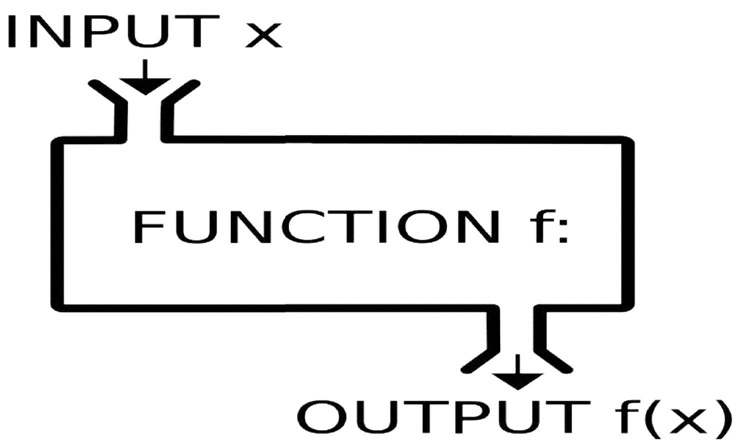
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

<u>ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

«ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ GEOGEBRA»



ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Κ. Νικολαντωνάκης

Βαθμολογητές: κ. Χ. Λεμονίδης

κ. Γ. Παλαιγεωργίου

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης από μαθητές της Α' Λυκείου. Συγκεκριμένα, στην εργασία γίνεται, αρχικά, μια συνοπτική ανασκόπηση της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης και αναλύονται οι διάφορες μορφές που πήρε η έννοια με την πάροδο του χρόνου. Έπειτα αναδεικνύεται ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται η έννοια στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου, ενώ στην πορεία παρουσιάζεται μια έρευνα αναφορικά με το επίπεδο κατανόησης των εννοιών της συνάρτησης από μαθητές της Α' Λυκείου. Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού Geogebra. Πρόκειται για ένα εργαλείο το οποίο παρέχει μια ολοκληρωμένη εικόνα τόσο της αλγεβρικής όσο και της γραφικής αναπαράστασης της έννοιας. Για την αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης των μαθητών δόθηκε διαγώνισμα μαθηματικού περιεχομένου (post-test), τα αποτελέσματα του οποίου κατέδειξαν ότι συγκριτικά με την προηγούμενη εικόνα των μαθητών στα μαθηματικά σημαντική βελτίωση των μαθηματικών επιδόσεων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η παρέμβαση κατάφερε να εμπλέξει σε δραστηριότητες μαθητές που μέχρι τότε εκφράζονταν σαφώς αρνητικά και η μέχρι τότε εμπλοκή τους στο μάθημα χαρακτηριζόταν σχετικά αδρανής.

Λέξεις κλειδιά
Συνάρτηση, γραφική παράσταση συνάρτησης, λογισμικό Geogebra, ιστορική αναδρομή συνάρτησης

Abstract

The subject of this paper is the study of understanding the concept of function by the students of the first grade of Lyceum. Specifically, the paper includes a brief overview of the historical evolution of the concept of function and the various forms that took the concept over time. Next the manner in which the concept is presented in textbooks on Gymnasium and Lyceum, and a survey on the level of understanding the concept of function from students of A Grade of Lyceum. Didactic intervention was complete with the help of the Geogebra mathematical software. It is a tool that provides a complete picture of both the algebraic and graphical representation of the concept. A mathematical test (post-test) was given to evaluate student's level of understanding, and showed, compared to the previous mathematical picture: mathematical performance improvement. Interestingly, intervention has been able to involve students in activities that until then were clearly negative and did not play an active role in the lesson.

Key words

Function, graphic representation of function, Geogebra software, historical evolution of function

Πίνακας περιεχομένων

Περιεχόμενα Πινάκων-Σχημάτων

Εισαγωγή

Στην εποχή μας η τεχνολογία αποτελεί σημαντικό μέρος της καθημερινής μας ζωής. Χρησιμοποιούμε υπολογιστές και άλλες ηλεκτρονικές συσκευές για ευχαρίστηση, εργασία και αυτό-εκπαίδευση. Ορισμένες 'πινελιές' τεχνολογίας κάνουν την εμφάνιση τους και στα σχολεία μέσα από την χρήση ενός διαδραστικού πίνακα, προτζέκτορα, υπολογιστή, tablet κ.α. Ωστόσο η ελλιπής γνώση των εκπαιδευτικών για την προετοιμασία χρήσης σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας δεν επιφέρει επιθυμητά αποτελέσματα (Joanna Stróżyk, 2014).

Η άλγεβρα και η γεωμετρία είναι δύο βασικά σκέλη του μαθηματικού αναλυτικού προγράμματος καθώς σε όλο τον κόσμο θεωρούνται ως «οι δύο επίσημες πυλώνες» των μαθηματικών (Atiyah, 2001). Ως εκ τούτου, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι ο κλάδος των μαθηματικών αποτελεί σημαντική εστία προσοχής από τον κλάδο της τεχνολογίας (Sangwin, 2007). Πολλοί ερευνητές θεωρούν την εκπαίδευση των μαθηματικών ως ένα από τα πρώτα εκπαιδευτικά πεδία για να εισαχθεί η τεχνολογία σαν βοηθητικό εργαλείο μέσα στην τάξη (Papert, 1980, Hoyles and Sutherland, 1989, Noss and Hoyles, 1996). Η δυναμική και συμβολική φύση του περιβάλλοντος των ηλεκτρονικών υπολογιστών μπορεί να προκαλέσει τους μαθητές να γενικεύσουν, να επισημοποιήσουν και να δημιουργήσουν συνδέσμους μεταξύ της διαισθητικής αντίληψης τους για τα μαθηματικά και τις μαθηματικές τους γνώσεις (Godwin και Sutherland, 2004: 131-132).

Σύμφωνα με τους Fey και Good (1985) στα μαθηματικά του Λυκείου πρέπει να δοθεί έμφαση στη διδασκαλία της έννοιας «συνάρτηση». Η συνάρτηση είναι θεμελιώδους σημασίας για την εκμάθηση των μαθηματικών καθώς έχει γίνει σημαντική εστία προσοχής από την εκπαιδευτική κοινότητα μαθηματικών κατά την τελευταία δεκαετία (Dubinski and Harel, 1992 ,Eisenberg, 1992). Έχει ουσιαστική σημασία στην άλγεβρα και συγκαταλέγεται ανάμεσα στις πιο σημαντικές έννοιες των μαθηματικών (O'Gallaghan, 1998). Κατά τον Day (1995) η μάθηση των συναρτήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές ως μια ενωτική ιδέα για τη σύνδεση διάφορων μαθηματικών εννοιών, για τη σύνδεση με άλλα μαθήματα (διαθεματικότητα) αλλά και για τη δημιουργία μοντέλων από πραγματικές καταστάσεις (μαθηματικοποίηση). Οι Dubinsky & Harel (1992) αναφέρουν ότι η συνάρτηση, εξαιτίας της επιστημολογικής της πολυπλοκότητας, μπορεί να θεωρηθεί ως σχέση, ως μετασχηματισμός ή ως αντικείμενο ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Ο Roy D. Pea (2007) διακρίνει δύο τύπους συναρτήσεων:

- <u>Συναρτήσεις σκοπού</u>: Οι συναρτήσεις μπορούν να επηρεάσουν το κατά πόσο οι μαθητές επιλέγουν να σκέφτονται μαθηματικά.

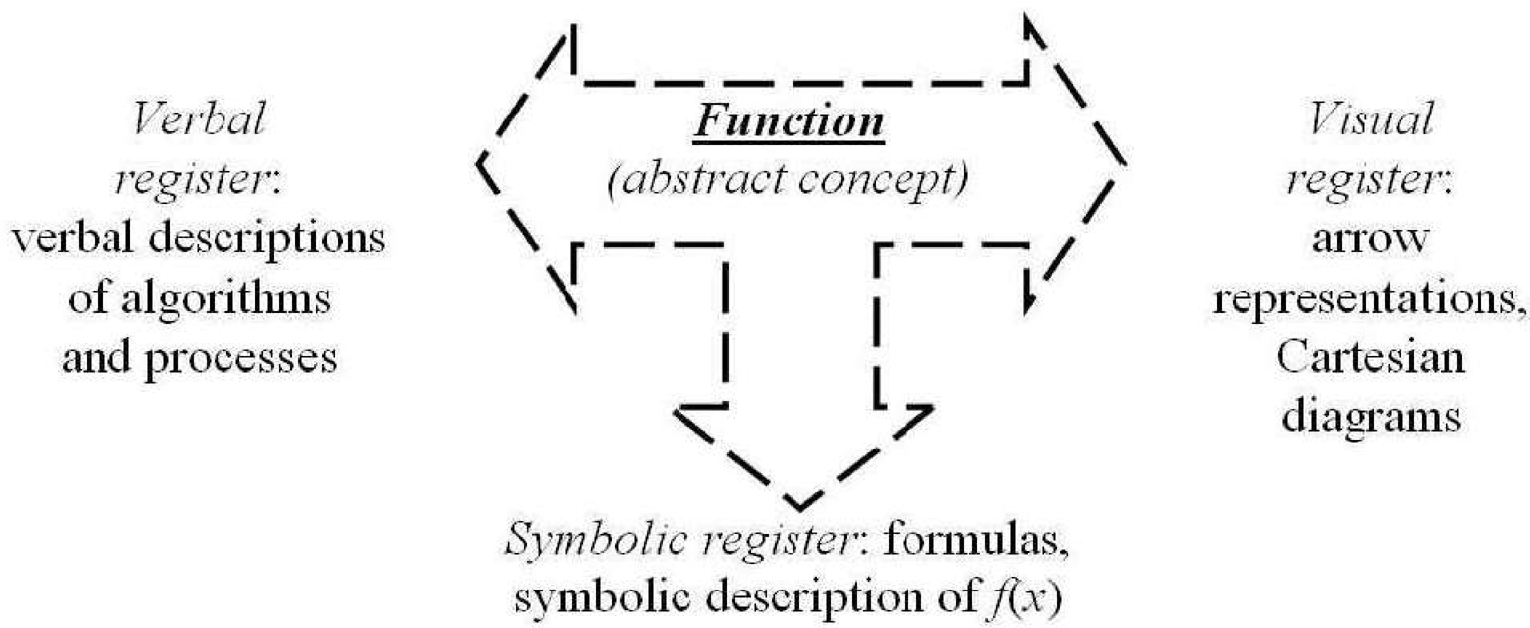
- <u>Συναρτήσεις διαδικασίας</u>: Οι συναρτήσεις υποστηρίζουν τα συστατικά των νοητικών δραστηριοτήτων της μαθηματικής σκέψης.

Ανεξάρτητα από τη μορφή που μπορούν να πάρουν οι συναρτήσεις, ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης είναι ο λόγος μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με τις αλλαγές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Ο λόγος αυτός ονομάζεται κλίση. Κλίση θεωρείται η θεμελιώδης έννοια η οποία έχει πολλές εφαρμογές στην γεωμετρία, την άλγεβρα καθώς και την τριγωνομετρία. Παρατηρείται όμως πως η έννοια της κλίσης αμφισβητεί τη διάκριση ανάμεσα στο λόγο και στο ρυθμό μεταβολής. Σύμφωνα με τον Vergnaud (1983,1988), λόγος είναι μια σύγκριση μεταξύ ποσοτήτων και της φύσης, ενώ ως ρυθμός μεταβολής ορίζεται η σύγκριση ποσοτήτων η οποία έρχεται σε αντίθεση με τη φύση. Ο Eisenberg (αναφορά στον Hitt, 1998) δηλώνει ότι η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης πρέπει να είναι ένας από τους κύριους στόχους του αναλυτικού προγράμματος.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1985):

«Καταλαβαίνει κάποιος ότι σκέφτεται μαθηματικά όταν είναι επινοητικός, ευέλικτος και αποτελεσματικός στην ικανότητα του να διαχειρίζεται καινούργια προβλήματα μαθηματικών.»

Ένας σημαντικός παράγοντας παρεμπόδισης της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης είναι οι διαφορετικοί τρόποι που αυτή αναπαρίσταται (Sierpinska, 1992, Hitt, 1998). Υπάρχει ο αριθμητικός τρόπος αναπαράστασης μέσω του πίνακα τιμών, ο αναλυτικός τρόπος αναπαράστασης μέσω του τύπου και ο γραφικός τρόπος αναπαράστασης μέσω της γραφικής παράστασης. Σύμφωνα με τους Aspinwall ,Shaw και Presmeg (1997) σε πολλές περιπτώσεις η γραφική αναπαράσταση μπορεί να προκαλέσει γνωστικές δυσκολίες για το λόγο ότι η αντιληπτική ανάλυση και η σύνθεση των μαθηματικών πληροφοριών δίνονται σε μορφή διαγράμματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης να είναι ένα θέμα που συγκεντρώνει την προσοχή των εκπαιδευτικών αλλά και της ερευνητικής κοινότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης γενικότερα (Tall & Bakar, 1991, Sierpinska, 1992).



Διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης της έννοιας συνάρτηση

(Σχήμα 1)

Ο Vinner (1992) δήλωσε ότι η συνάρτηση με τον τρόπο με τον οποίο διδάσκεται στο σχολείο συχνά ταυτίζεται μόνο με μία από τις αναπαραστάσεις της, είτε συμβολικά είτε γραφικά. Ως εκ τούτου ο Sfard (1992) οδηγήθηκε στο συμπέρασμα πως η συνάρτηση μπορεί να ερμηνευτεί και ως «τύπος». Η έρευνα για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών έχει επανειλημμένα εντοπίσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Tall & Bakar, 1991). Κατά την προσπάθεια άρσης των παραπάνω δυσκολιών, οι ερευνητές συχνά προτείνουν την χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της συνάρτησης.

Κεφάλαιο 1

1.1 Ιστορική εξέλιξη της έννοιας συνάρτηση

Η έννοια της συνάρτησης «γεννήθηκε ως αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης αναζήτησης ενός μαθηματικού μοντέλου των φυσικών φαινομένων που περιλαμβάνουν μεταβλητές «ποσότητες» (Sfard, 1994). Μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αγώνας μεταξύ δύο νοητικών εικόνων: της γεωμετρικής («έκφραση μέσω καμπυλών») και της αλγεβρικής («αναλυτική έκφραση») (Kleiner, 1989).

Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1997) οι απόψεις σχετικά με την χρονική στιγμή που έκανε την εμφάνιση της η συνάρτηση ποικίλουν. Ορισμένοι θεωρούν τον Καρτέσιο ως τον πρώτο που επινόησε την έννοια της συνάρτησης με την εισαγωγή των συντεταγμένων. Γενικά ο κλασσικός ορισμός της συνάρτησης αποδίδεται είτε στον Dirichlet (1837) είτε στον Lobachevski (1834) εάν και ιστορικά μιλώντας η άποψη αυτή μπορεί να θεωρηθεί και ανακριβής επειδή η γενική έννοια της συνάρτησης σαν μια αυθαίρετη σχέση μεταξύ δύο στοιχείων όπου το καθένα ανήκει στο σύνολο του, εδραιώθηκε πολύ αργότερα, περίπου στα μέσα του 18^{ου} αιώνα. Στο βιβλίο του ο D.E Smith (1923) δηλώνει πως η έννοια της συνάρτησης είχε αναφερθεί και δημοσιευτεί ξεκάθαρα από τον Καρτέσιο. Ωστόσο, σημαντικό εύρημα αποτελούν εργασίες σχετικές με συναρτήσεις όπως αυτή του Πτολεμαίου στην οποία υπάρχουν διάφοροι αστρονομικοί πίνακες που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις (Youschkevitch, 1997), ενώ στη συνέχεια ο C.Boyer (1959) επισημαίνει ότι έχουν βρεθεί πρωτότυπες συναρτήσεις στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

Οι βασικότεροι περίοδοι εξέλιξης των συναρτήσεων μέχρι τα μέσα του 19^{ου} αιώνα είναι οι εξής (Youschkevitch, 1997):

1. **Αρχαιότητα:** Η περίοδος όπου η μελέτη συγκεκριμένων περιπτώσεων αλληλεξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτήτων δεν κατάφερε να 'απομονώσει' τις έννοιες μεταβλητών και ποσοτήτων.

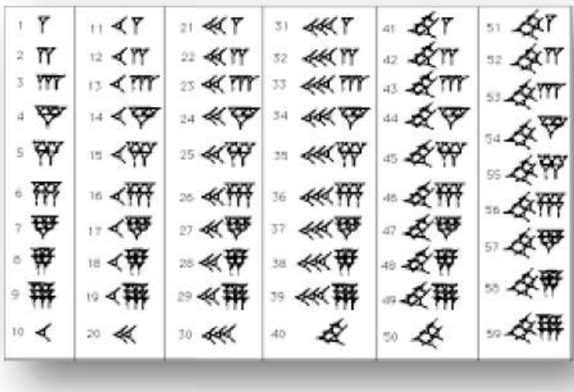
2. **Μεσαίωνας:** (14^{ος} αιώνας) Η περίοδος όπου στην Ευρωπαϊκή επιστήμη τον 14^{ο} αιώνα οι γενικές έννοιες αρχικά εκφράστηκαν γεωμετρικά και μηχανικά, αλλά κάθε αλληλεξάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών ορίστηκε με προφορική ή γραφική αναπαράσταση παρά με την χρήση τύπου.

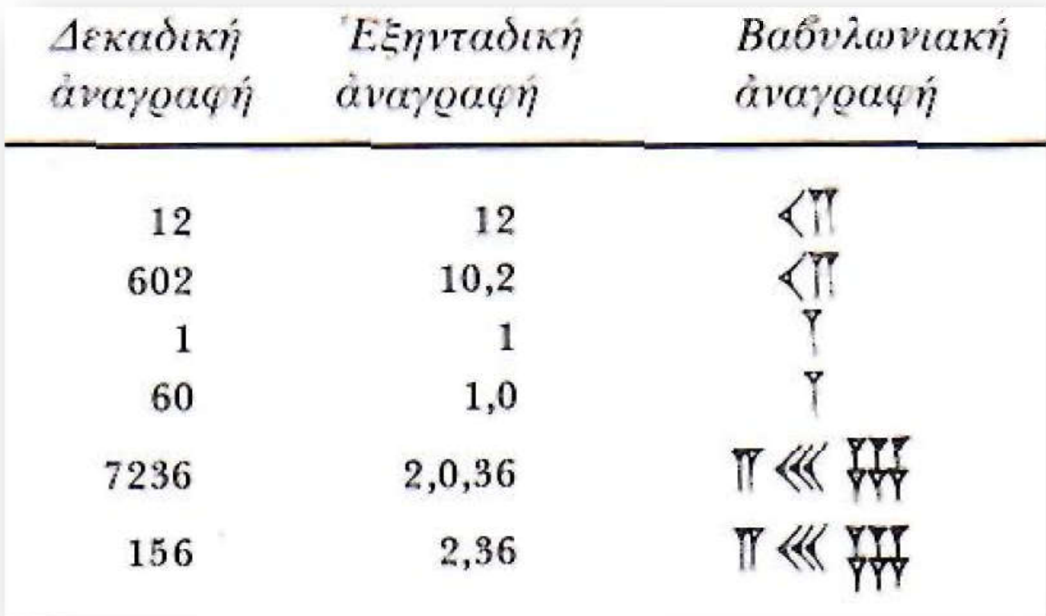
3. **Μοντέρνα Περίοδος:** (16^{ος} -17^{ος} αιώνας) Η συγκεκριμένη περίοδος κάνει την εμφάνιση της από τα τέλη του 16^{ου} αιώνα και συνεχίζει κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα. Άρχισε να εμφανίζεται η αναλυτική έκφραση των συναρτήσεων με τη βοήθεια άπειρων σειρών.

1.1.1 Αρχαιότητα

Κατά τη διάρκεια της αρχαιότητας, μελετήθηκαν παραδείγματα διαφόρων σχέσεων που προκύπτουν από τη σύγκριση δύο αντικειμένων, αλλά καμιά γενικευμένη ιδέα αυτών δεν διαμορφώθηκε. Δεν υπήρξε η αφηρημένη ιδέα μιας μεταβλητής και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα οι ποσότητες να περιγραφούν προφορικά ή με μια γραφική παράσταση αντί ενός τύπου.

Στην αρχαιότητα οι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί το 2000 π.Χ. για τους υπολογισμούς τους χρησιμοποιούσαν εξηκονταδικούς πίνακες αντίστροφων φυσικών αριθμών, τετράγωνα και τετραγωνικές ρίζες ,κύβους και κυβικές ρίζες.



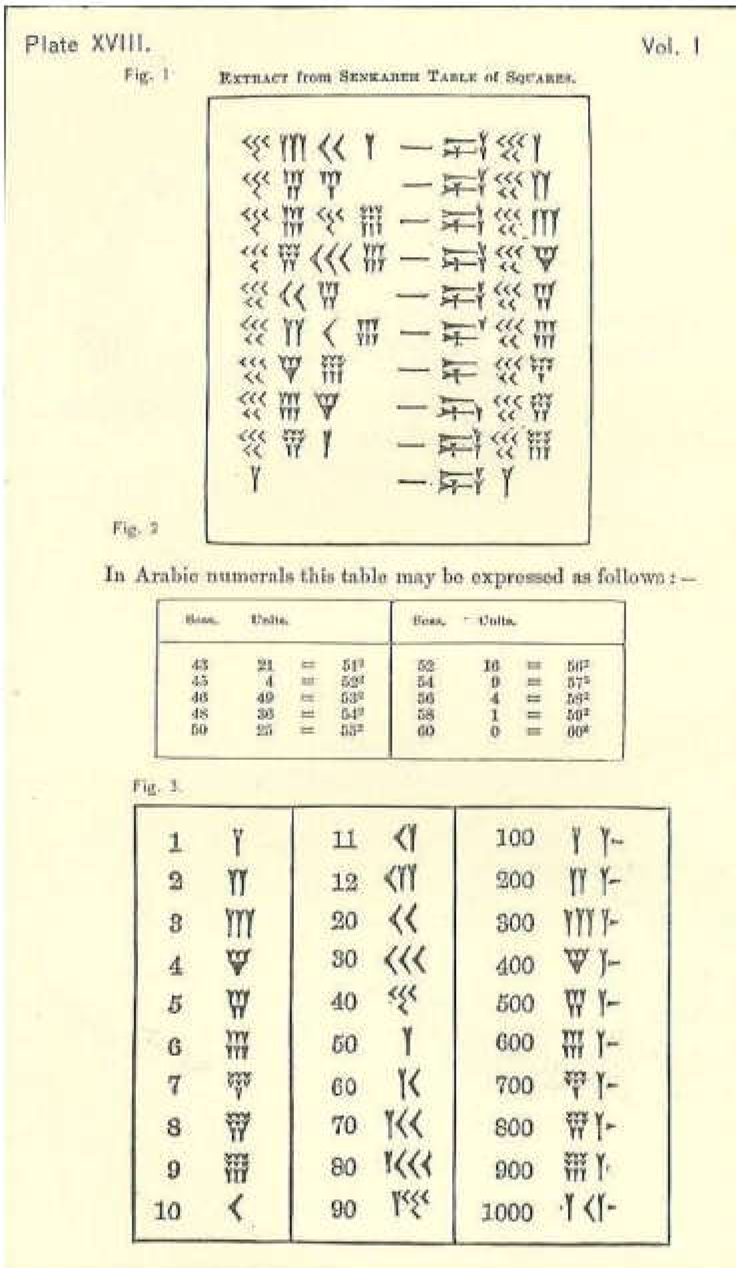


Δεκαδική αναγραφή	Έξηνταδική αναγραφή	Βαβυλωνιακή αναγραφή
12	12	
602	10,2	
1	1	
60	1,0	
7236	2,0,36	
156	2,36	

Βαβυλωνιακή αρίθμηση

(Εικόνα 1)

Οι πίνακες διακρίνονταν σε δύο κατηγορίες: των κλιμακωτών συναρτήσεων και των γραμμικών συναρτήσεων (Neugebauer, 1957). Χρησιμοποιήθηκαν στην Βαβυλωνιακή αστρονομία κατά τη διάρκεια της βασιλείας των Σελευκιδών για τη σύνταξη των ημεροδεικτών του ήλιου, της σελήνης, και των πλανητών. Από όλα αυτά είναι φανερό ότι οι Βαβυλώνιοι ήταν πολύ ειδικευμένοι στους υπολογισμούς. Σύμφωνα με τον E. T. Bell (2013) μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι είχαν ενστικτωδώς την έννοια της συνάρτησης, αφού οι τιμές των πινάκων αυτών, προκύπτουν από συναρτήσεις.



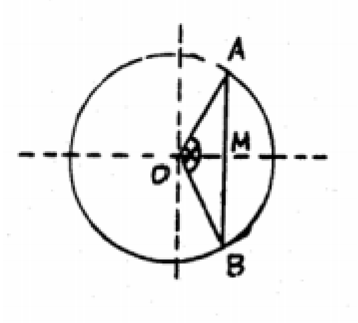
Ο Βαβυλωνιακός Πίνακας των Τετραγώνων και η αρίθμηση των Βαβυλωνίων

Ο Βαβυλωνιακός Πίνακας των Τετραγώνων και η αρίθμηση των Βαβυλωνίων

(Εικόνα 2)

Οι συναρτήσεις στην πορεία κάνουν την εμφάνιση τους στα ελληνικά μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Οι προσπάθειες που αποδίδονται στους πρώτους Πυθαγόρειους να προσδιορίσουν τους απλούστερους νόμους της ακουστικής, είναι χαρακτηριστικές της αναζήτησης ποσοτικών αλληλεξαρτήσεων πολλών φυσικών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα, η διάρκεια και το ύψος του τόνου για τις νότες που εκπέμπονται από ορχήστρα εγχόρδων του ιδίου είδους, υπό ίσες εντάσεις. Αργότερα, κατά τη διάρκεια της Αλεξανδρινής περιόδου, οι αστρονόμοι ανέπτυξαν την τριγωνομετρία των χορδών της περιφέρειας ενός κύκλου και χρησιμοποιώντας θεωρήματα της γεωμετρίας και κανόνες παρεμβολής υπολόγισαν πίνακες χορδών ισοδύναμους στην πραγματικότητα με πίνακες ημιτόνων που χρησιμοποιήθηκαν μερικούς αιώνες αργότερα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν και οι πίνακες χορδών της «Αλμαγέστης» του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της Αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου

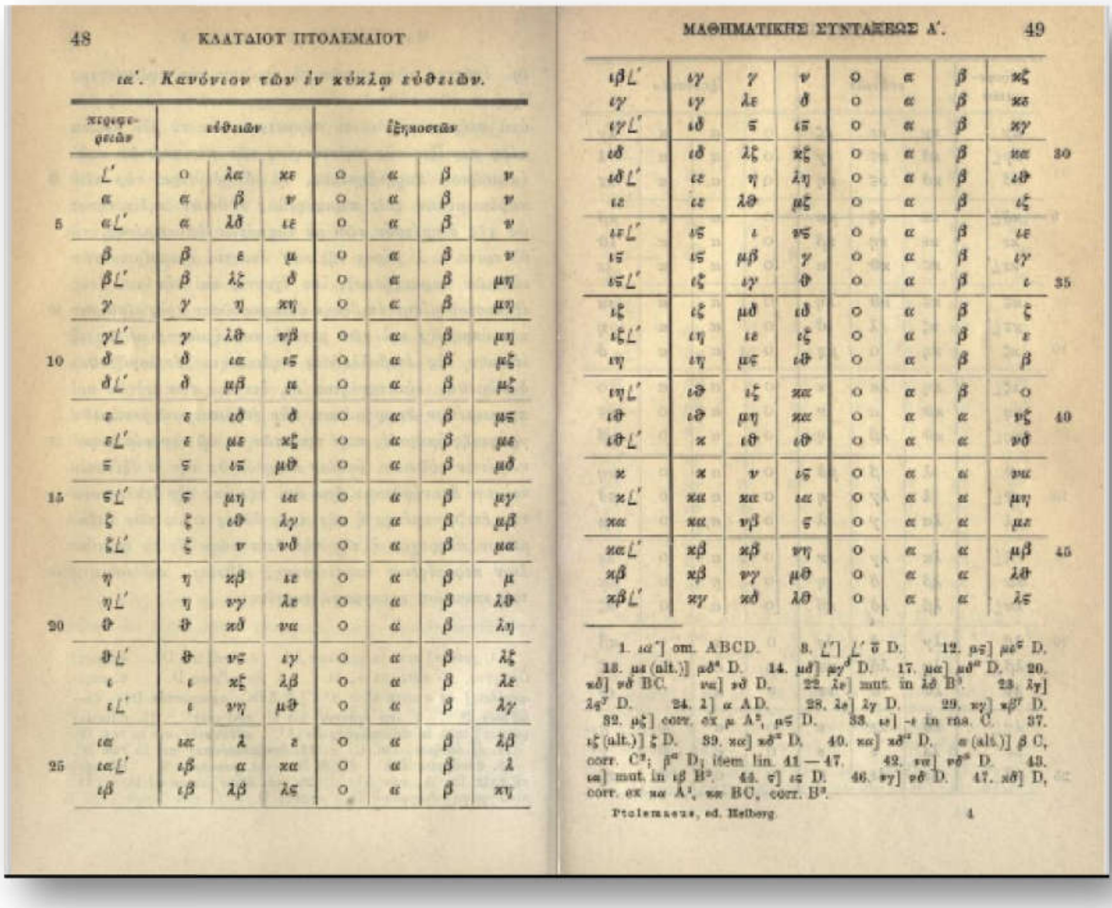
(128-168 μ.Χ.). Στη μια στήλη αυτών των πινάκων υπάρχουν τα μήκη των τόξων ενός κύκλου και στην άλλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών.



Χορδή τόξου σε μοναδιαίο κύκλο
(Εικόνα 3)

Χρησιμοποιώντας την έννοια του ημιτόνου στον μοναδιαίο κύκλο μπορούμε σήμερα να εκφράσουμε αναλυτικά «τη συνάρτηση των πινάκων» του Πτολεμαίου ως εξής:

$$\text{χορδή τόξου}(x) = AB = 2AM = 2\eta\mu\frac{x}{2}$$



48 ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

ια΄. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.

περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
∠′	ο	λα	κε	ο	α	β	ν
α	α	β	ν	ο	α	β	ν
α∠′	α	λδ	ιε	ο	α	β	ν
β	β	ε	μ	ο	α	β	ν
β∠′	β	λζ	δ	ο	α	β	μη
γ	γ	η	κη	ο	α	β	μη
γ∠′	γ	λθ	νβ	ο	α	β	μη
δ	δ	ια	ις	ο	α	β	μζ
δ∠′	δ	μβ	μ	ο	α	β	μζ
ε	ε	ιδ	δ	ο	α	β	μς
ε∠′	ε	με	κζ	ο	α	β	με
ς	ς	ις	μθ	ο	α	β	μδ
ς∠′	ς	μη	ια	ο	α	β	μγ
ζ	ζ	ιθ	λγ	ο	α	β	μβ
ζ∠′	ζ	ν	νδ	ο	α	β	μα
η	η	κβ	ιε	ο	α	β	μ
η∠′	η	νγ	λε	ο	α	β	λθ
θ	θ	κδ	να	ο	α	β	λη
θ∠′	θ	νς	ιγ	ο	α	β	λζ
ι	ι	κζ	λβ	ο	α	β	λε
ι∠′	ι	νη	μθ	ο	α	β	λγ
ια	ια	λ	ε	ο	α	β	λβ
ια∠′	ιβ	α	κα	ο	α	β	λ
ιβ	ιβ	λβ	λς	ο	α	β	κη

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ Α΄. 49

ιβ∠′	ιγ	γ	ν	ο	α	β	κζ
ιγ	ιγ	λε	δ	ο	α	β	κε
ιγ∠′	ιδ	ς	ις	ο	α	β	κγ
ιδ	ιδ	λζ	κζ	ο	α	β	κα
ιδ∠′	ιε	η	λη	ο	α	β	ιθ
ιε	ιε	λθ	μζ	ο	α	β	ιζ
ιε∠′	ις	ι	νς	ο	α	β	ιε
ις	ις	μβ	γ	ο	α	β	ιγ
ις∠′	ιζ	ιγ	θ	ο	α	β	ι
ιζ	ιζ	μδ	ιδ	ο	α	β	ζ
ιζ∠′	ιη	ιε	ιζ	ο	α	β	ε
ιη	ιη	μς	ιθ	ο	α	β	β
ιη∠′	ιθ	ιζ	κα	ο	α	β	ο
ιθ	ιθ	μη	κα	ο	α	α	νζ
ιθ∠′	κ	ιθ	ιθ	ο	α	α	νδ
κ	κ	ν	ις	ο	α	α	να
κ∠′	κα	κα	ια	ο	α	α	μη
κα	κα	νβ	ς	ο	α	α	με
κα∠′	κβ	κβ	νη	ο	α	α	μβ
κβ	κβ	νγ	μθ	ο	α	α	λθ
κβ∠′	κγ	κδ	λθ	ο	α	α	λς

1. ια΄] om. ABCD. 8. ∠′] ∠′ ῡ D. 12. μς] μς D. 13. μα (alt.)] μδ D. 14. μδ] μγ D. 17. μα] μδ D. 20. κδ] νδ BC. να] νδ D. 22. λε] mut. in λδ B². 23. λγ] λγ D. 24. λ] α AD. 28. λε] λγ D. 29. κγ] κβ D. 32. μζ] corr. ex μ A², μς D. 33. ιε] -ι in ras. C. 37. ιζ (alt.)] ζ D. 39. κα] κδ D. 40. κα] κδ D. α (alt.)] β C, corr. C²; β D; item lin. 41—47. 42. να] νδ D. 43. ια] mut. in ιβ B². 44. ς] ις D. 46. νγ] νδ D. 47. κδ] D, corr. ex κα A², κα BC, corr. B².

Ptolemaeus, ed. Heiberg. 4

Πίνακας χορδών
(Εικόνα 4)

Οι αρχαίοι έλληνες όμως δεν περιορίστηκαν μόνο στην χρήση των αριθμητικών πινάκων. Μελέτησαν τη θεωρία των κωνικών τομών με κύριο ρόλο να παίζουν τα «συμπτώματα». Ένα «σύμπτωμα» μιας κωνικής τομής έχει ως ερμηνεία:

«Για κάθε σημείο από δοσμένη καμπύλη αντιστοιχεί μία και μοναδική συναρτησιακή εξάρτηση μεταξύ του y και ενός τμήματος του x (Youschkevitch, 1977).»

Οι μαθηματικοί της αρχαιότητας που είχαν ως αντικείμενο τη γεωμετρία περιέγραφαν τα «συμπτώματα» είτε προφορικά είτε μέσω της γεωμετρικής άλγεβρας. Το νόημα αυτών των συμπτωμάτων θα μπορούσε να αποδοθεί στη γλώσσα της Αναλυτικής Γεωμετρίας με εξισώσεις καμπυλών β' τάξης.

Στην πορεία οι αρχαίοι μαθηματικοί εισήγαγαν μια ιδιόμορφη ταξινόμηση των καμπυλών. Ακόμη και πριν από τον Ευκλείδη είχαν ξεχωρίσει τρία είδη γεωμετρικών τόπων:

- ❖ επίπεδοι γεωμετρικοί τόποι (γραμμές, καμπύλες)
- ❖ στέρεοι γεωμετρικοί τόποι (κωνικές τομές)
- ❖ γραμμικοί γεωμετρικοί τόποι (όλες οι άλλες καμπύλες).

Στη συνέχεια οι συναρτήσεις έκαναν την εμφάνιση τους σε συνδυασμό με μαθηματικά και αστρονομικά προβλήματα, έπειτα ταξινομήθηκαν μέσω γραμμικής παρεμβολής, και στις απλούστερες περιπτώσεις, υπολογίστηκαν τα όρια των λόγων δύο απείρως μικρών ποσοτήτων. Τέλος, για την επίλυση προβλημάτων στα οποία έπρεπε να υπολογιστούν ρίζες τριτοβάθμιων πολυωνύμων χρησιμοποιήθηκαν κωνικές τομές. Μέχρι τον 3$^{\text{ο}}$μ.Χ αιώνα οι Έλληνες για το συμβολισμό ποσοτήτων χρησιμοποιούσαν εκτός από την χρήση ψηφίων και γράμματα της αλφαβήτου. Ωστόσο ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκαν αλγεβρικοί τύποι ή κάποιο είδος αλγόριθμου ή αναλυτικές εκφράσεις. Μόνο ο Διόφαντος ο τελευταίος μαθηματικός της Αλεξανδρινής εποχής, χρησιμοποίησε στα έργα του κάποια αλγεβρικά σύμβολα, του οποίου ο συμβολισμός όμως δεν κατάφερε να εξελιχθεί. Τα βασικά σύμβολα που χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος ήταν:

S = χ άγνωστος	$K^{Y}\overline{\alpha} = \chi^3$
$\dot{M}$ = μονάδα ή μονάδες	$\Delta^{Y}\Delta\overline{\alpha} = \chi^4$
↑ = σύμβολο αφαίρεσης	$\Delta^{Y}K\overline{\alpha} = \chi^5$
$\Delta^{Y}\overline{\alpha} = \chi^2$	$K^{Y}K = \chi^6$

Σύμβολα κατά τον Διόφαντο
(Εικόνα 5)

Εκτός από την έλλειψη συμβολισμού, τα επιτεύγματα των Ελλήνων τόσο στην αύξηση του αριθμού των συναρτησιακών εξαρτήσεων, όσο και στην ανακάλυψη νέων τρόπων μελέτης τους διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των Μαθηματικών μέχρι τη δημιουργία της νέας Άλγεβρας, της Αναλυτικής Γεωμετρίας και του Απειροστικού Λογισμού του $16^{ου}$ και του $17^{ου}$ αιώνα.

Ο Pedersen (1974) στην εργασία του μελέτησε κατά πόσο οι αρχαίοι μαθηματικοί κατείχαν τη γενική έννοια της συνάρτησης. Παρατήρησε ότι ο όρος συνάρτηση δεν εμφανίστηκε για πρώτη φορά στα έργα των αρχαίων μαθηματικών αλλά πολύ αργότερα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αναρωτηθεί εάν πρέπει να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι αρχαίοι μαθηματικοί αγνοούσαν τις συναρτησιακές σχέσεις. Η απάντησή του στο ερώτημα ήταν ότι τα πάντα εξαρτώνται από το τι πραγματικά εννοούμε με τον όρο συνάρτηση. Ο Pedersen θεωρούσε ότι αν ερμηνεύσουμε τον όρο συνάρτηση ως μια αναλυτική έκφραση, τότε το συμπέρασμα είναι ότι οι αρχαίοι δε γνώριζαν τις συναρτήσεις, ενώ αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο συνόλων τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι γνώριζαν.

Μελετώντας κάποιος τα μαθηματικά της αρχαιότητας αντιλαμβάνεται αμέσως τη σημασία τους για μετέπειτα εξέλιξη της επιστήμης ενώ παράλληλα του δίνεται η ευκαιρία να διευρύνει τις γνώσεις του για κάποιες ιδέες, συγκρίνοντας τις με πιο μοντέρνες.

1.1.2 Μεσαίωνα

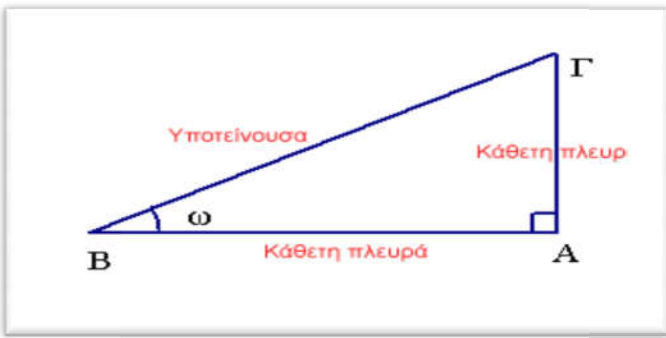
Λίγο καιρό μετά την αρχαιότητα η επιστήμη των μαθηματικών κάνει την εμφάνιση της στις Αραβικές χώρες χωρίς όμως να παρουσιάζονται νέα στοιχεία της έννοιας συνάρτηση. Ωστόσο παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός καθώς και ο τρόπος υπολογισμού των συναρτήσεων αυξήθηκαν σημαντικά. Με λίγα λόγια κάθε τριγωνομετρική συνάρτηση είχε κάνει την εμφάνιση της, οι τρόποι υπολογισμού της είχαν τελειοποιηθεί ενώ στη συνέχεια η μελέτη η οποία αφορούσε τις θετικές λύσεις των πολυωνύμων τρίτου βαθμού μέσω των κωνικών τομών είχε προχωρήσει. Περαιτέρω πρόοδος παρατηρήθηκε στην οπτική και την αστρονομία, όπως η μελέτη της επιταχυνόμενης κίνησης τον $9^{ο}$ αιώνα.

Η έννοια της συνάρτησης έκανε την πρώτη της εμφάνιση με μια πιο γενική μορφή τρείς αιώνες αργότερα στα σχολεία της φυσικής φιλοσοφίας στην Οξφόρδη και στο Παρίσι τον $14^{ο}$ αιώνα. Τα σχολεία βασιζόμενα στις απόψεις των Robert Crosseteste και Roger Bacon δήλωσαν τα μαθηματικά να είναι το κύριο εργαλείο για τη μελέτη φυσικών φαινομένων. Παρεκκλίνοντας από τη θεωρία του Αριστοτέλη οδηγήθηκαν στη μελέτη μη ομοιόμορφης κίνησης. Κάποια από τα φαινόμενα τα οποία μελετήθηκαν ήταν: η θερμότητα, το φώς, το χρώμα, η πυκνότητα, η απόσταση, η ταχύτητα και διάφορα άλλα τα οποία έχουν διάφορες βαθμίδες έντασης οι οποίες αλλάζουν σε συγκεκριμένα πλαίσια. Σε όλα αυτά κυρίαρχο ρόλο διαδραμάτισε η σύνθεση της κινηματικής και μαθηματικής σκέψης.

Η θεωρία των υπολογισμών ή αλλιώς και δόγμα έντασης των μορφών και το σημαντικό μέρος της, η κινηματική, είχαν αναπτυχθεί στην Αγγλία από τους William

Hevtesbury και Richard Swineshead και πολλούς άλλους, ενώ στη Γαλλία είχε αναπτυχθεί από τον Nicole Oresme με μια πιο γεωμετρική οπτική. Στα μέσα του $14^{ου}$ αιώνα ο Oresme ανέπτυξε τη θεωρία σύνθεσης των ποσοτήτων. Η θεωρία του Oresme ξεχωρίζει για την αφηρημένη λύση των προβλημάτων. Αναπαριστούσε τους βαθμούς της έντασης με τμήματα αντίστοιχων μηκών, «τα πλάτη» τοποθετούνται κάθετα πάνω στη γραμμή των «μηκών» τα τμήματα των οποίων αναπαριστούν εκτάσεις. Ωστόσο και η γωνία μεταξύ του πλάτους και του μήκους μπορούσε να επιλεγεί αυθαίρετα, αν και συνήθως τέμνονταν κάθετα. Όλες αυτές οι θεωρίες που αναπτύχθηκαν τον $14^{ο}$ αιώνα χρησιμοποιούν συνειδητά τη σχέση ανάμεσα ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Έτσι σε αυτές τις θεωρίες μια συνάρτηση ορίζεται είτε με λεκτική περιγραφή είτε μέσω γραφικής παράστασης. Οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούσαν για τον σχεδιασμό των γραφικών αναπαραστάσεων σχετίζονταν με κάποια σημεία της καμπύλης παρά με αυθαίρετα σημεία του σχεδίου. Ο Oresme εισάγει έναν διαχωρισμό ανάμεσα στα είδη των γραμμικών ποιοτήτων*:*

- **<u>Ομαλή ποιότητα:</u>** Κατά την οποία έχουμε σταθερό πλάτος και η γραμμή της έντασης είναι παράλληλη προς τη γραμμή του μήκους. Το αντίστοιχο σχήμα είναι ένα τρίγωνο γωνίας 90 μοιρών.



Ορθογώνιο τρίγωνο
(Σχήμα 2)

- **<u>Ομαλά μεταβαλλόμενη ποιότητα:</u>** Για τρία τυχαία σημεία της ο λόγος της οριζόντιας απόστασης μεταξύ του πρώτου και του δευτέρου προς αυτή μεταξύ του δευτέρου και του τρίτου είναι ίσος με το λόγο της κατακόρυφης απόστασης μεταξύ του πρώτου και του δευτέρου προς αυτή μεταξύ του δευτέρου και του τρίτου. Η γραμμή της έντασης αναπαριστάται από την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου.

- **<u>Μη ομαλά μεταβαλλόμενη ποιότητα:</u>** Στην οποία περιλαμβάνονται όλες οι άλλες περιπτώσεις. Αρχικά ο Oresme διακρίνει τέσσερα είδη ποιοτήτων, αυτά που είναι κυρτά και κοίλα τόξα ενός κύκλου μικρότερα του ημικυκλίου και παρόμοια κυρτά και κοίλα τόξα μιας έλλειψης. Στη συνέχεια αναφέρει 63 σύνθετες μη ομαλές μεταβολές.

Η μελέτη των συναρτήσεων του χρόνου αποτέλεσαν ένα σημαντικό συστατικό για την ανάπτυξη της θεωρίας των υπολογισμών. Η κύρια μέθοδος υπολογισμού ήταν η άθροιση απείρων γεωμετρικών σειρών. Τον 15^{ο} αιώνα καθώς και στα μισά του 16^{ου} η θεωρία των υπολογισμών έγινε αποδεκτή στην Αγγλία, Γαλλία, Ισπανία και Ιταλία. Όπως αναφέρει ο Crombie (1959-1961):

«Τον 14^{ο} αιώνα η ιδέα των συναρτησιακών σχέσεων αναπτύχθηκε χωρίς μετρήσεις και μόνο επί της αρχής.»

1.1.3 Μοντέρνα περίοδο

Η προσέγγιση στις συναρτήσεις κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου ήταν αλγεβρική με έμφαση στην αλγοριθμική εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών και την χρήση εξισώσεων ή τύπων ως μορφές αναπαράστασης. Από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα παρατηρείται πως η αριθμητική (επέκταση των αριθμών) και η άλγεβρα (συμβολική άλγεβρα) είχαν αναπτυχθεί μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο το οποίο έδωσε στη συνέχεια τη δυνατότητα στον Rene Descartes και στον Pierrede Fermat να ‘παντρέψουν’ την άλγεβρα με τη γεωμετρία. Στην πορεία ακολούθησε η ανακάλυψη του λογισμού από τους Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz. Ακολούθως η συμβολή του Newton με τη βοήθεια των δυναμοσειρών διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της έννοιας συνάρτηση. Τον 18^{ο} αιώνα, καθώς τα μαθηματικά άρχισαν να απομακρύνονται από τη γεωμετρική ιδέα και να εστιάζουν προς την αλγεβρική έκφραση, η έννοια της συνάρτησης αντιμετωπίσθηκε κάτω από μια νέα οπτική. Σύμφωνα με τον Skemp (1971) :

«Οι συναρτήσεις μπορούν να ορισθούν όχι μόνο ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη αλλά και ως μια υπολογιστική διαδικασία ή ως μια μέθοδος επιλογής στοιχείων από ένα σύστημα σε ένα άλλο.»

Ο Johann Bernoulli εισήγαγε το 1718 τον πρώτο τυπικό ορισμό της συνάρτησης:

«Ονομάζουμε συνάρτηση μιας μεταβλητής μια ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτήν τη μεταβλητή και από σταθερές.»

Αργότερα ο μαθητής του Bernoulli ο Euler διατύπωσε έναν ορισμό της συνάρτησης, τον οποίο βελτίωσε το 1755. Αυτός ο ορισμός της συνάρτησης υπογράμμιζε μια σχέση εξάρτησης μεταξύ ποσοτήτων:

«Εάν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε εάν αυτές αλλάζουν και οι πρώτες υφίστανται την ίδια αλλαγή, τότε οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων ποσοτήτων, (Kleiner, 1989).»

Οι μαθηματικοί P.Fermat και R.Descartes του 17^{ου} αιώνα έδωσαν ορισμούς για την έννοια της συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Fermat (Ad Locos Plano et Solido Isagoge, 1629 published in 1679)*:*

«Μόλις δύο άγνωστες ποσότητες εμφανιστούν στην τελική εξίσωση δημιουργείτε μια θέση και το τελικό σημείο της μιας από τις δύο ποσότητες περιγράφει μία ευθεία ή μια καμπύλη γραμμή.»

Κατά τον R.Descartes (*La Géométrie*, 1637)*:*

«Εάν πάρουμε διαδοχικά έναν άπειρο αριθμό για τις διάφορες τιμές του y τότε πρέπει να πάρουμε και ακόμη έναν άπειρο αριθμό για τις διάφορες τιμές του x και κατά συνέπεια έναν άπειρο αριθμό από διαφορετικά σημεία όπως C μέσω του οποίου θα μπορούσε να συνταχθεί η απαιτούμενη καμπύλη.»

Ο πιο σαφής όμως ορισμός για την έννοια της συνάρτησης τον 17^{ο} αιώνα δόθηκε από τον Gregory (Vera Circuliet Hypebolae Quadratura, 1667)*:*

«Καλούμε συνάρτηση μια ποσότητα η οποία αποτελείται από άλλες ποσότητες εάν τα αποτελέσματα της ποσότητας προκύπτουν από άλλες ποσότητες μέσω της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, της εύρεσης ριζών ή από κάτι άλλο που μπορούμε να φανταστούμε.»

Κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων διαδραμάτισε από τη μια η αύξηση των υπολογιστικών μαθηματικών και από την άλλη η δημιουργία της συμβολικής άλγεβρας μαζί με την επέκταση της έννοιας του αριθμού έτσι ώστε μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα η έννοια αυτή να συμπεριλαμβάνει εκτός από το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η έννοια της συνάρτησης να ορισθεί ως μια σχέση μεταξύ δύο αριθμητικών συνόλων παρά ως μια σχέση ανάμεσα σε «ποσότητες». Αξίζει να αναφέρουμε πως σημειώθηκε ανάπτυξη στον κλάδο της τριγωνομετρίας ενώ παράλληλα φαίνεται στο προσκήνιο και η ανακάλυψη των λογαρίθμων. Παρόλα αυτά πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην εισαγωγή συμβόλων για την αναπαράσταση αλγεβρικών παραστάσεων και εξισώσεων όπως είναι τα σύμβολα της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, των δυνάμεων ,της ισότητας, κ.α. Ο Γάλλος Francois Viete το 1591 ήταν ο πρώτος που συμβόλισε ποσότητες χρησιμοποιώντας κεφαλαία φωνήεντα και σύμφωνα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Ένα παράδειγμα συμβολισμού του είναι το εξής: «12aq 5aaeq. 23» δηλαδή 12+5x=23. Ο συμβολισμός του Viete όμως παρουσίασε κάποιες ελλείψεις και στη συνέχεια τροποποιήθηκε από τους Descartes, Newton , Euler και Leibniz. Από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα οι νόμοι της φύσης άρχισαν να εκφράζονται ως συναρτησιακές σχέσης μεταξύ φυσικών ποσοτήτων.

Ως το τέλος του 16^{ου} αιώνα οι συναρτήσεις εισάγονταν μόνο με τις παλιές μεθόδους δηλαδή προφορικά, με γράφημα, κινηματικά ή με πίνακα τιμών. Στην πορεία, την εμφάνιση τους κάνουν και οι λογαριθμικές συναρτήσεις. Σύμφωνα με τον Youschkevitch, (1975) ο J.Burgi υπολόγισε τους λογαριθμικούς πίνακες ξεκινώντας από τη σχέση ανάμεσα στη γεωμετρική πρόοδο των δυνάμεων μιας ποσότητας q, q^2, q^3 και ούτω καθεξής καθώς και στην αριθμητική πρόοδο των εκθετών δηλαδή 1,2,3…..

