ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διπλωματική εργασία

Τίτλος

Το Πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα και ο Ρόλος του Μηδενός: Επιστημολογικά και Διδακτικά Ζητήματα

της

Αικατερίνης Τσαμούρη,

Α.Ε.Μ. 590

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:		Δέσποινα Πόταρη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Εξεταστές:	1.	Χαράλαμπος Σακονίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής
	2.	Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της συγκεκριμένης Διπλωματικής Εργασίας δε θα ήταν δυνατή χωρίς την καθοδήγηση και το ενδιαφέρον της Αναπληρώτριας Καθηγήτριας του Μαθηματικού Τμήματος (Ε.Κ.Π.Α.) κ. Δέσποινας Πόταρη. Την ευχαριστώ βαθιά για τη συνεχή κατεύθυνση των βημάτων μου και την αμέριστη προσφορά της στην προσπάθεια μου αυτή.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές μου κ.κ. Χαράλαμπο Σακονίδη και Θεοδόσιο Ζαχαριάδη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου.

Η αφιέρωση της συγκεκριμένης Διπλωματικής Εργασίας στην οικογένεια μου, τον Νίκο, την Όλγα και την Κυριακή, είναι το ελάχιστο ευχαριστώ απέναντι στην ανιδιοτελή τους υποστήριξη καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Τέλος αισθάνομαι ιδιαίτερη ανάγκη να ευχαριστήσω τους φίλους μου και υποψήφιους Διδάκτορες Ευαγγελία Σειρά και Λάζαρο Μωυσιάδη για την αμέριστη υποστήριξή τους στην πραγματοποίηση της εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ 9

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ, ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ 9

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9

1.2 Η Αριθμητική και οι Αριθμοί για τους Πυθαγόρειους 10

1.3 Οι Ιδέες και οι Αριθμοί για τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη 13

1.4 Το Μηδέν και το Άπειρο 15

1.5 Η Εξέλιξη της έννοιας του Μηδενός 20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ 27

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 27

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 27

2.2 ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ 28

2.2.1 Σημειωτική προσέγγιση 28

2.2.2. Θεωρίες για τα Μαθηματικά 45

Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα 45

Ενσώματη Γνώση 55

Εννοιολογική κατανόηση – Εννοιολογική αλλαγή 62

Η έννοια (αίσθηση) του αριθμού 65

Θεσιακή αξία αριθμού 68

Η θέση των αριθμών στην ευθεία 70

Οι Πράξεις 72

Το Μηδέν γνωσιακά και ψυχολογικά. 76

2. 3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ 80

2.3.1. Μαθησιακά - Διδακτικά Ζητήματα 81

2.3.2. Μαθητές 83

2.3.3. Εκπαιδευτικοί 85

2.4 ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ 89

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ 94

Η ΕΡΕΥΝΑ 94

3.1 ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ....94
3.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ....98
3.2.1. Οι συμμετέχοντες....98
3.2.2. Η διαδικασία της έρευνας και τα ερευνητικά εργαλεία....99
3.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ....100
3.3.1 Γενικά....100
3.3.2 Ανάλυση των ερωτήσεων....101
3.4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ....109
3.4.1 Ποσοτικές προσεγγίσεις....111
3.5 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ....122
3.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ....133
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ....136
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ....141

In the history of culture, the discovery of zero will always stand out as one of the greatest achievements of the human race.

Tobias Dantzig

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιτυχία των μαθητών στα μαθηματικά είναι αντικείμενο ερευνών και για πολλά χρόνια βρίσκεται στην κορυφή του ενδιαφέροντος στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι αντικείμενα μελέτης, καθώς στη μετάβαση αυτή εμφανίζονται δυσκολίες στους μαθητές. Γενικές έρευνες στον χώρο της διδακτικής που εξελίσσονται τα τελευταία χρόνια γίνονται σε μια προσπάθεια να κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τόσο τα μαθηματικά αντικείμενα όσο και τις διαδικασίες στα οποία αυτά συμμετέχουν. Στόχος συγκεκριμένων ερευνητικών προσπαθειών είναι να δημιουργηθεί ένα γενικό πλαίσιο για τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται και αναπτύσσονται οι μαθηματικές έννοιες στον νου των μαθητών. Μια τέτοια μαθηματική έννοια είναι το μηδέν. Είναι αριθμός που δεν προκύπτει από καταμέτρηση, είναι σύμβολο που αντιπροσωπεύει την απουσία. Η εξέλιξη της έννοιας του μηδενός είναι το πιο ενδιαφέρον κεφάλαιο στην ιστορία των αριθμών και φέρει όλα τα σημάδια της ανάπτυξης των μαθηματικών. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν την έννοια του μηδενός οφείλει να περιλαμβάνει την διπλή λειτουργία της μαθηματικής γλώσσας: Ως σύμβολο να χρησιμοποιείται σαν όργανο λογικής για την περιγραφή καταστάσεων του κόσμου (σημαίνον) αλλά και ως αντικείμενο λογικής γιατί έχει το δικό του νόημα (σημαινόμενο). Η αποτύπωση της κατανόησης του από μαθητές, μπορεί να θεωρηθεί αντικείμενο που θα ανατροφοδοτήσει και θα εξελίξει έρευνες.

Την τελευταία εικοσαετία αναπτύσσεται το πεδίο της γνωσιακής έρευνας, μια τάση με ολοένα αυξανόμενη επιρροή με επίκεντρο την έμφαση στον ενσώματο χαρακτήρα της μαθηματικής κατανόησης. Η γνωσιακή επιστήμη είναι νεοσύστατος επιστημονικός κλάδος που μελετά τα εννοιολογικά σχήματα. Τα συμπεράσματά της, έως τώρα, έρχονται να εμπλουτίσουν ή ακόμη να αμφισβητήσουν απόψεις της ψυχολογίας, της φιλοσοφίας αλλά και της διδακτικής που αφορούν τη δημιουργία, τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Θεμελιώδης θέση της θεώρησης είναι οι αισθητηριακές και κινητικές ιδιότητες του ανθρωπίνου σώματος, οι οποίες παίζουν κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική δραστηριότητα. Ερευνητές όπως οι A. Sfard , E. Dubinsky, G. Lakoff & E. Nunez, δημιούργησαν ένα γενικό πλαίσιο αναφοράς για την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Το βασικό εργαλείο για να υλοποιηθεί η ανάδυση των αφηρημένων αλλά και των τυπικών μαθηματικών εννοιών από τις αισθητηριακές και κινητικές εμπειρίες είναι η εννοιολογική μεταφορά και ο ρόλος της στη διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος. Η ανάλυση των μαθηματικών ιδεών με τις μεταφορές είναι μια καινοτόμα αλλά και σε βάθος προσπάθεια να φανεί το ενσώματο εννοιολογικό περιεχόμενο τους και με αυτόν τον τρόπο να καλυφθεί το κενό ανάμεσα στην ενορατική και την τυπική όψη των Μαθηματικών.

Συνάμα, ερευνητές όπως οι D. Tall (Tall, 2007) με τους E. Gray, Mc Gowen, D. Pitta, G. Davis και άλλους, μας προσφέρουν το θεωρητικό πλαίσιο για τους τρεις κόσμους προσέγγισης των μαθηματικών : στον ενσαρκωμένο κόσμο (embodied world) τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά με τις αισθήσεις και έχουν άμεση σχέση με αντικείμενα και δραστηριότητες του πραγματικού κόσμου, στον συμβολικό κόσμο (symbolic & procedural world) τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά με τη βοήθεια συμβόλων και θεωρούνται αντικείμενα, έννοιες αλλά και διαδικασίες και τέλος στον αξιωματικό κόσμο (axiomatic world), τα μαθηματικά αποκτούν τον τυπικό και αυστηρό χαρακτήρα τους, εξελίσσοντας με λογικά βήματα τους ορισμούς και τις πρωταρχικές έννοιες ώστε να παραχθούν και να αποδειχθούν θεωρήματα (Tall, D., Gray, E., Crowley, L., McGowen, M, Pitta & Pinto, 1998).

Το μηδέν αντιπροσωπεύει το παράδοξο, την υπερβατικότητα, τη διασύνδεση, την ισορροπία, τη σεμνότητα, τη δημιουργικότητα, την έμπνευση, και την ουσία και το μυστήριο της ανθρώπινης ύπαρξης (Karakas, 2008). Το μηδέν δίνει παρουσία σε κάτι που είναι απόν, ενσαρκώνει ό,τι δεν υπάρχει. Το κενό δηλαδή, αποκτά ένα είδος μεγέθους, ή πυκνότητας, γίνεται ένα αντικείμενο, δεν είναι πλέον το «τίποτα». Το κενό, λοιπόν, γίνεται διαθέσιμο στην ανθρώπινη σκέψη και συμμετέχει στις εργασίες της, ανακάλυψη που οι επιπτώσεις της για τα μαθηματικά στάθηκαν θεμελιώδεις. Οι μαθητές που εννοιοποιούν αφηρημένες έννοιες ή ιδέες, όπως είναι το μηδέν, και τις διασυνδέσεις τους με άλλες έννοιες μπορούν να κατανοήσουν και νέες αφηρημένες δομές που απαιτούνται για την εκμάθηση της άλγεβρας.

Οι Carraher et al (2006) (Carraher, Education, & View, 2006) προτείνουν να γίνεται η εισαγωγή της πρώιμης άλγεβρας στη βάση τριών αρχών: *της αλγεβρικής γενίκευσης*, ως κεντρικής συνιστώσας της αλγεβρικής λογικής, *των αριθμητικών πράξεων* που μπορεί να θεωρηθούν ως προσέγγιση της έννοιας των συναρτήσεων και *του αλγεβρικού συμβολισμού* που μπορεί να δράσει υποστηρικτικά στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού (Βαμβακούση, Ξ., Βερύκιος, Π., Γαβρίλης, Κ., Θωμαΐδης, Γ., Κείσογλου, Σ., Κλαουδάτος, Ν., Κυλάφης, Π., Ναζαριάν, Α., Σακονίδης, 2011). Η παρούσα εργασία προσπαθεί να αναδείξει τον ρόλο του μηδενός στη μετάβαση της σκέψης και λειτουργίας των μαθητών και των μαθητριών από την αριθμητική στην πρώιμη άλγεβρα. Η έρευνα έγινε με δειγματοληψία ευχέρειας ή διαθεσιμότητας και η συλλογή των δεδομένων της έρευνας με τη συλλογή ερωτηματολογίων από μαθητές της ΣΤ΄ τάξης Δημοτικών σχολείων και της Α΄ τάξης Γυμνασίων δημοσίων σχολείων, από διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα και περιοχές της πόλης της Θεσσαλονίκης, σχετικά με την έννοια του μηδενός με βάση το εξής τρίπτυχο ερωτημάτων :

- Ποιες αντιλήψεις γύρω από την έννοια του μηδενός και τη λειτουργία του στις πράξεις έχουν οι μαθητές και μαθήτριες τελειώνοντας την πρωτοβάθμια εκπαίδευση;
- Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές και μαθήτριες τελειώνοντας την Α΄ τάξη του Γυμνασίου τις μεταφορές του μηδενός;
- Πώς η έννοια του μηδενός, αξιοποιείται από μαθητές και μαθήτριες ηλικίας 12 – 13 ετών προκειμένου να αναπτύξουν αλγεβρικούς συλλογισμούς και να επιτύχουν γενικεύσεις και αφαιρέσεις;

Οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, ηλικίας 12 – 13 χρόνων, είναι χαρακτηριστικό δείγμα παιδιών που μετακινούνται από την εστίαση στον συγκεκριμένο αριθμό, που συμβαίνει στην αριθμητική, στη σχολική άλγεβρα που επικεντρώνεται στις σχέσεις. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο γίνεται μια απόπειρα να διερευνηθεί το πώς οι μαθητές και οι μαθήτριες αντιλαμβάνονται το μηδέν, πώς το χειρίζονται στη διαδικασία των πράξεων και τι προβλήματα τους δημιουργεί. Προκειμένου να γίνει κατανοητό πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του μηδενός είναι χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω θεωρητικά εργαλεία. Η *ιστορική και φιλοσοφική προσέγγιση* της έννοιας από την αρχαιότητα μέχρι τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Η *σημειωτική προσέγγιση*, για την κατανόηση του ρόλου των συμβόλων και των ερμηνειών τους για τα μαθηματικά αντικείμενα που παριστάνουν. Τέλος η *εννοιολογική μεταφορά* ως κεντρική διαδικασία της ενσαρκωμένης γνώσης. Σύμφωνα με τις απόψεις των γνωστικών ψυχολόγων, η εννοιολογική μεταφορά δομεί τη μαθηματική λογική σύμφωνα με τη φύση του ανθρώπινου σώματος, του μυαλού και του τρόπου που λειτουργεί ο άνθρωπος μέσα στο περιβάλλον (Lakoff, G., Nunez, 2000). Για παράδειγμα αν αναρωτηθούμε: «είναι το μηδέν ένα σημείο σε μια γραμμή; ή μήπως είναι το κενό σύνολο; ή είναι και τα δύο; ή είναι απλά ένας αριθμός και δεν είναι ούτε ένα σημείο ούτε ένα σύνολο;», θα δούμε ότι δεν υπάρχει μία σωστή απάντηση. Κάθε απάντηση αποτελεί επιλογή μεταφοράς και κάθε επιλογή μεταφοράς παρέχει διαφορετικά συμπεράσματα και καθορίζει ένα διαφορετικό θέμα. Τα μαθηματικά είναι επίπεδα μεταφορών και καθιστούν εφικτή την επίτευξη της αφηρημένης σκέψης. Όταν μια μόνο μαθηματική ιδέα συσσωματώνει πολλές μεταφορές, γίνεται αντικείμενο της Γνωστικής επιστήμης, και έτσι εμφανίζεται η υποκείμενη γνωστική της δομή.

Στην παρούσα εργασία γίνεται επίσης μια προσπάθεια παρουσίασης των βασικών θεωριών και πώς αυτές εξελίχθηκαν, για την καλύτερη κατανόησή τους αλλά και πώς χρησιμοποιούνται από τους μαθητές ως εργαλεία των απόψεών τους σχετικά με το μηδέν και τον ρόλο του στο πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Ως στόχο της έρευνας θεωρούμε τη συμβολή της, σε μια προσπάθεια εφαρμογής τέτοιων γενικών θεωρητικών σχημάτων σε συγκεκριμένα ζητήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ, ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το μηδέν, δίνει παρουσία σε κάτι που είναι απόν, ενσαρκώνει ό, τι δεν υπάρχει. Το κενό μεταξύ δύο στοιχείων μιας κανονικής σειράς συμμετέχει σε ένα ρυθμό. Αποκτά ένα είδος μεγέθους, ή πυκνότητας, γίνεται ένα αντικείμενο, δεν είναι ένα «κενό». Στην έρευνα που ακολουθεί, έγινε προσπάθεια να εξεταστεί η κατανόηση της φύσης του μηδενός από μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου και της Α΄ τάξης του Γυμνασίου και διαπιστώθηκε ότι αρκετοί από τους μαθητές εμφάνισαν παρανοήσεις για την έννοια και τη χρήση του μηδενός παρόμοιες με αυτές που εμφανίζονται σε μαθητές σε όλο τον κόσμο αλλά και που αντιμετώπισαν μεγάλοι μαθηματικοί και διανοητές στο παρελθόν.

Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει ευκαιρίες ώστε να γίνεται ορατή η απεικόνιση της πληθώρας των διαδικαστικών μεθόδων και της δυναμικής των εννοιών στα μαθηματικά. Η ενσωμάτωση των θεμάτων εννοιολογικής ανάπτυξης στη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλουν στη φιλοσοφική παρατηρητικότητα του μαθητή. Παραδείγματα εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών προετοιμάζουν τους μαθητές για τη σχετικότητα και τη συνάφεια των μαθηματικών μεθόδων, την αλήθεια και τη γνώση και επαναφέρουν τα μαθηματικά στην προοπτική του χρόνου, του πολιτισμού και του εννοιολογικού πλαισίου (Heeffer, 2006). Η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί απόδειξη ότι η φύση των μαθηματικών εννοιών δεν είναι σταθερή και διαχρονική και δείχνει ότι τα μαθηματικά έχουν πάντα προσαρμοστεί στις ανάγκες της κοινωνίας. Οι μαθηματικές έννοιες, ακόμα και οι πιο στοιχειώδεις, όπως η έννοια του αριθμού, συνεχώς μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Η έννοια του «αριθμού», για τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς έχει διαφορετική ερμηνεία από την ερμηνεία του «αριθμού» για τους Αναγεννησιακούς μαθηματικούς, και η ερμηνεία αυτή με τη σειρά της διαφέρει από τη σύγχρονη άποψη. Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι δεν είναι τα μαθηματικά που αλλάζουν αλλά η κατανόησή μας για την μαθηματική πραγματικότητα. Η σημαντική μελέτη του Jacob Klein (1934) για το θέμα αυτό ακριβώς επικεντρώνεται στην οντολογική μετατόπιση της έννοιας του αριθμού. Αρχικά το «μηδέν», το «ένα» δεν ήταν αριθμοί, αλλά αργότερα έγιναν. Μετά, η ρίζα του αριθμού δύο έγινε δεκτή ως αριθμός και μέχρι το τέλος του δέκατου έκτου αιώνα η ρίζα του μείον δεκαπέντε έγινε ένας αριθμός (Heeffer, 2006). Οι ιδέες θα πρέπει να ερμηνεύονται στο πλαίσιο του ιστορικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο προέκυψαν και ίσως ο βαθμός της ανωτερότητας τους εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο προσαρμόστηκαν για τις ανάγκες της κοινωνίας εκείνης της εποχής. Η ιδέα μιας αντικειμενικής πραγματικότητας των μαθηματικών εννοιών παρακάμπτει την πραγματικότητα των εννοιολογικών προβλημάτων στα μαθηματικά. Επανειλημμένα υπήρξαν σοβαρές κρίσεις στα εννοιολογικά θεμέλια των μαθηματικών. Έχουν υπάρξει αντιφατικές θεωρίες, όπως η πρώιμη χρήση της ανάλυσης και η θεωρία των συνόλων που διήρκεσαν για αρκετές δεκαετίες. Σε περιόδους κρίσης και εννοιολογικών δυσκολιών, ακριβώς τότε νέες ιδέες αναδύονται και γίνονται ανακαλύψεις (Heeffer, 2006).

Οι Έλληνες, που συνέβαλαν σημαντικά στη γεωμετρία και στη θεωρία των αριθμών, υιοθέτησαν ένα σύστημα βασισμένο στην προσθετική αρχή και δεν χρειάστηκε να εισαγάγουν το μηδέν. Σκέφτηκαν τους αριθμούς γεωμετρικά, για παράδειγμα στα Στοιχεία του Ευκλείδη υπάρχουν συζητήσεις για τη θεωρία αριθμών, αλλά οι αριθμοί αντιπροσωπεύονται πάντα ως μήκος μιας γραμμής. Σε αντίθεση με τους Ευρωπαίους, οι Ινδοί κατάφεραν να σκεφτούν τους αριθμούς με αφηρημένο τρόπο. Έτσι, η έννοια του μηδενός εξελίχθηκε και θα εξεταστεί διαχρονικά από

- την κοσμοθεωρία των Πυθαγορείων φιλοσόφων για την αντιμετώπιση των αριθμών και της αριθμητικής,
- τη θεωρία και τις ιδέες του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη για τους αριθμούς, για τον κόσμο του γίγνεσθαι και για τον κόσμο της ουσίας,
- τη σχέση του μηδενός με το άπειρο,
- την ένταξη του μηδενός στο σύστημα των αριθμών και την εξέλιξη του στον κόσμο των μαθηματικών, και τέλος
- τον ρόλο του μηδενός στο πέρασμα από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη.

1.2 Η Αριθμητική και οι Αριθμοί για τους Πυθαγόρειους

Οι Μιλήσιοι στοχαστές πρώτοι ερμήνευσαν τον κόσμο δημιουργώντας τις πρώτες φιλοσοφικές έννοιες. Η αναζήτηση μιας σταθερής υλικής αρχής πάνω στην οποία στηρίζονται όλες οι εξελίξεις των πραγμάτων, όπου στο τέλος όλα τα πράγματα, μετά την φθορά τους, επανέρχονται στην αρχική τους κατάσταση, ήταν αναγκαία προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα μεγάλα διλήμματα της ύπαρξης του κόσμου. Τα ερωτήματα που προβλημάτιζαν τους Μιλησίους ήταν σχετικά με τη δομή της σύστασης του κόσμου. Ο κόσμος τους περιγράφεται από το στατικό «*είναι*» ή το διαρκές «*γίγνεσθαι*». Οι Πυθαγόρειοι που δεν αποδέχθηκαν τον υλιστικό μονισμό των Μιλήσιων στοχαστών, ερμήνευσαν τον κόσμο πάνω στην αφηρημένη έννοια του αριθμού, θεωρία που όμως δεν είχε τη δυνατότητα να εξηγήσει την μεταβολή των πραγμάτων. Η πυθαγόρεια θεωρία, ήταν ένας γεωμετρικός «ατομισμός», σύμφωνα με τον Δημόκριτο, δηλαδή πίστευαν ότι η ύλη και ο χώρος συνίστανται από απειροελάχιστες ενότητες ή μονάδες, σημεία με διάσταση, έτσι ώστε π.χ. κάθε γραμμή να αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων (Γκιργκένης, 2004). Οι Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι πρώτοι, πριν τους φυσικούς και ατομικούς φιλοσόφους, ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά και τα ανέπτυξαν. Υποστήριζαν ότι η δομή του όντος, τα δομικά υλικά του κόσμου, είναι (φυσικοί) αριθμοί. Για να το επιτύχουν αυτό έπρεπε πρώτα να μελετήσουν τους ίδιους τους αριθμούς. Έτσι αρχίζει η θεμελίωση της αριθμητικής. Σύμφωνα με τον Federico Enriques, στην πυθαγόρεια θεωρία, μια γραμμή αποτελείται από μικρές σφαίρες (μονάδες), δηλαδή, από ορισμένο αριθμό σημείων. Από τον Αριστοτέλη πληροφορούμαστε ότι για τους Πυθαγόρειους, η φύση ερμηνεύεται αριθμητικά και οι αριθμοί αποτελούν την ουσία των όντων. Πιστεύουν ότι ο αριθμός είναι αρχή με δύο τρόπους: ως ύλη των όντων αλλά και ως αυτό που καθορίζει τις ιδιότητες στα όντα. Στοιχεία του αριθμού είναι το άρτιο και το περιττό, όπου το περιττό είναι πεπερασμένο και το άρτιο είναι άπειρο. Το ένα συνίσταται και από τα δύο, καθώς είναι και άρτιο και περιττό. Ο αριθμός προέρχεται από το ένα ενώ όπως είπαμε, οι αριθμοί συνιστούν την ολότητα του σύμπαντος. Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο της πυθαγόρειας σκέψης είναι η έννοια του πέρατος ή ορίου. Από τη στιγμή που υφίσταται ο κόσμος, η οργανωμένη τάξη στο Σύμπαν, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ορίου, καθώς οτιδήποτε δεν έχει προκαθορισμένα όρια, είναι άμορφο και ταιριάζει στο χάος (Στεργίου, 2004). Ο κόσμος δημιουργείται με την παρέμβαση του ορίου στο άπειρο, οπότε αποκαλύπτεται μια καθορισμένη ενότητα. Το καθορισμένο και το απροσδιόριστο αποτελούν τις δυο βασικές αντίθετες αρχές για τους Πυθαγόρειους, από τις οποίες η πρώτη είναι το καλό και η δεύτερη το κακό, αφήνοντας να φανεί η έννοια του δυϊσμού στη φιλοσοφία τους. Ο Αριστοτέλης παραθέτει έναν πίνακα του Αλκμαίωνα του Κροτωνιάτη με τα βασικά αντίθετα των Πυθαγορείων:

πέρας — άπειρον	ηρεμούν — κινούμενον
περιττόν — άρτιον	ευθύ — καμπύλον
εν — πλήθος	φως — σκότος
δεξιόν — αριστερόν	αγαθόν — κακόν
άρρεν — θήλυ	τετράγωνον — ετερομήκες

Ο Πυθαγόρας χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για να διεισδύσει στις πιο υψηλές περιοχές του νου και δεν το κάνει με κάποια δεισιδαιμονική αντιμετώπισή. Αντίθετα, θεμελιώνει τη μαθηματική επιστήμη και την ανάγει σε φιλοσοφική θεωρία. Ξεφεύγει από τις μετρήσεις και τις λογιστικές ενασχολήσεις της και την αναβιβάζει σε επίπεδα ιδεών (Taylor, 1995). Καθίσταται πρωτοπόρος του μαθηματικού στοχασμού, ανακαλύπτοντας νέες μαθηματικές θεωρίες και αρχές, που η εφαρμογή τους αποδείχθηκε διαχρονική. Αλλά όλα αυτά δε θα είχαν ίσως ποτέ ανακαλυφθεί εάν οι αριθμοί δε συνδέονταν με έννοιες και οντότητες. Οι αριθμοί δεν είναι ποσότητες απλώς, αλλά αντιπροσωπεύουν ιδέες και αρετές και κάθε συσχέτισή τους οδηγεί την ανθρώπινη διάνοια σε συνειδησιακές ανακαλύψεις. Μέσω αυτών παρέχεται μια δυνατότητα ανάπτυξης και βελτίωσης της ανθρώπινης οντότητας. Στην ουσία οι Πυθαγόρειοι εξομοίωσαν ολόκληρη τη φύση με τους αριθμούς και υπέθεσαν ότι τα στοιχεία των αριθμών είναι στοιχεία όλων των όντων και όλος ο κόσμος είναι αρμονία και αριθμός. Ο Πυθαγόρας πιθανολογείται πως ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο «*κόσμος*» προκειμένου να υποδηλώσει το Σύμπαν σαν μια οργανωμένη τάξη που το καθιστά και έμψυχο. Δεν υπάρχει τίποτε άψυχο και «*κενό ζωής*» κατά τους Πυθαγόρειους. Όπως ακριβώς στις εγκόσμιες φύσεις δεν υπάρχει τίποτε άμορφο, ούτε κανένα κενό ανάμεσα στα είδη των πραγμάτων, ομοίως στους αριθμούς, στα μαθηματικά, δεν υπάρχει ποσότητα μη αριθμητή. Σύμφωνα και με το δόγμα του Αριστοτέλη, σε κάθε πράγμα, ένα μέρος του αντιστοιχεί στην ύλη και ένα άλλο στη μορφή. Η ύπαρξη λοιπόν άρα και η εκπροσώπηση του *κενού* δεν ήταν δυνατόν να γίνουν νοητές. Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι η φύση παράγει τα αισθητά από τους αριθμούς, αυτοί όμως οι αριθμοί δεν ήταν μαθηματικοί, αλλά φυσικοί και καθώς μιλούσαν συμβολικά, δεν είναι απίθανο να εξηγούσαν κάθε ιδιότητα των αισθητών με μαθηματικούς όρους. Όπως ακριβώς στις εγκόσμιες φύσεις δεν υπάρχει τίποτε άμορφο, ούτε κανένα κενό ανάμεσα στα είδη των πραγμάτων, ομοίως στους μαθηματικούς αριθμούς δεν υπάρχει ποσότητα μη αριθμητή (Taylor, 1995).

Πρώτοι, επίσης, οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την ασυμμετρία στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τους αριθμούς. Αυτό οφείλεται στο ότι όλοι οι αριθμοί, με οποιονδήποτε τρόπο και αν διαιρεθούν, αφήνουν κάποιο μέρος που δεν επιδέχεται περαιτέρω διαίρεση, ενώ όλα τα μεγέθη είναι επ' άπειρον διαιρετά. Δηλαδή, τα μεγέθη εμπεριέχουν την έννοια του απείρου στη διαίρεση ενώ στην ολότητα δίνουν την έννοια του πεπερασμένου, αντίθετα, ενώ οι αριθμοί στη διαίρεση δίνουν την έννοια του πεπερασμένου ενώ στην ολότητα εμπεριέχουν την έννοια του απείρου. Βέβαια, επί πολλούς αιώνες κυριάρχησε η αυθεντία του Αριστοτέλη, για τον οποίο ο κόσμος ήταν πεπερασμένος σε έκταση και γεμάτος εξ ολοκλήρου με ύλη. Δεν υπήρχε άπειρο, δεν υπήρχε κενό. Δεν υπήρχε απειρότητα, δεν υπήρχε μηδέν.

1.3 Οι Ιδέες και οι Αριθμοί για τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη

Κεντρικός άξονας στο φιλοσοφικό σύστημα του Πλάτωνα είναι η περίφημη «Θεωρία των Ιδεών» την οποία και συνέλαβε στην προσπάθειά του να αποδείξει την ύπαρξη ενός καθολικού, σταθερού και αντικειμενικού σημείου αναφοράς σε απάντηση των σχετικιστών σοφιστών. Ο Πλάτωνας, όπως και ο Δημόκριτος υποστήριξαν την ύπαρξη δύο ειδών πραγματικότητας. Η πρώτη προέρχεται μέσω των αισθήσεων και αφορά τον αισθητό κόσμο ο οποίος αφού είναι διαρκώς μεταβαλλόμενος, καθιστά και αυτή την πραγματικότητα, παροδική ή σχετική. Η δεύτερη αντίθετα, που αντιστοιχεί στη νόηση, είναι η μόνιμη πραγματικότητα. Πρόκειται δηλαδή για τον κόσμο του «*γίγνεσθαι*» και για τον κόσμο της «*ουσίας*». Όσον αφορά την αξιολόγηση των δύο περιοχών της πραγματικότητας, είναι ανάλογη μ' αυτήν των ειδών γνώσης. Έτσι λοιπόν προκύπτει πως οι αισθήσεις ως μέσο γνώσης και η εμπειρική σχετική πραγματικότητα, σαφώς και υστερούν συγκριτικά με τον κόσμο της νόησης ο οποίος είναι σταθερός και αληθινός, άποψη που την ασπάζεται και ο Δημόκριτος. Ακολουθώντας όμως τη συγκεκριμένη συλλογιστική πορεία καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα με τους Πυθαγόρειους, το οποίο αφορά στα δύο ποιοτικά διαφορετικά επίπεδα πραγματικότητας. Όπως στους Πυθαγόρειους φιλόσοφους έτσι και στον Πλάτωνα η επιστήμη των Μαθηματικών κατείχε εξέχουσα θέση στη φιλοσοφία τους. Συγκεκριμένα, τα Μαθηματικά, ήταν η επιστήμη που «συγκινούσε» περισσότερο τον Πλάτωνα. Οι σημαντικότεροι συγγραφείς γεωμετρικών εγχειριδίων την εποχή εκείνη προέρχονται από τη Ακαδημία του Πλάτωνα (Κάλφας, Β., Ζωγραφίδης, 2006). Η επίδραση των Πυθαγόρειων για τα Μαθηματικά στον Πλάτωνα ήταν τόσο έντονη ώστε ταύτισε την Ιδέα του αγαθού με την μονάδα, τον αριθμό «*εν*» από τον οποίο προήλθε η «*Δυάς*» και όλοι οι άλλοι αριθμοί. Η ισορροπία ανάμεσα στο πέρας και το άπειρο επιτυγχάνεται μέσω του αριθμού. Η ισορροπία αυτή ενώ επιτρέπει την ύπαρξη και την αποδοχή του άπειρου δεν επιτρέπει την αποδοχή του κενού και της αντιπροσώπευσης του από το μηδέν. Ο Πλάτωνας υποστήριζε την ύπαρξη του «*άπειρου*», το απέδιδε στην *Δυάδα* από την οποία προκύπτουν το Μέγα και το Μικρό με αντίθετες ιδιότητες, του καλού και του κακού αποκλείοντας έτσι οριστικά την ανάδυση του μηδενός. Όπως σημειώνει ο Seife, «[το] μηδέν συγκρούστηκε με ένα από τα κεντρικά δόγματα της δυτικής φιλοσοφίας», μια ρήση που έχει τις ρίζες της στην αριθμοσοφία του Πυθαγόρα και της οποίας η σημαντικότητα αναδύθηκε μέσα από τα παράδοξα του Ζήνωνα (Seife, 2000). Σύμφωνα με τον Δημόκριτο, ο Αναξαγόρας απαντώντας στον μαθητή του Παρμενίδη, Ζήνωνα, χαρακτηρίζει τις αδιαίρετες ποσότητες ως «απειροελάχιστα μόρια στα οποία φθάνουμε με την επ' άπειρο διαιρετότητα της ύλης», τα οποία «εξακολουθούν να έχουν κάποιο μέγεθος που δεν αντιστοιχεί στο *μηδέν*». Αυτή η ρήση ήταν ο στυλοβάτης ολόκληρου του ελληνικού Σύμπαντος: *δεν υπάρχει κενό*. Ο Αριστοτέλης εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στον αισθητό κόσμο και τους αριθμούς με τη φράση: «Τα όντα μιμούνται τους αριθμούς και όντα ταυτίζονται με τους αριθμούς». Η αντίφαση στη φράση είναι φαινομενική. Ένας αριθμός μπορεί να ταυτίζεται με ένα ον με την έννοια ότι μιμείται τις ιδιότητες του. Οι πλατωνικές ιδέες μπορούν να θεωρηθούν «Αρχέτυπες» με την έννοια ότι είναι αιώνιες, αποτυπώνονται στην ψυχή πριν ενωθεί με το σώμα και αποτελούν τα πρότυπα των αισθητών πραγμάτων. Τα αρχέτυπα αποτελούν αρχαϊκές μορφές «πρωτογενείς εικόνες», σύμβολα τα οποία δεν βιώνει ο άνθρωπος ατομικά αλλά αποκτιούνται κληρονομικά μέσω του συλλογικού ασυνείδητου το οποίο είναι κοινό στους ανθρώπους. Με τον συμβολισμό των αριθμών, έχει ασχοληθεί και η ψυχαναλυτική σχολή του Carl Jung σύμφωνα με την οποία ο αριθμός είναι ικανός να επιδρά στο υποσυνείδητο των ανθρώπων. Αυτό, εξηγεί ο Ελβετός ψυχαναλυτής, συμβαίνει γιατί οι αριθμοί είναι αρχέτυπα. Το ελληνικό [φιλοσοφικό] Σύμπαν, που δημιουργήθηκε από τον Πυθαγόρα, τον Αριστοτέλη και τον Πτολεμαίο, επέζησε για μεγάλο χρονικό διάστημα μετά την κατάρρευση του ελληνικού πολιτισμού. Σε αυτό το Σύμπαν δεν υπάρχει θέση για κάτι σαν το τίποτε. *Δεν υπάρχει μηδέν* (Κάλφας, Β., Ζωγραφίδης, 2006).

1.4 Το Μηδέν και το Άπειρο

Οι Έλληνες, λοιπόν, και μαζί όσοι επηρεάστηκαν κατεξοχήν από αυτούς, απέρριψαν το μηδέν. Ο λόγος προφανής. Ο τακτοποιημένος και αρμονικός τους κόσμος δεν το άντεχε. Το μηδέν είναι αυτό που διαιρούμενο με οποιαδήποτε αριθμό τον καταβροχθίζει μια και καταλήγει στο μηδέν και πάλι. Και, ακόμη χειρότερα, η διαίρεση οποιουδήποτε αριθμού με το μηδέν, αυτό το α/0, μπορεί να καταστρέψει ολοκληρωτικά τη λογική. Με την παρουσία του μηδενός η ωραία πυθαγόρεια τάξη του Σύμπαντος καταρρέει. Γι' αυτό και επιβάλλεται ο εξοβελισμός του, η απόκρυψη της ύπαρξής του. Η σε βάθος όμως μελέτη του μηδενός, τελικά οδηγεί στο άπειρο. Το μηδέν είναι μια έννοια και ένας αριθμός, ενώ το άπειρο είναι μια έννοια αλλά όχι ένας αριθμός. Τον 6ο αιώνα π.Χ. ο Αναξίμανδρος θεωρεί το άπειρο ως βασικό κοσμικό στοιχείο, την πρώτη αρχή από την οποία δημιουργήθηκε το σύμπαν και η οποία ρύθμιζε όλες τις λειτουργίες του. Αυτό είναι ανεξάντλητο, αγέννητο, άφθαρτο και παντοτινό ενώ οι Πυθαγόρειοι ανακαλύπτουν την ασυμμετρία και έτσι εισάγουν το άπειρο στα Μαθηματικά σηματοδοτώντας την άποψη ότι: υπάρχουν γεωμετρικά μεγέθη αποτελούμενα από απείρως μικρά τμήματα των οποίων ο αριθμός είναι άπειρος. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας, ανέτρεψε την άνετη αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και στη γεωμετρία. Ο Ζήνων, μέσω των παραδόξων που διατύπωσε, αμφισβήτησε την ορθότητα παλαιότερων διαισθητικών αντιλήψεων σχετικά με το άπειρα μεγάλο και το άπειρα μικρό. Το άθροισμα απειράριθμων ποσοτήτων μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε και το άθροισμα πεπερασμένου ή άπειρου αριθμού ποσοτήτων με μηδενική διάσταση είναι μηδέν (Struik, 1982).

Οι Έλληνες φιλόσοφοι ήταν απρόθυμοι να δεχθούν ότι ένα σύμβολο μπορεί να αντιπροσωπεύσει το κενό, επειδή το κενό δεν υπάρχει, άρα δεν μπορεί να αντιπροσωπευθεί από κάποιο σύμβολο. Όταν όμως το μηδέν βρήκε τη θέση του στις διαφορετικές κοινωνίες, κατάφερε γρήγορα να ενσωματωθεί στη μαθηματική σκέψη και τη λογική, και σύντομα άνοιξε τις πόρτες για να επισημοποιηθεί η αριθμητική, η άλγεβρα και ο λογισμός, για να αναφέρουμε μόνο μερικές περιοχές. Ακόμη οι μαθηματικοί άρχισαν να εξελίσσονται μέσα από τις εξερευνήσεις τους για το μηδέν και το νόημά του, οδηγώντας τον Νεύτωνα, να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι «... οι μαθηματικές ποσότητες δεν είναι ... αποτελούμενες από πολύ μικρά κομμάτια, αλλά όπως περιγράφει διέπονται από μία συνεχή κίνηση… ». Έτσι, το μηδέν είχε εξελιχθεί από το να είναι ένα αυθαίρετο σύμβολο που χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει ένα κενό διάστημα, σε ποσότητα με τέτοια πολυπλοκότητα και βάθος που επέτρεψε στα μαθηματικά να προχωρήσουν σε μια σφαίρα που αγκάλιασε ασυμπτωτικές και οριακές συμπεριφορές (Russell & Chernoff, 2011).

Ο Seife μας προσφέρει μια εξαιρετική, περιεκτική και προχωρημένη εισαγωγή στο θέμα. Το πρωτότυπο και εντυπωσιακό στο βιβλίο του, «Μηδέν: η βιογραφία μιας επικίνδυνης ιδέας». Στο βιβλίο του βάζει στο κέντρο της πραγμάτευσής το μηδέν, εκεί που συνήθως είναι το άπειρο. Κι αυτό αποδεικνύεται πολύ παραγωγικό. Στην παρακάτω περιγραφή του ο Seife, απασχολείται με μια απλούστατη απειροσειρά. «Θεωρήστε την παρακάτω σειρά: 1-1+1-1+1-1+… (όπου τα 1 υπονοούνται άπειρα). Δεν είναι καθόλου δύσκολο να δείξετε ότι η σειρά αυτή έχει άθροισμα 0. Εξάλλου, το (1-1)+(1-1)+(1-1)+… είναι το ίδιο πράγμα με το 0+0+0…, που προφανώς έχει άθροισμα 0. Αλλά προσοχή! Ομαδοποιώντας τη σειρά με διαφορετικό τρόπο: 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)… είναι το ίδιο πράγμα με το 1+0+0+0…, που έχει προφανώς άθροισμα 1. Το ίδιο άπειρο άθροισμα των μηδενικών μπορεί να είναι ίσο με 0 και με 1 ταυτόχρονα. Το μηδέν, παρεισφρέει παντού στη μελέτη της Φύσης. Η άπειρη πυκνότητα της μαύρης τρύπας είναι μια διαίρεση με το μηδέν. Το Big Bang, η δημιουργία από το κενό είναι μια διαίρεση με το μηδέν. Η άπειρη ενέργεια του κενού είναι μια διαίρεση με το μηδέν. Το μηδέν, λοιπόν, είναι πολύ σπουδαίο. Όπως και το (πραγματικό) άπειρο». Δεν ξέρουμε αν έχει δίκιο ο Τ. Σ. Έλιοτ, όταν γράφει: «Αυτός είναι ο τρόπος που τελειώνει ο κόσμος, όχι μ' έναν πάταγο, αλλά μ' ένα λυγμό». Ο Seife, όμως, είναι βέβαιος πως το Σύμπαν ξεκινά και τελειώνει με το μηδέν. (Seife, 2009)

Η Δύση δεν μπορούσε να αποδεχτεί το μηδέν για περίπου δύο χιλιετίες. Οι συνέπειες ήταν τρομακτικές. Η απουσία του μηδενός θα παρεμπόδιζε την ανάπτυξη των μαθηματικών, θα αποθάρρυνε τις καινοτομίες στην επιστήμη και, μεταξύ άλλων, θα μπέρδευε το ημερολόγιο. Προτού αποδεχτούν το μηδέν, οι φιλόσοφοι της Δύσης θα έπρεπε να καταστρέψουν πρώτα τον κόσμο τους.

Μια πολύ ασχημάτιστη έννοια για το μηδέν αρχίζει να εμφανίζεται ως «κενό» στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία από τον Δημόκριτο, που έλεγε «πως τα στοιχεία είναι το πλήρες και το κενό», αποκαλώντας τα αντίστοιχα «ον» και «μη-ον». Απ' αυτά το πλήρες και το στερεό είναι το «ον», ενώ το κενό, το αραιό και η στέρηση είναι το μη-ον». Γι' αυτό και ισχυρίζεται πως το «ον» δεν υπάρχει περισσότερο από το «μη-ον», αφού ούτε το σώμα υπάρχει περισσότερο από το κενό. Ο όρος ουδέν εξ ουδενός (στα Λατινικά: ex nihilo nihil) αποτελεί ένα από τα αξιώματα της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας, που διατύπωσε ο Παρμενίδης, συμφώνα με το οποίο τίποτε δεν γεννάται από το τίποτε και τίποτε δεν ανάγεται εις το τίποτε. Ο Αριστοτέλης ερευνά το όλον πρόβλημα της γένεσης και της φθοράς των όντων στα έργα του και κυρίως στο «Περί Γεννέσεως και Φθοράς», όπου ο ίδιος μελετά, ερμηνεύει, και σχολιάζει θεωρίες που υπήρχαν προγενέστερα. Η «μονιστική θεωρία» ανάγει τη γένεση και τη φθορά στην αλλοίωση μιας και μοναδικής ουσίας η δε «πλουραλιστική θεωρία» αντιλαμβάνεται τη γένεση ως σύνδεση-σύγκριση επιμέρους στοιχείων, και τη φθορά ως αποσύνδεση αυτών των μερών. Η εμφάνιση μη-μηδενικών απειροελάχιστων χωρικών στοιχείων δείχνει την παρουσία του μηδενός … χωρίς αυτό να εμφανίζεται! Ακόμη μια όψη της κρυφής παρουσίας του μηδενός δίνεται στην οντότητα «σημείο» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ένα σημείο ορίζει μια ακριβή θέση στο χώρο και μόνον αυτό. Το ίδιο δεν έχει μέγεθος (μήκος, επιφάνεια ή όγκο) και είναι επομένως ένα αντικείμενο μηδενικής διάστασης. Παρότι μηδενικής διάστασης κι επομένως αόρατα τα σημεία, τα παριστάνουμε με μια ευδιάκριτη στιγμή (που έχει προφανώς διαστάσεις) για να μπορέσουμε να τα ξεχωρίσουμε από τα υπόλοιπα. Αυτό όμως δεν πρέπει να μας παρασύρει να νομίσουμε ότι έχουν και αυτά διάσταση. Επίσης τα ονομάζουμε χρησιμοποιώντας κεφαλαία γράμματα, όπως π.χ. το σημείο Α, το σημείο Β κ.λπ. Ο Ευκλείδης όρισε το σημείο σαν αμερές, χωρίς δηλαδή μέρη και επομένως αδιαίρετο. Είναι η ύστατη οντότητα στην οποία μπορούμε να φτάσουμε με την επ’ άπειρον διαίρεση μιας ευθείας γραμμής. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι μια ευθεία γραμμή αποτελείται από άπειρα σημεία. Δημιουργείται όμως έτσι το παράδοξο πώς μια απειρία αδιάστατων στοιχείων δημιουργεί με τη συνάθροισή τους διάσταση, την ευθεία, και συγχρόνως μέγεθος, το μήκος της ευθείας. Όχι μόνον αυτό, αλλά η απειρία αυτή μπορεί να δώσει κάθε φορά διαφορετικό τελικό αποτέλεσμα (διαφορετικά μήκη ευθυγράμμων τμημάτων). Αυτό ανάγεται μαθηματικά στο ότι το γινόμενο μηδέν επί άπειρο ή συμβολικά $0 \cdot \infty$ (όπου 0 είναι το μέγεθος του σημείου και το άπειρο πλήθος των σημείων) δεν είναι μηδέν, αλλά ένας απροσδιόριστος (οποιοσδήποτε) πραγματικός αριθμός. Εδώ υποκρύπτεται το παράδοξο ότι άπειρα «τίποτα» μπορούν να μας δώσουν «κάτι» και όχι ένα συγκεκριμένο κάθε φορά κάτι (έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό), αλλά διαφορετικό κάθε φορά κάτι (διαφορετικό πραγματικό αριθμό). Έτσι θα μπορούσαμε να γράψουμε συμβολικά: $0 \cdot \infty = x$, όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Δεχόμαστε, δηλαδή, ότι άπειρα αμερή και αδιάστατα σημεία που δηλώνουν μόνον θέση, μπορούν να δώσουν συνολικά, με ένα μαγικό τρόπο, μέγεθος και διάσταση, δημιουργώντας με την άπειρη επανάληψή τους μια αμέσως μεγαλύτερη διάσταση την διάσταση ένα (1) από τη δική τους μηδενική διάσταση (0). Γενικά στα μαθηματικά και ιδιαίτερα στην τοπολογία θεωρούμε ότι οποιαδήποτε γεωμετρική οντότητα αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος σημείων (Στεργίου, 2004).

Μέσα από τα επιχειρήματα κατά της ύπαρξης των αδιαιρέτων ποσοτήτων, ο Blaise Pascal (1623-1662) φαίνεται να απαντά στο παράδοξο του Ζήνωνα, λέγοντας ότι οι παραπάνω δυσκολίες με τις αδιαίρετες ποσότητες προέρχονται από το ότι κάποιοι θεωρούν ότι ένας χώρος που τον διατρέχουμε σε πολύ λίγο χρόνο, δεν μπορεί να αποτελείται από άπειρα διαιρετά στοιχεία. Η γεωμετρική ενόραση των αδιαιρέτων μικρότερης διάστασης στην εργασία του μετεφέρθηκε μέσα από την αριθμητική για να επιβεβαιώσει την ανυπαρξία όρων μικρότερου βαθμού στο τελικό αποτέλεσμα. Έτσι ο Pascal, κατά την πρώτη περίοδο της μαθηματικής του δραστηριότητας, προσπάθησε να συγκρίνει τα αδιαίρετα της γεωμετρίας με το μηδέν της αριθμητικής. Το απόσπασμα που ακολουθεί περιγράφει τον ισχυρισμό του Pascal με σαφήνεια: «…δεν ωφελεί να συγκρίνει κανείς πράγματα τόσο δυσανάλογα όπως η απειρία των διαιρετών (στοιχείων) με τον μικρό χρόνο κατά τον οποίο τα διατρέξαμε», ενώ σε κάποιο άλλο σημείο της εργασίας του σημειώνει : «…γιατί το μηδέν δεν είναι του ίδιου είδους με τους αριθμούς, εφόσον πολλαπλασιαζόμενο δεν μπορεί να τους ξεπεράσει. Έτσι λοιπόν, το μηδέν είναι πράγματι ένας αδιαίρετος αριθμός, όπως και το αδιαίρετο είναι πράγματι μια μηδενική έκταση…». Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πλήρης αντιστοιχία ανάμεσα σ’ αυτά τα πράγματα. Γιατί όλα αυτά τα μεγέθη είναι διαιρετά επ’άπειρον, χωρίς να καταλήγουν στα αδιαίρετά τους, έτσι που όλα βρίσκονται πάντοτε ανάμεσα στο μηδέν και το άπειρο. Να λοιπόν ποια είναι η θαυμαστή σχέση με την οποία η φύση συνέδεσε αυτά τα πράγματα, και οι δύο εκπληκτικές απειρίες που πρότεινε στους ανθρώπους, όχι για να μπορούν να τις συλλάβουν αλλά για να τις θαυμάζουν, και αν και είναι διαφορετικά, είναι όμως σχετικά το ένα με το άλλο, με τέτοιο τρόπο που η γνώση του ενός (μηδέν) οδηγεί υποχρεωτικά στη γνώση του άπειρου (Στεργίου, 2004).

Μπορεί πράγματι να χρειαζόταν χρόνος για να ανακαλυφθεί ο πιο περίεργος από όλους τους αριθμούς (Pesic, 2004). Φυσικά το πρόβλημα προέκυψε όταν προσπάθησαν να ορισθεί το μηδέν και οι αρνητικοί ως αριθμοί και το πώς αλληλοεπιδρούν στις αριθμητικές πράξεις της αριθμητικής (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση). Η έννοια "Sunya" (σημαίνει «άδειο») αρχική λέξη για το μηδέν, γεννήθηκε και παρείχε έναν πολύ αποτελεσματικό τρόπο για τον έλεγχο του κενού. Στη συνέχεια η κατάκτηση του κενού από την αφηρημένη σκέψη φαίνεται να έχει γίνει σε δύο στάδια. Το Sunya για το μηδέν έδειχνε, σε πρώτο στάδιο ότι ήταν ένα σημάδι-σύμβολο. Το δεύτερο στάδιο της κατάκτησης του σημείου «*μηδέν*» ήταν το να αποσπαστεί από το πλαίσιό του και να πάρει και την έννοια του «τίποτα». Ωστόσο, η ινδουιστική λέξη για το μηδέν «Sunya» που σημαίνει «άδειο», δεν είχε την ίδια στιγμή την έννοια του «τίποτα». Η ταυτοποίηση του 0 και του «τίποτα» ή του μηδενός ήρθε αργότερα. Η ταυτοποίηση ήρθε όταν χρειάστηκε να χρησιμοποιηθεί η έννοια για να εκφράσει το αποτέλεσμα της διαφοράς δύο αριθμών και τότε έγινε συνώνυμο με το «τίποτα». Το μηδέν σημαίνει τίποτα, ως ένας αριθμός, που όμως εφαρμόζει πια τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών: αυτό είδε καθαρά ο Ινδουιστής λόγιος Baskara (τον δωδέκατο αιώνα). Το μηδέν είναι και ο απόλυτος αριθμός των συνόλων που ονομάζεται σε μερικές σειρές κενό (null) σύνολο. Οι Barrow, Kaplan, και Seife, τον τελευταίο αιώνα έγραψαν τις λεπτομέρειες της ιστορίας του μηδενός.

Το κενό θα είναι διαθέσιμο για την ανθρώπινη σκέψη και θα συμμετάσχει στις εργασίες της. Οι επιπτώσεις αυτής της ανακάλυψης για τα μαθηματικά ήταν σημαντικές. Το ενδιαφέρον της ψυχολογίας για το μηδέν, αρκεί, να μας κάνει να βεβαιώσουμε την αργή και δύσκολη γέννηση της έννοιας που θα μπορούσε να είναι, ένα αντίγραφο του αντικειμένου, το «σημαινόμενο».

Ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta προσπάθησε να απαντήσει σε αυτές τις ερωτήσεις δίνοντας τους κανόνες για την αριθμητική εμπλοκή του μηδενός και των αρνητικών αριθμών στον έβδομο αιώνα. Εξήγησε ότι όταν δίνεται ένας αριθμός και τον αφαιρέσουμε από τον εαυτό του τότε αποκτάμε το μηδέν και διατύπωσε τους ακόλουθους κανόνες για την πρόσθεση που περιλαμβάνουν μηδέν:

- Το άθροισμα του μηδενός και ενός αρνητικού είναι αριθμός αρνητικός, το άθροισμα ενός θετικού αριθμού και του μηδενός είναι θετικός.
- Το άθροισμα του μηδενός με το μηδέν είναι μηδέν.
- Ένας αρνητικός αριθμός που αφαιρέθηκε από το μηδέν είναι θετικός, ένας θετικός αριθμός που αφαιρέθηκε από το μηδέν είναι αρνητικός, το μηδέν αφαιρείται από έναν αρνητικό αριθμό και προκύπτει αρνητικός, το μηδέν αφαιρείται από ένα θετικό αριθμό και το αποτέλεσμα είναι θετικός, το μηδέν αφαιρείται από το μηδέν και προκύπτει μηδέν.

Ο Brahmagupta, λέει στη συνέχεια ότι οποιοσδήποτε αριθμός όταν πολλαπλασιάζεται με το μηδέν μας δίνει μηδέν, αλλά δυσκολεύεται όταν πρόκειται για τη διαίρεση: ένας θετικός ή ένας αρνητικός αριθμός όταν διαιρείται με το μηδέν είναι ένα κλάσμα με το μηδέν ως παρονομαστή. Το μηδέν διαιρούμενο με αρνητικό ή θετικό αριθμό είναι είτε μηδέν είτε εκφράζεται ως κλάσμα με μηδέν ως αριθμητή και πεπερασμένη ποσότητα ως παρονομαστή. Το μηδέν διαιρούμενο με το μηδέν είναι μηδέν. Ο Bhaskara έγραψε για το μηδέν πάνω από 500 χρόνια μετά τον Brahmagupta. Παρά το πέρασμα του χρόνου, εξακολουθεί να αγωνίζεται να εξηγήσει τη διαίρεση με το μηδέν. Ο Bhaskara προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα γράφοντας $n / 0 = \infty$. Εκ πρώτης όψεως μπορεί να πιστέψουμε ότι ο Bhaskara έχει δίκαιο, αλλά φυσικά δεν έχει. Εάν αυτό ήταν αληθές, τότε 0 φορές το ∞ πρέπει να είναι ίσο με κάθε αριθμό n, έτσι ώστε όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους. Οι Ινδοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να φτάσουν στο σημείο να παραδεχτούν ότι κανείς δεν μπορούσε να διαιρέσει με το μηδέν, γιατί δεν υπάρχει ένας μόνο αριθμός που δίνει απάντηση στην έκφραση $0 / 0$. Το μηδέν είναι μια πλούσια πηγή παραδόξων. Η εξίσωση $5 / x = y$, όπου $x = 0$, σημαίνει ότι το y θα είναι είτε άπειρο, είτε «απροσδιόριστο». Τώρα, αυτό έχει επικριθεί με βάση το ότι το $x / 0$ είναι «απροσδιόριστο» Το "undefined" (απροσδιόριστο) μπορεί κυριολεκτικά να σημαίνει οτιδήποτε δεν εμφανίζεται ως αξίωμα, ορισμός ή θεώρημα σε ένα αξιωματικό σύστημα αριθμών. Ωστόσο, το "undefined"(απροσδιόριστο) συνήθως χρησιμοποιείται για να σημαίνει κάτι «χωρίς νόημα» αλλά συχνά σημαίνει πραγματικά «δεν θέλουμε να το σκεφτούμε». Η ειλικρινής απάντηση θα ήταν: «Κανένα αξιωματικό σύστημα αριθμών δεν μπόρεσε να το αντιμετωπίσει, οπότε δεν ξέρω τι να πω». (Mabkhout, 2016)

1.5 Η Εξέλιξη της έννοιας του Μηδενός

Η έρευνα για την ιστορία των εννοιών των αριθμών μάς παρέχει στοιχεία για τη συνέχεια μεταξύ επιστήμης και γνωσιακής εξέλιξης. Ιστορικά στοιχεία δείχνουν ότι η εμφάνιση και η επακόλουθη πολιτιστική εξάπλωση των εννοιών των αριθμών επηρεάζονται από τις εξελίξεις της δομής του ανθρώπινου εγκεφάλου. Η πολυάριθμη και συχνή πολιτισμική εφεύρεση των θετικών ακέραιων αριθμών μπορεί να εξηγηθεί ως αποτέλεσμα της κατάλληλης προσαρμογής με τις διαισθήσεις που παρέχονται από την αριθμητική μονάδα. Με ρίζες σε περισσότερες από μια εννοιολογικές ενότητες, συμπεριλαμβανομένης της αναγνώρισης μέρους σώματος και των γλωσσικών δεξιοτήτων, οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί ήταν εύκολο να μαθευτούν και να μεταδοθούν. Η μοναδική εφεύρεση του μηδενός ως αριθμητικής έννοιας και της επιτυχημένης εξάπλωσής της μπορεί να θεωρηθεί αποτέλεσμα πολιτιστικής μετάδοσης. Η αντιφατικότητά του αδιαμφισβήτητα διευκόλυνε την πολιτιστική μετάδοσή του όταν αυτό εμφανίστηκε και μπόρεσε εύκολα να εξαπλωθεί σε γειτονικές κουλτούρες με θεσιακά συστήματα.

