ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου (13-18 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

Διδακτική διαχείριση του Θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων από μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

της

Τσιπουρά Φωτεινή, 804

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής
Εξεταστής 1: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια
Εξεταστής 2: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής καθηγητής

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2021

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο για την καθοδήγηση, την ουσιαστική βοήθεια και την υπομονή του κατά την εκπόνησή της.
- Την καθηγήτρια κα. Τζεκάκη Μαριάννα και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.
- Τους συναδέλφους καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη βοήθεια που μου προσέφεραν συμμετέχοντας πρόθυμα και εθελοντικά στην έρευνα.
- Την οικογένειά μου που πίστεψε στην προσπάθεια αυτή και μου παρείχε καθημερινή βοήθεια και υποστήριξη.

Διδακτική διαχείριση του Θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων από μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να μελετήσει τη γνώση περιεχομένου και τη παιδαγωγική γνώση περιεχομένου μαθηματικών πάνω στη ομοιότητα και το Θεώρημα του Θαλή. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται διερεύνηση της μεθόδου διδασκαλίας που ακολουθείται από τους εκπαιδευτικούς, όπως επίσης και των σχημάτων, πρωτοτυπικών ή μη, που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή. Επιπλέον, εξετάζεται κατά πόσο οι μαθηματικοί γνωρίζουν τα διαφορετικά είδη των λόγων που δημιουργούνται και τέλος, ελέγχεται κατά πόσο οι μαθηματικοί είναι σε θέση να ερμηνεύσουν τις παρανοήσεις των μαθητών πάνω στο Θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν συνολικά 13 μαθηματικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έπειτα από μια σύντομη συνέντευξη, οι καθηγητές/-τριες απάντησαν στα πέντε έργα του ερωτηματολογίου που τους δόθηκε.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, βασικός στόχος της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι η σύνδεση της γνωστικής διαδικασίας, της αναπαράστασης και του συλλογισμού. Έπειτα από την ποιοτική ανάλυση των ερωτημάτων που τέθηκαν, διαπιστώθηκε η παραδοσιακή διδασκαλία σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους προτιμάται από τους μαθηματικούς και ότι μεγάλο μέρος της διδασκαλίας του θεωρήματος του Θαλή βασίζεται σε πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις. Επίσης, προέκυψε ότι οι εκπαιδευτικοί ενώ είναι σε θέση να αναφέρουν τα είδη των λόγων είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τους λόγους ομοιότητας. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν και κατηγοριοποιούν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών δίνοντας τρόπους αντιμετώπισης.

Λέξεις Κλειδιά:

Παραδοσιακή διδασκαλία, Θεώρημα Θαλή, όμοια τρίγωνα, πρωτοτυπικά σχήματα, ερμηνεία παρανοήσεων

Didactic management of Thales’ theorem and triangles’ similarity by secondary school mathematicians

Abstract

The purpose of this thesis is to study the content knowledge and the content pedagogical knowledge of mathematicians on the similarity and the Thales’ Theorem. More specifically, it examines the teaching method followed by the mathematicians, as well as the figures, prototypical or not, that are used during the teaching of Thales' theorem. Moreover, it examines whether mathematicians know the different kinds of ratios that are created, and finally, it is evaluated whether mathematicians are able to interpret students’ misunderstandings on Thales' Theorem and similarity. Altogether, 13 mathematicians of secondary education were involved in the conducted study. After a short interview, the mathematicians answered five questions of a questionnaire given to them.

According to the literature, the main goal of the educational process is to connect the cognitive process, the representation and the reasoning. After a qualitative analysis of the questions that were posed, it was found that traditional teaching in combination with other methods is preferred by mathematicians and the teaching of Thales' theorem is mainly based on prototypical representations. Additionally, it emerged that mathematicians, while being able to state the kinds of ratios, are more familiar with the similar ratio. Finally, it was found that they are able to recognize and categorize students' mistakes and misunderstandings by giving ways to deal with them.

Key Words:

Traditional teaching, Thales’ Theorem, similar triangles, prototypical figures, explanation of misunderstandings

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Τα γεωμετρικά σχήματα, σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό, είναι αυτά που καθορίζουν την πορεία της γεωμετρικής σκέψης, καθώς συμβάλουν στην οπτικοποίηση αφηρημένων εννοιών. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί ένα μάθημα που έχει παίξει καθοριστικό ρόλο στην ιστορία της ελληνικής και της παγκόσμιας εκπαίδευσης, καθώς τα γεωμετρικά σχήματα αποτελούν κομβικά σημεία που προάγουν την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και της λογικής τεκμηρίωσης, με τον μαθητή να βιώνει την εμπειρία του χώρου και της γεωμετρικής κατασκευής.

Οι εκπαιδευτικοί, κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας, πρέπει να βοηθούν τα παιδιά ώστε να δημιουργούν εικόνες, είτε στο χαρτί είτε σε οθόνη υπολογιστή, προκειμένου να αναπτύξουν έναν *χωρικό γραμματισμό*, δηλαδή μια ικανότητα να αντιλαμβάνονται το χώρο μέσα στον οποίο ζουν (Κολέζα, 2009). Τις πιο πολλές φορές, η διδασκαλία της Γεωμετρίας στοχεύει στην απόκτηση συγκεκριμένων εννοιών με έναν "αυστηρό" τρόπο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αποκτούν τις συγκεκριμένες γνώσεις για αυτές τις συγκεκριμένες έννοιες, τις οποίες, όμως, στην αρχή δεν μπορούν να τις συνδυάσουν (Γαγάτσης, 2014˙ Λεμονίδης, 1993˙ Mattheou & Spyrou, 2009).

Στην Ελλάδα, η διδασκαλία της Γεωμετρίας βασίζεται στη διδακτική θεωρία των Van Hieles, πράγμα που δεν αναφέρεται πουθενά στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, παρά μόνο υπονοείται. Αρχικά, το πρόβλημα εμφανίζεται στην τάξη της Γ' Γυμνασίου, όπου οι μαθητές, για πρώτη φορά, έρχονται σε επαφή με τις αποδεικτικές διαδικασίες και γίνεται ακόμα πιο έντονο στην Α' Λυκείου, όπου η Γεωμετρία γίνεται ανεξάρτητο μάθημα και θεμελιώνεται αξιωματικά. Έχει παρατηρηθεί ότι πολλοί μαθητές προτιμούν να ασχολούνται με δύσκολες ασκήσεις της Άλγεβρας παρά με εύκολες της Γεωμετρίας. Έτσι, οι μαθητές δημιουργούν μια αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα της Γεωμετρίας και οι επιδόσεις τους είναι αρκετά χαμηλές.

Βασικός στόχος της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι η σύνδεση της γνωστικής διαδικασίας αναπαράστασης, της κατασκευής και του συλλογισμού. Συχνά παρατηρείται το φαινόμενο της μη σύνδεσης μεταξύ των καταστάσεων αυτών, που μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη κατάλληλων δραστηριοτήτων. Οι μαθητές περιορίζονται στην οπτική – εικονική αντίληψή του γεωμετρικού σχήματος, η οποία από μόνη δεν μπορεί να δημιουργήσει της έννοιες, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αντιληφθούν τυχόν τροποποιήσεις του ίδιου σχήματος.

Η υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, είτε με την περικοπή σημαντικών μαθηματικών ενοτήτων, είτε με την μη υπαγωγή τους στην εξεταστέα ύλη, καθώς και η αρνητική στάση των μαθητών, τα τελευταία χρόνια, έχουν αποτελέσει πηγή έμπνευσης πολλών ερευνών διεθνώς. Πολλές από αυτές τις μελέτες σχετίζονται με την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Αποτελέσματα έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να χειριστούν ένα γεωμετρικό σχήμα, προκειμένου να αντιμετωπίσουν μια προβληματική κατάσταση.

Στην παρούσα εργασία μελετάται ο τρόπος με τον οποίο εκπαιδευτικοί της Γ' Γυμνασίου παρουσιάζουν βασικές γεωμετρικές έννοιες στους μαθητές τους, όπως το Θεώρημα του Θαλή και η Ομοιότητα τριγώνων. Πιο συγκεκριμένα γίνεται απόπειρα για διερεύνηση της διδακτικής πρακτικής που ακολουθούν οι μαθηματικοί, της χρήσης πρωτοτυπικών σχημάτων κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή, της διάκρισης των διαφορετικών ειδών των λόγων που δημιουργούνται στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα και τέλος τις ερμηνείες που δίνουν οι εκπαιδευτικοί στις παρανοήσεις των μαθητών που δημιουργούνται στις ενότητες αυτές.

Στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στα σχετικά θέματα μέσα σε τρία κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο γεωμετρικό συλλογισμό βάσει του οποίου γίνεται η παρούσα μελέτη. Αρχικά παρουσιάζεται η θεωρία του Fischbein (1993), η οποία υποστηρίζει πως κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές (*conceptual*) και σχηματικές (*figural*) ιδιότητες. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στη θεωρία της «τυπικότητας» και στα πρωτοτυπικά σχήματα, σχήματα με τα οποία τα άτομα συνδέουν πιο εύκολα γεωμετρικές αναπαραστάσεις από άλλα σε μια δεδομένη κατάσταση (Cordier & Cordier, 1991˙ Λεμονίδης, 1993˙ Mesquita, 1998). Το πρώτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη γνωστική θεωρία και ανάλυση του R. Duval (1995) σχετικά με τους τέσσερις τύπους γνωστικής σύλληψης, με τους οποίους μια γεωμετρική μορφή γίνεται αντιληπτή μέσα σε μια γεωμετρική κατάσταση. Επιπλέον, μελετώνται και τα τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος που αφορούν τις παραπάνω έννοιες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η ιστορική εξέλιξη του θεωρήματος του Θαλή και παρουσιάζονται τα είδη των λόγων που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο θεώρημα και την ομοιότητα. Στη συνέχεια, αναλύονται τα σχήματα που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή του θεωρήματος, με βάση τη βιβλιογραφία, και γίνεται παρουσίαση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών της Γ' Γυμνασίου, όσον αφορά πάντα το βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, Τέλος, ανασκοπείται η βιβλιογραφία σχετικά με τις παρανοήσεις των μαθητών που παρατηρούνται σε αυτές τις έννοιες.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται η μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται η γνώση περιεχομένου, η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών, το πώς ένας εκπαιδευτικός διαχειρίζεται το λάθος του μαθητή και ποιες θεωρούνται οι κατάλληλες αναπαραστάσεις για την διδασκαλία μιας γεωμετρικής έννοιας. Επιπλέον, περιγράφονται δύο μοντέλα διδασκαλίας, το παραδοσιακό μοντέλο ή αλλιώς δασκαλοκεντρική μέθοδος διδασκαλίας και η μαθητοκεντρική μέθοδος, δύο μοντέλα τα οποία έρχονται σε αντιπαράθεση και συναντώνται στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αποτελείται από τρία κεφάλαια. Αναλυτικά, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται διεξοδικά η μεθοδολογία της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται ο στόχος της έρευνας και οι ερευνητικές υποθέσεις, η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την διεξαγωγή της έρευνας, το δείγμα που συμμετείχε, το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για τη συλλογή δεδομένων και τέλος, η μέθοδος με την οποία επεξεργάστηκαν.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα τόσο από τη συνέντευξη όσο και από το ερωτηματολόγιο. Στη συνέχεια, στο έκτο κεφάλαιο, περιγράφονται αναλυτικά η συζήτηση των αποτελεσμάτων σε συνάφεια με έρευνες που έχουν υλοποιηθεί, τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα, καθώς και προτάσεις για μελλοντικές έρευνες πάνω στα ίδια ζητήματα.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1. Κεφάλαιο 1: Γεωμετρικός Συλλογισμός

1.1. Γεωμετρικό Σχήμα

Βασικό αντικείμενο μελέτης της γεωμετρίας είναι ο χώρος μέσα στον οποίο ζει, αναπνέει και κινείται κάθε παιδί, και δε στοχεύει απλά στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων. Ο Freudenthal (1973, όπ. αναφ. στο Κολέζα, 2009, σελ.286) υποστήριξε πως ο χώρος αυτός θα πρέπει να εξερευνηθεί και να κατακτηθεί από το κάθε παιδί προκειμένου να ζήσει καλύτερα μέσα σ' αυτόν. Σκοπός της διδασκαλίας της γεωμετρίας είναι:

i. η εξέλιξη της χωρικής γνώσης, της γεωμετρικής διαίσθησης και της ικανότητας οπτικοποίησης,
ii. η ανάπτυξη του συμπερασματικού λογισμού και της απόδειξης, και
iii. η μελέτη των αντικειμένων του χώρου, τόσο δυσδιάστατων όσο και τρισδιάστατων,

έχοντας ως βασικούς τους παρακάτω στόχους:

- τη μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων δυσδιάστατων και τρισδιάστατων, όπως και των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων αυτών,
- τη μελέτη των μετασχηματισμών στο χώρο και της συμμετρίας,
- τον τρόπο τοποθέτησης των αντικειμένων στο επίπεδο ή στο χώρο, και
- την αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων, όπως επίσης και την ανάπτυξη σχέσεων που δημιουργούνται μεταξύ δυσδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων από διαφορετικές οπτικές γωνίες (Κολέζα, 2009˙ Van de Walle, 2007).

Σύμφωνα με την Van Niekerk (1995, όπ. αναφ. στο Κολέζα,2009, σελ. 286), «*η γεωμετρία δεν αρχίζει με τη διατύπωση ορισμών και θεωρημάτων. Αρχίζει από τη στιγμή που το παιδί πρέπει να προσανατολισθεί στον περιβάλλοντα χώρο του. Αυτή η εξοικείωση με το φυσικό περιβάλλον θα οδηγήσει τελικά σε περισσότερη εμπειρία που προετοιμάζει το έδαφος για τους ορισμούς και τα θεωρήματα*». Η ικανότητα αντίληψης του χώρου αποτελεί βασική προϋπόθεση για την επίλυση προβλημάτων και κατ' επέκταση για τη μάθηση των Μαθηματικών (Battista et al., 1998˙ Curry et al., 2006˙ Curry & Outhred, 2005).

Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος εμπεριέχει τρεις οντότητες: **τον ορισμό** (*definition*), **την εικόνα** (*image*) που στηρίζεται στην αισθησιοαντιληπτική εμπειρία και **τη σχηματική έννοια** (*figural concept*). Για παράδειγμα, το τρίγωνο είναι μια σχηματική έννοια η οποία καθορίζεται πλήρως από έναν ορισμό. Αυτή η σχηματική έννοια διαμορφώνεται και εμπλουτίζεται σταδιακά από το σύνολο όλων των εικόνων (*concept imagery*), που έχουν συσχετισθεί στο νου ενός ατόμου σχετικά με αυτό το σχήμα (Κολέζα, 2009, σελ. 288).

Η πορεία της γεωμετρικής σκέψης καθορίζεται από τα σχήματα, αφού αυτά είναι που συνδέουν τις αφηρημένες έννοιες με την αισθητηριακή αντίληψη. Στη διδασκαλία παίζουν καθοριστικό ρόλο καθώς συνδέονται με την αιτιολόγηση και την παραγωγική σκέψη των μαθητών. Επιπλέον, είναι αδύνατο να φανταστούμε το μάθημα της γεωμετρίας χωρίς την ύπαρξη σχημάτων, εικονικών, δηλαδή, αναπαραστάσεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν τις αφηρημένες έννοιες, χωρίς την ένδειξη ενός σημείου – αντικειμένου αναφοράς, το οποίο θα καλύπτει το κενό μεταξύ του αφηρημένου και του πραγματικού (Bruner, 1966).Ο ρόλος του σχήματος είναι καθοριστικός, καθώς συμβάλλει στην ανάπτυξη των γνωστικών δεξιοτήτων, όπως η κατηγοριοποίηση, η αναγνώριση και η δημιουργία εικασιών από τους μαθητές.

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές, τα τρία πιο δύσκολα θέματα πάνω στην κατανόηση του μαθηματικού τρόπου σκέψης είναι:

i. η ανάλυση της διαδικασίας εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης,
ii. η περιγραφή της φύσης των οπτικών αναπαραστάσεων (visual representations) και
iii. ο ρόλος της διαίσθησης (intuition) και της φαντασίας (imagery) στη δημιουργία αυτών των αναπαραστάσεων (Κολέζα, 2003, σελ. 6).

Η γεωμετρία θεωρείται ένα από τα δυσκολότερα μαθήματα για τους μαθητές, καθώς χρειάζεται να αναπτύξουν και διαδικασίες πέρα των μηχανικών. Δεν υπάρχουν, δηλαδή, προκαθορισμένοι αλγόριθμοι που μπορούν να εφαρμοστούν χωρίς πρώτα να έχει επέλθει η κατανόηση του εκάστοτε αντικειμένου που μελετάται. Σε αντίθεση με την άλγεβρα, όπου κυριαρχεί η οργανωμένη σκέψη (υπάρχουν συγκεκριμένοι αλγόριθμοι), στη γεωμετρία κυριαρχεί η οπτική σκέψη. Η γεωμετρική σκέψη είναι το σύνολο των γνωστικών διαδικασιών με τις οποίες ο μαθητής κατασκευάζει και διαχειρίζεται νοητικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων του χώρου, των σχέσεων και των μετασχηματισμών τους (Κολέζα, 2009, σελ. 286).

Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας ποικίλουν. Έρευνες δείχνουν ότι οι δυσκολίες αυτές εμφανίζονται, κατά κύριο λόγο,

1. στην ορολογία των εννοιών,
2. στην ικανότητα αντίληψης του χώρου,
3. στη δημιουργία συλλογισμών και
4. στην κατασκευή αποδείξεων για τις διάφορες γεωμετρικές προτάσεις.

Στις μικρότερες τάξεις, η γεωμετρία είναι *περιγραφική* ή, καλύτερα *πρακτική*, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη μάθηση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και στην ειδική ορολογία που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους, ενώ μπορούν να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία (Τουμάσης, 2002). Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δίνεται περισσότερη έμφαση στην πρακτική εφαρμογή της θεωρίας και λιγότερο στην κατανόηση των εννοιών, με αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται στην εφαρμογή της θεωρίας που απαιτείται για την επίλυση ασκήσεων και στο να δίνουν ολοκληρωμένους ορισμούς που απαιτούν κάποιες συνθήκες, οι οποίοι στην πρακτική εφαρμογή τους υπονοούνται χωρίς να παρουσιάζονται (Mattheou & Spyrou, 2009).

1.2. Θεωρίες γύρω από τη Γεωμετρία

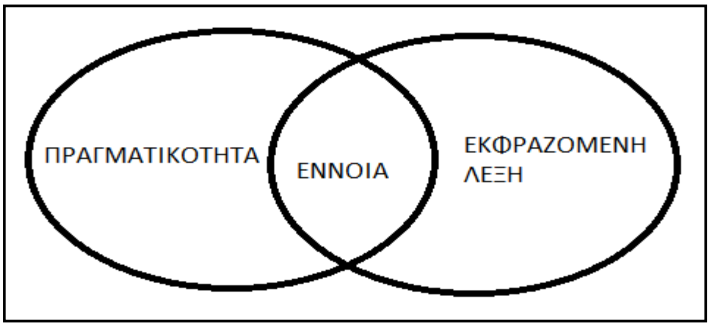
Η θεωρία του Fischbein

Ο Fischbein (1993), στο έργο του, υποστηρίζει ότι το γεωμετρικό σχήμα έχει διττή φύση, δηλαδή ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές (*conceptual*) και σχηματικές (*figural*) ιδιότητες. Οι ιδιότητες που σχετίζονται με την εννοιολογική κατανόηση αναφέρονται στη θεωρητική υπόσταση που έχουν οι γεωμετρικές έννοιες, ενώ οι σχηματικές αναφέρονται στο χώρο.

Σύμφωνα με τον Fischbein (1993), οι λέξεις/ήχοι που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε μία δραστηριότητα είναι η εξωτερική, δηλαδή η παραστατική σημασία του αντικειμένου που περιγράφουμε. Η κάθε μαθηματική έννοια τοποθετείται στην τομή της πραγματικότητας και της εκφραζόμενης λέξης: η έννοια είναι μια ιδέα που διατηρείται μέσα σε πολύπλοκες σχέσεις.

Η σχηματική αρχή είναι μία έννοια. Η ιδιαιτερότητα αυτής της έννοιας είναι ότι περιλαμβάνει το σχήμα ως μία ουσιαστική ιδιότητα. Είναι μια εικόνα που ελέγχεται εντελώς από τον ορισμό. Χωρίς αυτού του είδους των εικόνων του χώρου, η Γεωμετρία δεν θα υπήρχε ως κλάδος των Μαθηματικών (Fischbein, 1993).

Ουσιαστικά, η γεωμετρική σκέψη μπορεί να χαρακτηριστεί από αμοιβαία επίδραση μεταξύ του γεωμετρικού σχήματος και αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας, αλληλεπίδραση, δηλαδή, μεταξύ του "*figure" και του "concept"* (Κολέζα, 2003˙ Mariotti & Fischbein, 1997). Η αρμονική συνύπαρξη των δύο αυτών πτυχών του γεωμετρικού σχήματος ενισχύει την αποτελεσματικότητα του γεωμετρικού συλλογισμού (Παναούρα, 2007).



Σχεδιάζοντας ένα γεωμετρικό σχήμα, προκειμένου να εξεταστούν ή να εφαρμοστούν κάποιες ιδιότητές του, είναι γνωστό ότι δε γίνεται αναφορά στο συγκεκριμένο σχήμα, αλλά σε μια τάξη απείρων σχημάτων που υπακούουν στον ορισμό του (Lemonidis, 1997). Με λίγα λόγια, το γεωμετρικό σχήμα "*έχει μια ιδιότητα που δεν έχουν οι άλλες μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα περιέχει την νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου*" (Fischbein, 1993, σελ. 141). Κι αυτός είναι ο λόγος που χαρακτηρίζει τα γεωμετρικά σχήματα ως «σχηματικές έννοιες» (figural concepts).

Από έρευνες που έχουν γίνει, γνωστοποιείται ότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία τα χαρακτηριστικά των σχημάτων δεν εξαρτώνται από τη θέση ή τον προσανατολισμό με τον οποίο σχεδιάζονται. Επιπλέον, τα σχήματα παραμένουν αναλλοίωτα με το μετασχηματισμό της ομοιότητας. Δεν ενδιαφέρει, δηλαδή, το συγκεκριμένο μήκος των σχημάτων, αλλά οι σχέσεις και οι αναλογίες μεταξύ των σχηματικών οντοτήτων (Lemonidis, 1997).

Πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι η συγχώνευση μεταξύ έννοιας και σχήματος στη γεωμετρική αιτιολόγηση εκφράζει μόνο μια ιδεατή κατάσταση η οποία συνήθως δεν γίνεται απόλυτα κατανοητή εξαιτίας εξωγενών παραγόντων (π.χ. ψυχολογία, προϋπάρχουσες γνώσεις). Η διττή λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων καθιστά τον κύριο λόγο εμφάνισης δυσκολιών από μαθητές κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Γαγάτσης, 2007˙ Fischbein & Nachlieli, 1998˙ Mesquita, 1998). Τις περισσότερες φορές, οι μαθητές αναγνωρίζουν, αρχικά, τις έννοιες που έχουν να μελετήσουν αναπαριστώντας τες με τα «πρωταρχικά διαισθητικά μοντέλα» (intuitive models),τα οποία λειτουργούν ως παραδειγματικά μοντέλα (paradigmatic models) για την ανάπτυξη των εννοιών, και στη συνέχεια επεξεργάζονται τα στοιχεία αυτών των σχημάτων (Fischbein & Nachlieli, 1998). Η διαισθητική αντίληψη ενός φαινομένου στους μαθητές είναι διαφορετική συνήθως από την επιστημονική ερμηνεία. Αυτό συμβαίνει, γιατί η εικόνα και η έννοια θα πρέπει να ενώνονται σε ένα μοναδικό νοερό αντικείμενο για να μπορεί να το κατανοήσει ο μαθητής (Fischbein, 1993˙ Mariotti & Fischbein, 1997).

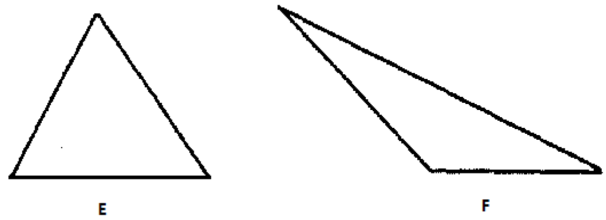
Η θεωρία "Τυπικότητας μιας αναπαράστασης" και τα "Πρωτοτυπικά σχήματα"

Όπως αναφέρεται στην έρευνά της η Mesquita (1998), μια σημαντική συμβολή στην εκπαίδευση των μαθηματικών προέρχεται από τη θεωρία της τυπικότητας που αναπτύχθηκε από γνωστικούς όπως οι Adelson (1985) και Le (1989) και εφαρμόστηκε στην εκπαίδευση των μαθηματικών από τους Cordier και Cordier (1991). Η '*τυπικότητα'* είναι μία ιδιότητα στοιχείων που ανήκουν σε μια κατηγορία και αντιστοιχεί στην ιδέα ότι ορισμένα στοιχεία είναι "καλύτερα" παραδείγματα από άλλα της ίδιας κατηγορίας, δηλαδή, είναι πιο '*τυπικά'* από άλλα. Για παράδειγμα, μια καρέκλα με τέσσερα πόδια είναι πιο τυπική από μια καρέκλα με τρία πόδια. Ένα σκυλί είναι ένα πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα θηλαστικών από μια φάλαινα. Εφαρμοσμένη σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, η τυπικότητα μιας αναπαράστασης προκύπτει από το γεγονός ότι τα άτομα συνδέουν πιο εύκολα μερικές εξωτερικές αναπαραστάσεις από άλλες σε ένα δεδομένο πρόβλημα ή μία κατάσταση (Cordier & Cordier, 1991˙ Λεμονίδης, 1993˙ Mesquita, 1998).

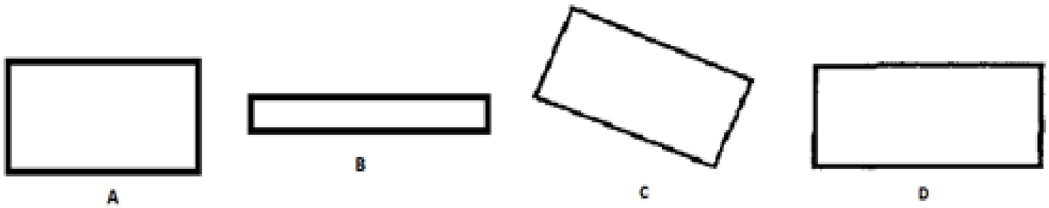
Τα χαρακτηριστικά του αντιπροσωπευτικού χώρου και η θεωρία της τυπικότητας που εφαρμόζονται στις μαθηματικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών αντικειμένων μας δίνουν τη δυνατότητα να ονομάζουμε «πρωτοτυπικά σχήματα» ή «εικονικά πρωτότυπα μοντέλα» εκείνες τις αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν σε μια «*κανονική*» οργάνωση του προσανατολισμού και της μορφής. Σύμφωνα με τη Mesquita (1998), τα πρωτοτυπικά σχήματα:

- ✓ τηρούν κανόνες εγκλεισμού (κλειστά σχήματα),
- ✓ έχουν συγκεκριμένες κατευθύνσεις (οριζόντιες και κάθετες) και
- ✓ έχουν κανονικές, απλές και συμμετρικές μορφές.

Για παράδειγμα, ένα ισοσκελές τρίγωνο θεωρείται η καλύτερη αναπαράσταση για την έννοια του τριγώνου, με αποτέλεσμα αυτό να το καθιστά ως πρωτοτυπικό σχήμα της έννοιας του τριγώνου (Mesquita, 1998˙ Warren & English, 1995). Με λίγα λόγια, το τρίγωνο E είναι πρωτοτυπικό, ενώ το τρίγωνο F όχι.

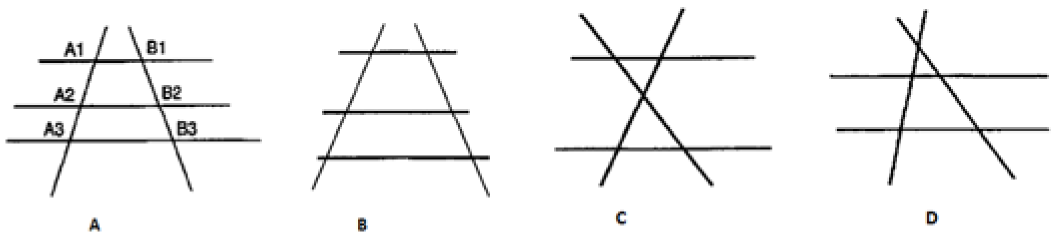


Όπως επίσης, στην παρακάτω εικόνα, το ορθογώνιο A θεωρείται πρωτοτυπικό σε αντίθεση με το ορθογώνιο B. Ομοίως το ορθογώνιο D σε σχέση με το C.



Η ανάπτυξη πρωτοτυπικών σχημάτων θεωρείται αποτέλεσμα των οπτικών και των αντιληπτικών περιορισμών οι οποίοι επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών να διακρίνουν τα γεωμετρικά σχήματα, και ειδικότερα γεωμετρικά σχήματα που ανήκουν στην ίδια ομάδα. Μέσα από έρευνες που έχουν γίνει έχει διαπιστωθεί ότι δάσκαλοι και βιβλία τείνουν να χρησιμοποιούν πρωτότυπες αναπαραστάσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευκολότερα από άλλες, είτε λόγω οικονομίας χαρτιού, είτε εξοικονόμησης χώρου στις σελίδες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι μαθητές να μην μπορούν να αναγνωρίσουν τα ίδια σχήματα σε μία μη τυπική αναπαράσταση.

Οι Cordier και Cordier (1991) μελέτησαν την τυπικότητα μιας αναπαράστασης του θεωρήματος του Θαλή σε ορισμένες ευρωπαϊκές χώρες. Έδειξαν ότι υπάρχουν γνωστικές διαφορές μεταξύ των πιθανών αναπαραστάσεων που μπορούν να συσχετίσουν οι μαθητές με αυτό το θεώρημα, δηλαδή ότι υπάρχουν ορισμένες αναπαραστάσεις που είναι πιο εύκολα συνδεδεμένες με το θεώρημα από ότι άλλες. Για παράδειγμα, στην εικόνα που ακολουθεί, το A είναι ένα καλύτερο παράδειγμα μιας παράστασης του θεωρήματος από B και το D καλύτερο από το C.



Βασιζόμενοι, οι Cordier και Cordier (1991), στις δέκα διαφορετικές αναπαραστάσεις του θεωρήματος του Θαλή (βλ. κεφ. 2.2), έδειξαν:

i. *«ότι μερικές από αυτές σχετίζονταν φυσικότερα με το θεώρημα από ό, τι άλλες,*
ii. *ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα κυρίως στις αναπαραστάσεις του σχήματος C από ό, τι στις άλλες περιπτώσεις* (Cordier & Cordier, σελ. 57) *και*
iii. *ότι η τυπικότητα ορισμένων αναπαραστάσεων αποτελεί πηγή γνωστικής προκατάληψης»* (Cordier & Cordier, 1991, σελ. 61-62).

Στην πραγματικότητα, το ζήτημα της τυπικότητας συνδέεται με δύο απόψεις. Από μαθηματική άποψη, δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των αναπαραστάσεων A και B ή των C και D. O αριθμός των παράλληλων γραμμών αποτελεί βασικό παράγοντα, ενώ η απόσταση μεταξύ τους ή οι κλίσεις των μη παράλληλων γραμμών δεν είναι σημαντικοί. Όμως, από διδακτική άποψη, αυτές οι αναπαραστάσεις εμφανίζονται διαφορετικές για τους μαθητές. Όπως προκύπτει από τη μελέτη των Cordier και Cordier (1991), η γωνία μεταξύ μη παράλληλων γραμμών επηρεάζει την απόδοση των μαθητών. Οι αναπαραστάσεις που περιέχουν αμβλεία γωνία καθιστούν πιο δύσκολη τη σύνδεσή τους με το θεώρημα του Θαλή. Με λίγα λόγια, παρατηρείται ότι οι μαθητές ανταποκρίνονται με μεγαλύτερη ευκολία στην εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή έχοντας τις τυπικές αναπαραστάσεις (Brousseau, 1995).

Η τυπικότητα των γεωμετρικών μορφών έχει κάποια σχέση με το ζήτημα της ετερογένειας του αντιπροσωπευτικού χώρου. Για παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι μια απεικόνιση ενός τριγώνου με οριζόντια βάση είναι πιο τυπική από μια άλλη χωρίς τέτοια βάση. Η ετερογένεια του αντιπροσωπευτικού χώρου έχει κάποιες επιπτώσεις στην τυπικότητα της αντιπροσώπευσης. Τα πιο "τυπικά" γραμμικά και οριζόντια σχήματα είναι αυτά που έχουν τις ειδικές αντιληπτικές ιδιότητες.

Έρευνες που έχουν γίνει για τη χρήση του σχήματος στη γεωμετρία παγκοσμίως καταλήγουν σχεδόν στα ίδια συμπεράσματα. Κατά τη διδασκαλία, φαίνεται ότι χρησιμοποιείται πολύ περιορισμένος αριθμός σχημάτων και μάλιστα τις περισσότερες φορές παρουσιάζεται στους μαθητές μόνο ένα σχήμα. Οι εκπαιδευτικοί δεν είναι ενημερωμένοι για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές από τη χρήση των τυπικών σχημάτων, καθώς επίσης και για τον τρόπο που πρέπει να αντιμετωπίζονται αυτές οι δυσκολίες.

Για να κατασκευάζουν οι μαθητές πλούσιες και σωστές εννοιολογικές εικόνες των γεωμετρικών εννοιών που μαθαίνουν θα πρέπει να προτείνονται διδακτικές καταστάσεις τέτοιες ώστε να δημιουργείται μια αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και των αντίστοιχων σχηματικών αναπαραστάσεων. Δηλαδή αφενός η έννοια μπορεί να κατασκευάζεται και να ανακαλύπτονται τα κατάλληλα χαρακτηριστικά δοκιμάζοντας διάφορα σωστά ή λανθασμένα σχηματικά παραδείγματα μέσα σε μια διαλεκτική συζήτηση διόρθωσης των λαθών στις προτάσεις των μαθητών. Αφετέρου μπορεί να δίνεται (γραπτά ή προφορικά) ο ορισμός μιας έννοιας και οι μαθητές να αναγνωρίζουν ή να κατασκευάζουν αντίστοιχα παραδείγματα.

Σύμφωνα με τους Cordier (1991), μπορούμε να αντλήσουμε από ένα σχήμα δύο είδη γνώσεων:

- → Μια εννοιολογική γνώση αφαιρετικού χαρακτήρα, η οποία ορίζει ένα σύνολο αντικειμένων δίνοντας τη δυνατότητα εφαρμογής ενός θεωρήματος από τις κοινές ιδιότητές τους.
- → Μια πρωτότυπη γνώση, η οποία είναι περισσότερο αντιληπτική και συνίσταται στη σύνδεση αυτού του σχήματος με άλλα γνωστά σχήματα. Αυτή η σύνδεση γίνεται λόγω ίδιων ιδιοτήτων με το πρώτο, παρόλο που τα σχήματα δεν ταυτίζονται με αυτό.

Αυτά τα δύο είδη γνώσεων εμφανίζονται ταυτόχρονα σε κάθε κατάσταση, με αποτέλεσμα να δημιουργούν εμπόδια στη γνώση, χωρίς να αντιβαίνουν μεταξύ τους, καθώς βρίσκονται σε συνεχή σύγκρουση. Ανάλογα με την περίπτωση, άλλοτε είναι περισσότερο χρήσιμο το ένα από το άλλο, και μερικές φορές πρέπει να τα συνδυάζονται και τα δύο, χωρίς όμως το ένα να παρεμποδίζει την ύπαρξη του άλλου. Η σημασία της διάκρισης καθενός από αυτούς τους δύο τύπους γνώσεων είναι σαφής στην περίπτωση αναπαραγωγής ενός σχήματος (Brousseau, 1995˙ Cordier & Cordier, 1991˙ Mrabet, 2006).

Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε εκπαιδευτικούς, προκειμένου να προσδιοριστεί η ποικιλία των αναπαραστάσεων του θεωρήματος του Θαλή που χρησιμοποιούν, σύμφωνα με τις μεταβλητές που πρότειναν οι Cordier (1991), οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν διαφορετικές. Οι εκπαιδευτικοί χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορά νέους εκπαιδευτικούς που μπορεί να μην είχαν ακόμη διδάξει το θεώρημα του Θαλή. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί επέλεξαν αναπαραστάσεις που είχαν αρκετές παράλληλες ευθείες ή και τέμνουσες, αναπαραστάσεις με διαφορετικό είδος γωνίας των τεμνουσών, καθώς επίσης και αναπαραστάσεις όπου το σημείο τομής των δύο τεμνουσών βρισκόταν σε διαφορετικές θέσεις σε σχέση με τις παραλληλίες. Απ' ότι φαίνεται, στόχος των εκπαιδευτικών αυτών ήταν η εννοιολογική γνώση του θεωρήματος του Θαλή, λέγοντας πως οι μαθητές πρέπει να συναντούν όλες τις πιθανές αναπαραστάσεις του θεωρήματος, χωρίς να περιορίζονται στις αναπαραστάσεις των σχολικών εγχειριδίων.