Ο Descartes ήταν ο πρώτος ο οποίος χώρισε τις διάφορες αλγεβρικές εξισώσεις ανάλογα με το βαθμό τους. Λίγο αργότερα στα μέσα του 17^{ου} αιώνα ο P. Mengoli, J.Gregory, N.Mercator και ο I.Newton κατάφεραν να αναπαραστήσουν αναλυτικά σε μορφή απειροσειράς οποιαδήποτε συναρτησιακή σχέση η οποία μελετούνταν εκείνο το καιρό. Ο όρος «function» (από το λατινικό ρήμα fungor που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ΄ ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο «*η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων*», στον οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μιας καμπύλης, όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων, που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Με τη βοήθεια της συνάρτησης κατάφερε να ορίσει την εξάρτηση των γεωμετρικών μεγεθών πάνω στο σχήμα μιας καμπύλης. Εισήγαγε τις λέξεις «σταθερές», «μεταβλητή», «παράμετρος» και «συντεταγμένες», (Ponte, 1992). Ο Leibniz όπως και ο Bernoulli αντιλήφθηκαν τις συναρτήσεις ως οποιαδήποτε μέρη ευθειών γραμμών όπως χορδές, τετμημένες, τεταγμένες τμήματα κύκλων και άλλα.

Στην πορεία για την ανάπτυξη της μελέτης των καμπυλών με την χρήση αλγεβρικών μεθόδων ολοένα και πιο αναγκαία ήταν η εύρεση ενός τρόπου για την αναπαράσταση ποσοτήτων οι οποίες εξαρτώνται από μια μεταβλητή. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε η έννοια της συνάρτησης από τους Bernoulli και Leibniz (1667-1748) ανάμεσα στο έτος 1694 και 1698 (Ponte, 1992). Ακολούθως μια σημαντική ώθηση για τη διερεύνηση της έννοιας συνάρτηση προήλθε από τη δουλεία του Fourier (1768-1830) ο οποίος ασχολήθηκε με το πρόβλημα ροής της θερμότητας σε υλικά σώματα. Ο Fourier θεώρησε τη θερμότητα ως μια συνάρτηση δύο μεταβλητών : του χώρου και του χρόνου. Στη συνέχεια το πρόβλημα υιοθετήθηκε από τον Dirichlet (1805-1859) ο οποίος διατύπωσε επαρκής συνθήκες έτσι ώστε να μπορεί να αναπαρασταθεί από μια συνάρτηση Fourier. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού διαχώρισε την έννοια της συνάρτησης από την αναλυτική αναπαράσταση της. Ο διαχωρισμός έγινε το 1837, ενώ στη συνέχεια έδωσε και ένα πολύ γνωστό παράδειγμα ασυνεχούς συνάρτησης σε όλα τα σημεία ανάμεσα στο διάστημα [0,1]. Το 1829 ο Dirichlet (Kleiner, 1989) διατύπωσε έναν ορισμό της συνάρτησης που έδινε έμφαση στη σχέση αντιστοιχίας μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων:

«Μια μεταβλητή y είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής x, ορισμένης στο διάστημα a < x < b, εάν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x σε αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια τιμή της μεταβλητής y.»

Ο Lagrange ταξινόμησε τις καμπύλες και τις συναρτήσεις σε δύο κατηγορίες: αλγεβρικές και υπερβατικές. Αλγεβρικές ή αλλιώς αναλυτικές είναι οι συναρτήσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν από μια εξίσωση συγκεκριμένου βαθμού. Οι υπερβατικές συναρτήσεις και καμπύλες, αν και διαφορετικής φύσης, μπορούσαν να μελετηθούν μεθοδικά και να χρησιμοποιηθούν στο λογισμό, μέσω της αναπαράστασης τους με εξισώσεις απροσδιόριστου ή άπειρου βαθμού. Στα τέλη του 18^{ου} αιώνα οι μαθηματικοί Joseph, Louis, Lagrange και Sylvestrie Francas Lacroix όρισαν την έννοια της συνάρτησης με ένα φαινομενικά πιο γενικό τρόπο. Σύμφωνα με τον J.L.Lagrange (Theorie des fonctions analytique, 1797):

«Ονομάζουμε συνάρτηση από μια ή διάφορες ποσότητες, οποιαδήποτε έκφραση για υπολογισμό στην οποία οι συγκεκριμένες ποσότητες εισάγονται με οποιονδήποτε τρόπο, αναμειγνύονται ή όχι με άλλες ποσότητες οι οποίες θεωρείτε πως δόθηκαν, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ποσότητες της συνάρτησης μπορούν να πάρουν όλες τις δυνατές τιμές.»

Σύμφωνα με τον S.F Lacroix (Traite du calcul differentiel et du calcul integral, 1797):

«Κάθε ποσότητα της οποίας η τιμή εξαρτάται από μία ή περισσότερες ποσότητες ονομάζεται συνάρτηση είτε γνωρίζεις είτε αγνοείς πια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσεις για να φτάσεις στο επιθυμητό αποτέλεσμα.»

Κατά τον 19^{ο} αιώνα η έννοια της συνάρτησης υπέστη διαδοχικές διερευνήσεις και διευκρινίσεις οι οποίες άλλαξαν τη φύση και το νόημα της (Ponte, 1992). Ένας μοντέρνος ορισμός από τους Cauchy και Riemann:

«Το y ορίζεται ως συνάρτηση του x εάν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μία τιμή της μεταβλητής y και αυτό αναπαριστάται με τη σχέση y=f(x).»

Οι μαθηματικοί εκείνης της εποχής επιδίωξαν να δώσουν μια πιο αυστηρή ανάλυση της έννοιας συνάρτηση. Οι μαθηματικοί οι οποίοι ξεκίνησαν να δουλεύουν σε αυτή την ιδέα ήταν οι: Carl Friedrich, Abel, Bolzano, Cauchy, Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Στην πορεία η ιδέα συνεχίστηκε από τους: Karl Weiestrass, Richard Dedekind, George Friedrich, Bernhard Riemann και τέλος από τον George Cantor. Όπως ήταν αναμενόμενο αυτή η τάση έφερε μια νέα "σύλληψη" της έννοιας συνάρτηση. Σύμφωνα με τον:

N.I.Lobachevsky ("On the convergence of trigonometric series, 1838"):

«Η γενική αντίληψη απαιτεί ότι συνάρτηση του x καλείται ο αριθμός που δίνεται για κάθε x και ο οποίος αλλάζει σταδιακά μαζί με το x. Η τιμή της συνάρτησης μπορεί να δοθεί είτε με μια αναλυτική έκφραση είτε από μια σειρά από αριθμούς κατά την οποία επιλέγουμε έναν από αυτούς.»

P.G.L.Dirichlet ("Uber die Darstellung ganz wilkurlicher Funktionen durch Sinus-und Cosinsureihen, 1837"):

«Ας σκεφτούμε δύο σταθερές τιμές α, β και το x ως μια μεταβλητή ποσότητα η οποία μπορεί να πάρει τιμές ανάμεσα στο διάστημα των α, β. Εάν για κάθε x αντιστοιχεί μια και μόνο μοναδική τιμή y στο διάστημα των α, β τότε το y ονομάζεται συνεχής συνάρτηση και συμβολίζεται ως y=f(x). Γεωμετρικά η συνεχής συνάρτηση παριστάνετε ως μια συνδεδεμένη καμπύλη για την οποία κάθε τιμή της τετμημένης που περιέχεται στο διάστημα των α, β αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο.»

G.F.B. Riemann ("Grundlagen flur eine allegeine Theorie der Funktionen einer varanderlichen complexen Grosse, 1851"):

«Ας υποθέσουμε πως z είναι μια μεταβλητή ποσότητα για την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε πως παίρνει όλες τις πιθανές πραγματικές τιμές τότε για κάθε μια από αυτές τις τιμές αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή έστω w.Το w ονομάζεται συνάρτηση του z. Σε περίπτωση που το z μεταβάλλει τις τιμές του ανάμεσα σε ένα διάστημα μεταξύ δύο σταθερών τιμών τότε κατά συνέπεια αλλάζει συνεχώς και η τιμή της μεταβλητής w. Τότε σύμφωνα με τον Riemann έχουμε μια συνεχή συνάρτηση.»

H.Hankel ("Untersuchunger uber die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, 1870"):

«Το y καλείται συνάρτηση του x όταν για κάθε τιμή της μεταβλητής x σε ένα ορισμένο διάστημα αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή της μεταβλητής y, χωρίς να μας απασχολεί είτε εάν το y εξαρτάται από το x σε ολόκληρο το διάστημα ή όχι, είτε εάν η εξάρτηση μπορεί να εκφραστεί με μαθηματική πράξη ή όχι.»

Με την ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων, που ξεκίνησε από τον Cantor (1845-1918) η έννοια της συνάρτησης συνέχισε να εξελίσσεται. Στον $20^{ο}$ αιώνα η συνάρτηση επεκτάθηκε για να συμπεριλάβει όλες τις αυθαίρετες αντιστοιχίες ικανοποιώντας τη μοναδικότητα των συνθηκών ανάμεσα στα αριθμητικά σύνολα, (Ponte, 1992).

1.2 Η συνάρτηση ως αυθαίρετη σταθερά

1.2.1 Bernoulli-Euler

Το 1694 ο Johann Bernoulli ανακάλυψε πως το ολοκλήρωμα ∫n dz αναπτύσσεται σε μια άπειρη σειρά*:*

$$\int n dz = nz - \frac{1}{1\cdot 2}z^2\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\frac{d^2n}{dz^2} - \ldots$$

Ο Bernoulli χρησιμοποίησε τη λέξη συνάρτηση σε μια επιστολή τον Ιούλιο του 1698 σχετικά με τη λύση σε ένα ισοπεριμετρικό πρόβλημα που περιελάμβανε καμπύλες.

«Από όλες τις καμπύλες του επιπέδου που έχουν το ίδιο μήκος, αυτή που περικλείει χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν είναι ο κύκλος.»

Αργότερα τον ίδιο χρόνο ο Leibniz εξέφρασε την αρέσκεια του όσον αφορά την χρήση της λέξης συνάρτηση από τον Bernoulli. Ο πρώτος ρητά διατυπωμένος ορισμός της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω διατυπώνεται στο άρθρο του Johann Bernoulli «*Παρατηρήσεις πάνω σε ότι είναι μέχρι τώρα γνωστό για την επίλυση των ισοπεριμετρικών προβλημάτων*» κατά τον οποίο ονομάζουμε συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους μια ποσότητα που αποτελείται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές. Ακολούθως πρότεινε το ελληνικό γράμμα φ να χρησιμοποιείται για το συμβολισμό της συνάρτησης και μάλιστα χωρίς παρενθέσεις δηλαδή φx. Ωστόσο το σύμβολο f για τον συμβολισμό των συναρτήσεων οφείλεται στον Euler ο οποίος τον χρησιμοποίησε στο άρθρο του το οποίο δημοσιεύτηκε το 1740.

Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα η μελέτη των φυσικών φαινομένων και της κίνησης οδήγησαν σε προβλήματα πολλών μεταβλητών, των οποίων η επίλυση απαιτούσε την ανάπτυξη των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Με τη βοήθεια του απειροστικού λογισμού, του μετασχηματισμού Laplace, του λογισμού των μεταβολών και της συνάρτησης γάμμα πραγματοποιήθηκε η επίλυση πολλών προβλημάτων. Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα ήταν απαραίτητο να ορισθούν αναλυτικά ορισμένες γεωμετρικές έννοιες όπως το μήκος μιας καμπύλης, το εμβαδό μιας επιφάνειας κ.α. Στη συνέχεια ο μαθητής του Bernoulli ο Euler το 1748 έδωσε κάποιους ορισμούς.

- **Σταθερά**: Είναι μία ποσότητα η τιμή της οποίας μένει αμετάβλητη σε οποιαδήποτε αλλαγή της τιμής της μεταβλητής μέσα σε ένα σύνολο τιμών.

- **Μεταβλητή ποσότητα**: Είναι μια ακαθόριστη ποσότητα που περιλαμβάνει πολλές διαφορετικές τιμές (θετικές, αρνητικές, κλασματικές, ακέραιες, μιγαδικές, μηδέν κ.α.).

Στον ορισμό που έδωσε για τη συνάρτηση στο Introduction ο Euler ακολούθησε το δάσκαλο του, Johann Bernoulli αλλάζοντας ωστόσο τη λέξη «ποσότητα» σε «αναλυτική έκφραση» δηλαδή:

«Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες.»

Σ' αυτόν τον ορισμό ο Euler συμπεριέλαβε τα πολυώνυμα, τις δυναμοσειρές, τις λογαριθμικές και τριγωνομετρικές εκφράσεις. Όρισε στη συνέχεια και τη συνάρτηση πολλών μεταβλητών, τις κατηγοριοποίησε και προσπάθησε να απαντήσει στο ερώτημα «τι σημαίνει και πώς σχηματίστηκε ο όρος αναλυτική έκφραση» (Youschkevitch, 1976). Απαριθμώντας τις εξισώσεις που εκφράζονται αναλυτικά ξεκίνησε από τις αλγεβρικές συναρτήσεις. Σ' αυτές τις συναρτήσεις οι μετασχηματισμοί στην ανεξάρτητη μεταβλητή εμπλέκουν μόνο αλγεβρικές διαδικασίες, οι οποίες με τη σειρά τους χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις ρητές που εμπλέκουν μόνο τις τέσσερις συνήθεις πράξεις, και τις άρρητες που εμπλέκουν τις ρίζες. Συμπληρωματικά μελέτησε διάφορες υπερβατικές συναρτήσεις, τις τριγωνομετρικές, τις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις κάποια ολοκληρώματα καθώς και άπειρο αριθμό άλλων συναρτήσεων με ακέραιους υπολογισμούς. Κατά τον Euler, η κύρια διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων έγκειται στο συνδυασμό των μεταβλητών και των σταθερών από τις οποίες αποτελούνται. Έτσι, οι υπερβατικές συναρτήσεις διαχωρίζονται από τις αλγεβρικές συναρτήσεις επειδή οι πρώτες επαναλαμβάνουν άπειρες φορές τους συνδυασμούς των δεύτερων, δηλαδή, οι υπερβατικές συναρτήσεις θα μπορούσαν να δοθούν από άπειρες σειρές. Όρισε την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση ως:

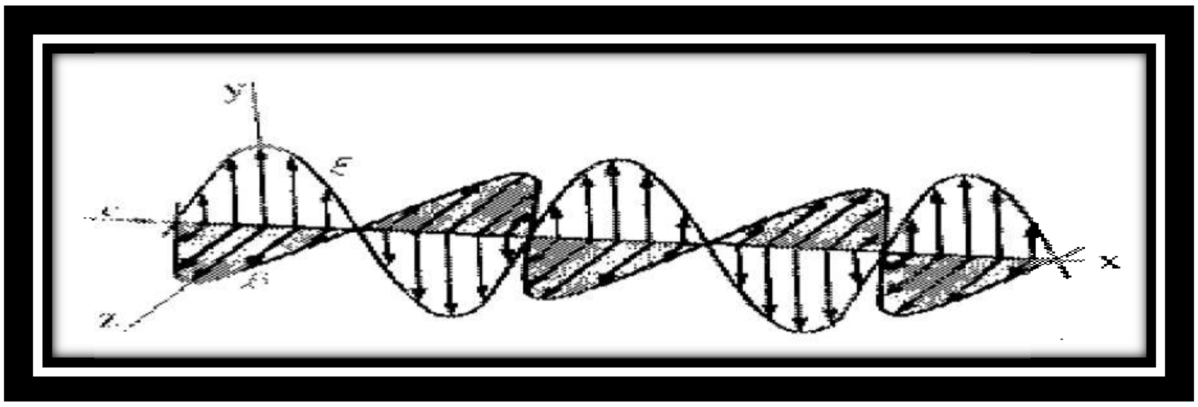
$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ και } \quad \log x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n}-1\right).$$

και τέλος διατύπωσε θεωρήματα για την ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης. Επειδή ήταν αδύνατο να απαριθμηθούν οι διάφορες μέθοδοι έκφρασης των συναρτήσεων με αναλυτικό τρόπο ο Euler τις περιόρισε όλες σε μια και μοναδική έκφραση, εκφράζοντας την άποψη ότι η πλέον κατάλληλη μορφή της αναλυτικής έκφρασης μιας συνάρτησης είναι μια άπειρη δυναμοσειρά του τύπου:

$$A+ Bz+Cz^2 + Dz^3 +\ldots\ldots$$

Πιο αναλυτικά δήλωσε ότι θα μπορούσαν να γίνουν δεκτές, όχι μόνο θετικές ακέραιες δυνάμεις του z αλλά οποιεσδήποτε δυνάμεις. Ο Euler έκανε επίσης το διαχωρισμό μεταξύ λελυμένων και πεπλεγμένων συναρτήσεων, και μεταξύ μονότιμων και πλειότιμων συναρτήσεων, με τις τελευταίες να είναι ρίζες εξισώσεων ανώτερου βαθμού με δύο μεταβλητές, και με συντελεστές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Κατά τον Euler, αν μια συνάρτηση όπως η $\sqrt[3]{P}$, όπου P είναι μια μονότιμη συνάρτηση, έχει πραγματικές τιμές για τις πραγματικές τιμές της μεταβλητής τότε συγκαταλέγεται συνήθως μεταξύ των μονότιμων συναρτήσεων. Τέλος ο ορισμός της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης από τους Bernoulli και Euler έγινε αποδεκτός από πολλούς μαθηματικούς μέσα στους οποίους συγκαταλέγεται και ο Lagrange.

1.3 Η συνάρτηση και το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής



Παλλόμενη χορδή
(Σχήμα 3)

Η μεγαλύτερη ώθηση για περαιτέρω έρευνα της έννοιας συνάρτηση προέκυψε από την εργασία του Euler που αφορούσε τη μελέτη του σχετικά με το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής. Ο D'Alembert προσπαθώντας να περιγράψει το πρόβλημα της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής το 1747, σχημάτισε και έλυσε την κυματική εξίσωση που αποτελούσε τη γενική λύση του προβλήματος. Το πρόβλημα απαιτούσε την χρήση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, και γι' αυτό θεωρείται μαζί με τον Daniel Bernoulli συνιδρυτής της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ο D'Alembert εξέφρασε τις συνθήκες του προβλήματος της κίνησης της παλλόμενης χορδής με εξισώσεις ισοδύναμες με τη μερική διαφορική εξίσωση*:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

με a σταθερό, το y να αντιπροσωπεύει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ,το x την απόσταση από την αρχή, και το t τον χρόνο και απέδειξε ότι η γενική λύση y = f(x, t) του προβλήματος θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από το άθροισμα δύο τυχαίων συναρτήσεων

$$y = \varphi (x + at) + \psi (x - at)$$

και λόγω των οριακών συνθηκών να καταλήξει στη μορφή

$$y = \varphi (at + x) - \varphi (a t - x).$$

Οι αρχικές συνθήκες μπορούσαν να είναι διαφορετικές ανάλογα με την αρχική κατάσταση της χορδής αλλά ο D'Alembert υποστήριξε πως υπάρχουν μοναδικές αποδεκτές αρχικές καταστάσεις ειδάλλως δεν θα υπήρχε λύση. Αυτό που δημιούργησε ουσιαστικά μεγάλες αντιπαραθέσεις ανάμεσα στους D'Alembert και Euler ήταν το γενικότερο πρόβλημα της εύρεσης λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η διαμάχη τους εστιάστηκε στις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις φ και ψ της σχέσης

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

Αυτό είχε σαν συνέπεια ο Euler να παράγει μια λύση σε σχέση με το συνεχή αρχικό τύπο που αναπαριστάται από μια τριγωνομετρική σειρά της μορφής*:*

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{l} + \beta \sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots, \qquad (1)$$

με την χορδή να στερεώνεται στα σημεία χ=0 και χ=l. Λόγω της συγκεκριμένης αντιπαράθεσης ανάμεσα στους D'Alembert και Euler ξεκίνησε μια μακροχρόνια διαμάχη σχετικά με τη φύση των αποδεκτών συναρτήσεων με βάση τις αρχικές συνθήκες και τα ολοκληρώματα των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Παρόμοιες συναρτήσεις έκαναν την εμφάνιση τους στις θεωρίες της ελαστικότητας, της υδροδυναμικής, της αεροδυναμικής, και της διαφορικής γεωμετρίας (Youschkevitch, 1976). Σύντομα όμως το πρόβλημα πήρε μια νέα διάσταση με την είσοδο του γιου του Bernoulli τον Daniel Bernoulli το 1755. Υποστήριξε ότι τόσο η αρχική μορφή όσο και οι μεταγενέστερες ταλαντώσεις αναπαριστώνται από άπειρες σειρές όρων που περιλαμβάνουν ημίτονα πολλαπλών γωνιών. Ωστόσο η μέθοδος υπολογισμού σειρών Fourier του ήταν άγνωστη. Ο Euler που είχε δώσει μια λύση της μορφής (1) απέκλεισε τη πιθανότητα να αναπαριστώνται με τέτοια μορφή μεικτές συναρτήσεις. Στη συνέχεια ο D'Alembert απέρριψε τη λύση του Daniel Bernoulli όμως η διαμάχη δεν τέλειωσε εδώ, αλλά συνεχίστηκε και αργότερα από άλλους διακεκριμένους μαθηματικούς όπως τους Lagrange, Moge, Arbogast, Fourier κ.α. Η διαμάχη αυτή ήταν υψίστης σημασίας τόσο για την πορεία της μαθηματικής φυσικής όσο και για τη μεθοδολογική ανάπτυξη των θεμελίων της μαθηματικής ανάλυσης.

1.4 Συναρτήσεις και τα φυσικά φαινόμενα

Ο Bento Caraça το 1951 έδειξε τόσο αριστοτεχνικά ότι οι συναρτήσεις είναι απαραίτητο μαθηματικό εργαλείο για την ποσοτική μελέτη των φυσικών φαινομένων που ξεκίνησε από το Γαλιλαίο (1564-1642) και Kepler (1571-1630). Σε αντίθεση με τη μεσαιωνική σκέψη ο Γαλιλαίος υποστήριξε ότι τα μαθηματικά είναι η πιο κατάλληλη γλώσσα για τη μελέτη της φύσης. Σύμφωνα με τον Γαλιλαίο για να μελετηθεί ένα φαινόμενο ήταν απαραίτητο να μετρηθούν οι ποσότητες, να αναγνωριστούν οι ομαλότητες και τέλος να ληφθούν συναρτησιακές σχέσεις οι οποίες θα αναπαριστούν μαθηματικές περιγραφές με το πιο απλό τρόπο. Η μελέτη του κύματος της πτώσης σωμάτων, της κίνησης των πλανητών και γενικότερα της καμπυλόγραμμης κίνησης οδήγησε στην εξέταση των ευθύ και αντίστροφων αναλογιών καθώς και των πολυωνυμικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις είναι εξαιρετικά εργαλεία για τη μελέτη προβλημάτων διακύμανσης. Μια δεδομένη ποσότητα μπορεί να ποικίλλει σε σχέση με το χρόνο, το χώρο, με άλλες ποσότητες ακόμα και ταυτοχρόνως σε άλλες διαστάσεις. Τέτοιες διακυμάνσεις μπορεί να είναι αργές, γρήγορες ή και ακόμα να εμφανίζονται σε μερικά σημεία.

Μετά από λίγο καιρό οι μαθηματικοί άρχισαν να εξετάζουν συναρτήσεις οι οποίες δεν ήταν σε αναλυτική μορφή, συναρτήσεις που δεν είχαν απλή γεωμετρική αναπαράσταση ή ακόμα και συναρτήσεις που δεν είχαν καμία σχέση με φυσικές καταστάσεις. Έτσι η έννοια της συνάρτησης άρχισε να εξελίσσεται έχοντας όμως και κάποιες δραματικές στιγμές. Ένα παράδειγμα είναι οι συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο, οι οποίες με τη σειρά τους προκάλεσαν πολλές δοκιμασίες στους μαθηματικούς που τις μελετούσαν.

1.5 Συμπεράσματα από την ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης

Συνοψίζοντας, βάση της σύντομης περιγραφής της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι:

- Η έννοια αναπτύχθηκε βαθμιαία μέσα από την καθημερινή εμπειρία και από την ενασχόληση αρχικά με μεμονωμένες συναρτήσεις, χωρίς να είναι συνειδητά σχηματισμένη η έννοια της συνάρτησης.
- Οι μαθηματικοί του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα θεωρούσαν ως συναρτήσεις τις συνεχείς, λείες και όχι σταθερές καμπύλες, οι οποίες εκφράζονταν με μία αναλυτική έκφραση.
- Η έννοια της συνάρτησης αρχικά ήταν σε αντιστοιχία με τις ανάγκες της καθημερινής ζωής ή των προβλημάτων της φυσικής. Έντονος ήταν ο διαδικαστικός χαρακτήρας της συνάρτησης συνδεδεμένος με την αλλαγή σε σχέση με τον χρόνο. Οι αρχικοί ορισμοί της έννοιας ήταν περισσότερο προσανατολισμένοι προς τη σχέση εξάρτησης ενώ αργότερα εμφανίστηκε η απαίτηση για το μονοσήμαντο της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής.

Επιπλέον, μπορούμε να συμπεράνουμε την υπόθεση ότι μια ικανοποιητική πρόσβαση στην έννοια της συνάρτησης απαιτεί μια καλή άρθρωση ανάμεσα στα θέματα:

- αλγεβρικός συμβολισμός και πράξεις και πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα
- αριθμητικές εξισώσεις

- άγνωστοι
- μεταβλητές
- συμμεταβολή των μεταβλητών σε γεωμετρικές καμπύλες που ορίζονται από απλές εξισώσεις

Η συγκεκριμένη υπόθεση υπό μία έννοια είναι εσωτερική στα μαθηματικά, καθώς τα σημεία που πρέπει να αρθρώσει είναι έννοιες ή μαθηματικές πρακτικές. Ωστόσο, προηγουμένως αναφέρθηκε ότι η αστρονομία δημιούργησε κίνητρο για τη δημιουργία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, περνώντας από τη δημιουργία γραφημάτων από τον N. Oresme για τη μελέτη των διαφορετικών ειδών κίνησης μέχρι τον Leibniz και τον Newton για τον οποίο η μεταβλητή είναι συνήθως ο χρόνος, σύμφωνα με τον οποίο ένα σημείο σχεδιάζει μια καμπύλη η οποία ορίζει μια συνάρτηση. Επαγωγικά προκύπτει μια δεύτερη υπόθεση. Συγκεκριμένα, η μελέτη των φαινομένων που περιέχουν τον χρόνο και η χρήση της μεταβλητής χρόνος μπορεί να αποτελέσει έναν θεμελιώδη πρόδρομο συνειδητοποίησης της αριθμητικοποίησης ενός μεταβλητού μεγέθους και της έννοιας του μεγέθους συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους ή της ύπαρξης συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ μεγεθών. Αυτή η μελέτη, συνδυαζόμενη με την προτεινόμενη άρθρωση στην αρχική υπόθεση, μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε μια καλή αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης, ανάλογη με αυτή που πρότεινε ο Gregory και στην πορεία από τη σύλληψη την οποία ανέπτυξαν ο Bernoulli και στη συνέχεια ο Euler. Κάτι τέτοιο όμως προκαλεί ποικίλα διδακτικά προβλήματα προς μελέτη.

Κεφάλαιο 2

2. Χρήση τεχνολογίας

2.1 Χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας έχει επηρεάσει σημαντικά το εκπαιδευτικό σύστημα πολλών ευρωπαϊκών χωρών. Στη χώρα μας έχουν παρατηρηθεί αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα όπου συνίσταται η χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι μαθητές μέσω της παραδοσιακής μεθόδου διδασκαλίας δεν έχουν καταφέρει να αποκτήσουν την ικανότητα να ρυθμίζουν ή να τροποποιούν τη γνωστική τους δραστηριότητα. Έχουν μάθει κάποιες συγκεκριμένες στρατηγικές, όπως για παράδειγμα η απομνημόνευση τις οποίες εφαρμόζουν σε κάθε περίσταση [Grabinger & Dunlap, (2002)]. Ο δάσκαλος των μαθηματικών αρχίζει τη διδασκαλία συνήθως με την παρουσίαση μιας τεχνικής, ακολουθούν ασκήσεις για εξάσκηση και ασκήσεις και προβλήματα για εφαρμογή. Για το λόγο αυτό η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της συνάρτησης προτείνεται από ερευνητές και παιδαγωγούς (Lagrange, 2005) ως βοηθητική για την ενεργοποίηση των μαθητών μέσω δραστηριοτήτων διερεύνησης. Σημαντική επιπλέον έχει αποδειχθεί η χρήση περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας, όπου οι μαθητές μεταβάλλουν τα δεδομένα, παρατηρούν τις αλλαγές που προκαλούνται και έτσι οδηγούνται σε χρήσιμα συμπεράσματα (Ferrara κ.ά., 2006). Αντίστοιχη προσέγγιση προτείνεται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2011 το οποίο αναπτύσσεται βάση των τροχών μάθησης και διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, για καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα και καλύτερη κατανόηση των εννοιών προτείνεται η χρήση ενός μαθηματικού λογισμικού (Geogebra) με στόχο την ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες οι οποίες θα καθιστούν πιο ενεργητικό το ρόλο τους μέσα στην τάξη ενώ ταυτόχρονη επιδίωξη αποτελεί η διαφοροποίηση της διδασκαλίας από το παραδοσιακό μοντέλο μάθησης. Οι Blake, Hurley & Arenz (1995) ισχυρίζονται ότι η σκέψη που αναπτύσσουν τα παιδιά όταν έρχονται αντιμέτωπα με ένα πρόβλημα καθώς και η εύρεση της λύσης του προβλήματος είναι πολύ πιο σημαντική από τα παραδοσιακά μαθηματικά, όπου οι μαθητές μαθαίνουν να υπολογίζουν και να απομνημονεύουν ανούσια πράγματα. Στη συνέχεια επισημαίνουν ότι τα παιδιά αντί να χρησιμοποιούν προσχεδιασμένες μαθηματικές δραστηριότητες, μπορούν να χρησιμοποιούν τη μαθηματική σκέψη ώστε να ανακαλύπτουν έννοιες μέσα στις καθημερινές τους δραστηριότητες.

Η χρήση της τεχνολογίας και πιο συγκεκριμένα η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα ο υπολογιστής ως διαδραστικό εργαλείο μέσα στην τάξη βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες προσφέροντας τη δυνατότητα οπτικοποίησης. Στη συνέχεια οι μαθητές που χρησιμοποιούν υπολογιστές διαμορφώνουν καλύτερη στάση απέναντι στα μαθηματικά καθώς αυξάνεται η αυτοπεποίθηση τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες. Στην πορεία με τη βοήθεια του υπολογιστή διαμορφώνονται καλύτερα μαθησιακά περιβάλλοντα. Η Thompson (1992) παρουσίασε μια συγκριτική μελέτη που επικεντρώθηκε στις διαφορές μεταξύ της εργασίας των μαθητών σε παραδοσιακά και σε υπολογιστικά-προσομοιωμένα περιβάλλοντα μάθησης. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν την θετική επίδραση των προσομοιωμένων περιβαλλόντων μάθησης στη κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές. Ακολούθως η διδασκαλία μέσω του υπολογιστή ενισχύει τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών. Οι μαθητές μαθαίνουν να δουλεύουν σε ομάδες αναπτύσσοντας με αυτό τον τρόπο ομαδικό πνεύμα. Συμπληρωματικά η μάθηση με την χρήση υπολογιστή όχι μόνο είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά την άνοδο της επίδοσης ιδιαίτερα των αδύναμων και των πιο δυνατών μαθητών αλλά συμβάλλει και στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα μαθηματικά (Ferrara, 2006, Kaput &Thompson, 1994). Τέλος μελέτες υποδεικνύουν ότι οι υπολογιστές έχουν τη δυνατότητα να υποστηρίξουν και να βελτιώσουν τα περιβάλλοντα επίλυσης προβλημάτων (Fey, 1984) καθώς και να μειώσουν την ποσότητα του χρόνου που απαιτείται για την ανάπτυξη δεξιοτήτων, δίνοντας με αυτό τον τρόπο πιο πολύ χρόνο στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης (Cox, Abbott, Webb, Blakeley, Beauchamp, Rhodes, 2004).

2.2 Λογισμικό Geogebra

Δυναμικά γεωμετρικά συστήματα όπως το Geogebra, Cabri κ.α. καθώς και ορισμένα αλγεβρικά συστήματα όπως το Mathematica έχουν επηρεάσει την εκπαίδευση των μαθηματικών (Markus Hohenwarter and Karl Fuchs). Το Geogebra είναι ένα διαδραστικό λογισμικό γεωμετρίας που συνδέει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και το λογισμό. Απευθύνεται σε μαθητές ηλικίας 10 με 18 χρόνων και σε εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αναπτύχθηκε για τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία από τον Markus Hohenwarter και από μια ομάδα προγραμματιστών. Το Geogebra έχει μεταφραστεί σε 36 γλώσσες και είναι ελεύθερο λογισμικό, το οποίο συνδέει με άμεσο και αυτόματο τρόπο τους δύο τύπους λογισμικών όπως δείχνει και το όνομα του *(***Geo**metry and al**Gebra***).*

Τα βασικά αντικείμενα στο Geogebra είναι τα σημεία, τα διανύσματα, τα τμήματα, τα πολύγωνα, οι ευθείες γραμμές, όλες οι κωνικές τομές και οι συναρτήσεις/εξισώσεις. Με το Geogebra είναι δυνατόν να ορίσουμε συντεταγμένες σημείων, γραμμικές εξισώσεις, αριθμούς γωνιών για τον υπολογισμό τους κ.α. Ως εκ τούτου το συγκεκριμένο λογισμικό έχει σχεδιαστεί από την αρχή για χρήση στα σχολεία.

2.3 Εφαρμογή Geogebra στο σχολείο

Το Geogebra είναι πολύ ευέλικτο εργαλείο για τα μαθηματικά σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Χρήση του λογισμικού:

1) Geogebra για παρουσίαση και απεικόνιση

Ακόμα και στην παραδοσιακή διδασκαλία η ιδέα της χρήσης ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει το καθεστώς της. Ο Becker υποστηρίζει ότι το συγκεκριμένο λογισμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως εργαλείο για παρουσίαση και απεικόνιση. Με λίγα λόγια το Geogebra είναι ένα λογισμικό με ευρεία κάλυψη δεξιοτήτων λόγο των πολλαπλών αναπαραστάσεων του.

2) Geogebra σαν κατασκευαστικό εργαλείο

Το 1990 ο Karl Fuchs επισήμανε τη σημασία των ηλεκτρονικών υπολογιστών και της σχεδίασης συστημάτων για την εποικοδομητική διδασκαλία της γεωμετρίας. Για το λόγο αυτό προόριζε την ενσωμάτωση καινούργιων μεθόδων διδασκαλίας χωρίς όμως να υποκαταστήσει τις παραδοσιακές μεθόδους. Ακολούθως η ιδέα της αξιοποίησης ηλεκτρονικών υπολογιστών έγινε θεμελιώδης. Το Geogebra είναι ένα λογισμικό το οποίο έχει όλες τις απαραίτητες ικανότητες που απαιτούνται από ένα κατάλληλο λογισμικό σχεδιασμού.

3) Geogebra για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών

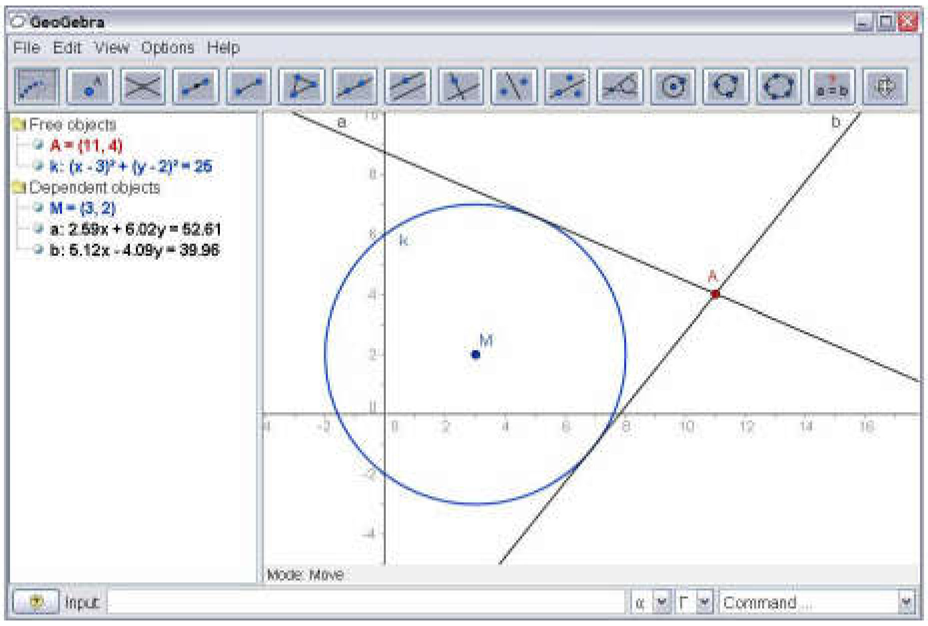
Με την χρήση του λογισμικού Geogebra οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να οργανώσουν τη γνώση από μόνοι τους. Παραδείγματος χάρη ο Artigue και Lagrange αναφέρουν τη θετική επίδραση των ηλεκτρονικών υπολογιστών για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Το Geogebra είναι ένα εργαλείο το οποίο μπορεί να βοηθήσει στη δημιουργία της καταλληλότερης ατμόσφαιρας για μάθηση.

4) Geogebra για την ετοιμασία διδακτικού υλικού

Το Geogebra ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς να προετοιμάσουν υλικό για την εκπαιδευτική διαδικασία, χρησιμοποιώντας το ως εργαλείο συνεργασίας, επικοινωνίας και αναπαράστασης.

2.4 Το Geogebra στη διδασκαλία των συναρτήσεων

Το δυναμικό σύστημα γεωμετρίας Geogebra αρχικά ενθαρρύνει τους μαθητές να προσεγγίσουν τα μαθηματικά με ένα πειραματικό τρόπο. Παραδείγματος χάρη είναι εφικτό να διερευνήσουν τις παραμέτρους μιας εξίσωσης κύκλου ζωγραφίζοντας τον κύκλο με το ποντίκι. Μπορούν στη συνέχεια να ‘παίξουν’ με την εξίσωση του κύκλου και στην πορεία να δουν τις αλλαγές στο παράθυρο της γεωμετρίας.

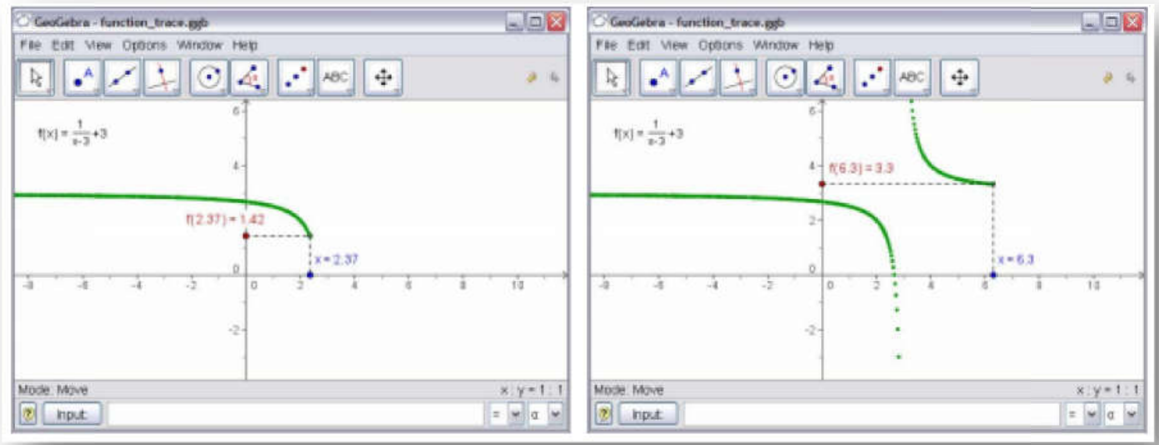


Παράδειγμα εφαρμογής Geogebra-Εξίσωση κύκλου
(Εικόνα 6)

Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν νοήματα για μία νέα έννοια, με βάση τους γνωστικούς τους πόρους που σχετίζονται με την εργασία που τους έχει ανατεθεί (Hoyles & Healy, 1997). Παράλληλα, οποιαδήποτε αλλαγή συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη αναπαράσταση συνεπάγεται άμεση μεταβολή στις υπόλοιπες. Το δυναμικό περιβάλλον επιτρέπει στους μαθητές να πειραματίζονται ελεύθερα με στόχο να παρατηρούν πώς οι αναπαραστάσεις ανταποκρίνονται δυναμικά σε αλλαγές, ενώ παράλληλα διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής, καθώς και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών. Δεν παραθέτει συνεπώς απλά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, αλλά επιτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών, ενώ ο σχεδιασμός του στοχεύει:

1) Στη δημιουργία ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων.
2) Στη διάθεση λειτουργικοτήτων που δεν απαντώνται με τον ίδιο τρόπο και στα στατικά μέσα.
3) Στην ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων για όσα συμβαίνουν στην οθόνη, ενισχύοντας παράλληλα τις προϋποθέσεις για αφαιρετική σκέψη και αναστοχασμό. Ο μαθητής έχει έτσι τη δυνατότητα να ελέγχει τις δράσεις του και να επαναπροσδιορίζει τις στρατηγικές του, να διερευνά δηλαδή τους τρόπους επίτευξης των ζητούμενων μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

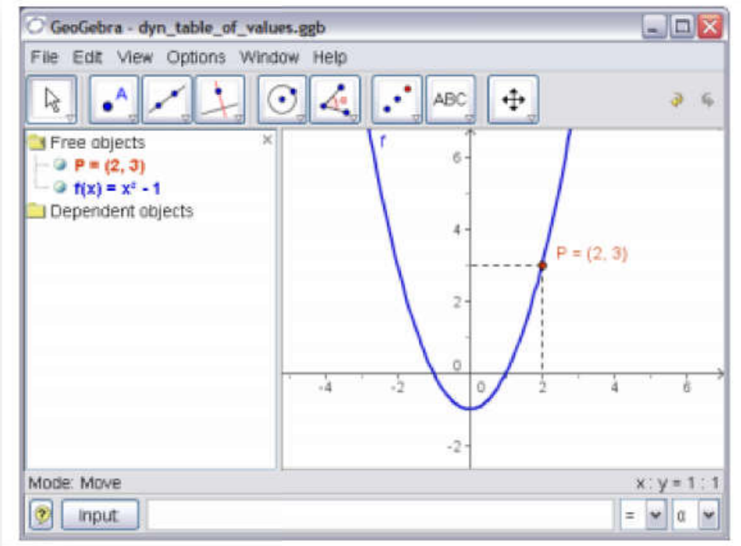
Στη συνέχεια το λογισμικό Geogebra προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να σχεδιάσουν σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με συντεταγμένες οι οποίες υπολογίστηκαν με την χρήση μεταβλητών. Παραδείγματος χάρη με δοσμένο x μπορούν να δημιουργήσουν το σημείο (x,y) της συνάρτησης f(x). Το σχήμα στη συνέχεια δείχνει την απεικόνιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Παρατηρείτε πως το γράφημα εξελίσσετε με το ίχνος κάθε σημείου (x,y) με αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να δουν τη δημιουργία-εξέλιξη της γραφικής παράστασης μετακινώντας απλά το ποντίκι τους.



Παράδειγμα εφαρμογής Geogebra-Γραφική παράσταση

(Εικόνα 7)

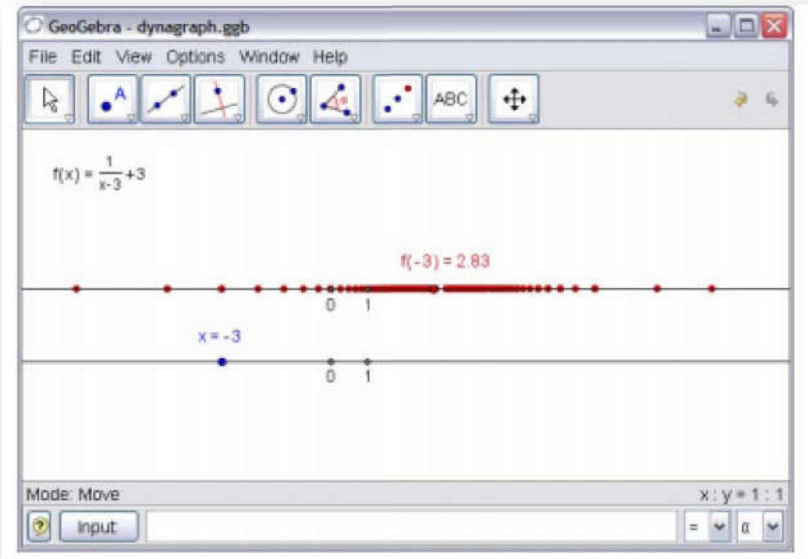
Έπειτα μέσω του λογισμικού γίνεται εύκολα αντιληπτό από τους μαθητές πότε ένα σημείο ανήκει-διέρχεται από μια συνάρτηση. Κάνοντας τη γραφική της παράσταση και επιλέγοντας το σημείο που τους ζητείτε πάνω στον άξονα, έχοντας δηλαδή οπτικοποιήσει το πρόβλημα μπορούν με ευκολία να απαντήσουν στο ερώτημα.



Παράδειγμα εφαρμογής Geogebra-Σημείο ανήκει σε γραφική παράσταση

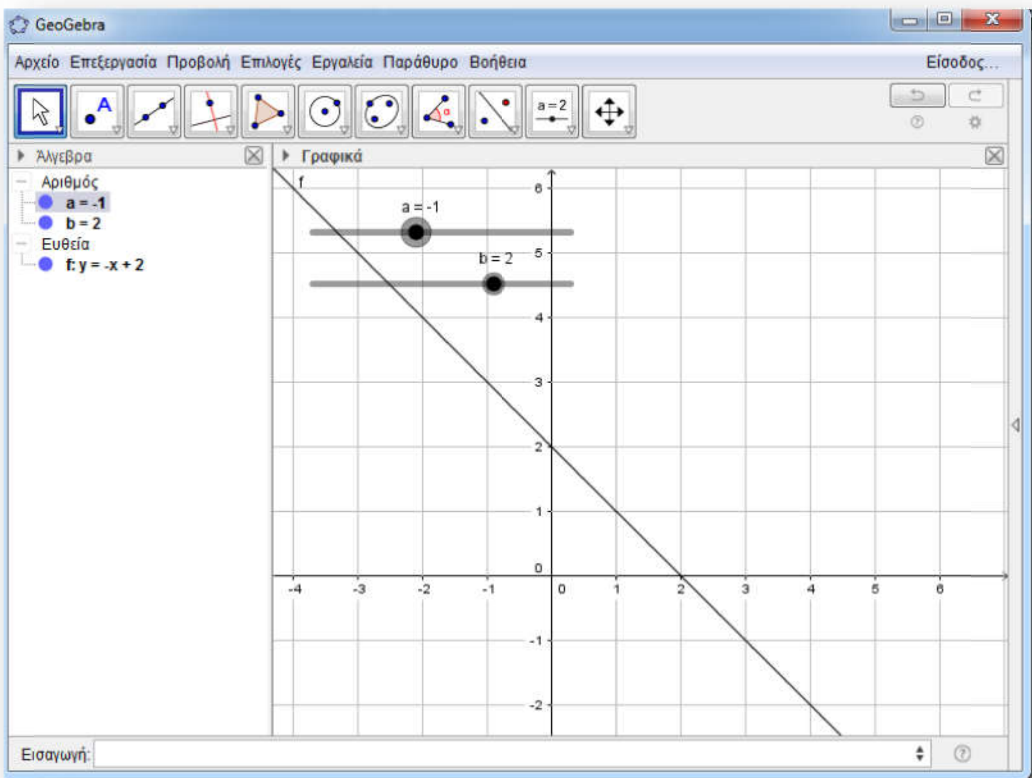
(Εικόνα 8)

Επιπλέον δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα μεταβάλλοντας την τιμή της μεταβλητής x να παρατηρήσουν αντίστοιχα και τη μεταβολή της μεταβλητής y. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγούνται μόνοι τους στο ανάλογο συμπέρασμα δηλαδή πότε δυο συναρτήσεις είναι παράλληλες, τεμνόμενες κ.α.



Παράδειγμα εφαρμογής Geogebra-Μεταβάλλοντας τις τιμές των μεταβλητών (Εικόνα 9)

Τέλος οι μαθητές εισάγοντας μια συνάρτηση της μορφής y= αx+β και αλλάζοντας κάθε φορά τις τιμές των παραμέτρων α και β μπορούν με μεγάλη ευχέρεια να κατανοήσουν πώς μεταβάλλεται η εκάστοτε συνάρτηση.



Παράδειγμα εφαρμογής Geogebra-Μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων (Εικόνα 10)

Κεφάλαιο 3

3. Η συνάρτηση στα σχολικά βιβλία

3.1 Διδασκαλία των συναρτήσεων στο Γυμνάσιο

3.1.1 Η συνάρτηση στην Α’ Γυμνασίου

Η πρώτη επαφή των παιδιών με την έννοια συνάρτηση πραγματοποιείται στο 6^{o} κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικά της Α’ Γυμνασίου (Βανδουλάκης, κ.α. 2011) κατά τη μελέτη των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν γίνεται ρητή αναφορά ούτε στον όρο συνάρτηση αλλά ούτε στην έννοια συνάρτηση. Έρχονται όμως για πρώτη φορά σε επαφή με τις σχέσεις y=αx και y= α/x, με τη συμπλήρωση των αντίστοιχων πινάκων τιμών τους και με τη γραφική παράσταση τους.

3.1.2 Η συνάρτηση στην Β’ Γυμνασίου

Στο βιβλίου της Β’ Γυμνασίου (Βλάμος κ.α. 2007) γίνεται η πρώτη «επίσημη» εισαγωγή του όρου «συνάρτηση» στο 3^{o} κεφάλαιο, το οποίο αποτελείται από πέντε (5) παραγράφους. Αναλυτικά έχουμε:

3.1 Η έννοια της συνάρτησης
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες-Γραφική παράσταση συνάρτησης
3.3 Η συνάρτηση y=αx
3.4 Η συνάρτηση y=αx + β
3.5 Η συνάρτηση y=α/x – Η υπερβολή

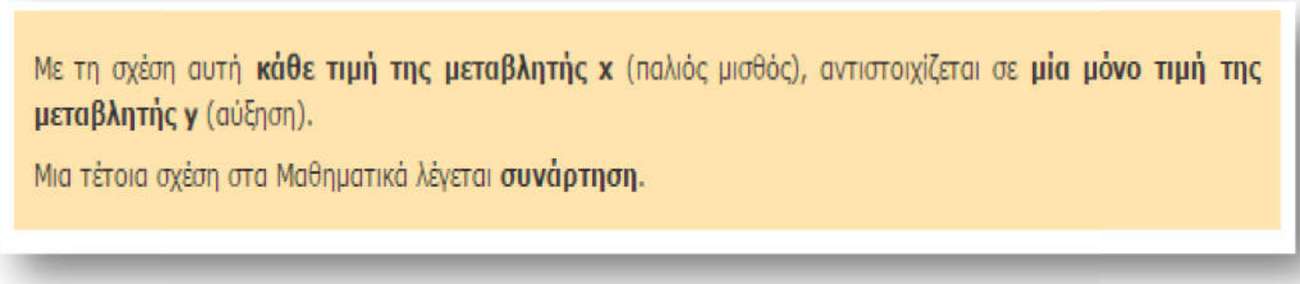
Αρχικά δεν δίνεται πλήρης ορισμός για την έννοια αλλά γίνεται η προσπάθεια να οικοδομηθεί η εικόνα της μέσα από παραδείγματα της καθημερινής ζωής αλλά και μέσα από τα μαθηματικά. Αρχικά δίνεται η εξής δραστηριότητα:

> Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων.
>
> Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.
>
> α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;
>
> β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Παράδειγμα συναρτησιακής σχέσης

(Εικόνα 11)

Η δραστηριότητα έχει ως σκοπό την ανάδειξη μιας σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών (μεγεθών) την οποία τελικά θα ονομάσει συνάρτηση. Στην περιγραφή της έννοιας της συνάρτησης μπαίνει περιορισμός όσον αφορά το είδος των σχέσεων που μπορούν να ονομαστούν συναρτήσεις. Το απόσπασμα στην πορεία το οποίο μπορεί να ονομαστεί για λόγους ευκολίας ως «ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης στο Γυμνάσιο» είναι η κάπως τυπική περιγραφή της έννοιας:


Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση).

Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Τυπική περιγραφή της έννοιας συνάρτηση

(Εικόνα 12)

Παρατηρείται ότι ο τρόπος με τον οποίο έχει εισαχθεί ο ορισμός της συνάρτησης στο σχολικό εγχειρίδιο παραπέμπει σε διαδικασία αντιστοίχησης μεταξύ των μεταβλητών x και y. Ωστόσο οι εισαγωγικές δραστηριότητες και οι ασκήσεις οδηγούν σε μια αλγεβρική σχέση εξάρτησης του y με το x. Μετέπειτα αρκετή μελέτη υφίστανται με την εμφάνιση τους οι αλγεβρικές σχέσεις $y=\alpha x^2$, $y=\alpha x$, $y=\alpha x+\beta$ και η $y=\alpha/x$. Η συνηθισμένη πρακτική που ακολουθείται από το βιβλίο είναι: οι μαθητές να καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών όταν γνωρίζουν τον αλγεβρικό τύπο, είτε να ανακαλύψουν την αλγεβρική σχέση που συνδέει δύο μεγέθη. (Εικόνα 13 και Εικόνα 14)

Ασκήσεις Συμπλήρωσης πίνακα τιμών

α) $y = 3x - 2$

x	−3	−2	−1	0	2
y					

α) $y = x^2 + 1$

x	−3	−1	0	2	5
y					

Ασκήσεις Συμπλήρωσης πίνακα τιμών

(Εικόνα 13)

Αλγεβρική σχέση δύο μεγεθών
8. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 χιλιόμετρα την ώρα. α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 2 ώρες και πόση σε 5 ημέ β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).

Αλγεβρική σχέση δύο μεγεθών

(Εικόνα 14)

Ενώ στο πλαίσιο της ανάδειξης της συνάρτησης ως σχέσης εξάρτησης δύο μεγεθών δίνονται ασκήσεις του παρακάτω τύπου (Εικόνα 15):

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 3x - 5$:

x	2		–3	
y		7		–2

Άσκηση συμπλήρωσης πίνακα τιμών συνάρτησης

(Εικόνα 15)

Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με παρόμοιες ασκήσεις (Εικόνα 3) και στην Α’ Γυμνασίου κατά τη μελέτη ανάλογων ποσών. Παρατηρείται ότι τέτοιας κατηγορίας ασκήσεις συνδέουν την έννοια της συνάρτησης με τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων.

Όσων αφορά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης οι μαθητές έχουν ήδη κατασκευάσει γραφικές παραστάσεις των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών στην Α΄ Γυμνασίου, επομένως έχουν εμπειρία αυτής της αναπαράστασης. Ένας από τους στόχους διδασκαλίας της είναι να μπορέσουν να εντοπίσουν τις συντεταγμένες ενός σημείου καθώς και ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του. Να μπορέσουν να υπολογίσουν την απόσταση δύο σημείων εάν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του και τέλος να έχουν την ευχέρεια να σχεδιάσουν γραφικές παραστάσεις με την χρήση ενός πίνακα τιμών. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού προτείνονται δραστηριότητες οι οποίες αποσκοπούν στην ανάγνωση, κατασκευή και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που περιγράφουν τη λύση πραγματικών προβλημάτων. Στη Β' Γυμνασίου όμως δίνεται μεγαλύτερη προσοχή στις πληροφορίες τις οποίες μπορούμε να αποκομίσουμε βλέποντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Συγκεκριμένα χαρακτηριστική είναι η τέταρτη εφαρμογή της σελ 64 (Βλάμος κ.α. 2011) η οποία χρησιμοποιεί τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης για να εκτιμηθεί η τιμή του y για μία συγκεκριμένη τιμή του x και αντίστροφα (Εικόνα 16). Η εφαρμογή αυτή είναι ίδια με την εφαρμογή της Εικόνας 15 αφού και στις δύο λύνουμε κάποια εξίσωση είτε αλγεβρικά είτε γραφικά ενώ το μόνο που αλλάζει είναι η αναπαράσταση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία.

Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό.

Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα :

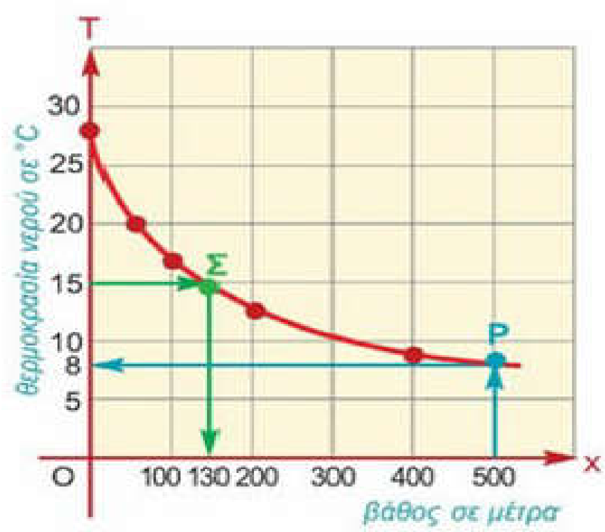
x	0	50	100	200	400
T	28	20	17	12	9

όπου T είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους x (σε μέτρα).

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β)Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.

γ) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι 15°C;



Επίλυση συνάρτησης με τη βοήθεια γραφικής παράστασης

(Εικόνα 16)

Στην πορεία έμφαση δίνεται στην μελέτη και στη γραφική παράσταση των συναρτήσεων y=αx, y=αx+β και y=α/x. Η διδασκαλία επικεντρώνεται κυρίως στη γραφική αναπαράσταση αυτών των αλγεβρικών σχέσεων και στις γεωμετρικές ιδιότητες των γραφημάτων τους (κλίση της y=αx, παραλληλία των y=αx+β). Η σύνδεση της έννοιας με την καθημερινότητα γίνεται μέσα από προβλήματα του παρακάτω τύπου (Εικόνα 17). Ιδιαίτερα η άσκηση οκτώ (8) σελ 71 (Βλάμος κ.α.2011) αναπαράγει την εικόνα πού αναδύεται μέσα από τις ασκήσεις που παρουσιάζονται στις Εικόνες 15 και 16.

8. Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 20% σ' ένα χρόνο.

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλιών τους τιμών x.

β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση.

γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε:

i) Τη σημερινή τιμή ενός προϊόντος που είχε πέρυσι 7 €

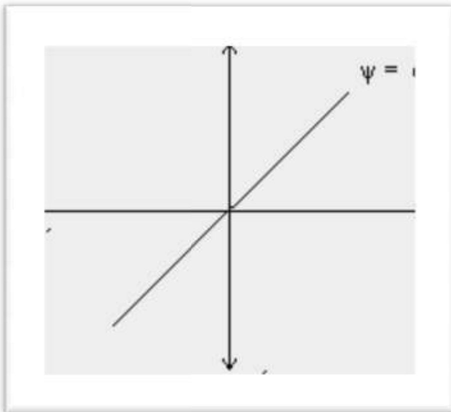
ii)Την περσινή τιμή ενός προϊόντος που έχει τώρα 7 €.

5. Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 0,5 € για τη σημαία και 0,2 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό y που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.

Προβλήματα συναρτήσεων με εφαρμογή στην καθημερινότητα

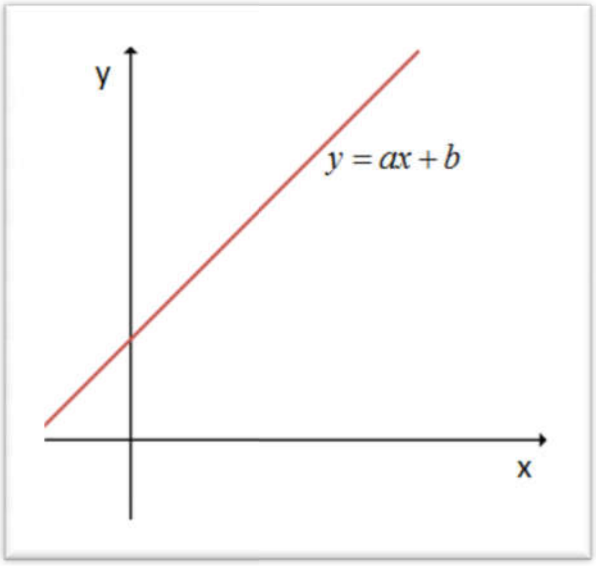
(Εικόνα 17)

Πιο αναλυτικά η εκμάθηση της συνάρτησης y=αx έχει ως στόχο οι μαθητές να καταφέρουν να προσδιορίσουν τη σχέση ανάμεσα στα ανάλογα ποσά. Επόμενος στόχος είναι να κατανοήσουν ότι η συνάρτηση διέρχεται από την αρχή των αξόνων καθώς και να μάθουν να κάνουν διερεύνηση της παραμέτρου α. Για τη διεξαγωγή του συγκεκριμένου στόχου δίνονται δραστηριότητες όπως παραδείγματος χάρη να σχεδιάσουν σε ένα κοινό σύστημα αξόνων, διαγράμματα διαστήματος-χρόνου μιας ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.



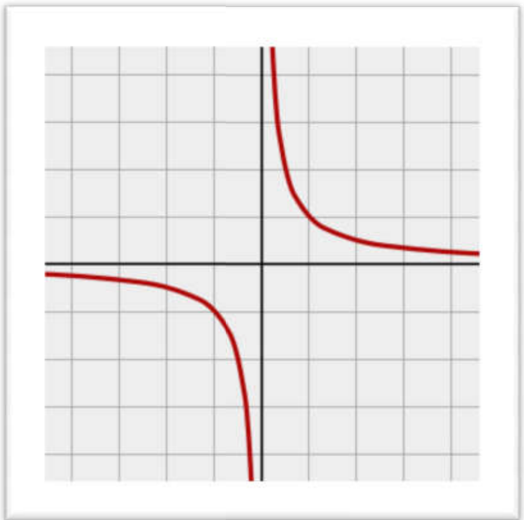
Γραφική παράσταση συνάρτησης y=αx
(Σχήμα 4)

Όσων αφορά τη συνάρτηση y= αx+β ένας από τους κύριους λόγους εκμάθησης της είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι είναι συνάρτηση παράλληλη με την ευθεία y=αx. Στην πορεία να καταλάβουν ότι κάθε εξίσωση της μορφής αx+βy=γ παριστάνει μια ευθεία γραμμή της οποίας πρέπει να μάθουν να βρίσκουν τα σημεία τομής με τους άξονες. Για την επίτευξη του συγκεκριμένου στόχου προτείνονται δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα μιλιμετρέ χαρτί.



Γραφική παράσταση συνάρτησης y=αx + β
(Σχήμα 5)

Με τη συνάρτηση y=α/x ένας από τους στόχους είναι να μάθουν ότι η γραφική παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων. Για το λόγο αυτό προτείνονται δραστηριότητες οι οποίες ζητούν από τους μαθητές να μελετήσουν και να αναπαραστήσουν γραφικά κάποιες σχέσεις.



Γραφική παράσταση συνάρτησης y=α/x
(Σχήμα 6)

Συγκρίνοντας τον «ορισμό» της έννοιας της συνάρτησης και των εφαρμογών που επιλέγονται για την δημιουργία της εικόνας της έννοιας θα φανεί ότι ο «ορισμός» δεν είναι σε αντιστοιχία με την εικόνα που αναδύεται από τις εφαρμογές. Μέσα από τις ασκήσεις δεν αναδεικνύεται πουθενά η έννοια της συνάρτησης ως μια αντιστοιχία όπου κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται με μία μόνο τιμή της μεταβλητής y. Η μοναδικότητα της τιμής του y δεν φαίνεται σε καμία δραστηριότητα με αποτέλεσμα να θεωρείται σαν περιττή απαίτηση μέσα στον «ορισμό». Ο ορισμός φαίνεται να μην είναι σε αντιστοιχία με τους στόχους πού θέτουν τα παραδείγματα και οι δραστηριότητες αλλά περισσότερο προσπαθεί να είναι σε συμφωνία με τον ορισμό που δίνεται στην Α΄ Λυκείου.

3.1.3 Η συνάρτηση Γ' Γυμνασίου

Στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου (Αργυράκης κ.α.) η εισαγωγή της έννοιας συνάρτηση γίνεται στο $4^{ο}$ κεφάλαιο, το οποίο αποτελείται από δύο (2) παραγράφους:

4.1 Η συνάρτηση $y=αx^2$ με $α≠0$

4.2 Η συνάρτηση $y=αx^2 + βx + γ$ με $α≠0$

Αρχικά πραγματοποιείται μια μικρή υπενθύμιση στις πρωτοβάθμιες εξισώσεις και ανισώσεις ενώ παράλληλα γίνεται εκμάθηση των εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Δεν δίνεται εκ νέου ορισμός για την έννοια, εφόσον αποτελεί συνέχεια της Β΄ Γυμνασίου. Η διδασκαλία της έννοιας γίνεται κυρίως μέσω της μελέτης της γραφικής παράστασης της $y=αx^2+βx+γ$.

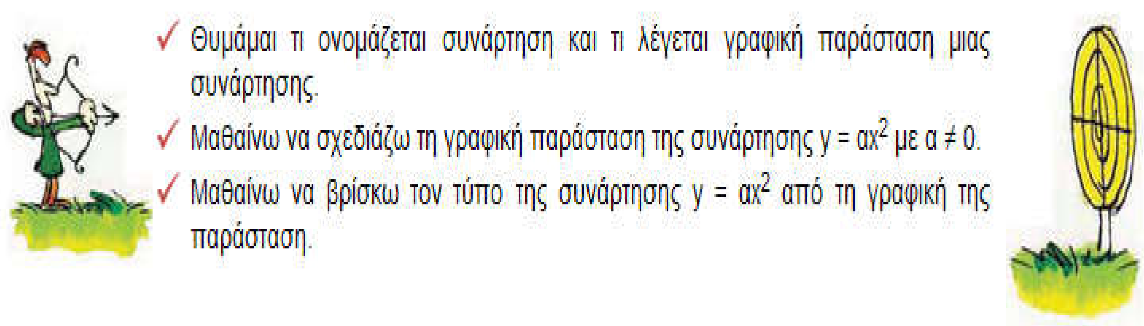
Συγκεκριμένα στην παράγραφο 4.1 υπενθυμίζεται ο «ορισμός» της έννοιας της συνάρτησης που δόθηκε στη Β΄ Γυμνασίου και δίνεται ένα παράδειγμα μίας αλγεβρικής σχέσης που είναι συνάρτηση :

..η ισότητα $y=x^2$ καθορίζει μία συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μόνο μία τιμή του y.

Πχ. Για x=1 έχουμε $y=1^2=1$

Για x=2 έχουμε $y=2^2=4$ κ.λπ.

Γενικός στόχος της παραγράφου είναι:



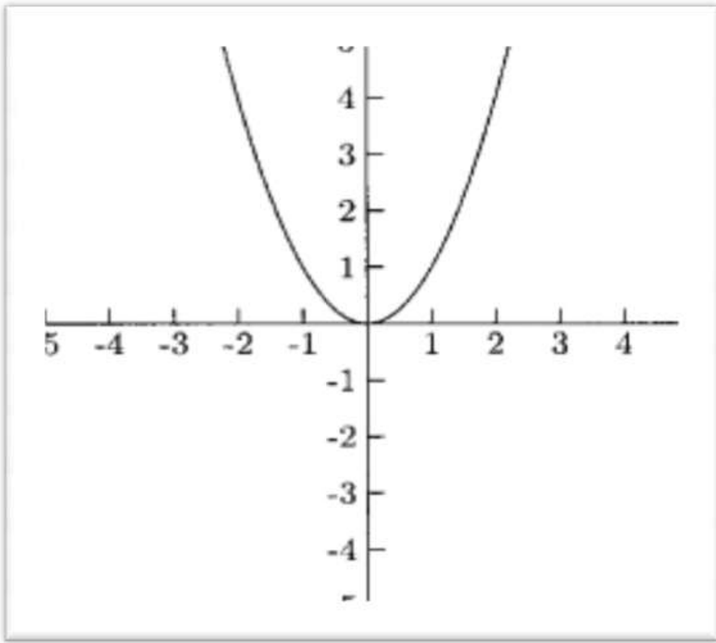
✓ Θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

✓ Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α ≠ 0$.

✓ Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = αx^2$ από τη γραφική της παράσταση.

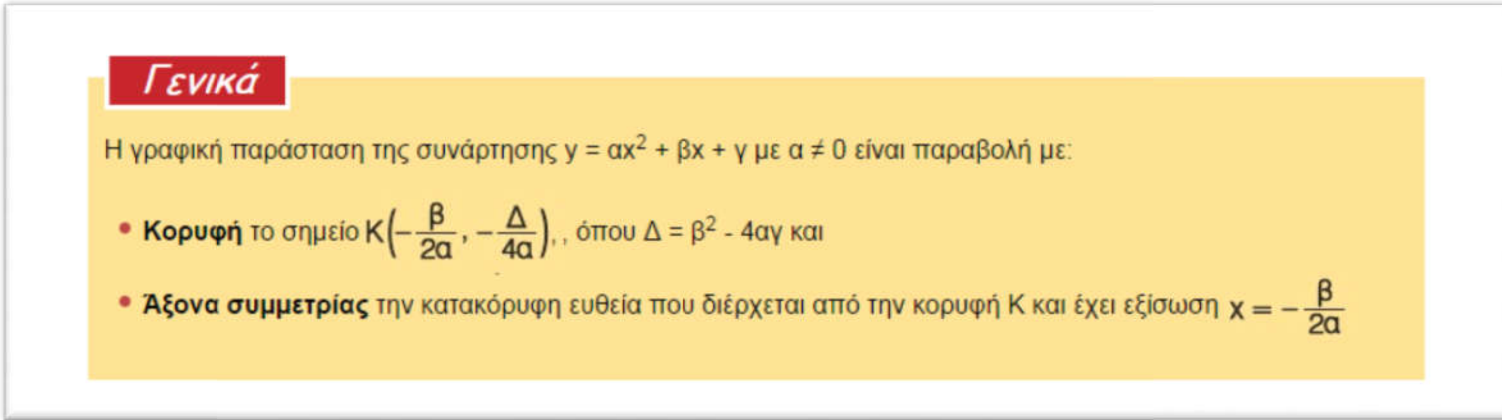
Για τον λόγο αυτό προτείνονται παραδείγματα όπως:

- το εμβαδόν y τετραγώνου πλευράς x είναι $y= x^2$
- το εμβαδόν ορθογωνίου με βάση διπλάσια από το ύψος είναι $y=2x^2$
- το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας x είναι $y= π x^2$.



Γραφική παράσταση συνάρτησης $y=αx^2 + βx + γ$ με $α≠0$
(Σχήμα 7)

Με όμοιο τρόπο στην παράγραφο 4.2 πραγματοποιείται η μελέτη της συνάρτησης $y=αx^2 +βx + γ$ με $α≠0$ σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της:

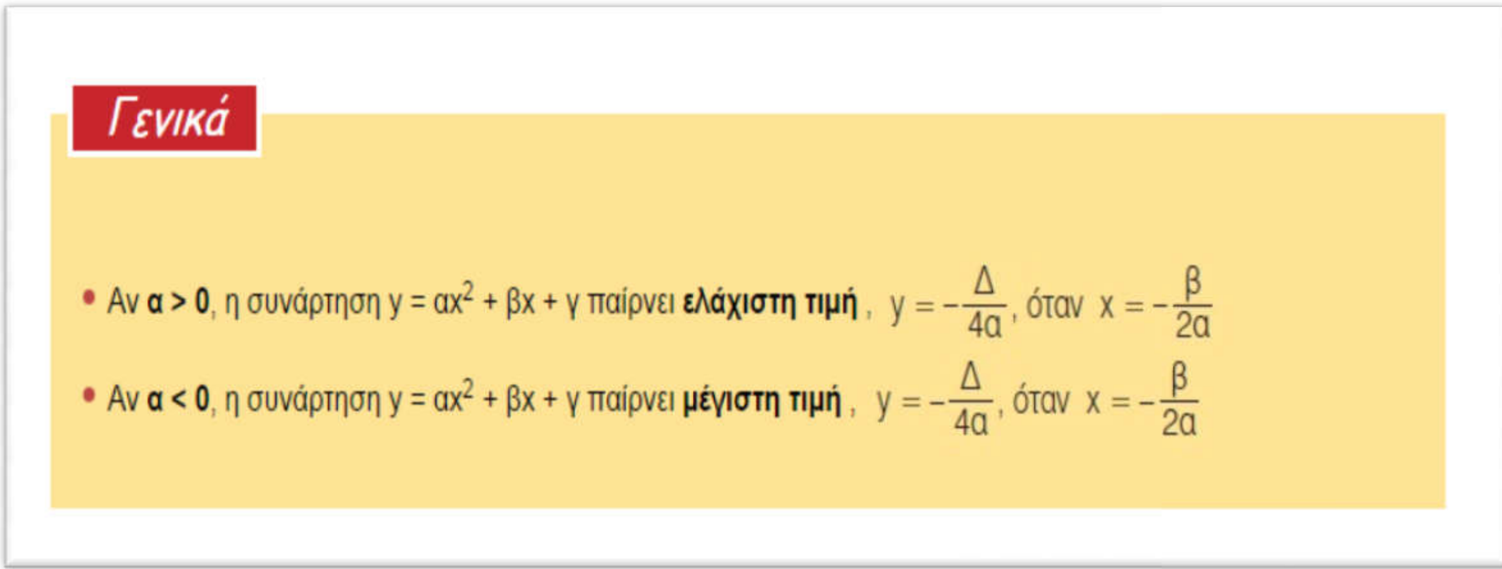


Γενικά

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $K\left(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α}\right)$, , όπου $Δ = β^2 - 4αγ$ και
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\frac{β}{2α}$

Ιδιότητες της συνάρτησης $y=αx^2 + βx + γ$ με $α≠0$
(Εικόνα 18)

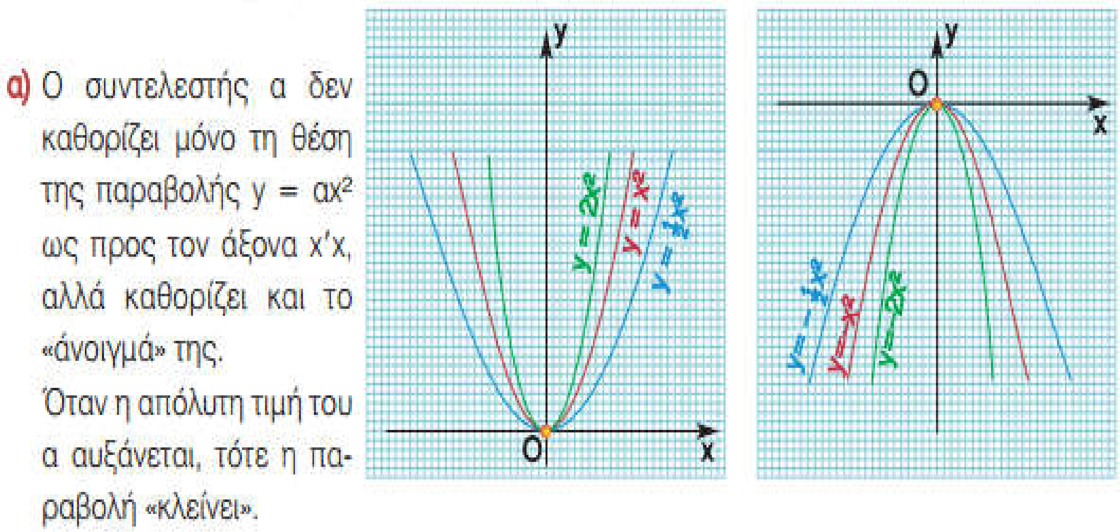


Γενικά

- Αν **α > 0**, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **ελάχιστη τιμή**, $y = -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\frac{β}{2α}$
- Αν **α < 0**, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **μέγιστη τιμή**, $y = -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\frac{β}{2α}$

Ιδιότητες της συνάρτησης $y=αx^2 + βx + γ$ με $α≠0$
(Εικόνα 19)

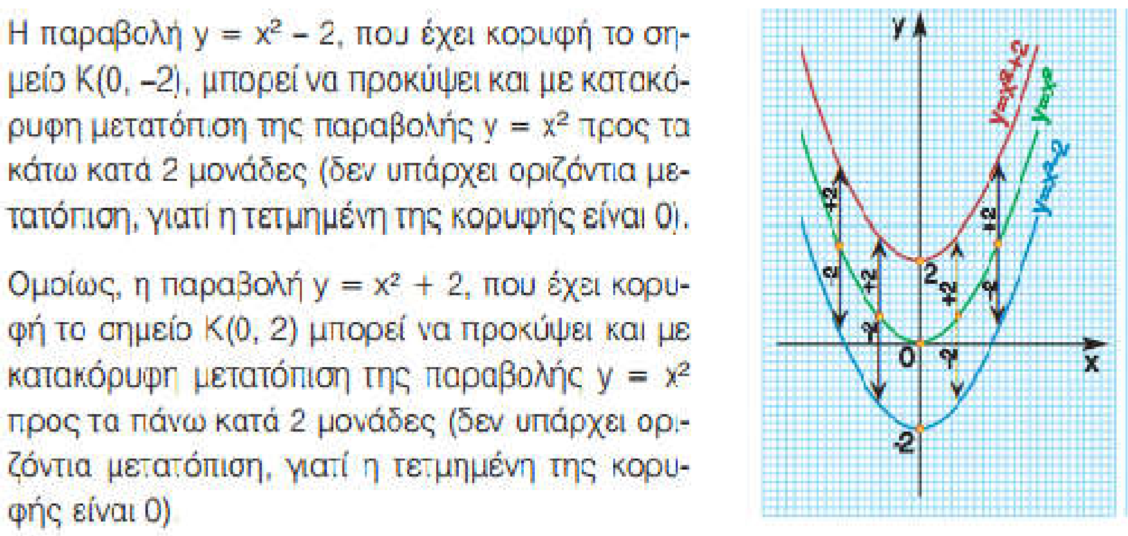
Μέσα από τη μελέτη της $y=αx^2$ γίνεται προσπάθεια να κατανοηθεί ο ρόλος του α ανάλογα με το πρόσημο του, χωρίς όμως ταυτόχρονη προσπάθεια να ερμηνευθεί ο μηχανισμός που «ανοίγει» και «κλείνει» τη γραφική παράσταση.



Μελέτη συνάρτησης $y=αx^2$

(Εικόνα 20)

Έπειτα γίνεται εισαγωγή των εννοιών ελάχιστη-μέγιστη τιμή, του άξονα συμμετρίας και της κορυφής της παραβολής. Στην πορεία μελετάται η γραφική παράστασης της $y=αx^2+βx+γ$ μέσω των μετασχηματισμών της μορφής $y=a(x-b)+c$, δηλαδή της κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.



Μελέτη συνάρτησης $y=αx^2$

(Εικόνα 21)

Συγκριτικά με τις έννοιες που παρουσιάστηκαν στη διδακτέα ύλη της Β΄ Γυμνασίου δεν εμφανίζεται και κάτι εντελώς νέο. Παρατηρείτε ότι αποφεύγεται η αναφορά στις οριακές θέσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=αx^2$ όταν α=0 ή όταν το α είναι πολύ μεγάλος αριθμός ,όπου θα μπορούσαν οι μαθητές να προβληματιστούν πάνω στις βασικές διαφορές μίας οποιασδήποτε αλγεβρικής και μίας συναρτησιακής σχέσης.

Στο Κεφάλαιο 3 συγκρίνοντας τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται οι έννοιες γραμμική εξίσωση και συνάρτηση, παρατηρούμε ότι φαίνεται να διαφοροποιούνται μόνο στο όνομα και στη θέση της μεταβλητής x σε σχέση με το σύμβολο της ισότητας. Δηλαδή η εξίσωση της ευθείας δίνεται από την αλγεβρική έκφραση αx+βy=γ ενώ η συνάρτηση από την έκφραση y=αx+β. Έτσι δεν αναδεικνύονται οι διαφορές που υπάρχουν μεταξύ μίας οποιασδήποτε εξίσωσης δύο μεταβλητών και μίας που παριστάνει συνάρτηση με αποτέλεσμα η εικόνα που σχηματίζεται από τους μαθητές για την έννοια της συνάρτησης να είναι αυτή της εξίσωσης δύο μεταβλητών χωρίς περιορισμούς.

3.2 Διδασκαλία των συναρτήσεων στην Α' Λυκείου

3.2.1 Η συνάρτηση στην Α' Λυκείου

Στο βιβλίο της Α' Λυκείου «Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Λυκείου» (Ανδρεαδάκης κ.α.2011) η εισαγωγή της έννοιας συνάρτηση γίνεται στο 6^{ο} κεφάλαιο

6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

το οποίο αποτελείται από πέντε (5) παραγράφους:

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
6.3 Η Συνάρτηση f(x) = αx + β
6.4 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης
6.5 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης

Αρχικά στην παράγραφο 6.1 δίνεται ο αναλυτικός ορισμός της συνάρτησης ο οποίος διατυπώνεται ως διαδικασία αντιστοίχησης ενώ ορίζονται και οι «υπο-έννοιες» που συγκροτούν την έννοια της συνάρτησης ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in$ Α αντιστοιχίζεται στο $y \in$ Β, τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $\mathbf{f(x)}$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x.** Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

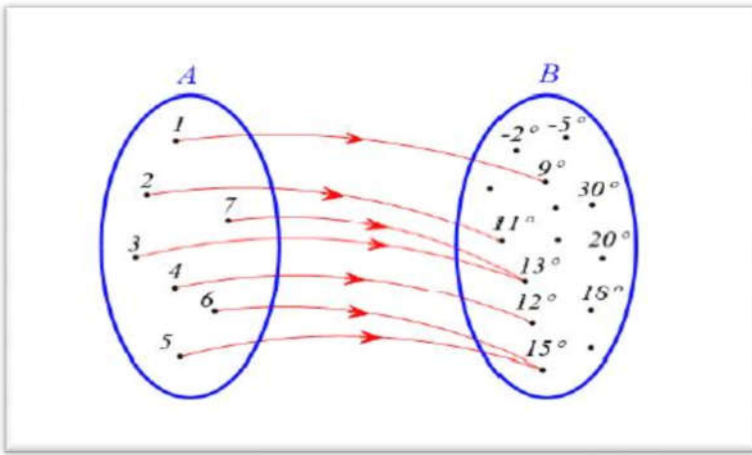
Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in$ Α, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $\mathbf{f(A)}$.

Αναλυτικός ορισμός συνάρτησης-σχολικό βιβλίο Α' Λυκείου

(Εικόνα 22)

Για την εμπέδωση του ορισμού χρησιμοποιούνται δύο παραδείγματα με βελοδιαγράμματα. Το πρώτο παράδειγμα στοχεύει στο να καταδείξει ότι όταν μία σχέση είναι συνάρτηση τότε:

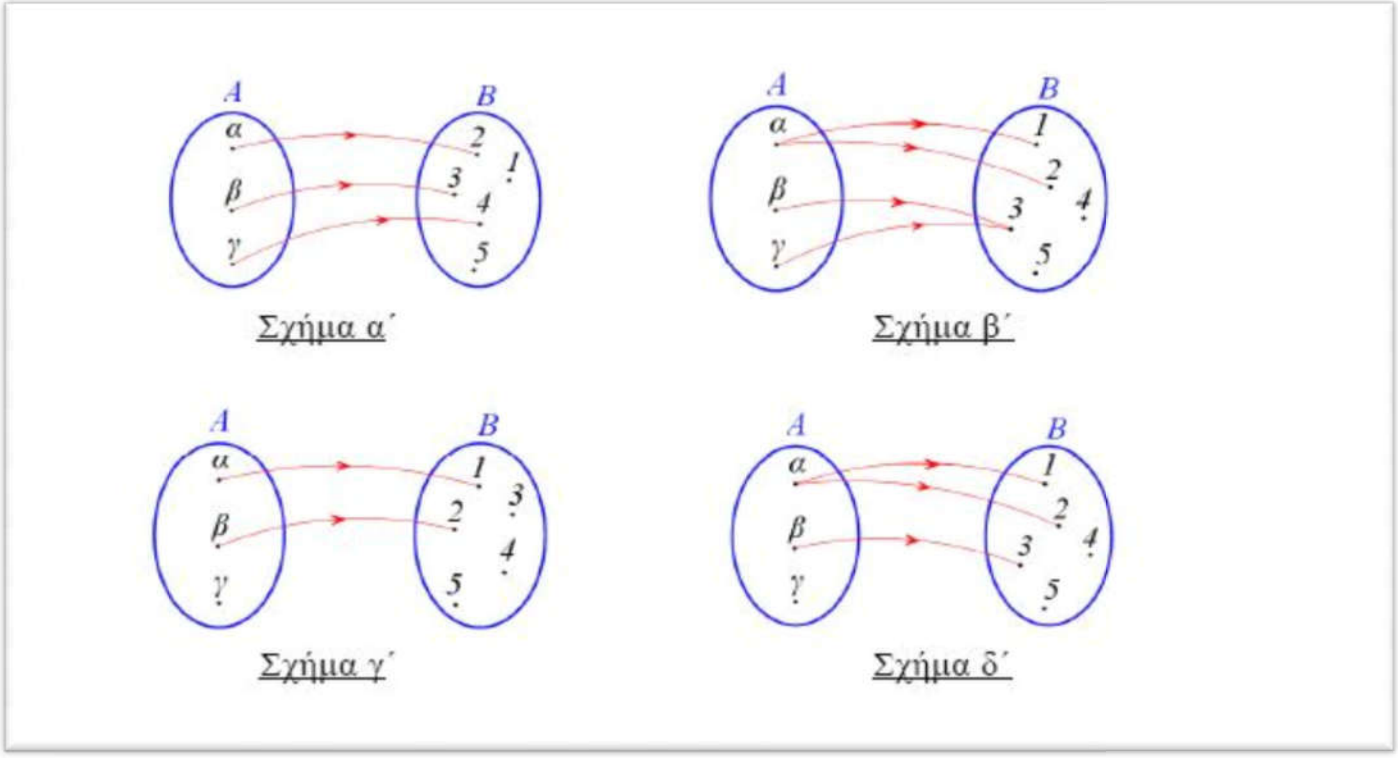
- Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.
- Μερικά στοιχεία του Β μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (παραδείγματος χάρη ο αριθμός 18^{o}).
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του Α μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του Β (π.χ. το 3 και 7 αντιστοιχίζονται στον αριθμό 13^{o}).



Παράδειγμα συνάρτησης με βελοδιαγράμματα

(Εικόνα 23)

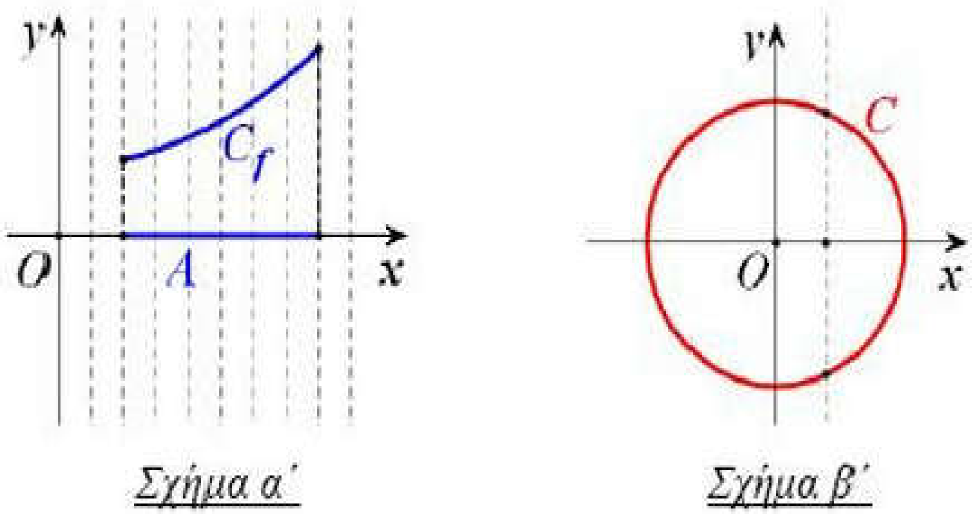
Το δεύτερο παράδειγμα στοχεύει στην κατανόηση της έννοιας μέσα από αντιπαραδείγματα συνάρτησης (Σχήμα β, γ &δ):



Παράδειγμα συνάρτησης με βελοδιαγράμματα

(Εικόνα 24)

Πέρα από τα βελοδιαγράμματα το βιβλίο της Α΄ Λυκείου επανέρχεται στο ζήτημα για το πότε μία σχέση χαρακτηρίζεται ως συναρτησιακή όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιεί το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας για να ελέγξει αν μία καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Ως αντιπαράδειγμα χρησιμοποιεί τον κύκλο.

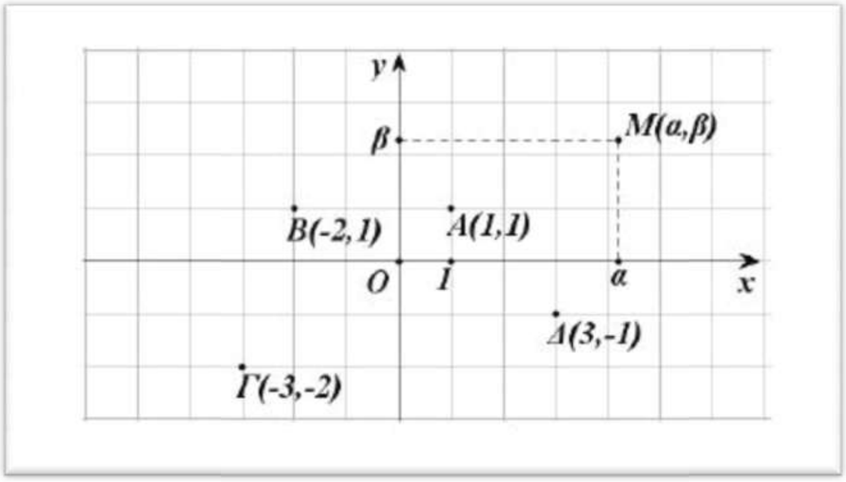


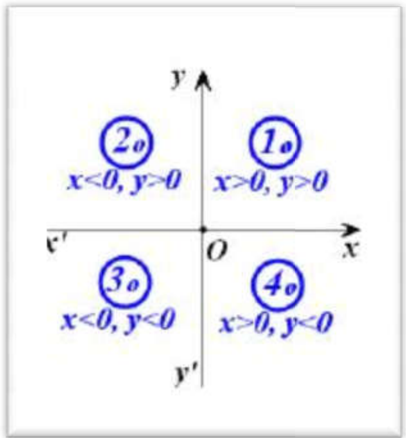
Αντιπαράδειγμα συνάρτησης με χρήση γραφικής παράστασης

(Σχήμα 7)

Όσον αφορά το σύμβολο f, το οποίο είναι ένα από τα νέα στοιχεία πού εισάγεται με τον ορισμό της έννοιας στην Α΄ Λυκείου, γίνεται ιδιαίτερη προσπάθεια να αποσαφηνιστεί ο ρόλος του. Το f(x) ορίζεται ως *η τιμή της f στο x* , και ο σχηματισμός της εικόνας του συμβόλου στο μυαλό του μαθητή γίνεται μέσω του παρακάτω παραδείγματος: *«η συνάρτηση $f(x)= x^2-4x+7$ θα μπορούσε να έχει τη μορφή $f(\ ) = (\ )^2- 4 (\ ) +7$»* όπου μέσα από αυτό αναδεικνύεται ο διαδικαστικός ρόλος του συμβόλου f, ο οποίος συνεπάγεται την κατανόηση του ρόλου του f ως τον υποδοχέα των τιμών του x και το έναυσμα για πράξεις.

Στη συνέχεια στην παράγραφο 6.2 διδάσκεται πιο αναλυτικά η γραφική παράσταση συνάρτησης, η οποία ορίζεται ως το σύνολο των σημείων M(x,f(x)), με $x \in A$. Έπειτα δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στη κατανόηση του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, καθώς και στην έννοια του τεταρτημορίου και των συμμετρικών σημείων.





Καρτεσιανές συντεταγμένες- Ιδιότητες τεταρτημορίων

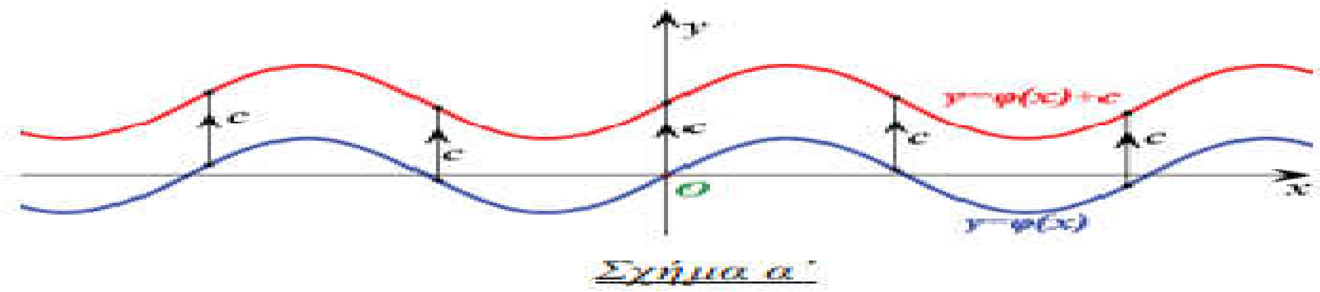
(Σχήμα 8)

Στην επόμενη παράγραφο 6.3 μελετάται η συνάρτηση f(x)= αx+β με τις ιδιότητες της. Οι μαθητές κατανοούν καλύτερα την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης (λ), την εύρεση σημείων τομής με τους άξονες x'x και y'y καθώς τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών. Ορισμένες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου προτείνεται να γίνουν με τη βοήθεια του Μαθηματικού Λογισμικού Geogebra, πιο αναλυτικά:

Ασκήσεις Α' Ομάδας σελίδα 164 η άσκηση 3 και η άσκηση 7.

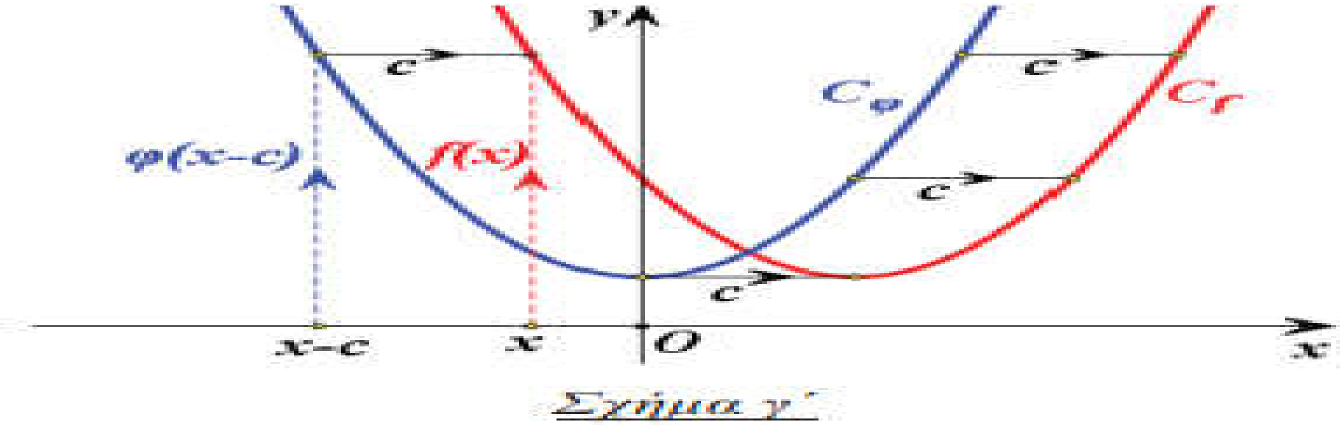
Ασκήσεις Β' Ομάδας σελίδας 166 η άσκηση 2, η άσκηση 4 και η άσκηση 5.

Στην παράγραφο 6.4 οι μαθητές επανέρχονται στη μελέτη της κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης μίας γραφικής παράστασης. Στόχος είναι οι μαθητές να ξεφύγουν από την εικόνα που έχουν διαμορφώσει για το σύμβολο f, αυτής δηλαδή του υποδοχέα τιμών. Για να κατανοήσουν τις μετατοπίσεις που εκφράζουν οι συναρτήσεις f(x)=φ(x)+c και f(x)=φ(x-c) πρέπει να αντιληφθούν το σύμβολο f(x) ταυτόχρονα ως αριθμό και ως μία νοητή διαδικασία. Πρέπει δηλαδή να κατανοήσουν ότι το f(x) είναι η τεταγμένη του σημείου (x,f(x)).



Κατακόρυφη μετατόπιση συνάρτησης

(Σχήμα 9)



Οριζόντια μετατόπιση συνάρτησης

(Σχήμα 10)

Ενώ τέλος στην τελευταία παράγραφο 6.5 έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις έννοιες της μονοτονίας, των ακρότατων και των συμμετριών της συνάρτησης, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη μελέτη μιας συνάρτησης.

3.3 Διδασκαλία της συνάρτησης y= α x + β με την χρήση νέων τεχνολογιών

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως για την επίλυση ορισμένων δραστηριοτήτων-ασκήσεων προτείνεται η χρήση του Μαθηματικού Λογισμικού Geogebra:

<u>Ασκήσεις Α’ Ομάδας σελίδα 164</u>

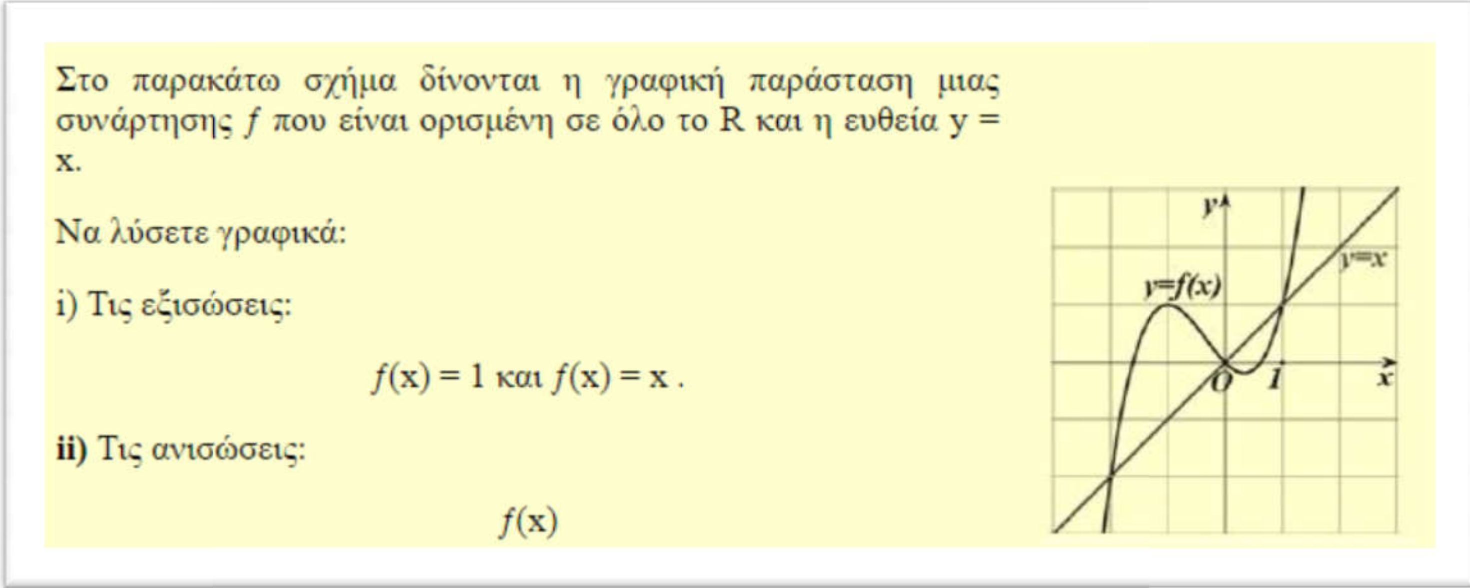
<u>Άσκηση 3</u>

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

i. Έχει κλίση α = -1 και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,2).
ii. Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω = 45° και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Β(0,1).
iii. Είναι παράλληλη με την ευθεία y = 2x - 3 και διέρχεται από το σημείο Α (1,1).

Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 25)

Άσκηση 7


Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το R και η ευθεία y = x.

