



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ ΗΛΙΚΙΑΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διπλωματική εργασία

**«Ανάλυση των έργων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών
της Β΄ Γυμνασίου. Η περίπτωση της επιχειρηματολογίας»**

της Θωμόγλου Κωνσταντίνας

A.E.M. 968

Επιβλέπων : Λεμονίδης Χαράλαμπος (Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ)

Εξεταστές : Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής, Π. Δ. Μ.

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής, Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη
Φεβρουάριος 2021

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη, Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας και Πρόεδρο του ΔΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών», για την επιστημονική του καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές του και την κατανόησή του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο, αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, και τον κ. Παπαδόπουλο Ιωάννη, επίκουρου Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, για τις εποικοδομητικές υποδείξεις τους και την συμβολή τους στην ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας, καθώς και τους υπόλοιπους καθηγητές του ΔΠΜΣ για τις νέες γνώσεις και εμπειρίες που μου προσέφεραν, οι οποίες συντέλεσαν στην εξέλιξή μου ως εκπαιδευτικός.

Ευχαριστώ θερμά τις συμφοιτήτριές μου Δέσποινα και Έλσα για την ηθική συμπαράσταση, τις ανταλλαγές απόψεων και τις πολύτιμες συζητήσεις κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, αλλά προπάντων στον σύζυγό μου Δημήτρη για την υπομονή και τη στήριξη που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

**Στον Δημήτρη
και στην μπέμπα που περιμένουμε**

Περίληψη

Τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της σχολικής πραγματικότητας, ιδιαίτερα της ελληνικής, που η εκπαιδευτική διαδικασία περιορίζεται στο ένα και μοναδικό επιβαλλόμενο εγχειρίδιο του Υπουργείου Παιδείας. Τις τελευταίες δεκαετίες η έρευνα γύρω από τα σχολικά εγχειρίδια παρουσιάζει ραγδαία αύξηση στη διεθνή εκπαιδευτική κοινότητα, όχι όμως στην ελληνική. Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται η ανάλυση έργων (tasks) του βιβλίου που διδάσκεται στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Συγκεκριμένα αναλύονται 284 έργα που περιέχονται σε τέσσερα κεφάλαια της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Η ανάλυση των έργων πραγματοποιήθηκε με βάση το πενταδιάστατο πλαίσιο ανάλυσης έργων σχολικών εγχειριδίων της Glasnovic Gracin (2008). Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι στα αναλυθέντα έργα δίνεται βαρύτητα κυρίως σε υπολογιστικές διαδικασίες, στην εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων για την εκτέλεση των εργασιών, ενώ η επιχειρηματολογία, οι επεξηγηματικές δραστηριότητες, η συλλογιστική σκέψη, οι εργασίες ανοικτού τύπου και τα ρεαλιστικά – αυθεντικά προβλήματα απουσιάζουν ή έρχονται σε δεύτερη μοίρα.

Λέξεις κλειδιά: σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, ανάλυση εγχειριδίων, επιχειρηματολογία

Abstract

Mathematics textbooks are an integral part of school reality, especially the Greek one, where the educational process is limited only to the specific textbook imposed by the Ministry of Education. In past decades, research on school textbooks has grown rapidly in the international educational community, but not in the Greek one. In the present research, an analysis of tasks found in the book taught to the students of the second form of Junior High School is attempted. More specifically, 284 tasks contained in four chapters of Algebra and Geometry are analyzed. The analysis of the tasks was carried out based on the five – dimensional framework for the analysis of school textbook tasks by Glasnovic Gracin (2008). The results of the research show that in the analyzed tasks emphasis is mainly placed on computation processes, on the application of basic knowledge and skills for the fulfillment of tasks, whereas argumentation, interpretation activities, reasoning, open-ended tasks and realistic – authentic problems are absent or secondary.

Key words: mathematics textbooks, textbook analysis, argumentation

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	2
Περίληψη	4
Abstract.....	5
Εισαγωγή.....	8
Κεφάλαιο 1. Τα σχολικά εγχειρίδια	11
1.1 Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών.....	11
1.2 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών.....	13
1.3 Έρευνες σχετικά με την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών	16
1.3.1 Μαθηματικό περιεχόμενο και μαθηματικές έννοιες	16
1.3.2 Ανάλυση προβλημάτων των σχολικών εγχειριδίων	21
1.3.3 Σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων	31
1.4 Έρευνες σχετικά με την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών στην Ελλάδα.....	38
1.5 Οι έννοιες επιχειρηματολογία και απόδειξη στα Μαθηματικά	42
1.6 Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη μέσα από τα Προγράμματα Σπουδών ..	44
1.7 Έρευνες σχετικά με την επιχειρηματολογία και απόδειξη στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών	47
Κεφάλαιο 2. Μεθοδολογία	49
2.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα	49
2.2 Μέθοδος έρευνας	50
2.3 Το υλικό της έρευνας	51
2.4 Δείγμα	52
2.5 Εργαλείο ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου	53
2.6 Παραδείγματα ανάλυσης έργων	57
2.7 Διαδικασία	60

Κεφάλαιο 3. Αποτελέσματα.....	62
3.1 Αποτελέσματα της ανάλυσης των έργων ανά κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου	62
3.1.1 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Εξισώσεις – Ανισώσεις».....	62
3.1.2 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί».....	65
3.1.3 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα».....	68
3.1.4 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Μέτρηση κύκλου»	71
3.2 Αποτελέσματα ανάλυσης έργων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας	73
3.3 Αποτελέσματα ανάλυσης έργων των σχολικών εγχειριδίων της Ελλάδας και της Κροατίας.....	77
Συμπεράσματα – Συζήτηση.....	83
Περιορισμοί και επεκτάσεις της έρευνας	86
Βιβλιογραφία	88

Εισαγωγή

Στις σχολικές τάξεις χρησιμοποιούνται διάφορα διδακτικά μέσα με το σχολικό εγχειρίδιο να αποτελεί το βασικό μέσο διδασκαλίας. Τα σχολικά εγχειρίδια αναφέρονται σε βιβλία που έχουν σχεδιαστεί και αναπτυχθεί για να μεταφράσουν τους επιθυμητούς στόχους του προγράμματος σπουδών. Αποτελούν σημαντικό συστατικό του εκπαιδευτικού συστήματος και του προγράμματος σπουδών, ώστε η μάθηση στο σχολείο να επηρεάζεται πολύ από τα σχολικά εγχειρίδια. Οι εκπαιδευτικοί βασίζονται στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς συνιστούν για αυτούς την κύρια πηγή άντλησης πληροφοριών, μειώνουν τον χρόνο προετοιμασίας τους για τη διδασκαλία και προσφέρουν μια αυτόνομη, έγκυρη και γενικής αποδοχής συλλογή υλικού, το οποίο μπορεί να καταστεί αντικείμενο επεξεργασίας χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες (Μπονίδης, 2005). Ο Rezat (2009) διαπίστωσε, ωστόσο, ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια μαθηματικών όχι μόνο όταν τους ζητείται από τον δάσκαλο, αλλά και για αυτο-μάθηση (self-learning). Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα βιβλία των μαθηματικών τους ως πηγή έργων (tasks), για την επίλυση προβλημάτων, απόκτηση μαθηματικών γνώσεων και δραστηριοτήτων που σχετίζονται με το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά. Οι Henningsen & Stein (1997, σελ. 525) υποστηρίζουν ότι η φύση των εργασιών του εγχειριδίου «μπορεί ενδεχομένως να επηρεάσει, να δομήσει τον τρόπο που οι μαθητές σκέφτονται και μπορεί να εξυπηρετήσει για να περιορίσουν ή να διευρύνουν τις απόψεις τους για το αντικείμενο με το οποίο εμπλέκονται.»

Αν και τα σχολικά εγχειρίδια είναι τα πιο διαδεδομένα διδακτικά μέσα, οι έρευνες σχετικά με την ανάλυση των έργων των σχολικών εγχειριδίων είναι πολύ περιορισμένες. Ορισμένες έρευνες, όπως των Österholm (2006) και McNaught, Tarr, & Sears (2010), εξετάζουν τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών τόσο από εκπαιδευτικούς όσο και από μαθητές. Άλλες, πάλι, εστιάζουν στην ανάλυση διαφορετικών κάθε φορά χαρακτηριστικών των σχολικών εγχειριδίων, όπως για παράδειγμα οι έρευνες των Li (2000) και Vincent & Stacey (2008). Ενώ υπάρχουν και έρευνες που συγκρίνουν εγχειρίδια διαφορετικών χωρών ή διαφορετικών σειρών σχολικών εγχειριδίων της ίδιας χώρας, όπως των Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa (2010) και των Zhu και Fan (2006).

Η επισκόπηση της βιβλιογραφίας στον κλάδο της έρευνας των σχολικών εγχειριδίων επιβεβαιώνει το κενό σχετικά με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, ιδιαίτερα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη χώρα μας. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να καλύψει αυτό το κενό αναλύοντας έργα από τέσσερα κεφάλαια Άλγεβρας και Γεωμετρίας του σχολικού εγχειριδίου «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου» (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, και Ρεκούμης, 2008) δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στο θέμα των δραστηριοτήτων σχετικά με την επιχειρηματολογία.

Η διάρθρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας πραγματοποιείται σε τέσσερα κεφάλαια.

Αρχικά, οριοθετείται το θέμα της εργασίας ενώ τονίζονται και οι λόγοι για τους οποίους είναι αναγκαία η πραγματοποίησή της, στη συνέχεια παρουσιάζεται η δομή της.

Στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου της εργασίας. Αρχικά, επισημαίνεται ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων γενικά και ειδικά στη διδασκαλία των Μαθηματικών, ο τρόπος επιλογής τους, η χρήση τους στην Ελλάδα, αλλά και σε άλλες χώρες. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται διάφορα είδη ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων που προέκυψαν από διεθνείς έρευνες τις τελευταίες δεκαετίες. Ειδικότερα, παρουσιάζονται έρευνες στις οποίες τα σχολικά εγχειρίδια αναλύθηκαν ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο και τις μαθηματικές έννοιες. Επίσης, τα προβλήματα και η επίλυσή τους αποτέλεσαν ένα από τα πιο δημοφιλή θέματα ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων, τόσο από τη γνωστική όσο και από την παιδαγωγική πλευρά. Ακολουθεί μια παρουσίαση ερευνών με θέμα τη σύγκριση σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών τόσο μεταξύ διαφορετικών χωρών, διεθνείς συγκρίσεις, όσο και μεταξύ σχολικών εγχειριδίων της ίδιας χώρας, εθνικές συγκρίσεις. Τέλος, παρουσιάζονται σχετικές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα, ξεκινώντας από το σκοπό και τα ερευνητικά ερωτήματα. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται η μέθοδος, το υλικό και το δείγμα της έρευνας. Ακολουθεί το εργαλείο ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου καθώς και η αναλυτική περιγραφή του. Στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου δίνονται παραδείγματα ανάλυσης των έργων (εφαρμογές, ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις) και περιγράφεται

η διαδικασία ταξινόμησης των έργων στις αντίστοιχες κατηγορίες που δημιουργήθηκαν.

Στο *τρίτο κεφάλαιο*, αρχικά, γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας ανά κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου, έπειτα, των αποτελεσμάτων των θεματικών περιοχών Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Τέλος, μέσα από τα ευρήματα της παρούσας έρευνας και της αντίστοιχης έρευνας της Glasnovic Gracin (2018), που χρησιμοποιήθηκε το ίδιο εργαλείο ανάλυσης, συγκρίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων της Ελλάδας και της Κροατίας.

Στο *τέταρτο κεφάλαιο* γίνεται γενική συζήτηση των αποτελεσμάτων, διατυπώνονται οι περιορισμοί και οι πιθανές επεκτάσεις της παρούσας έρευνας.

Κεφάλαιο 1. Τα σχολικά εγχειρίδια

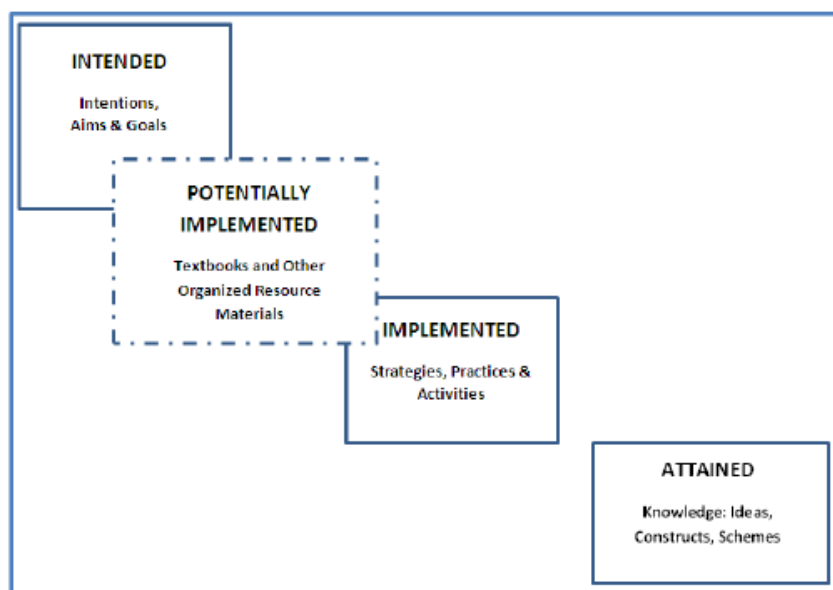
1.1 Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών

Το σχολικό βιβλίο ή σχολικό εγχειρίδιο περιέχει, σε έντυπη μορφή και με σημείο αναφοράς το επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα, τη διδακτέα ύλη ενός γνωστικού αντικείμενου ή μαθήματος για μια συγκεκριμένη τάξη ή σχολική βαθμίδα (Ξωχέλλης, 2009). Επομένως, ως ο κύριος «μετακομιστής» των ιδεών του Προγράμματος Σπουδών διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στη σύγχρονη εκπαιδευτική σκηνή στα διάφορα σχολικά μαθήματα. Μάλιστα, οι Robitaille και Travers (1992), όπως αναφέρεται στο άρθρο των Fan, Zhu και Miao (2013), υποστήριξαν ότι η εξάρτηση από τα σχολικά βιβλία είναι ίσως περισσότερο χαρακτηριστική στη διδασκαλία των Μαθηματικών από οποιοδήποτε άλλο διδακτικό αντικείμενο.

Η σχέση των σχολικών εγχειριδίων με το Πρόγραμμα Σπουδών είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτη, διότι το εγχειρίδιο φέρει το βάρος του ρόλου της σύνδεσης μεταξύ του προβλεπόμενου και του εφαρμοσμένου Προγράμματος Σπουδών. Το προβλεπόμενο (intended) Πρόγραμμα Σπουδών διαμορφώνεται από το εκπαιδευτικό σύστημα και την εθνική πολιτική, που περιλαμβάνει πρότυπα περιεχομένου, οδηγούς προγραμμάτων σπουδών, πλαίσια ή άλλα παρόμοια έγγραφα (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002). Το εφαρμοσμένο (implemented) Πρόγραμμα Σπουδών δημιουργείται από το συνδυασμό πρακτικής που εφαρμόζεται στην τάξη και του εκπαιδευτικού. Οι Valverde et al. (2002) όρισαν τα σχολικά εγχειρίδια ως ένα ξεχωριστό Πρόγραμμα Σπουδών, το δυνητικά εφαρμοσμένο (potentially implemented), δημιουργώντας έναν ισχυρό σύνδεσμο μεταξύ του προβλεπόμενου και του εφαρμοσμένου Προγράμματος Σπουδών (Σχήμα 1.1). Ως εκ τούτου, το TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) θέτει και αναπτύσσει έναν ισχυρό σύνδεσμο μεταξύ του Προγράμματος Σπουδών και του σχολικού βιβλίου, τον οποίο ενισχύουν περιγράφοντας το σχολικό βιβλίο ως «υποκατάστατο του Προγράμματος Σπουδών» (Okeeffe, 2013).

Σε σύγκριση με την επίδραση των Προγραμμάτων Σπουδών, τα σχολικά εγχειρίδια διαδραματίζουν έναν ακόμη πιο άμεσο ρόλο. Καθορίζουν τις αποφάσεις των

εκπαιδευτικών σχετικά με την επιλογή του περιεχομένου και των στρατηγικών διδασκαλίας, συμβάλλοντας με αυτόν τον τρόπο στη διαμόρφωση της διδασκαλίας. Επομένως, τα εγχειρίδια θεωρούνται ότι καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Ως «ευκαιρία μάθησης» (Opportunity to Learn – OTL) ορίζεται το εάν οι μαθητές έχουν λάβει την εκπαίδευση που τους επιτρέπει να αποκτήσουν τις ικανότητες που εκφράζονται μέσω συγκεκριμένων στόχων (Wijaya, van den Heuvel – Panhuizen & Doorman, 2015). Αυτή η έννοια αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη στην εξασφάλιση εγκυρότητας διεθνών συγκριτικών μελετών σχετικά με την απόδοση των μαθητών. Πρόσφατα, οι Wijaya et al. (2015) έδειξαν πόσο καρποφόρα είναι η έννοια της OTL όταν ερεύνησαν τη σχέση μεταξύ των έργων που προσφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Ινδονησίας και των δυσκολιών των Ινδονησίων μαθητών να λύσουν μαθηματικά έργα που βασίζονται σε πλαίσιο.



Σχήμα 1.1. Σχολικά εγχειρίδια και τριμερές μοντέλο Προγράμματος Σπουδών (Valverde et al., 2002, σελ. 13)

Ο τρόπος επιλογής καθώς και η χρήση του σχολικού εγχειριδίου ποικίλει από χώρα σε χώρα, ακόμη και από σχολείο σε σχολείο. Έτσι, σε χώρες όπου το εκπαιδευτικό σύστημα είναι διοικητικά αποκεντρωμένο, όπως είναι για παράδειγμα οι ΗΠΑ, παρατηρείται μεγάλη ποικιλία σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται στα σχολεία σε ολόκληρη τη χώρα και οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν το εγχειρίδιο που θα διδάξουν στην τάξη. Ομοίως, στην Αυστραλία δεν υπάρχει συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο και οι επιλογές διαφέρουν ανάλογα την πολιτεία. Στη Γερμανία οι μαθη-

τές αγοράζουν μόνοι τους τα διδακτικά βιβλία, τα οποία επιλέγονται από τα σχολεία και τους δασκάλους από έναν κατάλογο διδακτικών βιβλίων εγκεκριμένων από το Υπουργείο. Στη Γαλλία κάθε μαθητής έχει ένα διδακτικό βιβλίο, το οποίο διανέμεται από το σχολείο και χρησιμοποιείται κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς στο σχολείο και στο σπίτι. Παραδοσιακά, κάθε χρόνο αγοράζονται και ανανεώνονται τα διδακτικά βιβλία μιας σχολικής τάξης (Perin, 2008).

Αντίθετα, σε συγκεντρωτικά εκπαιδευτικά συστήματα, όπως το ελληνικό, σε όλα τα σχολεία γίνεται χρήση ενός και δεσμευτικού σχολικού βιβλίου που ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδας. Η βαρύτητα που έχει το σχολικό βιβλίο στην ελληνική εκπαίδευση ήταν πάντα και είναι και σήμερα ιδιαίτερα αισθητή, γιατί αποτελούσε έως πρόσφατα αφετηρία για τη σύνταξη του αναλυτικού προγράμματος. Γενικά είναι αδιανόητο το ελληνικό σχολείο χωρίς το σχολικό βιβλίο· ενδεικτικά παραδείγματα για του λόγου του αληθές είναι ο πανικός που επικρατεί στην Ελλάδα στην αρχή της χρονιάς, όταν καθυστερούν τα σχολικά βιβλία, ή η στενή σύνδεση του σχολικού βιβλίου με τις πανελλήνιες εξετάσεις (Ξωχέλλης, 2009).

1.2 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών

Τα εγχειρίδια των Μαθηματικών, ως υποστηρικτικά υλικά για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, έχουν υπάρξει από την αρχαιότητα. Παρόλο αυτή τη μακροχρόνια ύπαρξη η μελέτη και η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών έχει πολύ μικρότερη ιστορία. Ο Cronbach (1955), στην έρευνα των Fan et al. (2013), σημειώνει ότι αν και τα σχολικά εγχειρίδια ήταν τα πιο διαδεδομένα στις αίθουσες διδασκαλίας, η έρευνα που επικεντρώθηκε σε αυτά ήταν «διάσπαρτη, ασαφής και συχνά ασήμαντη». Τη δεκαετία του 1980 γίνεται πλέον αντιληπτή από τους ερευνητές η ανάγκη εξερεύνησης αυτού του πεδίου με αποτέλεσμα η έρευνα για τα σχολικά βιβλία να παρουσιάσει ραγδαία αύξηση διεθνώς τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες.

Οι Fan et al. (2013) διεξήγαγαν μια βιβλιογραφική ανασκόπηση με σκοπό τη συστηματική εξέταση, μελέτη και ανάλυση των ερευνών που εστιάζουν στα σχολικά

εγχειρίδια Μαθηματικών. Οι έρευνες της επιλεγμένης βιβλιογραφίας ταξινομήθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πλαίσιο. (Πίνακας 1.1).

Περιγραφή	
Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων	Η βιβλιογραφία για το ρόλο των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Αυτή η κατηγορία είναι απαραίτητη για να αντικατοπτρίζει το επίκεντρο και τη συζήτηση των περισσότερων φιλοσοφικών ή μη εμπειρικών άρθρων που επικεντρώνονται στον ρόλο των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων.
Ανάλυση και σύγκριση σχολικών εγχειριδίων	Μελέτες που εστιάζουν στην ανάλυση των σχετικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών βιβλίων που μελετώνται και, στην περίπτωση της σύγκρισης βιβλίων, συγκρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές δύο ή περισσότερων σειρών μαθηματικών εγχειριδίων.
Η χρήση των σχολικών εγχειριδίων	Μελέτες που εστιάζουν στον τρόπο χρήσης των σχολικών βιβλίων από εκπαιδευτικούς ή/και μαθητές. Με άλλα λόγια, πώς τα εγχειρίδια διαμορφώνουν τον τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης των μαθηματικών.
Άλλες μελέτες	Περιλαμβάνει γενικά όλες τις άλλες μελέτες, όπως αυτές που αφορούν τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια και τη σχέση μεταξύ των σχολικών βιβλίων και της απόδοσης των μαθητών.

Πίνακας 1.1. Ένα πλαίσιο για την ταξινόμηση της βιβλιογραφίας στην έρευνα των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών (Fan et al., 2013, σελ.635)

Το μεγαλύτερο ποσοστό ερευνών (63%) συγκεντρώθηκε στην κατηγορία ανάλυση και σύγκριση σχολικών εγχειριδίων, ενώ αμέσως μετά ακολουθεί η χρήση του εγχειριδίου στη σχολική τάξη με 25%. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε στην παρούσα έρευνα η ανάλυση των έργων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Τι εννοούμε, όμως, με την έννοια ανάλυση εγχειριδίου;

Σύμφωνα με τους Fan et al. (2013), η ανάλυση εγχειριδίων είναι μια ευρεία έννοια που περιλαμβάνει κυρίως δύο βασικούς τομείς: (1) την ανάλυση ενός εγχειριδίου ή μιας σειράς εγχειριδίων σχετικά με τον τρόπο που παρουσιάζεται ένα θέμα σε αυτό ή πως μια πτυχή ενδιαφέροντος αντικατοπτρίζεται σε αυτό και (2) την ανάλυση των διαφορετικών σειρών εγχειριδίων από την ίδια χώρα ή, πιο συχνά, από διαφορετικές χώρες, εστιάζοντας στον προσδιορισμό των ομοιοτήτων και των διαφορών τους, αυτό που αποκαλούμε σύγκριση εγχειριδίων. Προφανώς, η σύγκριση

των βιβλίων βασίζεται στην ανάλυση αυτών, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο της ανάλυσης βιβλίων και να χαρακτηριστεί ως συγκριτική ανάλυση βιβλίων.

Οι ίδιοι ερευνητές παραθέτουν πέντε διαστάσεις ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων: (1) το μαθηματικό περιεχόμενο και τις μαθηματικές έννοιες, (2) τη γνώση και την παιδαγωγική, (3) το φύλο, την εθνικότητα, την ισότητα, την κουλτούρα και τις αξίες, (4) σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων και (5) εννοιολόγηση (conceptualization) και μεθοδολογικά θέματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι διαστάσεις είναι συχνά αλληλένδετες, για παράδειγμα μια συγκριτική έρευνα μπορεί να αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο ή μαθηματικές έννοιες σε διαφορετικά σχολικά βιβλία.

Άλλοι ερευνητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους για να μελετήσουν το σημαντικό ερώτημα του πώς τα σχολικά βιβλία μαθηματικών σε διαφορετικές χώρες διαμορφώνουν ευκαιρίες μάθησης για τους μαθητές τους. Δεν έχει ακόμη προκύψει συμφωνημένη προσέγγιση για την αξιολόγηση και τη σύγκριση των ευκαιριών μάθησης στα σχολικά βιβλία. Επιπλέον, οι ερευνητές έχουν εκφράσει αντιφατικές απόψεις σχετικά με το τι μπορεί να διδαχθεί κανείς από την ανάλυση των μαθηματικών βιβλίων (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010). Ορισμένοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι η ανάλυση του εγχειριδίου μπορεί να εξηγήσει τις διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών στις διεθνείς συγκριτικές μελέτες (Fuson, Stigler, & Bartsch, 1988, Li, 2000). Άλλοι ερευνητές, ωστόσο, υποστήριξαν ότι τα σχολικά βιβλία ασκούν μικρή επιρροή στην εκπαίδευση και στα διδάγματα των μαθητών (Freeman & Porter, 1989).

Η προσπάθεια ανάλυσης ενός σχολικού εγχειριδίου είναι ένα δύσκολο εγχείρημα και οδηγεί αναπόφευκτα σε κρίσιμα ερωτήματα: Με ποιον τρόπο μπορούμε να αναλύσουμε ένα σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών; Τι μπορούμε να αναλύσουμε σε αυτό; Για το σκοπό αυτό, έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες μέθοδοι ανάλυσης και ταξινόμησης, καθεμία από τις οποίες έχει διαφορετικό στόχο και αναδεικνύει διαφορετικά κάθε φορά στοιχεία (Καφούση, Σκουμπουρδή και Τάτσης, 2009).

Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζονται έρευνες οι οποίες υπάγονται στις διαστάσεις ανάλυσης που αναφέρθηκαν παραπάνω, εστιάζοντας στις πιο πρόσφατες και σε αυτές που σχετίζονται με την παρούσα έρευνα.

1.3 Έρευνες σχετικά με την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών

1.3.1 Μαθηματικό περιεχόμενο και μαθηματικές έννοιες

Οι περισσότερες έρευνες στην ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, σύμφωνα με τη βιβλιογραφική έρευνα των Fan et al. (2013), εστιάζουν στον τρόπο με τον οποίο διάφορες μαθηματικές έννοιες παρουσιάζονται σε αυτά και πως αντιμετωπίζονται. Οι Dole και Shield (2008), ανέπτυξαν ένα πλαίσιο κριτηρίων για την ανάλυση δύο σχολικών εγχειριδίων της 8^{ης} τάξης στην Αυστραλία, εστιάζοντας στη αναλογική συλλογιστική και την αξιοποίηση της σχετικής βιβλιογραφίας, καθώς και στις αρχές μεταρρύθμισης του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών που στηρίζουν το πρόγραμμα σπουδών στη πολιτεία Queensland της Αυστραλίας. Η ανάλυση επικεντρώθηκε στο βαθμό τον οποίο τα επιλεγμένα εγχειρίδια υποστήριξαν και βοήθησαν τους μαθητές να συνδέσουν και να ενσωματώσουν μαθηματικές έννοιες, ειδικά σε σχέση με τα θέματα του λόγου και της αναλογίας.

Αρχικά, βασιζόμενοι στην ανάλυση της βιβλιογραφίας, εντόπισαν ένα σύνολο τεσσάρων βασικών μαθησιακών αποτελεσμάτων για το λόγο και την αναλογία που σχετίζονται με την προσθετική έναντι της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, τους πολλαπλασιαστικούς συνδέσμους σε καταστάσεις αναλογίας, την αναπαράσταση καταστάσεων αναλογίας και τους συνδέσμους με κλάσματα. Επινόησαν δείκτες για την επεξεργασία των βασικών μαθησιακών αποτελεσμάτων ή συγκεκριμένων στόχων του περιεχομένου του προγράμματος σπουδών (Specific Curriculum Content Goals – SCCG), οι οποίοι αναφέρονται παρακάτω.

1. **Η προσθετική και πολλαπλασιαστική σύγκριση είναι πλαισιωμένη.** Δείκτες: (α) δίνονται παραδείγματα του πραγματικού κόσμου τόσο των προσθετικών όσο και των πολλαπλασιαστικών συγκρίσεων· (β) παρέχονται ευκαιρίες για διαφοροποίηση προσθετικών και πολλαπλασιαστικών συγκρίσεων· (γ) ενθαρρύνεται η εννοιολογική κατανόηση καταστάσεων ως προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές μέσω μιας σειράς αυθεντικών, πραγματικών πλαισίων για σύγκριση.
2. **Επισημαίνονται οι κοινές πολλαπλασιαστικές δομές και η αναλογική σκέψη.** Δείκτες: (α) ορίζεται σαφώς η συγκριτική σχέση αναλογικών καταστάσεων· (β) η κοινή πολλαπλασιαστική δομή γίνεται σαφής σε διαφορετικούς

τύπους προβλημάτων (όπως λόγος, ρυθμός, κλίμακα, πιθανότητα, κλίση και τα παρόμοια)· (γ) η χρήση της αναλογικής σκέψης για την επίλυση προβλημάτων γίνεται σαφής στα λυμένα παραδείγματα.