Το 1202 ο Leonardo Fibonacci δημοσίευσε το Liber Abaci, εισάγοντας το μουσουλμανικό σύστημα αριθμών στην Ευρώπη και ξεκινώντας την πτώση του αριστοτελισμού. Το Liber Abaci περιείχε την ακολουθία Fibonacci και τη χρυσή αναλογία, αλλά το πιο σημαντικό ήταν ότι εισήγαγε το βασικό δεκαδικό σύστημα. Το μηδέν και η βάση του δέκα έγιναν σύντομα αποδεκτά μεταξύ εμπόρων, τραπεζιτών και επιχειρήσεων, αλλά όχι και από τις τοπικές κυβερνήσεις ή την εκκλησία. Το 1299 η πόλη της Φλωρεντίας και το μουσουλμανικό σύστημα, απαγόρευσε το μηδέν από τους φόβους της πλαστογράφησης, όπως το 3 που μπορούσε να μετατραπεί σε 8. Το 1400 οι ελληνικές ιδέες και πεποιθήσεις διαμόρφωναν τις νέες ιδέες της Αναγέννησης. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί ήταν μεταξύ των τελευταίων διανοουμένων που αναγνώριζαν το μηδέν. Φιλοσοφικά η μάχη για το μηδέν στηρίχθηκε στον ισχυρισμό του Αριστοτέλη ότι η φύση αποτρέπει το κενό. Πολλές από τις επαναστατικές ιδέες, κυρίως το ηλιακό σύστημα του Κοπέρνικου, το οποίο τοποθετούσε τον ήλιο, και όχι τη γη, στο κέντρο αμφισβητήθηκαν. Το 1600 περίπου, ο Γαλιλαίος παρουσίασε τρεις δημόσιες διαλέξεις και αργότερα ένα βιβλίο στο οποίο διαμαρτύρεται κατά των θεωριών του Αριστοτέλη. Το βιβλίο Dialogue Galileo (1630) έφερε στον Γαλιλαίο ποινή φυλάκισης. Ο Γαλιλαίος δημοσίευσε σύντομα μια ανάκληση και η ποινή του μειώθηκε σε κατ 'οίκον περιορισμό. Ο Blaise Pascal δημοσίευσε νέα πειράματα σχετικά με το κενό, το 1647. Στην εργασία του, σχετικά με τις σημειώσεις του Torricelli, ο Pascal έλυσε το αίνιγμα της βαρομετρικής πίεσης και έδειξε ότι η φύση δεν αποθαρρύνει το κενό. Ο υδράργυρος ανεβαίνει στις 30 ίντσες λόγω της ατμοσφαιρικής πίεσης, γεγονός που βεβαιώνει ότι η φύση δεν αποφεύγει το κενό. Ο Rene Descartes βρήκε τον εαυτό του διχασμένο, χρειαζόταν το μηδέν για να θεμελιώσει το σύστημα συντεταγμένων του, αλλά λόγω των πεποιθήσεών του (Ιησουΐτης) απέρριψε την ύπαρξη οποιουδήποτε κενού. Επίσης, πίστευε ότι κανένα αντικείμενο δεν μπορεί να διανύει ευθεία γραμμή, επειδή θα έφτανε στο κενό τελικά. Συνέχισε λοιπόν να συμφιλιώνει τις δύο αντιτιθέμενες φιλοσοφίες. Τελικά η ελληνική φιλοσοφία έγινε μέρος της χριστιανικής διδασκαλίας και επέζησε των πολυάριθμων προκλήσεων. Φυσικά το μηδέν έπαιξε επίσης σημαντικό ρόλο στη φυσική.

Ο William Thomson, γνωστός ως Λόρδος Kelvin, χαρακτήρισε την έννοια του απόλυτου μηδενός στη δεκαετία του 1850. Το απόλυτο μηδέν είναι μια θεωρητικά δυνατή αλλά μη αποδεκτή κατάσταση της ύλης με όλη τη διασκορπισμένη ενέργεια. Η άκρως επαινεμένη Θεωρία Γενικής Σχετικότητας του Αϊνστάιν βασίζεται σε ένα μοντέλο ελαστικού φύλλου του σύμπαντος. Οι μαύρες-μηδενικές τρύπες στο χώρο-χρόνο ανήκουν στη θεωρία που οδήγησε στην ειδική σχετικότητα όπως επίσης η σταθερά της βαρύτητας και η αρχή αποκλεισμού του Pauli για την επικάλυψη του διάτρητου συνεχούς. Επιπλέον, ο Αϊνστάιν θεώρησε ότι το κέντρο μιας μαύρης τρύπας είναι μηδέν, συμβάλλοντας στη διαμάχη γύρω από τη θεωρία του Big Bang. Το κενό τώρα θεωρείται ότι αποτελείται από άπειρα μηδενικά σημεία ενέργειας που θα μπορούσαν να προκαλέσουν την ομοιόμορφη κατανομή της διογκούμενης ύλης. Η κβαντομηχανική έχει ένα παρόμοιο πρόβλημα με μικροσκοπικά σωματίδια και πιθανές ενεργειακές καταστάσεις οι οποίες ταλαντεύονται γύρω από το μηδέν. Περιγράφοντας αυτές τις ποσότητες ως γεγονότα που πλησιάζουν στο μηδέν αντί να ισούνται με το μηδέν, οι εξισώσεις της φυσικής έγιναν πλέον αξιόπιστες (Tamburro, 2005).

Οι επιστήμονες και οι ορθολογιστικοί φιλόσοφοι του 17ου αιώνα ισχυρίστηκαν ότι η νέα επιστήμη πρέπει να είναι εξ ολοκλήρου μαθηματική, προκειμένου να επιτύχει να εξηγήσει τον κόσμο. Ο Leibniz (1646-1716) ανήκε στους πιο ένθερμους οπαδούς αυτού του προγράμματος. Ωστόσο, έπρεπε να παραδεχτεί ότι τα μαθηματικά δεν αντικατοπτρίζουν πλήρως τη δομή της πραγματικότητας. Ενώ ο χρόνος και ο χώρος έχουν άπειρα μεγέθη, δυστυχώς, αυτά τα μεγέθη δεν μπορούν να αποδοθούν με μαθηματικές έννοιες. Η προσέγγιση του Leibniz ήταν πιο φιλόδοξη. Προσπάθησε να χειριστεί το πρόβλημα στο πλαίσιο ενός ερευνητικού προγράμματος που αφορούσε μαθηματικές μεθόδους σε σχέση με ορισμένα μαθηματικά έργα με τα οποία ασχολήθηκε το 1672. Ένα από αυτά ξεκίνησε ύστερα από μια συζήτηση ανάμεσα στον Christian Huygens και τον Leibniz, που θεωρούνταν κορυφαίος στα μαθηματικά. Αυτή η συνάντηση, που αναφέρθηκε σε εκτενή επιστολή από τον Leibniz προς τον Gallois, γράφτηκε μέχρι τα τέλη του 1672, με τίτλο *«Accessio ad arithmeticam infinitorum»*. Σύμφωνα με τον Leibniz, η αντιφατική φράση «ο μεγαλύτερος αριθμός δεν είναι ο μεγαλύτερος» δηλώνει ότι το μηδέν, βρίσκεται εδώ και ταυτίζεται με το τίποτα. Ωστόσο, το μηδέν εμφανίζεται ως ένα αντικείμενο αναμφισβήτητα απαλλαγμένο από ύπαρξη, αυτό-αντιφατικό, ενώ τίποτα δεν δείχνει να έχει ασυνεπή έκφραση. Σύμφωνα με το έργο αυτό, ο Christian Huygens πρότεινε να προσπαθήσει ο Leibniz να λύσει ένα απαιτητικό μαθηματικό πρόβλημα (εκείνο το χρονικό διάστημα), δηλαδή να βρει το άθροισμα μιας σειράς λογικών αριθμών. Αυτή η σειρά παρατίθεται ως στοιχείο [3] παρακάτω. Τα υπόλοιπα στοιχεία αποτελούν παραδείγματα παρόμοιων αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκαν από αυτόν μετά τη γενίκευση του προβλήματος του Huygens. Νοερά, θεώρησαν μια ολόκληρη τάξη αριθμητικών σειρών, που κατασκευάστηκε με συστηματικό τρόπο για να οδηγήσει στην αναζήτηση της λύσης. Σε αυτή η κατασκευή ο Leibniz εισάγει το πρόβλημα του άπειρου στην αριθμητική. Αφήνοντας κατά μέρος αυτή τη μέθοδο της κατασκευής (που θα απαιτούσε μια μάλλον εκτενή έκθεση), ας παρατηρήσουμε ότι σε κάθε επόμενη σειρά οι διαφορές μεταξύ παρονομαστών οποιωνδήποτε παρακείμενων όρων γίνονται μεγαλύτερες. Ακολουθούν παραδείγματα της σειράς (ξεκινώντας από τη [2], όχι από την [1], για λόγο που θα δούμε αργότερα).

[2] $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ etc=\frac{1}{0}$

[3] $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\ etc=\frac{2}{1}$

[4] $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\ etc=\frac{3}{2}$

Τώρα φτάνουμε στο σημείο που μπορεί να εντοπιστεί το επιχείρημα του Leibniz σχετικά με το άπειρο. Θα πρέπει να συμπληρώσουμε τον παραπάνω κατάλογο των σειρών με το ελλιπές στοιχείο [1] στο οποίο οι διαφορές παρονομαστή θα ήταν μικρότερες από 1 (όπως συμβαίνει στη σχέση [2]). Αυτό θα πρέπει να είναι μηδέν, ενώ το άθροισμα θα πρέπει να ισούται με το κλάσμα 0/0 (για να έχει τον αριθμητή μικρότερο από αυτόν στη [2]). Έτσι προκύπτει η ακόλουθη σειρά.

[1] $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+etc=\frac{0}{0}=0$

Παρατηρούμε ότι στη σχέση [2] η διαφορά ισούται με ένα σε όλους τους παρονομαστές των κλασμάτων που προστίθενται. Στην [3] η διαφορά ισούται με δύο μεταξύ των δύο πρώτων όρων, τρία μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου όρου, και ούτω καθεξής. Στην [4] αυτές οι διαφορές είναι ακόμη μεγαλύτερες από ό, τι στις προηγούμενες σειρές. Ο Leibniz παραθέτει, επιπλέον, σειρές [5], [6], [7] ως παραδείγματα, καθένα από τα οποία υπακούει στον ίδιο νόμο για την αύξηση (με κάθε επόμενη σειρά) των διαφορών μεταξύ των παρακείμενων παρονομαστών. Δεν φαίνεται σαφώς πώς να κατανοήσουμε την ταυτοποίηση του μηδενός με το τίποτα. Όσον αφορά τη σειρά [1], το « 0 » δηλώνει μια μαθηματική οντότητα σε αυτήν, αλλά καμία μαθηματική οντότητα δεν αξίζει να ονομάζεται *τίποτα*. O Leibniz χρησιμοποιεί την ισότητα που αναφέρεται παραπάνω ως [1], όπου το αριστερό μέλος αντιπροσωπεύει ένα άπειρο μέγεθος, καθώς ποσότητες προστίθενται χωρίς να σταματούν, ενώ το δεξί μέλος είναι μηδέν (που προκύπτει διαιρώντας το μηδέν με το μηδέν κάτι που μπορεί να αγνοηθεί εδώ ως δευτερεύον σημείο). Έτσι, ο Leibniz έχει το δικαίωμα να συμπεράνει κατηγορηματικά ότι ο άπειρος αριθμός όλων των αριθμών είναι μηδέν ή τίποτα (Marciszewski, 2001).

Επιπλέον, στο επόμενο επιχείρημα («demonstration nova»), που μοιάζει *με μια αναγωγή στο παράλογο*, ο Leibniz φαίνεται να αποδίδει στην έννοια του άπειρου αριθμού την απουσία συνοχής. Γιατί, όπως ισχυρίζεται, ένας τέτοιος αριθμός (όπως το άθροισμα όλων των όρων στη σειρά [1]) θα είναι και ο μεγαλύτερος, ως άπειρος και όχι ο μεγαλύτερος, δεδομένου ότι η σειρά όλων των φυσικών αριθμών (ως 1 + 2 +3, κ.λπ.) θα ήταν ακόμη μεγαλύτερη. Μια άλλη εννοιολογική άβυσσος μεταξύ της εποχής του Leibniz και της δική μας μπορεί να υπονοηθεί με την ακόλουθη παρατήρηση του Teilhard de Chardin : το μεγαλύτερο γεγονός στην εξέλιξη της ανθρώπινης φυλής είναι ότι έμαθε κάποτε για την εξέλιξή της. Αυτό το πιο σοβαρό γεγονός ήταν μεταξύ εκείνων των πραγμάτων στη γη και στον ουρανό, που δεν ονειρευόταν καν οι φιλόσοφοι του 17ου αιώνα. Δεν εννοούμε την ιδέα του Δαρβίνου για την εξέλιξη των φυτών και των ζώων που ήταν ένα μικρό βήμα σε σύγκριση με την ανακάλυψη του Hubble και τη γενική θεωρία της σχετικότητας που αποκαλύφθηκε στους ανθρώπους του 20ου αιώνα. Η ιδέα του εξελισσόμενου σύμπαντος από το μηδέν ήταν τόσο αινιγματική, τόσο απίστευτη, που ακόμη και ο Αϊνστάιν την απέρριψε στην πρώτη του έκδοση της γενικής σχετικότητας. Μόνο μετά την εμπειρική ανακάλυψη του Hubble για την επέκταση του σύμπαντος, το 1923, ο Αϊνστάιν επέστρεψε στην νέα εκδοχή (Marciszewski, 2001).

O George Cantor (1845-1918) διερεύνησε διεξοδικά το άπειρο, το οποίο οδηγεί σε ένα άλλο θέμα, αλλά παρέχει ένα μηδενικό τέλος σε αυτόν τον πεπερασμένο απολογισμό (Tamburro, 2005).

Ο δέκατος όγδοος αιώνας απείλησε τα θεμέλια του λογισμού με τη μορφή του πνεύματος του Νεύτωνα (1642 -1727) . Ο Νεύτωνας λύνει το περίφημο πρόβλημα της εφαπτομένης μιας γραμμής παίρνοντας την παράγωγο. Για μια γραμμή που διέρχεται από ένα σημείο, σε μια ομαλή καμπύλη, η μέθοδος παραγώγισης του Νεύτωνα επέτρεψε στο Δx^2 να είναι ίσο με το μηδέν και το Δx να είναι ένας διαιρέτης. Φυσικά αν το Δx^2 ήταν μηδέν, τότε Δx θα ήταν επίσης μηδέν και δεν θα μπορούσε να είναι ένας διαιρέτης. Ο Νεύτωνας αγνόησε το μηδέν, ως μια σημειακή ανωμαλία επειδή λειτουργούσε η μέθοδος παραγώγισης! Το 1745 ο Jean-Le-Rond D'Alembert πρότεινε τη θεωρία των ορίων που πλησιάζουν το μηδέν για να εξαλείψει τα φαντάσματα του Νεύτωνα. Τα όρια επέτρεψαν στις απειροελάχιστες ποσότητες (Δx^2) να προστίθενται με στους νόμους της αριθμητικής (Tamburro, 2005).

Ο Euler, (1755-1787), όπως αναφέρεται στον Kline, (1972) γράφει: «Κάθε ποσότητα μπορεί να μειωθεί μέχρι να γίνει μηδέν και εξαφανίζεται εντελώς. Αλλά μια απείρως μικρή ποσότητα που συνεχώς εξαφανίζεται είναι ίση με το μηδέν. Επιπλέον, αυτή η έννοια είναι σύμφωνη με τον ορισμό των απείρως μικρών πράγματων τα οποία μπορούμε να πούμε ότι είναι μικρότερα από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα τότε σίγουρα είναι μηδέν, διότι, αν δεν είναι ίση με το μηδέν, θα ήταν δυνατό να εκχωρήσει στον εαυτό της μια άλλη ίση ποσότητα, και αυτό είναι ενάντια στην υπόθεση». Εξάλλου ο D'Alembert (1717-1783) δήλωσε: «Μια ποσότητα είναι κάτι ή είναι τίποτα: αν είναι κάτι, αυτή δεν έγινε μηδέν ακόμα, αν είναι τίποτα, πραγματικά έγινε το μηδέν. Η υπόθεση ότι υπάρχει μια ενδιάμεση κατάσταση ανάμεσα στο κάτι και στο τίποτα είναι «ξέφρενη φαντασία» (Bagni, 2001).

Το μηδέν στην διαδρομή καθιέρωσης του στο αριθμητικό σύστημα πέρασε από τη φάση της άρνησης, της αποδοχής πρώτα ως σύμβολο και μετά στην υπολογιστική διαδικασία και κατόπιν μετασχηματίστηκε σε αυτόνομο μαθηματικό αντικείμενο και τότε άρχισε να μελετάται και να συμβάλει στην ανάπτυξη της δομής των μαθηματικών. Η ιστορική γέννηση και η εξέλιξη της μαθηματικής έννοιας του μηδενός συνδέεται επίσης και με τα στάδια και τους μηχανισμούς της νοητικής ανάπτυξης του ανθρώπου. Η Anna Sfard το 1991, στην εργασία της για τη διπλή φύση των μαθηματικών εννοιών, αναφερόμενη στην ιστορική εξέλιξη του αριθμού και της συνάρτησης ανέπτυξε το θεωρητικό μοντέλο της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών κατά τη διαδικασία της μάθησης. Πρόβαλλε αυτό το μοντέλο στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας και επιχείρησε να εντοπίσει τα στάδια μετάβασης από τις «εργαλειακές» στις «δομικές» προσεγγίσεις (Θωμαΐδης, 2014). Επίσης ο Booth (1989) υποστήριξε ότι «Η ικανότητά μας να διαχειριστούμε τα αλγεβρικά σύμβολα με επιτυχία απαιτεί πρώτα να καταλάβουμε τις δομικές ιδιότητες των μαθηματικών πράξεων, τις σχέσεις και τους μετασχηματισμούς που μπορούν να γίνουν ή όχι. Αυτές οι δομικές ιδιότητες αποτελούν τις σημασιολογικές πτυχές της άλγεβρας». Από την αρχή της μέχρι τον δέκατο έκτο αιώνα, η άλγεβρα υπήρχε ως μια προηγμένη μορφή της αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων. Με εξαίρεση τον Διόφαντο και μερικούς άλλους, τα αλγεβρικά προβλήματα αναφέρονται και επιλύονταν στη φυσική γλώσσα (η φάση της ρητορικής άλγεβρας). Οι λύσεις σε αυτά τα προβλήματα δεν συνοδεύονταν από κάποιου είδους εξήγηση, και η ρητορική σημειογραφία καθυστερούσε την ανάπτυξη μιας πιο γενικευμένης διατύπωσης (Kieran, 1992). Το μηδέν ως αριθμός συμμετέχει στις πράξεις της αριθμητικής με τις ιδιαίτερες ιδιότητες του και δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης αφηρημένων σκέψεων που οδηγούν στη γενίκευση και στην αφαίρεση της άλγεβρας. Εστιάζει αφενός την προσοχή των μαθητών στις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και αφετέρου οδηγεί την έννοια του αριθμού ώστε να αποκτήσει αυτή την πολυπλοκότητα των πτυχών της. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια να αναλυθεί σε θεωρητικό πλαίσιο ο ρόλος του μηδενός εννοιολογικά και διαδικαστικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θεωρήσαμε σκόπιμο να περιλάβουμε στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας τις εξής ενότητες. Τις γνωστικές θεωρίες, που θα χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία κατανόησης του μηδενός από τους μαθητές. Τον ρόλο της έννοιας του αριθμού στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών και τον ρόλο του στο πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Τέλος την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για τις έρευνες που είναι σχετικές με την έννοια που εξετάζουμε, το μηδέν.

Στις γνωστικές θεωρίες συμπεριλαμβάνεται η σημειωτική προσέγγιση, η οποία προέρχεται από την γλωσσολογία και κυριαρχεί σε μελέτες διαφόρων επιστημονικών θεμάτων. Το μηδέν ως σημείο, μαθηματικό και γλωσσικό σύμβολο, ερμηνεία, δημιουργεί εννοιολογικές συνδέσεις αυτόνομες αλλά διαδοχικά εξελισσόμενες, όπως οι κρίκοι μιας αλυσίδας, στην απόκτηση μαθηματικών ιδεών στους μαθητές. Σηματοδοτεί, στην εκπαίδευση των μαθηματικών όχι μόνο την κατανόηση της έννοιας αλλά και κυρίως το πως αλλάζει μια ιδέα και η διαδικασία στην οποία συμμετέχει. Αυτό διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατάκτηση των μαθηματικών αντικειμένων. Ερευνητές που χρησιμοποιούν τα στοιχεία της σημειωτικής μπορούν να βοηθήσουν ερευνητές και εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν την ερμηνεία και το ρόλο των συμβόλων, τον τρόπο χειρισμού τους, την συνειδητοποίηση της μεταξύ τους σχέσης και τη μεταφορά αυτών των δραστηριοτήτων στο επίπεδο των μαθηματικών ιδεών τις οποίες αναπαριστούν τα σύμβολα. Η σημειωτική στη μαθηματική εκπαίδευση από την άποψη της ανάπτυξης αναπτύσσεται σε τρία αναπτυξιακά επίπεδα: πρώτο, την ανάπτυξη του ατόμου, από το βρέφος έως τον ενήλικο, που είναι *το οντογενετικό επίπεδο*, δεύτερο, την ανάπτυξη του ανθρώπου ως είδος, δηλαδή την ανάπτυξη του από τις υψηλότερες μορφές συμπεριφοράς των μεγάλων πιθήκων στην ανθρώπινη συμπεριφορά, η οποία είναι *το φυλογενετικό επίπεδο*, και τρίτο το επίπεδο της ανάπτυξης της ανθρώπινης κοινωνίας από την αρχή της κουλτούρας του ανθρώπου στις τρέχουσες εξελίξεις, που είναι *το ιστορικό επίπεδο*. Αυτά τα τρία επίπεδα μαζί αποτελούν την προσέγγιση της ψυχολογίας που είναι γνωστή ως πολιτιστική-ιστορική προσέγγιση και που ξεκίνησε από τον Lev S.

Vygotsky. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στον ρόλο του μηδενός στο πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα, στη θεωρία της Ενσώματης Γνώσης. Ακολουθεί η εννοιολογική κατανόηση και η εννοιολογική αλλαγή, η έννοια (αίσθηση) του αριθμού, η θεσιακή αξία με κεντρική ιδέα το μηδέν. Τέλος η θέση των αριθμών στην αριθμογραμμή και οι αλγόριθμοι των πράξεων σε αριθμητική και άλγεβρα γίνονται πολυδιάστατες με τη συμμετοχή του μηδενός.

2.2 ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

2.2.1 Σημειωτική προσέγγιση

Η σημειωτική προσέγγιση, η μελέτη των σημείων, των συμβόλων και η χρήση ή η ερμηνεία τους στηρίζει την εστίαση της στην εξωτερικότητα του νου. Εξαιρετική σημασία αποκτά όταν κάποιος προσπαθεί να κατανοήσει πώς αναπτύσσεται η μαθηματική ικανότητα. Είναι εξαιρετικά σημαντικό, να θεωρήσουμε την ικανότητα αυτή όχι μόνο με όρους εσωτερικής ιδιότητας αλλά με όρους αντικειμενικότητας. Η υπεροχή του εξωτερικού πάνω στο εσωτερικό, του κοινωνικού πάνω στο ατομικό , ή τουλάχιστον η ανάπτυξη από το εξωτερικό προς το εσωτερικό, είναι ζωτικής σημασίας για μια κριτική αντίληψη της επάρκειας. Η γνώση, από την ματιά της σημειωτικής θεωρείται ως η διαδικασία που οδηγεί: «Από την εγκατεστημένη διαμεσολάβηση στην κριτική αντανακλαστική υπέρβαση». Ο Whitson επεσήμανε ότι, αν και υπήρχε αλληλεπίδραση μεταξύ αντικειμένου και ερμηνείας (σημαίνοντος και σημαινόμενου) (σχέση που σημειώνεται με τα βέλη και στις δύο κατευθύνσεις στα διαγράμματα), η ερμηνεία (το σημαινόμενο), ως το κορυφαίο στοιχείο της δυαδικότητας, φαίνεται να κυριαρχεί στο αντικείμενο (στο σημαίνον) (Presmeg, Radford, Roth, & Kadunz, 2016). Η προσέγγιση της ερμηνείας του μηδενός, με ότι αυτό συμβολίζει, με την σημειωτική είναι στο επίκεντρο όλων των σύγχρονων φιλοσόφων. Το «κενό» δεν είναι το τίποτε, αλλά είναι ένα *σημαίνον-κενό*. «Το μη-είναι ενός καθορισμένου είναι, είναι ένα καθορισμένο μη-είναι» (ο Χέγκελ σε παράδειγμα για το μηδέν των μαθηματικών) (Presmeg et al., 2016).

Η Σημειολογία

Ο ιδρυτής της επιστήμης της γλωσσολογίας, αλλά επίσης και της επιστήμης που αναφέρεται συνηθέστερα ως « σημειωτική», ο Ελβετός γλωσσολόγος Ferdinand de Saussure (1857-1913) έγραψε στο βιβλίο του με τίτλο *Μαθήματα Γενικής Γλωσσολογίας* (1915) : «Μια επιστήμη που μελετά τη ζωή των σημείων σε μια κοινωνία, είναι νοητή. Θ' αποτελούσε τμήμα της κοινωνικής ψυχολογίας και συνεπώς της γενικής ψυχολογίας. Θα την ονομάσω σημειολογία (από την ελληνική λέξη «σημείο»). Η σημειολογία θα έδειχνε τι συνιστά η έννοια σημείο-σύμβολο και ποιοι νόμοι το διέπουν. Αφού η επιστήμη αυτή δεν υπάρχει ακόμη, κανείς δεν μπορεί να πει τι θα ήταν. Αλλά έχει δικαίωμα ύπαρξης, δικαίωμα να έχει μια καθορισμένη θέση στην επιστήμη. Η γλωσσολογία είναι απλώς τμήμα της γενικής επιστήμης της σημειολογίας. Οι νόμοι που διέπουν τη σημειολογία θα εφαρμόζονται στη γλωσσολογία κι αυτή θα οριοθετεί μια καλώς καθορισμένη περιοχή μέσα στη μάζα των ανθρωπολογικών δεδομένων αναφέρει ο Saussure, στο Innis το 1986. Ο πιο συνηθισμένος σύντομος ορισμός της σημειωτικής είναι «η μελέτη των σημείων» (ή «η θεωρία των σημείων») και περιλαμβάνει τη μελέτη όχι μόνον αυτών που ονομάζουμε *σημεία* στην καθημερινή γλώσσα, αλλά και κάθε αντικειμένου που αντιπροσωπεύει κάτι άλλο. Στην έννοια της σημειωτικής, τα σημεία θεωρούνται ότι περιλαμβάνουν λέξεις, εικόνες, ήχους, χειρονομίες κι αντικείμενα. Τα σημεία δεν μελετώνται μεμονωμένα αλλά ως τμήματα ενός σημειωτικού συστήματος σημείων. Ο τρόπος με τον οποίο δημιουργούνται τα νοήματα, η σχέση μεταξύ ενός συμβόλου και της σημασίας του και ο τρόπος που τα σύμβολα συνδυάζονται σε κώδικες θεωρούν οι John Fiske & John Hartley (1978) ότι είναι το κεντρικό ενδιαφέρον της σημειωτικής. Η σημειωτική δεν αποτελεί ανεξάρτητο ακαδημαϊκό κλάδο αλλά κυριαρχεί σε μελέτες φιλολογίας, τέχνης, ανθρωπολογίας, μαθηματικών και ενδιαφέρεται όχι μόνο για την (ακριβολογία) της επικοινωνίας αλλά για την απόδοση σημασίας σε οτιδήποτε βρίσκεται γύρω μας. Η παραγωγή σημασιών, η σημειωτική, για τον Umberto Eco, είναι πλέον κοινωνική δραστηριότητα που επιτρέπει όμως σε υποκειμενικούς παράγοντες να εμπλέκονται σε κάθε ατομική ενέργεια της. Ο Eco με τη σημειωτική του θεωρία γεφυρώνει τις δυο αποκλίνουσες θεωρίες της σημειωτικής. Οι δυο αποκλίνουσες αναλύσεις-παραδόσεις της σημειωτικής βασίζονται στον Ελβετό Saussure και στον Αμερικανό Peirce. Για τους βασικότερους όρους-κλειδιά (όπως : σημείο, σύμβολο, δείκτης, εικόνα, ερμηνευτής κ.α.) της σημειωτικής υπάρχουν πολλοί ορισμοί. Ο σημειωτικός τύπος που αποδίδεται στο μηδέν, δηλαδή ότι το μηδέν είναι ένα σύμβολο-σημάδι για την απουσία άλλων σημείων, λειτουργεί όχι μόνο σαν μια στοιχειώδης και θεωρητική απλή ανάγνωση του «σημείου» ως σηματοδότης ενός γεγονότος, ενός πράγματος, μιας κίνησης που δίνει σημασία σε ένα θέμα, αλλά αυτό που είναι πιο σημαντικό είναι ότι δηλώνει ρητά και πράγματι αποτελεί, όσον αφορά τη λογοκεντρική[1] αντίθεση ανάμεσα στην απουσία και στην παρουσία. Ακόμη, αναφερόμενοι στο μηδέν μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μετα-σύμβολο, ένα σύμβολο, δηλαδή για την απουσία / παρουσία άλλων συμβόλων, είναι απαραίτητο δε να αποδώσουμε στο μηδέν, αναγκαστικά, και μια δεύτερη σημασία, τη σημασία της άρνησης, των άλλων συμβόλων (Rotman, 1988). Το μηδέν μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ότι είναι πιο σημαντικό σύμβολο από τα άλλα σύμβολα ;

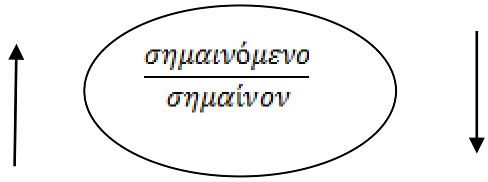
Σημαίνον-Σημαινόμενο

Ο Ελβετός γλωσσολόγος Ferdinand de Saussure (1857-1913) εισήγαγε τους όρους «σημείο», «σημαίνον», «σημαινόμενο». Το σημείο, μονάδα σημασίας που μπορεί να έχει τη μορφή λέξης, εικόνας, ήχου, αντικειμένου ή ακόμη και ενέργειας ως όρος εισάγεται το 1906 στο βιβλίο του «Μαθήματα Γενικής γλωσσολογίας»[2] και εκεί επισημαίνει : «Το γλωσσικό σημείο ενώνει όχι ένα πράγμα με ένα όνομα, αλλά μια έννοια με μια ακουστική εικόνα. Το σημαίνον είναι αναιτιολόγητο, δηλ. αυθαίρετο σε σχέση με το σημαινόμενο, με τον οποίο δεν έχει κανένα φυσικό δεσμό στην πραγματικότητα». Παράδειγμα: η έννοια «αδελφή» δεν έχει καμιά εσωτερική σχέση με την ακολουθία των ήχων α-δ-ε-λ-φ-ή που της χρησιμεύει ως σημαίνον. Θα μπορούσε εξίσου καλά να παριστάνεται με οποιαδήποτε άλλη ακολουθία. Απόδειξη αυτού είναι οι διαφορές μεταξύ των γλωσσών: αδελφή, sister, soeur. Για τον Saussure, η αυθαιρεσία του γλωσσικού σημείου ορίζεται ως σχέση σημαίνοντος και σημαινόμενου, δηλαδή δεν περιλαμβάνει το «πράγμα». Ωστόσο, στον βαθμό που το σημαινόμενο, η έννοια, είναι μια αντανάκλαση του «πράγματος» μεσολαβημένη από τις διαδικασίες της γενίκευσης και της αφαίρεσης είναι σαφές ότι η αυθαίρετη σχέση περιλαμβάνει και το «πράγμα»: η έννοια γενικευμένη και αφηρημένη αντανάκλαση του «πράγματος» συνδέεται αυθαίρετα με την ακουστική εικόνα. Όπως σημειώνει ακόμη ο Saussure, η αυθαίρετη σχέση σημαίνοντος / σημαινόμενου δεν σημαίνει ότι το σημαίνον εξαρτάται από την ελεύθερη εκλογή του υποκειμένου. Για τον Saussure το σημαίνον και το σημαινόμενο αποτελούν μορφή και όχι ουσία, είναι αδιαχώριστα και δεν υπάρχει το ένα χωρίς το άλλο. Το σημείο, κατά τον Saussure, αποκλείει την αναφορά σε κάποιο υλικό αντικείμενο. Η σημασία κατά τον Saussure είναι κατά

[1] Λογοκεντρισμός: Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, οι λέξεις έχουν συγκεκριμένο και σαφές νόημα που δεν υπόκειται σε αλλαγές και το οποίο, συνεπώς, μας υποχρεώνει σε ένα και μόνο λογικό συμπέρασμα κάθε φορά.

[2] F. de Saussure, Μαθήματα γενικής γλωσσολογίας, εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1979, σελ 151

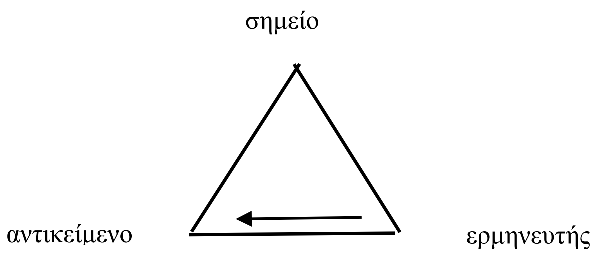
βάση σχέση μεταξύ των σημείων ενός πλαισίου υποβαθμίζοντας το ρόλο της αναφοράς σε κάποια αντικείμενα. Ο Saussure, αναπαριστά το σημείο με την χρήση του διαγράμματος:



Το σημαίνον είναι δεσμευτικό για το υποκείμενο, εφόσον έχει καθιερωθεί μέσα σε μια γλωσσική κοινότητα. Το γλωσσικό σημείο δεν συνδέει ένα πράγμα με ένα όνομα αλλά μια έννοια με μια ακουστική εικόνα. Αυτή η τελευταία δεν είναι μόνο το ηχητικό υλικό, κάτι εντελώς φυσικό, αλλά το ψυχικό αποτύπωμα αυτού του ήχου, η αναπαράσταση που δίνει η μαρτυρία των αισθήσεών μας. Θα πρέπει να υπογραμμίσουμε εδώ ότι το σημείο συνιστά πρωτίστως μια «ψυχική οντότητα» γιατί και τα δύο της σκέλη, σημαίνον και σημαινόμενο, δεν συνδέονται με την ίδια την αντικειμενική πραγματικότητα, αλλά με την ψυχική της αναπαράσταση. Το σημαίνον, θα πρέπει να γίνεται κατανοητό όχι σαν μια απλή ηχητική αναπαράσταση, αλλά σαν ψυχική αναπαράσταση του ήχου (ακουστική εικόνα), πέρα από κάθε φυσική εκδήλωσή του στην ομιλία. Επίσης, το σημαινόμενο δεν σχετίζεται με τα πράγματα ή τις έννοιες της εξωτερικής πραγματικότητας, αλλά με μια ορισμένη έννοια που ανακαλείται στο νου μέσω του σημαίνοντος. Ένα σημαινόμενο δεν μπορεί να υπάρξει παρά μόνο μέσα από τη σχέση του με το σημαίνον. Χωρίς σημαίνον, θα ήταν αδύνατον να νοηθεί, δεν θα μπορούσε να υπάρξει. Με βάση τα προηγούμενα, στο σημείο ενοποιούνται ένα σημαίνον και ένα σημαινόμενο, διεργασία η οποία θεμελιώνει και συνάμα δημιουργεί τη σημασία ως διαδικασία του «εννοείν», του νοήματος (Σακονίδης, 1996). Όπως λέει ο Justin Lewis (1971), «το σημείο ενσωματώνει τόσο το σημαίνον όσο και το σημαινόμενο: είναι η υλική οντότητα που έχει αποκτήσει σημασία». Την ίδια περίπου εποχή που γίνεται γνωστό το έργο του αλλά ανεξάρτητα από αυτό, ο Saussure (1974) καθιερώνει την επιστήμη της σημειολογίας ως τον κλάδο «που μελετά τη ζωή των (γλωσσικών) σημείων μέσα στην κοινωνία ... (που) φανερώνει από τι συγκροτούνται τα σημεία, ποιοι νόμοι τα διέπουν». Ο Saussure δεν ενδιαφερόταν για τα μη γλωσσικά σημεία, ωστόσο, η θεωρία του και ειδικότερα η διάκριση μεταξύ *σημαινόμενου* (signified) και *σημαίνοντος* (signifier) και η αρχή ότι η σχέση μεταξύ σημαινόμενου και σημαίνοντος είναι αυθαίρετη, επηρέασε ιδιαίτερα το πεδίο της σημειωτικής. Η διάκριση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινομένου εξισώνεται συνήθως με τον δυαδισμό «μορφής και περιεχομένου» αποκλείοντας αναφορές σε αντικείμενα του υπαρκτού κόσμου, αλλά οι αναφορές γίνονται σε νοητές έννοιες ή ηχητικές εικόνες. Η σχέση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινομένου, για μερικούς, δηλώνει ότι «το σημαινόμενο επηρεάζεται από το σημαίνον» (και όχι το αντίστροφο). Για άλλους η σχέση θεωρείται αυθαίρετη και για άλλους η σχέση αυτή θεωρείται ότι διέπεται από όρους «σχετικής αυτονομίας». Ο τρόπος που ο Saussure αντιλαμβάνεται τη σημασία των σημείων είναι επίσης διαφορικός : τονίζει τις διαφορές μεταξύ των σημείων. Ισχυρίστηκε ότι «οι έννοιες είναι καθαρά διαφορικές και ορίζονται όχι από το θετικό τους περιεχόμενο αλλά αρνητικά από τις σχέσεις τους με άλλους όρους του συστήματος. Το πιο ακριβές χαρακτηριστικό τους είναι ότι αποτελούν αυτό που τα άλλα δεν είναι» (Σακονίδης, 1996).

Σημείο-Αντικείμενο-Ερμηνεία

Σε αντίθεση με την «αυτοδύναμη δυάδα» : *σημαίνον – σημαινόμενο* του Saussure, ο Charles Sanders Peirce (1839-1914) πρότεινε μια τριάδα : *Σημείο, σήμα ή αναπαράσταση (Sign or Representamen), Ερμηνεία ή Ερμήνευμα (Interpretant)* και *Αντικείμενο (Object).* Ένα σημείο μπορεί να είναι εικόνα, σύμβολο και ερμηνευτής (ενδείκτης), ή οποιοσδήποτε συνδυασμός. *«Ένας χάρτης είναι ... ενδεικτικός (δείχνει που είναι διάφοροι τόποι) και εικονικός (αναπαριστά τόπους σε τοπογραφική σχέση μεταξύ τους) και συμβολικός (το σημειολογικό τους σύστημα πρέπει να διδαχθεί).* Ο Peirce (1955) διακρίνει τρεις τύπους σημείων με βάση αυτή τη σχέση: το *ομοίωμα* (όταν υπάρχουν κοινές ιδιότητες του σημείου και του αντικειμένου π.χ. ο χάρακας και η ευθεία γραμμή), τον *δείκτη* (όταν η σχέση μεταξύ σημείου και αντικειμένου καθορίζεται από την επιρροή που ασκεί το αντικείμενο στο πλαίσιο που διαμορφώνεται, δηλαδή η σημασία της σχέσης εξαρτάται από τα συν-κείμενα (context) π.χ. η πτώση του δείκτη ενός βαρομέτρου) και το *σύμβολο* (όταν η σχέση σημείου-αντικειμένου καθορίζεται συμβατικά π.χ. «5»). Έτσι γίνεται φανερό ότι το ομοίωμα αποτελεί τον απλούστερο τύπο σημείου και το σύμβολο τον πιο σύνθετο. Επιπλέον, υπάρχει μια σχέση εγκλεισμού μεταξύ των ομοιωμάτων, των δεικτών και των συμβόλων: κάθε δείκτης περιέχει ένα ομοίωμα και κάθε σύμβολο ένα δείκτη. Συνεπώς, στο πλαίσιο αυτό, το ομοίωμα συνδέει μία εικόνα με μία προηγούμενη, η οποία απλώνεται από το παρόν στο παρελθόν, ο δείκτης περικλείει μια συνέχεια που συνδέεται με τον χαρακτήρα του πλαισίου που διαμορφώνεται, δηλαδή έχει το χαρακτήρα της παρούσας εμπειρίας και τέλος, το σύμβολο βιώνεται μόνο αν πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις και επομένως, σε σχέση με το ομοίωμα και το δείκτη, είναι ανεξάρτητο του χρόνου και του χώρου και γι' αυτό αποτελεί το πιο κυρίαρχο σημείο. «Ορίζω ένα Σημείο ως κάτι που είναι τόσο ορισμένο από κάτι άλλο, που ονομάζεται Αντικείμενο του, και έτσι καθορίζει ένα αποτέλεσμα σε ένα άτομο. Το αποτέλεσμα, το οποίο καλώ Ερμηνευτή, καθορίζεται μεσολαβητικά από το πρώτο. Η παρεμβολή της έκφρασής μου "σε ένα άτομο" είναι ('a sop to Cerberus') μια αναφορά που δίνεται για να εξευμενίσει μια πιθανή πηγή προβλημάτων, γιατί πραγματικά δυσκολεύομαι να κατανοήσω την ευρύτερη αντίληψη. Αναγνωρίζω τρία Σύμπαντα, τα οποία διακρίνονται από τρεις Καταστάσεις του Όντος» (Presmeg et al., 2016).



Σημειωτικό Τρίγωνο του Pierce

Η μελέτη των σημείων σε οποιοδήποτε γνωστικό πεδίο προϋποθέτει τη διερεύνηση της φύσης της σχέσης μεταξύ σημείου και αντικειμένου. Ο Peirce διατυπώνει την άποψη ότι «όλη η σκέψη πραγματοποιείται με σημεία» και η *διαδικασία σημείωσης* (signing process) συνίσταται στην τριαδική συσχέτιση μεταξύ των (συγκεκριμένων) *αντικειμένων* που εμπλέκονται στο πρόβλημα, των *σημείων* που αναπαριστούν αυτά τα αντικείμενα και της απόδοσης *νοήματος* ή *σημασίας* στα σημεία. Το σημείο αντικαθιστά το αντικείμενο, αναφέρεται σε αυτό αλλά είναι περισσότερο διαθέσιμο από το ίδιο το αντικείμενο (Langer, 1955). Ο Peirce ανέπτυξε διάφορες τυπολογίες για τα σύμβολα. Ίσως είναι η πιο γνωστή τυπολογία είναι αυτή που βασίζεται στο είδος της σχέσης μεταξύ ενός συμβόλου - οχήματος και του αντικειμένου του. Η σχέση οδηγεί σε τρία είδη συμβόλων : το εικονικό, το δεικτικό και το συμβολικό. Για τη διευκρίνιση των διαφορών μεταξύ των εικονικών, δεικτικών και συμβολικών σημείων, μπορεί να είναι χρήσιμο να δούμε κάποια από τα παραδείγματα του Peirce :

στο *εικονικό* σύμβολο, το σύμβολο-όχημα και το σύμβολο-αντικείμενο μοιράζονται μια φυσική ομοιότητα, π.χ. μια φωτογραφία ενός ατόμου που απεικονίζει το πραγματικό πρόσωπο. Τα σύμβολα είναι *ερμηνευτικά* εάν υπάρχει κάποια φυσική σύνδεση μεταξύ συμβόλου-οχήματος και αντικείμενου, π.χ., ο καπνός δηλώνει ότι υπάρχει πυρκαγιά ή είναι ένα σημάδι που δείχνει κάποιο δρόμο. Η φύση των *συμβολικών* σημείων είναι ότι υπάρχει ένα στοιχείο σύμβασης για τη σύνδεση ενός συγκεκριμένου συμβόλου-οχήματος με το αντικείμενο του (π.χ. ο αλγεβρικός συμβολισμός). Αυτές οι διαφορές στα μαθηματικά σύμβολα περιπλέκονται από το γεγονός ότι τρεις διαφορετικοί άνθρωποι μπορούν να ταξινομήσουν την «ίδια» σχέση μεταξύ ενός συμβόλου- οχήματος και του αντικειμένου του με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι *εικονική*, *ερμηνευτική* ή *συμβολική* αντίστοιχα, σύμφωνα με τις ερμηνείες τους. Στην πράξη, οι διακρίσεις είναι λεπτές γιατί εξαρτώνται από τις ερμηνείες του ατόμου και επομένως, από μια τέτοια σκοπιά, οι διαφορές μπορεί να είναι χρήσιμες για τους σκοπούς ενός ερευνητή ή δάσκαλου ώστε να προσδιορίσει τις λεπτές πτυχές των μαθηματικών αντιλήψεων ενός μαθητή και να λαμβάνει υπόψη του τις διάφορες ερμηνείες. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε με την τριάδα *σύμβολο, αντικείμενο, ερμηνευτής* τον τύπο λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τον γνωστό τύπο $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. Επειδή χρησιμοποιούνται σύμβολα, η ερμηνεία της γραφής αυτής της σχέσης με το μαθηματικό της αντικείμενο μπορεί να χαρακτηριστεί ως συμβολική, που περιλαμβάνει σύμβαση. Ωστόσο, ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύεται η γραφή της σχέσης, θα μπορούσε και το σύμβολο να χαρακτηρίζεται ως *εικονικό* ή *ερμηνευτικό*. Σε αρχική ερευνητική μελέτη της Presmeg (1985) για την απεικόνιση των μαθηματικών γυμνασίου, πολλοί από τους 54 ερωτηθέντες ανέφεραν αυθόρμητα ότι θυμήθηκαν αυτόν τον τύπο από μια εικόνα του σχήματος του, μια *εικονική* ιδιότητα. Ωστόσο, ο τύπος ερμηνεύεται επίσης συνήθως ως *ερμηνευτής-δείκτης* (όπως ένα σημάδι κατεύθυνσης σε ένα δρόμο): είναι μια οδηγία για την εκτέλεση της πράξης της αντικατάστασης τιμών για τις μεταβλητές α, β και γ προκειμένου να λυθεί η εξίσωση. Με αυτή την έννοια ο τύπος είναι «ευρετηριακός». Έτσι, αν το σύμβολο-όχημα του τύπου είναι χαρακτηρισμένο ως *εικονικό, ερμηνευτικό*, ή *συμβολικό* εξαρτάται από τον ερμηνευτή του σημείου (Presmeg et al., 2016). Επειδή ο ανθρώπινος νους έχει φτάσει πλέον σε επίπεδα επίγνωσης, το αντικείμενο γίνεται πλέον αντικείμενο γνώσης. Αλλά η γνώση δεν είναι μια σειρά απομονωμένων δεδομένων ή γεγονότων. Μάλλον, προκύπτει από τη σύνδεση μεταξύ των δεδομένων, και αυτή η σύνδεση, υποστηρίζει ο Peirce, απαιτεί την είσοδο σε ένα επίπεδο που να ξεπερνά κατά πρώτον την ποιότητα και κατά δεύτερον την πραγματικότητα. Αυτό το τρίτο νέο επίπεδο απαιτεί τη χρήση συμβόλων. Σχολιάζοντας τις λεπτές αποχρώσεις των αλληλεξαρτήσεων μεταξύ πρώτου, δευτέρου και τρίτου επιπέδου είτε ως οντολογικές είτε ως φαινομενολογικές οι Sáens-Ludlow και Kadunz (2016) αναφέρουν τα εξής: «*Η σημειωτική του Peirce βασίζεται στις τρεις συναφείς κατηγορίες, οι οποίες μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους, και οι οποίες δεν μπορούν να μειωθούν. Ο Peirce ισχυρίστηκε ότι υπάρχουν τρεις και μόνο τρεις κατηγορίες. Ισχυρίζεται ότι είχε κοιτάξει μακριά και σκληρά για να διαψεύσει το δόγμα του για τις τρεις κατηγορίες αλλά ότι ποτέ δεν βρήκε τίποτα να τον αντικρούσει και έτσι πρότεινε σε όλους την πρόσκληση να κάνουν το ίδιο». Η ύπαρξη αυτών των τριών κατηγοριών ονομάστηκαν «Θεώρημα του Peirce» ο οποίος θεωρεί ότι αυτές οι κατηγορίες είναι τόσο οντολογικές όσο και φαινομενολογικές. Οι πρώτες αφορούν τη φύση της ύπαρξης και οι τελευταίες το φαινόμενο της συνειδητής εμπειρίας* (Presmeg et al., 2016).

Ο Μαθηματικός Συμβολισμός

Από πολύ νωρίς η μαθηματική επιστήμη προχώρησε στην εισαγωγή και χρήση μιας μεγάλης ποικιλίας σημείων για την επεξεργασία και την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών, καθιστώντας καθοριστικό το ρόλο τους στην περαιτέρω εξέλιξή της. Με το πέρασμα του χρόνου, μόνο ένας αριθμός σημείων-συμβόλων επιβίωσε με κυριότερη αιτία, μεταξύ των άλλων, την ανταπόκριση στους νόμους της ευχρηστίας, της συνέπειας και της λειτουργικότητας. Η εξέλιξη των μαθηματικών έχει άμεση σχέση με την ανάπτυξη των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων. Σύμφωνα με τον Duval (1999) «η πρόοδος στα Μαθηματικά συνδέεται με την εξέλιξη (ανάπτυξη) διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων των αισθητηρίων συστημάτων : της γλώσσας και της εικόνας». Ο ρόλος των συμβόλων στη διαμεσολάβηση της έκφρασης των ιδεών και της εννοιοποίησης νέων ιδεών ήταν μια διαδεδομένη δύναμη στα μαθηματικά και αυτά τα σύμβολα εξελίχθηκαν ως μαθηματικές έννοιες που από την εμπειρική και τη συγκεκριμένη ύπαρξη μεταφέρθηκαν στη γενική και αφηρημένη σκέψη. Η γνώση των συμβόλων είναι η μελέτη της δομής μαθηματικών σημείων και συμβόλων και των διαδικασιών που εμπλέκονται στο χειρισμό αυτών των αντικειμένων σε νόημα έννοιες, διαδικασίες και παραστάσεις. Πιο πρακτικά σκοπεύει να κατανοήσει τους τρόπους με τους οποίους τα σύμβολα μας βοηθούν να κάνουμε τα μαθηματικά, εξετάζοντας την εξέλιξη των συμβόλων και το ρόλο τους στην πνευματική ανάπτυξη του εκπαιδευόμενου από τις πρώτες αρχές μέχρι το τέλος μέχρι την ωριμότητα (Chandler, 2007).

Μέσα στο περιβάλλον της μαθηματικής σκέψης η εξέλιξη των συμβόλων ξεκινά από την κατανόηση του πως τα σύμβολα είναι εργαλεία με τα οποία επιτυγχάνεται η επικοινωνία στην παρατήρηση συνεχίζεται στο πώς τα σύμβολα είναι μέρος μεγαλύτερων συστημάτων που ίσως να εξελίσσονται με την ανθρώπινη γνώση ή είναι τεχνουργήματα πολιτισμού που υποστηρίζουν τις μαθηματικές ιδέες. η εκπαίδευση των μαθηματικών έχει πραγματικά μια σημειωτική φύση. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να επισημανθεί μόνο η εστίαση της έρευνας σχετικά με το νόημα, την επικοινωνία, τη γλώσσα και τον πολιτισμό. Η σημειωτική ως επιστήμη μπορεί να βοηθήσει στην αποσαφήνιση των προβληματικών πτυχών που αναφέρονται στον συνδυασμό της ιστορίας των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η εκπαίδευση των μαθηματικών έχει πραγματικά μια σημειωτική φύση. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να επισημανθεί η εστίαση της έρευνας σχετικά με το νόημα, την επικοινωνία, τη γλώσσα και τον πολιτισμό. Η ιστορία των ιδεών, που περιλαμβάνει την ιστορία των μαθηματικών, έχει σκοπό την κατανόηση του τρόπου πώς αλλάζουν οι ιδέες και, ως εκ τούτου, πρέπει να ξεκινήσει από την προβολή της προηγούμενης σκέψης ως πραγματικά διαφορετικής από τη σύγχρονη σκέψη (Chandler, 2007).

Ο μαθηματικός συμβολισμός αποτελεί ένα από τα ισχυρότερα μέσα έκφρασης των μαθηματικών. Η χρήση συμβόλων για την αναπαράσταση των μαθηματικών ιδεών συνέβαλε σημαντικά στη εντυπωσιακή εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, εφοδιάζοντας τη σκέψη με ένα ευέλικτο και οικονομικό εργαλείο. Η εκτεταμένη αυτή χρήση συμβόλων στα μαθηματικά επηρέασε το περιεχόμενο και τη διδασκαλία του μαθήματος στο σχολείο. Από τα πρώτα χρόνια και με την πάροδο του χρόνου, τα παιδιά έρχονται σε επαφή μ’ ένα σημαντικό αριθμό συμβόλων. Η έρευνα έχει επανειλημμένα ασχοληθεί με αυτό το κομμάτι των σχολικών μαθηματικών, εστιάζοντας το ενδιαφέρον στα χαρακτηριστικά του μαθηματικού συμβολισμού και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί χειρίζονται το συμβολικό σύστημα των μαθηματικών. Προκειμένου να κατανοήσουμε ένα μαθηματικό σύμβολο πρέπει να το συσχετίσουμε με μια έννοια δηλαδή κάτι που να έχει νόημα στην ανθρώπινη νόηση στην οποία τελικά στηρίζεται η εμπειρία που δημιουργήθηκε μέσω νευρικών μηχανισμών. Όπως τόνισε ο Stanislas Dehaene, πολλοί από εμάς βιώσαμε αριθμητικούς υπολογισμούς στις διάφορες τάξεις του σχολείου που μπορεί να πραγματοποιηθήκαν με ή χωρίς γνήσια κατανόηση. Πολλοί μπορεί να θυμηθούν τους πίνακες πολλαπλασιασμού, αλλά ουσιαστικά είναι χωρίς νόημα. Η έννοια των μαθηματικών συμβόλων δεν βρίσκεται μόνο στα σύμβολα και πώς μπορούν αυτά να χρησιμοποιούνται από τους κανόνες. Ο Skemp (1971) γράφει ότι «η χρήση των συμβόλων είναι εκείνη με την οποία επιτυγχάνουμε τον εθελοντικό έλεγχο της σκέψης» και αποδίδει στο μαθηματικό συμβολισμό έναν αριθμό λειτουργιών, όπως επικοινωνία, ταξινόμηση, επεξήγηση, διευκόλυνση διαλογισμού, αυτοματοποίηση συχνά επαναλαμβανόμενων χειρισμών, κατανόηση, κάθε δημιουργική διανοητική δραστηριότητα κτλ. Υποστηρίζει ότι τα σύμβολα λειτουργούν ως γέφυρες μεταξύ των σκέψεων και του εξωτερικού κόσμου και δανείζεται από τον Chomsky τους όρους «επιφανειακή δομή» (surface structure)» και «βαθιά δομή» (deep structure)» για να αναπαραστήσει τους δύο αυτούς κόσμους αντίστοιχα. Επεκτείνοντας αυτήν την αντίληψη, οι Byers και Erlwanger (1984) αναπτύσσουν την άποψη ότι τα μαθηματικά ως επιστημονικός κλάδος διακρίνονται από μια δυαδικότητα, αυτήν του «περιεχομένου» και της «φόρμας» (Σακονίδης, 1996) . Η τελευταία εξελίσσεται και αλλάζει εξαιτίας της ανάγκης να εκφράσει τις ιδιότητες ενός «αυξανόμενου αποθεματικού μαθηματικών αντικειμένων». Κεντρικό σημείο της μαθηματικής δραστηριότητας αποτελεί η ικανότητα χειρισμού συμβόλων και η ταυτόχρονη διατήρηση της συνειδητοποίησης των εννοιών που δηλώνουν αυτά τα σύμβολα. Σε μεταγενέστερο άρθρο του ο Skemp (1982) υιοθετεί τον όρο «συμβολική κατανόηση» (symbolic understanding) για να αναφερθεί στην κατανόηση που αφορά την ικανότητα της σύνδεσης των μαθηματικών συμβόλων με τις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες (την οποία οι Byers και Herscovics (1977) αποκαλούν «τυπική κατανόηση» formal understanding). Ο Skemp διευκρινίζει ότι η λέξη «συμβολική» δεν αναφέρεται σε ένα μοναδικό σύμβολο αλλά σε ένα συμβολικό σύστημα, δηλαδή σε ένα σύνολο συμβόλων που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο εννοιών μαζί με σχέσεις μεταξύ των συμβόλων, οι οποίες με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε σχέσεις μεταξύ των εννοιών. Για παράδειγμα, η θέση και το μέγεθος των ψηφίων «2» και «3» στις παρακάτω συμβολικές αναπαραστάσεις καθορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών που αναπαριστούν: 23, 2^3. Τελικά, ο Skemp υιοθετεί τον εξής ορισμό για τη συμβολική κατανόηση: είναι η αμοιβαία αφομοίωση μεταξύ ενός συστήματος συμβόλων και μιας κατάλληλης εννοιολογικής δομής. Τονίζει, ωστόσο, ότι η εννοιολογική δομή είναι σημαντικό να μην κυριαρχείται από το σύστημα συμβόλων, καθώς η ισχύς των μαθηματικών βρίσκεται στις ιδέες. Με την κατάλληλη συνεργασία των δύο, τα σύμβολα υποστηρίζουν τη χρήση αυτής της ισχύος μέσω της αξιοποίησης των ιδεών αυτών στην πληρότητά τους. Σε περιπτώσεις ισομορφισμού, ελάχιστη σημασία έχει η κυριαρχία του ενός στοιχείου έναντι του άλλου. Στα μαθηματικά, ο ισομορφισμός μεταξύ συμβολικού συστήματος και εννοιολογικής δομής είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, τοπικού μόνο χαρακτήρα. Για παράδειγμα, η χωρική σχέση «βρίσκεται δεξιά από» έχει διαφορετική σημασία σε κάθε μία από τις παρακάτω συμβολικές αναπαραστάσεις: 23, 21/3, 2α, ενώ η αναπαράσταση (2,3) έχει τρεις διαφορετικές ερμηνείες: ρητός αριθμός, σημείο στο επίπεδο και ελεύθερο διάνυσμα. Αυτό οφείλεται κυρίως στις πολύ περιορισμένες δυνατότητες διευθέτησης των συμβόλων αναφορικά με τις πολλές σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και λιγότερο σε ενδεχόμενα λανθασμένη επιλογή συμβολικού συστήματος. Ο Skemp υποστηρίζει ότι οποιαδήποτε επικοινωνία, προφορική ή γραπτή γίνεται αντιληπτή αρχικά από ένα σύστημα συμβόλων. Για να γίνει κατανοητή (δηλαδή να συσχετιστεί εννοιολογικά), πρέπει να «προσελκυστεί» από κάποια εννοιολογική δομή και να ερμηνευτεί με βάση τις σχέσεις της εννοιολογικής, κυρίως, δομής και λιγότερο αυτές του συμβολικού συστήματος. Αυτό απαιτεί ισχυρές εννοιολογικές δομές και κυρίως αρκετά δυνατούς δεσμούς μεταξύ του συμβολικού συστήματος και της εννοιολογικής δομής, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο (Σακονίδης, 1996).

