ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Μελέτη των ικανοτήτων μαθητών και εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στους νοερούς υπολογισμούς

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

του

Δανιηλίδη Δημήτριου

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΎ ΤΙΤΛΟΥ
Στις «Επιστήμες της Αγωγής»
Με ειδήκευση «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

ΦΛΩΡΙΝΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2021

ΦΥΛΛΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

1. Επόπτης : Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής

Βαθμός: _________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάτης, καθηγητής

Βαθμός:________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Δημήτριος Πνευματικός, Καθηγητής

Βαθμός:________________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός:_________________________

Ο συγγραφέας Δανιηλίδης Δημήτριος βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα από τα κομβικά σημεία της Μαθηματικής εξέλιξης ενός μαθητή είναι η διδασκαλία και η κατανόηση των αρνητικών αριθμών, των πράξεων αλλά και των συσχετίσεων μεταξύ τους είτε πρόκειται για ακέραιους είτε για κλασματικούς αριθμούς. Επιπλέον, ο σύγχρονος τρόπος ζωής αναδεικνύει έναν ακόμα παράγοντα, αυτόν του νοερού υπολογισμού των πράξεων, ο οποίος γίνεται ολοένα και πιο καθοριστικός αλλά και αναγκαίος για την περεταίρω μαθηματική ανάπτυξη του ατόμου. Το δείγμα της έρευνας αποτελούνταν από 20 άτομα δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και καθηγητές Μαθηματικών, οι οποίοι ρωτήθηκαν για τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για τον υπολογισμό 12 έργων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι ηλικιακές ομάδες, ξεκινώντας από αυτή της Β΄ Γυμνασίου και καταλήγοντας σε αυτή των Μαθηματικών, τα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν είτε λανθασμένης εφαρμογής της στρατηγικής του νοερού υπολογισμού είτε λάθους υπολογισμού και μειώνονταν συνεχώς ενώ προφανώς οι σωστές απαντήσεις είχαν μια σταθερή ανοδική τάση. Αρκετά άτομα όλων των ηλικιακών βαθμίδων έκαναν χρήση εναλλακτικών νοερών στρατηγικών υπολογισμού διαφόρων έργων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στις περισσότερες απαντήσεις τα άτομα πρώτα καθόριζαν το πρόσημο του αποτελέσματος και έπειτα έκαναν χρήση διαφόρων στρατηγικών για τον υπολογισμό του έργου στα πλαίσια πλέον των Φυσικών αριθμών.

Λέξεις κλειδιά: Νοεροί υπολογισμοί, αίσθηση του αριθμού, νοερές στρατηγικές, ακέραιοι, στρατηγικές πρόσθεσης , αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Abstract

One of the focal points of a student's mathematical development is the teaching and understanding of negative numbers, mathematical operations and the association between them, either they are whole or fractional numbers. Furthermore, the modern way of life features one more factor: mental calculation of operations, which is becoming not only even more decisive but also necessary for the person's further development of mathematics. The sample of the survey consists of 20 people of the secondary education and of Professors of Mathematics, who were asked about the mental strategies used for the calculation of 12 projects. The results showed that in the age groups, starting from the second grade of junior high school up to the professors, the mistakes which were observed were either due to the wrong implementation of the mental calculation strategy or due to the wrong calculation, which was constantly decreasing, whilst the correct answers had obviously a steady upward trend. Several people of all age groups employed alternative mental calculation strategies in various projects. It should be pointed out that in most answers, the people firstly defined the sign of the result and then, made use of various strategies for the calculation of the task in the context of Natural numbers.

Key-words: Mental Calculations, Sense of Number, Mental Strategies, Integers, Strategies of addition, Subtraction, multiplication and Division.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ενσωμάτωση των αρνητικών αριθμών στο Μαθηματικό οικοδόμημα του κάθε ατόμου δεν ήταν και δεν είναι εύκολη υπόθεση (Τζεκάκη, Σταγιόπουλος & Μπαραλός, 2011). Διάφοροι ερευνητές προσπάθησαν να αναδείξουν τις αναπαραστάσεις των αρνητικών αριθμών (Ganor-Stern & Tzelgov, 2008), ενώ η Ball (1993) πλαισιώνει τους αρνητικούς αριθμούς μέσα σε προβλήματα της καθημερινότητας των μαθητών. Όπως διαπιστώνει η Vlassis (2002a, 2004) η τριπλή λειτουργία του συμβόλου "πλην" αποτελεί έναν ανασταλτικό παράγοντα για τους μαθητές.

Πλέον η γνωριμία των μαθητών με τους αρνητικών αριθμών γίνεται στην Πέμπτη Δημοτικού και όχι στο τέλος της Α΄ Γυμνασίου που γινόταν μέχρι και το 2018. Η απόδοση των μαθητών επηρεάζεται αφού η κατάλληλη ηλικία αφομοίωσης των αρνητικών αριθμών δεν είναι για όλους τους μαθητές η ίδια (Θωμαΐδης, 2009). Ακόμα εμφανίζεται και το φαινόμενο της "προκατάληψης των φυσικών αριθμών" όπου οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι όλες οι προσθέσεις δεν προκαλούν αύξηση όπως και όλοι οι πολλαπλασιασμοί (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Van Dooren, Lehrinen, Verchaffel, 2015).

Η εισαγωγή των νοερών υπολογισμών στην ζωή μας ήταν αναγκαία, καθώς διευκόλυνε πάρα πολύ τον υπολογισμό των καθημερινών πράξεων. Αρκετοί ορισμοί δόθηκαν για τον νοερό υπολογισμό με πιο πρόσφατο του Λεμονίδης (2013, σελ. 25) ο οποίος αναφέρει ότι «Νοερός είναι ο υπολογισμός που πραγματοποιείται νοερά και με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη».

Οι τρόποι υπολογισμού των πράξεων ονομάζονται στρατηγικές των νοερών υπολογισμών και όπως αναφέρει ο Threlfall (2000) η έννοια στρατηγική αναλύεται σε δύο συνιστώσες αυτή της απόφασης να γίνει κάτι με ιδιαίτερο τρόπο και αυτή της αλληλουχίας των δράσεων για την επίτευξη της παραπάνω απόφασης. Κάποια από τα πλεονεκτήματα των νοερών υπολογισμών είναι ότι αυτοί χρησιμοποιούνται καθημερινά και σε μεγάλη κλίμακα, βοηθούν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού αλλά και γενικότερα των μαθηματικών ικανοτήτων Λεμονίδη (2013, σελ. 27). Η σύγκριση όμως μεταξύ τους θα ανεδείκνυε και τα θετικά αλλά και τα αρνητικά στοιχεία τόσο των γραπτών όσο και των νοερών υπολογισμών.

Ένα από τα σημαντικά οφέλη των νοερών υπολογισμών είναι ότι αυτοί σε οδηγούν στην κατάκτηση της αίσθησης του αριθμού και αυτή με την σειρά της βοηθά στην καλλιέργεια της ευελιξίας στους νοερούς υπολογισμούς, δηλαδή να γνωρίζει το άτομο όλο και περισσότερες στρατηγικές υπολογισμού. Τον παραπάνω ορισμό της ευελιξίας δεν τον ενστερνίζονται όλοι οι ερευνητές. Μια σημαντική παρατήρηση που κάνει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 59) είναι ότι η γνώση πολλών στρατηγικών και μόνο δεν σημαίνει ότι υπάρχει και ευελιξία.

Οι έρευνες που αφορούν τις προσθέσεις και αφαιρέσεις ακεραίων αριθμών είναι λίγες, με πιο πρόσφατη αυτή του REZAT (2011), ο οποίος στην έρευνά του παρουσίασε τις κατηγορίες των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν μαθητές στις παραπάνω πράξεις. Όσο αφορά τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση οι έρευνες είναι ακόμα λιγότερες και δεν αφορούν ενήλικες και δη Μαθηματικούς.

Η παρούσα έρευνα προσπαθεί να καλύψει το ερευνητικό κενό που υπάρχει ηλικιακά (από Β΄ Γυμνασίου μέχρι και ενήλικες-Μαθηματικούς) αλλά και στο Μαθηματικό αντικείμενο ερευνά τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο πλαίσιο των ακεραίων αλλά και των κλασματικών αριθμών.

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται όλο το θεωρητικό υπόβαθρο. Στο 1^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ακέραιοι αριθμοί, περιγράφονται τα μοντέλα κατανόησης των ακέραιων αριθμών και η διδασκαλίας τους ενώ στην συνέχεια περιγράφεται το φαινόμενο της προκατάληψης των Φυσικών αριθμών. Στο 2^{ο} κεφάλαιο ορίζουμε τον όρο του Νοερού υπολογισμού καθώς και τις στρατηγικές του. Στην συνέχεια αναφέρονται διάφορα θέματα που αφορούν τους νοερούς υπολογισμούς όπως η σημαντικότητά τους, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα γραπτών και νοερών υπολογισμών, η Αίσθηση του Αριθμού, η ευελιξία και οι παράγοντες που την επηρεάζουν καθώς και η θέση τους στα Προγράμματα Σπουδών. Στην συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου παρουσιάζονται οι νοερές στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης με Φυσικούς αριθμούς μέχρι το 20 και συνεχίζει το ίδιο αλλά με αριθμούς από το 20 μέχρι το 100. Στο 3^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφορες έρευνες που αφορούν τις τέσσερις πράξεις των ακεραίων και κλασματικών αριθμών καθώς και τις νοερές στρατηγικές του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται η έρευνα και τα αποτελέσματά της.

1. Ακέραιοι

1.1 Μοντέλα Κατανόησης των Ακεραίων

Αρκετοί ερευνητές έχουν αποτυπώσει την ιστορική εξέλιξη (που δεν ήταν και ομαλή) ενός μαθηματικού θέματος και τη σύνδεσαν με τη σκέψη των μαθητών που αφορούσε το ίδιο θέμα (Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014; Thomaidis & Tzanakis, 2007; Galardo, 2002; Linchevski & Williams, 1999). Οι δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθηματικοί της εκάστοτε εποχής για να αναπτύξουν ένα θέμα ήταν αρκετές και παρόμοιες με αυτές που συναντούν οι σημερινοί μαθητές όταν διαπραγματεύονται το ίδιο θέμα. Τα παραπάνω εμπόδια λέγονται επιστημολογικά εμπόδια. Θα πρέπει όμως να επισημάνουμε ότι το πλαίσιο που περιέβαλλε τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης ήταν διαφορετικό από αυτό που περιβάλλει τους σημερινούς μας μαθητές (Furinghetti & Radford, 2008).

Ένα άλλο θέμα είναι η εννοιολογική ανακατασκευή των αριθμητικών σχημάτων που πρέπει να μετασχηματιστούν. Αυτό δεν είναι εύκολο καθώς οι μαθητές, κατά την πορεία επέκτασης του συνόλου των φυσικών αριθμών σε αυτό των ακεραίων, πρέπει να ενσωματώσουν τους αρνητικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς (Τζεκάκη, Σταγιόπουλος & Μπαραλός, 2011).

Οι Ganor-Stern & Tzelgov, (2008) σε άρθρο τους αναφέρουν τις δύο (2) πιθανές αναπαραστάσεις των αρνητικών αριθμών:

A. Η ολιστική αντιμετώπιση, όπου μέσα στην απόλυτη τιμή-μέγεθος ενός αριθμού ενσωματώνεται και η πολικότητά (κατεύθυνση) του.
B. Η παράσταση των συστατικών του, όπου η απόλυτη τιμή του αριθμού εξετάζεται ξεχωριστά από την πολικότητά του.

Οι 27 σπουδαστές του τμήματος ψυχολογίας του κολλεγίου Achva αποτελούν τους συμμετέχοντες της έρευνας και εξετάστηκαν σε δύο (2) εργασίες που αφορούσαν αριθμούς από το -100 έως το 100. Στην πρώτη εργασία, οι συμμετέχοντες καλούνται να συγκρίνουν-διατάξουν ένα ζεύγος αριθμών, ενώ στη δεύτερη έπρεπε να τοποθετήσουν πάνω στην αριθμογραμμή την θέση του εκάστοτε αριθμού, που τους δίνονταν.

Η Ball (1993),όπως και αρκετοί μελετητές, σε άρθρο της υποστηρίζει ότι η διδασκαλία και η μάθηση μπορούν να βελτιωθούν αν οι αίθουσες διδασκαλίας οργανωθούν με τέτοιον τρόπο ώστε οι μαθητές, εμπλεκόμενοι σε πραγματικές-αυθεντικές καταστάσεις και καθοδηγούμενοι από τους καθηγητές τους, να είναι σε θέση να εικάζουν, να πειραματίζονται, να πλαισιώνουν, αλλά και να επιλύουν προβλήματα, να διαβάζουν, να γράφουν και να δημιουργούν πράγματα που για αυτούς έχουν σημασία. Επεκτείνοντας την παραπάνω διαπίστωση η Ball στους αρνητικούς αριθμούς, αναφέρει στο άρθρο της ότι δύο (2) οποιοιδήποτε αριθμοί έχουν δυο (2) συνιστώσες, το μέγεθος και την κατεύθυνση, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο, όταν αναφερόμαστε στους αρνητικούς αριθμούς. Ειδικότερα το μέγεθος του αριθμού οδηγεί στην σύνδεσή του με την απόλυτη τιμή του και εμφανίζεται σε πολλές καθημερινές χρήσεις των αρνητικών αριθμών (π.χ. χρέος, θερμοκρασία, ασανσέρ). Όσο αφορά την κατεύθυνση, το μοντέλο του ασανσέρ για παράδειγμα, βοηθάει στην κατανόηση όχι μόνο στην κατανόηση της διάταξης των αριθμών αλλά και λειτουργεί ως προστάδιο της εισαγωγής των μαθητών στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακέραιων αριθμών.

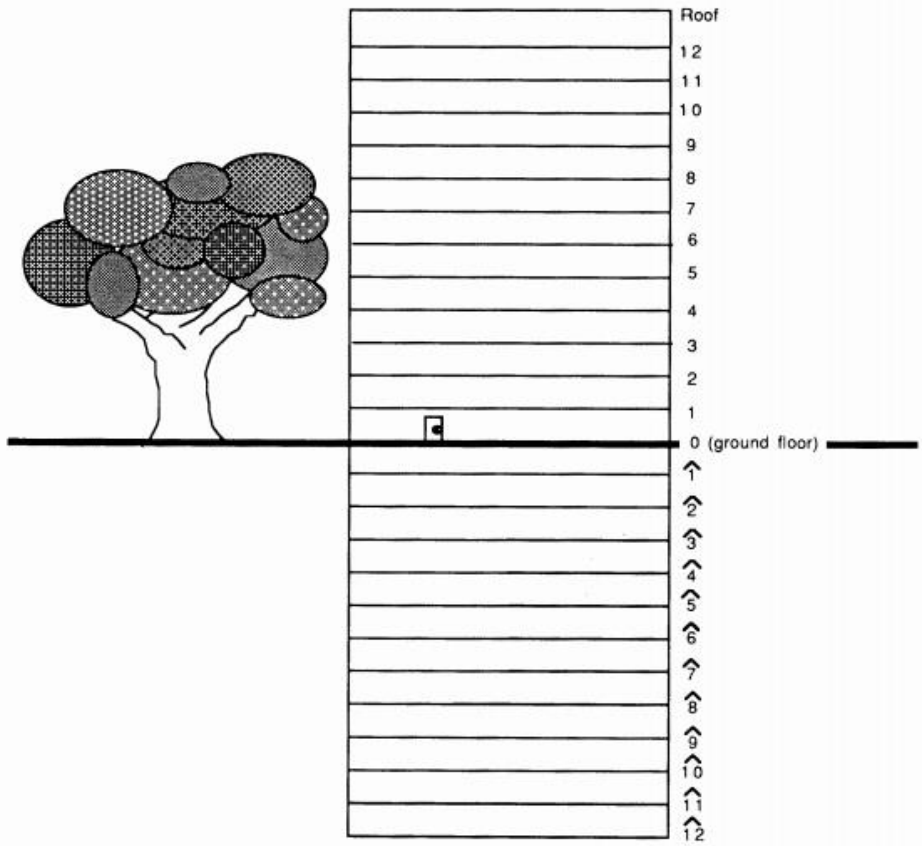


FIG. 1.—The "building": A model for adding and subtracting integers

Οι Whitacre, Bishop, Lamb, Philipp, Schappelle & Lewis (2012) σε άρθρο τους για τις παιδικές αντιλήψεις για τους ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποίησαν το μοντέλο της εξουδετέρωσης. Η βάση της έρευνάς τους ήταν ότι οι αντίθετοι αριθμοί, δηλαδή αυτοί που έχουν άθροισμα μηδέν (α+(-α)=0). Για να προσεγγίσουν τη μαθηματική λογική των παιδιών στον τομέα των ακέραιων αριθμών, οι ερευνητές ζήτησαν από τους μαθητές να μετρήσουν το πλήθος των χαρούμενων και δυσάρεστων σκέψεών τους σε μια ορισμένη μέρα. Ένα ακόμα σημαντικό στοιχείο της έρευνας ήταν ότι οι ερευνητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη «γλώσσα» των παιδιών και έτσι δεν έγινε αναφορά ή εισήγηση για τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.

Στην έρευνα της η Vlassis (2004), προσθέτει ότι οι μαθητές όταν χρειαζόντουσαν βοήθεια για την υπολογισμό ενός εξαγόμενου - στο πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής και δη στην απλοποίηση πολυωνύμων, τότε ο επιβλέπων καθηγητής τους υπενθύμιζε την αριθμογραμμή. Κάποιοι μαθητές δικαιολόγησαν τα αποτελέσματα τους, αρνούμενοι ότι έκαναν χρήση της αριθμογραμμής, λέγοντας ότι τους ήρθε αυθόρμητα.

Τέλος, ο Ural (2016) στην έρευνά του, η οποία πραγματεύεται την κατανόηση της έννοιας των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές, ρωτάει τους μαθητές "Ποιοι είναι οι αρνητικοί ακέραιοι; Πού χρησιμοποιούνται; Ή γράψτε ένα πρόβλημα κατάλληλο για την έκφραση του +3-7 = -4. Με άλλα λόγια, προσπαθεί να πλαισιώσει τους ακέραιους αριθμούς σε διάφορα περιβάλλοντα όπως αυτά της θερμοκρασίας, του χρέους και του υψομέτρου δηλαδή πάνω ή κάτω από τη στάθμη της θάλασσας. Προφανώς, το μοντέλο που χρησιμοποιεί ο Ural δε συγκαταλέγεται ούτε σε αυτά που εμπλέκουν την αριθμογραμμή των ακεραίων αριθμών αλλά ούτε και σε αυτά της εξουδετέρωσης.

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στα μοντέλα προσέγγισης των ακεραίων αριθμών, θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε και την τριπλή λειτουργία του συμβόλου "πλην" :

- Η Δυαδική (Gallardo & Rojano, 1994; Vlassis, 2004) (Binary), η οποία λειτουργεί ως σύμβολο της αφαίρεσης. Πιο συγκεκριμένα ο Gallardo αναφέρει την τριπλή φυσή της αφαίρεσης ως:
  1ον της Απομάκρυνσης π.χ. 6 μάρμαρα αφαιρέθηκαν απο 12 μάρμαρα,
  2ον της Συμπλήρωσης π.χ. ποιος αριθμός λείπει απο το24 για να γίνει 38,
  3ον η διαφορά δύο αριθμών
  και τέλος οι Thompson & Dreyfus (1988) αναφέρουν και την κίνηση πάνω στην αριθμογραμμή.
- Η Συμμετρική (Vlassis, 2008) (Symmetric), η οποία εκφράζει το αντίθετο ενός αριθμού ή ενός αποτελέσματος.
- Η μοναδιαία (Bofferding, 2010) (Unary) λειτουργία η οποία αντιπροσωπεύει τη διεύρυνση των φυσικών αριθμών, ενσωματώνοντας τους αρνητικούς αριθμούς · έτσι δημιουργούνται οι ακέραιοι αριθμοί. Οι αρνητικοί αριθμοί τοποθετούνται αριστερά του μηδενός και μειώνονται κατά μια μονάδα καθώς απομακρύνονται από το μηδέν.

Η Vlassis (2002a, 2004) διαπίστωσε ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν τη χρήση του συμβόλου «πλην» ως μια διαδικασία που συνδέεται με τη δυαδική του λειτουργία. Επιπλέον, κανένας μαθητής δε θεώρησε απροβλημάτιστα ότι το σύμβολο "πλην" θα μπορούσε να έχει διττή σημασία. Τέλος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι διαφορετικές χρήσεις του αρνητικού συμβόλου είναι αντιφατικές και αποτελούν εμπόδιο για τους μαθητές.

1.2 Διδασκαλία των Ακεραίων

Για πρώτη φορά στην Ελληνική Εκπαίδευση, το Υπουργείο Παιδείας προέβει σε μια ριξηκέλευθη παρέμβαση εισάγωντας την έννοια των αρνητικών αριθμών για πρώτη φορά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και ειδικότερα στην Ε' Δημοτικού. Έτσι λοιπόν τον Μάρτιο του 2018 το Ελληνικό Υπουργείο Παιδείας ενέκρινε την αντικατάσταση του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών με καινούργιο όπου εκεί συναντάμε για πρώτη φορά την έννοια των αρνητικών αριθμών (Ενότητα 6, παράγραφος 33). Στο καινούργιο εγχειρίδιο παρατηρούμε την 'δειλή' εισαγωγή των αρνητικών αριθμών, η οποία προσεγγίζεται κατά, κύριο λόγο, με καταστάσεις της καθημερινής ζωής (π.χ. ασανσέρ, θερμοκρασία), με την επέκταση της αριθμογραμμής και με την ενσωμάτωση σε αυτήν των αρνητικών αριθμών.

Η πρώτη μαθηματική επαφή των μαθητών με τους αρνητικούς αριθμούς, γίνεται στα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2002). Εκεί πραγματώνεται η γνωριμία με τον ορισμό των ακεραίων αριθμών, των θετικών και των αρνητικών, του προσήμου, των ομόσημων και ετερόσημων αριθμών, της απόλυτης τιμής καθώς και τους αντίθετους αριθμούς. Ακόμα, γίνεται αναγνώριση, αναπαράσταση, σύγκριση, διάταξη των αριθμών καθώς και τοποθέτησή τους πάνω στην αριθμογραμμή. Εξετάζεται επίσης η σχέση μεταξύ φυσικών και ακεραίων αριθμών καθώς και η τριπλή σημασία του συμβόλου «-» ως πρόσημου, ως αντίθετης ποσότητας και ως αφαίρεσης. Επίσης, διδάσκονται οι τέσσερις πράξεις των ακεραίων αριθμών μαζί με τις ιδιότητες τους και συγκρίνεται το νόημα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των φυσικών αριθμών με αυτό των ακεραίων, αφού κάθε πρόσθεση στους ακέραιους αριθμούς δε σημαίνει υποχρεωτικά αύξηση καθώς και κάθε αφαίρεση δεν σημαίνει υποχρεωτικά μείωση. Παρόμοια σύγκριση γίνεται και για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς με τους ακέραιους αριθμούς. Η δομή του προγράμματος σπουδών χωρίζεται σε έξι (6) τροχιές μάθησης. Η τέταρτη τροχιά αφορά τους ακεραίους αριθμούς και αυτή χωρίζεται σε δύο υποτροχιές. Η πρώτη αφορά την έννοια του ακέραιου αριθμού και του αντίστοιχου συνόλου του, με τους παρακάτω σημαντικούς σταθμούς:

- Διαισθητικής αντίληψη των ακεραίων αριθμών μέσω μιας ποικιλίας από καθημερινές καταστάσεις.
- Αναγνώριση και αναπαράσταση ακέραιων αριθμών σε διαφορετικά πλαίσια.
- Σύγκριση και διάταξη ακέραιων αριθμών με την χρήση της αριθμογραμμής.
- Αναγνώριση και αξιοποίηση της ιδιότητας των αντιθέτων ακεραίων.

ενώ η δεύτερη αναφέρεται στις πράξεις με τους ακέραιους αριθμούς με σταθμούς ορόσημο τους:

- Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς, με την χρήση κατάλληλων μοντέλων.
- Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς.
- Αξιοποίηση των ακέραιων αριθμών, των πράξεων στο αντίστοιχο σύνολο και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση μαθηματικών και καθημερινών προβλημάτων (μοντελοποίηση).

(ΙΕΠ- ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ(Σχολείο 21^{ου} αιώνα)-ΝέοΠρόγραμμα Σπουδών, σελ.13, 2014).

Για τους μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, η χρήση των φυσικών αριθμών τους είναι εύκολη καθώς καλούνται να κάνουν πράξεις με περιορισμένο πλήθος αριθμών, ενώ κατά τη μετάβαση στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση οι μαθητές καλούνται να χειριστούν και αρνητικούς αριθμούς, πράγμα που απαιτεί υψηλή αφαιρετική ικανότητα, αφού αποτελεί το μεταίχμιο από τα συγκεκριμένα στα αφηρημένα μαθηματικά. Ένας ακόμα παράγοντας δυσκολίας που επηρεάζει την απόδοση των μαθητών είναι ότι δεν είναι όλοι «έτοιμοι» την ίδια χρονική στιγμή (περίπου 13 ετών) να αφομοιώσουν τους αρνητικούς αριθμούς (Θωμαΐδης, 2009). Οι μαθητές δεν έχουν τη δυνατότητα αντιστοίχισης των αρνητικών αριθμών με φυσικά-απτά αντικείμενα, όπως έκαναν με τους φυσικούς αριθμούς. Έτσι, καταφεύγουν στην αποστήθιση κανόνων που διέπουν τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις τους για να μπορέσουν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του σχολικού βίου (Ekol, 2010). Η μεγαλύτερη δυσκολία όμως, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η εκτέλεση των πράξεων με ακέραιους αριθμούς και ιδιαίτερα η αφαίρεση (Θωμαΐδης, 2009). Η πραγμάτευση, από εκπαιδευτικούς και μαθητές, της έγκαιρης μετατροπής της αφαίρεσης σε πρόσθεση των ακέραιων αριθμών διευκολύνει αρκετά τους εκπαιδευόμενους (Βανδουλάκης, 2013).

1.3 Προκατάληψη των Φυσικών αριθμών

Κατά την πρώτη απόπειρα γνωριμίας των μαθητών με τις σχέσεις-πράξεις των ακεραίων αριθμών, διαπιστώνουν ότι όλες οι προσθέσεις ή οι πολλαπλασιασμοί δεν προκαλούν αύξηση όπως και όλες οι αφαιρέσεις ή οι διαιρέσεις δεν προκαλούν μείωση. Οι παραπάνω δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, οι ερευνητές (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Van Dooren, Lehrinen, Verchaffel, 2015) τις εντάσσουν στο φαινόμενο της "προκατάληψης των φυσικών αριθμών" (The natural number bias) ή εναλλακτικά η "προκατάληψη των ολόκληρων αριθμών" (Whole number bias) που αναφέρουν επίσης οι Ni & Zhou (2005). Μια περαιτέρω ανάλυση του φαινομένου αναδεικνύει ότι η δυσκολίες των μαθητών οφείλονται σε ακατάλληλη εφαρμογή των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς αριθμούς και τους οδηγεί σε λάθη και επομένως σε χαμηλές επιδόσεις (Ni & Zhou, 2005).

Η ονομασία του φαινομένου προέρχεται από το γεγονός ότι οι μαθητές , στην πρώιμη φάση της ζωής τους, έχουν συνδέσει την αρχική κατανόηση του αριθμού με την διαδικασία της απαρίθμησης, η οποία προσεγγίζει με την σειρά της, τους φυσικούς αριθμούς (Gelman, 2000; Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008).

Σε έρευνές του ο Χρήστου (2014, 2015) επισημαίνει ότι το φαινόμενο της προκατάληψης των φυσικών αριθμών επηρεάζει τους μαθητές με δύο τρόπους : α) βοηθά την δημιουργία διαισθητικών πεποιθήσεων όσον αφορά το αποτέλεσμα των πράξεων, που τελικά παίρνουν την μορφή κανόνων, όπως π.χ. ότι η πρόσθεση πάντα δημιουργεί αύξηση και β) προτρέπει τους μαθητές να σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τα σύμβολά που αναπαριστούν αριθμούς που λείπουν.

Η απαγκίστρωση των μαθητών από τις αρχικές τους πεποιθήσεις μπορεί να επιτευχθεί με την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού πέρα από τα όρια του φυσικού αριθμού και να ενστερνιστούν μια πιο μαθηματικά εκλεπτυσμένη κατανόηση για τον αριθμό, προσεγγίζοντας σιγά-σιγά τον πραγματικό αριθμό. Η παραπάνω πορεία προς την γνώση είναι και δύσκολή και χρονοβόρα για τους μαθητές, αφού απαιτεί αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους αριθμούς (Vosniadou et al, 2008). Καταλυτικός είναι ο ρόλος των δασκάλων και των εκπαιδευτικών αφού πρέπει να είναι ενήμεροι για το παραπάνω φαινόμενο, καθώς τέτοιες συμπεριφορές έχουν παρατηρηθεί και σε ενήλικες (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993). Για να μπορέσουν να ανταπεξέλθουν σε αυτήν τη δυσκολία κατανόησης, μαθαίνουν μηχανικά τους κανόνες εκτέλεσης όλων των πράξεων των ακεραίων αριθμών, χωρίς επιπλέον να έχουν τη δυνατότητα να αξιολογήσουν το εξαγόμενο (Badarudin & Khalid, 2008; Θωμαΐδης, 2009).

Για παράδειγμα, το γεγονός ότι το -27 είναι μικρότερο από το -12 έρχεται σε αντίθεση με αυτό που έχουν κατακτήσει-γνωρίσει για τους φυσικούς αριθμούς (Badarudin & Khalid, 2008). Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών στη σχολική ζωή των μαθητών έχει κάποια δυσκολία αφού δεν μπορούν να δώσουν νόημα σε εκφράσεις που εμπλέκουν αρνητικούς αριθμούς, όπως αφαιρώ έναν αριθμό από έναν μικρότερό του ή αφαιρώ έναν αρνητικό αριθμό ή παίρνω κάτι αρνητικές φορές (Θωμαΐδης, 2009). Ακόμα πιο συχνά είναι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές με τα πρόσημα γιατί συγχέουν το νόημα που μπορεί να έχει το «πλην» σε κάποια παράσταση, η οποία μπορεί να λειτουργεί είτε ως πρόσημο είτε ως αφαίρεση είτε ως αντίθετος (Schechter, 2009). Βέβαια, οι μαθητές χρησιμοποιούν τους αρνητικούς αριθμούς στην καθημερινή τους ζωή παρόλα τα εμπόδια που παρουσιάζονται λόγω των φυσικών αριθμών. Ο Van de Walle (2007) επισημαίνει ότι, για να γίνει κατανοητή μια έννοια στους μαθητές, θα πρέπει αυτή να συνδεθεί με την καθημερινή ζωή.

Τέλος, η ποσοτικοποίηση των ακεραίων αριθμών και δη των αρνητικών είναι ένα ισχυρό πλεονέκτημα στη διαδικασία κατανόησης των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές (Ekol, 2010). Για αυτό το λόγο ο Θωμαΐδης (2009) ισχυρίζεται ότι ένας τρόπος για την ποσοτικοποίηση των ακεραίων αριθμών είναι το θερμόμετρο.