3. **Αποτελεσματική χρήση μιας σειράς αναπαραστάσεων.** Δείκτες: (α) οι πίνακες, τα γραμμικά γραφήματα και οι αριθμογραμμές χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν αναλογικές καταστάσεις· (β) οι αναπαραστάσεις δομούν την κατανόηση της πολλαπλασιαστικής δομής των τύπων προβλημάτων· (γ) οι εφαρμογές χρησιμοποιούν τις κατάλληλες έννοιες στο περιβάλλον των μαθητών.
4. **Οι σχετικές ιδέες κλάσματος συνδέονται ρητά.** Δείκτες: (α) δημιουργούνται σαφείς σύνδεσμοι με τις ιδέες κλάσματος και της ισοδυναμίας (β) διακρίνεται ρητά ο προσδιορισμός των σχέσεων μέρος-όλου του κλάσματος και μέρος-μέρους-όλου του λόγου (γ) η καθιέρωση της επίσημης «αναλογικής ισότητας» καθυστερεί έως ότου αποκτήσει εκτεταμένη εμπειρία με άλλες παραστάσεις.

Δεύτερον, οι αρχές στις οποίες βασίζεται το μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών (Queensland Studies Authority 2004) στο αυστραλιανό κράτος στο οποίο διεξήχθη αυτή η μελέτη χρησιμοποιήθηκαν ως πλαίσιο για την ανάλυση του υλικού του προγράμματος σπουδών όσον αφορά την ικανότητά τους να προωθούν την επίτευξη των βασικών μαθησιακών αποτελεσμάτων σε ένα συγκεκριμένο θέμα, το οποίο στην περίπτωση αυτή ήταν ο λόγος και η αναλογία. Η ανάλυση αυτή για το πρόγραμμα σπουδών αποκάλυψε ισχυρή ευθυγράμμιση με τις αρχές της ισότητας, του προγράμματος σπουδών, της διδασκαλίας, της μάθησης, της αξιολόγησης και της τεχνολογίας, όπως προτάθηκε από το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics – NCTM 2000).

Η ανάλυση των εγχειριδίων αποκάλυψε την υπεροχή των υπολογιστικών διαδικασιών που παρουσιάζονται στους μαθητές μελετώντας τον λόγο και την αναλογία και κατέστησε επίσης εμφανή την ελάχιστη χρήση διαγραμμάτων, πινάκων και γραφημάτων, ώστε να υποστηριχθεί η εννοιολογική κατανόηση. Γενικά, τα εγχειρίδια που εξετάστηκαν διαπιστώθηκε ότι ήταν αρκετά περιορισμένα όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις ενός αναλυτικού

προγράμματος που τονίζει μια συνεκτική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση μαθηματικών θεμάτων.

Στην άλλη άκρη του πλανήτη, η Brändström (2005) μελετά τη διαφοροποίηση των έργων (ασκήσεις, προβλήματα, λεκτικά προβλήματα) σε τρία εγχειρίδια Μαθηματικών της 7^{ης} τάξης στη Σουηδία. Ο στόχος της μελέτης αυτής είναι τριπλός:

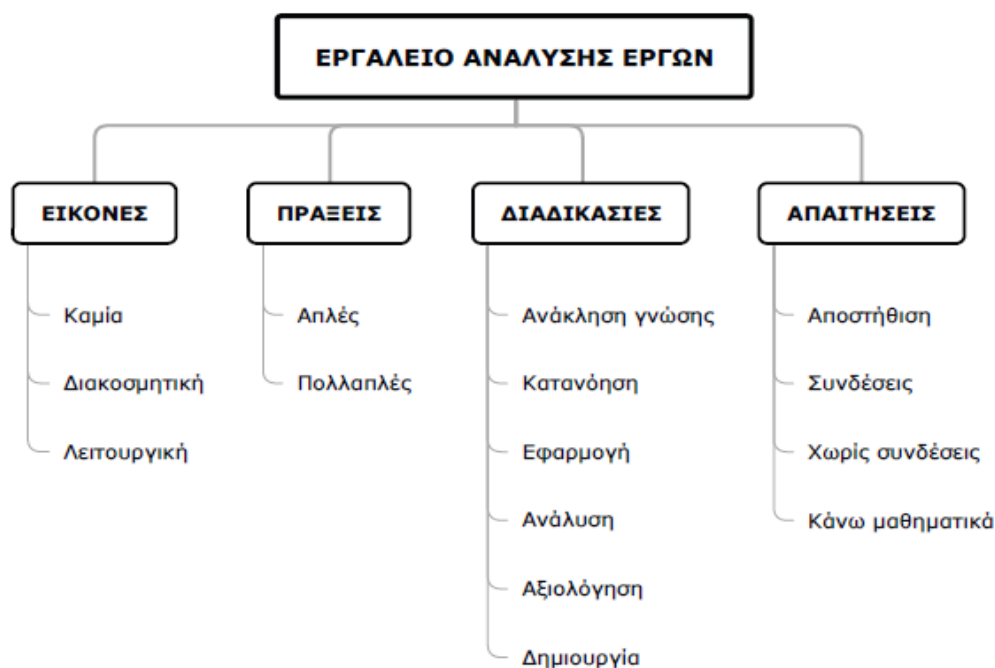
- Η περιγραφή της δομής των κεφαλαίων
- Η δημιουργία ενός εργαλείου ανάλυσης δύσκολων έργων και η εφαρμογή του στα έργα των σχολικών εγχειριδίων
- Η ανάλυση των έργων και η σύγκριση αυτών ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας, που βασίζεται στις πτυχές του εργαλείου

Για να μελετηθεί πως η διαφοροποίηση αυτή αντιμετωπίζεται και υποστηρίζεται στα σχολικά εγχειρίδια της Σουηδίας, η έρευνα αυτή επικεντρώθηκε στην έννοια του κλάσματος, καθώς συναντάται σε όλα τα αναλυθέντα εγχειρίδια.

Το εργαλείο ανάλυσης που χρησιμοποίησε, εστιάζει σε τέσσερις πτυχές: «τη χρήση εικόνων», «τις απαιτούμενες πράξεις», «τις γνωστικές διαδικασίες» και «το επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων» που υπάρχουν στα έργα. Καθεμία από τις πτυχές παρουσιάζονται παρακάτω (Σχήμα 1.2).

Εικόνες: Οι εικόνες σε ένα βιβλίο μπορούν να έχουν διαφορετικούς στόχους. Μπορούν είτε να ελαφρύνουν (μερικές φορές) το δύσκολο και γεμάτο θεωρία κείμενο ή να απεικονίσουν ένα πρόβλημα και να το κάνουν πιο εύκολο ή πιο δύσκολο να επιλυθεί. Διακρίνονται τρεις διαφορετικές κατηγορίες έργων σχετικά με την παρουσία εικόνων: έργα χωρίς εικόνα, έργα με εικόνα ως διακοσμητική, έργα με λειτουργική εικόνα.

Απαιτούμενες πράξεις: Το πλήθος των πράξεων ταξινομούν τα έργα σε δύο ομάδες. Τα έργα που δεν απαιτούν ή απαιτούν μία πράξη για επίλυση («uni») βρίσκονται στην πρώτη ομάδα, ενώ η δεύτερη ομάδα αποτελείται από έργα που απαιτούν δύο ή περισσότερες πράξεις («multi»). Οι «απαιτούμενες πράξεις» μπορούν επίσης να περιγραφούν ως ο αριθμός των βημάτων για την επίλυση των έργων.



Σχήμα 1.2. Το πλαίσιο εφαρμογής (Brändström, 2005, σελ. 47)

Γνωστικές διαδικασίες: Αναλύθηκαν οι «γνωστικές διαδικασίες» που απεικονίζονται στα έργα των σχολικών εγχειριδίων, ταξινομώντας τα έργα με βάση τις παρακάτω κατηγορίες: «ανάκληση γνώσης», «κατανόηση», «εφαρμογή», «ανάλυση», «αξιολόγηση» και «δημιουργία» (Πίνακας 1.2). Η σειρά και τα ονόματα των κατηγοριών προέρχονται από την αναθεωρημένη ταξινόμηση Bloom (Anderson & Krathwohl, 2001), αλλά οι περιγραφές προέρχονται από την αρχική ταξινόμηση Bloom (Bloom, 1956).

Διαδικασίες	Περιγραφή
Ανάκληση γνώσης	Ανάκτηση της γνώσης από τη μακροπρόθεσμη μνήμη
Κατανόηση	Κατασκευή νοήματος από διδακτικά μηνύματα
Εφαρμογή	Χρήση μιας διαδικασίας σε μια δεδομένη κατάσταση
Ανάλυση	Διαχωρισμός τμημάτων και καθορισμός του τρόπου που τα μέρη ανήκουν μαζί
Αξιολόγηση	Κρίση βάσει κριτηρίων και προτύπων
Δημιουργία	Συνένωση (ή αναδιοργάνωση) κομματιών σε ένα σύνολο

Πίνακας 1.2. Οι γνωστικές διαδικασίες του πλαισίου (Brändström, 2005, σελ. 49)

Επίπεδο γνωστικής απαίτησης: Για τη μελέτη της διαδικασίας της σκέψης ενός μαθητή κατά την επίλυση ενός, χρησιμοποιείται η πτυχή «επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων». Χρησιμοποιούνται τέσσερις πτυχές για την ανάλυση του επιπέδου των γνωστικών απαιτήσεων των εργασιών:

- **Απομνημόνευση.** Ο μαθητής δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσει έναν αλγόριθμο για να δώσει τη σωστή απάντηση.
- **Διαδικασίες με συνδέσεις σε έννοιες.** Δίνεται ένα βαθύτερο νόημα στα έργα και συχνά χρησιμοποιούνται εικόνες και εικονογραφήσεις για να βοηθήσουν τον μαθητή να καταλάβει.
- **Διαδικασίες χωρίς συνδέσεις με έννοιες.** Απαιτείται αλγόριθμος, αλλά δεν δίνει κανένα νόημα ή δεν σχετίζεται με οποιαδήποτε έννοια με αυτό που μαθαίνει ο μαθητής.
- **Κάνοντας μαθηματικά.** Σε αυτήν την πτυχή, που είναι και η πιο απαιτητική, τα έργα συχνά απαιτούν κάτι περισσότερο από απλώς τη χρήση μιας μεθόδου και την εύρεση της λύσης.

Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα ανάλυσης έργου χρησιμοποιώντας τις πτυχές του εργαλείου.

Παράδειγμα 1. Πόσα δευτερόλεπτα είναι 1 λεπτό; (Brändström, 2005, σελ. 51)

Σχόλια

- Σε αυτό το έργο δεν υπάρχει εικόνα. Ένας μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα ρολόι για να έχει εικόνα, αν και αυτό δεν γίνεται στο βιβλίο. Αν η άσκηση ζητούσε από τον μαθητή να σχεδιάσει μια εικόνα, τότε το έργο θα είχε ταξινομηθεί στην κατηγορία «λειτουργική εικόνα».
- Η εργασία δεν απαιτεί αλγοριθμική πράξη, αφού ο μαθητής χρησιμοποιεί τη μνήμη του για να δώσει τη σωστή απάντηση, δηλαδή είναι μια εργασία «υπὶ», απαιτεί μία μόνο πράξη για τη λύση της.
- Η διαδικασία που απαιτείται για την επίλυση του έργου είναι η ανάκληση μνήμης.
- Το επίπεδο της γνωστικής απαίτησης είναι η αποστήθιση. Καμία διαδικασία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αυτό το έργο εκτός από την παρούσα, η οποία υπάρχει στη μνήμη του μαθητή εκ των προτέρων· σε αυτήν την περίπτωση, το ένα λεπτό είναι 60 δευτερόλεπτα.

Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν το χαμηλό επίπεδο πρόκλησης στα σχολικά εγχειρίδια της Σουηδίας εξαιτίας του γεγονότος ότι η έμφαση δίνεται σε έργα χαμηλής γνωστικής δυσκολίας.

1.3.2 Ανάλυση προβλημάτων των σχολικών εγχειριδίων

Οι πρώτες έρευνες που σχετίζονται με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων επικεντρώθηκαν στην ανάλυση περιεχομένου, στην κάλυψη των θεμάτων του περιεχομένου καθώς και στον αριθμό σελίδων που αφιερώνεται σε κάθε θέμα, παραγκωνίζοντας την ανάλυση των έργων (π.χ. προβλημάτων, ασκήσεων, εφαρμογών) που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια. Ιδιαίτερα τα προβλήματα και η επίλυσή τους αποτέλεσαν ένα από τα πιο δημοφιλή θέματα ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων, τόσο από τη γνωστική όσο και από την παιδαγωγική πλευρά. Ο Li (2000) διεξήγαγε μια συγκριτική μελέτη σχετικά με τα μαθηματικά προβλήματα ή μέρη των προβλημάτων που εντόπισε στα βιβλία της 7ης τάξης της Κίνας και των ΗΠΑ, τα οποία δεν είχαν συνοδευτικές λύσεις ή απαντήσεις και αναφερόταν στην πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων. Για τη σύγκριση των προβλημάτων αυτών αναπτύχθηκε ένα τρισδιάστατο πλαίσιο που περιλαμβάνει τις εξής διαστάσεις: (1) τα μαθηματικά χαρακτηριστικά, τον αριθμό των μαθηματικών διαδικασιών που απαιτούνται για τη λύση, (2) τα χαρακτηριστικά πλαισίου, τον τύπο των πληροφοριών πλαισίου στο πρόβλημα και (3) τις απαιτήσεις απόδοσης με βάση (α) τον τύπο απάντησης του προβλήματος και (β) τη γνωστική του απαίτηση (Πίνακας 1.3).

Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος	
1. Μαθηματικά χαρακτηριστικά	<ul style="list-style-type: none">• απαιτείται μια απλή διαδικασία υπολογισμού• απαιτούνται πολλαπλές διαδικασίες υπολογισμού
2. Χαρακτηριστικά πλαισίου	<ul style="list-style-type: none">• καθαρά μαθηματικό πλαίσιο σε αριθμητική ή λεκτική μορφή• επεξηγηματικό πλαίσιο με εικονογραφημένη αναπαράσταση ή ιστορία
3. Απαιτήσεις επιδόσεων	
(α) Τύπος απάντησης:	<ul style="list-style-type: none">• αριθμητική απάντηση μόνο• αριθμητική έκφραση μόνο• απαιτείται εξήγηση ή λύση
(β) Γνωστικές απαιτήσεις:	<ul style="list-style-type: none">• διαδικαστική πρακτική• εννοιολογική κατανόηση• επίλυση προβλήματος• ειδική απαίτηση

Πίνακας 1.3. Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος (Li, 2000, σελ. 237)

Κάθε πρόβλημα κωδικοποιήθηκε σε όλα τα βιβλία με όρους των τριών διαστάσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω (δείτε δείγματα κωδικοποίησης στον Πίνακα

1.4). Τα προβλήματα κωδικοποιήθηκαν σε τρία τυχαία επιλεγμένα εγχειρίδια (δύο αμερικανικά εγχειρίδια και ένα κινεζικό εγχειρίδιο) επίσης από έναν δεύτερο ανεξάρτητο κριτή ο οποίος ήταν γνώστης τόσο της αγγλικής όσο και της κινεζικής γλώσσας. Το ποσοστό συμφωνίας ήταν 93%.

Τόσο στα αμερικανικά όσο και στα κινεζικά εγχειρίδια, τα περισσότερα προβλήματα που αναλύθηκαν απαιτούσαν απλές διαδικασίες υπολογισμού και είχαν καθαρά μαθηματικά πλαίσια. Αντίθετα, στα σχολικά εγχειρίδια των ΗΠΑ παρατηρήθηκε μια υπεροχή στην ποικιλία απαιτήσεων των προβλημάτων, δίνοντας έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, σε σχέση με τα εγχειρίδια της Κίνας.

Παράδειγμα 1: Προσθέστε $-16 + 19 + 12$	
Κωδικοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> • απαιτούνται πολλαπλές διαδικασίες υπολογισμού • καθαρά μαθηματικό πλαίσιο σε αριθμητική ή λεκτική μορφή • αριθμητική απάντηση μόνο • διαδικαστική πρακτική
Παράδειγμα 2: Ο Ριτς έχει 13\$ στον αποταμιευτικό του λογαριασμό. Καταθέτει 25\$. Πόσα χρήματα έχει στον αποταμιευτικό λογαριασμό του μετά την κατάθεση;	
Κωδικοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> • απαιτείται μια απλή διαδικασία υπολογισμού • επεξηγηματικό πλαίσιο με εικονογραφημένη αναπαράσταση ή ιστορία • αριθμητική απάντηση μόνο • επίλυση προβλήματος

Πίνακας 1.4. Δείγμα προβλημάτων του εγχειριδίου και κωδικοποίηση (Li, 2000, σελ. 237)

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν επίσης την αξία σύγκρισης των προβλημάτων σε σχέση με τη σύγκριση μόνο του περιεχομένου του εγχειριδίου, η οποία δεν σχετίζεται με τις εμπειρίες των μαθητών κατά την εκμάθηση των Μαθηματικών. Για το λόγο αυτό ο συγγραφέας προτείνει τη διεξαγωγή ερευνών των σχολικών εγχειριδίων συγκρίνοντας κάθε φορά διαφορετικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών προβλημάτων και του περιεχομένου αυτών, με στόχο την περεταίρω γνώση σχετικά με τις πιθανές επιπτώσεις των εγχειριδίων στην τάξη και την απόδοση των μαθητών.

Μία άλλη συγκριτική μελέτη των κινεζικών και αμερικανικών σχολικών εγχειριδίων της 7^{ης} και 8^{ης} τάξης διεξήχθη από τους Zhu και Fan (2006), οι οποίοι συνέκριναν τον τρόπο με τον οποίον τα επιλεγμένα εγχειρίδια παρουσιάζουν διάφορους τύπους μαθηματικών προβλημάτων. Ορίζουν ένα πρόβλημα ως μια κατάσταση που απαιτεί απόφαση ή/και απάντηση από τον πιθανό λύτη, ανεξάρτητα από το εάν λύ-

νεται εύκολα ή όχι, πιστεύοντας ότι αυτός ο ορισμός είναι πιο λειτουργικός και ουσιαστικός για την ανάλυση βιβλίων. Βασισμένοι στον παραπάνω ορισμό, οι ερευνητές ταξινομήσαν τα προβλήματα στις ακόλουθες επτά κατηγορίες.

Προβλήματα ρουτίνας έναντι προβλημάτων μη ρουτίνας. Ένα πρόβλημα μη ρουτίνας είναι μια κατάσταση που δεν μπορεί να επιλυθεί με απλή εφαρμογή ενός αλγόριθμου, τύπου ή μιας διαδικασίας, που συνήθως είναι άμεσα διαθέσιμα στους λύτες των προβλημάτων, δηλαδή στους μαθητές. Αντίθετα, ένα πρόβλημα ρουτίνας είναι αυτό για το οποίο οι λύτες των προβλημάτων μπορούν να ακολουθήσουν έναν γνωστό αλγόριθμο, τύπο ή διαδικασία για να βρουν τη λύση και, συνήθως, η πορεία προς τη λύση είναι αμέσως εμφανής.

Παραδοσιακά προβλήματα έναντι μη παραδοσιακών προβλημάτων. Στην έρευνα, τα μη παραδοσιακά προβλήματα αποτελούνται από τέσσερις υποκατηγορίες προβλημάτων. Η πρώτη υποκατηγορία είναι η κατασκευή προβλήματος (problem posing) που απαιτεί από τους μαθητές να δημιουργήσουν ερωτήσεις χρησιμοποιώντας τις δεδομένες πληροφορίες ως κατάσταση του προβλήματος. Η δεύτερη υποκατηγορία είναι τα προβλήματα «πάζλ» (puzzle problems) που συχνά δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν με μαθηματικά προβλήματα που τους ψυχαγωγούν. Η τρίτη υποκατηγορία είναι τα προβλήματα εργασίας (project problems) που είναι έργα ή μια σειρά έργων που περιλαμβάνουν μία ή και περισσότερες από τις ακόλουθες διαδικασίες: συλλογή δεδομένων, παρατήρηση, αναζήτηση αναφορών, αναγνώριση, μέτρηση, ανάλυση, καθορισμό προτύπων ή / και σχέσεων, γραφική παράσταση και επικοινωνία. Τα προβλήματα εργασίας απαιτούν συνήθως από τους μαθητές να αφιερώσουν σημαντικό χρόνο (π.χ. μερικές ημέρες, εβδομάδες ή ακόμα και μήνες) για να τελειώσουν. Η τελευταία υποκατηγορία των μη παραδοσιακών προβλημάτων είναι τα προβλήματα έκφρασης (journal problems) που ζητούν από τους μαθητές να γράψουν ένα κείμενο για να εκφράσουν τις ιδέες, τις εμπειρίες, τις ερωτήσεις, τους προβληματισμούς, την προσωπική τους κατανόηση, ή τη νέα μάθηση. Μέσω της έκφρασης αυτής των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αποκτήσουν χρήσιμες πληροφορίες για τη μάθηση τόσο των μαθητών όσο και της δικής τους διδασκαλίας. Παραδείγματα των τεσσάρων υποκατηγοριών μη παραδοσιακών προβλημάτων δίνονται στον Πίνακα 1.5.

Τύποι μη παραδοσιακών προβλημάτων	Παράδειγμα
Προβλήματα κατασκευής προβλήματος	Κάντε μια ερώτηση συγκρίνοντας δύο ποσότητες που αυξάνονται ή μειώνονται, η καθεμία με τον δικό της σταθερό ρυθμό. Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση για να απαντήσετε στην ερώτησή σας. (McConnell, Brown, Usiskin, Senk, Widorski, Anderson et al., 1996, σελ. 675)
Προβλήματα παζλ	Βρείτε τον διψήφιο αριθμό που έχει το άθροισμα των κύβων των ψηφίων του ίσο με τρεις φορές τον ίδιο. (Teh & Looi, 1997, σελ. 35)
Προβλήματα εργασίας	Μάθετε τις τιμές των τηλεφωνικών κλήσεων από την περιοχή ή την πόλη που ζείτε και έχει διαφορετικό κωδικό περιοχής. Συγκρίνετε τις τιμές από δύο εταιρείες για υπεραστικές κλήσεις με διαφορετική διάρκεια. Ίσως χρειαστεί να λάβετε υπόψη διαφορετικές ώρες της ημέρας και της εβδομάδας. Μην πραγματοποιείτε κλήσεις για να καθορίσετε το κόστος τους! (McConnell et al., 1996, σελ. 339)
Προβλήματα έκφρασης	Γράψτε μια επιστολή σε έναν μαθητή που δεν έχει παρακολουθήσει το μάθημα της άλγεβρας εξηγώντας τη σειρά των πράξεων. Χρησιμοποιήστε παραδείγματα για να δείξετε την εξήγησή σας. Ίσως θελήσετε να δώσετε την επιστολή σας σε έναν νεότερο μαθητή για να την διαβάσετε προτού την παραδώσετε. Εάν αυτός ή αυτή δυσκολεύεται να κατανοήσει την εξήγησή σας, θα πρέπει να την αναθεωρήσετε προτού την δώσετε στον δάσκαλό σας. (McConnell et al., 1996, σελ. 60)

Πίνακας 1.5. Δείγματα των τεσσάρων υποκατηγοριών μη παραδοσιακών προβλημάτων (Zhu et al., 2006, σελ. 614)

Προβλήματα ανοιχτού τύπου έναντι προβλημάτων κλειστού τύπου. Ανοιχτό πρόβλημα είναι το πρόβλημα με διαφορετικές ή πολλές σωστές απαντήσεις. Αντίθετα, ένα κλειστό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που έχει απλώς μία μόνο απάντηση, ανεξάρτητα από το πόσες διαφορετικές προσεγγίσεις υπάρχουν για να φτάσει κανείς στην απάντηση. Αυτή η κατηγοριοποίηση δίνει έμφαση στο πόσο ανοιχτές είναι οι τελικές απαντήσεις σε μία κατάσταση, παρά στις προσεγγίσεις της κατάστασης.

Προβλήματα εφαρμογής έναντι προβλημάτων μη εφαρμογής. Ένα πρόβλημα μη εφαρμογής είναι μια κατάσταση που δεν σχετίζεται με οποιοδήποτε πρακτικό υπόβαθρο της καθημερινής ζωής ή του πραγματικού κόσμου. Αντιθέτως, ένα πρόβλημα εφαρμογής είναι ένα πρόβλημα που σχετίζεται ή προκύπτει από το πλαίσιο μιας πραγματικής κατάστασης. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πραγματικές καταστάσεις εδώ δεν περιορίζονται μόνο στην καθημερινή ζωή των μαθητών, αλλά με μια πιο γενική έννοια. Τα προβλήματα εφαρμογής, χωρίστηκαν σε δύο υποκατηγορίες, μία κατηγορία είναι τα πλασματικά προβλήματα εφαρμογής, των οποίων οι συνθήκες και τα δεδομένα δημιουργούνται πλασματικά από συγγραφείς εγχειριδίων και δεύ-

τερη κατηγορία είναι τα αυθεντικά προβλήματα εφαρμογής, των οποίων οι συνθήκες και τα δεδομένα προέρχονται από καταστάσεις πραγματικής ζωής ή συλλέγονται από τους ίδιους τους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή. Ένα παράδειγμα πλασματικού προβλήματος εφαρμογής είναι το εξής:

Τρεις καμπάνες χτυπούν σε διαστήματα 8 λεπτών, 15 λεπτών και 24 λεπτών, αντίστοιχα. Εάν χτυπήσουν μαζί στις 3 μ.μ., τι ώρα θα είναι όταν θα χτυπήσουν ξανά όλες μαζί; (Teh & Looi, 1997, σελ. 32)

Ακολουθεί ένα παράδειγμα αυθεντικού προβλήματος εφαρμογής:

Πόσες φορές μπορείτε να διπλώσετε μια σελίδα εφημερίδας; Εξηγήστε πώς φτάσατε στην απάντησή σας. (McConnell et al., 1996, σελ. 59)

Προβλήματα ενός βήματος έναντι προβλημάτων πολλαπλών βημάτων. Τα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν απευθείας με μία πράξη ορίζονται ως προβλήματα ενός βήματος. Διαφορετικά, τα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα πολλαπλών βημάτων.

Προβλήματα Επαρκών Δεδομένων, Προβλήματα Άσχετων Δεδομένων και Προβλήματα Ανεπαρκών Δεδομένων. Εάν ένα πρόβλημα περιέχει περισσότερες πληροφορίες ή συνθήκες από αυτές που χρειάζονται για την επίλυση του προβλήματος, χαρακτηρίζεται ως ένα πρόβλημα άσχετων δεδομένων. Εάν οι πληροφορίες που παρέχονται για ένα πρόβλημα δεν είναι αρκετές για να επιτευχθεί η λύση του και δεν αναμένεται ούτε είναι δυνατό για έναν λύτη προβλημάτων να συμπληρώσει τις πληροφορίες που λείπουν, τότε το πρόβλημα θεωρείται ως πρόβλημα ανεπαρκών δεδομένων. Τα υπόλοιπα προβλήματα, στα οποία οι πληροφορίες είναι ακριβώς αυτές που χρειάζονται για την επίλυση των προβλημάτων από έναν λύτη, θεωρούνται προβλήματα επαρκών δεδομένων. Ακολουθεί ένα παράδειγμα προβλήματος άσχετων δεδομένων:

Ένας πρόσκοπος σε μια ζούγκλα κατευθύνεται νότια. Στρίβει δεξιά και περπατά για 40 μέτρα. Στη συνέχεια, παίρνει μια αριστερή στροφή και περπατά ξανά για 50 μέτρα ακόμη. Στη συνέχεια, παίρνει μια αριστερή στροφή και περπατά για άλλα 45 μέτρα. Τέλος, παίρνει μια δεξιά στροφή. Σε ποια κατεύθυνση πηγαίνει τώρα; (Teh & Looi, 1997, σελ.47)

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, δεν χρειάζονται επιπλέον πληροφορίες σχετικά με τις αποστάσεις που περπάτησε το αγόρι. Αντιθέτως, δίνεται ένα παράδειγμα προβλήματος ανεπαρκών δεδομένων:

Πόσο θα κοστίσει σήμερα η αγορά μιας σακούλας 5 κιλών τροφής για σκύλους αν κόστιζε 0,20\$ λιγότερα την περασμένη εβδομάδα; (Hatfield, Edwards & Bitter, 1997)

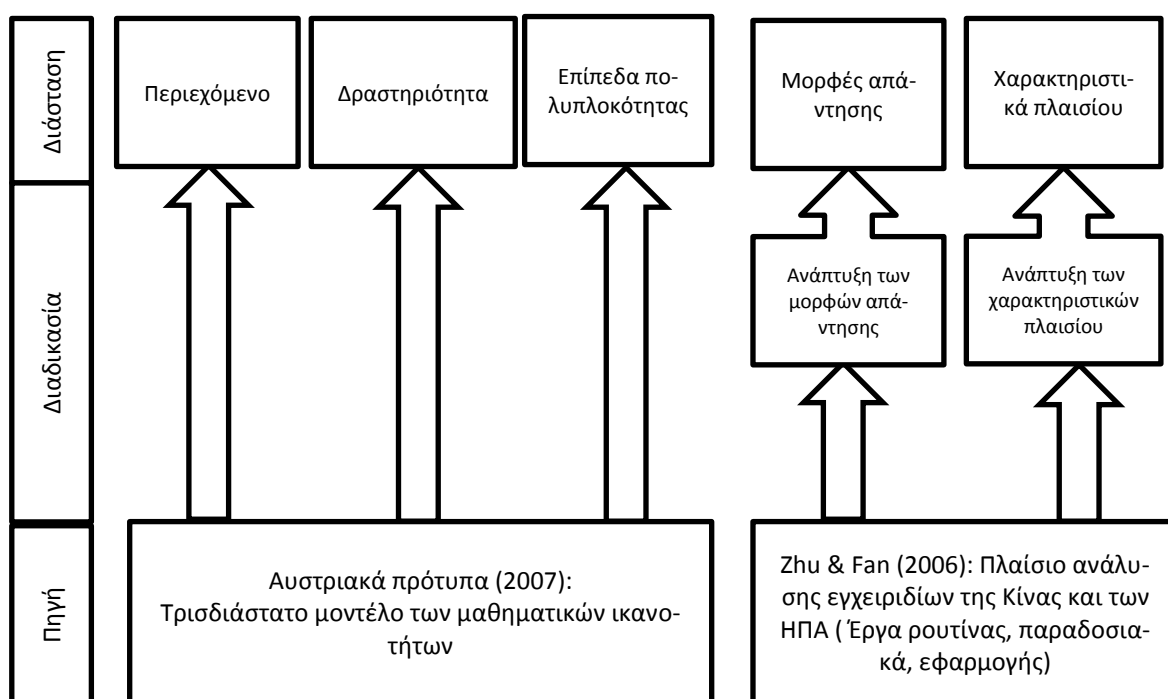
Προβλήματα σε καθαρά μαθηματική μορφή, προβλήματα σε λεκτική μορφή, προβλήματα σε οπτική μορφή και προβλήματα σε συνδυασμένη μορφή. Αυτή η κατηγοριοποίηση βασίζεται στις μορφές αναπαράστασης ενός προβλήματος που περιγράφει τόσο την τοποθέτηση της κατάστασης όσο και την παρουσίαση των δεδομένων για την ερώτηση. Εάν το θέμα ενός προβλήματος περιλαμβάνει μόνο μαθηματικές εκφράσεις, τότε το πρόβλημα ταξινομείται στην κατηγορία των «προβλημάτων με καθαρά μαθηματική μορφή». Εάν το θέμα είναι εντελώς λεκτικό, δηλαδή, μόνο με γραπτές λέξεις, τότε το πρόβλημα κωδικοποιείται στην κατηγορία των «προβλημάτων με λεκτική μορφή», ενώ, εάν αποτελείται απλώς από σχήματα, εικόνες, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα, χάρτες κ.λπ., τότε ένα τέτοιο πρόβλημα κατατάσσεται σε «προβλήματα με οπτική μορφή». Τα υπόλοιπα είναι «προβλήματα με συνδυασμένη μορφή», που συνδυάζουν δύο ή τρεις από τις παραπάνω μορφές.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αποκάλυψαν ότι η πλειοψηφία των προβλημάτων στα σχολικά βιβλία και των δύο χωρών ήταν ρουτίνας, παραδοσιακά, κλειστού τύπου και δεν σχετιζόνταν με πραγματικές καταστάσεις. Ωστόσο, τα περισσότερα προβλήματα εφαρμογής, ιδιαίτερα αυθεντικά, εντοπίστηκαν στα βιβλία των ΗΠΑ. Αντίθετα, τα προβλήματα στα βιβλία της Κίνας ήταν πιο δύσκολα όσον αφορά στα βήματα που απαιτούνται για τις λύσεις των προβλημάτων.