Το μηδέν ως αριθμός ή ως σύμβολο μπορεί να παρουσιάσει μοναδικές αναπτυξιακές και εννοιολογικές προκλήσεις για τα παιδιά. Η ικανότητα καταμέτρησης, συνήθως ξεκινά από το ένα και αφορά αριθμούς που περιγράφουν ποσότητα. Το μηδέν, μια λέξη αριθμός και γραπτό σύμβολο, αντιπροσωπεύει μια νέα αντίληψη, την απουσία της ποσότητας, η οποία συχνά είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή από τα παιδιά. Στα μικρά παιδιά η κατανόηση του μηδενός αναπτύσσεται σε διάφορα στάδια. Οι Wellman & Miller, (1986), μετά από έρευνες περιέγραψαν ότι το παιδί αρχικά μπορεί να μάθει το όνομα και να το συνδέσει με το σύμβολο « 0 », αλλά πολύ αργότερα θα αναγνωρίσει την ποσοτική του έννοια (δηλαδή, την έλλειψη ποσότητας), και στη συνέχεια, μπορεί να το συνδέσει με άλλους μικρούς αριθμούς (Center, 2015). Η καθυστέρηση στην κατανόηση του μηδενός από τα παιδιά εγείρει ένα σημαντικό ερώτημα. Μήπως τα παιδιά ενσωματώνουν το μηδέν στην ίδια αριθμητική συνέχεια των ακέραιων αριθμών που βρίσκονται σε μια λίστα καταμέτρησης; Ή μήπως αρχικά αναπτύσσουν μια ριζικά διαφορετική παράσταση για το μηδέν, και μόνο μαθαίνουν να το αξιολογούν σε σχέση με άλλους αριθμούς μέσω ενός συστήματος κανόνων;

Η αξία του συμβόλου μηδέν διαφοροποιείται από τα άλλα σύμβολα και το κάνει να μην σχετίζεται με καμία κατάλληλη έκφραση. Η αξία του συμβόλου του μηδενός εισάγει την ευελιξία στην ανακατανομή σημαίνοντος και σημαινόμενου, συμπυκνώνει και επεκτείνει τις σχέσεις τους, και έτσι ενεργοποιεί περιορισμένες αλλά χρήσιμες αναπαραστάσεις του κόσμου. Η ιστορική ανάδυση του μηδενός ως πραγματικού αριθμού (και όχι απλώς ως απουσίας αριθμού) είναι ένα από τα πιο περίπλοκα θέματα στην ιστορία των μαθηματικών. Στην *εισαγωγή του στο έργο του Marcel Mauss* (1950), ο Claude Lévi-Strauss προσδιόρισε ένα «πλωτό σημαίνον», ή «μηδενικό σύμβολο», το οποίο υποστήριξε ότι λειτουργούσε ως μεσολαβητής μεταξύ του δικτύου των «σημαινόντων» και του τομέα των «σημαινομένων». Στο έργο αυτό, δίνει ένα ανθρωπολογικό επιχείρημα για την ύπαρξη του μηδενικού συμβόλου. Με την απόκτηση ενός βασικού συμβολικού δικτύου, ήταν σαν να είχε αποκτήσει ξαφνικά η ανθρωπότητα όχι μόνο έναν τεράστιο τομέα, αλλά και λεπτομερές σχέδιο αυτού του τομέα, μαζί με την ιδέα της αμοιβαίας σχέσης του τομέα και του σχεδίου.

Πέρασαν όμως χιλιετίες μέχρι να μάθει η ανθρωπότητα ποια συγκεκριμένα σύμβολα του σχεδίου αντιπροσώπευαν τις διάφορες πτυχές του τομέα[3]».

Τα σύγχρονα μαθηματικά δίνουν στο μηδέν μια ειδική και παράδοξη κατάσταση. Νοείται και ως ένας αριθμός και ως ένας δείκτης της απουσίας ενός αριθμού. Μαθηματικά, το μηδέν λειτουργεί ώστε να δημιουργηθεί το πλήρες σύνολο των αριθμών αλλά και το ίδιο ως αριθμός. Εξαιτίας αυτού, οι μαθηματικοί αναγκάστηκαν να ρωτήσουν, «Είναι [το μηδέν] το σύμβολο για το κενό ή το κενό σύμβολο; Η πρώτη ερώτηση κρατά το μηδέν αποξενωμένο, διαφορετικό από τους άλλους αριθμούς, απλώς είναι ένα μέρος του τοπίου μέσα στο οποίο κινούνται. Η δεύτερη ερώτηση βάζει το μηδέν στο ίδιο επίπεδο με τους αριθμούς». Φαίνεται ότι το μηδέν φέρει μαζί του τη σπουδαιότητα της εξαίρεσης. Παράγει το σύνολο των αριθμών, αλλά βρίσκεται επίσης έξω από αυτό. Αυτό είναι αρκετά παρόμοιο με το κεντρικό κέντρο της δομής που συζητάει ο Jacques Derrida στο διάσημο έργο του «Δομή, σημάδι και παιχνίδι στις ομιλίες των ανθρωπιστικών επιστημών» (Chandler, 2007).

Πιο συγκεκριμένα. Ας αναρωτηθούμε αν τα μαθηματικά κείμενα παράγουν έννοιες που διαφέρουν θεμελιωδώς από εκείνες της ομιλίας και της γραφής : ποια είναι η

3 http://cahiers.kingston.ac.uk/concepts/zero.html

σχέση, για παράδειγμα, των μαθηματικών αποδείξεων με τις γραπτές αφηγήσεις ή με τα επιχειρήματα και τους διάλογους της καθημερινής ομιλίας; Τι σημαίνει γλωσσολογικά «κάνει κάποιος μαθηματικά»; Με ποιο τρόπο συμβολικής απεικόνισης, φαντασίας και γραφής; οι μαθηματικοί ασχολούνται σκέφτονται ή γράφουν μαθηματικά σύμβολα; Το μηδέν πώς εξελίχθηκε ως σύμβολο, ως έννοια με περιεχόμενο;

Όπως είναι γνωστό, ούτε τα ελληνικά ούτε τα ρωμαϊκά μαθηματικά είχαν το μηδέν με τη μορφή που την έχουμε σήμερα, το μηδέν είναι μια ινδουιστική εφεύρεση που μεταφέρθηκε στην Ευρώπη μέσω της Αραβικής Μεσογείου. Η εισαγωγή του σήμαινε μια ασυνέχεια στη δυτική σκέψη σχετικά με την έννοια, τη χρήση, τη θεωρία, τη μεταφυσική και τη γραφή του αριθμού. Στα τέλη του 16ου αιώνα, περίπου τρεις αιώνες μετά την εισαγωγή του στη βόρεια Ιταλία, ο Ολλανδός μηχανικός και μαθηματικός Simon Stevin, συμμετείχε στο έργο επέκτασης της σημειογραφίας από τα πεπερασμένα στα άπειρα δεκαδικά ψηφία στην πραγματεία του «The Dime». Τότε εμφανίστηκε η αξία της δημιουργικής δύναμης του μηδενός «της αληθινής και φυσικής αρχής» των αριθμών όπως την ονόμασε. Δεδομένου ότι σημείο ήταν για τη γεωμετρική γραμμή το τίποτε "poinct de nombre" έπρεπε, το μηδέν, να πάρει μια άλλη ονομασία για την αριθμητική εξέλιξη. Τέθηκαν ερωτήματα όπως : « Τι θα πρέπει να κάνουμε για την αντίληψή του μηδενός ως μια φυσική αρχή και αναλογία;», «Τι είναι αυτό που θα μπορούσε να δώσει στο μηδέν, ως ένα σημείο, αυτή τη μοναδική γενετική ποιότητα;». Η προσέγγισή σε αυτά τα ερωτήματα έκανε να δοθεί ένας αρκετά αφηρημένος, γενικός χαρακτηρισμός στο μηδέν και στη συνέχεια να κατασκευαστεί ένα είδος μηδενικού σημείου σε σχέση με τα άλλα, παρόμοια σχεδιασμένα, μη μαθηματικά σημάδια. Ξεκινώντας από μια συνταγή συγκεκριμένου τύπου μετα-σημείου συγκεκριμένα ενός συμβόλου για την απουσία ορισμένων άλλων σημείων προσδιορίστηκε μια σειρά από σημειωτικές σχέσεις μεταξύ του μηδενός στον κώδικα της αριθμητικής, του σημείου εξαφάνισης στον κώδικα της προοπτικής της ζωγραφικής και του δήθεν υπάρχοντος φανταστικού χρήματος, δηλαδή του χρήματος των τραπεζών, όπως το ονόμασε ο Adam Smith, στον κώδικα οικονομικών συναλλαγών. Οι σχέσεις αυτές βασίστηκαν σε παραλληλισμούς μεταξύ των γενεσιουργών ρόλων που παίζουν τα μετα-σημεία στους αντίστοιχους κώδικες: το μηδέν δημιούργησε άπειρο αριθμό νέων αριθμητικών σημείων, το σημείο εξαφάνισης, παρέχοντας μια ατελείωτη προσφορά ενός νέου τύπου οπτικής εικόνας και φανταστικού χρήματος καθιστώντας έτσι δυνατή μια απεριόριστη γκάμα συναλλαγών μη διαθέσιμων προηγουμένως. Με βάση τους ισομορφισμούς που προκύπτουν ανάμεσα στους κώδικες της αριθμητικής, της ζωγραφικής και του χρήματος καθίσταται δυνατή η διατύπωση ορισμένων χαρακτηριστικών που μοιράζονται οι σημειωτικοί παράγοντες μεταξύ τους και που λειτουργούν μέσα στους κώδικες. Δηλαδή, στον τομέα της αριθμητικής παριστάνει αυτό που μετράει, ενώ στους άλλους εμπλεκόμενους τομείς αυτό που απεικονίζει και αυτό που συναλλάσσεται- επιτελεί αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, γίνεται πλέον δυνατή η κατανόηση της διπλής κατάστασης συγκεκριμένων αντικειμένων, δηλαδή των σημειωτικών υποκειμένων που χρησιμοποιούν αλλά και δημιουργούνται από τους δικούς τους αντίστοιχους κώδικες[4].

Η βεβαίωση της ύπαρξης δεν είναι παρά άρνηση του αριθμού μηδέν, το τίποτα ορίζεται ως κάτι που δεν είναι υπαρκτό, δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό από τις αισθήσεις μας. Το μηδέν ορίζεται ως ο αριθμός που «δεν ταυτίζεται με τον εαυτό του». Είναι ο αριθμός που αν αντικατασταθεί από τον εαυτό του σημαίνει … «τίποτα». Η έννοια του συμβόλου του μηδενός αποκτάται ως φυσική επέκταση της έννοιας της γλωσσολογίας επιτρέποντας να είναι «άδειο», δηλαδή να μην υπάρχει ένα από τα τρία συστατικά του, δηλαδή το σημαίνον.

Κατά τους Lakoff & Nunez, ο μαθηματικός συμβολισμός δεν αποτελεί ανάλυση μαθηματικών ιδεών, η μαθηματική σημειογραφία πρέπει να κατανοείται με αναφορά στις μαθηματικές ιδέες και απαιτείται μια ανάλυση μαθηματικών ιδεών προκειμένου να προσδιοριστούν επακριβώς οι ιδέες που βρίσκονται σιωπηρά στη μαθηματικής σημειογραφία (Lakoff, G., Nunez, 2000).

Συνοψίζοντας, ο ρόλος των συμβόλων στις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών χρήζει ειδικής μελέτης. Είναι δυνατό για ένα μαθητή να επιτύχει στα μαθηματικά μαθαίνοντας απλώς να χειρίζεται τα μαθηματικά σύμβολα, χωρίς να τα κατανοεί. Ωστόσο, προτεραιότητα για το παιδί αποτελεί η κατανόηση του νοήματος των ιδεών, παράλληλα ή ταυτόχρονα με την ικανότητα χειρισμού των συμβολικών τους αναπαραστάσεων. Παρόλα αυτά, στο σημερινό σχολείο συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Τα παιδιά συχνά μαθαίνουν πώς να χειρίζονται «ετικέτες» χωρίς περιεχόμενο. Αυτό επιτυγχάνεται σύντομα και με ευκολία, αλλά είναι ιδιαίτερα προβληματικό σε μακροπρόθεσμη βάση (Σακονίδης, 1996).

---

[4] http://web.stanford.edu/class/history34q/readings/Rotman/Rotman_MathPersuasion.html

Σημείο, Σύμβολο και η Σχέση τους με το Αντικείμενο στα Μαθηματικά

Ο Chao (1968) εισάγει την ιδέα του «συμβόλου ενός συμβόλου» σύμφωνα με την οποία ένα σύμβολο μπορεί να συμβολίζει ένα άλλο. Για παράδειγμα, η γλώσσα είναι το σύμβολο των πραγμάτων, ενώ ο γραπτός λόγος είναι το σύμβολο της γλώσσας. Ο Chao κάνει δύο σημαντικές παρατηρήσεις για τα μαθηματικά : στην τυπική λογική και στα μαθηματικά είναι συχνά απαραίτητος ο επάλληλος συμβολισμός, για παράδειγμα, η καθημερινή γλώσσα σε ένα μετα-επίπεδο (μετα-γλώσσα) χρησιμοποιείται για να «μιλήσουμε» για τα μαθηματικά σύμβολα. Τα μαθηματικά, ως ο κατεξοχήν χώρος των σημείων και των συμβόλων, αποτέλεσαν πεδίο μελέτης πολλών θεωρητικών του είδους. Η Langer (1955) υποστηρίζει ότι «.. η μυστική δύναμη των μαθηματικών .. βρίσκεται .. στο γεγονός ότι ένας μαθηματικός δεν ισχυρίζεται ότι λέει κάτι για την ύπαρξη, την πραγματικότητα ή την αποτελεσματικότητα των πραγμάτων. Φροντίδα του είναι η δυνατότητα συμβολισμού των πραγμάτων και των πιθανών σχέσεων τους. Οι «οντότητές» του δεν είναι «δεδομένα» αλλά «έννοιες». Και ο Peirce, το 1964, υπογραμμίζει την εννοιολογική φύση των μαθηματικών θεωρώντας ότι όλα τα αντικείμενα του μαθηματικού συλλογισμού είναι υποθετικά. Ισχυρίζεται, ωστόσο, ότι τα αρχικά αντικείμενα του συλλογισμού είναι διαγραμματικά και οι διαδικασίες που εμπλέκονται σε αυτόν καθοδηγούνται από τους χειρισμούς αυτής της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Κατά συνέπεια η φύση των μαθηματικών, κατά τον Peirce, είναι τόσο αντιληπτική όσο και εννοιολογική (Σακονίδης, 1996). Οι Chaffe-Stengel και Noddings συμφωνούν με το γεγονός ότι οι συμβολικές σχέσεις είναι, κατά κάποιο τρόπο, αμετάβλητες, θεωρούν, ωστόσο, ότι οι διαδικασίες συμβολισμού δε διαφέρουν πολύ από αυτές της σημείωσης. Συγκεκριμένα υποστηρίζουν ότι η διαδικασία συμβολισμού είναι ριζωμένη και απορρέει από τη διαδικασία σημείωσης:

• ο πυρήνας της διαδικασίας συμβολισμού εντοπίζεται σε μια αμετάβλητη, ένα προς ένα συσχέτιση του σημείου με το αντικείμενο, η οποία διατηρείται κατά τη διάρκεια επαναλαμβανόμενων διαδικασιών συμβολισμού,

• η συμβολική κατανόηση στηρίζεται σε διαδικασίες σημείωσης,

• η συμβολική κατανόηση αυξάνεται με επαναλαμβανόμενες επεκτάσεις της βασικής τριαδικής σχέσης που συνδέει σημείο, αντικείμενο και σημασία,

• διαδοχικές επαναλήψεις πάνω στην αρχική διαδικασία σημείωσης ενοποιούν το νέο σύμβολο σε κάποια υπάρχουσα συμβολική κατανόηση, θέτοντας το νέο σύμβολο σε αντίθεση και σύγκριση με υπάρχοντα σύμβολα και

• διαδοχικές επαναλήψεις πάνω στην αρχική διαδικασία σημείωσης επιφέρουν μικρές διαφοροποιήσεις στο αρχικό νόημα που επιτεύχθηκε στο επίπεδο της σημείωσης (Σακονίδης, 1996).

Η Sesay (1982) αναφέρεται στο θέμα της σχέσης μεταξύ συμβόλων και μαθηματικών ιδεών/ αντικειμένων στα πλαίσια της σχολικής πρακτικής και υποστηρίζει ότι για να μπορεί ένα παιδί να αντιμετωπίσει μια συμβολική πρόταση, θα πρέπει να είναι σε θέση: (1) να χειριστεί τα σύμβολα, (2) να συνειδητοποιήσει τη μεταξύ τους σχέση και (3) να μεταφέρει αυτές τις δραστηριότητες στο επίπεδο των μαθηματικών ιδεών τις οποίες αναπαριστούν τα σύμβολα. Στην τελευταία διαδικασία, το παιδί πρέπει να αντιστοιχίσει τα σύμβολα με αυτές τις ιδέες, με τον κίνδυνο ανεξαρτητοποίησης των συμβόλων από τα αντικείμενα, αυτό που η Sesay αποκαλεί έλλειψη «εξωτερικής σταθερότητας» (αναφέρεται στη σταθερότητα μεταξύ των μαθηματικών ιδεών και του συστήματος των συμβόλων) (Σακονίδης, 1996).

Η πληθώρα σημείων και κυρίως συμβόλων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά αποδίδει κεντρικό ρόλο στην ικανότητα χειρισμού τους ως προς την κατανόηση του αντικειμένου. Ο επιτυχής χειρισμός ενός μαθηματικού συμβόλου προϋποθέτει τη σύνδεση από το χρήστη του συμβόλου με κάποιο νόημα μέσα από τη διαδικασία συμβολισμού και σε τέτοιο βαθμό γενίκευσης, ώστε το σύμβολο δεν είναι απλώς ένα σημαίνον ενός αντικειμένου αλλά μετατρέπεται το ίδιο σε αντικείμενο για χειρισμό. (Σακονίδης, 1996). Η δυνατότητα να γίνονται αντιληπτά τα μαθηματικά με αυτόν τον διπλό τρόπο (ως δράση και ως αντικείμενο) μεταφέρει το σύμπαν των αφηρημένων ιδεών στην εικόνα του υλικού κόσμου: όπως στην πραγματική ζωή, οι ενέργειες που εκτελούνται εδώ έχουν τις «πρώτες ύλες» τους και τα προϊόντα τους με τη μορφή οντοτήτων που αντιμετωπίζονται ως γνήσια, μόνιμα αντικείμενα. Σε αντίθεση με την πραγματική ζωή, ωστόσο, μια πιο προσεκτική ματιά σε αυτές τις οντότητες θα αποκαλύψει ότι δεν μπορούν να διαχωριστούν από τις ίδιες τις διαδικασίες ως αυτοσυντηρούμενα όντα. Τέτοια αφηρημένα αντικείμενα όπως η τετραγωνική ρίζα του -1, το -2, ή η συνάρτηση $3(x+5)+1$ είναι τα αποτελέσματα ενός διαφορετικού τρόπου διερεύνησης των διαδικασιών εξαγωγής της τετραγωνικής ρίζας του -1, της αφαίρεσης του 2, και της συνάρτησης των πραγματικών αριθμών με γραμμικό μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Έτσι, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ένα αποτέλεσμα της πραγματοποίησης της ικανότητας των ματιών μας του μυαλού μας να οραματίζεται το αποτέλεσμα των διαδικασιών ως νέες μόνιμες οντότητες που έχουν τις δικές τους ιδιότητες (Slavit, 1999).

Για πολλά χρόνια, ο χειρισμός των μαθηματικών συμβόλων κατείχε κεντρική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια, ωστόσο, η έρευνα έστρεψε την προσοχή των εκπαιδευτικών στη σημασία που έχει για τη μάθηση των μαθηματικών η κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων, στα οποία αναφέρονται τα σύμβολα. Ωστόσο, ακόμη και σήμερα, τα μαθηματικά σύμβολα έχουν λίγο ή καθόλου νόημα για πολλούς μαθητές. Εντοπίζοντας αυτό το πρόβλημα, ο Arcavi (1994) υποστηρίζει ότι η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να καλλιεργήσει αυτό που αποκαλεί «αντίληψη συμβόλου» (symbol sense), δηλαδή «μια σύνθετη και πολύπλευρη ‘αίσθηση’ για τα σύμβολα ...μια γρήγορη ή ακριβή αναγνώριση, κατανόηση ή αντίληψη των συμβόλων». Ο Arcavi δεν επιχειρεί να διατυπώσει έναν ακριβή ορισμό του όρου αλλά προσπαθεί να περιγράψει συμπεριφορές οι οποίες αποτελούν παραδείγματα της «αντίληψη συμβόλου» όπως:

• κατανόηση της δύναμης των συμβόλων, δηλαδή πότε και πού μπορούν να χρησιμοποιηθούν,

• συναίσθηση της λειτουργικότητας των συμβόλων έναντι άλλων προσεγγίσεων,

• ικανότητα χειρισμού αλλά και «ανάγνωσης» των συμβόλων ως δύο συμπληρωματικών πλευρών της λύσης προβλημάτων,

• ικανότητα επιλογής ενός μαθηματικού συμβολισμού αλλά και απόρριψής του προς όφελος της επίλυσης του προβλήματος

• συνειδητοποίηση της ανάγκης ελέγχου της σημασίας/νοήματος του συμβόλου κατά την επίλυση του προβλήματος,

• αντίληψη του διαφορετικού ρόλου που μπορούν να διαδραματίσουν τα σύμβολα σε διαφορετικά πλαίσια.

Κατά τον Arcavi, η «αντίληψη συμβόλου» αποτελεί συστατικό της ευρύτερης διαδικασίας απόδοσης νοήματος στα μαθηματικά, και συνιστά το βασικότερο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, γι’ αυτό θα πρέπει να γίνει αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών εργαλείων τόσο του μαθητή όσο και του εκπαιδευτικού, έτοιμο να ενεργοποιηθεί όταν χρειαστεί. Σε διδακτικό επίπεδο, αυτό σημαίνει τη συγκρότηση μαθηματικών δραστηριοτήτων οι οποίες, μέσα από κατάλληλες προσεγγίσεις παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες διαμόρφωσης της «αντίληψης συμβόλου» (Σακονίδης, 1996).

Η εμφάνιση της έννοιας του μηδενός έχει μακρά εξέλιξη. Μπορεί να ξεκίνησε ως ένδειξη μιας κενής στήλης σε άβακα στην αρχαία Κίνα. Αρκετά αργότερα χρησιμοποιήθηκε ένα σύμβολο για τον κενό χώρο και από τότε έχει γίνει ένα ολοκληρωμένο και αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών. Η χρήση των συμβόλων αντικατοπτρίζει καλύτερα τα σύγχρονα πρότυπα των μαθηματικών από τη χρήση των γλωσσών που εξελίσσονται αρκετά αργά (Harremoës, 2011).

2.2.2. Θεωρίες για τα Μαθηματικά

Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Η εκμάθηση της αριθμητικής, έχει υποστηριχθεί πρόσφατα, δεν χρειάζεται να αποτελεί προϋπόθεση για την εκμάθηση της άλγεβρας. Σε αυτή την άποψη, προβάλλεται ο ισχυρισμός ότι οι μικροί μαθητές μπορούν να εισαχθούν σε κάποιες στοιχειώδεις αλγεβρικές έννοιες στα σχολεία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, παρά την αυξανόμενη ποσότητα των πειραματικών αποδείξεων, η ιδέα της εισαγωγής της άλγεβρας στα πρώτα χρόνια παραμένει θολή από την έλλειψη σαφών διακρίσεων μεταξύ του τι είναι αριθμητική και τι είναι άλγεβρα. Ο στόχος στην παρούσα εργασία είναι διττός. Κατ' αρχάς, σε ένα πρώτο επιστημολογικό επίπεδο, θα γίνει προσπάθεια να γίνει αντιληπτή η σχέση που αναπτύσσεται στο νου των μαθητών μεταξύ αριθμητικού και αλγεβρικού τρόπου σκέψης. Δεύτερο, σε αναπτυξιακό επίπεδο, να διερευνηθούν μερικές στοιχειώδεις αλγεβρικές έννοιες και ερωτήσεις σχετικά με τα όρια και τις δυνατότητες της εισαγωγής της άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο. Πολλοί ερευνητές, σε γενικές γραμμές, συμφωνούν ότι η αριθμητική είναι ένα σύστημα που είναι διαδικαστικό και συγκεκριμένο όπου οι μετασχηματισμοί λαμβάνουν χώρα με ή σε συγκεκριμένους αριθμούς και που προκύπτουν αριθμητικές απαντήσεις, ενώ η άλγεβρα είναι πιο διαρθρωτική και αφηρημένη και εκεί όπου οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται με ή για αλγεβρικές εκφράσεις και όχι με ή σε συγκεκριμένους αριθμούς.

Υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στις συμβάσεις που ισχύουν στο αριθμητικό και στο αλγεβρικό σύστημα και που συχνά αναφέρεται ως «γνωστικό χάσμα» ("cognitive gap") (Linchevski & Herscovics, 1996), «σημείο διακοπής» ("cut point,") ή «διδακτικό κόψιμο» ("didactic cut") (Filloy & Rojano, 1989) και που μπορεί να ευθύνεται για μια σειρά από λάθη και δυσκολίες των μαθητών κατά την εκμάθηση της άλγεβρας, όπως τα λάθη «έλλειψης προσέγγισης», τα οποία αναφέρονται σε μαθητές με απροθυμία να αποδεχθούν αλγεβρικές εκφράσεις που περιέχουν σύμβολα, ως τελικές απαντήσεις. Παρά τις διαφορές μεταξύ τους, ας σημειωθεί ότι υπάρχουν διάφορες δυνατότητες για να χρησιμοποιηθούν οι γνώσεις της αριθμητικής για τη διευκόλυνση της μάθησης της άλγεβρας από τους μαθητές (Christou & Vosniadou, 2012). Ο αλγεβρικός συλλογισμός βασίζεται στην ικανότητά μας να παρατηρούμε σχέδια και να γενικεύουμε από αυτά. Η Άλγεβρα είναι η γλώσσα που μας επιτρέπει να εκφράσουμε αυτές τις γενικεύσεις με μαθηματικό τρόπο. Η γενίκευση είναι ο «κτύπος» της καρδιάς των μαθηματικών και εμφανίζεται σε πολλές μορφές. Αν οι δάσκαλοι αγνοούν την παρουσία της, και δεν διδάσκουν τους μαθητές να εργάζονται και να εκφράζονται με δικές τους γενικεύσεις, τότε μαθηματική σκέψη δεν αναπτύσσεται (Mason, 1996).

Όταν πρόκειται να εξηγήσουν γιατί είναι τόσο δύσκολο στους μαθητές να κατανοήσουν τα σύμβολα, ως γενικευμένους αριθμούς, ορισμένοι ερευνητές αναφέρονται στην δυαδικότητα των μαθηματικών ιδεών (Sfard, 1991). Η Sfard υποστήριξε ότι οι μαθηματικές ιδέες μπορεί να θεωρηθούν τόσο ως διαδικασία αλλά και ως προϊόν αυτής της διαδικασίας, ένα προϊόν που μπορεί να σταθεί μόνο του ως αυτοτελής οντότητα. Άλλοι ερευνητές έχουν προτείνει παρόμοια μοντέλα, όπως η διαδικασία / έννοια της δυαδικότητας (Gray & Tall, 1994), η διαδικασία / δομή της διάκρισης (Kieran, 1992), και η θεωρία APOS, η οποία είναι ένα αρκτικόλεξο της ακολουθίας: δράση, διαδικασία, αντικείμενο και σχήμα (Action, Process, Object, and Schema) (Dubinsky, 1991). Χρησιμοποιώντας αυτή τη διάκριση, οι αλγεβρικές εκφράσεις μπορεί να νοηθούν τόσο ως η διαδικασία των υπολογισμών, αλλά και ως η αλγεβρική οντότητα με τις δικές της ιδιότητες. Οι μαθητές αρχικά κατανοούν τις μαθηματικές ιδέες διαδικαστικά. Όταν αναπτυχθεί μια πιο εξελιγμένη κατανόηση, οι μαθητές, αντιλαμβάνονται τη δομική πλευρά των μαθηματικών και μπορούν μετά να μετακινούνται από τη διαδικαστική στην εννοιολογική γνώση. Σύμφωνα με τη Sfard, αυτό χαρακτηρίζεται πραγμοποίηση (reification). Οι δυσκολίες των μαθητών για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού απαιτούν από μέρους τους οντολογική αλλαγή. Αυτή η οντολογική μετατόπιση περιπλέκει την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι υπάρχει μια «προκατάληψη για τους φυσικούς αριθμούς» που επηρεάζει τους μαθητές κατά τη μετάβαση από τους αριθμούς στα σύμβολα, ακόμη και όταν η έννοια του αφηρημένου αριθμού έχει γίνει κατανοητή. Οι γνώσεις των μαθητών για τους αριθμούς βασίζονται στις αρχικές τους εμπειρίες με τους αριθμούς καταμέτρησης. Μια τέτοια αντίληψη για την έννοια του αριθμού είναι ήδη εμφανής στην προσχολική ηλικία και περαιτέρω επιβεβαιώνεται και ενισχύεται κατά τα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου, όπου οι μαθητές μαθαίνουν συστηματικά το συμβολισμό και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., Σκοπελίτη, 2008). Η γνώση αυτή επίσης, ενισχύεται από τη συνεχή χρήση των φυσικών αριθμών σε όλο το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Αν και υπάρχουν θετικοί τρόποι για να αξιοποιηθούν οι γνώσεις των μαθητών στους φυσικούς αριθμούς για την εισαγωγή τους σε μη φυσικούς αριθμούς, αυτοί δεν λαμβάνονται συνήθως υπόψη στην εκπαίδευση. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι οι μαθητές έχουν επίμονες δυσκολίες και παρανοήσεις, που προκαλούνται από την παρεμβολή των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σχετικά με την ερμηνεία τους, στους ρητούς αριθμούς και αργότερα στους πραγματικούς. Το μηδέν είναι ο πρώτος αριθμός που εισάγεται στους μικρούς μαθητές, ο οποίος ενώ έχει ιδιότητες διαφορετικές και μοναδικές από τους φυσικούς αριθμούς δημιουργεί δυσκολίες και παρανοήσεις εξαιτίας της παρεμβολής των εγκατεστημένων ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Αυτή η παρεμβολή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως «προκατάληψη του ακέραιου αριθμού». Η Βοσνιάδου και οι συνεργάτες της (2003 και 2008) έχουν υποστηρίξει ότι η αρχική κατανόηση της έννοιας του αριθμού, κατασκευάστηκε γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού. Ο όρος αυτός ονομάζεται «θεωρία πλαισίου» (“framework theory”) και οδηγεί στην ανάπτυξη πιο προηγμένων μαθηματικών ιδεών. Ο όρος «θεωρία πλαισίου» χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει μια γραμμική δομή, η οποία είναι, ωστόσο, παραγωγική, με την έννοια ότι μπορεί να δημιουργήσει εξηγήσεις και προβλέψεις, και όχι ρητή, καλοσχηματισμένη, και επιστημονική θεωρία. Είναι πιθανό ότι πολλά στοιχεία από την αρχική «θεωρία πλαισίου» της έννοιας του αριθμού, βασίζονται στις εμπειρίες των παιδιών, μια υπόθεση που συνάδει με την προσέγγιση «γνώση-σε-κομμάτια» κατά την οποία το φυσικό σύστημα γνώσεων στους αρχάριους αποτελείται από μια αδόμητη συλλογή πολλών, σχετικά απομονωμένων, αυτονόητων στοιχείων γνωστά ως φαινομενολογικά πρωτόγονων που προέρχονται από επιφανειακές ερμηνείες της φυσικής πραγματικότητας. Η μάθηση απαιτεί τη συλλογή και συστηματοποίηση αυτών των κομματιών της γνώσης σε μεγαλύτερα συστήματα με πιο σύνθετες δομές γνώσης, όπως είναι οι νόμοι της φυσικής (Christou & Vosniadou, 2012).

Κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, γίνονται πολλές προσαρμογές, ακόμη και από εκείνους τους μαθητές που είναι αρκετά καλοί στην αριθμητική. Προς το παρόν, για παράδειγμα, στο δημοτικό σχολείο η αριθμητική είναι προσανατολισμένη σε μεγάλο βαθμό σε απαντήσεις και δεν επικεντρώνεται στις αναπαραστάσεις σχέσεων. Ένα μεγάλο μέρος του προγράμματος σπουδών, στο δημοτικό και στο γυμνάσιο, ασχολείται με τους αριθμούς και οδηγεί, φυσικά, στην άλγεβρα. Το εάν και το πώς θα διδαχθεί η άλγεβρα σε όλα τα παιδιά είναι κεντρικό θέμα συζητήσεων σε πολλά σχολεία. Η έμφαση τόσο στην εννοιολογική κατανόηση όσο και στην προσαρμοστική αιτιολόγηση βοηθάει τους μαθητές διότι αυτά βρίσκονται στο επίκεντρο πρόσφατων ερευνών αλλά και επειδή η παραδοσιακή διδασκαλία τείνει να τονίσει την ανάπτυξη της διαδικαστικής ευχέρειας. Η άλγεβρα βασίζεται στην ικανότητα που αναπτύσσουν οι μαθητές στην αριθμητική και την οποία αναπτύσσουν περαιτέρω με αλγεβρικές δραστηριότητες για την αναπαράσταση, τον μετασχηματισμό, τη γενίκευση και την δικαιολόγηση. Συγκεκριμένα, η θεσιακή αξία των ψηφίων, οι έννοιες της ισότητας και της ισοδυναμίας, η χρήση γραμμάτων ως μεταβλητών ή ως αγνώστων που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική ενσωματώνει εμμέσως ορισμένες από τις βασικές έννοιες της άλγεβρας και οι αλγόριθμοι της αριθμητικής εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τους «νόμους της άλγεβρας». Παρόλα αυτά, για πολλούς μαθητές, η μάθηση της άλγεβρας είναι μια εντελώς διαφορετική εμπειρία από την αριθμητική μάθηση, και βρίσκουν δύσκολη τη μετάβαση.[5] Για να γίνουν κατανοητές πληρέστερα οι σχέσεις των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου με την άλγεβρα, είναι χρήσιμο να διακριθούν δύο πτυχές της άλγεβρας που περιέχουν όλους τους άλλους: (α) η άλγεβρα ως συστηματικός τρόπος έκφρασης της γενικότητας και της αφαίρεσης, συμπεριλαμβανομένης της ιδέας της άλγεβρας ως γενικευμένης αριθμητικής και (β) η άλγεβρα ως συντακτικά καθοδηγούμενος μετασχηματισμός συμβόλων. Αυτές οι δύο κύριες πτυχές έχουν οδηγήσει στην ανάγκη εισαγωγής δραστηριοτήτων στη σχολική άλγεβρα, όπως δραστηριότητες αναπαράστασης, μετασχηματιστικές (βασισμένες σε κανόνες) δραστηριότητες και δραστηριότητες που περιλαμβάνουν γενικεύσεις και δικαιολογήσεις προκειμένου να αποκτηθούν εμπειρίες σκέψης και στοχασμού και να επιτευχθεί η μετάβαση στην άλγεβρα (Kieran, 1996).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να εισαγάγει κάποιος την άλγεβρα, αλλά η πιο κοινή, για πολλούς ερευνητές πρακτική είναι να εισαγάγει την άλγεβρα αφού οι μαθητές έχουν διδαχθεί αριθμητική. Τα τελευταία χρόνια, μια νέα θεωρία αναπτύσσεται προς

---

[5] https://www.nap.edu/read/9822/chapter/10#294.

αυτήν την κατεύθυνση. Πρόκειται για ένα τμήμα της ερευνητικής βιβλιογραφίας που ασχολείται με την αναγνώριση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση της άλγεβρας, και τη σύνδεσή της με την αριθμητική. Πειραματικές διδασκαλίες έχουν θέσει ως στόχο να αποκτήσουν οι μαθητές καλύτερη κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων και των λειτουργιών τους, ερμηνεύοντας έτσι τη σύνδεση αριθμητικής άλγεβρας. Με βάση αυτή την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, για μια καλύτερη και ευρύτερη κατανόηση της σύνδεσης αριθμητικής-άλγεβρας, θα αναφερθούν τα είδη των αριθμητικών πράξεων που είναι απαραίτητες για να είναι σε θέση οι μαθητές να κάνουν τη μετάβαση στην άλγεβρα (Banerjee, 2011). Οι Kaput και Blanton (2001) συζητούν μερικούς από τους τρόπους «αλγεβρικοποίησης» (algebrafying) του στοιχειώδους προγράμματος σπουδών και παρουσιάζουν παραδείγματα των πρακτικών στην τάξη που πραγματοποιούνται με αυτό τον στόχο. Προτείνουν διάφορες ομάδες δραστηριοτήτων, όπως η γενίκευση των αριθμητικών πράξεων, των ιδιοτήτων τους και του σκεπτικού σχετικά με τις γενικότερες σχέσεις και τις μορφές τους. Οι προτάσεις αυτές μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν επίσης συζήτηση για τις ιδιότητες του μηδενός (τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις διαφορετικές πράξεις με το μηδέν), την αντιμεταθετικότητα, την επιμεριστικότητα, τις αντίστροφες σχέσεις όπως την πρόσθεση και την αφαίρεση του ίδιου αριθμού ή τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με τον ίδιο αριθμό κλπ. Κάποιος θα μπορούσε επίσης να παρουσιάσει γενικεύσεις για κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες αριθμών και σχέσεις, όπως ότι το άθροισμα δυο αντίθετων αριθμών είναι 0, το άθροισμα των δύο μονών αριθμών είναι άρτιος ή ακόμα και εξεύρεση κανονικοτήτων στον πίνακα της προπαίδειας (θεωρώντας ένα τετράγωνο, 3×3, βρίσκοντας τα διαφορετικά μοτίβα που υπάρχουν και δείχνοντας τη γενικότητα τους). Σε παραδείγματα από την Τρίτη τάξη ενός δημοτικού σχολείου, οι Kaput και Blanton (2001) δείχνουν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν ιδέες σχετικά με γενικεύσεις, όπως ότι το άθροισμα των δύο περιττών αριθμών είναι πάντα άρτιος, μετρώντας συστηματικά τον αριθμό των χειραψιών σε μια γιορτή, όταν είναι δεδομένος ο αριθμός των προσκεκλημένων. Με τη διδασκαλία που εφάρμοσαν αναπτύχθηκε η κατανόηση των συμβόλων από τους μαθητές και κατόπιν εισήγαγαν γράμματα σταδιακά σε ανοικτές προτάσεις αριθμών ή στις γενικές ιδιότητες των αριθμών. Αξιοποίησαν τις ικανότητες που έχουν οι μαθητές στο να υποθέτουν και στο να υποστηρίζουν την αλήθεια ή την ψευδαίσθηση της γενίκευσης (Banerjee, 2011).

Οι γνώσεις σχετικά με τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, με τη συμβολή του μηδενός είναι σημαντικές για τους εκπαιδευτικούς που θέλουν να προετοιμάσουν τους μαθητές για τη μετάβαση στην αλγεβρική σκέψη και, όπως ειπώθηκε, η μετάβαση αυτή έχει μελετηθεί εκτενώς (Kilhamn, 2011). Τα αποτελέσματα ερευνών, όπως έχει ήδη αναφερθεί αναδεικνύουν την ύπαρξη του γνωστικού χάσματος μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας, γνωστικό κενό που μπορεί να χαρακτηριστεί ως αδυναμία των μαθητών να λειτουργήσουν αυθόρμητα με ή σχετικά με το άγνωστο. Το μηδέν (0) εμφανίζεται στην αριθμητική σαν σύμβολο και σαν αριθμός αλλά οι μαθητές δεν υποψιάζονται τις ιδιότητές του και το ρόλο που θα διαδραματίσει στις πράξεις της αριθμητικής και αργότερα της άλγεβρας. Είναι από τις δυσκολότερες έννοιες των μαθηματικών, είναι μια έννοια σταθμός που εγκλείει δυσκολίες καθώς εκφράζει το κενό, το τίποτα. Για μερικά παιδιά, δηλαδή το μηδέν δεν είναι ένας αριθμός (Herscovics & Linchevski, 1994). Μια ιδέα που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη χρήση μεταβλητών, με τη βοήθεια του μηδενός, είναι να τους ρωτήσουμε «Μπορείτε να σκεφτείτε μια σχέση ανάμεσα σε αριθμούς που να είναι αληθής και να μην έχει σημασία τι αριθμούς θα επιλέξουμε;» Εξερευνώντας αλγεβρικές σχέσεις ενθαρρύνουμε τους μαθητές σε υψηλότερης τάξη σκέψη. Αυτό που βοηθά τους μαθητές και θεωρείται μία από τις πιο σημαντικές πτυχές της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης είναι το να προκαλούνται να κάνουν εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες των αριθμών και τις λειτουργίες των πράξεων. Είναι σημαντικό να καταγράφονται οι εικασίες των μαθητών και κατόπιν να γίνεται βελτίωση των εικασιών τους που μπορεί να είναι στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης και μπορεί να είναι εσφαλμένες ή ανακριβείς. Για παράδειγμα, μια κατηγορία ασκήσεων με παραδείγματα όπως 12 - 12 = 0 και 45 - 45 = 0 αρχικά, φέρνει την ιδέα ότι «αν ο πρώτος αριθμός είναι ο ίδιος με τον δεύτερο αριθμό, η απάντηση θα είναι πάντα μηδέν». Αυτό τότε αποκτά μια πιο τυπική μορφή : «αν αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό από τον ίδιο αριθμό, θα πάρουμε το μηδέν» και εισάγει την έννοια της μεταβλητής (Ministry of Education, 2010). Ο Kaput (1995), θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι ιεραρχικά, δηλαδή η παλιά γνώση χτίζει τις νέες γνώσεις και σε κάθε περίπτωση οι προηγούμενες γνώσεις παρέχουν τόσο τα θεμέλια όσο και τους σκοπέλους για τις επόμενες γνώσεις. Αναφέρει τρεις κατηγορίες δεξιοτήτων ή ικανοτήτων που θα πρέπει ενεργοποιήσουν οι μαθητές καθώς μετακινούνται από την επάρκεια που έχουν στην αριθμητική, δηλαδή την επάρκεια στον χειρισμό των αριθμών και στους υπολογισμούς στην επάρκεια που πρέπει να αποκτηθεί στην άλγεβρα. Κατά τον Kaput οι μαθητές πρέπει :

* να είναι σε θέση να μιλάνε για αριθμούς και μεγέθη, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίζουν τίποτα.

* να είναι σε θέση να περιγράψουν τους υπολογισμούς που κάνουν ή που θα πουν σε κάποιον να κάνει. Η περιγραφή δίνει μια συνταγή που μπορούν να περιγράψουν με λόγια, με συντομογραφίες-συντομεύσεις ή με έναν τύπο. Τέλος,

* να μπορούν να αλλάζουν τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται αριθμοί ή μεγέθη.

Η Άλγεβρα είναι ένα αφηρημένο σύστημα το οποίο όμως αντανακλά τη δομή της αριθμητικής. Οι διεργασίες της είναι αφηρημένα σχήματα ή δομικές αντιλήψεις των αριθμητικών πράξεων, της ισότητας, και των κανόνων των πράξεων-διαδικασιών, σε συνδυασμό με την αλγεβρική έννοια της μεταβλητής. Η αριθμητική, από την άλλη πλευρά, δεν λειτουργεί στο ίδιο επίπεδο αφαίρεσης όπως η άλγεβρα. Παρόλο που και οι δύο αφορούν στα γραπτά σύμβολα και στην κατανόηση των λειτουργιών η αριθμητική και η άλγεβρα διαφέρουν ουσιαστικά στο γεγονός ότι στην αριθμητική οι υπολογιστικές διαδικασίες διαχωρίζονται από το αντικείμενο που προκύπτει (Herscovics & Linchevski, 1994). Δηλαδή, οι μαθητές στην αριθμητική δεν αναμένεται να καταλάβουν τις ομάδες των αριθμών και των συμβόλων ως αντικείμενα, που, όμως στην άλγεβρα αυτό είναι απαραίτητο (Norton & Cooper, 2003). Μια ακόμη θεμελιώδης απαίτηση της άλγεβρας είναι η κατανόηση ότι το σύμβολο της ισότητας δείχνει ισοδυναμία και ότι τα δεδομένα μπορούν να υποβάλλονται σε επεξεργασία από οποιαδήποτε κατεύθυνση. Πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η ισότητα είναι ένδειξη δράσης (π.χ., σημαίνει : πόσο μας κάνει ή πόσο μας δίνει, ή συντακτικά δείχνει το μέρος όπου η απάντηση πρέπει να γραφτεί). Οι παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της ισότητας, καθιστούν πολύ δύσκολο για τους μαθητές να μετατρέψουν και να λύσουν εξισώσεις. Η κατανόηση των αριθμητικών λειτουργικών νόμων (αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική) και οι συμβάσεις που ισχύουν στις πράξεις είναι επίσης σημαντικά στην άλγεβρα. Για παράδειγμα, η Kieran (1992) αναφέρει ότι μερικοί μαθητές διαβάζουν τις αλγεβρικές εκφράσεις από αριστερά προς τα δεξιά και αγνοούν τις παρενθέσεις : μια συμπεριφορά που δείχνει αδυναμία να εφαρμόσουν την προτεραιότητα των πράξεων στη σωστή σειρά. Η ολοκλήρωση, λοιπόν, του έργου της άλγεβρας απαιτεί κατανόηση της έννοιας της ισότητας, της προτεραιότητας των πράξεων, της εφαρμογής των κανόνων και της διαχείρισης των αριθμών.

Η άλγεβρα, εξάλλου, αναγνωρίζεται ως πύλη για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, ευκαιρία για την επιτυχή συμμετοχή σε μια δημοκρατική κοινωνία και την πρόσβαση στη τεχνολογία με γνώμονα τον κόσμο. Απαιτεί αφηρημένη μαθηματική σκέψη, αλλά είναι δύσκολο για τους μαθητές να επιτύχουν την πρόσβαση και την επιτυχία στη μελέτη της τυπικής μορφής της άλγεβρας (Dudley, 1997). Η δεξιότητα που χρειάζονται οι μαθητές για να επιτύχουν ευχέρεια στο να χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία σκέψης και άτυπες αλγεβρικές ιδέες είναι το κλειδί ώστε να αποκτήσουν πλεονέκτημα για περαιτέρω εκπαίδευση και καλύτερη σταδιοδρομία. Μαθητές, γονείς και εκπαιδευτικοί είναι καλό να κατανοήσουν ότι η σημασία μιας σταθερής βάσης στα μαθηματικά επιτυγχάνεται με μια επιτυχή μετάβαση από την αριθμητική στα πιο προηγμένα μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων της άλγεβρας, της γεωμετρίας, του λογισμού. Αυτό το αλγεβρικό πλαίσιο σκέψης που δημιουργείται στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου και αναπτύσσεται στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου διευκολύνει τη μετάβαση από την αριθμητική σε προηγμένα θέματα σκέψης και λειτουργίας. Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να δημιουργούν και επιλύουν εξισώσεις, να αναγνωρίζουν και να χαρακτηρίζουν πρότυπα, να εκτιμούν ρυθμούς μεταβολής μεταβλητών και τελικά να χρησιμοποιούν θεμελιώδεις αλγεβρικές έννοιες (Riley, 1997). Η αλγεβρική σκέψη, σύμφωνα με τον Kriegler, οργανώνεται από δύο βασικά στοιχεία: την ανάπτυξη μαθηματικών εργαλείων σκέψης και τη μελέτη θεμελιωδών αλγεβρικών ιδεών. Τα εργαλεία μαθηματικής σκέψης είναι οι αναλυτικές συνήθειες του νου μας που οργανώνονται γύρω από τρία θέματα: δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, δεξιότητες αναπαράστασης και ικανότητες ποσοτικής συλλογιστικής. Οι θεμελιώδεις αλγεβρικές ιδέες σηματοδοτούν και αντιπροσωπεύουν τον τομέα περιεχομένου (content domain) στον οποίο αναπτύσσονται τα μαθηματικά εργαλεία σκέψης. Η διερεύνηση γίνεται μέσω τριών φακών: της άλγεβρας ως γενικευμένης αριθμητικής, της άλγεβρας ως γλώσσας και τέλος της άλγεβρας ως εργαλείο για συναρτήσεις και μαθηματική μοντελοποίηση. Αυτό το αλγεβρικό πλαίσιο σκέψης, που βασίζεται στην έρευνα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετάσουμε με κριτικό πνεύμα τους στόχους, τα υλικά, και τις στρατηγικές διδασκαλίας που προάγουν την ανάπτυξη των μαθηματικών εργαλείων σκέψης και των θεμελιωδών αλγεβρικών ιδεών, και να λειτουργούν ως υπενθύμιση των σημαντικών στοιχείων για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Kriegler, 2007) Οι μαθητές, ήδη από την προσχολική ηλικία οργανώνουν μια αρχική κατανόηση του αριθμού γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού**.** Μια τέτοια κατανόηση του αριθμού επιβεβαιώνεται και ενισχύεται από τη σχολική διδασκαλία, όπου στο πλαίσιο της αριθμητικής οι μαθητές μαθαίνουν συστηματικά τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Η γνώση αυτή, για τον φυσικό αριθμό, κάποιες φορές λειτουργεί υποστηρικτικά στην κατανόηση άλλων εννοιών, όπως η έννοια του επόμενου φυσικού αριθμού, αλλά συχνά στέκεται εμπόδιο στην κατανόηση εννοιών όπως οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα. Για παράδειγμα, στο σύνολο των φυσικών αριθμών ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό και η διαίρεση τον μικραίνει (Χρήστου, 2009). Αυτό όμως δε συμβαίνει στις αντίστοιχες πράξεις με το μηδέν ή στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς με μεταβλητές. Κάποιοι μαθητές κατανοούν τις μεταβλητές στο πλαίσιο που έχουν ήδη οργανωμένο γύρω από τους φυσικούς αριθμούς και εξαιτίας της γνώσης των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών αγνοούν το μηδέν όταν αυτό συμμετέχει στον πολλαπλασιασμό ή στη διαίρεση. Στην περίπτωση αυτή ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών, αποδίδοντάς τους ιδιότητες των φυσικών αριθμών, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα συγκεκριμένα λάθη και παρερμηνείες σε διάφορα αλγεβρικά πλαίσια, όπως στην κατανόηση των τιμών που μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές. Για να γίνει κατανοητή η μαθηματική έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο πραγματικών αριθμών, οι μαθητές να αλλάζουν την αρχική θεωρία τους για τον αριθμό που είναι οργανωμένη γύρω από το φυσικό αριθμό, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Έρευνες στην ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού έχουν δείξει ότι αυτό είναι μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία που γίνεται σταδιακά και χαρακτηρίζεται από ενδιάμεσα επίπεδα κατανόησης (Χρήστου, 2009). Ο συλλογισμός ποσοτήτων είναι θεμελιώδης για την επιτυχία στα μαθηματικά και η αλγεβρική σκέψη βοηθά στην ανάπτυξη αυτού του συλλογισμού σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο. Δεδομένου ότι οι εφαρμογές των μαθηματικών σπάνια απαιτούν υπολογισμούς σε «καθαρούς αριθμούς», η ανάλυση των προβλημάτων για την εκμαίευση και την ποσοτικοποίηση των σχετικών πληροφοριών είναι μια βασική δεξιότητα συλλογισμού. Ο επαγωγικός συλλογισμός περιλαμβάνει την εξέταση συγκεκριμένων περιπτώσεων, τον εντοπισμό των σχεδίων και των σχέσεων μεταξύ αυτών των περιπτώσεων και την επέκταση των προτύπων και των σχέσεων. Η συλλογιστική συνεπάγεται την εξαγωγή συμπερασμάτων εξετάζοντας τη δομή ενός προβλήματος. Η δεξιότητα αυτή είναι απαραίτητη σε κάθε σύγχρονο πολίτη καθώς αυτά τα είδη συλλογισμών χρησιμοποιούνται σε τακτική βάση (Kriegler, 2007). Σύμφωνα με τον Battista (1998), η σκέψη για τις αριθμητικές διαδικασίες πρέπει να αρχίζει με τις στοιχειώδεις ποιότητες και να συνεχίζεται έως ότου οι μαθητές μπορούν τελικά να εκφράζουν και να προβληματίζονται για τις διαδικασίες χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς χειρισμούς συμβόλων. Με τη συστηματική ενθάρρυνση των εννοιολογικών προσεγγίσεων κατά τη μελέτη των αριθμητικών διαδικασιών, οι μαθητές θα αναπτύξουν ένα δίκτυο μαθηματικών δομών από το οποίο θα αξιοποιήσουν όταν θα ξεκινήσουν τη μελέτη της επίσημης άλγεβρας (Kriegler, 2007). Οι μικροί μαθητές έρχονται σε πρώτη επαφή με τους αριθμούς και οι περισσότερες θεωρίες θεωρούν το «ένα» ως τον πρώτο αριθμό εξαιτίας της θέσης του στην τυπική ακολουθία των αριθμών (καταμέτρησης) αλλά και λόγω του ρόλου του στην απαρίθμηση. Χωρίς είναι απολύτως σαφές, αυτό μπορεί να αποκλείει το μηδέν ως πιθανό αρχικό αριθμό για τα παιδιά. Από τη μία πλευρά, υπάρχουν στοιχεία που αποδεικνύουν ότι το μηδέν παρουσιάζει μερικές εννοιολογικές δυσκολίες (Wellman & Miller, 1986). Από την άλλη πλευρά, όμως τα παιδιά φαίνεται να έχουν μια πρώιμη κατανόηση λέξεων ποσοτικοποίησης όπως «κανένας» ή «δεν» που εκφράζουν την πληθικότητα μηδενικών στοιχείων (Hanlon & Silverbergt, 1998). Από τις υποθέσεις ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι πληθικοί αριθμοί και ότι οι αριθμοί προέρχονται από τα ποσοτικά στοιχεία της φυσικής γλώσσας, είναι μυστηριώδης ο λόγος για τον οποίο το μηδέν είναι τόσο δύσκολο (Rips, Bloomfield, & Asmuth, 2008).

Η άλγεβρα αποτελεί ένα βασικό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης που οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν επαρκώς. Η εισαγωγή στη συμβολική άλγεβρα γίνεται, τουλάχιστον στη χώρα μας, στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και κατά την είσοδο των παιδιών στο Γυμνάσιο (βλ. Αλιμπινίσης, Αντύπας, Ευσταθόπουλος, Κλαουδάτος, & Παπασταυρίδης, 1987, Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989a· βλ. Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989b). Έστω κι αν η κατανόηση της άλγεβρας αποτελεί βασικό στόχο κάθε εκπαιδευτικού προγράμματος, μεγάλης κλίμακας εμπειρικές μελέτες που διεξήχθησαν τόσο στη Βρετανία (Hart, 1981) όσο και στις Η.Π.Α. (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981), έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση βασικών εννοιών της. Η σημαντικότερη όμως συμβολή στην έρευνα στο συγκεκριμένο πεδίο ήταν της Booth που σημείωσε ότι, λόγω του ότι η άλγεβρα μπορεί να ιδωθεί ως γενικευμένη αριθμητική, οι δυσκολίες των μαθητών με τις αλγεβρικές μεθόδους και τους συμβολισμούς της άλγεβρας θα μπορούσαν να οφείλονται στις αντίστοιχες δυσκολίες που είχαν οι μαθητές ήδη με τις μεθόδους και τα σύμβολα της αριθμητικής. Με τον τρόπο αυτό, άνοιξε το δρόμο σε ερευνητές που ακολούθησαν εστιάζοντας το ενδιαφέρον τους στη μελέτη της αριθμητικής ως ένα προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο, το οποίο θα μπορούσε να επηρεάσει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται κατανοητή η άλγεβρα (Χρήστου, 2009). Ο Matz πρότεινε ότι πολλές από τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα οφείλονται σε αυθαίρετες γενικεύσεις κανόνων που, ενώ ισχύουν στην αριθμητική, δεν ισχύουν στην άλγεβρα. Σύμφωνα με τους Sfard & Linchevski (1994), η ρήξη μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας είναι ένα οντογενετικό κενό που προκαλείται από τη διαδικαστική - δομική δυαδικότητα των μαθηματικών εννοιών. Κατά τη μεταβίβαση από μια αριθμητική σε μια αλγεβρική σύλληψη οι μαθητές χρειάζεται να μάθουν ότι οι διαδικασίες μπορεί να θεωρηθούν και αντικείμενα. Είναι να αποκτήσουν μια διπλή αντίληψη : Διαδικασία-Αντικείμενο (Sfard, A., Linchevski, 1994).

Ενσώματη Γνώση

Οι Lakoff και Núñez βλέπουν τους αριθμούς και τις άλλες μαθηματικές οντότητες ως μεταφορές. Με αυτή την έννοια, λοιπόν, τα μαθηματικά είναι τόσο πολύ χρήσιμα, διότι μας επιτρέπουν να οργανώσουμε την κατανόηση των καταστάσεων στον απτό κόσμο. Αν και οι ίδιοι οι αριθμοί δεν έχουν απτή ύπαρξη, η αριθμητική έχει μια λογική δομή που ταιριάζει, για παράδειγμα, με τη δομή της ανταλλαγής χρημάτων που συμβαίνει όταν κάποιος αγοράζει κάτι σε ένα κατάστημα και ο ταμίας δίνει ρέστα. Αυτό που πρότειναν οι Lakoff και ο Nunez αντί του φορμαλισμού είναι ένας τρόπος σκέψης για τα μαθηματικά που είναι η αντίθεση του φορμαλισμού και που αποκαλούν : τα ενσωματωμένα μαθηματικά. Στα ενσωματωμένα μαθηματικά, τα μαθηματικά σύμβολα, όπως το 0, π, e, έχουν νόημα λόγω των μαθηματικών εννοιών με τις οποίες συνδέονται. Οι μαθηματικές έννοιες δίνονται με γνωστικούς όρους (π.χ. σχήματα εικόνων, φανταστικά γεωμετρικά σχήματα, μεταφορικές δομές, όπως η γραμμή αριθμών και ούτω καθεξής), και αυτές οι γνωστικές δομές θα απαιτήσουν τελικά μια νευρωνική ερμηνεία του πώς ο εγκέφαλος *δημιουργεί* με βάση τη νευρική δομή και την σωματική και κοινωνική εμπειρία. Προκειμένου να κατανοήσουμε, δηλαδή ένα μαθηματικό σύμβολο πρέπει να το συσχετίσουμε με μια έννοια, κάτι που έχει νόημα στην ανθρώπινη νόηση και που τελικά στηρίζεται στην εμπειρία και δημιουργήθηκε μέσω νευρικών μηχανισμών. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι το νευρωνικό κύκλωμα που έχουμε αναπτύξει για άλλους σκοπούς γίνεται ένα εγγενές κομμάτι των μαθηματικών, γεγονός που υποδηλώνει ότι τα ενσωματωμένα μαθηματικά δεν υπάρχουν ανεξάρτητα των άλλων ενσωματωμένων εννοιών που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή. Αντίθετα, τα μαθηματικά χρησιμοποιούν τις προσαρμοστικές μας δυνατότητες, τις ικανότητες μας να προσαρμόζουμε άλλες γνωστικές μηχανές για μαθηματικούς σκοπούς (Lakoff, G., Nunez, 2000).