Η δεύτερη κατηγορία αφορά 'συνταξιούχους' εκπαιδευτικούς. Η πλειοψηφία των ερωτηθέντων εκπαιδευτικών επέλεξε "τυπικά" σχήματα, δηλαδή σχήματα που αποτελούνταν από τον ελάχιστο αριθμό παραλλήλων και τεμνουσών, μια οξεία γωνία μεταξύ των τμημάτων και ένα σημείο τομής που βρίσκονται στη μία πλευρά σε σχέση με τις παράλληλες ευθείες. Οι εξηγήσεις τους για αυτές τους τις επιλογές είχαν να κάνουν με τα εξής:

I. οι μαθητές χρειάζονται τα απολύτως απαραίτητα για την εφαρμογή του θεωρήματος και ότι οι πολύπλοκες αναπαραστάσεις δεν προσθέτουν τίποτα στην εκμάθησή του παρά μόνο «χάσιμο χρόνο».
II. οι μαθητές από μόνοι τους πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόσουν το θεώρημα του Θαλή σε περίπλοκες αναπαραστάσεις.
III. η απουσία χώρου στα σχολικά εγχειρίδια και η κυριαρχία τυπικών αναπαραστάσεων στις εφαρμογές του θεωρήματος.

Η γνωστική θεωρία του Duval

Ο Duval (1999) αναπτύσσει τη θεωρία του μέσω της «γνωστικής προσέγγισης» του θέματος, εντοπίζει, δηλαδή, γνωστικές διαδικασίες που υπάρχουν πίσω από τη γεωμετρική σκέψη. Σύμφωνα με τον Duval, η διδασκαλία της Γεωμετρίας δεν πρέπει να ξεκινάει από την αναγνώριση των σχημάτων, γιατί αυτό οδηγεί τους μαθητές στην εξοικείωση της εικόνας και τους εμποδίζει να κατανοήσουν βαθύτερα τη Γεωμετρία όταν βλέπουν τα σχήματα εικονικά.

Όπως αναφέρει ο Duval (1999), υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγιστεί ένα γεωμετρικό αντικείμενο:

A. λεκτικά και
B. σχηματικά.

Όσον αφορά τη λεκτική προσέγγιση, η κάθε γεωμετρική έννοια βασίζεται στον ορισμό, τα θεωρήματα και τα αξιώματά της. Από την άλλη πλευρά, η σχηματική προσέγγιση έχει να κάνει με το πώς βλέπει κανείς τις σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα, ώστε να διευκολύνεται η επεξεργασία του γεωμετρικού προβλήματος.

Σχετικά με τα γεωμετρικά σχήματα, ο Duval (1995), προκειμένου να δώσει έμφαση στους διάφορους τρόπους με τους οποίους κάποιος βλέπει ένα σχήμα, χρησιμοποιεί τη λέξη κατανόηση. Στη θεωρία του διακρίνονται τέσσερεις τύποι γνωστικής σύλληψης ενός γεωμετρικού σχήματος:

Α. η αντιληπτική κατανόηση,

Β. η λεκτική κατανόηση,

Γ. η διαδικαστική/ακολουθιακή/σειριακή κατανόηση και

Δ. η λειτουργική κατανόηση.

Σύμφωνα με τον Duval, κρίνεται αναγκαία η ύπαρξη της αντιληπτικής κατανόησης σε συνδυασμό με μία από τις άλλες τρεις μορφές κατανόησης. Η διδασκαλία τους θα πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αναπτύσσονται ταυτόχρονα και ομαλά όλες οι μορφές κατανόησης (Duval, 1995).

Α. <u>Αντιληπτική Κατανόηση (*perceptual apprehension*)</u>

Η αντιληπτική κατανόηση αναφέρεται σε αυτό που μπορεί κανείς να αναγνωρίσει με μία πρώτη ματιά, ένα σχήμα, μία αναπαράσταση ενός αντικειμένου, στο επίπεδο ή το χώρο. Αυτό που δείχνει η εικόνα – αναπαράσταση καθορίζεται από τους νόμους περί οργάνωσης των εικόνων/μορφών. Υπάρχει στενή σχέση με τη οπτική αντίληψη. Το αντιληπτό σχήμα μπορεί να διαφέρει από άτομο σε άτομο. Η εικόνα που βλέπει ο καθένας μπορεί να αλλάξει, ενώ οι αντιληπτές ιδιότητες του σχήματος (σχήμα, μέγεθος, φωτεινότητα) παραμένουν οι ίδιες (αντιληπτικές σταθερές).

Ο Duval διακρίνει και αναγνωρίζει υπο-σχήματα μέσα στο αντιληπτό σχήμα. Αυτά τα υπο-σχήματα είναι σαν πιθανά συστατικά που δεν εξαρτώνται απαραίτητα από την κατασκευή του σχήματος. Μια γεωμετρική μορφή συχνά περιλαμβάνει περισσότερες μορφολογικές μονάδες ή περισσότερες υποδιαιρέσεις από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της. Με αυτήν την κατανόηση, ουσιαστικά, ένα απλό σχήμα γίνεται αντιληπτό ως μία ολότητα (Duval, 1988, 1995).

→ Επιστημολογική λειτουργία: Αναγνώριση και ταυτοποίηση ενός αντικειμένου στο επίπεδο ή στο χώρο.

Β. <u>Λεκτική κατανόηση (*discursive apprehension*)</u>

Οι μαθηματικές ιδιότητες που αναπαριστώνται σε ένα σχήμα, σύμφωνα με τον Duval (1995) δεν μπορούν να προσδιοριστούν μέσω της αντιληπτικής κατανόησης. Ορισμένες πρέπει, αρχικά, να δοθούν μέσω ομιλίας (ονομασία και υπόθεση) και άλλες μπορούν να προέρχονται από τις δεδομένες ιδιότητες. Ουσιαστικά, η αντιληπτική κατανόηση μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικές εκτιμήσεις.

Ένα σχήμα, χωρίς δόγμα ή υπόθεση, είναι μια διφορούμενη αναπαράσταση, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να δουν όλοι τα ίδια στοιχεία ή τις ίδιες ιδιότητες. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Duval (1995), σε οποιαδήποτε γεωμετρική παράσταση η αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων πρέπει να παραμείνει υπό τον έλεγχο των δηλώσεων. Κι αυτό γιατί, μπορεί να υπάρχει χάσμα ανάμεσα σε αυτό που φαίνεται και σε αυτό που αναπαριστάται από το σχήμα.

Για τις μαθηματικές ιδιότητες, λοιπόν, που αναπαριστώνται από το σχήμα απαιτείται μια άλλη μορφή κατανόησης, η λεκτική. Ονομάστηκε έτσι γιατί ορισμένες από τις μαθηματικές ιδιότητες απορρέουν από το κείμενο που συνοδεύει το σχήμα, ενώ άλλες προκύπτουν παραγωγικά από τις δοθείσες ιδιότητες που διατυπώνονται λεκτικά. Με τη λεκτική κατανόηση, ένα απλό σχήμα γίνεται αντιληπτό ως επιμέρους μορφές, που αναπαριστούν ευθύγραμμα τμήματα ή σημεία και έχουν συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ τους (Duval, 1988). Συνεπώς, υπάρχει αλλαγή διάστασης: από τα δισδιάστατα σχήματα, στις γραμμές. Επιπλέον, οι μαθηματικές ιδιότητες μπορεί να αναπαριστώνται στο σχήμα με τη βοήθεια ειδικών συμβόλων.

→ Επιστημολογική λειτουργία: Απόδειξη

Γ. <u>Διαδικαστική/ακολουθιακή/σειριακή Κατανόηση *(sequential apprehension)*</u>

Η διαδικαστική κατανόηση αφορά την κατασκευή ενός σχήματος ή την περιγραφή της κατασκευής του. Και στις δύο περιπτώσεις απαιτείται διαδοχική σύλληψη, δηλαδή ακολουθείται μία σειρά, η οποία προκύπτει από τις ιδιότητες του σχήματος και από τους τεχνικούς περιορισμούς των εργαλείων. Οι περιορισμοί αυτοί διαφέρουν για κάθε εργαλείο. Αντίθετα, η ελεύθερη σχεδίαση δεν έχει αντίστοιχους οργανικούς περιορισμούς. Οι τεχνικοί περιορισμοί δημιουργούν ανατροφοδότηση, δηλαδή το προβλεπόμενο σχήμα δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί εφόσον δεν τηρούνται οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδιοτήτων και των τεχνικών περιορισμών. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το «γεωμετρικό σχήμα» μπορεί να λειτουργήσει σαν ένα μοντέλο, στο οποίο οι ενέργειες των αντιπροσωπευτικών και παρατηρούμενων αποτελεσμάτων σχετίζονται με τις πράξεις στο μαθηματικά εκπροσωπούμενο αντικείμενο (Duval, 1988, 1995).

→ Επιστημολογική λειτουργία: Κατασκευή ενός μοντέλου

Δ. Λειτουργική κατανόηση(*operative apprehension*)

Σύμφωνα με τον Duval (1995), αυτή η μορφή κατανόησης είναι λιγότερο γνωστή από τις προηγούμενες και περιλαμβάνει χειρισμούς πάνω στο ίδιο το σχήμα. Οι χειρισμοί αυτοί μπορεί να είναι είτε σε φυσικό είτε σε νοητικό επίπεδο, και συμβάλλουν στη βαθιά γνώση της λύσης ενός γεωμετρικού προβλήματος, αμβλύνοντας την απόσταση που υπάρχει μεταξύ σχήματος και έννοιας. Η λειτουργική αντίληψη εξαρτάται από τις διάφορες τροποποιήσεις μιας δεδομένης εικόνας. Τα τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος που περιλαμβάνει είναι τα εξής:

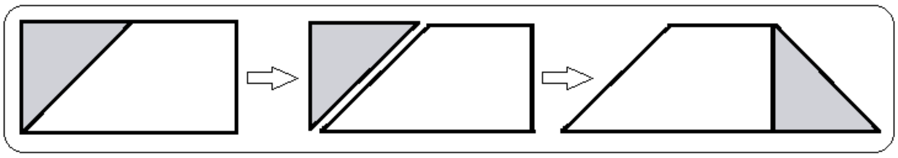
α. οι μερολογικές τροποποιήσεις,

β. οι οπτικές τροποποιήσεις και

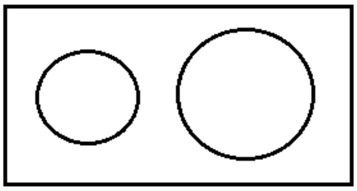
γ. η αλλαγή θέσης.

Πιο συγκεκριμένα:

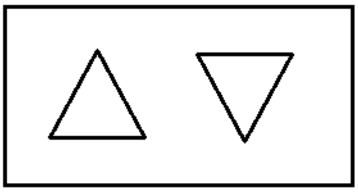
α. Οι μερολογικές τροποποιήσεις είναι οι αναλύσεις ενός σχήματος σε διάφορα μέρη και, ενδεχομένως, η σύνθεση των μερών σε ένα νέο όλο, δηλαδή σε σχήμα ή σχήματα διαφορετικά από το αρχικό.



β. Οι οπτικές τροποποιήσεις είναι οι αλλαγές που επιδέχονται τα μεγέθη (σμίκρυνση, μεγέθυνση) ή η αλλοίωση του σχήματος (λοξότητα).



γ. Η θεσιακή τροποποίηση είναι η μετατόπιση του σχήματος ή η αλλαγή προσανατολισμού.



Οι παραπάνω τροποποιήσεις μπορούν να γίνουν και με υλικό τρόπο, δηλαδή μπορεί, για παράδειγμα, να διπλωθεί ή να κοπεί το σχήμα και να ενωθούν τα επιμέρους κομμάτια του σαν ένα πάζλ, έτσι ώστε να γίνει μια μερεολογική τροποποίηση. Ουσιαστικά, οι τροποποιήσεις αυτές συντελούν στην επεξεργασία του σχήματος.

→ Επιστημολογική λειτουργία: Ευρετική

Για τις μερεολογικές τροποποιήσεις, ο Duval (1988) πιστεύει ότι δεν κρίνεται αναγκαία η ύπαρξη συγκεκριμένων γεωμετρικών γνώσεις, και ότι κάθε σχήμα επιδέχεται πολλές και διαφορετικές μερεολογικές τροποποιήσεις. Ωστόσο, τίθεται το ερώτημα κατά πόσο είναι ορατή η κατάλληλη τροποποίηση για ένα δεδομένο πρόβλημα (Duval, 1995). Οι πιο σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν αρνητικά σε αυτό είναι η διπλή χρήση ενός επιμέρους σχήματος και η ανυπαρξία γραμμών στο αρχικό σχήμα, οι οποίες διαχωρίζουν τα επιμέρους σχήματα, ιδίως αν πρέπει να γίνουν πολλοί διαχωρισμοί. Επιπλέον, η τροποποίηση θα μπορούσε να είναι λιγότερο ορατή, αν το νέο σχήμα δε βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα του αρχικού σχήματος ή αν δεν είναι κυρτό ή αν τα επιμέρους σχήματα δε συνδυάζονται για να δώσουν ένα οικείο σχήμα (τρίγωνο, ορθογώνιο, τετράγωνο, κύκλος).

Πέρα από τα παραπάνω, ο Duval (1999) διέκρινε τρεις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη Γεωμετρία, που είναι:

- η οπτικοποίηση, που αφορά την αναπαράσταση του χώρου,
- η κατασκευή και
- ο συλλογισμός, που είναι στενά συνδεδεμένος με την εκφορά του λόγου και έχει σκοπό την απόδειξη, την εξήγηση και την επέκταση της γνώσης.

Σύμφωνα με τα λεγόμενά του, τόσο για αυτές, όσο και για τις μορφές κατανόησης του σχήματος, απαιτείται η συνεργασία και των τριών. Πρακτικά, όμως, για να συμβεί αυτό χρειάζεται να αναπτυχθεί καθεμία ξεχωριστά μέσα από τη διδασκαλία. Επισημαίνει, δηλαδή, ότι αυτές οι διαδικασίες μπορούν να εκτελούνται και ξεχωριστά. Τέλος, υποστήριξε ότι δεν υπάρχει μεταξύ τους μια συγκεκριμένη πορεία ανάπτυξης, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, καθώς ακόμα και η οπτικοποίηση αφορά αφηρημένες αναπαραστάσεις.

Το δύσκολο σ' αυτήν την υπόθεση είναι το πως θα γίνει κατανοητή και προσιτή από τους μαθητές η σχέση που αναπτύσσεται μεταξύ αυτών των τριών διαδικασιών. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, ο Duval (1999) αναφέρει τρεις άξονες στους οποίους πρέπει να κινηθούμε:

i. Τα τρία είδη διαδικασιών πρέπει να αναπτύσσονται ανεξάρτητα.
ii. Η οπτικοποίηση και ο συλλογισμός είναι αναγκαία στα πλαίσια ενός αναλυτικού προγράμματος.
iii. Η αναδιοργάνωση των τριών αυτών τύπων διαδικασιών μπορεί πραγματικά να συντελεστεί έπειτα από την επεξεργασία της εργασίας αυτής σε αντιπαράθεση με άλλες παρόμοιες.

2. Κεφάλαιο 2: Το Θεώρημα του Θαλή και η Ομοιότητα τριγώνων

2.1. Ιστορική εξέλιξη του Θεωρήματος του Θαλή

Η έννοια της αναλογίας, από την αρχαιότητα παίζει σπουδαίο ρόλο στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων, καθώς χρησιμοποιείται είτε για την επίλυση αριθμητικών είτε γεωμετρικών προβλημάτων. Η πρώτη εμφάνιση της έννοιας αυτής γίνεται στην αρχαία Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα. Προβλήματα που βρέθηκαν γραμμένα στον πάπυρο Ρηντ και σχετίζονται με το μοίρασμα αγαθών σε συγκεκριμένο αριθμό ανθρώπων, καθώς και μία πλάκα που βρέθηκε στη Βαβυλώνα με όμοια τρίγωνα, η οποία χρονολογείται περίπου στο 2000 π.Χ., φανερώνουν ότι οι δύο αυτοί πολιτισμοί γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν την έννοια της αναλογίας σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και προβλήματα, χωρίς να υπάρχει κάποια θεωρητική θεμελίωση (Katz, 2013).

Ο πρώτος λαός που ίδρυσε κι ανάπτυξε τη Θεωρητική Γεωμετρία ως αποδεικτική Επιστήμη, ήταν οι αρχαίοι Έλληνες, καθώς εισήγαγαν και ανέπτυξαν την αποδεικτική διαδικασία και την παραγωγική συλλογιστική. Θεμελίωσαν και δόμησαν τη Γεωμετρία και δημιούργησαν την "Ευκλείδεια Γεωμετρία", την οποία οι περισσότεροι μελετητές, ακόμα και σήμερα, θεωρούν ως έναν από τους κλάδους των Μαθηματικών και των επιστημών γενικότερα, που είναι υποδειγματικά θεμελιωμένος. Ο Θαλής (624 – 547 π.Χ.) φημολογείται ότι είναι ο πρώτος μαθηματικός που κάνει χρήση της παραγωγικής συλλογιστικής για να αποδείξει κάποιες μαθηματικές προτάσεις, δηλαδή δίνει ιδιαίτερη βάση στη λογική και την απόδειξη παρά στα πρακτικά ζητήματα (Redlin, Viet & Watson, 2000). Επιπλέον, θεωρείται πως είναι ο πρώτος Έλληνας, του οποίου το όνομα συνδέθηκε με τη μελέτη και τη λύση προβλημάτων της γεωμετρίας, που έχουν σχέση με την έννοια της αναλογίας. Συγκεκριμένα:

* εφάρμοσε το κριτήριο της ομοιότητας τριγώνων που λέει ότι τα τρίγωνα με ανάλογες πλευρές και ίσες περιεχόμενες γωνίες είναι όμοια για να μετρήσει την απόσταση ενός πλοίου από την ακτή,
* ανακάλυψε την ιδιότητα της διατήρησης του λόγου υπό συνθήκη παραλληλίας, με την οποία υπολόγισε το ύψος της πυραμίδας από το μήκος της σκιάς της,
* ανακάλυψε το θεώρημα ότι οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες,

* οι ορθές γωνίες είναι ίσες,
* ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρό του,
* οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες,
* δύο τρίγωνα είναι ίσα εάν έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες μία προς μια ίσες κτλ. (Katz, 2013)

Ο Θαλής ενδεχομένως να άντλησε πολλές από τις γεωμετρικές του γνώσεις από τα ταξίδια του στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα, καθώς πολλές από τις προτάσεις που απέδειξε, υπήρχαν στα Αιγυπτιακά και Βαβυλωνιακά Μαθηματικά (Katz, 2013˙ Panchenko, 2005). Το γεγονός όμως ότι είναι ο πρώτος που αποδεικνύει αυτές τις προτάσεις, θα μπορούσε να τον χαρακτηρίσει ως ιδρυτή της Θεωρητικής Γεωμετρίας. Ωστόσο, για όλα τα παραπάνω, δεν έχει γνωστοποιηθεί η "απόδειξη" των προτάσεων. Γι' αυτό το λόγο, όπως *«αναφέρει ο Αριστοτέλης, ο Θαλής κατηγορήθηκε ότι σπαταλούσε το χρόνο του για άχρηστες μελέτες»* (Katz, 2013, σελ. 55).

Ο πρώτος ορισμός της αναλογίας εμφανίζεται στο Βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη, Ορισμός 5: *«Εν τω αυτώ λόγω μεγέθη λέγεται είναι πρώτον προς δεύτερον και τρίτον προς τέταρτον, όταν τα του πρώτου και τρίτου ισάκις πολλαπλάσια των του δευτέρου και τετάρτου ισάκις πολλαπλασίων καθ' οποιονούν πολλαπλασιασμόν εκάτερον εκατέρου ή άμα υπερέχη ή άμα ίσα ή ή άμα ελλείπη ληφθέντα κατάλληλα»* (Katz, 2013, σελ. 91). Δηλαδή, σε αλγεβρικό συμβολισμό, ισχύει a:b :: c:d αν και μόνο αν πολλαπλασιάζοντας τα a και c με οποιονδήποτε θετικό ακέραιο m και τα b και d με οποιονδήποτε ακέραιο n, από τις σχέσεις:

– ma < nb έπεται η σχέση mc < nd
– ma = nb έπεται η σχέση mc = nd
– ma > nb έπεται η σχέση mc > nd (Katz, 2013).

Σε αυτό τον ορισμό, ο Ευκλείδης ορίζει την ισότητα δύο λόγων και όχι ένα λόγο μεγεθών. Η ισότητα αυτή, όπως αναφέρει και ο Λεμονίδης (1990), ορίζει τις κλάσεις ισοδυναμίας των ίσων λόγων.

Το θεώρημα του Θαλή, για πρώτη φορά εμφανίζεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη (4^{ος} αι. π.Χ.), Βιβλίο VI, Πρόταση 2: *«Μία ευθεία παράλληλη προς μία από τις πλευρές ενός τριγώνου τέμνει τις άλλες δύο σε ανάλογα τμήματα, και αντιστρόφως»* (Katz, 2013, σελ. 97). Στην απόδειξη αυτής της πρότασης ο Ευκλείδης εφαρμόζει τους κανόνες των αναλογιών και τη μέθοδο της ισότητας των εμβαδών (Λεμονίδης, 1990). Ωστόσο, στην εκφώνηση της πρότασης δε διευκρινίζει τις περιπτώσεις για το αν η παράλληλη που θα φέρουμε θα τέμνει τις άλλες δύο πλευρές ή αν θα τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών και προς ποια κατεύθυνση θα βρίσκεται η τομή αυτή. Όπως υποστηρίζει ο Λεμονίδης (1990), ο Simon ήταν αυτός που διέκρινε περιπτώσεις για τον αν θα υπάρχει τομή στις πλευρές ή στις προεκτάσεις τους και αν τέμνονται ανάλογα.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, στα Στοιχεία του Ευκλείδη, Βιβλίο V, οι λόγοι των μεγεθών δε χρησιμοποιούνται ως αριθμοί. Μέχρι το τέλος περίπου του Μεσαίωνα οι αριθμητικές αναλογίες εξακολουθούν να μελετώνται χωριστά από τις γεωμετρικές. Οι αριθμητικές αναλογίες μελετώνται έχοντας ως στόχο τη λύση προβλημάτων που σχετίζονται με συναλλαγές, ενώ οι γεωμετρικές (ομοιότητα ευθύγραμμων σχημάτων και «θεώρημα Θαλή») έχοντας ως κύριο στόχο τη λύση ασκήσεων της θεωρητικής Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η έννοια του μετασχηματισμού δεν υπάρχει στην αρχαία Ελλάδα. Η ομοιότητα και η ομοιοθεσία δεν έχουν λειτουργικό χαρακτήρα και θεωρούνται ως σχέσεις μεταξύ δύο γεωμετρικών σχημάτων. Κατά την περίοδο της Αναγέννησης η ομοιοθεσία πήρε το χαρακτήρα του μετασχηματισμού. Μεταξύ του 16^{ου} και 18^{ου} αιώνα παρουσιάζεται ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας με αποτέλεσμα την εμφάνιση και την ανάπτυξη των μετασχηματισμών. Ο Euler (1777, όπ. αναφ. στο Λεμονίδης, 1990) είναι ο πρώτος που ορίζει το κέντρο ομοιότητας. "*Η ομοιότητα και η ομοιοθεσία (ή 'σχήματα όμοια τοποθετημένα') εκφράζονται μ' ένα λειτουργικό πλέον τρόπο, ως προβολή του ενός σχήματος στο άλλο, από ένα κέντρο ομοιότητας"* (Λεμονίδης, 1990, σελ. 26).

Σημαντικό γεγονός αυτής της περιόδου είναι *η αριθμοποίηση των λόγων* από τον Omar Khayam (1048-1112), δηλαδή, κάθε λόγος μεγεθών μπορεί να ονομαστεί αριθμός, χωρίς όμως να είναι αποτέλεσμα μιας θεωρητικής διαδικασίας, που να έχει την καθαρότητα του Ευκλείδη (Λεμονίδης, 1990). Επιπλέον, σταθμός της περιόδου αυτής θεωρείται και η ανάπτυξη της Προβολικής γεωμετρίας (τέλος 14^{ου} αι.– αρχές 15^{ου} αι.), αρχικά από ζωγράφους και αρχιτέκτονες στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν πιστά τον τρισδιάστατο χώρο στις δύο διαστάσεις ενός πίνακα ή ενός σχεδίου. Αργότερα, το 1872, ο Felix Klein όρισε τη γεωμετρία μέσω της έννοιας του μετασχηματισμού με αποτέλεσμα την ανάδειξη της σχέσης της προβολικής γεωμετρίας με την ευκλείδεια (Λεμονίδης, 1990˙ Katz, 2013).

Έρευνες που έχουν γίνει, κυρίως στο γαλλικό εκπαιδευτικό σύστημα, καθώς σ' αυτό παρουσιάστηκαν αλλαγές στα προγράμματα σπουδών, φαίνεται ότι μέχρι τα τέλη του 18^{ου} αιώνα, ο Legendre στο έργο του χρησιμοποιεί το θεώρημα του Θαλή όπως ακριβώς ο Ευκλείδης, δηλαδή εφαρμόζοντας τη μέθοδο των εμβαδών. Το 1825, ο Lacroix είναι αυτός που για πρώτη φορά εφαρμόζει τις σχέσεις μεταξύ των μηκών και των γωνιών, δηλαδή αν μια ευθεία τέμνεται από παράλληλες ευθείες σε ίσα τμήματα, οι παράλληλες αυτές τέμνουν και κάθε άλλη ευθεία σε ίσα τμήματα. Κάνει χρήση των σχέσεων ομοιότητας.

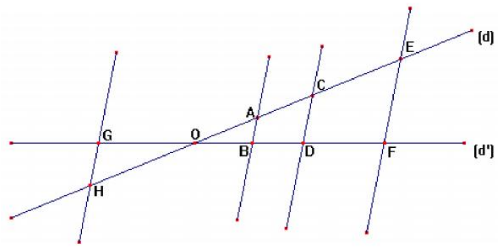
2.2. Τα είδη των λόγων

Η διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή μέσα στο σχολείο, με το πέρασμα των χρόνων έχει εξελιχθεί πολύ (Laguerre, 2005˙ Mrabet, 2006). Διακρίνουμε δύο προσεγγίσεις του θεωρήματος:

A. την προσέγγιση της προβολής και

B. την προσέγγιση της ομοιότητας (Brousseau, 1995).

Στην προσέγγιση "προβολής", παρεμβαίνουν μόνο τα τμήματα που μεταφέρονται από τις τεμνόμενες. Σε αυτή την περίπτωση, ο Brousseau (1995) προτείνει δύο αναγνώσεις για να τονιστεί ότι στα δύο δευτερεύοντα τμήματα, οι αναλογίες είναι αμετάβλητες από τον παραλληλισμό.



Έτσι έχουμε:

A. Ανάγνωση του σχήματος με τα τρίγωνα και οι ισότητες που αναφέρονται είναι οι εξής: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{OH}{OG}$.

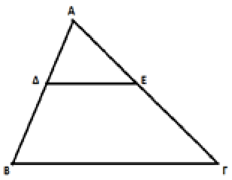
B. Ανάγνωση του σχήματος με τα ανάλογα τμήματα και οι αναλογίες είναι: $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$ ή $\frac{BD}{AC} = \frac{DF}{CE}$.

Σε κάθε αναφορά τα μήκη δεν ανήκουν στο ίδιο τμήμα.

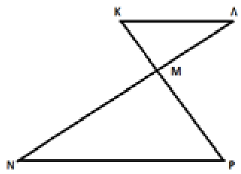
Στην προσέγγιση "ομοιότητας", επεκτείνεται η αναλογία στα μήκη των τμημάτων που μεταφέρονται από τις παράλληλες γραμμές, με σκοπό να τονιστεί η ιδέα της διέλευσης από το ένα τρίγωνο στο άλλο. Σε αυτή την περίπτωση, ο Brousseau (1995) προτείνει την εξής γραφή: $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$ ή $\frac{OC}{OH} = \frac{OD}{OG} = \frac{CD}{GH}$.

Η "προβολή" αντιμετωπίζεται ως η βασική προσέγγιση του θεωρήματος. Κάνοντας μια επισκόπηση των προγραμμάτων και εγχειριδίων οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η προσέγγιση "ομοιότητας" αντιμετωπίζεται ως συνέπεια μιας δήλωσης σύμφωνα με την προβολή, που υποτίθεται ότι είναι γενικότερη. Αυτό εξηγεί τον μειωμένο αριθμό καταστάσεων που επιτρέπουν την επένδυση του θεωρήματος σε όλο το πρόγραμμα γεωμετρίας του γυμνασίου και την υψηλή συχνότητα των ερωτήσεων που οδηγούν στον ίδιο στόχο: τον υπολογισμό μιας απόστασης (Brousseau, 1995˙ Mrabet, 2006).

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (1992), φαίνεται ότι οι μαθητές εφαρμόζουν τέσσερα είδη λόγων πάνω σε τρίγωνα είτε της μορφής "κώνου" (σχ. Α) είτε της "πεταλούδας" (σχ. Β).



Σχ. Α



Σχ. Β

Έτσι έχουμε:

1. <u>Λόγους ομοιότητας των δύο τριγώνων</u>

   Στο σχήμα Α για τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουμε τους λόγους $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$, ενώ στο Β για τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΜΝΡ έχουμε τους λόγους $\frac{\Lambda M}{MN} = \frac{KM}{MP} = \frac{K\Lambda}{NP}$

2. <u>Λόγους προβολής</u>

   Για το σχήμα Α έχουμε τους λόγους $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{E\Gamma}$, ενώ για το Β τους λόγους $\frac{MN}{MP} = \frac{M\Lambda}{MK} = \frac{N\Lambda}{KP}$

3. <u>Λόγους μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων</u>

   Για το σχήμα Α έχουμε τους λόγους $\frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{AB}{B\Gamma}$ ή $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, ενώ για το Β τους λόγους $\frac{MP}{PN} = \frac{KM}{K\Lambda}$ ή $\frac{MN}{NP} = \frac{M\Lambda}{K\Lambda}$

4. <u>Λόγους μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών</u>

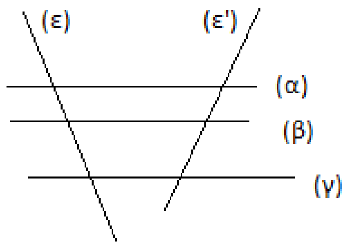
   Για το σχήμα Α έχουμε τους λόγους $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ ή $\frac{\Delta B}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$, ενώ για το Β τους λόγους $\frac{MN}{\Lambda N} = \frac{PM}{KP}$ ή $\frac{MK}{KP} = \frac{M\Lambda}{N\Lambda}$.

2.3. Ανάλυση των σχημάτων του Θεωρήματος του Θαλή

Προκειμένου να γίνει σωστή διερεύνηση των τυπικών σχηματικών αναπαραστάσεων που αφορούν το θεώρημα του Θαλή, όπως αναφέρει ο Λεμονίδης (1993), πρέπει να ληφθούν υπόψη ορισμένες μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές είναι οι εξής:

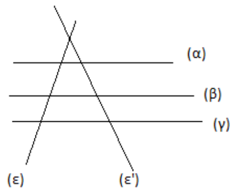
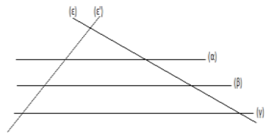
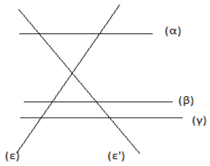
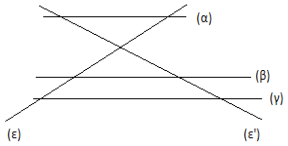
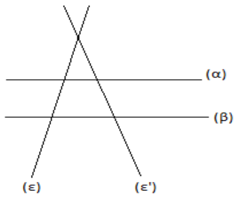
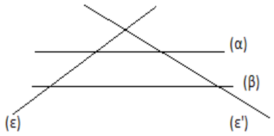
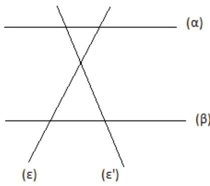
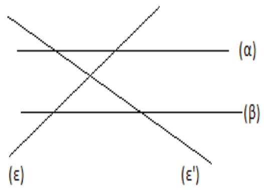
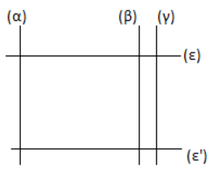
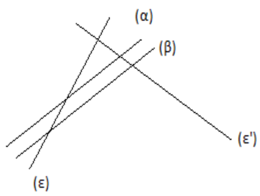
1. η θέση της ευθείας (ε) σχετικά με την ευθεία (ε'): τέμνουσα ή παράλληλη,
2. η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') εάν είναι τεμνόμενες: οξεία ή αμβλεία,
3. ο αριθμός των παράλληλων ευθειών : 2 ή 3 ή και περισσότερες,
4. η θέση των παραλλήλων ευθειών σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε'): από την ίδια πλευρά ή από τη μια και την άλλη πλευρά της τομής,
5. οι ευθείες (ε) και (ε') να σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες 2 γωνίες οξείες ή μια γωνία οξεία και μια γωνία αμβλεία,
6. η διεύθυνση των παραλλήλων: οριζόντια ή κατακόρυφη.

Σχετικά με τη μεταβλητή 1, στα σχολικά εγχειρίδια, παρατηρούμε ότι για να εισάγουν το θεώρημα του Θαλή χρησιμοποιούνται σχήματα στα οποία οι δύο ευθείες (ε) και (ε') είναι θεωρητικά τεμνόμενες αλλά το σημείο τομής τους δεν παρουσιάζεται στο δοθέν σχήμα. Τα σχήματα, δηλαδή, έχουν την παρακάτω μορφή:



Συνδυάζοντας τις μεταβλητές, που αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούν να δημιουργηθούν διάφοροι τύποι σχημάτων. Τα σχήματα αυτά, ενώ μπορεί να φαίνονται ίδια, στην πραγματικότητα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την οπτική τους αντίληψη.

Παραδείγματα τέτοιων σχημάτων εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	6. 
7. 	8. 
9. 	10. 

Πίνακας 1: Αναπαραστάσεις του θεωρήματος του Θαλή

Στη συνέχεια, γίνεται ανάλυση των σχημάτων αυτών σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν πιο πάνω.

Σχήμα 1

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.

- → Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι οξεία.
- → Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α), (β) και (γ) είναι παράλληλες.
- → Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').
- → Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο γωνίες οξείες.
- → Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

<u>Σχήμα 2</u>

- → Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.
- → Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι αμβλεία.
- → Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α), (β) και (γ) είναι παράλληλες.
- → Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').
- → Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.
- → Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

<u>Σχήμα 3</u>

- → Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.
- → Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι οξεία.
- → Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α), (β) και (γ) είναι παράλληλες.
- → Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες δε βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').
- → Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.
- → Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

<u>Σχήμα 4</u>

- → Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.
- → Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι αμβλεία.
- → Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α), (β) και (γ) είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες δε βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.

→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

Σχήμα 5

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.

→ Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι οξεία.

→ Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α) και (β) είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.

→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

Σχήμα 6

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.

→ Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι αμβλεία.

→ Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α) και (β) είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.

→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

Σχήμα 7

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.

→ Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι οξεία.

→ Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α) και (β) είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες δε βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.

→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

<u>Σχήμα 8</u>

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.

→ Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι αμβλεία.

→ Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α) και (β) είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες δε βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες δύο οξείες γωνίες.

→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι οριζόντια.

<u>Σχήμα 9</u>

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 2: Δε σχηματίζεται γωνία από τις ευθείες (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α), (β) και (γ) είναι παράλληλες.

→ Μεταβλητή 4: -

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες ορθές γωνίες.

→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι κατακόρυφη.

<u>Σχήμα 10</u>

→ Μεταβλητή 1: Οι ευθείες (ε) και (ε') τέμνονται.

→ Μεταβλητή 2: Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε) και (ε') είναι οξεία.

→ Μεταβλητή 3: Οι ευθείες (α) και (β) είναι παράλληλες.

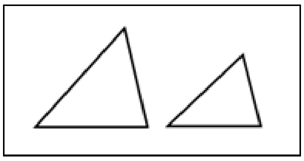
→ Μεταβλητή 4: Οι παράλληλες ευθείες βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με την τομή των (ε) και (ε').

→ Μεταβλητή 5: Οι ευθείες (ε) και (ε') σχηματίζουν με τις παράλληλες ευθείες μία αμβλεία και μία οξεία γωνία.

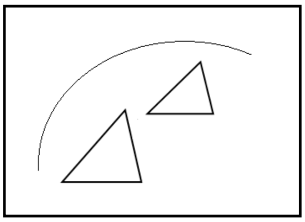
→ Μεταβλητή 6: Η διεύθυνση των παραλλήλων είναι πλάγια.

Τα σχήματα 1, 2, 5 και 6 ονομάζονται σχήματα της μορφής *"κώνου"* ή κιβωτισμένα τρίγωνα, ενώ τα σχήματα 3, 4, 7 και 8 μορφής *"πεταλούδας"* (Λεμονίδης, 1993˙ Λεμονίδης, 1992˙ Lemonidis, 1997).

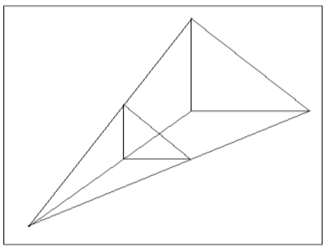
Περιπλοκότητα παρουσιάζεται και στις αναπαραστάσεις που σχετίζονται με την ομοιοθεσία και την ομοιότητα σχημάτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα δύο όμοια τρίγωνα τα οποία είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο.