Τέλος, οι Zhu et al. (2006) επισημαίνουν ότι και οι δύο σειρές εγχειριδίων, ειδικά η κινεζική, θα μπορούσαν να έχουν πιο καινοτόμα και μη παραδοσιακά προβλήματα διαφόρων τύπων, καθώς ορισμένοι ερευνητές ισχυρίστηκαν ότι «τα καινοτόμα προβλήματα και έργα μπορεί να συμβάλλουν περισσότερο στην κατανόηση αυτών από τους μαθητές σε σχέση με τα παραδοσιακά προβλήματα και τα έργα που βασίζονται σε κανόνες» (Siemon, Vitgona και Cornielle, 2001).

Δέκα χρόνια αργότερα, η Glasnovic Gracin (2018) προκειμένου να εξετάσει τις απαιτήσεις των έργων των κροατικών σχολικών εγχειριδίων της 6^{ης}, 7^{ης} και 8^{ης} τάξης δημιουργεί ένα πενταδιάστατο πλαίσιο που προέκυψε από το συνδυασμό των

αυστριακών εκπαιδευτικών προτύπων (2007) και το πλαίσιο των Zhu et al. (2006) που αναφέρθηκε παραπάνω. Στις μέχρι τώρα έρευνες ανάλυσης των έργων των εγχειριδίων οι συνήθεις διαστάσεις ήταν το περιεχόμενο, οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος ερωτήσεων και τα χαρακτηριστικά πλαισίου. Η Glasnovic Gracin (2018) ενσωματώνει μια νέα πέμπτη διάσταση στο πλαίσιο: τις μαθηματικές δραστηριότητες, η οποία εξετάζει το τι πρέπει να κάνει ο μαθητής σε μια συγκεκριμένη εργασία, να αναπαραστήσει, να υπολογίσει, να εξηγήσει ή να επιχειρηματολογήσει.



Σχήμα 1.3. Διάγραμμα πενταδιάστατου πλαισίου (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 6)

Τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα ορίζουν το θεωρητικό πλαίσιο μέσα από τις τρεις διαστάσεις ως εξής: το περιεχόμενο, τις μαθηματικές δραστηριότητες και τα επίπεδα πολυπλοκότητας, ενώ οι άλλες δύο διαστάσεις των μορφών απάντησης και των χαρακτηριστικών πλαισίου βασίζονται στην έρευνα των Zhu et al. (2006). Οι πτυχές από τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα έχουν ληφθεί όπως αυτές αναφέρονται στην αρχική πηγή, ενώ οι πτυχές των μορφών απάντησης και των χαρακτηριστικών πλαισίου έχουν αναπτυχθεί και τροποποιηθεί περαιτέρω για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας. Το θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα κροατικά εγχειρίδια δεν παρέχουν ένα πλήρες φάσμα τύπων εργασιών. Δίνεται έμφαση στον υπολογισμό, ενώ η επι-

χειρηματολογία και οι επεξηγηματικές δραστηριότητες, η συλλογιστική σκέψη και οι εργασίες ανοικτής απάντησης υποεκπροσωπούνται. Η μελέτη αποκάλυψε ότι η ενσωμάτωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων στο πολυδιάστατο πλαίσιο ανάλυσης των εργασιών μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των ευκαιριών μάθησης που παρέχονται στους μαθητές χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά εγχειρίδια.

Η μεγαλύτερη σε κλίμακα συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της μελέτης TIMSS τη δεκαετία του '90. Συγκεκριμένα, η μελέτη βιντεοσκόπησης TIMSS 1999 (TIMSS Video Study 1999) που πραγματοποιήθηκε στα μαθήματα μαθηματικών της 8^{ης} τάξης στην Αυστραλία, αποκάλυψε ότι στα προβλήματα υπάρχει χαμηλή διαδικαστική πολυπλοκότητα, υψηλό ποσοστό επανάληψης και απουσία παραγωγικού συλλογισμού. Οι Vincent και Stacey (2008) χρησιμοποιώντας ορισμούς από τη μελέτη βιντεοσκόπησης, επανεξέτασαν αυτό το «ρηχό σύνδρομο διδασκαλίας». Η έρευνά του εστίασε στην ανάλυση προβλημάτων τριών διαφορετικών θεμάτων, τα κλάσματα (πρόσθεση και αφαίρεση), την επίλυση γραμμικών εξισώσεων και τη γεωμετρία (τρίγωνα και τετράπλευρα) σε εννέα εγχειρίδια μαθηματικών της 8ης τάξης της Αυστραλίας. Τα θέματα αυτά επιλέχθηκαν γιατί ήταν κοινά στα εγχειρίδια όλων των πολιτειών της Αυστραλίας και κάλυπταν τις θεματικές περιοχές Αριθμητική, Άλγεβρα και Γεωμετρία (τις πιο δημοφιλείς σύμφωνα με τη Μελέτη βιντεοσκόπησης TIMSS 1999). Στόχος της έρευνας ήταν να εξετάσουν εάν τα ευρήματα από τη μελέτη βιντεοσκόπησης συμβαδίζουν με τα ευρήματα από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, χρησιμοποιώντας τα ίδια κριτήρια και στις δύο περιπτώσεις.

Ο όρος «πρόβλημα» χρησιμοποιείται από τους ερευνητές για κάθε αυτόνομο μαθηματικό έργο που αναλαμβάνουν οι μαθητές. Οι συγγραφείς ταξινόμησαν τα προβλήματα των βιβλίων σύμφωνα με τα πέντε κριτήρια της Μελέτης βιντεοσκόπησης TIMSS 1999:

Διαδικαστική πολυπλοκότητα. Τα προβλήματα ταξινομήθηκαν ως χαμηλής, μέτριας ή υψηλής διαδικαστικής πολυπλοκότητας σύμφωνα με τον αριθμό των βημάτων σε μια κοινή μέθοδο λύσης και εάν το πρόβλημα αφορούσε ή όχι τη λύση των υποπροβλημάτων. Ένα υποπρόβλημα είναι μια εργασία ενσωματωμένη σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα που θα μπορούσε να κωδικοποιηθεί ως πρόβλημα. Ο Πίνακας 1.6

δείχνει τους ορισμούς της Μελέτης βιντεοσκόπησης για τα τρία επίπεδα διαδικαστικής πολυπλοκότητας.

Διαδικαστική πολυπλοκότητα	Ορισμός
Χαμηλή	Η επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας συμβατικές διαδικασίες, απαιτεί τέσσερις ή λιγότερες αποφάσεις από τους μαθητές (οι αποφάσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν μικρά βήματα).
Μέτρια	Η επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας συμβατικές διαδικασίες, απαιτεί περισσότερες από τέσσερις αποφάσεις από τους μαθητές και περιέχει 0 ή 1 υποπρόβλημα.
Υψηλή	Η επίλυση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας συμβατικές διαδικασίες, απαιτεί περισσότερες από τέσσερις αποφάσεις από τους μαθητές και περιέχει 2 ή περισσότερα υποπροβλήματα.

Πίνακας 1.6. Καθορισμός επιπέδων της διαδικαστικής πολυπλοκότητας των προβλημάτων (Hiebert et al., 2003, σελ. 71)

Είδος διαδικασιών επίλυσης. Αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι η διαδικαστική πολυπλοκότητα δεν επαρκούσε για να περιγράψει τη συνολική γνωστική πολυπλοκότητα των προβλημάτων, η Μελέτη βιντεοσκόπησης ταξινομήσε κάθε πρόβλημα σύμφωνα με το είδος της μαθηματικής διαδικασίας επίλυσης που εμπεριέχεται στην εκφώνηση του προβλήματος. Οι ορισμοί και ένα παράδειγμα για κάθε κατηγορία από τους Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, Jacobs, και Stigler (2003) παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.7.

Βαθμός επανάληψης. Ένα πρόβλημα εντάχθηκε σε αυτή την κατηγορία με κριτήριο εάν «ήταν το ίδιο, ή ως επί το πλείστον το ίδιο, με ένα προηγούμενο πρόβλημα στο μάθημα. Απαιτούσε ουσιαστικά τις ίδιες πράξεις για επίλυση αν και η αριθμητική ή αλγεβρική έκφραση μπορεί να ήταν διαφορετική» (Hiebert et al., 2003). Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $2x + 3 = 8$ και $3x + 5 = 16$ είναι ουσιαστικά οι ίδιες, επομένως η επίλυση της δεύτερης εξίσωσης θεωρείται ως επανάληψη της πρώτης.

Άσκηση ή εφαρμογή. Τα προβλήματα ταξινομήθηκαν είτε ως ασκήσεις, όπου οι μαθητές διδάσκονται μια συγκεκριμένη διαδικασία και στη συνέχεια τους ζητείται να εφαρμόσουν αυτή τη διαδικασία σε μια σειρά παρόμοιων προβλημάτων, είτε ως εφαρμογές, όπου οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν διαδικασίες που έχουν μάθει σε ένα πλαίσιο προκειμένου να λύσουν προβλήματα που τίθενται σε διαφορετικό πλαίσιο. Σύμφωνα με τους Hiebert et al. (2003) οι εφαρμογές παρουσιάζονται συχνά χρησιμοποιώντας λεκτικές περιγραφές, γραφήματα ή διαγράμματα και όχι

απλώς μαθηματικά σύμβολα και απαιτούν από τους μαθητές να λάβουν αποφάσεις σχετικά με το πώς και το πότε θα χρησιμοποιήσουν διαδικασίες που μπορεί να έχουν ήδη μάθει και ασκήσει. Υπό αυτή την έννοια, οι εφαρμογές είναι εξ ορισμού πιο εννοιολογικά απαιτητικές σε σχέση με τις ασκήσεις ρουτίνας για το ίδιο θέμα. Ένα παράδειγμα εφαρμογής είναι το ακόλουθο: «Το άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων είναι 240. Βρείτε τους ακέραιους αριθμούς.» (Hiebert et al., 2003). Για να λυθεί το πρόβλημα, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια μέθοδο εικασίας και ελέγχου ή αυτό που έχουν μελετήσει στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων για την αναπαράσταση της κατάστασης με την εξίσωση $x + (x + 1) + (x + 2) = 240$ και μετά να λύσουν την εξίσωση για να βρουν τους τρεις ακέραιους αριθμούς.

Διαδικασία επίλυσης	Περιγραφή
Χρησιμοποιώντας διαδικασίες	Η εκφώνηση προβλήματος υποδηλώνει ότι το πρόβλημα συνήθως επιλύεται εφαρμόζοντας μια διαδικασία ή ένα σύνολο διαδικασιών. Αυτές περιλαμβάνουν αριθμητική με ακέραιους αριθμούς, κλάσματα, δεκαδικούς, χειρισμός αλγεβρικών συμβόλων για απλοποίηση εκφράσεων και επίλυση εξισώσεων, εύρεση εμβαδών και περιμέτρων απλών σχημάτων, κ.λπ. Παράδειγμα: Λύστε την εξίσωση $2x + 5 = 6 - x$.
Δηλώνοντας έννοιες	Εκφωνήσεις προβλημάτων που απαιτούσαν μια μαθηματική συνθήκη ή ένα παράδειγμα μαθηματικής έννοιας. Παραδείγματα: Σχεδιάστε το σημείο (3, 2) σε επίπεδο συντεταγμένων. Σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο.
Κάνοντας συνδέσεις	Η εκφώνηση του προβλήματος που υπονοούσε ότι το πρόβλημα θα εστιάσει στη δημιουργία σχέσεων μεταξύ μαθηματικών ιδεών, γεγονότων ή διαδικασιών. Συχνά, η εκφώνηση του προβλήματος υποδηλώνει ότι οι μαθητές θα εμπλακούν σε ειδικές μορφές μαθηματικής συλλογιστικής όπως η εικασία, η γενίκευση και η επαλήθευση. Παράδειγμα: Σχεδιάστε τις εξισώσεις $y = 2x + 3$, $2y = x - 2$ και $y = -4x$, και εξετάστε το ρόλο που διαδραματίζουν οι αριθμοί στον καθορισμό της θέσης και της κλίσης των αντίστοιχων ευθειών.

Πίνακας 1.7. Ορισμός των τύπων διαδικασιών επίλυσης που υπονοούνται στις εκφωνήσεις προβλημάτων (Hiebert et al., 2003, σελ. 98)

Απόδειξη, επαλήθευση ή παραγωγή. Η Μελέτη βιντεοσκόπησης TIMSS 1999 επιδίωξε να μετρήσει τη συχνότητα του παραγωγικού συλλογισμού, εντοπίζοντας προβλήματα που περιλαμβάνουν απόδειξη, επαλήθευση ή παραγωγή. Στη Μελέτη βιντεοσκόπησης, η απόδειξη ορίστηκε ως «η διαδικασία προσδιορισμού της εγκυρότητας μιας πρότασης, ειδικά εξ ορισμού από άλλες προτάσεις σύμφωνα με τις αρχές

της συλλογιστικής»· η επαλήθευση ορίστηκε ως «η πράξη ή η διαδικασία εξακρίβωσης της αλήθειας ή της ορθότητας του κανόνα» και η παραγωγή ορίστηκε ως «μια σειρά προτάσεων που δείχνουν ότι το αποτέλεσμα είναι η λογική συνέπεια των αποδεκτών προτάσεων».

Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι στα επιλεγμένα σχολικά εγχειρίδια επικρατούν τα προβλήματα χαμηλής διαδικαστικής πολυπλοκότητας, χαμηλής γνωστικής απαίτησης και με σημαντική επανάληψη. Οι Vincent et al. (2008) επισημαίνουν ότι είναι σημαντικό στα σχολικά εγχειρίδια να υπάρχει μια ισορροπία στους τύπους των προβλημάτων, οι μαθητές, δηλαδή, θα πρέπει να έρχονται αντιμέτωποι με ένα πλήρες φάσμα τύπων προβλημάτων. Η ανάλυση όμως των σχολικών εγχειριδίων, συμπεριλαμβανομένων και αυτών με τις καλύτερες πωλήσεις, δείχνει ότι η ισορροπία αυτή δεν είναι πάντα εφικτή.

1.3.3 Σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων

Ένα μεγάλο μέρος των ερευνών σχετικά με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων καταλαμβάνουν τόσο οι διεθνείς συγκρίσεις όσο και οι συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών σειρών εγχειριδίων της ίδιας χώρας. Οι Perin και Haggarty (2001) στη μελέτη τους σχετικά με τη χρήση των σχολικών βιβλίων Μαθηματικών στις αγγλικές, γαλλικές και γερμανικές τάξεις υιοθέτησαν μια προσέγγιση που επικεντρώθηκε όχι μόνο στα θέματα (περιεχόμενο) και τις μεθόδους (στρατηγικές διδασκαλίας), αλλά και στα κοινωνιολογικά πλαίσια και τις πολιτιστικές παραδόσεις που εκδηλώνονται μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια. Σύμφωνα με τις ερευνήτριες η ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των σχολικών εγχειριδίων επικεντρώνεται στις ακόλουθες περιοχές: τις μαθηματικές προθέσεις, τις παιδαγωγικές προθέσεις και τα κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων, καθώς και τις πολιτισμικές παραδόσεις που εκπροσωπούνται στα σχολικά εγχειρίδια.

Μαθηματικές προθέσεις. Οι μαθηματικές προθέσεις των εγχειριδίων αναφέρονται στα μαθηματικά θέματα που παρουσιάζονται σε αυτά, στις πεποιθήσεις που προωθούνται για τη φύση των Μαθηματικών και στον τρόπο συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης, στοιχεία που αποτελούν τη βάση περιεχομένου του βιβλίου.

Παιδαγωγικές προθέσεις. Οι παιδαγωγικές προθέσεις αναφέρονται στους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται ή όχι η μάθηση από το μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου, από τη μέθοδο παρουσίασης του περιεχομένου και από τη ρητορική των κειμένων των βιβλίων.

Κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά αναφέρονται σε κοινωνιολογικά στοιχεία που επηρεάζουν τόσο τους συγγραφείς των βιβλίων όσο και τον εκάστοτε αναγνώστη ή χρήστη του εγχειριδίου.

Πολιτισμικές παραδόσεις. Στα σχολικά βιβλία αποτυπώνονται χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τις πολιτισμικές παραδόσεις και τα στερεότυπα μια χώρας. Είναι αναπόφευκτο η ανάλυση ενός βιβλίου να μη λάβει σοβαρά υπόψη τον πολιτισμό της κοινωνίας στην οποία σχεδιάστηκε. Τα σχολικά εγχειρίδια είναι αποτέλεσμα πολιτικών, οικονομικών και πολιτισμικών δραστηριοτήτων, αντιθέσεων και συμβιβασμών (Apple, 1992).

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι δομές των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων και στις τρεις αυτές χώρες ήταν αρκετά διαφορετικές. Ενώ τα γαλλικά εγχειρίδια περιείχαν δραστηριότητες, ουσιώδεις ασκήσεις και ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας, με στόχο την καθοδήγηση των μαθητών σε νέες έννοιες, τα γερμανικά βιβλία δομήθηκαν με εισαγωγικές ασκήσεις και την κύρια έννοια ακολουθεί ένα ευρύ φάσμα ασκήσεων. Συγκριτικά, τα βρετανικά βιβλία φαίνονταν απλά, με ξεκάθαρες ερωτήσεις που υποβάλλονται πριν από τα λυμένα παραδείγματα. Σύμφωνα με τις ερευνήτριες, οι διαφορές σχετίζονται με τα διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια και τις παραδόσεις. Ειδικότερα, το μοναδικό κομμάτι που βρίσκεται στη δομή των γαλλικών βιβλίων, συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες (μικρές έρευνες) φαίνεται ότι «ταιριάζουν με τις έννοιες του Piaget, αυτή του κονστρουκτιβισμού και των σχετικών διδακτικών προσεγγίσεων» (Fan et al., 2013).

Στην Ιρλανδία, την περίοδο που η αλλαγή του Προγράμματος Σπουδών και η συγγραφή νέων βιβλίων βρισκόταν σε εξέλιξη οι O'Keeffe και O'Donoghue (2011) πραγματοποίησαν μια έρευνα ανάλυσης των ιρλανδικών μαθηματικών εγχειριδίων με στόχο την επισήμανση βασικών χαρακτηριστικών των εγχειριδίων που επηρεάζουν θετικά τη μάθηση των μαθητών. Το πλαίσιο ανάλυσης που ανέπτυξαν οι ερευνητές ενσωματώνει την ανάλυση των γλωσσικών στοιχείων των εγχειριδίων καθώς και άλλων στοιχείων. Τα τέσσερα κύρια στοιχεία που περιλαμβάνονται σε αυτό το

πλαίσιο είναι: Δομή, Περιεχόμενο, Προσδοκία και Γλώσσα. Ο σκοπός της προσθήκης του γλωσσικού στοιχείου είναι η ενίσχυση του πλαισίου ανάλυσης των εγχειριδίων τους επιτρέποντας την αποτελεσματική ανάλυση του βιβλίου στο σύνολό του. Η ανάλυση των μαθηματικών εγχειριδίων πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό θεωρητικών πλαισίων (Πίνακας 1.8) που προέκυψαν από έρευνες και βασίζεται κυρίως στην ανάλυση του Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS, 2002).

Θεωρητικό Πλαίσιο	Επιρροή	Σημασία
TIMSS (2002)	Παρέχει συνολική δομή για ανάλυση βιβλίων	<ul style="list-style-type: none"> • Ανάλυση Περιεχομένου • Ανάλυση Δομής • Ανάλυση Προσδοκιών
Rivers (1990)	Ενισχύει το πλαίσιο TIMSS	<ul style="list-style-type: none"> • Ανάλυση Περιεχομένου • Ανάλυση Προσδοκιών
Mikk (2000)	Ενισχύει το πλαίσιο TIMSS	<ul style="list-style-type: none"> • Ανάλυση Δομής
Morgan (2004)	Παρέχει το πλαίσιο για γλωσσική ανάλυση	<ul style="list-style-type: none"> • Ανάλυση Γλώσσας

Πίνακας 1.8. Θεωρητικά πλαίσια, η επιρροή και η σημασία τους (O'Keeffe et al., 2011, σελ.2)

Οι Charalambous et al. (2010) δημοσίευσαν μια συγκριτική έρευνα για τον τρόπο αντιμετώπισης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων σε σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο, την Ιρλανδία και την Ταϊβάν. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποίησαν ένα πλαίσιο που αναπτύχθηκε ειδικά για να διερευνήσουν τις ευκαιρίες μάθησης που παρέχονται στους μαθητές από τα σχολικά εγχειρίδια, ιδίως σε σχέση με την παρουσίαση του περιεχομένου και τις προσδοκίες του εγχειριδίου, όπως αυτές εκδηλώνονται στα σχετικά έργα (tasks).

Το πλαίσιο αυτό αναλύει κάθε εγχειρίδιο σε δύο διαστάσεις. Στην πρώτη διάσταση, της οριζόντιας ανάλυσης, το βιβλίο εξετάζεται στο σύνολό του δίνοντας έμφαση στα γενικά χαρακτηριστικά των βιβλίων, όπως τη φυσική εμφάνιση και την οργάνωση περιεχομένου. Ωστόσο, σε αυτή την προσέγγιση έχει ασκηθεί κριτική για την παράβλεψη των θεμελιωδών διαφορών στις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές. Η δεύτερη διάσταση, της κάθετης ανάλυσης, εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο τα σχολικά βιβλία αντιμετωπίζουν μία μαθηματική έννοια ή ένα

θέμα και έχει υποστηριχθεί ότι η προσέγγιση αυτή θα μπορούσε δυνητικά να παραβλέψει τη σχέση μεταξύ του εξεταζόμενου θέματος και άλλων που περιέχονται στο ίδιο βιβλίο. Οι ερευνητές οργάνωσαν τα κριτήρια ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου όπως φαίνονται στον Πίνακα 1.9.

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ		
Γενικές πληροφορίες	Συνολική δομή εγχειριδίου	
<ul style="list-style-type: none"> • Τίτλος • Αριθμός βιβλίων • Σελίδες (Αριθμός και πυκνότητα) • Προφίλ συγγραφέων και συμβουλευτικής επιτροπής • Εκδότης και έτος έκδοσης • Συνοδευτικά υλικά (π.χ. οδηγοί εκπαιδευτικών, υλικά πόρων) 	<ul style="list-style-type: none"> • Αριθμός ενοτήτων/μαθημάτων και μέσος αριθμός σελίδων ανά ενότητα/μάθημα • Δομή ενοτήτων / μαθημάτων • Θέματα που καλύπτονται • Αλληλουχία θεμάτων 	
ΚΑΘΕΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ		
Μετάδοση των γνώσεων στους μαθητές	Απαιτήσεις από τους μαθητές	Συνδέσεις
<p><i>Μαθηματικό περιεχόμενο</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Κατασκευή συγκεκριμένου θέματος, δομή κ.λπ. (π.χ. μέρος-όλο, λόγος, τελεστής, πηλίκο, μέτρηση κατασκευών κλάσματος) • Ορισμοί, κανόνες, συμβάσεις • Εικονογραφήσεις-αναπαραστάσεις (άσχετες, σχετικές με το πλαίσιο αλλά όχι με το μαθηματικό, υποστηρίζοντας το μαθηματικά) <p><i>Μαθηματικές Πρακτικές</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Λυμένα παραδείγματα • Μοντελοποίηση σκέψης <p><i>Στάσεις</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Ισότητα • Άποψη των μαθηματικών 	<ul style="list-style-type: none"> • Πιθανές γνωστικές απαιτήσεις (απομνημόνευση, διαδικασίες με συνδέσεις, διαδικασίες χωρίς συνδέσεις, κάνει μαθηματικά) • Τύπος απάντησης (μόνο απάντηση, απάντηση και μαθηματική πρόταση, εξήγηση, αιτιολόγηση) 	<ul style="list-style-type: none"> • Συνδέσεις μεταξύ θεματικών ενοτήτων • Συνδέσεις του βιβλίου και της διδασκαλίας στην τάξη • Συνδέσεις με καταστάσεις εκτός του σχολείου

Πίνακας 1.9. Το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των εγχειριδίων μαθηματικών.

(Charalambous et al., 2010, σελ.123)

Για το σκοπό της συγκεκριμένης έρευνας, οι Charalambous et al. (2010) εστίασαν σε έξι κριτήρια (δύο από την οριζόντια και τέσσερα από η κάθετη διάσταση), ώστε να μελετηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές του τρόπου παρουσίασης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων μεταξύ των εγχειριδίων των τριών χωρών. Για την οριζόντια ανάλυση, επέλεξαν και εξέτασαν τα θέματα σε σχέση με την πρόσθεση και αφαίρεση των κλασμάτων και την αλληλουχία τους. Από την κατηγορία «μετάδοση γνώσεων στους μαθητές» της κάθετης ανάλυσης, εξέτασαν τις ερμηνείες των κλασμάτων και τα λυμένα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στα εγχειρίδια. Οι διαφορετικές ερμηνείες των κλασμάτων βοηθούν τους μαθητές να

αντιληφθούν πλήρως την έννοια του κλάσματος, ενώ τα λυμένα παραδείγματα κάνουν πιο εύκολη την απόκτηση δεξιοτήτων. Από την κατηγορία «απαιτήσεις από τους μαθητές», εστίασαν στις πιθανές γνωστικές απαιτήσεις των εργασιών του βιβλίου και στον τύπο της απάντησης που ζητήθηκε.

Ακολουθώντας τους Charalampous et al. (2010), οι Wijaya et al. (2015) ερεύνησαν την ευκαιρία για μάθηση που προσφέρουν τα ινδονησιακά εγχειρίδια Μαθηματικών της 8^{ης} τάξης και τη σχέση αυτής της ευκαιρίας για μάθηση με τις δυσκολίες που συναντάνε οι μαθητές κατά την επίλυση μαθηματικών έργων που βασίζονται σε πλαίσιο. Ανέλυσαν τα βιβλία από δύο οπτικές, δηλαδή τα φυσικά τους χαρακτηριστικά και τα εκπαιδευτικά τους στοιχεία (οριζόντια ανάλυση) και τα χαρακτηριστικά των έργων (κάθετη ανάλυση). Η κάθετη ανάλυση είχε ως στόχο να ερευνήσει την ευκαιρία μάθησης κατά την επίλυση εργασιών βάσει πλαισίου. Για το σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε ένα πλαίσιο ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων (Πίνακας 1.10) που αφορά τα χαρακτηριστικά ενός έργου από τέσσερις οπτικές: (1) τον τύπο του πλαισίου που χρησιμοποιείται σε ένα έργο, (2) το σκοπό των έργων που βασίζονται σε ένα πλαίσιο (3) το είδος των πληροφοριών που παρέχονται σε ένα έργο, και (4) το είδος των γνωστικών απαιτήσεων.