Η μεταφορά (προερχόμενη από την αρχαία ελληνική μεταφορά) είναι ένα σχήμα λόγου κατά το οποίο οι ιδιότητες ενός στοιχείου Α αποδίδονται ("μεταφέρονται") σε ένα στοιχείο Β, το οποίο έχει διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά από το Α. Για παράδειγμα στη φράση «ο αντίπαλος έγινε λαγός» υπάρχει μεταφορά μιας ιδιότητας του μη ανθρώπινου ουσιαστικού «λαγός», της ταχύτητας με την οποία φεύγει καταδιωκόμενος, στο ανθρώπινο υποκείμενο του ρήματος «έγινε» Η μεταφορά παράγει μια νέα σημασία υποκαθιστώντας ένα σημαίνον (π.χ. το γήρας) με ένα άλλο (π.χ. το δειλινό της ζωής). Αντίστροφα η υποκατάσταση ενός σημαίνοντος από ένα άλλο συνεπάγεται τη δυνατότητα της μεταφοράς. Ας θεωρήσουμε τη μεταφορά «οι αριθμοί είναι σημεία σε μια ευθεία». Η εννοιοποίηση των αριθμών, εδώ ως σημείων μιας ευθείας είναι απαραίτητη, γιατί υπάρχει στους μαθητές η σύλληψη της έννοιας του αριθμού που δεν είναι γεωμετρική. Η ευθεία των αριθμών, όμως είναι από τις κεντρικότερες έννοιες του συνόλου των μαθηματικών, καθώς ούτε η τριγωνομετρία ούτε η αναλυτική γεωμετρία δεν θα υπήρχαν χωρίς αυτήν. Ακόμη ας θεωρήσουμε τη μεταφορά ότι οι αριθμοί είναι σύνολα. Η μεταφορά αυτή διαδραμάτισε κεντρικό ρόλο στη θεμελίωση των μαθηματικών στις αρχές του εικοστού αιώνα. Η αριθμητική για περισσότερο από δυο χιλιετίες αναπτύχθηκε χωρίς την παραπάνω μεταφορά, δηλαδή χωρίς την εννοιοποίηση του 0 ως κενού συνόλου, του 1 ως συνόλου που περιέχει το κενό σύνολο, του 2 ως συνόλου που περιέχει το 0 και το 1 κ.λπ. Με τη συγκεκριμένη μεταφορά, οι μορφές εννοιοποίησης των συνόλων μπορούν όχι μόνο να εφαρμοστούν στους αριθμούς αλλά και να κάνουν δυνατή τη θεμελίωση των κλασσικών μαθηματικών (Lakoff, G., Nunez, 2000).

Η εννοιολογική μεταφορά είναι ένας γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να λογίζουμε, να θεωρούμε ένα είδος σαν να ήταν ένα άλλο. Αυτό σημαίνει ότι η μεταφορά δεν είναι απλά ένα γλωσσολογικό φαινόμενο, μια απλή μορφή λόγου, αλλά μάλλον είναι μάλλον ένας γνωστικός μηχανισμός που ανήκει στη σφαίρα της σκέψης. Η «εννοιολογική μεταφορά» έχει το εξής τεχνικό νόημα: Βασίζεται στη διατήρηση των συμπερασμάτων και τον σχεδιασμό ανάμεσα σε διαφορετικούς τομείς, είναι ένας (νοητικός) μηχανισμός που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συμβολική δομή ενός εννοιολογικού πεδίου (ας πούμε της γεωμετρίας) προκειμένου να αντιληφθούμε τη λογική ενός άλλου πεδίου (ας πούμε της αριθμητικής). Τέτοιες εννοιολογικές μεταφορές μας επιτρέπουν να εφαρμόζουμε αυτό που ξέρουμε από ένα κλάδο των μαθηματικών για να το κατανοήσουμε, σε έναν άλλο κλάδο.

Ας πάρουμε το εξής παράδειγμα : Ο κύκλος σε ένα καρτεσιανό επίπεδο που έχει τις εξής σταθερές αντιστοιχίες : το κέντρο του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, στο σημείο 0(0,0) και η ακτίνα του είναι ίση με 1, είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Οι δυο γνωσιακές δομές, του κύκλου (ορισμός, ιδιότητες) και του καρτεσιανού επιπέδου (ορισμός, ιδιότητες) με σταθερές αντιστοιχίες μεταξύ τους συνδυάζονται και προκύπτουν συνεπαγωγές όπως ότι τα σημεία τομής του μοναδιαίου κύκλου με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία με συντεταγμένες (1,0) και (-1,0) και με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία (0,1) και (0,-1). Ο κύκλος αυτός έχει σταθερή θέση στο επίπεδο και η ακτίνα του και το μήκος της περιφέρειας του εξαρτώνται από τους αριθμούς στους άξονες x΄x και y΄y. Στο ευκλείδειο επίπεδο, στο οποίο δεν υπάρχουν άξονες και αριθμοί ένας κύκλος δεν θα είχε αυτές τις ιδιότητες. Τον συνδυασμό δυο σαφώς διακεκριμένων γνωσιακών δομών με σταθερές αντιστοιχίες μεταξύ τους, οι Lakoff & Nunez, ονόμασαν *εννοιακή μείξη*. Όταν οι σταθερές αντιστοιχίες σε μια εννοιακή μείξη αναπαριστάνονται με μεταφορά η εννοιακή μείξη ονομάζεται *μεταφορική μείξη*. Η μεταφορά «οι αριθμοί είναι σημεία μιας ευθείας» ορίζει αντιστοιχίες που χρησιμοποιούνται στη μείξη της «ευθείας των αριθμών». Στη μείξη δηλαδή δημιουργούνται καινούργιες οντότητες, στην συγκεκριμένη περίπτωση η οντότητα αριθμός-σημείο η οποία είναι αριθμός αλλά και σημείο σε μια ευθεία. Η εννοιολογική μεταφορά και η εννοιολογική μείξη είναι μεταξύ των βασικών γνωστικών μηχανισμών που μας οδηγούν πέρα από την ελάχιστη έμφυτη αριθμητική καταμέτρησης στη στοιχειώδη και απλή αριθμητική των φυσικών αριθμών. Οι δύο τύποι εννοιολογικής μεταφοράς και εννοιολογικής μείξης χρησιμοποιούνται για την επέκταση από την έμφυτη αριθμητική κατανόηση, την καταμέτρηση και την απλούστερη αριθμητική των νεογνών σε μια αριθμητική φυσικών αριθμών (Lakoff, G., Nunez, 2000). Οι θεμελιώδεις μεταφορές αποδίδουν, άμεσα βασικές ιδέες. Για παράδειγμα η πρόσθεση γίνεται αντιληπτή ως προσθήκη αντικειμένων σε μια συλλογή, η αφαίρεση ως απομάκρυνση αντικείμενων μακριά από μια συλλογή. Δηλαδή τα σύνολα θεωρούνται «δοχεία», τα στοιχεία ενός συνόλου θεωρούνται αντικείμενα σε ένα «δοχείο». Αυτές οι ιδέες συνήθως απαιτούν ελάχιστες οδηγίες προκειμένου να γίνουν κατανοητές. Η σύνδεση ανάμεσα στις μεταφορές αποδίδει πιο εξελιγμένες ιδέες, μερικές φορές, που ονομάζονται αφηρημένες ιδέες. Παράδειγμα οι αριθμοί θεωρούνται ως σημεία σε μια γραμμή, τα γεωμετρικά σχήματα αποδίδονται από αλγεβρικές εξισώσεις, οι πράξεις σε κλάσεις δίνονται ως αλγεβρικές λειτουργίες. Αυτές οι ιδέες βέβαια απαιτούν επίμονη διδασκαλία με σαφείς και ρητές οδηγίες (Lakoff, G., Nunez, 2000).

Καμία μεταφορά δεν είναι πιο βασική από την μεταφορά που επεκτείνει την έννοια που έχουμε για τους έμφυτους αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς (τους θετικούς ακέραιους αριθμούς). Αυτό οφείλεται στο ότι η συσχέτιση της ομαδοποίησης με την απαρίθμηση και την καταμέτρηση των στοιχείων σε μια ομάδα έχουν διεισδύσει στην εμπειρία μας από την πρώιμη παιδική μας ηλικία. Οι πιο θεμελιώδεις πτυχές του αριθμού και της αριθμητικής υπήρχαν για χιλιετίες χωρίς την έννοια των μεταφορών. Αλλά μόνο όταν χρησιμοποιήθηκε η μεταφορά των συνόλων στους αριθμούς, τότε μόνο εφαρμόστηκε στους αριθμούς η συλλογιστική σκέψη που αφορά τα σύνολα, στους αριθμούς. Μόνο με αυτή τη μεταφορά κατόρθωσε να υπάρξει και να αναπτυχθεί η θεμελίωση των σύγχρονων μαθηματικών. Οι μεταφορές της αριθμητικής διευρύνουν την κατανόηση για την έννοια των αριθμών: από τους αριθμούς άμεσης εκτίμησης της έμφυτης αριθμητικής και από την απλή καταμέτρηση μέχρι την αριθμητική των φυσικών αριθμών, θεμελιώνοντας την επέκταση της αριθμητικής στην καθημερινή μας εμπειρία με ομάδες φυσικών αντικειμένων. Οι Lacoff & Nunez θεωρούν ότι στην αριθμητική εντοπίζονται τέσσερεις βασικές εννοιολογικές μεταφορές:

1. Η αριθμητική ως (<u>μεταφορά) συλλογής αντικειμένων:</u> κάθε αριθμός εκφράζεται ως ο πληθικός αριθμός συλλογών από ομοειδή αντικείμενα. Έτσι ο αριθμός 5 εκφράζει το πλήθος μιας συλλογής πέντε π.χ. μολυβιών
2. Η αριθμητική ως (<u>μεταφορά) κατασκευής αντικειμένων:</u> οι αριθμοί αποτελούνται από ξεχωριστά τμήματα μοναδιαίου μεγέθους. Έτσι ο αριθμός 5 κατασκευάζεται-θεωρείται ως το άθροισμα πέντε μονάδων ή αποτελείται από πέντε μονάδες.
3. Η αριθμητική ως (<u>μεταφορά) μονάδων μέτρησης:</u> οι αριθμοί είναι τμήματα που δημιουργούνται και αποτελούνται από την συνεχή τοποθέτηση διακριτών τμημάτων μοναδιαίου μήκους. Έτσι ένα τμήμα με μήκος 5 έχει προκύψει από την τοποθέτηση σε μια ευθεία, χωρίς κενά, πέντε μοναδιαίων τμημάτων.
4. Η αριθμητική ως (<u>μεταφορά) κίνησης κατά μήκος μιας διαδρομής:</u> όπου οι αριθμητικές πράξεις είναι κινήσεις κατά μήκος αυτής της διαδρομής. Το 5 είναι «κατά πέντε πιο μακριά» από την αρχή, δηλαδή από το 0.

Το μηδέν με τις μεταφορές του, ενισχύει σημαντικά την αριθμητική στο να επεκτείνει τα σύνολα των αριθμών, να ορίσει την κλειστότητα ως ιδιότητα στις αριθμητικές πράξεις και να εμπλουτίσει τους νόμους της.

1. Το *μηδέν* μπορεί να θεωρηθεί ως μεταφορά συλλογής αντικειμένων αφού είναι πληθικός αριθμός μιας συλλογής αντικειμένων(του κενού συνόλου δηλαδή). Με δεδομένο ότι η αριθμητική είναι μεταφορά συλλογής αντικειμένων, ορίζεται-χαρτογραφείται η κενή συλλογή με έναν αριθμό τον οποίο καλούμε "μηδέν." Αυτή η νέα μεταφορά είναι κοινού τύπου στα μαθηματικά, και θα την αποκαλέσουμε μεταφορά που δημιουργεί μια οντότητα. Έτσι δημιουργείται η εννοιολογική μεταφορά: το μηδέν ως πραγματικός αριθμός. Αν και το μηδέν είναι μια μεταφορά στην επέκταση της συλλογής αντικειμένων, δεν είναι φυσική επέκταση. Δεν προκύπτει από μια συσχέτιση μεταξύ της εμπειρίας της συλλογής (the experience of collecting), της εμπειρίας της αυτόματης αρίθμησης (the experience of subitizing)[6] και της έμφυτης αριθμητικής. Το μηδέν είναι λοιπόν μια τεχνητή μεταφορά, που επινοήθηκε ad hoc για την επέκταση. Μόλις επεκταθεί η μεταφορά της αριθμητικής ως συλλογής αντικειμένων με αυτόν τον τρόπο, ως συμπεράσματα της μεταφοράς αυτής ακολουθούν περισσότερες ιδιότητες των αριθμών.
2. Το *μηδέν* μπορεί να θεωρηθεί ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων αφού αποτελεί ένα αντικείμενο-επέκταση που ερμηνεύεται ως η έλλειψη- απουσία κάθε τμήματος. Οι αριθμοί πρέπει να γίνουν κατανοητοί σαν να κατασκευάζονται, ή αποτελούνται από άλλους αριθμούς, οι οποίοι τοποθετούνται μαζί χρησιμοποιώντας αριθμητικές πράξεις. Αυτό που γίνεται σε αυτή τη μεταφορά είναι να αντιληφθούμε ότι οι αριθμοί αποτελούνται από τομείς-μέρη. Τα μέρη είναι άλλοι αριθμοί και οι πράξεις της αριθμητικής παρέχουν τον τρόπο με τον οποίο τα μέρη ταιριάζουν μεταξύ τους για να σχηματίσουν σύνολα. Εδώ είναι ο μεταφορικός σχεδιασμός που χρησιμοποιείται για να κατανοήσουμε τους αριθμούς με αυτόν τον τρόπο. Όπως και στην περίπτωση της μεταφοράς συλλογής αντικειμένων, μια

---

[6] Η λέξη «subitizing» προέρχεται από τη λατινική λέξη subitus που σημαίνει ξαφνικός ή απότομος και υιοθετήθηκε από τους συγγραφείς για να δηλώσει την αμεσότητα της αντίδρασης. Η λέξη «αμεσότητα» ενδεχομένως να μπορούσε να αποδώσει το νόημα του όρου, επειδή όμως δεν μας καλύπτει σημασιολογικά και θα διατηρήσουμε τον όρο στα Αγγλικά.

πρόσθετη μεταφορά είναι απαραίτητη για να γίνει αντιληπτό το μηδέν. Δεδομένου ότι η απουσία-έλλειψη ενός αντικειμένου δεν είναι αντικείμενο, δεν πρέπει, αυστηρά, να αντιστοιχεί σε έναν αριθμό. Η μεταφορά «το αντικείμενο μηδέν» είναι μια τεχνητή μεταφορά.

3. Το *μηδέν*, ως μεταφορά μονάδων μέτρησης μοιάζει πολύ με την μεταφορά κατασκευής αντικειμένων: Ένα φυσικό τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ως φυσικό αντικείμενο, ακόμα κι αν είναι μια φανταστική γραμμή στο διάστημα. Αλλά τα φυσικά τμήματα είναι πολύ ξεχωριστά "κατασκευασμένα αντικείμενα". Είναι μονοδιάστατα και συνεχή. Στην αφηρημένη έκδοσή τους αντιστοιχούν στα ευθύγραμμα τμήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Ως αποτέλεσμα, το μείγμα του πεδίου πηγής και των πεδίων στόχων αυτής της μεταφοράς είναι μια πολύ ιδιαίτερη κατάσταση.[7] Πρόκειται για ένα μείγμα γραμμικών (φυσικών) τμημάτων με αριθμούς που προσδιορίζουν το μήκος τους, το οποίο θα ονομάσουμε μείγμα αριθμού και φυσικού τμήματος. Μόλις δημιουργήσουμε το μείγμα όμως δημιουργείται μια μοιραία πρόκληση. Ας θυμηθούμε τη μεταφορά που δηλώνει ότι οι αριθμοί αποτελούνται από μέρη - τομείς και με δεδομένο αυτό αυτή τη συγκεκριμένη μεταφορά, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τους φυσικούς αριθμούς, το μηδέν και τα θετικά κλάσματα (τους ρητούς αριθμούς) ως αποτελούμενα από μέρη- τομείς. Δηλαδή, για κάθε θετικό ρητό αριθμό, αυτή η μεταφορά παρέχει ένα μοναδικό φυσικό τμήμα. Ο σχεδιασμός αυτής της μεταφοράς είναι μονόδρομος. Δεν σημαίνει καθόλου ότι σε οποιοδήποτε τμήμα της γραμμής, υπάρχει ένας αντίστοιχος αριθμός. Αλλά ο συνδυασμός πεδίου πηγής και πεδίου στόχου υπερβαίνει τη μεταφορά και δημιουργεί νέες συνεπαγωγές και συμπεράσματα. Όταν σχηματίζεται ένα μείγμα φυσικών τμημάτων και αριθμών, που περιορίζονται από τη μεταφορά μονάδων μέτρησης, στη συνέχεια μέσα στο μείγμα υπάρχει μια αντιστοιχία ενός προς ένα μεταξύ φυσικών τμημάτων και αριθμών. Η μοιραία πρόκληση είναι αυτή: Λαμβάνοντας υπόψη ένα σταθερό μήκος μονάδας, έπεται ότι για κάθε φυσικό τμήμα υπάρχει ένας αριθμός, για το μηδέν όμως αυτή η «ύπαρξη» είναι δύσκολο να εννοιοποιηθεί.

[7] Το πεδίο πηγής (ως πεδίο πηγής θεωρούμε το πεδίο αφετηρίας ή το πεδίο αναφοράς) (*Source Domain)* αφορά οριοθετημένη περιοχή σε φυσικό χώρο. Το πεδίο στόχος (*Target Domain*) είναι η υποκειμενική εμπειρία για την ύπαρξη μιας κατάστασης.

4. Το *μηδέν*, ως <u>μεταφορά κίνησης σε μια διαδρομή.</u> Όπως αναφέρθηκε, η αριθμητική είναι κίνηση, αντιστοιχεί με πολλούς τρόπους στη μεταφορά της μιας μετρικής μονάδας, αλλά υπάρχει μια μεγάλη διαφορά. Σε όλες τις άλλες τις μεταφορές που εξετάσαμε μέχρι στιγμής, έπρεπε να υπάρξει κάποια οντότητα - μεταφορά που να δημιουργεί το μηδέν. Ωστόσο, όταν οι αριθμοί είναι θέσεις σημείων σε μια γραμμή, το προσδιοριστικό στοιχείο από την ίδια της τη φύση είναι μια θέση σημείου. Όταν προσδιορίζουμε το μηδέν ως αρχή, είναι ήδη μια θέση σημείου. Επιπλέον, αυτή η μεταφορά προσφέρει μια φυσική επέκταση που περιλαμβάνει τους αρνητικούς αριθμούς. Η έναρξη είναι κάπου στην διαδρομή που εκτείνεται επ 'αόριστον και προς τις δύο κατευθύνσεις. Οι αρνητικοί αριθμοί θα είναι σε σημεία θέσης στην άλλη πλευρά του μηδενός από τους θετικούς αριθμούς κατά μήκος της διαδρομής. Αυτή η επέκταση ήταν σαφής και έγινε από τον Rafael Bombelli στο δεύτερο μισό του δέκατου έκτου αιώνα. Στην επέκταση του Bombelli, στη μεταφορά της σημειακής θέσης για αριθμούς, οι θετικοί αριθμοί, το μηδέν και οι αρνητικοί αριθμοί είναι όλοι σημεία τοποθεσίας σε μια γραμμή. Αυτό δημιούργησε ένα κοινό τόπο για τους Ευρωπαίους μαθηματικούς ώστε να σκέφτονται και να μιλούν για την έννοια του αριθμού που βρίσκεται μεταξύ δύο άλλων αριθμών-όπως το μηδέν βρίσκεται μεταξύ του μείον ένα και του ένα. Το να αποκτήσουμε την αίσθηση όλων των (πραγματικών) αριθμών μεταφορικά ως σημείων-θέσεων στην ίδια γραμμή ήταν ιδιαίτερης σημασίας για την ομοιόμορφη κατανόηση της έννοιας του αριθμού. Σήμερα, βέβαια, είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς ότι κάποτε τέτοιες μεταφορές δεν ήταν κοινά αποδεκτές από τους μαθηματικούς.

Οι τέσσερις θεμελιώδεις μεταφορές που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα - *η συλλογή αντικειμένων, η κατασκευή αντικειμένων, η μέτρηση-σύγκριση αντικειμένων και η κίνηση κατά μήκος μιας γραμμής αντικειμένων* περιέχουν μεταφορικούς χαρακτηρισμούς για το μηδέν. Αυτές οι μεταφορές μαζί χαρακτηρίζουν τις συμβολικές έννοιες του μηδενός (Lakoff, G., Nunez, 2000).

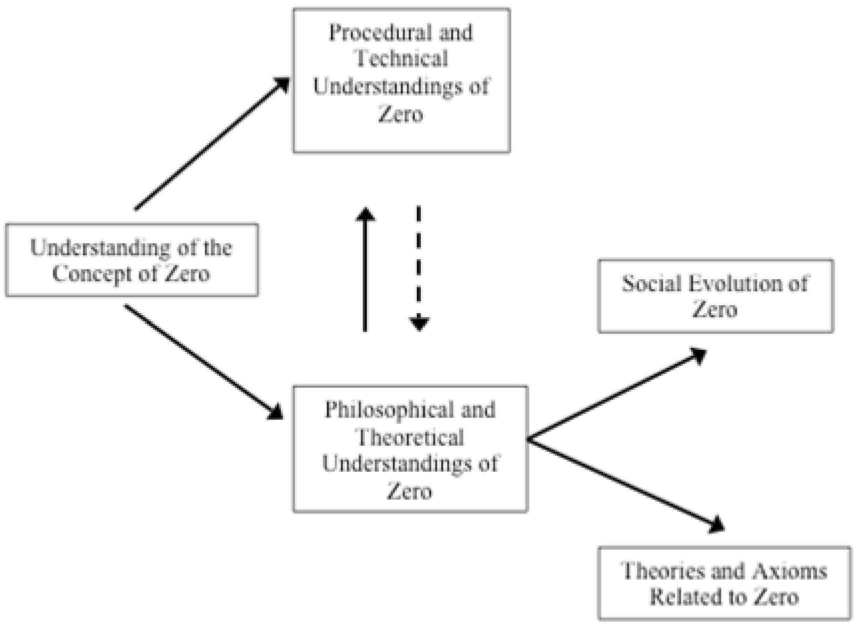
- Στη μεταφορά συλλογής αντικειμένων, το μηδέν είναι η κενή συλλογή. Έτσι, το μηδέν μπορεί να υποδηλώνει το κενό.
- Στη μεταφορά κατασκευής αντικειμένων, το μηδέν είναι είτε η έλλειψη ενός αντικειμένου, είτε η απουσία ενός αντικειμένου, είτε το αποτέλεσμα μιας

πράξης, της καταστροφής ενός αντικειμένου. Έτσι, το μηδέν μπορεί να σημαίνει έλλειψη, απουσία ή καταστροφή.

- Στη μεταφορά μέτρηση- σύγκριση αντικειμένων το μηδέν αντιπροσωπεύει το απόλυτο στην ελάχιστη ποσότητα, την έλλειψη εντελώς οποιουδήποτε φυσικού τμήματος.
- Στη μεταφορά κίνησης κατά μήκος μιας γραμμής, το μηδέν είναι η αρχή της κίνησης. Ως εκ τούτου, το μηδέν μπορεί να χαρακτηρίσει την αρχή, την προέλευση (Lakoff, G., Nunez, 2000).

Το μηδέν, λοιπόν στην καθημερινή γλώσσα, συμβολικά υποδηλώνει την κενότητα, το τίποτα, την έλλειψη, την απουσία, την καταστροφή, την απόλυτη ελάττωση και την αρχή. Αυτές οι μεταφορές εξηγούν επομένως γιατί το μηδέν, που είναι κυριολεκτικά αριθμός, έχει τη συμβολική αξία που έχει. Αλλά αυτό, δεν είναι η πραγματική σημασία αυτών των μεταφορών για τα μαθηματικά. Η πραγματική σημασία είναι ότι εξηγούν πώς η έμφυτη αριθμητική επεκτείνεται συστηματικά ώστε να δώσει τις αριθμητικές διακριτικές ιδιότητες που η έμφυτη αριθμητική δεν έχει.

Εννοιολογική κατανόηση – Εννοιολογική αλλαγή



Εννοιολογικό πλαίσιο για την κατανόηση της έννοιας του μηδενός (Russell & Chernoff, 2011)

Οι φιλοσοφικές και θεωρητικές αντιλήψεις του μηδενός είναι αποτέλεσμα τόσο της κοινωνικής εξέλιξης, που αφορά το μηδέν, όσο και των θεωριών και των αξιώματων της έννοιας του μηδενός που ξεκινούν από τους μαθηματικούς του παρελθόντος και φτάνουν έως τους σύγχρονους ακαδημαϊκούς μαθηματικούς. Από την άλλη πλευρά, οι τεχνικές και διαδικαστικές αντιλήψεις για το μηδέν, αφορούν τις συνηθισμένες πράξεις που εκτελούνται σε μαθηματικές καταστάσεις που περιλαμβάνουν το μηδέν. Αυτές οι δύο κατηγορίες σχετίζονται μεταξύ τους στο ότι οι τεχνικές και διαδικαστικές αντιλήψεις του μηδενός μπορεί να εξηγηθούν άμεσα από τις φιλοσοφικές και θεωρητικές αντιλήψεις του μηδενός. Για παράδειγμα, το γιατί κάποιος βάζει μηδενικά όταν κάνει πολλαπλασιασμό πολλαπλών ψηφίων είναι άμεση συνέπεια του θεωρητικού ορισμού της θεσιακής αξίας των πολλαπλασιαζόμενων ποσοτήτων (Russell & Chernoff, 2011).

Η εννοιολογική κατανόηση αναφέρεται στην κατασκευή της γνώσης που συνεπάγονται διαφορετικά αλλά συναφή κομμάτια των μαθηματικών. Αναφέρεται στις γνώσεις, στις δεξιότητες, στις αξίες και στις πεποιθήσεις. Αυτή η γνώση που θα μπορούσε να ανακτηθεί, εξομοιώνεται, φιλοξενείται, ανακατασκευάζεται και εφαρμόζεται στην ανάπτυξη των διαφόρων νέων εννοιών για να αποδείξει την κατανόηση χωρίς να εξαρτάται από την ανάκληση στη μνήμη γεγονότων που δεν έχουν νόημα. Οι μαθητές που έχουν αναπτύξει εννοιολογική κατανόηση γνωρίζουν πότε οι υπολογισμοί είναι σωστοί ή λάθος. Η διαδικαστική κατανόηση περιλαμβάνει τις διαδικασίες ή τα βήματα για επίλυση των προβλημάτων που θα μπορούσαν να γίνουν χωρίς εννοιολογική κατανόηση ή την αίσθηση λήψης αποφάσεων των προβλημάτων και τις λύσεις τους. Η αποτελεσματική διαδικαστική κατανόηση όμως συνεπάγεται την εφαρμογή αποτελεσματικών βημάτων για τον υπολογισμό, τον ευκολότερο και τον πιο έξυπνο τρόπο για να κατακτηθεί η εννοιολογική κατανόηση (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2002).

Αν και το ίδιο πράγμα διδάσκεται σε όλους τους μαθητές, μόνο όσοι έχουν εσωτερικεύσει (interiorized) την έννοια θα καταφέρουν να έρθουν στο στάδιο της πραγμοποίησης της έννοιας του μηδενός και θα είναι σε θέση να παρακολουθήσουν και να κατανοήσουν το σκεπτικό του δασκάλου, όταν μιλά για πράξεις με αυτό. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι μπορεί ο εκπαιδευτικός να περιμένει να εισαγάγει το μηδέν, μέχρις ότου η αφαίρεση πραγματοποιηθεί πλήρως. Είναι σημαντικό να δοθεί χρόνος στους μαθητές ώστε η κάθε γνωστική φάση να εγκαθίσταται.

Ακόμη η ιδέα της εννοιολογικής αλλαγής για τον αριθμό γενικά και για το μηδέν ειδικότερα είναι θεμελιώδες να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει όχι μόνο τον εμπλουτισμό και την ανοικοδόμηση των εννοιών, αλλά και την ευαισθητοποίηση των πολλαπλών νοημάτων-εννοιών. Πολύ συχνά μια έννοια θεωρείται εσφαλμένη όταν έχει αντικατασταθεί από κάποια άλλη, για παράδειγμα, όταν στον ηλιοκεντρικό κόσμο η θεωρία αντικατέστησε την γεωκεντρική άποψη. Κατά τη διαδικασία της αλλαγής από τη μια έννοια στην άλλη μια σειρά από νέες ιδέες μπορεί να εμφανιστούν, τα λεγόμενα «συνθετικά μοντέλα» (Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., Σκοπελίτη, 2008). Ωστόσο, υπάρχουν πολλά παραδείγματα, ιδιαίτερα στα μαθηματικά, όταν διαφορετικές αντιλήψεις συνυπάρχουν. Το να μαθαίνουμε να ορίζουμε με λεπτομέρειες τις διαφορετικές αντιλήψεις και τις συνθήκες, όταν κρίνονται ως αληθείς, είναι ένα διαφορετικό είδος της εννοιολογικής αλλαγής. Είναι σημαντικό να αναπτυχθεί στους μαθητές η απαραίτητη «μετανοηματική (metaconceptual) ευαισθητοποίηση» και η «Επιστημολογική εκλέπτυνση» (Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., Σκοπελίτη, 2008).

Η εννοιολογική ανάπτυξη του μηδενός στους μαθητών φαίνεται να γίνεται παράλληλα με την ιστορική εξέλιξη του μηδενός. Η κατανόηση του μηδενός ως ποσότητας που περιγράφει το κενό σύνολο είναι ανάγκη για την αποτελεσματική σύλληψη της έννοιας του. Η ανάπτυξη της έννοιας της μηδενός απαιτεί τη κατανόηση λειτουργίας του μηδενός ως σύμβολου κράτησης θέσης αλλά και ως αριθμού. Για παράδειγμα την θεσιακή του αξία του μηδενός σε αριθμούς όπως ο 2017, την αξία του σαν αριθμός στην ακολουθία ...,-2, -1, 0, 1, 2,..., και τέλος τη λειτουργία του σαν αριθμός στις πράξεις 12 × 0 , 0 ÷ 10 (Blake, R., Verhille, 1985),(Pogliani, Randic, & Trinajstić, 1998), (Seife, 2009).

Σήμερα, η εκπαίδευση των μαθητών στην άλγεβρα υπόκειται σε όλο τον κόσμο σε κριτικό έλεγχο και γίνονται διαρκείς συζητήσεις και έρευνες. Διαφορετικές απόψεις για τους στόχους, τις προσεγγίσεις και τα επιτεύγματα της βρίσκονται στο επίκεντρο των συζητήσεων στη «μαθηματική διαμάχη» σε πολλές χώρες (Klein, 2007, Schoenfeld, 2004). Ζωτικής σημασίας για αυτές τις συζητήσεις είναι η σχέση μεταξύ των διαδικαστικών δεξιοτήτων και της εννοιολογικής κατανόησης στη διδασκαλία και την εκμάθηση της άλγεβρας. Από τη μία πλευρά, οι υπολογιστικές ικανότητες θεωρούνται ως προϋπόθεση για την εννοιολογική κατανόηση (Τμήμα Παιδείας των ΗΠΑ, το 2007). Παράπονα από την τριτοβάθμια εκπαίδευση δίνουν έμφαση στην έλλειψη τέτοιων διαδικαστικών δεξιοτήτων από τους μαθητές, και σε αρκετές χώρες η τριτοβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιεί εισαγωγικές εξετάσεις που αφορούν βασικές αλγεβρικές ικανότητες-δεξιότητες. Ως εκ τούτου, πολλοί μαθητές δεν έχουν την στοιχειώδη αίσθηση για την έννοια του αριθμού και την πραγματική γνώση ώστε να αναγνωρίσουν το 144 ως το τετράγωνο του 12 ή να παρατηρήσουν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ 12/16 και 3/4. Από την άλλη πλευρά, ορισμένοι θεωρούν ως πυρήνα-στόχο της εκπαίδευσης στην άλγεβρα την ανάπτυξη των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, τις δεξιότητες συλλογισμού, τη συμβολική λογική και την ευελιξία, και τη διαδικαστική ευχέρεια. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, το μέλλον των κοινωνικών και επαγγελματικών αναγκών θα επικεντρωθεί ακόμη περισσότερο στις ευέλικτες αναλυτικές δεξιότητες συλλογισμού, αντί στις διαδικαστικές δεξιότητες. Κατά συνέπεια, η εκπαίδευση στην άλγεβρα μήπως είναι αναγκαίο να αλλάξει τους στόχους της; Μήπως είναι σημαντικό να επικεντρωθεί σε νέα επιστημολογία και να αποσκοπεί σε νέα είδη κατανόησης; (Drijvers, Goddijn, 2011).

Η έννοια (αίσθηση) του αριθμού

Τα Μαθηματικά διαφοροποιούνται από όλες τις άλλες Θετικές Επιστήμες. Το σημαντικό είναι ότι στα Μαθηματικά μπορεί κάποιος να χειρίζεται έννοιες μέσω των αναπαραστάσεών τους και να αναφέρεται σε ιδιότητές τους, χωρίς να χρειάζεται να πάρει θέση στο φιλοσοφικό ερώτημα της ύπαρξης ή μη των μαθηματικών αντικειμένων. Οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων είναι κυρίως σημειωτικές αναπαραστάσεις. Σημειωτικές αναπαραστάσεις, που εκφέρονται με χρήση σημείων (signes), (εκφωνήσεις στη φυσική γλώσσα, αλγεβρικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα) αποτελούν το μέσο που διαθέτει το άτομο για να εξωτερικεύσει τις νοητικές του αναπαραστάσεις (Κολέζα, 1991). Η Sfard, το 1991, επίσης, υποστηρίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να προσεγγιστούν με δυο τρόπους, δομικά και λειτουργικά. Η δομική προσέγγιση έγκειται σε μια σφαιρική αντίληψη της έννοιας σε αντίθεση με τη λειτουργική που συνεπάγεται την ερμηνεία της έννοιας ως διαδικασίας. Την αντιλαμβανόμαστε ως «μια δυναμική μάλλον, παρά ως μια ενεργή οντότητα η οποία αρχίζει να υπάρχει όταν οι συνθήκες το επιβάλλουν σε μια ακολουθία δράσεων». Όλες όμως οι (σημειωτικές) αναπαραστάσεις μιας έννοιας δεν ερμηνεύονται με την ίδια ευκολία δομικά και λειτουργικά. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τη Sfard, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης προσφέρει μια δομική αντίληψη, ενώ ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης προσφέρεται συγχρόνως για λειτουργική και δομική προσέγγιση. Εάν προσεγγίσουμε τα μαθηματικά ως σύστημα σύμβολων, τότε το βασικό σύμβολο αυτού του συστήματος λογικής και ταυτόχρονα κώδικας επικοινωνίας είναι ο αριθμός. Η έννοια του αριθμού και ο συμβολισμός του (η αναπαράστασή του) δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να επεξεργαστούν τον αριθμό σε συμβολικό επίπεδο ώστε να οδηγηθούν σε αφαιρετικά και αφηρημένα επίπεδα. Πριν ακόμη από την έννοια του αριθμού δημιουργείται στα παιδιά η έννοια της ποσότητας με αποτέλεσμα να αποκτούν την αίσθηση του «πολλά» ή «λίγα».

Η επέκταση της έννοιας του αριθμού γίνεται με το μηδέν και το ένα. Το μηδέν σημαίνει είτε κανένα αντικείμενο, είτε μια συμπληρωματική αφαίρεση σε κάποιο προηγούμενο πλαίσιο είτε ότι δεν μένει τίποτα ύστερα από μια αριθμητική πράξη. Ο μαθητής δυσκολεύεται να καταλάβει το μηδέν γιατί δεν μπορεί να δεχθεί την έννοια του «τίποτα» ή του «δεν υπάρχει». Το νόημα του αριθμού, όμως, περιορίζεται αυστηρά εάν θεωρηθεί μόνο ως μαθηματικό σύμβολο. Ακόμη το σύμβολο της ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί ως εντολή εκτέλεσης πράξεων, αλλά και ως σύμβολο ταύτισης των δύο μερών. Το μηδέν εμφανίζεται σαν σύμβολο κράτησης θέσης αλλά και σαν σημείο αναφοράς. Αν και *«..στη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας η λειτουργική αντίληψη προηγείται της δομικής»* (Sfard 1991), στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ικανότητα για δομική προσέγγιση θεωρείται ως ο απώτερος στόχος της μαθησιακής διαδικασίας. Αυτός είναι και ο λόγος που η διαδικασία δομικής συγκρότησης των μαθηματικών εννοιών αποτέλεσε το αντικείμενο πολλών ερευνών, τόσο από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όσο και από το χώρο της ψυχολογίας τα τελευταία σαράντα χρόνια (Κολέζα, 1991). Στην περίπτωση των συμβόλων στα Μαθηματικά, απουσιάζει το «πραγματικό αντικείμενο». Το υποκείμενο δεν εκτελεί ενέργειες σε αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, αλλά σε (νοητικές) αναπαραστάσεις πραγματικών αντικειμένων. Δεν υπάρχει, δηλαδή -σύμφωνα με τον Piaget- «εμπειρική αφαίρεση», αλλά «ψευδο-εμπειρική» αφαίρεση. Για παράδειγμα, το σύμβολο του αριθμού «1» δεν προκύπτει απ' ευθείας από την απλή παρατήρηση «ενός πραγματικού αντικειμένου», αλλά από την λογική διεργασία του προσδιορισμού του κοινού χαρακτηριστικού συνόλων με ένα στοιχείο.

Ο αριθμός είναι μια πλούσια έννοια και τέσσερεις συνδέσεις-μεταφορές απαιτούνται για να δομήσει κάποιος όλα τα χαρακτηριστικά της έννοιας. Οι Lakoff και Núñez ισχυρίζονται ότι αυτές οι τέσσερις συνδέσεις-μεταφορές είναι επαρκείς προκειμένου να αποκτήσουμε και να κατανοήσουμε την έννοια των φυσικών αριθμών, και κατόπιν να γίνει επέκταση στο πεδίο των αριθμών ώστε να συμπεριληφθεί το μηδέν, τα κλάσματα και οι αρνητικοί αριθμοί με την επέκταση των συνδέσεων (Lakoff, G., Nunez, 2000). Ωστόσο, δεν είναι σαφές τι σημαίνει επέκταση σύνδεσης-μεταφοράς, και δεν έχει ακόμη εμπειρικά αποδειχθεί ότι οι τέσσερεις μεταφορές επαρκούν για την επέκταση του συνόλου των αριθμών (Kilhamn, 2011).

Η αρχική προσέγγιση της έννοιας του αριθμού φυσικά θα πρέπει να είναι σε αρμονία με τις προϋπάρχουσες γνώσεις που το παιδί ήδη έχει. Η ιδέα του φυσικού αριθμού είναι πολύπλοκη και απαιτεί, επομένως, προσέγγιση από διαφορετικές απόψεις (διάταξη, πληθικότητα, μέτρο, αναδρομικότητα, θεωρία των συνόλων, κλπ.) και αποκτάται, από τους μαθητές του Δημοτικού σχολείου, μετά από μακρά «εσωτερίκευση» από μέρους του παιδιού. Από την άλλη πλευρά, η έννοια του αριθμού είναι μια αφηρημένη έννοια η οποία αποκτήθηκε με εξέλιξη της λογικής σκέψης σε διάφορα στάδια. Με τι γνώσεις και με ποιους προβληματισμούς, για την έννοια του αριθμού και ειδικότερα του μηδενός οι μαθητές του Δημοτικού θα αντιμετωπίσουν την πρόκληση της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα; (Di Leonardo M., Marino & Spagnolo, 1994).

Οι μαθητές για πρώτη φορά εισάγονται στην αρίθμηση στο δημοτικό σχολείο και στη συνέχεια μεταβάλλουν σημαντικά την έννοια του αριθμού, όταν αρχίζουν να μαθαίνουν για τους ρητούς αριθμούς. Καθώς οι μαθητές μετακινούνται προς την άλγεβρα, η κατανόησή τους για τον αριθμό και τις πράξεις που αποκτήθηκαν κατά τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου καθιστά δύσκολο να κατανοήσουν τις μεταβλητές.

Στο βιβλίο της, «*Για τη διδασκαλία των μαθηματικών*» , η Marilyn Burns (2007), περιγράφει τους μαθητές που έχουν αναπτυγμένη την αίσθηση της έννοιας του αριθμού με τον ακόλουθο τρόπο: «Μπορούν να σκέφτονται και να συζητούν ευέλικτα για αριθμούς, να χρησιμοποιούν αριθμούς για να λύσουν προβλήματα, να εντοπίσουν παράλογες απαντήσεις, να καταλάβουν πώς μπορούν να ληφθούν οι αριθμοί ξεχωριστά αλλά και συνδυασμένοι με διαφορετικούς τρόπους , να βλέπουν τις συνδέσεις μεταξύ των πράξεων, να υπολογίζουν νοερά και να κάνουν λογικές εκτιμήσεις»[8].

Η γνώση περιεχομένου από τους εκπαιδευτικούς και ο τρόπος με τον οποίο η γνώση αυτή συνδέεται με αποτελεσματικές παιδαγωγικές θα μπορούσε να ενισχυθεί σημαντικά με την προβολή μαθηματικού περιεχομένου από την οπτική γωνία της

[8]https://mathsolutions.com/making-sense-of-math/number-sense/understanding-number-sense/

«μεγάλης ιδέας» του αριθμού. Αυτό θα επιτρέψει στους εκπαιδευτικούς να κάνουν χρήση των πολλών σχέσεων και συνδέσεων ανάμεσα και μεταξύ αυτών των «μεγάλων ιδεών» και να τους καταστήσει σαφείς στα παιδιά. Είναι σημαντικό να εντοπιστούν τα βασικά στοιχεία για κάθε αριθμό, ώστε οι εκπαιδευτικοί να είναι σε θέση να βοηθήσουν καλύτερα τους μαθητές τους να περάσουν από τη φάση της εμπιστοσύνης στη καταμέτρηση, στη φάση της αξίας της θέσης, και από εκεί στις φάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης και του πολλαπλασιαστικού διαχωρισμού. Χρειάζεται να αναγνωριστεί από την αρχή ότι αυτή η εξέλιξη μέσα από τις ιδέες δεν είναι μια γραμμική διαδικασία, αλλά αναπτυξιακή (Hurst & Hurrell, 2015).

Πολλά από τα προβλήματα των μαθητών στα μαθηματικά γίνονται εμφανή στη μετάβαση στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Οι δυσκολίες των μαθητών οφείλονται στην ελλιπή διδασκαλία και στην αδυναμία των μαθητών να εγκαταλείψουν τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου για τα πιο πολύπλοκα μαθηματικά της μεσαίας και υψηλής βαθμίδας εκπαίδευσης.

Θεσιακή αξία αριθμού

Η θεσιακή αξία των αριθμών είναι μια περίπλοκη διαδικασία (Moeller, Pixner, Zuber, Kaufmann, & Nuerk, 2011). Ένδειξη αυτής της πολυπλοκότητας είναι τα πολλά κριτήρια που είναι απαραίτητο να κατανοηθούν ώστε να αναπτυχθεί η δεξιότητα της κατανόησης της αξίας θέσης. Ο Major (2012) έγραψε για το πώς αυτή η πολυπλοκότητα συχνά καλύπτεται από τη συμπύκνωση όλων των βασικών κριτηρίων σε ένα φαινομενικά απλό οικοδόμημα: το να ορίσουμε την θεσιακή αξία ως έναν τρόπο για να λέμε, να διαβάζουμε και να γράφουμε αριθμούς. Υπογραμμίζεται, ακόμη το γεγονός ότι επειδή οι μαθητές μπορούν συχνά να κάνουν σωστά τις πράξεις λέγοντας, διαβάζοντας και γράφοντας αριθμούς, αυτό μπορεί συχνά να αποκρύπτει το γεγονός ότι δεν είναι σε θέση να γενικεύσουν τις σχέσεις μέσα στο σύστημα θεσιακής αξίας, ένα ζήτημα που αναγνωρίζεται επίσης από πολλούς ερευνητές. Η ανάπτυξη της κατανόησης της αξίας της θέσης έχει αντίκτυπο όχι μόνο στην άμεση επιτυχία των μαθητών κατά τη μετάβαση από μονοψήφιους αριθμούς σε πολυψήφιους αριθμούς, αλλά επίσης έχει επίσης αντίκτυπο στη μελλοντική μαθηματική τους επιτυχία. Οι Ketterlin-Geller & Chard (2011) υποδηλώνουν ότι η θεσιακή αξία είναι θεμελιώδους σημασίας για την τελική ανάπτυξη αλγεβρικών συλλογισμών, ιδιαίτερα της εννοιολογικής κατανόησης, του δεκαδικού συστήματος των αριθμών και την ευχέρεια με τις βασικές ιδιότητες των αριθμών (Hurst &

Hurrell, 2015). Υπάρχουν διάφοροι τρόποι θεώρησης της εξέλιξης της θεσιακής αξίας των αριθμών. Μια άποψη περιγράφεται από τον Ross (1989), ο οποίος ισχυρίστηκε ότι υπήρχαν τέσσερις ιδιότητες του συστήματος αρίθμησης. Υπάρχει η προσθετική ιδιότητα, όπου η τιμή ενός αριθμού καθορίζεται από το άθροισμα των τιμών των μεμονωμένων ψηφίων του. Η ιδιότητα θέσης, όπου η θέση ενός ψηφίου εντός ενός αριθμού καθορίζει την αξία του. Στην δεκαδική αξία, υπάρχει η διαφορά-σχέση δέκα φορών μεταξύ κάθε θέσης και εκείνων που βρίσκονται στα αριστερά και εκείνων που βρίσκονται στα δεξιά. Και τέλος η πολλαπλασιαστική ιδιότητα, όπου η συνολική τιμή ενός ψηφίου καθορίζεται και από τη θέση και από τις τιμές της. Η ανάπτυξη της έννοιας της θεσιακής αξίας γίνεται μέσω τριών φάσεων. Η πρώτη φάση είναι η μοναδιαία τιμή, που είναι η τοποθέτηση του αριθμού στη συμβολοσειρά αριθμών (δηλαδή το 37 είναι μετά τον αριθμό 36). Η δεύτερη φάση είναι η φάση της ποσότητας (δηλαδή το 36 είναι 30 + 6). Αυτή η φάση βασίζεται στην προσθετική σκέψη και χρησιμοποιεί τον τυπικό διαχωρισμό κατά μήκος των γραμμών τιμών θέσης. O Thompson (2009) δήλωσε ότι αυτή η κατανόηση της αξίας της θέσης (του τόπου) είναι ιδιαίτερα σημαντική στην εφαρμογή στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Ο ίδιος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι και για τις τέσσερις πράξεις, τα ψηφία στη στήλη των δεκάδων (και των εκατοντάδων) θεωρούνται ως ποσότητες με τις δικές τους ιδιότητες. Για παράδειγμα ο αριθμός 40 σε αρκετούς μαθητές δεν φαίνεται ότι αποτελείται από τέσσερεις δεκάδες (4 στη στήλη δεκάδων και 0 στη στήλη των μονάδων) ή ακόμα και 4 x 10, αλλά είναι απλά σαράντα. Ο Thompson καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αυτή η φάση της κατανόησης της αξίας της θέσης είναι ιδιαίτερα σημαντική ώστε να διδαχθούν οι απαραίτητοι επίσημοι γραπτοί αλγόριθμοι των πράξεων. Η τρίτη και τελική φάση είναι η κατανόηση της θεσιακής αξίας στην τιμή της στήλης. Αυτό σημαίνει ότι το 36 αναλύεται σε 3 x 10 και 6 x 1. Η κατανόηση αυτή είναι αφενός πολύ σημαντική και κρίσιμη για την επαρκή κατανόηση των περισσότερων γραπτών αλγορίθμων και αφετέρου για την ανάπτυξη της κατανόησης της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ των θέσεων στο σύστημα αριθμών. Η ιδέα της θεσιακής αξίας ίσως δεν είναι τόσο εύκολη όσο φαίνεται, όπως μελέτησαν οι Moeller et al. (2011) και προτείνουν στα παιδιά να εφαρμόζουν αυτόματα τους κανόνες για την τοποθέτηση των δεκάδων και μονάδων στις σωστές θέσεις. Έρευνες των Gervasoni και Sullivan (2007) έδειξαν ότι το 27% των μαθητών της δευτέρας τάξης του δημοτικού αντιμετωπίζουν προβλήματα. Το να είναι ο μαθητής ικανός να τοποθετήσει τους αριθμούς στις σωστές θέσεις είναι σημαντικό, καθώς οι μαθητές που είναι καλύτεροι στο να καθορίσουν ποιοι από αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος, έχουν υψηλότερα επιτεύγματα στα μαθηματικά (Hurst & Hurrell, 2015).

Η θέση των αριθμών στην ευθεία

Η ποικιλία των ορισμών που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία για την αναπαράσταση των αριθμών στην ευθεία αριθμογραμμή παρέχει περαιτέρω στοιχεία για το εύρος των μαθηματικών και διδακτικών εννοιών που σχετίζονται με αυτό το γραφικό αντικείμενο. Ο Devlin (2008) περιγράφει την αριθμογραμμή ως αναπαράσταση της «συνεκτικής και ενοποιημένης μαθηματικής δομής» του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Skemp (2002), «η γραμμή αριθμών είναι εννοιολογική - είναι ένα νοητικό αντικείμενο, αν και συχνά χρησιμοποιούμε διαγράμματα για να μας βοηθήσουν να το αντιληφθούμε». Επιπλέον, η γραμμή των αριθμών είναι άπειρη, στην αντίληψή μας καθώς μπορούμε να σκεφτούμε μια γραμμή αριθμών η οποία πηγαίνει προς το άπειρο. Η έννοια της αριθμοσειράς είναι κάτι έμφυτο και φυσικό, γίνεται αντιληπτή ως νοητικό αντικείμενο, αν και συχνά χρησιμοποιούμε διάφορα διαγράμματα που μας βοηθούν να την αντιληφθούμε καλύτερα (Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Η γραμμή αριθμών είναι κατάλληλη για την υποστήριξη στρατηγικών νοερών υπολογισμών και σκέψεων των μαθητών λόγω της ενυπάρχουσας γραμμικότητας. Τα παιδιά αναγνωρίζουν φυσικά τα σύμβολα σε μια γραμμή αριθμών ως οπτικές αναπαραστάσεις των νοερών εικόνων που έχουν οι περισσότεροι άνθρωποι όταν μαθαίνουν να μετράνε και έτσι αναπτύσσουν κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων. Η αριθμοσειρά είναι πεπερασμένη, ενώ η γραμμή των αριθμών είναι άπειρη. Στη σειρά των αριθμών, οι αριθμοί αρχικά αντιπροσωπεύονται από ένα πλήθος διαστημάτων. Στη γραμμή των αριθμών, οι αριθμοί αντιπροσωπεύονται από σημεία, όχι από διαστήματα. Η έννοια του μοναδιαίου διαστήματος αντικαθιστά έτσι την έννοια του διακριτού αντικειμένου. Οι αριθμοί είναι διακριτά-συγκεκριμένα σημεία σε μια διαδρομή και οι οποιεσδήποτε λειτουργίες τους θεωρήθηκαν ως πράξεις μετακίνησης κατά μήκος της διαδρομής. Η γραμμή αριθμών παρέχει τη διαδρομή και τα άλματα, ή τις διαδικασίες γεφύρωσης, για τις πράξεις. Από μια άλλη οπτική γωνία, οι Lakoff & Nunez (2000) περιγράφουν τη γραμμή αριθμών που μαθαίνει κάποιος στο σχολείο σαν μια μεταφορά αποτελούμενη από ένα εννοιολογικό μείγμα πηγής στον τομέα στόχου στον οποίο οι οντότητες είναι ταυτόχρονα αριθμοί και σημεία. Ο Heefer (2011) εφιστά την προσοχή στις έννοιες που πρέπει να αποδοθούν στα γραφικά στοιχεία των γραμμικών στοιχείων, δηλώνοντας ότι, «η γραμμή αριθμών είναι μια αναπαράσταση αριθμών σε μια ευθεία γραμμή όπου τα σημεία αντιπροσωπεύουν ακεραίους ή πραγματικούς αριθμούς και η απόσταση μεταξύ των σημείων ταιριάζει με την αριθμητική διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων αριθμών». Ο Freudenthal (1983) πηγαίνει ακόμη μακρύτερα και περιγράφει τη γραμμή ως αναπαραστατική λειτουργία από διδακτική άποψη, επισημαίνοντας ότι η γραμμή των αριθμών είναι ταυτόχρονα μια μέτρηση και μια ερμηνεία μέτρησης. Επειδή η γραμμή αριθμών είναι μοντέλο μέτρησης, και όχι μοντέλο καταμέτρησης, οι αριθμοί στην ευθεία των αριθμών είναι παραστάσεις μήκους και όχι απλά σημεία που την προσδιορίζουν (Fuson, 1984). Έτσι, κατά τον προσδιορισμό μιας άγνωστης σημειωμένης θέσης-σημείου σε μια γραμμή αριθμών, η εγγύτητα του άγνωστου από τους γνωστούς αριθμούς είναι σημαντική. Η αριθμογραμμή ως οπτική αναπαράσταση αποτελεί σημαντικό εργαλείο σκέψης και επικοινωνίας για τα Μαθηματικά και έχει ουσιαστική σημασία στην εποχή της πληροφορίας (Diezmann & Lowrie, 2006). Οι Lakoff και Núñez (2000) θεωρούν ότι η δυναμική της μεταφοράς στους μαθητές στην αρχή έχει το ρόλο μιας απλής αναπαράστασης που υποστηρίζει την ανάπτυξη διαδικασιών των αριθμών χωρίς αναφορές στη δομική βάση, στηρίζει όμως την ουσιαστική κατανόηση. Επιπλέον, η παρουσίαση των ιδιαίτερων ιδιοτήτων του μηδενός απαιτεί από τα παιδιά να ανακατασκευάσουν τις γνώσεις τους για ολόκληρο το σύστημα αριθμών, με αναφορά σε εννοιολογικές δομές (Doritou & Gray, 2007). Η γραμμή αριθμών μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ως δομική αναφορά για την κατασκευή συνδέσεων μεταξύ των οπτικών χαρακτηριστικών ενός συγκεκριμένου μοντέλου γραμμής αριθμών και υποκείμενων μαθηματικών σχέσεων και δομών. Στην περίπτωση αυτή, η αναπαραστατική λειτουργία της γραμμής αριθμών μετατοπίζεται από ένα μοντέλο μιας συγκεκριμένης εργασίας σε ένα μοντέλο για συλλογισμό πιο αφηρημένων μαθηματικών εννοιών όπως είναι το μηδέν (Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Σε κάθε έρευνα που αφορά αναπαραστάσεις, ένα σημαντικό ερώτημα είναι: «Τι αντιπροσωπεύει τι και με ποιο τρόπο;» (Kaput, 1998). Έτσι, είναι απαραίτητο να φανεί πώς μια απεικόνιση γραμμής αριθμών οπτικά ενσωματώνει τις ιδιαίτερες πτυχές του σύνθετου ιστού των μαθηματικών εννοιών και της έννοιας του μηδενός ειδικότερα που αποδίδονται στην έννοια του αριθμού, τη δομή των αριθμητικών πράξεων με αριθμούς και τις ιδιότητες πυκνότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Οι Πράξεις

Πέρα από την καταμέτρηση, οι πράξεις που μπορούν να εκτελεστούν με αριθμούς είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Η πρόσθεση και η αφαίρεση αντιπροσωπεύουν φυσικές ενέργειες. Το άθροισμα-συσσωμάτωση συνόλων απεικονίζεται όταν σκεφτόμαστε την πρόσθεση. Ο πολλαπλασιασμός είναι μια αποτελεσματική μέθοδος μέτρησης ανά ομάδες που έχει επίσης μια εικονογραφική αναπαράσταση, ξεκινώντας με μοτίβα για μικρούς αριθμούς. Η διαίρεση είναι η πράξη της μοιρασιάς αλλά είναι σκόπιμο να γίνεται συζήτηση γιατί δεν μπορεί να γίνει διαίρεση με το 0. Η σύντομη απάντηση είναι ότι το μηδέν δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, οπότε κάθε προσπάθεια για να ορίσουμε έναν πραγματικό αριθμό ως τον πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του 0 θα οδηγούσε στην αντίφαση 0 = 1, 2, 3, …. Η διαίρεση είναι η πιο δύσκολη πράξη, κοινωνικά και υπολογιστικά. Όλες οι πράξεις ενισχύουν την έννοια του αριθμού να επεκταθεί. Η άμεση εκτίμηση, και η απαρίθμηση είναι οι αρχές της αριθμητικής. Από τη στοιχειώδη αριθμητική θα γίνει η μετάβαση στην άλγεβρα και από εκεί στα ανώτερα μαθηματικά. Προκειμένου να οδηγηθούμε από την άμεση εκτίμηση αντικειμένων (subitizing) από το ένα έως το τέσσερα, στην απλή αρίθμηση χρειαζόμαστε τους παρακάτω γνωστικούς μηχανισμούς και δεξιότητες. Πρώτον τη συνδυαστική ικανότητα ομαδοποίησης, δηλαδή χρειαζόμαστε το γνωστικό μηχανισμό που μας επιτρέπει να συναρμολογούμε αντιληπτές ή φανταστικές ομάδες σε μεγαλύτερες ομάδες και δεύτερον την συμβολική δεξιότητα, δηλαδή να είμαστε σε θέση να συσχετίζουμε φυσικά σύμβολα ή λέξεις με αριθμούς που είναι εννοιολογικές οντότητες. Από ιστορική άποψη, η άλγεβρα άρχισε με βασικές αριθμητικές δομές. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μεταφέρθηκαν από τους φυσικούς αριθμούς, στην αριθμητική, στους ακέραιους, στους ρητούς και αργότερα στους πραγματικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς.

Οι τέσσερεις αριθμητικές πράξεις και οι ιδιότητες τους ερμηνεύονται από τους γνωσιακούς μηχανισμούς των Lakoff & Nunez, οι οποίοι θεωρούν ότι είναι μεταξύ των βασικών γνωστικών αρχών. Με την ικανότητα σχηματισμού *μεταφορών* γίνεται εννοιοποίηση των πληθικών αριθμών και των αριθμητικών πράξεων κάνοντας αναφορά στις καθημερινές εμπειρίες με ομάδες αντικειμένων, με τις δομές μέρους-όλου με τις αποστάσεις των αντικειμένων μεταξύ τους, με την κίνηση από και προς κάπου, με τη θέση αντικειμένων στο χώρο κλπ. (Lakoff, G., Nunez, 2000). Η αριθμητική ως συλλογή αντικειμένων εννοιοποιεί την πρόσθεση και την αφαίρεση, ουσιαστικά ως πρόσθεση και αφαίρεση συλλογών. Οι πράξεις γίνονται από ένα πεδίο, που χρησιμοποιεί μόνο συλλογές και αντιστοιχίζονται στις πράξεις του άλλου πεδίου που χρησιμοποιεί μόνο αριθμούς (πληθικούς). Δεν υπάρχει ούτε μία μοναδική ξεχωριστή πράξη πρόσθεσης ή αφαίρεσης που να έχει χαρακτηριστικά και από τα δύο πεδία, δηλαδή καμία πράξη που να χρησιμοποιεί ταυτόχρονα στοιχεία και συλλογές. Όσον αφορά όμως τον πολλαπλασιασμό, χρειάζεται να αναφερθούμε ταυτόχρονα σε αριθμούς και συλλογές. Η κατανόηση του πολλαπλασιασμού απαιτεί την εκτέλεση της πράξης «αριθμός φορών μιας συλλογής» (για παράδειγμα 32 X 64 σημαίνει 32 φορές την συλλογή του 64). Ο πολλαπλασιασμός είναι, λοιπόν, γνωσιακά πιο πολύπλοκος από την πρόσθεση και την αφαίρεση γιατί αναφερόμαστε σε αριθμούς και συλλογές ταυτόχρονα. Η μεταφορική μείξη συλλογών αντικειμένων μαζί με αριθμούς, από γνωσιακή άποψη, είναι μια επέκταση της μεταφοράς συλλογής αντικειμένων. Ενδιαφέρον είναι ότι η ισοδύναμη μεταφορική αντίληψη του πολλαπλασιασμού ορίζεται σε σχέση με τη μείξη αριθμός-συλλογή αλλά περιλαμβάνει διαφορετικό τρόπο σκέψης όσον αφορά την εκτέλεση των πράξεων στις συλλογές. Οι μεταφορές για τον πολλαπλασιασμό αντιστοιχίζουν τις ιδιότητες του πεδίου πηγής στο πεδίο στόχο. Η αντιστοίχιση αυτή είναι σημαντικός παράγοντας για την κατανόηση των βασικών ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού. Ο γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να επεκτείνουμε αυτή τη μεταφορά από την πρόσθεση και την αφαίρεση στον πολλαπλασιασμό και κατόπιν στη διαίρεση είναι μια μεταφορική παραλλαγή. Αυτή η παραλλαγή δεν είναι ένας νέος μηχανισμός απλά είναι συνέπεια-επακόλουθο της ύπαρξης μεταφορικών μετασχηματισμών. Κατά τη θεώρηση των αριθμών ως μείγμα αριθμού-φυσικού τμήματος δίνεται η δυνατότητα με αυτή η μεταφορά, να χαρακτηριστούν οι φυσικοί αριθμοί, το μηδέν και τα θετικά κλάσματα (τους ρητούς αριθμούς) ως αποτελούμενα από μέρη-τομείς. Δηλαδή, για κάθε θετικό ρητό αριθμό, αυτή η μεταφορά παρέχει ένα μοναδικό φυσικό τμήμα. Ο σχεδιασμός αυτής της μεταφοράς είναι μονόδρομος. Δεν αναφέρεται ότι σε οποιοδήποτε τμήμα της γραμμής, υπάρχει ένας αντίστοιχος αριθμός. Αλλά εδώ ο συνδυασμός πεδίου πηγής και πεδίου στόχου υπερβαίνει τη μεταφορά και δημιουργεί νέες συνεπαγωγές και συμπεράσματα. Όταν σχηματίζεται ένα μείγμα φυσικών τμημάτων και αριθμών, που περιορίζονται από τη μεταφορά μονάδων μέτρησης, στη συνέχεια μέσα στο μείγμα υπάρχει μια αντιστοιχία ενός προς ένα μεταξύ φυσικών τμημάτων και αριθμών. Η μοιραία πρόκληση είναι αυτή: Λαμβάνοντας υπόψη ένα σταθερό μήκος μονάδας, έπεται ότι για κάθε φυσικό τμήμα υπάρχει ένας αριθμός. Το μηδέν είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στο φυσικό τμήμα που δεν έχει μήκος. Ιδιαίτερο λοιπόν ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της διαίρεσης ενός αριθμού με το μηδέν, γιατί καταδεικνύει ότι δεν υπάρχει επέκταση της μεταφοράς της κίνησης ή οποιασδήποτε άλλης θεμελιώδους μεταφοράς, η οποία να επιτρέπει τη διαίρεση με το μηδέν. Η σύλληψη της διαίρεσης με το μηδέν δεν μπορεί να γίνει ούτε με τις θεμελιώδεις μεταφορές ούτε με την κλειστότητα των πράξεων της αριθμητικής, σύμφωνα με την οποία το αποτέλεσμα της διαίρεσης αριθμού με το μηδέν θα έπρεπε να δώσει ένα καθορισμένο αποτέλεσμα. Προκειμένου να διαιρέσουμε έναν αριθμό α (μια συλλογή) με το μηδέν θα πρέπει να διασπάσουμε - να χωρίσουμε τον α σε υποσυλλογές μηδενικού μεγέθους- δηλαδή σε έναν μοναδικό, απολύτως καθορισμένο αριθμό υποσυλλογών ώστε να εξαντληθεί ο αριθμός-συλλογή α. Η έλλειψη διαιρετότητας των αριθμών με το μηδέν αποτελεί συνέπεια της έλλειψης οποιασδήποτε επέκτασης των τεσσάρων θεμελιωδών μεταφορών η οποία να είναι και συνεπής με τους νόμους της αριθμητικής και να ικανοποιεί την κλειστότητα, δηλαδή το αποτέλεσμα να είναι μοναδικός και απολύτως καθορισμένος αριθμός.

Ο Watanabe (2003) μελέτησε τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού στην Ιαπωνία και διαπίστωσε ότι ο πολλαπλασιασμός με το μηδέν διδάσκεται στους μαθητές μετά την τρίτη τάξη στο δημοτικό σχολείο, όταν έχει ήδη διδαχθεί η προπαίδεια των αριθμών από το ένα έως το εννέα. Ένας πιθανός λόγος για αυτό είναι ότι παρόλο που οι μαθητές μπορούν εύκολα να μάθουν να πολλαπλασιάζουν με το μηδέν, μπορεί να μην θεωρούν όμως ότι αυτό είναι μια πολλαπλασιαστική κατάσταση (Levenson, Tsamir, & Tirosh, 2007). Οι Blake & Verhille (1985) υποστήριξαν ότι αντίληψη ότι «το μηδέν είναι τίποτα» αποτρέπει τη βαθιά διδασκαλία της σύνθετης δομής του. Αυτή η αντίληψη, φαίνεται ότι παραμένει και στους μαθητές του γυμνασίου. Ακόμη και δάσκαλοι δημοτικού σχολείου συχνά χρησιμοποιούν για το μηδέν τις εκφράσεις «τίποτα» ή «κανένα» ή κάποια συνώνυμα τους (Blake, R., Verhille, 1985). Η κατανόηση του μαθηματικού συμβόλου είναι η συσχέτισή του με μια έννοια, δηλαδή με κάτι που έχει νόημα στο ανθρώπινο γιγνώσκειν. Στα ενσώματα μαθηματικά τα μαθηματικά σύμβολα έχουν νόημα λόγω των μαθηματικών εννοιών που αποδίδουν. Οι δυσκολίες με το μηδέν ακολουθούν τους μαθητές μέχρι το λύκειο, όπου μπερδεύονται ακόμη περισσότερο με την έννοια της κλίσης της οριζόντιας ευθείας, που είναι μηδέν. Για τους περισσότερους μαθητές αυτό ερμηνεύεται ότι δεν υπάρχει κλίση, όπως ακριβώς ένας επίπεδος δρόμος, χωρίς λόφους αναφέρεται ότι δεν έχει κλίση. Στα μαθηματικά όμως χωρίς κλίση είναι η κατακόρυφη ευθεία, της οποίας η κλίση θεωρείται ότι είναι απροσδιόριστη. Η χρήση της καθημερινής γλώσσας δημιουργεί μια επιφανειακή δομή για το μηδέν που ουσιαστικά εμποδίζει τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του. Μία μέθοδος για την προσπάθεια οικοδόμησης της εννοιολογικής κατανόησης του πολλαπλασιασμού είναι η πολλαπλασιαστική διάταξη, ας σημειωθεί ότι και άλλες αναπαραστάσεις, όπως η γραμμή αριθμών, είναι απαραίτητο επίσης να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη βαθιάς κατανόησης της θεσιακής αξίας. Ο Moseley (2005) θεωρεί ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών υποδεικνύει ότι οι μαθητές που βιώνουν μια ευρύτερη σειρά από αναπαραστάσεις έχουν αυξημένη κατανόηση των εννοιών. Ομοίως, οι Young-Loveridge (2005) περιέγραψαν την ανάγκη να έχουν πρόσβαση τα παιδιά και σε στρατηγικές που βασίζονται σε μέτρηση που προέρχονται από γραμμές αριθμών και από στρατηγικές που βασίζονται στη συλλογή χρησιμοποιώντας σύνολα (Hurst & Hurrell, 2015).

Οι Carpenter, Levi & al (2000) υποστήριξαν ότι οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν την αριθμητική με τρόπους που όχι μόνο ενισχύουν την αριθμητική, αλλά και παρέχουν μια βάση για την άλγεβρα. Συγκεκριμένα, υποστήριξαν ότι από την πρώτη και τη δευτέρα τάξη του δημοτικού σχολείου οι γνώσεις των παιδιών σχετικά με την έννοια του αριθμού αντιπροσώπευαν την ικανότητα τους να κάνουν και να δικαιολογούν γενικεύσεις σχετικά με την υποκείμενη δομή και τις ιδιότητες της αριθμητικής. Για παράδειγμα, όπως και διαισθητικά γνωρίζουν ότι «3 + 7» είναι το ίδιο με «7 + 3», οι Carpenter και Levi διαπίστωσαν ότι μερικοί από τους μικρούς μαθητές έδειξαν ότι κατάλαβαν ότι αυτή η σχέση ισχύει για όλους αριθμούς. Αυτή η ικανότητα των παιδιών να κατανοήσουν τις γενικές ιδιότητες της αριθμητικής με όρους της έννοιας του αριθμού έχει οριστεί από τους Fuji & Stephens (2001) ως κατανόηση των «οιονεί-μεταβλητών, ψευδομεταβλητών, ημι-μεταβλητών». Η έκφραση αυτή σημαίνει μια αριθμητική παράσταση ή μια ομάδα παραστάσεων που υποδηλώνουν μια υποκείμενη μαθηματική σχέση η οποία παραμένει αληθής ανεξάρτητα από τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται (Fujii & Stephens, 2001). Οι Fuji & Stephens (2001) δημιούργησαν ψευδομεταβλητές στις αριθμητικές πράξεις μεταξύ αριθμών για να υποδείξουν μια υποκείμενη μαθηματική σχέση που παραμένει αληθής ανεξάρτητα από την αξία των αριθμών. Το να αποφασίσουν οι μαθητές το αποτέλεσμα χωρίς κανέναν υπολογισμό είναι μια μορφή σχεσιακής σκέψης. Αφού εκτιμήσουν την αριθμητική δομή της πρότασης, να παρατηρήσουν την πρώτη αφαίρεση και στη συνέχεια την πρόσθεση της ίδιας ποσότητας. Θα μπορούσε να είναι η εκδήλωση ενός θεμελιώδους στοιχείου η συνειδητοποίηση ότι η πρόσθεση και στη συνέχεια η απομάκρυνση=αφαίρεση δεν φέρει καμία αλλαγή (Lakoff, G., Nunez, 2000). Η έννοια της ψευδομεταβλητής παρέχει ένα ουσιαστικό αντιστάθμισμα στην κατανόηση της άλγεβρας στο στοιχειώδες και κατώτερο επίπεδο όπου η έννοια του άγνωστου συχνά κυριαρχεί στη σκέψη των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Όπως επισημαίνει ο Radford (1996) «Ενώ το άγνωστο είναι ένας αριθμός που δεν αλλάζει, η μεταβλητή προσδιορίζει μια ποσότητα της οποίας η αξία μπορεί να αλλάξει». Το ίδιο θέμα, ότι δηλαδή η μεταβλητή είναι μια έννοια που μπορεί να μεταβάλλεται απασχολεί και τους Schoenfeld και Arcavi (1988). Η χρήση αριθμητικών προτάσεων με παραστάσεις ψευδομεταβλητών μπορεί να παρέχει μια εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής στα πρώτα μαθήματα της άλγεβρας. Σε αυτή την προοπτική, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν γενικευμένες αριθμητικές εκφράσεις, εστιάζοντας την προσοχή τους στη δομή των εκφράσεων, εντοπίζοντας και συζητώντας την αλγεβρική γενίκευση πριν από την εισαγωγή της επίσημης άλγεβρας (Mestre, C., Oliveira, 2012).

Το Μηδέν γνωσιακά και ψυχολογικά.

Το μηδέν έχει γίνει ένας αριθμός μέσω της μεταφορικής επέκτασης των φυσικών αριθμών. Υπενθυμίζουμε ότι σε πολλούς πολιτισμούς σε όλο τον κόσμο, δεν υπάρχει ο αριθμός μηδέν και καμία τέτοια «αλήθεια». Αυτή η κατάσταση επικρατούσε και στα δυτικά μαθηματικά για πολλούς αιώνες.

Η εμφάνιση του μηδενός, ως αριθμητικής έννοιας στα μαθηματικά, έγινε δυνατή όταν κατάφερε να ταξιδέψει ελεύθερα στις κοσμολογικές και φιλοσοφικές έννοιες. Ωστόσο, αυτό εξηγεί την επακόλουθη εξάπλωσή του σε άλλους πολιτισμούς. Μια πιθανή εξήγηση για την επιτυχία αυτή είναι η στοιχειώδης-ελάχιστη παραβίαση των διαισθητικών προσδοκιών της αριθμητικής μονάδας. Αν και η αριθμητική μονάδα δεν είναι σε θέση να αντιπροσωπεύει το μηδέν, το μηδέν μπορεί να γίνει μέρος της πραγματικότητας, επειδή η απουσία μεγέθους μπορεί να παρασταθεί εύκολα στην απουσία στοιχείων στον πραγματικό κόσμο. Αυτή η αντίθετη με την κοινή λογική αλλά ισχύουσα κατάσταση δίνει στο μηδέν ένα πλεονέκτημα κατανόησης, όπως απεικονίζεται σε μια σειρά πειραμάτων που διερεύνησαν για την κατανόηση του μηδενός στα μικρά παιδιά οι Wellman & Miller (1986). Όπως αναμενόταν, η ανάπτυξη της έννοιας του μηδενός είναι διαφορετική από αυτή των άλλων φυσικών αριθμών. Τα μικρά παιδιά προσχολικής ηλικίας απλώς μεταχειρίζονται το μηδέν ως συνώνυμο για το τίποτα, δεν συνειδητοποιούν ότι είναι μια αριθμητική έννοια. Σε εργασίες σύγκρισης μεγέθους, είναι εξίσου πιθανό να πουν ότι το 0 είναι μεγαλύτερο από το 3 ή το αντίστροφο. Μέχρι το τέλος των προσχολικών ετών, ωστόσο, τα περισσότερα παιδιά καταλαβαίνουν ότι το μηδέν είναι μια αριθμητική έννοια και το αναγνωρίζουν ως τον μικρότερο φυσικό αριθμό. Είναι ενδιαφέρον ότι οι αρχικές δυσκολίες φαίνεται να διευκολύνουν την κατανόηση των αφηρημένων λειτουργικών κανόνων για το μηδέν σε σύγκριση με άλλους αριθμούς. Όταν οι μαθητές της πρώτης τάξης του δημοτικού αντιμετωπίζουν μια αφηρημένη πράξη πρόσθεσης ή αφαίρεσης, η επιτυχία τους είναι σημαντικά υψηλότερη για τις ασκήσεις που αφορούν το 0 και όχι για εκείνες τις ασκήσεις που αφορούν άλλους μικρούς αριθμούς, όπως το 1 ή το 2. Για παράδειγμα, κρίνουν σωστά ότι α + 0 = α, αλλά βρίσκονται σε αμηχανία όταν καλούνται να κρίνουν αν η πρόταση α + 2 = α είναι ψευδής ή αληθής. Ως εκ τούτου, η πρόωρη κατανόηση των αλγεβρικών κανόνων για το μηδέν φαίνεται να αναπτύσσεται καλύτερα σε σύγκριση με τους άλλους μικρούς αριθμούς. Ο λόγος για αυτό το πλεονέκτημα είναι σαφής : οι περισσότεροι μαθητές δηλώνουν ότι το μηδέν είναι ένας ιδιαίτερος αριθμός με ιδιαίτερες ιδιότητες. Έτσι, το μηδέν ως αριθμητική έννοια υπήρξε το αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης δημιουργίας- κατασκευής, επειδή είναι αντιφατικό. Ωστόσο, όταν δημιουργήθηκε, έγινε ελκυστικό ακριβώς επειδή παραβιάζει οντολογικές προσδοκίες (De Cruz, 2006).

Οι Lakoff & Nunez, στη θεώρησή τους της αριθμητικής ως *μεταφοράς συλλογής αντικειμένων* το μηδέν είναι η κενή συλλογή (το κενό σύνολο), στη *μεταφορά* της αριθμητικής ως *κατασκευής αντικείμενου*, είναι η έλλειψη ενός αντικειμένου, στη *μεταφορά* της αριθμητικής ως *μονάδας μέτρησης*, είναι το αρχικό σημείο της μέτρησης και τέλος στην *μεταφορά* της αριθμητικής ως *κίνησης στην γραμμή των αριθμών*, το μηδέν είναι η αρχή της κίνησης. Στη *μεταφορά συλλογής αντικειμένων*, προσθέτοντας μια συλλογή n αντικειμένων σε μια κενή συλλογή παράγεται μια συλλογή με n αντικείμενα (n + 0 = n). Στην *μεταφορά με κίνηση* κάνοντας n βήματα από την αρχή και στη συνέχεια κανένα βήμα υπάρχει παραμονή στο ίδιο σημείο σαν να έγιναν τα ίδια βήματα από την αρχή. Δεδομένης της κατανόησης του μηδενός και της κατανόησης της λειτουργίας του στην πρόσθεση και το αποτέλεσμά της, μόνο τότε μπορούμε να εννοιοποιήσουμε και να θεωρούμε το n + 0 = n ως αληθές.

Κάθε αριθμός είναι μια αφηρημένη έννοια, μια αναγνώριση ότι οι συλλογές μπορεί να έχουν κάτι κοινό, ακόμη και αν τα στοιχεία των συλλογών είναι πολύ διαφορετικά. Ο αριθμός 2 είναι η κοινή ιδιότητα όλων των συνόλων που περιέχουν ένα ζεύγος, ο αριθμός 3 όλων των συνόλων που περιέχουν ένα τριπλό, και ούτω καθεξής. Ωστόσο, αν και η έννοια είναι αφηρημένη και απαιτητική, οι θετικοί ακέραιοι αντιστοιχούν στα πραγματικά «πράγματα» που μπορούν να απαριθμηθούν. Ως εκ τούτου, πρώτα μαθαίνουμε να μετρούμε ένα μικρό αριθμό ειδών και αργότερα να χρησιμοποιούμε τη διαδικασία καταμέτρησης για να κατανοήσουμε τους άπειρους θετικούς αριθμούς. Το μηδέν, ωστόσο, δεν ταιριάζει σε αυτή την σειρά-ρουτίνα. Ενώ η διαδικασία καταμέτρησης βασίζεται στην παραδοχή ότι υπάρχει κάτι για να μετρηθεί, ένα σύνολο χωρίς στοιχεία δεν μπορεί να εκτιμηθεί με την καταμέτρηση. Κατανοώντας ότι το μηδέν εξακολουθεί να είναι μια συλλογή (έστω και κενή) και μια αριθμητική έννοια, απαιτεί την ανάπτυξη αφηρημένης σκέψης που δεν έχει σχέση με την εμπειρία. Το πρόβλημα είναι ότι το «τίποτα» να γίνει «κάτι». Η απουσία στοιχείων να γίνει μια διανοητική κατηγορία - ένα μαθηματικό αντικείμενο. Η αντανάκλαση αυτής της πνευματικής πρόκλησης, στοίχισε σε μεγάλο τμήμα της ανθρώπινης ιστορίας ώστε να αναγνωρίζεται και να εκτιμάται το μηδέν. Αυτός ο πολιτιστικός δισταγμός αντικατοπτρίζεται σε μια παρατεταμένη οντογενετική κατανόηση του μηδενός στα παιδιά. Πρόσφατες μελέτες στην ανθρώπινη ιστορία, στην αναπτυξιακή ψυχολογία, στη γνωσιακή επιστήμη και στη νευροφυσιολογία παρέχουν αποδεικτικά στοιχεία ότι η ανάπτυξη της έννοιας του μηδενός είναι δύσκολη και περνάει από τέσσερα στάδια κατανόησης και αποδοχής. Στο πρώτο και πιο πρωτόγονο στάδιο, η απουσία ενός ερεθίσματος («τίποτα») αντιστοιχεί σε μια (ψυχική / νευρολογική) κατάσταση αδράνειας χωρίς συγκεκριμένο σύμβολο. Στο δεύτερο στάδιο, η απουσία διέγερσης είναι αντιληπτή ως μια σημαντική συμπεριφορά αλλά η εκπροσώπησή της παραμένει χωρίς ποσοτική σχέση. Στο τρίτο στάδιο, το τίποτα αποκτά ποσοτική έννοια και αντιπροσωπεύεται ως κενό- άδειο σύνολο που αποκτά θέση στο χαμηλότερο σημείο της αριθμητικής σειράς ή της αριθμογραμμής. Τέλος, στο τέταρτο και τελευταίο στάδιο η αναπαράσταση κενών συνόλων επεκτείνεται για να γίνει ο αριθμός μηδέν. Αυτά τα διαφορετικά στάδια των μηδενικών εννοιών αντανακλούν τα προχωρημένα επίπεδα πνευματικής αφαίρεσης και ανοίγουν το δρόμο για την πλήρη θεωρία των αριθμών (Nieder, 2016). Η κατανόηση του μηδενός, λοιπόν, ως ποσότητας έρχεται αργότερα στη ζωή και φαίνεται να λειτουργεί ως γέφυρα προς την πραγματική έννοια του μηδενός ως αριθμού και της επίσημης αλγεβρικής κατανόησης.

Το μηδέν συμμετέχει στις πράξεις με τους φυσικούς αριθμούς. Δεν εμφανίζονται οι μοναδικές ιδιότητες του αλλά και ούτε υποψιάζονται οι μικροί μαθητές ότι το μηδέν θα γίνει το όχημα που θα τους οδηγήσει μέσα από την άλγεβρα στα ανώτερα μαθηματικά και στην αφηρημένη σκέψη. Οι υπολογισμοί με το μηδέν αποτελούν πρωταρχικό εμπόδιο στα μαθηματικά για τους μαθητές σε όλα τα επίπεδα ανάπτυξης (Semenza, Grana, & Girelli, 2006). Η κατανόηση, τώρα του συμβόλου του μηδενός από τα παιδιά αναπτύσσεται σε μια σειρά από στάδια (Wellman & Miller, 1986). Τα παιδιά πρώτα μαθαίνουν να αναγνωρίζουν το σύμβολο για το μηδέν, χωρίς να κατανοούν τι σημαίνει αυτό το σύμβολο. Αργότερα, τα παιδιά μαθαίνουν ότι το μηδέν αντιπροσωπεύει το «κανένα» ή το «τίποτα», αλλά, εξακολουθούν να αποτυγχάνουν στο να αναγνωρίσουν ότι το μηδέν είναι μια αριθμητική τιμή που καταλαμβάνει μια θέση στην αριθμητική συνέχεια. Για παράδειγμα, όταν παιδιά ρωτήθηκαν, «ποιο είναι μικρότερο, το μηδέν ή το ένα;» τα παιδιά συχνά επιμένουν ότι το *ένα* είναι ο μικρότερος αριθμός (Wellman & Miller, 1986). Τελικά, τα παιδιά μαθαίνουν πρώτα τη σχέση μεταξύ του μηδενός και των άλλων αριθμών, και κατόπιν εκτιμούν ότι το μηδέν είναι μικρότερο από ένα. Είναι ενδιαφέρον ότι, η σύγχυση γύρω από το μηδέν (ως ιδέας) δεν συμβαίνει μόνο στα παιδιά αλλά ακόμη και σε μορφωμένους ενήλικες οι οποίοι έχουν δυσκολία στη σύλληψη της έννοιας του μηδενός ως αριθμό, και της λειτουργίας του σε μαθηματικούς υπολογισμούς (Merritt D & Brannon, 2013).

Στην πρόσθεση, στην αφαίρεση αλλά και στον πολλαπλασιασμό το μηδέν είναι συνώνυμο με το «τίποτα». Δηλαδή κάτι που δεν χρειάζεται να μας απασχολήσει γιατί αντιπροσωπεύει, σαν σύμβολο, την ανυπαρξία.[$\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha - 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$]. Λίγο αργότερα αποκτά μια θέση στην αριθμογραμμή και γίνεται μάλιστα σημείο αφετηρίας για τους φυσικούς και ρητούς αριθμούς ενισχύοντας τη σχέση διάταξης [$\alpha - \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha < \beta$]. Ενισχύει πραγματικά τη θέση του με την επέκταση της αριθμογραμμής προς τα αριστερά με την γένεση - εφεύρεση - δημιουργία των αρνητικών αριθμών. Ορίζει τους αντίθετους αριθμούς [$\alpha + (-\alpha) = 0$] αλλά και ταυτόχρονα αντικαθιστά την αφαίρεση με την πρόσθεση του αντίθετου. Πόσο εύκολη είναι αυτή η διαδρομή από το «τίποτα» στην αρχή για «όλα» ; Πως γίνεται αυτή η μετάβαση στις μαθήτριες και στους μαθητές; Φυσικά οι μοναδικές ιδιότητες του, προσδίδουν στο μηδέν νέα επίθετα. Ουδέτερο στοιχείο [$\alpha + 0 = \alpha$], απορροφητικό στοιχείο [$\alpha \cdot 0 = \beta \cdot 0 = \ldots = 0$]. Η επιστημονική αυστηρότητα ορίζει το μηδέν ως εκθέτη α^0=1, και ως παραγοντικό $0\,! = 1$, ολοκληρώνει έτσι την αρμονία των μαθηματικών, άρει αδιέξοδα ερμηνευτικά και αφήνει μόνο ένα το $\frac{\alpha}{0}$. Ορίζει πεδία ορισμού, όρια και συνέχεια στις συναρτήσεις, ισοδυναμίες ρητών παραστάσεων, πλαισιώνει δηλαδή το χώρο όπου μπορούμε να δουλέψουμε με ασφάλεια και να αναπτύξουμε πολλά πεδία έρευνας. Ενισχύει τη κατανόηση της συμβολικής γλώσσας της άλγεβρας και την κάνει να αποκτά νόημα ως αφαιρετική και αφηρημένη σκέψη. Η κατανόηση του μηδενός όμως, ως φυσικού αριθμού, απαιτεί την κατανόηση και μιας σημαντικής διάκρισης μεταξύ των απόλυτων και τακτικών αριθμών. Στην Γλωσσολογία οι απόλυτοι αριθμοί είναι επίθετα που χρησιμοποιούνται για την ολογράφως έκφραση των αριθμών και τον ολογράφως προσδιορισμό ποσότητας, ενώ οι τακτικοί αριθμού είναι επίθετα τα οποία αντιπροσωπεύουν αριθμητική θέση ή τοποθεσία. Όταν λοιπόν κάνουμε καταμέτρηση, πραγματοποιούμε μια διάταξη του συνόλου των αριθμών και προσδιορίζουμε έτσι τη θέση στην οποία βρίσκονται οι (τακτικοί) αριθμοί. Όταν όλα τα στοιχεία έχουν προσδιοριστεί τότε μεταφράζουμε τον τελευταίο αριθμό της απαρίθμησης ως έναν απόλυτο αριθμό. Εξαιτίας αυτού το μηδέν είναι πιο δύσκολο να κατανοηθεί σε σχέση με τους άλλους απόλυτους αριθμούς, διότι δεν αντιστοιχεί σε κανέναν τακτικό αριθμό.

2. 3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Ο Glaser (1981) αναγνώρισε δύο ιστορικές αντιλήψεις για το μηδέν, α) το μηδέν ως αυθύπαρκτο που νοείται ως το κατώτατο σημείο, κάτω από το οποίο δεν υπάρχει τίποτα, και β) το μηδέν ως προσδιοριστικό σημείο, ένα αυθαίρετο σημείο σε έναν άξονα με προσανατολισμό στον οποίο υπάρχουν δύο κατευθύνσεις. Παρά το γεγονός ότι είναι διαφορετικές, αυτές είναι οι δύο αντιλήψεις του μηδενός που δίνουν τη θέση του στη γραμμή των αριθμών. Μια μελέτη 40 μαθητών ηλικίας 13-15 ετών, με πράξεις προσθέσεων και αφαιρέσεων χρησιμοποιώντας μια διαβαθμισμένη κλίμακα αριθμών, αποκάλυψε ότι κάποιοι μαθητές ερμηνεύουν το μηδέν ως προσδιοριστικό σημείο στη γραμμή των αριθμών, ενώ κάποιοι άλλοι, αποφεύγαν το μηδέν (Gallardo & Hernández, 2005). Οι μαθητές είτε δεν συμβόλιζαν το μηδέν καθόλου, είτε το συμβόλιζαν αλλά το αγνοούσαν κατά τη διάρκεια των εργασιών. Για ορισμένους μαθητές οι αριθμοί ένα (1) και μείον ένα (-1) θεωρήθηκαν αρχή για τη γραμμή των αριθμών. Ακόμη και μεταξύ των μαθητών που αποδέχθηκαν τους αρνητικούς αριθμούς υπήρχαν κάποιοι οι οποίοι δεν αποδέχονται το μηδέν ως ένα αριθμό. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι παρά την αναγνώριση της αρνητικότητας των αριθμών, αυτό δεν συνεπάγεται κατ’ ανάγκη την αναγνώριση του μηδενός ως αριθμό. Οι Gallardo και Hernández (2005) μελέτησαν αντιλήψεις για το μηδέν σε μαθητές ηλικίας 12 και 13 ετών και βρήκαν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν πέντε έννοιες για το μηδέν:

1. τίποτα - μηδέν: αυτό που δεν έχει καμία αξία
2. υπονοούμενο - μηδέν: αυτό που χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια των εργασιών, αλλά δεν εμφανίζεται εγγράφως
3. συνολικό - μηδέν: το αποτέλεσμα του αθροίσματος των αντίθετων αριθμών
4. αριθμητικό - μηδέν: αυτό που προκύπτει ως αποτέλεσμα των αριθμητικών πράξεων
5. αλγοριθμικό - μηδέν: αυτό που προκύπτει ως λύση μιας εξίσωση (Kilhamn, 2011).

Ο Steinbring (1998), εμφανίζει μια πρόσθετη έννοια του μηδενός σε σχέση με άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Το μηδέν είναι το σύνολο όλων των πιθανών ζευγών των αντίθετων αριθμών. Μια άλλη άποψη για την έννοια του μηδενός είναι ο ρόλος του ως σημείο αναφοράς (αριθμός αναφοράς) αλλά και ως ένας δείκτης συμμετρίας. Σε μια μελέτη, των Tsang & Schwartz, (2009) στην οποία ζητήθηκε από ενήλικες να δώσουν γρήγορα το μέσον δύο αριθμών διαπιστώθηκε ότι βρήκαν το μέσο πιο γρήγορα, εάν το ζευγάρι των αριθμών ήταν συμμετρικό γύρω από το μηδέν ή εάν ο ένας αριθμός ήταν το μηδέν. Τα προβλήματα αριθμών που ήταν απομακρυσμένοι από αυτή τη συμμετρία λύθηκαν πιο αργά. Οι συγγραφείς κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι ενήλικες θεωρούν ότι το μηδέν είναι δομικός πυλώνας, για την διάταξη των αριθμών όταν εμφανίζεται η συμμετρία.

Για να συνοψίσουμε: η αποδοχή της ύπαρξης του μηδενός και των αριθμών μικρότερων από το μηδέν, η διάκριση μεταξύ δεκαδικών και αρνητικών αριθμών, ενισχύει την αντίληψη για τη δυαδικότητα του μηδενός , βλέποντας τους αριθμούς και τις σχέσεις, με διάκριση μεταξύ των μεγεθών και την αξία των αριθμών, εντοπίζοντας αρνητικούς αριθμούς προς τα αριστερά χώρου και ενοποιώντας τη γραμμή των αριθμών. Αυτά είναι μερικά από τα χαρακτηριστικά που τονίζονται από τους ερευνητές ως σημαντικά στη διαδικασία της κατανόησης της έννοιας των αρνητικών αριθμών.

2.3.1. Μαθησιακά - Διδακτικά Ζητήματα

Στο πέρασμα από την αριθμητική σκέψη στον αλγεβρικό συλλογισμό ένα σημαντικό ρόλο παίζει η μελέτη σε βάθος των επιστημολογικών εμπόδιων. Η εξατομίκευση των εμποδίων είναι ένα πολύ μεγάλο πεδίο της έρευνας και απαιτεί διαφορετικές επιβεβαιώσεις, που υποστηρίζονται από ιστορικό-επιστημολογικές και πειραματικές έρευνες, από τη μελέτη διδακτικών καταστάσεων και από τα ίδια εμπόδια. Στη παρούσα μελέτη, θα εξεταστούν τα σχετικά εμπόδια που αφορούν το «μηδέν» και θα γίνει προσπάθεια να εντοπιστούν οι πιθανές αιτίες. Τα προβλήματα αφορούν στο ότι το μηδέν λειτουργεί με διττό τρόπο αφενός κινείται ανάμεσα στο εσωτερικό του ρόλο, είναι αριθμός ανάμεσα σε αριθμούς και αφετέρου στον εξωτερικό του ρόλο, είναι το μετα-σύμβολο που δίνει αρχή στη δραστηριότητα της μέτρησης.

Ο Brousseau (1983) ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά σε κάποιο πλαίσιο μιας ορισμένης γνωστικής περιοχής και επομένως εδραιώνεται, αλλά αποτυγχάνοντας να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ' ένα άλλο πλαίσιο οδηγεί σε αντιφάσεις. Τα εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης είναι αυτά από τα οποία κάποιος ούτε μπορεί ούτε θα έπρεπε να ξεφύγει, εξαιτίας του εποικοδομητικού τους ρόλου στην αναζήτηση της γνώσης Brousseau. Βρίσκονται στην ίδια την πράξη του γιγνώσκειν, ενδόμυχα, όπου εμφανίζονται οι διαταραχές ως ένα είδος λειτουργικής αναγκαιότητας. Βρίσκονται επίσης από μόνα τους στην ιστορία των εννοιών (Θωμαΐδης, 2014).

Το μηδέν δεν είναι ένας αριθμός όπως και οι άλλοι, σηματοδοτεί ένα διάλειμμα, που εμπίπτει στην ανυπαρξία. Το μηδέν μπορεί κάλλιστα να ενσωματωθεί συμβατικά στη σειρά των αριθμών. Στην πραγματικότητα, δεν είναι ένας αριθμός όπως οι άλλοι, είναι μάλλον ένα κενό στην αρχή αυτής της σειράς. Το μηδέν είναι «σημάδι» ή είναι «σύμβολο»; Είναι ένα «σημάδι» που, κατά συνθήκη, έχει ως στόχο να αντιπροσωπεύσει ένα αντικείμενο, μια αναπαράσταση ή μια έννοια. Το σημάδι και το σύμβολο αντιστοιχούν στη σαφή διαφοροποίηση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινόμενου, και είναι όργανα της συμβολικής σκέψης. Αλλά το σημάδι περαιτέρω σημαίνει και το σύμβολο, επειδή το σύμβολο υποδηλώνει μια σχέση, ομοιότητας μεταξύ του σημαίνοντος με το σημαινόμενο, ενώ το σημάδι είναι αυθαίρετο και βασίζεται αναγκαστικά σε μια σύμβαση (Michelot, 1966).

Το μηδέν, 0, αυτή η καμπύλη γραμμή, κλειστή, που περικλείει μια κενή περιοχή, φαίνεται να προτείνει την ιδέα του «κενού». Είναι πιθανό ότι στον τόπο καταγωγής του, η γραφή του μηδενός έχει σχεδιαστεί για να μοιάζει με ό, τι αυτό σημαίνει. Θα παρατηρήσουμε επίσης ότι ο αριθμός αυτός δεν μοιάζει με κανέναν άλλο. Όλοι οι άλλοι αριθμοί περισσότερο ή λιγότερο είναι πιο περίπλοκοι γραφικά, αλλά κανένας δεν μοιάζει με το μηδέν το οποίο με την απλότητά του στη μορφή, δηλώνει αυτό που είναι. Παρά αυτήν την ομοιότητα μεταξύ σημαίνοντος και σημαινόμενου, το μηδέν θεωρείται γραφικά ως ένα σημάδι και όχι ως ένα σύμβολο επειδή η λειτουργία του δεν είναι το «τίποτα», σημαίνει «τίποτα» είναι το σύμβολο που εκφράζει μηδενική ποσότητα. Ο ρόλος αυτός φαίνεται να είναι ασυνέπεια της έννοιας του μηδενός, που θεωρείται σημάδι μιας μηδενικής ποσότητας. Σε έναν αριθμό όπως το 304, το μηδέν δεν είναι ένα γραφικό σημάδι που προορίζεται να γεμίσει ένα κενό, αλλά αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μηδενικές δεκάδες (Michelot, 1966). Το μηδέν αντιπροσωπεύει την μη παρουσία των 1,2 ,..., 9 και την ίδια στιγμή παράγει το ατέρμονη εξέλιξη του συνόλου των αριθμών (Di Leonardo M., Marino & Spagnolo, 1994).

2.3.2. Μαθητές

Δεδομένης της σημαντικής επίδρασης του μηδενός στα μαθηματικά, είναι εκπληκτικό το ότι δεν γίνεται ακόμη απόλυτα κατανοητή από μαθητές, μαθήτριες αλλά και ενήλικες. Ακόμη και εάν υπάρξει ένας βαθμός κατανόησης, αυτή είναι περιορισμένη κατανόηση και με πολλές παρανοήσεις που έχουν σχέση με το μηδέν. Οι Inhelder & Piaget (1964) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά κάτω από την ηλικία των 10 ή 11 δεν αναγνωρίζουν το μηδενικό σύνολο (δηλαδή, ένα σύνολο του οποίου το χαρακτηριστικό είναι η έλλειψη στοιχείων). Έρευνες των Pasternack (2003), Evans (1983), Baroody et. al. (1983) εντόπισαν από έρευνες ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν το μηδέν ως αριθμό ή το βλέπουν σαν ένα μόνο μέρος του συμβόλου για τον αριθμό δέκα. Στην πραγματικότητα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι το μηδέν δεν είναι πραγματικά αριθμός ... δεν είναι «τίποτα», με την έννοια ότι μπορεί να αγνοηθεί κάθε φορά που το συναντούν. Εναλλακτικά κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι το μηδέν αναπτύσσεται και υπάρχει ξεχωριστά από τους άλλους αριθμούς. Μαθητές, έχει επίσης αποδειχθεί ότι έχουν προβλήματα με τη μαθηματική έννοια του μηδενός λόγω της ασυνεπούς χρήσης του προφορικού και γραπτού λόγου. Το μηδέν δεν αναφέρεται στην προφορική ονομασία αριθμών π.χ. τριακόσια πέντε αντί τριακόσια μηδέν πέντε. Η αγνόηση στην προφορική αναφορά του μηδενός δημιουργεί ή ενισχύει την πεποίθηση των μαθητών ότι το μηδέν…είναι «τίποτα» άρα μπορεί να αγνοηθεί (Wheeler & Feghali, 1983). Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούνται επίσης στην έρευνα των Neuwirth Beal (1983) και Reys & Grouws (1975). Όλες αυτές οι έννοιες του μηδενός βρέθηκαν για να υποστηρίξουν τις παρεξηγήσεις των μαθητών που σχετίζονταν με υπολογισμούς που αφορούσαν μηδέν (Wheeler & Feghali, 1983).

Οι μαθητές έχει επίσης αποδειχθεί ότι αγωνίζονται με τη μαθηματική έννοια του μηδενός λόγω της ασυνεπούς χρήσης της προφορικής και της γραπτής γλώσσας που σχετίζεται με το μηδέν μέσα στην κοινωνία. Οι Baroody, et. Al. (1983), ο Allinger (1980) και ο Whitelaw (1984) αναφέρουν ότι οι μαθητές συχνά συγχέουν τον αριθμό "0" και το γράμμα "O" (Wheeler & Feghali, 1983). Η συχνή χρήση, λένε οι ερευνητές του "oh" από την κοινωνία όταν κάποιος δηλώνει κωδικούς περιοχής, πινακίδες, αριθμούς τηλεφώνου και αριθμούς δωματίων αναφέρεται ως κοινή πηγή για τους μαθητές που εξισώνουν το μηδέν με το γράμμα "O". Ακόμη και στην προφορική εκφώνηση αριθμών στην αγγλική γλώσσα, το μηδέν δεν αναφέρεται ονομαστικά (π.χ., το 203 διαβάζεται ως διακόσια τρία και όχι τα δύο μηδέν τρία). Αυτή η σύμβαση των μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει στους μαθητές παρεξήγηση και αγνόηση του μηδενός. Οι μαθητές προσπαθούν να «γράψουν» αριθμούς με τον ίδιο τρόπο που «γράφουν» τις λέξεις, έτσι το εκατόν είκοσι είναι συχνά γραμμένο ως 10020 (Kamii, 1981). Αυτή η σύμβαση «αγνοώ το μηδέν» στην ονομασία των αριθμών υποστηρίζει την πεποίθηση του μαθητή ότι το μηδέν είναι «τίποτα» και έτσι μπορεί να αγνοηθεί (Wheeler & Feghali, 1983).

Πως οι μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν το μηδέν όταν είναι αποτέλεσμα σε μια ισότητα; Όταν συναντούν εξίσωση της μορφής $(αx + β) \cdot (γx + δ) = 0$ χρησιμοποιούν την ιδιότητα; εφαρμόζουν πάντα την ιδιότητα, ακόμα και όταν είναι το μόνο διαθέσιμο εργαλείο ή ακόμη και όταν έχουν λάβει συγκεκριμένες οδηγίες σχετικά με την εφαρμογή της στην επίλυση των εξισώσεων του παρόντος τύπου; Επαληθεύουν τις λύσεις αυτού του τύπου των εξισώσεων; Δίνουν δύο διαφορετικές τιμές για τον άγνωστο ταυτοχρόνως; Υπάρχει κάποια τάση η οποία γενικεύει την ιδιότητα που ισχύει όταν το μηδέν είναι αποτέλεσμα και σε άλλες αλγεβρικές δομές, που δεν είναι πάντα έγκυρες; (π.χ. $α^2 + β^2 = 0$, $α^2 + β^2 \neq 0$); Ένα νέο νόημα δίνεται στο μηδέν όταν το μηδέν γίνεται «όριο». Δεν υποδηλώνει μηδενική ποσότητα, αλλά μια ποσότητα μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη που έχει μέγεθος. Αυτή η πτυχή της έννοιας του μηδενός εκφράζει τις αντιφάσεις της έννοιας. Το μηδέν είναι τόσο «τίποτα» όσο και «κάτι». Έτσι, το μηδέν αποκαλύπτεται ότι είναι η ιδέα που γεννήθηκε στην ιστορία της ανθρώπινης σκέψης υπό την πίεση ορισμένων αναγκών. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται για σκοπούς άλλους από αυτούς για τους οποίους έχει σχεδιαστεί. Χρειάζεται τότε και άλλες διαφορετικές πτυχές, εξελίσσεται, διαφοροποιείται. Γίνεται περίπλοκη και πολύπλοκη έννοια και δεν είναι πλέον δυνατόν να οριστεί με έναν μόνο τρόπο καθολικά έγκυρο. Αυτή η μελέτη θα προσπαθήσει να δώσει μια απάντηση στο γιατί το μηδέν εξακολουθεί να είναι μια αιτία λαθών. Το μηδέν χρειάζεται μια ειδική προσέγγιση διδασκαλίας από το δημοτικό σχολείο. Χρειάζεται να υπογραμμιστεί ο διακριτός ρόλος του σε σχέση με τους άλλους φυσικούς αριθμούς. Θα είναι σίγουρα απαραίτητο να τονισθεί κάθε φορά η ιδιαιτερότητα του μηδενός, όχι μόνο σε οριακές περιπτώσεις, αλλά και στη θεωρία (μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, μηδενική γωνία, το μηδέν ως λύση εξίσωσης, μηδενικός συντελεστής διεύθυνσης ευθείας κλπ.)

2.3.3. Εκπαιδευτικοί

Η καλή διδασκαλία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τους στόχους μάθησης. Καλή διδασκαλία είναι η διδασκαλία που βοηθά τους μαθητές να φθάσουν σε στόχους μάθησης που έχουν ήδη τεθεί (Ζαχαριάδης, Θ., Πόταρη, Στουραΐτης, 2011). Αν ένας δάσκαλος, ένα σχολείο ή μια κοινότητα δεν επιτύχει τους καθορισμένους στόχους θα πρέπει να εξετάζει αλλαγές και μεταρρυθμίσεις. Η μελέτη αυτή εκτός από τη γνωστική προοπτική για το μηδέν, τη λογική και τη χρήση συνδέσεων- μεταφορών, θέλει να ρίξει επίσης ένα μικρό φως και στις κοινωνικομαθηματικές νόρμες της τάξης. Δεν είναι ένα εύκολο έργο, δεδομένου ότι οι κανόνες κοινωνικομαθηματικών σε μια τάξη επηρεάζονται όχι μόνο από τους διάφορους συμμετέχοντες στην τάξη, αλλά και από τις γενικότερες κοινωνικές νόρμες και τις πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας στην κοινωνία γενικότερα. Αν η μαθηματική δραστηριότητα ισοδυναμεί με απόκτηση διαδικαστικών δεξιοτήτων για την επίλυση προβλημάτων τότε θα οδηγήσει σε ένα είδος μαθησιακών στόχων και κοινωνικομαθηματικών κανόνων. Ωστόσο, αν τα μαθηματικά θεωρούνται μια δραστηριότητα που χαρακτηρίζεται από τη δημιουργική σκέψη για την επίλυση προβλημάτων, τότε κρίνεται αναγκαίο να οδηγήσει σε διαφορετικούς στόχους μάθησης και κοινωνικομαθηματικών κανόνων, όπου οι διαδικαστικές δεξιότητες χρησιμεύουν ως εργαλεία και όχι ως στόχοι. Η διάκριση δεν είναι μεταξύ διαδικαστικής και εννοιολογικής κατανόησης αλλά και μεταξύ διαφορετικών στόχων που έχουν τεθεί για τις διαδικασίες της διδασκαλίας (Kilhamn, 2011). Οι κοινωνικομαθηματικοί κανόνες δίνουν «εξουσία» στους εκπαιδευτικούς οι οποίοι μπορεί επίσης να αμφισβητήσουν μαθηματικές αλήθειες και τρόπους συλλογισμού. Αν και είναι σημαντικό το τι ένας δάσκαλος και ένα βιβλίο προσπαθούν να παρέχουν στους μαθητές, δηλαδή μαθηματικά εργαλεία και τρόπους συλλογιστικής, είναι επίσης πιθανό ότι οι μαθητές οι ίδιοι έχουν διορατικές σχέσεις και τρόπους συλλογισμού. Η μαθηματική μάθηση θα πρέπει να θεωρείται τόσο μια διαδικασία ενεργητικής ατομικής κατασκευής όσο και μια διαδικασία κοινωνικοποίησης στις μαθηματικές πρακτικές της ευρύτερης κοινωνίας. Η ψυχολογική προοπτική βοηθά να γίνει αντιληπτό πώς οι μαθητές ατομικά αποκτούν νόημα (ή όχι) των μαθηματικών δραστηριοτήτων στην κοινωνική τάξη και η κοινωνική προοπτική βοηθά να γίνουν κατανοητές οι συνθήκες που αναπτύσσονται για τη δυνατότητα μάθησης. Καμία προοπτική, ατομική ή κοινωνική, δεν μπορεί να υπάρξει χωρίς την άλλη με την έννοια ότι η κάθε προοπτική αποτελεί το φόντο εναντίον του οποίου η μαθηματική δραστηριότητα ερμηνεύεται από την άλλη οπτική γωνία. Η ατομική προοπτική του πλαισίου αναλύεται και ερμηνεύεται συχνά με την απόκτηση της μεταφοράς, όπου η γνώση είναι το ουσιαστικό και η πράξη της μάθησης είναι που περιγράφεται ως πράξη απόκτησης γνώσης. Ωστόσο, η κοινωνική προοπτική είναι ριζωμένη μέσα στη συμμετοχή της μεταφοράς, όπου κυρίαρχες έννοιες είναι: η γνώση, η επικοινωνία και η συζήτηση. Η έννοια του μηδενός και η χρήση του στις πράξεις απαιτεί από τους μαθητές να είναι ενεργοί, δημιουργικοί για την κατασκευή της γνώσης ή της συζήτησης για αυτή τη γνώση. Η απόκτηση της γνώσης για το μηδέν δεν είναι κάτι που απλώς μπορεί να ληφθεί από το εξωτερικό και να τοποθετηθεί μέσα στο μυαλό των μαθητών. Δημιουργείται. Αυτό δεν σημαίνει ότι εφευρίσκεται. Η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης έχει ανάγκη όχι μόνο από εργαλεία και υλικά. Η μαθηματική έννοια του μηδενός, οι αναπαραστάσεις της και οι ιδιαίτερες ιδιότητες της είναι το υλικό που είναι απαραίτητο. Η διδασκαλία, η αλληλεπίδραση με τους άλλους μαθητές ο τρόπος με τον οποίο εξηγούνται και δικαιολογούνται τα επιχειρήματα και οι λύσεις, ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζονται οι διαφωνίες, υποδεικνύονται και επιλύονται, ο τρόπος που παρουσιάζεται η έγκυρη μαθηματική λύση και αυτό που μετράει ως αποδεκτή εξήγηση, είναι τα εργαλεία που στα χέρια κάθε μαθητή θα επιτρέψει να κατασκευάσει ενεργά με μαθηματικούς τρόπους τη γνώση του μηδενός καθώς συμμετέχει στην τάξη. Η συμμετοχή, βέβαια συνιστά τη δυνατότητα μάθησης ενεργοποιεί ή περιορίζει τη μάθηση αλλά δεν την καθορίζει (Kilhamn, 2011).

Υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις σχετικά με την ενσωμάτωση της έννοιας του μηδενός στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου. Οι ερευνητές Wellman & Miller, υποστήριξαν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να αναπτύξουν μια συνολικά θετική αντίληψη για το μηδέν πριν από τη φοίτηση τους στη δευτέρα τάξη του δημοτικού σχολείου (Semenza et al., 2006). Ακόμη ερευνητές, όπως οι Inhelder & Piaget υποστηρίζουν ότι η αντίληψη του μηδενός δεν αναπτύσσεται ικανοποιητικά μέχρις ότου οι μαθητές επιτύχουν το στάδιο της τυπικής λειτουργίας και προτείνουν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο σχολείο να μην ασχολούνται σε βάθος με υπολογισμούς με το μηδέν (Anthony & Walshaw, 2009). Είναι θεμελιώδες οι νέοι μαθητές να είναι σε θέση να κατασκευάσουν τη σημασία της έννοιας της μηδενός με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών, η οποία συνεπάγεται εποικοδομητική εμπειρία μάθησης σε μια κονστρουκτιβιστική προσέγγιση για τη διδασκαλία και τη μάθηση. Οι μαθητές είναι σημαντικό να έχουν ευκαιρίες να κατασκευάσουν το δικό τους νόημα για το μηδέν ως κενό σύνολο, το μηδέν ως έναν ακέραιο αριθμό, ως άρτιο αριθμό, ως ψηφίο με θεσιακή αξία και να κατανοήσουν έτσι τη συμπεριφορά του στις βασικές πράξεις χωρίς αλγορίθμους που παρέχονται από το δάσκαλο. Οι Anthony & Walshaw (2004) υποστήριξαν τη συμπερίληψη του μηδενός στις αρχές των μαθησιακών εμπειριών. Ο Cockburn (1999) θεώρησε ότι οι μαθητές θα έχουν πρόβλημα με την κατανόηση του ρόλου του μηδενός αν δεν έχουν μια καλή κατανόηση του χαρακτήρα του μηδενός και αναφέρει ότι είναι θεμελιώδες η διδασκαλία σχετικά με την έννοια του μηδενός να συμπεριληφθεί στις αρχές της μάθησης των μαθητών, στις πρώτες διδακτικές τους εμπειρίες. Η μελέτη των Van der Heuvel-Panhuizen απέδειξε ότι στην έκτη τάξη του δημοτικού οι μαθητές μπορούν να προβούν σε κατανόηση- εκμάθηση ακόμη και της διαίρεσης με το μηδέν, αν το περιβάλλον είναι ευνοϊκό σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική διδασκαλία για τη μάθηση (Van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Οι περισσότεροι ερευνητές δηλώνουν ότι η διδασκαλία της έννοιας του μηδενός είναι απαιτητική, λόγω του αφηρημένου χαρακτήρα της έννοιας. Οι παρανοήσεις των καθηγητών για το μηδέν (εκτός από αυτές που σχετίζονται ειδικά με τη διαίρεση με το μηδέν), μπορεί να κρύβεται μέσα σε άλλα ερευνητικά θέματα. Παράδειγμα μιας τέτοιας έρευνας είναι η μελέτη της Ma (1999), η οποία συνέκρινε τη μαθηματική κατανόηση των εκπαιδευτικών στις ΗΠΑ και στη Σιγκαπούρη. Έδειξε, μέσω αυτής της έρευνας, ότι οι δάσκαλοι από τη Σιγκαπούρη διέθεταν ένα πολύ υψηλότερο επίπεδο «βαθιάς κατανόησης» των Μαθηματικών από τους δάσκαλους των ΗΠΑ. Όταν εξετάστηκαν ενδελεχώς στο «τι συμβαίνει με το μηδέν», η έρευνά της αποκάλυψε ότι, ειδικότερα, οι Αμερικανοί εκπαιδευτικοί είχαν παρανοήσεις σχετικά με το μηδέν στις έννοιες της θεσιακής του αξίας και στην έννοια της (αποσύνθεσης) ανάλυσης ενός αριθμού. Αυτές οι παρανοήσεις γίνονται εμφανείς, μέσω της μελέτης της Ma, σχετικά με την κατανόηση των δασκάλων που αφορά την αφαίρεση διψήφιων αριθμών και τον πολλαπλασιασμό αριθμών με πολλά ψηφία. Όσον αφορά την αφαίρεση, τα στοιχεία που συλλέχθηκαν αποκάλυψαν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν κατανόησαν το ρόλο της ανάλυσης των αριθμών σε διαφορετικές τάξεις δεκάδων και μονάδων μέσα στον αλγόριθμο της αφαίρεσης που διδάσκουν. Σε αυτούς τους δάσκαλους φάνηκε ότι λείπει η κατανόηση της αξίας θέσης και του ρόλου του μηδενός στην αποσύνθεση και στην αφαίρεση αριθμών. Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό, δόθηκε σε δασκάλους μια λύση μαθητών σε μια άσκηση πολλαπλασιασμού πολυψήφιων αριθμών η οποία περιλάμβανε ένα συνηθισμένο σφάλμα που έκαναν οι μαθητές, δηλαδή δεν υπολόγισαν την θεσιακή αξία των επιμέρους ψηφίων στον πολλαπλασιαστέο και τον πολλαπλασιαστή (ή ξέχασαν να βάλουν μηδενικά στο τέλος κάθε μερικού αποτελέσματος). Η Ma ζήτησε από τους δασκάλους να διορθώσουν τη λύση του μαθητή. Αν και οι δάσκαλοι σημείωσαν ότι ο μαθητής «δεν κατανόησε το σκεπτικό του αλγορίθμου», στις εξηγήσεις των λαθών του μαθητή αποκαλύφθηκε ότι οι εκπαιδευτικοί δεν κατανόησαν την αξία της θέσης και το ρόλο του μηδενός στον πολλαπλασιασμό. Κάποιοι από τους δασκάλους πρότειναν στους μαθητές αντί να βάλουν μηδενικά στα μερικά αποτελέσματα, να ενθαρρυνθούν να χρησιμοποιήσουν το σύμβολο X ώστε να κρατήσουν τις θέσεις. Αυτοί οι δάσκαλοι υποστήριξαν ότι με τη χρήση μηδενικών στις κενές θέσεις, θα οδηγούσαν τους μαθητές στο να πιστέψουν ότι τα μερικά αποτελέσματα ήταν στην πραγματικότητα μεγαλύτερα από αυτά που πραγματικά ήταν (π.χ., 4920 αντί 492 που προέρχεται από τον πολλαπλασιασμό 123 με το 4 στο 123 X 645). Έτσι, τόσο στην αφαίρεση όσο και στον πολλαπλασιασμό, οι Αμερικανοί καθηγητές δεν είχαν κατανοήσει όχι μόνο την αποσύνθεση του αριθμού αλλά την αξία θέσης και το μηδέν. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις στο πλαίσιο έρευνών για τα μαθηματικά, ότι υπάρχει λόγος ανησυχίας για την κατανόηση των εκπαιδευτικών γενικότερα, όχι μόνο στις ανώτερες βαθμίδες μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όταν οι εκπαιδευτικοί εισάγουν τους μαθητές στην πολυπλοκότητα της διαίρεσης με το μηδέν για πρώτη φορά, αλλά ακόμη και στις τάξεις του δημοτικού. Αυτή η μελέτη της Ma σχεδιάστηκε για να διερευνήσει τις αντιλήψεις για το μηδέν που έχουν οι δάσκαλοι του δημοτικού, πώς έφθασαν να έχουν αυτές τις κατανοήσεις και πώς εμπλέκουν τους μαθητές τους στην κατανόηση του μηδενός (Russell & Chernoff, 2011).

2.4 ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ

Τα περισσότερα παιδιά μαθαίνουν να μετρούν πριν ακόμη αρχίσουν να πηγαίνουν στο σχολείο. Οι φυσικοί αριθμοί βρίσκονται στο φυσικό τους περιβάλλον, ο κόσμος τους αποτελείται από αριθμούς που μετρούν, δηλαδή φυσικούς αριθμούς. Το σύστημα των φυσικών αριθμών επεκτείνεται λίγο αργότερα στο σχολικό περιβάλλον για να συμπεριλάβει το μηδέν, τους ρητούς αριθμούς, και τους ακέραιους. Καθώς τα παιδιά επεκτείνουν τον κόσμο των φυσικών αριθμών, να λαμβάνουν υπόψη τους πώς οι νέοι αριθμοί διαφέρουν από τους προηγούμενους γνωστούς αριθμούς καθώς και το πώς οι καινούργιοι αυτοί αριθμοί ταιριάζουν στο υπάρχον εννοιολογικό σχήμα. Οι μαθητές σιωπηρά προ-μοντελοποιούν, τα νέα σύνολα των αριθμών και κατόπιν τα πιο σαφή μοντέλα των συνόλων εισάγονται από τους δασκάλους τους, αλλά βασίζονται συνήθως στους φυσικούς αριθμούς. Η επέκταση του συνόλου των αριθμών είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα , καθώς η επέκταση του κόσμου των αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εφαλτήριο από το οποίο μπορούν οι μαθητές να ενθαρρυνθούν και να εκτιμήσουν την τυπική φύση των μαθηματικών (Levenson et al., 2007). Συνεπώς έννοιες και λειτουργίες που ορίζονται σε ένα συγκεκριμένο σύνολο μπορεί να χρειαστεί να επαναπροσδιοριστούν στην διεύρυνση του συνόλου των αριθμών, και ορισμοί και ιδιότητες αριθμών που υπάρχουν για το σύνολο των φυσικών αριθμών μπορεί να μην ισχύουν για όλα τα στοιχεία σε ένα εκτεταμένο σύνολο αριθμών. Αν και οι μαθητές δημοτικού σχολείου μπορεί να είναι πολύ μικροί για αυστηρούς και τυπικούς συλλογισμούς αλλά και για ερμηνείες και αιτιολογήσεις μπορεί να είναι έτοιμοι για ερμηνείες με μαθηματική βάση που είναι λιγότερο τυπικές, αλλά παρόλα αυτά βασίζονται αποκλειστικά σε μαθηματικές έννοιες. Οι Reys και Grouws (Reys & Grouws, 1975) μελέτησαν τις αντιλήψεις μαθητών για το μηδέν. Οι μαθητές φοιτούσαν στην τέταρτη τάξη του δημοτικού αλλά και στην Α΄ τάξη του γυμνασίου. Διαπίστωσαν ότι πολλοί μαθητές δεν θεωρούσαν ότι το μηδέν είναι ένας αριθμός. Μέρος της παρανόησης αυτής για το μηδέν, πιθανόν να έχει προκληθεί στους μαθητές επειδή ταυτίζουν το μηδέν με το «τίποτα». Για παράδειγμα, αν έχουμε οκτώ μπισκότα και φάμε τα οκτώ από αυτά δεν μένει με τίποτα. Με απλά λόγια, εάν από το οκτώ πάρω και τα οκτώ δεν μένει τίποτα. Μεταφράζοντας την λεκτική φράση αυτή σε μια μαθηματική πρόταση, γράφουμε: 8 - 8 = 0. Ο όρος «τίποτα» μεταφράζεται ως μηδέν. Άλλοι μαθητές επικεντρώνονται στην ιδέα ότι μηδέν «είναι τίποτα». Εάν σε έναν αριθμό προσθέσουμε το μηδέν, ή εάν αφαιρέσουμε από αριθμό το μηδέν δεν συμβαίνει τίποτα (Levenson et al., 2007)). Είναι συνηθισμένη πρακτική σε μαθητές (αλλά και σε δασκάλους) να έχουν παρανοήσεις σχετικά με την κατανόηση του μηδενός ως αριθμού γιατί υποτιμούν την σημασία του στο αριθμητικό σύστημα και του προσδίδουν μόνο τη σημασία που έχει στην πραγματική ζωή. Μαθητές της έκτης δημοτικού, σε μια έρευνα των Levenson et.al (2007) δεν θεώρησαν το μηδέν ως άρτιο αριθμό αιτιολογώντας ότι « …δεν μπορείς πραγματικά να περιμένεις κάτι εάν διαιρέσεις το τίποτα…», ή « Απλά δεν διαιρείς το τίποτα…», ή» … Μπορείς να διαιρέσεις το μηδέν με το δύο ..αλλά δεν παίρνεις κανένα αποτέλεσμα» (Levenson et al., 2007). Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για την ιδιότητα ενός αριθμού να είναι άρτιος. Είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δυο ίσων ακέραιων αριθμών (1), οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του δύο (2), οι αριθμοί που όταν διαιρεθούν με το δυο αφήνουν υπόλοιπο μηδέν (3), οι αριθμοί που δίνουν ακέραιο πηλίκο όταν διαιρεθούν με το δυο (4). Πολλοί μαθητές υποθέτουν ότι οι αριθμοί σταματούν πριν από το μηδέν, χωρίς να το περιλαμβάνουν στο σύστημα των αριθμών, και αγνοούν τη σαφή θέση που κατέχει το μηδέν στην αριθμογραμμή, χωρίζοντας τους θετικούς από τους αρνητικούς (Quinn, Lamberg, & Perrin, 2008). Οι μαθητές επίσης με απροθυμία μπορούν να δεχθούν το μηδέν-αριθμό ως άρτιο αριθμό, που διαιρείται με το 2 για να δώσει αποτέλεσμα 0 και δεν μπορούν να συνδέσουν αυτή την κατανόηση με τους άλλους άρτιους αριθμούς : ο αριθμός 4 είναι άρτιος γιατί $4 \div 2 = 2$, ενώ $0 \div 2 = 0$. Η απροθυμία στην παραδοχή του μηδενός ως αριθμού φυσικά οδηγεί σε παρανοήσεις στις πράξεις. Ο συλλογισμός με αυτόν τον τρόπο είναι μια αναγνώριση του γεγονότος ότι κάποιος μπορεί να κάνει πράξεις με το μηδέν, για παράδειγμα $5 + 0$ ή $5 – 0$, ισχυριζόμενος ότι δεν συμβαίνει τίποτα ή ότι το μηδέν δεν κάνει τίποτα. Αυτό όμως είναι ανακριβές, διότι κάτι συμβαίνει στα μαθηματικά. Αν προσθέσουμε 0 στο 5 το αποτέλεσμα είναι 5 ($5 + 0 = 5$) και εάν αφαιρέσουμε 0 από το 5 το αποτέλεσμα είναι 5 ($5 - 0 = 5$). Η αιτιολόγηση των μαθητών υπονοεί ότι στον αριθμό μπορούμε να προσθέσουμε το μηδέν ή να αφαιρέσουμε το μηδέν και να παραμένει ο ίδιος δηλαδή δεν συμβαίνει τίποτα στον αριθμό. Αυτή η σκέψη θα μπορούσε πραγματικά να συμβαίνει με τις πράξεις που γίνονται στην αρθμογραμμή ή με πράξεις με φυσικά αντικείμενα, για παράδειγμα. Δεν γίνεται όμως καμιά αναφορά στο τι θα συμβεί όταν αφαιρέσουμε έναν αριθμό από το 0. Αυτός ο συλλογισμός θα μπορούσε να αναδείξει πιθανές δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης, όπως για παράδειγμα στην αφαίρεση

50 - 18, ή ακόμα και 0 - 5 = - 5, που αφορά στον μελλοντικό αλγεβρικό συλλογισμό. O Fischbein (1987) τάσσεται υπέρ της εισαγωγής δραστηριοτήτων που βοηθούν το παιδί να αφομοιώσει έννοιες πιο σύνθετες και αφηρημένες κατά τη συγκεκριμένη φάση των πράξεων. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αρχίσουν, το συντομότερο δυνατόν, την προετοιμασία του παιδιού για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αλλά και για το τυπικό περιεχόμενο των εννοιών που πρόκειται να διδαχθούν (Levenson et al., 2007). Η μελέτη των Levenson, et. al. (2007) δείχνει έτσι ότι η αποτελεσματική κατανόηση της έννοιας «το μηδέν ανήκει στους άρτιους αριθμούς» είναι εντός της ζώνης της επικείμενης ανάπτυξης των μαθητών. Οι Levenson, Tsamir, και Tirosh (2004) σε έρευνα τους, διαπίστωσαν ότι μαθητές της δευτέρας τάξης του δημοτικού υποστήριξαν ότι 3 × 0 = 3, ενώ 0 x 3 = 0 επειδή ο αριθμός 3 πολλαπλασιάζεται με το «τίποτα». Κάποιοι μαθητές, δηλαδή δεν προσπάθησαν να συνδέσουν τον πολλαπλασιασμό με το μηδέν με τη νέα γνώση τους εξαιτίας της προϋπάρχουσας προκατάληψης ότι το μηδέν σημαίνει «τίποτα» και άρα δεν το αντιμετωπίζουν σαν αριθμό με τις τυπικές ιδιότητες του (Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2004). Συγκεκριμένα, τα δύο αυτά ερωτήματα διερευνούν αν οι τύποι των εξηγήσεων που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για τον πολλαπλασιασμό μη μηδενικών αριθμών διέφεραν από τις εξηγήσεις που χρησιμοποιούνται για τον πολλαπλασιασμό με το μηδέν. Επιπλέον, αυτά τα δύο ερωτήματα επέτρεψαν να διερευνηθεί αν οι ερμηνείες για τον πολλαπλασιασμό διαφοροποιούνται στις πράξεις 3 x 0 και 0 x 3. Το πρόβλημα 3 x 0, προσδιορίζει τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, όταν ο πολλαπλασιαστής είναι ένας θετικός ακέραιος και δείχνει τον αριθμό των φορών που πρόκειται το 0 να προστεθεί στον εαυτό του. Ωστόσο, όταν ο πολλαπλασιαστής είναι μηδέν, όπως στην περίπτωση του 0 x 3, μπορεί να προκύψουν δυσκολίες. Ως εκ τούτου, ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον να διερευνηθούν θέματα και να εξηγηθούν προβλήματα του κατά πόσο είναι διαδεδομένη η χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, όπως σε αυτή την περίπτωση. Η διδασκαλία του πολλαπλασιασμού στην Ιαπωνία δίνει έμφαση στη διάκριση ανάμεσα στον πολλαπλασιαστή και στον πολλαπλασιαστέο ως παράγοντες. Προηγείται εισαγωγική συζήτηση πριν από τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού, των αριθμών 1 και 0 και κατόπιν διδάσκεται η αυστηρή χρήση της οριζόντιας αναπαράστασης της πράξης (Watanabe, 2003).

Το θέμα της διδασκαλίας των καθιερωμένων αλγόριθμων στο δημοτικό σχολείο, δημιουργεί αντιπαράθεση σε ερευνητές, πολλοί από τους οποίους πιστεύουν ότι οι δεξιότητες τίθενται έναντι της κατανόησης. Ισχυρίζονται ότι οι αλγόριθμοι είναι από τη φύση τους τίποτα περισσότερο από ρουτίνα και χωρίς νόημα μαθηματική εξάσκηση. Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο την μαγευτική απλότητα του ίδιου του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού παρά στη μονοτονία στην εκτέλεσή του. Η εννοιολογική κατανόηση που είναι κρυμμένη στον αλγόριθμο είναι το είδος που οι μαθητές τελικά χρειάζονται προκειμένου να προετοιμαστούν για την άλγεβρα. Με λίγα λόγια, αυτός ο αλγόριθμος είναι ένα λαμπρό παράδειγμα στα μαθηματικά του δημοτικού, το καλύτερο ίσως που αξίζει να μάθει κάθε μαθητής. Εάν υπάρχει οποιαδήποτε «επικίνδυνη» επίδραση στην εκμάθηση των αλγορίθμων, θα μπορούσε μόνο να είναι επειδή δεν διδάσκονται σωστά (Wu, 1999).

Η διαίρεση με το μηδέν είναι μια από τις περιπτώσεις που παραβιάζουν τη διαισθητική πεποίθηση ότι κάθε μαθηματική πράξη οδηγεί σε μια αριθμητική απάντηση. Οι μαθητές και οι δάσκαλοι έχουν την τάση να βλέπουν αυτή την απροσδιόριστη μαθηματική πράξη ως «ένας κανόνας που πρέπει να θυμάμαι» (Ball, 1990). Οι δυσκολίες των μαθητών στη διαίρεση με το μηδέν έχουν τεκμηριωθεί ευρέως από τους Blake & Verhille (1985), Reys & Grouws (1975), Tsamir et al. (2000). Καθώς οι μαθητές προσπαθούν να «παλέψουν» με τη διαίρεση του «τίποτα» με το «κάτι» και του «κάτι» με το «τίποτα» οι ερευνητές βρίσκουν και πάλι ότι εξισώνοντας το μηδέν με το τίποτα προκαλείται μεγάλη σύγχυση. Το τελευταίο δεν επιτρέπεται όχι όμως το προηγούμενο. Αρκετοί μαθητές υποστήριξαν ότι η διαίρεση ενός μη μηδενικού αριθμού με το μηδέν έχει σαν αποτέλεσμα αριθμό και ότι το μηδέν διαιρούμενο με το μηδέν έχει σαν αποτελέσματα το μηδέν. Διαπιστώθηκε επίσης ότι και οι μελλοντικοί και ακόμη και εν ενεργεία εκπαιδευτικοί δεν ήταν πάντα σαφείς ως προς τα αποτελέσματα της διαίρεσης με το μηδέν (Wheeler & Feghali, 1983) (Ball, 1990). Ακόμη και όταν οι εκπαιδευτικοί ήξεραν ότι αυτή η διαίρεση είναι απροσδιόριστη δεν μπορούσαν να παρέχουν μια κατάλληλη εξήγηση. Στο κλασικό του βιβλίο για τη διαίσθηση στην επιστήμη και στα μαθηματικά, ο Fischbein (1987) υποστήριξε ότι ένα από τα βασικά θεμελιώδη καθήκοντα της εκπαίδευσης των μαθηματικών είναι να αναπτύξουν στους μαθητές την ικανότητα να διακρίνουν μεταξύ του διαισθητικού συναισθήματος, της διαισθητικής πεποίθησης και των αποδείξεων που βασίζονται σε λογικά επιχειρήματα. Στα μαθηματικά, η επίσημη απόδειξη είναι καθοριστική και κάποιος είναι αναγκαίο να καταφεύγει σε αυτή, διότι οι διαισθήσεις μπορεί να είναι παραπλανητικές (Tsamir & Sheffer, 2000). Δεδομένα ερευνών δείχνουν ότι, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν την εγκυρότητα συγκεκριμένων τεκμηριωμένων επιχειρημάτων για τον μη ορισμό της διαίρεσης με το μηδέν, στη συντριπτική πλειοψηφία του οι συμμετέχοντες μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θεωρούσαν τα συγκεκριμένα επιχειρήματα έγκυρα και κανένας από τους μαθητές δεν έδειξε ότι γνώριζε την ύπαρξη και την εφαρμογή αυτών των επιχειρημάτων. Η πρώτη δυνατή σύσταση είναι η συνεχής χρήση συγκεκριμένων επιχειρημάτων για τον μη ορισμό της διαίρεσης με το μηδέν στο δημοτικό σχολείο, πριν οι μαθητές γνωρίσουν τους αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Όταν οι μαθητές έχουν κάποια εμπειρία με εκφράσεις διαίρεσης που αφορούν αρνητικούς αριθμούς απαιτείται η αφιέρωση επαρκή χρόνου και προσπάθειας για μια προσεκτική ανάλυση και εφαρμογή συγκεκριμένων επιχειρημάτων και περιορισμών κατά την εκτέλεση της διαίρεσης.

Παραδείγματα που δημιουργούν προβλήματα στο μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών που είναι δείκτες του προβλήματος της εννοιολογικής αλλαγής στην έννοια του αριθμού και τη σχέση του με την περιπλοκότητα περιλαμβάνουν τη διαίρεση με μηδέν. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι ένας αριθμός που διαιρείται με το μηδέν είναι απροσδιόριστος αλλά οι μαθητές σπάνια κατανοούν γιατί το μηδέν αποτυγχάνει να ενεργήσει σαν ένας οποιοσδήποτε αριθμός στη διαίρεση. Αν στον μαθητή παρουσιαστεί το γράφημα του $n / x = y$ (όπου η = σταθερός αριθμός και το x επιτρέπεται να προσεγγίσει το μηδέν), τότε ο μαθητής θα δει την ασύμπτωτη. Ο μαθητής θα δει ότι η συνάρτηση ορίζεται για οποιοδήποτε αριθμό εκτός από το μηδέν, επειδή αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία εκτός από το μηδέν, η αρχή της σχέσης μεταξύ συνέχειας και αριθμών εμφανίζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Η ΕΡΕΥΝΑ

3.1 ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η επιτυχία των μαθητών στα μαθηματικά είναι αντικείμενο ερευνών και για πολλά χρόνια βρίσκεται στην κορυφή του ενδιαφέροντος στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι αντικείμενα μελέτης, καθώς στη μετάβαση αυτή εμφανίζονται δυσκολίες στους μαθητές. Δεδομένου ότι ο βασικός στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι να κατανοήσουν και όχι απλά να μάθουν να χειρίζονται οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες είναι απαραίτητο να προσδιορισθεί σαφώς το περιεχόμενο της έννοιας της κατανόησης. Τα μαθηματικά, είναι *ανθρώπινα, μαθηματικά,* προϊόν του ανθρώπινου μυαλού. Τα δημιουργούμε εμείς, αλλά όχι αυθαίρετα. Δεν είναι μια απλή, ιστορικά τυχαία, κοινωνική κατασκευή. Οι βασικοί εννοιακοί μηχανισμοί του ενσώματου ανθρώπινου νου, που έχει εξελιχθεί στην κοινωνική διαδρομή του ανθρώπου στον πραγματικό κόσμο, κάνουν τα μαθηματικά μη αυθαίρετα. Η ικανότητα σχηματισμού μεταφορών, η εννοιοποίηση των πληθικών αριθμών και των αριθμητικών πράξεων με αναφορά στις εμπειρίες μας είναι βασικός γνωσιακός μηχανισμός. Η εννοιακή μεταφορά δημιουργεί το μηδέν, μια *νέα* οντότητα, ως έναν αληθινό αριθμό (Lakoff, G., Nunez, 2000). Για να προσδιοριστεί, τι σημαίνει η έκφραση η κατανόηση του μηδενός μια προηγούμενη ερώτηση κρίνεται απαραίτητη: Ποια είναι η μαθηματική οντότητα που βρίσκεται πίσω από την έννοια «μηδέν»;

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο σε αυτή την έρευνα γίνεται μια απόπειρα να διερευνηθεί το πώς οι μαθητές και οι μαθήτριες αντιλαμβάνονται το μηδέν, πως το χειρίζονται στη διαδικασία των πράξεων και τι προβλήματα τους δημιουργεί. Πως εννοιοποιούν την αφηρημένη έννοια, με αναφορά σε κάτι συγκεκριμένο χρησιμοποιώντας το αισθητικο-κινητικό τους σύστημα προκειμένου να δημιουργήσουν ιδέες αλλά και τρόπους συλλογισμού. Στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας έγινε αναφορά ότι η γνωστική εξέλιξη των εννοιών στο νου των μαθητών είναι μια διαδικασία πολύπλοκη, με πολλές πτυχές, στάδια εξέλιξης και επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες. Οι μαθητές πολλές φορές, σχηματίζουν δικές τους αντιλήψεις για τις μαθηματικές έννοιες, για το μηδέν στην προκειμένη περίπτωση, που δεν είναι οι αντιλήψεις της μαθηματικής κοινότητας και για το λόγο αυτό τις θεωρούμε ως παρανοήσεις. Το ξεπέρασμα αυτών των λανθασμένων αντιλήψεων είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχημένη πορεία του μαθητή στα μαθηματικά. Ο δάσκαλος και ο καθηγητής των μαθηματικών είναι πολύ σημαντικό τόσο να μπορεί να εντοπίζει τις παρανοήσεις των μαθητών του όσο και τις αιτίες που τους έχουν οδηγήσει σε αυτές. Η μοναδικότητα των ιδιοτήτων του μηδενός, οδηγεί στη μετάβαση από τους μετασχηματισμούς με ή σε συγκεκριμένους αριθμούς (αριθμητική) στην άλγεβρα που είναι πιο διαρθρωτική και αφηρημένη. Με βάση τα παραπάνω διατυπώνονται τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας

- Ποιες αντιλήψεις γύρω από την έννοια του μηδενός και τη λειτουργία του στις πράξεις έχουν οι μαθητές και οι μαθήτριες τελειώνοντας την πρωτοβάθμια εκπαίδευση;
- Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές και μαθήτριες τελειώνοντας την Α΄ τάξη του Γυμνασίου τις μεταφορές του μηδενός;
- Πώς η έννοια του μηδενός, αξιοποιείται από μαθητές και μαθήτριες ηλικίας 12 – 13 ετών προκειμένου να αναπτύξουν αλγεβρικούς συλλογισμούς και να επιτύχουν γενικεύσεις και αφαιρέσεις;

Τα μαθηματικά, είναι επίπεδα μεταφορών. Όταν μια μόνο μαθηματική ιδέα συσσωματώνει πολλές μεταφορές, τότε γίνεται αντικείμενο της Γνωστικής επιστήμης, ώστε να αποκαλυφθεί η υποκείμενη γνωστική του δομή. Αλλά μπορεί επίσης να έχει σημαντική εφαρμογή στη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιστεύουμε ότι αποκαλύπτοντας τη γνωστική δομή των μαθηματικών εννοιών, καθιστούμε τα μαθηματικά πολύ πιο προσιτά και κατανοητά. Επειδή οι μεταφορές βασίζονται σε κοινές εμπειρίες, οι μαθηματικές ιδέες που τις χρησιμοποιούν μπορούν να γίνουν κατανοητές στο μεγαλύτερο μέρος τους με όρους της καθημερινότητας.

Θεωρούμε πως με την κατάκτηση της δεξιότητας της αντίληψης των μεταφορών από τους μαθητές επιτυγχάνεται η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, η οποία βασίζεται στον δυνητικά αλγεβρικό χαρακτήρα της αριθμητικής, δηλαδή της γενικευμένης αριθμητικής. Αυτό συνεπάγεται την κατασκευή της γενίκευσης μέσω αριθμητικών σχέσεων και αριθμητικών λειτουργιών και των ιδιοτήτων. Η αλγεβρική σκέψη μπορεί να θεωρηθεί «ως μια διαδικασία στην οποία οι μαθητές γενικεύουν τις μαθηματικές ιδέες από ένα σύνολο συγκεκριμένων περιπτώσεων, καθιερώνουν αυτές τις γενικεύσεις μέσω του λόγου της επιχειρηματολογίας και τις εκφράζουν με ολοένα και πιο τυπικούς και κατάλληλους για την ηλικία τους τρόπους. Η προσπάθεια που θα γίνει αφορά την καταγραφή των αντιλήψεων των μαθητών, που βρίσκονται στην ηλικία των 12-13, ετών για το μηδέν, εάν έχουν γίνει κατανοητές οι μεταφορές της έννοιας του και η αλλαγή της αρχικής τους θεώρησης «μηδέν = τίποτα». Η συμμετοχή του μηδενός σε πράξεις της αριθμητικής και η συμμετοχή του σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις θα αναδείξουν εάν οι μαθητές έχουν αρχίσει να αναπτύσσουν την αφηρημένη σκέψη που είναι απαραίτητη για τη μετάβαση στην άλγεβρα. Αποκαλύπτοντας τη γνωστική δομή των μαθηματικών τα μαθηματικά γίνονται πολύ πιο προσιτά και κατανοητά. Επειδή οι μεταφορές βασίζονται σε κοινές εμπειρίες, οι μαθηματικές ιδέες που τις χρησιμοποιούν μπορούν να γίνουν κατανοητές στο μεγαλύτερο μέρος τους με όρους της καθημερινότητας. Οι μαθηματικοί όροι και οι εκφράσεις, όπως οι αριθμοί, παραπέμπουν σε αφηρημένες οντότητες των οποίων η φύση και η προέλευση είναι σημαντικό να διερευνηθεί ώστε να διαμορφωθεί μια χρήσιμη και αποτελεσματική θεωρία σχετικά με τον τρόπο κατανόησης αυτών των αφηρημένων οντοτήτων (Blanton & Kaput, 2005). Τα Μαθηματικά επεκτείνουν τη χρήση των αριθμών σε πολλές άλλες ιδέες, για παράδειγμα, στην αριθμητική μελέτη των γωνιών, την τριγωνομετρία, στην αριθμητική μελέτη της μεταβολής, τον απειροστικό λογισμό, στην αριθμητική μελέτη των γεωμετρικών μορφών, την αναλυτική γεωμετρία, και πολλά άλλα. Η εννοιακή μεταφορά αποτελεί τον κεντρικό γνωσιακό μηχανισμό της επέκτασης από την βασική αριθμητική σε τέτοιες ανώτερες εφαρμογές του αριθμού. Επιπροσθέτως μια ανώτερη κατανόηση της ίδιας της αριθμητικής απαιτεί εννοιακές μεταφορές.

Το μηδέν (0) όταν εμφανίζεται για πρώτη φορά στους μαθητές είναι ήδη ταυτισμένο με την ερμηνεία που έχει από τη καθημερινή ζωή. Η εμφάνιση του μαζί με τους φυσικούς αριθμούς στα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου οδηγεί τους μαθητές να δώσουν στο μηδέν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών αλλά η συμμετοχή του στις πράξεις της αριθμητικής και αργότερα της άλγεβρας δημιουργεί προβλήματα και αδιέξοδα. Η συνειδητοποίηση ότι το μηδέν και οι αρνητικοί αριθμοί είναι αριθμοί χρειάστηκε αιώνες εκλεπτυσμένης ανάπτυξης. Η διδασκαλία των μαθηματικών σε σχολείο για πάνω από είκοσι χρόνια και η αναζήτηση της βιβλιογραφίας οδήγησε στις εξής παραδοχές.

- Οι περισσότεροι μαθητές δείχνουν απρόθυμοι στην αποδοχή του μηδενός σαν αριθμό και αντιμετωπίζουν προβλήματα στους υπολογισμούς στους οποίους εμπλέκεται το μηδέν.
- Οι μαθητές αποκτούν αλγοριθμική-διαδικαστική γνώση για την εκτέλεση των πράξεων, που έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία παρανοήσεων και άρα λαθών για την έννοια του μηδενός.
- Οι καθηγητές, τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια συχνά παραμελούν ή παραβλέπουν την διδασκαλία του μηδενός.

Τα ερωτηματολόγια που δοθήκαν στους μαθητές και τις μαθήτριες των ΣΤ΄ τάξεων του Δημοτικού θα διακριβώσουν τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του αριθμού-μηδέν και την λειτουργία του στις πράξεις. Οι μαθητές του Δημοτικού σχολείου γνωρίζουν το σύνολο των φυσικών αριθμών, κατόπιν επεκτείνουν αυτό το σύνολο των αριθμών με τους θετικούς ρητούς αριθμούς (κλάσματα, δεκαδικοί και ποσοστά). Στην ΣΤ΄ τάξη συγκρίνουν και σειροθετούν ρητούς αριθμούς (θετικούς και αρνητικούς) και ορίζουν τη θέση τους ώστε να κατανοήσουν τα πρόσημα + και – ως ένδειξη της θέσης των αριθμών στην αριθμητική γραμμή σε σχέση με το 0. Εδώ για πρώτη φορά εμφανίζεται το 0 σαν αποτέλεσμα πράξης. Η ποσοτική κατανόηση του μηδέν φαίνεται να λειτουργεί ως γέφυρα προς την πραγματική έννοια του μηδενός ως αριθμού και την αλγεβρική του κατανόηση. Η εισαγωγή της συμβολικής γλώσσας της άλγεβρας με τις μεταβλητές όπως $α - α = 0$, $α + 0 = α$ εστιάζει στην κατανόηση των παιδιών σε ορισμένους απλούς αλλά γενικούς κανόνες της αριθμητικής. Ένας τέτοιος κανόνας φαίνεται να είναι πραγματικά αλγεβρικός δεδομένου ότι πρόκειται για μια μεταβλητή α, και όχι κάποιο συγκεκριμένο αριθμό, και έτσι καλύπτει μια σειρά από ιδιαιτερότητες. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να διακριθούν από συγκεκριμένα προβλήματα, όπως ένα $α - 2 = 3$. Εδώ το α θα μπορούσε να γραφτεί συμβολικά ως μεταβλητή, αλλά μέσα σε αυτό το πλαίσιο, έχει μια συγκεκριμένη αξία, δηλαδή 5. Στην περίπτωση $α - α = 0$, ο κανόνας ισχύει για οποιαδήποτε αριθμό, ακόμη και όταν αυτός δεν προσδιορίζεται ρητά. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος του ελαχίστου προσθετέου καθορίζει ότι το θέμα αυτό ξεκινά με τον μεγαλύτερο από τους δύο προσθετέους και υπολογίζει προς τα εμπρός προς τον μικρότερο αριθμό των ακεραίων προσθετέων για να φθάσει στην απάντηση. Ένας τέτοιος αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοσθεί σε επ' αόριστον πολλούς ακέραιους (προσθετέους) και πάντα δίνει μια σαφή απάντηση. Ομοίως, ένα - ένα = 0 ισχύει για όλους τους ακέραιους και δίνει μια σαφή απάντηση. Ωστόσο, υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ αυτών των δύο. Κάποιος που γνωρίζει μόνο τον υπολογιστικό αλγόριθμο για την εύρεση αποτελέσματος δεν θα μπορούσε να λύσει-υπολογίσει την παράσταση α - α = 0, εκτός αν έκανε αντικατάσταση τη μεταβλητή α με συγκεκριμένους αριθμούς, όπως 4 - 4 = 0, ή 5 - 5 = 0. Κάποιος, όμως που γνωρίζει τον κανόνα, εξ ορισμού μας, γνωρίζει ότι το μηδέν είναι η απάντηση ακόμη και όταν δεν υπάρχουν(απουσιάζουν) συγκεκριμένοι αριθμοί. Ομοίως, η κατανόηση του κανόνα, α - α = 0 είναι σαφώς διαφορετική από έναν υπολογιστικό αλγόριθμο. Μια θεμελιώδης απαίτηση της άλγεβρας είναι η κατανόηση ότι το σύμβολο της ισότητας δείχνει ισοδυναμία. Η επέκταση του αριθμητικού πεδίου από τους φυσικούς αριθμούς στους ακέραιους, διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές, 12-13 ετών αποκτούν αλγεβρική γλώσσα αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο για την επίτευξη των αλγεβρικών τους ικανοτήτων στην επίλυση των προβλημάτων και εξισώσεων. Αυτός ο ισχυρισμός βρίσκεται στο επίκεντρο του σχεδιασμού και της εκτέλεσης της μελέτης που περιγράφεται στο παρόν έγγραφο. Η μελέτη αυτή γίνεται με βάση την υπόθεση ότι τα μαθηματικά, είναι τόσο κοινωνική όσο και αφηρημένη επιστήμη και ότι η έννοια της μεταφοράς λειτουργεί ως σημαντική σύνδεση μεταξύ της κοινωνικής και της γνωστικής. Πρόκειται για διερευνητική μελέτη, που έχει σκοπό να φωτίσει την πολυπλοκότητα της μαθηματικής σκέψης και τον πλούτο της έννοιας του μηδενός.

3.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.2.1. Οι συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 189 μαθητές δημοσίων σχολείων της πόλης της Θεσσαλονίκης. Η επιλογή των σχολείων των συμμετεχόντων μαθητών έγινε με την μέθοδο της δειγματοληψίας διαθεσιμότητας. Από τους συμμετέχοντες 89 είναι κορίτσια και 100 είναι αγόρια. Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου είναι 75 (38 κορίτσια και 37 αγόρια). Από την Α΄ Γυμνασίου συμμετείχαν στην έρευνα 114 μαθητές (51 κορίτσια και 63 αγόρια). Μετά από επιστολή αίτησης δόθηκε άδεια από όλους τους διευθυντές και τις διευθύντριες των σχολείων και για όλους τους μαθητές κρατήθηκε η απόλυτη ανωνυμία και διασφαλίστηκε η εθελοντική συμμετοχή. Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε τον Μάιο του 2017.

3.2.2. Η διαδικασία της έρευνας και τα ερευνητικά εργαλεία

Οι περιορισμοί στις δυνατότητες που είχαμε για ακόμη ασφαλέστερα αποτελέσματα οφείλονται στο ότι τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στους μαθητές τον τελευταίο διδακτικό μήνα της σχολικής χρονιάς 2016-2017, μια εποχή δραστηριοτήτων στα δημοτικά σχολεία και στα γυμνάσια. Η επιλογή όμως να δοθούν τα ερωτηματολόγια στο τέλος της σχολικής χρονιάς ήταν αναγκαστική καθώς η επέκταση του συνόλου των αριθμών ώστε να συμπεριλάβει και τους αρνητικούς διδάσκεται στο τέλος της σχολικής περιόδου, σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα δημοτικού και γυμνασίου. Οι μαθητές απάντησαν αβίαστα στα ερωτηματολόγια, ανώνυμα, και με τη διαβεβαίωση ότι δεν θα υπάρξει αξιολόγηση. Θεωρούμε ότι τα αποτελέσματα της έρευνας δίνουν τη δυνατότητα να συγκροτηθεί μια ασφαλής βάση σε ένα ευρύ πεδίο των στόχων μας. Μας δίνουν ακόμη τη δυνατότητα να επανέλθουμε χρησιμοποιώντας περισσότερα εργαλεία (συνεντεύξεις, διδακτική παρέμβαση, τεστ) ώστε να εξάγουμε ασφαλέστερα αποτελέσματα. Πριν από τη διανομή του ερωτηματολογίου δόθηκε πιλοτικό ερωτηματολόγιο σε οκτώ μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, διαφορετικής σχολικής επίδοσης, προκειμένου να εξασφαλιστεί η σαφήνεια των ερωτήσεων και να γίνει δειγματοληπτική χρονομέτρηση.

Η έρευνα γίνεται με προσανατολισμό ποιοτικό με ορισμένα ποσοτικά στοιχεία στην ανάλυση και συζήτηση των δεδομένων. Έγινε προσπάθεια η παραγωγή των δεδομένων της έρευνας μας να αξιοποιηθεί με μια μικτή προσέγγιση τόσο ποιοτικών όσο και ποσοτικών μεθόδων. Η αξιοποίηση ισορροπίας μεταξύ ποσοτικών και ποιοτικών προσεγγίσεων και το πως αυτές χρησιμοποιούνται προκειμένου να συμπληρώσουν η μια την άλλη βοήθησαν στο να απαντηθούν όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματικά τα ερευνητικά μας ερωτήματα. Έγινε προσπάθεια ώστε τα ποσοτικά αποτελέσματα να μας δώσουν πληροφορίες για πιο ευέλικτες προσεγγίσεις στις απαντήσεις των μαθητών, στο περιβάλλον μάθησης, για τις αντιλήψεις τους και τις εκφράσεις τους κατά την κατασκευή του δικού τους νοήματος για την έννοια και τις ιδιότητες του μηδενός στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα αυτή απάντησαν σε κλειστού και ανοιχτού τύπου ερωτήσεις. Τα κλειστού τύπου ερωτήματα δόθηκαν για τη συλλογή αποδεικτικών στοιχείων για την υπόθεση εάν οι μαθητές αγωνίζονται με την έννοια του μηδενός, ενώ οι απαντήσεις στα ανοιχτά ερωτήματα αξιοποιήθηκαν ώστε να ανιχνευθεί γιατί υπάρχουν και ποιες είναι οι δυσκολίες και ποια είναι η εμπειρία των μαθητές με την έννοια.

3.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

3.3.1 Γενικά

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας έπρεπε να απαντήσουν σε 12 ερωτήματα (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ). Τα πρώτα έξι ερωτήματα εξετάζουν την αντίληψη που έχουν οι μαθητές για το μηδέν όταν αυτό παίρνει μέρος σε αριθμητικές πράξεις, ενώ τα επόμενα αποσκοπούν στην καταγραφή της αντίληψης των μαθητών για το μηδέν όταν αυτό συμμετέχει σε αλγεβρικές διαδικασίες. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο, οι ερωτήσεις 5, 6, 7 ομαδοποιήθηκαν και έχουν σκοπό να καταγράψουν τις αντιλήψεις των μαθητών για τη μεταφορά του μηδενός ως συλλογή αντικειμένων. Οι ερωτήσεις 1, 2 θα δείξουν την αντίληψη για τη μεταφορά του μηδενός ως κατασκευή αντικειμένου. Η αντίληψη του μηδενός ως μεταφορά μονάδων μέτρησης θα φανεί από τις απαντήσεις στις ερωτήσεις 8, 9 ενώ η μεταφορά του μηδενός στην κίνηση κατά μήκος μιας διαδρομής στην ομαδοποίηση των ερωτήσεων 3, 4. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στις αντιλήψεις των μαθητών για τις πράξεις της διαίρεσης με το μηδέν. Η διαίρεση με το μηδέν δεν είναι κάτι που προκύπτει φυσικά, κάτι που προκύπτει από την ωρίμανση της γνώσης των πράξεων με τους άλλους αριθμούς. Θεωρώντας ότι η κατανόηση της διαίρεσης με το μηδέν των μαθητών εμφανίζει ομοιότητες με την επίτευξη της αλγεβρικής σκέψης, παρουσιάζει δυσκολίες γιατί απαιτεί στοχασμό και τρόπο σκέψης που εξασκείται ξανά και ξανά. Προτείνεται λοιπόν, η ιδιαίτερη αυτή πράξη στους μαθητές προκειμένου να εμπλουτιστεί η αριθμητική τους εμπειρία και να αποφευχθούν το δυνατόν δυσκολίες και μελλοντικές ανακατασκευές γνώσεων. Μια διαφορετική προσέγγιση στην καταγραφή των αντιλήψεων των μαθητών για το μηδέν επιχειρείται με την ομάδα των ερωτήσεων 10, 11, 12 του ερωτηματολογίου. Η συμμετοχή του μηδενός στις πράξεις των ερωτήσεων 10, 11, 12 υποστηρίζει την ανάπτυξη της αίσθησης των μαθητών και μεσολαβεί στην μετάβαση από τους αριθμητικούς υπολογισμούς στις αλγεβρικές σχέσεις ποσοτήτων. Στόχος είναι να καταγραφεί εάν η ενεργή παρουσία του μηδενός σε αριθμητικές εξισώσεις, ως ζητούμενο και η μεσολάβησή του σε αριθμητικές παραστάσεις με ψευδομεταβλητές, ως αποτέλεσμα πρόσθεσης αντίθετων αριθμών, συμβάλει στη δυναμική της ανάπτυξης αλγεβρικών συλλογισμών. Ο τρόπος που το μηδέν αναγνωρίζεται στις περιπτώσεις αυτές, και η λειτουργία του ώστε η εστίαση να μη βρίσκεται στο συγκεκριμένο αλλά στη δομή και στη σχέση που υφίστανται οι ποσότητες συντελεί στην επίτευξη της γενίκευσης από τους μαθητές. Η επικέντρωση δε στις συγκεκριμένες ιδιότητες του μηδενός στις παραπάνω περιστάσεις, σε βάρος της εύρεσης συγκεκριμένων αριθμητικών αποτελεσμάτων αφορά στην επίτευξη της αφαίρεσης. Η γενίκευση και η αφαίρεση, ως πυρηνικά συστατικά της άλγεβρας, εκφράζονται στην προκειμένη περίπτωση συμβολικά με το μηδέν και έτσι συντείνουν στην ευχέρεια διαχείρισης των συμβόλων και της σημασίας τους, που είναι αναπόσπαστο κομμάτι της αλγεβρικής δεξιότητας (Βαμβακούση, Ξ., Βερύκιος, Π., Γαβρίλης, Κ., Θωμαίδης, Γ., Κείσογλου, Σ., Κλαουδάτος, Ν., Κυλάφης, Π., Ναζαριάν, Α., Σακονίδης, 2011).

Τα πρωτογενή στοιχεία αντλήθηκαν με τη συμπλήρωση των εκατό ογδόντα εννέα ερωτηματολογίων, αποτελούμενων από συνολικά δώδεκα ερωτήσεις, κλειστού και ανοιχτού τύπου, το καθένα. Επιπλέον το ερωτηματολόγιο κατηγοριοποιήθηκε σε πέντε θεματικές ενότητες. Κάθε ενότητα του ερωτηματολογίου αναφέρεται σε μια από τις βασικές πτυχές που περιλαμβάνει το θέμα της διπλωματικής εργασίας. Τη συλλογή των δεδομένων ακολούθησε η ποσοτική ανάλυση των δεδομένων και η επεξεργασία τους με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS (Statistical Package for the Social Sciences). Τα ερωτηματολόγια κωδικοποιήθηκαν και ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες. Εν συνεχεία αναλύθηκαν και εξήχθησαν τα συμπεράσματα βάσει των δυνατοτήτων που προσφέρει το στατιστικό πακέτο.

3.3.2 Ανάλυση των ερωτήσεων

Το πρώτο από τα ερωτήματα είχε σκοπό να εξερευνήσει την αντίληψη τους για τη θεσιακή αξία του μηδενός σε δεκαδικούς αριθμούς. Είναι μια εισαγωγική, απλή και εύκολη ερώτηση για μαθητές που τελειώνουν την έκτη δημοτικού και την πρώτη γυμνασίου. Σκοπός είναι να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η αξία του μηδενός, όπως των άλλων αριθμών, εξαρτάται από τη θέση του καθώς και εάν υπάρχει η αντίληψη της μεταφοράς του μηδενός ως ολικής απουσίας στην κατασκευή αντικειμένων. Η κατανόηση της αξίας της θέσης είναι μια σημαντική προϋπόθεση όχι μόνο για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, στην συγκεκριμένη έρευνα του μηδενός, αλλά και για την ανάπτυξη της κατανόησης της πολλαπλασιαστικής σχέσης των αριθμών. Οι Ketterlin-Geller & Chard (2011) υποστηρίζουν ότι η αξία θέσης ενός αριθμού είναι θεμελιώδους σημασίας για την τελική ανάπτυξη της αλγεβρικής λογικής, ιδιαίτερα της εννοιολογικής κατανόησης του βασικού δεκαδικού συστήματος των αριθμών και της ευχέρειας εφαρμογής των βασικών ιδιοτήτων των αριθμών. Στην ανάπτυξη αυτής της αλγεβρικής λογικής η καλή γνώση μαθηματικών από τους δασκάλους αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο της αποτελεσματικής διδασκαλίας και η διδασκαλία της αξίας της θέσης των αριθμών απαιτεί και κατανόηση της μαθησιακής εξέλιξης των μαθητών (Hurst & Hurrell, 2015).

Η δεύτερη ερώτηση- άσκηση είχε σκοπό να διερευνήσει μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών την αντίληψή τους για τη θεώρηση εάν το μηδέν ανήκει ή όχι στους άρτιους αριθμούς. Συγκεκριμένα ζητήθηκε να συνεχίσουν την αρίθμηση μιας σειράς άρτιων αριθμών που ξεκινούσε από το 20 και τελείωνε στο - 4. Στο πλαίσιο της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορετικές πτυχές της επέκτασης των συνόλων των αριθμών. Τα πρότυπα ενθαρρύνουν την αρχή της επαναλαμβανόμενης σκέψης, με την επέκταση των αριθμητικών μοτίβων των άρτιων και περιττών αριθμών, ώστε να χαρακτηρίσουν το μηδέν. Ο χαρακτηρισμός του μηδενός ως άρτιου αριθμού, από τους μαθητές απεικονίζει την ικανότητα τους να δικαιολογήσουν και να αποδείξουν μια εικασία. Η ερώτηση, επίσης αυτή είναι εισαγωγική της ερώτησης που αφορά τη διαίρεση με το μηδέν. Δυο ενδιαφέροντα σημεία είναι δυνατόν να εντοπιστούν στις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση εάν το μηδέν είναι άρτιος ή περιττός. Το πρώτο είναι ότι οι μαθητές στοχάζονται τη διαίρεση με το μηδέν ως διαιρέτη και ως διαιρετέο. Οι απαντήσεις του ερωτηματολογίου θα εντοπίσουν εάν υπάρχει σύγχυση των μαθητών στις ερωτήσεις $77 \div 0$ και $0 \div 59$, υποθέτοντας ότι η σύγχυση στις διαιρέσεις αυτές ισχύει όπως ακριβώς και στην περίπτωση : $2 \div 0$ ή $0 \div 2$ δηλαδή, το μηδέν διαιρούμενο με το δυο ή το δυο διαιρούμενο με το μηδέν. Αυτό το δίλημμα οφείλεται στην αντίληψη των μαθητών για την έννοια του μηδενός αλλά και στην αντίληψή τους για την έννοια της διαίρεσης. Οι μαθητές, προκειμένου να χωρίσουν *κάτι…* αυτό πρέπει να υπάρχει… και στο μηδέν δεν υπάρχει *τίποτε* για να χωριστεί. Παρόλο που μπορεί ένας μαθητής να έγραψε μια πράξη διαίρεσης με το μηδέν είναι δύσκολο να δεχθεί ως αποτέλεσμα αυτής της πράξης το 0. Το δεύτερο σημείο ενδιαφέροντος είναι ότι παρά το ότι γίνεται δεκτό ότι $0 \div 2 = 0$ δεν χρησιμοποιείται σαν επιχείρημα στην ερμηνεία της πρότασης το μηδέν είναι άρτιος (αιτιολόγηση σε συνέντευξη). Αλλά και στην άλλη θεώρηση για τους άρτιους αριθμούς, ότι δηλαδή είναι άθροισμα δυο ίσων ακέραιων αριθμών, υπάρχει η απορία- άρνηση ότι το μηδέν δεν μπορεί να είναι άθροισμα δυο ίσων ακέραιων αριθμών. Στη μεταφορά κατασκευής αντικειμένων η έννοια του άρτιου αριθμού δεν μπορεί να είναι διφορούμενη. Να αναφέρεται δηλαδή ότι ο άρτιος αριθμός δημιουργείται από το άθροισμα δυο ίσων ακέραιων αριθμών, ή όταν χωρισθεί σε δυο ίσα κομμάτια δεν αφήνει υπόλοιπο. Η αντίληψη των μαθητών για την έννοια των άρτιων και των περιττών αριθμών άπτεται, επίσης, της κατανόησης της αντίληψης της έννοιας του πολλαπλασιασμού. Θα εκτιμηθεί με την ερώτηση αυτή, εάν γίνεται αντιληπτό το μηδέν ως πολλαπλάσιο του δυο για τους μαθητές.

Η τρίτη και η τέταρτη ερώτηση τέθηκαν με σκοπό να ερευνήσουν την αντίληψη των μαθητών για τη σχέση και τις συνδέσεις του μηδενός με άλλες μαθηματικές οντότητες (θετικούς και αρνητικούς αριθμούς) καθώς και το ρόλο του στην γραμμή των πραγματικών αριθμών. Οι ερωτήσεις εξετάζουν τι αντιπροσωπεύει για τους μαθητές της έρευνας, μια γραμμή αριθμών και πώς γίνεται αυτή αντιληπτή. Ακόμη ποιες είναι οι υποκείμενες αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του αριθμού που υποστηρίζονται-βασίζονται στην αριθμογραμμή. Με το μηδέν και τους αρνητικούς αριθμούς, δεν δίνεται η ποσοτική-διαισθητική σημασία στους αριθμούς, όπως συνέβαινε στην αριθμητική αλλά σε σχέσεις και γίνεται ένα πέρασμα από τις πράξεις της αριθμητικής σε μια αλγεβρική δομή σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες. Τα σημάδια-σημεία στην αριθμογραμμή, με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, θα εξεταστεί πως θα αξιοποιηθούν, ώστε οι μαθητές να ερμηνεύσουν τόσο τα σημεία κλιμάκωσης όσο και τα διαστήματα μονάδων. Ο σκοπός είναι, αφενός να φανεί πως διαμορφώνεται η αντίληψη των μαθητών για το μηδέν αναφορικά με την πυκνότητα της αριθμογραμμής και τον προσανατολισμό της. Η επινόηση του μηχανισμού της γραμμής έχει το πλεονέκτημα να απεικονίζει τα μεγέθη και ταυτόχρονα τους φυσικούς αριθμούς που αντιστοιχούν σε αυτά. Ο Heefer (2011), εφιστά την προσοχή στη σημασία που πρέπει να δοθεί στις έννοιες που απεικονίζονται στα στοιχεία της γραμμής, δηλώνοντας ότι, «η γραμμή των αριθμών είναι μια αναπαράσταση αριθμών σε μια ευθεία γραμμή, όπου τα σημεία αντιπροσωπεύουν ακεραίους ή πραγματικούς αριθμούς και η απόσταση μεταξύ των σημείων ταιριάζει με την αριθμητική διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων αριθμών». Ο Freudenthal (1983) πηγαίνει μακρύτερα και περιγράφει την αναπαραστατική λειτουργία της γραμμής από διδακτική άποψη, σημειώνοντας τη σημασία τόσο της αρίθμησης όσο και της ερμηνείας της μέτρησης (Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Αφετέρου, θα ερευνηθούν οι δυο πτυχές του μηδενός στον άξονα των αριθμών, δηλαδή τόσο ως σημείου με αντικειμενική ύπαρξη όσο και ως σημείου αναφοράς ενός άξονα με δυο κατευθύνσεις. Σύμφωνα με τους Lakoff & Núñez, το μηδέν, όπως όλοι οι αριθμοί δεν αντιμετωπίζονται σαν οντότητες αλλά εννοιοποιούνται ως σημεία θέσης σε μια ευθεία γραμμή. Το μηδέν, ως μεταφορά κίνησης σε μια διαδρομή βρίσκεται κάπου στη διαδρομή που επεκτείνεται επ' αόριστο και προς τις δυο κατευθύνσεις, αλλά ως αρχή της διαδρομής αυτής για κάθε κατεύθυνση ορίζεται το μηδέν και έτσι ορίζεται ο αριθμός ως μέγεθος που εξαρτάται από την απόσταση του από το μηδέν.

Η πέμπτη ερώτηση θα αναδείξει την αντίληψη που έχουν οι μαθητές για την κατανόηση του μηδενός ως ποσότητας. Η εστίαση θα γίνει στην εφαρμογή αυτού του απλού αλλά γενικού κανόνα : α – α = 0. Ο κανόνας αυτός είναι πραγματικά αλγεβρικός δεδομένου ότι το α είναι μεταβλητή και όχι συγκεκριμένος αριθμός (είναι δηλαδή διαφορετικό από τη σχέση α – 2 = 3, όπου το α έχει μια συγκεκριμένη τιμή α = 5). Οι μαθητές που γνωρίζουν μόνο τον υπολογιστικό αλγόριθμο για την εύρεση αποτελέσματος δεν θα μπορούσαν να υπολογίσουν την παράσταση α - α = 0, εκτός αν έβαζαν στη θέση της μεταβλητής α συγκεκριμένους αριθμούς, όπως 4 - 4 = 0, ή 5 - 5 = 0. Αν θεωρηθεί όμως ότι το μηδέν είναι η απάντηση, ακόμη και όταν δεν υπάρχουν συγκεκριμένοι αριθμοί, τότε γίνεται αντιληπτό ότι το μηδέν μεσολαβεί στην αναγνώριση αυτής της γενίκευσης, λειτουργώντας ως γέφυρα για την αλγεβρική κατανόηση. Οι Lakoff & Nunez θεωρούν ότι οι αριθμοί είναι οι πληθικοί αριθμοί συλλογών από ομοειδή αντικείμενα. Με δεδομένο ότι η αριθμητική είναι μεταφορά συλλογής αντικειμένων, ορίζεται-χαρτογραφείται η κενή συλλογή με έναν αριθμό τον οποίο καλούμε «μηδέν». Έτσι από τις απαντήσεις των μαθητών θα υπάρξουν ενδείξεις για το εάν δημιουργήθηκε η εννοιολογική μεταφορά : το μηδέν είναι πραγματικός αριθμός. Δεδομένου ότι το μηδέν αποκτά φυσική ερμηνεία στην μεταφορά συλλογής αντικειμένων θα θεωρούσε κάποιος ότι θεμελιώνεται ως αριθμός. Τα ευρήματα ερευνών όμως δείχνουν ότι δεν επαρκεί η συγκεκριμένη μεταφορά. Η πρόσθεση θετικών αριθμών θα αποκτά νόημα ως κίνηση προς τα δεξιά, ενώ η αφαίρεση θετικών αριθμών θα κινείται προς τα αριστερά. Μια μικρή αλλαγή της μεταφορικής αντιστοίχισης κρίνεται απαραίτητη για την πρόσθεση και την αφαίρεση με το μηδέν. Και στις δυο περιπτώσεις, πρόσθεση και αφαίρεση θα εννοιοποιούνται ως απουσία κίνησης : α + 0 = α, α – 0 = α, α – α = 0. Στην καθημερινή εμπειρία μας το αποτέλεσμα της απομάκρυνσης (στην προκειμένη περίπτωση αποδίδεται με την πράξη της αφαίρεσης) *α* αντικειμένων από *α* αντικείμενα είναι η απόλυτη απουσία αντικειμένων και όχι μια συλλογή αντικειμένων. Σύμφωνα με την κλειστότητα, όμως, και τον περιορισμό ότι το αποτέλεσμα πρέπει να είναι αριθμός δημιουργείται η ανάγκη να εννοιοποιηθεί ότι η απουσία συλλογής *είναι* συλλογή. Εδώ λοιπόν, για αυτό το λόγο θα εξετασθεί εάν δημιουργήθηκε στους μαθητές η νέα μεταφορά, δηλαδή δημιουργήθηκε *κάτι* από το *τίποτε*. Θα εξετασθεί ακόμη, εάν από την απουσία συλλογής αντικειμένων έγινε η μεταφορική αντιστοίχιση και εάν κατάφεραν οι μαθητές να δημιουργήσουν τη μοναδική και απολύτως συγκεκριμένη συλλογή : μια συλλογή χωρίς αντικείμενα στο εσωτερικό της.

Με την έκτη ερώτηση γίνεται μια προσπάθεια να εξεταστεί η αντίληψη των μαθητών για το μηδέν ως παράγοντα στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Μια βασική ευρεία λανθασμένη άποψη επικρατεί είναι ότι με τον πολλαπλασιασμό προκύπτει πάντα ένας αριθμός μεγαλύτερος από τους αρχικούς, ιδιότητα που ισχύει στους φυσικούς αριθμούς. Δημιουργείται έτσι στους μαθητές η λανθασμένη άποψη $5 \cdot 0 \cdot 3 = 15$. Το λάθος αυτό συμβαίνει γιατί οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν το μηδέν ως «τίποτα». Η πράξη λοιπόν του πολλαπλασιασμού αριθμών με το μηδέν αφήνει το γινόμενο αμετάβλητο. Είναι η διαδικασία της μείξης που δεν έγινε. Η ανάπτυξη της ευχέρειας στις πράξεις από τους μαθητές απαιτεί ισορροπία και σύνδεση ανάμεσα στην εννοιολογική και την υπολογιστική κατανόηση. Με την έκτη ερώτηση γίνεται διερεύνηση για το πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν το μηδέν ως παράγοντα τόσο στον πολλαπλασιασμό αριθμών όσο και στον πολλαπλασιασμό μεταβλητών. Η παρουσία του μηδενός είναι ένα ισχυρό εργαλείο που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τόσο για την ευελιξία τους στον αλγεβρικό συμβολισμό όσο και για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων τους για τις αλγεβρικές έννοιες και αναπαραστάσεις. Οι Carracher, Schliemann & Brizuela (2006) υποστηρίζουν ότι οι δυσκολίες των μαθητών είναι πιο έντονες και παρατεταμένες όσο πιο έντονος είναι ο διαχωρισμός μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας. Αυτός ο διαχωρισμός συνήθως δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί επαρκώς από σχεδιασμένα προγράμματα, προκειμένου να διευκολύνει τη «μετάβαση» από την αριθμητική στην άλγεβρα, αλλά απαιτεί την ενσωμάτωση αριθμητικής και άλγεβρας, από την αρχή. Αναμφισβήτητα υπάρχουν αναπτυξιακοί περιορισμοί στην μάθηση όμως οι πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μπορούν να πραγματεύονται έγκαιρα από τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ως συναρτησιακές σχέσεις. Για να θεωρηθούν οι πράξεις ως συναρτήσεις, απαιτείται να αντιμετωπίζονται ως εργασίες-λειτουργίες σε ένα σύνολο αριθμών ή ποσοτήτων. Το μηδέν μπορεί να έχει υποστηρικτικό ρόλο σε αυτή την διαδρομή .

Στην έβδομη ερώτηση γίνεται η εισαγωγή μεταβλητών x, y για το υπολογισμό γινομένου ($x \cdot y = z$). Θα διερευνηθεί, εάν οι μαθητές έχουν ευχέρεια με την πράξη του πολλαπλασιασμού και την εφαρμογή της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Όπως στην περίπτωση μεταφοράς συλλογής αντικειμένων, ο πολλαπλασιασμός ως μεταφορά μπορεί να επεκταθεί ως μεταφορά επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης στη συλλογή αντικειμένων. Η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (x φορές) συμβαίνει από x κομμάτια του μεγέθους y ώστε να προκύψει ένα νέο ακέραιο-ολόκληρο αντικείμενο. Μια πρόσθετη μεταφορά στον πολλαπλασιασμό είναι απαραίτητη για να γίνει κατανοητό το μηδέν. Δεδομένου ότι η απουσία-έλλειψη αντικειμένου δεν είναι αντικείμενο δεν πρέπει, αυστηρά θεωρούμενο, να αντιστοιχεί σε αριθμό. Άρα ο πολλαπλασιασμός $0 \cdot 24$ γίνεται αντιληπτός ως πολλαπλασιασμός δυο αριθμών ή το μηδέν αγνοείται; Στην προκειμένη περίπτωση, $0 \cdot 24$, ($x = 0$, $y = 24$) από τις απαντήσεις των μαθητών θα εκτιμηθεί, εάν έχει επιτευχθεί ο γνωστικός μηχανισμός ο οποίος επεκτείνει τη μεταφορά από την πρόσθεση στον πολλαπλασιασμό. Δηλαδή εάν ερμηνευθεί ως αποτέλεσμα της παραπάνω πράξης είναι το μηδέν «ως καθόλου κομμάτια μεγέθους 24». Η κατανόηση και η χρήση της ιδιότητας της αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού, επίσης θα κριθεί καθώς και η θεώρηση «24 κομμάτια με καθόλου μέγεθος» δίνουν αποτέλεσμα το μηδέν. Η επέκταση αυτή είναι μια εννοιακή μείξη, μια μεταφορική μείξη. Ο συνδυασμός των δύο σαφώς διακεκριμένων γνωσιακών δομών, των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με σταθερές αντιστοιχίες μεταξύ τους είναι η μείξη που δημιουργεί καινούρια οντότητα. Η μεταφορική μείξη αφορά την εννοιοποίηση της αφηρημένης έννοιας του αριθμού ως κάτι που πλέον «κατασκευάζεται από...» ή «συντίθεται από…» μέρη που είναι άλλοι αριθμοί. Οι πράξη του πολλαπλασιασμού, δίνει τη δυνατότητα και παρέχει μοτίβα στους μαθητές ώστε να γίνει κατανοητό ότι τα μέρη σχηματίζουν ολότητες και οι ολότητες αποτελούνται από μέρη.

<u>*Με τις ερωτήσεις οκτώ και εννέα*</u> θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθούν οι αντιλήψεις μαθητών για τη διαίρεση με το μηδέν ως διαιρέτη αλλά και ως διαιρετέο. Η διαίρεση με το μηδέν ως διαιρέτη παραβιάζει τη γενική αντίληψη ότι κάθε πράξη έχει σαν αποτέλεσμα αριθμό. Σκοπός της ερώτησης, $77 \div 0$, είναι να εξετάσει κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν τις μαθηματικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν τη διαίρεση με το μηδέν ως απροσδιόριστη ή τείνουν να της δώσουν μια αριθμητική τιμή. Από τις απαντήσεις θα φανεί κατά πόσο οι μαθητές εφαρμόζουν την αντίστροφη λειτουργία της πράξης της διαίρεσης, ως επαλήθευσή της. Η διαίρεση με το μηδέν είναι μια πολύπλοκη έννοια, η οποία αναπτύσσεται αφού γίνει η βασική κατανόηση της έννοιας του μηδενός και των αλγεβρικών ιδιοτήτων του. Οι μαθητές της τελευταίας τάξης της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και της πρώτης τάξης της δευτεροβάθμιας εάν προσπαθήσουν να ερμηνεύσουν τη διαίρεση με το μηδέν σαν

διανομή συγκεκριμένων αντικειμένων, αναπόφευκτα θα οδηγηθούν σε σύγχυση και λάθος. Η ερμηνεία της πράξης της διαίρεσης με το μηδέν, στους μαθητές, χρειάζεται να γίνεται με προσεκτική ανάλυση των κατάλληλων μαθηματικών επιχειρημάτων και περιορισμών που θα επιτρέψουν στους μαθητές να κατανοήσουν τον μη ορισμό της συγκεκριμένης διαίρεσης. Εάν οι μαθητές ερμηνεύουν τη διαίρεση ως διανομή, θα εκτιμηθεί και στις απαντήσεις που αφορούν στη διαίρεση, $0 \div 59$, με το μηδέν στη θέση του διαιρετέου, δηλαδή εάν οι μαθητές αγνοούν την ενεργή παρουσία του στην πράξη ή το ταυτίζουν με το «τίποτε» άρα το αγνοούν. Τονίζεται ότι και σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές αναμένεται να εκλάβουν τη πράξη της διαίρεσης ως αντίστροφης του πολλαπλασιασμού, προκειμένου να ελέγξουν και να δώσουν το απάντηση τους.

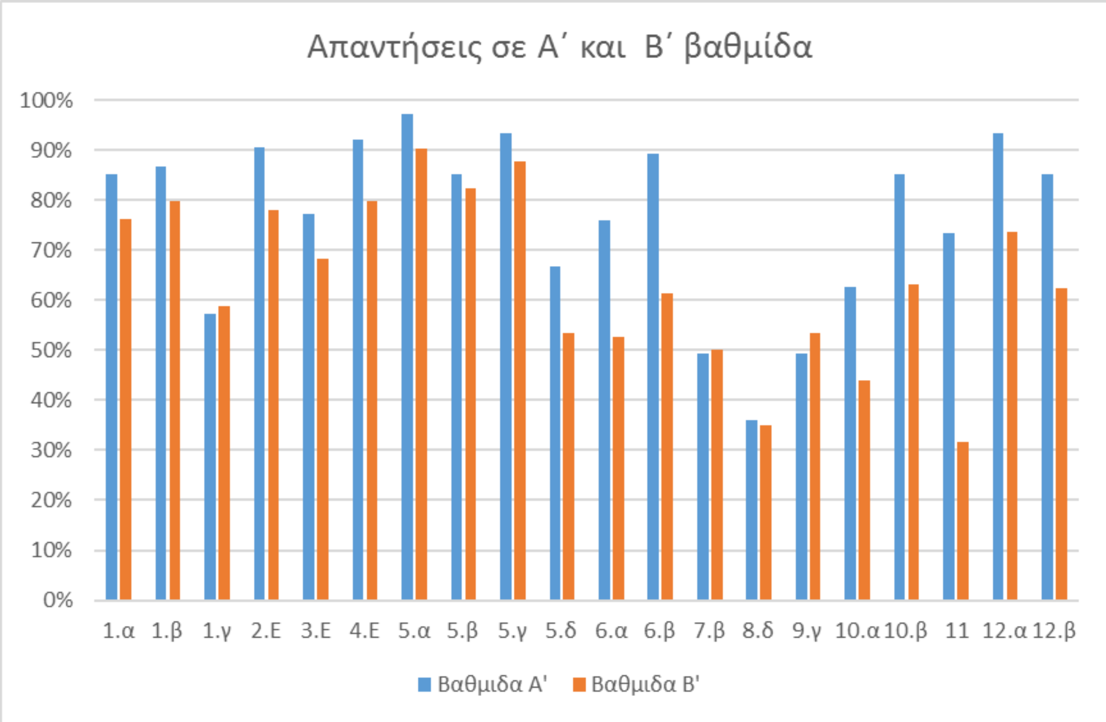
Στην δέκατη ερώτηση θα καταγραφεί η αντίληψη που έχουν οι μαθητές για την ισότιμη συμμετοχή του μηδενός στις ιδιότητες των πράξεων καθώς και τη θεώρηση του ως αριθμητική λύση μιας εξίσωσης. Παρουσιάζει ενδιαφέρον να παρατηρηθεί πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν το μηδέν όταν αυτό εμπλέκεται σε σύνθετες πράξεις και εάν η προτεραιότητα των πράξεων ισχύει όταν ένας παράγοντας είναι μηδέν. Γενικά είναι γνωστό ότι οι αριθμοί που πρέπει να «βρεθούν» για να «γεμίσουν» κάποιο πλαίσιο δημιουργούν προβλήματα σε αρκετά παιδιά. Πολλοί μαθητές συχνά απαντούν δίνοντας όχι έναν αριθμό αλλά συνδυασμούς αριθμών για να γεμίσουν το κενό πλαίσιο. Δεν είναι σαφές σε αυτούς τους μαθητές ότι το πλαίσιο αντιπροσωπεύει έναν αριθμό. Δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι η αναζήτηση αριθμού σε πλαίσιο δημιουργεί στους μαθητές ερμηνείες που είναι ασυμβίβαστες με την μεταγενέστερη χρήση των κυριολεκτικών συμβόλων. Σκοπός της ερώτησης 10, είναι η αναζήτηση αριθμού σε κάθε πλαίσιο. Αυτή η διαδικασία εύρεσης θα δώσει στα παιδιά ευκαιρίες να αντιληφθούν και να διαχειριστούν αλγεβρικές γενικεύσεις (Fujii & Stephens, 2001). Ουσιαστικά, τέτοια προβλήματα απαιτούν από τους μαθητές να βρουν έναν απόντα ή άγνωστο αριθμό σε μια μαθηματική φράση. Τέτοιες προτάσεις αποκαλούνται «παραστάσεις με αριθμό που λείπει», τις οποίες υποθέτουμε ότι κάποιοι μαθητές λύνουν με δοκιμές και εικασίες. Οι προτάσεις αυτού του τύπου μπορεί να είναι αρκετά αποτελεσματικές για την προώθηση της γνώσης απλών αριθμητικών γεγονότων, αλλά είναι αρκετά στοχευμένες στην ανάπτυξη αλγεβρικών σκέψεων. Η προσπάθεια να βρεθεί μια γραμμή οριοθέτησης μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας δεν είναι ασήμαντο πρόβλημα. Μερικοί ερευνητές τείνουν να βλέπουν την άλγεβρα παντού και να ισχυρίζονται ότι για τα παιδιά η επίλυση ενός ελλείποντος παράγοντα, σε ένα αριθμητικό πρόβλημα όπως το : 3 + 2 . ... = 3 είναι άλγεβρα, γιατί ο κάτοχος της θέσης μπορεί να θεωρηθεί ως ο άγνωστος. Φυσικά, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας καθαρή αριθμητική όπως διαδικασίες καταμέτρησης ή μια αντίστροφη λειτουργία. Στο άλλο άκρο βρίσκουμε ερευνητές που ισχυρίζονται ότι η άλγεβρα δεν μπορεί να εισαχθεί χωρίς προηγούμενη γνώση των ακεραίων αριθμών. Πολλές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται σήμερα για την πρώιμη άλγεβρα φαίνονται να επικεντρώνονται στην εισαγωγή πλαισίων και κυριολεκτικών συμβόλων ως μηχανισμών για την επίλυση απλών αριθμητικών προτάσεων. Η αλγεβρική σκέψη αναγκαστικά εμπλέκει τους μαθητές σε πρότυπα γενίκευσης αλλά και αφαίρεσης, δεξιότητα που είναι απαραίτητη για την μετάβαση στην άλγεβρα και τον λογισμό.

Στην ενδέκατη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν το μηδέν, που είναι η λύση ενός απλού συστήματος δυο εξισώσεων. Οι μαθητές καλούνται να βρουν ή να αποφασίσουν να μαντέψουν δυο απόντες ή άγνωστους αριθμούς που έχουν ταυτόχρονα άθροισμα και διαφορά τον αριθμό εκατό (100). Η εύρεση των απόντων ή των άγνωστων αριθμών βάζει επίσης τους μαθητές σε ένα περιβάλλον στοχασμού, που τους παρέχει ευκαιρίες να σκεφτούν γενικά τις ιδιότητες των αριθμών και να αποφασίσουν να επιλέξουν εκείνους που πληρούν τις προϋποθέσεις που ζητούνται για να δώσουν σωστή απάντηση. Πολλοί μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην πραγματοποίηση της μετάβασης από τις πράξεις με αριθμούς στις πράξεις με μεταβλητές. Μεγάλο μέρος της διδασκαλίας της (πρώιμης) άλγεβρας στα δημοτικά σχολεία και στα γυμνάσια φαίνεται να επικεντρώνεται στην εργασία με άγνωστους, με ελάχιστη όμως έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής. Πολλοί ερευνητές, εκπαιδευτικοί, συγγραφείς βιβλίων και προγραμμάτων σπουδών θεωρούν ότι η εισαγωγή της έννοιας των μεταβλητών μπορεί να περιμένει έως ότου οι μαθητές διδαχθούν την επίσημη άλγεβρα. Ερευνητές όμως όπως οι Blanton & Kaput προτείνουν την «αλγεβροποίηση της μαθηματικής εμπειρίας στο Δημοτικό Σχολείο». Με το όρο αλγεβροποίηση εννοούν την εστίαση στην εξερεύνηση της γενίκευσης μέσω της συγκρότησης και της έκφρασης νέων γενικεύσεων (Βαμβακούση, Ξ., Βερύκιος, Π., Γαβρίλης, Κ., Θωμαίδης, Γ., Κείσογλου, Σ., Κλαουδάτος, Ν., Κυλάφης, Π., Ναζαριάν, Α., Σακονίδης, 2011). Η αναζήτηση των δυο αριθμών, στην ερώτηση 11, δίνει έμφαση στις σχέσεις των δυο αριθμών που αναζητούνται (100 και 0) παρά στους αριθμούς καθαυτούς. Ο τρόπος δε που το μηδέν αφήνει ανέπαφο τον αριθμό 100 εάν προστεθεί ή αφαιρεθεί τονίζει τις ιδιότητες της ουδετερότητας του στην πρόσθεση και στην αφαίρεση.

Στην ερώτηση δώδεκα, τέλος επιχειρείται εστίαση στην αλγεβρική σκέψη των μαθητών με το παράδειγμα δυο ημι-μεταβλητών ή ψευδομεταβλητών σχέσεων (Mestre, C., Oliveira, 2012). Η σημασία του δωδέκατου ερωτήματος αφορά στη γενίκευση σχετικά με τις σχέσεις αριθμών. Θα γίνει προσπάθεια να ανιχνευθεί κατά πόσο οι μαθητές είναι εφοδιασμένοι με κριτική αλγεβρική σκέψη εξετάζοντας εάν η εύρεση του αποτελέσματος έγινε χωρίς υπολογισμό. Ο υπολογισμός μπορεί να είναι χρήσιμος για την επαναβεβαίωση-επαλήθευση του αποτελέσματος από τους μαθητές, αλλά ο στόχος είναι να επικεντρωθεί η προσοχή των παιδιών στην υποκείμενη μαθηματική δομή που υποδεικνύεται από αυτή την πρόταση. Στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος δεν είναι να υπολογίσουν τα παιδιά ότι 237 - 89 + 89 = 237 και 267 – 92 + 92 = 267 αλλά να παρατηρήσουν ότι το αποτέλεσμα είναι 237 ή 267 αντίστοιχα, ανεξάρτητα από τον αριθμό που αφαιρείται και στη συνέχεια προστίθεται ή αντίστροφα. Με τις προτάσεις αυτές αναμένεται να επικεντρωθεί η προσοχή των μαθητών στη γενική σχέση που ισχύει στις αριθμητικές παραστάσεις και όχι στις πράξεις με τους συγκεκριμένους αριθμούς. Οι ψευδομεταβλητές και ο ρόλος του μηδενός στις σχέσεις μεταξύ τους μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να εντοπίσουν και να αναγνωρίσουν τον αλγεβρικό χαρακτήρα των παραπάνω αριθμητικών προτάσεων. Οι σύγχρονες θεωρήσεις υποστηρίζουν ότι η χρήση ψευδομεταβλητών μπορεί να αποτελέσει μια σημαντική γέφυρα μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής σκέψης. Οι μαθητές με την παρατήρηση και τον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, αποκτούν δεξιότητες όχι μόνο να παράγουν αλλά και τεκμηριώνουν γενικεύσεις.

3.4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Από την εξέταση των απαντήσεων των 189 ερωτηματολογίων, που δόθηκαν σε μαθητές και μαθήτριες στην Πρωτοβάθμια και στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση προέκυψαν τα αποτελέσματα που παραθέτουμε.



Πίνακας 1 : Σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση στις βαθμίδες εκπαίδευσης

Η καταγραφή των σωστών απαντήσεων, και η συγκριτική καταγραφή στις δυο βαθμίδες της εκπαίδευσης, σε ένα αρχικό επίπεδο ανάλυσης δίνονται στον Πίνακα 1. Παρατηρούμε ότι και στις δυο βαθμίδες της εκπαίδευσης, τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σημειώθηκαν στις ερωτήσεις που αναφέρονται στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, ενώ χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας σημειώθηκαν στις ερωτήσεις που αφορούν τη συμμετοχή του μηδενός στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση. Ιδιαίτερη αναφορά, θεωρούμε ότι αξίζει να κάνουμε στο χαμηλό ποσοστό (κάτω του 40%) και στις δυο βαθμίδες στην ερώτηση 8(δ) όπου το μηδέν είναι στη θέση του διαιρέτη. Οι απαντήσεις των μαθητών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε όλες σχεδόν τις ερωτήσεις. Συγκεκριμένα στην ερώτηση 11 στην οποία ζητούνται δυο αριθμοί που το άθροισμα και η διαφορά τους να είναι ίση με τον αριθμό 100, απάντησαν σωστά υπερδιπλάσιοι μαθητές του Δημοτικού σε σχέση με τους μαθητές του Γυμνασίου. Οι μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απάντησαν σωστά, κατά μικρό ποσοστό όμως διαφοράς σε σχέση με τους μαθητές του Δημοτικού, στις εξής ερωτήσεις : Στην ερώτηση 1γ, που αφορά τη θεσιακή αξία του μηδενός όταν αυτό βρίσκεται στη θέση των δεκάδων σε δεκαδικό αριθμό. Στην ερώτηση 7β, στην οποία το μηδέν είναι παράγοντας στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Τέλος, στην ερώτηση 9γ που αναφέρεται στη διαίρεση και το μηδέν βρίσκεται στη θέση του διαιρετέου. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε επίσης ότι από την επεξεργασία των ερωτηματολογίων μας δεν εντοπίσαμε κανένα ερωτηματολόγιο μαθητή πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας που να έχει σωστές σε όλες τις απαντήσεις, κάτι που μας εξέπληξε αλλά και μας προβλημάτισε.

Οι τέσσερις θεμελιώδεις μεταφορές που αναφέρθηκαν στο θεωρητικό μας πλαίσιο δηλαδή, *η συλλογή αντικειμένων, η κατασκευή αντικειμένων, η μέτρηση-σύγκριση αντικειμένων και η κίνηση κατά μήκος μιας γραμμής αντικειμένων* και οι μεταφορικοί χαρακτηρισμοί για το μηδέν χαρακτηρίζουν τις συμβολικές έννοιες του. Οι ερωτήσεις ομαδοποιήθηκαν και το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές της έρευνας, είχε σκοπό να καταγράψει τις αντιλήψεις που έχουν διαμορφώσει για το μηδέν και πως αυτό γίνεται αντιληπτό στις θεμελιώδεις μεταφορές. Δηλαδή εάν το μηδέν αντιπροσωπεύει το κενό σύνολο (κενή συλλογή), την έλλειψη ή απουσία (απουσία μερών στην κατασκευή), το απόλυτο στην ελάχιστη ποσότητα (έλλειψη οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους) και τελικά εάν θεωρούν οι μαθητές το μηδέν σημείο αναφοράς-αρχή (απουσία κίνησης) για τους άλλους αριθμούς (Lakoff, G., Nunez, 2000). Στους μαθητές ηλικίας 12-13 ετών, που βρίσκονται στην αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης η έννοια του μηδενός μπορεί να εξελιχθεί από την αρχική διαισθητική κατανόηση του ως κενού στην τελική ένταξη του στους πραγματικούς αριθμούς με τις ιδιαίτερες ιδιότητες του με τις μεταφορές.

3.4.1 Ποσοτικές προσεγγίσεις

Το μηδέν ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων

Προκειμένου να εξεταστεί εάν το μηδέν γίνεται αντιληπτό ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένου, έγινε ομαδοποίηση των ερωτήσεων 1 (α, β, γ) και 2. Στην αριθμητική ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων, απαιτείται η κατανόηση - εννοιοποίηση κάθε αριθμού - αντικειμένου ως σύνθεση ή κατασκευή από μέρη, που είναι άλλοι αριθμοί. Οι απαντήσεις των μαθητών στις συγκεκριμένες ερωτήσεις θα αποτυπώσουν την αντίληψη που έχουν διαμορφώσει για το εάν το μηδέν είναι η οντότητα που δηλώνει την απουσία αντικειμένου. Στην πρώτη ερώτηση εξετάζεται τη θεσιακή αξία του μηδενός και ζητούμε τη διαγραφή του όταν δεν αλλάζει την αξία του αριθμού. Οι αριθμοί είναι δεκαδικοί και το μηδέν είτε βρίσκεται στη θέση του ακέραιου μέρους είτε βρίσκεται σε θέση κάποιου δεκαδικού ψηφίου. Στη δεύτερη ερώτηση ζητείται η καταγραφή σε φθίνουσα σειρά άρτιων αριθμών από το 20 έως το – 4 με σκοπό να εξετάσουμε εάν το μηδέν θα καταγραφεί ως άρτιος αριθμός στη σειρά του.

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
βαθμίδα*(1α,1β,1γ,2)	187	98,9%	2	1,1%	189	100,0%

Ο παραπάνω πίνακας πληροφορεί ότι 2 απαντήσεις μαθητών (του γυμνασίου) είναι ταυτόχρονα και στις τέσσερεις ερωτήσεις λάθος, ενώ ο επόμενος πίνακας είναι ένας πίνακας διπλής εισόδου, γνωστός και ως πίνακας συνάφειας, ο οποίος πληροφορεί για τις σωστές απαντήσεις των μαθητών ανά ερώτηση και ανά βαθμίδα.

		Ερωτήσεις				
		1α	1β	1γ	2	Σύνολο
Πρωτοβάθμια	Μαθητές	64	65	43	68	75
	% ανά βαθμίδα	85,3%	86,7%	57,3%	90,7%	
	% σύνολο ερωτήσεων	42,4%	41,7%	39,1%	43,3%	
	% στο σύνολο	34,2%	34,8%	23,0%	36,4%	40,1%
Δευτεροβάθμια	Μαθητές	87	91	67	89	112
	% ανά βαθμίδα	77,7%	81,3%	59,8%	79,5%	
	% σύνολο ερωτήσεων	57,6%	58,3%	60,9%	56,7%	
	% στο σύνολο	46,5%	48,7%	35,8%	47,6%	59,9%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	151	156	110	157	187
	% στο σύνολο	80,7%	83,4%	58,8%	84,0%	100,0%

Πίνακας 2 : Αντίληψη του μηδενός ως κατασκευή αντικειμένου

Παρατηρήθηκαν υψηλά ποσοστά αποτυχίας στη ερώτηση 1γ που αφορά τον προσδιορισμό της θεσιακής αξίας του μηδενός όταν αυτό βρίσκεται στην τάξη των δεκάδων, στους μαθητές και των δυο βαθμίδων. Από τους μαθητές της έκτης δημοτικού οι 32 μαθητές έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Από τους μαθητές της πρώτης γυμνασίου 47 μαθητές απάντησαν λάθος. Η δυσκολία τους εντοπίζεται στη διατήρηση ή όχι του μηδενός όταν αυτό προτάσσεται στο ακέραιο τμήμα του δεκαδικού αριθμού 02,205. Οι μαθητές μπερδεύτηκαν όταν έπρεπε να αποφασίσουν που να διατηρήσουν ή που να διαγράψουν το μηδέν.

Στη δεύτερη ερώτηση, οι 157 από τους 189 μαθητές και των δυο βαθμίδων, συμπλήρωσαν σωστά την σειρά των άρτιων αριθμών και συμπεριέλαβαν το μηδέν στη σωστή θέση. Ενώ 34 μαθητές (7 μαθητές του δημοτικού και 27 του γυμνασίου) έκαναν λάθος αγνοώντας οι περισσότεροι να συμπεριλάβουν το μηδέν στην αρίθμηση ή κάποιοι να το τοποθετήσουν σε λάθος θέση. Συγκεκριμένα από τους 75 μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης απάντησαν σωστά οι 68, ενώ μικρότερο ποσοστό επιτυχίας παρουσιάστηκε στους 114 μαθητές της δευτεροβάθμιας , από τους οποίους απάντησαν σωστά οι 89. Οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είχαν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας στο σύνολο των παραπάνω ερωτήσεων και ειδικότερα στην ερώτηση 1α για την αξία της θέσης του μηδενός στον δεκαδικό αριθμό 0,020 αλλά και στην ερώτηση 2 στην οποία ζητήθηκε να καταμετρηθούν οι άρτιοι αριθμοί συμπεριλαμβάνοντας το μηδέν στην αρίθμηση. Η διαφορά των δυο βαθμίδων της εκπαίδευσης στη δεύτερη ερώτηση υπερέβη το 10% . Οι μαθητές που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας βρίσκονται στο κατώφλι της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις στις οποίες συμμετέχουν ακέραιοι αριθμοί. Εκτός από την πρώτη ερώτηση, στην οποία υπάρχουν δεκαδικοί αριθμοί, σε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου δεν χρησιμοποιήθηκαν κλασματικοί και δεκαδικοί αριθμοί προκειμένου η προσοχή των μαθητών να εστιαστεί στο ρόλο του μηδενός. Παρότι τα ποσοστά των λάθος απαντήσεων δεν είναι υψηλά, μας προβληματίζει ο αριθμός των μαθητών που δίνουν λάθος απαντήσεις.

Το μηδέν, ως μεταφορά κίνησης σε μια διαδρομή

Η δεύτερη ομαδοποίηση έγινε στις ερωτήσεις 3 και 4 του ερωτηματολογίου. Αφορά στην ικανότητα των μαθητών να αντιληφθούν το μηδέν σαν μεταφορά κίνησης σε μια διαδρομή. Στην προκειμένη περίπτωση η διαδρομή αυτή συμβαίνει στην αριθμογραμμή των πραγματικών αριθμών. Το μηδέν σε αυτή τη μεταφορά, εμφανίζεται διαφορετικά από τις μεταφορές συλλογής και κατασκευής αντικειμένων στις οποίες δηλώνεται ως οντότητα που δηλώνει απουσία ή έλλειψη. Τώρα αποκτά μια υπόσταση, είναι η αρχή, η αφετηρία της διαδρομής, κάθε σημείο της οποίας είναι ένας αριθμός, δηλαδή κατέχει μια συγκεκριμένη θέση σε αυτή τη διαδρομή. Η απόσταση του από την αφετηρία (από το 0) ερμηνεύεται «μακρύτερα από… = μεγαλύτερος», «πλησιέστερα από… = μικρότερο». Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις αυτές θα αναδείξουν την αντίληψη τους για την αριθμητική ως κίνηση κατά μήκος μιας διαδρομής. Η διαδρομή αυτή επεκτείνεται επ’ αόριστο και έτσι επιτρέπει στο μηδέν και αργότερα στους αρνητικούς αριθμούς να εννοιοποιούνται ως σημεία θέσης, διακριτά και συγκεκριμένα. Εξαιτίας αυτού νοούνται οι αριθμοί ώστε να μπορούν να συγκριθούν, να διαταχθούν και να επεκτείνουν το σύνολο των φυσικών αριθμών.

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
βαθμίδα*(3,4)	169	89,4%	20	10,6%	189	100,0%

Ο παραπάνω πίνακας πληροφορεί ότι 20 απαντήσεις (3 μαθητών της πρωτοβάθμιας και 17 μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) είναι ταυτόχρονα και στις δυο ερωτήσεις λάθος, ενώ ο επόμενος πίνακας είναι ένας πίνακας διπλής εισόδου, γνωστός και ως πίνακας συνάφειας και καταγράφει τον αριθμό και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση και βαθμίδα.

		Ερωτήσεις		
		3	4	Σύνολο
Πρωτοβάθμια	Μαθητές	58	69	72
	% ανά βαθμίδα	80,6%	95,8%	
	% σύνολο ερωτήσεων	42,6%	43,1%	
	% στο σύνολο	34,3%	40,8%	42,6%
Δευτεροβάθμια	Μαθητές	78	91	97
	% ανά βαθμίδα	80,4%	93,8%	
	% σύνολο ερωτήσεων	57,4%	56,9%	
	% στο σύνολο	46,2%	53,8%	57,4%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	136	160	169
	% στο σύνολο	80,5%	94,7%	100,0%

Πίνακας 3 : Αντίληψη του μηδενός ως κίνηση σε διαδρομή

Στην τρίτη ερώτηση, από τους 189 συνολικά μαθητές οι 52 μαθητές (16 της έκτης δημοτικού και 36 της πρώτης γυμνασίου) τοποθέτησαν λάθος ή δεν έβαλαν καθόλου το μηδέν στην αριθμογραμμή. Στους μαθητές δόθηκαν οι αριθμοί 5, 0, - 3, 4, - 2 και ζητήθηκε να τους τοποθετήσουν σε σημεία που ισαπέχουν και βρίσκονται σε μια γραμμή. Στην τέταρτη ερώτηση, δόθηκε στους μαθητές μια γραμμή με σημεία σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους και στην οποία ήταν σημειωμένος ο αριθμός – 3, ζητήθηκε να υπολογίσουν τη σωστή θέση για το μηδέν και να το τοποθετήσουν. Στη συγκεκριμένη ερώτηση 29 μαθητές (6 της έκτης δημοτικού και 23 της πρώτης γυμνασίου) τοποθέτησαν το μηδέν σε λάθος θέση. Οι μαθητές της έκτης δημοτικού αντιμετώπισαν τη θέση του μηδενός στην αριθμογραμμή με μεγαλύτερη επιτυχία. Είναι σημαντική η διαφορά στα αποτελέσματα ανάμεσα στους μαθητές της έκτης τάξης του δημοτικού και στους μαθητές της πρώτης γυμνασίου αναφορικά με την τοποθέτηση αριθμών στην αριθμογραμμή. Η γραμμή αριθμών παρέχει στους αριθμούς τις ιδιότητες και τις διαδικασίες γεφύρωσης ώστε η έννοια του αριθμού να εξελιχθεί στο νου των μαθητών.

Το μηδέν ως μεταφορά συλλογής αντικειμένων

Οι ερωτήσεις 5, 6 και 7 ομαδοποιήθηκαν για να εξεταστεί εάν το μηδέν γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές ως επέκταση της μεταφοράς συλλογής αντικειμένων. Στη συγκεκριμένη μεταφορά το μηδέν εκφράζει την συλλογή που δεν έχει στοιχεία (δηλαδή έχει μηδενικό πλήθος στοιχείων) και έτσι συμμετέχει στις πράξεις της πρόσθεσης της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού. Με την ομαδοποίηση των παραπάνω ερωτήσεων θα γίνει προσπάθεια να καταγραφεί από τις απαντήσεις των μαθητών ο ρόλος που έχει το μηδέν στην ανάπτυξη της αλγεβρικής τους σκέψης. Αφενός εξαιτίας της διπλής φύσης του πολλαπλασιασμού, που αναγνωρίζεται ως η σημαντικότερη ιδέα του, οι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται συμβολίζουν διαφορετικά στοιχεία. Η διαδικασία του πολλαπλασιασμού οδηγεί τους μαθητές πιο κοντά στην αφηρημένη σκέψη, όχι με την απομνημόνευση του αλγόριθμου, αλλά με την ιδιότητα κατά την οποία οι μαθητές δεν καταμετρούν για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα, αλλά σκέφτονται πόσες φορές (πλήθος) θα αναπαράγουν τον αριθμό των στοιχείων ενός συνόλου (μέγεθος). Το μηδέν στην πράξη του πολλαπλασιασμού με αριθμούς ή με μεταβλητές, είτε έχει την ερμηνεία του πλήθους, είτε την ερμηνεία του μεγέθους, δίνει πάντοτε αποτέλεσμα το μηδέν και είναι παράδειγμα γενίκευσης. Αφετέρου οι πράξεις με μεταβλητές αντανακλούν τη δομή της αριθμητικής και των λειτουργιών της αλλά με αφηρημένα σχήματα. Το μηδέν αφήνει αμετάβλητη οποιαδήποτε ποσότητα στην οποία προστίθεται ή από την οποία αφαιρείται αλλά μηδενίζει κάθε ποσότητα που πολλαπλασιάζει. Η λειτουργία του αυτή επιτρέπει επίσης στους μαθητές να αναπτύξουν ισχυρή κατανόηση έννοιας της γενίκευσης.

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Βαθμίδα*(5α,5β,5γ,5δ,6α,6β,7β)	187	98,9%	2	1,1%	189	100,0%

Ο παραπάνω πίνακας πληροφορεί ότι 2 απαντήσεις μαθητών (της πρώτης γυμνασίου) είναι ταυτόχρονα και στις επτά ερωτήσεις λάθος, ενώ ο επόμενος πίνακας είναι ένας πίνακας διπλής εισόδου, γνωστός και ως πίνακας συνάφειας. Καταγράφει τις σωστές απαντήσεις μαθητών ανά ερώτηση και ανά βαθμίδα.

		Ερωτήσεις							Σύνολο
		5α	**5β**	**5γ**	**5δ**	**6α**	**6β**	**7β**	
Α΄βάθμια	Μαθητές	73	64	70	50	57	67	37	75
	% ανά βαθμίδα	97,3%	85,3%	93,3%	66,7%	76,0%	89,3%	49,3%	
	% σύνολο των ερωτήσεων	41,5%	40,5%	41,2%	45,0%	48,7%	48,9%	39,4%	
	% στο σύνολο	39,0%	34,2%	37,4%	26,7%	30,5%	35,8%	19,8%	40,1%
Β΄βάθμια	Μαθητές	103	94	100	61	60	70	57	112
	% ανά βαθμίδα	92,0%	83,9%	89,3%	54,5%	53,6%	62,5%	50,9%	
	% σύνολο των ερωτήσεων	58,5%	59,5%	58,8%	55,0%	51,3%	51,1%	60,6%	
	% στο σύνολο	55,1%	50,3%	53,5%	32,6%	32,1%	37,4%	30,5%	59,9%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	176	158	170	111	117	137	94	187
	% στο σύνολο	94,1%	84,5%	90,9%	59,4%	62,6%	73,3%	50,3%	100,0%

Πίνακας 4 : Αντίληψη του μηδενός ως συλλογή αντικειμένου

Τα αποτελέσματα του πίνακα 4 εντοπίζουν τα μεγαλύτερα ποσοστά λάθους στην πέμπτη ερώτηση. Οι 78 μαθητές (5 του δημοτικού και 53 του γυμνασίου) απάντησαν λάθος στην ερώτηση 5δ (α - α = ….). Οι περισσότεροι δε, από αυτούς τους μαθητές έδωσαν σαν απάντηση το α. Το επόμενο μεγαλύτερο ποσοστό λάθους δόθηκε στην ερώτηση 5β (α + 0 = …), στην οποία απάντησαν λάθος 11 μαθητές της έκτης δημοτικού και 18 μαθητές της πρώτης γυμνασίου, δίνοντας εδώ οι περισσότεροι σαν απάντηση το 0. Τα λάθη των μαθητών σε αυτή την ερώτηση έρχονται σε αντίθεση με την ερμηνεία που δόθηκε προηγουμένως, δηλαδή ότι το μηδέν στον νου των παιδιών είναι το «τίποτα». Φαίνεται εδώ, ότι η δομική αλλά και η λειτουργική προσέγγιση της έννοιας του μηδενός δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές. Στις ερωτήσεις που προαναφέραμε, δηλαδή α – α =… και α + 0 =… σημειώνουμε και την παρουσία της μεταβλητής α και όχι αριθμών για τις πράξεις με το μηδέν ίσως και αυτό δημιούργησε παραπάνω αμηχανία στους μαθητές, εφόσον δεν είναι ακόμη εξοικειωμένοι στις πράξεις με αλγεβρικούς συμβολισμούς. Λιγότερες ήταν οι λάθος απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στις ερωτήσεις 5α (0 + 5 = …) και 5γ (10 – 0 = …) στις οποίες το μηδέν προστίθεται σε ή αφαιρείται από φυσικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα στην ερώτηση 5α, λάθος απαντήσεις έδωσαν 2 μαθητές της έκτης δημοτικού και 9 μαθητές της πρώτης γυμνασίου, ενώ στην ερώτηση 5γ οι λάθος έδωσαν αντίστοιχα από 5 και 12 μαθητές των δυο βαθμίδων. Τα ποσοστά της επιτυχίας σε αυτές τις ερωτήσεις είναι μεγαλύτερα στους μαθητές της πρωτοβάθμιας βαθμίδας.

Η έκτη ερώτηση, περιλαμβάνει δυο υποερωτήματα στα οποία αριθμοί αλλά και (γράμματα) μεταβλητές πολλαπλασιάζονται με το μηδέν. Τα αποτελέσματα του πίνακα 4 προσέφεραν κάτι παράδοξο. Στο υποερώτημα 6α ($4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 3 = \ldots$) καταγράφηκαν περισσότερες λάθος απαντήσεις, οι οποίες ήταν αριθμητικά αποτελέσματα, αφού το μηδέν αγνοήθηκε σαν να μην υπήρχε καθόλου σαν παράγοντας στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Από τις 72 λάθος απαντήσεις, οι 18 προέρχονται από τους μαθητές του δημοτικού και 54 από τους μαθητές του γυμνασίου. Στο υποερώτημα 6β ($\alpha \cdot 0 \cdot \beta = \ldots$) 8 μαθητές του δημοτικού και 42 μαθητές του γυμνασίου έδωσαν λάθος ή καθόλου απάντηση. Υπογραμμίζουμε ότι στην προηγούμενη ερώτηση, στην οποία το μηδέν συμμετέχει στην πρόσθεση και στην αφαίρεση, οι μαθητές έκαναν περισσότερα λάθη στις παραστάσεις που υπάρχουν μεταβλητές από τις παραστάσεις που εμπλέκονται φυσικοί αριθμοί. Ως παράδοξο χαρακτηρίζεται ότι στην ερώτηση που το μηδέν πολλαπλασιάζεται με μεταβλητές τα λάθη των μαθητών είναι λιγότερα από τα λάθη από αυτά που έκαναν στον πολλαπλασιασμό του μηδέν με φυσικούς αριθμούς.

Στην έβδομη ερώτηση μεγάλος αριθμός μαθητών, 95 μαθητές (38 μαθητές της πρωτοβάθμιας και 57 της δευτεροβάθμιας) δεν δίνουν σωστή απάντηση. Η ερώτηση ζητούσε από τους μαθητές να αντικαταστήσουν στις μεταβλητές x και y αντίστοιχα τους αριθμούς 0 και 24 και κατόπιν να υπολογίσουν το γινόμενο $x \cdot y$. Οι 60 μαθητές αγνόησαν το μηδέν στην διαδικασία του πολλαπλασιασμού και έδωσαν σαν αποτέλεσμα τον αριθμό 24, ενώ οι 25 μαθητές θεωρήσαν ότι το αποτέλεσμα δεν είναι αριθμός, δηλαδή το γινόμενο δεν ορίζεται. Ο πίνακας 4 δείχνει ότι δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στις απαντήσεις των μαθητών της έκτης δημοτικού και της πρώτης γυμνασίου, στην έβδομη ερώτηση.

Το μηδέν ως μεταφορά μονάδων μέτρησης

Το μηδέν στη μεταφορά μονάδων μέτρησης αποκτά ένα ακόμη πιο νοητικό και αφηρημένο νόημα. Από την έννοια του φυσικού τμήματος, από τα οποία αποτελείται κάθε αριθμός αφαιρείται πλέον η υλική υπόσταση. Η μονάδα μέτρησης γίνεται ιδεατό νοητικό αντικείμενο, αποτελεί ύπαρξη μιας κατάστασης μέσα από την υποκειμενική εμπειρία. Η αντιστοιχία ένα προς ένα της νοητικής μονάδας με αριθμούς δημιουργεί για τον αριθμό την έννοια : φυσικό αντικείμενο, που αποτελείται από απόλυτο αριθμό μονάδων μέτρησης μοναδιαίου μήκους. Το μηδέν, στην επέκταση αυτής της μεταφοράς, υπάρχει ως απουσία μονάδων μέτρησης. Οι ερωτήσεις 8 και 9 ομαδοποιήθηκαν και εξετάζουν την αντίληψη του μηδενός στη διαίρεση, ως διαιρέτη και ως διαιρετέο. Η διάσπαση-διαίρεση ενός αριθμού Α (στην προκειμένη περίπτωση φυσικού αντικειμένου) σε Κ (πλήθος) τμήματα μήκους Λ (μέγεθος) ορίζει τη διαίρεση σε αυτή τη μεταφορά μονάδων μέτρησης (Α ÷ Λ = Κ). Στη διαίρεση που το μηδέν είναι στη θέση του αριθμού Α, δηλαδή το 0 να διαιρεθεί σε Κ τμήματα μήκους Λ, τότε ο αριθμός των τμημάτων μήκους Λ που αντιστοιχεί είναι 0, δηλαδή 0 ÷ Λ = 0. Στη διαίρεση Α ÷ 0 το μηδέν είναι το μήκος (απουσία μεγέθους) τμήματος. Στην περίπτωση αυτή το Κ δεν είναι προσδιορισμένο (πλήθος).

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
βαθμίδα*(8δ,9γ)	128	67,7%	61	32,3%	189	100,0%

Ο παραπάνω πίνακας μας πληροφορεί ότι 61 απαντήσεις μαθητών (28 του δημοτικού και 33 του γυμνασίου) είναι ταυτόχρονα και στις δυο ερωτήσεις λάθος, ενώ στον επόμενο πίνακα διπλής εισόδου, γνωστός και ως πίνακας συνάφειας, καταγράφονται οι σωστές απαντήσεις των μαθητών ανά ερώτηση και ανά βαθμίδα.

		Ερωτήσεις		
		8δ	**9γ**	Σύνολο
Πρωτοβάθμια	Μαθητές	27	37	47
	% ανά βαθμίδα	57,4%	78,7%	
	% σύνολο ερωτήσεων	40,3%	37,8%	
	% στο σύνολο	21,1%	28,9%	36,7%
Δευτεροβάθμια	Μαθητές	40	61	81
	% ανά βαθμίδα	49,4%	75,3%	
	% σύνολο ερωτήσεων	59,7%	62,2%	
	% στο σύνολο	31,3%	47,7%	63,3%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	67	98	128
	% στο σύνολο	52,3%	76,6%	100,0%

Πίνακας 5 : Αντίληψη του μηδενός ως μονάδα μεταφοράς

Τα αποτελέσματα του πίνακα 5, δείχνουν ότι 61 μαθητές έδωσαν λάθος απαντήσεις και στις δυο ερωτήσεις διαίρεσης με μηδέν. Από τους μαθητές που απάντησαν σωστά (δηλαδή 128 μαθητές) έστω στη μια από τις ερωτήσεις 8 και 9 : Στην όγδοη ερώτηση, 77 ÷ 0, μόνο οι 67 μαθητές έδωσαν ως απάντηση ότι δεν ορίζεται. Από αυτούς οι 27 μαθητές είναι της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού και 40 μαθητές είναι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Στην ένατη ερώτηση, 0 ÷ 59, σωστή απάντηση έδωσαν 98 μαθητές, 37 μαθητές του δημοτικού και 61 του γυμνασίου. Στην ερμηνεία και συζήτηση των αποτελεσμάτων αυτής της έρευνας γίνεται μια προσπάθεια ανάλυσης των αποτελεσμάτων του πίνακα 5 που αφορά τη διαίρεση στην οποία εμπλέκεται το μηδέν. Επιχειρείται επίσης μια προσπάθεια ερμηνείας των λαθών των μαθητών.

<u>Παρανοήσεις του μηδενός στη διαίρεση</u>

		Ερωτήσεις			Σύνολο
		8α	8β	8γ	
Πρωτοβάθμια	Μαθητές	2	44	0	46
	% ανά βαθμίδα	4,3%	95,7%	0,0%	
	% σύνολο ερωτήσεων	28,6%	41,1%	0,0%	
	% στο σύνολο	1,7%	37,3%	0,0%	39,0%
Δευτεροβάθμια	Μαθητές	5	63	4	72
	% ανά βαθμίδα	6,9%	87,5%	5,6%	
	% σύνολο ερωτήσεων	71,4%	58,9%	100,0%	
	% στο σύνολο	4,2%	53,4%	3,4%	61,0%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	7	107	4	118
	% στο σύνολο	5,9%	90,7%	3,4%	100,0%

Πίνακας 6 : Παρανοήσεις στη διαίρεση με το μηδέν ως διαιρέτη

Ο πίνακας 6 καταγράφει τις λάθος επιλογές απαντήσεων που δόθηκαν στην διαίρεση με το μηδέν. Οι μαθητές που στην ερώτηση για τη διαίρεση με το μηδέν ως διαιρετέο, $77 \div 0$, έδωσαν ως απάντηση το 0 είναι οι περισσότεροι και στις δυο βαθμίδες της εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, από τους 107 μαθητές, οι 44 (από τους 46 που έκαναν λάθος επιλογή απάντησης) είναι μαθητές της έκτης τάξης και 63 (από τους 72) μαθητές της πρώτης τάξης του γυμνασίου. Οι υπόλοιποι 2 μαθητές από το δημοτικό και 9 από το γυμνάσιο επέλεξαν ως σωστή απάντηση στη διαίρεση αριθμούς διαφορετικούς του μηδενός.

		Ερωτήσεις			Σύνολο
		9α	9β	9δ	
Πρωτοβάθμια	Μαθητές	0	6	31	37
	% ανά βαθμίδα	0,0%	16,2%	83,8%	
	% σύνολο ερωτήσεων	0,0%	37,5%	43,7%	
	% στο σύνολο	0,0%	6,7%	34,8%	41,6%
Δευτεροβάθμια	Μαθητές	2	10	40	52
	% ανά βαθμίδα	3,8%	19,2%	76,9%	
	% σύνολο ερωτήσεων	100,0%	62,5%	56,3%	
	% στο σύνολο	2,2%	11,2%	44,9%	58,4%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	2	16	71	89
	% στο σύνολο	2,2%	18,0%	79,8%	100,0%

Πίνακας 7 : Παρανοήσεις στη διαίρεση με το μηδέν ως διαιρετέο

Το συχνότερο λάθος, που έκαναν μαθητές και των δυο βαθμίδων σε αυτή την ερώτηση, 0 ÷ 59, όπου το μηδέν είναι στη θέση του διαιρετέου, ήταν να επιλέξουν ως απάντηση ότι η πράξη δεν ορίζεται. Συγκεκριμένα 71 μαθητές συνολικά, από τους οποίους οι 31 είναι μαθητές της έκτης δημοτικού και οι 40 μαθητές της πρώτης τάξης του γυμνασίου. Οι 16 μαθητές (6 μαθητές του Δημοτικού και 10 μαθητές του Γυμνασίου), επέλεξαν ως σωστή απάντηση τον αριθμό 59, αγνοώντας την παρουσία του μηδενός στη συγκεκριμένη πράξη.

Το μηδέν σε εξισώσεις και εκφράσεις με ψευδομεταβλητές

Οι ερωτήσεις 10, 11 και 12 ομαδοποιήθηκαν με άξονα τη δομή των προτάσεων. Με τις ερωτήσεις αυτές οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν τις σχέσεις ανάμεσα σε αριθμούς με τρόπους που όχι μόνο ενισχύουν την αριθμητική, αλλά και παρέχουν μια βάση για την άλγεβρα. Το μηδέν στις ερωτήσεις αυτές έχει διαφορετικούς ρόλους. Συμμετέχει ή είναι ζητούμενο σε προτάσεις που οι μαθητές εφαρμόζουν προτεραιότητα πράξεων, είναι η αριθμητική τιμή που ζητείται ώστε να ισχύει ισότητα και δημιουργεί ισοδυναμίες.

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
βαθμίδα*$Q10_Q11_Q12	173	91,5%	16	8,5%	189	100,0%

Ο παραπάνω πίνακας μας πληροφορεί ότι 16 απαντήσεις μαθητών (4 μαθητές της έκτης δημοτικού και 12 μαθητές της πρώτης γυμνασίου) είναι λάθος ταυτόχρονα και στις δύο ερωτήσεις ενώ στον επόμενο πίνακα διπλής εισόδου, πίνακας συνάφειας, αποτυπώνονται οι σωστές απαντήσεις σε κάθε ερώτηση ανά βαθμίδα.

		Ερωτήσεις					Σύνολο
		Q10a	Q10b	Q11	Q12a	Q12b	
Πρωτοβάθμια	Μαθητές	47	64	55	66	58	71
	% ανά βαθμίδα	66,2%	90,1%	77,5%	93,0%	81,7%	
	% σύνολο ερωτήσεων	48,5%	47,1%	60,4%	44,0%	45,0%	
	% στο σύνολο	27,2%	37,0%	31,8%	38,2%	33,5%	41,0%
Δευτεροβάθμια	Μαθητές	50	72	36	84	71	102
	% ανά βαθμίδα	49,0%	70,6%	35,3%	82,4%	69,6%	
	% σύνολο ερωτήσεων	51,5%	52,9%	39,6%	56,0%	55,0%	
	% στο σύνολο	28,9%	41,6%	20,8%	48,6%	41,0%	59,0%
Συνολικά	Σύνολο μαθητών	97	136	91	150	129	173
	% στο σύνολο	56,1%	78,6%	52,6%	86,7%	74,6%	100,0%

Πίνακας 8 : Αντίληψη του μηδενός σε εξισώσεις και εκφράσεις με ψευδομεταβλητές

Στην ερώτηση 10α [3 + 2 · ... = 3], 28 μαθητές του δημοτικού και 64 μαθητές του γυμνασίου, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές της έρευνας, δεν έδωσαν σωστή απάντηση. Στην ερώτηση 10β [25 – (2 · …) = 0] 11 μαθητές της έκτης δημοτικού και 42 μαθητές της πρώτης γυμνασίου δεν έδωσαν σωστή απάντηση. Δεν συμπλήρωσαν το 0 στις κενές θέσεις ώστε να προκύψει το αποτέλεσμα. Το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας που εμφανίζεται στην ερώτηση 11β ενδεχόμενα αποδίδεται στην παρουσία παρένθεσης, η οποία υπενθύμισε στους μαθητές την προτεραιότητα της πράξης του πολλαπλασιασμού και κατόπιν έδωσε νόημα στο σύμβολο της ισότητας ως ισοδυναμίας ανάμεσα στα δύο μέλη. Οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, εμφάνισαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας συνολικά στη δέκατη ερώτηση. Τα λάθη που έκαναν οι μαθητές στις παραπάνω αριθμητικές παραστάσεις, πιθανά δεν οφείλονται μόνο στην αντίληψη που έχουν οι μαθητές για το ρόλο του μηδενός στον πολλαπλασιασμό και στην προτεραιότητα των πράξεων αλλά και στη σύγχυση που ίσως υπάρχει για τις έννοιες μεταβλητή και άγνωστος.

Η ενδέκατη ερώτηση, ζητούσε από τους μαθητές να βρουν δυο αριθμούς που και το άθροισμά τους και η διαφορά τους να ισούται με 100, είχε σκοπό αφενός να ανιχνεύσει εάν το μηδέν ανακαλείται από τον νου των μαθητών ως αριθμός – λύση στην ερώτηση και αφετέρου να διερευνήσει εάν υπάρχει στην αντίληψη των μαθητών η βασική ιδιότητα του μηδενός να είναι το ουδέτερο στοιχείο στην αφαίρεση (ως μειωτέος). Οι μαθητές και των δυο βαθμίδων που απάντησαν σωστά σε αυτή την ερώτηση είναι μόνο 91, ενώ χαρακτηριστικός είναι ο αριθμός των μαθητών της πρώτης γυμνασίου, 78 μαθητές, που δεν έδωσαν ή έδωσαν λάθος απάντηση στο ερώτημα. Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, στην ενδέκατη ερώτηση, ήταν η εύρεση δυο διαφορετικών αριθμών που έδιναν άθροισμα το 100 ή διαφορά το 100 αλλά χωρίς να ικανοποιούνται και οι δυο συνθήκες ταυτόχρονα.

Τέλος η δωδέκατη ερώτηση, έχει δυο υποερωτήματα: το 12α (237 + 89 – 89 =) και το 12β (267 – 92 + 92 =). Στις παραπάνω αριθμητικές εκφράσεις με ψευδομεταβλητές, οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύτηκαν και έδωσαν περισσότερες λάθος απαντήσεις από τους μαθητές της πρωτοβάθμιας. Οι αριθμητικές παραστάσεις, + 89 - 89 και - 92 + 92, επιλέχθηκαν για να δούμε εάν οι μαθητές στην αριθμητική αυτή έκφραση αναγνωρίσουν ότι η ποσότητα που προστίθεται αμέσως μετά αφαιρείται, ή το αντίστροφο ώστε να εμφανιστεί η γενίκευση της διαδικασίας. Τα αποτελέσματα του πίνακα 8 δείχνουν ότι δεν συνέβη η γενίκευση αυτή στους περισσότερους μαθητές. Στην ερώτηση 12α έδωσαν λάθος απαντήσεις ή έκαναν πράξεις για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα, 9 μαθητές του δημοτικού και 30 μαθητές του γυμνασίου. Στην ερώτηση 12β, 17 μαθητές της πρώτης δημοτικού και 43 μαθητές της πρώτης τάξης του γυμνασίου υπολόγισαν λάθος το αποτέλεσμα ή έκαναν πράξεις για να το βρουν. Στην ερώτηση 12β λιγότεροι μαθητές βρήκαν το αποτέλεσμα χωρίς υπολογισμό και αντιλήφθηκαν την γενική μορφή της παράστασης ενδεχόμενα γιατί η αφαίρεση του αριθμού 92 προηγείται της πρόσθεσης του.

3.5 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σύμφωνα με το θεωρητικό μας πλαίσιο η συνειδητοποίηση ότι το μηδέν είναι ένας αριθμός απαιτεί πολλές γνωστικές ικανότητες, που θα επιτρέψουν στους μαθητές να περάσουν από τις έμφυτες βασικές αριθμητικές ικανότητες, στο πλαίσιο του ενσαρκωμένου κόσμου, στη βαθιά και πλούσια κατανόηση των μαθηματικών. Θα γίνει μια προσπάθεια να μελετηθούν τα αποτελέσματα της έρευνας για την αντίληψη που έχουν οι μαθητές 12-13 ετών, για το μηδέν και την εξέλιξή του από τη βασική αριθμητική στις πιο εξελιγμένες μορφές της έννοιας του αριθμού, με τις εννοιολογικές μεταφορές. Το μηδέν ερμηνεύεται ως έλλειψη, απουσία αντικειμένου όσον αφορά τη θεσιακή του αξία ως ψηφίο μέσα σε αριθμούς αλλά και την θεώρηση του ως άρτιου αριθμού. Η θέση του μηδενός στην αριθμογραμμή, παρέχει την ευκαιρία να εντοπιστούν στοιχεία για την διαισθητική χρήση της γραμμής αριθμών στην κατανόηση της έννοιας του μηδενός και να επικυρώσει το ρόλο του στη σχέση του με τους αριθμούς. Ο ορισμός του ως σημείου αφετηρίας και η αντιστοίχιση της διαδρομής της κίνησης με φυσικό τμήμα (μέγεθος) υποστηρίζει και ενισχύει την φυσική επέκταση της γραμμής αριστερά για τους αρνητικούς αριθμούς. Τα λάθη των μαθητών της έρευνας στις πράξεις με το μηδέν, προβληματίζουν για το κατά πόσο οφείλονται στην εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση του ή προκαλούνται από γνωστικά κενά κανόνων και διαδικασιών στους αλγόριθμους των πράξεων, των οποίων η σύνδεση με εννοιολογικές γνώσεις είναι μάλλον οριακή. Η περίπλοκη περίπτωση της διαίρεσης με το μηδέν δίνει μια ευκαιρία να αναδειχθούν αρκετά κεντρικά ζητήματα σχετικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Τέλος η χρήση αριθμητικών εκφράσεων για την απεικόνιση σχέσεων των μεταβλητών με τη συμβολή του μηδενός απαιτεί μια μετατόπιση της σκέψης χωρίς υπολογισμούς προκειμένου να αναζητηθούν πρότυπα που είναι γενικά και σύνθετα.

Οι συμμετέχοντες μαθητές στην έρευνα παρουσίασαν ιδιαίτερες αδυναμίες στο γνωστικό επίπεδο. Ας σημειωθεί ότι τα ερωτηματολόγια που δόθηκαν δεν έγιναν με βάση πολύπλοκα προβλήματα ή πράξεις, αλλά με απλές αναπαραστάσεις των βασικών πράξεων που συμπεριλάμβαναν το μηδέν και που οι μαθητές έχουν διδαχθεί σε όλες τις τάξεις κατά τη φοίτησή τους στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση και στη πρώτη τάξη της δευτεροβάθμιας. Παρόλα αυτά λίγοι μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά σε αρκετά από τα ερωτήματα και κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν τη γνώση που έπρεπε να έχουν αποκτήσει. Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας σίγουρα δεν μπορούν να θεωρηθούν ως γενίκευση. Ωστόσο δόθηκε η δυνατότητα αποτύπωσης της αντίληψης και της κατανόησης της έννοιας του μηδενός, από μαθητές και μαθήτριες που βρίσκονται στο στάδιο μετάβασης στην αλγεβρική σκέψη.

Στην ερευνητική βιβλιογραφία, η έννοια της διαίρεσης με το μηδέν αλλά και της αιτιολόγησης της συγκεκριμένης πράξης έχει διερευνηθεί ιστορικά , όπως έχει ήδη αναφερθεί από τους Kline (1962), Seiffe, (2000), γλωσσολογικά από τους Blake & Verhille, (1985) , γνωσιακά από παρανοήσεις παιδιών από τους Henry (1969), Reys & Grouws (1975) αλλά και ως προς τις δυσκολίες υποψήφιων εκπαιδευτικών από τους Ball (1990), Even & Tirosh (1995), Tsamir, Sheffer & Tirosh(2000), Wheeler & Feghali (1983). Όλοι οι ερευνητές ανέφεραν την ευρέως διαδεδομένη σύγχυση για το 0 και ιδιαίτερα της διαίρεσης με το 0 από μαθητές και φοιτητές όλων των ηλικιών και διαπιστώθηκε ότι ακόμη και όσοι δίνουν σωστή απάντηση, αυτή βασίζεται στον κανόνα απομνημόνευσης παρά στην εννοιολογική κατανόηση. Οι έρευνες αυτές, η πρόκληση της καθημερινής διδασκαλίας και περισσότερο η ανάγκη των μαθητών για βαθιά κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών επέβαλλαν την ιδιαίτερη αναφορά και τη συζήτηση για τη διαίρεση με το μηδέν. Η διαίρεση με το μηδέν για τους μαθητές που βρίσκονται στην αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης προσφέρει μια μαθηματική πρόκληση και ευκαιρία για στάση στα μαθηματικά που έχει τις ρίζες της στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του μηδενός και της πράξης της διαίρεσης.

Το μηδέν ως μεταφορά κατασκευής αντικειμένων

Στους περισσότερους μαθητές της έρευνας, εμφανίζονται σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια ως προς την αντίληψη που έχουν για το μηδέν αντίστοιχα με όσα έχουν καταγραφεί στην ιστορική του εξέλιξη. Η καθυστερημένη ανακάλυψη του μηδενός στην ανθρώπινη ιστορία επιβεβαιώνει τις υψηλές εννοιολογικές απαιτήσεις του. Η θεσιακή αξία του μηδενός και ο χαρακτηρισμός του ως άρτιου ή περιττού αριθμού ανέδειξε τη δύσκολη ενσωμάτωσή του στο εννοιολογικό σχήμα που έχουν οι μαθητές για την κατασκευή των αριθμών. Η αξία της θέσης και η έννοια του άρτιου, υποστηρίζουν την αναπτυσσόμενη κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης και του διαμοιρασμού (κάθε θεσιακή τιμή που βρίσκεται στα αριστερά μιας άλλης είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από αυτή που βρίσκεται στα δεξιά). Η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στους μαθητές, τους οδηγεί στη ανάπτυξη αφηρημένων νοημάτων και αναπτύσσεται ταυτόχρονα με την ικανότητα για αρίθμηση. Από τα αποτελέσματα, του πίνακα 2, διαπιστώνεται ότι τόσο οι μαθητές της έκτης δημοτικού όσο και της πρώτης γυμνασίου υστερούν στις δυο βασικές έννοιες, στη βαθύτερη γνώση της θεσιακής αξίας του μηδενός και στην απόδοση στο μηδέν της ιδιότητας του άρτιου αριθμού. Η αδυναμία αυτή φάνηκε ότι επεκτείνεται και στις ερωτήσεις που αφορούν την πολλαπλασιαστική σχέση του μηδενός με φυσικούς αριθμούς. Ο σημαντικός ρόλος της αξίας της θέσης του μηδενός στους αριθμούς δεν βοηθάει μόνο τους μαθητές να λένε, να γράφουν και να διαβάζουν τους αριθμούς αλλά είναι αναγκαίος για την κατανόηση του δεκαδικού συστήματος και για την εφαρμογή των βασικών ιδιοτήτων των αριθμών και της κατανόησης των αλγορίθμων των πράξεων. Η σύγχυση των μαθητών για τη διαγραφή ή όχι του μηδενός, δεν οφείλεται μόνο στην ταύτιση του μηδενός με το «τίποτα» αλλά και σε γνωστικά κενά για την αξία της θέσης των αριθμών γενικότερα. Η άποψη, ότι οι μαθητές αναπτύσσουν διαισθητικά την κατανόηση της αξίας της θέσης αξίζει ίσως περαιτέρω διερεύνηση. Η σύγχυση των μαθητών για τη θεσιακή αξία, περιπλέκει την αντίληψη τους για την αξία του μηδενός, η οποία με τη σειρά της ίσως προκαλέσει μέρος της σύγχυσης στην αντιμετώπιση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με το μηδέν.

Αναφορικά με το χαρακτηρισμό του μηδενός ως άρτιου αριθμού επίσης παρατηρήθηκαν αυξημένα ποσοστά αποτυχίας. Παρά την εύκολη δομή της ερώτησης αρκετοί μαθητές δεν είδαν τη γενίκευση της κατασκευής των αριθμών, ώστε να συμπεριλάβουν το μηδέν στους άρτιους και τη διαρθρωτική προοπτική για την επέκταση του συνόλου των αριθμών. Οι μαθητές που δεν αναγνωρίσαν το μηδέν ως άρτιο αριθμό, φαίνεται ότι δεν έχουν ενσωματώσει το μηδέν στο ήδη υπάρχον εννοιολογικό σχήμα που έχουν για τους αριθμούς που έχουν διδαχθεί. Η κατανόηση της δομής των αριθμών, σε άρτιους και περιττούς, αναπτύσσει την υποκείμενη δομή των μαθηματικών και διευκολύνει τη μάθηση της άλγεβρας. Οι λάθος απαντήσεις προκύπτουν από τη σύγχυση που έχουν οι μαθητές ανάμεσα στο «τίποτα» και στο «μηδέν». Οι μαθητές εμφανίζουν απροθυμία να εντάξουν το μηδέν στους φυσικούς αριθμούς, γιατί το μηδέν συμπεριφέρεται διαφορετικά σε πολλές μαθηματικές καταστάσεις. Αυτό δεν είναι απαραίτητα κακό αρκεί να μην το αγνοούν αλλά να ενεργούν με σύνεση και προσοχή.

Το μηδέν, ως μεταφορά κίνησης σε μια διαδρομή

Οι απαντήσεις των μαθητών, όπως φαίνεται στον πίνακα 3, έδειξαν ότι η επέκταση των αριθμών κατά μήκος της διαδρομής στην αριθμογραμμή δεν επαρκεί για τη θεμελίωση της έννοιας του μηδενός. Για τον προσδιορισμό του ρόλου που το μηδέν έχει στη γραμμή των αριθμών, ζητήθηκε από τους μαθητές, να τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή ακέραιους αριθμούς και όχι κλασματικούς ή δεκαδικούς, γιατί σύμφωνα με έρευνα των Hartnett & Gelman (1998) οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τη διάταξη των ακέραιων αριθμών από τους ρητούς (Harnett & Gelman, 1998). Τα δεδομένα της έρευνας έδειξαν ότι για αρκετούς μαθητές το μηδέν δεν θεωρήθηκε ως σημείο με ύπαρξη, στη γραμμή των αριθμών, πολύ περισσότερο δε ως σημείο αναφοράς. Οι μαθητές που δεν αντιλαμβάνονται το μηδέν ως σημείο-αρχή της διαδρομής δεν εννοιοποιούν την κίνηση των αριθμών στη γραμμή και δεν αντιλαμβάνονται τους αριθμούς ως μεγέθη από την απόστασή τους από το μηδέν. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών ανέδειξε ότι πρώτον, είναι λάθος να θεωρηθεί ότι οι μαθητές είναι καταρτισμένοι στη χρήση της αριθμογραμμής ακόμη και για το φαινομενικά απλό έργο της, να προσδιορίσουν μη αριθμημένα σημεία. Κατά δεύτερον, οι επιτυχημένες και ανεπιτυχείς απαντήσεις των μαθητών δείχνουν πόσο σημαντική είναι η εκτίμηση ότι η γραμμή αριθμών είναι μια μέτρηση παρά μοντέλο καταμέτρησης. Αν και το μηδέν δεν δημιουργείται και δεν αναπτύσσεται από την καταμέτρηση παρέχει μια αντίθεση που ενισχύει την αλλαγή στη μαθηματική σκέψη. Ο συντονισμός των δύο γνώσεων, μηδέν και καταμέτρηση, μπορεί να είναι σημαντικό βήμα για την έννοια του αριθμού. Η κατανόηση του μηδενός είναι η πρώτη ευκαιρία για τους μαθητές σε πρώτο επίπεδο, να καταλάβουν ότι οι πεποιθήσεις τους για τους αριθμούς δεν είναι απαραβίαστες και ότι η σκέψη για τους αριθμούς πρέπει να παραμείνει ευέλικτη. Ακόμη η διδασκαλία είναι σημαντικό να τονίζει περισσότερο τη γραμμικότητα παρά την πληθικότητα της αριθμογραμμής, έτσι ώστε το μηδέν να πάρει τη θέση του ως σημείο αναφοράς. Η σαφής διδασκαλία της γραμμής των αριθμών μπορεί να λειτουργήσει ως δομικό πλαίσιο αναφοράς αλλάζοντας την ερμηνεία της γραμμής των αριθμών από το μοντέλο ενός συγκεκριμένου πλαισίου με αυτό του ενός μοντέλου λογικής σχετικά με τις υποκείμενες μαθηματικές σχέσεις και τη δομή. Για τα παραπάνω σημαντικό ρόλο παίζει η εξήγηση και η επιχειρηματολογία ως μεταγνωστικές διαδικασίες.

Το μηδέν ως μεταφορά συλλογής αντικειμένων

Περίπου μισοί από τους μαθητές της έρευνας, όπως αυτό καταγράφεται στον πίνακα 4, δεν έχουν ευχέρεια στις πράξεις που συμμετέχει το μηδέν και κάνουν λάθη. Η δυσκολία τους αυτή αποδίδεται τόσο στην εννοιολογική όσο και την υπολογιστική τους κατανόηση. Εάν η δυαδική φύση (σύνολα-στοιχεία) του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, δεν κατακτηθεί εννοιολογικά από τους μαθητές και η εκτέλεση της βασίζεται στην απομνημόνευση μόνο συγκεκριμένων κανόνων, τότε ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση με το μηδέν ανάγονται στην περίπτωση : για το μηδέν δεν ισχύει ο κανόνας. Η απεικόνιση που δημιουργεί ο μαθητής αν προσθέσει ή αφαιρέσει μια μηδενική ποσότητα σε ή από μια δεδομένη ποσότητα, μπορεί εύκολα να αναπαρασταθεί (π.χ. με οπτική απεικόνιση). Είναι λιγότερο όμως προφανές ποια αναπαράσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον πολλαπλασιασμό ή στη διαίρεση με το μηδέν. Η ποσοτική ερμηνεία του μηδενός στον πολλαπλασιασμό μπορεί να εστιάσει τη προσοχή των μαθητών και να συμβάλει στη διάκριση των εννοιών-ποσοτήτων : αριθμός συνόλων, αριθμός στοιχείων συνόλου και συνολικού ποσού. Ο Larsson (2013) υποστηρίζει ότι εάν οι μαθητές χρησιμοποιούν την προσθετική σκέψη για να υπολογίσουν πολλαπλασιαστικά γεγονότα, αλγόριθμους και άλλες διαδικασίες, μπορεί να μην έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν την κατανόηση του πολλαπλασιασμού ως κάτι περισσότερο από επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ίσων ομάδων. Αυτή η κατανόηση του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης δεν παρέχει στους μαθητές την απαραιτήτως απαιτούμενη ευρύτερη άποψη και την ποιοτική αλλαγή που απαιτείται τελικά για τον πολλαπλασιασμό (Hurst & Hurrell, 2015). Στον πολλαπλασιασμό $3 \cdot 2 = 6$, για παράδειγμα, η προσέγγιση του πολλαπλασιασμού ως αναπαραγωγή, σημαίνει ότι το σύνολο των στοιχείων με τρία στοιχεία αναπαράγεται δυο φορές για να δώσει ένα σύνολο με έξι στοιχεία. Σε αντίστοιχο παράδειγμα πολλαπλασιασμού με το μηδέν, $0 \cdot 2 =$ …. ή $3 \cdot 0 =$, το αποτέλεσμα δίνει κανένα σύνολο ή σύνολο με καθόλου στοιχεία. Αυτή είναι μια θεώρηση που θα ενισχύσει τη διάκριση των εννοιών ποσότητα-πλήθος. Δηλαδή ο δυαδικός χαρακτήρας του πολλαπλασιασμού είναι αναγκαία έννοια με την οποία γίνονται αντιληπτές οι ιδιότητες της αντιμεταθετικότητας και της επιμεριστικότητας στους διακριτούς και διαφορετικούς παράγοντες του πολλαπλασιασμού (Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., Suggate, 2004). Είναι σημαντικό να καταλάβουν οι μαθητές ότι στον πολλαπλασιασμό το μηδέν, δεν λειτουργεί σαν ουδέτερο στοιχείο, που αφήνει αναλλοίωτο τον άλλο παράγοντα αλλά τον «εξαφανίζει» γιατί δεν τον αναπαράγει καμία φορά. Εξάλλου στους μαθητές επικρατεί η «εγκατεστημένη» γνώση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών : όταν κάνω αφαίρεση ανάμεσα σε δυο αριθμούς μένει ένας αριθμός. Το μηδέν, όμως στην προκειμένη περίπτωση κρατά τον προηγούμενο ρόλο του ως «τίποτα», άρα δεν θεωρείται αριθμός και δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα της αφαίρεσης α – α = 0.

Η φιλοσοφική αλλά και ψυχολογική αυτή παρανόηση, πιθανά δημιουργεί το λάθος αποτέλεσμα στο διαδικαστικό ρόλο του μηδενός στη πράξη της αφαίρεσης. Ίσως μια ακόμη αιτία της παρανόησης των μαθητών στον πολλαπλασιασμό με το μηδέν είναι, η σημειολογική και λεκτική παρανόηση. Οι μαθητές συχνά γενικεύουν πρότυπα-μοτίβα και ιδέες που έχουν για τα μαθηματικά τα οποία τους προκαλούν μη έγκυρα ή λανθασμένα συμπεράσματα για το μηδέν : Το μηδέν δεν διαβάζεται σε κανέναν αριθμό (30, 203, 1024, 10286, …) με αποτέλεσμα σε μερικούς μαθητές να προκύπτει το συμπέρασμα : αφού δεν αναφέρεται στους αριθμούς…δεν είναι αριθμός. Επίσης αξίζει να τονιστεί για μια ακόμη φορά η αξία της γλώσσας, ως αναπόσπαστο κομμάτι της μάθησης και άρα η χρήση των όρων πολλαπλάσιο και παράγοντας στη διαδικασία του πολλαπλασιασμού μπορούν να είναι ουσιαστικό στοιχείο της αποτελεσματικής διδασκαλίας για την μαθησιακή εξέλιξη.

Με αφορμή τις απαντήσεις των μαθητών που αγνόησαν το μηδέν μεταξύ των συγκεκριμένων ποσοτήτων (αριθμών) ενώ λειτούργησαν πιο σωστά όταν η σχέση εκφράστηκε πιο αφηρημένα, αλγεβρικά αξίζει να αναφερθεί ο παρακάτω προβληματισμός. Ίσως οι αριθμοί στο πρόβλημα να ήταν η πηγή του σφάλματος. Οι αριθμοί ίσως να παραπλάνησαν τα παιδιά και η αφηρημένη αλγεβρική αναπαράσταση της μαθηματικής δομής να τους βοήθησε να διορθώσουν το λάθος. Σύμφωνα με την προσέγγιση του Vygotsky τα τρία βασικά χαρακτηριστικά για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης είναι : η εισαγωγική ανάπτυξη από την πιο γενικευμένη εννοιολογική βάση, η μετάβαση από την αφηρημένη έννοια στη συγκεκριμένη και η εξοικείωση με τα ψυχολογικά εργαλεία. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, το ψυχολογικό εργαλείο, στην προκειμένη περίπτωση το μηδέν, προσανατολίζει την προσοχή του παιδιού στις εσωτερικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των ποσοτήτων, αντί για τα αριθμητικά χαρακτηριστικά του προβλήματος (Schmittau, 2005)

Το μηδέν ως μεταφορά μονάδων μέτρησης

Οι απαντήσεις των μαθητών, όπως καταγράφονται στα αποτελέσματα του πίνακα 5, σε πράξεις διαίρεσης με το μηδέν έδειξαν ότι είναι χαρακτηριστική η αδυναμία των μαθητών και στις δυο βαθμίδες. Η ταύτιση του μηδενός με το «τίποτε» και η διαισθητική πεποίθηση ότι κάθε πράξη έχει αριθμητικό αποτέλεσμα εμποδίζουν τους μαθητές να δουν τη λειτουργία της διαίρεσης ως αντίστροφης του πολλαπλασιασμού. Οι μαθητές της έρευνας μας έχουν διδαχθεί τους φυσικούς, τους αρνητικούς και τους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις ανάμεσα τους. Σε κάθε αριθμητική πράξη οποιονδήποτε αριθμών προκύπτει αριθμός αλλά αυτό ισχύει για όλες τις πράξεις εκτός από τη διαίρεση με το μηδέν. Θεωρούμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με το μηδέν συνδέονται με ιδέες που είναι σημαντικές, όπως η αντιστροφή και κάνουν τα παιδιά να σκεφτούν «πολλαπλασιαστικά» επομένως με «αναλογικότητα» άρα αλγεβρικά. Είναι προφανείς οι συνδέσεις μεταξύ της έννοιας της ισότιμης κατανομής και της ομαδοποίησης και επομένως μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, καθώς και ανάμεσα στην αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και της κατανόησης του όλου-μέρους και του διαμερισμού (Hurst & Hurrell, 2015). Στους μαθητές ηλικίας 12-13 ετών ο ιδιαίτερος ρόλος του μηδενός μπορεί να έχει σημαντική συμβολή σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Σε αυτό το στάδιο της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών, δημιουργείται η αναγκαιότητα να μην δίνονται παραδείγματα με αντικείμενα, αλλά να ζητείται να περιγράφουν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ως νοητικά αντικείμενα σκέψης και όχι ενέργειες (Jacob & Willis, 2001). Ακόμη είναι πολύ χρήσιμο να εκλαμβάνουν τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό ως αντίστροφες πράξεις και να αντιλαμβάνονται αντίστοιχα και την αντιστροφή των βασικών τους ιδιοτήτων. Η διαίρεση, είτε συνεπάγεται την εύρεση του μεγέθους κάθε συνόλου, είτε συνεπάγεται την εύρεση του αριθμού των συνόλων και μπορεί επίσης να εκφραστεί με παράγοντες ή πολλαπλάσια. Δηλαδή για παράδειγμα στη διαίρεση $6 \div 2 = 3$ η προσέγγιση της ερμηνείας της διαίρεσης απαντά είτε στις ερωτήσεις : «*πόσα σύνολα* των δυο στοιχείων χρειάζονται για το σύνολο με έξι στοιχεία» είτε «*ποιο είναι το μέγεθος των συνόλων* δυο στοιχείων ώστε να προκύψει το σύνολο με έξι στοιχεία». Η διαίρεση με το μηδέν στη θέση του διαιρετέου, $0 \div 2$ δίνει το μηδέν σαν απάντηση και στις δυο ερωτήσεις υποστηρίζοντας τόσο την κατανόηση της πράξης της διαίρεσης όσο και τη διαδικασία του αλγορίθμου της αξιοποιώντας και την ιδιότητα ότι πολλαπλασιασμός και διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις. Το μηδέν, λοιπόν, μπορεί να διαιρεθεί από κάθε αριθμό και να δώσει αποτέλεσμα τον ίδιο τον εαυτό του. Η διαίρεση όμως με το μηδέν στη θέση του διαιρετέου $6 \div 0$ δεν ορίζεται. Δεν υπάρχει σαφώς προσδιορισμένο πλήθος συνόλων με καθόλου στοιχεία που να δημιουργήσουν το σύνολο με έξι στοιχεία και δεν είναι επίσης σαφώς προσδιορισμένο το μέγεθος των συνόλων με καθόλου στοιχεία που χρειάζεται το σύνολο των έξι στοιχείων. Το μηδέν, αξίζει να τονιστεί, είναι ο μοναδικός αριθμός που δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Αν και αυτή η ερώτηση μπορεί να θεωρηθεί « unfair » και προκλητικά δύσκολη για μαθητές δημοτικού ή γυμνασίου ο προβληματισμός των μαθητών και οι ερωτήσεις που θα αναδυθούν τόσο για την εννοιολογική κατανόηση όσο και για τη διαδικαστική μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να μεταφερθούν σε ένα επίπεδο πιο αφηρημένο από αυτό της αριθμητικής. Σε αυτό το πρίσμα, η διαίρεση με το μηδέν ως συγκεκριμένο εργαλείο είναι μια πρόκληση για ατομική δραστηριότητα και στοχασμό που θα κάνει τους μαθητές να σκεφτούν για τη διαίρεση να ανασυνθέσουν προηγούμενες γνώσεις τους και να δουν πως οι μαθηματικές ιδέες οικοδομούνται η μια πάνω στην άλλη κατά τη διάρκεια της μαθησιακής τους διαδικασίας. Ο Elkonin & Davydov πίστευαν ότι θέτοντας στο μυαλό των μαθητών νοητές και αφηρημένες ιδέες, όπως η διαίρεση με το μηδέν, αναπτύσσεται η ικανότητα τους να αναλύουν, να προβληματίζονται και να σχεδιάζουν (Caraher, D., Schliemann, 2014). Οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για τη διαίρεση με το μηδέν στις επόμενες τάξεις, για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων και ανισώσεων, για τον προσδιορισμό πεδίων ορισμού και συνόλου τιμών συναρτήσεων αλλά και γενικά κατά τη μελέτη του λογισμού. Αυτό δημιουργεί την ανάγκη να έρθουν σε επαφή με τις προκλητικές αυτές έννοιες και διαδικασίες όσο το δυνατόν πιο έγκαιρα.

Παρανοήσεις του μηδενός στη διαίρεση

Όπως φαίνεται στους πίνακες 6 και 7, εμφανίζονται πολύ μεγάλα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών στις διαιρέσεις με το μηδέν, ως διαιρετέο ή ως διαιρέτη. Από τις απαντήσεις των μαθητών έγινε εμφανές ότι η επικρατεί στους μαθητές η διαισθητική πεποίθηση ότι σε κάθε μαθηματική λειτουργία υπάρχει μια αριθμητική απάντηση. Έτσι η διαίρεση με το μηδέν από πολλούς μαθητές είχε αριθμητικό αποτέλεσμα. Παρόμοιες διαισθητικές πεποιθήσεις έχουν οι μαθητές και για τις μαθηματικές πράξεις (π.χ. η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δίνουν μεγαλύτερα αποτελέσματα, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση μικρότερα). Αν οι μαθητές ενθαρρυνθούν να εξετάζουν κριτικά τέτοιες περιπτώσεις πράξεων υπό το πρίσμα των συσσωρευμένων εμπειριών τους στις αριθμητικές πράξεις, και μαθηματική επιχειρηματολογία, τότε θα είναι πιο εύκολο να γνωρίσουν τα σύνολα των αριθμών στα οποία με διαφορετικά δεδομένα ισχύουν διαφορετικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η προσέγγιση σύμφωνα με την οποία η διαίρεση με το μηδέν θεωρείται αδύνατη, επειδή είναι σχεδόν αδύνατο να μοιραστεί ένα δεδομένο ποσό ανάμεσα σε «κανένα» παιδί καλό είναι να επανεκτιμηθεί αφού οι μαθητές εξοικειωθούν με εκφράσεις διαίρεσης με αρνητικούς διαιρέτες, όπως $4 \div (-2) =$…. Αν οι μαθητές αναγνωρίσουν ότι η έννοια του διαμοιρασμού στη διαίρεση ισχύει μόνο όταν στην πράξη συμμετέχουν φυσικοί αριθμοί, εκτός του μηδενός, ως διαιρέτες, τότε θα αντιληφθούν ότι δεν μπορεί να ισχύουν στη διαίρεση εκφράσεις που περιλαμβάνουν μηδενικό διαιρέτη (Tsamir & Sheffer, 2000). Οι μαθητές με αποτελεσματικές νοερές στρατηγικές έχουν την δυνατότητα να κατανοήσουν τα τυπικά λογικά μαθηματικά επιχειρήματα για μη ορισμό της διαίρεσης με μηδέν. Μια τέτοια σύσταση γίνεται, για παράδειγμα, από την Watson (Watson, 1991). Η δεύτερη εναλλακτική σύσταση είναι να αναβληθεί η εισαγωγή της διαίρεσης με το μηδέν μέχρι τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και στη συνέχεια να εισαχθεί μόνο με επίσημα, έγκυρα επιχειρήματα για τον μη ορισμό της διαίρεσης με το μηδέν. Οι Grouws και Reys (1975), που έκαναν μια τέτοια σύσταση, τη δικαιολόγησαν ως εξής: ότι μια προσπάθεια ερμηνείας της διαίρεσης με το μηδέν όσον αφορά συγκεκριμένα αντικείμενα οδηγεί αναπόφευκτα σε καταστάσεις σύγχυσης και αποτυχίας των μαθητών (Reys & Grouws, 1975).

Έτσι, αξίζει τον κόπο να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να διερευνήσουν ορισμένα γενικά ζητήματα που σχετίζονται με την απόφαση τους να μην υπακούσουν τη διαισθητική τους πεποίθηση για την εκτέλεση της διαίρεσης με το μηδέν, καθώς αυτή η διαισθητική πεποίθηση προέρχεται από την αριθμητική. Θα πρέπει να υιοθετηθεί η διαδικασία της διερεύνησης και σε σχέση με άλλα θέματα που αφορούν απροσδιόριστες εκφράσεις (π.χ., γιατί οι διαιρέσεις με μηδενικές εκφράσεις είναι … καταδικασμένες να είναι απροσδιόριστες; Ποιες άλλες πράξεις είναι απροσδιόριστες και γιατί; Υπάρχει ένας γενικός κανόνας με τον οποίο οι μαθηματικές πράξεις είτε ορίζονται είτε δεν ορίζονται;) ή ζητήματα που αφορούν τον ορισμό των μαθηματικών πράξεων (π.χ. πως οι μαθηματικοί λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με τους ορισμούς των μαθηματικών πράξεων; Ποιες είναι οι κύριες ιδιότητες των μαθηματικών πράξεων;). Αυτό θα ενθαρρύνει τους μαθητές να εκτιμήσουν καλύτερα τα μαθηματικά ως ανθρώπινο σύστημα κανόνων (πειθαρχία). Οι απαντήσεις των μαθητών και τα επιχειρήματά τους για τα θέματα που αφορούν τη διαίρεση με το μηδέν σχετίζονται με τις απόψεις τους για συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες (π.χ. τον αριθμό μηδέν, το άπειρο) και στις γενικότερες πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά. Οι Tsamir & Tirosh μελέτησαν τον αντίκτυπο της διαισθητικής πίστης στις απαντήσεις των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και τα επιχειρήματα τους για τα θέματα που υπάρχει διαίρεση με το μηδέν και θεωρούν ότι αυτή η διαισθητική πεποίθηση φαίνεται να προέρχεται από την αριθμητική (Tsamir & Tirosh, 2002). Υποστηρίζουν μάλιστα μαζί με τους Fischbein (1987, 1999) και Vinner (1991) ότι ένας σπουδαίος στόχος της εκπαίδευσης των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη στους μαθητές της ικανότητας να αναλύουν τις διαισθητικές τους αντιλήψεις αλλά να τις κρατούν υπό έλεγχο. Η ουσιαστική προσφορά βοήθειας στους μαθητές είναι να υπάρξει οικοδόμηση νέας διαίσθησης, σύμφωνη με τους τους μαθηματικούς ορισμούς. Όσον αφορά τις περιπτώσεις διαίρεσης με το μηδέν είναι σημαντικό, στην τάξη, να σχετίζεται ρητά η διαισθητική πεποίθηση για την εκτέλεση της πράξης, να γίνεται συζήτηση για τις πιθανές πηγές και να αναδεικνύονται οι επιπτώσεις της πράξης στις διαδικασίες λογικής (Tsamir & Tirosh, 2002).

Μια τέτοια κατάσταση εγείρει φυσικά το ακόλουθο ερώτημα: Πώς μπορούν οι μαθητές να ξεπεράσουν την επίδραση της διαισθητικής πεποίθησης και να αποδεχθούν μερικές μαθηματικές εκφράσεις ότι δεν ορίζονται; Πρέπει να το παραδεχθούμε από την αρχή αυτό το καθήκον είναι πράγματι περίπλοκο. Στα γραπτά του, ο Fischbein υποστήριξε ότι «βλέπω ως μόνη λύση την προσφυγή στις μεταγνωστικές διαδικασίες. Οι μαθητές πρέπει να βοηθηθούν και να εξετάσουν συνειδητά όλες τις συνέπειες των τυπικών ορισμών που διδάσκονται και να δοκιμάσουν να τις εφαρμόζουν σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, ειδικά εκείνες που ο δάσκαλος γνωρίζει για ότι εμπεριέχουν ορισμένες δυσκολίες (Tsamir & Tirosh, 2002).

Το μηδέν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το πλήθος των επιστημών. Η κατανόησή του οδηγεί τον νου των μαθητών να κατακτήσουν την αφηρημένη σκέψη. Τα στάδια που οδηγούν στην κατανόηση του επιτυγχάνονται με αποτελεσματική διδασκαλία, αλληλεπίδραση, μαθηματική επιχειρηματολογία. Χρήσιμη είναι μια παραπομπή από τον Fischbein: «Νομίζω ότι είναι απαράδεκτο να εισαγάγουμε νέες έννοιες στα σχολικά προγράμματα, ειδικά στην επιστήμη και στα μαθηματικά, χωρίς μια λεπτομερή προκαταρκτική ψυχολογική και ψυχο-διδακτική έρευνα. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν με επιτυχία τα προβλήματα διδασκαλίας, κάποιος οφείλει πρώτα να έχει μια καλή, σοβαρή κατανόηση των ψυχολογικών πτυχών των σχετικών εννοιών και πολύ περισσότερο απαιτείται και σχετική έρευνα» (Tsamir & Sheffer, 2000).

Το μηδέν σε εξισώσεις και σε εκφράσεις με ψευδομεταβλητές

Η Kieran (1981) ανέφερε ότι για να λειτουργήσουν αλγεβρικά οι μαθητές χρειάζονται κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας. Το μηδέν συμμετέχει στα δυο πυρηνικά συστατικά της άλγεβρας, τη γενίκευση και την αφαίρεση, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως παράδειγμα «αρνητικής πληροφορίας», δηλαδή πληροφορίας που μεταδόθηκε από την απουσία ερεθίσματος, την απουσία παρά την παρουσία στοιχείων που υπάρχουν για να μετρηθούν. Οι απαντήσεις των μαθητών, όπως καταγράφονται στον πίνακα 8, αντικατοπτρίζουν μια βασική έλλειψη συνειδητοποίησης του ρόλου της ισοδυναμίας στο σύμβολο της ισότητας. Το μηδέν ως αριθμός που έπρεπε να συμπληρωθεί στο κενό βρέθηκε από τους μισούς περίπου μαθητές αναδεικνύοντας την δυσκολία τους αλλά και τα λάθη τους να συμπεριλάβουν το μηδέν ως απάντηση-λύση στη θέση του κενού=αγνώστου στις αριθμητικές εξισώσεις. Αυτά τα λάθη δείχνουν ότι πολλοί μαθητές ερμηνεύουν ακόμη το σύμβολο της ισότητας ως ένα σύμβολο που ζητάει μια απάντηση, ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Ότι, δηλαδή, το σύμβολο της ισότητας είναι ένα σύμβολο που δίνει την εντολή «κάνε κάτι» είναι μια αντίληψη που φαίνεται να δημιουργείται και να παραμένει από τις σχέσεις ισότητας στο δημοτικό σχολείο, στο γυμνάσιο, και να διατηρείται ακόμη και στο λύκειο. Η ερμηνεία αυτή, εμφανίζεται ακόμη και στους μαθητές του λυκείου που μελετούν λογισμό. Όταν, για παράδειγμα, ζητείται η παράγωγος μιας συνάρτησης, φαίνεται να χρησιμοποιούν το σύμβολο της ισότητας ως σύνδεση μεταξύ των βημάτων, εξισώνοντας έτσι τη συνάρτηση με την παράγωγό της (Kieran, 1981).

Η χρήση ψευδομεταβλητών σε αριθμητικές εκφράσεις μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στο δημοτικό, στο γυμνάσιο ή ακόμα και ανώτερο γυμνάσιο να προσεγγίσουν την αλγεβρική σκέψη. Οι αριθμητικές εκφράσεις που απεικονίζουν σχέσεις των αριθμών ή των μεταβλητών απαιτούν από τους μαθητές μια μετατόπιση της σκέψης τους. Να βρουν χωρίς υπολογισμούς, αποτελέσματα αναγνωρίζοντας πρότυπα που είναι γενικά και σύνθετα (Fujii & Stephens, 2001). Μερικοί μαθητές υπολογίζουν με το δικό τους τρόπο την απάντηση και στη συνέχεια αποφασίζουν. Άλλοι αρχίζουν να υπολογίζουν και στη συνέχεια παρατηρούν τον κοινό αριθμό που πρέπει να αφαιρεθεί και δηλώνουν την απάντηση τους. Άλλοι εξετάζουν την έκφραση και δηλώνουν αμέσως χωρίς προφανώς να κάνουν καθόλου υπολογισμό. Οι

Carpenter, Franke & Levi (2003) αναγνωρίζουν αυτή την ιδέα ως σχεσιακή σκέψη, δηλαδή η ικανότητα να εξετάζουν οι μαθητές εκφράσεις ή εξισώσεις σε μια ευρύτερη προοπτική, αποκαλύπτει τις υπάρχουσες σχέσεις που βρίσκονται σε αυτές τις εκφράσεις (Mestre, C., Oliveira, 2012).

3.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Με την έρευνα συγκεντρωθήκαν χρήσιμα δεδομένα που επιβεβαιώνει ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν με το μηδέν προβλήματα που μαθητές σε όλο τον κόσμο έχουν και που αναλυτικά είχαμε μελετήσει στην παγκόσμια βιβλιογραφία. Οι συμμετέχοντες μαθητές στην έρευνά παρουσίασαν ιδιαίτερες αδυναμίες στο γνωστικό επίπεδο αλλά και ως προς την δεξιότητα τους να χειριστούν το μηδέν σαν έννοια, σαν σύμβολο και σαν μαθηματική οντότητα. Ας σημειωθεί ότι τα ερωτηματολόγια που δόθηκαν δεν έγιναν με βάση πολύπλοκα προβλήματα ή πράξεις αλλά με απλές αναπαραστάσεις των βασικών πράξεων που συμπεριλάμβαναν το μηδέν και που οι μαθητές έχουν διδαχθεί σε όλες τις τάξεις κατά τη φοίτησή τους στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση και στη πρώτη τάξη της δευτεροβάθμιας. Παρόλα αυτά λίγοι μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν σωστά σε αρκετά από τα ερωτήματα και κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν τη γνώση που έπρεπε να έχουν αποκτήσει. Αναγνωρίζουμε βεβαίως ότι οι μαθητές αφενός δεν είχαν προετοιμαστεί για το ερωτηματολόγιο και αφετέρου ότι η κατανόηση της έννοιας του μηδενός δεν μπορεί να ελεγχθεί μόνο από τις γραπτές απαντήσεις τους στα συγκεκριμένα ερωτήματα. Ο ιδιαίτερα έντονος προβληματισμός αφορά ότι στο μεγαλύτερο μέρος των ερωτήσεων οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έδωσαν περισσότερες λάθος απαντήσεις και παρουσίασαν περισσότερες αδυναμίες από τους μαθητές της πρωτοβάθμιας.

Οι δυσκολίες κατανόησης της μαθηματικής έννοιας του μηδενός οφείλεται αφενός στις υψηλές εννοιολογικές απαιτήσεις και αφετέρου, σε μεγάλο μέρος, στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας που οφείλεται στη βιωματική και προηγούμενη γνώση. Η κατανόηση όμως της έννοιας του μηδενός, ως αριθμού με τις ιδιαίτερες ιδιότητες του, από τους μαθητές ως επιστημονικής πλέον έννοιας και όχι διαισθητικής ή καθημερινής έννοιας απαιτεί από τους μαθητές ένα γνωστικό άλμα: την αποστασιοποίηση από την διαίσθηση και τη συνειδητοποίηση των ενεργειών που προκύπτουν από την απόκτηση και λειτουργία της νέας αναδιαμορφωμένης γνώσης.

Οι περισσότεροι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν το μηδέν ως μαθηματική ιδέα που περιλαμβάνει ταυτόχρονα τις έννοιες του σημείου σε μια γραμμή, του κενού συνόλου, του αριθμού. Κάθε τέτοια ερμηνεία αποτελεί επιλογή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής μεταφοράς, λειτουργεί ως γνωσιακός μηχανισμός που δίνει διαφορετικά συμπεράσματα στους μαθητές και τους βοηθά ώστε να ανακαλύψουν την υποκείμενη γνωστική δομή των μαθηματικών. Η επέκταση από τους «έμφυτους» (= θετικούς) ακέραιους στους φυσικούς αριθμούς αντιμετωπίσθηκε με δυσκολία από τους μαθητές καθώς το μηδέν δεν είναι αριθμός καταμέτρησης. Ακόμη και οι μαθητές της πρώτης γυμνασίου που κατάφεραν να δημιουργήσουν την εννοιολογική μεταφορά «το μηδέν είναι πραγματικός αριθμός» δεν κατάφεραν να θεωρήσουν το μηδέν ως φυσική επέκταση της συλλογής αντικειμένων και να θεωρήσουν την καινούρια οντότητα, το μηδέν, ως «κενή» συλλογή. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι δυσκολεύτηκαν να αποδώσουν στο μηδέν τις ιδιαίτερες ιδιότητες του στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση. Η απουσία φυσικού τμήματος που να αντιστοιχεί στο μηδέν φάνηκε ότι δημιούργησε σοβαρά προβλήματα στους μαθητές της έρευνας. Η βασική γνώση ότι κάθε αριθμός α δημιουργείται από α μοναδιαία τμήματα χωρίς κενό, κάνει για τους μαθητές την κατανόηση του μηδενός (=κενό), αποδοχή μιας παραδοχής, αντιφατικής και πραγματικά δύσκολης : ότι το μηδέν δεν αποτελείται από κανένα τμήμα (ουσιαστικά αποτελείται από τον εαυτό του). Η κατανόηση του μηδενός βασίζεται σε διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες από εκείνες που απαιτούνται για την κατανόηση των άλλων αριθμών. Στην προσπάθειά τους οι μαθητές να διαχειριστούν τη λειτουργία του μηδενός στις πράξεις με άλλους αριθμούς ή με μεταβλητές ώστε να δώσουν σωστές απαντήσεις έθεταν οι ίδιοι εμπειρικούς και οντολογικούς περιορισμούς ή επεκτάσεις. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ακόμη ότι αρκετοί μαθητές δεν είχαν την τυπική γνώση όχι μόνο της έννοιας του μηδενός αλλά και της σημασίας της αξίας της θέσης των αριθμών, της πολλαπλασιαστικής σκέψης και του πολλαπλασιαστικού διαμοιρασμού.

Μια προσπάθεια που θα διερευνούσε περαιτέρω το θέμα της εργασίας μας θεωρούμε ότι θα μπορούσε να θέσει ερωτήματα για ερευνητική και συγκριτική μελέτη. Πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές των πρώτων τάξεων του δημοτικού την έννοια, τη φύση του μηδενός; Πως οι εκπαιδευτικοί θα αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με το μηδέν σε πράξεις και σχέσεις και πως θα συμβάλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας αντί της διαισθητικής αυθόρμητης απάντησης; Ποιες διδακτικές πρακτικές μπορούν να αναπτυχθούν προκειμένου να αποκτηθεί η μαθηματική γνώση για την έννοια του αριθμού και τη δομή των πράξεων με το μηδέν ώστε να συμβάλλει προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της αφηρημένης αλγεβρικής σκέψης; Η έννοια του μηδενός ενισχύει την ιδέα της έννοιας των αριθμών, μια ιδέα που είναι κεντρική στην εκμάθηση των μαθηματικών, που συνδέει πολλές μαθηματικές αντιλήψεις σε ένα συνεκτικό σύνολο. Οι ιδέα του μηδενός είναι σημαντική επίσης, επειδή μας δίνει τη δυνατότητα να δούμε τα μαθηματικά ως ένα συνεκτικό σύνολο ιδεών και συνδέσεων. Ενθαρρύνει την βαθιά κατανόηση των μαθηματικών και ενισχύει τη διαδικασία μεταφοράς της μάθησης από ένα πλαίσιο σε άλλο.

Η διδασκαλία της έννοιας του μηδενός δεν προτείνεται να διδαχθεί συστηματικά από τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών ούτε του δημοτικού ούτε του γυμνασίου. Δάσκαλοι και καθηγητές μαθηματικών δεν εντοπίζουν τις αδυναμίες των μαθητών τους και τους απευθύνουν γενικές ιδέες και γνώσεις για την έννοια του μηδενός και διαδικαστικές συνταγές για τη λειτουργία του στις αριθμητικές και τις αλγεβρικές πράξεις. Εξάλλου συνήθως επικρατεί η άποψη στους εκπαιδευτικούς ότι εάν ειπωθεί μια «σωστή πρόταση» ή εξηγηθεί αναλυτικά «ένας αλγόριθμος» ότι οι μαθητές θα τα κατακτήσουν. Έτσι αρκετοί μαθητές βασίζονται στις διαισθητικές τους προτάσεις και δεν αναπτύσσουν τη μαθηματική επιχειρηματολογία, τα οποία είναι η βασική προϋπόθεση να αναπτυχθούν όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά γενικότερα στις επιστήμες. Σχεδόν όλοι οι μαθητές ξέρουν πώς να κάνουν βασικές προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, αν και πολλοί θα είχαν πρόβλημα να πολλαπλασιάσουν το μηδέν με δεκαδικούς αριθμούς, κλάσματα, ή μεταβλητές. Όλοι μπορούν να προφέρουν τις λέξεις, αλλά πολλοί έχουν πρόβλημα να εκφράσουν συνοπτικά την κύρια ιδέα αυτού που διαβάζουν.

Θεωρούμε ότι οι στόχοι της έρευνας μας για την καλύτερη αποτύπωση των αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του μηδενός και τον σχηματισμό πληρέστερης εικόνας για αυτές τις αντιλήψεις, είναι απαραίτητα δεδομένα που δεν θα είναι μόνο από γραπτές απαντήσεις ερωτηματολόγιου αλλά συνεντεύξεις, αιτιολογήσεις μαθητών και οπτικοακουστική καταγραφή διδακτικών προτάσεων, που εστιάζουν στη διερευνητική προσέγγιση και στην κατανόηση όλων των πτυχών της έννοιας του μηδενός.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., Βερύκιος, Π., Γαβρίλης, Κ., Θωμαίδης, Γ., Κείσογλου, Σ., Κλαουδάτος, Ν., Κυλάφης, Π., Ναζαριάν, Α., Σακονίδης, Χ. (2011). *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Βοσνιάδου, Σ., Βαμβακούση, Ξ., Σκοπελίτη, Ε. (2008). Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti_2008.pdf. *Νόησις*, *3*, 137–180. https://doi.org/ISSN 1790-3203

Γκιργκένης Σ. (2004). *Δημόκριτος: Μαθηματικά –Φυσικές Επιστήμες- Αστρονομία-Κοσμολογία Της Ατομικής Θεωρίας*. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΡΟΣ.

Ζαχαριάδης, Θ., Πόταρη, Στουραΐτης, Δ. (2011). Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασιου. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). « Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση ». In *«Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους»*.

Κάλφας, Β., Ζωγραφίδης, Γ. (2006). *Αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι*. (Κ. Ε. Έρευνας, Ed.) (Ινστιτούτο). Θ: Ινστιτούτο Νεοελληνικών Σπουδών(Ιδρυμα Μανώλη Τριανταφυλλίδη.

Κολέζα, Ε. (1991). *Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών*. Ιωάννινα.

Σακονίδης, Χ. (1996). Μαθηματικά Σημεία και Σύμβολα : Σημειωτκές, Ψυχολογικές και Παιδαγωγικές Αναζητήσεις. Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης.

Στεργίου, Β. (2004). Ιστορική Εξέλιξη, Ερμηνείες και Διδακτικές Προσεγγίσεις της Εννοιας του Απειροστού.

Χρήστου, Κ. (2009). *Εννοιολογική Αλλαγή στα Μαθηματικά: Η Περίπτωση της Άλγεβρας*. Ε.Κ.Π.Α.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Effective pedagogy in mathematics. *Educational Practices Series - 19*, 1–32.

Bagni, G. (2001). Historical roots of limit notion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, (1980), 1–15.

Ball, D. (1990). Prospective Elementary and Secondary Teachers Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132–144.

Banerjee, R. (2011). Is Arithmetic Useful for the Teaching and Learning of Algebra? *Contemporary Education Dialogue*, *8*(2), 137–159. https://doi.org/10.1177/097318491100800202

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., Suggate, J. (2004). The array representation and primary children’s understanding and reasoning in multiplication. *Journal of Business Ethics*, *44*(April), 0–103. https://doi.org/10.1063/1.2756072

Blake, R., Verhille, C. (1985). The Story of 0. *For the Learning of Mathematics*, *5*(November), 35–46.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Caraher, D., Schliemann, A. (2014). *Elkonin and Davydov Curriculum in Mathematics Education*. (E. of M. Education, Ed.). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Carraher, D., Education, T., & View, M. E. (2006). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic*. https://doi.org/10.4324/9780203827192

Center, E. D. (2015). Mathematics In the Early Grades: Counting & Cardinality. EDC Learning transforms lives.

Chandler, D. (2007). Semiotics the Basics, 29–30. https://doi.org/10.1016/S0378-2166(02)00176-5

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(November), 1–27. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.625074

De Cruz, H. (2006). Why are some numerical concepts more successful than others? An evolutionary perspective on the history of number concepts. *Evolution and Human Behavior*, *27*(4), 306–323. https://doi.org/10.1016/j.evolhumbehav.2006.02.001

Di Leonardo M., Marino, T., & Spagnolo, F. (1994). The “ 0 ”, is it an obstacle ? *Il Pitagora*, *4*, 383–389.

Diezmann, C., & Lowrie, T. (2006). Primary students’ knowledge of and errors on number lines. *Proceedings 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (1964), 171–178. Retrieved from http://eprints.qut.edu.au/5302/1/5302_1.pdf

Doritou, M., & Gray, E. (2007). the Number Line As Metaphor of the Number System : a Case Study of a Primary School, *5*(did), 111–120.

Drijvers, Goddijn, K. (2011). *Secondary Algebra Education*. Utrecht, the Netherland: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University.

Dudley, U. (1997). Is Mathematics Necessary? *The College Mathematics Journal*, *28*(5), 360–364.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Furture of the Teaching and Learning of Algebra*, 258–264.

Gallardo, A., & Hernández, A. (2005). The Duality of Zero in the Transition from Aritmetic to Algebra, *3*, 17–24.

Hanlon, C., & Silverbergt, J. (1998). Semantic and Pragmatic Aspects of Set-Relational References in Modern Indo-European Languages. *International Pragmatic Association*, *8*(4), 453–554. https://doi.org/10.1075/prag.8.4.05han

Harnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understanding of number: Paths or barriers to the construction of new understandings. *Learning and Instruction*, *8*(4), 341–374.

Harremoës, P. (2011). Is Zero a Natural Number ? Cornell University Library.

Heeffer, A. (2006). Learning concepts through the history of mathematics. The case of symbolic algebra. *(Eds.), Philosophical Dimensions in Mathematics*, 1–13. Retrieved from http://www.uco.es/~ma1mamaa/GIHEM/documentos/Learning concepts through the history of matheamtics.pdf

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/BF01284528

Hurst, C., & Hurrell, D. (2015). Developing the Big Ideas of Number. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, *1*(1), 1–18. Retrieved from https://lms.curtin.edu.au/webapps/blackboard/content/listContent.jsp?course_id=_73775_1&content_id=_3516132_1&mode=reset

Jacob, L., & Willis, S. (2001). The Development of Multiplicative Thinking in Young Children. *Education And Training*, (1992).

Kaput, J. (1998). Representations , Inscriptions , Descriptions and Learning : A Kaleidoscope of Windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17(2).*, 265–281.

Karakas, F. (2008). Reflections on zero and zero-centered spirituality in organizations. *Journal of Global Competitiveness*, *18*, 367–377. https://doi.org/10.1108/10595420810920833
Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*.
Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. Quebec: Université du Québec à Montréal. Department of Mathematics.
Kieran, C. (1996). The Changing Face of School Algebra. *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures*, 271–290.
Kilhamn, C. (2011). *Making Sense of Negative Numbers*. University of Gothenburg. Faculty of Education, Gothenburg. https://doi.org/978-91-7346-698-1
Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. *Education*. https://doi.org/10.17226/9822
Kriegler, S. (2007). Just What Is Algebraic Thinking ? *Center for Mathematics and Teaching (CMAT)*, 1–11.
Lakoff, G., Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Come from : How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books(A Member of the Perseus Books Group).
Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). Elementary School Students ' Use of Mathematically-Based and Practically-Based Explanations : the Case of Multiplication. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004* (Vol. 3, pp. 241–248).
Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). Neither even nor odd: Sixth grade students' dilemmas regarding the parity of zero. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 83–95. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.004
Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operation on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 39–65. https://doi.org/10.1007/BF00163752
Mabkhout, S. (2016). New Philosophical View Merging Infinity, Imaginary number and Zero and a new Arithmetic Solving Indeterminant.s. *International Journal of Discrete Mathematics*, (X), 4–6. https://doi.org/10.11648/j.XXXX.2016XXXX.XX
Marciszewski, W. (2001). Leibniz's Mathematical and Philosophical Approaches to Actual Infinity. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *4*(17), 7–19.
Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. *Approaches to Algebra*, 65–86. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3
Merritt D & Brannon. (2013). Nothing to it: Precursors to a Zero Concept in Preschoolers. *PMC*, *93*. https://doi.org/doi:10.1016/j.beproc.2012.11.001
Mestre, C., Oliveira, H. (2012). From quasi-variable thinking to algebraic thinking : A study with Grade 4 student. In *12th International Congress on Mathemtical Education Education* (pp. 1–8). Seoul, Korea.
Michelot, A. (1966). *La Notion de Zero Chez L β€™ Enfant*. (Recherche Scientifique, Ed.) (Librairie). Paris.
Ministry of Education, O. (2010). Paying Attention to Algebraic Reasoning, K to 12.
Moeller, K., Pixner, S., Zuber, J., Kaufmann, L., & Nuerk, H. C. (2011). Early place-value understanding as a precursor for later arithmetic performance-A longitudinal study on numerical development. *Research in Developmental Disabilities*, *32*(5), 1837–1851. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2011.03.012
Nieder, A. (2016). Representing Something Out of Nothing: The Dawning of Zero.

Trends in Cognitive Sciences, *20*(11), 830–842. https://doi.org/10.1016/j.tics.2016.08.008

Norton, S. J., & Cooper, T. J. (2003). Students' Perceptions of the Importance of Closure in Arithmetic: Implications for Algebra. *Centre for Mathematics and Science Education, QUT, Brisbane, Australia.*, 198–202.

Pesic, P. (2004). Plato and Zero. *Graduate Faculty Philosophy Journal*, *25*(2), 1–18.

Pogliani, L., Randic, M., & Trinajstić, N. (1998). Much ado about nothing—an introductive inquiry about zero. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(5), 729–744. https://doi.org/10.1080/0020739980290509

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.-M., & Kadunz, G. (2016). Semiotics in Mathematics Education. *Springer*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2

Quinn, R. J., Lamberg, T. D., & Perrin, J. R. (2008). Teacher Perceptions of Division by Zero. *The Clearing House, 81*(3), 101–104. https://doi.org/10.3200/TCHS.81.3.101-104

Reys, R. E., & Grouws, D. a. (1975). Division Involving Zero: Some Revealing Thoughts from Interviewing Children. *School Science and Mathematics, 75*(7), 593–605. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1975.tb09861.x

Riley, R. (1997). Mathematics Equals Opportunity. Washington, DC: Department of Education, Washington, DC. 1997-10-20.

Rips, L. J., Bloomfield, A., & Asmuth, J. (2008). From numerical concepts to concepts of number. *Behavioral and Brain Sciences*, *31*(6), 623. https://doi.org/10.1017/S0140525X08005566

Rotman, B. (1988). *Signifying Nothing- The Semiotics of Zero*. https://doi.org/10.5860

Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers' Conceptions of zero. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *8*(1&2), 77–112.

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 16–22. https://doi.org/10.1007/BF02655893

Seife, C. (2000). *Zero : The Biography of a Dangerous Idea*. London: Penguin Books.

Seife, C. (2009). *Μηδέν, η βιογραφία μιας επικίνδυνης ιδέας*. Αθήνα: Α.Α.Λιβάνη.

Semenza, C., Grana, A., & Girelli, L. (2006). On knowing about nothing: The processing of zero in single- and multi-digit multiplication. *Aphasiology*, *20*(9), 1105–1111. https://doi.org/10.1080/02687030600741659

Sfard, A., Linchevski, L. (1994). Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link. The case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico Università E Politecnico Di Torino*, *52*(3), 279–307.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions : Reflections on Process and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Slavit, D. (1999). The Role of Operation Sense in Transitions from Arithmetic to Algenraic Thought. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 251–274.

Struik, D. J. (1982). *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.

Tall, D., Gray, E., Crowley, L., McGowen, M, Pitta, D., & Pinto, M. (1998). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking Axiomatic Mathematics Space & Symbolic Mathematics, (July), 1–25.

Tall, D. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *David Tall Home Page*. Retrieved from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007b-rume-keynote.pdf

Tamburro, R. (2005). Zero : Much Ado About Nothing. *Mathematics Education Research Journal*.

Taylor, T. (1995). *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων* (Ιαμβλιχος). Αθήνα: Ιαμβλιχος.

Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: The number line as an example. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *46*(1), 45–58. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0518-2

Tsamir, P., & Sheffer, R. (2000). Concrete and formal arguments: The case of division by zero. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 92–106. https://doi.org/10.1007/BF03217078

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2002). Intuitive beliefs, formal definitions and undefined operations: Cases of division by zero. *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, 331–344. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_19

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Retrieved from http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Children+Learn+Mathematics

Watanabe, T. (2003). Teaching Multiplication: An Analysis of Elementary School Mathematics Teachers' Manuals from Japan and the United States. *The Elementary School Journal*, *104*(2), 111. https://doi.org/10.1086/499745

Watson, J. M. (1991). Models to Show the Impossibility of Division by Zero. Hobart, Tasmania 7001: Jane M. Watson Department of Educational Studies University of Tasmania Hobart, Tasmania 7001 Australia.

Wellman, H. M., & Miller, K. F. (1986). Thinking about nothing: Development of concepts of zero. *British Journal of Developmental Psychology*, *4*(1), 31–42. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1986.tb00995.x

Wheeler & Feghali. (1983). Much Ado about Nothing : Preservice Elementary School Teachers Concept of Zero. *Research in Mathematics Education*, *14*(3), 147–155.

Wu, H. (1999). Basic Skills Versus Conceptual Understanding: A Bogus Dichotomy in Mathematics Education. *American Educator*, *23*(3), 14-19-52. Retrieved from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.29.2984&rep=rep1&type=pdf

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παρακαλώ να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Σημειώστε με ένα Χ αυτές που πιθανόν δεν καταλάβατε ή σας δυσκόλεψαν αλλά προσπαθήστε ωστόσο να δώσετε και σε αυτές μια απάντηση. Παρακαλώ πολύ μην απαντάτε τυχαία αλλά προσπαθήστε να βρείτε την σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Αγόρι ☐ Κορίτσι ☐ Ηλικία ☐

Σχολείο: Τάξη ☐

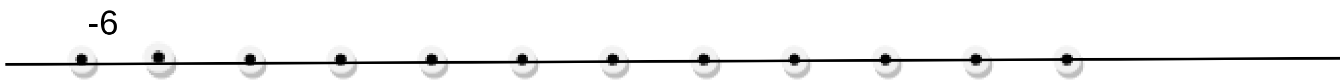
1. Να διαγράψεις το μηδέν όπου νομίζεις ότι δεν αλλάζει την αξία του αριθμού (δηλαδή ότι δεν χρειάζεται)

α) 0,020	**β)** 2,1010	**γ)** 02,205

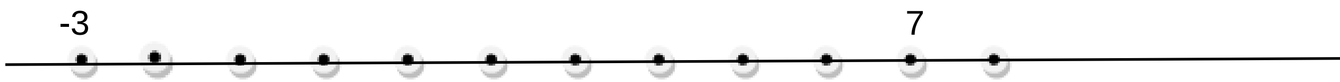
2. Να συνεχίσεις την αρίθμηση των άρτιων αριθμών :

20,18,16,…………………………………………………, -2, -4.

3. Να τοποθετήσεις τους αριθμούς 5, 0, -3, 4, -2 στην παρακάτω αριθμογραμμή



4. Να τοποθετήσεις το μηδέν (0) στην παρακάτω αριθμογραμμή



5. Βρες τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων (προσθέσεις και αφαιρέσεις):

α) 0+5=	**γ)** 10 – 0 =

β) α+0=	**δ)** α – α =

6. Κάνε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς

α) 4 · 2 · 1 · 0 · 3 =	**β)** α · 0 · β =

7. Πόσο είναι το γινόμενο x·y όταν χ= 0, y = 24

α) 24 **β)** 0 **γ)** 1 **δ)** δεν ορίζεται

8. Ποια είναι η σωστή απάντηση στη διαίρεση 77 ÷ 0 ;

α) 7 **β)** 0 **γ)** 1 **δ)** δεν ορίζεται

9. Ποια είναι η σωστή απάντηση στη διαίρεση 0 ÷ 59 ;

α) 1 **β)** 59 **γ)** 0 **δ)** δεν ορίζεται

10. Να συμπληρώσεις τους αριθμούς που λείπουν στις παρακάτω ισότητες :

α) $3 + 2 \cdot \boxed{} = 3$	**β)** $25 – (2 \cdot \boxed{}) = 25$

11. Να βρεις δυο αριθμούς που το άθροισμα τους και η διαφορά τους να ισούται με 100.

α) ………… **β)** …………

12. Ποιο είναι το αποτέλεσμα στις παρακάτω πράξεις;

α) 237+ 89− 89 = **β)** 267−92+ 92 =