος που κάνει εδώ ο μαθητής είναι στη διαδικασία της διαίρεσης κάτι το οποίο αναμενόταν να αναγνωρίσουν οι δάσκαλοι, αν γνώριζαν οι ίδιοι τους σωστά αυτόν τον αλγόριθμο διαίρεσης κλασμάτων.

Η 4η ερώτηση ΠΓΠ, ήταν η ΕΛΠΠΚ η οποία αναφερόταν επίσης σε ένα μαθηματικό πρόβλημα κλασμάτων και στη λύση που έδωσε ένας μαθητής σε αυτό. Το πρόβλημα ήταν το εξής: *«Ο Κώστας αγόρασε ¾ του κιλού μοσχαρίσιο κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας χρησιμοποίησε για τα γιουβαρλάκια;»*
Ενώ, η λύση του μαθητή ήταν: «3/4 - 1/3 = ..»

Στόχος αυτής της ερώτησης ήταν να αναδειχθεί σε ποιο βαθμό οι δάσκαλοι μπορούν να ερμηνεύσουν το λάθος του μαθητή και τι κατανοούν από αυτό το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, ο μαθητής κατανόησε ότι πρέπει να αφαιρέσει και όχι να πολλαπλασιάσει τα κλάσματα δίνοντας έμφαση στα δεδομένα και στην λέξη «χρησιμοποίησε» και όχι στο ζητούμενο του προβλήματος, νομίζοντας ότι πρέπει να βρει πόσο κρέας απέμεινε.

Η 5η ερώτηση ΕΑ ζητούσε από τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν και να εξηγήσουν το σκεπτικό του μαθητή πάνω στη άποψη ότι «ο επόμενος του 3/5 είναι το 4/5». Στόχο αυτής της ερώτησης αποτελούσε η ικανότητα των εκπαιδευτικών να ερμηνεύουν και να αξιολογούν το σκεπτικό των μαθητών σχετικά με τη θεώρηση ύπαρξης δύο διαδοχικών ρητών αριθμών.

Η 6η ερώτηση ΔΥΛ ζητούσε από τους εκπαιδευτικούς να κάνουν μια λίστα με τα συχνότερα λάθη που κάνουν οι μαθητές στις πράξης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Στόχος αυτής της δραστηριότητας ήταν να μπορούν οι δάσκαλοι να εντοπίζουν τα λάθη των μαθητών τους αλλά και την πηγή προέλευσής τους.

Η 7η και τελευταία ερώτηση ΑΠΠΚ, ζητούσε από τους εκπαιδευτικούς να περιγράψουν τον τρόπο σκέψης μιας μαθήτριας και να αξιολογήσουν την απάντησή της ως σωστή ή λανθασμένη στην παρακάτω πράξη:

«Η Ελένη είναι μαθήτρια της Στ’ τάξης του δημοτικού. Έκανε τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων $\frac{1}{4}\ x\ \frac{1}{5}$ όπως παρακάτω:

1ο βήμα: $\frac{1}{4}\ x\ \frac{1}{5} = \frac{5}{20}\ x \frac{4}{20}$

2ο βήμα: $\frac{5}{20}\ x\ \frac{4}{20} = \frac{20}{400}$

3ο βήμα: $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$»

Στόχος της ήταν να ανιχνευθεί η ικανότητα των εκπαιδευτικών να μπορούν να ερμηνεύουν και να περιγράφουν τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας , καθώς και να αξιολογήσουν ορθά την απάντηση.

Για τη διαμόρφωση των ερωτήσεων της συνέντευξης έγινε μια επιλογή από ερωτήσεις σύμφωνα με την διδακτέα υλη της Ε΄ κα Στ΄ τάξης του δημοτικού. Συγκεκριμένα οι 9 πρώτες ερωτήσεις ΠΥ, ΠΑ, ΠΠ,ΔΥ, ΔΑ, ΑΠ, ΔΜΥ, ΔΜΑ,ΔΜΠ πάρθηκαν από το βιβλίο *«Στην τροχιά των ρητών»* του Χ. Λεμονιδη (2017). Οι 6 ερωτήσεις της κατηγορίας επίλυσης προβλημάτων, οι 3 ΠΓ (ΛΠΠΚ, ΑΠΠΚ, ΛΑΚ) και οι άλλες 3 ΠΓΠ (ΕΑΚ, ΕΛΠΠΚ, ΑΛΠΠΚ) υπάρχουν στην έρευνα των Depaepe et al. (2015). Οι δύο ερωτήσεις ΠΓΠ (ΕΛΠΔΚ, ΑΛΠΔΚ) και η 1 ερώτηση ΓΠ (ΛΠΔΚ) και οι 2 ερωτήσεις της τοποθέτησης κλασμάτων σε αριθμογραμμή (ΑΚ1 και ΑΚ2) πάρθηκαν από τα θέματα του διαγωνισμού Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής (2014). (http://mathslife.eled.uowm.gr/?q=%CE%B4%CE%B9%CE%B1%CE%B3%CF%89%CE%BD%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82-2014). Οι 4 ερωτήσεις σύγκρισης κλασμάτων (ΣΚΜ, ΣΚ, ΣΚΥ και ΣΚΕ) πάρθηκαν από την έρευνα των Clarke, & Roche, (2009). Οι 2 ερωτήσεις πυκνότητας και μετατροπής κλάσματος (ΜΚ1, ΜΚ2, ΕΠΚ και ΥΠΚ) είναι από την έρευνα των Post et al. (1988). Η ΜΚ1 τροποποιήθηκε για την χρήση της στην παρούσα έρευνα. Οι ερωτήσεις ΔΥΑ, ΔΥΚ, ΔΥΛ προέρχονται από την έρευνα της Dina Tirosh (2000), ενώ η ερώτηση ΕΑ από τον Newton, (2008). Η τελευταία ερώτηση ΑΠΠΚ πάρθηκε από την έρευνα των Yesildere & Turnuklu (2007).

7.2.2. Το υλικό επιμόρφωσης και η λογική του

Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών χτίστηκε με βάση τις ελλείψεις που φάνηκε ότι έχουν οι δάσκαλοι πάνω στη ΓΠ και στην ΠΓΠ στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων. Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε στο νέο πρόγραμμα σπουδών του Χ. Λεμονίδη (2017) στους ρητούς αριθμούς, που αναπτύχθηκε στο βιβλίο του «Στην τροχιά των ρητών». Τόσο οι ασκήσεις που χρησιμοποιήθηκαν όσο το προτεινόμενο υλικό και η πορεία παρουσίασής του πάρθηκαν από τα αντίστοιχα βιβλία του μαθητή και τετράδια εργασιών των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ του δημοτικού που γράφτηκαν από τον ίδιο, με βάση το νέο πρόγραμμα σπουδών που προτείνει. Επίσης, υπήρξαν προβλήματα που πάρθηκαν από τα σημερινά σχολικά εγχειρίδια των αντίστοιχων τάξεων που διδάσκουν καθημερινά οι εκπαιδευτικοί.

Το υλικό του σεμιναρίου διαρθρώθηκε και μοιράστηκε σε έξι συναντήσεις, διάρκειας 1.5 με 2 ώρες, έτσι ώστε να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας και να ακολουθεί τη ροή του νέου προγράμματος σπουδών. Η δομή της κάθε συνάντησης ήταν καθορισμένη και ακολουθούσε τις παρακάτω 4 φάσεις.

Κατά την πρώτη φάση οι εκπαιδευτικοί έρχονταν σε επαφή με το νέο αντικείμενο το οποίο ανακάλυπταν οι ίδιοι μέσα από κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες. Στόχος της πρώτης φάσης ήταν η ενίσχυση της ΓΠ των δασκάλων γύρω από τους ρητούς.

Κατά τη δεύτερη φάση προτείνεται ενασχόληση των εκπαιδευτικών με προβλήματα και πράξεις ρητών, καθώς και προτάσεις τρόπων διδασκαλίας των ρητών αριθμών. Στόχος αυτής της φάσης αποτελεί η ενίσχυση τόσο της ΓΠ όσο και της ΠΓΠ.

Στην τρίτη φάση οι εκπαιδευτικοί έρχονται σε επαφή με λάθος απαντήσεις των μαθητών, τις οποίες καλούνται να διαχειριστούν, να εντοπίσουν την πηγή παρανόησής τους και να προτείνουν λύσεις. Όλα αυτά έχουν ως στόχο την ενίσχυση της ΠΓΠ τους.

Τέλος, κατά την **τελευταία φάση** είτε παρουσιάζονται κάποια στοιχεία της βιβλιογραφίας, ώστε να τεκμηριωθούν επιστημονικά τα λεγόμενά μας, είτε παρουσιάζονται εφαρμογές της τεχνολογίας που μπορούν να ασχοληθούν οι μαθητές και να παίξουν, παρέχοντας άμεση οπτικοποίηση των ρητών. Αυτά τα δύο δεν τα συναντάμε ταυτόχρονα σε κάθε συνάντηση αλλά εναλλάσσονται.

Αφού ολοκληρωνόταν η συνάντηση ακολουθούσε μία ανοιχτή συζήτηση ώστε να δοθεί η δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να εκφράσουν τις εντυπώσεις τους, τις απορίες τους, την αξιολόγησή της συνάντησης και τους γενικότερους προβληματισμούς τους.

Οι θεματικές των πέντε πρώτων συναντήσεων δομήθηκαν με βάση τα πέντε μαθήματα του προτεινόμενου νέου σχολικού εγχειριδίου, ενώ στην τελευταία συνάντηση αναφέρθηκαν στοιχεία της βιβλιογραφίας που συγκροτούσαν το θεωρητικό πλαίσιο του σεμιναρίου. Οι θεματικές που αναπτύχθηκαν ήταν οι εξής:

1. Πολλαπλασιασμός ακεραίου με κλάσμα - Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα (χωρίς υποδιαιρέσεις).
2. Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα (με υποδιαιρέσεις).
3. Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα μεικτών & καταχρηστικών.
4. Διαίρεση ακεραίου με κλάσμα.
5. Διαίρεση κλάσματος με κλάσμα.
6. Δυσκολίες και λάθη των μαθητών στους ρητούς – Δυσκολίες στη χρήση της αριθμογραμμής.

<u>Η πρώτη συνάντηση</u> με τους εκπαιδευτικούς δομήθηκε ώστε να επιτευχθούν οι στόχοι που τέθηκαν από την αρχή και παρουσιάστηκαν στα πρώτα λεπτά της συνάντησης. Συγκεκριμένα, μετά το πέρας της συνάντησης οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει:

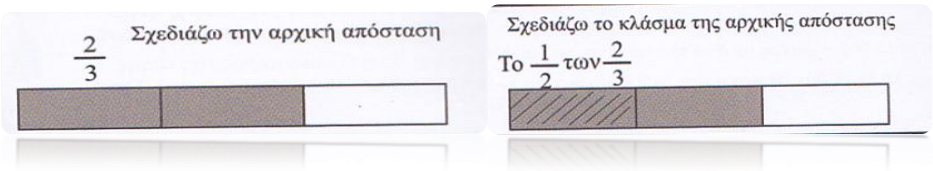
1. να είναι σε θέση να τοποθετούν κλάσματα σε αριθμογραμμή,

2. να μπορούν να ερμηνεύουν τη πράξη του πολλαπλασιασμού,
3. να μοντελοποιούν προβλήματα πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αναπαράσταση,
4. να διατυπώνουν πρόβλημα με αυτή τη πράξη και να γνωρίζουν τις πολλαπλές ερμηνείες των κλασμάτων.

Με βάση, λοιπόν, αυτούς τους στόχους το σεμινάριο ξεκίνησε με την πρώτη άσκηση όπου καλούνταν να τοποθετήσουν πάνω σε τρεις διαφορετικές αριθμογραμμές τα κλάσματα 3/4 ,4/4, 2/4, 5/4, στην πρώτη αριθμογραμμή, 3/5, 2/5 στη δεύτερη και 2/3, 4/3 και 5/3 στην τρίτη αριθμογραμμή. Στη συνέχεια δόθηκαν οι παρακάτω πράξεις, όπου υπολόγισαν σωστά το γινόμενο και το ερμήνευαν πάνω στην αριθμογραμμή (2 x 3/4, 3 x 3/5, 4 x 2/3, 3 x 4/4, 7 x 2/5, 3 x 4/3, 4 x 2/4, 2 x 5/3). Αφού έγινε αναφορά στον πολλαπλασιασμό ακεραίου με κλάσμα, ακολούθησε εκείνος του κλάσματος με κλάσμα με την επόμενη δραστηριότητα ενός προβλήματος με αποστάσεις, που λύνεται με πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα, όπου δεν χρειάζεται περαιτέρω υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης. Το πρόβλημα ήταν το εξής:

«Η Νεκταρία περπατάει με σταθερή ταχύτητα και σχεδιάζει να καλύψει μια απόσταση 2/3 του χιλιομέτρου. Στα ½ της απόστασης έπιασε βροχή και σταμάτησε. Ποιο μέρος της όλης απόστασης περπάτησε;».

Οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να κατανοήσουν το πρόβλημα και να αναγνωρίσουν τη πράξη που αντιστοιχεί. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να ερμηνεύσουν το πρόβλημα ως ένα μέρος του κλάσματος από ένα άλλο μέρους του κλάσματος. Αφού αναδείχθηκε η ερμηνεία του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί αποτύπωσαν το πρόβλημα με ένα σχεδιάγραμμα. Βήμα βήμα σχεδιάστηκε η αρχική απόσταση και το κλάσμα της αρχικής απόστασης, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα 2.



Εικόνα 2: Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων.

Αφού έγινε η εισαγωγή και η ανάδειξη με το πρόβλημα στην πρώτη φάση, ακολούθησε στη δεύτερη φάση το πρόβλημα «τα κομμάτια της κορδέλας» για εξάσκηση και εμπέδωση, *«η κορδέλα που ήταν τυλιγμένο το δώρο ήταν 6/8 του μέτρου. Από αυτήν έκοψα τα 4/6. Ποιο μέρος του μέτρου ήταν το κομμάτι της κορδέλας που έκοψα;»*. Οι εκπαιδευτικοί με τη ίδια λογική σχεδίασαν τα κομμάτια της κορδέλας και βρήκαν τη πράξη που αντιστοιχεί. Η επόμενη δραστηριότητα σε αυτή τη φάση ήταν η κατασκευή ενός προβλήματος από τους εκπαιδευτικούς, όπου η λύση θα ήταν η πράξη 1/3 x 3/4.

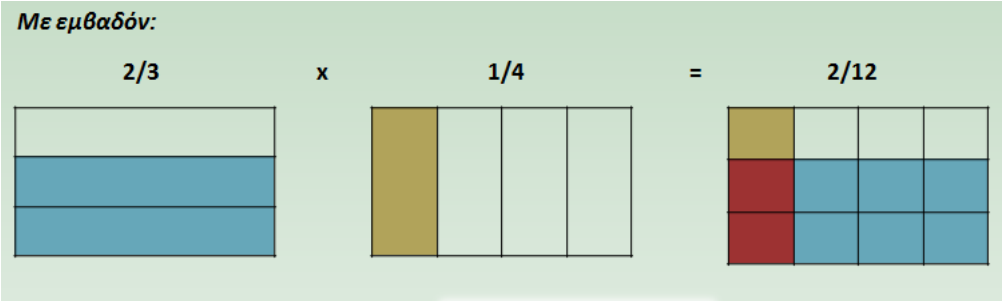
Για την ενίσχυση και της ΠΓΠ δόθηκε στη τρίτη φάση η λύση ενός μαθητή στο πρόβλημα: *«Ο Κώστας αγόρασε ¾ του κιλού μοσχαρίσιο κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας χρησιμοποίησε για τα γιουβαρλάκια;»* Η λύση του μαθητή ήταν: 3/4 - 1/3 = 9/12 - 4/12 = 5/12. Οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να ερμηνεύσουν την απάντηση του μαθητή και να βρουν τη πηγή του λάθους του.

Κατά τη διάρκεια της τέταρτης και τελευταίας φάσης παρουσιάστηκε και συζητήθηκε το θεωρητικό κομμάτι που αφορούσε τις πολλαπλές ερμηνείες που έχουν τα κλάσματα. Αναλύθηκε η ερμηνεία του κλάσματος ως λόγος, ως τελεστής, ως μέτρηση, ως πηλίκο και ως μέρος όλου. Στο τέλος, συζητήθηκαν οι πρώτες εντυπώσεις των εκπαιδευτικών από την

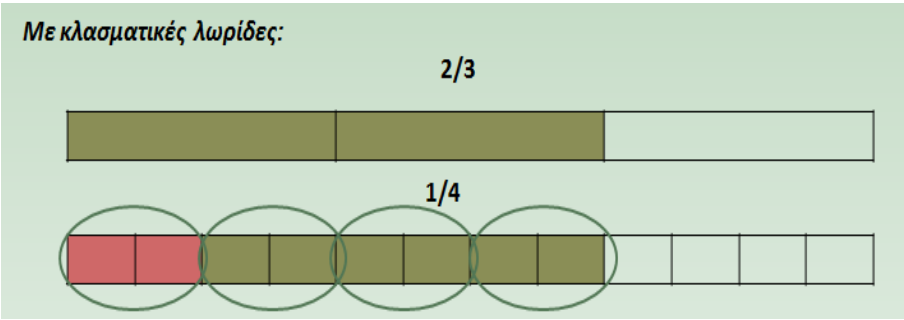
πρώτη μέρα της επιμόρφωσης, κατά τη διάρκεια της οποίας ήρθαν σε επαφή με πράγματα που ως τότε αγνοούσαν.

<u>Η δεύτερη συνάντηση</u> παρέμεινε στον πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα. Στόχοι της συνάντησης ήταν να χρησιμοποιηθούν εκτιμήσεις, πλαίσια προβλημάτων και οπτικοποιήσεις για να κατανοηθεί ο πολλαπλασιασμός των κλασμάτων, να είναι ικανοί οι εκπαιδευτικοί να μοντελοποιούν προβλήματα πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα χρησιμοποιώντας το μοντέλο του εμβαδού και των κλασματικών λωρίδων και να διατυπώνουν προβλήματα με τέτοια πράξη. Αρχικά ως εισαγωγική δραστηριότητα της πρώτης φάσης για το πέρασμα στις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού κλασμάτων συζητήθηκε με τους εκπαιδευτικούς το πρόβλημα: *«Η Κορίνα πηγαίνει στην κουζίνα για να φάει τυρόπιτα και βρίσκει μέσα στο ταψί να έχει μείνει το ¼ της αρχικής τυρόπιτας. Από την τυρόπιτα που έμεινε η Κορίνα τρώει το 1/2 . Ποιο μέρος της αρχικής τυρόπιτας έφαγε η Κορίνα;»*. Ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να εκτιμήσουν και να εξηγήσουν ποιο μέρος της αρχικής τυρόπιτας έφαγε η Κορίνα. Στη συνέχεια, πρότειναν έναν τρόπο αναπαράστασης τους συγκεκριμένου προβλήματος βασιζόμενοι στα βήματα να σχεδιάσουν πρώτα το ταψί με το 1/4 της τυρόπιτας που έμεινε στο ταψί και έπειτα το 1/2 εκείνης που έφαγε η Κορίνα.

Αφού βρέθηκε το αποτέλεσμα του προβλήματος μέσω στης αναπαράστασης, στη δεύτερη φάση παρουσιάστηκε το επόμενο, όπου και έγινε ανάδειξη των δυο τρόπων αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων. Το πρόβλημα ήταν το εξής: *«Τα 2/3 των παιδιών της τάξης είναι κορίτσια. Από τα κορίτσια το ¼ μαθαίνουν κάποιο όργανο. Ποιο μέρος των παιδιών της τάξης είναι τα κορίτσια που μαθαίνουν κάποιο όργανο;»* Αφού έγινε μία εκτίμηση για το ποιο μέρος της τάξης είναι τα κορίτσια που μαθαίνουν κάποιο όργανο, αναδείχθηκαν οι δύο τρόποι σχεδιασμού των δεδομένων του προβλήματος, πρώτον με εμβαδόν και έπειτα με κλασματικές λωρίδες.



Εικόνα 3: Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων με το μοντέλο του εμβαδού.

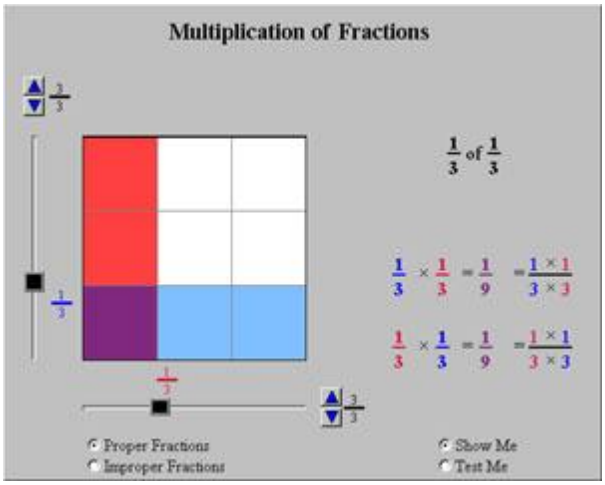


Εικόνα 4: Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων με το μοντέλο των κλασματικών λωρίδων.