Η ανάλυση των τριών ινδονησιακών εγχειριδίων της 8^{ης} τάξης αποκάλυψε ότι ελάχιστα, μόνο περίπου το 10%, των έργων στα εγχειρίδια είναι έργα που βασίζονται σε πλαίσιο, τα περισσότερα εκ των οποίων ανήκουν στην κατηγορία «καμουφλαρισμένο» πλαίσιο. Επιπλέον, τουλάχιστον το 85% αυτών των εργασιών παρέχει στους μαθητές τις απαραίτητες πληροφορίες που απαιτούνται για την επίλυσή τους, με αποτέλεσμα να μην αφήνουν περιθώρια στους μαθητές να επιλέξουν σχετικές πληροφορίες από μόνοι τους προσθέτοντας ή αγνοώντας πληροφορίες. Άλλωστε, όπως επισημαίνει η Masss (2007) η παροχή περισσότερων ή λιγότερων πληροφοριών από αυτές που απαιτούνται για την επίλυση μιας εργασίας που βασίζεται σε πλαίσιο είναι ένας τρόπος ενθάρρυνσης των μαθητών να εξετάσουν το πλαίσιο που χρησιμοποιείται στην εργασία και όχι απλώς να βγάλουν τους αριθμούς από το πλαίσιο και να τους επεξεργαστούν μαθηματικά με έναν αυτόματο τρόπο. Επίσης, από τα έργα που αναλύθηκαν, βρέθηκε ότι το 45% είναι έργα αναπαραγωγής που απαιτούν την εκτέλεση μαθηματικών διαδικασιών ρουτίνας, το 53% είναι έργα σύνδεσης που απαιτούν τη σύνδεση διαφορετικών θεματικών ενοτήτων του προγράμ-

Χαρακτηριστικά έργων	Υποκατηγορία	Επεξήγηση
Τύπος πλαισίου	Χωρίς πλαίσιο	Αναφέρεται μόνο σε μαθηματικά αντικείμενα, σύμβολα ή δομές.
	«Καμουφλαρισμένο» πλαίσιο	Δεν χρειάζονται εμπειρίες από την καθημερινή ζωή ή τη συλλογιστική της κοινής λογικής. Οι μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων είναι ήδη προφανείς. Η λύση μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας όλους τους αριθμούς που δίνονται στο κείμενο.
	Σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο	Για να γίνει κατανοητό και να επιλυθεί το πρόβλημα, απαιτείται κοινή λογική συλλογιστικής στο πλαίσιο αυτό. Η μαθηματική πράξη δεν δίνεται ρητά. Απαιτείται μαθηματική μοντελοποίηση.
Σκοπός της εργασίας βάσει πλαισίου	Εφαρμογή Μοντελοποίηση	Η εργασία δίνεται μετά την ενότητα εξήγησης. Η εργασία δίνεται πριν την ενότητα εξήγησης.
Είδος πληροφοριών	Απαραίτητες	Οι εργασίες περιέχουν ακριβώς τις πληροφορίες που απαιτούνται για την εύρεση της λύσης.
	Ελλιπείς	Οι εργασίες περιέχουν λιγότερες πληροφορίες από τις απαραίτητες, οπότε οι μαθητές πρέπει να αντλήσουν επιπλέον δεδομένα.
	Περιττές	Οι εργασίες περιέχουν περισσότερες πληροφορίες από τις απαραίτητες, οπότε οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν πληροφορίες.
Είδος γνωστικών απαιτήσεων	Αναπαραγωγή	Αναπαραγωγή αναπαραστάσεων, ορισμών ή γεγονότων. Ερμηνεία απλών και οικείων παραστάσεων. Απομνημόνευση ή εκτέλεση υπολογισμών/ διαδικασιών ρουτίνας.
	Συνδέσεις	Ενσωμάτωση και σύνδεση μεταξύ διαφορετικών θεματικών εννοιών ή αναπαραστάσεων. Επίλυση προβλημάτων μη ρουτίνας. Ερμηνεία καταστάσεων και μαθηματικών εκφωνήσεων ενός προβλήματος. Συμμετοχή σε απλή μαθηματική συλλογιστική.
	Συλλογισμός	Στοχασμός και απόκτηση γνώσης για τα μαθηματικά. Κατασκευή πρωτότυπων μαθηματικών προσεγγίσεων. Κοινοποίηση περίπλοκων επιχειρημάτων και σύνθετων συλλογισμών. Δημιουργία γενικεύσεων.

Πίνακας 1.10. Ανάλυση πλαισίου για την ανάλυση σχολικού εγχειριδίου (Wijaya et al.,2015, σελ.52)

ματος σπουδών και μόνο το 2% είναι εργασίες συλλογιστικής σκέψης (reflective thinking), οι οποίες θεωρούνται εργασίες με το υψηλότερο επίπεδο γνωστικής απαίτησης. Εν ολίγοις, τα αποτελέσματα από την ανάλυσή των τριών ινδονησιακών σχολικών βιβλίων δείχνουν ότι η έλλειψη ευκαιρίας για μάθηση στα βιβλία μαθηματικών της Ινδονησίας μπορεί να προκαλέσει τις δυσκολίες των ινδονήσιων μαθητών στην επίλυση πλαισιωμένων εργασιών.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δείχνει ότι το εργαλείο ανάλυσης των έργων των σχολικών εγχειριδίων (ασκήσεις, προβλήματα, λυμένα παραδείγματα) ποικίλλει από έρευνα σε έρευνα. Τα πιο «δημοφιλή» κριτήρια ανάλυσης των έργων που συναντώνται στις έρευνες είναι: οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος απάντησης, το επίπεδο πολυπλοκότητας, το είδος διαδικασιών επίλυσης και τα χαρακτηριστικά πλαισίου. Κάποιες έρευνες επικεντρώνονται σε ένα συγκεκριμένο θέμα ή έννοια για παράδειγμα στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, στις εξισώσεις, στο λόγο και την αναλογία, στα τρίγωνα και τετράπλευρα, ενώ άλλες εστιάζουν στα έργα ενός ή περισσότερων σχολικών εγχειριδίων ολόκληρης της σχολικής βαθμίδας, για παράδειγμα η Brändström (2005) μελετά τη διαφοροποίηση των έργων (ασκήσεις, προβλήματα, λεκτικά προβλήματα) σε τρία εγχειρίδια Μαθηματικών της 7ης τάξης στη Σουηδία.

Τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνών που παρουσιάστηκαν στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αποκαλύπτουν σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό την ανεπάρκεια των σχολικών βιβλίων στην παρουσίαση μαθηματικού περιεχομένου και την υπεροχή των έργων με χαμηλές γνωστικές απαιτήσεις. Επίσης, εντοπίστηκαν αξιοσημείωτες διαφορές σε εγχειρίδια διαφορετικών σειρών και ιδίως διαφορετικών χωρών γεγονός που καταδεικνύει όχι μόνο την έλλειψη συναίνεσης για την εξέλιξη των εγχειριδίων αλλά και το πόσο άρρηκτα συνδεδεμένα είναι τα σχολικά εγχειρίδια με πολιτιστικό και κοινωνικό υπόβαθρο. Αρκετές, επίσης, έρευνες αποκάλυψαν το κενό που υπάρχει μεταξύ των σχολικών βιβλίων και του προβλεπόμενου Προγράμματος Σπουδών (Zhu et al., 2013). Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν την ανάγκη για τη διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας και δράσης στον τομέα ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών από ερευνητές, υπεύθυνους Προγραμμάτων Σπουδών αλλά και εκπαιδευτικούς.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί το κενό που υπάρχει στη χώρα μας σχετικά με τις έρευνες ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών. Έχουν πραγματοποιηθεί κάποιες έρευνες σε σχολικά βιβλία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι έρευνες είναι πολύ λιγότερες σχεδόν ανύπαρκτες, γεγονός που συνεπάγεται την πρόκληση και την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα ιδιαίτερα σε αυτή τη βαθμίδα εκπαίδευσης. Στη συνέχεια αναφέρονται σχετικές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα.

1.4 Έρευνες σχετικά με την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών στην Ελλάδα

Οι Καφούση, Σκουμπουρδή και Τάτσης (2009) υποστηρίζοντας την άποψη των Perin και Haggarty (2001), ότι η ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου μπορεί να γίνει τόσο με βάση τη δομή και το περιεχόμενό του όσο και με βάση τη χρήση του στη σχολική τάξη, επέλεξαν να αναλύσουν το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Δημοτικού, η επιλογή του οποίου βασίστηκε στην παραδοχή των ερευνητών ότι το εγχειρίδιο της Α΄ Δημοτικού αποτελεί την πρώτη επαφή του παιδιού με το μάθημα των Μαθηματικών μέσα από ένα δομημένο κείμενο. Συγκεκριμένα, επικεντρώθηκαν στη γλωσσική ανάλυση του μαθηματικού κειμένου, μελετώντας τα χαρακτηριστικά κειμένου σε σχέση με τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας και την εμπλοκή του μαθητή σε αυτή, τη σχέση αναγνώστη – συγγραφέα, την ύπαρξη και ποιότητα εξηγήσεων και τη θεματολογία δραστηριοτήτων.

Τα αποτελέσματα της πρώτης προσπάθειας ανάλυσης του περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου της Α΄ Δημοτικού με βάση την προσέγγιση που περιγράφηκε παραπάνω έδειξαν αρχικά ότι ενώ υπάρχει ποικιλία θεμάτων στο βιβλίο του μαθητή, δίνοντας έμφαση στην κοινωνική ζωή και το περιβάλλον, δεν υπάρχει συνήθως κάποιο σενάριο ή ιστορία που να συνδέεται με αυτά. Επίσης, ο μεγάλος αριθμός των ρημάτων στο πρώτο ενικό πρόσωπο καταδεικνύει μια προτίμηση στην ατομική εργασία έναντι της ομαδικής, συνεπώς και στο γεγονός να θεωρηθεί το μάθημα των Μαθηματικών ως μία ατομική ενασχόληση. Τέλος, ο ρόλος του μαθητή συνδέεται κυρίως με την εκτέλεση προκαθορισμένων ενεργειών, οι οποίες μπορεί να οδηγούν

στην αντίληψη ότι «όταν κάνω Μαθηματικά πρέπει να ακολουθώ τους κανόνες και τις οδηγίες του βιβλίου».

Μία ακόμη προσπάθεια ανάλυσης περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου της Α΄ Δημοτικού πραγματοποιήθηκε από τον Χατζηβασιλείου (2008) με κριτήριο τα πολιτισμικά στοιχεία που διέπουν το εγχειρίδιο. Από την ανάλυση περιεχομένου διαπιστώθηκαν στοιχεία διαπολιτισμικότητας σε σχέση με τους παρακάτω άξονες: (1) τα στερεότυπα του φύλου, (2) τα στερεότυπα και τις εικόνες για τους άλλους λαούς – εθνοκεντρισμός, (3) την αντιπροσώπευση των διαφόρων κοινωνικο-οικονομικών ομάδων, (4) τη γεωγραφική κατανομή πληθυσμών που εκπροσωπούνται, και (5) τα πρότυπα και τις αξίες που περνούν (π.χ. οι διατροφικές και καταναλωτικές συνήθειες των παιδιών, η οικογενειακή οργάνωση και δομή, η προστασία του περιβάλλοντος). Ο Χατζηβασιλείου (2008) υποστηρίζει ότι στο συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο δεν έχουν ξεπεραστεί τα στερεότυπα του κοινωνικού ρόλου των δύο φύλων. Επίσης, οι αξίες και τα πρότυπα που παρουσιάζονται στο εγχειρίδιο προάγουν το μοντέλο μιας παγκοσμιοποιημένης κοινωνίας με έντονα ταξικά στοιχεία στην οποία κυριαρχούν οι νόμοι της αγοράς και του κέρδους. Τέλος, αν και γίνεται προσπάθεια να αντληθούν παραδείγματα από την καθημερινότητα των μαθητών ώστε να δώσουν νόημα στους αριθμούς και τις σχέσεις τους, τα περισσότερα παραδείγματα αφορούν την πραγματικότητα του κυρίαρχου πολιτισμού, παραγκωνίζοντας μαθητές που ζουν σε απομακρυσμένες περιοχές.

Στην επόμενη τάξη του Δημοτικού, οι Δεσλή και Μολασιώτη (2014) ανέλυσαν το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Δημοτικού, καταγράφοντας το είδος των εικόνων που συνοδεύουν τα προβλήματα αριθμητικών πράξεων με ακέραιους αριθμούς. Επίσης, μελετήθηκε η επίδραση του είδους των εικόνων στην επίδοση των μαθητών της Β΄ Δημοτικού. Οι εικόνες που συνοδεύουν τα προβλήματα κατηγοριοποιήθηκαν με βάση την ταξινόμηση των Θεοδούλου και Γαγάτη (2003), προσθέτοντας μία επιπλέον κατηγορία για τις ανάγκες της έρευνας. Με βάση τις λειτουργίες που επιτελούν οι εικόνες στην επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος προτείνονται οι εξής πέντε κατηγορίες: (1) οι «διακοσμητικές εικόνες», οι οποίες δεν παρέχουν καμία πληροφορία και έχουν μόνο διακοσμητικό ρόλο, (2) οι «βοηθητικές – αναπαραστατικές εικόνες», οι οποίες αναπαριστούν μέρος του προβλήματος ή όλο το πρόβλημα και δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή

του, (3) οι «βοηθητικές – οργανωτικές εικόνες», οι οποίες οργανώνουν τις πληροφορίες του προβλήματος χωρίς να είναι απαραίτητες, (4) οι «πληροφοριακές εικόνες», οι οποίες παρέχουν τα απαραίτητα στοιχεία για την κατανόηση και επίλυση του προβλήματος, και (5) οι «εικόνες μηδενικής αναπαράστασης» όταν δεν υπάρχουν εικόνες στα προβλήματα.

Η ανάλυση περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Δημοτικού αποκάλυψε ότι οι πληροφοριακές εικόνες εμφανίζονται πολύ συχνά στο σχολικό εγχειρίδιο (48%), ακολουθούν οι διακοσμητικές εικόνες (24%), οι εικόνες χωρίς αναπαράσταση (18%), ενώ οι βοηθητικές (αναπαραστατικές και οργανωτικές) δεν ξεπερνούν συνολικά το 10%. Ενώ τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές θα έπρεπε να είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις πληροφοριακές εικόνες και την ερμηνεία τους στα μαθηματικά προβλήματα, στην πραγματικότητα οι επιδόσεις τους δεν διαφοροποιούνται ως προς το είδος των εικόνων που τους παρουσιάζονται.

Προς την ίδια κατεύθυνση κινήθηκαν οι Lemonidis, Stavrou & Papoutzis (2019) πραγματοποιώντας μια έρευνα σχετικά με την κοινωνιοσημειωτική ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου της Γ΄ τάξης Δημοτικού με τίτλο: *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. Οι ερευνητές χρησιμοποιώντας ως εργαλείο ανάλυσης τη σημειωτική, ανέλυσαν τις εικόνες και τα συνοδευτικά κείμενα του εγχειριδίου προκειμένου να διερευνήσουν ποιες αισθήσεις διεγείρονται κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας. Μέσω της παρατήρησης των συμμετεχόντων στην τάξη στο 5^ο Δημοτικό Σχολείο της Φλώρινας σε ασκήσεις πολλαπλών αναπαραστάσεων, επιβεβαιώνεται ότι τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά και κατανοούν τη νέα γνώση, η οποία απορροφάται μέσω της διανοητικής διαδικασίας των αναπαραστάσεων.

Οι Θεοφανίδου, Βάσιου, και Λεμονίδης (2018) εξέτασαν τις αντιλήψεις των μαθητών για το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου και πως αυτές σχετίζονται με τα συναισθήματα και τους στόχους επίτευξής τους. Για την αξιολόγηση του περιεχομένου του εγχειριδίου των Μαθηματικών της Γ΄ Δημοτικού χρησιμοποιήθηκε το ερωτηματολόγιο Student Feedback and Evaluation (Ο΄ Keeffe, 2011). Το ερωτηματολόγιο εξετάζει πώς οι μαθητές αξιολογούν το περιεχόμενο του βιβλίου των μαθηματικών και συγκεκριμένα αν είναι εύκολο, ενδιαφέρον και κατανοητό (π.χ., «Τα προβλήματα που περιέχονται στο βιβλίο

μου είναι ενδιαφέροντα», «Οι εικόνες που περιλαμβάνονται στο βιβλίο μου κάνουν το μάθημα πιο κατανοητό»). Από την ανάλυση του περιεχομένου προκύπτει ότι οι μαθητές αν και θεωρούν το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών εύκολο και ευχάριστο, διαβάζουν τα Μαθηματικά γιατί είναι χρήσιμα και για να ικανοποιήσουν τους γονείς τους ή / και τους εκπαιδευτικούς.

Η έρευνα των Triantafyllou, Spiliotopoulou και Potari (2016) μας μεταφέρει στα σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, οι ερευνήτριες μελέτησαν τη συλλογιστική και την επιχειρηματολογία που συναντάται σε θέματα σχετικά με την έννοια της περιοδικότητας στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής τόσο του Γυμνασίου όσο και του Λυκείου. Τα κείμενα των εγχειριδίων των Μαθηματικών που αναλύθηκαν σχετίζονται με την τριγωνμετρία και τις περιοδικές συναρτήσεις, ενώ της Φυσικής με περιοδικές κινήσεις (π.χ. ηλεκτρικές και μηχανικές ταλαντώσεις). Τα κείμενα των βιβλίων της Φυσικής οδηγούν τους μαθητές μέσα από την αναφορά πραγματικών εμπειριών, στη διατύπωση και αποδοχή της νέας γνώσης, ενώ τα κείμενα των Μαθηματικών αξιοποιούν ως βάση τόσο ισχυρές μαθηματικές παραδοχές όσο και εμπειρίες για να επαληθεύουν τις κυρίως μαθηματικο – λογικές διατυπώσεις της γνώσης.

Τέλος, οι Κολέζα και Φακούδης (2008) προτείνουν τρόπους ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών ως προς τη μαθηματική και την παιδαγωγική τους διάσταση σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης. Όσον αφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο η ανάλυση θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί ως προς τους παρακάτω άξονες: (1) τις τυπικές και άτυπες μορφές διαπραγμάτευσης της έννοιας στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης, (2) τον τρόπο σύνδεσης λειτουργικής και δομικής φύσης της έννοιας, (3) τις μορφές αναπαράστασης και τους τρόπους σύνδεσης αυτών των μορφών, (4) τις εσωτερικές συνδέσεις με άλλες μαθηματικές περιοχές (εξισώσεις, ανισώσεις, μοτίβα, γεωμετρία κ.α.), (5) τις εξωτερικές συνδέσεις με άλλα επιστημονικά πεδία όπως οι Φυσικές επιστήμες, η Οικονομία κ.α., και (6) τη χρήση της έννοιας σε πραγματικά προβλήματα (π.χ. μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων μέσω συναρτήσεων), (Κολέζα κ.α., 2008).

1.5 Οι έννοιες επιχειρηματολογία και απόδειξη στα Μαθηματικά

Η απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική μορφή της επιχειρηματολογίας στην οποία η αφαιρετική λογική λειτουργεί ως εγγύηση που δικαιολογεί τους μαθηματικούς ισχυρισμούς (Selden & Selden, 2003). Η απόδειξη και η επιχειρηματολογία αποτελούν βασικές διεργασίες στη διδασκαλία και την εκμάθηση των Μαθηματικών. Δεν αποτελούν μεμονωμένες διαδικασίες για ειδικές χρονικές στιγμές αλλά πρέπει να είναι ένα συνεχές – φυσιολογικό μέρος της διδασκαλίας στην τάξη, όποιο κι αν είναι το θέμα που μελετάται (NCTM, 2000). Λαμβάνοντας υπόψη τη διπλή φύση των μαθηματικών ως (μαθηματική) διαίσθηση (τόσο ως προς τη σύλληψη μιας έννοιας όσο και ως προς την κατανόηση της) αλλά και ως μίας συστημικής σειράς λογικών σχέσεων, γίνεται αντιληπτός ο ρόλος και η σημασία της επιχειρηματολογίας (Τσιλιπιδής, 2017). Αρκετοί ερευνητές τοποθετούν τη σημασία της επιχειρηματολογίας στον πυρήνα της παραγωγής γνώσης και θεωρούν ότι η επιχειρηματολογία για την εικασία, αποτελεί το αντίστοιχο της απόδειξης για το θεώρημα (Balacheff, 1999). Ο Balacheff προκειμένου να ξεπεραστούν τα επιστημολογικά εμπόδια ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη προτείνει ότι ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει τη διαφορά ανάμεσα στα δύο χωρίς να απορρίπτει κάποιο από τα δύο (Balacheff, 1999).

Πολλοί ερευνητές, επίσης, έχουν προσπαθήσει να ορίσουν την επιχειρηματολογία στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης χωρίς όμως οι απόψεις να είναι απόλυτα σύμφωνες μεταξύ τους. Για τον Krummheuer (1995) επιχειρηματολογία είναι οποιαδήποτε κατάσταση περιέχει «δηλώσεις που σχετίζονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο τρόπο και που με αυτόν τον τρόπο τελούνται συγκεκριμένες λειτουργίες οι οποίες βοηθούν στην αλληλεπιδραστική τους αποτελεσματικότητα» (σελ. 247). Η επιχειρηματολογία αφορά την παραγωγή λόγου για ένα συγκεκριμένο ζήτημα το οποίο βασίζεται σε λογικές συνδέσεις ή την παραγωγή διαλόγου (Douek, 1998). Η Pedemonte (2008) προτείνει έναν άλλο πιθανό ορισμό για την επιχειρηματολογία, «η επιχειρηματολογία, με την έννοια της απόδειξης, είναι ένα σύνολο λογικών αιτιολογήσεων που εκφράζονται ως συμπεράσματα» (σελ. 387).

Η Yackel (2001) διαχωρίζει την επεξήγηση (explanation) από την αιτιολόγηση (justification) και την επιχειρηματολογία (argumentation). Η επεξήγηση και η αιτιο-

λόγηση, σύμφωνα με τη Yackel (2001), τελούν διαφορετικές λειτουργίες και για αυτό νοούνται ξεχωριστά. Η επεξήγηση αφορά στοιχεία τα οποία παραθέτουν είτε οι εκπαιδευτικοί είτε οι μαθητές ώστε να συγκεκριμενοποιήσουν πτυχές της μαθηματικής σκέψης τους που δεν είναι άμεσα αντιληπτή από τα υπόλοιπα άτομα, ενώ η αιτιολόγηση δίνεται σαν απάντηση σε προκλήσεις όταν υπάρχουν εμφανείς παραβιάσεις των κανονιστικών μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Η Knipring (2008) κατηγοριοποιεί τα επιχειρήματα ανάλογα με το είδος των εγγυήσεών τους σε εννοιολογικά επιχειρήματα (conceptual arguments), που υπάγονται τα επιχειρήματα των οποίων οι εγγυήσεις είναι μαθηματικές έννοιες, θεωρήματα ή σχέσεις, για αυτόν το λόγο μπορεί να κατηγοριοποιηθούν και ως παραγωγικά εννοιολογικά επιχειρήματα (deductive conceptual arguments) και στα οπτικά επιχειρήματα (visual arguments), στα οποία η αναφορά σε σχήματα αποτελεί την εγγύηση του επιχειρήματος. Τα οπτικά επιχειρήματα διαχωρίζονται σε εμπειρικά οπτικά επιχειρήματα (empirical visual arguments) αν το σχήμα είναι συγκεκριμένο και οι σχέσεις παρατηρούνται μόνο σε αυτό και σε εννοιολογικά οπτικά επιχειρήματα (conceptual visual arguments) αν το σχήμα αποτελεί «αναπαράσταση μιας ιδέας» και το επιχειρήμα που βασίζεται σε αυτό το σχήμα μπορεί να αιτιολογήσει ένα γενικό συμπέρασμα για όλα τα επιχειρήματα με τις ίδιες ιδιότητες.

Σύμφωνα με τους Bieda, Drwenske & Picard (2014) οι μαθητές χρησιμοποιούν τη συλλογιστική (reasoning) όταν εμπλέκονται σε μαθηματικά επιχειρήματα, μια διαδικασία που περιλαμβάνει την υποβολή και την αιτιολόγηση (justification) των μαθηματικών ισχυρισμών. Η απόδειξη (demonstration), μια εξειδικευμένη μορφή επιχειρηματολογίας, είναι μια διαδικασία που δείχνει ότι ένας ισχυρισμός είναι πάντα αληθής (ή ψευδής), διέπεται από πειθαρχικούς κανόνες που καθορίζουν τους τρόπους συλλογιστικής και μορφές αναπαράστασης που είναι κατάλληλες για έγκυρη απόδειξη.

Σε γενικές γραμμές, οι ερευνητές συμφωνούν ότι η επιχειρηματολογία και η απόδειξη αποτελούν τα θεμέλια της μαθηματικής κατανόησης και ότι η μάθηση της αιτιολόγησης έχει βαρύνουσα σημασία για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης (Stylianides, 2007; Mueller, Yankelewitz & Maher, 2010).

1.6 Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη μέσα από τα Προγράμματα Σπουδών

Για την απόδειξη δίνεται μεγάλη προσοχή στα πλαίσια των προγραμμάτων σπουδών για σχολικά μαθηματικά σε όλο τον κόσμο (Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). Συγκεκριμένα, το «Common Core State Standards» των Ηνωμένων Πολιτειών υποστηρίζει ότι οι μαθητές όλων των ηλικιών θα πρέπει να «κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν ρητές υποθέσεις, ορισμούς και προηγούμενα διαπιστωμένα αποτελέσματα για την κατασκευή επιχειρημάτων» (Common Core State Standards Initiative, 2010). Ομοίως, στο «The Principles and Standards for School Mathematics» (NCTM, 2000) των Η.Π.Α., αναφέρεται πως «ο συλλογισμός και η απόδειξη πρέπει να είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών από το Νηπιαγωγείο έως και το Λύκειο». Αντίστοιχα, το Εθνικό Πρόγραμμα Σπουδών της Αγγλίας αναφέρει πως όλοι οι μαθητές πρέπει να καλλιεργούν την «μαθηματική σκέψη, ερευνώντας, εικάζοντας σχέσεις και γενικεύσεις και αναπτύσσοντας επιχειρήματα, αιτιολογήσεις ή αποδείξεις χρησιμοποιώντας μαθηματική γλώσσα» (Department for Education, 2013).

Το NCTM (2000) συνιστά στους μαθητές της 6^{ης}, 7^{ης} και 8^{ης} τάξης να διατυπώνουν εικασίες, να αξιολογούν εικασίες, να εξετάζουν δομές και μοτίβα και να δημιουργούν επιχειρήματα για τις εικασίες τους. Τα επιχειρήματά τους θα πρέπει να περιέχουν αρκετά στοιχεία για να πείσουν έναν άλλο μαθητή που δεν είναι μέλος της δικής του μαθησιακής κοινότητας. Σε αυτό το επίπεδο, οι αποδείξεις δεν χρειάζεται να είναι τυπικές, αλλά πρέπει να μοιράζονται σημαντικά χαρακτηριστικά ενός τυπικού επιχειρήματος. Για παράδειγμα, η συλλογιστική (reasoning) τους πρέπει να είναι αρκετά σαφής ώστε να αξιολογείται από άλλους. Οι μαθητές θα πρέπει να αρχίσουν να αναπτύσσουν τη σκέψη τους σχετικά με τη γενίκευση προτύπων και θα πρέπει να χρησιμοποιούν επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό (Campbell, Boyle, & King, 2020).

Η δομή του Αυστραλιανού Προγράμματος Σπουδών ACARA είναι ξεκάθαρη και οργανώνεται με την αλληλεπίδραση τεσσάρων τροχιών (strands) ικανοτήτων: την κατανόηση (understanding), την ευχέρεια (fluency), την επίλυση προβλήματος (problem solving) και την αιτιολόγηση (reasoning). Ιδιαίτερα, για τη συλλογιστική (reasoning) αναφέρεται: Οι μαθητές αναπτύσσουν μια ολοένα και πιο εξελιγμένη

ικανότητα λογικής σκέψης και ενεργειών, αναλύοντας, αποδεικνύοντας, εκτιμώντας, εξηγώντας, υπονοώντας, δικαιολογώντας και γενικεύοντας. Οι μαθητές αιτιολογούν μαθηματικά, όταν εξηγούν τη σκέψη τους, όταν συνάγουν και δικαιολογούν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για τα συμπεράσματα που επιτεύχθηκαν, όταν προσαρμόζουν το γνωστό στο άγνωστο, όταν μεταφέρουν τη μάθηση από το ένα στο άλλο, όταν αποδεικνύουν ότι κάτι είναι αληθινό ή ψευδές, και όταν συγκρίνουν και αντιπαραβάλλουν σχετικές ιδέες και εξηγούν τις επιλογές τους.

Οι Peschek και Heugl (2007) αναφέρονται στις μαθηματικές ικανότητες που πρέπει να αναπτύξει ο αυστριακός μαθητής μέχρι το τέλος της όγδοης τάξης (λαμβάνοντας υπόψη το Πρόγραμμα Σπουδών) και ορίζουν την επιχειρηματολογία ως μνεία των μαθηματικών πτυχών που κάνουν λόγο υπέρ ή κατά μίας συγκεκριμένης άποψης/απόφασης. Η επιχειρηματολογία απαιτεί σωστή και κατάλληλη χρήση μαθηματικών χαρακτηριστικών/σχέσεων, μαθηματικών κανόνων και ορολογίας των μαθηματικών. Χαρακτηρίζουν, επίσης, την αιτιολόγηση ως τη μνεία της επιχειρηματολογίας (ακολουθίας επιχειρημάτων) που οδηγεί σε συγκεκριμένα συμπεράσματα/αποφάσεις.