2. Νοεροί Υπολογισμοί

Είναι ευρύτατα διαδεδομένη η άποψη ότι οι νοεροί υπολογισμοί κατέχουν σημαντική θέση στη διδασκαλία αλλά και στη μάθηση των μαθηματικών, είτε αναφερόμαστε σε παιδιά είτε σε ενήλικες. Οι υποχρεώσεις της καθημερινότητας της ενήλικης ζωής απαιτούν τη χρήση των νοερών υπολογισμών λόγω της πληθώρας των στρατηγικών τους παρά τη χρήση των γραπτών υπολογισμών (McIntoch, Reys & Reys, 1997)

2.1 Αποσαφήνιση των Όρων

2.1.1 Τι είναι Νοεροί υπολογισμοί

Πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί στη διεθνή βιβλιογραφία και έχουν γίνει πολλές αναφορές στους νοερούς υπολογισμούς. Οι πρώτοι ορισμοί του όρου στηρίζονται στην έλλειψη χρήσης του μέσου (χαρτί-μολύβι). Όπως έγινε αναφορά και στην εισαγωγή, οι υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν με τη χρήση τριών μέσων :

A. αριθμομηχανή
B. με το μυαλό-νοερά
C. χαρτί-μολύβι

Σύμφωνα με τους Wandt και Brawn (1957) «νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία του υπολογισμού ενός αριθμητικού αποτελέσματος με ακρίβεια, χωρίς τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μέσου υπολογισμού ή γραφής». Μετέπειτα ο Reys (1984) υποστήριξε ότι τα χαρακτηριστικά των νοερών υπολογισμών είναι δύο: να υπολογίσεις ακριβώς μία αριθμητική απάντηση χωρίς την βοήθεια αριθμομηχανής ή καταγραφής. Με την παραπάνω άποψη συμφωνεί και η Reys (1985), προσθέτοντας ότι η ικανότητα των νοερών υπολογισμών ποικίλει ανάμεσα στα άτομα. Μετέπειτα η Reys (1994) ανέφερε ότι οι νοεροί υπολογισμοί ενθαρρύνουν τα άτομα στην επινόηση στρατηγικών και αντανακλαστικών σε λογικές απαντήσεις.

Η Sowder (1990) και μετέπειτα ο Threlfall (2009) αναφέρουν ότι ο νοερός υπολογισμός κάποιες φορές μπορεί να συνδυαστεί με χαρτί και μολύβι ή ακόμα και με αριθμομηχανή. Με την άποψη αυτή της Sowder βλέπουμε ότι συμφωνούν και οι Harries και Spooner (2000) καθώς υποστηρίζουν ότι ο νοερός υπολογισμός γίνεται με το μυαλό χωρίς να αποκλείεται και η χρήση του χαρτιού-μολυβιού προκειμένου να βοηθήσει τον μαθηματικό συλλογισμό. Η Sowder συχνά συσχετίζει τον νοερό υπολογισμό με τον κατ’ εκτίμηση υπολογισμό θεωρώντας ότι αυτός μετατρέπει τους ακριβείς υπολογισμούς σε προσεγγιστικούς, παίρνοντας μια απάντηση αρκετά κοντά στο αποτέλεσμα του ακριβούς υπολογισμού. Επομένως, νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία διεξαγωγής αριθμητικών πράξεων για την επίτευξη μιας ακριβούς απάντησης είτε μιας κατ’ εκτίμησης-προσέγγισης απάντησης. Με την άποψη της Sowder συμφωνεί και ο Maclellan (2001).

Το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποιούνται στον νοερό υπολογισμό έχουν να κάνουν με την ακριβή ή την κατά προσέγγιση απάντηση. Όταν το πρόβλημα περιέχει μεγάλους ή πολλούς αριθμούς τότε είναι προτιμότερη η απάντηση της εκτίμησης, ενώ όταν το πρόβλημα περιέχει μικρούς ή λίγους αριθμούς τότε η απάντηση είναι προτιμότερο να είναι ακριβής. Επιπλέον, ο Maclellan επισημαίνει ότι για να επιτευχθεί ο νοερός υπολογισμός κρίνεται απαραίτητη η χρήση στρατηγικών. Επίσης, ο Anghileri (1999) κινείται στο ίδιο πνεύμα και προσδιορίζει τον νοερό υπολογισμό με βάση τις στρατηγικές αλλά αναφέρεται και στις «σύντομες σημειώσεις» που μπορούν να κρατούνται κατά τη διάρκεια των νοερών υπολογισμών.

Η Reys (1985) δηλώνει ότι «ο νοερός υπολογισμός καλλιεργεί την ανάπτυξη της έντονης αίσθησης του αριθμού». Επιπλέον ο Reys (1984) πιστεύει ότι ο νοερός υπολογισμός «προωθεί την μεγαλύτερη κατανόηση της δομής του αριθμού και των ιδιοτήτων του» και «προάγει την δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη και ενθαρρύνει τους μαθητές στο να δημιουργούν έξυπνους τρόπους χειρισμού των αριθμών».

Ο Thompson (1999) σχολιάζει ότι οι έννοιες νοερός υπολογισμός και νοερή αριθμητική είναι διαφορετικές, αφού ο πρώτος προϋποθέτει νοερές στρατηγικές ενώ ο δεύτερος μόνο νοερή ανάκληση.

Πιο πρόσφατα ο Λεμονίδης (2013, σελ. 25) αναφέρει ότι «Νοερός είναι ο υπολογισμός που πραγματοποιείται νοερά και με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη».

Ένα σημαντικό πεδίο, στο οποίο ξεκίνησαν διάφορες μελέτες είναι αυτό του εντοπισμού και της κωδικοποίησης των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων σε νοερό επίπεδο (Λεμονίδης & Λυγούρας 2006). Επιχειρώντας έναν ορισμό του νοερού υπολογισμού η Maclellan (2001) αναφέρει ότι είναι μια διαδικασία υπολογισμού ενός αριθμητικού αποτελέσματος με ακρίβεια (νοερός) ή κατά προσέγγιση (κατ'εκτίμηση) χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων υπολογισμού ή γραφής (Λεμονίδης, 2006α; Sowder, 1988 στη Maclellan, 2001). Την ίδια περίοδο ο Λεμονίδης (2006) αναφέρει ότι είναι ο υπολογισμός που γίνεται με το μυαλό και όχι με το χαρτί και το μολύβι, συμπληρώνοντας οι Harries & Spooner (2000) τον ορισμό «χωρίς όμως να αποσιωπάτε η σημασία της καταγραφής των μαθηματικών συμβόλων για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού». Ο Thompson (1999) αναφέρει τέσσερις (4) βασικούς λόγους για τους οποίους είναι απαραίτητη η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών:

1. Χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή περισσότερο από τους γραπτούς υπολογισμούς.
2. η εξάσκηση με αυτούς δημιουργεί καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της σημασίας των αριθμών (McIntoch, 1990; Sowder, 1990)
3. η νοερή εργασία αναπτύσσει ικανότητες για τη λύση προβλημάτων
4. βοηθούν στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού (αναφορά στο Λεμονίδη, 2006α).

Από παιδαγωγική σκοπιά, οι νοεροί υπολογισμοί μπορούν να αξιολογηθούν υπό το πρίσμα της συμπεριφοριστικής (behavioral) οπτικής και αυτό της κατασκευαστικής (constructivist) (Reys & Barger, 1994, αναφορά στο Λυγούρας, 2006). Όσο αφορά την συμπεριφοριστική οπτική ο νοερός υπολογισμός είναι μια βασική ικανότητα που ενδεχομένως βοηθάει, ως βασική προϋπόθεση, στην υπολογιστική ικανότητα του μαθητή στους γραπτούς υπολογισμούς ή στους κατ` εκτίμηση υπολογισμούς. Με δεδομένα τα παραπάνω η κατάκτηση της γνώσης επιτυγχάνεται με άμεση διδασκαλία και πρακτική (Shibata, 1994, αναφορά στο Λυγούρας, 2006). Αναλύοντας την κατασκευαστική οπτική, αυτή θεωρεί τον νοερό υπολογισμό ως μια υψηλού επιπέδου διαδικασία σκέψης και υποστηρίζει ότι η δημιουργία-σκέψη μιας στρατηγικής είναι τόσο σημαντική όσο και η εκτέλεσή της (Sowder, 1992a). Στην περίπτωση αυτή, η καλλιέργεια των αριθμητικών-μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών πραγματοποιείται στη τάξη, αφού πρώτα επισημάνουμε και έπειτα αξιοποιήσουμε τις στρατηγικές που κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν οι μαθητές στα νοερά προβλήματα, με τη βοήθεια του δασκάλου (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2006).

2.1.2 Τι είναι Στρατηγικές Νοερού Υπολογισμού

Οι νοεροί υπολογισμοί πραγματοποιούνται με την βοήθεια στρατηγικών. Οι νοερές στρατηγικές αποτελούν έναν τύπο ειδικών γνωστικών διαδικασιών. Στρατηγικές είναι οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε νοερά απλά αριθμητικά προβλήματα. Οι στρατηγικές ορίζονται με μικρές διαφορές από διάφορους ερευνητές. Ο Thompson (1999a, σελ. 2) γράφει ότι για την εκτέλεση ενός νοερού υπολογισμού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ποικίλες στρατηγικές. Προσδιορίζει τις στρατηγικές στους νοερούς υπολογισμούς ως εξής: «Οι νοερές στρατηγικές είναι περισσότερο η εφαρμογή γνωστών ή γρήγορα υπολογίσιμων αριθμητικών γεγονότων, σε συνδυασμό με ειδικές ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, για να βρεθεί η λύση ενός υπολογισμού του οποίου η απάντηση δεν είναι γνωστή. Επιπλέον, ο Λεμονίδης (2013, σελ. 49) αναφέρει ότι οι στρατηγικές βοηθούν στην ανάκληση πληροφοριών από την μακρόχρονη μνήμη, συνυπάρχουν με άλλες γνωστικές λειτουργίες και επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες. Επίσης, οι νοερές στρατηγικές ενσωματώνουν την ιδέα ότι τα παιδιά, με δεδομένη μια συλλογή από αριθμούς για να εργαστούν, θα επιλέξουν τη στρατηγική που είναι η πιο κατάλληλη για τους συγκεκριμένους αριθμούς». Ένας νοερός υπολογισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλές στρατηγικές ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια στρατηγική πολλές φορές (Levine, 1982). Οι Bjorkland & Douglas (1997), υποστηρίζουν ότι οι στρατηγικές εξελίσσονται – αναπτύσσονται, στο παραπάνω συμπέρασμα κατέληξαν όταν παρατήρησαν ότι η διαφορά ηλικίας επηρεάζει το πλήθος των στρατηγικών που χρησιμοποιούν παιδιά διαφορετικών ηλικιών καθώς και την αποτελεσματικότητα της εφαρμογής των παραπάνω στρατηγικών. Για τον Threlfall (2000) η έννοια στρατηγική αναλύεται σε δύο συνιστώσες αυτή της απόφασης να γίνει κάτι με ιδιαίτερο τρόπο και αυτή της αλληλουχίας των δράσεων για την επίτευξη της παραπάνω απόφασης. Επίσης, ο Threlfall (2002, σελ. 30) αναφέρει ότι οι μαθητές για να ανταποκριθούν στα προβλήματα των νοερών υπολογισμών, έχουν τις παρακάτω επιλογές:

1. Με την ανάκληση ενός αριθμητικού γεγονότος
2. Με μια απλή διαδικασία καταμέτρησης των αριθμών
3. Με μια νοερή αναπαράσταση της μεθόδου με “χαρτί και μολύβι” και νοερό υπολογισμό του αποτελέσματος
4. Με την δημιουργία μιας ακολουθίας μετασχηματισμών των αριθμών του προβλήματος, για να καταλήξει σε μια λύση του προβλήματος.

Και τέλος η Callingham (2005), κατηγοριοποιεί τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών σε δύο κατηγορίες, αυτή της συντελεστικής και αυτή της συσχετιστικής κατανόησης. Οι συντελεστικές στρατηγικές είναι αυτές που κάνουν χρήση μια συγκεκριμένη διαδικασία χωρίς κάποια δικαιολόγηση που να αποσαφηνίζει την κατανόηση των εν λόγω εννοιών. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με τη συσχετιστική κατανόηση η οποία υποδηλώνει εννοιολογική κατανόηση της δομής και της λειτουργίας των αριθμών και εν τέλει αναδύεται η σύνδεση τους με την αίσθηση του αριθμού.

2.2 Θέματα σχετικά με τους Νοερούς Υπολογισμούς

2.2.1 Η σημασία-σημαντικότητα των Νοερών Υπολογισμών

Στο έργο της η Reys (1984) περιγράφει τα πλεονεκτήματα της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών. Αναφέρει ότι οι νοεροί υπολογισμοί θεωρούνται προαπαιτούμενοι της ανάπτυξης των γραπτών υπολογισμών, ενώ ενισχύουν την καλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους. Η δημιουργική σκέψη, οι δεξιότητες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων αλλά και η ανάπτυξη των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών είναι τομείς που ενισχύονται με την καλλιέργεια των νοερών υπολογισμών.

Στο έργο του ο Thompson (1999), αναφέρει τους παρακάτω λόγους που ενισχύουν την διδασκαλία των νοερών υπολογισμών:

- Στην ενήλικη ζωή είναι χρησιμότεροι οι νοεροί υπολογισμοί
- Μια βασική συνιστώσα της αίσθησης του αριθμού είναι οι νοεροί υπολογισμοί, έτσι ο μαθητής μπορεί να κατακτήσει την δομή του αριθμητικού μας συστήματος.
- Η επίλυση ενός προβλήματος γίνεται ευκολότερη, καθώς οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν-αναπτύσσουν τις στρατηγικές επίλυσής του.
- Η κατανόηση των νοερών υπολογισμών επιφέρει-συνεπάγεται και την αποτελεσματικότητα και στους γραπτούς υπολογισμούς (Threfall,2002)

Ο Hartnett (2007) επισημαίνει ότι όταν οι δάσκαλοι και οι καθηγητές επικεντρώνονται στην διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των στρατηγικών τους, τότε οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά τους στην καθημερινότητά τους. Επιπλέον αναπτύσσεται η μαθηματική τους λογική, η ικανότητα εκτίμησης και τέλος πολλαπλασιάζονται οι εναλλακτικοί τρόποι αξιολόγησης-έκφρασης των αριθμών και των σχέσεων-πράξεων μεταξύ τους (Carroll, 1996).

Πολύ αργότερα ο Olsen (2015), παροτρύνει τους δασκάλους να διδάξουν στους μαθητές τους, τον τρόπο να επιλέγουν την σωστή στρατηγική για τον υπολογισμό μια αριθμητικής παράστασης. Μια σημαντική επισήμανση του Olsen είναι ότι οι νοεροί υπολογισμοί κάνουν χρήση κάποιων βασικών μαθηματικών ιδιοτήτων, της αντιμεταθετικής, της προσεταιριστικής και της επιμεριστικής.

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2013, σελ. 27), οι λόγοι για του οποίους πρέπει να διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί είναι οι παρακάτω :

- Η χρησιμότητα και η εφαρμογή στην πράξη: Εφαρμόζονται στην καθημερινότητα μας, πολύ περισσότερο από τους γραπτούς υπολογισμούς.
- Η συμβολή τους σε άλλες μαθηματικές έννοιες: Η καλλιέργεια των νοερών υπολογισμών αποτελεί βασικό άξονα ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού. Επίσης βοηθάει στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών υπολογισμών, καθώς και στην ενίσχυση των ικανοτήτων των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών αλλά και αυτών της επίλυσης προβλημάτων.
- Η συμβολή τους σε γνωστικές ικανότητες: Οι νοεροί υπολογισμοί εξασκούν την ικανότητα αναπαράστασης και χρήσης αφηρημένων εννοιών στην βραχύχρονη μνήμη αλλά και η ικανότητα της ευελιξίας (βλ. Λεμονίδης 2013, σελ. 57-67). Και τέλος εξασκείται η μεταγνωστική ικανότητα των μαθητών, όταν αυτοί παρουσιάζουν τους τρόπους με τους οποίους έκαναν τους νοερούς υπολογισμούς που τους ζητήθηκαν.

2.2.2 Σύγκριση Νοερών και Γραπτών Υπολογισμών

Αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει και ερευνήσει την σχέση των γραπτών αλγόριθμων με τους νοερούς υπολογισμούς. Κάποιοι εξ αυτών (Plunkett, 1979; Thompson, 1997) αναλύουν και αναφέρουν κάποια από τα θετικά τους χαρακτηριστικά των γραπτών αλγορίθμων :

- Παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας των πράξεων σε όλον τον κόσμο για πολλά χρόνια.
- Μεγαλύτερη σιγουριά στο αποτέλεσμα ειδικά όταν υπάρχουν υπολογισμοί με πολλούς αριθμούς και η μνήμη μπορεί να επιβαρυνθεί.
- Είναι αυτόματοι και δεν απαιτείται ανάλυση της βάσης στην οποία στηρίζεται ο αλγόριθμος.
- Είναι γρήγοροι, δίνοντας κατευθείαν την απάντηση.
- Οι εκπαιδευτικοί ή οι μαθητές εντοπίζουν τα λάθη τους στους γραπτούς υπολογισμούς.
- Οι γραπτοί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται για όλους τους αριθμούς.

Στον αντίποδα όμως, υπάρχουν ερευνητές (Kamii & Dominick, 1997, 1998; McIntosh, 1998; Van de Walle, 2005α, 2005β; Λεμονίδης, 2013, σελ. 52-54) που αναφέρουν κάποια προβλήματα που μπορούν να παρουσιαστούν απο τη χρήση των γραπτών υπολογισμών, όπως τα παρακάτω:

- Οι αλγόριθμοι στηρίζονται στο ψηφίο και όχι σε ολόκληρους τους αριθμούς όπως γίνεται με τους νοερούς υπολογισμούς.
- Πολύ συχνά οι αλγόριθμοι κουράζουν εύκολα τους μαθητές γιατί ακριβώς είναι άκαμπτοι.
- Οι γραπτοί αλγόριθμοι επιβάλλονται και έτσι δεν δίνονται περιθώρια επιλογής από τους μαθητές για τη στρατηγική που θα ακολουθήσει για την επίλυσή τους. Χάνεται έτσι το αίσθημα της πρωτοβουλίας και φαντασίας που πρέπει να αναπτυχθεί κυρίως σε παιδιά μικρής ηλικίας.
- Οι μαθητές κάνουν περισσότερα λάθη με τους αλγόριθμους παρά με τις δικές τους επινοούμενες στρατηγικές.

Ένα από τα συμπεράσματα που καταλήγουν διάφοροι ερευνητές είναι ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τους νοερούς υπολογισμούς, άρα και τις στρατηγικές τους, για τον λόγο ότι αυτοί δεν διδάσκονται. Την παραπάνω διαπίστωση την υποστήριξαν οι Carroll (1996) και οι Reys, Reys & Hope (1986) και πιο συγκεκριμένα αναφέρουν ότι το σχολείο, οι δάσκαλοι και τα σχολικά εγχειρίδια κατά την διδασκαλία των μαθηματικών δίνουν έμφαση στους γραπτούς υπολογισμούς, έτσι λοιπόν ατροφεί η ικανότητα των μαθητών να κάνουν νοερούς υπολογισμούς. Ο Λεμονίδης (2013, σελ. 53) αναφέρει ότι οι δάσκαλοι επιλέγουν τον δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας και όχι τον μαθητοκεντρικό, αφού αυτός είναι αρκετά δύσκολος για να αποδώσει το θέμα των νοερών υπολογισμών, επομένως ο τρόπος διδασκαλίας αποτελεί και αυτός ένας ανασταλτικός παράγοντας για την διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.

Θα αποτελούσε σοβαρή παράλειψη αν δεν αναφέραμε και τα θετικά χαρακτηριστικά των νοερών αλγορίθμων, όπως τους παρουσιάζει ο Plunkett (1979): έχουν μεγάλη ποικιλία στρατηγικών και με μεγάλη ευελιξία μπορούν να εφαρμοστούν. Μπορούν να αποτυπωθούν σε μια εικόνα όπως η αριθμογραμμή, δίνοντας έτσι μια εικόνα του υπολογισμού. Τα σημαντικότερα όμως χαρακτηριστικά τους είναι ότι αυτοί είναι ολιστικοί, δηλαδή αντιμετωπίζουν τους παράγοντες ή τους όρους μιας παράστασης ως ολόκληρους αριθμούς και όχι κατακερματισμένους σε μονάδες, δεκάδες, κ.ο.κ. επιπλέον είναι εποικοδομητικοί αφού η πορεία επίλυσης ξεκινάει από την ερώτηση και κατευθύνεται στην απάντηση, επίσης ο νοερός υπολογισμός δίνει μια πρώτη προσέγγιση του αποτελέσματος και ειδικά στους φυσικούς αριθμούς αυτό είναι ακόμα πιο ξεκάθαρο διότι πιο συχνά υπολογίζονται τα αριστερότερα ψηφία των αριθμών. Και τέλος ο κάθε μαθητής που κατέχει τους νοερούς υπολογισμούς, άρα και τις στρατηγικές του, είναι γνώστης και σίγουρος για την πορεία επίλυσης του προβλήματος, καθότι μπορεί να επιλέξει την καταλληλότερη μέθοδο και να χρησιμοποιήσει τις κατάλληλες μαθηματικές ιδιότητες αναδεικνύοντας έτσι ότι κατανοεί τους αριθμούς και τις ιδιότητες τους, δηλαδή έχει την αίσθηση τους αριθμού.

Από την άλλη πλευρά ο Plunkett (1979) αναφέρει και τα αρνητικά χαρακτηριστικά των νοερών υπολογισμών: είναι γρήγοροι, αν και βρίσκουν εφαρμογή σε πάρα πολλές πράξεις εντούτοις δεν μπορούν ή είναι δύσκολο να εφαρμοστούν σε πολύ δύσκολούς υπολογισμούς.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω χαρακτηριστικά των γραπτών και των νοερών υπολογισμών και συγκρίνοντάς τα, μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα, οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν στην κατανόηση της δομής των αριθμών, αφού αντιμετωπίζονται ως ενιαίοι αριθμοί και όχι ως μεμονωμένα ψηφία, πράγμα που συμβαίνει στους γραπτούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013, σελ.52-53). Ενισχύοντας την παραπάνω διαπίστωση, ο Plunkett (1979) αναφέρει ότι οι γραπτοί υπολογισμοί αποτελούνται από κανόνες και αλγορίθμους που απλώς πρέπει να τους θυμόμαστε και να τους ακλουθούμε πιστά, χωρίς να αιτιολογείται αυτό αλλά ούτε και να συσχετίζεται με κάποια άλλη μαθηματική δομή, έτσι λοιπόν δημιουργείται, και κάποιες φορές ενισχύεται η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι αυθαίρετα.

Άλλη μια διαφορά είναι ότι οι γραπτοί υπολογισμοί εφαρμόζονται για υπολογισμούς με μεγάλους αριθμούς ενώ οι νοεροί υπολογισμοί δεν μπορούν να εφαρμοστούν με την ίδια ευκολία. Οι νοεροί υπολογισμοί μπορούν να εφαρμοστούν χρησιμοποιώντας ποικίλους τρόπους (στρατηγικές) για την διεκπεραίωση τους, ενώ οι γραπτοί υπολογισμοί έχουν μόνον έναν τρόπο επίλυσης και όλοι οι μαθητές εκτελούν τον ίδιο αλγόριθμο (τον κάθετο), θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι είναι σταθερής μορφής. Την παραπάνω διαπίστωση ενστερνίζονται και οι Van de Walle (2007), και ο Λεμονίδης (2013, σελ. 53) λέγοντας ότι οι γραπτοί υπολογισμοί είναι άκαμπτοι ενώ οι νοεροί υπολογισμοί είναι ευέλικτοι καθώς διαθέτουν ποικίλες στρατηγικές για τον υπολογισμό τους.

Άλλοι δύο ερευνητές (Maclellan, 2001; Hartnett, 2007) διαπίστωσαν ότι ο γραπτός αλγόριθμος λειτουργεί ανασταλτικά στην κατανόηση και στην σκέψη ενώ ο νοερός υπολογισμός ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται και να επιλέγουν τον καταλληλότερο τρόπο (στρατηγική, π.χ. αλλαγή μορφής αριθμού από δεκαδικό σε κλάσμα ή και αντίστροφα) για τον υπολογισμό της παράστασης.

Όσον αφορά την σύνδεση των γραπτών υπολογισμών με τους νοερούς υπάρχουν έρευνες (Heirdsfield, Cooper & Irons, 1996) που αναδεικνύουν αυτήν τη σύνδεση αλλά και την επιρροή του γραπτού υπολογισμού πάνω στον νοερό και αντίστροφα. Τα συμπεράσματα τους έδειξαν ότι τα παιδιά πριν την διδασκαλία είχαν μια ποικιλία από αυθόρμητες και αποτελεσματικές νοερές στρατηγικές, ενώ μετά την διδασκαλία τα παιδιά έτειναν να χρησιμοποιούν μια νοερή στρατηγική πίσω από την οποία όμως υπήρχε υποβόσκουσα η στρατηγική του γραπτού υπολογισμού που μόλις είχε διδάξει ο δάσκαλος. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, οι ερευνητές (Kamii, Lewis & Jones, 1991; Reys et al., 1995; Murphy, 2011) τονίζουν ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ελεύθεροι να διατυπώνουν και να ακολουθούν τις δικές τους νοερές στρατηγικές, ενισχύοντας έτσι την κατανόηση των αλγορίθμων αφού αυτοί είναι προέκταση των δικών τους τρόπων σκέψης (αναφορά στο Λεμονίδη, 2006α). Με βάση τις κατευθύνσεις του αναλυτικού προγράμματος της Αγγλίας- National Numeracy- αντιλαμβανόμαστε ότι η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών πρέπει να έχει δεσπόζουσα θέση στην τάξη έχοντας όμως κατά νου ότι αυτοί (οι νοεροί υπολογισμοί) πρέπει να συνδέονται με την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών και τις ικανότητές τους.

2.2.3 Αίσθηση του Αριθμού-εφαρμογή των Νοερών υπολογισμών στην καθημερινότητα

Μία καινούργια έννοια που έχει εισαχθεί στην επιστημονική κοινότητα είναι αυτή του αριθμητισμού ή του αριθμητικού γραμματισμού, η οποία μελετά τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα μαθηματικά του σχολείου με αυτά της καθημερινής ζωής και επηρεάζει τα διάφορα προγράμματα σπουδών, όπως για παράδειγμα αυτό της Αγγλίας (National Numeracy Strategy, DfEE 1999, DfES 2007). Οι νοεροί υπολογισμοί είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών, που βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή και επομένως η σύνδεση τους με τον αριθμητικό γραμματισμό είναι αναπόφευκτη και ισχυρή.

Μετά την βιομηχανική επανάσταση, η ανάπτυξη των κοινωνιών και ιδιαίτερα στον τομέα της τεχνολογίας ακολουθούσε όρους γεωμετρικής προόδου. Έτσι λοιπόν οι πολίτες για να μπορέσουν να ακολουθήσουν την πρόοδο αυτή θα έπρεπε πρώτα να την κατανοήσουν. Επομένως οι απαιτήσεις που έχει μια ανεπτυγμένη κοινωνία, σε μαθηματικές και αριθμητικές γνώσεις είναι ανάλογες με την ανάπτυξή της. Ο Paulos (1998) ονομάζει innumeracy – αναριθμησία – την άγνοια βασικών αριθμητικών γνώσεων και θεωρεί ότι μπορεί να είναι σοβαρή αδυναμία σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, είτε στο σπίτι και την ιδιωτική ζωή είτε στην εργασία και την καριέρα είτε και στη δημόσια και επαγγελματική ενασχόληση.

Το σχολείο όμως με την παροχή «στεγνών» μαθηματικών τύπων και αλγόριθμων δεν βοηθά τον μαθητή και αυριανό πολίτη στην εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων του στην καθημερινή του ζωή. Η στείρα γνώση, των αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων, που μαθαίνουν οι μαθητές στο σχολείο, δεν συνεπάγεται ότι αυτή η γνώση θα βοηθήσει τον μαθητή να ανταπεξέλθει στις μαθηματικές απαιτήσεις και εκτιμήσεις που απαιτούνται στον $21^{ο}$ αιώνα. Ένας από τους πρώτους ορισμούς της έννοιας «ενάριθμος» εμφανίστηκε στην αναφορά Cockcroft της Βρετανικής κυβέρνησης (Cockcroft, 1982, παρ. 34-39, σελ.10-11):

> *Θα επιθυμούσαμε η λέξη ενάριθμος να αποδίδει την ταυτόχρονη ύπαρξη δύο χαρακτηριστικών. Το πρώτο από αυτά είναι η εξοικείωση με τους αριθμούς και η ικανότητα να χρησιμοποιεί κανείς μαθηματικές δεξιότητες που δίνουν την δυνατότητα σε ένα άτομο να αντιμετωπίζει τις πρακτικές απαιτήσεις της καθημερινής ζωής. Το δεύτερο είναι η ικανότητα του ατόμου να εκτιμά και να κατανοεί τις πληροφορίες που παρουσιάζονται με μαθηματικούς όρους, για παράδειγμα με γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα ή πίνακες ή με αναφορές σε ποσοστά αύξησης ή μείωσης. Συνολικά, αυτά σημαίνουν ότι ένα ενάριθμο άτομο θα πρέπει να είναι ικανό να αξιολογεί και να καταλαβαίνει μερικούς από τους τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως μέσο επικοινωνίας.*

Ένας ακόμη ορισμός για τον μαθηματικό γραμματισμό είναι αυτός που δόθηκε από την ομάδα των μαθηματικών του προγράμματος PIZA (Programme for International Student Assessment) και αναφέρει ότι:

> *Μαθηματικός γραμματισμός (mathematical literacy) είναι η ικανότητα του ατόμου να αναγνωρίζει και να κατανοεί τον ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, να*

κάνει καλά θεμελιωμένες κρίσεις και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά με τρόπους που ανταποκρίνονται στις ανάγκες της ζωής του ως ενός δημιουργικού, ενδιαφερόμενου και στοχαζόμενου πολίτη (OECD, 1999).

Οι μαθητές κατά την διάρκεια του σχολικού τους βίου, ασχολούνται στον τομέα των μαθηματικών με αλγόριθμους πράξεων, οι οποίες φανερώνουν ότι δεν έχουν αναληφθεί το νόημα της αίσθησης του αριθμού, αφού εφαρμόζουν τυπολατρικά τους γραπτούς αλγορίθμους που διδάχθηκαν στο σχολείο (Reys & Yang, 1998; Reys 1985). Κατά την εκτέλεση των αλγορίθμων, είτε οριζοντίων είτε καθέτων, οι μαθητές δεν αξιολογούν το αποτέλεσμα που βρήκαν αφού τους λείπει η αίσθηση του αριθμού, θα μπορούσε όμως να αποφευχθούν αυτά τα λάθη αν αντιμετώπιζαν τους αριθμούς με μια ολιστική αντίληψη (Beishuizen & Anghileri, 1998). Μια ακόμη σημαντική παρατήρηση που κάνει ο Rubenstein (2001) είναι ότι βασικός παράγοντας για την κατανόηση της σύνδεσης των αντίστροφων πράξεων είναι οι νοεροί υπολογισμοί.

Αρκετοί είναι οι ορισμοί που έχουν δοθεί για την αίσθηση του αριθμού. Ο ορισμός των McIntosh et al. (1992) αναφέρει ότι «η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στη γενική κατανόηση ενός ατόμου των αριθμών και των πράξεων μαζί με την ικανότητα και την τάση να χρησιμοποιεί την ικανότητα αυτή με ευέλικτους τρόπους για να πάρει μαθηματικές αποφάσεις και να αναπτύξει χρήσιμές και αποτελεσματικές στρατηγικές για την διαχείριση των αριθμών και των πράξεων». Στον παραπάνω ορισμού οι Yang, Reys, Reys (2009) προσθέτουν ότι το άτομο θα πρέπει επίσης να έχει την ικανότητα να χειρίζεται και καταστάσεις της καθημερινότητας που εμπλέκουν αριθμούς.

Ο Sowder (1988) δίνοντας τον δικό του ορισμό λέει ότι η αίσθηση του αριθμού ερμηνεύεται από καλά οργανωμένο εννοιολογικό δίκτυο, δίνοντας την δυνατότητα στο κάθε άτομο να κατανοεί τους αριθμούς και τις ιδιότητες τους (δομή) και να επιλύει προβλήματα με ευέλικτους και δημιουργικούς τρόπους. Παρόμοια είναι και η άποψη της Dowker (1992) αφού αναφέρεται στο νόημα των αριθμών και των μεταξύ τους σχέσεων.