Αν όμως μεταβληθούν κάποιες παράμετροι, όπως για παράδειγμα να τοποθετηθεί μία γραμμή, τότε μπορούμε να δούμε τα δύο τρίγωνα να είναι ίσα όσον αφορά το μέγεθός τους, αλλά το ένα μακρύτερα από το άλλο, όπως φαίνεται στην εικόνα παρακάτω. Βλέπουμε τα δύο τρίγωνα σε “βάθος”. Παρατηρείται, δηλαδή, μια σχηματική πολυπλοκότητα στις αναπαραστάσεις που αφορούν τα σχήματα της ομοιοθεσίας (Lemonidis, 1997).



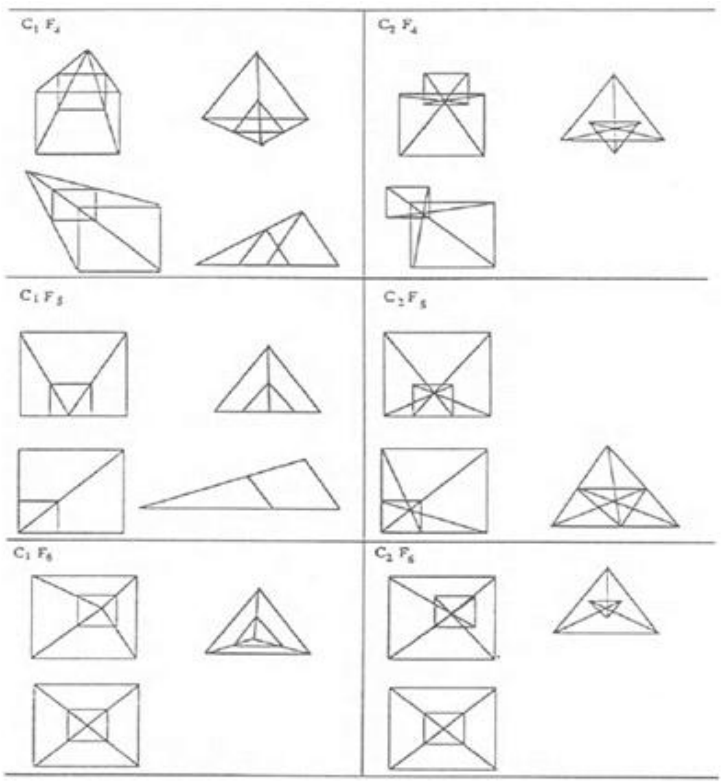
Στα μαθηματικά η ομοιοθεσία αφορά τη «διατήρηση της σχέσης των μήκων». Στην πραγματικότητα, όμως, η λειτουργική αντίληψη των μορφών, σύμφωνα με την οπτική τροποποίηση, μας κατευθύνει στο να δούμε έναν μετασχηματισμό ενός δισδιάστατου σχήματος μέσα στον χώρο ενώνοντας τα ομόλογα σημεία του. Φυσικά, όλες οι επίπεδες αναπαραστάσεις αυτές δεν είναι δυνατόν να μετασχηματιστούν στις τρεις διαστάσεις.



Από έρευνες που έχουν γίνει, εντοπίστηκαν παράγοντες που θα μπορούσαν να μεταμορφώσουν την αντίληψη ενός επίπεδου ομοιοθετικού σχήματος. Συνδυάζοντας αυτούς τους διαφορετικούς παράγοντες μπορεί να επέλθει ταξινόμηση όλων των πιθανών μορφών των επίπεδων ομοιοθετικών σχημάτων. Μια αναπαράσταση ομοιοθεσίας, προκειμένου να αναγνωριστεί ως μια τρισδιάστατη αναπαράσταση, πρέπει να ικανοποιεί τρεις προϋποθέσεις:

i. Ένα τμήμα που ενώνει τα χαρακτηριστικά ενός σχήματος με τα αντίστοιχα σημεία του ομοιοθετικού σχήματος δεν πρέπει να συμπίπτει με τις πλευρές των σχημάτων.
ii. Ο λόγος ομοιοθεσίας πρέπει να είναι θετικός (θετική σχέση). Αυτή η προϋπόθεση αποκλείει τις γραφικές παραστάσεις της ομοιοθεσίας με αρνητική σχέση.
iii. Το κέντρο της ομοιοθεσίας, πρέπει να είναι εξωτερικό σε σχέση με τη ζώνη που περιέχει το σχήμα – αντικείμενο.

Όταν πληρούνται αυτές οι τρεις προϋποθέσεις, το κέντρο της ομοιοθεσίας αντιστοιχεί σε ένα σημείο σύγκλισης. Όταν δεν πληρείται η δεύτερη προϋπόθεση, τότε το σχήμα έχει αντίθετο προσανατολισμό της εικόνας του αντικειμένου. Με τον ίδιο τρόπο, όταν δεν πληρείται η πρώτη προϋπόθεση, έχουμε εικόνες που μας φαίνονται επίπεδες. Αντίθετα, όταν πληρούνται και η πρώτη και η δεύτερη προϋπόθεση, αλλά όχι η τρίτη, έχουμε αναπαραστάσεις που είτε τις βλέπουμε στο χώρο είτε στο επίπεδο. Περιπτώσεις των όσων έχουν αναφερθεί παρουσιάζονται στην παρακάτω εικόνα (Lemonidis, 1990, σελ. 58-59):



Κατά τη διδασκαλία της ομοιοθεσίας, οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται αφορούν μεγεθύνσεις ή σμικρύνσεις ενός σχήματος. Επιπλέον, η μεταβολή θέσης των σχημάτων προκαλεί και μεταβολή στην επιτυχία των μαθητών (Λεμονίδης, 1993˙ Lemonidis, 1997).

Ο Λεμονίδης (1991, όπ. αναφ. στο Gualdrón et al., 2015, σελ 143-144) αναφέρει τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις στην ομοιότητα που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή, της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας. Οι προσεγγίσεις αυτές είναι οι εξής:

I. *Ενδοσχηματική σχέση (Intrafigural relationship)*:

   Σε αυτή την περίπτωση επισημαίνεται η αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων ενός σχήματος και των στοιχείων ενός όμοιου σχήματος, αλλά χωρίς να εξετάζεται η ιδέα του μετασχηματισμού των δύο αυτών σχημάτων. Σε αυτήν την προσέγγιση διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

   - Όταν τα σχήματα χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, όπου η ομοιοθεσία λαμβάνεται υπόψη με επαρκείς λόγους και
   - Όταν τα σχήματα αναπαριστώνται χωριστά το ένα από το άλλο.

II. *Γεωμετρικός μετασχηματισμός ως εργαλείο (Geometrical transformation seen as a tool)*:

   Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός γίνεται αντιληπτός ως εφαρμογή από το σύνολο των σημείων στο επίπεδο. Αυτή η προσέγγιση της ομοιότητας είναι χρήσιμη για την επίλυση προβλημάτων, για παράδειγμα στην τριγωνομετρία και τον λογισμό.

III. *Γεωμετρικός μετασχηματισμός ως μαθηματικό αντικείμενο (Geometrical transformation seen as a mathematical object)*:

   Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από μια αλγεβρική προσέγγιση στην οποία ο στόχος είναι να βρεθεί ο μετασχηματισμός που προκύπτει από τη σύνθεση δύο ή περισσότερων μετασχηματισμών.

2.4. Το ισχύον πρόγραμμα σπουδών της Γ’ Γυμνασίου (ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ) 2003

Το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών ΔΕΠΠΣ (2003) διαχωρίζει σε κατηγορίες το περιεχόμενο των Μαθηματικών που πρέπει να διδαχθούν οι μαθητές σε όλες τις τάξεις. Μια από αυτές τις κατηγορίες στη Γ’ Γυμνασίου είναι και η Γεωμετρία. Το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά ορίζει τους διδακτικούς στόχους της γεωμετρία, το χρόνο που πρέπει να διαθέσει ο καθηγητής για τη μελέτη των συγκεκριμένων εννοιών του κεφαλαίου, όπως επίσης και ενδεικτικές δραστηριότητες για το κάθε αντικείμενο.

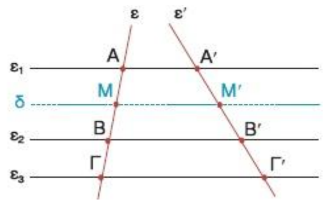
Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές πρέπει:

1. Να γνωρίζουν ότι ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.
2. Να υπολογίζουν το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων.
3. Να γνωρίζουν το θεώρημα του Θαλή και να μπορούν να το χρησιμοποιούν στον υπολογισμό μηκών.
4. Να βρίσκουν το ομοιόθετο ενός πολυγώνου με κέντρο ένα σημείο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ.
5. Να γνωρίζουν ότι το ομοιόθετο ενός πολυγώνου ως προς ένα σημείο Ο και με λόγο έναν θετικό αριθμό λ είναι μια μεγέθυνση του αρχικού πολυγώνου αν $\lambda>1$ και μια σμίκρυνση αυτού αν $0<\lambda<1$.
6. Να γνωρίζουν ότι δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν το ένα από αυτά είναι μεγέθυνση του άλλου.
7. Να γνωρίζουν (χωρίς απόδειξη) ότι σε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα οι ομόλογες γωνίες είναι ίσες και οι ομόλογες πλευρές είναι ανάλογες.
8. Να αναγνωρίζουν τα κοινά χαρακτηριστικά των ομοίων τριγώνων και να εντοπίζουν τις πιθανές διαφορές τους.
9. Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες ίσες.
10. Να χρησιμοποιούν τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων για τον υπολογισμό εμβαδών (ΔΕΠΠΣ, 2003, σελ.301-302).

Το ισχύον Προγράμματα Σπουδών του 2003 (ΔΕΠΠΣ) υποστηρίζει την απόκτηση των βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων με βάση την καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας και την περιγραφή φαινομένων και καταστάσεων της καθημερινότητας και την σταδιακή τους κατανόηση. Ωστόσο, το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών έχει ως αποτέλεσμα οι γνώσεις που λαμβάνουν οι μαθητές να είναι «ξερές» και με σχεδόν καθόλου ανταπόκριση στα δεδομένα της καθημερινότητας. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στον ίδιο τον εκπαιδευτικό, ο οποίος ακολουθεί «αυστηρά» το πρόγραμμα σπουδών, χωρίς να ελέγχει σε βάθος αν η γεωμετρική σκέψη του κάθε μαθητή έχει αναπτυχθεί πλήρως, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ανταπεξέλθει σε τυχόν ιδιαιτερότητες και δυσκολίες που εμφανίζονται στην τάξη. Στις παρακάτω ενότητες παρουσιάζονται το Θεώρημα του Θαλή, η Ομοιοθεσία και η Ομοιότητα, όπως αυτά είναι διατυπωμένα στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου του ΔΕΠΠΣ (2003).

Το Θεώρημα του Θαλή

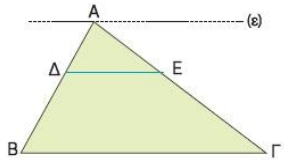
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.



Δηλαδή: αν $ε_1//ε_2//ε_3$ τότε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{AΓ}{A'Γ'}$

Αν στις αναλογίες αυτές εναλλάξουμε τους μέσους όρους, τότε προκύπτουν και οι εξής αναλογίες: $\frac{AB}{BΓ} = \frac{A'B'}{B'Γ'}$ $και$ $\frac{AB}{AΓ} = \frac{A'B'}{A'Γ'}$.

Για παράδειγμα, έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε//ΒΓ και ΔΕ//ΒΓ. Τότε, οι παράλληλες ευθείες ε, ΒΓ, ΔΕ θα ορίζουν στις πλευρές του τριγώνου ανάλογα τμήματα, και αντίστροφα. Δηλαδή: Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

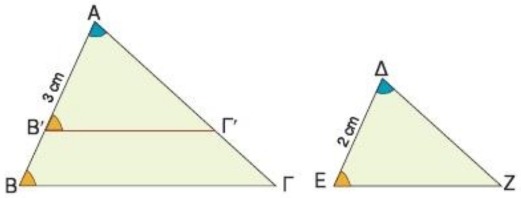


- Αν ΔΕ//ΒΓ τότε $\frac{AΔ}{ΔB} = \frac{AE}{EΓ}$
- Αν $\frac{AΔ}{ΔB} = \frac{AE}{EΓ}$ τότε ΔΕ//ΒΓ

Ομοιοθεσία

- Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα, αν ΑΒ = λ Α’Β’.
- Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.
- Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Οι ανάλογες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- Αν ένα πολύγωνο Π είναι ομοιόθετο του πολυγώνου Π’ με λόγο λ, τότε το Π είναι:
  - ✓ Μεγέθυνση του Π’, όταν λ>1
  - ✓ Σμίκρυνση του Π’, όταν 0<λ<1
  - ✓ Ίσο με το Π’, όταν λ=1

Όμοια τρίγωνα



Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, όπως και δύο πολύγωνα, είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες τους ίσες.

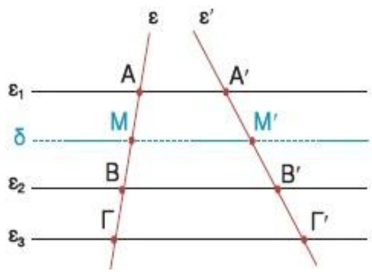
Δηλαδή, $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{Z}$

→ Γενικά, αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

2.5. Ανάλυση των σχημάτων του σχολικού βιβλίου στις ενότητες 1.3, 1.4, 1.5

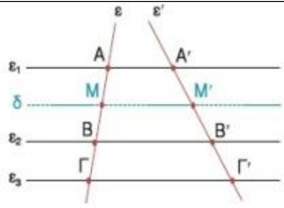
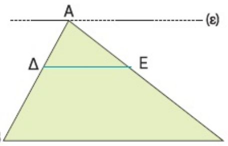
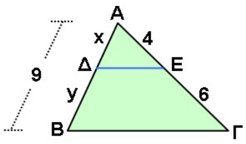
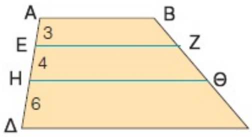
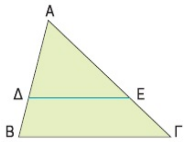
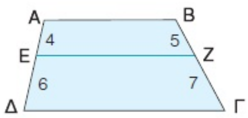
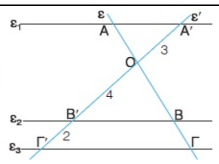
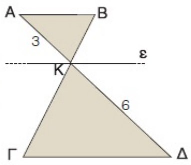
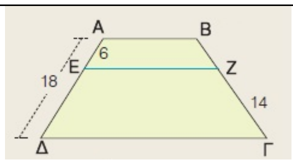
Με βάση την ανάλυση των σχημάτων του Θεωρήματος του Θαλή και της ομοιοθεσίας που πραγματοποιήθηκε παραπάνω, στο παρόν κεφάλαιο γίνεται ανάλυση των σχημάτων του σχολικού εγχειριδίου στις ενότητες 1.3 (σελ. 206-209), 1.4 (σελ. 210-214) και 1.5 (σελ. 215-224). Η ανάλυση αυτή γίνεται στα πλαίσια σύγκρισης των σχηματικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί κατά τη διάρκεια διδασκαλίας του θεωρήματος του Θαλή (βλ. Κεφ. 5.5) σε σχέση με αυτά που παρουσιάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο.

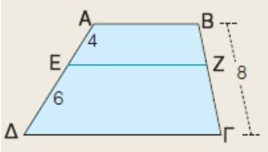
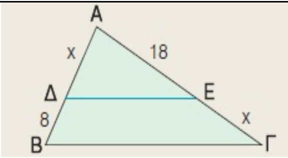
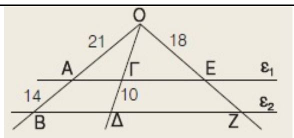
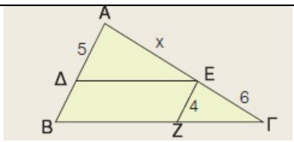
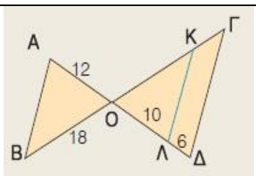
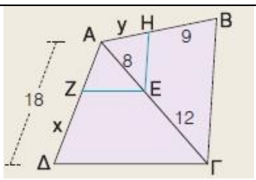
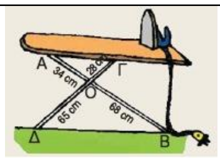
Στο σχολικό εγχειρίδιο, η εισαγωγή του θεωρήματος του Θαλή γίνεται με τη χρήση σχήματος στο οποίο οι δύο ευθείες (ε) και (ε') είναι θεωρητικά τεμνόμενες χωρίς όμως το σημείο τομής τους να είναι εμφανές στο σχήμα, όπως φαίνεται παρακάτω:



Από τα 16 σχήματα της ενότητας αυτής τα 5 είναι αυτής της μορφής και παρουσιάζονται ως τραπέζια. Τα υπόλοιπα είναι τρίγωνα, είναι εμφανές, δηλαδή, το σημείο τομής των παραλλήλων. Χαρακτηριστικά, θα μπορούσε να πει κανείς ότι η μορφή του *"κώνου"* υπερισχύει της *"πεταλούδας"* στην ενότητα αυτή.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα σχήματα της ενότητας αυτής και αναλύονται με βάση τις μεταβλητές του προηγούμενου κεφαλαίου (βλ. Κεφ. 2.3).

Σχήμα	**Μορφή**
1. 	«δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από μη τέμνουσες, με προεκτάσεις»
2. 	«κώνος, χωρίς προεκτάσεις, με εικονική παράλληλη στο σημείο τομής των τεμνουσών »
3. 	«κώνος, χωρίς προεκτάσεις»
4. 	«δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από μη τέμνουσες, χωρίς προεκτάσεις»
5. 	«κώνος, χωρίς προεκτάσεις»
6. 	«δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από μη τέμνουσες, χωρίς προεκτάσεις»
7. 	«σύνθετη μορφή, κώνου και πεταλούδας, με προεκτάσεις»
8. 	«πεταλούδα, χωρίς προεκτάσεις με εικονική παράλληλη στο σημείο τομής των τεμνουσών»
9. 	«δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από μη τέμνουσες, χωρίς προεκτάσεις»

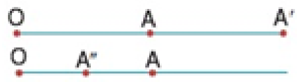
10. 	«δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από μη τέμνουσες, χωρίς προεκτάσεις»
11. 	«κώνος, χωρίς προεκτάσεις»
12. 	«κώνος, με προεκτάσεις»
13. 	«κώνος, χωρίς προεκτάσεις»
14. 	«σύνθετη μορφή, κώνου και πεταλούδας, χωρίς προεκτάσεις»
15. 	«κώνος, χωρίς προεκτάσεις»
16. 	«αντιπαράδειγμα πεταλούδας»

Πίνακας 2: Θεώρημα Θαλή: Ανάλυση σχημάτων σχολικού βιβλίου

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, τα αντιπροσωπευτικά σχήματα του σχολικού βιβλίου για την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, στην πλειοψηφία τους, είναι σχήματα της μορφής του *"κώνου"*, παρά της *"πεταλούδας"*. Δηλαδή, οι μαθητές έχουν συχνότερη επαφή με τα σχήματα τύπου 1 και 5, των οποίων οι παράλληλες, 2 ή περισσότερες, βρίσκονται από τη μία πλευρά του σημείου τομής των τεμνουσών και όχι σε αυτά που οι παράλληλες βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου τομής των τεμνουσών.

Στη συνέχεια της ενότητας, αναπτύσσεται η ομοιοθεσία ως εξής:

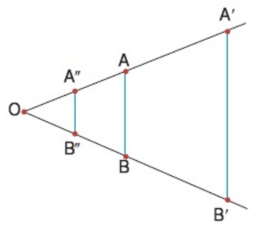
✓ Ομοιόθετο σημείου



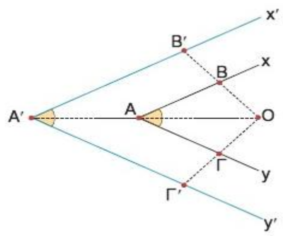
Στις δύο αυτές περιπτώσεις το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο Ο και ο λόγος ομοιοθεσίας θετικός.

- ✓ <u>Ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος</u>

Ομοίως, το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο Ο και ο λόγος ομοιοθεσίας θετικός. Το τμήμα που ενώνει τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με τα αντίστοιχα σημεία του ομοιοθετικού ευθυγράμμου τμήματος δεν συμπίπτει με τις πλευρές του σχήματος. Επιπλέον, το κέντρο ομοιοθεσίας είναι εξωτερικό σε σχέση με τη ζώνη που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα.



- ✓ <u>Ομοιόθετο γωνίας</u>

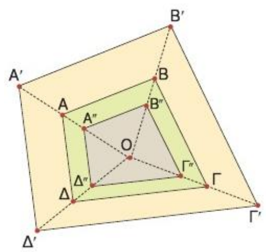


Το κέντρο ομοιοθεσίας της γωνίας xAy είναι το σημείο Ο, εσωτερικό του σχήματος, και ο λόγος της θετικός. Ένα τμήμα ενώνει δύο σημεία (Β και Γ) της γωνίας με τα αντίστοιχα σημεία του ομοιοθετικού σχήματος (Β΄ και Γ΄) δεν συμπίπτει με τις πλευρές των γωνιών.

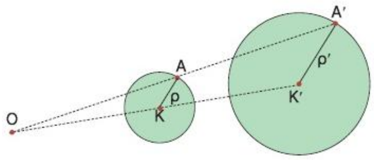
Λόγω του ότι δεν πληρείται η τρίτη προϋπόθεση από αυτές που αναπτύχθηκαν παραπάνω (βλ. Κεφ. 2.2.) σχετικά με την ομοιοθεσία, η συγκεκριμένη αναπαράσταση μελετάται είτε στο επίπεδο είτε στο χώρο.

- ✓ <u>Ομοιόθετο πολυγώνου</u>

Ομοίως, το κέντρο ομοιοθεσίας του πολυγώνου ΑΒΓΔ είναι το σημείο Ο, εσωτερικό του σχήματος, και ο λόγος της θετικός. Στην περίπτωση του τετραπλεύρου Α΄Β΄Γ΄Δ΄, ο λόγος ομοιοθεσίας είναι μεγαλύτερος του 1, οπότε πρόκειται για μεγέθυνση, ενώ στην περίπτωση του Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄, ο λόγος είναι 0<λ<1, οπότε πρόκειται για σμίκρυνση. Τα τμήματα που ενώνουν τις κορυφές των τετραπλεύρων με το κέντρο ομοιοθεσίας δεν συμπίπτουν με τις πλευρές των σχημάτων. Λόγω του ότι το κέντρο ομοιοθεσίας βρίσκεται εντός του σχήματος η αναπαράσταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί είτε δισδιάστατη είτε τρισδιάστατη.



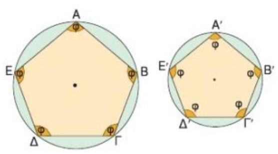
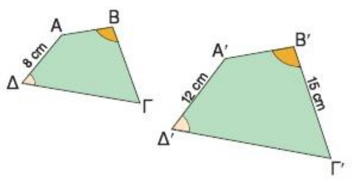
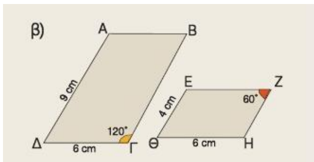
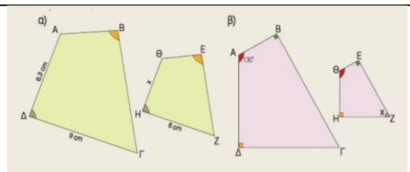
- ✓ <u>Ομοιόθετο κύκλου</u>



Το κέντρο ομοιοθεσίας είναι το σημείο Ο και ο λόγος ομοιοθεσίας θετικός. Το τμήμα που ενώνει τασημείο Α και Κ του κύκλου (Κ, ρ) με το κέντρο ομοιοθεσίας Ο και με τα σημεία Α΄και Κ΄ του κύκλου (Κ΄, ρ΄) δεν συμπίπτει με πλευρές του σχήματος. Επιπλέον, το κέντρο ομοιοθεσίας είναι εξωτερικό σε σχέση με τη ζώνη που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα.

- ✓ <u>Όμοια πολύγωνα</u>

Σχετικά με το πώς είναι τοποθετημένες οι αναπαραστάσεις των όμοιων πολυγώνων παρατηρούμε ότι στα σχήματα του σχολικού εγχειριδίου εμφανίζονται και οι δύο μορφές, δηλαδή να είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο ή να φαίνονται στο "βάθος". Στον παρακάτω πίνακα γίνεται ομαδοποίηση των σχημάτων με βάση τις δύο αυτές περιπτώσεις.

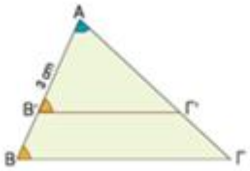
Στη σειρά	**Στο "βάθος"**
	
	

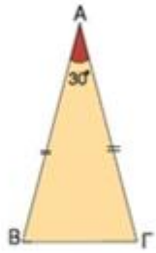
Πίνακας 3: Ομοιότητα πολυγώνων: Ανάλυση σχημάτων σχολικού βιβλίου

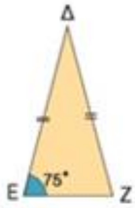
- ✓ <u>Όμοια τρίγωνα</u>

Στα όμοια τρίγωνα παρατηρείται μια πολυπλοκότητα σε σχέση με το πώς είναι τοποθετημένα τα σχήματα του σχολικού βιβλίου. Πέρα από τις δύο κατηγορίες που αναφέρθηκαν στα όμοια πολύγωνα, από τις οποίες η δεύτερη είναι ανύπαρκτη μέσα στο σχολικό βιβλίο, πέρα από μία αναπαράσταση, παρατηρούνται σχήματα που μελετήθηκαν στην ενότητα 1.3 του θεωρήματος του Θαλή, τρίγωνα τοποθετημένα το ένα μέσα στο άλλο, καθώς επίσης και ομοιοθετικά τρίγωνα αλλαγμένου προσανατολισμού. Στη συνέχεια γίνεται ομαδοποίηση των σχημάτων με βάση τις πέντε αυτές περιπτώσεις.

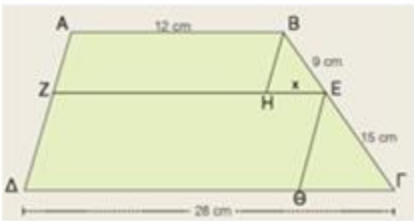
Α. Στη σειρά

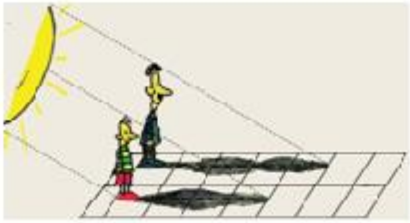




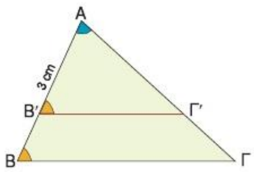


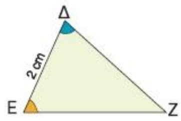
Β. Στο "βάθος"

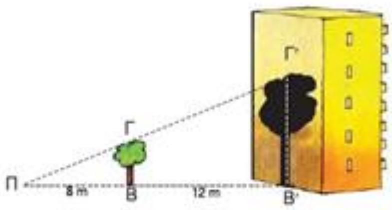


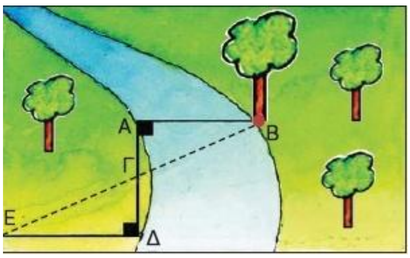


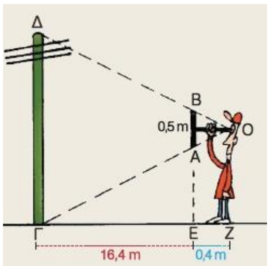
Γ. Σχήματα από το Θεώρημα του Θαλή

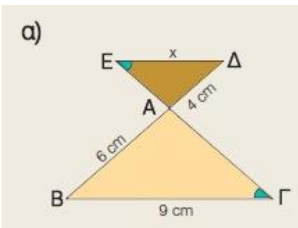


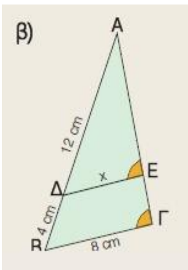


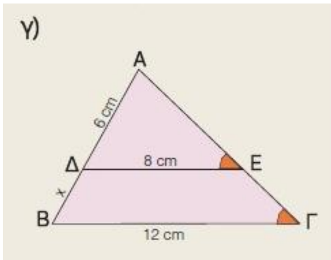




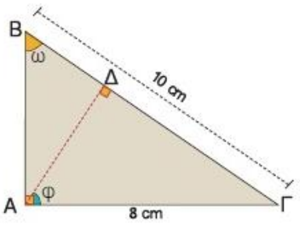




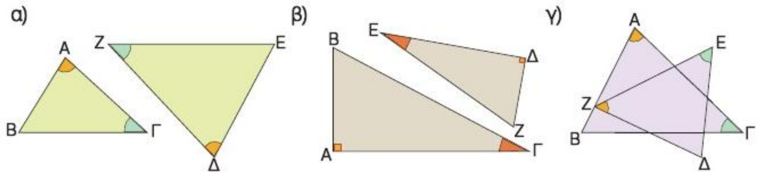


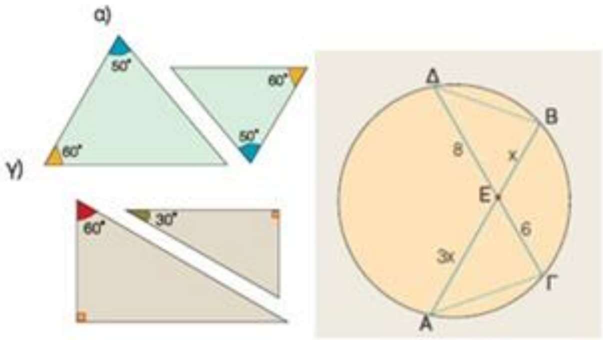


Δ. Το ένα μέσα στο άλλο



Ε. Αλλαγή προσανατολισμού





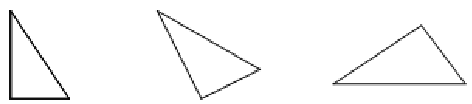
Η οπτικοποίηση είναι η αναπαράσταση που μας δίνει τη δυνατότητα να διακρίνουμε και να αναγνωρίσουμε μία αφηρημένη έννοια (Duval, 1999). Με γνώμονα αυτήν γίνεται αντιληπτό ότι δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς την οπτικοποίηση. Οι θεωρίες γεωμετρικού συλλογισμού, και κυρίως του Fischbein και του Duval, δείχνουν ότι η οπτικοποίηση συνδέεται με τη διαισθητική προσέγγιση, εμπεριέχοντας την κατανόηση του αντικειμένου που μελετάται. Ωστόσο, η διαίσθηση του κάθε ατόμου διαφέρει, με αποτέλεσμα να διαφέρει και η οπτική με την οποία βλέπει και μελετά μία γεωμετρική αναπαράσταση.

2.6. Οι παρανοήσεις των μαθητών στο Θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα

Ο Duval ισχυρίζεται πως υπάρχει δυνατή αντιπαράθεση ανάμεσα στην αισθητική κατανόηση ενός σχήματος και στην αυστηρή μαθηματική κατανόηση του ίδιου σχήματος. *«Δυσκολίες μετάβασης από τα αισθητικά δεδομένα του σχήματος, μπορεί να παραπλανήσουν ένα μαθητή σε σχέση με της μαθηματικές ιδιότητες και τα γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία αναπαριστούνται από το σχήμα, και έτσι ίσως πλήθος μαθητών να* *υπερβαίνει την αναγκαιότητα της ανακάλυψης των αυστηρών μαθηματικών αποδείξεων»* (Duval, 1995, σελ. 155).

Έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές της Γ' Γυμνασίου, και όχι μόνο, φέρνουν στο φως αποτελέσματα τα οποία δείχνουν ότι υπάρχουν αντιπροσωπευτικά σχήματα για την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, τα οποία είναι αυτά της μορφής του *"κώνου"* και της *"πεταλούδας"* (Λεμονίδης, 1993˙ Lemonidis, 1997). Πιο συγκεκριμένα, από τις έρευνες αυτές φαίνεται ότι οι μαθητές παρουσιάζουν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στα σχήματα της μορφής του *"κώνου",* παρά της *"πεταλούδας".* Δηλαδή, οι μαθητές εμφανίζουν μεγαλύτερη ευχέρεια στα σχήματα των οποίων οι παράλληλες, 2 ή περισσότερες, βρίσκονται από τη μία πλευρά του σημείου τομής των τεμνουσών και όχι σε αυτά που οι παράλληλες βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου τομής των τεμνουσών. Σε έρευνα που πραγματοποίησε ο Brousseau (1995) υποστηρίζει ότι η θέση του σημείου τομής των τεμνουσών είναι αυτή που καθιστά το ποσοστό επιτυχίας να είναι μικρότερο του 20%.

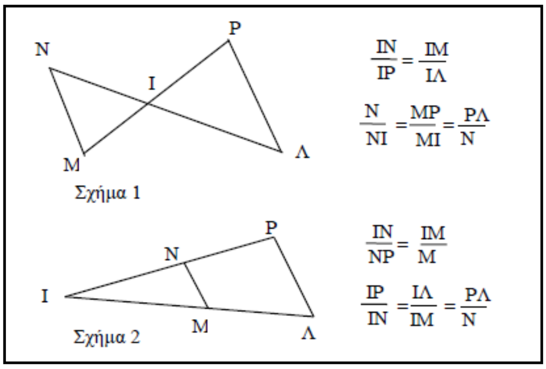
Όπως αναφέρει σε έρευνά του ο Λεμονίδης (1997), μελέτη που έγινε στο Ισραήλ το 1987 από τους Hershkowitz, Bruckheimer και Vinner, σε μαθητές, $5^{ης}$ και $8^{ης}$ τάξης, και εκπαιδευτικούς, φανερώνει ότι ο προσανατολισμός του σχήματος επηρεάζει την ανάγνωσή του τόσο τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς. Πιο συγκεκριμένα, στην έρευνα ζητήθηκε να αναγνωριστούν τα ορθογώνια τρίγωνα μέσα σε μια ποικιλία τριγώνων. Όπως ήταν αναμενόμενοι οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πιο ορθές απαντήσεις από τους μαθητές, ωστόσο υπήρχαν κι αυτοί που δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν όλα τα ορθογώνια τρίγωνα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



5η τάξη:	80%	50%	30%
8η τάξη:	95%	72%	22%
Εκπαιδευτικοί:	100%	97%	77%

Ο ρόλος μιας οπτικής εικόνας δεν είναι μόνο να δίνει νόημα σε αφηρημένες έννοιες, αλλά και να καθοδηγεί την αναλυτική ανάπτυξη μιας μαθηματικής λύσης (Fischbein, 1993). Απ' ότι φαίνεται όμως, ο ρόλος της οπτικοποίησης μπορεί να οδηγήσει και σε λανθασμένα συμπεράσματα. Όταν δύο σχήματα διαφέρουν από την κινητοποίηση ορισμένων μεταβλητών, η απουσία του θεωρητικού αντικειμένου από τον μαθητή του δίνει την ψευδαίσθηση ύπαρξης δύο διαφορετικών σχημάτων (Duval, 1988). Η μη αναγνώριση της μεταβλητότητας των σχημάτων υπογραμμίζεται από το φαινόμενο της τυπικότητας που αναπτύχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Τα περισσότερα λάθη των μαθητών, που παρατηρούνται στο θεώρημα του Θαλή, έχουν να κάνουν με τον αν το σχήμα που τους δόθηκε ήταν τυπικό ή όχι, και με το κατά πόσο οι ίδιοι ήταν σε θέση να αυτοματοποιήσουν ορισμένες από τις ιδιότητες των σχημάτων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα λαθών, από την έρευνα του Λεμονίδη (1993), σε μαθητές της Γ' Γυμνασίου, φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:

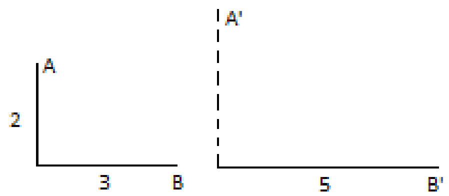


Το Σχήμα 1 πρόκειται για ένα σχήμα μη τυπικό της μορφής της *"πεταλούδας"*, ενώ το Σχήμα 2 είναι τυπικό της μορφής του *"κώνου"*. Αυτό που φαίνεται στη συγκεκριμένη έρευνα είναι ότι οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των τυπικών σχημάτων και στα μη τυπικά, εφαρμόζοντας κάποιους αυτοματισμούς (Λεμονίδης, 1993).

Το γεγονός ότι οι μαθητές ανταποκρίνονται πιο εύκολα στις ιδιότητες των τυπικών σχημάτων οφείλεται σε μεγάλο βαθμό, όπως ήδη έχει αναφερθεί, στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε Τυνήσιους εκπαιδευτικούς αποκαλύπτει την απόσταση που υπάρχει μεταξύ των γνώσεων που αποκτά ο εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της αρχικής του κατάρτισης και των γνώσεων που διδάσκονται στα σχολεία. Η απόσταση αυτή υπόκειται στο φαινόμενο της διδακτικής μεταφοράς καθώς τις περισσότερες φορές ο εκπαιδευτικός υπακούει στο πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια. Από την ανάλυση των τυνησιακών εγχειριδίων και από ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς φαίνεται ότι οι μεταβλητές στα σχήματα του θεωρήματος του Θαλή αναφέρονται σπάνια, ενώ η χρήση τυπικών παραδειγμάτων είναι συχνή (Mrabet, 2006). Ωστόσο, ο Brousseau (1995) είχε προτείνει κι άλλες μεταβλητές που σχετίζονται με το θεώρημα του Θαλή, όπως: το μέγεθος της αναπαράστασης ή ακόμα και ο τύπος της ερώτησης (εάν πρόκειται για σχεδιασμό, υπολογισμό ή αναγνώριση του θεωρήματος).