Στη συνέχεια, έγινε η αντίστροφη διαδικασία, όπου ερμήνευσαν τις αναπαραστάσεις και έβρισκαν τις πράξεις, με στόχο την πιο βαθιά κατανόηση των αναπαραστάσεων του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων. Αφού πραγματοποιήθηκε και η παραπάνω δραστηριότητα, ήρθε η επόμενη όπου γίνεται πλήρως αντιληπτό το τι συμβολίζει η κάθε πλευρά του τελικού ορθογωνίου της αναπαράσταση δίνοντας ένα άδειο ορθογώνιο και μία πράξη του πολλαπλασιασμού και οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να την αποτυπώσουν πάνω στο σχήμα.

Στην τρίτη φάση οι εκπαιδευτικοί ήρθαν αντιμέτωποι με τα λάθη των μαθητών σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων. Το πρόβλημα ήταν το εξής: *«Ο Κώστας αγόρασε ¾ του κιλού μοσχαρίσιο κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας χρησιμοποίησε για τα γιουβαρλάκια;».* Ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο: 3/4 - 1/3. Έτσι, οι δάσκαλοι αξιολόγησαν τη λύση του μαθητή και την αιτιολόγησαν. Στη συνέχεια, έγραψαν οι ίδιο ένα πρόβλημα με λύση την πράξη: 3/4 x 1/2.

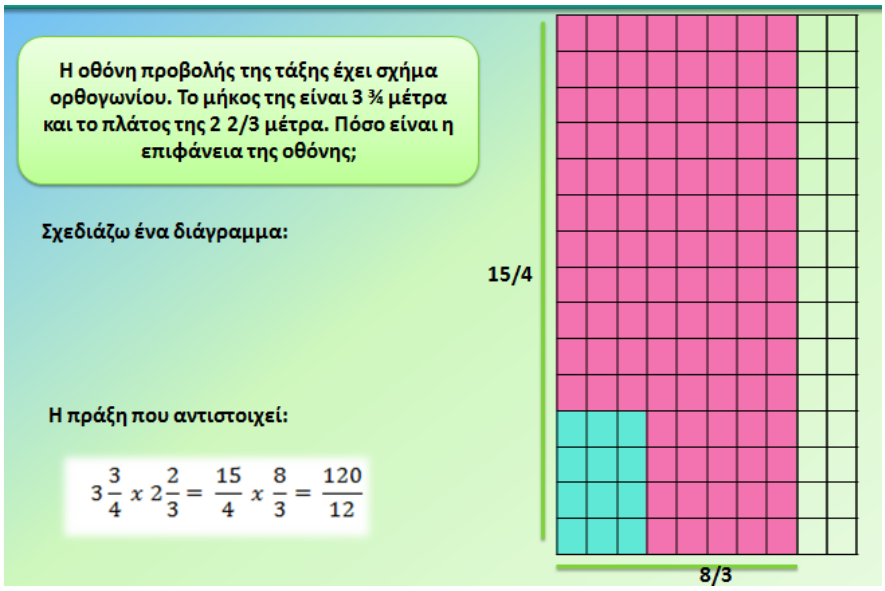
Στην τέταρτη και τελευταία φάση της δεύτερης συνάντησης παρουσιάστηκε η εφαρμογή Fractions-Rectangle Multiplication. Με τη βοήθειά της δίνεται η δυνατότητα να γίνει ο πολλαπλασιασμός δύο κλασμάτων και ταυτόχρονα παρέχεται οπτικοποίηση της πράξης με το μοντέλο του εμβαδόν ενός ορθογωνίου.



Εικόνα 5: Παράδειγμα οπτικοποίησης του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων στην εφαρμογή Fractions-Rectangle Multiplication.

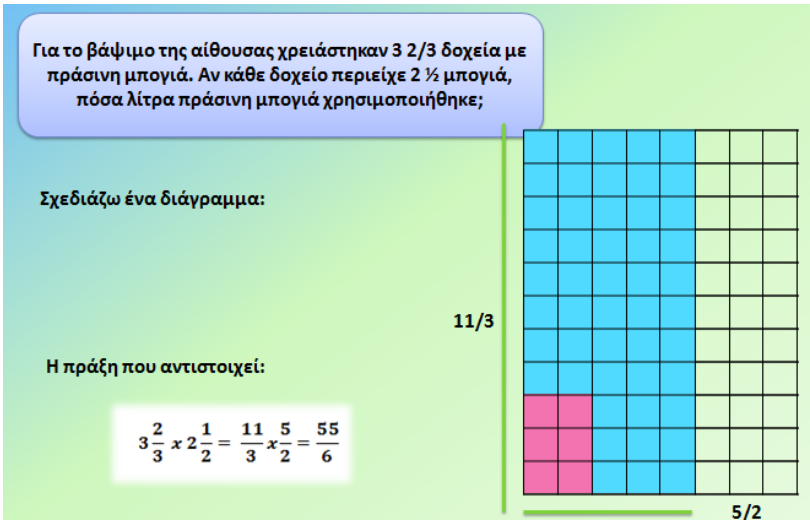
Η <u>τρίτη συνάντηση</u> αφορούσε τον πολλαπλασιασμό μεικτών κλασμάτων. Στόχος ήταν μετά το πέρας της συνάντησης οι εκπαιδευτικοί να είναι ικανοί να μοντελοποιούν προβλήματα πολλαπλασιασμού δύο μεικτών κλασμάτων χρησιμοποιώντας το μοντέλο του εμβαδού και να μπορούν να μετατρέπουν τα μεικτά κλάσματα σε καταχρηστικά για την αναπαράσταση του γινομένου τους.

Στην πρώτη φάση ως εισαγωγική δραστηριότητα χρησιμοποιήθηκε το εξής πρόβλημα: *«Η οθόνη προβολής της τάξης έχει σχήμα ορθογωνίου. Το μήκος της είναι 3 ¾ μέτρα και το πλάτος της 2 2/3 μέτρα. Πόσο είναι η επιφάνεια της οθόνης;».* Οι εκπαιδευτικοί συζήτησαν το πρόβλημα και το οπτικοποίησαν πάνω σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Με αυτή τη δραστηριότητα αναδείχθηκε το μοντέλο αναπαράστασης του γινομένου των καταχρηστικών κλασμάτων σε επιφάνεια, όπου ο κάθε όρος του γινομένου αποτελεί το μήκος κάθε πλευράς και το γραμμοσκιασμένο μέρος που θα προκύψει είναι η επιφάνεια του πολλαπλασιασμού.



Εικόνα 6: Αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού μεικτών κλασμάτων με το μοντέλο του εμβαδού.

Στη δεύτερη φάση εξάσκησης και εμπέδωσης χρησιμοποιήθηκαν 3 δραστηριότητες. Η πρώτη ήταν το πρόβλημα: *«Για το βάψιμο της αίθουσας χρειάστηκαν 3 2/3 δοχεία με πράσινη μπογιά. Αν κάθε δοχείο περιείχε 2 ½ μπογιά, πόσα λίτρα πράσινη μπογιά χρησιμοποιήθηκε;»*. Με βάση λοιπόν, το εισαγωγικό πρόβλημα οι εκπαιδευτικοί έλυσαν και αυτό. Η επόμενη δραστηριότητα εμπέδωσης είχε ως στόχο να βρουν τα γινόμενο δύο καταχρηστικών κλασμάτων π.χ. 3/4 x 5/4 μέσα από την αναπαράσταση στο μοντέλο στου εμβαδού και όχι από τον κλασσικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού.



Εικόνα 7: Αναπαράσταση του προβλήματος πολλαπλασιασμού δύο καταχρηστικών κλασμάτων με το μοντέλο του εμβαδού.

Η τρίτη δραστηριότητα, όπως και στις προηγούμενες συναντήσεις ήταν η κατασκευή ενός προβλήματος από τους εκπαιδευτικούς όπου η πράξη 2 1/3 x 1 3/4 να είναι η λύση του.

Η ενίσχυση της ΠΓΠ στην τρίτη φάση έγινε μέσω της εξής δραστηριότητας: « *Η Ελένη είναι μαθήτρια της Στ' τάξης του δημοτικού. Έκανε τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων 1/4 x 1/5 όπως παρακάτω: 1ο βήμα: 1/4 x 1/5= 5/20 x 4/20, 2ο βήμα: 5/20 x 4/20= 20/400, 3ο βήμα: 20/400= 1/20. Περιέγραψε τον τρόπο σκέψης της Ελένης. Είναι λάθος η απάντησή της; Γιατί ναι/όχι;*».

Στην τελευταία φάση της τρίτης συνάντησης χρησιμοποιήθηκε πάλι η εφαρμογή Fractions-Rectangle Multiplication, μόνο που αυτή τη φορά οι πολλαπλασιασμοί που χρησιμοποιήθηκαν αφορούσαν τα καταχρηστικά κλάσματα και την οπτικοποίησή τους. Έτσι, ολοκληρώθηκαν οι θεματικές που αφορούσαν τον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών.

Μετά τον πολλαπλασιασμό ακολούθησε η διαίρεση ως θεματική της **τέταρτης συνάντησης** και μάλιστα εκείνης του ακεραίου με ένα μοναδιαίο κλάσμα. Στόχος αυτής της συνάντησης αποτελούσε η εξάσκηση των εκπαιδευτικών στην διαίρεση μοναδιαίου κλάσματος με ακέραιο αριθμό και η διαίρεση με τη βοήθεια προβληματικών καταστάσεων και οπτικών κλασματικών μονάδων.

Στη πρώτη φάση χρησιμοποιήθηκαν τα εξής τρία προβλήματα:

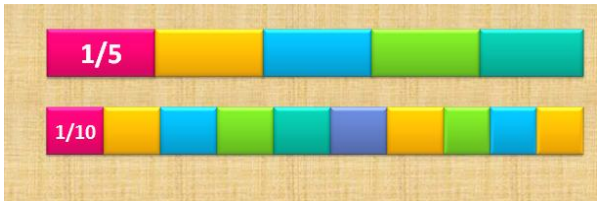
«*Στο πάρτι της Αναστασίας 5 ίδιες πίτσες τις έκοψαν σε ίσα μέρη και κάθε παιδί πήρε ½ της πίτσας. Πόσα παιδιά πήραν πίτσα;*»,

«*Πόσα τέταρτα υπάρχουν στις 3 ώρες;*»

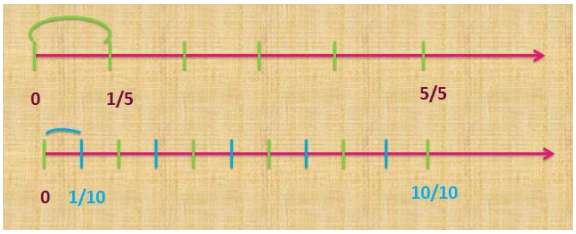
και «*Ο μικρός Δήμος όταν περπατάει κάνει βήματα μήκους 1/5 του μέτρου. Πόσα βήματα θα κάνει για να περπατήσει 3 μέτρα;*».

Οι εκπαιδευτικοί προσπάθησαν μέσω σχημάτων να βρουν τη λύση χωρίς να κάνουν οποιαδήποτε πράξη.

Αφού έγιναν οι εισαγωγικές δραστηριότητες, στην δεύτερη φάση δόθηκε το πρόβλημα: «*Μια ακρίδα πηδάει με ίσα άλματα. Κάθε άλμα είναι το 1/3 του μέτρου. Πόσα άλματα θα κάνει η ακρίδα για να διανύσει 4 μέτρα;*». Με τη βοήθεια μιας αριθμογραμμής οι εκπαιδευτικοί έλυσαν το πρόβλημα. Η επόμενη δραστηριότητα αφορούσε το πρόβλημα: «*Ο Κώστας έχει το ½ της πίτσας και θέλει να το μοιράσει δίκαια σε τρεις φίλους του. Ποιο μέρος της αρχικής πίτσας θα δώσει στον καθένα;*». Σε αυτή τη περίπτωση η αναπαράσταση της πράξης έγινε με τη βοήθεια κλασματικών λωρίδων. Τέλος, λύθηκε το επόμενο πρόβλημα χρησιμοποιώντας και τις δύο αναπαραστάσεις της διαίρεσης κλασμάτων, την αριθμογραμμή και τις κλασματικές λωρίδες. (*Η Νεκταρία το 1/5 του σχοινιού το χώρισε σε δύο ίσα κομμάτια. Τι κλάσματα του αρχικού σχοινιού θα είναι το κάθε κομμάτι;*).



Εικόνα 8: Αναπαράσταση του προβλήματος της διαίρεσης με το μοντέλο των κλασματικών λωρίδων.



Εικόνα 9: Αναπαράσταση του προβλήματος της διαίρεσης με το μοντέλο της αριθμογραμμής.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκαν τρεις πράξης διαίρεσης όπου οι εκπαιδευτικοί πρώτα τις έλυσαν, μετά περιέγραψαν τα συνηθέστερα λάθη που κάνουν οι μαθητές σε αυτές τις πράξεις και τέλος εξέτασαν την πηγή των λαθών τους. Όλο αυτό βοήθησε στην ενίσχυση της ΠΓΠ των δασκάλων. Στο τέλος της συνάντησης, ακολούθησε βιβλιογραφική ανασκόπηση πάνω στο χειραπτικό υλικό και τα μέσα οπτικοποίησης που υπάρχουν στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία.

Η **πέμπτη συνάντηση** ήταν και η τελευταία που ολοκλήρωνε τις δύο πράξεις κλασμάτων. Θεματική της ήταν η διαίρεση κλάσματος με κλάσμα. Ως στόχοι τέθηκαν η ικανότητα του εκπαιδευτικού να ερμηνεύει την πράξη της διαίρεσης των κλασμάτων, να μοντελοποιούν προβλήματα διαίρεσης χρησιμοποιώντας τα οπτικά μοντέλα των κλασμάτων και να διατυπώνουν προβλήματα διαίρεσης. Σε αυτή τη συνάντηση χρησιμοποιήθηκε το πρόβλημα: *«Από τη ποσότητα των 9/4 του κιλού γιαουρτιού γεμίζουμε κεσεδάκια χωρητικότητας 3/4 γιαουρτιού. Πόσα κεσεδάκια θα γεμίσουμε;»*. Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής πραγματοποιήθηκε αναπαράσταση του προβλήματος και βρέθηκε η λύση του. Το επόμενο πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκε ήταν: *«Μια κορδέλα των ¾ του μέτρου τη χωρίζουμε σε κομμάτια των ¼ του μέτρου. Πόσα κομμάτια θα πάρουμε;»*. Τέλος, διατύπωσαν οι ίδιοι ένα πρόβλημα όπου η λύση του ήταν η πράξη 3/4 : 1/2.

Για την ενίσχυση της ΠΓΠ δόθηκε στους εκπαιδευτικούς το παρακάτω πρόβλημα: «Στους μαθητές δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι με μήκος 3/4 του μέτρου. Θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει;» Ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο: 3/4 : 1/8= 4/3 x 1/8. Αξιολογήστε αν η πράξη του μαθητή είναι σωστή και αιτιολογήστε την». Στην τέταρτη και τελευταία φάση χρησιμοποιήθηκε η μικροεφαρμογή Αριθμητικές Μπάρες Κλασμάτων, όπου έγινε η αναπαράσταση της διαίρεσης με αριθμητικές μπάρες.

Αφού ολοκληρώθηκε το κομμάτι των δραστηριοτήτων, **στη τελευταία συνάντηση** με τους εκπαιδευτικούς αναλύθηκαν και συζητήθηκαν οι δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών στους ρητούς και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στη χρήση της αριθμογραμμής. Στόχος ήταν να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τη σπουδαιότητα της χρήσης της αριθμογραμμής μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα κα να γνωρίζουν τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές όταν έρχονται σε επαφή με ρητούς αριθμούς καθώς και την πηγή προέλευσής τους. Μετά την ολοκλήρωση και της τελευταία θεματικής πραγματοποιήθηκε μια ανοιχτή συζήτηση και ανασκόπησης όλου του σεμιναρίου. Οι εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν το πρόγραμμα, εξέφρασαν τις απόψεις τους και τις εμπειρίες τους από παρόμοιες επιμορφώσεις.

7.3. Διαδικασία

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε ήταν η έρευνα δράσης. Υπήρχαν τρεις διακριτές φάσεις – στάδια που περιλαμβάνονταν στη διαδικασία. Η έρευνα ξεκίνησε με μία ημι-δομημένη συνέντευξη σε κάθε έναν εκπαιδευτικό που συμμετείχε (pre test). Οι συνεντεύξεις χαρακτηρίζονται ως ημι-δομημένες καθώς παρόλο που ακολουθήθηκε ως πρωτόκολλο το διαμορφωμένο τεστ της έρευνας, κατά την διάρκεια των συναντήσεων διατυπώθηκαν κάποιες περεταίρω ερωτήσεις, διευκρινήσεις και παρατηρήσεις όταν αυτό κρίθηκε απαραίτητο. Οι συνεντεύξεις ξεκίνησαν με μια εισαγωγή όπου οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν για τον στόχο και το περιεχόμενο της έρευνας και κάποιες γενικές οδηγίες (π.χ. σε όσες ερωτήσεις είναι δυνατόν να λύσουν νοερά, ο χρόνος κ.λ.π.). Για την παραγωγή ενός αξιόπιστου αποτελέσματος ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να περιγράφουν τον τρόπο σκέψης τους όσο το δυνατόν πιο αναλυτικά γίνεται, την στρατηγική που χρησιμοποιούσαν για να απαντήσουν στις ερωτήσεις, καθώς επίσης ενθαρρύνθηκαν να διατυπώνουν οποιαδήποτε ερώτησή τους ή απορία, ώστε να συζητηθούν και να λυθούν κατά τη διάρκεια των επιμορφώσεων.

Η διάρκεια των συνεντεύξεων ήταν μεταξύ 30 έως 60 λεπτά, καθώς στους συμμετέχοντες δόθηκε ο κατάλληλος χρόνος για να σκεφτούν και να απαντήσουν στις ερωτήσεις. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν για να αναλυθούν στη συνέχεια. Επίσης, κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων κρατιόντουσαν σημειώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για καλύτερη ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια, **η δεύτερη φάση** της έρευνας αφορούσε την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Πραγματοποιήθηκαν 6 συναντήσεις με τους εκπαιδευτικούς σε χώρο κατάλληλα διαμορφωμένο, ώστε να υπάρχει πρόσβαση σε ηλεκτρονικό υπολογιστή και προτζέκτορα. Οι συναντήσεις είχαν διάρκεια 1,5 με 2 ώρες, ανάλογα με τον όγκο της κάθε μιας ενότητας και έλαβαν χώρα σε διάστημα 3 εβδομάδων, δύο ημέρες την βδομάδα.

Κατά **το τελευταίο στάδιο της έρευνας**, και αφού είχε περάσει ένα χρονικό διάστημα 10 ημερών, πραγματοποιήθηκαν ξανά ατομικές ημι-δομημένες συνεντεύξεις με τις ίδιες ακριβώς ερωτήσεις (post test). Η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν η ίδια. Οι ερωτήσεις έγιναν ακριβώς με την ίδια σειρά, μόνο που η διάρκειά τους ήταν σημαντικά μικρότερη, 20-30 λεπτά.

7.4. Ανάλυση

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τις συνεντεύξεις αναλύθηκαν ποιοτικά. Οι απαντήσεις των συνεντεύξεων κατηγοριοποιήθηκαν και στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν με τον εξής τρόπο: 1 για μια σωστή απάντηση, 0 για μια λάθος και 2 για μη απάντηση. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών αναλύθηκαν ποιοτικά για να αναλυθούν τα λάθη και οι στρατηγικές – τρόποι σκέψης στις ερωτήσεις ΓΠ και ΠΓΠ. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία της ποσοτικής έρευνας, μόνο για να βγουν αριθμητικά δεδομένα στο σύνολο των σωστών απαντήσεων και στην σύγκριση μεταξύ των υποκειμένων. Για τη ποσοτική ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Excel.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται ανά υποκείμενο, αναλύοντας 7 επιμέρους μελέτες περίπτωσης. Κάθε υποκείμενο αναλύεται με βάση τις επτά κατηγορίες των ερωτήσεων που υπάρχουν στο pre και post test που απάντησαν. Αφού ολοκληρωθεί η ανάλυση των μελετών περίπτωσης, ακολουθεί συγκριτική ανάλυση των επιδόσεων των εκπαιδευτικών στις δύο συνεντεύξεις.

8. Αποτελέσματα

8.1. Μελέτη εκπαιδευτικού 1

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 40 λεπτά. Η συνεντευξιαζόμενη ήταν γυναίκα, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 18 χρόνια.