Πολλοί ερευνητές για να ορίσουν την αίσθηση του αριθμού χρησιμοποίησαν διάφορους παράγοντες που την χαρακτηρίζουν, όπως την εννοιολογική κατανόηση του αριθμού και τις ειδικές αριθμητικές ικανότητες (Berch, 2005). Όμως αυτή η έννοια συμπεριλαμβάνει τη γενική κατανόηση των αριθμών, των πράξεων τους και την ικανότητα χειρισμού καταστάσεων που εμπλέκουν αριθμούς από τους μαθητές. Βασικές προϋποθέσεις της αίσθησης του αριθμού είναι ο συνδυασμός ευέλικτων και αποτελεσματικών στρατηγικών στους νοερούς υπολογισμούς και στην διαχείριση-επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (McIntosh, Reys, Reys, Yang,Bana, Farrell, 1997; Sowder, 1992).

Έτσι λοιπόν, αντιλαμβανόμαστε ότι οι νοεροί υπολογισμοί είναι ένα γνήσιο υποσύνολο-συστατικό της αίσθησης του αριθμού (Λεμονίδης, Τσακιρίδου, Μελιοπούλου, 2015), τονίζοντας έτσι ότι η εξάσκηση με τους νοερούς υπολογισμούς δημιουργεί καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης αριθμού (McIntosh, 1990; Sowder, 1990; Λεμονίδης, 2013, σελ. 36-38)

Όμως η υψηλή επίδοση στους νοερούς υπολογισμούς δεν είναι αναγκαστικά ανάλογη με την αίσθηση του αριθμού (McIntosh & Dole, 2000). Αυτό σημαίνει ότι ένας μαθητής μπορεί να βρίσκει με «μηχανικό» τρόπο την σωστή απάντηση, μην καταλαβαίνοντας όμως ούτε τη σημασία των αριθμών αλλά ούτε και των πράξεων. Την παραπάνω διαπίστωση την επαλήθευσαν οι McIntosh et al (1992).

Αρκετοί ερευνητές επισημαίνουν τη σύνδεση των νοερών υπολογισμών με την αίσθηση του αριθμού. Η Reys (1985), αρχικά, αναφέρει ότι ο νοερός υπολογισμός προωθεί την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, μαζί με τις ιδιότητές του. Η ίδια (1985) επιπλέον πιστεύει ότι ”ο νοερός υπολογισμός καλλιεργεί την ανάπτυξη της έντονης αίσθησης του αριθμού”. Ο Reys (1984) αναφέρει ότι ο νοερός υπολογισμός καλλιεργεί την κατανόηση της δομής του αριθμού και των ιδιοτήτων του καθώς αναπτύσσει την δημιουργική - ανεξάρτητη σκέψη και εμφυσά στους μαθητές ευέλικτους τρόπους χειρισμούς των αριθμών.

Είναι γενικώς αποδεκτό ότι η γνώση αριθμητικών γεγονότων αποτελεί μια συνιστώσα της αίσθησης του αριθμού, η οποία είναι συνδεδεμένη άρρηκτα με τους νοερούς υπολογισμούς. Η γνώση κάποιων βασικών αριθμητικών γεγονότων, αποτελεί προϋπόθεση για τους νοερούς υπολογισμούς και γενικά για τις αριθμητικές διαδικασίες (Plunkett, 1979; Sowder, 1988; Dowker, 2005). Επίσης, αρκετές έρευνες (McIntosh et al, 1997; McIntosh, Reys, Reys,1992; Reys, 1984; Sowder, 1990, 1992a; Trafton, 1992) έδειξαν ότι η αίσθηση του αριθμού είναι βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη της ευελιξίας στους νοερούς υπολογισμούς.

Παρατηρήθηκε ότι η χρήση του γραπτού αλγορίθμου ή/και της αριθμομηχανής δεν βοηθούν στην καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού, έτσι μαθητές με υψηλή επίδοση στους γραπτούς υπολογισμούς δεν αναπτύσσουν ή δεν θα αναπτύξουν την αίσθηση αριθμού. Επίσης, τονίζεται ότι για την κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων, σημαντικό ρόλο παίζουν οι νοεροί υπολογισμοί καθώς αυτοί προκαλούν την εννοιολογική κατανόηση, την αίσθηση του αριθμού και την εμπέδωση- αντίληψη αριθμητικών σχέσεων, για αυτό θα πρέπει η αίσθηση του αριθμού να είναι ένας βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης (McIntosh et al, 1992).

Ο Sowder (1990) αναφέρει ότι οι μαθητές που έχουν κατακτήσει τους νοερούς υπολογισμούς, μπορούν να κατανοήσουν σε πλήρη έκταση την δομή των αριθμών και τις ιδιότητες τους, δηλαδή οι νοεροί υπολογισμοί είναι ένα ισχυρό εργαλείο των μαθητών που βοηθάει την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού. Για αυτό λοιπόν οι δάσκαλοι - καθηγητές θα πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να έχουν «νοερή σκέψη» για να έχουν την καλύτερη δυνατή ανάπτυξη της αίσθησης αριθμού (Van de Walle, 2007; Heirdsfield & Cooper, 2004).

2.2.4 Η Ευελιξία και οι παράγοντες που την επιρέαζουν

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενες ενότητες οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν στην εξέλιξη της αίσθησης του αριθμού αλλά και στην ευελιξία του. Ο νοερός υπολογισμός συνεισφέρει στην ανάπτυξη της ευελιξίας ενός ατόμου, δηλαδή την χρήση μεθόδων που διευκολύνουν το άτομο να κάνει έναν υπολογισμό (Thompson, 1998).

Όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 57) ο όρος ευελιξία συναντάτε διεθνώς ως flexibility, αλλά και ως προσαρμοστικότητα- adaptivity. Επίσης ο Λεμονίδης στην ίδια ενότητα (2013, σελ.57) επισημαίνει ότι κάποιοι ερευνητές θεωρούν τους παραπάνω όρους ως συνώνυμους (Verschaffel et al., 2009; Heinze et al., 2009) και κάποιοι όχι (Baroody, 2003; Feltovich et al., 1997; Selter, 2009). Για τους ερευνητές που διαχωρίζουν τους παραπάνω όρους, η ευελιξία ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να είναι γνώστης των διαφόρων στρατηγικών υπολογισμού και να τις εναλλάσσουν, ενώ στον όρο προσαρμοστικότητα δίνουν την έννοια της ικανότητας του ατόμου να χρησιμοποιεί την καταλληλότερη στρατηγική για να ανταποκριθεί πλήρως (γρήγορα και σωστά) στις απαιτήσεις του προβλήματος. Σύμφωνα με τους Verschaffel et al. (2009) η ευελιξία αφορά την ομαλή επιλογή ανάμεσα σε διαφορετικές στρατηγικές (Selter, 2009), δηλαδή τα άτομα είναι ικανά να επιλέγουν στρατηγικές χωρίς να είναι απαραίτητα πάντα η πιο κατάλληλη (Heinze et al., 2009).

Οι Macintyre & Forrester (2003) θεωρούν ένα άτομο ευέλικτο όταν αυτό μπορεί να χρησιμοποιήσει μια συγκεκριμένη στρατηγική ή να μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε μια πληθώρα στρατηγικών την καταλληλότερη για την επίλυση του προβλήματος, επομένως οι παραπάνω ερευνητές θεωρούν ταυτόσημες τις έννοιες ευελιξία και προσαρμοστικότητα.

Η Whitacre (2015) αναφέρει ότι τα ευέλικτα άτομα έχουν την τάση να επιλέγουν στρατηγικές οι οποίες είναι αποστασιοποιημένες από τους γραπτούς αλγόριθμους. Ενώ τα άτομα που δεν είναι ευέλικτα, έχουν την τάση να κάνουν νοερούς υπολογισμούς, κάνοντας χρήση του γραπτού-τυπικού αλγορίθμου, νοερά (Heirdsfield & Cooper, 2004).

Ο Selter (2009) κάνει λόγο και για έναν ακόμη όρο αυτό της δημιουργικότητας, δηλαδή την επινόηση καινούργιων στρατηγικών ή την τροποποίηση των ήδη υπάρχων.

Μία σημαντική παρατήρηση-διαπίστωση που αναφέρει ο Threlfall (2000), είναι ότι τα είδη των στρατηγικών που συνεισφέρουν-επηρεάζουν την ευελιξία είναι εκείνα στα οποία μπορούν οι όροι ή οι παράγοντες μιας παράστασης να μετατραπούν σε ισοδύναμες παραστάσεις σαφώς πιο εύκολα διαχειρίσιμες. Μια τέτοια άποψη βρίσκει σύμφωνο και τον Reys (1985), αφού υποστηρίζει ότι η μετατροπή ενός προβλήματος σε ισοδύναμες μορφές του, βοηθάει πολύ στην ευελιξία για την αντιμετώπιση του και ότι είναι βασικός παράγοντας του νοερού υπολογισμού.

Η πολύ καλή κατανόηση των πράξεων και των ιδιοτήτων τους αποτελούν προϋπόθεση για να μπορεί ένα άτομο να έχει ευέλικτη σκέψη (Van de Walle, 2007), δηλαδή η ευελιξία αποτελεί ένα βασικό κρίκο που συνδέει τον νοερό υπολογισμό με την αίσθηση του αριθμού (Whitacre, 2015). Επομένως, η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να έχει ως πυλώνα της την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επιλέγουν την κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων, δηλαδή να επιδιώκεται η καλλιέργεια της ευελιξίας των μαθητών (Thompson, 1998). Για να συμβεί όμως αυτό, θα πρέπει πρωτίστως να είναι ευέλικτοι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί (Star & Newton, 2009). Και τέλος μια σημαντική παρατήρηση που κάνει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 59) είναι ότι πλέον η γνώση πολλών στρατηγικών από μόνη της δεν συνεπάγεται και την ύπαρξη ευελιξίας.

Οι παράγοντες-μεταβλητές που επηρεάζουν την ευελιξία ενός ατόμου, όπως καταγράφεται από τους Verschaffel, Luwel, Torbeyns, Van Dooren (2009), όπως αναφέρεται στο Λεμονίδη, 2013 σελ.59) είναι :

- Οι μεταβλητές της κατάστασης ή τα χαρακτηριστικά του προβλήματος όπου ανάλογα με τους αριθμούς που δίνονται στο πρόβλημα, καθορίζεται και η καταλληλότερη στρατηγική επίλυσής του.
- Οι μεταβλητές του υποκειμένου ή η ταχύτητα και αποτελεσματικότητα, εδώ εξετάζεται η αποτελεσματικότητα και η ταχύτητα του μαθητή στην εφαρμογή στρατηγικών που επιλύουν ένα πρόβλημα, δεδομένου τις προγενέστερες γνώσεις και δεξιότητες του μαθητή.
- Οι μεταβλητές του πλαισίου δηλαδή το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο που διέπει τους μαθητές που αναφερόμαστε-εξετάζουμε.

2.2.5 Η Θέση των Νοερών Υπολογισμών στα Προγράμματα σπουδών

Οι Νοεροί υπολογισμοί, στα περισσότερα μέρη του κόσμου βρίσκονται στο επίκεντρο διαφόρων μεταρρυθμίσεων στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι Η.Π.Α., το Ηνωμένο Βασίλειο, η Ολλανδία και η Αυστραλία επισημαίνουν ότι η μαθηματική εκπαίδευση χρίζει αλλαγών έτσι ώστε να μπορεί να παρακολουθήσει τις εξελίξεις στον κόσμο (Hartnett, 2007). Όλες οι χώρες όμως δεν δίνουν την ίδια βαρύτητα στους νοερούς υπολογισμούς (Reys et al., 1993).

Οι Wandt & Brown (1957) τονίζουν ότι η δομή ενός προγράμματος σπουδών των μαθηματικών πρέπει να περιλαμβάνει ή να στηρίζεται σε βιώματα παραπλήσια με αυτά που θα συναντήσουν-αντιμετωπίσουν στην ενήλική τους ζωή, για αυτό θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στα νοερά μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Η εμπλοκή των νοερών υπολογισμών στο πρόγραμμα σπουδών είναι καταλυτική, καθώς καλλιεργεί την αίσθηση του αριθμού (Reys et al., 1995) και δημιουργεί ευνοϊκές συνθήκες για την αντιμετώπιση των προβλημάτων της καθημερινής ζωής (Olander & Brown, 1959).

To National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ένας οργανισμός- συμβούλιο εισηγήθηκε ότι οι νοεροί και οι κατ` εκτίμηση υπολογισμοί πρέπει να ενσωματωθούν στα προγράμματα σπουδών (Reys, 1984), τελικά η άποψη τους εισακούστηκε και το 1989 άλλαξαν τα σχολικά εγχειρίδια (Reys et al, 1996). Κρίνοντας εκ του αποτελέσματος, παρατηρούμε ότι οι αλλαγές που έγιναν στη μαθηματική εκπαίδευση, ενσωματώνοντας τους νοερούς και κατ` εκτίμηση υπολογισμούς, τελικά συγκλίνει-εναρμονίζεται η μαθηματική εκπαίδευση με τις απαιτήσεις της καθημερινής ζωής (Carroll, 1996).

Οι Heidsfield & Cooper (2002) αφού επισημαίνουν τη σημαντικότητα του εναρμονισμού ενός προγράμματος μαθηματικών σπουδών με την καθημερινή ζωή, αναφέρουν τους λόγους που δικαιολογούν την παραπάνω διαπίστωση αφού καθιστούν ικανά τα παιδιά να μάθουν πως λειτουργούν οι αριθμοί, να παίρνουν αποφάσεις για διαδικασίες και να δημιουργούν στρατηγικές, προωθούν μεγαλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (αίσθηση του αριθμού), μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένα «όχημα» για την προώθηση της σκέψης, των υποθέσεων και της γενίκευσης βασισμένη σε εννοιολογική κατανόηση (Sowder, 1992). Η κεντρική θέση που πρέπει να κατέχουν οι νοεροί υπολογισμοί στο μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να δημιουργούν δικές τους στρατηγικές, έτσι ο νοερός υπολογισμός προάγει τη σκέψη σε υψηλότερα επίπεδα διανόησης (Reys et al., 1995).

Ένας ακόμα λόγος που επιτάσσει την αλλαγή του προγράμματος σπουδών όπως επισημαίνει ο Van de Walle (2007) είναι ότι τα μαζικά και παραδοσιακά προγράμματα σπουδών υποστηρίζουν την διδασκαλία των παραδοσιακών αλγόριθμων, πράγμα που λειτουργεί ανασταλτικά στην διδασκαλία άλλων μεθόδων υπολογισμού από τους εκπαιδευτικούς. Η παραπάνω όμως διαπίστωση λειτουργεί ανασταλτικά και στην σκέψη των μαθητών (Reys & Yang, 1998).

Αρχικά, πολλές χώρες παραδοσιακά είχαν ως κορμό στα προγράμματα σπουδών τους γραπτούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης, σχετικά νωρίς (Blote et al., 2000). Όμως, με την πάροδο του χρόνου, αλλά και την εξέλιξη της κοινωνίας και των απαιτήσεων της τα προγράμματα σπουδών ενσωμάτωσαν τους νοερούς υπολογισμούς στην πρωτοβάθμια και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Peter et al., 2014), από νωρίς.

Στην Ολλανδία και στη Γερμανία η εισαγωγή των μαθητών στις άτυπες στρατηγικές νοερού υπολογισμού γίνεται στις μικρότερες τάξεις εκτοπίζοντας την διδασκαλία των γραπτών υπολογισμών για αργότερα (Beishuizen & Anghileri, 1998; Blote et al., 2000). Πιο ειδικά, στην Β΄ Δημοτικού οι μαθητές χρησιμοποιούν τους νοερούς υπολογισμούς στην πρόσθεση και την αφαίρεση και όχι τον κάθετο γραπτό υπολογισμό (Beishuizen & Anghileri, 1998; Beishuizen, 1993). Ενώ οι γραπτοί υπολογισμοί δεν εισάγονται πριν την Γ΄ Δημοτικού (Beishuizen, 1993; Klein et al., 1998; Λεμονίδης & Λυγούρας, 2006).

Στις Η.Π.Α. και στον Καναδά ο υπολογισμός προσθέσεων διψήφιων αριθμών γίνεται μέσω του τυπικού γραπτού αλγόριθμου, παρόλο που οι μαθητές είναι σε θέση να τους υπολογίσουν και νοερά (Reys et al., 1993). Στην Α΄ Δημοτικού γίνεται η διδασκαλία των μη τυπικών γραπτών αλγορίθμων, ενώ στην Β΄ Δημοτικού διδάσκεται ο κάθετος γραπτός αλγόριθμος πρόσθεσης και αφαίρεσης και τέλος στην Γ΄ Δημοτικού ολοκληρώνονται οι γραπτοί αλγόριθμοι με αυτούς του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Reys, Reys & Koyama, 1996).

Συνάμα, στις Η.Π.Α. το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), σημειώνει ότι πρέπει να δίδεται περισσότερη προσοχή στους νοερούς υπολογισμούς και στη βοηθητική χρήση της αριθμομηχανής παρά στους τυπικούς γραπτούς αλγόριθμους. Έτσι λοιπόν το NCTM προτείνει να παραγκωνιστούν οι τυπικοί γραπτοί αλγόριθμοι και να δοθεί έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση των διαδικασιών.

Το πρόγραμμά σπουδών της Αυστραλίας συμβουλεύει τους δασκάλους να δίνουν περισσότερη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς και στις στρατηγικές τους παρά στους τυπικούς γραπτούς αλγόριθμους (Hartnett, 2007)

Στην Ιαπωνία, οι νοεροί υπολογισμοί θεωρούνται βασικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης και διδάσκονται πριν την Γ΄ Δημοτικού (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa & Shimizu, 1991a). Επίσης οι Ιάπωνες μαθητές καταφέρνουν να κάνουν νοερές προσθέσεις διψήφιων αριθμών (Reys, Reys & Koyama, 1996), αλλά στις μεγαλύτερες τάξεις χρησιμοποιούν λίγες στρατηγικές νοερών υπολογισμών (Reys et al., 1993).

Στο Ηνωμένο Βασίλειο, το 1999 προτείνεται για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση το πρόγραμμα National Numeracy Strategy (DfEE), στο οποίο κυρίαρχη θέση κατέχουν οι νοεροί υπολογισμοί σε συνδυασμό με την άμεση διδασκαλία των στρατηγικών τους στο πλαίσιο ολόκληρης της τάξης. Βέβαια κάποιοι μαθητές θα μπορούν από μόνοι τους να αναπτύξουν νοερές ικανότητες, υψηλού νοητικού επιπέδου (Thompson, 2000b), όμως κατά γενική ομολογία είναι αναγκαία η διδασκαλία των νοερών στρατηγικών (DfEE, 1999).

Τα Ελληνικά προγράμματα σπουδών που συγγράφηκαν κατά την διετία 1982-84 δεν υπήρξε πουθενά η έννοια των νοερών υπολογισμών, πολύ περισσότερο δεν υπήρξαν οι στρατηγικές του. Όμως με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη όχι μόνο της κοινωνίας αλλά και της επιστημονικής κοινότητας και των ερευνών της, το Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδας αποφάσισε τον επανακαθορισμό - επανασχεδιασμό του Αναλυτικού προγράμματος σπουδών (Πρόγραμμα σπουδών) για να συμπεριληφθούν οι νοεροί υπολογισμοί, κατά κύριο λόγο στις μικρές τάξεις του Δημοτικού, αφού οι επιστημονικές έρευνες διαπίστωσαν την καθολική τους αξία στην ανάπτυξη της μαθηματικής και όχι μόνο, σκέψης (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2006).

Μια από τις έρευνες που επικυρώνει τα παραπάνω, είναι αυτή που έγινε στην Ελλάδα (1997-1999) από τον Λεμονίδη και μελετούσε τις στρατηγικές υπολογισμού των μικρών μαθητών, η οποία υπογράμμισε την σημαντικότητα των στρατηγικών και ανέδειξε την πρόοδο των μαθητών στην υπολογιστική σκέψη όταν χρησιμοποιούσαν τις παραπάνω στρατηγικές.

Η αλλαγή του μαθηματικού προγράμματος σπουδών της Ελλάδας (ΥΠΕΠΘ, Π. Ι., 2002), εκτός από την αλλαγή στην δομή του, έφερε και αλλαγή στα διδακτικά βιβλία. Στα πρώτα βιβλία, οι γραπτοί υπολογισμοί διδασκόντουσαν γρήγορα χωρίς να συγκριθούν-συσχετιστούν με άτυπους (νοερούς) τρόπους υπολογισμού έτσι ο μαθητής δεν κατάφερνε πλήρως την εννοιολογική κατανόηση. Στα καινούργια όμως βιβλία, η λογική είναι διαφορετική, ξεκινώντας δίδεται στους μαθητές ένα πρόβλημα και τους ζητείται να το επιλύσουν, χωρίς να έχουν διδαχθεί κάποιους τρόπους επίλυσης, στηριζόμενοι δηλαδή αποκλειστικά και μόνο στους προσωπικούς-νοερούς υπολογισμούς του κάθε μαθητή. Κατόπιν εξάσκησης σε νοερούς υπολογισμούς αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν ήταν μια λογική κατάληξη (προφανής) (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2006; Καραντζής, 2010-2011). Όπως αποφαίνονται οι Λεμονίδης (2003) και Λεμονίδης & Λυγούρας (2006) η αυθόρμητη και απρόσκοπτη χρήση των προσωπικών στρατηγικών, βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση και να έχουν μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Βέβαια ο δάσκαλος θα πρέπει να σταθεί δίπλα στο μαθητή, για να τον βοηθήσει να αναπτύξει τις ικανότητες του, που επηρεάζουν την επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών επίλυσης νοερών υπολογισμών (Καρατζής, 2007).

2.3 Στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης στους Νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς από το 0 έως το 20.

Η μάθηση των απλών προσθέσεων και αφαιρέσεων με μονοψήφιους αριθμούς που είναι μικρότεροι του είκοσι (20) είναι από τις πιο σημαντικές και καθοριστικές διδασκαλίες που δέχεται το παιδί στα πλαίσια της εκπαίδευσής του. Στις απλές αυτές πράξεις θα βασιστεί αργότερα και η γνώση των υπολοίπων πράξεων (πολλαπλασιασμού και διαίρεσης), καθώς και η γνώση των γραπτών αλγοριθμικών πράξεων. Η γνώση είναι επίσης καθοριστική για την υπόλοιπη στάση του μαθητή απέναντι στα μαθηματικά. Για τους λόγους αυτούς θα πρέπει να δώσουμε μεγάλη βαρύτητα στην διδασκαλία των απλών αλγορίθμων. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές, στις προσθέσεις και στις αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών αναπτύσσονται σύμφωνα με τα παρακάτω τρία στάδια (Carpenter, Moser ,1982; Fuson, 1992):

<u>**1^ο επίπεδο. Στρατηγικές με υλικά-αισθητοποίηση των αριθμών**</u>

Αυτές τις στρατηγικές τις συναντούμε στο νηπιαγωγείο και στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού. Τα παιδιά χρησιμοποιούν κυρίως τα δάχτυλά τους ή οτιδήποτε άλλο που θα δώσει υπόσταση στους αριθμούς που θα προσθέσει. Αφού αισθητοποιήσουν τον κάθε προσθετέο, ξεκινούν την απαρίθμηση-αισθητοποίηση του αθροίσματος. Αυτή την στρατηγική την ονομάζουμε **απαρίθμηση όλων ή επαναρίθμηση**. Σε αυτό το επίπεδο οι στρατηγικές με υλικά διαχωρίζονται σε αυτές που χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους οι μαθητές , από αυτές που χρησιμοποιούν αντικείμενα. Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα, όπως αυτός παρουσιάζεται στο βιβλίο του Λεμονίδη (2013, σελ. 83), και αναφέρει της στρατηγικές με υλικά-αισθητοποίηση του αριθμού.

	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
	1ο επίπεδο: Στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης	
	Πρόσθεση	
1	Απαρίθμηση όλων	**Πράξη: 2 και 3** . Μετράει δύο δάχτυλα. Μετράει τρία δάχτυλα. Μετράει όλα τα δάχτυλα από την αρχή.
	Αφαίρεση	
1	Διαχωρισμός από	**Πράξη: 5 βγάζω 3**. Μετράει 5 δάχτυλα. Μετράει και κατεβάζει τα τρία από αυτά. Μετράει όσα δάχτυλα έμειναν σηκωμένα.
2	Διαχωρισμός μέχρι	Μετράει πέντε κυβάκια. Παίρνει κυβάκια ώστε αυτά που θα μείνουν να είναι τρία. Μετράει αυτά

		που πήρε για να βρει το αποτέλεσμα.
3	Πρόσθεση	Μετράει και σχηματίζει μια συλλογή από τρία κυβάκια. Στα τρία κυβάκια προσθέτει ένα-ένα μέχρι να γίνουν πέντε. Μετράει αυτά που πρόσθεσε για να βρει το αποτέλεσμα.
4	Αντιπαραβολή	Μετράει και βάζει στην σειρά τρία κυβάκια. Από κάτω κάνει μια άλλη σειρά από πέντε κυβάκια που τα αντιστοιχεί με τα τρία επάνω. Μετράει αυτά που περισσεύουν για να βρει την απάντηση.

2ο επίπεδο. Στρατηγικές αρίθμησης

Στο εν λόγο επίπεδο, οι μαθητές για να υπολογίσουν μια πρόσθεση ή μια αφαίρεση χρησιμοποιούν την ακολουθία των φυσικών αριθμών (ή γεωμετρικά, την αριθμογραμμή), για αυτόν το λόγο ονομάστηκαν ως στρατηγικές αρίθμησης. Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα, όπως αυτός παρουσιάζεται στο βιβλίο του Λεμονίδη (2013, σελ. 86), και αναφέρει της στρατηγικές αρίθμησης πρόσθεσης και αφαίρεσης.

	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
	2ο επίπεδο. Στρατηγικές αρίθμησης	
	Πρόσθεση 2+7	
1	Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο	Αριθμούν όλα τα βήματα του πρώτου και του δεύτερου όρου : ”1,2,…,3,4,5,6,7,8,9”.
2	Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο	Αριθμούν όλα τα βήματα και των δύο όρων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο: ”1,2,3,4,5,6,7,…,8,9”.
3	Αρίθμηση από τον πρώτο	Αριθμούν με δεδομένο τον πρώτο αριθμό : ”(2),…,3,4,5,6,7,8,9”.
4	Αρίθμηση από τον μεγαλύτερο	Αριθμούν με δεδομένο τον μεγαλύτερο αριθμό : ”(7),…,8,9 ”
	Αφαίρεση 7-3	
1	Αντίστροφη αρίθμηση από	Ξεκινούν από τον μεγαλύτερο όρο και αριθμούν τόσα βήματα όσα είναι ο μικρότερος όρος. ”(7),6,5,4”
2	Αντίστροφη αρίθμηση μέχρι	Ξεκινούν από τον μεγαλύτερο όρο και αριθμούν αντίστροφα μέχρι να φτάσουν τον μικρότερο. Μετρούν τον αριθμό των βημάτων για να βρουν την

		απάντηση. ”(7),6,5,4,3”
3	Πρόσθεση	Ξεκινούν από τον μικρότερο όρο και αριθμούν προς τα επάνω μέχρι να φτάσουν τον μεγαλύτερο. Μετρούν τον αριθμό των βημάτων για να βρουν την απάντηση. ”(3),4,5,6,7”

3ο επίπεδο. Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές

Τα παιδιά σε αυτό το επίπεδο χρησιμοποιούν την μνήμη τους για να ανακαλέσουν γνωστά γεγονότα και για να τα χρησιμοποιήσουν στον υπολογισμό άλλων, αφού προηγουμένως τα έχουν επεξεργαστεί νοερά. Στο επίπεδο αυτό έχουμε δύο υποκατηγορίες στρατηγικών αυτό της άμεσης ανάκλησης, δηλαδή το παιδί γνωρίζει την πράξη και το αποτέλεσμά της και το ανακαλεί άμεσα από την μνήμη του, και αυτό των κατασκευαστικών στρατηγικών ή της παραγωγής των πράξεων, όπου ο μαθητής ανακαλεί από την μνήμη του γνωστές αριθμητικές πράξεις και αυτές τις προσαρμόζει για να βρει το αποτέλεσμα. Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα, όπως αυτός παρουσιάζεται στο βιβλίο του Λεμονίδη (2013, σελ. 89), και αναφέρει της στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές.

	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
	3ο επίπεδο. Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές	
	Πρόσθεση	
1	Κοντά στα διπλά	**7+6=13** 7+6=6+6+1 ή 7+7-1. Υπολογίζουν με βάση τα διπλά αθροίσματα.
2	Χρήση του 5	**6+7** 5+1+5+2=10+3. Αναλύουν τους προσθετέους με βάση το 5.
3	Υπέρβαση της δεκάδας ή Πέρασμα από το 10	**9+7** 9+1=10, 10+6=16. Προσθέτουν στον μεγαλύτερο όρο μέχρι να φτάσουν στο 10 και μετά προσθέτουν και τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου
4	Αντιστάθμιση(Compensation)	**9+5** 9+1=10, 10+5=15, 15-1=14.Συμπληρώνουν τον έναν όρο, ώστε να γίνει εύκολα η πρόσθεση, και μετά

		αφαιρούν αυτό το συμπλήρωμα από το αποτέλεσμα.
5	Εξισορόπηση(Leveling)	**6+8** 7+7=14. Προσθέτουν στον έναν όρο και αφαιρούν από τον άλλον τον ίδιο αριθμό, ώστε να καταλήξουν σε ένα γνωστό άθροισμα.
	Αφαίρεση	
1	Χρήση των διπλών	**14-7=7** 7+7=14. Υπολογίζουν με βάση την αντίστροφη πρόσθεση που είναι άθροισμα διπλών (ν+ν)
2	Κοντά στα διπλά	**9-5=4** 10-5=5, 5-1=4. Υπολογίζουν με βάση την αφαίρεση των διπλών(2ν-ν)
3	Υπέρβαση της δεκάδας ή Πέρασμα από το 10	**13-7** 13-3=10, 10-4=6. Αφαιρούν από τον μεγαλύτερο όρο μέχρι να φτάσουν στο 10 και μετά αφαιρούν και τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου.
4	Αφαίρεση ως αντίστροφη της πρόσθεσης	**7-4=3** 4+3=7.Χρησιμοποιούν την αντίστροφη πρόσθεση για να βρουν την διαφορά.

2.3.1 Στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης στους νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς από 20 έως 100

Διεθνώς έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την καταγραφή και την περιγραφή των πιθανών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές-άτομα στους νοερούς υπολογισμούς (Hartnett, 2007). Όπως ήταν αναμενόμενο, αλλά το επιβεβαιώνει και ο Whitacre (2015), η ταξινόμηση των στρατηγικών ποικίλουν και εξαρτώνται από την προσέγγιση του κάθε ερευνητή. Διάφορές έρευνες που έγιναν είτε στο εξωτερικό (Beishuizen et al., 1997; Blote et al., 2000; Reys et al., 1995; Thompson & Smith, 1999) είτε στο εσωτερικό (Καρατζής & Τόλου, 2009; Καρατζής, 2010-2011; Λεμονίδης, 2013, Λεμονίδης & Λυγούρας, 2006) κατάφεραν και κωδικοποίησαν τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών.

Στην εν λόγω εργασία θα ακολουθήσουμε και θα παρουσιάσουμε την ταξινόμηση που παρουσιάζει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 116-123), αφού είναι το απόσταγμα διαφόρων ερευνών σε παγκόσμια κλίμακα, συνοδευόμενα σε κάθε κατηγορία και με αντίστοιχα παραδείγματα.