Να λύσετε γραφικά:

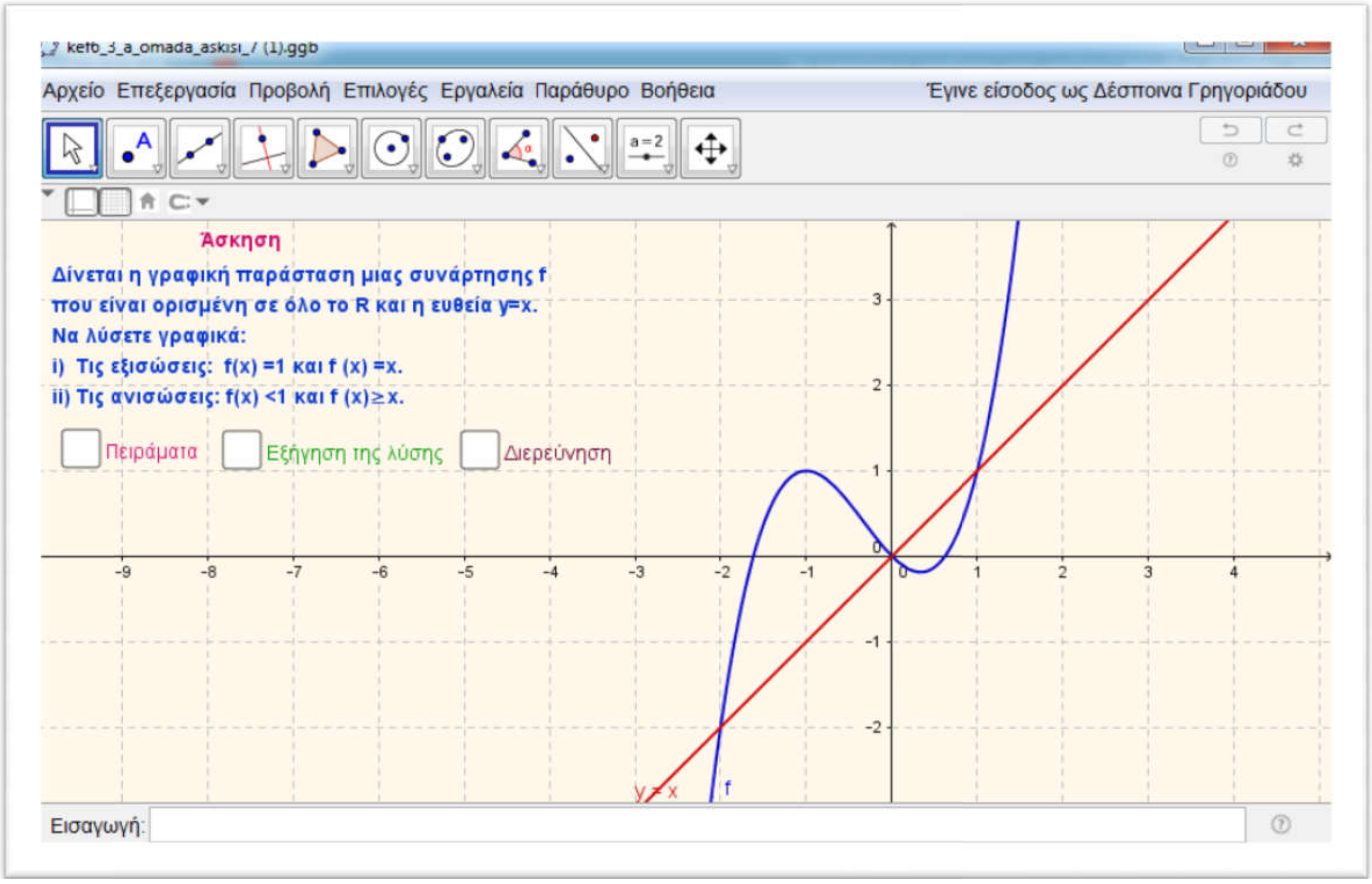
i) Τις εξισώσεις:

$$f(x) = 1 \text{ και } f(x) = x .$$

ii) Τις ανισώσεις:

$f(x)$

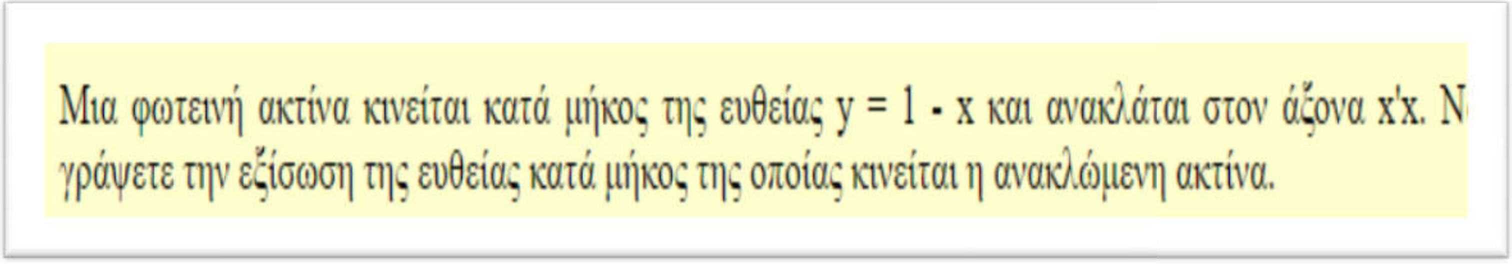
Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 26)



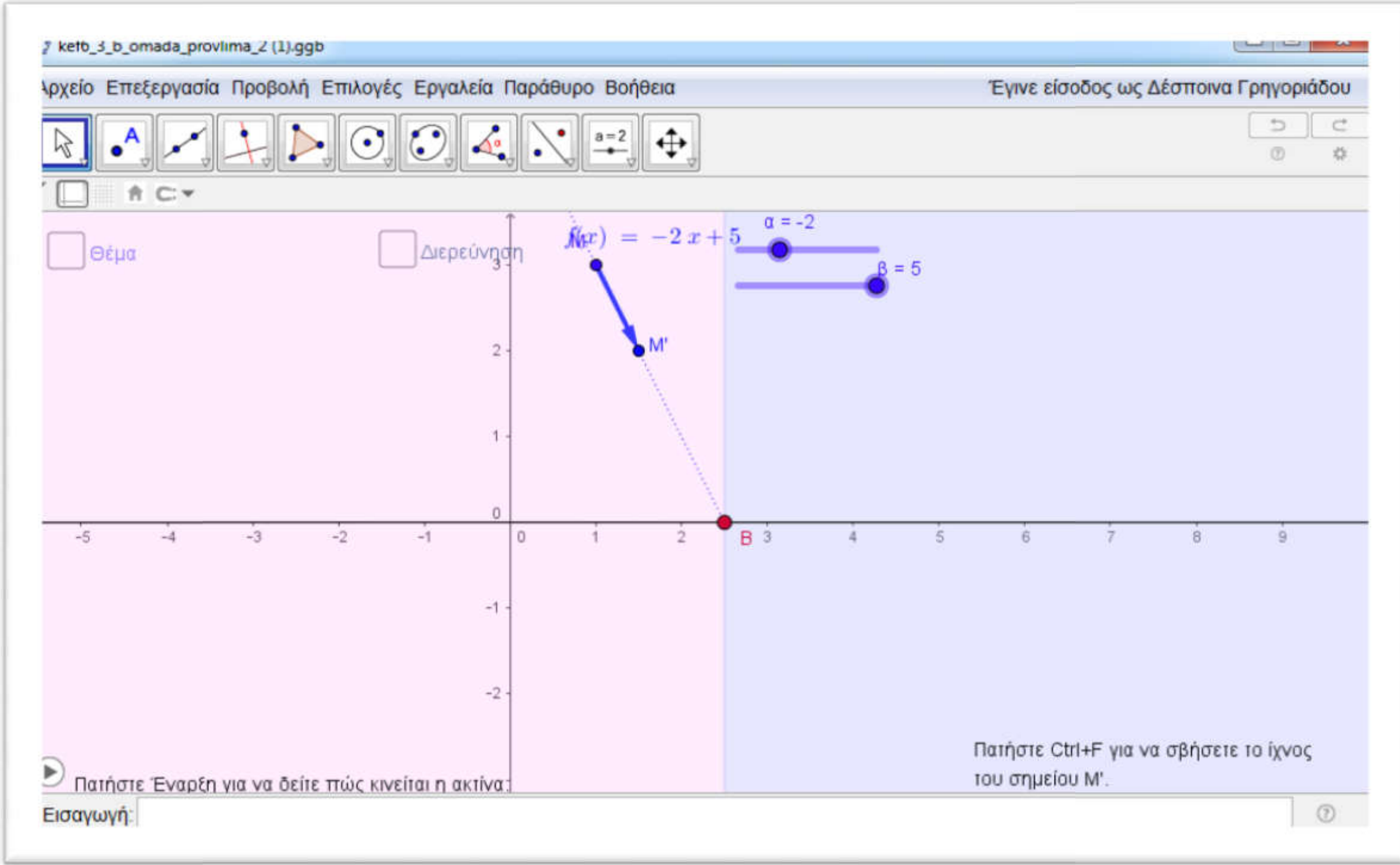
Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 27)

Ασκήσεις Β' Ομάδας σελίδα 166

Άσκηση 2

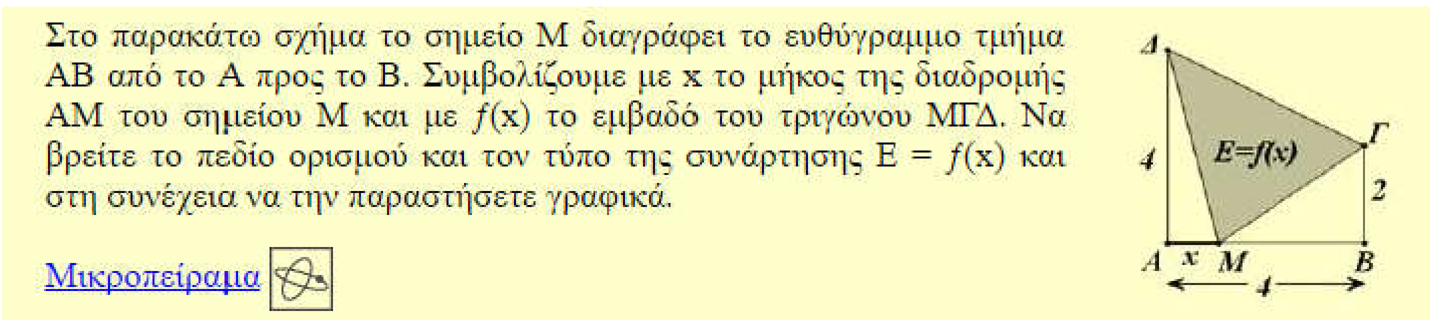


Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας y = 1 - x και ανακλάται στον άξονα x'x. N
γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.



Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 28)

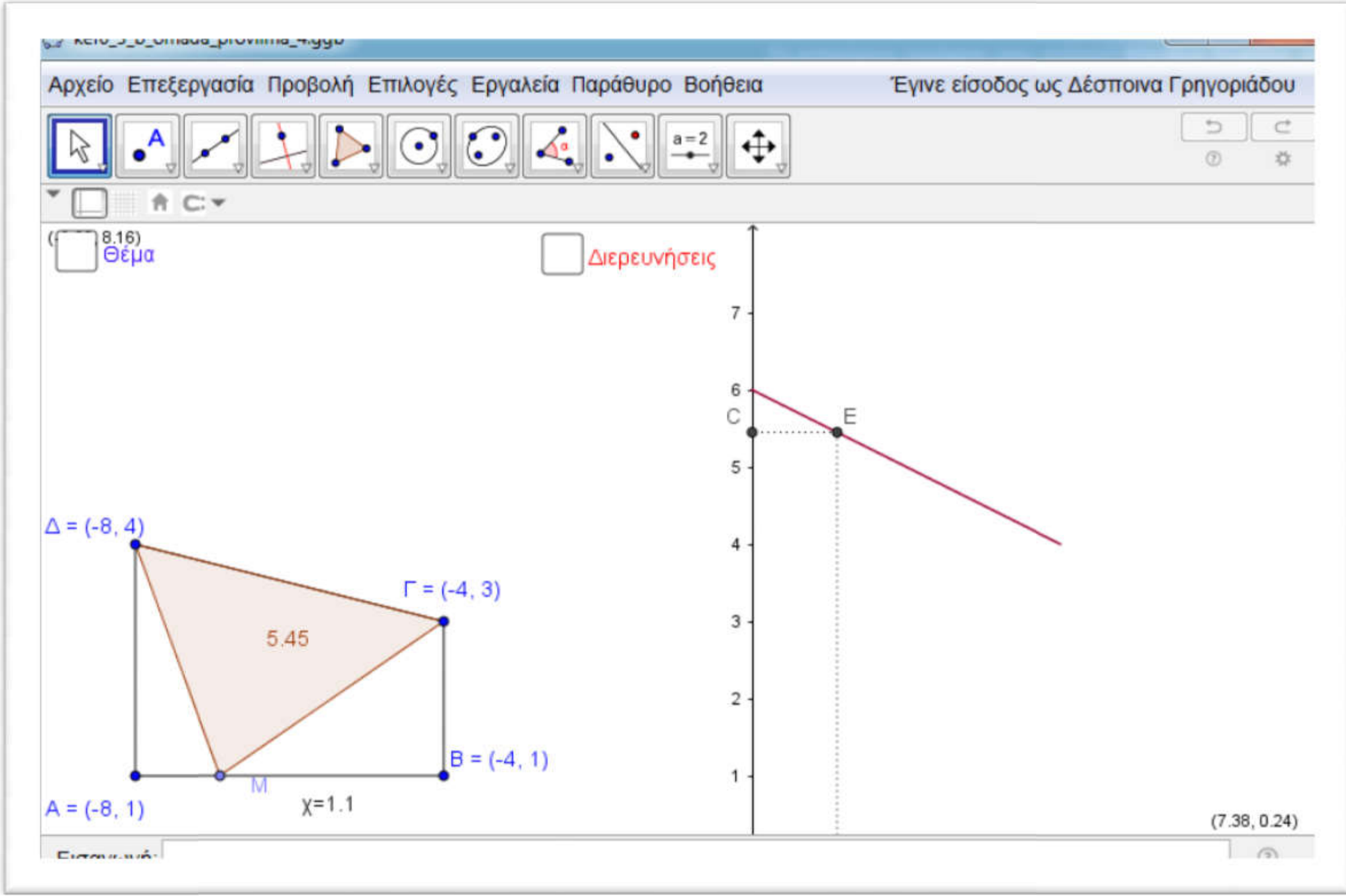
Άσκηση 4



Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου ΜΓΔ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης Ε = $f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

Μικροπείραμα

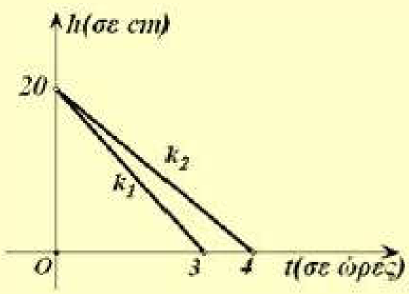
Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 29)



Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 30)

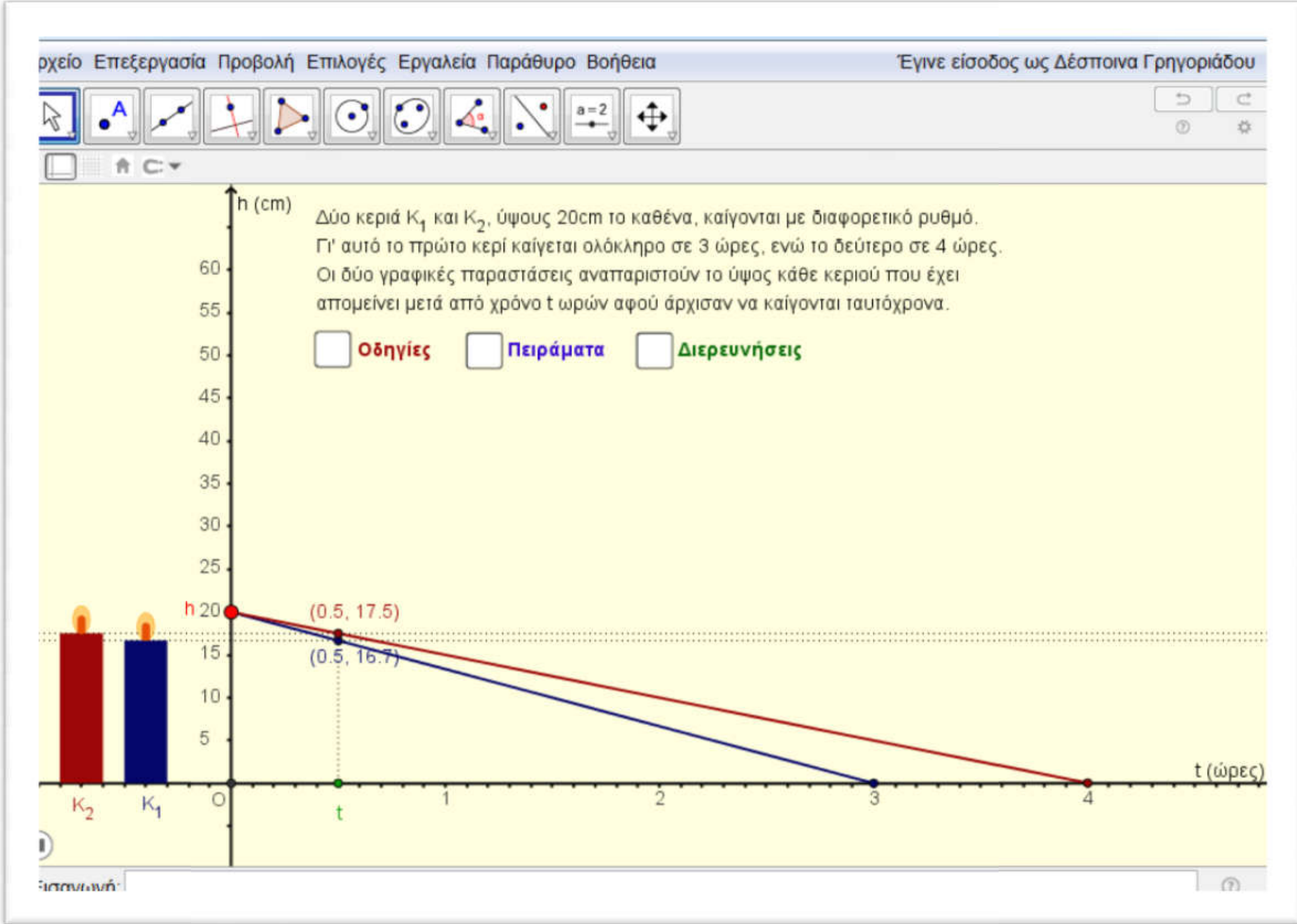
Άσκηση 5

Δύο κεριά Κ1 και Κ2, ύψους 20cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών Κ1 και Κ2, συναρτήσει του χρόνου t, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k1 και k2 του παρακάτω σχήματος.



i. Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, τα ύψη των κεριών Κ1 και Κ2 αντιστοίχως.
ii. Να βρείτε πότε το κερί Κ2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί Κ1.
iii. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ. Τι παρατηρείτε;

Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 31)



Προτεινόμενη άσκηση με χρήση λογισμικού Geogebra
(Εικόνα 32)

3.4 Οι δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών στην κατανόηση της συνάρτησης

Στην πορεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης. Η έννοια της συνάρτησης είναι αφηρημένη και αποδεικνύεται ότι είναι μια από τις πιο δύσκολες έννοιες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά αφού πολλά κεφάλαια συνδέονται με αυτήν. Η κατανόηση της μας βοηθάει να αντιληφθούμε και άλλες έννοιες καλύτερα όπως τα συστήματα, τα πολυώνυμα κ.λπ. Ωστόσο οι μαθητές δυσκολεύονται στην ερμηνεία διαγραμμάτων και στο χειρισμό συμβόλων όπως f(x), f(x+α) κ.λπ. Σύμφωνα με τον Gerson (2008) οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται κατά τη μετάβαση από μία αναπαράσταση της συνάρτησης σε μία άλλη. Είναι δε αξιοσημείωτο ότι, ακόμα και όταν οι μαθητές μπορούν να μεταβούν με ευκολία από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, συχνά δυσκολεύονται να μεταφέρουν τις πληροφορίες που έχουν από τη μία αναπαράσταση ως γνώση για μια άλλη αναπαράσταση. Για παράδειγμα, στη γραμμική συνάρτηση y=αx+β, ενώ οι μαθητές, όταν έχουν τον τύπο αναφέρουν ότι το α αποτελεί την κλίση της ευθείας, ωστόσο δεν συσχετίζουν την κλίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η συνάρτηση με τον άξονα Οx. Στην πραγματικότητα οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις αναπαραστάσεις μίας συνάρτησης ως ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, συναντούν δυσκολία στη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων: τύποι, γραφήματα, πίνακες τιμών, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων. Αυτό οφείλεται στα επίπεδα πολυπλοκότητας και στις πολυάριθμες υπό-έννοιες που συνδέονται με την έννοια αυτή, στην έλλειψη θεωρητικού πλαισίου, στη δυσκολία των θεωρητικών της μοντέλων και στους τρόπους διδακτικής μεταφοράς της στην τάξη. Είναι γενικά παραδεκτό ότι η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι σε μεγάλο βαθμό αποκομμένη από τις εμπειρίες των παιδιών, με αποτέλεσμα οι έννοιες να μη βρίσκουν κάποιο προηγούμενο εννοιολογικό υπόστρωμα για να στηριχτούν.

Κατά τη Sierpinska (1992) πολλές από τις δυσκολίες που φέρει η έννοια συνάρτηση οφείλονται σε ελλείψεις από προαπαιτούμενες μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες των μαθητών καθώς και στις παρανοήσεις ή εννοιολογικές αντιλήψεις τους. Υποστηρίζει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις παρακάτω δυσκολίες στην κατανόηση της συνάρτησης κατά τη διδασκαλία της:

- Το ασυνείδητο σχήμα σκέψης που αναφέρεται στις αλλαγές του κόσμου ως φαινόμενα και χωρίς να επικεντρώνεται στο πως τα πράγματα αλλάζουν, παραγνωρίζοντας το τι αλλάζει, δηλαδή τις παραμέτρους της αλλαγής. Μια τέτοια στάση βλέπει κατά ποιοτικό τρόπο τον κόσμο και δεν στέκεται στις ποσοτικές σχέσεις.
- Η σκέψη που κατά πρωταρχικό τρόπο αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στο χωρισμό σε σταθερές και άγνωστες ποσότητες οδηγεί συχνά στην ιδέα της εξίσωσης και όχι στη συνάρτηση.
- Η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.
- Η διάκριση μεταξύ της χρήσης του αριθμού και της ποσότητας. Αυτό εν γένει οφείλεται σε μια περιορισμένη κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
- Η εντύπωση ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν αναλυτικό τύπο.
- Το πρόβλημα μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης, συμβολική, γραφική, με πίνακα τιμών κ.λπ.
- Άλλα εμπόδια, όπως η εύκολη εντύπωση της συνάρτησης ως 1-1 και η δυσκολία της κατανόησης του πολλά – ένα.

Μια ακόμη δυσκολία, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών που έχουν σχέση με τις συναρτήσεις καθώς και της μετάφρασής τους από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη, είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η διδακτική μεταφορά τους στην τάξη. Συγκεκριμένα, το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου. Πιο αναλυτικά συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. Οι ερευνητές Vinner & Dreyfus (1989) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι:

- Οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν τύπο. Αν δίνονται πολλαπλοί τύποι συναρτήσεων, τότε έχουμε πολλές συναρτήσεις.
- Μια συνάρτηση υπάρχει αν υπάρχει ένας τύπος που την περιγράφει.

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να έχει «καλή συμπεριφορά» (συμμετρικότητα, ομαλότητα, συνεχώς να αυξάνεται).
- Πρέπει να υπάρχει μια πράξη στο x που να αποδίδει το y, αυτό αποκλείει άλλου είδους σχέσεις.
- Ο καθορισμός του πεδίου ορισμού δεν αποτελεί μέρος του ορισμού της συνάρτησης.

Στη συνέχεια ο Vinner (1992) και οι Dubinsky & Harel (1992) αναφέρουν κάποια άλλα λάθη που κάνουν οι μαθητές :

- Σχετικά με τον χειρισμό θεωρούν για μια κατάσταση η οποία ερμηνεύεται ως συνάρτηση, πρέπει να περιλαμβάνει σαφείς εκτελεστικούς χειρισμούς. Για παράδειγμα, σύμφωνα με την αντίληψη αυτή, ένας πίνακας με δύο στήλες δεδομένων, ίσως δεν ερμηνεύεται ως αντιπροσωπευτικός τύπος συναρτήσεως γιατί δεν γίνεται σαφής διάκριση των εισαγομένων δεδομένων ανεξάρτητης μεταβλητής στην μια στήλη από τα εξαγόμενα δεδομένα στην άλλη στήλη.
- Η ποσότητα : Οι μεταβλητές πρέπει να είναι αριθμοί.
- Η συνέχεια : Μια γραφική παράσταση η οποία αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής.

Ο Gerson (2008) υποστηρίζει ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ του μαθηματικού ορισμού μίας έννοιας και του τρόπου με τον οποίο ένας μαθητής κατανοεί την έννοια αυτή. Η εικόνα της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να περιλαμβάνει τη διαδικασία παραγωγής στοιχείων «βάζεις έναν αριθμό και σου βγάζει κάποιον άλλο» ή ότι «αν φέρεις κάθετη στον άξονα x’x τέμνει τη γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο». Μπορεί επίσης η έννοια της συνάρτησης για μερικούς μαθητές να ταυτίζεται με το σύμβολο «f(x)». Είναι πολύ πιθανό η εικόνα μίας έννοιας στο μυαλό του μαθητή να μην περιλαμβάνει το μαθηματικό ορισμό της έννοιας. Ακολούθως δυσκολία σημειώνεται και στο πολλαπλό τρόπο αναπαράστασης τους. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στη μετάφραση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και στη σύνδεσή της με άλλες αναπαραστάσεις. Συχνά οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με παρόμοιες δυσκολίες όπως κατά την αναπαράσταση μιας συνάρτησης με πίνακα τιμών, ενώ δυσκολία παρατηρείτε και στην ερμηνεία γραφημάτων καθώς και στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να χειρίζονται τα γραφήματα που έχουν σχέση με τις συναρτήσεις (Fey, 1984).

Μια άλλη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές σύμφωνα με την Sajka (2003) οφείλεται στη διπλή φύση της συνάρτησης, δηλαδή μπορεί να γίνει αντιληπτή είτε δομικά ως ένα αντικείμενο και συγκεκριμένα ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη είτε λειτουργικά ως μια υπολογιστική διαδικασία κατά την οποία δίνοντας τιμή σε μία μεταβλητή (x) εξάγεται η τιμή μιας ποσότητας που εξαρτάται από τη μεταβλητή αυτή (f(x)). Για παράδειγμα, ο τύπος της συνάρτησης y=f(x)=2x+3 μας λέει συγχρόνως δύο πράγματα: πρώτον, πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης (του y) για συγκεκριμένη τιμή του x (διαδικασία) και δεύτερον, περιλαμβάνει το σύνολο των ζευγών (x, y) για ολόκληρο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (αντικείμενο). Έπειτα η Sierpinska (1992) αναφέρει ότι ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει τη μάθηση των συναρτήσεων είναι η γλώσσα που χρησιμοποιείται. Το σύμβολο f(x) χρησιμοποιείται για να περιγράψει το όνομα της συνάρτησης, αλλά και την τιμή της συνάρτησης με αποτέλεσμα να προκαλέσει σύγχυση σε μη εξοικειωμένους με αυτή την έννοια μαθητές. Σε αυθόρμητες περιπτώσεις οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικό συμβολισμό και διαφορετική γλώσσα. Αυτό επιβεβαιώνεται από τον επόμενο ισχυρισμό της Sierpinska:

Για να πουν ότι η τιμή μιας συνάρτησης στο 2 είναι 3 οι μαθητές θα έγραφαν: «x(2)=3». Αυτό θα διαβαζόταν: « θέσε το 2 στη θέση του x στον τύπο της συνάρτησης. Παίρνει τότε τιμή 3». Η έννοια της τιμής της συνάρτησης είναι στενά συνδεδεμένη με την δραστηριότητα των μαθητών να υπολογίζουν την τιμή εάν δοθεί ο τύπος. Για να εκφράσουν το «f(x)» αυτοί θα έλεγαν: « θέσε 2 στον τύπο της συνάρτησης και υπολόγισε. Τότε παίρνεις έναν αριθμό».

Στην πορεία κάποιες από τις δυσκολίες που φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές, αντικατοπτρίζονται στην έννοια της μεταβλητής (Ursini & Trigueros, 2001). Οι Wagner, Rachlin και Jensen (1984) σημειώνουν ότι ο ρόλος της μεταβλητής δεν είναι κατανοητός σε βάθος από τους μαθητές. Αυτές οι έννοιες είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή, το πεδίο ορισμού κ.λπ. Πολλοί ερευνητές έχουν παρατηρήσει ότι οι μαθητές φαίνεται να εμφανίζουν δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης για προβλήματα στα οποία αλλάζει μόνο το όνομα της μεταβλητής (Eisenberg, 1991). Στα προβλήματα αυτά διατηρώντας όλα τα στοιχεία απαράλλακτα και διαφοροποιώντας μόνο την ονομασία των μεταβλητών (η μεταβλητή να ονομαστεί αντί για x) παρατηρήθηκε ότι ένα μέρος των μαθητών διατηρεί πολλές ασάφειες στην προσέγγιση του προβλήματος και το λύνει από την αρχή, αντιμετωπίζοντάς το ως ένα εντελώς διαφορετικό πρόβλημα. Στη συνέχεια παρατηρείται δυσκολία από τους μαθητές κατά τη μετάφραση μιας γραφικής παράστασης καθώς και κατά τον χειρισμό συμβόλων που σχετίζονται με τη συνάρτηση όπως f(x), x → y, sin (x + t) (Sierpinska, 1992).

Εδώ προκύπτει, το εξής παιδαγωγικό ερώτημα: «και πως θα αντιμετωπιστούν όλες αυτές οι δυσκολίες στην τάξη;». Ως γνωστό, πολλοί έχουν προσπαθήσει να απαντήσουν σε αυτό το ερώτημα με διάφορους τρόπους, χρησιμοποιώντας λύση προβλήματος (problem solving), αριθμομηχανές και ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Αυτές οι παιδαγωγικές λύσεις πειραματίστηκαν μερικές φορές ακόμα και στην τάξη και αυτό επηρέασε αναμφισβήτητα την τελική τους μορφή.

Οι Artigue & Didirem (1997) θεωρούν ότι τα κριτήρια στα οποία βασίζονται οι μαθητές ώστε να διακρίνουν αν μία σχέση είναι συνάρτηση ή όχι, διαφέρουν από τον τυπικό ορισμό της έννοιας και αυτό ισχύει ακόμα και για μαθητές που φαίνεται να γνωρίζουν τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης. Αυτά τα κριτήρια εξαρτώνται περισσότερο από τυπικά παραδείγματα που λειτουργούν ως πρότυπα (prototypes) και από συσχετίσεις όπως η συσχέτιση συνάρτηση-τύπος ή συνάρτηση-καμπύλη. Έτσι, το ίδιο αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση ή όχι, ανάλογα με την αναπαράστασή του. Τα κριτήρια των μαθητών για τον καθορισμό μιας συναρτησιακής κατάστασης βασίζονται συνήθως σε συμβολικές εκφράσεις. Για παράδειγμα, η συνάρτηση με το σταθερό εξαγόμενο 4 δεν θα αναγνωρισθεί ως συνάρτηση εάν παρουσιάζεται με την αλγεβρική έκφραση $y=4$ διότι σύμφωνα με την αντίληψη : «συνάρτηση είναι τύπος» πρέπει να υπάρχει μια μεταβλητή x η οποία είναι συμβολικώς απούσα με αυτή την έκφραση. Ωστόσο, η ίδια συνάρτηση είναι πιθανόν να αναγνωρίζεται εάν παρουσιάζεται σε μια γραφική παράσταση, εξ αιτίας της αντίληψης «συνάρτηση είναι καμπύλη».

Παρατηρείται ότι οι μαθητές οι οποίοι δεν έχουν αφομοιώσει την έννοια της συναρτήσεως συνήθως συνδέουν τις συναρτήσεις και τις εξισώσεις μόνο δια μέσου του τύπου. Για παράδειγμα, οι μαθητές ίσως βλέπουν την δευτεροβάθμια συνάρτηση και την αναγνωρίζουν απλώς συνδέοντάς την με την εξίσωση, για την οποία γνωρίζουν τους τύπους επιλύσεως. Αυτή η σύνδεση βασίζεται μόνο στην ομοιότητα και όχι στη γνώση της σχέσης μεταξύ των δύο. Με άλλα λόγια, οι συγκεκριμένοι μαθητές θεωρούν την εξίσωση ως μια συλλογή στοιχείων, τα οποία αναγνωρίζουν δια των σχέσεων χώρου ή χρόνου. Η βασική αιτία αυτής της δυσκολίας είναι ότι οι μαθητές εισάγονται βιαστικά στον χειρισμό συμβόλων, στις διαδικασίες και στις λύσεις προβλημάτων. Το χειρότερο από την πλευρά των μαθητών είναι ότι ο μόνος σκοπός αυτού του είδους της δραστηριότητας είναι η εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων, τα οποία συμπίπτουν με αριθμούς και παραστάσεις καταχωρημένες στο τέλος του βιβλίου υπό τον τίτλο «απαντήσεις».

Μετέπειτα για την έννοια της συνάρτησης οι Moschkovich J., Schoenfeld A. H., Arcavi A. (1993) διακρίνουν δύο διαφορετικές διαστάσεις:

- τη διάσταση διαδικασίας και
- τη διάσταση αντικειμένου.

Σύμφωνα με τη διάσταση διαδικασίας, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων και τεταγμένων (x και y). Πιο αναλυτικά αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x και προσπαθούν να βρουν λύση σε μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης.

Σύμφωνα με τη διάσταση αντικειμένου, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως μια οντότητα. Συγκεκριμένα οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη διάσταση αυτή, αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης από τη μελέτη της συμβολικής της μορφής και κάνουν παρατηρήσεις για τις τιμές και το πρόσημο των συντελεστών της (Knuth, 2000). Η αντιμετώπιση της συνάρτησης ως διάσταση αντικειμένου αναφέρεται και ως «ποιοτική» διάσταση των συναρτήσεων. Από αυτή την οπτική οι συναρτήσεις αντιμετωπίζονται ολιστικά, ως ανεξάρτητες οντότητες, ως αντικείμενα στα οποία οι πράξεις όπως παραδείγματος χάρη η σύνθεση, μπορούν να εκτελεστούν.

Εν κατακλείδι, η Sierpinska (1992) τονίζει ότι για την κατανόηση της συνάρτησης χρειάζεται ευελιξία διότι, για παράδειγμα, το f(x) αντιπροσωπεύει και το όνομα μιας συνάρτησης, αλλά και την τιμή της συνάρτησης f. Η ερμηνεία του συμβόλου αυτού εξαρτάται από το πλαίσιο μέσα στο οποίο αναφέρεται και είναι κάτι που μπορεί να μπερδέψει τους αρχάριους μαθητές. Γενικότερα σε σχέση με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών υπάρχουν δύο συμπληρωματικοί τρόποι για να εργαστούμε: να μελετήσουμε τους παλιούς τρόπους γνώσης που μας εμποδίζουν από τη γνώση με ένα νέο τρόπο (ενέργειες υπέρβασης των εμποδίων) και να κοιτάξουμε μπροστά μας ώστε να περιγράψουμε την αλλαγή με νέους τρόπους γνώσης (ενέργειες κατανόησης). Οι τρόποι αυτοί είναι συμπληρωματικοί γιατί κανένας από τους δύο δεν δίνει μια πλήρη περιγραφή της μετάβασης ενώ και οι δύο είναι υποχρεωτικοί για να περιγραφεί το τι έχει συμβεί. Αν το εμπόδιο ή η δυσκολία έρχεται σε αντίθεση με το νέο τρόπο γνώσης, τότε είναι ασυμβίβαστο με αυτήν. Ωστόσο στην περίπτωση που ένα εμπόδιο δεν είναι μόνο δικό μας ή ίσως και λίγων ακόμη ανθρώπων αλλά είναι πιο διαδεδομένο, ή είναι πιο διαδεδομένο κάποια χρονική στιγμή ή σε κάποιο πολιτισμό τότε καλείται επιστημολογικό εμπόδιο. Κάθε επιστημολογικό εμπόδιο έχει και μια αντίστοιχη ενέργεια κατανόησης. Ένα επιστημολογικό εμπόδιο δεν είναι υποχρεωτικά κάτι αρνητικό στην εννοιολογική ανάπτυξη. Η φύση του είναι τέτοια που δεν μπορεί να αποφευχθεί και ο ρόλος του στη σκέψη μας είναι σημαντικός. Κατά την Sierpinska οι ενέργειες κατανόησης που πρέπει να γίνουν και τα επιστημολογικά εμπόδια που προκαλούν διάφορες αντιλήψεις είναι τα εξής:

Οι ενέργειες κατανόησης είναι:

- Προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα προς επίλυση.
- Προσδιορισμός των κανονικοτήτων στις σχέσεις ανάμεσα στις αλλαγές ως έναν τρόπο για να ασχοληθούμε με αυτές τις αλλαγές.
- Προσδιορισμός των αντικειμένων των αλλαγών στη μελέτη των αλλαγών.
- Διάκριση μεταξύ δύο ειδών μαθηματικής σκέψης: τη μία με όρους γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων και την άλλη με όρους μεταβλητών και σταθερών ποσοτήτων.
- Διάκριση μεταξύ των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών.
- Γενίκευση και σύνθεση της έννοιας του αριθμού.
- Διάκριση μεταξύ αριθμού και ποσότητας.
- Σύνθεση των εννοιών του νόμου και της έννοιας της συνάρτησης ειδικότερα, η επίγνωση της πιθανής χρήσης των συναρτήσεων στη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών ή άλλων μεγεθών.
- Διάκριση μεταξύ μιας συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των κανόνων της.
- Διάκριση μεταξύ μαθηματικών ορισμών και περιγραφών των αντικειμένων.
- Σύνθεση της γενικής έννοιας της συνάρτησης ως αντικείμενο.
- Διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης.
- Διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της ακολουθίας.

- ❖ Διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου της καμπύλης και των ευθυγράμμων τμημάτων που επιτελούν κάποια λειτουργία της καμπύλης.
- ❖ Διάκριση μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων.
- ❖ Σύνθεση των διαφορετικών τρόπων που δίνονται οι συναρτήσεις.
- ❖ Γενίκευση της έννοιας της μεταβλητής.
- ❖ Σύνθεση των ρόλων της έννοιας της συνάρτησης και αιτιότητας στην ιστορία της επιστήμης: επίγνωση του γεγονότος ότι οι έρευνες για τις συναρτησιακές και αιτιακές σχέσεις είναι και οι δύο εκφράσεις της ανθρώπινης προσπάθειας για την κατανόηση και ερμηνεία των αλλαγών μέσα στον κόσμο.
- ❖ Διάκριση ανάμεσα στις έννοιες των συναρτήσεων και αιτιακών σχέσεων.

Τα επιστημολογικά εμπόδια είναι:

- ❖ Τα μαθηματικά δεν ενδιαφέρονται για πρακτικά προβλήματα.
- ❖ Οι τεχνικές υπολογισμού που χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθούν πίνακες αριθμητικών σχέσεων δεν αξίζουν να είναι αντικείμενο μελέτης στα μαθηματικά.
- ❖ Θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα. Εστίαση στο πως τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας αυτές τις αλλαγές.
- ❖ Σκέψη με όρους εξισώσεων και αγνώστων που πρέπει να υπολογιστούν από αυτές.
- ❖ Θεώρηση της τάξης των μεταβλητών ως άσχετης.
- ❖ Μια ετερογενής αντίληψη του αριθμού.
- ❖ Μια Πυθαγόρεια φιλοσοφία του αριθμού: όλα είναι αριθμός.
- ❖ Οι νόμοι της Φυσικής και οι συναρτήσεις στα μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό, δηλαδή ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές της σκέψης.
- ❖ Η αναλογία είναι ένα προνομιούχο είδος σχέσης.
- ❖ Ισχυρή πεποίθηση στη δύναμη των τυπικών πράξεων στις αλγεβρικές εκφράσεις.
- ❖ Μόνο σχέσεις που μπορούν να περιγραφούν με αναλυτικούς τύπους αξίζουν να ονομαστούν συναρτήσεις.
- ❖ Ο ορισμός είναι η περιγραφή ενός αντικειμένου που είναι κατανοητό και με άλλους τρόπους, μέσω των αισθήσεων και της διορατικότητας. Ένας ορισμός δεν καθορίζει το αντικείμενο, αλλά το αντικείμενο καθορίζει τον ορισμό. Ο ορισμός δεν είναι λογικά δεσμευτικός.
- ❖ Οι συναρτήσεις είναι ακολουθίες.
- ❖ Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι ευθύγραμμα τμήματα (όχι αριθμοί).
- ❖ Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο της συναρτησιακής σχέσης. Δεν χρειάζεται να είναι πιστό και μπορεί να περιλαμβάνει σημεία (x,y) στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται στο x.
- ❖ Οι αλλαγές μιας μεταβλητής είναι αλλαγές μέσα στο χρόνο.

Διαπιστώθηκε βέβαια πως δεν έχουν ξεπεραστεί όλες οι αυτές οι δυσκολίες που αφορούν την κατανόηση της έννοιας συνάρτηση. Τα προβλήματα που υπήρχαν έχουν ελαττωθεί, αλλά δεν έχουν εξαλειφθεί. Για αυτό η Sierpinska προτείνει ένα διδακτικό σχέδιο, το οποίο πρέπει να στηρίζεται σε μια δομή εξωτερική και ακόμη να βασίζεται σε ένα συλλογισμό αρχικά για την κατανόηση γενικά μιας μαθηματικής έννοιας και στη συνέχεια ειδικά για τις συναρτήσεις. Επιπλέον προτείνει σε πρώτο στάδιο οι συναρτήσεις να παρουσιάζονται ως μοντέλα σχέσεων, αφού έτσι πρωτοεμφανίστηκαν στην ιστορία. Κάτι τέτοιο βρίσκει σύμφωνη και την Sfard (1995) που ισχυρίζεται ότι αν εξετάσουμε προσεκτικά τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, θα παρατηρήσουμε ότι σε κάποιο βαθμό η οντογένεση αναπαράγει τη φυλογένεση. Δηλαδή, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει ένα άτομο στα διάφορα στάδια ανάπτυξης της γνώσης είναι ανάλογες με εκείνες τις δυσκολίες που συνάντησαν οι πρώτοι δημιουργοί στη φάση της αρχικής οικοδόμησης της γνώσης. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να παριστάνουν τις συναρτήσεις και με τους τρεις τρόπους [τύπο, πίνακα τιμών, γραφική παράσταση(Fey, 1984)], αλλά και να μπορούν να μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη (O' Challaghan, 1998).

3.5 Τροχιές μάθησης

Οι τροχιές μάθησης αποτελούν δομικό λίθο στην ανάπτυξη του αναλυτικού προγράμματος και σχετίζονται με τους στόχους που θέτει το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Βασικές μαθηματικές έννοιες όπως οι συναρτήσεις με τις οποίες ασχολούμαστε στην παρούσα μελέτη δομούνται χρησιμοποιώντας την έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας. Η Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας περιγράφετε ως εξής: «Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία».

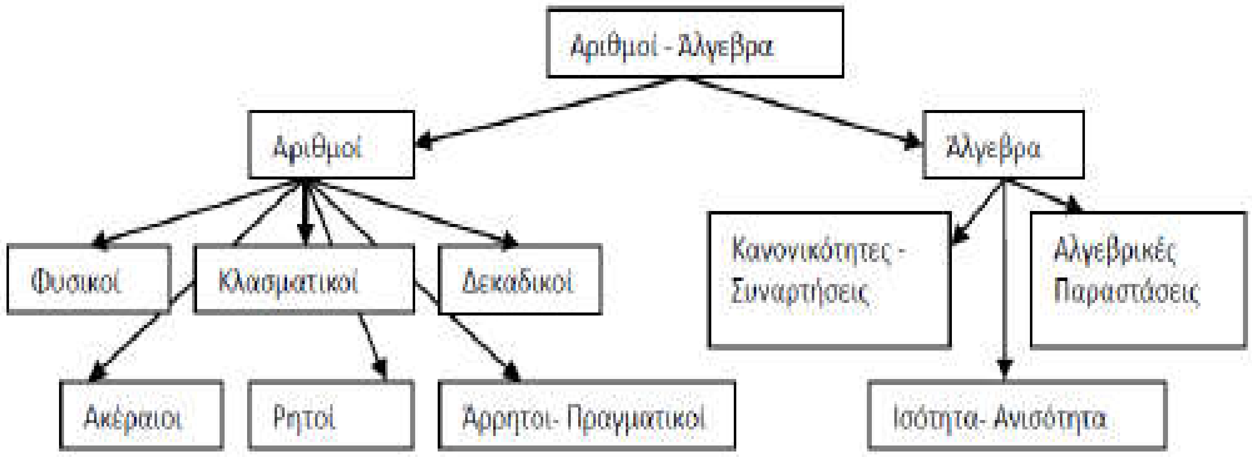
Κάθε Τροχιά Μάθησης αποτελείται από τρία (3) μέρη:

- ένα μαθηματικό στόχο
- μια διαδρομή, κατά την οποία οι μαθητές αναπτύσσονται για να επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο
- ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες, αντίστοιχες των επιπέδων σκέψης που διακρίνονται στη διαδρομή ή την χαρακτηρίζουν, οι οποίες θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν ανώτερα επίπεδα σκέψης, δηλαδή να αποκτήσουν τα απαραίτητα skills.

Αξίζει να επισημανθεί ότι, μια ΤΜΔ δεν είναι μια γραμμική, βήμα-προς-βήμα περιγραφή πορείας, όπου κάθε βήμα συνδέεται αναγκαία με το επόμενο. Σε μια ΤΜΔ, αυτό που μαθαίνεται σε μια φάση επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην αμέσως επόμενη, δηλαδή, η μαθησιακή διαδικασία εξελίσσεται σε επίπεδα.

Οι βασικές θεματικές περιοχές γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι οι εξής τρεις: Αριθμοί **–** Άλγεβρα**,** Χώρος και Γεωμετρία **–** Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά**.**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της Θεματικής Περιοχής **«**Αριθμοί**-** Άλγεβρα**»**, στην οποία ανήκει η έννοια της συνάρτησης.



Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της Θεματικής Περιοχής **«**Αριθμοί- Άλγεβρα**»**

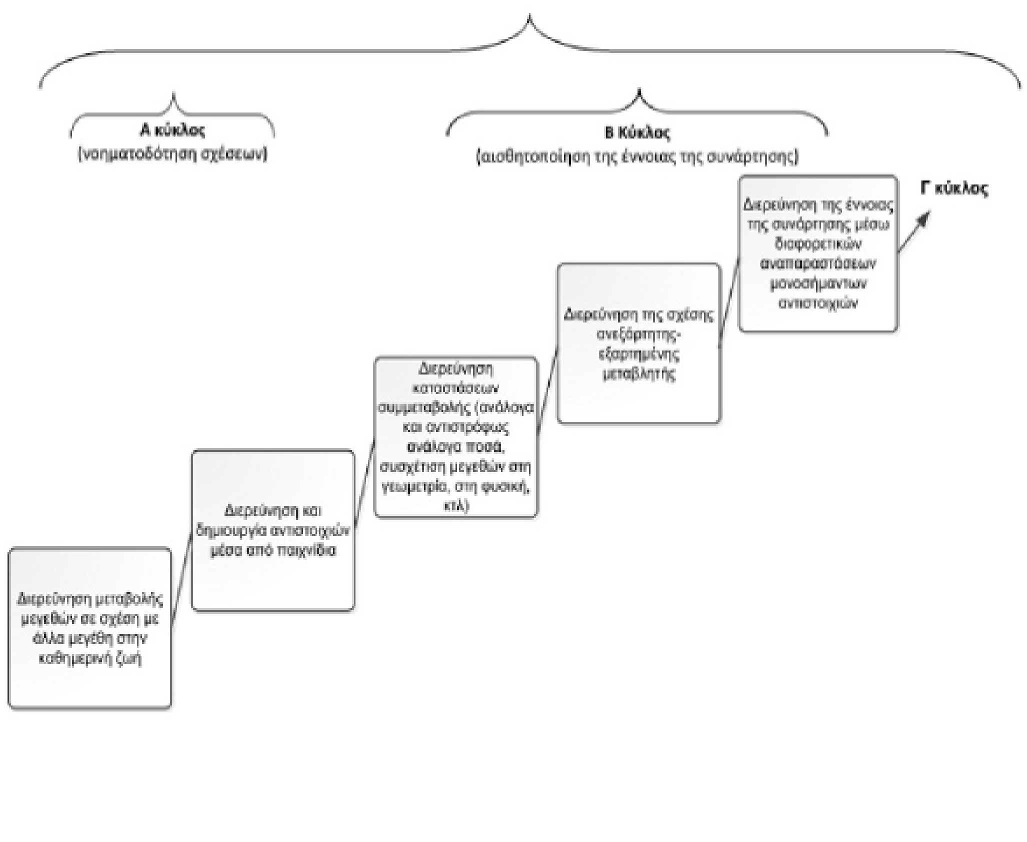
(Σχήμα 11)

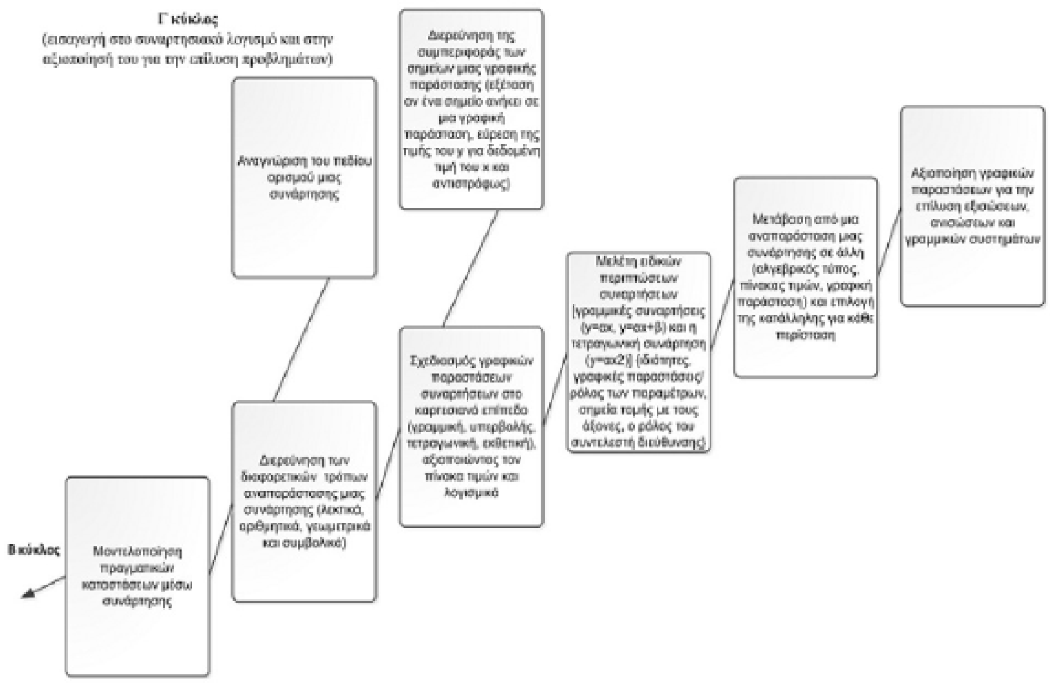
Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μία από τις δυσκολότερες μαθηματικές ιδέες για τους μαθητές. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι αυτής της δυσκολίας. Η πρώτη συνδέεται με τη συνθετότητα της έννοιας αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή, συν-μεταβολή, σύνολο και άλλες. Η δεύτερη αφορά στο γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης ενυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών αλλά και των σχολικών μαθηματικών: οι τέσσερις πράξεις, η μέτρηση στη γεωμετρία, η επίλυση εξισώσεων και άλλες τεχνικές και αλγόριθμοι μπορούν να μελετηθούν από τη σκοπιά των συναρτήσεων. Αυτό δυσκολεύει ιδιαίτερα τη διαμόρφωση ενός ενιαίου και γενικά αποδεκτού πλαισίου μάθησης για την έννοια της συνάρτησης. Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την αναγκαιότητα να αντιληφτούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο.

Η γνώση του Α.Π.Σ και της έννοιας της τροχιάς μάθησης είναι ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει τη διδασκαλία του. Επίσης οι στόχοι αυτοί αναδιαμορφώνονται ή χρησιμοποιούνται ως έχουν ή μπορούν να υποστούν τις απαραίτητες αλλαγές από τον εκπαιδευτικό ο οποίος έχει τη δυνατότητα να θέσει και καινούριους. Σε κάθε περίπτωση όμως για να τους υλοποιήσει επιλέγει δραστηριότητες και σε αυτό το σημείο κάνουν την εμφάνιση τους οι τροχιές μάθησης με έναν υποστηρικτικό ρόλο στο διδακτικό του έργο καθώς λειτουργούν σαν πηγή ιδεών και πολλές φορές συντελούν στο να ξεφεύγει ο εκπαιδευτικός από τους περιορισμούς του σχολικού εγχειριδίου. Επομένως θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η ύπαρξη των τροχιών μάθησης στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της χώρας διαμορφώνει μια πιο ελεύθερη σχέση μεταξύ εκπαιδευτικού και αναλυτικού προγράμματος. Οι τροχιές μάθησης δεν επιβάλλουν τρόπο διδασκαλίας αλλά η γνώση τους δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να παρέχει καλή μαθηματική εκπαίδευση. Ερευνητικά αποτελέσματα (Fuson, M.Carroll, & V.Drueck, 2000) δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί που είναι «πιο συνειδητοποιημένοι» και έχουν γνώση της έννοιας των τροχιών, τείνουν να χρησιμοποιούν στη διδασκαλία τους μια αντίστοιχη εννοιολογική δομή με αυτή των τροχιών μάθησης.

Τέλος, είναι σημαντικό να επισημανθούν ορισμένοι περιορισμοί και δυσκολίες στην οργάνωση της διδασκαλίας με βάση τις ΤΜΔ. Καταρχήν, είναι σαφές ότι δεν είναι πάντοτε εύκολο να οριστούν με σαφήνεια και να οργανωθούν με αποτελεσματικό τρόπο οι ΤΜΔ η μια σε σχέση με την άλλη. Επιπλέον, κατά την εργασία της διδασκαλίας στη βάση των ΤΜΔ θα πρέπει να ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα ώστε:

- ❖ Η εστίαση σε μια τροχιά να μην εμποδίζει τη θέαση των υπολοίπων.
- ❖ Οι τροχιές να επιτρέπουν τη συν-θέαση της γνωστικής, κοινωνικής και συναισθηματικής ανάπτυξης του μαθητή(αχώριστες αλλά όχι αδιάκριτες).
- ❖ Να είναι εμφανής ο τρόπος με τον οποίο οι τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και ενοποιούνται.