8.1.1.1. Pre test

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

Η εκπαιδευτικός κλήθηκε να απαντήσει σε 25 ερωτήσεις Γνώσης Περιεχομένου. Στον πίνακα 3 παρακάτω αποτυπώνονται οι σωστές απαντήσεις που έδωσε ανά κατηγορία ερωτήσεων.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΕΠΙΤΥΧΙΑ	ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	1 (33,3%)	2 (66,6%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	0 (0%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	3 (75%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	0 (0%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	0 (0%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	0 (0%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	0 (0%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	0 (0%)
Σύνολο (Ε=25)	**14/25 (74%)**	**5/25 (20%)**

Πίνακας 3: Επιτυχίες του Υποκειμένου 1 ανά κατηγορία στις ερωτήσεις ΓΠ.

Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων ΓΠ της συνέντευξης η πρώτη κατηγορία που προκύπτει είναι η κατασκευή προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Η ικανότητα του εκπαιδευτικού να κατασκευάζει προβλήματα, όπως φαίνεται από τον πίνακα 3, είναι περιορισμένη. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης χρειάστηκε να κατασκευάσει τρία προβλήματα ένα πολλαπλασιασμού κλασμάτων (ΠΠ), ένα διαίρεσης απλών κλασμάτων (ΔΠ) και ένα διαίρεσης μεικτών κλασμάτων (ΔΜΠ). Η εκπαιδευτικός μπόρεσε να διατυπώσει πρόβλημα πολλαπλασιασμού με ιδιαίτερη ευκολία, δίνοντας το εξής: *«Ένα ορθογώνιο έχει μήκος ¾ του μέτρου και πλάτος ½ του μέτρου. Ποιο είναι το εμβαδόν του;»*. Αντίθετα, δεν μπόρεσε να κατασκευάσει κανένα από τα δύο προβλήματα διαίρεσης, αν και προσπαθούσε αρκετή ώρα. Παρατηρείται επομένως ότι υπάρχει δυσκολία στο κομμάτι πλαισιοποίησης της πράξης της διαίρεσης κλασμάτων.

Στην κατηγορία πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων παρατηρούνται υψηλές επιδόσεις. Η εκπαιδευτικός απάντησε σωστά και στις πέντε ερωτήσεις που κλήθηκε να απαντήσει. Συγκεκριμένα, εκτέλεση την πράξη ¾ x ½ (ΠΥ) με στρατηγική που βασίζεται τον κανόνα, δηλαδή στο αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Με τον ίδιο τρόπο ακριβώς υπολόγισε το αποτέλεσμα των πράξεων ¾ : ½ (ΔΥ), 1 ¾ : ½ (ΔΜΥ), ¼ : 4 (ΔΥΑ) και ¼ : ¾ (ΔΥΚ) δίνοντας σωστό αποτέλεσμα.

Τεράστια αδυναμία παρουσίασε η εκπαιδευτικός στις κατηγορίες της αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων και λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, όπως φαίνεται από τον πίνακα 3. Δεν έδωσε καμία αναπαράσταση της πράξης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων στις ερωτήσεις ΠΑ, ΔΑ και ΔΜΑ (75%). Αντίθετα, σωστή απάντηση (25%) σημείωσε στην ερώτηση ΛΑΚ. Συγκεκριμένα, στην ερώτηση ΛΑΚ ζητήθηκε να σκιαστεί το ¼ των 5 κύκλων. Η εκπαιδευτικός σκίασε ένα ολόκληρο κύκλο και ¼ από τον δεύτερο, αφού προηγουμένως χώρισε όλους του κύκλους σε τέσσερα ίσα μέρη.

Οι ερωτήσεις αναπαράστασης λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (ΑΠΠΛ και ΑΠΔΚ) φάνηκαν και αυτές δύσκολες για την εκπαιδευτικό. Δεν μπόρεσε να δώσει κάποια αναπαράσταση για τα δύο προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (0%). Τόσο στο πρόβλημα «*Ο Κώστας αγόρασε 3/4 του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε;*» όσο και στο «*Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους 3/4 του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το κάθε ένα έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;*» η εκπαιδευτικός αδυνατούσε να καταλάβει τι πρέπει να κάνει. Έπειτα από διευκρινήσεις πάλι δεν κατάφερε να δώσει κάποιο σωστό σχήμα.

Η επόμενη κατηγορία ερωτήσεων που απάντησε η εκπαιδευτικός είναι εκείνη της επίλυσης προβλημάτων. Από τις 2 ερωτήσεις ΓΠ απάντησε σωστά σε όλες (100%). Στην ερώτηση ΛΠΠΚ (*Ο Κώστας αγόρασε* $\frac{3}{4}$ *του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το* $\frac{1}{3}$ *του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε;)* του προβλήματος η εκπαιδευτικός το έλυσε βρίσκοντας πρώτα τα ¾ του 100 (3/4 x 1000= 750γρ.) και στη συνέχεια το 1/3 των 750 γρ. (1/3 x 750 = 250 γρ.). Στο επόμενο πρόβλημα ΛΠΔΚ *(Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους* $\frac{3}{4}$ *του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το καθένα έχει μήκος* $\frac{1}{8}$ *του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;)* το έλυσε με τον ίδιο τρόπο, βρίσκοντας πρώτα τα ¾ του 100 (3/4 x 100 = 75 εκ.) και στη συνέχεια το 1//8 του 100 (1/8 x 100= 12,5 εκ.) και στο τέλος διαίρεσε 75: 12,5=6 για να βρει τα κομμάτια. Αφού ολοκλήρωσε την λύση, ζητήθηκε από την εκπαιδευτικό αν θα μπορούσε να το λύσει απευθείας με μία πράξη, όμως κάτι τέτοιο δεν έγινε. Να σημειωθεί ότι αυτός ο τρόπος σκέψης ακολουθήθηκε από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς.

Σειρά είχε η κατηγορία σύγκρισης κλασμάτων, όπου υπήρχαν 4 ερωτήσεις. Η εκπαιδευτικός απάντησε σωστά σε 2 (50%). Θεώρησε λανθασμένα τα κλάσματα (ΣΚΥ) 5/6 και 7/8 ίσα, γιατί όπως χαρακτηριστικά ανέφερε *«και τα δύο θέλουν ακόμα ένα»* για να φτάσουν στο όλο, παραλείποντας όμως ότι το πρώτο θέλει 1/6 ενώ το δεύτερο 1/8. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο σκέφτηκε στην ερώτηση ΣΚΕ θεωρώντας ίσα τα κλάσματα ¾ και 8/9. Στις ερωτήσεις ΣΚΜ και ΣΚ θεώρησε ορθώς το κλάσμα 5/8 μεγαλύτερο έναντι στο ½ και 3/7, λέγονται ότι είναι μεγαλύτερο από το μισό. Εδώ η εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε ως σημείο αναφοράς το ½.

Στην κατηγορία μετατροπής του αριθμητή και του παρονομαστή των κλασμάτων και στις ερωτήσεις ΜΚ1 και ΜΚ2 η συνεντευξιαζόμενη βρήκε σωστά ότι ένα κλάσμα θα αυξηθεί αν τετραπλασιαστεί ο αριθμητής του και υποδιπλασιαστεί ο παρονομαστής του, αλλά δεν υπολόγισε σωστά πόσες θα είναι οι φορές που θα αυξηθεί. Ο τρόπος λύσης που επέλεξε ήταν στη θέση του να βάλει ένα τυχαίο κλάσμα π.χ. το 2/4 και να ακολουθήσει τα βήματα

βρίσκοντας τον αριθμό 4. Η απάντηση που έδωσε όμως ήταν ότι θα διπλασιαστεί, θεωρώντας ότι το 2 έγινε 4.

Οι μέγιστες επιδόσεις σημειώθηκαν στην κατηγορία τοποθέτησης κλασμάτων στην αριθμογραμμή με ποσοστό 100%. Οι δύο ερωτήσεις ΑΚ1 και ΑΚ2 απαντήθηκαν σωστά από την εκπαιδευτικό, αφού τοποθέτησε τα κλάσματα ¾ και 3/8 σωστά στην αριθμογραμμή, χωρίζοντάς την αρχικά σε 4 μέρη και στη συνέχεια σε 8.

Οι απαντήσεις της εκπαιδευτικού πάνω στην πυκνότητα των κλασμάτων έδειξαν ότι υπάρχει μεγάλη αδυναμία. Στην κατηγορία αυτή υπήρχε μία ερώτηση ΓΠ όπου της ζητήθηκε να βρει τρία κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1 (ΥΠΚ). Η εκπαιδευτικός δεν μπόρεσε να βρει κανένα κλάσμα (0%) λέγοντας ότι «*δεν μπορώ να βρω αριθμό, γιατί μετά το 7/8 είναι το 8/8 που είναι ίσο με το 1*».

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

Ακόμα, η εκπαιδευτικός απάντησε σε άλλες 9 ερωτήσεις ΠΓΠ. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι επιδόσεις της ανά κατηγορία ερωτήσεων.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΕΠΙΤΥΧΙΑ	ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	0 (0%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	0 (0%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	3 (60%)	0 (0%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	0 (0%)
Σύνολο (Ε=25)	**4/9 (44,4%)**	**0/9 (0%)**

Πίνακας 4: Επιτυχίες του Υποκειμένου 1 ανά κατηγορία στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, η κατηγορία πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων με ερωτήσεις σχετικές με ΠΓΠ δεν δυσκόλεψε την εκπαιδευτικό. Στην ερώτηση όπου ζητήθηκε να γίνει μια λίστα με τα συνηθέστερα λάθη που κάνουν οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων (ΔΥΛ), η εκπαιδευτικός περιέγραψε με ευκολία τα λάθη που μπορεί να κάνουν οι μαθητές κατά την εκτέλεση αυτών των πράξεων αλλά περιορίστηκε μόνο στα αλγοριθμικά. Ανέφερε ότι οι μαθητές ξεχνούν πολλές φορές να βάλουν κάτω από τον ακέραιο την μονάδα, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αντιστρέψουν τον δεύτερο όρο, αλλάζουν τη διαίρεση με πολλαπλασιασμό χωρίς να αντιστρέψουν το δεύτερο κλάσμα, πολλαπλασιάζουν μόνο τους αριθμητές και όχι και τους παρονομαστές, επηρεασμένοι από την πρόσθεση και την αφαίρεση και τέλος πολλαπλασιάζουν αριθμητή και παρονομαστή με τον ακέραιο αριθμό.

Εξίσου καλά (100%) τα πήγε στη κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Στην ερώτηση ΕΑΚ, που εξετάζει την ΠΓΠ, δόθηκαν τρεις διαφορετικές απαντήσεις μαθητών στην άσκηση «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών».

Εικόνα 10: Απαντήσεις μαθητών στην ΕΑΚ.

Η εκπαιδευτικός θεώρησε σωστές τις απαντήσει 1 και 3 και λανθασμένη την 2. Στην πρώτη απάντηση θεωρεί ότι μαθητής χώρισε την κάθε σοκολάτα σε τρία μέρη και πήρε το ένα από την καθεμιά, στην τρίτη απάντηση θεώρησε και τις τέσσερις σοκολάτες ως μία ενιαία ποσότητα και πήρε το 1/3, ενώ στην δεύτερη απάντηση πήρε το 1/3 μόνο από την πρώτη σοκολάτα.

Η επόμενη κατηγορία ερωτήσεων που απάντησε η εκπαιδευτικός είναι εκείνη της επίλυσης προβλημάτων. Από τις 5 ερωτήσεις ΠΓΠ απάντησε σωστά στις 3 (60%). Στις ερωτήσεις ΑΛΠΔΚ και ΕΛΠΔΚ*«Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι με μήκος 3/4 του μέτρου. Θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει*; Η λύση του μαθητή ήταν η εξής: «3/4 : 1/8= 4/3 x 1/8 =..» η εκπαιδευτικός έκρινε ότι η λύση είναι λανθασμένη λόγω του ότι δεν εφαρμόστηκαν οι κανόνες της διαίρεσης και αντιστράφηκε ο πρώτος όρος. Στη ερώτηση ΕΛΠΠΚ η εκπαιδευτικός αξιολόγησε την απάντηση ¾ - 1/3 για το προηγούμενο πρόβλημα ως λανθασμένη, χωρίς να μπορέσει να αιτιολογήσει με ακρίβεια τον λόγο στην ερώτηση ΑΛΠΠΚ, λέγοντας απλά ότι δεν κάνουμε αφαίρεση αλλά διαίρεση. Η ερώτηση ΑΠΠΚ κρίθηκε ως σωστή από την εκπαιδευτικό λέγοντας πως η μαθήτρια τα έκανε ομώνυμα και αφού δεν υπάρχει κάτι λάθος στις πράξεις της και βρήκε το σωστό αποτέλεσμα δεν μπορούσε να μην την πάρει ως σωστή.

Οι απαντήσεις της εκπαιδευτικού πάνω στην πυκνότητα των κλασμάτων έδειξαν ότι υπάρχει μεγάλη αδυναμία. Από τις δύο ερωτήσεις ΠΓΠ της κατηγορίας δεν απαντήθηκε σωστά καμία, ενώ μία δεν απαντήθηκε καθόλου. Στην ερώτηση ΕΠΚ η εκπαιδευτικός υποστήριξε τον μαθητή που απάντησε ότι «*δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 7/8 και στο 1, γιατί μετά το 7/8 ακολουθεί το 8/8 που είναι ίσο με το 1*» καθώς έβρισκε το σκεπτικό του σωστό. Με την ίδια λογική απάντησε και στην ερώτηση ΕΑ, όπου πάλι αξιολόγησε σωστά την απάντηση του μαθητή ότι «*ο επόμενος του 3/5 είναι το 4/5*», γιατί όπως ανέφερε χαρακτηριστικά «και εγώ το ίδιο θα έλεγα», ενώ μία τέτοια σκέψη είναι λανθασμένη .

8.1.1.2. Post Test

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

Τα αποτελέσματα από το post test της εκπαιδευτικού, όπως φαίνονται από τον πίνακα 5, είναι ενθαρρυντικά. Στο pre test οι σωστές απαντήσεις ήταν 20 από τις 34 (58,8%), ενώ στο post test έγιναν 33 (97,1%). Παρουσίασε 100% επιτυχία απαντώντας σωστά και στις 9 ερωτήσεις της ΠΓΠ, έναντι 5 ερωτήσεων στο pre test, ενώ σε εκείνες που μελετούσαν τη ΓΠ παρατηρήθηκε αύξηση κατά 10 (22%) σωστές απαντήσεις.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	1 (33,3%)	3 (100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	3 (75%)

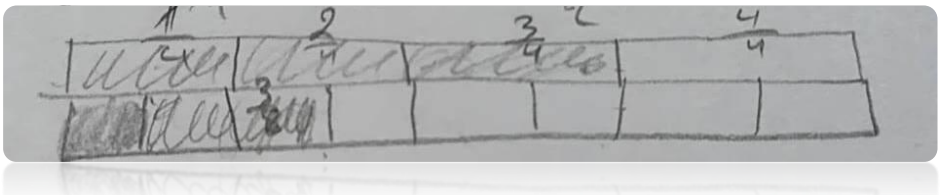
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2 (100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	4 (100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2 (100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Σύνολο (Ε=25)	**14/25 (74%)**	**24/25 (96%)**

Πίνακας 5: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 1 στις ερωτήσεις ΓΠ.

Στην πρώτη κατηγορία κατασκευής προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης η εκπαιδευτικός παρουσίασε επιτυχία της τάξεως του 100%, καθώς μπόρεσε να διατυπώσει σωστό πρόβλημα και στις τρεις ερωτήσεις. Για την ερώτηση ΠΠ διατύπωσε το πρόβλημα: «*Η Ιορδάνα αγόρασε ¾ του μέτρου κορδέλα για να τη βάλει σε φόρεμα, όμως τελικά χρειάστηκε μόνο το ½. Πόση κορδέλα χρειάστηκε τελικά;*», για την ερώτηση ΔΠ έδωσε το πρόβλημα: «*Η Σοφία είχε μία κορδέλα ¾ του μέτρου. Τη χώρισε σε κομματάκια που το καθένα είχε μήκος ½ του μέτρου. Σε πόσα μέρη χώρισε την κορδέλα;*», ενώ για την ερώτηση ΔΜΠ που αφορούσε τη διαίρεση μεικτών σκέφτηκε το πρόβλημα: «*Η Μαρία αγόρασε 1 ¾ του κιλού τυρί. Αυτό το έβαλε σε τάπερ του ½ του κιλού. Πόσα τάπερ χρησιμοποίησε;*». Και τα τρία προβλήματα βαθμολογήθηκαν με 1, γιατί κρίθηκαν σωστά.

Στις ερωτήσεις που αφορούσαν πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων η εκπαιδευτικός διατήρησε το ήδη υψηλό ποσοστό της, δίνοντας πάλι σωστή απάντηση και στις 5 ερωτήσεις της ΓΠ. Για άλλη μια φορά η στρατηγική που ακολούθησε για να βρει το αποτέλεσμα στις ερωτήσεις ΔΥ, ΔΜΥ, ΔΥΑ, ΔΥΚ, ΠΥ αφορούσε τον αλγόριθμο των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων.

Οι ερωτήσεις αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων ήταν εκείνες που δυσκόλεψαν και καθυστέρησαν την εκπαιδευτικό. Σημείωσε 3 σωστές απαντήσεις (75%), έναντι 1 (25%) στην πρώτη συνέντευξη. Στην ερώτηση ΠΑ η εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε το μοντέλο των κλασματικών λωρίδων για την αναπαράσταση της πράξης ¾ x ½, (εικόνα 11), ενώ στην ερώτηση ΔΑ η αναπαράσταση που έδωσε βασίστηκε στην αυτοσχέδια αριθμογραμμή που κατασκεύασε. Αντίθετα στην ερώτηση ΔΜΑ δεν μπόρεσε να δώσει μια ολοκληρωμένη αναπαράσταση, καθώς μπερδεύτηκε στον χωρισμό της αριθμογραμμής. Η ερώτηση αυτή αφορούσε διαίρεση μεικτών κλασμάτων.



Εικόνα 11: Αναπαράσταση της πράξης ¾ x ½ από την εκπαιδευτικό 1 στο post test.

Μεγάλη βελτίωση παρουσίασε στην κατηγορία αναπαράστασης λεκτικών προβλημάτων όπου απάντησε σωστά και στις 2 ερωτήσεις (100%) έναντι καμίας σωστής απάντησης στο pre test. Στην ερώτηση ΑΠΠΛ η εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε το μοντέλο των κλασματικών λωρίδων για την αναπαράσταση της πράξης ¾ x 1/3, ενώ στην ερώτηση ΑΠΔΚ η

αναπαράσταση που έδωσε βασίστηκε στην αυτοσχέδια αριθμογραμμή που κατασκεύασε και σε αυτή την ερώτηση.

Το μέγιστο ποσοστό επιτυχίας σημειώθηκε και στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων. Οι ερωτήσεις ΛΠΠΚ και ΛΠΔΚ εξακολουθούσαν να είναι σωστές αλλά λύθηκαν με διαφορετικό τρόπο από την εκπαιδευτικό. Αυτή τη φορά επέλεξε να εκτελέσει απευθείας τις πράξεις ¾ x 1/3= 3/12 και ¾: 1/8 = ¾ x 8/1 = 24/4 = 6 ως λύσεις στα προβλήματα ΛΠΠΚ και ΛΠΔΚ αντίστοιχα.

Επίσης, 100% επιτυχία παρουσίασε η εκπαιδευτικός στην κατηγορία σύγκρισης κλασμάτων, έναντι 50 % στο pre test. Σε αντίθεση με τη πρώτη φορά, έδωσε σωστή απάντηση και στις ερωτήσεις ΣΚΕ και ΣΚΥ. Η στρατηγική που επέλεξε για να δώσει απάντηση είναι η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς για να βρει ποιο είναι μεγαλύτερο. Γνωρίζοντας δηλαδή ότι κάθε κλάσμα αντιπροσωπεύει μια διαίρεση, του αριθμητή με τον παρονομαστή, επέλεξε να κάνει, λοιπόν, τις διαιρέσεις και έπειτα να συγκρίνει τους δύο δεκαδικούς αριθμούς που προέκυψαν. Διατήρησε όμως την στρατηγική της χρήσης του μισού στις ερωτήσεις ΣΚ και ΣΚΜ, λέγοντας ότι «*το 5/8 είναι πάνω από το μισό…. το 3/7 πιο λίγο από το μισό*».

Στη μετατροπή του αριθμητή και του παρονομαστή των κλασμάτων η εκπαιδευτικός αύξησε τις σωστές απαντήσεις της δίνοντας 2 σωστές απαντήσεις έναντι 1 στην πρώτη συνέντευξη. Η ΜΚ1 διατηρήθηκε σωστή, αφού η εκπαιδευτικός συμπέρανε ότι το κλάσμα α/β θα μεγαλώσει αν αυξηθεί ο αριθμητής 4 φορές και υποδιπλασιαστεί ο αριθμητής. Μάλιστα, παρατήρησε ότι το κλάσμα θα μεγαλώσει 8 φορές, δίνοντας σωστή απάντηση στην ΜΚ2. Ο τρόπος που επέλεξε για να βρει το πόσες φορές θα μεταβληθεί το κλάσμα ήταν ο ίδιος με την προηγούμενη φορά. Η εκπαιδευτικός επέλεξε τυχαία για παράδειγμα το κλάσμα ½ και ακολούθησε τα βήματα της εκφώνησης. Έτσι, βρήκε ότι το κλάσμα από ½ έγινε 4 και συμπέρανε ότι οκταπλασιάστηκε.