Ο Beishuizen (1993) μελετώντας τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά στις νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις διαπίστωσε την ύπαρξη δύο κατά κύριο λόγο στρατηγικών, αυτή του διαχωρισμού (η στρατηγική 1010) όπου και οι δύο αριθμοί διαχωρίζονται σε μέρη – συνήθως δεκάδες και μονάδες (π.χ. 26+18: 6+8=14, 20+10=30, 44 ή 52-24: 12-4=8, 40-20=20, 28)- και τη στρατηγική της συσσώρευσης (ή στρατηγική N10) όπου ο μαθητής ξεκινά με τον έναν αριθμό και προοδευτικά χειρίζεται τους υπόλοιπους αριθμούς (π.χ. 26+18: 26+8=34, 34+10=44 ή 52-24: 52-4=48, 48-20=28). Σε άρθρο της η Yackel (2001) αναφέρει ότι η στρατηγική του διαχωρισμού συγκαταλέγεται στις λύσεις που βασίζονται στις συλλογές (‘collection-based’ solutions), ενώ η στρατηγική της συσσώρευσης βασίζεται στην αρίθμηση ή τη διαδοχή (‘counting or sequence based’ solutions).

Σε έρευνα τους οι (Cooper, Heirdsfield & Irons, 1996) ανέδειξαν εκτός των άλλων και τη στρατηγική της αντιστάθμισης (π.χ. 28+35: 30+33=63), τη στρατηγική ‘πάτημα στη δεκάδα’ (26+18: 26+4=30, 30+14=44) αλλά και την νοερή απεικόνιση του αλγόριθμου με μολύβι και χαρτί. Η τελευταία στρατηγική εμφανίζεται μετά την διδασκαλία των τυπικών γραπτών υπολογισμών και είναι αυτή με την μικρότερη ευελιξία (Heirdsfield & Cooper, 2002).

Αρκετές έρευνες έχουν διεξαχθεί σε διεθνές επίπεδο στο πεδίο του νοερού υπολογισμού με κύριο άξονα τους την καταγραφή και την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές Δημοτικού σε νοερούς υπολογισμούς. Οι περισσότερες επικεντρώνονται στις στρατηγικές που εφαρμόζονται στην πρόσθεση και στην αφαίρεση φυσικών αριθμών (Thompson, 1999, 2000; McIntosh, Reys & Reys, 1997; Macintyre & Forrester, 2003; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquiere & Verschaffel, 2010; 2014; Rezat, 2011).

Η στρατηγική του διαχωρισμού καλείται και 1010 όπως είναι πιο γνωστή στην διεθνή βιβλιογραφία (Thompson & Smith, 1999) ή αλλιώς μέθοδος χωρισμού (partitioning method) (Λεμονίδης, 2013, σελ. 118) ενώ στην Ολλανδία χρησιμοποιείται η δημοφιλής ονομασία μέθοδος διαχωρισμού (split method) (Beishuizen, 1993). Σε αυτήν τη στρατηγική, χωρίζουμε τους όρους της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης σε δεκάδες και μονάδες και τις προσθέτουμε ή τις αφαιρούμε αντίστοιχα μεταξύ τους. Στην κατηγορία αυτής της στρατηγικής εντάσσονται δύο υποκατηγορίες:

- Στρατηγική Διαχωρισμού από Αριστερά προς τα Δεξιά σε Δεκάδες-Μονάδες (1010): Σε αυτήν την στρατηγική, χωρίζουμε τους όρους της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης σε δεκάδες και μονάδες και τις προσθέτουμε ή τις αφαιρούμε αντίστοιχα μεταξύ τους, πρώτα οι Δεκάδες και μετά οι Μονάδες.

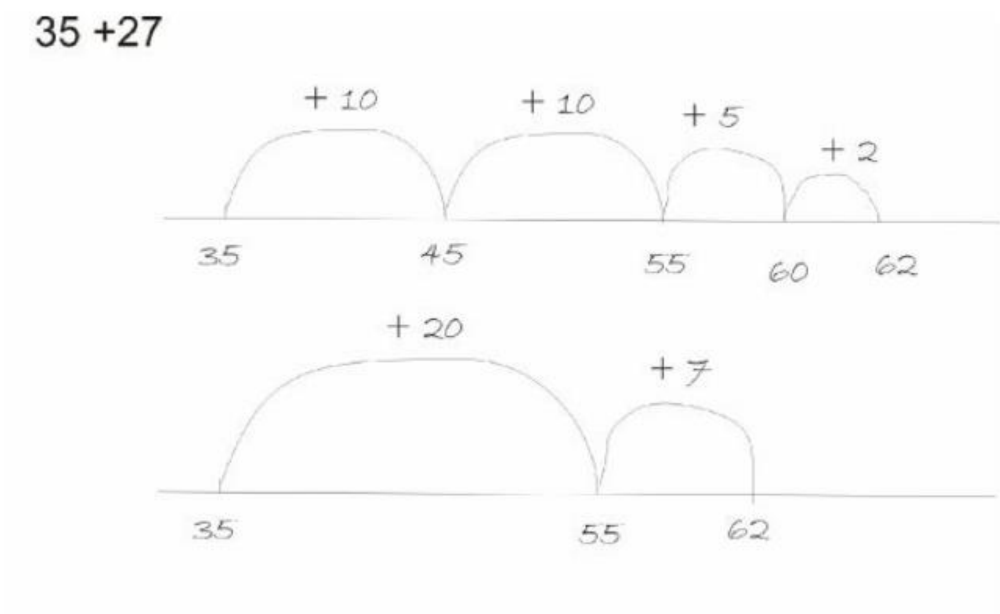
    Παραδείγματα: 34+25: 30+20=50, 4+5=9, 50+9=59
    48-26: 40-20=20, 8-6=2, 20+2=22

- Στρατηγική Διαχωρισμού από Δεξιά προς τα Αριστερά σε Μονάδες–Δεκάδες (u-1010): Σε αυτήν την στρατηγική, χωρίζουμε τους όρους της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης σε δεκάδες και μονάδες και τις προσθέτουμε ή τις αφαιρούμε αντίστοιχα μεταξύ τους, πρώτα τις Μονάδες και μετά τις Δεκάδες.

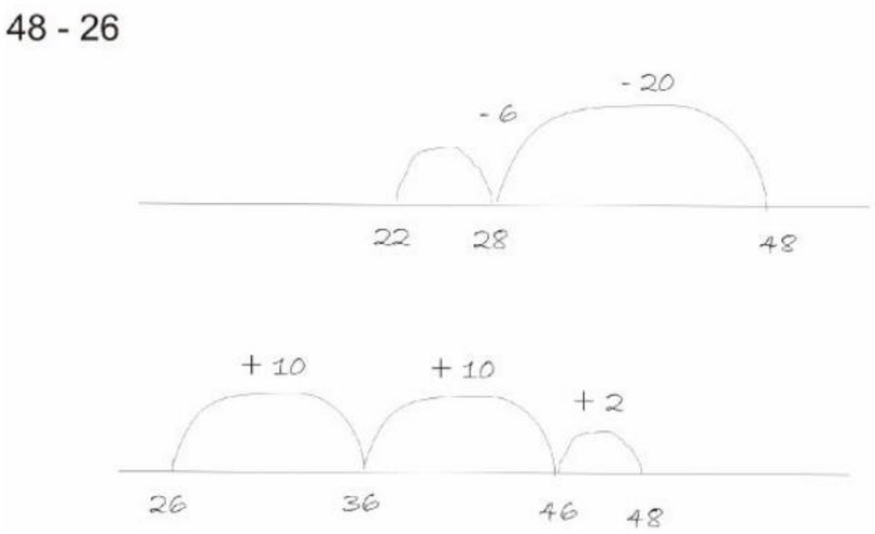
  Παραδείγματα: 34+25: 4+5=9, 30+20=50, 50+9=59

  48-26: 8-6=2, 40-20=20, 20+2=22

Η στρατηγική της Συσσώρευσης καλείται ως διαδοχική μέθοδος (Λεμονίδης, 2013, σελ. 119) ή εναλλακτικά και μέθοδος άλματος (jump method, N10) που είναι και το πιο δημοφιλές όνομα της. Σε αυτήν την στρατηγική, κρατάμε σταθερό τον έναν όρο και προσθέτουμε ή αφαιρούμε σε αυτόν διαδοχικά τις δεκάδες και τις μονάδες του άλλου όρου με δύο διακριτά βήματα. Η χρήση αυτής της ονομασίας παραπέμπει πρακτικά ή νοερά σε μια άδεια αριθμογραμμή αφού ξεκινάει από τον έναν αριθμό και κατευθύνεται προς την απάντηση με άλματα κατά μήκος της γραμμής, όπου κατάλληλα μέρη του δεύτερου αριθμού προσθέτονται ή αφαιρούνται (Thompson & Smith, 1999). Επιπλέον οι Klein et al. (1998) θεωρούν ότι η άδεια αριθμογραμμή αποτελεί ένα δυναμικό εργαλείο στην διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αριθμών μέχρι το 100.



Εικόνα 1-Υπολογισμός πρόσθεσης με άλματα πάνω σε κενή αριθμογραμμή



Εικόνα 2-Υπολογισμός αφαίρεσης με άλματα πάνω σε κενή αριθμογραμμή

Στην κατηγορία αυτής της στρατηγικής εντάσσονται δύο υποκατηγορίες:

- Στρατηγική Συσσώρευσης με Δεκάδες-Μονάδες (N10): Στον πρώτο όρο της πράξης προσθέτουμε ή αφαιρούμε πρώτα τις δεκάδες του δεύτερου όρου και μετά τις μονάδες του.

  Παραδείγματα: 34+25:34+20=54, 54+5=59
  48-26: 48-20=28, 28-6=22

- Στρατηγική Συσσώρευσης με Μονάδες-Δεκάδες (u-N10): Στον πρώτο όρο της πράξης προσθέτουμε ή αφαιρούμε πρώτα τις μονάδες του δεύτερου όρου και μετά τις δεκάδες του.

  Παραδείγματα: 34+25: 34+5=39, 39+20=59
  48-26: 48-6=42, 42-20=22

Έχοντας κατά νου και τις δύο παραπάνω στρατηγικές παρατηρούμε ότι κοινό τους στοιχείο είναι ότι ασχολούνται πρώτα με τις δεκάδες και μετά με τις αντίστοιχες μονάδες των όρων (Beishuizen, 1993), ενώ στις διαφορές θα λέγαμε ότι στην περίπτωση της Συσσώρευσης ένας από τους δύο όρους παραμένει ως έχει (σταθερός) ενώ ο άλλος διασπάται και μέρη του προσθέτονται ή αφαιρούνται στον σταθερό όρο (Thompson & Smith, 1999) μία δεύτερη διαφορά είναι ότι η στρατηγική 1010 σε προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών παραπέμπει στην εννοιολογική γνώση που αποκτήθηκε κατά την διδασκαλία της δομής των αριθμών (Beishuizen et al., 1997).

Μία ακόμη στρατηγική που επισημαίνει οι Beishuizen et al. (1997) είναι η μικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης ή εναλλακτικά μέθοδος διαχωρισμού-άλματος (split-jump method) ή αλλιώς 10S. Η εν λόγο στρατηγική, αρχικά αναλύει τους αριθμούς σε δεκάδες και μονάδες, σε δεύτερο στάδιο προσθέτει ή αφαιρεί τις δεκάδες και προσθέτει ή αφαιρεί στο εξαγόμενο διαδοχικά τις μονάδες των δύο όρων.

Παραδείγματα: 34+25: 30+20=50, 50+4=54,54+5=59
48-26: 40-20=20, 20-6=14, 14+8=22
74-69:70-60=10, 10+4=14,14-9=5

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η μικτή στρατηγική ξεκινάει με τη μέθοδο του διαχωρισμού και ολοκληρώνει με τη στρατηγική της συσσώρευσης, είναι μια στρατηγική τριών βημάτων όπως και η 1010 σε αντίθεση με τη Ν10 που είναι δύο βημάτων (Thompson & Smith, 1999).

Μία ακόμη στρατηγική που προέκυψε σε μια έρευνα των Beishuizen et al. (1997) είναι γνωστή ως πέρασμα από το10 ή Α10. Σε αυτήν την στρατηγική ο πρώτος όρος της πράξης παραμένει ως έχει ενώ ο δεύτερος όρος της πράξης διασπάται σε δύο μέρη με απώτερο σκοπό-στόχο η πρόσθεση ή η αφαίρεση του μέρους του δεύτερου όρου με τον πρώτο όρο, να τον οδηγήσει στην πλησιέστερη δεκάδα.

Παραδείγματα: 34+25: 34+6=40, 40+19=59
48-26: 48-8=40, 40-18=22

Ο Λεμονίδης (2013, σελ. 120) αναφέρει ότι η στρατηγική πέρασμα από το 10 μπορεί να θεωρηθεί υποκατηγορία της στρατηγικής Ν10 ή ακόμα μπορεί να θεωρηθεί και ανεξάρτητη στρατηγική. Η άδεια αριθμογραμμή βρίσκει και εδώ εφαρμογή, αφού είναι υποκατηγορία της Ν10 και τέλος η στρατηγική Α10 αντιμετωπίζει τους αριθμούς ολόκληρους και όχι ως άθροισμα δεκάδων και μονάδων, βοηθώντας έτσι τον μαθητή να είναι ευέλικτος (αίσθηση του αριθμού).

Όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 121), ολιστικές στρατηγικές είναι αυτές που μεταχειρίζονται τους αριθμούς με έναν ολιστικό τρόπο, άλλη ονομασία των παραπάνω στρατηγικών είναι «κοντά στα πολλαπλάσια του δέκα» δηλαδή είναι προτιμότερη να χρησιμοποιείται αυτή η στρατηγική από αριθμούς που έχουν ως ψηφίο μονάδων το 7 ή 8 ή 9. Οι ολιστικές στρατηγικές χωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες :

- Στρατηγική Αντιστάθμισης ή N10C: Σε αυτήν την στρατηγική ο ένας όρος της πράξης στρογγυλοποιείται στην πλησιέστερη δεκάδα και το εξαγόμενο επιδιορθώνεται ή αντισταθμίζεται από την στρογγυλοποίηση (Hartnett, 2007).

  Παραδείγματα:34+25:35+25=60, 60-1=59
  48-26:50-26=24,24-2=22

- Στρατηγική Εξισορρόπησης: Η στρατηγική της εξισορρόπησης είναι παραπλήσια με αυτή της N10C, η διαφοροποίηση τους έγκειται στο ότι κατά την εξισορρόπηση κατασκευάζουμε μια ισοδύναμη ισότητα με την αρχική, μόνο που οι μετασχηματισμοί γίνονται και στους δύο όρους της πράξης ανάγοντας έτσι την πράξη σε μια ευκολότερη ισοδύναμη έκφραση (Threlfall, 2000). Βεβαίως, όπως πολύ εύστοχα αναφέρει, περιγράφοντας την στρατηγική, ο Λεμονίδης (2013, σελ. 122) «ότι προσθαφαιρούμε στον πρώτο όρο της πράξης, το ίδιο προσθαφαιρούμε και στον δεύτερο όρο, έτσι ώστε οι δύο παρεμβάσεις να αλληλοεξουδετερώνονται και να έχουμε τελικό αποτέλεσμα μηδέν ή ισορροπία ».

  Παραδείγματα: 34+25: (34+6)+(25-6)=40+19=59
  48-26: (48+2)-(26+2)=50-28=22

Ολοκληρώνοντας την παράθεση των στρατηγικών, θα ήταν παράληψη να μην αναφέρουμε τις παρακάτω δύο στρατηγικές, της Αρίθμησης και της Νοητικής αναπαράστασης του τυπικού-γραπτού αλγόριθμου.

- Στρατηγική της Αρίθμησης: οι μαθητές ξεκινούν από τον πρώτο όρο και ανεβαίνουν (με πρόσθεση) ή κατεβαίνουν (με αφαίρεση) τόσα βήματα, χρησιμοποιώντας την ακολουθία των αριθμών, όσα δείχνει ο δεύτερος όρος της πράξης. Αν η ακολουθία των αριθμών έχει βήμα ένα-ένα τότε η στρατηγική λέγεται αρίθμηση με μονάδες, αν η ακολουθία των αριθμών έχει βήμα δέκα-δέκα τότε η στρατηγική λέγεται αρίθμηση με δεκάδες (Λεμονίδης,2013, σελ. 122).

  Παραδείγματα:34+25: 34+1+1+1+….+1=59 (βήμα 1)
  34+25: 34+10=44,44+10=54,54+5=59 (βήμα 10)
  48-26: 48-1-1-1-…-1=22 (βήμα 1)
  48-26: 48-10=38,38-10=28,28-6=22 (βήμα 10)

- Νοητική αναπαράσταση του τυπικού-γραπτού αλγόριθμου: οι μαθητές υπολογίζουν το αποτέλεσμα εκτελώντας νοερά τον αλγόριθμο της κάθετης πρόσθεσης ή αφαίρεσης, εκτελώντας την πράξη από δεξιά προς τα αριστερά.

  Παραδείγματα: 34+25: 4+5=9,3+2=5, επομένως άθροισμα 59
  48-26: 6 από 8 μας κάνει 2 και 2 από 4 μας κάνεις 2, άρα η διαφορά είναι 22.

Και τέλος είναι άξιο αναφοράς η στρατηγική που χρησιμοποιείται μόνο για την αφαίρεση, ενώ όλες οι προηγούμενες εφαρμόζονται και στην πρόσθεση και στην αφαίρεση. Σύμφωνα, με τους Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere & Verschaffel (2009) και Peters et al. (2014) η στρατηγική αυτή καλείται είτε αφαίρεση με πρόσθεση (έμμεση πρόσθεση) είτε συμπλήρωμα του αφαιρετέου είτε αφαίρεση ως αντίστροφη της πρόσθεσης, κατά την οποία οι μαθητές αυξάνουν τις μονάδες του αφαιρετέου μέχρι να φτάσει στον μειωτέο. Ο αριθμός που αντιπροσωπεύει την αύξηση θα είναι η σωστή απάντηση.

Παραδείγματα: 72-69: 69+**3**=72 επομένως η διαφορά είναι 3.
48-26:26+22=48 επομένως η διαφορά είναι 22.

3. Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας-Άλλες σχετικές έρευνες με τους νοερούς υπολογισμούς στα πλαίσια των ακεραίων αριθμών

Στην διεθνή βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα από έρευνες που αφορούν τους νοερούς υπολογισμούς στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση με φυσικούς και ρητούς αριθμούς, αλλά και άλλες που αφορούν φοιτητές, δασκάλους και εκπαιδευτικούς. Δεν είναι όμως τόσες πολλές οι έρευνες σε νοερούς υπολογισμούς με ακεραίους στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα στο Γυμνασίου.

Ξεκινώντας από την μελέτη του Rezat (2011), η οποία επικεντρώθηκε στην ανάλυση-προσδιορισμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές αλλά και την προσαρμοστικότητα-ευελιξία των μαθητών στην επιλογή των αντίστοιχων στρατηγικών, καθώς και τους παράγοντες που επηρεάζουν τον νοερό υπολογισμό, με ακεραίους αριθμούς.

Για την εκτέλεση των προσθέσεων και αφαιρέσεων των ακεραίων αριθμών ο Rezat αναφέρει ότι αυτοί θα γίνονται είτε μέσω των κανόνων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακεραίων αριθμών είτε μέσω αλγεβρικών ιδιοτήτων, όπως φαίνονται παρακάτω:

$(-n) + n = 0$

$0-n=-n$

$(-n) + m = m – n$, όταν $m > n$

$(-n) – 0 = -n$

$(-n) + m = -(n – m)$, όταν $n > m$

$0 – (-n) = n$

$(-n) + 0 = -n$

$(-n) – (-m) = (-n) + m$

$(-n) + (-m) = -(n + m)$

$(-n) – m = -(n+m)$

$m – (-n) = n + m$

Όσο αφορά την δομή-σκελετό των κατηγοριών των στρατηγικών, ο Rezat τις διαχώρισε σε δύο κατηγορίες, αυτές της προσέγγισης και αυτές του μετασχηματισμού. Για την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών υπολογισμού των νοερών υπολογισμών ο Rezat χρησιμοποίησε τις στρατηγικές της προσέγγισης, οι οποίες περιλαμβάνουν τις παρακάτω κατηγορίες:

- Της μετατροπής, όπου ο μαθητής μετατρέπει το αρχικό πρόβλημα σε ισοδύναμο πρόβλημα στο σύνολο των φυσικών αριθμών, σύμφωνα με τους κανόνες που διέπουν τους ακεραίους αριθμούς.
- Της αριθμογραμμής, όπου ο μαθητής επιλύει το πρόβλημα με αναφορά σε μια νοερή αριθμογραμμή.
- Του ισοζυγίου τράπεζας, όπου ο μαθητής επιλύει το πρόβλημα σε σχέση με τα νομισματικά πλαίσια της κατάθεσης και της ανάληψης.
- Το μοντέλο κλίμακας θερμοκρασίας, όπου ο μαθητής επιλύει το πρόβλημα με αναφορά σε ένα περιβάλλον θερμοκρασίας.

- Το υψομετρικό μοντέλο, όπου ο μαθητής επιλύει το πρόβλημα με αναφορά σε υψόμετρο.

Για την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών του μετασχηματισμού, ο Rezat χρησιμοποίησε την κατηγοριοποίηση του Heinze et al. (2009), , οι οποίες περιλαμβάνουν τις παρακάτω κατηγορίες:

- Η στρατηγική της βαθμιαίας συσσώρευσης
- Η στρατηγική του διαχωρισμού
- Η στρατηγική της εξισορρόπησης
- Η στρατηγική της απλοποίησης
- Η στρατηγική της έμμεσης πρόσθεσης

Επίσης γίνεται μια σημαντική αναφορά στην μηδενική μετάβαση (-n+n=0) ως μια σημαντική καινοτομία στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και έτσι στο εργαλείο συμπεριλαμβάνονται δύο (2) έργα (P7: -11+28, P14: 0,8-2,9) που αναφέρονται-συσχετίζονται με την παραπάνω επισήμανση.

Κατά την ανάλυση των στρατηγικών, παρατηρήθηκε ότι η στρατηγική που εφαρμόστηκε από τους μαθητές με μεγάλη συχνότητα και σε προβλήματα που ενέπλεκαν αρνητικούς αριθμούς, ήταν η μετατροπή τους σε ισοδύναμα προβλήματα με φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας όμως τους γνωστούς κανόνες από την πρόσθεση και την αφαίρεση των ακεραίων αριθμών (π.χ. -11+28 = 28-11). Τα προβλήματα όμως που περιείχαν την μηδενική μετάβαση (P7, P14) οι μαθητές το αντιμετώπιζαν με την χρήση της νοερής αριθμογραμμής ή του μοντέλου ισοζυγίου τράπεζας (κατάθεση-ανάληψη). Όσον αφορά την προσαρμοστικότητα των μαθητών, η ανάλυση των χρησιμοποιούμενων στρατηγικών μετασχηματισμού των αριθμών έδειξε ότι οι μαθητές εφαρμόζουν κατά κύριο λόγο την στρατηγική stepwise (βαθμιαία στρατηγική συσσώρευσης) και την split (στρατηγική διαχωρισμού). Όπως προκύπτει από προηγούμενες μελέτες και επιβεβαιώνεται από αυτή του Rezat είναι ότι για τους νοερούς υπολογισμούς οι μαθητές εφαρμόζουν μία(1) ή δύο(2) στρατηγικές σε όλα σχεδόν τα προβλήματα χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων.

Έπειτα η έρευνα των Reys R, Reys B., Nohda N και Emori H. (1995), η οποία πραγματοποιήθηκε σε μαθητές δημοτικού αλλά και σε 206 μαθητές Β΄ Γυμνασίου (Grade 8), αφορούσε την αξιολόγηση της στάσης, τις υπολογιστικές προτιμήσεις και τις νοερές υπολογιστικές επιδόσεις των παραπάνω Ιαπώνων μαθητών. Ένα δείγμα των μαθητών της Δ΄ Δημοτικού και της Β΄ Γυμνασίου υποβλήθηκε σε συνέντευξη για τον προσδιορισμό των στρατηγικών που ακολούθησαν οι μαθητές στους νοερούς υπολογισμούς. Στα συμπεράσματα της παραπάνω έρευνας έχουμε ότι οι επιδόσεις των μαθητών στους νοερούς υπολογισμούς ήταν ποικίλες και μάλιστα σε σχέση με όλους τους τύπους των αριθμών(κλάσματα, δεκαδικοί κ.α.). Παρατηρήθηκε ότι οι επιδόσεις των αγοριών ήταν υψηλότερες από αυτές των κοριτσιών σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης που ασχολήθηκε η έρευνα. Επίσης οι επιδόσεις των μαθητών ήταν ανάλογες της βαθμίδας εκπαίδευσής τους και η μεγαλύτερη επίδοση των μαθητών συμπίπτει με το σημείο εκείνο όπου δίνει έμφαση το πρόγραμμα σπουδών. Σημαντικό ρόλο στην απόδοση των μαθητών έπαιξε ο τρόπος παρουσίασης των θεμάτων (οπτικά ή προφορικά), καθώς τα οπτικά στοιχεία ενθαρρύνουν τις υψηλότερες επιδόσεις. Το φάσμα όμως των στρατηγικών (αρχική και εναλλακτική) για τους νοερούς υπολογισμούς ήταν μικρό, καθώς ζητήθηκε από τους μαθητές στην συνέντευξή τους να περιγράψουν την στρατηγική υπολογισμού που χρησιμοποίησαν και αποκαλύφθηκε ότι η νοερή εκδοχή του γραπτού (χαρτί - μολύβι) αλγορίθμου κατείχε δεσπόζουσα θέση. Κατά την συνέντευξη, οι περισσότεροι μαθητές δεν μπόρεσαν να διατυπώσουν εναλλακτική νοερή στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος επιπλέον φάνηκαν να ξαφνιάζονται όταν τους ζητήθηκε εναλλακτική προσέγγιση. Οι καλύτεροι όμως μαθητές (καθορίστηκε από ένα τεστ νοερών υπολογισμών) ήταν πιο πιθανό να χρησιμοποιήσουν μη–καθιερωμένες στρατηγικές από ότι της μεσαίας κλίμακας μαθητών.

Και τέλος, διάφορες έρευνες σε μαθητές αποκαλύπτουν ότι καθώς μεγαλώνουν οι μαθητές ηλικιακά και αποκτούν εμπειρίες (ωριμάζουν), κατακτούν όλο και υψηλότερα επίπεδα εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, τα οποία αυξάνουν την επίδοση τους στους υπολογισμούς και ταυτόχρονα μειώνουν την συχνότητα των λαθών (Van Lehn, 1982). Ανάλογα αποτελέσματα ήταν και αυτά των Raghubar et al. (2009), όπου διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές της Δ΄ Δημοτικού έκαναν λιγότερα λάθη σε σχέση με τους μαθητές της Γ΄ Δημοτικού, ενώ παράλληλα παρουσίασαν μια ανώτερη κατάκτηση, εμπέδωση και εφαρμογή της διαδικαστικής γνώσης σε σχέση με τους μαθητές της Γ΄ Δημοτικού.

3.1 Σχετικές έρευνες και Στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση

Το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών που αναφέρονται στους νοερούς υπολογισμούς και στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται εστιάζουν στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Beinshuizem, 1993; Lucangeli et al, 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004; Yang &Huang, 2014; Erdem, 2016; Csikos, 2016). Ενώ οι έρευνες για τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση είναι λιγότερες τις οποίες και αναφέρουμε παρακάτω.

Ξεκινώντας με την κατηγοριοποίηση του Λεμονίδη (2013, σελ. 257), παρουσιάζει πέντε κατηγορίες στρατηγικών στους πολυψήφιους πολλαπλασιασμούς που χρησιμοποιούν οι μαθητές :

1. **Άμεση μοντελοποίηση**: Αρχικά οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα και έπειτα καταμετρούν τον συνολικό αριθμό των αντικειμένων, τον αριθμό των ομάδων ή τον αριθμό των αντικειμένων κάθε ομάδας.
2. **Στρατηγικές αρίθμησης**: Στην κατηγορία αυτή των στρατηγικών συγκαταλέγονται κάθε μορφή στρατηγικής αρίθμησης, αρίθμηση με υπερπήδηση προς τα εμπρός ή προς τα πίσω, επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και αφαίρεση, στρατηγικές διπλασιασμού και υποδιπλασιασμού.

   Παράδειγμα : 5 x 15: 15, 30, 45, 60, 75 ή

   5x15: 2x15=30, 30+30=60, 60+15=75

3. **Άμεση ανάκληση** : Οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα γνωστό αριθμητικό γεγονός πολλαπλασιασμού ή με την βοήθεια μιας ελαφριάς τροποποίησης παράγεται το αριθμητικό γεγονός.

   Παράδειγμα : 8x11=88

4. **Στρατηγικές διάσπασης του αριθμού**: Οι μαθητές διασπούν τον έναν παράγοντα ή και τους δύο παράγοντες του πολλαπλασιασμού σε μικρότερους αριθμούς, έτσι ώστε να γίνει ευκολότερα η πράξη. Η εν λόγο κατηγορία περιλαμβάνει τις ακόλουθές τρεις υποκατηγορίες:

   α) **Διάσπαση ενός αριθμού (παράγοντα) με βάση την θεσιακή του αξία**. Ο μαθητής, αφού διασπάσει τον έναν παράγοντα του πολλαπλασιασμού, έπειτα εκτελεί τις πράξεις

   ή από δεξιά προς τα αριστερά (Διάσπαση ΔΑ)

   Παράδειγμα :7x15=(7x5)+(7x10)=35+70=105

   ή από αριστερά προς τα δεξιά (Διάσπαση ΑΔ)

   Παράδειγμα :7x15=(7x10)+(7x5)=70 +35=105

   β) **Διάσπαση και των δύο παραγόντων με βάση την θεσιακή τους αξία.** Διασπάται και ο πολλαπλασιαστής και ο πολλαπλασιαστέος σε αριθμούς με βάση την θεσιακή τους αξία στο σύστημα αρίθμησης.

   Παράδειγμα :

   14x26= (10+4)x(20+6)=(10x20)+(10x6)+(4x20)+(4x6)=200+60+80+24=364

   γ) **Διάσπαση σε αριθμούς μη δεκάδων.** Διασπάται ή ο πολλαπλασιαστής ή ο πολλαπλασιαστέος σε αριθμούς όχι όμως με βάση την θεσιακή τους αξία στο σύστημα αρίθμησης.

   Παράδειγμα: 15x136=(5x3)x136=5x(3x136)=5x408=2040

   7x15=(5+1+1)x15=75+15+15=105

5. **Ολιστικές στρατηγικές ή αντιστάθμισης**. Οι μαθητές προσαρμόζουν τον έναν ή και τους δύο παράγοντες του πολλαπλασιασμού έτσι ώστε αυτός να γίνει ευκολότερος.

   Παράδειγμα: 8x99=8x100-8x1=792

   50x46=100x23=2300

Ο Jae-Meen Baek (1998, σελ. 151-160), σε έρευνά του σε μαθητές Γ΄, Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού εξέτασε τους αλγόριθμους του πολλαπλασιασμού που θα επινοούσαν οι μαθητές μιας και οι παραπάνω μαθητές δεν είχαν διδαχθεί τους κανόνες ή τους τυπικούς αλγόριθμούς του πολλαπλασιασμού. Η ταξινόμηση των νοερών στρατηγικών του πολλαπλασιασμού που αναφέρει ο Baek είναι:

1. **Άμεση μοντελοποίηση:** Οι μαθητές μοντελοποιούν τους αριθμούς κάνοντας χρήση διάφορα υλικά και καταμετρούν τα υλικά είτε ανά μονάδες είτε ανά δεκάδες. Έτσι λοιπόν υπάρχουν δύο είδη άμεσης μοντελοποίησης αυτή της μοντελοποίησης με μονάδες και αυτή της μοντελοποίησης με δεκάδες.
2. **Ολόκληρου αριθμού:** Οι μαθητές προσθέτουν τον πολλαπλασιαστέο χωρίς όμως να τροποποιηθούν οι παράγοντες του γινομένου. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να προσθέσουν τον πολλαπλασιαστέο είναι ποικίλες όπως η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή ο διπλασιασμός.
3. **Διασπασμένου αριθμού:** Οι μαθητές με την χρήση αυτής της στρατηγικής διασπούν τουλάχιστον έναν παράγοντα του γινομένου για να γίνει ευκολότερα η

πράξη. Η διάσπαση των παραγόντων γίνεται είτε με βάση τη θεσιακή τους αξία στο σύστημα αρίθμησης (μονάδες, δεκάδες) είτε χωρίς αυτήν. Η στρατηγική της διάσπασης των παραγόντων του γινομένου ανάλογα με την θεσιακή τους αξία χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες αυτή που διασπάται μόνο ένας παράγοντας και αυτή που διασπούνται και οι δύο παράγοντες του γινομένου. Η διάσπαση τουλάχιστον ενός από τους παράγοντες του γινομένου γίνεται για να μπορέσει ο μαθητής να βρει ευκολότερα το εξαγόμενο.