Ένας ακόμη παράγοντας που επηρεάζει την επιτυχία της εφαρμογής του θεωρήματος είναι και η φύση του λόγου προβολής. Πράγματι, αποτελέσματα έρευνας δείχνουν ότι ο βαθμός επιτυχίας του θεωρήματος ποικίλλει ανάλογα με το αν ο λόγος είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος της μονάδας, φυσικός ή δεκαδικός αριθμός (Brousseau, 1995˙ Chazan, 1988).

Σχετικά με τα λάθη των μαθητών, παρατηρούνται και λάθη τα οποία δεν έχουν καμία σχέση με το Θεώρημα του Θαλή. Ένα τέτοιο λάθος είναι η εφαρμογή προσθετικών στρατηγικών (*additive strategies*) που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων στις αναλογίες (Chazan, 1988˙ Τσικοπούλου & Φερεντίνος, 2018). Πιστεύεται ότι ο λόγος που προτιμώνται οι προσθετικές στρατηγικές είναι ότι φαίνονται απλούστερες σε σχέση με τις πολλαπλασιαστικές. Κλασσικό παράδειγμα εφαρμογής της προσθετικής στρατηγικής είναι όταν ένα μέγεθος Α αυξάνεται κατά μια συγκεκριμένη ποσότητα, τότε και το μέγεθος Β που συνδέεται με το Α αυξάνεται το ίδιο (με προσθετικό και όχι πολλαπλασιαστικό τρόπο). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η παρακάτω δραστηριότητα που παρουσιάζει στην έρευνά του ο Chazan (1988). Ζητήθηκε από μαθητές (10ης τάξης) να υπολογίσουν το μήκος της πλευράς που λείπει έτσι ώστε το δεύτερο σχήμα να είναι το ίδιο με το πρώτο απλά μεγαλύτερο. Το 1/3 των μαθητών που συμμετείχαν σε αυτή τη δραστηριότητα θεωρώντας ότι, στο υπό κατασκευή σχήμα η πλευρά 5 προέκυψε από την αντίστοιχη πλευρά του αρχικού σχήματος, μετά από πρόσθεση του αριθμού 2 (5=3+2), κατέληξαν ότι η ζητούμενη πλευρά του νέου σχήματος θα είναι 4 (4=2+2).



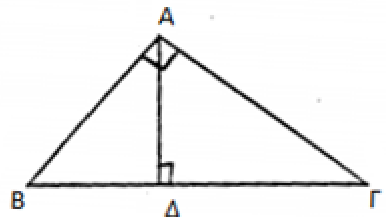
Κατά τη διάρκεια μιας μελέτης είναι σημαντικό για τον ερευνητή να γνωρίζει την εξήγηση που δίνουν οι μαθητές στην ομοιότητα, καθώς η έννοια αυτή χρησιμοποιείται και στην καθημερινή ζωή και σε μαθηματικό επίπεδο στη γεωμετρία (Vollrath, 1977). Οι Kospentaris και Spyrou (2005) επιβεβαιώνουν στη μελέτη τους ότι ο όρος ομοιότητα στην καθομιλουμένη δε συμπίπτει με τη γεωμετρική ομοιότητα, καθώς πλησιάζει περισσότερο στην έννοια του να έχουν τα σχήματα το ίδιο μέγεθος.

Αρκετά εντυπωσιακό φαίνεται το γεγονός ότι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών σε σημαντικό ποσοστό (περίπου 50%) δεν χρησιμοποίησαν την ιδέα της αναλογίας πλευρών για να εξασφαλίσουν μια ακριβή απάντηση στην ερώτηση για το αν τα σχήματα είναι όμοια. Από αυτό το γεγονός προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα σχετικά με τις μεθόδους διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο. Οι μαθητές θα πρέπει από μικρή ηλικία να γνωρίζουν ότι η ομοιότητα σχετίζεται με τη διατήρηση της μορφής του σχήματος παρά τη διακύμανση του μεγέθους του (Kospentaris & Spyrou, 2005).

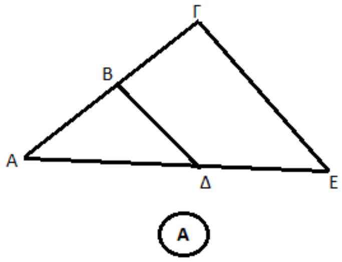
Η έρευνα των Mattheou και Spyrou (2009) έρχεται να τονίσει κι αυτή με τη σειρά της τη σπουδαιότητα του ορισμού των εννοιών. Ένας λανθασμένος ορισμός συνεπάγεται λανθασμένες απαντήσεις σε πρακτικές εφαρμογές και λανθασμένες αναπαραστάσεις εννοιών συνεπάγονται λανθασμένους ορισμούς. Σε έρευνα που πραγματοποίησαν οι ερευνητές αυτοί σε 85 φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης διαπίστωσαν πως δεν ήταν σε θέση να ορίσουν σωστά την ομοιότητα των σχημάτων. Ωστόσο, οι φοιτητές εφάρμοσαν τις σχέσεις ομοιότητας στα τρίγωνα, μιας και τα είχαν διδαχθεί πρόσφατα στο λύκειο. Μόνο το 36,5% έδωσε σωστό ορισμό. Από τους υπόλοιπους, το 21% αναφέρθηκε στην εμφάνιση του σχήματος, το 14% συνέδεσε την ομοιότητα με τα όμοια τρίγωνα, το 12% συνέδεσε την ομοιότητα με την ισότητα, ενώ το 16% ή δεν έδωσε καμία απάντηση, ή η απάντηση που έδωσε ήταν λανθασμένη.

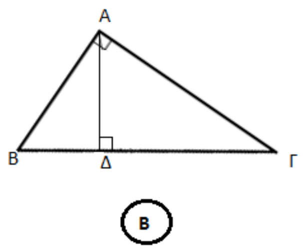
Προκειμένου να εξετασθεί αν οι φοιτητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό της ομοιότητας σε άσκηση με όμοια τρίγωνα, τους ζητήθηκε να βρουν τις σχέσεις ομοιότητας δοθέντων όμοιων τριγώνων. Το 53% έδωσε μία ολοκληρωμένη απάντηση, το 30% κατάφερε να ολοκληρώσει τη μισή άσκηση, ενώ το 17% ή δεν έδωσε καμία απάντηση, ή η απάντηση που έδωσε ήταν λανθασμένη (Mattheou & Spyrou, 2009).

Μία ακόμη σημαντική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι αυτή που σχετίζεται με την εύρεση λόγων σε όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Πιο συγκεκριμένα, όπως αναφέρει στη μελέτη του ο Chazan (1988), μαθητές, παρόλο που γνώριζαν καλά την έννοια των όμοιων τριγώνων, δεν μπορούσαν να αντιστοιχίσουν τις πλευρές σε όμοια ορθογώνια τρίγωνα, ιδιαίτερα σε σχήματα όπως το παρακάτω:



Βασικός παράγοντας αυτής της δυσκολίας ήταν ότι οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με την ιδέα της αναστροφής και περιστροφής των τριγώνων ώστε να εναρμονιστούν οι αντίστοιχες πλευρές τους. Κι αυτό φάνηκε και από τα ποσοστά επιτυχίας για την εύρεση ομοιότητας στα παρακάτω σχήματα.





Διαπιστώθηκε ότι το 70% των μαθητών ανέφερε ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ στο σχήμα Α , ενώ μόλις το 50% (54 από τους 108 συμμετέχοντες) ανέφερε τουλάχιστον μία ομοιότητα μεταξύ των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ και ΑΒΓ του σχήματος Β.

Στη συνέχεια της έρευνας αυτής ζητήθηκε από τους ίδιους μαθητές να γράψουν τις αναλογίες στο όμοια τρίγωνα που εντόπισαν. Μόνο 31 μαθητές κατάφεραν να γράψουν σωστά έστω και μία αναλογία. παρακάτω πίνακας δείχνει αναλυτικά τα ποσοστά επιτυχίας και για τους 31 που έγραψαν σωστά αναλογίες αλλά και στο σύνολο των συμμετεχόντων:

Τρίγωνα που εντοπίστηκε ομοιότητα	**Μαθητές**	**Ποσοστό επιτυχίας στους μαθητές που εντόπισαν ομοιότητα**	**Ποσοστό επιτυχίας στους συμμετέχοντες**
Μικρό (ΑΒΔ) – Μεσαίο (ΑΔΓ)	7	23%	6%
Μικρό (ΑΒΔ) – Μεγάλο (ΑΒΓ)	0	0%	0%
Μεσαίο (ΑΔΓ) – Μεγάλο (ΑΒΓ)	6	19%	6%
Σε όλα τα τρίγωνα	18	58%	17%

Πίνακας 3: Ποσοστά επιτυχίας στον εντοπισμό όμοιων τριγώνων

Τα αποτελέσματα της μελέτης του ο Chazan (1988) φανερώνουν ότι η σχέση περιστροφής (*rotation*) είναι πιο αναγνωρίσιμη από τις σχέσεις που χρειάζονται και περιστροφή και αναστροφή (*rotation and flipping*).Έτσι, οι μαθητές ήταν λιγότερο πιθανό να αναγνωρίσουν την ομοιότητα και να γράψουν σωστές αναλογίες όταν τα σχήματα έπρεπε να αναστραφούν ώστε να έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ευθυγραμμισμένες. Ένας ακόμη παράγοντας που συνέβαλε στα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας του τεστ των ορθογωνίων τριγώνων είναι και η θέση που δόθηκε το ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή έχοντας για βάση την υποτείνουσα. Επιπλέον, το γεγονός ότι το ύψος από την ορθή γωνία ορθογωνίου τριγώνου μοιράζεται τις πλευρές του με τα άλλα δύο τρίγωνα φαίνεται να προσθέτει ένα επίπεδο δυσκολίας σε αυτό το τεστ, καθώς με την πρώτη ματιά είναι ορατά το μικρό και το μεσαίο τρίγωνο ενώ δύσκολα εντοπίζεται η ύπαρξη του μεγάλου τριγώνου.

Έρευνες που έχουν γίνει παγκοσμίως (Ελλάδα, Γαλλία, Κολομβία, Ισπανία, Τυνησία) φανερώνουν πως σπουδαίο ρόλο στην αποφυγή παρανοήσεων και λαθών από τους μαθητές παίζει η σειρά και ο τρόπος διδασκαλίας των εννοιών του θεωρήματος του Θαλή, της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας. Ο τρόπος διδασκαλίας είναι ένας θετικός παράγοντας για την απόκτηση περισσότερων και καλύτερων ικανοτήτων λογικής, καθώς μεταξύ των εννοιών αυτών γίνεται γεφύρωση των γεωμετρικών και αριθμητικών συνθηκών για την αναλογική σκέψη (Brousseau, 1995˙ Escudero & Sánchez, 2007˙ Gualdrón et al., 2015˙ Mattheou & Spyrou, 2009).

3. Κεφάλαιο 3: Μαθηματική γνώση

Οι μαθηματικές γνώσεις για τη διδασκαλία, «*Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*», είναι μία φράση που χρησιμοποιήθηκε, από τους Thompson και Thompson (1996), για να περιγράψει τα προγράμματα διδασκαλίας των εκπαιδευτικών, σχετικά με τις ιδέες που διδάσκουν και τις οποίες κατέχουν σε ένα αποτυπωμένο επίπεδο (Byerley & Thompson, 2017). Οι ίδιοι ερευνητές, σε συνεργασία με τον Silverman, επέκτειναν αργότερα την φράση *Mathematical Knowledge for Teaching*, εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να δημιουργήσουν τις λεγόμενες «*Βασικές Παιδαγωγικές Συμφωνίες*», οι οποίες έχουν να κάνουν με τις προσωπικές τους εμπειρίες και τα καλά διαμορφωμένα σχήματα που έχουν αναπτύξει.

Οι Ball, Thames και Phelps (2008) χρησιμοποίησαν με διαφορετικό τρόπο τη φράση *MKT* των Thompson, Thompson και Silverman. Μελετώντας εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας, ανέλυσαν και κατηγοριοποίησαν ποιες είναι αυτές οι "μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που χρησιμοποιούνται στο έργο της διδασκαλίας".

3.1. Γνώση Περιεχομένου

Σύμφωνα με τους Ball, Thames και Phelps (2008), η γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία των Μαθηματικών δεν περιορίζεται στις ικανότητες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και διαχείρισης κανόνων, αλλά περιλαμβάνει ειδικές δεξιότητες και μια σειρά πληροφοριών που σχετίζονται με τους μαθητές και τη διδασκαλία. Οι ειδικές αυτές γνώσεις που απαιτούνται για τη διδασκαλία των Μαθηματικών κατηγοριοποιήθηκαν από τους παραπάνω ερευνητές και συνέθεσαν ένα μοντέλο, με σκοπό την περαιτέρω ανάλυση τους στο πλαίσιο της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών και της βελτίωσης της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης. Ένας αρχικός διαχωρισμός έγινε μεταξύ γνώσης του γνωστικού αντικειμένου και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου.

Η γνώση του γνωστικού αντικειμένου αφορά τη γνώση των μαθηματικών και διακρίνεται σε κοινή, εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου, καθώς και ορίζοντα της γνώσης περιεχομένου.

Η **κοινή γνώση περιεχομένου (CCK)** ορίζεται ως οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλά περιβάλλοντα και όχι κατά μοναδικό τρόπο στη διδασκαλία (Ball et al., 2008, σελ. 399). Ένα άλλο είδος γνώσης περιεχομένου είναι η **εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου (SCK)** που αφορά τις μαθηματικές γνώσεις εκείνες και τις δεξιότητες που απαιτούνται ειδικά για τη διδασκαλία. Περιλαμβάνει για παράδειγμα, το να μπορεί κανείς να εντοπίσει μοτίβα στα λάθη των μαθητών, ή να εκτιμά αν ένας μη τυπικός/παραδοσιακός συλλογισμός θα μπορούσε να έχει γενική ισχύ. Ακόμη, η **horizon content knowledge (HCK)** περιλαμβάνει τη γνώση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά θέματα σχετίζονται με το εύρος των μαθηματικών που περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών. Πρόκειται για γνώσεις σχετικά με το ποιες είναι εκείνες οι μαθηματικές ιδέες που ακούγονται στην τάξη και οφείλει ο εκπαιδευτικός να πριμοδοτήσει και να δώσει βάρος, καθώς είναι σημαντικές για την ανάπτυξη και κατανόηση μιας έννοιας, ή για τον τρόπο που θα εξελιχθεί η μαθηματική έννοια στο μέλλον.

3.2. Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου

Εκτός από τη γνώση του περιεχομένου όμως, απαραίτητη θεωρείται και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, την οποία οι Ball, Thames και Phelps (2008) ανέλυσαν σε γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας, γνώση του περιεχομένου και των μαθητών καθώς και γνώση του περιεχομένου και αναλυτικού προγράμματος.
Η **γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας (KCT),** είναι η γνώση εκείνη που συνδυάζει τη γνώση των μαθηματικών με τη γνώση για τον τρόπο που οφείλουν να παρουσιαστούν οι διάφορες μαθηματικές έννοιες κατά τη διδασκαλία. Περιλαμβάνει για παράδειγμα, γνώσεις σχετικές με το ποιες είναι οι κατάλληλες δραστηριότητες και αναπαραστάσεις για την εισαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας ή ακόμα και ποια σειρά μαθηματικών δραστηριοτήτων/προβλημάτων θα βοηθούσε στην παρουσίαση της έννοιας αυτής. Επιπλέον, η **γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (KCS)**, συνδυάζει τη γνώση μαθηματικών και μαθητών. Περιλαμβάνει γνώσεις που αφορούν στον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές, ποιες ιδέες τους προκαλούν δυσκολίες αλλά και πως εκφράζονται στα μαθηματικά, έτσι ώστε κατά τη διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός να είναι σε θέση να αντιληφθεί τις ιδέες των μαθητών του και να τις προσαρμόσει ή να τις βοηθήσει να εξελιχθούν. Τέλος, η **γνώση του περιεχομένου και του αναλυτικού προγράμματος (KCC)** αφορά στη γνώση του εκπαιδευτικού σχετικά με το ποια είναι η κατάλληλη ηλικία να διδαχθούν οι μαθητές την εκάστοτε μαθηματική ιδέα, όπως και πώς οι έννοιες συνδέονται μεταξύ τους καθ’ όλη τη διάρκεια της σχολικής φοίτησης.

Με βάση όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, πρέπει να αναγνωριστεί η ύπαρξη διαφορετικών εκπαιδευτικών, οι οποίοι ενσωματώνουν τις διαφορετικές πτυχές των γνώσεών τους δίνοντας νόημα στη δική τους πρακτική και βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν τις νέες έννοιες. Την αναγνώριση αυτή μας παρουσιάζουν μέσα από τη μελέτη τους οι Escudero και Sánchez (2007), η οποία πραγματοποιήθηκε σε δύο Ισπανούς εκπαιδευτικούς έχοντας ως στόχο τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών της παιδαγωγικής τους γνώσης περιεχομένου στο θεώρημα του Θαλή και των γνώσεών τους σχετικά με τις έννοιες που ενσωματώθηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους. Οι Escudero και Sánchez (2007) διαπίστωσαν πως η γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών επιδρά στη διδασκαλία τους, όπως επίσης και στην επιλογή των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούν για την παρουσίαση του θεωρήματος του Θαλή. Κάθε ένας από τους εκπαιδευτικούς προσέγγισε το θέμα από διαφορετική οπτική, πράγμα που αποδεικνύει την ύπαρξη δύο μοντέλων διδασκαλίας. Αυτά είναι:

Α. <u>Μαθητοκεντρική διδασκαλία</u>: Ο εκπαιδευτικός προσεγγίζει τη διδασκαλία του πιστεύοντας ότι οι μαθητές κατανοούν τις νέες έννοιες μέσω της δικής τους εμπειρίας. Η διδασκαλία για αυτόν είναι η παροχή ερεθισμάτων στους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν μόνοι τους τις νέες μαθηματικές έννοιες. Χρησιμοποιεί γνώσεις σχετικά με τις ιδέες των μαθητών, τις δυσκολίες και την προηγούμενη γνώση τους και ενσωματώνει στη διδασκαλία του το σχολικό εγχειρίδιο.

Β. <u>Δασκαλοκεντρική διδασκαλία</u>: Ο εκπαιδευτικός προσεγγίζει τη διδασκαλία του πιστεύοντας ότι πρέπει να παρέχει πληροφορίες στους μαθητές σχετικά με συγκεκριμένες μαθηματικές ιδέες. Η διδασκαλία του βασίζεται στην προσωπική του εμπειρία και τις γνώριμες για αυτόν διαδικασίες μάθησης εφαρμόζοντας παραδείγματα ώστε να αλληλεπιδρούν με τις έννοιες που θα διδαχθούν οι μαθητές αργότερα.

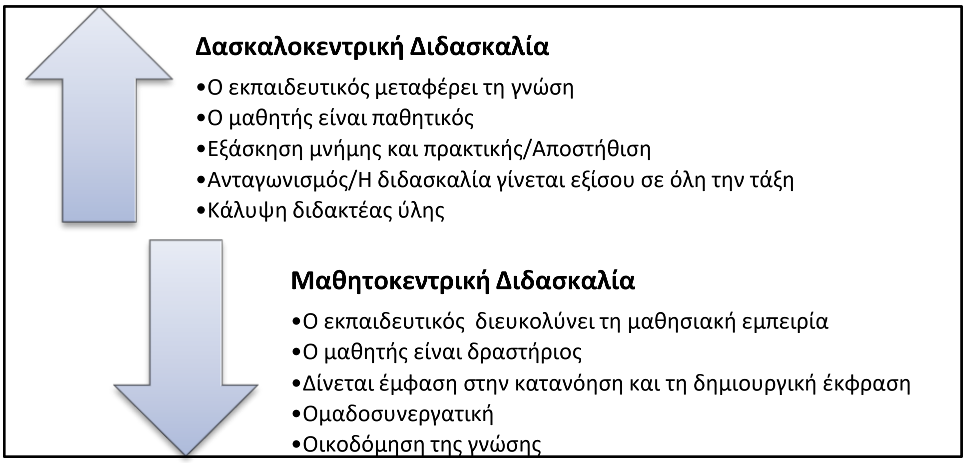
Και στις δύο περιπτώσεις πάντως φάνηκε πως το επίπεδο των μαθητών επηρεάζει την εκπαιδευτική πρακτική του κάθε εκπαιδευτικού.

Η δασκαλοκεντρική μέθοδος διδασκαλίας είναι η παραδοσιακή διδασκαλία, όπου ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει στους μαθητές ή τους υποβάλλει μαθηματικές καταστάσεις βάσει των οποίων πρέπει να επιλύονται οι ασκήσεις που ακολουθούν. Βασικός στόχος αυτής της μεθόδου διδασκαλίας είναι η μετάδοση γνώσεων με παθητική παρακολούθηση από την πλευρά των μαθητών, αντιγραφή από τον πίνακα και επίλυση ασκήσεων, συνήθως από το σχολικό βιβλίο (Κολέζα, 2009˙ Χρυσαφίδης, 1994).

Τις περισσότερες φορές, οι εκπαιδευτικοί, που ακολουθούν αυτό το μοντέλο διδασκαλίας, έχουν την αντίληψη ότι πρέπει να κυριαρχούν μέσα στην τάξη, να ασκούν τέτοια επίδραση στους μαθητές, με αποτέλεσμα να τους αφαιρούν κάθε πρωτοβουλία και κάθε ανεξαρτησία στη σκέψη τους, να τους παρέχουν έτοιμες γνώσεις αξιολογώντας τους με βάση τις γνώσεις που κατέκτησαν (Χρυσαφίδης, 1994). Τη μέθοδο αυτή στηρίζει ένας μηχανισμός πειθαρχίας, στείρων επαναλήψεων, εξάσκηση μνήμης και αποστήθιση, ένας μηχανισμός ανεπαρκής για την ανάπτυξη ανώτερων ικανοτήτων, μορφών σκέψης και της προσωπικότητας (Φεσάκης, 2019).

Χαρακτηριστικά αυτής της μεθόδου διδασκαλίας είναι ότι:
α. ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει και ο μαθητής ακολουθεί,
β. ο εκπαιδευτικός μεταδίδει τη γνώση και ο μαθητής απλά την αποδέχεται,
γ. ο εκπαιδευτικός απευθύνεται σε όλους τους μαθητές με τον ίδιο τρόπο, χωρίς να λαμβάνει υπόψη ότι ο κάθε μαθητής παρουσιάζει διαφορετικές ανάγκες και
δ. δεν υπάρχει ανατροφοδότηση κατά τη διάρκεια του μαθήματος, δηλαδή το ότι απαντούν σωστά ορισμένοι μαθητές δε σημαίνει ότι η κάθε έννοια έχει γίνει κατανοητή από όλους.

Σε αντίθεση με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας, στη μαθητοκεντρική προσέγγιση η διδακτική πρακτική έχει ως άξονα τα ενδιαφέροντα και τις προσδοκίες του κάθε μαθητή. Έτσι, επιδιώκεται η μέγιστη ενεργητική συμμετοχή των μαθητών καθ’ όλη τη διάρκεια του μαθήματος. Οι διαφορές μεταξύ δασκαλοκεντρικής και μαθητοκεντρικής μεθόδου διδασκαλίας παρουσιάζονται στη συνέχεια:



Διάγραμμα 1: Σύγκριση δασκαλοκεντρικής και μαθητοκεντρικής διδασκαλίας

Ένας άλλος παράγοντας που παίζει βασικό ρόλο στη διδασκαλία ενός εκπαιδευτικού είναι τα χρόνια εμπειρίας και η τριβή πάνω στο αντικείμενο διδασκαλίας. Όσο περισσότερα χρόνια εμπειρίας έχει ένας εκπαιδευτικός που έχει διδάξει γεωμετρία γυμνασίου, τόσο υψηλότερη είναι η βαθμολογία των γνώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω (Herbst & Kosko, 2012). Ωστόσο, έρευνες που έχουν γίνει πάνω στη γεωμετρία, φανερώνουν ότι ενώ μπορεί οι εκπαιδευτικοί, είτε με μικρή είτε με μεγάλη εμπειρία στη διδασκαλία, να έχουν ανεπτυγμένη την CCK (κοινή γνώση περιεχομένου), δεν μπορούν να τη συνδυάσουν κατάλληλα με την KCT (γνώση περιεχομένου στη διδασκαλία). Χαρακτηριστικό παράδειγμα στην έρευνα των Herbst και Kosko (2012), σε άσκηση που έπρεπε να επεξεργαστούν μαθηματικοί γυμνασίου, με μικρή εμπειρία, όχι ότι δεν γνώριζαν την τριγωνική ανισότητα, αλλά δεν γνώριζαν ότι είχε σημασία η αναφορά της στο πλαίσιο της διδασκαλίας, με αποτέλεσμα να επεξεργαστούν το πρόβλημα ως άσκηση άλγεβρας παρά ως άσκηση γεωμετρίας. Παρόμοια αποτελέσματα έδειξε και η έρευνα των Küchemann και Rodd (2012), καθώς σε έρευνα που πραγματοποίησαν στην Αγγλία, έμπειροι καθηγητές μαθηματικών, αυτή τη φορά, είχαν ελάχιστη μόρφωση σχολικής γεωμετρίας.

Η δουλειά των εκπαιδευτικών περιορίζεται στο να διδάσκουν γεωμετρία, ως μέρος των μαθηματικών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργείται η ψευδαίσθηση ότι και το μάθημα της γεωμετρίας πρέπει να αντιμετωπίζεται όπως το μάθημα της άλγεβρας, δηλαδή πράξεις μέσω διαδικασιών χωρίς φαντασία και διορατικότητα.

3.3. Διαχείριση του λάθους

Όπως αναφέρει η Ράπτη (2002), ο τρόπος με τον οποίο αντιδρά ένας εκπαιδευτικός στις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών και γενικότερα στη μαθησιακή συμπεριφορά τους, εντάσσεται στο πλαίσιο της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης.

Λόγω του ότι πολλοί ερευνητές θεωρούν τα μαθηματικά ως την επιστήμη του σωστού – λάθους, έχουν γίνει αρκετές μελέτες σχετικά με τη διαχείριση του λάθους κατά τη διδασκαλία (Alro & Skovsmose, 2002˙ Μαναρίδης κ. συν., 2009). Αρχικά, οι έρευνες αυτές καλλιέργησαν την πεποίθηση ότι τα λάθη είναι γνωστικές παρανοήσεις που αντιμετωπίζονται και εξαλείφονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ή υποδηλώνουν εναλλακτικές προσεγγίσεις που αξιοποιούνται κατά τη διδασκαλία. Όπως, όμως, ισχυρίζεται ο Μαναρίδης και οι συνεργάτες του (2009), οι τελευταίες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν και στηρίχτηκαν σε σύγχρονες θεωρίες μάθησης, φανερώνουν ότι το λάθος είναι η ανεπαρκής συμμετοχή σε μία ομάδα, δηλαδή η ατελής συμμετοχή στις πρακτικές κοινότητας και διερεύνησης.

Η αξία που αποδίδει ο άνθρωπος στην επιτυχία, η οποία συνδέεται τις πιο πολλές φορές με την επίτευξη του σωστού αποτελέσματος με τον λιγότερο κόπο, τον οδηγούν να θεωρεί το λάθος ως εμπόδιο γενικά στη ζωή του. Αν ωστόσο ο στόχος του εκπαιδευτικού είναι η ανάπτυξη της λογικής σκέψης και κρίσης των μαθητών του, η έκφραση με σαφήνεια και ακρίβεια, τότε πρωτεύοντα ρόλο παίζει η καλλιέργεια της ερευνητικής διάθεσης. Σε αυτή την περίπτωση, το λάθος παίζει άλλο ρόλο. Αντί για εμπόδιο αποτελεί μέσο γνώσης για τον μαθητή. Όταν ο μαθητής κάνει λάθος, ο εκπαιδευτικός οφείλει να ερευνήσει την πηγή του λάθους.

Στο ελληνικό σχολείο, πολλοί εκπαιδευτικοί έχουν την αρνητική αντίληψη ότι το λάθος ερμηνεύεται ως έλλειψη γνώσεων, ή λανθασμένης κατανόησης, ή ως αποτέλεσμα ελλιπούς ενδιαφέροντος από την πλευρά του μαθητή. Το 2002 έγινε μία απόπειρα καταγραφής των λαθών και της διαχείρισής τους κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, από τους Alro και Skovsmose. Η έρευνα έδειξε ότι τα μαθηματικά λάθη μπορεί να:

- απορρίπτονται,
- ενθαρρύνεται η αποφυγή τους,
- επισημαίνονται από τον εκπαιδευτικό και
- μη επεξηγούνται.

Πιο αναλυτικά, υπάρχουν φορές που ο εκπαιδευτικός δε λαμβάνει υπόψη του τη λανθασμένη απάντηση του μαθητή και ψάχνει να ακούσει την προσδοκώμενη απάντηση, ενώ υπάρχουν φορές που απλά σχολιάζει τη λαθεμένη απάντηση που άκουσε. Υπάρχουν και αυτοί οι εκπαιδευτικοί που αποδέχονται με ευγενικό τρόπο το λάθος, προσπαθώντας να εξηγήσουν και στους υπόλοιπους μαθητές το λάθος που έγινε, ώστε να μην επαναληφθεί (Σύκα, Φαρμάκη & Ψαρράς, 2011).

Το λάθος αποτελεί ένδειξη κάποιας γνώσης, που μπορεί με κατάλληλους χειρισμούς του εκπαιδευτικού και δραστηριότητες του μαθητή, να οδηγήσει στη γνώση. Η διαχείριση του λάθους στηρίζεται, κατά κύριο λόγο, στη διόρθωση του μαθητή από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία και δεν αντιμετωπίζεται ως εργαλείο ή ως κινητήριος δύναμη για τη ομαλή εξέλιξη της διδακτικής διαδικασίας (Potari & Jaworski, 2002). Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να εξετάζουν τις πρακτικές τους, να αναγνωρίζουν και να κατηγοριοποιούν τα λάθη των μαθητών τους, να αναστοχάζονται τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι διαχειρίζονται αυτά τα λάθη, να διερευνούν τη σχέση μεταξύ των λαθών και του τρόπου διαχείρισης της μαθηματικής γνώσης κατά τη διδασκαλία, να συζητούν εναλλακτικούς τρόπους διαχείρισης και να δημιουργούν το έδαφος για βελτίωση της διδακτικής πρακτικής (Μαναρίδης κ. συν., 2009). Στην έρευνα που ακολουθεί φαίνεται πως μαθηματικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τα λάθη και τις δυσκολίες των μαθητών πάνω στην ομοιότητα τριγώνων και κατόπιν να δίνουν τρόπους διαχείρισης τους.

3.4. Κατάλληλες αναπαραστάσεις

Για την αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών, ο εκπαιδευτικός οφείλει να έχει γνώση των χαρακτηριστικών τους και των συνθηκών μέσα στις οποίες λειτουργούν και αναπτύσσονται, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν. Οφείλει, δηλαδή, να κατέχει γνώσεις, περί του γνωστικού αντικειμένου που διδάσκει και περί των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιεί, έτσι ώστε να μπορεί να τις διαχειρίζεται διδακτικά σωστά και να απωθεί εσφαλμένες αντιλήψεις (Τζεκάκη, 2007).

Σύμφωνα με τους Ball, Thames και Phelps (2008), η γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν περιορίζεται στις ικανότητες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και διαχείρισης κανόνων, αλλά περιλαμβάνει ειδικές δεξιότητες και μια σειρά πληροφοριών που σχετίζονται με τους μαθητές και τη διδασκαλία. Οι ειδικές αυτές γνώσεις που απαιτούνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών κατηγοριοποιήθηκαν από τους παραπάνω ερευνητές και συνέθεσαν ένα μοντέλο, με σκοπό την περαιτέρω ανάλυση τους στο πλαίσιο της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών και της βελτίωσης της μαθηματικής διδασκαλίας και μάθησης.

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν χρήσιμο εργαλείο στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, επομένως κατέχουν κυρίαρχο ρόλο στο αντικείμενο των μαθηματικών (Van De Walle, 2007). Με τη χρήση των κατάλληλων αναπαραστάσεων δημιουργείται ένα αποτελεσματικό μαθησιακό περιβάλλον, καθώς συμβάλλουν στην ανάπτυξη της σκέψης και της επικοινωνίας των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Τις περισσότερες φορές, όμως, ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται και αναδεικνύονται οι αναπαραστάσεις είναι επιφανειακός (Τζεκάκη, 2007).

Έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε εκπαιδευτικούς για τη χρήση των αναπαραστάσεων στο θεώρημα του Θαλή παρουσίασε διαφορετικά αποτελέσματα σχετικά με το ρόλο και τη χρήση των τυπικών αναπαραστάσεων. Στη γεωμετρία, οι αναπαραστάσεις αυτές επιβάλλονται και διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της μάθησης, γεγονός που καθιστά δύσκολη την εξέλιξή τους. Όπως αναφέρουν οι Cordier (1991), οι τυπικές αναπαραστάσεις χαρακτηρίζονται από ταχύτερο χρόνο επεξεργασίας πληροφοριών σε σύγκριση με τις άλλες αναπαραστάσεις. Μπορεί κατά τη διάρκεια εκμάθησης μιας έννοιας, η ύπαρξη αυτού του τύπου των αναπαραστάσεων να μην αγγίζει τη γενικότητα του αντικειμενικού στόχου, ωστόσο ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να ελίσσεται αναλόγως την περίσταση και να πετυχαίνει τελικά την εννοιολογική γνώση της έννοιας.

Αν και είναι προνομιακοί χώροι επεξεργασίας πληροφοριών, τα τυπικά σχήματα μπορούν να αποτελέσουν πηγή γνωστικής προκατάληψης. Ο μαθητής μπορεί να βασίσει το συλλογισμό του στις ιδιότητες των εικόνων που είναι άχρηστες για το πρόβλημα που του έχει προσφερθεί, αλλά που είναι ίδιας φύσης με τις τυπικές αναπαραστάσεις που έχει, καθώς μπορεί να απορρίψει σχετικές καταστάσεις υπό το πρόσχημα της ανεπάρκειάς τους με αυτές τις αναπαραστάσεις (Brousseau, 1995˙ Cordier, 1991˙ Mrabet, 2006).

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ: Η ΕΡΕΥΝΑ

4. Κεφάλαιο 4: Μεθοδολογία της έρευνας

Η διεξαγωγή της παρούσας έρευνας κρίνεται σημαντική καθώς διαπιστώθηκε έλλειψη παρόμοιων ερευνών που αφορούν τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου μαθηματικών στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων.

Η έρευνα διεξήχθη σε εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας και πιο συγκεκριμένα σε εν ενεργεία μαθηματικούς, μόνιμους και αναπληρωτές. Η μέθοδος που επιλέχτηκε για τη διερεύνηση των υποθέσεων είναι η ποιοτική, καθώς στοχεύει στην διερεύνηση και την κατανόηση των απαντήσεων των συμμετεχόντων, που σχετίζονται με το 'Πώς;' και το 'Γιατί;' (Ισαρη & Πούρκος, 2015). Μέσω της έρευνας αυτής επιδιώχθηκε η εξέταση σε βάθος και η κατανόηση της διδακτικής εμπειρίας, τα βιώματα, η οπτική και οι ιστορίες του κάθε υποκειμένου πάνω στις διδακτικές ενότητες που ερευνήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα:

A. δόθηκε έμφαση στην υποκειμενικότητα των συμμετεχόντων, δηλαδή στο τι λένε και πώς το λένε δίνοντάς τους χρόνο και χώρο για να εκφραστούν ελεύθερα και
B. λήφθηκε υπόψη η ποικιλία των απαντήσεων των συμμετεχόντων (Ισαρη & Πούρκος, 2015˙ Παρασκευοπούλου – Κόλλια, 2008˙ Τσιώλης, 2013).

Σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει υποστηρίζεται ότι οι κανόνες εγκυρότητας (validity) και αξιοπιστίας (reliability) έχουν εφαρμογή μόνο σε ποσοτικές έρευνες (Cohen, Lawrence & Morrison, 2008). Ενώ η εγκυρότητα στην ποσοτική έρευνα στηρίζεται στη λογική και στα στατιστικά αποτελέσματα, στην παρούσα έρευνα ποιοτικού τύπου διασφαλίζεται μέσω της εξασφάλισης επαρκών πηγών για την πραγματοποίησή της, της επιλογής του κατάλληλου ερευνητικού εργαλείου και της χρήσης του κατάλληλου αντιπροσωπευτικού δείγματος (Cohen, Lawrence & Morrison, 2008˙ Robson, 2010). Οι ερωτήσεις, τόσο της συνέντευξης, όσο και του ερωτηματολογίου, δομήθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να απαντούν σε κάθε μία ερευνητική υπόθεση που τέθηκαν στο αρχικό στάδιο της έρευνας. Επιπλέον, για την αποφυγή κινδύνου μεροληψίας, που ενδέχεται να διακατέχει είτε την ερευνήτρια, είτε τους συμμετέχοντες, χρησιμοποιούνται η τριγωνοποίηση δεδομένων, δηλαδή η χρήση περισσότερων μεθόδων στη συλλογή των δεδομένων (συνέντευξη και ανάλυση και επεξεργασία έργων μέσω ερωτηματολογίου) (Robson, 2010˙ Τσιώλης, 2013). Όσον αφορά την αξιοπιστία της παρούσας έρευνας, υπογραμμίζεται ότι έχει διασφαλισθεί, καθώς και οι ερωτήσεις της συνέντευξης (Α’ μέρος εργαλείου) και τα έργα του ερωτηματολογίου (Β’ μέρος εργαλείου) είναι τμήματα εργαλείων ερευνών που έχουν διεξαχθεί στο παρελθόν από άλλους ερευνητές. Στην ποιοτική έρευνα η έμφαση δίνεται στην σταθερότητα – την προσεκτική απόδειξη και κατηγοριοποίηση των διαδικασιών για τη δημιουργία και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

4.1. Στόχος της έρευνας

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να μελετηθεί η γνώση περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου μαθηματικών πάνω στη ομοιότητα τριγώνων και το Θεώρημα του Θαλή. Πιο συγκεκριμένα:

- ✓ θα διερευνηθεί η διδακτική πρακτική που ακολουθούν οι μαθηματικοί,
- ✓ θα μελετηθεί η χρήση πρωτοτυπικών σχημάτων ή μη κατά τη διδασκαλία του Θεωρήματος,
- ✓ θα εξετασθεί κατά πόσο οι μαθηματικοί γνωρίζουν τα διαφορετικά είδη των λόγων που δημιουργούνται, καθώς επίσης και την ερμηνεία που δίνουν για κάθε έναν από αυτούς,
- ✓ θα μελετηθεί η ερμηνεία που δίνουν οι μαθηματικοί για τις παρανοήσεις των μαθητών πάνω στο Θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα.

4.2. Ερευνητικές υποθέσεις

Υ.1. Οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν την παραδοσιακή διδασκαλία τόσο στο θεώρημα του Θαλή όσο και την ομοιότητα τριγώνων.
Υ.2. Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα πρωτοτυπικά σχήματα για τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή.
Υ.3. Οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν να διακρίνουν τα διαφορετικά είδη των λόγων που δημιουργούνται στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα.
Υ.4. Οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τις παρανοήσεις των μαθητών που δημιουργούνται στην ομοιότητα τριγώνων.

4.3. Διαδικασία

Η έρευνα διεξήχθη είτε με φυσική παρουσία του υποκειμένου στο χώρο της ερευνήτριας ή σε χώρο που επέλεξε το ίδιο το υποκείμενο, είτε μέσω κάποιας ηλεκτρονικής πλατφόρμας (Skype, Messenger, Viber) λόγω δυσκολίας μετακίνησης τόσο του υποκειμένου όσο της ερευνήτριας. Πραγματοποιήθηκε κατά τους μήνες Μάιο, Ιούνιο και Ιούλιο του 2020. Η διάρκεια της κάθε συνέντευξης ήταν το ελάχιστο τα 60 λεπτά της ώρας. Το μόνο που γνώριζαν εκ των προτέρων τα υποκείμενα ήταν ότι θα συμμετέχουν σε μία έρευνα που πραγματοποιεί η ερευνήτρια στα πλαίσια του μεταπτυχιακού της προγράμματος με θέμα το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα σχημάτων.

Αφού η ερευνήτρια παρουσίασε τον εαυτό της και εξήγησε το σκοπό της έρευνας στα υποκείμενα, διαβεβαίωσε για την εχεμύθεια και ζήτησε την άδεια για μαγνητοφώνηση, πέρα των σημειώσεων που θα κρατούσε, ώστε να μπορεί να ερμηνεύσει τα γεγονότα και τις εμπειρίες τους όπως ακριβώς έχουν αυτά (Robson, 2010). Μέσα από το πρώτο μέρος της έρευνας, δηλαδή τη συνέντευξη, η ερευνήτρια κατάφερε να διεισδύσει βαθύτερα αποσπώντας από το υποκείμενο πληροφορίες και γνώσεις σχετικές με το αντικείμενο της έρευνας, τις προτιμήσεις και τις αξίες του για το τι του αρέσει και τι όχι πάνω στο συγκεκριμένο θέμα και τέλος, τις αντιλήψεις και τις απόψεις του για το τι ακριβώς σκέφτεται και πως αισθάνεται όταν διδάσκει αυτή τη συγκεκριμένη ενότητα (Παρασκευοπούλου – Κόλλια, 2008).

Μετά το πέρας της συνέντευξης, σε δεύτερη φάση, δόθηκε στο κάθε υποκείμενο ένα ερωτηματολόγιο το οποίο αποτελείται από μία σειρά έργων προς επεξεργασία και απάντηση. Η διάρκεια απάντησης του κάθε ερωτηματολογίου ήταν το ελάχιστο τα 45 λεπτά της ώρας. Τα έργα αυτά ήταν σχετικά με τα σχήματα που χρησιμοποιούν κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή, πόσα είδη λόγων γνωρίζουν που σχετίζονται με το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων και τέλος ποιες ερμηνείες μπορούν να δώσουν σε συστηματικά λάθη που κάνουν οι μαθητές πάνω στις έννοιες αυτές. Οι ερωτήσεις ήταν ανοιχτού τύπου επιτρέποντας την αναλυτικότερη απάντηση και διευκρινίζοντας πτυχές της ερώτησης με τέτοιο τρόπο ο οποίος δε θα ήταν δυνατόν να απαντηθεί με ερωτηματολόγιο άλλης μορφής. Επί πρόσθετα, από τη στιγμή που κάθε απάντηση εμπεριέχει το προσωπικό ύφος σε συνδυασμό με τις προσωπικές γνώσεις του εκάστοτε υποκειμένου διατηρεί αναλλοίωτο το προσωπικό του ύφος (Cohen et al., 2008).

4.4. Δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν 13 μαθηματικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ηλικίας 28 έως 65 ετών. Η στρατηγική δειγματοληψίας που εφαρμόστηκε στην παρούσα έρευνα ήταν βολική δειγματοληψία που βασίστηκε σε τρία κριτήρια (δειγματοληψία κριτηρίων). Πιο συγκεκριμένα, βασική προϋπόθεση συμμετοχής στην έρευνα ήταν:

- ✓ το δείγμα να αποτελείται από εκπαιδευτικούς που έχουν διδάξει σε σχολεία, είτε ως μόνιμοι είτε ως αναπληρωτές,
- ✓ το δείγμα να αποτελείται από εκπαιδευτικούς που έχουν διδάξει το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα και
- ✓ τα υποκείμενα να μην γνωρίζονται μεταξύ τους για την αποφυγή διαρροής των ερωτήσεων και επανάληψης των απαντήσεων.

Από τα 20 υποκείμενα που δήλωσαν εθελοντικά συμμετοχή στην έρευνα επιλέχθηκαν τα 13, καθώς αυτά πληρούσαν τις βασικές προϋποθέσεις συμμετοχής που αναφέρθηκαν παραπάνω (Cohen et al., 2008˙ Ίσαρη & Πουρκός, 2015˙ Robson, 2010).

4.5. Εργαλείο συλλογής ερευνητικών δεδομένων και μέθοδος επεξεργασίας τους

Για να ερευνηθούν οι παραπάνω υποθέσεις επιλέχθηκε ως ερευνητική μέθοδος:

Α. η συνέντευξη, η οποία αποτελεί ένα από βασικότερα εργαλεία μιας έρευνας ποιοτικού τύπου (Παρασκευοπούλου – Κόλλια, 2008) και

Β. το ερωτηματολόγιο ανοιχτού τύπου ερωτήσεων (Cohen et al., 2008).

Για το πρώτο μέρος της έρευνας, συντάχθηκαν ερωτήσεις οι οποίες εκμαιεύτηκαν από έρευνα που πραγματοποιήθηκε για να μελετηθεί η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου δύο εκπαιδευτικών στην Ισπανία (Escudero & Sanchez, 2007, σελ. 317). Το πρώτο μέρος της έρευνας αφορά την πρώτη ερευνητική υπόθεση. Για το δεύτερο μέρος της έρευνας, χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο που αποτελούνταν από 4 έργα. Τα έργα αυτά, ομοίως πάρθηκαν από έρευνες που ήδη έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν και έχουν αναφερθεί λεπτομερώς στη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα:

- ✓ Έργο 1 (ΒΕ1): Πάρθηκε από την έρευνα των Cordier (1991) (σελ. 51-52) και αφορά την δεύτερη ερευνητική υπόθεση.
- ✓ Έργο 2 (ΒΕ2): Πάρθηκε από την έρευνα του Λεμονίδη (1992) (σελ. 9-10) και αφορά την τρίτη ερευνητική υπόθεση.
- ✓ Έργο 3 (ΒΕ3): Πάρθηκε από την έρευνα του Chazan (1988) (σελ. 55-56) και αφορά την τέταρτη ερευνητική υπόθεση.

- ✓ Έργο 4 (ΒΕ4): Πάρθηκε από τις έρευνες των Chazan (1988) (σελ.16) και Τσικοπούλου και Φερεντίνου (2018) (σελ.39-40) και αφορά, επίσης, την τέταρτη ερευνητική υπόθεση.

Σε καμία περίπτωση δεν επιδιώχθηκε η ανάδειξη της καλής ή της κακής γνώσης των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα. Εξετάστηκε το πως ενσωματώνουν οι εκπαιδευτικοί τις γνώσεις που διακατέχουν πάνω στις ενότητες του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους.

Η συνέντευξη αποτελείται από 10 ερωτήσεις ανοιχτού τύπου. Οι ερωτήσεις αυτές είναι ερωτήσεις μέσω των οποίων η ερευνήτρια ήθελε να αντλήσει πληροφορίες σχετικές με την εμπειρία του κάθε συμμετέχοντα πάνω στο αντικείμενο μελέτης, ερωτήσεις περιγραφικές για τον τρόπο και τις μεθόδους διδασκαλίας, καθώς επίσης και ερωτήσεις συναισθημάτων (βλ. Παράρτημα Α).

Η *πρώτη* ερώτηση της συνέντευξης αφορά τα έτη διδασκαλίας των ενοτήτων του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας από τους συμμετέχοντες μαθηματικούς.

Οι επόμενες ερωτήσεις σχετίζονται κυρίως με τον τρόπο διδασκαλίας και διεξαγωγής του μαθήματος. Πιο συγκεκριμένα, στην *δεύτερη* ερώτηση ζητείται από τα υποκείμενα να δώσουν το πλάνο του μαθήματος, δηλαδή ένα οργανόγραμμα. Στόχος αυτής της ερώτησης είναι να μελετηθεί η επιστημονική θεωρία που βασίζεται το οργανόγραμμα του κάθε υποκειμένου. Στη συνέχεια, στην *τρίτη* ερώτηση τα υποκείμενα πρέπει να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιούν το μάθημα και τον τρόπο με τον οποίο συνεργάζονται ή όχι με τους μαθητές τους.

Στην ερώτηση που ακολουθεί οι εκπαιδευτικοί καλούνται να δώσουν τις σημαντικότερες ιδέες της διδακτικής αυτής ενότητας, ιδέες που πιστεύουν ότι πληρούν βασικό εφόδιο για τη διδασκαλία των μαθητών τους. Η *πέμπτη* ερώτηση έχει να κάνει με το πόσες μέρες, δηλαδή πόσες διδακτικές ώρες χρειάζεται το κάθε υποκείμενο για να ολοκληρώσει αυτή τη διδακτική ενότητα.

Ακολουθούν δύο ερωτήσεις, η *έκτη* και η *έβδομη*, που σχετίζονται με τους στόχους που θέτει ο κάθε εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία του θεωρήματος και της ομοιότητας, γιατί τους θέτει αυτούς τους στόχους και με ποιον τρόπο σκοπεύει να τους πετύχει. Στην ερώτηση *οκτώ*, ζητείται από τους εκπαιδευτικούς να σχολιάσουν τη σειρά παρουσίασης των μαθημάτων της ενότητας αυτής. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι στο σχολικό εγχειρίδιο διδάσκεται πρώτα το θεώρημα του Θαλή και στη συνέχεια η ομοιότητα σχημάτων και τριγώνων, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2 (βλ. Κεφ. 2.4).

Η *ένατη* ερώτηση αποσκοπεί στην αποκρυπτογράφηση των συναισθημάτων των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια διδασκαλίας των ενοτήτων αυτών. Η συνέντευξη ολοκληρώνεται με τη *δέκατη* ερώτηση, μία ερώτηση ελεύθερη για τυχών δηλώσεις και παρατηρήσεις που έχουν να κάνουν ή να συμπληρώσουν οι εκπαιδευτικοί.

Μετά το πέρας της συνέντευξης, όπως ήδη έχει αναφερθεί, ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να επεξεργαστούν και να απαντήσουν μία σειρά από έργα. Το *πρώτο έργο* αφορά την δεύτερη ερευνητική υπόθεση της ερευνήτριας, κατά πόσο δηλαδή οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν πρωτοτυπικά σχήματα ή όχι κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους. Πιο συγκεκριμένα, το *πρώτο έργο* αποτελεί μία σχεδιαστική άσκηση καθώς ζητείται από τους εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν, οι ίδιοι, γεωμετρικά σχήματα τα οποία χρησιμοποιούν στην τάξη για το μάθημα του θεωρήματος του Θαλή.

Το *δεύτερο έργο* έχει να κάνει με τα διάφορα είδη των λόγων που εμφανίζονται μεταξύ των τμημάτων σε δύο σχήματα που χρησιμοποιούνται και στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων. Το έργο αυτό σχετίζεται με την τρίτη ερευνητική υπόθεση, δηλαδή στο κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν ή όχι τα διάφορα είδη των λόγων και τον συμβολισμό τους.

Το δεύτερο μέρος της έρευνας ολοκληρώνεται με τα έργα *τρία* και *τέσσερα,* τα οποία στοχεύουν στην εκμαίευση όσο των δυνατών περισσότερων ερμηνειών για τα συστηματικά λάθη και τις παρανοήσεις που παρουσιάζουν οι μαθητές πάνω στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων. Στο *τρίτο έργο* ζητείται από τους εκπαιδευτικούς να δώσουν τη δική τους ερμηνεία στις χαμηλές επιδόσεις των μαθητών στην αναγνώριση όμοιων τριγώνων και πόσο μάλλον ορθογωνίων τριγώνων και να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα τους το εξηγούσαν οι ίδιοι ώστε να το κατανοήσουν καλύτερα. Τέλος, το *τέταρτο έργο* σχετίζεται καθαρά με τη μη κατανόηση κατασκευής και δημιουργίας όμοιων ορθογώνιων τριγώνων. Έτσι, στο έργο αυτό το κάθε υποκείμενο καλείται να ερμηνεύσει τα πιθανά λάθη των μαθητών και να εξηγήσει τους λόγους που πιστεύει ότι ωθούν τους μαθητές σε αυτά τα λάθη.

Η μέθοδος ανάλυσης και επεξεργασίας των δεδομένων που συλλέχθηκαν είναι η ανάλυση περιεχομένου. Ωστόσο, για την ανάλυση τόσο των δημογραφικών στοιχείων, όσο και τον υπολογισμό ποσοστών επανάληψης των σχηματικών αναπαραστάσεων που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Statistical Package for the Social Sciences (SPSS Statistics). Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύονται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματιστεί μία ολοκληρωμένη εικόνα. Μέσα από τις απομαγνητοφωνήσεις και τις σημειώσεις κατά τη διάρκεια της συνέντευξης και της συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου αποκωδικοποιούνται οι προσωπικές απαντήσεις του κάθε υποκειμένου και αναζητάτε η συμπεριφορά και η εμπειρία των υποκειμένων. Τα συμπεράσματα στηρίζονται αποκλειστικά και μόνο στην ανάλυση των απομαγνητοφωνήσεων και των γραπτών ή προφορικών απαντήσεών τους στις ερωτήσεις τόσο της συνέντευξης όσο και του ερωτηματολογίου (Παρασκευοπούλου – Κόλλια, 2008). Τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα εξετάστηκαν ολιστικά μετά από συστηματική ανάγνωση. Για την καλύτερη εμβάθυνση στα δεδομένα έγινε προσπάθεια κωδικοποίησης των απαντήσεων καθώς επίσης ταξινόμησης και ομαδοποίησης των απαντήσεων των υποκειμένων (Cohen et al., 2008˙ Ίσαρη & Πουρκός, 2015˙ Τσιώλης, 2018). Οι άξονες της κωδικοποίησης των απαντήσεων είναι:

* Η Διδασκαλία
* Οι Διδακτικοί στόχοι
* Τα Συναισθήματα
* Οι Σχηματικές αναπαραστάσεις
* Τα είδη των λόγων
* Η Ερμηνεία λαθών

Με βάση αυτή την κωδικοποίηση ακολουθεί η παρουσίαση και η ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτής της έρευνας.

5. Κεφάλαιο 5: Αποτελέσματα

5.1. Πληροφορίες για το δείγμα

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, βασική προϋπόθεση συμμετοχής στην έρευνα ήταν το δείγμα να αποτελείται από εκπαιδευτικούς που έχουν διδάξει σε σχολεία, είτε ως μόνιμοι είτε ως αναπληρωτές και να έχουν διδάξει το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα. Από τους 13 συμμετέχοντες 7 ήταν γυναίκες και 6 άνδρες. Όλοι τους είναι ενεργοί εκπαιδευτικοί σε δημόσια γυμνάσια της Μακεδονίας και της Ηπείρου. Από αυτούς, 8 είναι αναπληρωτές και οι υπόλοιποι 5 είναι μόνιμοι εκπαιδευτικοί. Ο μέσος όρος χρόνων διδασκαλίας των εκπαιδευτικών σε αυτές της ενότητες είναι τα 9,54 έτη, με ακραίες τιμές το 1 έτος και τα 40 έτη διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, 8 εκπαιδευτικοί διδάσκουν 1 – 5 έτη, 3 εκπαιδευτικοί διδάσκουν 11 – 15 έτη και 2 πάνω από 20 (1 διδάσκει 24 έτη κι ένας 40).

Έτη	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**
1-5	8	61,54
11-15	3	23,07
21-25	1	7,69
36-40	1	7,69
Σύνολο	13	100,0

Πίνακας 4: Έτη υπηρεσίας του δείγματος

5.2. Διδασκαλία

(ΕΑ2): Μπορείτε να δώσετε το πλάνο του μαθήματος (οργανόγραμμα μαθήματος);

Μετά την ομαδοποίηση των απαντήσεων σε αυτή την ερώτηση παρατηρήθηκε ότι τα οργανογράμματα των εκπαιδευτικών παρουσιάζουν 2 διαφορετικά μοτίβα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

1. Παρουσίαση θεωρίας από τον εκπαιδευτικό
   - Είτε με επανάληψη προηγούμενων γνώσεων είτε όχι.
   - Είτε με ιστορική αναφορά στο έργο και τη ζωή του Θαλή και
   - Πρακτική εξάσκηση
2. Ανακάλυψη της θεωρίας από τους μαθητές

- Είτε με επανάληψη προηγούμενων γνώσεων είτε όχι.
- Είτε με ιστορική αναφορά στο έργο και τη ζωή του Θαλή και
- Πρακτική εξάσκηση

Από τους 13 μαθηματικούς, οι 11 ακολουθούν το $1^{ο}$ μοτίβο, ενώ μόνο 2 μαθηματικοί ακολουθούν το $2^{ο}$.

Παρουσίαση θεωρίας (11)

- Επανάληψη ή όχι
- Ιστορική αναφορά ή όχι
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ανακάλυψη θεωρίας (2)

- Επανάληψη ή όχι
- Ιστορική αναφορά ή όχι
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πίνακας 5: Οργανογράμματα μαθημάτων

Σε όλες τις περιπτώσεις η επανάληψη που κάνουν οι μαθηματικοί αφορά τους λόγους, την αναλογία και τις ιδιότητές της, τις εξισώσεις α' και β' βαθμού και τις ιδιότητες παράλληλων ευθειών που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία. Πιο συγκεκριμένα, από τους 6 μαθηματικούς που αφιερώνουν χρόνο σε επανάληψη προηγούμενων εννοιών, 2 είναι αυτοί που κάνουν επανάληψη στις αναλογίες και τις ιδιότητές τους, ένας κάνει επανάληψη στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας, ένας στις ιδιότητες των αναλογιών, των παραλλήλων και στις εξισώσεις α' και β' βαθμού, ένας ακόμη αφιερώνει χρόνο για επανάληψη στις ιδιότητες των αναλογιών και στις εξισώσεις α' και β' βαθμού και ένας τόσο στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας όσο και στις ιδιότητες των αναλογιών και των παραλλήλων.

Από τις απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτό το ερώτημα διαπιστώθηκε πως 2 εκπαιδευτικοί ισχυρίζονται πως τονίζουν τη χρησιμότητα του θεωρήματος του Θαλή. Λέγοντας χρησιμότητα αναφέρονται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό μηκών. Επιπλέον, 2 είναι αυτοί οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι προσπαθούν να εξηγήσουν στους μαθητές τους ότι υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ ισότητας και ομοιότητας. Τέλος, 2 είναι οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι εκτός από τα παραδείγματα και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου χρησιμοποιούν και παραδείγματα της καθημερινότητας ώστε να γίνεται πιο αντιληπτή και κατανοητή η αφηρημένη έννοια που διδάσκονται οι μαθητές.

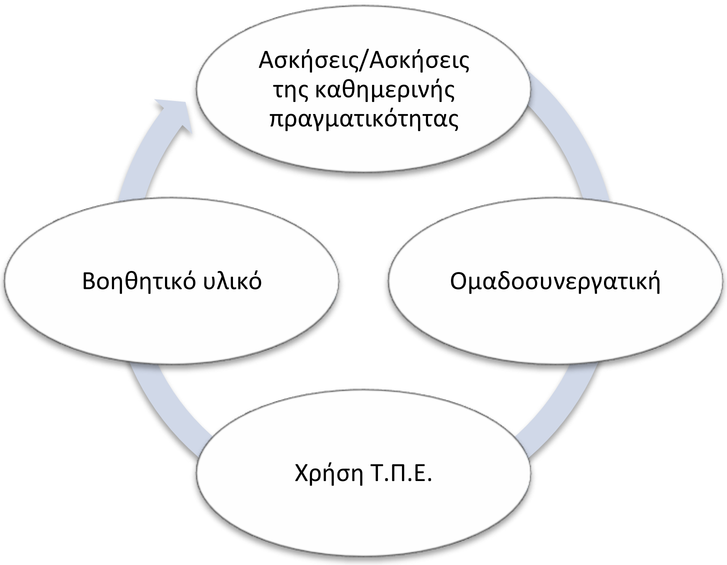
Σύμφωνα με τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, οι πλειοψηφία ακολουθεί το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, καθώς αυτοί είναι που παρουσιάζουν τη θεωρία στους μαθητές προσφέροντάς τους 'έτοιμες' γνώσεις, χρησιμοποιώντας τες στη συνέχεια για την επίλυση ασκήσεων. Τις περισσότερες φορές οι μαθητές απλά εφαρμόζουν μία κατάσταση χωρίς να την έχουν κατανοήσει σε βάθος για το λόγο ότι ειπώθηκε από τον καθηγητή, άρα ισχύει. Επιπλέον, φαίνεται πως με την πρακτική εξάσκηση μέσω των ασκήσεων οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να πετύχουν την εξάσκηση της μνήμης και την αποστήθιση των νέων εννοιών χωρίς να δίνουν έμφαση στην κατανόηση και τη δημιουργική έκφραση.

(ΕΑ3): Πώς σκοπεύετε να πραγματοποιήσετε το μάθημα και να εργαστείτε με τους μαθητές σας;

Από τις απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτή την ερώτηση γίνεται αντιληπτό το γεγονός πως η διδακτική πρακτική και των 13 εκπαιδευτικών περιστρέφεται γύρω από την επίλυση ασκήσεων. Οι 11 από τους 13 εφαρμόζουν ασκήσεις και παραδείγματα αφού πρώτα παρουσιάσουν τη θεωρία, ενώ 2 είναι αυτοί που αφήνουν τους μαθητές να ανακαλύψουν μέσα από τα παραδείγματα τη θεωρία του μαθήματος.

Πέρα του ότι οι εκπαιδευτικοί στηρίζονται στην ασκησιολογία της θεωρίας, φάνηκε από τις απαντήσεις τους ότι προσπαθούν με διάφορους τρόπους να σπάσουν τη μονοτονία της απλής επίλυσης ασκήσεων. Οι τρόποι που ανέφεραν είναι:

1. Επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, βιωματικά ή όχι,
2. Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία,
3. Χρήση ΤΠΕ και λογισμικών (ppt, υπολογιστής, διαδραστικός πίνακας, βίντεο),
4. Χρήση βοηθητικού υλικού (χρώματα, κλιμακωτά τερταγωνισμένο χαρτί),



Διάγραμμα 2: Μέσα διεξαγωγής μαθήματος

Έτσι λοιπόν, πέρα του ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί, πάνω στη θεωρία της ενότητας, εφαρμόζουν παραδείγματα και ασκήσεις, 4 ανέφεραν ότι οι ασκήσεις και τα παραδείγματα που χρησιμοποιούν συνδέονται με την καθημερινότητα δίνοντας τη δυνατότητα στους μαθητές *«να δουν ότι τα μαθηματικά είναι πιο κοντά στην πραγματική ζωή από ότι πιστεύουν αυτά»*. Μάλιστα, ένας από τους εκπαιδευτικούς που εντάσσει την καθημερινότητα στις ασκήσεις του ανέφερε και μία βιωματική άσκηση που κάνει με τους μαθητές του.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 4): *«…Πολλές φορές τους κάνω και το πρόβλημα της σκιάς βγάζοντάς τους στην αυλή, αν φυσικά μας το επιτρέπει και ο καιρός…».*

Η θεωρία της βιωματικής μάθησης έχει ως στόχο να φέρει το μαθητή σε επαφή με το αντικείμενο που μελετά και τον βοηθά να επεξεργαστεί τη γνώση αυτή που προέρχεται από την πρακτική ενασχόλησή του. Ο μαθητής, με τη μέθοδο αυτή, δεν είναι παθητικός δέκτης αλλά ενεργό υποκείμενο που με τις πράξεις του διαμορφώνει τη γνωστική του πραγματικότητα. Οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι εντάσσουν βιωματικές καταστάσεις στα πλαίσια των σχολικών δραστηριοτήτων φαίνεται πως ταυτίζονται με εκείνον τον ρόλο του σχολείου που θέλει να ενεργοποιήσει τους μαθητές ώστε να είναι ικανοί και να μπορούν να αντιμετωπίσουν καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής (Χρυσαφίδης, 1994). Όπως φαίνεται, όμως, από τις περιγραφές των εκπαιδευτικών, ελάχιστοι είναι αυτοί που φεύγουν από τα όρια του βιβλίου και προσπαθούν να εντάξουν τις μαθηματικές έννοιες στην καθημερινή ζωή των μαθητών.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 6): *«...Για την ομοιότητα, τις πιο πολλές φορές, με βιωματικό τρόπο καταλαβαίνουν ότι έχουμε να κάνουμε με μεγέθυνση και σμίκρυνση. Τι εννοώ: κόβουμε τρίγωνα και άλλα σχήματα και διαπιστώνουμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και οι πλευρές ανάλογες».*

Από τα όσα ανέφεραν οι εκπαιδευτικοί, τέσσερις ισχυρίστηκαν ότι επιδιώκουν την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, καθώς με την ομαδική δουλειά επιτυγχάνεται η αλληλοσυμπλήρωση και η ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των μαθητών. Οι μορφές των ομάδων που ορίζουν οι εκπαιδευτικοί είναι είτε ομάδες των δύο μελών είτε των τεσσάρων. Όπως φαίνεται από τα λεγόμενά τους, αφού πρώτα ενημερώσουν τις ομάδες για το διδακτικό αντικείμενο, οι μαθητές συνεργάζονται βοηθώντας ο ένας τον άλλο και δουλεύουν πάνω σε δραστηριότητες με στόχο την κατανόηση της νέας μαθηματικής έννοιας.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 4): *«Χωρίζω σε ομάδες τα παιδιά. Σίγουρα βοηθάει αυτό, γιατί το ένα συμπληρώνει το άλλο και ανταλλάσσουν ιδέες έτσι. Κάποιο μπορεί να θυμάται κάτι παραπάνω από κάποιο άλλο. Βέβαια αυτό δεν πετυχαίνει πάντα…».*

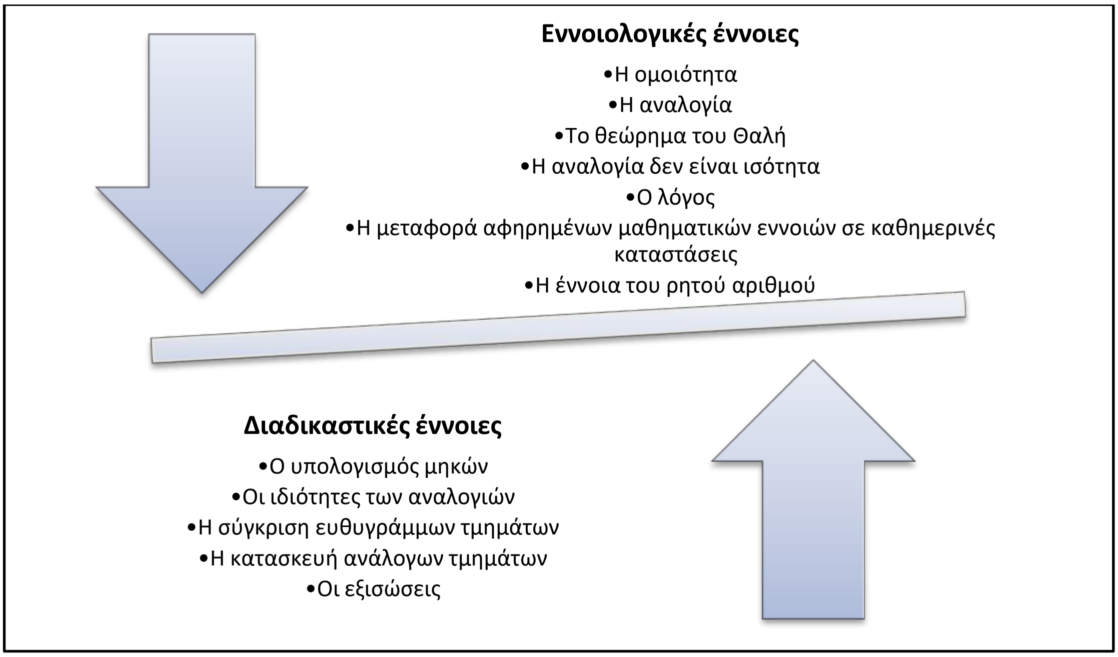
Τέλος, 4 δήλωσαν πως χρησιμοποιούν νέες τεχνολογίες κατά τη διδασκαλίας τους, όπως ηλεκτρονικό υπολογιστή, λογισμικά, Power Point, ή ακόμα και διαδραστικούς πίνακες όταν αυτοί είναι διαθέσιμοι, και 3 εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν βοηθητικό υλικό, όπως διαφορετικά χρώματα και κλιμακωτά τερταγωνισμένο χαρτί.

Η χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας δίνει στο μαθητή τη δυνατότητα να συνεργαστεί με τους συμμαθητές του, να δημιουργήσει σχήματα, να υποθέσει και να φτάσει στην κατάκτηση της νέας γνώσης. Επίσης η δυνατότητα ανάδρασης ώστε να ελέγχεται αμέσως π.χ. η ισότητα δύο τμημάτων ή η ισότητα γωνιών, είναι κάτι που κάνει τέτοιου είδους λογισμικά απαραίτητα πλέον εργαλεία στην εκπαίδευση.

(ΕΑ4): Ποιες θεωρείτε τις πιο σημαντικές ιδέες σε αυτή την διδακτική ενότητα;

Στο ερώτημα αυτό οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν κυρίως σε μαθηματικές έννοιες που εφαρμόζονται κατά κύριο λόγο για την επίλυση ασκήσεων, τόσο αλγεβρικών όσο και γεωμετρικών. Οι έννοιες αυτές είναι κατηγοριοποιήθηκαν όσον αφορά τον εννοιολογικό και διαδικαστικό τους χαρακτήρα. Πιο συγκεκριμένα:

1. Έννοιες εννοιολογικού χαρακτήρα (12)
   - Η ομοιότητα
   - Η αναλογία
   - Το θεώρημα του Θαλή
   - Η αναλογία δεν είναι ισότητα
   - Ο λόγος
   - Η μεταφορά αφηρημένων μαθηματικών εννοιών σε καθημερινές καταστάσεις
   - Η έννοια του ρητού αριθμού
2. Έννοιες διαδικαστικού χαρακτήρα (5)
   - Ο υπολογισμός μηκών
   - Οι ιδιότητες των αναλογιών
   - Η σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων
   - Η κατασκευή ανάλογων τμημάτων
   - Οι εξισώσεις



Διάγραμμα 3: Οι σημαντικότερες ιδέες της ενότητας

Οι εκπαιδευτικοί είτε ανέφεραν μόνο έννοιες εννοιολογικής κατανόησης, είτε μόνο διαδικαστικής κατανόησης είτε συνδυασμό και των δύο κατανοήσεων. Από την ομαδοποίηση των απαντήσεων σε αυτή την ερώτηση φαίνεται πως οι πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρεί σημαντικότερη την εννοιολογική κατανόηση, καθώς 12 από τους 13 εκπαιδευτικούς ανέφεραν έννοιες με εννοιολογικό χαρακτήρα. 5 ήταν μόνο οι εκπαιδευτικοί που ανέφεραν και έννοιες με διαδικαστικό χαρακτήρα. Πιο συγκεκριμένα, 8 εκπαιδευτικοί ανέφεραν μόνο έννοιες εννοιολογικής κατανόησης, ένας ανέφερε μόνο διαδικαστικής κατανόησης, ενώ 4 ήταν οι εκπαιδευτικοί που ανέφεραν συνδυασμό και των δύο κατανοήσεων.

6 από τους 13 εκπαιδευτικούς θεωρούν σπουδαιότερη έννοια αυτή της ομοιότητας καθώς είναι η μόνη που εμφανίζεται στην καθημερινότητά μας.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 1): *«Όλα είναι σπουδαία σε αυτή την ενότητα. Πιστεύω, όμως, πως την ομοιότητα θα έλεγα, επειδή εμφανίζεται πιο συχνά στην καθημερινότητα, το ζουμ, το ξεζουμ, άρα πρέπει να δίνεται μεγαλύτερη έμφαση σε αυτήν».*

Τέσσερις θεωρούν την αναλογία σπουδαία έννοια, ενώ δύο θεωρούν το θεώρημα του Θαλή, δύο τον υπολογισμό των μηκών και δύο ότι η αναλογία δεν είναι ισότητα. Την έννοια του λόγου, τις ιδιότητες των αναλογιών, τη σύγκριση των ευθυγράμμων τμημάτων, την κατασκευή ανάλογων τμημάτων, τις εξισώσεις και τη μεταφορά αφηρημένων μαθηματικών εννοιών σε καθημερινές καταστάσεις ανέφερε κάθε φορά ένας εκπαιδευτικός. Όλα τα παραπάνω, θεωρούνται σημαντικά από τους εκπαιδευτικός γιατί χωρίς την κατανόησή τους οι μαθητές δεν μπορούν να λύνουν ασκήσεις, όπως ανέφερε χαρακτηριστικά ένας εκπαιδευτικός

Απόσπασμα (Υποκείμενο 2): *«Σημαντικό θεωρώ μια καλή επανάληψη στις ιδιότητες που ανέφερα και μία ευρεία επανάληψη στις εξισώσεις α' και β' βαθμού, γιατί στην ουσία και το θεώρημα του Θαλή και η ομοιότητα έχουν να κάνουν με λόγους και εξισώσεις».*

Οι μαθηματικές ιδέες έχουν δημιουργηθεί με στόχο να λειτουργούν ως εργαλεία οργάνωσης τόσο του φυσικού όσο και του νοητικού κόσμου. Ωστόσο, ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται στο σχολείο δε φανερώνει το λόγο ύπαρξής τους. Οι μισοί εκπαιδευτικοί με τον τρόπο διδασκαλίας τους προσπαθούν να φανερώσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή. Κι αυτός είναι ο λόγος που πολλοί μαθητές όταν ρωτούνται για τη χρησιμότητα των μαθηματικών, έξω από τα πλαίσια του σχολείου, αναφέρονται σε συνηθισμένες και μη πρωτότυπες εφαρμογές.

(ΕΑ5): Πόσες μέρες χρειάζεστε για την ολοκλήρωση της ενότητας;

Σε αυτή την ερώτηση οι εκπαιδευτικού έδωσαν απάντηση με βάση τις διδακτικές ώρες παράδοσης. Κατά μέσο όρο διαθέτουν για τη διδασκαλία αυτών των εννοιών είναι 8,04 διδακτικές ώρες. Πιο συγκεκριμένα, 4 στους 13 εκπαιδευτικοί διαθέτουν από 5 έως 7 διδακτικές ώρες, ενώ οι υπόλοιποι 9 εκπαιδευτικοί διαθέτουν από 8 έως 10 διδακτικές ώρες.