Δεν παρουσιάστηκε κάποιο πρόβλημα στην κατηγορία τοποθέτηση κλασμάτων σε αριθμογραμμή, αφού η εκπαιδευτικός κράτησε τα ήδη ψηλά ποσοστά της, όπως φαίνεται και στον πίνακα 4. Τοποθέτησε ολόσωστα τα κλάσματα 3/4 και 3/8 στην αριθμογραμμή που της δόθηκε για τις ερωτήσεις ΑΚ1 και ΑΚ2.

Τέλος, βελτίωση παρατηρήθηκε στην τελευταία κατηγορία που εξέταζε την πυκνότητα των κλασμάτων. Κατά την πρώτη συνέντευξη η εκπαιδευτικός δεν έδωσε σωστή απάντηση στην ερώτηση ΥΠΚ, που εξέταζε τη ΓΠ. Αντίθετα, η επιτυχία άγγιξε το 100% στο post test. Συγκεκριμένα, σε αυτή την ερώτηση η εκπαιδευτικός με την μέθοδο των ισοδύναμων κλασμάτων βρήκε ανάμεσα στο 7/8 και στο 1 τα κλάσματα 14/16, 21/24 και 28/32.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	3 (60%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**5/9 (55,5%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 6: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 1 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 6 η εκπαιδευτικός διατήρησε και αύξησε τις επιδόσεις της στις ερωτήσεις που σχετίζονταν με την ΠΓΠ. Συγκεκριμένα, στην κατηγορία πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης απάντησε σωστά στην ερώτηση ΔΥΛ (100%) αναφέροντας μια πληθώρα λαθών που κάνουν οι μαθητές σε αυτές τις πράξεις. Σταθερά υψηλό παρέμεινε και το ποσοστό επιτυχίας στην αναπαράσταση αποπλαισιωμένων προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, όπου η εκπαιδευτικός απάντησε σωστά στην ερώτηση ΕΑΚ, σημειώνοντας το ¼ των σοκολατών με τον ίδιο τρόπο που το έκανε και στο pre test.

Στις ερωτήσεις που σχετίζονται με την ΠΓΠ για την κατηγορία επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, οι επιδόσεις φτάνουν το 100% από 60% στην πρώτη συνέντευξη. Συγκεκριμένα, στις ερωτήσεις ΑΛΠΔΚ και ΕΛΠΔΚ η εκπαιδευτικός για άλλη μια φορά έκρινε ότι η λύση ¾: 1/8 /=4/3 x 1/8 είναι λανθασμένη λόγω του ότι δεν εφαρμόστηκαν οι κανόνες της διαίρεσης και αντιστράφηκε ο πρώτος όρος, εντοπίζοντας το πρόβλημα με τους αλγόριθμους των πράξεων λέγοντας χαρακτηριστικά «*με τα τόσα βήματα που πρέπει να μάθουν απ' έξω μπερδεύονται τα παιδιά*». Στη ερώτηση ΕΛΠΠΚ η εκπαιδευτικός αξιολόγησε την απάντηση ¾ - 1/3 ως λανθασμένη αιτιολογώντας αυτή τη φορά ότι ο μαθητής έκανε αφαίρεση γιατί «*σκέφτηκε όπως σκέφτεται στους ακέραιους*».

Τέλος, η μεγαλύτερη βελτίωση παρατηρήθηκε στην τελευταία κατηγορία που εξέταζε την πυκνότητα των κλασμάτων. Κατά την πρώτη συνέντευξη η εκπαιδευτικός δεν έδωσε καμία σωστή απάντηση στις ερωτήσεις ΕΠΚ και ΕΑ αυτής της κατηγορίας. Αντίθετα, η επιτυχία άγγιξε το 100% στο post test. Συγκεκριμένα, μπόρεσε να δώσει σωστή εξήγηση στην ερώτηση ΕΠΚ που ζητούσε να αιτιολογήσει την απάντηση ενός μαθητή ότι «δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο 7/8 και στο 1» λέγοντας ότι ο μαθητής «*σκέφτεται με βάση τους ακέραιους*» επομένως αυτό την οδηγεί να υποστηρίξει αυτή τη λανθασμένη άποψη. Ανάλογη απάντηση έδωσε και στην ερώτηση ΕΑ, όπου υποστήριξε ότι το σκεπτικό του μαθητή να θεωρεί ότι ο επόμενος από το 3/5 είναι το 4/5, είναι λανθασμένο καθώς όπως είπε «τους πήρε σαν ακέραιους» και στους ρητούς δεν υπάρχει επόμενος και προηγούμενος αριθμός.

8.2. Μελέτη Εκπαιδευτικού 2

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 45 λεπτά. Η συνεντευξιαζόμενη ήταν γυναίκα, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 20 χρόνια.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	3 (100%)	3(100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	4 (100%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2 (100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	4 (100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή	1 (50%)	2 (100%)

Κλασμάτων (Ε=2)		
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Σύνολο (Ε=25)	**16/25 (64%)**	**25/25 (100%)**

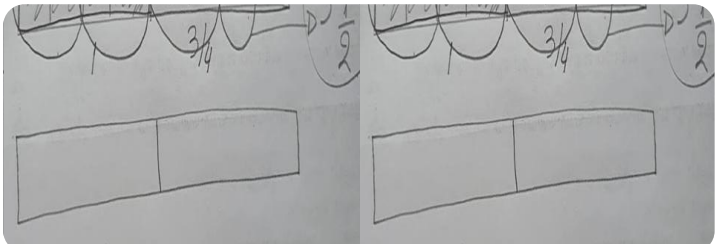
Πίνακας 7: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία ερωτήσεων ΓΠ του υποκειμένου 2.

Ο πίνακας 7 παρουσιάζει τις επιδόσεις του δεύτερου υποκειμένου στη πρώτη και δεύτερη συνέντευξη στις ερωτήσεις ΓΠ. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα, κατά τη πρώτη συνέντευξη η μέγιστη επίδοση (100%) παρουσιάστηκε στην κατασκευή προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Η εκπαιδευτικός διατύπωσε με ευκολία προβλήματα στις ερωτήσεις ΠΠ, ΔΠ και ΔΜΠ. Το πρόβλημα του πολλαπλασιασμού που κατασκεύασε ήταν: « *Πόσο κοστίζουν τα ¾ του κιλού μήλα, όταν το 1 κιλό κοστίζει το ½ του ευρώ.*» Για τη διαίρεση κλασμάτων έδωσε το πρόβλημα: «*Θέλω να μοιράσω τα ¾ του κιλού ζάχαρη σε σακουλάκια του ½ ζάχαρη. Πόσα σακουλάκια θα χρησιμοποιήσω;*» ενώ για τη διαίρεση μεικτών κλασμάτων το πρόβλημα: «*Σε πόσα σακουλάκια θα μοιράσουμε το 1 ¾ του κιλού ρύζι όταν το κάθε σακουλάκι χωράει ½ του κιλού ρύζι;*».

Στην επόμενη κατηγορία που αφορούσε τις πράξεις των κλασμάτων σημείωσε ποσοστό επιτυχίας 100%, αφού απάντησε σωστά και στις 5 ερωτήσεις. Το ποσοστό επιτυχίας έπεσε αισθητά στο 25% με 1 μόνο σωστή απάντηση στην κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων προβλημάτων. Μάλιστα τόσο η ίδια όσο και άλλοι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν την απορία τους σχετικά με το τι εννοούμε αναπαράσταση, ποιο είναι δηλαδή το ζητούμενο. Παρά τις διευκρινήσεις αναπαράσταση δεν δόθηκε σε καμία από τις ερωτήσεις ΠΑ, ΔΑ και ΔΜΑ. Επιπλέον, καμία σωστή απάντηση δεν δόθηκε και στην κατηγορία αναπαράστασης λεκτικών προβλημάτων (0%) με την εκπαιδευτικό να μην μπορεί να δώσει αναπαράσταση σε πρόβλημα ούτε διαίρεσης ούτε πολλαπλασιασμού.

Στις δυο ερωτήσεις απάντησε σωστά η εκπαιδευτικός στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων (100%). Η κατηγορία σύγκρισης κλασμάτων φάνηκε να δυσκολεύει την εκπαιδευτικό (ποσοστό 50%), γιατί μπορούσε να δώσει απάντηση μόνο αν τα έκανε ομώνυμα. Στην περίπτωση που δεν μπορούσε να τα κάνει ομώνυμα, διάλεγε ένα κλάσμα ως μεγαλύτερο, εκείνο που της φαινόταν σωστό χωρίς να μπορεί όμως να εξηγήσει το γιατί. Επίσης, το μέγιστο ποσοστό επιτυχίας (100%) συγκέντρωσε στη τοποθέτηση κλασμάτων σε αριθμογραμμή, ενώ στη κατηγορία μετατροπής κλασμάτων ποσοστό 50%. Το μεγαλύτερο ποσοστό αποτυχίας παρουσιάστηκε στην πυκνότητα κλασμάτων (0%). Η εκπαιδευτικός δεν μπόρεσε να βρει κανένα κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1 (ΥΠΚ), λέγοντας χαρακτηριστικά ότι «δεν υπάρχει».

Όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 7 η εκπαιδευτικός στο post test διατήρησε το ήδη υψηλό ποσοστό της στο 100% στις κατηγορίες κατασκευής προβλημάτων και πράξεις κλασμάτων, διατυπώνοντας προβλήματα και εκτελώντας πράξεις με ιδιαίτερη ευκολία. Αύξηση της τάξεως του 75% παρουσίασε στη αναπαράσταση αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης αποτυπώνοντας τις αναπαραστάσεις που δεν κατάφερε την πρώτη φορά. Μάλιστα, σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι ήταν η μοναδική εκπαιδευτικός που αποτύπωσε αναπαράσταση για την διαίρεση μεικτών κλασμάτων (ΔΜΑ). Έδωσε με ευκολία κιόλας την αναπαράσταση που φαίνεται στην εικόνα 11.



Εικόνα 11: Αναπαράσταση της εκπαιδευτικού 2 στην ερώτηση ΔΜΑ.

Το άριστα διατήρησε στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων, ενώ ολόσωστες απαντήσεις έδωσε και στην κατηγορία της σύγκρισης κλασμάτων χρησιμοποιώντας τις στρατηγικές του μισού και της λογικής του υπολοίπου, σε αντίθεση με την πρώτη φορά που δεν μπορούσε να δώσει κάποια απάντηση αν δεν τα έκανε ομώνυμα. Η κατηγορία μετατροπής και τοποθέτησης κλασμάτων σε αριθμογραμμή φάνηκε να σημειώνει αύξηση στο 100%, αλλά και αυτή της πυκνότητας κλασμάτων, όπου η εκπαιδευτικός μπόρεσε να βρει τρεις αριθμούς ανάμεσα στο 7/8 και στο 1 (ΥΠΚ), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ισοδύναμων κλασμάτων.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	3 (60%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**4/9 (44,4%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 8: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 2 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Σύμφωνα με τον πίνακα 8 η εκπαιδευτικός απάντησε σε 5 κατηγορίες ερωτήσεων ΠΓΠ. Το 100% επιτυχίας έφτασε κατά την πρώτη συνέντευξη στις ερωτήσεις αναπαράσταση αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Λίγο πάνω από τη μέση (60%) συγκέντρωσε στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων. Αξίζει να σημειωθεί η απάντηση που έδωσε στην ερώτηση ΑΠΠΚ, όπου έκρινε ως λάθος την απάντηση της μαθήτρια, λέγοντας ότι «τα έκανε ομώνυμα, ενώ δεν έπρεπε». Καμία σωστή απάντηση (0%) δεν έδωσε στις ερωτήσεις σχετικές με την πυκνότητα των κλασμάτων και έκρινε ως σωστή την απάντηση του μαθητή ότι δεν υπάρχει κανένα κλάσμα μεταξύ αυτών τον δύο αριθμών (ΕΠΚ).

Κατά της δεύτερη συνέντευξη οι επιδόσεις της διατηρήθηκαν ενώ άλλες αυξήθηκαν. Το 100% πέτυχε ξανά στις κατηγορίες πράξεις κλασμάτων και αναπαράστασης απολπαισιωμένων πράξεων. Επίσης, το άριστα άγγιξε στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, έναντι 60% στο pre test, μπορώντας πλέον να αιτιολογήσει τα λάθη των μαθητών στις ερωτήσεις ΕΛΠΔΚ και ΕΛΠΠΚ. Η κατηγορία πυκνότητας κλασμάτων φάνηκε να μη δυσκόλεψε την εκπαιδευτικό στο pre test, όπου μπόρεσε να αιτιολογήσει τις απαντήσει των μαθητών στις ερωτήσει ΕΑ και ΕΠΚ λέγοντας ότι «*ο μαθητής σκέφτεται με την λογική των ακεραίων*».

8.3. Μελέτη Εκπαιδευτικού 3

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 50 λεπτά. Η συνεντευξιαζόμενη ήταν γυναίκα, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 9 χρόνια. Μάλιστα είναι κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος στις επιστήμες της αγωγής.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	0(0%)	3(100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5(100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	3 (75%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2(100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	4 (100%)	4(100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (100%)	2(100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Σύνολο (Ε=25)	**15/25 (60%)**	**24/25 (96%)**

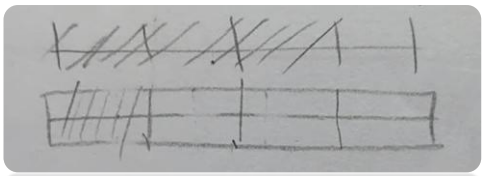
Πίνακας 9: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 3 στις ερωτήσεις ΓΠ.

Ο πίνακας 9 παρουσιάζει τις επιτυχίες του τρίτου υποκειμένου στις εννιά κατηγορίες στο pre και post test. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η εκπαιδευτικός στο pre test σημείωσε 100% επιτυχία σε 5 από τις 9 κατηγορίες της συνέντευξης. Από τις απαντήσεις που έδωσε αξίζει να σημειωθεί ο τρόπος που σύγκρινε τα κλάσματα τις ερωτήσεις ΣΚΕ, ΣΚΥ, ΣΚΜ και ΣΚ. Η εκπαιδευτικός στο μυαλό της πραγματοποιούσε νοερές διαιρέσεις για να βρει ποιο κλάσμα είναι το μεγαλύτερο, καθώς όπως ανέφερε δεν μπορούσε αλλιώς.

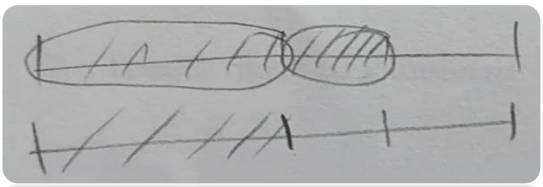
Τόσο η ίδια, όσο και οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί, δεν μπόρεσε να κάνει κάποια αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (0%), ούτε να κατασκευάσει κάποιο πρόβλημα (0%). Μία σωστή απάντηση έδωσε στη κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων προβλημάτων (25%), όπου σκίασε το ¼ των κύκλων που της δόθηκαν.

Όπως είναι φανερό από τον πίνακα οι επιδόσεις της εκπαιδευτικού αυξήθηκαν μετά την επιμόρφωση. Μάλιστα, συγκέντρωσε στις 7 από τις 8 κατηγορίες 100% επιτυχία. Η κατηγορία αναπαράστασης προβλημάτων ήταν εκείνη στην οποία σημειώθηκε μία λάθος απάντηση (75%). Συγκεκριμένα, η ερώτηση ΔΜΑ, που αφορούσε την αναπαράσταση της πράξης της διαίρεσης μεικτών κλασμάτων ήταν εκείνη που δυσκόλεψε την εκπαιδευτικό.

Ενώ μπόρεσε να διατυπώσει πρόβλημα με την πράξη 1 3/4 :1/2, δεν μπόρεσε εν τέλει, παρά την επιμονή της να αναπαραστήσει σωστά την πράξη πάνω στην αριθμογραμμή. Γενικότερα, παρατηρήθηκε μία δυσκολία στην κατασκευή προβλημάτων διαίρεσης για την εκπαιδευτικό. Έκανε αρκετές προσπάθειες μέχρι να καταλήξει τελικά σε σωστό πρόβλημα, αντιλαμβάνοντας τα λάθη της η ίδια κάθε φορά. Μάλιστα, λόγω αυτής της δυσκολίας εξέφρασε την άποψη ότι της έλειπε ένα σλόγκαν – μότο για τη διαίρεση, όπως αυτό που κράτησε στον πολλαπλασιασμό (το μέρος του μέρους).



Εικόνα 12: Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού των κλασμάτων 3/4 x 1/3 για την ερώτηση ΑΠΠΚ της κατηγορίας αναπαράστασης προβλήματος στο post test.



Εικόνα 13: Αναπαράσταση διαίρεσης των κλασμάτων 3/4 :1/2 για την ερώτηση ΔΑ της κατηγορίας αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων στο post test.

Ένα ακόμα σημείο που αξίζει την προσοχή είναι η επιλογή του τρόπου σύγκρισης δύο κλασμάτων. Η εκπαιδευτικός τόνισε ότι πάλι θα συνεχίσει να επιλέγει την διαίρεση και την μετατροπή σε δεκαδικούς ως μέθοδο, αν και για το τεστ χρησιμοποίησε άλλες στρατηγικές. Να σημειωθεί σε αυτή το σημείο ότι η ίδια άποψη εκφράστηκε και από άλλους εκπαιδευτικούς κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και της επιμόρφωσης.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**7/9 (77,7%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 10: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 3 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Από τα αποτελέσματα που αποτυπώνονται στον πίνακα 10 είναι φανερό ότι η εκπαιδευτικός πέτυχε πολύ υψηλές επιδόσεις από την πρώτη κιόλας συνέντευξη. Συγκεκριμένα, απάντησε σωστά στις 7 από τις 9 ερωτήσεις (77,7%) της ΠΓΠ. Ήταν μία από τις δύο εκπαιδευτικούς που μπόρεσε να δώσει ερμηνεία στις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις ΑΛΠΔΚ και ΑΛΠΠΚ της κατηγορίας επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, από το pre test κιόλας, λέγοντας ότι «οι μαθητές σκέφτονται τις περισσότερες φορές όπως και στους ακέραιους νομίζουν ότι τα κλάσματα είναι όπως και οι

ακέραιοι». Εξίσου υψηλά ποσοστά (100%) συγκέντρωσε στις κατηγορίες με πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και επίλυσης προβλημάτων. Αντίθετα, χαμηλότερο ποσοστό σημείωσε στην κατηγορία της πυκνότητας κλασμάτων (50%) απαντώντας μόνο σωστά στην ερώτηση ΕΠΚ. Υποστήριξε την στάση της λέγοντας ότι ο μαθητής πιστεύει ότι ανάμεσα στο 7/8 και το 8/8 δεν υπάρχει κάποιος αριθμός γιατί «*βασίζεται στους ακέραιους αριθμούς, που ανάμεσα στο 7 και στο 8 δεν υπάρχει κάποιος άλλος ακέραιος*».

Τα υψηλά ποσοστά επιτυχίας διατηρήθηκαν και στο post test. Το 100% έφτασαν οι επιδόσεις της και στις 4 κατηγορίες των ερωτήσεων της ΠΓΠ. Μάλιστα, απάντησε ορθά και αιτιολόγησε το σκεπτικό του μαθητή στη ερώτηση ΕΑ λέγοντας ότι «*στα κλάσματα δεν υπάρχει προηγούμενος και επόμενος αριθμός*».

8.4. Μελέτη Εκπαιδευτικού 4

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 40 λεπτά. Ο συνεντευξιαζόμενος ήταν άντρας, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 20 χρόνια.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	1(33,3%)	3(100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5(100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	3 (75%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2(100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	4(100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2(100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Σύνολο (Ε=25)	**14/25 (56%)**	**24/25 (96%)**

Πίνακας 11: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 4 στις ερωτήσεις ΓΠ.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 11 οι επιδόσεις του εκπαιδευτικού στο pre test ήταν ιδιαίτερα χαμηλές σε σχέση με τους προηγούμενους εκπαιδευτικούς. Υψηλά ποσοστά συγκέντρωσε στην κατηγορία πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (100%), στη τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή (100%) και στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (100%). Μεγάλη δυσκολία αντιμετώπισε και ο ίδιος, όπως και οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί στην κατηγορία πυκνότητα κλασμάτων, όπου δεν μπόρεσε να απαντήσει σε καμία από τις ερωτήσεις (0%), στην αναπαράσταση αποπλαισιωμένων Πράξεων (25%), δίνοντας μόνο μία αναπαράσταση στην ερώτηση ΛΑΚ, που απαιτούσε να σκιάσουν το ¼ των κύκλων που του δόθηκαν και στη αναπαράσταση

λεκτικών προβλημάτων, όπου δεν μπόρεσε να δώσει κάποια αναπαράσταση για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων (0%).

