ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ ηλικιακός κύκλος(5-12 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

Η συμβολή του κινέζικου άβακα στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού

του

Πόποτη Απόστολου

Α.Ε.Μ: 585

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής καθηγητής

Εξεταστές: Θωμαΐδης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής

Θεσσαλονίκη, 2017

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος βαθμολογητής: ....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ....

Ο συγγραφέας .... βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό να διερευνήσει αν οι μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου γνωρίζουν τη δομή του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και να διαπιστώσει αν ο κινέζικος άβακας, ο οποίος ως τεχνούργημα βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, μπορεί να συμβάλει στη κατανόηση της δομής του αριθμητικού συστήματος με βάση το 10.

Στο πλαίσιο αυτό σχεδιάστηκε μια διδακτική παρέμβαση, στην οποία βρήκαν εφαρμογή οι δύο παραπάνω θεωρίες. Επιπλέον, σε αυτή ενσωματώθηκαν και στοιχεία της ιστορίας των μαθηματικών. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε 7 μαθητές/τριες και αξιολογήθηκε θετικά ως προς τη συμβολή του κινέζικου άβακα στην επίτευξη των στόχων της έρευνας.

Λέξεις-κλειδιά: κινέζικος άβακας, αίσθηση του αριθμού, αξία θέσης ψηφίου, ιστορία των μαθηματικών, εργαλειακή γένεση, σημειωτική διαμεσολάβηση

Abstract

The purpose of this research is to examine if third grade students of primary school are familiar with the structure of the decimal number system and to ascertain whether the Chinese abacus, which, as an artifact is in the core of the theory of the instrumental genesis and the semiotic mediation, can contribute to the understanding of the structure of the number system in the base of 10.

In this context an instructional intervention was designed in which the two theories were applied. In addition, elements of the history of mathematics were incorporated into it. The intervention was applied to 7 students and was positively evaluated as to the contribution of the Chinese abacus to the achievement of the research objectives.

Keywords: Chinese abacus, number sense, place value, history of mathematics, instrumental genesis, semiotic mediation

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, και πιο συγκεκριμένα στην κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, από τους μαθητές και τις μαθήτριες της Γ΄ τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου, μέσω μιας διδακτικής παρέμβασης. Στον πυρήνα της παρέμβασης βρίσκεται ο κινέζικος άβακας, με τον οποίο, μέσα από τη θεωρία της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, επιχειρείται να μεταδοθεί μαθηματικό περιεχόμενο στους/στις μαθητές/τριες.

Η αίσθηση του αριθμού αποτελεί μια πολύπλευρη, μια πολυδιάστατη έννοια, η οποία είναι δύσκολο να οριστεί. Βασική διάσταση της έννοιας αυτής αποτελεί η αξία θέσης ψηφίου, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο ακρογωνιαίος λίθος του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος. Έτσι, στο 2$^{\text{ο}}$ κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται οι ορισμοί που δόθηκαν κατά καιρούς από διάφορους/ες ερευνητές/τριες για την αίσθηση του αριθμού, άλλοτε συνοπτικοί και άλλοτε πιο αναλυτικοί. Επίσης, δίνεται ο ορισμός της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου και παρουσιάζεται συνοπτικά η πολυπλοκότητα της συγκεκριμένης έννοιας. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι όψεις/πτυχές της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου, που απασχολούν την παρούσα εργασία. Ο ρόλος των χειραπτικών υλικών στη μετάδοση της γνώσης έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές/τριες. Ένα τέτοιο υλικό είναι και ο άβακας. Αυτό το πανάρχαιο μέσο υπολογισμού, το οποίο, καθώς έρχεται από το μακρινό παρελθόν, έχει τη δυνατότητα να ενσωματώσει την ιστορία των μαθηματικών στη διδακτική πράξη, παρέχει τη δυνατότητα οπτικοποίησης της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου. Τη δυνατότητα αυτή, σε σύγκριση με άλλους άβακες, την έχει σε μεγαλύτερο βαθμό ο κινέζικος άβακας, του οποίου η ιστορική πορεία, η δομή και η λειτουργία, αλλά και τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του εξετάζονται στο εν λόγω κεφάλαιο. Εδώ παρουσιάζεται και μια αντίστοιχη έρευνα, που αφορά τη χρήση του κινέζικου άβακα για την ανάπτυξη της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου σε μαθητές/τριες της Στ΄ τάξης του Δημοτικού. Τέλος, στο ίδιο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, μέσω τον οποίων διαμεσολαβείται η συγκεκριμένη μαθηματική γνώση στους/στις μαθητές/τριες.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έρευνα που διεξήχθη στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Μέσα από δραστηριότητες εφαρμογής της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης έγινε προσπάθεια μετατροπής του τεχνουργήματος σε εργαλείο. Επίσης, έγιναν δραστηριότητες για την εκμάθηση της λειτουργίας του κινέζικου άβακα, αλλά και τη χρήση του, και με κάθε ευκαιρία εφαρμόστηκε η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης, ώστε τα πλαισιοθετημένα κείμενα των μαθητών/τριών, που προκύπτουν από την ενασχόλησή τους με το τεχνούργημα για την επίλυση εργασιών, να μετατραπούν σε μαθηματικά κείμενα, τα οποία διαμεσολαβούν μαθηματική γνώση.

Πιο συγκεκριμένα, στο 3^{ο} κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η χρησιμότητα της έρευνας, ο σκοπός της, τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία εξειδικεύεται, οι συμμετέχοντες και ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης. Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή των δεδομένων ήταν: ερωτηματολόγιο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με ταυτόχρονες συνεντεύξεις των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσής του, ηχογραφήσεις κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων και φύλλα εργασίας.

Στο 4^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ερωτηματολογίων τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση, παρατηρήσεις από τις δραστηριότητες της παρέμβασης, καθώς και παραδείγματα δραστηριοτήτων, που κάνουν φανερή την εφαρμογή της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Επίσης, παρουσιάζονται και τρεις μελέτες περίπτωσης, οι οποίες συγκρίνουν τη διαφορά στο βαθμό κατανόησης πτυχών της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου από τρεις μαθητές/τριες πριν τη διδακτική παρέμβαση και μετά από αυτή.

Τέλος, στο 5^{ο} κεφάλαιο επιχειρείται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την έρευνα με τη βοήθεια των στοιχείων που παρέχει το θεωρητικό πλαίσιο προς αυτή την κατεύθυνση. Περιγράφονται, επίσης, οι περιορισμοί της έρευνας, ενώ γίνονται και κάποιες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1. Η αίσθηση του αριθμού

Όπως αναφέρει το ελληνικό Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011), τα παιδιά από τη στιγμή της γέννησής τους έρχονται σε επαφή με ένα πλήθος αριθμητικών φαινομένων. Αυτά τα φαινόμενα ελκύουν τόσο το ενδιαφέρον όσο και την περιέργειά τους. Γενικά, οι αριθμοί αποτελούν μια ανεξάντλητη και άκρως ενδιαφέρουσα πηγή ευκαιριών για ανακαλύψεις. Έτσι, η καθημερινότητα προσφέρει στα παιδιά ένα ελκυστικό περιβάλλον για αλληλεπιδράσεις με νόημα και για την προώθηση της διαδικασίας μάθησης του αριθμού. Η διεύρυνση αυτού του πρώτου πεδίου «αριθμητικής δράσης» στο σχολικό περιβάλλον διαμορφώνει νέους ορίζοντες μάθησης για τον αριθμό, καθώς με οργανωμένο, πλέον, τρόπο οι μαθητές οδηγούνται στη μετάβαση από την άτυπη αριθμητική γνώση στην τυπική, στη μύηση, δηλαδή, στο «αριθμητικό/μαθηματικό κεφάλαιο» του ανθρώπινου πολιτισμού. Προσκαλούνται, πιο συγκεκριμένα, να γίνουν «ενάριθμοι» (numerate). Να αναπτύξουν, δηλαδή, την αίσθηση του αριθμού (number sense). Η αίσθηση του αριθμού αποτελεί δομικό στοιχείο των μαθηματικών, η κατάκτηση του οποίου οδηγεί στην ουσιαστική κατανόηση και μάθησή τους.

Η διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης της αίσθησης του αριθμού θεωρείται πια ως ένα συστατικό-κλειδί και ένα κύριο θέμα στο αναλυτικό πρόγραμμα πολλών χωρών, μεταξύ των οποίων και της Ελλάδας (2011), στο οποίο για πρώτη φορά γίνεται ρητή αναφορά στην έννοια αυτή.

Σύμφωνα με τον Carpenter et al. (1976) (όπως αναφ. στο Koleza & Koleli, 2014), μια πρώιμη αναφορά στην αίσθηση του αριθμού έγινε με τον όρο «ποσοτική διαίσθηση». Αργότερα, ο όρος «αίσθηση του αριθμού» ήρθε να αντικαταστήσει τον όρο «αριθμητισμός» (numeracy), που ήταν ως τότε σε χρήση (McIntosh et al., 1992). Όσον αφορά τον ορισμό της «αίσθησης του αριθμού», ο McIntosh et al. (1992) αναφέρει ότι η φράση αυτή αν και είναι εξαιρετική, το νόημά της είναι ανοιχτό σε διαφορετικές ερμηνείες.

Ο Hope (1989) αναφέρει ότι ο συγκεκριμένος όρος δεν μπορεί να οριστεί με ακρίβεια, αλλά οι καταστάσεις στις οποίες εκλείπει αυτή η αίσθηση, εύκολα αναγνωρίζονται.

Ωστόσο, όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Gersten et al. (2005), δεν υπάρχουν ούτε δύο ερευνητές που να έχουν ορίσει την αίσθηση του αριθμού με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Ο Berch (2005) επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό αυτό, λέγοντας ότι οι γνωστικοί ψυχολόγοι και οι καθηγητές των μαθηματικών ορίζουν την έννοια με πολύ διαφορετικό τρόπο. Από τη σκοπιά της γνωστικής νευροεπιστήμης, ο Dehaene (2001) υποθέτει ότι η αίσθηση του αριθμού είναι βιολογικά καθορισμένη.

Ο McIntosh et al. (1992· 1997), όπως και το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών της Ελλάδας (2011), επίσης ορίζουν την έννοια γενικά, αλλά πιο αναλυτικά, λέγοντας ότι αναφέρεται στη γενική κατανόηση του αριθμού και των πράξεων, με επιπλέον, όμως, χαρακτηριστικό την ικανότητα και την τάση που έχει το άτομο να χρησιμοποιεί αυτή την κατανόηση με ευέλικτους τρόπους και επαρκείς στρατηγικές, ώστε να διαχειρίζεται διάφορες αριθμητικές καταστάσεις.

Όπως η κοινή λογική, έτσι και η αίσθηση του αριθμού αποτελεί μια πολύτιμη, αλλά δύσκολη έννοια, η οποία έχει πυροδοτήσει πολλές συζητήσεις μεταξύ καθηγητών των μαθηματικών, δασκάλων, σχεδιαστών αναλυτικών προγραμμάτων, ερευνητών και γνωστικών ψυχολόγων (Reys et al., 1999). Αυτές οι συζητήσεις περιλαμβάνουν: μια λίστα των βασικών στοιχείων του όρου, περιγραφές μαθητών/τριών που επιδεικνύουν την ύπαρξη ή την έλλειψη της αίσθησης του αριθμού, προτεινόμενα επίπεδα της αίσθησης του αριθμού, που σχετίζονται ειδικά με την ανάπτυξη των ακέραιων αριθμών στα παιδιά του δημοτικού, μια θεωρητική ανάλυση του όρου από την πλευρά των ψυχολόγων και συζητήσεις περί διδακτικών στρατηγικών, οι οποίες ευνοούν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Reys et al., 1999).

Ο McIntosh et al. (1992) αναφέρει ότι το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών της Αμερικής (NCTM, 1989), στο Αναλυτικό Πρόγραμμα και στα Πρότυπα Αξιολόγησης των Σχολικών Μαθηματικών, περιγράφει τα χαρακτηριστικά των παιδιών που έχουν καλή αίσθηση του αριθμού, αναφέροντας ότι αυτά επιδεικνύουν: α) καλή κατανόηση της έννοιας των αριθμών, β) πολλαπλές ερμηνείες/αναπαραστάσεις τους, γ) αναγνώριση του σχετικού και απόλυτου μεγέθους τους, δ) εκτίμηση του αποτελέσματος των πράξεων με αυτούς, και ε) ένα σύστημα σημείων αναφοράς (benchmarks) για να σκέφτονται τους αριθμούς.

Η Resnick (1989), όπως αναφέρει ο McIntosh et al. (1992), στα παραπάνω χαρακτηριστικά πρόσθεσε και άλλα στοιχεία που αποδεικνύουν την κατοχή της αίσθησης του αριθμού. Αυτά περιλαμβάνουν τη χρήση της δεκαδικής δομής του αριθμητικού συστήματος για την ανάλυση και σύνθεση των αριθμών, ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, την τάση να θέλει κανείς να βγάλει νόημα σε καταστάσεις που εμπλέκονται αριθμοί και ποσότητες, και τη χρήση πληροφοριών/δεδομένων ως σημείων αναφοράς για την εξαγωγή νέων πληροφοριών.

Διαπιστώνουν, όμως, οι ερευνητές ότι παρόλο που η περιγραφή που παρέχει το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών της Αμερικής είναι εξαιρετικά βοηθητική, εντούτοις απαιτεί περαιτέρω διευκρινίσεις. Και αυτό γιατί δεν είναι απόλυτα σαφές τι σημαίνει ότι τα παιδιά, για παράδειγμα, «επιδεικνύουν καλή κατανόηση της έννοιας των αριθμών», καθώς όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν, μπορούν να συμπεριληφθούν σε αυτή τη διατύπωση. Έτσι, σύμφωνα με τις Koleza & Koleli (2014), οι εν λόγω ερευνητές (McIntosh et al., 1992) είναι οι πρώτοι που παρέχουν ένα πλαίσιο, το οποίο διευκρινίζει, οργανώνει και συσχετίζει τα διάφορα συστατικά στοιχεία της βασικής αίσθησης του αριθμού για το δημοτικό, τα οποία περιέχονται στο NCTM (1989). Παρακάτω παρατίθεται σε γενικές γραμμές το πλαίσιο αυτό, το οποίο ξεχωρίζει τρεις περιοχές, όπου η αίσθηση του αριθμού παίζει σημαντικό ρόλο.

1. Γνώση και ευχέρεια με τους αριθμούς	1.1. Αίσθηση της τάξης (orderliness) των αριθμών
	1.2. Πολλαπλές αναπαραστάσεις των αριθμών
	1.3. Αίσθηση του σχετικού και απόλυτου μεγέθους των αριθμών
	1.4. Σύστημα σημείων αναφοράς
2. Γνώση και ευχέρεια με	2.1. Κατανόηση του αποτελέσματος των πράξεων
	2.2. Κατανόηση μαθηματικών ιδιοτήτων

τις πράξεις	2.3. Κατανόηση της σχέσης μεταξύ των πράξεων
3. Εφαρμογή της γνώσης και της ευχέρειας με τους αριθμούς και τις πράξεις σε υπολογιστικά περιβάλλοντα	3.1. Κατανόηση της σχέσης μεταξύ του πλαισίου του προβλήματος και του απαραίτητου υπολογισμού
	3.2. Γνώση της ύπαρξης πολλαπλών στρατηγικών
	3.3. Τάση χρήσης αποτελεσματικής αναπαράστασης ή/και μεθόδου
	3.4. Τάση επανελέγχου δεδομένων και εξαγωγή λογικού αποτελέσματος

Πίνακας 2.1. Τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού για το δημοτικό (NCTM, 1989).

Οι ερευνητές που δημιούργησαν το παραπάνω μοντέλο έχουν επίγνωση ότι αυτό παρουσιάζει κάποιες ατέλειες και αλληλοεπικαλύψεις. Δεν τρέφουν αυταπάτες ότι θα πρέπει να γίνει αποδεκτό ως ένα οριστικό μοντέλο, το οποίο δεν επιδέχεται αμφισβήτηση. Επομένως, δε διεκδικούν την απολυτότητα του μοντέλου. Αντίθετα, το θεωρούν ως σημείο εκκίνησης ενός συνεχούς και γόνιμου διαλόγου.

Από το παραπάνω μοντέλο οι Reys et al. (1999) αναγνώρισαν ως κυριότερα τα παρακάτω έξι στοιχεία (δύο στοιχεία από καθεμία περιοχή του παραπάνω πλαισίου):

1. Κατανόηση της έννοιας και του μεγέθους των αριθμών.
2. Κατανόηση και χρήση ισοδύναμων αναπαραστάσεων.
3. Κατανόηση της έννοιας και του αποτελέσματος των πράξεων.
4. Κατανόηση και χρήση ισοδύναμων εκφράσεων.
5. Ευέλικτες στρατηγικές υπολογισμού και αρίθμησης για νοερό υπολογισμό, γραπτό υπολογισμό και χρήση υπολογιστή τσέπης.
6. Σημεία αναφοράς μέτρησης.

Το 2000, το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών (NCTM) στις Αρχές και στα Πρότυπα Αξιολόγησης των Σχολικών Μαθηματικών σημειώνει ότι η αίσθηση του αριθμού αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις αρχές των μαθηματικών, όπου ο/η μαθητής/τρια: α) κατανοεί τους αριθμούς, τους τρόπους αναπαράστασής τους, τις σχέσεις μεταξύ τους και το αριθμητικό σύστημα, β) αντιλαμβάνεται τις έννοιες των πράξεων και πώς σχετίζονται μεταξύ τους, και γ) υπολογίζει με ευχέρεια και κάνει λογικές εκτιμήσεις (Şengül, 2013).

Όπως αναφέρει ο McIntosh et al. (1997), με την άποψη ότι η αίσθηση του αριθμού δεν μπορεί να αποτελεί το περιεχόμενο μιας συγκεκριμένης διδακτικής ενότητας συμφωνούν και οι Verschaffel & De Corte (1996). Πιο συγκεκριμένα, οι δύο αυτοί ερευνητές τονίζουν ότι η πολύπλοκη, η πολύπλευρη φύση της αίσθησης του αριθμού δεν μπορεί να κατακερματιστεί σε ειδικά κεφάλαια ή ενότητες στα σχολικά βιβλία. Η ανάπτυξη αυτής της αίσθησης είναι το αποτέλεσμα του όλου εύρους των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση παρά ενός υποσυνόλου ειδικά σχεδιασμένων για το σκοπό αυτό δραστηριοτήτων.

2.2. Η αξία θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Όπως έχει ήδη ειπωθεί, η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους/τις μαθητές/τριες κατέχει κεντρική θέση στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών της Ελλάδας σε όλη την πορεία της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (ΝΠΣ, 2011). Μια βασική πτυχή της αίσθησης αυτής αποτελεί η κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Σύμφωνα με τον Price (2002), η αξία θέσης ψηφίου είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται συχνά στα μαθηματικά και αναφέρεται στο εξής κεντρικό χαρακτηριστικό του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος: κάθε ψηφίο παίρνει μια αξία, η οποία βασίζεται στη θέση που κατέχει σε ολόκληρο τον αριθμό, και σχετίζεται με το ψηφίο που υπάρχει στη θέση δεξιά του. Πιο συγκεκριμένα, η αριθμητική αξία, που αναπαριστάται από το κάθε ψηφίο σε ένα γραπτό πολυψήφιο αριθμό, ισοδυναμεί με το αποτέλεσμα της ονομαστικής αξίας του ψηφίου και της δύναμης του 10 που σχετίζεται με τη θέση του ψηφίου στον αριθμό (Miura & Okamoto, 1989). Η ιδιότητα της αξίας θέσης στο δεκαδικό σύστημα δείχνει ότι πρόκειται για ένα συμπαγές και αποτελεσματικό σύστημα αρίθμησης, καθώς όλοι οι αριθμοί μπορούν να κατασκευαστούν με τη χρήση δέκα ψηφίων από το 0 ως και το 9 (Φιλίππου & Χρίστου, 1995), επιδεικνύοντας ταυτόχρονα τα κύρια χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης: αποδοτικότητα, κομψότητα και ακρίβεια (Sharma, 1993). Σύμφωνα με την ίδια ερευνήτρια, στα προηγούμενα χαρακτηριστικά θα μπορούσε να προσθέσει κανείς και την οικονομία σκέψης, καθώς με τον συμβολισμό του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, ο οποίος είναι συστηματοποιημένος, αποφεύγεται η σπατάλη πνευματικής ενέργειας. Πρόκειται για χαρακτηριστικά που δεν απαντώνται σε άλλα αριθμητικά συστήματα, όπως το αιγυπτιακό και το ρωμαϊκό (Price, 2002), τα οποία δεν είναι θεσιακά. Επομένως, θα μπορούσε κανείς να πει ότι η αξία θέσης ψηφίου μαζί με τη βάση του δέκα αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο του αριθμητικού μας συστήματος.

Κατά τους Φιλίππου & Χρίστου (1995), οι βασικές έννοιες στις οποίες στηρίζεται η αξία θέσης ψηφίου είναι: α) η έννοια της ομαδοποίησης και της ανταλλαγής (ένα πλήθος μονάδων από μια τάξη συγκροτεί μια ομάδα που ισοδυναμεί με μια μονάδα της αμέσως επόμενης τάξης) και β) η έννοια της διαφοροποίησης της αξίας ενός ψηφίου ανάλογα με τη θέση του (η θέση του ψηφίου καθορίζει και την αξία του μέσα στον αριθμό).

Οι Hurst & Hurrell (2014) ισχυρίζονται ότι η αξία θέσης ψηφίου αποτελεί μια πολύπλοκη έννοια και παρέχουν μια λίστα ως ένδειξη αυτής της πολυπλοκότητας, η οποία αντικατοπτρίζει την ποικιλία των κριτηρίων που πρέπει να γίνουν κατανοητά. Η λίστα αυτή αποτελεί μια σύνθεση ιδεών που προέρχονται από διάφορες πηγές και είναι η ακόλουθη:

- Η σειρά των ψηφίων κάνει τη διαφορά.
- Προσθετική ιδιότητα: Η ποσότητα που αναπαριστάται από όλο τον αριθμό είναι το άθροισμα των αξιών που αντιπροσωπεύονται από καθένα ψηφίο.
- Ιδιότητα θέσης: Η αξία που αντιπροσωπεύει το κάθε ψηφίο καθορίζεται από τη θέση που κατέχει στο σύνολο του αριθμού.
- Ιδιότητα της βάσης του δέκα: Η αξία της κάθε στήλης ή της κάθε θέσης αυξάνεται κατά μία δύναμη του δέκα, καθώς κινείται κανείς από τα δεξιά προς τα αριστερά, και μειώνεται κατά μία δύναμη του δέκα, καθώς κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά.
- Πολλαπλασιαστική ιδιότητα: Η αξία καθενός ψηφίου βρίσκεται, πολλαπλασιάζοντας την ονομαστική αξία του ψηφίου με την αξία που αποδίδεται στη θέση του.

Οι παραπάνω τέσσερις ιδιότητες έχουν υπαγορευτεί από τη Ross (1989).

- Υπάρχουν κανονικότητες στον τρόπο που κάποιος διαβάζει και αναφέρει αριθμούς.
- Υπάρχουν κανονικότητες στον τρόπο που κάποιος γράφει αριθμούς.

- Οι κανονικότητες του αριθμητικού συστήματος βοηθούν κάποιον να κατασκευάσει και άλλους αριθμούς.
- Οι στήλες των θέσεων αξίας έχουν ονομασίες.
- Το μηδέν μπορεί να κρατά μια θέση.

Θα μπορούσε κανείς να πει ότι το μηδέν είναι αυτό που τελειοποιεί το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, αφού χωρίς αυτό θα ήταν μη λειτουργικό.

- Μια συλλογή των δέκα μπορεί να εκληφθεί ως μια ιδιαίτερη οντότητα που μπορεί να απαριθμηθεί.

Η Young-Loveridge, όπως αναφέρει η Major (2012), ισχυρίζεται ότι τα παιδιά μπορούν να διδαχθούν την αξία θέσης ψηφίου, μόλις κατανοήσουν την έννοια των μονάδων και έχουν δημιουργήσει τις αριθμητικές σχέσεις εκείνες, που θα υποστηρίξουν την έννοια του δέκα (της δεκάδας) ως μιας άλλης μονάδας.

- Ο όρος «συλλογή των δέκα» μπορεί να εφαρμοστεί στις «δέκα δεκάδες» ή «δέκα εκατοντάδες» και ούτω καθεξής.
- Μπορεί κανείς να μετρά ανά δέκα, εκατό ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας.
- Οι αριθμοί μπορούν να χωριστούν με ευέλικτους τρόπους, χρησιμοποιώντας τόσο κανονικούς όσο και μη κανονικούς τρόπους χωρισμού (π.χ. 32=30+2 ή 32=20+12).
- Ο χωρισμός του αριθμού μπορεί να εκληφθεί ως δηλωτικό της αξίας του ψηφίου και της αξίας της θέσης του. Για παράδειγμα, 26=20+6 ή (2x10)+(6x1).

Η Major (2012) (όπως αναφ. στο Hurst & Hurrell, 2014), αναφέρει ότι η πολυπλοκότητα της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου μπορεί να καλυφθεί από τη συμπύκνωση των παραπάνω κριτηρίων σε μια φαινομενικά απλή εννοιολογική κατασκευή, η οποία ορίζει την έννοια μόνο ως τον τρόπο που κάποιος αναφέρει, διαβάζει ή γράφει αριθμούς. Και επειδή οι μαθητές κατορθώνουν συνήθως να λένε, να διαβάζουν και να γράφουν αριθμούς, το γεγονός αυτό μπορεί να σκεπάσει την ανικανότητά τους να γενικεύουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που υπάρχουν εντός του συστήματος της αξίας θέσης ψηφίου.

Ο Λεμονίδης (2003) τονίζει ότι είναι σημαντική η μάθηση των ιδιοτήτων του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, διότι συντελεί στην καλή κατανόηση των αριθμών, στην ανάπτυξη των ικανοτήτων της εκτίμησης και των νοερών υπολογισμών και στην κατανόηση των πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς. Η Major

(2012) αναφέρει ότι η αξία θέσης ψηφίου αποτελεί μια θεμελιώδη και απαραίτητη μαθηματική έννοια, η κατοχή της οποίας οδηγεί στην επιτυχία στα μαθηματικά. Επομένως, μπορεί να χαρακτηριστεί ως θεματοφύλακας της περαιτέρω μαθηματικής κατανόησης. Ενώ οι Chan, Au, & Tang (2014) συμπληρώνουν ότι όποιος έχει δυσκολία με την έννοια αυτή είναι επιρρεπής στο να κάνει λάθη στην κατανόηση, στην παραγωγή, στην ανάγνωση και στη γραφή πολυψήφιων αριθμών, καθώς και σε διαδικασίες που αφορούν τη δομή των αριθμών με βάση το δέκα, όπως τη μεταφορά κρατουμένου στην πρόσθεση και το δανεισμό στην αφαίρεση.

2.3. Όψεις της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου

Η κατανόηση της ιδιότητας της αξίας θέσης ψηφίου περιλαμβάνει μεταξύ άλλων: α) τη σωστή ανάγνωση και γραφή πολυψήφιων αριθμών, β) την αναγνώριση της αξίας κάθε ψηφίου σε έναν πολυψήφιο αριθμό, γ) τις ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας, δ) τη σωστή εκτέλεση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και ε) την κατανόηση της έννοιας του κρατουμένου στην πρόσθεση και του δανεικού στην αφαίρεση. Όλες αυτές οι όψεις της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου θα απασχολήσουν την παρούσα εργασία.

2.3.1. Σωστή ανάγνωση και γραφή πολυψήφιων αριθμών

Σύμφωνα με τον Barrouillet et al. (2004), πολλές έρευνες έχουν εξετάσει τη μάθηση και τη χρήση των προφορικών αριθμητικών συστημάτων. Τα περισσότερα από αυτά αποτελούνται από ένα περιορισμένο λεξιλόγιο και από ένα συντακτικό. Το λεξιλόγιο προσδιορίζει μόνο μερικές ποσότητες, ενώ το συντακτικό διέπει το συμβολισμό των προσθετικών και πολλαπλασιαστικών σχέσεων, που επιτρέπουν την αναπαράσταση όλων των ποσοτήτων.

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι τυπικά απλό, αφού αποτελείται από δέκα μόνο στοιχεία, τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, και από την απλή αρχή του θεσιακού συμβολισμού. Όμως, η χρήση αυτού του συμβολισμού είναι που προκαλεί δυσκολίες στα παιδιά και στους ενήλικες.

Σύμφωνα με έρευνες των Miura, Okamoto, Kim, Steere & Fayol, των ετών 1993 και 1994 (όπως αναφ. στο Barrouillet et al., 2004), τα παιδιά στην Κίνα, στην Κορέα και στην Ιαπωνία μπορούν να γράψουν αριθμούς με ψηφία καλύτερα και σε μικρότερη ηλικία σε σχέση με τους Αμερικανούς, Γάλλους ή Σουηδούς συνομηλίκους τους. Αυτό εξηγείται εύκολα, καθώς η δομή της γλώσσα των πρώτων διευκολύνει την αντίληψη της «δεκαδικότητας», σε αντίθεση με εκείνη των τελευταίων, η οποία είναι λιγότερο διαφανής. Όπως αναφέρουν οι Saxton & Towse (1998), σύμφωνα με την υπόθεση της γλωσσικής σχετικότητας, οι διαφορές μεταξύ των γλωσσών οδηγούν σε διαφορές στη σκέψη των ομιλητών. Ειδικά τα συστήματα ονοματοδοσίας αριθμών ορισμένων γλωσσών, όπως της ιαπωνικής, της κορεατικής και της κινεζικής, χαρίζουν στους ομιλητές τους ένα εγγενές πλεονέκτημα για την κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου και του δεκαδικού συστήματος.

Όπως συνεχίζει να αναφέρει ο Barrouillet et al. (2004), έρευνες που έγιναν σε Ιταλούς και Γάλλους μαθητές/τριες μεταξύ 7 και 9 ετών, έδειξαν ότι αυτοί/ες κάνουν λάθη όταν περνούν από τον φωνολογικό κώδικα σε εκείνον των ψηφίων. Αυτά τα λάθη αφορούν είτε αντικατάσταση ψηφίων (π.χ. το εκατόν είκοσι τέσσερα γράφεται ως 134), οπότε γίνεται λόγος για λεξιλογικά λάθη, είτε προσθέσεις ή αφαιρέσεις μηδενικών (π.χ. το εκατόν είκοσι τέσσερα γράφεται ως 10024 ή το χίλια έξι ως 106) οπότε μιλά κανείς για συντακτικά λάθη. Τα λάθη αυτά επηρεάζουν τις σχέσεις μεταξύ των ψηφίων που σχηματίζουν τον αριθμό.

2.3.2. Αναγνώριση της αξίας κάθε ψηφίου σε έναν πολυψήφιο αριθμό

Οι Καφούση και Ντζιαχρήστος (1998) αναφέρουν ότι, σύμφωνα με έρευνες της Fuson το 1992, τα παιδιά δίνουν την εντύπωση ότι χειρίζονται τους πολυψήφιους αριθμούς ως μια ακολουθία μονοψήφιων αριθμών τοποθετημένων ο ένας δίπλα στον άλλο, χωρίς να αποδίδουν σε κάθε ψηφίο την αξία που έχει σε σχέση με τη θέση του στον αριθμό. Σε αυτό το συμπέρασμα κατέληξε η Fuson και σε προγενέστερη έρευνά της (Fuson, 1990). Ο Price (2002) συμπληρώνει λέγοντας ότι ο συλλογισμός με βάση την ονομαστική αξία (face value) του αριθμού αποτελεί για τα παιδιά πιθανώς την πιο κοινή παρανόηση στους πολυψήφιους αριθμούς. Προσθέτει και μια δική του νοητική κατασκευή για τους πολυψήφιους αριθμούς, η οποία εδράζεται στο μυαλό των μαθητών/τριών, και την ονομάζει «ανεξαρτήτου θέσης» (independent-place construct). Σύμφωνα με αυτή, τα παιδιά δε δείχνουν να αντιλαμβάνονται κάποια σχέση που να συνδέει τις θέσεις των εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων. Αντιθέτως τις θεωρούν ανεξάρτητες κατηγορίες ποσοτήτων με χωριστά ονόματα, ψηφία και αναπαραστάσεις με τουβλάκια στη βάση του 10.

2.3.3. Ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας

Οι Καφούση & Ντζιαχρήστος (1998) συμφωνούν με τους Jones, Thornton, Putt et al. (1996) ότι υπάρχουν τέσσερα βασικά στοιχεία που θεωρούνται απαραίτητα για την κατανόηση της ιδιότητας της αξίας θέσης ψηφίου. Δύο εξ αυτών είναι: α) η ανάλυση ενός αριθμού σε μονάδες διάφορων τάξεων με πολλούς τρόπους, και β) η σύνθεση ενός αριθμού από δοσμένες μονάδες των διαφόρων τάξεων που τον αποτελούν. Για παράδειγμα ο αριθμός 643 μπορεί να διαβαστεί ως: 6 εκατοντάδες, 4 δεκάδες και 3 μονάδες ή 64 δεκάδες και 3 μονάδες ή 643 μονάδες. Αυτή η ποικιλία των τρόπων ανάλυσης ενός αριθμού στηρίζεται στην κατανόηση της αρχής της διατήρησης του αριθμού (ο συνολικός αριθμός δεν αλλάζει), και στην αναγνώριση ότι τα μέρη της αξίας θέσης αποτελούν σύνθετες μονάδες. Έτσι, αυτή η γνώση θα επιτρέψει στα παιδιά να αναγνωρίσουν ότι η 1 δεκάδα μπορεί να μετονομαστεί σε 10 μονάδες, χωρίς να αλλάξει η αξία της αρχικής ποσότητας (Baturo, 2000).

2.3.4. Σωστή εκτέλεση των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης

Για το θέμα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης πολυψήφιων αριθμών, οι Καφούση & Ντζιαχρήστος (1998) διατείνονται ότι δυσκολίες υπάρχουν και στην εκτέλεση των αλγόριθμων των δύο αυτών πράξεων, αφού η κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου αποτελεί προϋπόθεση για την ορθή εκτέλεσή τους.

2.3.5. Κατανόηση της έννοιας του κρατούμενου στην πρόσθεση

Όσον αφορά το κρατούμενο, η Poisard (2006) σε έρευνά της κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η έννοιά του δεν ορίζεται εύκολα ούτε από τους/τις μαθητές/τριες ούτε από τους/τις δασκάλους/ες. Για να την εξηγήσει, αναφέρει ότι σε κάθε θέση του δεκαδικού συστήματος (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κτλ.) μπορεί να εγγραφεί μόνο ένα ψηφίο, από το 0 έως και το 9. Σε μια πρόσθεση, μόλις το άθροισμα των ψηφίων σε μία θέση αξίας ενός αριθμού φτάσει (ή ξεπεράσει) το 10, γίνεται μια μεταφορά αριθμών μεταξύ των θέσεων (πάντα προς τα αριστερά). Έτσι, μεταφέρεται 1 δεκάδα για κάθε 10 μονάδες που προκύπτουν, 1 εκατοντάδα για κάθε 10 δεκάδες, 1 χιλιάδα για κάθε 10 εκατοντάδες και ούτω καθεξής. Το κρατούμενο, λοιπόν, παρέχει τη δυνατότητα σε κάποιον να διαχειριστεί την αλλαγή στην αξία θέσης κάνοντας μια μεταφορά αριθμών μεταξύ των θέσεων. Πρόκειται για μια ακόμη έννοια, η σύλληψη της οποίας απαιτεί βαθιά κατανόηση του συστήματος της αξίας θέσης.

2.4. Ο ρόλος των χειραπτικών υλικών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα αποτελεί αναμφισβήτητα το πιο σημαντικό θέμα στο αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού σχολείου. Μια συγκροτημένη αντίληψη της έννοιας αυτής δίνει τη δυνατότητα στο/η μαθητή/τρια να διαχειριστεί προβλήματα από ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών περιοχών, και κυρίως αυτών που εμπλέκουν τους νοερούς υπολογισμούς. Ωστόσο, μπορεί να προκαλεί εντύπωση και να μοιάζει ανακόλουθο το γεγονός ότι ένα τέτοιο σύστημα, που ενσωματώνει στον πυρήνα του ένα μικρό αριθμό απλών κανόνων, παρουσιάζει δυσκολίες τόσο για τους/τις δασκάλους/ες να το διδάξουν όσο και για τους/τις μαθητές/τριες να το κατανοήσουν (Price, 2002).

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), γενικά, η γνώση αποτελείται από εσωτερικές ή αλλιώς νοητικές αναπαραστάσεις των ιδεών, που έχει κατασκευάσει το άτομο στο μυαλό του. Οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών διακρίνουν τη γνώση σε εννοιολογική και διαδικαστική. Η εννοιολογική γνώση αποτελείται από λογικές σχέσεις που δομούνται εσωτερικά και συνδέονται με προϋπάρχουσες γνώσεις. Στην πραγματικότητα πρόκειται για τη γνώση που είναι κατανοητή από το άτομο. Ο Piaget την είχε ονομάσει «λογικομαθηματική», αφού είχε διακρίνει τη γνώση σε φυσική και λογικομαθηματική (Kamii et al., 2001). Στο παιδί τα δύο αυτά είδη γνώσης συνυπάρχουν και είναι αδύνατο να διαχωριστούν στη μικρή ηλικία, ενώ μεγαλώνοντας η λογικομαθηματική γνώση γίνεται σταδιακά ανεξάρτητη.

Κατά την Τζεκάκη (2016), η χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού συμβάλλει στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, εφόσον αυτό ενταχθεί οργανικά στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών. Και σε τι συνίσταται αυτή η συμβολή; Όταν μιλάει κανείς για μαθηματικές έννοιες, κάνει λόγο για ιδεατές κατασκευές, οι οποίες μπορούν να αποδοθούν με διαφορετικά μέσα αναπαράστασης. Στο βιβλίο του ο Van de Walle (2005) αναφέρει ότι οι Lesh, Post & Behr (1987) κάνουν λόγο για πέντε διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών: τις εικόνες, τα χειραπτικά μοντέλα, το γραπτό συμβολισμό, τις πραγματικές καταστάσεις και την προφορική γλώσσα. Οι μεταφορές ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις και στο εσωτερικό της καθεμιάς βοηθούν στην ανάπτυξη νέων εννοιών. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού είναι να συνδέσει το «συγκεκριμένο» και ρεαλιστικό, το οποίο εκπροσωπείται από το υλικό, με το «αφηρημένο» και ιδεατό, δηλαδή τις μαθηματικές έννοιες.

Με το γενικό όρο «εκπαιδευτικό υλικό» εννοούνται διάφορα αντικείμενα ή υλικά που εισέρχονται για να χρησιμοποιηθούν στη σχολική τάξη, όπως παιχνίδια, εμπράγματο χειραπτικό υλικό, αναπαραστάσεις, εικόνες, φωτογραφίες, ταινίες, ψηφιακές εφαρμογές κ.ά.

Η Laski et al. (2015) ορίζουν τα χειραπτικά υλικά (manipulatives) ως συγκεκριμένα (concrete) υλικά, τα οποία χρησιμοποιούνται για την επίδειξη μιας μαθηματικής ιδέας ή για την υποστήριξη της εκτέλεσης μιας μαθηματικής διαδικασίας. Ο Φεσάκης (2014) δηλώνει ότι ο προσδιορισμός "concrete" χρησιμοποιείται από τους ξένους συγγραφείς για να διακρίνουν το «απτικό υλικό» (όπως μεταφράζει ο ίδιος τον όρο "manipulatives"), από το εικονικό (virtual), το οποίο είναι λογισμικής μορφής. Όμως, στο πλαίσιο της μάθησης, ο όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει εμπειρίες, όπου οι μαθητές/τριες, μέσω των υλικών, βελτιώνουν την εννοιολογική κατανόηση μιας μαθηματικής ιδέας μέσα από τη διερεύνηση της σχέσης της με άλλες έννοιες. Η Moyer (2001) ορίζει τα χειραπτικά υλικά (manipulative materials) ως αντικείμενα, που έχουν σχεδιαστεί για να αναπαριστούν ρητά και με συγκεκριμένο τρόπο μαθηματικές ιδέες, οι οποίες είναι αφηρημένες.

Η Τζεκάκη (2016) αναφέρεται σε μια εξειδίκευση του χειραπτικού υλικού, καθώς οι Marshall & Swan (2008) χρησιμοποιούν τον όρο «μαθηματικό χειραπτικό υλικό» (mathematical manipulative) για να ορίσουν κάθε αντικείμενο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί με έναν τρόπο αισθησιοκινητικό, αναπτύσσοντας έτσι συνειδητό ή μη συνειδητό μαθηματικό συλλογισμό.

Όμως, το υλικό αυτό δεν είναι μαγικό. Δεν αποτελεί από μόνο του τον αναμεταδότη ή το μεταφορέα εννοιών και γνώσης (Ball, 1992, όπως αναφ. στο Moyer, 2001 και στο Cope, 2015). Το χειραπτικό υλικό είναι η φυσική αναπαράσταση μιας έννοιας· δεν είναι η ίδια η έννοια (Laski et al., 2015). Και καθώς οι μαθηματικές έννοιες είναι το αποτέλεσμα διαδοχικών αφαιρέσεων στο πέρασμα του χρόνου, δε είναι εύκολο να δημιουργηθούν ούτε μπορούν να προέλθουν από μία και μόνο συγκεκριμένη κατάσταση ούτε με τη χρήση ενός υλικού. Αυτό που χρειάζεται, ώστε να οικοδομηθεί μια έννοια, είναι η δραστηριότητα με διαφορετικά υλικά, το σταδιακό πέρασμα από τις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης και η εφαρμογή της έννοιας σε διαφορετικές καταστάσεις (Τζεκάκη, 2016). Το γεγονός ότι το (χειραπτικό) υλικό δεν αποτελεί πανάκεια και δεν καταφέρνει πάντα από μόνο του να κάνει θαύματα, φαίνεται από τις έρευνες που έχουν διεξαχθεί τις τελευταίες δεκαετίες. Η Sowell το 1989 πραγματοποίησε μια από τις πρώτες μετα-αναλύσεις ερευνών, συγκρίνοντας διδασκαλίες με τη χρήση χειραπτικών υλικών και χωρίς τη χρήση αυτών. Το σημαντικότερο συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ήταν ότι το όφελος των χειραπτικών υλικών εξαρτάται από το χρονικό διάστημα που τα παιδιά τα χρησιμοποιούν· η βραχύχρονη χρήση τους δεν ήταν αποτελεσματική, ενώ η μακρόχρονη αποδείχτηκε αποτελεσματικότερη (Laski et al., 2015). Σε μια πιο πρόσφατη μετα-ανάλυση, οι Carbonneau, Marley & Selig (2013) χρησιμοποίησαν 55 έρευνες που διεξήχθησαν από το 1955 ως και το 2010. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η διδασκαλία των μαθηματικών με τη χρήση χειραπτικών υλικών παρουσιάζει μικρή έως μέτρια αποτελεσματικότητα στη μάθηση, σε σύγκριση με τη διδασκαλία με αφηρημένα μαθηματικά σύμβολα. Επιπλέον, αποκαλύπτεται ότι το παραπάνω αποτέλεσμα εξαρτάται και από άλλες μεταβλητές που έχουν να κάνουν με τις διδακτικές επιλογές, άρα με το/τη δάσκαλο/α.

Όπως τονίζουν οι Marshall & Swan (2008), τα χειραπτικά υλικά από μόνα τους δε διδάσκουν· οι δάσκαλοι/ες διδάσκουν. Η Τζεκάκη (2016) επισημαίνει ότι τα περισσότερα από τα υλικά που χρησιμοποιούνται σήμερα για τη διδασκαλία των μαθηματικών ιδεών, δεν αναπαριστούν το σύνολο των χαρακτηριστικών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων που περιλαμβάνει μια μαθηματική έννοια, αλλά ένα μέρος αυτών. Έτσι, αναφέρει ένα παράδειγμα, λέγοντας ότι με το υλικό Dienes μπορεί κανείς να αναλύσει και να συνθέσει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κτλ., αλλά δεν μπορεί να κάνει ομαδοποιήσεις, διαιρέσεις ή υποδιαιρέσεις. Επομένως, ο/η δάσκαλος/α, για να είναι ένας/μία αποτελεσματικός/ή δάσκαλος/α των μαθηματικών, χρειάζεται να έχει βαθιά γνώση της μαθηματικής έννοιας που πρόκειται να διδάξει, να επιλέγει τα κατάλληλα μαθηματικά χειραπτικά υλικά, να γνωρίζει πώς αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ώστε να υποστηρίξουν την ανάπτυξη της συγκεκριμένης έννοιας, να γνωρίζει το/τη μαθητή/τρια και να τον/την βοηθά να οικοδομεί τη γνώση συνδέοντας ιδέες, καθώς και να μπορεί να διαχειρίζεται το περιβάλλον μάθησης. Άρα, τα χειραπτικά υλικά για να είναι αποτελεσματικά, πρέπει να αποτελούν μέρος ενός καλά σχεδιασμένου προγράμματος μαθηματικών.

Στο βιβλίο του ο Κόρρος (2012) αναφέρει ένα κινέζικο ρητό:

«Μίλα μου για τα Μαθηματικά και θα τα ξεχάσω

Δείξε μου Μαθηματικά και ίσως τα θυμάμαι

Άσε με να κάνω πράξεις αυτά που λες και τότε θα τα καταλάβω» (σελ. 92)

Οι Marshall & Swan (2008) ισχυρίζονται ότι για τον 21^{ο} αιώνα το ρητό αυτό δεν είναι αρκετό και αναφέρουν ότι οι Swan & Sparrow (2004) προτείνουν τη συμπλήρωση μιας τέταρτης σειράς σε αυτό:

«Μιλώ για αυτά και συνδέω»,

αφού η γλώσσα είναι το κύριο μέσο που γεφυρώνει το «συγκεκριμένο» με το «αφηρημένο», ενώ, όπως προαναφέρθηκε, με τη διασύνδεση των ιδεών (που προϋπάρχουν) οικοδομείται (νέα) γνώση.

Η Cope (2015) παρέχει στους εκπαιδευτικούς μια λίστα με οδηγίες για τη χρήση των χειραπτικών υλικών προκειμένου να επιτύχουν θετικά αποτελέσματα, ενώ η Laski et al. (2015) προτείνουν τέσσερις αρχές για τη μεγιστοποίηση της αποτελεσματικότητας των υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών.

2.5. Ο άβακας ως χειραπτικό υλικό

Ένα από τα αρχαιότερα μέσα υπολογισμού, το οποίο έχει εισέλθει στη σχολική τάξη ως χειραπτικό υλικό είναι ο άβακας. Σύμφωνα με τον Spitzer (1942), τα δύο σημαντικότερα χαρακτηριστικά του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος, η αξία θέσης ψηφίου και η ιδέα ότι μπορεί κανείς να χειριστεί τις δεκάδες, εκατοντάδες, κτλ. ως «μονάδες» (αν τις σκεφτεί ως ομαδοποιήσεις/συλλογές), μπορούν άριστα να αναπαρασταθούν στον άβακα. Η μελέτη της μεθόδου και των αρχών, που εμπλέκονται στην αναπαράσταση μιας ποσότητας – ενός αριθμού στον άβακα, αποκαλύπτει ότι πέντε σημαντικά χαρακτηριστικά της αριθμητικής επιδεικνύονται με θαυμαστό τρόπο.

Πρώτον, οι χάντρες του άβακα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν διάφορα συγκεκριμένα αντικείμενα. Πρόκειται για το πρώτο βήμα στο μακρύ δρόμο που πρέπει να διανύσει το παιδί για να μεταβεί από το «συγκεκριμένο» στο «αφηρημένο». Το παιδί, όπως ένας πρωτόγονος άνθρωπος, δυσκολεύεται να συλλάβει την ιδέα ότι ένα σύμβολο, για παράδειγμα το «τέσσερα», μπορεί να αναφέρεται σε διάφορα πράγματα, όπως σε βιβλία, ημέρες ή παιδιά. Με τη χρήση των χαντρών το παιδί μπορεί να «δει» το «τέσσερα» (για τις τέσσερις μέρες, για παράδειγμα) και έτσι, δε χρειάζεται να επιβαρύνει το μυαλό του με όλους τους συσχετισμούς που συνοδεύουν τη σκέψη των «τεσσάρων ημερών». Η υπηρεσία που προσφέρουν οι αριθμοί στον άνθρωπο είναι αρχικά η οικονομία της σκέψης. Το κύριο έργο του σχολικού προγράμματος αριθμητικής είναι να βοηθήσει το παιδί να εξασφαλίσει την κατανόηση αυτών των αφηρημένων χρήσεων του αριθμού. Αυτή η κατανόηση μπορεί να διευκολυνθεί με τη χρήση του άβακα.

Δεύτερον, η αξία ενός αριθμού εξαρτάται από τη θέση των ψηφίων του. Οι χάντρες στην προτελευταία στήλη του άβακα, για παράδειγμα, είναι ακριβώς ίδιες με τις χάντρες στην τελευταία στήλη. Επειδή, όμως, βρίσκονται σε διαφορετική θέση, αναπαριστούν δεκάδες και όχι μονάδες, τις οποίες αναπαριστούν οι χάντρες της τελευταίας θέσης. Στην περίπτωση ενός αριθμού, όπως του 11, που βρίσκεται γραμμένος στον πίνακα ή στο χαρτί, ο όρος «θέση» είναι πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητός. Κάτι που επιτυγχάνεται πολύ εύκολα στον άβακα.

Τρίτον, ο άβακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί, επίσης, για να απεικονίσει την ιδέα ενός άλλου χαρακτηριστικού του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος, της κράτησης θέσης ή της λειτουργίας του μηδενός. Αν ζητούνταν από τα παιδιά να γράψουν με ψηφία ποιον αριθμό αναπαριστά ο άβακας που έχει μία χάντρα στη θέση των εκατοντάδων και έξι χάντρες στη θέση των μονάδων, η ανάγκη ενός συμβόλου που θα «κρατάει» τη θέση των δεκάδων θα γινόταν προφανής. Εδώ, το μηδέν δεν αναπαριστά κάποια ποσότητα, αλλά ασκεί τη πολύ σημαντική λειτουργία του να «κρατά» μια θέση αξίας.

Τέταρτον, ένα άλλο χαρακτηριστικό του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος, που αποτυπώνεται στον άβακα, είναι η ιδέα της συλλογής. Το γεγονός ότι μία και μοναδική χάντρα στη θέση των δεκάδων αντιπροσωπεύει τις δέκα μονάδες, κάνει εύκολο στο παιδί να δείξει και να δει τη δεκάδα, όπως είναι να δείχνει τη μονάδα. Στην πραγματικότητα, σε όλη την εργασία του με τον άβακα το παιδί χειρίζεται τις δεκάδες και τις εκατοντάδες, όπως χειρίζεται τις μονάδες. Για παράδειγμα, για τον αριθμό 43 στον άβακα οδηγείται να σκεφτεί ότι αποτελείται από «τέσσερις δεκάδες και τρεις μονάδες» και για τον 452 ότι φτιάχνεται από «τέσσερις εκατοντάδες, πέντε δεκάδες και δύο μονάδες».

Πέμπτον, μια τελευταία χρήση του άβακα στη διδασκαλία είναι η απεικόνιση του «κρατουμένου» και του «δανεικού». Η πρόσθεση και η αφαίρεση πραγματοποιούνται εύκολα στον άβακα, ειδικά αν δεν προκύπτει θέμα κρατουμένου για την πρόσθεση και δανεικού για την αφαίρεση. Όταν ανακύπτουν, όμως, τέτοια θέματα κατά τη διαδικασία των εν λόγω πράξεων, αρχίζουν οι αντικαταστάσεις ψηφίων. Για παράδειγμα, στην πρόσθεση 10 μονάδες αντικαθίστανται με 1 δεκάδα, 10 δεκάδες με 1 εκατοντάδα, κτλ., ενώ στην αφαίρεση αντικαθίστανται για παράδειγμα 1 δεκάδα με 10 μονάδες, 1 εκατοντάδα με 10 δεκάδες, κτλ.

Στο βιβλίο της η Σκουμπουρδή (2012) αναφέρει ότι ο άβακας:

Υποστηρίζει την αντίληψη της έννοιας του φυσικού αριθμού, τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων βασικών πράξεων, την εξοικείωση με την αξία της θέσης των ψηφίων των αριθμών και της αλλαγής βάσης, καθώς και την ανάπτυξη ατομικών υπολογιστικών αλγορίθμων (σελ.158).

Οι παραπάνω τρόποι, με τους οποίους ο άβακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποσαφηνίσει διάφορα χαρακτηριστικά του αριθμητικού μας συστήματος, δείχνουν ότι αποτελεί ένα εργαλείο που παρέχει σημαντική διδακτική βοήθεια και καλό θα ήταν να συμπεριλαμβάνεται στη διδασκαλία.

2.6. Ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη

Εδώ και μερικούς αιώνες υπάρχει ενδιαφέρον, ολοένα και αυξανόμενο, για τη σχέση της ιστορίας των μαθηματικών με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, η οποία ιστορία τις τελευταίες δεκαετίες έχει διεισδύσει και στις έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών. Πολλοί διαπρεπείς μαθηματικοί, αλλά και καθηγητές των μαθηματικών, έχουν κατά καιρούς εκφράσει, με διαφορετικούς τρόπους και διαφορετικούς λόγους ο καθένας, ιδέες σχετικά με τη συσχέτιση ή μη των μαθηματικών με την ιστορία τους. Όλες αυτές οι συζητήσεις έγιναν υπό το πρίσμα ενός «παραλληλισμού»· δηλαδή, μιας συσχέτισης ή αναλογίας μεταξύ του τρόπου με τον οποίο μια μαθηματική έννοια γεννήθηκε και εξελίχθηκε ιστορικά, και του τρόπου με τον οποίο η ίδια έννοια γίνεται αντιληπτή από το μαθητή στη σημερινή τάξη (Θωμαΐδης, 2014). Σύμφωνα με τους Thomaidis &Tzanakis (2007), όπως ρητά αναφέρει η Sfard (1994, σ. 131), η ιστορική γνώση μπορεί να συνεισφέρει αποφασιστικά στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Η ιδέα, όμως, ενός αυστηρού παραλληλισμού, δηλαδή μιας ένα-προς-ένα αντιστοιχίας μεταξύ ιστορίας και μάθησης των μαθηματικών, έχει αμφισβητηθεί από πολλούς, όπως τη Sierpinska και τον Arcavi.

Όπως αναφέρει ο Θωμαΐδης (2014), η ιστορική γνώση λειτουργεί ως μια πηγή ενόρασης για τα ζητήματα που σχετίζονται αφενώς με τη διαδικασία της μάθησης, αφετέρου με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες.

Σύμφωνα με αυτόν, υπάρχουν τρεις διαφορετικές θεωρίες μάθησης, που η καθεμιά έχει αποτελέσει ξεχωριστό θεωρητικό πλαίσιο για τις έρευνες της διδακτικής των μαθηματικών και υπαγορεύουν διαφορετικούς τρόπους χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών. Πρόκειται για τη θεωρία που εκπορεύεται από το έργο του Piaget, τη θεωρία που εντάσσεται στη «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση», και τέλος, εκείνη των «Διδακτικών Καταστάσεων» του Brousseau.

Ο Piaget, αρχικά, ανέπτυξε μια θεωρία τεσσάρων σταδίων από τα οποία περνά διαδοχικά το παιδί κατά τη νοητική του ανάπτυξη. Έπειτα, προσπάθησε να αποδείξει ότι ανάλογα στάδια μπορεί να βρει κανείς στην ιστορία της επιστήμης και να τα χρησιμοποιήσει ως εργαλεία επιστημονικής ανάλυσης. Αντιστοιχίζει, δηλαδή, τα στάδια της ιστορικής εξέλιξης με τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης.

Στο πλαίσιο της «Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης» ο Freudenthal διατύπωσε την αρχή της «εκ νέου επινόησης» της γνώσης. Στο έργο του κάνει ένα διαχωρισμό των μεθόδων διδασκαλίας σε «γενετικές» και «δογματικές». Στην πρώτη κατηγορία εντάσσει τη «μαιευτική» μέθοδο του Σωκράτη, ενώ στη δεύτερη την «αξιωματική» παρουσίαση (θεωρία-αξίωμα-απόδειξη), που ακολουθούν τα σύγχρονα σχολικά βιβλία, την οποία ουσιαστικά αποστρέφεται. Για αυτόν ο εμπρόθετος προσδιορισμός «εκ νέου» δεν αναφέρεται στην προϊστορία του ατόμου που μαθαίνει, αλλά στην ιστορία ολόκληρης της ανθρωπότητας. Επίσης, θεωρεί ότι η ιστορία των μαθηματικών χρησιμεύει ως μια πηγή υλικού και ιδεών για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ο Brousseau με τη θεωρία του προσπαθεί να εισάγει στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών την έννοια του «εμποδίου», την οποία πρώτος διατύπωσε ο Bachelard. Για τον τελευταίο η εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης δε μπορεί να ακολουθεί μια συνεχή, ομαλή πορεία. Αντίθετα, συναντά αδιέξοδα και ρήξεις. Τις αιτίες αυτών των αδιεξόδων και ρήξεων τις αποκάλεσε «επιστημολογικά εμπόδια», τα οποία θεωρεί εγγενή εμπόδια στην ίδια την πράξη της απόκτησης της γνώσης. Βέβαια, η θέση αυτή του Bachelard δεν αγγίζει τα μαθηματικά, αφού τα χαρακτηρίζει ως θαύμα κανονικότητας, που δε γνώρισαν ποτέ λάθη. Ο Brousseau ορίζει ως γνωστικά εμπόδια τα επαναλαμβανόμενα λάθη, τα οποία δεν προκαλούνται λόγω έλλειψης γνώσης, αλλά λόγω της ύπαρξης μιας γνώσης που δυσλειτουργεί, και τα διαχωρίζει σε: οντογενετικά, διδακτικά, επιστημολογικά, και πολιτιστικά. Ιδιαίτερη έμφαση δίνει στα επιστημολογικά εμπόδια. Κατά την άποψή του, αυτά είναι εμπόδια από τα οποία κανείς ούτε μπορεί, αλλά ούτε και πρέπει να ξεφύγει, αφού ο ρόλος τους στη γνώση είναι εποικοδομητικός. Για την ανάπτυξη της παραμέτρου των εμποδίων στη θεωρία του συνδυάζει τη θεωρία του Bachelard με εκείνη του Piaget. Επίσης, παρέχει και μια περιγραφή των στοιχείων που καθιστούν μια γνώση εμπόδιο, αλλά και τον τρόπο που μπορεί να ξεπεραστεί το εμπόδιο αυτό, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα δημιουργίας ανάλογων διδακτικών καταστάσεων στη σχολική τάξη. Επομένως, στη θεωρία του Brousseau, η αποστολή της ιστορίας και της διδακτικής των μαθηματικών είναι να εντοπίζουν λάθη που επαναλαμβάνονται, να εντοπίζουν εμπόδια στην ιστορία των μαθηματικών και να συγκρίνουν τα εμπόδια στην ιστορία με τα εμπόδια στη μάθηση. Βέβαια, στις θέσεις που εξέφρασε ο Brousseau υπάρχει και αντίλογος. Όπως αναφέρουν οι Thomaidis &Tzanakis (2007), η Artigue τόνισε ότι πολλές φορές τα επιστημολογικά εμπόδια σχετίζονται στενά με εμπόδια διδακτικής φύσεως. Αλλά και τα αποτελέσματα ερευνών των Γαγάτση & Θωμαΐδη (1995) και του Θωμαΐδη (1995) δείχνουν ότι κατά το μετασχηματισμό μιας μαθηματικής γνώσης σε αντικείμενο διδασκαλίας παρατηρείται μια ανάμειξη ισχυρών διδακτικών (στο πλαίσιο του σχολείου) και επιστημολογικών (στο ιστορικό πλαίσιο) εμποδίων. Επιπλέον, και το λεγόμενο «διδακτικό συμβόλαιο» αποτελεί γνήσιο διδακτικό εμπόδιο (Thomaidis &Tzanakis, 2007).

Σύμφωνα με τους Tzanakis & Thomaidis (2011), τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται παγκοσμίως ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι Tzanakis, Arcavi, et al. (2000) παρέχουν λίστες με τα επιχειρήματα τόσο υπέρ όσο και κατά της ενσωμάτωσης αυτής.

Ο Τζανάκης (ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ., 2009) αναφέρει:

> *Η κεντρική ιδέα πίσω από όλα τα επιχειρήματα είναι η επιστημολογική θέση ότι Μαθηματικά δεν είναι μόνο τα* ***αποτέλεσμα*** *της διαδικασίας ενασχόλησης, μάθησης και ανάπτυξης θεωριών απαγωγικά δομημένων και τον χειρισμό μιας εξειδικευμένης συμβολικής γλώσσας, αυξανόμενων συσσωρευτικά και παρουσιασμένων στην* ***τελική*** *τους μορφή, αλλά και αυτές καθ' εαυτές οι* ***διαδικασίες*** *που οδηγούν σε αυτά και οι οποίες περιλαμβάνουν ενέργειες για την απόδοση νοήματος στις λογικές κατασκευές, αναστοχαστικές διαδικασίες που οδηγούν στην κατασκευή νοήματος συνδέοντας νέες με ήδη υπάρχουσες γνώσεις ή/και διευρύνοντας,*

εμβαθύνοντας και επεκτείνοντας ήδη υπάρχοντα εννοιολογικά πλαίσια. Η συγκεκριμένη αυτή θέση έχει σαφείς διδακτικές προεκτάσεις: Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών δεν μπορεί να περιορίζεται στην παρουσίαση και εκμάθηση απαγωγικά οργανωμένων ***τελικών*** *προϊόντων της μαθηματικής κοινότητας, αλλά πρέπει να παρέχει δυνατότητες στον διδασκόμενο να αποκτήσει εμπειρίες μαθηματικής* ***δημιουργίας, κάνοντας*** *Μαθηματικά ο ίδιος ανάλογα με το επίπεδο γνώσεων και νοητικής ανάπτυξης στην οποία βρίσκεται. Σ' αυτή την προοπτική, η Ιστορία των Μαθηματικών (ΙΜ) αποτελεί ένα φυσιολογικό πλαίσιο (που δεν είναι το μοναδικό!) για να ειδωθούν τα Μαθηματικά* ***εν τω γενάσθαι****, οδηγώντας έτσι σε μια σφαιρικότερη αντίληψη γι' αυτά, τόσο ως νοητική κατασκευή με συγκεκριμένο πληροφοριακό περιεχόμενο και εργαλειακή αξία, όσο και ως* ***ανθρώπινη*** *δραστηριότητα με όλες τις ατέλειες, αδυναμίες αλλά και τη συναρπαστικότητα που αυτό συνεπάγεται.*

Οι Tzanakis, Arcavi, et al. (2000) ομαδοποιούν τα υπερασπιστικά επιχειρήματα γύρω από πέντε βασικές περιοχές: α) της μάθησης των μαθηματικών, β) της ανάπτυξης απόψεων για τη φύση των μαθηματικών και των μαθηματικών δραστηριοτήτων, γ) του διδακτικού υπόβαθρου των δασκάλων και του παιδαγωγικού τους ρεπερτορίου, δ) της συναισθηματικής προδιάθεσης προς τα μαθηματικά, και ε) της αναγνώρισης των μαθηματικών ως ενός πολιτιστικού και ανθρώπινου εγχειρήματος.

Μερικά χρόνια αργότερα ο Jankvist (2009), μελετώντας τη βιβλιογραφία, παρατηρεί μια θολότητα στη συζήτηση για τα «πώς», τους τρόπους δηλαδή, και τα «γιατί», δηλαδή τους σκοπούς, να χρησιμοποιήσει κανείς την ιστορία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Επισημαίνει ότι κατά την άποψή του η προϋπάρχουσα κατηγοριοποίηση (κυρίως των Tzanakis, Arcavi et al., 2000) δε διαχωρίζει αυστηρά τα «πώς» από τα «γιατί», ενώ κάποιες φορές οι παραπάνω ερευνητές χρησιμοποιούν τους τρόπους για να περιγράψουν τους σκοπούς και αντίστροφα. Βέβαια, το γεγονός αυτό το δικαιολογεί, λέγοντας ότι, θεωρητικά, ένα «πώς» συχνά επηρεάζει ή προϋποθέτει ένα «γιατί». Επιμένει, όμως, σε αυτόν τον αυστηρό διαχωρισμό, καθώς θεωρεί ότι έτσι, νέα γνώση μπορεί να αποκτηθεί, ενώ και οι διασυνδέσεις μεταξύ των «πώς» και των «γιατί» μπορούν να γίνουν ξεκάθαρες. Αν γνωρίζει ο/η δάσκαλος/α αυτές τις διασυνδέσεις, μπορεί να αναλύει καλύτερα το διδακτικό υλικό, και να αποφασίζει για το περιεχόμενό του, καθώς και τον τρόπο οργάνωσης και παρουσίασής του. Επίσης, θεωρεί ότι η λίστα των Tzanakis, Arcavi et al. (2000) δεν περιλαμβάνει όλα τα πιθανά επιχειρήματα για τη χρήση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Έτσι, προτείνει, χωρίς να τον θεωρεί απόλυτο, το διαχωρισμό των επιχειρημάτων που τάσσονται υπέρ της εν λόγω ενσωμάτωσης σε δύο κατηγορίες· σε αυτά που αναφέρονται στη χρήση της ιστορίας: α) ως εργαλείο και β) ως στόχο. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τα επιχειρήματα που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές/τριες μαθαίνουν μαθηματικά, ενώ η δεύτερη εκείνα που επικεντρώνονται στις αναπτυξιακές και εξελικτικές πλευρές των μαθηματικών, ως επιστημονικού κλάδου.

Ένα τυπικό επιχείρημα που παρέχει ο Jankvist (2009) για τη χρήση της ιστορίας ως εργαλείου, είναι ότι αυτή δύναται να αποτελέσει έναν παράγοντα κινητοποίησης του/της μαθητή/τριας, αφού μπορεί να προκαλέσει και να διατηρήσει αμείωτο το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό του/της για τα μαθηματικά, δίνοντας παράλληλα σε αυτά έναν πιο ανθρώπινο χαρακτήρα. Ένα άλλο επιχείρημα δίνει στην ιστορία το ρόλο του γνωστικού εργαλείου για τη μάθηση των μαθηματικών. Μια ειδική χρήση της ιστορίας ως γνωστικό εργαλείο είναι να αναγνωρίσει, αλλά και να ξεπεράσει τα επιστημολογικά εμπόδια, όπως αυτά παρουσιάστηκαν από τον Bachelard (βλ. παραπάνω). Ένα τρίτο και πολύ χαρακτηριστικό επιχείρημα είναι αυτό που βασίζεται στο «βιογενετικό νόμο» του Haeckel, σύμφωνα με τον οποίο η οντογένεση (η ανάπτυξη ενός οργανισμού) αποτελεί μια βραχεία επανάληψη ή ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (της εξέλιξης του αντίστοιχου γένους) (Θωμαΐδης, 2014). Μεταφέροντας κανείς το βιογενετικό νόμο στο ανθρώπινο είδος, μπορεί να αποφανθεί ότι: «Η γνωστική ανάπτυξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους». Αν μεταφερθεί η έννοια της ανακεφαλαίωσης στη μάθηση των μαθηματικών, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Για να μάθει κανείς και για να κατακτήσει τα μαθηματικά, το μυαλό του πρέπει να περάσει από τα ίδια στάδια που πέρασαν τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους». Ενώ αν μεταφερθεί στη διδασκαλία τους, μπορεί κανείς να πει ότι: «Η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να ακολουθεί κατά κάποιον τρόπο την ιστορική τους πορεία και να ενσωματώνει στοιχεία της τελευταίας» (Θωμαΐδης, 2014). Όμως, στο βιογενετικό νόμο στηρίχτηκε και η έννοια του «παραλληλισμού» (βλ. παραπάνω). Εδώ βασίζεται και το τέταρτο επιχείρημα της χρήσης της ιστορίας ως εργαλείο, σύμφωνα με το οποίο «ο ιστορικός παραλληλισμός αφορά την παρατήρηση των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίστηκαν στην ιστορία και εμφανίζονται ξανά στη σχολική τάξη». Στη χρήση της ιστορίας ως εργαλείο, γενικά, θα μπορούσε να λεχθεί ότι η ιστορία των μαθηματικών αφορά ζητήματα που σχετίζονται με το εσωτερικό των μαθηματικών (in-issues) (ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ, 2009).