Σχηματική αναπαράσταση μιας ανάπτυξης της τροχιάς **«**συνάρτηση**»** σε τρεις κύκλους,

(Σχήμα 12)

Κεφάλαιο 4

4.Μεθοδολογία

4.1 Ερευνητικό πρόβλημα-Ερευνητικά ερωτήματα

Πολλές έρευνες έχουν διενεργηθεί παγκοσμίως με αφορμή την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από μαθητές διαφόρων ηλικιών, ειδικά όσον αφορά το πώς εκείνοι αντιλαμβάνονται την αριθμητική ή τη γραφική μορφή της συνάρτησης καθώς και τις επιμέρους έννοιές της (Brown, 2009,Heid, 2009). Ο κύριος προβληματισμός, που θα απασχολήσει την παρούσα έρευνα είναι να προσδιοριστεί η ικανότητα των μαθητών της Α' Λυκείου να κατανοήσουν συνολικά την έννοια και την διδακτέα ύλη της συνάρτησης καθώς και τη σχέση που έχει με τα άλλα πεδία εκτός των μαθηματικών. Συγκεκριμένα στα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία αναφέρονται οι λέξεις «οι επιμέρους έννοιες» ή απλά «οι έννοιες» οι οποίες συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης θα εννοείται: η συμπλήρωση πίνακα τιμών, ο σχεδιασμός γραφικής παράστασης, η διερεύνηση των παραμέτρων α και β στις συναρτήσεις y=αx και y=αx+β, η κατανόηση της σχέσης μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β, η συμπλήρωση πίνακα ανάλογων ποσών, η εύρεση συνάρτησης όταν ικανοποιούνται ορισμένες ιδιότητες και η εύρεση συνάρτησης από δοσμένη γραφική παράσταση. Αναλυτικά έχουμε:

- **Ερευνητικό ερώτημα 1**: Έχουν κατανοήσει οι μαθητές της Α' Λυκείου από τα προηγούμενα χρόνια τις έννοιες που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης;
- **Ερευνητικό ερώτημα 2**: Αν και κατά πόσο η χρήση μαθηματικού λογισμικού Geogebra στη διδασκαλία των συναρτήσεων σε μαθητές της Α΄ Λυκείου μπορεί να τους βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των επιμέρους εννοιών οι οποίες συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης καθώς και στην κατάκτηση της νέας γνώσης γύρω από την έννοια.
- **Ερευνητικό ερώτημα 3**: Κατανόησαν σε καλύτερο βαθμό οι μαθητές της Α΄ Λυκείου τη σχέση της συνάρτησης με τα άλλα επιστημονικά πεδία πέρα των μαθηματικών.

4.2 Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης σε μαθητές της Α' Λυκείου

Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στην πόλη Γιαννιτσά τη σχολική χρονιά 2016-2017σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου που αποτελούνταν από 20 μαθητές (17 αγόρια και 3 κορίτσια).

4.3 Σχεδιασμός διδασκαλίας-παρέμβασης

Η παρέμβαση ολοκληρώνετε σε τρία στάδια. Στην πρώτη συνάντηση (πρώτο στάδιο) η οποία πραγματοποιήθηκε στις 10 Μαρτίου του 2017 οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το pre-test το οποίο αποτελούνταν από εννέα (9) δραστηριότητες οι οποίες έλεγχαν τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών στις συναρτήσεις (παράρτημα Α). Στο δεύτερο στάδιο το οποίο έλαβε χώρα από τις 29 Μαρτίου έως τις 5 Απριλίου πραγματοποιήθηκαν συνολικά τέσσερις (4) συναντήσεις, διάρκειας δύο ωρών η κάθε μια στις οποίες έγινε η διδασκαλία της παραγράφου 6.3 του σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Α΄ Λυκείου. Τα μαθήματα έλαβαν χώρα στο εργαστήριο πληροφορικής και το κάθε μάθημα διαρκούσε όσο δύο διδακτικές ώρες. Στα μαθήματα χρησιμοποιήθηκαν ηλεκτρονικοί υπολογιστές, δηλαδή ένας υπολογιστής ανά δύο μαθητές. Τα περιβάλλοντα για τη διδασκαλία της συνάρτησης βασίστηκαν στο διερευνητικό λογισμικό Geogebra το οποίο παρέχει και εργαλεία διαχείρισης συναρτήσεων που διευκολύνουν το σχεδιασμό και δυναμικό χειρισμό γραφικών παραστάσεων (https://www.geogebra.org/apps/).

Τέλος στο τρίτο στάδιο πραγματοποιήθηκε η τελευταία συνάντηση στις 6 Απριλίου στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το post-test (παράρτημα Η) το οποίο αποτελούνταν από έξι (6) δραστηριότητες οι οποίες έλεγχαν τη βελτίωση του γνωστικού περιεχομένου των μαθητών στις συναρτήσεις.

4.4 Στόχος της παρέμβασης

Στόχος της παρέμβασης είναι η διδασκαλία των συναρτήσεων με τέτοιον τρόπο ώστε να εξαλειφθούν στο μεγαλύτερο βαθμό οι γνωστικές δυσκολίες που έχουν αναφερθεί, αλλά και να ενισχυθεί η σχέση των μαθητών με τα μαθηματικά. Πιο αναλυτικά η συγκεκριμένη παρέμβαση στοχεύει στην αντιμετώπιση ορισμένων δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την Sierpinska. Συγκεκριμένα οι δυσκολίες που θα μας απασχολήσουν είναι οι εξής:

- Η εντύπωση ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν αναλυτικό τύπο.
- Το πρόβλημα μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης, συμβολική, γραφική, με πίνακα τιμών κ.λπ.
- Η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.
- Η σκέψη που κατά πρωταρχικό τρόπο αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στο χωρισμό σε σταθερές και άγνωστες ποσότητες οδηγεί συχνά στην ιδέα της εξίσωσης και όχι στη συνάρτηση.

Βάση των παραπάνω δυσκολιών οι ενέργειες που θα λάβουν χώρα για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι οι εξής:

- Διάκριση ανάμεσα στις έννοιες των συναρτήσεων και αιτιακών σχέσεων.
- Διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης.
- Διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου της καμπύλης και των ευθυγράμμων τμημάτων που επιτελούν κάποια λειτουργία της καμπύλης.
- Διάκριση μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων.
- Σύνθεση των διαφορετικών τρόπων που δίνονται οι συναρτήσεις.
- Γενίκευση της έννοιας της μεταβλητής.

- ❖ Σύνθεση των εννοιών του νόμου και της έννοιας της συνάρτησης ειδικότερα, η επίγνωση της πιθανής χρήσης των συναρτήσεων στη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών ή άλλων μεγεθών.
- ❖ Διάκριση μεταξύ μιας συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των κανόνων της.

Με την αντιμετώπιση των δυσκολιών που έχουν αναφερθεί επιδιώκεται οι μαθητές:

- ❖ Να αποκτήσουν μια πλήρη εικόνα της έννοιας συνάρτηση.
- ❖ Να εκφράσουν ένα μέγεθος συνάρτηση ενός άλλου.
- ❖ Να μπορούν να κατανοούν πότε μια σχέση είναι συναρτησιακή και πότε όχι.
- ❖ Να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.
- ❖ Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του και το αντίστροφο.
- ❖ Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- ❖ Να ελέγχουν πότε ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση.
- ❖ Να βρίσκουν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες x΄xκαι y΄y.
- ❖ Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν τον ρόλο του α στη συνάρτηση y=αx και y=αx+β.
- ❖ Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν τη σχέση των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β.
- ❖ Να προσδιορίσουν τη σχέση που συνδέει τις τιμές δύο ανάλογων ποσών.
- ❖ Να βρουν την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων καθώς και την κλίση της.
- ❖ Να βρουν την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία καθώς και την κλίση της.
- ❖ Να προβληματιστούν και να ανακαλύψουν τη σχέση των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β για την ίδια τιμή της παραμέτρου α.
- ❖ Να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τύπο της μορφής y=αx+β, όταν τους δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο y=αx για την ίδια τιμή του α, αλλά και το αντίστροφο.

Επίσης επιδιώκεται η αλλαγή της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα:

- ❖ Να γίνει πιο ενεργός ο ρόλος των μαθητών μέσα στην τάξη.
- ❖ Να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να δουλέψουν συλλογικά.
- ❖ Να τους βοηθήσουμε να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά συνδέονται και με άλλα πεδία όπως η φυσική, η πληροφορική, τα οικονομικά, κ.α.
- ❖ Να αντιληφθούν ότι κάνοντας μαθηματικά μπορούν διασκεδάσουν και να ξεφύγουν από την αντίληψη ότι είναι ένα βαρετό και δύσκολο μάθημα.

- Να προκληθεί το ενδιαφέρον των μαθητών με δραστηριότητες που θα τους εντυπωσιάσουν.

Κεφάλαιο 5

5. Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του pre-test (παράρτημα Α) και του post-test (παράρτημα Β). Για την προστασία των προσωπικών δεδομένων των μαθητών θα χρησιμοποιηθούν τα ονόματα Α1,Κ2, …. , Α20, στην παρουσίαση των απαντήσεων, τα οποία επιλέχθηκαν τυχαία και δεν είναι με αλφαβητική ή κάποια άλλη σειρά. Με το γράμμα Α θα συμβολίζονται οι μαθητές ενώ με το γράμμα Κ οι μαθήτριες. Η πρώτη συνάντηση πραγματοποιήθηκε στην τάξη στις 10 Μαρτίου 2017 στην οποία δόθηκε στους μαθητές το pre-test το οποίο αποτελούταν από εννέα (9) δραστηριότητες (παράρτημα Α), οι οποίες έλεγχαν τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών στη συνάρτηση. Η διάρκεια του τεστ ήταν μια μισή ώρα (1 και 30΄). Στην πρώτη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν πως αντιλαμβάνονται την έννοια συνάρτηση και να δώσουν ένα παράδειγμα εφαρμογής της στην καθημερινότητα. Στη δεύτερη δραστηριότητα δόθηκε στους μαθητές ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων πάνω στο οποίο υπήρχαν σημειωμένα σημεία και στη συνέχεια τους ζητήθηκε να γίνει η καταγραφή των συντεταγμένων τους. Στην τρίτη δραστηριότητα τους δίνονταν οι συντεταγμένες των σημείων και έπρεπε να τις σχεδιάσουν πάνω στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Στην τέταρτη δραστηριότητα τους δινόταν ο τύπος μιας συνάρτησης και από κάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και έπρεπε να επιλέξουν ποια γραφική παράσταση αντιστοιχεί στη συνάρτηση. Στην πέμπτη δραστηριότητα έπρεπε να επιλέξουν ποια συνάρτηση αντιστοιχούσε στην κλίση της ευθείας που τους δινόταν. Στην έκτη δραστηριότητα τους δινόταν ένας πίνακας ανάλογων ποσών και έπρεπε αρχικά να συμπληρώσουν τον πίνακα και στη συνέχεια να εκφράσουν το y ως συνάρτηση του x. Στην έβδομη δραστηριότητα έπρεπε να σχεδιάσουν σε ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων δύο συναρτήσεις οι οποίες είχαν την ίδια κλίση και στη συνέχεια να διατυπώσουν το συμπέρασμα που προέκυπτε. Τέλος στις δραστηριότητες οκτώ και εννέα τους δόθηκαν δύο προβλήματα τα οποία συνδύαζαν την έννοια της συνάρτησης με την καθημερινότητα και με το πεδίο της φυσικής αντίστοιχα.

5.2 Αποτελέσματα Pre-test

Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο α ερώτημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να γράψουν όλα όσα θα έλεγαν σε ένα συμμαθητή τους, ώστε να καταλάβει τι είναι συνάρτηση. Στον πίνακα αυτόν δεν λαμβάνεται υπόψη αν απάτησαν σωστά ή λάθος.

Απάντηση	Μαθητές
Εξίσωση	3/20
Σύστημα αξόνων	3/20
Τύπος	3/20
Σχέση αναλογίας	2/20
Μοτίβο	1/20
Γραφική παράσταση	2/20
Καμία απάντηση	6/20

Πίνακας 5.1. Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη συνάρτηση

Από τον Πίνακα 5.1 είναι φανερό πως οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί σε μεγάλο βαθμό τι είναι συνάρτηση. Τρείς μαθητές (Α1, Α3, Α10) περιέγραψαν τη συνάρτηση ως μια εξίσωση και ξεκίνησαν την περιγραφή τους γράφοντας ότι «συνάρτηση είναι μια εξίσωση…..». Συγκεκριμένα ο μαθητής Α10 έγραψε:

«Η συνάρτηση είναι μια εξίσωση που έχει δύο αγνώστους x και y τους οποίους χρησιμοποιούμε για να βρούμε το αποτέλεσμα των αγνώστων.»

Εδώ παρατηρείται πως ο μαθητής Α10 θεωρεί ξεκάθαρα ότι η συνάρτηση είναι μια εξίσωση, η οποία αποτελείται από δύο αγνώστους τους οποίους στη συνέχεια καλείται να υπολογίσει.

Έπειτα τρείς μαθητές (Κ2, Α13, Κ15) περιέγραψαν τη συνάρτηση ως ένα σύστημα αξόνων. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α13 έδωσε σαν απάντηση ότι:

«Συνάρτηση είναι ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από άξονες και μεταβλητές.»

Στη συνέχεια τρείς μαθητές (Α4, Κ17, Α20) περιέγραψαν τη συνάρτηση ως τύπο. Αναλυτικά ο μαθητής Α4 διατύπωσε ότι:

«Η συνάρτηση έχει δύο βασικούς τύπους y=αx και y=αx +β και με αυτούς τους τύπους μπορούμε να βρούμε συντεταγμένες (x,y) αντικαθιστώντας ένα φυσικό αριθμό στο x ή στο y και κάνουμε πινακάκι.»

Εδώ ο μαθητής έχει μπερδέψει την έννοια της συνάρτησης με τις δύο ευθείες που έχουν διδαχθεί στο γυμνάσιο και δεν μπορεί να ξεχωρίσει πως η διαδικασία που περιγράφει παραπάνω με τον πίνακα τιμών γίνεται για το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

Δύο μαθητές (Α5,Α18) περιέγραψαν τη συνάρτηση ως μια σχέση αναλογίας. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α5 έδωσε σαν απάντηση στο ερώτημα:

«Συνάρτηση είναι μια σχέση αναλογίας που εξαρτάται από το ποσό x είτε από το ποσό y και από την κλίση.»

Εδώ ο μαθητής έχει μπερδέψει την έννοια της συνάρτησης με τη σχέση αναλογίας που εκφράζει η ευθεία της μορφής y=αx.

Ένας μαθητής (Α11) περιέγραψε τη συνάρτηση ως ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο. Συγκριμένα ο μαθητής Α11 έγραψε ότι:

«Συνάρτηση ονομάζουμε μια παράσταση μεταβλητών στις οποίες αν θέσουμε κάποιες τιμές στη θέση συγκεκριμένων μεταβλητών διαπιστώνουμε ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο.»

Ακολούθως δύο μαθητές (Α12, Α19) έδωσαν σαν απάντηση ότι συνάρτηση είναι γραφική παράσταση. Δηλαδή ο μαθητής Α19 έγραψε ότι:

«Η συνάρτηση είναι μια γραφική παράσταση η οποία έχει θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, σε αυτή τη γραφική παράσταση βρίσκουμε που βρίσκεται ο άγνωστος.»

Οι περισσότεροι μαθητές όμως όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.1 δεν έδωσαν καμία απάντησή στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο β ερώτημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να σκεφτούν ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο κάνουν χρήση της έννοιας συνάρτηση.

Απάντηση	Μαθητές
Παράδειγμα αναλογίας	4/20
Έκφραση	4/20
Γενικά	7/20
Καμία απάντηση	5/20

Πίνακας 5.2. Παράδειγμα συνάρτησης στη καθημερινότητα

Από τον Πίνακα 5.2 παρατηρείται πως μόνο τέσσερις μαθητές στους είκοσι (4/20) έδωσαν παράδειγμα αναλογίας, δηλαδή σωστή απάντησή στο ερώτημα. Συγκεκριμένα οι μαθητές Α1, Κ2,Α7,Α14 έδωσαν απαντήσεις οι οποίες εκφράζουν αναλογικές σχέσεις. Η μαθήτρια Κ2 έδωσε το εξής παράδειγμα:

«Οι αγορές στο παζάρι, δηλαδή αν γνωρίζω ότι ένα κιλό πατάτες έχει 3 ευρώ και εγώ θέλω να αγοράσω 5 κιλά πατάτες θα πληρώσω 15 ευρώ, y=3x»

Λανθασμένη απάντηση έδωσαν τέσσερις μαθητές (Α4, Α10, Α11, Α20) καθώς η απάντησή τους ήταν ότι χρησιμοποιούν την έννοια της συνάρτησης στην καθημερινότητα τους ως έκφραση. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α10 που και στο α ερώτημα είχε διατυπώσει πως συνάρτηση είναι μια εξίσωση έγραψε:

«Χρησιμοποιούμε την έννοια συνάρτηση στην καθημερινότητα μας για να δηλώσουμε μια σκέψη μας η οποία έχει πολλούς και διαφορετικούς παράγοντες: Συναρτήσει όλων των γεγονότων θα αποφασίσω ποια θα είναι η τιμωρία σας.»

Στη συγκεκριμένη απάντηση παρατηρείται μια σύγχυση από τον μαθητή ο οποίος έχει μπερδέψει τη λέξη «συνάρτηση» με τη λέξη «συναρτήσει».

Στη συνέχεια επτά μαθητές (Α3, Α5, Α6, Α9, Α12, Α13, Α18) έδωσαν γενικές απαντήσεις, χωρίς δηλαδή περαιτέρω ανάλυση των παραδειγμάτων τους. Συγκεκριμένα ο μαθητής ο μαθητής Α5 έγραψε σαν απάντηση:

«Τα οικονομικά μιας τράπεζας.»

Εδώ ο μαθητής δίνοντας ως απάντηση «τα οικονομικά μιας τράπεζας» προφανώς θα εννοούσε τη σχέση αναλογίας μεταξύ των πελατών και των καταθέσεων. Δηλαδή όσους πιο πολλούς πελάτες έχει μια τράπεζα τόσες περισσότερες καταθέσεις θα έχει.

Στο συγκεκριμένο ερώτημα μόνο πέντε μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν καμία απάντησή στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στη δεύτερη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) όπου ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις συντεταγμένες τεσσάρων σημείων (Α, Β, Γ, Δ και Ε).

Απάντηση	**Μαθητές**
Όλα τα σημεία σωστά	16/20
Ένα λάθος σημείο	1/20
Τρία λάθος σημεία στη διάταξη	3/20

Πίνακας 5.3. Συμπλήρωση συντεταγμένων

Από τον Πίνακα 5.3 διαπιστώνεται ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης συμπλήρωσαν με επιτυχία τον πίνακα με τις συντεταγμένες. Ένας μαθητής (Α6) συμπλήρωσε ένα λάθος σημείο (Ε) στον πίνακα, ενώ τρείς μαθητές (Α9, Α10, Κ17) βρήκαν σωστά τα σημεία εκ των οποίων τα τρία (Β, Γ και Ε) τα έγραψαν με λάθος διάταξη.

Στον Πίνακα 5.4 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στην οποία δίνονται στους μαθητές πέντε σημεία (Α, Β, Γ, Δ και Ε) και τους ζητείται να τα σχεδιάσουν στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

Απάντηση	**Μαθητές**
Όλα τα σημεία σωστά	14/20
Ένα λάθος σημείο	3/20
Τρία λάθος σημεία	3/20

Πίνακας 5.4. Σχεδιασμός συντεταγμένων

Στον Πίνακα 5.4 παρατηρείται ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης σχεδίασαν με επιτυχία όλα τα σημεία στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Ωστόσο οι μαθητές Α4 και Α20 σχεδίασαν λάθος το σημείο Ε το οποίο είχε τετμημένη μηδέν, ενώ ο μαθητής Α6 σχεδίασε λάθος το σημείο Β. Οι μαθητές Α8, Α10 και Κ17 σχεδίασαν λάθος τρία σημεία (Β, Γ και Ε) εκ των οποίων τα δύο Γ και Ε είχαν τεταγμένη και τετμημένη μηδέν αντίστοιχα.

Στον Πίνακα 5.5 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στην οποία δίνεται στους μαθητές μια συνάρτηση και τέσσερις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και τους ζητείται να βρουν ποία γραφική παράσταση αντιστοιχεί στη δοσμένη ευθεία.

Απάντηση	**Μαθητές**
Σωστή εύρεση ευθείας	11/20
Λανθασμένη εύρεση ευθείας	6/20
Καμία απάντηση	3/20

Πίνακας 5.5. Εύρεση ευθείας

Στον παραπάνω Πίνακα 5.5 διαπιστώνεται πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης έχουν την ικανότητα σωστής αντιστοίχησης ευθείας με τη γραφική της παράσταση. Ωστόσο έξι μαθητές (Α8, Α9, Α10, Α14, Α16, Α18) έδωσαν λανθασμένη απάντηση ενώ μόνο τρείς μαθητές (Α1, Κ17, Α20) δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Στον Πίνακα 5.6 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πέμπτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στην οποία δίνονται στους μαθητές πέντε ευθείες και μια κλίση και τους ζητείται να βρουν ποία ευθεία έχει τη δοσμένη κλίση.

Απάντηση	**Μαθητές**
Σωστή εύρεση κλίσης	8/20
Δεν γνωρίζει την έννοια κλίση	3/20
Λανθασμένη εύρεση κλίσης	5/20
Καμία απάντηση	4/20

Πίνακας 5.6. Εύρεση κλίσης

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.6 μόνο οκτώ μαθητές βρήκαν με επιτυχία τη σωστή ευθεία η οποία είχε τη δοσμένη κλίση, ενώ τρείς μαθητές Α3, Α4 και Α7 δεν γνώριζαν καθόλου την έννοια κλίση. Μερικές από τις απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα ήταν:

«Τι είναι κλίση;»

«What?»

Πέντε μαθητές (Α8, Α10, Α12, Α13, Α14) έδωσαν λάθος απάντηση, ενώ τέσσερις (Κ15, Κ17, Α18, Α20) δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Στον Πίνακα 5.7 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο α ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα πίνακα με ανάλογα ποσά.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή συμπλήρωση πίνακα τιμών	8/20
Λάθος στο λόγο	1/20
Λάθος στο λόγο και στο y	8/20
Καμία απάντηση	3/20

Πίνακας 5.7. Συμπλήρωση πίνακα ανάλογων ποσών

Με βάση τον Πίνακα 5.7 διαπιστώνεται ότι μόνο οι οκτώ μαθητές από τους είκοσι γνώριζαν να συμπληρώσουν σωστά έναν πίνακα με ανάλογα ποσά. Ένας μαθητής (Α4) έκανε λανθασμένη συμπλήρωση του λόγου y/x καθώς αντί για να γράψει y/x έγραψε x/y. Στη συνέχεια οκτώ μαθητές (Α6, Α7, Α9, Α10, Α12, Α13, Κ15, Α19) έκαναν λάθος κατά τη συμπλήρωση της τιμής της μεταβλητής y με αποτέλεσμα και λανθασμένη συμπλήρωση του λόγου y/x. Τρείς μαθητές (Κ17, Α18, Α20) δεν συμπλήρωσαν καθόλου τον πίνακα με τα ανάλογα ποσά.

Στην πορεία στον Πίνακα 5.8 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν ποια είναι η σχέση του λόγου y/x όταν δίνονται ανάλογα ποσά.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	2/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20
Καμία απάντηση	16/20

Πίνακας 5.8. Σχέση λόγου y/x

Από τον Πίνακα 5.8 φαίνεται ότι το μεγαλύτερος μέρος των μαθητών της τάξης δεν γνώριζαν τη σχέση που έχει ο λόγος y/x όταν δίνονται ανάλογα ποσά. Δύο μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Συγκεκριμένα οι μαθητές Α1 και Α3 ως απάντηση στη σχέση του λόγου y/x στα ανάλογα ποσά έγραψαν ότι:

«Ο αριθμητής είναι διπλάσιος του παρονομαστή.»

Μόνο δύο μαθητές από τους είκοσι (Α5, Α11) μπόρεσαν και απάντησαν με επιτυχία στο ερώτημα.

Στη συνέχεια στον Πίνακα 5.9 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν το y ως συνάρτηση του x.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	4/20
Λανθασμένη απάντηση	4/20
Καμία απάντηση	12/20

Πίνακας 5.9. Έκφραση του y ως συνάρτηση του x

Όπως στον Πίνακα 5.8 έτσι και στον Πίνακα 5.9 φαίνεται πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης δεν μπόρεσαν να απαντήσουν στο ερώτημα. Τέσσερις μαθητές (Α4, Α10, Α12, Α20) έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Συγκεκριμένα οι μαθητές Α4 και Α20 ως απάντηση στο ερώτημα έγραψαν ότι:

«y=αx οπότε α=y/x»

Από την παραπάνω απάντηση διαπιστώνεται ότι οι μαθητές δεν έχουν καταλάβει τη σχέση της παραμέτρου α στη συνάρτηση y=αx. Κατανοούν εν μέρει ότι πρόκειται για μια συνάρτηση της μορφής y=αx χωρίς όμως να έχουν κατανοήσει ποιος είναι ο ρόλος της παραμέτρου α. Αυτό φαίνεται και από τον Πίνακα 5.8 βάση του οποίου οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν γνώριζαν να απαντήσουν στο ερώτημα τι ισχύει για το λόγο y/x.

Οι μαθητές Α10 και Α12 ως απάντηση στο ερώτημα έδωσαν ότι:

«Το y το εκφράζουμε σε μια συνάρτηση του x με άγνωστο το y για να το λύσουμε.»

«y=-3, y=-2, y=1, y=2 , y=3»

αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τον μαθητή Α10 φαίνεται πως δεν έχει κατανοήσει την έκφραση «να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x» καθώς θεωρεί πώς έχει έναν άγνωστο και πρέπει να επιλύσει μια εξίσωση. Σύμφωνα και με τον Πίνακα 5.8 δεν μπόρεσε να απαντήσει στο ερώτημα τι ισχύει για το λόγο y/x. Ο μαθητής Α12 έδωσε σαν απάντηση τις τιμές που δίνονταν στην τετμημένη x στον πίνακα των ανάλογων ποσών στη μεταβλητή y, δηλαδή η απάντηση του θύμισε σημεία πάνω σε άξονα. Αυτό δικαιολογείται και από το γεγονός ότι στον Πίνακα 5.1 σαν απάντηση στο ερώτημα «τι είναι συνάρτηση» έγραψε ότι είναι μια γραφική παράσταση. Όπως και ο προηγούμενος μαθητής Α10 έτσι και ο μαθητής Α12 φαίνεται πως δεν έχει κατανοήσει την έκφραση «να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x» και επειδή στην απάντηση του μαθητή Α12 δεν περιέχεται καθόλου η μεταβλητή x προκύπτει το συμπέρασμα πως δεν έχει κατανοήσει τι είναι γενικά η συνάρτηση.

Ωστόσο τέσσερις μαθητές από τους είκοσι (Α1, Α3, Α11, Α14) μπόρεσαν και απάντησαν με επιτυχία στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.10 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο α ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν πίνακες τιμών δύο συναρτήσεων.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή συμπλήρωση	10/20
Λανθασμένη συμπλήρωση-έπαιρνε και τα x μαζί	1/20
Λανθασμένη συμπλήρωση-ανάποδα τα x και y	1/20
Λανθασμένη συμπλήρωση του πίνακα τιμών της y=αx + β	3/20
Καμία απάντηση	5/20

Πίνακας 5.10. Συμπλήρωση πίνακα τιμών

Από τον Πίνακα 5.10 εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι μισοί μαθητές της τάξης μπόρεσαν να συμπληρώσουν με επιτυχία τους πίνακες τιμών και των δύο συναρτήσεων. Τρείς μαθητές (Α8, Α11, Α12) έκαναν λανθασμένη συμπλήρωση του πίνακα τιμών της συνάρτησης y=5x+4. Οι μαθητές Α8 και Α12 έδιναν τιμές στη μεταβλητή x αλλά έκαναν λάθος πράξεις κατά την αντικατάσταση με αποτέλεσμα να μην βρίσκουν τη σωστή τιμή της μεταβλητής y. Ο μαθητής Α11 έκανε μόνο ένα σημείο λάθος καθώς στην τιμή της μεταβλητής x έδωσε τον αριθμό μηδέν και αντί να γράψει ότι η τιμή της μεταβλητής y είναι τέσσερα, έγραψε πάλι μηδέν.

Ένας μαθητής (Α1) έβαζε τιμές στη μεταβλητή x, έβρισκε σωστά τη τιμή της μεταβλητής y αλλά σαν αποτέλεσμα στις τιμές των μεταβλητών y τοποθετούσε και τη μεταβλητή x μαζί, δηλαδή για x=1 το y=9x.

Ένας μαθητής (Α6) έβαζε τιμές στη μεταβλητή x, έβρισκε σωστά την τιμή της μεταβλητής y αλλά σαν αποτέλεσμα στη θέση της μεταβλητής x έβαζε την τιμή της μεταβλητής y.

Πέντε μαθητές (Α10, Α16, Κ17,Α18, Α19) δεν μπόρεσαν να συμπληρώσουν κανέναν από τους δύο πίνακες τιμών.

Έπειτα στον Πίνακα 5.11 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y= 5x.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	8/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20
Καμία απάντηση	10/20

Πίνακας 5.11. Γραφική παράσταση της y=αx

Από τον Πίνακα 5.11 φαίνεται ότι οι μισοί μαθητές της τάξης δεν γνώριζαν να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=5x. Δύο μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α6 τοποθέτησε στον άξονα ανάποδα τις τιμές των μεταβλητών x και y το οποίο όμως οφείλεται και σύμφωνα με την ανάλυση του Πίνακα 5.10 στο γεγονός ότι έβρισκε σωστά τις τιμές των μεταβλητών αλλά τις τοποθετούσε στον πίνακα τιμών ανάποδα. Ο μαθητής Α7 τοποθέτησε και αυτός στον άξονα ανάποδα τις τιμές των μεταβλητών x και y έχοντας όμως συμπληρώσει σωστά των πίνακα τιμών της συνάρτησης.

Από τους είκοσι μαθητές μόνο οι οκτώ (Α1, Κ2, Α3, Α4, Α8, Α11, Α12, Κ15) μπόρεσαν να σχεδιάσουν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=5x.

Στον Πίνακα 5.12 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y= 5x+4.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	3/20
Λανθασμένη απάντηση	1/20
Καμία απάντηση	16/20

Πίνακας 5.12. Γραφική παράσταση της y=αx + β

Σε σχέση με τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=5x παρατηρείται ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης έδειξαν μεγαλύτερη δυσκολία κατά τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=5x+4 και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι δεκαέξι μαθητές στους είκοσι (16/20) δεν μπόρεσαν δώσουν απάντηση στο ερώτημα.

Ο μαθητής Α7 δεν απάντησε σωστά στο ερώτημα καθώς όπως παρατηρήθηκε και στην ανάλυση του Πίνακα 5.12 έβαλε ανάποδα τις τιμές των μεταβλητών x και y με αποτέλεσμα να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ώστε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ωστόσο μόνο τρείς μαθητές (Α5, Α13, Κ15) σχεδίασαν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=5x+4.

Στον Πίνακα 5.13 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να γράψουν το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	1/20
Λανθασμένη απάντηση	10/20
Καμία απάντηση	9/20

Πίνακας 5.13. Σημείο που διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β

Από τον Πίνακα 5.13 διαπιστώνεται ότι οι μισοί μαθητές της τάξης έδωσαν λανθασμένη απάντηση όσον αφορά το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β.

Συγκεκριμένα οι μαθητές Α4, Α6, Α12, Α20 ως απάντηση στο ερώτημα από ποιο σημείο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β έδωσαν: «(x,y)». Οι μαθήτριες Κ2 και Κ15 απάντησαν στο ερώτημα με γνωστό σημείο, ενώ οι μαθητές Α8, Α11, Α13 και Α14 έδωσαν σαν απάντηση ότι διέρχεται από το σημείο (0,0).

Ένας μαθητής (Α5) μόνο από τους είκοσι έδωσε σωστή απάντηση για το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β. Οι υπόλοιποι εννέα μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.14 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τον άξονα από τον οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β.

Απάντηση	**Μαθητές**
Σωστή απάντηση	4/20
Λανθασμένη απάντηση	7/20
Καμία απάντηση	9/20

Πίνακας 5.14. Άξονας που διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β

Από τον Πίνακα 5.14 φαίνεται ότι επτά μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση όσον αφορά τον άξονα από τον οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β.

Συγκεκριμένα οι μαθητές Κ2, Α4, Α5, Α8 και Α20 ως απάντηση στο ερώτημα από ποιόν άξονα διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx + β έδωσαν το σημείο «(x,y)».

Οι μαθητές Α11 και Α12 έδωσαν σαν απάντηση στο ερώτημα από ποιόν άξονα διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β τον άξονα x’x.

Ωστόσο μόνο τέσσερις μαθητές (Α6, ,Α13, Α14, Κ15) μπόρεσαν να απαντήσουν σωστά στο ερώτημα, ενώ εννέα μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν καμία απάντηση.

Στον Πίνακα 5.15 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έβδομη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να γράψουν ποια είναι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	4/20
Λανθασμένη απάντηση	3/20
Καμία απάντηση	13/20

Πίνακας 5.15. Σχέση μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β

Στον Πίνακα 5.15 φαίνεται ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης δεν απάντησε στο ερώτημα όσον αφορά τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι συναρτήσεις y=αx και y=αx+β.

Τρείς μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Συγκεκριμένα οι μαθητές Α4 και Α20 ως απάντηση στο ερώτημα έγραψαν ότι: «οι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους συμπληρωματικές». Ένας μαθητής Α6 έγραψε ότι: «οι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους κάθετες». Ωστόσο μόνο τέσσερις μαθητές (Κ2, Α11, Α13, Κ15) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Στη συνέχεια στον Πίνακα 5.16 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην όγδον δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο α ερώτημα στο οποίο δίνεται στους μαθητές ένα πρόβλημα και τους ζητείται να εκφράσουν τη συνάρτηση που το περιγράφει.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	0/20
Λανθασμένη απάντηση	12/20
Καμία απάντηση	8/20

Πίνακας 5.16. Έκφραση συνάρτησης σε πρόβλημα

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.16 είναι ολοφάνερη η δυσκολία των μαθητών καθώς κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να απαντήσει σωστά στο ερώτημα. Ένα μεγάλο μέρος της τάξης απάντησε λάθος στο ερώτημα, ενώ οκτώ μαθητές (Α4, Α7, Α8, Α14, Κ15, Α16, Κ17, Α19) δεν έδωσαν καμία απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.17 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην όγδον δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο β ερώτημα στο οποίο δίνεται στους μαθητές ένα πρόβλημα και τους ζητείται να εκφράσουν τη συνάρτηση που το περιγράφει.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	0/20
Λανθασμένη απάντηση	11/20
Καμία απάντηση	9/20

Πίνακας 5.17. Έκφραση συνάρτησης σε πρόβλημα

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.17 είναι ξανά ολοφάνερη η δυσκολία των μαθητών καθώς κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να απαντήσει σωστά στο ερώτημα. Ένα μεγάλο μέρος της τάξης απάντησε λάθος στο ερώτημα, ενώ εννιά μαθητές (Α2, Α4, Α7, Α8, Κ15, Α16, Κ17, Α19, Α20) δεν έδωσαν καμία απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.18 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην ένατη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο α ερώτημα στο οποίο δίνεται στους μαθητές ένα πρόβλημα από το πεδίο της φυσικής με δοσμένη τη συνάρτηση και τους ζητείται να υπολογίσουν την ταχύτητα την χρονική στιγμή που το αεροπλάνο θα αγγίξει το έδαφος.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	3/20
Λανθασμένη απάντηση	6/20
Καμία απάντηση	11/20

Πίνακας 5.18. Κατανόηση προβλήματος

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.18 οι μαθητές δυσκολεύτηκαν σε μεγάλο βαθμό στο συγκεκριμένο ερώτημα καθώς μόνο τρείς μαθητές (Α3, Α5, Α6) κατάφεραν να απαντήσουν σωστά. Έξι μαθητές (Α10, Α11, Α12, Α13, Α18, Α20) προσπάθησαν να απαντήσουν στο ερώτημα αλλά έδωσαν λανθασμένη απάντηση, ενώ οι υπόλοιποι έντεκα μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν καμία απάντηση.

Στον τελευταίο Πίνακα 5.19 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην ένατη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) στο β ερώτημα στο οποίο δίνεται στους μαθητές ένα πρόβλημα από το πεδίο της φυσικής με δοσμένη τη συνάρτηση και τους ζητείται να υπολογίσουν το χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	7/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20
Καμία απάντηση	11/20

Πίνακας 5.19. Κατανόηση προβλήματος

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.19 οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στο συγκεκριμένο ερώτημα καθώς μόνο επτά μαθητές (Α1, Α3, Α5, Α6, Α11, Α14, Α18) κατάφεραν να απαντήσουν σωστά. Δύο μαθητές (Α10, Α12) προσπάθησαν να απαντήσουν στο ερώτημα αλλά έδωσαν λανθασμένη απάντηση, ενώ οι υπόλοιποι έντεκα μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν καμία απάντηση.

5.3 Πορεία της παρέμβασης

Η διδασκαλία του κεφαλαίου 6.3 ολοκληρώθηκε σε τέσσερα (4) μαθήματα που το κάθε μάθημα αντιστοιχούσε σε δύο (2) διδακτικές ώρες. Για την διεκπεραίωση όλων των μαθημάτων χρησιμοποιήθηκαν διδακτικές ώρες και από άλλα μαθήματα πέρα των μαθηματικών. Όλα τα μαθήματα έλαβαν χώρα στο εργαστήριο της πληροφορικής και για την διεξαγωγή τους έγινε χρήση προτζέκτορα. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων και για τη διεξαγωγή των αποτελεσμάτων ο διάλογος και οι συζητήσεις των μαθητών μέσα στην τάξη καταγράφηκαν στο χαρτί. Αποτυπώθηκε το μεγαλύτερο μέρος των απαντήσεων τους σε σχέση με τις ερωτήσεις που τέθηκαν μέσα στην τάξη, ενώ στην πορεία παρατηρήθηκε και καταγράφηκε η συνολική συμπεριφορά τους. Αναλυτικά έγιναν τα εξής:

1^{ο} μάθημα: Πραγματοποιήθηκε στην αίθουσα υπολογιστών στις 29 Μαρτίου 2017 και διήρκησε δύο διδακτικές ώρες. Η παράδοση του μαθήματος έγινε με την χρήση προτζέκτορα. Στο 1^{ο} μάθημα οι μαθητές με τη βοήθεια των κατάλληλων ερωτήσεων οδηγήθηκαν μόνοι τους στο συμπέρασμα για το τι είναι συνάρτηση καθώς και για το τι δεν είναι συνάρτηση. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α16 ο οποίος στο pre-test δεν μπόρεσε να απαντήσει στην ερώτηση «τι είναι συνάρτηση» έδωσε παράδειγμα το οποίο εξέφραζε συναρτησιακή σχέση.

«Αν πάω για παράδειγμα στο βιβλιοπωλείο και θέλω να αγοράσω μια τριλογία, αν ξέρω ότι το ένα βιβλίο έχει 20 ευρώ μπορώ να υπολογίσω πόσα λεφτά θα τα πάρω και τα τρία.»

Στη συνέχεια όμως ο μαθητής Α18 έκανε μια πολύ ενδιαφέρουσα ερώτηση μέσα στην τάξη:

«Δηλαδή όλες οι σχέσεις είναι συναρτησιακές;»

Σε αυτό το σημείο επικράτησε μια παύση μεταξύ των μαθητών. Άρχισαν να αναρωτιούνται αν όλες οι σχέσεις είναι συναρτησιακές. Αυτό είχε σαν συνέπεια οι μαθητές Α1, Α4 και η μαθήτρια Κ17 να δώσουν από ένα αντιπαράδειγμα. Συγκεκριμένα η μαθήτρια Κ17 είπε:

«Εεεε όχι δεν εκφράζονται όλες οι σχέσεις από έναν τύπο, για παράδειγμα τα ρούχα που φοράω και οι βαθμοί που έχω στο σχολείο.»

Με τη βοήθεια της απάντησης της μαθήτριας Κ17 έγινε απόλυτα κατανοητό ότι για να είναι μια σχέση συναρτησιακή πρέπει να υπάρχει κάποια σχέση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών.

Στην πορεία με τη βοήθεια απλών προβλημάτων που συναντάμε στην καθημερινότητα και του διαλόγου μέσα στην τάξη κατανόησαν και διαχώρισαν την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή. Στη συνέχεια ακολούθησε συζήτηση η οποία συνδύαζε την έννοια της κλίσης με παραδείγματα της καθημερινότητας ενώ στην πορεία δόθηκε και ο ορισμός του συντελεστή διεύθυνσης. Αφού λοιπόν οι μαθητές κατάλαβαν πλήρως την έννοια της κλίσης έδωσαν κάποια παραδείγματα. Οι μαθητές Κ2, Κ15, Α20 και Α10 είπαν:

«Ένα παράδειγμα είναι η ανηφόρα στο δρόμο.»

«Παράδειγμα για την κλίση είναι όταν πάμε και κάνουμε πατίνια οι πίστες έχουν και ανηφόρες.»

Τέλος έγινε επισήμανση της σχέσης κλίσης με την εφαπτομένη μιας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα.

Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους τι είναι η συνάρτηση, ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή και πώς συνδέεται η κλίση με την καθημερινότητα αλλά και με την εφαπτομένη μιας γωνίας.

2^{ο} μάθημα: Πραγματοποιήθηκε στην αίθουσα υπολογιστών στις 31 Μαρτίου 2017 και διήρκησε δύο διδακτικές ώρες. Για την παράδοση του μαθήματος έγινε χρήση του προτζέκτορα, ενώ παράλληλα δόθηκε στους μαθητές ένα αναλυτικό φύλλο οδηγιών (παράρτημα Β) για τη σωστή χρήση του λογισμικού Geogebra καθώς και ένα φύλλο εργασίας (παράρτημα Γ). Στο 2^{ο} μάθημα ολοκληρώθηκε η παράδοση της συνάρτησης y=αx. Δόθηκε αρχικά στους μαθητές ένα πρόβλημα φυσικής:

«Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα αυτοκίνητο που κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα 10m/sec. Κατά την εκκίνηση του αυτοκινήτου το ρολόι μας δείχνει χρόνο t = 0sec. Αν συμβολίσουμε με s το διάστημα (σε μέτρα) που διανύει το αυτοκίνητο σε χρόνο t (σε δευτερόλεπτα), τότε ποια σχέση θα έχουμε;»

Οι μαθητές με τη βοήθεια του παραδείγματος οδηγήθηκαν μόνοι τους στη σχέση αναλογίας που εκφράζει η συνάρτηση y=αx καθώς και στη σχέση που έχει με τα άλλα πεδία. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α13 είπε:

«Άρα το παράδειγμα που έδωσε πριν ο συμμαθητής μου Α16 στα μαθηματικά μπορεί να γραφεί και y=20x.»

Ακολούθως παρακολουθούσαν μέσω του προτζέκτορα τη διαδικασία συμπλήρωσης του πίνακα τιμών της γραφικής παράστασης στο Geogebra και έπειτα τον σχεδιασμό της. Η συμπλήρωση του πίνακα τιμών έγινε με τη βοήθεια του μαθητή Α19. Με την χρήση του λογισμικού Geogebra έγινε μια συζήτηση η οποία αφορούσε το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησηςy=αx. Ο μαθητής Α8 οδηγήθηκε μόνος του στην απάντηση και είπε:

«Από την αρχή των αξόνων.»

Στην πορεία δόθηκε ένα φύλλο οδηγιών του λογισμικού Geogebra (παράρτημα Β) και στη συνέχεια ένα φύλλο εργασίας το οποίο αποτελούταν από τρείς (3) δραστηριότητες (παράρτημα Γ). Οι μαθητές καθ' όλη τη διάρκεια της συμπλήρωσης του φύλλου εργασίας εργάστηκαν ομαδικά. Πιο αναλυτικά σε κάθε υπολογιστή δούλευαν και ανά δύο μαθητές. Η ομαδική συνεργασία φάνηκε να προξενεί ευχάριστα το ενδιαφέρον των μαθητών αν και η μη εξοικείωση τους με την ομαδική συνεργασία ήταν εμφανής. Στην πρώτη δραστηριότητα δίνονταν στους μαθητές συναρτήσεις της μορφής y=αx τις οποίες έπρεπε να τις σχεδιάσουν στο Geogebra και στη συνέχεια να συμπληρώσουν ορισμένα συμπεράσματα. Στη δεύτερη δραστηριότητα στο πρώτο ερώτημα έπρεπε οι μαθητές να σχεδιάσουν στο χαρτί τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και στη συνέχεια να κάνουν την επαλήθευση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών της στο Geogebra. Στο δεύτερο ερώτημα έπρεπε να υπολογίσουν την κλίση της ευθείας και αλγεβρικά και με Geogebra. Τέλος στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν ένα δρομέα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α σε διάστημα από -10 μέχρι 10 με αύξηση 0.5 και στη συνέχεια να απαντήσουν σε διάφορες ερωτήσεις.

Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τη συνάρτηση y=αx με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra, να μάθουν να σχεδιάζουν σωστά την γραφική της παράσταση και να υπολογίζουν την κλίση της. Τέλος να συνειδητοποιήσουν πώς η συνάρτηση y=αx έχει εφαρμογές και σε άλλα πεδία πέρα των μαθηματικών.

<u>3^{ο} μάθημα:</u> Πραγματοποιήθηκε στην αίθουσα υπολογιστών στις 3 Απριλίου 2017 και διήρκησε δύο διδακτικές ώρες. Για την παράδοση του μαθήματος έγινε χρήση του προτζέκτορα, ενώ παράλληλα δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (παράρτημα Δ). Στο 3^{ο} μάθημα ολοκληρώθηκε η παράδοση της συνάρτησης y=αx+β. Δόθηκε αρχικά στους μαθητές ένα πρόβλημα φυσικής:

«Έστω ότι ένα αμάξι την χρονική στιγμή t=0sec έχει αρχική ταχύτητα u=4m/s και συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα 10m/s. Ποια σχέση συνδέει την ταχύτητα σε σχέση με τον χρόνο;»

Οι μαθητές πλέον αρκετά πιο εξοικειωμένοι με την έννοια της συνάρτησης οδηγήθηκαν μόνοι τους στην εύρεση της συνάρτησης η οποία εκφράζει την παραπάνω σχέση με αποτέλεσμα να γίνει αντιληπτή η σχέση της συνάρτησης y=αx+β με τα άλλα πεδία πέρα των μαθηματικών. Στη συνέχεια με την χρήση του λογισμικού Geogebra έγινε ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης y=αx+β ενώ με τη βοήθεια των μαθητών Α8, Α11, Α12 και της μαθήτριας Κ17 έγινε η συμπλήρωση του πίνακα τιμών της. Οι μαθητές Α8, Α11 και Α12 στο pre-test δεν είχαν συμπληρώσει σωστά των πίνακα τιμών της συνάρτησης y=5x+4, ενώ η μαθήτρια Κ17 δεν είχε δώσει καμία απάντηση.

Στη συνέχεια με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra οι μαθητές κατανόησαν πλήρως τη σχέση παραλληλίας που συνδέει τις συναρτήσεις y=αx και y=αx+β καθώς και ότι η συνάρτηση y=αx+β είναι μια ευθεία οποία διέρχεται πάντα από το σημείο β του άξονα y΄y. Το παραπάνω συμπέρασμα απαντήθηκε από το μαθητή Α6 ο οποίος στο pre-test είχε δώσει ως απάντηση ότι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β είναι ότι τέμνονται κάθετα. Στη συνέχεια ακολούθησε συζήτηση σχετική με την κλίση της ευθείας, ενώ έγινε και η διερεύνηση της για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α. Ακολούθως δόθηκε ένα φύλλο εργασίας το οποίο αποτελούταν από τρείς (3) δραστηριότητες (παράρτημα Δ). Οι μαθητές όπως και στο προηγούμενο μάθημα έτσι και στο συγκεκριμένο δούλεψαν ανά δύο σε κάθε υπολογιστή. Στην πρώτη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές αρχικά να εισάγουν στο Geogebra τη συνάρτηση y=αx+β με δρομέα για τις παραμέτρους α και β και στη συνέχεια να συμπληρώσουν έναν πίνακα και ορισμένα συμπεράσματα τα οποία προέκυπταν με τη διερεύνηση των παραμέτρων. Στη δεύτερη δραστηριότητα τους ζητήθηκε να εισάγουν μια συνάρτηση στο Geogebra και να υπολογίσουν αρχικά την κλίση της και στη συνέχεια να παρατηρήσουν τη σχέση της με μια άλλη συνάρτηση που έχει την ίδια παράμετρο α. Στην τελική δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης στο χαρτί και στη συνέχεια την επαλήθευση της στο Geogebra. Αξιοσημείωτη ήταν η συμπεριφορά ορισμένων μαθητών οι οποίοι έχοντας κατανοήσει καλύτερα τις δραστηριότητες και έχοντας βρει πιο γρήγορα την απάντηση, με τον χρόνο που τους είχε απομείνει βοηθούσαν τον συμμαθητή που ήταν μαζί τους στην ίδια ομάδα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές οι οποίοι ήταν πιο αδύναμοι σε σχέση με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους να βοηθηθούν και να κατακτήσουν καλύτερα τη νέα γνώση.

Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τη συνάρτηση y=αx+β με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra, να μάθουν να σχεδιάζουν σωστά τη γραφική της παράσταση και να υπολογίζουν την κλίση της. Στη συνέχεια να καταλάβουν μόνοι τους τη σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις y=αx και y=αx+β και έπειτα να μάθουν πως γίνεται η διερεύνηση μιας παραμέτρου. Τέλος να συνειδητοποιήσουν πώς η συνάρτηση y=αx+β έχει εφαρμογές και σε άλλα πεδία πέρα των μαθηματικών.

4^{ο} μάθημα: Πραγματοποιήθηκε στην αίθουσα υπολογιστών στις 5 Απριλίου 2017 και διήρκησε δύο διδακτικές ώρες. Για την παράδοση του μαθήματος έγινε χρήση του προτζέκτορα, ενώ παράλληλα δόθηκαν στους μαθητές δύο φύλλα εργασίας (παράρτημα Ε και παράρτημα Ζ). Στο 4^{ο} μάθημα οι μαθητές διδάχτηκαν πότε ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Δόθηκε στους μαθητές η συνάρτηση y=2x+3 και αφού τη σχεδίασαν στο Geogebra, ρωτήθηκαν αν το σημείο Α(1,5) ανήκει στη γραφική της παράσταση. Ο μαθητής Α14 απάντησε:

«Εννοείται πως ανήκει αφού το ακουμπάει.»

Παρόμοια απάντηση δόθηκε και από το μαθητή Α1 για το σημείο Β(2,6):

«Αυτό δεν ανήκει, δεν το ακουμπάει.»

Με τη βοήθεια του λογισμικού καθώς και από τον τρόπο απάντησης των μαθητών Α14 και Α1 διαπιστώνεται ότι οι μαθητές έχουν πλήρως κατανοήσει τη σημασία της έννοιας «πότε ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και πότε όχι.»

Έπειτα ακολούθησε συζήτηση για την εύρεση σημείων τομής συναρτήσεων με τους άξονες x'x και y'y.

Αρχικά τους δόθηκε μια συνάρτηση την οποία σχεδίασαν στο Geogebra, και στη πορεία ρωτήθηκαν ποιο είναι το σημείο τομής της δοσμένης ευθείας με τους άξονες x'x και y'y. Όλοι οι μαθητές μαζί απάντησαν σωστά στο ερώτημα. Όταν ρωτήθηκαν είστε σίγουροι για τις απαντήσεις σας είπαν:

«Εεε ναι αφού το βλέπουμε.»

Βάση της παραπάνω απάντησης είναι φανερό πως η οπτικοποίηση του προβλήματος με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra έδωσε ώθηση στους μαθητές να κατανοήσουν πολύ πιο γρήγορα και πιο σωστά την έννοια του σημείου τομής μιας συνάρτησης με τους άξονες.

Τέλος ακολούθησε συζήτηση για τη σχετική θέση των ευθειών για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β. Σε αυτό το σημείο οι μαθητές έβαζαν μόνοι τους συναρτήσεις στο Geogebra και έβλεπαν τη σχετική θέση των ευθειών ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων που είχαν επιλέξει.

Ακολούθως δόθηκαν δύο φύλλα εργασίας (παράρτημα Ε και παράρτημα Ζ). Το πρώτο φύλλο εργασίας (παράρτημα Ε) αποτελούταν από δύο σκέλη. Το πρώτο σκέλος αποτελούταν από μία (1) δραστηριότητα η οποία ζητούσε από τους μαθητές να εισάγουν μια συνάρτηση στο Geogebra και να ελέγξουν ποια από τα δοσμένα σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της. Στα δύο τελευταία σημεία ήταν απαραίτητη και η αλγεβρική επίλυση. Το δεύτερο σκέλος αφορούσε τα σημεία τομής μια συνάρτησης με τους άξονες x'x και y'y. Αποτελούταν από δύο (2) δραστηριότητες. Στη πρώτη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να εισάγουν μια συνάρτηση στο Geogebra, να βρουν την κλίση της, στη συνέχεια τα σημεία τομής της με τους άξονες και στο τέλος να κάνουν και την αλγεβρική επίλυση. Στην τελευταία δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να εισάγουν δύο συναρτήσεις στο Geogebra και να υπολογίσουν το σημείο στο οποίο τέμνονται.

Το δεύτερο φύλλο εργασίας (παράρτημα Ζ) αποτελούταν από τέσσερις (4) δραστηριότητες. Στις τρείς δραστηριότητες ζητήθηκε από τους μαθητές να εισάγουν ορισμένες συναρτήσεις στο Geogebra και στη συνέχεια να συμπληρώσουν συμπεράσματα τα οποία αφορούσαν τη σχετική θέση των ευθειών για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β. Στην τελευταία δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να βρουν κάθε φορά την εξίσωση της ευθείας ανάλογα με τα δεδομένα που τους δίνονταν.

Κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης και των δύο φύλλων εργασίας οι μαθητές όπως και στα προηγούμενα μαθήματα δούλεψαν ομαδικά. Η εξοικείωση τους με την ομαδική συνεργασία αλλά και με την χρήση του λογισμικού Geogebra ήταν εμφανής. Κάτι τέτοιο γίνεται αντιληπτό από το πρώτο φύλλο εργασίας στο δεύτερο σκέλος, στη δεύτερη δραστηριότητα από την οποία ζητούταν από τους μαθητές να εισάγουν δύο συναρτήσεις στο Geogebra και να υπολογίσουν το σημείο στο οποίο τέμνονται. Συγκεκριμένα στην ομάδα η οποία αποτελούταν από τους μαθητές Α11 και Κ2 σημειώθηκε ο εξής διάλογος:

Α11: «Λοιπόν θα σκεφτώ μια συνάρτηση εγώ και μια συνάρτηση εσύ και θα τη γράψουμε.»

Κ2: «Ωραία, απλά τώρα θα γράψω εγώ γιατί εσύ έγραψες πριν.»

Α11: «Έγινε.»

Αφού οι μαθητές σκέφτηκαν τις συναρτήσεις στην πορεία τις συμπλήρωσε η μαθήτρια Κ2. Μόλις πατήθηκε το πλήκτρο enter στον υπολογιστή απευθείας ο μαθητής Α11 είπε την απάντηση.

Α11: «Είναι το σημείο Α(5,20).»

Κ2: «Καλά περίμενε λίγο να το δω και εγώ.»

Α11: «Είναι πολύ εύκολο, κάτσε να σε βοηθήσω λίγο. Πάρε το ποντίκι και πήγαινε στην επιλογή σημείο και πάτα την επιλογή τομή. Έπειτα σύρε το ποντίκι στη γραφική παράσταση των συναρτήσεων και μόλις γίνουν λίγο πιο έντονες στο χρώμα πάτα επάνω. Έτσι θα εμφανιστεί στα αριστερά σου το σημείο.»

Κ2: «Πω πω είχες απόλυτο δίκιο, μα τι εύκολο που ήταν. Τέλεια, το κατάλαβα σε ευχαριστώ.»

Βάση του συγκεκριμένου διαλόγου είναι εμφανής ότι η ομαδική συνεργασία μεταξύ των μαθητών βοήθησε σε μεγάλο βαθμό την ομαλή πορεία του μαθήματος. Η μαθήτρια Κ2 η οποία δεν είχε αντιληφθεί τόσο γρήγορα τον τρόπο υπολογισμού του σημείο τομής, με τη βοήθεια του συμμαθητής Α11 κατάφερε μέσα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα να κατανοήσει πλήρως τον τρόπο. Με το παραπάνω παράδειγμα γίνεται αντιληπτό πως η συνεργασία μεταξύ των μαθητών δεν κατάφερε μόνο να δημιουργήσει ένα αρμονικό κλίμα μεταξύ τους, αλλά και να βοηθήσει τους λίγο πιο αδύναμους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τη γνώση.

Στόχος σε αυτό το μάθημα ήταν οι μαθητές να αντιληφθούν το νόημα, όταν ένα σημείο ανήκει σε μια γραφική παράσταση καθώς και τη σχετική θέση που μπορούν να έχουν δύο ευθείες στο χώρο ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων τους.

5.4 Αποτελέσματα Post-test

Η τελευταία συνάντηση έλαβε χώρα στην τάξη στις 5 Απριλίου 2017 στην οποία δόθηκε στους μαθητές το post-test το οποίο αποτελούταν από έξι (6) δραστηριότητες (παράρτημα Η). Στόχος του post-test ήταν να ελέγξει το βαθμό βελτίωσης των γνώσεων των μαθητών συγκριτικά με τις προϋπάρχουσες γνώσεις που κατείχαν όσον αφορά τη συνάρτηση. Η διάρκεια του τεστ ήταν μια μισή ώρα (1 και 30΄). Στην πρώτη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς αντιλαμβάνονται την έννοια συνάρτηση και να δώσουν ένα παράδειγμα εφαρμογής της στην καθημερινότητα. Στη δεύτερη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν ένα παράδειγμα της έννοιας κλίσης το οποίο να είχε εφαρμογή στην καθημερινότητα. Στην τρίτη δραστηριότητα τους δόθηκε ένα πρόβλημα με ανάλογα ποσά και έπρεπε να συμπληρώσουν έναν πίνακα και στη συνέχεια ορισμένα συμπεράσματα. Στην τέταρτη δραστηριότητα τους δόθηκε ένα πρόβλημα και τους ζητήθηκε αρχικά να βρουν τη συνάρτηση που εκφράζει το πρόβλημα, να σχεδιάσουν τη γραφική της παράσταση, να βρουν τα σημεία τομής με τους άξονες x΄x και y΄y κα τέλος να βρουν το σημείο τομής δύο συναρτήσεων. Στην πέμπτη δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν την εξίσωση της ευθείας η οποία προέκυπτε κάθε φορά ανάλογα με τα δεδομένα που τους δίνονταν. Στην τελευταία δραστηριότητα οι μαθητές βλέποντας δύο σημεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έπρεπε να βρουν την εξίσωση της ευθείας που προέκυπτε και στη συνέχεια τη σχετική θέση της ευθείας σε σχέση με άλλες συναρτήσεις. Τέλος στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα του post-test σε κάθε μια από τις δραστηριότητες.

Στον Πίνακα 5.20 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα ,όπου ζητείται από τους μαθητές να γράψουν όλα όσα θα έλεγαν σε ένα συμμαθητή τους, ώστε να καταλάβει τι είναι συνάρτηση. Στον πίνακα αυτόν δεν λαμβάνεται υπόψη αν απάτησαν σωστά ή λάθος.

Απάντηση	Μαθητές
Εξίσωση	1/20
Τύπος	1/20
Σχέση αντιστοιχίας μεταξύ μεταβλητών	18/20

Πίνακας 5.20. Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τη συνάρτηση

Από τον Πίνακα 5.20 διαπιστώνεται πως οι μαθητές μετά το πέρας των μαθημάτων και συγκριτικά με το pre-test έχουν αντιληφθεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό την έννοια συνάρτηση. Συγκεκριμένα 18 μαθητές από τους 20 απάντησαν ότι συνάρτηση είναι μια σχέση αντιστοιχίας μεταξύ μεταβλητών, της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης. Παράδειγμα ο μαθητής Α10 ο οποίος στο pre-test στο ερώτημα «τι είναι συνάρτηση» είχε δώσει σαν απάντηση ότι συνάρτηση είναι μια εξίσωση, στο post-test διατύπωσε ότι:

«Συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία στην οποία κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό αριθμό.»

Ο μαθητής Α6 ο οποίος στο pre-test δεν μπόρεσε να δώσει καμία απάντηση στο ερώτημα «τι είναι συνάρτηση» στο post-test διατύπωσε ότι:

«Συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών x και y στην οποία κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται σε μοναδική τιμή του y.»

Ωστόσο μόνο δύο μαθητές δεν κατάφεραν να δώσουν ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α11 διατύπωσε:

«Συνάρτηση είναι μια αλγεβρική παράσταση η οποία περιέχει μεταβλητές, τα x και y τα οποία αν τα λύσουμε ως προς x παίρνουμε τα y.»

Στη συνέχεια η μαθήτρια Κ2 έδωσε σαν απάντηση ότι συνάρτηση είναι δύο τύποι. Συγκεκριμένα έγραψε ότι:

«Συνάρτηση είναι οι δύο τύποι y=αx και y=αx+β οι οποίοι μας βοηθάνε σε κάποιες πράξεις.»

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών Α11 και Κ2 φαίνεται ότι δεν έχουν αντιληφθεί ακριβώς την έννοια της συνάρτησης, καθώς την παρομοιάζουν με αλγεβρική παράσταση και με τύπο.

Στον Πίνακα 5.21 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πρώτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να σκεφτούν ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο κάνουν χρήση της έννοιας συνάρτηση.

Απάντηση	**Μαθητές**
Παράδειγμα αναλογίας	20/20

Πίνακας 5.21. Παράδειγμα συνάρτησης στη καθημερινότητα

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.21 όλοι οι μαθητές κατάφεραν να δώσουν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Μερικές από τις απαντήσεις είναι:

Ο μαθητής Α6 ο οποίος στο pre-test έδωσε γενική απάντηση στο ερώτημα, στο post-test έγραψε ότι:

«Αν η τιμή ενός πακέτου δημητριακών είναι στα 3,5 ευρώ και εγώ θέλω να πάρω δύο κουτιά τότε ξέρω πως τα χρήματα που θα πληρώσω έχουν άμεση σχέση με τον αριθμό των πακέτων δημητριακών που θα αγοράσω.»

Ο μαθητής Α6 έχει κατανοήσει τη σχέση εξάρτησης που συνδέει τις μεταβλητές τιμή-ποσότητα.

Στη συνέχεια ο μαθητής Α8 ο οποίος στο pre-test δεν μπόρεσε να δώσει απάντηση στο ερώτημα, στο post-test έγραψε ότι:

«Όταν πάω λαϊκή και ξέρω ότι ένα κιλό πορτοκάλια έχει 5 ευρώ ξέρω αυτόματα πόσα χρήματα θα πληρώσω αν θέλω να πάρω 3 κιλά.»

Βάση των απαντήσεων των μαθητών είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι έχουν αντιληφθεί ακριβώς την έννοια της συνάρτησης. Ακόμη και οι μαθητές Α11 και Κ2 οι οποίοι σύμφωνα με τον Πίνακα 5.20 στο προηγούμενο ερώτημα δεν κατάφεραν να δώσουν ικανοποιητική απάντηση, στο συγκεκριμένο ερώτημα απάντησαν σωστά.

Στον Πίνακα 5.22 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στη δεύτερη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) όπου ζητείται από τους μαθητές να σκεφτούν ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο κάνουν χρήση της έννοιας κλίση.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	20/20
Λανθασμένη απάντηση	0/20

Πίνακας 5.22. Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια της κλίσης

Ο Πίνακας 5.22 δείχνει πώς όλοι οι μαθητές της τάξης έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α11 διατύπωσε ότι:

«Την έννοια της κλίσης την χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τη κλίση του δρόμου, δηλαδή πόσο ανηφόρα έχει ο δρόμος.»

Σύμφωνα με την απάντηση του μαθητή συμπεραίνουμε ότι έχει κατανοήσει την έννοια της κλίσης, και το συγκεκριμένο συμπέρασμα προκύπτει από την έκφραση «…….,δηλαδή πόσο ανηφόρα έχει ο δρόμος.». Γίνεται αντιληπτό δηλαδή ότι έχει καταλάβει ότι κλίση είναι η γωνία που σχηματίζει στο συγκεκριμένο παράδειγμα η ανηφόρα σε σχέση με το δρόμο.

Στον Πίνακα 5.23 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν ένα πίνακα με ανάλογα ποσά.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	20/20
Λανθασμένη απάντηση	0/20

Πίνακας 5.23. Συμπλήρωση πίνακα ανάλογων ποσών

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.23 όλοι οι μαθητές της τάξης κατάφεραν να συμπληρώσουν με επιτυχία τον πίνακα με τα ανάλογα ποσά.

Στον Πίνακα 5.24 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν ποια είναι η σχέση του λόγου y/x όταν δίνονται ανάλογα ποσά.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	18/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20

Πίνακας 5.24. Σχέση λόγου y/x

Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (18/20) έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα. Ωστόσο μόνο δύο μαθητές (Α4, Α19) δεν κατάφεραν να απαντήσουν σωστά. Συγκεκριμένα απάντησαν ότι:

«Το x αυξάνεται κατά 5.»

Βάση της απάντησης και των δύο μαθητών συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές κοιτώντας τον πίνακα με τα ανάλογα ποσά παρατήρησαν ότι η τιμή της μεταβλητής x αυξάνεται κατά 5 μονάδες κάθε φορά με αποτέλεσμα να μπερδέψουν την ερώτηση της σχέσης του λόγου y/x με τη μεταβλητή x.

Στον Πίνακα 5.25 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο γ ερώτημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν το y ως συνάρτηση του x.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	18/20
Λανθασμένη απάντηση	1/20
Καμία απάντηση	1/20

Πίνακας 5.25. Έκφραση του y ως συνάρτηση του x

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.25 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (18/20) απάντησαν σωστά στο ερώτημα. Ωστόσο ο μαθητής Α13 όπως και στο pre-test δεν έδωσε καμία απάντηση στο ερώτημα.

Ο μαθητής Α18 ο οποίος στο pre-test δεν είχε δώσει απάντηση στο ερώτημα στο post-test έδωσε λανθασμένη απάντηση. Η απάντηση του ήταν η εξής:

«y=αx+β»

Από την απάντηση του μαθητή συμπεραίνουμε ότι δεν έχει κατανοήσει την έκφραση «να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x» καθώς και ότι η συνάρτηση η οποία περιγράφει ανάλογα ποσά είναι μια συνάρτηση της μορφής y=αx.

Στον Πίνακα 5.26 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο δ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να γράψουν το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	13/20
Λανθασμένη απάντηση	6/20
Καμία απάντηση	1/20

Πίνακας 5.26. Σημείο που διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.26 ένας ικανοποιητικός αριθμός μαθητών (13/20) απάντησαν σωστά στο ερώτημα. Συγκεκριμένα η απάντηση τους ήταν:

«Διέρχεται από το σημείο (0,1) γιατί αν σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση στο Geogebra, όπως κάναμε και στα μαθήματα θα φανεί αμέσως ότι θα διέρχεται από το β, δηλαδή το 1.»

Ωστόσο έξι από τους μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Συγκεκριμένα οι μαθητές Α4, Α19 και Α20 έγραψαν σαν απάντηση ότι:

«Η ευθεία y=3x+1 διέρχεται από το σημείο 3.»

Στη συνέχεια οι μαθητές Α8 και Α10 έγραψαν ότι:

«Η ευθεία y=3x+1 διέρχεται από το σημείο (y,0).»

Μόνο ένας μαθητής ο Α18 όπως και στο pre-test δεν έδωσε καμία απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.27 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο ε ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τον άξονα από τον οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	17/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20
Καμία απάντηση	1/20

Πίνακας 5.27. Άξονας που διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.27 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (17/20) έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα η απάντηση των μαθητών ήταν:

«Διέρχεται από τον άξονα y'y γιατί αν σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση στο Geogebra, όπως κάναμε και στα μαθήματα θα φανεί αμέσως ότι τέμνει τον άξονα.»

Δύο μαθητές (Α10 και Α12) έδωσαν λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα και οι δύο μαθητές απάντησαν:

« Τον άξονα x'x.»

Ο μαθητής Α18 όπως και στο προηγούμενο ερώτημα για το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β, έτσι και σε αυτό δεν μπόρεσε να δώσει καμία απάντηση.

Στον Πίνακα 5.28 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τρίτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο ζ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να γράψουν το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx καθώς και ποια είναι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	20/20
Λανθασμένη απάντηση	0/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.28. Σχέση μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.28 διαπιστώνεται ότι όλοι μαθητές της τάξης απάντησαν σωστά στα ερωτήματα. Πιο αναλυτικά, η απάντηση τους ήταν:

«Όπως είδαμε και με το Geogebra, η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx περνάει απ την αρχή των αξόνων και όταν εισάγω συναρτήσεις με το ίδιο α, τότε θα είναι μεταξύ τους παράλληλες»

Στη συνέχεια στον Πίνακα 5.29 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα στο οποίο δίνεται στους μαθητές ένα πρόβλημα και τους ζητείται να εκφράσουν τη συνάρτηση που το περιγράφει.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	19/20
Λανθασμένη απάντηση	1/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.29. Έκφραση συνάρτησης σε πρόβλημα

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.29 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (19/20) κατάφερε με επιτυχία να εκφράσει τη συνάρτηση που περιέγραφε το πρόβλημα. Ωστόσο μόνο ένας μαθητής (Α19) έδωσε λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα η απάντηση του ήταν:

«y=0,3x+3»

Σύμφωνα με την απάντηση του μαθητή Α19 συμπεράνουμε ότι δεν θα πρόσεξε σωστά τον αριθμό που δινόταν στην εκφώνηση του προβλήματος γιατί έχει κάνει σωστή σκέψη απλά έχει χρησιμοποιήσει στη θέση του αριθμού 0,5 τον αριθμό 0,3.

Στον Πίνακα 5.30 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών της συνάρτησης y= 0,5x+5.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	19/20
Λανθασμένη απάντηση	1/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.30. Συμπλήρωση πίνακα τιμών συνάρτησης y= 0,5x+5

Σύμφωνα με τα δεδομένα του Πίνακα 5.30 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (19/20) συμπλήρωσαν σωστά τον πίνακα τιμών της συνάρτησης y= 0,5x+5. Ωστόσο η μαθήτρια Κ2 η οποία στο pre-test είχε δώσει σωστή απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα, στο post-test μπέρδεψε και έβαλε ανάποδα τις τιμές των μεταβλητών x και y.

Στον Πίνακα 5.31 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y= 0,5x+5.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	17/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.31. Γραφική παράσταση της y=αx+β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.31το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (17/20) σχεδίασε σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=0,5x+5. Εντύπωση προκάλεσε ο τρόπος με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές καθώς και ο συλλογισμός που ακολουθήθηκε:

«Αφού θέλω να σχεδιάσω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=0,5x+5 ξέρω ότι θα περνάει από το 5 και θα τέμνει τον άξονα y'y.»

Βάση της παραπάνω απάντησης των μαθητών είναι εμφανές ότι με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra κατάφεραν να κατανοήσουν σε βάθος τις ιδιότητες της συνάρτησης.

Μόνο τρείς μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Συγκεκριμένα η μαθήτρια Κ2 και οι μαθητές Α19 και Α20.

Ο μαθητής Α19 είχε κάνει λανθασμένο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και αυτό οφείλεται όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.29 στο γεγονός ότι δεν πήρε σωστά τα δεδομένα της άσκησης.

Η μαθήτρια Κ2 έχει κάνει λανθασμένο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και αυτό οφείλεται όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.30 στο γεγονός ότι έβαλε ανάποδα τις τιμές των μεταβλητών x και y.

Στον Πίνακα 5.32 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν τα σημεία τομής της συνάρτησης y=0,5x+5 με τους άξονες x'x και y'y.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	14/20
Σωστός τρόπος-λάθος πράξεις	4/20
Λανθασμένη απάντηση	2/20

Πίνακας 5.32. Σημεία τομής της συνάρτησης y=0,5x+5 με τους άξονες x'x και y'y

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.32 οι περισσότεροι μαθητές βρήκαν σωστά τα σημεία τομής της συνάρτησης y=0,5x+5 με τους άξονες x'x και y'y. Τέσσερις μαθητές (Α4, Α9, Α13 και Α16) για την εύρεση των σημείων τομής της συνάρτησης y=0,5x+5 με τους άξονες x'x και y'y έκαναν σωστά όλη τη διαδικασία, ωστόσο τα λάθη έγιναν κατά την αλγεβρική επίλυση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

Στη συνέχεια μόνο δύο μαθητές (Α11 και Α19) έδωσαν λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα ο μαθητής Α11 έδωσε σαν απάντηση σωστά το σημείο τομής με τον άξονα x'x και με λάθος διάταξη το σημείο τομής με τον άξονα y'y δηλαδή:

«Σημείο τομής με τον άξονα y'y Β(5,0)»

Ο μαθητής Α19 έδωσε σαν απάντηση σωστά το σημείο τομής με τον άξονα x'x και λάθος το σημείο τομής με τον άξονα y'y δηλαδή:

«Σημείο τομής με τον άξονα y'y Β(0,3)»

Η απάντηση του μαθητή Α19 είναι προβλέψιμη γιατί σύμφωνα με τον Πίνακα 5.29 δεν πήρε σωστά τα δεδομένα της άσκησης, δηλαδή αντί για τη συνάρτηση y=0,5x+5 έγραψε y=0,3x+3,ωστόσο η λογική και ο τρόπος επίλυσης είναι σωστά.

Στον Πίνακα 5.33 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο δ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=3x.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	18/20
Σωστός τρόπος-Λανθασμένη απάντηση	2/20

Πίνακας 5.33. Σχεδιασμός γραφικής παράστασης y=3x

Σύμφωνα με τα δεδομένα του Πίνακα 5.33 το μεγαλύτερος μέρος των μαθητών της τάξης (18/20) κατάφερε να σχεδιάσει σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=3x. Συγκεκριμένα η απάντηση που διατυπώθηκε ήταν:

«Είναι της μορφής y=αx άρα ξέρω από πού θα διέρχεται, από την αρχή των αξόνων.»

Με την παραπάνω απάντηση φαίνεται ότι οι συναρτήσεις που σχεδίασαν στα μαθήματα με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές να κατακτήσουν τη γνώση.

Ωστόσο μόνο δύο μαθητές αντιμετώπισαν κάποια δυσκολία. Συγκεκριμένα και οι δύο μαθητές Α1 και Α12 στον πίνακα τιμών της συνάρτησης y=3x έβαλαν δεκαδικούς αριθμούς με αποτέλεσμα να δυσκολευτούν αρκετά στις πράξεις και στο τέλος να βρουν λανθασμένα αποτελέσματα.

Στον Πίνακα 5.34 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο ε ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν το σημείο τομής των συναρτήσεων y=0,5x+5 και y=3x.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	12/20
Σωστός τρόπος-Λανθασμένη απάντηση	6/20
Καμία απάντηση	2/20

Πίνακας 5.34. Σημείο τομής των συναρτήσεων y=0,5x + 5 και y=3x

Στον Πίνακα 5.34 διαπιστώνεται πως αρκετοί μαθητές (12/20) μπόρεσαν και βρήκαν σωστά το σημείο τομής των συναρτήσεων y=0,5x+5 και y=3x. Έξι μαθητές (Α1, Κ2, Α4, Α6, Α19 και Α20) ωστόσο αν και έκαναν σωστά όλη τη διαδικασία, αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία κατά την αλγεβρική επίλυση του συστήματος. Σαν απάντηση και οι δεκαοκτώ (18) μαθητές έγραψαν ότι:

«Αφού θέλω να βρω το σημείο τομής, αρκεί να λύσω το σύστημα που προκύπτει από τις δύο συναρτήσεις, γιατί αν κάνω τη γραφική τους παράσταση θα τέμνονται σε ένα σημείο.»

Παρόμοια και εδώ φαίνεται πως με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra οι μαθητές αμέσως μετέφεραν το πρόβλημα στο ηλεκτρονικό περιβάλλον και βρήκαν εκεί τη λύση.

Στη συνέχεια μόνο οι μαθητές Α10 και Α12 δεν έδωσαν καμία απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.35 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πέμπτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν εξίσωση ευθείας με γνωστή κλίση όταν διέρχεται από γνωστό σημείο.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	19/20
Σωστός τρόπος-Λανθασμένη απάντηση	1/20

Πίνακας 5.35. Εύρεση εξίσωσης ευθείας με γνωστή κλίση όταν διέρχεται από γνωστό σημείο

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.35 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (19/20) κατάφερε να βρει σωστά την εξίσωση ευθείας με γνωστή κλίση όταν διέρχεται από γνωστό σημείο.

Ο μαθητής Α5 αν και έκανε σωστά όλη τη διαδικασία για την εύρεση της ευθείας, στη συνέχεια έκανε λάθος στην αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης κατά την εύρεση της παραμέτρου β.

Όλοι οι μαθητές έγραψαν σαν απάντηση ότι:

«Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι το α και αφού διέρχεται από γνωστό σημείο, αυτό σημαίνει ότι το σημείο την επαληθεύει, δηλαδή αν κάνουμε τη γραφική παράσταση το σημείο θα είναι πάνω της.»

Στον Πίνακα 5.36 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πέμπτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν εξίσωση ευθείας όταν είναι παράλληλη σε μια άλλη ευθεία και διέρχεται από γνωστό σημείο.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	16/20
Σωστός τρόπος-Λανθασμένη απάντηση	3/20
Καμία απάντηση	1/20

Πίνακας 5.36. Εύρεση εξίσωσης ευθείας όταν είναι παράλληλη σε μια άλλη ευθεία και διέρχεται από γνωστό σημείο

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.36 οι περισσότεροι μαθητές της τάξης (16/20) κατάφεραν να βρουν σωστά την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη σε μια άλλη ευθεία και διέρχεται από γνωστό σημείο.

Οι μαθητές Α1, Α3 και Α13 έκαναν σωστά όλη τη διαδικασία, στην πορεία όμως έκαναν λάθος κατά την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης για την εύρεση της παραμέτρου β.

Και οι δεκαεννέα (19) μαθητές έγραψαν σαν απάντηση ότι:

«Αφού είναι παράλληλη σε μια άλλη θα έχουν ίδιο α και αφού διέρχεται από γνωστό σημείο, αυτό σημαίνει ότι το σημείο την επαληθεύει, δηλαδή αν κάνουμε τη γραφική παράσταση το σημείο θα είναι πάνω της.»

Μόνο η μαθήτρια Κ2 δεν μπόρεσε να δώσει καμία απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.37 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην πέμπτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν εξίσωση ευθείας η οποία σχηματίζει γωνία με τον άξονα x’x και διέρχεται από γνωστό σημείο.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	14/20
Σωστός τρόπος-Λανθασμένη απάντηση	4/20
Καμία απάντηση	2/20

Πίνακας 5.37. Εύρεση εξίσωσης ευθείας η οποία σχηματίζει γωνία με τον άξονα x’x και διέρχεται από γνωστό σημείο

Στον Πίνακα 5.37 διαπιστώνεται πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (14/20) έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα για την εύρεση εξίσωσης ευθείας η οποία σχηματίζει γωνία με τον άξονα x’x και διέρχεται από γνωστό σημείο.

Οι μαθητές Α5, Α6, Α13 και Α20 έκαναν σωστά όλη τη διαδικασία, αλλά στην πορεία έκαναν λάθος κατά την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης για την εύρεση της παραμέτρου β.

Και οι δεκαοκτώ (18) μαθητές έγραψαν σαν απάντηση ότι:

«Αφού σχηματίζει γωνία με τον άξονα x’x άρα η εφαπτομένη θα είναι η κλίση (όπως με την ανηφόρα) και αφού διέρχεται από γνωστό σημείο, αυτό σημαίνει ότι το σημείο την επαληθεύει, δηλαδή αν κάνουμε τη γραφική παράσταση το σημείο θα είναι πάνω της.»

Ο μαθητής Α1 και η μαθήτρια Κ2 δεν έδωσαν καμία απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.38 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	4/20
Σωστός τρόπος-Λανθασμένη απάντηση	11/20
Καμία απάντηση	5/20

Πίνακας 5.38. Εύρεση εξίσωσης ευθείας η οποία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.38 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (11/20) αντιμετώπισε μεγάλη δυσκολία κατά τη διαδικασία εύρεσης εξίσωσης της ευθείας η οποία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία. Και οι έντεκα μαθητές ακολούθησαν σωστά τον τρόπο επίλυσης του ερωτήματος, αλλά στην πορεία δυσκολεύτηκαν κατά την αλγεβρική επίλυση του συστήματος για την εύρεση των παραμέτρων α και β. Μόνο οι μαθητές Α8, Α11, Α14 και Α18 κατάφεραν να δώσουν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Ωστόσο, και οι δεκαπέντε (15) μαθητές σαν απάντηση έγραψαν ότι:

«Αφού διέρχεται από δύο σημεία, άρα θα την επαληθεύουν.»

Στη συνέχεια οι μαθητές Α3, Α5, Κ15, Κ17 και Α20 δεν μπόρεσαν να δώσουν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Στον Πίνακα 5.39 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν τη κλίση που έχει η ευθεία y= -3x+2.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	20/20
Λανθασμένη απάντηση	0/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.39. Εύρεση κλίσης της ευθείας y= -3x + 2

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.39 όλοι οι μαθητές της τάξης κατάφεραν να βρουν σωστά την κλίση της ευθείας y= -3x+2.

Στον Πίνακα 5.40 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο γ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν τη σχέση που έχουν δύο ευθείες με ίδια κλίση (α) και διαφορετικό β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	20/20
Λανθασμένη απάντηση	0/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.40. Εύρεση σχέσης που έχουν δύο ευθείες με ίδια κλίση (α) και διαφορετικό β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.40 όλοι οι μαθητές της τάξης κατάφεραν να βρουν σωστά τη σχέση των ευθειών y= -3x+2 και y= -3x-5. Συγκεκριμένα η απάντηση τους ήταν:

«Έχουν το ίδιο α, αν την σχεδιάσω στο Geogebra θα φανεί αμέσως ότι είναι παράλληλες.»

Στον Πίνακα 5.41 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο δ ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν τη σχέση που έχουν δύο ευθείες με ίδια κλίση (α) και ίδιο β.

Απάντηση	Μαθητές
Σωστή απάντηση	19/20
Λανθασμένη απάντηση	1/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.41. Εύρεση σχέσης που έχουν δύο ευθείες με ίδια κλίση (α) και ίδιο β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.41 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (19/20) έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα. Πιο αναλυτικά η απάντηση και των δεκαεννέα (19) μαθητών ήταν:

«Ε αφού έχουν το ίδιο α και το ίδιο β ταυτίζονται, είναι δηλαδή σαν τα παραδείγματα των συναρτήσεων που βάζαμε στο Geogebra στα μαθήματα.»

Ωστόσο μόνο ο μαθητής Α13 έδωσε λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα η απάντηση του ήταν:

«Οι ευθείες είναι παράλληλες.»

Στον Πίνακα 5.42 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών στην έκτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο ε ερώτημα στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να βρουν τη σχέση που έχουν δύο ευθείες με διαφορετική κλίση (α) και ίδιο β.

Απάντηση	**Μαθητές**
Σωστή απάντηση	19/20
Λανθασμένη απάντηση	1/20
Καμία απάντηση	0/20

Πίνακας 5.42. Εύρεση σχέσης που έχουν δύο ευθείες με διαφορετική κλίση (α) και ίδιο β

Σύμφωνα με τον Πίνακα 5.42 το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης (19/20) έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα η απάντησή των μαθητών ήταν:

«Αφού έχουμε ίδιο β και διαφορετικό α τότε θα τέμνονται, δηλαδή θα έχουν ένα κοινό σημείο.»

Ωστόσο μόνο ο μαθητής Α13 έδωσε λανθασμένη απάντηση στο ερώτημα. Συγκεκριμένα η απάντηση του ήταν:

«Οι ευθείες έχουν το ίδιο β.»

5.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων Pre-Post-test

Συνοψίζοντας, μπορεί να αναφερθεί πως τα αποτελέσματα της έρευνας υποδεικνύουν πως η διδασκαλία με την χρήση του μαθηματικού λογισμικού Geogebra βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια της συνάρτησης καθώς και τις επιμέρους έννοιες της. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από την ποιοτική και ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών. Πιο αναλυτικά, σημαντική βελτίωση παρατηρήθηκε στην πρώτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) και post-test (παράρτημα Η) στην οποία ζητούταν από τους μαθητές αρχικά να εξηγήσουν σε ένα συμμαθητή τους την έννοια της συνάρτησης και στη συνέχεια να δώσουν παραδείγματα της.

Σύμφωνα με τους Πίνακες 5.1, 5.2, 5.20 και 5.21 είναι εμφανής η πρόοδος των μαθητών. Συγκεκριμένα στην ερώτηση:

«Θέλεις να εξηγήσεις σε έναν συμμαθητή σου τι είναι συνάρτηση. Γράψε αναλυτικά στην απάντηση σου όλα όσα θα έλεγες ώστε να κατανοήσει την έννοια.»

στο pre-test μόνο δύο μαθητές από τα είκοσι (2/20) κατάφεραν να δώσουν σχετικά ικανοποιητική απάντηση, ενώ στην ίδια ερώτηση στο post-test ικανοποιητική απάντηση έδωσαν δεκαοχτώ (18) μαθητές. Όσον αφορά την ερώτηση:

«Μπορείς να σκεφτείς ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο να χρησιμοποιείς την έννοια συνάρτηση;»

αρχικά στο pre-test μόνο τέσσερις μαθητές (4) έδωσαν σωστό παράδειγμα, ενώ στη συνέχεια στο post-test σωστή απάντηση έδωσαν και οι είκοσι μαθητές (20).

Έπειτα βελτίωση παρατηρήθηκε ανάμεσα στη δεύτερη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) και στην έκτη δραστηριότητα του post-test στο α ερώτημα (παράρτημα Η) όσον αφορά τη συμπλήρωση συντεταγμένων. Αρχικά στο pre-test δεκαέξι μαθητές από τους είκοσι (16/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα, ενώ στο post-test όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά.

Στη συνέχεια βελτίωση παρατηρήθηκε ανάμεσα στην τρίτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test στο β και δ ερώτημα (παράρτημα Η) όσον αφορά το σχεδιασμό συντεταγμένων σε καρτεσιανό σύστημα. Αρχικά στο pre-test δεκατέσσερις μαθητές από τους είκοσι (14/20) έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ στο post-test όλοι οι μαθητές κατάφεραν να αναπαραστήσουν με επιτυχία τα σημεία που βρήκαν στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ακολούθως σημαντική βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην πέμπτη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) και στην δεύτερη και έκτη (β ερώτημα) δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά την έννοια της κλίσης. Αρχικά σύμφωνα με τον Πίνακα 5.6 μόνο οκτώ στους είκοσι μαθητές (8/20) μπόρεσαν και έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα, ενώ μετέπειτα στους Πίνακες 5.22 και 5.39 φαίνεται πως όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά.

Σημαντική βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έκτη δραστηριότητα στο α ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τρίτη δραστηριότητα στο α ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά τη συμπλήρωση πίνακα ανάλογων ποσών. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.7 διαπιστώνεται ότι μόνο οι οκτώ μαθητές στους είκοσι (8/20) γνώριζαν να συμπληρώσουν πίνακα με ανάλογα ποσά, ενώ στον Πίνακα 5.23 φαίνεται πως μετά όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν με επιτυχία έναν αντίστοιχο πίνακα.

Στην πορεία μεγάλη βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έκτη δραστηριότητα στο β ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τρίτη δραστηριότητα στο β ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά τη σχέση του λόγου y/x. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.8 είναι φανερό πως οι μαθητές δεν γνώριζαν τη σχέση του λόγου καθώς μόνο δύο μαθητές μπόρεσαν και έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ από τον Πίνακα 5.24 φαίνεται ότι δεκαοχτώ στους είκοσι (18/20) απάντησαν σωστά.

Στη συνέχεια μεγάλη βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έκτη δραστηριότητα στο γ ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τρίτη δραστηριότητα στο γ ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά την έκφραση της μεταβλητής y ως συνάρτηση της μεταβλητής x . Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.9 είναι φανερό πως οι μαθητές αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία ώστε να εκφράσουν το y ως συνάρτηση του x καθώς μόνο τέσσερις μαθητές (4) μπόρεσαν και έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα, ενώ στον Πίνακα 5.25 οι δεκαοχτώ στους είκοσι (18/20) απάντησαν σωστά.

Σημαντική βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έβδομη δραστηριότητα στο α ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τέταρτη δραστηριότητα στο β και δ ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά τη συμπλήρωση πίνακα τιμών για το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεωνy=5x, y=5x+4, y=3x και y=0,5x+5. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.10 διαπιστώνεται ότι μόνο δέκα μαθητές στους είκοσι (10/20) μπόρεσαν και συμπλήρωσαν με επιτυχία και τους δύο πίνακες τιμών των συναρτήσεων y=5x και y=5x+4, ενώ από τον Πίνακα 5.30 φαίνεται ότι δεκαεννέα μαθητές συμπλήρωσαν με επιτυχία τον πίνακα τιμών της συνάρτησης y=0,5x+5. Στη συνέχεια από τον Πίνακα 5.33 παρατηρείται ότι δεκαοκτώ μαθητές (18/20) έκαναν σωστή συμπλήρωση του πίνακα τιμών της συνάρτησης y=3x, ενώ οι υπόλοιποι δύο που έκαναν λανθασμένη συμπλήρωση οφείλεται σε λάθος αλγεβρικών πράξεων.

Ακολούθως μεγάλη βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έβδομη δραστηριότητα στο β ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τέταρτη δραστηριότητα στο δ ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y=5x και y=3x. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.11 είναι φανερό πως οι μαθητές αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης y=5x καθώς μόνο οκτώ (8/20) μαθητές μπόρεσαν να τη σχεδιάσουν με επιτυχία, ενώ από τον Πίνακα 5.33 διαπιστώνεται ότι δεκαοκτώ (18/20) μαθητές σχεδίασαν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=3x.

Στη συνέχεια μεγάλη βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έβδομη δραστηριότητα στο β ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τέταρτη δραστηριότητα στο β ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y=5x+4 και y=0,5x+5. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.12 φαίνεται πως οι μαθητές αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία κατά το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης y=5x+4 καθώς μόνο τρείς (3/20) μαθητές μπόρεσαν να τη σχεδιάσουν με επιτυχία, ενώ από τον Πίνακα 5.30 διαπιστώνεται ότι δεκαεννέα μαθητές (19/20) σχεδίασαν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=0,5x+5.

Βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έβδομη δραστηριότητα στο γ ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τρίτη δραστηριότητα στο δ ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά το σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.13 διαπιστώνεται ότι μόνο ένας μαθητής στους είκοσι (1/20) γνώριζε να απαντήσει σωστά στο ερώτημα, ενώ από τον Πίνακα 5.26 φαίνεται ότι σωστή απάντηση έδωσαν δεκατρείς μαθητές (13/20).

Μεγάλη βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έβδομη δραστηριότητα στο γ ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τρίτη δραστηριότητα στο δ ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά τον άξονα από τον οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.14 διαπιστώνεται ότι μόνο τέσσερις μαθητές στους είκοσι (4/20) γνώριζαν να απαντήσουν σωστά στο ερώτημα, ενώ από τον Πίνακα 5.27 φαίνεται ότι σωστή απάντηση έδωσαν δεκαεπτά μαθητές (17/20).

Πολύ μεγάλη βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην έβδομη δραστηριότητα στο γ ερώτημα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τρίτη δραστηριότητα στο δ ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά τη σχέση παραλληλίας μεταξύ των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β. Συγκεκριμένα από τον Πίνακα 5.15 διαπιστώνεται ότι μόνο τέσσερις μαθητές στους είκοσι (4/20) γνώριζαν να απαντήσουν σωστά στο ερώτημα, ενώ από τον Πίνακα 5.28 φαίνεται ότι σωστή απάντηση έδωσαν και οι είκοσι μαθητές της τάξης (20/20).

Έπειτα βελτίωση διαπιστώθηκε ανάμεσα στην όγδοη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) και στην τέταρτη δραστηριότητα στο α ερώτημα του post-test (παράρτημα Η) όσον αφορά την έκφραση συνάρτησης από δοσμένο πρόβλημα. Συγκεκριμένα στην όγδοη δραστηριότητα του pre-test (παράρτημα Α) από τους Πίνακες 5.16 και 5.17 διαπιστώνεται ότι κανένας μαθητής δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά σε κανένα από τα δύο ερωτήματα, ενώ από τον Πίνακα 5.29 διαπιστώνεται ότι δεκαεννέα μαθητές (19/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Όσον αφορά την τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο γ ερώτημα για την εύρεση των σημείων τομής της συνάρτησης y=0,5x+5 με τους άξονες x΄x και y΄y σύμφωνα με τον Πίνακα 5.32 δεκατέσσερις μαθητές στους είκοσι (14/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Γενικά οι υπόλοιποι μαθητές ενώ γνώριζαν όλη τη διαδικασία επίλυσης αντιμετώπισαν δυσκολία κατά την αλγεβρική επίλυση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

Παρόμοια στην τέταρτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο ε ερώτημα για την εύρεση των σημείων τομής των συναρτήσεων y=0,5x+5 και y=3x σύμφωνα με τον Πίνακα 5.34 δώδεκα μαθητές στους είκοσι (12/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Γενικά οι υπόλοιποι μαθητές ενώ γνώριζαν τη διαδικασία επίλυσης αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία κατά την αλγεβρική επίλυση του συστήματος.

Όσον αφορά την πέμπτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα για την εύρεση ευθείας με γνωστή κλίση όταν διέρχεται από γνωστό σημείο σύμφωνα με τον Πίνακα 5.35 δεκαεννέα μαθητές στους είκοσι (19/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Στη συνέχεια της πέμπτης δραστηριότητας του post-test (παράρτημα Η) στο β ερώτημα για την εύρεση ευθείας όταν είναι παράλληλη με μια άλλη ευθεία και διέρχεται από γνωστό σημείο σύμφωνα με τον Πίνακα 5.36 δεκαέξι μαθητές στους είκοσι (16/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Γενικά οι υπόλοιποι μαθητές ενώ γνώριζαν τη διαδικασία επίλυσης αντιμετώπισαν δυσκολία κατά την αλγεβρική επίλυση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

Ακολούθως στο γ ερώτημα για την εύρεση ευθείας η οποία σχηματίζει γνωστή γωνία με τον άξονα x'x και διέρχεται από γνωστό σημείο σύμφωνα με τον Πίνακα 5.37 δεκατέσσερις μαθητές στους είκοσι (14/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Γενικά οι υπόλοιποι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία κατά την αλγεβρική επίλυση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

Όσον αφορά την έκτη δραστηριότητα του post-test (παράρτημα Η) στο α ερώτημα για την εύρεση ευθείας όταν διέρχεται από δύο γνωστά σημεία σύμφωνα με τον Πίνακα 5.38 μόνο τέσσερις μαθητές στους είκοσι (4/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα. Γενικά οι υπόλοιποι μαθητές ενώ γνώριζαν τη διαδικασία επίλυσης αντιμετώπισαν πολύ μεγάλη δυσκολία κατά την αλγεβρική επίλυση του συστήματος.

Στη συνέχεια της έκτης δραστηριότητας του post-test (παράρτημα Η) στο γ ερώτημα για τη σχέση ευθείας με άλλη ευθεία η οποία έχει την ίδια κλίση α σύμφωνα με τον Πίνακα 5.40 όλοι οι μαθητές της τάξης έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Ακολούθως στο δ ερώτημα για τη σχέση ευθείας με άλλη ευθεία η οποία έχει την ίδια κλίση α και ίδιο β σύμφωνα με τον Πίνακα 5.41 δεκαεννέα μαθητές στους είκοσι (19/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

Τέλος στο ε ερώτημα για τη σχέση ευθείας με άλλη ευθεία η οποία έχει το ίδιο β σύμφωνα με τον Πίνακα 5.42 δεκαεννέα μαθητές στους είκοσι (19/20) έδωσαν σωστή απάντηση στο ερώτημα.

5.6 Αποτελέσματα σχετικών ερευνών

Θεμελιώδους σπουδαιότητας στη διδακτική των μαθηματικών καταβάλει η έννοια της συνάρτησης η οποία αποτέλεσε κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών σημαντική εστίαση προσοχής για την ερευνητική μαθηματική κοινότητα (Dubinsky & Harel (1992), Gagatsis & Shiakalli, 2004, Sfard, 1992, Sierpinska, 1992, Vinner & Dreyfus, 1989). Έρευνες σχετικές με την έννοια της συνάρτησης κατέχουν ένα τεράστιο μέρος στη βιβλιογραφία μαθηματικών κειμένων (Evangelidou et al, 2004, Sfard, 1992, Sierpinska, 1992). Κάτι τέτοιο μπορεί να διαπιστωθεί από τον αριθμό των ερευνητικών μελετών οι οποίες έχουν εξετάσει το ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση και την ερμηνεία των συναρτήσεων (Gagatsis & Shiakalli, 2004, Hitt, 1998).

Μεγάλο μέρος των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζει πολλές δυσκολίες στην αφαιρετική σκέψη (Ορφανάκης Σπυρίδων, Διπλωματική Εργασία 2014). Για πολλούς, η ενασχόληση με τις καρτεσιανές γραφικές παραστάσεις και τις αλγεβρικές εκφράσεις δεν είναι ένα εύκολο έργο. Όπως επισημαίνει ο Γαγάτσης (2000), η συνάρτηση είναι μία έννοια με πολλές αναπαραστάσεις, αφού μπορεί να εκφραστεί με πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, αλγεβρική και λεκτική έκφραση. Κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας έτσι, ώστε οι διάφορες αναπαραστάσεις να αλληλοσυμπληρώνονται. Ωστόσο, η μετάβαση από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές γυμνασίου και αποφοίτους λυκείου, όσο και σε φοιτητές μαθηματικών και φυσικής (Hitt, 1998, Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. (Καλδρυμίδου και Οικονόμου, 1992).

Κατά τους Eisenberg και Dreyfus (1991) οι μαθητές προτιμούν να χειρίζονται τη συνάρτηση μέσα από τον αλγεβρικό της τύπο παρά μέσα από τη γραφική της παράσταση. Αυτό το συμπέρασμα έρχεται σε συμφωνία με το συμπέρασμα της Καλδρυμίδου (1998) η οποία επισημαίνει ότι η αρνητική τάση των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών, προς τον χειρισμό της συνάρτησης μέσα από τον αλγεβρικό της τύπο παρά μέσα από τη γραφική της παράσταση οφείλεται σε λόγους όπως:

- Γνωστικής φύσης, που αφορούν τη δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύσης της εικόνας ως τρόπου παράστασης πληροφοριών.
- Επιστημολογικής φύσης, που αναφέρονται στην επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών.
- Συναισθηματικής φύσης, που σχετίζονται με την αβεβαιότητα και το άγχος που αισθάνονται τα υποκείμενα όταν αντιμετωπίζουν γραφικές παραστάσεις.

Σημαντική, επιπλέον, έχει αποδειχθεί η χρήση περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας, όπου οι μαθητές μεταβάλλουν τα δεδομένα, παρατηρούν τις αλλαγές που προκαλούνται και βγάζουν χρήσιμα συμπεράσματα (Ferrara κ.ά., 2006). Ένας ουσιαστικός αριθμός ερευνητικών μελετών έχει εξετάσει τον τρόπο με τον οποίο το περιβάλλον της Δυναμικής Γεωμετρίας όπως το Geogebra δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ερευνήσουν, να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν εικασίες για το μαθηματικό αντικείμενο με το οποίο αλληλεπιδρούν. Σύμφωνα με τον Slavit (1997) οι μαθητές οφείλουν να ερευνήσουν τις αλγεβρικές και συναρτησιακές ιδέες σε διαφορετικά πλαίσια. Ένα τέτοιο πλαίσιο είναι το γεωμετρικό. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές αντιμετωπίζοντας ένα συναρτησιακό πρόβλημα μπορούν να οδηγηθούν στην οικοδόμηση των βασικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης και να υιοθετήσουν σταδιακά το συναρτησιακό τρόπο σκέψης υπό το πρίσμα της συμμεταβολής ποσοτήτων ή μεγεθών. Σύμφωνα με μια έρευνα η οποία πραγματοποιήθηκε στη Μαλαισία και ερευνούσε τις επιδώσεις των μαθητών στα μαθηματικά με την χρήση του λογισμικού Geogebra από τους Kamariah Abu Bakar, Ahmad Fauzi Mohd Ayub και Rohani Ahmad Tarmizi (2010) έδειξε σημαντική αύξηση στις επιδώσεις των μαθητών.

Έρευνες για την χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών έδειξαν ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες ότι:

- Ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες προσφέροντας τη δυνατότητα οπτικοποίησης και συγκεκριμένης επεξεργασίας τους,
- οι μαθητές που χρησιμοποιούν υπολογιστές διαμορφώνουν καλύτερη στάση απέναντι στα μαθηματικά, ενώ παράλληλα αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες,
- η διδασκαλία που υποβοηθείται από υπολογιστή είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά στην άνοδο της επίδοσης ιδιαίτερα των αδύνατων και των πολύ καλών μαθητών,
- η διδασκαλία με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή συμβάλλει στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα μαθηματικά (Ferrara κ.ά., 2006, Kaput & Thompson, 1994).

Συνοψίζοντας τα συγκεκριμένα συμπεράσματα επιβεβαιώνονται και από την έρευνα των: Δέσποινα Χριστοφόρου, Χρήστος Κουρουνιώτης, Ειρήνη Μπιζά και Έλενα Ναρδή (2009) η οποία έλαβε χώρα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι, συγκριτικά με τη στάση που είχαν οι μαθητές πριν την εφαρμογή, η συμμετοχή τους στο μάθημα αυξήθηκε, έδειξαν να ενθουσιάζονται και να κατανοούν καλύτερα τη νέα γνώση. Η εργασία σε ομάδες βοήθησε όλους τους μαθητές, ενώ ενδιαφέρον παρατηρήθηκε στο γεγονός ότι η διδασκαλία μαθηματικών με τη βοήθεια λογισμικού κατάφερε να δώσει ώθηση για συμμετοχή σε δραστηριότητες σε μαθητές οι οποίοι προηγουμένως δεν συμμετείχαν αρκετά στην τάξη των μαθηματικών.