Σε όλες τις περιπτώσεις φαίνεται πως το επίπεδο των μαθητών επηρεάζει την εκπαιδευτική πρακτική του κάθε εκπαιδευτικού, καθώς και οι 13 εκπαιδευτικοί ανέφεραν πως είτε ο χρόνος είτε το περιεχόμενο και ο τρόπος διδασκαλίας προσαρμόζονται στις απαιτήσεις των μαθητών.

Διδακτικές ώρες	**Συχνότητα**
5-7	4
8-10	9
Σύνολο	13

Πίνακας 6: Διδακτικές ώρες διδασκαλίας ενότητας

(ΕΑ8): Πώς σχολιάζετε την σειρά που παρουσιάζονται τα μαθήματα της ενότητας αυτής στο σχολικό εγχειρίδιο;

Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων σε αυτή την ερώτηση ομαδοποιήθηκαν ως εξής:

I. Από το γενικό στο ειδικό: Έξι από τους 13 εκπαιδευτικούς θεωρούν ικανοποιητική/ορθή/καλή τη σειρά παρουσίασης των μαθημάτων της ενότητας αυτής στο σχολικό εγχειρίδιο καθώς δεν αντιμετωπίζουν προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών που να οφείλονται στη σειρά διδασκαλίας τους.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 13): *«Καλή είναι. Δεν αντιμετωπίζω κάποια προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών που να οφείλονται στη σειρά παρουσίασής τους».*

II. Από το ειδικό στο γενικό: Έξι από τους 13 εκπαιδευτικούς δήλωσαν ότι η σειρά των μαθημάτων είναι ανάποδη θεωρώντας πιο φρόνιμο να γίνεται πρώτα η ομοιότητα και έπειτα το θεώρημα του Θαλή γιατί, είτε οι αναλογίες προσεγγίζονται πιο εύκολα μέσω της ομοιότητας, είτε γιατί μέσω της ομοιότητας επιτυγχάνεται καλύτερα η εμπειρική κατανόηση των μαθητών, είτε γιατί η ομοιότητα γίνεται πιο εύκολα αντιληπτή σε σχέση με το θεώρημα του Θαλή.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 6): *«Α! Νομίζω πως αν ήταν πρώτα η ομοιοθεσία, που δε διδάσκεται, και η ομοιότητα και μετά το θεώρημα του Θαλή θα ήταν καλύτερα. Είμαι της άποψης να πηγαίνουμε από το ειδικό στο γενικό. Πρώτα το πιο αντιληπτό από τους μαθητές και μετά το γενικό και αόριστο θεώρημα».*

III. Ταυτόχρονη διδασκαλία: Ένας εκπαιδευτικός ανέφερε πως θα προτιμούσε να διδάσκει τις δύο αυτές έννοιες ταυτόχρονα.

Όπως φαίνεται, οι εκπαιδευτικοί σε αυτή την ερώτηση διχάστηκαν. Οι μισοί σχεδόν υποστήριξαν πως είναι σωστό σε αυτό το κεφάλαιο που οι έννοιες παρουσιάζονται από το γενικό/αφηρημένο (θεώρημα του Θαλή) στο ειδικό (ομοιότητα). Η ομοιότητα είναι μία μαθηματική έννοια που μπορεί να συνδεθεί πιο εύκολα με τους μαθητές, καθώς οι λέξεις σμίκρυνση και μεγέθυνση τους είναι οικείες. Έτσι, οι άλλοι μισοί εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι οι μαθητές θα κατανοούσαν καλύτερα τις έννοιες αυτές εάν δίδασκαν το πιο ειδικό (ομοιότητα) και οικείο προς αυτούς κι έπειτα το πιο γενικό (θεώρημα του Θαλή).

5.3. Οι διδακτικοί στόχοι που θέτουν οι εκπαιδευτικοί

(ΕΑ6): Ποιοι είναι οι σημαντικότεροι στόχοι σας και γιατί;

Πριν γίνει η ομαδοποίηση και η ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών, μελετήθηκαν οι γνωστικοί στόχοι που είναι διατυπωμένοι στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, οι οποίοι παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β.

Οι στόχοι που διατυπώθηκαν από τους εκπαιδευτικούς σε αυτό το ερώτημα παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλομορφία. Κατά μέσο όρο ο κάθε εκπαιδευτικός ανέφερε 2,38 διδακτικούς στόχους. Ωστόσο, ομαδοποιήθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν σε

- Γνωστικούς στόχους (13)
- Ψυχοκινητικούς στόχους (4)
- Συναισθηματικούς στόχους (1)

Όλοι οι εκπαιδευτικοί θέτουν γνωστικούς στόχους. Αυτοί είναι ο υπολογισμός μηκών, η διατύπωση του θεωρήματος του Θαλή, ο ορισμός της ομοιότητας και η έννοια του λόγου ομοιότητας, η κατανόηση και ερμηνεία αναλογιών, η σωστή γραφή των λόγων, η κατανόηση των ανάλογων πλευρών, ο συνδυασμός γνώσεων, παλαιότερων και νέων και η κατανόηση ρητών και άρρητων μέσω της ασυμμετρίας των ευθυγράμμων τμημάτων.

Οι εκπαιδευτικοί επιδιώκουν την κατανόηση της θεωρίας μέσα από ασκήσεις. Οι ασκήσεις που δίνονται επιδιώκουν τη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Ψυχοκινητικούς στόχους θέτουν 4 εκπαιδευτικοί. Μέσω της ομαδοσυνεργατικής και βιωματικής μάθησης οι εκπαιδευτικοί στοχεύουν στην ενεργή συμμετοχή και τη συνεργασία των μαθητών τους. Επιπλέον στοχεύουν στη γενίκευση των ιδιοτήτων της ενότητας σε σύνθετες αναπαραστάσεις, μετά από πολλές δοκιμές και επαναλήψεις.

Συναισθηματικούς στόχους θέτει μόνο ένας εκπαιδευτικός. Μέσα από τη διδασκαλία του στοχεύει στην πρόκληση και ανάπτυξη του ενδιαφέροντος για την γεωμετρία και την εφαρμογή της στην καθημερινότητα ώστε *«…να μην είναι οι μαθητές ξένοι με το μάθημα»*.

Ωστόσο, αν και ήταν μόνο δύο οι εκπαιδευτικοί που είπαν ότι ακολουθούν το βιβλίο του εκπαιδευτικού, από τις απαντήσεις που δόθηκαν φάνηκε πως τέσσερις στόχοι που αναφέρθηκαν είναι στόχοι από το βιβλίο του εκπαιδευτικού.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 4): *«…θέλω να δείξω στα παιδιά και να κατανοήσουν πως τα μαθηματικά είναι μία αλυσίδα γνώσεων. Δεν έμαθα έναν ορισμό και τέλος. Θα τον συναντήσω ξανά και ξανά. Τα μαθηματικά είναι εκεί έξω και μας περιμένουν. Κάθε βήμα που κάνουμε πέφτουμε πάνω σε κάτι που μαθαίνουμε στο σχολείο».* Ουσιαστικά, οι πλειοψηφία των εκπαιδευτικών έχει ως σημείο αναφοράς την επίλυση ασκήσεων.

(ΕΑ7): Πώς σκοπεύετε να τους πετύχετε;

Το παραπάνω ερώτημα σχετίζεται και με το ερώτημα ΕΑ3, όμως μελετάει στο ειδικό πλαίσιο της λήψης αποφάσεων για την υλοποίηση των στόχων που θέτει ο κάθε εκπαιδευτικός. Οι τρόποι, λοιπόν, με τους οποίους προσπαθούν να πετύχουν τους στόχους τους είναι οι εξής:

1. Η πρακτική εξάσκηση (12)
2. Η σωστή επιλογή μέσων διδασκαλίας (7)
3. Η επιμονή και η υπομονή (2),

Όλοι σχεδόν οι εκπαιδευτικοί (12 στους 13) δήλωσαν ότι ο κατάλληλος συνδυασμός ασκήσεων και η πρακτική εξάσκηση μέσω αυτών είναι ο καλύτερος τρόπος που βοηθάει στην επίτευξη των στόχων που έχουν θέσει, ενώ 2 από αυτούς τόνισαν και την αξία της επανάληψης. Φαίνεται, δηλαδή, πως τόσο οι στόχοι όσο και τα μέσα επίτευξής τους περιστρέφονται γύρω από την επίλυση ασκήσεων. Η μάθηση μέσω του βιβλίου σε αντίθεση με την μάθηση μέσα από εμπειρία και η κατάκτηση μεμονωμένων δεξιοτήτων (π.χ. επίλυση εξισώσεων) σε αντίθεση με την κατάκτησή τους μέσα από μία ζωντανή διαδικασία φανερώνουν πως το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας κυριαρχεί ακόμα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Επτά εκπαιδευτικοί ανέφεραν πως για να πετύχουν τους διδακτικούς στόχους που θέτουν πρέπει να επιλέξουν με σωστά κριτήρια τα μέσα διδασκαλίας που θα χρησιμοποιήσουν στην ενότητα αυτή. Πιο συγκεκριμένα, τρεις είναι εκείνοι οι εκπαιδευτικοί που επιδιώκουν την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία ως μέσω επίτευξης των στόχων τους. Η μειοψηφία αυτή δηλώνει τη δυσκολία εφαρμογής του ομαδοσυνεργατικής μάθησης στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Η δυσκολία αυτή οφείλεται κυρίως στον ατομικό χαρακτήρα που καλλιεργείται στα σχολεία, ο οποίος αναπτύσσεται λόγω της παραδοσιακής μεθόδου διδασκαλίας, των αναλυτικών προγραμμάτων, ακόμα και λόγω των σχολικών βιβλίων (Μπότσογλου κ. συν., 2007, σελ.88). Η σωστή οργάνωση του μαθήματος, η χρήση ΤΠΕ και η επιμονή/υπομονή είναι μέσα επίτευξης που ανέφεραν κάθε φορά 2 εκπαιδευτικοί. Τέλος, ένας εκπαιδευτικός δήλωσε χαρακτηριστικά πως πετυχαίνει τους στόχους του υπογραμμίζοντας την αξία του θεωρήματος. Χαρακτηριστικά αναφέρει: *«Στο συγκεκριμένο μάθημα τονίζω την σπουδαιότητα του θεωρήματος του Θαλή και την ύπαρξη των ρητών αριθμών και επισημαίνω πως η αρμονία που υπάρχει στη φύση προκύπτει από αυτό το θεώρημα».*

<table>
<tr><th><u>Στόχοι</u></th><th><u>Γιατί;</u></th><th><u>Πώς;</u></th></tr>
<tr><td rowspan="2">Γνωστικοί στόχοι</td><td>Σύνδεση μαθηματικών εννοιών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής</td><td rowspan="6">1. Πρακτική εξάσκηση
2. Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία
3. Σωστή οργάνωση του μαθήματος
4. Χρήση ΤΠΕ</td></tr>
<tr><td>Αναφέρονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ψυχοκινητικοί στόχοι</td><td>Ενεργή συμμετοχή</td></tr>
<tr><td>Συνεργασία</td></tr>
<tr><td>Γενίκευση ιδιοτήτων</td></tr>
<tr><td>Συναισθηματικοί στόχοι</td><td>Πρόκληση ενδιαφέροντος</td></tr>
</table>

Πίνακας 7: Πίνακας στόχων

5.4. Συναισθήματα & Σχόλια

(ΕΑ9): Πώς αισθάνεστε όταν διδάσκετε αυτήν την ενότητα;

Η ενότητα που συμπεριλαμβάνει το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα είναι μία ενότητα προκαλεί ανάμεικτα συναισθήματα στους εκπαιδευτικούς, τόσο θετικά όσο και αρνητικά. Ωστόσο, φαίνεται πως τα αρνητικά υπερισχύουν, λόγω του ότι οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν εκ των προτέρων ότι πρόκειται για μία ενότητα που δυσκολεύει, εδώ και πολλά χρόνια, τους μαθητές.

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών στην παραπάνω ερώτηση καταγράφηκαν και ομαδοποιήθηκαν τα συναισθήματα που τους διακατέχουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας αυτής της ενότητας. Αυτά είναι:

- ❖ Αρνητικά (11)
  - ✓ Αμηχανία
  - ✓ Άγχος
  - ✓ Προβληματισμός/Ανησυχία
  - ✓ Απογοήτευση
  - ✓ Πλήξη
- ❖ Θετικά (7)
  - ✓ Ενθουσιασμός/Χαρά
  - ✓ Ικανοποίηση/Ευχαρίστηση
  - ✓ Αυτοπεποίθηση
  - ✓ Υπερηφάνεια

Οι 4 από τους 13 εκπαιδευτικούς δήλωσαν πως νιώθουν αμήχανα όταν διδάσκουν αυτήν την ενότητα. Τρεις είναι αυτοί που δηλώνουν άγχος, ενώ δύο αισθάνονται προβληματισμό/ανησυχία, είτε όταν διαπιστώνουν ότι υπάρχουν ελλείψεις σε προηγούμενες γνώσεις είτε όταν δεν υπάρχει κατανόηση στις νέες. Τέλος, απογοήτευση και πλήξη ανέφερε ότι νιώθει κάθε φορά ένας εκπαιδευτικός

Απόσπασμα (Υποκείμενο 6): *«Νιώθω πολύ άβολα. Είναι μια ενότητα, που όσα χρόνια τη διδάσκω παρατηρώ ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία ως προς την κατανόηση του θεωρήματος, όχι τόσο στην ομοιότητα όσο στο θεώρημα του Θαλή».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 9): *«… Στη συγκεκριμένη ενότητα προβληματίζομαι όταν πρέπει να εξηγήσω ξανά σε μαθητές τα ισοδύναμα κλάσματα, γνώση προαπαιτούμενη από προηγούμενα σχολικά έτη».*

Τρεις εκπαιδευτικοί αισθάνονται ενθουσιασμό δύο είναι οι εκπαιδευτικοί που αισθάνονται ευχαρίστηση/ικανοποίηση βλέποντας πως οι μαθητές τους αντιλαμβάνονται τις νέες έννοιες, ενώ αυτοπεποίθηση και υπερηφάνεια ανέφερε ότι νιώθει κάθε φορά ένας εκπαιδευτικός.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 4): *«Η ενότητα αυτή είναι μία από τις σπουδαιότερες ενότητες όλης της γεωμετρίας του γυμνασίου. Κάνω παραδείγματα που σχετίζονται με την πραγματική ζωή. Είναι από τις ενότητες που μπορώ να δώσω απάντηση στα παιδιά στο ερώτημά τους 'Αυτά κύριε που το συναντάμε έξω;'».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 10): *«Πολύ όμορφα. Είναι από τα θεωρήματα που αποτελούν ακρογωνιαίο λίθο της γεωμετρίας. Έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές και συνδέει την γεωμετρία με την αρμονία».*

Ωστόσο, υπήρχαν και τρεις εκπαιδευτικοί που δήλωσαν πως έχουν ανάμεικτα συναισθήματα κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας. Πιο συγκεκριμένα:

- ✓ ένας εκπαιδευτικός αισθάνεται υπερηφάνεια για την καταγωγή του Θαλή και ανησυχία για το βαθμό κατανόησης των εννοιών,

- ✓ ένας άλλος αισθάνεται ικανοποίηση, άγχος και απογοήτευση στα διάφορα στάδια της διδασκαλίας αυτών των ενοτήτων και
- ✓ ένας ακόμη αισθάνεται χαρά και ικανοποίηση όταν βλέπει τα παιδιά να δουλεύουν μαζί και να κατανοούν τις νέες έννοιες, ενώ άγχος λόγω του ότι θεωρεί τη συγκεκριμένη ενότητα δυσκολότερη από κάθε άλλη.

(ΕΑ10): Έχετε να δηλώσετε ή να παρατηρήσετε κάτι άλλο;

Στην ερώτηση αυτή δεν έδωσαν απάντηση μόνο 5 εκπαιδευτικοί. Οι υπόλοιποι 8 κάτι είχαν να σχολιάσουν. Πιο συγκεκριμένα, 3 από τους 8 εκπαιδευτικούς προτείνουν αλλαγή ή ανανέωση των σχολικών εγχειριδίων, 3 προτείνουν την ένταξη της ομοιοθεσίας στη διδακτέα ύλη και 2 προτείνουν περισσότερες ώρες διδασκαλίας στο μάθημα της γεωμετρίας. Ένας εκπαιδευτικός προτείνει περισσότερες ασκήσεις που σχετίζονται με την καθημερινότητα, ενώ ένας άλλος τη χρήση λογισμικού για την καλύτερη κατανόηση και παρουσίαση των εννοιών. Τέλος, ένας μόνο σχολιάζει πως η ενότητα αυτή είναι δύσκολη και απαιτητική.

5.5. Σχήματα

(ΒΕ1): Κατασκευάστε γεωμετρικά σχήματα που θα χρησιμοποιούσατε στην τάξη για το μάθημα του θεωρήματος του Θαλή.

Στο ερώτημα αυτό οι εκπαιδευτικοί ήταν ελεύθεροι να κατασκευάσουν γεωμετρικά σχήματα τα οποία χρησιμοποιούν στην τάξη για το μάθημα του θεωρήματος του Θαλή. 5 από τους 13 εκπαιδευτικούς ρώτησαν πόσα γεωμετρικά σχήματα πρέπει να σχεδιάσουν. Η απάντηση που τους δόθηκε ήταν πως είναι ελεύθεροι να σχεδιάσουν όσα σχήματα επιθυμούν. Κατά μέσο όρο, το πλήθος των γεωμετρικών σχημάτων που σχεδίασε ο κάθε εκπαιδευτικός ήταν 3,69 σχήματα. Ο μικρός αυτός μέσος όρος φανερώνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν ποικίλα σχήματα για την μελέτη του θεωρήματος του Θαλή και περιορίζονται σε αυτά που απεικονίζονται στο σχολικό βιβλίο.

Συνολικά κατασκευάστηκαν 48 σχήματα. Τα σχήματα αυτά μελετήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν ως προς:

Α. τη μορφή τους,

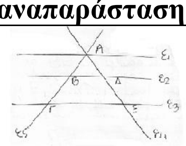
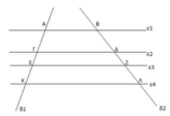
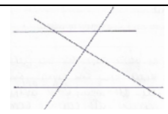
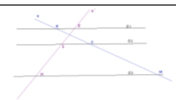
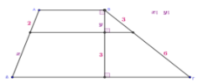
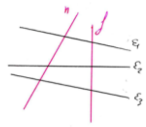
Β. την οπτική αίσθηση που δίνουν,

Γ. το πλήθος των παραλλήλων και

Δ. τον ορισμό ίσων τμημάτων στις τέμνουσες από τις παράλληλες ευθείες.

Όλες οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις που σχεδιάστηκαν στο έργο Β1 παρατίθενται στο Παράρτημα Γ (βλ. Παράρτημα Γ).

Αρχικά, τα σχήματα αυτά, ομαδοποιήθηκαν σε 6 κατηγορίες ως προς τη μορφή τους, οι οποίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, μαζί με τη συχνότητά τους.

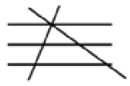
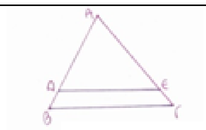
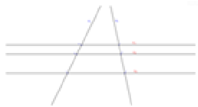
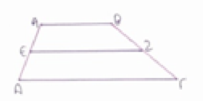
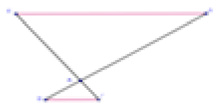
Μορφή σχήματος	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**	**Παράδειγμα αναπαράστασης**
Μορφή κώνου	25	52,08	
Γενική μορφή θεωρήματος του Θαλή (δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από μη τεμνόμενες ευθείες)	10	20,83	
Μορφή πεταλούδας	7	14,58	
Σύνθετη μορφή 1 (συνδυασμός κώνου και πεταλούδας)	3	6,25	
Σύνθετη μορφή 2 (συνδυασμός δέσμης παραλλήλων και κώνου)	2	4,17	
Αντιπαράδειγμα	1	2,08	
Σύνολο	48	100,0	

Πίνακας 8: Πίνακας συχνοτήτων αρχικής κωδικοποίησης σχημάτων

Από τα 48 σχήματα, τα 25 (52,08%) είχαν τη μορφή κώνου, 10 (20,83%) ήταν δέσμες παραλλήλων που τέμνονταν από μη τεμνόμενες ευθείες, 7 (14,58%) είχαν τη μορφή πεταλούδας, 3 (6,25%) είχαν σύνθετη μορφή 1, δηλαδή συνδυασμό κώνου και πεταλούδας, 2 (4,17%) ήταν σύνθετης μορφής 2, δηλαδή συνδυασμός δέσμης παραλλήλων και κώνου, ενώ 1 (2,08%) ήταν σχήμα το οποίο χρησιμοποιεί ο/η εκπαιδευτικός ως αντιπαράδειγμα.

Μέσα από τις απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στο έργο 1 φάνηκε ότι μεγάλο μέρος τις διδασκαλίας του θεωρήματος του Θαλή βασίζεται σε πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις. Τα σχήματα τα οποία προτιμώνται από τους εκπαιδευτικούς, είτε είναι η γενική μορφή του θεωρήματος του Θαλή με τις δέσμες παραλλήλων που τέμνονται από μη τεμνόμενες ευθείες, με την οποία εισάγει και το σχολικό βιβλίο το θεώρημα του Θαλή, είτε τα σχήματα μορφής κώνου. Φυσικά, υπήρχαν και εκπαιδευτικοί που ζωγράφισαν και σχήματα μορφής πεταλούδας. Ένας ήταν μόνο ο εκπαιδευτικός ο οποίος διευκρίνισε πως για να εισαγάγει την έννοια χρησιμοποιεί τα κατάλληλα χαρακτηριστικά δοκιμάζοντας σωστά ή λανθασμένα σχηματικά παραδείγματα έτσι ώστε μέσα από τη συζήτηση με τους μαθητές του να οδηγούνται στο επιθυμητό σχήμα που αφορά την έννοια.

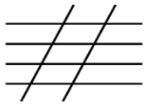
Στη συνέχεια, τα σχήματα μορφής κώνου, πεταλούδας, τα σύνθετης μορφής 1 και 2 και οι δέσμες παραλλήλων μελετήθηκαν ως προς την ύπαρξη ή όχι προεκτάσεων στις παράλληλές τους ευθείες. Οι προεκτάσεις δίνουν την αίσθηση τομής ευθειών, ενώ οι αναπαραστάσεις χωρίς προεκτάσεις δίνουν την αίσθηση γεωμετρικών σχημάτων (τρίγωνα ή τραπέζια). Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ενδεικτικά παραδείγματα αυτών των απεικονίσεων. Τα σχήματα αυτά πάρθηκαν από τις απαντήσεις των υποκειμένων στο έργο Β1 (βλ. Παράρτημα Γ).

Κώνος με προεκτάσεις		Κώνος χωρίς προεκτάσεις	
Δέσμη παραλλήλων με προεκτάσεις		Δέσμη παραλλήλων χωρίς προεκτάσεις	
Πεταλούδα με προεκτάσεις		Πεταλούδα χωρίς προεκτάσεις	

Πίνακας 9: Σχηματικές αναπαραστάσεις με και χωρίς προεκτάσεις

Από την ομαδοποίηση που έγινε έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

- Από τα 25 σχήματα μορφής κώνου, τα 16 ήταν με προεκτάσεις, ενώ τα 9 χωρίς.
- Από τα 10 σχήματα με δέσμες παραλλήλων, τα μισά είχαν προεκτάσεις και τα μισά όχι. Ένα μάλιστα από αυτά με τις προεκτάσεις παρουσιάζει μία ιδιαιτερότητα σε σχέση με τα υπόλοιπα. Πρόκειται για δέσμη παραλλήλων που τέμνονται από παράλληλες ευθείες.

Απεικόνιση (Υποκείμενο 9): 

- Από τα 7 σχήματα μορφής πεταλούδας, τα 2 είχαν προεκτάσεις, ενώ τα 5 όχι.
- Από τα 3 σχήματα σύνθετης μορφής 1, και τα 3 ήταν με προεκτάσεις.
- Από τα 2 σχήματα σύνθετης μορφής 2, και τα 2 ήταν χωρίς προεκτάσεις.
- Το σχήμα του αντιπαραδείγματος είχε προεκτάσεις.

Στο σύνολό τους, από τα 48 αυτά σχήματα, τα 27 είχαν προεκτάσεις (56,25%), ενώ τα 21 ήταν χωρίς προεκτάσεις (43,75%). Σε αντίθεση με τις αναπαραστάσεις του σχολικού βιβλίου (βλ. Κεφ. 2.4), τα υποκείμενα φαίνεται ότι προτιμούν αναπαραστάσεις που δε δίνουν την αίσθηση γεωμετρικών σχημάτων, αλλά τεμνόμενων ευθειών, παρόλο που τα ποσοστά είναι πολύ κοντά το ένα με το άλλο.

Προεκτάσεις	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**
Ναι	27	56,25
Όχι	21	43,75
Σύνολο	48	100,0

Πίνακας 10: Πίνακας συχνοτήτων προεκτάσεων

Η επόμενη ομαδοποίηση που έγινε στα σχήματα αφορούσε το πλήθος των παράλληλων ευθειών. Σε αυτή την ομαδοποίηση μελετήθηκαν τα 47 από τα 48 σχήματα, καθώς εξαιρέθηκε το σχήμα του αντιπαραδείγματος. Όπως φάνηκε από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, τα σχήματα που χρησιμοποιούν για τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή έχουν το ελάχιστο 2 και το μέγιστο 4 παράλληλες ευθείες. Πιο συγκεκριμένα, 19 από τα 47 σχήματα είχαν 2 παράλληλες ευθείες (40,43%), 16 σχήματα είχαν 3 παράλληλες ευθείες (34,04%) και 7 σχήματα είχαν 4 παράλληλες ευθείες (14,89%). 5 ήταν τα σχήματα (μορφής κώνου) που είχαν 2 βασικές παράλληλες ευθείες, ωστόσο οι εκπαιδευτικοί σχεδίασαν και μία τρίτη εικονική στο σημείο τομής των τεμνουσών. Όπως φαίνεται και από την ανάλυση των σχημάτων του σχολικού βιβλίου που έγινε σε προηγούμενη ενότητα (βλ. Κεφ. 2.4), τα σχήματα που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί ταυτίζονται με αυτά του σχολικού βιβλίου. Γι’ αυτό το λόγο και το πλήθος των παραλλήλων περιορίζεται από 2 έως 4. Επιπλέον, όσο μικρότερο είναι το πλήθος των παραλλήλων τόσο πιο εύκολα διακρίνονται τα ανάλογα τμήματα, καθώς είναι και αυτά λιγότερα σε πλήθος.

Πλήθος παραλλήλων	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**
2 παράλληλες	19	40,43
2 παράλληλες + 1εικονική στο σημείο τομής των τεμνουσών	5	10,64
3 παράλληλες	16	34,04
4 παράλληλες	7	14,89
Σύνολο	47	100,0

Πίνακας 11: Πίνακας συχνοτήτων παράλληλων ευθειών

Η τελευταία ομαδοποίηση που έγινε στα σχήματα είχε να κάνει με το αν οι παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα στις ευθείες που τέμνουν. Επίσης, στην ομαδοποίηση αυτή μελετήθηκαν τα 47 από τα 48 σχήματα, καθώς εξαιρέθηκε το σχήμα του αντιπαραδείγματος, λόγω του ότι δεν υπήρχαν παράλληλες. Όπως φάνηκε από τις αναπαραστάσεις που έκαναν οι εκπαιδευτικοί, σε λιγότερο από τα μισά σχήματα ορίζονταν ίσα ευθύγραμμα τμήματα από τις παράλληλες, μόλις στο 44,68% (21 από τα 47 σχήματα).

Ορισμός ίσων τμημάτων	**Συχνότητα**	**Ποσοστό**
Ναι	21	44,68
Όχι	26	55,32
Σύνολο	47	100,0

Πίνακας 12: Πίνακας συχνοτήτων ορισμού ίσων τμημάτων

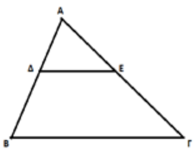
Από τα 21 αυτά σχήματα:

- Τα 12 ήταν μορφής κώνου εκ των οποίων τα 7 με προεκτάσεις, ενώ τα 5 χωρίς.
- Τα 6 ήταν δέσμες παραλλήλων εκ των οποίων μόνο το 1 ήταν με προεκτάσεις, ενώ τα 5 χωρίς.
- Τα 2 ήταν μορφής πεταλούδας εκ των οποίων το 1 με προεκτάσεις και το άλλο χωρίς.
- 1 μόνο ήταν της σύνθετης μορφής 2, χωρίς προεκτάσεις.

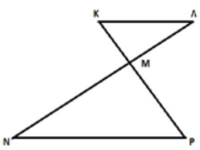
Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι τα 12 από τα 21 σχήματα δεν έχουν προεκτάσεις, πράγμα που όπως ήδη αναφέραμε δίνει την αίσθηση σχημάτων (τριγώνων και τραπεζίων). Η κατάσταση αυτή παραπέμπει στην πρόταση που λέει: *«Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του».* Η πρόταση αυτή είναι απόρροια του θεωρήματος που λέει: *«Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει»* (σχ. βιβλίο, σελ. 198-199). Η πρόταση αυτή, όπως και ο λόγος ευθυγράμμων τμημάτων μελετώνται πριν το θεώρημα του Θαλή. Οπότε, κάνοντας στους μαθητές 'γνώριμες' αναπαραστάσεις είναι πιο εύκολο να γενικεύσουν αυτή την πρόταση για οποιονδήποτε λόγο, που στην ουσία είναι το θεώρημα του Θαλή.

5.6. Τα είδη των λόγων

(ΒΕ2): Για κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα, να γράψετε όλους τους διαφορετικούς λόγους μεταξύ των τμημάτων. Πόσα είδη διαφορετικών λόγων υπάρχουν και τι συμβολίζουν οι λόγοι αυτοί;



Σχ. Α



Σχ. Β

Στην παραπάνω ερώτηση δεν υπήρχε εκπαιδευτικός που να μην απάντησε. Αναφέρθηκαν και οι τέσσερις προσεγγίσεις των λόγων όπως αυτές αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 2 (βλ. Κεφ. 2.2).

Οι λόγοι που καταγράφηκαν για το σχήμα Α παρουσιάζονται παρακάτω:

1. Λόγοι ομοιότητας μεταξύ των δύο τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ (11)
2. Λόγοι μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών (10)
3. Λόγοι προβολής (9)
4. Λόγοι μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ (2)

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι λόγοι που καταγράφηκαν για το σχήμα Β:

1. Λόγους ομοιότητας μεταξύ των δύο τριγώνων ΚΛΜ και ΜΝΡ (13)
2. Λόγοι μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών (10)
3. Λόγοι προβολής (7)
4. Λόγοι μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων ΚΛΜ και ΜΝΡ (0)

Όσον αφορά την ερμηνεία των λόγων που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί έχουμε τα εξής:

α. Λόγοι ομοιότητας (9),

β. Λόγοι που χρησιμοποιούνται στο θεώρημα του Θαλή (8),

γ. Καμία ερμηνεία (4).

<table>
<tr><th>Είδη λόγων</th><th>Ερμηνεία λόγων</th></tr>
<tr><td>Λόγοι ομοιότητας μεταξύ τριγώνων</td><td>Ομοιότητα</td></tr>
<tr><td>Λόγοι μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών</td><td rowspan="3">Λόγοι που εφαρμόζονται στο θεώρημα του Θαλή</td></tr>
<tr><td>Λόγοι προβολής</td></tr>
<tr><td>Λόγοι μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων</td></tr>
</table>

Πίνακας 13: Τα είδη των λόγων και ο συμβολισμός τους

Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι, ενώ και οι 13 ανέφεραν λόγους ομοιότητας, μόνο 9 ήταν αυτοί που τους ερμήνευσαν σωστά. Οι υπόλοιποι 4 δεν έδωσαν καμία ερμηνεία, τόσο στους λόγους ομοιότητας όσο και στους υπόλοιπους που ανέφεραν. Χαρακτηριστικά ένας εκπαιδευτικός είπε:

Απόσπασμα (Υποκείμενο 3): *«Δε γνωρίζω τι ακριβώς συμβολίζουν. Είναι κάτι συγκεκριμένο; Μου κίνησε την περιέργεια. Θέλω να μου πεις μετά γιατί εγώ στην τάξη μόνο τους λόγους έγραφα και δεν εξήγησα ποτέ κάτι άλλο».*

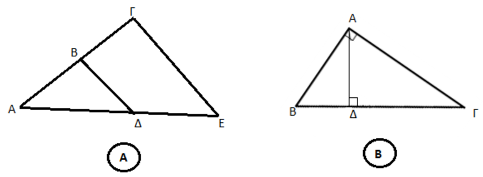
Για τους υπόλοιπους λόγους που διατυπώθηκαν, αναφέρθηκε από τέσσερις εκπαιδευτικούς ότι είναι λόγοι που εφαρμόζονται στο θεώρημα του Θαλή, ενώ δύο ισχυρίστηκαν ότι είναι λόγοι που προκύπτουν από τις ιδιότητες των αναλογιών. Δύο ήταν οι εκπαιδευτικοί που ανέφεραν λόγους προβολής. Μάλιστα, ο ένας το είπε αυτολεξεί, ενώ ο άλλος έδωσε περιγραφή. Τέλος, δύο χαρακτήρισαν τους λόγους μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών ως λόγους των τμημάτων των ευθειών που τέμνουν τις παράλληλες.

Είναι χαρακτηριστικό ότι στο σχολικό βιβλίο οι μόνοι λόγοι που χαρακτηρίζονται είναι οι λόγοι ομοιότητας. Δεν γίνεται διαχωρισμός των λόγων. Οι λόγοι προβολής χαρακτηρίζονται ως ισότητα λόγων του θεωρήματος του Θαλή, ενώ οι λόγοι μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών προκύπτουν από την εναλλαγή των μέσων όρων των αναλογιών που εφαρμόζονται στο θεώρημα του Θαλή. Ουσιαστικά, η μετάβαση από τη μία αναλογία στην άλλη γίνεται με μαθηματικό τρόπο.

Από τα σχόλια και τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, λοιπόν, φαίνεται ότι η προβολή αντιμετωπίζεται ως η βασική προσέγγιση του θεωρήματος του Θαλή (Brousseau, 1995˙ Mrabet, 2006), ενώ η ομοιότητα αντιμετωπίζεται ως ενδοσχηματική σχέση μεταξύ των τριγώνων (Gualdrón et al., 2015).

5.7. Ερμηνεία λαθών

(ΒΕ3): Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε διαπιστώθηκε ότι το 70% των μαθητών ανέφερε ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ στο σχήμα Α , ενώ μόλις το 50% ανέφερε τουλάχιστον μία ομοιότητα μεταξύ των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ και ΑΒΓ του σχήματος Β.



Α) Τι πιστεύετε ότι είναι αυτό που δυσκολεύει τους μαθητές και τους εμποδίζει να εντοπίσουν τα όμοια τρίγωνα, ιδιαίτερα στην περίπτωση των ορθογωνίων τριγώνων;

Τα σχόλια που έκαναν οι εκπαιδευτικοί, τόσο για το σχήμα Α όσο και για το σχήμα Β, είχαν να κάνουν με:

- Την ύπαρξη αντιπροσωπευτικών σχημάτων (13),
- Τα Διαδικαστικά λάθη (13) και
- Τα Εννοιολογικά λάθη (5).

Όσον αφορά την εμφάνιση των σχημάτων αυτών στο σχολικό εγχειρίδιο και οι 13 εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι η επιτυχία ή η αποτυχία οφείλεται στην επανάληψή τους μέσα από τις ασκήσεις. Μπορεί η συχνότητα επανάληψής τους να είναι μικρότερη, ωστόσο και τα δύο σχήματα εμφανίζονται στο σχολικό βιβλίο.

Συνεχίζοντας, όπως φαίνεται από τις απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί σε αυτό το ερώτημα, τα περισσότερα λάθη που κάνουν οι μαθητές είναι διαδικαστικά λάθη. Και οι 13 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε τέτοιου είδους λάθη, όπως ότι

- ❖ ο προσανατολισμός των σχημάτων είναι ένας παράγοντας που δυσκολεύει τους μαθητές, ή
- ❖ δυσκολεύονται να διακρίνουν τα τρίγωνα, ή

- δυσκολεύονται να εντοπίσουν το πλήθος των τριγώνων.