Επίσης, στην κατηγορία κατασκευής προβλημάτων δεν μπόρεσε να διατυπώσει πρόβλημα διαίρεσης απλών και μεικτών κλασμάτων, παρά μόνο για τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων (33,3%) Μέτρια ποσοστά, ωστόσο συγκέντρωσε στη σύγκριση κλασμάτων (50%) και τη μετατροπή (50%).

Αν και το ποσοστό επιτυχίας στο pre test ήταν λίγο πάνω από τη μέση (56 %), στο post test παρουσιάστηκε μεγάλη άνοδος αγγίζοντας το 96% καταφέρνοντας να απαντήσει στις 24 από τις 25 ερωτήσεις ΓΠ. Συγκεκριμένα, στον πίνακα 11 όπου φαίνονται αναλυτικά οι επιδόσεις που σημείωσε ο εκπαιδευτικός στο post test συγκριτικά με το pre test, η αύξηση των ποσοστών επιτυχίας είναι εμφανής. Το 100% άγγιξε στις επτά από τις οκτώ κατηγορίες ερωτήσεων ΓΠ. Μόνο η κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων κλασμάτων φάνηκε να δυσκόλεψε τον εκπαιδευτικό. Απάντησε σωστά σε 3 από τις 4 ερωτήσεις (75%) της κατηγορίας με εξαίρεση την ΔΜΑ. Και ο ίδιος όπως και ο τρίτος εκπαιδευτικός δυσκολεύτηκε στην αναπαράσταση των μεικτών κλασμάτων, καθώς δεν χρησιμοποίησε το μοντέλο του εμβαδού αλλά της αριθμογραμμής. Αξίζει να σημειωθεί ότι και αυτός ο εκπαιδευτικός επέλεξε τη στρατηγική της διαίρεσης για να συγκρίνει τα κλάσματα στην κατηγορία σύγκρισης κλασμάτων και όχι κάποια άλλη νοερή στρατηγική.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	3 (60%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**4/9 (44,4%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 12: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 4 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Ο πίνακας 12 παρουσιάζει τις απαντήσεις που έδωσε ο εκπαιδευτικός στις ερωτήσεις της ΠΓΠ. Όπως είναι εμφανές απάντησε σωστά (100%) στις ερωτήσεις αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων. Στην ερώτηση ΔΥΛ και αυτός ο εκπαιδευτικός έκανα μια λίστα με τα λάθη που κάνουν οι μαθητές στις πράξεις μεταξύ κλασμάτων στην ερώτηση ΔΥΛ της πρώτης κατηγορίας. Χαρακτηριστικά ανέφερε ότι οι μαθητές ξεχνούν να αντιστρέψουν τον δεύτερο όρο στη διαίρεση και πάνε να διαιρέσουν αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, μένοντας μόνο στα αλγοριθμικά λάθη. Τα ίδια ποσοστά αυξήθηκαν στο post test (100%). Μικρότερα ποσοστά σημείωσε στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (60%) απαντώντας σωστά στις ερωτήσεις ΕΛΠΔΚ, ΑΛΠΔΚ και ΑΛΠΠΚ δίνοντας ίδιες απαντήσεις με τους προηγούμενους εκπαιδευτικούς. Το ποσοστό όμως αυξήθηκε στο post test φτάνοντας το 100% και απαντώντας σωστά στις υπόλοιπες δύο ερωτήσεις. Η τελευταία κατηγορία της πυκνότητας κλασμάτων δυσκόλεψε τον εκπαιδευτικό καθώς δεν μπόρεσε να απαντήσει σε καμία από τις δύο ερωτήσεις της κατηγορίας. Όμως κατά τη δεύτερη συνέντευξη απάντησε σωστά στις

ερωτήσεις ΕΠΚ και ΕΑ, λέγοντας ότι υπάρχουν κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1 και υποστηρίζοντας πως δεν υπάρχει επόμενος και προηγούμενος αριθμός στους ρητούς.

8.5. Μελέτη Εκπαιδευτικού 5

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 45 λεπτά. Ο συνεντευξιαζόμενος ήταν άντρας, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 11 χρόνια.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

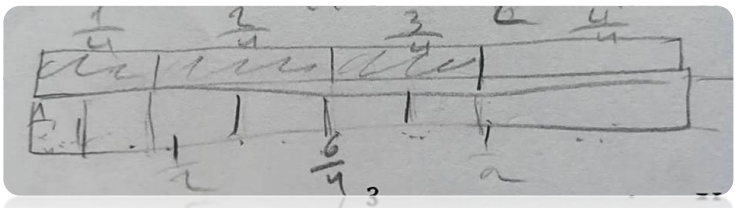
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	1(33,3%)	3(100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5(100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	3 (75%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2(100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	4(100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2(100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	0 (0%)
Σύνολο (Ε=25)	**14/25 (56%)**	**23/25 (92%)**

Πίνακας 13: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 5 στις ερωτήσεις ΓΠ.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα 13 ο εκπαιδευτικός στο pre test σημείωσε υψηλά ποσοστά επιτυχίας στις κατηγορίες πράξεις κλασμάτων (100%), τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή (100%) και επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (100%). Μεγάλη δυσκολία συνάντησε και αυτός ο εκπαιδευτικός στην πυκνότητα κλασμάτων όπου δεν μπόρεσε να απαντήσει σωστά σε καμία ερώτηση (0%), στην κατασκευή προβλημάτων (33,3%) και στην αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων (0%) και αποπλαισιωμένων προβλημάτων (25%). Αξίζει να σημειωθεί πως την ίδια απορία με τους υπόλοιπους εξέφρασε και αυτός ο εκπαιδευτικός όταν ήρθε η ώρα να αναπαραστήσει μια πράξη κλασμάτων ρωτώντας «*τι εννοείς αναπαράσταση*;». Από την άλλη πλευρά, όσο και αν προσπάθησε δεν μπόρεσε να διατυπώσει κάποιο πρόβλημα πολλαπλασιασμού, διότι πάντα κατέληγε σε πρόβλημα αφαίρεσης. Τέλος, μέτρια ποσοστά σημείωσε στις κατηγορίες σύγκριση κλασμάτων (50%) και μετατροπή κλασμάτων (50%).

Αν και το ποσοστό επιτυχίας στο pre test ήταν λίγο πάνω από τη μέση (56%), στο post test παρουσιάστηκε μεγάλη άνοδος αγγίζοντας το 92%. Σύμφωνα με τον πίνακα 12 στο post test ο εκπαιδευτικός πέτυχε το μέγιστο ποσοστό σωστών απαντήσεων σε 7 από τις 9 κατηγορίες ερωτήσεων. Μπόρεσε με προσπάθεια να διατυπώσει προβλήματα διαίρεσης και πολλαπλασιασμό κλασμάτων (100%), με ευκολία εκτέλεσε πράξεις κλασμάτων (100%) και έλυσε προβλήματα (100%) καθώς και σύγκρινε, μετέτρεψε και διέταξε κλάσματα (100%). Δυσκολία παρουσιάστηκε στην κατηγορία των αναπαραστάσεων αποπλαισιωμένων πράξεων

πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, όπου και αυτός δεν μπόρεσε να αποτυπώσει σωστή αναπαράσταση στην ερώτηση ΔΜΑ για τη διαίρεση 1 ¾ : 1/2 (85,7%) και στην κατηγορία πυκνότητας κλασμάτων, όπου στην ερώτηση ΥΠΚ δεν μπόρεσε να βρει 3 κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1 (0%).



Εικόνα 14: Αναπαράσταση της πράξεις 3/4 : 1/2 της ερώτησης ΔΑ της κατηγορίας αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	3 (60%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**4/9 (44,4%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 14: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 5 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Παρόμοιες επιδόσεις με τον προηγούμενο εκπαιδευτικό σημείωσε ο εκπαιδευτικός 5. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στον πίνακα 14, απάντησε στο pre test σωστά σε 4 από τις 9 (44,4%) ερωτήσεις ΠΓΠ ενώ στο post test και στις 9 ερωτήσεις (100%). Το άριστα (100%) έφτασε στην κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων τόσο κατά την πρώτη όσο και κατά τη δεύτερη συνέντευξη. Δυσκολία αντιμετώπισε στην κατηγορία πυκνότητας κλασμάτων με 0% επιτυχία, ενώ καλύτερα τα πήγε στη επίλυση προβλημάτων (60%). Μπόρεσε και απάντησε σωστά στις ερωτήσεις ΑΛΠΠΚ, ΕΛΠΔΚ και ΑΛΠΔΚ. Αντίθετα, απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις των κατηγοριών στη δεύτερη συνέντευξη.

8.6. Μελέτη Εκπαιδευτικού 6

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 40 λεπτά. Η συνεντευξιαζόμενη ήταν γυναίκα, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 11 χρόνια. Μάλιστα, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού τίτλου πάνω στην ειδική αγωγή.

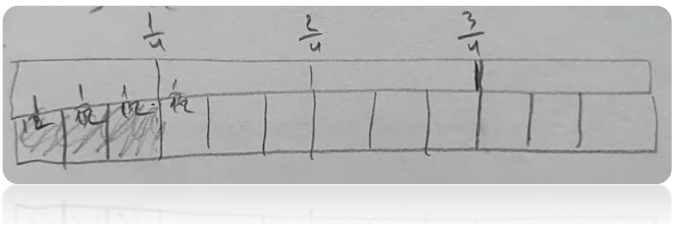
Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	0 (0%)	3(100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5(100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	2 (50%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2(100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	4 (100%)	4(100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2(100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Σύνολο (Ε=25)	**15/25 (60%)**	**23/25 (92%)**

Πίνακας 15: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 6 στις ερωτήσεις ΓΠ.

Ο πίνακας 15 παρουσιάζει τις επιδόσεις της εκπαιδευτικού στο pre και post test. Όπως φαίνεται κατά τη πρώτη συνέντευξη ο εκπαιδευτικός συγκέντρωσε τα υψηλότερα ποσοστά στις κατηγορίες πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (100%), σύγκρισης (100%), επίλυσης προβλημάτων και τοποθέτησης κλασμάτων στην αριθμογραμμή (100%), όπου απάντησε με ιδιαίτερη ευκολία. Αξίζει να σημειωθεί ότι η στρατηγική που ακολούθησε η εκπαιδευτικός για τη σύγκριση ήταν να κάνει τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή και στη συνέχεια να συγκρίνει τους δεκαδικούς μεταξύ τους. Μάλιστα, ήταν ο μοναδικός από τους επτά εκπαιδευτικούς που σύγκρινε σωστά όλα τα κλάσματα. Ακολουθούν σε ποσοστά οι κατηγορίες αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων (25%) κα μετατροπής κλασμάτων (50%). Πολύ μικρό ποσοστό επιτυχίας είχε στην κατηγορία αναπαράστασης λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, όπου δεν μπόρεσε να αποτυπώσει αναπαράσταση για τις πράξεις της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων. Καμία ερώτηση δεν απάντησε σωστά η εκπαιδευτικός στις κατηγορίες πυκνότητα κλασμάτων και κατασκευής προβλημάτων (0%).

Αντίθετα, μεγάλη βελτίωση παρατηρήθηκε στο post test, όπως φαίνεται στον πίνακα. Η εκπαιδευτικός απάντησε σωστά σε 23 από τις 25 ερωτήσεις της συνέντευξης (92%). Αύξησε τις σωστές ερωτήσεις της ΓΠ από 15 σε 23. Μάλιστα, συγκέντρωσε 100% επιτυχία σε 8 από τις 9 κατηγορίες των ερωτήσεων. Όπως φανερώνει ο πίνακας 14, η κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων ήταν εκείνη που σημείωσε λάθος απάντηση η εκπαιδευτικός (50%). Συγκεκριμένα, η ερώτηση ΔΜΑ ήταν εκείνη στην οποία δεν μπόρεσε να αποτυπώσει κάποια αναπαράσταση για τη διαίρεση μεικτών κλασμάτων. Αξίζει να αναφερθεί πως και αυτή η εκπαιδευτικός επεσήμανε ότι για τη σύγκριση των κλασμάτων θα συνεχίζει να χρησιμοποιεί την στρατηγική της διαίρεσης ή των ομώνυμων κλασμάτων, γιατί όπως ανέφερε «*βασίζομαι περισσότερο για το αποτέλεσμα*».



Εικόνα 15: Αναπαράσταση της πράξης 3/4 x 1/2 στην ερώτηση ΑΠΠΚ της κατηγορίας αναπαράστασης προβλημάτων στο post test.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	4 (80%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**5/9 (55,5%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 16: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 6 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Ο πίνακα 16 παρουσιάζει τις επιδόσεις της εκπαιδευτικού στις ερωτήσεις που αφορούν την ΠΓΠ. Όπως αποτυπώνεται και στον πίνακα η εκπαιδευτικός απάντησε σωστά σε 5 ερωτήσεις της κατηγορίας (55,5%). Μάλιστα, 100 % επιτυχία σημείωσε, απαντώντας σωστά στις ερωτήσεις της κατηγορίας αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων. Καλές επιδόσεις σημείωσε στην επίλυσης προβλημάτων (80%) με την εκπαιδευτικό να απαντά σωστά σε 4 από τις 5 ερωτήσεις της κατηγορίας. Συγκεκριμένα η ερώτηση που απάντησε λανθασμένα ήταν η ΑΠΠΚ, όπου αξιολόγησε ως λάθος την απάντηση που έδωσε η μαθήτρια ακολουθώντας τον συλλογισμό: $\frac{1}{4}\ x\ \frac{1}{5} = \frac{5}{20}\ x \frac{4}{20}\ = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$. Σε αυτό την οδήγησε η άποψή της ότι δεν ακολούθησε σωστά τα βήματα του πολλαπλασιασμού επομένως και να βρήκε σωστό αποτέλεσμα είναι λάθος. Καμία σωστή απάντηση δεν έδωσε ούτε αυτή η εκπαιδευτικός στις ερωτήσεις της κατηγορίας πυκνότητα κλασμάτων, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με τους προηγούμενους εκπαιδευτικούς.

Έπειτα από την επιμόρφωση που έγινε, η εκπαιδευτικός απάντησε ξανά στις ίδιες ερωτήσεις. Αυτή τη φορά οι απαντήσεις της διαφοροποιήθηκαν σε κάποιες ερωτήσεις. Διατήρησε τις σωστές της απαντήσεις στις ερωτήσεις των κατηγοριών πράξεις κλασμάτων και αναπαράσταση αποπλαισιωμένων πράξεων (100%) ενώ αύξησε σε 100% τις επιδόσεις της στις κατηγορίες επίλυσης προβλημάτων και πυκνότητας κλασμάτων.

8.7. Μελέτη Εκπαιδευτικού 7

Η πρώτη συνέντευξη (pre test) που πραγματοποιήθηκε πριν από την παρέμβαση διήρκησε 45 λεπτά. Η συνεντευξιαζόμενη ήταν γυναίκα, που εργάζεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 18 χρόνια.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre test	Post test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=3)	1 (33,3%)	3(100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	5 (100%)	5(100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=4)	1 (25%)	2 (50%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2(100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	4(100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2(100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων στην Αριθμογραμμή (Ε=2)	2 (100%)	2(100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Σύνολο (Ε=25)	**14/25 (56%)**	**23/25 (92%)**

Πίνακας 17: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 7 στις ερωτήσεις ΓΠ.

Ο πίνακας 17 παρουσιάζει τις επιδόσεις του υποκειμένου 7 στη ΓΠ ανά κατηγορία ερωτήσεων στο pre και post test. Όπως φαίνεται, κατά τη πρώτη συνέντευξη η εκπαιδευτικός σημείωσε υψηλά ποσοστά στις ερωτήσεις της κατηγορίας πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (100%) τοποθέτησης κλασμάτων στην αριθμογραμμή (100%) και επίλυσης προβλημάτων (100%). Ιδιαίτερο πρόβλημα παρουσιάστηκε στην κατηγορία πυκνότητας κλασμάτων, όπου δεν μπόρεσε να απαντήσει σωστά σε καμία ερώτηση (0%) και στην αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Δυσκολία υπήρξε στην κατηγορία κατασκευής προβλημάτων (33,3%), όπου και διατύπωσε μόνο ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων και κανένα για τη διαίρεση. Μέτρια ποσοστά σημειώθηκαν στις κατηγορίες σύγκρισης (50%) και μετατροπής κλασμάτων (50%).

Με εμφανή τη διαφορά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εκπαιδευτικού στο post test. Στον πίνακα φαίνεται η συνολική επιτυχία της εκπαιδευτικού στο post test που αγγίζει το 92%. Απάντησε σωστά σε 23 από τις 25 ερωτήσεις της ΓΠ έναντι 14 στο pre test. Συγκεκριμένα τα ποσοστά της έφτασαν το 100% σε 8 από τις 9 κατηγορίες των ερωτήσεων της συνέντευξης. Με εξαίρεση την κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, όπου δεν απάντησε σωστά σε δύο ερωτήσεις (50%). Δεν μπόρεσε να αποτυπώσει αναπαράσταση για την διαίρεση κλασμάτων των ερωτήσεων ΔΑ και ΔΜΑ. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που απάντησε σωστά η εκπαιδευτικός παρατήρησε ότι δυσκολεύτηκε στη κατασκευή προβλήματος για τη διαίρεση κλασμάτων, κάνοντας πολλές προσπάθειες γιατί συνεχώς διατύπωνε πρόβλημα αφαίρεσης. Επιπλέον, τόσο αυτή όσο και οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί επεσήμαναν ότι χρειαζόταν περισσότερη και σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα εξάσκηση στις νοερές στρατηγικές σύγκρισης κλασμάτων, καθώς δύσκολα να απαγκιστρωθούν από τη συνήθεια χρόνων, όπου χρησιμοποιούν τη διαίρεση ή τη μετατροπή σε ομώνυμα.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ΠΓΠ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=1)	0 (0%)	1 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=1)	1 (100%)	1 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=5)	4 (80%)	5 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Σύνολο (Ε=9)	**5/9 (55,5%)**	**9/9 (100%)**

Πίνακας 18: Συγκριτικός πίνακας σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία του υποκειμένου 7 στις ερωτήσεις ΠΓΠ.

Καλύτερες επιδόσεις σημείωσε ο εκπαιδευτικός στις ερωτήσεις της ΠΓΠ. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στον πίνακα 18, απάντησε στο pre test σωστά σε 5 από τις 9 (55,5%) ερωτήσεις ΠΓΠ, ενώ στο post test και στις 9 ερωτήσεις (100%). Το άριστα (100%) έφτασε στην κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων τόσο κατά την πρώτη όσο και κατά τη δεύτερη συνέντευξη. Δυσκολία αντιμετώπισε στην κατηγορία πυκνότητας κλασμάτων με 0% επιτυχία, ενώ καλύτερα τα πήγε στη επίλυση προβλημάτων (80%). Μπόρεσε και απάντησε σωστά στις ερωτήσεις ΑΛΠΠΚ, ΕΛΠΔΚ, ΑΠΠΚ και ΑΛΠΔΚ. Αντίθετα, απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις των κατηγοριών στη δεύτερη συνέντευξη.

8.8. Συγκριτική Ανάλυση

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα δεν αντιμετώπισαν όπως φάνηκε τον ίδιο βαθμό δυσκολίας σε όλες τις κατηγορίες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα σε κάποιες κατηγορίες να έχουν δώσει κατά μέσο όρο 6 σωστές απαντήσεις, ενώ σε κάποιες άλλες 1 ή και καμία. Ο πίνακας 19 παρακάτω παρουσιάζει το μέσο όρο σωστών απαντήσεων ανά κατηγορία ερωτήσεων στο pre και post test αντίστοιχα.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	Pre Test	Post Test
Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=3)	1 (33,3%)	3 (100%)
Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων (Ε=6)	6 (100%)	6 (100%)
Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=5)	1 (20%)	5 (71,4%)
Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=2)	0 (0%)	2 (100%)
Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης (Ε=7)	6 (85,7%)	7 (100%)
Σύγκριση Κλασμάτων (Ε=4)	2 (50%)	4 (100%)
Μετατροπή του Αριθμητή και του Παρονομαστή Κλασμάτων (Ε=2)	1 (50%)	2 (100%)
Τοποθέτηση Κλασμάτων σε Αριθμογραμμή(Ε= 2)	2 (100%)	2 (100%)
Πυκνότητα Κλασμάτων (Ε=3)	0 (0%)	3 (100%)

Πίνακας 19: Μέσος όρος σωστών απαντήσεων των εκπαιδευτικών ανά κατηγορία ερωτήσεων.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 19 η κατηγορία κατά τη οποία οι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν περισσότερες δυσκολίες είναι η πυκνότητα κλασμάτων όπου κατά μέσο όρο δεν δόθηκε καμία σωστή απάντηση (0%) και η αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων (0%). Ακολουθεί η κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων κλασμάτων όπου κατά μέσο όρο οι εκπαιδευτικοί έδωσαν σωστές απαντήσεις από τις 5 ερωτήσεις της κατηγορίας (20%). Έπεται η κατασκευή προβλημάτων, με τους εκπαιδευτικούς να απαντούν κατά μέσο όρο σε 1 ερώτηση (33,3%). Ακολουθούν με τις μισές σωστές απαντήσεις οι κατηγορίες σύγκριση και μετατροπή κλασμάτων (50%) και η επίλυση προβλημάτων με μέσο όρο 6 σωστές απαντήσεις (85,7%). Τέλος, σε όλες τις απαντήσεις απάντησαν σωστά κατά μέσο όρο οι εκπαιδευτικοί στις κατηγορίες πράξεις κλασμάτων και διάταξη κλασμάτων.