Ορισμένες τυπικές δραστηριότητες της επιχειρηματολογίας και αιτιολόγησης δίνονται παρακάτω:

- Να αναφέρετε μαθηματικά επιχειρήματα υπέρ ή κατά της χρήσης μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας, ενός μοντέλου ή παράστασης, υπέρ ή κατά ενός συγκεκριμένου τρόπου λύσης και μιας συγκεκριμένης λύσης, υπέρ ή κατά μιας συγκεκριμένης ερμηνείας.
- Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απόφαση για τη χρήση μίας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας, ενός μοντέλου, ενός τρόπου λύσης μίας παράστασης, μίας συγκεκριμένης λύσης ή συγκεκριμένης άποψης/ερμηνείας.
- Να διαμορφώσετε και να αιτιολογήσετε μαθηματικές υποθέσεις (βάσει παραγωγικού, επαγωγικού ή αναλογικού συλλογισμού).
- Να συναγάγετε ή να αποδείξετε μαθηματικές συναρτήσεις (τύποι, προτάσεις).

- Να αναγνωρίσετε σωστές και λανθασμένες μαθηματικές επιχειρηματολογίες/αιτιολογήσεις. Να αιτιολογήσετε γιατί μία επιχειρηματολογία ή αιτιολόγηση είναι σωστή ή λανθασμένη.

Στο ελληνικό Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών – Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ), (Υπουργείο Παιδείας, 2003) αναφέρεται ότι ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών συμβάλλει στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική ένταξή του, αφού τα Μαθηματικά:

- Ασκούν τον μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια.

Για το Γυμνάσιο επιδιώκονται οι παρακάτω ειδικότεροι σκοποί:

- Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
- Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.
- Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
- Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.

Επίσης, το ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ επισημαίνει ότι επιδιώκοντας τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης μέσω επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας. Αυτοί είναι οι πραγματικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης, δηλαδή «οι στόχοι, που αφορούν την ίδια τη διαδικασία μάθησης και δεν αποτελούν απλά μετρήσιμο αποτέλεσμα».

Τέλος, τονίζονται τα είδη των διαδικασιών σκέψης που αναμένεται να μάθουν να χρησιμοποιούν οι μαθητές. Για παράδειγμα, αν μπορούν:

- Να αναλύουν και να ερμηνεύουν.

- Να υπολογίζουν και να συγκρίνουν.
- Να οργανώνουν πληροφορίες και δεδομένα.
- Να σχεδιάζουν και να κατασκευάζουν.
- Να διατυπώνουν, να εικάζουν και να υποθέτουν.
- Να αιτιολογούν, να επιχειρηματολογούν και να αποδεικνύουν.

1.7 Έρευνες σχετικά με την επιχειρηματολογία και απόδειξη στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών

Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί το ενδιαφέρον των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών για τη θέση της απόδειξης στα σχολικά εγχειρίδια και ειδικότερα για τις ευκαιρίες εμπλοκής που τα σχολικά βιβλία παρέχουν στους μαθητές και στις μαθήτριες σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία (Μούτσιος – Ρέντζος & Πιτσιλή – Χαντζή, 2015). Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών; Το περιεχόμενο αυτών θα μπορούσε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να αντιμετωπίσουν τη συλλογιστική (reasoning) και, μέσω αυτής, να οδηγηθούν στην καλύτερη κατανόηση του βιβλίου των Μαθηματικών; Όπως έχει παρατηρήσει ο Liptman (1991), για να προωθήσουμε τη συλλογιστική, χρειαζόμαστε βιβλία που να την ενσωματώνουν και να τη διαμορφώνουν.

Οι Newton & Newton (2007) μελέτησαν δεκαοχτώ εγχειρίδια Μαθηματικών που απευθύνονται σε μαθητές ηλικίας 7-11 ετών στην Αγγλία με σκοπό να εξετάσουν τη δυνατότητα που προσφέρουν τα εγχειρίδια να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να ανταποκριθούν στην αιτιολόγηση των εργασιών. Το σιωπηρό μήνυμα των σχολικών αγγλικών εγχειριδίων είναι ότι η γνώση των υπολογισμών είναι αυτό που μετράει. Η μαθηματική εκπαίδευση αναφέρεται, κυρίως, στην ανάπτυξη υπολογιστικών δεξιοτήτων μέσω εργασιών ρουτίνας και αλγορίθμων, μειώνοντας την ανάγκη για τις επιχειρηματολογικές και συλλογιστικές δραστηριότητες των μαθητών.

Οι Bieda et al. (2014) ανέλυσαν επτά σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών του Δημοτικού που διδάσκονται σε μαθητές των ΗΠΑ ηλικίας 9-11 εστιάζοντας στις ευκαιρίες για συλλογιστική και απόδειξη που παρουσιάζονται στις εργασίες των εγχειριδίων. Οι ερευνητές, ωστόσο, ασχολήθηκαν περισσότερο με την ταξινόμηση των ει-

δών των εργασιών που σχετίζονται με τη μαθηματική επιχειρηματολογία και που υπάρχουν στα βιβλία του Δημοτικού και όχι τόσο με την εφαρμογή της συλλογιστικής και της απόδειξης των εργασιών στις αίθουσες διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι μόνο το 3,7% των εργασιών των εγχειριδίων που αναλύθηκαν σχετίζονται με τη συλλογιστική και την απόδειξη.

Τέλος, οι Davis, Smith, Roy και Bilgic (2014), όπως αναφέρουν οι Μούτσιος – Ρέντζος κ.α. (2015), αναλύοντας δύο μεταρρυθμιστικά βιβλία της Άλγεβρας των ΗΠΑ, βρήκαν ότι στην πραγματικότητα των σχολικών εγχειριδίων η παραγωγή εικασιών δεν αποτελεί συχνή διαδικασία, ενώ η αναγνώριση μοτίβων συνήθως δεν συνδέεται με ανάπτυξη εικασιών ή επιχειρημάτων. Αντίστοιχο χάσμα μεταξύ αναλυτικού προγράμματος και εγχειριδίων αναγνωρίστηκε στην Ιρλανδία, όπου οι διαδικασίες επιχειρηματολογίας που ζητούνται από τους μαθητές είναι φτωχές στην ποικιλία και δεν αντιστοιχούν στη μαθηματική πρακτική (Davis, 2013). Στην ίδια κατεύθυνση, οι Vincent et al. (2008) ανέλυσαν τα προβλήματα εννέα σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της 8^{ης} τάξης της Αυστραλίας που αφορούσαν τις θεματικές περιοχές Αριθμητική, Άλγεβρα και Γεωμετρία. Τα προβλήματα που αναλύθηκαν και ταξινομήθηκαν στην κατηγορία απόδειξη – συλλογιστική εντοπίστηκαν μόνο στη Γεωμετρία και μόνο σε έξι από τα εννέα εγχειρίδια σε ποσοστό περίπου 8%.

Κεφάλαιο 2. Μεθοδολογία

2.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Πραγματοποιώντας αυτή την έρευνα γίνεται μια προσπάθεια περιγραφής της παρούσας κατάστασης στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Δεδομένου ότι τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν το βασικό συστατικό του επιδιωκόμενου προγράμματος σπουδών, η ανάλυσή τους, ενδεχομένως, να εφοδιάσει τους δημιουργούς του σχολικού εγχειριδίου καθώς και τους υπευθύνους για τη λήψη αποφάσεων όσον αφορά την επιλογή του εγχειριδίου με σημαντικά δεδομένα και πληροφορίες για μελλοντικές βελτιώσεις και τροποποιήσεις του συγκεκριμένου σχολικού εγχειριδίου.

Βασικός στόχος της παρούσας έρευνας είναι, λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρονται στη σχετική βιβλιογραφία, να εξετάσει τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα διαφορετικά είδη έργων και πως αυτά σχετίζονται με τις πέντε διαστάσεις ανάλυσης των έργων επιλεγμένων θεματικών ενοτήτων του εγχειριδίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, οι θεματικές ενότητες που αναλύονται είναι οι Εξισώσεις – Ανισώσεις, οι Πραγματικοί αριθμοί, τα Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα και η Μέτρηση του κύκλου.

Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να δώσει απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που ακολουθούν:

1. Σε ποιο βαθμό τα έργα των επιλεγμένων θεματικών ενοτήτων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου έχουν μια παραδοσιακή μορφή για τη μάθηση εννοιών;
2. Τι ποιότητας μαθηματικές δραστηριότητες προσφέρουν τα αναλυθέντα έργα; Σε ποιο βαθμό η επιχειρηματολογία και η συλλογιστική αναπτύσσονται σε αυτά;
3. Ποιες είναι οι γνωστικές απαιτήσεις των έργων στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου που ωθούν τον μαθητή σε κριτική σκέψη κατά τη διαχείριση των μαθηματικών εννοιών;
4. Συναντώνται διαλεκτικές ερωτήσεις στα αναλυθέντα έργα ώστε ο μαθητής να μπει στη διαδικασία συζήτησης ή έχουν μοναδική λύση;

5. Παρατηρείται σύνδεση με την πραγματικότητα και την καθημερινή ζωή στα αναλυθέντα έργα;

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η παρούσα έρευνα πραγματοποιείται με βάση το εργαλείο ανάλυσης έργων της Glasnovic Gracin (2018) των κροατικών σχολικών εγχειριδίων, κρίθηκε απαραίτητο να προστεθεί το επόμενο ερευνητικό ερώτημα.

6. Ποιες ομοιότητες και διαφορές παρουσιάζουν τα έργα των σχολικών εγχειριδίων στην Ελλάδα και στην Κροατία;

2.2 Μέθοδος έρευνας

Με βάση τη βιβλιογραφία για την ανάλυση των έργων των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών προτείνονται διάφορες μέθοδοι ανάλυσης. Για παράδειγμα, πολλές έρευνες βασίστηκαν στο τρισδιάστατο πλαίσιο του Li (2000), στο πλαίσιο ανάλυσης των Zhu et al. (2006) και στους ορισμούς της Μελέτης Βιντεοσκόπησης TIMSS 1999 όπως χρησιμοποίησαν για την έρευνά τους οι Stacey et al. (2008). Για την ανάλυση των έργων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης επιλέχθηκε το πλαίσιο της πενταδιάστατης ανάλυσης των έργων του εγχειριδίου της Glasnovic Gracin (2018). Η Glasnovic Gracin (2018) συνδύασε δύο θεωρητικές πηγές: τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα (2007) και το πλαίσιο των Zhu και Fan (2006). Τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα (2007) ορίζουν το θεωρητικό πλαίσιο μέσα από τρεις διαστάσεις: *το περιεχόμενο, τις μαθηματικές δραστηριότητες και τα επίπεδα πολυπλοκότητας*. Ενώ, οι Zhu et al. (2006) συμπλήρωσαν το πενταδιάστατο πλαίσιο με τις διαστάσεις: *μορφές απάντησης και χαρακτηριστικά πλαισίου*, οι οποίες προέκυψαν από τροποποιήσεις του αρχικού τους πλαισίου για τις ανάγκες της έρευνας που πραγματοποίησε η Glasnovic Gracin (2018). Θεωρήθηκε το καταλληλότερο πλαίσιο για τη διερεύνηση των στόχων της παρούσας έρευνας, διότι σύμφωνα με τη Glasnovic Gracin (2018) το πολυδιάστατο αυτό πλαίσιο αποδείχθηκε ένα ισχυρό αναλυτικό εργαλείο για τον εντοπισμό των ευκαιριών μάθησης των μαθητών.

2.3 Το υλικό της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε το σχολικό εγχειρίδιο «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου» (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, και Ρεκούμης, 2008) το οποίο διδάσκεται στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Τα σημερινά σχολικά βιβλία μαθηματικών για το Γυμνάσιο διανεμήθηκαν για πρώτη φορά το 2007 – 2008. Το βιβλίο του μαθητή αποτελείται από 254 σελίδες και η ύλη του είναι οργανωμένη σε δύο μέρη. Το Α΄ μέρος περιλαμβάνει τέσσερα κεφάλαια που αναφέρονται στην Άλγεβρα και τη Στατιστική και το Β΄ μέρος περιλαμβάνει άλλα τέσσερα κεφάλαια που αναφέρονται στη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία. Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε θεματικές ενότητες. Συγκεκριμένα επιλέχθηκαν προς ανάλυση οι παρακάτω ενότητες (Πίνακας 2.1):

Μέρος Α΄	
Κεφάλαιο 1 ^ο : Εξισώσεις – Ανισώσεις	
1.1	Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις
1.2	Εξισώσεις α΄ βαθμού
1.3	Επίλυση τύπων
1.4	Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων
1.5	Ανισώσεις α΄ βαθμού
Κεφάλαιο 2 ^ο : Πραγματικοί αριθμοί	
2.1	Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού
2.2	Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί
2.3	Προβλήματα
Μέρος Β΄	
Κεφάλαιο 1 ^ο : Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα	
1.1	Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας
1.2	Μονάδες μέτρησης επιφανειών
1.3	Εμβαδά επίπεδων σχημάτων
1.4	Πυθαγόρειο θεώρημα
Κεφάλαιο 3 ^ο : Μέτρηση Κύκλου	
3.1	Εγγεγραμμένες γωνίες
3.2	Κανονικά πολύγωνα
3.3	Μήκος κύκλου
3.4	Μήκος τόξου
3.5	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου
3.6	Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Πίνακας 2.1. Θεματικές ενότητες προς ανάλυση

Αξίζει να σημειωθεί η θεματική ενότητα του Πυθαγόρειου θεωρήματος συνδέεται άρρηκτα με την ενότητα των Πραγματικών αριθμών, όπου στα περισσότερα έργα απαιτείται η εφαρμογή του θεωρήματος.

2.4 Δείγμα

Από το σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου εξετάστηκαν τα στοιχεία εκείνα που καλούνται «έργα». Η λέξη έργο (task) σύμφωνα με τους Mason και Johnston-Wilder (2004) καλύπτει όλες τις καταστάσεις του βιβλίου που απαιτούν απάντηση, ανεξάρτητα αν η απάντηση δίνεται ή όχι. Σύμφωνα με τις Henningsen & Stein (1997), τα μαθηματικά έργα (tasks) είναι διάφορες δραστηριότητες που πραγματοποιούνται εντός της σχολικής τάξης και έχουν ως στόχο να εστιάσουν την προσοχή των μαθητών σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια ή διαδικασία. Στην παρούσα έρευνα αυτές οι καταστάσεις είναι οι εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις) που έπονται των εισαγωγικών δραστηριοτήτων, οι ερωτήσεις κατανόησης, οι ασκήσεις, και κάποιες σπαζοκεφαλιές που ονομάζονται δραστηριότητες «για διασκέδαση».

Συνολικά καταμετρήθηκαν 636 έργα (εφαρμογές, ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις και σπαζοκεφαλιές). Αναλυτικότερα φαίνονται παρακάτω (Πίνακας 2.2).

Θέματα	Πλήθος έργων
Εξισώσεις – Ανισώσεις	88
Πραγματικοί αριθμοί	50
Συναρτήσεις	78
Περιγραφική Στατιστική	55
Εμβαδά επίπεδων σχημάτων- Πυθαγόρειο Θεώρημα	57
Τριγωνομετρία	101
Μέτρηση κύκλου	89
Γεωμετρικά στερεά	118
Σύνολο	636

Πίνακας 2.2. Πλήθος έργων ανά ενότητα του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου

Για τη διεκπεραίωση της έρευνας επιλέχθηκαν τα έργα από δύο κεφάλαια της Άλγεβρας και δύο της Γεωμετρίας. Τα έργα που αναλύθηκαν προέρχονται από τις θεματικές ενότητες των Εξισώσεων – Ανισώσεων (88), τους Πραγματικούς αριθμούς (50), τα Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα (57) και τη Μέτρηση κύκλου (89). Συνολικά εξετάστηκαν 284 έργα (138 από την Άλγεβρα και 146 από τη Γεωμετρία). Η επιλογή των θεμάτων στηρίχθηκε στη βιβλιογραφία και στο γεγονός ότι είναι από τα πιο δημοφιλή θέματα της Β΄ Γυμνασίου.

2.5 Εργαλείο ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου

Κάθε έργο αναλύθηκε με βάση το πενταδιάστατο πλαίσιο (περιεχόμενο, μαθηματική δραστηριότητα, επίπεδο πολυπλοκότητας, μορφή απάντησης και χαρακτηριστικά πλαισίου) που παρουσιάστηκε στη βιβλιογραφία. Οι πέντε διαστάσεις καθώς και οι ταξινομήσεις των έργων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των εργασιών του σχολικού βιβλίου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2.3) και αναλύονται περαιτέρω.

Διάσταση	Ερώτηση	Λεπτομέρειες και κωδικοί
Μαθηματικό περιεχόμενο	Ποιο περιεχόμενο πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής για να εκτελέσει μια συγκεκριμένη εργασία;	Άλγεβρα (I1) Στατιστική(I2) Γεωμετρία(I3) Τριγωνομετρία (I4)
Μαθηματική δραστηριότητα	Ποιες μαθηματικές δραστηριότητες πρέπει να εκτελεστούν για την επιτυχή εκτέλεση του έργου;	Αναπαραστάσεις και μοντελοποίηση (H1) Υπολογισμός και Πράξη (H2) Επεξήγηση (H3) Επιχειρηματολογία και συλλογιστική (H4)
Επίπεδο πολυπλοκότητας	Ποια είναι η πολυπλοκότητα των γνώσεων και των δραστηριοτήτων που χρειάζεται ένας μαθητής για να εκτελέσει το έργο;	Άμεση εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων(K1) Κατασκευή και αντιμετώπιση των συνδέσεων (K2) Συλλογισμός ή εφαρμογή συλλογιστικής γνώσης (K3)
Μορφή απάντησης	Ποια μορφή απάντησης απαιτεί η εργασία;	Κλειστή απάντηση (A1) Ανοικτή απάντηση (A2) Πολλαπλή επιλογή (A3)
Πλαίσιο	Ποιο είναι το πλαίσιο στο έργο;	Η ενδο-μαθηματική κατάσταση (C1) Ρεαλιστικό πλαίσιο (C2) Αυθεντικό πλαίσιο (C3)

Πίνακας 2.3. Εργαλείο για την ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου

Περιεχόμενο. Το περιεχόμενο δίνει έμφαση στη διερεύνηση της μαθηματικής γνώσης που απαιτείται να έχει ο μαθητής για να ανταποκριθεί επιτυχώς στα έργα του βιβλίου. Το μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (Πίνακας 2.4), σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. χωρίζεται σε δύο μέρη Άλγεβρα και Γεωμετρία. Για την καλύτερη, όμως, εφαρμογή της έρευνάς μας διαχωρίζουμε την ύλη του βιβλίου σε τέσσερις Θεματικές περιοχές :

- Άλγεβρα – Στατιστική
- Γεωμετρία – Τριγωνομετρία

Οι συγγραφείς του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου αναφέρουν στον πρόλόγό του: «Στο πρώτο μέρος, η Άλγεβρα ξεκινά με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού, ενώ στο δεύτερο μέρος η Γεωμετρία ξεκινά με τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων τα οποία οδηγούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη Γεωμετρία το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μελετηθεί μόνο για ρητούς αριθμούς και κατόπιν θα αποτελέσει τη

βάση για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας. Γνωρίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να μελετήσουμε την Τριγωνομετρία, η οποία καταλαμβάνει τις περισσότερες παραγράφους του δεύτερου κεφαλαίου του δευτέρου μέρους, το οποίο ολοκληρώνεται με τα διανύσματα. Στη συνέχεια η πορεία των δύο μερών του βιβλίου γίνεται σχεδόν ανεξάρτητη. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση βασικών συναρτήσεων και την περιγραφική Στατιστική, ενώ το δεύτερο με τη μέτρηση κύκλου και τη μελέτη και μέτρηση γεωμετρικών στερεών.»

Θεματική περιοχή	Αριθμός κεφαλαίου	Τίτλος - Περιεχόμενο
Άλγεβρα – Περιγραφική Στατιστική	1	Εξισώσεις – Ανισώσεις
	2	Πραγματικοί Αριθμοί
	3	Συναρτήσεις
	4	Περιγραφική Στατιστική
Γεωμετρία – Τριγωνομετρία	1	Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα
	2	Τριγωνομετρία – Διανύσματα
	3	Μέτρηση Κύκλου
	4	Γεωμετρικά Σχήματα – Μέτρηση Στερεών

Πίνακας 2.4. Ύλη του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου

Μαθηματικές δραστηριότητες. Οι τέσσερις βασικές μαθηματικές δραστηριότητες που πρέπει να εκτελεστούν για την επιτυχή εκτέλεση ενός έργου είναι: Αναπαράστασεις και Μοντελοποίηση (H1), Υπολογισμοί και Πράξεις (H2), Επεξήγηση (H3) και Επιχειρηματολογία και Συλλογιστική (H4). Η αναπαράσταση (H1) αφορά την «μετάφραση» κάποιων μαθηματικών δεδομένων σε μία άλλη μαθηματική αναπαράσταση (για παράδειγμα, μετατροπή από μία στατιστική αναπαράσταση σε άλλη). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει την αναγνώριση σχετικών μαθηματικών σχέσεων από τη δεδομένη κατάσταση και την έκφραση του ίδιου προβλήματος με μαθηματικό τρόπο (συμβολική, γραφική, κλπ.). Ο υπολογισμός (H2) αφορά τη διενέργεια στοιχειωδών πράξεων με συγκεκριμένους ή γενικευμένους αριθμούς. Η πράξη είναι η συγκεκριμένη, λογική και αποτελεσματική διεξαγωγή υπολογιστικών ή κατασκευαστικών βημάτων. Αναφέρεται επίσης σε μετασχηματισμό μονάδων μέτρησης, μετασχηματισμό μαθηματικών εκφράσεων, επίλυση εξισώσεων, εκτίμηση αποτελεσμάτων, προσεγγίσεις και διεξαγωγή στοιχειωδών γεωμετρικών κατασκευών. Η ε-

πεξήγηση (H3) αφορά την αναγνώριση των σχέσεων και των σχετικών δεδομένων που δίνονται στις μαθηματικές αναπαραστάσεις (γραφική, συμβολική και πίνακες) και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Η επεξήγηση περιλαμβάνει την κατάλληλη ανάγνωση των γραφικών ή συμβολικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Η επιχειρηματολογία (H4) αναφέρεται στην περιγραφή των μαθηματικών πτυχών που μιλούν υπέρ ή κατά μιας συγκεκριμένης απόφασης. Απαιτεί συγκεκριμένη και κατάλληλη εφαρμογή των μαθηματικών σχέσεων και χαρακτηριστικών, των μαθηματικών κανόνων καθώς και τη σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Η συλλογιστική αφορά τη σειρά των σωστών επιχειρημάτων που οδηγούν σε ένα συμπέρασμα.

Για παράδειγμα, η ακόλουθη εργασία απαιτεί δραστηριότητες αναπαραστάσης: Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τη φράση «Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12». Ενώ η ακόλουθη εργασία του εγχειριδίου απαιτεί δραστηριότητες υπολογισμού: $\sqrt{18+18}$. Ορισμένα έργα απαιτούσαν περισσότερες από μία δραστηριότητες. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέχθηκε και κωδικοποιήθηκε η δραστηριότητα που θεωρήθηκε κυρίαρχη για την εκτέλεση του έργου.

Επίπεδο πολυπλοκότητας. Η πολυπλοκότητα των γνώσεων και των δραστηριοτήτων που χρειάζεται ένας μαθητής για να εκτελέσει ένα έργο χωρίζεται σε τρία επίπεδα. Αυτά είναι: η εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων (K1), η δημιουργία συνδέσεων (K2) και η συλλογιστική σκέψη (K3). Δηλαδή, το ίδιο το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες δεν αρκούν για να προσδιορίσουν τις ικανότητες που απαιτούνται από τους μαθητές σε μια συγκεκριμένη εργασία του βιβλίου. Ορισμένες μαθηματικές εργασίες θα μπορούσαν να έχουν το ίδιο περιεχόμενο (για παράδειγμα, τον κύκλο) και την ίδια δραστηριότητα (για παράδειγμα, υπολογισμοί), αλλά θα μπορούσαν να διαφέρουν ως προς τη γνωστική πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, ένα έργο θα μπορούσε να απαιτήσει τις δεξιότητες σχετικά με το επίπεδο πολυπλοκότητας της αναπαραγωγής, ενώ ένα άλλο να απαιτεί την κατασκευή πιο σύνθετων συνδέσεων. Η εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων (K1) περιλαμβάνει την αναπαραγωγή ή την άμεση εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, κανόνων, διαδικασιών και αναπαραστάσεων. Η δημιουργία συνδέσεων (K2) και η αντιμετώπιση των συν-

δέσεων αφορά σε πιο πολύπλοκα έργα, όπου απαιτείται να συνδυαστούν διάφορες έννοιες ή δραστηριότητες για την επίλυση του προβλήματος. Περιλαμβάνει, για παράδειγμα, τη σύνδεση μεταξύ μιας ποικιλίας όρων, θεωρημάτων, μεθόδων και αναπαραστάσεων. Η συλλογιστική σκέψη (Κ3) περιλαμβάνει το συλλογισμό μαθηματικών ιδεών που δεν είναι ευανάγνωστες από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η συλλογιστική γνώση σημαίνει την εφαρμογή δημιουργικών γνώσεων σχετικά με τα μαθηματικά.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα το πρώτο από την ενότητα 3.2 Κανονικά πολύγωνα: «Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκάγωνου», όπου απαιτείται από τους μαθητές να εφαρμόσουν βασικές γνώσεις, δηλαδή τον τύπο που τους δίνεται στη θεωρία του μαθήματος. Το δεύτερο είναι από την ενότητα 1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών: «Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν: α) του δωματίου μας, β) της Κρήτης, γ) ενός αγρού, δ) ενός γραμματόσημου, ε) ενός φύλλου τετραδίου. Ο μαθητής καλείται να συνδέσει τις γνώσεις του για τις μονάδες μέτρησης με τις γνώσεις του από την καθημερινή ζωή.

Μορφές απάντησης. Οι μορφές απάντησης που μπορεί να έχει ένα έργο είναι οι ακόλουθες: κλειστή απάντηση (Α1), ανοικτή απάντηση (Α2) και απάντηση πολλαπλής επιλογής (Α3). Τα έργα πολλαπλής επιλογής προσφέρουν στον μαθητή έναν περιορισμένο αριθμό καθορισμένων απαντήσεων. Τα έργα κλειστής απάντησης απαιτούν μια σωστή απάντηση, ανεξάρτητα από το πόσες διαφορετικές προσεγγίσεις υπάρχουν για να φτάσει ο μαθητής στην απάντηση. Αντίθετα τα έργα ανοικτής απάντησης έχουν διαφορετικές ή πολλές σωστές απαντήσεις, απαιτώντας από τους μαθητές μια πιο ελεύθερη έκφραση των ιδεών τους για τα Μαθηματικά. Τα έργα κλειστής απάντησης δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην τελική λύση, ενώ τα έργα ανοικτής απάντησης σχετίζονται περισσότερο με τη διαδικασία και τον τρόπο επίλυσης του συγκεκριμένου έργου.

Για παράδειγμα, το ακόλουθο έργο: «Να λύσετε την εξίσωση $2x + 21 = 4 + x - 5$ », απαιτεί μια και μοναδική σωστή απάντηση. Αντίθετα το έργο: «Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι: Α: 80° , Β: 180° , Γ: 90° , Δ: 45° . Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση», δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή

να επιλέξει τη σωστή απάντηση από έναν περιορισμένο αριθμό καθορισμένων απαντήσεων.

Χαρακτηριστικά πλαισίου. Το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται ένα έργο μπορεί να σχετίζεται με μια ενδομαθηματική κατάσταση (C1), με ένα ρεαλιστικό πλαίσιο (C2) ή με ένα αυθεντικό πλαίσιο (C3). Μια ενδομαθηματική κατάσταση αναφέρεται σε έργα χωρίς πλαίσιο, δηλαδή σε έργα που χρησιμοποιούν ένα σύστημα συμβολικών αναπαραστάσεων μαθηματικών αντικειμένων και ιδεών. Το ρεαλιστικό πλαίσιο περιλαμβάνει καταστάσεις με προσομοιωμένη πραγματικότητα.

Για παράδειγμα, το πρόβλημα του βιβλίου: «Η διαγώνιος της οθόνης μιας τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x , y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης», μιμείται καταστάσεις του πραγματικού κόσμου που τεχνηέντως έχουν κατασκευάσει οι συγγραφείς του βιβλίου, οπότε αποτελεί ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Τέλος, αυθεντικό πλαίσιο σημαίνει ότι τα δεδομένα και οι συνθήκες του έργου προέρχονται από καταστάσεις πραγματικής ζωής ή συλλέγονται από τους ίδιους τους μαθητές.

2.6 Παραδείγματα ανάλυσης έργων

Με βάση το εργαλείο ανάλυσης έργων που περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω, παρατίθενται τέσσερα από τα έργα του σχολικού εγχειριδίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου που μελετήθηκαν και αναλύθηκαν. Τα μαθηματικά αυτά έργα παρουσιάζονται ως παραδείγματα του τρόπου ανάλυσης και ταξινόμησης των έργων ανάλογα με το περιεχόμενο, τη μαθηματική δραστηριότητα που απαιτείται, το επίπεδο πολυπλοκότητας του έργου, τη μορφή απάντησης και το πλαίσιο στο οποίο ανήκει. Τα έργα που επιλέχθηκαν παρουσιάζονται ακολούθως.