Σε ό,τι αφορά τη χρήση της ιστορίας ως στόχο, στόχος μπορεί να θεωρηθεί το να δείξει ο/η δάσκαλος/α στους μαθητές ότι: α) τα μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο, β) είναι ένας επιστημονικός κλάδος που δεν προέκυψε από το πουθενά, γ) οι άνθρωποι συμμετέχουν στην εξέλιξή τους, δ) αναπτύχθηκαν από πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς στο διάβα της ιστορίας, και οι πολιτισμοί αυτοί τα διαμόρφωσαν, αλλά και διαμορφώθηκαν από αυτά, και ε) η εξέλιξή τους καθοδηγείται από εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις. Με άλλα λόγια, η ιστορία των μαθηματικών ως στόχος ασχολείται με ζητήματα που αφορούν τη φύση, το ρόλο και τη σημασία τους, τα οποία θα μπορούσαν εν συντομία να ονομαστούν «μετα-ζητήματα» (meta-issues) (ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ, 2009).

Συσχετίζοντας τις πέντε βασικές περιοχές γύρω από τις οποίες οι Tzanakis, Arcavi et al. (2000) ομαδοποιούν τα επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση με την κατηγοριοποίηση των επιχειρημάτων που προτείνει ο Jankvist (2009), καταλήγει κανείς στον παρακάτω πίνακα.

Βασικές περιοχές που προτείνουν οι Tzanakis, Arcavi et al. (2000)	**Κατηγοριοποίηση επιχειρημάτων Jankvist (2009)**
1. Μάθηση των μαθηματικών	Η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο
2. Ανάπτυξη απόψεων για τη φύση των μαθηματικών και των μαθηματικών δραστηριοτήτων	Η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο και ως στόχος
3. Διδακτικό υπόβαθρο των δασκάλων και του παιδαγωγικού τους ρεπερτορίου	Η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο και ως στόχος
4. Συναισθηματική προδιάθεση προς τα μαθηματικά	Η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο και ως στόχος
5. Αναγνώριση των μαθηματικών ως πολιτιστικού και ανθρώπινου εγχειρήματος	Η ιστορία χρησιμοποιείται ως στόχος

Πίνακας 2.2. Ο συσχετισμός των προτάσεων των Tzanakis, Arcavi et al. και του Jankvist για τα επιχειρήματα υπέρ της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση

Τελικά, το αν ένα επιχείρημα αφορά την ιστορία των μαθηματικών ως εργαλείο ή ως στόχο εξαρτάται από την ερμηνεία του επιχειρήματος ή/και το κίνητρο που προκαλεί αυτή την ερμηνεία.

Στο ερώτημα «Πώς μπορεί η ιστορία των μαθηματικών να ενσωματωθεί στη μαθηματική εκπαίδευση;» οι Tzanakis, Arcavi, et al. (2000) απαντούν προτείνοντας τρεις διαφορετικούς, αλλά συμπληρωματικούς τρόπους. Αυτοί σχετίζονται με: α) τη μάθηση της ιστορίας με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών, β) τη μάθηση μαθηματικών θεμάτων ακολουθώντας μια διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης εμπνευσμένη από την ιστορία, και γ) τη βαθύτερη γνώση των ίδιων των μαθηματικών, αλλά και των πολιτισμικών και κοινωνικών πλαισίων μέσα στα οποία δημιουργήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, προτείνουν τη χρήση: ιστορικών αποσπασμάτων, ερευνητικών εργασιών που βασίζονται σε ιστορικά κείμενα, πρωτογενών πηγών, φύλλων εργασίας, ιστορικών πακέτων (συλλογές υλικού που εστιάζουν σε ένα μικρό μαθηματικό θέμα και καλύπτουν 2-3 διδακτικές ώρες), λαθών-εναλλακτικών ιδεών-αλλαγής προοπτικής-αναθεώρησης άρρητων υποθέσεων-διαισθητικών επιχειρημάτων, ιστορικών προβλημάτων, μηχανικών εργαλείων, μαθηματικών δραστηριοτήτων, θεατρικών έργων, ταινιών και άλλων οπτικών μέσων, εμπειριών έξω από την τάξη και το σχολείο, και το διαδίκτυο.

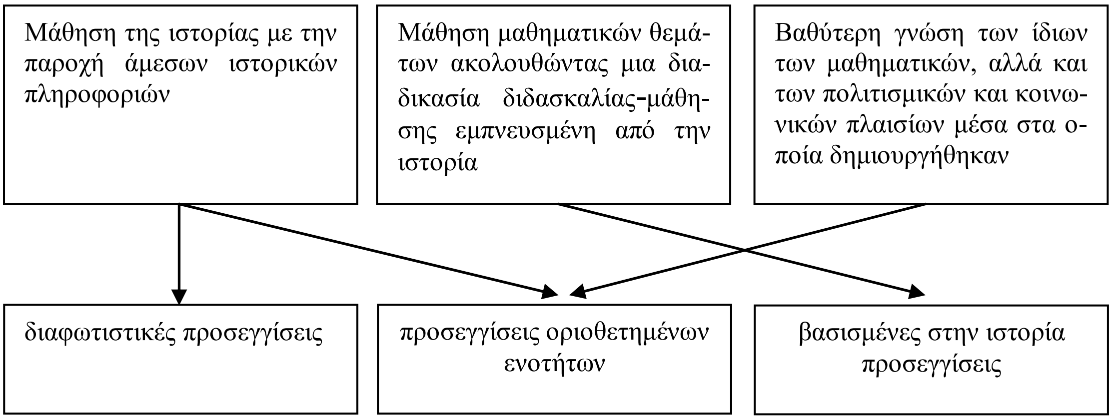
Ο Jankvist (2009) προτείνει τρεις κατηγορίες προσεγγίσεων για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών: α) τις διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination approaches), β) τις προσεγγίσεις των οριοθετημένων ενοτήτων (modules approaches), και γ) τις βασισμένες στην ιστορία προσεγγίσεις (history-based approaches).

Στις διαφωτιστικές προσεγγίσεις, η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών συμπληρώνεται με ιστορικές πληροφορίες. Αυτές οι συμπληρωματικές πληροφορίες μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους τόσο ως προς το μέγεθος όσο και ως προς το σκοπό που χρησιμοποιούνται. Ο Jankvist (2009) τις χαρακτηρίζει ως το «αλατοπίπερο» της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι οριοθετημένες ενότητες είναι διδακτικές ενότητες αφιερωμένες στην ιστορία των μαθηματικών. Και αυτές μπορεί να διαφέρουν ως προς το σκοπό και το μέγεθός τους.

Οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην ιστορία είτε εμπνέονται από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών είτε στηρίζονται σε αυτή. Ασχολούνται με τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών όχι άμεσα, αλλά με έμμεσο τρόπο. Συχνά, η ιστορική εξέλιξη θέτει τη σειρά και τον τρόπο που παρουσιάζονται τα μαθηματικά θέματα.

Στη συνέχεια ο Jankvist (2009) συσχετίζει την κατηγοριοποίηση των Tzanakis, Arcavi, et al. (2000) για τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορία στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με τη δική του κατηγοριοποίηση. Καταλήγει αντιστοιχίζοντας: α) τη μάθηση της ιστορίας με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών (Tzanakis, Arcavi, et al.,2000) τόσο με τις διαφωτιστικές προσεγγίσεις όσο και με τις προσεγγίσεις των οριοθετημένων ενοτήτων (Jankvist, 2009), β) τη μάθηση μαθηματικών θεμάτων ακολουθώντας μια διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης εμπνευσμένη από την ιστορία (Tzanakis, Arcavi, et al., 2000) με τις βασισμένες στην ιστορία προσεγγίσεις (Jankvist, 2009), και γ) τη βαθύτερη γνώση των ίδιων των μαθηματικών, αλλά και των πολιτισμικών και κοινωνικών πλαισίων μέσα στα οποία δημιουργήθηκαν (Tzanakis, Arcavi, et al., 2000) με τις προσεγγίσεις των οριοθετημένων ενοτήτων (Jankvist, 2009). Οι αντιστοιχίσεις αυτές μπορούν να φανούν καλύτερα με το παρακάτω σχήμα.



Πίνακας 2.3. Αντιστοίχιση της κατηγοριοποίησης των Tzanakis, Arcavi, et al. και του Jankvist για τους τρόπους ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Ο Jankvist (2009) εκφράζει την ένστασή του για τον τρίτο τρόπο ενσωμάτωσης που προτείνουν οι Tzanakis, Arcavi, et al. (2000), λέγοντας ότι δεν πρόκειται για μια σαφή προσέγγιση. Κατά την άποψή του αφορά περισσότερο τους σκοπούς παρά τους τρόπους ενσωμάτωσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Όσον αφορά τις ενστάσεις που έχουν διατυπωθεί για την εν λόγω ενσωμάτωση, ο Τζανάκης στο έργο *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ, 2009) τις διακρίνει σε: α) επιστημολογικού-φιλοσοφικού χαρακτήρα, και β) πρακτικού-διδακτικού χαρακτήρα. Οι πρώτες περιλαμβάνουν αυτές που σχετίζονται με: i) τη φύση των μαθηματικών· «Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά», «Πρόοδος στα μαθηματικά σημαίνει η αντιμετώπιση των δύσκολων προβλημάτων να γίνεται υπόθεση ρουτίνας. Γιατί να ασχολείται κανείς με το παρελθόν;» και «Η ιστορία μπορεί να προκαλεί σύγχυση παρά να διαφωτίζει», ii) τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος· «Οι μαθητές/τριες μπορεί να έχουν αποσπασματική αίσθηση του παρελθόντος», «Πολλοί/ες μαθητές/τριες απεχθάνονται την ιστορία, επομένως και την ιστορία των μαθηματικών» και «Η ιστορία μπορεί να ευθύνεται για την καλλιέργεια πολιτισμικού σωβινισμού και στενόμυαλου εθνικισμού». Οι τελευταίες περιλαμβάνουν τις ενστάσεις που σχετίζονται με: i) το υπόβαθρο και τη στάση των διδασκόντων/ουσών, οι οποίοι/ες επικαλούνται έλλειψη διδακτικού χρόνου, διαθέσιμου διδακτικού υλικού, ειδικών ιστορικών γνώσεων και κατάλληλης επιμόρφωσης, και ii) την έλλειψη σαφών τρόπων αξιολόγησης.

Ο Jankvist (2009) διακρίνει τις παραπάνω ενστάσεις σε δύο κατηγορίες: α) σε αυτές που απορρίπτουν την ιστορία ως κάτι σημαντικό και β) σε αυτές που αναγνωρίζουν τη χρήση της ιστορίας ως επιλογή, αλλά την απορρίπτουν για άλλους λόγους. Έτσι, στην πρώτη κατηγορία εντάσσει τα επιχειρήματα: «Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά» και «Πρόοδος στα μαθηματικά σημαίνει η αντιμετώπιση των δύσκολων προβλημάτων να γίνεται υπόθεση ρουτίνας. Γιατί να ασχολείται κανείς με το παρελθόν;». Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τα εξής επιχειρήματα: «Η ιστορία μπορεί να ευθύνεται για την καλλιέργεια πολιτισμικού σωβινισμού και στενόμυαλου εθνικισμού», «Οι μαθητές/τριες μπορεί να έχουν αποσπασματική αίσθηση του παρελθόντος, γεγονός που καθιστά αδύνατη την ιστορική πλαισίωση των μαθηματικών, αφού δεν έχουν μια ευρύτερη εκπαίδευση στη γενική ιστορία», και «Υπάρχει έλλειψη διδακτικού χρόνου, διαθέσιμου διδακτικού υλικού, ειδικών ιστορικών γνώσεων, κατάλληλης επιμόρφωσης και σαφών τρόπων αξιολόγησης».

Σε ένα πρόσφατο θεωρητικό άρθρο οι Tzanakis & Thomaidis (2011) επιχειρούν να κατηγοριοποιήσουν εκ νέου τα επιχειρήματα και τα μεθοδολογικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Στόχος τους είναι να κάνουν την κατηγοριοποίηση των σκοπών (whys) και των τρόπων (hows) της ενσωμάτωσης, που αναλύθηκαν παραπάνω, με έναν λεπτότερο τρόπο, ώστε να δώσουν μια πιο σαφή ιδέα για το σκοπό, που η ιστορία των μαθηματικών θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί σε μια δεδομένη κατάσταση, και ποιοι είναι οι καταλληλότεροι τρόποι για να συμβεί αυτό. Για να προχωρήσουν στην ταξινόμησή τους λαμβάνουν υπόψη τους δύο εννοιολογικά δίπολα: α) το δίπολο: χρήση της ιστορίας ως εργαλείο - χρήση της ιστορίας ως στόχο, που προτείνει ο Jankvist (2009), και β) το δίπολο: «ιστορία» (history) - «κληρονομιά» (heritage), που προτείνει ο Grattan-Guiness. Συνδέοντας αυτά τα δύο δίπολα, μπορούν να συνεισφέρουν στην αποσαφήνιση της σχέσης τους με τη μαθηματική εκπαίδευση και να προσφέρουν ένα πιο εκλεπτυσμένο εννοιολογικό πλαίσιο για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Τα εννοιολογικά δίπολα που προαναφέρθηκαν λειτουργούν ως «μεγεθυντικοί φακοί» για την τοποθέτηση των «γιατί» και «πώς» σε κατηγορίες, ενώ οι κατηγοριοποιήσεις που προτείνουν οι Tzanakis & Thomaidis μπορούν να θεωρηθούν σε σχέση με τα άτομα στα οποία απευθύνονται (δασκάλους/ες των μαθηματικών, σχεδιαστές/στριες αναλυτικών προγραμμάτων, παραγωγούς διδακτικού υλικού, καθηγητές/τριες μαθηματικών σχολών, σχολικούς συμβούλους). Έτσι, μπορούν να προσδιορίσουν ποιες καταχωρήσεις ταιριάζουν καλύτερα σε ποιον. Βέβαια, οι δύο συγγραφείς δε διεκδικούν την απολυτότητα των κατηγοριοποιήσεών τους, ενώ είναι ανοιχτοί σε πιθανές τροποποιήσεις, αφού η έρευνά τους βρίσκεται σε εξέλιξη.

Σύμφωνα με τον Maanen (Nagaoka, et al., 2000), η κλασική μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο είναι ο μαυροπίνακας και η κιμωλία ή, τώρα πια, ο ασπροπίνακας και ο μαρκαδόρος. Όμως, στη σύγχρονη διδακτική πρακτική κυριαρχεί και η τεχνολογία. Ωστόσο, αυτή δεν καταφέρνει να προσελκύσει το ενδιαφέρον όλων των μαθητών/τριών. Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και τη μάθησή τους μπορεί να υποστηριχθεί και από άλλα, μη τυπικά, μη συνηθισμένα, μη παραδοσιακά μέσα, τα οποία έχουν ήδη αναφερθεί παραπάνω. Αυτά μπορούν να ωφελήσουν τους μαθητές όλων των ηλικιών και όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης, καθώς η ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία μπορεί να ικανοποιήσει τις γνωστικές τους ανάγκες, τις οποίες δεν καταφέρνει να καλύψει το παρόν εκπαιδευτικό σύστημα. Επιπλέον, όσον αφορά το θέμα της αξιολόγησης των μαθητών/τριών, τόσο η ιστορία των μαθηματικών όσο και η χρήση μη τυπικών μέσων στη διδασκαλία και μάθησή τους μπορούν να διαμορφώσουν ένα πιο πλούσιο, πιο ικανοποιητικό και λιγότερο αγχωτικό, σε σχέση με το σημερινό, περιβάλλον αξιολόγησης, το οποίο μπορεί να αναδείξει τις ικανότητες και τα ταλέντα των παιδιών. Η μαθηματική δραματοποίηση, η χρήση (γεωμετρικών) οργάνων στις δημιουργικές τέχνες, και η παρουσίαση της προσωπικής δημιουργίας σε συνομηλίκους ή σε ένα ευρύτερο κοινό αποτελούν ευκαιρίες για μια μη τυπική αξιολόγηση.

Η Bartolini Bussi (Nagaoka, et al., 2000) αναφέρει ότι ένας τρόπος για να εισαχθεί η ιστορία των μαθηματικών στη σχολική τάξη είναι μέσω της έρευνας αντιγράφων αρχαίων εργαλείων και τεχνουργημάτων. Τα εργαλεία αυτά βοηθούν τους/τις μαθητές/τριες να συνειδητοποιήσουν την κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, και ευνοούν τη δημιουργία μιας εμπειρικής βάσης για τη μαθηματική απόδειξη. Άλλωστε, τα εν λόγω εργαλεία για αυτόν το σκοπό επινοήθηκαν: για να καταστήσουν δυνατή την απεικόνιση μαθηματικών ιδεών και αποδείξεων. Όμως, η έρευνα των αντιγράφων των αρχαίων εργαλείων, που αναφέρθηκε παραπάνω, δεν περιορίζεται στην οπτική επαφή μόνο, αλλά επεκτείνεται και στην απτική αντίληψη. Οι μαθητές δεν κοιτούν απλώς τα εργαλεία, τα χειρίζονται κιόλας. Αυτή η απτική εμπειρία όχι μόνο έχει τη δυναμική να κινητοποιεί τους μαθητές, αλλά αποτελεί και σημαντικό κομμάτι της γνωστικής θεμελίωσης της μαθηματικής δραστηριότητας. Η απτική διάσταση προσθέτει κάτι ειδικό στην ιστορική διάσταση των δραστηριοτήτων. Η ίδια ερευνήτρια τονίζει ότι όλα σχεδόν τα εργαλεία της αρχαιότητας κρύβουν μαθηματικά στο εσωτερικό τους, τα οποία γίνονται αντιληπτά μέσω μιας προσεκτικής και στοχευμένης επιστημολογικής ανάλυσης. Μεταξύ αυτών των εργαλείων συγκαταλέγονται και οι διαφορετικοί τύποι άβακα (ο βαβυλωνιακός, ο ελληνικός, ο κινέζικος, ο ιαπωνικός, ο ρωσικός). Όπως αναφέρει, ο άβακας είναι ένα εργαλείο που εποπτεύει τη διαδικασία της μέτρησης, και σύμφωνα με τον Brian Rotman, ο οποίος προσφέρει μια ενδιαφέρουσα επιστημολογική ανάλυση για τον άβακα, η μεταφορά από τον άβακα στο χαρτί σημαίνει μετακίνηση από ένα μέσο κινήσεων των χεριών σε ένα γραφικό μέσο, όπου μόνιμα σημεία, τα οποία προέρχονται από τις κινήσεις αυτές, υπόκεινται σε μια σύνταξη ανεξάρτητη από κάθε φυσική ερμηνεία.

2.7. Ο κινέζικος άβακας ως εργαλείο για την κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Ένα όργανο, το οποίο δύναται να εισαγάγει την ιστορία των μαθηματικών στη δραστηριότητα της τάξης, είναι και ο κινέζικος άβακας.

Από τότε που εμφανίστηκαν με μεγάλη επιτυχία οι ηλεκτρικές υπολογιστικές μηχανές και οι ψηφιακοί ηλεκτρονικοί υπολογιστές, υπάρχει σχετικό ενδιαφέρον να ανατρέξει κανείς πίσω στις ρίζες και στην ανάπτυξη των αρχικών πρωτοτύπων των υπολογιστικών μηχανών. Ανάμεσά τους ξεχωρίζει ο κινέζικος άβακας, καθώς είναι ο παλαιότερος υπολογιστής και μάλιστα ακόμα και σήμερα σε ευρεία χρήση, η πιο απλή ολοκληρωμένη υπολογιστική μηχανή χωρίς την ανάγκη βοηθητικού ή περιφερειακού εξοπλισμού, καθώς και η πρώτη γνωστή ως τώρα υπολογιστική μηχανή, στην οποία ο άνθρωπος έκανε χρήση του πενταδικού συμβολισμού στις χάντρες του. Έχει πενταδική μορφή και δεκαδική χρήση. Επιπλέον, μπορεί να κατασκευαστεί από τα πιο απλά υλικά και με τα πιο απλά εργαλεία.

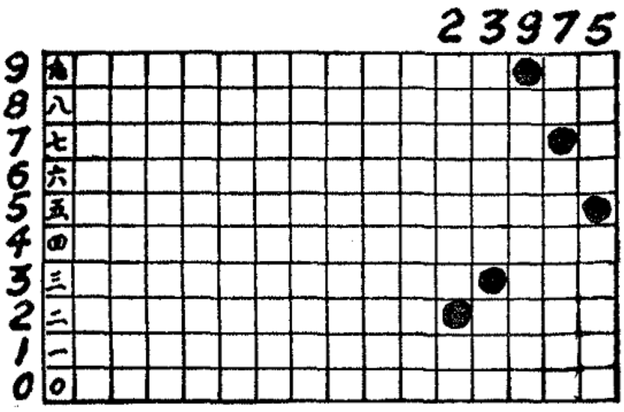
2.7.1. Ιστορική αναδρομή του κινέζικου άβακα

Ο Li (1958) αναφέρει ότι ο κινέζικος άβακας, ως συσκευή υπολογισμού, μπορεί να εντοπιστεί πίσω στο χρόνο γύρω στο 1100 π.Χ. Η ανάπτυξη του πρώτου πρωτοτύπου του κινέζικου άβακα χρονολογείται ανάμεσα στον 6^{o} και στον 3^{o} αιώνα π.Χ. Στις χώρες της ανατολικής Ασίας (Κίνα, Κορέα, Ιαπωνία) έχει γίνει απαραίτητος.

Ο κινέζικος άβακας γεννήθηκε και αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τους άλλους άβακες. Δεν υπάρχει καμία σύνδεση με τον άβακα των Πυθαγορείων, ο οποίος χρησιμοποιούσε κόκκους άμμου, το αρχαίο χάλκινο τραπέζι υπολογισμών ή τον άβακα με τις χάντρες που κινούνταν σε αυλάκια, που χρησιμοποιούσαν οι Ρωμαίοι, τον αρχαίο περουβιανό άβακα ή το γαλλικό άβακα.

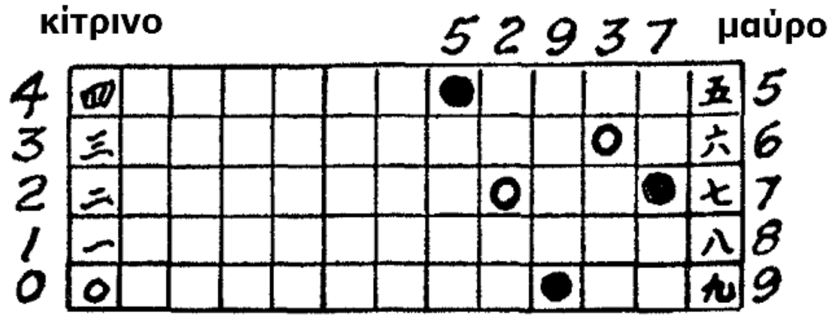
Η πρώτη υπολογιστική συσκευή ήταν φτιαγμένη από μπαμπού (μερικές φορές από ξύλο ή ελεφαντόδοντο) με ψηφία σε μορφή ράβδων, μήκους 3-6 ιντσών, και αποτελούνταν από 271 ράβδους. Ονομάζονταν «υπολογιστικές ράβδοι» ή «ράβδοι καταμέτρησης», αλλά οι αρχαίοι Κινέζοι τις χρησιμοποιούσαν και για καταμέτρηση και για υπολογισμούς. Για τις ράβδους επινοήθηκαν μέθοδοι χειρισμού για την εκτέλεση της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Η χρήση τους εξαπλώθηκε ευρέως (551 - 478 π.Χ) και σταδιακά αντικαταστάθηκε πλήρως από μια άλλη πιο αποτελεσματική συσκευή, τον άβακα, γύρω στο 1.000 μ.Χ. Η παραδοσιακή χρήση των ράβδων από μπαμπού ως ράβδοι πάνω στις οποίες κινούνται οι χάντρες του κινέζικου άβακα, έχουν την αρχή τους στις υπολογιστικές ράβδους από μπαμπού.

Την πρώτη βελτίωση στην αρχαία κινέζικη υπολογιστική συσκευή επέφερε ένας ορθογώνιος δίσκος υπολογισμού που περιείχε χάντρες υπολογισμού, φτιαγμένες από ξύλο, όπως αυτές του σημερινού κινέζικου άβακα. Ονομάστηκε «Σου Παν» (Chu Pan) ή «ο δίσκος με τις χάντρες» και αποτέλεσε το πρωτότυπο του κινέζικου άβακα. Ο ορθογώνιος δίσκος έμοιαζε με σκακιέρα. Χωριζόταν σε τετράγωνα σε δέκα οριζόντιες σειρές και όσες στήλες χρειάζονταν. Κάθε οριζόντια θέση υποδήλωνε έναν αριθμό, από το 0 έως το 9, από τη βάση προς τα πάνω. Κάθε στήλη αναπαριστούσε ένα ψηφίο, το οποίο αυξανόταν από τα δεξιά προς τα αριστερά. Τοποθετώντας χάντρες στα κατάλληλα τετράγωνα του δίσκου, αναπαρίσταντο οι αριθμοί για τις πράξεις. Η εικόνα 2.1. δείχνει τον αριθμό 23.975, όπως αναπαρίσταται στο «Σου Παν».



Εικόνα 2.1. Ο αριθμός 23.975 στον «Σου Παν»

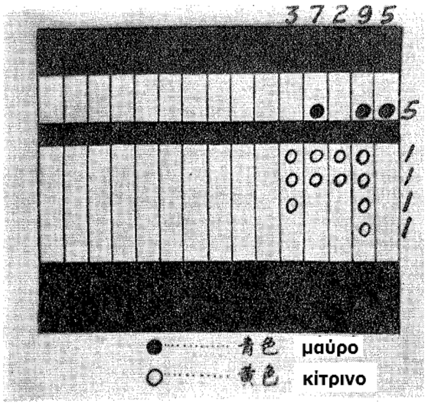
Η επόμενη βελτίωση είχε στόχο τη μείωση του μεγέθους του δίσκου κατά το ήμισυ. Επετεύχθη με τη χρήση χαντρών δύο διαφορετικών χρωμάτων. Κίτρινες χάντρες υποδήλωναν αριθμούς από το 0 έως το 4 από κάτω προς τα πάνω, και μαύρες αναπαριστούσαν τους αριθμούς από το 5 έως το 9 από πάνω προς τα κάτω, με την αξία των ψηφίων, επίσης, να αυξάνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά. Αυτό το σχήμα έδωσε τη δυνατότητα στο δίσκο να διαιρεθεί μόνο σε πέντε οριζόντιες σειρές τετραγώνων και ίδιο αριθμό κάθετων στηλών, όπως πριν. Η εικόνα 2.2. δείχνει τον αριθμό 52.937, όπως αναπαρίσταται στον μειωμένου μεγέθους «Σου Παν».



Εικόνα 2.2. Ο αριθμός 52.937 στον μειωμένου μεγέθους «Σου Παν»

Η έκταση στην οποία χρησιμοποιήθηκε ο «Σου Παν» από τους αρχαίους Κινέζους, αποκαλύπτεται σε ένα στίχο του Hsü Y' ao, ο οποίος αναφέρεται σε αυτόν ως τη συσκευή που «ελέγχει τις τέσσερις εποχές και συντονίζει τις τρεις δυνάμεις: τον ουρανό, τη γη και τον άνθρωπο». Αυτό δείχνει ότι χρησιμοποιούνταν σε ημερολογιακούς υπολογισμούς, στη λήψη γεωδαιτικών αποφάσεων και σε υπολογισμούς που σχετίζονταν με ανθρώπινες υποθέσεις.

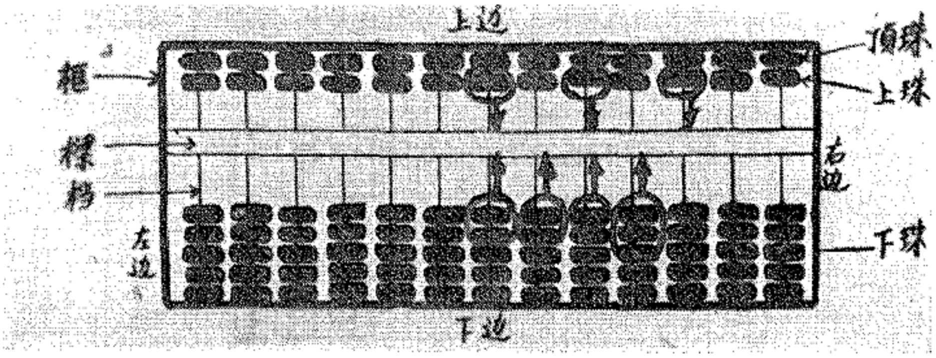
Πριν από τον 2^o αιώνα π.Χ ο «Σου Παν» είχε ήδη πάρει την ακριβή μορφή του σημερινού κινέζικου άβακα, αλλά χωρίς τις ενσωματωμένες χάντρες. Αποτελούνταν από μια ξύλινη σανίδα, με εσοχές στη βάση και στην κορυφή για την αποθήκευση των χαντρών. Επίσης, είχε ορθογώνιες κενές στήλες κι ένα οριζόντιο διαχωριστικό στο πάνω μέρος. Σε κάθε στήλη μόνο πέντε χάντρες μπορούσαν να τοποθετηθούν. Μια χάντρα πάνω από το διαχωριστικό αναπαριστούσε το 5, ενώ κάθε μία κάτω από το διαχωριστικό αντιπροσώπευε το 1, με την αξία των ψηφίων να αυξάνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά, όπως και πριν. Η εικόνα 2.3. δείχνει τον αριθμό 37.295, όπως αναπαρίσταται στον κινέζικο άβακα με τις μη ενσωματωμένες χάντρες.



Εικόνα 2.3. Ο κινέζικος άβακας με τις μη ενσωματωμένες χάντρες

Παρόλο που χρησιμοποιήθηκαν πάνω και κάτω από το διαχωριστικό χάντρες με διαφορετικό χρώμα, αυτό δεν ήταν τελείως απαραίτητο. Αυτό το μοντέλο του άβακα επικράτησε μέχρι τις αρχές του $7^{ου}$ αιώνα.

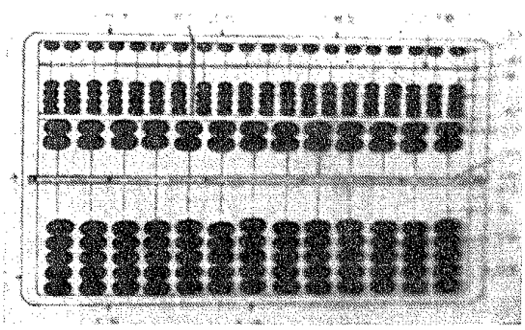
Από τις αρχές του $7^{ου}$ μέχρι τα τέλη του $10^{ου}$ αιώνα ο «Σου Παν» βελτιωνόταν συνεχώς. Τελειοποιήθηκε το πλαίσιο, ανοίχτηκε οπή στη μέση κάθε χάντρας, τοποθετήθηκαν στρογγυλές ράγες από μπαμπού για κάθε ψηφίο και προστέθηκε μια επιπλέον χάντρα τόσο πάνω όσο και κάτω από το διαχωριστικό. Έτσι, οι χάντρες ενσωματώθηκαν στις ράγες επιτρέποντας την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, ενώ οι εσοχές αποθήκευσης εξαφανίστηκαν. Από την άποψη της απλής αναπαράστασης ενός αριθμού, μία από τις δύο χάντρες στο πάνω μέρος του άβακα και μία από τις πέντε χάντρες στο πάνω μέρος φαίνονται περιττές. Ωστόσο, είναι απαραίτητες στις προηγμένες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.



Εικόνα 2.4. Ο κινέζικος άβακας, ο οποίος είναι σε χρήση για περίπου 13 αιώνες

Αυτός είναι ο κινέζικος άβακας (εικόνα 2.4.), ο οποίος βρίσκεται σε συνεχή χρήση για περίπου 1.300 χρόνια χωρίς περαιτέρω βελτιώσεις, από τον $10^{ο}$ αιώνα μέχρι πρόσφατα. Ξεπερνώντας τα όρια της Κίνας η χρήση του απλώθηκε σε όλη την Ανατολή.

Το 1956 ο Li Kai-Cheng έκανε την τελευταία βελτίωση συνδυάζοντας δύο βοηθητικούς άβακες στην κορυφή του κυρίως άβακα (εικόνα 2.5.). Για να υπολογίσει κανείς ένα άθροισμα, προσθέτοντας όρους που απαιτούν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, χρησιμοποιεί τον κυρίως άβακα για την εύρεση του τελικού αποτελέσματος, και τους βοηθητικούς άβακες για την αποθήκευση των διαδοχικών ενδιάμεσων και τελικών αποτελεσμάτων των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων.

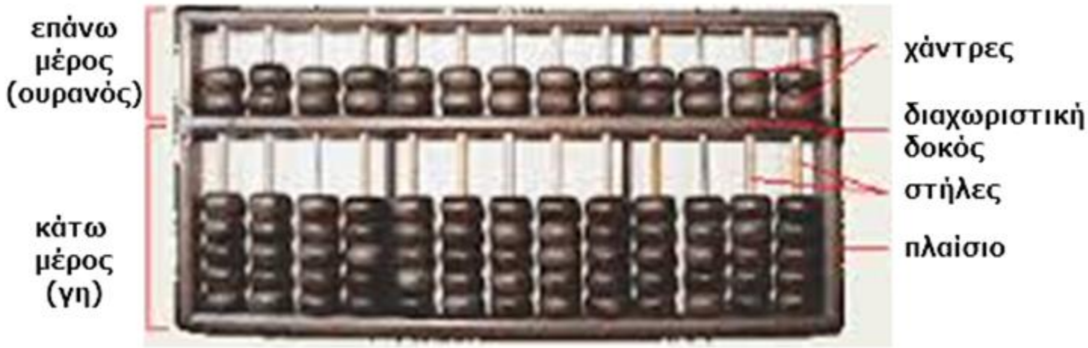


Εικόνα 2.5. Ο τελευταίος σύνθετος άβακας

2.7.2. Δομή και λειτουργία του κινέζικου άβακα

Στο βιβλίο του ο Κόρρος, (2012) αναφέρει ότι ο άβακας, που επίσης ονομάζεται πλαίσιο καταμέτρησης, γνωστός στην Κίνα ως «Σουαν Παν» [suan pan (ακριβής μετάφραση «δίσκος μέτρησης»)], αποτελείται από ένα ορθογώνιο πλαίσιο. Έχει ύψος περίπου 20cm και το μήκος του ποικίλλει ανάλογα με αυτόν που τον χειρίζεται. Σήμερα, μπορεί να δει κανείς τον άβακα να χρησιμοποιείται σε πολλές εμπορικές επιχειρήσεις, δημόσιες και ιδιωτικές. Συνήθως έχει περισσότερες από 7 ράβδους. Υπάρχουν δύο χάντρες (ή σφαίρες) σε κάθε μία από τις επάνω ράβδους και πέντε χάντρες σε κάθε μία από τις κάτω ράβδους. Οι πάνω χάντρες διαχωρίζονται από τις κάτω με μια διαχωριστική δοκό. Η ποσότητα των χαντρών σε κάθε ράβδο δε μεταβάλλεται, είτε μετράμε με τον άβακα στο εξηκονταδικό είτε μετράμε στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα. Οι χάντρες είναι συνήθως στρογγυλές και φτιαγμένες από σκληρό ξύλο.

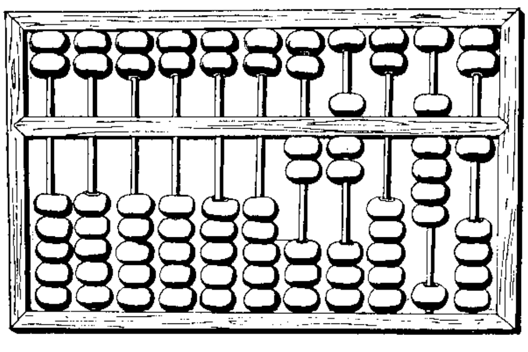
Οι χάντρες μετρούνται, όταν κινούνται πάνω ή κάτω προς την πλευρά της διαχωριστικής δοκού. Όταν κινούνται προς το μέρος της δοκού καταμετρώνται, ενώ όταν κινούνται μακριά από τη δοκό δεν προσμετρώνται (εικόνα 2.7.).



Εικόνα 2.6. Τα μέρη του κινέζικου άβακα

Ας δούμε, τώρα, πώς «διαβάζουμε» τον κινέζικο άβακα. Θα μιλήσουμε πρώτα για τις χάντρες. Υπάρχουν στον άβακα δύο είδη. Αυτές του επάνω τμήματος και αυτές του κάτω τμήματος. Οι χάντρες του κάτω τμήματος, που ονομάζονται μερικές φορές γήινες ή υδάτινες χάντρες, έχουν αξία 1. Οι άλλες του επάνω τμήματος ονομάζονται μερικές φορές ουράνιες χάντρες και έχουν αξία ίση με 5. Η δεξιά στήλη αντιπροσωπεύει τις μονάδες, η αμέσως αριστερά από αυτή τις δεκάδες κ.ο.κ. Αν, όμως, επιλέξουμε για στήλη των μονάδων κάποια εσωτερική στήλη, τότε πάλι η αμέσως αριστερή από αυτήν είναι οι δεκάδες, αλλά η δεξιά της είναι τα δέκατα, η επόμενη δεξιά τα εκατοστά κ.ο.κ. Στον άβακα υπάρχουν πάντα 2 ουράνιες σφαίρες και 5 γήινες σε κάθε στήλη. Στο γιαπωνέζικο άβακα (παραλλαγή του κινέζικου) βρίσκουμε 1 ουράνια και 4 γήινες σφαίρες. Αν το καλοσκεφτεί κανείς, ο γιαπωνέζικος άβακας δεν έχει έλλειψη σφαιρών, αλλά έχει ακριβώς τον αριθμό των σφαιρών που απαιτούνται για το δεκαδικό σύστημα. Τότε προς τι η μία παραπάνω σφαίρα σε κάθε τμήμα του κινέζικου άβακα; Πιθανόν, λένε κάποιοι, να βοηθούσε στη χρήση κάποιου εξηκονταδικού συστήματος. Το πιθανότερο, όμως, είναι να έχουν δίκαιο εκείνοι που υποστηρίζουν ότι οι επιπλέον σφαίρες ήταν απαραίτητες για την πραγματοποίηση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με δύο παλιές τεχνικές, που ονομάζονταν «Η τεχνική της επιπλέον σφαίρας» και «Η τεχνική της εκκρεμούσης σφαίρας».

Στο τέλος μιας ενέργειας - πράξης στον άβακα, ποτέ δε θα δούμε ενεργοποιημένες 5 επίγειες σφαίρες στην ίδια στήλη. Αν συμβεί αυτό, αμέσως επιστρέφουν στην αρχική τους θέση και ενεργοποιείται μια ουράνια σφαίρα. Το ίδιο συμβαίνει και αν ενεργοποιηθούν δύο ουράνιες σφαίρες στην ίδια στήλη. Αμέσως επιστρέφουν στην αρχική τους θέση και ενεργοποιείται μια επίγεια από την επόμενη αριστερά στήλη. Υπενθυμίζεται ότι μια σφαίρα θεωρείται ενεργοποιημένη αν βρίσκεται προς τη διαχωριστική δοκό (εικόνα 2.7.).



Εικόνα 2.7. Αναπαράσταση του αριθμού 27.091

2.7.3. Τα πλεονεκτήματα του κινέζικου άβακα

Όπως αναφέρουν οι Zhou & Peverly (2005), ο κινέζικος άβακας παρουσιάζει τρία χαρακτηριστικά: α) προσφέρει μια ημι-συγκεκριμένη αναπαράσταση του αριθμού, β) τα παιδιά μπορούν να τον χειρίζονται και γ) μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν μια νοερή εικόνα του.

Παρόλο που ο χειρισμός του κινέζικου άβακα μπορεί να είναι πολύπλοκος (διαθέτει δύο σφαίρες με αξία 5 και πέντε σφαίρες με αξία 1 σε κάθε θέση ψηφίου), αποτελεί μια εξαιρετική συσκευή μνήμης και υπολογισμού αριθμών. Αυτό συμβαίνει, επειδή τα αρχικά και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα είναι πάντα παρόντα οπτικά. Με την απόκτηση εμπειρίας, μαθαίνοντας πώς να χρησιμοποιούν τον άβακα, ο νοερός υπολογισμός βελτιώνεται, καθώς τα παιδιά μαθαίνουν να βασίζονται στον εσωτερικευμένο νοητό άβακα, ο οποίος τα βοηθά να δημιουργούν νοητές αναπαραστάσεις των αριθμών. Η κατανόησης της θέσης αξίας, επίσης βελτιώνεται με τις ερωτήσεις που απευθύνει ο/η δάσκαλος/α, καθώς οι μαθητές/τριες εκτελούν πράξεις στον άβακα. Επιπλέον, οι Tsiapou & Nikolantonakis (2013) αναφέρουν ότι, σύμφωνα με την Poisard, το γεγονός ότι μπορεί κανείς να σχηματίσει αριθμούς μέχρι το δεκαπέντε σε κάθε στήλη του άβακα, και να κάνει ανταλλαγές μεταξύ των στηλών με τα δάχτυλά του, ενισχύει την κατανόηση της έννοιας του κρατουμένου.

Ο Stigler (1984) επισημαίνει ότι η μελέτη της νοητικής αναπαράστασης, που χρησιμοποιούν οι Κινέζοι/ες μαθητές/τριες στους νοερούς υπολογισμούς, υπογραμμίζει έναν από τους τρόπους με τους οποίους ο πολιτισμός μπορεί να επηρεάσει τις γνωστικές διεργασίες. Η πολιτισμικά συγκεκριμένη εκπαίδευση μπορεί όχι μόνο να αλλάξει τις στρατηγικές που φέρει ένα παιδί, ώστε να αντιμετωπίσει ένα γνωστικό πρόβλημα, αλλά, επίσης, αλλάζει και το περιεχόμενο της σκέψης του παιδιού. Ίσως, τα πιο ισχυρά εργαλεία, που μπορεί να παρέχει ένας πολιτισμός στο παιδί που αναπτύσσεται, παίρνουν τη μορφή εξειδικευμένων νοητικών αναπαραστάσεων, που θα διαβιβαστούν μέσω της εκπαίδευσης.

2.7.4. Τα μειονεκτήματα του κινέζικου άβακα

Ο Yuen (1974) αναφέρει ότι για να γίνει κάποιος επιδέξιος χειριστής του άβακα απαιτείται πολύ πρακτική εξάσκηση, πολλή απομνημόνευση και εκπληκτικά λίγη ή καθόλου μαθηματική κατανόηση. Χρειάζεται να μάθει απέξω εκατοντάδες κανόνες χειρισμού, που ουσιαστικά καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις που μπορούν να εμφανιστούν κατά τη διαδικασία των υπολογισμών. Δεν υπάρχει κάτι μυστηριώδες στη λειτουργία του άβακα· όλοι οι κανόνες δεν είναι τίποτα άλλο παρά εκτέλεση καλά καθορισμένων μαθηματικά βημάτων. Επιπλέον, ως εργαλείο υπολογισμών, ο άβακας έχει τη σοβαρή αδυναμία ότι δεν παράγει ένα αντίγραφο του αποτελέσματος και δεν μπορεί να καταγράψει τα ενδιάμεσα στάδια ενός υπολογισμού. Επομένως, για να ελέγξει κανείς την ορθότητα του αποτελέσματος καλείται να επαναλάβει την όλη διαδικασία. Δεδομένης, όμως, της επαρκούς ανθρώπινης ευφυΐας, μπορεί κανείς να ξεπεράσει τις ανεπάρκειες αυτής της πρωτόγονης συσκευής.

2.7.5. Σχετική έρευνα

Κατά το σχολικό έτος 2010-2011, οι Tsiapou & Nikolantonakis (2013) διεξήγαγαν μια έρευνα σε 18 μαθητές/τριες μιας Στ΄ τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου της Θεσσαλονίκης. Σκοπός τους ήταν να χρησιμοποιήσουν την ιστορία των μαθηματικών μέσω της αξιοποίησης του κινέζικου άβακα, προκειμένου να αναπτύξουν την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου στους/στις μαθητές/τριες. Διερεύνησαν, λοιπόν: α) αν οι μαθητές/τριες της Στ΄ τάξης αναγνωρίζουν τη δομή του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, β) αν μπορούν να εξηγήσουν προφορικά την έννοια του κρατουμένου και τον τρόπο που το χρησιμοποιούν κατά την εκτέλεση γραπτών υπολογισμών, και γ) κατά πόσο θα μπορούσε μια διδακτική παρέμβαση με τη χρήση του άβακα να βοηθήσει τα παιδιά, ώστε να διαχειριστούν πιθανές δυσκολίες και παρανοήσεις τους. Επίσης, θέλησαν να επισημάνουν τη ιστορική διάσταση του άβακα και να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία με ποικίλες προσεγγίσεις, στις οποίες οι μαθητές/τριες να εμπλέκονται ενεργά. Στην έρευνά τους οι δύο ερευνητές υιοθέτησαν τις προτάσεις της Poisard για τους υπολογισμούς με τον κινέζικο άβακα. Ωστόσο, πρόσθεσαν και δικά τους στοιχεία, όπως δραστηριότητες ανασύνθεσης αριθμών και δραστηριότητες για τους δεκαδικούς αριθμούς.

Για τους δύο πρώτους στόχους χορηγήθηκαν στους/στις μαθητές/τριες δύο ερωτηματολόγια πριν τη διδακτική παρέμβαση. Το πρώτο αποτελούνταν από έξι ερωτήσεις κλειστού τύπου και μια ερώτηση που απαιτούσε προφορική εξήγηση. Παρόμοιες ερωτήσεις περιλάμβανε και το αντίστοιχο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση. Στα ερωτηματολόγια περιλαμβάνονταν ερωτήσεις τόσο για ακέραιους όσο και για δεκαδικούς αριθμούς. Οι ερωτήσεις για τους ακέραιους αφορούσαν την ονομασία των θέσεων αξίας, την εκτενή μορφή τους, την ανασύνθεση, τη στρογγυλοποίηση και την αφαίρεση μεταξύ τους. Οι ερωτήσεις για τους δεκαδικούς περιλάμβαναν το πέρασμα από τη λεκτική τους μορφή στην ψηφιακή, αριθμητικά μοτίβα, την πρόσθεση και την αφαίρεσή τους. Το δεύτερο ερωτηματολόγιο περιλάμβανε τέσσερις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου παρμένες από την έρευνα της Poisard. Μια από αυτές ήταν η εξής: «Τι είναι το κρατούμενο;». Για τον τελευταίο στόχο εφαρμόστηκε μια διδακτική παρέμβαση διάρκειας πέντε μηνών, εμπνευσμένη από την προσέγγιση των οριθετημένων ενοτήτων (modules approach) του Jankvist. Η διδακτική ακολουθία, που σχεδιάστηκε, χωρίστηκε σε τρεις ενότητες (ακέραιους αριθμούς, δεκαδικούς αριθμούς, πράξεις) και η καθεμία σε υποενότητες, πλαισιωμένες με τους στόχους της και με δραστηριότητες επί του άβακα. Τα αποτελέσματα καταγράφηκαν και κάποια μαθήματα βιντεοσκοπήθηκαν για ανατροφοδότηση. Οι εισαγωγικές και οι τελευταίες δραστηριότητες είχαν ως σκοπό τη χρησιμοποίηση της ιστορίας κυρίως ως στόχου.

Τα αποτελέσματα των ερωτηματολογίων πριν την παρέμβαση έδειξαν ότι οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες έχουν μια επιφανειακή κατανόηση της δομής των αριθμών. Πέρα από άλλες δυσκολίες, δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν τους αριθμούς που βρίσκονταν πίσω από μη κανονικούς διαχωρισμούς. Επίσης, οι μισοί/ες απέτυχαν να λύσουν μια αφαίρεση μεταξύ τετραψήφιων αριθμών, όπου απαιτούνταν δανεισμός διαμέσου μηδενικών, αφού η δομή των αριθμών δεν ήταν κατανοητή. Επιπλέον, δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν την έννοια του κρατουμένου, καθώς το θεωρούσαν ως ένα βοήθημα για τις πράξεις με αόριστη φύση. Ωστόσο, τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση έδειξαν μια καλύτερη εννοιολογική κατανόηση από την πλευρά των μαθητών/τριών. Επηρεασμένοι/ες από τις δραστηριότητες με τον άβακα, κατάφεραν να ανασυνθέσουν μη κανονικές αναπαραστάσεις αριθμών σε κανονικούς αριθμούς. Οι μαθητές/τριες, που πριν την παρέμβαση απέτυχαν να διαχειριστούν το κρατούμενο, μετά την παρέμβαση εφάρμοσαν με επιτυχία τον τύπο αφαίρεσης των «εσωτερικών μεταφορών», η οποία απαιτεί την αντίστροφη διαδικασία της ανάλυσης αριθμών με μη κανονικό τρόπο. Η διαδικασία της σύνθεσης και ανάλυσης αριθμών στον άβακα και η σύνδεσή τους με τον αλγόριθμο της πρόσθεσης και της αφαίρεσης φαίνεται να άλλαξε την αντίληψη των μαθητών/τριών για την έννοια του κρατουμένου. Την εξήγησαν πια ως μια ανταλλαγή μεταξύ των τάξεων, την οποία περιέγραψαν είτε λεκτικά είτε μέσω παραδειγμάτων ανάλυσης και σύνθεσης αριθμών, προσεγγίζοντας ως ένα βαθμό τη γενικότητα του ορισμού που έδωσε η Poisard για το κρατούμενο.

Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι οποίοι πιστεύουν ότι με την παρέμβασή τους οι λόγοι για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση επιτεύχθηκαν σε ικανοποιητικό βαθμό, οι μαθητές/τριες που εργάστηκαν με τον κινέζικο άβακα για την κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου, βελτίωσαν την κατανόησή τους σε αυτόν τον τομέα σε μια εμπειρική, στην κυριολεξία, βάση, αφού χειρίζονταν τον άβακα με τα χέρια τους. Μέσω της ενασχόλησής τους με τον άβακα στις δραστηριότητες εκτίμησαν το γεγονός ότι τα μαθηματικά του παρελθόντος οδηγούν σε αποτελέσματα που χαρακτηρίζονται από λογική πληρότητα. Έτσι, επιβεβαιώθηκε και ο ισχυρισμός της Poisard ότι στην απτική εμπειρία, που προσφέρουν τα μηχανικά εργαλεία, μπορεί κανείς να βρει τα θεμέλια της μαθηματικής δραστηριότητας.

2.8. Η εργαλειακή προσέγγιση του Rabardel

Ιστορικά το ανθρώπινο είδος έχει κατασκευάσει και έχει χρησιμοποιήσει εργαλεία για να φέρει εις πέρας διάφορες εργασίες (Maschietto, 2015). Χαρακτηριστικό, λοιπόν, στοιχείο της ανθρώπινης δραστηριότητας αποτελεί η κατασκευή και η χρήση πολύπλοκων, κυρίως, τεχνουργημάτων. Ακόμα πιο χαρακτηριστική, όμως, φαίνεται να είναι η δυνατότητα της συνεισφοράς τέτοιων τεχνουργημάτων πέρα από το πρακτικό επίπεδο –για την επίλυση προβλημάτων– και σε άλλους τομείς, όπως για παράδειγμα στη γνωστική ανάπτυξη.

Η έννοια του τεχνουργήματος είναι πολύ γενική και περιλαμβάνει διάφορα είδη πραγμάτων που ανέπτυξε ο άνθρωπος με την πάροδο του χρόνου: ήχους και χειρονομίες, διάφορα σκεύη και εφαρμογές, την προφορική και τη γραπτή μορφή της γλώσσας –η οποία κατέχει κεντρική θέση μεταξύ των τεχνουργημάτων που κατασκεύασε ο άνθρωπος–, κείμενα και βιβλία, μουσικά και επιστημονικά όργανα, καθώς και τα εργαλεία τεχνολογίας πληροφορικής και επικοινωνίας. Αλλά και στην εκπαίδευση η συνεισφορά των τεχνουργημάτων δεν είναι καινούρια, καθώς τα βιβλία, ο πίνακας, το χαρτί και το μολύβι χρησιμοποιούνται εδώ και πολλά χρόνια. Επειδή η σχέση μεταξύ τεχνουργημάτων και γνώσης είναι αρκετά πολύπλοκη, απαιτείται μια όσο το δυνατόν προσεκτικότερη ανάλυση (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Ο Rabardel είναι εκείνος που ανέπτυξε την εργαλειακή προσέγγιση αρχικά στον τομέα της γνωστικής εργονομίας, η οποία στη συνέχεια επεκτάθηκε στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η γνωστική εργονομία αναλύει τις γνωστικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στη σύγχρονη βιομηχανία. Έχει εστιάσει στο σχεδιασμό της αλληλεπίδρασης μεταξύ ανθρώπου-μηχανής και ανθρώπου-ηλεκτρονικού υπολογιστή, θέτοντας στο επίκεντρο το χρήστη (Bartolini Bussi et al., 2012). Κινούμενος, λοιπόν, στο χώρο της γνωστικής εργονομίας, ο Rabardel ερεύνησε την αλληλεπίδραση μεταξύ του ανθρώπου και των τεχνολογικών εργαλείων, έχοντας ως σημείο εκκίνησης τις μελέτες του Vygotsky (Fiorani, 2013). Μια τέτοια προσέγγιση παρέχει ένα ισχυρό πλαίσιο για να περιγράψει κανείς καταστάσεις, στις οποίες εμπλέκεται η χρήση εργαλείων, και κυρίως για να εξηγήσει τις διαφορές που ενδέχεται να εμφανιστούν: α) στη χρήση των εργαλείων από τους/τις μαθητές/τριες και β) στη σχέση που μπορεί να κατασκευάσουν μεταξύ της χρήσης του εργαλείου και της μαθηματικής γνώσης. Ο Rabardel βασίζει την εργαλειακή του προσέγγιση στη διάκριση μεταξύ του τεχνουργήματος (artifact) και του εργαλείου (instrument) ή αλλιώς στο διαχωρισμό μεταξύ του γυμνού αντικειμένου και των τρόπων χρήσης του για την πραγματοποίηση μιας εργασίας (Mariotti, 2006).

Για εκείνον το τεχνούργημα είναι το υλικό ή το συμβολικό αντικείμενο αυτό καθεαυτό, το οποίο έχει δημιουργηθεί από τον άνθρωπο για έναν συγκεκριμένο σκοπό, ως απάντηση σε μια ειδική ανάγκη (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Συνεπώς περικλείει κάποια γνώση στο εσωτερικό του (Fiorani, 2013). Πρόκειται για την ίδια γνώση που το καθιστά ικανό να ολοκληρώνει εργασίες ή να επιλύει προβλήματα για τα οποία σχεδιάστηκε (Mariotti, 2012). Για παράδειγμα, ο υπολογιστής τσέπης είναι ένα τεχνούργημα, όπως επίσης και ένας αλγόριθμος αποτελεί τεχνούργημα. Επομένως, το τεχνούργημα είναι ένα αντικείμενο, το οποίο διατίθεται στο χρήστη για να το χρησιμοποιήσει σε ένα συγκεκριμένο είδος δραστηριότητας. Αλλά μπορεί να είναι και άνευ σημασίας για αυτόν, όσο δε γνωρίζει τι είδους εργασίες μπορεί αυτό να υποστηρίξει και με ποιους τρόπους (Maschietto & Trouche, 2010).

Αντίθετα, το εργαλείο συνιστά μια μικτή ή αλλιώς υβριδική οντότητα, η οποία περιλαμβάνει και τεχνουργηματικού τύπου συστατικά και σχηματικά συστατικά. Τα τελευταία ονομάζονται σχήματα χρήσης (utilization schemes). Επομένως, η μικτή αυτή οντότητα δημιουργείται τόσο από το υποκείμενο όσο και από το αντικείμενο. Σύμφωνα με τις Bartolini Bussi & Boni (2009), τα σχήματα χρήσης είναι εσωτερικές αναπαραστάσεις και μπορεί να τις συμπεράνει κανείς μέσω εξωτερικών σημείων (λέξεων, ζωγραφιών, χειρονομιών, κ.ά), ενώ η Maschietto (2015) τα χαρακτηρίζει σταθερά και δομημένα στοιχεία των δραστηριοτήτων και των ενεργειών του χρήστη. Τα σχήματα χρήσης αναπτύσσονται σταδιακά από το υποκείμενο, όταν χρησιμοποιεί κάποιο τεχνούργημα για την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης εργασίας (Bartolini Bussi, 2011). Επίσης, όπως αναφέρει η Maschietto (2015), σύμφωνα με τους Beguin και Rabardel, τα σχήματα χρήσης έχουν μια προσωπική και μια κοινωνική διάσταση· μπορεί να προκύπτουν από μια προσωπική-ιδιωτική κατασκευή του χρήστη ή/και να είναι το αποτέλεσμα της οικειοποίησης των (κοινωνικών) σχημάτων που διαμορφώνονται από την κοινότητα. Οι υπόλοιποι χρήστες, όπως επίσης και οι σχεδιαστές του τεχνουργήματος, συμβάλλουν στην ανάπτυξη του σχήματος (Bartolini Bussi & Maschietto, 2008). Άρα, το εργαλείο αποτελεί την κατασκευή ενός ατόμου, έχει έναν ψυχολογικό χαρακτήρα και συνδέεται άμεσα με το πλαίσιο μέσα από το οποίο προέρχεται και στο οποίο αναπτύσσεται. Έτσι, θα μπορούσε κανείς να αποφανθεί ότι το εργαλείο είναι κάτι παραπάνω από το τεχνούργημα. Σύμφωνα με τον Rabardel, γίνεται λόγος για ένα εργαλείο, μόνον όταν υπάρχει μια ουσιαστική σχέση μεταξύ του τεχνουργήματος και του χρήστη για ένα συγκεκριμένο είδος εργασίας, με το οποίο προτίθεται να ασχοληθεί. Η έννοια του εργαλείου θα μπορούσε να αποδοθεί με τη μορφή μιας σχέσης ως εξής:

Εργαλείο = τεχνούργημα + σχήμα χρήσης για μια κατηγορία εργασιών (Drijvers & Trouce, 2008).

Οι Maschietto & Trouce (2010) συνοψίζουν τα παραπάνω, λέγοντας ότι το εργαλείο είναι αυτό που το υποκείμενο κατασκευάζει από το τεχνούργημα. Ψυχολογικό ή υλικό, ένα εργαλείο είναι πάνω από όλα υποκειμενικό. Συνδέεται με τη δραστηριότητα του υποκειμένου και αναπτύσσεται έναντι ενός δεδομένου προβλήματος που πρέπει να επιλυθεί.

Η διαδικασία δημιουργίας και ανάπτυξης ενός εργαλείου για την εκτέλεση μιας εργασίας είναι μακρά και πολύπλοκη. Επομένως απαιτεί χρόνο και προσπάθεια τόσο από τους/τις μαθητές/τριες όσο και από το/τη δάσκαλο/α (Maschietto & Trouce 2010). Ο Rabardel την ονομάζει εργαλειακή γένεση (instrumental genesis). Με άλλα λόγια, εργαλειακή γένεση είναι η διαδικασία με την οποία ένα τεχνούργημα γίνεται μέρος ενός εργαλείου στα χέρια του χρήστη (στην περίπτωσή μας του/της μαθητή/τριας) (Drijvers et al., 2010). Η εργαλειακή γένεση συνδέεται με τα χαρακτηριστικά του τεχνουργήματος και τη δραστηριότητα του υποκειμένου, δηλαδή τη γνώση του και τις προηγούμενες μεθόδους εργασίας του.

Όπως αναφέρουν οι Maschietto & Trouce (2010), τη σπουδαιότητα μιας κατάστασης για τη μάθηση των μαθηματικών την έχει επισημάνει ο Brousseau, ο οποίος τόνισε ότι για μια δεδομένη γνώση που πρέπει να οικοδομηθεί από τους/τις μαθητές/τριες, είναι απαραίτητη μια καλά προσαρμοσμένη κατάσταση. Έτσι, χαρακτηρίζεται ως ένα «καλό πλαίσιο για την ανάπτυξη μαθηματικών εργαλείων» μια κατάσταση, η οποία λαμβάνει υπόψη της τόσο τη γνώση-στόχο όσο και τις δυνατότητες των διαθέσιμων τεχνουργημάτων.

Η εργαλειακή γένεση περιλαμβάνει δύο επιμέρους διαδικασίες: α) αυτή που συμβάλλει στην κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation), και β) εκείνη που μετασχηματίζει το τεχνούργημα σε εργαλείο (instrumentation).

Η κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων σχετίζεται με την εμφάνιση και εξέλιξη των δομικών στοιχείων του τεχνουργήματος, όπως για παράδειγμα τη σταδιακή αναγνώριση των δυνατοτήτων, αλλά και των περιορισμών του. Πρόκειται για την ανακάλυψη των στοιχείων και της ποιότητας των εργαλείων (Fiorani, 2013). Κατευθύνεται προς το τεχνούργημα, το οποίο διαμορφώνεται από τη δραστηριότητα του χρήστη.

Η δραστηριότητα που μετασχηματίζει το τεχνούργημα σε εργαλείο αφορά την εμφάνιση και ανάπτυξη των σχημάτων χρήσης, που σχετίζονται με την εκτέλεση μιας εργασίας με τη βοήθεια ενός τεχνουργήματος. Κατευθύνεται προς το υποκείμενο και διαμορφώνει τη σκέψη και τη δραστηριότητα του χρήστη.

Επομένως, οι δύο παραπάνω διαδικασίες είναι προσανατολισμένες από το υποκείμενο προς το τεχνούργημα και αντίστροφα. Δηλαδή, η σκέψη του/της μαθητή/τριας διαμορφώνεται από το τεχνούργημα, αλλά και διαμορφώνει το τεχνούργημα (Drijvers & Trouche, 2008). Για παράδειγμα, στην περίπτωση της χρήσης ενός σφυριού, οι διαδικασίες αυτές περιλαμβάνουν τις ικανότητες του ατόμου, ώστε να μη χτυπήσει τα δάχτυλά του, αλλά και τη γνώση του είδους των προβλημάτων που μπορούν ή δεν μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση ενός σφυριού. Η εργαλειακή γένεση περιλαμβάνει, επίσης, τη σκέψη για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να αλλάξει το τεχνούργημα, όπως εφευρίσκοντας ένα σφυρί με μια σφήνα στο πάνω μέρος του, για να μπορεί και να αφαιρεί καρφιά (Drijvers et al., 2010).

Η διάκριση μεταξύ των δύο παραπάνω διαδικασιών μπορεί να σχετίζεται με τη μάθηση, αν επιτρέπει σε κάποιον/α να αντιληφθεί ποιες γνωστικές διαδικασίες ενεργοποιούνται σε σχέση με το είδος των εργασιών που προτείνονται στο χρήστη. Ο Rabardel θεωρεί ότι η χρήση ενός εργαλείου δεν μπορεί ποτέ να είναι ουδέτερη. Πάντα πυροδοτεί ένα μηχανισμό στις γνωστικές δομές του ατόμου, που οδηγεί στην κατασκευή και την οργάνωση νέων (γνωστικών δομών). Αυτή η διαδικασία είναι δυνατή λόγω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Fiorani, 2013). Τα σχήματα χρήσης, που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς σχετίζονται άμεσα με την κατασκευή της γνώσης (Maschietto, 2015). Σχηματικά η εργαλειακή γένεση θα μπορούσε να αποδοθεί με την παρακάτω εικόνα.

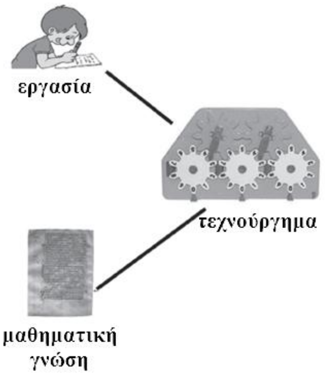
Εικόνα 2.8. Σχηματική αναπαράσταση της εργαλειακής γένεσης

2.9. Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης

Όπως αναφέρει η Bartolini Bussi (2011), η εργαλειακή γένεση του Rabardel, παρά το γεγονός ότι είναι θεμελιώδης, δεν επαρκεί για την επίτευξη των διδακτικών στόχων, καθώς οι μαθηματικές έννοιες κάποιες φορές είναι κρυμμένες.

Σύμφωνα με τις Bartolini Bussi & Boni (2009), ο Piaget θεωρεί ότι μια καθιερωμένη εκπαιδευτική στρατηγική είναι εκείνη που θέλει το/τη μαθητή/τρια να οικοδομεί τις μαθηματικές έννοιες μέσα από τη χρήση χειραπτικών υλικών. Αυτή η υπόθεση στηρίζεται στον άμεσο ή έμμεσο ισχυρισμό ότι τα χειραπτικά υλικά λειτουργούν ως διαφανείς (transparent) μεταφορείς των μαθηματικών νοημάτων.

Όμως, δεν μπορεί κάποιος/α να δώσει στα παιδιά ένα οποιοδήποτε εργαλείο και να προσδοκά να μάθουν λόγω της ενασχόλησής τους με αυτό. Η παρακάτω εικόνα δείχνει αυτή την απλοποιημένη μορφή μετάδοσης της γνώσης, η οποία, όμως, δεν είναι αποτελεσματική στην τάξη των μαθηματικών.



Εικόνα 2.9. Η απλή μορφή μετάδοσης της γνώσης

Η Bartolini Bussi (2011) αναφέρει ότι τα τεχνουργήματα μπορούν να γίνουν διαμεσολαβητές της γνώσης μόνο σε κατάλληλες καταστάσεις διδασκαλίας και μάθησης. Κανένα τεχνούργημα δεν είναι διαφανές για τις μαθηματικές έννοιες, εκτός και αν οι κοινωνικές πρακτικές που εφαρμόζονται στην τάξη των μαθηματικών, οι οποίες ξεκινούν από το δάσκαλο, είναι αποτελεσματικές.

Εδώ ακριβώς βρίσκει πρόσφορο έδαφος η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης.

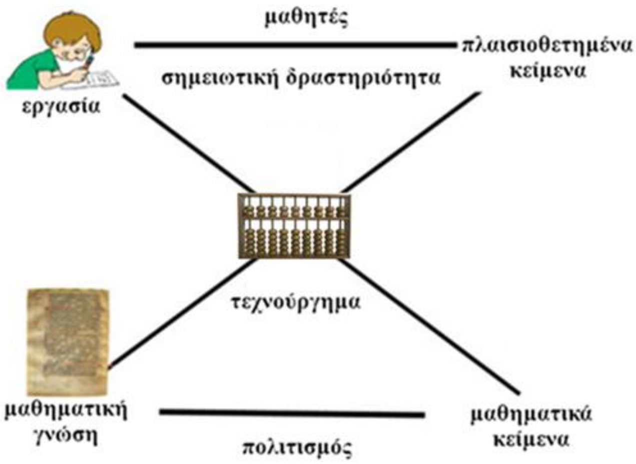
Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε στη μαθηματική εκπαίδευση από τις Bartolini Bussi & Mariotti. Οι δύο ερευνήτριες διεξήγαγαν διδακτικά πειράματα σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης με τεχνουργήματα διάφορων τύπων: από συγκεκριμένα χειραπτικά υλικά, κάποια παρμένα από την ιστορία, όπως ο άβακας και ο διαβήτης, μέχρι εικονικά (virtual) υλικά, όπως τα διάφορα λογισμικά. Η θεωρία τους βασίζεται στην σπερματική ιδέα της σημειωτικής διαμεσολάβησης, η οποία εισήχθη από τον Vygotsky (Mariotti, 2012).

Ο Vygotsky δήλωσε ότι η χρήση εργαλείων είναι βασική στη μαθησιακή διαδικασία (Fiorani, 2013). Επομένως, μπορεί να παράσχει ένα επαρκές πλαίσιο για τη μελέτη της χρήσης των τεχνουργημάτων στον τομέα της εκπαίδευσης. Το τεχνούργημα και οι τρόποι χρήσης του μπορούν να λειτουργήσουν ως βασικά στοιχεία για την ανάδυση της μαθηματικής γνώσης στο πλαίσιο του σχολείου

(Mariotti, 2012).