Συμπεράσματα

Πρωταρχικός στόχος της παρούσας, διπλωματικής εργασίας ήταν να ερευνήσει την κατανόηση των μαθητών αναφορικά με τις επιμέρους έννοιες οι οποίες σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης καθώς και τη σύνδεση της με τα άλλα επιστημονικά πεδία πέραν των μαθηματικών. Ωστόσο η έρευνα επιβεβαιώνει και κάποια ήδη γνωστά αποτελέσματα. Πιο αναλυτικά βάση των αποτελεσμάτων του pre-test διαπιστώνεται ότι:

- Οι μαθητές δεν κατάφεραν να διατυπώσουν σωστό ορισμό για την έννοια της συνάρτησης.

- ❖ Οι μαθητές θεωρούν ότι γνωρίζουν τις έννοιες που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης αλλά όταν τους δόθηκε το pre-test δεν μπόρεσαν να εφαρμόσουν τη γνώση στην πράξη.
- ❖ Δεν έχουν ξεκαθαρίσει πότε μια σχέση χαρακτηρίζεται συναρτησιακή και πότε όχι.
- ❖ Δυσκολεύονται με τις διάφορες αναπαραστάσεις που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης.

Κάτι τέτοιο συμπεραίνεται και από την ποιοτική και ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών. Συγκεκριμένα το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης δεν κατάφερε να δώσει σωστό ορισμό για την έννοια της συνάρτησης. Όσων αφορά τις επιμέρους έννοιες της υπήρχαν μαθητές οι οποίοι μπόρεσαν να συμπληρώσουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης καθώς και να σχεδιάσουν τη γραφική της παράσταση, ωστόσο το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών δεν κατάφερε να δώσει σωστή απάντηση σε σχετικά ερωτήματα. Έπειτα όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα: «Έχουν κατανοήσει οι μαθητές της Α' Λυκείου από τα προηγούμενα χρόνια τις έννοιες που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης;», τα αποτελέσματα δεν ήταν τα επιθυμητά. Συγκεκριμένα, ελάχιστος αριθμός μαθητών κατάφερε να απαντήσει με επιτυχία στις δραστηριότητες του pre-test (παράρτημα Α). Οι περισσότεροι παρουσίασαν δυσκολία στο να περιγράψουν σε ένα φίλο τους το τι είναι συνάρτηση και όπως ήταν αναμενόμενο δεν μπόρεσαν στην πορεία να δώσουν παράδειγμα το οποίο να εκφράζει συναρτησιακή σχέση. Παρόμοια αποτελέσματα διαπιστώθηκαν και για τον σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων αλλά και για τις επιμέρους ιδιότητες τους. Αναφορικά με την έννοια που σχετίζεται με την κλίση της συνάρτησης ορισμένοι μαθητές απάντησαν σωστά στο ερώτημα, ωστόσο όμως η πλειοψηφία των μαθητών δεν θυμόταν την έννοια κλίση συνάρτησης και κατά συνέπεια τον τρόπο υπολογισμού της. Στη συνέχεια σχετικά με τις ιδιότητες των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β διαπιστώθηκε ότι ελάχιστοι μαθητές γνώριζαν τη σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις, το σημείο από το οποίο διέρχονται καθώς και τον άξονα τον οποίο τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β. Τέλος, καταδεικνύεται η ελλιπής γνώση των μαθητών σχετικά με τη σύνδεση της έννοιας της συνάρτησης με τα άλλα επιστημονικά πεδία πέρα των μαθηματικών. Ο ισχυρισμός αυτός επιβεβαιώνεται όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως από το γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία κατά τη μεταφορά και συσχέτιση των πληροφοριών μιας συνάρτησης σε σχέση με ένα γράφημα καθώς και με άλλα επιστημονικά πεδία αντίστοιχα.

Μετά το πέρας των μαθημάτων τα αποτελέσματα ήταν πολύ ικανοποιητικά. Πιο αναλυτικά η συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα αυξήθηκε, ενώ έδειξαν να ενθουσιάζονται με την χρήση του παρόντος λογισμικού. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα επιβεβαιώνεται αρχικά από το γεγονός ότι στέκονταν αδιάφοροι στο χτύπημα του κουδουνιού για διάλειμμα ενώ μετέπειτα και από το γεγονός ότι το μεγαλύτερος μέρος των μαθητών ανέφερε ότι «πρώτη φορά καταλαβαίνουμε μαθηματικά». Στη συνέχεια μπορούμε αβίαστα να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οι μαθητές κατανόησαν καλύτερα τις έννοιες που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης τις οποίες είχαν διδαχτεί στις τρείς τάξεις του Γυμνασίου αλλά και αυτές που διδάχτηκαν φέτος. Με βάση την ανάλυση των αποτελεσμάτων του post-test (παράρτημα Η) καταφαίνεται ότι το λογισμικό Geogebra έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να αρχίσουν να σκέφτονται με διαφορετικό τρόπο. Μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών ήταν εμφανές ότι αφού είχαν διαβάσει το ζητούμενο της άσκησης, και αφού είχαν λύσει παρόμοια ζητούμενα στο ηλεκτρονικό περιβάλλον, τους ήταν πιο εύκολο να συνδυάσουν τον τρόπο με τον οποίο λύθηκε το συγκεκριμένο ερώτημα στο Geogebra και να το εφαρμόσουν στο χαρτί, με αποτέλεσμα να φτάσουν πιο γρήγορα και με πιο εύκολο τρόπο στη σωστή απάντηση. Έρευνες δείχνουν ότι, την καλύτερη επίδοση στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης έχουν οι μαθητές που διδάσκονται τη συνάρτηση με την χρήση των φύλλων εργασίας. Η μάθηση με την χρήση φύλλων εργασίας, στοχεύει εκτός από την ανάπτυξη κριτικής σκέψης και επιστημονικού τρόπου εργασίας, στην ανάπτυξη της δυνατότητας των μαθητών να εκφραστούν ελεύθερα και να αναπτύξουν στάσεις και δεξιότητες. Τέλος, βελτιώνει την επικοινωνία και τη συνεργασία των μαθητών, αναπτύσσοντας τη συνεργατική συμμετοχή τους. Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται και στην παρούσα διπλωματική εργασία καθώς η εργασία σε ομάδες επέφερε σημαντικά αποτελέσματα αναφορικά με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης σε όλους τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές οι οποίοι φαίνεται να είχαν κατακτήσει καλύτερα την έννοια της συνάρτησης βοηθώντας τους πιο «αδύναμους» μαθητές κατάφεραν να εμπεδώσουν καλύτερα τη νέα γνώση, ενώ και οι δεύτεροι παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στην πρόσκτηση ως αποτέλεσμα της ομαδοσυνεργατικής εργασίας. Ιδιαίτερα ενθαρρυντικό είναι το γεγονός ότι η παρέμβαση κατάφερε να εμπλέξει σε δραστηριότητες μαθητές που μέχρι τότε εκφράζονταν σαφώς αρνητικά και δε συμμετείχαν ενεργά στο μάθημα των μαθηματικών. Έτσι λοιπόν, παρατηρήθηκε βελτίωση των επιδόσεων των πιο αδύναμων μαθητών.

Έρευνες που σχετίζονται με την χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών κατέδειξαν ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες:

- ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες προσφέροντας τη δυνατότητα οπτικοποίησης,
- οι μαθητές που χρησιμοποιούν υπολογιστές διαμορφώνουν καλύτερη στάση απέναντι στα μαθηματικά, ενώ αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες,
- η διδασκαλία που υποβοηθείται με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά στην άνοδο της επίδοσης ιδιαίτερα των αδύνατων και των πολύ καλών μαθητών,
- τέλος, η διδασκαλία με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή συμβάλλει στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα μαθηματικά (Ferrara et al, 2006).

Μέσα από την ανασκόπηση της παρούσας εργασίας, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης κατανόησε καλύτερα την έννοια της συνάρτησης καθώς και τις επιμέρους έννοιες της.
- Όσον αφορά στον ορισμό της συνάρτησης διαπιστώθηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές έδειξαν σημαντική βελτίωση συγκριτικά με την αρχική τους εικόνα.
- Σε σχέση με το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων σχεδόν όλοι οι μαθητές κατάφεραν με επιτυχία να συμπληρώσουν τους πίνακες τιμών και να τις σχεδιάσουν μετέπειτα σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων.
- Σχετικά με τις ιδιότητες των συναρτήσεων y=αx και y=αx+β μεγάλο μέρος των μαθητών έδειξε μεγάλη πρόοδο στις γνώσεις του σε σχέση με τις προϋπάρχουσες γνώσεις.
- Σε σχέση με τις καινούργιες έννοιες τις οποίες διδάχτηκαν για τις συναρτήσεις οι περισσότεροι μαθητές της τάξης διαπιστώθηκε ότι τις κατανόησαν σε αρκετά μεγάλο βαθμό.

Στη συνέχεια θετικά αποτελέσματα διαπιστώθηκαν σε σχέση με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: «Αν και κατά πόσο η χρήση μαθηματικού λογισμικού Geogebra στη διδασκαλία των συναρτήσεων σε μαθητές της Α΄ Λυκείου μπορεί να τους βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των επιμέρους εννοιών οι οποίες συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης καθώς και στην κατάκτηση της νέας γνώσης γύρω από την έννοια.». Οι μαθητές αν και δεν ήταν εξοικειωμένοι με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού στη διδασκαλία τους, ούτε με δραστηριότητες σαν τις προτεινόμενες, οι οποίες διαφοροποιούνται των συνηθισμένων, φάνηκαν ιδιαίτερα θετικοί σε μια διδασκαλία τέτοιας μορφής. Οι δυσκολίες εξαιτίας της χρήσης άγνωστου σε αυτούς λογισμικού γρήγορα ξεπεράστηκαν καθώς ισοσταθμίστηκαν από τον ζήλο που επέδειξαν για να συμμετάσχουν ουσιαστικά στη δραστηριότητα αυτή. Οι μαθητές ενεπλάκησαν ενεργά στη συγκεκριμένη διδασκαλία αλληλεπιδρώντας τόσο με το τεχνολογικό κατασκεύασμα, όσο και με τους συμμαθητές τους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δουν τις δραστηριότητες αλλά και το μάθημα σαν παιχνίδι μέσα από το οποίο ξανάκουγαν και μάθαιναν καινούργιες έννοιες γύρω από τη συνάρτηση. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της εργασίας των Ferrara κ.ά. 2006, Kaput & Thompson 1994, κατά τους οποίους η διδασκαλία των μαθηματικών με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στη διαμόρφωση καλύτερης στάσης απέναντι στα μαθηματικά, στην άνοδο των μαθηματικών επιδόσεων και τέλος στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Πολύ ικανοποιητικά ήταν αποτελέσματα όσων αφορά και το δεύτερο σκέλος του δευτέρου ερευνητικού ερωτήματος για το αν βοήθησε το λογισμικό Geogebra τους μαθητές της Α΄

Λυκείου να κατακτήσουν τη νέα γνώση γύρω από την έννοια της συνάρτησης. Βάση των απαντήσεων των μαθητών στις δραστηριότητες οι οποίες εξέταζαν το συγκεκριμένο ερώτημα μπορούμε με ευκολία να συμπεράνουμε ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών της τάξης εμπέδωσε σε μεγάλο βαθμό τις καινούργιες έννοιες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να δουλέψουν δραστηριότητες βασισμένες στις νέες έννοιες με έναν τελείως διαφορετικό τρόπο σε σχέση με αυτόν που είχαν μάθει να δουλεύουν. Παρόμοιο συμπέρασμα επιβεβαιώνεται και από μια σχετική έρευνα η οποία έλαβε χώρα στη Μαλαισία από τους Kamariah Abu Bakar, Ahmad Fauzi Mohd Ayub και Rohani Ahmad Tarmizi (2010) η οποία έδειξε σημαντική αύξηση στις επιδώσεις των μαθητών οι οποίοι συνεργάστηκαν και δούλεψαν με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού Geogebra.

Θετικά αποτελέσματα προέκυψαν σχετικά με το τρίτο και τελευταίο ερευνητικό ερώτημα το οποίο αφορούσε το βαθμό κατανόησης της σχέση της συνάρτησης με τα άλλα επιστημονικά πεδία πέρα των μαθηματικών. Στο συγκεκριμένο ερώτημα μετά την παρέμβαση παρατηρήθηκε σημαντική αλλαγή στη στάση των μαθητών αναφορικά με θέματα διαθεματικού περιεχομένου. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας οι μαθητές έδιναν δικά τους παραδείγματα συναρτησιακών σχέσεων τα οποία σχετίζονταν με έννοιες από άλλα μαθήματα, όπως παραδείγματος χάρη από τον κλάδο της φυσικής. Όσον αφορά την κατανόηση των προβλημάτων τα οποία ήταν βασισμένα στην καθημερινότητα διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές ξεπέρασαν το φόβο που τους διακατείχε κατά την προσπάθεια διαχείρισης και λύσης ενός προβλήματος, ενώ τέλος μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές κατανόησαν πλήρως το ρόλο των μεταβλητών.

Συμπερασματικά έχει καταστεί σαφές πως τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας υποδεικνύουν ότι ο προτεινόμενος τρόπος διδασκαλίας βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες οι οποίες σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης καθώς και τη σύνδεση της με τα άλλα επιστημονικά πεδία πέρα των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα του pre-test κατέδειξαν την αναγκαιότητα για εδραίωση μιας νέας μορφής διδασκαλίας η οποία απομακρύνεται από τον παραδοσιακό τρόπο μάθησης. Μια διδασκαλία η οποία στηρίζεται σε απλή εφαρμογή δραστηριοτήτων και στην απλή αποστήθιση κανόνων δεν αρκεί για να εφοδιάσει τους μαθητές με τις απαραίτητες δεξιότητες ώστε να αντιμετωπίσουν αργότερα κάποιο πρόβλημα που θα τους παρουσιαστεί. Για την καλύτερη και πιο αποτελεσματική κατάκτηση της γνώσης πρέπει οι μαθητές να αποκτήσουν ενεργό ρόλο στη διαδικασία μάθησης αλληλεπιδρώντας με τις δραστηριότητες και με τους συμμαθητές τους.

Οι μαθητές αν και δεν ήταν εξοικειωμένοι αρχικά με τέτοιου είδους διδασκαλία ούτε με την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού, φάνηκαν στην πορεία ιδιαίτερα θετικοί απέναντι σε μια διδασκαλία τέτοιας μορφής. Οι μαθητές ενεπλάκησαν ενεργά στο συγκεκριμένο τρόπο διδασκαλίας αλληλεπιδρώντας τόσο με το εκπαιδευτικό λογισμικό, όσο και με τους συμμαθητές τους. Ωστόσο για να επιτευχθεί σωστά μια τέτοιου είδους μορφή διδασκαλίας πρέπει τα σχολεία να διαμορφώσουν τα εργαστήρια της πληροφορικής με σύγχρονους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, ενώ παράλληλα και οι εκπαιδευτικοί με τη σειρά τους να ενημερωθούν κατάλληλα για τα σύγχρονα εκπαιδευτικά λογισμικά που υπάρχουν ώστε να αποκτήσουν μια ουσιώδη και μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα.

Το επίπεδο εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία αναμένεται να είναι ακόμα υψηλότερο εάν οι μαθητές καταφέρουν να αποκτήσουν καλύτερη εξοικείωση αναφορικά με την χρήση της τεχνολογίας στη διδακτική των μαθηματικών. Στη διδακτική των μαθηματικών, είναι επομένως έντονη η ανάγκη δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων όπου κυριαρχούν η δράση, ο διάλογος, το βίωμα, η έκφραση, η αναπαράσταση, ο πειραματισμός, η επιστημονική στάση απέναντι στη γνώση και η συμμετοχή σε πολλαπλές συλλογικότητες. Πρόταση για περαιτέρω έρευνα είναι η εφαρμογή του προτεινόμενου τρόπου διδασκαλίας σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και από περισσότερα σχολεία. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να εξασφαλιστεί η ασφαλέστερη και αντικειμενικότερη εξαγωγή των συμπερασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ξένη Βιβλιογραφία

1. Anna Sfard and Liora Linchevski., (1994) The gains and the pitfalls of reification- The case of algebra, Educational Studies in Mathematics March 1994, Volume 26, Issue 2-3, pp 191-228
2. Anna Sfard., (2013) *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin,* Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, No. 1 (Feb., 1991), pp. 1-36
3. Artigue, M., & Didirem, E., (1997) *Teaching and Learning elementary analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution?,* First Mediterranean Conference on Mathematics 1997, 207-217
4. Atiyah, M., (2001) *Mathematics in the 20th Century: geometry versus algebra,* Mathematics Today, 37(2), 46-53.
5. Bell, E. T., (1940) *The development of Mathematics,* 2nd ed. N.Y.-London.
6. Blake, S., Hurley, S., &Arenz, B., (1995) *Mathematical Problem Solving and Young Children*, Early Childhood Education Journal, 23 (2), 81-84.
7. Boyer, C. B., (1969*) The history of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, 3rd edition
8. Brown J.P., (2009) *Concept Maps: Implications for the teaching of function for secondary education students*, In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1), Palmerston North, NZ: MERGA
9. Dubisky E., Harel G., (1992) *The Nature of the Process Conception of Function,* in E.
10. Eisenberg T., Dreyfus T., (1994) *On understanding how students learn to visualize function transformations,* Research on Collegiate Mathematics Education I, 45 – 68
11. Evangelidou A., Spyrou P., Elia I., Gagatsis, A., (2004) *University students' conceptions of function*, In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.).
12. Fernando Hitt, (1998) *Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function*, JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR, 17 (1), 123-134

13. Ferrara F., Pratt D., Robutti O., (2006) *The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calculus*, In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (p. 237-273), Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

14. Fey J. T., (1984) *Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula, Reston,* VA: National Council of Teachers of Mathematics.

15. Fuson, K., M.Carroll, W., & V.Drueck, J., (2000, May) *Achievement results for second and third graders using the standards-based curriculum everyday mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education Vol. 31, No. 3 (May, 2000), pp. 277-295

16. Gagatsis A., Shiakalli M., (2004) *Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving*, Educational Psychology, 24(5), p. 645 – 657.

17. Gerson, H., (2008) *David's Understanding of Functions and Periodicity*, School Science and Mathematics, 108, 28-38.

18. Giorgio T. Bagni, (2005) *Functions: Processes, properties, objects,* Scientia Paedagogica Experimentalis, XLII, 2 (2005), 205–230

19. Godwin, S. and Sutherland, R., (2004) *Whole class technology for learning mathematics: the case of functions and graphs,* Education, Communication & Information, Vol. 4, No. 1, March 2004

20. Grabinger, S., & Dunlap, C., (2002) *Problem-based Learning as an Example of Active Learning and Student Engagement,* In Advances in Information Systems: Proccedings Second International Conference. T. Yakhno (Ed.): ADVIS 2002, LNCS 2457, pp. 375-384.

21. Heid K.M., (2009) *Mathematical Knowledge for Secondary School Mathematics Teaching*, The Pennsylvania State University

22. Hitt, F., (1998) *Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function,* The Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 123-134.

23. Hoyles, C. & Healy, L., (1997) *Unfolding meanings for reflective symmetry*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol. 2 (pp. 27-59), Kluwer Academic Publishers.

24. Joanna Stróżyk., (2014) *Blended learning in polish schools,* Scientific Issues Jan Długosz University in Częstochowa Mathematics XIX (2014) 165–171

25. Joanne Hardman., (2005) *An exploratory case study of computer use in a primary school mathematics classroom: New technology, new pedagogy?,* Perspectives in Education, Volume 23(4), December 2005

26. João Pedro Ponte, (1992*) The History of the Concept of Function and Some Educational Implications,* The Mathematics Educator

27. Kamariah Abu Bakar, Ahmad Fauzi Mohd Ayub, Rohani Ahmad Tarmizi, (2010) *Exploring the effectiveness of using GeoGebra and e-transformation in teaching and learning Mathematics,* Advance Educational Technologies

28. Kaput, J., & Thompson P., (1994) *Technology in mathematics education research: The first 25 years in JRME*, Journal for Research in Mathematics Education, 25(6), 674 – 684.

29. Kleiner, I., (1989) *Evolution of the Function Concept: a Brief Survey*, College Math. Jour. 20, 282-300.

30. Knuth J.E., (2000) *Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study,* Journal of Research in Mathematics Education, 31 (4), p. 500-508.

31. Lagrange, J.B., (2005) *Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches,* Inter-national Journal of Computers for Mathematical Learning, 10, 143 – 189.

32. Markus Hohenwarter and Karl Fuchs July, (2004) *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*, ZDM classification: R 20, U 70

33. Markus Hohenwarter, (2000) *Dynamic investigation of functions using GeoGebra*, Florida Atlantic University

34. Moschkovich J., Schoenfeld A. H., Arcavi A., (1993) *Aspects of Understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them, in T.A. Romberg, E. Fennema & T.C. Carptener Eds*, Integrating Research on the graphical representation of function (pp. 69-100), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

35. O' Challaghan B., (1998) *Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions,* Journal for Research in Mathematics Education, 29.

36. Ponte, J., (1992) *The history of the concept of function and some educational implications,* The mathematics Educator, Vol. 3, νο.2, σελ. 3-8

37. Roy D. Pea, (1987) *Cognitive Technologies for Mathematics Education,* Educational Communication and Technology New York University

38. Sajka, M., (2003) *A secondary school student's understanding for the concept of function – a case study*, Educational Studies in Mathematics, 53, 229-254.

39. Sangwin, C., (2007) *A brief review of GeoGebra: dynamic mathematics*, MSOR Connections, 7(2), 36-38.

40. Sfard A. (1992) *Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function*, In E. Dubinsky & G. Harel, The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy, (p.59-84), Mathematical Association of America

41. Sheryl Stump, (1999) *Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of slope*, Mathematics Education Research Journal

42. Sierpinska A., (1992) *On understanding the notion of function, In E. Dubinsky & G. Harel, The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (p. 25 – 58),* United States: The Mathematical Association of America.

43. Smith, D. E., (1923) *History of Mathematics*, v.1, New York.

44. Tall D.O., Bakar M., (1991) *Students' mental prototypes for functions and Lagrange, J.B.* (2005), Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. International Journal of Computers for Mathematical Learning, p. 143 – 189

45. Theodossios Zachariades, Constantinos Christou, Eleni Papageorgiou, (2000-01) *The difficulties and reasoning of under graduate mathematics students in the identification of functions,* University of Athens

46. Vinner S., Dreyfus T., (1989) *Images and definitions for the concept of function,* Journal for Research in Mathematics Education, 20, p. 356-366.

47. Youschkevitch A. P., (1977) *The concept of function up to the Middle of the 19th century*, Archive for History of Exact Sciences, p. 36-85

48. Yu-Wen Allison Lu, (2008) *Linking Geometry and Algebra: A multiple-case study of Upper-Secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan,* University of Cambridge

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ. Δαμιανού, Χ.:(2011) *'Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων, Α΄ Γενικού Λυκείου. ΟΕΔΒ.*
2. Αργυράκης, Δ., Βουργάνας ,Π. Μεντής, Κ. Τσικοπούλου, Σ. Χρυσοβέργης, Μ.:(2011) *'Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου' Εκδόσεις Πατάκη, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.*
3. Γαγάτσης, Α., Σιακαλλή, Μ., (2000) *Chic: ένα στατιστικό πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων σε σχέση με τη διδακτική των μαθηματικών-εφαρμογή στις συναρτήσεις,* Πρακτικά 17ου Πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας, 601-610.
4. Δέσποινα Χριστοφόρου, Χρήστος Κουρουνιώτης, Ειρήνη Μπιζά, Έλενα Ναρδή, (2009) *Εναλλακτική Μορφή Διδασκαλίας των Συναρτήσεων στη Β΄ Γυμνασίου με Χρήση Νέων Τεχνολογιών*, Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές ΕΝΕΔΙΜ, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
5. Καλδρυμίδου Μ., Οικονόμου, Α., (1992) *Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου,* Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 10-11, 21-43.
6. Ορφανάκης Σπυρίδων, (2014) *«Κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης ως συμμεταβολή από μαθητές της Α' Λυκείου με τη βοήθεια υπολογιστικών περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας»,* Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
7. Βλάμος, Π. Δρούτσας, Π. Πρέσβης ,Γ. Ρεκούμης, Κ.: (2011). '*Μαθηματικά Β΄* Γυμνασίου' , *εκδόσεις Πατάκη, ΟΕΔΒ*.
8. Παναγιώτης Γ. Θωμάς, (2013*) «Δυσκολίες κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης από μαθητές της Α΄ Λυκείου»,* Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
9. Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Παραρτήματα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Όνομα:

Επίθετο:

Δραστηριότητα 1

α)Θέλεις να εξηγήσεις σε έναν συμμαθητή σου τι είναι συνάρτηση. Γράψε αναλυτικά στην απάντηση σου όλα όσα θα έλεγες ώστε να κατανοήσει την έννοια.

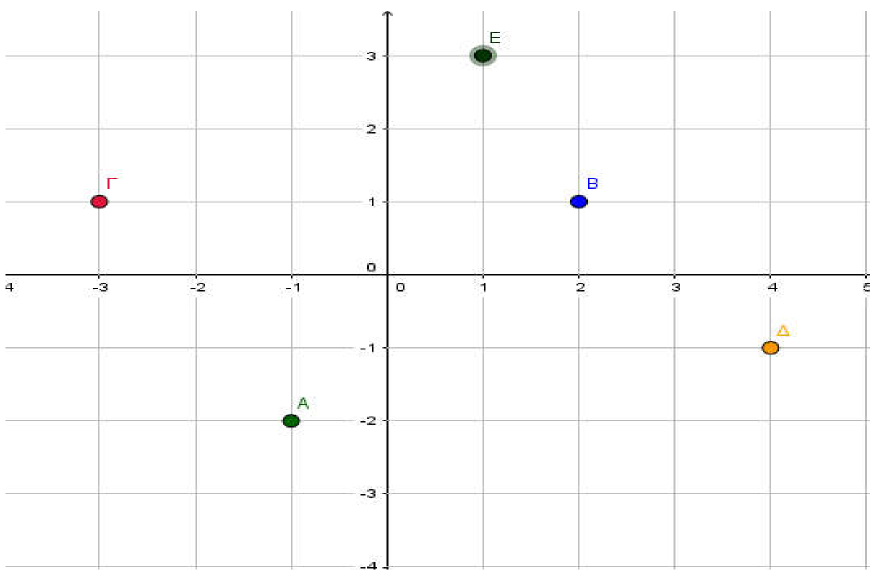
β)Μπορείς να σκεφτείς ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο να χρησιμοποιείς την έννοια **συνάρτηση**;

Απάντηση

α)……
………
………

β)……
………
………

Δραστηριότητα 2



Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

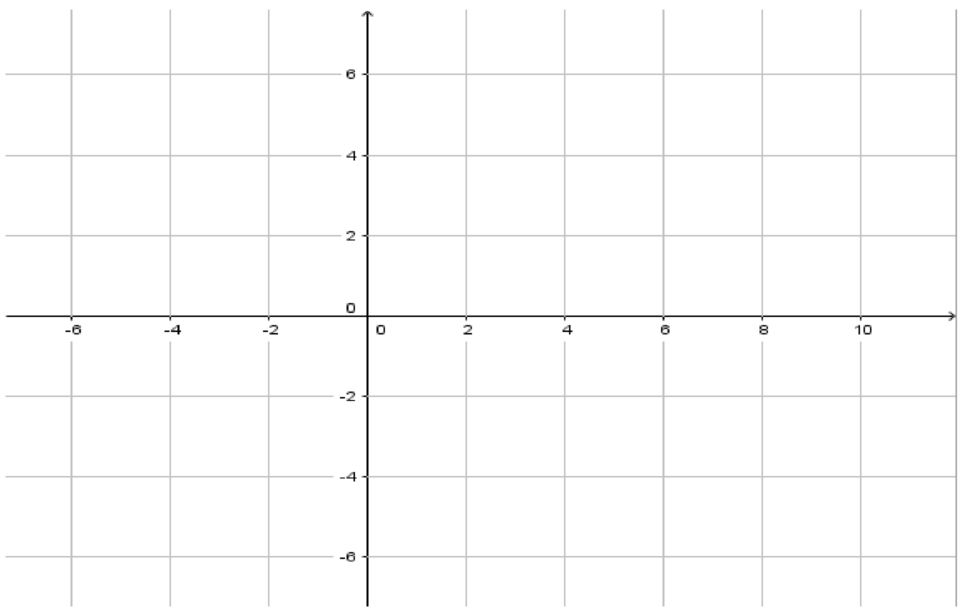
Κουκίδα	**Τετμημένη x**	**Τεταγμένηy**	**Συντεταγμένες(x,y)**

Δραστηριότητα 3

Να σχεδιάσεις στο παρακάτω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα παρακάτω σημεία.

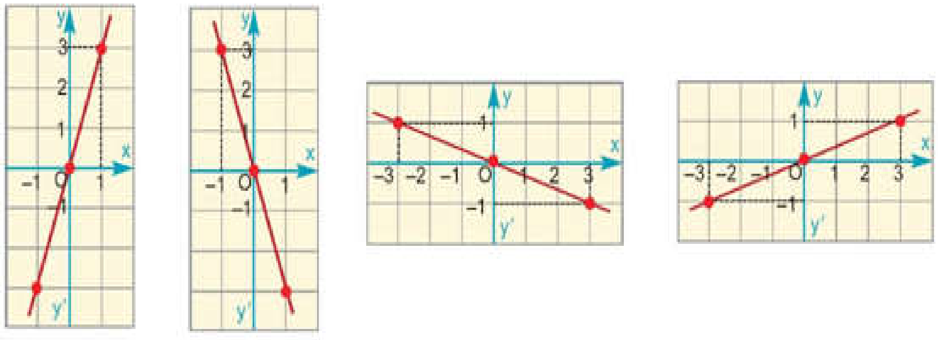
Σημείο	Συντεταγμένες
Α	(2,4)
Β	(-6,1)
Γ	(8,0)
Δ	(10,-4)
Ε	(0,-2)

Απάντηση



Δραστηριότητα 4

Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η y=3x;



Απάντηση

……
……

Δραστηριότητα 5

Ποία από τις παρακάτω ευθείες έχει κλίση τον αριθμό - 1;

α)y= x	β)y= -2x	γ)y= x +1	δ)y= - x	ε)y= x- 1

Απάντηση

……
……

Δραστηριότητα 6

α)Τα ποσά x, y του παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

x	-3	-2	1	2	3
y			2		
Λόγος $\frac{y}{x}$					
Σημείο (x,y)			(1,2)		

β) Τι ισχύει για το λόγο y/x;

……
……

γ) Να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x.

……
……

Δραστηριότητα 7

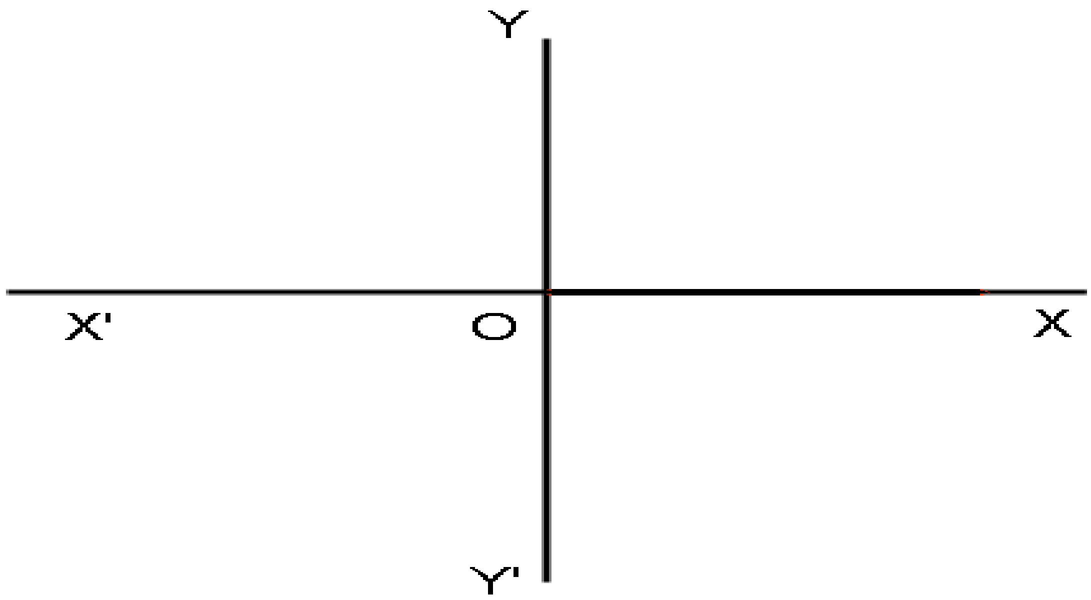
α)Να σχεδιάσεις με τη βοήθεια του πίνακα τιμών σε ένα **κοινό σύστημα αξόνων** τις συναρτήσεις :

y=5x

x			
y			

y=5x + 4

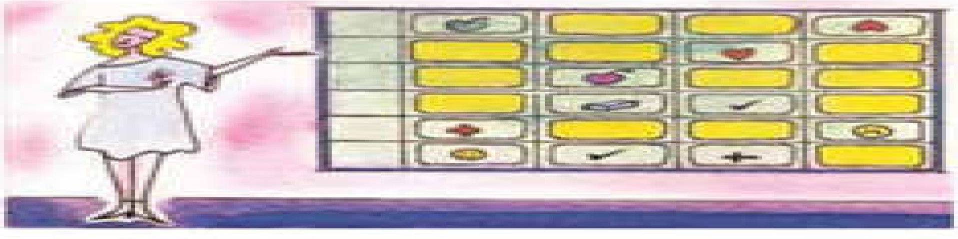
x			
y			



Συμπέρασμα: «Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β, β≠0 είναι μια ευθεία …………………… της ευθείας y=αx, που διέρχεται από το σημείο (,) του άξονα …………».

Δραστηριότητα 8

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι κάθε παίκτης ξεκινάει έχοντας ως δώρο από την εταιρεία παραγωγής 1000€. Στη συνέχεια πρέπει να απαντήσει σε 20 ερωτήσεις. Σε κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 100€, ενώ σε κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 50€. Συμβολίζουμε με x το πλήθος των σωστών απαντήσεων.



α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το πλήθος **ω** των λανθασμένων απαντήσεων.

β) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το συνολικό κέρδος y του παίκτη.

Απάντηση

α)………
……
……
……

β)………
……
……
……

Δραστηριότητα 9

Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση $u=45-1,5t$, όπου t ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.

α)Να βρείτε τη ταχύτητα του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.

β)Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο.

Απάντηση

α………
……
……

β)………
……
……

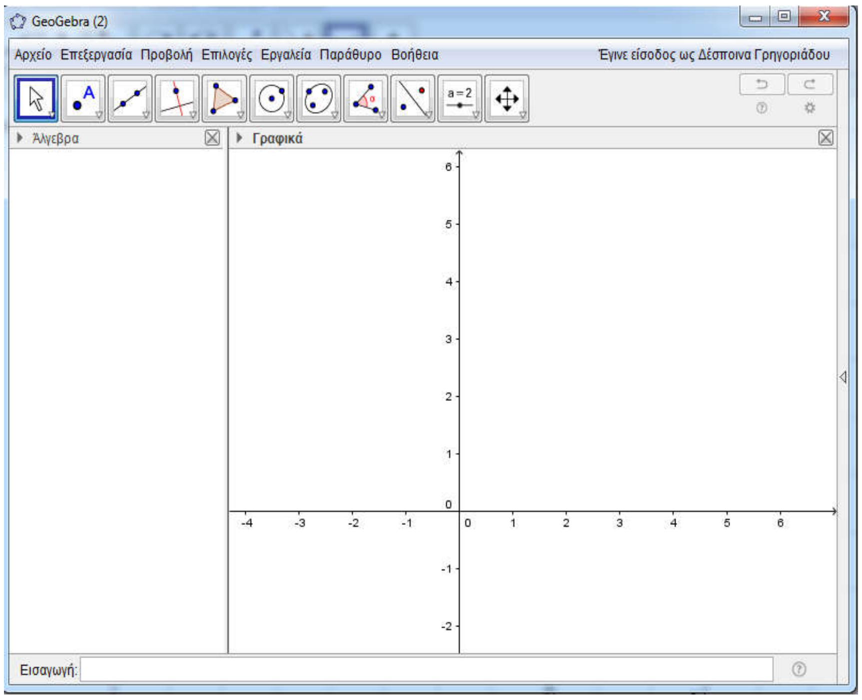
Καλή Επιτυχία!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

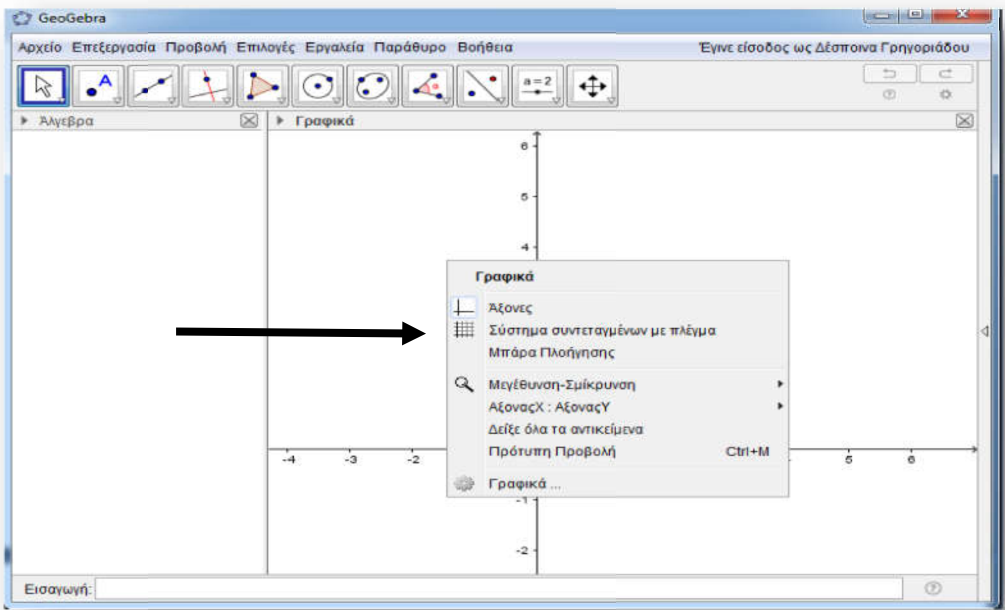
Οδηγίες χρήσης του Λογισμικού Geogebra

✓ **<u>Εισαγωγή Συνάρτησης</u>**

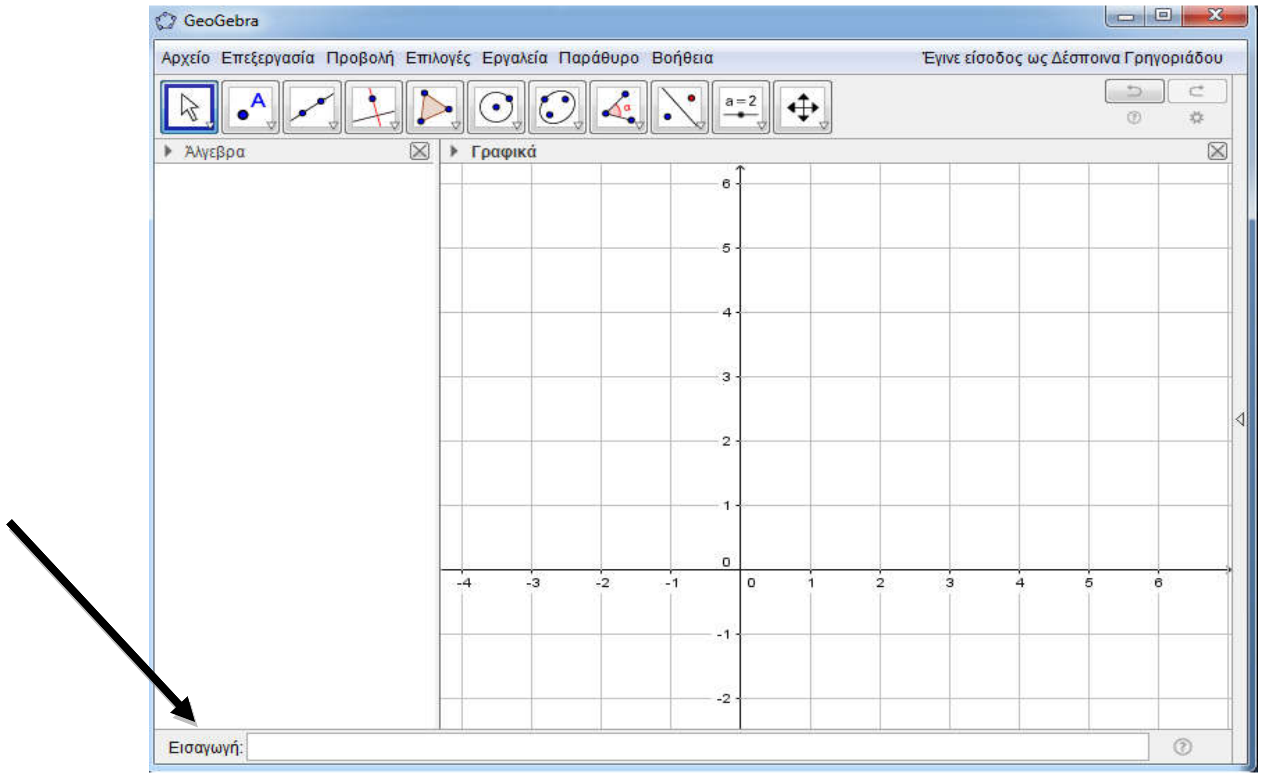
Αφού ανοίξουμε το πρόγραμμα θα εμφανιστεί μπροστά ας ένα παράθυρο



και **κάνοντας δεξί κλικ μέσα στο πλαίσιο** θα εμφανιστεί ακόμη ένα παράθυρο. Στη συνέχεια για να **δουλέψουμε με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** πατάμε τη δεύτερη επιλογή «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».

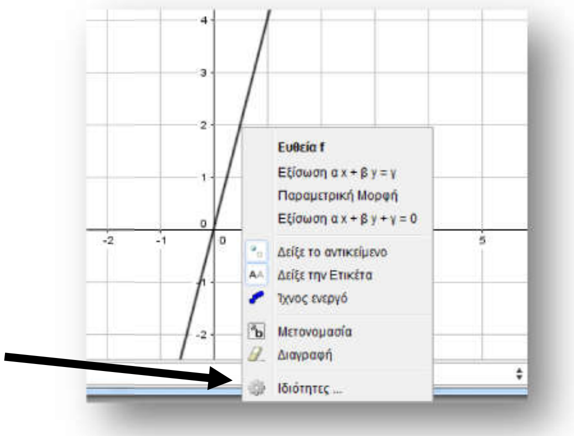


Η εισαγωγή της συνάρτησης γίνεται κάτω δεξιά στο κουτάκι που λέει «Εισαγωγή»:

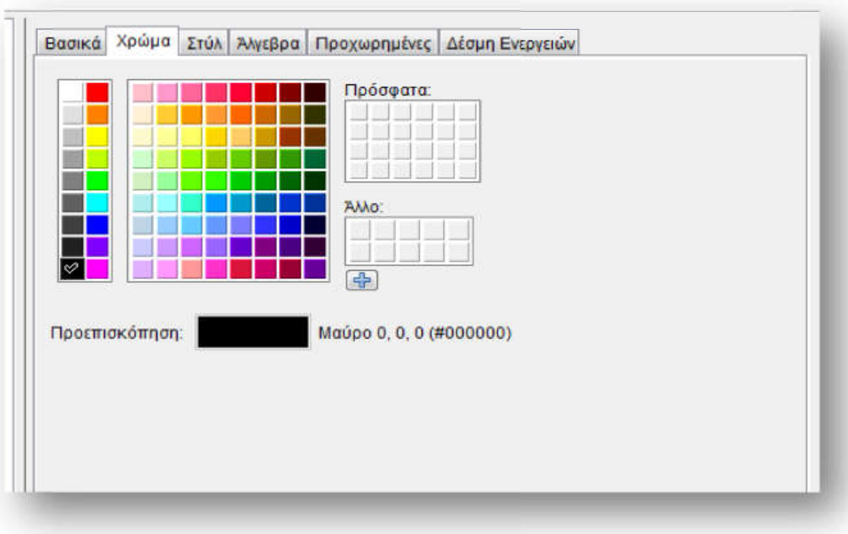


Στη συνέχεια πληκτρολογούμε τη συνάρτηση και πατάμε <u>ender</u>

❖ Αν θέλετε να αλλάξετε το χρώμα της συνάρτησης πηγαίνετε πάνω στη συνάρτηση με το ποντίκι και μόλις το χρώμα της γίνει λίγο πιο έντονο κάνετε δεξί κλικ και ιδιότητες

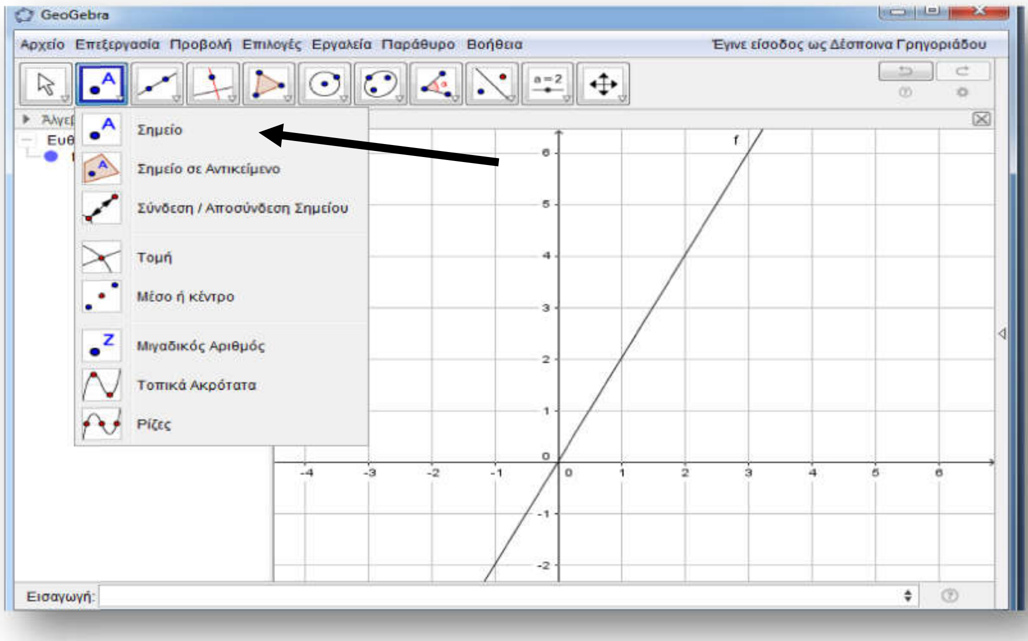


και πατώντας στη καρτέλα χρώμα μπορείτε να επιλέξετε όποιο χρώμα σας αρέσει.

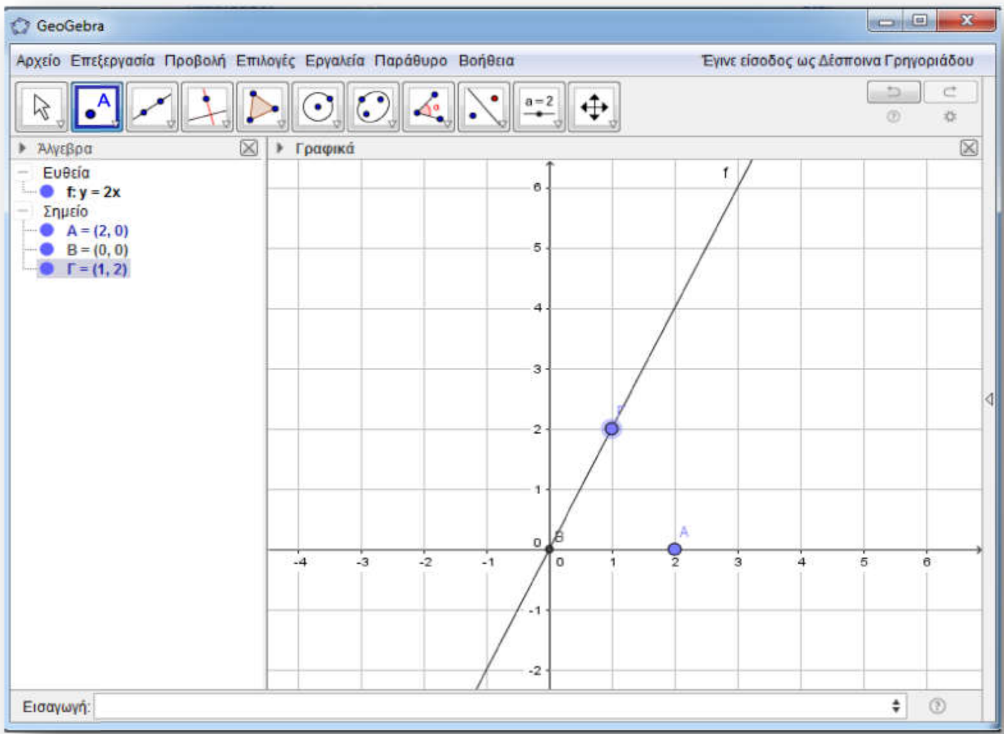


✓ **<u>Για να υπολογίσουμε τη γωνία-κλίση που σχηματίζει ο άξονας x'x με την συνάρτηση:</u>**

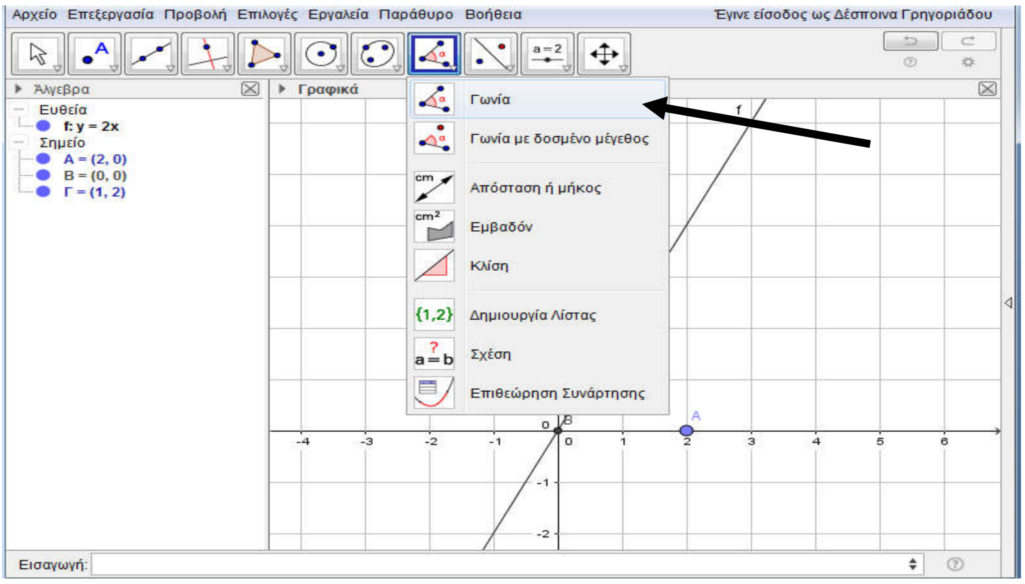
1ον Πατάμε στο εικονίδιο **σημείο** και επιλέγουμε την πρώτη επιλογή σημείο



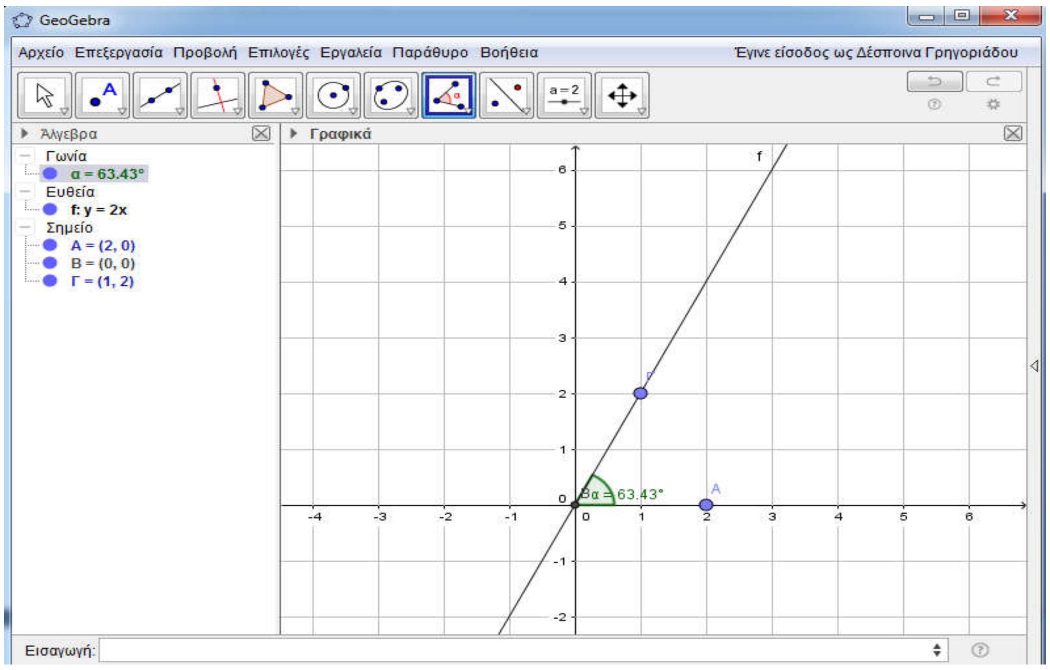
2ονΕπιλέγουμε **τρία σημεία**: **ένα σημείο πάνω στον άξονα x'x**, **ένα σημείο πάνω στο σημείο που η συνάρτηση ακουμπάει τον άξονα x'x, και ένα τελευταίο σημείο πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης**. Μπορούμε αν θέλουμε να αλλάξουμε και το χρώμα στα σημεία ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν.