Παράδειγμα 1 (σελ. 14)

Να χρησιμοποιήσετε μία μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε πέντε κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.

β) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.

I1: Το έργο διαπραγματεύεται μεταβλητές, οπότε ανήκει στη Άλγεβρα.

H1: Το έργο απαιτεί τη μετάφραση της πρότασης από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική της μορφή.

K1: Το έργο απαιτεί την αναπαράσταση της σχέσης αυτής με τη μορφή αλγεβρικής παράστασης: αυτή η δραστηριότητα είναι βασική.

A1: Η απάντηση είναι μοναδική, οποιαδήποτε μεταβλητή και αν χρησιμοποιήσει ο μαθητής, άρα θεωρείται έργο κλειστού τύπου.

C2: Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι ρεαλιστικό, γιατί σχετίζεται με προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Παράδειγμα 2 (σελ. 20)

Να λύσετε την εξίσωση: $4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$

I1: Το αντικείμενο αυτού του έργου είναι οι εξισώσεις α' βαθμού, το οποίο ανήκει στην Άλγεβρα.

H2: Το έργο απαιτεί μια σειρά πράξεων για την εύρεση της λύσης της εξίσωσης, δηλαδή τη χρήση συγκεκριμένου αλγορίθμου.

K1: Το έργο απαιτεί το σχεδιασμό μιας διαδρομής για την επίλυση της εξίσωσης, δηλαδή την εφαρμογή βασικών γνώσεων (π.χ. πράξεις ρητών, εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας).

A1: Η απάντηση είναι μοναδική ανεξάρτητα από τον τρόπο επίλυσης κάθε μαθητή.

C1: Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι καθαρά ενδομαθηματικό.

Παράδειγμα 3 (σελ. 44)

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	16				
64	36				

Τι συμπεραίνετε;

I1: Οι τετραγωνικές ρίζες ταξινομούνται στην Άλγεβρα.

H3: Το έργο απαιτεί επεξήγηση, δηλαδή, την ανάγνωση, τη συσχέτιση και την ερμηνεία των τιμών του πίνακα για τη διεξαγωγή συμπεράσματος. Από τις ειδικότερες περιπτώσεις των συγκεκριμένων αριθμών προκύπτει η γενικευμένη μορφή $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

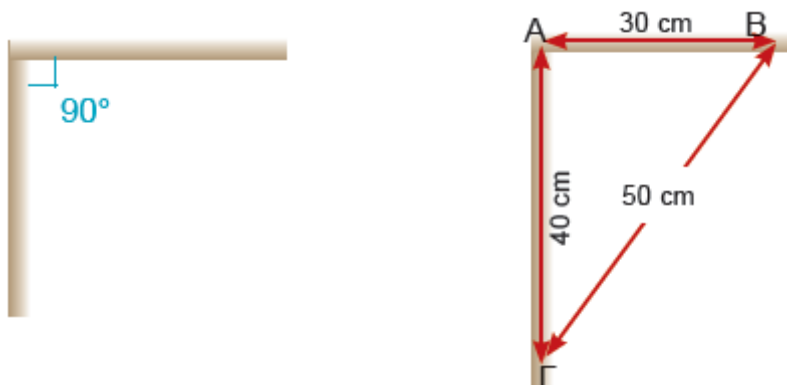
K1: Το έργο απαιτεί την εφαρμογή του ορισμού της τετραγωνικής ρίζας.

A1: Η απάντηση του έργου είναι μοναδική.

C1: Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι καθαρά ενδομαθηματικό.

Παράδειγμα 4 (σελ. 131)

Για να σχηματίσει ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρι $AB = 30$ cm και στο άλλο $AG = 40$ cm. Στη συνέχεια, τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι $B\Gamma = 50$ cm. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;



I3: Το έργο απαιτεί τη γνώση των ορθογωνίων τριγώνων και του αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος, οπότε ανήκει στη Γεωμετρία.

H4: Το έργο απαιτεί τον προσδιορισμό ενός μαθηματικού επιχειρήματος που μιλά για τη χρήση μιας συγκεκριμένης μεθόδου για τον έλεγχο μιας ορθής

γωνίας σε ένα μη μαθηματικό πλαίσιο.

- K1: Η επιχειρηματολογία βασίζεται στην άμεση εφαρμογή του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
- A1: Το έργο είναι ανοικτού τύπου, αφού ο μαθητής μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα ένας μαθητής θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει μοιρογνωμόνιο για να μετρήσει στην περίπτωση αυτή τη γωνία, κάποιος άλλος θα μπορούσε να σχεδιάσει εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα που αντιστοιχούν στις πλευρές του ή, εάν έχει αναφερθεί από τον εκπαιδευτικό η αρπεδόνη να κάνει χρήση αυτής.
- C2: Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι ρεαλιστικό, γιατί σχετίζεται με την καθημερινή ζωή.

2.7 Διαδικασία

Με βάση το πενταδιάστατο πλαίσιο που περιγράφεται παραπάνω πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των επιλεγμένων έργων του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου. Ειδικότερα, καθένα από τα 284 έργα εξετάστηκε προσεκτικά σύμφωνα με το πενταδιάστατο εργαλείο και στη συνέχεια κωδικοποιήθηκε στην αντίστοιχη κατηγορία.

Η ανάλυση των έργων πραγματοποιήθηκε από δύο άτομα. Αρχικά, από κοινού μελέτησαν και συζήτησαν τα αυστριακά πρότυπα των Peschek και Heugl (2007), που αφορούσαν τις τρεις, πιο σύνθετες, από τις πέντε διαστάσεις του πλαισίου. Συζητήθηκαν τα προβλήματα που ανέκυψαν και λήφθηκαν αποφάσεις για τη συνέχεια. Ακολούθως, ο καθένας ανέλυσε μόνος του τα έργα της πρώτης ενότητας του αφορούσε το κεφάλαιο Εξισώσεις – Ανισώσεις και η κωδικοποίηση του κάθε έργου συζητήθηκε από κοινού συνολικά. Οι συζητήσεις ήταν ιδιαίτερα σημαντικές για την κωδικοποίηση διφορούμενων έργων. Η διαδικασία επαναλήφθηκε για τα έργα των Πραγματικών αριθμών καθώς και για τα κεφάλαια της Γεωμετρίας, τα Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα και της Μέτρησης κύκλου. Μέσα από αυ-

τή τη διαδικασία που ακολουθήθηκε από τους δύο κριτές, έγινε μια προσπάθεια για τη διασφάλιση της αξιοπιστίας της κωδικοποίησης.

Με τα δεδομένα που προέκυψαν δημιουργήθηκαν τρεις πίνακες αποτελεσμάτων κωδικοποίησης, ένας για κάθε ενότητα, στο EXCEL. Στη συνέχεια, ο κάθε πίνακας, σε συνδυασμό με τις ανάλογες μεταβλητές, εισήχθη στο SPSS (Statistical Package for the Social Sciences – SPSS version 25, Στατιστικό Πακέτο για τις Κοινωνικές Επιστήμες), με σκοπό την περαιτέρω ανάλυση και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Κεφάλαιο 3. Αποτελέσματα

3.1 Αποτελέσματα της ανάλυσης των έργων ανά κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου

3.1.1 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Εξισώσεις – Ανισώσεις»

Οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου στο πρώτο κεφάλαιο «Εξισώσεις – Ανισώσεις» του Α΄ μέρους του σχολικού βιβλίου καλούνται να αντιμετωπίσουν τις παρακάτω ενότητες: (1.1) Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις, (1.2) Εξισώσεις α΄ βαθμού, (1.3) Επίλυση τύπων, (1.4) Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων και (1.5) Ανισώσεις α΄ βαθμού. Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται τα ποσοστά των χαρακτηριστικών των αναλυθέντων έργων.

Κεφάλαιο	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
(πλήθος έργων)	Ποσοστό %												
Εξισώσεις – Ανισώσεις (88)	26,1	65,9	4,5	3,4	68,2	31,8	0	100	0	0	79,5	20,5	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.1. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου «Εξισώσεις – Ανισώσεις»

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, αυτό που προκύπτει είναι ότι στα αναλυθέντα έργα της θεματικής ενότητας των «Εξισώσεων – Ανισώσεων» επικρατούν οι δραστηριότητες υπολογισμού και πράξεων (65,9%), οι απαντήσεις κλειστού τύπου (100%) και το ενδομαθηματικό πλαίσιο (79,5%). Επίσης, η πολυπλοκότητα των γνώσεων που απαιτούνται από τους μαθητές για την επιτυχή εκτέλεση των έργων παραμένει σε χαμηλό επίπεδο, δηλαδή στην εφαρμογή βασικών γνώσεων με ποσοστό 68,2%. Αντίθετα, οι επεξηγηματικές και επιχειρηματολογικές δραστηριότητες εμφανίζονται ελάχιστα, με ποσοστά 4,5% και 3,4% αντίστοιχα. Αισθητή γίνεται και η απουσία των έργων που απαιτούν συλλογιστική σκέψη, ανοιχτές απαντήσεις και παρουσιάζονται μέσα σε αυθεντικό πλαίσιο.

Για μια πιο σαφή και αναλυτική εικόνα των αποτελεσμάτων του πρώτου κεφαλαίου της Άλγεβρας παραθέτουμε παρακάτω τον πίνακα ταξινόμησης των αναλυθέντων

ντων έργων ανά ενότητα (Πίνακας 3.2). Κάθε γραμμή του πίνακα 3.2 αναφέρεται στις αντίστοιχες ενότητες του κεφαλαίου.

Ενότητα (Πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
	Ποσοστό %												
1.1 (14)	14,3	78,6	7,1	0	85,7	14,3	0	100	0	0	85,7	14,3	0
1.2 (19)	10,5	78,9	0	10,5	78,9	21,1	0	100	0	0	100	0	0
1.3 (20)	0	100	0	0	85	15	0	100	0	0	90	10	0
1.4 (16)	100	0	0	0	43,8	56,3	0	100	0	0	31,3	68,8	0
1.5 (19)	15,8	63,2	15,8	5,8	47,4	52,6	0	100	0	0	84,2	15,8	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.2. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στην ενότητα (1.1) όπου ο μαθητής εισάγεται στην έννοια της μεταβλητής παρατηρείται ότι δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στους υπολογισμούς και στις πράξεις και στις ενδομαθηματικές καταστάσεις των έργων. Αυτό σημαίνει ότι δεν δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Στον πίνακα μπορούμε να δούμε, επίσης, ότι στην ενότητα (1.2) «Εξισώσεις α' βαθμού» κυριαρχούν οι υπολογιστικές δραστηριότητες, αγγίζοντας το 80% των έργων, καθώς και ότι τα έργα αναφέρονται σε καθαρά ενδομαθηματικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας μόνο συμβολικές αναπαραστάσεις σε ποσοστό 100%. Ωστόσο, υπάρχει και ένα μικρό ποσοστό περίπου το 10% των έργων που απαιτούν αναπαραστάσεις ή επιχειρηματολογία για την επιτυχή εκτέλεση αυτών.

Όσον αφορά στην ενότητα (1.3) «Επίλυση τύπων» το ποσοστό υπολογισμών και πράξεων ανάγεται στο 100% και μόνο το 10% των έργων σχετίζονται με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Θα περίμενε κανείς στη συγκεκριμένη ενότητα να επιλεχθούν από τη συγγραφική ομάδα έργα τα οποία συνδέουν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, για παράδειγμα τα Μαθηματικά με τις Φυσικές επιστήμες, ή πραγματικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές βοηθώντας τους να κατανοήσουν τη χρησιμότητα της επίλυσης τύπων ως προς έναν άγνωστο.

Η ενότητα (1.4) «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων» αποτελείται μόνο από λεκτικά προβλήματα, στα οποία οι μαθητές καλούνται να καταστρώσουν

αλγεβρικές εξισώσεις με τον άγνωστο ή τους αγνώστους του προβλήματος. Η διαδικασία μετάφρασης από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική είναι η μαθηματική δραστηριότητα που κυριαρχεί στην επίλυση των προβλημάτων με ποσοστό 100%, είτε εφαρμόζοντας ο μαθητής βασικές γνώσεις (43,8%) είτε δημιουργώντας συνδέσεις (56,3%). Αξίζει να σημειωθεί, επίσης, ότι περίπου το 70% των προβλημάτων αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις, ενώ για ακόμη μια φορά είναι αισθητή η απουσία των αυθεντικών προβλημάτων, αποτρέποντας του μαθητές από τη διαδικασία εμπλοκής σε καταστάσεις που σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο.

Στις ανισώσεις α' βαθμού, όπως και στις προηγούμενες ενότητες, υπερτερούν οι υπολογιστικές δραστηριότητες (63,2%) των έργων, χωρίς όμως να απουσιάζει καμία άλλη δραστηριότητα. Έστω και με μικρή συμμετοχή της τάξεως του 5,8% η επιχειρηματολογία εμφανίζεται στα έργα. Παρατηρείται, επίσης, μια αύξηση στο επίπεδο πολυπλοκότητας των έργων τόσο στις ανισώσεις όσο και στα προβλήματα σε σχέση με τις προηγούμενες ενότητες.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι ένα πολύ μεγάλο μέρος των έργων ακολουθούν φορμαλιστικό πνεύμα. Για παράδειγμα, στην ενότητα (1.1), οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες που δίνουν νόημα στις αναγωγές ομοίων όρων και τις απλοποιήσεις αλγεβρικών παραστάσεων, αλλά είναι μετέωρο το κατά πόσο έχουν κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής. Στην ενότητα (1.2) που αφορά στην επίλυση εξισώσεων, ενώ αρχικά η εξίσωση οπτικοποιείται μέσα από το μοντέλο της ζυγαριάς ερμηνεύοντας το σύμβολο της ισότητας με την ισορροπία (δραστηριότητα 3, σελ. 16) και πραγματοποιείται μετάβαση από τη ζυγαριά στον αλγεβρικό φορμαλισμό, στη συνέχεια σχεδόν όλες οι ασκήσεις του βιβλίου λύνονται με τον πρακτικό κανόνα «αλλάζω μέλος – αλλάζω πρόσημο», κανόνας που μοιάζει μαγικός για τους μαθητές και τους οδηγεί σε μηχανιστικούς και άνευ νοήματος χειρισμούς. Η δημιουργία και επίλυση εξισώσεων στην ενότητα 1.4 «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων» με τη μετατροπή λεκτικά διατυπωμένων προβλημάτων σε αλγεβρικές εκφράσεις παρατηρείται σε όλα τα έργα της ενότητας χωρίς όμως την αναμενόμενη ρεαλιστική διατύπωση αυτών. Τα προβλήματα αυτής της ενότητας είτε παρουσιάζουν ρεαλιστικές καταστάσεις στις οποίες εφαρμόζονται τα Μαθηματικά είτε είναι τεχνητές κατασκευές για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας, τα οποία όμως απλώς αντιγράφουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Εξίσωση $3x + 200 = x + 600$	Περιγραφή λύσης	
$3x + 200 - 200 = x + 600 - 200$	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$3x = x + 400$	Κάνουμε τις πράξεις	
$3x - x = x + 400 - x$	Αφαιρούμε τον x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$(3 - 1)x = 400$ άρα $2x = 400$	Αναγωγή ομοίων όρων	
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης	
$x = 200$	Απλοποιούμε τα κλάσματα	

Εικόνα 3.1. Δραστηριότητα 3 του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 16)

3.1.2 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί»

Στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας «Πραγματικοί αριθμοί» οι μαθητές διδάσκονται τις εξής ενότητες: (2.1) Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, (2.2) Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί και (2.3) Προβλήματα. Ο πίνακας 4.3 παρουσιάζει τα ποσοστά των χαρακτηριστικών των έργων αυτού του κεφαλαίου.

Κεφάλαιο (πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
	Ποσοστό %												
Πραγματικοί αριθμοί (50)	22	52	8	18	70	22	8	90	0	10	84	16	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.3. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί»

Από τη μελέτη του πίνακα 3.3 προκύπτει ότι το 22% των 50 έργων απαιτεί από τους μαθητές να αναπαριστούν τους πραγματικούς αριθμούς, το 52% των έργων απαιτεί δραστηριότητες υπολογισμού και πράξεων με τους πραγματικούς αριθμούς, το 18% των έργων απαιτεί δραστηριότητες επιχειρηματολογίας ή συλλογισμού, ενώ μόνο το 8% των έργων απαιτεί επεξήγηση ενός δεδομένου πίνακα. Επίσης, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 3.3 δείχνουν ότι το 70% των έργων είναι έργα χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων, το 80% των έργων απαιτεί

απαντήσεις κλειστού τύπου και ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των έργων περιλαμβάνει ενδομαθηματικές καταστάσεις (84%).

Στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά των αναλυθέντων έργων για κάθε ενότητα του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί». Ξεκινώντας από την ενότητα (2.1) «Τετραγωνική ρίζα» διαπιστώνουμε ότι επικρατούν οι δραστηριότητες πράξεων και οι τεχνικές υπολογισμού με ποσοστό 72%. Ακολουθεί η δραστηριότητα της επεξήγησης (16%), όπου σε 4 μόνο από τα 25 έργα οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν και να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα πινάκων που σχετίζονται με τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών. Στο υπολογιστικό πλαίσιο που αναπτύσσεται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας είναι αναμενόμενο τα έργα να παρουσιάζονται μέσα από ενδομαθηματικές καταστάσεις και να απαιτούνται δεξιότητες χαμηλής πολυπλοκότητας.

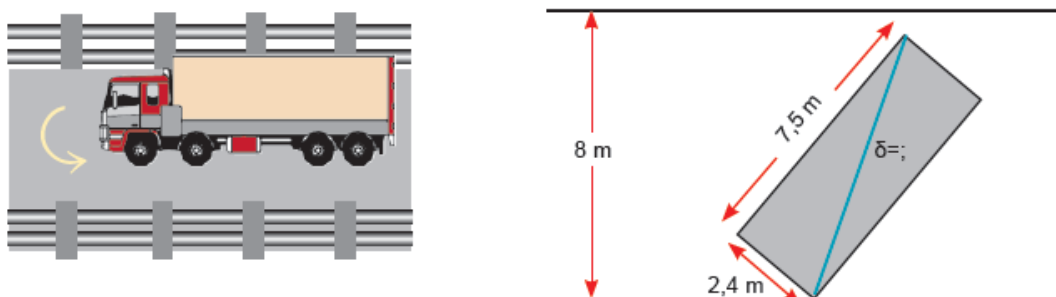
Ενότητα (πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
	Ποσοστό %												
2.1 (25)	12	72	16	0	88	12	0	80	0	20	92	8	0
2.2 (12)	16,7	33,3	0	50	66,7	25	8,3	100	0	0	100	0	0
2.3 (13)	46,2	30,8	0	23,1	38,5	38,5	23,1	100	0	0	53,8	46,2	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.4. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στην ενότητα (2.2) «Πραγματικοί αριθμοί» οι μαθητές εισάγονται για πρώτη φορά στους άρρητους αριθμούς μέσα από τη μέθοδο των διαδοχικών ρητών προσεγγίσεων. Από την ανάλυση παρατηρούμε ότι η κυρίαρχη μαθηματική δραστηριότητα που σχετίζεται με τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς είναι η επιχειρηματολογία. Στο 50% των έργων ζητείται από τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν υπέρ ή κατά μιας απόφασης ή να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα μέσα από μια σειρά ορθών επιχειρημάτων. Αντίθετα, σε σύγκριση με την προηγούμενη ενότητα, στις υπολογιστικές δραστηριότητες παρατηρείται αισθητή μείωση της τάξεως περίπου 50%. Αξίζει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι έστω και σε ένα έργο, όπως για παράδειγμα στη γεωμετρική κατασκευή του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$, απαιτείται από τους μαθητές συλλογισμός (K3).

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την επίλυση προβλημάτων τα οποία έχουν σχέση με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς. Σχεδόν τα μισά από τα προβλήματα παρουσιάζουν ρεαλιστικές καταστάσεις στις οποίες εφαρμόζονται Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα παρουσιάζουν αυστηρά γεωμετρικά προβλήματα των Μαθηματικών. Θα είχε ενδιαφέρον να δουν οι μαθητές την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και των άρρητων όχι μόνο μέσα από τα προβλήματα του σχολικού εγχειριδίου, αλλά και μέσα από προβλήματα στα οποία οι ίδιοι θα συμμετέχουν στις μετρήσεις. Επιπλέον, στο πρόβλημα 2 (σελ. 49) και στην άσκηση 9 (σελ.52) παρατηρείται ότι ενώ τα προβλήματα αυτά είναι ικανά να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να απαιτήσουν από αυτούς να επιχειρηματολογήσουν για την επίλυσή τους, αντίθετα το σχολικό βιβλίο κατευθύνει τους μαθητές δίνοντάς τους το σχεδιάγραμμα το οποίο θα μπορούσαν να δημιουργήσουν μόνοι τους.



Εικόνα 3.2. Άσκηση 9 του σχολικού βιβλίου της Β' Γυμνασίου (σελ. 52)

Το κυριότερο συμπέρασμα που αναδεικνύεται μέσα από την ανάλυση αυτού του κεφαλαίου είναι έμφαση που δίνεται στην επιχειρηματολογία των έργων ιδιαίτερα στην ενότητα (2.2) «Πραγματικοί αριθμοί». Το βιβλίο βάζει τον μαθητή στη διαδικασία να καταλήξει σε ένα συμπέρασμα εκφράζοντας ένα σύνολο λογικών αιτιολογήσεων, για παράδειγμα να αιτιολογήσουν ποιοι αριθμοί είναι άρρητοι και ποιοι ρητοί. Ωστόσο, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας μέσα από ένα καθαρά υπολογιστικό και ενδομαθηματικό πλαίσιο εφαρμόζοντας βασικές αλγεβρικές δεξιότητες. Στα προβλήματα των άρρητων αριθμών υπερέχουν οι δραστηριότητες αναπαράστασης, ενώ παρακάμπτεται η ευκαιρία για σύνδεση με την πραγματική ζωή.

3.1.3 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα»

Το πρώτο κεφάλαιο της Γεωμετρίας που αναλύσαμε περιλαμβάνει τις εξής ενότητες: (1.1) Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας, (1.2) Μονάδες μέτρησης επιφανειών, (1.3) Εμβαδά επίπεδων σχημάτων και (1.4) Πυθαγόρειο θεώρημα. Στον πίνακα 3.5 παρουσιάζονται τα ποσοστά των χαρακτηριστικών των έργων στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο (πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
	Ποσοστό %												
Εμβαδά-Πυθαγόρειο θεώρημα (57)	19,3	52,6	5,3	22,8	71,9	22,8	5,3	89,5	1,8	8,8	78,9	21,1	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.5. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου «Εμβαδά – Πυθαγόρειο θεώρημα»

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, αυτό που προκύπτει είναι ότι στα έργα επικρατούν - με μεγάλη διαφορά - οι υπολογιστικές διαδικασίες, οι απλές συνδέσεις, οι κλειστές απαντήσεις και οι ενδομαθηματικές καταστάσεις. Αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούνται για την εκτέλεση ενός έργου, διαπιστώνουμε ότι οι διαφορές ανάμεσα στα ποσοστά αυτών δεν είναι τόσο μεγάλες. Ειδικότερα, προηγούνται με ποσοστό 52,6% τα έργα που απαιτούν υπολογισμούς και πράξεις, ακολουθούν οι επιχειρηματολογικές δραστηριότητες με το πρωτοφανές ποσοστό 22,8%, οι δραστηριότητες αναπαραστάσης με ποσοστό 19,3%, ενώ οι επεξηγηματικές δραστηριότητες εμφανίζονται με ποσοστό μόνο 5,3%. Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας γίνεται αντιληπτό ότι ένα πολύ υψηλό ποσοστό των εργασιών, που ξεπερνά το 70%, απαιτεί βασικές γνώσεις και δεξιότητες από τον μαθητή, παραμελώντας αρκετά τη δημιουργία συνδέσεων των γνώσεων και πολύ περισσότερο τη συλλογιστική σκέψη. Χαρακτηριστικό γνώρισμα, επίσης, αυτών των εργασιών είναι ότι κυριαρχούν οι απαντήσεις κλειστού τύπου (89,5%) συγκριτικά με τις απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (16,7%), ενώ οι ανοικτές απαντήσεις απουσιάζουν από το σχολικό εγχειρίδιο. Τέλος, παρατηρείται ότι στο σχολικό βιβλίο δίνεται βαρύτητα στα ενδομαθηματικά έργα (78,9%).

Αναλυτικότερα, στην πρώτη ενότητα η έννοια του εμβαδού επιπέδων σχημάτων έχει την έννοια της μέτρησης της έκτασης που καταλαμβάνει ένα επίπεδο σχήμα. Η μέτρηση σε αυτή την περίπτωση είναι μια διαδικασία σύγκρισης της έκτασης που καταλαμβάνει ένα σχήμα σε σχέση με ένα άλλο που λαμβάνεται ως μονάδα. Για την πραγματοποίηση της μέτρησης χρησιμοποιούνται κυρίως γεωμετρικά σχήματα, δηλαδή αναπαραστάσεις σε ποσοστό 83,3%. Μόνο σε μια σπαζοκεφαλιά στο τέλος της ενότητας δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα μέσω ενός ρεαλιστικού και ανοικτού τύπου προβλήματος να ερμηνεύσουν τον αυτοσχεδιασμό τους.

Ενότητα (πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	Ποσοστό %								
					K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
1.1 (6)	83,3	0	16,7	0	66,7	0	33,3	83,3	16,7	0	100	0	0
1.2 (10)	0	90	0	10	90	10	0	80	0	20	90	10	0
1.3 (26)	19,2	50	7,7	23,1	61,5	34,6	3,8	92,3	0	7,7	69,2	30,8	0
1.4 (15)	6,7	53,3	0	40	80	20	0	93,3	0	6,7	80	20	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.6. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στην επόμενη ενότητα (1.2) «Μονάδες μέτρησης επιφανειών» η κυρίαρχη δραστηριότητα είναι οι μετατροπές μονάδων μέτρησης του εμβαδού με ποσοστό 90%. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τις δέκα εργασίες που αναλύσαμε μόνο μία εργασία έχει αυθεντικό πλαίσιο και απαιτεί από τον μαθητή να επιχειρηματολογήσει για την επιλογή της απάντησής του (Άσκηση 6, σελ 118). Ενώ ο μαθητής στις πρώτες εννέα εργασίες καλείται να εκτελέσει υπολογισμούς και πράξεις ξαφνικά του ζητείται να αντιμετωπίσει μία εργασία «εκτός πλαισίου» με αποτέλεσμα να πραγματοποιείται «ρήξη συμβολαίου».

- 6** Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν:
- του δωματίου μας,
 - της Κρήτης,
 - ενός αγρού,
 - ενός γραμματόσημου,
 - ενός φύλλου τετραδίου.

Εικόνα 3.3. Άσκηση 6 του σχολικού βιβλίου της Β' Γυμνασίου (σελ. 118)

Σε ένα επόμενο επίπεδο, στην ενότητα (1.3) η μέτρηση του εμβαδού των επίπεδων σχημάτων γίνεται με την βοήθεια αλγεβρικών τύπων στους οποίους εμπλέκονται τα μήκη συγκεκριμένων πλευρών ή αποστάσεων του μετρούμενου σχήματος. Η ανάλυσή μας αποκάλυψε ότι τα μισά έργα αυτής της ενότητας απαιτούν υπολογιστικές δραστηριότητες, ακολουθούν οι επιχειρηματολογικές με ποσοστό 23,1%, στο ίδιο επίπεδο κυμαίνονται οι αναπαραστάσεις (19,2%), ενώ οι ερμηνείες γεωμετρικών αναπαραστάσεων φτάνει μόλις στο 7,7%. Οι περισσότερες από τις εργασίες αυτής της ενότητας έχουν περιορισμένες γνωστικές απαιτήσεις και αναφέρονται σε ενδομαθηματικές καταστάσεις, παρόλο που η ενότητα «προσφέρεται» για ρεαλιστικά προβλήματα και κυρίως για αυθεντικά, τα οποία θα μπορούσαν να εμπλέξουν τους μαθητές σε πραγματικές καταστάσεις.

Στην τελευταία ενότητα του Πυθαγορείου θεωρήματος αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες, τα έργα μοιράζονται ανάμεσα στις αλγεβρικές και υπολογιστικές διαδικασίες με ποσοστό 53,3% και τις επιχειρηματολογικές με ποσοστό 40%, όπου ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν ότι ένα τρίγωνο με γνωστές πλευρές είναι ορθογώνιο. Ωστόσο, απουσιάζουν οι διεργασίες προβληματισμού και η συλλογιστική σκέψη. Η συνήθης δομή των εργασιών είναι να δίνονται τα μήκη δύο πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου και ο μαθητής με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος να υπολογίζει το μήκος της τρίτης πλευράς. Ενώ το Πυθαγόρειο θεώρημα, λοιπόν, αποτελεί πεδίο εφαρμογής σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα εμφανίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο ως ένας κανόνας που εφαρμόζεται σε καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο και δε σχετίζεται με πρακτικά ζητήματα και πραγματικές ανάγκες της ζωής.

Τα έργα, λοιπόν, αυτού του κεφαλαίου είναι υπολογιστικά, ενδομαθηματικά, με χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων και κλειστά. Απαιτείται από τους μαθητές η αισθητοποίηση της τυπικής μονάδας μέτρησης επιφανειών, των υποδιαιρέσεων και των πολλαπλάσιων αυτής, καθώς και οι μεταξύ τους σχέσεις να γίνουν κατανοητές μέσα από τη συνεχή εξάσκηση με ασκήσεις μετατροπής από την μια μονάδα μέτρησης στην άλλη. Αντίθετα, στα εμβαδά επίπεδων σχημάτων ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν σχέσεις μεταξύ εμβαδών και να εφαρμόσουν γεωμετρική συλλογιστική υπολογίζοντας εμβαδά μέσα από τη διαμέριση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων. Και στο Πυθαγόρειο Θεώρημα οι μαθητές καλούνται να επι-

χειρηματολογήσουν μέσα από την εφαρμογή του αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος. Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί το πολύ χαμηλό ποσοστό των ρεαλιστικών έργων και η απουσία των αυθεντικών στην απόδοση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

3.1.4 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Μέτρηση κύκλου»

Το περιεχόμενο του τρίτου κεφαλαίου της Γεωμετρίας ασχολείται κυρίως με τα κανονικά πολύγωνα και τον κύκλο. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνει τις εξής ενότητες: (3.1) Εγγεγραμμένες γωνίες, (3.2) Κανονικά πολύγωνα, (3.3) Μήκος κύκλου, (3.4) Μήκος τόξου, (3.5) Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, και (3.6) Εμβαδόν κυκλικού τομέα. Στον πίνακα 3.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των απαιτήσεων των έργων αυτού του κεφαλαίου.

Κεφάλαιο (πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
Μέτρηση κύκλου (89)	20,2	51,7	22,5	5,6	66,3	32,6	1,1	83,1	0	16,9	89,9	10,1	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.7. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου Μέτρηση Κύκλου

Το ποσοστό των έργων που απαιτούν υπολογιστικές δραστηριότητες φτάνει το 67,4%, έπεται η ερμηνεία γεωμετρικών αναπαραστάσεων με ποσοστό 19,1%, η μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικές σχέσεις με ποσοστό 11,2% και τέλος ζητείται από τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν σε ένα πολύ μικρό ποσοστό των έργων της τάξεως του 2,2%. Παρατηρείται, επίσης, ότι ευνοούνται τα έργα χαμηλού γνωστικού επιπέδου με κλειστές κατασκευασμένες απαντήσεις διαμορφωμένες σε ενδομαθηματικές καταστάσεις.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη ενότητα δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις επεξηγηματικές δραστηριότητες, στις οποίες οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ εγγεγραμμένων – επίκεντρων γωνιών που προκύπτουν παρατηρώντας τα γεωμετρικά σχήματα και να τις ερμηνεύσουν, με πρωτοφανές ποσοστό 82,4%.

Παρόλα αυτά οι εργασίες απαιτούν χαμηλές γνωστικές δεξιότητες και απαντήσεις κλειστού τύπου σε καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο.

Στην ενότητα των κανονικών πολυγώνων η χρήση σχέσεων και ο συνδυασμός αυτών για τον υπολογισμό των στοιχείων ενός κανονικού πολυγώνου οδηγούν τον μαθητή στην εφαρμογή στοιχειωδών μαθηματικών πράξεων σε παραπάνω από τα μισά έργα της ενότητας. Τρία από τα έργα αναφέρονται στην μετάφραση λεκτικών προτάσεων σε αλγεβρικές σχέσεις. Μόνο σε ένα έργο ζητείται από τους μαθητές να προβληματιστούν, να στοχαστούν και να επιχειρηματολογήσουν για την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης. Και σε αυτή την ενότητα τα έργα παρουσιάζονται σε αυστηρά ενδομαθηματικό πλαίσιο.

Ενότητα (πλήθος έργων)	H1	H2	H3	H4	K1	K2	K3	A1	A2	A3	C1	C2	C3
Ποσοστό %													
3.1 (17)	0	17,6	82,4	0	76,5	23,5	0	76,5	0	23,5	100	0	0
3.2 (14)	21,4	57,1	14,3	7,1	78,6	14,3	7,1	78,6	0	21,4	100	0	0
3.3 (14)	35,7	57,1	7,1	0	35,7	64,3	0	92,9	0	7,1	64,3	35,7	0
3.4 (13)	15,4	69,2	0	15,4	76,9	23,1	0	92,3	0	7,7	100	0	0
3.5 (16)	37,5	43,8	12,5	6,3	56,2	43,8	0	81,3	0	18,8	87,5	12,5	0
3.6 (15)	13,3	73,3	6,7	6,7	73,3	26,7	0	80	0	20	86,7	13,3	0

H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό

Πίνακας 3.8. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στις ενότητες (3.3) «Μήκος κύκλου» και (3.5) «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου», στις οποίες δίνεται έμφαση στην αναλογία των μεγεθών μήκος και διάμετρος κύκλου, τετράγωνο ακτίνας και εμβαδό κυκλικού δίσκου, οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν γνώσεις των Μαθηματικών οι οποίες όχι μόνο βρίσκονται σε διαφορετικές ενότητες του σχολικού εγχειριδίου, αλλά και σε διαφορετικές θεματικές περιοχές (Άλγεβρα – Γεωμετρία). Αυτό έχει ως συνέπεια να εμφανίζονται ιδιαίτερα αυξημένα τα ποσοστά των έργων, και στις δύο ενότητες, που απαιτούν από τους μαθητές να συνδέσουν την έννοια της αναλογίας με το μήκος και εμβαδό κύκλου. Οι υπολογιστικές δραστηριότητες κατέχουν για ακόμη μια φορά την πρώτη θέση με ποσοστό 57,1% και 43,8% αντίστοιχα και, ενώ θα ήταν αναμενόμενο σε ενότητες όπως αυτή να δίνονται προβλήματα στους μαθητές που θα αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις

της καθημερινότητας και θα τους κεντρίζουν το ενδιαφέρον, το ποσοστό των ρεαλιστικών έργων φτάνει στο 35,7% στο μήκος κύκλου και μόλις στο 12,5% το εμβαδόν κυκλικού δίσκου. Αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες παρατηρούνται επίσης αυξημένα ποσοστά στις υπολογιστικές δραστηριότητες και στη χρήση βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων. Στην ενότητα (3.4) απουσιάζει εντελώς το ρεαλιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο δίνονται τα έργα στους μαθητές, ενώ στην ενότητα (3.5) εμφανίζεται μόνο σε δύο από τα 15 έργα της ενότητας.

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, οι υπολογιστικές δραστηριότητες, το χαμηλό γνωστικό επίπεδο, οι κλειστές απαντήσεις και τα ενδομαθηματικά έργα υπερτερούν στο κεφάλαιο του Κύκλου. Ακόμα και στις ενότητες, όπως το μήκος κύκλου και το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, που προσφέρονται για ρεαλιστικά και κυρίως αυθεντικά έργα παρατηρείται η πολύ μικρή παρουσία των ρεαλιστικών και η απουσία των αυθεντικών έργων. Εξάιρεση, επίσης, αποτελούν τα έργα της ενότητας των εγγεγραμμένων γωνιών όπου ζητείται από τους μαθητές σχεδόν σε όλα τα έργα να ερμηνεύσουν το εκάστοτε σχήμα για να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα.

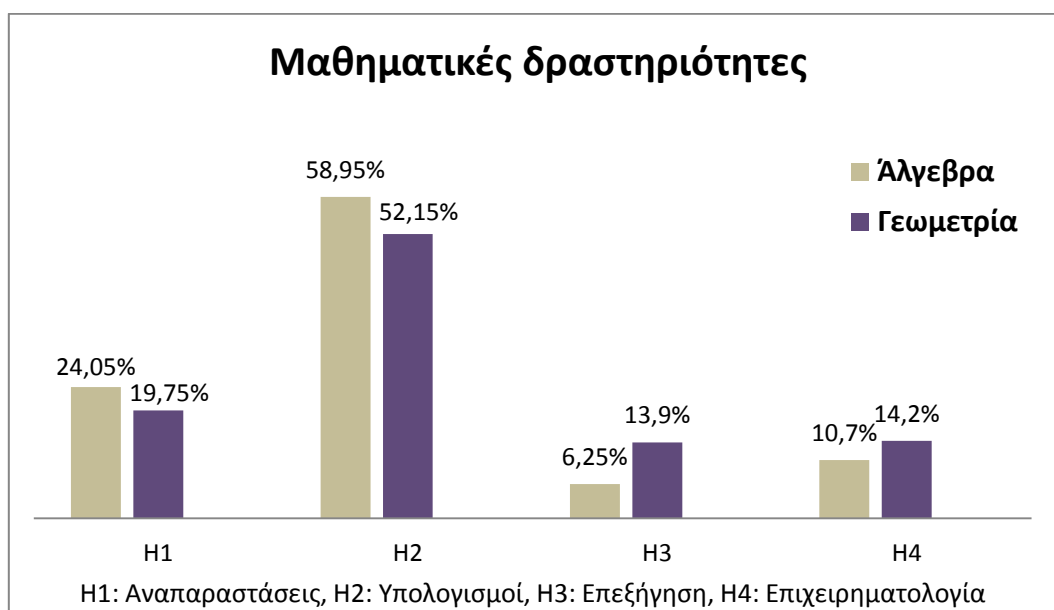
3.2 Αποτελέσματα ανάλυσης έργων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας

Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β' τάξης Γυμνασίου μετρήθηκαν και ταξινομήθηκαν στις αντίστοιχες κατηγορίες τα 284 έργα (περίπου το 45% του συνολικού πλήθους έργων) από τα οποία τα 138 ανήκουν στη θεματική περιοχή της Άλγεβρας, ενώ τα 146 στη θεματική περιοχή της Γεωμετρίας. Σε αυτή την ενότητα συγκρίνονται τα αποτελέσματα ανάλυσης έργων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας και εξετάζεται ο βαθμός συσχέτισής τους.

Αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες, όπως προκύπτει από το Γράφημα 1, που απαιτούνται για την επιτυχή εκτέλεση ενός έργου τόσο στην Άλγεβρα όσο και στη Γεωμετρία παρατηρείται ότι οι δραστηριότητες υπολογισμού και πράξεων παραμένουν οι πιο συχνές δραστηριότητες. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αυξημένα ποσοστά των υπολογιστικών δραστηριοτήτων στη θεματολογία των έργων της Γεωμετρίας καθώς δίνεται έμφαση στις αλγεβρικές και υπολογιστικές διαδικασίες σε βάρος της κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών. Ωστόσο, οι μαθη-

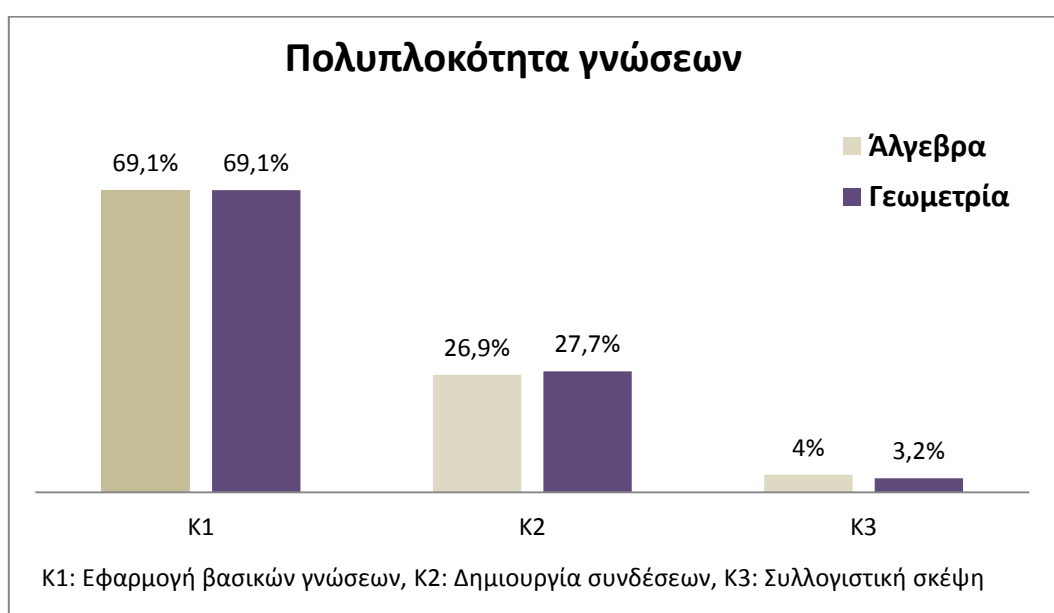
τές χρειάζεται να είναι σε θέση να διαχειρίζονται αποτελεσματικά τη μαθηματική γλώσσα, όχι μόνο σε επίπεδο συμβόλων, αλλά κυρίως σε επίπεδο διατύπωσης λογικών σχέσεων και επιχειρημάτων. Αυτό φαίνεται να απαιτείται από τους μαθητές μόνο στο 14,2% των έργων της Γεωμετρίας και στο 10,7% των έργων της Άλγεβρας. Στο 13,9% των έργων της Γεωμετρίας, έναντι του 6,25% της Άλγεβρας, ζητείται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν πίνακες, μαθηματικές παραστάσεις και σχήματα στα αντίστοιχα πλαίσιά τους. Τέλος, οι μαθητές μεταβαίνουν από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο και επιλέγουν το κατάλληλο σύστημα αναπαράστασης μιας κατάστασης σε ποσοστό 19,75% στη Γεωμετρία και 24,05% στην Άλγεβρα.

Τα αποτελέσματα αυτά αποκαλύπτουν ότι το σχολικό εγχειρίδιο «βομβαρδίζει» τους μαθητές με πλήθος εργασιών, αποσκοπώντας να αποκτήσουν άνεση κυρίως στις διαδικαστικές δεξιότητες. Τα περισσότερα γεωμετρικά θέματα δίνουν έμφαση στις δραστηριότητες υπολογισμού, πράγμα που σημαίνει ότι τα γεωμετρικά έργα απαιτούν ικανότητες αντιμετώπισης τύπων και αριθμών από τους μαθητές αντί της διαμόρφωσης γεωμετρικών εννοιών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Πυθαγόρειο θεώρημα, που από θεώρημα Γεωμετρίας και γεωμετρικών μεγεθών (ορθή γωνία, μήκη, εμβαδά) έχει μεταλλαχθεί σε θεώρημα της Άλγεβρας (αλγεβρική ισότητα στην οποία τα γράμματα αντικαθίσταται συνήθως με ακέραιους αριθμούς), (Κόσσυβας, 2014α).



Γράφημα 1. Οι μαθηματικές δραστηριότητες στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία

Όσον αφορά στην πολυπλοκότητα των γνώσεων που απαιτούνται από τον μαθητή για την επιτυχή εκτέλεση ενός έργου, η έρευνα αποκάλυψε ότι η πλειονότητα των έργων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας απαιτούν την εφαρμογή βασικών γνώσεων με ποσοστά που ταυτίζονται, ακολουθεί η δημιουργία συνδέσεων με παρόμοια ποσοστά, ενώ τελευταία έρχεται η συλλογιστική σκέψη με ποσοστά που κυμαίνονται από 3,2 – 4% (Γράφημα 2). Θα περίμενε κανείς στη Γεωμετρία να παρέχεται η ευκαιρία στους μαθητές να δημιουργούν περισσότερες συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών γεωμετρικών εννοιών και συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.

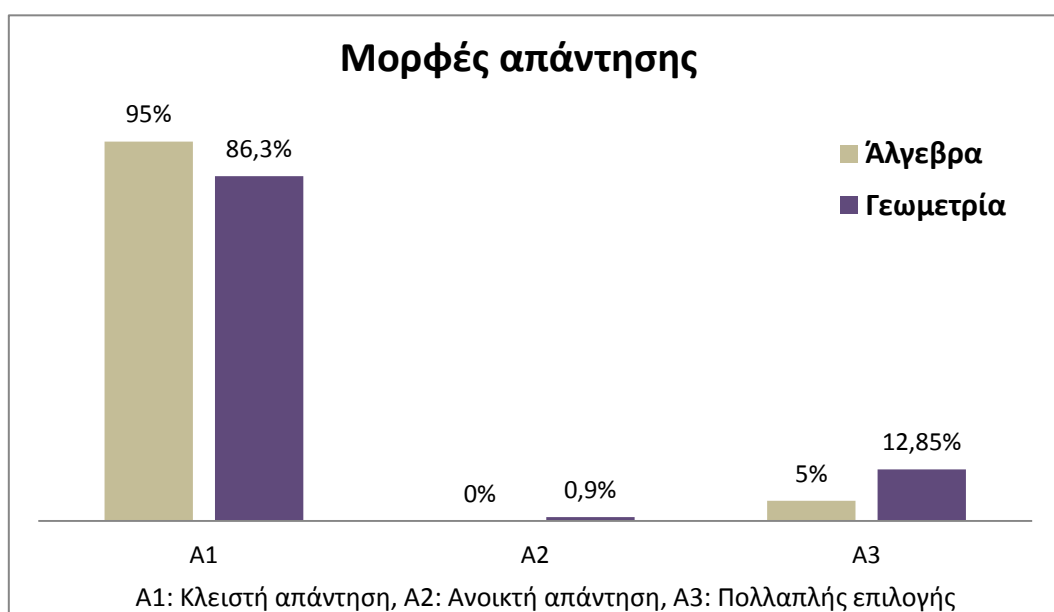


Γράφημα 2. Η πολυπλοκότητα γνώσεων στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία

Τα αποτελέσματα, επίσης, αποκαλύπτουν ότι εμφανίζεται ενδομαθηματική διαθεματικότητα μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Για παράδειγμα, στις εργασίες του κεφαλαίου «Μέτρηση κύκλου» της Γεωμετρίας στην παράγραφο 3.3 «Μήκος κύκλου» δίνεται έμφαση στην αναλογία των μεγεθών L (μήκος κύκλου), δ (διάμετρος) της σχέση $L = \pi\delta$ και γίνεται σύνδεση με τις γνώσεις που έχουν οι μαθητές από το κεφάλαιο «Συναρτήσεις» της Άλγεβρας και την παράγραφο 3.3 «Η συνάρτηση $y = ax$ ». Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει μεταξύ του Πυθαγορείου θεωρήματος και του δεύτερου κεφαλαίου της Άλγεβρας «Πραγματικοί αριθμοί» που περιλαμβάνει την τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, τους άρρητους - πραγματικούς αριθμούς και προβλήματα με άρρητους. Τα περισσότερα έργα αυτού του κεφαλαίου απαιτούν για

την επίλυσή τους τη συσχέτιση του Πυθαγόρειου θεωρήματος με την τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού. Είναι σημαντικό να εξασκηθούν οι μαθητές στην εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και των αρρήτων κυρίως με γεωμετρικά προβλήματα και με πραγματικά προβλήματα μέτρησης, αλλά και με αλγεβρικά.

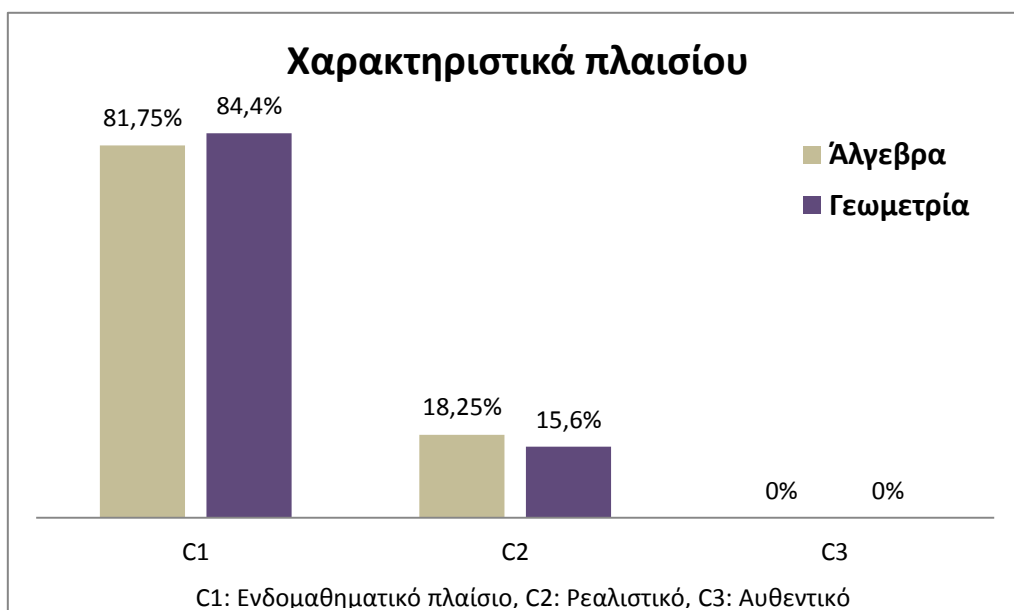
Διαπιστώθηκε, παρατηρώντας το Γράφημα 3, ότι τα έργα κλειστού τύπου κυριαρχούν και στις δύο θεματικές περιοχές του σχολικού εγχειριδίου. Η Άλγεβρα έχει ένα μικρό προβάδισμα στα έργα κλειστού τύπου, ενώ η Γεωμετρία στα έργα πολλαπλής απάντησης. Γενικά, οι ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών δεν συνηθίζονται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια. Το πιο ενδιαφέρον αποτέλεσμα αυτής της έρευνας είναι η απουσία έργων ανοικτού τύπου, η οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την απουσία επιχειρηματολογικών δραστηριοτήτων. Η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει την ευκαιρία στον κάθε μαθητή να φτάσει στη δική του απάντηση. Η σύγκριση των διαφορετικών αυτών λύσεων και η συζήτηση πάνω σ' αυτές κινητοποιεί τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν υπέρ των λύσεών τους, με αποτέλεσμα να αναπτύσσουν τη μαθηματική τους σκέψη.



Γράφημα 3. Μορφές απάντησης στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία

Τέλος, η σημασία της διδασκαλίας της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας συνδέεται με τη χρησιμότητά τους τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στα Μαθηματικά ή τις άλλες επιστήμες. Για παράδειγμα, πλήθος από γεωμετρικές γνώσεις είναι απαραίτητες για την αντίληψη καθημερινών καταστάσεων και προβλημάτων καθώς και

πολλές δράσεις του ατόμου στηρίζονται σε αυτές. Τα αποτελέσματα, όμως, δείχνουν ότι η πλειονότητα των έργων τόσο των αλγεβρικών όσο και των γεωμετρικών παρουσιάζονται σε ενδομαθηματικό πλαίσιο. Επίσης, μόνο το 18,25% των έργων της Άλγεβρας και το 15,6% της Γεωμετρίας αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις, ενώ τα αυθεντικά έργα απουσίαζαν εντελώς από το σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (Γράφημα 4).

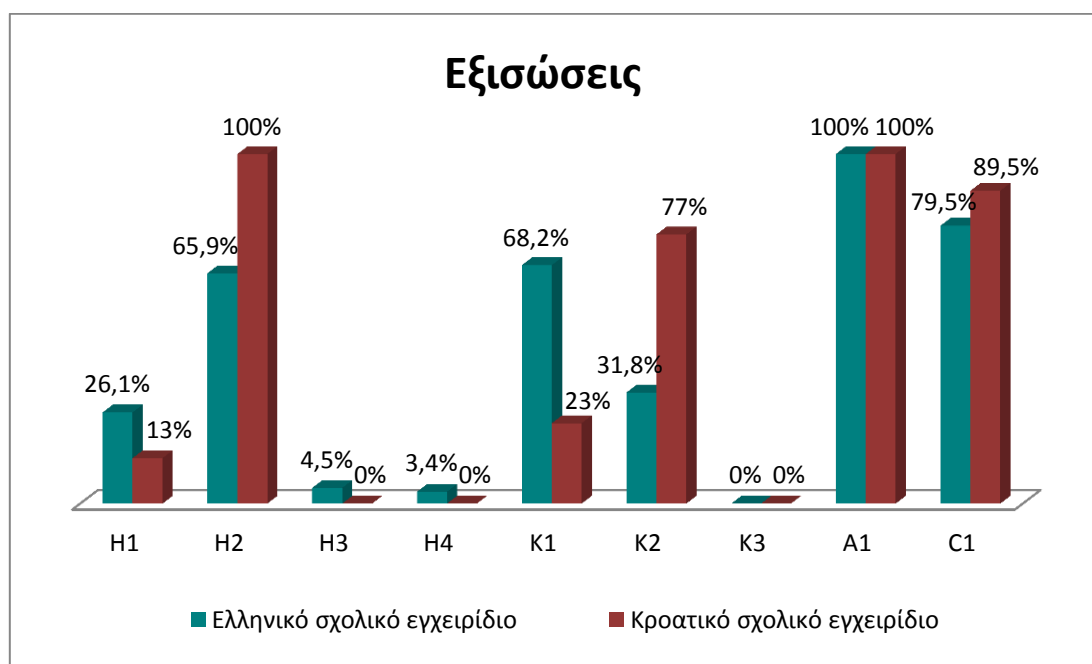


Γράφημα 4. Χαρακτηριστικά πλαισίου στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία

3.3 Αποτελέσματα ανάλυσης έργων των σχολικών εγχειριδίων της Ελλάδας και της Κροατίας

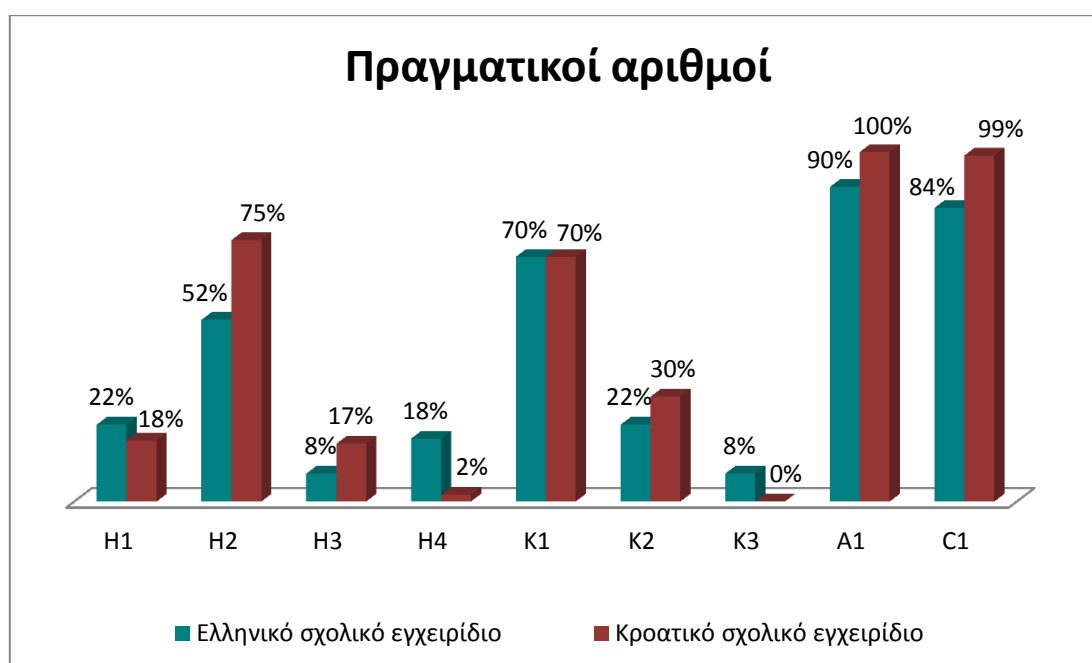
Δεδομένου ότι η παρούσα έρευνα βασίστηκε στο εργαλείο ανάλυσης έργων σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της Glasnovic Gracin (2018), θεωρήσαμε χρήσιμο να γίνει μια σύγκριση των ευρημάτων των αναλυθέντων έργων μεταξύ των χωρών Ελλάδας – Κροατίας. Η ανάλυση της Glasnovic Gracin (2018) περιλαμβάνει όλα τα έργα (22.000 περίπου) από τις δύο πιο συχνά χρησιμοποιούμενες σειρές κροατικών σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων της 6^{ης}, 7^{ης} και 8^{ης} τάξης. Για τη σύγκριση που θα ακολουθήσει μας ενδιαφέρουν κυρίως τα έργα της 8^{ης} τάξης (7.000 περίπου), που ανήκουν στις ίδιες θεματικές ενότητες με τα αναλυθέντα έργα (284) από το ελληνικό σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου.

Το θέμα «Εξισώσεις» στα κροατικά σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνει τις εξισώσεις α΄ βαθμού και διδάσκεται στην 6^η τάξη, ενώ στα ελληνικά εγχειρίδια στη Β΄ τάξη Γυμνασίου και περιλαμβάνει εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού καθώς και προβλήματα με εξισώσεις. Οι εξισώσεις α΄ βαθμού στα εγχειρίδια της Κροατίας απαιτούν στο 100% των έργων δραστηριότητες πράξεων και υπολογισμού (H2), αλλά και αναπαραστάσεις (H1) στο 13% των έργων. Αντίθετα, στο ελληνικό εγχειρίδιο παρατηρείται ένα μοίρασμα στις μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούν τα έργα των εξισώσεων, δηλαδή, απαιτούν υπολογισμούς και πράξεις (H2) σε ποσοστό που ανέρχεται στο 65%, αναπαραστάσεις (H1) σε ποσοστό 26%, επεξήγηση (H3) στο 4,5% και επιχειρηματολογία (H4) στο 3,5%. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι τα έργα των κροατικών βιβλίων στην περίπτωση που απαιτούσαν δύο δραστηριότητες ισότιμα για την εκτέλεσή τους, και τα δύο κωδικοποιούνταν και συμπεριλαμβάνονταν στην ανάλυση, ενώ στην παρούσα έρευνα η ταξινόμηση των έργων έγινε με βάση την κυρίαρχη μαθηματική δραστηριότητα. Αναφορικά με το επίπεδο πολυπλοκότητας των έργων παρατηρείται μεγάλη διαφορά, καθώς στα κροατικά εγχειρίδια το επίπεδο πολυπλοκότητας στις εξισώσεις είναι πολύ πιο υψηλό, όπως φαίνεται στο Γράφημα 5. Τόσα στα ελληνικά όσα και στα κροατικά εγχειρίδια κυριαρχούν οι ενδομαθηματικές κλειστές εργασίες στο θέμα των εξισώσεων, γεγονός που αποκαλύπτει τον φορμαλιστικό χαρακτήρα των εργασιών στα εγχειρίδια.



