ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α΄ Ηλιακός Κύκλος

Διπλωματική εργασία

Τέχνη και Μαθηματικά με μαθητές Δημοτικού

Γαραντζιώτη Αγγελική
Α.Ε.Μ. 559

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος
Εξεταστές Καθηγήτρια: Χρονάκη Άννα
Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών: Θωμαΐδη Ιωάννη

Φλώρινα, Σεπτέμβριος 2015

Φύλλο Εξέτασης

1. Επόπτης:

....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος βαθμολογητής:

....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος βαθμολογητής:

....

Βαθμός: ....

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ....

Η συγγραφέας Γαραντζιώτη Αγγελική βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Ευχαριστίες

- Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικολαντωνάκη, του οποίου η ερευνητική εμπειρία σε συνδυασμό με τις καίριες υποδείξεις του, τη στήριξη και τη καθοδήγηση του, συνέβαλαν με τρόπο ουσιαστικό στην υπέρβαση των δυσκολιών καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου.

  Η συμβολή του υπήρξε ιδιαίτερα καθοριστική στο στάδιο του σχεδιασμού της όλης ερευνητικής μου προσπάθειας, καθώς και οι πολύτιμες κριτικές του παρατηρήσεις στην συνέχεια.
- Επίσης ευχαριστώ την καθηγήτρια κ. Χρονάκη και τον κ. Θωμαΐδη που με τίμησαν με την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή, αλλά και για τη συμμετοχή τους στην ολοκλήρωση της εργασίας μου.
- Ένα μεγάλο ευχαριστώ και σε όλους τους καθηγητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών για όλη την προσπάθειά τους και για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν κατά τη διάρκεια του προγράμματος και οι οποίες αποδείχθηκαν σημαντικές στη διεκπεραίωση αυτής μου της προσπάθειας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΕΔΙΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν ήταν αρκετά εξοικειωμένοι με ορισμούς και έννοιες που αφορούν γεωμετρικά σχήματα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η καθιερωμένη παραδοσιακή διδασκαλία αδυνατεί να καλλιεργήσει στα παιδιά τα χαρακτηριστικά εκείνα που προάγουν τη γεωμετρική σκέψη και παραμελεί βασικές πτυχές της Γεωμετρίας, που είναι ωφέλιμες για την ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας των μαθητών, όπως παιδαγωγικές και επιστημολογικές.

Το 2003 οι ερευνητές Houdement και Kuzniak, θεωρώντας πολύ ανεπαρκή τα προηγούμενα θεωρητικά μοντέλα για την κατανόηση και ερμηνεία των παρατηρούμενων δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στη Γεωμετρία και στηριζόμενοι στην ιδέα των διαφορετικών παραδειγμάτων, όπως διατυπώθηκε από τον Kuhn (1970) υιοθέτησαν ένα καινούριο μοντέλο, στο οποίο διακρίνονται τρία διαφορετικά παραδείγματα γεωμετρίας, αυτού του ΓΧΕ.

Σκοπός λοιπόν της συγκεκριμένης έρευνας είναι να διερευνηθούν οι προσωπικοί Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας (ΓΧΕ) μαθητών Ε΄ Δημοτικού, κατά την ενασχόληση τους με την εννοιολογική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου και να εμπλουτιστούν αυτοί οι ΓΧΕ στα πλαίσια της διδακτικής αξιοποίησης διαφόρων μορφών τέχνης. Κατά τις διδακτικές παρεμβάσεις οι μαθητές ασχολήθηκαν με πίνακες ζωγραφικής γεωμετρικών σχημάτων και με τη δραματοποίηση θεατρικού κειμένου, όπου ανέδειξαν την έννοια της ίσης απόστασης από ένα σημείο. Επίσης έλυσαν ασκήσεις όπου ενεργοποιήθηκε η χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου και ανέδειξαν τη λειτουργικότητα της ίδιας ιδιότητας, βασισμένοι σε πίνακες ελεύθερων σχεδίων και βρίσκοντας μήκη άγνωστων τμημάτων. Ακόμη οδηγήθηκαν στην μοντελοποίηση και λύση προβληματικών καταστάσεων καθημερινής ζωής με μοναδικό τους εργαλείο τη χρήση του κύκλου και των στοιχείων του.

Η συλλογή δεδομένων έγινε με παρατηρήσεις από τη διδασκαλία και με φύλλα εργασίας, αλλά και με ατομικές συνεντεύξεις των μαθητών μετά την παρέμβαση.

Οι μαθητές και πριν την παρέμβαση έδειξαν μια καλή αναγνωριστική ικανότητα του σχήματος του κύκλου. Ως προς το θεωρητικό σύστημα αναφοράς όλοι αγνοούσαν τον ορισμό της έννοιας του συγκεκριμένου σχήματος, κατά τη διάρκεια όμως της παρέμβασης βελτιώθηκαν ως προς την εννοιολογική κατανόηση του κύκλου, τη λειτουργικότητας της ιδιότητας του αλλά και στον εμπλουτισμό της εργαλειοθήκης τους για την επίτευξη της κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος.

Συγχρόνως, η νέα ιδιότητα επέτρεψε την εργασία στη GII (Kuzniak, 2006), ενώ το νέο εργαλείο και οι μέθοδοι διευκόλυναν την εργασία στη GI (Kuzniak, 2006).

Στις σχέσεις κύκλου-κυκλικού δίσκου – ακτίνας οι περισσότεροι μαθητές είχαν δυσκολίες πριν την παρέμβαση, ενώ μετά από αυτήν παρατηρήθηκε βελτίωση και μεγαλύτερη συνοχή στις απαντήσεις. Ωστόσο υπήρχαν και πάλι μαθητές που είχαν δυσκολίες. Αυτά τα ευρήματα δείχνουν ότι στην έννοια του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου καθώς και στην επίλυση προβλημάτων απόστασης με τη χρήση της γεωμετρικής ορολογίας του, οι μαθητές αντιμετωπίζουν ποικίλες δυσκολίες, ενίοτε ανθεκτικές στη διδασκαλία. Το θεωρητικό μοντέλο των ΓΧΕ όμως και η διδακτική αξιοποίηση των διαφόρων μορφών τέχνης φαίνεται πως μπορούν να συμβάλουν στην πληρέστερη κατανόηση αυτών των εννοιών.

Λέξεις-κλειδιά: Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας, γεωμετρικά σχήματα, κύκλος, Τέχνη και Μαθηματικά

Abstract

Several researches have shown that students weren't familiar with definitions and senses concerning geometrical shapes. The findings of these surveys revealed that students were not quite familiar with the definitions and concepts that relate to geometric shapes. This is due to the fact that the established traditional teaching fails to nourish those characteristics that promote geometric thinking and neglects basic aspects of geometry that are beneficial to the development of students' mathematical education, such as pedagogical and epistemological.

In 2003, researchers Houdement and Kuzniak, considering the previous theoretical models insufficient for the understanding and the interpretation of the observed difficulties encountered by students in Geometry and based on the idea of multiple examples, as theorized by Kuhn (1970), they adopted a new model, in which there are three different examples of geometry, that of GWS.

The aim of this research is to investigate the personal Geometric Workspaces (GWS) of the 5th Grade's students, during their occupation with the conceptual understanding of the geometric shape of the cycle and to enrich these GWS in the context of the instructional use of various forms of art. During the educational interventions, the students got involved with paintings illustrating geometric shapes and with the dramatization of theatrical text, where they featured the sense of equal distance from one point. They also solved exercises where the characteristic properties of the circle was activated, and they demonstrated the functionality of the same properties, based on free drawings where they found the lengths of unknown parts. They were also led to the modeling and to the solution of problematic situations of everyday life, using the circle and its elements as their sole tool.

The data was collected through observation during teaching and through worksheets, as well as though individual interviews with the students after the intervention.

Students, even before the intervention, indicated a good recognition ability of the circle shape. As far as the theoretical reference system is concerned, they all ignored the definition of the concept of the particular shape. However, during the intervention, they improved in the conceptual understanding of the circle, the functionality of its properties and the enrichment of their toolkit in order to achieve the construction of the geometric shape.

At the same time, the new properties allowed work on the GII (Kuzniak, 2006), while the new tool and methods facilitated work on GI (Kuzniak, 2006).
In the relations circle – circular disk - ray, most students had difficulties before the intervention, whereas an improvement and more coherent answers were observed after the intervention. However, there were still students who had difficulties. These findings show that, students encounter a variety of difficulties, sometimes resilient to teaching, in the concept of the circle geometric shape as well as in the solution of distance problems using its geometric terminology. The theoretical model of GWS, however, and the educational exploitation of various forms of art seem to contribute to a fuller understanding of these concepts.

Keywords: Geometrical Work Spaces, geometrical shapes, circle, Art and Mathematics

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη παρούσα γεωμετρική μας εργασία εφαρμόζεται η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας στο μαθησιακό περιεχόμενο της εννοιολογικής κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου και στα πλαίσια μιας διδακτικής παρέμβασης σε ένα τμήμα της Ε΄ Δημοτικού. Βασικό χαρακτηριστικό αυτής της παρέμβασης ήταν η αξιοποίηση διαφόρων μορφών τέχνης.

Κατά τη διάρκεια της φοίτησης τους στο δημοτικό σχολείο οι μαθητές έρχονται σε γνωριμία με τις βασικές έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων καθώς και των ιδιοτήτων τους.

Στις δύο όμως τελευταίες τάξεις μαθαίνουν ουσιαστικά να διαχειρίζονται τα στοιχεία του κύκλου και να κάνουν υπολογισμούς και χαράξεις, που αφορούν το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Εμπλουτίζοντας τις γνώσεις τους οι μαθητές με ολοένα και περισσότερες πληροφορίες γύρω από τον κόσμο της γεωμετρίας, θα μπορέσουν να αντιληφθούν τη σπουδαιότητα και χρησιμότητα της, καθώς είναι ένας χώρος που παρέχει δυνατότητες ανάπτυξης λογικής και κριτικής σκέψης, ικανότητας ερευνητικής, κατανόησης του κόσμου που μας περιβάλλει, αλλά και ως ένα μέσο για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών.

Κατανοώντας τη χρησιμότητα αυτή, θα μπορέσουν να εισαχθούν στη γεωμετρία του γυμνασίου προσεγγίζοντάς την με μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Για να μπορέσουν οι μαθητές να γίνουν αποδέκτες της σημαντικότητας και χρησιμότητας του συγκεκριμένου μαθήματος, θα πρέπει πρώτα να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά τη διάρκεια της επαφής τους με το χώρο της γεωμετρίας.

Στο 1^{ο} Κεφάλαιο αυτής της εργασίας παρουσιάζονται λοιπόν γενικά οι δυσκολίες των παιδιών στο πεδίο των μαθηματικών που ονομάζεται γεωμετρία, όπως και οι δυσκολίες τους στην πλήρη και ακριβή εκμάθηση και κατανόηση των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων.

Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο της έννοιας του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου, σε κάποια ιστορικά του στοιχεία, αλλά κυρίως στις δυσκολίες κατανόησης του από τα παιδιά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται η σχέση της Τέχνης με την μαθηματική εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα παρατίθενται βασικά επιχειρήματα και απόψεις που έχουν διατυπωθεί υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της Τέχνης και γίνεται απαρίθμηση των πλεονεκτημάτων που επιτυγχάνονται και των εφοδίων που αποκτιούνται μέσα από τέτοιου είδους εναλλακτικές παιδαγωγικές προσεγγίσεις.

Επιπρόσθετα γίνεται πιο εμπεριστατωμένη περιγραφή της προσφοράς και συμβολής κάθε μορφής τέχνης, που χρησιμοποιήθηκε στην ανάπτυξη των δραστηριοτήτων της γεωμετρικής εργασίας.

Την θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (ΓΧΕ) διαπραγματεύεται το 3^{ο} κεφάλαιο, στο οποίο σύμφωνα με τα θεωρητικά δεδομένα γίνεται ορατό πως πρόκειται για μια πολύπλευρη και δυναμικά εξελισσόμενη θεωρητική κατασκευή, σχετική με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης, η οποία συμβάλλει συγχρόνως στην εκμάθηση της γεωμετρίας με πρακτικό και βιωματικό τρόπο και που έχει σαν στόχο την περιγραφή της γεωμετρικής εργασίας που γίνεται από μαθητές σε μια διδασκαλία, αναδεικνύοντας έτσι την πολυπλοκότητα της εργασίας και ενισχύοντας την αντανάκλαση στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας.

Στο 4^{ο} Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας γίνεται ειδικότερη αναφορά στη χρησιμότητα της έρευνας, στα ερευνητικά ερωτήματα, στους συμμετέχοντες και στο σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης, για τον οποίο ελήφθησαν υπόψη και όσα είχαν διδαχτεί μέχρι τότε οι μαθητές. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με παρατηρήσεις από τη διδασκαλία, με Φύλλα Εργασίας και με ατομικές συνεντεύξεις μετά την παρέμβαση. Αναλυτικότερη παρουσίαση των ερευνητικών εργαλείων και των διαδικασιών που ακολουθήθηκαν γίνεται επίσης στο Κεφάλαιο αυτό.

Στη συνέχεια γίνεται αναλυτικότερη παρουσίαση της έρευνας που διεξήχθη στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Η έρευνα είχε σαν στόχο την εξέταση των προσωπικών ΓΧΕ των μαθητών, κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης αλλά και μετά από αυτήν, η οποία είχε στο επίκεντρό της την ιδιότητα που οδηγεί στον ορισμό του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου και τις σχέσεις κύκλου – ακτίνας – κυκλικός δίσκος. Στα πλαίσια αυτά και με βάση τη θεωρία των ΓΧΕ τέθηκαν υπό διερεύνηση οι διαδικασίες οπτικοποίησης, η ενεργοποίηση των διαφορετικών διαστάσεων και γεννήσεων, καθώς και ο γενικότερος τρόπος αντιμετώπισης του σχήματος του κύκλου, αλλά και η χρήση υλικών και εργαλείων, όπως αυτή του διαβήτη στα πλαίσια των διαδικασιών μέτρησης και κατασκευής. Επίσης διερευνήθηκαν, οι σωστοί και εσφαλμένοι τρόποι εργασίας στα πλαίσια ενεργοποίησης της ιδιότητας που οριοθετεί το σχήμα του κύκλου, οι σημασίες που απέδιδαν οι μαθητές στη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του κύκλου, της ακτίνας και του κυκλικού δίσκου, οι χρήσεις της ιδιότητας του κύκλου ως θεωρητικού εργαλείου, προκειμένου να οδηγηθούν σε λύσεις προβλημάτων απόστασης, καθώς και οι διαδικασίες απόδειξης. Με την εξέταση των παραπάνω συστατικών και διεργασιών του ΓΧΕ προκύπτουν συμπεράσματα και για το επιστημολογικό παράδειγμα που ακολουθούσαν οι μαθητές. Με δεδομένο επίσης ότι βασικό χαρακτηριστικό της παρέμβασης ήταν η αξιοποίηση της τέχνης, εξετάστηκε και ο ρόλος των διαφόρων μορφών τέχνης στη διαμόρφωση των ΓΧΕ και ιδίως στην κινητοποίηση των μαθητών.

Στο 5^{ο} Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, με έμφαση στις μορφές εργασίας των μαθητών, στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, στις δυσκολίες που αντιμετώπισαν και στην πορεία που ακολούθησαν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Γίνεται επίσης αναφορά στο γνωστικό – μαθησιακό επίπεδο των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση, ενώ παρουσιάζονται και οι απόψεις των ίδιων των μαθητών για τη συμβολή των μορφών τέχνης που χρησιμοποιήθηκαν και τον τρόπο που αυτές αξιοποιήθηκαν.

Το ίδιο κεφάλαιο περιλαμβάνει την ανάλυση του υλικού που συλλέχθηκε για την μελέτη αυτή, δηλαδή την ανάλυση των μαγνητοφωνήσεων των διδασκαλιών και των συνεντεύξεων των παιδιών που μετείχαν στην έρευνα.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί το 6^{ο} παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της μελέτης, καθώς επίσης και κάποιες διδακτικές προτάσεις για τη βελτίωση της διδακτικής πρακτικής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.Γεωμετρία

1.1 Οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών στη Γεωμετρία

Η Γεωμετρία είναι ένα από τα μαθήματα τα οποία περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα διδασκαλίας των περισσοτέρων σχολείων όλου του κόσμου, καθώς θεωρούνται τα μαθηματικά του χώρου και του σχήματος τα οποία δίνουν τη δυνατότητα ανάπτυξης γνώσεων για την αναγνώριση των σχημάτων, αλλά και την ανακάλυψη των ιδιοτήτων τους και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Κολέζα 2000).

Οι μαθητές λοιπόν στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας ασχολούνται και μελετούν το χώρο μέσα στον οποίο υπάρχουν, μαθαίνουν τα γεωμετρικά σχήματα και προσπαθούν να κατανοήσουν τα διάφορα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους.

Τα παιδιά μέσα από τα παιχνίδια τους και τα βιώματα της καθημερινότητα τους έρχονται σε επαφή με διάφορα γεωμετρικά σχήματα τα οποία μαθαίνουν να διακρίνουν με βάση το σχήμα και το μέγεθος τους, αλλά και να αναγνωρίζουν την ονομασία τους, να ανακαλύπτουν τις ιδιότητες τους και έτσι να αποκτούν εμπειρίες με τις εκάστοτε γεωμετρικές έννοιες. Οι γνώσεις τους αυτές τα καθιστούν ικανά να μπορούν να ξεκινούν τη μελέτη της Γεωμετρίας από πολύ μικρή ηλικία (Χρονάκη 2006).

Το ισχυρότερο επιχείρημα για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας είναι ότι η αξία της είναι πρακτικής και θεωρητικής μορφής, καθώς συμβάλλει στην περιγραφή των γεωμετρικών σχημάτων στο επίπεδο και στο χώρο αλλά και σε μία πρώτη προσέγγιση στον παραγωγικό συλλογισμό Duval (1999).

Η άτυπη ή περιγραφική Γεωμετρία που διδάσκεται στο Δημοτικό είναι στενά συνδεδεμένη με τη διερεύνηση μέσω δραστηριοτήτων που λαμβάνουν μέρος με χειρονακτικό τρόπο (Vand walle, 2001).

Η διερεύνηση όμως αυτή και η απόκτηση εμπειριών πραγματώνεται σε διαφορετικά επίπεδα α) Ξεκινάει από τα γεωμετρικά σχήματα και τη μορφή τους, που όπως φαίνεται οι μαθητές αναγνωρίζουν με σχετική ευκολία και β) συνεχίζει με την εκμάθηση των ιδιοτήτων τους και των μεταξύ τους σχέσεων καθώς και την αντίστοιχη μαθηματική ορολογία που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους, στοιχεία ή γνώσεις που αποκτούνται όμως με σχετική δυσκολία (Τουμάσης 1994).

Το μάθημα λοιπόν της Γεωμετρίας είναι ένα μάθημα με βαριά σημασία ακόμα και σε άτυπη μορφή, καθώς για την αποτίμηση του κόσμου γύρω μας ο οποίος αποτελείται από σχήματα και χώρους απαραίτητη είναι η αντίληψη και κατανόηση τους, γεγονός που επιτυγχάνεται μόνο με το συγκεκριμένο μάθημα. Η σπουδαιότητα λοιπόν της επιστήμης του χώρου που ονομάζεται Γεωμετρία καθώς ασχολείται με τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων, είναι αναμφισβήτητη.

Παρότι όμως οι άνθρωποι έρχονται σε επαφή με τις γεωμετρικές έννοιες και αποκτούν αρκετές εμπειρίες γύρω από αυτές από την νηπιακή τους ακόμα ηλικία, παρουσιάζουν αρκετές δυσκολίες κατά την εκμάθηση και κατανόηση του συγκεκριμένου μαθήματος σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Μεγάλο ποσοστό μαθητών δεν μπορούν να ανταποκριθούν με επιτυχία σε ερωτήσεις που αφορούν την αντίληψη στοιχειωδών γεωμετρικών εννοιών και μετρήσεων (Τζεκάκη, 2002).

Μερικά από τα σημαντικότερα εγγενή χαρακτηριστικά που διαθέτουν τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο και τα οποία θα πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διδασκαλία αν δε θέλουμε να αποτελέσουν πηγή δυσκολιών μάθησης είναι:

α) Το μάθημα έχει μια καθαρά ιεραρχική φύση καθώς οι έννοιες δομούνται με αυστηρό τρόπο και στηρίζονται αποφασιστικά σε προηγούμενες τους.

β) Οι μαθηματικοί όροι και τα σύμβολα που αποτελούν το μαθηματικό κώδικα επικοινωνίας δυσκολεύουν ιδιαίτερα τους μαθητές.

γ) Οι τρόποι με τους οποίους αναπαριστούν τη μαθηματική γνώση (καθώς το άτομο που μαθαίνει μπορεί να κατασκευάσει μόνο του τη γνώση). Γι’ αυτό και οι μαθητές που μπορούν να αναπαραστήσουν πραξιακά, εικονιστικά, συμβολικά τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες τότε και μόνο τότε τις έχουν μάθει και κατακτήσει πραγματικά.

Αν και οι μαθητές θα πρέπει να σημειωθεί ότι δεν μπορούν εύκολα να περάσουν από ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, κυρίως όμως παρουσιάζουν αδυναμία στην αναγνώριση μιας γεωμετρικής έννοιας μέσα από τις διαφορετικές της αναπαραστάσεις σε διαφορετικά σημειωτικά συστήματα ή και να κάνουν μετατροπές μέσα στο ίδιο σύστημα (Αγαλιώτης 2000).

1.2 Κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων

Τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα επίσης αποτελούν ένα είδος αναπαράστασης την οποία πολύ δύσκολα μπορεί να συλλάβει και να κατανοήσει ο παιδικός νους, καθώς δεν υπάρχει ούτε ένα αντικείμενο στο φυσικό χώρο το οποίο να μπορεί να αναπαρασταθεί πλήρως και με απόλυτη ακρίβεια από ένα γεωμετρικό σχήμα (Duval 2004). Αυτό έχει σαν επακόλουθο οι μαθητές να μην οδηγούνται στη γνώση των γεωμετρικών εννοιών μέσω των γνώσεων που κατέχουν για τον πραγματικό χώρο (Μιχαήλ, Μουσκή & Γαγάτσης, 2006: 191).

Είναι δύσκολο λοιπόν να δοθεί ακριβής ορισμός του σχήματος. Ο όρος «οπτικά πρότυπα» αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα από τον Freudenthal (1983). Το οπτικό πρότυπο προκύπτει μέσω διαδικασίας αφαίρεσης κάποιων φυσικών ιδιοτήτων πραγματικών αντικειμένων, όπως το χρώμα, το υλικό ή το βάρος τους, οπότε εκείνο που παραμένει είναι το μέγεθος και το σχήμα (Κολέζα, 2000).

Τα γεωμετρικά σχήματα επιπλέον τα οποία είναι κατασκευές που πραγματοποιούνται νοητικά αλλά και οι οποίες χειραγωγούνται από ένα μαθηματικό συλλογισμό (Κολέζα, 2000), μπορεί να θεωρούνται απαραίτητα εργαλεία στη διάρκεια της διδασκαλίας για τη θεμελίωση γεωμετρικών εννοιών μιας και αποτελούν την εξωτερική και εικονική αντιπροσώπευση των συγκεκριμένων γεωμετρικών εννοιών ή καταστάσεων, αλλά συγχρόνως αποτελούν και το πυρήνα των δραστηριοτήτων που προτείνονται στους μαθητές. Δεν παύουν όμως να τους δυσκολεύουν, στην προσπάθεια τους να τα κατανοήσουν και να τα κατακτήσουν (Τζεκάκη, 2001).

Επιπρόσθετα το γεωμετρικό σχήμα ως έννοια σε επίπεδο διδακτικής είναι το θεμελιώδης αντικείμενο και εργαλείο με βασικό ρόλο σε πλήθος γνωστικών δεξιοτήτων και λειτουργιών, όπως ή κατηγοριοποίηση, η αναγνώριση και η δημιουργία εικασιών (Νόκας Ευστάθιος).

Παρουσιάζεται λοιπόν μια διπλή υπόσταση των γεωμετρικών σχημάτων, αυτή του εννοιολογικού τους χαρακτήρα – δηλαδή ότι είναι αφηρημένες έννοιες, νοητικές παραγωγές – μέσω του οποίου πηγάζουν και πέντε ιδιότητες τους (το ιδεατό, η τελειότητα, το αφηρημένο, η γενικότητα, ο αξιωματικός ορισμός τους), αλλά και ταυτόχρονα είναι και οπτικές εικόνες γι’ αυτό άλλωστε και έχουν την ιδιότητα να αποδίδουν την νοητική αναπαράσταση του χώρου (Λεμονίδης 1997).

Αυτή η διπλή υπόσταση των σχημάτων είναι αρκετά σημαντική καθώς προσφέρει την αφετηρία προσέγγισης της διδακτικής γεωμετρίας.

Εμπόδιο στην αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές μπορεί να αποτελέσει και η μεταβολή του προσανατολισμού του σχήματος από οριζόντια ή κάθετη θέση σε πλάγια. Επίσης και το μέγεθος των γεωμετρικών σχημάτων είναι μια σημαντική παράμετρος που αυξάνει τη δυσκολία αναγνώρισης τους από τους μαθητές, καθώς με την μεταβολή του μεγέθους δημιουργούνται φόρμες γεωμετρικών σχημάτων οι οποίες είναι ασυνήθιστες για τα μάτια των παιδιών (Λεμονίδης, 20003).

Στις περισσότερες χώρες η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό σχολείο βασίζεται στην εξερεύνηση, ονομασία, περιγραφή, ομαδοποίηση, σχεδιασμό και μέτρηση φυσικών αντικειμένων στο επίπεδο ή στο χώρο (Κολέζα, 2000). Επιπρόσθετα απαιτείται η στενή σύνδεση και συνεργασία τριών ειδών γνωστικών διαδικασιών για τη μελέτη της Γεωμετρίας, διαδικασιών οπτικοποίησης για την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, διαδικασιών κατασκευής με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό συγκεκριμένες συνθήκες και διαδικασιών «συλλογισμού».

Όσο αναφορά τη διαδικασία της οπτικοποίησης, εντοπίζεται μια επιπλέον δυσκολία, καθώς υπάρχει διάσταση ανάμεσα στην οπτική αντίληψη του σχήματος και του μαθηματικού του περιεχομένου, αφού οι μαθητές δίνουν περισσότερο βάρος στα οπτικά χαρακτηριστικά του σχήματος και δεν εστιάζουν τι είναι αυτό πάνω στο σχήμα που θα τους δείξει την «πόρτα», που θα τους οδηγήσει στη ποθητή λύση. Αυτή η δυσκολία οφείλεται στο γεγονός, ότι υπάρχουν μεγάλες διαφορές ανάμεσα στην οπτική αντίληψη και την οπτικοποίηση (Κολέζα, 2003).

Εστιάζοντας στη δεύτερη γνωστική διαδικασία, βγαίνει το συμπέρασμα ο ρόλος της σχεδίασης ή κατασκευής σχημάτων με κανόνα ή διαβήτη είναι παραδοσιακός στην διδασκαλία της επιπεδομετρίας. Η ύπαρξη τέτοιων κατασκευών στη διδακτέα ύλη δικαιολογείται πλήρως, καθώς είναι οι πιο κατάλληλες για να γνωρίσει ο αρχάριος τα γεωμετρικά σχήματα και εξαιρετικά αρμόζουσες, ώστε να εξοικειωθεί με ιδέες πάνω στην επίλυση προβλημάτων (Polya, 1961).

Οι μαθητές όμως παρουσιάζουν δυσκολίες και στην κατασκευή του σχήματος, καθώς δεν έχουν κατανοήσει το σωστό τρόπο χρήσης των απαραίτητων εργαλείων ή άλλων γνωστικών εμποδίων που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (Λεμονίδης, 2003).

Δυσλειτουργίες παρουσιάζουν όμως οι μαθητές και στο Θεωρητικό συλλογισμό στα πλαίσια της αιτιολόγησης κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, καθώς υπάρχει ελλιπής οργάνωση των πληροφοριών. Επιπρόσθετα στην αρχή της δημιουργίας του θεωρητικού λόγου δυσκολεύονται στην κατανόηση της σχέσης των δεδομένων και των ζητουμένων, με αποτέλεσμα να μη φτάνουν να τα συνδέσουν σε μια σωστή κατεύθυνση (Κολέζα & Καμπάνη 2005).

Έρευνες πάντως που έγιναν σε παιδιά των μικρότερων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου έδειξαν πως οι μαθητές αναγνωρίζουν πιο εύκολα τα γεωμετρικά σχήματα, ενώ παρουσιάζουν μεγαλύτερες δυσκολίες στην εκμάθηση των ιδιοτήτων τους, τη συσχέτιση αυτών των ιδιοτήτων με τα αντίστοιχα σχήματα, καθώς και στη ορολογία που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους. Γενικότερα σε όλες τις τάξεις του

Δημοτικού δυσκολίες εντοπίζονται στην ορολογία και στην ικανότητα αντίληψης του χώρου, αλλά και κατά τη διάρκεια της δημιουργίας των συλλογισμών και των κατασκευών των αποδείξεων για τις διάφορες γεωμετρικές προτάσεις (Πόταρη, 2001). Εφόσον όμως για να επιτευχθεί η διερεύνηση και η απόκτηση εμπειριών πρέπει οι μαθητές να κινηθούν σε τρία διαφορετικά επίπεδα δηλαδή από τα σχήματα και τη μορφή τους, στις ιδιότητες των σχημάτων και τέλος στις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, αλλά και επιπρόσθετα επειδή η άτυπη Γεωμετρία είναι άρρηκτα δεμένη με τη διερεύνηση μέσω χειρονακτικών δραστηριοτήτων, θα πρέπει να σχεδιαστούν κατάλληλες δραστηριότητες, όπου τα παιδιά θα μπορούν να κατασκευάσουν γεωμετρικά σχήματα με διάφορα υλικά με στόχο την ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). (Van de Walle, 2005: 426).

1.3 Γεωμετρικό σχήμα του κύκλου

Ένα από τα βασικά γεωμετρικά σχήματα της γεωμετρικής διδασκαλίας στο Δημοτικό είναι και αυτό του κύκλου. Ο κύκλος όπως και τα υπόλοιπα βασικά γεωμετρικά σχήματα αναγνωρίζονται παντού.

Αξιοσημείωτο είναι πως η γεωμετρία του κύκλου γεννήθηκε στους αρχαιότερους πολιτισμούς και εξελίχθηκε πιθανότατα από την αλληλεπίδραση άλλων τεχνικών κατασκευών συνδυασμένων με την αστρονομία. (Βαζούρα, 2007).

Οι κυκλικές μορφές επειδή είναι παμπάλαιες και αποτελούν σύμβολα με ιδιαίτερη σημασία και νόημα σε όλο τον κόσμο πολλές γενιές πριν από εμάς, παίζουν σπουδαίο ρόλο στην δημιουργία των εικόνων που έχει σχηματίσει το άτομο για την αντίληψη του κόσμου.

Ο κύκλος είναι ένα τέλειο σχήμα και μεταδίδει ησυχία, κίνηση και αρμονία (Αντωνόπουλος & Δουκάκη, 2007) και ταυτόχρονα αποτελεί μία επίπεδη καμπύλη της οποίας κάθε σημείο ισαπέχει από ένα σταθερό σημείο (κέντρο) μέσα στην καμπυλότητα (Ching, 2006).

Συμβολίζει την τέλεια τάξη και ισορροπία. Σε όλους τους πολιτισμούς συναντιέται η ιδέα του κύκλου την οποία ανακαλύπτουμε σε πολύ παλιά σχέδια. Είναι το σχήμα που μοιάζει να κυλάει αλλά και να επιστρέφει. Θυμόμαστε το Βυζαντινό τρούλο αλλά και το αρχαίο θέατρο (Κοζάκου- Τσιάρα, 2006)

Επειδή λοιπόν ο κύκλος ή η σφαίρα συμβόλιζε την πληρότητα, την τελειότητα τον βρίσκουμε παντού, χαραγμένο στους βράχους, ως ρόδα της ιατρικής στους ινδιάνους, ως ροζέτα στα παράθυρα της γοτθικής εκκλησίας, σε σχέδια αρχαίων πόλεων και ναών, σε όστρακα, σε απολιθώματα, στις φωλιές των πουλιών, αλλά και σε άλλα πολύ παλιά σχέδια. Η δομή των κυκλικών μορφών είναι απόλυτα συμμετρική και αρμονική. (Παυλίδου Μ., 2002: 74-75).

Όταν αναφερόμαστε για παράδειγμα στον κύκλο οι μαθητές φαντάζονται περισσότερο ένα σχέδιο κύκλου που μπορεί να περιλαμβάνει ακόμη και το χρώμα της γραμμής του, αλλά όχι έναν ιδεατό – τέλειο κύκλο όπως ο μαθηματικός κύκλος, επειδή είναι ένα προϊόν μαθηματικής λογικής και δεν έχει χρώμα, ούτε υλική υπόσταση, ούτε μάζα, έχει τις ιδιότητες μιας έννοιας, αλλά συγχρόνως αναπαριστά και ιδιότητες του χώρου.

Τα παιδιά αν και έχουν μάθει τον κύκλο σαν ζωγραφιά αρχικά σε πολύ μικρή ηλικία, τον κύκλο ως μαθηματική έννοια και ως δομή θα το διδαχθούν αργότερα σε μεγαλύτερες τάξεις.

Αν και είναι ένα σχήμα που παρουσιάζει απλότητα στην μορφή του, παρόλα αυτά αποτελεί μια νοητική πολλαπλότητα.

Μπορεί επίσης να δίνεται μεγάλη έμφαση στη διδασκαλία του και η χρήση του να είναι ευρεία, αλλά οι μαθητές συνεχίζουν να παρουσιάζουν μεγάλες αδυναμίες και να συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση του.

Μιας από τις κυριότερες δυσκολίες τους είναι στην κατανόηση της έννοιας του κύκλου καθώς και της διάκρισης της από αυτή της έννοιας του εμβαδού, η οποία αναφέρεται σε κυκλικό δίσκο και όχι σε κύκλο κάτι που και σε μεγαλύτερες τάξεις αποτελεί συχνό λάθος, καθώς κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο 0 το κέντρο του δηλαδή η κυκλική γραμμή, ενώ κυκλικός δίσκος (0,ρ) είναι ο κύκλος (0,ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει (η κυκλική γραμμή μαζί με την επιφάνεια που βρίσκεται μέσα στην γραμμή) (Σμυρναίου, 2014).

Οι δυσκολίες που γίνονται ορατές επίσης κατά τη διδασκαλία της ενότητας του εμβαδού ξεκινάνε από κάποιες έννοιες που συνδέονται με τον όρο αυτό. Μία τέτοια έννοια είναι ο όρος ισεμβαδικά σχήματα... Τα παιδιά δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι μπορείς να "κομματιάσεις " έναν κύκλο και να συνθέσεις ένα άλλο σχήμα που να έχει το ίδιο εμβαδόν. Επιπρόσθετα δυσκολεύονται με τις διάφορες μονάδες μέτρησης, αφού δεν έχει δοθεί ποτέ σε αυτές η πρέπουσα σημασία από τους δασκάλους τους. Επίσης το ίδιο συμβαίνει και με τις μετατροπές από τη μια μονάδα στην άλλη μονάδα μέτρησης. (Σε προηγούμενες τάξεις το επίκεντρο αποτελούσαν οι αριθμοί και όχι οι μονάδες μέτρησής τους) (Σμυρναίου, 2014).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ

2.1 Ο ρόλος της Τέχνης στην κατανόηση της Γεωμετρίας στο σχολείο

Όλα τα προαναφερόμενα προβλήματα και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους πορείας στην κατανόηση βασικών γεωμετρικών εννοιών, οδηγούν ένα μεγάλο αριθμό από αυτούς να εμφανίζει συναισθήματα άγχους, φόβου και αντιπάθειας για τα μαθηματικά. Διαμορφώνεται έτσι ένα συναισθηματικό πλαίσιο μέσα από το οποίο οι μαθητές αποκτούν μια άποψη για το μαθηματικό κόσμο καθόλου ευχάριστο και δημοφιλή.

Η αρνητική στάση που τελικά υιοθετούν απέναντι στον κόσμο των μαθηματικών επηρεάζει τόσο την σχολική τους επίδοση όσο και τη γενικότερη σχέση τους με το συγκεκριμένο μάθημα, καθώς αποθαρρύνει από τη μία τη συμμετοχή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες, αλλά και από την άλλη αδυνατούν να κατανοήσουν το ρόλο της ύπαρξης των μαθηματικών στην ανθρώπινη εξέλιξη (Μηλιώνης 2001).

Οι αιτίες για την υιοθέτηση αυτών των στάσεων απέναντι στα μαθηματικά πρέπει να αναζητηθούν στη μέθοδο που χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθήματος, από την οποία τις περισσότερες φορές απουσιάζει η περιπέτεια σκέψης και φαντασίας του ανθρώπου στη συνεχή προσπάθεια του για την εξέλιξη του πολιτισμού του (Παπαδογιαννάκη, 2012).

Επειδή όμως ένας πολιτισμός στάσιμος είναι ένας πολιτισμός που καταρρέει, θα πρέπει να καταβληθούν προσπάθειες άνθισης του, ώστε να συνεχίσει να παράγει και να δημιουργεί. Για το λόγο αυτό χρειάζονται νέες ιδέες.

Επομένως τα συστήματα εκπαίδευσης θα πρέπει να εφοδιάσουν τις νέες γενιές με το σημαντικό εφόδιο της δημιουργικής σκέψης, το οποίο θα αποβεί ιδιαίτερο χρήσιμο στο μέλλον τους.

Επειδή λοιπόν τα μαθηματικά κατέχουν εξέχουσα θέση στα αναλυτικά προγράμματα, θα ήταν σκόπιμο να βρεθούν μέθοδοι διδασκαλίας, ώστε τα μαθηματικά να ενισχύσουν τη δημιουργικότητα των μαθητών. Πόσο μάλλον όταν αναφερόμαστε στον τομέα της Γεωμετρίας ο οποίος βελτιώνει την αίσθηση του χώρου και του προσανατολισμού, ενισχύει την απόκτηση μιας πιο σφαιρικής εκτίμησης του κόσμου, εξασκεί την αναλυτική και τη σύνθετη σκέψη, αλλά και αναπτύσσει μεθόδους επίλυσης προβλημάτων χρήσιμες σε όλους τους κλάδους άλλων επιστημών (Van de walle, 2005).

Οι καινούριες λοιπόν διδακτικές προσεγγίσεις των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας θα πρέπει να ενθαρρύνουν και να εξοικειώνουν τα παιδιά με τις πρωτόγνωρες έννοιες και να τα βοηθούν επιπλέον να αποβάλλουν τα αρνητικά συναισθήματα που πιθανόν να τρέφουν για αυτά, καθώς ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας που ακολουθείται μέχρι σήμερα κάθε άλλο παρά επιθυμητά αποτελέσματα επιφέρει, αφού δίνει μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και αποτυγχάνει στην πρόκληση διαδικασιών που θα τον οδηγήσουν σε αυτήν (Πούλος-Θωμαίδης, 2000).

Επιπρόσθετα το μάθημα της Γεωμετρίας υπήρξε αρκετά υποτιμημένο και παραμελημένο. Τα τελευταία χρόνια γίνεται διερεύνηση της αξιοποίησης των τεχνών για τη βελτίωση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών**.** Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της τέχνης, η επίδραση της οποίας στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών έχει χαρακτηριστεί θετική, μπορεί να πραγματοποιηθεί με την ενασχόληση των παιδιών με σχολικά προγράμματα πλούσια σε καλλιτεχνικές δραστηριότητες

Η αυτοπεποίθηση των μαθητών αυξάνει με αυτές τις εναλλακτικές παιδαγωγικές προσεγγίσεις και επιπλέον τους δημιουργείται μια μεγαλύτερη αίσθηση ελευθερίας, λόγω της φύσης των καλλιτεχνικών, όταν ασχολούνται με ανάλογες δραστηριότητες όπου ενσωματώνονται στοιχεία τέχνης.

Επιπλέον τα παιδιά μπορούν να δουν τη Γεωμετρία σαν ένα γνωστικό αντικείμενο με χώρο για πειραματισμό μέσα από τη γεωμετρική ανάλυση έργων τέχνης, αλλά και τη σύνθεση έργων από γεωμετρικά σχήματα, καταρρίπτοντας έτσι την πεποίθηση τους πως στη Γεωμετρία ή ξέρουν κάτι ή δεν το ξέρουν, και αν δεν το ξέρουν θα κάνουν λάθος. Αυτού του είδους η αντιμετώπιση είναι ιδιαίτερα επιθυμητή, μιας και τα προβλήματα της Γεωμετρίας λύνονται κυρίως με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους (Bertonaschi, 2004).

Η σύνδεση των μαθηματικών μπορεί να γίνει με διάφορες μορφές τέχνης, η αρωγή της οποίας στο συγκεκριμένο μάθημα βοηθάει τους μαθητές στη διερεύνηση και εμβάθυνση των γνώσεων τους, στη δημιουργία ερεθισμάτων για το ενδιαφέρον τους στα μαθηματικά, καθώς και στη δημιουργία θετικής στάσης απέναντι τους (Κοταρινού &Σταθοπούλου, 2011, όπ. αναφ. στο Παπαδογιαννάκη, 2012).

Η μαθηματική σκέψη των παιδιών μπορεί να αναπτυχθεί μόνο μέσα από την ενεργητική συμμετοχή και τον πειραματισμό με δραστηριότητες που έχουν νόημα για τα ίδια τα παιδιά (Donaldson, 1991, όπ. αναφ. στο Χρονάκη & Μουντζούρη, 2011).

2.2 Η συμβολή των Λογοτεχνικών κειμένων στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών

Η λογοτεχνία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με πολλούς τρόπους και με διαφορετικές μορφές ως μέσο εξοικείωσης των μαθητών με τα μαθηματικά. Μέσα από τη συνεργασία εκπαιδευτικού και μαθητών μπορεί να αναδειχθεί ο καταλληλότερος και πιο πρόσφορος τρόπος. Ο Μηλιώνης (2001), αναφέρει ότι μερικοί από αυτούς μπορεί να είναι η ανάγνωση και παρουσίαση ενός λογοτεχνικού έργου, η συζήτηση για το περιεχόμενό του, η συγγραφή μιας απλής ή συνθετικής εργασίας. Μέσα από αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές/τριες μπορούν να προσεγγίσουν τα μαθηματικά με τρόπους που προκαλούν περισσότερο ενδιαφέρον και μεγαλύτερη ευχαρίστηση. Παράλληλα όμως μπορούν να εστιάσουν στον παραλληλισμό των μαθηματικών προβλημάτων μέσα από τις λογοτεχνικές ιστορίες, με τις οποίες έγινε η επεξεργασία και εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και να στοχαστούν πάνω σε αυτές σε ένα πλαίσιο διαφορετικό από αυτό του τυποποιημένου σχολικού μαθήματος (Μηλιώνης, 2001).

Το παιδί διαβάζοντας ή ακούγοντας τις ιστορίες παίρνει μέρος σε κάτι που γίνεται τώρα μέσα στην τάξη του και σε κάτι που μπορεί να έχει διαδραματιστεί χρόνια πριν σύμφωνα με το λογοτεχνικό κείμενο. Με άλλα λόγια τα μαθηματικά υπάρχουν ταυτόχρονα στο παρόν ως στοιχεία της ιστορίας που ακούει το παιδί και χρησιμοποιεί, γιατί του είναι απαραίτητα για να βρει λύσεις στα προβλήματα που προκύπτουν και που υπήρχαν και στο χωροχρόνο, που τοποθετείται η ιστορία (Ε. Τρέσσου & Σ. Μητακίδου).

Το παιδί μετατρέπει σε προσωπική υπόθεση την επίλυση προβλημάτων, η οποία αποτελεί μέχρι τότε μια εσωτερική διαδικασία της ιστορίας.

Οι γεωμετρικές έννοιες οι οποίες εντοπίζονται μέσα σε ένα λογοτεχνικό κείμενο δεν διδάσκονται στο πλαίσιο ενός προσχεδιασμένου και αυστηρά δομημένου μαθήματος, αλλά αποτελούν αντικείμενο συζήτησης, προβληματισμού και διδασκαλίας (Ε. Τρέσσου & Σ. Μητακίδου).

Οι ιστορίες των λογοτεχνικών κειμένων μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν ως βάση για να θίξουν ή να παρουσιάσουν τις μαθηματικές έννοιες που εμπεριέχουν ή άλλες να αξιοποιηθούν στην πορεία της διδασκαλίας για την εξάσκηση και κατανόησης τους, αλλά και να κεντρίσουν την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών οι οποίοι καλούνται να χρησιμοποιήσουν γνώσεις που γνωρίζουν ή που χρειάζεται να μάθουν, προκειμένου να βρουν λύση στα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία δεν εκφωνούνται πλέον αλλά είναι ενσωματωμένα στην ιστορία ως προβληματικές καταστάσεις.

Θα χρειαστεί να μεταφράσουν το λόγο σε μαθηματικά σύμβολα και τις σχέσεις που εκφράζονται με λόγο σε αριθμητικές σχέσεις. Επομένως μέσα από ένα λογοτεχνικό κείμενο μπορεί το παιδί να διασκεδάσει με τα συμφραζόμενα του και ταυτόχρονα να ενεργοποιηθεί η μαθηματική του σκέψη και να οδηγηθεί στην ανακάλυψη τρόπων επίλυσης ενός προβλήματος ή μέσα από τη λογική εξέλιξη της ιστορίας, να προβληθούν μαθηματικές έννοιες που μπορούν να εξερευνηθούν από τους μαθητές.(Diane Thiessen, 2004.)

Οι ιστορίες στα λογοτεχνικά κείμενα παρέχουν ένα δυναμικό, οικείο και γεμάτο νόημα πλαίσιο στο δάσκαλο για να θέσει προβλήματα στα παιδιά, στα οποία οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν, να χειριστούν και να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες, να μοντελοποιήσουν καταστάσεις γεωμετρικές και να τις συνδέσουν με την πραγματική ζωή, καθώς και να αναγνωρίσουν τα συναισθήματα που συνοδεύουν τη λύση ενός προβλήματος: σύγχυση, αποτυχία, απογοήτευση, αγαλλίαση (Borasi, 1990). Δημιουργούνται κίνητρα στα παιδιά να λύνουν τις προβληματικές καταστάσεις που είναι ενσωματωμένες στις ιστορίες, αποκτούν μία πολύ υψηλού βαθμού προσωπική μαθησιακή εμπειρία επιτρέποντας σε κάθε παιδί να δει στις ιστορίες τα μαθηματικά του δικού του βαθμού ενδιαφέροντος (Jenner, 2002) και τους παρέχουν ένα μοντέλο το οποίο μπορούν να χρησιμοποιήσουν σε μία άλλη δικιά τους ιστορία ή κατάσταση και έτσι να αφομοιώσουν τις έννοιες. Τέλος τα ενθαρρύνουν να σκέπτονται μαθηματικά και εκτός των διδακτικών ωρών και ξαναδίνουν στα μαθηματικά την ανθρώπινη διάστασή τους (Γιαννικοπούλου, 2002).

Έρευνες που αφορούν στη χρήση της Λογοτεχνίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές Δημοτικού, δείχνουν ότι οι ιστορίες μπορούν να επιδράσουν θετικά στη γνώση των μαθηματικών. Η αφήγηση ως κείμενο και προφορικός λόγος μπορεί να δημιουργήσει πλούσια περιβάλλοντα μάθησης και να αποτελέσει σπουδαία συνιστώσα διδασκαλίας, που παρέχει εμπειρίες μάθησης. (Χασάπης, 2007).

2.3 Η προσέγγιση μαθηματικών καταστάσεων μέσα από το Θέατρο και τη Δραματική Τέχνη

Η θεατρική τέχνη προκαλεί διανοητικά ερεθίσματα στους μαθητές, κεντρίζοντας το ενδιαφέρον και ενισχύοντας την ικανότητα τους ως προς την κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένο (Γραμματάς, 1998 όπ. αναφ. στο Μηλιώνης, 2002).

Μέσα από τη δραματοποιημένη εμπειρία διαμορφώνεται μια δυναμική επικοινωνιακή ατμόσφαιρα. Όταν οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στην προετοιμασία και το ανέβασμα μιας θεατρικής σκηνής, έχουν την δυνατότητα να παρακολουθήσουν την αντιπαράθεση και εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, να προβληματιστούν και να σκεφτούν πάνω σε αυτές, ξεφεύγοντας από τους περιορισμούς και την απολυτότητα του καθαρού «διδακτικού» μαθηματικού λόγου, που προσφέρει το τυποποιημένο σχολικό μάθημα.

Με τη συμπλοκή του λόγου τα συμφραζόμενα αποκτούν διαφορετική σημασία από αυτή που θα είχαν αν τα διατύπωνε μόνο ένας ομιλητής, διότι με την πολλαπλή διάσταση που έχει ο λόγος στο διάλογο σε συνδυασμό με το συμπληρωματικό ρόλο της εικόνας απέναντι στο λόγο προσδίδει νέο νόημα στο περιεχόμενο (Μηλιώνης, 2002).

Η Γεωμετρία και η αριθμητική είναι δύο τομείς που περιέχουν πολλά θέματα τα οποία αν θέλουμε να γίνουν εύκολα προσιτά και ευκολονόητα θα πρέπει να δουλέψει η φαντασία (Rodari, 1985 όπ. αναφ. στο Μηλιώνης, 2002).

Η προσφορά των θεατρικών δραστηριοτήτων και της δραματοποίησης των μαθηματικών κειμένων είναι αναμφισβήτητη στη διαμόρφωση της προσωπικότητας του παιδιού, καθώς το παιδί περνώντας μέσα από τη διαδικασία της αισθητικής απόλαυσης και ενεργοποιώντας τη φαντασία και το συναίσθημα του, έχει τη δυνατότητα για μια προσέγγιση των μαθηματικών τελείως διαφορετική (Ιωακειμίδης, 2012).

Το θεατρικό παιχνίδι συμβάλει στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος διδασκαλίας με διδακτικές καταστάσεις που οδηγούν στην ανάπτυξη και κατάκτηση των γεωμετρικών εννοιών, αλλά λειτουργεί παράλληλα και ως διαγνωστικό μέσο για τη διερεύνηση των εννοιολογικών αντιλήψεων των παιδιών και την αξιολόγηση του βαθμού κατανόησης τους. Αυτά είναι αποτελέσματα έρευνας των Lampropoulou και Kaldrimidou (1997) και εστιάζει στις δυνατότητες που έχει το θεατρικό παιχνίδι στη δημιουργία ενός διδακτικού περιβάλλοντος για τις μαθηματικές έννοιες.

Επίσης σε έρευνα που έκανε η Duatepe (2004) στα πλαίσια της διατριβής της, διερευνώντας την επίδραση της διδασκαλίας που βασίζεται σε τεχνικές δράματος στην επίδοση των παιδιών στη Γεωμετρία και στη διαμόρφωση των στάσεων απέναντι της, εφάρμοσε διάφορες τεχνικές δράματος για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών όπως: γωνία, πολύγωνο, κύκλος, κύλινδρος και έδειξε πόσο σημαντικά επέδρασσε το είδος αυτό διδασκαλίας στην επίδοση των παιδιών στην Γεωμετρία, καθώς και στην ενίσχυση της αυτοπεποίθησης και της αυτοεικόνας τους.

Ο εκπαιδευτικός, έχοντας το ρόλο του εμψυχωτή με τη χρήση των τεχνικών του δράματος διαμορφώνει νέες πρακτικές σε μία τάξη, όπου ενεργοί μαθητές συνεργάζονται και αναπτύσσουν μαθηματική γνώση χτίζοντας έτσι ένα κλίμα εμπιστοσύνης, σε αντίθεση με την απρόσωπη σχέση που συνήθως αναπτύσσεται μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού σε μια τυπική τάξη μαθηματικών. Οι μαθητές παίρνοντας μέρος σε βιωματικές διαδικασίες μάθησης και συνεργασίας κατάφεραν να κατανοήσουν θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες καθώς και την ιστορία τους, διευρύνοντας με αυτό τον τρόπο την ιδέα που είχαν διαμορφώσει για τη φύση των μαθηματικών.

Μαθαίνοντας λοιπόν να δουλεύουν ομαδικά καταφέρνουν να γίνουν υπεύθυνα άτομα και μέλη μιας ομάδας τα οποία προσφέρουν σε αυτήν ανάλογα με τις ιδιαίτερες κλίσεις τους, καθώς αποκτούν δεξιότητες, όπως να παίρνουν συλλογικές αποφάσεις, να «ακούν» με προσοχή τον άλλον, να βοηθούν, να εκτιμούν τις ικανότητες του άλλου. Μέσα στο κλίμα εμπιστοσύνης που δημιουργείται μπορούν να δουν τις ιδέες και τις προτάσεις τους να γίνονται αποδεκτές και να χρησιμοποιούνται ή να τροποποιούνται από την ομάδα και μαθαίνουν να βρίσκουν αποτελεσματικά επιχειρήματα και να τα παρουσιάζουν με κατάλληλο τρόπο (Κοταρινού, Π., Σταθοπούλου,. Χ., Κοντογιάννη,. Α., 2012).

2.4 Εικαστικές Τέχνες και Μαθηματική Εκπαίδευση

Οι μαθητές που φοιτούσαν σε σχολεία πλούσια σε προγράμματα Αισθητικής Αγωγής ήταν σε θέση να συνεργαστούν με τους συμμαθητές τους και να έχουν αρμονική σχέση με τους δασκάλους, αλλά και να εκφράσουν καλύτερα τις σκέψεις και τις ιδέες τους, όπως και να εξασκήσουν τη φαντασία τους (Epstein, 2002: 58-62).

Τα παιδιά μέσα από τις βιωματικές εικαστικές τους δημιουργίες γνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά των σχημάτων, αναλύουν και συνθέτουν σχήματα, πειραματίζονται με τις διαστάσεις και το χώρο και αναπτύσσουν με παιγνιώδη τρόπο τις μαθηματικές τους δεξιότητες. Τα έργα των καλλιτεχνών προκαλούν συζήτηση και παρατηρήσεις με περιεχόμενο μαθηματικό: τα παιδιά προβληματίζονται, προβαίνουν σε υποθέσεις, δημιουργούν γραμμές και σχήματα, ασχολούνται με κατευθύνσεις των γραμμών σε μια επιφάνεια, με διαδρομές, με αναγνώριση ποικίλων γραμμών, σχημάτων και μορφών. Επίσης διαφοροποιούν τα σχήματα μεταξύ τους, γνωρίζουν έργα τέχνης με τη χρήση σχημάτων, γνωρίζουν καινούργια γεωμετρικά σχήματα και βρίσκουν τις διαφορές που έχουν από τα υπόλοιπα σχήματα που γνωρίζουν, αλλά και τις χαρακτηριστικές ιδιότητες που τα ορίζουν (Ζωγράφος Θ. Πετρίκη Σ. Κωτσαλίδου Δ. 2004).

Οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να κατανοηθούν καλύτερα με τη βοήθεια και την παράλληλη διαπραγμάτευση εικαστικών εννοιών. Πρωταγωνιστικό ρόλο κατέχουν οι προσεγγίσεις έργων τέχνης, με τα τη βοήθεια των οποίων τα παιδιά μπορούν να εμβαθύνουν σε μαθηματικές έννοιες με ευχάριστο και ανιχνευτικό τρόπο. Επίσης η διοργάνωση μιας έκθεσης στην τάξη φέρνει τα παιδιά μπροστά σε προβληματισμούς και υποθέσεις που έχουν να κάνουν με μετρήσεις, διατάξεις ταξινόμησης, το χώρο και την επιφάνεια.

Οι δημιουργίες επίσης των παιδιών δισδιάστατες ή τρισδιάστατες είναι ο καλύτερος τρόπος να κατανοηθούν μαθηματικές έννοιες.

Η ενασχόληση του παιδιού με ένα εικαστικό θέμα ή δραστηριότητα το βοηθά να εμβαθύνει και να κατανοήσει γεωμετρικές έννοιες, αλλά και να εξασκηθεί σε αυτές με τρόπο βιωματικό και μάλιστα με τον πιο ευχάριστο και δημιουργικό τρόπο της εικαστικής δημιουργίας.

Τα παιδιά μέσα από την επαφή τους με τα υλικά, τις τεχνικές και τη δημιουργία έργων ανακαλύπτουν και κατακτούν αρκετές έννοιες, όπως ο το σημείο, η γραμμή, το σχήμα, το μήκος, η περίμετρος, το εμβαδόν. Επίσης μέσω των εικαστικών δημιουργιών τα παιδιά καταπιάνονται και κατανοούν κάποιες σχέσεις που αφορούν συγκρίσεις (Ζωγράφος Θ. Πετρίκη Σ. Κωτσαλίδου Δ. 2004).

Έκθεση έργων τέχνης με θέμα την αλληλεπίδραση των Μαθηματικών με τις εικαστικές τέχνες, παρουσίασε ο Corbalan (2004) σε πάνω από 100 σχολεία α/θμιας και β/θμιας εκπαίδευσης στην Ισπανία δίνοντας τη δυνατότητα να συμμετέχουν σε διάφορες δραστηριότητες για την εκμάθηση μαθηματικών – γεωμετρικών εννοιών με πολύ αξιόλογα αποτελέσματα.

Κατά το σχολικό έτος 2013-2014 στα πλαίσια μιας έρευνας επίσης που πραγματοποιήθηκε στον ελλαδικό χώρο σε ένα σχολείο σε 40 μαθητές, ύστερα από δραστηριότητες που πραγματοποιήθηκαν συνδυάζοντας Μαθηματικά και Τέχνη, οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο, όπου μεταξύ των άλλων ερωτήσεων κλήθηκαν να επιλέξουν σύμφωνα με τη γνώμη τους αν η σχέση ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Τέχνη είναι μεγάλη, μέτρια ή μικρή. Είναι εντυπωσιακό ότι οι μαθητές αναγνώρισαν σε ποσοστό 80 % πως αυτή η σχέση είναι μεγάλη. Επίσης ύστερα από μία σειρά δραστηριοτήτων που έλαβαν μέρος κατά τη διδακτική ώρα των Μαθηματικών που συνδυάστηκαν με την Τέχνη, οι μαθητές, σε ποσοστό 67,5% δήλωσαν πως τα συγκεκριμένα μαθήματα ήταν ευχάριστα και τα παρακολούθησαν με ενδιαφέρον (Κουριδάκης, Μ., Γληνού, Κ., & Παπασίνου, Χ., 2013).

Οι Τέχνες μαθαίνουν στο παιδί να αναπτύσσει την κριτική του ικανότητα. Καλλιεργούν ακόμη την πεποίθηση, πως κατά τη μαθησιακή διαδικασία ένα ερώτημα μπορεί να επιδέχεται περισσότερες από μια σωστές απαντήσεις. Δεν υπάρχει μόνο μία απάντηση, αλλά κάθε παιδί πρέπει να διαμορφώσει μια πιο ευέλικτη προσέγγιση και η Τέχνη προσφέρει αυτή την ελευθερία έκφρασης και την ευρηματικότητα. Τα υλικά τους που πολλές φορές μπορεί να τα προσφέρει η ίδια η φύση, είναι υλικά που αποτελούν σημαντικά εφόδια για οποιαδήποτε δραστηριότητα.

Το παιδί το οποίο μαθαίνει να δημιουργεί, αισθάνεται τον ενθουσιασμό της ελεύθερης έκφρασης. Γίνεται γόνιμη η φαντασία του, αποκτάει γνώσεις και δεξιότητες και καλύτερο ψυχισμό. Ταυτόχρονα με τη διδασκαλία της τέχνης στο σχολείο αναπτύσσεται η κοινωνικότητα του, εξαλείφεται ο ατομικισμός αφού αποκλείεται το στοιχείο της απόρριψης και παροτρύνεται η ενεργός συμμετοχή και συνεργασία. Η τέχνη πρέπει να λάβει τη θέση που τις αξίζει στο σχολείο γιατί είναι τόπος ελευθερίας και έκφρασης, όσο και τόπος συνάντησης με τους άλλους (Αφεντάκης-Δανασσής, 1997).

3. Γεωμετρικοί χώροι εργασίας

Στα πρώτα στάδια της εκπαίδευσης η Γεωμετρία ασχολείται με τη μελέτη και χρήση πραγματικών αντικειμένων, ενώ σταδιακά περνάει στη γεωμετρική γνώση νοητικών αντικειμένων.

Γι' αυτό το λόγο μπορεί για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς ένα γεωμετρικό σχήμα να αποτελεί μια νοητική κατασκευή που υφίσταται μόνο μέσω των ιδιοτήτων του, αλλά για τους μαθητές το ίδιο γεωμετρικό σχήμα να αντιμετωπίζεται ως ένα φυσικό αντικείμενο ή ως εικόνα.

Σε μία λοιπόν προσπάθεια αντιμετώπισης των προβλημάτων που εμφανίζουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια μάθησης των γεωμετρικών εννοιών, έγινε χρήση του θεωρητικού πλαισίου που ανέπτυξαν οι Houdement και Kuzniak (2004) οι οποίοι εμπνευσμένοι από την εργασία του T Kuhn και στηριζόμενοι σε επιστημονικά, ιστορικά και διδακτικά κριτήρια έκαναν λόγο για τρεις διαφορετικούς Τύπους ή Παραδείγματα Στοιχειώδους γεωμετρίας ως Θεωρίας του Χώρου.

Σε αυτή την προσέγγιση των Houdement και Kuzniak έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί ένα πλούσιο περιβάλλον το οποίο θα επιτρέπει τους μαθητές να επιλύσουν γεωμετρικά προβλήματα με έναν επαρκή λόγο.

Το πρώτο Παράδειγμα ονομάστηκε Γεωμετρία 1 και συνδέεται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο γι' αυτό και λέγεται και Φυσική Γεωμετρία, καθώς είναι συγχρόνως και πηγή επικύρωσης της. Τα επιχειρήματα δηλαδή που χρησιμοποιεί το άτομο και το καθιστά ικανό να αποδεικνύει προτάσεις και να βρίσκει το ζητούμενο στηρίζονται στη διαίσθηση, στον πειραματισμό και τον ακόλουθο συλλογισμό.

Συνηθισμένα γεωμετρικά όργανα όπως ο βαθμονομημένος χάρακας, το μοιρογνωμόνιο, ο διαβήτης, είναι διάφορα εργαλεία κατασκευής και μέτρησης που χρησιμοποιούνται ως μέσα πειραματισμού, αλλά εργαλειακά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η δίπλωση του υλικού αντικειμένου ή του σχήματος όπως και η αποκοπή – επικόλληση.

Μιλάμε δηλαδή για μια Γεωμετρία με τεχνολογικό ορίζοντα που είναι άμεσα συνδεδεμένη ιστορικά με πρακτικά προβλήματα χωρομετρίας (Kuzniak & Vivier, 2010).

Το δεύτερο Παράδειγμα, επειδή πηγή επικύρωσης είναι οι υποθετικο-απαγωγικοί νόμοι στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος, ονομάστηκε Γεωμετρία 2. Συγχρόνως όμως ονομάστηκε και Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία γιατί το αξιωματικό σύστημα δεν είναι αποκομμένο από την αισθητή πραγματικότητα, δηλαδή οι ορισμοί και τα αξιώματα στον Τύπο αυτό της Γεωμετρίας βρίσκονται κοντά στην χωρική αντίληψη που υπάρχει γύρω από το άτομο.

Η αξιωματικοποίηση στον Τύπο αυτό δεν είναι ολοκληρωμένη αλλά οι αποδείξεις είναι βασικό μεταβατικό στοιχείο προς τη βεβαιότητα. Η λεκτική διατύπωση αποκτά ιδιαίτερη σημασία καθώς όλα τα αντικείμενα ορίζονται από αυτήν, ενώ τα σχήματα βασίζονται σε ορισμούς που δεν αντιτίθεται στην πραγματικότητα και λειτουργούν ως στήριγμα για το συλλογισμό, χωρίς όμως να γίνεται αποδεκτή η μέτρηση πάνω σε αυτά ως μία μορφή απόδειξης. Τέλος τα σχήματα έχουν τη μορφή ελεύθερου σχεδίου αλλά κωδικοποιούνται καθώς συνοδεύονται από γράμματα αλλά και ειδικά σύμβολα (Braconne-Michoux, 2011· Kuzniak & Vivier, 2010).

Ο Τρίτος Τύπος Γεωμετρίας ονομάστηκε Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία η Γεωμετρία 3, επειδή δίνει έμφαση στην τυπική λογική και στη δομή. Πρόκειται για ένα πλήρες αξιωματικό σύστημα και δε έχει καμία σχέση με τον πραγματικό φυσικό κόσμο, ούτε στηρίζεται στις αισθήσεις και την αντιληπτική πραγματικότητα. Ο τρόπος συλλογισμού του είναι ο ίδιος όπως στην Γεωμετρία 2, αλλά η συνέπεια και η απουσία αντιφάσεων είναι το μοναδικό κριτήριο αλήθειας.

Απώτερος σκοπός της διάκρισης αυτών τριών Παραδειγμάτων τα οποία σύμφωνα με τους Houdement και Kuzniak (2003) είναι ομογενή, είναι να προσδιοριστεί επιστημολογικά η φύση της γεωμετρικής εργασίας αλλά ταυτόχρονα να υιοθετηθεί και η έννοια του χώρου εργασίας, που σημαίνει το χώρο που δημιουργείται με τέτοιο τρόπο ώστε να προσφέρει ένα πλούσιο περιβάλλον που να καθιστά εφικτή για το κάθε χρήστη του χώρου (μαθητή – εκπαιδευτικό) την εκτέλεση της εργασίας του, δηλαδή την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Με άλλα λόγια τα προβλήματα αποτελούν το λόγο ύπαρξης των Γ.Χ.Ε.

Επιπρόσθετα οι Houdement και Kuzniak (2003), επισημαίνουν ότι οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός δεν είναι αναγκαίο να δουλεύουν στο ίδιο Παράδειγμα. Μπορεί οι μαθητές να δίνουν βάση στην οπτική τους αντίληψη και να εργάζονται στο Τύπο της Εμπειρικής Γεωμετρίας όπου τα αντικείμενα είναι υλικά, αλλά ο δάσκαλος να εργάζεται στο ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα του Παραδείγματος της Τυπικής Αξιωματικής Γεωμετρίας, όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά.

Ο Γ.Χ.Ε. περιλαμβάνει σε ένα δίκτυο τα τρία ακόλουθα συστατικά: α) ένα σύνολο αντικειμένων η φύση των οποίων εξαρτάται από το γεωμετρικό Τύπο, β) ένα σύνολο από τεχνικά μέσα που αποτελούν τα απαραίτητα εργαλεία και όργανα στα χέρια του δυνητικού χρήστη και γ) ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς, το οποίο οργανώνεται σε ένα θεωρητικό μοντέλο που έχει άμεση εξάρτηση από το γεωμετρικό Παράδειγμα.

Στο χώρο γίνεται η τοποθέτηση των σχημάτων και αντικειμένων, ενώ οι ορισμοί και οι ιδιότητες περιλαμβάνονται στο σύστημα αναφοράς.

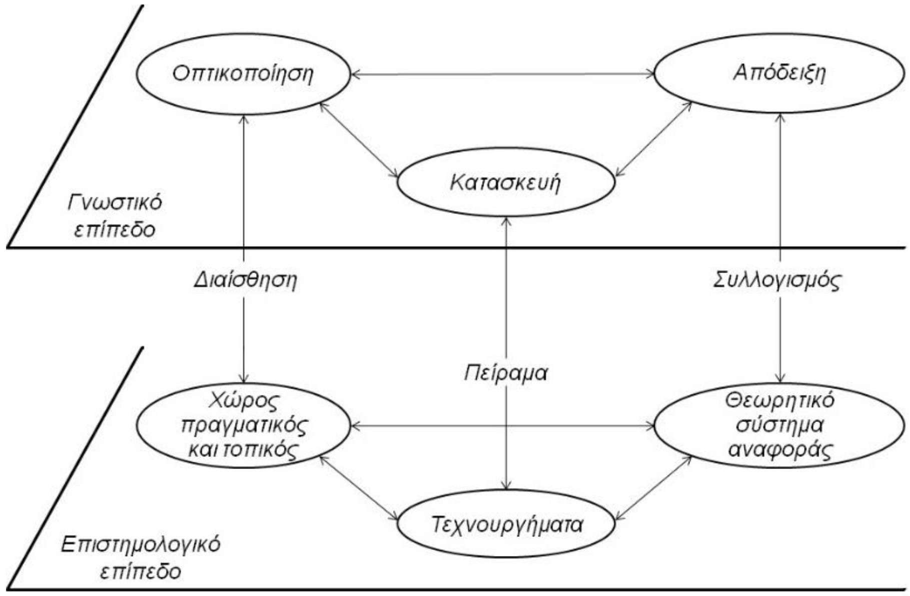
Κάθε άτομο που μπορεί να ελέγχει και να συνδέει τα τρία συστατικά που προαναφέρθηκαν, θα μπορεί και να μετατρέπει σε αντικείμενο χειρισμού τον αντίστοιχο χώρο εργασίας τον οποίο χρησιμοποιεί το ίδιο.

Επίσης συμπεριελήφθησαν στο Γ.Χ.Ε. και 3 γνωστικές διαδικασίες που παίρνουν μέρος στη γεωμετρική δραστηριότητα: η διαδικασία οπτικοποίησης, η διαδικασία κατασκευής και η διαδικασία απόδειξης που συνδέεται με την εκφορά του λόγου, προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος που εργάζονται οι χρήστες του Γ.Χ.Ε (Duval, 2005, στο Αναστασιάδης, & Νικολαντωνάκης, 2014) .

Ακόμη αξιοποιήθηκαν η διαίσθηση, το πείραμα και η παραγωγή, οι τρείς τρόποι γεωμετρικής σκέψης που είχε διακρίνει ο Gonseth (Houdement και Kuzniak, 1999). Το πείραμα μπορεί να είναι νοητικό, ενώ η απαγωγή χρησιμοποιήθηκε με ευρύτερη σημασία πιο κοντά στο συλλογισμό.

Τα τρία συστατικά του Γ.Χ.Ε. που προαναφέρθηκαν (χώρος πραγματικός- τεχνουργήματα- σύστημα αναφοράς) αποτελούν το επιστημολογικό επίπεδο του

Γ.Χ.Ε. και οι τρεις γνωστικές διαδικασίες το γνωστικό επίπεδο, ενώ οι τρεις τρόποι γεωμετρικής σκέψης συνδέουν τα δύο επίπεδα μεταξύ τους.

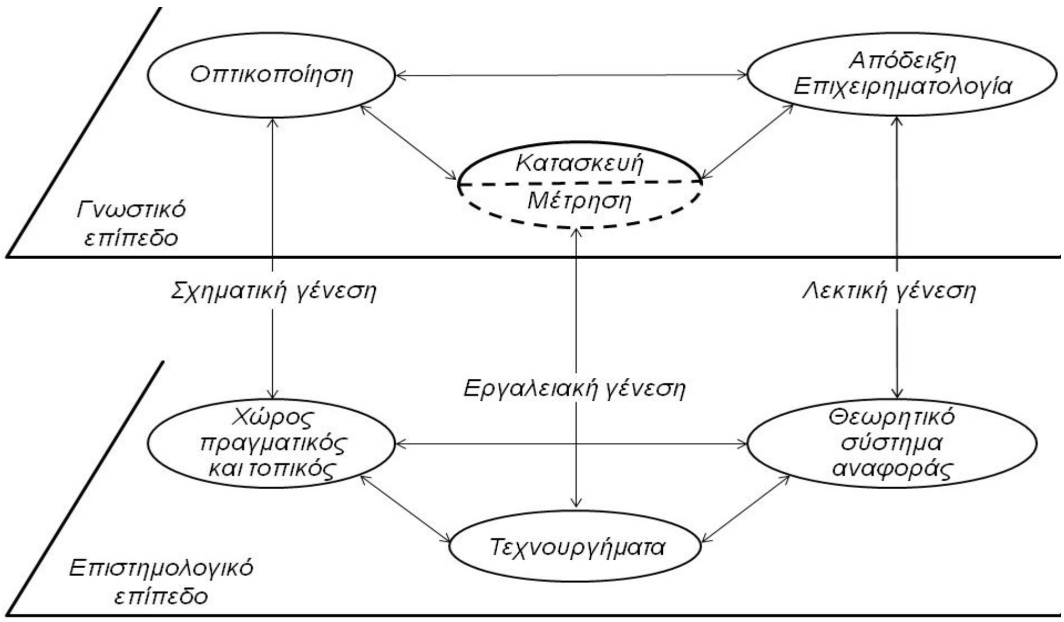


Σύμφωνα με πιο πρόσφατες αναφορές ο Kuzniak (2012a) έκανε χρήση της λέξης γένεση για να τονιστεί ο δυναμικός χαρακτήρας του Γ.Χ.Ε. Με αυτό τον τρόπο το επιστημολογικό επίπεδο κατασκευάζεται μέσω της επιστημολογικής γένεσης που σχετίζεται με το γεωμετρικό παράδειγμα, ενώ το γνωστικό επίπεδο κατασκευάζεται μέσω της γνωστικής γένεσης.

Τα δύο αυτά επίπεδα συνδέονται με αμφίδρομες διαδικασίες μεταξύ τους. Έτσι έχουμε τη σχηματική γένεση ως μία σημειωτική διαδικασία που αλλάζει το αντικείμενο του χώρου σε γεωμετρικό αντικείμενο και αντιστρόφως.

Η λεκτική γένεση από την άλλη συμβάλλει στην αξιοποίηση των ορισμών και ιδιοτήτων, με απώτερο σκοπό την παραγωγή μιας έγκαιρης λεκτικής απόδειξης και αντίστροφα η λεκτική γένεση εμπλέκεται στον έλεγχο της συμβατότητας μιας απόδειξης, με ορισμούς και ιδιότητες που είδη υπάρχουν αλλά και στη διατύπωση νέων ορισμών και ιδιοτήτων.

Τέλος η εργαλειακή γένεση μετασχηματίζει το τεχνούργημα σε εργαλείο μέσα από τη δημιουργία ή την οικειοποίηση σχημάτων δράσης και στα πλαίσια της κατασκευαστικής διαδικασίας (Artigue, 2002· Kuzniak, 2012a), αλλά και αντίστροφα όταν ο χρήστης του Γ.Χ.Ε. γνωρίζει το σχήμα που πρέπει να δημιουργήσει η εργαλειακή γένεση βοηθάει στην επιλογή των κατάλληλων εργαλείων (Kuzniak, 2012a).



Από όλα τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι ο Γ.Χ.Ε. δεν είναι ένας και μοναδικός, εξαρτάται κάθε φορά από το ποιος είναι ο κατασκευαστής και από το ποιος είναι ο χρήστης. Εάν λοιπόν πρόκειται για μια κοινότητα μαθηματικών μέσα στην οποία υπάρχει συναίνεση για το επιστημολογικό παράδειγμα, τότε έχουμε το ΓΧΕ αναφοράς (Houdement & Kuzniak, 2006· Kuzniak, 2006). Επιπλέον στο επίπεδο ενός συγκεκριμένου σχολείου ή τάξης οποιασδήποτε βαθμίδας έχουμε τον κατάλληλο ΓΧΕ, που οργανώνεται από τον διδάσκοντα. Ο κατάλληλος ΓΧΕ θα πρέπει να καθιστά εφικτή την επίλυση από τους μαθητές ενός προβλήματος ή μιας κατηγορίας προβλημάτων με τρόπο έγκυρο στα πλαίσια ενός δεδομένου παραδείγματος. Τέλος, όταν χρήστες είναι μαθητές, φοιτητές ή δάσκαλοι, τότε έχουμε τους προσωπικούς ΓΧΕ. Επιπρόσθετα η καταλληλότητα του Γ.Χ.Ε. επικυρώνεται από το αν καθιστά εφικτή την επίλυση ενός προβλήματος η μιας κατηγορίας προβλημάτων από τους μαθητές με έγκυρο τρόπο.

Επιπλέον η μορφή του εξαρτάται από το είδος και τη διατύπωση του προβλήματος που τίθεται, αλλά και το γεωμετρικό παράδειγμα είναι και αυτός ένας ακόμη παράγοντας που καθορίζει τη μορφή του Γ.Χ.Ε.

Η Γεωμετρία Ι επικεντρώνεται στον εμπειρικό πόλο της γεωμετρίας, με άλλα λόγια στη διαίσθηση και στο πείραμα, ενώ η Γεωμετρία ΙΙΙ στο θεωρητικό πόλο που σχετίζεται με το συλλογισμό (Kuzniak, 2006). Η Γεωμετρία ΙΙ με τη σειρά της συνδυάζοντας την αντίληψη του φυσικού κόσμου και το λογικό συλλογισμό είναι κάτι ενδιάμεσο στην Ι και ΙΙΙ. Επιπλέον στο επίπεδο του ΓΧΕ αναφοράς, το θεωρητικό σύστημα αναφοράς της Γεωμετρίας 3 (GIII) προϋπάρχει των αντικειμένων και είναι οργανωμένο σε μορφή θεωρητικού μοντέλου. Στη Γεωμετρία 2 (GII) το σύστημα αναφοράς έχει και πάλι δομή θεωρητικού μοντέλου, αλλά αυτό αποτελεί προϊόν αφαίρεσης και μοντελοποίησης του φυσικού κόσμου. Αντίθετα, στη Γεωμετρία 1(GI), το σύστημα αναφοράς συνήθως δεν είναι οργανωμένο ως θεωρητικό μοντέλο, με εξαίρεση κάποιες παλαιότερες προσπάθειες συγκρότησης μιας οργανωμένης θεωρίας. Πέρα από τα παραπάνω έγινε αποδεκτό ότι στο επίπεδο του ΓΧΕ αναφοράς και τα τρία παραδείγματα είναι συνεκτικά και το καθένα έχει τη δική του αξία (Houdement & Kuzniak, 2006˙ Kuzniak, 2009a).

Από την άλλη οι κατάλληλοι και οι προσωπικοί ΓΧΕ δεν έχουν τον πλούτο του αναφορικού ΓΧΕ και συχνά δεν είναι επαρκώς οργανωμένοι και αποτελεσματικοί. Είναι συχνό φαινόμενο ο θεωρητικού πόλος ιδίως στα πλαίσια της GI να είναι ατροφικός αλλά όχι μόνο. Όπως για παράδειγμα, μπορεί οι γεωμετρικοί ορισμοί να μένουν μη κατανοητοί ή αναξιοποίητοι παρά το γεγονός ότι είναι γνωστοί στους μαθητές(Vinner 1991).

Επιπλέον η άποψη των Houdement και Kuzniak (2004) για τη θεωρία των ΓΧΕ ήταν η ύπαρξη σύνθετων διαδρομών με πολλαπλά κριτήρια, ενώ ισχυρίζονταν ότι αποτελεί αλλαγή θεωρίας η μετάβαση μεταξύ των παραδειγμάτων. Ενώ δεν ήταν σύμφωνοι με την ιδέα της εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης υπό μορφή καθολικά ιεραρχημένων σταδίων.

Ο Kuzniak (2006, 2009b) ειδικά ήταν υποστηριχτής της αντίληψης ότι εκπαιδευτικοί και μαθητές θα πρέπει να είναι γνώστες του παραδείγματος στο οποίο εργάζονται και οι όποιες μετατοπίσεις θα πρέπει να επιλέγονται συνειδητά˙ σε αντιπαράθεση με την ολίσθηση, που συνιστά μη συνειδητή μετατόπιση.

Το παιχνίδι μεταξύ των παραδειγμάτων αποτελεί για τη θεωρία των ΓΧΕ ένα εσωτερικό παιχνίδι, σε αντιδιαστολή με το εξωτερικό παιχνίδι, που αφορά τη συνειδητή μετατόπιση από το γεωμετρικό πλαίσιο σε άλλα μαθηματικά πλαίσια (Kuzniak, 2006). Και σε αυτήν την περίπτωση η μετατόπιση μπορεί να μην είναι συνειδητή, οπότε πρόκειται για ολίσθηση.

Μετά από ερμηνεία αποτελεσμάτων εθνικών αξιολογήσεων στη Γαλλία που πραγματοποίησαν για τον προσωπικό ΓΧΕ μαθητών οι Houdement και Kuzniak (2006), είδαν ότι μαθητές 11-13 ετών ενώ μπορούσαν να κατανοούν ως πραγματικά αντικείμενα σχήματα σε σμίκρυνση δεν μπορούσαν να προβούν σε σωστές μετρήσεις, καθώς αγνοούσαν το κείμενο και δεν έκαναν χρήση των γεωμετρικών ιδιοτήτων στην κατασκευή των σχημάτων. Ακόμη η Braconne-Michoux (2011) βρήκε ότι από 209 μαθητές 10-11 ετών, οι 120 απάντησαν σε δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκαν στα πλαίσια της Γεωμετρίας 1 (GI), ενώ μόνο 14 κινήθηκαν σε αυτές στα πλαίσια της Γεωμετρίας 2 (GII). Τα αντίστοιχα αποτελέσματα σε 246 μαθητές 11-12 ετών ήταν 69 μαθητές για τη Γεωμετρία (GI) και 58 για τη Γεωμετρία 2 (GII). Αν και είναι λιγότερο διαδεδομένη, ο σχεδιασμός και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων διδακτικών παρεμβάσεων σε μαθητές αποτελεί άλλη μια εφαρμογή της θεωρίας των ΓΧΕ.

Η διδασκαλία των Coutat και Richard (2011), οι οποίοι αξιοποίησαν τη θεωρία για το σχεδιασμό του κατάλληλου ΓΧΕ, εμπεριείχε μια φάση εισαγωγής, όπου κινητοποιούνταν οι γεωμετρικές ιδιότητες που ήταν απαραίτητες για τη διαμόρφωση του ΓΧΕ, μια φάση πειραματισμού, μια φάση επισημοποίησης των νέων ιδιοτήτων και μια φάση εφαρμογής και επέκτασης των νέων ιδιοτήτων.

Επίσης έγινε διερεύνηση του αναφορικού αλλά και του κατάλληλου ΓΧΕ σε εκπαιδευτικά συστήματα και έγιναν διεθνείς συγκρίσεις. Γενικά, για τη διερεύνηση του αναφορικού ΓΧΕ η εξέταση γίνεται μέσω των προγραμμάτων σπουδών, ενώ για του κατάλληλου γίνεται μέσω της εξέτασης των βιβλίων (Kuzniak, 2009b). Στον ελλαδικό χώρο ωστόσο, έγινε χρήση και των προγραμμάτων και των βιβλίων για την εξέταση του αναφορικού ΓΧΕ από τους Kuzniak και Vivier (2010), αφού τα βιβλία τα οποία περιλαμβάνουν δραστηριότητες που ορίζουν τα προγράμματα, επιλέγονται κεντρικά και είναι μοναδικά για όλη τη χώρα.

Ακολουθεί ενδεικτική αναφορά σε δύο παραδείγματα από τις έρευνες για τον κατάλληλο ΓΧΕ.

Σε γαλλικό περιοδικό παρουσιάστηκε από τους Houdement και Kuzniak (1999) μία δραστηριότητα που απευθυνόταν σε μαθητές 10 ετών, στα πλαίσια της οποίας θα έπρεπε να οδηγηθούν στην κατασκευή όλων των δυνατών τριγώνων, χρησιμοποιώντας ξυλάκια που είχαν τρία δεδομένα μήκη. Το αναμενόμενο συμπέρασμα στο οποίο θα κατέληγαν οι μαθητές ήταν, ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν όλοι οι συνδυασμοί αφού κάποια ξυλάκια είναι κοντά ή δεν ταιριάζουν, ή έδιναν μια πιο αφηρημένη απάντηση, όπως ότι είναι αδύνατη κάποιες φορές η κατασκευή τριγώνου με τρία δεδομένα μήκη. Ο δάσκαλος από την πλευρά του είχε το ρόλο της επισημοποίησης του γενικού συμπεράσματος, ότι για να κατασκευάσουν ένα τρίγωνο θα πρέπει η μεγάλη πλευρά να είναι πάντα μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.

Για τους Houdement και Kuzniak, η δραστηριότητα εντάσσεται στη Γεωμετρία 1 (GI) και η εξαγωγή του συμπεράσματος, μέσω του πειραματισμού στον πραγματικό κόσμο, είναι χαρακτηριστική της μορφής που παίρνει ο θεωρητικός πόλος στη GI. Τόνισαν επιπρόσθετα και το σημαντικό ρόλο του δασκάλου στην επισημοποίηση του λιγότερου συγκεκριμένου συμπεράσματος σε αυτό το παράδειγμα, καθώς οι μαθητές συχνά δεν είναι σε θέση να προβούν σε τέτοιες γενικεύσεις. Συγχρόνως όμως τέτοιες δραστηριότητες θα μπορούσαν να αποτελέσουν και το έναυσμα για μετατόπιση στη Γεωμετρία 2 (GII) και εισαγωγή ορισμών και ιδιοτήτων.

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να επισημάνουμε ότι η μελέτη θεμάτων γεωμετρίας στηριζόμενοι στην διάκριση των τριών τύπων Γεωμετρίας, της Φυσικής, της Φυσικής Αξιωματικής και της Τυπικής Αξιωματικής σύμφωνα με ην προσέγγιση των Houdement και Kuzniak είναι ένα θεωρητικό μοντέλο, η ανάλυση του οποίου επικεντρώνεται στα αντικείμενα, στις τεχνικές και στον τρόπο αξιολόγησης σε κάθε τύπο Γεωμετρίας και έχει σαν σκοπό να συμβάλλει θετικά στην αντιμετώπιση και κατανόηση των δυσκολιών που παρουσιάζονται στους μαθητές κατά την επίλυση των γεωμετρικών εργασιών τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στόχος και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να ερευνήσει την αρωγή των τεχνών στην κατανόηση της έννοιας του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου από μαθητές της Ε΄ Δημοτικού, καθώς και την συμβολή της ανάπτυξης των Γ.Χ.Ε. ως εργαλείο για την διευκρίνιση και δόμηση μιας διδασκαλίας στη γεωμετρία με συνοχή.

Είναι χρήσιμο να αναζητηθούν καινούρια στοιχεία και τρόποι προσέγγισης του μαθήματος της γεωμετρίας, που θα εξοικειώσουν τα παιδιά με καινούριες μαθηματικές έννοιες, θα τους ενθαρρύνει και θα τους αποτρέψει από την εμφάνιση αρνητικών συναισθημάτων απέναντι στη γεωμετρία.

Στην εργασία σχεδιάστηκαν και κατασκευάστηκαν εναλλακτικές δραστηριότητες για την εννοιολογική κατανόηση του σχήματος του κύκλου στο Δημοτικό Σχολείο, με τη διδακτική αξιοποίηση των τεχνών, στην προσπάθεια μας να επιτευχθεί η κατάκτηση της γνώσης με τρόπο ουσιαστικό και ελκυστικό για τα παιδιά.

Η ανάλυση επίσης της σύνθετης σειράς δραστηριοτήτων με τον εμπλουτισμό της τέχνης, πραγματοποιήθηκε υπό το πρίσμα της Θεωρίας των Γ.Χ.Ε.

Ουσιαστικά στην συγκεκριμένη έρευνα γίνεται μια προσπάθεια σύνδεσης της διδακτικής αξιοποίησης των τεχνών με τη θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας στο πλαίσιο μιας διδακτικής παρέμβασης με θέμα την εννοιολογική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου από μαθητές Ε΄ Δημοτικού, προκειμένου να ερευνηθεί και να διαπιστωθεί αν το συγκεκριμένο μοντέλο συμβάλλει θετικά σε ένα συγκροτημένο πρόγραμμα διδασκαλίας γεωμετρικών αντικειμένων.

Πιο συγκεκριμένα τα ερωτήματα της παρούσας μελέτης είναι:

1. Η αξιοποίηση των διαφορετικών ειδών τέχνης στη διδασκαλία της έννοιας του κύκλου, αποτελεί μια εναλλακτική διδακτική πρόταση που ενθαρρύνει και προτρέπει τους μαθητές στην ενασχόληση και εξοικείωση τους με τη νέα γνώση με ένα τρόπο πιο ουσιαστικό και ελκυστικό;
2. Η οικοδόμηση της γεωμετρικής εργασίας βασισμένης στο μοντέλο των ΓΧΕ με την εισαγωγή των νέων και διαφορετικών διαστάσεων της (σημειωτική – εργαλειακή – λεκτική), καθώς και των αντίστοιχων επιθυμητών επιπέδων που δημιουργούνται, καταφέρνει να οδηγήσει τους μαθητές σε μια πλήρη και ολοκληρωμένη εννοιολογική κατανόηση του σχήματος του κύκλου;

Ειδικότερα:

- Βοηθάει τα παιδιά στην αναγνώριση και κατάκτηση της χαρακτηριστικής ιδιότητας του συγκεκριμένου γεωμετρικού αντικειμένου;
- Συμβάλλει στην επιτυχή χρήση της γεωμετρικής έννοιας του κύκλου ως θεωρητικού εργαλείου για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων απόστασης;

Θεωρητική Μεθοδολογική Προσέγγιση της Έρευνας

Ποιοτική Έρευνα

Η μεθοδολογία είναι η επιστήμη που μελετά μεθοδικά, ενεργητικά, επίμονα και συστηματικά κάθε μορφή γνώσης βάσει εμπειρικών δεδομένων που την επαληθεύουν και στη διάρκεια της οποίας ο ερευνητής καλείται να διαλέξει, να αξιολογήσει και να καθορίσει τις μεθόδους που θα χρησιμοποιήσει στην έρευνα (Wellington, 2000 στην Ρουμπέση).

Η συγκεκριμένη διαδικασία για τον εκάστοτε ερευνητή της επιλογής και υλοποίησης των μεθόδων αυτών είναι μια πολύ δύσκολη και σημαντική διαδικασία, κατά την οποία ο ίδιος θα πρέπει μέσα από βαθιά μελέτη να καταφέρει στο τέλος να συλλέξει όσο το δυνατό περισσότερες πληροφορίες και να οδηγηθεί σε συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα είναι ποιοτική και σκοπός της είναι η διερεύνηση και ανακάλυψη της συμβολής της διδακτικής αξιοποίησης των τεχνών και της θεωρίας των Γ.Χ.Ε. κατά την πραγμάτωση ερευνητικών δραστηριοτήτων στη Θεματική ενότητα του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου στην Ε΄ Δημοτικού.

Για τη διεξαγωγή της συγκεκριμένης ποιοτικής μελέτης και τη διερεύνηση των ερωτημάτων που τέθηκαν, η συλλογή των δεδομένων κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης έγινε με τη χρήση του εργαλείου της συμμετοχικής παρατήρησης. Οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στη διδακτική παρέμβαση είναι κατάλληλα οργανωμένες ώστε να προσελκύσουν το ενδιαφέρον των παιδιών και να ενισχύσουν τη συμμετοχή τους. Επίσης, είναι δομημένες με τέτοιο τρόπο ώστε τα παιδιά να οικοδομήσουν σταδιακά τις απαιτούμενες έννοιες

Επιπρόσθετα ως βοηθητικά μέσα καταγραφής χρησιμοποιήθηκαν το μαγνητόφωνο και η φωτογραφική μηχανή.

Ενώ για τη συλλογή δεδομένων μετά την διδασκαλία και την αξιολόγηση αυτής, εφαρμόστηκαν ατομικές συνεντεύξεις . Οι απαντήσεις των παιδιών που συλλέχθηκαν μετά τη διδασκαλία δίνουν μία εικόνα για το πώς και σε τι βαθμό βοηθήθηκαν τα παιδιά στη κατανόηση της διδασκόμενης γεωμετρικής έννοιας.

Η συμμετοχική παρατήρηση ως μια μέθοδο συλλογής ποιοτικών δεδομένων θεωρήθηκε η μία από τις καταλληλότερες, από τη στιγμή που με τη βοήθεια της ο εκάστοτε ερευνητής μπορεί να δώσει έμφαση στα ποιοτικά χαρακτηριστικά κάποιου φαινομένου, με στόχο την ερμηνεία, την κατανόηση, την ανάπτυξη και την επιβεβαίωση κάποιας θεωρίας ή την αποκάλυψη κάποιων σχέσεων με αιτιακό υπόβαθρο (Ιωσηφίδης 2003).

Η κατηγορία της συμμετοχικής παρατήρησης που θα χρησιμοποιηθεί στην δική μας έρευνα είναι αυτή της συμμετοχής σαν παρατήρηση στην οποία η ταυτότητα του ερευνητή είναι γνωστή, αλλά και η συλλογή στοιχείων γίνεται όχι μόνο μέσα από την παρατήρηση, αλλά και της ενεργούς συμμετοχής του στις εκπαιδευτικές δραστηριότητες της ομάδας. Με τον τρόπο αυτό παράγονται πλούσια και σε βάθος ποιοτικά δεδομένα και πληροφορίες (Robson, 2002 στο Ιωσηφίδης, 2003).

Η συνέντευξη από την άλλη αποτελεί και αυτή μια πολύ διαδεδομένη μέθοδο πληροφοριών και άντλησης ποιοτικού υλικού και πληροφοριών, καθώς και ένα βασικό εργαλείο ποιοτικής έρευνας με το οποίο ο ερευνητής αποκτάει πολλές δυνατότητες διερεύνησης των θεμάτων που τον απασχολούν.

Το είδος της συνέντευξης στην παρούσα έρευνα είναι αυτό της ημιδομημένης, καθώς επιτρέπει τη χρήση ενός συνόλου προκαθορισμένων ερωτήσεων αλλά με πολύ μεγαλύτερη ευελιξία ως προς την σειρά των ερωτήσεων, ως προς τη τροποποίηση του περιεχομένου τους, ανάλογα με τον ερωτώμενο και αλλά και ως προς την προσθαφαίρεση ερωτήσεων και θεμάτων για συζήτηση (Ρουμπέση 2009).

Το είδος της ποιοτικής συμμετοχικής παρατήρησης και της συνέντευξης στην δική μας έρευνα αποσκοπεί στη διαμόρφωση μιας σφαιρικής και συνολικής εικόνας της εννοιολογικής κατανόησης του σχήματος του κύκλου με την αξιοποίηση των καλλιτεχνικών δραστηριοτήτων και την ανάλυση τους βάση της θεωρίας των Γ.Χ.Ε.

Δείγμα

Στην έρευνα συμμετέχουν 12 μαθητές, οι οποίοι αποτελούν ένα τμήμα της Ε΄ Δημοτικού. Οι 7 από τους μαθητές είναι αγόρια, ενώ οι υπόλοιποι 5 είναι κορίτσια. Το σχολείο στο οποίο φοιτούν βρίσκεται σε περιοχή του πολεοδομικού συγκροτήματος της Δυτικής Θεσσαλονίκης και οι γονείς των μαθητών προέρχονται από διάφορες επαγγελματικές τάξεις. Επιπλέον δύο μαθητές είναι αλλοδαπής καταγωγής, ενώ άλλος ένας παρουσιάζει μικρή διάσπαση προσοχής αλλά χωρίς αυτό να του προκαλεί ιδιαίτερα μαθησιακά προβλήματα γιατί είναι αρκετά εύστροφος· υπάρχουν τέλος και δύο με δυσκολίες στο γραπτό λόγο. Οι μαθητές του τμήματος δεν είχαν κάποια προηγούμενη εμπειρία από ερευνητική διδακτική παρέμβαση.

Το γνωστικό αντικείμενο του κύκλου μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια και το Αναλυτικό Πρόγραμμα: Ο ΓΧΕ αναφοράς

Κατά τη διάρκεια της φοίτησης τους στο δημοτικό σχολείο οι μαθητές έρχονται σε γνωριμία με τις βασικές έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων καθώς και των ιδιοτήτων τους.

Στις δύο όμως τελευταίες τάξεις μαθαίνουν ουσιαστικά να διαχειρίζονται τα στοιχεία του κύκλου και να κάνουν υπολογισμούς και χαράξεις που αφορούν το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα.

Στην ανάγκη λοιπόν αυτή εκμάθησης της γεωμετρίας του κύκλου με πρακτικό και βιωματικό τρόπο συμβάλει καθοριστικά η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας. Οι μαθητές αφού κατανοήσουν τη σωστή ορολογία που αφορά τον κύκλο, της κυριότερης ιδιότητας που οδηγεί στον ορισμό του, καθώς και στον σχεδιασμό του με την εκμάθηση της χρήσης του κατάλληλου εργαλείου, απώτερος στόχος μας είναι να τους οδηγήσουμε να κάνουν χρήση των καινούριων γνώσεων και να μπορέσουν να χειριστούν πραγματικές καταστάσεις – προβλήματα, οι οποίες κεντρίζουν το ενδιαφέρον τους και τους οδηγούν μέσω πραγματικών μετρήσεων και σχεδιασμού να

κατανοήσουν την αναγκαιότητα απόκτησης δεξιοτήτων και ικανοτήτων στο σχεδιασμό του συγκεκριμένου σχήματος και γνώσης των ιδιοτήτων του κύκλου.
Για την πραγματοποίηση των σχεδιαζόμενων διδασκαλιών – δραστηριοτήτων που θα ακολουθήσουν απαραίτητη προϋπόθεση θεωρείται ότι έχουν διδαχθεί οι μαθητές την παρακάτω ύλη του αναλυτικού προγράμματος:

Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Στη αρχή της εισαγωγής τους στο Δημοτικό η επαφή των παιδιών με τον κόσμο της γεωμετρίας γίνεται με εμπειρικό τρόπο και υπάρχει σύνδεση με την Τέχνη και τον Πολιτισμό. Μαθαίνουν να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν σωστά τα επίπεδα σχήματα (τρίγωνο τετράγωνο ορθογώνιο κύκλος), τα φαντάζονται, τα αναπλάθουν με το μυαλό τους και γενικά τα μεταχειρίζονται με τη διαίσθηση αλλά και νοητικά. Χρησιμοποιούν τα σχήματα για να συνθέσουν διάφορες εικόνες, αλλά επιπλέον ασκούνται να χαράζουν άλλα ελεύθερα με το χέρι και άλλα με το χάρακα. Αυτές οι οπτικές διεργασίες της ανάλυσης και της σύνθεσης των γεωμετρικών σχημάτων εφαρμόζονται σε δραστηριότητες όπως είναι τα παζλ, τα πλακόστρωτα και τα μωσαϊκά.

Ενότητα 1
Κεφάλαιο 2: Γεωμετρικά σχήματα

Ενότητα 6
Κεφάλαιο 40: Γεωμετρικά σχήματα

Τα αντίστοιχα κεφάλαια με τίτλο «Γεωμετρικά σχήματα» έχουν σαν στόχο οι μαθητές να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τους τα διάφορα σχήματα και επιπρόσθετα να αναγνωρίζουν τη φόρμα των επίπεδων σχημάτων (τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλος), όπως και αυτή των στερεών (τριγωνική πυραμίδα, κύβος, στερεό ορθογώνιο, κύλινδρος, σφαίρα) και να τα ονομάζουν σωστά κάθε φορά

Ενότητα 9
Κεφάλαιο 61

Το κεφάλαιο αυτό έχει τίτλο «Χαράξεις σχημάτων-παζλ-πλακόστρωτο» και η άσκηση στις χαράξεις σχημάτων, στη σύνθεση παζλ και την κατασκευή πλακόστρωτων, συνεχίζεται από πλευράς των μαθητών.

Β ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Στη Β΄ τάξη υπάρχει σαφή σύνδεση της Γεωμετρίας με φαινόμενα της καθημερινής ζωής και με παιχνίδια. Επίσης τα παιδιά γνωρίζουν τις μετρήσεις όπως αυτές της επιφάνειας, αλλά επιπλέον έρχονται για πρώτη φορά, όσον αφορά την Γεωμετρία, σε γνωριμία με τα γεωμετρικά μοτίβα, με απώτερο στόχο να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν τα γεωμετρικά σχήματα.

Ενότητα 2

Κεφάλαιο 14. Φτιάχνω γεωμετρικά σχήματα

Οι μαθητές θα οδηγηθούν στην εκμάθηση κατασκευής και προέκτασης ενός γεωμετρικού σχήματος όπως το τετράγωνο, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το τρίγωνο και το μη κανονικό πολύγωνο πάνω σε πλέγμα και με τα κομμάτια του τάγκραμ, με προϋποθέσεις, καθώς και στην ανακάλυψη ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν τα σχήματα

Κεφάλαιο 15: Μετρώ ευθύγραμμα τμήματα

Εξασκούνται στη χάραξη ευθύγραμμων τμημάτων αλλά και στη χρήση του χάρακα για τη μέτρηση του μήκους τμημάτων και πλευρών απλών γεωμετρικών σχημάτων

Ενότητα 5

Στο κεφάλαιο 31: Καλύπτω επιφάνειες

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μετρούν επιφάνειες με τη βοήθεια άλλων μικρότερων επιφανειών, τις οποίες χρησιμοποιούν ως μονάδα μέτρησης. Πιο αναλυτικά θα πρέπει με τη χρήση εποπτικού υλικού να μπορούν να δείξουν τι σημαίνει «καλύπτω μια επιφάνεια», αλλά και να κατακτήσουν τη χρήση των εννοιών του μισού και του διπλάσιου για την κάλυψη επιφανειών.

Γ΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Η εισαγωγή των γεωμετρικών σχημάτων και των στερεών σωμάτων στην Γεωμετρία στη Γ΄ τάξη γίνεται μέσα από πίνακες ζωγραφικής και μνημεία, όπως οι Πυραμίδες της Αιγύπτου. Επίσης σε γνώριμες δραστηριότητες από προηγούμενες τάξεις εφαρμόζονται οι οπτικές διεργασίες της ανάλυσης και της σύνθεσης των γεωμετρικών σχημάτων, που είναι πολύ σημαντικές για το μάθημα της Γεωμετρίας.

Πραγματοποιείται και άσκηση τους πάνω σε χαράξεις με τη χρήση του χάρακα και του διαβήτη.

Ενότητα 1

Κεφάλαιο 3: Γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα

Γνωρίζοντας ήδη τα ονόματα των βασικών γεωμετρικών σχημάτων ανασύρουν από την μνήμη τους τις γνωστικές τους πληροφορίες σχετικά με τα βασικά χαρακτηριστικά τους και τις επεκτείνουν καθώς γίνονται ικανοί, να αναγνωρίζουν και να απομονώνουν ένα σχήμα μέσα από μια σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και να αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της καθημερινότητας.

Ενότητα 2

Κεφάλαιο 8: Μέτρηση μηκών με εκατοστά και χιλιοστά

Μετά από την εκμάθηση τους στη χρήση του μέτρου και των υποδιαιρέσεων του για τη μέτρηση του μήκους, έρχονται αντιμέτωποι με προβληματικές καταστάσεις που απαιτούν τη χρήση του.

Ενότητα 3

Κεφάλαιο 16: Χαράξεις με διαβήτη και χάρακα

Στα πλαίσια της γεωμετρίας μια βασική δεξιότητα την οποία πρέπει να αποκτήσουν τα παιδιά είναι αυτή της χάραξης. Τα παιδιά ασκούνται στην απλή σχεδίαση σχημάτων κα σε απλές χαράξεις με την βοήθεια κουκίδων, τετραγωνισμένου χαρτιού αλλά και γεωμετρικών οργάνων.

Οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με ένα καινούριο γεωμετρικό εργαλείο το διαβήτη. Μέσα από την εκμάθηση της σωστής χρήσης του οι μαθητές επιδιώκεται να καταστούν ικανοί στην χάραξη των κύκλων.

Ενότητα 7

Κεφάλαιο 42: Παζλ, πλακόστρωτα και μωσαϊκά

Γίνεται εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της επιφάνειας σε μία προεμβαδική κατάσταση και εμβαθύνουν περισσότερο στις ιδιότητες των σχημάτων, παράλληλα όμως βγάζουν και το συμπέρασμα της πραγματοποίησης της πλήρης κάλυψης μιας επιφάνειας από κάποια σχήματα αν αυτά τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο, αλλά και της μη ολοκληρωμένης κάλυψης από κάποια άλλα. Η παράγραφός αυτή στοχεύει στην άσκηση των μαθητών πάνω στην ανάλυση ενός σύνθετου σχήματος στα επιμέρους σχήματα από τα οποία συγκροτείται, όσο και στη σύνθεση ενός σχήματος με πρότυπα σχήματα ή στην κάλυψη μιας επιφάνειας.

Δ΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Στη Γεωμετρία της Δ΄ Δημοτικού σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα γίνεται μια γενική στόχευση της έννοιας του εμβαδού ακολουθώντας τα ίδια διδακτικά βήματα των προηγούμενων ετών.

Β΄ Περίοδος

Κεφάλαιο 30: Διάκριση της Περιμέτρου από το Εμβαδόν.

Γίνεται προσέγγιση της έννοιας της επιφάνειας και μέτρηση αυτής με μη τυπικές μονάδες μέτρησης. Αναλυτικότερα οι στόχοι είναι: α) διάκριση της έννοιας του εμβαδού από αυτή της έννοιας της περιμέτρου, β) μέτρηση της επιφάνειας με μη τυπικές μονάδες μέτρησης και γ) σύγκριση επιφανειών με εμπειρικό τρόπο.

Κεφάλαιο 31: Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

Στο κεφάλαιο 31 οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του εμβαδού και οι διδακτικοί στόχοι του κεφαλαίου αυτού είναι να μπορούν να μετρούν μια επιφάνεια με τυπικές μονάδες μέτρησης και να γνωρίζουν τις συνήθεις μονάδες μέτρησης.

Κεφάλαιο 32: Παραλληλόγραμμα

Γίνεται σωστή διαχείριση των τετραγώνων, των ορθογωνίων παραλληλογράμμων καθώς και των πλάγιων αλλά και των ρόμβων καθώς μπορούν να αναγνωρίζουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του καθενός, να τα περιγράφουν βάσει αυτών των χαρακτηριστικών αλλά και να τα σχεδιάζουν με ή χωρίς πλέγμα με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων, αλλά και με την αξιοποίηση κάποιων ιδιοτήτων τους.

Ε΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Στην ενότητα που αναφέρεται στην Ε΄ Δημοτικού στη Γεωμετρία οι μαθητές ανακαλύπτουν την έννοια των ισοπεριμετρικών και ισοεμβαδικών και γίνονται γνώστες της διαδικασίας που ακολουθείται για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλογράμμου και του ορθογώνιου τριγώνου. Και μαθαίνουν να κάνουν μετατροπές στις μονάδες μέτρησης μήκους και επιφάνειας.

Ενότητα 5

Κεφάλαιο 25 : Ισοεμβαδικά σχήματα

Η διάκριση της έννοιας του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος υπό την έννοια της επιφάνειας που αυτό καλύπτει είναι ο κύριος διδακτικός στόχος του συγκεκριμένου κεφαλαίου.

Τα παιδιά φτάνουν στο γνωστικό επίπεδο κατανόησης της ύπαρξης διαφορετικών σχημάτων με το ίδιο εμβαδόν και σχημάτων των οποίων δεν μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το εμβαδόν τους, μπορούμε όμως να τα αναλύσουμε σε άλλα των οποίων το εμβαδόν είναι δυνατό να υπολογιστεί πιο εύκολα.

Πιο αναλυτικά οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να αναλύουν σύνθετα γεωμετρικά σχήματα σε άλλα πιο απλά και αντιστρόφως, με τη βοήθεια του παιχνιδιού τάγκραμ, να κατανοούν την έννοια του εμβαδού ως κάλυψη επιφάνειας και να μπορούν να το υπολογίζουν χωρίς να χρησιμοποιούν τύπους αλλά κάνοντας χρήση του διαγραμμισμένου ή τετραγωνισμένου χαρτιού και με σύγκρισή του με άλλα μικρότερα ή μεγαλύτερα σχήματα. Επίσης να μπορούν να κάνουν διάκριση της περιμέτρου από το εμβαδόν ενός σύνθετου ή απλού σχήματος, καθώς και διάκριση των μονάδων που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του καθενός, π.χ. μέτρα, εκατοστά για την περίμετρο και τετραγωνικά μέτρα, τετραγωνικά εκατοστά για το εμβαδόν.

Κεφάλαιο26: Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογώνιου Παραλληλογράμμου και ορθογωνίου τριγώνου

Ο κύριος γνωστικός στόχος είναι η κατάκτηση της έννοιας του εμβαδού των προαναφερθέντων σχημάτων αλλά και του υπολογισμού του με τη χρήση τύπων. Πιο αναλυτικά οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να εφαρμόζουν τη γνώση για τα ισοεμβαδικά σχήματα σε προβλήματα, να ανακαλύπτουν τη σχέση του εμβαδού τυχαίου ορθογώνιου τριγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου, να οδηγούνται σε νοερούς υπολογισμούς των εμβαδών του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλογράμμου, του ορθογώνιου τριγώνου, με την προϋπόθεση ότι είναι γνώστες των διαστάσεις τους, αλλά και να βρίσκουν τις διαστάσεις ενός τετραγώνου, όταν γνωρίζουν το εμβαδόν του.

Μάθημα 30. Μονάδες μέτρησης μήκους: μετατροπές (α)

Οι μαθητές μαθαίνουν να διενεργούν μετρήσεις μηκών και να εκφράζουν τα αποτελέσματα με διαφορετικές μονάδες μέτρησης, αλλά και να επιλέγουν τη σωστή υποδιαίρεση ή μεγάλη μονάδα μέτρησης αντίστοιχα, όταν θέλουν να εκφράσουν μήκη.

Μάθημα 31. Μονάδες μέτρησης μήκους: μετατροπές (β)

Αποκτούν ικανότητα στις μετατροπές στις διάφορες μονάδες μέτρησης και συνδέουν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με τις μετρήσεις μήκους και τη συμβολική γραφή τους

Σχεδιασμός του κατάλληλου ΓΧΕ - Παρουσίαση Διδακτικών Παρεμβάσεων

Η συγκεκριμένη σειρά των δραστηριοτήτων της «έννοιας του κύκλου» που θα αναλύσουμε, υλοποιείται στο 3ο Τρίμηνο όπου σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα υπάρχει η Ενότητα της Γεωμετρίας, η οποία αναφέρεται στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Το όλο πρόγραμμα είναι αρκετά φιλόδοξο και περιλαμβάνει 5 μαθήματα[1] – διάρκειας μίας μέχρι μιάμισης ώρας και τα οποία έλαβαν μέρος στη διάρκεια τεσσάρων εβδομάδων. Σχετικά με τη ύπαρξη της Τέχνης αξιοποιήθηκαν εικαστικές δημιουργίες, θεατρικά δρώμενα και δραματοποίηση λογοτεχνικού κειμένου. Οι διάφορες μορφές τέχνης λειτούργησαν ως μέσο κινητοποίησης των μαθητών, ως μέσο ενεργοποίησης προϋπαρχουσών γνώσεων-ιδιοτήτων του θεωρητικού συστήματος αναφοράς του ΓΧΕ και ως μια σημαντική παράμετρος βοήθειας σε λύσεις μαθηματικών προβλημάτων. Οι μαθητές μέσα από τις συγκεκριμένες διδασκαλίες ασχολήθηκαν ομαδικά: 1) με την αναγνώριση και σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων, 2) την κατασκευή σημείων σε ίση απόσταση από ένα δοθέν, αλλά και σημείων που βρίσκονταν σε απόσταση μεγαλύτερη ή μικρότερη από μία συγκεκριμένη αρχική απόσταση, 3) εντόπισαν το κέντρο ενός κύκλου γνωρίζοντας κάποια σημεία που ανήκαν σε αυτόν, 4) βρήκαν σημεία των οποίων οι θέσεις βρίσκονταν σε ίδιους κύκλους ξέροντας απλά και μόνο τα κέντρα τους, 5) σύγκριναν τα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων με το μήκος ενός δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος, 6) έλυσαν ασκήσεις και προβλήματα προκειμένου να καταφέρουν να εισαχθούν στη σφαιρική έννοια του

[1] Ο σχεδιασμός από τη 2η μέχρι την 5η διδακτική παρέμβαση προέκυψε από Fénichel, M., & Taveau, C. (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond. DVD, CRDP Créteil.

κύκλου, δηλαδή να κατανοούν τον κύκλο ως ένα σύνολο σημείων που βρίσκονται σε ίση απόσταση από ένα δοθέν σημείο - το κέντρο, να χρησιμοποιούν αυτό το σχήμα για να επιλύουν προβλήματα απόστασης και να συσχετίζουν τη ιδιότητα που οριοθετεί την έννοια του κύκλου στην κατασκευή με διαβήτη ο οποίος χρησιμοποιείται επίσης για την μεταφορά αποστάσεων.

Μάθημα 1

Στόχος

Να γίνει αναγνώριση του συγκεκριμένου σχήματος ανάμεσα σε άλλα γεωμετρικά σχήματα και να αντιληφθούν οι μαθητές ποια είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν τον κύκλο από τα υπόλοιπα γεωμετρικά σχήματα. Έτσι παρατηρώντας ένα σχήμα να μπορούν αμέσως να το κατατάσσουν στην κατηγορία των κυκλικών σχημάτων. (έλλειψη γωνιών, πλευρών και περίμετρος πλευρών = μήκος κύκλου)

Εργασία των μαθητών

Αφού υποκινήσουμε το ενδιαφέρον των παιδιών προβάλλοντας κάποιες εικαστικές ζωγραφιές, ζητάμε από τους μαθητές να ανασύρουν από τη μνήμη τους και να καταγράψουν εικόνες στις οποίες κυριαρχεί το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου

Υλικά

Πίνακες που απεικονίζουν γεωμετρικά σχήματα

Πίνακες στους οποίους έχει κυρίαρχη θέση ο κύκλος

Οργάνωση

Εργασία ατομικά και σε ζεύγη

Ανάλυση δραστηριοτήτων

Φάση 1: Παρουσίαση πινάκων ζωγραφικής με γεωμετρικά σχήματα. Δείχνουμε στον προτζέκτορα πίνακες ζωγραφικής (παράρτημα Β, πίνακες 1-8) και ζητάμε από τους μαθητές να καταγράψουν σε στήλες τα γεωμετρικά σχήματα που συναντούν

Φάση 2: Προβολή πινάκων όπου πρωταγωνιστής είναι ο κύκλος και ζητάμε από τα παιδιά να μας απαντήσουν ποιο είναι το χαρακτηριστικό που τον ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα σχήματα.

Φάση 3: Αφού έχουμε κεντρίσει το ενδιαφέρον των παιδιών στην φάση 2 τους ζητάμε δουλεύοντας ανά ζεύγη να κατασκευάσουν το δικό τους κατάλογο με κυκλικά σχήματα.

Μάθημα 2

Στόχος

Να γίνει η ενεργοποίηση της κυριότερης ιδιότητας που οδηγεί στον ορισμό του κύκλου, το σύνολο δηλαδή των σημείων που βρίσκονται σε ίση απόσταση από ένα σημείο, αλλά και να μπορέσει να αναδειχθεί η σχέση μεταξύ αυτών των σημείων και αυτού του κύκλου, μεταξύ της απόστασης και της ακτίνας του κύκλου.

Εργασία των μαθητών

Τα παιδιά παίρνουν μέρος στην κατασκευή σημείων σε ίση απόσταση από ένα δοθέν σημείο, καθώς και κατασκευή σημείων που θα βρίσκονται σε απόσταση μεγαλύτερη ή μικρότερη από μια συγκεκριμένη απόσταση επίσης.

Υλικά

Λωρίδες υφάσματος, κομμάτια σχοινιού, χάρακας, διαβήτης.

Πλαστικά χρώματα

Οργάνωση

Εναλλαγή μεταξύ ομαδικής εργασίας και εργασίας σε ζεύγη.

Ανάλυση δραστηριοτήτων

Φάση 1: Πραγματοποιείται ανάγνωση του θεατρικού κειμένου «ο κύκλος με την κιμωλία» όπου γίνεται αναφορά στον συγκεκριμένο σχήμα

[Το καυκασιανό παραμύθι]

Γ9

Στη διάρκεια τον πολέμου ένα μικρό κορίτσι χάνει τη μητέρα του. Το σώζει μια γυναίκα, που το υιοθετεί και το ανατρέφει με τρυφερότητα και αγάπη. Μετά από χρόνια, η φυσική του μητέρα, που ποτέ δε σταμάτησε να το αναζητά, το ξαναβρίσκει και θέλει να το πάρει κοντά της. Στο κείμενο που ακολουθεί, η Μόνα, η θετή μητέρα της ιστορίας μας, διηγείται στο παιδί ένα παραμύθι, με σκοπό να το προετοιμάσει για την αλήθεια, αλλά και για τις αλλαγές που πρόκειται να συμβούν στη ζωή του.

Απο κείνο, το ίδιο κιόλας βράδυ, άρχισε να του λέει με δικά της λόγια απλά το καυκασιανό παραμύθι του «Κύκλου με την κιμωλία».

«Ήταν, που λες, Λουλούδι μου, στα πολύ παλιά χρόνια, ένας βασιλιάς και μια βασίλισσα, που είχαν ένα μεγάλο παλάτι, που έμπαινες και δεν ήξερες τι να πρωτοθαυμάσεις. Τις ζωγραφιές, τους καθρέφτες, τα χρυσαφικά, τα χαλιά, τους κήπους, τα πατώματα κι ό,τι άλλο θες. Ο βασιλιάς κι η βασίλισσα δεν είχαν παιδιά. Όλα τα καλά τα είχαν. Μόνο ένα παιδί τούς έλειπε. Ώσπου μια μέρα ήρθε κι αυτό το καλό. Χαρές, γιορτές, γλέντια, που κράτησαν μέρες. Και τότε, πάνω στο μεθύσι της χαράς του, ο βασιλιάς είπε ότι δε φοβόταν πια κανένα. Κανένα.

»Το άκουσε ο δράκος Πόλεμος και λέει: "Να δεις, θα τους δείξω εγώ!". Παίρνει τα τσιράκια* του και πάνε και βάζουν φωτιά στο παλάτι. Και τρέχει ο βασιλιάς να σωθεί και τρέχει η βασίλισσα να φύγει. Αλλά, προτού να βγει από το παλάτι, η βασίλισσα θυμήθηκε ότι ξέχασε να πάρει το πιο ακριβό πράγμα που είχε στον κόσμο: ένα μεγάλο ρουμπίνι που άστραφτε σαν μικρός ήλιος. Τρέχει, που λες, το παίρνει και φεύγει από την πίσω πόρτα. Μόλις βγήκε από το παλάτι, θυμήθηκε ότι είχε κι ένα άλλο πολύτιμο πράγμα: το μονάκριβο παιδί της που κοιμόταν στην κούνια του. Αχ, πώς το ξέχασε! Κάνει να γυρίσει να το πάρει, μα βλέπει ότι τα τσιράκια του δράκου Πόλεμου είχαν μπει στο παλάτι. "Αχ, βαχ", τι να κάνει η βασίλισσα, φεύγει με την άμαξα και γλιτώνει τη ζωή και το ρουμπίνι της».

— Και το παιδί, τι έγινε το παιδί;

— Ναι, το παιδί. Θα δεις τι έγινε.

«Πέρασαν χρόνια κι η βασίλισσα, που δεν ήταν πια βασίλισσα κι ο άντρας της είχε σκοτωθεί, μαθαίνει ότι το παιδί της ζούσε. Το είχε σώσει μια από τις υπηρέτριές της, η πιο μικρή. Όταν είδε ότι το ξέχασαν, το πήρε και με κίνδυνο της ζωής της το έσωσε. Δεν είχε άμαξα να φύγει αυτή, δεν είχε άλογα, δεν είχε λεφτά. Το πήρε και, περπατώντας, τράβηξε προς το βουνό. Κι εκεί κρύφτηκε. Ύστερα, βρήκε κάτι καλούς ανθρώπους που της δώσανε δουλειά, και το μεγάλωσε το παιδί.

»Λοιπόν, ήρθε ύστερα από χρόνια η μητέρα του, που το ξέχασε στην κούνια και λέει: "Το παιδί είναι δικό μου". "Όχι", λέει η γυναίκα που το έσωσε. "Εγώ το γλίτωσα, το μεγάλωσα, το αγάπησα· είναι δικό μου το παιδί". "Όχι, δικό μου" η μια, "δικό μου" η άλλη και, για να βρουν το δίκιο τους, πήγαν σε ένα μεγάλο και σοφό δικαστή.

»Κι αυτός λέει σε κάποιον από τους ανθρώπους του να πάρει μια κιμωλία και να φτιάξει στο πάτωμα έναν κύκλο κι εκεί μέσα να βάλουν το μικρό παιδί στο κέντρο του κύκλου και οι μητέρες να σταθούν απέναντι η μια από την άλλη και σε ίση απόσταση από το κέντρο.

Φάση 2: Δραματοποίηση του θεατρικού κειμένου με τους μαθητές στους ρόλους των ηρώων.

Ζητάμε από τους μαθητές να τοποθετήσουν ένα μαθητή τους σε ένα συγκεκριμένο σημείο που το ονομάζουν Α (παιδί) και στη συνέχεια ανά ζεύγη των δύο ατόμων (οι μητέρες του παιδιού) να σημειώσουν σημεία 12 σε αριθμό που να βρίσκονται στην ίδια απόσταση από το σημείο Α που βρίσκεται το παιδί. Επιπρόσθετα κάθε φορά υπενθυμίζουμε τα παιδιά να σημαδεύουν τις θέσεις με κάποιο χρώμα.(Η όλη διαδικασία πραγματοποιείται στο δάπεδο της τάξης).

Φάση 3: Μετά την ολοκλήρωση των εργασιών και την ανακοίνωση των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και της διαδικασίας που χρησιμοποιήθηκε για να χαραχθούν τα ζητηθέντα σημεία, γίνεται προσπάθεια επικύρωσης της έννοιας του κύκλου.

Ζητάμε από τα παιδιά να επιχειρηματολογήσουν και να προσπαθήσουν να αναδείξουν την έννοια της ίσης απόστασης από ένα σημείο όπως τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο. Ενεργοποιούνται ξανά οι όροι κύκλος και ακτίνα κύκλου.

Φάση 4 (ζεύγη) Επανεπένδυση

Οι μαθητές καλούνται τώρα να τοποθετήσουν ακόμη δέκα σημεία με ένα διαφορετικό χρώμα μπογιάς από αυτό που χρησιμοποίησαν στην προηγούμενη δραστηριότητα στην ίδια απόσταση από το Α, όπως συνέβη και με τα προηγούμενα σημεία. Η όλη διαδικασία πραγματοποιείται προκειμένου να αξιολογήσουμε κατά πόσο οι μαθητές έχοντας στη διάθεση τους το σύνολο των απαραίτητων υλικών, έχουν προσαρμοστεί στην έννοια της ίσης απόστασης σημείων από ένα δοθέν σημείο.

Φάση 5 (συλλογικά και στη συνέχεια ζεύγη) Κοινή θέα και έννοια του δίσκου.

Γίνεται συλλογική ανάλυση σχετικά με την χάραξη αυτών των δέκα σημείων και επαναδιατύπωση της σχέσης μεταξύ της ίσης απόστασης των σημείων και των σημείων του κύκλου.

Στη συνέχεια θέλοντας να συμπληρώσουμε την κατασκευή της έννοιας βάζουμε τα παιδιά να κατασκευάσουν με ένα τρίτο χρώμα πέντε σημεία, τέτοια ώστε η απόστασή τους από το σημείο Α να είναι μεγαλύτερη από το μήκος του Α από τα προηγούμενα σημεία και αλλάζοντας πάλι το χρώμα πέντε καινούρια σημεία έτσι ώστε η απόστασή τους από το σημείο Α να είναι αυτή τη φορά μικρότερη από το μήκος του Α από τα υπόλοιπα σημεία.

Φάση 6 (συλλογικά) κοινή θέα και σύνθεση

Εδώ περνάμε στη φάση της επισημοποίησης. Στη φάση αυτή γίνεται ορατό πλέον ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση από το Α βρίσκονται όλα πάνω στον κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ (για παράδειγμα αν με Β συμβολίσουμε ένα τυχαίο σημείο που βρίσκεται πάνω σε αυτόν).

Ενώ όλα τα σημεία που έχουν την απόστασή τους από το Α μικρότερη από την ακτίνα βρίσκονται μέσα στον δίσκο κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ και αντίστοιχα όλα τα σημεία που έχουν την απόσταση τους από το Α μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου βρίσκονται έξω από τον δίσκο κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ.

Επίσης η επιφάνεια που ορίζεται από τον κύκλο ονομάζεται δίσκος (χρωματίστε την).
Ο κύκλος αναπαριστά το σύνορο του δίσκου.

Φάση 7 (ατομική εργασία) Δημιουργία σχεδίου του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου και γραπτή διατύπωση της χαρακτηριστικής ιδιότητας που ορίζει το συγκεκριμένο σχήμα σε φύλλα εργασίας

Ο σχεδιασμός και γραπτή διατύπωση του εννοιολογικού ορισμού θα βοηθήσει τους μαθητές, από τη μία να κατανοήσουν και να θυμούνται καλύτερα το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου και από την άλλη να αποτυπώσουν στο χαρτί αυτά που έκαναν στην πραγματικότητα

Μάθημα 3

Στόχος

Προσπαθούμε να δείξουμε πόσο χρήσιμη και λειτουργική είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου,(το σύνολο των σημείων που έχουν ίση απόσταση από ένα δοθέν σημείο) γι’ αυτό στηριζόμαστε ξανά στην γεωμετρική ορολογία που σχετίζεται με τον κύκλο.

Εργασία των μαθητών

Επίλυση ασκήσεων που θέτουν στο παιχνίδι την χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου

Υλικά

Οι εκφωνήσεις των ασκήσεων σε φύλλα εργασίας. Τα γεωμετρικά εργαλεία που επιτρέπονται είναι διαφορετικά ανάλογα με την άσκηση.

Ανάλυση δραστηριοτήτων

Φάση 1 (συλλογικά), υπενθύμιση του μαθήματος 1

Γίνεται χρήση κάποιων εργασιών των μαθητών του προηγούμενου μαθήματος οι οποίες θα αποτελέσουν εναρκτήριο δύναμη της εργασίας και της σύνθεσης του μαθήματος.

Επίσης γίνεται πρόταση πιθανής χρήσης του διαβήτη και όχι των άλλων υλικών με τα οποία χάραζαν μέχρι τώρα τους κύκλους.

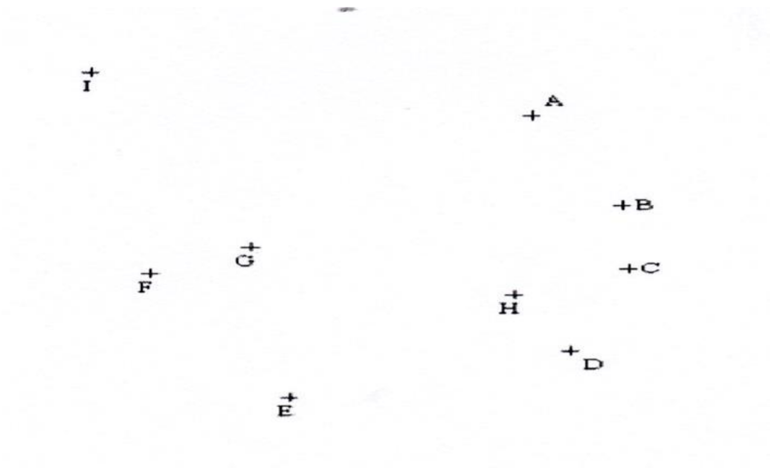
Η πρόταση αυτή βοηθάει στην επαναδιατύπωση της σχέσης μεταξύ του κύκλου και της έννοιας της ίσης απόστασης, αλλά συγχρόνως έμμεσα πολύτιμη είναι και η χρήση του διαβήτη που είναι κατεξοχήν το εργαλείο που χρησιμοποιείται στην κατασκευή των κύκλων.

Φάση 2 (ατομικά)

Δείχνουμε στα παιδιά ένα πίνακα ζωγραφικής που απεικονίζει το μεγαλιθικό μνημείο του Στόουνχεντζ (παράρτημα Β, πίνακες 15-16) και κάποιες πληροφορίες σχετικά με το συγκεκριμένο αυτό αρχαιολογικό έργο τέχνης.

Στην συνέχεια τους μοιράζουμε ένα φύλλο εργασίας (παράρτημα Β, 1ο φύλλο), το οποίο πρέπει να διαβάσουν ήσυχα και προσεκτικά.

Στο φύλλο απεικονίζονται κάποια σημεία και τους εξηγούμε πως στα σημεία A, B, C υπάρχουν τρεις μεγάλιθοι που βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο. Το κέντρο αυτού του κύκλου είναι ένας από τους υπόλοιπους μεγάλιθους δηλαδή ένα από τα άλλα σημεία που βλέπουνε και τους ζητάμε χρησιμοποιώντας τον βαθμονομημένο χάρακα, να βρουν το κέντρο αυτού του κύκλου.



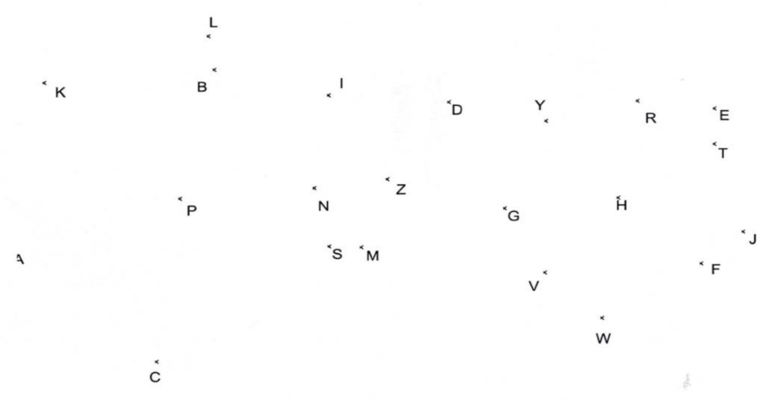
Με την άσκηση αυτή ελέγχουμε την ικανότητα των μαθητών να κάνουν τη σύνδεση μεταξύ των σημείων πάνω σε έναν κύκλο και της ίσης απόστασης.

Τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν για την έρευνα είναι μόνο ο χάρακας. Ο διαβήτης θα χρησιμοποιηθεί μόνο για την επικύρωση.

Φάση 3 (ατομικά), επίλυση της άσκησης 2

Με την άσκηση αυτή στόχος είναι να ισχυροποιηθεί η σχέση μεταξύ των σημείων ενός κύκλου και της έννοιας της ίσης απόστασης. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ίδια με αυτή της προηγούμενης άσκησης και οι μαθητές μπορούν να κάνουν χρήση όλων των εργαλείων κατασκευής.

Οι μαθητές παίρνουν καινούρια φύλλα εργασίας, (παράρτημα Β, 2ο φύλλο) όπου σε κάθε σημείο που απεικονίζεται αντιστοιχεί και πάλι ένας μεγάλιθος και καλούνται να χρωματίσουν με κόκκινο χρώμα όλα εκείνα τα σημεία που βρίσκονται 5 εκατοστά από το σημείο P καθώς και με μπλε όλα εκείνα που βρίσκονται σε απόσταση αντίστοιχα 3 εκατοστά από το σημείο H. Επιπρόσθετα ζητάμε από τους μαθητές να μας εξηγήσουν τον τρόπο που τα βρήκαν



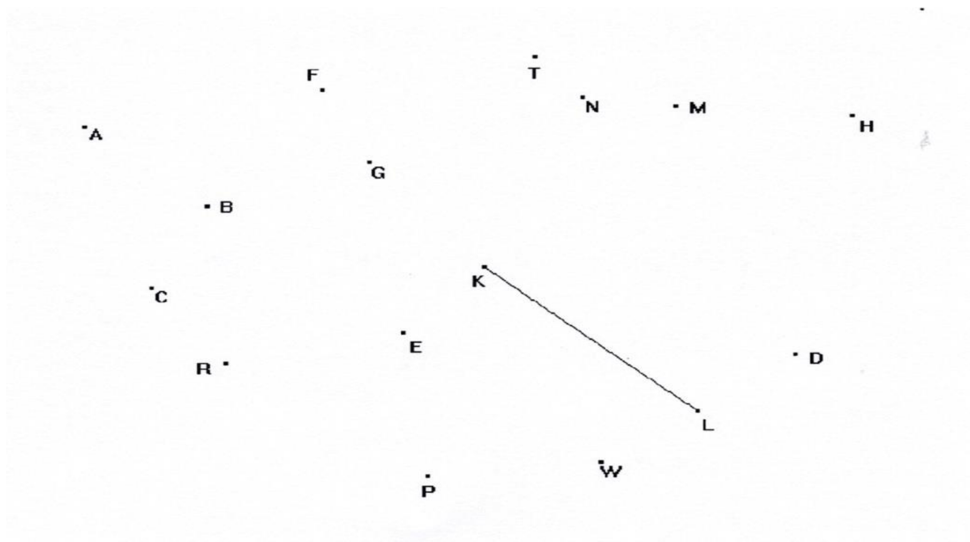
Φάση 4, επίλυση άσκησης 3

Στόχος είναι η σύνδεση μεταξύ των σημείων ενός κύκλου και της έννοιας της ίσης απόστασης, να επισημοποιηθεί αυτή τη φορά και με τη χρήση του διαβήτη του κατεξοχήν εργαλείου για τη κατασκευή του συγκεκριμένου σχήματος

Αυτή τη φορά σχεδιάσαμε ένα ευθύγραμμο τμήμα KL (παράρτημα Β, 3ο φύλλο), που ενώνει δύο μεγάλιθους που βρίσκονται στα αντίστοιχα σημεία, όπως εικονίζεται παρακάτω, του οποίου το μήκος είναι 5 εκατοστά και ζητάμε να βρεθούν τα μήκη των παρακάτω τμημάτων που ενώνουν τους μεγάλιθους, η θέση των οποίων συμβολίζεται με τα γράμματα που δίδονται στη συνέχεια χωρίς τη χρήση του χάρακα.

[KB] [KA] [KM] [KE] [HD] [KT] [KR] [BC] [KF] [GE]

Στη συνέχεια τους ζητάμε να τα τοποθετήσουν στις στήλες 1, 2, 3 του πίνακα που ακολουθεί ανάλογα με το μήκος τους (παράρτημα Β, 4ο φύλλο εργασίας).



Τμήματα με μήκος μεγαλύτερο από 5 εκατοστά	Τμήματα με μήκος ίσο με 5 εκατοστά	Τμήματα με μήκος μικρότερο από 5 εκατοστά

Φάση 5 (ομαδική), σύνθεση του μαθήματος

Στο τέλος του μαθήματος οδηγούμε τους μαθητές να διατυπώσουν τις έννοιες στις οποίες εργάστηκαν σε αυτό το μάθημα και τονίζουμε το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν τα εργαλεία κατασκευής.

Επίσης προσπαθούμε να τους δείξουμε πως η χρήση της ιδιότητας της ίσης απόστασης των σημείων ενός κύκλου οδηγεί στην επίλυση προβλημάτων απόστασης χωρίς την χρήση εργαλείων μέτρησης αλλά στηριζόμενοι μόνο στον συλλογισμό τους

Μάθημα 4

Στόχος

Να αναδειχθεί η λειτουργικότητα και η αποτελεσματικότητα της χρήσης της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου πάνω στα ελεύθερα σχέδια για την επίλυση προβλημάτων.

Εργασία των μαθητών

Επίλυση προβλημάτων

Υλικά

Διαφορετικά ανάλογα με τη φάση εξέλιξης της διαδικασίας του μαθήματος

Ανάλυση Δραστηριοτήτων

Φάση 1 (συλλογικά)

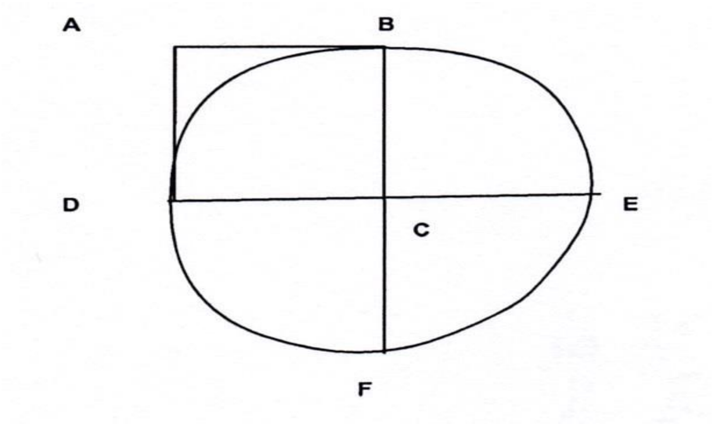
Οι μαθητές μετά από παρότρυνση μας ξαναθυμούνται και εκφωνούν τη χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου (ότι όλα τα σημεία ενός κύκλου βρίσκονται σε ίση απόσταση από το κέντρο αυτού του κύκλου).

Στη συνέχεια τους ανακοινώνουμε ότι σήμερα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα, για να βρούμε το μήκος τμημάτων χωρίς χρήση εργαλείων με την επίλυση 2 ασκήσεων.

Φάση 2 (συλλογικά και μετά ατομικά)

Πριν ασχοληθούμε με την επίλυση των ασκήσεων, κρεμάμε στον πίνακα κάποιους πίνακες του Καντίνσκι (παράρτημα Β) και προχωράμε σε μια άμεση γνωριμία με τον ίδιο και το έργο του μέσα από πληροφορίες που δίνουμε, όπως ότι ο ίδιος εμπνεύστηκε από τα μαθηματικά και χρησιμοποίησε γεωμετρικές έννοιες για να δημιουργήσει τα καλλιτεχνικά του έργα.

Ακολουθεί η παραγωγή ενός ελεύθερου σχεδίου στον πίνακα σε κοινή θέα όλων των μαθητών καθώς και επεξήγηση της καινούριας έννοιας.



Αφού απαντηθούν και ερωτήσεις όπως :

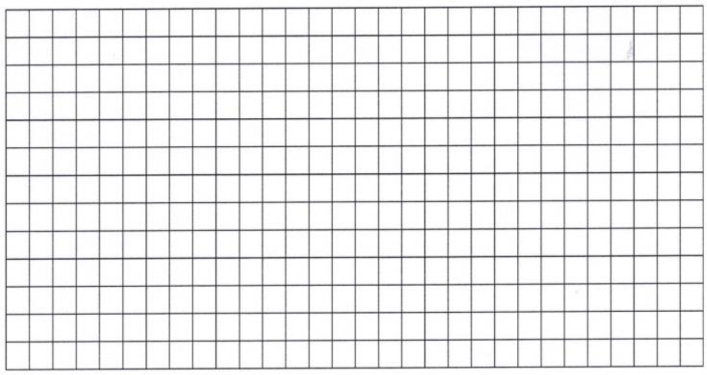
- «Από τι συνίσταται αυτό το σχήμα?»
- Ένας κύκλος με κέντρο C και ακτίνα (ή διάμετρο) και ένα τετράγωνο ABCD
   - «Ποια είναι η μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται?»
   - Η μονάδα μέτρησης είναι το πλακάκι

Ζητάμε από τα παιδιά να γίνουν και αυτοί μικροί ζωγράφοι, να αποτυπώσουν το συγκεκριμένο σχέδιο στο χαρτί τους και να δημιουργήσουν το δικό τους πίνακα με τα γεωμετρικά σχήματα που εικονίζονται απαγορεύοντας συγχρόνως τη χρήση του χάρακα και δηλώνοντας τους ότι σε ένα ελεύθερο σχέδιο είναι αδύνατη η μέτρηση, διότι οι χαράξεις δεν είναι ακριβείς.

Φάση 3 (ατομικά)

Μετά την ολοκλήρωση των ζωγραφικών πινάκων τους με το ελεύθερο σχήμα που τους προτείναμε τους, γνωστοποιούμε ότι στο συγκεκριμένο σχήμα το ABCD (παράρτημα Β, 5^{ο} φύλλο) είναι ένα τετράγωνο του οποίου το μήκος των πλευρών είναι 5 πλακάκια, ο κύκλος έχει κέντρο C και ακτίνα CD, τα σημεία B, C, F είναι συνευθειακά (ευθυγραμμισμένα), τα σημεία D, C, E είναι επίσης συνευθειακά και τους προτρέπουμε να βρουν τα μήκη των τμημάτων [CF]? [CE]? [DE]? [BF]? και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους.

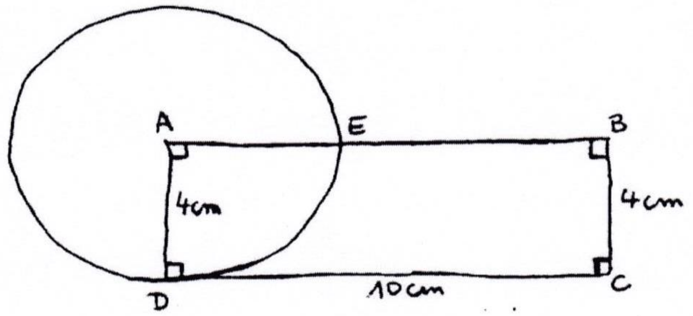
Αφού ολοκληρώσουν την παραπάνω εργασία τους, ζητάμε να κατασκευάσουν σε πραγματικές διαστάσεις το σχήμα του πίνακα τους στο τετραγωνισμένο χαρτί.



Φάση 4 (ατομικά)

Ακολουθείται η ίδια διαδικασία με την προηγούμενη δίνοντας αυτή τη φορά στα παιδιά να δημιουργήσουν καινούριο πίνακα και να σχεδιάζουν το παρακάτω ελεύθερο σχέδιο αλλάζοντας το ένα από τα δύο γεωμετρικά σχήματα και αφήνοντας σταθερό το δεύτερο. Σε αυτό το ελεύθερο σχέδιο έχουμε ένα ορθογώνιο ABCD και τον κύκλο με κέντρο A που διέρχεται από το σημείο D (παράρτημα B, 6^{ο} Φύλλο).

Αυτός ο κύκλος τέμνει το τμήμα AB στο σημείο E (παράρτημα B, 5^{ο} φύλλο). Ζητάμε να βρεθεί το μήκος του τμήματος EB και να δικαιολογηθεί η απάντηση τους.

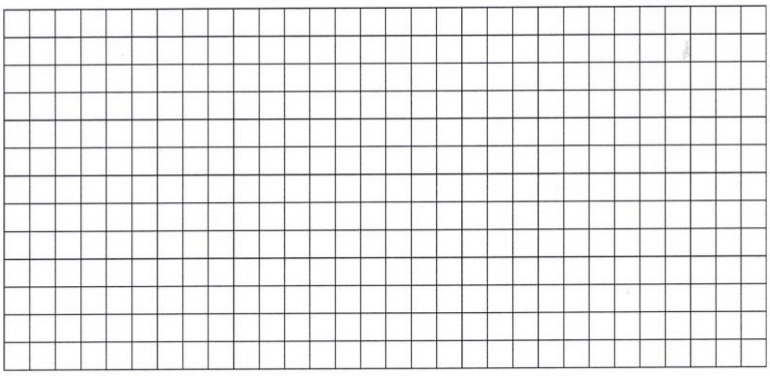


Φάση 5 (συλλογικά), κοινή θέα

Παρατηρούμε τις διαδικασίες των μαθητών κατά τη διάρκεια της επίλυσης και επιλέγουμε την κατάλληλη στρατηγική την οποία θέτουμε σε κοινή θέα.

Δημιουργούμε ένα κατάλογο με τις τιμές που βρήκαν οι μαθητές για το μήκος του ίδιου τμήματος καθώς οι απαντήσεις σχετικά με τα μήκη μπορεί να είναι ποικίλες -η σωστή όμως είναι μια και μοναδική – και συνεχίζουμε ζητώντας τους να παρουσιάσουν τις διαδικασίες τους και να επιχειρηματολογήσουν σχετικά με την επικύρωση των απαντήσεών τους.

Η κατασκευή σε τετραγωνισμένο χαρτί που ακολουθεί και στις πραγματικές διαστάσεις του σχήματος επιτρέπει μια επικύρωση για όλους



Φάση 6 (συλλογικά), σύνθεση

Γίνεται συλλογικά μία συγκεντρωτική και ολοκληρωμένη διατύπωση του καταληκτικού αποτελέσματος της όλης διαδικασίας που ακολουθήθηκε από τους μαθητές.

Τελικά μπορεί να δοθεί το μήκος κάποιων τμημάτων χωρίς χρήση της μέτρησης τους, δηλαδή να γίνει επικύρωση ενός αποτελέσματος από έναν συλλογισμό, γεγονός που οδηγεί τους μαθητές να μην χρησιμοποιούν την αντίληψη (αισθητηριακά), ούτε τα εργαλεία για να επιλύσουν ένα πρόβλημα γεωμετρίας. Τονίζοντας φυσικά ότι στο αποτέλεσμα αυτό καταλήξαμε λόγω της χρήσης της ιδιότητας της ίσης απόστασης των σημείων που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο

Μάθημα 5

Στόχος

Να οδηγηθούν στην ανακάλυψη, ότι εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων ίσης απόστασης αποτελούν η χρήση του κύκλου και η χρήσης του δίσκου

Εργασία των μαθητών

Να Μοντελοποιήσουν μια κατάσταση της πραγματικής ζωής και να την επιλύσουν

Ανάλυση Δραστηριοτήτων

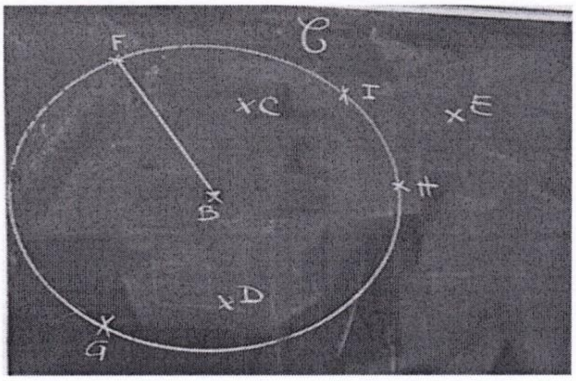
Φάση 1 (συλλογικά)

Υπενθύμιση των ιδιοτήτων των σημείων του κύκλου

Τα παιδιά μεταμορφώνονται σε μικρούς χορευτές και παίρνουν μέρος σε χορευτικές εκδηλώσεις. Για τις ανάγκες της χορογραφίας τους θα πρέπει να βρίσκεται κάποιο παιδί σε ένα σημείο το οποίο ονομάζουμε B και άλλα παιδιά στα σημεία H, I, F και G ώστε να αποτελούν οι θέσεις τους σημεία που βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο, καθώς και δύο άλλα παιδιά στις θέσεις D και E σημεία που βρίσκονται πάνω στον δίσκο και σημείων που βρίσκονται έξω από τον δίσκο αντίστοιχα.

Στην συνέχεια ζητάμε να μας απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως, α) να δώσουν πληροφορίες για τα μήκη BF, BI, BH, BG, β) που βρίσκεται το σημείο E, γ) πως μπορούμε να αξιολογήσουμε το μήκος BE και πως το μήκος BD.

Με τον τρόπο αυτό οδηγούμε τα παιδιά να θυμηθούν τις σχέσεις της θέσης και της απόστασης αυτών των σημείων με το κέντρο του κύκλου.



Φάση 2, το πρόβλημα της εύρεσης του θησαυρού (Μέσα από θεατρικό δρώμενο)

Οι μαθητές αναλαμβάνουν ρόλο μικρών εξερευνητών. Τους δίνουμε στα χέρια τους ένα παλιό χάρτη θησαυρού σε φωτοτυπία που βρέθηκε σε ένα σεντούκι του σχολείου (παράρτημα B, 7ο φύλλο). Ο χάρτης υποδεικνύει την τοποθεσία της αυλής του σχολείου και τις παρακάτω οδηγίες για την ανεύρεση του θησαυρού που είναι θαμμένη σε αυτήν. «Στην αυλή υπάρχει μια βελανιδιά και ένα πεύκο. Ο θησαυρός είναι θαμμένος σε 4 μέτρα από τη βελανιδιά και σε 7 μέτρα από το πεύκο.»

Με βάση το χάρτη και τη βοήθεια των οδηγιών ξεκινάει η περιπέτεια για τον εντοπισμό της θέσης του θησαυρού.

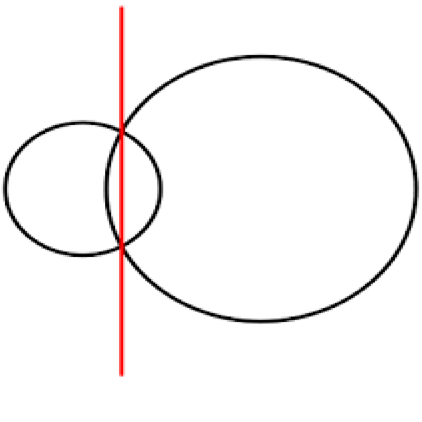
Οδηγούμε τους μαθητές να διαβάσουν καλά την εκφώνηση της εργασίας τους και στη συνέχεια να την επαναδιατυπώσουν. Ελέγχουμε αν έγινε πλήρης κατανόηση της συγκεκριμένης προβληματικής κατάστασης και του αντίστοιχου σχεδίου και συνεχίζουμε παρατηρώντας τις διαφορετικές διαδικασίες των παιδιών

Φάση 3 (συλλογικά)

Πραγματοποίηση της διαδικασίας, παρουσίαση και επιχειρηματολογία των λύσεων καθώς και επικύρωση τους.(2 μέρη είναι πιθανά για την εύρεση του θησαυρού).

Οι μαθητές στην αυλή του σχολείου παράλληλα με το ρόλο των εξερευνητών πραγματώνουν και το ρόλο του ζωγράφου και με τη χρήση των διαφορετικών χρωμάτων τους δουλεύουν για την εύρεση των πιθανών σημείων εντοπισμού του θησαυρού.

Το αποτέλεσμα της εργασίας θα τους δείξει ότι τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται στην τομή των δύο κύκλων, αυτού με κέντρο το πρώτο δέντρο και ακτίνα 4 μέτρα και εκείνου με κέντρο το δεύτερο και ακτίνας 7 μέτρα. Αυτή η σύνθεση θα επιτρέψει την γενίκευση της κατασκευής των σημείων που βρίσκονται σε δύο δοθείσες αποστάσεις από άλλα 2 σημεία.



Φάση 4 (ατομικά)

Προβολή πίνακα με θέμα το άλογο (παράρτημα Β, πίνακας 17) και παρουσίαση του προβλήματος που έχει να αντιμετωπίσει ένας ιδιοκτήτης με τις δύο φάρμες αλόγων που διαθέτει.

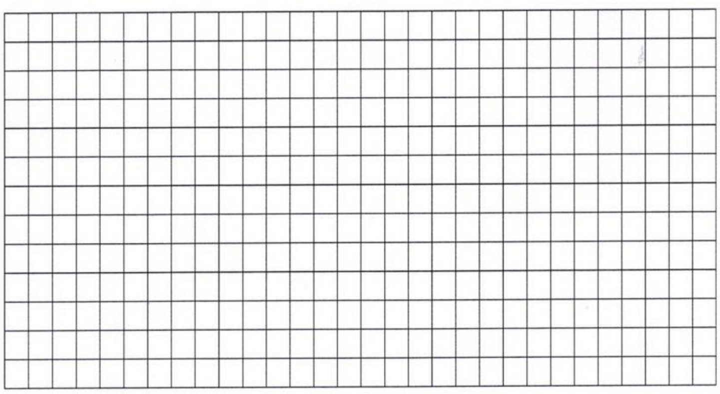
Δίνουμε ένα φύλλο χαρτί με διατυπωμένο το εξής πρόβλημα:

Ο ιδιοκτήτης των δύο αγροκτημάτων θέλει να τοποθετήσει ένα αυτόματο σύστημα με ποτίστρες σε ένα σημείο που να μπορεί να εξυπηρετεί τα άλογα και από τις δύο φάρμες του. Αν η απόσταση ανάμεσα στις δύο φάρμες είναι 20 μέτρα και τα άλογα από τη μία φάρμα είναι δεμένα με σχοινί μήκους 11 μέτρων ενώ αντίστοιχα τα άλογα από την άλλη φάρμα με σχοινί μήκους 14 μέτρα, που μπορεί να κατασκευάσει το συγκεκριμένο σύστημα που να εξυπηρετεί και τις δύο φάρμες του.

Αφού τα παιδιά διαβάσουν την εκφώνηση και βεβαιωθούν ότι έχουν κατανοήσει πλήρως την προβληματική κατάσταση, τους ζητάμε με τη βοήθεια των πινάκων και των δεδομένων που τους δόθηκαν να την αναπαραστήσουν εικαστικά. Ζωγραφίζοντας ή με τη βοήθεια κολάζ (εικόνες σχετικές έχουμε ζητήσει να έχουν μαζί τους) να σχεδιάσουν σε πίνακα όλο το πρόβλημα και να σηματοδοτήσουν τη πιθανή τοποθέτηση του αυτόματου ποτίσματος.

Φάση 5 (ατομικά – συλλογικά)

Πραγματοποιείται επικύρωση της λύσης του προβλήματος, καθώς οι μαθητές σε τετραγωνισμένο χαρτί που τους δίνεται, έρχονται να επιβεβαιώσουν αρχικά μόνοι τους τη ορθότητα του αποτελέσματος τους και στη συνέχεια με την τοποθέτηση ενός τετραγωνισμένου χαρτιού στον πίνακα σε κοινή θέα, γίνεται παρουσίαση των διαφορετικών διαδικασιών και κατάθεση επιχειρημάτων, με στόχο να καταλήξουν συλλογικά σε ένα τελικό αποτέλεσμα, που θα είναι και η σωστή λύση.



ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ανάλυση των διδακτικών δραστηριοτήτων με την αξιοποίηση των ΓΧΕ[2]

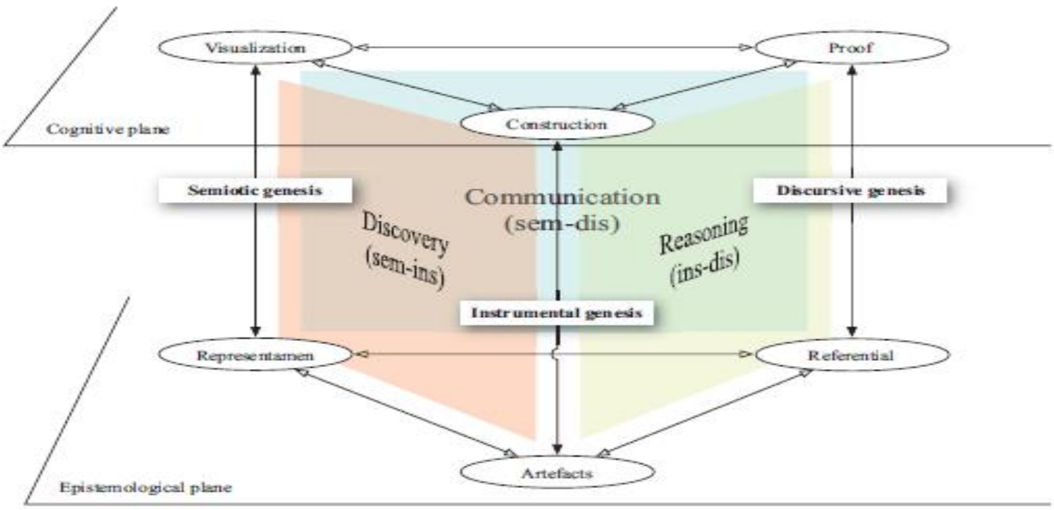
Η ανάλυση των δραστηριοτήτων βασίστηκε στους ΓΧΕ, οι οποίοι αποτέλεσαν το εργαλείο δόμησης της συγκεκριμένης διδασκαλίας στη γεωμετρία.

Παρακάτω γίνεται η παρουσίαση ενός διαγράμματος, το οποίο χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των διδακτικών δραστηριοτήτων του κάθε μαθήματος και δείχνει τις τρεις γενέσεις των ΓΧΕ και τις τρεις διαστάσεις της γεωμετρικής εργασίας που δημιουργούνται.

I. Τη σχηματική και σημειωτική γένεση η οποία μετατρέπει τα απτά αντικείμενα του χώρου σε λειτουργικά γεωμετρικά αντικείμενα.

II. Την εργαλειακή γένεση η οποία μετασχηματίζει τα τεχνουργήματα σε εργαλεία στα πλαίσια της διαδικασίας κατασκευής.

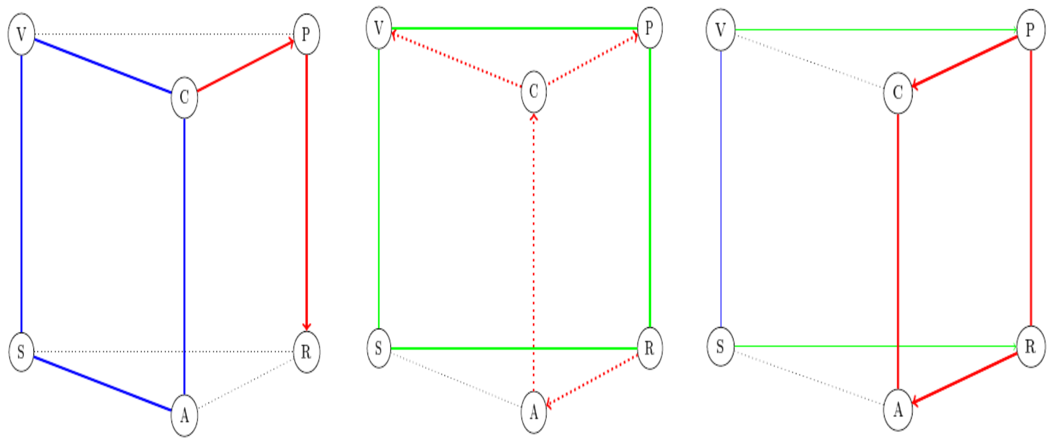
III. Την λεκτική και συλλογιστική γένεση η οποία συμβάλει στην παραγωγή μιας έγκυρης απόδειξης με την αξιοποίηση των κατάλληλων ορισμών και ιδιοτήτων και δίνει ένα νόημα στα αξιώματα κατά τη χρήση τους στη μαθηματική αιτιολόγηση.



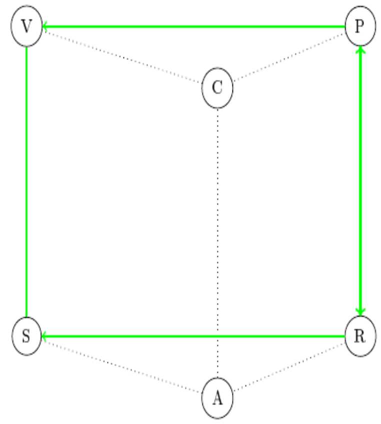
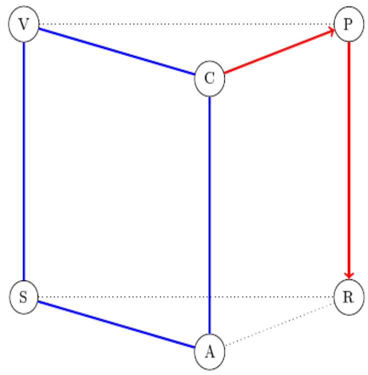
[2]Από Alain Kuzniak, Assia Nechache. Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. Konrad Krainer; Nada Vondrov´a. CERME 9 - Ninth Congress of the European ˇ Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.543- 549, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

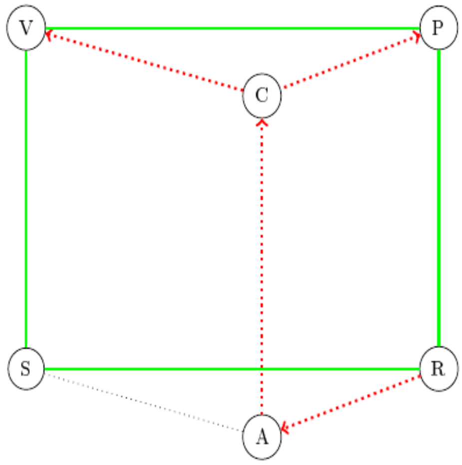
Η παρατήρηση των δεδομένων κατά τη γεωμετρική εργασία είναι ιδιαίτερα σημαντική για να περιγράψουμε και να οργανώσουμε τη διδασκαλία της γεωμετρίας συνολικά. Όπως αναφέρεται παραπάνω, οι δραστηριότητες είναι κατανεμημένες σε 5 μαθήματα. Κάθε μία από αυτές τις διδακτικές ενότητες έχει αναλυθεί χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ΓΧΕ.

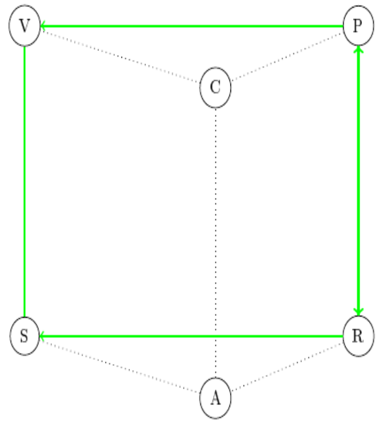
Ειδικότερα οι συμμετέχοντες σε αυτές τις διδασκαλίες μπήκαν στη διαδικασία αναγνώρισης των νέων και διαφορετικών διαστάσεων που εισήχθησαν στην εργασία –σχηματική, εργαλειακή, λεκτική- και των επιθυμητών επιπέδων με συνδυασμούς των παραπάνω, επίπεδο [σχηματικό-εργαλειακό], επίπεδο [σχηματικό-λεκτικό] και επίπεδο [εργαλειακό-λεκτικό]. Με τον τρόπο αυτό τονίζονται οι δυναμικές της γεωμετρικής εργασίας κατά τη διάρκεια της κάθε διδασκαλίας και επιτρέπεται ο χαρακτηρισμός εξολοκλήρου του κατάλληλου και προσωπικού ΓΧΕ.

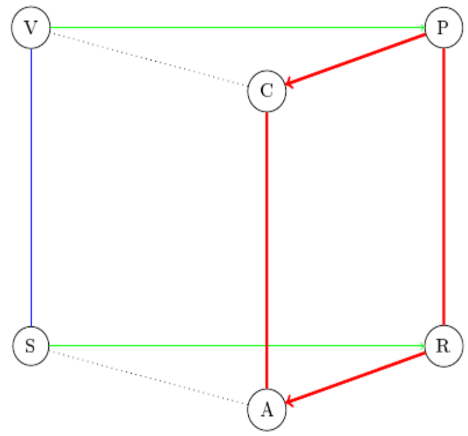


Τα διάφορα επίπεδα που αναγνωρίστηκαν κατά την διάρκεια των πέντε μαθημάτων της γεωμετρικής εργασίας, παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα και συνδέονται με ένα διάγραμμα ΓΧΕ.

Μαθήματα	Εισαγωγή στην Γεωμετρική εργασία	Διαγράμματα
Μάθημα 1	Η εργασία ξεκινάει στο επίπεδο (Σημειωτικό – Λεκτικό) με την παρουσίαση γεωμετρικών σχημάτων κύκλου σε εικονικές αναπαραστάσεις - πίνακες και έπειτα ακολουθεί διατύπωση και καταγραφεί κυκλικών σχημάτων μέσα από το πραγματικό τους περιβάλλοντα χώρο.	
Μάθημα 2	Στη συνέχεια της διδακτικής μας παρέμβασης, οι μαθητές με τη δραματοποίηση ενός λογοτεχνικού κειμένου, στο οποίο υπάρχει ενσωματωμένος ο γεωμετρικός όρος του κύκλου, οδηγούνται τελικά στην ανακάλυψη του εννοιολογικού ορισμού του κύκλου αλλά και στην ενεργοποίηση της κυριότερης ιδιότητας του, η οποία και θα αποτελέσει μια σημαντική επιπρόσθετη γνώση που θα προστεθεί στο θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς στους ΓΧΕ. Τα παιδιά στη συνέχεια βασιζόμενα στην χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου καθώς και στη γνώση του καινούριου γεωμετρικού όρου που ονομάζεται ακτίνα, καταφέρνουν με τη βοήθεια των οργάνων που διαθέτουν (χάρακας – διαβήτης) να σχεδιάσουν το δικό τους κύκλο. Η γεωμετρική εργασία εδώ κινείται στο επίπεδο (Σημειωτικό– Εργαλειακό).	

Μάθημα 3	Τα παιδιά εργάζονται πάνω σε μια σειρά σχεδιαστικών πινάκων με απεικονίσεις μεγάλιθων του Στόουνχεντζ και κάνοντας χρήση της καινούριας ιδιότητας του κύκλου και της γεωμετρικής ορολογίας που σχετίζεται με αυτόν, προσπαθούν να οδηγηθούν στην επίλυση ασκήσεων. Η εργασία είναι αρχικά σημειωτική αλλά στηριζόμενοι στην συνέχεια μόνο στο συλλογιστικό λόγο - της ίσης απόστασης των σημείων ενός κύκλου- για την απόδειξη και την επίλυση της παρουσιαζόμενης προβληματικής κατάστασης και χωρίς τη χρήση οργάνων, γίνεται λεκτική. Με το τέλος της εργασίας προτείνονται τεχνουργήματα επιλογής ως εργαλεία επαλήθευσης και όχι ως όργανα μέτρησης. Εδώ βρισκόμαστε στο επίπεδο (Σημειωτικό - Λεκτικό)	
Μάθημα 4	Στις δραστηριότητες του τέταρτου διδακτικού μαθήματος η όλη εργασία πραγματοποιείται με γεωμετρικά σχήματα που έχουν το χαρακτηριστικό του ελεύθερου σχεδίου. Οι πίνακες του Καντίνσκι έχουν πρωταγωνιστικό ρόλο, καθώς δεσπόζουν σε αυτούς τα γεωμετρικά σχήματα και βοηθούν τους μικρούς μαθητές να φτιάξουν τους δικούς πίνακες, πάνω στους οποίους αποτυπώνονται ελεύθερα γεωμετρικά σχέδια. Το πρόβλημα που τίθεται	

	πάνω στο ελεύθερο σχέδιο οδηγείται στη λύση του με τη σκέψη και παντελή έλλειψη σχεδιαστικών εργαλείων, καθώς το ελεύθερο σχέδιο που χρησιμοποιείται, θεωρείται μόνο ως συμβολικό σημείο. Η επικύρωση του αποτελέσματος πραγματοποιείται μέσω μιας συλλογιστικής κατάστασης, όπου οι μαθητές καταλήγουν στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων που σχετίζονται με τον κύκλο στηριζόμενοι στη χρήση της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου. Παύει λοιπόν ο κύκλος να θεωρείται ως ένα εμπειρικό αντικείμενο αντιληπτό (αισθητηριακά) και εργαλειακά συνδεόμενο σε μια ζωγραφιά, αλλά ως ένα θεωρητικό αντικείμενο βασιζόμενο στην χαρακτηριστική του ιδιότητα. Η συλλογιστική της επικύρωσης στην γεωμετρία I είναι κατάλληλη για το επίπεδο του δημοτικού, αλλά προετοιμάζει συγχρόνως και την είσοδο στην γεωμετρία II, που θα αποτελέσει την πρόκληση της δευτεροβάθμιας. Η γεωμετρική εργασία στο συγκεκριμένο σημείο είναι στο επίπεδο [Σημειωτικό – Λεκτικό].	

Μάθημα 5	Αφού προηγηθεί η μοντελοποίηση του προβλήματος, η δραστηριότητα οδηγεί σε μία κατασκευή. Η γεωμετρική εργασία λοιπόν τοποθετείται κύρια στο επίπεδο [Λεκτικό – Εργαλειακό] Όπου γίνεται χρήση της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου, που χρησιμοποιείται ως σύστημα αναφοράς και ως ένα εργαλείο με το οποίο επιτυγχάνεται η λύση και συγχρόνως εξασφαλίζεται η επικύρωση της.	

Η συγκεκριμένη γεωμετρική εργασία όπως προαναφέρθηκε είναι εστιασμένη στην εισαγωγή και ανάπτυξη της γενικής έννοιας του κύκλου ως ένα σύνολο όλων των σημείων σε ίση απόσταση από ένα δοθέν σημείο το κέντρο, καθώς και τη χρήση της ιδιότητας αυτής για την επίλυση προβλημάτων απόστασης να μπορέσει να τη συσχετίσει στην κατασκευή με διαβήτη. Το επιστημολογικό επίπεδο των Γ.Χ.Ε. μπορεί να περιγραφεί από την τριαδική οντότητα (κύκλος ως σχέδιο, διαβήτης, ίση απόσταση).
Η βάση της γεωμετρικής μας εργασίας είναι το τεχνούργημα - διαβήτης- η πολύτιμη χρήση του οποίου βοηθάει στην ανάδειξη της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου, η οποία θα οδηγήσει στην ορθή διατύπωση του εννοιολογικού ορισμού του συγκεκριμένου γεωμετρικού σχήματος αλλά και το σχεδιασμό του, γεγονός που θα εμπλουτίσει το σύνολο των θεωρητικών εργαλείων.
Στην συνέχεια διευκρινίζεται η πολύτιμη χρήση του διαβήτη ως τεχνούργημα για τη μέτρηση των μηκών των τμημάτων.
Έπειτα παραμερίζεται το τεχνούργημα και επιστρέφουμε με την επαναδιατύπωση της ιδιότητας και τονίζοντας την αποτελεσματικότητα της στην εύρεση των μηκών των τμημάτων και χωρίς τη χρήση γεωμετρικών εργαλείων αυτή τη φορά.
Έτσι καταλήγουμε στο τέλος της σειράς των διδασκαλιών να γίνει αντιληπτή η εισαγωγή μιας νέας χρήσης του κύκλου και του κυκλικού δίσκου ως εργαλεία (τεχνουργήματα) επίλυσης προβλημάτων απόστασης. Επιπρόσθετα όμως έχουμε και επιστροφή του τεχνουργήματος του διαβήτη στο νέο ρόλο του, ως το βασικό σχεδιαστικό εργαλείο του γεωμετρικού αντικειμένου που μελετάμε.
Σε όλη τη διδασκαλία της γεωμετρίας στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση ακολουθείται

το παράδειγμα της Γεωμετρίας Ι, γι' αυτό και η εργασία αυτή που μελετάμε παραμένει στην Φυσική Γεωμετρία όπου ο πραγματικός κόσμος αποτελεί την πηγή επικύρωσης της, αλλά συγχρόνως θέτει ξεκάθαρα και τις βάσεις για μία μελλοντική εργασία στην Γεωμετρία ΙΙ κατά τη διάρκεια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Ανάλυση των διδακτικών παρεμβάσεων

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται και παρουσιάζονται τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων και κατά τη διάρκεια των ατομικών συνεντεύξεων των μαθητών μετά την παρέμβαση.

Έγινε μια προσπάθεια ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων του δείγματος, που συγκεντρώθηκε σε κάθε φάση των μαθημάτων με απώτερο σκοπό τον εντοπισμό διαφορών στις γνωστικές συμπεριφορές στη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας, καθώς και παρουσίαση των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στις ατομικές συνεντεύξεις τους έχοντας έτσι μια συγκριτική εικόνα των παιδιών πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις.

Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνεται αφενός η γνωστική πρόοδος των μαθητών και αφετέρου γίνεται αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της διδακτικής παρέμβασης.

Κατά τη διάρκεια της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας που επιλέχτηκε στα μαθήματα τα οποία έγιναν, σχεδιάστηκαν δραστηριότητες που μπορούν να χαρακτηριστούν συμμετοχικές καθώς πραγματοποιούνται με συνεργατικό τρόπο, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοδηγητικός – συμβουλευτικός και η δράση του μειώνεται σταδιακά υπέρ της δράσης των μαθητών. Η γνώση δε παρουσιάζεται κατευθείαν στους μαθητές, αλλά έχει επιλεγεί από τον εκπαιδευτικό μια σειρά ερωτήσεων και συγκεκριμένων τρόπων συστηματικής παρακολούθησης του έργου της ομάδας, που καθοδηγούν τη διδασκαλία και παρέχουν άμεση ανατροφοδότηση σε αυτή.

Μέσα από τις επικοινωνιακές επιλογές του ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να δημιουργήσει ένα περιβάλλον κατάλληλο για τους μαθητές ενθαρρύνοντας με αυτό τον τρόπο τη συμμετοχή τους στο μάθημα. Η στάση αυτή του εκπαιδευτικού ακολουθεί την κοινωνικοπολιτισμική – επικοινωνιακή θεώρηση της γνώσης του Vygotskyη, σύμφωνα με την οποία ο άνθρωπος δεν αποτελεί αποξενωμένο υποκείμενο, αλλά σημαντικό κόμβο στον ιστό των κοινωνικών σχέσεων και οι πράξεις του καθορίζονται από τις επιμέρους συνθήκες τις οποίες βιώνει και έχουν σαν απώτερο στόχο την αλληλεπίδραση με το κοινωνικό του περιβάλλον. Επειδή λοιπόν και η μάθηση επιτελείται μέσα στο σχολείο που αποτελεί μία πολιτισμική κοινότητα, παρακινείται και αυτή από την ανάγκη για αλληλεπίδραση και επικοινωνία και προσαρμόζεται προς τη συνεχή βελτίωση της επικοινωνίας αυτής.

Ανάλυση 1ης Διδακτικής Παρέμβασης

Όπως έχει προαναφερθεί ο στόχος της πρώτης διδασκαλίας είναι ο εντοπισμός του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου μέσα από άλλα γεωμετρικά σχήματα, αλλά και η ανάπτυξη της αντιληπτικής ικανότητας για την αναγνώριση εκείνων των στοιχείων του κύκλου που τον διαφοροποιούν από τα υπόλοιπα σχήματα.

Από έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι οι αυθόρμητες έννοιες και ιδέες που έχουν οι μαθητές πριν από τη διδασκαλία των συναφών μαθηματικών εννοιών από το σχολείο, παίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση των τυπικών μαθηματικών εννοιών. Γι' αυτό το λόγο κυρίαρχο στοιχείο μιας αποδοτικής διδασκαλίας αποτελεί το στάδιο της «διάγνωσης» της προϋπάρχουσας γνώσης (Χασάπης, Γιαννακοπούλου, 2015)

Μέσα λοιπόν από την ανάλυση του 1ου μαγνητοφωνημένου μαθήματος φαίνεται καθαρά ότι η διδάσκουσα κάνοντας χρήση μιας σειράς ερωτήσεων και απαντήσεων, αλλά και με την εμπλοκή των ίδιων των μαθητών προσπαθεί να διερευνήσει όλα τα παραπάνω. Αρχικά προβάλλει μια σειρά από πίνακες όπου κυρίαρχο θέμα τους είναι τα γεωμετρικά σχήματα και ζητά από τους μαθητές να τα αναγνωρίσουν. (παράρτημα Β, πίνακες 1-8). Ένα απόσπασμα διαλόγου από την τάξη είναι το ακόλουθο:

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποια γεωμετρικά σχήματα μπορείτε να ανακαλύψετε μέσα από τους πίνακες που βλέπετε με αρίθμηση από το 1 μέχρι το 8;

ΜΑΘ$_6$: Τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο, ορθογώνιο

ΔΙΔΑΣΚ.: Μήπως κάποιο παιδί αναγνώρισε και κάποιο άλλο γεωμετρικό σχήμα;

ΜΑΘ$_7$: Υπάρχει ένα ημικύκλιο

ΔΙΔΑΣΚ.: Έχουμε διδαχθεί γεωμετρικό σχήμα με το όνομα ημικύκλιο;

ΜΑΘ$_7$: Όχι δεν έχουμε μάθει, είναι όμως μισός κύκλος

Παρατηρούμε ότι η Μαθητ.7 σε ερώτηση της εκπαιδευτικού αν αναγνωρίζουν και κάποιο άλλο γεωμετρικό σχήμα εκτός από αυτά που προαναφέρθηκαν, απαντάει πως εντόπισε και κάποιο ημικύκλιο. Διαπιστώνεται ότι ήταν μια πολύ γρήγορη απάντηση και χωρίς προφανώς να έχει ακούσει καλά την ερώτηση που προηγήθηκε, γιατί όπως φαίνεται αναγνωρίζει πολύ καλά τι σημαίνει ο όρος ημικύκλιο και οδηγείται άμεσα σε μια πιο σωστή τοποθέτηση.

Στη συνέχεια του διδακτικού επεισοδίου η εκπαιδευτικός καλεί κάποιους μαθητές ζητώντας τους να της δείξουν τα γεωμετρικά σχήματα που ήταν ορατά στους ίδιους και συγχρόνως να τα ονομάζουν. Με αυτό τον τρόπο υπάρχει ένα είδος λεκτικής- εικονικής σύνδεσης. Επίσης οι μαθητές αναγνωρίζουν εύκολα τα γεωμετρικά σχήματα και δεν τα μπερδεύουν με κάποια που μπορεί να μοιάζουν, αλλά τελικά δεν είναι ολοκληρωμένα σχήματα.

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποια γεωμετρικά σχήματα βλέπετε στον πίνακα 3;

ΜΑΘ$_{11}$: . Τρίγωνα, τετράγωνα

ΔΙΔΑΣΚ.: ; Ποια γεωμετρικά σχήματα βλέπετε στον πίνακα 6;

ΜΑΘ$_{8}$: Κύκλους, ορθογώνια, παραλληλόγραμμα

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποια σχήματα και πόσα αναγνωρίζετε στον πίνακα 4;

ΜΑΘ$_{7}$: Βλέπω 2 κύκλους, 5 τετράγωνα, 5 τρίγωνα και 3 ορθογώνια

ΔΙΔΑΣΚ.: Μπορεί αυτό το σχήμα να είναι ορθογώνιο; (Δείχνει κάποιο σχήμα σε έναν από τους πίνακες)

ΜΑΘ$_{1}$: . Φαίνεται σαν ορθογώνιο αλλά μπερδεύει η εικόνα του γιατί αν το δούμε πιο καθαρά η μία από τις πλευρές του είναι πλάγια και όχι κάθετη.

ΔΙΔΑΣΚ.: ; Αυτό θα το λέγαμε; (Δείχνει κάποιο άλλο σχήμα)

ΜΑΘ$_{2}$: Όχι γιατί δεν έχει ξεκάθαρες κάθετες πλευρές

ΔΙΔΑΣΚ.: Δείξτε μου ένα τετράγωνο

ΜΑΘ$_{3}$: Αυτό είναι ένα τετράγωνο (Δείχνει σωστά)

ΔΙΔΑΣΚ.: Μπορεί τώρα να μου δείξεις και ένα ορθογώνιο

ΜΑΘ$_{3}$: . Αυτό είναι ένα ορθογώνιο (Δείχνει σωστά ένα ορθογώνιο)

ΔΙΔΑΣΚ.: Είστε σίγουροι πως το σχήμα που έδειξε η συγκεκριμένη μαθήτρια είναι ορθογώνιο και όχι τετράγωνο;

ΜΑΘ$_{9}$.: Ναι γιατί οι δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες παράλληλες και το ίδιο και οι άλλες δύο και δεν είναι και οι τέσσερις ίσες όπως συμβαίνει στο τετράγωνο.

Στο συγκεκριμένο διαλογικό απόσπασμα επιπλέον φαίνεται ότι οι μαθητές καταφέρνουν όχι μόνο να ξεχωρίζουν γεωμετρικά σχήματα που εύκολα μπορεί να τους μπερδεύουν λόγο κάποιων κοινών τους ιδιοτήτων (τετράγωνο – ορθογώνιο), αλλά και να αιτιολογούν κάθε φορά την ονομασία του καθενός, βάση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων που γνωρίζουν.

Τελειώνοντας την φάση η εκπαιδευτικός ζητάει από τα παιδιά να καταγράψουν σε ένα πίνακα τα γεωμετρικά σχήματα που τους περιβάλλουν.

Στην δεύτερη φάση της ίδιας διδακτικής παρέμβασης γίνεται έκθεση κάποιων άλλων πινάκων, όπου κεντρικό θέμα τους είναι το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου (παράρτημα Β, πίνακες 9 – 14) και σε αυτό το σημείο τα παιδιά πρέπει να μπορέσουν να εντοπίσουν και να εξηγήσουν τι είναι αυτό που διαφοροποιεί τους συγκεκριμένους πίνακες από τους προηγούμενους

ΔΙΔΑΣΚ.: Τι διαφορετικό εντοπίζεται στους καινούριους πίνακες σε σχέση με τους παλιούς με αρίθμηση από το 9 μέχρι το 14;

ΜΑΘ$_3$: Υπάρχουν μόνο κύκλοι

ΔΙΔΑΣΚ.: Δηλαδή;

ΜΑΘ$_3$: . Κυριαρχεί ένα μόνο γεωμετρικό σχήμα, ο κύκλος

Τα παιδιά δεν δυσκολεύονται να εντοπίσουν την ύπαρξη του μοναδικού γεωμετρικού σχήματος στους καινούριους πίνακες, ενώ η εκπαιδευτικός με το τρόπο της ωθεί τους μαθητές να αντιπαραβάλλουν το σχήμα του κύκλου με τα άλλα σχήματα και να εντοπίσουν ποια είναι τα στοιχεία που τον κάνουν διαφορετικό.

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποιο είναι το χαρακτηριστικό που κάνει το σχήμα του κύκλου ξεχωριστό σε σύγκριση με άλλα σχήματα;

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποια στοιχεία μπορώ να διακρίνω στα άλλα σχήματα που δεν μπορώ να διακρίνω στον κύκλο;

ΜΑΘ$_8$: Γωνίες

ΜΑΘ$_3$: Γραμμές - Πλευρές

ΔΙΔΑΣΚ.: Ο κύκλος έχει πλευρές;

ΜΑΘ$_1$: Το Τρίγωνο έχει τρεις πλευρές, το τετράγωνο έχει τέσσερις πλευρές, ο κύκλος φαίνεται σαν να έχει μία μεγάλη στρογγυλή πλευρά

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως θα καθοδηγούσαμε κάποιον να σχηματίσει ένα τρίγωνο, χωρίς να το γνωρίζει και χωρίς να το έχει δει προηγουμένως;

ΜΑΘ$_{12}$: Να σχηματίσει ένα ευθύγραμμο τμήμα για βάση κι από τα άκρα αυτού του τμήματος να φέρει τις αντίστοιχες γωνίες με το μοιρογνωμόνιο και των οποίων τις μοίρες θα του τις δώσουμε και στη συνέχεια να προεκτείνει τις δύο ευθείες που θα έχει φέρει από τις γωνίες και σε κάποιο σημείο θα ενωθούν.

ΔΙΔΑΣΚ.: Με το ίδιο τρόπο τι βασικές πληροφορίες θα του δίναμε λεκτικά, ώστε να τον παροτρύνουμε να ζωγραφίσει το σχήμα του κύκλου;

ΜΑΘ$_2$: Μία γραμμή που δε θα σχηματίζει γωνίες, αλλά η αρχή θα ενώνεται με το τέλος της.

ΜΑΘ$_3$: Ζωγράφισε ένα σχήμα χωρίς γωνίες και πλευρές.

ΜΑΘ$_4$: Να φτιάξεις μια ενωμένη γραμμή, δηλαδή καμπύλη γραμμή που θα ξεκινάει από ένα σημείο και θα καταλήγει στο ίδιο που άρχισες.

ΜΑΘ$_9$.: Να κάνεις δύο ημικύκλια και να τα ενώσεις αφού αφαιρέσεις τις βάσεις τους.

ΜΑΘ$_5$: Μια στρογγυλή πλευρά που έχει την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος.

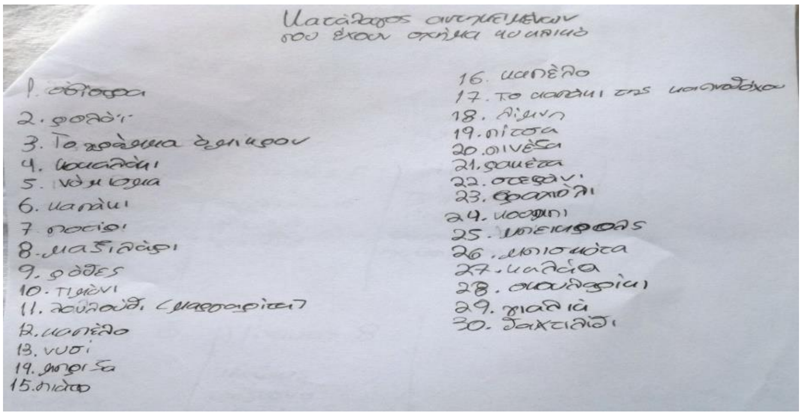
ΜΑΘ$_{10}$: Θα του έλεγα στο ίδιο σημείο που ξεκινάς μία γραμμή στο ίδιο σημείο πάλι να καταλήξεις.

ΔΙΔΑΣΚ.: Μπορώ να ξεκινήσω από κάπου και να τελειώσω πάλι στο ίδιο σημείο με μία γραμμή ακανόνιστου σχήματος.

ΜΑΘ$_{10}$: Να είναι κυκλική γραμμή.

Η κατασκευή ενός καταλόγου με αντικείμενα σε κυκλικό σχήμα μέσα από το ευρύτερο περιβάλλον τους είναι η συνέχεια της συγκεκριμένης δραστηριότητας, όπου τα παιδιά δουλεύοντας ανά ζεύγη σχηματίζουν μεγάλους καταλόγους απαριθμώντας πράγματα που έχουν στο οπτικό τους πεδίο και είναι κυκλικά ή που γνωρίζουν και ανασύρουν από την μνήμη τους.

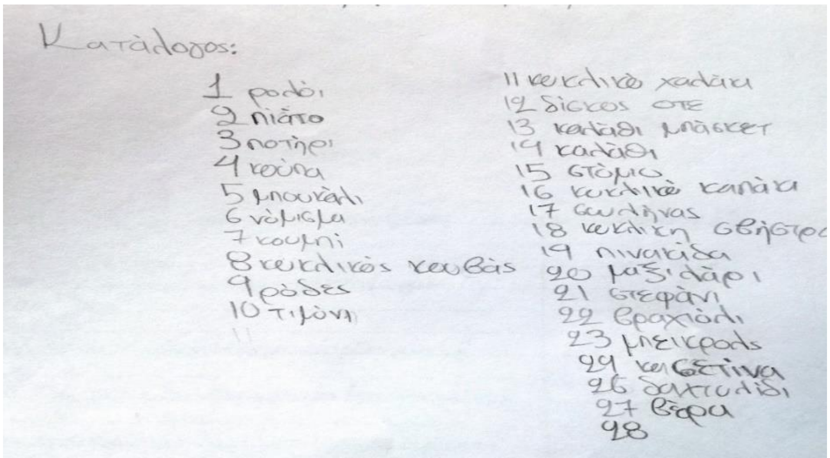
Πίνακας 1: Απαρίθμηση κυκλικών αντικειμένων



Κατάλογος αντικειμένων που έχουν σχήμα κυκλικό

1. [illegible]
2. [illegible]
3. Το [illegible]
4. [illegible]
5. νομίσματα
6. καπάκι
7. ποτήρι
8. μαξιλάρι
9. ρόδες
10. τιμόνι
11. λουλούδι (μαργαρίτα)
12. καπέλο
13. νησί
14. [illegible]
15. πιάτο
16. καπέλο
17. το καπάκι της [illegible]
18. λίμνη
19. πίτσα
20. [illegible]
21. [illegible]
22. στεφάνι
23. βραχιόλι
24. κουμπί
25. [illegible]
26. μπισκότα
27. καλάθια
28. σκουλαρίκια
29. γυαλιά
30. δαχτυλίδι

Πίνακας 2: Απαρίθμηση κυκλικών αντικειμένων



Κατάλογος:

1 ρολόι
2 πιάτο
3 ποτήρι
4 κούπα
5 μπουκάλι
6 νόμισμα
7 κουμπί
8 κυκλικός κουβάς
9 ρόδες
10 τιμόνι
11
11 κυκλικό χαλάκι
12 δίσκος ΟΤΕ
13 καλάθι μπάσκετ
14 καλάθι
15 στόμιο
16 κυκλικό καπάκι
17 σωλήνας
18 κυκλική σβήστρα
19 πινακίδα
20 μαξιλάρι
21 στεφάνι
22 βραχιόλι
23 [illegible]
24 κασετίνα
26 δαχτυλίδι
27 βέρα
28

Μέσα από τη διαλογική συζήτηση αλλά και από τα φύλλα εργασίας των παιδιών διαπιστώνεται ότι ο κάθε μαθητής με το δικό του τρόπο κατανοεί ότι ο κύκλος είναι ένα γεωμετρικό σχήμα με χαρακτηριστικά που τον διαφοροποιούν από τα άλλα σχήματα και που γίνεται εύκολα αντιληπτό σε αντικείμενα που πλαισιώνουν την καθημερινότητα τους.

Κατανοούν δηλαδή ότι υπάρχει παντελή έλλειψη γωνιών και πλευρών γι' αυτό και η μαθήτρια 3 συμβουλεύει να δημιουργήσουν ένα σχήμα χωρίς την ύπαρξη τους. Τους γίνεται επίσης εύκολα κατανοητό, ότι έχουν να κάνουν με μία μόνο γραμμή που είναι και η μοναδική πλευρά του κύκλου σε στρογγυλή μορφή, αλλά επειδή δεν έχουν ακόμη διδαχθεί και γνωρίσει την χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου, οι πληροφορίες που μπορούν να δώσουν για το υπάρχον σχήμα είναι μια γραμμή που θα έχει κοινή αρχή και τέλος και ακολουθεί κυκλική πορεία. Ένας μόνο μαθητής θεωρεί ότι θα μπορούσε κάποιος να κατασκευάσει δύο ημικύκλια και μετά να τα ενώσει αφαιρώντας τις βάσεις τους. Η οδηγία αυτή προκύπτει καθώς οι μαθητές γνωρίζουν ότι ένα ημικύκλιο είναι μισός κύκλος, άρα συμπεραίνει ότι θα ήταν πιο εύκολο αν έφτιαχνε δύο τέτοια σχήματα και μετά απλώς τα ένωνε, αλλά και σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να έχουν μάθει την κατασκευαστική πορεία που πρέπει να ακολουθηθεί αλλά και τη χρήση των κατάλληλων εργαλείων.

Τα παιδιά δουλεύουν και κινούνται σε ένα επίπεδο σημειωτικό όπου έρχονται σε επαφή με καλλιτεχνικές εικόνες – πίνακες, το περιεχόμενο των οποίων, τα γεωμετρικά σχήματα, είναι ικανοί να αναγνωρίζουν και να απομονώνουν μέσα από μια σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και να τα αναγνωρίζουν σε αντικείμενα της καθημερινότητας. Γνώσεις οι οποίες προϋπάρχουν στον αναφορικό ΓΧΕ τους και έρχονται να ενεργοποιηθούν ξανά. Η αναγνώριση όμως αυτή δεν είναι μόνο οπτική, αλλά φαίνεται ότι διαθέτουν και πρότερες γνώσεις πάνω στις ιδιότητες αυτών σχημάτων, γεγονός που τα καθιστά ικανά να αιτιολογήσουν και την ονομασία που δίνουν κάθε φορά στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα που τους παρουσιάζεται. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές κινητοποιούνται και οδηγούνται σε γεωμετρικές δραστηριότητες που είναι συνυφασμένες με πραγματικές και πρακτικές καταστάσεις, που κινούνται στα πλαίσια της GI και που είναι ο καταλληλότερος χώρος γεωμετρίας για την διερεύνηση της έννοιας του κύκλου από μαθητές της Ε΄ Δημοτικού. Η εργασία τους συνεχίζεται με τον εντοπισμό και αιτιολόγηση των στοιχείων που διαφοροποιεί τα υπόλοιπα γεωμετρικά σχήματα από αυτό του κύκλου. Η απαραίτητη μαθηματική διαδικασία παρατήρησης, σύγκρισης και εκφραστικής διατύπωσης των συμπερασμάτων αναφορικά με το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου, πραγματοποιείται στο λεκτικό επίπεδο του ΓΧΕ

Ανάλυση 2ης Διδακτικής Παρέμβασης

Στο διδακτικό επεισόδιο που ακολουθεί, γίνεται ανάγνωση από την εκπαιδευτικό μιας συγκεκριμένης σκηνής του λογοτεχνικού κειμένου «ο κύκλος με την κιμωλία» (παράρτημα Α) και αφού επιτευχθεί μέσω ερωτήσεων η κατανόηση του, η εκπαιδευτικός οργανώνει μέσα στην τάξη μία κατάσταση προβληματισμού, έρευνας και επικοινωνίας, με πρόθεση μέσα από τη διακριτική καθοδήγηση των μαθητών να μπορέσουν να έρθουν σε επαφή με την οπτική αναπαράσταση διακριτών μαθηματικών εννοιών.

ΔΙΔΑΣΚ.: Τι παρατηρείτε στην συγκεκριμένη σκηνή που διαδραματίζεται μέσα στο κείμενο;

$ΜΑΘ_6$: Μέσα στην συγκεκριμένη σκηνή εμφανίζονται και τα μαθηματικά.

$ΜΑΘ_7$: Γίνεται ένωση του κειμένου με τη Γεωμετρία.

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποιες λέξεις είναι αυτές που μας παραπέμπουν στην Γεωμετρία;

$ΜΑΘ_7$: Η λέξη κύκλος.

$ΜΑΘ_{7:}$ Αναφέρεται το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ.: Σε ποιο σημείο της σκηνής γίνεται σύνδεση του λογοτεχνικού κειμένου με αυτό της Γεωμετρίας;

$ΜΑΘ_6$: Εκεί που ο Δικαστής ζητάει να τοποθετήσουν το παιδί στο κέντρο ενός κύκλου και οι δύο μητέρες να καθίσουν σε δύο σημεία του κύκλου σε ίση απόσταση από το κέντρο, όπου βρίσκεται το παιδί αλλά η μία απέναντι από την άλλη.

Από το διάλογο που προηγήθηκε καταλαβαίνουμε ότι γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές ότι υπάρχει μία σύνδεση ενός είδους τέχνης με τα μαθηματικά και συγκεκριμένα γίνεται ενσωμάτωση γεωμετρικών όρων, όπως αυτός του κύκλου μέσα σε ένα λογοτεχνικό κείμενο και μάλιστα είναι και ορατό και το σημείο που πραγματοποιείται η σύνδεση αυτή.

Την κατανόηση αυτής της σύνδεσης έρχεται να εκμεταλλευτεί η διδάσκουσα προς όφελος των μαθητών της και παραθέτοντας σε αυτούς μια παλέτα υλικών (Λωρίδες υφάσματος, κομμάτια σχοινιού, χάρακας, διαβήτης, μαρκαδόροι, πλαστικά χρώματα, κιμωλίες, ψαλίδι) τους ζητάει να βιώσουν στην πραγματικότητα με τη βοήθεια των υλικών που έχουν στη διάθεση τους και εργαζόμενοι σε ομάδες, τη σκηνή όπου γίνεται η ένωση της τέχνης με τη γεωμετρία. Να αναπαραστήσουν δηλαδή τη σκηνή της διεκδίκησης του παιδιού από τις μητέρες, όπως αυτή αναπτύσσεται στο λογοτεχνικό κείμενο «ο κύκλος με την κιμωλία» (παράρτημα Α), η ανάγνωση του οποίου πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της δεύτερης διδακτικής παρέμβασης.

Στη συζήτηση που ακολουθεί, η διδάσκουσα ζητάει να μάθει με ποιο τρόπο εργάστηκε η κάθε ομάδα και τι υλικά χρησιμοποίησε.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πείτε μου με πιο τρόπο εργαστήκατε και τι υλικά χρησιμοποιήσατε;

Ομάδα1: Τα υλικά που χρησιμοποιήσαμε ήταν χάρακας και κιμωλίες. Αρχικά τοποθετήσαμε τα τρία παιδιά στις θέσεις που μας ζητήθηκαν, πήραμε ένα σημείο Α ως κέντρο και τοποθετήσαμε το πρώτο παιδί, στη συνέχεια μετρήσαμε με το χάρακα ή μετροταινία ίσες αποστάσεις από το σημείο Α και σημειώσαμε δύο θέσεις που βρισκόταν η μία απέναντι από την άλλη και τοποθετήσαμε τα δύο άλλα παιδιά. Σχετικά με τα καινούρια βήματα που έπρεπε να εκτελέσουν τα δύο παιδιά εργαστήκαμε με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως, δηλαδή μετρούσαμε πάλι με το χάρακα ίση απόσταση από το κέντρο και βάζαμε τα καινούρια σημάδια, που ήταν υποθετικά τα καινούρια βήματα που έπρεπε να εκτελέσουν οι δύο μητέρες και αυτό συνεχίστηκε μέχρι οι δύο μητέρες φτάσουν η μία στην αρχική θέση της άλλης. Τέλος ενώσαμε τα σημάδια όλα μεταξύ τους.

Ομάδα2: Χρησιμοποιήσαμε υλικά όπως πλαστικό χρώμα, διαβήτη, χάρακα και εργαστήκαμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που εργάστηκε και η πρώτη ομάδα, με τη διαφορά ότι εμείς κάναμε και χρήση του διαβήτη για να υπολογίσουμε τις ακριβείς θέσεις των παιδιών. Με τη βοήθεια του χάρακα υπολογίζαμε το άνοιγμα του διαβήτη που παρίστανε την απόσταση κάθε φορά της καινούριας θέσης από το σημείο Α, αλλά που το μέτρο της παρέμενε σταθερό σε κάθε μετακίνηση.

Ομάδα3: Εμείς διαλέξαμε κιμωλίες, νήμα, ψαλίδι, χάρακα. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις από το κέντρο Α, οι οποίες κάθε φορά θα ήταν διαφορετικές αλλά θα είχαν πάντα το ίδιο μέτρο, σκεφτήκαμε ως εξής. Μετρήσαμε με το χάρακα δύο ίσα κομμάτια νήματος, τα κόψαμε και στη συνέχεια δέσαμε αυτά τα κομμάτια με το παιδί που βρισκόταν σταθερά στο σημείο Α και με τις μητέρες που βρισκόταν στα σημεία Β και Γ, έτσι κάθε φορά που κάθε μητέρα έκανε και ένα καινούριο βήμα ξέραμε ότι η απόσταση από το δοθέν σημείο παρέμενε σταθερή και απλά βάζαμε σημαδάκια στα νέα βήματα.

Ομάδα4: Τα δικά μας υλικά ήταν παρόμοια με αυτά που επέλεξε η ομάδα 3 απλά αντί για νήμα χρησιμοποιήσαμε κορδέλες δύο διαφορετικών χρωμάτων, αλλά ο τρόπος που εργαστήκαμε ήταν ακριβώς ο ίδιος. Αυτό όμως που παρατηρήσαμε για την δική μας ομάδα όπως και για την ομάδα 3, ήταν ότι με την χρήση των συγκεκριμένων υλικών ξοδέψαμε περισσότερο χρόνο για να τελειώσουμε την εργασία μας.

Εικόνα 1: Παράσταση διαφορετικών σημείων με σταθερή απόσταση από ένα σημείο Α (κέντρο)

Εικόνα 2: Παράσταση διαφορετικών σημείων με σταθερή απόσταση από ένα σημείο Α (κέντρο)

Εικόνα 3: Παράσταση διαφορετικών σημείων με σταθερή απόσταση από ένα σημείο Α (κέντρο)

Εικόνα 4: Παράσταση διαφορετικών σημείων με σταθερή απόσταση από ένα σημείο Α (κέντρο)

Διαπιστώνεται ότι τα παιδιά δουλεύοντας ομαδικά και κάνοντας σωστή χρήση των εργαλείων που έχουν στη διάθεση τους, καταφέρνουν να αποδώσουν με ρεαλιστικό τρόπο την σκηνή τοποθετώντας στη σωστή θέση τους τους ήρωες της ιστορίας, αλλά και να την επεκτείνουν, βρίσκοντας επίσης τη σωστή θέση των καινούριων σημείων που τους ζητούνται στη συνέχεια.

Δύο από τις ομάδες κάνουν χρήση του χάρακα και του διαβήτη, του οποίου η χρήση στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι παρόμοια με αυτή του χάρακα και φτάνουν με έναν πιο ασφαλή τρόπο στο αποτέλεσμα τους. Οι άλλες δύο ομάδες δεν καταφεύγουν στα συνήθη όργανα, θα λέγαμε ότι σκέπτονται πιο πρακτικά και χρησιμοποιώντας παρεμφερή μέσα όπως νήματα και κορδέλες, φτάνουν και αυτές με τη σειρά τους στο επιθυμητό αποτέλεσμα σπαταλώντας όμως περισσότερο χρόνο.

Οι ερωτήσεις της διδάσκουσας συνεχίζονται θέλοντας να διερευνήσει τη γνωστική ικανότητα των μαθητών της αναφορικά με τη σχέση του σημείου Α, που θεωρείται το κέντρο, με όλα τα υπόλοιπα σημεία που σχεδιάστηκαν γύρω από αυτό.

ΔΙΔΑΣΚ.: Τι σχέση έχουν όλα αυτά τα σημεία που σχεδιάσατε με το σημείο Α;

ΜΑΘ$_6$: Έχουν απόσταση ενός μέτρου από το Α (αυτήν την απόσταση πήραν).

ΔΙΔΑΣΚ.: Δηλαδή;

ΜΑΘ$_7$: Έχουν ίση απόσταση από το σημείο Α.

ΔΙΔΑΣΚ.: Όταν ενώσατε όλα αυτά τα σημεία τι δημιουργήσατε;

ΜΑΘ$_3$: Έναν κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Άρα που βρίσκονται όλα αυτά τα σημεία που έχουν ίση απόσταση από το κέντρο Α;

ΜΑΘ$_{11}$: Γύρω – γύρω από το κέντρο Α.

ΜΑΘ$_4$: Το ένα δίπλα στο άλλο πάνω στον κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως το ονομάζουμε αυτό το γύρω – γύρω του κύκλου, σκεπτόμενοι άλλα γεωμετρικά σχήματα;

ΜΑΘ$_1$: Μήκος ή περιφέρεια του κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ.: Μετά από όλη αυτή την εργασία τι θα ονομάζαμε κύκλο;

ΜΑΘ$_2$: Πολλά ενωμένα σημαδάκια που έχουν την ίδια απόσταση από το σημείο Α που είναι το κέντρο του.

ΜΑΘ$_9$: Κύκλος είναι ένα σύνολο σημείων που βρίσκονται στην περιφέρεια του και ισαπέχουν από το κέντρο του.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα ας επαναλάβουμε μια ακόμη φορά τη χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου, που μας βοηθάει στην διατύπωση του ορισμού του ως γεωμετρικού σχήματος.

ΜΑΘ$_{12}$: Το σύνολο των σημείων που έχουν την ιδιότητα να απέχουν το ίδιο από το κέντρο του.

ΔΙΔΑΣΚ.: Αν φέρναμε μία ευθεία που να ένωνε το κέντρο του κύκλου με ένα από αυτά τα σημεία του κύκλου, τι θα συμβόλιζε αυτή η ευθεία;

ΜΑΘ$_7$: Την απόσταση του κέντρου από τον κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Τι είπαμε για αυτήν την απόσταση;

ΜΑΘ$_7$: Ότι είναι ίδια για όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ: Αν φέρναμε και άλλες τέτοιες ευθείες με τι θα σας έμοιαζε τώρα αυτός ο κύκλος καθώς και οι ευθείες που φέραμε σε αυτόν;

ΜΑΘ$_5$: Με τη ρόδα ενός ποδηλάτου.

ΔΙΔΑΣΚ.: Και πως λέγονται στην ρόδα του ποδηλάτου αυτές οι ευθείες;

ΜΑΘ$_5$: Ακτίνες.

ΔΙΔΑΣΚ.: Επομένως και στον κύκλο η ευθεία που ενώνει το κέντρο με κάποιο από τα σημεία της περιφέρειας του ονομάζεται ακτίνα.

ΔΙΔΑΣΚ.: Όλες οι ακτίνες στον ίδιο κύκλο τι είναι;

ΜΑΘ$_{10}$: Είναι ίσες μεταξύ τους.

Μέσα από τη διακριτική καθοδήγηση των μαθητών από την εκπαιδευτικό αλλά και εργαζόμενοι μέσω της βιωματικής ανακάλυψης κατάφεραν να κατακτήσουν το μαθησιακό στόχο. Δουλεύοντας ομαδικά σχεδίασαν με σωστό και ακριβή τρόπο το σύνολο των σημείων που είχαν όλα ένα κοινό χαρακτηριστικό, να βρίσκονται σε ίση απόσταση από ένα άλλο σημείο Α και ενώνοντας τα οδηγήθηκαν στο σχηματισμό ενός κύκλου. Άρα κατανόησαν ότι ο κύκλος δεν είναι παρά ένα σύνολο σημείων που βρίσκονται κατά μήκος της περιφέρειας του και πως καθένα από αυτά έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να ισαπέχει το ίδιο με τα άλλα από ένα άλλο σημείο Α, το οποίο είναι το κέντρο του.

Επίσης πρόσεξαν πως αν ενώναμε όλα αυτά τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον κύκλο με ευθείες με το κέντρο του, που είναι το σημείο Α στη υπάρχουσα κατάσταση, θα παρουσιάζονταν μπροστά τους μια ρόδα ποδηλάτου με πάρα πολλές ακτίνες. Έχοντας λοιπόν κατακτήσει την ιδιότητα της ίσης απόστασης όλων των σημείων πάνω σε ένα κύκλο με αυτό του κέντρου του, κατανοούν πως και στο δικό τους κύκλο οι αντίστοιχες ευθείες που ενώνουν τα σημεία του με το δικό του κέντρο, ονομάζονται ακτίνες.

Στην επόμενη φάση της εργασίας τους τα παιδιά καλούνται να βρουν άλλες 10 καινούριες θέσεις, τις οποίες θα σημειώσουν με καινούρια χρώματα της αρεσκείας τους και θα έχουν όλες την ίδια απόσταση από το κέντρο Α.

Με τον τρόπο αυτό γίνεται ένα είδος αξιολόγησης της κατάκτησης της νέας γεωμετρικής έννοιας του κύκλου, καθώς και της χαρακτηριστικής του ιδιότητας από τους μαθητές.

ΔΙΔΑΣΚ.: Που θα βρίσκονται τα καινούρια σημεία που σχεδιάστηκαν;

$ΜΑΘ_6$: Σε ίση απόσταση από το κέντρο

ΔΙΔΑΣΚ.: Ναι αλλά που ανήκουν;

$ΜΑΘ_2$: Πάνω στην περίμετρο

ΔΙΔΑΣΚ: Δηλαδή;

$ΜΑΘ_2$: Είναι σημεία πάνω στον κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Και γιατί βρίσκονται πάνω στον κύκλο;

$ΜΑΘ_3$: Γιατί τα πήραμε να έχουν ίση απόσταση από το κέντρο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Και εμείς τι ονομάσαμε κύκλο;

$ΜΑΘ_4$: Είναι το σύνολο των σημείων που έχουν την ιδιότητα να έχουν ίση απόσταση από το σημείο που είναι το κέντρο του, επομένως και τα νέα σημεία είναι σημεία του ίδιου κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ.: Επίσης για να ξαναθυμηθούμε, τι ονομάζουμε ακτίνα του κύκλου;

$ΜΑΘ_6$: Είναι το σημείο στο οποίο ενώνεται το κέντρο του κύκλου με την περίμετρο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Είναι σημείο;

$ΜΑΘ_6$: Είναι μία γραμμή ή καλύτερα μια ευθεία που ενώνει το κέντρο με τα σημεία πάνω στον κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Και όλες αυτές τι είναι μέσα σε έναν κύκλο;

$ΜΑΘ_6$: Είναι ίσες

ΔΙΔΑΣΚ.: Κάνατε χρήση οργάνων για να σχεδιάσετε τα νέα σημεία σας;

$ΜΑΘ_{11}$: Όχι γιατί γνωρίζαμε που ακριβώς έπρεπε να σημειώσουμε τις νέες θέσεις που μας ζητήθηκαν.

Είναι άμεσα ορατό ότι τα παιδιά στη φάση αυτή βρίσκουν την νέα θέση των σημείων με πολύ πιο γρήγορο και εύκολο τρόπο, αφού βλέπουμε πως έχουν κατανοήσει πλήρως ότι κάθε νέο σημείο που θα έχει ίση απόσταση από το κέντρο Α, δεν μπορεί να ανήκει πουθενά αλλού παρά μονάχα πάνω στην περιφέρεια του δηλαδή πάνω σε αυτόν και μάλιστα χωρίς τη χρήση των οργάνων αυτή τη φορά, απλά και μόνο θέτοντας με το χρώμα που έχουν επιλέξει τις νέες θέσεις στον ήδη σχηματισμένο από την αρχή κύκλο. Επιπλέον γίνεται και μία υπενθύμιση του όρου ακτίνα, προκειμένου να επιβεβαιωθεί η κατανόηση και κατάκτηση της.

Θέλοντας να βοηθήσει τα παιδία να συνεχίσουν να κινούνται μέσα στο ερευνητικό πεδίο του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου, με στόχο να ανακαλύψουν και άλλα στοιχεία που τον αφορούν, η εκπαιδευτικός τους ωθεί να βρουν πέντε σημεία τα οποία αυτή τη φορά θα βρίσκονται από το σημείο Α σε μεγαλύτερη απόσταση από αυτή που βρίσκονταν τα προηγούμενα σημεία και μετά άλλα πέντε σημεία με μικρότερο μήκος τώρα από το κέντρο Α από όλα τα υπόλοιπα.

ΔΙΔΑΣΚ.: Που θα λέγαμε ότι βρίσκονται τα σημεία με μεγαλύτερη και μικρότερη απόσταση από το κέντρο Α από ότι τα προηγούμενα σημεία;

$ΜΑΘ_5$: Βρίσκονται αντίστοιχα έξω από το κύκλο και μέσα σε αυτόν.

ΔΙΔΑΣΚ.: Είπαμε ότι όταν αναφερόμαστε στον κύκλο εννοούμε το σύνολο των σημείων του που βρίσκονται σε όλο το μήκος του. Το σύνολο των σημείων με απόσταση μικρότερη από το Α είπαμε επίσης ότι θα βρίσκονται μέσα σε αυτόν. Ο κύκλος λοιπόν συμπεριλαμβανομένης και της επιφάνειας που καταλαμβάνουν τα σημεία που βρίσκονται μέσα σε αυτόν, ονομάζεται κυκλικός δίσκος.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα που θα λέμε ότι βρίσκονται τώρα σημεία με απόσταση μικρότερη ή μεγαλύτερη από το κέντρο Α του κύκλου;

$ΜΑΘ_5$: Θα λέμε ότι βρίσκονται μέσα στον κυκλικό δίσκο ή έξω από αυτόν.

ΔΙΔΑΣΚ: Σας δυσκόλεψε καθόλου η εύρεση των σημείων αυτών;

$ΜΑΘ_8$: Ήταν αρκετά εύκολη η εύρεση τους.

ΔΙΔΑΣΚ.: Αν ενώσουμε τώρα τα σημεία που βρίσκονται έξω από τον κυκλικό δίσκο τι θα πάρουμε;

$ΜΑΘ_7$: Θα σχηματιστεί ένα νέος κύκλος που θα έχει το ίδιο κέντρο με τον προηγούμενο αλλά θα είναι μεγαλύτερος.

ΔΙΔΑΣΚ.: Από πού συμπεραίνουμε ότι θα είναι μεγαλύτερος. Μόνο επειδή το βλέπουμε;

$ΜΑΘ_7$: Επειδή έχει μεγαλύτερη επιφάνεια.

$ΜΑΘ_6$: Επειδή η ακτίνα του είναι μεγαλύτερη, μιας και η απόσταση των σημείων του από το κέντρο Α είναι μεγαλύτερη από την απόσταση των σημείων του αρχικού κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ.: Ενώ αν ενώσουμε τα σημεία που βρίσκονται μέσα στον κυκλικό δίσκο τι θα πάρουμε;

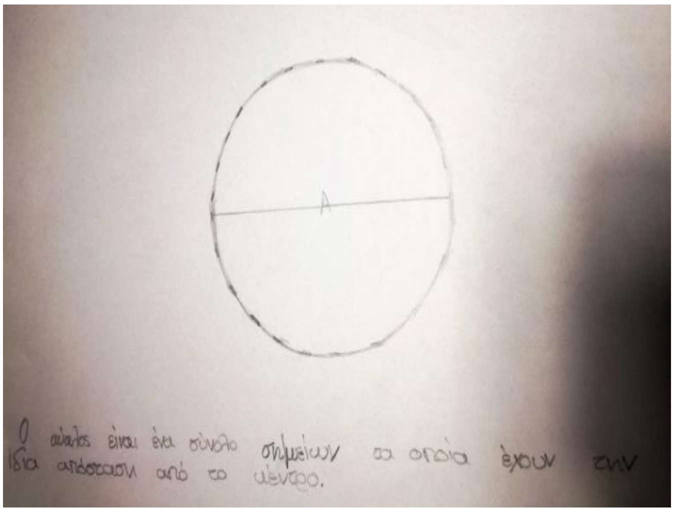
$ΜΑΘ_3$: Θα φτιάξουμε ένα τρίτο κύκλο πάλι με το ίδιο κέντρο με τους δύο προηγούμενους αλλά με μικρότερη ακτίνα από αυτούς.

Οι μαθητές επειδή γνωρίζουν πλέον ότι ο κύκλος που έχουν σχεδιάσει αρχικά απαρτίζεται από ένα σύνολο σημείων που έχουν μια σταθερή και ίση απόσταση από το κέντρο Α, δηλαδή είναι ένας κύκλος με μια συγκεκριμένη ακτίνα και επειδή φαίνεται επίσης ότι κατανοούν το γεγονός ότι η απόσταση σημείου του κύκλου από το κέντρο ταυτίζεται με τον όρο ακτίνα, μπορούν με σχετικά μεγάλη ευκολία να οδηγηθούν στο συμπέρασμα, ότι οποιαδήποτε άλλα σημεία με μεγαλύτερη ή μικρότερη απόσταση από το δοθέν κέντρο, συνεπώς με μεγαλύτερη ή μικρότερη ακτίνα αντίστοιχα, δεν θα αποτελούν σημεία του ίδιου κύκλου, αλλά σημεία διαφορετικών κύκλων που μπορεί να έχουν το ίδιο κέντρο αλλά διαφορετικές ακτίνες.

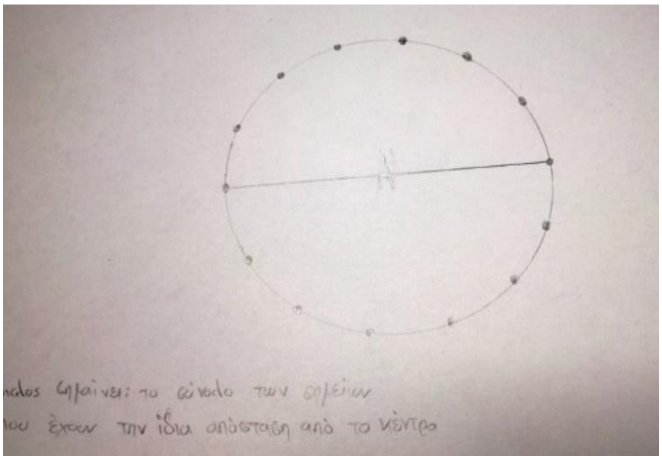
Επιπρόσθετα η διδάσκουσα τους κάνει γνωστή την ταυτότητα του κυκλικού δίσκου, δίνοντας τους να καταλάβουν ότι όταν αναφερόμαστε στον κύκλο εννοούμε το σύνολο των σημείων του σε όλο το μήκος του, ενώ όταν αναφερόμαστε στον κυκλικό δίσκο, συμπεριλαμβάνουμε και το χώρο ή αλλιώς την επιφάνεια που καταλαμβάνει. Αποκτώντας λοιπόν και τη γνώση του κυκλικού δίσκου είναι σε θέση να ξεχωρίζουν πότε κάποια σημεία βρίσκονται εντός και πότε εκτός από αυτόν.

Στη συνέχεια μοιράζονται στους μαθητές κενά φύλλα, με σκοπό δουλεύοντας ατομικά να αποδώσουν σχεδιαστικά το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου.

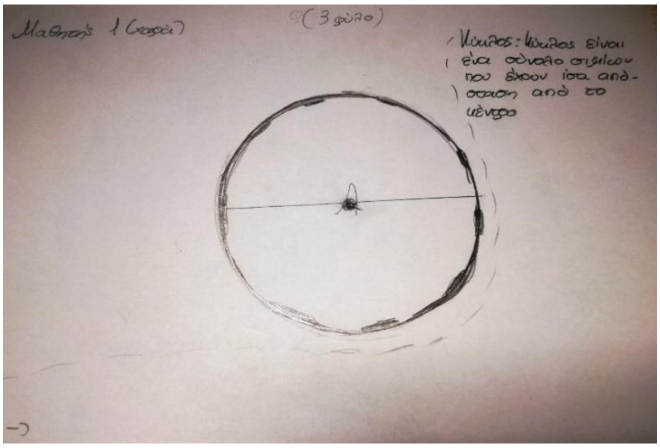
Σχέδιο 1: Κατασκευαστική απόδοση του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου



Σχέδιο 2: Κατασκευαστική απόδοση του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου



Σχέδιο 3: Κατασκευαστική απόδοση του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου



ΔΙΔΑΣΚ: Ποιο είναι το σκεπτικό σας για το σχεδιασμό του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου;

$ΜΑΘ_4$: Η αρχική κίνηση μου ήταν να πάρω ένα σημείο το οποίο και θεώρησα ως κέντρο του κύκλου. Από το κέντρο έφερα μία ευθεία με το χάρακα πέντε εκατοστών, την ακτίνα του. Στο τέλος της έβαλα ένα σημαδάκι. Στη συνέχεια έφερα αρκετές τέτοιες ευθείες ίδιου μήκους σημειώνοντας και τα αντίστοιχα σημεία κάθε φορά. Το αποτέλεσμα μετά την ένωση όλων αυτών των σημείων, ήταν η δημιουργία ενός κύκλου

$ΜΑΘ_9$: Πήρα ένα σημείο Α για κέντρο, χρησιμοποιώντας το άνοιγμα του διαβήτη στα πέντε εκατοστά το οποίο μέτρησα με το χάρακα, κράτησα το ένα άκρο του σταθερό στο κέντρο και με το άλλο περιστρέφοντας τον γύρω - γύρω έβαζα μικρά σημαδάκια. Στο τέλος τα ένωσα διαγράφοντας έναν κύκλο.

$ΜΑΘ_2$: Εργάστηκα όπως ακριβώς και ο προηγούμενος μαθητής, με τη διαφορά πως εγώ δεν έβαζα σημεία, αλλά περιστρέφοντας το διαβήτη διέγραψα κατευθείαν τον κύκλο.

Ο μεγαλύτερος αριθμός των παιδιών κάνει χρήση του χάρακα και γνωρίζοντας πως η απόσταση από το κέντρο του κύκλου με οποιοδήποτε σημείο πάνω σε αυτόν είναι η ακτίνα του και πως όλες οι ακτίνες στον ίδιο κύκλο είναι ίσες, καταφέρνουν φέρνοντας αρκετές τέτοιες ευθείες και βάζοντας ίχνη στο τέλος των μηκών τους, να διαγράψουν τον κύκλο τους ενώνοντας στο τέλος όλα αυτά τα ίχνη μεταξύ τους.

Κάποιοι άλλοι μαθητές χρησιμοποιούν το διαβήτη όχι σαν το όργανο σχεδιασμού του κύκλου, αλλά με τη βοήθεια του ανοίγματος του το οποίο αναπαριστά το μήκος της ακτίνας του σχήματος που θέλουν να φτιάξουν, κρατώντας σταθερό το ένα άκρο στο κέντρο και περιστρέφοντας το άλλο άκρο του, βάζουν σημάδια σε μικρές αποστάσεις, τα οποία τελικά ενώνουν φτάνοντας με αυτό τον τρόπο στην ολοκλήρωση του έργου τους.

Τα παιδιά φαίνεται ότι βασίζονται στην χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου, καθώς και στη γνώση του καινούριου γεωμετρικού όρου που ονομάζεται ακτίνα και καταφέρνουν με τη βοήθεια των οργάνων που διαθέτουν να σχεδιάσουν το δικό τους κύκλο καθένας ξεχωριστά.

Στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση η ενεργοποίηση των μαθητών γίνεται στο σημειωτικό επίπεδο του ΓΧΕ με την κατασκευή σημείων σε ίση απόσταση από ένα δοθέν σημείο και ακολουθεί κατασκευή σημείων σε απόσταση μεγαλύτερη, αλλά και μικρότερη από το δοθέν σημείο σε σχέση με τα αρχικά σημεία. Η όλη αυτή γεωμετρική δράση στο σημειωτικό επίπεδο συντελείται με τη δραματοποίηση ενός λογοτεχνικού κειμένου, όπου τα παιδιά καλούνται να μετατρέψουν την κατάσταση που περιγράφει το κείμενο σε γεωμετρικό πρόβλημα δηλαδή σε μια διαδικασία μαθηματικοποίησης, η οποία συμβάλλει πιο εύκολα στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών που πρέπει να διδαχθούν και που ευνοεί την εργασία στα πλαίσια της GI και τελικά οδηγεί στο τελικό στόχο την ενεργοποίηση και την ανακάλυψη της ιδιότητας και των στοιχείων που είναι απαραίτητα για τη διαμόρφωση του ΓΧΕ: τι είναι κύκλος, ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα που ορίζει το σχήμα του κύκλου, πως αναγνωρίζουμε την ακτίνα του κύκλου αλλά και του ορισμού του κυκλικού δίσκου. Η χρήση της καινούριας αυτής ιδιότητας αλλά και οργάνων όπως αυτή του χάρακα και του διαβήτη για την κατασκευή και σχεδιασμό του κύκλου τους βάζει να κινηθούν στο τέλος και στο εργαλειακό επίπεδο του ΓΧΕ

Ανάλυση 3ης Διδακτικής Παρέμβασης

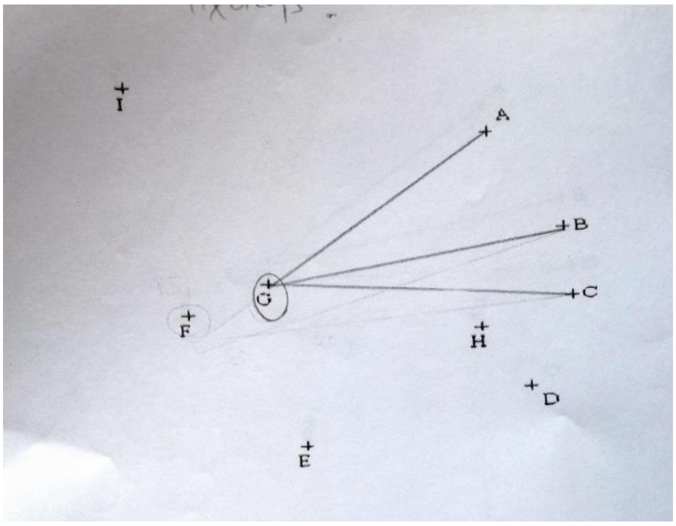
Πριν η διδάσκουσα παρουσιάσει τις δραστηριότητες την επόμενης διδακτικής παρέμβασης θεωρεί σκόπιμο να γίνει επαναδιατύπωση της νέας μαθηματικής γνώσης, ορισμός κύκλου – χαρακτηριστική ιδιότητα που ορίζει το συγκεκριμένο σχήμα, καθώς και υπενθύμιση των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν, συγχρόνως όμως προχωράει και ένα βήμα παρακάτω επιβεβαιώνοντας τη χρήση του διαβήτη, ως κατεξοχήν εργαλείου για την κατασκευή των κύκλων, αφήνοντας στην άκρη άλλα υλικά που μπορεί να είχαν χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα.

Το τρίτο διδακτικό επεισόδιο έχει σαν αφετηρία την προβολή δύο πινάκων στους οποίους απεικονίζεται το μεγαλιθικό μνημείο του Στόουνχεντζ (παράρτημα Β, πίνακες 15-16), όπως και ανάγνωση κάποιων πληροφοριών σχετικά με το συγκεκριμένο αυτό αρχαιολογικό έργο.

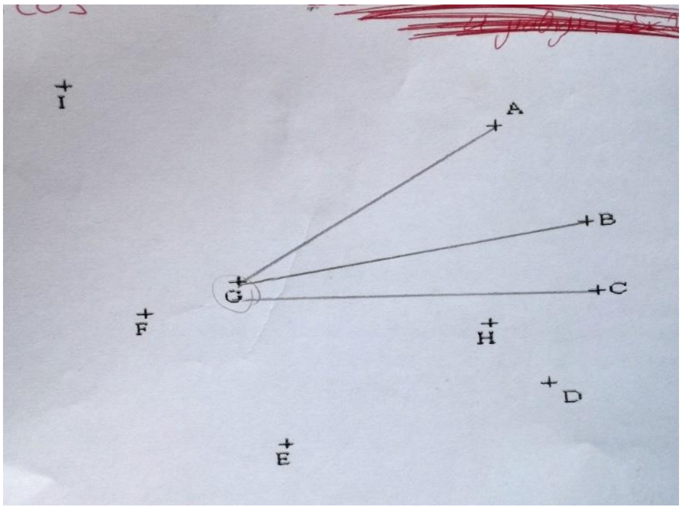
Η εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές της να υλοποιήσουν την εργασία που είναι αποτυπωμένη στα ατομικά φύλλα εργασίας (παράρτημα Β, 1ο φύλλο εργασίας). Στα συγκεκριμένα φύλλα απεικονίζονται διάσπαρτα κάποια σημεία, στα οποία είναι τοποθετημένοι κάποιοι μεγάλιθοι. Τρεις μόνο από αυτούς στα σημεία A, B, C ανήκουν πάνω στον ίδιο κύκλο. Ζητάει από τους μαθητές να βρουν ποιο από τα υπόλοιπα στοιχεία μπορεί να είναι το κέντρο του κύκλου που έχει για σημεία του τα προαναφερόμενα.

Κατά τη διάρκεια της εργασίας τους οι μαθητές χρησιμοποιούν το κατάλληλο υλικό (Σε αυτήν την εργασία γίνεται χρήση μόνο του χάρακα ενώ ο διαβήτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν όργανο επιβεβαίωσης της σωστής απάντησης) που τους έχει διαθέσει η διδάσκουσα και μέσα στον απαιτούμενο χρόνο προσπαθούν να βρουν το σημείο που είναι και η λύση του προβλήματος.

Σχέδιο 4: Εύρεση κέντρου κύκλου



Σχέδιο 5: Εύρεση κέντρου κύκλου



ΔΙΔΑΣΚ: Μας δίνονται τρία σημεία τα οποία σύμφωνα με τα δεδομένα είναι σημεία του ίδιου κύκλου, βρίσκονται δηλαδή πάνω σε αυτόν. Επομένως από αυτά που γνωρίζουμε μέχρι τώρα τι θα είναι η απόσταση αυτών των σημείων από το ζητούμενο κέντρο;

$ΜΑΘ_7$: θα είναι ίδια για όλα τα σημεία.

ΔΙΔΑΣΚ: Πως ονομάζουμε είπαμε αυτήν την απόσταση;

$ΜΑΘ_7$: Ακτίνα.

ΔΙΔΑΣΚ: Με ποιο από τα όργανα που είχατε στην διάθεση σας εργαστήκατε;

$ΜΑΘ_7$: Το βαθμονομημένο χάρακα.

ΔΙΔΑΣΚ: Για να είναι το σημείο που θα βρείτε το κέντρο του κύκλου με σημεία του τα A, B, C τι πρέπει να ισχύει;

$ΜΑΘ_4$: Θα πρέπει τα σημεία αυτά να έχουν την ίδια απόσταση από το ένα και μοναδικό σημείο που θα είναι το κέντρο του.

ΔΙΔΑΣΚ: Τι διαδικασία ακολουθήσατε;

$ΜΑΘ_6$: Πήρα το χάρακα και μέτρησα ποιο σημείο απείχε σε μήκος το ίδιο από τα ζητούμενα σημεία.

ΔΙΔΑΣΚ: Για ποιο λόγο ενέργησες με αυτό τον τρόπο;

$ΜΑΘ_6$: Γιατί μάθαμε ότι σύμφωνα με την ιδιότητα του κύκλου, το σύνολο των σημείων ενός κύκλου έχουν την ίδια απόσταση από το κέντρο του

ΔΙΔΑΣΚ: Μαθητή 2 αντιμετώπισες αρχικά κάποιο πρόβλημα;

$ΜΑΘ_2$: Ναι γιατί νόμιζα ότι όλα τα σημεία πρέπει να έχουν το ίδιο κέντρο.

ΔΙΔΑΣΚ: Αυτό διαπίστωσες ότι θα μπορούσε να είναι εφικτό;

$ΜΑΘ_2$: Όχι γιατί όλα μαζί δεν μπορούσαν να έχουν την ίδια απόσταση από ένα σημείο, άρα να ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

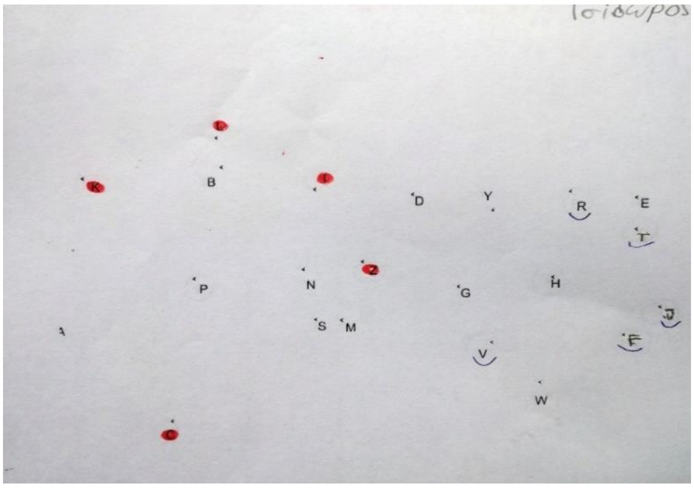
ΔΙΔΑΣΚ: Τι σε οδήγησε σε αυτό το λάθος;

$ΜΑΘ_2$: Δεν έδωσα προσοχή στην εκφώνηση της άσκησης.

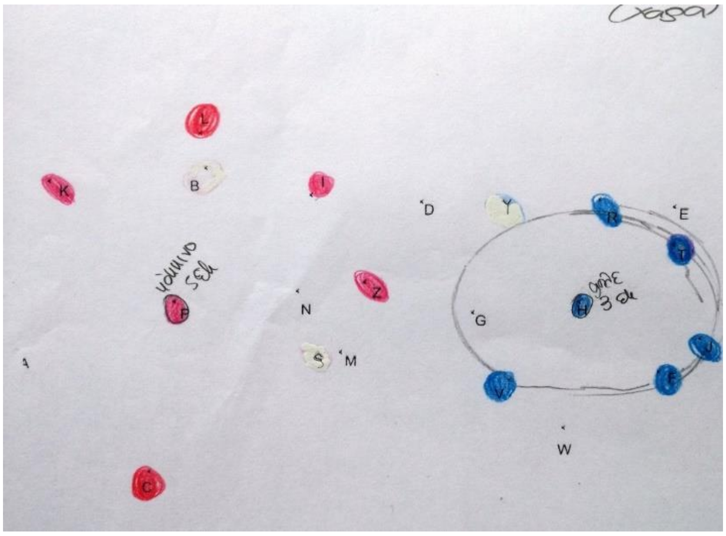
Εξετάζοντας τις εργασίες των μαθητών και μέσα από τη διαλογική συζήτηση προκύπτει ότι οι μαθητές δεν έγιναν απλώς γνώστες της γεωμετρικής ορολογίας που σχετίζεται με τον κύκλο, μιας νέας γνώσης η οποία όπως τόσες άλλες κάποια στιγμή ειπώθηκε από τον εκπαιδευτικό ενώ μετά από λίγο είχε κιόλας σβηστεί από την μνήμη τους, αλλά μέσω του τρόπου που εργάζονται η συγκεκριμένη γνώση παρέμεινε αναλλοίωτη και ανασύρθηκε από τη μνήμη τους και στηριζόμενοι σε αυτήν έφτασαν στην επιθυμητή λύση. Έχουν δηλαδή κατανοήσει πλήρως ότι σημεία που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο έχουν ίση απόσταση από το κέντρο του και αυτό φαίνεται καθώς παίρνουν το χάρακα ή το διαβήτη τους και με τη βοήθεια τους ανακαλύπτουν το σημείο του κέντρου, αλλά συγχρόνως ανακαλύπτουν και πόσο λειτουργική και χρήσιμη μπορεί να είναι η χαρακτηριστική αυτή ιδιότητα που ορίζει τον κύκλο, αφού βάση αυτής μπορούν να δίνουν εύκολα απαντήσεις σε ερωτήσει και λύσεις σε προβλήματα που σχετίζονται με τον γεωμετρικό σχήμα του κύκλου. Αδυναμία στην εύρεση του αποτελέσματος οφείλονταν σε έλλειψη και μόνο πραγματικής προσοχής των ζητουμένων.

Δίδεται καινούριο φύλλο εργασίας (παράρτημα Β, $2^{ο}$ φύλλο εργασίας). Η άσκηση που αποκαλύπτεται μπροστά στα μάτια των παιδιών δείχνει και πάλι διάσπαρτα σημεία πιο ομαδοποιημένα όμως αυτή τη φορά, όπου σε κάθε σημείο που απεικονίζεται αντιστοιχεί και πάλι ένας μεγάλιθος και τους καλεί να χρωματίσουν με κόκκινο χρώμα όλα εκείνα τα σημεία που βρίσκονται 5 εκατοστά από το σημείο P, καθώς και με μπλε όλα εκείνα που βρίσκονται σε απόσταση αντίστοιχα 3 εκατοστά από το σημείο H.

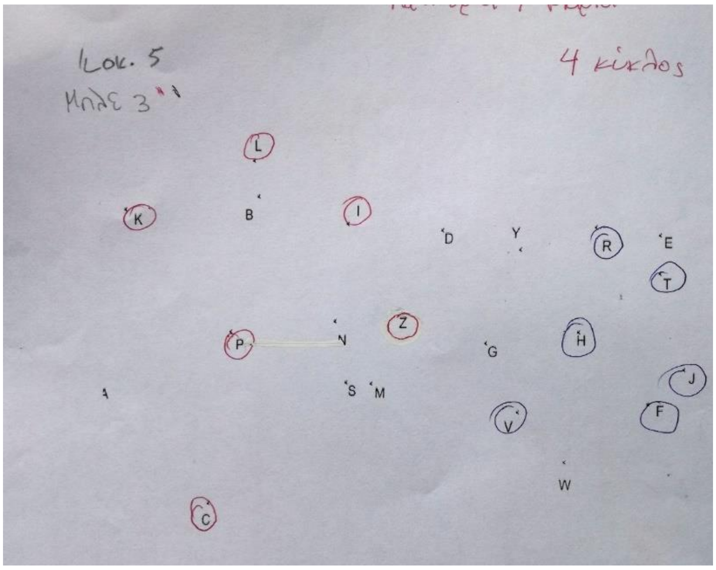
Σχέδιο 6: Εύρεση σημείων που ανήκουν σε δύο κύκλους



Σχέδιο 7: Εύρεση σημείων που ανήκουν σε δύο κύκλους



Σχέδιο 8: Εύρεση σημείων που ανήκουν σε δύο κύκλους



ΔΙΔΑΣΚ: Με ποιο από τα όργανα που είχατε στην διάθεση σας εργαστήκατε αυτή τη φορά;

ΜΑΘ$_{12}$: Το διαβήτη αλλά και το χάρακα. Πήρα άνοιγμα 5 εκατοστά στο διαβήτη μου με τη βοήθεια του χάρακα την πρώτη φορά και από την μια ομάδα μεγάλιθων εξέταζα ποια σημεία έχουν το άνοιγμα των 5 εκατοστών από το σημείο P και τα χρωμάτισα κόκκινα και με τον ίδιο τρόπο εργάστηκα για να βρω και τα σημεία που απέχουν 3 εκατοστά από την άλλη ομάδα μεγάλιθων από το σημείο Η.

ΔΙΔΑΣΚ: Τα σημεία που βρήκατε ότι απέχουν 5 εκατοστά από το P που βρίσκονται;

ΜΑΘ$_{5}$: Είναι σημεία που αν τα ενώσουμε θα βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο με κέντρο P και ακτίνα 5 εκατοστά μιας και έχουν την ίδια απόσταση από αυτό.

ΔΙΔΑΣΚ:Το ίδιο ισχύει και για τα σημεία που απέχουν 3 εκατοστά από το σημείο Η;

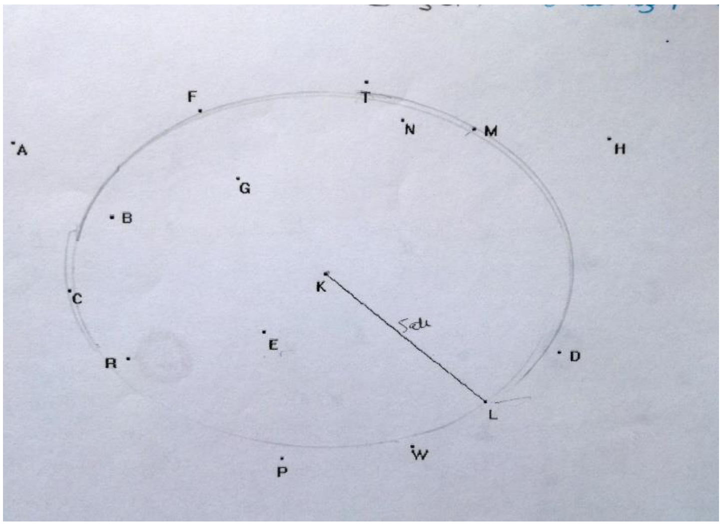
ΜΑΘ$_{4}$: Ναι αφού και αυτά είναι σημεία που ανήκουν σε έναν άλλο κύκλο με κέντρο το Η και ακτίνα 3 εκατοστά.

Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται πως η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ίδια με αυτή της προηγούμενης άσκησης, απλά οι μαθητές αφού αυτή τη φορά μπορούν να κάνουν χρήση όλων των εργαλείων κατασκευής, στηρίζονται στο όργανο που λέγεται διαβήτης. Από τη λύση των ασκήσεων αλλά και τις ιδέες και σκέψεις που εκφράζουν κατά τη διάρκεια της ενημέρωσης με την εκπαιδευτικό, αποκαλύπτεται ότι ο τρόπος που υιοθέτησαν για να εργαστούν σταθεροποίησε και ενίσχυσε στο μυαλό τους ακόμα περισσότερο τη σχέση μεταξύ των σημείων ενός κύκλου και της έννοιας της ίσης απόστασης.

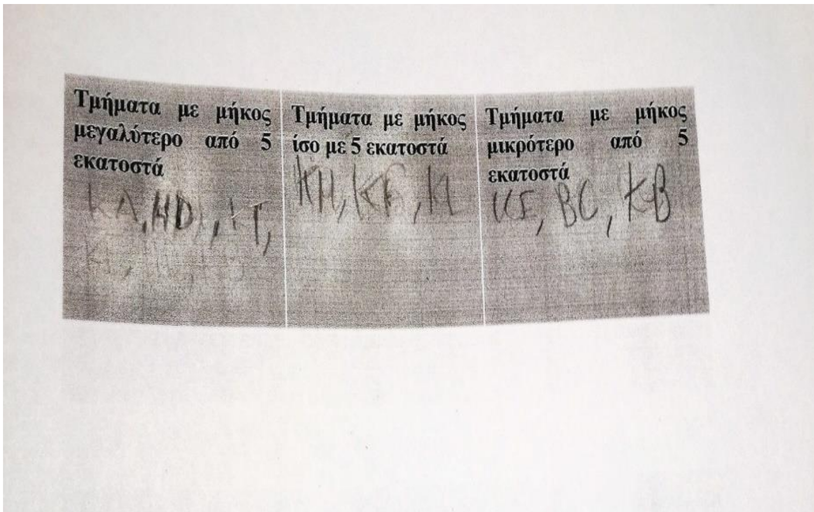
Ένα ακόμα φύλλο (παράρτημα Β, $3^{ο}$ φύλλο εργασίας) με διάσπαρτους μεγάλιθους βρίσκεται στα χέρια των παιδιών και απεικονίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα KL 5 εκατοστών που ενώνει δύο μεγάλιθους που βρίσκονται στα αντίστοιχα σημεία. Η

εκπαιδευτικός ζητάει να βρεθούν τα μήκη κάποιων άλλων τμημάτων, τα οποία επίσης ενώνουν άλλους μεγάλιθους και τα οποία συμβολίζει με γράμματα, με τη διαφορά ότι αποκλείει τη χρήση χάρακα για τη περάτωση της συγκεκριμένης εργασίας και επιτρέπει αποκλειστικά και μόνο τη χρήση του διαβήτη.
Στη τέλος τους ζητάει να τα τοποθετήσουν στις τρεις στήλες ενός πίνακα που τους δίνετε ανάλογα με το μήκος τους και κάνοντας σύγκριση με το αρχικό τμήμα KL των 5 εκατοστών (παράρτημα Β, 4ο φύλλο εργασίας).

Σχέδιο 9: Σύγκριση τμημάτων με ευθύγραμμο τμήμα συγκεκριμένου μήκους



Πίνακας 3: Καταγραφή σύγκρισης ευθύγραμμων τμημάτων σε στήλες



Τμήματα με μήκος μεγαλύτερο από 5 εκατοστά	Τμήματα με μήκος ίσο με 5 εκατοστά	Τμήματα με μήκος μικρότερο από 5 εκατοστά
KA, HD, [illegible]T, [illegible]	KH, KF, KL	KE, BC, KB

ΜΑΘ$_3$: Πως θα μπορέσω να συγκρίνω τα τμήματα σε μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με το δοθέν τμήμα με τη χρήση μόνο του διαβήτη;

ΔΙΔΑΣΚ: Αν είχες στη διάθεση σου τον χάρακα τι θα έκανες;

ΜΑΘ$_3$: Θα τα μετρούσα.

ΔΙΔΑΣΚ: Πως έβρισκες σε προηγούμενη άσκηση το μήκος μιας απόστασης με το διαβήτη;

ΜΑΘ$_3$: Με το άνοιγμα του διαβήτη αλλά εκεί είχα και τη βοήθεια του χάρακα, για να ξέρω πόσα εκατοστά είναι.

ΔΙΔΑΣΚ: Ναι αλλά εγώ εδώ δε σου ζητάω να βρεις συγκεκριμένο μήκος, αλλά απλώς να τα κατατάξεις κάνοντας χρήση των όρων μικρότερο και μεγαλύτερο.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα είναι απαραίτητος ο χάρακας;

ΜΑΘ$_4$: Όχι, αλλά και εγώ μπερδεύτηκα και δυσκολεύτηκα στην αρχή πώς μόνο με το διαβήτη θα μπορέσω να τα μετρήσω, δεν ήξερα αρχικά πώς να το κάνω.

ΔΙΔΑΣΚ: Πως λοιπόν τελικά με τη βοήθεια του διαβήτη αντιληφθήκατε τη διαφορά των μηκών στα ζητούμενα τμήματα;

ΜΑΘ$_4$: Άνοιξα το διαβήτη μου και έβαλα το ένα πόδι του στο 0 και το άλλο στον αριθμό 5 όσο δηλαδή και το μήκος του τμήματος και μετά άρχισα να μετρώ και να συγκρίνω τα τμήματα

ΜΑΘ$_6$: Πήρα και εγώ το διαβήτη και βασίστηκα για το άνοιγμα του πάνω στο τμήμα KL που είναι 5 εκατοστά χωρίς να χρησιμοποιήσω καθόλου το χάρακα, στη συνέχεια με το άνοιγμα αυτό τοποθετούσα το διαβήτη πάνω στα άλλα τμήματα και συγκρίνοντας τα έβγαζα συμπεράσματα για το αν είναι μικρότερα ή μεγαλύτερα από 5 εκατοστά και τα έβαζα στη στήλη που έπρεπε.

ΜΑΘ$_9$: Εγώ σκέφτηκα διαφορετικά. Πήρα σαν κέντρο το σημείο Κ και διέγραψα ένα κύκλο με ακτίνα 5 εκατοστά.

ΔΙΔΑΣΚ: Και τι συμπεράσματα έβγαλες με αυτόν τον τρόπο;

ΜΑΘ$_9$: Ότι όλα τα σημεία που θα είναι ίσα με 5 εκατοστά θα βρίσκονται πάνω στον κύκλο άρα θα έχουν και αυτά το ίδιο μήκος, αυτά που θα είναι μικρότερα θα βρεθούν μέσα στον κυκλικό δίσκο, ενώ αυτά που θα είναι μεγαλύτερα θα βρεθούν έξω από αυτόν.

ΔΙΔΑΣΚ: Με τον τρόπο αυτό βγαίνουν συμπεράσματα για όλα τα τμήματα;

ΜΑΘ$_9$: Μόνο για αυτά που έχουν το ένα άκρο τους στο σημείο Κ, που όμως είναι και τα περισσότερα.

Αρχικά εκφράζονται κάποιες σκέψεις και απορίες των μαθητών σχετικά με τον τρόπο που πρέπει να ταξινομήσουν τα τμήματα σε σύγκριση με το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα, χωρίς τη χρήση του χάρακα παρά μονάχα με το εργαλείο που ονομάζεται διαβήτης. Αν και όπως αποδείχτηκε και από την προηγούμενη άσκηση έχουν αναπτύξει την ικανότητα να κάνουν μετρήσεις με το διαβήτη, να παίρνουν δηλαδή το συγκεκριμένο όργανο και με το κατάλληλο άνοιγμα του στα εκατοστά που τους ζητάει η άσκηση να βρίσκουν και άλλες τέτοιες αποστάσεις του ίδιου μήκους, δημιουργήθηκε κάποια σύγχυση, καθώς τώρα επικράτησε η απορία, πως θα κατέληγαν να βρουν το μήκος των συγκεκριμένων τμημάτων και επομένως να αποδώσουν σε αυτά τις ονομασίες μικρότερο ή μεγαλύτερο, για να μπορέσουν στη συνέχεια να τα τοποθετήσουν στις ανάλογες στήλες του πίνακα που τους δίνονταν χωρίς την προφανή βοήθεια του χάρακα αυτή τη φορά. Γίνεται όμως άμεσα αντιληπτό ότι δε δόθηκε η κατάλληλη προσοχή από μέρους τους αρχικά, αφού η άσκηση δεν τους ζητούσε τα ακριβή μήκη των τμημάτων, αλλά τη ταξινόμηση τους με μόνο κριτήριο το αν το μήκος ενός τμήματος προεξείχε από το άνοιγμα του διαβήτη, ήταν ίσο με αυτό ή δεν έφτανε όσο αυτό. Πολύ γρήγορα όμως με τη καταλυτική καθοδήγηση της διδάσκουσας τα παιδιά αντιλαμβάνονται πως πρέπει να δουλέψουν.

Αφού ξεπεράσουν οι μαθητές τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν με την κατάλληλη βοήθεια της εκπαιδευτικού μέσα από τις καθοδηγητικές της ερωτήσεις και χωρίς να τους δίνεται έτοιμη γνώση, φτάνουν να γίνουν άξιοι και κατάλληλοι αποδέκτες της γεωμετρικής ικανότητας, που θα τους οδηγήσει να δώσουν από μόνοι τους τη σωστή απάντηση και τελικά να κάνουν τη σωστή ταξινόμηση.

Εστιάζοντας στο τρόπο που δρα ο μαθητής 6, φαίνεται ότι έχει επίγνωση του τρόπου που πρέπει να κινηθεί από τις προηγούμενες δραστηριότητες και κάνοντας χρήση του οργάνου που ονομάζεται διαβήτης, ακολουθεί τη γνωστή διαδικασία με τη καταλυτική βοήθεια του ανοίγματος του. Μετά από τη συζήτηση και την ανταλλαγή απόψεων της διδάσκουσας και με τους υπόλοιπους μαθητές της διαφαίνεται ότι και άλλοι ακολούθησαν τον ίδιο τρόπο σκέψης με αυτόν του μαθητή 6. Υπάρχει φυσικά και η περίπτωση του μαθητή 9, ο οποίος ακολουθεί έναν διαφορετικό δρόμο για να φτάσει στην τελική ταξινόμηση των τμημάτων στον πίνακα. Η γνωστική αυτή οδός μπορεί να είναι αρκετά πιο σύντομη και εύκολη, αλλά ανακαλύπτει ότι του δίνει πληροφορίες μόνο για κάποια από τα δοθέντα τμήματα, τα οποία είναι και τα πιο πολλά, αλλά μένουν και κάποια που με το συγκεκριμένο τρόπο εργασίας, δεν μπορεί να δώσει τις απαιτούμενες απαντήσεις. Το τελικό πάντως συμπέρασμα είναι ότι οι μαθητές είτε δουλεύοντας με τον ένα τρόπο είτε με τον άλλον, δείχνουν πως έχουν κατακτήσει σε βάθος την ιδιότητα της ίσης απόστασης των σημείων ενός κύκλου, με αποτέλεσμα να κάνουν χρήση της ιδιότητας αυτής, όπου το επιτρέπουν οι συνθήκες των προβλημάτων απόστασης και έτσι να οδηγούνται στην επίλυση τους χωρίς την βοήθεια εργαλείων παρά μόνο με την αρωγή των νεοαποκτηθέντων γνώσεων τους. Γι’ αυτό και ο μαθητής 9 βλέποντας πως τα περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ως ένα άκρο τους το Κ, προτιμάει να δημιουργήσει ένα κύκλο και βασιζόμενος στο συλλογισμό που κάνει σύμφωνα με αυτά που έχει μάθει, ότι ισχύουν για τα σημεία του ίδιου κύκλου, να μπορέσει να κάνει εξοικονόμηση χρόνου και να οδηγηθεί σωστά στην ταξινόμηση τους.

Μέσα από μια σειρά σχεδιαστικών πινάκων με απεικονίσεις μεγάλιθων του Στόουνχεντζ οι μαθητές συνεχίζουν σε σημειωτικό επίπεδο με κινήσεις πειραματισμού να βαδίζουν στον πραγματικό κόσμο (GI), αλλά συγχρόνως οι προσωπικοί ΓΧΕ τους εμπλουτίζονται με μια καινούρια ιδιότητα, καθώς και με την κατάλληλη γεωμετρική ορολογία που σχετίζεται με αυτήν, η χρήση της οποίας διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων και έρχεται να επιβεβαιώσει τις εμπειρικές παρατηρήσεις τους. Η επισημοποίηση της νέας ιδιότητας οδηγεί στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων με νέες μεθόδους στηριζόμενες μόνο σε συλλογιστικά όργανα, που τους κάνουν να κινούνται σε λεκτικά επίπεδα και να κάνουν κάποια αρχικά βήματα προς την GII.

Τα τεχνουργήματα επιλογής στο συγκεκριμένο επίπεδο εργασίας προτείνονται όχι ως όργανα μέτρησης αλλά απλά και μόνο ως εργαλεία επαλήθευσης

Ανάλυση 4ης Διδακτικής Παρέμβασης

Μετά από τρεις διδακτικές παρεμβάσεις βλέπουμε ότι έχει επιτευχθεί η κατανόηση της γεωμετρικής έννοιας που ορίζει τον κύκλο και στοιχείων του όπως η ακτίνα, καθώς τα παιδιά με μεγάλη ευκολία όχι μόνο τη διατυπώνουν, αλλά έχουν αποδείξει ότι μπορούν να τη χρησιμοποιούν και για να επιλύουν προβληματικές καταστάσεις. Για το λόγο αυτό η διδάσκουσα ενημερώνει τα παιδιά ότι στις δραστηριότητες που ακολουθούν θα πρέπει να φτάσουν να ανακαλύπτουν μήκη τμημάτων, χωρίς τη χρήση κάποιου από τα εργαλεία που είχαν μέχρι τώρα στη διάθεση τους αλλά μόνο στηριζόμενοι στη χρήση της ιδιότητας του κύκλου.

Η εκπαιδευτικός ξεκινάει με την παρουσίαση πινάκων του Καντίνσκι (παράρτημα Β) και προχωράει σε μια άμεση γνωριμία με τον ίδιο και το έργο του μέσα από πληροφορίες που δίνει, όπως ότι ο ίδιος εμπνεύστηκε από τα μαθηματικά και χρησιμοποίησε γεωμετρικές έννοιες για να δημιουργήσει τα καλλιτεχνικά του έργα.

Ακολουθεί ένα φύλλο εργασίας, όπου απεικονίζεται ένα σχέδιο (παράρτημα Β, 5ο φύλλο εργασίας). Πριν τους γνωστοποιήσει ότι πρόκειται για ένα ελεύθερο σχέδιο, γίνεται μία συζήτηση όπου τα παιδιά εκφράζουν αμέσως τις απορίες τους για τα συγκεκριμένα σχήματα που βλέπουν και τη περίεργη μορφή τους. Η εκπαιδευτικός τους αποκαλύπτει ότι τα συγκεκριμένα σχήματα ονομάζονται ελεύθερα ακριβώς γιατί δεν υπάρχει χαρακτική μέτρηση και δεν τηρούνται οι κανόνες λεπτομέρειας και ακρίβειας, καθώς δεν υπάρχει καθόλου χρήση οργάνων.

Δεν προχωράει όμως άμεσα στα μαθηματικά ζητούμενα, αλλά θέλοντας να τους ενθαρρύνει να οδηγηθούν σε νέες μαθηματικές ανακαλύψεις με ένα πιο ελκυστικό και διασκεδαστικό τρόπο, μετατρέπει την τάξη σε εργαστήρι ζωγραφικής και μεταμορφώνει τους ίδιους σε μικρούς ζωγράφους ζητώντας τους να ντύσουν το ελεύθερο σχέδιο που τους έχει δοθεί με καλλιτεχνικό τρόπο, να δημιουργήσουν το δικό τους πίνακα όπως αυτοί τον φαντάζονται και με ότι χρώματα θέλουν.

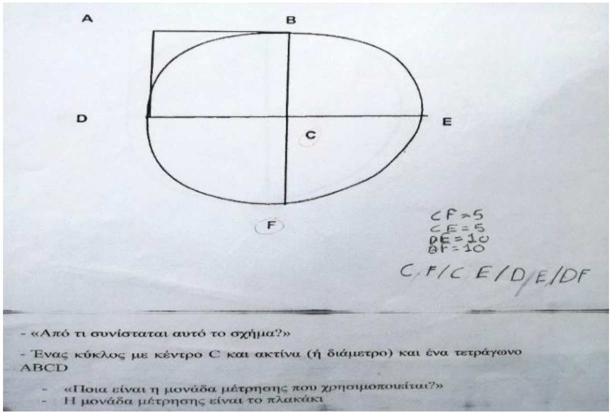
Σχέδιο 10: Εικαστικές δημιουργίες με ελεύθερα σχήματα κύκλου και τετραγώνου

Σχέδιο 11: Εικαστικές δημιουργίες με ελεύθερα σχήματα κύκλου και τετραγώνου

Εδώ γίνεται γρήγορα αντιληπτή η αναπτυγμένη φαντασία αλλά και η δημιουργικότητα των μαθητών. Παίρνουν σαν βάση τους το ελεύθερο σχέδιο που τους δίνεται και βλέπουν πάνω σε αυτό μορφές ζώων, ηρώων τοπίων και ενός δικού τους κόσμου τον οποίο αποδίδουν με πολλά χρώματα και συναίσθημα.
Μετά την ολοκλήρωση των εικαστικών δημιουργημάτων τους με το ελεύθερο σχήμα που τους είχε προτείνει, τους γνωστοποιεί ότι στο συγκεκριμένο σχήμα υπάρχει το ABCD που είναι ένα τετράγωνο του οποίου το μήκος των πλευρών είναι 5 πλακάκια

και ένας κύκλος που έχει κέντρο C και ακτίνα CD, τα σημεία B, C, F είναι συνευθειακά (ευθυγραμμισμένα), τα σημεία D, C, E είναι επίσης συνευθειακά και τους προτρέπει να βρουν τα μήκη των τμημάτων CF, CE, DE,BF και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους.

Σχέδιο 12: Εύρεση μήκους τμήματος σε ελεύθερο σχήμα σύνθεσης τετραγώνου - κύκλου



ΔΙΔΑΣΚ: Πείτε μου λοιπόν πόσο βρήκατε ότι είναι τα μήκη των τμημάτων που σας ζητήθηκαν;

ΔΙΔΑΣΚ: Πόσο είναι το μήκος του CF;

ΜΑΘ$_6$: Είναι 5 πλακάκια γιατί είναι ίσο με μία ακτίνα και όχι με δύο και γιατί όπως είπαμε μία ακτίνα είναι ίση με 5 πλακάκια.

ΔΙΔΑΣΚ: Εγώ σας έδωσα σαν δεδομένο ότι μία ακτίνα είναι ίση με 5 πλακάκια;

ΜΑΘ$_3$: Όχι, το μήκος όλου του τετραγώνου είναι 5 πλακάκια.

ΔΙΔΑΣΚ: Όλου του τετραγώνου; Αυτό είπα;

ΜΑΘ$_4$: Ενός ευθύγραμμου τμήματος.

ΔΙΔΑΣΚ: Ενός ευθύγραμμου τμήματος;

ΜΑΘ$_2$: Το μήκος μιας πλευράς του τετραγώνου όπως η BC.

ΔΙΔΑΣΚ: Σωστά αυτό ήταν το δεδομένο που σας έδωσα. Τι είναι όμως συγχρόνως η BC;

ΜΑΘ$_6$: Είναι και ακτίνα του κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ: Και τι ξέρουμε για τις ακτίνες του ίδιου κύκλου;

ΜΑΘ$_6$: Ότι είναι όλες ίδιες.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα και CF πόσο θα είναι και αυτή;

ΜΑΘ$_6$: Θα είναι 5 πλακάκια.

ΔΙΔΑΣΚ: Για να πούμε επομένως πως σκεφτήκατε με βάση τα δεδομένα που προαναφέραμε για να βρείτε τα άγνωστα μήκη;

ΜΑΘ$_7$: Η πλευρά του τετραγώνου BC είναι 5 πλακάκια αλλά συγχρόνως βλέπουμε ότι είναι και ακτίνα του κύκλου με κέντρο C, άρα και οι CF και CE που είναι και αυτές ακτίνες του ίδιου κύκλου θα είναι ίσες με 5 πλακάκια, ενώ οι DE και BF που το μήκος τους είναι όσο δύο ακτίνες μαζί θα είναι ίσες με 10 πλακάκια.

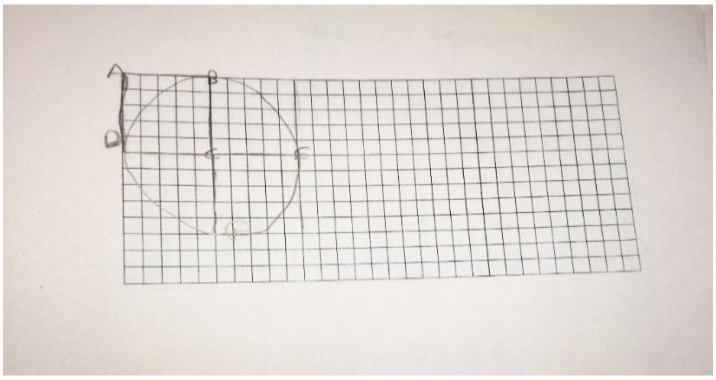
ΜΑΘ$_5$: Ναι, αλλά εμένα δε μου φαίνεται ότι είναι ολόκληρος κύκλος.

ΔΙΔΑΣΚ: Θυμήσου όμως τι είπαμε για τα ελεύθερα σχέδια ότι τα σχήματα που αποτυπώνονται σε αυτά δεν ακολουθούν κανόνες χαρακτικής μέτρησης γιατί δεν γίνεται χρήση οργάνων, εμείς όμως θα τα λαμβάνουμε ως κανονικά σχήματα και θα προσπαθούμε να οδηγηθούμε στις λύσεις και απαντήσεις των όσων μας ζητούνται, κάνοντας χρήση των πληροφοριών που μας δίνονται και των ιδιοτήτων που γνωρίζουμε για τα σχήματα που απεικονίζονται κάθε φορά.

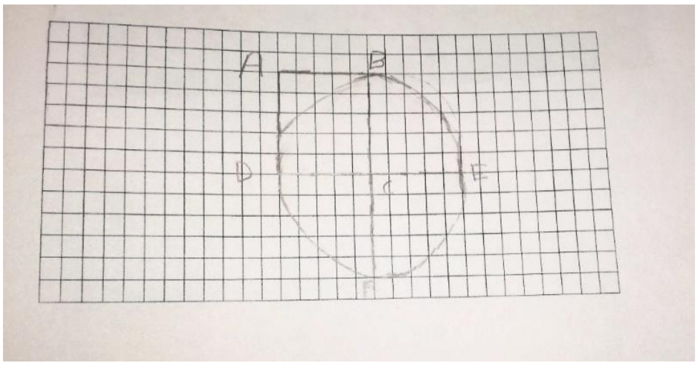
Αρχικά ξεκαθαρίζεται κάποια παρανόηση αναφορικά με το μήκος 5 πλακάκια και αφού τονίζεται από τη διδάσκουσα ότι η συγκεκριμένη πληροφορία αφορούσε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, τα παιδιά μένοντας πιστά στις οδηγίες της διδάσκουσας και ακολουθώντας τα βήματα της συλλογιστικής οδού σημειώνουν τις σωστές τιμές των μηκών δίπλα στα ζητούμενα τμήματα. Χρησιμοποιούν τα δεδομένα που τους δίνονται, ότι δηλαδή το ABCD είναι τετράγωνο του οποίου όπως γίνεται ορατό στο σχήμα του οι δύο πλευρές του είναι και ακτίνες του κύκλου, αλλά και της πρότερης γνώσης ότι όλες οι ακτίνες του ίδιου κύκλου είναι ίδιες, καταλήγουν στο συμπέρασμα, ότι τα τμήματα των οποίων το μήκος είναι όσο της ακτίνας είναι 5 πλακάκια, ενώ αυτών που τα μήκη τους είναι όσο δύο ακτίνες είναι 10 πλακάκια, αποτελέσματα απολύτως ορθά μέσα από τα οποία διακρίνεται καθαρά η επίτευξη του στόχου της συγκεκριμένης δραστηριότητας, που είναι η περάτωση μιας γεωμετρικής άσκησης στηριζόμενη στις γνώσεις τους και το συλλογισμό τους. Συγχρόνως όμως συνεχίζουν να υπάρχουν και κάποιοι προβληματισμοί των μαθητών σχετικά με τη μορφή που έχει ο κύκλος στο σχέδιο που τους δίνεται, επειδή δεν έχουν εξοικειωθεί ακόμα με τον όρο ελεύθερο σχέδιο, γι' αυτό και μπερδεύονται συχνά, αφού δεν έχουν κατανοήσει ότι έχουν να κάνουν με γεωμετρικά σχήματα τα οποία αποτυπώνονται στο χαρτί χωρίς τη χρήση εργαλείων με αποτέλεσμα και η μορφή του κύκλου τον οποίο και εξετάζουν να μην έχει την ακριβή και πλήρη μορφή του.

Η εργασία ολοκληρώνεται αφού αποτυπώσει ο κάθε μαθητής το ελεύθερο σχέδιο που του δόθηκε σε πραγματικές διαστάσεις πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί, αποκτώντας με αυτό το τρόπο μια πιο ρεαλιστική εικόνα του σχεδίου.

Σχέδιο 13: Αποτύπωση του σύνθετου σχήματος κύκλου – τετραγώνου σε τετραγωνισμένο χαρτί



Σχέδιο 14: Αποτύπωση του σύνθετου σχήματος κύκλου – τετραγώνου σε τετραγωνισμένο χαρτί



Παρόμοια εργασία δίνεται στους μαθητές στο νέο φύλλο που ακολουθεί Η διαδικασία είναι ίδια με την προηγούμενη με τη διαφορά ότι αυτή τη φορά τα παιδιά πρέπει να δημιουργήσουν καινούριο πίνακα και να αποτυπώσουν το νέο ελεύθερο σχέδιο που απεικονίζεται, στο οποίο όμως υπάρχει μια μικρή αλλαγή, καθώς μόνο το ένα από τα δύο γεωμετρικά σχήματα παραμένει σταθερό.

Σχέδιο 15: Εικαστικές δημιουργίες με ελεύθερα σχήματα κύκλου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Σχέδιο 16: Εικαστικές δημιουργίες με ελεύθερα σχήματα κύκλου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Σχέδιο 17: Εικαστικές δημιουργίες με ελεύθερα σχήματα κύκλου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

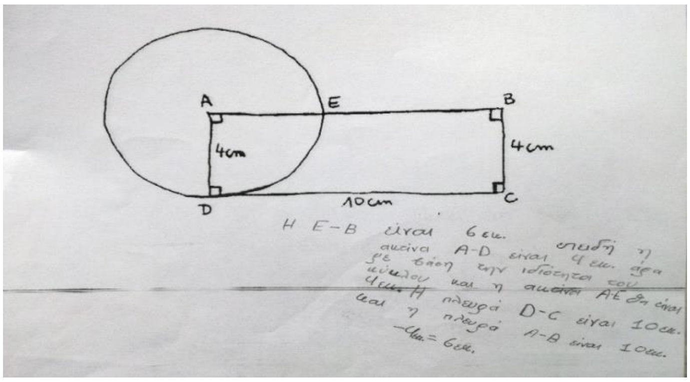
Καινούρια καλλιτεχνικά δημιουργήματα όπου ο κάθε πίνακας είναι και μια διαφορετική ιστορία, την οποία αποδίδουν στο χαρτί τους, γιατί ο καθένας τους δε θέλει να δημιουργήσει κάτι απλά και μόνο για να τελειώσει την εργασία του, αλλά θέλουν αυτό που θα αποδώσουν στο χαρτί τους να είναι κάτι εντυπωσιακό και ξεχωριστό και ξοδεύουν όσο χρόνο χρειαστεί για το αποτέλεσμα που επιθυμούν. Επίσης με μεγάλο ενδιαφέρον περιγράφουν τους πίνακες τους, όπως πως σκέφτηκαν να τους κατασκευάσουν, αλλά και γιατί χρησιμοποίησαν τα συγκεκριμένα χρώματα στα συγκεκριμένα σημεία. Ο τρόπος που κινούνται και εκφράζονται δείχνει πόσο πολύ τους ευχαριστεί και τους διασκεδάζει αυτό που κάνουν.

ΜΑΘ$_2$:Το κομμάτι του ορθογωνίου που μπαίνει μέσα στον κύκλο το χρωμάτισα κόκκινο γιατί ήθελα να ξεχωρίζει .

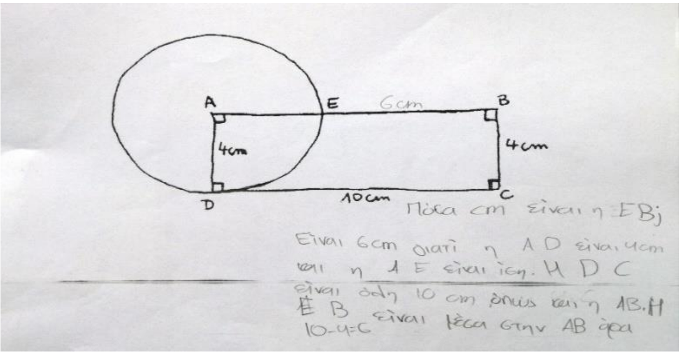
ΜΑΘ$_1$: Όπου ενώνονταν τα σχήματα έγραφα με διαφορετικά χρώματα τις ενώσεις τους

Αφού ολοκληρωθούν οι προσωπικοί πίνακες των παιδιών η διδάσκουσα εξηγεί ότι στο καινούριο ελεύθερο σχέδιο που τους δίνεται (παράρτημα Β, 6^{ο} φύλλο), έχουνε ένα ορθογώνιο ABCD και έναν κύκλο με κέντρο Α που διέρχεται από το σημείο D. Αυτός ο κύκλος επίσης τέμνει το τμήμα ΑΒ στο σημείο Ε. Τους ζητάει να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΕΒ και να δικαιολογηθεί η απάντηση τους.

Σχέδιο 18: Εύρεση μήκους τμήματος σε ελεύθερο σχήμα σύνθεσης ορθογωνίου παραλληλογράμμου - κύκλου



Σχέδιο 19: Εύρεση μήκους τμήματος σε ελεύθερο σχήμα σύνθεσης ορθογωνίου παραλληλογράμμου - κύκλου



ΔΙΔΑΣΚ: Ονομάστε μου το ορθογώνιο που βλέπετε.

ΜΑΘ$_{6}$: Ορθογώνιο ABCD.

ΔΙΔΑΣΚ: Υπάρχει και ένας κύκλος ενσωματωμένος σε αυτόν, ποια είναι τα στοιχεία του;

ΜΑΘ$_{6}$: Έχει κέντρο Α και ακτίνα AD και ΑΕ.

ΔΙΔΑΣΚ: Που τι είναι αυτές οι ακτίνες για τον ίδιο κύκλο;

ΜΑΘ$_{7}$:Είναι ίσες.

ΔΙΔΑΣΚ: Για πείτε μου τώρα βασιζόμενοι σε αυτά που ξέρετε πόσο θα είναι το ζητούμενο τμήμα;

ΜΑΘ$_{7}$: Νομίζω ότι είναι σχεδόν 6 εκατοστά, γιατί το ΑΕ σαν ακτίνα είναι 4εκατοστά και επειδή το σημείο Ε είναι λίγο πιο πριν από τη μέση του ΑΒ που είναι 10 εκ άρα θα είναι το ΕΒ μεγαλύτερο του 5

ΜΑΘ$_{5}$: Και εγώ συμφωνώ ότι είναι 6, γιατί το DC είναι 10 εκ άρα και το ΑΒ θα είναι 10 εκ και επειδή θεωρώ ότι το σημείο Ε είναι σχεδόν στη μέση, το υπολόγισα ένα εκατοστό πιο πέρα.

ΔΙΔΑΣΚ: Αν κατάλαβα καλά ενεργείται βάση αυτών που βλέπετε;

ΜΑΘ$_5$: Ναι με το μάτι.

ΜΑΘ$_6$:Εγώ έχω τρείς εκδοχές 4εκ ή 5εκ ή 6 εκ.

ΔΙΔΑΣΚ: Γιατί τρεις εκδοχές;

ΜΑΘ$_6$: Γιατί μας είπατε ότι είναι ελεύθερα σχέδια άρα όχι ακριβείς μετρήσεις, επομένως μπορεί να μην είναι ακριβή και τα μήκη των τμημάτων.

ΜΑΘ$_4$: Δηλαδή επειδή τα σχήματα αυτά δεν είναι ακριβή στις μετρήσεις τους θα πρέπει να υποθέσουμε;

ΔΙΔΑΣΚ: Θυμήσου ξανά όμως τι είπαμε. Ότι τα ελεύθερα σχέδια μπορεί να μην ακολουθούν ακριβείς μετρήσεις σχεδιαστικά, αλλά αυτό δεν πρέπει να μας μπερδεύει, γιατί τα αποτελέσματα μας θα πρέπει να στηρίζονται σε κανόνες και γνώσεις που ξέρουμε για να μπορούν να είναι αληθή και με συλλογιστικά βήματα θα αποδεικνύουμε αυτό που βρίσκουμε, δεν θα υποθέτουμε απλώς.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε, αλλά και με αυτά που πρόσφατα μάθαμε, τι συμπέρασμα θα βγάζαμε για το μήκος του ΕΒ;

ΜΑΘ$_{12}$: Αν από την ΑΒ που είναι 10 εκατοστά, αφού είναι και αυτή πλευρά του ορθογωνίου, αφαιρέσω την ΑΕ που είναι και αυτή ακτίνα του ίδιου κύκλου αρά ίση με 4 εκατοστά, θα βρω το μήκος του ΕΒ που πρέπει να είναι περίπου 6 εκατοστά, αλλά και πάλι βλέποντας το φαίνεται ότι είναι λίγο μεγαλύτερο.

ΜΑΘ$_{10}$: Συμφωνώ και εγώ με τη σκέψη του μαθητή 12, γιατί αν την ΑΕ που είναι ακτίνα του κύκλου την αφαιρέσω από την ΑΒ που είναι 10 εκατοστά σύμφωνα με την ιδιότητα του ορθογωνίου, θα βρω το μήκος της ΕΒ που είναι 4 εκ.

Κατά τη διάρκεια της εργασίας τους εκφράζονται σκέψεις που δείχνουν ότι τα παιδιά μπερδεύονται και πάλι να δουλεύουν πάνω σε ελεύθερα σχέδια

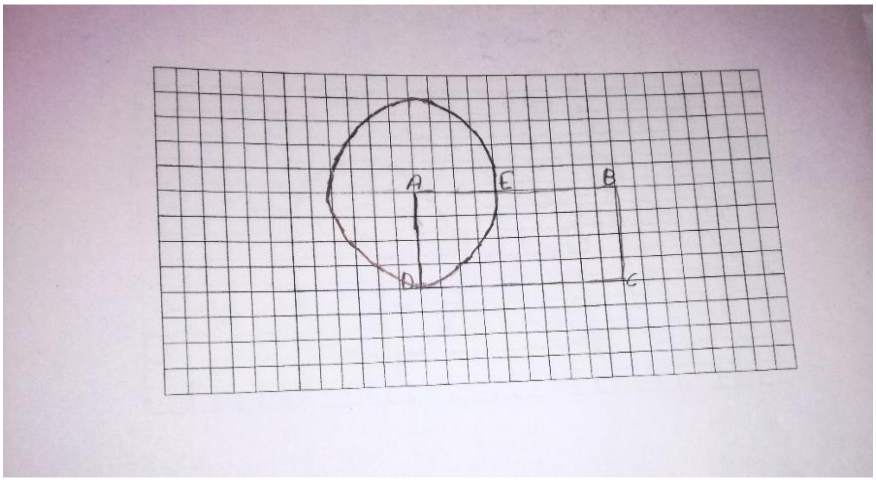
Ο εμφανής προβληματισμός τους σχετικά με τα σχήματα σε ελεύθερη απόδοση κάνει τους μαθητές να θεωρήσουν πως και τα αποτελέσματα τους μπορούν να στηρίζονται σε εμπειρικά στοιχεία, που συλλέγουν από τις υποθέσεις που κάνουν βλέποντας οπτικά και μόνο τα σχεδιαστικά δεδομένα τους. Το σκεπτικό αυτό τους οδηγεί σε απαντήσεις που δεν δίνουν συγκεκριμένο μήκος, αλλά και που δεν μπορούν να αιτιολογήσουν ταυτόχρονα, αφού τα αποδεικτικά τους στοιχεία δεν στηρίζονται σε γνωστικά.

Η εκπαιδευτικός φυσικά τους υπενθυμίζει και πάλι ότι δουλεύουν πάνω σε ελεύθερα σχέδια και ότι πρέπει να καταλάβουν ότι δεν πρέπει να τους απασχολεί η σχεδιαστική μορφή των γεωμετρικών τους σχημάτων και να χρησιμοποιούν εκφράσεις του τύπου, φαίνεται ότι είναι ή πρέπει να είναι περίπου, αλλά τα ακριβή αποτελέσματα τους θα πρέπει να βγαίνουν βάση των δεδομένων και των γνώσεων τους, αν θέλουν να πράττουν με σωστό τρόπο οι ίδιοι.

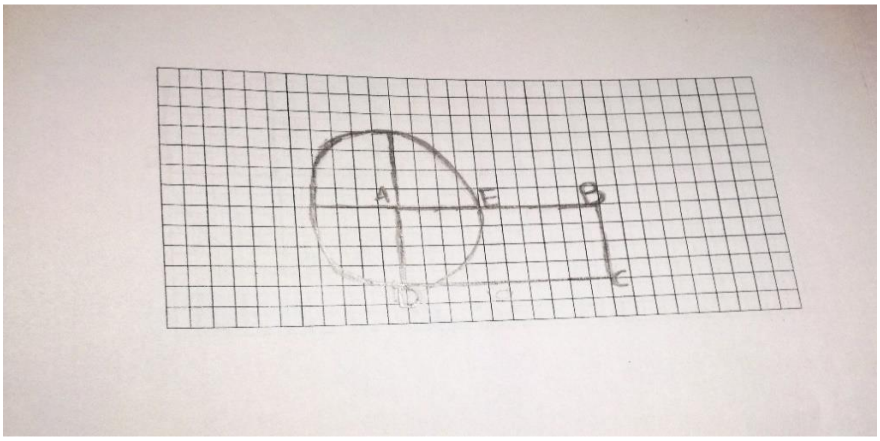
Στη συνέχεια όμως εργαζόμενα τα παιδιά βάση κανόνων και γνωστικών στοιχείων καταλήγουν σε απαντήσεις με σωστό και ολοκληρωμένο σκεπτικό, που δείχνουν ότι οι γνώριμες ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου αλλά και αυτής του κύκλου που μόλις διδάχτηκαν έγιναν χρήσιμα σκεπτικά εργαλεία, που τους βοήθησαν να βρεθούν μπροστά στο μήκος των 6 εκατοστών του ζητούμενου τμήματος ΕΒ. Αυτό αποδεικνύει την αποτελεσματικότητα της χρήσης της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου πάνω στα ελεύθερα σχέδια για την επίλυση προβλημάτων.

Στη συνέχεια για μία ακόμα φορά ο κάθε μαθητής αποτυπώνει το ελεύθερο σχέδιο που του δόθηκε σε πραγματικές διαστάσεις πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί επιβεβαιώνοντας και επικυρώνοντας έτσι την λύση της άσκησης, ότι το τμήμα ΕΒ είναι ίσο με 6 εκατοστά.

Σχέδιο 20: Αποτύπωση του σύνθετου σχήματος κύκλου – ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τετραγωνισμένο χαρτί



Σχέδιο 21: Αποτύπωση του σύνθετου σχήματος κύκλου – ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τετραγωνισμένο χαρτί



Κάνοντας έναν μαθηματικό απολογισμό του τρόπου με τον οποίο οδηγήθηκαν στα αποτελέσματα τους οι μαθητές, φαίνεται πως κατάφεραν να δώσουν το μήκος κάποιων τμημάτων χωρίς χρήση της μέτρησης τους, αλλά επιτεύχθηκε επικύρωση ενός αποτελέσματος με τη βοήθεια ενός συλλογισμού, γεγονός που οδηγεί τους μαθητές να μην χρησιμοποιούν την αντίληψη (αισθητηριακά), ούτε τα εργαλεία για να επιλύσουν ένα πρόβλημα γεωμετρίας. Θα πρέπει να τονιστεί φυσικά ότι η συλλογιστική που τους οδήγησε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, ήταν ότι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο ισαπέχουν από το κέντρο του.

Στη συγκεκριμένη φάση πειραματισμού της GI πραγματοποιείται η κατανόηση των ελεύθερων σχεδίων στα οποία αποτυπώνονται τα γεωμετρικά σχήματα ακολουθώντας τους ίδιους κανόνες σχεδιασμού με τα προαναφερθέντα σχέδια, παντελής δηλαδή έλλειψη σχεδιαστικών εργαλείων και μέτρησης για την κατασκευή τους, γεγονός που τα καθιστά καθαρά και μόνο συμβολικά στοιχεία και όχι γεωμετρικές απεικονίσεις που θα βοηθήσουν τα παιδιά στις συγκρίσεις των αποτελεσμάτων τους.

Το σημειωτικό επίπεδο όμως εργασίας τους αλλάζει και στο προσωπικό ΓΧΕ τους κυριαρχεί η εφαρμογή της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου αλλά και γνώριμων ιδιοτήτων από το αναφορικό ΓΧΕ, όπως αυτές του τετραγώνου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που τον μετατρέπουν από ένα εμπειρικό χώρο σε ένα λεκτικό επίπεδο που επικρατεί περισσότερο η συλλογιστική οδός για την επίλυση γεωμετρικών δράσεων και για την απαιτούμενη επικύρωση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων.

Ο τρόπος αυτός επικύρωσης στα πλαίσια της GI στην οποία κινούνται όλες οι γεωμετρικές εργασίες στο επίπεδο του Δημοτικού είναι τελείως κατάλληλος και αποδεκτός, αλλά βοηθάει παράλληλα και στην μετατόπιση προς τη GII.

Ανάλυση 5ης Διδακτικής Παρέμβασης

Σε όλες τις δραστηριότητες του πέμπτου διδακτικού επεισοδίου τα παιδιά θα βιώσουν καταστάσεις της πραγματικής ζωής τις οποίες καλούνται να επιλύσουν.

Η πρώτη δραστηριότητα τους ζητάει να γίνουν χορευτές και να πάρουν μέρος σε μία χορογραφία, για την πραγματοποίηση της οποίας απαιτείται το στήσιμο των μικρών χορευτών σε συγκεκριμένα σημεία.

Θα πρέπει να βρίσκεται κάποιο παιδί σε ένα σημείο το οποίο ονομάζει B και άλλα παιδιά στα σημεία H, I, F και G ώστε να αποτελούν οι θέσεις τους σημεία που βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο με κέντρο αυτό το σημείο B, καθώς και δύο άλλα παιδιά στις θέσεις D και E σημεία που βρίσκονται πάνω στον δίσκο και σημείων που βρίσκονται έξω από τον δίσκο αντίστοιχα.

Στην συνέχεια ζητάει να απαντήσουν ερωτήσεις, όπως να δώσουν πληροφορίες για τα μήκη BF, BI, BH, BG, για το που βρίσκεται το σημείο E, αλλά και πως μπορούμε να αξιολογήσουμε το μήκος BE και πως το μήκος BD.

Τα παιδιά αναπαριστούν δουλεύοντας ομαδικά τις θέσεις της χορογραφίας.

ΔΙΔΑΣΚ: Ας μου πει κάποιος με ποιο τρόπο εκτελέσατε την χορογραφία σας και καθορίσατε τις θέσεις που έπρεπε να πάρετε;

$ΜΑΘ_3$: Αρχικά ορίσαμε ένα σημείο Β, στη συνέχεια πήραμε το χάρακα και μετρήσαμε απόσταση ενός μέτρου – γιατί αυτή την απόσταση θέλαμε να δώσουμε στα σημεία μας από το κέντρο Β – και τοποθετήσαμε το σημείο F και το ίδιο κάναμε και με τα υπόλοιπα σημεία που μας δόθηκαν. Στη συνέχεια ενώσαμε όλα τα σημεία μας και φτιάξαμε έναν κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα όλα αυτά τα σημεία από το σημείο Β που είναι το κέντρο τι θα έχουν;

$ΜΑΘ_6$: Θα έχουν την ίδια απόσταση.

ΔΙΔΑΣΚ: Επομένως το μήκος των τμημάτων BI, BG, BH, και BF θα είναι ένα μέτρο. Γιατί τι είναι αυτά τα τμήματα;

$ΜΑΘ_9$: Είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου αφού τα σημεία H, I, F και G βρίσκονται πάνω στον κύκλο που φτιάξαμε και μάθαμε ότι οποιοδήποτε σημείο του κύκλου ενώσουμε με το κέντρο του μας δίνει το ευθύγραμμο τμήμα που ονομάζεται ακτίνα και επίσης όλες οι ακτίνες του ίδιου κύκλου είναι ίσες.

$ΜΑΘ_{10}$: Εμείς αρχικά ορίσαμε το σημείο Β που ήταν το κέντρο, στη συνέχεια τραβήξαμε από το σημείο Β ένα ευθύγραμμο τμήμα ενός μέτρου και βάλαμε στο άλλο άκρο το σημείο F. Μετά πήραμε το διαβήτη και διαγράψαμε ένα κύκλο ακτίνας BF ενός μέτρου.

ΔΙΔΑΣΚ: Τα υπόλοιπα σημεία πως τα ορίσατε;

$ΜΑΘ_{10}$: Τα σημεία H G I επειδή ήταν και αυτά σημεία του κύκλου δε χρειάστηκε να τα μετρήσουμε, απλά σημειώσαμε τα συγκεκριμένα γράμματα πάνω σε κάποιες θέσεις του κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ: Με ποιο τρόπο καθορίσατε τις θέσεις των σημείων Ε και D;

$ΜΑΘ_{10}$: Με τον ίδιο τρόπο ορίσαμε και τα σημεία D και E που τα σημειώσαμε σε κάποιες θέσεις μέσα και έξω από τον κυκλικό δίσκο χωρίς μέτρηση επίσης.

ΔΙΔΑΣΚ: Γιατί τι γνωρίζουμε;

$ΜΑΘ_{10}$: Γιατί ξέρουμε ότι αφού το σημείο Ε είναι έξω και το D μέσα στον κυκλικό δίσκο, η απόσταση ΒΕ θα είναι μεγαλύτερη και η BD μικρότερη αντίστοιχα από το ένα μέτρο που είναι και η ακτίνα του δεδομένου κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ: Ποια είναι τα εργαλεία που μας βοήθησαν να δώσουμε πληροφορίες για τα καθορισμένα μήκη;

$ΜΑΘ_9$: Μας βοήθησε ο χάρακας.

ΔΙΔΑΣΚ: Το χάρακα το χρησιμοποιήσατε για να σημειώσετε αρχικά το μήκος του ενός μέτρου δηλαδή το μήκος μιας ακτίνας. Μετά σας ήταν χρήσιμο;

ΔΙΔΑΣΚ: Τα υπόλοιπα τμήματα χρειαζόταν να τα μετρήσετε;

$ΜΑΘ_1$: Όχι.

ΔΙΔΑΣΚ: Αλλά που στηριχτήκατε;

$ΜΑΘ_1$: Στην ιδιότητα του κύκλου που λέει ότι όλα τα σημεία του ίδιου κύκλου απέχουν το ίδιο από το κέντρο του, επομένως και οι αποστάσεις τους από αυτό δηλαδή οι ακτίνες του θα είναι και αυτές όλες ίσες, άρα κατά συνέπεια και σημεία που θα είναι έξω από αυτόν θα βρίσκονται σε μεγαλύτερη απόσταση από την ακτίνα του, ενώ σημεία μέσα στον κυκλικό δίσκο θα βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από αυτήν.

Οι καλλιτέχνες μας θυμούνται και πάλι τις σχέσεις των σημείων ενός κύκλου με το κέντρο του και τις κάνουν βασικό τους εργαλείο για να καθορίσουν τις θέσεις τους βάση των αναγκών της χορογραφίας.
Μπορεί αρχικά να κάνουν μια μικρή χρήση του χάρακα για να καθορίσουν το μήκος του πρώτου σημείου από το κέντρο Β, δηλαδή της ακτίνας του κύκλου που πρόκειται να σχηματιστεί, αλλά στην πορεία της εργασίας τους σταματούν να μπαίνουν πλέον στη λογική της χρήσης των οργάνων και των μετρήσεων τους, γιατί γνωρίζουν ότι υπάρχει μια πιο εύκολη οδός. Βάζουν στη σειρά όλες τις προηγούμενες γνώσεις τους που τους είναι καθοριστικές για τη λύση, όπως εδώ τη γνώση της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου αλλά και του ορισμού του κυκλικού δίσκου και ακολουθώντας τα σωστά συλλογιστικά βήματα οριοθετούν τα σημεία και τοποθετούν τους χορευτές στις θέσεις που πρέπει, για να μπορέσει να εκτελεστεί με αίσιο τρόπο η χορογραφία τους.
Οι μικροί μας χορευτές αλλάζουν τώρα καλλιτεχνική ιδιότητα και γίνονται μικροί ηθοποιοί παίζοντας το ρόλο των εξερευνητών. Η Διδάσκουσα τους δίνει τις απαραίτητες οδηγίες και τους στέλνει να ψάξουν έναν χάρτη θησαυρού που βρίσκεται σε ένα σεντούκι σε κάποιο σημείο του σχολείου τους (παράρτημα Β, $7^{ο}$ φύλλο). Ο χάρτης υποδεικνύει την τοποθεσία της αυλής του σχολείου ως το μέρος για την ανεύρεση ενός θησαυρού που είναι θαμμένος σε αυτήν. Συγκεκριμένα τους υποδεικνύει εκείνο το σημείο της αυλής όπου υπάρχει μία βελανιδιά και ένα πεύκο σε απόσταση 8 μέτρων το ένα από το άλλο και τους φανερώνει ότι ο θησαυρός είναι θαμμένος σε απόσταση 4 μέτρα από τη βελανιδιά και σε 7 από το πεύκο.
Οι μαθητές λοιπόν αντιμετωπίζουν το δίλλημα σύμφωνα με αυτά που τους λέει ο χάρτης, που πρέπει να σκάψουν για να βρουν το θησαυρό!
Ακολουθεί συζήτηση με την εκπαιδευτικό και μερικές σκέψεις των παιδιών.

ΔΙΔΑΣΚ: Σε πόσα σημεία πιστεύεται ότι πρέπει να ψάξετε για το θησαυρό;

ΜΑΘ8 : Στα σημεία που θα ενώνεται η βελανιδιά με το πεύκο.

ΔΙΔΑΣΚ: Γιατί το λέτε αυτό τι εννοείται;

ΜΑΘ1 : Γιατί μας λέει ο χάρτης ότι θα πρέπει να απέχουν συγχρόνως 7 μ από το πεύκο και 4 μ από τη βελανιδιά.

ΔΙΔΑΣΚ: Ναι αλλά υπάρχουν σημεία που ενώνονται τα δύο δέντρα;

ΜΑΘ3 : Αν φέρουμε μία ευθεία 7 μ από το πεύκο και μία ευθεία 4 μ από τη βελανιδιά θα δούμε ότι κάπου τέμνονται.

ΔΙΔΑΣΚ: Επομένως δεν ενώνονται ακριβώς τα δύο δέντρα αλλά τι; Και είμαστε σίγουροι ότι με αυτό τον τρόπο θα βρούμε τα σημεία που ζητάμε; Και επίσης θα είναι ένα και μοναδικό το σημείο τομής;

ΜΑΘ$_5$: Εγώ με την ομάδα μου πιστεύουμε ότι δύο είναι τα πιθανά σημεία που πρέπει να ψάξουμε για το θησαυρό.

ΔΙΔΑΣΚ: Πως εργαστήκατε για να βρείτε αυτά τα σημεία;

ΜΑΘ$_7$: Σκεφτήκαμε που μπορεί να βρίσκονται σημεία που θα απέχουν 7 μ από ένα συγκεκριμένο σημείο; Μόνο πάνω σε ένα κύκλο που θα έχει ακτίνα 7μ. άρα το ίδιο θα ισχύει και για αυτά που θα απέχουν 4 μέτρα.

ΔΙΔΑΣΚ: Και πως συνεχίσατε;

ΜΑΘ$_7$: Διαγράψαμε δύο κύκλους, έναν με κέντρο το πεύκο και ακτίνα 7 μέτρα και έναν με κέντρο τη βελανιδιά και ακτίνα 4 μέτρα.

ΔΙΔΑΣΚ: Ναι αλλά το σημείο ή τα σημεία που θα βρω δε θα πρέπει να απέχουν συγχρόνως 4 μέτρα από τη βελανιδιά και 7 από το πεύκο;

ΜΑΘ$_8$: Αυτήν την απορία είχαμε και εμείς αλλά μετά την κατασκευή των δύο κύκλων παρατηρήσαμε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Εξετάζοντας τα δύο αυτά σημεία είδαμε ότι ανήκουν και στους δύο κύκλους, άρα βάση αυτών που μάθαμε για τον κύκλο τα σημεία θα απέχουν ταυτόχρονα 7 εκ από το πεύκο και 4 εκ από τη βελανιδιά που είναι τα δύο κέντρα των κύκλων που διαγράψαμε.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα που καταλήξατε;

ΜΑΘ$_8$: Ότι αυτά τα δύο σημεία τομής των κύκλων είναι τα σημεία του θησαυρού αφού έχουν ταυτόχρονα απόσταση 7 και 4 μέτρα αντίστοιχα από τα δύο δέντρα.

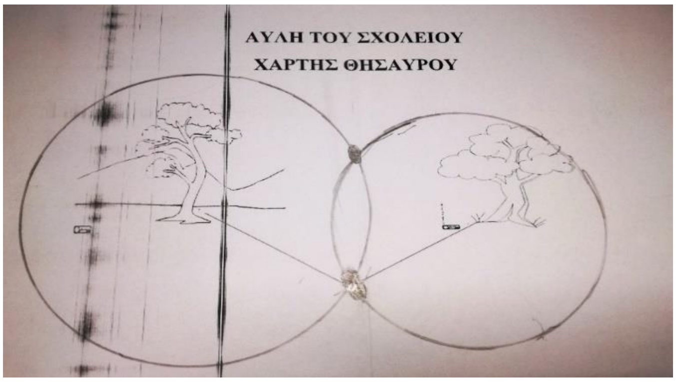
Μέσα από τις συζητήσεις των παιδιών βλέπουμε ότι κάποιοι δεν εκφράζουν με σωστό τρόπο τη σκέψη τους και κάπου μπερδεύονται και προσπαθούν να τη ξεδιαλύνουν, κάποιοι άλλοι με τη βοήθεια των οδηγιών του χάρτη τους αλλά και τη γνώση της ίσης απόστασης των σημείων του κύκλου από το κέντρο του, αποφασίζουν να διαγράψουν δύο κύκλους διαφορετικούς με διαφορετικά κέντρα και ακτίνες. Στο σημείο αυτό οι εξερευνητές μας γίνονται ταυτόχρονα και ζωγράφοι αφού παίρνουν χρώματα και τραβούν γραμμές στον τεράστιο πίνακα της αυλής. Ο μεγάλος προβληματισμός τους όμως είναι ότι εδώ θα πρέπει τα σημεία που θα βρουν να πληρούν συγχρόνως την αρχή της απόστασης των 7 και 4 μέτρων αντίστοιχα από τα δύο δέντρα που θα είναι και τα κέντρα των κύκλων τους.

Αυτό στην αρχή τους κάνει σκεπτικούς γιατί δεν αντιμετώπισαν παρόμοια προβληματική κατάσταση, αλλά διαγράφοντας τους δύο κύκλους διαπιστώνουν ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία, τα οποία εξετάζοντας τα διαπιστώνουν ότι και τα δύο σημεία είναι κοινά και για τους δύο κύκλους, άρα είναι τα σημεία που τους υποδεικνύει ο χάρτης, αφού απέχουν ταυτόχρονα 4 μέτρα από τη βελανιδιά και 7 από το πεύκο.

Αυτό που διαπιστώνεται όμως είναι ότι όσο οι δραστηριότητες προχωρούν τα παιδιά καταφεύγουν όλο και πιο εύκολα στην επιτυχή χρήση της γεωμετρικής έννοιας του κύκλου ως θεωρητικού εργαλείου για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων απόστασης, γίνεται δηλαδή εύκολα αντιληπτό πόσο πολύ έχουν εξοικειωθεί με την αποκτηθείσα γνώση της ιδιότητας του κύκλου.

Στη συνέχεια θα μεταφερθούν στην τάξη τους και η διδάσκουσα θα τους μοιράσει ένα φύλλο χαρτί (παράρτημα Β, 8ο φύλλο), όπου πάνω του είναι αποτυπωμένη σε σμίκρυνση η προβληματική κατάσταση του θησαυρού που αντιμετώπισαν στην αυλή και τους ζητάει να την αποδώσει ο καθένας ατομικά. Το αποτέλεσμα είναι αρκετά εντυπωσιακό, καθώς πολλά από τα παιδιά αποδίδουν με αρχιτεκτονικό σχεδιασμό την εύρεση του θησαυρού.

Σχέδιο 22: Εντοπισμός ενδεικτικών σημείων θησαυρού

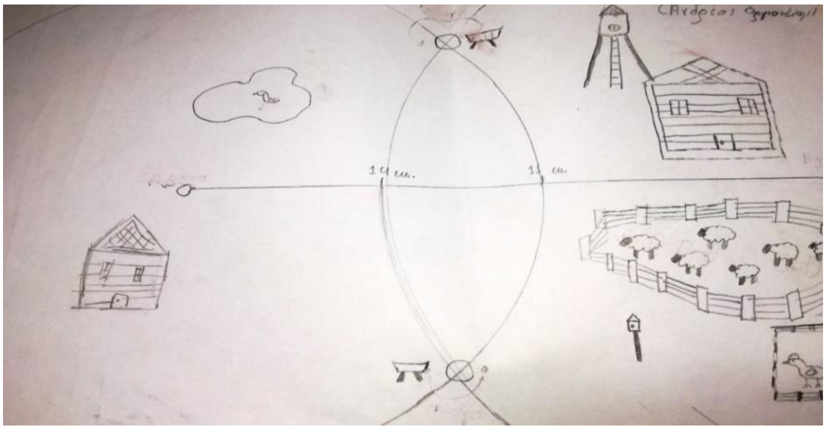


Σχέδιο 23: Εντοπισμός ενδεικτικών σημείων θησαυρού

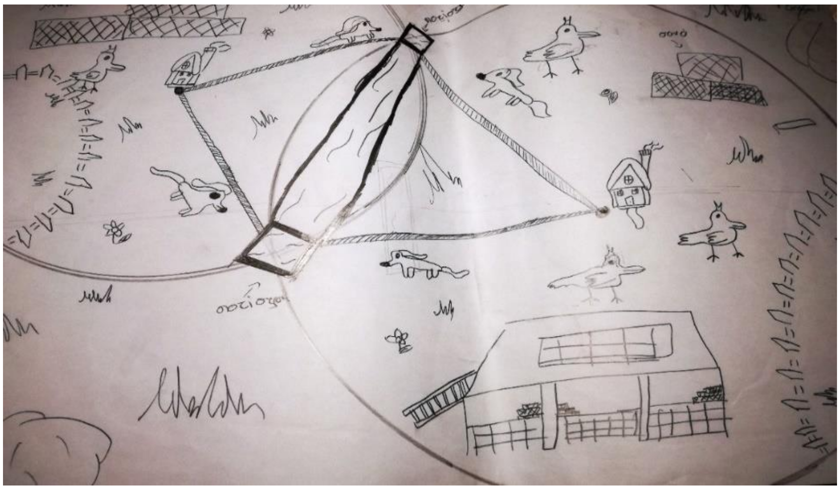
Στην επόμενη φάση της διδακτικής μας παρέμβασης οι μαθητές γίνονται οι ακροατές του προβλήματος που έχει να αντιμετωπίσει ένας ιδιοκτήτης με τις δύο φάρμες αλόγων που διαθέτει. Το πρόβλημα του είναι ότι δεν ξέρει που πρέπει να κατασκευάσει ένα αυτόματο σύστημα ποτίσματος, για να μπορεί να εξυπηρετεί τις ανάγκες που έχουν και οι δύο φάρμες σε νερό. Οι πληροφορίες που τους δίνονται επίσης είναι ότι η απόσταση ανάμεσα στις δύο φάρμες είναι 20 μέτρα και τα άλογα από τη μία φάρμα είναι δεμένα με σχοινί μήκους 11 μέτρων, ενώ αντίστοιχα τα άλογα από την άλλη φάρμα με σχοινί μήκους 14 μέτρα.

Η εκπαιδευτικός τους ζητάει αφού σκεφτούν και εξετάσουν με προσοχή τα δεδομένα του προβλήματος και τα κατανοήσουν, να αναλάβουν δράση σχεδιάζοντας σε πίνακα όλο το πρόβλημα με απώτερο στόχο τη σηματοδότηση της πιθανής τοποθέτησης του αυτόματου ποτίσματος.

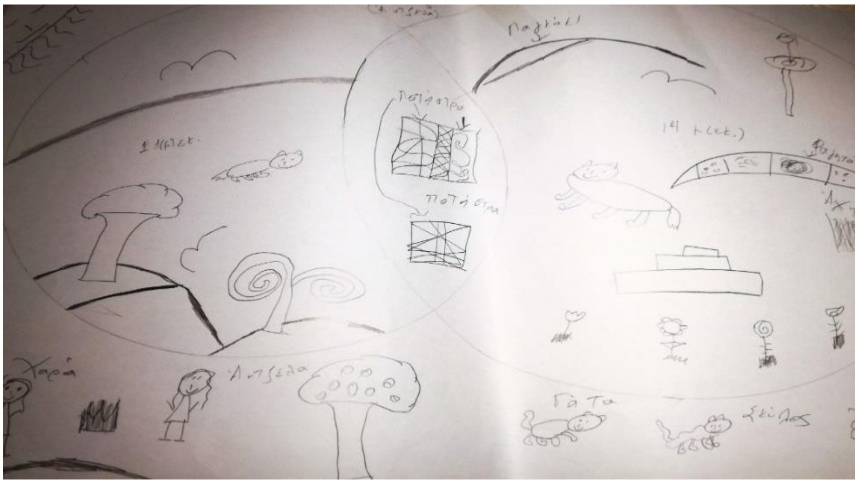
Σχέδιο 24: Αρχιτεκτονική απεικόνιση σηματοδότησης χώρου τοποθέτησης αυτόματου ποτίσματος



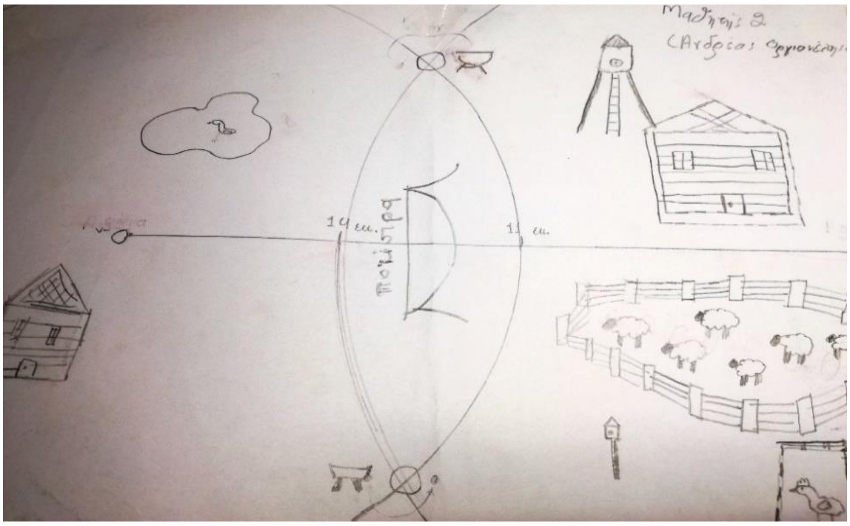
Σχέδιο 25: Αρχιτεκτονική απεικόνιση σηματοδότησης χώρου τοποθέτησης αυτόματου ποτίσματος



Σχέδιο 26: Αρχιτεκτονική απεικόνιση σηματοδότησης χώρου τοποθέτησης αυτόματου ποτίσματος



Σχέδιο 27: Αρχιτεκτονική απεικόνιση σηματοδότησης χώρου τοποθέτησης αυτόματου ποτίσματος



Ο σχεδιασμός του οικοδομήματος της φάρμας πραγματοποιείται με αρχιτεκτονική λεπτομέρεια ξεδιπλώνοντας για άλλη μια φορά την καλλιτεχνική τους φύση. Σηματοδοτούν επίσης τη πιθανή τοποθέτηση του συστήματος για το πότισμα. Αφού ολοκληρωθούν τα σχέδια τους, τοποθετούνται σε κοινή θέα και η τάξη μετατρέπεται σε γκαλερί που εκθέτει πίνακες και οι δημιουργοί τους γίνονται κριτές των ίδιων των έργων τους, στήνονται μπροστά και προσπαθούν να διαβάσουν τους πίνακες, προκειμένου να αποφανθούν μετά από ώριμη σκέψη ποιοι πίνακες μπορούν να αποδώσουν σωστά και με ακρίβεια το χώρο που πιστεύουν πως πληροί τη λύση του προβλήματος.

Τα παιδιά επιχειρηματολογούν και αιτιολογούν τις απαντήσεις τους.

ΔΙΔΑΣΚ: Πως σκεφτήκατε για να βρείτε το σημείο ή τα σημεία τοποθέτησης της ποτίστρας;

$ΜΑΘ_9$: Πήρα σαν κέντρο τη μία φάρμα και με ακτίνα το μήκος του σχοινιού από τα άλογα της δηλαδή 11 μέτρα έφτιαξα έναν κύκλο, στη συνέχεια πήρα σαν κέντρο τη δεύτερη φάρμα και μήκος ακτίνας 14 μέτρα που ήταν το σχοινί από τα άλογα της δεύτερης φάρμας και δημιούργησα έναν δεύτερο κύκλο. Στα σημεία τώρα που τέμνονταν αυτοί οι δύο κύκλου, πιστεύω ότι πρέπει να τοποθετήσω την ποτίστρα.

$ΜΑΘ_4$: Βασίστηκα και πάλι στην ιδιότητα του κύκλου και εργάστηκα όπως και στην προηγούμενη άσκηση. Χάραξα έναν κύκλο με κέντρο τη μία φάρμα και ακτίνα 11 εκατοστά και έναν δεύτερο κύκλο με κέντρο την άλλη φάρμα και ακτίνα 14, βρήκα τα σημεία που τέμνονται οι δύο κύκλοι και θεώρησα ότι είναι τα ζητούμενα.

ΔΙΔΑΣΚ: Επομένως στους πίνακες στους οποίους αποδώσατε σχεδιαστικά την όλη προβληματική κατάσταση, που οριοθετείτε τελικά τον ακριβή χώρο τοποθέτησης του συστήματος;

$ΜΑΘ_1$: Θεωρώ ότι είναι ή το ένα σημείο που συναντιούνται οι δύο κύκλοι ή το άλλο.

$ΜΑΘ_6$: Συμφωνώ με την μαθήτρια 1.

$ΜΑΘ_8$: Και εγώ συμφωνώ με τους δύο προηγούμενους συμμαθητές μου.

$ΜΑΘ_3$: Πιστεύω ότι πρέπει να είναι ο κοινός χώρος των δύο κύκλων, δηλαδή ο χώρος που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο σημεία τομής

$ΜΑΘ_3$: Στο ίδιο χώρο με την μαθήτρια 3 τοποθέτησα και εγώ την ποτίστρα μου.

ΔΙΔΑΣΚ: Επομένως πείτε μου ποιοι πίνακες αποδίδουν το σωστό χώρο;

$ΜΑΘ_6$: Πιστεύω ότι οι πίνακες που αποδίδουν σωστά τη θέση τοποθέτησης του συστήματος είναι οι 1. 6. 9. 10 …γιατί το τοποθέτησαν στο σημείο τομής των δύο κύκλων.

$ΜΑΘ_{11}$: Το ίδιο πιστεύω και εγώ γιατί τα σημεία αυτά θα απέχουν συγχρόνως 14 και 11 μέτρα από τις δύο φάρμες άρα θα εξυπηρετεί τα άλογα τους.

$ΜΑΘ_2$: Εγώ πιστεύω ότι μπορεί να είναι και ο κοινός χώρος των δύο κύκλων αλλά και τα σημεία τομής.

ΔΙΔΑΣΚ: Σύμφωνα με την διατύπωση του προβλήματος ο χώρος τοποθέτησης της ποτίστρας θα έπρεπε να ισαπέχει συγχρόνως 11 και 14 μέτρα από τις δύο φάρμες για να ικανοποιεί τις ανάγκες ποτίσματος των αλόγων τους, κάτι παρόμοιο που αντιμετωπίσαμε στη προηγούμενη δραστηριότητα μας;

$ΜΑΘ_{11}$: Όχι δεν λέει κάτι τέτοιο το πρόβλημα

ΔΙΔΑΣΚ: Μήπως να δούμε πιο προσεκτικά την όλη προβληματική κατάσταση παρατηρώντας παράλληλα και τους πίνακες μας.

ΔΙΔΑΣΚ: Συνεχίζεται λοιπόν να πιστεύεται πως το σύστημα ποτίσματος πρέπει να τοποθετηθεί μόνο στα σημεία τομής των δύο κύκλων;

$ΜΑΘ_7$: Πιστεύω πως δεν ήταν η σωστή απόφαση αφού είδαμε ότι πουθενά στις πληροφορίες μας δεν υπήρχε ο περιορισμός ότι το σημείο θα έπρεπε να ισαπέχει συγχρόνως από τις δύο φάρμες 11και 14 εκατοστά, αλλά και μετά από την προσεκτική παρατήρηση των σχεδίων μας είδαμε ότι χώρος τοποθέτησης ήταν πιο μεγάλος και κοινός και για τους δύο κύκλους δηλαδή το κοινό κομμάτι τομής τους.

ΔΙΔΑΣΚ: Άρα καταλήγουμε στην απόφαση ότι ο κοινός τομέας ανάμεσα στους δύο κύκλους που τέμνονται είναι ο κατάλληλος για να τοποθετηθεί το αυτόματο σύστημα ποτίσματος, ώστε να εξυπηρετεί τα άλογα και από τις δύο φάρμες;

$ΜΑΘ_{12}$: Ναι γιατί στο χώρο αυτό μπορούν να φτάνουν τα άλογα και από τις δύο φάρμες.

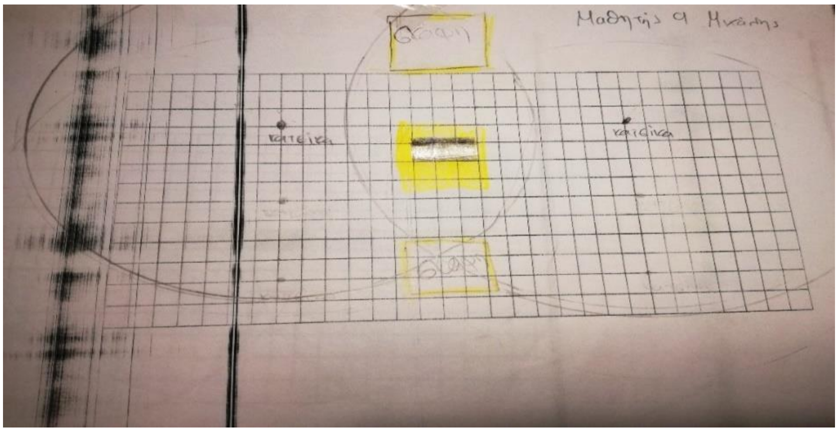
Η καινούρια προβληματική κατάσταση παρουσιάζει αρκετά κοινά σημεία με την προηγούμενη, αλλά οι περισσότεροι ταυτίζονται με την πρότερη και παρασύρονται χωρίς να ακούσουν και να διαβάσουν προσεκτικά το ζητούμενο αυτή τη φορά, το οποίο διαφοροποιεί τη λύση, προχωρούν και ακολουθούν την ίδια διαδικασία η οποία φυσικά μέχρι ένα σημείο είναι σωστή, αλλά όχι και οι προτεινόμενες θέσεις οι οποίες θεωρούν πως και εδώ θα πρέπει να είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων .

Μετά από αυτή τη λανθασμένη οπτική τοποθέτησης του συστήματος η διδάσκουσα τους ζητάει να ξαναδιαβάσουν αυτή τη φορά πιο προσεκτικά τα δεδομένα του προβλήματος, για να διαπιστώσουν αν η διατύπωση είναι απολύτως η ίδια με το προηγούμενο ή αν υπάρχει κάποια διαφορά στις τωρινές πληροφορίες που ίσως δεν τις έδωσαν τη πρέπουσα σημασία, με αποτέλεσμα να τους οδηγήσουν σε λάθος αποφάσεις.

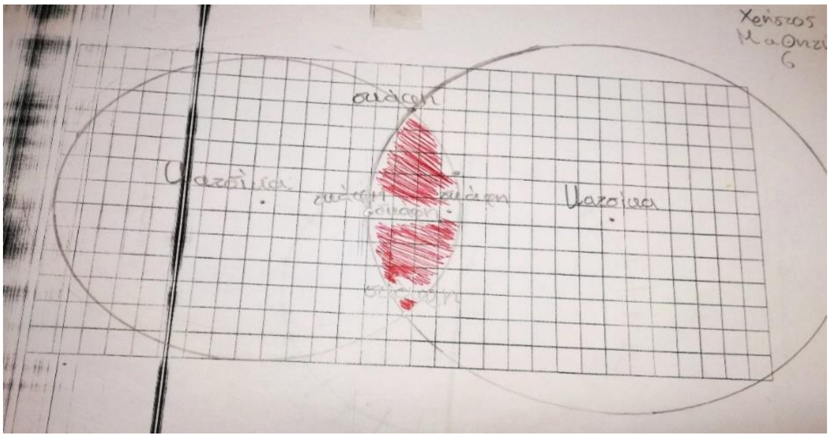
Ακολουθεί ολόκληρη οπτική αναπαράσταση της πορείας που θα ακολουθήσουν τα άλογα μπροστά στους πίνακες τους, για να μπορέσουν να αντιληφθούν καλύτερα και οι ίδιοι το χώρο που ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του προβλήματος και θα είναι κατανοητός και αποδεχτός από όλους.

Η αλλαγή της άποψης των μαθητών σχετικά με τα πιθανά σημεία τοποθέτησης του συστήματος είναι ολοκάθαρα, καθώς πείθονται και όλοι μαζί αποφασίζουν πως παρασύρθηκαν και έβαλαν περιορισμούς οι οποίοι δεν υφίσταται αυτή τη φορά, που τους οδήγησαν όμως σε λανθασμένες διαπιστώσεις. Επανεξετάζοντας τα σχέδια τους παρατηρούν και ανακαλύπτουν το σωστό χώρο, που είναι το κοινό κομμάτι τομής των δύο κύκλων που διέγραψαν, αφού θα μπορεί να εξυπηρετεί τις ανάγκες των αλόγων και από τις δύο φάρμες. Το ίδιο αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται με την αναπαράσταση της ίδιας προβληματικής κατάστασης σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί με τη διαφορά ότι τα παιδιά αλλάζουν λίγο την ιστορία τους, οι ήρωες τους από άλογα μετατρέπονται σε κατσίκες και το σύστημα ποτίσματος τους σε σκάφη με χόρτα. Ο σχεδιασμός στο τετραγωνισμένο χαρτί και η επικύρωση της ορθότητας του αποτελέσματος γίνεται χωρίς προβλήματα και αυτό δείχνει το μεγάλο κέρδος των μαθητών, της κατανόησης και κατάκτησης δύο σημαντικών εργαλείων του κύκλου και του κυκλικού δίσκου αντίστοιχα με τα οποία μπορούν να γίνουν ικανοί λύτες και να αντιμετωπίσουν προβληματικές καταστάσεις της καθημερινότητας τους.

Σχέδιο 28: Επικύρωση της ορθότητας του αποτελέσματος εύρεσης τοποθέτησης του συστήματος σε τετραγωνισμένο χαρτί



Σχέδιο 29: Επικύρωση της ορθότητας του αποτελέσματος εύρεσης τοποθέτησης του συστήματος σε τετραγωνισμένο χαρτί



Οι μαθητές δεν εργάζονται πλέον στον εμπειρικό αλλά στον θεωρητικό πόλο και εφαρμόζοντας τα επισημοποιημένα συμπεράσματα (GII) δημιουργούν ένα προσωπικό ΓΧΕ λεκτικό και πλούσιο σε γνώσεις ιδιοτήτων όπως αυτή του κύκλου αλλά και του ορισμού του κυκλικού δίσκου βασικά τους πλέον εργαλεία. Δεν εφαρμόζουν απλώς τις ιδιότητες αλλά με τη αρωγή τους επεκτείνουν την γεωμετρική τους δραστηριότητα, μοντελοποιούν προβληματικές καταστάσεις και οδηγούνται σε κατασκευές.

Η ενεργοποίηση των απαραίτητων ιδιοτήτων για την επίλυση προβλημάτων ακολουθείται και από την ενεργοποίηση των κατάλληλων τεχνουργημάτων – εργαλείων που θα συνεισφέρουν αποτελεσματικά στην γεωμετρική κατασκευή και θα τους βοηθήσουν να ικανοποιήσουν τα σχέδια για τα προσδοκόμενα επιθυμητά αποτελέσματα. Η γεωμετρική εργασία λοιπόν τοποθετείται κύρια στο επίπεδο [Λεκτικό – Εργαλειακό].

Ανάλυση αποτελεσμάτων των ατομικών συνεντεύξεων

Μετά την ολοκλήρωση των διδακτικών παρεμβάσεων με την εκπόνηση μιας σειράς στοχευμένων δραστηριοτήτων για την κατανόηση και κατάκτηση του εννοιολογικού ορισμού του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου, πραγματοποιήθηκαν οι ατομικές συνεντεύξεις των μαθητών.

Οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένες, δηλαδή υπήρχε ένα γενικό πλάνο με ερωτήσεις και δραστηριότητες, οι οποίες έλαβαν μέρος ή στον ήσυχο χώρο της βιβλιοθήκης του σχολείου μας ή σε κάποια άδεια αίθουσα. Παρά το γεγονός ότι δεν υπήρχε χρονικός περιορισμός στις συνεντεύξεις, κάθε συνέντευξη είχε διάρκεια από 25- 40 λεπτά.

Οι μαθητές προσέρχονταν ένας ένας, απαντούσαν στις ερωτήσεις και εκτελούσαν τις εργασίες που τους ανάθετε η εκπαιδευτικός. Συνολικά εξετάστηκαν 12 μαθητές, συγκεκριμένα 7 αγόρια και 5 κορίτσια.

Στην αρχή της συνέντευξης έγινε προφορική διαβεβαίωση της διατήρησης της ανωνυμίας τους στις διάφορες απαντήσεις, ότι δηλ. τα ονόματα τους και άλλες προσωπικές πληροφορίες θα παραμείνουν εμπιστευτικές και ότι αυτή η συνέντευξη αποτελεί σπουδαία βοήθεια για την ερευνήτρια, αλλά και μία ευκαιρία για τους ίδιους να εκφράσουν τις απόψεις τους για το μάθημα και τη διδασκαλία του, τις οποίες η διδάσκουσα θα λάβει σοβαρά υπόψη της και θα τις μεταφέρει στην ερευνητική κοινότητα.

Για να αποφευχθούν τυχόν δυσκολίες ή αδυναμίες που δεν είχαν προβλεφθεί από την ερευνήτρια, έγιναν τρεις δοκιμαστικές συνεντεύξεις σε μαθητές πριν την έναρξη της έρευνας.

Η προσωπική συνέντευξη επίσης προτιμήθηκε από μεθοδολογικής άποψης έναντι κάποιου άλλου εργαλείου, καθώς μέσα από την προσωπική επαφή με το μαθητή η εκπαιδευτικός μπορεί να συλλέξει δεδομένα που θα χάνονταν διαφορετικά, αλλά και με δεδομένο ότι δεν εστιάζει μόνο στο αποτέλεσμα, αλλά σε όλη τη διαδικασία μέσω της οποίας φτάνουν σε αυτό με τα ενδεχόμενα λάθη, τους δισταγμούς και τις διορθώσεις τους, η συνέντευξη ήταν η μόνη που μας παρείχε την ευκαιρία για κάτι τέτοιο. Όπως επίσης ο χρόνος που οι μαθητές χρειάστηκαν για να πραγματοποιήσουν την κάθε δραστηριότητα καθώς και οι αντιδράσεις τους, ήταν στοιχεία αδύνατα να παρατηρηθούν αλλιώς.

Οι ερωτήσεις και οι δραστηριότητες ομαδοποιήθηκαν ανάλογα με τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας.

Η συνέντευξη ήταν δομημένη σε δύο θεματικούς άξονες.

Στον Α΄ Θεματικό άξονα μέσα από ερωτήσεις κλειστού και ανοιχτού τύπου γίνεται διερεύνηση των συναισθημάτων και της σχέσης των παιδιών με τη Γεωμετρία και τη διδασκαλία της και πιο ειδικά των αντιλήψεων τους για το συγκεκριμένο μάθημα, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, καθώς και τις απόψεις τους για το πώς νομίζουν ότι μαθαίνουν καλύτερα. Ζητάει επιπρόσθετα να διερευνηθούν και οι απόψεις και η στάση τους στη σύνδεση Γεωμετρίας- Τέχνης που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια των διδακτικών παρεμβάσεων

Στον Β΄ Θεματικό άξονα της συνέντευξης οι μαθητές υποβάλλονται σε εκτέλεση τεσσάρων δραστηριοτήτων γνωστικού περιεχομένου[3] σχετικά με τα θέματα της Γεωμετρίας που είχαν πραγματευτεί στις πρότερες δραστηριότητες των διδακτικών παρεμβάσεων, για να αξιολογηθεί η διατηρησιμότητα της γνώσης. Η πρώτη δραστηριότητα αφορά την ικανότητα ανάλυσης του σχήματος και χρήσης της σχετικής ορολογίας του κύκλου, στην επόμενη γίνεται επιβεβαίωση της απόκτησης της ικανότητας χρήσης της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου για την επίλυση προβλημάτων ίσης απόστασης, ακολουθεί έρευνα σχετικά με την καινούρια δεξιότητα αξιοποίησης των γνώσεων που σχετίζονται άμεσα με τον κύκλο, όπως κέντρο – ακτίνα και τέλος στην τέταρτη εργασία γίνεται προσπάθεια αξιολόγησης της κατανόησης του ελεύθερου σχεδίου, αλλά και της ικανότητας των μαθητών να κάνουν χρήση ενός συλλογισμού βασισμένου στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων που είναι ορατοί και να επιλύουν ασκήσεις με ελεύθερα σχέδια .

Α΄ΘΕΜΑΤΙΚΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

Ανάμεσα στους στόχους των διδακτικών παρεμβάσεων συγκαταλέγεται και η συναισθηματική ευεξία των μαθητών κατά τη διδασκαλία, για αυτό το λόγο ο Α΄ θεματικός άξονας περιλαμβάνει 7 ερωτήσεις από τις οποίες οι 4 είναι πολλαπλών επιλογών κλειστού τύπου και γίνεται διερεύνηση των συναισθημάτων αλλά και των απόψεων των παιδιών για το μάθημα της Γεωμετρίας, των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν αλλά και προτάσεις τους για το πως θα μπορούσαν να οδηγηθούν στην κατανόηση των καινούριων γεωμετρικών εννοιών με ένα πιο εύκολο και ευχάριστο

[3]Οι τέσσερις ασκήσεις γνωστικού περιεχομένου στο υλικό των συνεντεύξεων είναι από Fénichel, M., & Taveau, C. (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond. DVD, CRDP Créteil.

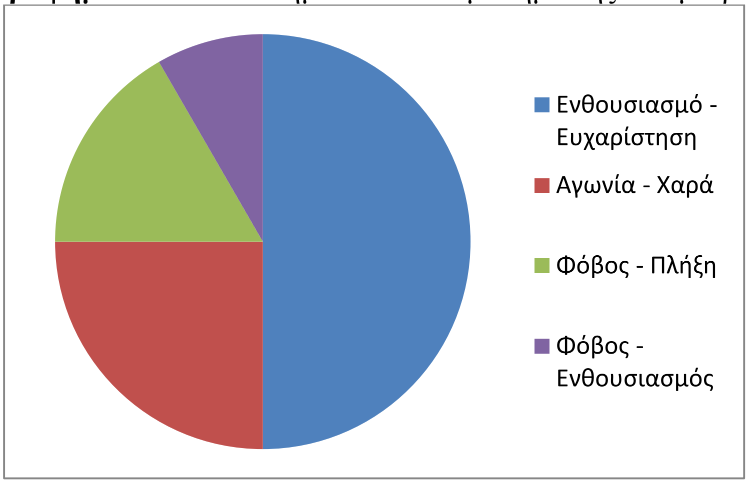
τρόπο διδασκαλίας. Οι ερωτήσεις αυτές αφορούν τη διδασκαλία της γεωμετρίας σε μια παραδοσιακή εκδοχή πριν την πραγματοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων.

Οι επόμενες 3 ερωτήσεις είναι ανοιχτού τύπου και ανιχνεύονται οι ιδέες και γνώμες των μαθητών όσον αφορά τη σύνδεση της Γεωμετρίας με την Τέχνη, η οποία έγινε ορατή στο πλαίσιο διδασκαλίας των διδακτικών παρεμβάσεων, την επιρροή που είχαν στη γνωστική και μαθησιακή δυναμική των παιδιών, τη δημιουργία θετικών εντυπώσεων ή μη, καθώς και τα πιστεύω τους σχετικά με την αλλαγή στην στάση τους κατά την ενασχόληση τους με το συγκεκριμένο μάθημα.

Στο ερώτημα – Όταν ακούω τη λέξη Γεωμετρία τι αισθάνομαι; στις ερωτήσεις που δόθηκαν στους μαθητές στο πρώτο μέρος της συνέντευξης τους, από τους 12 οι μισοί δήλωσαν ως πρώτες προτιμήσεις τους συναισθήματα, όπως ευχαρίστηση και ενθουσιασμό, το ¼ εξέφρασε ανάμεικτα συναισθήματα αγωνίας για το άγνωστο αντικείμενο που πρόκειται να διδαχθούν και χαράς όταν πλέον έχουν κατανοήσει και κατακτήσει την καινούρια γνώση και μόνο 2 μαθητές εμφάνισαν αρνητικά συναισθήματα, σημειώνοντας ότι κυριαρχεί ο φόβος και η πλήξη στις επιλογές τους, γιατί τις περισσότερε φορές τους είναι δυσνόητα αυτά που ακούνε, δεν μπορούν να συμμετέχουν μαζί με τους άλλους στην επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων με αποτέλεσμα να βαριούνται και να αδιαφορούν.

Χαρακτηριστική ήταν και η επιλογή μιας μαθήτριας, η οποία δήλωσε ταυτόχρονα συναισθήματα φόβου και ενθουσιασμού. Στην ερώτηση της εκπαιδευτικού πως γίνεται να συνυπάρχουν δύο τόσο έντονα και αντίθετα συναισθήματα, επιχειρηματολόγησε ότι ενώ βρίσκει πολύ ενδιαφέρον το μάθημα και της αρέσει, αισθάνεται παράλληλα φόβο και αγωνία, μπροστά στο ενδεχόμενο αδυναμίας να απαντήσει σε ερωτήματα της εκπαιδευτικού, επειδή δεν θα έχει κατανοήσει τη θεωρία των γεωμετρικών εννοιών που θα έχει ειπωθεί σε προηγούμενη διδασκαλία.

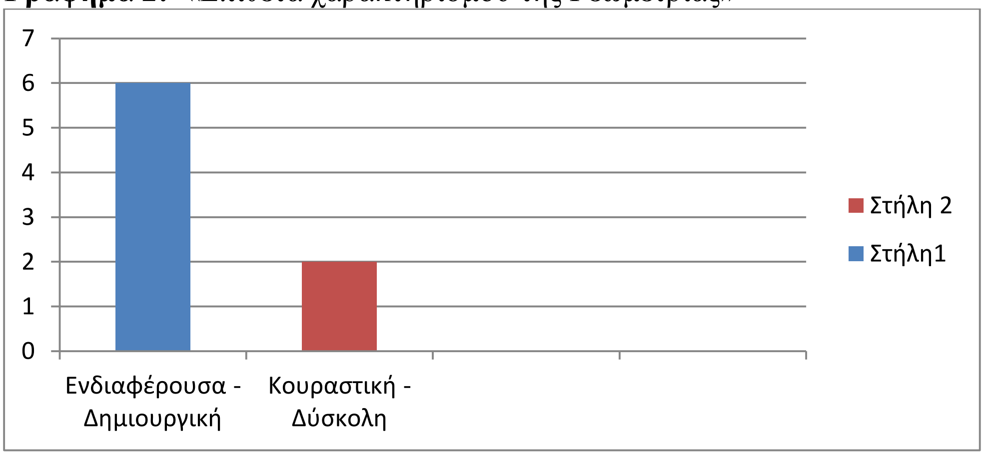
Γράφημα 1: «Συναισθήματα από το μάθημα της Γεωμετρίας»



Μελετώντας τις απαντήσεις που δόθηκαν στην δεύτερη ερώτηση που αφορά το χαρακτηρισμό του μαθήματος με κάποια επίθετα που τους δόθηκαν συγκεκριμένων επιλογών, καταλαβαίνουμε ότι έχουν άμεση σχέση με τα συναισθήματα που εξέφρασαν στην προηγούμενη ερώτηση, καθώς οι ίδιοι μαθητές με τα θετικά συναισθήματα χρησιμοποίησαν και ανάλογους χαρακτηρισμούς που ανταποκρίνονταν σε αυτά που ένοιωθαν. Κυριάρχησαν επίθετα όπως δημιουργική και ενδιαφέρουσα και μόνο 2 και πάλι μαθητές, οι ίδιοι με αυτούς που είχαν εκφράσει αρνητικά συναισθήματα, την ονόμασαν δύσκολη ή βαρετή.

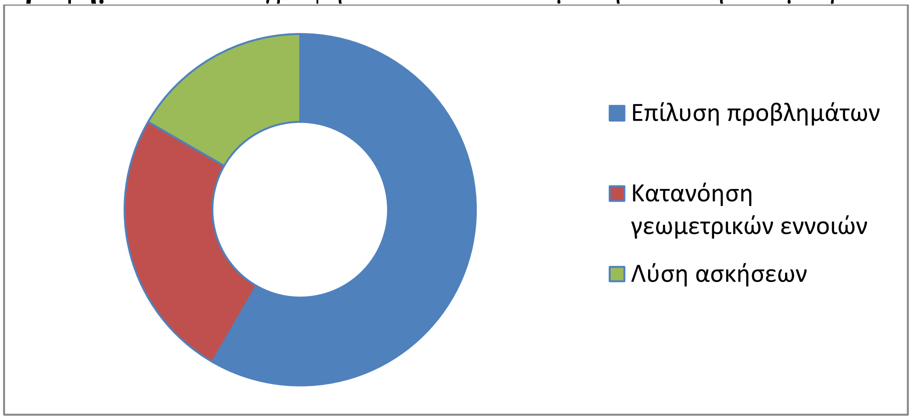
Διαπιστώνεται έτσι κατά κάποιο τρόπο και η αληθοφάνεια των απαντήσεων τους και στις δύο ερωτήσεις, καθώς θα ερχόταν σε πλήρη αντίθεση αρνητικά συναισθήματα παιδιών με θετικούς χαρακτηρισμούς του συγκεκριμένου μαθήματος.

Γράφημα 2: «Επίθετα χαρακτηρισμού της Γεωμετρίας»



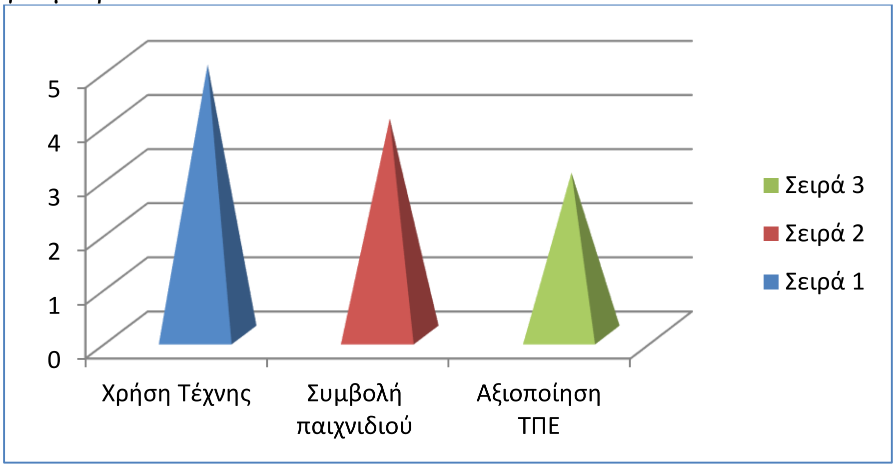
Τα παιδιά έδειξαν ότι μπορεί να αξιολόγησαν στην πλειοψηφία τους τη Γεωμετρία λόγο των ενοτήτων που διαπραγματεύεται ως ένα μαθησιακό αντικείμενο δημιουργικό και με ενδιαφέρον, αλλά στην ερώτηση που ακολούθησε για το τι είναι αυτό που τους δυσκολεύει περισσότερο, γίνεται αντιληπτό ότι δεν παύει να είναι ένα δύσκολο μάθημα, που δημιουργεί σε όλους σχεδόν τους μαθητές ταλαιπωρία κυρίως στην επίλυση προβλημάτων, ακολουθεί η έλλειψη κατανόησης της θεωρίας των βασικών γεωμετρικών εννοιών, η οποία αποτελεί και βασικό συστατικό της γνώσης, την οποία θα πρέπει οπωσδήποτε να κατακτήσουν για να μην αντιμετωπίζουν την δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων, αλλά και της λύσης των ασκήσεων που είναι και η τρίτη κατά σειρά αντιξοότητα στα πλαίσια της ενασχόλησης τους με το μάθημα της Γεωμετρίας, σε διαπίστωση που έγινε μετά τον έλεγχο της καταγραφής των απαντήσεων από τους ίδιους τους μαθητές.

Γράφημα 3: «Καταγραφή δυσκολιών των μαθητών στη Γεωμετρία»



Η ενσωμάτωση της Τέχνης στα μαθήματα της Γεωμετρίας, η συμβολή του παιχνιδιού στα γεωμετρικά δρώμενα, αλλά και η αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών ήταν μερικές από τις προτάσεις των παιδιών για έναν διαφορετικό και πιο εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας, που θα συνέβαλε στην πιο εύκολη και καλύτερη εκμάθηση των νέων εννοιών. Γεγονός όμως που καθιστά και άμεσα κατανοητή την αλλαγή που πρέπει να επέλθει στο παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας.

Γράφημα 4: «Εναλλακτικοί τρόποι διδασκαλίας για ευκολότερη εκμάθηση των γεωμετρικών εννοιών»



Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές απόψεις των παιδιών σχετικά με το αν η σύνδεση της Γεωμετρία με την Τέχνη, η οποία έλαβε μέρος στα πλαίσια των δραστηριοτήτων που πραγματοποιήθηκαν, με σκοπό την κατανόηση της έννοιας του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου, επέδρασσε θετικά στην εύκολη κατάκτηση της, καθώς και στο να διατηρηθεί στη μνήμη των παιδιών.

Μαθητής2: Εμένα με βοήθησε πολύ αυτό που κάναμε, ήταν αρκετά ενδιαφέρον γιατί μέσα από την τέχνη και το παιχνίδι μπόρεσα να κατανοήσω πολλά πράγματα για τον κύκλο.

Μαθητής6: Τα μαθήματα αυτά επέδρασσαν θετικά στη μάθηση μου και επίσης με έκαναν να κατανοώ πιο εύκολα τα προβλήματα και να θυμάμαι πάντα την ιδιότητα του κύκλου

Μαθητής4: Ναι επειδή το βρήκα μόνος μου και επειδή επίσης πιστεύω πως αυτό θα με βοηθήσει να το μάθω καλύτερα.

Μαθητής1: Με βοήθησε γιατί μέσα από τις συγκεκριμένες δραστηριότητες και με τον τρόπο που έγιναν κατάλαβα πιο εύκολα την έννοια του κύκλου, γιατί συμμετείχαμε όλοι μαζί με πιο διασκεδαστικό τρόπο.

Μαθητής3: Μου άρεσε αυτός ο τρόπος μαθήματος και νιώθω χαρά γιατί τα κατάλαβα όλα πιο εύκολα από το να έκανα ένα κανονικό μάθημα.

Μαθητής8: Στο τρόπο που έγινε το μάθημα ήταν κάτι το διαφορετικό και όχι ο συνηθισμένος τρόπος και αυτό με έκανε να μάθω πιο εύκολα τον ορισμό του κύκλου και να τον εντοπίζω σχεδόν μονομιάς.

Μαθητής7: Με βοήθησε να το καταλάβω πιο εύκολα από τις ζωγραφιές και τα παιχνίδια και έτσι ενώ διασκεδάζαμε μαθαίναμε κιόλας.

Οι απαντήσεις κάνουν ευδιάκριτη τη βοήθεια που προσέφεραν οι συγκεκριμένες δραστηριότητες και ο τρόπος με τον οποίο εκτελέστηκαν, καθώς χαρακτήρισαν το μάθημα διαφορετικό, ευχάριστο, διασκεδαστικό, ομαδικό, εύκολο και οι μαθητές οδηγήθηκαν στην εκμάθηση του ορισμού της έννοια του κύκλου χωρίς ιδιαίτερη

δυσκολία και μέσα από ένα διασκεδαστικό και πρωτόγνωρο είδος μάθησης, το οποίο ξεφεύγει από τα στενά και κλασικά πλαίσια και που θα συμβάλει στη διατηρησιμότητα της.
Ακολουθούν απαντήσεις των παιδιών που γνωστοποιούν αν ή όλη εμπλοκή τους με τη Γεωμετρία μέσα από την Τέχνη άλλαξε τη στάση τους στο συγκεκριμένο μάθημα.

Μαθήτρια1 Ναι γιατί δημιούργησα και εγώ έναν κύκλο σωστά μόνος μου και με βοήθησε να το δω το μάθημα ποιο φιλικά και να το καταλάβω.
Μαθητής6: Πιστεύω ότι μέσα από αυτά τα μαθήματα η στάση μου για τη γεωμετρία έγινε καλύτερη, διότι τα μαθήματα με βοήθησαν στην κατανόηση της ιδιότητας του κύκλου.
Μαθητής2: Η στάση μου άλλαξε και έγινε πιο θετική, γιατί κατάλαβα ότι αν όλα τα άλλα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να μετρηθούν με τον ίδιο τρόπο όπως ο κύκλος, η Γεωμετρία θα είναι πιο εύκολη απ' όσο νόμιζα
Μαθητής4: Με κάνει να αλλάξω τη στάση μου απέναντι της, διότι με βοήθησε να καταλάβω μόνος μου τον κύκλο.
Μαθήτρια3: Πιστεύω ότι έφερε αλλαγές στην στάση μου στη Γεωμετρία, γιατί ο τρόπος διδασκαλίας ήταν πιο εύκολος και διασκεδαστικός
Μαθητής9: Η στάση μου θα είναι πολύ διαφορετική, γιατί μέχρι τώρα μου φαινόταν δύσκολη. Ο τρόπος που δουλέψαμε με βοήθησε και έκανε το μάθημα πιο εύκολο.
Μαθήτρια8: Σίγουρα θα αντιμετωπίσω το συγκεκριμένο μάθημα πιο ευχάριστα, επειδή βοηθήθηκα πολύ και θα ήθελα να ερευνήσω τη Γεωμετρία περισσότερο.

Σε όλη τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων οι μαθητές έμειναν απόλυτα ικανοποιημένοι και ευχαριστημένοι με τη μορφή των δραστηριοτήτων και τις βιωματικές εμπειρίες που τους προσέφεραν, καθώς κάθε φορά γινόταν σύνδεση κάποιου είδους τέχνης με τα γεωμετρικά δρώμενα στα πλαίσια της διδασκαλίας.
Η καινούρια αυτή γνωριμία της Γεωμετρίας μέσα από την Τέχνη, τους έκανε να διαφοροποιήσουν τα πιστεύω τους και επέφερε θετικές αλλαγές στη στάση απέναντι της. Χαρακτηριστική είναι και η επιθυμία που εκφράζουν τα παιδιά να γνωρίσουν με αυτό τον τρόπο διδασκαλίας περισσότερο και σε βάθος τις διάφορες καινούριες έννοιες της, που θα προκύψουν στις ενότητες που θα ακολουθήσουν.

Β΄ ΘΕΜΑΤΙΚΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

ΠΡΩΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στην πρώτη δραστηριότητα όπου θα πρέπει να διαπιστωθεί αν τα παιδιά είναι σε θέση να μπορούν να αναλύουν ένα σχήμα και να χρησιμοποιούν συγχρόνως και τη σχετική ορολογία του κύκλου, δίνεται από την εκπαιδευτικό ένα σύνθετο σχήμα αποτελούμενο από ένα τετράγωνο κι ένα κύκλο και τους ζητείται να το περιγράψουν λεκτικά σε ένα φίλο τους ο οποίος δεν το βλέπει, με την προοπτική να τον βοηθήσουν να το σχεδιάσει σωστά (παράρτημα Α, άσκηση 1, υλικό συνεντεύξεων).

Αρχικά σχεδόν όλοι οι μαθητές δεν διαθέτουν την ικανότητα να συσχετίσουν τις θέσεις των δύο σχημάτων με τελικό αποτέλεσμα τη μη σωστή λεκτική τοποθέτηση. Επίσης ένας επιπλέον λόγος που συμβάλει καθοριστικά στην προαναφερόμενη δυσκολία, είναι ότι δεν δίνουν την πρέπουσα σημασία στα οπτικά δεδομένα τους.

Γι’ αυτό το λόγο οδηγούνται σε σύγχυση και ερωτηματικά στα οποία δεν παίρνουν άμεσες απαντήσεις, αλλά η εκπαιδευτικός τους καθοδηγεί με τον κατάλληλο τρόπο δίνοντας τις απαραίτητες διευκρινήσεις, ώστε να φτάσουν τελικά σε όσο το δυνατόν πιο πλήρη περιγραφή. Από τους 12 μαθητές λοιπόν οι 6 καταφέρνουν να το αποδώσουν με λεκτικό τρόπο αρκετά καλά, περιγράφοντας την ακριβή θέση στην οποία βρίσκεται το τετράγωνο σε σχέση με τον κύκλο, επισημαίνοντας και το γεγονός ότι οι δύο από τις πλευρές του τετραγώνου είναι ταυτόχρονα και ακτίνες του κύκλου. Άλλοι 4 μαθητές ενώ δίνουν τα σωστά στοιχεία για τη θέση του τετραγώνου μέσα στον κύκλο και αναφέρονται και στις ακτίνες που είναι και πλευρές, παρουσιάζουν πρόβλημα έκφρασης, με αποτέλεσμα αυτό που αποτυπώνεται στο χαρτί τους να μην αποτελεί καθαρή οδηγία για την εκτέλεση σχεδιασμού του σχήματος. Οι 2 που απομένουν από τη μία δίνουν ακριβή στοιχεία της θέσης των δύο σχημάτων, αλλά από την άλλη παραλείπουν να αναφερθούν στην ταύτιση των πλευρών με αυτές των ακτινών. Επιπρόσθετα το ενδιαφέρον τους επικεντρώνονται στην απόδοση του μήκους της πλευράς – ακτίνας του κύκλου σε εκατοστά, στοιχείο το οποίο δεν είναι τόσο ουσιαστικό στην συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Ακολουθούν περιγραφές των παιδιών:

Μαθήτρια2: Ζωγράφισε έναν κύκλο και σχεδίασε ένα τετράγωνο που η πάνω δεξιά γωνία του να ακουμπάει το κέντρο του κύκλου και οι δύο πλευρές του τετραγώνου που είναι μέσα στον κύκλο, είναι οι δύο ακτίνες του.

Μαθητής6: Θα του έλεγα να σχεδιάσει έναν κύκλο και μετά ένα τετράγωνο στο κάτω μέρος του και αριστερά του, έτσι όμως που οι δύο πλευρές του τετραγώνου να είναι και ταυτόχρονα και ακτίνες του κύκλου.

Μαθητής4: Θα του έλεγα να σχεδιάσει έναν κύκλο και ένα τετράγωνο που οι δύο πλευρές του να είναι και ακτίνες του κύκλου. Επίσης το τετράγωνο να βρίσκεται στο κάτω και αριστερό μέρος του κύκλου

Μαθήτρια3: Σχημάτισε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο και οι δύο πλευρές του τετραγώνου να είναι ακτίνες του κύκλου. Το τετράγωνο να βρίσκεται κάτω και αριστερά

Μαθήτρια8: Φτιάξε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο. Ο οποίος κύκλος κάτω αριστερά να έχει το τετράγωνο και οι δύο πλευρές του να μπαίνουν μέσα στον κύκλο και να είναι παράλληλα και ακτίνες του κύκλου

Μαθήτρια7: Κάνε έναν κύκλο και κάτω στον κύκλο αριστερά κάνε ένα τετράγωνο και οι δύο ακτίνες είναι συγχρόνως πλευρές του τετραγώνου.

Μαθήτρια12: Να κάνεις έναν κύκλο και την πλευρά ενός τετραγώνου που θα τη σχεδιάσεις κάτω και αριστερά του κύκλου, έτσι ώστε να είναι και ακτίνα του κύκλου, αλλά και μία ακόμη πλευρά του να είναι και αυτή ακτίνα του ίδιου κύκλου.

Μαθητής10: Σχεδίασε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο. Το τετράγωνο θα βρίσκεται κάτω στην αριστερή πλευρά του κύκλου.

Μαθητής11: θα κάνετε έναν κύκλο. Όταν το σχεδιάσετε κάτω και αριστερά στον κύκλο θα σχεδιάσετε το τετράγωνο.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η παρουσίαση ενός αστικού χάρτη γνωστοποιεί μπροστά στα μάτια των μαθητών τις θέσεις κάποιων βασικών κτιριακών υποδομών του, όπως αυτή του σχολείου, του γυμνασίου, του ταχυδρομείου και της πισίνας και θέτει σαν ζητούμενο τις πιθανές θέσεις ενός αρτοποιείου με γνωστά δεδομένα ότι πρέπει οι θέσεις αυτές να ισαπέχουν 900μ από το σχολείο και 700 από το ταχυδρομείο (9 εκατοστά και 7 εκατοστά αντίστοιχα στο χαρτί (παράρτημα Α, άσκηση 2, υλικό συνεντεύξεων). Οι περισσότεροι μαθητές και συγκεκριμένα οι 8 δεν χρειάστηκαν καμία επιπλέον εξήγηση και χαρακτηριστικό είναι ότι η πρώτη προφορική απάντηση στην ερώτηση με ποιόν τρόπο θα κινηθούν, ήταν ότι θα γίνει χρήση του διαβήτη, ενώ στη συνέχεια ακολούθησαν τα σχεδιαστικά βήματα της απόδοσης δύο κύκλων με κέντρο το σχολείο και το ταχυδρομείο και ακτίνες τις αποστάσεις των δεδομένων κτιρίων από το αρτοποιείο.

Επίσης στην ερώτηση που θα βρίσκονται οι πιθανές θέσεις του οικοδομήματος του αρτοποιείου, δήλωσαν πως θα πρέπει να είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων, αιτιολογώντας το πώς βάση της ιδιότητας του κύκλου που έχουν διδαχθεί η θέση του αρτοποιείου θα πρέπει να είναι συγχρόνως σημείο και των δύο κύκλων, για να μπορεί ταυτόχρονα να απέχει 900 μέτρα από το σχολείο και 700 από το ταχυδρομείο.

Η επόμενη διευκρινιστική πληροφορία κάνει ακόμη πιο συγκεκριμένη τη θέση του ζητούμενου κτιρίου και έτσι την οριοθετούν τελικά χωρίς μεγάλη δυσκολία.

Υπήρξε και κάποια μαθήτρια η οποία απάντησε πως για την εύρεση των πιθανών θέσεων θα έπρεπε να τραβήξει δύο γραμμές, μία από το σχολείο και μήκος 9 εκατοστά και μία άλλη με αρχή το ταχυδρομείο και μήκος 7 εκατοστά και ότι στη συνέχει θα έπρεπε να βρει το σημείο τομής τους. Στην ερώτηση όμως πως γνωρίζει ότι αυτή θα είναι η σωστή θέση του αρτοποιείου που θα έχει συγχρόνως τις προαναφερόμενες αποστάσεις από τα δύο κτίρια, δεν μπορούσε να επιχειρηματολογήσει.

Στην προσπάθεια της η διδάσκουσα να τη βοηθήσει, της ζητάει να ξαναθυμηθεί την πρότερη γνώση σημείων που έχουν την ίδια απόσταση από ένα άλλο δοθέν σημείο. Η μαθήτρια ανακαλεί από την μνήμη της την ιδιότητα που οδηγεί στον ορισμό του κύκλου και έτσι ανταποκρίνεται πια σωστά στην σωστή διαδικασία τοποθέτησης του αρτοποιείου.

Δεν λείπουν και κάποιοι που αντιμετώπισαν πρόβλημα στο να ανταποκριθούν στη λύση της άσκησης και χρειάστηκε να ακολουθήσει μια σειρά καθοριστικών ερωτήσεων και επεμβάσεων της εκπαιδευτικού για να ολοκληρώσουν το έργο τους. Ήταν και οι πιο αδύναμοι μαθησιακά μαθητές. Αξιοσημείωτο πάντως ήταν πως παρόλη τη δυσκολία που αντιμετώπιζαν, έδειχναν μεγάλο ενδιαφέρον και προσπάθεια στην όλη διαδικασία και ότι τελικά κατάφεραν και αυτοί να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, γεγονός που δεν είχε παρατηρηθεί σε προηγούμενες διδασκαλίες άλλων μαθηματικών εννοιών.

Από όλη την πορεία των μαθητών γίνεται αντιληπτό πως ακόμα και οι μαθητές που αντιμετώπισαν αρχικά κάποιο πρόβλημα, έδειξαν πως τελικά κατάφεραν να φτάσουν στην επίλυση προβλημάτων απόστασης, καθώς ήταν ικανοί να κάνουν χρήση της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου.

Παραθέτουμε τη διαλογική συζήτηση μεταξύ διδάσκουσας και μαθητών.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως εργαστήκατε λοιπόν για να βρείτε τις πιθανές θέσεις του αρτοποιείου;

ΜΑΘ$_6$: Πήρα και έφτιαξα έναν κύκλο με κέντρο το σχολείο και ακτίνα 9 εκ και στη συνέχεια έναν δεύτερο κύκλο με κέντρο το ταχυδρομείο και ακτίνα 7 εκ

ΜΑΘ$_2$: Το ίδιο έκανα και εγώ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του κύκλου.

ΜΑΘ$_4$: Και εγώ ενέργησα με αυτόν τον τρόπο επειδή σκέφτηκα ότι σημεία που απέχουν το ίδιο από ένα σταθερό σημείο είναι σημεία ενός κύκλου, άρα έπρεπε να φτιάξω δύο κύκλους ένα για τα σημεία που θα απείχαν 9εκ από το σχολείο και έναν για τα σημεία που θα απείχαν 7 εκ από το ταχυδρομείο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως όμως βρήκατε τα σημεία που θα απέχουν συγχρόνως 7 εκ από το ταχυδρομείο και 9εκ από το σχολείο, δηλαδή τα σημεία που θα βρισκόταν το αρτοποιείο;

ΜΑΘ$_1$: Θα είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων, ουσιαστικά δύο σημεία, γιατί μόνο αυτά τα δύο σημεία που ανήκουν και στους δύο κύκλους απέχουν συγχρόνως 7εκ από το ταχυδρομείο και 9εκ από το σχολείο

ΜΑΘ$_{12}$: Εγώ σκέφτηκα να ενεργήσω με δύο τρόπους. Ο πρώτος ήταν να δημιουργήσω δύο κύκλους με κέντρα το σχολείο και το ταχυδρομείο και ακτίνες 9εκ και 7εκ αντίστοιχα και ο άλλος ήταν να φέρω δύο ευθείες μία από το σχολείο 9εκ και μία από το ταχυδρομείο 7 εκ και να ενωθούν σε ένα σημείο που να απέχει ταυτόχρονα 7εκ από το ένα και 9εκ από το άλλο.

ΜΑΘ8 : Και εγώ σκέφτηκα να τραβήξω μία γραμμή 9εκ από το σχολείο και μία 7εκ από το ταχυδρομείο, στη συνέχεια να προσπαθήσω να βρω το σημείο που θα απείχε ταυτόχρονα τις αποστάσεις αυτές από τα δύο κτίρια

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως θα το βρείτε αυτό το σημείο;

ΜΑΘ12 : Δεν ξέρω.

ΔΙΔΑΣΚ.: Που είπαμε θυμηθείτε ότι βρίσκονται σημεία που απέχουν το ίδιο από ένα καθορισμένο σημείο;

ΜΑΘ8 : Πάνω σε ένα κύκλο.

ΔΙΔΑΣΚ.: Άρα ουσιαστικά τι πρέπει να κάνετε;

ΜΑΘ8 : Δύο κύκλους, έναν με κέντρο το ταχυδρομείο και ακτίνα 7 εκ και έναν με κέντρο το σχολείο και ακτίνα 9 εκ.

ΔΙΔΑΣΚ.: Και ποια θα είναι τελικά τα πιθανά σημεία εύρεσης του αρτοποιείου.

ΜΑΘ8 : Τα σημεία που τέμνονται.

ΤΡΙΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η εκπαιδευτικός θέλοντας να διαπιστώσει αν μπορούν να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους γύρω από στοιχεία και όρους που σχετίζονται με τον κύκλο όπως ακτίνα, κυκλικός δίσκος, κέντρο, ώστε να καταστούν επιδέξιοι λύτες ασκήσεων οι οποίες έχουν σαν ζητούμενο το σχεδιασμό κύκλων με συγκεκριμένα κέντρα και ακτίνες, τους δίνει στα χέρια τους ένα φύλλο τετραγωνισμένου χαρτιού όπου θα πρέπει να κατασκευάσουν τρεις διαφορετικούς κύκλους με δεδομένα που διαφοροποιούνται κάθε φορά, όπως ότι το κέντρο Α του πρώτου κύκλου γίνεται σημείο του δεύτερου κύκλου, ενώ το σημείο Β που βρισκόταν πάνω στον πρώτο γίνεται το κέντρο του δεύτερου και το ίδιο συμβαίνει και με τον τρίτο κύκλο του οποίου το κέντρο αυτή τη φορά είναι σημείο τομής των δύο προηγούμενων. Η τελευταία διαδικασία είναι ο εντοπισμός και χρωματισμός του κοινού μέρους των τριών κυκλικών δίσκων που δημιούργησαν (παράρτημα Α, άσκηση 3, υλικό συνεντεύξεων).

Παρατηρήθηκε ότι όταν οι μαθητές άκουγαν και ακολουθούσαν προσεκτικά τις οδηγίες χάραξης και μέτρησης έφταναν στην επιτυχή κατασκευή των τριών κύκλων, τοποθετώντας το διαβήτη στα σωστά σημεία αλλά και με το άνοιγμα του να ανταποκρίνεται κάθε φορά στην ακτίνα που τους ζητούσαν, με μόνο εμπόδιο κάποιες στιγμές την έλλειψη ικανότητας στη σταθεροποίηση του οργάνου τους κατά τη διάρκεια της κατασκευής του σχήματος. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν έχουν ακόμη εξασκηθεί και εξοικειωθεί πλήρως με την χρήση του συγκεκριμένου οργάνου.

Κάποιοι δισταγμοί και απορίες δημιουργήθηκαν μόνο στην εκτέλεση της τελευταίας εντολής, στα πλαίσια της οποίας δεν τους ήταν άμεσα ορατός ο εικονικός εντοπισμός του κοινού μέρους των τριών κυκλικών δίσκων.

Να σημειωθεί επίσης πως πριν την κατασκευή των κύκλων στο αρχικό κάλεσμα - άκουσμα του σχεδιασμού ενός ευθύγραμμου τμήματος που το μήκος του είναι 4 τετραγωνάκια, παρασύρονταν και πήγαιναν να πάρουν το χάρακα στην προσπάθεια τους να το χαράξουν.

Γεγονός πάντως είναι ότι με εξαίρεση 3 μαθητές, οι υπόλοιποι κατάφεραν να ανταποκριθούν στο έργο τους με ορθό τρόπο και στα 6 ζητούμενα της άσκησης.

Μόνο δύο μαθητές χρωμάτισαν μεγαλύτερο κομμάτι από αυτό που έπρεπε, θεωρώντας λανθασμένα ότι ανήκει και στους τρείς κυκλικούς δίσκους και υπήρχε και ένας που σημείωσε ως απάντηση στο τελευταίο ζητούμενο το κέντρο Α του πρώτου κύκλου, που συγχρόνως στη συνέχεια αποτέλεσε σημείο του δεύτερου κύκλου.

Ακολουθούν αποσπάσματα της συζήτησης μαζί με τους μαθητές.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως σχεδίασες λοιπόν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

ΜΑΘ$_6$: Πήρα σαν αρχή στο τετραγωνισμένο χαρτί ένα σημείο Α και μετά πήρα το χάρακα και μέτρησα 4κ και εκεί που τελείωσα σημείωσα το Β.

ΔΙΔΑΣΚ.: Ναι αλλά η άσκηση δεν έλεγε να μετρήσεις με το χάρακα ευθύγραμμο τμήμα 4 εκ, αλλά να σχεδιάσεις τμήμα ΑΒ μήκους 4 τετραγωνάκια. Αφού σου λέει 4 τετραγωνάκια χρειάζεται να χρησιμοποιήσεις το χάρακα;

ΜΑΘ$_6$: Όχι γιατί τελικά αρκεί από το σημείο Α να τραβήξω μία ευθεία όσο 4 τετραγωνάκια.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως θα πάρεις την ακτίνα ΑΒ;

ΜΑΘ$_9$: θα πάρω στο διαβήτη μου άνοιγμα όσο το μήκος ΑΒ δηλαδή 4εκ και θα σχεδιάσω τον κύκλο με ακτίνα ΑΒ.

ΔΙΔΑΣΚ.: Ποιο νομίζεις ότι θα είναι το κοινό μέρος που σου ζητάει η άσκηση;

ΔΙΔΑΣΚ.: Βλέπω ότι σε δυσκολεύει;

ΔΙΔΑΣΚ.: Παρατήρησε προσεκτικά και δες ποιο είναι το κομμάτι της επιφάνεια που θα ανήκει και στους τρεις δίσκους και χρωμάτισε το.

ΜΑΘ$_2$: Αυτό. (Ο μαθητής το οριοθετεί σωστά και το χρωματίζει).

ΜΑΘ$_4$: Ο μαθητής δείχνει ένα σημείο και ρωτάει: Είναι ανάγκη να είναι ένα σημείο;

ΔΙΔΑΣΚ.: Η άσκηση όμως δε σου ζητάει σημείο τομής των κύκλων, αλλά το χώρο – το μέρος που θα είναι κοινό και για τους τρεις κυκλικούς δίσκους. Άλλωστε όταν μιλάμε για δίσκο εννοούμε την εσωτερική επιφάνεια του κύκλου.

ΜΑΘ$_4$: Άρα όπως το βλέπω, πιστεύω ότι πρέπει να ζωγραφίσω αυτό το μέρος (Το επισημαίνει τελικά και το ολοκληρώνει).

ΤΕΤΑΡΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η ανίχνευση από την εκπαιδευτικό της κατανόησης του ελεύθερου σχεδίου από τους μαθητές, αλλά και της ικανότητας τους να φτάνουν στο τελικό αποτέλεσμα με συλλογιστικό τρόπο, ο οποίος στηρίζεται σε γνώριμες ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων, γίνεται με την τέταρτη και τελευταία άσκηση, στην οποία απεικονίζεται σε ελεύθερο σχέδιο ένας κύκλος και ένα τετράγωνο. Στην άσκηση φανερώνεται το μήκος της πλευράς του τετραγώνου αλλά και της ακτίνας του κύκλου. Επίσης δύο ακτίνες του κύκλου είναι συγχρόνως στο σχέδιο και κομμάτια των δύο πλευρών του τετραγώνου. Ζητούνται τα μήκη κάποιων τμημάτων από το σχέδιο (παράρτημα Β, άσκηση 4, υλικό συνεντεύξεων).

Στην πλειοψηφία των μαθητών είναι άμεσα ορατή και γνώριμη η ιδιαιτερότητα του σχεδίου τους, από τις διδακτικές παρεμβάσεις που προηγήθηκαν. Παρατηρήθηκε όμως ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές χρειάστηκαν κάποιο εναρκτήριο έναυσμα για να ενεργοποιηθεί το γνωστικό τους υπόβαθρο. Η διδάσκουσα με τη χρήση κατάλληλων ερωτήσεων τους βοήθησε να δουν προσεκτικά την εικονική πραγματικότητα, να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των δύο σχημάτων και ανασύροντας από τη μνήμη τους τις βασικές ιδιότητες που ορίζουν τα δύο σχήματα, να κάνουν σωστούς υπολογισμούς.

Χαρακτηριστικό είναι ότι όλοι οι μαθητές βρήκαν τα μήκη των δύο τμημάτων που τους ζητήθηκαν, η δυσκολία εντοπίστηκε στο γεγονός ότι ενώ η σκέψη τους ήταν σωστή δεν μπορούσαν να την αποτυπώσουν στο χαρτί με ολοκληρωμένο και σαφή τρόπο.

Τρείς μόνο από το σύνολο των παιδιών ήταν σε θέση να περιγράψουν πλήρως και να αιτιολογήσουν το σκεπτικό που τους οδήγησε στην προφανή λύση, αναφέροντας ότι το ζητούμενο τμήμα ΒΗ είναι 4 εκατοστά και λέγοντας πως αφού είναι και αυτό ακτίνα του ίδιου κύκλου το αυτονόητο είναι να έχει αυτό το μήκος, καθώς όλες οι ακτίνες του κύκλου είναι ίσες. Επίσης επιχειρηματολόγησαν για την εύρεση και του άλλου ζητούμενου τμήματος CH, σημειώνοντας ότι είναι 3 εκατοστά και ότι το αποτέλεσμα προήλθε από την αφαίρεση του τμήματος BC που είναι 7 εκατοστά σαν πλευρά του ίδιου τετραγώνου και βάση της χαρακτηριστικής του ιδιότητας, που λέει πως όλες οι πλευρές του τετραγώνου είναι ίσες, με το τμήμα ΒΗ το οποίο είναι ακτίνα του κύκλου άρα 4 εκατοστά σύμφωνα με τον προηγούμενο συλλογισμό τους.

Οι υπόλοιποι κατέγραφαν το αποτέλεσμα παραλείποντας βασικά στοιχεία, όπως πχ ανέφεραν το μήκος του τμήματος BC αλλά όχι πως κατέληξαν σε αυτό το συμπέρασμα, να αναφερθούν δηλαδή στην ιδιότητα του τμήματος ως πλευράς τετραγώνου. Επίσης ανέφεραν ότι η ΒΗ είναι και αυτή ακτίνα του ίδιου κύκλου άρα είναι 4 εκατοστά, αλλά παρέλειπαν να αναφερθούν στο γεγονός της ιδιότητας του κύκλου, που λέει πως όλες οι ακτίνες στο ίδιο κύκλο είναι ίσες, παρόλο που κινούνταν βάση αυτού του σκεπτικού.

Τέλος υπήρχε και ένας μαθητής ο οποίος έγραψε απλώς τα αποτελέσματα χωρίς κανένα σχόλιο ή αιτιολόγηση τους.

Στην συνέχεια αποτυπώνονται διάλογοι και σκέψεις των παιδιών

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως θα βρεις τα μήκη των ζητούμενων ευθύγραμμων τμημάτων;

ΜΑΘ$_9$: Θα μετρήσω με το χάρακα.

ΔΙΔΑΣΚ.: Υπάρχουν μετρήσεις στο ελεύθερο σχέδιο;

ΜΑΘ$_9$: Όχι.

ΔΙΔΑΣΚ.: Άρα πως θα πράξουμε;

ΜΑΘ$_9$: Να σκεφτούμε μήπως με αυτά που ξέρουμε.

ΔΙΔΑΣΚ.: Τι γνωρίζουμε δηλαδή;

ΜΑΘ$_9$: Ξέρουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι 7 εκ και ο κύκλος έχει ακτίνα 4κ.

ΔΙΔΑΣΚ.: Άρα με δεδομένα αυτά τα στοιχεία ποιο πιστεύεις ότι θα είναι το μήκος του τμήματος ΒΗ.

ΔΙΔΑΣΚ.: Τι είναι το τμήμα ΒΗ.

ΜΑΘ$_9$: Είναι ακτίνα του κύκλου.

ΔΙΔΑΣΚ.: Άρα πόσο θα είναι και αυτή.

ΜΑΘ$_9$: Θα είναι 4 εκ, γιατί μάθαμε ότι όλες οι ακτίνες του ίδιου κύκλου είναι ίσες.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πολύ σωστά.

ΔΙΔΑΣΚ.: Για να υπολογίσουμε και το μήκος του HC πόσο λες ότι θα είναι;

ΜΑΘ$_9$: Θα είναι 3εκ.

ΔΙΔΑΣΚ.: Πως το βρήκες

ΜΑΘ$_9$: Είπα ότι το BC είναι πλευρά του τετραγώνου και αφού όλες οι πλευρές του τετραγώνου είναι ίσες άρα και αυτή θα είναι 7 εκ. Αν τώρα από αυτή αφαιρέσω την ΒΗ που είναι ακτίνα του κύκλου και όπως είπαμε όλες οι ακτίνες στο συγκεκριμένο κύκλο είναι 4εκ καταλήγω ότι η ΒΗ θα είναι 3εκ.

ΜΑΘ$_6$:Το ΒΗ είναι μια ακτίνα του κύκλου άρα σαν ακτίνα του ίδιου κύκλου σύμφωνα με την ιδιότητα του θα είναι κι αυτή 4εκ. Επίσης αν από ευθύγραμμο τμήμα BC που είναι η πλευρά του τετραγώνου και επειδή όλες οι πλευρές του είναι ίσες άρα και αυτή θα είναι 7εκ αφαιρέσουμε την ακτίνα ΒΗ που είναι είπαμε 4εκ., θα βρούμε ότι το HC είναι 3εκ.

ΜΑΘ$_{12}$: Το ΒΗ είναι 4εκ γιατί οι ακτίνες του κύκλου είναι ίσες και το ΒΗ είναι ακτίνα. Ενώ το HC είναι 3εκ γιατί η πλευρά του τετραγώνου είναι 7εκ και η ακτίνα 4εκ τα αφαίρεσα και βγήκε 3εκ

ΜΑΘ$_2$: Το ΒΗ είναι 4εκ γιατί είναι ακτίνα του κύκλου. Το HC είναι 3εκ., γιατί η πλευρά του τετραγώνου είναι 7εκ – 4εκ που είναι η ακτίνα του κύκλου μας κάνει 3εκ.

ΜΑΘ$_4$:Το ΒΗ είναι 4εκ επειδή και τα δύο είναι ακτίνες του κύκλου και το HC είναι 3εκ επειδή το ΒΗ είναι 4εκ και αν το αφαιρέσεις από το 7εκ σου μένουν 3εκ

ΜΑΘ$_8$: Το ΒΗ είναι 4εκ γιατί είναι ακτίνα του κύκλου που μας λέει ότι είναι 4εκ και το HC είναι 3εκ γιατί 4εκ που είναι η ακτίνα και μέχρι να φτάσεις στο 7 είναι 3εκ

ΜΑΘ3 : Το ΒΗ είναι 4εκ γιατί είναι ακτίνα του κύκλου και το HC είναι 3εκ γιατί αφαίρεσα 7εκ από την πλευρά του τετραγώνου και 4εκ από τη ακτίνα του κύκλου.

ΜΑΘ1 : Είναι 4εκ γιατί όλες οι ακτίνες είναι ίσες και το άλλο ζητούμενο τμήμα είναι 3εκ γιατί 7-4=3εκ., γιατί 7εκ είναι η πλευρά και 4εκ είναι η ακτίνα.

ΜΑΘ10 : Το ΒΗ είναι 4εκ και το HC είναι 3εκ.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το Κεφάλαιο αυτό συνοψίζει τα αποτελέσματα της έρευνας και εστιάζει στην ερμηνεία τους σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα και με βάση το θεωρητικό πλαίσιο.

Κατά τη διάρκεια της πρώτης παρέμβασης οι μαθητές εργάζονται πάνω στην αναγνώριση και τον εντοπισμό των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων – μέσα από ζωγραφικούς πίνακες – που τους πλαισιώνουν, στη συνέχεια εστιάζουν στη διαφορετικότητα των στοιχείων που κάνουν τον κύκλο να ξεχωρίζει από τα άλλα σχήματα και τελειώνοντας φτάνουν στη διατύπωση και καταγραφή κυκλικών σχημάτων από το χώρο που τους πλαισιώνει.

Μέσα από όλες τις φάσεις των δραστηριοτήτων που ξεδιπλώνονται στην εργασία τους στο πρώτο διδακτικό επεισόδιο φαίνεται ότι τα παιδιά δείχνουν αρχικά τις πρότερες γνώσεις που έχουν γύρω από την αναγνώριση των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, με εξαίρεση την αναφορά της μαθήτριας 7 στο ημικύκλιο ως γεωμετρικού σχήματος, που όπως αποδείχθηκε έγκαιρα οφειλόταν σε απροσεξία της κατά τη διάρκεια των ερωτήσεων της εκπαιδευτικού και όχι σε λανθασμένη γνωστική ικανότητα της, καθώς επέρχεται από την ίδια άμεση και σωστή διόρθωση.

Από την άλλη διακρίνουμε και την εμπειρία τους να ξεχωρίζουν σχήματα με παρόμοια χαρακτηριστικά στοιχεία και ιδιότητες τις οποίες έχουν κάνει κτήμα τους, καθώς μπορούν να τις χρησιμοποιούν με άνεση, προκειμένου να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους.

Επιπλέον διαπιστώνεται πως έχουν αναπτυγμένη ικανότητα εικονικής κατανόησης των σχημάτων αλλά και λεκτικής σύνδεσης με αυτήν, αφού μπορούν να τα βλέπουν και να τα ονοματίζουν συγχρόνως.

Στη Β΄ φάση της ίδιας παρέμβασης γίνεται αντιληπτό ότι τα παιδιά είναι επίσης σε θέση να αντιλαμβάνονται οπτικά και να βρίσκουν τα στοιχεία που τοποθετούν τον κύκλο σε μία άλλη κατηγορία σχημάτων από αυτά που έχουν διδαχθεί μέχρι σήμερα (έλλειψη πλευρών, γωνιών), αλλά και να συσχετίζουν αντικείμενα της καθημερινότητας τους με το συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα δημιουργώντας καταλόγους κυκλικών πραγμάτων. Παρουσιάζουν όμως μειωμένη ικανότητα λεκτικής διατύπωσης κατασκευαστικών πληροφοριών, καθώς δεν έχουν φτάσει ακόμα στο επιθυμητό επίπεδο διδασκαλίας της ιδιότητας που ορίζει εννοιολογικά το σχήμα του κύκλου, αλλά ούτε και της χρηστικής ικανότητας των κατάλληλων εργαλείων σχεδιασμού του.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι μαθητές κινούνται στον άξονα χώρος – οπτικοποίηση. Μέσα από δραστηριότητες αναγνώρισης διάφορων γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και δραστηριότητες σύγκρισης γεωμετρικών σχημάτων με το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου εξετάζονται οι δεξιότητες οπτικοποίησης τους, αφού αποτελούν και βασικό συστατικό του κατάλληλου ΓΧΕ τους και που όπως φαίνεται είναι αρκετά αναπτυγμένες, καθώς με την βοήθεια τους γίνεται ενεργοποίηση κατάλληλων ιδιοτήτων, βάση των οποίων αιτιολογούν με θεωρητικό τρόπο τις απαντήσεις τους και κατά συνέπεια πραγματοποιείται ενεργοποίηση και της λεκτικής γένεσης.

Προφανής είναι όμως και η αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας, καθώς τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να έρθουν σε μια πρώτη επαφή με το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου μέσα από πληθώρα εικαστικών έργων τέχνης, γεγονός που προσελκύει περισσότερο το ενδιαφέρον τους μιας και δεν παρατηρείται κάποια στιγμή αδιαφορίας ή πλήξης που να αποσπάει την προσοχή τους και να οδηγεί σε έλλειψη συμμετοχής στα γεωμετρικά δρώμενα.

Η όλη διαδικασία της εκπαιδευτικής παρέμβασης κινήθηκε στο επίπεδο του ΓΧΕ (Σημειωτικό – Λεκτικό)

Η Γεωμετρική εργασία συνεχίζεται αλλά κινείται πλέον στο επίπεδο (Σημειωτικό – Εργαλειακό), παράλληλα όμως συντελείται και η επαφή των παιδιών με ένα άλλο είδος τέχνης αυτό της λογοτεχνίας.

Συγκεκριμένα πραγματοποιείται δραματοποίηση ενός λογοτεχνικού κειμένου με μαθηματικό περιεχόμενο και με ενσωματωμένους τους όρους του κύκλου, της ακτίνας και του κέντρου. Τα παιδιά εργάζονται ομαδικά και η εργαλειακή γένεση ενεργοποιείται σε μια πρώτη φάση, αφού χάρακας, διαβήτης, αλλά και μερικά άλλα τεχνουργήματα λιγότερο συμβατικά όπως νήμα και κορδέλες μετατρέπονται σε βασικά εργαλεία μέτρησης και χάραξης

Ακολουθώντας βήμα – βήμα την διδακτική διαδικασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι οι μαθητές οδηγούνται μόνοι τους στον πειραματικό σχεδιασμό του κύκλου, κάτι που είναι τελείως επιτρεπτό μιας και κινούνται στα πλαίσια της GI, την ανακάλυψη και κατάκτηση των βασικών στοιχείων του (κέντρο, ακτίνα) αλλά και την κατοχή και κατάκτηση της νέας γεωμετρικής έννοιας του κύκλου και της χαρακτηριστικής ιδιότητας του.

Επίσης αποκτούν τη δεξιότητα να μπορούν να ξεχωρίζουν την ταυτότητα του κύκλου από αυτή του κυκλικού δίσκου, δηλαδή καταλαβαίνουν ότι όταν αναφερόμαστε στον κύκλο εννοούμε το σύνολο των σημείων του σε όλο το μήκος του, ενώ όταν αναφερόμαστε στον κυκλικό δίσκο συμπεριλαμβάνουμε και το χώρο ή αλλιώς την επιφάνεια που καταλαμβάνει. Αποκτώντας λοιπόν και τη γνώση του κυκλικού δίσκου είναι σε θέση να ξεχωρίζουν πότε κάποια σημεία βρίσκονται εντός και πότε εκτός κύκλου και να τα διαφοροποιούν από αυτά που βρίσκονται πάνω στον ίδιο τον κύκλο, τα οποία ισαπέχουν από το κέντρο του. Επιπρόσθετα αντιλαμβάνονται ότι η ένωση των σημείων που βρίσκονται έξω από τον κυκλικό δίσκο οδηγούν σε κύκλο με το ίδιο κέντρο αλλά με μεγαλύτερη ακτίνα από τον αρχικό, ενώ των σημείων που βρίσκονται μέσα σε αυτόν οδηγούν σε κύκλο πάλι με το ίδιο κέντρο άλλα με μικρότερη ακτίνα αυτή τη φορά εμπλουτίζοντας τον προσωπικό ΓΧΕ τους.

Φτάνοντας στην πρακτική εξάσκηση σχεδιασμού του κύκλου η εργαλειακή γένεση περνά σε μια δεύτερη φάση, καθώς τα εργαλεία χάρακας και διαβήτης διατηρούν στα χέρια κάποιων μόνο μαθητών την αρχική αποκλειστική τους χρήση, ως αντικείμενα χάραξης και μέτρησης, ενώ από κάποιους ακολουθείται μικτή χρήση του διαβήτη, δηλαδή από τη μία ως όργανο μέτρησης αποστάσεων και από την άλλη γίνεται και μια μικρή προσπάθεια απόπειρα περιστροφικής κίνησης χωρίς πλήρη διαγραφή του κύκλου, υπάρχουν και 2 – 3 μαθητές που το αντιμετωπίζουν ως βασικό εργαλείο σχεδιασμού.

Συνεπώς η ατομική κατασκευή του κύκλου πραγματώνεται με στήριγμα τους την χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου και του καινούριου γεωμετρικού όρου που ονομάζεται ακτίνα και υποβοηθούμενοι από όργανα όπως ο χάρακας και ο διαβήτης.

Η Εικαστική Τέχνη έχει και πάλι πρωταγωνιστικό ρόλο στο $3^{ο}$ μάθημα και η γεωμετρική εργασία ξεκινάει σε σχηματικό επίπεδο. Το τεχνούργημα χάρακας έχει μόνο χρήση οργάνου επιβεβαίωσης της απάντησης. Φαίνεται πως ο καινούριος τρόπος με τον οποίο εργάζονται τα παιδιά τους βοηθάει να αποτυπώνουν τις καινούριες γνώσεις, να τις αποθηκεύουν και να τις επαναφέρουν όταν τις χρειάζονται αναλλοίωτες.

Επίσης επιβεβαιώνεται πως η γνώση, χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου, η οποία αποθηκεύτηκε έγινε και πλήρως κατανοητή, καθώς μετατρέπεται στα χέρια τους σε ένα πολύ δυνατό και χρήσιμο – λειτουργικό εργαλείο, με το οποίο μέσω της συλλογιστικής οδού μπορούν να δίνουν απαντήσεις σε ερωτήσεις και λύσεις σε προβλήματα που σχετίζονται με το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου.

Συνεπώς φαίνεται πως υπάρχει μια σημαντική αλλαγή σε σχέση με τον αρχικό προσωπικό ΓΧΕ τους, ο οποίος εμπλουτίζεται γνωστικά και η γεωμετρική εργασία ενεργοποιεί την λεκτική γένεση, αλλά παράλληλα συντελείται και μια αλλαγή στον εμπειρικό πόλο, καθώς προστίθεται το εργαλείο διαβήτης με μια καινούρια ιδιότητα αυτή της σύγκρισης.

Στο σημείο όμως αυτό δημιουργείται κάποια σύγχυση στο άκουσμα της εκτέλεσης της μέτρησης και σύγκρισης των δοσμένων τμημάτων με το εργαλείο διαβήτης, καθώς μέχρι τώρα ότι αφορούσε μετρήσεις τμημάτων πραγματοποιούνταν μόνο με το χάρακα και αποδίδονταν στο χαρτί σε μήκος κάποιων εκατοστών. Στη συγκεκριμένη όμως μέτρηση και σύγκριση δεν απαιτείται η καταγραφή του μήκους των καινούριων τμημάτων παρά μόνο η μέτρηση τους σε σύγκριση με το αρχικό τμήμα και η ταξινόμηση τους σε στήλες πίνακα με την ένδειξη μικρότερο η μεγαλύτερο από αυτό. Διαφαίνεται λοιπόν πως οι περισσότεροι μαθητές βασιζόμενοι στον διαβήτη ως όργανο μέτρησης και σύγκρισης φτάνουν στην τελική ταξινόμηση των τμημάτων με τον προβλεπόμενο τρόπο. Υπάρχουν όμως και κάποιοι μαθητές, οι πιο λίγοι, οι οποίοι φαίνεται πως διαθέτουν πιο πλούσιο θεωρητικό ΓΧΕ και κάνουν χρήση όχι ενός απτού οργάνου αλλά ενός γνωστικού εργαλείου όπως αυτού της ιδιότητας της ίσης απόστασης των σημείων ενός κύκλου και ακολουθώντας τη συλλογιστική οδό, φτάνουν με την αρωγή των νεοαποκτηθέντων γνώσεων στο αποτέλεσμα της λύσης.

Χαρακτηριστικό είναι και το παράδειγμα του μαθητή 9, ο οποίος ελέγχοντας και έχοντας οπτική αντίληψη της θέσης του Κ ως ένα από τα άκρα των περισσότερων από τα ζητηθέντα σημεία και με την επίγνωση της πρότερης γνώσης, της ιδιότητας του κύκλου, προτιμάει να δημιουργήσει έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Κ και να οδηγηθεί στην ταξινόμηση των τμημάτων αυτών με ένα σωστό αλλά συγχρόνως πιο σύντομο και εύκολο τρόπο. Παρατηρείται δηλαδή ότι μια διαδικασία μετάβασης από την GI στην GII, βρίσκεται σε εξέλιξη για τον συγκεκριμένο μαθητή. Το μόνο τρωτό του σκεπτικού αυτού είναι ότι δεν μπορεί να δώσει απαντήσεις για όλα τα τμήματα και να τα ταξινομήσει, παρά μόνο για αυτά που όπως προαναφέρθηκε το ένα άκρο τους είναι στο κέντρο Κ του κύκλου που κατασκευάστηκε. Γι' αυτά τα τμήματα ακολουθεί τον τρόπο που ακολούθησαν και οι προηγούμενοι μαθητές.

Στη διδακτική παρέμβαση που ακολουθεί οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματικά –

γεωμετρικά ενδιαφέροντα γύρω από το ελεύθερο σχέδιο σχημάτων και το σημειωτικό – σχηματικό επίπεδο του ΓΧΕ τους πάνω στο οποίο κινούνται, μετατρέπεται σε ένα πολύ διασκεδαστικό και ελκυστικό περιβάλλον άσκησης με τη συμβολή και πάλι της εικαστικής τέχνης.

Όσο οι μαθητές εργάζονται πάνω στο σχηματικό επίπεδο επιδεικνύουν μια δημιουργικότητα και φαντασία και αποδίδουν στο έπακρο και με καλλιτεχνικό τρόπο το σχεδιασμό των γεωμετρικών σχημάτων στα ελεύθερα σχέδια.

Ένα μικρό πρόβλημα δημιουργείται όταν τα αποδεικτικά τους στοιχεία συγκρούονται με τα οπτικά. Ο άξονας χώρος – οπτικοποίηση δεν συνδέεται με τις διαδικασίες λεκτικής απόδειξης. Όσον αφορά τη γνωστική διαδικασία της κατασκευής στους αναφορικούς ΓΧΕ οι μαθητές όταν ήθελαν να σχεδιάσουν σχήματα στις περισσότερες περιπτώσεις τα σχεδίαζαν με χρήση εργαλείων σε πραγματικές διαστάσεις στο χαρτί, γεγονός που έρχεται σε πλήρη αντίθεση με αυτό που συμβαίνει στη σχεδιαστική απόδοση των γεωμετρικών σχημάτων που αποτυπώνονται στα ελεύθερα σχέδια τους, εφόσον τα χαρακτηρίζει παντελή έλλειψη χαρακτικής μέτρησης και τήρησης κανόνων λεπτομέρειας και ακρίβειας, αφού δεν γίνεται καθόλου χρήση οργάνων. Τα σχήματα έχουν καθαρά συμβολικό χαρακτήρα και είναι εμφανώς ενάντια στην οπτική αντίληψη. Κατά τη διάρκεια όμως της γεωμετρικής εργασίας οι μαθητές εξοικειώνονται με την ιδέα ότι τα σχήματα στα ελεύθερα σχέδια μπορεί να είναι συμβολικά και να ορίζονται ακόμα και ενάντια στην οπτική αντίληψη τους και παύουν να νοιώθουν την ανάγκη να είναι πραγματικά γεωμετρικά αντικείμενα. Η αποδοχή αυτή καθώς και τα νέα διαθέσιμα γνωστικά εργαλεία – ιδιότητες παραλληλογράμμου – τετραγώνου, ιδιότητα κύκλου διευκολύνουν την μετατόπιση της εργασίας των παιδιών προς την GII και μετατρέπονται στα χέρια τους σε σημαντικά εργαλεία απόδειξης, τα οποία χρησιμοποιούν προκειμένου να διεκπεραιώσουν τα μαθησιακά καθήκοντα που τους έχουν ανατεθεί.

Στη συνέχεια μια πιο ρεαλιστική απεικόνιση του σχεδίου με την αποτύπωση του πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί και σε πραγματικές διαστάσεις επιβεβαιώνει και επικυρώνει το αποτέλεσμα της άσκησης.

Με βάση τον αναφορικό ΓΧΕ αλλά και τις συνήθεις σχολικές γεωμετρικές εμπειρίες των μαθητών Δημοτικού ο προσωπικός ΓΧΕ τους κατευθύνεται γενικά στην GI με κάποιες μετατοπίσεις προς την GII.

Με την μεσολάβηση των προηγούμενων διδακτικών παρεμβάσεων και των νέων εργαλείων τους, της ιδιότητας του κύκλου και του ορισμού του κυκλικού δίσκου, με τα οποία εμπλουτίστηκε το θεωρητικό πλαίσιο του προσωπικού ΓΧΕ, αλλά και καθώς προχωράμε στις δραστηριότητες της 5ης διδακτικής παρέμβασης, αποκαλύπτεται ολοφάνερα ότι τα παιδιά με τη χρήση αυτών των νέων εργαλείων τους τα οποία έχουν εντρυφήσει και κατακτήσει, γίνονται ικανοί λύτες προβληματικών καταστάσεων της πραγματικής ζωής και ακολουθώντας μία σωστή συλλογιστική σειρά μπορούν πλέον να δίνουν απαντήσεις φτάνοντας στην επιτυχή λύση προβλημάτων απόστασης στα πλαίσια της GII.

Επίσης όλη αυτή η γεωμετρική δραστηριότητα συμβάλλει στη δημιουργία της λειτουργικής γένεσης μέσο της οποίας οικειοποιούνται και εφαρμόζουν τις γνώσεις που απέκτησαν. Με τις γνώσεις αυτές που σχετίζονται με τον κύκλο, έχουν εξοικειωθεί πλήρως και αποτελούν πλέον το βασικό γνωστικό τους στήριγμα για να αναλάβουν μαθηματική δράση, να επιχειρηματολογήσουν και να αιτιολογήσουν με έναν πιο έγκυρο και αποδεικτικό τρόπο τις απαντήσεις τους.

Ο άξονας χώρος – οπτικοποίηση όπως και το περιγραφικό στοιχείο είναι αναπτυγμένα, δεν διαπιστώνεται όμως το ίδιο και δε βγάζουμε τα ίδια συμπεράσματα και για τις ικανότητες τους να «διαβάζουν» σωστά τις πληροφορίες που τους δίνονται για τα ζητούμενα των άλυτων προβλημάτων. Αδυνατούν με άλλα λόγια να κάνουν σωστή αποκωδικοποίηση των δοθέντων πληροφοριών. Το γεγονός αυτό τους προσανατολίζει κάποιες φορές σε λάθος αποφάσεις και μαθηματικά βήματα, προκειμένου να οδηγηθούν στη διεκπεραίωση των γεωμετρικών απαιτήσεων που αντιμετωπίζουν

Μέσα από τη διερεύνηση των ατομικών συνεντεύξεων οι οποίες πρόσφεραν στους μαθητές μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας και τους διευκόλυναν σε επίπεδο επιχειρηματολογίας και έκφρασης απόψεων με μεγαλύτερη ελευθερία, παίρνουμε μια πιο ολοκληρωμένη και εμπεριστατωμένη εικόνα για την επίτευξη των στόχων που θέσαμε αλλά και των απαντήσεων στα ερευνητικά μας ερωτήματα.

Εστιάζοντας αρχικά στις απαντήσεις που δόθηκαν αναφορικά με τη συνεισφορά της Τέχνης στη διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια των δραστηριοτήτων με την ενσωμάτωση των διαφόρων μορφών τέχνης μέσα σε αυτές, φάνηκε ότι όλη η διαδικασία διδασκαλίας των γεωμετρικών όρων έγινε με ένα πιο εναλλακτικό και διαφορετικό τρόπο σε αντιδιαστολή με τον μέχρι τώρα παραδοσιακό. Επιπλέον ένα μεγάλο κομμάτι του μαθητικού πληθυσμού της τάξης αντιμετωπίζει το συγκεκριμένο μάθημα θετικά με ενθουσιασμό και ευχαρίστηση, αλλά και αυτοί ακόμα οι μαθητές που νιώθουν αγωνία για το καινούριο που πρόκειται να διδαχθούν, χαίρονται τη στιγμή που κατακτούν τη νέα γνώση. Ενδιαφέρον όμως παράμεινε το μάθημα ακόμα και στην περίπτωση της μαθήτριας με τα έντονα συναισθήματα ενθουσιασμού και φόβου. Γεγονός που δείχνει ότι η γεωμετρία είναι ένα μάθημα που τους ελκύει το ενδιαφέρον και θέλουν να το γνωρίσουν, να το καταλάβουν και να το κατακτήσουν.

Αυτό επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα στις επιλογές των επιθέτων που χαρακτηρίζουν το μάθημα της Γεωμετρίας, όπου κυριαρχούν λέξεις όπως δημιουργική και ενδιαφέρουσα, με εξαίρεση μόνο δύο μαθητές που χρησιμοποίησαν τους χαρακτηρισμούς δύσκολη και βαρετή.

Μπορεί όμως η Γεωμετρία να αποτελεί για ένα μεγάλο κομμάτι των μαθητών ένα μαθησιακό αντικείμενο δημιουργικό και ενδιαφέρον, αλλά παράλληλα και αρκετά δύσκολο στην κατανόηση των βασικών γεωμετρικών εννοιών, που τους ταλαιπωρεί κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα και ασκήσεις.

Όλο αυτό το πακέτο των δυσκολιών μπορεί πάντα σύμφωνα με τις απόψεις των παιδιών να αντιμετωπιστεί με ένα πιο ευχάριστο και ευρηματικό τρόπο προσέγγισης, που θα περιλαμβάνει ενσωμάτωση της Τέχνης, ενεργή συμμετοχή του παιχνιδιού στη μαθησιακή διαδικασία αλλά και την αξιοποίηση των Τ.Π.Ε

Ένας τέτοιος τρόπος διδασκαλίας θα αποτελεί ένα αναπτυξιακά κατάλληλο πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης, που θα συνεισφέρει και θα συμβάλει στη δημιουργία ικανοτήτων – δεξιοτήτων που θα έχουν κεντρική σημασία γι’ αυτήν.

Ευδιάκριτη γίνεται λοιπόν η βοήθεια που προσφέρει αυτή η σύνδεση της Τέχνης με την Γεωμετρία, καθώς αποτελεί ένα ιδιαίτερο μέσο για την ανακάλυψη των νέων γνώσεων – εννοιολογικών κατακτήσεων, αλλά και για την εμπέδωση και εφαρμογή αυτών που ήδη έχουν αποκτήσει.

Το ζευγάρωμα αυτό της Τέχνης με τη Γεωμετρία οδηγεί τα παιδιά στην ενασχόληση τους μέσα από δραστηριότητες με καταστάσεις προβληματισμού με ένα πιο γόνιμο και διασκεδαστικό τρόπο, με τελικό προορισμό την εμπέδωση και γνωστική γέννηση των γεωμετρικών εννοιών που αποτελούν και το βασικό θέμα των διδασκαλιών μας.

Στο δεύτερο μέρος των συνεντεύξεων παίρνουμε απαντήσεις με τις οποίες μπορούμε να αξιολογήσουμε αν τα συμπεράσματα που βγάλαμε στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών μέσα από τα διδακτικά επεισόδια επικυρώνονται ή όχι με την ενασχόληση τους με δραστηριότητες με παρεμφερή θεματολογία.

Οι περισσότεροι μαθητές δείχνουν ότι κινούνται με άνεση στο χώρο της οπτικοποίησης και ότι τελικά φτάνουν στην ανάλυση ενός σύνθετου σχήματος, αποτελούμενο από δύο γεωμετρικά σχήματα, η οποία συνοδεύεται και από μια λεκτική διαδικασία επεξήγησης κάνοντας χρήση της σχετικής ορολογίας του κύκλου, για να οδηγηθούν τελικά στη σωστή τοποθέτηση του ενός σχήματος σε συνάρτηση με τη θέση του άλλου. Κάποια μικρή δυσκολία που υπάρχει αρχικά σε κάποιους στη ικανότητα συσχέτισης των θέσεων των δύο σχημάτων, οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στην έλλειψη της απαραίτητης προσοχής των εικονικών τους δεδομένων.

Αναφορικά με το πρόβλημα ίσης απόστασης φαίνεται για ακόμη μια φορά ότι χειρίζονται την επίλυση του αρκετά εύκολα, δίνουν άμεση απάντηση για το σκεπτικό που θα ακολουθήσουν έχοντας σαν βάση τους την ιδιότητα του κύκλου, την οποία επίσης χειρίζονται χωρίς κανένα πρόβλημα, αλλά παράλληλα διαπιστώνεται και η καλή γνωριμία με το όργανο σχεδιασμού του σχήματος του κύκλου που απαιτεί η άσκηση.

Αξιοσημείωτο είναι ότι τα παιδιά έδειξαν αναπτυγμένη δεξιότητα στην εκτέλεση κύκλων με κέντρα και ακτίνες σε θέσεις και σημεία που συσχετίζονται, αλλά και διαφοροποιούνται κάθε φορά.

Διαπιστώνεται δηλαδή πως τελείται στενή σύνδεση του χώρου της συλλογιστικής γένεσης με τον άξονα εργαλεία – μέτρηση/κατασκευή.

Σημαντικό ρόλο στην σωστή και άμεση ανταπόκριση των παιδιών στην εκτέλεση δραστηριοτήτων κατασκευής κύκλων αλλά και ταυτόχρονα στην αναπτυγμένη ικανότητα αξιοποίησης γνώσεων που αφορούν στοιχεία και όρους τους – καθώς όπως προαναφέρθηκε κατέφευγαν κατ’ επανάληψη και διεξοδικά σε δημιουργίες κύκλων με κέντρα των οποίων οι θέσεις σχετίζονται μεταξύ τους αλλά και διαφοροποιούνται – έπαιξε η παρατηρητικότητα στον έλεγχο των οδηγιών και η προσεκτική εκτέλεση τους, οι οποίες τους γνωστοποιούνται με την απαραίτητη και προκαθορισμένη σειρά.

Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι όταν κάποιες στιγμές δεν έδιναν την κατάλληλη προσοχή στις οδηγίες χάραξης και μέτρησης, υπήρχαν παρανοήσεις που οδηγούσαν σε αποκλείσεις και λάθη με τελικό αποτέλεσμα τη μη σωστή πορεία βημάτων

Δυσκολίες αντιμετώπισαν μόνο στον εντοπισμό της κοινής επιφάνειας των τριών κύκλων. Στην οριοθέτηση με άλλα λόγια του κυκλικού δίσκου που ανήκει και στους τρεις κύκλους.

Χαρακτηριστικό επίσης είναι ότι αν και οι μαθητές έχουν γνώση της ιδιαιτερότητας του ελεύθερου σχεδίου, συνεχίζεται να επικρατεί μια σύγχυση ανάμεσα στο οπτικό και το γνωστικό τους πεδίο αναφορικά με τα γεωμετρικά σχήματα των συγκεκριμένων σχεδίων. Παραμερίζοντας όμως τη στιγμιαία δυσπιστία παύουν να δίνουν βάση στην οπτική αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων που αποτυπώνονται στο ελεύθερο σχέδιο, αλλά βγάζουν συμπεράσματα στηριζόμενοι στις βασικές ιδιότητες του θεωρητικού τους συστήματος αναφοράς συμπεριλαμβανομένης και της πρόσφατης ιδιότητας του σχήματος του κύκλου, με την οποία έχει εμπλουτιστεί ο προσωπικός τους ΓΧΕ και εντοπίζουν τα σωστά μήκη των τμημάτων που τους ζητούνται με ορθή σκέψη και αιτιολόγηση ακόμα και κόντρα στα οπτικά δεδομένα (GII). Δεν εμφανίζουν όμως την ίδια άνεση στην περιγραφική διατύπωση της επιχειρηματολογίας τους στο χαρτί, καθώς δεν είναι πλήρης και ολοκληρωμένη, αφού η καταγραφή των αποτελεσμάτων γίνεται με την παράλειψη βασικών στοιχείων και σχολίων που είναι απαραίτητα για την κατανόηση του αναγνώστη.

Η παρατήρηση πως αρκετοί μαθητές εμφανίζουν μειωμένη γραπτή αποδεικτική ικανότητα συμβαδίζει με τον αναφορικό ΓΧΕ για το Δημοτικό, συγχρόνως όμως τα συγκεκριμένα ευρήματα είναι πιθανόν να συνδέονται και με την ικανότητα που μπορεί να έχει ο κάθε μαθητής σε αυτήν την ηλικία ως προς την επεξεργασία πολλών μεταβλητών, αλλά και με την ικανότητα του στο χειρισμό του λόγου προφορικού ή γραπτού.

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα μας γίνεται αρκετά εμφανές ότι η όλη οικοδόμηση της εργασίας μας πάνω στο θεωρητικό μοντέλο των ΓΧΕ και ο τρόπος εργασίας των μαθητών μέσα από δραστηριότητες στα πλαίσια των οποίων οι συμμετέχοντες μαθητές αναγκάζονται να κινούνται και να δουλεύουν πάνω σε διαφορετικά επίπεδα κάθε φορά, που γεννιούνται από την ύπαρξη των τριών αντίστοιχων νέων διαστάσεων (σημειωτική – εργαλειακή – λεκτική) που εισάγει η γεωμετρική εργασία των ΓΧΕ, οδήγησε τελικά την πλειοψηφία των παιδιών στην επιτυχή κατάκτηση της χαρακτηριστικής ιδιότητας που ορίζει το σχήμα του κύκλου.

Επιπρόσθετα βοήθησε και στην ανάπτυξη βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων που σχετίζονται με την εννοιολογική κατανόηση του, καθώς και της χρήση αυτού ως θεωρητικού εργαλείου για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων απόστασης.

Κατάφεραν λοιπόν πέρα από κάποια γνωστική σύγχυση αρχικά σε μικρό αριθμό μαθητών που οφείλονταν στην αποκωδικοποίηση δοθέντων πληροφοριών, στην μη ολοκληρωμένη περιγραφική καταγραφή των αποτελεσμάτων και σε ελλιπή προσοχή λεκτικών - οπτικών εντολών, να διατυπώσουν τελικά τον εννοιολογικό ορισμό ενός σχήματος.

Ενός εννοιολογικού ορισμού που δεν το σχετίζουν πλέον με νοερές αναπαραστάσεις ή προηγούμενες εντυπώσεις και εμπειρίες, αλλά που το στηρίζουν σε μια ιδιότητα την οποία αποδεικνύουν με την συμβολή του χώρου της οπτικοποίησης, της λεκτικής γένεσης αλλά και τη χρήση των κατάλληλων τεχνουργημάτων – εργαλείων στα πλαίσια της διαδικασίας κατασκευής του σχήματος.

Σημειώνεται επίσης ότι κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων ο διαβήτης χρησιμοποιήθηκε κυρίως ως εργαλείο μέτρησης – σύγκρισης και μόνο προς το τέλος της εργασίας επικυρώνεται η χρήση του ως κατασκευαστικού εργαλείου.

Στις τελικές συνεντεύξεις η χρήση αυτή μετασχηματίζεται και ο διαβήτης κυριαρχεί στον άξονα εργαλεία/κατασκευή και καθιερώνεται ως όργανο σχεδιασμού του κύκλου.

Επιπλέον τα χαρακτηριστικά των προβληματικών καταστάσεων που είχαν να αντιμετωπίσουν κάθε φορά επηρέαζαν εν μέρει και την ανάπτυξη του ΓΧΕ, τη μορφή εργασίας και τις απαντήσεις τους. Η εργασία ξεκίνησε από τον άξονα χώρο – οπτικοποίηση και με την ενσωμάτωση νέων εργαλείων και μεθόδων οι μαθητές συγκρότησαν τον προσωπικό ΓΧΕ τους και κατάφεραν μέσω πειραματισμού και γενίκευσης να οδηγηθούν στην ιδιότητα του κύκλου και στη συνέχεια κινούμενοι στα πλαίσια του θεωρητικού πόλου και επιχειρηματολογώντας έφτασαν να δώσουν μια πιο έγκυρη απόδειξη του μαθηματικού αποτελέσματος.

Τα αποτελέσματα αυτά αλλαγής μεθόδου εργασίας έγιναν πιο ορατά στις συνεντεύξεις των παιδιών, όπου διαθέτοντας έναν πιο πλούσιο ΓΧΕ και έχοντας πλέον μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για την έννοια του κύκλου καθώς και της ιδιότητας του, πράττουν και ενεργούν περισσότερο στα πλαίσια του θεωρητικού πόλου της GII και λιγότερο σε αυτόν του εμπειρικού της GI.

Επιπρόσθετα η σύνδεση της Τέχνης με τη Γεωμετρία που έλαβε μέρος με την ενσωμάτωση των διαφόρων μορφών τέχνης στις δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν σε όλα τα διδακτικά επίπεδα, δημιούργησε ένα πιο διασκεδαστικό και ευχάριστο περιβάλλον μάθησης, το οποίο οδήγησε τελικά στην άμεση και γρήγορη εξοικείωση των παιδιών με τις καινούριες μαθηματικές έννοιες και συγκεκριμένα με την γεωμετρική έννοια του κύκλου και τους ενθάρρυνε να ασχοληθούν με αυτήν με έναν πιο ελκυστικό και βιωματικό τρόπο, που τους έκανε να διαφοροποιήσουν τα πιστεύω τους απέναντι στο μάθημα της Γεωμετρίας και επέφερε θετικές αλλαγές στη στάση τους απέναντι της, σε βαθμό που εξέφρασαν συνολικά την επιθυμία για περαιτέρω μάθηση νέων γεωμετρικών εννοιών με το ίδιο τρόπο διδασκαλίας και ακολουθώντας το ίδιο μοτίβο εργασίας και μάθησης.

6.1 Προτάσεις μελλοντικής έρευνας

Μελλοντικά θα μπορούσε να υπάρχουν έτοιμες σειρές διδακτικών παρεμβάσεων στηριζόμενες στο θεωρητικό μοντέλο των ΓΧΕ για τα παιδιά από τις πρώτες τάξεις φοίτησης τους στο Δημοτικού, όπου το θεωρητικό σύστημα αναφοράς τους βρίσκεται σε πολύ πρώιμο στάδιο ακόμη, στα πλαίσια της εννοιολογικής κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων με απώτερο στόχο να διερευνηθούν οι προσωπικοί χώροι εργασίας των παιδιών αυτών σε μεγαλύτερες τάξεις και να αποτελέσουν μέτρο σύγκρισης με τους προσωπικούς ΓΧΕ μαθητών που έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με το συγκεκριμένο μοντέλο γεωμετρικής εργασίας πάνω στα σχήματα σε μεγαλύτερες τάξεις (Ε΄- ΣΤ΄).

Επιπρόσθετα στόχο έρευνας θα μπορούσαν να αποτελέσουν και οι προσωπικού χώροι μαθητών στα πλαίσια διδασκαλίας διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων από άλλες χώρες, που φοίτησαν στο ελληνικό Δημοτικό σχολείο σε μεγάλες τάξεις, των οποίων τα θεωρητικά συστήματα αναφοράς ΓΧΕ τους είναι διαφορετικά από αυτά των Ελλήνων μαθητών.

6.2 Περιορισμοί έρευνας

Τελειώνοντας θα πρέπει να τονιστεί ότι η παρούσα έρευνα έχει συγκεκριμένους περιορισμούς. Καταρχήν το δείγμα είναι μικρό και τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευτούν στο σύνολο των μαθητών Ε΄ Δημοτικού.

Επίσης επειδή το επίπεδο των μαθητών διαφέρει σε κάθε τάξη και καμία διδασκαλία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες απολύτως η ίδια, ο κάθε εκπαιδευτικός πρέπει να λαμβάνει υπόψη τη συγκεκριμένη παράμετρο και να αποφασίζει πού να δώσει έμφαση και σε ποιο επίπεδο να φτάσει η επισημοποίηση (GI ή GII).

Επιπλέον σε κάθε περίπτωση θα βοηθούσε να μεσολαβούν περισσότερες ημέρες ανάμεσα σε κάθε μάθημα, ώστε οι μαθητές να έχουν το χρόνο να αφομοιώνουν όσα διδάχτηκαν.

Οι συνεντεύξεις από την άλλη διευκόλυναν την διατύπωση επιχειρημάτων, ενώ ένα γραπτό ερωτηματολόγιο θα είχε ίσως περισσότερες απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, γεγονός που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε τυχόν συγκρίσεις με έρευνες βασισμένες σε ερωτηματολόγιο. Τέλος η ενημέρωση των μαθητών ότι οι απαντήσεις αφορούσαν μόνο την έρευνα και δεν θα μετρούσαν στη προσωπική επίδοση του καθενός τους διευκόλυνε να εκφράζουν ελεύθερα την άποψη τους. Όμως έτσι ίσως οι μαθητές κατέβαλαν λιγότερη προσπάθεια στη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων σε σχέση με αυτήν που καταβάλλουν στην τάξη.

Βιβλιογραφία

1. Αγαλιώτης, Ι., (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Αιτιολογία, Αξιολόγηση, Αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα
2. Alain Kuzniak, Assia Nechache. Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. Konrad Krainer; Nada Vondrov´a. CERME 9 - Ninth Congress of the European ˇ Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.543- 549, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.
3. Αναστασιάδης, Μ., & Νικολαντωνάκης, Κ., (2014). *Ισοπεριμετρικά σχήματα στο δημοτικό σχολείο: διδασκαλία με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών.* Επιστήμες αγωγής, Θεματικό τεύχος 2014, 69-91.
4. Αντωνόπουλος, Ι. & Δουκάκη, Μ. (2007). *Εικαστικά Γ΄ Γυμνασίου*. Αθήνα
5. Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 245-274.
6. Βαζούρα, Ε., (2007). Η μαθηματική αναλογία της χρυσής τομής. Ένας ιστορικός και εικαστικός εντοπισμός με διδακτικές προσεγγίσεις. (Αδημοσίευτη μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών). Ανακτήθηκε 16 Ιουλίου 2017, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_vazoura.pdf
7. Bertonaschi, K.: ―*A Geometry Treasure Hunt: Uncovering Geometry in Art, Architecture and the Wolrd Around Us*", Askew Elementary School: 2004, σελ. 4 Boardman
8. Borasi, R., Sheedy, J. & Siegel, M. (1990). *The power of Stories in Learning Mathematics*. Language Arts, 67(2).
9. Braconne-Michoux, A. (2011). Relations between geometrical paradigms and van Hiele levels. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 618-627). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.
10. Ching, F. (2006). *Αρχιτεκτονική- Μορφή, Χώρος & Διάταξη*. (Δ. Φακίρη, Μτφρ.). Αθήνα: Ίων. Βιβλίο.

11. Γιαννικοπούλου, Α. (2002). Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Στο Καΐλα, Μ., Καλαβάσης, Υ., & Πολεμικός, Ν. (Επιμ.), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες σχέσεις στην εκπαίδευση* (σελ. 71-101). Αθήνα: Ατραπός.
12. Corbalan, F. (2004). MartMATICS, "The 10th International Congress on Mathematics Education", July 4-17 2004, Copenhagen, Denmark, TG21. http://www.icme-organisers.dk/tsg21/Corbalan.pdf
13. Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 97-126.
14. Γραμματάς, Θ., (1998). *Θέατρο και παιδεία*. Αθήνα: Τελέθριον.
15. Δανασσής – Αφεντάκης, Α., (1997). *Σύγχρονες τάσεις της αγωγής* (2η έκδοση), Αθήνα : Γκελμπέσης.
16. Donaldson, M. (1991). *Η σκέψη των παιδιών* (3η έκδοση). Αθήνα: Gutenberg.
17. Duatepe, A., (2004). The effects of Drama based instruction on seventh grade students‟ Geometry achievement, Van Hiele geometric thinking levels, attitude toward Mathematics and Geometry, Thesis submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences 0f Middle East Technical University Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
18. Duval, R., (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC.
19. Duval, R., (2004). Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings. Notes from Lecture.
20. Eisner, E., (2002). *The arts and the creation of mind.* New Haven and London: Yalle University Press
21. Ζωγράφος, Θ., Πετρίκη, Σ., Κωτσαλίδου, Δ., (2004). *Γιατί οι εκπαιδευτικοί δεν επιχειρούν την προσέγγιση ενός καλλιτέχνη*. Εφαρμογή ενός προγράμματος. Μακεδνόν, τ. 13, Φλώρινα.
22. Fénichel, M., & Taveau, C., (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond. DVD, CRDP Créteil.
23. Freudenthal, H., (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

24. Houdement, C., & Kuzniak, A., (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'etude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Educational Studies in Mathematics .
25. Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different paradigms. Proceedings of CERME. Bellaria, Italy.
26. Houdement, C., & Kuzniak, A., (2006). Paradigmes geometriques et enseignement de la geometrie: Developpement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnement et Coordination de leurs Foctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, (pp. 175-193).
27. Ιωακειμίδης, Π., (2012). Όταν η Θεατρική παιδεία συναντά τα Μαθηματικά: μια πρόταση εκπαιδευτικού σεναρίου με δράσεις Θεατρικής Αγωγής για τη διδασκαλία της ενότητας «Γεωμετρικά σχήματα». Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.), 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο, 5-7 Οκτωβρίου 2012.
28. Ιωσηφίδης, Θ. (2003) *Ανάλυση Ποιοτικών δεδομένων στις Κοινωνικές* Επιστήμες, Αθήνα, εκδόσεις Κριτική.
29. Jenner, D., M., (2002). *Experiencing and understanding mathematics in the midst of a story.* Teaching Children Mathematics, 9(3), 167-171.
30. Κοζάκου - Τσιάρα, Ο., (2006). *Εισαγωγή στην εικαστική γλώσσα*. Αθήνα: Gutenberg.
31. Κολέζα, Ε., (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.
32. Κολέζα, Ε., (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.
33. Κολέζα, Ε., & Καμπάνη, Ε., (2005). Μορφές και επίπεδα αιτιολόγησης κατά τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων. Στο Χ., Κυνηγός (Επ.), Πρακτικά 1ου Συνεδρίου της Ένωσης Διδακτικής Μαθηματικών (σελ. 322-331). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
34. Κοταρίνου, Π., & Σταθοπούλου, Χ. (2011) Ένα πανόραμα από τις έρευνες για την αξιοποίηση των τεχνών στη διδασκαλία των μαθηματικών, *9ο διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών,* 15-16 Νοεμβρίου, Αθήνα.
35. Κοταρινού, Π., Σταθοπούλου,. Χ., Κοντογιάννη,. Α. (2012) «Συλλογικότητα και αλληλεγγύη κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας με τεχνικές Δραματικής τέχνης στην εκπαίδευση» Πρακτικά από την 7η Διεθνή Συνδιάσκεψη για το

Θέατρο στην εκπαίδευση, σελ, 224-231, Θέατρο & Εκπαίδευση: Δεσμοί αλληλεγγύης, Αθήνα, Δεκέμβριος 2012, Γκόβας, Ν., Κατσαρίδου, Μ., Μαυρέας, Δ., (επιμ.) (ISBN 978-960-9529-01-3)

36. Κουριδάκης, Μ., Γληνού. Κ., Παπασίνου, Χ., (2013). Μαθηματικά και Τέχνη – Κεντήματα Υψηλού Νοήματος. Ανακτήθηκε 3 Αυγούστου 2017 από http://www.math-art.eu/X_School/Greek_School/+%C2%A3+%C3%A6+%C3%BF+%C3%B9+%C2%A3+%C3%A6+%C3%B1+%C3%96+%C3%9C+%C3%A6%20+%C3%9C+%C3%A6+%C3%96%20+%C3%B1+%C3%B2+%C2%BA+%C3%98+%C3%B9%20%20+%C3%B1+%C3%B2+%C3%B8+%C3%96+%C3%9C+%C3%B9%20+%C2%A3+%C6%92+%C3%AD+%C2%AA+%C6%92+%C3%A1+%C6%92+%C3%96+%C3%B9+%C3%BA+%C3%B9.pdf

37. Kuzniak, A., (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Paris: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathémaques, Paris VII.

38. Kuzniak, A., (2006). Paradigmes et espaces de travail géometriques. *Élements d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géometrie.* Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, σσ. 167, 188.

39. Kuzniak, A., (2009a). Δυσκολίες στην διδασκαλία της Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος, & Κ. Τζανάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 5ης διεθνούς διημερίδας διδακτικής Μαθηματικών* (τ. 1, σσ. 121-136). Ρέθυμνο: ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

40. Kuzniak, A., (2009b). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, & L. Vivier (Eds.), *Cyprus and France research in mathematics education. First French-Cypriot conference of mathematics education* (pp. 71-90). Lefkosia: A. Gagatsis, University of Cyprus.

41. Kuzniak, A., & Vivier, L. (2010). A French look on the Greek geometrical working space at secondary school level. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 686-695). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

42. Kuzniak, A., (2011). L'espace de travail Mathématique et ses genèses. Annales de didactique et de sciences cognitives (pp. 9-24). IREM de STRASBOURG.

43. Kuzniak, A. (2012a, July). *Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations*. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.
44. Kuzniak, A., (2012b, Octobre). *Travail mathématique et domaines mathématiques.* Papier présenté au 3e symposium Espace de Travail Mathématique, Montréal, Canada.
45. Kuzniak, A., (2014). Understanding Geometric Work through its Development and its Transformations.
46. Kuzniak, A., (2015). Understanding Geometric Work through its Development and its Transformations. Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (σσ. 1-15). Cham: Springer.
47. Lampropoulou, M.; Kaldrimidou, M. (1997). The deamatic play as a didactical environment for the young children: A study who focuses on mathematical notions. Paper at the EECERA Conference on the Quality of Early Childhood Education, CHILBHOOD IN A CHANGIG SOCIETY, Munich, Germany, 3-6 September, 1997. Lawrence
48. Λεμονίδης, Χ., (1997). Κάποιες παρατηρήσεις για τη διδασκαλία της γεωμετρίας διαμέσου μιας θεωρητικής ανάλυσης του γεωμετρικού σχήματος: http:// www. eled.uowm.gr/ mathslife (ανακτήθηκε στις 11/ 07/ 17)
49. Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μία νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου.* Αθήνα: Πατάκη.
50. Μηλιώνης, Χ., (2001). *Μαθηματική Λογοτεχνία: ένα εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών,* περιοδικό Το δικό μας Βήμα, τευχ.21, σελ. 44-47, Νοέμβριος 2002, εκδ. Α-Γ ΕΛΜΕ Ανατολικής Αττικής.
51. Μηλιώνης, Χ., (2002). Τα Μαθηματικά στο Θέατρο: Δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησης στο Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού, Πρακτικά του 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, σελ. 328-337, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Νοέμβριος 2002. (ISSN: 1105-7955)
52. Μιχαήλ, Ε., Μουσκή, Κ. & Γαγάτσης, Α. (2006). Η ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στις Γ΄- Δ΄ τάξεις του δημοτικού. Άρθρο που παρουσιάστηκε στο 9ο Συνέδριο παιδαγωγικής εταιρείας Κύπρου, 2-3 Ιουνίου 2006. Ανακτήθηκε 10 Ιουλίου 2017, από http://www.pek.org.cy/Proceedings_2006/1.%20kefalaio%201%20Themata%

20mathimatikis%20Paideias/1.16.%20E.%20Michael%20et%20al..pdf

53. Νόκας, Ε., (2010). Σχήματα και Διαγράμματα. Ο ρόλος τους στη διαμόρφωση και κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών. Διπλωματική εργασία, Αθήνα, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών. Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης. Τμήμα Φιλοσοφίας-Παιδαγωγικής-Ψυχολογίας. Ανακτήθηκε 14 Ιουνίου 2017 από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_nokas.efstathios.pdf.
54. Παπαδογιαννάκη, Α., (2012). «Η αξιοποίηση των τεχνών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο». Εργασία που παρουσιάστηκε στο 29ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (9-11/11/2012, Καλαμάτα) και η οποία εκπονήθηκε για το μεταπτυχιακό μάθημα «Διδακτική των Μαθηματικών», Τμήμα Μαθηματικό, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
55. Παυλίδου, Μ. (2002). *Παίζοντας με τη μαγεία του κύκλου.* Εικαστική Παιδεία, Τεύχος 18, 74-78.
56. Polya, G., (1961). *Η Μαθηματική Ανακάλυψη*. (Σ. Στεργιάκης & Γ. Τσαπακίδης, Μτφρ.). Αθήνα: Κάτοπτρο βιβλίο.
57. Πόταρη, Δ., (2001). Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος στα παιδιά και ο ρόλος της γλώσσας. Στο Μ., Τζεκάκη (Επ.), Πρακτικά 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση (σελ. 164-170). Θεσ/νίκη: Α.Π.Θ.
58. Πούλος, Α., Θωμαΐδης Γ., ―*Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*", Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000, σελ.16.
59. Robson, C. (2002) Real World Research, Second Edition. Oxford: Blackwell.
60. Ρουμπέση, Α., (2009). Τα νέα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου και η αντιμετώπιση τους από τους καθηγητές. Διπλωματική Εργασία, Αθήνα, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών. Ανακτήθηκε 11 Αυγούστου, 2016, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Roubessi.Anna.pdf
61. Σμυρναίου, Ζ., (2014). «Παιδαγωγικά, Νεότερες θεωρητικές προσεγγίσεις: Σενάρια διδασκαλίας, Σχεδιάζοντας ένα εκπαιδευτικό σενάριο για τις φυσικές επιστήμες, Κάλυψη Επιφάνειας Κυκλικού Δίσκου». Ανακτήθηκε Ιούλιος 17, 2017, από http://opencourses.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH18/%CE%94%CE%B9%CE%B4%CE%B1%CE%BA%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%A0%CE%B1%CE%BA%CE%AD%CF%84%CE%BF/%CE%95

%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%20%CE%94/%CE%A0%CE%B1%CF%81%CE%B1%CE%B4%CE%B5%CE%AF%CE%B3%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1%20%CE%A3%CE%B5%CE%BD%CE%B1%CF%81%CE%AF%CF%89%CE%BD/%CE%9A%CE%AC%CE%BB%CF%85%CF%88%CE%B7%20%CE%95%CF%80%CE%B9%CF%86%CE%AC%CE%BD%CE%B5%CE%B9%CE%B1%CF%82%20%CE%9A%CF%85%CE%BA%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CF%8D%20%CE%94%CE%AF%CF%83%CE%BA%CE%BF%CF%85.pdf

62. Τζεκάκη, Μ. (2001). Η γεωμετρική κατασκευή στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Στο Α. Αρβανιτογεώργος, Β. Παπαντωνίου & Δ. Ποτάρη (επιμ.), Ερευνητικές προσεγγίσεις στη διδακτική της γεωμετρίας – Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας, (σελ. 30-37). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.
63. Τζεκάκη, Μ., (2002). *Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση, ένα πρόβλημα αναζητά λύση.* Themes in Education, 3 (1), 22-34. 17.
64. Thiessen, D., Matthias, M., Smith J. (1998) *The Wonderful World of Mathematics: A Critically Annotated List of Childrens Books in Mathematics.* Second Edition. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.
65. Τουμάσης, Μ., (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg
66. Τρέσσου, Ε., & Μητακίδου, Σ., (2002). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία: μια δημιουργική συνάντηση.* Μαθηματικά και λογοτεχνικά κείμενα, σ. 37-38, Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη.
67. Van de Walle, John A., (2001*). Geometric Thinking and Geometric Concepts.* In Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (4th ed.). (pp. 342-349). Boston: Allyn and Bacon.
68. Van de Walle, J., (2005). *Γεωμετρική σκέψη και γεωμετρικές έννοιες*. Στο Τ. Τριανταφυλλίδης (Επιμ.), Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία (426-465). Αθήνα: Τυπωθήτω Γιώργος Δαρδανός. Βιβλίο.
69. Vinner, S., (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 65-81). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
70. Wellington, J., (2000). Educational Research. Contemporary Issues and

Practical Approaches. London: Continuum.

71. Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ., (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: ΔΑΡΔΑΝΟΣ.

72. Χασάπης, Δ., (2007). Μαθηματικά και Λογοτεχνία Μια αιτούμενη σύζευξη. 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών ‘‘Μαθηματικά και Λογοτεχνία’’. Θεσσαλονίκη: Ομάδα έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. (17-18 Μαρτίου).

73. Χρονάκη, Α., (2006). *Η πρό(σ)κληση της γεωμετρίας και της τεχνολογίας στις μικρές ηλικίες: Το ‘μέσο’ και το ‘μήνυμα’ του συστήματος άτομα-τεχνολογία δραστηριότητα*. Θέματα στην Εκπαίδευση, 7(1), 23-51.

74. Χρονάκη, Α., & Μουτζούρη, Γ., (2011). Λογοτεχνία και Μαθηματικά στις Μικρές Ηλικίες: πολυφωνικές αφηγήσεις και αναδυόμενες δεξιότητες αριθμητικού γραμματισμού. Στο Πρακτικά του 9ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Μαθηματικά και τέχνες στην Εκπαίδευση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Λογοτεχνικό κείμενο

[Το καυκασιανό παραμύθι]

Στη διάρκεια τον πολέμου ένα μικρό κορίτσι χάνει τη μητέρα του. Το σώζει μια γυναίκα, που το υιοθετεί και το ανατρέφει με τρυφερότητα και αγάπη. Μετά από χρόνια, η φυσική του μητέρα, που ποτέ δε σταμάτησε να το αναζητά, το ξαναβρίσκει και θέλει να το πάρει κοντά της. Στο κείμενο που ακολουθεί, η Μόνα, η θετή μητέρα της ιστορίας μας, διηγείται στο παιδί ένα παραμύθι, με σκοπό να το προετοιμάσει για την αλήθεια, αλλά και για τις αλλαγές που πρόκειται να συμβούν στη ζωή του.

Από κείνο, το ίδιο κιόλας βράδυ, άρχισε να του λέει με δικά της λόγια απλά το καυκασιανό παραμύθι του «Κύκλου με την κιμωλία».

«Ήταν, που λες, Λουλούδι μου, στα πολύ παλιά χρόνια, ένας βασιλιάς και μια βασίλισσα, που είχαν ένα μεγάλο παλάτι, που έμπαινες και δεν ήξερες τι να πρωτοθαυμάσεις. Τις ζωγραφιές, τους καθρέφτες, τα χρυσαφικά, τα χαλιά, τους κήπους, τα πατώματα κι ό,τι άλλο θες. Ο βασιλιάς κι η βασίλισσα δεν είχαν παιδιά. Όλα τα καλά τα είχαν. Μόνο ένα παιδί τούς έλειπε. Ώσπου μια μέρα ήρθε κι αυτό το καλό. Χαρές, γιορτές, γλέντια, που κράτησαν μέρες. Και τότε, πάνω στο μεθύσι της χαράς του, ο βασιλιάς είπε ότι δε φοβόταν πια κανένα. Κανένα.

»Το άκουσε ο δράκος Πόλεμος και λέει: "Να δεις, θα τους δείξω εγώ!". Παίρνει τα τσιράκια* του και πάνε και βάζουν φωτιά στο παλάτι. Και τρέχει ο βασιλιάς να σωθεί και τρέχει η βασίλισσα να φύγει. Αλλά, προτού να βγει από το παλάτι, η βασίλισσα θυμήθηκε ότι ξέχασε να πάρει το πιο ακριβό πράγμα που είχε στον κόσμο: ένα μεγάλο ρουμπίνι που άστραφτε σαν μικρός ήλιος. Τρέχει, που λες, το παίρνει και φεύγει από την πίσω πόρτα. Μόλις βγήκε από το παλάτι, θυμήθηκε ότι είχε κι ένα άλλο πολύτιμο πράγμα: το μονάκριβο παιδί της που κοιμόταν στην κούνια του. Αχ, πώς το ξέχασε! Κάνει να γυρίσει να το πάρει, μα βλέπει ότι τα τσιράκια του δράκου Πόλεμου είχαν μπει στο παλάτι. "Αχ, βαχ", τι να κάνει η βασίλισσα, φεύγει με την άμαξα και γλιτώνει τη ζωή και το ρουμπίνι της».

— Και το παιδί, τι έγινε το παιδί;

— Ναι, το παιδί. Θα δεις τι έγινε.

«Πέρασαν χρόνια κι η βασίλισσα, που δεν ήταν πια βασίλισσα κι ο άντρας της είχε σκοτωθεί, μαθαίνει ότι το παιδί της ζούσε. Το είχε σώσει μια από τις υπηρέτριές της, η πιο μικρή. Όταν είδε ότι το ξέχασαν, το πήρε και με κίνδυνο της ζωής της το έσωσε. Δεν είχε άμαξα να φύγει αυτή, δεν είχε άλογα, δεν είχε λεφτά. Το πήρε και, περπατώντας, τράβηξε προς το βουνό. Κι εκεί κρύφτηκε. Ύστερα, βρήκε κάτι καλούς ανθρώπους που της δώσανε δουλειά, και το μεγάλωσε το παιδί.

»Λοιπόν, ήρθε ύστερα από χρόνια η μητέρα του, που το ξέχασε στην κούνια και λέει: "Το παιδί είναι δικό μου". "Όχι", λέει η γυναίκα που το έσωσε. "Εγώ το γλίτωσα, το μεγάλωσα, το αγάπησα· είναι δικό μου το παιδί". "Όχι, δικό μου" η μια, "δικό μου" η άλλη και, για να βρουν το δίκιο τους, πήγαν σε ένα μεγάλο και σοφό δικαστή.

»Κι αυτός λέει σε κάποιον από τους ανθρώπους του να πάρει μια κιμωλία και να φτιάξει στο πάτωμα έναν κύκλο κι εκεί μέσα να βάλουν το μικρό παιδί στο κέντρο του κύκλου και οι μητέρες να σταθούν απέναντι η μια από την άλλη και σε ίση απόσταση από το κέντρο.

ΥΛΙΚΟ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΩΝ

Συναισθηματική διάσταση

Ερωτήσεις

1. Όταν ακούω τη λέξη Γεωμετρία τι συναισθήματα μου δημιουργούνται
    - Φόβος
    - Αγωνία
    - Δυσανασχέτιση
    - Ευχαρίστηση
    - Άγχος
    - Χαρά
    - Πλήξη
    - Ενθουσιασμό
2. Χαρακτήρισε με δύο επίθετα τη Γεωμετρία
    - Αδιάφορη
    - Δύσκολη
    - Ελκυστική
    - Βαρετή
    - Ενδιαφέρουσα
    - Ακατανόητη
    - Κουραστική
    - Δημιουργική
3. Τι νομίζεις ότι σε δυσκολεύει περισσότερο στο συγκεκριμένο μάθημα
    - Αντίληψη του χώρου
    - Απεικόνιση των γεωμετρικών σχημάτων και κατανόηση των βασικών ιδιοτήτων τους
    - Λύση ασκήσεων
    - Επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων
    - Κατανόηση της θεωρίας και των γεωμετρικών εννοιών

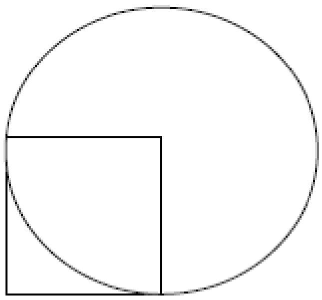
- Διατύπωση ορισμών και απομνημόνευση – εφαρμογή τύπων.
- Οι μέθοδοι διδασκαλίας του μαθήματος.

4. Πως νομίζεις ότι θα μάθαινες με καλύτερο τρόπο τις πρωτόγνωρες γεωμετρικές έννοιες
   - Αξιοποίηση των νέων Τεχνολογιών
   - Ενσωμάτωση – Χρήση Τέχνης
   - Χρήση υλικού από ιστορικές πηγές
   - Συμβολή του παιχνιδιού στα γεωμετρικά δρώμενα
5. Τις τελευταίες εβδομάδες ασχοληθήκαμε με μια σειρά δραστηριοτήτων στην προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του γεωμετρικού σχήματος του κύκλου κάνοντας χρήση διαφορετικών ειδών τέχνης. Τα μαθήματα που έγιναν και συνέδεσαν τη Γεωμετρία με την τέχνη επέδρασαν θετικά στη μάθηση σου και οδήγησαν σε επιτυχή κατανόηση της καινούριας έννοιας καθώς και στη διατηρησιμότητα της.
6. Τι δε σου άρεσε στις συναντήσεις;
7. Η καινούρια εμπλοκή σου με τη Γεωμετρία μέσα από την Τέχνη πισυεύεις ότι θα επιφέρει αλλαγές στην στάση σου και στον τρόπο ενασχόλησης σου με τη Γεωμετρία. Γιατί; (Αιτιολόγησε την απάντηση σου)

Γνωστική διάσταση

Α. Σχετικά με την ικανότητα ανάλυσης του σχήματος και χρήσης της σχετικής ορολογίας του κύκλου.

Άσκηση 1



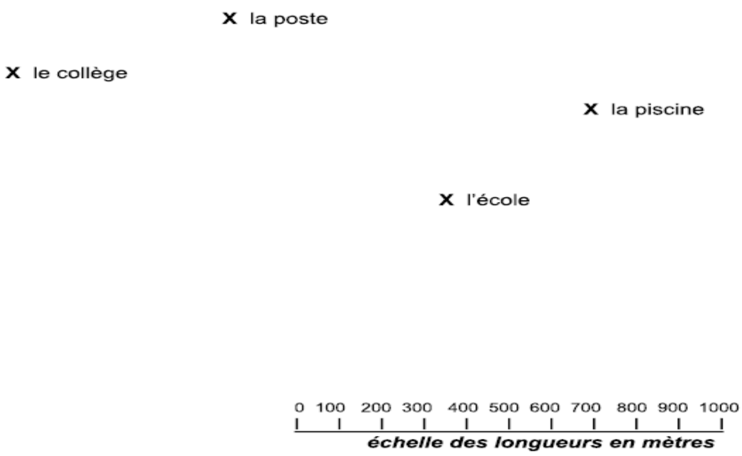
Προσπάθησε να περιγράψεις το παρακάτω σχήμα λεκτικά σε ένα συμμαθητή σου δίνοντας του τις κατάλληλες πληροφορίες ώστε να μπορέσει να το κατασκευάσει χωρίς να το δει.

Β. Σχετικά με την ικανότητα χρήσης της χαρακτηριστικής ιδιότητας του κύκλου για την επίλυση του προβλήματος ίσης απόστασης

Άσκηση 2

Σε μια πόλη το αρτοποιείο βρίσκεται 900 μέτρα από το σχολείο και 700 μέτρα από το ταχυδρομείο. Στο παρακάτω σχέδιο,

1) τοποθετείστε τις πιθανές θέσεις για το αρτοποιείο.



2) Γνωρίζουμε ότι το αρτοποιείο είναι πιο κοντά στο Γυμνάσιο απ΄ ότι στην πισίνα. Σημειώστε με κόκκινο την ακριβή θέση του αρτοποιείου.

Γ. Σχετικά με την ικανότητα αξιοποίησης την γνώσεων που σχετίζονται άμεσα με τον κύκλο (κέντρο – ακτίνα).

Άσκηση 3

Σε τετραγωνισμένο χαρτί

1) Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 4 τετραγωνάκια
2) Χάραξε τον κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ. Χρωμάτισε τον κύκλο με μπλε.
3) Χάραξε τον κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα ΑΒ. Χρωμάτισε τον κύκλο με κόκκινο.
4) Αυτοί οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Ονόμασε αυτά τα σημεία Γ και Δ.

5) Χάραξε τον κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ΑΓ.
6) Χρωμάτισε το κοινό μέρος στους τρείς δίσκους του σχήματος που κατασκεύασες.

Δ. Σχετικά με την αξιολόγηση κατανόησης του ελεύθερου σχεδίου και την ικανότητα χρήσης ενός συλλογισμού βασιζόμενου στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (τετράγωνο και κύκλος)

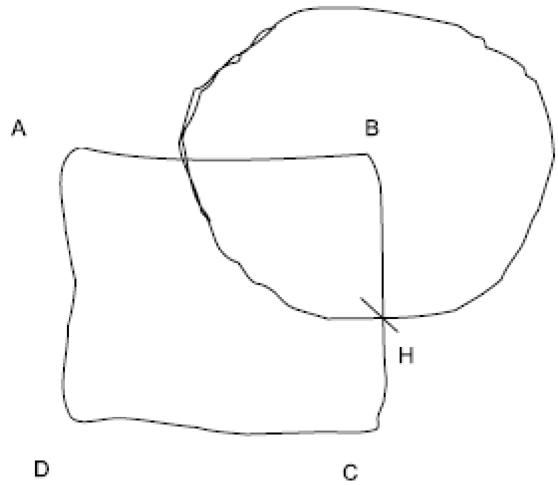
Άσκηση 4

Το παρακάτω σχήμα είναι ελεύθερο δηλαδή γίνεται με το χέρι.

ABCD είναι ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 7 εκατοστά.

Ο κύκλος είναι με κέντρο Β και ακτίνα 4 εκατοστά

1) Ποιο είναι το μήκος του τμήματος ΒΗ? Εξήγησε την απάντησή σου.
2) Υπολόγισε το μήκος HC. Εξήγησε τον υπολογισμό σου



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

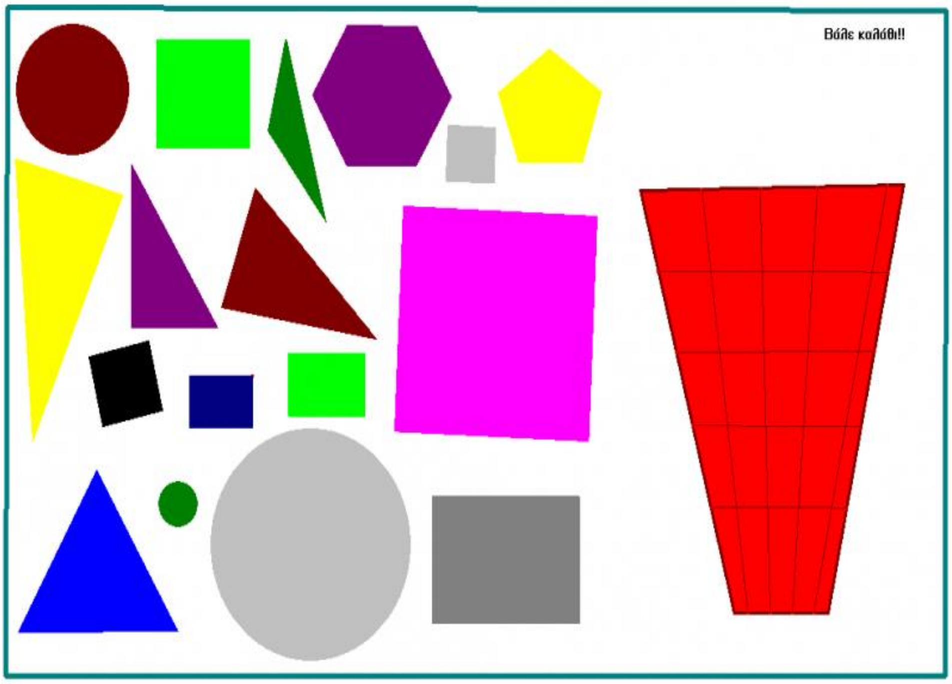
Πίνακες και φύλλα εργασίας

Πίνακας 1

Πίνακας 2

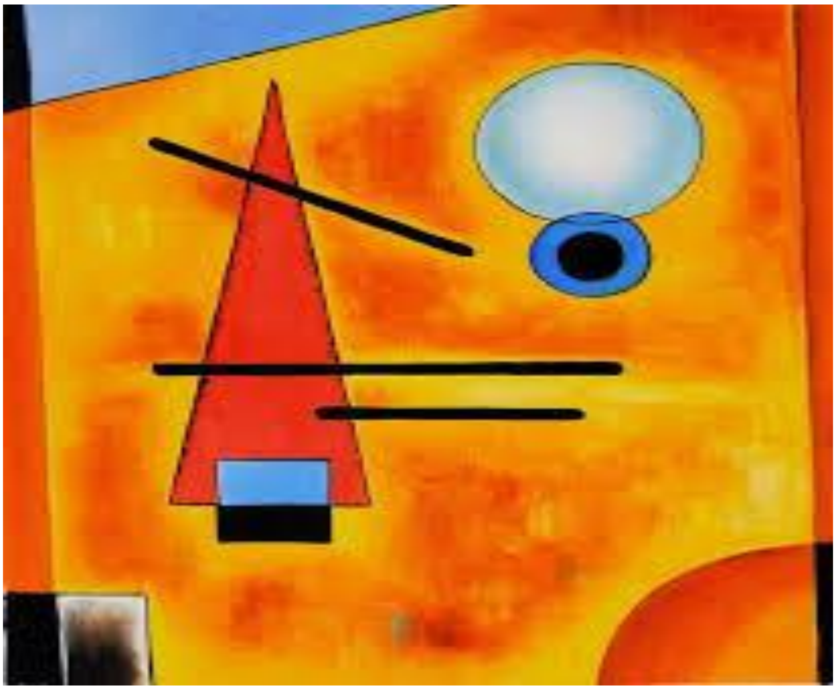
Πίνακας 3

Πίνακας 4



Πίνακας 5

Πίνακας 6

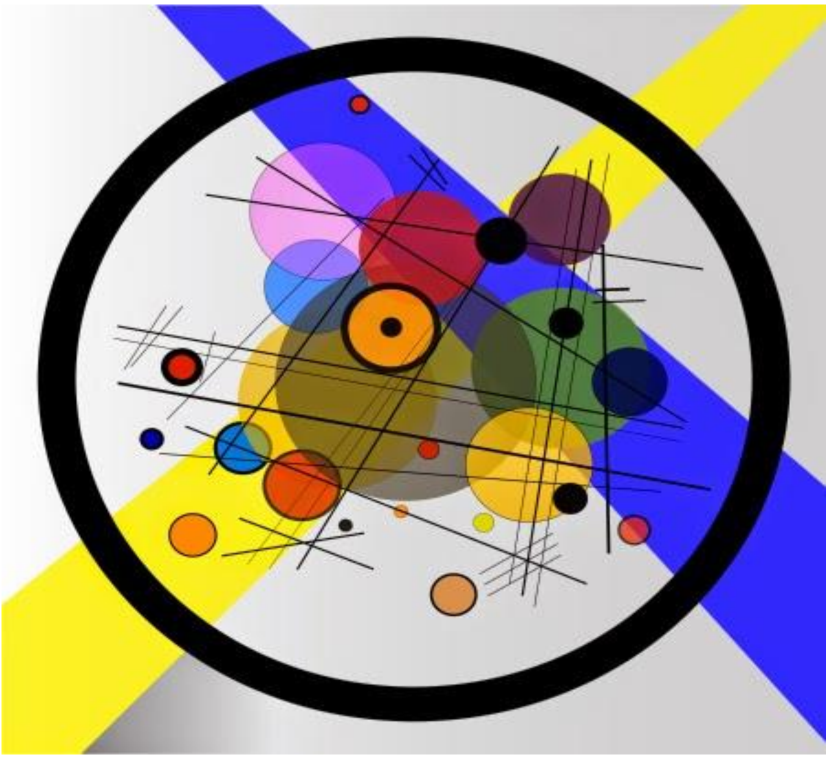


Πίνακας 7

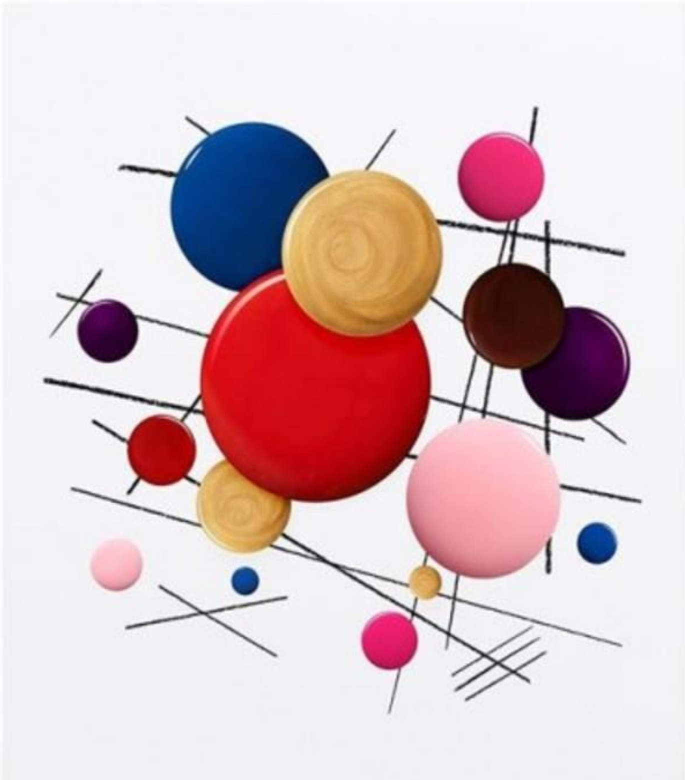
Πίνακας 8

Πίνακας 9

Πίνακας 10



Πίνακας 11



Πίνακας 12

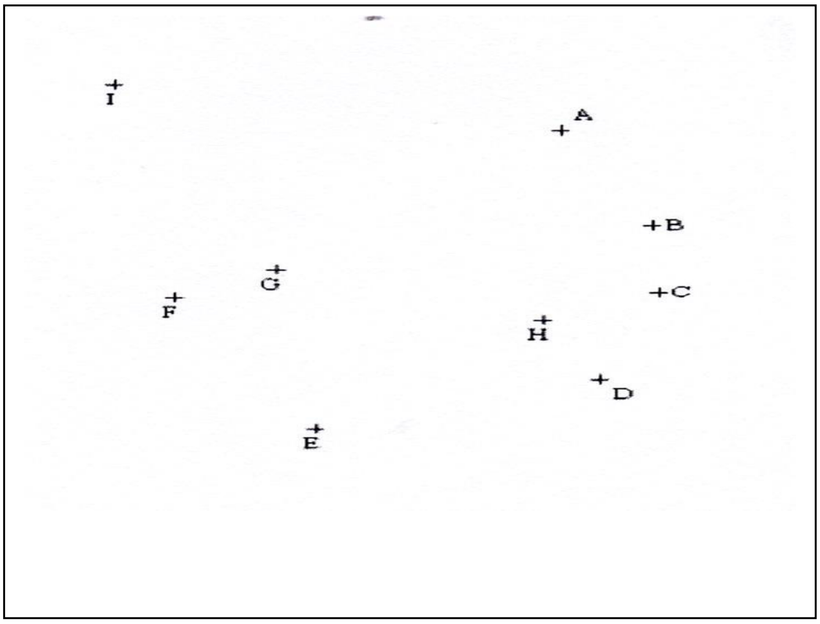
Πίνακας 13

Πίνακας 14

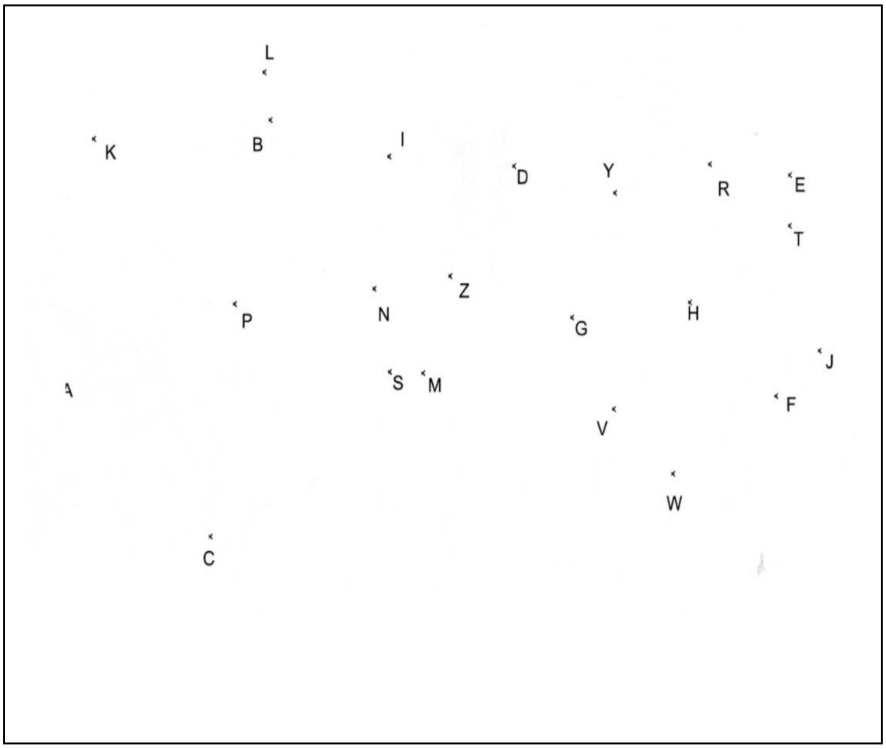
Πίνακας 15

Πίνακας 16

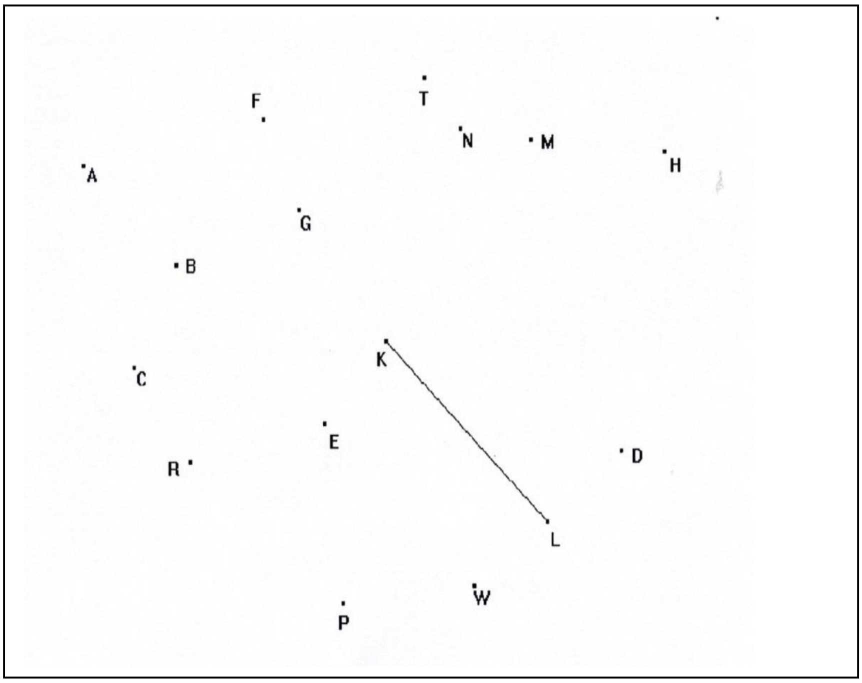
1ο Φύλλο εργασίας



2ο Φύλλο εργασίας



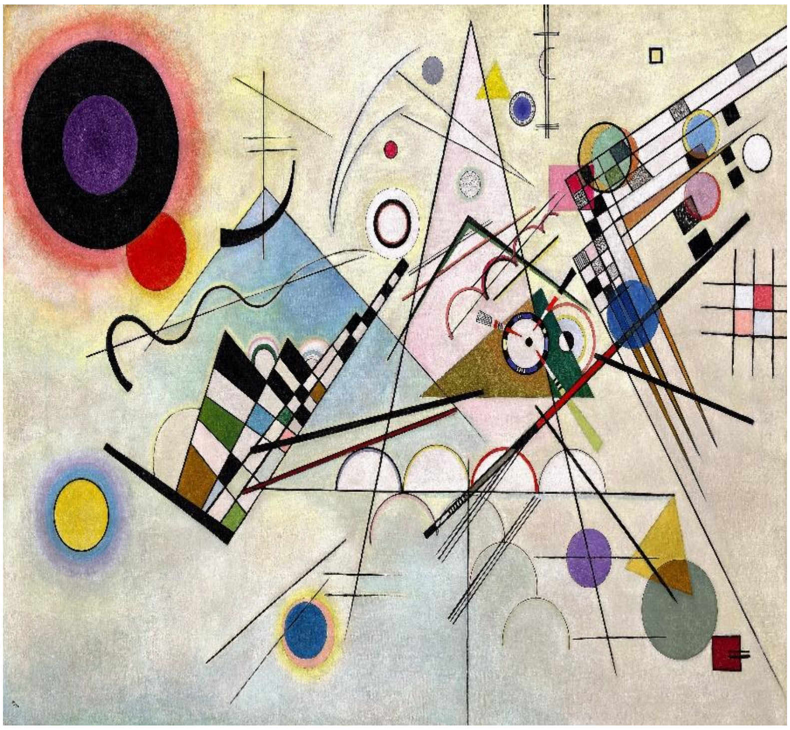
3ο Φύλλο εργασίας



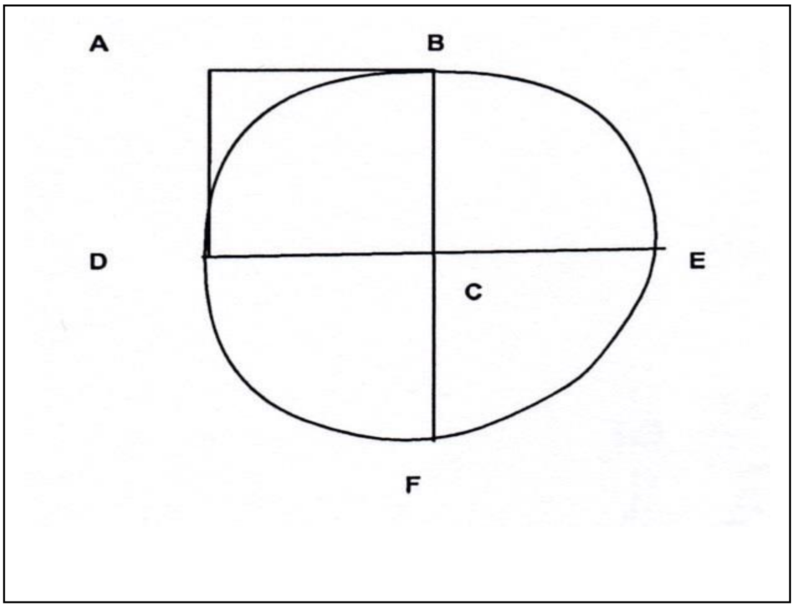
4ο Φύλλο εργασίας

Τμήματα με μήκος μεγαλύτερο από 5 εκατοστά	Τμήματα με μήκος ίσο με 5 εκατοστά	Τμήματα με μήκος μικρότερο από 5 εκατοστά

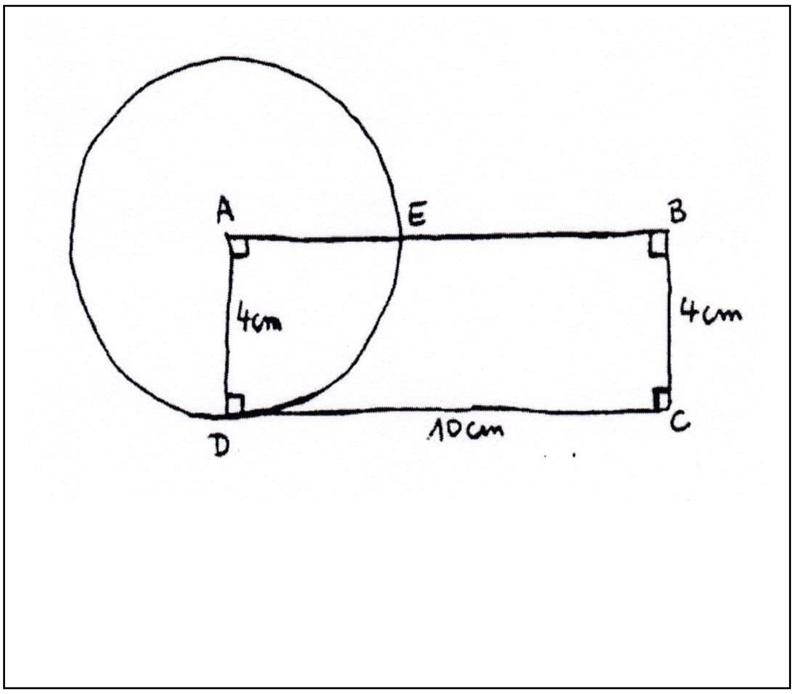
Πίνακες Καντίνσκι



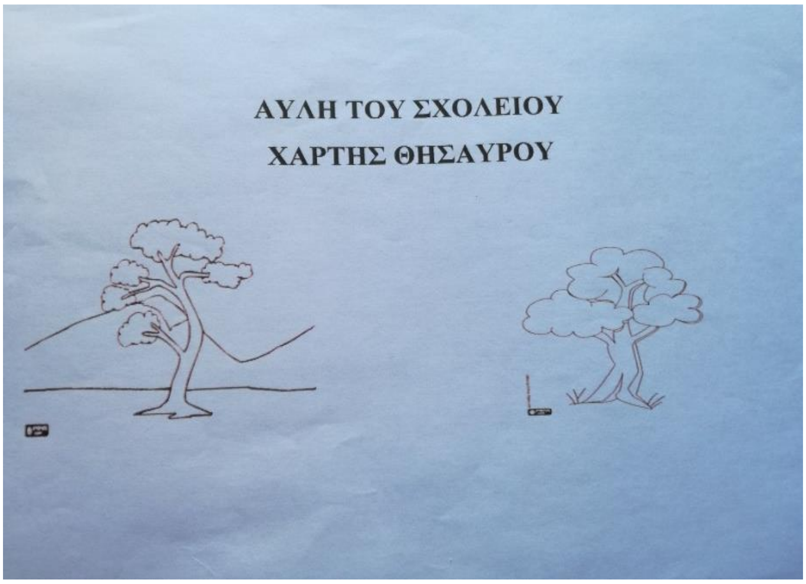
5ο Φύλλο εργασίας



6ο Φύλλο εργασίας



7ο Φύλλο εργασίας



Πίνακας 17