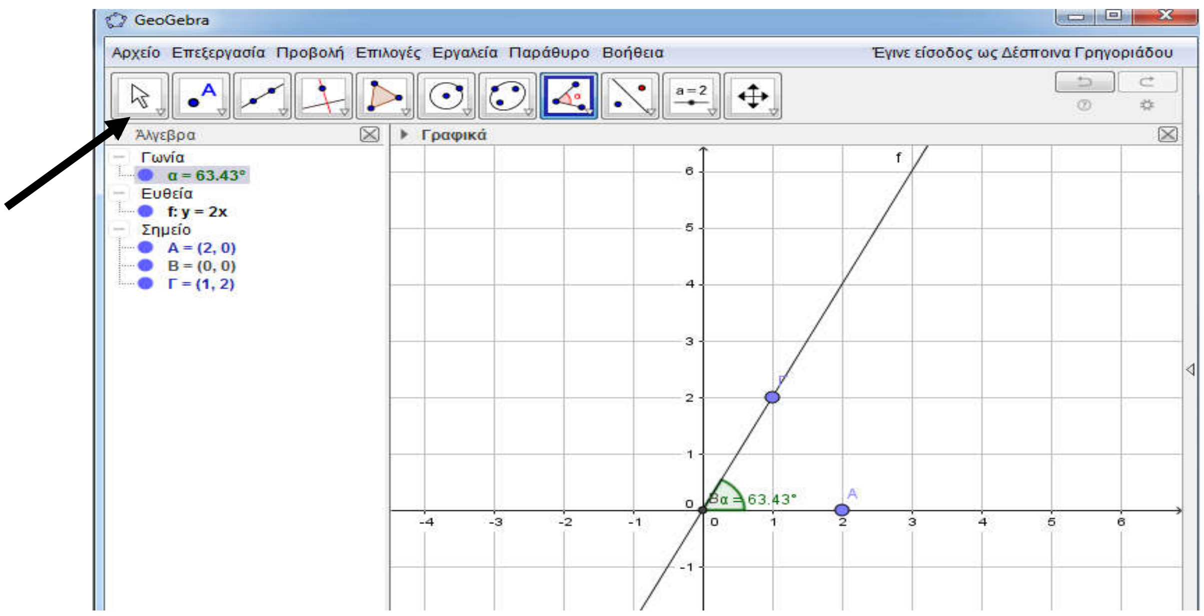
Έχοντας επιλέξει τα τρία σημεία πηγαίνουμε στην **επιλογή Γωνία** και πατάμε την πρώτη επιλογή «Γωνία»



Στη συνέχεια πατάμε μια φορά στα σημεία που είχαμε επιλέξει προηγουμένως και βλέπουμε να σχεδιάζεται η γωνία



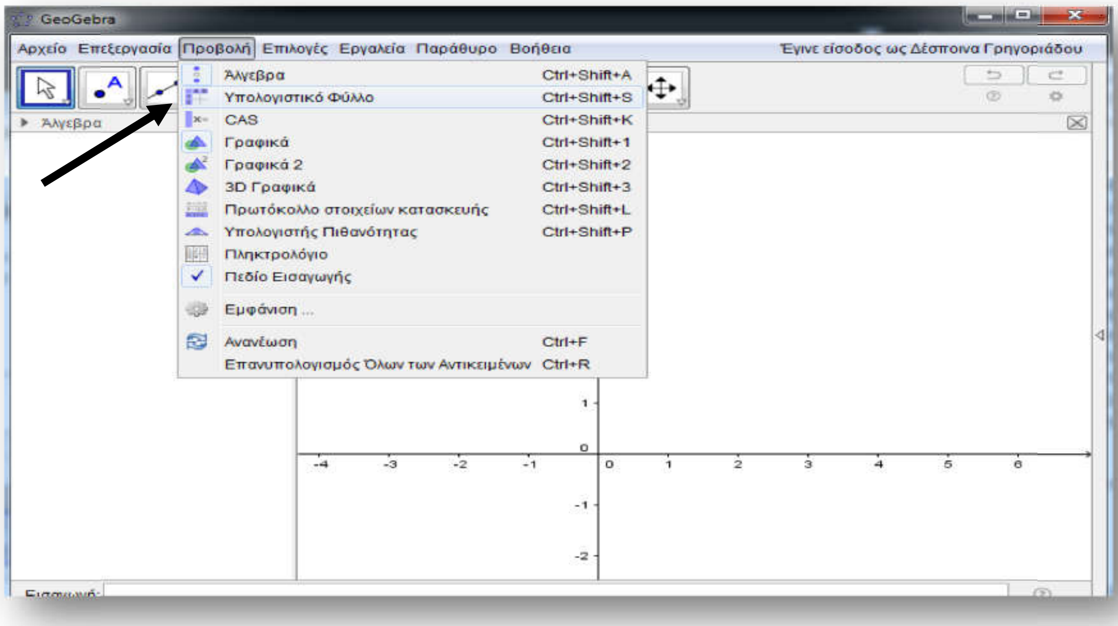
Τέλος για να μετακινηθούμε πάνω και κάτω πηγαίνουμε στο εικονίδιο «βελάκι».



Όπως φαίνεται και στη δεξιά στήλη έχουμε την ευθεία, τα σημεία και τη γωνία.

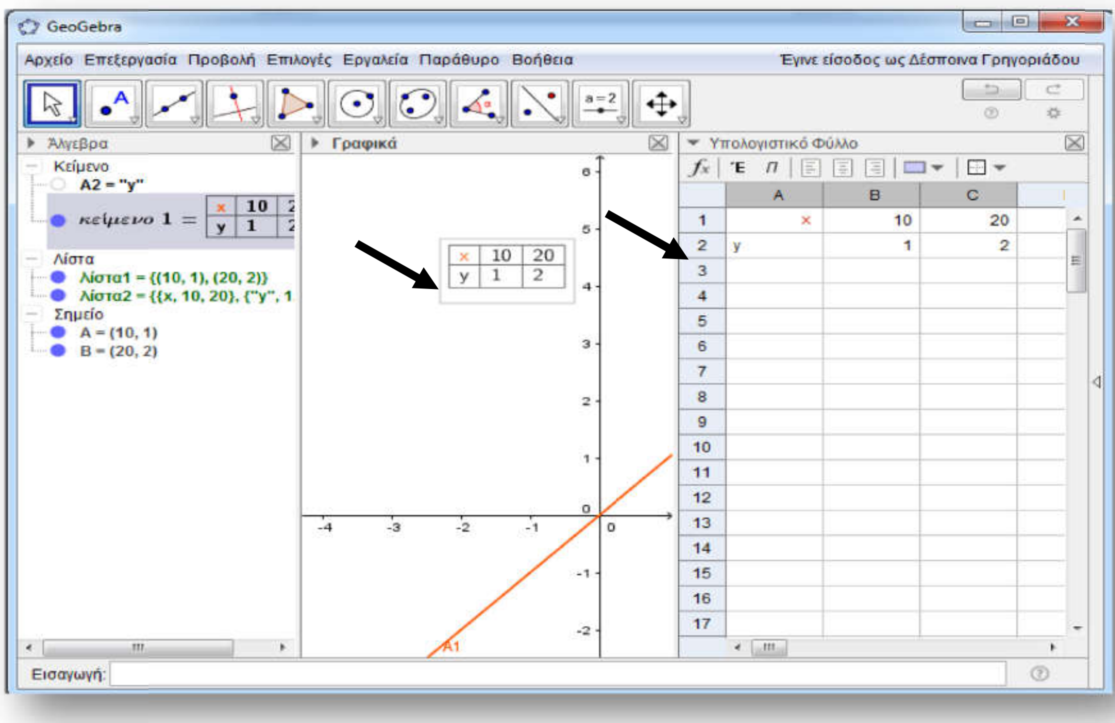
✓ **<u>Εισαγωγή πίνακα τιμών</u>**

Αρχικά πηγαίνουμε στο εικονίδιο «Προβολή» και επιλέγουμε τη δεύτερη επιλογή «Υπολογιστικά Φύλλα»



Στη συνέχεια στη πρώτη γραμμή γράφουμε τις τιμές του x και ακριβώς από κάτω του y. Έπειτα επιλέγουμε όλα τα στοιχεία και κάνουμε δεξί κλικ και επιλέγουμε:

- «Δημιουργία ⟶ Λίστα σημείων»
- «Δημιουργία ⟶ Πίνακα τιμών»



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Όνομα:

Επίθετο:

Ο Ρόλος του Συντελεστή α στη Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης y=αx

Δραστηριότητα 1

Αρχικά ανοίξτε το πρόγραμμα Geogebra και κάνοντας δεξί κλικ επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα». Στη συνέχει σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τη βοήθεια του φύλλου οδηγιών που σας δόθηκε.

y=2x, y=4x, y=5x, y=0.3x, y=-5x, y=-10x

- Παρατηρείτε ότι όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι της μορφής……………. Η y=2x έχει α=….. , η y=4x έχει α=….., η y=5x έχει α=….. , η y=0.3x έχει α=….. , η y=- 5x έχει α=….., η y=- 10x έχει α=….. .
- Όσο η τιμή του α μεγαλώνει, η ευθεία γίνεται μεγαλύτερη ανηφόρα ή κατηφόρα; ………………
- Όλες οι προηγούμενες ευθείες που κατασκευάσατε διέρχονται από την αρχή των αξόνων και βρίσκονται στο ……… και το …….. τεταρτημόριο. Μπορείτε να κατασκευάσετε μια ευθεία που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να βρίσκεται στο δεύτερο και το τέταρτο τεταρτημόριο; Τι εξίσωση έχει; …………………..
- **Συμπέρασμα: Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής y=αx είναι …………………….. που διέρχεται από την αρχή των …………………… Αν η κλίση α της ευθείας y=αx είναι θετική, τότε η ευθεία βρίσκεται στο ………. και στο ……….. τεταρτημόριο, ενώ αν είναι …………………… βρίσκεται στο ……….. και το …….. τεταρτημόριο.**

Δραστηριότητα 2

i) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=2x. Να γίνει η επαλήθευση του πίνακα τιμών καθώς και της γραφικής παράστασης στο χαρτί.
ii) Ποία είναι η κλίση της ευθείας; (αλγεβρικά και με Geogebra)

Απάντηση

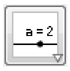
………
………
……….

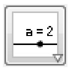
Δραστηριότητα 3

Ανοίξτε το πρόγραμμα Geogebra και κάνοντας δεξί κλικ επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».

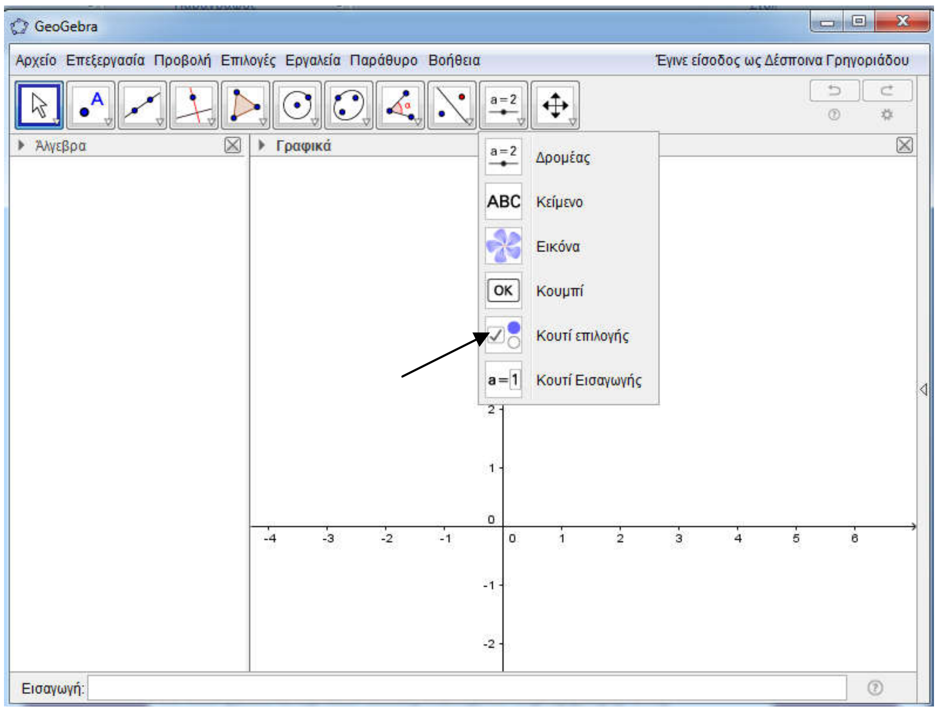
Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=ax, για τιμές του a από -10 ως 10 με τη βοήθεια του εργαλείου του δρομέα. Η παράμετρος a να αυξάνει κατά 0.5.

Τρόπος κατασκευής με το πρόγραμμα Geogebra

Για να αποφύγετε να πληκτρολογείτε κάθε φορά την εξίσωση της ευθείας, να χρησιμοποιήσετε το δρομέα 

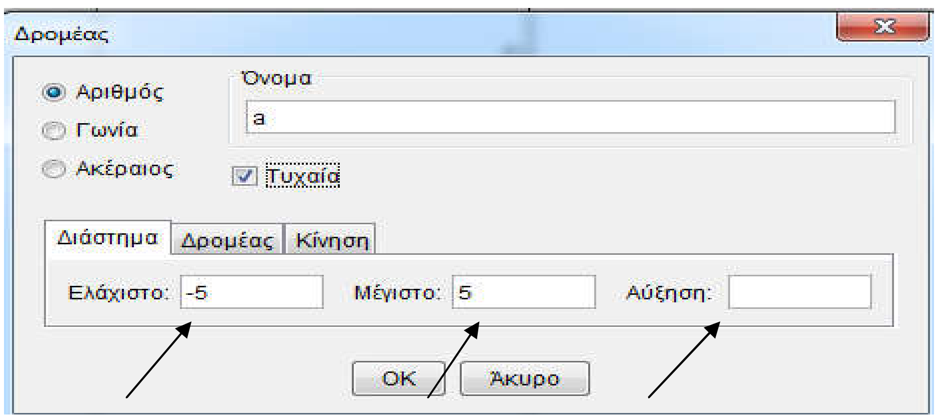
. Ο δρομέας είναι μια οπτική αναπαράσταση ενός αριθμού. Πατήστε το εικονίδιο 

του δρομέα



και στη συνέχεια κάντε ένα αριστερό κλικ σε ένα σημείο της επιφάνειας Geogebra. Στο πλαίσιο διαλόγου Δρομέας που ανοίγει αλλάξτε:

- το όνομα σε a (αγγλικό), αν χρειαστεί
- το ελάχιστο σε -10 (από -5)
- το μέγιστο σε 10 (από 5)
- την αύξηση σε 0.5 (από 0.1)
- και τέλος πατήστε οκ.



Στη συνέχεια στο κάτω μέρος της οθόνης, δεξιά από την εισαγωγή πληκτρολογήστε y=ax και πατήστε enter. Πατήστε με δεξί κλικ πάνω στην ευθεία, επιλέξτε Ιδιότητες και στη συνέχεια επιλέξτε «δείξτε την ετικέτα». Επιλέξτε ακόμη, αν θέλετε ένα χρώμα για την ευθεία που σας αρέσει.

i. Να μεταβάλετε την τιμή του δρομέα. Καθώς μετακινείτε το δρομέα παρατηρείστε πως μεταβάλλεται η τιμή του a και η αντίστοιχη εξίσωση της ευθείας. Να περιγράψετε πως μεταβάλλεται η ευθείαy=ax.

<u>Απάντηση</u>

……
……
……
……
……
……

ii. Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται η ευθεία όταν το a παίρνει θετικές τιμές και σε ποια όταν παίρνει αρνητικές;

<u>Απάντηση</u>

……
……
……
……

iii. Για ποια τιμή του a (του δρομέα) η ευθεία y=ax έχει τη μεγαλύτερη κλίση;

<u>Απάντηση</u>

……
……

iv. Υπάρχει κάποια τιμή του a για την οποία η ευθεία y=ax ταυτίζεται με τον άξονα x’x ; Ποια είναι αυτή η τιμή του a και ποια η εξίσωση της ευθείας;

<u>Απάντηση</u>

……
……
……

<u>Καλή Επιτυχία!</u>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Όνομα:

Επίθετο:

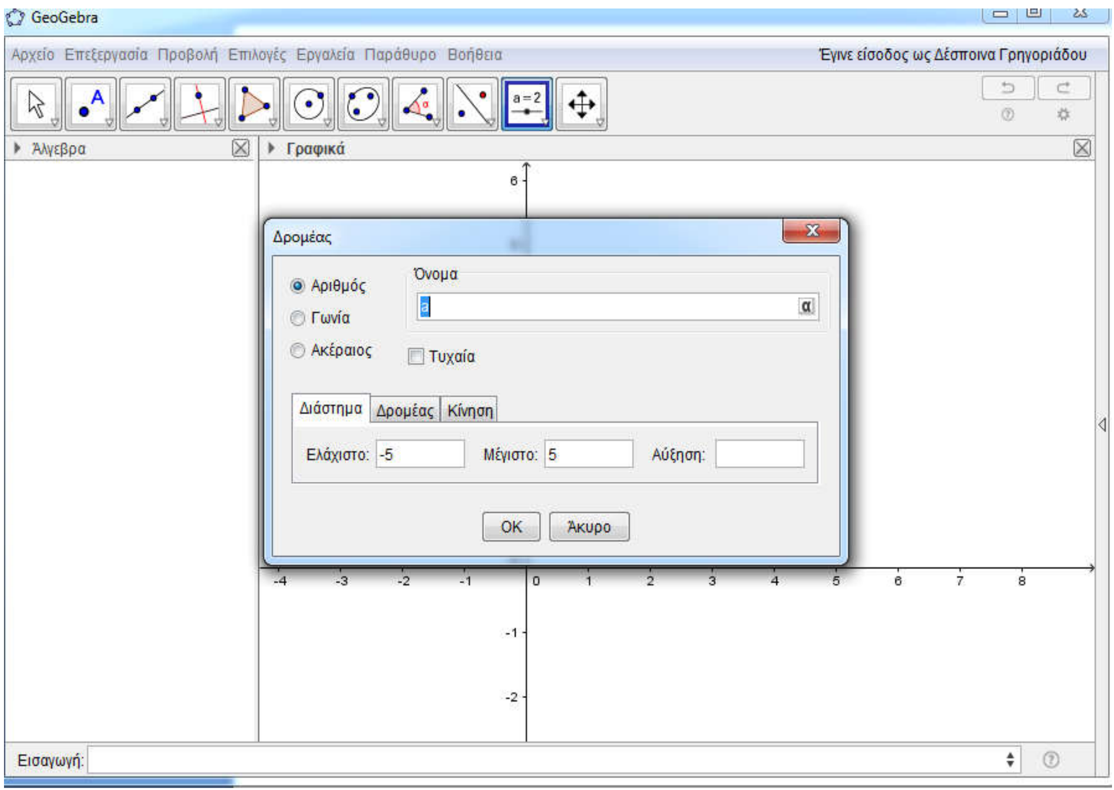
Συνάρτηση y=αx +β

Βήμα 1

Αρχικά ανοίξτε το πρόγραμμα Geogebra και κάνοντας δεξί κλικ επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».

Βήμα 2

Έπειτα πηγαίνετε στο εικονίδιο δρομέας, πατήστε κλικ στην επιλογή «Δρομέας» και στη συνέχεια πατήστε ένα τελευταίο κλικ στην επιφάνεια του Geogebra.



Βήμα 3

Αφού εμφανιστεί το παράθυρο του Δρομέα (a) αλλάζουμε τις ρυθμίσεις του από Ελάχιστο (-5) σε -15 Μέγιστο (5) σε 15 με Αύξηση 1.

Βήμα 4

Επαναλάβετε ξανά τα βήματα 2 και 3 για να επεξεργαστείτε αυτή τη φορά τον Δρομέα (b).

Βήμα 6

Τέλος πληκτρολογήστε στο πλαίσιο «Εισαγωγή» τη συνάρτηση y=αx+ β και πατήστε το πλήκτρο ender.

Δραστηριότητα 1

i) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Αριθμός α	Γωνία ω με τον Οχ (είδος)
α > 0	
α < 0	
α = 0	

ii) Αφού πρώτα επαναφέρετε την τιμή του Δρομέα a στο 1 δηλαδή : a=1 μεταβάλλεται τη τιμή του Δρομέα b. Καθώς μετακινείται το Δρομέα περιγράψτε πως μεταβάλλεται η συνάρτηση.

Απάντηση

……
……
……
……

iii) Τι συμβαίνει στη συνάρτηση όταν μετακινήσω τον Δρομέα b στο 0; Ποια εξίσωση προκύπτει;

Απάντηση

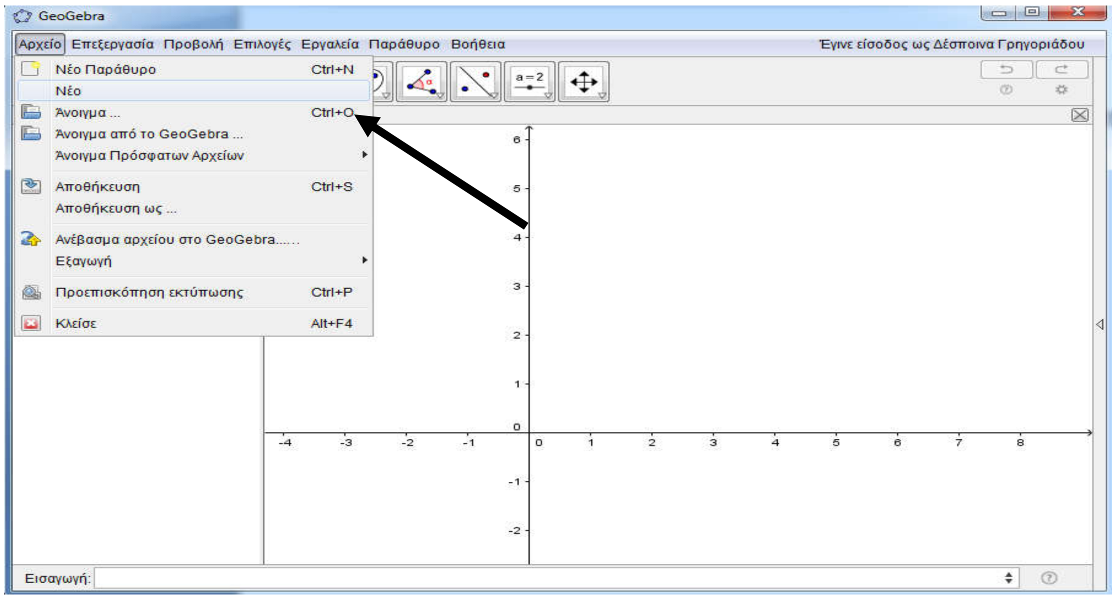
……
……
……
……

Βήμα 7

Επιλέξτε πάνω αριστερά την επιλογή «Αρχείο» και πατήστε τη δεύτερη επιλογή «Νέο»

Δεν κάνουμε αποθήκευση

και στη συνέχεια κάντε δεξί κλικ και επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».



Δραστηριότητα 2

i) Εισάγετε τη συνάρτηση y= 4x -2 και στη συνέχεια υπολογίστε τη κλίση της.

Απάντηση

………
………
………
………

ii) Στη συνέχεια χωρίς να αλλάξετε κάτι εισάγετε και τη συνάρτηση y=4x. Τι σχέση έχει η νέα ευθεία με την προηγούμενη;

Απάντηση

………
………

Δραστηριότητα 3

iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=x+1. Να γίνει η επαλήθευση του πίνακα τιμών καθώς και της γραφικής παράστασης στο χαρτί.

iv) Ποία είναι η κλίση της ευθείας; (αλγεβρικά)

Απάντηση

………
………

Καλή Επιτυχία

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Όνομα:

Επίθετο:

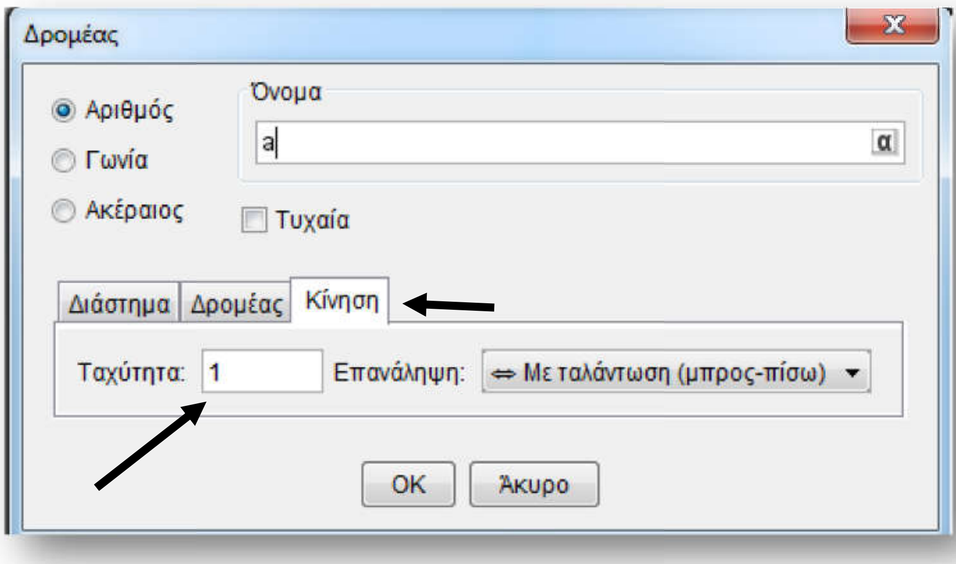
Σημείο ανήκει σε ευθεία

Αρχικά ανοίγετε το Geogebra και κάνοντας δεξί κλικ επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».

Για να ελέγξετε αν ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εκτελείτε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1

Έχοντας ανοίξει το Geogebra επιλέγετε το εικονίδιο «Δρομέα» και πατάτε ένα κλικ στην επιφάνεια του Geogebra. Μόλις εμφανιστεί το παράθυρο επιλέγετε την εντολή «Κίνηση» και εφόσον η ταχύτητα είναι ίση με 1 πατάτε οκ.



Στη συνέχεια πηγαίνετε στην «Εισαγωγή» και γράφετε τη συνάρτηση που σας δίνετε και πατάτε το πλήκτρο ender. Μόλις εμφανιστεί η γραφική παράσταση πηγαίνετε ξανά στην «Εισαγωγή» και πληκτρολογείτε το σημείο που σας δίνεται, όπως για παράδειγμα Α=(x,y). Καταλαβαίνετε αν ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση αν βρίσκεται ακριβώς 'πάνω' της.

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε τη συνάρτηση y= 6x -4. Επιλέξτε ποια από τα ακόλουθα σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της;

Α(1,3) Β(0,-4) Γ(3,15) Δ(-2,-1) Ε(2,8)

Για τα δύο τελευταία σημεία να γίνει και η αλγεβρική επαλήθευση τους.

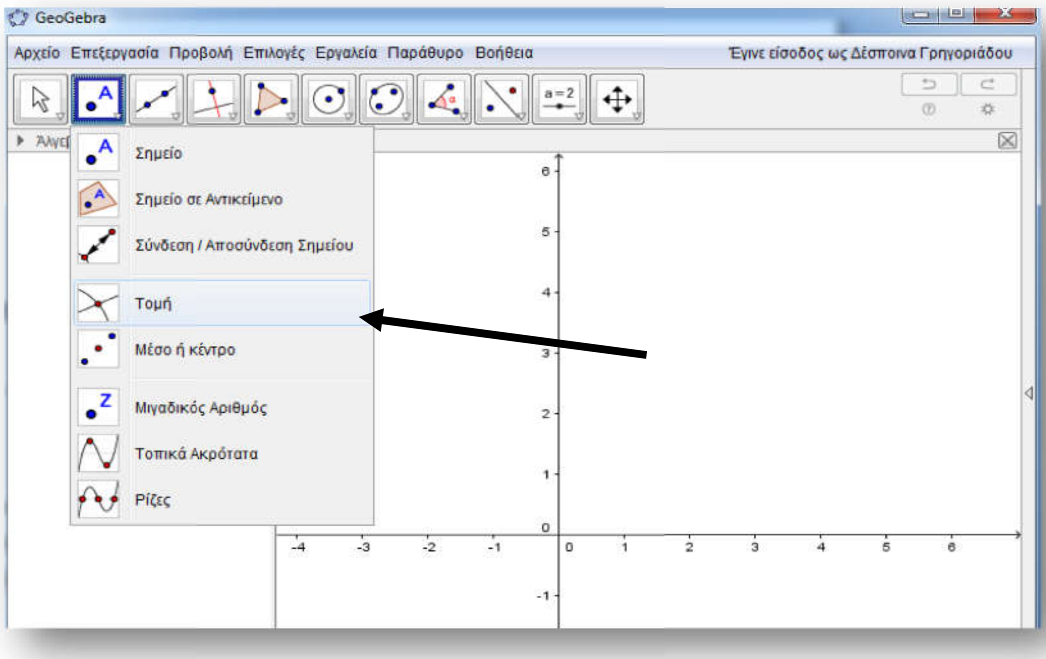
Απάντηση

………
………
………
………
………
………
………

Σημεία τομής

Για να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες εισάγετε αρχικά τη συνάρτηση στην «Εισαγωγή» και πατάτε το πλήκτρο ender. Στη συνέχεια πηγαίνετε στο εικονίδιο «Σημείο» και επιλέγετε «Τομή». Έχοντας επιλέξει «Τομή» πατάτε πάνω στον άξονα που θέλετε να βρείτε το σημείο τομής και στην ευθεία.

Παραδείγματος χάριν αν θέλετε να βρείτε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα x'x επιλέγετε «Τομή» και πατάτε ένα κλικ πάνω στον άξονα x'x και ένα κλικ πάνω στην ευθεία και εμφανίζεται στα αριστερά σας.



Αν θέλετε να βρείτε το σημείο τομής δύο ευθειών τότε επιλέγετε ξανά την επιλογή «Τομή» και πατάτε ένα κλικ στην πρώτη ευθεία, ένα δεύτερο κλικ στην δεύτερη ευθεία και εμφανίζεται αριστερά.

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε την ευθεία εξίσωση y=3x-6.

α) Βρείτε την κλίση της αλγεβρικά,

β) Βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες. Στο τέλος να γίνει και η αλγεβρική επαλήθευση των σημείων.

Απάντηση

………
………
………
………
………
………

Δραστηριότητα 2

Να βρείτε σε πιο σημείο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

y= 2x +3 και y= - x -3

Απάντηση

………
………
………
………
………
………

Καλή Επιτυχία!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ

Όνομα:

Επίθετο:

Σχετικές θέσεις ευθειών

Αρχικά ανοίγετε το Geogebra και κάνοντας δεξί κλικ επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».

Δραστηριότητα 1

Εισάγετε τις συναρτήσεις με τύπο:

- y=3x,
- y=3x+1,
- y=3x+3,
- y=3x-3,
- y=3x-5.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι της μορφής…………………

Να βρείτε τους αριθμούς α και β σε κάθε περίπτωση:

y=3x	**α=…………………………**	**β=…………………………**
y=3x +1	α=…………………………	β=…………………………
y=3x +3	α=…………………………	β=…………………………
y=3x -3	α=…………………………	β=…………………………
y=3x -5	α=…………………………	β=…………………………

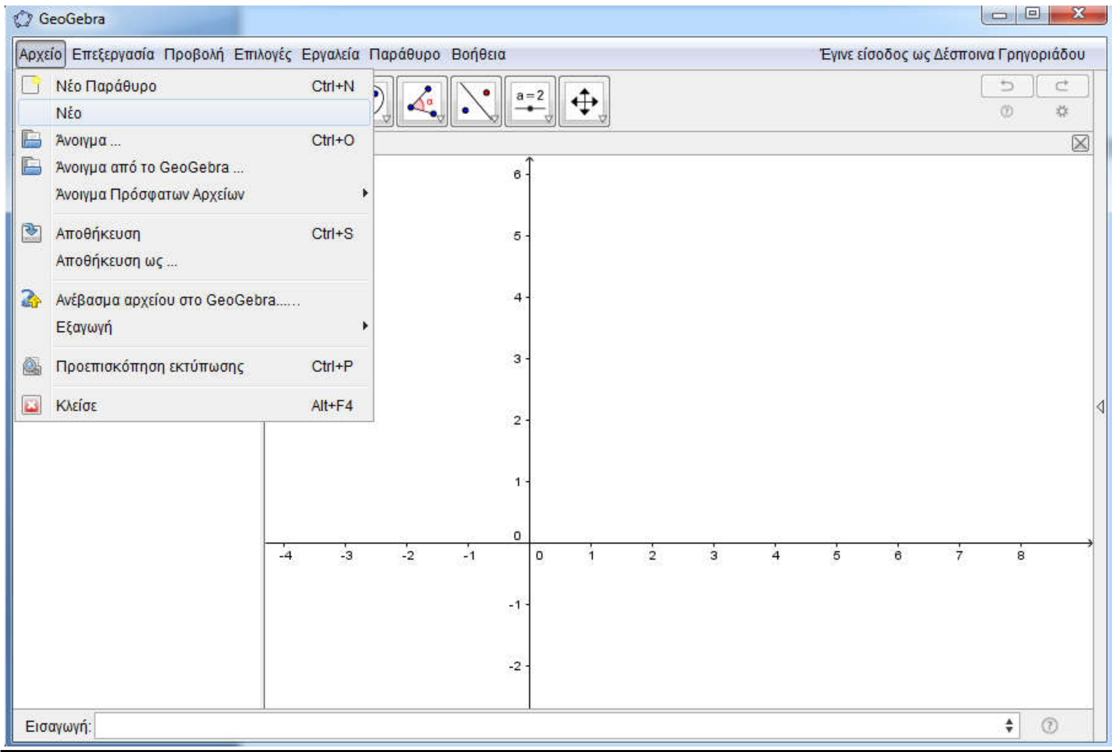
- Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν οι τύποι των συναρτήσεων των 5 αυτών ευθειών; ……………….
- Τι είναι μεταξύ τους οι 5 αυτές ευθείες; ………………… Συμπέρασμα: Όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφήςy=3x + β, όπου το β μεταβάλλεται είναι ……………………….

- **Γενικά όλες οι ευθείες με εξισώσεις** y=αx +β **, όπου το** α **είναι σταθερός αριθμός και το** β **μεταβάλλεται είναι**……………………..

Επιλέξτε πάνω αριστερά την επιλογή «Αρχείο» και πατήστε τη <u>δεύτερη επιλογή</u> «Νέο»

<u>Δεν κάνουμε αποθήκευση</u>

και στη συνέχεια κάντε δεξί κλικ και επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».



<u>Δραστηριότητα 2</u>

Εισάγετε τις συναρτήσεις:

- y=x + 4,
- y=2x + 4,
- y=5x + 4,
- y= -2x + 4,
- y= -x + 4

- Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν οι τύποι των συναρτήσεων των 5 αυτών ευθειών; ……………….
- Από ποιο κοινό σημείο διέρχονται οι 5 αυτές ευθείες; ……………………………………………

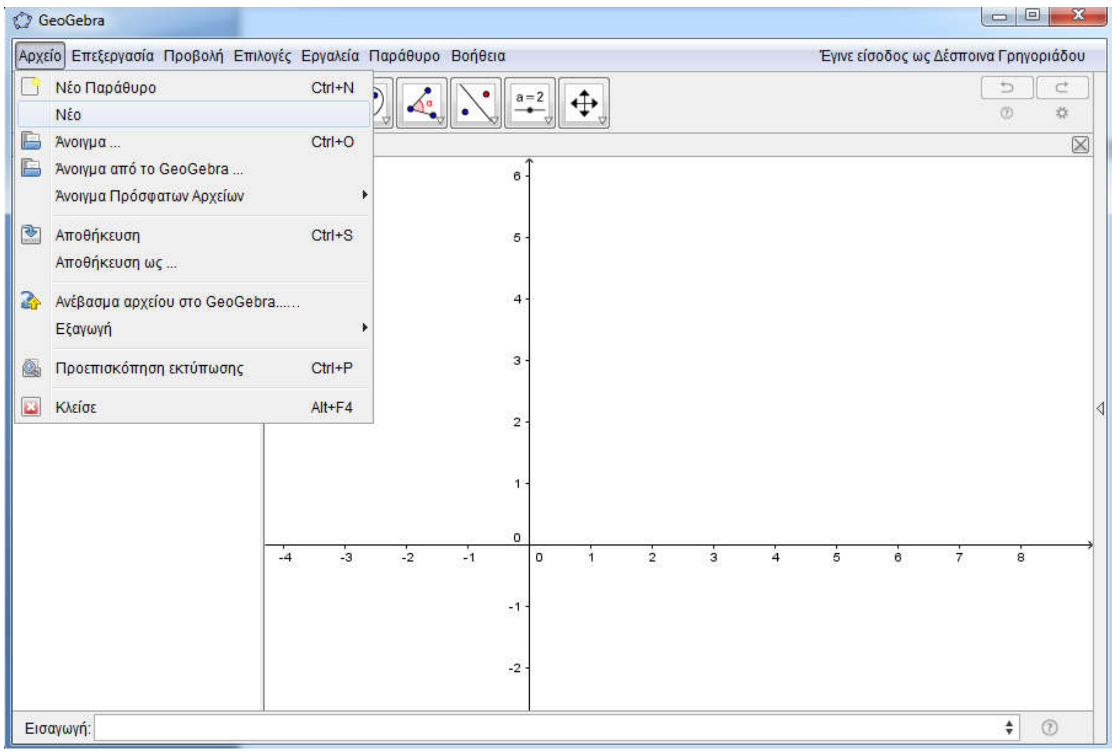
- Συμπέρασμα: Όλες οι ευθείες με εξίσωση της μορφής y=αx + 4 όπου η κλίση α μεταβάλλεται διέρχονται από το σημείο ………………… του άξονα y΄y.

- **Γενικά, όλες οι ευθείες με εξισώσεις** y=αx +β **όπου το** β **είναι σταθερός αριθμός και η κλίση** α **μεταβάλλεται διέρχονται από το σημείο …………… του άξονα** y΄y.
- Ο συντελεστής α σε κάθε ευθεία καθορίζει την …………………….. της ευθείας ενώ ο συντελεστής β καθορίζει το σημείο ………………… της ευθείας με τον άξονα y΄y.

Επιλέξτε πάνω αριστερά την επιλογή «Αρχείο» και πατήστε τη <u>δεύτερη επιλογή</u> «Νέο»

<u>Δεν κάνουμε αποθήκευση</u>

και στη συνέχεια κάντε δεξί κλικ και επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».



<u>Δραστηριότητα 3</u>

Εισάγετε τις συναρτήσεις:

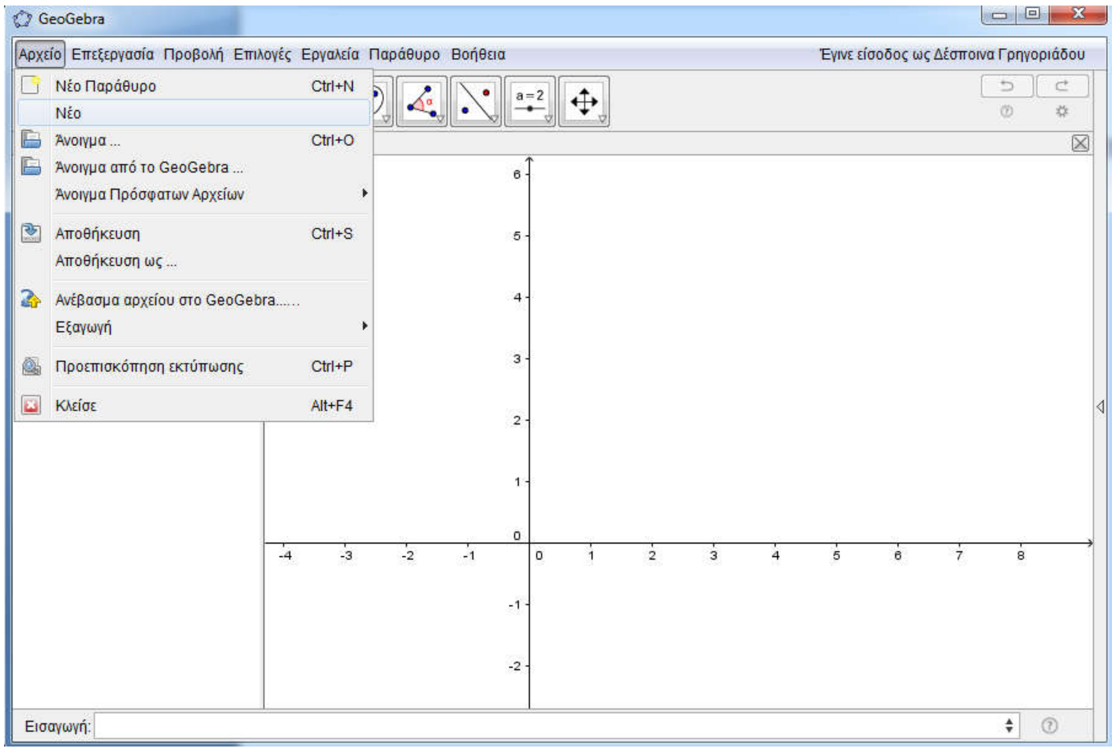
- y=5x + 5,
- y=5x + 5,
- y=5x + 5

- Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν οι τύποι των συναρτήσεων των 4 αυτών ευθειών; ……………….
- Από ποιο κοινό σημείο διέρχονται οι 4 αυτές ευθείες; ……………………………………………
- **Γενικά, όλες οι ευθείες με εξισώσεις** y=αx +β **όπου το** α **είναι σταθερός αριθμός και το** β **είναι σταθερός αριθμός διέρχονται από το σημείο …………… του άξονα** y’y.

Επιλέξτε πάνω αριστερά την επιλογή «Αρχείο» και πατήστε τη <u>δεύτερη επιλογή</u> «Νέο»

<u>Δεν κάνουμε αποθήκευση</u>

και στη συνέχεια κάντε δεξί κλικ και επιλέξτε «Σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα».



<u>Δραστηριότητα 4</u>

Να βρείτε την εξίσωση της ευθεία η οποία:

i. διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,3),
ii. έχει κλίση α= -1 και τέμνει τον άξονα y’y στο σημείο Γ(0,2),
iii. σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $ω=45^{o}$ και τέμνει τον άξονα y’y στο σημείο Δ(0,1),
iv. είναι παράλληλη με την ευθεία y=2x -3 και διέρχεται από το σημείο Ε(1,1).

Απάντηση

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Καλή Επιτυχία!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η

Όνομα:

Επίθετο:

Δραστηριότητα 1

α)Θέλεις να εξηγήσεις σε έναν συμμαθητή σου τι είναι συνάρτηση. Γράψε αναλυτικά στην απάντηση σου όλα όσα θα έλεγες ώστε να κατανοήσει την έννοια.

β)Μπορείς να σκεφτείς ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο να χρησιμοποιείς την έννοια **συνάρτηση**;

Απάντηση

α)……
……
……

β)……
……
……

Δραστηριότητα 2

Μπορείς να σκεφτείς ένα παράδειγμα της καθημερινότητας στο οποίο να χρησιμοποιείς την έννοια **της κλίσης**;

Απάντηση

……
……
……

Δραστηριότητα 3

Διαβάζοντας τις ετικέτες από δύο σοκολάτες διαπιστώνουμε ότι η πρώτη έχει βάρος 5 γραμμάρια και δίνει 15 θερμίδες ενώ η δεύτερη σοκολάτα έχει βάρος 10 γραμμάρια και δίνει 30 θερμίδες. Να συμπληρωθεί το μέρος του πίνακα που αντιστοιχεί στις δύο σοκολάτες.

Απάντηση

Σοκολάτες	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**
x Βάρος σοκολάτας (σε γραμμάρια)				

γ Θερμίδες				

- Από τη σχέση των δύο μεγεθών, «βάρος σοκολάτας» και «θερμίδες», όπως προέκυψε από τις προηγούμενες ερωτήσεις, μήπως θυμάστε πως ονομάζονται τα μεγέθη (ποσά) αυτά; ………………..
- Με τι ισούται ο λόγος $\frac{y}{x}$ για την 1η σοκολάτα; $\frac{y}{x}$ = ………..

  Για τη 2η σοκολάτα; $\frac{y}{x}$ = ………

  Για την 3η σοκολάτα; $\frac{y}{x}$ = ………

  Για την 4η σοκολάτα; $\frac{y}{x}$ = ………

- Να συγκρίνετε μεταξύ τους λόγους $\frac{y}{x}$. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση; …………………………
- Όταν δύο ποσά x, y είναι …………………τότε ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι …………………… .
- Να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω συμπέρασμα και να λύσετε ως προς y=………………… .Η ευθεία που προκύπτει είναι της μορφής…………… άρα η γραφική της παράσταση της θα διέρχεται από ………………………………………. και είναι …………………… με την ευθεία y=3x+1. Η ευθεία y=3x+1 διέρχεται από το σημείο……………… του άξονα…….. .

Δραστηριότητα 4

Το βάρος ενός φορτηγού όταν είναι άδειο είναι 5 τόνοι. Το φορτηγό φορτώνεται με σιτάρι με ρυθμό 0,5 τόνους σιτάρι κάθε λεπτό.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει το μεικτό βάρος του φορτηγού μετά από x λεπτά.

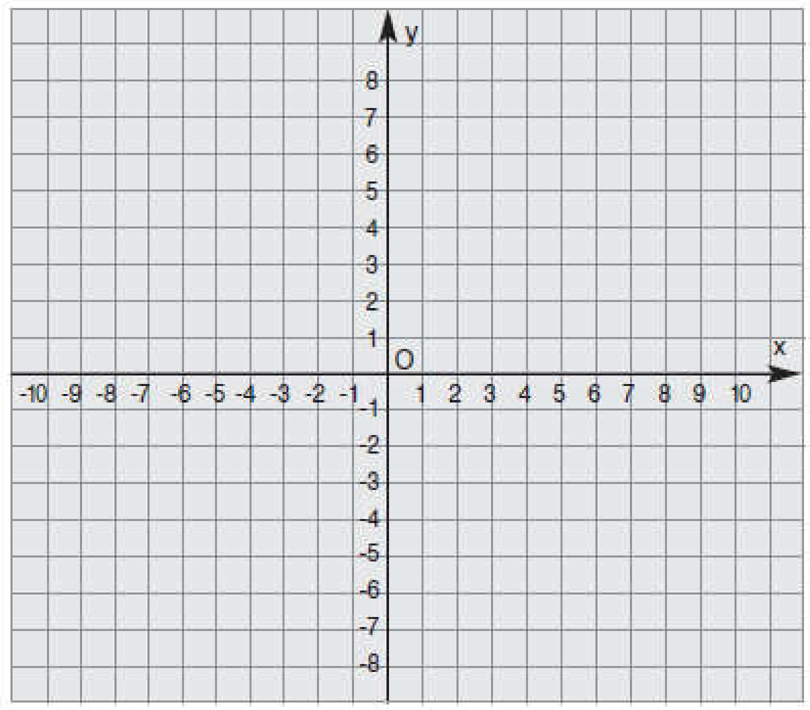
β) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Να βρεθούν τα σημεία Α και Β στα οποία η συνάρτηση τέμνει τους άξονες.

δ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και την ευθεία y=3x.

ε) Να βρείτε το κοινό σημείο (σημείο τομής) των συναρτήσεων.

Απάντηση



……
……
……
……
……
……
……
……
……

Δραστηριότητα 5

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία:

i. έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό 2 και διέρχεται από το σημείο Α(-3,-5),
ii. είναι παράλληλη στην ευθεία ζ:y= -3x + 4 και διέρχεται από το σημείο Β(-2,4),
iii. σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία 45^{o} και διέρχεται από το σημείο Γ(3,-2) .

Απάντηση

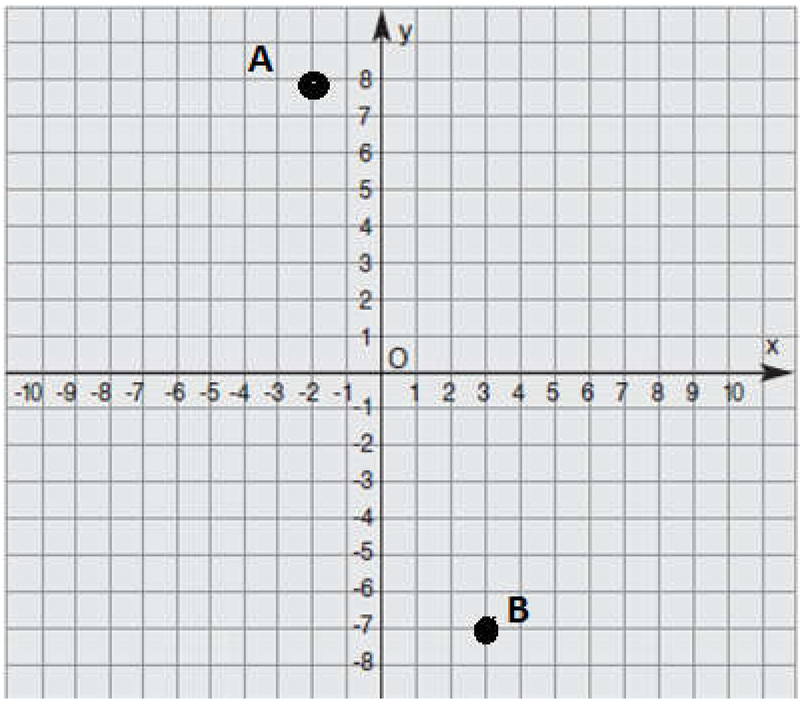
i. ………
………
………

ii. ………
………
………

iii. ……
……
……

Δραστηριότητα 6

Δίνονται τα σημεία Α και Β.



i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
ii. Ποια είναι η κλίση της ευθείας y= -3x + 2;
iii. Ποια είναι η σχέση της ευθείας του ii. ερωτήματος με την ευθεία y= -3x -5;

iv. Ποια είναι η σχέση της ευθείας του ii. ερωτήματος με την ευθεία y= -3x +2;
v. Ποια είναι η σχέση της ευθείας του ii. ερωτήματος με την ευθεία y= -4x +2;

Απάντηση

……
……
……
……
……
……
……
……

Καλή Επιτυχία!