Μετά την επιμόρφωση οι επιδόσεις διαφοροποιήθηκαν και κυμάνθηκαν ανοδικά. Συγκεκριμένα, κατά μέσο όρο απάντησαν σε όλες τις κατηγορίες σωστά οι εκπαιδευτικοί στις 8 από τις 9 κατηγορίες (100%). Εξαίρεση αποτέλεσε η κατηγορία αναπαράστασης αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων, όπου κατά μέσο όρο απάντησαν σωστά σε 5 ερωτήσεις.

8.8.1. Συγκριτική Ανάλυση Ερωτήσεων ΓΠ ανά κατηγορία

Παρακάτω παρουσιάζονται και αναλύονται οι σωστές απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στις ερωτήσεις Γνώσης Περιεχομένου των δύο συνεντεύξεων κατηγοριοποιημένες ανά κατηγορία ερωτήσεων.

Κατασκευή Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΠΠ : ¾ x ½	3 (42,8%)	7 (100%)
ΔΠ: ¾ : ½	1 (14,3%)	7 (100%)
ΔΜΠ: 1 ¾ : ½	1 (14,3%)	7 (100%)

Πίνακας 20: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία κατασκευή προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Ο πίνακας 20 παρουσιάζει το σύνολο των σωστών απαντήσεων που δόθηκαν στις τρεις ερωτήσεις της κατηγορίας κατασκευής προβλημάτων στο pre και post test αντίστοιχα. Οι σωστές απαντήσεις που δόθηκαν κατά την πρώτη συνέντευξη κυμαίνονται από 1 έως 3. Τρεις μόνο εκπαιδευτικοί μπόρεσαν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων, ενώ μόνο ένας να διατυπώσει πρόβλημα διαίρεσης απλών και μεικτών κλασμάτων. Μάλιστα, όπως αποδείχθηκε η κατηγορία αυτή ήταν μία από εκείνες που οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί αντιμετώπισαν πρόβλημα, καθώς υστερούν ιδιαίτερα στο να κατασκευάζουν οι ίδιοι προβλήματα. Αντίθετα, στο post test που διενεργήθηκε μετά την επιμόρφωση το 100% των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στο πρόγραμμα μπόρεσε να κατασκευάσει με ευχέρεια προβλήματα για τις ερωτήσεις ΠΠ, ΔΠ και ΔΜΠ.

Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΠΥ: ¾ x ½	7 (100%)	7 (100%)
ΔΥ: ¾ : ½	7 (100%)	7 (100%)
ΔΜΥ: 1 ¾ : ½	7 (100%)	7 (100%)
ΔΥΑ: ¼ : 4	7 (100%)	7 (100%)
ΔΥΚ: ¼ : ¾	7 (100%)	7 (100%)

Πίνακας 21: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Ο παραπάνω πίνακας παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας των εκπαιδευτικών ανά ερώτηση στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων. Είναι εμφανές ότι οι εκπαιδευτικοί εκτελούν πράξεις με ευκολία και χειρίζονται ορθά τους αλγόριθμος των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Στο σύνολο των πράξεων οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν τους αλγόριθμους τον πράξεων για να βρουν το αποτέλεσμα και όχι κάποια άλλη στρατηγική. Να σημειωθεί ότι δόθηκε η ελευθερία στους εκπαιδευτικούς να βρουν το αποτέλεσμα με όποιον τρόπο θέλουν. Τόσο πριν την επιμόρφωση όσο και μετά και οι 7 εκπαιδευτικοί απάντησαν σωστά σε όλες τις ερωτήσεις της κατηγορίας (100%).

Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης

	Pre Test	Post Test
ΠΑ: ¾ x ½	0 (0%)	7 (100%)
ΔΑ: ¾ : ½	0 (0%)	5 (71,4%)
ΔΜΑ: 1 ¾ : ½	0 (0%)	1 (14,3%)
ΛΑΚ: Σκίασε το ¼ των κύκλων	7 (100%)	7 (100%)

Πίνακας 22: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία αναπαράσταση αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Ο πίνακας 22 αποτυπώνει τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση ΓΠ, που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στο pre και post test. Όπως φαίνεται από τον πίνακα, η κατηγορία δυσκόλεψε τους εκπαιδευτικούς και φανέρωσε την αδυναμία που έχουν στο να αποτυπώσουν με μία αναπαράσταση πράξεις και προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, κανένας εκπαιδευτικός δεν μπόρεσε να δώσει κάποια αναπαράσταση (0%) στις ερωτήσεις ΠΑ (¾ x ½) , ΔΑ (¾ : ½) και ΔΜΑ (1 ¾ : ½). Φάνηκε ότι δεν ήταν καθόλου εξοικειωμένοι με το κομμάτι των αναπαραστάσεων, διότι πολλοί δεν καταλάβαιναν πλήρως τι τους ζητείται να κάνουν. Μόνο στην ερώτηση ΛΑΚ, που αφορούσε τη σκίαση των κύκλων, συγκέντρωσαν 100% επιτυχία.

Μετά την επιμόρφωση η επίδοσή τους στο κομμάτι των αναπαραστάσεων φαίνεται να παρουσιάζει ραγδαία αύξηση με τα ποσοστά επιτυχίας να κυμαίνονται μεταξύ 14,3% και 100%. Στην ερώτηση ΠΑ, αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, και οι 7 εκπαιδευτικοί (100%) αποτύπωσαν μία αναπαράσταση. Η αναπαράσταση της διαίρεσης σε καταστάσεις αποπλαισιοποίησης φαίνεται ότι δυσκόλεψαν λίγο τους εκπαιδευτικούς καθώς μόνο οι 5 (71,4%) μπόρεσαν να δώσουν αναπαράσταση διαίρεσης στην ερώτηση ΔΑ και μόνο 1 (14,3%) στην αναπαράσταση μεικτών κλασμάτων (ΔΜΑ). Μάλιστα, οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί δεν έδωσαν κάποια αναπαράσταση. Καταλάβαιναν ότι το σχέδιο που έκαναν ήταν λάθος, αλλά δεν μπορούσαν να βρουν και το σωστό. Συγκεκριμένα, ενώ σχεδίαζαν το κλάσμα 1 ¾, δεν μπορούσαν μέσα σε αυτό να βρουν το ½. Τα ποσοστά παρέμειναν σταθερά για την ερώτηση σκίασης των κύκλων (ΛΑΚ).

Αναπαράσταση Λεκτικών Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης

	Pre Test	Post Test
ΑΠΠΛ: Αναπαράσταση προβλήματος πολλαπλασιασμού	0 (0%)	7 (100%)
ΑΠΔΚ: Αναπαράσταση προβλήματος διαίρεσης	0 (0%)	7 (100%)

Πίνακας 23: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Όπως είναι φανερό στον πίνακα 23 η κατηγορία ερωτήσεων ΓΠ σχετικές με την αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων δυσκόλεψε όλους τους εκπαιδευτικούς. Μάλιστα, στις δύο ερωτήσεις αναπαράστασης προβλημάτων ΑΠΠΛ και ΑΠΔΚ της κατηγορίας κανένας από τους 7 εκπαιδευτικούς δεν μπόρεσε να δώσει κάποια αναπαράσταση για τις πράξεις των προβλημάτων. Αξιοσημείωτη

είναι η πρόοδος που γίνεται μετά από την επιμόρφωση και τις πολλές αναπαραστάσεις που είδαν και έκαναν. Όλοι οι εκπαιδευτικοί ανεξαιρέτως κατάφεραν να αναπαραστήσουν σωστά τα δύο προβλήματα και μάλιστα με ευκολία.

Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης

	Pre Test	Post Test
ΛΠΠΚ: *«Ο Κώστας αγόρασε 3/4 του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε;»*	7 (100%)	7 (100%)
ΛΠΔΚ: *«Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους 3/4 του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το κάθε ένα έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε;»*	7 (100%)	7 (100%)

Πίνακας 24: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Στον πίνακα 24 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στην κατηγορία επίλυσης προβλημάτων. Όπως φάνηκε από τη συνέντευξη οι ερωτήσεις που ερευνούσαν το επίπεδο της Γνώσης Περιεχομένου των εκπαιδευτικών δεν φάνηκαν να τους δυσκολεύουν καθόλου. Απάντησαν με ευκολία στις 2 ερωτήσεις και συγκέντρωσαν ποσοστό επιτυχίας 100%. Στο post test οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών έφτασαν πάλι στο μέγιστο σημείο. Σωστά απάντησαν και οι 7 σε όλες τις ερωτήσεις της κατηγορίας επίλυσης προβλήματος (100%).

Σύγκριση Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΣΚΕ: *3/4, 8/9*	4 (57,1%)	7 (100%)
ΣΚ: *5/6, 7/8*	7 (100%)	7 (100%)
ΣΚΜ: *1/2, 5/8*	7 (100%)	7 (100%)
ΣΚΥ: *3/7, 5/8*	3 (42,8%)	7 (100%)

Πίνακας 25: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία σύγκρισης κλασμάτων.

Ο πίνακας 25 αποτυπώνει τα ποσοστά επιτυχίας ανά ερώτηση για την κατηγορία σύγκρισης κλασμάτων πριν και μετά την επιμόρφωση. Κατά τα pre test οι σωστέ απαντήσεις κυμαίνονται από 3 έως 7. Συγκεκριμένα, όλοι οι εκπαιδευτικοί (100%) έδωσαν σωστή απάντηση στην ερώτηση σύγκρισης ΣΚΜ (1/2, 5/8), επιλέγοντας το 5/8 ως μεγαλύτερο κλάσμα, χρησιμοποιώντας είτε την στρατηγική του μισού, λέγοντας ότι το ½ είναι το μισό ενώ το 5/8 πάνω από το μισό. το ίδιο ποσοστό συγκέντρωσαν στην ερώτηση ΣΚ (5/6, 7/8). Λιγότεροι εκπαιδευτικοί απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις σύγκρισης ΣΚΕ (3/4, 8/9) και ΣΚΥ (3/7, 5/8), 4 και 3 εκπαιδευτικοί αντίστοιχα, επιλέγοντας τη σωστή απάντηση είτε κάνοντας διαίρεση τον αριθμητή με τον παρονομαστή είτε με κάποια άλλα νοερή στρατηγική.

Μετά την επιμόρφωση τα ποσοστά και στις 4 ερωτήσεις άγγιξαν το μέγιστο (100%), δίνονται όλοι οι εκπαιδευτικοί σωστή απάντηση. Το μεγαλύτερο ποσοστό των

συνεντευξιαζόμενων επέμενε να χρησιμοποιεί την ίδια μέθοδο με το pre test παρά τις νέες στρατηγικές που άκουσε και εφάρμοσε.

Μετατροπή του Αριθμητή και του Παρονομαστή Κλασμάτων

	Pre Test	Post test
ΜΚ1: *Τι θα συμβεί την τιμή του κλάσματος α/β, αν το α αυξηθεί 4 φορές και το β υποδιπλασιαστεί.*	7 (100%)	7 (100%)
ΜΚ2: *Πόσες φορές;*	1 (14,3%)	7 (100%)

Πίνακας 26: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία μετατροπή του αριθμητή και του παρονομαστή κλασμάτων.

Στον πίνακα 26 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις της κατηγορίας της μετατροπής του αριθμητή και του παρονομαστή κλασμάτων. Όπως είναι εμφανές από τον πίνακα, κατά τη πρώτη συνέντευξη η ερώτηση ΜΚ1 φάνηκε εύκολη στους εκπαιδευτικούς αφού και οι 7 έκριναν ότι το κλάσμα τα αυξηθεί. Όμως μόνο ένα (14,2%) μπόρεσε να βρει πόσες φορές θα αυξηθεί στην ερώτηση ΜΚ2. Αντίθετα, μετά την επιμόρφωση το ποσοστό έφτασε στο 100%, με όλους τους εκπαιδευτικούς να δίνουν σωστή απάντηση.

Τοποθέτηση Κλασμάτων σε Αριθμογραμμή

	Pre Test	Post Test
ΑΚ1: *Τοποθέτησε το κλάσμα ¾ στην αριθμογραμμή.*	7 (100%)	7 (100%)
ΑΚ2: *Τοποθέτησε το κλάσμα 3/8 στην αριθμογραμμή.*	7 (100%)	7 (100%)

Πίνακας 27: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία τοποθέτηση κλασμάτων σε αριθμογραμμή.

Ο πίνακας 27 παρουσιάζει τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στις ερωτήσεις της κατηγορίας τοποθέτηση κλασμάτων σε αριθμογραμμή. Είναι εμφανές ότι αυτή η κατηγορία δεν παρουσίασε καμία δυσκολία στους εκπαιδευτικούς, με αυτούς να έχουν τις ικανότητες που χρειάζονται για να τοποθετούν κλάσματα σε αριθμογραμμή. Τόσο στο πριν όσο και μετά την επιμόρφωση το ποσοστά έμεινε σταθερό στο 100%.

Πυκνότητα Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΥΠΚ: *Να βρείτε τρία κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1.*	0 (0%)	6 (85,7%)

Πίνακας 28: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία πυκνότητα κλασμάτων.

Στον πίνακα 28 παρουσιάζεται το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των εκπαιδευτικών για την κατηγορία πυκνότητα κλασμάτων για την ερώτηση της ΓΠ. Όπως φαίνεται από τις επιδόσεις τους στο pre test, η κατηγορία αυτή δυσκόλεψε πολύ τους εκπαιδευτικούς. Δεν φάνηκε να διαθέτουν τις γνώσεις εκείνες που χρειάζονται για να απαντήσουν σε τέτοιου είδους ερωτήσεις. Κανένας εκπαιδευτικός δεν μπόρεσε να δώσει σωστή απάντηση στην ερώτηση ΥΠΚ και να βρουν κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1, καθώς πίστευαν ότι δεν

υπάρχουν. Εμφανής ήταν η διαφορά μετά την επιμόρφωση, όπου οι 6 από τους 7 εκπαιδευτικούς μπόρεσαν να βρουν 3 κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1.

Οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών στις ερωτήσεις ΓΠ στο pre test ήταν μέτριες, με μέσο όρο επιτυχίας 56%. Υπήρξαν ερωτήσεις που τους δυσκόλεψαν πολύ και άλλες που απάντησαν με ευκολία. Οι ερωτήσεις όπου οι εκπαιδευτικοί συγκέντρωσαν το μεγαλύτερο ποσοστόο (100%) ήταν εκείνες της κατηγορίας πράξεις κλασμάτων (ΠΥ, ΔΥ, ΔΜΥ, ΔΥΑ, ΔΥΚ), της τοποθέτησης κλασμάτων σε αριθμογραμμή (ΑΚ1, ΑΚ2), της ερώτησης ΛΑΚ από την κατηγορία αναπαράσταση κλασμάτων, όπου σκίασαν το ¼ των κύκλων, οι δύο ερωτήσεις της κατηγορίας επίλυσης προβλημάτων (ΛΠΠΚ, ΛΠΔΚ) και οι ερωτήσεις ΣΚ (5/6, 7/8) και ΣΚΜ (1/2, 5/8) της σύγκρισης κλασμάτων. Με φθίνουσα σειρά ακολουθούν με μικρότερα ποσοστά επιτυχίας η ερώτηση ΣΚΕ (57,1%), που αφορούσε τη σύγκριση κλασμάτων 3/4 με 8/9 και η ερώτηση κατασκευής προβλημάτων πολλαπλασιασμού (ΠΠ) με ποσοστό 42,8%. Με 14,3% επιτυχία βρίσκονται οι ερωτήσεις κατασκευής προβλημάτων διαίρεσης απλών και μεικτών κλασμάτων (ΔΠ, ΔΜΠ) και η ΜΚ2 που σχετιζόταν με το πόσες φορές θα μεγαλώσει ένα κλάσμα αν αυξηθεί και μειωθεί αριθμητής και ο παρονομαστής. Στο τέλος της λίστας βρίσκονται οι ερωτήσεις με 0% επιτυχία, όπου δεν μπόρεσαν να ανταποκριθούν οι εκπαιδευτικοί. Αυτές οι ερωτήσεις ήταν 3 από την κατηγορία αναπαράστασης κλασμάτων (ΠΑ, ΔΑ, ΔΜΑ) για την αναπαράσταση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης απλών και μεικτών κλασμάτων, οι 2 ερωτήσεις που αφορούσαν την αναπαράσταση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (ΑΠΠΛ, ΑΠΔΚ) και η ερώτηση ΥΠΚ σχετική με την πυκνότητα των κλασμάτων, οπού κανένας δεν μπόρεσε να βρει κάποιο κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1.

Πολλές ερμηνείες μπορούν να υπάρξουν τόσο για το γιατί κάποιες ερωτήσεις φάνηκαν εύκολες όσο και για το γιατί κάποιες άλλες δυσκόλεψαν πολύ τους εκπαιδευτικούς. Αρχικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ερωτήσεις που αφορούσαν τις πράξεις μεταξύ κλασμάτων φάνηκαν εύκολες για λύση καθώς είναι ένα κομμάτι των μαθηματικών που το διδάσκουν άμεσα καθημερινά και το χρησιμοποιούν συνέχεια στις ασκήσεις. Το πρώτο πράγμα που έμαθαν οι ίδιοι στα μαθητικά τους χρόνια, αλλά και το πρώτο πράγμα που διδάσκουν στα κλάσματα είναι ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Είναι κάποια βήματα σταθερά που τα χρησιμοποιούν πάντα.

Από την άλλη πλευρά αντίθετα, η μεγάλη δυσκολία που αντιμετώπισαν στο να αναπαραστήσουν αυτές τις πράξεις οφείλεται στο ότι ποτέ μέχρι σήμερα δεν ήρθαν αντιμέτωποι με αυτό. Οι εκπαιδευτικοί, όπως φάνηκε, δεν γνωρίζουν και δεν κατανόησαν ποτέ τι είναι αυτό που τελικά αναπαριστούν οι δύο πράξεις. Επίσης το γεγονός ότι δεν μπορούν εύκολα να διατυπώσουν κάποιο πρόβλημα με τέτοιες πράξεις κρύβει από πίσω την άγνοια που έχουν για την ερμηνεία των πράξεων. Οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια των σπουδών τους δεν εμβάθυναν και δεν κατανόησαν αυτό το λεπτό κομμάτι ώστε να αποκτήσουν βαθιά γνώση και κατανόηση των κλασμάτων.

Με μεγάλη ευκολία έλυσαν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Η πολύχρονη εμπειρία τους στη διδασκαλία των μαθηματικών στην Ε΄ και Στ΄ τάξη τους καθιστά εξοικειωμένους με τέτοια προβλήματα. Έτσι μπορούν εύκολα να διακρίνουν αν θα κάνουν διαίρεση ή πολλαπλασιασμό. Παρόλα αυτά δυσκολεύονται στην αντίστροφη διαδικασία.

Τεράστια διαφορά παρουσιάστηκε στις επιδόσεις των εκπαιδευτικών μετά την επιμόρφωση. Όλες οι ερωτήσεις παρουσίασαν αύξηση με όλες σχεδόν να φτάνουν το 100%. Μία μόνο ερώτηση φάνηκε να συνεχίζει να δυσκολεύει και αφορούσε την αναπαράσταση της διαίρεσης μεικτών κλασμάτων. Μόνο ένας εκπαιδευτικός μπόρεσε να δώσει σωστή απάντηση. Αυτή η δυσκολία οφείλεται ίσως στη δομή και τη διάρκεια της επιμόρφωσης. Ήδη η διαίρεση απλών κλασμάτων τους δυσκόλεψε να κατανοήσουν την αναπαράστασή της και όταν χρησιμοποιήθηκαν μεικτά κλάσματα περιπλέχτηκαν τα πράγματα. Οι εκπαιδευτικοί δέχτηκαν

πολλές νέες πληροφορίες σε σύντομο χρονικό διάστημα χωρίς να έχουν τη δυνατότητα ίσως να τις κατανοήσουν πλήρως. Μάλιστα, η αναπαράσταση της διαίρεσης μεικτών κλασμάτων ήταν το τελευταίο αντικείμενο που αναφέρθηκε στην επιμόρφωση. Και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι άκουσαν πολλά νέα πράγματα που θα ήθελαν να τα ξαναδούν πιο αναλυτικά.

8.8.2. Συγκριτική Ανάλυση Ερωτήσεων ΠΓΠ ανά κατηγορία

Παρακάτω παρουσιάζονται και αναλύονται οι σωστές απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στις ερωτήσεις Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου των δύο συνεντεύξεων κατηγοριοποιημένες ανά κατηγορία ερωτήσεων.

Πράξεις Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΔΥΛ: Λίστα με τα συνηθέστερα λάθη που κάνουν οι μαθητές σε πράξεις κλασμάτων	0 (0 %)	7 (100%)

Πίνακας 29: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Ο παραπάνω πίνακας παρουσιάζει τα ποσοστά επιτυχίας των εκπαιδευτικών στην ερώτηση ΠΓΠ στην εκτέλεση πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεταξύ κλασμάτων. Είναι εμφανές ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είναι σε θέση να γνωρίζουν τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν πάνε να κάνουν πράξεις μεταξύ κλασμάτων. Όλοι αναγνώρισαν ότι οι μαθητές ξεχνούν τα αντιστρέψουν το δεύτερο κλάσμα όταν είναι να κάνουν διαίρεση ή αντιστρέφουν το πρώτο. Συμφώνησαν ότι πολλές φορές τυχαίνει να εφαρμόζουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων. Επίσης, ανέφεραν ότι οι μαθητές στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση όταν ο πολλαπλασιαστής και ο διαιρέτης είναι μικρότεροι της μονάδας τότε ο πολλαπλασιασμός μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει, πράγμα που τους μπερδεύει πολύ. Να σημειωθεί βέβαια ότι την χρονική περίοδο που πραγματοποιήθηκε η συνέντευξη οι εκπαιδευτικοί δίδαξαν ή δίδασκαν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Παρόλα αυτά κανένας εκπαιδευτικός (0 %) δεν αναφέρθηκε στο πυκνό των ρητών αριθμών και στην διαφορετική φύση των ρητών από τους ακέραιους αριθμούς. Μετά την επιμόρφωση και οι 7 εκπαιδευτικοί απάντησαν σωστά στην ερώτηση ΠΓΠ της κατηγορίας (100%).

Αναπαράσταση Αποπλαισιωμένων Πράξεων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΕΑΚ: Αξιολόγηση απαντήσεων των μαθητών «*Σημείωσε το ¼ των σοκολατών*»	7 (100%)	7 (100%)

Πίνακας 30: Σωστές απαντήσεις στην ερώτηση ΠΓΠ για την κατηγορία αναπαράσταση αποπλαισιωμένων πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Ο πίνακας 30 φανερώνει ότι οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν την ικανότητα να αξιολογούν τις απαντήσεις των μαθητών σε καταστάσεις αναπαράστασης πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Συγκεκριμένα, και οι 7 εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν σωστά τις απαντήσεις που έδωσε ένας μαθητής πάνω στην αναπαράσταση των κλασμάτων τόσο στο pre test όσο και στο post test.

Επίλυση Προβλημάτων Πολλαπλασιασμού και Διαίρεσης Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΕΛΠΠΚ: *«Ο Κώστας αγόρασε ¾ του κιλού μοσχαρίσιο κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας χρησιμοποίησε για τα γιουβαρλάκια;» Η λύση του μαθητή ήταν: «3/4 - 1/3 = ..». Να* ***ερμηνεύσεις*** *την απάντησή του*	2 (28,6%)	7 (100%)
ΑΠΠΚ: «*Η Ελένη είναι μαθήτρια της Στ' τάξης του δημοτικού. Έκανε τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων* $\frac{1}{4}$ *X* $\frac{1}{5}$ *όπως παρακάτω:* *1ο βήμα:* $\frac{1}{4}$ *X* $\frac{1}{5} = \frac{5}{20}$ *X* $\frac{4}{20}$ *2ο βήμα:* $\frac{5}{20}$ *X* $\frac{4}{20} = \frac{20}{400}$ *3ο βήμα:* $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$ *Περιέγραψε τον τρόπο σκέψης της Ελένης. Είναι λάθος η απάντησή της; Γιατί ναι/όχι;»*	4 (57,1%)	7 (100%)
ΕΛΠΔΚ: *«Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι με μήκος 3/4 του μέτρου. Θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει;»* Η λύση του μαθητή ήταν η εξής: «3/4 : 1/8= 4/3 x 1/8 =..» *Να* ***ερμηνεύσεις*** *την απάντησή του.*	5 (71,4%)	7 (100%)

Πίνακας 31: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση ΠΓΠ για την κατηγορία επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων.

Διφορούμενα είναι τα αποτελέσματα των επιδόσεων των εκπαιδευτικών στην ΠΓΠ που διαθέτουν σχετικά με την επίλυση προβλημάτων. Στον πίνακα 31 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στην κατηγορία. Είναι μια κατηγορία μέτριας δυσκολίας για τους εκπαιδευτικούς με ποσοστά που κυμαίνονται από 28,6% έως 100%. Η ερώτηση που φάνηκε να δυσκολεύει ήταν η ΕΛΠΠΚ, όπου μόνο 2 εκπαιδευτικοί απάντησαν σωστά, καθώς οι περισσότεροι δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν την απάντηση του μαθητή, αλλά στέκονταν μόνο στο ότι είναι σωστό ή λάθος. Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί εξήγησαν το λάθος του μαθητή βασιζόμενοι στο ότι οι μαθητές σκέφτονται όπως στους ακέραιους αριθμούς. Σωστή απάντηση στην ερώτηση ΑΠΠΚ, αξιολόγησης της λύσης που έδωσε η μαθήτρια στο πρόβλημα του πολλαπλασιασμού, έδωσαν μόνο 4 εκπαιδευτικοί (57,1%), οι οποίοι την αξιολόγησαν ως σωστή, παρόλο που ακολούθησε έναν πιο χρονοβόρο τρόπο. Αντίθετα, οι υπόλοιποι 3 έκριναν την απάντησή της ως λανθασμένη, γιατί δεν έγινε πιστή εφαρμογή του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού. Τέλος, 5 εκπαιδευτικοί (71,4%) ,μπόρεσαν να ερμηνεύσουν σωστά την απάντηση της μαθήτριας στην ερώτηση ΕΛΠΔΚ, ερμηνείας της απάντησης στο πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων.

Στο post test οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών έφτασαν στο μέγιστο σημείο. Σωστά απάντησαν και οι 7 σε όλες τις ερωτήσεις της κατηγορίας επίλυσης προβλήματος (100%). Μπόρεσαν να απαντήσουν με ευκολία σε ερωτήσεις που πιο πριν δεν μπορούσαν, ερμηνεύοντας και αξιολογώντας το σκεπτικό λύσης ενός μαθητή, βελτιώνοντας ταυτόχρονα το επίπεδο της ΠΓΠ τους.

Πυκνότητα Κλασμάτων

	Pre Test	Post Test
ΕΠΚ: *«Δεν υπάρχει κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1.»*	1 (14,3%)	7 (100%)
ΕΑ: «*Ο επόμενος αριθμός από 3/5 είναι το 4/5.» Αξιολόγησε το σκεπτικό του μαθητή.*	0 (0%)	7 (100%

Πίνακας 32: Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση για την κατηγορία πυκνότητα κλασμάτων.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 32 οι εκπαιδευτικοί δεν διαθέτουν Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου, ώστε να απαντήσουν στις 2 ερωτήσεις της κατηγορία πυκνότητας κλασμάτων. Συγκεκριμένα, κανένας εκπαιδευτικός δεν μπόρεσε να δώσει σωστή απάντηση στην ερώτηση ΕΑ, καθώς και οι ίδιοι είχαν την ίδια άποψη με τον μαθητή και έκριναν ως σωστή την απάντησή του ότι μετά το 3/5 είναι το 4/5. Μόνο ένας εκπαιδευτικός βρήκε λανθασμένη την απάντηση του μαθητή στην ερώτηση ΕΠΚ και πίστευε ότι υπάρχουν κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1, απλά δεν μπορούσε να τα βρει. Αντίθετα, μετά την επιμόρφωση φάνηκε να αλλάζουν τα ποσοστά και οι εκπαιδευτικοί να κατανοούν την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Τα ποσοστά επιτυχίας έφτασαν το 100% και στις δύο ερωτήσεις με τους εκπαιδευτικούς να ενισχύουν την ΠΓΠ που έχουν.

Στις ερωτήσεις ΠΓΠ, όπως και σε αυτές της ΓΠ, οι εκπαιδευτικοί πέτυχαν μέτριες επιδόσεις κατά την πρώτη συνέντευξη. Υπήρξαν κάποιες ερωτήσεις που φάνηκαν εύκολες για τους εκπαιδευτικούς και πέτυχαν υψηλά ποσοστά και κάποιες άλλες που τους δυσκόλεψαν αρκετά. Ταξινομημένες κατά φθίνουσα σειρά, το 100% επιτυχία συγκέντρωσαν στην ερώτηση ΕΑΚ, όπου όλοι σημείωσαν σωστά το 1/4 των σοκολατών και στην ΑΛΠΚ, αξιολόγησης της λύσης του μαθητή σε πρόβλημα πολλαπλασιασμού κλασμάτων της κατηγορίας επίλυσης προβλημάτων. Οι εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν σωστά την απάντηση του μαθητή στο πρόβλημα του πολλαπλασιασμού. Αυτό οφείλεται στο ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να διακρίνουν ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού από ένα διαίρεσης. Μπορούν ακόμα να διακρίνουν το λάθος στην επίλυση ενός προβλήματος, όπως έγινε στην ερώτηση ΑΛΠΔΚ.

Παρόλο που μπορούν με ευκολία να αξιολογήσουν μια απάντηση ως σωστή ή λανθασμένη, δεν μπορούν με την ίδια ευκολία να την ερμηνεύσουν. Αυτό φαίνεται στις ερωτήσεις ΕΛΠΔΚ (71,4%) και ΕΛΠΠΚ (28,6%), όπου κλήθηκαν να ερμηνεύσουν τα λάθη που έκαναν οι μαθητές λύνοντας τα προβλήματα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν την αιτία που οδηγεί στα λάθη των μαθητών.

Ακολουθούν με χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας οι ερωτήσεις της κατηγορίας πυκνότητας κλασμάτων ΕΠΚ (14,3%) και ΕΑ (0%). Οι αριθμοί αυτοί δείχνουν ότι υπάρχει μία άγνοια γύρω από την ίδια τη φύση των ρητών αριθμών. Ακόμα και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί όπως φαίνεται σε κάποιες περιπτώσεις θεωρούν τους ρητούς αριθμούς ως ακέραιους και τους αποδίδουν τις ιδιότητές τους. Ποσοστό 0% συγκέντρωσαν στην ερώτηση ΔΥΛ, όπου έκαναν μια λίστα με τα συνηθέστερα λάθη που κάνουν οι μαθητές στις πράξεις κλασμάτων. Να σημειωθεί ότι οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν με ευκολία τα αλγοριθμικά λάθη που κάνουν οι μαθητές τους και στάθηκαν μόνο σε αυτά.

9. Εντυπώσεις των Εκπαιδευτικών από το Πρόγραμμα

Κατά τη διάρκεια των επιμορφώσεων και των συναντήσεων αλλά και στο τέλος πραγματοποιήθηκαν πολλές συζητήσεις με τους εκπαιδευτικούς. Εξέφραζαν με ζήλο τις απόψεις τους, τις παρατηρήσεις του και τι γενικότερες εντυπώσεις τους. Όλοι οι εκπαιδευτικοί διαπίστωσαν και συμφώνησαν ότι τα κλάσματα είναι ένα κομμάτι που υπάρχουν πολλές παρανοήσεις και ελλείψεις. Ήδη από την πρώτη συνέντευξη διαπίστωσαν με έκπληξη ότι έχουν άγνοια για βασικά θέματα που διδάσκουν καθημερινά. Μία άγνοια που βασίζεται όπως αναφέρουν σε κάτι που «*δεν διδαχθήκαμε ποτέ...*», «*δεν υπάρχει στα σχολικά βιβλία*» ή και «*δεν ακούσαμε σε καμία επιμόρφωση*».

Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων έρχονταν σε επαφή με πράγματα που πρώτη φορά άκουγαν και συμπέραναν πως «*κάτι που δεν ξέρω, αποφεύγω να το διδάξω*» και πως «*αποφεύγω να εξηγήσω τυχόν απορίες των μαθητών γιατί εγώ ο ίδιος δεν το ξέρω καλά*». Πολλές φορές κλήθηκαν να ανταποκριθούν σε ασκήσεις που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία και όπως χαρακτηριστικά έλεγαν «*δεν τις διδάσκουμε*». Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η κατασκευή προβλημάτων. Στα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν πολλές ασκήσεις όπου ζητάνε από τον μαθητή να κατασκευάσει ένα δικό του πρόβλημα για μία πράξη, που όμως οι εκπαιδευτικοί δεν τις λύνουν σχεδόν ποτέ. Κατάλαβαν πρώτα οι ίδιοι τι είναι αναπαράσταση και πόσο χρήσιμες είναι για τις πράξεις των κλασμάτων και πλέον ένιωθαν έτοιμοι να το μεταδώσουν και στους μαθητές τους. Όπως χαρακτηριστικά ανέφερε μία δασκάλα «*τώρα νιώθω πιο σίγουρη για τον εαυτό μου και έτοιμη να το διδάξω στη τάξη*».

Στο τέλος του προγράμματος ζητήθηκε να εκφράσουν με ειλικρίνεια τις εντυπώσεις τους για το πρόγραμμα και να θέσουν τυχόν παρατηρήσεις και σχόλια που έχουν. Οι εντυπώσεις τους ήταν κάτι παραπάνω από θετικές. Διαπίστωσαν πως όλα αυτά που έμαθαν, οι γνώσεις και οι δεξιότητες που απέκτησαν ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις της σχολικής πραγματικότητας. Με έντονο ενθουσιασμό εκφράστηκαν για αυτά που έμαθαν λέγοντας πως «*πρώτη φορά είδαμε κάτι πρακτικό και όχι θεωρίες χωρίς άμεση εφαρμογή*» και «*μακάρι σε όλα τα σεμινάρια που θα πηγαίνουμε να βλέπουμε πράγματα που μπορούμε να κάνουμε στη πράξη*». Συμπέραναν ότι όσα είδαν ήταν χρήσιμα γιατί «*κατάλαβα το λόγο που κάνουμε πολλαπλασιασμό ή διαίρεση κλασμάτων. Μπορώ τώρα πλέον να κάνω προβλήματα με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση καθώς και αναπαράσταση των προβλημάτων και όλα αυτά είμαι έτοιμη πλέον να τα εξηγήσω και στους μαθητές μου*». Επίσης, ήταν πρόθυμοι να μοιραστούν την εμπειρία τους με άλλους συναδέλφους και να τους παροτρύνουν να συμμετέχουν στο μέλλον σε κάτι παρόμοιο.

Μια παρατήρηση που έκαναν ήταν η διάρκεια του σεμιναρίου. Θα ήθελαν, όπως ανέφεραν, τα έχουν χρόνο να εμβαθύνουν και εφαρμόσουν τα νέα πράγματα που έμαθαν. Να μπορούν επίσης να εφαρμόσουν κάποια από αυτά στους μαθητές τους, να δουν τα αποτελέσματα και να τα συζητήσουν την επόμενη φορά. Για αυτό και θα ήθελαν να είναι πιο συνεργατικό. Αυτό θα ήταν πιο εύκολο αν είχαν όλοι την ίδια τάξη, όπως πρότειναν. Στο χρονικό διάστημα που έγινε δεν υπήρχε αυτή η δυνατότητα. Αν όμως είχε μεγαλύτερη έκταση και διάρκεια θα μπορούσε να αναπτυχθεί μια μεγαλύτερη κοινότητα μάθησης που θα ενίσχυε τη συνεργατικότητα σε μεγαλύτερο βαθμό.

10. Συζήτηση

Ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας ήταν η δυνατότητα βελτίωσης της ΓΠ και της ΠΓΠ των εν ενεργεία εκπαιδευτικών μετά από μία επιμορφωτική παρέμβαση. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπήρξαν μεγάλες αλλαγές στις επιδόσεις των εκπαιδευτικών. Το συμπέρασμα αυτό έρχονται να επιβεβαιώσουν μια ποικιλία ερευνών που αναφέρθηκαν παραπάνω (Tirosh, 2000), όπου υπήρξε βελτίωση έπειτα από εξάσκηση. Η μεγαλύτερη βελτίωση παρατηρήθηκε στη ΓΠ. Οι εκπαιδευτικοί πριν από τη παρέμβαση κατά μέσο όρο απάντησαν σωστά σε 14 από τις 25 ερωτήσεις (56%). Μετά από την επιμόρφωσή τους όμως έφτασαν στις 24 σωστές απαντήσεις (96%). Παρουσίασαν επομένως αύξηση κατά 40% των επιδόσεών τους στη ΓΠ. Εξίσου μεγάλη βελτίωση παρατηρήθηκε στην ΠΓΠ. Αν και οι εκπαιδευτικοί ήδη από την αρχή είχαν ένα μέτριο ποσοστό επιτυχίας (67%), απαντώντας σωστά σε 6 από τις 9 ερωτήσεις, μετά από την επιμόρφωση έφτασαν το 100%. Με βάση, λοιπόν, αυτά τα αποτελέσματα συμπεραίνεται ότι η επιμορφωτική διαδικασία αποτελεί το εργαλείο εκείνο που θα συμπληρώσει και θα ολοκληρώσει το γνωστικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών που βρίσκονται στα σχολεία.

Στα βασικά ερωτήματα της έρευνας έρχονται να απαντήσουν τα αποτελέσματά της και να επιβεβαιώσουν τις προηγούμενες έρευνες που έδειξαν περιορισμένη ΓΠ και ΠΓΠ (Depaepe, 2015; Tirosh, 2000; Turnuklu & Yesildere, 2007). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων και ο μέσος όρος των επιτυχιών τους στη ΓΠ (56%) δείχνει ότι μόνο οι μισοί εκπαιδευτικοί κατανοούν τους ρητούς αριθμούς και μπορούν να λύσουν προβλήματα με αυτούς. Παρομοίως, ο μέσος όρος των επιτυχιών στην ΠΓΠ (67%) δείχνει ότι τα 2/3 των εκπαιδευτικών γνωρίζουν τις δυσκολίες των μαθητών στους ρητούς και είναι ικανοί να τις αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά. Το μεγαλύτερο πρόβλημα όμως εστιάζεται στη ΓΠ.

Οι τομείς που παρουσιάζουν περισσότερες δυσκολίες οι εκπαιδευτικοί είναι συγκεκριμένοι. Αυτό που δυσκολεύει σε μεγαλύτερο βαθμό, σύμφωνα με την έρευνα, είναι η αναπαράσταση αποπλαισιωμένων πράξεων και λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Οι εκπαιδευτικοί αγνοούν ακόμα και τον όρο «αναπαράσταση». Αδυνατούν να ερμηνεύσουν την πράξη και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων για να μεταβούν στην αποτύπωσή του με ένα σχήμα. Εξίσου μεγάλο πρόβλημα παρουσιάζουν και στο κομμάτι της κατασκευής προβλημάτων για μία πράξη. Οι εκπαιδευτικοί, σύμφωνα με την έρευνα, ενώ είναι ικανοί να λύνουν προβλήματα, δεν μπορούν να αντιστρέψουν τη διαδικασία και να κατασκευάσουν οι ίδιοι πρόβλημα για μία πράξη πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης κλασμάτων. Αυτή η διαπίστωση ίσως έχει την ίδια πηγή δυσκολίας με εκείνη της αναπαράστασης των κλασμάτων. Αφού λοιπόν δεν έχουν κατανοήσει τι αντιπροσωπεύουν στην ουσία οι δύο πράξεις αδυνατούν τόσο να τις αναπαραστήσουν όσο και να τις χρησιμοποιήσουν σε ένα πρόβλημα. Σε αυτή την ερμηνεία οδηγεί και το αποτέλεσμα της παρούσας έρευνας, όπου μετά την επιμόρφωση, που κατανόησαν σε μεγάλο βαθμό τις δύο πράξεις, μπορούσαν πλέον τόσο να τις αναπαραστήσουν όσο και να κατασκευάσουν προβλήματα. Τέλος, ιδιαίτερη δυσκολία αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της πυκνότητας των κλασμάτων. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δε γνωρίζουν και δεν κατανοούν ότι μεταξύ δύο ρητών αριθμών υπάρχουν άπειροι ή ενώ το κατανοούν δεν μπορούν να βρουν κάποιον αριθμό ανάμεσα.

Η επιμορφωτική διαδικασία αποτέλεσε κομβικό σημείο για την ενίσχυση της ΓΠ και της ΠΓΠ. Οι επιδόσεις των εκπαιδευτικών άγγιξαν το 96% στη ΓΠ και το 100% στην ΠΓΠ. Μικρή δυσκολία συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν στη ΓΠ που αφορά την αναπαράσταση της διαίρεσης των μεικτών κλασμάτων. Μετά την παρέμβαση μόνο ένας εκπαιδευτικός κατάφερε να αναπαραστήσει σωστά τη πράξη. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ίσως στο μικρό χρονικό διάστημα της επιμόρφωσης και στο πλήθος των νέων πληροφοριών που δέχτηκαν. Οι

εκπαιδευτικοί δεν είχαν το χρόνο να επεξεργαστούν και να κάνουν κτήμα τους τις νέες πληροφορίες, όπως ανέφεραν και οι ίδιοι θα ήθελαν να έχουν μια παρόμοια επιμόρφωση μεγαλύτερης έκτασης. Εξάλλου, ο τομέας των ρητών αριθμών αποτελεί αναμφισβήτητα ένα δύσκολο κομμάτι για μαθητές και δασκάλους και χρειάζεται περισσότερος χρόνος και συστηματικότερη επιμόρφωση.

Όσον αφορά τη συσχέτιση μεταξύ των ερωτήσεων ΓΠ και ΠΓΠ φάνηκε ότι εξαρτάται από το είδος και τη φύση των ερωτήσεων. Για παράδειγμα, στην κατηγορία επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, οι ερωτήσεις ΓΠ έδειξαν ότι ήταν στατιστικά πιο εύκολες από τις ερωτήσεις ΠΓΠ. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν περισσότερο να επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης από το να ερμηνεύουν τα λάθη και τον τρόπο σκέψης των μαθητών τους. Αντίθετα, θετική συσχέτιση παρουσιάστηκε στις ερωτήσεις των κατηγοριών πράξεις και πυκνότητας κλασμάτων. Οι εκπαιδευτικοί αδυνατούν τόσο οι ίδιοι να δώσουν απάντηση σε ρωτήσεις πυκνότητας όσο και να ερμηνεύσουν το λάθος της πυκνότητας μεταξύ κλασμάτων (ΕΠΚ, ΕΑ).

Σχετικά με το ερώτημα της έρευνας αν η εμπειρία των εν ενεργεία εκπαιδευτικών συμβάλλει θετικά στη διαμόρφωση της ΓΠ και της ΠΓΠ, τα αποτελέσματα έδειξαν πως όχι. Τόσο οι εν ενεργεία όσο και οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν σημαντική έλλειψη ΓΠ και ΠΓΠ στους ρητούς αριθμούς, όπως επιβεβαιώνουν προηγούμενες έρευνες (Ball, 1990; Depaepe et all, 2015; Ma, 1999; Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou, 2017, Turnuklu & Yesildere, 2007). Βέβαια, σε σύγκριση με τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν μεγαλύτερη ΠΓΠ, όχι όμως σε ικανοποιητικά επίπεδα με βάση και την εμπειρία που έχουν. Γι’ αυτό και δεν μπορεί να θεωρηθεί σημαντική. Η εξίσου χαμηλή ΓΠ και ΠΓΠ των υποψήφιων και των εν ενεργεία εκπαιδευτικών μπορεί να ερμηνευτεί στην παρόμοια εκπαίδευση που έλαβαν κατά τη διάρκεια των σπουδών τους και στο γνωστικό υπόβαθρο που είχαν ήδη από τα μαθητικά τους χρόνια.

Εν κατακλείδι, αναμφισβήτητα οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης παρουσιάζουν ελλείψεις στη ΓΠ και στην ΠΓΠ. Όμως οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί είναι εκείνοι που παίζουν καθοριστικό ρόλο στις επιδόσεις των μαθητών τους (Hattie, 2009). Έρευνες έχουν δείξει ότι είναι εκείνοι που έχουν ρόλο κλειδί στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού των μαθητών τους. Γι’ αυτό το λόγο είναι επιτακτική ανάγκη η παρουσία επιμορφωτικών σεμιναρίων, μεγάλης διάρκειας που θα έρθει να καλύψει τα κενά που υπάρχουν από τα μαθητικά και ακαδημαϊκά τους χρόνια. Μια επιμόρφωση που θα στοχεύει στην απόκτηση μιας βαθιάς μαθηματικής ΓΠ και ΠΓΠ που θα αποτελέσει, μακροπρόθεσμα, την βάση για την αύξηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων τους.

Βιβλιογραφία

Armstrong, B., & Bezuk, N. (1995*). Multiplication and division of fractions: The search for meaning.* In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades (pp. 85–119). Albany: State University of New York Press.

Anderson, P. (2007). *What is Web 2.0? Ideas, technologies and implications for education*. JISC Technology and Standards Watch. Feb. 2007.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, 59, 389e407.

Βεγρίδης, Δ. & Κόκκος, Α. (2010) Εκπαίδευση Ενηλίκων, διεθνείς προσεγγίσεις και ελληνικές διαδρομές. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 673–708). New York: MacMillan.

Bums, M. (1994). "Arithmetic: The last holdout." *Phi Delta Kappan*, 75(2), 471-477.

Calvert, L.M.G. (1999). "A Dependence On Technology And Algorithms Or A Lack Of Number Sense." *Teaching Children Mathematics*, 1, 6-7.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 127-138

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: the learning trajectory approach. New York & London: Routledge.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. Mathematical Thinking and Learning, 6, 81-89.

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics counts: Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools. *London: Her Majesty Stationery Office*.

Confrey, J., Maloney, A., & Nguyen, K. (2011). Learning over time: Learning trajectories in mathematics education. Charlotte, NC: *Information Age Publishers*

Cuff, C (1993) . "Beyond The Formula-Mathematics Education For Prospective Elementary School Teachers." *Education*,114 (4),221-223.

Daehler, K. & Shinohara, M. (2001). A complete circuit is a complete circle: Exploring the potential of case materials and methods to develop teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge of science, *Research in Science Education* 31, pp. 267– 288.

Dantzig, T. (1954). Number: The language of science: A critical survey written for the cultured non-mathematician.

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). Learning trajectories in mathematics (Research Report No. 68). Madison, WI: *Consortium for Policy Research in Education*.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: a systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. Teaching and Teacher Education, 34, 12e25.

Depaepe, F.,Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, C. Verschaffel, L., Dooren, W. V. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.

Φατσέα, Α., & Ορφανός, Σ. (2006). Πρόταση σχεδιασμού, οργάνωσης και λειτουργίας ηλεκτρονικής κοινότητας για την εξ αποστάσεως επιμόρφωση των εκπαιδευτικών των προγραμμάτων Π.Ε. Αθήνα: 2° Συνέδριο Σχολικών Προγραμμάτων Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact in: D.A. Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (New York: Macmillan Publishing).

Garber, D. (2004) 'Growing virtual communities. International Review of Research in Open and Distance Learning', Retrieved January 05, 2005 from http://www.irrodl.Org/content/v5.2/ technote4.html

Gelman, R. (1991). Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognitio*n (pp. 293–322). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Gelman, R., Williams, E. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesist. In W. Damon, D. Kuhn, & R. S. Siegler (Eds.). *Handbook of a child phycology*. NY: SUNY Press.

Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. In W. Damon, et al. (Eds.), *Handbook of a child psychology: Cognition, perception and language* (Vol. 2, pp 777-810). NH: Wiley

Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds (Ed.), *The Knowledge Base for Beginning Teachers* (pp. 23 36). New York: Pergamon

Hare, A.P. & Davies, M. F. (1994) 'Social interaction', in A.P. Hare, H.H. Blumberg, M.F. Davies & M.V. Kent (Eds.) Small group research: A handbook (pp. 169-193), Norwood, NJ, Ablex

Hattie, J. A. (2009). Visible learning: A synthesis of 800+ meta-analyses on achievement. Abingdon: Routledge.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371e406.

Hungerford, T. W. (1994). "Future elementary teachers: The neglected Constituency." *The American Mathematical Monthly.* 101(1),15-21.

Jones, A. & Moreland, J. (2004). Enhancing practicing primary school teachers' pedagogical content knowledge in technology, *International Journal of Technology and Design Education* 14, pp. 121–140.

Kahan, J., Cooper, D. & Bethea, K. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, pp. 223-252.

Kalchman, M., Moss, J., & Case, R. (2001). Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions. *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress*, 1-38.

Kamii, C. (1990). "Constructivism and Beginning Arithmetic (K-2)." In *Teaching, & Learning Mathematics in the 1990s*, 1990 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 22-30). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Κανελλόπουλος, Δ. (2005). Κέντρα Εκπαίδευσης Ενηλίκων (Κ.Ε.Ε.) Τηλεματική Δικτύωση και Προγράμματα Πληροφορικής. 3° Συνέδριο στη Σύρο- ΤΠΕ στην Εκπαίδευση.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and error in secondary mathematics project. Windson, England: NFER-Nelson.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. Educational Studies in Mathematics, 27, 191-204.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.*), Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hilldscale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kowch, E. & Schwier, R. (1997) 'Characteristics of technology-based virtual learning communities', Retrieved January 05, 2005 from http://www.usask.ca/education/coursework/802papers/ communities/communities.htm

Κουτσελίνη – Ιωαννίδου, Μ. (2010) Η έρευνα δράσης ως εκπαιδευτική διαδικασία ανάπτυξης εκπαιδευτών και εκπαιδευομένων. Διατίθεται: http://www.actionresearch.gr/AR/ActionResearch_Voll/Issue01_02_p04-09.pdf

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum.

Leslie, A. M., Gelman, R., & Gallistel, C. R. (2008). The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(6), 213-218.

Leutzinger, L. P.(1999). “Developing Thinking Strategies For Addition Facts. *Teaching Children Mathematics,* 6, 14-18.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ’.* Εκδόσεις Ζυγός. Θεσσαλονίκη, σελ. 440.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών.* Εκδόσεις Κυριακίδης. Θεσσαλονίκη.

Lemonidis, Ch., Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. MENON: Journal Of Educational Research. 1st Thematic Issue, 61-74.

Lo, J.-J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers’ knowledge of fraction division. Journal of Mathematics Teacher Education, 15, 481-500. doi: 10.1007/s10857-012-9221-4.

Lortie-Forgues, H., Siegler, R., (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? Developmental Review, 38, 201-221.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26, 422-411.

Μάνεσης, Ν. (2011) Επιμόρφωση και Δια Βίου Μάθηση των Εκπαιδευτικών – Το ζήτημα της εξομοίωσης (130/1990). Αθήνα: Γκιούρδας.

Markovits, Z. and Sowder, J.T.: 1991, ‘Students’ understanding of the relationship between fractions and decimals’, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(1), 3–11.

Martin, W.G. et al., eds (2007). The Learning of Mathematics, 69th NCTM Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

Μαυρογιώργος, Γ. (1996) Σχέδιο πρότασης για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Σύγχρονη Εκπαίδευση, 98: 19-26.

McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: Developing number sense. *Being numerate: What counts*, 24-43.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44.

McIntosh, A., De Nardi, E., & Swan, P. A. (1994). *Think Mathematically!: How to Teach Mental Maths in the Primary Classroom*. Longman Cheshire.

Moller, L. (1998) ‘Designing communities of learners for asynchronous distance education’, Educational Technology Research and Development, 46 (4), pp. 115-122

Moskal, B., & Magone, M. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational studies in mathematics*, 43(3), 313-335

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), How students learn: Mathematics in the classroom (pp. 121–162). Washington, DC: National Academic Press.

Μπαγάκης, Γ. (2011) Θεσμοθετημένες και νέες μορφές επιμόρφωσης. Προς αναζήτηση συνέργειας και καλών πρακτικών. Αθήνα: ΥΠ.Δ.Β.Μ.Θ.

National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics

NCTM (2006). Curriculum focal points for prekindergarten though grade 8 mathematics: A guest for coherence. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics

Ni , Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implication of whole number bias. *Educational Phycologist*, 40 (1), 27-52.

NMP. (2008). Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington D.C.: U.S. Department of Education, Office of Planning, Evaluation and Policy Development.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal, 45*, 1080-1110.

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: challenges and insights to pupils' implicit knowledge. Anales de Psicologia, 24(2), 262-270.

Nunes, T. & Bryant, P. (2009). Understanding rational numbers and intensive quantities. *Key understanding in mathematics learning.* London: Nuffield Foundation.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 143–185.

Paulos, J. A. (1988). *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*. Macmillan.

Pea, R.D. (1994).*Seeing what we build together: distributed multimedia learning environments for transformative communications.* The Journal of the Learning Sciences, 2, pp. 285-299

Preece, J. (2000). *Online communities: Designing usability, supporting sociability*. New York, J. Wiley & Sons

Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 225-237.

Schrage, M. (1990) '*Shared minds: The new technologies of collaboration*', New York, Random House.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.Journal for Research in Mathematics Education, 26, 114–145.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Sowder, L. (1988). "Children's solution of story problems." *Journal of Mathematical Behavior*. 7, 227-238.

Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *The Arithmetic Teacher*, *37*(7), 18.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.371-389). New York: Macmillan.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K. & Bana, J. (2001). Pre-service teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration, *Journal of Mathematics Teacher Education* 4, pp. 205–225

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

Sztajn, P. , Confrey, J., Wilson, H. and Edgington, C. (2012). Learning Trajectory Based Instruction: Toward a Theory of Teaching. Educational Researcher 2012 41: 147-156.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 5-25.

Tsao, Y. L. (2004). Exploring the Connections among Number Sense, Mental Computation Performance, and the Written Computation Performance of Elementary Preservice School Teachers. *Journal of College Teaching & Learning*, *1*(12), 71-90.

Tsao, Y. L. (2005). The number sense of preservice elementary school teachers. *College Student Journal*, *39*(4), 647-679.

Τσάφος, Β. & Κατσαρού, Ε. (2000) Η αξιοποίηση της έρευνας δράσης στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Σύγχρονη Εκπαίδευση, 114, 67-74.

Turnuklu, E. B., & Yesildere, S. (2007). The Pedagogical Content Knowledge in Mathematics: Pre-Service Primary Mathematics Teachers' Perspectives in Turkey. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. Learning and Instruction, 21, 676-685.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 344-355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467.

Vamakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. Cognition and Instruction, 28, 181–209.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) Learning and teaching mathematics, an international perspective. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd

Van Dooren, W., Lehtinen, E., Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. Learning and Instruction, 37, 1-4.

Van Hoof, J., Verschaffel, L & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. Educational Studies of Mathematics 90:39–56.

Von Glasersfeld, E. (1989). "Cognition, Construction Of Knowledge, And Teaching." *Synthese*, 80, 121-140

Wenger, E. (1998). Communities of Practice. Learning as a social system. Systems thinker.

Wilson, S., Shulman, L., & Richert, A. (1987). "150 different ways of knowing": Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 104-123). Eastbourne, England: Cassell.

Wyatt, J, W. (1986). "A Case-Study Survey Of Computational Estimation Processes And Notions Of Reasonableness Among Ninth-Grade Students (Doctoral Dissertation, University Of Missouri-Columbia,1985)." Distortion Abstracts International,46, 3280A.

Wynn, K. (2002). Do infants have numerical expectations or just perceptual preferences? Development Science, 2, 207-209.

Yang, D. C. (2007). Investigating the strategies used by preservice teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics, 107*, 293–301.

Yang. D., C., Reys, R., & Reys, B. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(2), 383-403.

Zhou, Z., Peverly, S. T., & Xin, T. (2006). Knowing and teaching fractions: a crosscultural study of American and Chinese mathematics teachers. Contemporary Educational Psychology, 31, 438-457.

Παράρτημα

<u>Οι ερωτήσεις της συνέντευξης των εκπαιδευτικών</u>

1. α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\frac{3}{4}\ x\ \frac{1}{2}$ και να δώσετε μία αναπαράσταση της πράξης.
   β) Διατυπώστε ένα πρόβλημα όπου η παραπάνω πράξη να είναι λύση του.

2. α) Να υπολογίσετε το πηλίκο $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ και να δώσετε μία αναπαράσταση της πράξης.
   β) Διατυπώστε ένα πρόβλημα όπου η παραπάνω πράξη να είναι λύση του.

3. Ο Κώστας αγόρασε $\frac{3}{4}$ του κιλού κρέας. Χρησιμοποίησε το $\frac{1}{3}$ του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά κρέας χρησιμοποίησε; Αποτύπωσε με μία αναπαράσταση τη λύση του.

4. Συγκρίνετε τα κλάσματα. Ποιο είναι το μεγαλύτερο σε κάθε περίπτωση;

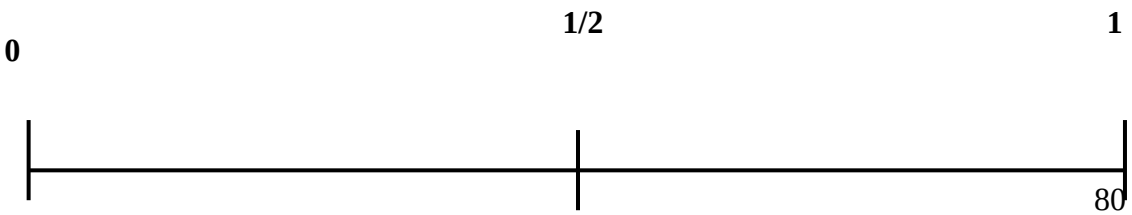
α) ¾ 8/9 β) 5/6 7/8

γ) 1/2 5/8 δ)3/7 5/8

5. Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι μήκους $\frac{3}{4}$ του μέτρου. Το χώρισε σε κομμάτια που το καθένα έχει μήκος $\frac{1}{8}$ του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια το χώρισε; Κάνε μία αναπαράσταση που να αποδίδει τη πράξη.

6. Τι θα συμβεί στη τιμή του κλάσματος $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$ αν το $\boldsymbol{\alpha}$ αυξηθεί 4 φορές και το $\boldsymbol{\beta}$ υποδιπλασιαστεί.

7. Τοποθετήστε τα κλάσματα $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ και $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ στην παρακάτω αριθμογραμμή;

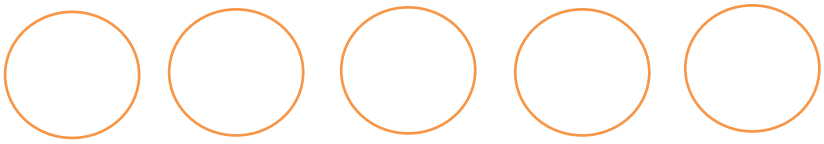


8. Α) Βρείτε τρία κλάσματα μεταξύ του 7/8 και του 1.

Β) Στην παραπάνω ερώτηση ένας μαθητής απάντησε : «Δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του 7/8 και του 1 γιατί μετά το 7/8 ακολουθεί το 8/8 που είναι ίσο με 1.»

Αξιολογήστε την απάντηση του μαθητή και αιτιολογήστε την.

9. Α. Σκιάστε το ¼ των κύκλων που βρίσκονται παρακάτω.



β. Παρακάτω βρίσκονται ζωγραφισμένες οι απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα : «Σημείωσε το 1/3 των σοκολατιών»

Απάντηση 1

Απάντηση 2

Απάντηση 3

Αξιολογήστε κάθε απάντηση των μαθητών και αιτιολογήστε τις.

10. Στους μαθητές δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι με μήκος 3/4 του μέτρου. Θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει;»

Ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο:

3/4 : 1/8= 4/3 x 1/8 =

Αξιολογήστε αν η πράξη του μαθητή είναι σωστή και αιτιολογήστε την.

11. Στους μαθητές δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Κώστας αγόρασε ¾ του κιλού μοσχαρίσιο κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας χρησιμοποίησε για τα γιουβαρλάκια;»

Ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο:

3/4 - 1/3 =

Αξιολογήστε αν η πράξη του μαθητή είναι σωστή και αιτιολογήστε την.

12. «Ο επόμενος αριθμός από το 3/5 είναι το 4/5». Αξιολογήστε και εξηγήστε το σκεπτικό του μαθητή.

13. Α. Να υπολογίσετε και να κάνετε μία αναπαράσταση της πράξης: $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

Β. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα όπου η λύση του θα είναι η παραπάνω πράξη.

14. Παρακάτω υπάρχουν τρεις πράξεις διαίρεσης. Υπολόγισέ τες, κάνε μία λίστα με τα πιο συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές και περιέγραψε τη πιθανή πηγή για καθένα από αυτά.

$\frac{1}{4}$: 4, $\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$, 4:$\frac{1}{4}$ 320 : 1/3

15. Η Ελένη είναι μαθήτρια της Στ' τάξης του δημοτικού. Έκανε τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων $\frac{1}{4}\ X\ \frac{1}{5}$ όπως παρακάτω:

1ο βήμα: $\frac{1}{4}\ X\ \frac{1}{5} = \frac{5}{20}\ X \frac{4}{20}$

2ο βήμα: $\frac{5}{20}\ X\ \frac{4}{20} = \frac{20}{400}$

3ο βήμα: $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$

Περιέγραψε τον τρόπο σκέψης της Ελένης. Είναι λάθος η απάντησή της; Γιατί ναι/όχι;