4. **Στρατηγική αντιστάθμισης:** οι μαθητές προσαρμόζουν τουλάχιστον έναν από τους παράγοντες του γινομένου είτε διπλασιάζοντας είτε υποδιπλασιάζοντας τους παράγοντες του γινομένου για να υπολογιστεί ευκολότερα. Η στρατηγική της αντιστάθμισης χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα που περιέχουν το 5.

Συγκρίνοντας την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών του πολλαπλασιασμού που αναφέρουν οι δύο παραπάνω ερευνητές μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η στρατηγική της άμεσης μοντελοποίησης είναι κοινή. Η στρατηγική ολόκληρου του αριθμού που αναφέρει ο Beak, ο Λεμονίδης την αναφέρει ως στρατηγική αρίθμησης. Η στρατηγική του διασπασμένου αριθμού του Beak, ο Λεμονίδης την αποδίδει ως διάσπαση σε αριθμού μη δεκάδων ενώ η διάσπαση των αριθμών σε δεκάδες είναι κοινή στρατηγική των δύο ερευνητών. Και τέλος οι στρατηγικές της αντιστάθμισης είναι κοινή και για του δύο ερευνητές μόνο που επιπλέον ο Λεμονίδης τις χαρακτηρίζει και ολιστικές στρατηγικές.

Οι Heirdfield et al. (1999) σε έρευνα τους σε 95 μαθητές της Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού της Αυστραλίας, για τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν στους νοερούς πολλαπλασιασμούς εντόπισαν πέντε (5) κατηγορίες στρατηγικών. Η πρώτη κατηγορία ονομάζεται «Counting (CO)» και αφορά όλους τους τύπους στρατηγικών μέτρησης (τη μέτρηση προς τα εμπρός και προς τα πίσω, την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και αφαίρεση, τη χρήση του μισού και του διπλασίου) π.χ. 5x8: 5, 10, 15, 20…, 40. Η δεύτερη κατηγορία είναι η «Basic Fact (BF)» όπου εδώ παρατηρούμε την χρήση ενός γνωστού γεγονότος πολλαπλασιασμού ή ενός εύκολα παραγόμενου γεγονότος π.χ. 5x8: 10x8=80, οπότε 5x8=40. Τρίτη κατηγορία είναι η «RL separated (RLS)», εδώ οι αριθμοί χωρίζονται σύμφωνα με την θεσιακή αξία του κάθε ψηφίου και η εκτέλεση των πράξεων γίνεται από δεξιά προς τα αριστερά π.χ. 5x19: 5x9=45=40+5, 5x10=50, 50+40=90,90+5=95. Τέταρτη κατηγορία είναι η «LR separated (LRS)», οι μαθητές χωρίζουν τον αριθμό σύμφωνα με την θεσιακή αξία του κάθε ψηφίου, όμως η εκτέλεση των πράξεων γίνεται από αριστερά προς τα δεξιά π.χ. 5x19: 5x10=50, 5x9=45, 50+45=95. Και τελευταία κατηγορία στρατηγικών είναι η επονομαζόμενη «Wholistic (WH)», όπου οι μαθητές χειρίζονται τους αριθμούς ως σύνολα π.χ. 5x19: 5x20-5 = 100-5=95. Μελετώντας τις παραπάνω στρατηγικές οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι ολιστικές στρατηγικές είναι λιγότερο περίπλοκές από τις στρατηγικές RLS ή LRS διότι ο μαθητής δεν χρειάζεται να αναλύει τον κάθε παράγοντα σε ψηφία ανάλογα με την θεσιακή του θέση και να τα καταχωρεί στην μνήμη του.

Μια ακόμη έρευνα πάνω στις νοερές στρατηγικές του πολλαπλασιασμού έγινε από τους Lucangeli et al. (2003) σε ένα δείγμα 200 μαθητών της Γ΄, Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού. Τα αποτελέσματα της έρευνας συνοψίζονται στις παρακάτω κατηγορίες νοερών υπολογισμών: α) Different operation (DO), όπου οι μαθητές μετατρέπουν τον πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση π.χ. 31x3=31+31+31, β) Multiplicative arithmetic fact (AYTO), οι μαθητές επιλύουν αυτόματα τον πολλαπλασιασμό αφού γνωρίζουν το αποτέλεσμα της μέσω της μνήμης π.χ. 18x2=36, γ) Mental algorithm (MA), οι μαθητές εκτελούν νοερά τον γραπτό υπολογισμό από δεξιά προς τα αριστερά.

Συγκρίνοντας την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών των Lucangeli et al. (2003) και των Heirdfield et al. (1999) παρατηρούμε ότι η στρατηγική Different operation (DO) και Counting (CO) είναι εφάμιλλες, όπως και κοινή παραδοχή και των δύο ερευνών είναι η χρήση των βασικών γεγονότων και της άμεσης ανάκλησης από την μνήμη. Τέλος κοινή ρίζα και των δύο στρατηγικών Mental algorithm (MA) και RL separated (RLS) είναι ο γραπτός-τυπικός αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού.

Άλλη μία έρευνα, αυτή του Erdem (2016) σε 118 μαθητές Ε΄ Δημοτικού παραθέτονται τέσσερις στρατηγικές νοερών υπολογισμών στους πολλαπλασιασμούς. Ξεκινώντας με αυτή που ονομάζει «N10», ο μαθητής διασπά έναν παράγοντα του πολλαπλασιασμού σε μονάδες και δεκάδες και έπειτα εκτελεί τις πράξεις, π.χ. 46x7: 40x7=280, 6x7=42, 280+42=322. Δεύτερη στρατηγική είναι η «N10C», όπου ο ένας παράγοντας του γινομένου προσαρμόζεται στον αμέσως μεγαλύτερο αριθμό, π.χ. 46x7: 50x7=350, 4x7=28, 350-28=322. Τρίτη στρατηγική είναι η «10C», όπου και οι δύο παράγοντες μετασχηματίζονται σε κατάλληλους αριθμούς για να γίνουν ευκολότερα οι πράξεις αφού βέβαια γίνουν οι κατάλληλες προσαρμογές π.χ. 46x7: 40x10=400, 40x3=120, 400-120=280, 6x7=42, 280+42=322. Και τέλος η στρατηγική «Mental image of the pen and paper algorithm», όπου γίνεται νοερή χρήση του τυπικού-γραπτού αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού.

Η Chusnul (2014) ερευνώντας τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών στους πολλαπλασιασμούς εντόπισε και αποτύπωσε τρεις στρατηγικές. Την πρώτη στρατηγική την ονομάζει «Mental image of paper and pen» και προφανώς είναι η νοερή αποτύπωση του τυπικού γραπτού αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού. Δεύτερη στρατηγική είναι η λεγόμενη «double or half», όπου ο μαθητής διπλασιάζει τον έναν παράγοντα και υποδιπλασιάζει τον άλλον π.χ. 16x35: 8x70=560. Η τρίτη και τελευταία στρατηγική που εντοπίζεται στην έρευνα είναι η «multiple compatible factors», εδώ οι μαθητές αναλύουν τουλάχιστον έναν παράγοντα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έτσι ώστε ο υπολογισμός του γινομένου να γίνει ευκολότερος, π.χ. 8x50: 8=2x2x2, 2x50=100, 2x2=4, 4x100=400.

Η έρευνα των Hope & Sherrill (1987) είχε ως αντικείμενο τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν μαθητές της Β΄ και Γ΄ Λυκείου σε δύσκολους πολλαπλασιασμούς. Η έρευνα τους ανάδειξε τέσσερις στρατηγικές υπολογισμού νοερών πολλαπλασιασμών. Η πρώτη κατηγορία είναι η νοερή απεικόνιση του γραπτού αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού. Η δεύτερη στρατηγική κάνει χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Ο Van de Walle (2007) επισήμανε ότι η επιμεριστική ιδιότητα είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για ευέλικτους υπολογισμούς. Η τρίτη στρατηγική περιλαμβάνει την παραγοντοποίηση τουλάχιστον ενός από τους παράγοντες του γινομένου. Και η τέταρτη στρατηγική είναι αυτή της άμεσης ανάκλησης ενός αριθμητικού γεγονότος από την μνήμη.

Και τέλος οι Ter Heege (1985) και ο French (2005) κατηγοριοποίησαν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τον υπολογισμό γινομένων με την χρήση ήδη γνωστών γεγονότων. Οι στρατηγικές που αναφέρονται είναι : α) η αντιμεταθετική ιδιότητα, β) η επιμεριστική ιδιότητα, γ) η αντιστροφή μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, δ) ο διπλασιασμός και ο υποδιπλασιασμός, ε) ο πολλαπλασιασμός του 10, στ) ο πολλαπλασιασμός του 5, ζ) αύξηση ή μείωση κατά μία φορά.

Η κατηγοριοποίηση των Ter Heege (1985) και French (2005) σε σύγκριση με αυτή των Λεμονίδη (2013) και Beak (1998) έχουν αρκετά κοινά στοιχεία, όπως η επιμεριστική ιδιότητα η οποία βρίσκει εφαρμογή στην στρατηγική διάσπασης σε αριθμούς μη δεκάδων. Οι στρατηγικές του διπλασιασμού, υποδιπλασιασμού και της αύξησης ή μείωσης κατά μία φορά συμπίπτουν με τις στρατηγικές αρίθμησης και ολόκληρου του αριθμού. Ενώ οι ολιστικές στρατηγικές σχετίζονται με τις στρατηγικές του πολλαπλασιασμού με το 10 ή το 5.

Σε γενικές γραμμές θα μπορούσαμε να πούμε ότι η πληθώρα των στρατηγικών έχει ως κοινό τόπο την προσαρμογή των παραγόντων σε ευκολότερα υπολογίσιμα γινόμενα καθώς και η εφαρμογή του τυπικού αλγόριθμου του πολλαπλασιασμού νοερά. Το πνεύμα και η φιλοσοφία των κατηγοριοποιήσεων των νοερών υπολογισμών στον πολλαπλασιασμό που αναφέραμε παραπάνω είναι το ίδιο.

3.2 Στρατηγικές νοερών υπολογισμών στην διαίρεση

Ο γραπτός αλγόριθμος της διαίρεσης όπως αναφέρουν οι Λεμονίδης & Παυλίδης (2003) είναι από τους πιο απαιτητικούς αλγόριθμους καθώς απαιτεί την συμβολή όλων των πράξεων για την διεξαγωγή της. Έτσι λοιπόν, αυτή θα πρέπει να διδάσκεται, μετά από την επέκταση των εργασιών των μαθητών σε προβληματικές-εμπειρικές καταστάσεις και σαφώς μετά από τους νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2003β).

Τα προβλήματα της διαίρεσης μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες α) η διαίρεση μερισμού όπου το ζητούμενο είναι να βρεθεί το μέγεθος κάθε ομάδας που αναζητείται και β) η διαίρεση μέτρησης όπου το ζητούμενο είναι το πλήθος των ομάδων (Σαλβαράς, 2011; Χατζηκυριάκου, 2013).

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τον νοερό υπολογισμό μιας διαίρεσης, όπως τις ανέδειξαν-επισήμαναν οι διάφοροι ερευνητές.

Ξεκινώντας με την κατηγοριοποίηση που παρουσιάζει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 257), παρουσιάζονται πέντε (5) στρατηγικές διαίρεσης. Η πρώτη είναι αυτή της «Άμεσης Μοντελοποίησης», όπου οι μαθητές καταμετρούν στο μοντέλο τον αριθμό των ομάδων (μέτρησης) ή το πλήθος των αντικειμένων κάθε ομάδας (μερισμού). Η δεύτερη κατηγορία είναι οι «Στρατηγικές Αρίθμησης», όπου οι μαθητές αριθμούν είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω είτε διπλασιάζοντας είτε υποδιπλασιάζοντας δηλαδή χρησιμοποιούν κάθε μορφή αρίθμησης, π.χ. 75÷15: 15, 30, 45, 60, 75. Τρίτη κατηγορία είναι η «Άμεση Ανάκληση», όπου οι μαθητές ανακαλούν από την μνήμη τους κάποιο γνωστό αριθμητικό γεγονός ή χρησιμοποιούν κάποιο γνωστό αριθμητικό γεγονός για τον υπολογισμό κάποιου νέου π.χ. 120÷6=20, διότι 6x20=120. Η τέταρτη κατηγορία είναι αυτή της «Διάσπασης του Αριθμού», όπου οι μαθητές διασπούν τον έναν όρο της πράξης έτσι ώστε να γίνει ευκολότερα η διαίρεση. Στην εν λόγο κατηγορία υπάρχουν δύο υποκατηγορίες: α) Η διάσπαση από Δεξιά προς τα Αριστερά π.χ. 84÷4: 4÷4=1, 80÷4=20, 20+1=21 και β) η Διάσπαση από Αριστερά προς τα Δεξιά π.χ. 84÷4: 80÷4=20, 4÷4=1, 20+1=21. Η τελευταία μάλιστα υποκατηγορία συμπίπτει με τον τυπικό αλγόριθμο της διαίρεσης. Η Πέμπτη κατηγορία καλείται «Ολικές στρατηγικές ή Αντιστάθμισμα», εδώ οι μαθητές προσαρμόζουν τους όρους της πράξης έτσι ώστε ο υπολογισμός της να γίνει ευκολότερος π.χ. 940÷5: 940÷10=94, 94x2=188.

Σε μια άλλη έρευνα, αυτή των Lucangeli et al. (2003) ζητήθηκε από μαθητές της Γ΄, Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού να εκτελέσουν νοερά τις ακόλουθες διαιρέσεις (66÷3, 120÷4 και 81÷9), οι στρατηγικές που κατέγραψαν ήταν οι εξής: α) «Different Operation (DO)», οι μαθητές μετέτρεπαν την διαίρεση σε πολλαπλασιασμό, π.χ. 104÷4=?: 4x?=120, β) «Automatic Calculation (AUTO)», το αποτέλεσμα της διαίρεσης προέκυπτε με άμεση ανάκληση από την μνήμη π.χ. 81÷9=9, επειδή το γνωρίζουν, γ) «Mental Algorithm (MA)», οι μαθητές διεξάγουν νοερά τον γραπτό αλγόριθμο της διαίρεσης και έτσι υπολογίζουν το πηλίκο.

Στην έρευνα του ο Erdem (2016) σε μαθητές της Ε΄ Δημοτικού ανέδειξε τρεις στρατηγικές υπολογισμού για την πράξη της διαίρεσης. Η πρώτη είναι η στρατηγική «N10», όπου ο ένας όρος της διαίρεσης αναλύεται σύμφωνα με την θεσιακή του αξία, π.χ. 112÷4: 100÷4=25, 12÷4=3, 25+3=28. Η δεύτερη στρατηγική είναι η «N10C», εδώ μόνο ο ένας όρος προσαρμόζεται στον αμέσως μεγαλύτερο αριθμό που διευκολύνει την πράξη και έπειτα γίνονται οι απαραίτητες διορθώσεις π.χ. 112÷4: 120÷4=30, 8÷4=2, 30-2=28. Και τελευταία στρατηγική είναι η «Mental image of the pen and paper algorithm», όπου γίνεται χρήση του γραπτού αλγόριθμου της διαίρεσης, νοερά.

Οι Robinson, Arbuthnott, Rose, McCarron, Globa & Phonexay (2006) ερεύνησαν τις στρατηγικές υπολογισμού απλών διαιρέσεων σε 122 μαθητές Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου. Οι στρατηγικές που εμφανίστηκαν ήταν α) της «Πρόσθεσης», δηλαδή της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης του διαιρέτη μέχρι να φτάσουμε στον διαιρετέο π.χ. 36÷6: 6+6+6+6+6+6=36, β) του «Πολλαπλασιασμού», οι μαθητές μετέτρεπαν την διαίρεση στον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό π.χ. 36÷6=?: 6x?=36, γ) της «Ανάκλησης», όπου οι μαθητές ανακαλούν την απάντηση από ένα γνωστό αριθμητικό γεγονός π.χ. 36÷6=6, διότι το γνωρίζουν και δ) η «Ομαδοποίηση», η οποία εμφανίστηκε τις λιγότερες φορές π.χ. 36÷6: φτιάχνω 6 ομάδες και προσθέτω ένα κάθε ομάδα μέχρι να φτάσουμε στο 36 και έπειτα μετράω τις μονάδες της κάθε ομάδας.

Από τις παραπάνω έρευνες συμπεραίνουμε ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται πιο συχνά από τους μαθητές είναι αυτή της «Ανάκλησης» και η χρήση του τυπικού αλγόριθμου της διαίρεσης νοερά.

Από την βιβλιογραφική επισκόπηση είναι φανερό ότι οι έρευνες που αφορούν τους νοερούς υπολογισμούς για την πράξη της διαίρεσης επικεντρώνονται αποκλειστικά στους μαθητές, ενώ για τους ενήλικες δεν βρέθηκε κάποια έρευνα.

Β. Ερευνητικό Μέρος

4. Η παρούσα έρευνα

4.1 Αναγκαιότητα της έρευνας

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με διαφορά θέμα που άπτονται των νοερών υπολογισμών. Κάποιοι ασχολήθηκαν με την οργάνωση και κατηγοριοποίηση των στρατηγικών (Thompson, 1999; Thompson & Smith, 1999; Hartnett, 2007), ενώ άλλοι με τη μελέτη της ευελιξίας των μαθητών στην επιλογή των στρατηγικών αλλά και με τους παράγοντες που την επηρεάζουν (Bjorklund, Douglas & Cowan, 1997; Siegler & Lemaire, 1997; Threlfall, 2009).

Κάθε έρευνα που δημοσιεύεται αναφέρεται σε συγκεκριμένο σύνολο αριθμών. Κάποιες ερευνούν το σύνολο των ρητών αριθμών (Caney & Watson, 2003; Lemonidis & Kaiafa, 2014). Ο Rezat (2011) αναφέρει ότι το παραπάνω σύνολο περιλαμβάνει τα κλάσματα, τους δεκαδικούς αριθμούς και τους ακέραιους με τον κύριο όγκο των ερευνών να αφορά τα κλάσματα και τους δεκαδικούς και όχι τους ακέραιους. Η πρώτη έρευνα που εντοπίστηκε στη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση των ακεραίων αριθμών είναι αυτή του Rezat (2011). Πρόσφατα, η έρευνα των Λεμονή και Χρήστου (2019), εστίασε στη μελέτη των νοερών υπολογισμών γύρω από τους νοερούς υπολογισμούς στην πρόσθεση και αφαίρεση με ακεραίους αριθμούς σε 27 μαθητές Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου.

Όσον αφορά τους πολλαπλασιασμούς, οι διεξαχθείσες έρευνες αφορούσαν την αναζήτηση και την παρουσίαση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές Δημοτικού για τον νοερό υπολογισμό γινομένων (Beak, 2005; Van de Walle, 2007; Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Για τη βαθμίδα του Γυμνασίου, γνωρίζουμε δύο έρευνες που διεξήχθησαν στην Ελλάδα γύρω από τους νοερούς πολλαπλασιασμούς με φυσικούς αριθμούς. Η πρώτη (Φραγγίδου & Λεμονίδη, 2011) εξέτασε ένα δείγμα 200 μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, δίγλωσσους μαθητές και μη δίγλωσσους μαθητές (Λεμονίδης, 2013, σελ. 272) και η δεύτερη έρευνα έγινε το Νοέμβριο του 2007 σε 198 μαθητές Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου στην επαρχία της Λεμεσού και της Πάφου, με στόχο την εξέταση τους στις στρατηγικές των νοερών πολυψήφιων πολλαπλασιασμών (Λεμονίδης, 2013, σελ.274).

Τέλος, οι έρευνες για τη μελέτη της νοερής διαδικασίας της διαίρεσης επικεντρώνονται στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Μέχρι στιγμής από όσο γνωρίζουμε, σε καμία έρευνα στην Ελλάδα δεν τέθηκε ως ομάδα-στόχος τους ενήλικες και πιο ειδικά τους μαθηματικούς (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008; Robinson, Arbuthnott, Rose, McCarron, Globa & Phonexay, 2006).

Το ερευνητικό κενό που δημιουργείται, έρχεται να καλύψει η παρούσα έρευνα μελετώντας τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου καθώς και οι μαθηματικοί στην πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση ακεραίων και κλασματικών αριθμών.

<u>Οι στρατηγικές νοερού υπολογισμού</u>

Έχοντας ως σημείο αναφοράς την έρευνα του Rezat (2011) παρατηρούμε ότι αυτός διακρίνει τις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης νοερών υπολογισμών με ακέραιους αριθμούς στις στρατηγικές προσέγγισης και στις στρατηγικές μετασχηματισμού (Threfall, 2009, σελ. 541-542).

Οι στρατηγικές προσέγγισης, όπως αναφέρουν και οι δύο ερευνητές Rezat (2009) και Threfall **(**2009**,** σελ.541) είναι ο τρόπος με τον οποίο θα χειριστούν οι μαθητές την μαθηματική γνώση για την επίλυση μιας πρόσθεσης ή μιας αφαίρεσης μεταξύ ακέραιων αριθμών. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να επιλύσουν μια πρόσθεση ή μια αφαίρεση ακέραιων αριθμών είναι :

- Μοντέλο της αριθμογραμμής
- Μοντέλο ισοζύγιο τράπεζας (καταθέσεις-αναλήψειςς)
- Μοντέλο θερμοκρασίας ή υψομέτρου

Και τέλος η πιο δημοφιλής στρατηγική προσέγγισης όπως αναφέρει στα συμπεράσματά του είναι αυτή της μετατροπής. Κατά την εφαρμογή της οι μαθητές μετατρέπουν τον αρχικό υπολογισμό σε έναν ισοδύναμο στο σύνολο όμως των φυσικών αριθμών (Rezat, 2011). Αναλυτικότερα, στο πρώτο στάδιο θα ορίζουν το πρόσημο του αποτελέσματος, στο δεύτερο στάδιο θα υπολογίζουν την πράξη μεταξύ των απολύτων τιμών των αριθμών. Κατά τη διαδικασία της "μετατροπής" οι μαθητές μετατρέπουν μια πρόσθεση ή μία αφαίρεση ακεραίων αριθμών σε πρόσθεση ή αφαίρεση φυσικών αριθμών. Στη συνέχεια χρησιμοποιούν τις στρατηγικές μετασχηματισμού για τον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος.

Ο Λεμονίδης (2013, σελ. 117) παραθέτει τις παρακάτω στρατηγικές μετασχηματισμού για τον νοερό υπολογισμό προσθέσεων και αφαιρέσεων στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών μαζί με αντίστοιχα παραδείγματα (πίνακας 1). Με βάση αυτές τις στρατηγικές θα διεξαγάγουμε την έρευνα και θα καταγράψουμε τα συμπεράσματά της.

<u>Πίνακας 1</u>: Στρατηγικές νοερού υπολογισμού μεταξύ διψήφιων φυσικών αριθμών στην πρόσθεση και στην αφαίρεση.

	Στρατηγική		Παραδείγματα Πρόσθεση (27+46) Αφαίρεση (42-15)	
1	Στρατηγική Διαχωρισμού (1010)	Από δεξιά στα αριστερά (u-1010)	27+46: 7+6=13, 20+40=60, 60+13=73	42-15: 12-5=7, 30-10=20, 20+7=27
		Από αριστερά στα δεξιά (1010)	27+46: 20+40=60, 7+6=13, 60+13=73	42-15: 30-10=20, 12-5=7, 20+7=27
2	Στρατηγική Συσσώρευσης (N10)	Από δεξιά στα αριστερά (u-N10) ή μονάδες	27+46: 27+6=33, 33+40=73	42-15: 42-5=37, 37-10=27

		- δεκάδες		
		Από αριστερά στα δεξιά (N10) ή δεκάδες - μονάδες	27+46: 27+40=67, 67+6=73	42-15: 42-10=32, 32-5=27
2.1	Πέρασμα από το 10 (A10)		27+46: 27+3=30, 30+43=73	42-15: 42-2=40, 40-10=30, 30-3=27
3	Μικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης (10S)		27+46: 20+40=60, 60+7=67, 67+6=73	42-15: 40-10=30, 30+2=32, 32-5=27
4	Ολιστικές στρατηγικές	Αντιστάθμιση (N10S)	27+46: 30+46=76, 76-3=73	42-15: 42-20=22, 22+5=27
		Εξισορρόπηση	27+46: 30+43=73	42-15: 47-20=27
5	Αρίθμηση	Με μονάδες Με δεκάδες ή άλλους αριθμούς	27+46: 28, 29, 30, … 27+46: 27+10=37, 37+10=47, 47+10=57, 57+10=67, 67+6=73	42-15: 42, 41, 40, .. 42-15: 42-10=32, 32-5=27
6	Νοητική εικόνα του αλγορίθμου με μολύβι και χαρτί		Σκέφτονται και εκτελούν νοερά τη μέθοδο του τυπικού γραπτού αλγορίθμου	

Εκτός από τις παραπάνω στρατηγικές, στη βιβλιογραφία εμφανίζεται και ο αλγόριθμος του Kye. Σε έρευνα των Cochran, Barson & Davis (1970), ένας μαθητής της Γ΄ Δημοτικού, ο Kye από το Weston του Connecticut, όταν του ζητήθηκε να υπολογίσει το έργο 64-28, αυτός απάντησε ως εξής: αφαιρώ από το τέσσερα το οκτώ και βρίσκω μείον τέσσερα 4-8=-4 και από το εξήντα αφαιρώ το είκοσι και βρίσκω σαράντα 60-20=40, το τελικό αποτέλεσμα είναι τριάντα έξι 40-4=36. Αυτή η επινόηση-ανακάλυψη του Kye, αν και είναι μία στρατηγική μετασχηματισμού (1010), δεν προϋποθέτει τη μετατροπή της σε πρόσθεση ή αφαίρεση φυσικών αριθμών για αυτό και την συναντούμε σε αφαιρέσεις με κρατούμενο.

Άλλη μία στρατηγική που επισημαίνει ο Rezat (2011) είναι αυτή της μηδενικής μετάβασης, δηλαδή την ανάλυση των αριθμών, έτσι ώστε να βρίσκει εφαρμογή η ιδιότητα: (-n)+n= 0, π.χ. 43-25=18+25-25=18.

Στο πλαίσιο του πολλαπλασιασμού, τα έργα περιλάμβαναν πολλαπλασιασμούς μονοψήφιων με διψήφιους ακεραίους αριθμούς, αλλά και πολλαπλασιασμούς κλασμάτων οι οποίοι κατέληγαν σε πολλαπλασιασμούς με μονοψήφιους ακέραιους. Στο πλαίσιο της διαίρεσης, τα έργα περιλαμβάνουν διαίρεση ακεραίων και διαίρεση κλασμάτων.

Ως σημείο αναφοράς για την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές είτε στον πολλαπλασιασμό είτε στη διαίρεση θα χρησιμοποιήσουμε αυτή που προτείνει ο Λεμονίδης (2013, σελ. 257) και παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα 2:

<u>Πίνακας 2</u>: Στρατηγικές νοερού υπολογισμού στον πολλαπλασιασμό και στην διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών.

	Στρατηγική	Παράδειγμα	
		Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση
1	Άμεση Μοντελοποίηση	Καταμετρούν στο μοντέλο τον συνολικό αριθμό των αντικειμένων	Καταμετρούν στο μοντέλο τον αριθμό των ομάδων ή τον αριθμό των αντικειμένων της κάθε ομάδας
2	Στρατηγικές Αρίθμησης	4x25: 2x25=50, 50+50=100	200÷4: 200÷2=100, 100÷2=50
3	Άμεση Ανάκληση	3x15=45	44÷4=11
4	Στρατηγικές Διάσπασης του αριθμού		
4.1	Διάσπαση ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία Διάσπαση ΔΑ Διάσπαση ΑΔ	3x15: (3x5)+(3x10)=15+30=45 3x15: (3x10)+(3x5)=30+15=45	69÷3: 9÷3=3, 60÷3=20, 20+3=23 69÷3:, 60÷3=20, 9÷3=3, 20+3=23
4.2	Διάσπαση και των δύο αριθμών με βάση τη θεσιακή αξία	12x34: (10+2)x(30+4)= (10x30)+(10x4)+(2x30)+(2x4)= 300+40+60+8=408	

4.3	Διάσπαση σε αριθμούς μη δεκάδων	12x35= (6x2)x35= 6x(2x35)=6x70=420	
5	Ολιστικές στρατηγικές ή Αντιστάθμισης	9x19= 10x19-19=190-19=171	720÷20: 720÷10=72, 72÷2=36

Συμπληρωματικά πρέπει να αναφέρουμε ότι σε έρευνα των Λεμονίδη & Καϊάφα (2014), εμφανίζονται στις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών των μαθητών και οι εργαλειακές στρατηγικές (Rule-based strategies). Σε αυτές οι μαθητές χρησιμοποιούν αλγόριθμους για τον υπολογισμό των πράξεων. Τέτοιες στρατηγικές, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, είναι:

<u>Πίνακας 3</u>: Εργαλειακές στρατηγικές στον πολλαπλασιασμό και διαίρεση μεταξύ κλασματικών αριθμών.

	Στρατηγική	Παράδειγμα	
		Πολλαπλασιασμός	Διαίρεση
1	Εκτέλεση του γραπτού αλγορίθμου	$\frac{2}{3}$ x $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{12}$	$\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ x $\frac{4}{1} = \frac{8}{3}$
2	Μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό	$\frac{3}{2}$ x $\frac{4}{8}$= 1,5x0.5=0.75	$\frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$ = 0,8÷0,5=0,4
3	Μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα		$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4} : \frac{1}{4}$ =2
4	Δημιουργία σύνθετου κλάσματος		$\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2x4}{3x1} = \frac{8}{3}$

Πλέον οι τέσσερις βασικές πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών διδάσκονται στο τρίτο τρίμηνο της Α΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές μαθαίνουν τρόπους για να υπολογίζουν το εξαγόμενο από την καθεμία πράξη, όπως περιγράφονται παρακάτω.

- Στην πρόσθεση, αν οι όροι της είναι ομόσημοι τότε το άθροισμα θα έχει το κοινό πρόσημο και θα προσθέσουμε τις απόλυτες τιμές των ρητών αριθμών π.χ. (+5)+(+3)=+(|+5|+|+3|)=+(5+3)=+8 και (-5)+(-3)=-(|−5|+|−3|)=-(5+3)=-8. Αν οι όροι είναι ετερόσημοι τότε στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από την μεγαλύτερη π.χ. (+5)+(-3)=+(|+5|-|−3|)=+(5-3)=+2 και (-5)+(+3)=-(|−5|-|+3)|)=-(5-3)=-2.
- Στην πράξη της αφαίρεσης δύο ρητών αριθμών, προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου για να βρούμε την διαφορά, δηλαδή α-β=α+(-β). Έτσι

λοιπόν η πράξη της αφαίρεσης μετατρέπεται σε πρόσθεση και επομένως είναι πάντα εφικτή. Π.χ. (+4)-(+3)=(+4)+(-3)=+1, (-4)-(-3)=(-4)+(+3)=-1, (+4)-(-3)=(+4)+(+3)=+7 και (-4)-(+3)=(-4)+(-3)=-7.

- Στον πολλαπλασιασμό, αν οι παράγοντες είναι ομόσημοι τότε το γινόμενο θα έχει πρόσημο θετικό και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των παραγόντων π.χ. (+4)x(+6)=+($|+4|$x$|+6|$)=+(4x6)=+24 και (-4)x(-6)=+($|-4|$x$|-6|$)=+(4x6)=+24. Αν οι παράγοντες είναι ετερόσημοι τότε το γινόμενο έχει αρνητικό πρόσημο και πάλι πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των παραγόντων π.χ. (-4)x(+6)=-($|+4|$x$|+6|$)=-(4x6)=-24 και (+4)x(-6)=-($|+4|$x$|-6|$)=-(4x6)=-24.
- Στην πράξη της διαίρεσης δύο ρητών αριθμών, αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι τότε το πηλίκο είναι θετικό και διαιρούμαι τις απόλυτες τιμές των αριθμών π.χ. (+8):(+4)=+($|+8|$:$|+4|$)=+(8:4)=+2 και (-8):(-4)=+($|-8|$:$|-4|$)=+(8:4)=+2 ενώ αν είναι ετερόσημοι τότε το πηλίκο είναι αρνητικό και πάλι διαιρούμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών π.χ. (+8):(-4)=-($|+8|$:$|-4|$)=-(8:4)=-2 και (-8):(+4)=-($|-8|$:$|+4|$)=-(8:4)=-2. Εναλλακτικά η πράξη της διαίρεσης γίνεται και με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη για να βρούμε το πηλίκο δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}$=αx$\frac{1}{\beta}$ (Βανδουλάκης κ.α., 2007). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η πράξη της διαίρεσης, τελικά ανάγεται σε πολλαπλασιασμό και ακολουθεί τους κανόνες που προαναφέραμε.

Οι Λεμονίδης & Λυγούρας (2008) αναφέρουν ότι η καλή γνώση της προπαίδειας επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την επίδοση των μαθητών στους νοερούς πολλαπλασιασμούς. Παρόμοια διαπίστωση έκαναν και άλλοι ερευνητές. Σύμφωνα με τους Dowker (1992), Plunkett (1979), Sowder (1988) για να μπορεί κάποιος να κάνει νοερούς υπολογισμούς θα πρέπει να γνωρίζει κάποια βασικά αριθμητικά γεγονότα.

4.2 Ο σκοπός της έρευνας

Οι στόχοι της παρούσας έρευνας είναι να ερευνηθούν οι νοερές στρατηγικές που χρησιμοποιούν τόσο οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου όσο και οι ενήλικοι (μαθηματικοί) στις πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, ακεραίων και κλασματικών αριθμών. Συνδυαστικά θα ερευνηθεί και η ευελιξία τους στους παραπάνω νοερούς υπολογισμούς.

Συγκεντρωτικά, θα λέγαμε ότι οι στόχοι της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει:

- τις στρατηγικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου και οι μαθηματικοί στην πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση, ακεραίων και κλασματικών αριθμών.
- τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές και οι Μαθηματικοί μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακέραιων και των κλασματικών αριθμών.
- την ευελιξία μαθητών και μαθηματικών στις στρατηγικές νοερού υπολογισμού.

4.3 Ερευνητική υπόθεση

Η αναμενόμενη πορεία σκέψης των μαθητών και των ενηλίκων (μαθηματικών) είναι ότι θα προηγηθεί ο καθορισμός του προσήμου του αποτελέσματος των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και θα ακολουθήσει ο τρόπος διεκπεραίωσης των παραπάνω πράξεων, αφού αυτές στο μεταξύ μετατραπούν σε πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών.

4.4 Ερευνητικά ερωτήματα

1. Ποιες είναι οι στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης μεταξύ ακεραίων και κλασματικών αριθμών.
2. Ποιες είναι οι στρατηγικές πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεταξύ ακεραίων και κλασματικών αριθμών
3. Υπάρχουν εναλλακτικές στρατηγικές υπολογισμού των αποτελεσμάτων των πράξεων;

5. Μεθοδολογία έρευνας

Για τη διεξαγωγή της έρευνας επιδέχθηκε η ποιοτική προσέγγιση, με το σκεπτικό ότι ο ερευνητής έχει τη δυνατότητα να ακούσει τις απόψεις των συμμετεχόντων (Creswell, 2011). Έτσι, λοιπόν, για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η συνέντευξη, καθότι δίνει στον ερευνητή τη δυνατότητα να κάνει ερωτήσεις, να καταγράφει τις απαντήσεις κάθε συμμετέχοντα, να εντοπίσει και να αναλύσει τις στρατηγικές που επιλέγουν τα υποκείμενα για τον νοερό υπολογισμό των τεσσάρων βασικών πράξεων στα πλαίσια των ακέραιων και των κλασματικών αριθμών.

5.1 Περιγραφή του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας επιλέχθηκε σύμφωνα με την βολική δειγματοληψία, της οποίας κύριο χαρακτηριστικό είναι η ευκολία, η διαθεσιμότητα των ερωτηθέντων και η μικρή κλίμακα της έρευνας (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Η έρευνα διεξήχθη εν μέσω καραντίνας, λόγω του Covid-19, ενώ όλες οι συνεντεύξεις έγιναν μέσω Skype αφού εξακριβώθηκε ότι οι ερωτηθέντες ήταν εξοικειωμένοι με αυτό το μέσο επικοινωνίας.

Το μέγεθος του δείγματος αποτελείται από 20 κατοίκους του νομού Φλώρινας και όλοι οι ερωτηθέντες δήλωσαν την προθυμία να συμμετάσχουν στην έρευνα. Η σχολική επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά ποικίλλει. Στο δείγμα δεν συμπεριλήφθηκαν μαθητές που είχαν διαγνωσμένη μαθησιακή δυσκολία είτε σχετίζεται με τα μαθηματικά είτε όχι.

Ειδικότερα, η κατανομή των ερωτηθέντων έχει ως εξής:

- 4 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, 2 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, 2 μαθητές της Α΄ Λυκείου, 5 μαθητές της Β΄ Λυκείου, 2 μαθητές της Γ΄ Λυκείου και 4 Μαθηματικοί
- 11 Αγόρια και 9 κορίτσια
- 17 άτομα δηλώνουν ικανοί στα Μαθηματικά και 3 άτομα όχι τόσο ικανοί στα μαθηματικά
- 17 άτομα δήλωσαν ότι αρέσουν “αρκετά” ή “πολύ” τα Μαθηματικά και 3 άτομα τους αρέσει ”μέτρια” ή “λίγο” τα μαθηματικά.

5.2 Εργαλείο συλλογής δεδομένων πριν την κυρίως εξέταση

Πριν τη διεξαγωγή της έρευνας, έκρινα απαραίτητο να ελέγξω την αξιοπιστία του ερευνητικού εργαλείου. Για τον λόγο αυτό απευθύνθηκα σε τέσσερις μαθητές (έναν από τη Β΄ Γυμνασίου, έναν από τη Γ΄ Γυμνασίου, έναν από την Α΄ Λυκείου και έναν από τη Β΄ Λυκείου) προκειμένου να διαπιστωθούν αστοχίες του εργαλείου και να δοκιμαστεί η καταλληλότητά του εργαλείου για τη συλλογή των δεδομένων.

Κατά τον προκαταρτικό έλεγχο εντοπίστηκε μια αστοχία, στη δέκατη ερώτηση ($-\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$), ο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου απάντησε ότι "διαιρώ αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή" το εξαγόμενο ήταν σωστό, όμως ο τρόπος σκέψης ήταν λανθασμένος. Στη συνέχεια ρώτησα τον μαθητή "αν δεν ήταν ομώνυμα, θα έκανες το ίδιο;" και ο μαθητής αποκρίθηκε καταφατικά. Για την αποφυγή τέτοιων περιστατικών, τα οποία μας αποπροσανατολίζουν από τον σκοπό της έρευνας, το συγκεκριμένο έργο αλλάχθηκε και αντικαταστάθηκε από το ($-\frac{2}{5} : \frac{4}{2}$).

5.3 Εργαλείο για την κυρίως έρευνα

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω μιας δομημένης ατομικής συνέντευξης. Για την επίτευξη του σκοπού της έρευνας χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 12 έργα-πράξεις.

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αναφέρονται τα δημογραφικά στοιχεία των συμμετεχόντων όπως σχολείο, σχολική τάξη, χρονολογία γέννησης, φύλο, αξιολόγηση της στάσης τους στο μάθημα των Μαθηματικών καθώς και η αυτοαξιολόγηση των ερωτηθέντων αν είναι καλοί ή όχι στα μαθηματικά. Στο δεύτερο μέρος περιλαμβάνονται 12 έργα, τα οποία καλούνται να υπολογίσουν νοερά οι ερωτηθέντες. Η παρουσίαση των έργων γίνεται σε οριζόντια μορφή και όχι σε κατακόρυφη, για να αποφευχθεί, όσο είναι δυνατόν, η χρήση ή η παραπομπή στον γραπτό κατακόρυφο αλγόριθμο. Οι υπολογισμοί αφορούν τις τέσσερις βασικές αριθμητικές πράξεις στο σύνολο των ακεραίων αριθμών, αλλά και των ρητών αριθμών.

Τα έργα δόθηκαν στους ερωτώμενους χωρίς να γίνεται αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο πλαίσιο. Οι Carraher T. et al. (1987) θεωρούν ότι τα λεκτικά προβλήματα (σε πλαίσιο) ενισχύουν τη χρήση των μη-τυπικών στρατηγικών υπολογισμού σε σχέση με τις απλές αριθμητικές πράξεις. Παρόλα αυτά, στην παρούσα έρευνα, προτιμήθηκαν οι τελευταίες για να είναι πιο σύντομες και περιεκτικές οι απαντήσεις των ερωτηθέντων.

Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να δώσουν μία ακριβή απάντηση για το κάθε έργο και αμέσως μετά να περιγράψουν τον τρόπο που σκέφτηκαν. Έτσι ο ερευνητής θα είναι σε θέση να κατηγοριοποιήσει τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες.

Οι ερωτήσεις είναι ανοιχτού τύπου έτσι ώστε ο κάθε ερωτώμενος να μπορεί να εκφράσει ελεύθερα τη σκέψη του για τον τρόπο υπολογισμού που χρησιμοποίησε στο εκάστοτε έργο.

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από δώδεκα έργα των τεσσάρων βασικών αριθμητικών πράξεων με ακέραιους και κλασματικούς αριθμούς. Τα πρώτα έξι έργα αφορούν προσθέσεις και αφαιρέσεις ακεραίων και κλασματικών αριθμών και τα επόμενα έξι αφορούν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ακέραιων και κλασματικών αριθμών. Στον πίνακα που ακολουθεί, παραθέτονται τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα.

<u>Πίνακας 4:</u> περιπτώσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ακεραίων και κλασματικών αριθμών που μελετήθηκαν

1) -43+25, Πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων αριθμών
2) $-\frac{2}{6}-\frac{7}{6}$, Πρόσθεση ομόσημων και ομώνυμων κλασματικών αριθμών
3) $\frac{3}{4}-\frac{5}{4}$, Πρόσθεση ετερόσημων και ομώνυμων κλασματικών αριθμών
4) -33-19, Πρόσθεση ομόσημων ακεραίων αριθμών
5) $\frac{3}{5}-\frac{8}{3}$, Πρόσθεση ετερόσημων και ετερώνυμων κλασματικών αριθμών
6) $-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}$, Πρόσθεση ομόσημων και ετερώνυμων κλασματικών αριθμών
7) $(-\frac{2}{3})x\frac{4}{3}$, Πολλαπλασιασμός ετερόσημων κλασμάτων
8) -5x21, Πολλαπλασιασμός ετερόσημων ακεραίων
9) $(-\frac{4}{6})$ x $\frac{5}{2}$,Πολλαπλασιασμός ετερόσημων κλασμάτων
10) $(-\frac{2}{5}):\frac{4}{2}$, Διαίρεση ετερόσημων κλασμάτων
11) -60:4, Διαίρεση ετερόσημων ακεραίων
12) $(-\frac{7}{3}):\frac{5}{4}$, Διαίρεση ετερόσημων κλασμάτων

Η σειρά των έργων έγινε ούτως ώστε αυτή να μην επηρεάζει την επιλογή της στρατηγικής που θα ακολουθήσουν οι μαθητές για τον υπολογισμό του κάθε έργου. Δηλαδή τα έργα δεν ακολουθούν κάποιο μοτίβο και κατ’ επέκταση αποφεύγεται η χρήση της ίδιας στρατηγικής κατ’ εξακολούθηση.

5.4 Ερευνητική διαδικασία

Οι Reys R. et al. (1982) αναφέρουν ότι, για να μπορέσει ένας ερευνητής να προσδιορίσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί ένα άτομο προκειμένου να διεξάγει έναν νοερό υπολογισμό, μπορεί να αντλήσει τα δεδομένα είτε μέσω γραπτών τεστ είτε μέσω συνεντεύξεων. Από την στιγμή όμως που τα γραπτά τεστ δε βοηθούν τα παιδιά της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να καλύψουν τα θέματα με πληρότητα και σαφήνεια, θα υπήρχε ο κίνδυνος να μην είναι ολοκληρωμένα τα γραπτά τεστ, κυρίως στην περιγραφή της νοερής στρατηγικής που χρησιμοποίησαν. Έτσι, λοιπόν επιλέχθηκε, ως μέσο συλλογής των δεδομένων η προσωπική συνέντευξη.

Το πλεονέκτημα της συνέντευξης είναι ότι ο ερευνητής θα είναι μάρτυρας των απαντήσεων του μαθητή και έτσι θα προσδώσει στην όλη διαδικασία περισσότερη αξιοπιστία και εγκυρότητα.

Η έρευνα διεξήχθη το τρίτο τρίμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2019-2020 στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής με Νέες Τεχνολογίες» με κατεύθυνση στις Θετικές Επιστήμες με Νέες Τεχνολογίες του Π.Τ.Δ.Ε. Δυτικής Μακεδονίας.

Όλοι οι συμμετέχοντες βρισκόντουσαν σε οικείο χώρο κατά την διάρκεια της συνέντευξης χωρίς την παρουσία των κηδεμόνων τους, και επομένως είχαν εξασφαλιστεί σε μεγάλο βαθμό οι συνθήκες έτσι ώστε οι ερωτώμενοι να διατυπώνουν τις σκέψεις τους ελεύθερα, χωρίς άγχος μέσα σε κλίμα ηρεμίας και ησυχίας.

Αρχικά ο ερευνητής συμπλήρωσε το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου με τα δημογραφικά στοιχεία των μαθητών. Έπειτα ενημέρωσε τον κάθε συμμετέχοντα για τον σκοπό της έρευνας. Στη συνέχεια αυτοί έπρεπε να υπολογίσουν νοερά τα έργα που ήταν γραμμένα στο ερωτηματολόγιο και να εξηγήσουν στον ερευνητή τον τρόπο ή τους τρόπους σκέψης τους, πράγμα που γίνεται ευκολότερο για τους μαθητές όταν γίνεται αμέσως μετά από τον υπολογισμό. Για τη διευκόλυνση των μαθητών υπήρχε και ένα παράδειγμα νοερού υπολογισμού με μία ενδεικτική στρατηγική. Λόγω των περιοριστικών συνθηκών αυτό έγινε με τη βοήθεια του Powerpoint και του Skype.

Επισημάνθηκε ότι δεν υπάρχουν σωστές ή λανθασμένες στρατηγικές. Επίσης τονίστηκε ότι δε θα μπορούν να κρατούν σημειώσεις και δε θα μπορούν να χρησιμοποιούν χειραπτικά αντικείμενα για βοήθεια. οι μαθητές από το άγχος και την αγωνία, ο ερευνητής τούς τόνισε ότι στόχος της έρευνας είναι να εξακριβώσει τον τρόπο σκέψης τους και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για τους νοερούς υπολογισμούς και όχι να αξιολογήσει τις επιδόσεις τους. Για να τονίσει τη σοβαρότητα της συμμετοχής, τους επισήμανε ότι τα συμπεράσματα που θα προκύψουν θα αξιοποιηθούν στη βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Κατά τον νοερό υπολογισμό των έργων από τους μαθητές, αυτοί πρώτα ανέφεραν το αποτέλεσμα του υπολογισμού και έπειτα την ή τις στρατηγικές που σκέφτηκαν. Όταν το αποτέλεσμα ήταν σωστό, αυτό επιβεβαιωνόταν από τη στρατηγική που εφάρμοζαν οι μαθητές, ενώ, όταν το αποτέλεσμα ήταν λανθασμένο, κατά την πορεία ανάλυσης της στρατηγικής ο μαθητής καταλάβαινε το λάθος του και αναθεωρούσε τη σκέψη του. Ο ρόλος του ερευνητή ήταν επικουρικός π.χ. βοηθούσε στην απομνημόνευση κάποιον ενδιάμεσων αποτελεσμάτων.

Χρονική δέσμευση για την ολοκλήρωση των έργων δεν υπήρχε και αυτό τονίστηκε στους ερωτώμενους για την αποφυγή επιπρόσθετου άγχους. Η διάρκεια των συνεντεύξεων κυμάνθηκε από 10 έως 35 λεπτά. Όλες οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν με την άδεια των συμμετεχόντων και των γονέων τους και έπειτα απομαγνητοφωνήθηκαν για να μελετηθούν.

6. Αποτελέσματα

6.1 Επιτυχίες

Αν και ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η εξακρίβωση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι ερωτώμενοι στα διάφορα έργα του ερωτηματολογίου, αρχικά θα αναφερθούμε στις επιτυχίες που είχαν οι διάφορες ηλικιακές ομάδες σε όλα τα έργα.

Ξεκινώντας από τους τέσσερις μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, οι επιδόσεις τους στο 3^{ο}, 4^{ο}, 5^{ο} και 8^{ο} έργο είναι όλες επιτυχημένες και το αντίστοιχο ποσοστό των απαντήσεων σε σύνολο 48 απαντήσεων είναι 33,3%. Στο 1^{ο}, 2^{ο}, 6^{ο} και 11^{ο} έργο είχαμε από τρεις (25%) σωστές απαντήσεις, ενώ από 2 (08,3%) σωστές απαντήσεις είχαμε στο 7^{ο} και 9^{ο} έργο. Εκεί που δυσκολεύτηκαν περισσότερο οι μαθητές ήταν στο 10^{ο} και 12^{ο} έργο αφού δόθηκε μόλις από μία (04,2%) σωστή απάντηση. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι δεν υπήρξε έργο με μηδενικές σωστές απαντήσεις.

Συνεχίζοντας με τους δύο (2) μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, αυτοί έδωσαν σωστές απαντήσεις στο 2^{ο}, 3^{ο}, 7^{ο}, 8^{ο}, 9^{ο}, 10^{ο}, 11^{ο} και 12^{ο} (66,6%) έργο και από μία (12,5%) σωστή απάντηση έδωσαν στο 1^{ο}, 4^{ο} και 6^{ο} έργο ενώ δυσκολεύτηκαν στο 5^{ο} έργο αφού δεν δόθηκε καμία σωστή απάντηση.

Περνώντας στους δύο (2) μαθητές της Α΄ Λυκείου, αυτοί απάντησαν σωστά στο1^{ο}, 2^{ο}, 3^{ο}, 4^{ο}, 7^{ο}, 8^{ο}, 9^{ο}, 10^{ο}, 11^{ο} και 12^{ο} έργο με ποσοστό 83,3% επί του συνόλου των απαντήσεων ενώ στο 5^{ο} και 6^{ο} έργο δόθηκε από μία σωστή απάντηση (08,3%).

Ακολουθούν οι πέντε (5) μαθητές της Β΄ Λυκείου, οι οποίοι είχαν ελαφρώς καλύτερες επιδόσεις από αυτές των μαθητών της Α΄ Λυκείου. Όλοι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου απάντησαν σωστά (66,6%) στο 2^{ο}, 3^{ο}, 4^{ο}, 7^{ο}, 9^{ο}, 10^{ο}, 11^{ο} και 12^{ο} έργο, ενώ τέσσερις (4) σωστές (26,7%) απαντήσεις έδωσαν στο 1^{ο}, 5^{ο}, 6^{ο} και 8^{ο} έργο. Δεν υπήρξαν έργα με λιγότερες από τέσσερις σωστές απαντήσεις.

Δύο (2) μαθητές από την τελευταία τάξη του Λυκείου συμμετείχαν στην έρευνα και η επίδοσή τους ήταν πάρα πολύ καλή αφού έδωσαν από δύο (2) σωστές (91,6%) απαντήσεις σε όλα τα έργα του ερωτηματολογίου εκτός από το 5^{ο} έργο όπου δόθηκε μία (04,2%) σωστή απάντηση, ενώ δεν υπήρξε έργο με καμία σωστή απάντηση.

Παρόμοια ήταν και η εικόνα των επιδόσεων και στους τέσσερις (4) μαθηματικούς αφού απάντησαν όλοι σωστά (91,7%) σε όλα τα έργα εκτός από το 1^{ο}, όπου είχαμε τρεις (3) σωστές απαντήσεις (06,2%) ενώ δεν υπήρξε έργο με λιγότερες από τρεις (3) σωστές απαντήσεις.

Όλες οι επιτυχίες των μαθητών έχουν συγκεντρωθεί και παρουσιάζονται μαζί με τις λανθασμένες απαντήσεις στον παρακάτω πίνακα 1, ο οποίος είναι ενσωματωμένος στην επόμενη ενότητα.

6.2 Λάθη

Ένα σημαντικό στοιχείο για την εκπαιδευτική διαδικασία είναι η επισήμανση και η αξιοποίηση των λαθών. Στην παρούσα ενότητα θα αναφέρουμε τα διάφορα λάθη που υπέπεσαν οι μαθητές της έρευνα μας καθώς και την σχολική τάξη στην οποία ανήκουν.
Ξεκινώντας από τους τέσσερις μαθητές της Β΄ Γυμνασίου τα συνολικά λάθη που έγιναν, σε σύνολο 48 απαντήσεων, ήταν 14 (29,17%). Βέβαια δεν ήταν όλα της ίδιας φύσεως. Η μαθήτρια Χ. στο 1ο έργο έκανε λάθος υπολογισμό της πράξης, δηλώνοντας ότι -43+25=-17. Η ίδια μαθήτρια στο 2ο έργο ($-\frac{2}{6}-\frac{7}{6}$) έκανε πρόσθεση ετερόσημων κλασμάτων αντί ομόσημων και βρήκε $+\frac{5}{6}$. Αρχικά η μαθήτρια σκέφτηκε $-\frac{2}{6}-(+\frac{7}{6})$ και χρησιμοποίησε τους κανόνες πρόσθεσης ετερόσημων κλασμάτων, μπερδεύοντας τους κανόνες πρόσθεσης με αυτούς της αφαίρεσης. Τελειώνοντας με την μαθήτρια Χ. στο 10ο και 12ο έργο δήλωσε ότι "δεν θυμάμαι πως γίνεται". Ένας άλλος μαθητής της Β΄ Γυμνασίου, ο Δ. στο 7ο έργο $(-\frac{2}{3}) \times \frac{4}{3}$, συγχέει τον κανόνα που αναφέρει ότι αν μπροστά από μία παρένθεση έχετε μείον, τότε φεύγει το μείον και η παρένθεση και αλλάζουν όλα τα πρόσημα των αριθμών. Έτσι λοιπόν, ο μαθητής λέει ότι το αποτέλεσμα θα είναι + αφού φεύγει η παρένθεση και σε δεύτερο στάδιο κάνει λάθος στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων μπερδεύοντάς τον με την χιαστή: $(-\frac{2}{3}) \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{6}$. Και τέλος ο ίδιος μαθητής στο 11ο έργο, επαναλαμβάνει το παραπάνω λάθος με το πρόσημο του αποτελέσματος αλλά κάνει και ένα δεύτερο λάθος που αφορά

τον τρόπο διαίρεσης και αντί να πολλαπλασιάσει με τον αντίστροφο του διαιρέτη, αυτός πολλαπλασιάζει με τον αντίθετο του διαιρέτη και βρίσκει 15: -60:4=-60x(-4)=15.

Η επόμενη ομάδα μαθητών αφορά αυτούς που φοιτούν στην Γ΄ Γυμνασίου. Οι δύο μαθητές που αποτελούσαν την παραπάνω ομάδα, σε σύνολο 24 απαντήσεων έδωσαν 5 (20,83%) λανθασμένες απαντήσεις. Οι τέσσερις από αυτές είχαν ως αιτία τον λανθασμένο υπολογισμό όπως π.χ. η μαθήτρια Β. στο 4ο έργο (-33-19) κατά την πράξη 33+19 απάντησε 54. Η μοναδική (04,17%) λανθασμένη απάντηση που είχε ως αιτία την λανθασμένη επιλογή στρατηγικής έγινε από την ίδια μαθήτρια στο 6ο έργο (-45-92) όπου αντί να κάνει πρόσθεση ομόσημων αριθμών έκανε πρόσθεση ετερόσημων αριθμών και φυσικά βρήκε λανθασμένο αποτέλεσμα.

Οι δύο μαθητές της Α΄ Λυκείου, σε σύνολο 24 απαντήσεων έκαναν 2 (08,33%) λάθος υπολογισμούς. Ο μαθητής Α. στο 6ο έργο ($-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}$) αντί να κάνει πρόσθεση ομόσημων αριθμών έκανε αφαίρεση και οδηγήθηκε σε λάθος υπολογισμό. Επίσης ο ίδιος μαθητής στο 5ο έργο ($\frac{3}{5}-\frac{8}{3}$) κατά τον υπολογισμό του και αφού μετέτρεψε τα κλάσματα σε ομώνυμα κατέληξε στον υπολογισμό της πράξης 9-40 και χρησιμοποιώντας την στρατηγική της αντιστάθμισης (Compensation, N10C), έκανε 10-40=-30 και έπειτα αντισταθμίζοντας το 1 είπε -29.

Οι πέντε μαθητές της Β΄ Λυκείου έδωσαν συνολικά 62 απαντήσεις, εκ των οποίων οι 4 (06,45%) ήταν λανθασμένες. Η μαθήτρια Ρ. έδωσε τρεις λανθασμένες απαντήσεις όπου και οι τρεις έγιναν λόγω λάθους υπολογισμού, λ.χ. στο 1ο έργο -43+25 είπε ότι: ...στο 25 θα προσθέσω 20 και θα γίνει 45 και έπειτα θα αφαιρέσω 2, άρα 22 και τελικά -22. Στο 8^{ο} έργο (-5x21) η ίδια μαθήτρια αφού διέσπασε το 21 σε μονάδες και δεκάδες και εφάρμοσε την επιμεριστική ιδιότητα [α(β+γ)=αβ+αγ] κατά την τελική πρόσθεση είπε 101. Ομοίως και η δεύτερη μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό στο 5ο έργο.

Η τελευταία σχολική ομάδα της Γ΄ Λυκείου με δύο συμμετέχοντες, έδωσαν 24 συνολικά απαντήσεις εκ των οποίων μόλις μία (04,17%) ήταν λάθος, το οποίο έγινε στο 5ο έργο ($\frac{3}{5}-\frac{8}{3}$) και λόγω λάθους υπολογισμού στην διαδικασία της δημιουργίας ομώνυμων κλασμάτων δόθηκε και λάθος αποτέλεσμα.

Και τέλος η τελευταία ηλικιακή ομάδα των Μαθηματικών με τέσσερις συμμετέχοντες, έδωσε 48 απαντήσεις, με μία (02,08%) μόλις λανθασμένη απάντηση στο 1ο έργο και αυτή εκ παραδρομής.

<u>Πίνακας 1:</u> Κατανομή σωστών και λανθασμένων απαντήσεων στο σύνολο του ερωτηματολογίου

		1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο	6ο έργο	7ο έργο	8ο έργο	9ο έργο	10ο έργο	11ο έργο	12ο έργο	Σύνολο
Β΄ Γυμνασίου	Σωστή	3	3	4	4	4	3	2	4	2	1	3	1	34 (70,83%)
	Λάθος	1	1	0	0	0	1	2	0	2	3	1	3	14 (29,17%)
Γ΄ Γυμνασίου	Σωστή	1	2	2	1	0	1	2	2	2	2	2	2	19 (79,17%)
	Λάθος	1	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	5 (20,83%)
Α΄ Λυκείου	Σωστή	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	22 (91,67%)
	Λάθος	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2 (08,33%)
Β΄ Λυκείου	Σωστή	4	5	5	5	4	4	5	4	5	5	5	5	56 (93,33%)
	Λάθος	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	4 (06,67%)
Γ΄ Λυκείου	Σωστή	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	23 (95,83%)
	Λάθος	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1 (04,17%)
Μαθηματικοί	Σωστή	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	47 (97,92%)
	Λάθος	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 (02,08%)
Σύνολο	Σωστή	15 (78,95%)	18 (94,74%)	19 (100%)	18 (94,74%)	14 (73,68%)	15 (78,95%)	17 (89,47%)	18 (94,74%)	17 (89,47%)	16 (84,21%)	18 (94,74%)	16 (84,21%)	
	Λάθος	4 (21,05%)	1 (05,26%)	0 (0%)	1 (05,26%)	5 (26,32%)	4 (21,05%)	2 (10,53%)	1 (05,26%)	2 (10,53%)	3 (15,79%)	1 (05,26%)	3 (15,79%)	

6.3 Στρατηγικές

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε την συμπεριφορά των ερωτώμενων ως προς τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για τον νοερό υπολογισμό των έργων αλλά και για τις επιλογές τους ως προς τον μετασχηματισμό των πράξεων ειδικά των ακεραίων, σε πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών.

Ξεκινώντας από τους τέσσερις (4) μαθητές της Β΄ Γυμνασίου για το 1ο έργο (-43+25) οι δύο (50%) υπολόγισαν το αποτέλεσμα χωρίς να μετασχηματίσουν την πράξη και ακολούθως ο ένας έκανε χρήση της στρατηγικής της συσσώρευσης (Jump method, N10) με αφαίρεση λέγοντας «..-43+25=-23 και -23+5=-18» ενώ ο δεύτερος έκανε χρήση της στρατηγικής του διαχωρισμού ΑΔ (Split method,1010) και εξηγεί "…-40+20=-20 και -3+5=2 τελικά -20+2=-18". Ο τρίτος μαθητής της Β΄ Γυμνασίου μετασχημάτισε την πράξη των ακεραίων και έπειτα έκανε την νοητική αναπαράσταση του γραπτού αλγόριθμου, ενώ ο τέταρτος μαθητής έκανε λάθος υπολογισμό.

Στο 2ο έργο $(-\frac{2}{6}-\frac{7}{6})$ οι τρεις (75%) μαθητές χρησιμοποίησαν σωστά τον κανόνα της πρόσθεσης ομόσημων και ομώνυμων κλασμάτων ενώ μία μαθήτρια έκανε λάθος εφαρμογή της στρατηγικής υπολογισμού.

Ομοίως στο 3ο έργο $(\frac{3}{4}-\frac{5}{4})$ και οι τέσσερις (100%) μαθητές της Β΄ Γυμνασίου έκαναν χρήση του κανόνα της πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόσημων κλασμάτων και έδωσαν το σωστό εξαγόμενο.

Προχωρώντας στο 4ο έργο (-33-19), οι δύο (50%) μαθητές μετασχημάτισαν την πράξη μεταξύ των ακεραίων σε πράξη μεταξύ φυσικών αριθμών. Ο ένας προχώρησε χρησιμοποιώντας την στρατηγική της συσσώρευσης ΑΔ (Jump method, N10) αναφέροντας "…33+10=43, 43+9=52 τελικά -52" ενώ ο δεύτερος χρησιμοποίησε την στρατηγική του Διαχωρισμού ΔΑ (Split method, units first,u-1010) και περιγράφει την σκέψη του "…3+9=12, 30+10=40 άρα 40+12=52 επομένως -52". Οι άλλοι δύο (50%) μαθητές υπολόγισαν το έργο χωρίς να το μετασχηματίσουν, κάνοντας χρήση και οι δύο της στρατηγικής του Διαχωρισμού (Split method,1010) λέγοντας "…-30-10=-40 και -3-9=-12 άρα -40-12=-52".

Στο 5ο έργο $(\frac{3}{5}-\frac{8}{3})$ και οι τέσσερις (100%) μαθητές χρησιμοποίησαν σωστά τον κανόνα πρόσθεσης ετερόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων.

Ομοίως στο 6ο έργο $(-\frac{4}{5}-\frac{9}{2})$ οι τρεις (75%) από τους τέσσερις μαθητές έκαναν σωστή χρήση του κανόνα πρόσθεσης ομόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων, αντίθετα η μαθήτρια Χ. έκανε λάθος υπολογισμό.

Προχωρώντας στα έργα του πολλαπλασιασμού, στο 7ο έργο $(-\frac{2}{3}) \times \frac{4}{3}$, οι δύο (50%) μαθητές βρήκαν σωστά το αποτέλεσμα αφού πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του γινομένου και έπειτα χρησιμοποίησαν τον κανόνα πολλαπλασιασμού ετερόσημων κλασμάτων, ενώ οι υπόλοιποι δύο (50%) έκαναν λάθος υπολογισμό.

Η συμπεριφορά των μαθητών ήταν παρόμοια και στο 8ο έργο (-5 x21), όπου και οι τέσσερις (100%) μαθητές πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του αποτελέσματος και έπειτα οι τρεις (75%) εφάρμοσαν την στρατηγική της Διάσπασης με βάση την θεσιακή αξία ΑΔ λέγοντας "…5x21=(5x20)+(5x1)=100+5=105 τελικά -105", ενώ η μαθήτρια Α. εφάρμοσε την νοητική αναπαράσταση του Γραπτού Αλγόριθμου με χαρτί και μολύβι.

Στο 9ο έργο $(-\frac{4}{9})x\frac{5}{2}$, οι δύο (50%) μαθητές, αφού καθόρισαν το πρόσημο του αποτελέσματος έπειτα προχώρησαν χρησιμοποιώντας τον κανόνα πολλαπλασιασμού κλασμάτων υπολογίζοντας σωστά το γινόμενο ενώ οι υπόλοιποι δύο (50%) έκαναν λάθος υπολογισμό.

Προχωρώντας στα έργα της διαίρεσης και ξεκινώντας από το 10ο έργο $(-\frac{2}{5}):\frac{4}{2}$, ένας (25%) μαθητής εκτέλεσε σωστά τον γραπτό αλγόριθμο και κατόπιν έκανε απλοποίηση, ενώ οι υπόλοιποι τρεις (75%) έκαναν λάθος υπολογισμό.

Στο 11ο έργο (-60:4) είχαμε μεγαλύτερη ποικιλία χρήσης στρατηγικών, οι τρεις (75%) μαθητές αφού πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του εξαγόμενου έπειτα οι δύο ξέρανε ήδη το αποτέλεσμα (Άμεση Ανάκληση) ενώ η Κ. το μετέτρεψε σε κλάσμα και έπειτα έκανε απλοποίηση δηλαδή "…60:4=$\frac{60}{4}=\frac{30}{2}=\frac{15}{1}$" ενώ ο Δ. έκανε λάθος υπολογισμό.

Και το τελευταίο έργο $(-\frac{7}{3}):\frac{5}{4}$, μόνο η Κ. (25%) αφού καθόρισε το πρόσημο, έπειτα εκτέλεσε τον Γραπτό Αλγόριθμο και υπολόγισε σωστά το αποτέλεσμα, ενώ οι υπόλοιποι τρεις (75%) έκαναν λάθος υπολογισμό.

Συνεχίζουμε με την περιγραφή και ανάλυση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου που συμμετείχαν στην έρευνα.

Ξεκινώντας με το 1ο έργο (-43+25), η μία (50%) μαθήτρια χωρίς να μετασχηματίσει το άθροισμα εφάρμοσε την στρατηγική της Αντιστάθμισης (Compensation method, N10C) εκτελώντας την πορεία "…-43+30=-13 και -13-5=-18" ενώ η δεύτερη μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό.

Στο δεύτερο έργο $(-\frac{2}{6}-\frac{7}{6})$ και οι δύο (100%) μαθήτριες εφάρμοσαν σωστά τον κανόνα της πρόσθεσης ομόσημων και ομώνυμων κλασμάτων.

Ομοίως και στο τρίτο $(\frac{3}{4}-\frac{5}{4})$ έργο οι δύο (100%) μαθήτριες έκαναν χρήση του κανόνα της πρόσθεσης ετερόσημων και ομώνυμων κλασμάτων και βρήκαν το σωστό εξαγόμενο. Επιπλέον η μία από τις δύο μαθήτριες προχώρησε και σε απλοποίηση του αποτελέσματος.

Στο τέταρτο έργο (-33-19) η μία (50%) μαθήτρια χωρίς να μετασχηματίσει το άθροισμα εφάρμοσε την στρατηγική του διαχωρισμού (Split method, 1010) και βρήκε το σωστό εξαγόμενο. Η περιγραφή της για την πορεία της σκέψης της ήταν "...-40+20=-20, -3+5=2 άρα -20+2=-18". Η δεύτερη μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό.

Στο πέμπτο έργο $(\frac{3}{5}-\frac{8}{3})$ και δυο (100%) μαθήτριες έκαναν λάθος υπολογισμό.

Προχωρώντας στο 6ο έργο $(-\frac{4}{5}-\frac{9}{2})$ η μία (50%) μαθήτρια εφάρμοσε σωστά τον κανόνα της πρόσθεσης ομόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων ενώ η δεύτερη 50% μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό.

Στο έβδομο έργο (- $\frac{2}{3}$) x $\frac{4}{3}$ και οι δύο (100%) μαθήτριες εφάρμοσαν σωστά τον κανόνα πολλαπλασιασμού των προσήμων και έπειτα πολλαπλασίασαν σωστά τα κλάσματα.
Ομοίως και στο όγδοο έργο (-5 x21) και οι δύο (100%) μαθήτριες μετασχημάτισαν σωστά το γινόμενο και έπειτα χρησιμοποίησαν και οι δύο την στρατηγική της διάσπασης με βάση την θεσιακή αξία ΑΔ, λέγοντας: 5x21=(5x20)+(5x1)=100+5=105.
Για το ένατο έργο (- $\frac{4}{9}$)x $\frac{5}{2}$ και οι δύο (100%) μαθήτριες καθόρισαν το πρόσημο του γινομένου και έπειτα εφάρμοσαν τον κανόνα πολλαπλασιασμού κλασμάτων βρίσκοντας το σωστό γινόμενο.
Περνώντας στην διαίρεση και στο 10^{ο} έργο (- $\frac{2}{5}$): $\frac{4}{2}$ η μία (50%) μαθήτρια έκανε σωστή χρήση της στρατηγικής της εκτέλεσης του Γραπτού Αλγόριθμου, ενώ η δεύτερη (50%) μαθήτρια έκανε χρήση της Ολιστικής στρατηγικής λέγοντας: …- $\frac{2}{5}$: $\frac{4}{2}$=- $\frac{2}{5}$: 2= - $\frac{1}{5}$.
Και οι δύο μαθήτριες δεν προκαθόρισαν το πρόσημο του πηλίκου.
Στο 11^{ο} έργο (-60:4), οι δύο (100%) μαθήτριες πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του πηλίκου και έπειτα η μία χρησιμοποίησε την άμεση ανάκληση και η δεύτερη περιέγραψε την στρατηγική της ως "…15x2=30, 30+30=60 άρα το αποτέλεσμα είναι -15".
Και στο τελευταίο έργο (- $\frac{7}{3}$): $\frac{5}{4}$, οι μαθήτριες πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του αποτελέσματος και συνεχίζοντας η μία εκτέλεσε σωστά τον γραπτό αλγόριθμο ενώ η δεύτερη μετέτρεψε την διαίρεση σε σύνθετο κλάσμα και κατόπιν υπολόγισε το αποτέλεσμα.
Συνεχίζοντας με τους μαθητές του Λυκείου και πιο ειδικά με αυτούς(2) της Α΄ Λυκείου, στο πρώτο έργο (-43+25) και οι δύο (100%) μετασχημάτισαν το άθροισμα των ακεραίων σε διαφορά φυσικών αριθμών και ακολούθως η μία μαθήτρια εφάρμοσε την μικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης (Split-Jump method,10S) λέγοντας "…43-25=40-25+3=15+3=18" ενώ ο δεύτερος μαθητής χρησιμοποίησε τη νοητική αναπαράσταση του Γραπτού Αλγόριθμου.
Στο δεύτερο έργο (- $\frac{2}{6}$ - $\frac{7}{6}$) και οι δύο (100%) μαθητές εφάρμοσαν σωστά τον κανόνα πρόσθεσης ομόσημων και ομώνυμων κλασμάτων.
Συνεχίζοντας με το τρίτο έργο ($\frac{3}{4}$ - $\frac{5}{4}$), οι εν λόγω μαθητές (100%) χρησιμοποίησαν τον κανόνα πρόσθεσης ομώνυμων και ετερόσημων κλασμάτων, βρίσκοντας το σωστό εξαγόμενο.
Στο τέταρτο έργο (-33-19) και οι δύο μαθητές μετασχημάτισαν την πράξη μεταξύ των ακεραίων σε πρόσθεση μεταξύ φυσικών αριθμών. Έπειτα ο ένας εφάρμοσε την στρατηγική της εξισορρόπησης (Leveling, L) λέγοντας: 33+7+12= 40+12=52 ενώ ο άλλος μαθητής εφάρμοσε την στρατηγική της αντιστάθμισης περιγράφοντας "...33+20=53, 53-1=52".
Στο πέμπτο ($\frac{3}{5}$ - $\frac{8}{3}$) έργο, η μία (50%) μαθήτρια εφάρμοσε σωστά τον κανόνα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων ο άλλος (50%) μαθητής έκανε λάθος υπολογισμό.
Ομοίως και στο 6^{ο} έργο (- $\frac{4}{5}$ - $\frac{9}{2}$), η μαθήτρια (50%) έκανε σωστή εφαρμογή του κανόνα πρόσθεσης ομόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων ενώ ο δεύτερος μαθητής (50%) έκανε λάθος υπολογισμό.
Στο 7^{ο} έργο (- $\frac{2}{3}$) x $\frac{4}{3}$ και οι δύο 100% έκαναν σωστή εφαρμογή του κανόνα πολλαπλασιασμού ετερόσημων κλασμάτων.

Η στρατηγική και των δύο (100%) μαθητών στο 8ο έργο (-5 x21) ήταν ακριβώς η ίδια, αφού πρώτα και οι δύο καθόρισαν το πρόσημο του γινομένου και έπειτα εφάρμοσαν σωστά την Στρατηγική της Διάσπασης με βάση τη θεσιακή αξία ΑΔ, λέγοντας: 5x21=(5x20)+(5x1)=100+5=105.

Στο ένατο έργο (-$\frac{4}{9}$)x $\frac{5}{2}$, εφάρμοσαν σωστά και οι δύο (100%) μαθητές τον κανόνα διαίρεσης-πολλαπλασιασμού ετερόσημων κλασμάτων, όπως και στο 10^{ο} έργο (-$\frac{2}{5}$): $\frac{4}{2}$ οι δύο (100%) μαθητές εκτέλεσαν σωστά τον Γραπτό Αλγόριθμου και βρήκαν το σωστό εξαγόμενο.

Στο 11ο έργο (-60:4) , οι δύο (100%) μαθητές πρώτα καθόρισαν το πρόσημο της διαίρεσης και έπειτα η μαθήτρια (50%) την μετέτρεψε σε κλάσμα και με συνεχείς απλοποιήσεις βρήκε το εξαγόμενο λέγοντας σχετικά "…$\frac{60}{4}$=$\frac{30}{2}$=$\frac{15}{1}$ ", ενώ ο μαθητής έκανε διαδοχικές διαιρέσεις και βρήκε το αποτέλεσμα περιγράφοντας τη σκέψη του "60:2=30, 30:2=15".

Και στο τελευταίο έργο (-$\frac{7}{3}$): $\frac{5}{4}$ και οι δύο (100%) μαθητές εκτέλεσαν τον Γραπτό Αλγόριθμο.

Περνώντας στους μαθητές (5) της Β΄ Λυκείου, στο πρώτο έργο (-43+25) είχαμε τρεις (60%) μαθητές που δεν μετασχημάτισαν την πράξη και στη συνέχεια οι δύο (40%) από αυτούς χρησιμοποίησαν τη στρατηγική του Διαχωρισμού ΑΔ (Split method,1010) για τον υπολογισμό του αποτελέσματος λέγοντας:...-40+20=-20, -3+5=2 και -20+2=-18. Ο τρίτος (20%) από τους παραπάνω χρησιμοποίησε την στρατηγική της συσσώρευσης (Jump method,N10) και περιγράφοντας την σκέψη του είπε:...-43+20=-23, -23+5=-18. Η τέταρτη (20%) μαθήτρια μετασχημάτισε την πράξη και έπειτα έκανε χρήση της νοητικής αναπαράστασης του Γραπτού Αλγόριθμου. Η πέμπτη (20%) μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό.

Συνεχίζοντας στο δεύτερο έργο (-$\frac{2}{6}$ - $\frac{7}{6}$) και οι πέντε (100%) μαθητές έκαναν σωστή χρήση του κανόνα της πρόσθεσης ομόσημων και ομώνυμων κλασμάτων.

Στο τρίτο έργο ($\frac{3}{4}$ - $\frac{5}{4}$), οι τέσσερις (80%) μαθητές χρησιμοποίησαν τον κανόνα πρόσθεσης ετερόσημων και ομώνυμων κλασμάτων, ενώ ο πέμπτος (20%) μαθητής περιγράφει την σκέψη του ως έξης:…$\frac{3}{4}$ - $\frac{5}{4}$ = $\frac{3}{4}$ - $\frac{3}{4}$ - $\frac{2}{4}$ =- $\frac{2}{4}$,δημιουργώντας δηλαδή αντίθετους αριθμούς.

Στο τέταρτο έργο (-33-19), οι τέσσερις (80%) μαθητές μετασχημάτισαν την πράξη και έπειτα για τον υπολογισμό της οι δύο (40%) μαθητές χρησιμοποίησαν την στρατηγική του Διαχωρισμού ΑΔ (Split method,1010) λέγοντας:...30+10=40, 3+9=12 επομένως 40+12=52, ενώ ο τρίτος (20%) χρησιμοποίησε την νοητική αναπαράσταση του Γραπτού αλγόριθμου και ο τέταρτος (20%) χρησιμοποίησε την στρατηγική της εξισορρόπησης (Leveling, L) λέγοντας ότι: 33+19=32+20=52. Ο πέμπτος (20%) μαθητής, υπολόγισε το εξαγόμενο χωρίς να μετασχηματίσει την πράξη και στη συνέχεια χρησιμοποίησε την στρατηγική του διαχωρισμού ΑΔ (Split method, 1010) διατυπώνοντας την σκέψη του ως εξής "-30-10=-40, -3-9=-12 άρα -40-12=-52".

Στο πέμπτο έργο ($\frac{3}{5}$ - $\frac{8}{3}$) οι τέσσερις (80%) μαθητές υπολόγισαν σωστά το εξαγόμενο χρησιμοποιώντας τους κανόνες πρόσθεσης ετερόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων ενώ ένας μαθητής (20%) έκανε λάθος υπολογισμό.

Συνεχίζοντας με το έκτο έργο (- $\frac{4}{5}$ - $\frac{9}{2}$) , οι τρεις (60%) μαθητές της Β΄ Λυκείου χρησιμοποίησαν τον κανόνα της πρόσθεσης ομόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων. Η τέταρτη (20%) μαθήτρια πρώτα μετέτρεψε τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και έπειτα χρησιμοποίησε τους ίδιους με παραπάνω κανόνες. Και τέλος η πέμπτη (20%) μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό.

Στο έβδομο έργο (- $\frac{2}{3}$) x $\frac{4}{3}$, υπήρξε πλήρης ταύτιση των στρατηγικών αφού και οι πέντε (100%) μαθητές έκαναν χρήση των κανόνων του πολλαπλασιασμού ετερώνυμων κλασμάτων.

Στο όγδοο έργο (-5x21), οι τρεις (60%) μαθητές πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του γινομένου και έπειτα χρησιμοποίησαν την στρατηγική της διάσπασης με βάση τη θεσιακή αξία ΑΔ, λέγοντας ότι "...(5x20)+(5x1)=100+5=105". Ο τέταρτος (20%) μαθητής υπολόγισε το γινόμενο χωρίς να καθορίσει το πρόσημο του αποτελέσματος, έπειτα χρησιμοποίησε την ίδια στρατηγική με τους παραπάνω συμμαθητές του μόνο που εκτέλεσε πρώτα τις μονάδες και μετά τις δεκάδες, και μας περιγραφή την σκέψη του λέγοντας "(-5x1)+(-5x20)=-5+(-100)=-105". Η πέμπτη (20%) μαθήτρια έκανε λάθος υπολογισμό.

Η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε για το ένατο έργο (- $\frac{4}{9}$)x $\frac{5}{2}$ ήταν η ίδια και από τους πέντε (100%) μαθητές και αυτή ήταν ο κανόνας πολλαπλασιασμού ετερόσημων κλασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τρεις (60%) μαθητές προχώρησαν και στην απλοποίηση του εξαγόμενο.

Συνεχίζοντας με τις πράξεις των διαιρέσεων και ξεκινώντας από το δέκατο έργο (- $\frac{2}{5}$): $\frac{4}{2}$, τρεις (60%) μαθητές εκτέλεσαν τον γραπτό αλγόριθμο και οι δύο από αυτούς προχώρησαν και σε απλοποίηση του αποτελέσματος. Οι υπόλοιποι δύο (40%) μαθητές μετέτρεψαν την διαίρεση σε σύνθετο κλάσμα και στην συνέχεια με την βοήθεια των άκρων και μέσων όρων το μετέτρεψαν σε απλό κλάσμα το οποίο και στο τέλος το απλοποίησαν..

Στο εντέκατο έργο (-60:4) και οι πέντε (100%) μαθητές πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του αποτελέσματος και έπειτα προχώρησαν στην επιλογή της στρατηγικής για τον υπολογισμό του. Δύο μαθητές (40%) χρησιμοποίησαν την άμεση ανάκληση αφού ήξεραν το αποτέλεσμα όπως σχολίασαν οι ίδιοι. Η τρίτη (20%) μαθήτρια εκτέλεσε τον Γραπτό Αλγόριθμο για τον υπολογισμό του έργου. Ο τέταρτος (20%) μαθητής διέσπασε τον διαιρετέο και έκανε τον υπολογισμό ως εξής "60:4; 40:4=10 και 20:4=5, 10+5=15". Και τέλος ο πέμπτος (20%) μαθητής έκανα ακριβώς το ίδιο με τον προηγούμενο, μόνο που την διαίρεση την είχε μετατρέψει σε κλάσμα και έπειτα προχώρησε στην διάσπασή του. Η περιγραφή της σκέψης του έχει ως εξής "$\frac{60}{4}$=$\frac{40}{4}$+$\frac{20}{4}$=10+5=15".

Και τέλος στο δωδέκατο έργο (- $\frac{7}{3}$): $\frac{5}{4}$, οι τρεις (60%) μαθητές το μετέτρεψαν σε σύνθετο κλάσμα και ακολούθως πολλαπλασίασαν τους άκρους και μέσους όρους για να το μετατρέψουν τελικά σε απλό κλάσμα. Ενώ οι υπόλοιποι δύο (40%) μαθητές εκτέλεσαν τον Γραπτό Αλγόριθμο.

Η επόμενη ηλικιακή ομάδα είναι οι μαθητές (2) της Γ΄ Λυκείου, στο πρώτο έργο (-43+25) και οι δύο (100%) μαθητές δεν μετασχημάτισαν την πράξη, ο ένας (50%) μαθητής συνέχισε χρησιμοποιώντας την στρατηγική του Διαχωρισμού ΑΔ (Split method, 1010) και εξηγώντας τη σκέψη του είπε "...-40+2=-20, -3+5=2, -20+2=-18". Ο δεύτερος (50%) μαθητής, χρησιμοποίησε την στρατηγική της Αντιστάθμισης (Compensation method, N10C) λέγοντας "...-43+25; -43+30=-13 άρα -13-5=-18".

Στο δεύτερο έργο (- $\frac{2}{6}$ - $\frac{7}{6}$) και οι δύο (100%) μαθητές εφάρμοσαν σωστά τους κανόνες πρόσθεσης ομόσημων και ομώνυμων κλασμάτων. Μάλιστα ο ένας (50%) από τους παραπάνω προχώρησε και σε απλοποίηση του εξαγόμενου.

Ομοίως και στο τρίτο έργο ($\frac{3}{4}$ - $\frac{5}{4}$) οι δύο (100%) μαθητές χρησιμοποίησαν σωστά τους κανόνες πρόσθεσης ετερόσημων και ομώνυμων κλασμάτων.
Και οι δύο (100%) μαθητές στο τέταρτο έργο (-33-19) μετασχημάτισαν την πράξη των ακέραιων αριθμών σε πράξη μεταξύ φυσικών αριθμών. Ακολούθως ο ένας (50%) έκανε χρήση της στρατηγικής της Συσσώρευσης ΑΔ (Jump method, N10) λέγοντας "...33+10=43,43+9=52", Ενώ ο δεύτερος (50%) χρησιμοποίησε την στρατηγική της Αντιστάθμισης (Compensation method, N10C) και εξηγώντας ο μαθητής είπε "...33+20=53, 53-1=52".
Στο πέμπτο έργο ($\frac{3}{5}$ - $\frac{8}{3}$), ο ένας (50%) μαθητής χρησιμοποίησε τους κανόνες πρόσθεσης ετερόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων και ο άλλος (50%) έκανε λάθος υπολογισμό.
Συνεχίζοντας στο έκτο έργο (- $\frac{4}{5}$ - $\frac{9}{2}$) αλλά έβδομο (- $\frac{2}{3}$) x $\frac{4}{3}$ και στο έβδομο έργο έβδομο και οι δύο (100%) μαθητές χρησιμοποίησαν τον κανόνα πρόσθεσης ομόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων και του κανόνα πολλαπλασιασμού ετερόσημων αριθμών αντίστοιχα.
Στο όγδοο έργο (-5x21) και οι δύο (100%) μαθητές καθόρισαν το πρόσημο του γινομένου και έπειτα εφάρμοσαν την στρατηγική της Διάσπασης με βάση τη θεσιακή αξία ΑΔ και εξηγούν την σκέψη τους "...(5x20)+(5 x1)=100+5=105".
Στο ένατο έργο (- $\frac{4}{9}$)x $\frac{5}{2}$, υπήρξε ταύτιση σκέψεων αφού και οι δύο (100%) μαθητές χρησιμοποίησαν τους κανόνες πολλαπλασιασμού ετερόσημων κλασμάτων και κατόπιν απλοποίησαν και οι δύο το εξαγόμενο.
Στο δέκατο (- $\frac{2}{5}$): $\frac{4}{2}$ και δωδέκατο έργο (- $\frac{7}{3}$): $\frac{5}{4}$, ο ένας (50%) μαθητής εκτέλεσε τον Γραπτό Αλγόριθμο ενώ ο δεύτερος (50%) το μετέτρεψε σε σύνθετο κλάσμα και έπειτα σε απλό με την βοήθεια των μέσων και άκρων όρων, στο τέλος έκανε και τις σχετικές απλοποιήσεις.
Στο ενδέκατο έργο (-60:4), ο ένας (50%) μαθητής καθορίζει το πρόσημο του πηλίκου, έπειτα το μετατρέπει σε κλάσμα και με διαδοχικές απλοποιήσεις υπολογίζει το πηλίκο. Ο δεύτερος (50%) μαθητής κρατώντας το πρόσημο του διαιρετέου, μετατρέπει την διαίρεση σε κλάσμα και στην συνέχεια το διασπά. Ο εν λόγω μαθητής περιγράφει την σκέψη του ως εξής "...-60:4=$\frac{-60}{4}$=$\frac{-40}{4}$+$\frac{-20}{4}$ =-10+(-5)=-15".
Και τέλος θα αναφέρουμε τις στρατηγικές που χρησιμοποίησε η τελευταία ομάδα των τεσσάρων (4) ατόμων που συμμετείχαν στη έρευνα και είναι αυτή των Μαθηματικών. Ξεκινώντας από το πρώτο έργο (-43+25), οι τρεις (75%) μετασχημάτισαν την πράξη και έπειτα ο ένας (25%) χρησιμοποίησε τη νοητική αναπαράσταση του Γραπτού Αλγόριθμου ενώ οι υπόλοιποι δύο (50%) Μαθηματικοί εφάρμοσαν την στρατηγική Αφαίρεση με πρόσθεση (Adding-on method, A10) και περιγράφουν την σκέψη τους ως "...25+5=30, 30+13=43,13+5=18". Τέλος είχαμε μία (25%) λανθασμένη απάντηση μάλλον λόγω βιασύνης.
Στο δεύτερο έργο (- $\frac{2}{6}$ - $\frac{7}{6}$) και οι τέσσερις (100%) Μαθηματικοί εφάρμοσαν με επιτυχία τον κανόνα πρόσθεσης ομόσημων και ομώνυμων κλασμάτων.
Το ίδιο συνέβη και στο τρίτο ($\frac{3}{4}$ - $\frac{5}{4}$) έργο όπου πάλι χρησιμοποιήθηκε η ίδια στρατηγική, του κανόνα πρόσθεσης ετερόσημων και ομώνυμων κλασμάτων από όλους (100%) τους Μαθηματικούς.
Στο τέταρτο έργο (-33-19) όλοι (100%) οι Μαθηματικοί μετασχημάτισαν την πράξη και οι δύο (50%) από αυτούς συνέχισαν με την νοητική αναπαράσταση του Γραπτού Αλγόριθμου,

ο τρίτος (25%) χρησιμοποίησε την στρατηγική της συσσώρευσης (Jump method,N10) περιγράφοντας την σκέψη του ως "...33+10=43, 43+9=52". Και η τέταρτη (25%) μαθηματικός έκανε χρήση της στρατηγικής της εξισορρόπησης (Leveling, L) λέγοντας ότι "...33+19=32+20=52".

Στο πέμπτο έργο ($\frac{3}{5}$ - $\frac{8}{3}$) όλοι (100%) οι Μαθηματικοί βρήκαν το ίδιο σωστό αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας όλοι (100%) τον ίδιο κανόνα πρόσθεσης ετερόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων.

Παρόμοια ήταν και η υπολογιστική τους συμπεριφορά και στο έκτο έργο (- $\frac{4}{5}$ - $\frac{9}{2}$), όπου οι τρεις (75%) χρησιμοποιώντας τον κανόνα πρόσθεσης ομόσημων και ετερώνυμων κλασμάτων υπολόγισαν το σωστό αποτέλεσμα, ενώ η τέταρτη (25%) Μαθηματικός μετέτρεψε πρώτα τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς και έπειτα προχώρησε στην πρόσθεση ομόσημων αριθμών.

Στο έβδομο έργο (- $\frac{2}{3}$) x $\frac{4}{3}$ υπήρξε πλήρη ταύτιση των σκέψεών αφού όλοι (100%) χρησιμοποίησαν τον κανόνα πολλαπλασιασμού ετερόσημων αριθμών.

Προχωρώντας στο όγδοο έργο (-5x21), όλοι (100%) οι Μαθηματικοί καθόρισαν αρχικά το πρόσημο του γινομένου και έπειτα οι τρεις (75%) χρησιμοποίησαν την στρατηγική της Διάσπασης με βάση τη θεσιακή αξία ΑΔ, δηλαδή σκέφτηκαν "...5x21=(5x20)+(5 x1)=100+5=105" ενώ η τέταρτη (25%) Μαθηματικός εκτέλεσε νοερά τον Γραπτό Αλγόριθμο με χαρτί και μολύβι.

Στο ένατο έργο (- $\frac{4}{9}$)x $\frac{5}{2}$, όλοι (100%) οι Μαθηματικοί εφάρμοσαν τον κανόνα πολλαπλασιασμού ετερόσημων αριθμών, σημειώνοντας ότι η μία (25%) από αυτούς προχώρησε και σε απλοποίηση του γινομένου.

Στο δέκατο έργο(- $\frac{2}{5}$): $\frac{4}{2}$, όλοι (100%) εκτέλεσαν τον γραπτό αλγόριθμο και στη συνέχεια προχώρησαν σε απλοποίηση του εξαγόμενου.

Την ίδια ακριβώς στρατηγική χρησιμοποίησαν πάλι όλοι (100%) οι Μαθηματικοί και στο δωδέκατο έργο (- $\frac{7}{3}$): $\frac{5}{4}$ με την εκτέλεση του Γραπτού Αλγόριθμου.

Στο ενδέκατο έργο (-60:4) , αρχικά όλοι (100%) καθόρισαν το πρόσημο του αποτελέσματος με τους τρεις (75%) να γνωρίζουν ήδη το αποτέλεσμα (Άμεση Ανάκληση) και η τέταρτη (25%) μετέτρεψε την διαίρεση σε κλάσμα και στη συνέχεια έκανε διαδοχικές απλοποιήσεις μέχρι να βρει το αποτέλεσμα. Μας περιέγραψε τη σκέψη της όπως "...$\frac{60}{4}$=$\frac{30}{2}$=$\frac{15}{1}$"

7. Συμπεράσματα-Συζήτηση

Η έρευνα που διεξήχθη αφορούσε τη μελέτη των νοερών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές και οι ενήλικοι (Μαθηματικοί) στην πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση ρητών αριθμών, αλλά και αν υπήρξαν εναλλακτικές στρατηγικές υπολογισμού των εξαγώμενων. Αρχικά, μελετήθηκαν οι στρατηγικές Προσέγγισης που χρησιμοποίησαν οι ερωτώμενοι, δηλαδή στον καθορισμό του προσήμου του αποτελέσματος και έπειτα στην πράξη που θα διεξαχθεί μεταξύ των απολύτων τιμών των ρητών αριθμών. Σε δεύτερο στάδιο μελετήθηκαν οι στρατηγικές Μετασχηματισμού που χρησιμοποίησαν οι ερωτώμενοι και τέλος μελετήθηκαν οι εναλλακτικές στρατηγικές υπολογισμού των αποτελεσμάτων.

Το δείγμα της έρευνας (ν=20) αποτελούνταν από 15 μαθητές της Β΄βάθμιας εκπαίδευσης (Γυμνάσιο-Λύκειο) και 5 Μαθηματικούς. Το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από 12 έργα. Τα πρώτα 6, αφορούσαν στην πρόσθεση και στην αφαίρεση ρητών αριθμών, ενώ τα τελευταία 6 αφορούσαν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ρητών αριθμών.

Τα λάθη που έκαναν οι ερωτώμενοι οφείλονταν είτε σε λανθασμένο υπολογισμό (9, 3,75%) είτε σε λάθος εφαρμογή των νοερών στρατηγικών (7, 2,9%). Προφανώς, η λανθασμένη εφαρμογή των στρατηγικών έχει μεγαλύτερη βαρύτητα. Έτσι λοιπόν είχαμε λανθασμένη εφαρμογή της στρατηγικής Διαχωρισμού (1010) στο 1ο έργο, λανθασμένη εφαρμογή της στρατηγικής Αρίθμησης στο 2ο έργο, ενώ τα υπόλοιπα λάθη έγιναν στην εφαρμογή της στρατηγικής Προσέγγισης στο 7ο, 9ο, 10ο, 11ο και 12ο έργο, δηλαδή στη λανθασμένη επιλογή πρόσημου του αποτελέσματος, από τον ίδιο μαθητή.

Η συμπεριφορά των ερωτώμενων για τον τρόπο υπολογισμού των έργων ήταν η αναμενόμενη καθώς η πλειονότητα τους αρχικά καθόρισε το πρόσημο του αποτελέσματος (Μετατροπή ως στρατηγική Προσέγγισης) και έπειτα έκαναν χρήση των κανόνων πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης φυσικών αριθμών. Βέβαια υπήρξαν και μαθητές που χρησιμοποίησαν άλλες στρατηγικές Προσέγγισης όπως το μοντέλο του Θερμομέτρου, αλλά και αυτό της Αριθμογραμμής.

Στο πλαίσιο της βιβλιογραφικής αναζήτησης για τις έρευνες που αφορούν στην πρόσθεση των ακεραίων αριθμών, η μόνη έρευνα που υπάρχει είναι αυτή του Rezat (2011). Τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας συμπίπτουν με αυτά του Rezat καθώς και αυτός υποστηρίζει ότι οι μαθητές πρώτα καθορίζουν το πρόσημο του αθροίσματος, δηλαδή χρησιμοποιούν ως στρατηγική Προσέγγισης αυτή της Μετατροπής και έπειτα χρησιμοποιούν τις στρατηγικές Μετασχηματισμού για να υπολογίσουν το άθροισμα, στο πλαίσιο πλέον των φυσικών αριθμών. Μια επιπλέον βοήθεια προς τους μαθητές για τον υπολογισμό αθροισμάτων είναι η χρήση του "πλην" ως αντίθετη ποσότητα, δηλαδή α-β=-(β-α) ή -α-β=-(α+β).

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου, ελέγχονται οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Από τα 6 έργα, τα τέσσερα ανάγονται τελικά σε πολλαπλασιασμού με μονοψήφιους παράγοντες, επομένως γίνεται εκτενής χρήση της προπαίδειας. Ο υπολογισμός των αριθμητικών γεγονότων της προπαίδειας καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τη μνήμη, όπως υποστηρίζει ο Λεμονίδης (2013) ενώ και η καλή της γνώση παίζει καταλυτικό ρόλο στην καλή επίδοση των μαθητών (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Έτσι λοιπόν οι περισσότεροι ερωτώμενοι για τον υπολογισμό των γινομένων στηρίχθηκαν στην ανάκληση και όχι στην εφαρμογή κάποιας στρατηγικής, όπως προκύπτει από τις στρατηγικές που ακολούθησαν για τον υπολογισμό των γινομένων.

Οι μαθητές για τον υπολογισμό των έργων που αφορούσαν τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση, έκαναν χρήση των ήδη γνωστών στρατηγικών του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, όπως αυτές κατατάσσονται στο βιβλίο του Λεμονίδη (2013, σελ. 257).

Δεν συνέβη όμως το ίδιο και με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, όπου η ευρηματικότητα των μαθητών είχε ως αποτέλεσμα τη σύλληψη και εφαρμογή έξι νέων στρατηγικών προσθέσεις ακέραιων αριθμών, οι οποίες είναι οι παρακάτω:

- Στρατηγική Αντιστάθμισης (N10C) χωρίς Μετατροπή
- Στρατηγικής Διαχωρισμού από αριστερά προς τα δεξιά σε δεκάδες μονάδες (1010) με χρήση του ελιγμού του Kye χωρίς Μετατροπή
- Στρατηγικής Πέρασμα από το μηδέν, χωρίς Μετατροπή με χρήση του ελιγμού του Kye
- Στρατηγική Πέρασμα από το 10 (A10) με πρόσθεση και χρήση της νοερής αριθμογραμμής- μοντέλο Θερμοκρασίας

- Στρατηγική Πέρασμα από το μηδέν, με Μετατροπή
- Στρατηγική Προσέγγισης της νοερής αριθμογραμμής χωρίς Μετατροπή

Στο σύνολο της έρευνας οι ερωτηθέντες έκαναν χρήση των παρακάτω στρατηγικών Μετασχηματισμού για την πρόσθεση των φυσικών αριθμών, είτε με την βοήθεια της Μετατροπής είτε όχι:

- Στρατηγική Διαχωρισμού από δεξιά στα αριστερά (u-1010)
- Στρατηγική Διαχωρισμού από αριστερά στα δεξιά (1010)
- Στρατηγική Συσσώρευσης από δεξιά στα αριστερά (u-N10)
- Στρατηγική Συσσώρευσης από αριστερά στα δεξιά (N10)
- Στρατηγική Πέρασμα από το 10 (A10)
- Μικτή Στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης (10s)
- Στρατηγική της Αντιστάθμισης (N10C)
- Στρατηγική της Εξισορρόπησης
- Στρατηγική της Αρίθμησης με μονάδες ή με δεκάδες ή με άλλους αριθμούς
- Στρατηγική της νοητικής εικόνας του αλγόριθμου με χαρτί και μολύβι
- Στρατηγική Πέρασμα από το μηδέν

Ενώ στο πλαίσιο του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, οι ερωτηθέντες, αφού πρώτα καθόρισαν το πρόσημο του αποτελέσματος, έπειτα έκαναν χρήση των παρακάτω στρατηγικών για τον υπολογισμό τους:

- Στρατηγικές Αρίθμησης
- Άμεση Ανάκληση
- Στρατηγικές Διάσπασης ενός αριθμού με βάση θεσιακή αξία (διάσπαση ΔΑ)
- Στρατηγικές Διάσπασης ενός αριθμού με βάση θεσιακή αξία (διάσπαση ΑΔ)
- Διάσπαση και των δύο αριθμών με βάση την θεσιακή αξία
- Διάσπαση σε αριθμούς μη-δεκάδων
- Ολιστικές στρατηγικές ή αντιστάθμισης
- Μετατροπή του κλάσματος ή του ποσοστού σε δεκαδικό (εργαλειακή στρατηγική)
- Μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα (εργαλειακή στρατηγική)
- Δημιουργία Σύνθετου Κλάσματος (εργαλειακή στρατηγική)
- Εκτέλεση του Γραπτού Αλγόριθμου (εργαλειακή στρατηγική)

Όσον αφορά τις εναλλακτικές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι ερωτηθέντες για τον υπολογισμό των έργων. Διαπιστώνουμε ότι χρησιμοποίησαν τουλάχιστον τρεις εναλλακτικές στρατηγικές έως και 6 σε όλο το φάσμα του ερωτηματολογίου. Υπήρξε και μία μαθήτρια που χρησιμοποίησε 7 εναλλακτικές στρατηγικές για τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και επομένως μπορεί να χαρακτηριστεί ως επιδέξια αφού διαθέτει μία μεγάλη γκάμα στρατηγικών και μπορεί να επιλέξει την καταλληλότερη για τον εκάστοτε υπολογισμό, διαπίστωση που συμφωνεί με τα συμπεράσματα των Hope & Sherril (1987) για τον παραπάνω χαρακτηρισμό της εν λόγω μαθήτριας.

Η ευελιξία των ερωτηθέντων, δεν μελετήθηκε στην παρούσα έρευνα, καθώς αυτή επηρεάζεται από το πλήθος των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκε (καταμετρήθηκε) αλλά και από τη συνειδητή επιλογή τους και την αποτελεσματικότητά τους (δεν καταμετρήθηκε) (Λεμονίδης, 2013).

Από τις νέες στρατηγικές που παρατηρήθηκαν, αξίζει να αναφέρουμε τον δημιουργικό ελιγμό του Kye ο οποίος πρωτοαναφέρθηκε σε έρευνα των Cochran, Barson & Davis (1970), όπου ο μαθητής Kye κατά τον υπολογισμό της αφαίρεσης 64-28, πρώτα υπολόγισε 60-20 και έπειτα το 4-8 και τελικά πρόσθεσε το 40 με το με αρνητικό 4.

Επίσης, η στρατηγική του Πέρασμα από το μηδέν, την οποία αναφέρει ο Rezat (2011) στην εργασία του, οι μαθητές κάνουν χρήση της ιδιότητας n+(-n)=0. Δηλαδή διασπούν τους ρητούς όρους με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργούνται αντίθετοι αριθμοί και επομένως απαλοιφή αυτών τών όρων αφού το άθροισμά τους είναι μηδενικό.

Κλείνοντας, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι μαθητές κατά την εκτέλεση των πράξεων είχαν δικλείδες ασφαλείας ως προς τον έλεγχο των αποτελεσμάτων αλλά και των στρατηγικών. Όταν καλούνταν να περιγράψουν, άρα και να δικαιολογήσουν, τον τρόπο υπολογισμού των πράξεων, τότε όσοι είχαν λανθασμένο αποτέλεσμα ή λανθασμένο τρόπο υπολογισμού διόρθωναν μόνοι τους τα λάθη τους και έδιναν βεβαίως τα σωστά αποτελέσματα. Έτσι λοιπόν ο αυτοέλεγχος των μαθητών αλλά και η αξιολόγηση των λαθών, έχει ιδιαίτερη βαρύτητα καθώς προάγει τη σημασία των νοερών υπολογισμών. Όπως υποστηρίζει ο Olsen (2015) αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους, η αίσθηση του αριθμού και γενικά βελτιώνεται η αλγεβρική σκέψη.

8. Περιορισμοί της έρευνας

Τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης υπόκεινται σε αρκετούς περιορισμούς. Ως περιορισμούς ο Creswell (2011) επισημαίνει τα ενδεχόμενα προβλήματα ή αδυναμίες που μπορεί να αντιμετωπίσει ο ερευνητής και να επηρεάσουν τα αποτελέσματα της έρευνας.

Η περίοδος διεξαγωγής της έρευνας ήταν Μάρτιος- Απρίλιος του 2020, λόγω του γενικευμένου lockdown η επιλογή του δείγματος αλλά και η επικοινωνία- συνέντευξη με τους μαθητές έγινε με δυσκολία, λόγω πρωτόγνωρων καταστάσεων (Covid-19), με ηλεκτρονικά μέσα (Skype). Το δείγμα αν και είναι ικανοποιητικό, τα συμπεράσματά του δεν μπορούν να γενικευθούν καθότι δεν είναι αντιπροσωπευτικό. Επίσης, το δείγμα ήταν από συγκεκριμένα σχολεία της πόλης της Φλώρινας, πράγμα που συνιστά έναν ακόμα περιορισμό στην έρευνα.

Επιπρόσθετα, το ενδιαφέρον αλλά και το άγχος των μαθητών, παρόλο που η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν εθελοντική, ήταν εστιασμένο στις επιδόσεις τους αν και στην αρχή της κάθε συνέντευξης είχε εξηγηθεί ο σκοπός της. Επίσης, ένας ακόμα παράγοντας που αρχικά φάνηκε ως πρόβλημα, ήταν ότι ο κατάλογος των νοερών στρατηγικών που αρχικά είχε ετοιμάσει ο ερευνητής δεν καλύπτει όλες τις περιπτώσεις των στρατηγικών που αναφέρουν οι μαθητές. Τελικά όμως, η αρχική δυσκολία, ανέδειξε την σύνθεση και τη δημιουργία νέων στρατηγικών.

Τέλος, κατά τη διάρκεια ανάλυσης των δεδομένων προέκυψαν στοιχεία, όπως η ευελιξία επιλογής των στρατηγικών και τα κριτήρια επιλογής τους, τα οποία όμως δεν αναλύθηκαν διότι δεν αποτελούσαν αντικείμενο της παρούσας έρευνας.

9. Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Όπως φαίνεται από τα συμπεράσματα της έρευνα οι μαθητές μπορούν να σκέφτονται και να εκτελούν νοερούς υπολογισμούς, πράγμα που δεν αξιοποιείται στο σχολείο. Κατά την ανάλυση των δεδομένων κάποιες κατηγορίες στρατηγικών δεν εμφανίστηκαν καθόλου, όπως η Μικτή στρατηγική Διαχωρισμού και Συσσώρευσης ενώ η εκτέλεση του Γραπτού Αλγόριθμου αποτελεί σταθερή αξία για τους μαθητές. Η πρακτική του σχολείου είναι να μην καλλιεργεί με ουσιαστικό τρόπο τους νοερούς υπολογισμούς αλλά να ενισχύει την αποστήθιση της προπαίδειας και να ενισχυθεί ως σίγουρη λύση την εφαρμογή του Γραπτού Αλγορίθμου για όλες τις πράξεις. Έτσι λοιπόν, ο Γραπτός αλγόριθμος υπερκαλύπτει τους νοερούς υπολογισμούς και στο τέλος τους υποκαθιστά, εμποδίζοντας την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στους μαθητές. Επομένως κρίνεται αναγκαίος ο επανασχεδιασμός των Προγραμμάτων Σπουδών των σχολείων με προτεραιότητα στην ανάδειξη των νοερών υπολογισμών και στην καλλιέργειά τους με απώτερο στόχο την βελτίωση της αίσθησης του αριθμού.

Πέρα από την μοναδική έρευνα που υπάρχει στη βιβλιογραφία για την πρόσθεση ακεραίων αριθμών αυτή του Rezat (2011), θα μπορούσαν να διεξαχθούν επιπλέον έρευνες που θα αφορούσαν τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση στο πλαίσιο των ρητών αριθμών και θα βοηθούσαν με χρήσιμες παρεμβάσεις και συμπεράσματα την εκπαιδευτική διαδικασία.

Μια πιο ολοκληρωμένη έρευνα θα μπορούσε να γίνει με μεγαλύτερο και αντιπροσωπευτικότερο δείγμα έτσι ώστε να έχουμε πιο έγκυρα αποτελέσματα τα οποία θα μπορούμε και να γενικεύσουμε. Οι παράγοντες που θα μπορούσαν να μελετηθούν σε μία πιο μεγάλης κλίμακα έρευνα είναι η σύνδεση και εφαρμογή των νοερών υπολογισμών με προβλήματα της καθημερινής ζωής των μαθητών, τα κριτήρια επιλογής των στρατηγικών υπολογισμού, η ανάδειξη και οι τρόποι άρσης των παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές τόσο για τους αρνητικούς αριθμούς και την κατανόηση τους όσο και για τις πράξεις μεταξύ τους. Μία ακόμη πρόταση θα ήταν η μελέτη των μαθητών που απαντούν στα διάφορα προβλήματα, κάνοντας χρήση συνδυασμούς διαφόρων νοερών στρατηγικών υπολογισμού. Τέλος θα είχε ενδιαφέρον μία μελέτη που θα αφορούσε τους δασκάλους, καθηγητές δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης καθώς και πολίτες διαφόρων κοινωνικών, επαγγελματικών, οικονομικών στρωμάτων για την εξαγωγή συμπερασμάτων όσον αφορά τη χρήση και την χρησιμότητα των νοερών υπολογισμών στην καθημερινότητα τους.

10. Ξένη Βιβλιογραφία

Ahi, B. (2016). A Study to Determine the Mental Models in Preschool Children's Conceptualization of a Desert Environment. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *8*(3), 333-350.

Akyüz, D., Stephan, M., & Dixon, J. K. (2012). The role of the teacher in supporting imagery in understanding integers. *Egitim Ve Bilim-Education and Science*, *37*(163), 268-282.

Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. In: I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary school* (pp. 184–194). Buckingham: Open University Press.

Badarudin, B. R. H., & Khalid, M. (2008). Using the Jar Model to Improve Students' Understanding of Operations on Integers. *PROCEEDINGS OF ICME-11–TOPIC STUDY GROUP 10 RESEARCH AND DEVELOPMENT IN THE TEACHING AND LEARNING OF NUMBER SYSTEMS AND ARITHMETIC*, 85.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, *93*(4), 373-397.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise*, 1-33

Barsalou, L. W. (1992). Cognitive Psychology: An overview for Cognitive Scientists. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Beak, J. M. (1998) Children's Invented Algorithms for Multidigit Multiplication Problems. In the teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Lorra J. Morrow and Margaret J. Kenney (pp. 151-60). Reston, Va: NCTM.

Beak, J. M. (2005). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. Teaching Children Mathematics, 12(5), 242-247.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 294– 323.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, *7*(1), 87-106.

Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519-538.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 333-339.

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: An analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 19-61.

Bjorkland, D. P. & Douglas, R. N. (1997). The development of memory strategies. In N. Cowan (Ed.), The development of memory in childhood (pp. 201-246). Hove, UK: Psychology Press.

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and instruction*, *10*(3), 221-247.

Bofferding, L. (2010, October). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 703-710).

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(2), 194-245.

Callingham, R. (2005). A whole-school approach to developing mental computation strategies. *International Group for the Psychology of M athematics Education*, 201.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. In *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*.

Caney, A. (2004). Perception of Mental Computation Practice: Reports from Middle School Teachers and Students. *Mathematics education for the third millennium: towards 2010*, 159-166.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 9-24.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 83-97.

Carroll, W. M. (1996). Mental Computation of Students in a Reform-Based Mathematics Curriculum. *School Science and Mathematics*, *96*(6), 305-311.

Chusnul, G. (2014). Mental computation strategies by 5th graders according to objectspatial-verbal cognitive style. Proceedings from International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Sciences. Yogyakarta, Indonesia.

Cochran, B. S., Barson, A., & Davis, R. B. (1970). Child-created mathematics. The Arithmetic Teacher, 17(3), 211-215.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HM Stationery Office.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας. (μτφ. Χρ. Μητσοπούλου, & Μ. Φιλοπούλου) Αθήνα: Μεταίχμιο (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1997).

Cooper, T. J., Heirdsfield, A., & Irons, C. J. (1996). Children’s mental strategies for addition and subtraction word problems. *Children’s number learning*, 147-162.

Creswell, J.W. (2011). Η Έρευνα στην Εκπαίδευση: Σχεδιασμός, Διεξαγωγή και Αξιολόγηση της Ποσοτικής και Ποιοτικής Έρευνας (μτφ.: Ν. Κουβαράκου). Αθήνα: ΙΩΝ (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 2008).

Csíkos, C. (2016) Strategies and performance in elementary students‟ three-digit mental addition. Educational Studies in Mathematics, 91, 123-139.

DfEE (1999), National Numeracy Strategy (Great Britain). (1999). *Framework for Teaching Mathematics: From Reception to Year 6*. Cambridge University Press for the Department for Education and Employment.

DfEs (2007), Department for Education and Skills. *The early years foundation stage: Setting the standards for learning, development and care for children from birth to five*. Department for Education and Skills.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Dowker, A. (2005). Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education. New York, NY, US.

Ekol, G. (2010). Operations with negative integers in a dynamic geometry environment. Proceedings of PME 34, 2, 337–344.

Erdem, E. (2016). Mental computation: evidence from fifth graders. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(6), 1157-1174.

Feltovich, P. J., Spiro, R. J., & Coulson, R. L. (1997). Issues of expert flexibility in contexts characterized by complexity and change. *Expertise in context: Human and machine*, 125-146.

French, D. (2005). Double, Double, Double. Mathematics in School, 35(5), 8-9.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. Handbook of international research in mathematics education, 626-655.

Fuson, K. (1992). ‘Research on whole number addition and subtraction’. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning (pp.243-275). New York: Macmillan.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity. In *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 159-165).

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(2), 171-192.

Ganor-Stern, D., & Tzelgov, J. (2008). Negative numbers are generated in the mind. *Experimental Psychology*, *55*(3), 157-163.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking.Journal of Applied Developmental Psychology, 21, 27-37.

Golafshani, N. (2003). Understanding reliability and validity in qualitative research. *The qualitative report*, *8*(4), 597-606.

Harries, T., & Spooner, M. (2013). *Mental mathematics for the numeracy hour*. Routledge.

Hartnett, J. E. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue.

Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). Children’s mental multiplication and division strategies. Paper presented at the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference, Haifa, Israel.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 57-74.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

Heinze, A., Star, J., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 41, 535–540.

Hope, J. A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1987). *Mental math in the middle grades*. Dale Seymour Publications.

Hope, J. A., & Sherill, J. M. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. Journal for Research in Mathematics Education, 18(2), 98-111.

Jaber, L. Z., & BouJaoude, S. (2012). A macro–micro–symbolic teaching to promote relational understanding of chemical reactions. *International Journal of Science Education*, *34*(7), 973-998.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(1), 51-61.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, *19*, 130-140.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Jones, S. (1991). Reform in primary mathematics education: A constructivist view. *Educational Horizons*, *70*(1), 19-26.

Karantzis, I. (2010). Mental arithmetic calculation in the addition and subtraction of two-digit numbers: The case of third and fourth grade elementary school pupils. *International Journal for Mathematics in Education*, *3*, 3-24.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-464.

Lemonidis, C., & Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *Journal of Educational Research*, *1*, 61-74.

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 350-359.

Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in'filling'the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 131-147.

Lucangeli, D., Tressoldi, E.P., Bendotti, M., Bonanomi, M. & Siegel, S.L. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. Educational Psychology, 23(5), 507-520.

Macintyre, T., & Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(2), 49-54.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster studies in education*, *24*(2), 145-154.

Mathison, S. (1988). Why triangulate?. *Educational researcher*, *17*(2), 13-17.

McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: Developing number sense. *Being numerate: What counts*, 24-43.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44.

Mcintosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 44-48.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). Number sense in school mathematics: Student performance in four countries.

McIntosh, A. J., & Dole, S. L. (2000). Mental computation, number sense and general mathematics ability: Are they linked?. In *Mathematics education beyond 2000* (pp. 401-408).

McIntosh, A., Reys, R. E., & Reys, B. J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(5), 322-327.

Murphy, C. (2011). Comparing the use of the empty number line in England and the Netherlands. *British Educational Research Journal*, *37*(1), 147-161.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Ni, Y. J., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origin and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40(1), 27-52.

Olander, H. T., & Brown, B. I. (1959). A research in mental arithmetic involving subtraction. *The Journal of Educational Research*, *53*(3), 97-102.

Olsen, J. R. (2015). Five keys for teaching mental math. *Mathematics Teacher*, *108*(7), 543-548.

Organisation for Economic Co-operation and Development (2003). The PISA 2003 assessment framework - mathematics, reading, science and problem solving: Knowledge and skills. Paris: Author.

Park, E. J., & Light, G. (2009). Identifying atomic structure as a threshold concept: Student mental models and troublesomeness. *International journal of science education*, *31*(2), 233-258.

Paulos, J. A. (1988). *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*. Macmillan.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Using addition to solve large subtractions in the number domain up to 20. *Acta Psychologica*, *133*(2), 163-169.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquiere, P., & Verschaffel, L. (2014). Using addition to solve subtraction problems in the number domain up to 20 and 100. *Menon. Journal Of Educational Research*, (1), 8-27.

PISA. (2000). Mathematical literacy in PISA. Retrieved from: http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33690591.pdf

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in school*, *8*(3), 2-5.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., &Harel, G. (1993).Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. P. Carpenter, E. Fennema& T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing-Cobbs, L., Fletcher, J., & Fuchs, L. (2009). Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of learning disabilities*, *42*(4), 356-371.

Reys, B. J. (1985). Mental Computation. *Arithmetic Teacher*, *32*(6), 43-46.

Reys, B. J. (1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(2), 114-120.

Reys, B. J., & Reys, R. E. (1993). Mental Computation Performance and Strategy Use of Japanese Students in Grades 2, 4, 6, and 8.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Koyama, M. (1996). The development of computation in three Japanese primary-grade textbooks. *The Elementary School Journal*, *96*(4), 423-437.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547-557.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Hope, J. A. (1993). Mental computation: A snapshot of second, fifth and seventh grade student performance. *School Science and Mathematics*, *93*(6), 306-315.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in Grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for research in mathematics education.*

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth-and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39-58.

Reys, R., Rybolt, J., Bestgen, B., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. Journal for Research in Mathematics Education, 13(3), 183-201.

Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 225-237.

Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. In *Proceedings of CERME* (Vol. 7).

Robinson, M.K., Arbuthnott, D.K., Rose, D., McCarron, C.M., Globa, A.C. & Phonexay, D.S. (2006). Stability and change in children‟s division strategies. Journal of Experimental Child Psychology, 93, 224-238.

Rubenstein, R. N. (2001). Mental Mathematics beyond the Middle School: Why? What? How?. *The Mathematics Teacher*, *94*(6), 442-446.

Schechter, E. (2006). The most common errors in undergraduate mathematics. *Accessed via http://www. Math. vanderbilt. edu/~ schectex/commerrs/(2 September 2010)*.

Schunk, D. H. (2012). *Learning theories an educational perspective sixth edition*. Pearson.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 619-625.

Shutler, P. M. (2017). A Symbolical Approach to Negative Numbers. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1), 207-240.

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of experimental psychology: General, 126*(1), 71.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparisons: The role in development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 182–197). Reston, VA: Lawrence Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *The Arithmetic Teacher*, *37*(7), 18-20.

Sowder, J. T. (1992a). Estimation and number sense. In (D. A. Grouws, Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 371–389. New York: Macmillan Publishing.

Sowder, J. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM*, *41*(5), 557-567.

Tasker, R., & Dalton, R. (2006). Research into practice: visualisation of the molecular world using animations. *Chemistry Education Research and Practice*, *7*(2), 141-159.

Ter Heege, H. (1985). The Acquisition of Basic Multiplication Skills. Educational Studies in Mathematics, 16, 375-388.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical “parallelism” revisited: historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 165-183.

Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: Can the gap be bridged? In I. Thompson (Ed.), Teaching and learning early number (pp. 97–109). Buckingham: Open University Press.

Thompson, I. (1998). Written subtraction algorithms: Time for a change?. *Education 3-13*, *26*(3), 55-58.

Thompson, I. (1999a). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in school*, *28*(5), 2-4.

Thompson, I. (2000a). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in school*, *29*(1), 24-26.

Thompson, I., & Smith, F. (1999). Mental calculation strategies for the addition and subtraction of 2-digit numbers (Report for the Nuffield Foundation). *Newcastle upon Tyne, Department of Education, University of Newcastle upon Tyne*.

Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies. *Research in mathematics education*, *2*(1), 77-90.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational studies in Mathematics*, *50*(1), 29-47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*(5), 541-555.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM*, *41*(5), 581-590.

Trafton, P. (1992). Using number sense to develop mental computation and computational estimation. *Challenging children to think when they compute*, 78-92.

Ural, A. (2016). 7th grade students‟ understandings of negative integer. *Journal of Studies in Education*, *6*(2), 170-179.

Utami, A. D., & Sa'dijah, C. (2018). Six Levels of Indonesian Primary School Students' Mental Model in Comprehending the Concept of Integer. *International Journal of Instruction*, *11*(4), 29-44.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. Learning and Instruction, 14, 453–467.

Van de Walle, J. (2007). Strategies for whole-number computation. In J. Van de Walle (Ed.), Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (pp. 216- 244). United States of America: Pearson Education.

Van de Walle, J. A. (2007). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.

Van de Walle, J., & Folk, S. (2005). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (Canadian edition).

Van Dooren, W., Lehtinen, E., Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. Learning and Instruction, 37, 1-4.

Van Lehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. Journal of Mathematical Behavior, 3(2), 3–71.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341-359.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction*, *14*(5), 469-484.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 555-570.

Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive psychology*, *24*(4), 535-585.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), Handbook of research on conceptual change (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wandt, E., & Brown, G. W. (1957). Non-Occupational Uses of Mathematics Mental and Written—Approximate and Exact. *The Arithmetic Teacher*, *4*(4), 151-154.

Wessman-Enzinger, N. M., & Tobias, J. (2015). Preservice teachers' temperature stories for integer addition and subtraction. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells(Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 289-296). Hobart, Australia: Psychology of Mathematic Education.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 356-365.

Whitacre, I. (2015). Strategy ranges: describing change in prospective elementary teachers’ approaches to mental computation of sums and differences. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(4), 353-373.

Yackel, E. (2001), ‘Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America’, in J. Anghileri (ed.), Principles and Practices in Arithmetic Teaching, Open University Press, Buckingham, 15–32.

Yang, D.C. & Huang, K.L. (2014). An intervention study on mental computation for second graders in Taiwan. The Journal of Educational Research, 107(1), 3-15.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383-403.

11. Ελληνική Βιβλιογραφία

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2013). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Υ. Π. Δ. Β. Μ. Θ. Π. Ι. ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Θωμαΐδης, Γ. (2009). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών. Στο Θωμαΐδης, Ι., Λάππας, Δ., Μιχαηλίδης, Τ., Νεγρεπόντης, Σ., Πάσχος, Θ., Τζανάκης, Κ., Φαρμάκη, Β., Χασάπης, Δ., Χριστιανίδης, Ι., & Χρυσανθόπουλος, Κ. (Επ.), Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών (σελ. 193-220). Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Καραντζής, Ι. (2007). Η στρατηγική των όμοιων προσθετέων στο νοερό αριθμητικό υπολογισμό κατά τη διαδικασία υπέρβασης της πρώτης δεκάδας. Πρακτικά εισηγήσεων-2ο Συνέδριο της ΕΝ. Ε. ΔΙ. Μ., 304-313. Αλεξανδρούπολη.

Καραντζής, Ι., & Τόλλου, Μ. (2009). Ο νοερός αριθμητικός υπολογισμός των μαθητών της Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου στις προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών. Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 48, 107-123.

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών (4η εκδ.). Αθήνα, Εκδόσεις ΤΟΠΟΣ.

Κολέτσος, Θ. (2001). Θεωρίες Μάθησης και Συνέπειες για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Ευκλείδης, γ΄, τεύχ.55, σελ. 63-77.

Λεμονή, Ι., & Χρήστου, Κ. (2019). ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (13), 25-45.

Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Αθήνα: Πατάκης

Λεμονίδης, Χ. (2003β). Η εισαγωγή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο Δημοτικό: μια πειραματική εφαρμογή. Μέντορας, 7, 34-48.

Λεμονίδης, Χ. (2006α). Μακροχρόνια μελέτη στην ανάπτυξη των νοερών υπολογισμών στις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.

Λεμονίδης, Χ. & Λυγούρας Γ. (2006). Η επίδοση και η ευελιξία μαθητών της Γ' Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. Ευκλείδης Γ, 68, 20-44.

Λεμονίδης, Χ. (2013). Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ., Παυλίδης, Α. (2003). Διδασκαλία και μάθηση της γραπτής διαίρεσης στο δημοτικό σχολείο. Συμπεριφορές μαθητών και απόψεις δασκάλων. Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών. Επιμέλεια Μ. Κούρκουλος, Κ. Τσανάκης, Γ. Τρούλης. Π.Τ.Δ.Ε. Ρεθύμνου, σελ. 58 – 66, ISBN 960–87898–0–Χ.

ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, (2014)

Νικολουδάκης Ε., Χουστουλάκης Ε. (2002). Στοιχεία Διδακτικής των Μαθηματικών. Αθήνα, αυτοέκδοση, (ISBN: 960-92323-0-2).

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών – Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, Τόμος Α΄. Αθήνα: ΠΙ

Σαλβαράς, Γ. (2011). Διδακτική Μεθοδολογία αντιμετώπισης δυσκολιών μάθησης στα Μαθηματικά, Διάδραση.

Σκοπέτος, Δ. (2001). Η διδασκαλία των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Ελλοπία.

Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π., & Μπαραλός, Γ. (2011). Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (τεύχος Α').

Τουμάσης, Μ. (2002). Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών. Αθήνα: Gutenberg.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2013). Μαθηματικά για τη δασκάλα και τον δάσκαλο, Β' έκδοση, Σοφία, Θεσσαλονίκη.

Van de Walle, J. (2005a). Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία. (Αλεξανδροπούλου, Α., & Κομπορόζος, Β. Μεταφρ. Τριανταφυλλίδης, Τ., Επιμ.). Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός.

12. Παράρτημα

Να υπολογίσετε νοερά τις παρακάτω πράξεις και να περιγράψετε την ή τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποιήσατε για τον υπολογισμό τους.

-43+25=

$-\frac{2}{6}-\frac{7}{6}=$

$\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=$

-33-19=

$\frac{3}{5}-\frac{8}{3}=$

$-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}=$

$(-\frac{2}{3})x\frac{4}{3}=$

-5x21=

$(-\frac{4}{6})\ x\ \frac{5}{2}=$

$(-\frac{2}{5}):\frac{4}{2}=$

-60:4=

$(-\frac{7}{3})\ :\ \frac{5}{4}=$