Το πλήθος των τριγώνων, ο προσανατολισμός των σχημάτων και η απουσία παράλληλων ευθειών είναι τρεις βασικοί παράγοντες δυσκολίας στον εντοπισμό των όμοιων τριγώνων. Δουλεύοντας με σχήματα και αναπαραστάσεις που οι παράλληλες ευθείες, εφόσον υπάρχουν, είναι παράλληλες και προς τις γραμμές του βιβλίου/τετραδίου, όταν τροποποιηθεί αυτή η μεταβλητή τότε οι μαθητές μπορεί να παραπλανηθούν και να μην μπορέσουν να αντιληφθούν ότι στην ουσία πρόκειται για το ίδιο σχήμα. Επιπλέον, 2 εκπαιδευτικοί υποστήριξαν πως η ύπαρξη τριών τριγώνων με, επιπρόσθετα, διαφορετικό προσανατολισμό εμποδίζει την αντιστοιχία των ίσων γωνιών και των ομόλογων τμημάτων των όμοιων τριγώνων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να εντοπίσουν τα όμοια τρίγωνα επειδή δεν μπορούν να εντοπίσουν πρώτα τις ίσες γωνίες, είτε τις συμπληρωματικές στα ορθογώνια τρίγωνα, είτε τις ίσες οξείες των οποίων οι πλευρές είναι κάθετες μία προς μία, κι έπειτα δυσκολεύονται να εντοπίσουν τις ανάλογες πλευρές, καθώς δεν είναι διακριτά τα ομόλογα τμήματα. Τέλος, 2 από τους 13 εκπαιδευτικούς ισχυρίστηκαν πως οι μαθητές δεν έχουν την εμπειρία να αναγνωρίζουν και να επεξεργάζονται σχήματα.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 1): *«… Από την άλλη, στο σχήμα Β τώρα, τα τρίγωνα είναι 3. Είναι το ένα μέσα στο άλλο, χωρίς να έχουν την ίδια φορά. Δεν είναι μαθημένοι σε τέτοιου είδους σχήματα οι μαθητές».*

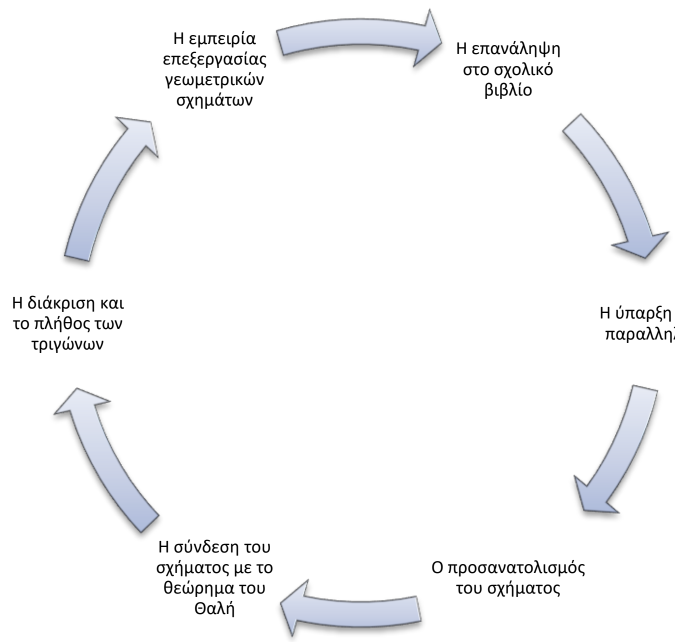
Απόσπασμα (Υποκείμενο 3): *«Στο Α, δυσκολεύονται επειδή είναι δοσμένο έτσι το σχήμα. Αν η κορυφή Α ήταν στο πάνω μέρος του σχήματος θα φαινόταν καλύτερα οι παράλληλες…».*

Πέρα από τα διαδικαστικά λάθη, υπήρχαν και 5 εκπαιδευτικοί οι οποίοι αναφέρθηκαν και στην ύπαρξη εννοιολογικών λαθών. Ένα από τα βασικότερα εννοιολογικά λάθη που παρατηρούνται είναι ότι οι μαθητές, ενώ αναφέρεται ότι πρόκειται για όμοια τρίγωνα, δεν είναι σε θέση να εντοπίσουν τις ίσες γωνίες και τις ανάλογες πλευρές, πράγμα που δηλώνει ότι δεν γνωρίζουν τον ορισμό των όμοιων τριγώνων. Τέλος, τρεις ήταν οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι ισχυρίστηκαν πως όταν το σχήμα ταυτίζεται με τα σχήματα που χρησιμοποιούνται στο θεώρημα του Θαλή, τότε υπάρχει μεγαλύτερη επιτυχία εντοπισμού των όμοιων τριγώνων απ' ότι αν δοθεί ένα σχήμα, όπως το σχήμα Β, που δεν παραπέμπει στο θεώρημα του Θαλή.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 4): *«Στην περίπτωση Α είναι δύο τα τρίγωνα και είναι σχήμα που παραπέμπει στο θεώρημα του Θαλή και εμφανίζεται πολλάκις στο σχολικό βιβλίο. Στην περίπτωση Β, με την πρώτη ματιά φαίνονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ. Λίγοι θα δουν το μεγάλο τρίγωνο, λόγω του ότι είναι και αυτό ''ανάποδα''. Δεν παραπέμπει στο θεώρημα αυτό το σχήμα και δεν έχει παράλληλες γραμμές».*

Με βάση τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών φαίνεται πως καθοριστικό ρόλο για την κατανόηση και αφομοίωση μιας έννοιας παίζουν τα αντιπροσωπευτικά σχήματα, τόσο στο θεώρημα του Θαλή όσο και την ομοιότητα τριγώνων (Chazan, 1988˙ Cordier & Cordier, 1991). Οι μαθητές βασίζουν τη λογική διαδικασία με την οποία καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα στις ιδιότητες των τυπικών αναπαραστάσεων, τις οποίες μπορούν και αντιλαμβάνονται ευκολότερα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, οι παράγοντες που είτε βοηθούν είτε εμποδίζουν τον εντοπισμό των όμοιων τριγώνων φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Διάγραμμα 4: Αιτίες δυσκολίας εντοπισμού όμοιων τριγώνων

Β) Πώς θα τους το εξηγούσατε ώστε να το καταλάβουν;

Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που παρατηρούνται από τους μαθητές, ο κάθε εκπαιδευτικός έδωσε τις δικές του προτάσεις. Οι προτάσεις αυτές ομαδοποιήθηκαν σε

Α. προτάσεις διαδικαστικής κατανόησης (13), όπως

- Περιστροφή σχημάτων (5)
- Εντοπισμός τριγώνων (4)
- Τεμαχισμός σχημάτων (4)
- Επεξεργασία σχημάτων (3) και

Β. προτάσεις εννοιολογικής κατανόησης (6), όπως

- Αφομοίωση θεωρίας (6)

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν από τους εκπαιδευτικούς, η αφομοίωση της θεωρίας και η πρακτική εξάσκηση αυτής οδηγούν τους μαθητές με εύκολο τρόπο στον εντοπισμό των όμοιων τριγώνων. Οι μισοί εκπαιδευτικοί (6 από τους 13) ισχυρίστηκαν πως η κατανόηση της θεωρίας, τόσο των κριτηρίων ομοιότητας τριγώνων όσο και του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, και η πρακτική εξάσκηση της θεωρία μέσω παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων συμβάλλουν στο γρήγορο εντοπισμό των όμοιων τριγώνων.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 3): *«Δίνω αριθμητικό παράδειγμα με μοίρες, γνωρίζοντας ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180 μοίρες, ώστε να το καταλάβουν καλύτερα».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 5): *«Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την ομοιότητα των σχημάτων που προκύπτει από το θεώρημα του Θαλή, καθώς και τα κριτήρια ομοιότητας με αρκετά απλά παραδείγματα. Είναι ακόμη βοηθητικό να γράφουν τα ζεύγη των ίσων γωνιών, δίνοντας τις απαιτούμενες εξηγήσεις και στα ονόματα των τριγώνων να προσέχουν τη διάταξη των κορυφών των ίσων γωνιών που θα τους βοηθήσει και στις σωστές προκύπτουσες ή και ισχύουσες αναλογίες. Επίσης αποτελεσματική είναι και η χρήση αντιπαραδειγμάτων».*

Ωστόσο, όλοι οι εκπαιδευτικοί ισχυρίστηκαν πως για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους λαθών βοηθάει η διαδικαστική κατανόηση των εννοιών της ενότητας. Πιο συγκεκριμένα, 5 ήταν οι εκπαιδευτικοί που υποστήριξαν ότι απαιτείται πολλές φορές η περιστροφή του δοθέντος σχήματος, είτε με περιστροφή του ίδιου του βιβλίου είτε με τη χρήση της φαντασίας (νοερή περιστροφή). Η περιστροφή του σχήματος, όπως ισχυρίστηκαν 4 εκπαιδευτικοί, συμβάλλει, αρχικά, στον εντοπισμό των τριγώνων (πλήθος), και κατ' επέκταση στον εντοπισμό παράλληλων τμημάτων, εφόσον, υπάρχουν, για τον εντοπισμό των ίσων γωνιών και των ανάλογων τμημάτων. Στην περίπτωση του σχήματος Β, που τα τρίγωνα είναι τρία και δεν υπάρχει αντιστοιχία στις ομόλογες πλευρές, η νοερή περιστροφή των τριγώνων επιβάλλεται.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 2): *«Για το Α, ότι μπορούν να γυρίσουν το βιβλίο ώστε να τους είναι πιο ορατή η παραλληλία. Για το Β, αρχικά να εντοπίσουν το πλήθος των τριγώνων και μετά να βρουν ότι είναι ανά δύο όμοια και να καταλήξουν ότι είναι και όλα όμοια μεταξύ τους».*

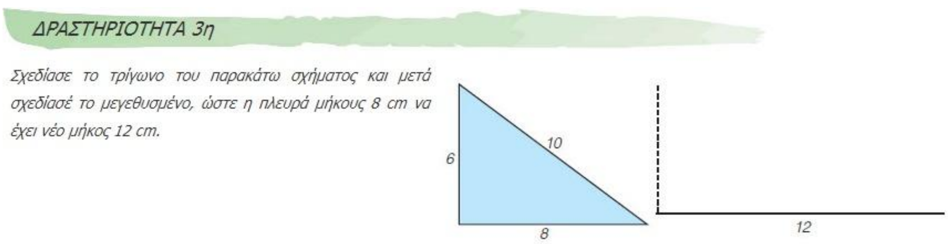
Μία ακόμη πρόταση που έκαναν 4 εκπαιδευτικοί ήταν αυτή του τεμαχισμού των τριγώνων και την επανατοποθέτησή τους με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι πλέον ορατή η αντιστοιχία των ίσων γωνιών και των ομόλογων τμημάτων. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί με τα σχήματα του βιβλίου, εκτός αν σχεδιαστούν εκ νέου σε χαρτί κι έπειτα γίνει ο τεμαχισμός τους.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 7): *«Αρχικά θα έκοβα χαρτιά ώστε περιστρέφοντάς τα, να τους δείξω ότι τα ορθογώνια τρίγωνα μοιάζουν πλέον περισσότερο ως όμοια όταν τα αντιπαραβάλλω με την ίδια 'κατεύθυνση' των όμοιων πλευρών. Στη συνέχεια θα προσπαθούσα να τους μεταφέρω την ιδέα, ότι σταδιακά, μπορούμε να αφήσουμε την φαντασία μας να μας οδηγεί σε μονοπάτια που τα μάτια μας προβάλλουν αδυναμία να δούμε. Συγκεκριμένα θα τους τόνιζα ότι τα κριτήρια ως συνθήκες είναι επιτρεπτά να μας βοηθήσουν να μαντέψουμε αυτό που διαισθητικά είναι αδύνατον και να εκφράσουμε συμπεράσματα χωρίς να εμπιστευόμαστε μόνο την οπτική μας που συχνά παρουσιάζει αδυναμίες».*

Τέλος, 3 εκπαιδευτικοί ανέφεραν τη χρήση βοηθητικού υλικού, όπως χρώματα, για την αντιστοιχία των ίσων γωνιών και των ανάλογων πλευρών, ώστε να είναι ορατά πλέον από τους μαθητές και να είναι σε θέση να λύνουν τις ασκήσεις.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 12): *«Με χρώματα. Να εντοπίζουμε αρχικά τα τρίγωνα και στη συνέχεια τις ίσες γωνίες και τις ανάλογες πλευρές».*

(ΒΕ4): Δόθηκε σε μαθητές η παρακάτω δραστηριότητα:



Α) Ποια συστηματικά λάθη παρουσιάζουν οι μαθητές σε αυτό το ερώτημα;

Στην ερώτηση αυτή τα συστηματικά λάθη και οι δυσκολίες που διατύπωσαν οι εκπαιδευτικοί διακρίνονται σε

A. Διαδικαστικά λάθη (9) και

B. Εννοιολογικά λάθη (4).

Όσον αφορά τα διαδικαστικά λάθη, 8 από τους 13 εκπαιδευτικούς ανέφεραν την προτίμηση της πράξης της πρόσθεσης έναντι του πολλαπλασιασμού και ένας τη μη ευχέρεια στις πράξεις με ρητούς αριθμούς.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 1): *«Α! κλασσικό λάθος των μαθητών μου. Συνέχεια μου κάνουν πρόσθεση αντί για πολλαπλασιασμό ή αν τους το δίνω το παράδειγμα ανάποδα, μου κάνουν αφαίρεση αντί για διαίρεση».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 5): *«Είναι* $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$. *Δεν είναι συνηθισμένοι σε πράξεις με ρητούς αριθμούς».*

Από την άλλη πλευρά, τα εννοιολογικά λάθη είχαν να κάνουν κυρίως με την κατανόηση ύπαρξης όμοιων τριγώνων. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχαν εκπαιδευτικοί οι οποίοι ανέφεραν ως λάθος το μη υπολογισμό του λόγου ομοιότητας, λόγω του ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι πρόκειται για όμοια τρίγωνα, άρα και ότι οι ομόλογες πλευρές θα πρέπει να είναι ανάλογες. Επιπλέον, 2 από τους 13 εκπαιδευτικούς ανέφεραν ως λάθος και τον τυχαίο σχεδιασμό τριγώνου, χωρίς αιτιολόγηση ή έλεγχο για ομοιότητα με το αρχικό.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 2): *«Δεν υπολογίζουν ότι η μεγέθυνση των πλευρών ότι είναι 1,5 φορά παραπάνω».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 7): *«Ενώνουν απλά τις άκρες των σχεδιασμένων ευθυγράμμων τμημάτων χωρίς να αιτιολογήσουν, συμπληρώνοντας τα μήκη, πιθανόν γιατί το σχεδιάζουν τυχαία».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 8): *«Δεν μπορούν να βρουν την αντιστοιχία των πλευρών, γιατί δεν έχουν καταλάβει ότι πρόκειται για όμοια τρίγωνα που οι πλευρές πρέπει να είναι ανάλογες».*

Σχετικά με τα λάθη των μαθητών, παρατηρούνται και λάθη τα οποία δεν έχουν καμία σχέση με το θεώρημα του Θαλή αλλά σχετίζονται με την έννοια της ομοιότητας. Ένα τέτοιο λάθος είναι η εφαρμογή προσθετικών στρατηγικών (*additive strategies*) που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων στις αναλογίες, όπως ανέφεραν οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί στο συγκεκριμένο έργο. Η αιτία που προτιμώνται οι προσθετικές στρατηγικές είναι ότι φαίνονται απλούστερες σε σχέση με τις πολλαπλασιαστικές (Chazan, 1988˙ Τσικοπούλου & Φερεντίνος, 2018). Από την άλλη, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι το τρίγωνο που θα σχηματισθεί θα είναι όμοιο με το αρχικό, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε λόγο ομοιότητας. Τέλος, η διαχείριση ενός φυσικού αριθμού είναι πολύ πιο εύκολη για τους μαθητές σε νοερούς υπολογισμούς και εκφράσεις, όπως διπλάσιο ή τριπλάσιο, σε σχέση με έναν ρητό όπως εμφανίζεται στο συγκεκριμένο έργο.

Β) Ποιες εξηγήσεις δίνετε για αυτά τα λάθη;

Στην ερώτηση αυτή, ο κάθε εκπαιδευτικός, κατά μέσο όρο, ανέφερε 1,69 αιτίες που οι μαθητές δυσκολεύονται στο σχηματισμό όμοιων τριγώνων. Οι αιτίες αυτές διακρίνονται σε

Α. Ζητήματα εννοιολογικής κατανόησης (11)

- δεν έχουν κατανοήσει τις αναλογίες (5),
- δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της ομοιότητας (5),
- δεν γνωρίζουν την τριγωνική ανισότητα (1)

Β. Ζητήματα διαδικαστικής κατανόησης (10).

- δεν έχουν ευχέρεια στις πράξεις με ρητούς αριθμούς (5),

- νιώθουν περισσότερη ασφάλεια και εξοικείωση με την πράξη της πρόσθεσης παρά του πολλαπλασιασμού (2),
- δυσκολεύονται με το σχηματισμό ισοδύναμων κλασμάτων (2),
- δεν έχουν εμπειρία στην επεξεργασία γεωμετρικών προβλημάτων σε σχέση με τα αλγεβρικά (1).

5 από τους 13 εκπαιδευτικούς δήλωσαν πως βασική αιτία για τα λάθη που παρουσιάζουν οι μαθητές κατά την κατασκευή όμοιων τριγώνων είναι η μη κατανόηση των αναλογιών και 5 αναφέρθηκαν στη μη κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας και κατ' επέκταση των κριτηρίων της. Είναι φανερό πως οι μαθητές δεν συνδέουν τη λέξη 'μεγέθυνση' με την ομοιότητα, ώστε να σκεφτούν ότι οι πλευρές του νέου τριγώνου μεγεθύνονται ανάλογα και όχι κατά ίσα τμήματα.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 3): *«Στο ότι δεν έχουν καταλάβει ότι για να είναι όμοιο το δεύτερο τρίγωνο με το πρώτο πρέπει οι γωνίες να είναι ίσες και οι πλευρές ανάλογες, κάτι που δε γίνεται αν προσθέσω σε όλες τις πλευρές το 4».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 6): *«Δεν έχουν αντιληφθεί τη λέξη 'μεγεθυσμένο' της εκφώνησης που παραπέμπει σε όμοια τρίγωνα, άρα σε ανάλογες πλευρές».*

Επιπλέον, 5 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στη μη ευχέρεια στις πράξεις με ρητούς αριθμούς και την παρανόηση ότι ο λόγος μεγέθυνσης είναι πάντα φυσικός αριθμός. Έρευνες έχουν δείξει ότι αν ο λόγος είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος της μονάδας, και πόσο μάλλον ρητός, είναι ένας βασικός παράγοντας που επηρεάζει την επιτυχία των μαθητών (Brousseau, 1995˙ Chazan, 1988).

Απόσπασμα (Υποκείμενο 2): *«Ότι ο λόγος είναι 1,5 (3/2) και τα παιδιά έχουν στο μυαλό τους πως ένας λόγος είναι πάντα ένας φυσικός αριθμός».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 10): *«Για να δημιουργήσω πλευρά 8cm ως πλευρά 12cm αρκεί να πολλαπλασιάσω την κάθε πλευρά με 3/2. Το 3/2 είναι ένας αριθμός δύσκολος για τους μαθητές, ενώ το 4 που είπα πριν είναι εύκολος».*

2 εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι οι μαθητές νιώθουν ασφάλεια με την πράξη της πρόσθεσης, ενώ 2 εκπαιδευτικοί τόνισαν τη σύγχυση που παρατηρείται με το σχηματισμό των ισοδύναμων κλασμάτων. Τέλος, ένας εκπαιδευτικός ισχυρίστηκε την απουσία εμπειρίας σε προβλήματα επεξεργασίας σχημάτων, με αποτέλεσμα οι μαθητές να παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευχέρεια στην επίλυση αλγεβρικών παρά γεωμετρικών προβλημάτων, ενώ ένας άλλος τόνισε την απουσία γνώσης της τριγωνικής ανισότητας για τη δημιουργία τριγώνου.

Απόσπασμα (Υποκείμενο 4): *«Πιστεύω πως τα παιδιά έχουν την αίσθηση πως η πρόσθεση είναι πιο εύκολη και πιο ασφαλής από τον πολλαπλασιασμό. Εκτός αυτού, ένα φυσικός αριθμός είναι πάντα πιο εύκολος από έναν ρητό. Όπου υπάρχει αναλογία πολύ δύσκολα θα πει ένα παιδί 3,5 φορές μεγαλύτερο. Τους βγαίνει πιο εύκολα το 3 φορές μεγαλύτερο».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 8): *«Δεν έχουν αποκτήσει εμπειρία στο να μπορούν να βλέπουν και να επεξεργάζονται σχήματα. Παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευχέρεια σε προβλήματα άλγεβρας παρά γεωμετρίας».*

Απόσπασμα (Υποκείμενο 12): *«Δεν έχουν κατανοήσει τις αναλογίες και τον τρόπο δημιουργίας ισοδύναμων κλασμάτων. Πόσο μάλλον, αν δεν τους έχει εξηγήσει και κανείς την τριγωνική ανισότητα, φυσικό επόμενο να μην τους βγει».*

6. Συζήτηση - Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να ερμηνεύσει τη διδακτική μέθοδο, τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών στην ομοιότητα και το θεώρημα του Θαλή.

Οι ερευνητικές υποθέσεις, που ορίστηκαν εξαρχής, σχετίζονται με αυτά τα τρία πεδία. Έτσι λοιπόν, στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου ακολουθεί η ερμηνεία των αποτελεσμάτων για την επαλήθευση ή την απόρριψη των ερευνητικών υποθέσεων. Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να τονιστεί ότι ο κάθε εκπαιδευτικός δεν παρατηρήθηκε σε βάθος χρόνου, δηλαδή δεν μελετήθηκε η γνώση περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των ενοτήτων της ομοιότητας και του θεωρήματος του Θαλή.

Υ.1. Οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν την παραδοσιακή διδασκαλία τόσο στο θεώρημα του Θαλή όσο και την ομοιότητα τριγώνων.

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, οι πλειοψηφία ακολουθεί τη δασκαλοκεντρική μέθοδο διδασκαλίας, καθώς η μέθοδος αυτή εστιάζει στο γνωστικό αντικείμενο. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι όταν ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να αναφέρουν στόχους που θέτουν κατά τη διδασκαλία αυτών των ενοτήτων, όλοι ανέφεραν γνωστικούς στόχους. Ελάχιστοι ήταν αυτοί που ανέφεραν και άλλους στόχους με τους οποίους δείχνουν ότι προσπαθούν να αποτρέψουν την κυριαρχία του παραδοσιακού μοντέλου εντάσσοντας τη μαθητοκεντρική και βιωματική μάθηση κατά τη διδασκαλία τους. Έτσι, όπως ανέδειξαν και οι Escudero και Sánchez (2007), η γνώση περιεχομένου είναι αυτή που επιδρά στη διδασκαλία των εκπαιδευτικών στη συγκεκριμένη ενότητα. Κάθε ένας από τους εκπαιδευτικούς προσεγγίζει το θέμα από διαφορετική οπτική, πράγμα που αποδεικνύει την ύπαρξη τόσο του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας, όσο και του μαθητοκεντρικού μοντέλου διδασκαλίας, σε μικρότερο βαθμό βέβαια.

Όλοι οι εκπαιδευτικοί τόνισαν την αξία της σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Όπως φαίνεται, οι εκπαιδευτικοί, και κυρίως οι νεότεροι σε ηλικία, προσπαθούν να μην ακολουθούν μία μέθοδο διδασκαλίας συνδυάζοντας μεθόδους διδασκαλίας για την καλύτερη επίτευξη και μετάδοσης της μαθηματικής γνώσης (Τουμάσης, 2004˙ Radford, 2008˙ Radford, 2019). Ωστόσο, τα σχολικά βιβλία, το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, η κάλυψη της διδακτέας ύλης, η ανεπαρκής υλικοτεχνική υποδομή και η χωρική οργάνωση των τάξεων είναι παράγοντες που ενισχύουν τη δασκαλοκεντρική σε σχέση με τη μαθητοκεντρική διδασκαλία (Μπότσογλου κ. συν., 2007).

Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται οι μαθηματικές έννοιες στο σχολικό βιβλίο δε φανερώνει το λόγο ύπαρξής τους. Οι μισοί εκπαιδευτικοί με τον τρόπο διδασκαλίας τους προσπαθούν να φανερώσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή, και λίγοι είναι εκείνοι που φεύγουν από τα όρια του σχολικού βιβλίου. Οι ασκήσεις που ακολουθούνται είναι αυτές του σχολικού βιβλίου. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν, είτε με την ομαδοσυνεργατική και βιωματική διδασκαλία, είτε με τη χρήση λογισμικών και βοηθητικών υλικών, να σπάσουν τη μονοτονία μιας απλής επίλυσης.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων ανέδειξε πως η συγκεκριμένη ενότητα δημιουργεί στους εκπαιδευτικού ανάμεικτα συναισθήματα, για τα οποία θα έλεγε κανείς ότι κυριαρχούν τα αρνητικά. Λόγω του ότι αναγνωρίζουν τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συγκεκριμένη ενότητα, τις πιο πολλές φορές προκαταβάλλονται και κυριαρχούνται από αρνητικά συναισθήματα. Βέβαια, η ικανοποίηση και ο ενθουσιασμός είναι δύο από τα συναισθήματα που ανθίζουν όταν βλέπουν ότι οι έννοιες έχουν κατανοηθεί από τους μαθητές.

Τέλος, μέσω της έρευνας αυτής δόθηκε η δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να σχολιάσουν και να κάνουν τις δικές τους προτάσεις για την καλύτερη διδακτική της συγκεκριμένης ενότητας. Μέσα από τα σχόλιά τους, φάνηκε ότι κρίνεται απαραίτητη η ανανέωση των σχολικών εγχειριδίων, με τοποθέτηση περισσότερων ασκήσεων που σχετίζονται με την καθημερινότητα, η ένταξη της ομοιοθεσίας στη διδακτέα ύλη μέσω της οποίας οι μαθητές θα μπορούν να μυηθούν στην έννοια του μετασχηματισμού και ότι η χρήση τεχνολογίας θα συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση και παρουσίαση των εννοιών.

Υ.2. Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα πρωτοτυπικά σχήματα για τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή.

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν χρήσιμο εργαλείο στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, επομένως κατέχουν σπουδαίο ρόλο στο αντικείμενο των μαθηματικών (Van De Walle, 2007). Με τη χρήση των κατάλληλων αναπαραστάσεων δημιουργείται ένα παραγωγικό μαθησιακό περιβάλλον, καθώς συμβάλλουν στην ανάπτυξη της σκέψης και της επικοινωνίας των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Τις περισσότερες φορές, όμως, ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται και προβάλλονται οι αναπαραστάσεις γίνεται χωρίς εμβάθυνση και ανάλυση (Τζεκάκη, 2007).

Σύμφωνα με την έρευνα των Cordier (1991) υπάρχουν ορισμένες αναπαραστάσεις που είναι πιο εύκολα συνδεδεμένες με το θεώρημα του Θαλή και πιο εύκολα κατανοητές από τους μαθητές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιούν αυτές τις ‘εύκολες’ αναπαραστάσεις κατά τη διδασκαλία αυτής της ενότητας. Τα χαρακτηριστικά των τυπικών αναπαραστάσεων στο θεώρημα του Θαλή που διευκολύνουν τους μαθητές είναι ο αριθμός των παραλλήλων και η μορφή του σχήματος, τους είναι πιο κατανοητή η μορφή κώνου πάρα της πεταλούδας (Brousseau, 1995˙ Cordier & Cordier, 1991).

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα συγκεκριμένο σύνολο αναπαραστάσεων, επικεντρωμένοι, συνήθως, μόνο στις αναπαραστάσεις του σχολικού βιβλίου, οι οποίες έχουν τα φανερά χαρακτηριστικά των εννοιών αυτών. Πρόκειται, δηλαδή, για ευνοϊκές αναπαραστάσεις, που στην ουσία, όμως, γίνονται η αιτία δημιουργίας λαθών και παρανοήσεων (Λεμονίδης, 1993˙ Lemonidis, 1997).

Από την ανάλυση των δεδομένων αναδύθηκαν αξιόλογα συμπεράσματα αναφορικά με τη χρήση πρωτοτυπικών ή μη σχημάτων στο θεώρημα του Θαλή. Οι αναπαραστάσεις που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί, στην πλειοψηφία τους, ήταν αναπαραστάσεις μορφής κώνου, μία από τις τυπικές μορφές σχήματος του θεωρήματος του Θαλή, όπως είχε προβλεφθεί από τη βιβλιογραφία. Φυσικά, υπήρχαν και σχήματα της μορφής πεταλούδας, όπως επίσης και της γενικής μορφής του θεωρήματος του Θαλή, δηλαδή δέσμες παραλλήλων που τέμνονται από ευθείες, πολύ λιγότερα σε πλήθος από αυτά της μορφής κώνου. Ακόμη, υπήρχαν και εκπαιδευτικοί που πρότειναν σχήματα με συνδυασμό μορφών, είτε κώνου και πεταλούδας, είτε κώνου με δέσμη παραλλήλων. Ένας ήταν μόνο ο εκπαιδευτικός ο οποίος σχεδίασε μία λανθασμένη αναπαράσταση του θεωρήματος του Θαλή τονίζοντας ότι μέσα από την επεξεργασία του σχήματος και τη συζήτηση με τους μαθητές του οδηγούνται στο επιθυμητό σχήμα που αφορά την έννοια.

Παρόλο που στο σχολικό βιβλίο οι αναπαραστάσεις που αφορούν το θεώρημα του Θαλή δίνουν την αίσθηση γεωμετρικών σχημάτων, και πιο συγκεκριμένα τριγώνων και τραπεζίων, από την έρευνα φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί προτιμούν σχήματα μιας πιο γενικής μορφής με προεκτάσεις, συνδέοντας έτσι το θεώρημα του Θαλή με δέσμες παραλλήλων που τέμνουν ευθείες είτε τεμνόμενες, είτε παράλληλες.

Όσον αφορά το πλήθος των παράλληλων ευθειών, η έρευνα έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν καταλληλότερα τα σχήματα αυτά με τον ελάχιστο αριθμό παραλλήλων και τεμνουσών (2 ή 3 ή 4). Όπως φαίνεται και από την ανάλυση των σχημάτων του σχολικού βιβλίου που έγινε σε προηγούμενη ενότητα (βλ. Κεφ. 2.4), τα σχήματα που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί, ως προς το πλήθος των παραλλήλων, ταυτίζονται με αυτά του σχολικού βιβλίου. Το πλήθος των παραλλήλων είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των τυπικών αναπαραστάσεων στο θεώρημα του Θαλή που διευκολύνει τους μαθητές: όσο μικρότερο είναι το πλήθος των παραλλήλων τόσο πιο εύκολα διακρίνονται τα ανάλογα τμήματα, καθώς είναι και αυτά λιγότερα σε πλήθος (Brousseau, 1995˙ Cordier & Cordier, 1991).

Τέλος, η έρευνα ανέδειξε και τη χρήση αναπαραστάσεων που οι παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα στις ευθείες που τέμνουν. Αν και τα σχήματα με μη ίσα τμήματα ήταν κατά το ελάχιστο περισσότερα, αυτά με τα ίσα τμήματα αποτελούν οικείες αναπαραστάσεις από τα προηγούμενα κεφάλαια μελέτης του σχολικού βιβλίου (λόγος ευθυγράμμων τμημάτων). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, την καλύτερη και ευκολότερη μετάβαση από μία συγκεκριμένη και ειδική συνθήκη, σε μία πιο γενική, αυτή που αφορά το θεώρημα του Θαλή.

Υ.3. Οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν να διακρίνουν τα διαφορετικά είδη των λόγων που δημιουργούνται στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα.

Όπως αναφέρουν οι Laguerre (2005) και Mrabet (2006) η διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή μέσα στο σχολείο έχει παρουσιάσει μεγάλη εξέλιξη με το πέρασμα των χρόνων. Ενώ μέχρι τα τέλη του 18^{ου} αιώνα το θεώρημα του Θαλή εφαρμοζόταν με τη μέθοδο των εμβαδών, από το 1825 κι έπειτα εφαρμόζονται οι σχέσεις μεταξύ των μηκών και των γωνιών, δηλαδή αν μια ευθεία τέμνεται από παράλληλες ευθείες σε ίσα τμήματα, οι παράλληλες αυτές τέμνουν και κάθε άλλη ευθεία σε ίσα τμήματα.

Από έρευνες που έχουν γίνει φαίνεται ότι τις δύο βασικές προσεγγίσεις του θεωρήματος του Θαλή, προβολής και ομοιότητας, όπως τις αναφέρει ο Brousseau (1995), οι μαθητές για την εφαρμογή του θεωρήματος τις έχουν διπλασιάσει. Εφαρμόζουν, δηλαδή, τέσσερα είδη λόγων πάνω σε τρίγωνα τόσο της μορφής "κώνου" όσο και της μορφής "πεταλούδας". Πέρα από τους λόγους ομοιότητας και προβολής, οι λόγοι μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων και οι λόγοι μεταξύ των ομόλογων τμημάτων των πλάγιων πλευρών προκύπτουν από τις ιδιότητες των αναλογιών.

Παρόλο που δεν έχει βιβλιογραφία σχετική με τα είδη των λόγων που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα των τριγώνων, τέσσερις προσεγγίσεις παρουσίασαν κι εδώ οι εκπαιδευτικοί μέσα από το ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε να απαντήσουν. Ωστόσο, και στα δύο σχήματα που δόθηκαν, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν με μεγαλύτερη ευκολία τους λόγους ομοιότητας. Όσον αφορά το συμβολισμό των λόγων, φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ερμηνεύσουν ξεκάθαρα τους λόγους ομοιότητας μεταξύ των δύο τριγώνων. Οι υπόλοιποι λόγοι είναι λόγοι που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή ή λόγοι που προκύπτουν από τις ιδιότητες των αναλογιών. Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών φάνηκε ότι, ενώ γνωρίζουν λόγους, δεν είναι σε θέση να τους διαχωρίσουν και να τους δώσουν οντότητα. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό και στο σχολικό εγχειρίδιο καθώς οι μόνοι λόγοι που χαρακτηρίζονται είναι οι λόγοι ομοιότητας. Όλες οι άλλες αναλογίες που προκύπτουν γίνονται με μαθηματικό τρόπο, χωρίς ουσιαστική ερμηνεία.

Υ.4. Οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τις παρανοήσεις των μαθητών που δημιουργούνται στην ομοιότητα τριγώνων.

Σημαντικά ήταν και τα συμπεράσματα που προέκυψαν, μέσα από το ερωτηματολόγιο, για το πώς οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών στο θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα τριγώνων, δίνοντας τις πιθανές αιτίες που προκύπτουν αυτά τα λάθη και τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να αντιμετωπιστούν.

Έρευνες έχουν δείξει ότι τα λάθη είναι γνωστικές παρανοήσεις που αντιμετωπίζονται και εξαλείφονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ή υποδηλώνουν εναλλακτικές προσεγγίσεις που αξιοποιούνται κατά τη διδασκαλία. Σημαντικό ρόλο στο πλαίσιο της διδακτικής πρακτικής παίζει ο τρόπος με τον οποίο ένας εκπαιδευτικούς θα διαχειριστεί ένα λάθος που προκύπτει. Η έρευνα σχετικά με τα λάθη των εκπαιδευόμενων στα μαθηματικά σταδιακά επικεντρώνεται στο να μπορέσει ο δάσκαλος να εντοπίσει και να αντιμετωπίσει τους λόγους που οδηγούν σε αυτά τα λάθη (Ράπτη, 2002).

Από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στην παρούσα έρευνα, φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν και κατηγοριοποίησαν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον εντοπισμό και το σχηματισμό όμοιων τριγώνων, και ανέφεραν τρόπους διαχείρισης και αντιμετώπισης για βελτίωση της διδακτικής πρακτικής και αιτίες που προκλήθηκαν αυτά τα λάθη (Μαναρίδης κ.ά., 2009). Οι απαντήσεις αυτές δείχνουν ότι υπάρχουν αντιπροσωπευτικά σχήματα, όχι μόνο στο θεώρημα του Θαλή αλλά και την ομοιότητα τριγώνων, που επηρεάζουν το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών (Chazan, 1988˙ Cordier & Cordier, 1991). Οι μαθητές βασίζουν τη λογική διαδικασία με την οποία καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα στις ιδιότητες των τυπικών αναπαραστάσεων, τις οποίες μπορούν και αντιλαμβάνονται ευκολότερα.

Σχετικά με τη δυσκολία εντοπισμού των όμοιων τριγώνων, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν την ύπαρξη τόσο εννοιολογικών όσο και διαδικαστικών λαθών. Από τις απαντήσεις φαίνεται πως η βασικότερη αιτία αυτής της δυσκολίας είναι ο προσανατολισμός των σχημάτων, καθώς οι μαθητές δεν έχουν την απαιτούμενη γνώση και εμπειρία με τις έννοιες της περιστροφής και της αναστροφής των σχημάτων. Αυτό οδηγεί στον μη εντοπισμό των παράλληλων τμημάτων, αν φυσικά υπάρχουν και στη μη αντιστοιχία των ίσων γωνιών και των ανάλογων πλευρών (Chazan, 1988). Για την αποφυγή αυτών των δυσκολιών οι εκπαιδευτικοί έκαναν προτάσεις εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης, όπως η εμπέδωση της θεωρίας και πρακτική εξάσκηση με αριθμητικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, η περιστροφή των σχημάτων, η χρήση βοηθητικού υλικού (π.χ. χρώματα), και τέλος ο τεμαχισμός των τριγώνων.

Όσον αφορά το σχηματισμό των όμοιων τριγώνων, οι εκπαιδευτικοί ανέδειξαν την ύπαρξη τόσο εννοιολογικών όσο και διαδικαστικών λαθών. Από έρευνες που έχουν γίνει στο παρελθόν, φαίνεται πως οι μαθητές κάνουν και λάθη που δε σχετίζονται με το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα των τριγώνων. Ένα τέτοιο λάθος ανέφεραν όλοι οι εκπαιδευτικοί στην παρούσα έρευνα. Η προσθετική στρατηγική (*additive strategy*) εφαρμόζεται από τους μαθητές σε προβλήματα αναλογιών, καθώς κρίνεται ευκολότερη η πράξη της πρόσθεσης παρά του πολλαπλασιασμού (Chazan, 1988˙ Τσικοπούλου & Φερεντίνος, 2018). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί ισχυρίστηκαν και ότι δεν έγινε αντιληπτή από τους μαθητές η ύπαρξη λόγου ομοιότητας και ότι επρόκειτο για ρητό λόγο ομοιότητας και όχι φυσικό. Όταν ο λόγος δεν είναι φυσικός αριθμός επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό η επιτυχία των μαθητών (Brousseau, 1995˙ Chazan, 1988). Τέλος, σπουδαίο ρόλο παίζει και η εμπειρία των μαθητών της Γ’ Γυμνασίου σε γεωμετρικά προβλήματα, η οποία απουσιάζει σε σχέση με την εμπειρία που έχουν πάνω σε αλγεβρικά προβλήματα.