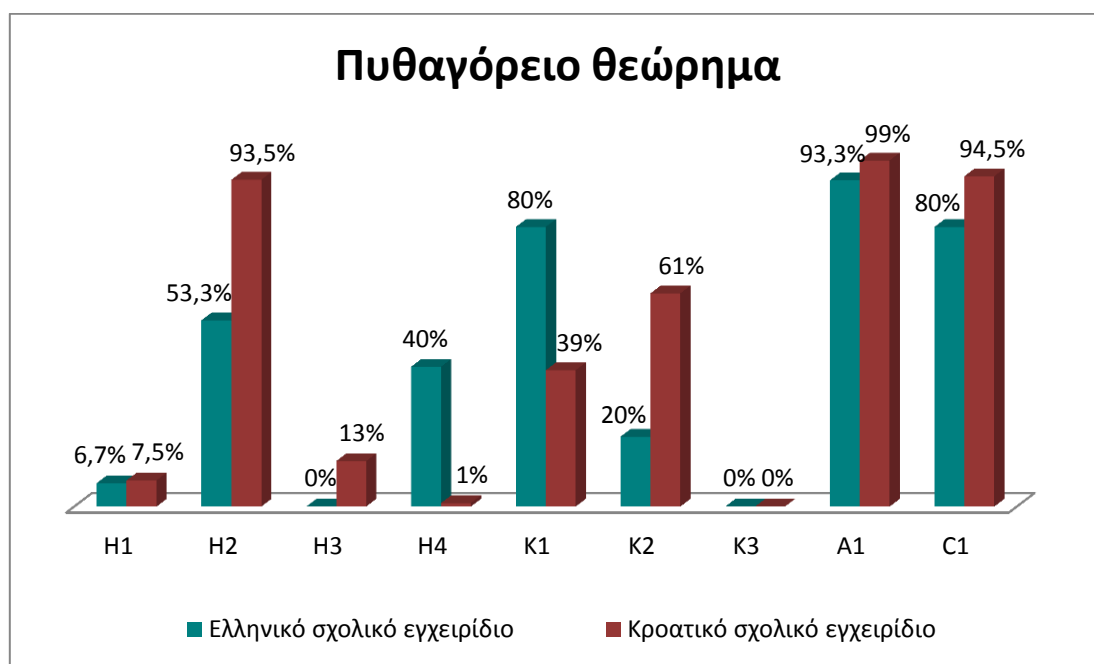
Γράφημα 5. Το θέμα «Εξισώσεις» ανά χώρα

Το δεύτερο θέμα που διαπραγματεύονται και οι δύο έρευνες είναι οι Πραγματικοί αριθμοί που μέσα σε αυτό περιλαμβάνονται και οι τετραγωνικές ρίζες. Από τη μελέτη του Γραφήματος 6 προκύπτει ότι και στα δύο εγχειρίδια επικρατούν οι υπολογιστικές δραστηριότητες (H2), που στο κροατικό εγχειρίδιο φτάνουν περίπου το 75% ενώ στο ελληνικό το 52%. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ελληνικό εγχειρίδιο να δίνει χώρο και στις υπόλοιπες μαθηματικές δραστηριότητες όπως είναι οι αναπαραστάσεις (H1), η επεξήγηση (H3) και η επιχειρηματολογία (H4). Αντίθετα, στο κροατικό εγχειρίδιο το ποσοστό των έργων που αντιπροσωπεύουν τις επιχειρηματολογικές δραστηριότητες (H4) είναι μόλις 2%. Στους πραγματικούς αριθμούς οι γνωστικές απαιτήσεις των έργων, τόσο στα ελληνικά όσο και στα κροατικά εγχειρίδια, είναι αναπαραγωγικές ή απλούστερες συνδέσεις (K1). Οι υψηλές γνωστικές δραστηριότητες, όπως η στοχαστική σκέψη (K3), εμφανίζεται μόνο στα έργα του ελληνικού εγχειριδίου. Επίσης, όλα τα έργα του κροατικού εγχειριδίου που αναφέρονται στους πραγματικούς αριθμούς είναι κλειστού τύπου (A1), ενώ στο ελληνικό το 10% των έργων είναι πολλαπλής επιλογής (A3). Τα ενδομαθηματικά έργα (C1) κυριαρχούν στα σχολικά εγχειρίδια της Κροατίας, σε αντίθεση με τα ελληνικά όπου βρέθηκε ότι το 16% των έργων στην ενότητα «Προβλήματα» έχουν ισχυρή σύνδεση με την πραγματική ζωή.



Γράφημα 6. Το θέμα «Πραγματικοί αριθμοί» ανά χώρα

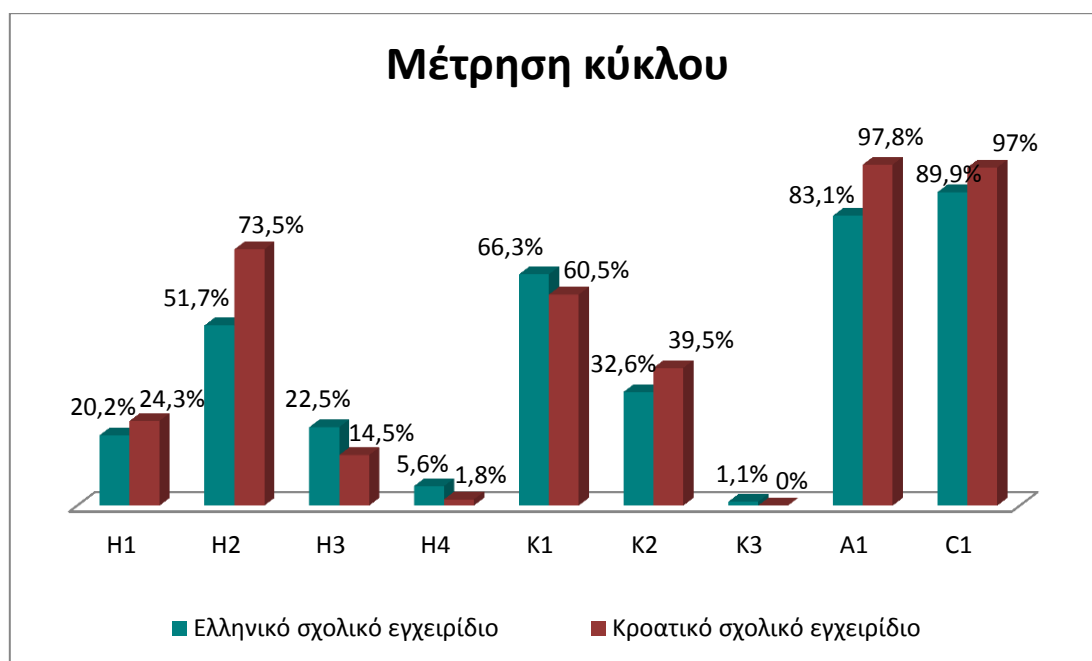
Και τα δύο σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών επικεντρώνονται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στα έργα του κροατικού εγχειριδίου γίνεται εκτεταμένη χρήση υπολογιστικών δραστηριοτήτων και πράξεων (H2). Το ποσοστό ανάγεται στο 93,5% και αντικατοπτρίζει την αλγεβρική οπτική που δίνουν οι συγγραφείς του βιβλίου στο Πυθαγόρειο θεώρημα, σύμφωνα με την οποία το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογώνιου τριγώνου μπορεί να βρεθεί λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των άλλων δύο πλευρών. Επίσης, μόνο το 13% των έργων απαιτεί από τους μαθητές επεξήγηση μιας δεδομένης εικόνας (H3). Αντίθετα το ελληνικό εγχειρίδιο δεν μένει μόνο στον υπολογιστικό χαρακτήρα του θεωρήματος, αλλά δίνει μια άλλη διάσταση στα έργα βάζοντας τους μαθητές στη διαδικασία να αιτιολογήσουν τη θέση τους με τεκμηριωμένα επιχειρήματα. Ωστόσο, παρατηρώντας το Γράφημα 7, διαπιστώνουμε ότι τα έργα του κροατικού εγχειριδίου απαιτούν από τους μαθητές να συνδυάσουν διάφορες έννοιες ή δραστηριότητες. Και ενώ οι μαθητές στην Κροατία έρχονται αντιμέτωποι με πιο περίπλοκα έργα στο θέμα του Πυθαγορείου θεωρήματος κάνοντας σύνθετες συνδέσεις, στην Ελλάδα η γνωστική πολυπλοκότητα των έργων βρίσκεται σε χαμηλό επίπεδο. Αν και το Πυθαγόρειο θεώρημα θεωρούνταν πάντα σημαντικό επειδή έβρισκε εφαρμογή σε πολυάριθμες καταστάσεις της καθημερινής ζωής, τα αποτελέσματα δείχνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα εφαρμόζεται, και στα δύο εγχειρίδια, σε κλειστές ενδομαθηματικές καταστάσεις (C1). Συγκεκριμένα στο κροατικό εγχειρίδιο



Γράφημα 7. Το θέμα «Πυθαγόρειο θεώρημα» ανά χώρα

εφαρμόζεται σε ποσοστό 93,5% σε ενδομαθηματικά έργα και στο ελληνικό σε ποσοστό 80%. Μόνο το 20% των έργων του ελληνικού εγχειριδίου αναφέρεται σε ρεαλιστικό πλαίσιο που μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα.

Τέλος, αναλύθηκαν και ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες τα έργα των σχολικών εγχειριδίων και των δύο χωρών που αφορούν στα κανονικά πολύγωνα και στον κύκλο. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα έργα του κροατικού εγχειριδίου επικεντρώνονται περισσότερο στους συνήθεις υπολογισμούς και πράξεις ή στις γεωμετρικές κατασκευές (H2) συγκριτικά με το ελληνικό εγχειρίδιο. Αυτό φαίνεται από τις ασκήσεις των εγχειριδίων που ζητάνε από τους μαθητές: «Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου», «Να υπολογίσετε το εμβαδό κυκλικού δίσκου», «Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού του δέντρου». Οι δραστηριότητες αναπαράστασης κυμαίνονται και στα δύο εγχειρίδια στα ίδια επίπεδα και αναφέρονται, ιδίως στο ελληνικό εγχειρίδιο, σε λεκτικά προβλήματα που απαιτείται τον μετασχηματισμό τους σε αλγεβρικά. Και οι επεξηγηματικές δραστηριότητες (H3) των αναλυθέντων έργων παρουσιάζουν παρόμοιες συχνότητες εμφάνισης στα δύο εγχειρίδια, ενώ οι δραστηριότητες επιχειρηματολογίας (H4) είναι σχεδόν ανύπαρκτες. Σχετικά με το επίπεδο πολυπλοκότητας διαπιστώνεται σαφής έλλειψη των έργων που απαιτούν από τους μαθητές συλλογιστική σκέψη (K3), και τα έργα ανήκουν κατά κύριο λόγο στο πιο χαμηλό επίπεδο



Γράφημα 8. Το θέμα «Μέτρηση κύκλου» ανά χώρα

δο γνωστικών απαιτήσεων. Παρόλο που θα μπορούσαν να υπάρξουν πολλές αφορμές για σύνδεση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο, τα σχολικά βιβλία επιμένουν στην παρουσίαση των θεμάτων, όπως ο κύκλος, μέσα από καθαρά ενδομαθηματικά πλαίσια (C1).

Συμπεράσματα – Συζήτηση

Τα αποτελέσματα της έρευνας γενικά δείχνουν ότι τα έργα του εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου ευνοούν τις υπολογιστικές και διαδικαστικές δεξιότητες του μαθητή, είναι ενδομαθηματικά, κλειστά και εμφανίζουν χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων. Παρατηρείται έλλειψη των έργων που ενισχύουν τις διαδικασίες επιχειρηματολογίας και απόδειξης, που δίνονται σε αυθεντικό ή ρεαλιστικό πλαίσιο και απαιτούν πολλές σωστές απαντήσεις και πολλούς τρόπους να φτάσει κανείς στις σωστές απαντήσεις.

Τα αποτελέσματα, βέβαια, αυτά δεν είναι σύμφωνα με τους σκοπούς και τις επισημάνσεις του ΑΠΣ. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.6 της παρούσας εργασίας ένας από τους σκοπούς του ΑΠΣ είναι η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία, σκοπός που δε συνάδει με τα αποτελέσματα της έρευνας που δείχνουν ότι στο σχολικό εγχειρίδιο δεν καταβάλλεται προσπάθεια να ενσωματωθεί η επιχειρηματολογία και συλλογιστική στα έργα του. Με τα χαμηλά ποσοστά που βρέθηκαν στις δραστηριότητες επιχειρηματολογίας και συλλογιστικής συμφωνούν και οι Vincent et al. (2008), οι οποίοι στην έρευνά τους εντόπισαν προβλήματα που εντάσσονται στην κατηγορία απόδειξη – συλλογιστική μόνο σε έξι από τα εννέα εγχειρίδια σε ποσοστό περίπου 8%.

Επίσης, τα ελάχιστα ρεαλιστικά προβλήματα και ιδιαίτερα η απουσία των αυθεντικών προβλημάτων από το εγχειρίδιο ακυρώνουν το ΑΠΣ που στοχεύει στη σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης των προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων, υποτιμώντας τη σημασία που προσδίδουν τέτοιου είδους προβλήματα στη μάθηση. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας διαπιστώθηκε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των αναλυθέντων έργων είναι έργα κλειστού τύπου και δεν σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με αυτά των Zhu et al. (2006) και του Li (2000), οι οποίοι σύγκριναν σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της Κίνας και των ΗΠΑ.

Το σίγουρο πάντως είναι ότι το σχολικό εγχειρίδιο υπηρετεί το ΑΠΣ μόνο στο ότι καλεί τους μαθητές να αποκτήσουν άνεση στις υπολογιστικές δεξιότητες μέσα από την επανάληψη των λυμένων εφαρμογών και την εξάσκηση στις άλυτες ασκή-

σεις. Η έμφαση που δίνεται στις υπολογιστικές δραστηριότητες των έργων συνάδει με τα αποτελέσματα της έρευνας των Dole et al. (2008), των οποίων η έρευνα αποκάλυψε την υπεροχή των διαδικασιών υπολογισμού όσον αφορά την αναλογική συλλογιστική στα αυστραλιανά εγχειρίδια.

Στο σχολικό εγχειρίδιο δίνεται βαρύτητα στα υπολογιστικά έργα, δηλαδή σε έργα με χαμηλές γνωστικές απαιτήσεις. Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με τις έρευνες των Vincent et al. (2008), της Brändström (2005) και των Wijaya et al. (2015). Ιδιαίτερα, οι Wijaya et al. (2015) βρήκαν ότι λιγότερο από το 3% των εργασιών των ινδονησιακών βιβλίων αναφέρονται σε έργα με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις, δηλαδή την κοινοποίηση περίπλοκων επιχειρημάτων και σύνθετων συλλογισμών (reflective thinking), γεγονός που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, καθώς το ποσοστό έργων υψηλών γνωστικών απαιτήσεων στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου είναι πολύ μικρό.

Ένα άλλο θέμα που απασχόλησε την παρούσα έρευνα είναι η σύγκριση των ελληνικών και κροατικών εγχειριδίων με τη χρήση του πενταδιάστατου πλαισίου, υπογραμμίζοντας συγκεκριμένες διαφορές και ομοιότητες στα εγχειρίδια των δύο χωρών.

Είναι ξεκάθαρο ότι στα κροατικά εγχειρίδια κυριαρχούν υπολογιστικές δραστηριότητες, πράξεις με αριθμούς ή μεταβλητές καθώς και γεωμετρικές κατασκευές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το κεφάλαιο των εξισώσεων που απαιτεί υπολογισμούς και πράξεις στο 100% των έργων. Αντίθετα, τα ελληνικά εγχειρίδια παρουσιάζουν μια σαφώς καλύτερη εικόνα, απαιτώντας από τους μαθητές όχι μόνο να προβούν σε διαδικαστικές δραστηριότητες, αλλά και να επιχειρηματολογήσουν. Στα κροατικά εγχειρίδια η επιχειρηματολογία και η συλλογιστική δεν υπάρχουν.

Όσον αφορά στη διάσταση των γνωστικών απαιτήσεων των έργων τα ευρήματα της σύγκρισης των δύο ερευνών έδειξαν ότι τα έργα των κροατικών εγχειριδίων επιβάλλουν στους μαθητές έργα υψηλότερων γνωστικών απαιτήσεων σε σύγκριση με εκείνα των ελληνικών εγχειριδίων. Δηλαδή, ζητείται από τους μαθητές της Κροατίας να επιλύουν πιο σύνθετα προβλήματα και να δημιουργούν κατάλληλες συνδέσεις μεταξύ θεματικών ενοτήτων ή θεματικών περιοχών των Μαθηματικών σε σχέση με τους μαθητές της Ελλάδας. Ωστόσο, από τα έργα των σχολικών εγχειριδίων και των δύο χωρών απουσιάζουν τα έργα που απαιτούν από τους μαθητές συλλογι-

στική διαδικασία, δηλαδή να τεκμηριώσουν έναν τρόπο λύσης ενός έργου μέσα από κατάλληλη επιχειρηματολογία και αιτιολόγηση.

Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης ότι τα έργα των σχολικών εγχειριδίων και των δύο χωρών είναι κυρίως έργα κλειστού τύπου, έργα μιας και μοναδικής απάντησης τα οποία δεν αφήνουν πολλά περιθώρια δημιουργικής σκέψης και εξερεύνησης διαφορετικών ιδεών. Στα σχολικά εγχειρίδια αποφεύγεται η ύπαρξη ανοικτών έργων, γεγονός που θα μπορούσε να συνδεθεί με την απουσία επιχειρηματολογίας, που παρατηρήθηκε παραπάνω. Ένας μαθητής κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός έργου αναλύει, αξιολογεί, επιχειρηματολογεί υπέρ ή κατά κάποιας πρότασης και αναπτύσσει, οργανώνει και συνθέτει επιμέρους στοιχεία για τη λύση του. Επίσης, όταν οι μαθητές επιλύουν τα προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους, επικοινωνώντας και συζητώντας τις ιδέες τους στην τάξη, προωθούν τη μαθηματική τους γνώση, κάνουν συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και συνδέουν διαφορετικές έννοιες και ιδέες (Polya, 1981).

Τα περισσότερα έργα τόσο στα κροατικά όσο και στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια δεν ήταν συνδεδεμένα με πραγματικές καταστάσεις, κάτι που, ωστόσο, έστω και με μικρή διαφορά ήταν πιο προφανές στα κροατικά εγχειρίδια. Ακόμη και ο μικρός αριθμός προβλημάτων που υποτίθεται ότι μιμούνται καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, όπως, για παράδειγμα ο πατέρας που έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο, ή οι διαστάσεις μιας οθόνης τηλεόρασης έχουν λόγο $\sqrt{2}$, αφήνουν παγερά αδιάφορους τους μαθητές. Αυτό που προκύπτει από τη σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων των δύο χωρών και ουσιαστικά λείπει από αυτά είναι η επίλυση κατάλληλων ανοικτών – αυθεντικών προβληματικών καταστάσεων που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή των μαθητών, τα οποία θα τους προσέφεραν τη δυνατότητα πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων, και, γενικότερα, τη δυνατότητα για επιχειρηματολογία, αιτιολόγηση και συνεργασία. Βέβαια, τα αυθεντικά έργα έρχονται σε αντίθεση με τα συνήθη έργα των σχολικών εγχειριδίων, όπως αποκαλύφθηκε από την παρούσα έρευνα, που προτεραιότητά τους είναι η εξάσκηση σε πράξεις και υπολογισμούς και σε έργα χαμηλού γνωστικού επιπέδου που απαιτούν μια και μοναδική λύση, η οποία είναι σχεδόν πάντα αριθμητική.

Τέλος, η ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου θα μπορούσε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να οργανώσουν πιο αποτελεσματικά τη διδασκαλία τους, γνωρίζοντας τα δυνατά και αδύνατα σημεία του εγχειριδίου. Επιπλέον, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας μπορούν να αξιοποιηθούν από τους συγγραφείς του βιβλίου ώστε να προβούν σε μια πιο βελτιωμένη έκδοση, εστιάζοντας στις αδυναμίες που εντοπίστηκαν παραπάνω. Από ερευνητική άποψη στον τομέα ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων έχει προστεθεί ένα λιθαράκι ώστε να καλυφθεί το τεράστιο κενό που υπάρχει στη χώρα μας σχετικά με τις έρευνες ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμιας εκπαίδευση.

Περιορισμοί και επεκτάσεις της έρευνας

Τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης και επομένως παίζουν καθοριστικό ρόλο - ιδιαίτερα στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα - στο περιεχόμενο και τη δομή της σχολικής γνώσης, στις διδακτικές δραστηριότητες που αναπτύσσει ο εκπαιδευτικός και στις μαθησιακές δραστηριότητες που αναπτύσσει ο μαθητής. Βέβαια, τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται με πολύ διαφορετικούς τρόπους από τους εκπαιδευτικούς. Ο Remillard (2000) αναλύοντας τη χρήση ενός εγχειριδίου από δύο εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία υπογράμμισε ότι εστίασαν σε διαφορετικά αποσπάσματα του κειμένου και βασίστηκαν στη δίκη τους οπτικής για να νοηματοδοτήσουν αυτό το οποίο διάβασαν. Ο εκπαιδευτικός, λοιπόν, είναι αυτός που θα έχει τον τελικό λόγο όσον αφορά στη χρήση του εγχειριδίου μέσα στη σχολική τάξη. Επομένως, όσο χρήσιμες και αν είναι οι έρευνες που επικεντρώνονται στην ανάλυση των χαρακτηριστικών των σχολικών εγχειριδίων, φαίνεται να αγνοούν τον διαμεσολαβητικό ρόλο του εκπαιδευτικού. Για να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το τι πραγματικά συμβαίνει στην ελληνική σχολική τάξη, θα ήταν χρήσιμο να ερευνήσουμε μελλοντικά τη χρήση του σχολικού εγχειριδίου από τον εκπαιδευτικό. Τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τα σχολικά εγχειρίδια στις τάξεις, πως τα προσαρμόζουν ή διαμορφώνουν το πλαίσιο χρήσης τους.

Ωστόσο, ο κάθε εκπαιδευτικός έχει προφανώς διαφορετικές προσδοκίες από ένα σχολικό βιβλίο και ιδιαίτερα στην Ελλάδα, όπου δεν υπάρχει δυνατότητα εναλλακτικής επιλογής εγχειριδίου, συνήθως επιλέγει να «συμπληρώσει» το εγχειρίδιο με ένα βοήθημα. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα ήταν δυνατό να διερευνηθεί αν τα βοηθήματα που κυκλοφορούν στο εμπόριο έχουν το ίδιο πνεύμα με τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια.

Τέλος, για τους σκοπούς της γενικότητας, η παρούσα έρευνα θα μπορούσε να επαναληφθεί και στα σχολικά εγχειρίδια άλλων χωρών όπως για παράδειγμα της Ολλανδίας - τη χώρα των ρεαλιστικών Μαθηματικών - της Γαλλίας και της Γερμανίας.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Anderson, L.W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing*. New York: Longman.
- Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 71-80.
- Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. Vol. 1: Cognitive domain. *New York: McKay*, 20, 24.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).
- Campbell, T. G., Boyle, J. D., & King, S. (2020). Proof and argumentation in K-12 mathematics: a review of conceptions, content, and support. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), 754-774.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 117-151.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common core state standards for mathematics. Ανακτήθηκε από <http://www.corestandards.org/Math/>
- Davis, J. D. (2013). Examining reasoning-and-proving in the treatment of complex numbers in Irish secondary mathematics textbooks. *Bulletin of the Irish Mathematical Society*, (71).
- Department for Education. (2013). *National Curriculum in England: Primary Curriculum*. Sudbury: DfE Publications.
- Dole, S., & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 10(1), 19-35.
- Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125-139).

- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633-646.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools?. *American educational research journal*, 26(3), 403-421.
- Fuson, K. C., Stigler, J. W., & Bartsch, K. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for research in mathematics Education*, 19(5), 449-456.
- Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International journal of mathematical education in science and technology*, 49(7), 1003-1024.
- Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G., & Hatfield, M. M. (1997). *Mathematics methods for elementary and middle school teachers*. Boston: Allyn and Bacon.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 524-549.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., & Stigler, J. (2003). Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study. *Education Statistics Quarterly*, 5(1), 7-15.
- Institut für Didaktik der Mathematik. Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe [Standards for the mathematical competencies of Austrian students at the end of the 8th grade]. Klagenfurt: Alpen-Adria-Universität; 2007. German.
- Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. Routledge.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM*, 40(3), 427.
- Krummheuer, G. (1995). *The ethnography of argumentation*. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Studies in mathematical thinking and learning series. The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (p. 229–269). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Lemonidis, Ch., Stavrou, A., Papoutzis, L. (2019). Multiple representations in textbooks: Evoking senses during the learning process of mathematics. Selected Proceedings from the 11th International Conference of the Hellenic Semiotics Society, Thessaloniki, pp. 346-359.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 234-241.
- Lipman, M. (2003). *Thinking in education*. Cambridge University Press.
- Maaß, K. (2007). Modelling tasks for low achieving students. First results of an empirical study. In *CERME 5—Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2120-2129).
- McConnell, J. W., Brown, S., Usiskin, Z., Senk, S. L., Widerski, T., Anderson, S., ... & Hirschhorn, D. (1996). UCSMP algebra.
- McNaught, M. D., Tarr, J. E., & Sears, R. (2010). Conceptualizing and Measuring Fidelity of Implementation of Secondary Mathematics Textbooks: Results of a Three-Year Study. *Online Submission*.
- Mueller, M. F., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2010). Promoting student reasoning through careful task design: A comparison of three studies. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 3(1).
- NCTM, P. (2000). standards for school mathematics, Reston, VA. *EE. UU*.
- Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom?. *Educational Studies in Mathematics*, 64(1), 69-84.
- Niss, M. (1993). Assessment in mathematics education and its effects: An introduction. In *Investigations into assessment in mathematics education* (pp. 1-30). Springer, Dordrecht.
- O’Keeffe, L., & O’Donoghue, J. (2011). Mathematics textbook analysis: The significance of textbook features to student learning. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

- O’Keeffe, L., & O’Donoghue, J. (2011). The use of evidence based research on mathematics textbooks to increase student conceptual understanding. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 2(1), 304-311.
- O’Keeffe, L. (2013). A framework for textbook analysis.
- Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational studies in mathematics*, 63(3), 325-346.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, 40(3), 385-400.
- Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (21-54). Θεσσαλονίκη.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Peschek, W., & Heugl, H. (2007). Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. *Schulstufe, Version*, 4(07).
- Rezat, S. (2010, January). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 1260-1269).
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 4-36.
- Siemon, D., Virgona, J., & Corneille, K. (2001). *The Middle Years Numeracy Research Project*, 5-9. Bundoora, VA: RMIT University.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(4), 268-275.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289-321.

- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward.
- Teh, K. S., & Looi, C. K. (1997). Basic algebra. and "Algebraic equations". In PY Lee (Ed.) *New Syllabus D Mathematics, 1*, 127-153.
- Triantafyllou, C., Spiliotopoulou, V., & Potari, D. (2016). The nature of argumentation in school mathematics and physics texts: The case of periodicity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 681-699.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Science & Business Media.
- Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 82-107.
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics, 89*(1), 41-65.
- Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609-626.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Βιβλίο εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Δεσλή, Δ., & Μολασιώτη, Κ. (2014). *Οι εικόνες στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β' Δημοτικού και ο ρόλος τους στην επίδοση των μαθητών* (No. ΙΚΕΕ-CONF-2017-385). Aristotle University of Thessaloniki.

- Θεοφανίδου, Ι., Βάσιου, Α., & Λεμονίδης, Χ. (2020). Η αξιολόγηση του βιβλίου των μαθηματικών σε σχέση με τα συναισθήματα και τους στόχους επίτευξης των μαθητών/τριών. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, 8, 323-334.
- Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ. & Τάτσης, Κ. (2009). Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού. *Ευκλείδης Γ΄*, 71, 42-62.
- Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2008). Προλεγόμενα μιας ανάλυσης των εγχειριδίων σχετικά με την έννοια της συνάρτησης. Στο Δ. Χασάπης (επ.), *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 225-243. Θεσσαλονίκη.
- Κόσσυβας, Γ. (2014α). Αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; Αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 7, 11-50. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.
- Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2015). Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Στο Χ. Σκουμπουρδή, & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά του 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, σ. 561-578. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Μπονίδης, Κ. (2005). Διαδικασία και κριτήρια αξιολόγησης των σχολικών βιβλίων. Στο *Πρακτικά Συνεδρίου Διδακτικό Βιβλίο και εκπαιδευτικό υλικό στο σχολείο: Προβληματισμοί, Δυνατότητες, Προοπτικές*, σ. 106-119. Θεσσαλονίκη.
- Χατζηβασιλείου, Ε. (2008). Τα πολιτισμικά στοιχεία στα νέα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Α΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Στο Δ. Χασάπης (επ.), *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 109-120. Θεσσαλονίκη.
- Ξωχέλλης, Π. (2009). Το σχολικό βιβλίο ως μέσο διδασκαλίας και αντικείμενο εκπαιδευτικής έρευνας. *Πρακτικά του 10^{ου} Συνεδρίου του Εκπαιδευτικού Ομίλου Κύπρου*, σ. 27-34. Λευκωσία.