Συνοπτικά, θα μπορούσε κανείς να πει ότι στόχος της θεωρίας είναι να περιγράψει και να εξηγήσει τη διαδικασία που ξεκινά με τη χρήση του τεχνουργήματος από το/τη μαθητή/τρια και οδηγεί στην απόκτηση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου από τον/την ίδιο/α μαθητή/τρια (Mariotti, 2012).

Η σημειωτική διαμεσολάβηση στη σχολική τάξη θα μπορούσε να αποδοθεί σχηματικά με την παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.10. Σχηματοποίηση της σημειωτικής διαμεσολάβησης

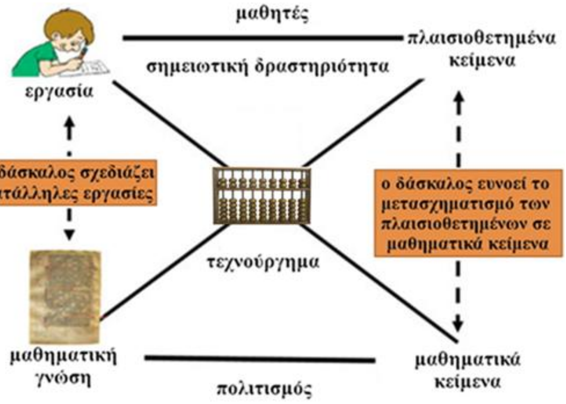
Ο/Η δάσκαλος/α αναθέτει στους/στις μαθητές/τριες μια εργασία (πάνω αριστερή κορυφή του σχήματος) για να τη λύσουν με τη βοήθεια ενός συγκεκριμένου τεχνουργήματος (κέντρο του σχήματος). Το τεχνούργημα κατέχει κεντρική θέση, καθώς αποτελεί το σημείο εκκίνησης της όλης διαδικασίας. Οι μαθητές/τριες, είτε ατομικά είτε σε μικρές ομάδες (μερικές φορές ακόμη και σε μια μεγάλη ομάδα), θα παράξουν λύσεις σωστές (ή εν μέρει σωστές) ή λανθασμένες. Σε αυτή τη διαδικασία (πάνω πλευρά της εικόνας) οι μαθητές/τριες κατασκευάζουν προσωπικά νοήματα, τα οποία σχετίζονται με τα σχήματα χρήσης του τεχνουργήματος. Άρα, στο πάνω μέρος της εικόνας η διαδικασία που συμβάλλει στην κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process) είναι στο προσκήνιο.

Οι μαθητές/τριες αναμένεται να χρησιμοποιήσουν το τεχνούργημα για να λύσουν τη συγκεκριμένη εργασία ανατρέχοντας σε προηγούμενη γνώση, εμπειρία, κτλ. Παράγουν σημεία, τα οποία ονομάζονται σημεία του τεχνουργήματος, καθώς αναφέρονται στο πλαίσιο της χρήσης του τεχνουργήματος (ολόκληρου ή ενός μέρους αυτού). Ως εκ τούτου, τα κείμενα (texts) (πάνω δεξιά κορυφή του σχήματος) που δημιουργούν οι μαθητές για την επίλυση της εργασίας, είναι πλαισιοθετημένα (situated), δηλαδή σχετίζονται αποκλειστικά με τη συγκεκριμένη κατάσταση της χρήσης του τεχνουργήματος. Εδώ να σημειωθεί ότι ο όρος «κείμενο» (text) είναι υβριδικός, με την έννοια ότι μπορεί να περιλαμβάνει καθημερινές εκφράσεις, δεικτικές εκφράσεις (π.χ. αυτό, εκείνο) και μαθηματικές εκφράσεις. Και είναι ακριβώς αυτές οι υβριδικές προτάσεις, που διαμορφώνουν ένα πλαίσιο στο οποίο μπορούν να συμμετέχουν μαθητές/τριες διαφορετικών επιπέδων δείχνοντας να κατανοούν (Bartolini Bussi & Boni, 2009). Αν ζητηθεί από τους/τις μαθητές/τριες να καταγράψουν τη διαδικασία επίλυσης που ακολούθησαν, συνήθως παράγουν ένα παρόμοιο κείμενο με κάποιες επιπλέον ζωγραφιές, σκίτσα και βέλη, προκειμένου να αντικαταστήσουν τις δεικτικές εκφράσεις. Το τεχνούργημα αποτελεί την πηγή μιας πλούσιας παραγωγής σημείων, όπως γραπτών και προφορικών κειμένων, χειρονομιών, σχεδίων, ζωγραφιών, βλεμμάτων, κτλ., τα οποία συνιστούν τη σημειωτική δραστηριότητα. Η ανάλυση αυτών των πλαισιοθετημένων κειμένων επιτρέπει στον παρατηρητή (στην περίπτωσή μας στο/στη δάσκαλο/α) να βγάλει συμπεράσματα για τα προσωπικά νοήματα των μαθητών/τριών. Αυτά είναι που αποτελούν το σπόρο του μαθηματικού κειμένου, χωρίς, όμως, να είναι ακόμα μαθηματικό κείμενο. Στόχος της όλης διαδικασίας είναι να επιδιώξει ο δάσκαλος την ωρίμανση αυτών των κειμένων (που αντικατοπτρίζουν προσωπικά νοήματα) προς μαθηματικά πια κείμενα (κάτω δεξιά πλευρά του σχήματος), τα οποία αποπλαισιώνονται από τη συγκεκριμένη κατάσταση και αντανακλούν πολιτισμικά διαμοιρασμένες έννοιες. Σχηματικά αυτή η ιδέα μπορεί να αποδοθεί με την παρακάτω εικόνα.

Εικόνα 2.11. Η διαμεσολάβηση του/της δασκάλου/ας

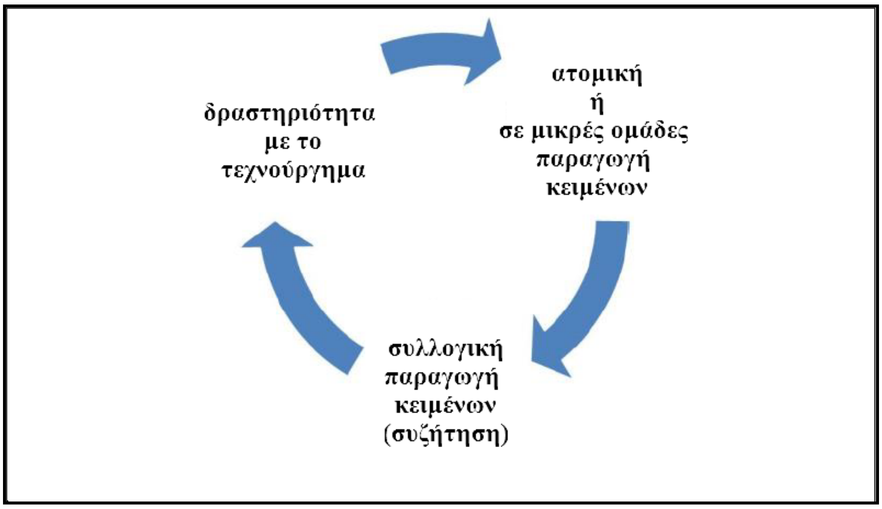
Επιστρέφοντας στο προηγούμενο σχήμα της σημειωτικής διαμεσολάβησης, η σύνδεση του άνω τμήματος της εικόνας (δραστηριότητα των μαθητών/τριών) με το κάτω μέρος της (πολιτισμικό επίπεδο των μαθηματικών) επιχειρείται με τη δυνατότητα που παρέχει το τεχνούργημα προς αυτή την κατεύθυνση και βρίσκεται υπό το διαρκή έλεγχο και την ευθύνη του/της δασκάλου/ας. Το τεχνούργημα, ως μέρος του πολιτισμού, έχει τη δυναμική να προωθήσει την ωρίμανση, αλλά η όλη διαδικασία πρέπει να καθοδηγείται από το/τη δάσκαλο/α. Αν δεν καταστεί εφικτή η σύνδεση ανάμεσα στα πλαισιοθετημένα και στα μαθηματικά κείμενα, ο/η μαθητής/τρια μπορεί να συνεχίσει απλώς να παίζει με το τεχνούργημα, χωρίς να καταφέρει να οικοδομήσει κάποια μαθηματική έννοια, η οποία θα του/της χρειαστεί περαιτέρω για την επίλυση προβλημάτων (Bartolini Bussi, 2011). Να σημειωθεί για άλλη μια φορά ότι όλη η παραπάνω διαδικασία της σημειωτικής διαμεσολάβησης λαμβάνει χώρα στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης.

Το σχήμα της εικόνας 2.10. αναπαριστά με μια ματιά όλα τα στοιχεία της θεωρίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Αυτό που απομένει να συμπληρωθεί και ρητά να εκφραστεί είναι ο σημαντικός ρόλος του/της δασκάλου/ας στην όλη διαδικασία. Ο ρόλος του/της, λοιπόν, είναι διττός: αφενός είναι υπεύθυνος/η για να σχεδιάζει κατάλληλες εργασίες, οι οποίες θα αξιοποιούν το σημειωτικό δυναμικό του τεχνουργήματος και θα οδηγούν στην κατασκευή της σκοπούμενης γνώσης. Αφετέρου φέρει την ευθύνη της διαχείρισης των πλαισιοθετημένων κειμένων των μαθητών/τριών και της εξέλιξής τους σε μαθηματικά κείμενα. Αυτό γίνεται στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης της τάξης, και κυρίως μέσω της επιδέξιας διαχείρισης της μαθηματικής συζήτησης, που λαμβάνει χώρα. Επομένως, το προηγούμενο σχήμα συμπληρώνεται ως εξής:



Εικόνα 2.12. Ο ρόλος του/της δασκάλου/ας στη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης

Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης παρέχει τόσο στο/στη μαθητή/τρια όσο και στο/η δάσκαλο/α τη διδακτική οργάνωση της εργασίας με ένα τεχνούργημα (Maschietto, 2015). Η διδακτική ακολουθία, που μπορεί να εφαρμόσει ο/η δάσκαλος/α προκειμένου να διαμεσολαβήσει μαθηματική γνώση στους/στις μαθητές/τριες, καλείται διδακτικός κύκλος. Ο διδακτικός κύκλος μπορεί να περιγραφεί σε γενικές γραμμές ως η επανάληψη ενός κύκλου που περιλαμβάνει: α) δραστηριότητες με το τεχνούργημα, β) ατομική παραγωγή σημείων, και γ) συλλογική παραγωγή σημείων. Σχηματικά μπορεί να αποδοθεί με την παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.13. Ο διδακτικός κύκλος

Συνήθως ένας διδακτικός κύκλος ξεκινά με δραστηριότητες με το τεχνούργημα, όπου ο/η μαθητής/τρια ασχολείται με εργασίες, οι οποίες πρέπει να πραγματοποιηθούν με τη χρήση του τεχνουργήματος. Πρόκειται για δραστηριότητες, οι οποίες γίνονται κυρίως σε μικρές ομάδες, και στοχεύουν στην εμφάνιση των ειδικών σημείων που έχει το τεχνούργημα. Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας οι μαθητές/τριες ανακαλύπτουν τη δομή και τα μέρη του τεχνουργήματος (Fiorani, 2013).

Κατά την ατομική παραγωγή σημείων, ο/η κάθε μαθητής/τρια ασχολείται μόνος/η του/της με διαφορετικές σημειωτικές δραστηριότητες, κυρίως με γραπτές παραγωγές, όπως σχέδια και κείμενα. Ένα κείμενο μπορεί να αναφέρεται στις προσωπικές εμπειρίες και σκέψεις του/της μαθητή/τριας σε σχέση με το τεχνούργημα, αλλά και στις αμφιβολίες και τις απορίες του/της. Όλες αυτές οι δραστηριότητες επικεντρώνονται σε σημειωτικές διαδικασίες, δηλαδή στην παραγωγή και επεξεργασία σημείων, και σχετίζονται άμεσα με την προηγούμενη κατηγορία δραστηριοτήτων. Επομένως, εδώ υπάρχει η προσωπική συμβολή του/της κάθε μαθητή/τριας, η οποία είναι μόνιμη, αφού είναι γραπτή (δε χάνεται, όπως για παράδειγμα οι χειρονομίες), και μπορεί να διαμοιραστεί ή να γίνει αντικείμενο συζήτησης στην τάξη.

Η συλλογική παραγωγή σημείων αφορά διάφορες αφηγήσεις, μιμήσεις και γενικά ομαδική παραγωγή κειμένων και σχεδίων. Αυτή η τρίτη κατηγορία δραστηριοτήτων αποτελεί βασικό κομμάτι της διαδικασίας διδασκαλίας-μάθησης και συνιστά τον πυρήνα της σημειωτικής διαδικασίας, στην οποία βασίζεται τόσο η διδασκαλία όσο και η μάθηση (Corni, Giliberti & Mariani, 2011· Bartolini Bussi & Boni, 2009). Και αυτό γιατί οδηγεί συνήθως στην ομαδική συζήτηση που λαμβάνει χώρα μέσα στην τάξη, η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης. Αυτή εμπλέκει ολόκληρη την τάξη σε μια συζήτηση που πρέπει να μετατραπεί σε μαθηματική συζήτηση.

Σύμφωνα με τη Mariotti (2009), η μαθηματική συζήτηση εκλαμβάνεται ως μια πολυφωνία εκφρασμένων φωνών για ένα μαθηματικό αντικείμενο (π.χ μια ιδέα, ένα πρόβλημα, μια διαδικασία ή μια πεποίθηση για τα μαθηματικά), το οποίο αποτελεί ένα από τα κίνητρα της δραστηριότητας διδασκαλίας-μάθησης. Ο όρος «φωνή» εκφράζει μια μορφή σκέψης ή ομιλίας, που αντιπροσωπεύει την αντίληψη ενός ατόμου, δηλαδή το γνωστικό του ορίζοντα, το στόχο του και την εικόνα που έχει για τον κόσμο (Bartolini Bussi, 1996).

Οι Bartolini Bussi & Boni (2009) θεωρούν το/τη δάσκαλο/α ως ενορχηστρωτή της πολυφωνίας, αφού αυτός/ή είναι που επιτρέπει και προάγει την έκφραση της κάθε φωνής, συμπεριλαμβάνοντας και τη δική του/της φωνή, η οποία εκπροσωπεί το μαθηματικό πολιτισμό. Συχνά αυτές οι συζητήσεις είναι πραγματικές μαθηματικές συζητήσεις, υπό την έννοια ότι το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η γνωστική διαλεκτική μεταξύ των προσωπικών νοημάτων των μαθητών/τριών και του μαθηματικού νοήματος που σχετίζεται με τα συγκεκριμένα σημεία, η οποία αναπτύσσεται πάντα με τη βοήθεια του/της δασκάλου/ας. Στο πλαίσιο της μαθηματικής συζήτησης ο/η δάσκαλος/α είναι υπεύθυνος/η για να δώσει φωνή στη μαθηματική κουλτούρα, που διαφορετικά θα μπορούσε να παραμείνει σε σημείο που δεν μπορούν να φτάσουν οι μαθητές/τριες (Bartolini Bussi & Boni, 2009). Άρα ο ρόλος του/της είναι ζωτικός, αφού αυτός/ή καθοδηγεί την εξέλιξη των σημείων, από σημεία που σχετίζονται με το τεχνούργημα προς μαθηματικά σημεία. Και αυτό το κάνει: α) λαμβάνοντας υπόψη την προσωπική συνεισφορά του/της κάθε μαθητή/τριας και β) αξιοποιώντας τις σημειωτικές δυνατότητες που προκύπτουν από τη χρήση του συγκεκριμένου τεχνουργήματος. Η Mariotti (2012) αναφέρει ότι η κρισιμότητα του ρόλου του/της δασκάλου/ας μπορεί να αναγνωριστεί και στην ευθύνη που φέρει για την ενορχήστρωση των συζητήσεων στην τάξη. Χρησιμοποιεί τον όρο «ενορχήστρωση» (orchestration) για να περιγράψει τη διαχείριση της τάξης από το/τη δάσκαλο/α κατά τη διάρκεια της μαθηματικής συζήτησης. Στόχος αυτής της ενορχήστρωσης είναι να προάγει την ανάπτυξη των διαμοιρασμένων νοημάτων, τα οποία αναγνωρίζονται και γίνονται αποδεκτά από την κοινότητα των μαθηματικών (προσώπων).

Καθεμιά από τις παραπάνω δραστηριότητες συνεισφέρει με διαφορετικό τρόπο, αλλά συμπληρωματικά στην ανάπτυξη της πολύπλοκης διαδικασίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης (Mariotti, 2012).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μεθοδολογία έρευνας

3.1. Χρησιμότητα της έρευνας

Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας της παρούσας εργασίας προκύπτει ότι η εργαλειακή προσέγγιση και η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης έχει χρησιμοποιηθεί από ξένους/ες ερευνητές/τριες για διάφορα τεχνουργήματα, όπως το αριθμητήριο (Slavonic abacus) (Bartolini Bussi, 2011· Bartolini Bussi & Boni, 2009· Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), τον κάθετο άβακα (spike abacus) (Bartolini Bussi, 2011· Bartolini Bussi & Boni, 2009· Bartolini Bussi & Mariotti, 2008· Bartolini Bussi & Maschietto, 2008), τα ξυλάκια μέτρησης (counting sticks) (Mariotti, 2012· Bartolini Bussi & Maschietto, 2008) και την αριθμητική μηχανή 0+1 ή αλλιώς Pascaline (Maschietto, 2015· Maschietto, 2013· Bartolini Bussi, 2011· Bartolini Bussi & Boni, 2009· Bartolini Bussi & Maschietto, 2008), όχι όμως για τον κινέζικο άβακα. Όπως έχει ήδη ειπωθεί, στον ελληνικό χώρο καταγράφεται μόνο μία έρευνα (Tsiapou & Nikolantonakis, 2013) σχετικά με την εισαγωγή και την αξιοποίηση του κινέζικου άβακα στο δημοτικό σχολείο. Αυτή επιχειρεί να διαπιστώσει σε τι έκταση μια διδακτική παρέμβαση με τον άβακα αυτό θα μπορούσε να βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου να διαχειριστούν πιθανές δυσκολίες και παρανοήσεις τους σε σχέση με τη δομή του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι θα ήταν ενδιαφέρον να συνδυαστούν τα δύο προαναφερόμενα στοιχεία, ώστε να διερευνηθεί, από την οπτική της εργαλειακής προσέγγισης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, αν ο κινέζικος άβακας μπορεί να βοηθήσει, ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες τη δομή του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος. Αυτή η διερεύνηση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου, καθώς η δομή του συστήματος αρίθμησης γίνεται σταδιακά κατανοητή από την προσχολική ακόμα ηλικία των παιδιών.

3.2. Σκοπός της έρευνας

Η παρούσα έρευνα έχει ως σκοπό να διερευνήσει αν οι μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου γνωρίζουν τη δομή του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, και να διαπιστώσει αν ο κινέζικος άβακας, υπό το πρίσμα της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, μπορεί να συμβάλει στη κατανόηση της δομής του.

3.3. Ερευνητικά ερωτήματα

Ο σκοπός της έρευνας, όπως διατυπώθηκε παραπάνω, εξειδικεύεται στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Γνωρίζουν οι μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα;
- Μπορεί ο κινέζικος άβακας να μετατραπεί σε εργαλείο για την κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου;
- Μπορεί ο κινέζικος άβακας να διαμεσολαβήσει στους/στις μαθητές/τριες την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου;
- Συμβάλλει τελικά ο κινέζικος άβακας στην κατανόηση της έννοιας της βάσης του 10 στο αριθμητικό σύστημα, του κρατουμένου, του δανεικού, και των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τους/τις μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου;

3.4. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 7 μαθητές/τριες, οι οποίοι αποτελούσαν το τμήμα της Γ΄ τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου, το οποίο βρίσκεται σε αγροτική περιοχή του νομού Πιερίας. Από τα 7 άτομα, τα 4 ήταν αγόρια και τα 3 κορίτσια. Οι γονείς των περισσότερων μαθητών/τριών είναι γεωργοί και κτηνοτρόφοι. Ήταν η πρώτη φορά που τα παιδιά συμμετείχαν σε μια ερευνητική διδακτική παρέμβαση.

3.5. Ερευνητικά εργαλεία

Η παρούσα έρευνα περιλαμβάνει τον έλεγχο των γνώσεων των μαθητών/τριών για την αξία θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης πριν τη παρέμβαση, τη διδακτική παρέμβαση, τον έλεγχο των αντίστοιχων γνώσεων των μαθητών/τριών μετά την παρέμβαση, καθώς και μελέτες περίπτωσης. Τα ερευνητικά δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ενός ερωτηματολογίου τόσο πριν όσο και μετά τη διδακτική παρέμβαση, με ταυτόχρονες συνεντεύξεις των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσής του, ηχογραφήσεων κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων, καθώς και φύλλων εργασίας μετά από κάθε δραστηριότητα. Οι συνεντεύξεις των παιδιών κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων περιλάμβαναν απαντήσεις σε διευκρινιστικές ερωτήσεις του δασκάλου ή/και εξηγήσεις για τον τρόπο σκέψης τους. Η χρονική διάρκεια της συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων υπολογίστηκε να διαρκεί περίπου μία διδακτική ώρα.

3.5.1. Παρουσίαση του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση (pre-test)

Με το ερωτηματολόγιο, πριν τη διδακτική παρέμβαση, γίνεται προσπάθεια να αναδειχθούν οι γνώσεις των μαθητών/τριών σε σχέση με τη δομή, τις ιδιότητες και τη λειτουργία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Για τη σύνταξη του ερωτηματολογίου μελετήθηκαν οι στόχοι που παρέχει το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) (ΥΠ.Ε.Π.Θ, 2003) των μαθηματικών της Β΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου στον άξονα «Αριθμοί και πράξεις» και επελέγησαν οι εξής:

Να μπορούν οι μαθητές/τριες:

1. Να γράφουν και να ονομάζουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000 και να περνούν από τη λεκτική στη συμβολική γραφή και αντίστροφα (άσκηση 1 του ερωτηματολογίου).
2. Να παριστάνουν τριψήφιους αριθμούς σαν άθροισμα μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων (άσκηση 2 του ερωτηματολογίου).
3. Να διακρίνουν τη διαφορετική αξία θέσης των ψηφίων (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) (άσκηση 3 του ερωτηματολογίου).
4. Να εφαρμόζουν διαδικασίες ομαδοποιήσεων ή ανταλλαγών με δεκάδες, εκατοντάδες και χιλιάδες (άσκηση 4 του ερωτηματολογίου).
5. Να συγκρίνουν φυσικούς αριθμούς και να χρησιμοποιούν σωστά τα σύμβολα σύγκρισης (άσκηση 5 του ερωτηματολογίου).

6. Να διατάσσουν φυσικούς αριθμούς και να χρησιμοποιούν αριθμούς, για να εντοπίζουν θέσεις στην αριθμογραμμή (άσκηση 5 του ερωτηματολογίου).
7. Να μπορούν να μετατρέπουν οριζόντιες προσθέσεις και αφαιρέσεις σε κάθετες και να τις πραγματοποιούν (ιδιαίτερα όταν οι αριθμοί έχουν διαφορετικό πλήθος ψηφίων) (άσκηση 6 του ερωτηματολογίου).

Επιπλέον, ο δάσκαλος, μελετώντας την έρευνα της Poisard (2006) για την κατανόηση της έννοιας του κρατουμένου στην πρόσθεση τόσο από τους/τις μαθητές/τριες όσο και από τους/τις εκπαιδευτικούς, αποφάσισε να ελέγξει την κατανόηση της ίδιας έννοιας από τους/τις μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης.

Επιπρόσθετα, εμπνευσμένος από την παραπάνω έννοια, επιχειρεί να εξετάσει και την κατανόηση της έννοιας του δανεικού στην αφαίρεση από τους/τις ίδιους/ες μαθητές/τριες. Έτσι, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η κατανόηση της καθεμιάς από τις παραπάνω έννοιες δύναται να αποτελέσει στόχο της διδασκαλίας και συνεπώς να τις προσθέσει στην παραπάνω λίστα.

8. Να κατανοούν και να μπορούν να εξηγούν την έννοια του κρατουμένου στην πρόσθεση ακέραιων αριθμών (άσκηση 7 του ερωτηματολογίου).
9. Να κατανοούν και να μπορούν να εξηγούν την έννοια του δανεικού στην αφαίρεση ακέραιων αριθμών (άσκηση 8 του ερωτηματολογίου).

3.5.2. Ασκήσεις του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση (pre-test) (βλ. Παράρτημα Β)

1η άσκηση του ερωτηματολογίου

Στο α΄ μέρος της πρώτης άσκησης του ερωτηματολογίου ζητείται από τους/τις μαθητές/τριες να «διαβάσουν» προφορικά τους αριθμούς που αναγράφονται. Έτσι, εξασφαλίζεται ταχύτητα και ακρίβεια στις απαντήσεις τους, καθώς η ηλικία τους δεν ευνοεί πάντα τη γραπτή διατύπωση της σκέψης τους με σαφή, και κατανοητό τρόπο.

Αντίθετα, στο β΄ μέρος οι μαθητές καλούνται να γράψουν με ψηφία τους αριθμούς που διαβάζουν.

Οι αριθμοί που επελέγησαν για την πρώτη άσκηση δεν είναι τυχαίοι. Αποτελούνται από όμοια ψηφία στη θέση των μονάδων, δεκάδων και εκατοντάδων (333, διακόσια είκοσι δύο) ή έχουν το ψηφίο μηδέν σε διαφορετικές θέσεις (180, 705, 400, πεντακόσια πενήντα, εννιακόσια εννιά, οχτακόσια), καθώς επιχειρείται να ανιχνευτεί αν οι μαθητές μπορούν να τους διαβάσουν και να τους γράψουν ορθά.

2η άσκηση του ερωτηματολογίου

Και σε αυτή την άσκηση επελέγησαν τριψήφιοι αριθμοί:
α) με ίδια ψηφία σε όλες τις θέσεις (π.χ. 999) για να διαπιστωθεί αν οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν τη διαφορετική αξία τους,
β) με το μηδέν σε διαφορετικές θέσεις αξίας (π.χ. 440, 303, 500), ώστε να διαφανεί αν οι μαθητές/τριες κατανοούν ότι η λειτουργία του σε αυτούς τους αριθμούς είναι η κράτηση θέσης/θέσεων, και
γ) με ίδια ψηφία σε δύο διαδοχικές θέσεις (π.χ. 277) για να διαπιστωθεί αν οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν τη διαφορετική αξία τους.

3η άσκηση του ερωτηματολογίου

Και στην τρίτη άσκηση, στις περισσότερες περιπτώσεις, οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν προσπαθούν να αποκαλύψουν αν οι μαθητές/τριες διακρίνουν τη διαφορετική αξία ίδιων ψηφίων ανάλογα με τη θέση τους στον αριθμό.

4η άσκηση του ερωτηματολογίου

Στην άσκηση αυτή επιχειρείται να ανιχνευτεί αν οι μαθητές/τριες γνωρίζουν και ανακαλούν σχεδόν αυτόματα τις βασικές ανταλλαγές μεταξύ χιλιάδας-εκατοντάδων-μονάδων, και αν μπορούν να υπολογίσουν και να εφαρμόσουν και άλλες ανταλλαγές (π.χ. 20 δεκάδες = …….. εκατοντάδες), οι οποίες χρειάζονται περισσότερη σκέψη.

5η άσκηση του ερωτηματολογίου

Οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη άσκηση, επελέγησαν έτσι ώστε να καλύπτουν ένα μεγάλο τμήμα της αριθμογραμμής από το 1 ως το 1.000. Για αυτό και όλοι έχουν ως τελευταίο ψηφίο το μηδέν. Επιπλέον, αποφασίστηκε οι αριθμοί που δίνονται να αποτελούν κατά κάποιο τρόπο «ζευγάρια», όπου τα δύο πρώτα ψηφία τού ενός αριθμού (π.χ. 760), χρησιμοποιούνται αντεστραμμένα (670) στον επόμενο αριθμό, που αποτελεί το «ζευγάρι» του. Έτσι, θα διαφανεί για άλλη μια φορά αν οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν τη διαφορετική αξία των ψηφίων.

<u>6η άσκηση του ερωτηματολογίου</u>

Αρχικά, στη συγκεκριμένη άσκηση επιχειρείται να ανιχνευτεί αν οι μαθητές/τριες γνωρίζουν να τοποθετούν σωστά δύο αριθμούς σε κάθετη διάταξη, πριν προχωρήσουν στην πρόσθεση ή την αφαίρεση τους. Βέβαια, στην πρόσθεση, η τοποθέτηση δύο τριψήφιων αριθμών κάθετα είναι εύκολη. Ο μεγαλύτερος αριθμός είτε τοποθετηθεί ως πρώτος προσθετέος είτε ως δεύτερος, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Στην αφαίρεση, σε περίπτωση τοποθέτησης του μεγαλύτερου αριθμού ως αφαιρετέου, θα εξαχθεί λάθος διαφορά ως αποτέλεσμα της πράξης. Σε ό,τι αφορά την παρούσα άσκηση αποφασίστηκε να δοθεί μία πρόσθεση (254+135) και μία αφαίρεση (546-233) με αναγραφή των αριθμών σε σωστή σειρά. Επιπλέον, επιλέχθηκε να μην προκύπτουν κρατούμενα στην παραπάνω πρόσθεση ούτε η ανάγκη δανεισμού στην προαναφερθείσα αφαίρεση.

Αντίθετα, στις δύο πράξεις που ακολουθούν, αποφασίστηκε να προστίθεται ένας τριψήφιος με ένα διψήφιο αριθμό (398+12) και να αφαιρείται ένας μονοψήφιος από έναν τριψήφιο αριθμό (600-8), για να ελεγχθεί η ορθότητα τοποθέτησης των αριθμών σε κάθετη διάταξη. Επιπλέον, επιλέχθηκε στην πρόσθεση να προκύπτουν κρατούμενα και στην αφαίρεση να προκύπτει η ανάγκη δανεισμού, και μάλιστα από θέση αξίας όπου το ψηφίο είναι το 0. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Σκανδαλάκη & Σκουμπουρδή, 2014· Fiori & Zuccheri, 2005· Λεμονίδης, 2016), σε αυτές τις περιπτώσεις πράξεων εμφανίζονται τα περισσότερα αλγοριθμικά λάθη των μαθητών/τριών.

<u>7η άσκηση του ερωτηματολογίου</u>

Στην έβδομη άσκηση του ερωτηματολογίου επιχειρείται να αναδυθεί πώς οι μαθητές/τριες ορίζουν, κατά κάποιο τρόπο, το κρατούμενο. Επίσης, καλούνται να απαντήσουν σε ποια πράξη συναντά κανείς το κρατούμενο, για να διαφανεί αν διακρίνουν το κρατούμενο από το δανεικό. Επειδή η ηλικία των παιδιών δεν ευνοεί τη σαφή διατύπωση των απόψεών τους, πόσο μάλλον τη διατύπωση ορισμών, τους δίνεται η δυνατότητα να διατυπώσουν παραδείγματα, ώστε να εξηγήσουν τι σημαίνει για αυτά το κρατούμενο.

<u>8η άσκηση του ερωτηματολογίου</u>

Στην ίδια λογική με την άσκηση 7 κινείται και η όγδοη άσκηση του ερωτηματολογίου. Βέβαια, εδώ το ερώτημα έχει να κάνει με το δανεικό.

Την ίδια φιλοσοφία, με την οποία καταρτίστηκε το ερωτηματόλογιο πριν την παρέμβαση, ακολουθεί και το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους/στις μαθητές/τριες μετά την παρέμβαση. Και αυτό το ερωτηματολόγιο βρίσκεται στο Παράρτημα Β.

3.6. Διαδικασίες

Οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση δοκιμάστηκαν πρώτα σε δύο μαθητές/τριες, που φοιτούν στη Γ΄ τάξη διαφορετικών σχολείων, ώστε να προσδιοριστεί ο βαθμός κατανόησής τους, καθώς και ο χρόνος που απαιτούνταν για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου. Έπειτα, έγιναν κάποιες τροποποιήσεις στα δεδομένα των ασκήσεων και πήραν τη μορφή που παρουσιάστηκε παραπάνω και εμφανίζεται και στο Παράρτημα Β της εργασίας.

Ο δάσκαλος από την αρχή της σχολικής χρονιάς έκανε τροποποίηση στη σειρά της διδασκαλίας των κεφαλαίων των μαθηματικών, ώστε να μη γίνει καμία αναφορά στους άξονες των ακέραιων αριθμών και των πράξεων με αυτούς καθόλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Έτσι, θα αποτυπωνόταν στο ερωτηματολόγιο πριν την παρέμβαση η γνώση που πραγματικά είχαν εκείνη τη στιγμή τα παιδιά για την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου.

Τα ερωτηματολόγια πριν την παρέμβαση συμπληρώθηκαν κατά το χρονικό διάστημα από 31 Οκτωβρίου έως και 11 Νοεμβρίου 2016. Να σημειωθεί ότι ο αρχικός σχεδιασμός προέβλεπε την ολοκλήρωση της όλης παρέμβασης μέχρι το τέλος Ιανουαρίου 2017. Λόγω, όμως, μιας μη προγραμματισμένης μακρόχρονης απουσίας του δασκάλου, συνεχίστηκε από τις 24 Απριλίου και ολοκληρώθηκε στις 13 Ιουνίου 2017. Έτσι, το τμήμα της παρέμβασης, που αφορούσε τον τρόπο λειτουργίας του κινέζικου άβακα, έπρεπε να παρουσιαστεί και πάλι στους/στις μαθητές/τριες, ώστε να το θυμηθούν. Ωστόσο, και κατά την απουσία του εκπαιδευτικού δεν έγινε καμία ρητή αναφορά στους ακέραιους αριθμούς και στην εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων με αυτούς.

Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων και πριν και μετά την παρέμβαση, αλλά και οι δραστηριότητες της παρέμβασης πραγματοποιήθηκαν από το δάσκαλο της τάξης. Η εκφώνηση της κάθε ερώτησης των ερωτηματολογίων επαναλαμβανόταν από το δάσκαλο, ενώ παρείχε και επιπλέον εξηγήσεις αν ο/η μαθητής/τρια δήλωνε ή έδειχνε να μην κατανοεί τι του/της ζητείται να κάνει στην άσκηση.

Όλες οι δραστηριότητες της παρέμβασης πραγματοποιήθηκαν σε δύο χώρους: στην αίθουσα διδασκαλίας και στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, όταν χρειαζόταν ο/η κάθε μαθητής/τρια να χειριστεί ατομικά τον ηλεκτρονικό άβακα. Υπολογιστής υπήρχε εγκατεστημένος και στη σχολική τάξη, αλλά εκεί ο ηλεκτρονικός άβακας χρησιμοποιήθηκε ως εποπτικό μέσο για όλη την τάξη. Για την ολοκλήρωση όλων των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης αφιερώθηκαν 35 διδακτικές ώρες.

3.7. Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

Κατά το σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης, στον πυρήνα της οποίας βρίσκεται ο κινέζικος άβακας, ελήφθησαν υπόψη οι σκοποί και οι τρόποι της εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Μέσα από τη μελέτη αυτών προέκυψαν οι δραστηριότητες της παρέμβασης.

3.7.1. Σκοποί της εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους

Έγινε προσπάθεια, ώστε η ιστορία των μαθηματικών να διατρέχει όλο το πρόγραμμα της διδακτικής παρέμβασης. Οι λόγοι για τους οποίους κρίνεται χρήσιμη η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική παρέμβαση, επιλέχθηκαν από τη λίστα που παρέχουν οι Tzanakis & Arcavi (2000), όπως αυτοί κατηγοριοποιήθηκαν μετέπειτα από τον Jankvist (2009), σε δύο κατηγορίες: α) στην ιστορία ως εργαλείο και β) στην ιστορία ως στόχο. Παρακάτω παρατίθενται για κάθε κατηγορία οι λόγοι που επελέγησαν.

α) Η χρήση της ιστορίας ως (γνωστικό) εργαλείο δύναται:

- Να αποτελέσει παράγοντα κινητοποίησης του/της μαθητή/τριας, αφού μπορεί όχι μόνο να προκαλέσει το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό του/της για τα μαθηματικά, αλλά και να το διατηρήσει αμείωτο, δίνοντας παράλληλα σε αυτά έναν πιο ανθρώπινο χαρακτήρα.
- Να διευκολύνει την κατανόηση και μάθηση μαθηματικών εννοιών (όπως της ιδιότητας της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα).

β) Η χρήση της ιστορίας ως στόχος συμβάλλει ώστε:

- Να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο.
- Να συνειδητοποιήσουν ότι οι άνθρωποι συμμετέχουν στην εξέλιξή τους.
- Να μάθουν ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν από πολλούς και διαφορετικούς πολιτισμούς, οι οποίοι τα διαμόρφωσαν, αλλά και διαμορφώθηκαν από αυτά.

Επιπλέον, το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) (ΥΠ.Ε.Π.Θ, 2003) των μαθηματικών ορίζει ως σκοπό της διδασκαλίας τους να αναπτύξουν οι μαθητές/τριες: την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και το κριτικό τους πνεύμα.

3.7.2. Τρόποι εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους

Η ιστορία των μαθηματικών υπεισέρχεται στο πρόγραμμα της διδακτικής παρέμβασης μέσω:

α) της επιλογής των στόχων, όπως αυτοί ορίζονται από το Α.Π.Σ.–Δ.Ε.Π.Π.Σ. για τα μαθηματικά της Β΄ τάξης του Δημοτικού, για την κατάρτιση του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση,

β) της επιλογής των εισαγωγικών και των κυρίως δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης, και

γ) της κατάρτισης του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση.

3.7.3. Δραστηριότητες

Ο δάσκαλος, κατά τη φάση του σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης, αποφάσισε αυτή να περιλαμβάνει τόσο δραστηριότητες εισαγωγής όσο και τις κύριες δραστηριότητες του προγράμματος.

3.7.3.1. Εισαγωγικές δραστηριότητες

Πρόκειται για δραστηριότητες, οι οποίες εισάγουν σταδιακά τους/τις μαθητές/τριες στον άξονα των αριθμών και των πράξεων με τη χρήση του κινέζικου άβακα. Αυτές περιλαμβάνουν:

i. Γνωριμία με τις απαρχές του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης

Εδώ η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο, καθώς προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών, οι οποίοι/ες ταυτόχρονα συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη κατασκευή, την οποία οι άνθρωποι εξελίσσουν. Επίσης, δίνεται η ευκαιρία μελέτης της ιδιότητας της αξίας θέσης ψηφίου στο θεσιακό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, γεγονός που προωθεί την κατανόηση και μάθηση της συγκεκριμένης ιδιότητας.

ii. Γνωριμία και με άλλα συστήματα αρίθμησης

Στη δραστηριότητα αυτή η ιστορία χρησιμοποιείται αφενώς ως εργαλείο, αφού κινητοποιεί τα παιδιά, αφετέρου ως στόχος, καθώς υποδηλώνει την ανθρώπινη συμμετοχή στην ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών, και μάλιστα από διαφορετικούς πολιτισμούς.

iii. Ανακάλυψη του κινέζικου άβακα

Και στη δραστηριότητα αυτή γίνεται χρήση της ιστορίας ως εργαλείου, καθώς προκαλεί το ενδιαφέρον των παιδιών η εισαγωγή ενός αρχαίου οργάνου στην τάξη, το οποίο θα βοηθήσει στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

iv. Γνωριμία με την ιστορική εξέλιξη και περιγραφή του κινέζικου άβακα

Η παρουσίαση της ιστορικής διαδρομής και εξέλιξης του κινέζικου άβακα εμπίπτει και στις δύο κατηγορίες χρήσης της ιστορίας (ως εργαλείου και ως στόχου), καθώς δύναται να προκαλέσει και να συντηρήσει αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών, και να τους δώσει τη δυνατότητα να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο, με τους ανθρώπους διάφορων πολιτισμών να συμμετέχουν στην εξέλιξή τους.

v. Κατασκευή του ατομικού άβακα από τους μαθητές και του άβακα της τάξης από το δάσκαλο

Η κατασκευή του άβακα από τα ίδια τα παιδιά αποτελεί μια δραστηριότητα που τα παρέχει κίνητρο, ενδιαφέρον και ενθουσιασμό για να ασχοληθούν με τα μαθηματικά. Επομένως η ιστορία χρησιμοποιείται ως εργαλείο.

vi. Εναλλακτική κατασκευή του άβακα με τη χρήση διαφορετικών υλικών

Αυτή η δραστηριότητα, πέρα από το ενδιαφέρον που μπορεί να προκαλέσει στους/στις μαθητές/τριες (η ιστορία ως εργαλείο), δύναται να αναπτύξει την παρατηρητικότητα, τη δημιουργική φαντασία και το κριτικό τους πνεύμα, που ορίζει ως σκοπό το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.)

(ΥΠ.Ε.Π.Θ, 2003) των μαθηματικών, ώστε να προτείνουν κατάλληλα υλικά με τα οποία θα μπορούσαν να κατασκευάσουν έναν ακόμη άβακα.

vii. Ανακάλυψη του τρόπου λειτουργίας του κινέζικου άβακα

Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο κινέζικος άβακας είναι διαφορετικός από τον τρόπο που έχουν μάθει μέχρι τώρα τα παιδιά να χρησιμοποιούν άλλα είδη αβάκων. Η ανακάλυψη αυτού του τρόπου λειτουργίας σίγουρα μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον τους, ώστε να ασχοληθούν περαιτέρω με τον άβακα. Πρόκειται για τη χρήση της ιστορίας ως εργαλείο.

viii. Αναπαράσταση τριψήφιου αριθμού στον άβακα

Η δραστηριότητα αυτή εντάσσεται στην κατηγορία της χρήσης της ιστορίας ως εργαλείο. Αναμένεται να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών για τον τρόπο αναπαράστασης ενός αριθμού στον κινέζικο άβακα.

Οι τέσσερις από τις οκτώ εισαγωγικές δραστηριότητες (η 3^{η}, η 6^{η}, η 7^{η} και η 8^{η}) εμπίπτουν στη θεωρία της εργαλειακής γένεσης. Οι δύο πρώτες αφορούν τη διαδικασία κατασκευής νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process), ενώ οι δύο τελευταίες σχετίζονται με τη διαδικασία εκείνη που μετασχηματίζει το τεχνούργημα σε εργαλείο (instrumentation process).

3.7.3.2. Κύριες δραστηριότητες

Ο κύριος όγκος των δραστηριοτήτων της παρέμβασης χωρίζεται σε δύο άξονες:

α) στον άξονα των ακέραιων αριθμών (μέχρι και το 1.000) και

β) στον άξονα των πράξεων με ακέραιους αριθμούς (προσθέσεων και αφαιρέσεων).

Οι δραστηριότητες και των δύο αξόνων εμπίπτουν στην κατηγορία της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών ως εργαλείο, αφού και το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών προκαλούν και την κατανόηση και μάθηση μαθηματικών έννοιων μέσω της χρήσης του άβακα διευκολύνουν.

Να σημειωθεί ότι τόσο στο εισαγωγικό όσο και στο κύριο σώμα εμπεριέχονται και δραστηριότητες που αφορούν την εργαλειακή γένεση, και οι οποίες σχετίζονται και με τις δύο διαδικασίες της (κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων-μετασχηματισμός του τεχνουργήματος σε εργαλείο).

Μετά από κάθε δραστηριότητα ακολουθεί ατομική, κυρίως, εργασία των μαθητών/τριών σε φύλλο ή φύλλα εργασίας. Αυτά τα φύλλα σχεδιάστηκαν από το διδάσκοντα, ώστε να τα χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες ως εφαρμογή των όσων έμαθαν κατά τις δραστηριότητες (βλ. Παράρτημα Γ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αποτελέσματα

4.1. Αποτελέσματα του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση (pre-test)

<u>1η ερώτηση</u>

Η πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου αποτελείτο από δύο σκέλη: το πρώτο καλούσε τα παιδιά να πουν με λέξεις τους αριθμούς που δίνονταν με ψηφία, ενώ το δεύτερο τα καλούσε να γράψουν με ψηφία τους αριθμούς που δηλώνονταν με λέξεις.

Στο πρώτο σκέλος και οι επτά μαθητές/τριες απάντησαν σωστά.

Στο δεύτερο σκέλος οι πέντε από τους/τις επτά μαθητές/τριες απάντησαν ορθά.

<u>2η ερώτηση</u>

Στη δεύτερη άσκηση της προσθετικής ανάλυσης τριψήφιων αριθμών οι έξι από τους/τις επτά μαθητές/τριες απάντησαν σωστά.

<u>3η ερώτηση</u>

Στην τρίτη άσκηση, η οποία ζητούσε την αναγνώριση της αξίας κάθε ψηφίου σε τριψήφιους αριθμούς, δεν παρατηρήθηκαν δυσκολίες στην πλειοψηφία των μαθητών/τριών. Οι έξι από τους/τις επτά απάντησαν σωστά.

<u>4η ερώτηση</u>

Η τέταρτη άσκηση καλούσε τα παιδιά να συμπληρώσουν τις ισοδυναμίες μεταξύ χιλιάδων, εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων. Από τους/τις επτά μαθητές/τριες: τρεις απάντησαν σωστά, δύο απάντησαν λανθασμένα, ενώ ένας μαθητής έκανε ένα λάθος και ένας άλλος δύο λάθη.

<u>5η ερώτηση</u>

Οι μαθητές/τριες, κατά τη σύγκριση και τοποθέτηση τριψήφιων αριθμών σε φθίνουσα σειρά, δεν αντιμετώπισαν δυσκολίες. Οι έξι από τους/τις επτά απάντησαν χωρίς κανένα λάθος.

Κατά την τοποθέτηση των αριθμών στην αριθμογραμμή μόνο μία μαθήτρια προέβη σε ορθή τοποθέτηση.

6^{η} ερώτηση

Η έκτη άσκηση του ερωτηματολογίου περιλάμβανε τη γραφή σε κάθετη διάταξη και την εκτέλεση τεσσάρων πράξεων, δύο προσθέσεων (254+135, 398+12) και δύο αφαιρέσεων (546-233, 600-8). Παρακάτω δίνονται τα αποτελέσματα των μαθητών/τριών για καθεμία πράξη.

- **Πρόσθεση 254+135**

i. Κάθετη διάταξη

Την πρόσθεση 254+135 οι 5 από τους/τις 7 μαθητές/τριες την έγραψαν κάθετα με το σωστό τρόπο.

ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης

Όσον αφορά την εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης, μόνο 2 από τους/τις 7 μαθητές/τριες τον εκτέλεσαν σωστά.

- **Πρόσθεση 398+12**

i. Κάθετη διάταξη

Η δεύτερη πρόσθεση (398+12) γράφτηκε σε κάθετη διάταξη σωστά μόνο από 2 από τα 7 παιδιά.

ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης

Και οι 7 μαθητές/τριες εκτέλεσαν λανθασμένα τον αλγόριθμο της πρόσθεσης 398+12.

- **Αφαίρεση 546-233**

i. Κάθετη διάταξη

Επειδή και ο μειωτέος και ο αφαιρετέος είναι τριψήφιοι αριθμοί, η πλειοψηφία των μαθητών/τριών, οι 5 από τους/τις 7 τοποθέτησαν σωστά τους αριθμούς σε κάθετη διάταξη.

ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης

Μόνο οι 2 από τους/τις 7 μαθητές/τριες, εκτέλεσαν σωστά τον αλγόριθμο της εν λόγω αφαίρεσης.

- **Αφαίρεση 600-8**

 i. **Κάθετη διάταξη**

Από τους/τις 7 μαθητές/τριες μόνο 3 διέταξαν σωστά τον αφαιρετέο κάτω από το μειωτέο.

 ii. **Εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης**

Κανένας/καμία μαθητής/μαθήτρια δεν εκτέλεσε σωστά τον αλγόριθμο της αφαίρεσης 600-8.

<u>7η ερώτηση</u>

Στο ερώτημα τι είναι το κρατούμενο μόνο 1 μαθήτρια έδωσε μια σαφή απάντηση για την έννοια του κρατουμένου.

Στο ερώτημα σε ποια πράξη χρησιμοποιείται το κρατούμενο μόνο 2 μαθήτριες απάντησαν ορθά.

<u>8η ερώτηση</u>

Και στην ερώτηση τι είναι το δανεικό μόνο 1 μαθήτρια έδωσε μια πιο σαφής απάντηση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σωστή.

Στο δεύτερο σκέλος της 8ης ερώτησης, σε ποια πράξη χρησιμοποιείται το δανεικό, και πάλι μόνο 2 μαθήτριες απάντησαν σωστά.

4.1.1. Συμπεράσματα του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση (pre-test)

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, επιβεβαιώνεται η αναφορά του Barrouillet et al. (2004) σε έρευνες που έγιναν σε Ιταλούς/ίδες και Γάλλους/ίδες μαθητές/τριες μεταξύ 7 και 9 ετών, και οι οποίες κατέδειξαν ότι γίνονται λάθη όταν τα παιδιά περνούν από τον φωνολογικό κώδικα σε εκείνον των ψηφίων.

Μια μαθήτρια της τάξης έκανε συντακτικά λάθη στη γραφή τριψήφιων αριθμών, αφού συμπλήρωσε μηδενικά εκεί που, σύμφωνα με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, δεν υπάρχουν (τον αριθμό πεντακόσια πενήντα τον έγραψε 5050, και το διακόσια είκοσι δύο ως 2022). Για τη Fuson (1990), το πέρασμα από το φωνολογικό κώδικα στον κώδικα των ψηφίων συνιστά μια προβληματική περιοχή. Η εγγραφή ενός αριθμού, με τη σύνδεση σε σειρά των αριθμών από τους οποίους αποτελείται (π.χ. το διακόσια σαράντα έξι γράφεται ως 200406), παρά με την ενσωμάτωσή τους στον τρόπο γραφής των αριθμών στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα (246), αποτελεί ένα συχνό και διαδεδομένο λάθος.

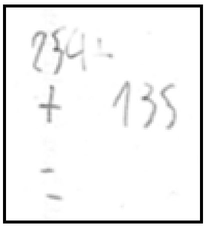
Σε ότι αφορά την προσθετική ανάλυση τριψήφιων αριθμών, αρχικά, η πλειοψηφία των μαθητών/τριων έδειξε να τους αντιμετωπίζει ως μια ακολουθία μονοψήφιων αριθμών τοποθετημένων ο ένας δίπλα στον άλλο, χωρίς να αποδίδουν σε κάθε ψηφίο την αξία που έχει σε σχέση με τη θέση του στον αριθμό (Fuson, 1990). Για παράδειγμα, για τον αριθμό 999 απάντησαν ότι αυτός φτιάχνεται από 9+9+9. Σύμφωνα με τον Price (2002), πρόκειται για το συλλογισμό με βάση την ονομαστική αξία (face value) του κάθε ψηφίου του αριθμού, τον οποίο θεωρεί ως την πιο κοινή παρανόηση στους πολυψήφιους αριθμούς.

Επίσης, αρκετοί/ες μαθητές/τριες έδειξαν να μη θυμούνται τι είναι η χιλιάδα, η εκατοντάδα, η δεκάδα και η μονάδα, πριν περάσουν σε ανταλλαγές μεταξύ αυτών. Όλοι χρησιμοποίησαν ως βοηθητικό μέσο τα δάχτυλα προκειμένου να κάνουν ανταλλαγές, ενώ η όλη διαδικασία ήταν για τους/τις περισσότερους/ες ιδιαίτερα χρονοβόρα. Επίσης, η σκέψη τους χρειαζόταν μια διαρκή καθοδήγηση.

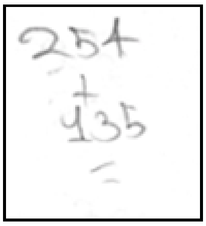
Η δυσκολία εύρεσης της κλίμακας της αριθμογραμμής για την πλειοψηφία των μαθητών/τριών, στην οποία έπρεπε να τοποθετήσουν δεδομένους αριθμούς, ίσως μαρτυρά την ελλειπή εξοικείωσή τους με αυτό το εργαλείο.

Παρά το γεγονός ότι το τμήμα αποτελείται μόνο από επτά μαθητές/τριες, παρατηρούνται αρκετά λάθη στην εκτέλεση του αλγόριθμου τόσο της πρόσθεσης όσο και της αφαίρεσης, τα οποία έχουν επισημανθεί και από την ελληνική (Σκανδαλάκη & Σκουμπουρδή, 2014· Αγαλιώτης, 2000· Καφούση & Ντζιαχρήστος, 1998· Λεμονίδης, 2016· Χατζηγεωργίου, 1990) και από την ξένη (Fiori & Zuccheri, 2005· Fuson, 1990) βιβλιογραφία.

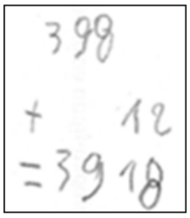
Σε ό,τι αφορά τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, πρέπει αρχικά να τονιστεί ο λανθασμένος τρόπος κάθετης τοποθέτησης των προσθετέων τόσο όταν αυτοί έχουν διαφορετικό αριθμό ψηφίων όσο και όταν έχουν τον ίδιο αριθμό ψηφίων. Αυτή η λανθασμένη διάταξη αριθμών πιθανόν να δείχνει προβλήματα στην κατανόηση της αξίας των ψηφίων των αριθμών. Σύμφωνα με τη Fuson (1990), το γεγονός ότι οι πολυψήφιοι αριθμοί γράφονται από τα αριστερά προς τα δεξιά, φαίνεται να οδηγεί πολλούς/ες μαθητές/τριες να ευθυγραμμίζουν τους αριθμούς προς τα αριστερά και όχι προς τα δεξιά κατά την κάθετη διάταξή τους.



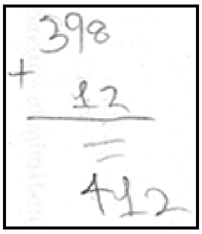
Εικόνα 4.1. Η τοποθέτηση των προσθετέων από το Δημήτρη



Εικόνα 4.2. Η τοποθέτηση των προσθετέων από το Νίκο



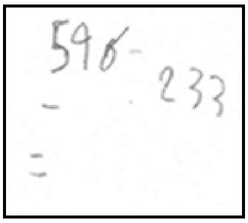
Εικόνα 4.3. Η τοποθέτηση των προσθετέων από το Δημήτρη



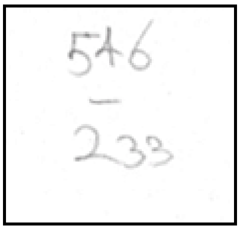
Εικόνα 4.4. Η τοποθέτηση των προσθετέων από το Νίκο

Τα λάθη που σημειώθηκαν κατά τη διαδικασία εκτέλεσης του αλγόριθμου της πρόσθεσης αφορούσαν: α) την κατεύθυνση της πράξης (εν προκειμένω έναρξη της διαδικασίας από τις εκατοντάδες), β) τη μεταφορά όλων των κρατουμένων στην ακραία αριστερή στήλη, αλλά και στην ακραία δεξιά, γ) την παράλειψη του κρατουμένου, και δ) την πρόσθεση των ψηφίων σε ανεξάρτητες μεταξύ τους στήλες, όπου γράφεται ολόκληρο το διψήφιο άθροισμα μιας στήλης χωρίς τη δημιουργία κρατουμένου. Βέβαια, παρατηρήθηκε και συνδυασμός λαθών από κάποιους/ες μαθητές/τριες. Τέλος, υπήρξαν και μαθητές που δήλωσαν άγνοια του αλγόριθμου, αλλά προσπάθησαν να βρουν το αποτέλεσμα μετρώντας με τη βοήθεια των δακτύλων.

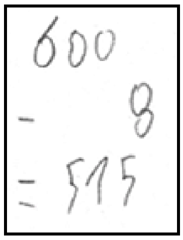
Όσον αφορά τον αλγόριθμο της αφαίρεσης, και εδώ σημειώθηκαν λάθη κατά την τοποθέτηση του μειωτέου και του αφαιρετέου σε κάθετη διάταξη.



Εικόνα 4.5. Η τοποθέτηση του μειωτέου και του αφαιρετέου από το Δημήτρη



Εικόνα 4.6. Η τοποθέτηση του μειωτέου και του αφαιρετέου από το Νίκο



Εικόνα 4.7. Η τοποθέτηση του μειωτέου και του αφαιρετέου από το Δημήτρη

Κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης σημειώθηκαν τα εξής λάθη: α) αλλαγή στην κατεύθυνση της πράξης (ξεκίνημα από τις εκατοντάδες), β) αντιστροφή των όρων στις θέσεις αξίας, ώστε να μπορεί να γίνει αφαίρεση [εφαρμογή, δηλαδή, της αντιμεταθετικής ιδιότητας στην πράξη της αφαίρεσης, στην οποία η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει (Λεμονίδης, 2016· Παπαδόπουλος, 2013)], γ) άγνοια εκτέλεσης του αλγόριθμου με ταυτόχρονη προσπάθεια εύρεσης του αποτελέσματος με τη χρήση των δακτύλων, δ) εγγραφή του αποτελέσματος μιας στήλης σε άλλη στήλη (για παράδειγμα το αποτέλεσμα της στήλης των μονάδων γράφεται στις εκατοντάδες και το αντίστροφο) και ε) δανεισμός-διαμέσου-μηδενός, όπου ο/η μαθητής/τρια καλείται να δανειστεί από μία στήλη, όπου το πάνω ψηφίο είναι το μηδέν, προσπερνά αυτή τη στήλη και δανείζεται από την προηγούμενη. Και στην αφαίρεση παρατηρήθηκε συνδυασμός λαθών από μερικούς/ες μαθητές/τριες.

Κάποια από τα λάθη που έκαναν οι μαθητές/τριες είναι κοινά και για την πρόσθεση και για την αφαίρεση, και το σύνολο των λαθών τους μαρτυρά ελλειπή κατανόηση τόσο των πράξεων όσο και της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου.

Εδώ αξίζει να αναφερθεί μια γενική παρατήρηση, την οποία επεσήμανε και ο Χατζηγεωργίου (1990) στην έρευνά του. Σύμφωνα με αυτόν, η πλειονότητα των μαθητών/τριών δε θεωρεί την επαλήθευση ως οργανικό μέρος της πράξης και δε την εκτελεί ούτε στην πρόσθεση ούτε στην αφαίρεση. Οι Fiori & Zuccheri (2005), οι οποίες κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα, θεωρούν αρνητική τη διαδεδομένη συνήθεια της μη επαλήθευσης των αποτελεσμάτων των πράξεων από τους μαθητές/τριες, έστω για τη διαπίστωση της αποδεκτότητας αυτών των αποτελεσμάτων. Στις προσθέσεις και αφαιρέσεις του παρόντος ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση ουδείς/ουδεμία μαθητής/μαθήτρια προέβη στην εκτέλεση της επαλήθευσής τους.

Στην ερώτηση τι είναι το κρατούμενο, οι απαντήσεις των μαθητών/τριών, όπως και στην έρευνα της Poisard (2006), είναι αρκετά ασαφείς και στερούνται μαθηματικού νοήματος. Η εν λόγω ερευνήτρια, λαμβάνοντας υπόψη της τις αποκρίσεις των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνά της, δέχτηκε ως μαθηματικές απαντήσεις στο ερώτημα τις ακόλουθες: «μια δεκάδα», «ένας διψήφιος αριθμός», «κάτι που ξεπερνά το 9», «την ιδέα του περάσματος ανάμεσα στις μονάδες και τις δεκάδες» ή «το πέρασμα στην επόμενη στήλη». Από τους/τις μαθητές/τριες της παρούσας έρευνας, μόνο μία μαθήτρια, η Εύα, έκανε λόγο για δεκάδα.

Ανάλογα χαρακτηριστικά έχουν και οι απαντήσεις των μαθητών/μαθητριών σχετικά με το δανεικό. Βέβαια εδώ, παραπάνω από τους/τις μισούς/ες μαθητές/τριες, οι τέσσερις από τους/τις επτά, δεν έδωσαν καμία απάντηση σχετικά με το τι είναι το δανεικό.

Η σύλληψη των δύο παραπάνω εννοιών τόσο του δανεικού όσο και του κρατούμενου, απαιτεί βαθιά κατανόηση του συστήματος της αξίας θέσης ψηφίου (Poisard, 2006), την οποία προφανώς οι μαθητές/τριες δεν την έχουν σε ικανοποιητικό βαθμό.

4.2. Εφαρμογή της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης στη διδακτική παρέμβαση

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης εφαρμόστηκε η θεωρία της εργαλειακής γένεσης μέσα από στοχευμένες προς αυτή την κατεύθυνση δραστηριότητες. Επιπλέον, εφαρμογή βρήκε και η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης, η οποία, έχοντας ως σημείο εκκίνησης μια εργασία, που εκτελείται με τη βοήθεια του κινέζικο άβακα, συμβάλλει, μέσα από κατάλληλους χειρισμούς του/της δασκάλου/ας, στη μετατροπή των προσωπικών νοημάτων των μαθητών/τριών σε πιο «μαθηματικά» νοήματα. Στη συνέχεια παρατίθενται οι παρατηρήσεις από τις δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης, που εμπλέκουν τις εν λόγω θεωρίες.

4.2.1. Δραστηριότητες εργαλειακής γένεσης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η εργαλειακή προσέγγιση του Rabardel βασίζεται στη διάκριση του τεχνουργήματος από το εργαλείο. Σε γενικές γραμμές θα μπορούσε κανείς να πει ότι το τεχνούργημα είναι το αντικείμενο, το οποίο δίνεται στο χρήστη προκειμένου να το χρησιμοποιήσει σε κάποια δραστηριότητα. Το εργαλείο είναι κάτι πιο σύνθετο. Περιλαμβάνει το τεχνούργημα, αλλά και το σχήμα χρήσης του ατόμου που θα το χρησιμοποιήσει. Η διαδικασία μετατροπής του τεχνουργήματος σε εργαλείο καλείται εργαλειακή γένεση. Αυτή περιλαμβάνει δύο επιμέρους διαδικασίες: i) τη διαδικασία κατασκευής νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process), και ii) τη διαδικασία μετασχηματισμού του τεχνουργήματος σε εργαλείο (instrumentation process).

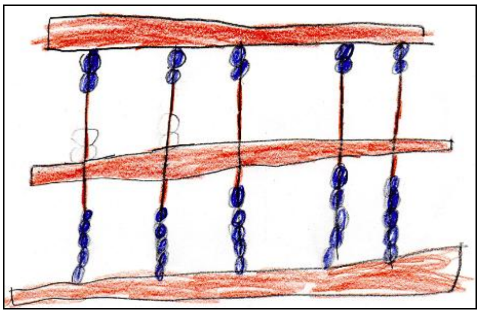
Κατά τη διαδικασία κατασκευής νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process) δόθηκαν στους/στις μαθητές/τριες δραστηριότητες, οι οποίες αφορούσαν: α) την ανακάλυψη των δομικών στοιχείων του εργαλείου (του κινέζικου άβακα), β) την εναλλακτική κατασκευή του εργαλείου, γ) τη συνειδητοποίηση της μέγιστης αναπαραστατικής δυνατότητας του ατομικού τους άβακα, και δ) την επέκταση του εργαλείου.

Στην πρώτη δραστηριότητα, της ανακάλυψης του εργαλείου, και στο ερώτημα «Μπορείς να γράψεις τι είναι αυτό που βλέπεις;», οι τέσσερις από τους/τις επτά μαθητές/τριες απάντησαν ότι μάλλον πρόκειται για έναν άβακα, οι δύο μίλησαν για αριθμητήριο (μάλιστα ο Κωνσταντίνος το ονόμασε «πίνακα μαθηματικών», λέγοντας αργότερα ότι εννοούσε το αριθμητήριο), ενώ ένα παιδί δεν έδωσε καμία απάντηση. Άλλωστε, τα παιδιά έχουν ασχοληθεί στις δύο προηγούμενες τάξεις με τον άβακα και το αριθμητήριο τόσο το ατομικό όσο και εκείνο της τάξης. Οπότε, οπτικά και μόνο, αναγνώρισαν κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ του κάθετου άβακα και του αριθμητηρίου από τη μια μεριά και του κινέζικου άβακα από την άλλη, όπως το σχήμα, τις στήλες και τις χάντρες, τα οποία και ανέφεραν. Άρα, επρόκειτο για ένα τεχνούργημα όχι εντελώς άγνωστο στα μάτια τους. Στη συζήτηση που ακολούθησε τη δραστηριότητα, μια μαθήτρια, η Εύα, ανέφερε χαρακτηριστικά: «Άμα το γυρίσουμε έτσι (εννοώντας τη στενή πλευρά του) είναι αριθμητήριο, άμα το γυρίσουμε έτσι (εννοώντας τη μεγάλη πλευρά του) είναι άβακας». Μια άλλη μαθήτρια, η Παρασκευή, είπε: «Είναι και τα δύο μαζί! Αριθμητοάβακας!». Τέλος, ένας μαθητής, ο Δημήτρης υποστήριξε ότι αριθμητήριο θα ήταν, αν δεν υπήρχε το διαχωριστικό στη μέση περίπου του πλαισίου, ενώ ο Αποστόλης μέτρησε τις χάντρες και βρήκε ότι σε κάθε ξυλάκι είναι επτά, ενώ οι χάντρες στο αριθμητήριο είναι δέκα.

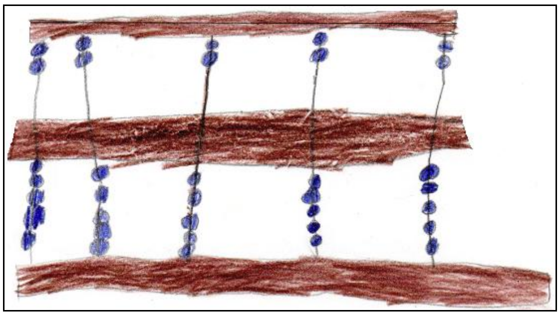
Στη συνέχεια, τα παιδιά κλήθηκαν να περιγράψουν με λεπτομέρειες γραπτά και με ένα σκίτσο τα δομικά στοιχεία του τεχνουργήματος. Οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες απέδωσαν το τεχνούργημα με περισσότερες λεπτομέρειες στο σκίτσο (και οι επτά), παρά στο κείμενο (οι τρεις από τους/τις επτά). Μάλιστα, ένας από αυτούς τους τρεις, ο Κωνσταντίνος, περιέγραψε ταυτόχρονα και πώς θα τον κατασκεύαζε ο ίδιος (με ποια σειρά, δηλαδή, θα τοποθετούσε τα υλικά). Ανέφερε χαρακτηριστικά:

«Αποτελείται από 3 φελλούς ορθογώνιους, πέντε ξυλάκια από σουβλάκια και 35 χάντρες. Φτιάχνεται: ο ένας φελλός μπαίνει κάτω, μετά βάζουμε τα ξυλάκια κάθετα, μετά στο πρώτο ξυλάκι βάζουμε πέντε χάντρες, στο δεύτερο πέντε χάντρες, στο τρίτο πέντε χάντρες, στο τέταρτο πέντε χάντρες, στο πέμπτο πέντε χάντρες. Μετά βάζουμε το δεύτερο φελλό στα ξυλάκια που περισσεύουν. Βάζουμε στο πρώτο δύο χάντρες, στο δεύτερο δύο, στο τρίτο δύο χάντρες, στο τέταρτο δύο χάντρες, στο πέμπτο δύο χάντρες και από πάνω τον τρίτο φελλό».

Επίσης, δύο από αυτούς/ές τους/τις τρεις μαθητές/τριες το απέδωσαν και με τα αντίστοιχα χρώματα του τεχνουργήματος. Ίσως η ηλικία των παιδιών να ευνοεί περισσότερο τη λεπτομερή απόδοση ενός αντικειμένου με μια ζωγραφιά, παρά με ένα κείμενο, αφού συνήθως δυσκολεύονται στην παραγωγή γραπτού λόγου. Ακολουθούν οι ζωγραφιές των προαναφερόμενων μαθητών.



Εικόνα 4.8. Ο κινέζικος άβακας όπως τον σχεδίασε ο Αποστόλης



Εικόνα 4.9. Ο κινέζικος άβακας όπως τον σχεδίασε ο Κωνσταντίνος

Οι υπόλοιποι/ες τέσσερις μαθητές/τριες περιέγραψαν χωρίς λεπτομέρειες τον άβακα. Ο Αποστόλης περιέγραψε μόνο το πλαίσιο με τις στήλες, ο Νίκος δεν ανέφερε τον αριθμό των στηλών, ο Δημήτρης ανέφερε ότι ο άβακας έχει 35 χάντρες, χωρίς να πει πόσες χάντρες έχει η κάθε στήλη, ενώ η Κατερίνα παρατήρησε ότι το πάνω τμήμα του άβακα έχει (συνολικά) 10 χάντρες και το κάτω 25 χάντρες.

Η περιγραφή ενός τεχνουργήματος, όσο πιο λεπτομερής είναι, υποδηλώνει και μεγαλύτερο βαθμό αναγνώρισης της δομής του από το χρήστη. Η καλή γνώση των μερών του τεχνουργήματος θα οδηγήσει με τη σειρά της στην εκμετάλλευση όλων των δυνατοτήτων του, όταν αυτό χρησιμοποιηθεί για την επίτευξη μιας εργασίας. Η Bartolini Bussi (2011) αναφέρει ότι η απουσία μιας βαθιάς κατανόησης των μερών του τεχνουργήματος μπορεί σύντομα να οδηγήσει σε μια αβέβαιη χρήση του.

Στο ερώτημα «Τι μπορείς να κάνεις με αυτό το εργαλείο;», τα περισσότερα παιδιά, αφού υπέθεσαν νωρίτερα ότι αυτό θα μπορούσε να είναι ένας άβακας ή ένα αριθμητήριο, άρα να έχει σχέση με τα μαθηματικά, και καθώς έχουν χρησιμοποιήσει στο παρελθόν και άβακα και αριθμητήριο, αποφάνθηκαν ότι μπορούν με αυτό να μετρήσουν, να υπολογίσουν, να γράψουν αριθμούς. Μια μαθήτρια αποκρίθηκε: «Με αυτό το εργαλείο μπορείς να παίξεις», ενώ ένας μαθητής το χαρακτήρισε «παιχνίδι», με το οποίο μπορεί και να παίξει και να μετρήσει. Τέλος, στη συζήτηση μετά τη δραστηριότητα, μια μαθήτρια ανέφερε ότι με αυτό μπορεί κανείς να κάνει και θόρυβο, υπονοώντας ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως μουσικό όργανο. Ενώ ένας συμμαθητής της ανέφερε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως κουδουνίστρα για τα μωρά.

Στη δραστηριότητα, της εναλλακτικής κατασκευής του εργαλείου, της κατασκευής του, δηλαδή, με τη χρήση διαφορετικών υλικών, τα οποία υπάρχουν συνήθως στο σπίτι, οι μαθητές/τριες πρότειναν για την κατασκευή του πλαισίου του άβακα: ορθογώνια κομμάτια από ξύλο, από αφρολέξ, το οποίο υπάρχει σε ποτήρια μιας χρήσεως, από χαντρό χαρτόνι, μολύβια. Για τις στήλες θα χρησιμοποιούσαν ξυλάκια από σουβλάκια, κομμάτια σύρματος και πλαστικά καλαμάκια. Για τις χάντρες του άβακα δεν είχαν πολλές ιδέες· ανέφεραν χάντρες από κολιέ ή βραχιόλια, ενώ ένας μαθητής πρότεινε μπίλιες. Φαίνεται ότι περιόρισαν τη σκέψη τους σε υλικά παραπλήσια με εκείνα που κατασκεύασαν το δικό τους άβακα. Στη συζήτηση, όμως, που ακολούθησε, διεύρυναν τη σκέψη τους, επιστράτευσαν τη φαντασία τους και πρότειναν περισσότερα υλικά για χάντρες: πλαστικά καπάκια, ρόδες από χαλασμένα αυτοκινητάκια, κομμάτια γόμας, λεπτούς κυλίνδρους από χαρτόνι, παλιά νομίσματα (δεκάρες), οι οποίες διαθέτουν μια οπή στο κέντρο τους, και κομμάτια από φελλούς μπουκαλιών. Το γεγονός ότι τα παιδιά μπόρεσαν να προτείνουν διαφορετικά υλικά από αυτά που είδαν για την κατασκευή του άβακα, μπορεί να σημαίνει βαθύτερη κατανόηση των μερών από τα οποία αποτελείται.

Με την επόμενη δραστηριότητα επιχειρήθηκε να ανιχνευθεί αν οι μαθητές/τριες μπορούν να αναγνωρίσουν τη μέγιστη αναπαραστατική δυνατότητα του κινέζικου άβακα με τις πέντε στήλες, που χρησιμοποιούν οι ίδιοι/ες. Πιο συγκεκριμένα κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα: «Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορείς να σχηματίσεις στον κινέζικο άβακα με τις πέντε στήλες που κρατάς;». Στη συνέχεια τούς ζητήθηκε να σχεδιάσουν τον άβακα με το συγκεκριμένο αριθμό και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Προκειμένου να εφαρμόσουν τους κανόνες λειτουργίας του άβακα, τους ζητήθηκε να σχηματίσουν έναν αριθμό, για τον οποίο δε θα υποχρεώνονταν να προβούν στη συνέχεια σε ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας. Μόνο μια μαθήτρια, η Εύα, αντιλήφθηκε πόσες χάντρες έπρεπε να ενεργοποιήσει σε κάθε στήλη. Εξηγώντας γραπτά τον τρόπο σκέψης της, ανέφερε χαρακτηριστικά: «Για να μην ενεργοποιήσω όλες τις χάντρες και του ουρανού και της γης, ενεργοποίησα μία λιγότερη, για να μη χρειαστεί να κάνω ανταλλαγές». Όλοι/ες οι άλλοι/ες μαθητές/τριες σχημάτισαν μικρότερους αριθμούς από το μέγιστο που θα μπορούσαν. Ο Κωνσταντίνος πρότεινε τον αριθμό 66.666, τον οποίο σχημάτισε, όπως είπε, ενεργοποιώντας όλες τις χάντρες του άβακα και κάνοντας ανταλλαγές. Ο Αποστόλης πρότεινε τον αριθμό 77.777 χωρίς, όμως, να εξηγεί πώς εργάστηκε. Το μόνο που ανέφερε είναι: «Σκέφτηκα να βάλω αυτές τις χάντρες, γιατί είναι ο μεγαλύτερος αριθμός». Και η Παρασκευή σχημάτισε τον ίδιο αριθμό. Στη συζήτηση που ακολούθησε τη δραστηριότητα εξήγησε πώς σκέφτηκε: ενεργοποίησε μόνο μία χάντρα του ουρανού σε κάθε στήλη, γιατί αν ενεργοποιούσε δύο, θα έπρεπε να κάνει ανταλλαγές. Έπειτα, ενεργοποίησε από μία χάντρα της γης σε κάθε στήλη. Προφανώς η μαθήτρια λανθασμένα εφάρμοσε τον κανόνα των ανταλλαγών, που ισχύουν για τις χάντρες του ουρανού, στις χάντρες της γης. Για να γίνουν ανταλλαγές στο κάτω τμήμα του άβακα (της γης) πρέπει σε μια στήλη να είναι ενεργοποιημένες και οι πέντε χάντρες. Στη συνέχεια σκέφτηκε να ενεργοποιήσει άλλη μία χάντρα της γης σε κάθε στήλη, για να μεγαλώσει τον αριθμό. Η Κατερίνα αναπαρέστησε τον αριθμό 40.000 χωρίς να εξηγήσει το γιατί ούτε στο φύλλο της δραστηριότητας ούτε κατά τη συζήτηση. Και ο Νίκος δεν έδωσε καμιά ουσιαστική εξήγηση για τον αριθμό 50.000 που σχημάτισε. Το μόνο που ανέφερε ήταν: «Νομίζω ότι ο αριθμός 50.000 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός στον κινέζικο άβακα». Ο Δημήτρης ενεργοποίησε όλες τις χάντρες στη στήλη των δεκάδων χιλιάδων, φτιάχνοντας τον αριθμό 150.000. Ο δάσκαλος τον ρώτησε αν θα πρέπει να κάνει ανταλλαγές, αφού όλες οι χάντρες της στήλης είναι ενεργοποιημένες. Εκείνος απάντησε θετικά, αλλά δεν προέβη σε καμιά περαιτέρω ενέργεια. Η Παρασκευή ήταν η μοναδική μαθήτρια από εκείνους/ες που απάντησαν λάθος, η οποία, κατά τη διάρκεια της συζήτησης, κατάλαβε πώς θα έπρεπε να είχε σκεφτεί, ώστε να βρει το μεγαλύτερο αριθμό. Στους/στις υπόλοιπους/ες έγινε αντιληπτό μετά την εξήγηση που έδωσε η Εύα για τον τρόπο που σκέφτηκε και εργάστηκε.

Στη δραστηριότητα επέκτασης του εργαλείου, οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα αν στον άβακα που κρατάνε, ο οποίος διαθέτει πέντε στήλες (μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων, χιλιάδων, δεκάδων χιλιάδων), μπορούν να σχηματίσουν τον αριθμό 100.000. Σε περίπτωση θετικής απάντησης καλούνταν να σχεδιάσουν τον άβακα, που αναπαριστά τον αριθμό. Σε περίπτωση αρνητικής απόκρισης προτρέπονταν να σκεφτούν έναν τρόπο, ώστε να μπορέσουν να αναπαραστήσουν τον αριθμό, να εξηγήσουν τον τρόπο αυτό και να σχεδιάσουν τον άβακα με την απάντηση. Αρχικά, οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες ανέφεραν ότι επρόκειτο για μια πολύ εύκολη δραστηριότητα, καθώς κατέφυγαν στο εξής σχήμα χρήσης: να ενεργοποιήσουν τις δύο χάντρες του ουρανού στη στήλη των δεκάδων χιλιάδων, αξίας 50.000 έκαστη. Ο Κωνσταντίνος, μάλιστα, είπε: «Στο τσακ μπορώ», εννοώντας προφανώς ότι ο αριθμός σχηματίζεται στην τελευταία στήλη του άβακά του και μάλιστα στο πάνω μέρος του. Όμως, ο δάσκαλος υπενθύμισε σε όλους/όλες τον κανόνα λειτουργίας του άβακα, σύμφωνα με τον οποίο, όταν ενεργοποιηθούν και οι δύο χάντρες του ουρανού σε μια στήλη, πρέπει να ανταλλαγούν με μία χάντρα της γης στην αριστερή στήλη. Μετά την επισήμανση αυτή, η Εύα αυθόρμητα ρώτησε: «Μπορώ να κάνω και έξι στήλες;», για να πάρει την απάντηση από τον Κωνσταντίνο: «Όσες θες μπορείς να κάνεις!». Έτσι, τα δύο αυτά παιδιά βρήκαν τον τρόπο να αναπαραστήσουν τον αριθμό στον άβακα. Η Εύα έγραψε: «Έκανα άλλη μια στήλη και ενεργοποίησα μία χάντρα της γης των εκατοντάδων χιλιάδων.», ενώ ο Κωνσταντίνος σημείωσε: «Ενεργοποίησα 1 χάντρα στη στήλη των ΕΧ της γης. Στον άβακά μου δεν υπάρχει στήλη των ΕΧ και έκανα έναν άβακα με 6 στήλες στο πλαίσιο.». Οι άλλοι/ες πέντε μαθητές/τριες, παρόλο που άκουσαν τα λεγόμενα των δύο παιδιών, δεν αντιλήφθηκαν αμέσως τι θα μπορούσαν να κάνουν. Οι τέσσερις από αυτούς/ες, μάλιστα, κατέφυγαν σε ένα άλλο σχήμα χρήσης: σχημάτισαν και πάλι τον αριθμό 100.000 ενεργοποιώντας μια χάντρα στη στήλη των δεκάδων χιλιάδων αξίας 50.000 και πέντε χάντρες της γης στην ίδια στήλη αξίας 10.000 η καθεμία. Ο δάσκαλος και πάλι επενέβη και ζήτησε από τα παιδιά να θυμηθούν τον κανόνα λειτουργίας του άβακα, που ορίζει ότι, όταν ενεργοποιούνται όλες οι χάντρες της γης σε μια στήλη, ανταλλάσσονται με μία χάντρα του ουρανού στην ίδια στήλη. Τότε τα παιδιά ήρθαν σε πραγματικό αδιέξοδο. Σιγά-σιγά, όμως, άρχισαν να ξανασκέφτονται τους δύο κανόνες λειτουργίας του άβακα, που αναφέρθηκαν παραπάνω, και να οδηγούνται στη λύση του μυστηρίου. Οι απαντήσεις που έδωσαν ήταν οι εξής: Κατερίνα: «Έβαλα μια στήλη των εκατοντάδων χιλιάδων.», Παρασκευή: «Απενεργοποίησα δύο χάντρες του ουρανού στη στήλη των ΔΧ και ενεργοποίησα μία χάντρα της γης στη στήλη των ΕΧ. Πρόσθεσα μία στήλη, που δεν υπάρχει στον άβακά μου.», Δημήτρης: «Θα προσθέσω μια στήλη των εκατοντάδων χιλιάδων και θα ενεργοποιήσω μια χάντρα της γης.», Νίκος: «Έβαλα μια ακόμη στήλη που είναι των 100.000. Απενεργοποίησα δύο χάντρες του ουρανού στην προτελευταία στήλη και ενεργοποίησα μία χάντρα της γης στην τελευταία στήλη.». Μόνο ένας μαθητής, ο Αποστόλης, δεν μπόρεσε μόνος του να σκεφτεί κάτι και να δώσει μια απάντηση στο ερώτημα.

Για τη διαδικασία μετασχηματισμού του τεχνουργήματος σε εργαλείο (instrumentation process), οι μαθητές/τριες ασχολήθηκαν με τις εξής δραστηριότητες: α) την ανακάλυψη του τρόπου λειτουργίας του άβακα, β) την αναπαράσταση ενός τριψήφιου αριθμού στον άβακα, γ) την εκτέλεση μιας πρόσθεσης στον άβακα, και δ) την εκτέλεση μιας αφαίρεσης στον άβακα.

Η δραστηριότητα ανακάλυψης του τρόπου λειτουργίας του κινέζικου άβακα έλαβε χώρα στους Η/Υ του εργαστηρίου πληροφορικής του σχολείου. Οι μαθητές/τριες μέχρι τώρα γνωρίζουν τον άβακα, που αποτελείται από κάθετες στήλες, που η καθεμία αναπαριστά διαφορετική θέση αξίας. Σε κάθε στήλη η κάθε χάντρα αναπαριστά είτε 1 μονάδα είτε 1 δεκάδα είτε 1 εκατοντάδα κτλ. Πιθανόν ο διαχωρισμός των στηλών του κινέζικου άβακα σε δύο τμήματα να αποτελούσε για τα παιδιά ανυπέρβλητο εμπόδιο στην ανακάλυψη του τρόπου λειτουργίας του. Για αυτό κρίθηκε σκόπιμο η δραστηριότητα να μεταφερθεί στον ηλεκτρονικό άβακα. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή υπάρχει δίπλα στον άβακα ένα πλαίσιο, το οποίο αναγράφει την αξία της κάθε χάντρας που ενεργοποιείται και προστίθεται στο προηγούμενο σύνολο ή αφαιρείται από αυτό, όταν απενεργοποιείται. Μάλιστα για να μη σχηματίζονται μεγάλοι αριθμοί, τους οποίους τα παιδιά δεν μπορούν να αναγνωρίσουν και να διαχειριστούν, ο δάσκαλος έδωσε την οδηγία να ασχοληθούν μόνο με τις πέντε τελευταίες στήλες.

Από τους/τις επτά μαθητές/τριες οι τρεις έδιναν την εντύπωση ότι αλληλεπιδρούσαν με την ηλεκτρονική μορφή του τεχνουργήματος με έναν τυχαίο τρόπο. Ενεργοποιούσαν και απενεργοποιούσαν τις χάντρες του ανεξέλεγκτα σε όλες τις στήλες του άβακα, χωρίς να παρατηρούν τι αναγράφεται κάθε φορά στο πλαίσιο.

Προσπαθούσαν να δημιουργήσουν τεράστιους αριθμούς, τους οποίους δεν μπορούσαν φυσικά να διαβάσουν, και με τα λόγια και τα επιφωνήματά τους έδειχναν να εκπλήσσονται από τους αριθμούς που σχηματίζονταν. Έτσι συνέχισαν να εργάζονται, παρά τις υποδείξεις του δασκάλου, και φυσικά δεν ανακάλυψαν τίποτα για τον τρόπο λειτουργίας του άβακα.

Οι υπόλοιποι/ες μαθητές/τριες εργάστηκαν πιο μεθοδικά και μπόρεσαν να εξηγήσουν την αξία της κάθε χάντρας σε κάθε στήλη και σε κάθε τμήμα της κάθε στήλης. Μάλιστα, μια μαθήτρια, η Εύα, από πολύ νωρίς (από το πέμπτο κιόλας λεπτό της ενασχόλησής της με τον άβακα) κατάλαβε, όπως είπε, ότι η τελευταία στήλη δείχνει μονάδες, η διπλανή της, στα αριστερά, δεκάδες, η τρίτη εκατοντάδες και η τέταρτη χιλιάδες. Παρατήρησε ότι, ενεργοποιώντας τις δύο χάντρες του ουρανού στην πρώτη στήλη, αυτές έχουν αξία 5 και 5, στη δεύτερη στήλη έχουν αξία 50 και 50, στην τρίτη 500 και 500 και στην τέταρτη 5.000 και 5.000.

Ωστόσο, τη σκοπιμότητα της διαχωριστικής δοκού στις στήλες του άβακα μόνο μία μαθήτρια την προσέγγισε, λέγοντας ότι χωρίζει την κάθε στήλη, χωρίς να εξηγήσει σε τι. Ο Κωνσταντίνος ανέφερε: «Είναι τα διπλάσια τα πάνω!», εννοώντας ότι το άθροισμα των χαντρών του πάνω τμήματος του άβακα σε κάθε στήλη είναι ο διπλάσιος αριθμός του αθροίσματος του κάτω τμήματος του άβακα στην αντίστοιχη στήλη. Όλοι/ες ανακάλυψαν ότι οι χάντρες ενεργοποιούνται μόνο όταν έρθουν σε επαφή με τη διαχωριστική δοκό και απενεργοποιούνται, όταν απομακρυνθούν από αυτή.

Στην επόμενη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες, αν μπορούν, να σχηματίσουν τον αριθμό 107 στον ατομικό τους άβακα, να σχεδιάσουν έναν άβακα στο φύλλο με τη δραστηριότητα, ο οποίος να αναπαριστά τον αριθμό, να εξηγήσουν πώς το έκαναν, και να απαντήσουν στο ερώτημα: «Γιατί είσαι σίγουρος/η ότι το έκανες σωστά;». Όλοι/ες οι μαθητές/τριες απάντησαν ότι μπορούν να σχηματίσουν τον αριθμό στον άβακά τους. Οι τέσσερις από αυτούς/ες, για να αναπαραστήσουν το 107, ενεργοποίησαν μία χάντρα της γης στη στήλη των εκατοντάδων, και στη στήλη των μονάδων ενεργοποίησαν μία χάντρα του ουρανού και δύο χάντρες της γης. Αυτό είναι το ένα σχήμα χρήσης, όπου η αναπαράσταση του αριθμού 100 γίνεται με μία χάντρα της γης στη στήλη των εκατοντάδων. Αυτός είναι και ο επίσημος τρόπος αναπαράστασης του αριθμού στον κινέζικο άβακα. Οι υπόλοιποι/ες τρεις ενεργοποίησαν δύο χάντρες του ουρανού στη στήλη των δεκάδων, αξίας 50+50=100, και στη στήλη των μονάδων μία χάντρα του ουρανού και δύο της γης, συνολικής αξίας 7 μονάδων. Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης του 100, με δύο χάντρες του ουρανού ενεργοποιημένες στη στήλη των δεκάδων, αποτελεί το δεύτερο σχήμα χρήσης. Πρόκειται, όμως, για το μη επίσημο τρόπο εγγραφής ενός αριθμού στον άβακα, καθώς απαιτείται η ανταλλαγή των δύο χαντρών του ουρανού της στήλης των δεκάδων με μία χάντρα της γης της στήλης των εκατοντάδων, αξίας επίσης 100. Μάλιστα μια μαθήτρια, η Εύα, ανέφερε και τα δύο σχήματα χρήσης για την αναπαράσταση του αριθμού. Επίσης, όλοι/ες οι μαθητές/τριες σχεδίασαν στο φύλλο εργασίας τον άβακα με τον αριθμό 107, ανάλογα με τον τρόπο αναπαράστασης που σκέφτηκε ο/η καθένας/καθεμία. Η εξήγηση, που έδωσαν οι περισσότεροι/ες στο ερώτημα γιατί είναι σίγουροι/ες ότι αναπαρέστησαν σωστά τον αριθμό, είχε τη μορφή αθροίσματος. Άθροισαν την αξία όλων των χαντρών και βρήκαν τον αριθμό 107. Έτσι, ανέφεραν: Εύα: «Γιατί 50+50=100, οι χάντρες του ουρανού στις δεκάδες, και 2 μονάδες από τις χάντρες της γης, 102, και 5 από του ουρανού, 107.», Κωνσταντίνος: «Οι χάντρες που ενεργοποίησα στη στήλη των δεκάδων δείχνουν 100. Η στήλη των μονάδων δείχνει 5 στον ουρανό και 2 στη γη.», Κατερίνα: «Η χάντρα στη στήλη των Ε έχει αξία 100 και οι χάντρες στη στήλη των Μ έχουν αξία 7. 100+7=107.», Αποστόλης: «Οι χάντρες στη στήλη των δεκάδων έχουν 100 και στη στήλη των μονάδων 7. 100+7=107.», Παρασκευή: «Είμαι σίγουρη ότι το έκανα σωστά, γιατί ενεργοποίησα τις σωστές χάντρες. Η χάντρα της στήλης των εκατοντάδων έχει αξία 100. Η χάντρα στη στήλη των μονάδων από τον ουρανό έχει αξία 5. Οι χάντρες στη στήλη των μονάδων στη γη έχουν αξία 2.», Δημήτρης: «Οι χάντρες στη στήλη των μονάδων έχουν αξία 2. Οι χάντρες στη στήλη του ουρανού έχουν αξία 5. Η χάντρα στη στήλη των εκατοντάδων έχει αξία 100. Άρα 100+5+2=107.». Μόνο ο Νίκος δεν έδωσε καμία εξήγηση.

Στη συνέχεια των δραστηριοτήτων μετασχηματισμού του τεχνουργήματος σε εργαλείο, τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν αν μπορούν να εκτελέσουν την πρόσθεση 108+241 στον άβακα. Η δραστηριότητα αυτή δόθηκε πριν κάνει αναφορά ο δάσκαλος στο τρόπο εκτέλεσης μιας πρόσθεσης στον άβακα. Έπειτα, τους ζητήθηκε να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν, και να δηλώσουν το αποτέλεσμα που βρήκαν. Όλοι/ες οι μαθητές/τριες ανέφεραν ότι μπορούν να κάνουν την παραπάνω πρόσθεση στον ατομικό τους άβακα. Επίσης, όλοι/ες εξήγησαν πώς εργάστηκαν, και μάλιστα έδωσαν την ίδια εξήγηση: σχημάτισαν πρώτα τον αριθμό

108, ενεργοποιώντας τις αντίστοιχες χάντρες στις στήλες του άβακα, και έπειτα προχώρησαν στο σχηματισμό του αριθμού 241. Όμως, από τους/τις επτά μαθητές/τριες μόνο οι πέντε βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα (349). Οι άλλοι δύο, ο Δημήτρης και ο Νίκος, αφού σχημάτισαν το 108, στη συνέχεια ξεκίνησαν να βάλουν το 200 του αριθμού 241. Καθώς, όμως, έβαλαν μια χάντρα στη στήλη των εκατοντάδων, σχηματίστηκε ο αριθμός 200, αφού ήδη ήταν ενεργοποιημένη η χάντρα του 100 από τον αριθμό 108. Έτσι, παρέλειψαν να προσθέσουν άλλη μια εκατοντάδα, και το λανθασμένο αποτέλεσμα που βρήκαν ήταν ο αριθμός 249. Η απάντηση της Εύας στο φύλλο εργασίας: «Ενεργοποίησα 1 εκατοντάδα και 8 μονάδες, και ενεργοποίησα πάλι 2 εκατοντάδες και 4 δεκάδες και 1 μονάδα, και πρόσθεσα το 108 και το 241, και μου βγήκε 349, γιατί 108+249=349», κατά τη φάση της συζήτησης, έδωσε την ευκαιρία στο διδάσκοντα να ρωτήσει: «Αφού τοποθετήσεις τους δύο αριθμούς στον άβακα, χρειάζεται να κάνεις κάτι ακόμα ή το αποτέλεσμα είναι έτοιμο;». Ο Κωνσταντίνος αποφάνθηκε ότι το αποτέλεσμα είναι έτοιμο. Για να αποδείξει ο δάσκαλος στα παιδιά ότι και ο άβακας αποτελεί ένα εργαλείο για τους αριθμούς, τα κάλεσε να συγκρίνουν τον τρόπο λειτουργίας ενός υπολογιστή τσέπης και του άβακα. Η Εύα είπε ότι για να γίνει μια πρόσθεση στον υπολογιστή πρέπει κανείς να πατήσει το «και» (+) μεταξύ των αριθμών που προστίθενται, και στη συνέχεια το ίσον για να εξαχθεί το αποτέλεσμα. Αντίθετα, στον άβακα δε χρειάζονται αυτές οι ενέργειες, καθώς το αποτέλεσμα σχηματίζεται αυτόματα. Με αφορμή την παρούσα δραστηριότητα, ο δάσκαλος ζήτησε από τα παιδιά να θυμηθούν τη δραστηριότητα ανακάλυψης του εργαλείου, και την ερώτηση: «Μπορείς να σκεφτείς τι μπορείς να κάνεις με αυτό το εργαλείο;». Τους υπενθύμισε τις κυρίαρχες απαντήσεις τους: «Να μετράς», «Να παίζεις», «Να γράφεις αριθμούς», και τους έθεσε το ερώτημα: «Αν σας έδινα εκείνο το φύλλο εργασίας σήμερα και σας ρωτούσα τι μπορείς να κάνεις με τον κινέζικο άβακα, τι θα απαντούσατε;». Τότε εκείνα συμπλήρωσαν: «Προσθέσεις!». Και συνέχισαν αυθόρμητα: «Αφαιρέσεις!», Πολλαπλασιασμούς!», «Διαιρέσεις!», αφού ο διδάσκων δεν είχε κάνει μέχρι εκείνη τη στιγμή καμία αναφορά στις δυνατότητες του κινέζικου άβακα. Ωστόσο, επιβεβαίωσε τις προτάσεις των μαθητών/τριών.

Στην τελευταία δραστηριότητα ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες να αποφανθούν αν μπορούν να εκτελέσουν την αφαίρεση 245-108 στον κινέζικο άβακα. Σκόπιμα επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένοι αριθμοί, ώστε να προκύπτει η ανάγκη δανεισμού, καθώς σε αντίθετη περίπτωση η αφαίρεση δε θα παρουσίαζε καμία δυσκολία. Σε περίπτωση θετικής απάντησης καλούνταν να εξηγήσουν πώς εργάστηκαν και τι αποτέλεσμα βρήκαν, ενώ αν απαντούσαν αρνητικά να εξηγήσουν τι ήταν εκείνο που στάθηκε εμπόδιο. Οι τέσσερις από τους/τις επτά μαθητές/τριες απάντησαν θετικά. Ωστόσο, η Εύα είναι η μοναδική μαθήτρια που έφτασε στη σωστή απάντηση. Σκέφτηκε να μεταφέρει μία δεκάδα στη στήλη των μονάδων, ώστε να γίνει εφικτή η αφαίρεση των 8 μονάδων από τις 5 (πλέον 15) μονάδες, αφού εκεί εντόπισε τη δυσκολία της συγκεκριμένης αφαίρεσης. Οι άλλοι/ες τρεις εκτέλεσαν τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με λάθος τρόπο και κατέληξαν σε λάθος αποτέλεσμα. Η Παρασκευή, κάνοντας την αφαίρεση 5-8 στη στήλη των μονάδων, βρήκε ως αποτέλεσμα το 0 στη στήλη αυτή. Η Κατερίνα, για να μπορέσει να κάνει την αφαίρεση 5-8, πρόσθεσε αυθαίρετα άλλες πέντε μονάδες στον αριθμό 5, ώστε το 5 να γίνει 10. Ο Νίκος στην αφαίρεση στη στήλη των μονάδων 5-8, αφαίρεσε μόνο 5 μονάδες και βρήκε ως αποτέλεσμα της στήλης το 0. Αυτός ο τρόπος εκτέλεσης της αφαίρεσης μάλλον υποκρύπτει παρανοήσεις στην εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης. Οι υπόλοιποι/ες τρεις μαθητές/τριες αποφάνθηκαν ότι δεν μπορούν να κάνουν την αφαίρεση στον άβακα. Όλοι/ες το εμπόδιο το εντόπισαν στη στήλη των μονάδων. Έγραψαν ως εξήγηση: Κωνσταντίνος: «Γιατί από το 200 και το 40 γίνεται να αφαιρέσω, αλλά από το 5 δε γίνεται (εννοείται να αφαιρέσω 8), γιατί θα μου βγει ο αριθμός -3.», Αποστόλης: «Από το 200 θα αφαιρέσουμε το 100, από το 40 δε θα αφαιρέσουμε τίποτα.Το τελευταίο δε γίνεται (εννοεί να αφαιρέσει 8 μονάδες από 5).», Δημήτρης: «Δεν μπορώ από τα 5 να βγάλω 8.».

Να σημειωθεί ότι οι περισσότερες από τις δραστηριότητες είναι παρμένες από τις αναφορές της Fiorani (2013), και τις έρευνες και τα διδακτικά πειράματα των Maschietto (2015) και Bartolini Bussi & Maschietto (2008). Επίσης, να αναφερθεί ότι είναι προσαρμοσμένες στον κινέζικο άβακα, καθώς οι παραπάνω ερευνητικές εργασίες αφορούσαν την αριθμομηχανή με οδοντωτούς τροχούς 0+1 ή αλλιώς Pascaline από το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Μπλεζ Πασκάλ (Blaise Pascal), ο οποίος την κατασκεύασε (1642).

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, θα μπορούσε κανείς να αποφανθεί ότι σε γενικές γραμμές,σύμφωνα με τις απαντήσεις των παιδιών στα φύλλα δραστηριοτήτων και το διάλογο που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια των συζητήσεων στην ολομέλεια της τάξης μετά από κάθε δραστηριότητα, επετεύχθη η μετατροπή του κινέζικου άβακα από τεχνούργημα σε εργαλείο. Μπορεί ο/η κάθε μαθητής/τρια να μην κατάφερε μόνος/η του/της να δώσει αποδεκτές ή πλήρεις απαντήσεις (γραπτές, προφορικές, συμβολικές, σχεδιαστικές) σε όλα τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων. Να μην κατάφερε, δηλαδή, να αναπτύξει τα κατάλληλα σχήματα χρήσης. Ωστόσο, ο καθένας/η καθεμία μπορεί να υιοθετήσει τα σχήματα χρήσης των συμμαθητών/τριών του/της, αφού τα σχήματα χρήσης έχουν τόσο μια προσωπική όσο και μια κοινωνική διάσταση (Beguin & Rabardel, 2000, όπως αναφ. στο Maschietto, 2015). Αποτελούν προσωπική κατασκευή του ατόμου ή/και αποτέλεσμα της οικειοποίησης των σχημάτων που διαμορφώνονται από την κοινότητα (της τάξης).

4.2.2. Δραστηριότητες σημειωτικής διαμεσολάβησης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η Bartolini Bussi και η Mariotti έχουν πειραματιστεί και έχουν αναπτύξει μια παιδαγωγική θεωρία για τη χρήση τεχνουργημάτων στην τάξη των μαθηματικών. Πρόκειται για τη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Στην τάξη των μαθηματικών ένα τεχνούργημα μπορεί να είναι οποιοδήποτε αντικείμενο, το οποίο έχει τη δυνατότητα να διαμεσολαβήσει ένα κομμάτι μαθηματικής γνώσης. Με λίγα λόγια θα μπορούσε κανείς να πει ότι στόχος της θεωρίας είναι να περιγράψει και να εξηγήσει τη διαδικασία, η οποία ξεκινά με το/τη μαθητή/τρια να χρησιμοποιεί ένα τεχνούργημα, και καταλήγει με την απόκτηση μιας συγκεκριμένη μαθηματικής γνώσης από τον/την ίδιο/α μαθητή/τρια.

Στη διδακτική παρέμβαση και στον άξονα των ακέραιων αριθμών, οι μαθητές/τριες ασχολήθηκαν με τη δραστηριότητα που στόχευε στην ανάδειξη της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Αρχικά, ο δάσκαλος ζήτησε από τους/τις μαθητές/τριες να σχηματίσουν στον ατομικό τους άβακα τον αριθμό 342. Αφού τον σχημάτισαν, ένας μαθητής, ο Αποστόλης, εξήγησε προφορικά πώς εργάστηκε. Ανέφερε χαρακτηριστικά: «Ανέβασα τρεις μπαλίτσες στο τρίτο ξυλάκι από το τέλος, μετά ανέβασα αυτές τις μπαλίτσες στο προτελευταίο ξυλάκι και μία μπαλίτσα σε αυτό το ξυλάκι».

Η εξήγηση, που έδωσε ο μαθητής, συνιστά ένα πλαισιοθετημένο κείμενο, αφού σχετίζεται με τη συγκεκριμένη κατάσταση της αναπαράστασης του αριθμού 342, και αντικατοπτρίζει τα προσωπικά του νοήματα για τον τρόπο αναπαράστασής του. Το κείμενο του μαθητή περιλαμβάνει καθημερινές εκφράσεις (ανέβασα, μπαλίτσες, ξυλάκι), αλλά και δεικτικές εκφράσεις (αυτές τις μπαλίτσες, σε αυτό το ξυλάκι).

Έπειτα, ζητήθηκε από τα παιδιά να καταγράψουν στο πρόχειρό τους τον τρόπο με τον οποίο σχημάτισαν τον αριθμό στον άβακά τους και να τον δείξουν με ένα σκίτσο. Το κείμενο του Αποστόλη ήταν το εξής: «Ανέβασα τρεις μπαλίτσες στο τρίτο ξυλάκι από το τέλος, μετά ανέβασα τέσσερις μπάλες στο προτελευταίο ξυλάκι και μετά μία μπαλίτσα στο τελευταίο το ξυλάκι». Έτσι, ο μαθητής, αφού υποχρεώθηκε να γράψει, και όχι να δείξει, τον τρόπο που εργάστηκε, αντικατέστησε τις παραπάνω δεικτικές εκφράσεις με τα αντικείμενα που εννοεί. Η φράση «αυτές τις μπαλίτσες» μετατράπηκε σε «τέσσερις μπάλες», ενώ η φράση «σε αυτό το ξυλάκι» έγινε «στο τελευταίο το ξυλάκι». Επομένως, οι πληροφορίες του μαθητή έγιναν πιο σαφείς.

Ο Αποστόλης, για να δείξει με σκίτσο τον τρόπο που εργάστηκε, δίπλα στις χάντρες που ενεργοποιούσε σε κάθε στήλη, σχεδίαζε και ένα βελάκι (↑) για να δείξει την κατεύθυνση της κίνησης που έκανε με τα δάχτυλά του. Αντικατέστησε, δηλαδή, τη λέξη «ανέβασα» με την εικόνα ενός βέλους.

Το παραπάνω κείμενο του μαθητή, με τον τρόπο που είναι διατυπωμένο, σε καμιά περίπτωση δε συνιστά μαθηματικό κείμενο. Υπάρχουν, όμως σπέρματα μαθηματικού περιεχομένου, αφού τα ξυλάκια, που αναφέρει ο μαθητής, περιγράφουν τις στήλες του άβακα και παραπέμπτουν στις θέσεις αξίας του αριθμού, ενώ οι μπαλίτσες περιγράφουν τις χάντρες του άβακα και αναφέρονται στον αριθμό των μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων, που συγκροτούν τον τριψήφιο αριθμό.

Στην ερώτηση του δασκάλου: «Από ποιους αριθμούς φτιάχτηκε το 342;», ο Αποστόλης απάντησε: «Από το τρία, από το τέσσερα και από το δύο». Στην απάντηση αυτή του μαθητή αναδεικνύεται η αντίληψή του για τους πολυψήφιους αριθμούς. Όπως φάνηκε και από τις απαντήσεις του στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση, αντιμετωπίζει το συγκεκριμένο τριψήφιο αριθμό ως μια αλληλουχία μονοψήφιων αριθμών, τοποθετημένων ο ένας δίπλα στον άλλο, οι οποίοι δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους. Πρόκειται για την εννοιολογική δομή, που η Fuson (1990) ονομάζει «σύνδεση μονοψήφιων (αριθμών) σε αλληλουχία» (concatenated single-digit ή αλλιώς CDS). Έπειτα, ο δάσκαλος ζήτησε από τον Αποστόλη να διαβάσει τον αριθμό και εκείνος τον διάβασε σωστά. Στη συνέχεια τον ρώτησε σταδιακά: «Όταν βλέπεις το τρία του αριθμού, πώς το διαβάζεις;», «Όταν βλέπεις το τέσσερα του αριθμού, πώς το διαβάζεις;», «Όταν βλέπεις το δύο του αριθμού, πώς το διαβάζεις;», και ο μαθητής αποφάνθηκε: «Τριακόσια», «Σαράντα», «Δύο», αντίστοιχα. Και συνέχισε σταδιακά να ρωτά: «Άρα ποιος αριθμός είναι στην πραγματικότητα το τρία του αριθμού;», «Ποιος αριθμός είναι στην πραγματικότητα το τέσσερα του αριθμού;», «Ποιος αριθμός είναι στην πραγματικότητα το δύο του αριθμού;». Ο μαθητής αποκρίθηκε: «Το τριακόσια», «Το σαράντα», «Το δύο», αντίστοιχα.

Κατόπιν, ο δάσκαλος σχεδίασε έναν κινέζικο άβακα στον πίνακα και κάλεσε το μαθητή να συμπληρώσει τις χάντρες, ώστε να αναπαρασταθεί ο αριθμός. Εκείνος τοποθέτησε σωστά τις χάντρες. Έπειτα, τον ρώτησε: «Γιατί ενεργοποίησες τις χάντρες σε διαφορετικά ξυλάκια, σε διαφορετικές στήλες, και όχι σε ένα ξυλάκι, σε μία στήλη;». Ο Αποστόλης, πιθανώς λόγω του διδακτικού συμβολαίου, θεώρησε ότι η ερώτηση του δασκάλου υπονοούσε ότι έκανε λάθος στην τοποθέτηση, και στη συνέχεια έμεινε σιωπηλός και σκεπτικός. Ο δάσκαλος ζήτησε τη βοήθεια των υπόλοιπων μαθητών/τριών, και ο Κωνσταντίνος, παίρνοντας το λόγο, απάντησε: «Γιατί κάθε αριθμός του αριθμού δείχνει άλλο πράγμα», εννοώντας ότι κάθε ψηφίο του αριθμού έχει άλλη αξία. Με αυτή την απάντηση συμφώνησε και ο Αποστόλης. Έπειτα, ο δάσκαλος ζήτησε από αυτόν να την εξηγήσει. Εκείνος αποκρίθηκε: «Να, οι τρεις χάντρες είναι το τριακόσια, οι τέσσερις είναι το σαράντα και οι δύο είναι το δύο». Ο διδάσκων συνέχισε: «Αφού το δύο του αριθμού φαίνεται με δύο χάντρες στην τελευταία στήλη του άβακα, γιατί το σαράντα φαίνεται με τέσσερις χάντρες στη διπλανή στήλη και όχι με σαράντα χάντρες, και γιατί το τριακόσια στην τρίτη στήλη φτιάχνεται με τρεις χάντρες και όχι με τριακόσιες;». Ο μαθητής απάντησε με ερώτηση: «Γιατί κάθε στήλη δείχνει άλλο πράγμα;». Ο δάσκαλος ζήτησε διευκρινίσεις. Ο Αποστόλης εξήγησε: «Η τελευταία στήλη δείχνει μονάδες, η άλλη δεκάδες, και η άλλη εκατοντάδες». Σε αυτή την απάντηση συμφώνησαν και οι υπόλοιποι μαθητές/τριες. Ο δάσκαλος συνέχισε να ρωτά: «Τι είναι η μονάδα;», «Τι είναι η δεκάδα;», «Τι είναι η εκατοντάδα;» και ο μαθητής απάντησε: «Το ένα!», «Το δέκα!», «Το εκατό!». Ο διάλογος συνεχίστηκε ως εξής:

Δ(άσκαλος): Άρα το δύο του αριθμού 342 τι δείχνει;

Μ(αθητής): Πόσα ένα έχει το δύο.

Δ: Πόσα έχει;

Μ: Δύο.

Δ: Το τέσσερα του αριθμού 342 τι δείχνει;

Μ: Πόσα 10 έχει.

Δ: Πόσα έχει;

Μ: Τέσσερα δέκα. (Εννοεί τέσσερις δεκάδες.)

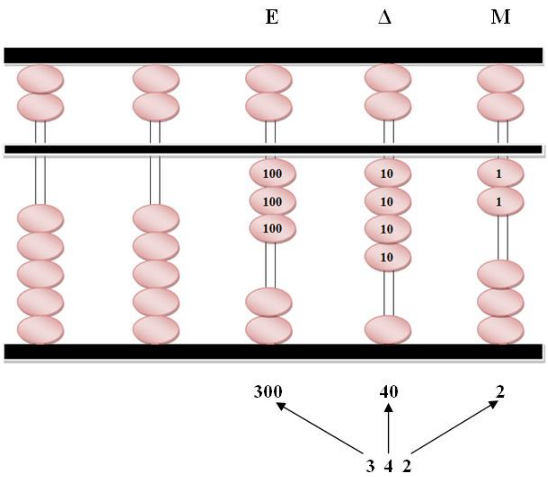
Δ: Το τρία του αριθμού 342 τι δείχνει;

Μ: Πόσα εκατό έχει το 342.

Δ: Πόσα έχει;

Μ: Τρία.

Σταδιακά, μετά από κάθε απάντηση του μαθητή ο δάσκαλος συμπλήρωνε την αξία των ενεργοποιημένων χαντρών της κάθε στήλης ανάλογα με τις απαντήσεις του. Έτσι, δημιουργήθηκε η παρακάτω εικόνα, η οποία αναλύει στον άβακα τον αριθμό 342 ανάλογα με την αξία της κάθε στήλης και της κάθε χάντρας.



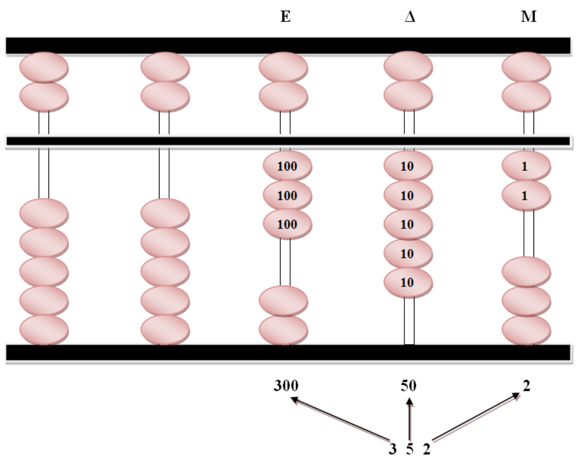
Εικόνα 4.10. Ανάλυση του αριθμού 342 στον κινέζικο άβακα, όπου οπτικοποιείται η έννοια της αξίας θέσης ψηφίου

Έπειτα, ο δάσκαλος επανέλαβε το αρχικό ερώτημα (πώς θα αναπαριστούσαν τον αριθμό 342 στον κινέζικο άβακα), ζητώντας από τα παιδιά, και από τον Αποστόλη, να απαντήσουν και πάλι γραπτά στο πρόχειρό τους. Ο Αποστόλης, του οποίου οι ενέργειες και οι αποκρίσεις μελετώνται, έγραψε: «Ανέβασα τρεις χάντρες στη στήλη των εκατοντάδων, γιατί η καθεμία δείχνει εκατό, άρα τριακόσια. Ανέβασα τέσσερις χάντρες στη στήλη των δεκάδων, γιατί η καθεμία έχει δέκα, σαράντα και ανέβασα και δύο στις μονάδες, γιατί η κάθε χάντρα έχει ένα».

Το παραπάνω κείμενο του μαθητή μπορεί να χαρακτηριστεί ως μαθηματικό κείμενο, καθώς γίνεται σε αυτό ρητή αναφορά στην αξία θέσης του κάθε ψηφίου του αριθμού. Έτσι, το αρχικό πλαισιοθετημένο κείμενο του Αποστόλη, το οποίο αντανακλούσε τα προσωπικά του νοήματα, μετατράπηκε μετά τη συγκεκριμένη δραστηριότητα σε μαθηματικό κείμενο, το οποίο εκφράζει μαθηματικά πια νοήματα. Τέλος, ο δάσκαλος έγραψε τυχαίους τριψήφιους αριθμούς στον πίνακα, τους οποίους ο μαθητής και διάβασε και ανέλυσε σωστά.

Να σημειωθεί ότι στην παραπάνω δραστηριότητα στο προσκήνιο βρίσκεται κυρίως ο Αποστόλης, καθώς την ημέρα που ασχολήθηκαν οι υπόλοιποι/ες μαθητές/τριες με τη δραστηριότητα αυτή, εκείνος απουσίαζε. Έτσι, ο διδάσκων έκρινε απαραίτητο, λόγω της σπουδαιότητας της κατανόησης της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου από όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες, να επαναλάβει τη δραστηριότητα για το συγκεκριμένο μαθητή, δίνοντας την ευκαιρία στους/στις υπόλοιπους/ες να την ξαναδούν.

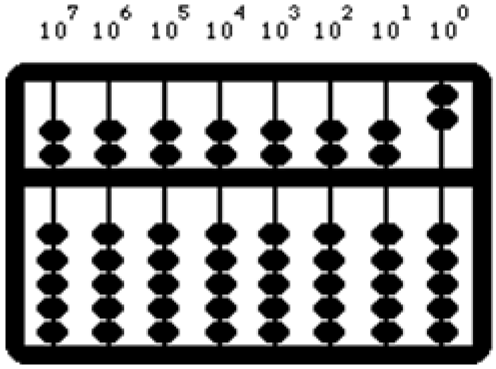
Ωστόσο, και στην αρχική δραστηριότητα της διδακτικής παρέμβασης, που στόχευε στην ανάδειξη της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, εφαρμόστηκε η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Πιο συγκεκριμένα, ο δάσκαλος ενήργησε με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, αλλά για τον αριθμό 352, καταλήγοντας στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 4.11. Ανάλυση του αριθμού 352 στον κινέζικο άβακα όπου οπτικοποιείται η έννοια της αξίας θέσης ψηφίου

Παρατηρώντας τις ενεργοποιημένες χάντρες του άβακα στη στήλη των μονάδων, των δεκάδων και των εκατοντάδων, οι οποίες αναπαριστούν τον αριθμό 352, μια μαθήτρια, η Παρασκευή, πήρε το λόγο και ανέφερε στην ολομέλεια της τάξης: «Κύριε, παρατήρησα κάτι: στη στήλη των μονάδων ο αριθμός 1 δεν έχει μηδέν, στη στήλη των δεκάδων ο αριθμός 10 έχει ένα μηδενικό, ενώ στη στήλη των εκατοντάδων ο αριθμός 100 έχει δύο μηδενικά».

Το «κείμενο» αυτό αντανακλά τα προσωπικά νοήματα της μαθήτριας για τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι χάντρες της κάθε στήλης του άβακα. Παραπέμπει στην ιδιότητα της βάσης του δέκα, σύμφωνα με την οποία η αξία της κάθε στήλης ή αλλιώς της κάθε θέσης αυξάνει κατά μία δύναμη του δέκα, καθώς κινείται κανείς από τα δεξιά προς τα αριστερά (Hurst & Hurrell, 2014). Η ιδιότητα αυτή μπορεί να αποδοθεί με την παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 4.12. Ο κινέζικος άβακας με την ιδιότητα της βάσης του 10

Αυτό το πλαισιοθετημένο κείμενο της Παρασκευής έδωσε στο δάσκαλο την ευκαιρία να ενεργοποιήσει τη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Έτσι, ζήτησε από τη μαθήτρια να επαναλάβει το κείμενό της, το οποίο κατέγραψε στον πίνακα της τάξης, ώστε να το βλέπουν όλοι/ες οι μαθητές/τριες. Έπειτα, ρώτησε: «Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι αριθμοί 1, 10 και 100, που ανέφερε η Παρασκευή;». Ο Δημήτρης αυθόρμητα απάντησε: «Και οι τρεις έχουν το 1 μπροστά. Το 1 δεν έχει μηδενικό, το 10 έχει ένα μηδενικό και το 100 έχει δύο μηδενικά». Από την απάντηση αυτή, διαπιστώνει κανείς ότι ο μαθητής στάθηκε στην αναπαράσταση των αριθμών, στην εικόνα τους, χωρίς να κάνει καμία νύξη για τη σχέση μεγέθους μεταξύ τους. Η Κατερίνα ανέφερε: «Το 1 έχει ένα ψηφίο, το 10 δύο ψηφία και το 100 τρία ψηφία». Και ο δάσκαλος συνέχισε: «Ποιος από τους τρεις αριθμούς είναι μεγαλύτερος και γιατί;». Ο Κωνσταντίνος απάντησε: «Το 100, γιατί έχει τρία ψηφία. Μετά είναι το 10, γιατί έχει δύο, και πιο μικρό το 1, γιατί έχει ένα ψηφίο». Έπειτα ο διδάσκων κάλεσε τα παιδιά να συγκρίνουν το 1 με το 10. Η Εύα αποκρίθηκε: « Το 10 είναι μεγαλύτερο από το 1». Και ξαναρωτήθηκε: «Πόσο μεγαλύτερο;». Η Εύα σκέφτηκε λίγο και απάντησε διστακτικά: «Δέκα;». Ο δάσκαλος ζήτησε τη γνώμη και των άλλων παιδιών. Τα περισσότερα συμφώνησαν με την Εύα. Όμως, ο Κωνσταντίνος διαφώνησε. Ανέφερε: «Εννιά, κύριε! Γιατί άμα έχεις ένα ευρώ και εγώ έχω δέκα ευρώ, έχω εννιά παραπάνω». Ο δάσκαλος ξαναζήτησε τη γνώμη των άλλων παιδιών, τα οποία έδειχναν προβληματισμένα. Έπειτα ρώτησε: «Για να κάνεις τα δέκα ευρώ, πόσες φορές πρέπει να πάρεις το ένα ευρώ; Γενικά, για να κάνεις το δέκα, πόσες φορές θα πάρεις το ένα;». Άλλα παιδιά μέτρησαν με τα δάχτυλά τους και άλλα έκαναν νοερό υπολογισμό. Ο Νίκος απάντησε: «Δέκα!». Μαζί του συμφώνησαν και οι υπόλοιποι/ες. Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να εξηγήσουν αυτό το δέκα της απάντησης του Νίκου. Η Παρασκευή είπε: «Δέκα, γιατί 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 κάνει δέκα. Ή αλλιώς δέκα φορές το ένα, δέκα». Στη συνέχεια ο δάσκαλος ζήτησε να συγκρίνουν το 10 με το 100 και να αποφανθούν πιο είναι μεγαλύτερο. Η Κατερίνα ανέφερε: «Το 100 είναι μεγαλύτερο από το 10, δέκα φορές». Έπειτα κλήθηκε να το εξηγήσει. Απάντησε: «Γιατί δέκα φορές το 10, κάνει 100». Μαζί της συμφώνησε όλη η τάξη. Κατόπιν, ο δάσκαλος ρώτησε: «Πόσες φορές μεγαλύτερη λέτε να είναι η αξία της μιας χάντρας στην επόμενη στήλη του άβακα;». Όλοι/ες μαζί απάντησαν δέκα. Και η επόμενη ερώτηση ήταν: «Άρα τι αξία θα έχει μία χάντρα της γης στην αριστερή στήλη των εκατοντάδων;». Ο Κωνσταντίνος απάντησε: «Χίλια, γιατί δέκα φορές το 100 κάνει 1.000». Έπειτα, ο δάσκαλος ζήτησε από τα παιδιά να ξαναδιαβάσουν το κείμενο της Παρασκευής, που ήταν γραμμένο στον πίνακα, και να εξηγήσουν καλύτερα τι ήθελε να πει με αυτό το κείμενο. Ο Δημήτρης, κοιτώντας τον άβακα, είπε: «Η μια στήλη είναι μεγαλύτερη από την άλλη». Και ο δάσκαλος τον ρώτησε: «Μεγαλύτερη σε μέγεθος;». Η Εύα παρενέβη λέγοντας: «Μεγαλύτερη σε αξία!». Ο διδάσκων ξαναρώτησε: «Πόσο μεγαλύτερη;», για να πάρει από την Παρασκευή την απάντηση: «Δέκα φορές!». Έπειτα κάλεσε τα παιδιά να αναδιατυπώσουν το κείμενο της Παρασκευής, μετά από όλα όσα άκουσαν και είπαν. Η Εύα πήρε το λόγο και είπε: «Η πρώτη στήλη δείχνει το 1. Η δεύτερη στήλη είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από την πρώτη και δείχνει το 10, και η τρίτη είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από τη δεύτερη και δείχνει το 100». Ο δάσκαλος ξαναρώτησε: «Μεγαλύτερη σε μήκος;», για να απαντήσει η Εύα: «Όχι, σε αξία». Έτσι, κατάφεραν οι μαθητές/τριες με την παρατηρητικότητα και τις απαντήσεις τους να αναδιατυπώσουν το κείμενο της Παρασκευής, δίνοντάς του μαθηματικό πλέον χαρακτήρα. Ο δάσκαλος έγραψε και το κείμενο της Εύας στον πίνακα. Στη συνέχεια έκανε μια σύνοψη, εξηγώντας από πού ξεκίνησε η συζήτηση και πού κατέληξε.

Η Εύα ζήτησε στη συνέχεια να σηκωθεί στον πίνακα για να δείξει κάτι στον άβακα, όπου αναλύθηκε ο αριθμός 352. Ανέφερε, δείχνοντας τους αριθμούς 300, 50 και 2, οι οποίοι ήταν γραμμένοι κάτω από τον άβακα: «Κύριε, άμα βγάλετε όλα τα μηδενικά, βγάλετε αυτά (δείχνει τα δύο μηδενικά του 300), βγάλετε και αυτό (δείχνει το μηδέν του 50), θα βγει ο αριθμός (εννοεί τον αριθμό 352)». Το κείμενο αυτό της Εύας ήταν μια ακόμα ευκαιρία, την οποία αξιοποίησε ο δάσκαλος την επόμενη μέρα, για να εφαρμόσει τη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Τα πλαισιοθετημένο (αφού αφορούσε αποκλειστικά τον αριθμό 352) κείμενο της μαθήτριας έδωσε τη δυνατότητα στο διδάσκοντα να εξηγήσει μέσω της παραπάνω θεωρίας την έννοια της διαφοροποίησης της αξίας ενός ψηφίου ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό. Και αυτό έγινε με την προσπάθεια μετατροπής του πλαισιοθετημένου κειμένου της Εύας σε μαθηματικό κείμενο.

Η όλη διαδικασία ξεκίνησε με την αναγραφή του παραπάνω κειμένου στον πίνακα, ώστε να το θυμηθούν οι μαθητές/τριες, αφού η δραστηριότητα έγινε την επόμενη μέρα, αλλά και για να το έχουν διαρκώς μπροστά τους. Ο δάσκαλος ξανασχημάτισε τον άβακα στη μέση του πίνακα, όπως είχε σχεδιαστεί την προηγούμενη μέρα και έγραψε ό,τι είχε γραφεί κάτω από αυτόν (βλ. εικόνα 4.11). Έπειτα ρώτησε: «Αν, όπως λέει η Εύα, βγάλω τα μηδενικά από το 300 και από το 50, ποιους αριθμούς θα έχω;». Όλοι/ες οι μαθητές/τριες απάντησαν εν χορώ: « Το 3 και το 5». Και ο δάσκαλος συνέχισε: «Αφού πρόκειται για το 3 και το 5, γιατί η Εύα λέει ότι θα κάνει τον αριθμό τριακόσια πενήντα δύο και όχι το 10, αφού 3+5+2 κάνει 10;». Ο Δημήτρης απάντησε: «Δεν πρέπει να τα προσθέσω». Η Κατερίνα είπε: «Το 3 είναι αντί για το 300, και το 5 αντί για το 50». Και ο δάσκαλος τη ρώτησε: «Μπορώ να γράφω 3 και να εννοώ το 300;». Η μαθήτρια απάντησε όχι, χωρίς να συμπληρώσει κάτι άλλο. Ο Κωνσταντίνος αποφάνθηκε: «Αν το βάλεις στον άβακα θα είναι 300». Ο διδάσκων ζήτησε περισσότερες εξηγήσεις από τον Κωνσταντίνο: «Στο άβακα πού θα βάλεις το 3, πώς θα το δείξεις;». Εκείνος απάντησε: «Θα το βάλω στην τρίτη στήλη, με χάντρες». Έπειτα ρώτησε τα υπόλοιπα παιδιά αν συμφωνούν με τα λεγόμενα του Κωνσταντίνου, και όλα (όσα απάντησαν) συμφώνησαν. Και συνέχισε: «Με πόσες χάντρες θα δείξετε το τριακόσια στον άβακα;». Ο Νίκος είπε: «Με τρεις». Και ο δάσκαλος ρώτησε: «Γιατί με τρεις;». Ο Δημήτρης απάντησε αυθόρμητα: «Γιατί τρεις είναι οι εκατοντάδες». Η επόμενη ερώτηση του δασκάλου ήταν: «Άρα τι δείχνει η κάθε χάντρα της γης στην τρίτη στήλη του άβακα;». Η Παρασκευή απάντησε: «Το εκατό…την εκατοντάδα! Το γράφει πάνω στη χάντρα». Ο διδάσκων συνέχισε, ρωτώντας πια για το 5, που ανέφερε η Εύα. Ρώτησε: «Γιατί είπε η Εύα ότι μπορεί να βγάλει το μηδέν από το 50; Το 50 και το 5 είναι ο ίδιος αριθμός;». Η Παρασκευή ξαναπήρε το λόγο και είπε: «Το 50 μπορείς να το δείξεις με 5 χάντρες στον άβακα». «Σε ποια στήλη;», τη ρώτησε ο δάσκαλος. «Στις δεκάδες», αποκρίθηκε εκείνη. Έπειτα ξαναρώτησε ο δάσκαλος: «Άρα τι αξία έχει η κάθε χάντρα της γης στη στήλη των δεκάδων στον άβακα;». Ο Νίκος ανέφερε: «Δέκα». Ο δάσκαλος συνέχισε: «Αφού όλες οι χάντρες στον άβακα είναι ίδιες, έχουν το ίδιο σχήμα, το ίδιο χρώμα, το ίδιο μέγεθος, γιατί άλλες δείχνουν το 100, άλλες δείχνουν το 10 και άλλες το 1;». Η Εύα απάντησε: «Γιατί είναι σε άλλη στήλη στον άβακα». Για να μετατραπεί το αρχικό κείμενο της Εύας σε μαθηματικό, ρώτησε ο διδάσκων: «Άρα τι εννοούσε η Εύα όταν έλεγε να βγάλει τα μηδενικά; Να κάνει το τριακόσια, τρία;». Η Εύα απάντησε: «Όχι. Να το δείξω με τρεις εκατοντάδες». «Και με το 5 τι εννοούσε;», συνέχισε ο διδάσκων. «Τις 5 δεκάδες», αποκρίθηκε η Κατερίνα. «Επομένως», συνέχισε ο δάσκαλος, «πώς μπορούμε να πούμε καλύτερα, με πιο μαθηματικό τρόπο, αυτό που είναι γραμμένο στον πίνακα;». Ο Κωνσταντίνος αποφάνθηκε: «Άμα ενεργοποιήσω τρεις χάντρες της γης στις εκατοντάδες, πέντε χάντρες στις δεκάδες και δύο χάντρες στις μονάδες, θα βγει το 352». Η Παρασκευή πρότεινε: «Άμα αλλάξεις το 300 με τρεις χάντρες του 100, το 50 με πέντε χάντρες του 10 και βάλεις και 2, θα βγει ο αριθμός 352». Η Εύα είπε: «Αν βάλεις 3 χάντρες στη στήλη των εκατοντάδων, 5 χάντρες στη στήλη των δεκάδων και 2 χάντρες στη στήλη των μονάδων, φτιάχνεις τον αριθμό 352». Ο δάσκαλος ρώτησε τους/τις υπόλοιπους/ες μαθητές/τριες ποια απάντηση προτιμούν και οι περισσότεροι/ες διάλεξαν αυτή της Εύας, την οποία και έγραψε στον πίνακα, κάτω από τον άβακα. Η τελευταία ερώτηση του δασκάλου ήταν: «Αυτός ο τρόπος γραφής των αριθμών ισχύει μόνο στον άβακα;». Ο Δημήτρης απάντησε: «Όχι μόνο! Και όταν γράφουμε τους αριθμούς». Ο δάσκαλος του ζήτησε να ξαναδιαβάσει το τελευταίο κείμενο που πρότεινε η Εύα και να το ξαναπεί χωρίς να έχει στο μυαλό του τον άβακα, αλλά σαν να γράφει με το μολύβι του τον αριθμό 352. Εκείνος ανέφερε: «Άμα γράψεις 3 στη θέση των εκατοντάδων, 5 στη θέση των δεκάδων και 2 στη θέση των μονάδων, φτιάχνεις τον αριθμό 352».

Έτσι, το πλαισιοθετημένο κείμενο της μαθήτριας, στο οποίο υπήρχαν ψήγματα μαθηματικού περιεχομένου, και τις κατάλληλες ερωτήσεις του διδάσκοντα, κατάφεραν τα παιδιά να το μετατρέψουν σε μαθηματικό κείμενο, και ίσως να αντιληφθούν καλύτερα την ιδιότητα της αξίας θέσης ψηφίου κατά τη γραφή πολυψήφιων αριθμών.

4.3. Αποτελέσματα του ερωτηματολογίου μετά τη διδακτική παρέμβαση (post-test)

1η ερώτηση

Και στα δύο σκέλη της πρώτης άσκησης όλοι/ες οι μαθητές/τριες απάντησαν σωστά χωρίς καμία δυσκολία.

2η ερώτηση

Και στη δεύτερη άσκηση όλοι/ες οι μαθητές/τριες προχώρησαν στην προσθετική ανάλυση δεδομένων αριθμών με ταχύτητα και ευστοχία.

3η ερώτηση

Την ίδια επιτυχία παρουσίασαν οι μαθητές/τριες και στην τρίτη άσκηση.

4η ερώτηση

Στην άσκηση, η οποία καλούσε τους/τις μαθητές/τριες να συμπληρώσουν ισοδυναμίες, κάνοντας ουσιαστικά ανταλλαγές μεταξύ χιλιάδας, εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων, και οι 7 απάντησαν σωστά.

.

5η ερώτηση

Στο σκέλος της άσκησης που ζητούσε την τοποθέτηση των αριθμών σε φθίνουσα σειρά, η πλειοψηφία των μαθητών/τριών, οι 6 από τους/τις 7, τους τοποθέτησαν σωστά χωρίς καμία δυσκολία.

Όσον αφορά την τοποθέτηση των αριθμών στην αριθμογραμμή, μόνο 2 από τους/τις 7 μαθητές/τριες, η Κατερίνα και ο Νίκος, δυσκολεύτηκαν στην εύρεση της κλίμακας της αριθμογραμμής. Μετά από μερικές προσπάθειες, όμως, βρήκαν την κλίμακα και τοποθέτησαν σωστά τους αριθμούς. Επομένως, η τοποθέτηση έγινε ορθά και από τους/τις 7 μαθητές/τριες.

6η ερώτηση

Η έκτη άσκηση του ερωτηματολογίου αφορούσε τη γραφή σε κάθετη διάταξη και την εκτέλεση τεσσάρων πράξεων, δύο προσθέσεων (327+8, 473+69) και δύο αφαιρέσεων (852-363, 600-8). Ακολουθούν τα αποτελέσματα των μαθητών/τριών για καθεμία πράξη.

- **Πρόσθεση 327+8**

  i. Κάθετη διάταξη

Την πρόσθεση 327+8 όλοι οι μαθητές/τριες την έγραψαν κάθετα με το σωστό τρόπο.

  ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης

Και οι 7 μαθητές/τριες εκτέλεσαν τον αλγόριθμο της συγκεκριμένης πρόσθεσης σωστά.

- **Πρόσθεση 473+69**

  i. Κάθετη διάταξη

Και στην πρόσθεση αυτή όλοι/ες οι μαθητές/τριες ορθά τοποθέτησαν τους δύο προσθετέους σε κάθετη διάταξη.

  ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της πρόσθεσης

Όπως και στην προηγούμενη πρόσθεση, όλοι/ες οι μαθητές/τριες εκτέλεσαν σωστά τον αλγόριθμο της πρόσθεσης 473+69.

- **Αφαίρεση 852-363**

  i. Κάθετη διάταξη

Άπαντες/άπασες οι μαθητές/τριες τοποθέτησαν ορθά τον αφαιρετέο κάτω από το μειωτέο.

  ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης

Οι 3 από τους/τις 7 μαθητές/τριες, ο Κωνσταντίνος, η Κατερίνα και η Εύα, εκτέλεσαν σωστά τον αλγόριθμο της αφαίρεσης.

- **Αφαίρεση 600-8**

  i. Κάθετη διάταξη

Και οι 7 μαθητές/τριες τοποθέτησαν σωστά τον μονοψήφιο αφαιρετέο κάτω από το τριψήφιο μειωτέο.

  ii. Εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης

Οι 5 από τους/τις 7 μαθητές/τριες εκτέλεσαν σωστά τον αλγόριθμο της αφαίρεσης.

<u>7η ερώτηση</u>

Στο ερώτημα τι είναι το κρατούμενο οι 6 από τους/τις 7 μαθητές/τριες έδωσαν μια σωστή περιγραφή του κρατουμένου. Και οι έξι έκαναν λόγο για έναν αριθμό, ο οποίος μεταφέρεται/προστίθεται στην επόμενη στήλη.

Στο ερώτημα «Σε ποια πράξη χρησιμοποιείται το κρατούμενο;», οι 5 από τους/τις 7 μαθητές/τριες απάντησαν σωστά.

<u>8η ερώτηση</u>

Στην ερώτηση τι είναι το δανεικό όλοι/ες οι μαθητές/τριες κατάφεραν να δώσουν μια εξήγηση της έννοιας του δανεικού.

Στο δεύτερο ερώτημα, σχετικά με την πράξη στην οποία χρησιμοποιείται το δανεικό, όλοι/ες οι μαθητές/τριες απάντησαν σωστά, λέγοντας ότι το δανεικό χρησιμοποιείται στην αφαίρεση.

4.3.1. Συμπεράσματα του ερωτηματολογίου μετά τη διδακτική παρέμβαση (post-test)

Η επιτυχία των παιδιών στις τρεις πρώτες ασκήσεις του ερωτηματολογίου, που έπεται της διδακτικής παρέμβασης, ίσως δηλώνει μια καλή κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου στους τριψήφιους αριθμούς.

Επιτυχία σημείωσαν οι μαθητές/τριες και στις ανταλλαγές μεταξύ χιλιάδας, εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων. Οι τέσσερις από αυτούς/ες, ο Κωνσταντίνος, η Εύα, η Παρασκευή και ο Δημήτρης, δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία, ενώ οι υπόλοιποι/ες τρεις, η Κατερίνα, ο Αποστόλης και ο Νίκος, ξεπέρασαν τις όποιες δυσκολίες τους, αλλά χρειάζονταν καθοδήγηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παιδιά, κατά τη διαδικασία εύρεσης των ισοδυναμιών, χρησιμοποίησαν διαφορετικά μέσα καταμέτρησης των μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων, που καλούνταν να βρουν και να συμπληρώσουν. Τα τέσσερα από αυτά, η Εύα, η Παρασκευή, ο Αποστόλης και ο Δημήτρης, χρησιμοποίησαν εξαρχής τα δάχτυλα των χεριών τους. Η Κατερίνα, αρχικά, χρησιμοποίησε τα δάχτυλά της. Δυσκολευόταν, όμως, και ο δάσκαλος της πρότεινε να σκεφτεί τον κινέζικο άβακα. Έτσι, τα κατάφερε καλύτερα. Ο Νίκος ήταν ο μοναδικός μαθητής που ξεκίνησε να δουλεύει έχοντας τον κινέζικο άβακα στο μυαλό του. Στη δεύτερη ισοδυναμία, όμως, δυσκολεύτηκε και κατέφυγε στη χρήση των δακτύλων. Με αυτόν τον τρόπο συνέχισε και ολοκλήρωσε την άσκηση. Σε αντίθεση με όλους/ες τους/τις άλλους/ες, ο Κωνσταντίνος συμπλήρωσε την άσκηση, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά πολλαπλασιαστική σκέψη. Την κάθε ισοδυναμία που έβρισκε, τη δικαιολογούσε με έναν πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, ανέφερε ότι οι 300 μονάδες είναι ίσες με 30 δεκάδες, γιατί 30 φορές το 10 κάνει 300.

Στην τοποθέτηση των αριθμών σε φθίνουσα σειρά παρατηρήθηκε μόνο ένα λάθος, το οποίο ενδέχεται να ήταν λάθος απροσεξίας, ενώ μόνο δύο μαθητές/τριες προβληματίστηκαν με την κλίμακα της αριθμογραμμής, την οποία κατάφεραν τελικά να αναγνωρίσουν. Το γεγονός ότι οι πέντε από τους/τις επτά μαθητές/τριες «διάβασαν» αμέσως την αριθμογραμμή, ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι εργάστηκαν με αυτή κατά τη διδασκαλία άλλων ενοτήτων στο μάθημα των μαθηματικών, πέραν της διδακτικής παρέμβασης.

Κατά την τοποθέτηση αριθμών σε κάθετη διάταξη για την εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων δεν σημειώθηκε κανένα λάθος.

Κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης, κάποιοι/ες μαθητές/τριες επέλεξαν τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου», ενώ κάποιοι/ες άλλοι/ες τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών».

Στον πρώτο τύπο, μια μονάδα μιας τάξης μετατρέπεται σε δέκα μονάδες της αμέσως μικρότερης. Στο δεύτερο τύπο, ο οποίος βασίζεται στη θεμελιώδη ιδιότητα του αμετάβλητου της διαφοράς, μπορεί να προστεθεί στο μειωτέο και στον αφαιρετέο ο ίδιος αριθμός μονάδων χωρίς να μεταβάλλεται το τελικό αποτέλεσμα (Λεμονίδης, 2016).

Σύμφωνα με το Λεμονίδη (2016) για τους/τις μικρούς/ές μαθητές/τριες ενδείκνυται ο τύπος της «μετατροπής του μειωτέου», καθώς στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, οι ανταλλαγές μπορούν να αναπαρασταθούν εύκολα με διάφορα αντικείμενα -στην περίπτωσή μας τον άβακα-, και έτσι να δοθεί νόημα στα βήματα εκτέλεσης του αλγόριθμου της αφαίρεσης. Ο τύπος της «πρόσθεσης ίσων ποσών» χρησιμοποιεί την ιδιότητα που προαναφέρθηκε, η οποία είναι αφηρημένη, άρα και δύσκολο να εξηγηθεί στους/στις μαθητές/τριες και να αναπαρασταθεί. Για αυτό και εκτελείται μηχανικά, οδηγώντας σε λάθη.

Οι Fiori & Zuccheri (2005) προτείνουν ότι για να αναλύσει κανείς τον αλγόριθμο της «πρόσθεσης ίσων ποσών» από διδακτικής άποψης, πρέπει να κάνει μια διάκριση μεταξύ δύο πλευρών: α) αυτή της διαμόρφωσης των υπολογιστικών ικανοτήτων των μαθητών/τριών και β) εκείνη της κατανόησης της σημασίας του από τους ίδιους τους/τις μαθητές/τριες.

Από την άποψη των υπολογιστικών ικανοτήτων, ο τύπος της «πρόσθεσης ίσων ποσών» είναι πλεονεκτικότερος έναντι του τύπου της «μετατροπής του μειωτέου», καθώς: i) εργάζεται κανείς περισσότερο στον τομέα της πρόσθεσης και λιγότερο στον τομέα της αφαίρεσης, μιας και η πρόσθεση είναι ευκολότερη από την αφαίρεση, ii) εξαλείφεται το πρόβλημα δανεισμού από το ψηφίο μηδέν, το οποίο αποτελεί πηγή δυσκολιών για τους/τις μαθητές/τριες, και iii) σε κάθε βήμα του αλγόριθμου υπάρχουν περιορισμένες επιλογές και απαιτούνται λίγοι χειρισμοί, γεγονός που καθιστά τον τύπο αυτό εύκολο, ώστε να τον θυμάται κανείς και να τον εφαρμόζει.

Από την άποψη της κατανόησης της σημασίας του αλγόριθμου, ο τύπος της «μετατροπής του μειωτέου» είναι πλεονεκτικότερος έναντι εκείνου της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Ο τελευταίος βασίζεται όχι μόνο στην κατανόηση του θεσιακού συστήματος αρίθμησης, αλλά υπονοεί και την οικειότητα με τις διαφορές και τον τρόπο που μπορεί να δουλέψει κανείς με αυτές χωρίς, όμως, να τις μεταβάλλει. Επιπλέον, κάποιος που έχει εσωτερικεύσει την έννοια της αφαίρεσης ως πράξης αντίθετης της πρόσθεσης, ενδέχεται να εμφανίσει αντίσταση σε αυτόν τον τύπο, όπου φαινομενικά αφαιρεί μέσω της πρόσθεσης.

Τα λάθη που σημειώθηκαν κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης είναι τα εξής: α) λάθη στις απλές πράξεις· όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (2016), όταν εκτελείται ένας αλγόριθμος σε πολυψήφιες πράξεις, σταδιακά εκτελούνται οι επιμέρους αντίστοιχες απλές πράξεις. Τα λάθη που εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία προκαλούν λανθασμένες απαντήσεις, οι οποίες οφείλονται στα λάθη των απλών πράξεων, β) αφαίρεση μεγαλύτερου ψηφίου από μικρότερο· ο Χατζηγεωργίου (1990) και η Fuson (1990) το χαρακτηρίζουν ως ένα από τα πιο κοινά λάθη, γ) ανταλλαγή μίας δεκάδας με μία, και όχι με δέκα μονάδες· η Fuson (1990) αναφερόμενη σε μια έρευνα της Cauley το 1987, όπου πολλά παιδιά «έβλεπαν» το δανεισμό ως την ανταλλαγή μιας μονάδας (μόνο το 8% των μαθητών/τριών της τρίτης, τετάρτης και πέμπτης τάξης εξήγησαν το δανεισμό από τις εκατοντάδες προς τις δεκάδες ως το πάρσιμο μιας εκατοντάδας από τη θέση των εκατοντάδων), αποδίδει το λάθος σε εκείνη την εννοιολογική δομή, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν τους πολυψήφιους αριθμούς ως μιας σειρά από ανεξάρτητα ψηφία τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, και τα οποία δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους, δ) στον τύπο του αλγόριθμου της «πρόσθεσης ίσων ποσών», ενώ προστίθενται ποσά στα ψηφία του μειωτέου, δεν προστίθενται ίσα ποσά στα ψηφία του αφαιρετέου, ε) στον τύπο του αλγόριθμου της «μετατροπής του μειωτέου», ενώ γίνεται δανεισμός από μια θέση αξίας, δε μειώνεται κατά ένα η αξία του ψηφίου στη συγκεκριμένη θέση, και στ) σε μια θέση αξίας, κατά την αφαίρεση του μεγαλύτερου αφαιρετέου από το 0 του μειωτέου, τίθεται ως αποτέλεσμα ο μεγαλύτερος αριθμός. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Λεμονίδης, 2016· Χατζηγεωργίου, 1990), στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι σύνηθες να γράφεται ως αποτέλεσμα και το 0.

Η παρατήρηση που έγινε στο ερωτηματόγιο πριν τη διδακτική παρέμβαση σχετικά με τη απουσία χρήσης από τους/τις μαθητές/τριες της επαλήθευσης, ως μέσου για το έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων τόσο των προσθέσεων και των αφαιρέσεων, ισχύει και για το ερωτηματολόγιο μετά τη διδακτική παρέμβαση. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση ενός μαθητή, του Αποστόλη, ο οποίος αμέσως μετά την εκτέλεση της αφαίρεσης 852-363 με τον αλγοριθμικό τύπο της «μετατροπής του μειωτέου», εκτέλεσε εκ νέου την ίδια αφαίρεση με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών», δίνοντας την εντύπωση ότι έτσι ελέγχει την ορθότητα του αποτελέσματος της αφαίρεσης κατά την εφαρμογή του πρώτου αλγόριθμου. Μάλιστα, τα αποτελέσματα που βρήκε κατά την εκτέλεση των δύο αλγορίθμων της παραπάνω αφαίρεσης ήταν διαφορετικά, με αποτέλεσμα να καταλάβει ότι στον πρώτο αλγόριθμο έκανε κάποιο λάθος, και στη συνέχεια να το εντοπίσει και να το διορθώσει.

Στην ερώτηση τι είναι το κρατούμενο, οι απαντήσεις που έδωσαν τα παιδιά συμπίπτουν με τις απαντήσεις των μαθητών/τριών που συμμετείχαν στην έρευνα της Poisard (2006), και τις οποίες η ερευνήτρια χαρακτήρισε ως μαθηματικές απαντήσεις. Η λίστα των απαντήσεων αυτών είναι η εξής: «μια δεκάδα», «ένας διψήφιος αριθμός», «κάτι που ξεπερνά το 9», «η ιδέα του περάσματος ανάμεσα στις μονάδες και τις δεκάδες» ή «το πέρασμα στην επόμενη στήλη». Οι έξι από τους/τις επτά μαθητές/τριες έκαναν λόγο για έναν αριθμό, ο οποίος μεταφέρεται/προστίθεται στην επόμενη στήλη. Μάλιστα, η Κατερίνα ανέφερε επιπλέον ότι ο αριθμός αυτός είναι το δέκα. Μόνο ένας μαθητής, ο Αποστόλης, παρόλο που ανέφερε ότι το κρατούμενο είναι μια δεκάδα, που σύμφωνα με την Poisard (2006) αποτελεί και αυτή μια μαθηματική απάντηση, εξηγώντας περαιτέρω την έννοια του κρατουμένου, ουσιαστικά περιέγραψε τι είναι το δανεικό.

Τέλος, στο ερώτημα που αφορά το δανεικό όλοι/ες οι μαθητές/τριες παρείχαν μια απάντηση και μάλιστα προς τη σωστή κατεύθυνση. Όλοι/ες έκαναν λόγο για έναν αριθμό που παίρνεται από διπλανή στήλη. Και αυτό για να εξυπηρετηθεί η ανάγκη εκτέλεσης της αφαίρεσης.

4.4. Αποδείξεις εργαλειακής γένεσης στην πράξη

Το γεγονός ότι ο άβακας από τεχνούργημα έχει μετατραπεί πια σε εργαλείο στα χέρια και στο μυαλό των μαθητών/τριών, αποκαλύπτεται και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Πιο συγκεκριμένα, ο δάσκαλος πριν καλέσει τον κάθε μαθητή/τρια να συμπληρώσει το ερωτηματολόγιο που έπεται της παρέμβασης, ξανάβλεπε το ερωτηματολόγιο το οποίο είχε συμπληρώσει ο/η αντίστοιχος/η μαθητής/τρια πριν την παρέμβαση. Έτσι, είχε μια εικόνα των αρχικών λαθών του/της. Αν στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση σημειωνόταν κάποιο λάθος, ο δάσκαλος καλούσε το παιδί να πει πώς σκέφτηκε. Αν, αντίθετα, απαντούσε σωστά, του πρότεινε τη λανθασμένη απάντηση, που το ίδιο είχε δώσει στο αρχικό ερωτηματολόγιο, και το καλούσε να εξηγήσει γιατί δεν είναι αυτή η σωστή απάντηση. Αν πάλι το παιδί έδινε κάποια απάντηση, η οποία δεν ήταν αρκετά σαφής, ο δάσκαλος ζητούσε διευκρινίσεις. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι τα παιδιά έδιναν εξηγήσεις, οι οποίες βασίζονταν στον κινέζικο άβακα. Έδιναν την εντύπωση ότι είχαν σχηματίσει τον κινέζικο άβακα στο μυαλό τους και τον χειρίζονταν νοερά. Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα από τις απαντήσεις-εξηγήσεις που έδωσαν τα παιδιά στις ερωτήσεις του δασκάλου.

Ο Κωνσταντίνος μετά την παρέμβαση δήλωσε για το κρατούμενο: «Το κρατούμενο είναι ένας αριθμός που τον κρατάω για λίγο, γιατί δεν μπορώ να τον βάλω στη στήλη που είναι, και μετά το βάζω στην άλλη στήλη». Ο δάσκαλος ζήτησε διευκρινίσεις για τη φράση «…γιατί δεν μπορώ να τον βάλω στη στήλη που είναι…». Ο Κωνσταντίνος εξήγησε: «Γιατί στον άβακα η κάθε στήλη μπορεί να πάρει μόνο έναν αριθμό. Από το 0 μέχρι το 9. Ο αριθμός σε εμένα είναι μεγαλύτερος από 9». Είναι εμφανές ότι ο μαθητής βασίζει την απάντησή του στη χρήση του άβακα. Ο ίδιος μαθητής μετά την παρέμβαση αποφάνθηκε για το δανεικό: «Είναι ένας αριθμός που δανείζομαι για λίγο, για να μπορέσω να κάνω την αφαίρεση». Η διευκρίνιση που ζήτησε ο διδάσκων ήταν από πού θα δανειστεί. Εκείνος απάντησε: «Από τη διπλανή στήλη. Θα ανταλλάξω μια χάντρα της γης στις δεκάδες με δύο χάντρες του ουρανού στις μονάδες». Πρόκειται για άλλη μια απάντηση που δείχνει ότι ο μαθητής χρησιμοποιεί τον άβακα ως εργαλείο σκέψης.

Η Κατερίνα πριν την παρέμβαση έγραψε τους αριθμούς «πεντακόσια πενήντα» και «διακόσια είκοσι δύο» ως 5050 και 2022 αντίστοιχα. Μετά την παρέμβαση δεν έκανε κανένα λάθος στη γραφή των αριθμών. Έτσι, ο δάσκαλος τη ρώτησε: «Γιατί ο αριθμός τριακόσια τριάντα τρία δε γράφεται ως 3033;». Εκείνη ανέφερε: «Γιατί στο 333, αυτό το 3 (δείχνει το 3 των εκατοντάδων) είναι το τριακόσια, αυτό (δείχνει το 3 των δεκάδων) είναι το 30 και αυτό (δείχνει το 3 των μονάδων) είναι το 3». Και ο διδάσκων συνέχισε: «Και γιατί δε γράφεις τον αριθμό έτσι, 300303;». Η Κατερίνα απάντησε: «Γιατί στον άβακα αυτό το 3 (δείχνει το 3 των εκατοντάδων) είναι στη στήλη των εκατοντάδων και το γράφω με σκέτο 3, αυτό (δείχνει το 3 των δεκάδων) είναι στη στήλη των δεκάδων και το γράφω με 3 και αυτό το 3 (δείχνει το 3 των μονάδων) είναι το 3. Σε κάθε στήλη γράφω μόνο έναν αριθμό». Επίσης, η ίδια μαθήτρια πριν την παρέμβαση κατά την εκτέλεση μιας πρόσθεσης, πρόσθεσε τις μονάδες των δύο προσθετέων, βρήκε διψήφιο αποτέλεσμα και το έγραψε ολόκληρο (χωρίς να δημιουργήσει κρατούμενο) στη θέση των μονάδων. Μετά την παρέμβαση δεν επανέλαβε το λάθος. Για αυτό ο δάσκαλος ρώτησε για την πρόσθεση 324+8: «Όταν ξεκίνησες την πρόσθεση, είπες 4+8 κάνει 12. Γιατί δεν έγραψες ολόκληρο το 12 στο αποτέλεσμα;». Η Κατερίνα απάντησε: «Γιατί σε κάθε στήλη μπορείς να γράψεις μέχρι το 9. Αν ενεργοποιηθεί όλος ο ουρανός, πρέπει να αλλάξεις με μία χάντρα της γης στην άλλη στήλη». Η μαθήτρια δίνει απάντηση στο ερώτημα μέσα από τη λειτουργία του κινέζικου άβακα, τον οποίο προφανώς έχει σχηματίσει στο μυαλό της. Η Κατερίνα, πριν την παρέμβαση, γράφοντας σε κάθετη διάταξη τους αριθμούς 600 και 8 προκειμένου να τους αφαιρέσει, τοποθέτησε το 8 κάτω από το 6. Μετά την παρέμβαση η τοποθέτηση ήταν σωστή. Ο δάσκαλος τη ρώτησε: «Γιατί έγραψες το 8 κάτω από το 0 και όχι κάτω από το 6 του αριθμού 600;». Εκείνη ανέφερε: «Γιατί είναι μόνο οχτώ και πρέπει να μπει στον άβακα στη στήλη των μονάδων». Μετά την παρέμβαση η μαθήτρια όρισε το κρατούμενο ως εξής: «Το κρατούμενο είναι το ένα… το δέκα, που το κρατάμε και το μεταφέρουμε στην επόμενη στήλη». Στη διευκρινιστική ερώτηση του διδάσκοντα: «Πώς προκύπτει αυτό το δέκα;», η Κατερίνα απάντησε: «Ενεργοποιούνται και οι δύο χάντρες του ουρανού».

Η Εύα, πριν την παρέμβαση, ανέλυσε τους αριθμούς 999 και 277 ως 900+9+9 και 200+7+7 αντίστοιχα. Μετά την παρέμβαση δεν έκανε κανένα λάθος. Ο δάσκαλος για να διαπιστώσει πώς σκέφτηκε η μαθήτρια μετά την παρέμβαση, τη ρώτησε για τον αριθμό 222: «Γιατί ο αριθμός 222 δεν αναλύεται ως 200+2+2;». Η Εύα απάντησε: «Γιατί αυτό το 2 (δείχνει το 2 των δεκάδων) είναι το 20. Είναι στη στήλη των δεκάδων και φτιάχνεται με 2 χάντρες». Κατά την εκτέλεση μιας πρόσθεσης πριν την παρέμβαση, η μαθήτρια μετέφερε τα κρατούμενα που προέκυψαν όχι στη διπλανή στήλη, αλλά στην ακραία αριστερή (των εκατοντάδων). Ωστόσο, μετά την παρέμβαση το κρατούμενο το μετέφερε κανονικά στη διπλανή στήλη. Ο δάσκαλος τη ρώτησε για την περίπτωση της πρόσθεσης 327+8: «Το κρατούμενο δεν πρέπει να πάει στο 3 του 327;». Εκείνη αποκρίθηκε: «Όχι, γιατί 7+8 κάνει 15. Γράφω το 5 και το κρατούμενο το πάω στη διπλανή στήλη, στη στήλη των δεκάδων. Στον άβακα κάνω ανταλλαγή το δέκα του ουρανού με ένα της γης στην άλλη στήλη». Και η Εύα φαίνεται να χρησιμοποιεί τον κινέζικο άβακα ως εργαλείο για τη σκέψη της.

Ο Αποστόλης έκανε και αυτός λάθη στην προσθετική ανάλυση αριθμών πριν την παρέμβαση. Τον αριθμό 440, για παράδειγμα, τον ανέλυσε ως 4+4+0. Μετά την παρέμβαση η ανάλυση των αριθμών πραγματοποιήθηκε σωστά. Ο διδάσκων, για να διαπιστώσει πώς σκέφτηκε, τον ρώτησε: «Γιατί γράφεις ότι ο αριθμός 222 έγινε από 200+20+2 και όχι από 2+2+2;». Εκείνος ανέφερε: «Γιατί το πρώτο 2 είναι στην προ-προτελευταία στήλη και δείχνει 200, το άλλο 2 είναι στην προτελευταία και είναι 20, και το άλλο 2 είναι στο τέλος και είναι το 2». Η νοερή εικόνα του κινέζικου άβακα στο μυαλό του μαθητή είναι εμφανής. Λάθη είχε κάνει ο μαθητής και στην αναγνώριση της αξίας κάθε ψηφίου σε τριψήφιους αριθμούς. Ωστόσο, μετά την παρέμβαση τα λάθη αυτά εξαλείφθηκαν. Έτσι, ο διδάσκων ρώτησε: «Γιατί στον αριθμό 777 έγραψες ότι το πρώτο 7 είναι ο αριθμός 700, το δεύτερο 7 είναι ο αριθμός 70 και το τρίτο 7 είναι ο αριθμός 7;». Ο μαθητής απάντησε: «Γιατί αυτό το 7 (δείχνει το πρώτο 7 του 777) είναι στην τρίτη στήλη, αυτό (δείχνει το δεύτερο 7 του 777) είναι στις δεκάδες και αυτό (δείχνει το τελευταίο 7 του 777) είναι στο τέλος… στη στήλη των μονάδων». Και στην κάθετη τοποθέτηση των προσθετέων στην πράξη της πρόσθεσης ο Αποστόλης είχε κάνει λάθος πριν την παρέμβαση. Μετά την παρέμβαση η κάθετη τοποθέτηση των αριθμών, για παράδειγμα, στην πρόσθεση 327+8 ήταν σωστή. Ο διδάσκων τον ρώτησε: «Γιατί το 8 γράφεται κάτω από 7 του αριθμού 327 και όχι κάτω από κάποιο άλλο ψηφίο του;». Εκείνος απάντησε: «Γιατί το 8 είναι μονάδες. Άρα είναι στη στήλη των μονάδων. Στην τελευταία στήλη». Από όλα τα παραπάνω φαίνεται ότι και ο Αποστόλης διαθέτει ένα νοερό άβακα, τον οποίο χρησιμοποιεί ως εργαλείο για τη σκέψη του.

Η Παρασκευή, όπως και οι περισσότεροι/ες συμμαθητές/τριές της πριν την παρέμβαση, ανέλυσε τον αριθμό 999 ως 9+9+9. Μετά την παρέμβαση, όμως, δεν έκανε κανένα λάθος. Ο δάσκαλος για να διαπιστώσει πώς σκέφτηκε τη ρώτησε: «Γιατί ο αριθμός 222 αναλύεται ως 200+20+2, όπως έγραψες, και όχι ως 2+2+2;». Εκείνη ανέφερε: «Γιατί, όπως είχαμε πει, οι δύο χάντρες στη στήλη των εκατοντάδων είναι το 200, οι δύο χάντρες στις δεκάδες είναι το 20, και οι δύο στις μονάδες το 2». Οι λέξεις «στήλη» και «χάντρες», παραπέμπτουν ξεκάθαρα στον άβακα.

Ο Δημήτρης πριν την παρέμβαση τοποθέτησε κάθετα τους προσθετέους των δύο προσθέσεων χωρίς να είναι ο ένας κάτω από τον άλλο. Μετά την παρέμβαση η τοποθέτηση ήταν σωστή. Ο δάσκαλος ρώτησε: «Στην πρόσθεση 473+69, τα ψηφία 6 και 9, του αριθμού 69, γιατί τα τοποθέτησες ακριβώς κάτω από τα ψηφία 7 και 3, του 473;». Ο Δημήτρης απάντησε: «Άμα βάλεις το 473 στον άβακα, μετά πρέπει να βάλεις 6 χάντρες στις δεκάδες, γιατί είναι το 60, και 9 στις μονάδες, γιατί είναι το 9». Η απάντηση αυτή δείχνει ότι ο μαθητής τοποθετεί νοερά τους αριθμούς στον άβακα.

Ο Νίκος στην άσκηση των ανταλλαγών μεταξύ των διαφόρων τάξεων χρησιμοποίησε νοερά τον κινέζικο άβακα για να βρει πόσες εκατοντάδες έχει η χιλιάδα.

Επομένως, από τα παραπάνω λεγόμενα των μαθητών/τριών προκύπτει ότι οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν τον κινέζικο άβακα για να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν σε κάθε περίπτωση. Πιθανόν ο κινέζικος άβακας να είναι στο μυαλό τους και κατά τη διάρκεια της επίλυσης των ασκήσεων, και όχι μόνο όταν καλούνται να δώσουν διευκρινίσεις.

4.5. Μελέτες περίπτωσης

Από τους/τις επτά μαθητές/τριες που συγκροτούν την Τρίτη τάξη του σχολείου, ο γράφων επέλεξε να παρουσιάσει τρεις περιπτώσεις μαθητών/τριών, λαμβάνοντας υπόψη την επίδοσή τους τόσο πριν όσο και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Έτσι, κατέληξε: α) στην Εύα, η οποία σημείωσε πολύ καλή επίδοση πριν την παρέμβαση και άριστη επίδοση μετά από αυτή, β) στην Κατερίνα, η οποία, αν και παρουσίασε μέτρια επίδοση πριν την παρέμβαση, κατάφερε να βελτιωθεί σε πολύ μεγάλο βαθμό μετά την παρέμβαση, και γ) στο Νίκο, ο οποίος σημείωσε πολύ χαμηλή επίδοση στο ερωτηματολόγιο πριν την παρέμβαση, και ήταν εκείνος από το σύνολο των μαθητών/τριών, που παρουσίασε τη μικρότερη βελτίωση μετά την παρέμβαση. Παρακάτω παρουσιάζεται για κάθε παιδί η επίδοση, οι ενέργειες και τα λεγόμενά του πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, ώστε να γίνει καλύτερα αντιληπτή η επίδραση της παρέμβασης στην κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου.

4.5.1. Περίπτωση 1η: Εύα

Στην πρώτη άσκηση του ερωτηματολογίου η μαθήτρια τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση διάβασε και έγραψε ορθά τριψήφιους αριθμούς χωρίς καμία απολύτως δυσκολία.

Στην επόμενη άσκηση της προσθετικής ανάλυσης τριψήφιων αριθμών, πριν την παρέμβαση, από τους πέντε αριθμούς της άσκησης έκανε από ένα λάθος σε δύο από αυτούς. Πιο συγκεκριμένα ανέλυσε το 999 ως 900+9+9 και το 277 ως 200+7+7. Το λάθος αυτό, που είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις, εμφανίστηκε μόνο στους αριθμούς που τα ψηφία των δεκάδων και των μονάδων ήταν ίδια και μάλιστα διαφορετικά του μηδενός. Ωστόσο, στην ίδια άσκηση μετά την παρέμβαση δε σημειώθηκε κανένα λάθος, παρόλο που υπήρχαν και πάλι αριθμοί με τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

Στην άσκηση 3 και πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση η μαθήτρια αναγνώρισε εύκολα και σωστά την αξία κάθε ψηφίου των τριψήφιων αριθμών.

Αλλά και στην επόμενη άσκηση, την τέταρτη, κατά την ενασχόληση με το ερωτηματολόγιο πριν την παρέμβαση, η Εύα ήταν η μοναδική μαθήτρια που συμπλήρωσε σωστά όλες τις ισοδυναμίες με χαρακτηριστική άνεση και ταχύτητα. Την ίδια άνεση και ταχύτητα επέδειξε και στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση. Και στις δύο περιπτώσεις η μαθήτρια χρησιμοποίησε τα δάχτυλά της ως βοηθητικό μέσο για να μετρήσει δεκάδες και εκατοντάδες.

Στην άσκηση 5 του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση, εκείνη της σύγκρισης, διάταξης και τοποθέτησης αριθμών στην αριθμογραμμή, η μαθήτρια δεν αντιμετώπισε καμία απολύτως δυσκολία. Την ίδια επιτυχία είχε και στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου που ακολούθησε την παρέμβαση.

Πριν τη διδακτική παρέμβαση, στην άσκηση 6, και στο σκέλος των προσθέσεων (254+135, 398+12), η Εύα τοποθέτησε σωστά τους προσθετέους σε κάθετη διάταξη. Στη δεύτερη πρόσθεση, όμως, στην εκτέλεση του αλγόριθμου παρατηρήθηκε ένα λάθος, το οποίο έχει καταγραφεί και στην ελληνική και στην ξένη βιβλιογραφία. Η μαθήτρια άφησε σε αναμονή τα κρατούμενα που προέκυψαν στη στήλη των μονάδων και των δεκάδων, και τα άθροισε όλα μαζί στη στήλη των εκατοντάδων, με αποτέλεσμα να προκύψει λάθος άθροισμα (500). Ωστόσο, στις προσθέσεις (327+8, 473+69) που εκτέλεσε η μαθήτρια στην αντίστοιχη άσκηση μετά την παρέμβαση, δε σημειώθηκε κανένα λάθος.

Σε ό,τι αφορά τις αφαιρέσεις του ερωτηματολογίου που προηγήθηκε της παρέμβασης (546-233 και 600-8), στην πρώτη από τις δύο δεν υπήρξε κανένα λάθος ούτε στη διάταξη των αριθμών ούτε στην εκτέλεση του αλγόριθμου. Στη δεύτερη, όμως, που γράφηκε επίσης σωστά, καταγράφηκε σημαντικός προβληματισμός κατά την εκτέλεσή της. Στην πρώτη απόπειρα εκτέλεσης του αλγόριθμου της αφαίρεσης, η μαθήτρια από το 0 αφαίρεσε 8 μονάδες και βρήκε ως αποτέλεσμα τον αριθμό 8. Κατέβασε το 0 των δεκάδων και το 6 των εκατοντάδων και παρατήρησε τη διαφορά (608) που προέκυψε. Διαπίστωσε ότι δε γίνεται με αυτό τον τρόπο η αφαίρεση, γιατί βρήκε ως διαφορά αριθμό μεγαλύτερο από το μειωτέο. Στη δεύτερη προσπάθεια αφαίρεσε και πάλι το 8 από το 0 και σημείωσε ως αποτέλεσμα 0. Κατέβασε το 0 των δεκάδων και το 6 των εκατοντάδων και βρήκε ως διαφορά τον αριθμό 600. Και πάλι συνειδητοποίησε ότι υπάρχει λάθος, καθώς η διαφορά ήταν ίδια με το μειωτέο, ενώ από αυτόν αφαίρεσε 8 μονάδες. Και στις δύο απόπειρες εκτέλεσης της εν λόγω αφαίρεσης εμφανίζονται λάθη που έχουν σχέση με την ύπαρξη μηδενός στο μειωτέο (Χατζηγεωργίου, 1990). Στην πρώτη προσπάθεια το λάθος της μαθήτριας εμπίπτει στην περίπτωση όπου οι μαθητές/τριες, αφαιρώντας από το μηδέν ένα φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του μηδενός, βρίσκουν ως αποτέλεσμα αυτόν τον μεγαλύτερο αριθμό (0-N=N). Στη δεύτερη προσπάθεια καταγράφεται η περίπτωση στην οποία οι μαθητές/τριες από την παραπάνω αφαίρεση γράφουν ως αποτέλεσμα το 0 (0-N=0). Έπειτα, έκανε έλεγχο αν τοποθέτησε σωστά τον αφαιρετέο κάτω από το μειωτέο και διαπίστωσε ότι είναι σωστά. Στη συνέχεια, προσπάθησε να κάνει την αφαίρεση χωρίς μολύβι και χαρτί, ξεκινώντας από το 600 και αφαιρώντας μία-μία 8 μονάδες με τα δάχτυλά της. Αλλά δε θυμόταν ποιος αριθμός είναι πριν το 600 και εγκατέλειψε την προσπάθεια. Κατόπιν, σκέφτηκε να αντιστρέψει τους δύο όρους, βάζοντας το 8 για μειωτέο και το 600 ως αφαιρετέο. Εκτέλεσε τον αλγόριθμο και βρήκε εκ νέου 608, καταλαβαίνοντας ότι πάλι κάνει λάθος. Μάλιστα χαρακτήρισε τη συγκεκριμένη αφαίρεση σπαζοκεφαλιά. Τελικά, ανέφερε ότι για να κάνει την αφαίρεση 600-8, θα χρειαστεί δανεικό, το οποίο θα πάρει από το 6. Αυτό θα γίνει 5. Σχημάτισε ένα μικρό κύκλο πάνω από το 0 των μονάδων και σημείωσε τον αριθμό 1 στο εσωτερικό του. Ξεκίνησε την εκτέλεση του αλγόριθμου από τις εκατοντάδες. Κατέβασε στη διαφορά το 5 των εκατοντάδων, το 0 των δεκάδων και το 2 των μονάδων, το οποίο προέκυψε από την αφαίρεση 10-8 στη στήλη των μονάδων. Η διαφορά που βρήκε ήταν ο αριθμός 502. Σε όλες τις προσπάθειες εκτέλεσης της αφαίρεσης 600-8 σημειώθηκαν αλγοριθμικά λάθη. Μάλιστα, ο Λεμονίδης (2016) κάνει λόγο για κοριούς (bugs), για παραλλαγές, δηλαδή, του σωστού αλγόριθμου. Ένας τέτοιος κοριός, που εμφανίστηκε στην τελευταία προσπάθεια εκτέλεσης του αλγόριθμου της αφαίρεσης 600-8, φέρει τον τίτλο δανεισμός-διαμέσου-μηδενός· η μαθήτρια, ενώ έπρεπε να δανειστεί από τη στήλη των δεκάδων που έχει ψηφίο 0, υπερπήδησε το 0 και δανείστηκε από το ψηφίο 6 των εκατοντάδων. Μετά τη διδακτική παρέμβαση και στην αντίστοιχη άσκηση, η μαθήτρια εκτέλεσε επιτυχώς τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών» και στις δύο περιπτώσεις (852-363 και 600-8).

Στο ερώτημα τι είναι το κρατούμενο (άσκηση 7 του ερωτηματολογίου), πριν την παρέμβαση, η Εύα ανέφερε: «Για παράδειγμα, άμα κάνεις μια κάθετη πρόσθεση και άμα είναι οι αριθμοί σου μεγάλοι, θα χρειαστείς κρατούμενο». Στην ερώτηση του δασκάλου: «Δηλαδή, τι είναι το κρατούμενο;» απάντησε: «Κρατάς μια δεκάδα κάπου και, όταν τελειώσεις την πρόσθεσή σου, το βάζεις». Εδώ η μαθήτρια περιγράφει ξεκάθαρα την παρανόησή της ότι τα κρατούμενα προστίθενται στην ακραία αριστερά στήλη των προσθετέων. Ως παράδειγμα χρησιμοποίησε την πράξη 398+12, με την οποία ασχολήθηκε στην προηγούμενη άσκηση, και βρήκε ως αποτέλεσμα τον αριθμό 500. Στην ίδια ερώτηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση, η Εύα απάντησε ως εξής: «Το κρατούμενο είναι ένας αριθμός που τον προσθέτουμε στον επόμενο αριθμό. Παράδειγμα, αν είναι 6+6, 12… Γράφουμε το 2 και ένα το κρατούμενο, για να το προσθέσω στον επόμενο αριθμό, για να… στη στήλη των δεκάδων. Το κρατάω για να το προσθέσω στην επόμενη στήλη». Στην απάντηση αυτή είναι εμφανές ότι η λανθασμένη εντύπωση που είχε αρχικά η μαθήτρια για το πού μεταφέρονται τα κρατούμενα, έχει διορθωθεί. Στο ερώτημα σε ποια πράξη χρησιμοποιείται το κρατούμενο, και στα δύο ερωτηματολόγια αποφάνθηκε: «Στην πρόσθεση».

Στο τελευταίο ερώτημα που αφορούσε το δανεικό, η μαθήτρια στο αρχικό ερωτηματολόγιο έδωσε την εξής απάντηση: «Το δανεικό είναι κάτι που το δανείζομαι, μια δεκάδα – έναν αριθμό, για να μου βγει καλή η πρόσθεση». Ως «καλή» όρισε τη σωστή πρόσθεση. Μετά την παρέμβαση η απάντησή της ήταν η εξής: «Είναι ένας αριθμός, που δανειζόμαστε από την επόμενη στήλη. Παράδειγμα, αν είμαστε στις μονάδες δανείζεσαι από τις δεκάδες, αμα είσαι στις δεκάδες, από τις εκατοντάδες, αν είσαι στις εκατοντάδες (από τις) χιλιάδες. Δανείζομαι, για να μου βγει σωστά ο αριθμός. Γιατί άμα δε δανειστώ, δεν μπορώ να κάνω την αφαίρεση». Ενώ πριν την παρέμβαση στην προσπάθειά της να εξηγήσει τι είναι το δανεικό, η μαθήτρια δήλωσε: «…για να μου βγει καλή η πρόσθεση», όταν ρωτήθηκε σε ποια πράξη απαντάται το δανεικό, ανέφερε την αφαίρεση. Την ίδια απάντηση έδωσε στο ερώτημα και μετά την παρέμβαση.

4.5.2. Περίπτωση 2η: Κατερίνα

Στην πρώτη άσκηση του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση, η μαθήτρια λανθασμένα έγραψε με ψηφία τον αριθμό πεντακόσια πενήντα ως 5050 και τον αριθμό διακόσια είκοσι δύο ως 2022. Και στους δύο αριθμούς πρόσθεσε ένα μηδενικό μετά τα ψηφία 5 και 2 αντίστοιχα, που αντιπροσωπεύουν τις εκατοντάδες των αριθμών, παραβιάζοντας έτσι τον τρόπο γραφής των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση η μαθήτρια δεν έκανε κανένα λάθος.

Στη δεύτερη άσκηση της προσθετικής ανάλυσης τριψήφιων αριθμών, η αρχική απάντηση της μαθήτριας πριν την παρέμβαση ήταν ότι ο αριθμός 999 έγινε από τους αριθμούς 9+9+9. Φάνηκε να αντιμετωπίζει τον συγκεκριμένο τριψήφιο αριθμό ως μια σειρά από ψηφία, τα οποία δε σχετίζονται μεταξύ τους. Μετά την παρέμβαση του δασκάλου, ο οποίος ζήτησε από την Κατερίνα να διαβάσει τον αριθμό, και στη συνέχεια να δείξει το κάθε ψηφίο που διαβάζει, αντιλήφθηκε το λάθος της και συνέχισε σωστά. Στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου που ακολούθησε την παρέμβαση, η μαθήτρια συμπλήρωσε την άσκηση χωρίς κανένα σφάλμα.

Στην άσκηση 3, όπου η μαθήτρια κλήθηκε να αναγνωρίσει την αξία του κάθε ψηφίου σε τριψήφιους αριθμούς, και στα δύο ερωτηματολόγια απάντησε σωστά.

Στην τέταρτη άσκηση των ισοδυναμιών, η Κατερίνα δε θυμόταν τι είναι η χιλιάδα. Αρχικά απάντησε ότι πρόκειται για τις γραμμές του χάρακα, τα χιλιοστά δηλαδή, αφού με αυτά ασχολήθηκε στα μαθηματικά, στην ενότητα της μέτρησης μηκών με εκατοστά και χιλιοστά, λίγες μέρες πριν της δοθεί το ερωτηματολόγιο. Όταν ρωτήθηκε, όμως, ποιον αριθμό της θυμίζει η χιλιάδα, απάντησε αμέσως. Σε ό,τι αφορά την εύρεση των ισοδυναμιών μεταξύ χιλιάδας, εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων, η μαθήτρια τις βρήκε χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά της, αλλά έπρεπε να επαναλαμβάνει αρκετές φορές τη διαδικασία για την ίδια ισοδυναμία, καθώς μπερδευόταν και άρχιζε πάλι από την αρχή. Την ίδια τακτική ακολούθησε προκειμένου να βρει τις ισοδυναμίες και στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση. Καθώς, όμως, πάλι μπερδευόταν, ο δάσκαλος της πρότεινε να σκεφτεί τις ισοδυναμίες έχοντας στο μυαλό της τον κινέζικο άβακα. Εκείνη έκανε τις απαραίτητες ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας στις στήλες του άβακα και κατάφερε να βρει τους ζητούμενους αριθμούς ευκολότερα. Για παράδειγμα, στην ισοδυναμία 2 εκατοντάδες = ….. δεκάδες, συμπλήρωσε τον αριθμό 20, εξηγώντας ότι στον άβακα για να ενεργοποιηθεί 1 εκατοντάδα πρέπει να απενεργοποιηθούν 10 δεκάδες. Επομένως, για να ενεργοποιηθούν 2 εκατοντάδες πρέπει να απενεργοποιηθούν άλλες 10 δεκάδες, δηλαδή, συνολικά 20 δεκάδες.

Κατά τη σύγκριση τριψήφιων αριθμών και την τοποθέτησή τους σε φθίνουσα σειρά (άσκηση 5 του ερωτηματολογίου), η μαθήτρια, πριν την παρέμβαση, εργάστηκε σωστά. Μετά την παρέμβαση έκανε ένα λάθος. Τοποθέτησε τον αριθμό 210 ανάμεσα στο 120 και το 110. Σε αυτούς τους τρεις αριθμούς μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι τα ψηφία τους είναι σχεδόν τα ίδια σε διαφορετικές, όμως, θέσεις αξίας. Ωστόσο, επειδή αυτό ήταν το μοναδικό λάθος στη άσκηση, και καθώς υπήρχαν και άλλοι αριθμοί που θα μπορούσαν να αναδείξουν μια πιθανή δυσκολία με τέτοιου είδους αριθμούς, το λάθος αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί σε απροσεξία. Όταν από τη μαθήτρια ζητήθηκε να τοποθετήσει τους αριθμούς στην αριθμογραμμή, αυτή δυσκολεύτηκε όχι στην τοποθέτηση των αριθμών, αλλά στην αναγνώριση της κλίμακας της αριθμογραμμής τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση. Βέβαια, μετά από κάποιες αποτυχημένες προσπάθειες, και στις δύο περιπτώσεις κατάφερε να διαβάσει την αριθμογραμμή.

Σε ό,τι αφορά την εγγραφή σε κάθετη διάταξη και την εκτέλεση προσθέσεων (άσκηση 6 του ερωτηματολογίου), η μαθήτρια πριν την παρέμβαση τοποθέτησε κάθετα με σωστό τρόπο τους προσθετέους της πρόσθεσης 254+135, αλλά έκανε λάθος στην πρόσθεση 398 +12. Τοποθέτησε το 12 κάτω από τις εκατοντάδες και τις δεκάδες του 398. Κατά την εκτέλεση των πράξεων, και στις δύο περιπτώσεις ξεκίνησε την εφαρμογή του αλγόριθμου από τη στήλη των εκατοντάδων. Επιπλέον, στην πρόσθεση 398+12, και με βάση τη λανθασμένη τοποθέτηση των ψηφίων του δεύτερου προσθετέου, έκανε ένα ακόμα λάθος: πρόσθεσε 9+2, και το αποτέλεσμα 11 το έγραψε ολόκληρο στη στήλη των δεκάδων. Το αποτέλεσμα που βρήκε ήταν το 4118. Αντίθετα, μετά την παρέμβαση, η μαθήτρια και τοποθέτησε σωστά τους προσθετέους κάθετα για τις πράξεις 324+8 και 473+69, και εκτέλεσε τον αλγόριθμο της πρόσθεσης σωστά.

Σε ό,τι αφορά την κάθετη διάταξη και την εκτέλεση αφαιρέσεων στην ίδια άσκηση πριν την παρέμβαση, η Κατερίνα τοποθέτησε κάθετα σωστά το μειωτέο και τον αφαιρετέο της αφαίρεσης 546-233, αλλά έκανε λανθασμένη τοποθέτηση των 8 μονάδων κάτω από τον αριθμό 600 στην αφαίρεση 600-8. Το 8 το τοποθέτησε κάτω από τις 6 εκατοντάδες του 600. Και στις δύο περιπτώσεις η μαθήτρια ξεκίνησε τον αλγόριθμο από τη στήλη των εκατοντάδων και συνέχισε δεξιότερα. Μάλιστα, στη δεύτερη αφαίρεση, για να καταφέρει να αφαιρέσει το 8 από το 6, αντέστρεψε τους όρους και υπολόγισε 8-6. Το αποτέλεσμα που βρήκε ήταν το 200. Ωστόσο, μετά την παρέμβαση η επίδοση βελτιώθηκε. Η μαθήτρια έκανε σωστή τοποθέτηση των μειωτέων και των αφαιρετέων των πράξεων 852-363 και 600-8, και εκτέλεσε σωστά τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου» και στις δύο περιπτώσεις.

Στο ερώτημα 7 του ερωτηματολογίου, η Κατερίνα πριν την παρέμβαση εξήγησε το κρατούμενο, λέγοντας: «Κρατούμενο έχουμε όταν κρατάμε έναν αριθμό». Παρά τις διευκρινιστικές ερωτήσεις του δασκάλου, η μαθήτρια δεν μπόρεσε να δώσει περαιτέρω εξηγήσεις, ώστε να γίνει πιο σαφής. Περισσότερη σαφήνεια διακρίνει την απάντησή της στο ίδιο ερώτημα μετά τη διδακτική παρέμβαση. Ανέφερε χαρακτηριστικά: «Το κρατούμενο είναι το ένα… το δέκα, που το κρατάμε και το μεταφέρουμε στην επόμενη στήλη». Η απάντηση αυτή εμπίπτει στην κατηγορία των απαντήσεων, που η Poisard (2006) χαρακτηρίζει ως μαθηματικές στην έρευνα που διεξήγαγε η ίδια για το κρατούμενο. Στο ερώτημα σε ποια πράξη συναντά κανείς το κρατούμενο, η αρχική ιδέα της μαθήτριας ήταν ότι απαντάται στην αφαίρεση και στον πολλαπλασιασμό. Μετά την παρέμβαση έδωσε ως απάντηση την πρόσθεση.

Στην όγδοη ερώτηση που διερευνούσε τις ιδέες των μαθητών/τριων για το τι είναι το δανεικό, η Κατερίνα ισχυρίστηκε ότι δεν έχει ακούσει ποτέ τον όρο «δανεικό». Στο ίδιο ερώτημα μετά την παρέμβαση απάντησε: «Το δανεικό είναι το ένα… το δέκα». Για να δώσει η μαθήτρια περισσότερες πληροφορίες, ο δάσκαλος τη ρώτησε: «Γιατί το λέμε δανεικό;» και εκείνη απάντησε: «Γιατί, όταν ένας αριθμός είναι λίγος, το παίρνω από τον άλλο τον αριθμό, για να τον κάνω τον άλλο τον αριθμό μεγάλο». Προφανώς, η μαθήτρια προσπάθησε να εξηγήσει τι είναι το δανεικό, έχοντας στο μυαλό της τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου». Αυτό επιβεβαιώθηκε, όταν της ζητήθηκε να δείξει το δανεικό με ένα παράδειγμα. Εκείνη χρησιμοποίησε ως παράδειγμα την αφαίρεση 600-8, με την οποία ασχολήθηκε στην άσκηση 6 του ερωτηματολογίου, και την οποία εκτέλεσε με τη χρήση του παραπάνω αλγόριθμου. Στο ερώτημα «Σε ποια πράξη χρησιμοποιούμε το δανεικό;», η μαθήτρια πριν την παρέμβαση δεν έδωσε καμία απάντηση. Μετά την παρέμβαση ανέφερε ότι το δανεικό χρησιμοποιείται στην αφαίρεση.

4.5.3. Περίπτωση 3η: Νίκος

Ο μαθητής στην πρώτη άσκηση του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση, αλλά και μετά από αυτή διάβασε και έγραψε σωστά τριψήφιους αριθμούς.

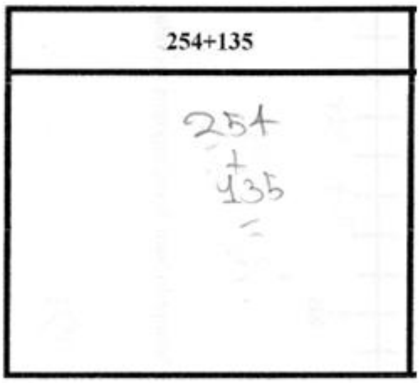
Στη δεύτερη άσκηση πριν την παρέμβαση, ο Νίκος, όπως και οι περισσότεροι/ες συμμαθητές/τριές του, ανέλυσε τον αριθμό 999 ως 9+9+9. Αφού ο δάσκαλος του ζήτησε να διαβάσει τον αριθμό ψηφίο-ψηφίο, κατάλαβε ότι αυτό που του ζητούνταν ήταν η ανάλυση του αριθμού στην αξία των αριθμών από τους οποίους αποτελείται, και όχι με ποια ψηφία συμβολίζεται. Έτσι, συνέχισε συμπληρώνοντας σωστά την άσκηση. Και μετά την παρέμβαση ο Νίκος συμπλήρωσε ορθά την αντίστοιχη άσκηση χωρίς να χρειαστεί να παρέμβει ο δάσκαλος.

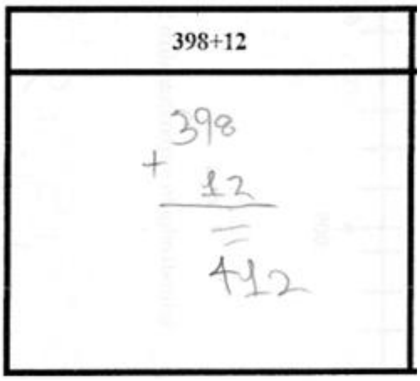
Την τρίτη άσκηση, της εύρεσης της αξίας των ψηφίων τριψήφιων αριθμών ανάλογα με τη θέση τους στον αριθμό, ο μαθητής την απάντησε σωστά και στα δύο ερωτηματολόγια.

Στην άσκηση 4 του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση, ο Νίκος αντιμετώπισε τεράστιες δυσκολίες στην εύρεση των ισοδυναμιών μεταξύ της χιλιάδας, των εκατοντάδων, των δεκάδων και των μονάδων. Να σημειωθεί ότι αρχικά ο μαθητής αναγνώρισε ποιον αριθμό αντιπροσωπεύει η χιλιάδα, η εκατοντάδα, η δεκάδα και η μονάδα. Στην πρώτη ισοδυναμία και στην ερώτηση του δασκάλου: «Πόσες εκατοντάδες, πόσα εκατό χρειάζεσαι για να κάνεις το χίλια;», ώστε να κατανοήσει ο Νίκος τι του ζητείται να σκεφτεί και να συμπληρώσει, εκείνος αρχικά απάντησε: «Μηδέν», και στη συνέχεια «Δύο. Τρία», δίνοντας την εντύπωση ότι απαντά στην τύχη χωρίς να σκέφτεται κάτι. Την απάντηση «τρία» τη δικαιολόγησε λέγοντας ότι ο αριθμός χίλια έχει τρία μηδενικά και το ένα μπροστά. Μάλλον αντιμετώπιζε τον αριθμό 1.000 ως ένα σχέδιο, ως μια εικόνα. Η απάντησή του δεν έχει κανένα σημείο επαφής με την ερώτηση. Στη δεύτερη ισοδυναμία, 1 χιλιάδα = ….. δεκάδες, είπε ότι θα βάλει 10 δεκάδες, γιατί κάνουν 100. Στην τρίτη ισοδυναμία, 1 χιλιάδα = ….. μονάδες, απάντησε ότι οι μονάδες του χίλια είναι άπειρες. Στην ισοδυναμία 100 μονάδες = ….. δεκάδες συμπλήρωσε 100, ενώ στην ισότητα 100 μονάδες = ….. εκατοντάδες, απάντησε καμία. Στη συνέχεια της άσκησης αντιμετώπισε προβλήματα στην κατανόηση των πρώτων όρων των ισοτήτων. Για παράδειγμα, στην ισότητα 20 δεκάδες = ….. εκατοντάδες δεν μπόρεσε να αναγνωρίσει ποιος αριθμός έχει 20 δεκάδες και συμπλήρωσε την ισότητα με τον αριθμό 2. Στη συνέχεια ανέφερε ότι οι 20 δεκάδες ισούνται με 20 μονάδες. Στην ισοδυναμία 5 εκατοντάδες = ….. δεκάδες, απάντησε 10. Στην ερώτηση του δασκάλου: «Ποιος αριθμός έχει 5 εκατοντάδες;», απάντησε το 105 και, όπως ανέφερε ο ίδιος, το είπε στην τύχη. Στην τελευταία ισότητα (5 εκατοντάδες = ….. μονάδες), απάντησε σωστά μετά από αρκετή προσπάθεια. Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, ο μαθητής ουσιαστικά δεν κατανοεί τι είναι η χιλιάδα, η εκατοντάδα, η δεκάδα, η μονάδα. Δεν μπορεί να αναγνωρίσει αριθμούς που είναι εκφρασμένοι σε εκατοντάδες, δεκάδες και μονάδες ούτε μπορεί να κάνει ανταλλαγές μεταξύ χιλιάδας, εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων. Παρά την παρότρυνση του δασκάλου να χρησιμοποιήσει ως βοηθητικό μέσο τα δάχτυλά του, εκείνος προσπάθησε να διαχειριστεί νοερά τους αριθμούς και τις ισοδυναμίες. Όμως, στη νοερή διαχείριση των αριθμών και των ανταλλαγών μεταξύ τους αποτυγχάνει πλήρως, ενώ χρειάζεται διαρκή καθοδήγηση. Στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση, ο Νίκος, προκειμένου να βρει τις ισοδυναμίες, ξεκίνησε έχοντας στο μυαλό του τον κινέζικο άβακα, τον οποίο χειριζόταν νοερά. Εδώ, πρέπει να επισημανθεί ότι ο Νίκος είναι ο μοναδικός μαθητής που, μετά την παρέμβαση, αυθόρμητα χρησιμοποίησε νοερά τον κινέζικο άβακα, προκειμένου να λύσει την άσκηση. Την πρώτη ισοδυναμία (1 χιλιάδα = ….. εκατοντάδες) τη βρήκε εύκολα, εξηγώντας την με κινήσεις/ανταλλαγές που έκανε νοερά στον άβακα. Στη δεύτερη (1 χιλιάδα = ….. δεκάδες), όμως, μπερδευόταν στο νοερό χειρισμό του άβακα και επέλεξε να εργαστεί με τα δάχτυλά του. Με τα δάχτυλα υπολόγισε και έγραψε σωστά και τις υπόλοιπες ισοδυναμίες. Πολύ εύκολα βρήκε τις ισότητες, στις οποίες το δεύτερο μέρος έπρεπε να εκφραστεί σε μονάδες. Μετά την παρέμβαση, ο Νίκος αναζήτησε ένα σημείο αναφοράς για τον υπολογισμό των αριθμών και των ισοτήτων, καταφεύγοντας μερικώς στη χρήση του άβακα και κυρίως στη χρήση των χεριών του. Κάτι που, όπως ειπώθηκε, δεν έπραξε πριν την παρέμβαση.

Στην πέμπτη άσκηση πριν την παρέμβαση, ο Νίκος, πριν ξεκινήσει τη σύγκριση και την τοποθέτηση αριθμών σε σειρά, εξήγησε τον τρόπο που θα εργαστεί. Ανέφερε ότι θα προσέξει το πρώτο ψηφίο κάθε αριθμού και αν δύο αριθμοί ξεκινούν από το ίδιο ψηφίο, θα κοιτάξει το δεύτερο (των δεκάδων). Ενώ τοποθέτησε σε σειρά τους αριθμούς, σύμφωνα με τον τρόπο που εξήγησε, εντούτοις έκανε ένα λάθος, αφού έθεσε το 640 μεταξύ του 570 και του 540. Το λάθος θα μπορούσε, βέβαια, να αποδοθεί σε απροσεξία του μαθητή, αν και του ζητήθηκε να κάνει επανέλεγχο. Δυσκολία αντιμετώπισε στην τοποθέτηση των αριθμών στην αριθμογραμμή. Ξεκίνησε, βάζοντας το 760 αμέσως μετά το 700. Στην ερώτηση του δασκάλου γιατί το τοποθέτησε εκεί, δεν έδωσε απάντηση. Στη συνέχεια προσπάθησε να βρει σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί η κάθε κάθετη γραμμή της αριθμογραμμής μεταξύ του 700 και του 800. Αρχικά μέτρησε ανά 1 και είδε ότι δεν είναι σωστό. Κατόπιν πρότεινε τον αριθμό 2, με το ίδιο αποτέλεσμα, επανέλαβε την υπόθεση της μονάδας, την οποία ξαναδοκίμασε, και τελικά πρότεινε τον αριθμό 10. Έλεγξε την κλίμακα ανά 10, κατάλαβε ότι είναι η σωστή και συνέχισε να τοποθετεί τους αριθμούς στην αριθμογραμμή χωρίς κανένα λάθος. Στην ίδια άσκηση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση, ο μαθητής τοποθέτησε τους αριθμούς σε φθίνουσα σειρά χωρίς κανένα λάθος. Όταν κλήθηκε να τους τοποθετήσει στην αριθμογραμμή, δυσκολεύτηκε και πάλι στην εύρεση της κλίμακας της αριθμογραμμής. Στην αρχή σε κάθε κάθετη γραμμή έδωσε τον αριθμό εκατό. Παρατήρησε, όμως, ότι η αριθμογραμμή περιείχε τους αριθμούς 200, 300, 400 και 500. Έπειτα, έθεσε τον αριθμό 110 αμέσως μετά το 100, αναφέροντας ότι η κλίμακα είναι ανά μία μονάδα. Μετρώντας κατάλαβε ότι κάνει λάθος. Τελικά κατέληξε στη δεκάδα, έκανε έλεγχο της ορθότητάς της πρότασής του και συνέχισε τοποθετώντας σωστά τους αριθμούς.

Στις προσθέσεις της άσκησης 6 του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση, ο μαθητής και στις δύο περιπτώσεις τοποθέτησε κάθετα τους δύο προσθετέους ως εξής:

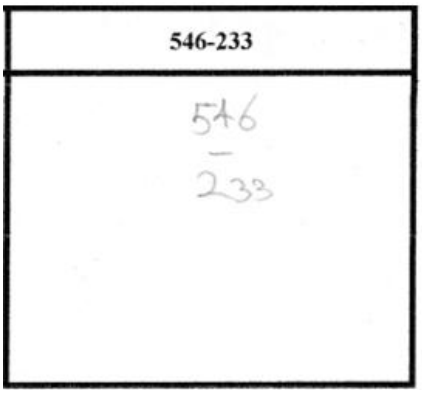


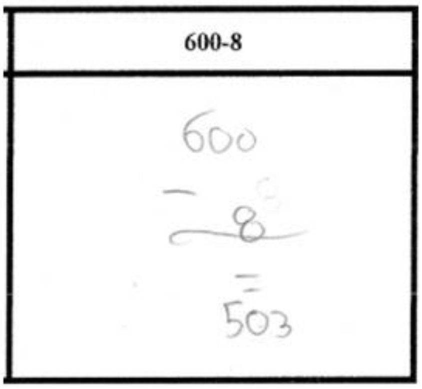


Εικόνα **4.13.** Κάθετη διάταξη των προσθετέων στις προσθέσεις του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση από το Νίκο

Ξεκίνησε να εκτελεί την πρώτη πρόσθεση (254+135), λέγοντας: «Διακόσια και εκατό, τριακόσια». Και το έγραψε, αρχικά, κάτω από το ίσον. Συνέχισε αναφέροντας: «Ως εδώ έχουμε τριακόσια. Τετρακόσια, πεντακόσια, εξακόσια, εφτακόσια». Στην ερώτηση του δασκάλου γιατί αναφέρει τετρακόσια, πεντακόσια, εξακόσια, εφτακόσια, δεν έδωσε καμία απάντηση και έσβησε τον αριθμό 300. Συνέχισε λέγοντας: «Διακόσια πενήντα τέσσερα και εκατόν τριάντα πέντε… χίλια». Ο δάσκαλος τον ρώτησε πώς βρήκε το 1.000 και εκείνος επικαλέστηκε την τύχη. Στη συνέχεια ανέφερε: «Δεν μπορώ να το βρω. Είναι μεγάλος ο αριθμός». Προφανώς επιχειρούσε ανεπιτυχώς να υπολογίσει με το νου και όχι με τον αλγόριθμο το αποτέλεσμα της πράξης. Και αυτό το έκανε αφού, όπως είπε: «Δε θυμάμαι πώς γίνεται (η πράξη)». Στη δεύτερη πρόσθεση (398+12) άρχισε να μετρά αντίστροφα από το 12 ως το 4. Στην ερώτηση του δασκάλου γιατί το έκανε αυτό, είπε ότι το έκανε στην τύχη. Μάλλον ο μαθητής από το 12 άρχισε να αφαιρεί τις 8 μονάδες του αριθμού 398. Όταν ρωτήθηκε τι σημαίνει το σύμβολο +, απάντησε «να βάλω». Όταν του επισημάνθηκε ότι εκείνος μετρούσε αντίστροφα, ανέφερε: «Εγώ νόμιζα ότι θα βγάλω». Το γεγονός αυτό θυμίζει το λάθος που κάνουν κάποιοι/ες μαθητές/τριες κατά την εκτέλεση μιας πράξης, οι οποίοι εκτελούν άλλη πράξη (αφαίρεση αντί για πρόσθεση) (Λεμονίδης, 2016· Χατζηγεωργίου, 1990). Συνέχισε προσπαθώντας να προσθέσει το 12 στο 398, ανεβαίνοντας ένα-ένα με τη βοήθεια των δακτύλων του. Τελικά, έγραψε ως άθροισμα τον αριθμό 412. Και εδώ φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο Νίκος δε θυμάται πώς εκτελείται ο αλγόριθμος της πρόσθεσης και προσπαθεί να βρει το αποτέλεσμα με το μυαλό και με τα δάχτυλά του. Μετά τη διδακτική παρέμβαση και στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου, τις προσθέσεις 327+8 και 473+69 τις έγραψε κάθετα με το σωστό τρόπο. Αρχικά, στην πρώτη πρόσθεση, αντί για τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, εκτέλεσε τον αλγόριθμο της αφαίρεσης. Έπειτα συνειδητοποίησε το λάθος του και εκτέλεσε το σωστό αλγόριθμο. Και στη δεύτερη πρόσθεση ο Νίκος αρχικά ξεκίνησε να κάνει αφαίρεση αντί για πρόσθεση. Αμέσως, όμως, κατάλαβε το λάθος του και εκτέλεσε ορθά τον αλγόριθμο της πρόσθεσης.

Και τις αφαιρέσεις της άσκησης 6 (546-233, 600-8) πριν την παρέμβαση ο μαθητής τις έγραψε σε κάθετη διάταξη με τρόπο παρόμοιο με εκείνο των προσθέσεων. Δηλαδή:





Εικόνα **4.14.** Κάθετη διάταξη του μειωτέου και του αφαιρετέου στις αφαιρέσεις του ερωτηματολογίου πριν τη διδακτική παρέμβαση από το Νίκο

Ξεκίνησε να εκτελεί την πρώτη αφαίρεση (546-233), λέγοντας «θέλει να βγάλουμε εκατό, γιατί είναι πλην». Παρά τις διευκρινιστικές ερωτήσεις του δασκάλου, δε δικαιολόγησε γιατί πρέπει να αφαιρέσει εκατό. Έπειτα πρότεινε να αφαιρέσει 7 από το 546, χωρίς και πάλι να εξηγεί το γιατί. Συνέχισε λέγοντας: «Κατάλαβα πόσα πρέπει να βγάλουμε! Τα 333». Όταν ο δάσκαλος τον διόρθωσε, θυμίζοντάς του ότι αφαιρετέος είναι ο αριθμός 233, εκείνος επέμεινε στο 333 χωρίς να εξηγήσει το λόγο. Τελικά εγκατέλειψε την προσπάθεια ανεύρεσης της διαφοράς των δύο αριθμών. Τη διαφορά των αριθμών στη δεύτερη αφαίρεση 600-8, ξεκίνησε να τη βρει μετρώντας αντίστροφα από το 600. Κατέβαινε μία-μία μονάδα με τη βοήθεια των δακτύλων του. Ως αποτέλεσμα της αντίστροφης μέτρησης βρήκε και έγραψε τον αριθμό 503. Και στον τρόπο εκτέλεσης των αφαιρέσεων γίνεται φανερό ότι ο μαθητής αγνοεί και τον αλγόριθμο της αφαίρεσης. Αλλά και με τον τρόπο που επιχειρεί να βρει τα αποτελέσματα κάνει λάθη στη μέτρηση. Ωστόσο, στις αφαιρέσεις (852-363, 600-8) της άσκησης 6 του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση, η κάθετη τοποθέτηση του μειωτέου και του αφαιρετέου έγινε με τον ορθό τρόπο. Την πρώτη αφαίρεση ο μαθητής επέλεξε να τη λύσει με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Ενώ, όμως, πρόσθεσε 10 μονάδες και 10 δεκάδες στις μονάδες και στις δεκάδες του μειωτέου αντίστοιχα, ώστε να μπορέσει να εκτελέσει τον αλγόριθμο, δεν πρόσθεσε ίσα ποσά στις δεκάδες και στις εκατοντάδες του αφαιρετέου, προκειμένου να εκτελεστεί σωστά ο αλγόριθμος. Έτσι προέκυψε η λανθασμένη διαφορά 599. Στη δεύτερη αφαίρεση, 600-8, ο Νίκος εφάρμοσε τον αλγόριθμο της «μετατροπής του μειωτέου», χρησιμοποιώντας στο τελευταίο στάδιο τον συντακτικό κανόνα που ισχύει στον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Αφού δεν μπόρεσε να κάνει αφαίρεση στη στήλη των μονάδων, δανείστηκε 1 εκατοντάδα από τις 6 εκατοντάδες του αριθμού 600, τη μετέτρεψε σε 10 δεκάδες, τις οποίες μετέφερε στις δεκάδες του μειωτέου. Βέβαια, παρέλειψε να μειώσει τις εκατοντάδες του 600 από 6 σε 5, αφού δανείστηκε μία από αυτές. Έπειτα, δανείστηκε μια δεκάδα από τις 10 δεκάδες του μειωτέου, χωρίς να τις ελαττώσει σε 9, αφού πήρε μία από αυτές, τη μετέτρεψε σε 10 μονάδες και τις τοποθέτησε στις μονάδες του μειωτέου. Συνέχισε την εκτέλεση του αλγόριθμου, βρίσκοντας 2 ως αποτέλεσμα στη στήλη των μονάδων και προχωρώντας στις δεκάδες, κατέβασε το 0 των 10 δεκάδων στη διαφορά της στήλης των δεκάδων και το ένα το έκανε κρατούμενο. Το κρατούμενο το μετέφερε στις εκατοντάδες του αφαιρετέου και έκανε την αφαίρεση 6-1=5, το οποίο 5 έγραψε στις εκατοντάδες τις διαφοράς. Εδώ ακριβώς εμφανίζεται ο συντακτικός κανόνας του αλγόριθμου της αφαίρεσης με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών», όπου το 1 μεταφέρεται στις εκατοντάδες του κάτω αριθμού (του μειωτέου). Ως τελικό αποτέλεσμα της αφαίρεσης προέκυψε ο αριθμός 502.

Στην ερώτηση 7, που αφορά το κρατούμενο, ο Νίκος πριν την παρέμβαση θεωρούσε ότι το κρατούμενο είναι το αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης, δηλαδή, το άθροισμα. Μετά την παρέμβαση και η δική του απάντηση: «Το κρατούμενο είναι ένας αριθμός που τον προσθέτουμε στη άλλη στήλη», μπορεί να χαρακτηριστεί, σύμφωνα με την Poisard (2006), ως μαθηματική απάντηση. Για να το εξηγήσει με ένα παράδειγμα, έγραψε κάθετα την αφαίρεση 600-7, την οποία και εκτέλεσε με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω η αφαίρεση 600-8. Στο ερώτημα «Σε ποια πράξη χρησιμοποιούμε το κρατούμενο;» πριν την παρέμβαση απάντησε ότι το κρατούμενο το έχουμε στην πρόσθεση και στην αφαίρεση, ενώ μετά την παρέμβαση ανέφερε μόνο την αφαίρεση.

Στην ερώτηση 8 του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση, που σχετίζεται με το δανεικό, ο μαθητής αρχικά ισχυρίστηκε ότι δε έχει ξανακούσει αυτό τον όρο, αλλά στη συνέχεια ανέφερε ότι δε θυμάται τι είναι το δανεικό. Προσπαθώντας να το εξηγήσει με ένα παράδειγμα, χρησιμοποίησε την αφαίρεση 600-8, και είπε: «Αν γράφεις 600-8, αυτό είναι το δανεικό!». Στην ερώτηση του δασκάλου αν ολόκληρη η πράξη είναι το δανεικό, απάντησε αρνητικά. Έπειτα ανέφερε ως δανεικό το σύμβολο της ισότητας (=). Είπε: «Το ίσον είναι το δανεικό!». Μετά από όλα αυτά κατέληξε, λέγοντας ότι δε θυμάται τι είναι το δανεικό. Στο ίδιο ερώτημα μετά την παρέμβαση ανέφερε: «(Το δανεικό) είναι αυτό που δανείζομαι μια δεκάδα, και το προσθέτω στον αριθμό για να μου βγει το αποτέλεσμα». Ως παράδειγμα έγραψε σε κάθετη διάταξη την αφαίρεση 800-7. Την εκτέλεσε με τον τρόπο που περιγράφηκαν παραπάνω οι αφαιρέσεις 600-8 και 600-7 και, όταν ρωτήθηκε ποιο είναι το δανεικό στη συγκεκριμένη αφαίρεση, εξήγησε: «Το δανεικό είναι το 10 στη στήλη των δεκάδων και το 10 στη στήλη των μονάδων». Τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση αποφάνθηκε ότι το δανεικό εμφανίζεται στην πράξη της αφαίρεσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα. Επιπλέον, επιχειρείται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων αυτών με βάση το θεωρητικό πλαίσιο και την προγενέστερη έρευνα (Tsiapou & Nikolantonakis, 2013).

Οι ασκήσεις με τις οποίες ασχολήθηκαν οι μαθητές/τριες στο ερωτηματολόγιο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση αφορούσαν: α) τη σωστή ανάγνωση και γραφή πολυψήφιων αριθμών, β) την προσθετική ανάλυση τριψήφιων αριθμών, γ) την αναγνώριση της αξίας θέσης ψηφίου σε τριψήφιους αριθμούς, δ) τις ανταλλαγές αριθμών μεταξύ των διαφορετικών θέσεων αξίας, ε) τη σύγκριση, τη διάταξη σε φθίνουσα σειρά και την τοποθέτηση αριθμών στην αριθμογραμμή, στ) την εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων σε κάθετη διάταξη, ζ) την ερμηνεία του κρατουμένου στην πρόσθεση, καθώς και η) την ερμηνεία του δανεικού στην αφαίρεση. Με όλες τις παραπάνω ασκήσεις επιχειρήθηκε, αρχικά, να ανιχνευτεί αν οι μαθητές/τριες, που μόλις έχουν ξεκινήσει την Τρίτη τάξη του Δημοτικού Σχολείου, κατανοούν πτυχές της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα.

Για να απαντηθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα πρέπει να μελετηθούν οι απαντήσεις των παιδιών στο ερωτηματολόγιο πριν τη διδακτική παρέμβαση.

Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές/τριες διάβασαν σωστά τους δεδομένους αριθμούς και ορθά έγραψαν με ψηφία άλλους, που δίνονταν με λέξεις.

Οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες, αρχικά, δυσκολεύτηκαν να αναλύσουν προσθετικά τριψήφιους αριθμούς. Η συνήθης αντιμετώπιση των ψηφίων των αριθμών παραπέμπει στην εννοιολογική δομή που περιγράφει η Fuson (1990), σύμφωνα με την οποία οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν τους πολυψήφιους αριθμούς ως μια αλληλουχία ασύνδετων μεταξύ τους ψηφίων. Η διευκρίνιση, που ζήτησε ο δάσκαλος, για τον τρόπο ανάλυσης του πρώτου αριθμού της άσκησης, άνοιξε το δρόμο για την ορθή συμπλήρωσή της.

Κατά την αναγνώριση της αξίας των ψηφίων σε τριψήφιους αριθμούς δε σημειώθηκαν λάθη από τους/τις περισσότερους/ες μαθητές/τριες. Κατά την άποψη του γράφοντος, η διευκρινιστική ερώτηση του δασκάλου («Πώς διαβάζεις το κάθε 9 στον αριθμό 999;») στην προηγούμενη άσκηση συνέβαλε, ώστε να μην επαναληφθούν τα λάθη της προαναφερθείσας άσκησης.

Εκεί που εντοπίστηκαν οι μεγαλύτερες δυσκολίες ήταν στις ανταλλαγές αριθμών μεταξύ των διαφόρων τάξεων. Αρχικά, πολλοί/ες μαθητές/τριες δεν απαντούσαν σωστά στο ερώτημα «Τι είναι η χιλιάδα;». Την μπέρδευαν με το χιλιοστό, τη μονάδα μέτρησης του μήκους, την οποία διδάχτηκαν λίγες μέρες πριν τους/τις δοθεί το ερωτηματολόγιο. Για αυτό και έκαναν λόγο για γραμμές στο χάρακα. Όταν, όμως το ερώτημα αναδιατυπώθηκε ως εξής: «Ποιος αριθμός είναι η χιλιάδα;», όλοι/ες απάντησαν σωστά. Ίσως το γεγονός ότι τα παιδιά είχαν καιρό να αναφερθούν στη χιλιάδα, αφού ο δάσκαλος τροποποίησε τη σειρά στην ύλη των μαθηματικών, ώστε να μη γίνει καμία αναφορά στον άξονα των ακέραιων αριθμών και των πράξεων με αυτούς καθόλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, να συνέβαλε στη δυσκολία εύρεσης της έννοιας της χιλιάδας. Άλλωστε, γνωστό είναι και το γεγονός ότι οι μαθητές/τριες, των μικρότερων κυρίως ηλικιών, πολύ συχνά μπερδεύουν τους μαθηματικούς όρους μεταξύ τους. Δυσκολία υπήρξε σε κάποιους/ες και στην αναγνώριση της μονάδας. Η πλειοψηφία των παιδιών είχε την ανάγκη διαρκούς καθοδήγησης, ώστε να καταλήξει σε κάποια απάντηση, καθώς υπήρχε σύγχυση για τη σχέση μεταξύ μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων και χιλιάδας. Πιο συγκεκριμένα, πολλές φορές μπερδεύονταν κατά τη διάρκεια της μέτρησης, φτιάχνοντας τελικά αριθμούς μικρότερους από τους ζητούμενους. Για παράδειγμα, ενώ τους ζητούνταν να βρουν με πόσες δεκάδες είναι ίσες οι 5 εκατοντάδες, τα παιδιά μπορεί να σταματούσαν τη μέτρηση στις 3 εκατοντάδες. Μόνο μια μαθήτρια επέδειξε χαρακτηριστική ευχέρεια στη διαδικασία εύρεσης των ζητούμενων αριθμών. Οι υπόλοιποι/ες μαθητές/τριες έκαναν λάθη ή/και καθυστερούσαν πολύ στην εύρεση της απάντησης. Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών χρησιμοποίησε τα δάχτυλα ως μέσο για την εύρεση των ζητούμενων αριθμών.

Κατά τη σύγκριση και διάταξη αριθμών σε φθίνουσα σειρά έγινε μόνο ένα λάθος, το οποίο μπορεί να αποδοθεί σε απροσεξία. Άλλωστε, οι αριθμοί, που επελέγησαν για την άσκηση αυτή, είχαν κοινά ψηφία σε διαφορετικές θέσεις αξίας, ώστε να αποκαλύψουν τυχόν παρανοήσεις και δυσκολίες των μαθητών/τριών. Μεγάλη δυσκολία εμφανίστηκε στην τοποθέτηση των αριθμών στην αριθμογραμμή, στην οποία αναγράφονταν οι εκατοντάδες, αλλά απουσίαζαν οι δεκάδες μεταξύ των εκατοντάδων. Κάθε δεκάδα αναπαρίστατο με μια μικρή κάθετη γραμμή πάνω στην αριθμογραμμή. Η πλειοψηφία των μαθητών/τριών δυσκολεύτηκε να «διαβάσει» την αριθμογραμμή, να κατανοήσει, δηλαδή, την κλίμακά της. Το γεγονός αυτό ίσως μαρτυρά την έλλειψη εξοικείωσης των παιδιών με το εργαλείο της αριθμογραμμής.

Προβλήματα παρουσιάστηκαν και κατά την κάθετη διάταξη αριθμών και την εκτέλεση προσθέσεων. Οι δύο από τους/τις επτά μαθητές/τριες τοποθέτησαν κάθετα τους προσθετέους με έναν τελείως δικό τους τρόπο, που δεν έχει παρουσιαστεί ποτέ στο σχολείο. Την τοποθέτηση διψήφιου προσθετέου κάτω από τριψήφιο μόνο δύο μαθητές/τριες την έκαναν σωστά. Οι υπόλοιποι/ες έθεσαν δεκάδες κάτω από εκατοντάδες και μονάδες κάτω από δεκάδες. Επίσης, από τις δύο προσθέσεις που κλήθηκαν να εκτελέσουν τα παιδιά, την πρώτη (254+135) μόνο δύο μαθητές/τριες την εκτέλεσαν σωστά, ενώ τη δεύτερη (398+12) όλοι/ες την εκτέλεσαν λάθος. Συνοπτικά, τα λάθη που σημειώθηκαν στην πρόσθεση αφορούσαν: α) τη λανθασμένη τοποθέτηση των προσθετέων, β) τη λανθασμένη κατεύθυνση κατά την εκτέλεση της πράξης (εκκίνηση της διαδικασίας εκτέλεσης του αλγόριθμου από τις εκατοντάδες), γ) τη μεταφορά των κρατουμένων στη ακραία αριστερή ή στην ακραία δεξιά, και όχι στην επόμενη στήλη, δ) την παράλειψη κρατουμένου, ε) την εγγραφή διψήφιου αριθμού σε μια θέση αξίας χωρίς τη δημιουργία κρατουμένου, αλλά και στ) άγνοια εκτέλεσης του αλγόριθμου της πρόσθεσης, καθώς δύο μαθητές αποφάνθηκαν ότι δε θυμούνταν πώς εκτελείται μια πρόσθεση.

Αλλά και στην αφαίρεση σημειώθηκαν παρόμοια προβλήματα τόσο στην κάθετη διάταξη μειωτέου και αφαιρετέου όσο και στην εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης. Στην πρώτη πράξη (546-233) τα ίδια παιδιά, όπως προηγουμένως στην πρόσθεση, τοποθέτησαν κάθετα τους δύο αριθμούς με τον δικό τους ανορθόδοξο τρόπο. Στη δεύτερη (600-8) μόνο τρία από τα επτά παιδιά προχώρησαν σε σωστή διάταξη. Την πρώτη αφαίρεση μόνο δύο μαθητές/τριες την εκτέλεσαν σωστά, ενώ τη δεύτερη κανένας/καμία. Να σημειωθεί ότι όσα από τα παιδιά εκτέλεσαν τον αλγόριθμο της αφαίρεσης επέλεξαν τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Μόνο μια μαθήτρια εκτέλεσε τον αλγόριθμο της αφαίρεσης με τον τύπο της «μετατροπής ή ανάλυσης του μειωτέου» στην πράξη 600-8. Συνοπτικά τα λάθη που σημειώθηκαν στην αφαίρεση ήταν τα εξής: α) λανθασμένη τοποθέτηση του αφαιρετέου κάτω από το μειωτέο, β) λανθασμένη κατεύθυνση στην εκτέλεση της πράξης (έναρξη από τις εκατοντάδες), γ) αντιστροφή των όρων αντί για δανεισμό, όταν σε μια θέση το ψηφίο του αφαιρετέου είναι μεγαλύτερο από το ψηφίο του μειωτέου, δ) εγγραφή του αποτελέσματος μιας θέσης αξίας σε άλλη θέση, ε) δανεισμός-διαμέσου-μηδενός, όπου αποφεύγεται ο δανεισμός από τη διπλανή θέση, γιατί το ψηφίο είναι μηδέν και γίνεται από τη μεθεπόμενη, και στ) άγνοια εκτέλεσης του αλγόριθμου της αφαίρεσης, καθώς οι ίδιοι μαθητές που δε θυμούνταν πώς εκτελείται ο αλγόριθμος της πρόσθεσης, δε θυμούνταν και πώς εκτελείται ο αλγόριθμος της αφαίρεσης.

Τη μεγαλύτερη συχνότητα τόσο στην πρόσθεση όσο και στην αφαίρεση σημείωσε το λάθος της εσφαλμένης τοποθέτησης των αριθμών σε κάθετη διάταξη πριν την εκτέλεση του αλγόριθμου, καθώς και της εκτέλεσης του αλγόριθμου από τα αριστερά προς τα δεξιά (από τις εκατοντάδες προς τις μονάδες).

Την έννοια του κρατουμένου η πλειοψηφία των μαθητών/τριών δεν μπόρεσε να την περιγράψει με σαφήνεια, ενώ δύο παιδιά δεν έδωσαν καμία απάντηση. Επίσης, δεν ήταν ξεκάθαρο στο μυαλό των παιδιών σε ποια πράξη εμφανίζεται το κρατούμενο, καθώς έγινε λόγος πέρα από την πρόσθεση και για την πράξη της αφαίρεσης.

Μεγαλύτερη αποτυχία καταγράφηκε στην ερώτηση για την έννοια του δανεικού. Οι τέσσερις από τους/τις επτά μαθητές/τριες δεν απάντησαν, ενώ από τους/τις υπόλοιπους/ες τρεις, μόνο μία μαθήτρια ήταν περισσότερο σαφής στην απάντησή της, καθώς έκανε λόγο για μια δεκάδα. Επίσης, σύγχυση παρατηρήθηκε και στην πράξη, στην οποία πραγματοποιείται ο δανεισμός, αφού κάποιοι/ες ανέφεραν εκτός από την αφαίρεση και την πρόσθεση.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, κανείς τα αποτελέσματα των ερωτηματολογίων των μαθητών /τριών πριν τη διδακτική παρέμβαση, θα μπορούσε να απαντήσει στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, λέγοντας ότι τα παιδιά, στην πλειοψηφία τους, δεν κατέχουν σε ικανοποιητικό βαθμό την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου. Αν η πολυπλοκότητα της έννοιας της αξίας θέσης των ψηφίων σε έναν πολυψήφιο αριθμό κρυβόταν πίσω από την υπεραπλούστευση της ερμηνείας της συγκεκριμένης έννοιας ως εκείνης που αφορά τη σωστή ανάγνωση και γραφή αριθμών και μόνο, τότε κάποιος θα ισχυριζόταν ότι οι παραπάνω μαθητές/τριες κατέχουν την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου (Major 2012, όπως αναφ. στο Hurst & Hurrell, 2014). Όμως, από τις επιδόσεις των παιδιών στην ποικιλία των ασκήσεων του ερωτηματολογίου, οι οποίες επιχειρούν να ελέγξουν την κατοχή της εν λόγω έννοιας, προκύπτει αρνητικό αποτέλεσμα. Έτσι, επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός των Chan, Au, & Tang (2014) ότι οι μαθητές/τριες, που δεν κατανοούν την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου, κάνουν λάθη τόσο στην ανάγνωση και στη γραφή όσο και στην παραγωγή πολυψήφιων αριθμών, αλλά και σε διαδικασίες που σχετίζονται με τη δομή του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος, όπως τη μεταφορά του κρατουμένου και το δανεισμό. Επίσης, η συνολική επίδοση των παιδιών εναρμονίζεται με τα αποτελέσματα της έρευνας των Tsiapou & Nikolantonakis (2013), οι οποίοι από τα ερωτηματολόγια πριν τη διδακτική τους παρέμβαση συμπεραίνουν μια επιφανειακή κατανόηση της δομής των αριθμών από τους/τις μαθητές/τριες της Στ΄ τάξης του Δημοτικού. Στο συμπέρασμα της επιφανειακής κατανόησης της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου από μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης κατέληξαν στην έρευνά τους και οι Καφούση & Ντζιαχρήστος (1998). Οι απαντήσεις των παιδιών στο ερώτημα τι είναι το κρατούμενο συμφωνούν με το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε η Poisard (2006), η οποία αποφάνθηκε ότι η έννοια του κρατουμένου δύσκολα μπορεί να οριστεί από τους/τις μαθητές/τριες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές/τριες, οι οποίοι/ες δε θυμούνταν ή/και δεν μπορούσαν να εκτελέσουν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης, κατέφυγαν στην εύρεση του αποτελέσματος με τη χρήση των δακτύλων τους. Αυτό γινόταν μόνο στις πράξεις, στις οποίες ο ένας προσθετέος ή ο αφαιρετέος ήταν μικρός αριθμός και μπορούσαν να τον διαχειριστούν εύκολα με τα δάχτυλά τους. Για την πρόσθεση χρησιμοποίησαν την (αριθμητική) διαδικασία της αρίθμησης από το μεγαλύτερο, ενώ στην αφαίρεση τη διαδικασία της αντίστροφης αρίθμησης.

Τα παιδιά, στο σύνολό τους, χρησιμοποίησαν τα δάχτυλά τους και κατά τη διαδικασία της ανταλλαγής αριθμών ανάμεσα σε διαφορετικές τάξεις, αφού αποτελεί ένα μέσο, το οποίο χαρακτηρίζεται ως εύχρηστο, άμεσα προσβάσιμο και εύκολο να το αντιληφθεί κανείς (Σκουμπουρδή, 2012).

Επίσης, άξιο λόγου είναι και το γεγονός ότι, η πλειοψηφία των μαθητών/τριών όχι μόνο δεν χρησιμοποίησε την επαλήθευση για να διαπιστώσει την ορθότητα των αποτελεσμάτων των πράξεων, αλλά ούτε καν έλεγξε τη λογικότητα των αποτελεσμάτων (Fiori & Zuccheri, 2005), όπως για παράδειγμα στην πράξη της αφαίρεσης, όπου πολλές φορές προέκυψε διαφορά πολύ μικρότερη από την αναμενόμενη (στην αφαίρεση 600-8 καταγράφηκαν ως αποτελέσματα της πράξης οι αριθμοί 500, 502, 200, 515, 503).

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα θέτει στο επίκεντρο την εργαλειακή γένεση. Πρόκειται για τη διαδικασία με την οποία ένα τεχνούργημα γίνεται μέρος ενός εργαλείου στα χέρια του/της μαθητή/τριας. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει δύο επιμέρους διαδικασίες: α) αυτή που μετατρέπει το τεχνούργημα σε εργαλείο (εμφάνιση και ανάπτυξη των σχημάτων χρήσης) και β) εκείνη που συμβάλλει στην κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων. Βέβαια, η όλη διαδικασία είναι μακρά και πολύπλοκη, και απαιτεί χρόνο και προσπάθεια και από τους/τις μαθητές/τριες και από τον/την εκπαιδευτικό.

Παρόλα αυτά, η απάντηση που μπορεί να δοθεί στο ερώτημα είναι καταφατική. Όντως, ο κινέζικος άβακας, όπως φάνηκε στην διδακτική παρέμβαση, δύναται από τεχνούργημα να μετατραπεί σε εργαλείο στο μυαλό και στα χέρια των μαθητών/τριών. Αρχικά αυτό επιδιώχθηκε μέσα από στοχευμένες δραστηριότητες, οι οποίες αποσκοπούσαν στην εξέλιξη αυτή. Εκείνο, όμως, που αποδεικνύει ότι πράγματι ο κινέζικος άβακας μπορεί να εξελιχθεί σε εργαλείο για την κατανόηση και εξήγηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου, καταγράφηκε στις απαντήσεις των μαθητών/τριών κατά τη συμπλήρωση των ασκήσεων του ερωτηματολογίου, που ακολούθησε τη διδακτική παρέμβαση.

Πιο συγκεκριμένα, ο δάσκαλος, πριν καλέσει κάποιο/α μαθητή/τρια να συμπληρώσει το ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση, είχε μελετήσει τα λάθη που είχε κάνει ο/η ίδιος/α μαθητής/τρια στις ασκήσεις του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση. Αν διαπίστωνε ότι σε κάποια άσκηση το παιδί, ενώ πριν απαντούσε λανθασμένα, τώρα πια απαντά σωστά, το καλούσε να εξηγήσει πώς σκέφτηκε. Επίσης, αν μια απάντηση του/της μαθητή/τριας δεν ήταν αρκετά σαφής, τον/την καλούσε να την εξηγήσει καλύτερα. Οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες αποκρίνονταν με όρους που παρέπεμπαν ξεκάθαρα στον κινέζικο άβακα. Όταν απαντούσαν, έδιναν την εντύπωση ότι είχαν σχηματίσει στο μυαλό τους τον κινέζικο άβακα, τον οποίο και χειρίζονταν νοερά. Χρησιμοποιούσαν, δηλαδή, τον άβακα ως ένα εργαλείο σκέψης και εξήγησης των ενεργειών τους. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αυτόν το νοερό άβακα τα παιδιά τον χρησιμοποιούσαν για να εξηγήσουν απλές καταστάσεις, οι οποίες εμπλέκουν την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου, και όχι πιο σύνθετες, όπως για παράδειγμα, την εκτέλεση μιας πρόσθεσης ή μιας αφαίρεσης. Βέβαια, για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο απαιτείται εξοικείωση και πολύ πρακτική εξάσκηση στον κινέζικο άβακα (Yuen, 1974), κάτι που προϋποθέτει πολύ χρόνο και ήταν έξω από τους στόχους της παρούσας έρευνας. Για παράδειγμα, ένας μαθητής στο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση απάντησε ότι το δανεικό «είναι ένας αριθμός που δανείζομαι για λίγο, για να μπορέσω να κάνω την αφαίρεση». Στην ερώτηση του δασκάλου από πού δανείζεται, αποκρίθηκε: «Από τη διπλανή στήλη. Θα ανταλλάξω μια χάντρα της γης στις δεκάδες με δύο χάντρες του ουρανού στις μονάδες». Επίσης, μια μαθήτρια κατά την εκτέλεση μιας πρόσθεσης πριν την παρέμβαση, έγραψε ως αποτέλεσμα σε μια θέση αξίας διψήφιο αριθμό, χωρίς να δημιουργήσει κρατούμενο. Ωστόσο, μετά την παρέμβαση, την πρόσθεση 324+8 την εκτέλεσε σωστά. Ο δάσκαλος τη ρώτησε: «Όταν ξεκίνησες την πρόσθεση είπες 4+8 κάνει 12. Γιατί δεν έγραψες ολόκληρο το 12 στο αποτέλεσμα;». Εκείνη αποκρίθηκε: «Γιατί σε κάθε στήλη μπορείς να γράψεις μέχρι το 9. Αν ενεργοποιηθεί όλος ο ουρανός, πρέπει να αλλάξεις με μία χάντρα της γης στην άλλη στήλη». Μια άλλη μαθήτρια, κατά την προσθετική ανάλυση αριθμών πριν την παρέμβαση, αποφάνθηκε ότι το 999 αναλύεται ως 900+9+9. Μετά την παρέμβαση τον αριθμό 222 τον ανέλυσε σωστά. Τότε ο δάσκαλος τη ρώτησε: «Γιατί ο αριθμός 222 δε γράφεται ως 200+2+2;». Εκείνη απάντησε: «Γιατί αυτό το 2 (δείχνει το 2 των δεκάδων) είναι το 20. Είναι στη στήλη των δεκάδων και φτιάχνεται με 2 χάντρες». Ένας μαθητής πριν την παρέμβαση στην πρόσθεση 398+12 τοποθέτησε τα ψηφία του 12 κάτω από τις εκατοντάδες και τις μονάδες του 398. Μετά την παρέμβαση δεν έκανε λάθη στην τοποθέτηση των προσθετέων στην πράξη 327+8. Ωστόσο, ο δάσκαλος τον ρώτησε: «Γιατί το 8 γράφεται κάτω από το 7 του αριθμού 327 και όχι κάτω από κάποιο άλλο ψηφίο του αριθμού;». Ο μαθητής απάντησε: «Γιατί το 8 είναι μονάδες. Άρα είναι στη στήλη των μονάδων. Στην τελευταία στήλη». Προφανώς ο μαθητής έχει σχηματίσει στο μυαλό του τον κινέζικο άβακα και έχει τοποθετήσει τον αριθμό 8 στη στήλη των μονάδων. Μετά την παρέμβαση, ένας άλλος μαθητής, στην άσκηση της ανταλλαγής αριθμών μεταξύ των διαφορετικών τάξεων, κλήθηκε να βρει πόσες εκατοντάδες έχει η μία χιλιάδα. Πρόκειται για την πρώτη περίπτωση της συγκεκριμένης άσκησης. Εκείνος απάντησε: «Δέκα, γιατί στη στήλη των εκατοντάδων, στον ουρανό, είναι ενεργοποιημένες δύο χάντρες. Και οι δύο έχουν αξία από πεντακόσια».

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, αν μπορεί ο κινέζικος άβακας να διαμεσολαβήσει την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου, αν μπορεί, δηλαδή, να διαμεσολαβήσει μαθηματικό περιεχόμενο στους/στις μαθητές/τριες, αναφέρεται στη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Τα παιδιά, κατά την ενασχόλησή τους με το τεχνούργημα στη διάρκεια μιας δραστηριότητας, παράγουν κείμενα που αντικατοπτρίζουν τα προσωπικά τους νοήματα, τα οποία ενδέχεται να περιέχουν και μαθηματικά νοήματα. Η μετατροπή αυτών των προσωπικών κειμένων, των προσωπικών νοημάτων των παιδιών, σε μαθηματικά κείμενα, σε μαθηματικά νοήματα, τα οποία αποπλαισιώνονται από τη συγκεκριμένη κατάσταση και αποκτούν γενική ισχύ -γίνονται, δηλαδή, μαθηματική γνώση- αποτελεί μια συνοπτική περιγραφή της θεωρίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Βέβαια, αυτή η μετατροπή απαιτεί την εμπλοκή του/της δασκάλου/ας, ο/η οποίος/α καλείται να διαχειριστεί κατάλληλα τα προσωπικά νοήματα των παιδιών.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, σε κάποιες δραστηριότητες διατυπώθηκαν από τα παιδιά κείμενα, τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν ως πλαισιοθετημένα, μιας και αφορούν πολύ συγκεκριμένες καταστάσεις. Τα κείμενα αυτά ήταν κυρίως προφορικά, τα οποία, μέσα από συζήτηση, επιχειρήθηκε να μετατραπούν σε μαθηματικά κείμενα.

Στη δραστηριότητα που αποσκοπούσε στην ανάδειξη της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου, οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τον αριθμό 342 στον κινέζικο άβακα. Ένας μαθητής εξήγησε πώς εργάστηκε στον άβακά του, με το ακόλουθο (προφορικό) κείμενο: «Ανέβασα τρεις μπαλίτσες στο τρίτο ξυλάκι από το τέλος, μετά ανέβασα αυτές τις μπαλίτσες στο προτελευταίο ξυλάκι και μία μπαλίτσα σε αυτό το ξυλάκι». Το πλαισιοθετημένο αυτό κείμενο αντανακλά τα προσωπικά νοήματα του μαθητή για την αναπαράσταση του αριθμού 342 στον άβακα. Το κείμενο, όμως, αυτό εμπεριέχει και κάποιο μαθηματικό περιεχόμενο, καθώς παραπέμπει στις στήλες του άβακα, άρα και στις θέσεις αξίας του αριθμού. Ο δάσκαλος φρόντισε μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις να κατευθύνει τη σκέψη των παιδιών από τη φαινομενική στην πραγματική αξία του κάθε ψηφίου, η οποία καθορίζεται από τη θέση του στον αριθμό. Έτσι, όταν ο ίδιος μαθητής, μετά από όλη τη συζήτηση, κλήθηκε να απαντήσει ξανά στο ερώτημα πώς έφτιαξε τον αριθμό 342 στον άβακα, αποκρίθηκε: «Ανέβασα τρεις χάντρες στη στήλη των εκατοντάδων, γιατί η καθεμία δείχνει εκατό, άρα τριακόσια. Ανέβασα τέσσερις χάντρες στη στήλη των δεκάδων, γιατί η καθεμία έχει δέκα, σαράντα και ανέβασα και δύο στις μονάδες, γιατί η κάθε χάντρα έχει ένα». Εδώ φαίνεται καθαρά η μετατροπή του αρχικού κειμένου του μαθητή σε μαθηματικό πια κείμενο, το οποίο παραπέμπει στη (μαθηματική) γνώση της αξίας κάθε ψηφίου του αριθμού ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό.

Κάτι αντίστοιχο συνέβη και στη συνέχεια της δραστηριότητας, όπου στον πίνακα ήταν σχεδιασμένος ένας κινέζικος άβακας, ο οποίος αναπαριστούσε τον αριθμό 352. Σε κάθε στήλη φαίνονταν οι ενεργοποιημένες χάντρες, πάνω στις οποίες ήταν γραμμένη η αξία τους. Μια μαθήτρια πήρε το λόγο και ανέφερε: «Κύριε, παρατήρησα κάτι: στη στήλη των μονάδων ο αριθμός 1 δεν έχει μηδέν, στη στήλη των δεκάδων ο αριθμός 10 έχει ένα μηδενικό, ενώ στη στήλη των εκατοντάδων ο αριθμός 100 έχει δύο μηδενικά». Αυτό το πλαισιοθετημένο κείμενο της μαθήτριας αντανακλά τη σκέψη της για τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι χάντρες της κάθε στήλης, την οποία την εκφράζει με τη ύπαρξη ή όχι μηδενικού ή μηδενικών στον αριθμό, που αναπαριστά την αξία της κάθε χάντρας του άβακα. Παραπέμπει, δηλαδή, στην έννοια της αξίας θέσης ψηφίου και πιο συγκεκριμένα στην ιδιότητα της βάσης του δέκα, σύμφωνα με την οποία η αξία της κάθε στήλης ή αλλιώς της κάθε θέσης αυξάνει κατά μία δύναμη του δέκα, καθώς κινείται κανείς από τα δεξιά προς τα αριστερά (Hurst & Hurrell, 2014). Ο δάσκαλος αξιοποίησε το κείμενο της μαθήτριας και μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις και συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης αυτό αναδιατυπώθηκε ως εξής: «Η πρώτη στήλη δείχνει το 1. Η δεύτερη στήλη είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από την πρώτη και δείχνει το 10, και η τρίτη είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από τη δεύτερη και δείχνει το 100». Έτσι, το μαθηματικό πια κείμενο, που διατυπώθηκε, αποτυπώνει ευκρινέστερα, σε σύγκριση με το αρχικό πλαισιοθετημένο κείμενο, την ιδιότητα της βάσης του δέκα στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Από τα δύο παραπάνω παραδείγματα γίνεται εμφανές ότι το τεχνούργημα, ο κινέζικος άβακας στην προκειμένη περίπτωση, κατέχει κεντρική θέση στη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης, καθώς αποτελεί την αφετηρία για την εκκίνηση της θεωρίας. Κατά την εφαρμογή της θεωρίας, τα πλαισιοθετημένα κείμενα των μαθητών/τριών μπορούν μέσα από τους κατάλληλους χειρισμούς του/της δασκάλου/ας να μετατραπούν σε μαθηματικά κείμενα. Να διαμεσολαβήσουν, δηλαδή, μαθηματικό περιεχόμενο, να διαμεσολαβήσουν μαθηματική γνώση. Τέλος, να σημειωθεί ότι όλη αυτή η διαδικασία συμβαίνει στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης με τη συμμετοχή όλων των μαθητών/τριών. Επομένως, όπως φάνηκε από τα παραπάνω παραδείγματα, ο κινέζικος άβακας με τη χρήση του στο πλαίσιο της θεωρίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης, έχει τη δυνατότητα να διαμεσολαβήσει την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Την απάντηση στο τελευταίο ερευνητικό ερώτημα, για το αν τελικά η χρήση του κινέζικου άβακα συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της βάσης του 10 στο αριθμητικό σύστημα, του κρατουμένου, του δανεικού, και των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τους/τις μαθητές/τριες, την παρέχει η μελέτη των αποτελεσμάτων των παιδιών στις ασκήσεις του ερωτηματολογίου, που ακολούθησε τη διδακτική παρέμβαση.

Όλοι/ες οι μαθητές/τριες και διάβασαν και έγραψαν τριψήφιους αριθμούς χωρίς καμία δυσκολία. Η ίδια επιτυχία καταγράφηκε και στην προσθετική ανάλυση αριθμών, αλλά και στην αναγνώριση της αξίας των ψηφίων τριψήφιων αριθμών. Και οι τρεις ασκήσεις απαντήθηκαν με χαρακτηριστική άνεση, σιγουριά και ταχύτητα από το σύνολο των μαθητών/τριών. Ακόμα και οι ελάχιστοι/ες μαθητές/τριες που είχαν κάνει κάποιο λάθος στις αντίστοιχες τρεις ασκήσεις του ερωτηματολογίου, που προηγούνταν της παρέμβασης, όχι μόνο δεν το επανέλαβαν, αλλά εξήγησαν και ποιο είναι το σωστό, χρησιμοποιώντας νοερά τον κινέζικο άβακα (όπως αναφέρθηκε και στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα) για την παροχή των εξηγήσεων.

Στην άσκηση των ανταλλαγών μεταξύ των διαφόρων τάξεων (μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων) όλοι/ες οι μαθητές/τριες συμπλήρωσαν σωστά τις ισοδυναμίες. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι και σε αυτή την άσκηση βελτιώθηκε όχι μόνο η επίδοση, αλλά και η αυτοπεποίθηση και η ταχύτητα απόκρισης. Μάλιστα τα τέσσερα από τα επτά παιδιά επέδειξαν τα χαρακτηριστικά αυτά. Τα υπόλοιπα τρία εξακολούθησαν να δυσκολεύονται στην εύρεση των ζητούμενων αριθμών. Από αυτά τα τρία παιδιά, ένας μαθητής έδειχνε να μην κατανοεί τι πρέπει να βρει και πώς να σκεφτεί. Ο δάσκαλος τον προέτρεψε να ανακαλύψει ποιον αριθμό περιγράφει το πρώτο σκέλος της ισότητας, ώστε να μπει στη διαδικασία να βρει και το δεύτερο. Τότε συνειδητοποίησε τι του ζητούνταν να κάνει, και στη συνέχεια συμπλήρωσε τις ισοδυναμίες. Οι περισσότεροι/ες μαθητές/τριες χρειάζονταν να έχουν κάποιο μέσο είτε υλικό είτε νοερό, ώστε να προβούν στη μέτρηση των εκατοντάδων και των δεκάδων που καλούνταν να βρουν. Όσον αφορά τις μονάδες, τις έβρισκαν χωρίς ιδιαίτερη σκέψη και χωρίς την ανάγκη κάποιου μέσου. Μάλιστα ένας μαθητής χρησιμοποίησε πολλαπλασιαστική σκέψη για την εύρεση των ισοδυναμιών. Κάθε απάντησή του τη δικαιολογούσε με το γινόμενο ενός πολλαπλασιασμού. Ίσως το γεγονός ότι στην τρίτη τάξη δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον πολλαπλασιασμό και στην εκμάθηση της προπαίδειας, την οποία ο εν λόγω μαθητής γνωρίζει πολύ καλά, να συνέβαλε στη χρήση αυτού του τρόπου σκέψης. Τρεις μαθητές/τριες χρησιμοποίησαν ως μέσο τα δάχτυλα. Μία μαθήτρια χρησιμοποίησε πρώτα τα δάχτυλα, αλλά επειδή δυσκολευόταν, με παρότρυνση του δασκάλου, μεταχειρίστηκε το νοερό άβακα και τα κατάφερε καλύτερα. Μία άλλη μαθήτρια έκανε χρήση εν μέρει των δακτύλων και εν μέρει της πολλαπλασιαστικής σκέψης, ενώ από το σύνολο των μαθητών/τριών μόνο ένας ξεκίνησε αυθόρμητα να χρησιμοποιεί τον κινέζικο άβακα, τον οποίο στη συνέχεια εγκατέλειψε για χάρη των δακτύλων. Ίσως η υπερβολική εξοικείωση των παιδιών με τη χρήση των δαχτύλων τους στα μαθηματικά, καθώς και το γεγονός ότι αυτά προσφέρουν άμεση αντίληψη (και απτική και οπτική), να τα καθιστούν πιο ισχυρά από κάθε άλλο μέσο για τη διευκόλυνση της σκέψης. Άλλωστε, ανέκαθεν το ανθρώπινο σώμα και τα μέλη του υποστήριζαν και εξυπηρετούσαν ανάγκες και πρακτικές μαθηματικής φύσεως (Σκουμπουρδή, 2012). Βέβαια, το τι μέσο θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές/τριες για να υποστηρίξουν τη σκέψη τους, πιθανόν να εξαρτάται και από τη φύση του έργου που έχουν να εκτελέσουν. Όπως αναφέρθηκε και στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούσαν το νοερό κινέζικο άβακα και όχι τα δάχτυλά τους, προκειμένου να παράσχουν τις διευκρινίσεις και τις εξηγήσεις, που ζητούσε ο δάσκαλος, σε διαφορετικού είδους ασκήσεις.

Σωστά τοποθετήθηκαν οι αριθμοί σε φθίνουσα σειρά από το σύνολο των μαθητών/τριών. Σημειώθηκε μόνο ένα λάθος, το οποίο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί λάθος απροσεξίας, καθώς δεν παρέπεμπε σε κάποια παρανόηση ή κάποιου είδους δυσκολία. Σαφώς βελτιωμένη ήταν και η επίδοση των μαθητών/τριών στην τοποθέτηση των τριψήφιων αριθμών στην αριθμογραμμή. Από τους/τις επτά μαθητές/τριες, οι πέντε δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία, ενώ οι δύο δυσκολεύτηκαν στην εύρεση της κλίμακας της αριθμογραμμής. Δυσκολία την οποία, μετά από μερικές προσπάθειες τοποθέτησης των αριθμών, την ξεπέρασαν. Να σημειωθεί ότι, στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση, αντίστοιχη δυσκολία είχαν αντιμετωπίσει οι έξι από τους/τις επτά μαθητές/τριες. Θα μπορούσε κανείς να αποδώσει την ευχέρεια πια στη χρήση της αριθμογραμμής, στην επαφή των μαθητών/τριών με αυτή και τη χρησιμοποίησή της κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών. Άλλωστε, η διδακτική παρέμβαση με τη χρήση του κινέζικου άβακα δεν προέβλεπε την παροχή κάποιας γνώσης και ιδιαίτερη εξάσκηση προς αυτή την κατεύθυνση.

Σε ό,τι αφορά την πράξη της πρόσθεσης, όλοι/ες οι μαθητές/τριες και τοποθέτησαν σωστά σε κάθετη διάταξη τους προσθετέους, παρόλο που είχαν διαφορετικό αριθμό ψηφίων, και εκτέλεσαν σωστά τον αλγόριθμο της πρόσθεσης. Τα λάθη που είχαν κάνει τα παιδιά κατά την εκτέλεση των προσθέσεων, που τους δόθηκαν πριν την παρέμβαση, δεν επαναλήφθηκαν.

Αναφορικά με την πράξη της αφαίρεσης, αξίζει να τονιστεί ότι και εδώ το σύνολο των μαθητών/τριών τοποθέτησε κάθετα το μειωτέο και τον αφαιρετέο με το σωστό τρόπο. Κάτι που δεν είχε συμβεί πριν την παρέμβαση. Το γεγονός ότι μάλλον ο κινέζικος άβακας συνέβαλε στη συνειδητοποίηση της σωστής θέσης των αριθμών, όταν αυτοί τοποθετούνται ο ένας κάτω από τον άλλο, τόσο στην πρόσθεση όσο και στην αφαίρεση, αποδεικνύεται από τις εξηγήσεις που παρέχουν οι μαθητές/τριες στις διευκρινιστικές ερωτήσεις του δασκάλου, οι οποίες περιγράφηκαν και σχολιάστηκαν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

Να σημειωθεί ότι στη Β΄ τάξη του Δημοτικού οι μαθητές/μαθήτριες διδάσκονται τον αλγόριθμο της αφαίρεσης, αρχικά με τον τύπο της «μετατροπής (ή αλλιώς ανάλυσης/ανασύνθεσης) του μειωτέου» και στη συνέχεια με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Ωστόσο στη Γ΄ τάξη, κατά την υπενθύμιση του αλγόριθμου της αφαίρεσης, παρουσιάζεται μόνο ο τύπος της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Άλλωστε, αυτός είναι και ο τύπος του αλγόριθμου που κυρίως προτιμούν να χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, τον οποίο και προωθούν περισσότερο στα παιδιά. Εδώ πρέπει να αναφερθεί μια σημαντική παρατήρηση που κάνει ο Χατζηγεωργίου (1990). Σύμφωνα με αυτόν, «δανεισμός» στην αφαίρεση καλείται η διάσπαση ενός ψηφίου, η λήψη μιας μονάδας από αυτό το ψηφίο, η μετατροπή αυτής της μονάδας σε δέκα μονάδες της αμέσως χαμηλότερης τάξης, και η τοποθέτηση των δέκα μονάδων στο ψηφίο της χαμηλότερης τάξης. Ωστόσο, στο ελληνικό σχολείο έχει επικρατήσει ο όρος «δανεισμός» (… δανειζόμαστε μια δεκάδα …) να σημαίνει την «πρόσθεση ίσων ποσών». Με λίγα λόγια χρησιμοποιείται η φρασεολογία του ενός τύπου αλγόριθμου για να περιγράψει τον άλλο τύπο. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να προκαλεί σύγχυση στους/στις μαθητές/τριες και να ευθύνεται ως ένα βαθμό για την αποτυχία τους στην εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης.

Σύμφωνα με τους ερευνητές (Λεμονίδης, 2016· Fiori & Zuccheri, 2005), για τους/τις μικρούς/ές μαθητές/τριες ενδείκνυται ο τύπος της «μετατροπής του μειωτέου», καθώς δίνει νόημα στα βήματα εκτέλεσης του αλγόριθμου της αφαίρεσης και προωθεί την κατανόηση της σημασίας του. Αντίθετα, ο τύπος της «πρόσθεσης ίσων ποσών», που κατά κόρον χρησιμοποιείται στο ελληνικό σχολείο, βασίζεται στη θεμελιώδη ιδιότητα του αμετάβλητου της διαφοράς, η οποία είναι αφηρημένη, άρα και δύσκολο να εξηγηθεί στους/στις μαθητές/τριες, καθώς και να αναπαρασταθεί. Μάλιστα, σχεδόν ποτέ δεν εξηγείται στους/στις μαθητές/τριες, ενώ πολλές φορές την αγνοούν και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί.

Ο τύπος της «μετατροπής του μειωτέου» είναι ο μόνος που μπορεί να εφαρμοστεί στον κινέζικο άβακα (Tsiapou & Nikolantonakis, 2013). Ωστόσο, ο δάσκαλος κατά τη διδακτική παρέμβαση δεν απέκλεισε τη χρήση του τύπου της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Άλλωστε, δε θα μπορούσε να ακυρώσει τον τρόπο με τον οποίο δούλευαν τα παιδιά κατά τα δύο τελευταία σχολικά χρόνια. Αντίθετα, ανέλυσε διεξοδικά τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου», ο οποίος οπτικοποιήθηκε με τη χρήση του άβακα και εξήγησε με άλλα υλικά (καπάκια μπουκαλιών) και στον πίνακα τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών», αφού ο άβακας δεν μπορεί να τον υποστηρίξει. Από εκεί και πέρα ήταν στη διακριτική ευχέρεια των μαθητών/τριών ποιον τύπο θα επιλέξουν για την εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης στο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί η ευκολία με την οποία τα παιδιά έδειχναν να κατανοούν το νέο για αυτά τρόπο εκτέλεσης της αφαίρεσης. Βέβαια, υπήρξε και ένα παιδί, το οποίο δήλωσε ότι μπερδευόταν με αυτόν τον «καινούριο» τρόπο. Έτσι, ενώ πριν την παρέμβαση όσοι/ες μαθητές/τριες εκτέλεσαν τις δύο αφαιρέσεις του ερωτηματολογίου το έκαναν με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών», αφού ουσιαστικά μόνο αυτόν γνώριζαν, μετά την παρέμβαση, στην αντίστοιχη άσκηση του ερωτηματολογίου, την αφαίρεση 852-363 τέσσερις μαθητές/τριες την εκτέλεσαν με τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου», και τρεις με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών», ενώ την αφαίρεση 600-8 πέντε μαθητές/τριες την εκτέλεσαν με τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου» και δύο με τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών». Αυτή η μετατόπιση της προτίμησης των μαθητών/τριών από τον τύπο της «πρόσθεσης ίσων ποσών», που χρησιμοποιούσαν ως τώρα, και όπως αναφέρουν οι έρευνες τα παιδιά εκτελούν συνήθως μηχανικά, αφού δεν τον κατανοούν, προς τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου», ο οποίος προωθεί την κατανόηση του αλγόριθμου της αφαίρεσης, μπορεί να πιστωθεί στη διδακτική παρέμβαση και πιο συγκεκριμένα στον κινέζικο άβακα, πάνω στον οποίο οπτικοποιήθηκε με τη βοήθεια των χαντρών η όλη διαδικασία της μετατροπής του μειωτέου.

Σε αντίθεση με τις προσθέσεις, στις αφαιρέσεις σημειώθηκαν αλγοριθμικά λάθη. Πριν γίνει αναφορά στα λάθη αυτά, άξιο λόγου είναι το γεγονός ότι, συγκρίνοντας κανείς την επίδοση των παιδιών στις δύο αφαιρέσεις (852-363 και 600-8) του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση, διαπιστώνει ότι οι πέντε από τους/τις επτά μαθητές/τριες εκτέλεσαν σωστά την αφαίρεση 600-8, έναντι τριών μαθητών/τριών, οι οποίοι/ες εκτέλεσαν σωστά την αφαίρεση 852-363. Στις έρευνες αναφέρεται ότι οι αφαιρέσεις που έχουν μηδενικά στο μειωτέο θεωρούνται πιο δύσκολες σε σχέση με άλλες περιπτώσεις αφαιρέσεων (Σκανδαλάκη & Σκουμπουρδή, 2014; Fiori & Zuccheri, 2005). Εδώ, βέβαια, η αφαίρεση 600-8 έχει μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας, καθώς, εκτός από την ύπαρξη μηδενικών στο μειωτέο, απουσιάζουν τα ψηφία των δεκάδων και των εκατοντάδων από τον αφαιρετέο, αφού ο αφαιρετέος είναι μονοψήφιος αριθμός. Σκοπίμως και στα δύο ερωτηματολόγια δόθηκε προς επίλυση η ίδια αφαίρεση (600-8), ακριβώς για να ελεγχθεί η διαφορά στην επίδοση των μαθητών/τριών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Υπενθυμίζεται ότι στο ερωτηματολόγιο πριν την παρέμβαση κανένας/καμία μαθητής/τρια δεν έλυσε σωστά τη συγκεκριμένη αφαίρεση. Αυτή η σημαντική αύξηση των σωστών απαντήσεων, που καταγράφηκε μετά την παρέμβαση, θα μπορούσε να αποδοθεί στη χρήση του άβακα, μέσω του οποίου τα παιδιά κατανόησαν πώς ανασυντίθεται ο μειωτέος προκειμένου να επιτευχθεί η αφαίρεση.

Τελικά, τρεις μαθητές/τριες έλυσαν σωστά και τις δύο αφαιρέσεις, δύο μαθητές/τριες έλυσαν σωστά τη μία από τις δύο αφαιρέσεις (την 600-8), και δύο μαθητές δεν έλυσαν σωστά καμία αφαίρεση.

Συνοπτικά τα λάθη που σημειώθηκαν στις αφαιρέσεις ήταν τα εξής: α) λάθη στις απλές πράξεις (π.χ 14-6=7), β) αφαίρεση μεγαλύτερου ψηφίου από μικρότερο, γ) ανταλλαγή 1 δεκάδας με μία, και όχι με δέκα μονάδες, δ) στον τύπο του αλγόριθμου της «πρόσθεσης ίσων ποσών», ενώ προστίθενται ποσά στα ψηφία του μειωτέου, δεν προστίθενται ίσα ποσά στα ψηφία του αφαιρετέου, ε) στον τύπο του αλγόριθμου της «μετατροπής του μειωτέου», ενώ γίνεται δανεισμός από μια θέση αξίας, δε μειώνεται κατά ένα η αξία του ψηφίου στη συγκεκριμένη θέση, και στ) σε μια θέση αξίας, κατά την αφαίρεση του μεγαλύτερου αφαιρετέου από το 0 του μειωτέου, τίθεται ως αποτέλεσμα ο μεγαλύτερος αριθμός.

Αν συγκρίνει κανείς τα λάθη που έκαναν τα παιδιά κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, διαπιστώνει ότι αυτά είναι διαφορετικά. Έτσι, επαναλαμβάνεται αυτό που παρατήρησε ο Χατζηγεωργίου (1990), ότι δηλαδή ο/η κάθε μαθητής/τρια δε χρησιμοποιεί πάντα τις ίδιες τεχνικές ούτε επαναλαμβάνει τα ίδια λάθη. Αυτός ο ισχυρισμός επιβεβαιώθηκε και κατά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων πριν και μετά την παρέμβαση και κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, όταν, για παράδειγμα, ένας μαθητής κλήθηκε να εκτελέσει την πρόσθεση 583+8. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι, αφού δε θυμόταν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης, εφηύρε διαδοχικά τρεις διαφορετικούς αλγόριθμους, προκειμένου να βρει το σωστό αποτέλεσμα. Παρόλα αυτά δε το βρήκε. Την περίπτωση αυτού του μαθητή περιγράφει η παρατήρηση του Λεμονίδη (2016), ο οποίος αναφέρει ότι, όταν ένα παιδί δεν μπορεί να εκτελέσει έναν αλγόριθμο είτε γιατί τον έχει ξεχάσει είτε γιατί δεν τον έχει μάθει, αντί να διακόψει την επίλυση, ανακατασκευάζει μια λύση. Έτσι, χρησιμοποιεί μεθόδους, οι οποίες μπορεί να πλησιάζουν ή να απέχουν από τη σωστή, κάνοντας σοβαρά ή λιγότερο σοβαρά λάθη.

Οι ασαφείς, αρχικά, περιγραφές των μαθητών/τριών για την έννοια του κρατούμενου, έχουν γίνει πιο σαφείς και έχουν αποκτήσει περισσότερο μαθηματικό περιεχόμενο στο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση. Συμπίπτουν με τις απαντήσεις των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα της Poisard (2006), τις οποίες η ερευνήτρια αποδέχεται ως μαθηματικές απαντήσεις. Σε αυτή την εξέλιξη σίγουρα συνέβαλε η ενασχόληση των μαθητών/τριών με τον κινέζικο άβακα. Η ερευνήτρια ισχυρίζεται ότι για πολλούς/ες μαθητές/τριες, αλλά και εκπαιδευτικούς, η έννοια του κρατούμενου φαίνεται να μην έχει αναπτυχθεί μαθηματικά. Συνήθως η πρόσθεση διδάσκεται στο σχολείο με τη μορφή της εκμάθησης του αλγόριθμου. Της εκτέλεσης, δηλαδή, μιας σειράς βημάτων, που αντιπροσωπεύουν τους συντακτικούς κανόνες του αλγόριθμου. Ωστόσο, η εκτέλεση ενός αλγόριθμου δεν απαιτεί τη γνώση της σημασίας των διαδοχικών βημάτων. Για παράδειγμα, όταν το παιδί αθροίζει τις μονάδες των προσθετέων και βρίσκει αποτέλεσμα ίσο ή μεγαλύτερο των δέκα μονάδων, λέει «ένα το κρατούμενο» και το σημειώνει με το ψηφίο 1 είτε πάνω από τις δεκάδες, που θα το μεταφέρει, είτε στο πλάι της πράξης. Δεν είναι, όμως, σίγουρο ότι το παιδί κατανοεί ότι αυτό το 1, που σημειώνει, είναι 1 δεκάδα, δηλαδή 10 μονάδες, και όχι μία μονάδα (Fuson, 1990). Αυτή την παρανόηση έρχεται να διορθώσει ο κινέζικος άβακας. Το γεγονός ότι σε κάθε στήλη του άβακα μπορούν να απεικονιστούν αριθμοί μέχρι το 15 (δηλ. 15 μονάδες, 15 δεκάδες, κτλ.) και να γίνουν ανταλλαγές/μεταφορές μεταξύ των στηλών με το χέρι, ενισχύει την κατανόηση της έννοιας του κρατούμενου (Poisard, 2006). Και στην έρευνα των Tsiapou & Nikolantonakis (2013), οι δραστηριότητες της ανάλυσης και της σύνθεσης αριθμών στον κινέζικο άβακα και η σύνδεσή τους με τον αλγόριθμο της πρόσθεσης και της αφαίρεσης άλλαξαν την αντίληψη που είχαν οι μαθητές/τριες για την έννοια του κρατούμενου, πλησιάζοντας το γενικό ορισμό που έδωσε η Poisard (2006) για το κρατούμενο. Έτσι, το κρατούμενο απέκτησε μια υλική υπόσταση, που δεν την είχε ως τώρα, αφού ο αλγόριθμος της πρόσθεσης διδάσκεται συνήθως χωρίς τη χρήση υλικών. Έγινε, δηλαδή, κατανοητό μέσω της οπτικής και απτικής αντίληψης, που προσφέρει ο κινέζικος άβακας. Ταυτόχρονα, όμως, η γνώση του συμβάλλει και στην ελάττωση των αλγοριθμικών λαθών. Επίσης, έγινε ξεκάθαρο στο μυαλό των περισσότερων μαθητών/τριών ότι το κρατούμενο εμφανίζεται στην πρόσθεση.

Αυτή η οπτική και απτική αντίληψη που παρέχει ο κινέζικος άβακας ισχύει και για την περίπτωση του δανεικού. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο κινέζικος άβακας μπορεί να υποστηρίξει την οπτικοποίηση του αλγόριθμου της αφαίρεσης με τον τύπο της «μετατροπής του μειωτέου». Αυτή η μετατροπή απαιτεί τις ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας προς την αντίθετη, όμως, κατεύθυνση (από τις θέσεις μεγαλύτερης αξίας προς τις θέσεις μικρότερης αξίας). Έτσι, και εδώ ο άυλος δανεισμός, που μέχρι τώρα διδάσκονταν τα παιδιά στο πλαίσιο του αλγόριθμου της αφαίρεσης, λαμβάνει υλική υπόσταση και γίνεται εμφανές πια τι δανείζεται κανείς και από πού το δανείζεται. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να αποφευχθούν τα λάθη κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου της αφαίρεσης, αλλά και οι «κοριοί» που αναφέρει ο Λεμονίδης (2016), ειδικά όταν ο/η μαθητής/τρια καλείται να δανειστεί από αξία θέσης που έχει ψηφίο μηδέν. Έτσι, ενώ πριν την παρέμβαση δεν δόθηκαν καθόλου απαντήσεις ή δόθηκαν πολύ γενικές και ασαφείς περιγραφές στο ερώτημα τι είναι το δανεικό, μετά την παρέμβαση όλοι/ες οι μαθητές/τριες παρείχαν μια απάντηση και μάλιστα μαθηματική απάντηση. Τέλος, όλοι/ες ανέφεραν ως φυσικό περιβάλλον της ύπαρξης του δανεικού την πράξη της αφαίρεσης.

Έτσι, από τη σύνοψη των απαντήσεων των παιδιών στο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση, και από τη σύγκριση των απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, μπορεί κανείς να αποφανθεί ότι βελτιώθηκε αισθητά η κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου από τους/τις μαθητές/τριες. Σε παρόμοιο συμπέρασμα κατέληξαν στην έρευνά τους και οι Tsiapou & Nikolantonakis (2013), οι οποίοι ανέφεραν ότι στο ερωτηματολόγιο μετά τη διδακτική τους παρέμβαση σχεδόν όλοι/ες οι μαθητές/τριες επέδειξαν καλύτερη εννοιολογική κατανόηση. Επομένως, ο κινέζικος άβακας, πάνω στον οποίο στηρίχθηκε η όλη διδακτική παρέμβαση, συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου από τους/τις μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου.

Πέρα από τους καθαρά γνωστικούς λόγους, μπορεί κανείς να πει ότι η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε για να εμπλακεί και η ιστορία των μαθηματικών στο όλο εγχείρημα. Και αυτό γιατί έχει τη δυναμική να κινητοποιεί τους/τις μαθητές/τριες, προκαλώντας το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά (Jankvist, 2009). Συνήθως στη σχολική τάξη τα μαθηματικά διδάσκονται με το γραπτό συμβολισμό τους, χωρίς τη χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο συμβάλλει και στην καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και στην κατανόησή τους. Αρκεί, βέβαια, αυτό να είναι οργανικά ενταγμένο στην μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών/τριών (Τζεκάκη, 2016). Ένα τέτοιο χειραπτικό υλικό, το οποίο έρχεται από το παρελθόν, από την ιστορία των μαθηματικών, είναι ο κινέζικος άβακας, ο οποίος εντάχθηκε οργανικά στις δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης. Κατάφερε να κινητοποιήσει τα παιδιά από την εισαγωγική ακόμα δραστηριότητα της κατασκευής του ατομικού τους άβακα. Για την κατασκευή του ο διδάσκων επέλεξε υλικά με κριτήρια την ανθεκτικότητά τους, τον εύκολο χειρισμό τους από τους/τις μαθητές/τριες, αλλά και την πιστότητα του παραγόμενου αντιγράφου. Έτσι, κατέληξε σε κομμάτια φελλού για την κατασκευή του πλαισίου, ξυλάκια (καλαμάκια) για στήλες και έτοιμες χάντρες με σχήμα που παραπέμπει στον αυθεντικό άβακα. Το γεγονός ότι στη συνέχεια τα παιδιά θα χρησιμοποιούσαν τον άβακα, θα μπορούσε να πει κανείς ότι προκάλεσε το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά. Οι εισαγωγικές δραστηριότητες για τις απαρχές του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και τη γνωριμία με άλλα συστήματα αρίθμησης, θεσιακά και μη, αλλά και ο ίδιος ο άβακας, έδωσαν τη δυνατότητα στα παιδιά να αντιληφθούν ότι οι άνθρωποι κατασκευάζουν και εξελίσσουν τα μαθηματικά, ότι τα μαθηματικά εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο, καθώς και ότι αναπτύχθηκαν από πολλούς και διαφορετικούς πολιτισμούς, προσδίδοντάς τους έτσι μια κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση (ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ, 2009).

Επίσης, τα παιδιά ήρθαν σε επαφή και χειρίστηκαν και την ηλεκτρονική μορφή του κινέζικου άβακα μέσω μιας διαδικτυακής εφαρμογής. Ενθουσιάστηκαν περισσότερο από το γεγονός ότι αλληλεπιδρούσαν με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή παρά με την ηλεκτρονική μορφή του. Ο διδάσκων αποφάσισε την ένταξη και της ψηφιακής εκδοχής του άβακα στη διδακτική παρέμβαση, καθώς θα βοηθούσε στην ανακάλυψη του τρόπου λειτουργίας του κινέζικου άβακα από τους/τις μαθητές/τριες.

Επίσης, λόγω του μεγάλου μεγέθους της οθόνης του υπολογιστή, ο οποίος ήταν εγκατεστημένος στην αίθουσα διδασκαλίας, ο ηλεκτρονικός άβακας ήταν περισσότερο ευκρινής από απόσταση σε σύγκριση με τον επιτραπέζιο άβακα. Επιπλέον, κάθε παιδί είχε τη δυνατότητα στους υπολογιστές του εργαστηρίου πληροφορικής να ασχολείται με ασκήσεις που του πρότεινε η εφαρμογή, όταν τελείωνε μια άσκηση και περίμενε και τους/τις υπόλοιπους/ες να ολοκληρώσουν. Στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης ο δάσκαλος ρώτησε τους/τις μαθητές/τριες ποια εκδοχή του άβακα προτιμούν. Η πλειοψηφία επέλεξε τον πραγματικό άβακα αφενός γιατί τον κατασκεύασαν οι ίδιοι/ες αφετέρου γιατί προτιμούσαν να αγγίζουν, να κινούν τις ίδιες τις χάντρες και όχι το ποντίκι του υπολογιστή, και να ακούν τον ήχο τους, όταν έρχονταν σε επαφή. Αυτή την απτική εμπειρία επεσήμανε και η Bartolini Bussi (Nagaoka, et al., 2000), τονίζοντας τη δυναμική που έχει, ώστε να κινητοποιεί τα παιδιά, αλλά και το γεγονός ότι αποτελεί και σημαντικό κομμάτι της γνωστικής θεμελίωσης της μαθηματικής δραστηριότητας.

5.1. Περιορισμοί της έρευνας

Κλείνοντας, καλό θα ήταν να αναφερθεί ότι η παρούσα έρευνα παρουσιάζει πέρα από θετικά στοιχεία, και κάποιους περιορισμούς και αδυναμίες. Αρχικά, το δείγμα της έρευνας ήταν πολύ μικρό, ώστε να μπορεί κανείς να γενικεύσει τα αποτελέσματα στο σύνολο του μαθητικού πληθυσμού της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Επίσης, ο χρόνος που ήταν διαθέσιμος για τη διεξαγωγή της έρευνας ήταν περιορισμένος. Η εξοικείωση των μαθητών/τριών με τον τρόπο λειτουργίας του κινέζικου άβακα απαιτεί αρκετό χρόνο. Αυτό αποδείχτηκε από το γεγονός ότι, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, κάποια παιδιά έβρισκαν λάθος αποτελέσματα κατά την επίλυση ασκήσεων στον άβακα ή κατά την επαλήθευση αποτελεσμάτων που ήδη είχαν βρει, λόγω διαδικαστικών λαθών στον τρόπο λειτουργίας του εργαλείου. Επίσης, επειδή οι πτυχές της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου που διερευνήθηκαν ήταν αρκετές, οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν ήταν εξίσου πολλές. Δεν μπόρεσε, όμως, να διατεθεί ο απαραίτητος χρόνος, που απαιτούνταν, σε όλες τις δραστηριότητες και ασκήσεις. Επιπλέον, οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν και τα φύλλα εργασίας που κατασκευάστηκαν και τις συνόδευαν, ίσως να χρειάζονται βελτιώσεις ή ακόμη και τροποποιήσεις, ώστε να πετυχαίνουν καλύτερα το στόχο τους. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω της συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων από τους/τις μαθητές/τριες και της καταγραφής των όσων έλεγαν ή εξηγούσαν με καταγραφέα φωνής. Κατά την απομαγνητοφώνηση, διαπιστώθηκε από τις συνομιλίες πόσο δύσκολο είναι να έχει κανείς σε μια τάξη το ρόλο και του δασκάλου και του ερευνητή. Είναι πολύ δύσκολο να είναι κανείς ουδέτερος με τα παιδιά, τα οποία γνωρίζει και συνεργάζεται μαζί τους για καιρό.

5.2. Μελλοντική έρευνα

Στον ελληνικό χώρο η παρούσα έρευνα αποτελεί τη δεύτερη προσπάθεια εισαγωγής του κινέζικου άβακα στη διδακτική πρακτική, με σκοπό να ανιχνεύσει κατά πόσο αυτό το ιστορικό εργαλείο μπορεί να υποστηρίξει και να ενισχύσει την κατανόηση της πολύπλευρης έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου στους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης από τους/τις μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Προηγήθηκε, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η έρευνα των Tsiapou & Nikolantonakis (2013).

Οι δύο παραπάνω έρευνες προσπάθησαν να εντοπίσουν και να «θεραπεύσουν» τις υπάρχουσες δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών/τριών σε μια μεσαία και σε μια ανώτερη τάξη του Δημοτικού Σχολείου. Μεγάλο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε μια μελλοντική έρευνα, η οποία θα εισήγαγε τον κινέζικο άβακα σε ένα τμήμα μιας Α΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Έτσι, τα παιδιά θα έρχονταν σε επαφή και θα διδάσκονταν τις διάφορες και διαφορετικές όψεις της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου με αυτόν τον άβακα, και όχι με το αριθμητήριο ή τον κάθετο άβακα, που χρησιμοποιείται συνήθως στο ελληνικό σχολείο. Κατόπιν, η συμμετοχή των μαθητών/τριών του τμήματος αυτού σε μια δοκιμασία, η οποία θα αναδείκνυε το βαθμό κατανόησης και κατοχής της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου, μαζί με τους/τις μαθητές/τριες ενός άλλου τμήματος, που θα διδάσκονταν την ίδια έννοια με το συνηθισμένο τρόπο, και η σύγκριση των αποτελεσμάτων τους, θα παρουσίαζε τεράστιο ενδιαφέρον.

Μέχρι στιγμής, οι ερευνητές που διεξήγαγαν τις δύο παραπάνω έρευνες, διαθέτουν πλέον στοιχεία για το γεγονός ότι ο κινέζικος άβακας συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου και στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών/τριών ως προς την έννοια αυτή. Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και μια μελλοντική έρευνα για την κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου από τους/τις μαθητές/τριες μιας Β΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου, οι οποίοι/ες στην Α΄ τάξη θα είχαν προσεγγίσει την έννοια μέσω του κινέζικου άβακα. Μια τέτοια έρευνα θα μπορούσε να αποκαλύψει αν και η διδασκαλία με τον κινέζικο άβακα μπορεί να οδηγεί σε δυσκολίες και παρανοήσεις ως προς την παραπάνω έννοια, όπως και η σημερινή προσέγγιση της έννοιας, με τον τρόπο που επιχειρείται από τους/τις εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της χώρας μας.

Αναφορές

Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά: αιτιολογία-αξιολόγηση-αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Barrouillet, P., Camos, V., Perruchet, P., & Seron, X. (2004). ADAPT: a developmental, asemantic, and procedural model for transcoding from verbal to arabic numerals. *Psychological review*, *111*(2), 368-394.

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational studies in mathematics*, *31*(1-2), 11-41.

Bartolini Bussi, M. G. (2011). Artefacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 93-112.

Bartolini Bussi, M. G. & Boni, M. (2009). The early construction of mathematical meanings. Positional representation of numbers at the beginning of primary school. In O. A. Barbarin & B. H. Wasik (Eds.), *Handbook of Child Development and Early Education: Research to Practice* (pp. 455–477). New York: The Guilford Press.

Bartolini Bussi, M. G., Corni, F., Mariani, C., & Falcade, R. (2012). Semiotic Mediation in Mathematics and Physics Classrooms: Artifacts and Signs after a Vygotskian Approach. *Electronic Journal of Science Education*, *16*(3), 1-28.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746–783). New York: Routledge.

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. In D. Tirosh, & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education, Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp.183–208). Rotterdam: SensePublisher.

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In Bana, J. and Chapman, A., (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95-103). Fremantle, WA: MERGA.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 333-339.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380-400.

Chan, W. W. L., Au, T. K., & Tang, J. (2014). Strategic counting: A novel assessment of place-value understanding. *Learning and Instruction*, *29*, 78-94.

Cope, L. (2015). Math manipulatives: Making the abstract tangible. *Delta Journal of Education*, *5*(1), 10-19.

Corni, F., Giliberti, E. & Mariani, C. (2011). Semiotic mediation and didactical cycle as methodological reference for primary school teachers. In Bruguière, C., Tiberghien, A., & Clément, P. (Eds.), *E-Book Proceedings of the ESERA 2011Conference: Science learning and Citizenship* (Part 13, pp. 53-58). Lyon, France: European Science Education Research Association. Retrieved 22 August, 2017, from https://www.dropbox.com/s/9cckaddfooh24sg/ebook-esera2011.pdf?dl=0

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language*, *16*(1), 16-36.

Drijvers, P., Kieran, C. & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89–132). New York: Springer.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 2, 363-391.

ΕΠ.Ε.ΔΙ.Μ. (Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών) (2009). *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Φεσάκης, Γ. (2014). Εικονικό και συμβατικό απτικό υλικό στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών: Θεωρητική ανάλυση. Στο Σκουμπουρδή, Χ. & Σκουμιός, Μ. (Επιμ.), *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου "Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*" (σ. 72 – 105). Ρόδος: ΤΕΠΑΕΣ, ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.

Fiorani, H. (2013). Teaching and Learning Process in Mathematical Education: a Vygostkian approach. *Cultural-historical psychology*, (3), 90-98.

Fiori, C., & Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 323-331.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and instruction*, *7*(4), 343-403.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 293-304.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *The Arithmetic Teacher*, *36*(6), 12-18.

Hurst, C., & Hurrell, D. (2014). Developing the big ideas of number. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, *1*(2), 1-18.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 21-31.

Καφούση, Σ., & Ντζιαχρήστος, Β. (1998). Οι μαθηματικές γνώσεις των παιδιών της Γ΄ Τάξης του δημοτικού Σχολείου σχετικά με την αξία θέσης ψηφίου, την πρόσθεση και την αφαίρεση τριψήφιων αριθμών. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 49-50, 205-217.

Koleza, E., & Koleli, M. (2014). Investigating prospective elementary teachers’ number sense, through mental computation strategies. *Menon: Journal Of Educational Research*, 1st thematic issue, 126-143. Retrieved 20 March, 2017, fromhttp://www.edu.uowm.gr/site/system/files/eugenia_koleza_maria_koleli_investigating_prospective_elem_scie_en.pdf

Κόρρος, Φ. (2012). *Τα μαθηματικά της επίπεδης γης*. Αθήνα: Bookstars-Free Publishing.

Laski, E. V., Jor’dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open*, *5*(2), 1-8.

Λεμονίδης, Χ. (2003). Η διδασκαλία του συστήματος αρίθμησης στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τσανάκης, & Γ. Τρούλης

(Επιμ.), *Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* (σ. 189-198). Ρέθυμνο: Π.Τ.Δ.Ε. Ρεθύμνου.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Περίπατος στη μάθηση της στοιχειώδους αριθμητική*. Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη.

Li, S. T. I. (1958). The origin of the abacus and its development. In *ACM Annual Conference/Annual Meeting: Preprints of papers presented at the 13th national meeting of the Association for Computing Machinery: Urbana, Illinois* (Vol. 11, No. 13, pp.102-110).

Major, K. (2012). The development of an assessment tool: Student knowledge of the concept of place value. In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 481-488). Singapore: MERGA.

Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L. H. Son, and N. Sinclair (Eds.) *Proceedings of the Seventeenth Study of the International Commission on Mathematics Instruction Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain* (pp. 378-385). Hanoi: Hanoi University of Technology.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective : the role of the teacher, *ZDM International Journal for Mathematics Education*, *41*, 427-440.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching–learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25–35). Taipei, Taiwan: PME.

Marshall, L., & Swan, P. (2008). Exploring the use of mathematics manipulative materials: is it what we think it is?. In *Proceedings of the EDU-COM 2008 International Conference. Sustainability in Higher Education: Directions for Change* (pp. 338-348). Perth Western Australia: Edith Cowan University. Retrieved 10 April, 2017, from http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1032&context=ceducom

Maschietto, M. (2013). Systems of Instruments for Place Value and Arithmetical Operations: an Exploratory Study with the Pascaline. *Education*, *3*(4), 221-

230.

Maschietto, M. (2015). The Arithmetical Machine Zero+1 in Mathematics Laboratory: Instrumental Genesis and Semiotic Mediation. *International Journal of Science & Mathematics Education*, *13*(1), 121-144.

Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 33–47.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). Number sense in school mathematics: Student performance in four countries. *MASTEC Monograph Series No. 5*. Perth, Western Australia: Edith Cowan University.

Miura, I. T., & Okamoto, Y. (1989). Comparisons of US and Japanese first graders' cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of Educational Psychology*, *81*(1), 109.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics: An International Journal*, *47*(2), 175-197.

Nagaoka, R., Barrow-Green, J., Bartolini Bussi, M. G., Isoda, M., Maanen, J., Michalowicz, K. D., ... & Brummelen, G. (2002). Non-standard media and other resources. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 329-370). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2011). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση*. Ανακτήθηκε 20 Νοεμβρίου 2016 από http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/Μαθηματικά/Μαθηματικά%20-%20Δημοτικό.pdf

Παπαδόπουλος, Ι. (2013). *Τα Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση & η Διδασκαλία τους*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

Poisard, C. (2006). The notion of carried-number, between the history of calculating instruments and arithmetic. In P. Groontenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnapan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces*. *Proceedings of the*

29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Canberra (Vol 2, pp. 416-423). Adelaide: MERGA.

Price, P. (2002). Children' s Difficulties With Base-Ten Numbers: " Face-Value " and " Independent-Place " Constructs. In B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannlruch, & M. O. J. Thomas (Eds.), *Mathematics Education in the South Pacific. Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland* (pp. 592–599). Sydney: MERGA.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 47.

Saxton, M., & Towse, J. N. (1998). Linguistic relativity: The case of place value in multidigit numbers. *Journal of Experimental Child Psychology, 69*, 66–79.

Şengül, S. (2013). Identification of Number Sense Strategies Used by Pre-Service Elementary Teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *13*(3), 1965-1974.

Sharma, M. C. (1993). Place Value Concept: How Children Learn It and How To Teach It. *Math Notebook*, *10*, (1-2).

Σκανδαλάκη, Ε., & Σκουμπουρδή, Χ. (2014). Επίλυση αλγόριθμου αφαίρεσης από μαθητές Β΄ τάξης. Στο *31ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Προκλήσεις και Προοπτικές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης & Έρευνας στη Διεθνοποιημένη Δικτυακή Εποχή* (σ. 881-890). Βέροια.

Σκουμπουρδή, Χ. (2012). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Spitzer, H. F. (1942). The abacus in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal, 42*(6), 448-451.

Stigler, J. W. (1984). "Mental abacus": The effect of abacus training on Chinese children's mental calculation. *Cognitive Psychology*, *16*(2), 145-176.

Θωμαΐδης, Γ., (2014). Θεωρητικό πλαίσιο ενός μεταπτυχιακού μαθήματος με θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους». *Επιστήμες Αγωγής*, θεματικό τεύχος 2014, 16-37.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 165-183.

Tsiapou, V., & Nikolantonakis, K. (2013) The Development of Place Value Concepts to Sixth Grade Students via the Study of the Chinese Abacus. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2058-2067). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., . . . Siu, M. K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2011). Classifying the arguments & methodological schemes for integrating history in mathematics education. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 1650–1660). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Τζεκάκη, Μ. (2016). Εκπαιδευτικό υλικό ως στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας. Στο Σκουμιός, Μ. & Σκουμπουρδή, Χ. (επιμ.), *Πρακτικά 2ου Πανελληνίου Συνεδρίου "Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;"* (σ. 380-390). Ρόδος: ΤΕΠΑΕΣ, ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική διδασκαλία* (από μετάφραση). Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδάνος.

Χατζηγεωργίου, Α. Ι. (1990). Η Πρόσθεση και η αφαίρεση στους ακεραίους. Δυσκολίες και λάθη των μαθητών. *Ευκλείδης Γ*, *27*(2), 8-24.

ΥΠΕΠΘ. (2003, 13 Μαρτίου). Αποφάσεις. Αριθμ. 21072α/Γ2. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας*. *Τεύχος δεύτερο*, Αρ. Φ. 303. Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.

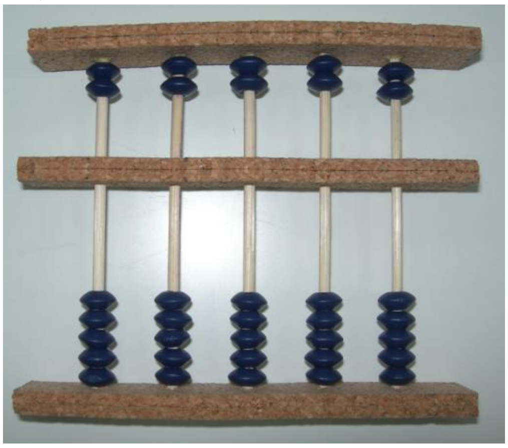
Yuen, K. (1974). Computation Procedures of the Chinese Abacus, *4*(1), 138–142.

Zhou, Z., & Peverly, S. T. (2005). Teaching addition and subtraction to first graders: A Chinese perspective. *Psychology in the Schools*, *42*(3), 259-272.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α
Κατασκευές

1. Ατομικός κινέζικος άβακας



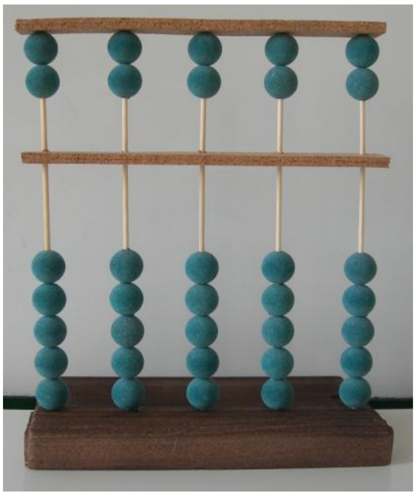
Υλικά για τον άβακα

- Έξι ορθογώνια παραλληλόγραμμα κομμάτια φελλού πάχους 3mm μεγέθους 12x2 cm
- Πέντε καλαμάκια για σουβλάκια κομμένα στη μέση
- 35 ξύλινες χάντρες
- Βενζινόκολλα, πινέλο, γάντια μιας χρήσεως, μολύβι

Διαδικασία κατασκευής

Οι μαθητές/τριες απλώνουν σε όλα τα κομμάτια του φελλού βενζινόκολλα και τα κολλούν ανά δύο. Έτσι προκύπτουν τρία ορθογώνια χοντρά κομμάτια φελλού. Σε κάθε κομμάτι κάνουν σημάδια με το μολύβι τους ανά δύο εκατοστά, ώστε να ξέρουν πού θα τρυπήσουν το κάθε κομμάτι με τα ξυλάκια. Έπειτα περνούν ένα-ένα τα ξυλάκια σε κάθε σημάδι του φελλού. Η βάση του άβακα είναι έτοιμη. Αφού περάσουν και τα πέντε ξυλάκια, σε καθένα βάζουν πέντε χάντρες. Τρυπούν με τα ξυλάκια που ήδη είναι στερεωμένα στη βάση του άβακα το επόμενο κομμάτι φελλού στα αντίστοιχα σημάδια και το μεταφέρουν έξι εκατοστά πάνω από τη βάση του άβακα. Η διαχωριστική δοκός είναι έτοιμη. Στη συνέχεια σε κάθε ξυλάκι τοποθετούν δύο χάντρες. Τοποθετούν και το τρίτο κομμάτι φελλού στα σημάδια, ώστε να κλείσει και το πάνω διάζωμα. Ο άβακας είναι έτοιμος.

2. Κινέζικος άβακας έδρας



Υλικά για τον άβακα

- Μία ξύλινη βάση διαστάσεων 22x10 cm
- Τέσσερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα κομμάτια φελλού πάχους 3mm μεγέθους 22x2 cm
- Πέντε καλαμάκια για σουβλάκια
- 35 βελούδινες χάντρες
- Βενζινόκολλα, πινέλο, γάντια μιας χρήσεως, μολύβι

Η διαδικασία κατασκευής είναι ίδια με παραπάνω με τη διαφορά ότι ανοίγονται μικρές οπές στη βάση και εκεί τοποθετούνται με βενζινόκολλα τα ξυλάκια.

Παράρτημα Β
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (pre-test)

1. Μπορείς **να πεις** με λέξεις τους παρακάτω αριθμούς;

333: ……………………………………………………………………………..

705: ……………………………………………………………………………..

180: ……………………………………………………………………………..

400: ……………………………………………………………………………..

Μπορείς να γράψεις με ψηφία τους παρακάτω αριθμούς;

πεντακόσια πενήντα: ……………..

εννιακόσια εννιά: …………………

οχτακόσια: ………………………...

διακόσια είκοσι δύο: ……………..

2. Μπορείς να γράψεις από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι παρακάτω αριθμοί;

999: ……… + ……… + ………

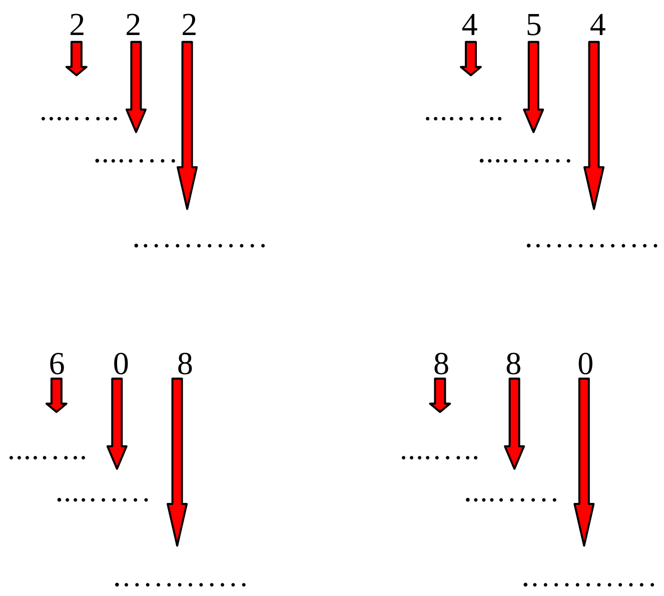
440: ……… + ……… + ………

500: ……… + ……… + ………

303: ……… + ……… + ………

277: ……… + ……… + ………

3. Μπορείς να γράψεις ποιον αριθμό δηλώνει το κάθε ψηφίο στους παρακάτω αριθμούς ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται;



4. Μπορείς να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν; Μπορείς **να πεις** πώς σκέφτηκες;

1 χιλιάδα = …….. **εκατοντάδες**

1 χιλιάδα = …….. **δεκάδες**

1 χιλιάδα = …….. **μονάδες**

100 μονάδες = …….. **δεκάδες**

100 μονάδες = …….. **εκατοντάδες**

20 δεκάδες = …….. **εκατοντάδες**

20 δεκάδες = …….. **μονάδες**

5 εκατοντάδες = …….. **δεκάδες**

5 εκατοντάδες = …….. **μονάδες**

6. Μπορείς να γράψεις κάθετα τις παρακάτω πράξεις και να τις εκτελέσεις;

254+135	**546-233**

398+12	**600-8**

7. Μπορείς **να πεις** τι είναι ένα **κρατούμενο** και σε ποια πράξη το χρησιμοποιούμε; Μπορείς να δώσεις παραδείγματα για να το εξηγήσεις.

____

____

____

____

8. Μπορείς **να πεις** τι είναι ένα **δανεικό** και σε ποια πράξη το χρησιμοποιούμε; Μπορείς να δώσεις παραδείγματα για να το εξηγήσεις.

____

____

____

____

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (post-test)

1. Μπορείς **να πεις** με λέξεις τους παρακάτω αριθμούς;

500: ……………………………………………………………………………..

550: ……………………………………………………………………………..

505: ……………………………………………………………………………..

555: ……………………………………………………………………………..

Μπορείς να γράψεις με ψηφία τους παρακάτω αριθμούς;

τετρακόσια σαράντα: ……………………………

επτακόσια: ………………………………………..

τριακόσια τριάντα τρία: ………………………...

οχτακόσια οχτώ : ………………………………...

2. Μπορείς να γράψεις από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι παρακάτω αριθμοί;

222: ……… + ……… + ………

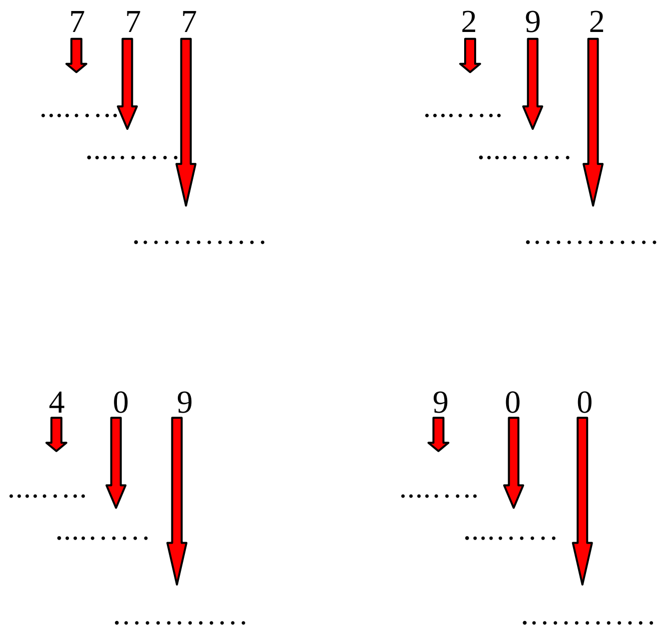
100: ……… + ……… + ………

909: ……… + ……… + ………

660: ……… + ……… + ………

744: ……… + ……… + ………

3. Μπορείς να γράψεις ποιον αριθμό δηλώνει το κάθε ψηφίο στα παρακάτω νούμερα ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται;



4. Μπορείς να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν; Μπορείς **να πεις** πώς σκέφτηκες;

1 χιλιάδα = …….. **εκατοντάδες**

1 χιλιάδα = …….. **δεκάδες**

1 χιλιάδα = …….. **μονάδες**

2 εκατοντάδες = …….. **δεκάδες**

2 εκατοντάδες = …….. **μονάδες**

10 δεκάδες = …….. **εκατοντάδες**

10 δεκάδες = …….. **μονάδες**

300 μονάδες = …….. **εκατοντάδες**

300 μονάδες = …….. **δεκάδες**

6. Μπορείς να γράψεις κάθετα τις παρακάτω πράξεις και να τις εκτελέσεις;

327+8	**852-363**

473+69	**600-8**

7. Μπορείς **να πεις** τι είναι ένα **κρατούμενο** και σε ποια πράξη το χρησιμοποιούμε; Μπορείς να δώσεις παραδείγματα για να το εξηγήσεις.

____

____

____

____

8. Μπορείς **να πεις** τι είναι ένα **δανεικό** και σε ποια πράξη το χρησιμοποιούμε; Μπορείς να δώσεις παραδείγματα για να το εξηγήσεις.

____

____

____

____

Παράρτημα Γ

Φύλλα εργασίας

1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να μελετήσεις προσεκτικά το παρακάτω κείμενο και να προσπαθήσεις να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν;

Κείμενο 1

Ένας πρωτόγονος βοσκός στην προϊστορική εποχή που δεν είχαν ακόμη επινοηθεί οι αριθμοί, ήθελε να μπορεί να ελέγχει το πλήθος του κοπαδιού του, το πρωί που έβγαιναν τα πρόβατα από τη σπηλιά για να βοσκήσουν και το βράδυ που επέστρεφαν. Ήθελε δηλαδή να μπορεί να τα μετράει, ώστε να βλέπει αν έχασε κανένα, για να πάει να το αναζητήσει πριν το φάνε οι λύκοι. Σκέφτηκε να αντιστοιχεί κάθε πρόβατο με ένα βότσαλο. Για κάθε πρόβατο που έβγαινε το πρωί για βοσκή, έριχνε ένα βότσαλο σε μια λακκούβα. Για κάθε πρόβατο που επέστρεφε το βράδυ, έβγαζε ένα βότσαλο από τη λακκούβα. Αν έμπαιναν όλα τα πρόβατα και περίσσευαν ακόμη βότσαλα μες στη λακκούβα, έπρεπε να ψάξει για τα χαμένα του πρόβατα. Καθώς περνούσαν τα χρόνια και τα πρόβατα γεννοβολούσαν, έγιναν πάρα πολλά και ο βοσκός άρχισε να μπερδεύεται με τα πολλά βότσαλα. Σκέφτηκε λοιπόν, παίρνοντας την ιδέα από τα 10 δάχτυλα των χεριών του, να αντικαθιστά 10 βότσαλα με ένα ξυλαράκι. Έτσι κατάφερε να μειώσει το πλήθος από τα βότσαλα και να κάνει πιο εύκολο και πιο γρήγορο το μέτρημα π.χ. για 75 πρόβατα, έριχνε 5 βότσαλα στη λακκούβα και 7 ξυλαράκια. Κάπως έτσι έγινε η απαρχή της επινόησης του δεκαδικού μας συστήματος.

Ερωτήσεις

α) Ποια ανάγκη οδήγησε τον προϊστορικό βοσκό, ώστε να βρει έναν τρόπο να μετράει;

____

____

____

β) Αρχικά πώς σκέφτηκε να μετρήσει, αφού ακόμα δεν είχαν επινοηθεί οι αριθμοί;

____

____

____

γ) Αν ήσουν στη θέση του βοσκού, με ποιο αντικείμενο θα σκεφτόσουν να αντιστοιχίσεις το κάθε πρόβατο;

____

____

____

δ) Ποια ανάγκη οδήγησε το βοσκό, ώστε να εξελίξει τη σκέψη του πάνω στο θέμα της μέτρησης των προβάτων του;

____

____

____

ε) Από πού πήρε την ιδέα, ώστε να αντικαταστήσει 10 βότσαλα (και όχι περισσότερα ή λιγότερα) με ένα ξυλαράκι;

____

____

____

στ) Εφαρμόζοντας αυτή την ιδέα τι «κέρδισε» ο βοσκός;

____

____

____

ζ) Σου θυμίζει κάτι αυτή η ανταλλαγή που έκανε ο βοσκός (10 βότσαλα = 1 ξυλαράκι); Τη χρησιμοποιούμε κάπου σήμερα;

____

____

____

η) «…π.χ. για 75 πρόβατα, έριχνε 5 βότσαλα στη λακκούβα και 7 ξυλαράκια». Πώς ονομάζουμε σήμερα στα Μαθηματικά το 5 και το 7 του αριθμού 75;

____

____

____

θ) Τι μπορεί να σημαίνει ο όρος «δεκαδικό σύστημα αρίθμησης», που αναφέρεται στο τέλος του $1^{ου}$ κειμένου;

____

____

____

2^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να μελετήσεις προσεκτικά το παρακάτω κείμενο και να προσπαθήσεις να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν;

Κείμενο 2

«Από παλιά οι Έλληνες υιοθέτησαν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο χρησιμοποιούσε ήδη το σύνολο του τότε πολιτισμένου κόσμου… Έτσι στον Όμηρος χρησιμοποιείται το ρήμα πεμπάζειν, που σημαίνει αριθμώ (ακριβέστερα σημαίνει αριθμώ κατά πεντάδες). Όμως αυτού του είδους η αρίθμηση ήταν πιθανώς κάτι περισσότερο από απλώς υποβοηθητική στην αρίθμηση κατά δεκάδες. Ο πέντε αποτελούσε ένα φυσιολογικό χώρο στάθμευσης μεταξύ του ένα και του δέκα… Η φυσική εξήγηση της προέλευσης του δεκαδικού συστήματος, καθώς και της πενταδικής παραλλαγής, δίνεται από την υπόθεση ότι τα συστήματα αυτά υπήρξαν απόρροια της πρωτόγονης πρακτικής αρίθμησης με τα δάκτυλα… γιατί όλοι οι άνθρωποι, είτε Έλληνες είτε Βάρβαροι, αριθμούν ως προς το δέκα και όχι ως προς οποιονδήποτε άλλο αριθμό… ενώ από την άλλη δεν υπερβαίνουν το δέκα ώστε να ξεκινήσουν από κάποιον άλλο αριθμό εκ νέου την αρίθμηση των μονάδων…»

Heath, Th. «Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών», τόμος Ι, Αθήνα 2001, σ ελ.45

Ερωτήσεις

α) Υπάρχουν ομοιότητες στις πληροφορίες που μας δίνουν το παραπάνω κείμενο και το κείμενο που διάβασες στο προηγούμενο φύλλο εργασιών; Ποιες είναι αυτές;

____

____

____

β) Υπάρχει κάποια πληροφορία σχετικά με την αρίθμηση στο ένα κείμενο, ενώ δεν υπάρχει στο άλλο;

____

____

____

γ) Τι μπορεί να σημαίνει ο όρος «πενταδική παραλλαγή» που αναφέρεται στο $2^{ο}$ κείμενο;

δ) Πρόσεξες πώς είναι «αριθμημένες» οι ερωτήσεις σε αυτή τη σελίδα; Τι σημαίνει α, β, γ, κτλ.; Μήπως γνωρίζεις ποιοι αριθμούσαν με αυτό τον τρόπο; Ο παρακάτω πίνακας δίνει και άλλους αριθμούς.

1 ↔ α΄	10 ↔ ι΄	100 ↔ ρ΄
2 ↔ β΄	20 ↔ κ΄	200 ↔ σ΄
3 ↔ γ΄	30 ↔ λ΄	300 ↔ τ΄
4 ↔ δ΄	40 ↔ μ΄	400 ↔ υ΄
5 ↔ ε΄	50 ↔ ν΄	500 ↔ φ΄
6 ↔ ς΄ (στ΄)	60 ↔ ξ΄	600 ↔ χ΄
7 ↔ ζ΄	70 ↔ ο΄	700 ↔ ψ΄
8 ↔ η΄	80 ↔ π΄	800 ↔ ω΄
9 ↔ θ΄	90 ↔ ϟ΄	900 ↔ ϡ΄

3^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process)

Ανακάλυψη του εργαλείου και των δομικών του στοιχείων

α) Μπορείς να γράψεις τι είναι αυτό που βλέπεις μπροστά σου;

β) Μπορείς να το περιγράψεις με λεπτομέρειες;

γ) Μπορείς να δείξεις με μια ζωγραφιά αυτό που περιέγραψες με λόγια;

γ) Μπορείς να σκεφτείς και να γράψεις τι μπορείς να κάνεις με αυτό το εργαλείο;

4^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process)

Εναλλακτική κατασκευή του εργαλείου

Μπορείς να περιγράψεις με τι υλικά, που υπάρχουν στο σπίτι σου, θα μπορούσες να κατασκευάσεις έναν κινέζικο άβακα παρόμοιο με αυτόν που κρατάς στα χέρια σου; Βάλε όλη τη φαντασία σου!

5^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Μετασχηματισμός του τεχνουργήματος σε εργαλείο (instrumentation process)

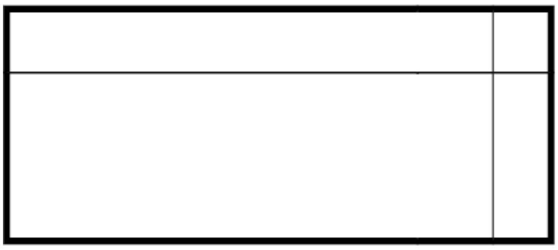
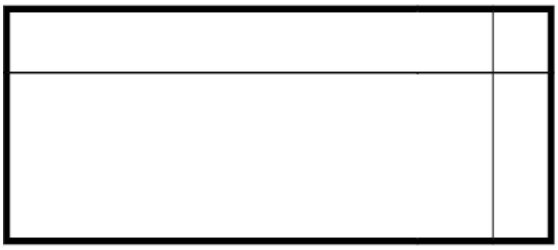
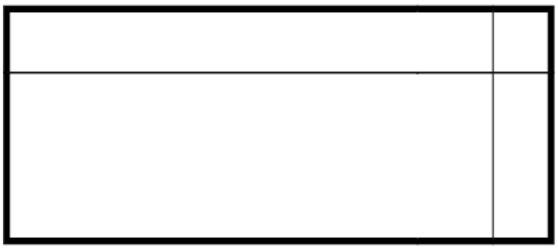
Αναπαράσταση τριψήφιου αριθμού στον άβακα

α) Μπορείς να δείξεις τον αριθμό 107 στον κινέζικο άβακα;
Απάντηση:____

Αν ναι, μπορείς να κάνεις ένα σκίτσο που να δείχνει τον αριθμό αυτό στο παρακάτω πλαίσιο;

6ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να ζωγραφίσεις χάντρες σε κάθε άβακα ώστε να αναπαραστήσεις τον αριθμό που αναγράφεται δίπλα του;

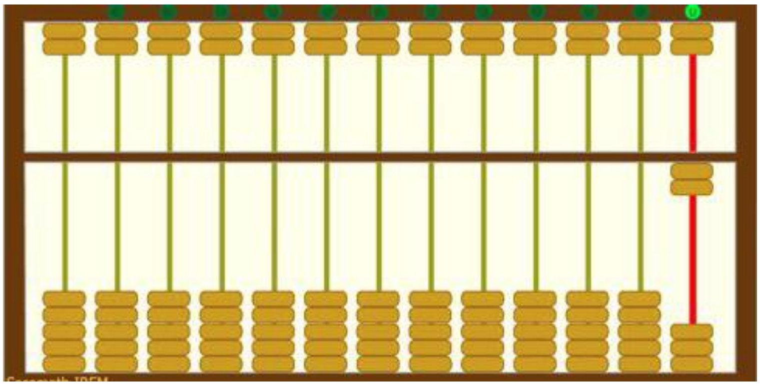
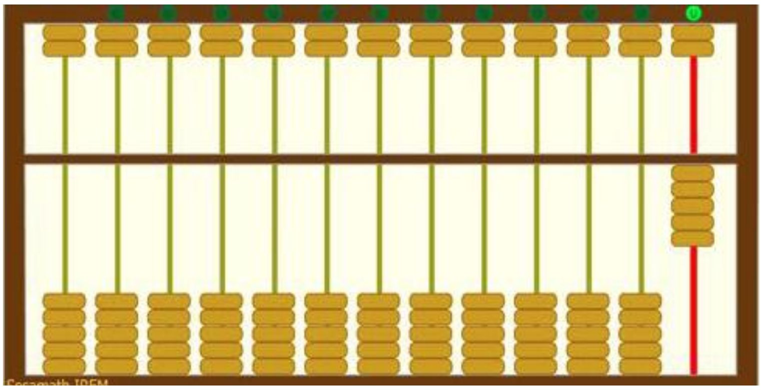
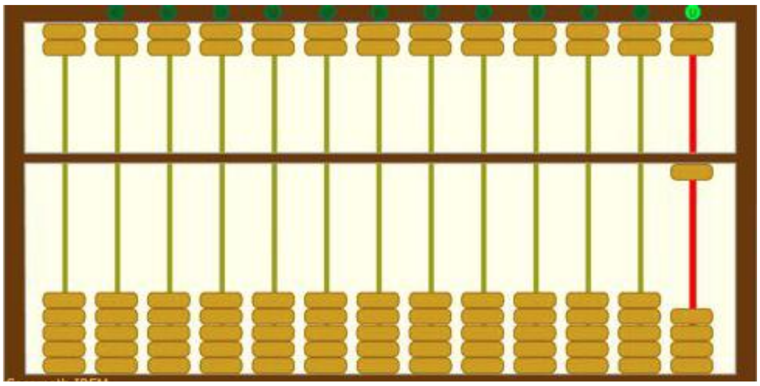
	**5**
	**3**
	**7**

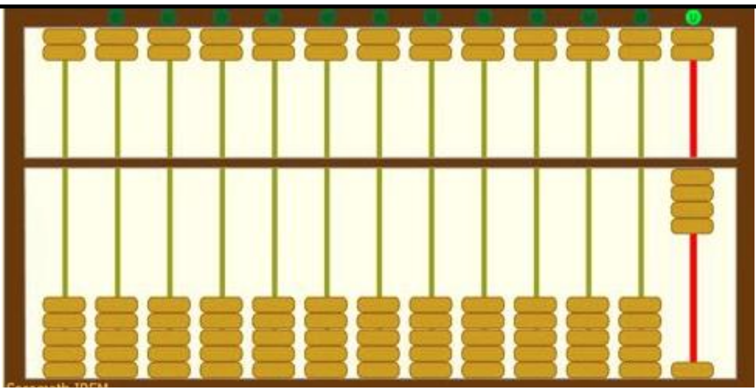
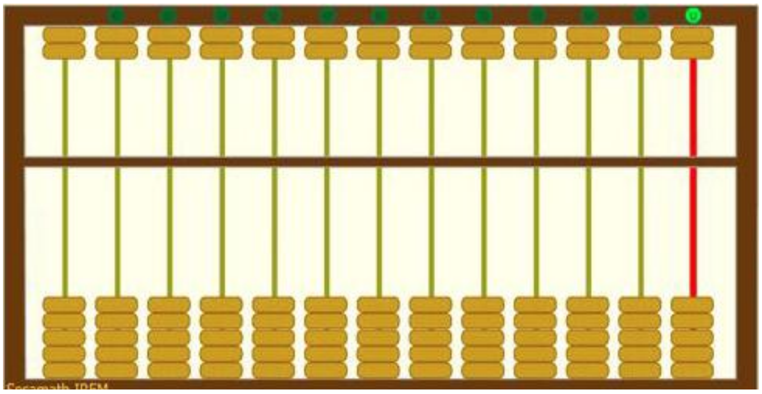
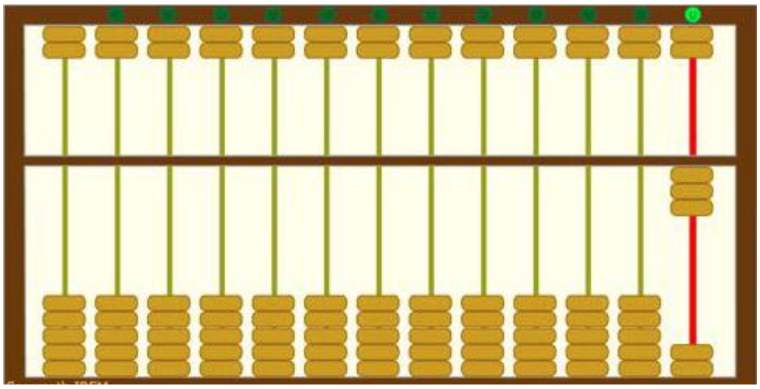
	1
	8
	0
	2

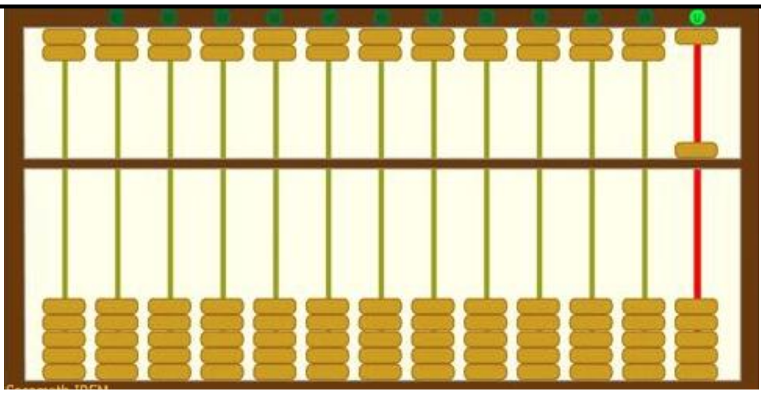
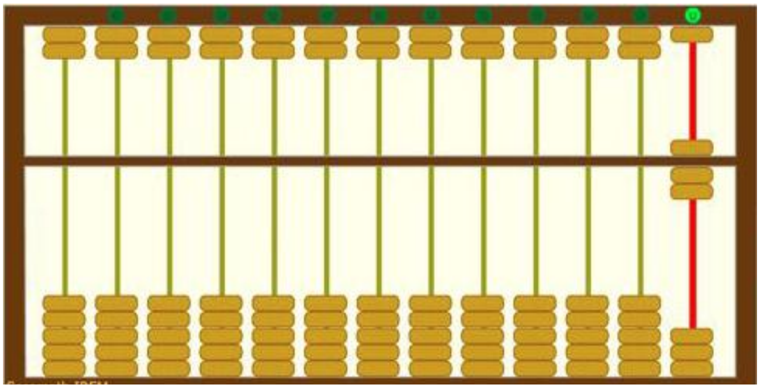
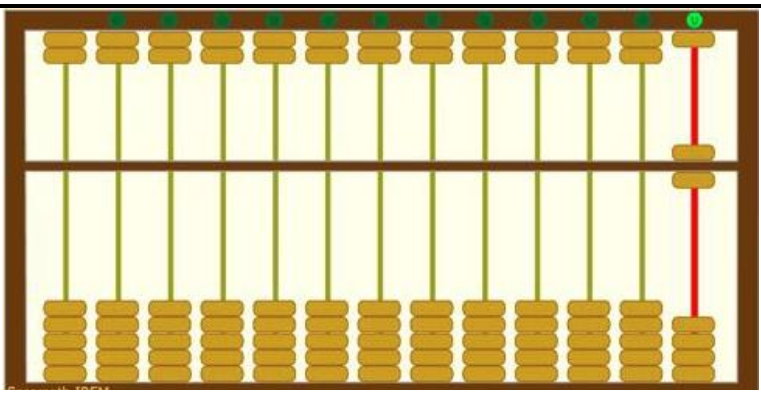
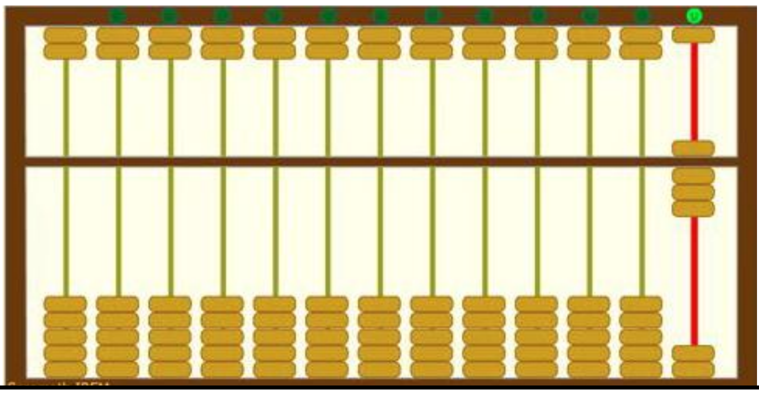
	4

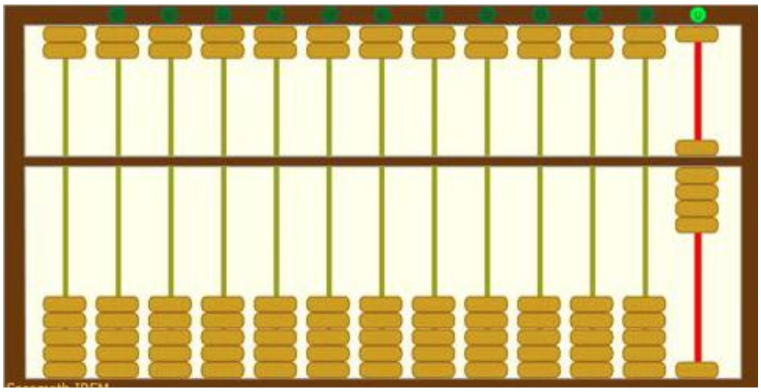
7ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να γράψεις δίπλα σε κάθε άβακα τον αριθμό που αναπαριστά;

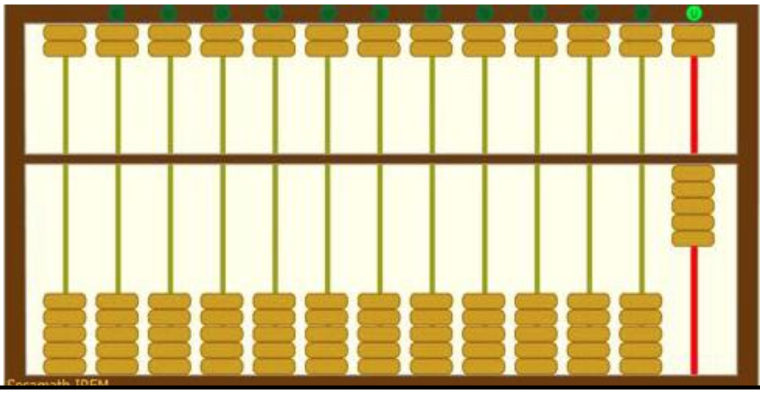
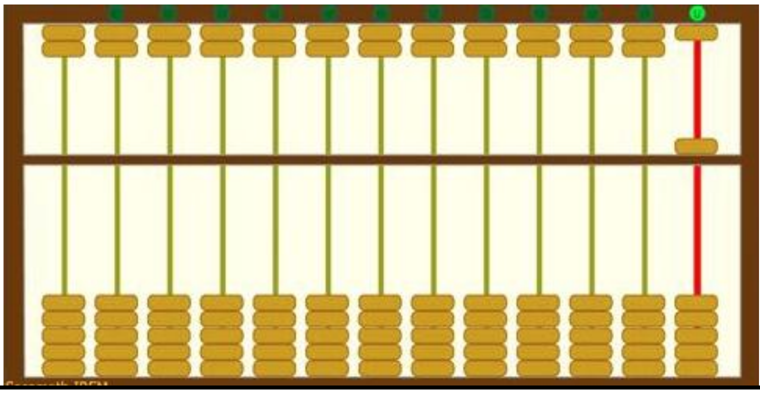
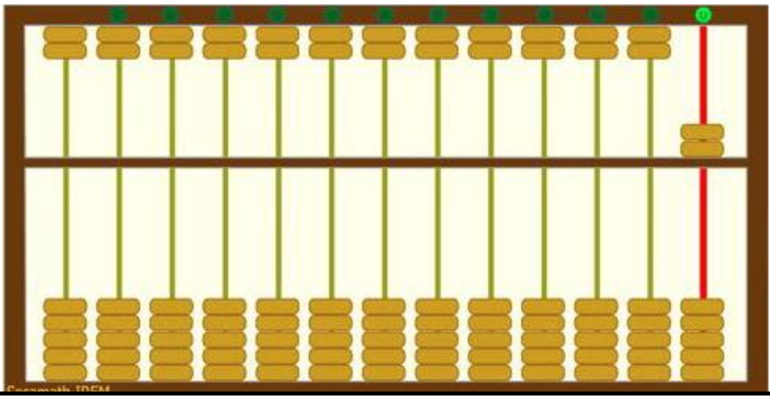
	
	
	

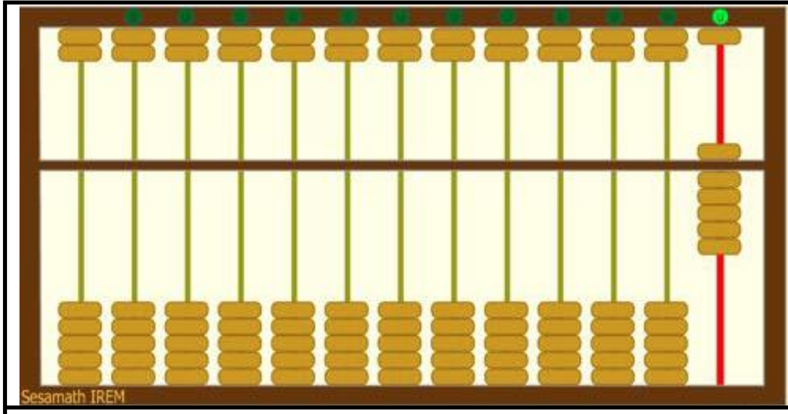
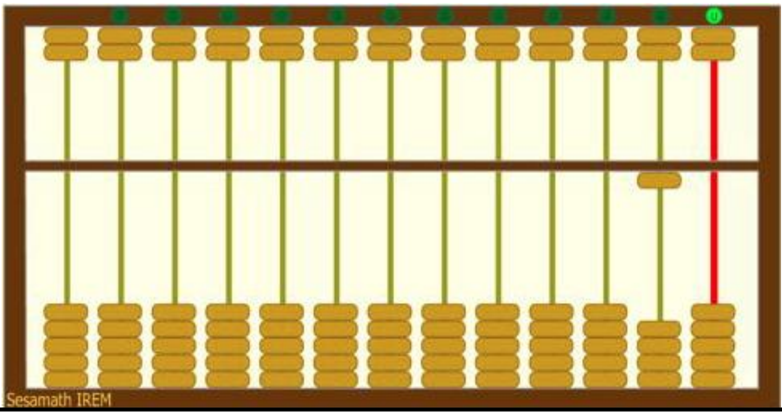
	
	
	
	

8ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

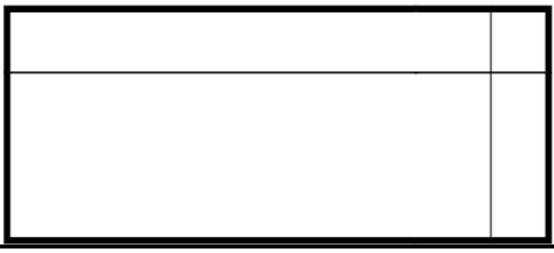
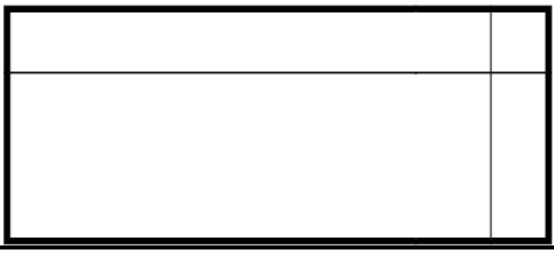
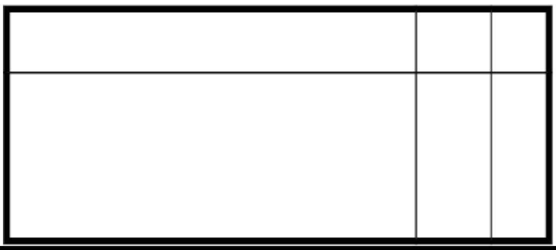
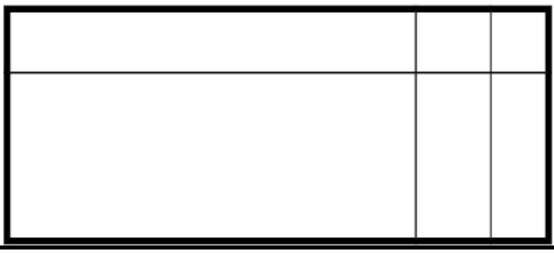
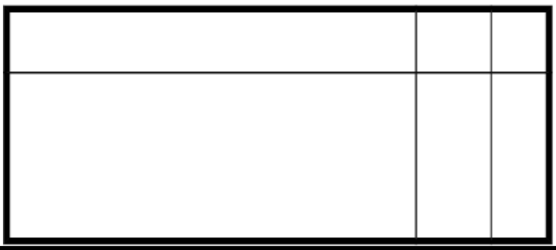
Μπορείς να γράψεις δίπλα σε κάθε άβακα τον αριθμό που αναπαριστά;

 Sesamath IREM	
 Sesamath IREM	

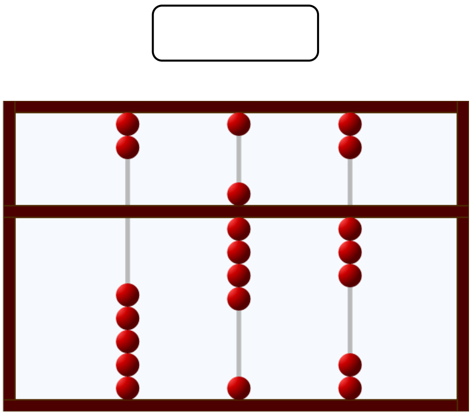
9ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

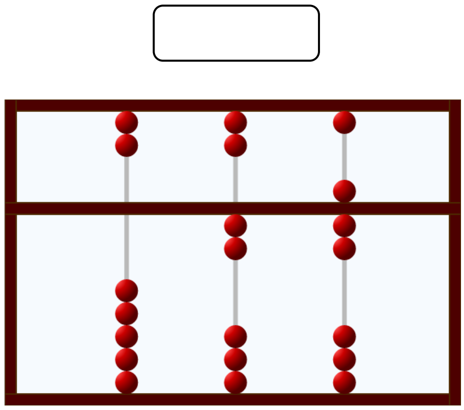
Μπορείς να ζωγραφίσεις χάντρες σε κάθε άβακα, ώστε να αναπαραστήσεις **με διαφορετικό κάθε φορά τρόπο** τον αριθμό που αναγράφεται δίπλα του;

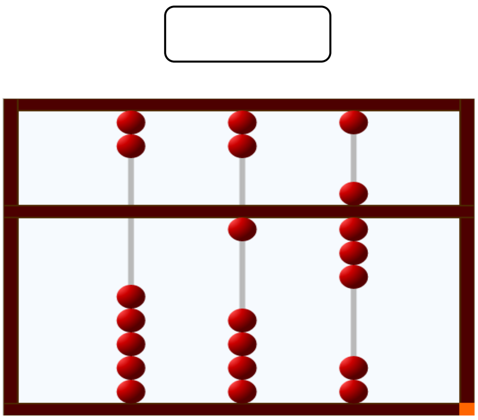
	**5**
	**5**
	**10**
	**10**
	**10**

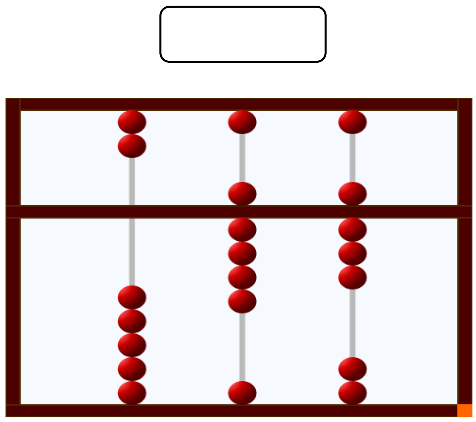
10ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

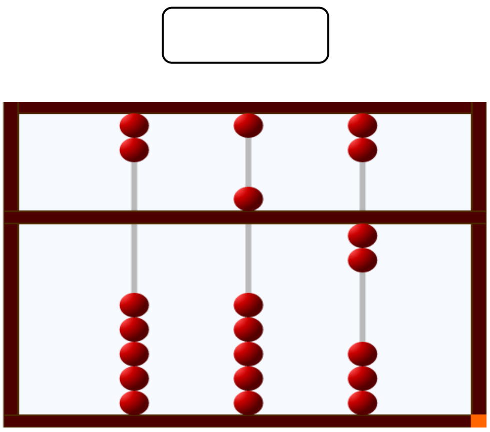
Μπορείς να γράψεις πάνω από κάθε άβακα τον αριθμό που αναπαριστά;

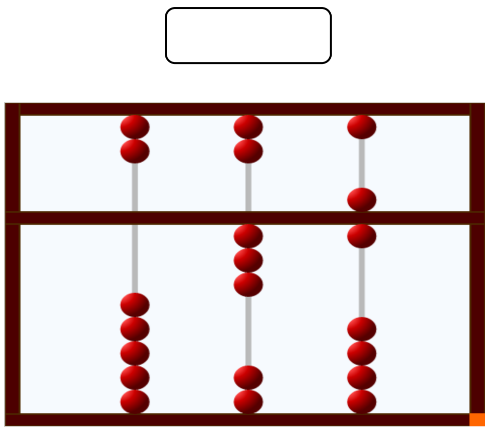


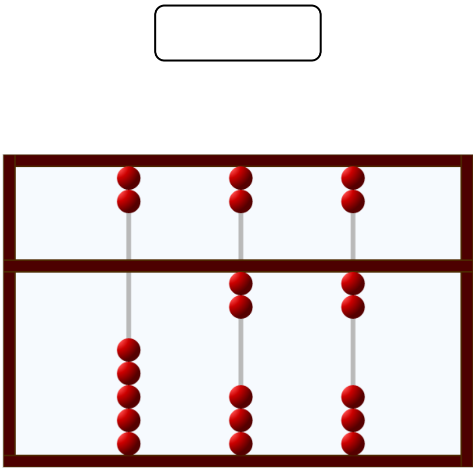


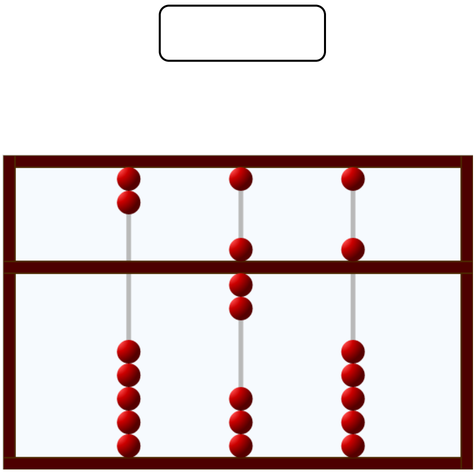








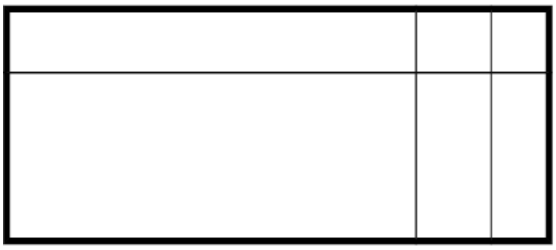




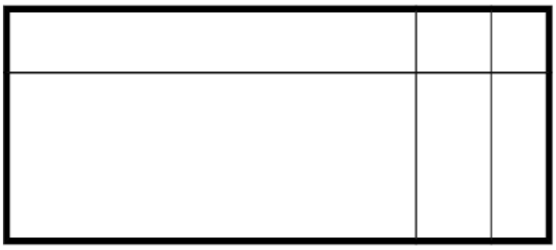
11^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να ζωγραφίσεις χάντρες σε κάθε άβακα, ώστε να αναπαραστήσεις τον αριθμό που αντιστοιχεί στον καθένα;

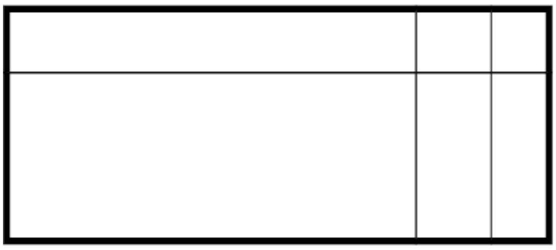
45



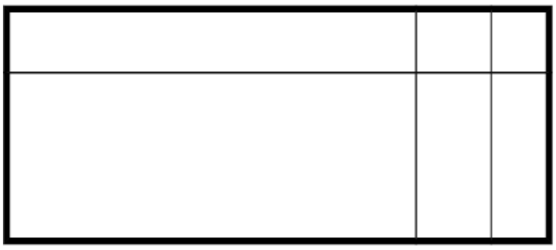
29



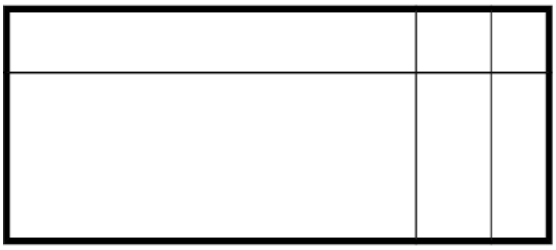
57



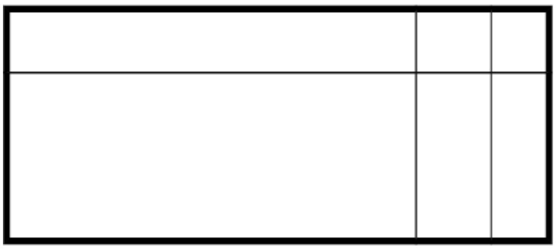
86



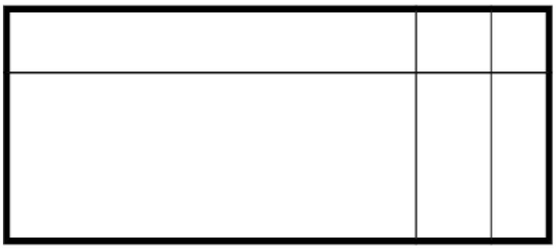
33



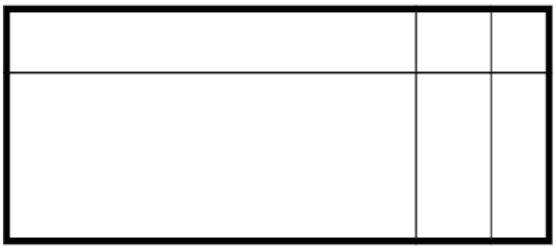
98



71



14

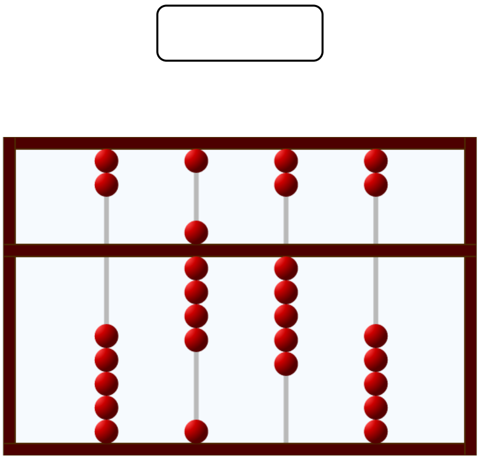


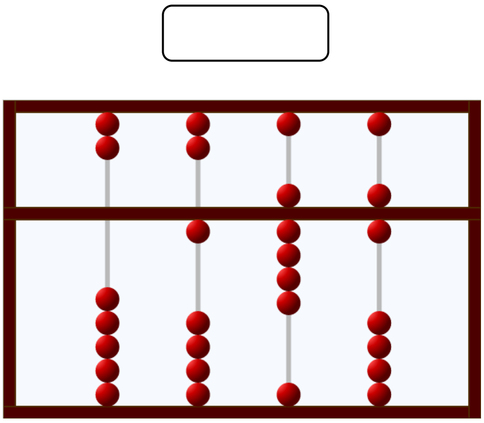
60

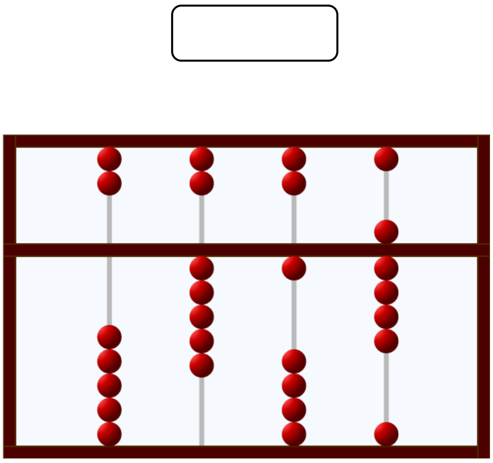
99

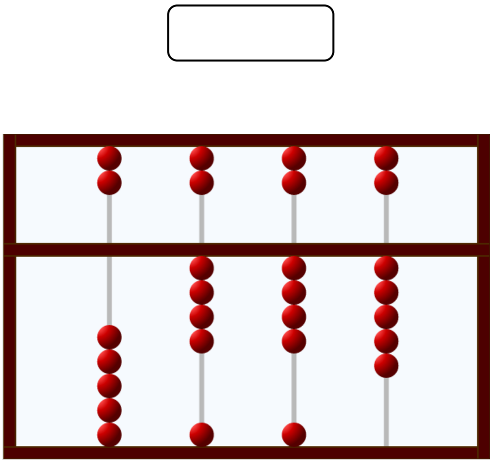
12ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

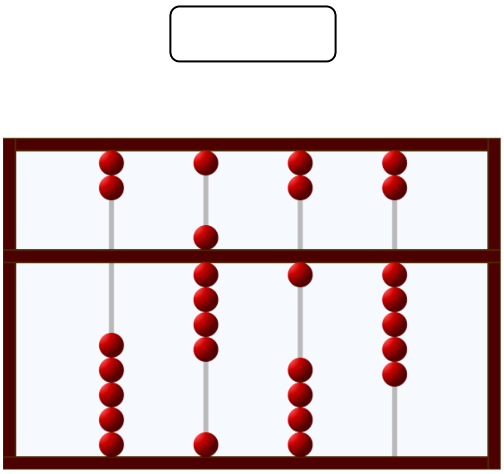
Μπορείς να γράψεις πάνω από κάθε άβακα τον αριθμό που αναπαριστά;

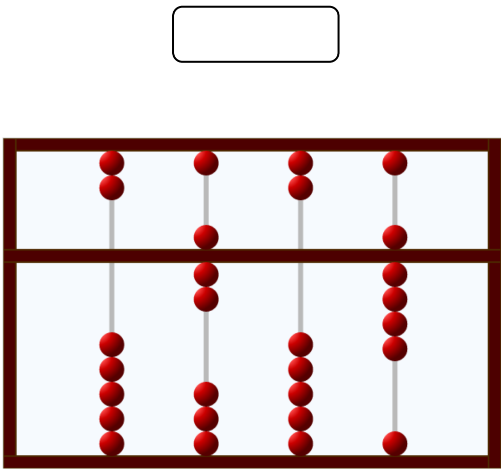


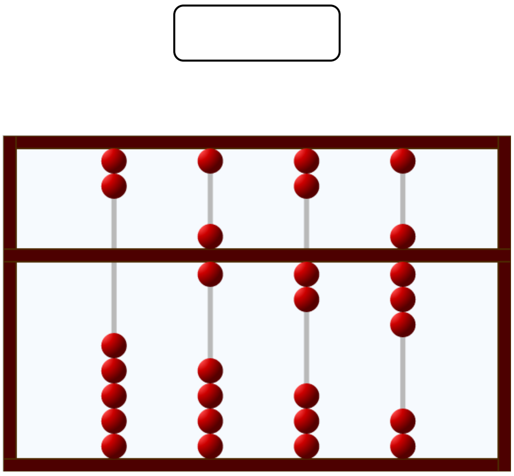


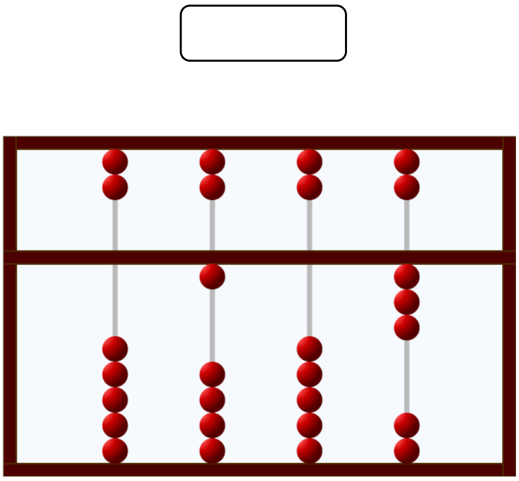








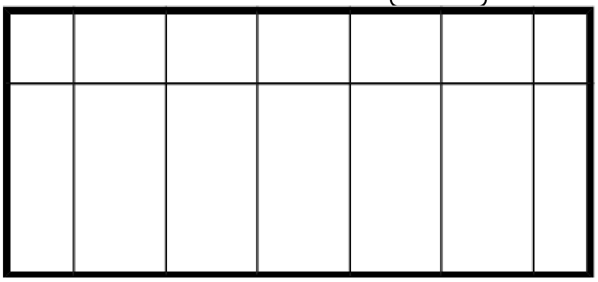




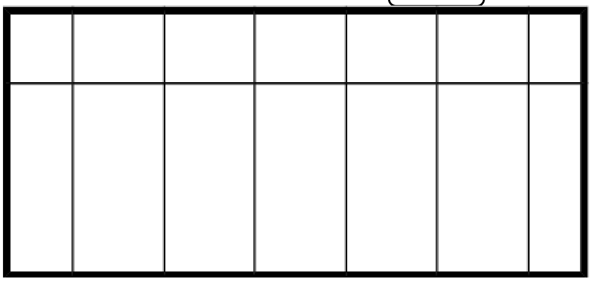
13^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να ζωγραφίσεις χάντρες σε κάθε άβακα, ώστε να αναπαραστήσεις τον αριθμό που αντιστοιχεί στον καθένα;

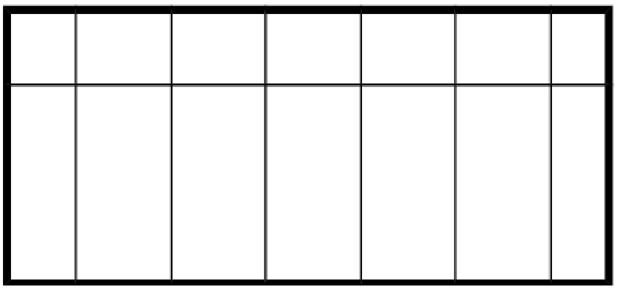
300



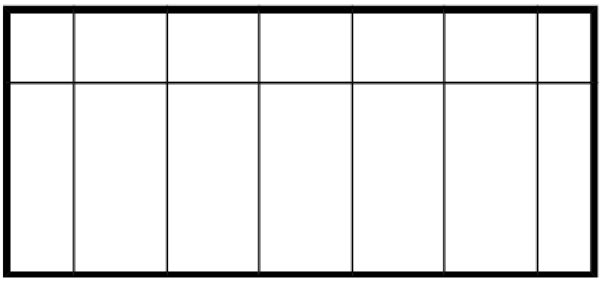
852



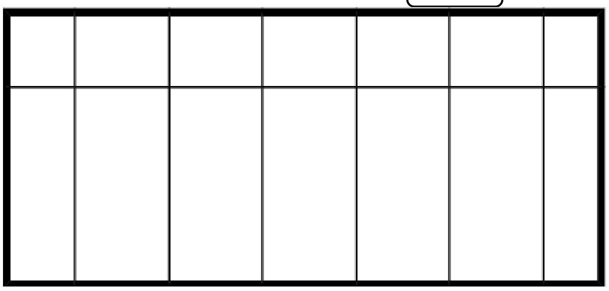
109



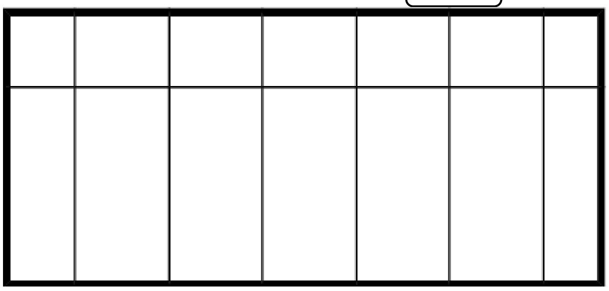
570



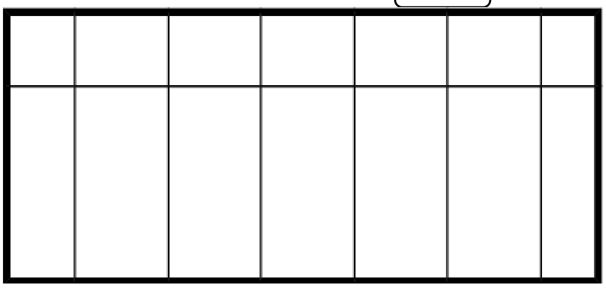
622



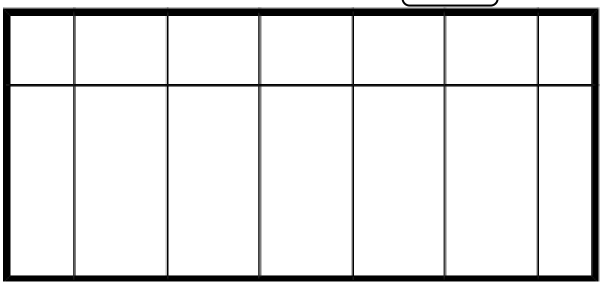
707



240



420

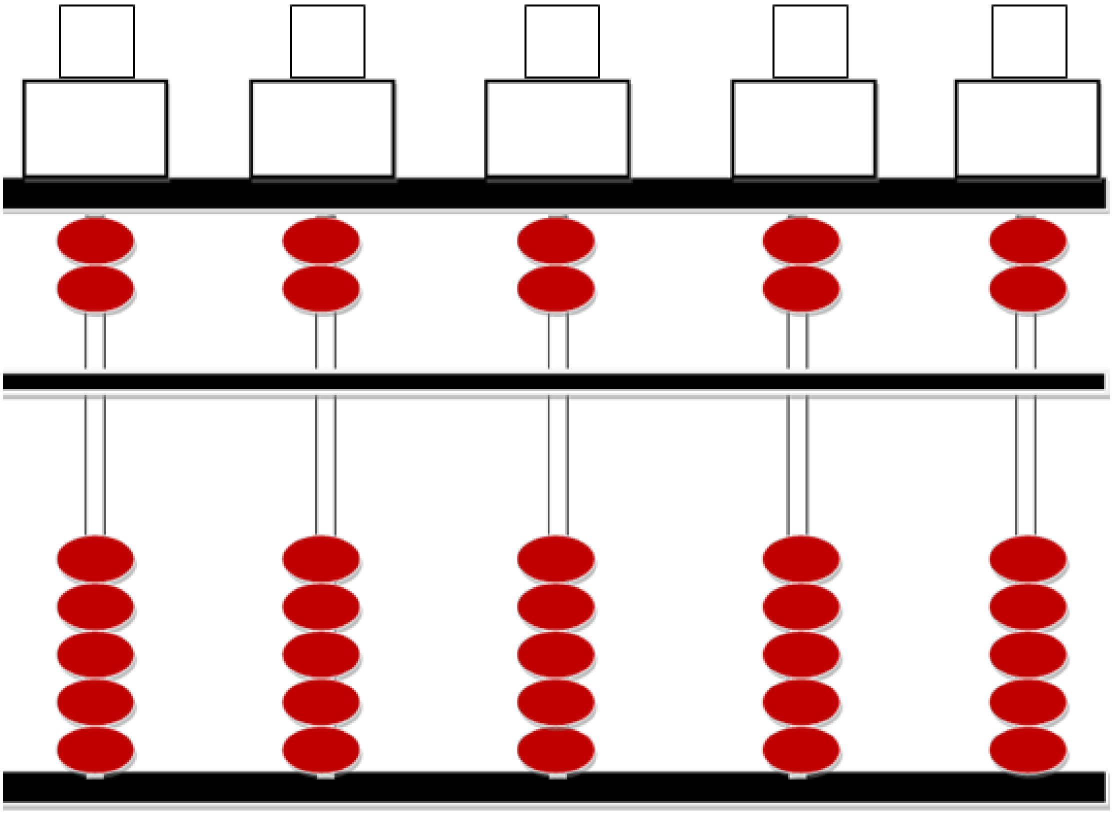


999

1.000

14ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Μπορείς να γράψεις με λέξεις σε κάθε μεγάλο πλαίσιο που υπάρχει πάνω από τον άβακα τι δείχνει η καθεμιά στήλη; Στη συνέχεια σε κάθε μικρό πλαίσιο βάλε ένα κεφαλαίο γράμμα που να δείχνει την αξία της κάθε στήλης του κινέζικου άβακα.



2. Μπορείς να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις;

- Τι είναι η «μονάδα»;

____

____

____

- Τι δείχνει η στήλη των μονάδων στον άβακα;

____

____

____

- Τι είναι η «δεκάδα»;

- Τι δείχνει η στήλη των δεκάδων στον άβακα;

- Τι είναι η «εκατοντάδα»;

- Τι δείχνει η στήλη των εκατοντάδων στον άβακα;

- Τι είναι η «χιλιάδα»;

- Τι δείχνει η στήλη των χιλιάδων στον άβακα;

15^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

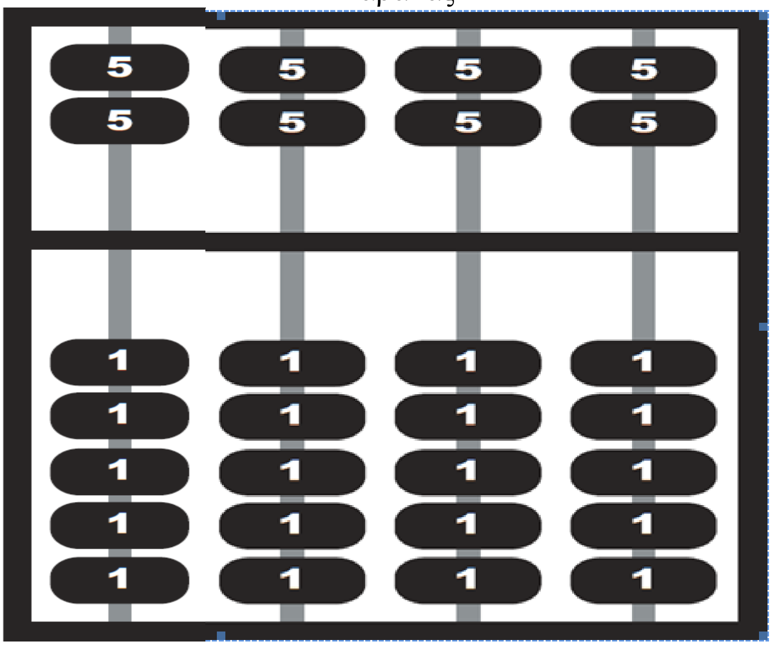
Παρατήρησε τον πρώτο άβακα που βρίσκεται παρακάτω. Η κάθε χάντρα γράφει πάνω της την αξία της. Είναι σωστή η αξία της κάθε χάντρας σε καθεμιά στήλη; Ναι ή όχι;

Απάντηση: ………………………

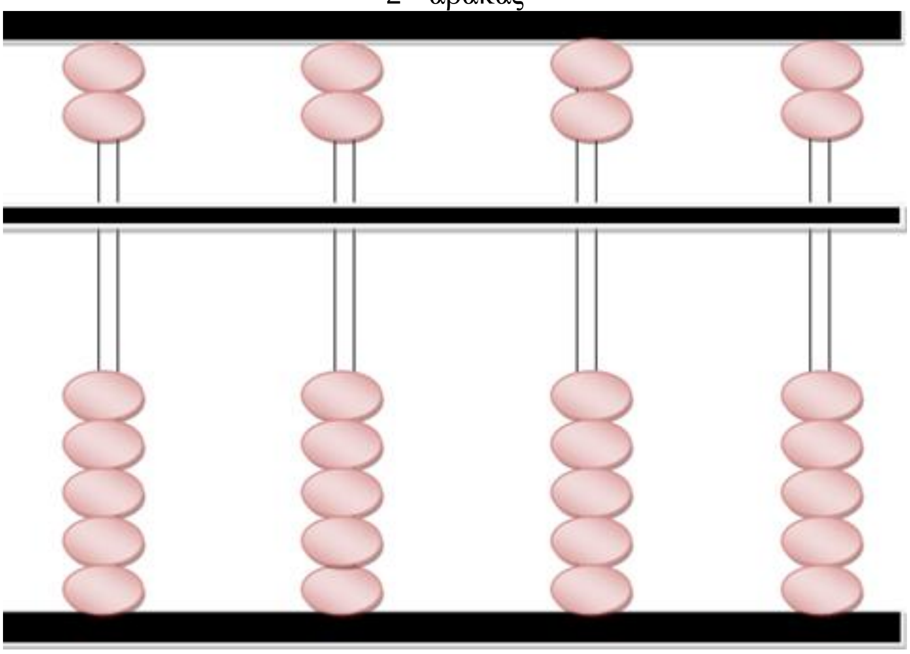
Αν ναι, μην κάνεις τίποτα.

Αν όχι, μπορείς να γράψεις στο δεύτερο άβακα πάνω σε κάθε χάντρα την αξία της;

1^{ος} άβακας



2^{ος} άβακας



16^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process)

Επέκταση του εργαλείου

Μπορείς να σχηματίσεις τον αριθμό 100.000 στον άβακά σου;
Αν ναι, σχεδίασε τον κινέζικο άβακα και δείξε τον αριθμό στο παρακάτω πλαίσιο.
Αν όχι, μπορείς να βρεις έναν τρόπο, ώστε να καταφέρεις να τον δείξεις; Εξήγησε τον τρόπο που σκέφτηκες και δείξε τον με ένα σκίτσο στο πλαίσιο που ακολουθεί.

Απάντηση:____

Εξήγηση:____

17ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Κατασκευή νέων για το χρήστη εργαλείων (instrumentalisation process)

Συνειδητοποίηση της μέγιστης αναπαραστατικής δυνατότητας του άβακα

α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορείς να σχηματίσεις στον κινέζικο άβακα με τις πέντε στήλες, που κρατάς;

Απάντηση:____

β) Μπορείς να τον δείξεις με ένα σκίτσο;

γ) Μπορείς να εξηγήσεις πώς σκέφτηκες για να βρεις τον αριθμό;

____

____

____

____

____

____

____

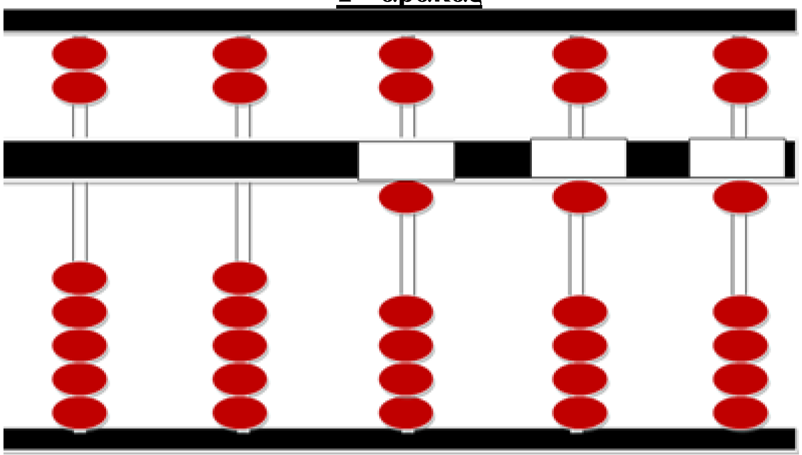
____

____

18ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

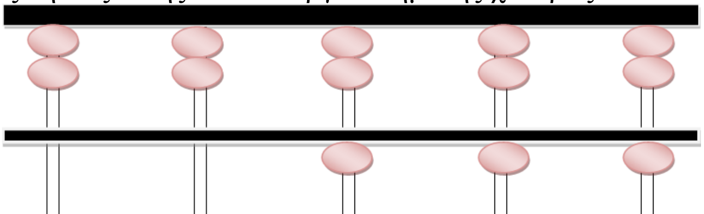
Μπορείς να γράψεις σε κάθε πλαίσιο που υπάρχει στη διαχωριστική δοκό του άβακα ποιον αριθμό αναπαριστά η κάθε χάντρα που είναι ενεργοποιημένη; Στη συνέχεια προσπάθησε να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί.

<u>1ος άβακας</u>

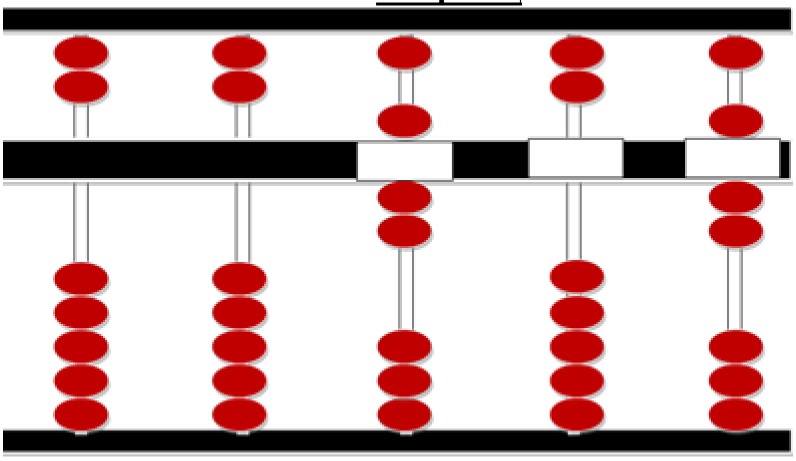


Ποιος αριθμός είναι; (τον γράφω με ψηφία)	………………
Από ποιους αριθμούς σχηματίστηκε;	……. + ……. + …….
Από πόσες Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες αποτελείται;	**….. Ε + ….. Δ + ….. Μ**
Από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι Εκατοντάδες, οι Δεκάδες και οι Μονάδες που βρήκες;	**….. Ε =** …………………………………………………………… **….. Δ =** …………………………………………………………… **….. Μ =** ……………………………………………………………

Μπορείς να γράψεις την αξία της κάθε ενεργοποιημένης χάντρας στον παρακάτω άβακα;

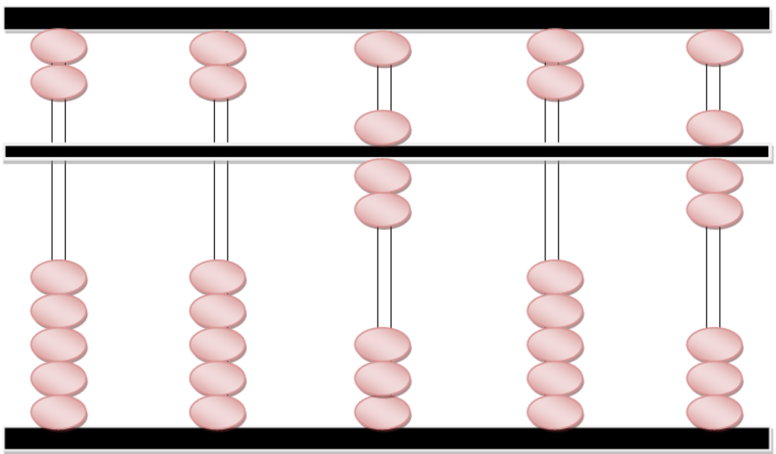


<u>2ος άβακας</u>

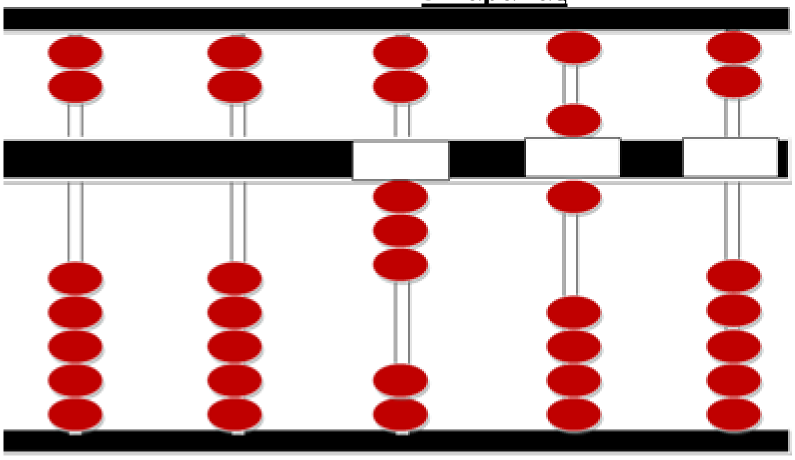


Ποιος αριθμός είναι; (τον γράφω με ψηφία)	………………
Από ποιους αριθμούς σχηματίστηκε;	……. + ……. + …….
Από πόσες Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες αποτελείται;	**….. Ε + ….. Δ + ….. Μ**
Από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι Εκατοντάδες, οι Δεκάδες και οι Μονάδες που βρήκες;	**….. Ε =** …………………………………………………………… **….. Δ =** …………………………………………………………… **….. Μ =** ……………………………………………………………

Μπορείς να γράψεις την αξία της κάθε ενεργοποιημένης χάντρας στον παρακάτω άβακα;

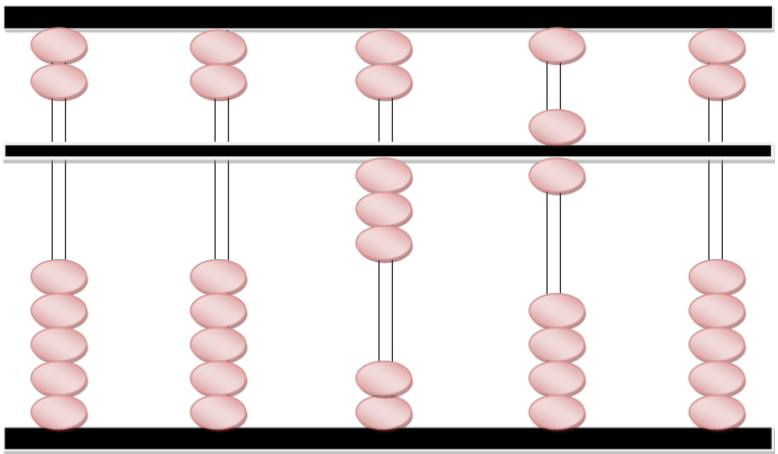


3^{ος} άβακας

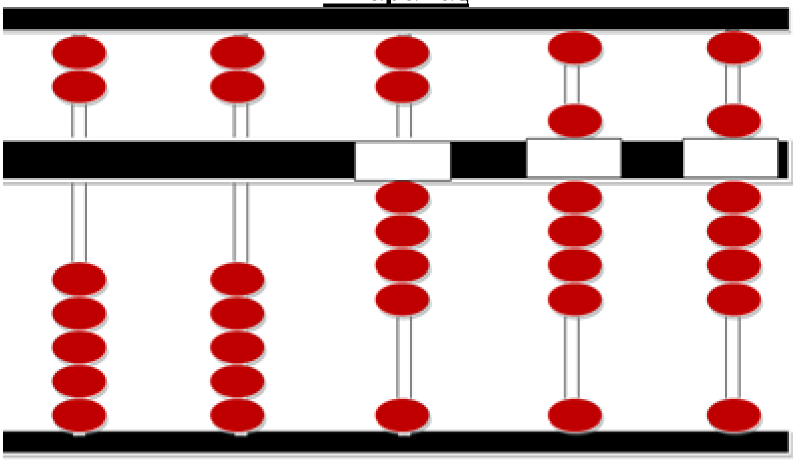


Ποιος αριθμός είναι; (τον γράφω με ψηφία)	………………
Από ποιους αριθμούς σχηματίστηκε;	……. + ……. + …….
Από πόσες Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες αποτελείται;	**….. Ε + ….. Δ + ….. Μ**
Από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι Εκατοντάδες, οι Δεκάδες και οι Μονάδες που βρήκες;	**….. Ε =** …………………………………………………………… **….. Δ =** …………………………………………………………… **….. Μ =** ……………………………………………………………

Μπορείς να γράψεις την αξία της κάθε ενεργοποιημένης χάντρας στον παρακάτω άβακα;

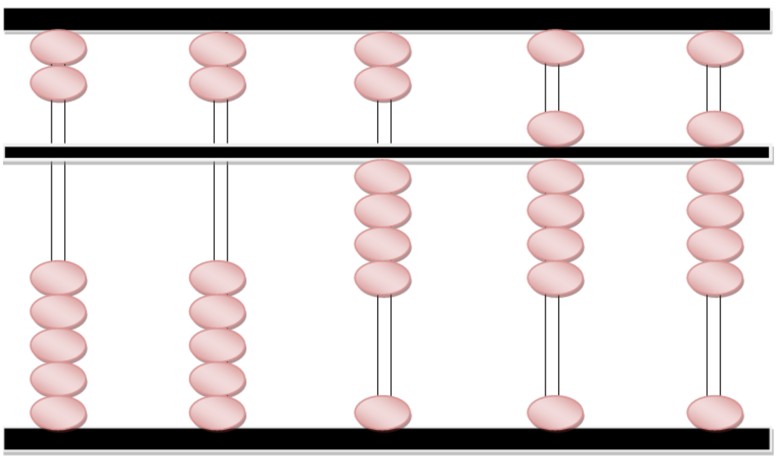


<u>4ος άβακας</u>

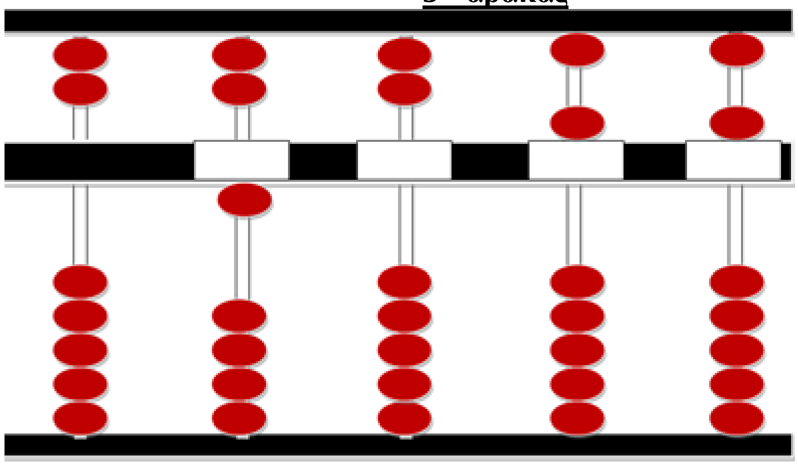


Ποιος αριθμός είναι; (τον γράφω με ψηφία)	………………
Από ποιους αριθμούς σχηματίστηκε;	……. + ……. + …….
Από πόσες Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες αποτελείται;	**….. Ε + ….. Δ + ….. Μ**
Από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι Εκατοντάδες, οι Δεκάδες και οι Μονάδες που βρήκες;	**….. Ε =** …………………………………………………………… **….. Δ =** …………………………………………………………… **….. Μ =** ……………………………………………………………

Μπορείς να γράψεις την αξία της κάθε ενεργοποιημένης χάντρας στον παρακάτω άβακα;

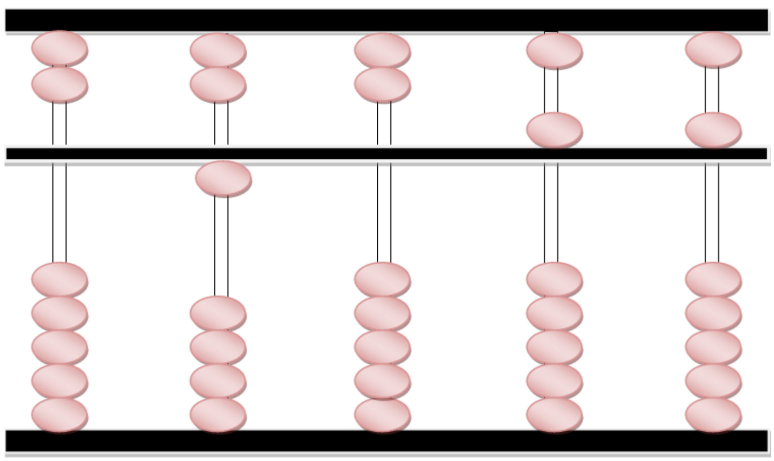


$5^{ος}$ άβακας



Ποιος αριθμός είναι; (τον γράφω με ψηφία)	………………
Από ποιους αριθμούς σχηματίστηκε;	……. + ……. + ……. + …….
Από πόσες Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες αποτελείται;	**….. Χ** + **….. Ε** + **….. Δ** + **….. Μ**
Από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι Εκατοντάδες, οι Δεκάδες και οι Μονάδες που βρήκες;	**….. Χ** = ……………………………………………… **….. Ε** = ……………………………………………… **….. Δ** = ……………………………………………… **….. Μ** = ………………………………………………

Μπορείς να γράψεις την αξία της κάθε ενεργοποιημένης χάντρας στον παρακάτω άβακα;

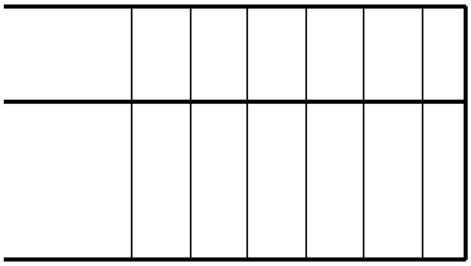


19ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να συμπληρώσεις τους παρακάτω πίνακες; Στη συνέχεια σχεδίασε χάντρες στον άβακα που βρίσκεται κάτω από κάθε πίνακα, ώστε να δείξεις τον αριθμό που βρήκες.

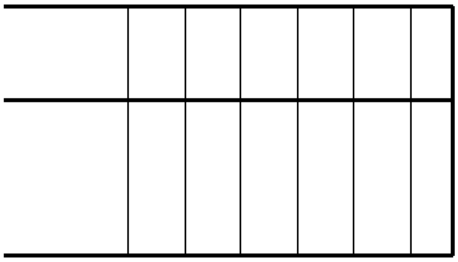
- Ποιος αριθμός έχει:

7Ε	
2Δ	
9Μ	



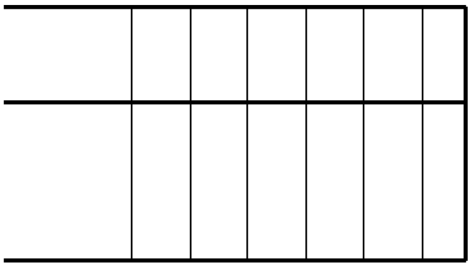
- Ποιος αριθμός έχει:

9Μ	
1Ε	
0Δ	



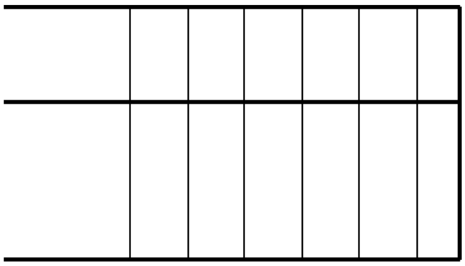
- Ποιος αριθμός έχει:

5Δ	
8Μ	
9Ε	



- Ποιος αριθμός έχει:

4Ε	
7Μ	
0Δ	



- Ποιος αριθμός έχει:

1Μ	
2Δ	
9Ε	

- Ποιος αριθμός έχει:

6Δ	
2Ε	
4Μ	

- Ποιος αριθμός έχει:

6Ε	
0Δ	
0Μ	

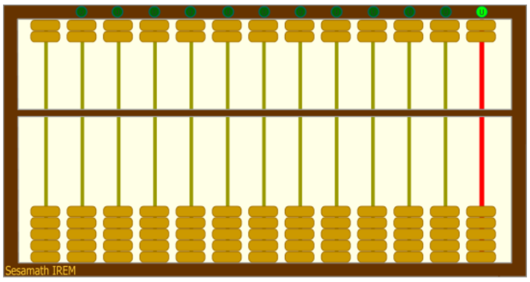
- Ποιος αριθμός έχει:

8Μ	
3Δ	
5Ε	

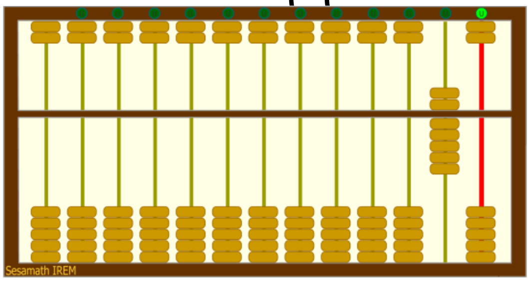
20ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όπως θα έχεις παρατηρήσει, στον κινέζικο άβακα δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε ποσότητες που έχουν αξία μεγαλύτερη από 15 σε κάθε θέση (στήλη του άβακα) ενός αριθμού. Παρατήρησε τις παρακάτω εικόνες. Μπορείς να εξηγήσεις πώς εργάστηκε κάποιος για να βρει ποιος αριθμός αποτελείται από **16 Δεκάδες**;

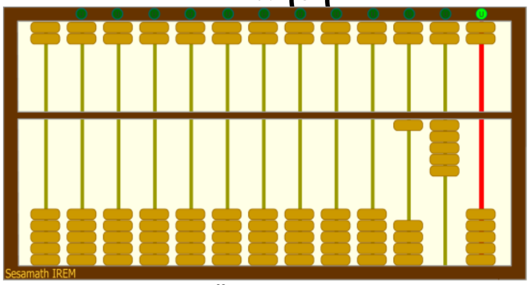
Εξηγώ:



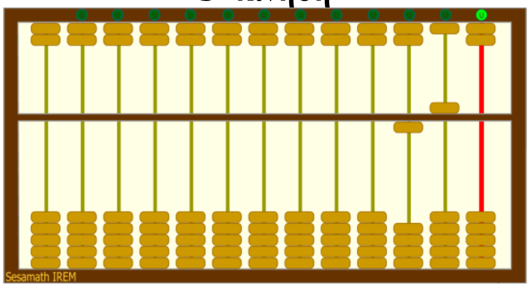
1η κίνηση



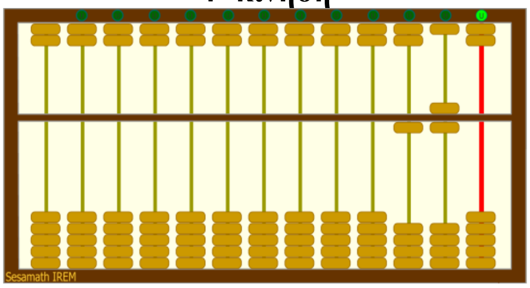
2η κίνηση



3η κίνηση



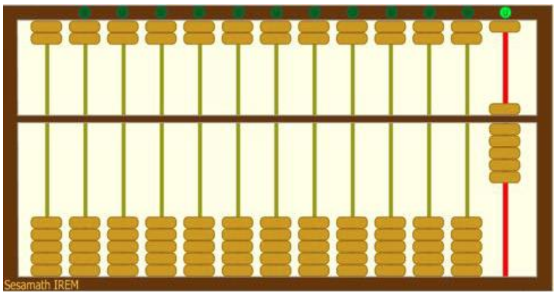
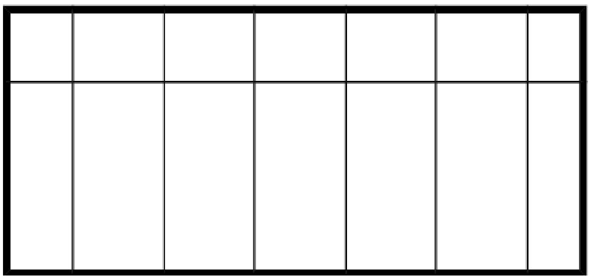
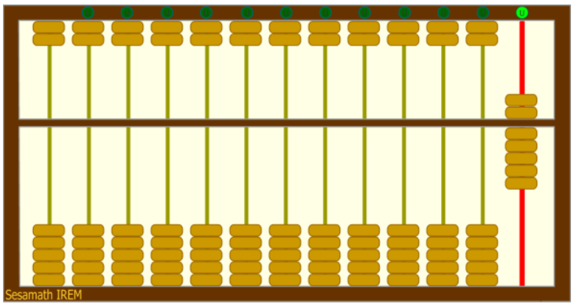
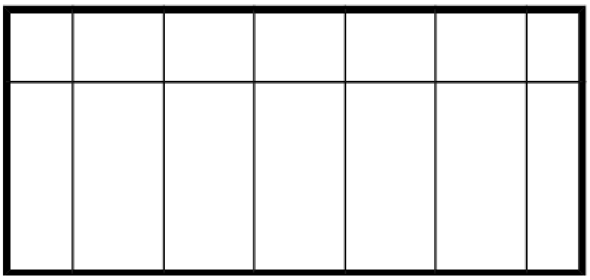
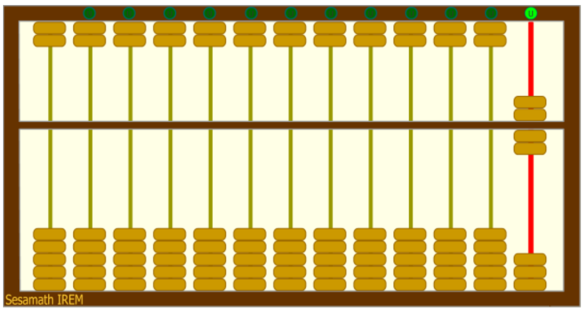
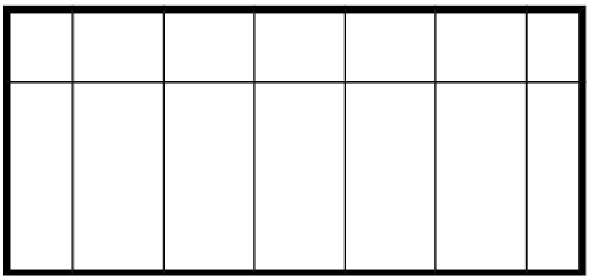
4η κίνηση

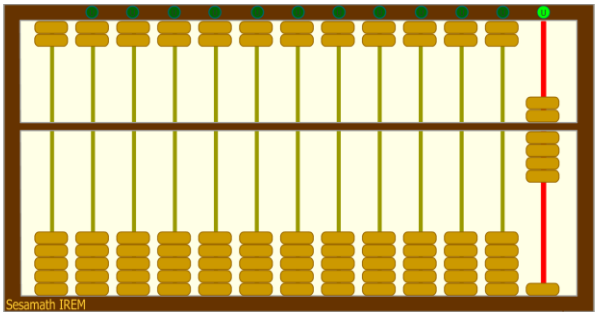
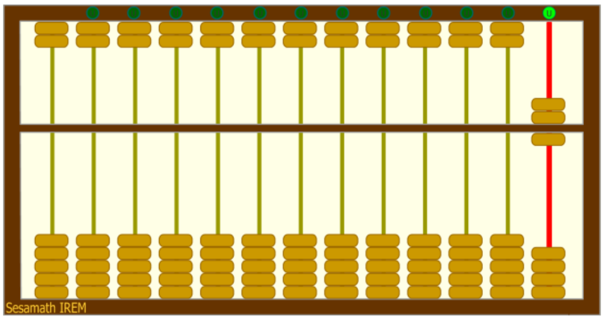
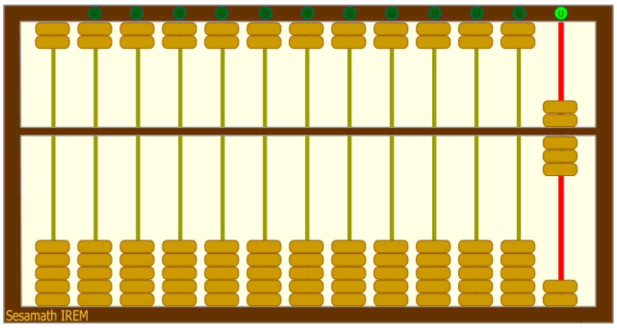


=160

21ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

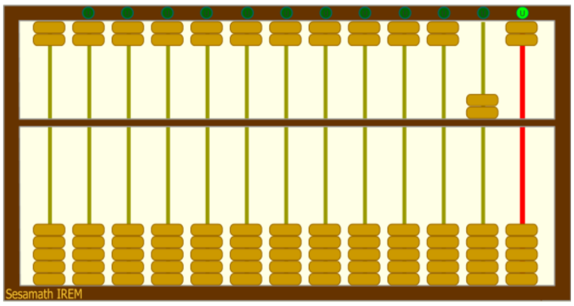
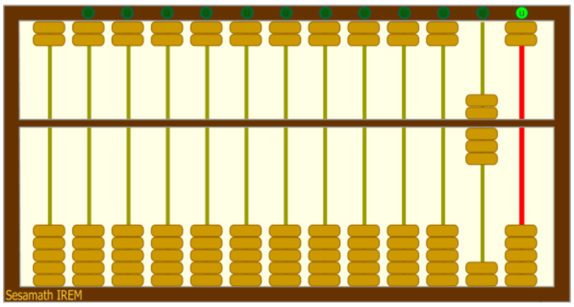
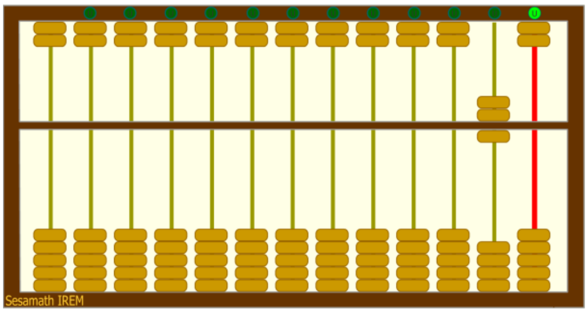
Μπορείς να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα; Μπορείς να εξηγήσεις πώς εργάστηκες;

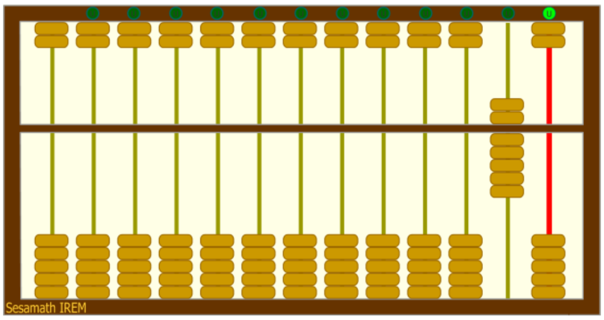
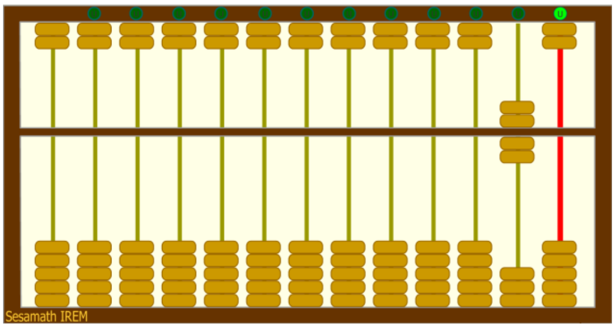
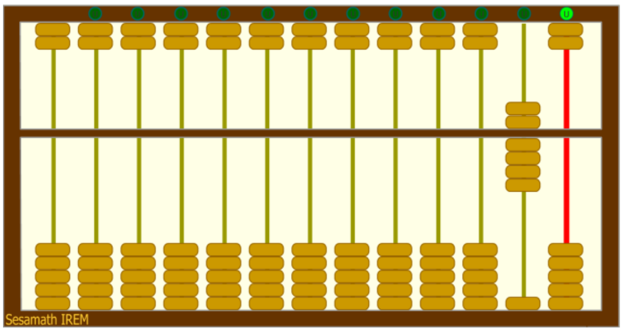
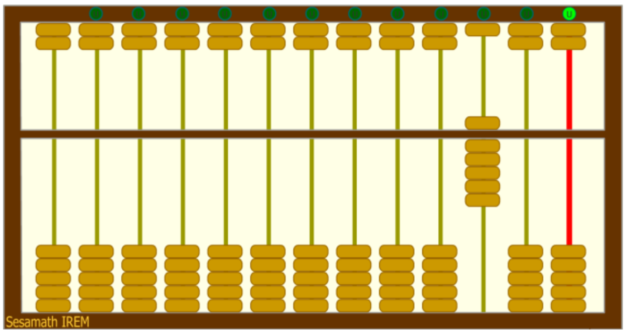
Αριθμός στον άβακα	**Ποιος αριθμός είναι;**	**Μπορείς να δείξεις το διπλανό αριθμό με τον σωστό τρόπο στον παρακάτω άβακα;**
		 Πώς εργάστηκες;
		 Πώς εργάστηκες;
		 Πώς εργάστηκες;

		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;

22ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

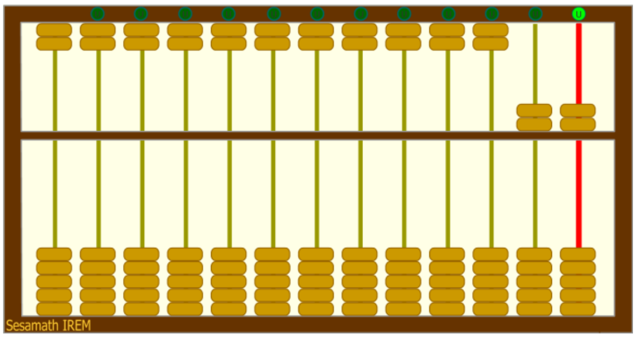
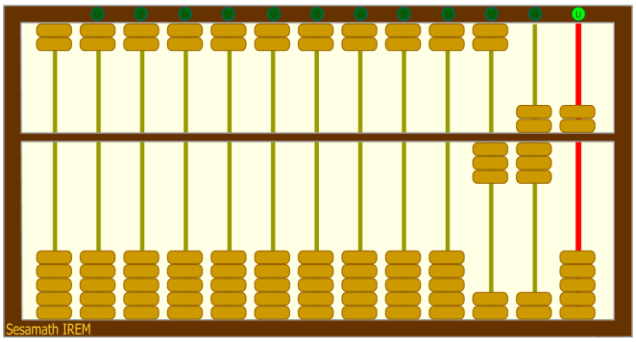
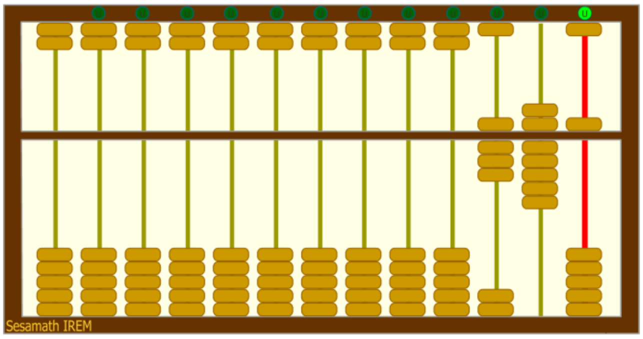
Μπορείς να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα; Μπορείς να εξηγήσεις πώς εργάστηκες;

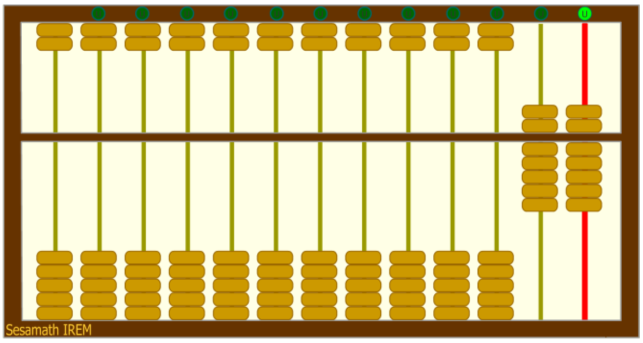
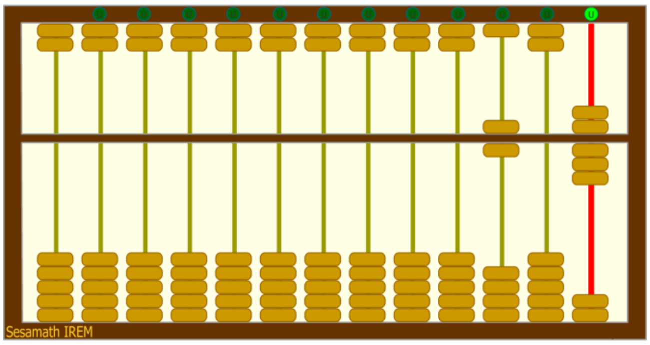
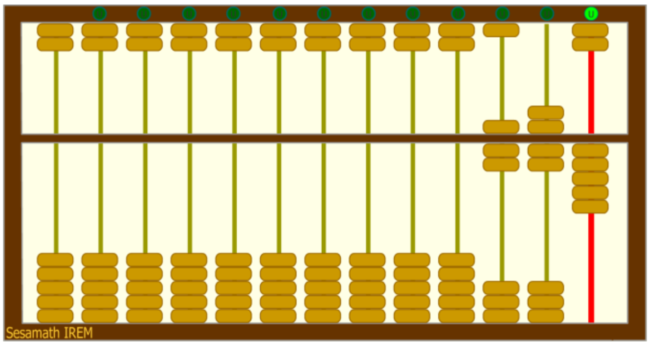
Αριθμός στον άβακα	**Ποιος αριθμός είναι;**	**Μπορείς να δείξεις το διπλανό αριθμό με τον σωστό τρόπο στον παρακάτω άβακα;**
		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;

		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;
		Πώς εργάστηκες;

23ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να βρεις ποιος αριθμός περιγράφεται σε κάθε άβακα; Στη συνέχεια με τον άβακά σου έλεγξε τα αποτελέσματα.

άβακας	**Ποιος αριθμός είναι;**
	
	
	

Sesamath IREM	
Sesamath IREM	
Sesamath IREM	

24ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν; Χρησιμοποίησε τον άβακά σου για να σε βοηθήσει.

1 χιλιάδα = …….. **εκατοντάδες**

1 χιλιάδα = …….. **δεκάδες**

1 χιλιάδα = …….. **μονάδες**

100 μονάδες = …….. **δεκάδες**

100 μονάδες = …….. **εκατοντάδες**

10 δεκάδες = …….. **εκατοντάδες**

10 δεκάδες = …….. **μονάδες**

5 εκατοντάδες = …….. **δεκάδες**

5 εκατοντάδες = …….. **μονάδες**

$25^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν; Χρησιμοποίησε τον άβακά σου για να σε βοηθήσει.

30 μονάδες = …….. δεκάδες

10 δεκάδες = …….. εκατοντάδες

5 εκατοντάδες = …….. δεκάδες

5 εκατοντάδες = …….. μονάδες

40 δεκάδες = …….. εκατοντάδες

40 δεκάδες = …….. μονάδες

40 μονάδες = …….. δεκάδες

7 εκατοντάδες = …….. δεκάδες

7 εκατοντάδες = …….. μονάδες

26^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Μπορείς να βρεις τους παρακάτω αριθμούς; Ο άβακάς σου θα σε βοηθήσει.

23Δ	=	…………
11Δ και 11Μ	=	…………
9Δ και 35Μ	=	…………
5Ε 8Δ και 40Μ	=	…………
9Ε 5Δ και 50Μ	=	…………

Μπορείς, τώρα που βρήκες ποιοι αριθμοί είναι, να τους τοποθετήσεις σε σειρά στην παρακάτω γραμμή, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο; Βάλε ανάμεσά τους το κατάλληλο σύμβολο.

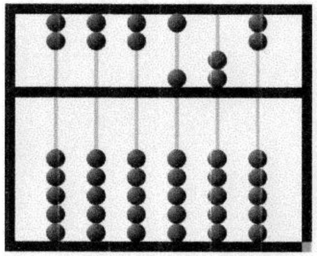
…………………………………………………………………………………….

2. Μπορείς να συγκρίνεις τους παρακάτω αριθμούς, χρησιμοποιώντας κάθε φορά ένα από τα σύμβολα <, =, >;

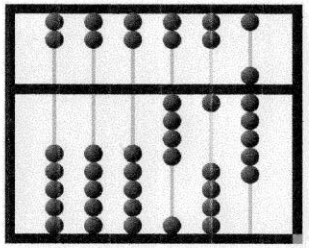
αριθμός	**σύμβολο**	**αριθμός**
2Δ και 23Μ (………..)	………	1Δ και 33Μ (………..)
3Ε και 12Δ (………..)	………	3Ε και 52Μ (………..)
5Ε και 45Μ (………..)	………	5Ε και 45Δ (………..)
7Ε 20Δ και 100Μ (………..)	………	10Ε (………..)
680Μ (………..)	………	6Ε 8Δ και 10Μ (………..)

27^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

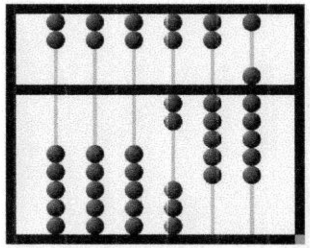
1 Μπορείς να βρεις ποιον αριθμό δείχνει ο κάθε άβακας; Έπειτα ένωσε με μια γραμμή την τελεία με τη θέση του αριθμού στην αριθμογραμμή.



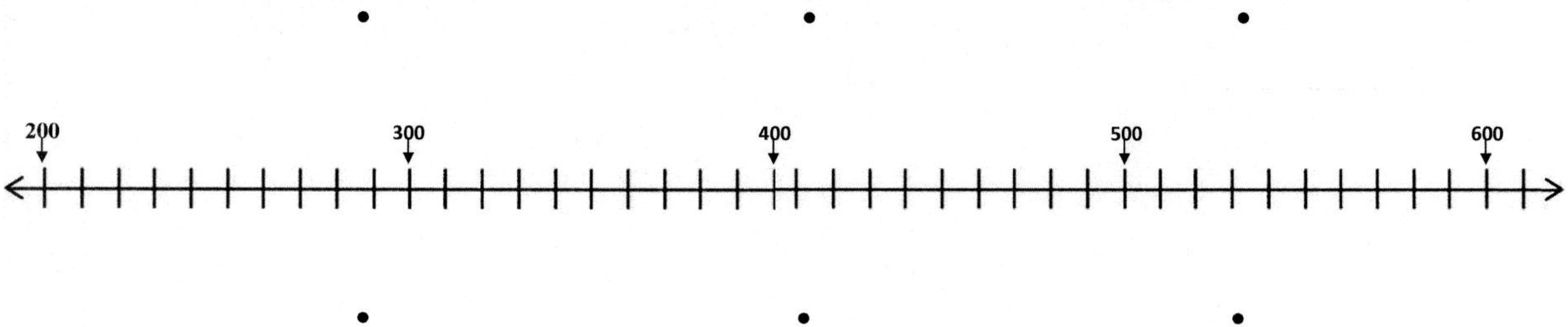
αριθμός:



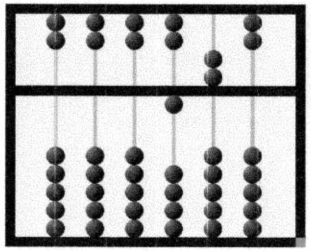
αριθμός:



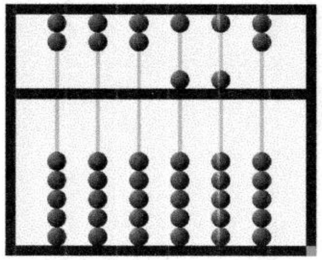
αριθμός:



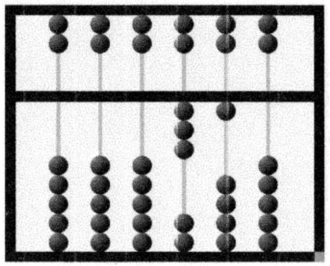
αριθμός:



αριθμός:



αριθμός:



28^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Μετασχηματισμός του τεχνουργήματος σε εργαλείο (instrumentation process)

Ανακάλυψη του τρόπου εκτέλεσης μιας πρόσθεσης στον άβακα

Μπορείς να προσθέσεις τους αριθμούς 108 και 241 στον κινέζικο άβακα που κρατάς;
Απάντηση:____

Αν ναι, μπορείς να εξηγήσεις πώς έκανες την πρόσθεση και τι αποτέλεσμα βρήκες;

29^{ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

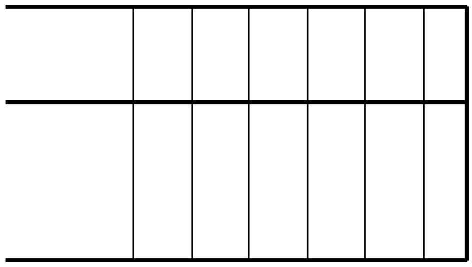
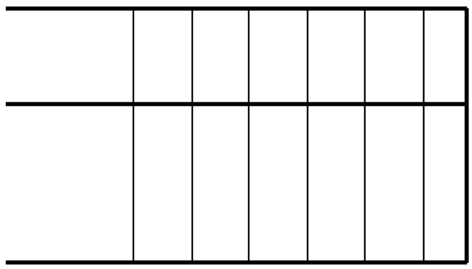
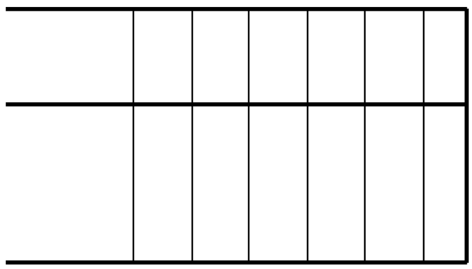
Μπορείς να σχεδιάσεις χάντρες στους παρακάτω άβακες, ώστε να δείξεις πώς θα έκανες στον άβακα την πρόσθεση που ακολουθεί; Σχεδίασε μόνο τις ενεργοποιημένες χάντρες. <u>Χρησιμοποίησε μόνο όσους άβακες χρειάζεσαι</u>. Τέλος, γράψε το αποτέλεσμα στο πλαίσιο.

152 + 236 = ……….

$1^{ος}$ άβακας Τοποθετώ τον αριθμό 152.	$2^{ος}$ άβακας Προσθέτω 6 μονάδες.	$3^{ος}$ άβακας Προσθέτω 3 δεκάδες.
$4^{ος}$ άβακας Προσθέτω 2 εκατοντάδες.	$5^{ος}$ άβακας Βρίσκω το αποτέλεσμα.	$6^{ος}$ άβακας
$7^{ος}$ άβακας	$8^{ος}$ άβακας	$9^{ος}$ άβακας

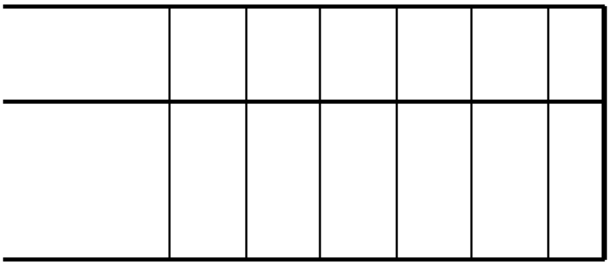
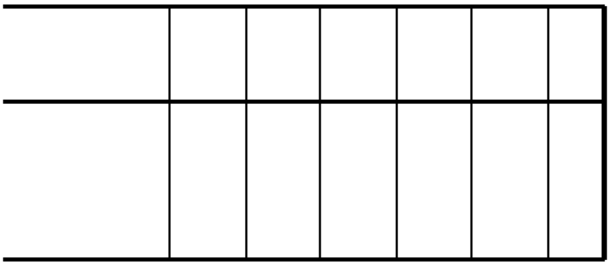
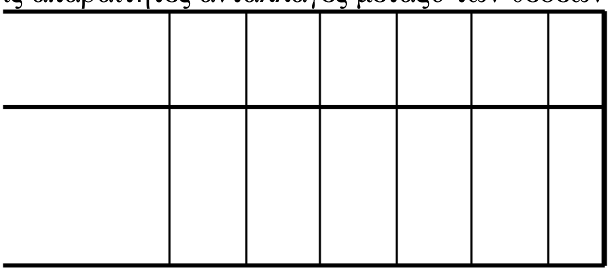
30ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

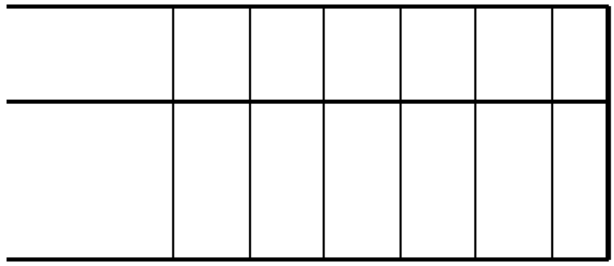
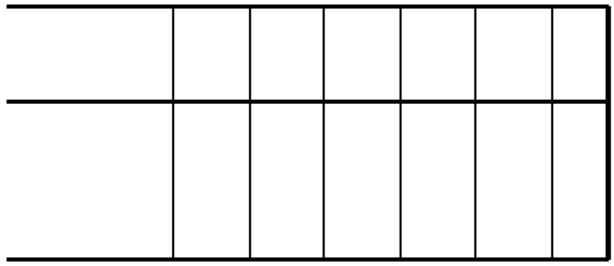
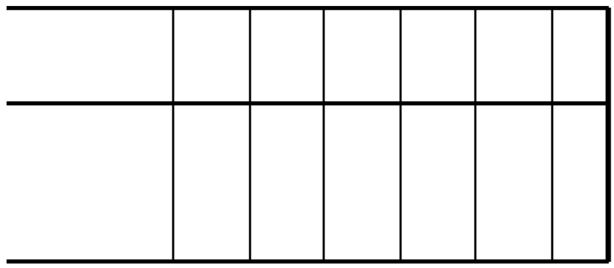
Μπορείς να γράψεις κάθετα κάθε μία πρόσθεση και να βρεις το αποτέλεσμά της; Στη συνέχεια επαλήθευσε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον άβακά σου. Στο τέλος δείξε με χάντρες το αποτέλεσμα που βρήκες στον άβακα.

οριζόντια πρόσθεση	**κάθετη πρόσθεση**	**άβακας**
404+5=		
980+19=		
256+333=		

31ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να γράψεις κάθετα κάθε μία πρόσθεση και να βρεις το αποτέλεσμά της; Στη συνέχεια επαλήθευσε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον άβακά σου. Στο τέλος δείξε με χάντρες το αποτέλεσμα που βρήκες στον άβακα. Μπορείς να εξηγήσεις τι είναι σε κάθε περίπτωση το κρατούμενο;

οριζόντια πρόσθεση	**κάθετη πρόσθεση**	**άβακας**
359+6=		Τοποθέτησε με χάντρες το 359 στον άβακα. Έπειτα γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες Μονάδες, Δεκάδες και Εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες.  ___ ___ ___ Πρόσθεσε με χάντρες το 6 στο 359. Έπειτα γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες Μονάδες, Δεκάδες και Εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες. Χρωμάτισε με κόκκινο χρώμα το κρατούμενο.  ___ ___ ___ Κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας.  ___ ___ ___ Μπορείς να εξηγήσεις τι είναι το κρατούμενο; ______________________________ ______________________________ ______________________________

οριζόντια πρόσθεση	**κάθετη πρόσθεση**	**άβακας**
156+567=		Τοποθέτησε με χάντρες το 156 στον άβακα. Έπειτα γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες Μονάδες, Δεκάδες και Εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες.  __ __ __ Πρόσθεσε με χάντρες το 567 στο 156. Έπειτα γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες Μονάδες, Δεκάδες και Εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες. Χρωμάτισε με κόκκινο χρώμα το κρατούμενο.  __ __ __ Κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές μεταξύ των θέσεων αξίας.  __ __ __ Μπορείς να εξηγήσεις τι είναι τα κρατούμενα; ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________

32^o ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ

Μετασχηματισμός του τεχνουργήματος σε εργαλείο (instrumentation process)

Ανακάλυψη του τρόπου εκτέλεσης μιας αφαίρεσης στον άβακα

Μπορείς να αφαιρέσεις τον αριθμό 108 από το 245 στον κινέζικο άβακα που κρατάς;

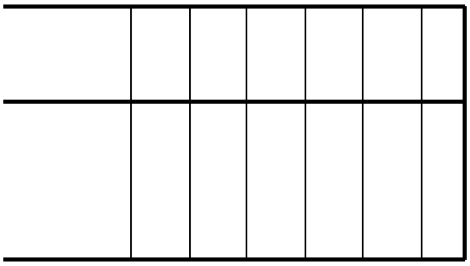
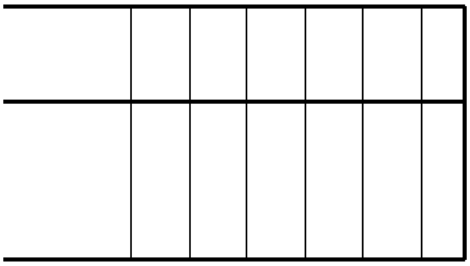
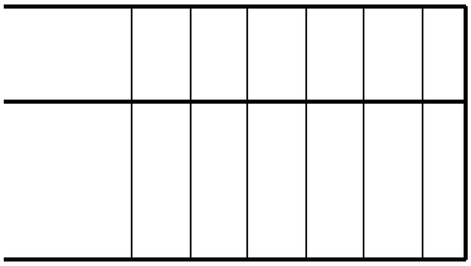
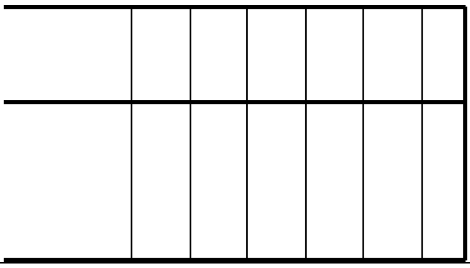
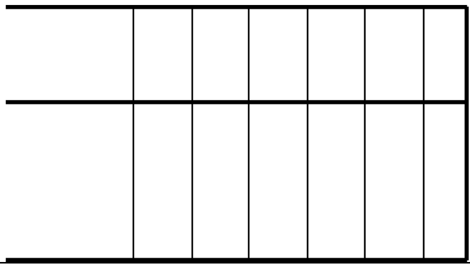
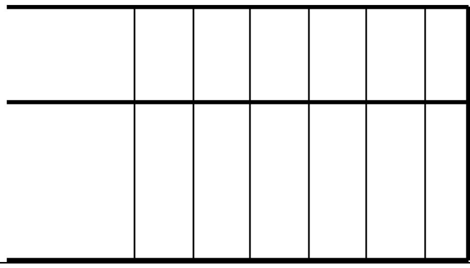
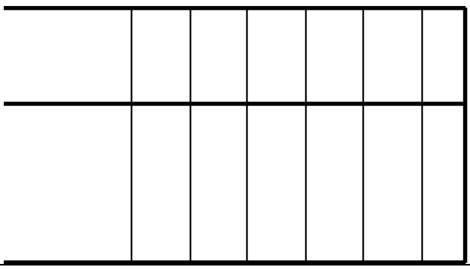
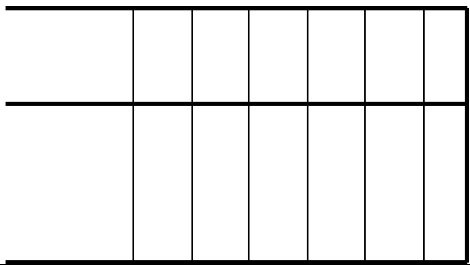
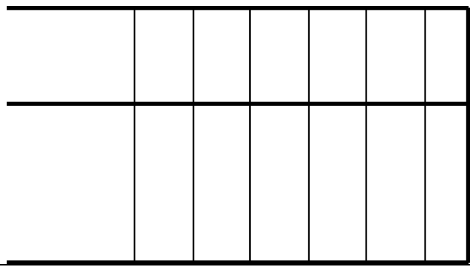
Απάντηση:____

Αν ναι, μπορείς να εξηγήσεις πώς έκανες την αφαίρεση και τι αποτέλεσμα βρήκες;

33ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

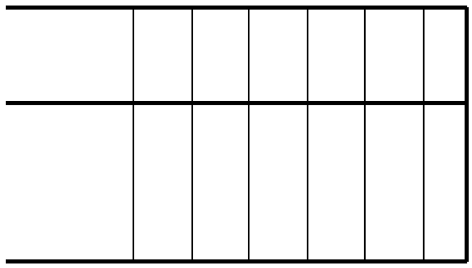
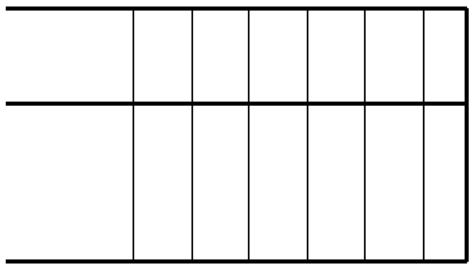
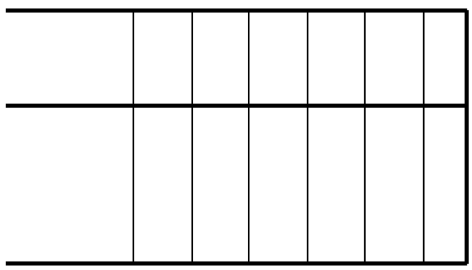
Μπορείς να σχεδιάσεις χάντρες στους παρακάτω άβακες, ώστε να δείξεις πώς θα έκανες στον άβακα την αφαίρεση που ακολουθεί; Σχεδίασε μόνο τις ενεργοποιημένες χάντρες. <u>Χρησιμοποίησε μόνο όσους άβακες χρειάζεσαι</u>. Τέλος, γράψε το αποτέλεσμα στο πλαίσιο.

368 - 156 = ……….

1ος άβακας 	2ος άβακας 	3ος άβακας 
4ος άβακας 	5ος άβακας 	6ος άβακας 
7ος άβακας 	8ος άβακας 	9ος άβακας 

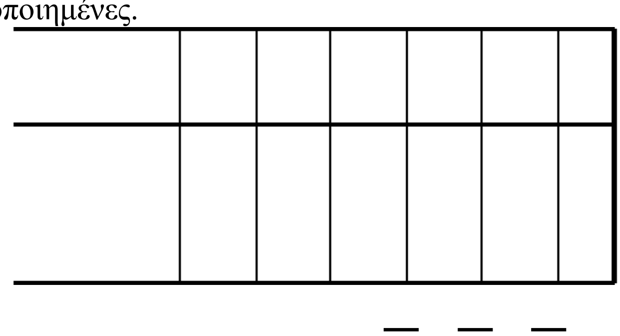
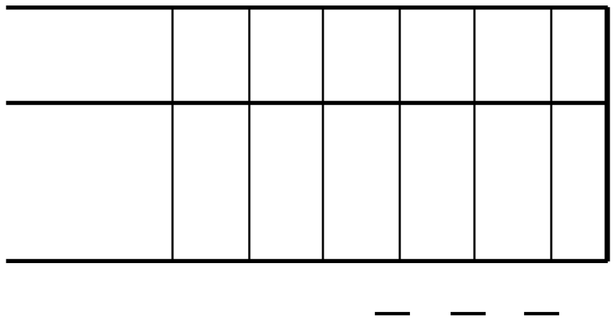
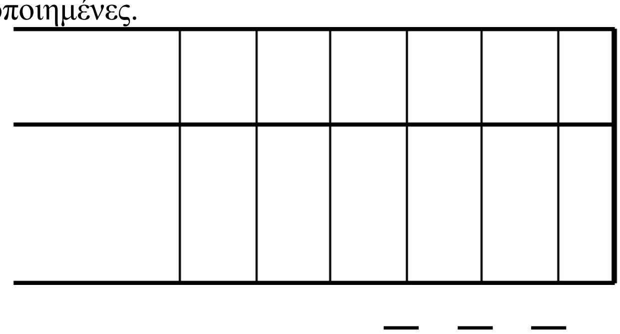
34ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

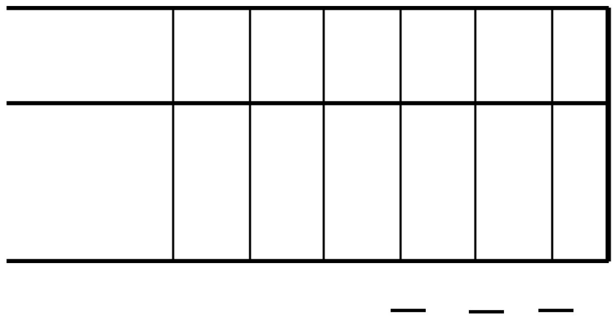
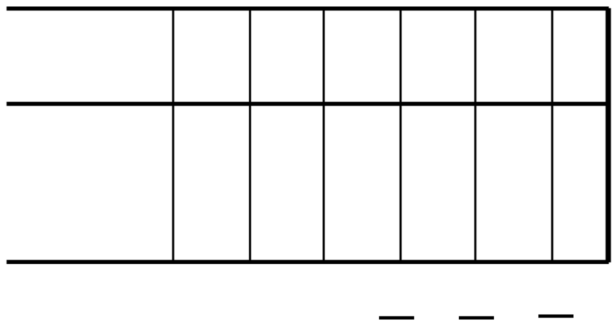
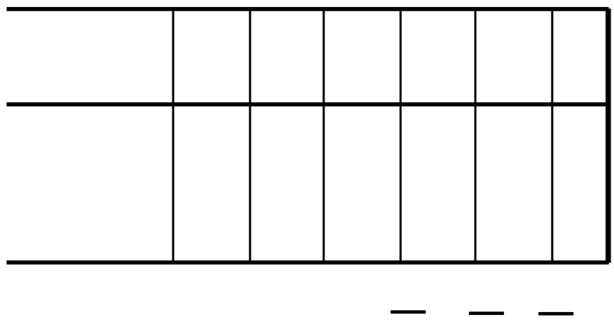
Μπορείς να γράψεις κάθετα καθεμιά αφαίρεση και να βρεις το αποτέλεσμά της; Στη συνέχεια επαλήθευσε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον άβακά σου. Στο τέλος δείξε με χάντρες το αποτέλεσμα που βρήκες στον άβακα της τρίτης στήλης.

οριζόντια πρόσθεση	**κάθετη πρόσθεση**	**άβακας**
787-6=		
443-32=		
561-141=		

35^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορείς να γράψεις κάθετα κάθε μία αφαίρεση και να βρεις το αποτέλεσμά της; Στη συνέχεια επαλήθευσε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον άβακά σου. Στο τέλος δείξε με χάντρες το αποτέλεσμα που βρήκες στον άβακα. Μπορείς να εξηγήσεις τι είναι σε κάθε περίπτωση το δανεικό;

<table>
<tr><th>οριζόντια αφαίρεση</th><th>κάθετη αφαίρεση</th><th>άβακας</th></tr>
<tr><td>212-9=</td><td></td><td>Τοποθέτησε με χάντρες το 212 στον άβακα και γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες.

Ξεκίνα την αφαίρεση. Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 9 μονάδες από 2. Δανείσου 1 δεκάδα (=10 μονάδες) από το 212, κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές και χρωμάτισε με κόκκινο χρώμα το δανεικό.

Τώρα έχεις 12 μονάδες. Αφαίρεσε τις 9. Γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες.

Μπορείς να εξηγήσεις τι είναι το δανεικό;
____
____
______________________________</td></tr>
</table>

οριζόντια αφαίρεση	κάθετη αφαίρεση	άβακας
954-586=		Τοποθέτησε με χάντρες το 954 στον άβακα και γράψε κάτω από κάθε στήλη πόσες μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες είναι ενεργοποιημένες.  Ξεκίνα την αφαίρεση. Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 6 μονάδες από 4. Δανείσου 1 δεκάδα από το 954, κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές και χρωμάτισε με κόκκινο χρώμα το δανεικό.  Κάνε αφαίρεση μεταξύ των μονάδων, σχεδίασε πόσες μονάδες μένουν στη στήλη των μονάδων, δεκάδων, εκατοντάδων και προχώρα στις δεκάδες. 

Δεν μπορείς να αφαιρέσεις 8 δεκάδες από 4. Δανείσου 1 εκατοντάδα (=10 δεκάδες) από τη στήλη των εκατοντάδων, κάνε τις απαραίτητες ανταλλαγές και χρωμάτισε με κόκκινο χρώμα το δανεικό.

Κάνε αφαίρεση μεταξύ των δεκάδων, σχεδίασε πόσες δεκάδες μένουν στη στήλη των δεκάδων, συμπλήρωσε τις μονάδες και τις εκατοντάδες και προχώρα στις εκατοντάδες.

Πήγαινε στη στήλη των εκατοντάδων και από τις 8 εκατοντάδες αφαίρεσε τις 5.

Μπορείς να εξηγήσεις τι είναι τα δανεικά;