Περιορισμοί και προτάσεις

Για την ολοκλήρωση της παρούσας έρευνας χρειάστηκε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα για την εύρεση του δείγματος. Το να συμμετέχουν στην έρευνα εκπαιδευτικοί που έχουν διδάξει το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα, αλλά να το έχουν διδάξει σε σχολεία, είτε ως μόνιμοι είτε ως αναπληρωτές και να μην γνωρίζονται μεταξύ τους για την αποφυγή διαρροής των ερωτήσεων και επανάληψης των απαντήσεων ήταν εξαιρετικά δύσκολο. Λόγω του ότι το δείγμα της έρευνας ήταν αρκετά περιορισμένο, δεν μπορεί να γίνει γενίκευση των συμπερασμάτων που προέκυψαν.

Επίσης, περιορισμό της έρευνας αποτέλεσε και το γεγονός ότι η συνεντεύξεις και τα ερωτηματολόγια ορισμένων υποκειμένων διεξήχθησαν μέσω κάποιας ηλεκτρονικής πλατφόρμας (Skype, Messenger, Viber) είτε λόγω δυσκολίας μετακίνησης του υποκειμένου και της ερευνήτριας, είτε λόγω της πανδημίας του Covid-19. Θετικό ήταν το γεγονός ότι η μέθοδος συμπλήρωσης δεν ήταν η αυτό-συμπλήρωση, καθώς υπήρχε η δυνατότητα παρέμβασης της ερευνήτριας σε περιπτώσεις μη κατανόησης κάποιων ερωτήσεων.

Σχετικά με την παρούσα έρευνα, υπάρχουν θέματα που χρειάζονται περαιτέρω διερεύνηση στον τομέα της διδασκαλίας του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων. Θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί σε μεγαλύτερο βαθμό η διδασκαλία αυτών των εννοιών σε πραγματικό χρόνο σε γυμνάσια της χώρας.

Υπάρχει ανάγκη να ερευνηθούν βαθύτερα οι δραστηριότητες που εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία των εννοιών που προαναφέρθηκαν. Ποιες δραστηριότητες και ποια μέσα, τεχνολογικά ή μη, θεωρούν καταλληλότερα οι εκπαιδευτικοί για την εισαγωγή και εμβάθυνση των εννοιών αυτών; Πόσος χρόνος είναι ο ιδανικός για την αφομοίωσή τους; Παίζει ρόλο η εμπειρία του καθηγητή για την επιτυχία της αφομοίωσης των μαθητών; Όλα αυτά αποτελούν ερωτήματα τα οποία θα μπορούσαν να απαντηθούν σε μελλοντικές έρευνες.

Τέλος, προτεινόμενη έρευνα θα μπορούσε να αποτελέσει μία ποσοτική μελέτη των στάσεων των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία του θεωρήματος του Θαλή και της ομοιότητας τριγώνων. Ως ευρύτερη διερεύνηση του παραπάνω, θα ήταν δυνατό η ποσοτική μελέτη να διαχωρίσει τις στάσεις των εκπαιδευτικών ανάλογα με το φύλο και την ηλικία τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Alro, H. & Skovsmose, O., (2002). Dialogue and Learning in Mathematics Education. *Mathematics Education Library*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ball, L. D., Thames, H. M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59 (5),* 389-407.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Bruner, J. S. (1966). Towards a theory of instruction, New York: Norton.

Brousseau, G. (1995). Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'Université. *Autour de Thalès, Bulletin Inter – IREM, COMMISSION PREMIER CYCLE,* 87-124.

Byerley, C. & Thompson, P. W. (2017). Secondary teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 48,*168-193.

Chazan, D. (1988). Similarity: Exploring the Understanding of a Geometric Concept. Technical Report 88-15. *Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education.*

Cordier, F., & Cordier, J. (1991). L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en didactique des Mathematiques, 11(1),* 45-64.

Curry, M., Mitchelmore, M. C., & Outhred, L. N. (2006). Development of children's understanding of length, area, and volume measurement principles. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*(July), 377–384.

Curry, M., & Outhred, L. (2005). Conceptual understanding of spatial measurement. *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Building connections: Theory, research and practice,* 1, 265-272.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrieentermes de congruence. *In Annales de Didactique et de Sciences cognitive, 1(1),* 57-74.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*, 142- 157, Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning.* Retrieved from ERIC ED 466379.

Escudero, I. & Sanchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 312–327.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24(2),* 139-162.

Fischbein, E & Nachlieli, T. (1998). Concepts and Figures in Geometrical Reasoning, *International Journal of Science Education, 20 (10),* 1193-1211.

Gualdrón, E., Giménez, J. & Gutierrez, A. (2015). Similarity, Homothety and Thales theorem together for an effective teaching. *Conference: CIEAEM 67.*And *Quaderni Di Ricerca In Didattica (Scienze Matematiche) 25(2),* 143-148.

Herbst, P. & Kosko, K. (2012). Mathematical Knowledge for teaching High School Geometry. *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 438-444.

Kospentaris, G. & Spyrou, P. (2005). The construction of the concept of similarity proportions and the educational experience. *Mediterranean Congress*, Palermo,239-254.

Küchemann, D. & Rodd, M. (2012). *On Learning Geometry for Teaching*. Στη διεύθυνση: https://www.researchgate.net/publication/245033137_On_Learning_Geometry_for_Teaching

Laguerre, E. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège* (Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot-Paris VII).

Lemonidis, Ch. (1990) "Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie". I.R.E.M. de Strasbourg, 1990, σελ. 315. https://doi.org/10.12681/eadd/3786

Lemonidis, Ch. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques (R.D.M). Vol. 11*, No.2.3 pp. 295-324, France. https://revue-rdm.com/1991/analyse-et-realisation-d-une/

Lemonidis, Ch. (1991). Une analyse de la complexité cognitive de la notion d'homothétie. PEDAGOGIES. Cahiers du Laboratoire de Pédagogie Expérimentale de l'université de Louvain. No.1, pp. 71-79, Bruxelles.

Lemonidis, Ch. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 30(4)*, 2087-2095.

Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 219-248.

Mattheou, K. & Spyrou, P. (2009). The role of teaching in the development of basic concepts in geometry: How the concept of similarity and intuitive knowledge affect student's perception of similar shapes. *Proceedings of CERME 6*, 736-745, Lyon France.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behaviour, 17 (2)*, 183-195.

Mrabet, S. (2006). L'enseignement du théorème de Thalès: Quelques points de reflexion. *Actes du colloque IMF*, Tunisie.

Potari, D. & Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the Teaching Triad as a Tool for Reflection and Analysis, *Journal of Mathematics Teacher Education, 5(4),* 351-380.

Radford, L. (2019). On theories in mathematics education and their conceptual differences. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 4,* 4055–4074.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Report of Survey Team, 7*.

Redlin, L., Viet, N. & Watson, S. (2000). Thales' Shadow. *Mathematics Magazine, 73(5),* 347-353.

Vollrath, H. J. (1977). The understanding of similarity and shape in classifying tasks. *Educational Studies in Mathematics, 8,* 211-224.

Warren, E. & English, L. (1995). Facility with plane shapes: a multifaceted skill. *Educational Studies in Mathematics, 28(4)*, 365-383.

Ελληνόγλωσση

Γαγάτσης, Α. (2007). *Προβλήματα μάθησης των Μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α. (2014). Το γεωμετρικό σχήμα στο γεωμετρικό συλλογισμό: κάνοντας τους μαθητές «τυφλούς» ή «εξερευνητές». *5ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ)*, Φλώρινα.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας. Νέα συμπληρωμένη και αναθεωρημένη έκδοση.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Ίσαρη, Φ., Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας. Εφαρμογές στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση.* Αθήνα: Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Katz, V. (2013). *Η ιστορία των Μαθηματικών. Μία εισαγωγή.* Ηράκλειο: Κρήτης.

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. *2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.*

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Τόπος.

Λεμονίδης, Χ. (1990). Ιστορική και επιστημολογική ανάλυση της ομοιοθεσίας. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*. *6,* 13-53, Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης, Χ. (1992). Διάφορες Μαθηματικές παρουσιάσεις και συμπεριφορά των μαθητών στο θεώρημα του Θαλή. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών.12*, 7-24, Θεσσαλονίκη.

Λεμονίδης, Χ. (1993). Επίδραση των τυπικών αναπαραστάσεων στη συμπεριφορά του μαθητή. Παραδείγματα από τη Γεωμετρία. Εισήγηση στο *4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ψυχολογικής Έρευνας, ΕΛΨΕ* Θεσσαλονίκη.

Μαναρίδης, Α., Χατζηγούλα, Α., Σιώπη, Κ., Πόταρη, Δ. & Σακονίδης, Χ. (2009). Το λάθος και η διαχείριση του στο πλαίσιο μιας κοινότητας διερεύνησης των διδακτικών πρακτικών στα μαθηματικά. *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ (Ρόδος, 2011).*

Μπότσογλου, Κ., Κακανά, Δ. Μ. & Χατζοπούλου, Κ. (2007). Σύγχρονες μορφές διδασκαλίας και μάθησης. Απόψεις των παιδαγωγών της προσχολικής ηλικίας για την ομαδοσυνεργατική. *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού, 7,* 87-100.

Παναούρα, Γ. (2007). *Οι Γεωμετρικές Γνώσεις και Ικανότητες των μαθητών στο τέλος της Δημοτικής Εκπαίδευσης. Συγκρίνοντας τη Γεωμετρική Σκέψη μαθητών Δημοτικής και Μέσης Εκπαίδευσης.* Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Παρασκευοπούλου – Κόλλια, Ε. Α. (2008). Μεθοδολογία ποιοτικής έρευνας στις κοινωνικές επιστήμες και συνεντεύξεις – Methodology of qualitative research in social sciences and interviews. *Open Education – The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology, 4 (1),* 72-81.

Panchenko, D., (2005). *Θαλής. Οι απαρχές της θεωρητικής συλλογιστικής και η γένεση της επιστήμης*. Αθήνα: Εκδόσεις Ευρασία.

Ράπτη, Μ. (2002). *Τα λάθη των μαθητών και ο ρόλος τους στη διαδικασία της μάθησης*. Αθήνα : Gutenberg.

Robson, C. (2010). *Η έρευνα του πραγματικού κόσμου. Ένα μέσον για κοινωνικούς επιστήμονες και επαγγελματίες ερευνητές.* Αθήνα: Gutenberg.

Σύκα, Α., & Φαρμάκη, Ε., & Ψαρράς, Σ. (2011). *Ο ρόλος του λάθους στην παιδαγωγική πράξη*. Αλεξανδρούπολη, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά Παιδιά Μεγάλα Μαθηματικά νοήματα. Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία.* Αθήνα: Gutenberg.

Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.

Τσικοπούλου, Σ., Φερεντίνος, Σ. (2018). Υπάρχουν λάθη στα Μαθηματικά που είναι σχεδόν αδύνατο να τα αποφύγουν οι μαθητές;. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών – Επιστημονικών Θεμάτων, 14,* 32-47.

Τσιώλης, Γ. (2013). *Η σχέση ποιοτικής και ποσοτικής προσέγγισης στην κοινωνική έρευνα: από τη θέση περί «ριζικής ασυμβατότητας» στο συνδυασμό ή τη συμπληρωματικότητα των προσεγγίσεων.* Στη διεύθυνση: https://www.researchgate.net/publication/283497432_G_Tsioles_E_schese_poiotikes_kai_posotikes_prosengises_sten_koinonike_ereuna_apo_te_these_peri_'rizikes_asymbatotetas'_sto_syndyasmo_e_te_sympleromatikoteta_ton_prosengiseon_Sto_M_Pourkos_Epim_Dynatot

Τσιώλης, Γ. (2018). *Η θεματική ανάλυση ποιοτικών δεδομένων. Ερευνητικές διαδρομές στις κοινωνικές επιστήμες: Θεωρητικές – μεθοδολογικές συμβολές και μελέτες περίπτωσης*, Πανεπιστήμιο

Κρήτης – Εργαστήριο Κοινωνικής Ανάλυσης & Εφαρμοσμένης Κοινωνικής Έρευνας, 97-125.

ΥΠΕΠΘ/Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή, (σελ. 206-224). Αθήνα: ΟΕΔΒ

ΥΠΕΠΘ/Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Βιβλίο εκπαιδευτικού, (σελ. 82-90). Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος»

Van De Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή Διαδικασία.* Αθήνα: Επίκεντρο.

Φεσάκης, Γ. (2019). *Εισαγωγή στις εφαρμογές των ψηφιακών τεχνολογιών στην εκπαίδευση. Από τις τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών (ΤΠΕ) στην ψηφιακή ικανότητα και την υπολογιστική σκέψη*. Αθήνα: Gutenberg.

Χρυσαφίδης, Κ. (1994). *Βιωματική – Επικοινωνιακή Διδασκαλία. Η εισαγωγή της μεθόδου project στο σχολείο.* Αθήνα: Gutenberg.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α – Συνέντευξη και Ερωτηματολόγιο

✓ **Ερωτήσεις Συνέντευξης**

(ΕΑ1): Πόσα χρόνια έχετε διδάξει την ενότητα που αφορά το θεώρημα του Θαλή και την ομοιότητα;

(ΕΑ2): Μπορείτε να δώσετε το πλάνο του μαθήματος (οργανόγραμμα μαθήματος);

(ΕΑ3): Πώς σκοπεύετε να πραγματοποιήσετε το μάθημα και να εργαστείτε με τους μαθητές σας;

(ΕΑ4): Ποιες θεωρείτε τις πιο σημαντικές ιδέες σε αυτή την διδακτική ενότητα;

(ΕΑ5): Πόσες μέρες χρειάζεστε για την ολοκλήρωση της ενότητας;

(ΕΑ6): Ποιοι είναι οι σημαντικότεροι στόχοι σας και γιατί;

(ΕΑ7): Πώς σκοπεύετε να τους πετύχετε;

(ΕΑ8): Πώς σχολιάζετε την σειρά που παρουσιάζονται τα μαθήματα της ενότητας αυτής στο σχολικό εγχειρίδιο;

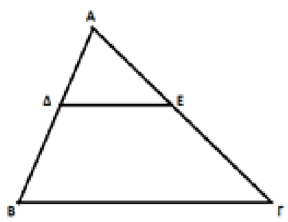
(ΕΑ9): Πώς αισθάνεστε όταν διδάσκετε αυτήν την ενότητα;

(ΕΑ10): Έχετε να δηλώσετε ή να παρατηρήσετε κάτι άλλο;

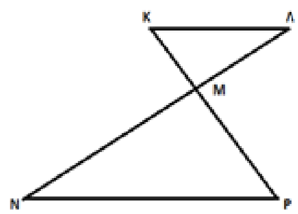
✓ **Έργα Ερωτηματολογίου**

(ΒΕ1): Κατασκευάστε γεωμετρικά σχήματα που θα χρησιμοποιούσατε στην τάξη για το μάθημα του θεωρήματος του Θαλή.

(ΒΕ2): Για κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα, να γράψετε όλους τους διαφορετικούς λόγους μεταξύ των τμημάτων. Πόσα είδη διαφορετικών λόγων υπάρχουν και τι συμβολίζουν οι λόγοι αυτοί;



Σχ. Α



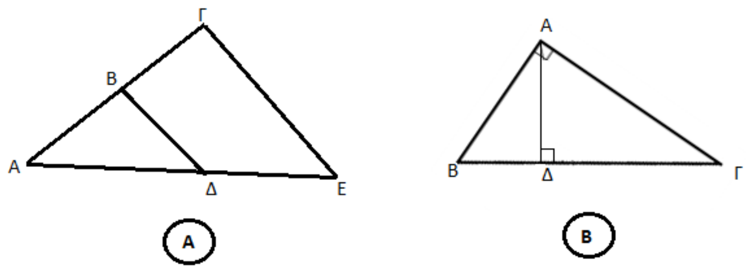
Σχ. Β

(ΒΕ3): Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε διαπιστώθηκε ότι το 70% των μαθητών ανέφερε ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ στο σχήμα Α , ενώ μόλις το 50%

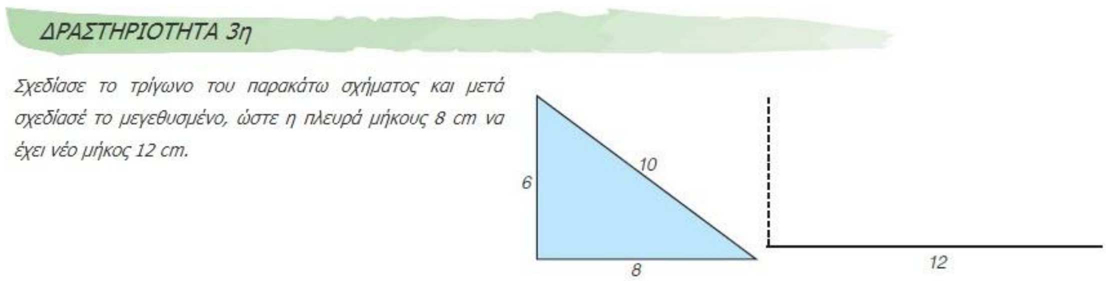
ανέφερε τουλάχιστον μία ομοιότητα μεταξύ των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ και ΑΒΓ του σχήματος Β.

A) Τι πιστεύετε ότι είναι αυτό που δυσκολεύει τους μαθητές και τους εμποδίζει να εντοπίσουν τα όμοια τρίγωνα, ιδιαίτερα στην περίπτωση των ορθογωνίων τριγώνων;

B) Πώς θα τους το εξηγούσατε ώστε να το καταλάβουν;



(ΒΕ4): Δόθηκε σε μαθητές η παρακάτω δραστηριότητα:



A) Ποια συστηματικά λάθη παρουσιάζουν οι μαθητές σε αυτό το ερώτημα;

B) Ποιες εξηγήσεις δίνετε για αυτά τα λάθη;

Παράρτημα Β – Γνωστικοί στόχοι από το βιβλίο του εκπαιδευτικού

Για το θεώρημα του Θαλή οι μαθητές πρέπει:

- *«Να μπορούν να διατυπώνουν το θεώρημα του Θαλή και να γράφουν τις αντίστοιχες αναλογίες σε οποιοδήποτε σχήμα που ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.*
- *Να μάθουν να χρησιμοποιούν το θεώρημα του Θαλή για να υπολογίζουν το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και το λόγο δύο τμημάτων»* (σελ. 84).

Για την ομοιότητα πολυγώνων οι μαθητές πρέπει:

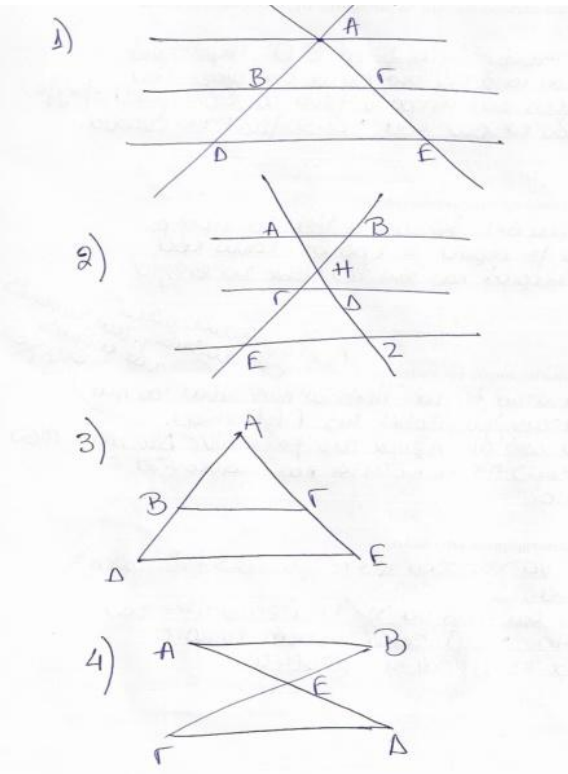
- *«Να γνωρίζουν ότι όμοια πολύγωνα είναι αυτά που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου, οπότε τα σχήματα που είναι ομοιόθετα ή μπορούν να γίνουν ομόθετα είναι όμοια.*
- *Να γνωρίζουν ότι, αν δυο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια και το αντίστροφο.*
- *Να γνωρίζουν τι σημαίνει λόγος ομοιότητας ομοίων πολυγώνων και ποια σχέση έχει με το λόγο των περιμέτρων τους. Ακόμη να γνωρίζουν πώς συνδέεται ο λόγος ομοιότητας με την κλίμακα ενός χάρτη ή ενός σχεδίου»* (σελ. 88).

Για την ομοιότητα τριγώνων οι μαθητές πρέπει:

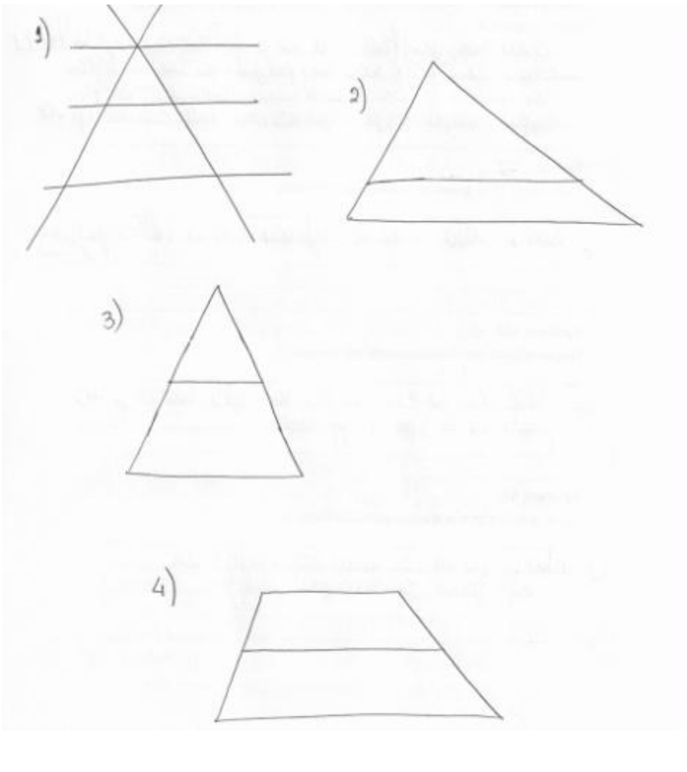
- *«Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν δυο γωνίες τους ίσες.*
- *Να μάθουν να γράφουν τους ίσους λόγους που προκύπτουν από τις αντίστοιχες πλευρές δυο ομοίων τριγώνων και να τους αξιοποιούν υπολογίζοντας μήκη τμημάτων»* (σελ. 90-91).

Παράρτημα Γ – Γεωμετρικά σχήματα Έργου Β1

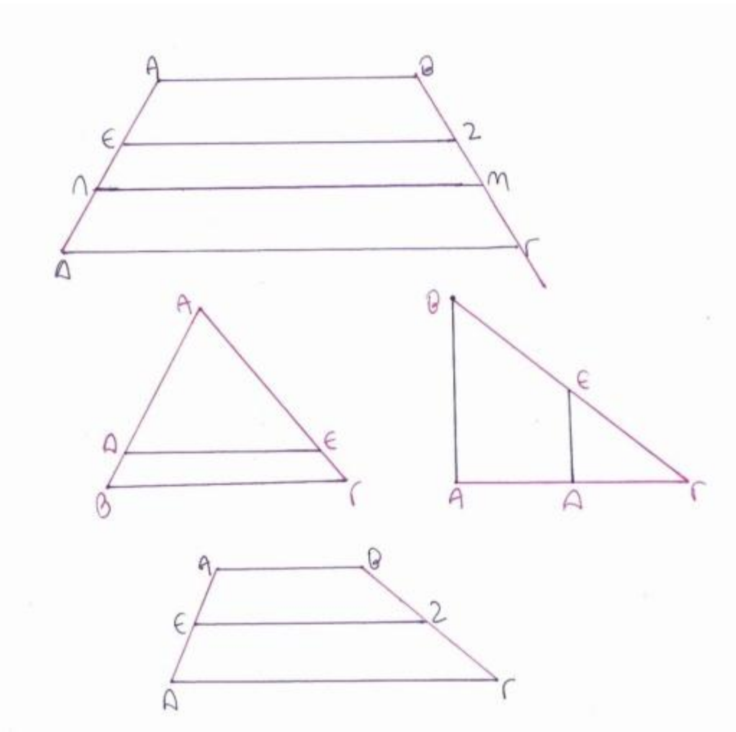
Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 1:



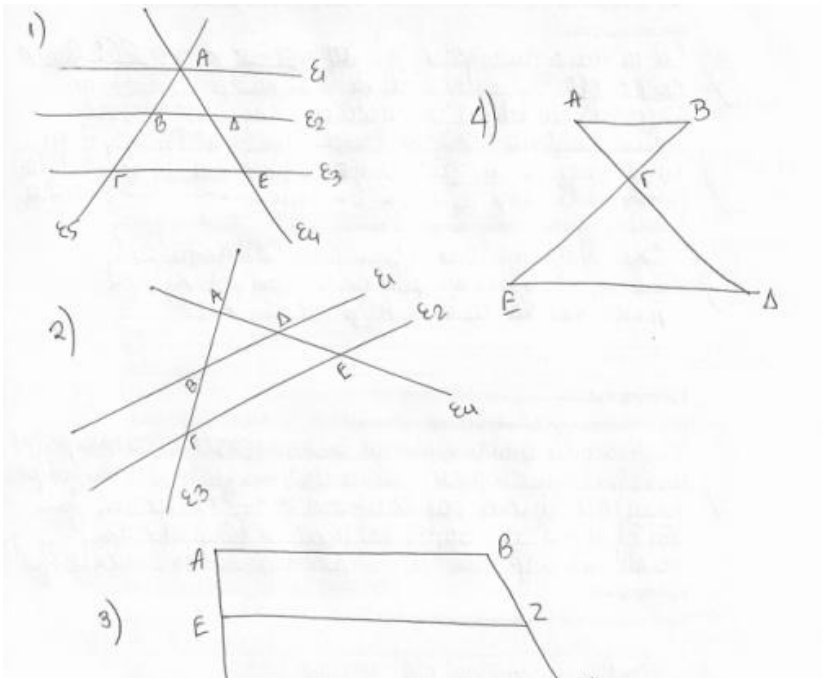
Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 2:



Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 3:

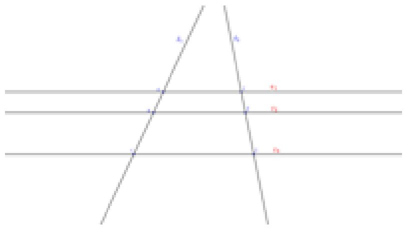


Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 4:

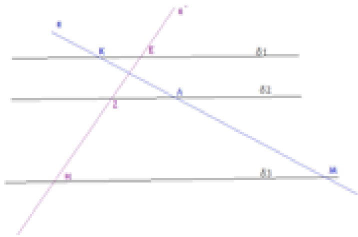


Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 5:

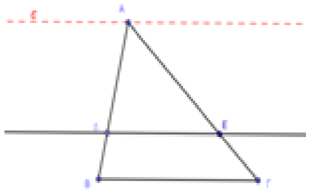
Σχήμα 1



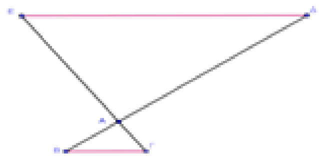
Σχήμα 2



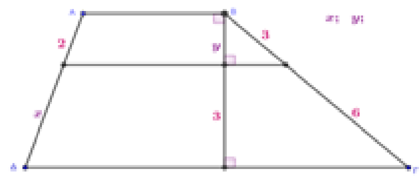
Σχήμα 3



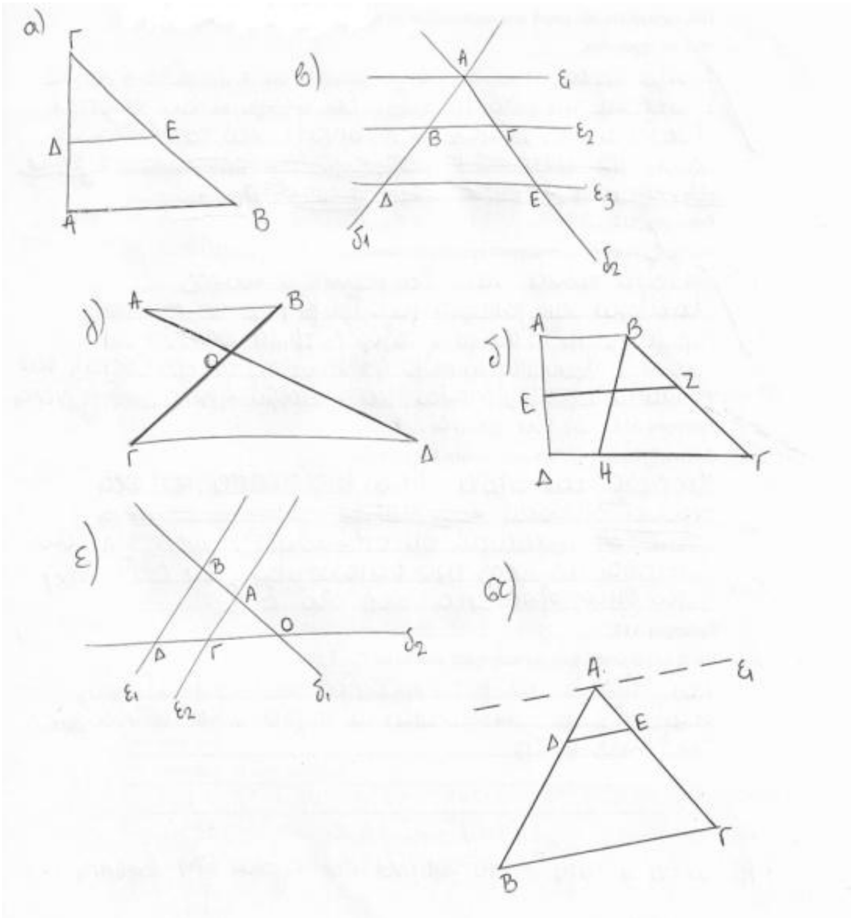
Σχήμα 4



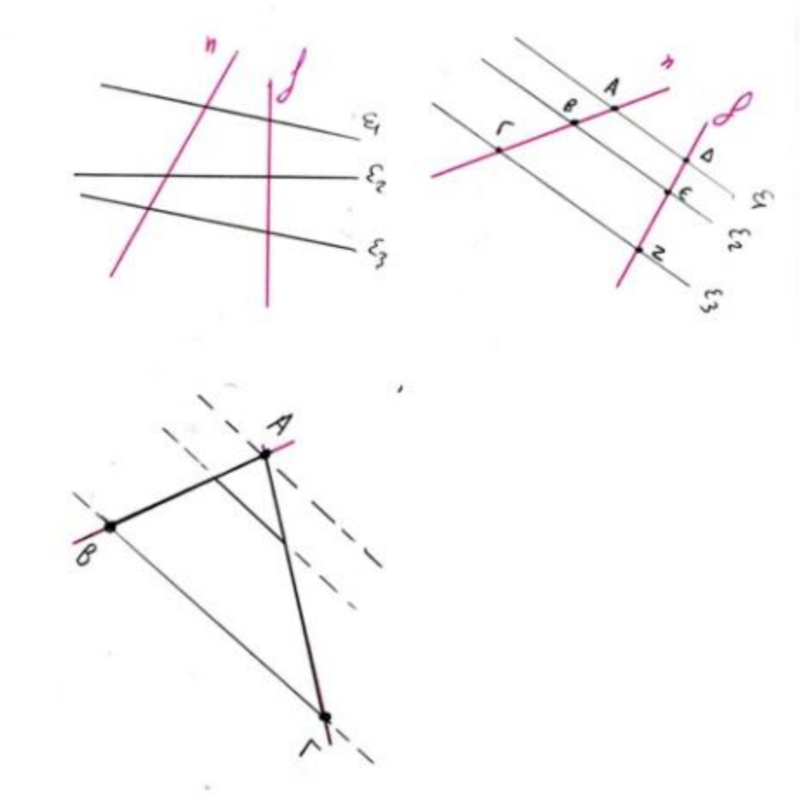
Σχήμα 5



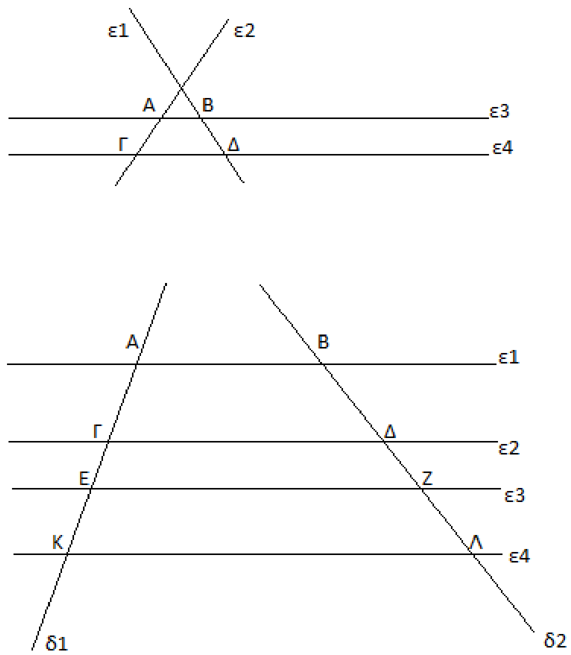
Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 6:



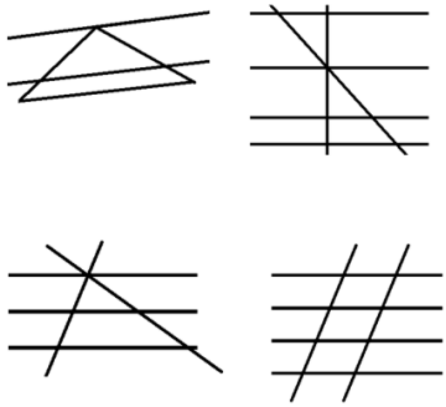
Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 7:



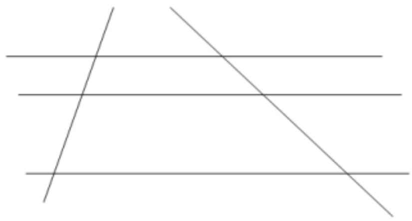
Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 8:

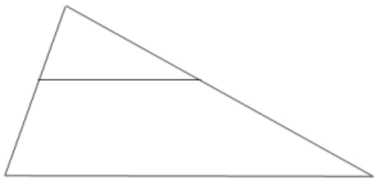


Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 9:

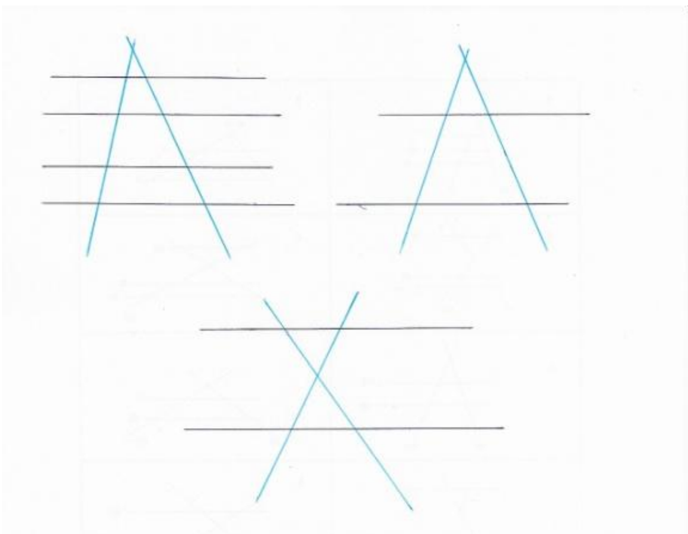


Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 10:

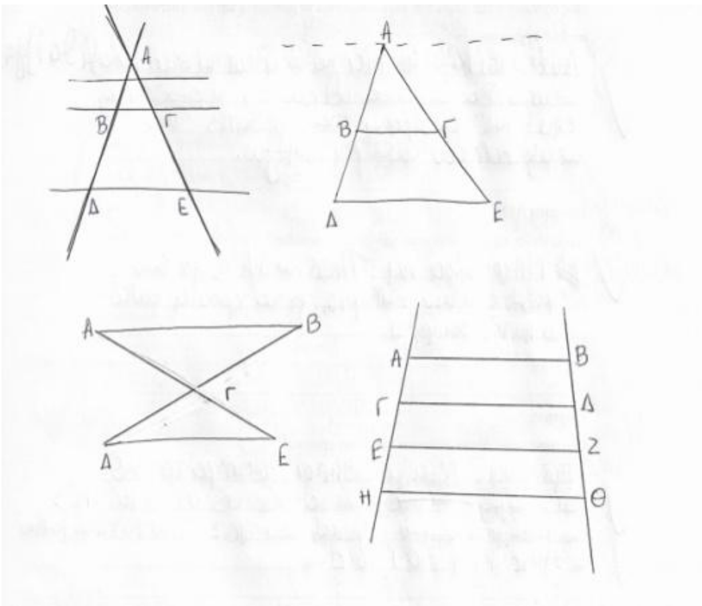




Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 11:



Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 12:



Γεωμετρικά σχήματα Υποκειμένου 13: